



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ
ΥΛΙΚΩΝ

**Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων σε
Ανισοτροπικά Μέσα - Ανάκλαση/Διάθλαση από
Στοιβία Ανισοτροπικών Διηλεκτρικών Στρωμάτων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Εμμανουήλ Σ. Κατσαράκη

Επιβλέπων: Ηλίας Ν. Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2014



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

**Διάδοση Ηλεκτρομαγνητικών Κυμάτων σε Ανισοτροπικά
Μέσα - Ανάκλαση/Διάθλαση από Στοιβά Ανισοτροπικών
Διηλεκτρικών Στρωμάτων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Εμμανουήλ Σ. Κατσαράκη

Επιβλέπων: Ηλίας Ν. Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή επιτροπή την 21η Νοεμβρίου 2014.

.....
Ηλίας Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Σχολή ΗΜΜΥ)

.....
Ιωάννης Ρουμेलιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Σχολή ΗΜΜΥ)

.....
Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π. (Σχολή ΗΜΜΥ)

Αθήνα, Νοέμβριος 2014

.....
Εμμανουήλ Σ. Κατσαράκης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.
[manoskat\[at\]gmail.com](mailto:manoskat[at]gmail.com)

Copyright © Εμμανουήλ Κατσαράκης, 2014 Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται στο συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική έχει ως αντικείμενο τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε ηλεκτρικώς ανισοτροπικά μέσα, δηλαδή σε μέσα τα οποία στερούνται κάποιας σφαιρικής συμμετρίας σε μικροσκοπικό επίπεδο με αποτέλεσμα να εμφανίζουν ιδιότητες οι οποίες εξαρτώνται από τον προσανατολισμό τους (ως προς την όποια διέγερση τους επιβληθεί).

Πιο συγκεκριμένα, αφού έγινε μια πρώτη μελέτη της ηλεκτρομαγνητικής συμπεριφοράς των ανισοτροπικών μέσων, μελετήθηκε η ανάκλαση και διάθλαση επιπέδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων κατά την πρόσπτωση σε στοίβα πολλαπλών ανισοτροπικών στρωμάτων, με έμφαση στις οπτικές συχνότητες (διπλοθλαστικά στρώματα). Εξετάστηκαν διάφορες υπάρχουσες μεθοδολογίες που αφορούν στον όσο το δυνατόν πιο ευσταθή και πιο αποδοτικό τρόπο ηλεκτρομαγνητικού υπολογισμού του συγκεκριμένου προβλήματος και βάσει αυτών αναπτύχθηκε σχετικός κώδικας σε περιβάλλον MATLAB. Η μεθοδολογία που εφαρμόστηκε εμπεριέχει έντονα τη χρήση πινάκων και μετατρέπει ουσιαστικά το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα σε πρόβλημα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

Το πρόγραμμα που υλοποιήθηκε παίρνει σαν είσοδο στοιχεία σχετικά με τη διάταξη των στρωμάτων (τανυστές ηλεκτρικής επιτρεπτότητας, πάχη στρωμάτων κλπ) και στοιχεία που αφορούν την προσπίπτουσα ακτινοβολία (μήκος κύματος, γωνία πρόσπτωσης) και δημιουργεί γραφήματα που απεικονίζουν διάφορα μεγέθη όπως τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για τις διάφορες περιπτώσεις πόλωσης (TE και TM) σε σχέση με τη γωνία πρόσπτωσης και το μήκος κύματος, την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, καθώς και τη ροή ενέργειας (λόγω της κάθε συνιστώσας πόλωσης) κατά μήκος της διάταξης. Η ορθότητα του προγράμματος επαληθεύθηκε εφαρμόζοντάς το σε διάφορες χαρακτηριστικές διατάξεις.

Επιπλέον, αναπτύχθηκε εφαρμογή γραφικής διεπαφής με το χρήστη, πάλι σε περιβάλλον MATLAB, η οποία υπολογίζει και απεικονίζει την κυματοεπιφάνεια (normal surface) ενός ανισοτροπικού κρυστάλλου (γεωμετρικός τόπος όλων των δυνατών πραγματικών κυματοανυσμάτων (wave vectors) που μπορούν να υπάρξουν (να διαδοθούν) μέσα σε ένα ηλεκτρικώς ανισοτροπικό υλικό) με δεδομένο το διηλεκτρικό τανυστή του.

Λέξεις κλειδιά: ανισοτροπικά μέσα, κρύσταλλοι, διπλοθλαστικότητα, ανάκλαση, διπλή διάθλαση, στρωματοποιημένα μέσα, στοίβα διηλεκτρικών, οπτικές επιστρώσεις, πρόσπτωση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, κυματοάνυσμα, ιδιορυθμοί, Γραφικό Περιβάλλον Χρήστη, κυματοεπιφάνεια, ελλειψοειδές δείκτη διάθλασης

Abstract

This Diploma Thesis focuses on the propagation of electromagnetic waves in electrically anisotropic media, i.e. media that lack of any spherical symmetry, and, consequently, their response to external excitations depends on their orientation.

More specifically, after studying the electromagnetic behaviour of anisotropic materials, the case of reflection/transmission of plane electromagnetic waves incident on a stack of anisotropic layers was investigated, with emphasis on optical frequencies (birefringent layered structures). Various existing algorithms were reviewed, concerning the stability and efficiency of the computational process of the problem, on the basis of which certain MATLAB code was developed. The implemented algorithm involves mainly the use of matrices and actually transforms the electromagnetic problem into an eigenvalue problem.

The program that was created, takes, as input, data regarding the configuration of the layered structure (dielectric tensors, layer thicknesses e.t.c) and data defining the incident radiation (wavelength, angle of incidence) and creates specific plots concerning a variety of quantities, such as the reflection and transmission coefficients for each case of polarization (TE and TM) versus the angle of incidence and the wavelength, the electric and magnetic field intensities, and the power flow across the configuration. The correctness of the programme was verified by applying it on certain typical cases.

Moreover, a Graphical User Interface was developed (also in MATLAB) that computes and plots the normal surface (or wave-vector surface) of an anisotropic crystal (locus of all possible real wavevectors that can exist (propagate) within an electrically anisotropic medium) given its electric permittivity tensor.

Keywords: anisotropic media, crystals, birefringence, reflection, double refraction, stratified media, layered media, multilayer structures, thin films, optical coating, electromagnetic wave incidence, wavevector, eigenmodes, Graphical User Interface, GUI, normal surface, index ellipsoid

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά καταρχήν τον καθηγητή μου κ. [Ηλία Γλύτση](#), επιβλέποντα της παρούσης διπλωματικής εργασίας, για την άψογη συνεργασία που είχαμε, την καθοδήγηση, την ενθάρρυνση και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε καθόλη τη διάρκεια της ενασχόλησής μου και ακόμα επειδή μου έδωσε την ευκαιρία να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα δίνοντάς μου παράλληλα μεγάλη ευελιξία.

Επίσης, ευχαριστώ πολύ την οικογένειά μου και τους φίλους μου για την αμέριστη στήριξη και συμπαράσταση που μου παρείχαν και εξακολουθούν να μου παρέχουν όλα αυτά τα χρόνια.

Τέλος, νιώθω την ανάγκη να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στους συμφοιτητές μου και σε όλο το διδακτικό, ερευνητικό και διοικητικό προσωπικό της Σχολής Η.Μ.Μ.Υ. και του Ε.Μ.Π. καθότι αγωνίστηκαν και αγωνίζονται με υπομονή και δημιουργικότητα ώστε να διασφαλίσουν το επίπεδο της ποιότητας των σπουδών μας υψηλό παρά τις όποιες οικονομικές αντιξοότητες είχαν να αντιμετωπίσουν.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων	xv
1 Εισαγωγή	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.1.1 Ανισοτροπικοί κρύσταλλοι	1
1.1.2 Επάλληλα λεπτά διηλεκτρικά στρώματα	5
1.2 Οργάνωση του τόμου	9
1.2.1 Τεχνικά στοιχεία	10
2 Υπόβαθρο Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας	11
2.1 Οι Νόμοι του Maxwell	11
2.1.1 Διαφορική μορφή	11
2.1.2 Ολοκληρωτική μορφή	12
2.1.3 Η εξίσωση συνέχειας	12
2.2 Οριακές συνθήκες	12
2.3 Συντακτικές σχέσεις	14
2.3.1 Συντακτικές σχέσεις στο κενό	15
2.3.2 Συντακτικές σχέσεις στα διάφορα υλικά μέσα	15
2.4 Μόνιμη Ημιτονοειδής Κατάσταση - Μονοχρωματικά Πεδία - Φασιθέτες	19
2.4.1 Φασιθέτες διανυσμάτων	20
2.4.2 Μέση τιμή γινομένου αρμονικών συναρτήσεων	20
2.4.3 Μέση τιμή εξωτερικού γινομένου	21
2.5 Ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και ισχύς	21
2.5.1 Μέση τιμή της ενέργειας για Ημιτονοειδή Πεδία	22
3 Διάδοση σε Ισοτροπικά Μέσα	23
3.1 Κυματική εξίσωση και αρμονικό επίπεδο κύμα	23
3.1.1 Η κυματική εξίσωση	23
3.1.2 Λύση βαθμωτής κυματικής εξίσωσης	24
3.1.3 Αρμονικά επίπεδα κύματα	26
3.2 Επίπεδα αρμονικά Η/Μ κύματα	26
3.2.1 Αποσβεννόμενα κύματα	28
3.3 Πόλωση του επιπέδου κύματος	29
3.4 Πρόσπτωση σε επίπεδη επιφάνεια: Ανάκλαση-Διάθλαση	34
3.4.1 Ταίριασμα των φάσεων	35
3.4.2 Κύματα s και p	38
3.4.3 Γωνία Brewster	44

3.4.4	Διάνυσμα Poynting	46
4	Διάδοση σε Ανισοτροπικά Μέσα	55
4.1	Ο διηλεκτρικός ταυυστής	56
4.2	Επίπεδα κύματα - Κυματοεπιφάνεια	60
4.3	Ιδιοπολώσεις	63
4.4	Το ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης	65
4.5	Φασική ταχύτητα και διάνυσμα Poynting	67
4.6	Διπλή Διάθλαση	69
4.6.1	Διπλή Διάθλαση σε κάθετη πρόσπτωση	71
4.7	Κατηγοριοποίηση κρυστάλλων	71
4.7.1	Μονοαξονικοί κρύσταλλοι	71
4.7.2	Διαξονικοί κρύσταλλοι	77
5	Ανάκλαση - Διάθλαση από Στοιβα Ανισοτροπικών Στρωμάτων	81
5.1	Διατύπωση του H/M προβλήματος	81
5.2	Μαθηματική Επίλυση - Μεθοδολογία	83
5.2.1	Ταίριασμα των φάσεων	84
5.2.2	Μετασχηματισμός σε Πρόβλημα Ιδιοτιμών	84
5.2.3	Ιδιορυθμοί στα Μέσα Εισόδου και Εξόδου	86
5.2.4	Γενικός Τύπος για το Ηλεκτρικό Πεδίο	88
5.2.5	Οριακές Συνθήκες	89
5.2.6	Σχέση μετασχηματισμού της διάταξης	90
5.2.7	Εξαγωγή των πεδιακών συντελεστών	91
5.2.8	Μέση ροή ενέργειας - Διάνυσμα Poynting	93
5.3	Σύντομη ανασκόπηση παρομοίων μεθόδων	97
6	Πρόγραμμα A - Επάλληλα Ανισοτροπικά Στρώματα	101
6.1	Υλοποίηση	101
6.1.1	Πρόγραμμα τελικού χρήστη: <i>συνάρτηση analyze_anis_stack()</i>	101
6.1.2	Πρόγραμμα - πυρήνας: <i>συνάρτηση compute_anis_stack()</i>	103
6.1.3	Παρατηρήσεις σχετικά με τις λοιπές βοηθητικές συναρτήσεις	105
6.1.4	Γενικά	107
6.2	Παραδείγματα - Εφαρμογή σε συγκεκριμένες διατάξεις	109
6.2.1	Απλό interface μεταξύ δύο ισοτροπικών μέσων	109
6.2.2	Στοιβα ισοτροπικών στρωμάτων όμοιων με το μέσο εξόδου	121
6.2.3	Απλό interface μεταξύ δύο ισοτροπικών μέσων με $n_2 < n_1$	130
6.2.4	Πλακίδιο $\lambda/2$	138
6.2.5	Ενδιάμεσο διαξονικό ανισοτροπικό στρώμα - σύγκριση με γράφημα της βιβλιογραφίας	157
6.2.6	Τέσσερα ενδιάμεσα μονοαξονικά στρώματα - σύγκριση με γράφημα της βιβλιογραφίας	170
7	Πρόγραμμα B - Κυματοεπιφάνεια	193
7.1	Προδιαγραφές	193
7.1.1	Παράμετροι κατασκευής της κυματοεπιφάνειας	193
7.1.2	Ρυθμίσεις γραφήματος (κατόπιν κατασκευής του)	196

7.1.3	Εργαλείο Εύρεσης Ιδιορυθμών - Μελλοντική επέκταση	201
7.2	Θέματα Υλοποίησης	203
7.2.1	Σχετικά με τις διαστάσεις των διαφόρων components	203
7.2.2	Βασική δομή του κώδικα	204
7.2.3	Κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τις callback συναρτήσεις	204
7.2.4	Συνάρτηση-πυρήνας <i>buildsurf()</i>	205
7.2.5	Εύρεση γωνιών περιστροφής Euler	205
8	Συμπεράσματα	207
A'	Κώδικας προγράμματος A	209
A.1	Βασική συνάρτηση	209
A.1.1	Αρχείο <i>analyze_anis_stack.m</i>	209
A.1.2	Αρχείο <i>anis_stack_script.m</i>	212
A.2	Βοηθητικές Συναρτήσεις	214
A.2.1	Αρχείο <i>rt_theta.m</i>	214
A.2.2	Αρχείο <i>rt_lamda.m</i>	214
A.2.3	Αρχείο <i>EH_along_x.m</i>	215
A.2.4	Αρχείο <i>Savg_along_x.m</i>	216
A.2.5	Αρχείο <i>ksnpols.m</i>	217
A.2.6	Αρχείο <i>compute_anis_stack.m</i>	219
A.2.7	Αρχείο <i>compute_anis.m</i>	221
A.2.8	Αρχείο <i>plot_rt_sp.m</i>	223
A.2.9	Αρχείο <i>plot_rt.m</i>	223
A.2.10	Αρχείο <i>plot_cvector_along_x.m</i>	224
A.2.11	Αρχείο <i>compute_EH_along_x.m</i>	225
A.2.12	Αρχείο <i>findlayer.m</i>	226
A.2.13	Αρχείο <i>savenamefilter.m</i>	226
B'	Κώδικας προγράμματος B	227
B.1	Βασική συνάρτηση	227
B.1.1	Αρχείο <i>normsurf.m</i>	227
B.2	Βοηθητικές Συναρτήσεις	257
B.2.1	Αρχείο <i>er0_euler2er.m</i>	257
B.2.2	Αρχείο <i>er2er0_euler.m</i>	257
B.2.3	Αρχείο <i>euler2R.m</i>	257
B.2.4	Αρχείο <i>R2euler.m</i>	258
Γ'	Χάρτης μεταβλητών προγράμματος B	259
Γ.1	Βασικό παράθυρο γραφικού περιβάλλοντος	259
Γ.2	Κύρια panels του GUI	260
Γ.3	Components του πάνω αριστερά panel (bg1)	264
Γ.4	Components του κάτω αριστερά panel (bg2)	266
Γ.5	Components του πάνω δεξιά panel (pan1)	267
	Βιβλιογραφία	269

Κατάλογος σχημάτων

1.1	Κρύσταλλος Χλωριούχου Νατρίου (αλάτι)	1
1.2	Μοναδιαία κρυσταλλική κυψελίδα (Πηγή: [1])	2
1.3	Πλέγματα Bravais: Κατηγοριοποίηση κρυσταλλικών πλεγμάτων με βάση τις γωνίες και τα μήκη των αξόνων της μοναδιαίας κυψελίδας) (Πηγή: [2])	2
1.4	Μοντέλο δεσμευμένου ηλεκτρονίου που δείχνει την ανισοτροπική συμπεριφορά του κρυστάλλου (Πηγή: [3])	3
1.5	Διπλή διάθλαση παρατηρούμενη σε ασβεστίτη	4
1.6	Χρήση ανισοτροπικών υλικών για μεταβολή της πόλωσης του φωτός	5
1.7	Στοιίβα επιπέδων λεπτών διηλεκτρικών στρωμάτων	6
1.8	Φασματικό φίλτρο τύπου Lyot-Ohman (Πηγή: [4])	7
1.9	Φασματικό φίλτρο τύπου Solc (Πηγή: [5])	8
1.10	Χρήση υγρών κρυστάλλων, ως ηλεκτρικά ελεγχόμενο ανισοτροπικό μέσο, σε διατάξεις απεικόνισης	8
2.1	Συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών	13
3.1	Επίπεδο κύμα (Πηγή: [6])	25
3.2	Χαρακτηριστικές ελλείψεις για διάφορες πολώσεις όταν $A_x = A_y$ (Πηγή: [7])	31
3.3	Γραμμική πόλωση ($A_x = 0$ και $\delta_y = 0$) (Πηγή: [6])	32
3.4	Κυκλική πόλωση ($A_x = A_y$ και $\delta_y = 0$, $\delta_x = -\pi/2$) (Πηγή: [6])	32
3.5	Ελλειπτική πόλωση (Πηγή: [8])	33
3.6	Πρόσπτωση σε επίπεδη επιφάνεια μεταξύ δύο ισοτροπικών μέσων	35
3.7	Διανύσματα βάσης s και p - Ένταση ηλεκτρικού πεδίου	40
3.8	Διανύσματα βάσης s και p - Ένταση μαγνητικού πεδίου	40
4.1	Γωνίες Euler τύπου z-x'-z'' (intrinsic rotations) (Πηγή:[9])	58
4.2	Η κυματο-επιφάνεια (normal surface) (Πηγή:[7])	62
4.3	Προσανατολισμός διανυσμάτων \vec{D}, \vec{E} και \vec{H} σε σχέση με την κατεύθυνση διάδοσης \hat{s}	65
4.4	Κυματοελλειψοειδές για $\epsilon_x = 1$, $\epsilon_y = 1.5$ και $\epsilon_z = 2$	66
4.5	Το κυματοελλειψοειδές (Πηγή: [7])	67
4.6	Η επιφάνεια φασικής ταχύτητας (Πηγή: [3])	68
4.7	Επίπεδα σταθερής φάσης και διάδοση της ενέργειας του επίπεδου κύματος ενός ρυθμού (Πηγή: [3])	69
4.8	Διπλή Διάθλαση (διεπαφή ισοτροπικού - ανισοτροπικού μέσου) (Πηγή: [3])	70
4.9	Διπλή Διάθλαση - Πόλωση της κάθε διαθλωμένης συνιστώσας (Πηγή: [10])	71
4.10	Διπλή Διάθλαση σε κάθετη πρόσπτωση (Πηγή: [11])	72
4.11	Uniaxial κρύσταλλος με $\epsilon_x = \epsilon_y = n_0^2 = 1$ και $\epsilon_z = n_e^2 = 3$ - Κυματοεπιφάνεια	73

4.12	Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 1$ και $\varepsilon_z = 3$ - Τομή κυματοεπιφάνειας	74
4.13	Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_0^2 = 1$ και $\varepsilon_z = n_e^2 = 3$ - Ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης	74
4.14	Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_0^2 = 3$ και $\varepsilon_z = n_e^2 = 1$ - Κυματοεπιφάνεια . .	75
4.15	Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 3$ και $\varepsilon_z = 1$ - Τομή κυματοεπιφάνειας	76
4.16	Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_0^2 = 3$ και $\varepsilon_z = n_e^2 = 1$ - Ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης	76
4.17	Biaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 2$ και $\varepsilon_z = 3$ - Κυματοεπιφάνεια	77
4.18	Biaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 2$ και $\varepsilon_z = 3$ - Τεταρτημόριο Κυματοεπιφάνειας (τομή κατά $y = 0, z = 0$)	78
4.19	Biaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 2$ και $\varepsilon_z = 3$ - Τομές κυματοεπιφάνειας . . .	79
5.1	Διάταξη του προβλήματος (επάλληλα διαδοχικά ανισοτροπικά στρώματα)	82
5.2	Προσπίπτον αρμονικό επίπεδο κύμα	82
6.1	Διάγραμμα Δομής και εξαρτήσεων του προγράμματος	108
6.2	Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	110
6.3	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	111
6.4	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	111
6.5	Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	112
6.6	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	112
6.7	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	113
6.8	Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	113
6.9	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	114
6.10	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	114
6.11	Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	115
6.12	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	115
6.13	Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	116
6.14	Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	117
6.15	Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	117
6.16	Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	118
6.17	Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	118
6.18	Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{p,in} ^2$	119

6.19 Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{s,in} ^2$	119
6.20 Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$	120
6.21 Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$	120
6.22 Iso...Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	122
6.23 Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	122
6.24 Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	123
6.25 Iso...Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	123
6.26 Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	124
6.27 Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	124
6.28 Iso...Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	125
6.29 Iso...Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	125
6.30 Iso...Iso: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	126
6.31 Iso...Iso: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	126
6.32 Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{p,in} ^2$	127
6.33 Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{s,in} ^2$	127
6.34 Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$	128
6.35 Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$	128
6.36 Iso...Iso: 3D Αναπαράσταση των ιδιοπολώσεων και των κυματανυσμάτων	129
6.37 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	130
6.38 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	131
6.39 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	131
6.40 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	132
6.41 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	132
6.42 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	133
6.43 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	134
6.44 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	134
6.45 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	135
6.46 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	135

6.47 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{p,in} ^2$	136
6.48 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{s,in} ^2$	136
6.49 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$	137
6.50 Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$	137
6.51 Πλακίδιο $\lambda/2$ (Πηγή: [7])	138
6.52 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	139
6.53 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	140
6.54 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	140
6.55 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	141
6.56 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	141
6.57 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	142
6.58 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	142
6.59 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	143
6.60 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	143
6.61 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	144
6.62 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	144
6.63 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	145
6.64 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	146
6.65 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	146
6.66 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	147
6.67 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	147
6.68 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	148
6.69 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	148
6.70 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	149
6.71 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	149
6.72 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	150
6.73 halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	150

6.74 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	151
6.75 halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	151
6.76 halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	152
6.77 halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	152
6.78 halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	153
6.79 halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	153
6.80 halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{p,in} ^2$	154
6.81 halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{s,in} ^2$	154
6.82 halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$	155
6.83 halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$	155
6.84 halfwave_plate: 3D Αναπαράσταση των ιδιοπολώσεων και των κυματανυσμάτων	156
6.85 Συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης p-p, p-s από ενδιαμέσο διαξονικό στρώμα (Πηγή: [12])	157
6.86 Συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης p-s, s-p από ενδιαμέσο διαξονικό στρώμα (Πηγή: [12])	157
6.87 Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	158
6.88 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	159
6.89 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	159
6.90 Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	160
6.91 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	160
6.92 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	161
6.93 Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	161
6.94 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	162
6.95 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	162
6.96 Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	163
6.97 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	163
6.98 Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	164
6.99 Graham_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	165

6.100Graham_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	165
6.101Graham_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	166
6.102Graham_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	166
6.103Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Roynting - συντελεστής του $ A_{p,in} ^2$	167
6.104Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Roynting - συντελεστής του $ A_{s,in} ^2$	167
6.105Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Roynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$	168
6.106Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Roynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$	168
6.107Graham_case: 3D Αναπαράσταση των ιδιοπολώσεων και των κυματανυσμάτων .	169
6.108Συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης p-p, p-s από ενδιάμεσο διαξονικό στρώμα (Πηγή: [13])	170
6.109Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	171
6.110Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	172
6.111Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	172
6.112Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	173
6.113Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	173
6.114Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	174
6.115Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	174
6.116Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	175
6.117Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	175
6.118Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	176
6.119Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	176
6.120Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}	177
6.121Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	178
6.122Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	178
6.123Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	179
6.124Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	179
6.125Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0	180

6.126	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε του μήκους κύματος λ_0	180
6.127	Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσε της συχνότητας f	181
6.128	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσε της συχνότητας f	181
6.129	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσε της συχνότητας f	182
6.130	Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσε της συχνότητας f	182
6.131	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσε της συχνότητας f	183
6.132	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσε της συχνότητας f	183
6.133	Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσε της συχνότητας f	184
6.134	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσε της συχνότητας f	184
6.135	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσε της συχνότητας f	185
6.136	Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσε της συχνότητας f	185
6.137	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε της συχνότητας f	186
6.138	Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε της συχνότητας f	186
6.139	Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	187
6.140	Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	187
6.141	Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	188
6.142	Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x	188
6.143	Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{p,in} ^2$	189
6.144	Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $ A_{s,in} ^2$	189
6.145	Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$	190
6.146	Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$	190
6.147	Heidary_case: Συντελεστές Ανάκλασης p-p και s-s συναρτήσε της συχνότητας f	191
7.1	Ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή βάσει του κύριου διηλεκτρικού ταυυστή και των γωνιών Euler περιστροφής του κρυστάλλου	194
7.2	Απευθείας ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή (βάσει των στοιχείων του)	194
7.3	Ορισμός εύρους γωνιών αποτύπωσης της κυματοεπιφάνειας	195
7.4	Ορισμός αρχικής οπτικής γωνίας γραφήματος	195
7.5	Οι επιλογές που αφορούν στην αρχική κατασκευή της κυματοεπιφάνειας "ομαδοποιημένες" σε ένα κοινό buttongroup	196
7.6	Ορισμός αρχικής οπτικής γωνίας γραφήματος	196
7.7	Ρύθμιση των shading και colormap	197
7.8	Διάφορες επιλογές shading	197
7.9	Διάφορες ενδεικτικές επιλογές απεικόνισης χρωμάτων	197
7.10	Επιλογές εμφάνισης οπτικών αξόνων αλλά και axes, grid, box	198
7.11	Διαφορές επιλογές απεικόνισης (με/χωρίς οπτικούς άξονες, με/χωρίς axes, grid ή box)	198
7.12	Ρύθμιση της οπτικής γωνίας (viewpoint) με επιπλέον εργαλεία	199
7.13	Προεπιλεγμένο γραφικό περιβάλλον (GUI) (περιλαμβάνει τόσο το γράφημα όσο και τα εργαλεία σε κοινό παράθυρο)	199
7.14	Κουμπί που προκαλεί την εξαγωγή του γραφήματος σε νέο, ξεχωριστό παράθυρο	200
7.15	Γραφικό περιβάλλον με το γράφημα και τα εργαλεία σε ξεχωριστά (αλλά αλληλοεξαρτώμενα) παράθυρα.	200

7.16	Πλήκτρα ρύθμισης μεγέθους των γραμματοσειρών	201
7.17	Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης	201
7.18	Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένες y και z συνιστώσες του κυματανύσματος	202
Γ.1	Χάρτης μεταβλητών ολόκληρου του GUI (<i>figure component</i>)	259
Γ.2	Χάρτης μεταβλητών του πάνω αριστερά πάνελ του GUI (<i>bg1 component</i>) (παράμετροι κατασκευής της κυματοεπιφάνειας)	260
Γ.3	Χάρτης μεταβλητών του κάτω αριστερά πάνελ του GUI (<i>bg2 component</i>) (Εργαλείο Εύρεσης ιδιορυθμών)	261
Γ.4	Χάρτης μεταβλητών του πάνω δεξιά πάνελ του GUI (<i>pan1 component</i>) (Ρυθμίσεις γραφήματος (κατόπιν κατασκευής του))	262
Γ.5	Χάρτης μεταβλητών του κάτω δεξιά πάνελ του GUI (<i>pan2 component</i>) (Πλήκτρα Αυξομείωσης μεγέθους όλων των γραμματοσειρών του GUI)	263
Γ.6	Χάρτης μεταβλητών του <i>bg1pan1 component</i> (Ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή βάσει του κύριου διηλεκτρικού ταυυστή και των γωνιών Euler περιστροφής του κρυστάλλου)	264
Γ.7	Χάρτης μεταβλητών του <i>bg1pan2 component</i> (Απευθείας ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή (βάσει των στοιχείων του))	264
Γ.8	Χάρτης μεταβλητών του <i>bg1pan3 component</i> (Εύρος γωνιών απεικόνισης της κυματοεπιφάνειας)	265
Γ.9	Χάρτης μεταβλητών του <i>bg1pan4 component</i> (Αρχική οπτική γωνία γραφήματος)	265
Γ.10	Χάρτης μεταβλητών του <i>bg2pan1 component</i> (Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης)	266
Γ.11	Χάρτης μεταβλητών του <i>bg2pan2 component</i> (Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένες y και z συνιστώσες του κυματανύσματος)	266
Γ.12	Χάρτης μεταβλητών του <i>pan1pan2 component</i> (Ρύθμιση της οπτικής γωνίας)	267
Γ.13	Χάρτης μεταβλητών του <i>pan1pan3 component</i> (Εξαγωγή γραφήματος σε ξεχωριστό παράθυρο)	268

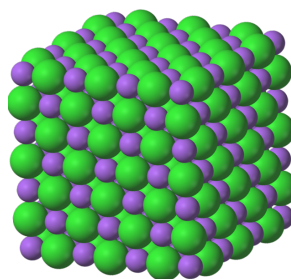
Κεφάλαιο 1

Πρόλογος-Εισαγωγή

1.1 Εισαγωγή

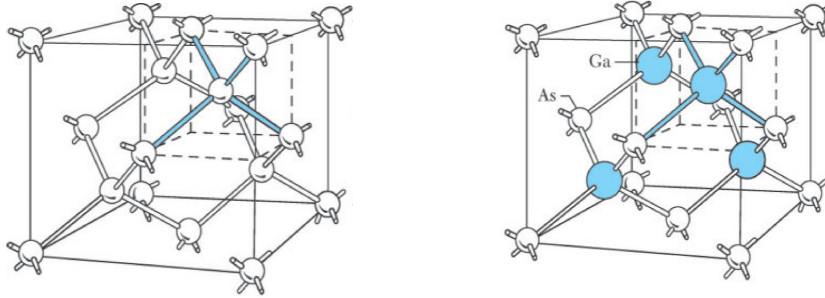
1.1.1 Ανισοτροπικοί κρύσταλλοι

Αρκετά στερεά -για την ακρίβεια, σχεδόν όλα τα μέταλλα, πολλά κεραμικά και ημιαγωγοί καθώς και διάφορα πολυμερή και άλλα σύνθετα υλικά- είναι κρυσταλλικά [14]. Αποτελούνται δηλαδή, σε μικροσκοπικό επίπεδο, από σωματίδια (άτομα, μόρια ή ιόντα) οργανωμένα σε μία καθορισμένη επαναλαμβανόμενη διάταξη (pattern). Η δομή αυτής της διάταξης αποτελεί το λεγόμενο κρυσταλλικό πλέγμα και έχει μορφή που καθορίζεται από τους αναπτυσσόμενους χημικούς δεσμούς μεταξύ των σωματιδίων που απαρτίζουν τον κρύσταλλο. Ένα κλασικό παράδειγμα κρυστάλλου είναι το κοινό αλάτι (NaCl) στο οποίο τα ανιόντα χλωρίου σχηματίζουν ιοντικούς δεσμούς με τα κατιόντα νατρίου δημιουργώντας έτσι ένα περιοδικό μοτίβο (βλ. σχήμα 1.1).



Σχήμα 1.1: Κρύσταλλος Χλωριούχου Νατρίου (αλάτι)

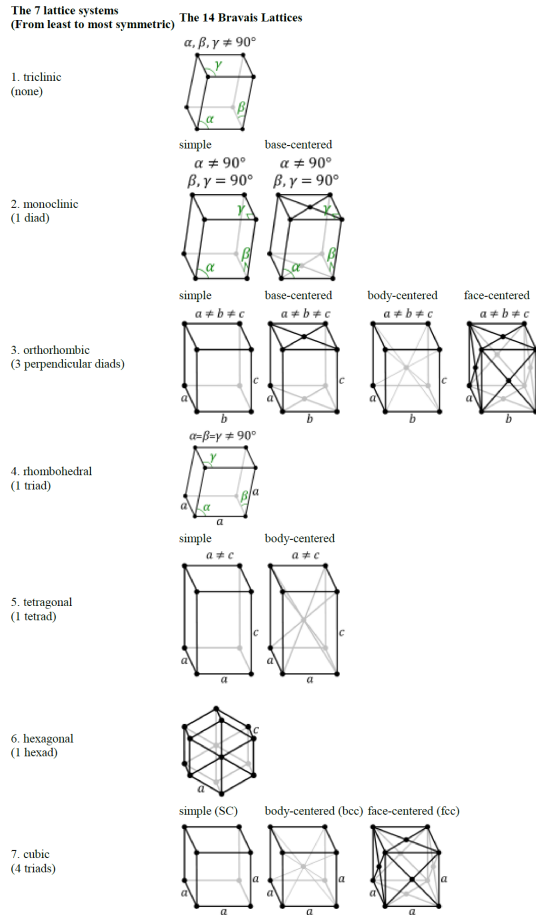
Λόγω της περιοδικότητας της κρυσταλλικής δομής εστιάζουμε στη βασική δομική μονάδα που επαναλαμβανόμενη δημιουργεί το κρυσταλλικό πλέγμα και η οποία περιέχει όλη την απαραίτητη πληροφορία για την περιγραφή του κρυστάλλου (βλ. σχήμα 1.2). Ανάλογα με τη γεωμετρία αυτής της κρυσταλλικής μοναδιαίας κυψελίδας (*crystal unit cell*) τα κρυσταλλικά πλέγματα διακρίνονται, ως γνωστόν, σε διάφορους τύπους (κυβικά, τετραγωνικά, ορθορομβικά, μονοκλινικά κ.α. (βλ. σχήμα 1.3)).



(α') Μοναδιαία κυψελίδα κρυστάλλου τύπου αδάμαντα (π.χ. πυρίτιο (Si), γερμάνιο (Ge) ή διαμάντι (C))

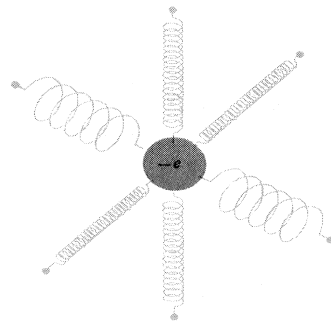
(β') Μοναδιαία κυψελίδα κρυστάλλου τύπου Zincblende (π.χ. αρσενικούχο γάλλιο (GaAs))

Σχήμα 1.2: Μοναδιαία κρυσταλλική κυψελίδα (Πηγή: [1])



Σχήμα 1.3: Πλέγματα Bravais: Κατηγοριοποίηση κρυσταλλικών πλεγμάτων με βάση τις γωνίες και τα μήκη των αξόνων της μοναδιαίας κυψελίδας) (Πηγή: [2])

Είναι ίσως εύκολο να αντιληφθούμε διαισθητικά ότι με εξαίρεση το κυβικό, τα υπόλοιπα είδη κρυστάλλων, καθώς η μοναδιαία κυψελίδα επαναλαμβάνεται, θα εμφανίζουν μακροσκοπικά κάποια συγκεκριμένη ασυμμετρία. Δηλαδή ανάλογα με τη διεύθυνση υπό την οποία τα εξετάζουμε θα βλέπουμε και μια διαφορετική προβολή της κρυσταλλικής διάταξης. Αυτό λοιπόν καθιστά τους συγκεκριμένους κρυστάλλους ανισοτροπικούς, δηλαδή χαρακτηρίζονται από συμπεριφορά η οποία δεν είναι ίδια για όλες της κατευθύνσεις. Μια κάπως απλουστευμένη εικόνα που θα μπορούσαμε να δώσουμε σχετικά με αυτό, για την περίπτωση των διηλεκτρικών υλικών, είναι ότι λόγω της φύσης των δεσμών μεταξύ των σωματιδίων, τα δεσμευμένα φορτία ταλαντώνονται πιο "εύκολα" σε ορισμένες κατευθύνσεις απ' ό,τι σε κάποιες άλλες (βλ. σχήμα 1.4).



Σχήμα 1.4: Μοντέλο δεσμευμένου ηλεκτρονίου που δείχνει την ανισοτροπική συμπεριφορά του κρυστάλλου (Πηγή: [3])

Αντίθετα, κρύσταλλοι με πλέγμα κυβικού τύπου όπως το διαμάντι αλλά και άμορφα στερεά, δηλαδή στερεά τα οποία δεν παρουσιάζουν καν καθορισμένη κρυσταλλική δομή, όπως είναι για παράδειγμα το γυαλί, είναι *ισοτροπικά*.

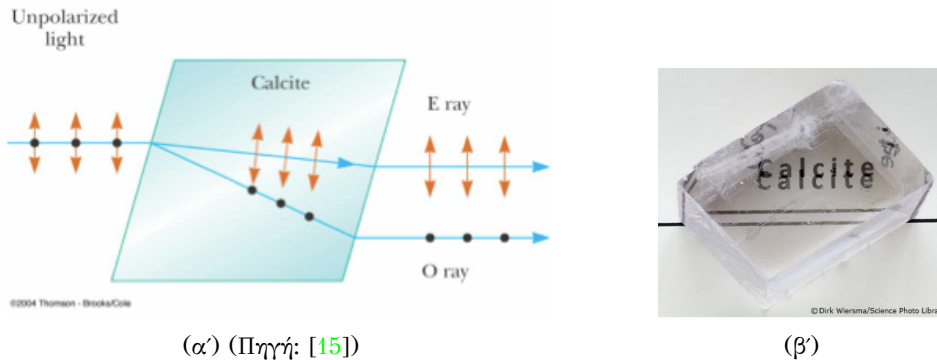
Συνεπάγεται λοιπόν ότι ένας διηλεκτρικός κρύσταλλος, ακόμα και αν είναι απόλυτα καθαρός (δηλαδή δεν παρουσιάζει ατέλειες ή προσμίξεις και άρα το κρυσταλλικό του πλέγμα είναι τελείως ομοιόμορφο και περιοδικό), κατά κανόνα δεν χαρακτηρίζεται από μία μοναδική τιμή για τα ηλεκτρομαγνητικά του χαρακτηριστικά, όπως η ηλεκτρική επιτρεπτότητα και η μαγνητική διαπερατότητά του, αλλά, αντίθετα, αυτά μεταβάλλονται ανάλογα με την κατεύθυνση.

Για ένα οπτικό κύμα που αλληλεπιδρά με έναν διαφανή ανισοτροπικό κρύσταλλο, αυτό τελικά σημαίνει ότι ο δείκτης διάθλασης είναι μεταβλητός και μάλιστα εξαρτάται τόσο από την διεύθυνση διάδοσης του κύματος όσο και από την πόλωσή του.

Μία εκδήλωση του παραπάνω γεγονότος είναι το γνωστό φαινόμενο της διπλής διάθλασης. Μια οπτική μονοχρωματική δέσμη προσπίπτουσα πάνω σε έναν οπτικό ανισοτροπικό κρύσταλλο, όπως ο ασβεστίτης (*calcite*, CaCO_3) ή ο χαλαζίας (*quartz*, SiO_2), διαθλάται εν γένει σε δύο διαφορετικά "μονοπάτια" και στο καθένα διαδίδεται με διαφορετική πόλωση και διαφορετική ταχύτητα (βλ. σχήμα 1.5).

Στην απλούστερη περίπτωση των μονοαξονικών κρυστάλλων, για κάθε διεύθυνση διάδοσης έχουμε δύο δείκτες διάθλασης n_o και n_e , όπου ο πρώτος είναι πάντα ίδιος (ανεξάρτητος της διεύθυνσης και χαρακτηριστικός του υλικού) και αντιστοιχεί στο λεγόμενο *σύννηθες* (*ordinary*) κύμα -για το οποίο ισχύει λίγο πολύ ότι ισχύει και για τα ισοτροπικά μέσα (π.χ. ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στη διεύθυνση της φασικής ταχύτητας, για την περίπτωση διάδοσης ενός επιπέδου κύματος)- ενώ ο δεύτερος, που αντιστοιχεί στο *ιδιάζον* (*extraordinary*) κύμα, είναι μεταβλητός. Για διάδοση κατά μήκος μίας συγκεκριμένης χαρακτηριστικής διεύθυνσης του κρυστάλλου, του

λεγόμενου οπτικού άξονα, οι δύο δείκτες διάθλασης είναι ίδιοι. Στο κεφάλαιο 4 θα εξηγηθούν το πώς συμβαίνουν τα παραπάνω χρησιμοποιώντας την ηλεκτρομαγνητική μοντελοποίηση του κρύσταλλου και πιο συγκεκριμένα, την ταυσιτική μορφή της ηλεκτρικής επιτρεπτότητας.



Σχήμα 1.5: Διπλή διάθλαση παρατηρούμενη σε ασβεστίτη

Πολλοί κρύσταλλοι επιδεικνύουν αξιοσημείωτα επιπρόσθετα χαρακτηριστικά όπως ηλεκτρο-οπτική, μαγνητο-οπτική ή ακουστο-οπτική φύση, δηλαδή η ανισοτροπική (και όχι μόνο) συμπεριφορά τους εξαρτάται από εξωγενείς παράγοντες.

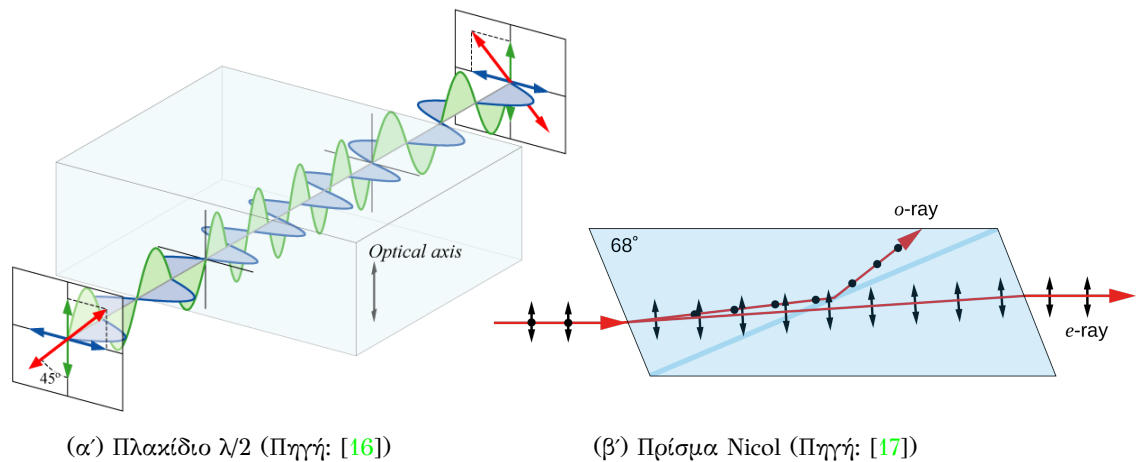
Η οπτική επιστήμη και τεχνολογία χρησιμοποιεί ευρέως ανισοτροπικούς κρυστάλλους σε πληθώρα εφαρμογών που εμπλέκουν τη μέτρηση ή τη μεταβολή της πόλωσης του φωτός, τη φασματική ανάλυση ή το φιλτράρισμα της οπτικής ακτινοβολίας, τον περιορισμό των ανακλάσεων κ.α.

Ενδεικτικά αναφέρεται ως παράδειγμα το πρίσμα του Nicol (βλ. 1.6β'). Πρόκειται για ένα κομμάτι κρυστάλλου με τις δύο ακραίες πλευρές του σε γωνία διαφορετική από αυτή του οπτικού του άξονα και το οποίο έχει κοπεί διαγώνια και επανασυνδεθεί μέσω ενός ενδιάμεσου συνδετικού ισοτροπικού στρώματος. Οι γωνίες των ακραίων πλευρών είναι τέτοιες ώστε όταν οριζόντιο οπτικό κύμα προσπέσει στη μία πλευρά του πρίσματος, η κάθε συνιστώσα πόλωσης του (συνιστώσα της διεύθυνσης ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου) να διαθλάται σε διαφορετική γωνία με αποτέλεσμα όταν οι δύο ακτίνες προσπέσουν (υπό διαφορετική γωνία) στο σημείο τομής (διεπαφή με το ενδιάμεσο συνδετικό στρώμα) η μία διαθλώμενη ακτίνα (συνιστώσα κάθετης πόλωσης) να υφίσταται ολική ανάκλαση ενώ η άλλη (συνιστώσα παράλληλης πόλωσης) να διαθλάται διαδιδόμενη στο άλλο μισό του κρυστάλλου. Με αυτόν τον τρόπο, στην άλλη πλευρά έχουμε διάδοση μόνο της συνιστώσας παράλληλης πόλωσης.

Ένα άλλο παράδειγμα είναι τα πλακίδια καθυστέρησης φάσης (*phase retardation plates* ή *waveplates*) που είναι τμήματα μονοαξονικού κρυστάλλου κομμένου κατά μήκος του οπτικού του άξονα. Όταν μονοχρωματικό φως προσπέσει κάθετα στη επιφάνεια του πλακιδίου τότε, αν υποθέσουμε ότι αρχικά είχε γραμμική πόλωση με διεύθυνση πόλωσης διαφορετική αυτής του οπτικού άξονα του κρυστάλλου, το προσπίπτον κύμα θα συνεχίσει να διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση (δηλαδή δεν θα υποστεί διπλή διάθλαση, όπως θα γινόταν στη γενικότερη περίπτωση) αλλά θα διαχωριστεί σε δύο κάθετες πολώσεις -μία παράλληλη και μία κάθετη στον οπτικό άξονα και με την καθεμία να διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα εντός του κρυστάλλου. Στο τέλος της διαδρομής της δέσμης μέσα στο πλακίδιο, οι δύο συνιστώσες, λόγω της διαφοράς της ταχύτητας διάδοσής τους, θα έχουν μία σχετική καθυστέρηση φάσης η μία με την άλλη. Ως αποτέλεσμα, το εξερχόμενο πεδίο, όπως αυτό θα προκύψει από την επανασύνθεση των δύο συνιστωσών, θα έχει εν γένει ελλειπτική πόλωση. Επιλέγοντας κατάλληλα το μήκος του

πλακιδίου, για τη συγκεκριμένη συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος, μπορούμε έτσι να ελέγξουμε την εξερχόμενη πόλωση. Αν για παράδειγμα προκαλέσουμε σχετική καθυστέρηση φάσης κατά π ή $\pi/2$ και αν η αρχική πόλωση σχηματίζει γωνία 45° σε σχέση με τον οπτικό άξονα του κρυστάλλου, τότε το εξερχόμενο κύμα θα έχει γραμμική πόλωση με διεύθυνση κάθετη αυτής που είχε αρχικά ή θα έχει κυκλική πόλωση, αντίστοιχα. Στο σχήμα 1.6α' φαίνεται ένα πλακίδιο καθυστέρησης φάσης κατά π (πλακίδιο $\lambda/2$).

Στην περίπτωση που ο κρύσταλλος είναι ηλεκτροοπτικός τότε ο ανισοτροπικός του χαρακτήρας μπορεί να ελεγχθεί από μια εξωτερικά επιβαλλόμενη τάση (φαινόμενο *Pockels*). Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να έχουμε ένα πλακίδιο το οποίο μεταβάλλει την πόλωση του φωτός με ηλεκτρικά ελεγχόμενο τρόπο. Μια τέτοια διάταξη συνεπώς μπορεί να επιτελέσει λειτουργία διαμόρφωσης ενός ηλεκτρικού σήματος σε οπτικό προκειμένου να μεταδοθεί μέσω ενός οπτικού δικτύου.



(α') Πλακίδιο $\lambda/2$ (Πηγή: [16])

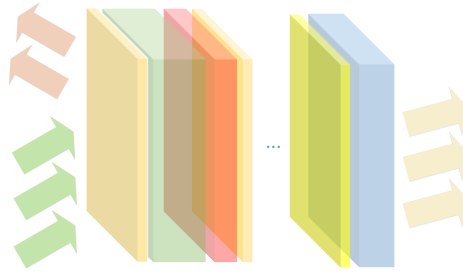
(β') Πρίσμα Nicol (Πηγή: [17])

Σχήμα 1.6: Χρήση ανισοτροπικών υλικών για μεταβολή της πόλωσης του φωτός

Αξίζει τέλος να αναφέρουμε ότι ενώ παραπάνω εξηγήσαμε το πώς αξιοποιούμε την ανισοτροπική συμπεριφορά των κρυστάλλων σε διάφορες εφαρμογές, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου τα διηλεκτρικά υλικά που χρησιμοποιούνται στα οπτικά συστήματα παρουσιάζουν ανεπιθύμητη ανισοτροπική συμπεριφορά λόγω ατελειών ή εξωγενών παραγόντων (π.χ. παραμόρφωση).

1.1.2 Επάλληλα λεπτά διηλεκτρικά στρώματα

Σε αρκετές εφαρμογές συναντούμε με καλή προσέγγιση στρωματοποιημένες -κατά τη μία διάσταση- διηλεκτρικές δομές, δηλαδή διατάξεις στις οποίες εμφανίζονται διαδοχικά επίπεδα λεπτά στρώματα διηλεκτρικών μέσων, είτε ισοτροπικών είτε ανισοτροπικών, τα οποία παρεμβάλλονται μεταξύ ευρύτερων ισοτροπικών περιοχών (βλ. σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.7: Στοιίβα επιπέδων λεπτών διηλεκτρικών στρωμάτων

Πολωτικά ή αντανάκλαστικά φίλτρα, συστήματα διαμόρφωσης/φώρασης και φίλτρα συχνότητας, διατάξεις κυματοδηγησης, φωτοανιχνευτές αλλά και συστήματα απεικόνισης είναι μερικά από τα παραδείγματα εφαρμογών που περιλαμβάνουν την πρόσπτωση της οπτικής ακτινοβολίας σε μία στοιίβα λεπτών διηλεκτρικών στρωμάτων. Λόγω μάλιστα της ανάπτυξης της οπτικής ολοκλήρωσης τα τελευταία χρόνια τέτοιες πολυστρωματικές δομές συναντώνται όλο και πιο συχνά.

Πιο συγκεκριμένα, διάφορες επιστρώσεις υψηλής ανακλαστικότητας (*high reflectance coatings*), για παράδειγμα, που χρησιμοποιούνται σε μικροκοιλότητες συντονισμού laser αλλά και ως φίλτρα σε διάφορες οπτικές διατάξεις προκειμένου να εμποδίσουν τη διάδοση συγκεκριμένων μήκων κύματος, αποτελούνται, στην απλή τους μορφή, από την περιοδική εναλλαγή δύο διηλεκτρικών ιστροπικών στρωμάτων με δείκτες διάθλασης n_1 , n_2 και πάχη d_1 και d_2 τέτοια ώστε $n_1 d_1 = n_2 d_2 = \lambda/4$. Όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των στρωμάτων τόσο μεγαλύτερη είναι και η ανακλαστικότητα που επιτυγχάνεται.

Αντίστοιχα, οι διάφορες αντι-ανακλαστικές επιστρώσεις (*antireflection coatings*) που τοποθετούνται στις επιφάνειες διαφόρων οπτικών στοιχείων προκειμένου να ελαχιστοποιήσουν τις ανακλάσεις κατά τη μετάβαση του φωτός από ένα μέσο με δείκτη διάθλασης n_1 σε ένα μέσο με δείκτη n_2 , αποτελούνται, στην απλούστερή τους μορφή, από ένα ενδιάμεσο διηλεκτρικό στρώμα με δείκτη διάθλασης $n = \sqrt{n_1 n_2}$ και πάχος $d = \frac{\lambda}{4n}$ το οποίο εξομαλύνει, θα λέγαμε, τη διηλεκτρική ασυνέχεια. Επειδή συχνά η απαιτούμενη τιμή για το δείκτη διάθλασης του ενδιάμεσου στρώματος δεν είναι κατασκευαστικά εφικτή, χρησιμοποιούνται επιπρόσθετα ενδιάμεσα στρώματα με πιο εφικτούς δείκτες διάθλασης. Το ίδιο γίνεται και όταν θέλουμε η εξάλειψη των ανακλάσεων να αφορά σε μία ευρύτερη ζώνη συχνοτήτων.

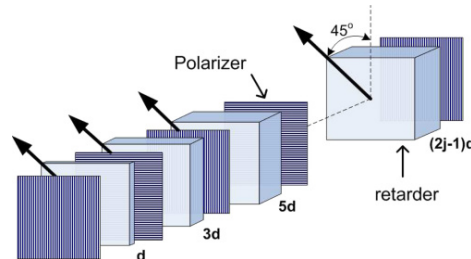
Κάνοντας χρήση τώρα ανιστροπικών μέσων ως ενδιάμεσα διηλεκτρικά στρώματα έχουμε ακόμα μεγαλύτερες δυνατότητες και μπορούμε να επιτύχουμε διατάξεις με καλύτερα χαρακτηριστικά και μεγαλύτερη ευελιξία.

Ένα παράδειγμα είναι τα φίλτρα Lyot-Ohman και τα φίλτρα Solc. Τα πρώτα αποτελούνται από μία σειρά ανιστροπικών πλακιδίων μεταξύ των οποίων παρεμβάλλονται όμοιοι κατακόρυφοι πολωτές. Τα πλακίδια είναι όλα από τον ίδιο κρύσταλλο, έχουν τον οπτικό τους άξονα σε γωνία 45° σε σχέση με τους πολωτές, αλλά το καθένα έχει πάχος διπλάσιο από το προηγούμενό του [18] (βλ. σχήμα 1.8). Για κάποια μήκη του προσπίπτοντος κύματος, το κάθε πλακίδιο προκαλεί καθυστέρηση φάσης κατά 2π μεταξύ των δύο συνιστωσών πόλωσης με αποτέλεσμα το εξερχόμενο από τον κρύσταλλο κύμα να είναι όμοιο με το προσπίπτον και άρα να περνάει σχεδόν αμετάβλητο από τον επόμενο πολωτή. Για τα υπόλοιπα όμως μήκη κύματος, η πόλωση μεταβάλλεται και έτσι η κατακόρυφη συνιστώσα που θα διέλθει από τον πολωτή, θα έχει μικρότερο πλάτος. Λόγω των πολλών πλακιδίων και της σχέσης που έχουν τα πάχη τους,

το φιλτράρισμα που επιτυγχάνεται έχει εξαιρετική λεπτότητα (*finesse*), πράγμα που καθιστά τα φίλτρα αυτά ιδιαίτερα χρήσιμα για εφαρμογές που απαιτούν ιδιαίτερη επιλεκτικότητα συχνοτήτων (π.χ. λήψη μονοσυχνοτικών οπτικών σημάτων μέσα σε περιβάλλον υψηλού θορύβου). Εκτός αυτού, τα χαρακτηριστικά του φίλτρου μπορούν να ρυθμιστούν με την περιστροφή των πλακιδίων (περιστροφή του οπτικού τους άξονα). Τέλος, αν "κόψουμε" κάθε πλακίδιο στη μέση και εισάγουμε ενδιάμεσα ένα πλακίδιο $\lambda/2$ τότε αποδεικνύεται ότι αυξάνεται σε μεγάλο βαθμό η γωνία θέασης (η αποτελεσματικότητα των φίλτρων υψηλής ανακλαστικότητας που εξηγήθηκαν παραπάνω εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη γωνία πρόσπτωσης).

Ένα φίλτρο *Solec* απ την άλλη αποτελείται από μία σειρά N ομοίων ανισοτροπικών πλακιδίων των οποίων ο προσανατολισμός (γωνία του οπτικού τους άξονα) είτε εναλλάσσεται περιοδικά ($\rho, -\rho, \rho, -\rho$ κ.ο.κ. - διάταξη *folded*) είτε αυξάνεται προοδευτικά ($\rho, 3\rho, 5\rho, 7\rho$ κ.ο.κ. - διάταξη *fan*) και απαιτεί δύο μόνο πολωτές, με κάθετο ή όμοιο προσανατολισμό (αντίστοιχα) -έναν στην είσοδο και έναν στην έξοδο (βλ. σχήμα 1.9). Στην περίπτωση του τύπου *folded*, κάποια μήκη κύματος "βλέπουν" τα πλακίδια σαν πλακίδια καθυστέρησης $\lambda/2$ και έτσι υφίστανται στροφή της πόλωσης σε κάθε στάδιο και έτσι, αν υποθέσουμε $\rho = \frac{\pi}{4N}$, θα έχουν υποστεί περιστροφή 90 μοιρών μετά το τελευταίο πλακίδιο και συνεπώς θα περνούν αμετάβλητα από τον τελευταίο πολωτή, σε αντίθεση με τα υπόλοιπα μήκη κύματος τα οποία υφίστανται μεγάλη απόσβεση. Στην περίπτωση του τύπου *fan* από την άλλη, όπως και στην περίπτωση των φίλτρων Lyot, τα μήκη κύματος που θα καταφέρουν να διέλθουν αμετάβλητα μέσα από τον τελευταίο πολωτή θα είναι αυτά που υφίστανται καθυστέρηση φάσης πολλαπλάσια του 2π , δηλαδή αυτά που θα "βλέπουν" τα πλακίδια σαν πλακίδια λ . Μεταβάλλοντας και εδώ διάφορους παράγοντες όπως, τη γωνία ρ , τον αριθμό των πλακιδίων ή τα πάχη τους, τα διάφορα χαρακτηριστικά του φίλτρου μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε να προσαρμόζεται στις ανάγκες της εκάστοτε εφαρμογής.

Αν μάλιστα χρησιμοποιήσουμε ηλεκτρο-οπτικούς κρυστάλλους τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε διατάξεις ανισοτροπικών πλακών που παρέχουν περαιτέρω προσαρμοστική ευελιξία (*tunability*) (π.χ. [19], [4]).



Σχήμα 1.8: Φασματικό φίλτρο τύπου Lyot-Ohman (Πηγή: [4])

Πέρα των παραπάνω εφαρμογών, όπου δημιουργούμε επίτηδες μία επαναλαμβανόμενη διάταξη στρωμάτων προκειμένου να επιτύχουμε κάποια χαρακτηριστικά (π.χ. στενότερο εύρος ζώνης των φίλτρων), συναντούμε διάφορες εφαρμογές όπου τέτοιες στοίβες διηλεκτρικών στρωμάτων προκύπτουν "αναπόφευκτα", όπως στις διατάξεις απεικόνισης (βλ. σχήμα 1.10) όπου αξιοποιείται η ιδιόμορφη ηλεκτρικά ελεγχόμενη ανισοτροπική συμπεριφορά των υγρών κρυστάλλων. Ακόμη, σε άλλες -μη οπτικές- ηλεκτρομαγνητικές εφαρμογές χρησιμοποιούνται πάλι ανισοτροπικά υλικά (π.χ. μαγνητικώς ανισοτροπικά ή δις ανισότροπα) και ανάλογες πολυστρωματικές δομές.

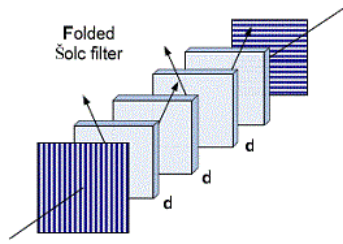


Figure 2a: Four-stage Folded Solc filter.

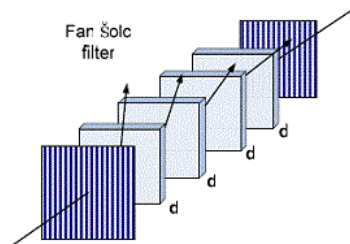
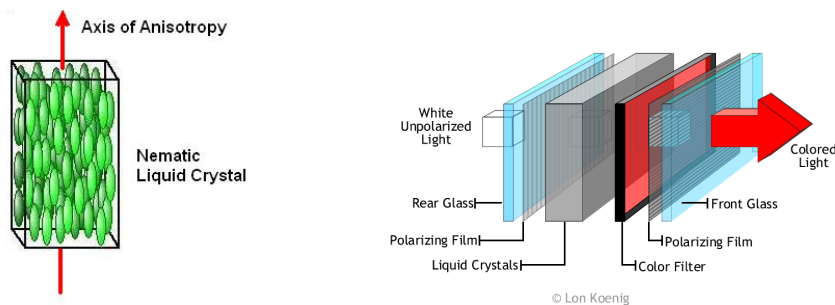


Figure 2b: Four-stage Fan Solc filter.

Σχήμα 1.9: Φασματικό φίλτρο τύπου Solc (Πηγή: [5])



(α) Υγροί κρύσταλλοι (Πηγή: [20])

(β) Σύστημα απεικόνισης με χρήση υγρών κρυστάλλων (Πηγή: [21])

Σχήμα 1.10: Χρήση υγρών κρυστάλλων, ως ηλεκτρικά ελεγχόμενο ανισοτροπικό μέσο, σε διάταξεις απεικόνισης

Για καλύτερη πρόβλεψη της λειτουργίας αυτών των διατάξεων, αλλά και για τον αποτελεσματικότερο σχεδιασμό τους, είναι αρκετά σημαντική λοιπόν η κατανόηση της διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μέσα σε ανισοτροπικά μέσα αλλά και μέσα από επάλθλα διηλεκτρικά στρώματα. Σε αυτήν την κατεύθυνση, η ύπαρξη υπολογιστικών εργαλείων που προσομοιώνουν και επιλύουν ανάλογα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα κρίνεται εξαιρετικά χρήσιμη.

Η παρούσα λοιπόν διπλωματική εργασία στοχεύει σε μία θεωρητική θεμελίωση της διάδοσης επιπέδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα από ηλεκτρικώς ανισοτροπικά μέσα, στη μελέτη του προβλήματος της ανάκλασης/διάθλασης αυτών από πολυστρωματικές επίπεδες δομές και τέλος στην ανάπτυξη σχετικού λογισμικού με χρήση κατάλληλου (από άποψη ευστάθειας και πολυπλοκότητας) αλγορίθμου.

Σημειώνουμε εδώ ότι παρότι εστιάζουμε στα οπτικά κύματα για το θέμα το οποίο μελετούμε, η όλη θεωρητική και προγραμματιστική ανάλυση γίνεται με χρήση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας. Βασίζεται δηλαδή στην κυματική φύση του φωτός, καθότι αυτή -σε συνδυασμό με το ηλεκτρομαγνητικό μοντέλο για την ανισοτροπική συμπεριφορά των κρυστάλλων- αρκεί -μέσα στα πλαίσια της παρούσας εργασίας- για να περιγράψει την αλληλεπίδραση των κρυστάλλων με την οπτική ακτινοβολία. Ως συνέπεια αυτού, η ανάλυση μπορεί να γενικευτεί σε ευρύτερη περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

1.2 Οργάνωση του τόμου

Τα κεφάλαια που απαρτίζουν το κείμενο της εργασίας είναι οργανωμένα ως εξής: Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας θεμελιωμένης πάνω στις εξισώσεις του Maxwell. Αφού εισαχθούν τα βασικά μεγέθη και οι εξισώσεις που συνθέτουν το ηλεκτρομαγνητικό πρότυπο, εξηγούνται οι συντακτικές σχέσεις στα διάφορα υλικά μέσα και το θεώρημα Poynting ενώ γίνεται μία υπενθύμιση σχετικά με τη χρήση των φασιθετών και εξηγείται η λογική που ακολουθείται όσον αφορά το συμβολισμό των διαφόρων μεγεθών.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναπτύσσονται ορισμένα στοιχεία θεωρίας γύρω από τη διάδοση επιπέδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε ομοιογενή ιστροπικά διηλεκτρικά μέσα. Τα μεγέθη και οι έννοιες που εισάγονται είναι καθοριστικής σημασίας για τα επόμενα κεφάλαια. Αρχικά εισάγεται το επίπεδο κύμα ως λύση της κυματικής εξίσωσης, τα αποσβεννύμενα κύματα, ο δείκτης διάθλασης, το κυματόνισμα, τα διάφορα είδη πόλωσης του επιπέδου κύματος ενώ στη συνέχεια αναλύεται η πρόσπτωση επιπέδου κύματος σε επίπεδη διηλεκτρική ασυνέχεια, όπου εισάγονται οι TE και TM συνιστώσες, οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης και γίνεται αρκετή μελέτη και διερεύνηση στο θέμα της ισχύος.

Στο τέταρτο κεφάλαιο μελετώνται τα ανιστροπικά μέσα και η διάδοση επιπέδων κυμάτων στο εσωτερικό τους. Εισάγονται διάφορα χαρακτηριστικά των κρυστάλλων όπως ο διηλεκτρικός ταυυστής, η κυματοεπιφάνεια και το ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης, μελετώνται οι ιδιοπολώσεις του ηλεκτρικού πεδίου και η διάδοση ισχύος και επεξηγούνται το φαινόμενο της διπλής διάθλασης και η κατηγοριοποίηση των κρυστάλλων σε μονοαξονικούς και διαξονικούς.

Στο επόμενο κεφάλαιο μελετάται το πρόβλημα της πρόσπτωσης επιπέδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε διάταξη πολλαπλών ανιστροπικών στρωμάτων. Αφού διατυπωθεί με ακρίβεια το πρόβλημα, εξηγείται αναλυτικά η μεθοδολογία επίλυσής του εστιάζοντας στην εύρεση των επαγόμενων ιδιορυθμών μέσα σε κάθε στρώμα ως πρόβλημα ιδιοτιμών και στην μέθοδο πινάκων μεταφοράς για την εύρεση των συντελεστών του πεδίου μέσα σε κάθε στρώμα. Εισάγεται επίσης η ανακλαστικότητα και η διαθλαστικότητα, χρησιμοποιώντας σε μεγάλο βαθμό θεωρία από το τρίτο κεφάλαιο.

Στο έκτο κεφάλαιο εξηγείται η ρουτίνα που υλοποιήθηκε με σκοπό την επίλυση του παραπάνω προβλήματος και την παραγωγή διαφόρων χρήσιμων γραφημάτων και παρουσιάζονται διάφορα παραδείγματα εκτέλεσής της. Στο πρώτο μέρος αναλύονται τα χαρακτηριστικά του προγράμματος και οι δυνατότητες που παρέχει στο χρήστη και εξηγείται ο τρόπος λειτουργίας του κώδικα, ενώ στο δεύτερο μέρος παρουσιάζονται μερικές ενδεικτικές διατάξεις στις οποίες εφαρμόστηκε και οι οποίες επιβεβαιώνουν την ορθότητά του.

Στο έβδομο κεφάλαιο εξηγείται το δεύτερο πρόγραμμα που υλοποιήθηκε, το οποίο αφορά την απεικόνιση της κυματοεπιφάνειας ενός ανιστροπικού μέσου μέσα από ειδικά διαμορφωμένο γραφικό περιβάλλον αλληλεπίδρασης με το χρήστη, το οποίο προσφέρει διάφορες δυνατότητες ρυθμίσεων και επιλογών. Αρχικά παρουσιάζεται ο τρόπος λειτουργίας του και έπειτα εξηγούνται διάφορα κομβικά σημεία που αφορούν στον τρόπο υλοποίησής του.

Στο τελευταίο μέρος του τόμου αφού δοθούν κάποια συμπεράσματα, δίνεται, ως παράρτημα, ο κώδικας των προγραμμάτων καθώς και κάποιοι χάρτες μεταβλητών του γραφικού περιβάλλοντος (χρήσιμοι για όποιον επιθυμεί να κατανοήσει πλήρως ή να τροποποιήσει το δεύτερο πρόγραμμα).

1.2.1 Τεχνικά στοιχεία

Έγινε προσπάθεια το κείμενο να είναι σχετικά αυτοτελές, δηλαδή όλη η απαιτούμενη θεωρία να οικοδομηθεί πάνω σε κάποιες περιορισμένες "δεδομένες" βάσεις που δίνονται στο δεύτερο κεφάλαιο και να υπάρχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερη συνέπεια όσον αφορά τις μαθηματικές σχέσεις και τους συμβολισμούς των μεγεθών.

Για τη συγγραφή του τόμου χρησιμοποιήθηκε σύστημα στοιχειοθεσίας $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ και συγκεκριμένα μηχανή $\text{X}_{\text{E}}\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ (λόγω της ταυτόχρονης υποστήριξης τόσο ελληνικών όσο και ξένων χαρακτήρων). Ως επεξεργαστής κειμένου χρησιμοποιήθηκε ο [Texstudio](#).

Τα προγράμματα δημιουργήθηκαν στο περιβάλλον [MATLAB](#) της Mathworks.

Οποιαδήποτε παρατηρήσεις ή απορίες είναι φυσικά ευπρόσδεκτες . Ο αναγνώστης, αν το επιθυμεί, ενθαρρύνεται να επικοινωνήσει με το γράφοντα [ηλεκτρονικά](#).

Κεφάλαιο 2

Βασικά στοιχεία Ηλεκτρομαγνητικής Θεωρίας

2.1 Οι Νόμοι του Maxwell

2.1.1 Διαφορική μορφή των εξισώσεων του Maxwell

Τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα περιγράφονται από τους νόμους του Maxwell, που διατυπώνονται μαθηματικά ως εξής:

- Νόμος του Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.1)$$

- Απουσία μαγνητικών μονοπόλων:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

- Νόμος της επαγωγής του Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

- Γενικευμένος νόμος του Ampere:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

Οι εξισώσεις αυτές περιγράφουν τον τρόπο που αλληλοεπιδρούν και αλληλοεξαρτώνται τα βασικά μεγέθη που συνθέτουν το ηλεκτρομαγνητικό πρότυπο [22], δηλαδή: οι πηγές (αίτια) των φαινομένων:

- ρ : πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου (σε Cb/m^3)
- \vec{J} : χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος (σε A/m^2)

και οι αποκρίσεις, δηλαδή τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία:

- $\vec{E}(\vec{r}, t)$: ένταση ηλεκτρικού πεδίου (σε V/m)

- $\vec{D}(\vec{r}, t)$: πυκνότητα της ηλεκτρικής ροής ή διηλεκτρική μετατόπιση (σε Cb/m)
- $\vec{H}(\vec{r}, t)$: ένταση του μαγνητικού πεδίου (σε A/m)
- $\vec{B}(\vec{r}, t)$: πυκνότητα της μαγνητικής ροής ή μαγνητική επαγωγή (σε $Tesla = Wb/m^2$)

Οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν τη λεγόμενη διαφορική μορφή των εξισώσεων του Maxwell, σε αντιδιαστολή με την ολοκληρωτική που έχει ως εξής (η σειρά αναγραφής των εξισώσεων κατά αντιστοιχία αυτών της σημειακής μορφής):

2.1.2 Ολοκληρωτική μορφή των εξισώσεων του Maxwell

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV \quad (2.5)$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.6)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.7)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (2.8)$$

όπου στις 2.5 και 2.6 S είναι μία οποιαδήποτε επιφάνεια με όγκο V και με το μοναδιαίο διάνυσμα $d\vec{S}$ να έχει φορά προς το εξωτερικό της, ενώ στις 2.7 και 2.8, C είναι μια οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη και S μια οποιαδήποτε επιφάνεια που καταλήγει στην C και με μοναδιαίο διάνυσμα $d\vec{S}$ αντίστοιχο της φοράς διαγραφής της C σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού.

2.1.3 Η εξίσωση συνέχειας

Από τις παραπάνω εξισώσεις, και συγκεκριμένα παίρνοντας την απόκλιση από τα δύο μέλη της 2.4 και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) = 0$, μπορούμε να εξαγάγουμε και μία ακόμα εξίσωση:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η λεγόμενη εξίσωση συνέχειας (σε αναλογία με την αντίστοιχη σχέση που συναντάται στην υδροδυναμική) [23]. Εκφράζει ουσιαστικά τη διατήρηση του φορτίου και συγκεκριμένα ότι το συνολικό φορτίο ρ που περικλείεται σε μια περιοχή μπορεί να μεταβληθεί μόνο εφόσον συνοδευτεί από αντίστοιχη ροή ηλεκτρικού ρεύματος \vec{J} .

2.2 Οριακές συνθήκες

Στις διάφορες ηλεκτρομαγνητικές εφαρμογές συμβαίνει συχνά τα αίτια ρ και \vec{J} να μεταβάλλονται απότομα χωρικά. Αυτό πρακτικά συμβαίνει στα σύνορα των διαφόρων υλικών. Για το λόγο αυτό, σε τέτοια σημεία είναι αναγκαία η χρήση άλλων μεγεθών για την περιγραφή του φορτίου και του ηλεκτρικού ρεύματος:

- $\sigma(\vec{r}, t)$: η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου (σε C/m^2) και
- $\vec{K}(\vec{r}, t)$: η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος (σε A/m)

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις του Maxwell στην ολοκληρωτική τους μορφή στα όρια της διαχωριστικής επιφάνειας S δύο συνορευόντων υλικών προκύπτουν οι εξής σημειακές εξισώσεις [24]:

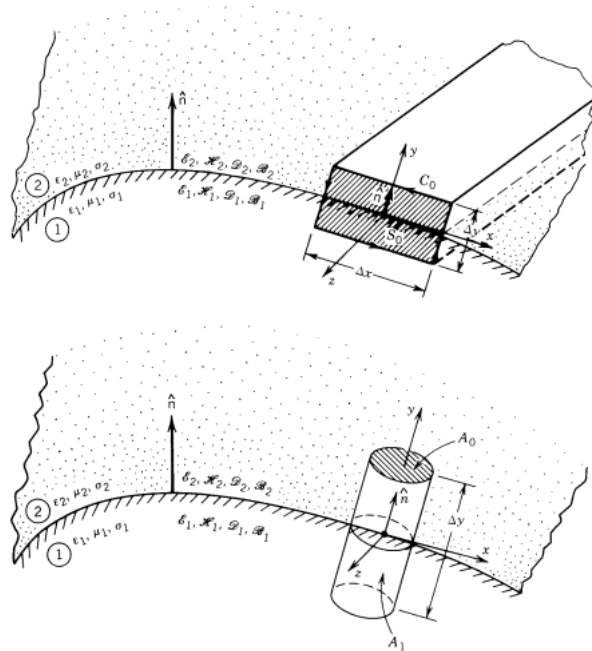
$$\hat{i}_n \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (2.10)$$

$$\hat{i}_n \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{K} \quad (2.11)$$

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \quad (2.12)$$

$$\hat{i}_n \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (2.13)$$

όπου \hat{i}_n είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια και το οποίο έχει φορά από το υλικό 1 στο υλικό 2 (Σχήμα 2.1), ενώ οι δείκτες 1 και 2 υποδηλώνουν πεδία στην πλευρά του αντίστοιχου υλικού (1 ή 2) και στα όρια ενός οποιουδήποτε σημείου της διαχωριστικής επιφάνειας.



Σχήμα 2.1: Συνοριακή επιφάνεια μεταξύ δύο υλικών

Η εξίσωση 2.10 εκφράζει τη συνέχεια των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου. Δηλαδή στα όρια της διαχωριστικής επιφάνειας δύο μέσω των εφαπτομενικές συνιστώσες του \vec{E} είναι πάντοτε συνεχείς.

Από την άλλη, η εξίσωση 2.11 διατυπώνει ότι κατά τη μετάβαση δια μέσου μίας διαχωριστικής επιφάνειας η (απότομη) μεταβολή των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης \vec{H} του μαγνητικού πεδίου είναι ίση με την επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος \vec{K} .

Οι εξισώσεις συχνά γράφονται και ως εξής ([7]):

$$\vec{E}_{2t} = \vec{E}_{1t} \quad (2.14)$$

$$\vec{H}_{2t} = \vec{H}_{1t} + \vec{K} \quad (2.15)$$

όπου ο δείκτης t δηλώνει εφαπτομενική συνιστώσα (tangential), δηλαδή την προβολή στην διαχωριστική επιφάνεια των μέσων.

Αντίστοιχα, η εξίσωση 2.13 εκφράζει τη συνέχεια της κάθετης συνιστώσας της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} κατά τη μετάβαση από ένα μέσο σε ένα άλλο και η εξίσωση 2.12 την ενδεχόμενη - κατά σ - ασυνέχεια της κάθετης συνιστώσας της διηλεκτρικής μετατόπισης \vec{D} :

$$B_{2n} = B_{1n} \quad (2.16)$$

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma \quad (2.17)$$

όπου ο δείκτης n δηλώνει κάθετη συνιστώσα (normal), δηλαδή την προβολή του διανύσματος στην κάθετη της διαχωριστικής επιφάνειας των μέσων.

2.3 Συντακτικές σχέσεις

Η γνώση των αιτίων ρ και \vec{J} δεν επαρκεί για να προσδιοριστούν τα \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} και \vec{H} . Απαιτούνται και κάποιες επιπλέον σχέσεις ώστε μαζί με τις εξισώσεις του Maxwell να έχουμε ένα επιλύσιμο σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Οι σχέσεις αυτές είναι οι λεγόμενες συντακτικές και έχουν τη μορφή [22]:

$$\vec{D} = f(\vec{E}, \vec{B}) \quad (2.18)$$

$$\vec{H} = g(\vec{E}, \vec{B}) \quad (2.19)$$

Οι συντακτικές σχέσεις περιγράφουν, ουσιαστικά, την αλληλεπίδραση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων με την ύλη.

Επίσης, το αίτιο \vec{J} δεν είναι αποκλειστικά επιβαλλόμενο (και άρα αποκλειστικά αίτιο) αλλά εξαρτάται και αυτό από το υλικό. Πιο συγκεκριμένα, στα υλικά τα οποία διαθέτουν ελεύθερους φορείς ρεύματος, τα δημιουργούμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία επάγουν κάποιο "επιπλέον" ηλεκτρικό ρεύμα \vec{J}_c . Πρόκειται για την ηλεκτρική αγωγιμότητα / αντίσταση (conductivity / resistance) των υλικών. Έτσι, το "αίτιο" \vec{J} περιλαμβάνει τόσο το επιβαλλόμενο ρεύμα \vec{J}_π (των πρωτογενών-ανεξάρτητων) πηγών όσο και το επαγόμενο ρεύμα \vec{J}_c αγωγιμότητας, των δευτερογενών πηγών μέσα στους αγωγούς. Έτσι:

$$\vec{J}_c = h(\vec{E}, \vec{B}) \quad (2.20)$$

και

$$\vec{J} = \vec{J}_\pi + \vec{J}_c \quad (2.21)$$

2.3.1 Συντακτικές σχέσεις στο κενό

Για τον κενό χώρο ισχύει:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad (2.22)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \quad (2.23)$$

$$\vec{J}_c = 0 \quad (2.24)$$

όπου:

- ϵ_0 : η επιτρεπτότητα του κενού
και
- μ_0 : η μαγνητική διαπερατότητα του κενού

Οι ϵ_0 και μ_0 είναι βαθμωτές ποσότητες, σταθερές, με την ιδιότητα

$$\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2 \quad (2.25)$$

όπου c είναι ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό (ταχύτητα του φωτός).

Στο διεθνές σύστημα μονάδων (SI) η ακριβής τιμή της σταθεράς μ_0 είναι [22]:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$$

Συνεπώς για την ϵ_0 θα ισχύει:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} [F/m]$$

Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι, στο κενό, το διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης είναι πάντοτε συγγραμικό και ανάλογο - κατά συγκεκριμένη σταθερά - της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου και, αντίστοιχα, το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής είναι πάντα συγγραμικό και ανάλογο - κατά συγκεκριμένη σταθερά - της έντασης του μαγνητικού πεδίου. Επίσης, δεν υπάρχουν φορείς αγωγιμότητας, συνεπώς το επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα \vec{J}_c είναι μηδενικό.

2.3.2 Συντακτικές σχέσεις στα διάφορα υλικά μέσα

Σε ένα υλικό, τώρα, οι συντακτικές σχέσεις είναι, εν γένει, αρκετά πιο περίπλοκες και ουσιαστικά περιγράφουν την ηλεκτρομαγνητική του διαφοροποίηση σε σχέση με τα υπόλοιπα υλικά. Συγκεκριμένα, όσον αφορά τη διηλεκτρική μετατόπιση, στον όρο $\epsilon_0 \vec{E}$ της σχέσης 2.18 προστίθεται το διάνυσμα της ηλεκτρικής πόλωσης ή απλά πόλωσης \vec{P} ενώ, όσον αφορά την ένταση του μαγνητικού πεδίου, στη σχέση 2.19 έρχεται να αφαιρεθεί η μαγνητική πόλωση ή μαγνήτιση \vec{M} του υλικού. Η πόλωση οφείλεται στον προσανατολισμό των δεσμευμένων φορτίων στο εσωτερικό του υλικού τα οποία συμπεριφέρονται σαν μικροσκοπικά δίπολα. Αντίστοιχα, η μαγνήτιση αναπαριστά την κατανομή των μαγνητικών διπόλων μέσα σε ένα μαγνητικό υλικό. [22].

[Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε το εξής: Η προσέγγιση που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω εισάγει από την αρχή τα μεγέθη \vec{D} και \vec{H} (μαζί με τα \vec{E} και \vec{B}) για να "καταλήξει" στη συνέχεια ότι "απαιτούνται" και κάποιες επιπλέον εξισώσεις (οι συντακτικές) για την επίλυση ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος. Θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε εναλλακτικά από τη διατύπωση των εξισώσεων του Maxwell για το κενό, απαλλαγμένα από τα μεγέθη αυτά

και χρησιμοποιώντας μόνο τα \vec{E} και \vec{B} , τα οποία (γι' αυτό) ονομάζονται και θεμελιώδη μεγέθη του ηλεκτρομαγνητισμού. Κατόπιν, περνώντας στην περίπτωση των υλικών θα εισάγαμε πρώτα τα φαινόμενα της πόλωσης \vec{P} και της μαγνήτισης \vec{M} και κατόπιν αυτών θα εισάγαμε τα βοηθητικά μεγέθη \vec{D} και \vec{H} (βλ. σελ 193 [22]). Η δεύτερη αυτή προσέγγιση περιγράφει και την ιστορική εξέλιξη των εξισώσεων του Maxwell. Τα βοηθητικά μεγέθη δηλαδή εισήχθησαν στην πορεία προκειμένου οι εξισώσεις του Maxwell να γενικευτούν ώστε να περιλαμβάνουν ένα οποιοδήποτε υλικό.]

Συνεπώς:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.26)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (2.27)$$

Συνήθως ισχύει $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$, $\vec{M} = \vec{M}(\vec{H})$ και $\vec{J}_c = \vec{J}_c(\vec{E})$.

Σε ένα γραμμικό υλικό η πόλωση, η μαγνήτιση και το επαγόμενο ρεύμα συμπεριφέρονται γραμμικά ως προς τα αίτια \vec{E} και \vec{H} , δηλαδή είναι ανάλογα αυτών. Ωστόσο παρατηρείται το φαινόμενο να μην εξαρτώνται μόνο από τις τιμές των \vec{E} και \vec{H} στο συγκεκριμένο σημείο \vec{r} και τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή t που μελετούμε, αλλά και από τις τιμές τους σε προηγούμενες χρονικές στιγμές καθώς και τις τιμές τους σε γειτονικές θέσεις. Εμφανίζουν δηλαδή, όπως λέμε *χρονική και χωρική διασπορά*, αντίστοιχα.

Απλά, Ισοτροπικά Μέσα

Επικεντρωνόμαστε τώρα σε ισοτροπικά και ομοιογενή γραμμικά υλικά που εμφανίζουν αμελητέα *χωρική διασπορά*, όσον αφορά και τα τρία παραπάνω μεγέθη. Ένα τέτοιο υλικό εκδηλώνει πόλωση, μαγνήτιση και επαγόμενο ρεύμα αποκρινόμενο σαν ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα. Αυτό εκφράζεται μαθηματικά μέσα από ένα ολοκλήρωμα συνέλιξης [24]:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_0^\infty G_e(\tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau - t) d\tau \quad (2.28)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, t) = \int_0^\infty G_m(\tau) \vec{H}(\vec{r}, \tau - t) d\tau \quad (2.29)$$

$$\vec{J}_c(\vec{r}, t) = \int_0^\infty G_c(\tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau - t) d\tau \quad (2.30)$$

Η πόλωση, δηλαδή, ισούται με τη συνέλιξη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου με τη συνάρτηση $G_e(t)$, η οποία αποτελεί, θα λέγαμε, την κρουστική απόκριση του υλικού θεωρούμενου σαν σύστημα με είσοδο την ένταση του πεδίου και έξοδο την ηλεκτρική του πόλωση. Αντίστοιχα ισχύει και για τα άλλα δύο μεγέθη.

Τα μεγέθη G_e, G_m, G_c είναι πυρήνες που περιγράφουν τη "μνήμη" του υλικού όσον αφορά στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία.

Αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας Δυστυχώς, η μορφή των εξισώσεων 2.28, 2.29 και 2.30 δεν καθιστά εύκολη τη χρήση τους για την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Ωστόσο, στα διάφορα προβλήματα που μελετώνται, συμβαίνει συχνά τα αίτια να είναι είτε σταθερά, ή ημιτονοειδείς (αρμονικές) συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή να ταλαντώνονται με μία συγκεκριμένη -ως επί το πλείστον- σταθερή συχνότητα ω . Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, τελικά τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη να είναι και αυτά σταθερά ή ημιτονοειδή. Αυτό μετατρέπει τις παραπάνω συντακτικές εξισώσεις αλλά και τους νόμους του Maxwell σε απλές γραμμικές εξισώσεις. Το πολύ σημαντικό αυτό "γεγονός" είναι συνέπεια δύο παραγμάτων:

- της ιδιότητας των αρμονικών συναρτήσεων να "δίνουν" πάλι αρμονικές συναρτήσεις όταν παραγωγίζονται [22] και
- της "τάσης" που έχει η φύση, και κατά συνέπεια όλα τα υλικά μέσα, να συμπεριφέρεται κατά σταθερό τρόπο σε αρμονικές διαταραχές, δηλαδή να έχει χαρακτηριστικά τα οποία εξαρτώνται από τη συχνότητα.

Το αποτέλεσμα των παραπάνω είναι ότι, ακόμα και όταν τα μεγέθη δεν είναι αρμονικά, "βολεύει" ιδιαίτερα η χρήση του μετασχηματισμού Fourier τους ως προς το χρόνο.

Αν λοιπόν, θεωρήσουμε τους μετασχηματισμούς Fourier ως προς το χρόνο των μεγεθών των εξισώσεων 2.28, 2.29 και 2.30 έχουμε:

$$\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2.31)$$

$$\vec{M}(\vec{r}, \omega) = \chi_m(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad (2.32)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, \omega) = \gamma_c(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2.33)$$

[Σημειώνουμε εδώ ότι, όπως φάνηκε ήδη, για τα "πραγματικά" μεγέθη χρησιμοποιούνται καλλιγραφικοί χαρακτήρες ενώ για τους μετασχηματισμούς Fourier αυτών καθώς και για άλλα μεγέθη, όπως για τους φασιθέτες (βλ. ενότητα 2.4), τα οποία μπορεί να είναι και μιγαδικά, χρησιμοποιούνται κανονικοί (συμβατικοί) χαρακτήρες. Ο λόγος που χρησιμοποιούμε αυτή τη σύμβαση και όχι την αντίθετη είναι ότι θα δουλέψουμε ως επί το πλείστον στο πεδίο της συχνότητας, ή θεωρώντας μόνιμη ημιτονοειδή κατάσταση.]

Το μέγεθος $\chi_e(\omega)$ αποτελεί τη λεγόμενη ηλεκτρική επιδεκτικότητα του μέσου, ενώ τα μεγέθη $\chi_m(\omega)$ και $\gamma_c(\omega)$ αποτελούν την μαγνητική επιδεκτικότητα και την ηλεκτρική αγωγιμότητα του μέσου αντίστοιχα.

Η εξίσωση 2.33 αποτελεί το γνωστό νόμο του Ohm σε σημειακή (μικροσκοπική) μορφή.

Αν θεωρήσουμε αντίστοιχα το μετασχηματισμό Fourier της διηλεκτρικής μετατόπισης $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$ και της μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}(\vec{r}, \omega)$ τότε αντικαθιστώντας τις 2.31 και 2.32 στις 2.26 και 2.27 έχουμε ότι:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (2.34)$$

και

$$\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\omega) \vec{H}(\vec{r}, \omega) \quad (2.35)$$

όπου

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0(1 + \chi_e(\omega)) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \quad (2.36)$$

η (ηλεκτρική) επιτρεπτότητα του μέσου (και ϵ_r η σχετική (ηλεκτρική) επιτρεπτότητα του μέσου)

ενώ

$$\mu(\omega) = \mu_0(1 + \chi_m(\omega)) = \mu_0 \mu_r(\omega) \quad (2.37)$$

η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου (και μ_r η σχετική μαγνητική διαπερατότητα του μέσου).

Μέσα με απώλειες Στα διάφορα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα που αντιμετωπίζουμε υπάρχει περίπτωση η επιτρεπτότητα ϵ_r και η μαγνητική διαπερατότητα μ_r να είναι μιγαδικές. Αυτό είναι κάτι αναμενόμενο αφού τα μεγέθη που υπεισέρχονται στις ανωτέρω σχέσεις είναι, όπως είπαμε, μετασχηματισμοί Fourier.

Η πρακτική σημασία αυτού είναι ότι στην περίπτωση αυτή το μέσο παρουσιάζει κάποιες απώλειες οι οποίες εκδηλώνονται με τη μορφή θερμότητας. Στο πεδίο του χρόνου, αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιου φθίνοντος εκθετικού όρου. Είναι φανερό ότι στην πράξη οι παραπάνω σταθερές είναι πάντα μιγαδικές δεδομένου ότι όλα τα μέσα παρουσιάζουν απώλειες. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις είναι αμελητέες, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε πραγματικές ποσότητες.

Μέσα χωρίς διασπορά και χωρίς απώλειες Αν ένα υλικό τώρα (επιπλέον των ανωτέρω προϋποθέσεων) δεν έχει ούτε χρονική διασπορά τότε τα ϵ , μ και γ_c θα είναι σταθερά και πραγματικά. Αυτό συνεπάγεται ότι οι εξισώσεις 2.34, 2.35 και 2.33 θα ισχύουν τότε και στο πεδίο του χρόνου:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.38)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (2.39)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \gamma_c \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.40)$$

Άλλα, Πολυπλοκότερα Μέσα

Ανισοτροπικά Μέσα Στην περίπτωση που έχουμε ένα ομοιογενές, γραμμικό, χωρίς χωρική διασπορά αλλά ανισοτροπικό υλικό τότε τα μεγέθη $\chi_e(\omega)$ και $\chi_m(\omega)$ δεν είναι βαθμωτές ποσότητες αλλά τανυστές, δηλαδή πίνακες 3x3. Τις συμβολίζουμε, γι αυτό, $\bar{\chi}_e(\omega)$ και $\bar{\chi}_m(\omega)$.

Αν αυτό ισχύει μόνο για το $\chi_e(\omega)$ τότε το μέσο ονομάζεται ηλεκτρικώς ανισοτροπικό. Τέτοια υλικά είναι π.χ. οι διάφοροι κρύσταλλοι που χρησιμοποιούνται αρκετά σε οπτικές-φωτονικές εφαρμογές, όπως αναφέραμε ήδη στην ενότητα 1.1.1, και σε αυτά τα υλικά θα επικεντρωθούμε.

Αν από την άλλη το $\chi_e(\omega)$ είναι βαθμωτό αλλά το $\chi_m(\omega)$ είναι τανυστής, το μέσο ονομάζεται μαγνητικώς ανισοτροπικό. Τέτοια υλικά είναι π.χ. οι φερρίτες, οι οποίοι χρησιμοποιούνται αρκετά σε μικροκυματικές εφαρμογές.

Υπάρχουν και "γενικώς" ανισοτροπικά υλικά τα οποία παρουσιάζουν τόσο ηλεκτρική όσο και μαγνητική ανισοτροπία.

Η ύπαρξη του τανυστή αυτού εκφράζει (π.χ. για τα ηλεκτρικώς ανισοτροπικά μέσα) το γεγονός ότι το διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης \vec{D} δεν είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} αλλά ότι κάθε συνιστώσα του εξαρτάται από την καθεμία από τις συνιστώσες του \vec{E} . Φυσικά, αυτό οφείλεται στην ύπαρξη κάποιου "μικροσκοπικού" προσανατολισμού στο εσωτερικό του υλικού, με αποτέλεσμα οι ιδιότητες του υλικού να εξαρτώνται από τον προσανατολισμό του ως προς τα αίτια.

Δις-Ανισοτροπικά, Δις-Ισοτροπικά και Χειρότροπα Μέσα Μέσα που περιγράφονται με συντακτικές σχέσεις της μορφής:

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{E} + \bar{\xi} \vec{H} \quad (2.41)$$

$$\vec{B} = \bar{\zeta} \vec{E} + \bar{\mu} \vec{H} \quad (2.42)$$

ονομάζονται *δισ-ανιστροπικά* [22].

Τα στοιχεία $\bar{\xi}$ και $\bar{\zeta}$ ονομάζονται *μαγνητο-ηλεκτρικοί τανυστές*.

Στην κατηγορία αυτή ανήκουν διάφορα σύνθετα υλικά καθώς και όλα τα κινούμενα ισοτροπικά μέσα.

Άλλα σύνθετα υλικά περιγράφονται από τις σχέσεις 2.41 και 2.42 με τη διαφορά ότι τα ϵ, μ, ξ και ζ είναι βαθμωτά μεγέθη. Πρόκειται για τα λεγόμενα *δισ-ισοτροπικά*.

Τέλος, υπάρχουν τα *χειρότροπα* μέσα για τα οποία ισχύει $\xi = \zeta$. Παράδειγμα τέτοιων υλικών είναι η κοινή ζάχαρη.

Μη ομοιογενή και μη γραμμικά μέσα Οι προαναφερθείσες συντακτικές παράμετροι ($\epsilon, \mu, \xi, \zeta$ και σ) μπορούν να εξαρτώνται από τη θέση του σημείου μελέτης (ή παρατήρησης) μέσα στο υλικό. Αν συμβαίνει αυτό τότε πρόκειται για ένα *μη ομοιογενές υλικό*.

Επιπλέον, τα παραπάνω υλικά θεωρήθηκαν όλα *γραμμικά*. Αυτό σημαίνει ότι οι αποκρίσεις τους (\vec{P}, \vec{M} και \vec{J}_c) είναι ανάλογες των αιτίων \vec{E} και \vec{H} . Σε πολλά υλικά, όμως, η επιβολή ισχυρών πεδίων προκαλεί απότομη αύξηση των αποκρίσεων, λόγω της εμφάνισης παραγόντων *μεγαλύτερης τάξης*. Στην περίπτωση αυτή, και γενικότερα στην περίπτωση που οι αποκρίσεις αποτελούν περίπλοκες συναρτήσεις των αιτίων, τα μέσα ονομάζονται *μη γραμμικά*. Τυπικό παράδειγμα αποτελούν τα λεγόμενα *σιδηρομαγνητικά υλικά* τα οποία εμφανίζουν το λεγόμενο *βρόχο υστέρησης*.

2.4 Μόνιμη Ημιτονοειδής Κατάσταση - Μονοχρωματικά Πεδία - Φασιθέτες

Όπως αναφέραμε και στην ενότητα 2.3.2 συμβαίνει συχνά τα αίτια να είναι είτε σταθερά, ή ημιτονοειδείς (αρμονικές) συναρτήσεις του χρόνου, με αποτέλεσμα, τελικά τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη να είναι και αυτά σταθερά ή ημιτονοειδή.

Έστω λοιπόν, ένα μέγεθος $\alpha(x, y, z, t)$ το οποίο μεταβάλλεται αρμονικά:

$$\alpha(x, y, z, t) = f(x, y, z) \cos[\omega t + \phi((x, y, z))] \quad (2.43)$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τη σχέση του Euler

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (2.44)$$

μπορούμε να γράψουμε το $\alpha(x, y, z, t)$ στη μορφή:

$$\alpha(x, y, z, t) = \Re\{[f(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)}]e^{i\omega t}\} \quad (2.45)$$

Το μέγεθος

$$a = f(x, y, z)e^{i\phi(x, y, z)} \quad (2.46)$$

είναι μιγαδικό και, ως γνωστόν, ονομάζεται *παραστατικός μιγάς* ή *φασιθέτης* (*phasor*).

Ο φασιθέτης εμπεριέχει όλη την πληροφορία που χαρακτηρίζει ένα ημιτονοειδές μέγεθος και συνεπώς, αποτελεί μία *ισοδύναμη αναπαράστασή* του.

$$\alpha(x, y, z, t) \Leftrightarrow a(x, y, z) \quad (2.47)$$

Οι φασιθέτες χαρακτηρίζονται από γραμμικότητα

$$c_1\alpha(x, y, z, t) + c_2\beta(x, y, z, t) \Leftrightarrow c_1a(x, y, z) + c_2b(x, y, z) \quad (2.48)$$

καθώς και από την ιδιότητα

$$\frac{d}{dt}\alpha(x, y, z, t) \Leftrightarrow i\omega a(x, y, z) \quad (2.49)$$

γεγονός που τους καθιστά ιδιαίτερα χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών (και όχι μόνο) προβλημάτων στην περίπτωση αρμονικής διέγερσης.

2.4.1 Φασιθέτες διανυσμάτων

Θεωρώντας τους φασιθέτες των συνιστώσων ενός διανύσματος που η κάθε του συνιστώσα μεταβάλλεται αρμονικά με την ίδια συχνότητα ω μπορούμε να ορίσουμε και τον φασιθέτη ενός διανύσματος:

$$\vec{A} = \Re\{\vec{A}e^{i\omega t}\} \quad (2.50)$$

Ο φασιθέτης \vec{A} αποτελεί ένα μιγαδικό διάνυσμα και, συνεπώς, δεν μπορεί να αναπαρασταθεί στο χώρο των τριών διαστάσεων.

Η χρήση των φασιθέτων διευκολύνει την επίλυση των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων και γι αυτό, στην παρούσα εργασία, που θα ασχοληθούμε με μονοχρωματική ακτινοβολία δηλαδή θα θεωρήσουμε ότι τα βασικά πεδιακά μεγέθη είναι ημιτονικά με συγκεκριμένη συχνότητα ω , θα χρησιμοποιήσουμε ως επί το πλείστον φασιθέτες για την περιγραφή των πεδίων.

Ίσως έγινε αντιληπτό ότι στην παραπάνω ανάλυση, χρησιμοποιήθηκε και εδώ αντίστοιχος συμβολισμός με αυτόν που εισήχθη στην προηγούμενη ενότητα δηλαδή, συμβατικοί χαρακτήρες για τους φασιθέτες και καλλιγραφικοί χαρακτήρες για τα ίδια τα (πραγματικά) μεγέθη.

2.4.2 Μέση τιμή γινομένου αρμονικών συναρτήσεων

Η μέση τιμή ενός περιοδικού μεγέθους με περίοδο T ορίζεται ως γνωστόν ως εξής:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (2.51)$$

Έστω τώρα ότι έχουμε δύο ημιτονοειδή μεγέθη α και β ίδιας περιόδου T και θέλουμε να βρούμε τη μέση τιμή του γινομένου τους. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t)\beta(t) \rangle &= \\ \frac{1}{T} \int_0^T |a| \cos(\omega t + \phi_a) |b| \cos(\omega t + \phi_b) dt &= \\ \frac{1}{2} |ab| \cos(\phi_a - \phi_b) &= \\ \frac{1}{2} |ab| \Re\{e^{i(\phi_a - \phi_b)}\} & \end{aligned} \quad (2.52)$$

Προκύπτει, λοιπόν ότι:

$$\langle \alpha(t)\beta(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re\{ab^*\} \quad (2.53)$$

2.4.3 Μέση τιμή εξωτερικού γινομένου αρμονικών διανυσματικών συναρτήσεων

Εφαρμόζοντας τώρα την ιδιότητα της προηγούμενης ενότητας στο εξωτερικό γινόμενο διανυσματικών αρμονικών μεγεθών προκύπτει μία αντίστοιχη σχέση:

$$\langle \vec{A}(t) \times \vec{B}(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re\{\vec{A} \times \vec{B}^*\} \quad (2.54)$$

2.5 Ηλεκτρομαγνητική ενέργεια και ισχύς

Από την εξίσωση 2.4 έχουμε ότι [7]:

$$\vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (2.55)$$

Εφαρμόζοντας την ιδιότητα

$$\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) = \vec{\mathcal{H}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) - \vec{\mathcal{E}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) \quad (2.56)$$

προκύπτει:

$$\vec{\mathcal{H}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) - \nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} \quad (2.57)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την εξίσωση 2.3 έχουμε:

$$-\nabla \cdot (\vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}) = \vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{J}} + \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} \quad (2.58)$$

Στην περίπτωση συνεπώς που έχουμε γραμμικό υλικό και είμαστε στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση τότε η παραπάνω εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = -\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}} \quad (2.59)$$

Ο όρος

$$\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (2.60)$$

είναι το λεγόμενο διάνυσμα Poynting το οποίο αναπαριστά την τοπική ροή της ενέργειας και έχει μονάδες Watt/m^2 .

Ο όρος

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_e + \mathcal{U}_m = \frac{1}{2}(\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{D}} + \vec{\mathcal{H}} \cdot \vec{\mathcal{B}}) \quad (2.61)$$

αποτελεί την πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας και έχει μονάδες joules/m^3 .

Τέλος, ο όρος $\vec{\mathcal{J}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$ αναπαριστά το έργο που καταναλώνεται από τα πεδία (ωμικές απώλειες).

Η εξίσωση 2.59 είναι η γνωστή εξίσωση συνεχείας ή θεώρημα του Poynting για τη διατήρηση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας.

2.5.1 Μέση τιμή της ενέργειας για Ημιτονοειδή Πεδία

Βάσει της ενότητας 2.4.1 και με χρήση των φασιθετών προκύπτουν τα εξής για τις μέσες τιμές της πυκνότητας της ενέργειας και του διανύσματος Poynting:

$$\langle U_e \rangle = \frac{1}{4} \Re\{\vec{E} \cdot \vec{D}^*\} \quad (2.62)$$

$$\langle U_m \rangle = \frac{1}{4} \Re\{\vec{H} \cdot \vec{B}^*\} \quad (2.63)$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \quad (2.64)$$

Κεφάλαιο 3

Διάδοση Επιπέδων Κυμάτων μέσα σε Ισοτροπικά Μέσα

3.1 Κυματική εξίσωση και αρμονικό επίπεδο κύμα

3.1.1 Η κυματική εξίσωση εκ των εξισώσεων του Maxwell

Θεωρούμε ένα γραμμικό ισοτροπικό ομοιογενές μέσο χωρίς διασπορά, χωρίς απώλειες και με μηδενική αγωγιμότητα. Οι συντακτικές σχέσεις θα έχουν ως εξής:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu \vec{H}(\vec{r}, t) \quad (3.2)$$

$$\vec{J}_c = 0 \quad (3.3)$$

Θεωρούμε επιπλέον ότι είμαστε σε χώρο με μηδενικές πηγές, δηλαδή

$$\rho = 0 \quad (3.4)$$

$$\vec{J}_\pi = 0 \quad (3.5)$$

Έτσι, οι εξισώσεις του Maxwell 2.3 και 2.4, γίνονται:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.9)$$

Παίρνοντας την περιστροφή των 3.6 και 3.7 έχουμε:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{E}}) = -\mu \frac{\partial(\nabla \times \vec{\mathcal{H}})}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{\mathcal{H}}) = \epsilon \frac{\partial(\nabla \times \vec{\mathcal{E}})}{\partial t} \quad (3.11)$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (3.12)$$

και τις εξισώσεις 3.6, 3.7, 3.8 και 3.9 έχουμε:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} \quad (3.13)$$

και

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

Άρα λοιπόν, τόσο το ηλεκτρικό όσο και το μαγνητικό πεδίο ικανοποιούν τη λεγόμενη διανυσματική κυματική εξίσωση:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{\mathcal{A}} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{A}}}{\partial t^2}} \quad (3.15)$$

με

$$v^2 = \frac{1}{\mu\epsilon} \quad (3.16)$$

Καθεμία από τις συνιστώσες της διανυσματικής συνάρτησης $\vec{\mathcal{A}}$ αποδεικνύεται ότι ικανοποιεί αντίστοιχα τη γενική βαθμωτή κυματική εξίσωση:

$$\boxed{\nabla^2 \mathcal{U} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2}} \quad (3.17)$$

3.1.2 Λύση βαθμωτής κυματικής εξίσωσης

Αναζητούμε απλές λύσεις της εξίσωσης 3.17.

Επίπεδα Κύματα

Αν αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$\mathcal{U}(\vec{r}, t) = \mathcal{U}(\hat{s} \cdot \vec{r}, t) \quad (3.18)$$

όπου \hat{s} μοναδιαίο διάνυσμα, τότε βρίσκουμε [23] ότι:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_1\left(t - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{v}\right) + \mathcal{U}_2\left(t + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{v}\right) \quad (3.19)$$

όπου $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ αυθαίρετες συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Αν θεωρήσουμε όλα τα σημεία για τα οποία ισχύει

$$t - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{v} = \text{σταθ} \quad (3.20)$$

δηλαδή όλα τα σημεία για τα οποία το όρισμα της \mathcal{U}_1 έχει μία συγκεκριμένη τιμή, τότε αυτά σχηματίζουν ένα επίπεδο το οποίο με την πάροδο του χρόνου "μετακινείται" προς την κατεύθυνση του \hat{s} με ταχύτητα v .

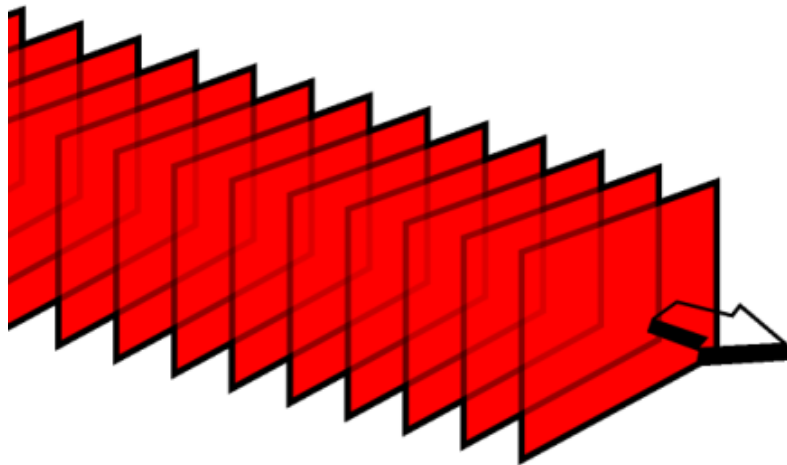
Ομοίως, αν θεωρήσουμε όλα τα σημεία για τα οποία ισχύει

$$t + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{v} = \text{σταθ} \quad (3.21)$$

δηλαδή που έχουν σταθερό όρισμα για τη συνάρτηση \mathcal{U}_2 , τότε αυτά σχηματίζουν ένα επίπεδο το οποίο με την πάροδο του χρόνου μετακινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν του \hat{s} με ταχύτητα v .

Λόγω των παραπάνω η (γενική) λύση αυτή ονομάζεται, ως γνωστόν, *επίπεδο κύμα*. Τα εν λόγω επίπεδα ονομάζονται *μέτωπα* του κύματος (βλ. Σχήμα 3.1).

Επομένως, το v είναι η λεγόμενη *ταχύτητα διάδοσης* του κύματος, ενώ το \hat{s} αποτελεί τη *διεύθυνση διάδοσης* του κύματος.



Σχήμα 3.1: Επίπεδο κύμα (Πηγή: [6])

Σφαιρικά Κύματα

Η συνάρτηση

$$\mathcal{U} = \frac{\mathcal{U}_1(t - \frac{r}{v})}{r} + \frac{\mathcal{U}_2(t + \frac{r}{v})}{r} \quad (3.22)$$

(όπου πάλι $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ αυθαίρετες συναρτήσεις μιας μεταβλητής) είναι επίσης λύση της κυματικής εξίσωσης και παριστάνει ένα *σφαιρικό κύμα*, αφού τα σημεία για τα οποία ισχύει

$$t - \frac{r}{v} = \text{σταθ} \quad (\text{ή } t + \frac{r}{v} = \text{σταθ}) \quad (3.23)$$

δηλαδή όλα τα σημεία για τα οποία το όρισμα της \mathcal{U}_1 (ή της \mathcal{U}_2) έχει συγκεκριμένη τιμή, σχηματίζουν μία σφαίρα της οποίας η ακτίνα μεγαλώνει (ή μικραίνει) με ταχύτητα v .

Άλλες λύσεις

Υπάρχουν φυσικά κι άλλες λύσεις της κυματικής εξίσωσης. Ωστόσο, η αναφορά σε αυτές ξεφεύγει από το σκοπό αυτής της εργασίας. Κρίθηκε σκόπιμο να γίνει αναφορά ενδεικτικά μόνο στις προηγούμενες δύο οικογένειες λύσεων καθώς θα επικεντρωθούμε (όπως θα φανεί στην επόμενη ενότητα) σε αυτήν των επιπέδων κυμάτων.

3.1.3 Αρμονικά επίπεδα κύματα

Η περίπτωση που είναι η πιο "κλασική" και που παρουσιάζει ίσως και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η περίπτωση επιπέδων κυμάτων (τύπος 3.19) των οποίων οι συναρτήσεις U_1, U_2 είναι αρμονικές με κυκλική συχνότητα ω και αρχική φάση ϕ , δηλαδή

$$U_1(t), U_2(t) \propto \cos(\omega t + \phi) \quad (3.24)$$

Έτσι, έχουμε:

$$U(\vec{r}, t) = A_1 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) + A_2 \cos(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \quad (3.25)$$

Το διάνυσμα $\vec{k} = k \cdot \hat{s} = \frac{\omega}{v} \hat{s}$ ονομάζεται *κυματόδιάνυσμα* (ή *κυματοδιάνυσμα*) (*wavevector*). Η διεύθυνσή του ταυτίζεται με τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Αν θεωρήσουμε δεδομένο \vec{r} τότε η U είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου t με κυκλική συχνότητα $\omega = kv$.

Η διεύθυνση \hat{s} του κύματος είναι αυθαίρετη, όπως και τα πλάτη A_1, A_2 (οποιοδήποτε μοναδιαίο διάνυσμα \hat{s} ικανοποιεί την κυματική εξίσωση) συνεπώς με αντικατάσταση $\hat{s} = -\hat{s}$ στον πρώτο προσθετέο της σχέσης 3.25 προκύπτει ο δεύτερος προσθετέος της. Για το λόγο αυτό και για να διευκολύνουμε την ανάλυσή μας, θα θεωρήσουμε σαν γενική λύση αρμονικού επιπέδου κύματος τη μορφή

$$U = A \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi) \quad (3.26)$$

που ουσιαστικά αποτελείται από τον πρώτο μόνο όρο της σχέσης 3.25 αλλά είναι ισοδύναμη με αυτήν αν θεωρήσουμε μία επαλληλία τέτοιων λύσεων.

Χρησιμοποιώντας φασιθέτες (βλ. ενότητα 2.4), η διαταραχή αυτή γράφεται και ως:

$$U(\vec{r}, t) = \Re\{U(\vec{r}) \exp(i\omega t)\} \quad (3.27)$$

όπου

$$U(\vec{r}) = A \exp(i\phi) \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.28)$$

ο φασιθέτης του αρμονικού (ως προς t) μεγέθους U .

Συμβολίζοντας $U_0 = A e^{i\phi}$ έχουμε:

$$U(\vec{r}) = U_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.29)$$

3.2 Επίπεδα αρμονικά Η/Μ κύματα

Στις προηγούμενες ενότητες είδαμε πώς από τις εξισώσεις του Maxwell, στην περίπτωση που έχουμε ένα ομοιογενές, γραμμικό ισοτροπικό και χωρίς διασπορά μέσο, οδηγούμαστε στην κυματική εξίσωση, μία βασική-τυπική λύση της οποίας (της βαθμωτής της μορφής) είναι το αρμονικό επίπεδο κύμα.

Επικεντρωνόμαστε τώρα στη λύση της διανυσματικής κυματικής εξίσωσης για την περίπτωση των πεδριακών μεγεθών. Ακολουθούμε όμως μια αντίστροφη προσέγγιση προσπαθώντας να διευρύνουμε το σύνολο των υλικών τα οποία εξετάζουμε.

Ξεκινούμε από την αντίστοιχη διανυσματική σχέση της 3.29 σαν υποτιθέμενη λύση για τα πεδία \vec{E} και \vec{H} , δηλαδή:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}(\vec{r})\exp(i\omega t)\} \quad (3.30)$$

όπου

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.31)$$

και

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{H}(\vec{r})\exp(i\omega t)\} \quad (3.32)$$

όπου

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.33)$$

Αντικαθιστούμε στις εξισώσεις του Maxwell (3.6 - 3.9), υποθέτοντας ότι το \vec{k} μπορεί να είναι εν γένει μιγαδικό. Επίσης, επιτρέπουμε, στο ισοτροπικό μέσο να έχει απώλειες καθώς και χρονική διασπορά, δηλαδή τα ϵ και μ να είναι εν γένει μιγαδικά και να εξαρτώνται από τη συχνότητα.

Έτσι, έχουμε:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (3.34)$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \epsilon \vec{E}_0 \quad (3.35)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (3.36)$$

και

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (3.37)$$

Αντικαθιστώντας την 3.34 στην 3.35 έχουμε:

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E}_0 \quad (3.38)$$

ή

$$(\vec{k} \cdot \vec{k} - \omega^2 \mu \epsilon) \vec{E}_0 = 0 \quad (3.39)$$

Οπότε πρέπει:

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \mu \epsilon} \quad (3.40)$$

Στην περίπτωση που έχουμε κενό η εξίσωση 3.40 γίνεται

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \quad (3.41)$$

Ορίζουμε λοιπόν το μέγεθος

$$k_0 = \omega(\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} \quad (3.42)$$

που είναι σταθερός αριθμός, ως τον κυματάριθμο του κενού. Θα ισχύει προφανώς:

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (3.43)$$

όπου

$$c = \sqrt{\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό, όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 2.3.1 (σχέση 2.25).

Το λ_0 , με τη σειρά του, είναι το μήκος κύματος στο κενό). Το μέγεθος αυτό εξαρτάται από την κυκλική συχνότητα ω .

Συνεπώς η σχέση 3.40 μπορεί να γραφεί και ως:

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = k_0^2 n^2 \quad (3.44)$$

όπου το μέγεθος

$$n = (\mu_r \epsilon_r)^{1/2} \quad (3.45)$$

είναι χαρακτηριστικό του μέσου και αποτελεί το λεγόμενο δείκτη διάθλασης του (για την ονομασία του βλ. ενότητα 3.4).

Στη περίπτωση που έχουμε απλό ισοτροπικό μέσο (χωρίς διασπορά, απώλειες κλπ) τότε εφόσον η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι $v = (c/n)$ (βλ. σχέση 3.16 και ενότητα 3.1.2) και λόγω της 2.25 θα ισχύει

$$n = \frac{c}{v} \quad (3.46)$$

που σημαίνει ότι ο n εκφράζει το πόσο πιο αργά διαδίδεται το Η/Μ κύμα μέσα στο μέσο που έχουμε σε σχέση με τη διάδοσή του στο κενό (πόσο "πυκνό" είναι το μέσο).

Ορίζουμε, τέλος, χάριν ευκολίας (για τα επόμενα κεφάλαια) το σχετικό κυματόνυσμα \vec{k}_r :

$$\vec{k}_r = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} := \vec{k}/k_0 \quad (3.47)$$

Έτσι, είναι φανερό ότι πλέον η εξίσωση 3.40 μπορεί να γραφεί ως:

$$\vec{k}_r \cdot \vec{k}_r = n^2 \quad (3.48)$$

ή

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = n^2 \quad (3.49)$$

3.2.1 Μιγαδικά κυματόνυματα - Αποσβεννόμενα Κύματα

Είπαμε ότι με τη διεύρυνση που κάναμε το κυματόνυματα μπορεί να είναι και μιγαδικό. Τι σημαίνει όμως αυτό? Ποια είναι η φυσική του σημασία?

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι το \vec{k} είναι μιγαδικό και χωρίζουμε το πραγματικό από το φανταστικό του μέρος έχουμε:

$$\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I \quad (3.50)$$

και άρα, για το ηλεκτρικό πεδίο, π.χ., θα έχουμε:

$$\vec{E} = (\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(-i(\vec{k}_R + i\vec{k}_I) \cdot \vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(\vec{k}_I \cdot \vec{r}) \exp(-i\vec{k}_R \cdot \vec{r}) \quad (3.51)$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι για κάθε μία από τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου (για παράδειγμα τη x συνιστώσα) θα έχουμε ένα κύμα της μορφής:

$$\vec{\mathcal{E}}_x = A_x e^{i\vec{k}_I \cdot \vec{r}} \cos(\omega t - \vec{k}_R \cdot \vec{r} + \phi_x) \quad (3.52)$$

Συνήθως το \vec{k}_I είναι τέτοιο ώστε όταν απομακρυνόμαστε από την πηγή του κύματος το εσωτερικό γινόμενο $\vec{k}_I \cdot \vec{r}$ να μικραίνει. Αυτό συνεπάγεται ότι το πλάτος του κύματος φθίνει, καθώς αυτό διαδίδεται. Στην περίπτωση αυτή έχουμε λοιπόν ένα αποσβεννύμενο επίπεδο κύμα (*evanescent plane wave*).

3.3 Πόλωση του επιπέδου κύματος

Όπως είπαμε και στην προηγούμενη ενότητα, ένα επίπεδο αρμονικό κύμα είναι μία από τις πολλές λύσεις (μία οικογένεια λύσεων, για να είμαστε πιο ακριβείς) της κυματικής εξίσωσης 3.17 (η οποία ικανοποιεί τις συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου μέσα σε ένα ιστροπικό μέσο). Εξετάζουμε τώρα ποια επιπλέον σχέση μεταξύ αυτών των συνιστωσών επιβάλλουν οι εξισώσεις του Maxwell. Έχουμε:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (3.53)$$

και

$$\vec{\mathcal{E}} = \Re\{\vec{E} \exp(i\omega t)\} \quad (3.54)$$

(και αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο).

Από τις εξισώσεις 3.34 και 3.36 έχουμε:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0$$

και

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται εύκολα ότι τα τρία διανύσματα $\vec{k}, \vec{E}_0, \vec{H}_0$, αν είναι πραγματικά, είναι ανά δύο κάθετα μεταξύ τους, ή, όπως θα λέγαμε, σχηματίζουν ένα τρισσορθογώνιο σύστημα διανυσμάτων. Πιο συγκεκριμένα, τα \vec{E}_0 και \vec{H}_0 είναι και τα δύο κάθετα στο κυματόνυσμα \vec{k} , δηλαδή στη διεύθυνση διάδοσης των μετώπων του κύματος. Γι αυτό, πρόκειται για ένα εγκάρσιο κύμα. Επιπλέον, τα \vec{E}_0 και \vec{H}_0 είναι κάθετα μεταξύ τους και τα μέτρα τους συνδέονται σταθερά με τη σχέση:

$$H_0 = \frac{k}{\omega \mu} E_0 \quad (3.55)$$

ή

$$H_0 = \frac{E_0}{Z} \quad (3.56)$$

όπου το μέγεθος

$$Z = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \quad (3.57)$$

είναι η λεγόμενη *κυματική αντίσταση του μέσου* και η οποία για το κενό συμβολίζεται ως Z_0 και είναι περίπου ίση με 377ohms .

Βέβαια στις σχέσεις 3.34 και 3.36 τα \vec{k}, \vec{E}_0 και \vec{H}_0 είναι εν γένει μιγαδικά! Άρα, για να ακριβολογήσουμε, αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα αρμονικό επίπεδο κύμα μέσα σε ένα ομοιογενές ιστροπικό υλικό, το διάνυσμα \vec{E}_0 μπορεί να έχει οποιαδήποτε (μιγαδική) τιμή αρκεί να ικανοποιεί τη σχέση 3.36

$$\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (3.58)$$

ενώ το διάνυσμα \vec{H}_0 θα δίνεται από τη σχέση 3.34

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (3.59)$$

Ας δούμε τι σημαίνουν τα παραπάνω για την περίπτωση που το κυματάνασμα \vec{k} είναι πραγματικό. Εστιάζουμε στο διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}_0 . Επίσης, θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το \vec{k} είναι στη διεύθυνση του άξονα z . Εύκολα, προκύπτει ότι

$$E_{0z} = 0$$

που είναι η μοναδική απαίτηση, δηλαδή το διάνυσμα του \vec{E} θα βρίσκεται στο επίπεδο $x - y$. Οι συνιστώσες E_{0x}, E_{0y} μπορούν να έχουν οποιαδήποτε μιγαδική τιμή. Γράφοντάς τες σε πολική μορφή έχουμε:

$$\begin{aligned} E_{0x} &= A_x e^{j\delta_x} \\ E_{0y} &= A_y e^{j\delta_y} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= A_x \cos(kz - \omega t + \delta_x) \\ \mathcal{E}_y &= A_y \cos(kz - \omega t + \delta_y) \end{aligned} \quad (3.61)$$

Λόγω της (εν γένει) διαφοράς φάσης των δύο συνιστωσών το συνιστάμενο διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} δε θα εκτελεί (με την πάροδο του χρόνου) απαραίτητα μια γραμμική ταλάντωση παραμένοντας στην ίδια διεύθυνση.

Για να συμπεράνουμε την τροχιά που θα διαγράφει το πέρας του διανύσματος \vec{E} συνδυάζουμε τις εξισώσεις 3.61 απαλοφώντας τον όρο $kz - \omega t$.

Έχουμε τελικά [7] ότι:

$$\left(\frac{\mathcal{E}_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{\cos \delta}{A_x A_y} \mathcal{E}_x \mathcal{E}_y = \sin^2 \delta, \quad (3.62)$$

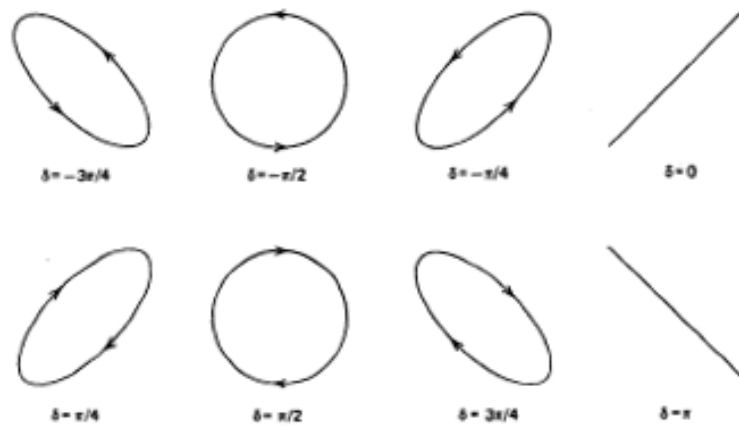
όπου

$$\delta = \delta_x - \delta_y. \quad (3.63)$$

(υποθέτουμε ότι $-\pi < \delta \leq \pi$)

Η εξίσωση 3.62 είναι εξίσωση έλλειψης. Άρα το πέρας του διανύσματος \vec{E} ταλαντώνεται διαγράφοντας στη γενική περίπτωση μια έλλειψη. Ανάλογα με τις τιμές του δ και των A_x, A_y η έλλειψη αυτή μπορεί να διαγράφεται αριστερόστροφα ή δεξιόστροφα, να έχει μεγάλη ή μικρή ελλειπτικότητα και για συγκεκριμένες τιμές του δ να εκφυλίζεται σε κύκλο ή ακόμα και σε ευθύγραμμο τμήμα. Ο τρόπος αυτός ταλάντωσης του ηλεκτρικού πεδίου ονομάζεται *πόλωση* του επιπέδου κύματος. Στο σχήμα 3.2 φαίνεται η πόλωση για διάφορες τιμές του δ στην ειδική περίπτωση που $A_x = A_y$.

Βλέπουμε ότι για $\delta = 0$ και $\delta = \pi$ η τροχιά που διαγράφεται είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το ίδιο συμβαίνει επίσης αν κάποιο εκ των A_x, A_y είναι 0. Έχουμε τότε *γραμμική πόλωση*. Στο

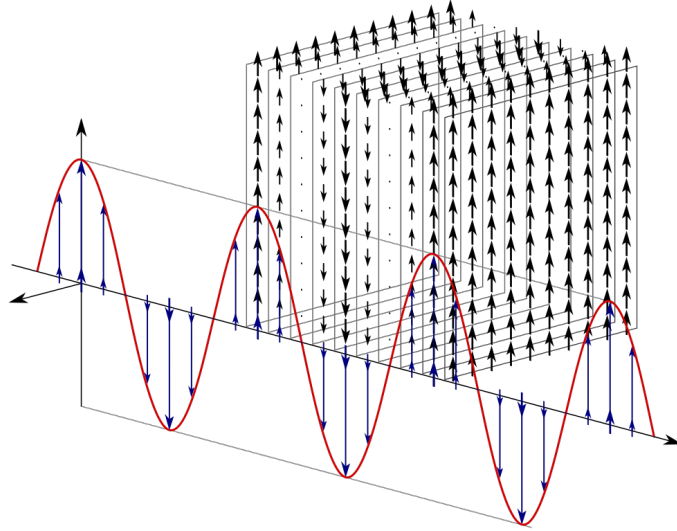


Σχήμα 3.2: Χαρακτηριστικές ελλείψεις για διάφορες πολώσεις όταν $A_x = A_y$ (Πηγή: [7])

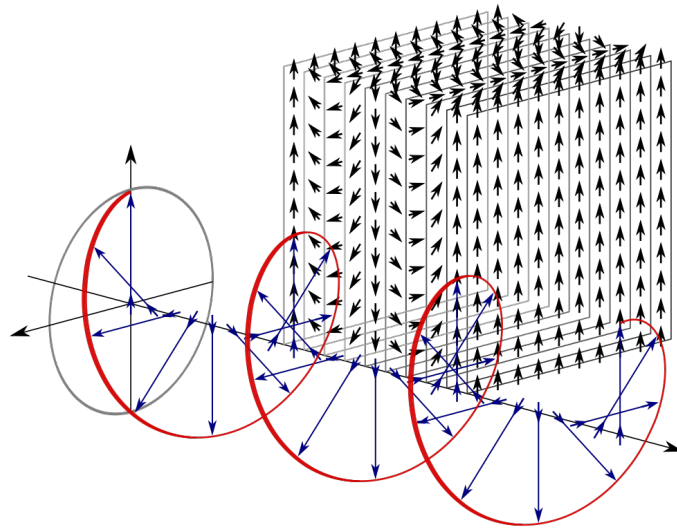
σχήμα 3.3 φαίνεται ένα επίπεδο αρμονικό κύμα γραμμικά πολωμένο για την περίπτωση που $A_x = 0$.

Για $\delta = -\pi/2$ και $\delta = \pi/2$ και εφόσον $A_x = A_y$ έχουμε κυκλική πόλωση (Σχήμα 3.4).

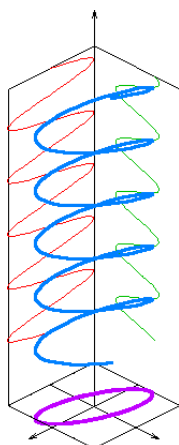
Σε κάθε άλλη περίπτωση έχουμε ελλειπτική πόλωση (Σχήμα 3.5).



Σχήμα 3.3: Γραμμική πόλωση ($A_x = 0$ και $\delta_y = 0$) (Πηγή: [6])



Σχήμα 3.4: Κυκλική πόλωση ($A_x = A_y$ και $\delta_y = 0$, $\delta_x = -\pi/2$) (Πηγή: [6])



Σχήμα 3.5: Ελλειπτική πόλωση (Πηγή: [8])

3.4 Πρόσπτωση σε επίπεδη επιφάνεια διηλεκτρικού: Ανάκλαση-Διάθλαση

Έστω ότι στον ημιάπειρο χώρο $x < 0$ έχουμε ιστροπικό ομοιογενές διηλεκτρικό μέσο (μέσο 1) με διηλεκτρική επιτρεπτότητα ϵ_1 και μαγνητική διαπερατότητα μ_1 ενώ στον ημιάπειρο χώρο $x > 0$ έχουμε πάλι ιστροπικό διηλεκτρικό ομοιογενές μέσο (μέσο 2) με ϵ_2 και μ_2 .

Θεωρούμε τώρα ότι έχουμε ένα επίπεδο αρμονικό κύμα της μορφής 3.53

$$\vec{E}_{inc} = \vec{E}_{inc,0} \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) \quad (3.64)$$

$$\vec{H}_{inc} = \vec{H}_{inc,0} \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) \quad (3.65)$$

το οποίο "προέρχεται" από το $-\infty$ (έχοντας δημιουργηθεί π.χ. από μακρινή πηγή επίπεδης ημιτονοειδούς επιφανειακής κατανομής ηλεκτρικού ρεύματος), διαδίδεται εντός του μέσου 1 και προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$. Προφανώς, σύμφωνα με την ενότητα 3.2, θα ισχύουν:

$$\vec{k}_{inc} \cdot \vec{k}_{inc} = k_0^2 n_1^2 \quad (3.66)$$

$$\vec{k}_{inc} \cdot \vec{E}_{inc,0} = 0 \quad (3.67)$$

και

$$\vec{H}_{inc,0} = \frac{1}{\omega \mu_1} \vec{k}_{inc} \times \vec{E}_{inc,0} \quad (3.68)$$

Θεωρούμε ότι αν το κυματοδιάνυσμα του προσπίπτοντος κύματος είναι πραγματικό, τότε αυτό έχει φορά προς το μέσο 2 και σχηματίζει γωνία θ_{inc} με την κάθετη στο επίπεδο της διαχωριστικής επιφάνειας. Αυτή είναι συνεπώς η λεγόμενη γωνία πρόσπτωσης.

Θα αποδείξουμε ότι οι οριακές συνθήκες στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$ ικανοποιούνται αν θεωρήσουμε ότι το προσπίπτον αυτό επίπεδο κύμα ανακλάται κατά ένα μέρος "πίσω" στο μέσο 1 ως επίπεδο κύμα (ανακλώμενο κύμα) και κατά το υπόλοιπο μεταδίδεται, ή όπως θα λέγαμε, διαθλάται ως επίπεδο κύμα στο μέσο 2 (διαθλώμενο κύμα) [22] (βλ. σχήμα 3.6).

Έχουμε δηλαδή τα εξής επίπεδα κύματα, ίδιας συχνότητας, ω :

προσπίπτον (αίτιο)

$$\vec{E}_{inc} = \vec{E}_{inc,0} \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) \quad (3.69)$$

ανακλώμενο (αποτέλεσμα)

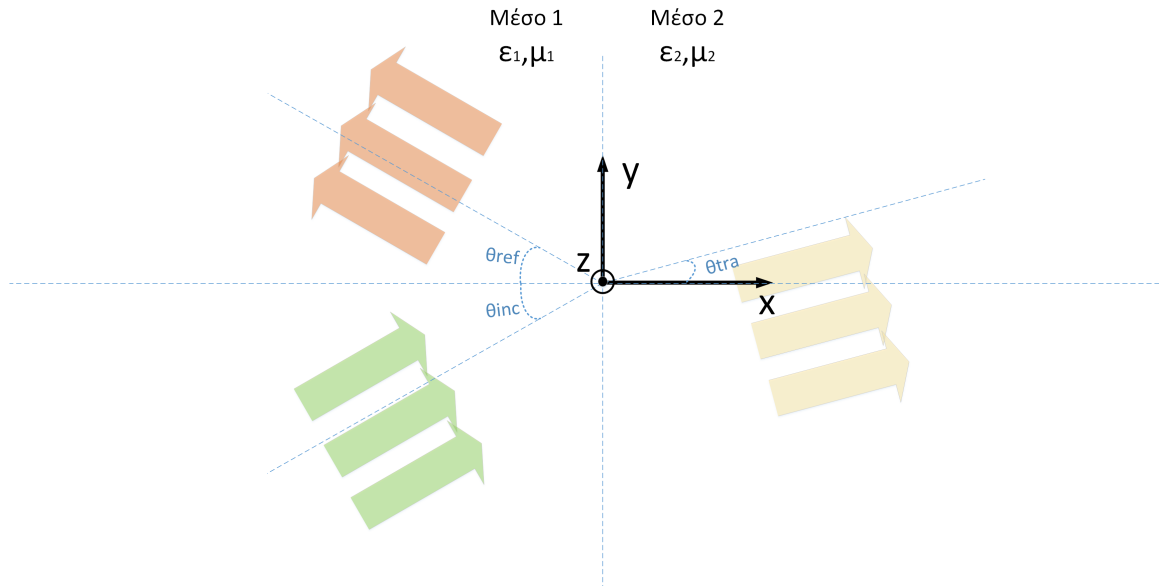
$$\vec{E}_{ref} = \vec{E}_{ref,0} \exp(-i\vec{k}_{ref} \cdot \vec{r}) \quad (3.70)$$

διαθλώμενο (αποτέλεσμα)

$$\vec{E}_{tra} = \vec{E}_{tra,0} \exp(-i\vec{k}_{tra} \cdot \vec{r}) \quad (3.71)$$

με αντίστοιχες σχέσεις για τα \vec{H}_{inc} , \vec{H}_{ref} και \vec{H}_{tra} .

Το επίπεδο που σχηματίζει το κυματοδιάνυσμα του προσπίπτοντος διανύσματος και η κάθετη στο επίπεδο της διαχωριστικής επιφάνειας ονομάζεται, ως γνωστόν, *επίπεδο πρόσπτωσης*.



Σχήμα 3.6: Πρόσπτωση σε επίπεδη επιφάνεια μεταξύ δύο ιστροπικών μέσων

3.4.1 Ταίριασμα των φάσεων

Εφαρμόζουμε τις οριακές συνθήκες 2.14 και 2.15 στη διαχωριστική επιφάνεια $x = 0$, οι οποίες θα ισχύουν αφού τα μέσα 1 και 2 θεωρούμε πως είναι διηλεκτρικά (και άρα η επιφανειακή πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος \vec{K} θα είναι αναγκαστικά μηδενική).

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο μέσο 1 θα είναι:

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{E}}_{inc} + \vec{\mathcal{E}}_{ref} \quad (3.72)$$

ενώ στο μέσο 2 θα είναι:

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{E}}_{tra} \quad (3.73)$$

Αντίστοιχα και για το μαγνητικό πεδίο.

Θέλουμε λοιπόν να ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{1y}|_{x=0} &= \mathcal{E}_{2y}|_{x=0} \\ \mathcal{E}_{1z}|_{x=0} &= \mathcal{E}_{2z}|_{x=0} \end{aligned} \quad (3.74)$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{1y}|_{x=0} &= \mathcal{H}_{2y}|_{x=0} \\ \mathcal{H}_{1z}|_{x=0} &= \mathcal{H}_{2z}|_{x=0} \end{aligned} \quad (3.75)$$

για κάθε y, z και t .

Για να ισχύει αυτό, δεδομένης της μορφής των $\vec{\mathcal{E}}_1$, $\vec{\mathcal{E}}_2, \vec{\mathcal{H}}_1$ και $\vec{\mathcal{H}}_2$ πρέπει τουλάχιστον η εξάρτηση των $\vec{\mathcal{E}}_{ref}$, $\vec{\mathcal{E}}_{tra}$, $\vec{\mathcal{H}}_{ref}$ και $\vec{\mathcal{H}}_{tra}$ από τα y, z και t να είναι ίδιας μορφής με αυτήν του $\vec{\mathcal{E}}_{inc}$. Αυτό "μεταφράζεται" ως

- ίδια (κοινή) συχνότητα ω
- ίδια y -συνιστώσα κυματανύσματος: $k_{inc,y} = k_{ref,y} = k_{tra,y}$

- ίδια z-συνιστώσα κυματανύσματος: $k_{inc,z} = k_{ref,z} = k_{tra,z}$

για τα τρία επιμέρους επίπεδα κύματα.

Οι παραπάνω συνθήκες είναι γνωστές ως *ταίριασμα των φάσεων* (phase matching). Η πρώτη συνθήκη (κοινή συχνότητα ω) ικανοποιείται ούτως ή άλλως από τις μορφές των πεδίων που έχουμε υποθέσει. Οι υπόλοιπες συνθήκες μας λένε ουσιαστικά ότι οι προβολές των επιμέρους κυματανυσμάτων πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια (οι εφαπτομενικές συνιστώσες τους δηλαδή) πρέπει να ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει, καταρχήν, ότι τα $k_{inc}, k_{ref}, k_{tra}$ (αν είναι και τα τρία πραγματικά) ανήκουν στο ίδιο επίπεδο, το επίπεδο πρόσπτωσης.

Στο σημείο αυτό κάνουμε την παραδοχή ότι το επίπεδο πρόσπτωσης είναι το επίπεδο $x-y$ (ή, για να είμαστε πιο ακριβείς, ότι το \vec{k}_{inc} (και άρα και τα k_{ref} και k_{tra}) έχουν μόνο x και y συνιστώσα). Αυτό γίνεται χωρίς καμία βλάβη της γενικότητας αφού η διάταξη είναι συμμετρική εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα των x . Από αυτό συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$k_{inc,z} = 0 \quad (3.76)$$

Συνεπώς θα έχουμε:

$$\gamma_{inc} = \gamma_{ref} = \gamma_{tra} = 0 \quad (3.77)$$

και

$$\beta_{inc} = \beta_{ref} = \beta_{tra} := \beta \quad (3.78)$$

Άρα, τα σχετικά κυματανύσματα των επιμέρους κυμάτων θα είναι:

$$\vec{k}_{r,inc} = \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k}_{r,ref} = \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k}_{r,tra} = \begin{bmatrix} \alpha_{tra} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Υπενθυμίζεται ότι σχετικό κυματάνυσμα το ορίσαμε ως $\vec{k}_r = \vec{k}/k_0$ (σχέση 3.47).

Προσπίπτον κύμα

Λόγω της 3.48 θα έχουμε ότι

$$\alpha_{inc}^2 + \beta^2 = n_1^2 \quad (3.80)$$

Αν τώρα \vec{k}_{inc} πραγματικό τότε θα έχουμε ότι

$$\alpha_{inc} = n_1 \cos \theta_{inc} \quad (3.81)$$

και

$$\beta = n_1 \sin \theta_{inc} \quad (3.82)$$

Ανακλώμενο κύμα

$$\alpha_{ref}^2 + \beta^2 = n_1^2 \quad (3.83)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις 3.80 και 3.83 θα έχουμε ότι:

$$\alpha_{ref}^2 = \alpha_{inc}^2 \quad (3.84)$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$\alpha_{ref} = -\alpha_{inc} \quad (3.85)$$

(Αν ήταν $\alpha_{ref} = \alpha_{inc}$ τότε θα είχαμε ουσιαστικά $\vec{k}_{ref} = \vec{k}_{inc}$)

Άρα, αν \vec{k}_{inc} πραγματικό τότε

$$\alpha_{ref} = -n_1 \cos \theta_{inc} \quad (3.86)$$

και

$$\beta_{ref} = n_1 \sin \theta_{inc} \quad (3.87)$$

Άρα, σε αυτήν την περίπτωση, το \vec{k}_{ref} θα είναι και αυτό πραγματικό.

Μάλιστα, αν ορίσουμε τη γωνία ανάκλασης θ_{ref} όπως φαίνεται στο σχήμα 3.6 έχουμε:

$$\alpha_{ref} = -n_1 \cos \theta_{ref} \quad (3.88)$$

απ όπου, βάσει και της 3.86, έχουμε:

$$\boxed{\theta_{ref} = \theta_{inc}} \quad (\text{νόμος της ανάκλασης}) \quad (3.89)$$

Διαθλώμενο κύμα

Θα έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\begin{aligned} \alpha_{tra}^2 + \beta^2 &= n_2^2 \\ &\text{ή} \\ \alpha_{tra}^2 &= n_2^2 - \beta^2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

Οπότε, αν $n_2^2 - \beta^2 > 0$ τότε

$$\alpha_{tra} = \sqrt{n_2^2 - \beta^2} \quad (3.91)$$

Προφανώς προκύπτουν κανονικά δύο τιμές για το α_{tra} , αντίθετες. Η μία αντιστοιχεί σε ένα διαθλώμενο κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα θετικά x και η άλλη σε ένα περαιτέρω ανακλώμενο κύμα το οποίο διαδίδεται προς τα αρνητικά x . Θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχουν και τα δύο αυτά κύματα. Όμως δεδομένου ότι το μέσο 2 θεωρούμε πως εκτείνεται απεριόριστα προς τα θετικά x θα θεωρήσουμε ότι έχουμε μόνο διαθλώμενο κύμα. Εξάλλου, αν θεωρήσουμε ότι έχουμε και ανακλώμενο κύμα, το πρόβλημα απαιτεί και άλλες οριακές συνθήκες προκειμένου να προσδιοριστεί πλήρως το Η/Μ πεδίο στο χώρο.

Οπότε, αν \vec{k}_{inc} πραγματικό και αν $n_2^2 - \beta^2 > 0$ τότε και το \vec{k}_{tra} είναι πραγματικό και τότε, ορίζοντας τη γωνία διάθλασης θ_{tra} όπως στο σχήμα 3.6, θα έχουμε:

$$\beta_{tra} = n_2 \sin \theta_{tra} \quad (3.92)$$

απ όπου, λόγω της 3.82, συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{n_2 \sin \theta_{tra} = n_1 \sin \theta_{inc}} \quad (\text{νόμος του Snell}) \quad (3.93)$$

Στην περίπτωση που

$$n_2^2 - \beta^2 < 0 \quad (3.94)$$

τότε έχουμε ολική ανάκλαση και αυτό θα αναλυθεί στην ενότητα 3.4.4 ενώ η περίπτωση ο παραπάνω όρος να προκύψει μιγαδικός (που έγκειται π.χ. σε τυχόν μιγαδικό n_2) ξεφεύγει από το σκοπό του παρόντος κεφαλαίου.

3.4.2 Κύματα s και p

Οι οριακές συνθήκες δεν επιβάλλουν μόνο το ταίριασμα των φάσεων αλλά και κάποια σχέση μεταξύ των $\vec{E}_{ref,0}$, $\vec{E}_{tra,0}$, $\vec{H}_{ref,0}$ και $\vec{H}_{tra,0}$ με το $\vec{E}_{inc,0}$ η οποία και προσδιορίζει, σε συνδυασμό και με τα κυματοδιανύσματα που υπολογίσαμε παραπάνω, το διαθλώμενο και το ανακλώμενο κύμα σε σχέση με το προσπίπτον.

Αναλύουμε τα διανύσματα $\vec{E}_{inc,0}$, $\vec{E}_{ref,0}$, $\vec{E}_{tra,0}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες: Αυτή που ανήκει στο επίπεδο πρόσπτωσης, την οποία ονομάζουμε παράλληλη ή p ή TM συνιστώσα (θα τη συμβολίζουμε με το δείκτη p), και αυτή που είναι κάθετη στο επίπεδο πρόσπτωσης, δηλαδή την κάθετη ή s ή TE συνιστώσα (θα τη συμβολίζουμε με το δείκτη s). Ο λόγος που το κάνουμε αυτό θα φανεί στη συνέχεια. Οι συνιστώσες αυτές θα είναι προφανώς όχι μόνο κάθετες μεταξύ τους αλλά και κάθετες στο κυματόνισμα \vec{k} (υπενθυμίζουμε ότι $\vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$ (σχέση 3.58, εφόσον έχουμε υποθέσει επίπεδα κύματα)). Κάθεμία από τις συνιστώσες αποτελεί ουσιαστικά μία ξεχωριστή περίπτωση γραμμικής πόλωσης για το διάνυσμα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, στην περίπτωση που το κυματόνισμα είναι πραγματικό. Αντίστοιχα, λοιπόν, οι δύο αυτές περιπτώσεις ονομάζονται παράλληλη και κάθετη πόλωση. Με κατάλληλη υπέρθεση των δύο συνιστωσών (με εν γένει μιγαδικούς συντελεστές) προκύπτει μία οποιαδήποτε περίπτωση πόλωσης (π.χ. ελλειπτική).

Επιλέγουμε σα μοναδιαίο διάνυσμα για την s-συνιστώσα το διάνυσμα

$$\hat{u}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Είναι πάντα κάθετο στο επίπεδο πρόσπτωσης και στο \vec{k} αφού έχουμε υποθέσει ότι το \vec{k}_{inc} δεν έχει z-συνιστώσα (και όπως δείξαμε παραπάνω το ίδιο ισχύει και για τα \vec{k}_{ref} και \vec{k}_{tra}).

Βάσει αυτού μπορούμε να ορίσουμε κάλλιστα το μοναδιαίο διάνυσμα για τη p-συνιστώσα ως το εξωτερικό γινόμενο των \hat{u}_s και \vec{k}_r . Με αυτόν τον τρόπο θα έχουμε τόσο $\hat{u}_p \cdot \hat{u}_s = 0$ όσο και $\hat{u}_p \cdot \vec{k} = 0$. Κανονικοποιούμε διαιρώντας με $(\vec{k}_r \cdot \vec{k}_r)^{\frac{1}{2}}$ προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι είναι μοναδιαίο, δηλαδή ότι $\hat{u}_p \cdot \hat{u}_p = 1$.

Να σημειώσουμε εδώ ότι χρησιμοποιούμε την εξίσωση $\vec{s} \cdot \vec{s} = 1$ αντί της $|\vec{s}| = 1$ προκειμένου να δείξουμε ότι ένα διάνυσμα είναι μοναδιαίο διότι μπορεί το \vec{s} , όπως είπαμε να είναι μιγαδικό.

$$\hat{u}_p = (\vec{k}_r \cdot \vec{k}_r)^{-\frac{1}{2}} \hat{u}_s \times \vec{k}_r = \frac{1}{n} \hat{u}_s \times \vec{k}_r = \begin{bmatrix} -\beta/n \\ \alpha/n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

όπου $\alpha = k_{rx}$ και $\beta = k_{ry}$.

Έτσι, έχουμε:

$$\vec{E}_{m,0} = A_{m,s} \hat{u}_{m,s} + A_{m,p} \hat{u}_{m,p} \quad (3.97)$$

όπου

$$\hat{u}_{m,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

και

$$\hat{u}_{m,p} = \begin{bmatrix} -\beta/n_m \\ \alpha_m/n_m \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

όπου $m = inc, ref$ ή tra (και προφανώς $n_{inc} = n_{ref} = n_1$ και $n_{tra} = n_2$).
Αντίστοιχα, για την ένταση του μαγνητικού πεδίου θα έχουμε (βάσει της 3.34):

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{m,0} &= \frac{1}{\omega\mu_m} \vec{k}_m \times \vec{E}_{m,0} \\
&= \frac{1}{\omega\mu_m} \vec{k}_m \times (A_{m,s} \hat{u}_{m,s} + A_{m,p} \hat{u}_{m,p}) \\
&= \frac{1}{\omega\mu_m} [A_{m,s} (\vec{k}_m \times \hat{u}_{m,s}) + A_{m,p} (\vec{k}_m \times \hat{u}_{m,p})] \\
&= \frac{k_0}{\omega\mu_m} [A_{m,s} (\vec{k}_{r_m} \times \hat{u}_{m,s}) + A_{m,p} (\vec{k}_{r_m} \times \hat{u}_{m,p})] \\
&= \frac{1}{c\mu_m} \left[A_{m,s} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \alpha_m & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + A_{m,p} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \alpha_m & \beta & 0 \\ -\beta/n_m & \alpha_m/n_m & 0 \end{vmatrix} \right]
\end{aligned} \tag{3.100}$$

Έτσι:

$$\boxed{\vec{H}_{m,0} = [A_{m,s} \vec{v}_{m,s} + A_{m,p} \vec{v}_{m,p}]} \tag{3.101}$$

όπου

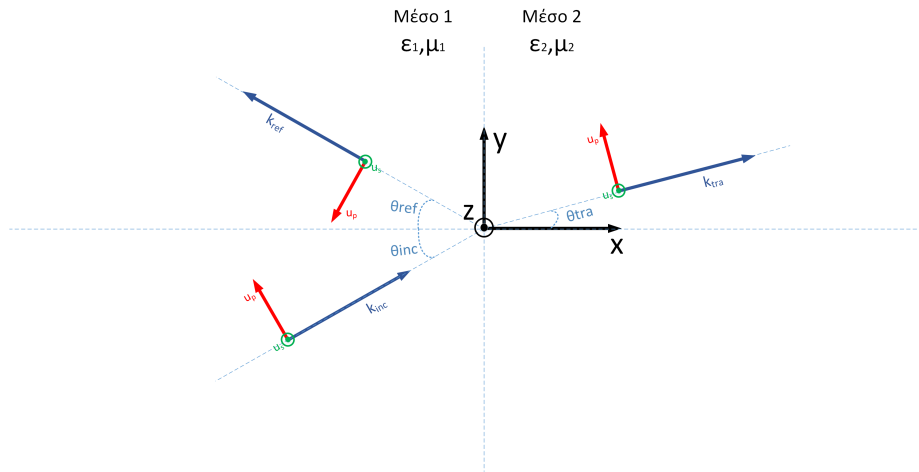
$$\boxed{\vec{v}_{m,s} = \frac{1}{c\mu_m} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha_m \\ 0 \end{bmatrix}} \tag{3.102}$$

και

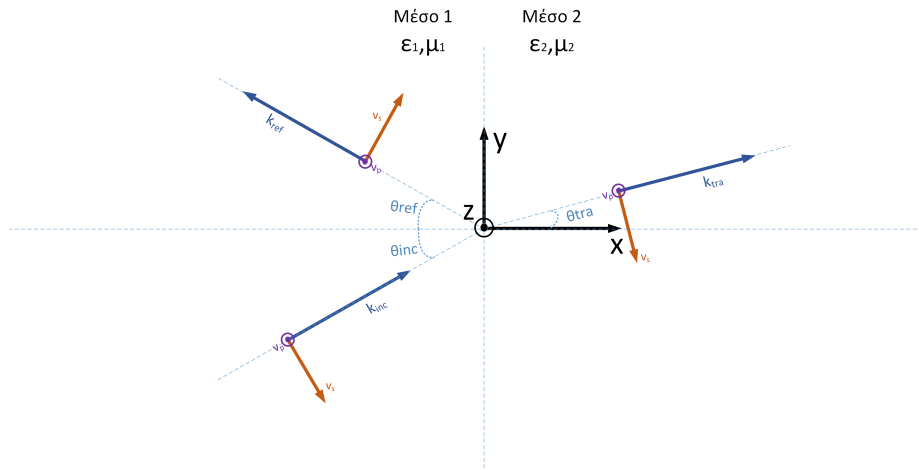
$$\boxed{\vec{v}_{m,p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{n_m}{c\mu_m} \end{bmatrix}} \tag{3.103}$$

(λόγω των 3.79, 3.95, 3.96)

Τα διανύσματα βάσης $\vec{u}_{m,s}$, $\vec{u}_{m,p}$, $\vec{v}_{m,s}$, $\vec{v}_{m,p}$ φαίνονται στα σχήματα 3.7 και 3.8.



Σχήμα 3.7: Διανύσματα βάσης s και p - Ένταση ηλεκτρικού πεδίου



Σχήμα 3.8: Διανύσματα βάσης s και p - Ένταση μαγνητικού πεδίου

Εφαρμόζουμε τώρα τις οριακές συνθήκες 3.74 και 3.75.

Έχουμε:

$$\vec{\mathcal{E}}_1 = \vec{\mathcal{E}}_{inc} + \vec{\mathcal{E}}_{ref} \quad (3.104)$$

$$\vec{\mathcal{E}}_2 = \vec{\mathcal{E}}_{tra} \quad (3.105)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_1 = \vec{\mathcal{H}}_{inc} + \vec{\mathcal{H}}_{ref} \quad (3.106)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_2 = \vec{\mathcal{H}}_{tra} \quad (3.107)$$

με

$$\vec{\mathcal{E}}_m(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}_m(\vec{r})exp(i\omega t)\} \quad (3.108)$$

$$\vec{\mathcal{H}}_m(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{H}_m(\vec{r})exp(i\omega t)\} \quad (3.109)$$

όπου

$$\vec{E}_m(\vec{r}) = \vec{E}_{m,0}exp(-i\vec{k}_m \cdot \vec{r}) \quad (3.110)$$

και

$$\vec{H}_m(\vec{r}) = \vec{H}_{m,0}exp(-i\vec{k}_m \cdot \vec{r}) \quad (3.111)$$

(όπου πάλι $m = inc, ref$ ή tra)

Αφού λοιπόν

$$\vec{k}_m = k_0 \begin{bmatrix} \alpha_m \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

θα έχουμε ότι

$$\vec{\mathcal{E}}_m \Big|_{x=0} = \Re\{\vec{E}_{m,0}exp(-ik_0\beta y)exp(i\omega t)\} \quad (3.113)$$

και

$$\vec{\mathcal{H}}_m \Big|_{x=0} = \Re\{\vec{H}_{m,0}exp(-ik_0\beta y)exp(i\omega t)\} \quad (3.114)$$

Έτσι, τελικά, οι απαιτήσεις 3.74 και 3.75

$$\mathcal{E}_{1y}|_{x=0} = \mathcal{E}_{2y}|_{x=0}$$

$$\mathcal{E}_{1z}|_{x=0} = \mathcal{E}_{2z}|_{x=0}$$

$$\mathcal{H}_{1y}|_{x=0} = \mathcal{H}_{2y}|_{x=0}$$

$$\mathcal{H}_{1z}|_{x=0} = \mathcal{H}_{2z}|_{x=0}$$

γίνονται

$$(A_{inc,p} - A_{ref,p}) \begin{bmatrix} \alpha_{inc}/n_1 \\ 0 \end{bmatrix} + (A_{inc,s} + A_{ref,s}) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_{tra,p} \begin{bmatrix} \alpha_{tra}/n_2 \\ 0 \end{bmatrix} + A_{tra,s} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

$$\frac{1}{c\mu_1} \left((A_{inc,p} + A_{ref,p}) \begin{bmatrix} 0 \\ n_1 \end{bmatrix} + (A_{inc,s} - A_{ref,s}) \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{c\mu_2} \left(A_{tra,p} \begin{bmatrix} 0 \\ n_2 \end{bmatrix} + A_{tra,s} \begin{bmatrix} -\alpha_{tra} \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (3.116)$$

ή

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_{inc}}{n_1} & -\frac{\alpha_{inc}}{n_1} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_{inc} & \alpha_{inc} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_1 & n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{inc,s} \\ A_{ref,s} \\ A_{inc,p} \\ A_{ref,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_{tra}}{n_2} \\ 1 & 0 \\ -\alpha_{tra} \frac{\mu_1}{\mu_2} & 0 \\ 0 & n_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{tra,s} \\ A_{tra,p} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Αναδιατάσσοντας τώρα την πρώτη με την τρίτη γραμμή του κάθε πίνακα έχουμε την ισοδύναμη μορφή:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{inc} & \alpha_{inc} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_{inc}}{n_1} & -\frac{\alpha_{inc}}{n_1} \\ 0 & 0 & n_1 & n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{inc,s} \\ A_{ref,s} \\ A_{inc,p} \\ A_{ref,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{tra} \frac{\mu_1}{\mu_2} & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{tra}}{n_2} \\ 0 & n_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{tra,s} \\ A_{tra,p} \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι πίνακες είναι block διαγώνιοι, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε να σπάσουμε το σύστημα εξισώσεων σε δύο μικρότερα, ισοδύναμα, όπου το ένα θα αφορά στα πλάτη των s συνιστωσών και το άλλο στα πλάτη των p συνιστωσών:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{inc} & \alpha_{inc} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{inc,s} \\ A_{ref,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha_{tra} \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A_{tra,s} \quad (3.119)$$

και

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_{inc}}{n_1} & -\frac{\alpha_{inc}}{n_1} \\ n_1 & n_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{inc,p} \\ A_{ref,p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{tra}}{n_2} \\ n_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot A_{tra,p} \quad (3.120)$$

Άρα τελικά οι δύο συνιστώσες (s και p) είναι ανεξάρτητες ή αποσυμπλεγμένες (*uncoupled*). Συνεπώς, οι δύο περιπτώσεις πόλωσης του προσπίπτοντος κύματος (κάθετη και παράλληλη) μπορούν να μελετηθούν ξεχωριστά, ανεξάρτητα η μία από την άλλη.

Κάθετη πόλωση (s)

Από την 3.119 έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{inc,s} \\ A_{ref,s} \end{bmatrix} &= -\frac{1}{2\alpha_{inc}} \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_{inc} \\ -1 & -\alpha_{inc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_{tra} \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A_{tra,s} = \\ &= -\frac{1}{2\alpha_{inc}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha_{inc} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\alpha_{tra} \frac{\mu_1}{\mu_2} \\ 1 \end{bmatrix} \cdot A_{tra,s} = \\ &= -\frac{1}{2\alpha_{inc}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{tra}\mu_1}{2\alpha_{inc}\mu_2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot A_{tra,s} \end{aligned} \quad (3.121)$$

Από την παραπάνω μορφή μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τους λόγους $r_s := \frac{A_{ref,s}}{A_{inc,s}}$ και $t_s := \frac{A_{tra,s}}{A_{tra,s}}$ που είναι οι γνωστοί συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης.

Συγκεκριμένα, για την περίπτωση που τα \vec{k}_{inc} και \vec{k}_{tra} είναι πραγματικά έχουμε:

$$t_s = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc}}{\mu_1 n_2 \cos \theta_{tra} + \mu_2 n_1 \cos \theta_{inc}} \quad (3.122)$$

και

$$r_s = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc} - \mu_1 n_2 \cos \theta_{tra}}{2\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc}} t_s \Rightarrow r_s = \frac{\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc} - \mu_1 n_2 \cos \theta_{tra}}{\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc} + \mu_1 n_2 \cos \theta_{tra}} \quad (3.123)$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητές και παρανομαστές με $\frac{c}{n_1 n_2}$ οι συντελεστές μπορούν (βάσει των 3.45 και 3.57) να γραφούν στην πιο κομψή μορφή:

$$t_s = \frac{2Z_2 \cos \theta_{inc}}{Z_1 \cos \theta_{tra} + Z_2 \cos \theta_{inc}} \quad (3.124)$$

και

$$r_s = \frac{Z_2 \cos \theta_{inc} - Z_1 \cos \theta_{tra}}{Z_2 \cos \theta_{inc} + Z_1 \cos \theta_{tra}} \quad (3.125)$$

Παράλληλη πόλωση (p)

Από την 3.120 έχουμε:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A_{inc,p} \\ A_{ref,p} \end{bmatrix} &= \frac{1}{2\alpha_{inc}} \begin{bmatrix} n_1 & \frac{\alpha_{inc}}{n_1} \\ -n_1 & \frac{\alpha_{inc}}{n_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{tra}}{n_2} \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot A_{tra,p} = \\ &= -\frac{1}{2\alpha_{inc}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{inc}}{n_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\alpha_{tra}}{n_2} \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} \end{bmatrix} \cdot A_{tra,p} = \\ &= -\frac{1}{2\alpha_{inc}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{n_1 \alpha_{tra}}{2n_2 \mu_1} \\ \frac{n_2 \alpha_{inc}}{2n_1 \mu_2} \end{bmatrix} \cdot A_{tra,p} \end{aligned} \quad (3.126)$$

Για τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης, για την περίπτωση που τα \vec{k}_{inc} και \vec{k}_{tra} είναι πραγματικά, έχουμε:

$$t_p = \frac{2\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc}}{\mu_2 n_1 \cos \theta_{tra} + \mu_1 n_2 \cos \theta_{inc}} \quad (3.127)$$

και

$$r_p = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_{inc} - \mu_2 n_1 \cos \theta_{tra}}{2\mu_2 n_1 \cos \theta_{inc}} t_p \Rightarrow r_p = \frac{\mu_1 n_2 \cos \theta_{inc} - \mu_2 n_1 \cos \theta_{tra}}{\mu_1 n_2 \cos \theta_{inc} + \mu_2 n_1 \cos \theta_{tra}} \quad (3.128)$$

ή, αντίστοιχα, στην πιο κομψή μορφή:

$$t_p = \frac{2Z_2 \cos \theta_{inc}}{Z_2 \cos \theta_{tra} + Z_1 \cos \theta_{inc}} \quad (3.129)$$

και

$$r_p = \frac{Z_1 \cos \theta_{inc} - Z_2 \cos \theta_{tra}}{Z_1 \cos \theta_{inc} + Z_2 \cos \theta_{tra}} \quad (3.130)$$

3.4.3 Γωνία Brewster

Παρατηρούμε ότι οι συντελεστές ανάκλασης αποτελούνται από τη διαφορά δύο συνημιτόνων με διαφορετικούς συντελεστές και άρα είναι αναμενόμενο ότι υπό συνθήκες μπορεί να μηδενίζονται.

Κάθετη πόλωση (s)

Έχουμε

$$\begin{aligned} r_s &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \mu_2 n_1 \cos \theta_{inc} - \mu_1 n_2 \cos \theta_{tra} &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\mu_2 n_1}{\mu_1} \cos \theta_{inc} &= n_2 \cos \theta_{tra} \end{aligned} \quad (3.131)$$

Από το νόμο του Snell όμως έχουμε ότι

$$n_1 \sin \theta_{inc} = n_2 \sin \theta_{tra} \quad (3.132)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις 3.131 και 3.132 και προσθέτοντάς τες κατά μέλη έχουμε τελικά:

$$\left[\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - 1 \right] \cos^2 \theta_{inc} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^2 - 1 \quad (3.133)$$

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\mu_1 = \mu_2$, όπως συμβαίνει για παράδειγμα όταν τα μέσα είναι μη μαγνητικά ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) τότε η 3.133 γίνεται

$$n_1^2 = n_2^2 \quad \text{ή} \quad \epsilon_1 = \epsilon_2 \quad (3.134)$$

που σημαίνει ουσιαστικά ότι ο συντελεστής ανάκλασης μηδενίζεται όταν έχουμε διάδοση στο ίδιο μέσο, και όχι πρόσπτωση σε κάποια ασυνέχεια του μέσου. Αυτό είναι βέβαια κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο.

Αλλιώς:

$$\cos^2 \theta_{inc} = \frac{1 - \frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}{1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2} \quad (3.135)$$

Παράλληλη πόλωση (p)

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 r_p &= 0 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \mu_1 n_2 \cos \theta_{inc} - \mu_2 n_1 \cos \theta_{tra} &= 0 \\
 &\Leftrightarrow \\
 \cos \theta_{tra} &= \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \cos \theta_{inc}
 \end{aligned} \tag{3.136}$$

Από το νόμο του Snell όμως έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
 n_1 \sin \theta_{inc} &= n_2 \sin \theta_{tra} \\
 &\Leftrightarrow \\
 \sin \theta_{tra} &= \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_{inc}
 \end{aligned} \tag{3.137}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο τις 3.136 και 3.137 και προσθέτοντάς τες κατά μέλη έχουμε τελικά:

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_{inc} + \left(\frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1}\right)^2 \cos^2 \theta_{inc} = 1 \tag{3.138}$$

ή

$$\boxed{\left[\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2 - 1\right] \cos^2 \theta_{inc} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1} \tag{3.139}$$

Στην περίπτωση που $\epsilon_1 = \epsilon_2$ τότε η 3.139 γίνεται

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 \tag{3.140}$$

που σημαίνει, όπως και στην περίπτωση της κάθετης πόλωσης, ότι έχουμε διάδοση στο ίδιο μέσο (προφανής λύση).

Αλλιώς:

$$\boxed{\cos^2 \theta_{inc} = \frac{1 - \frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}{1 - \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)^2}} \tag{3.141}$$

Αν τώρα έχουμε μη μαγνητικά μέσα ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) τότε η 3.141 γίνεται:

$$\boxed{\cos^2 \theta_{inc} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \tag{3.142}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι όταν έχουμε μη μαγνητικά μέσα, όπως στην περίπτωση οπτικών υλικών, τότε μηδενική ανάκλαση επιτυγχάνεται πρακτικά μόνο στην περίπτωση της παράλληλης πόλωσης. Και αυτό γίνεται για μια συγκεκριμένη γωνία που δίνεται από τη σχέση 3.142, τη λεγόμενη γωνία *Brewster*.

3.4.4 Διάνυσμα Poynting

Όπως αναφέραμε στην ενότητα 2.5, για το διάνυσμα Poynting, τη ροή δηλαδή της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας, έχουμε:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.143)$$

και για τη μέση τιμή της, στην περίπτωση που τα \vec{E} και \vec{H} είναι ημιτονοειδή με κοινή συχνότητα ω , θα έχουμε:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} \quad (3.144)$$

Για το μέσο 1 λοιπόν θα ισχύει:

$$\langle \vec{S}_1 \rangle = \frac{1}{2} \Re\{(\vec{E}_{inc} + \vec{E}_{ref}) \times (\vec{H}_{inc}^* + \vec{H}_{ref}^*)\} \quad (3.145)$$

ή, λόγω των 3.69, 3.70, 3.97 και 3.101:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_1 \rangle = & \frac{1}{2} \Re\{[(A_{inc,s} \hat{u}_{inc,s} + A_{inc,p} \hat{u}_{inc,p}) e^{-i\vec{k}_{inc}\vec{r}} + (A_{ref,s} \hat{u}_{ref,s} + A_{ref,p} \hat{u}_{ref,p}) e^{-i\vec{k}_{ref}\vec{r}}] \times \\ & [(A_{inc,s}^* \vec{v}_{inc,s}^* + A_{inc,p}^* \vec{v}_{inc,p}^*) e^{i\vec{k}_{inc}\vec{r}} + (A_{ref,s}^* \vec{v}_{ref,s}^* + A_{ref,p}^* \vec{v}_{ref,p}^*) e^{i\vec{k}_{ref}\vec{r}}]\} \end{aligned} \quad (3.146)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις 3.85 και 3.79 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_1 \rangle = & \frac{1}{2} e^{2k_0 \Im m\{\beta\}y} \Re\{[(A_{inc,s} \hat{u}_{inc,s} + A_{inc,p} \hat{u}_{inc,p}) e^{-ik_0 \alpha_{inc} x} + (A_{ref,s} \hat{u}_{ref,s} + A_{ref,p} \hat{u}_{ref,p}) e^{ik_0 \alpha_{inc} x}] \times \\ & [(A_{inc,s}^* \vec{v}_{inc,s}^* + A_{inc,p}^* \vec{v}_{inc,p}^*) e^{ik_0 \alpha_{inc}^* x} + (A_{ref,s}^* \vec{v}_{ref,s}^* + A_{ref,p}^* \vec{v}_{ref,p}^*) e^{-ik_0 \alpha_{inc}^* x}]\} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Αντίστοιχα, για το μέσο 2 θα έχουμε:

$$\langle \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E}_{tra} \times \vec{H}_{tra}^*\} \quad (3.148)$$

ή, λόγω των 3.71, 3.97 και 3.101:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_2 \rangle = & \frac{1}{2} \Re\{[(A_{tra,s} \hat{u}_{tra,s} + A_{tra,p} \hat{u}_{tra,p}) e^{-i\vec{k}_{tra}\vec{r}}] \times \\ & [(A_{tra,s}^* \vec{v}_{tra,s}^* + A_{tra,p}^* \vec{v}_{tra,p}^*) e^{i\vec{k}_{tra}\vec{r}}]\} \end{aligned} \quad (3.149)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τις 3.85 και 3.79 έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_2 \rangle = & \frac{1}{2} e^{2k_0 \Im m\{\beta\}y} \Re\{[(A_{tra,s} \hat{u}_{tra,s} + A_{tra,p} \hat{u}_{tra,p}) e^{-ik_0 \alpha_{tra} x}] \times \\ & [(A_{tra,s}^* \vec{v}_{tra,s}^* + A_{tra,p}^* \vec{v}_{tra,p}^*) e^{ik_0 \alpha_{tra}^* x}]\} \end{aligned} \quad (3.150)$$

Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα προκύπτουν διάφορα επιμέρους εξωτερικά γινόμενα μεταξύ των διανυσμάτων $\hat{u}_{m,q}$ και $\vec{v}_{l,q}^*$, όπου $m = inc, ref$ ή tra , $l = inc, ref$ ή tra και $q = p$ ή s . Υπολογίζουμε, συνεπώς, τον κάθε τέτοιο όρο στη γενική περίπτωση:

$$\hat{u}_{m,s} \times \vec{v}_{l,s}^* = \frac{1}{c\mu_l^*} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta^* & -\alpha_l^* & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{c\mu_l^*} \begin{bmatrix} \alpha_l^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

$$\hat{u}_{m,s} \times \vec{v}_{l,p}^* = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{n_l^*}{c\mu_l^*} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

$$\hat{u}_{m,p} \times \vec{v}_{l,s}^* = \frac{1}{c\mu_l^*} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\beta/n_m & \alpha_m/n_m & 0 \\ \beta^* & -\alpha_l^* & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta\alpha_l^* - \beta^*\alpha_m}{n_m c\mu_l^*} \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

$$\hat{u}_{m,p} \times \vec{v}_{l,p}^* = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\beta/n_m & \alpha_m/n_m & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n_l^*}{c\mu_l^*} \end{vmatrix} = \frac{n_l^*}{n_m c\mu_l^*} \begin{bmatrix} \alpha_m \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.154)$$

Έτσι, για το μέσο 1, προκύπτουν 16 επιμέρους εξωτερικά γινόμενα τα οποία δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

$\hat{u} \times \vec{v}^*$	$\hat{u}_{inc} \times \vec{v}_{inc}^*$	$\hat{u}_{inc} \times \vec{v}_{ref}^*$	$\hat{u}_{ref} \times \vec{v}_{inc}^*$	$\hat{u}_{ref} \times \vec{v}_{ref}^*$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^*$	$\frac{1}{c\mu_1^*} \begin{bmatrix} \alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{c\mu_1^*} \begin{bmatrix} -\alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{c\mu_1^*} \begin{bmatrix} \alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{c\mu_1^*} \begin{bmatrix} -\alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_p^*$	0	0	0	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_s^*$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta\alpha_{inc}^* - \beta^*\alpha_{inc}}{n_1 c\mu_1^*} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\beta\alpha_{inc}^* - \beta^*\alpha_{inc}}{n_1 c\mu_1^*} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta\alpha_{inc}^* + \beta^*\alpha_{inc}}{n_1 c\mu_1^*} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\beta\alpha_{inc}^* + \beta^*\alpha_{inc}}{n_1 c\mu_1^*} \end{bmatrix}$
$\hat{u}_p \times \vec{v}_p^*$	$\frac{n_1^*}{n_1 c\mu_1^*} \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{n_1^*}{n_1 c\mu_1^*} \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{n_1^*}{n_1 c\mu_1^*} \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$\frac{n_1^*}{n_1 c\mu_1^*} \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

Πιο συγκεκριμένα, οι προσθετέοι που απαρτίζουν τον όρο $[(A_{tra,s}\hat{u}_{tra,s} + A_{tra,p}\hat{u}_{tra,p})e^{-ik_0\alpha_{tra}x}] \times [(A_{tra,s}^*\vec{v}_{tra,s}^* + A_{tra,p}^*\vec{v}_{tra,p}^*)e^{ik_0\alpha_{tra}^*x}]$ της σχέσης 3.147 δίνονται στον πίνακα 3.1:

Πίνακας 3.1: Επιμέρους όροι της μέσης ροής ενέργειας $\langle \vec{S} \rangle$ στο μέσο 1
Γενική περίπτωση

$\hat{u} \times \vec{v}^*$	$\hat{u}_{inc} \times \vec{v}_{inc}^* e^{2k_0 \text{Im}\{\alpha_{inc}\}x}$	$\hat{u}_{inc} \times \vec{v}_{ref}^* e^{-2ik_0 \text{Re}\{\alpha_{inc}\}x}$	$\hat{u}_{ref} \times \vec{v}_{inc}^* e^{2ik_0 \text{Re}\{\alpha_{inc}\}x}$	$\hat{u}_{ref} \times \vec{v}_{ref}^* e^{-2k_0 \text{Im}\{\alpha_{inc}\}x}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^* \frac{1}{c\mu_1^*}$	$ A_{inc,s} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{inc,s} A_{ref,s}^* \begin{bmatrix} -\alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{ref,s} A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} \alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$	$ A_{ref,s} ^2 \begin{bmatrix} -\alpha_{inc}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_p^*$	0	0	0	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_s^* \frac{1}{n_1 c \mu_1^*}$	$A_{inc,p} A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \alpha_{inc}^* - \beta^* \alpha_{inc} \end{bmatrix}$	$A_{inc,p} A_{ref,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta \alpha_{inc}^* - \beta^* \alpha_{inc} \end{bmatrix}$	$A_{ref,p} A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \alpha_{inc}^* + \beta^* \alpha_{inc} \end{bmatrix}$	$A_{ref,p} A_{ref,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\beta \alpha_{inc}^* + \beta^* \alpha_{inc} \end{bmatrix}$
$\hat{u}_p \times \vec{v}_p^* \frac{n_1^*}{n_1 c \mu_1^*}$	$ A_{inc,p} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{inc,p} A_{ref,p}^* \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{ref,p} A_{inc,p}^* \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$ A_{ref,p} ^2 \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

Στην περίπτωση που έχουμε $\epsilon_1, \mu_1 \vec{k}_{inc} \in \mathfrak{R}$ τότε ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο 3.2:

Πίνακας 3.2: Επιμέρους όροι της μέσης ροής ενέργειας $\langle \vec{S} \rangle$ στο μέσο 1, όταν $\epsilon_1, \mu_1, \vec{k}_{inc} \in \mathfrak{R}$

$\hat{u} \times \vec{v}^*$	$\hat{u}_{inc} \times \vec{v}_{inc}^*$	$\hat{u}_{inc} \times \vec{v}_{ref}^* e^{-2ik_0 \alpha_{inc} x}$	$\hat{u}_{ref} \times \vec{v}_{inc}^* e^{2ik_0 \alpha_{inc} x}$	$\hat{u}_{ref} \times \vec{v}_{ref}^*$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^* \frac{1}{c\mu_1}$	$ A_{inc,s} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{inc,s} A_{ref,s}^* \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{ref,s} A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$ A_{ref,s} ^2 \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_p^*$	0	0	0	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_s^* \frac{1}{n_1 c \mu_1}$	0	$A_{inc,p} A_{ref,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2\beta \alpha_{inc} \end{bmatrix}$	$A_{ref,p} A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\beta \alpha_{inc} \end{bmatrix}$	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_p^* \frac{1}{c\mu_1}$	$ A_{inc,p} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{inc,p} A_{ref,p}^* \begin{bmatrix} \alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$A_{ref,p} A_{inc,p}^* \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$	$ A_{ref,p} ^2 \begin{bmatrix} -\alpha_{inc} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση, οι x συνιστώσεις των όρων στις θέσεις (1,2) και (1,3) του πίνακα (αναφερόμαστε στον εσωτερικό 4×4 υποπίνακα) είναι αντίθετες-συζυγείς και άρα το άθροισμά τους κάνει φανταστικό αριθμό, με αποτέλεσμα (βάσει της σχέσης 3.147) να αλληλοαναιρούνται. Το ίδιο συμβαίνει και με τους όρους στις θέσεις (4,2) και (4,3).

Επίσης, είπαμε ότι, λόγω της ανεξαρτησίας των ρυθμών, οι δύο συντελεστές ανάκλασης θα είναι ανεξάρτητοι, δηλαδή θα έχουμε $A_{ref,s} = r_s A_{inc,s}$ και $A_{ref,p} = r_p A_{inc,p}$.

Έτσι, προκύπτει τελικά:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S}_1 \rangle = & \frac{1}{2c\mu_1} [\\
& |A_{inc,s}|^2 \begin{bmatrix} (1 - |r_s|^2)\alpha_{inc} \\ (1 + |r_s|^2 + 2\Re\{r_s e^{2ik_0\alpha_{inc}x}\})\beta \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + |A_{inc,p}|^2 \begin{bmatrix} (1 - |r_p|^2)\alpha_{inc} \\ (1 + |r_p|^2 + 2\Re\{r_p e^{2ik_0\alpha_{inc}x}\})\beta \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \Re\{A_{inc,p}A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_p e^{2ik_0\alpha_{inc}x} - r_s^* e^{-2ik_0\alpha_{inc}x} \end{bmatrix} \} \frac{2\alpha_{inc}\beta}{n_1} \\
&] \tag{3.155}
\end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S}_1 \rangle = & \frac{1}{2Z_1} [\\
& |A_{inc,s}|^2 \begin{bmatrix} (1 - |r_s|^2) \cos \theta_{inc} \\ (1 + |r_s|^2 + 2\Re\{r_s e^{2ik_0 n_1 \cos \theta_{inc} x}\}) \sin \theta_{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + |A_{inc,p}|^2 \begin{bmatrix} (1 - |r_p|^2) \cos \theta_{inc} \\ (1 + |r_p|^2 + 2\Re\{r_p e^{2ik_0 n_1 \cos \theta_{inc} x}\}) \sin \theta_{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \\
& + \Re\{A_{inc,p}A_{inc,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_p e^{2ik_0\alpha_{inc}x} - r_s^* e^{-2ik_0\alpha_{inc}x} \end{bmatrix} \} \sin(2\theta_{inc}) \\
&] \tag{3.156}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση σχολιάζεται παρακάτω, αφού δοθεί και η αντίστοιχη σχέση για το μέσο 2.

Για το μέσο 2 οι όροι που προκύπτουν από τα επιμέρους εξωτερικά γινόμενα θα είναι όπως στον πίνακα 3.3 (δίνονται ξεχωριστά σε πίνακα, προκειμένου να υπάρχει αντιστοιχία με την περίπτωση του μέσου 1).

Παρατηρούμε ότι αν $n_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$, δηλαδή αν το μέσο 2 είναι μέσο χωρίς απώλειες, αν το $\beta \in \mathbb{R}$, και αν επιπλέον δεν έχουμε ολική ανάκλαση (και άρα $\alpha_{tra} \in \mathbb{R}$), τότε οι όροι γίνονται όπως στον πίνακα 3.4.

που σημαίνει (βάσει της 3.150) ότι

$$\begin{aligned}
\langle \vec{S}_2 \rangle = & \frac{1}{2c\mu_2} (|A_{tra,s}|^2 + |A_{tra,p}|^2) \vec{k}_{tra} \\
= & \frac{1}{2Z_2} (|A_{tra,s}|^2 + |A_{tra,p}|^2) \hat{s}_{tra} = \frac{1}{2Z_2} |\vec{E}_{tra,0}|^2 \hat{s}_{tra} \tag{3.157}
\end{aligned}$$

$$\text{όπου } \hat{s}_{tra} = \frac{\vec{k}_{tra}}{k_0 n_2} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{tra} \\ \sin \theta_{tra} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Πίνακας 3.3: Επιμέρους όροι της ροής ενέργειας S στο μέσο 2
Γενική περίπτωση

$\hat{u} \times \vec{v}^*$	$\hat{u}_{tra} \times \vec{v}_{tra}^* e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{tra}\}x}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^* \frac{1}{c\mu_2^*}$	$ A_{tra,s} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{tra}^* \\ \beta^* \\ 0 \end{bmatrix}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^*$	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_s^* \frac{1}{n_2 c \mu_2^*}$	$A_{tra,p} A_{tra,s}^* \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta \alpha_{tra}^* - \beta^* \alpha_{tra} \end{bmatrix}$
$\hat{u}_p \times \vec{v}_p^* \frac{n_2^*}{n_2 c \mu_2^*}$	$ A_{tra,p} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{tra} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

Πίνακας 3.4: Επιμέρους όροι της ροής ενέργειας S στο μέσο 2,
όταν $\epsilon_2, \mu_2 \vec{k}_{tra} \in \mathbb{R}$

$\hat{u} \times \vec{v}^*$	$\hat{u}_{tra} \times \vec{v}_{tra}^*$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^* \frac{1}{c\mu_2}$	$ A_{tra,s} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{tra} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$
$\hat{u}_s \times \vec{v}_s^*$	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_s^* \frac{1}{n_2 c \mu_2}$	0
$\hat{u}_p \times \vec{v}_p^* \frac{1}{c\mu_2}$	$ A_{tra,p} ^2 \begin{bmatrix} \alpha_{tra} \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}$

(για την τελευταία ισότητα βλ. σχέσεις 3.92, 3.57, 3.45 και 3.47)

Λαμβάνοντας υπόψιν την ανεξαρτησία των συντελεστών διάθλασης, έχουμε $A_{tra,s} = t_s A_{inc,s}$ και $A_{tra,p} = t_p A_{inc,p}$ και άρα:

$$\langle \vec{S}_2 \rangle = \frac{1}{2Z_2} (|A_{inc,s}|^2 |t_s|^2 + |A_{inc,p}|^2 |t_p|^2) \hat{s}_{tra} \quad (3.158)$$

Απ' ότι βλέπουμε, η ροή ενέργειας του διαθλώμενου κύματος είναι στην διεύθυνση διάδοσής του (διεύθυνση του κυματανύσματός του) και είναι ίδια, σταθερή, σε όλο τον ημιχώρο $x > 0$. Επίσης, οι δύο συνιστώσες πόλωσης είναι ανεξάρτητες και όσον αφορά τη ροή ενέργειας, δηλαδή η συνολική ροή ενέργειας, όταν το προσπίπτον κύμα έχει τόσο s όσο και p συνιστώσα, ισούται με το άθροισμα της ροής ενέργειας στην περίπτωση που το προσπίπτον κύμα είχε μόνο s συνιστώσα συν την ροή ενέργειας στην περίπτωση που το προσπίπτον κύμα είχε μόνο p συνιστώσα.

Αν δούμε τον πίνακα 3.3 παρατηρούμε ότι στη γενικότερη περίπτωση που τα ϵ_2, μ_2 είναι μιγαδικά τότε οι s και p συνιστώσες παραμένουν ανεξάρτητες μόνο για τις x και y συνιστώσες, αφού προκύπτει και ένας όρος, στην z συνιστώσα, ανάλογος των γινομένων $A_{tra,p} A_{tra,s}^*$. Επίσης, η ροή ενέργειας παύει πλέον να έχει τη διεύθυνση του κυματανύσματος \vec{k}_{tra} .

Στην περίπτωση τώρα που $\epsilon_2, \mu_2, \beta \in \mathbb{R}$ αλλά $n_2^2 - \beta^2 < 0$ τότε $a_{inc} \in \mathfrak{I}$ και έχουμε ολική ανάκλαση.

Αυτό συμβαίνει όταν

$$\sin^2 \theta_{inc} > \frac{n_2}{n_1} \quad (3.159)$$

Τότε:

$$\langle \vec{S}_2 \rangle = \frac{e^{2k_0 \Im m\{a_{tra}\}x}}{2c\mu_2} \begin{bmatrix} 0 \\ (|A_{tra,s}|^2 + |A_{tra,p}|^2)\beta \\ -\frac{2\beta \Im m\{a_{tra}\}}{n_2} \Re\{A_{tra,p} A_{tra,s}^* i\} \end{bmatrix} \quad (3.160)$$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι στην ολική ανάκλαση δεν έχουμε καθόλου μέση ροή ενέργειας στη διεύθυνση x . Επίσης, στις άλλες δύο διευθύνσεις, έχουμε αποσβεννύμενη εξάρτηση από το x .

”Γυρνώντας πίσω” τώρα στο μέσο 1, παρατηρούμε από τη σχέση 3.156 ότι ανεξαρτησία των δύο ρυθμών s και p έχουμε μόνο για τις x και y συνιστώσες της ροής ενέργειας (δηλαδή για να υπολογίσουμε τη συνολική ροή ενέργειας μπορούμε να υπολογίσουμε ξεχωριστά τις ροές ενέργειας σε περίπτωση που έχουμε μόνο p ή μόνο s πρόσπτωση και στη συνέχεια να τις αθροίσουμε). Στην z συνιστώσα παρατηρούμε ότι οι δύο συνιστώσες είναι συζευγμένες.

Εκτός αυτού, βλέπουμε ότι η μέση ροή ενέργειας είναι ανεξάρτητη των y, z , δηλαδή παραμένει σταθερή σε όλο τον ημιχώρο $x < 0$, όσο ”κινούμαστε” σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα x . Μάλιστα, όσον αφορά τη x συνιστώσα, είναι σταθερή σε όλο το χώρο (του μέσου 1) δηλαδή ανεξάρτητη και από το x .

Επίσης, παρατηρούμε και κάτι άλλο: Αν υποθέσουμε ότι στο μέσο 1 είχαμε μόνο το προσπίπτον ή μόνο το ανακλώμενο κύμα, τότε οι αντίστοιχες ροές ενέργειας θα ήταν ανάλογες της σχέσης 3.158:

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_{inc} \rangle = \frac{1}{2Z_1} (|A_{inc,s}|^2 + |A_{inc,p}|^2) \hat{s}_{inc} \quad (3.161)$$

δηλαδή

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_{inc} \rangle = \frac{1}{2Z_1} (|A_{inc,s}|^2 + |A_{inc,p}|^2) \begin{bmatrix} \cos \theta_{inc} \\ \sin \theta_{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

και

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_{ref} \rangle = \frac{1}{2Z_1} (|A_{inc,s}|^2 |r_s|^2 + |A_{inc,p}|^2 |r_p|^2) \hat{s}_{ref} \quad (3.163)$$

δηλαδή

$$\langle \vec{\mathcal{S}}_{ref} \rangle = \frac{1}{2Z_1} (|A_{inc,s}|^2 |r_s|^2 + |A_{inc,p}|^2 |r_p|^2) \begin{bmatrix} -\cos \theta_{inc} \\ \sin \theta_{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις 3.162 και 3.164 με τη σχέση 3.156 μπορούμε να δούμε ότι τα δύο κύματα (ανακλώμενο και προσπίπτον) είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, όσον αφορά τη μέση συνολική ροή ενέργειας, στη x διεύθυνση (x συνιστώσα). Αυτό δε συμβαίνει με τις y και z συνιστώσες.

Στην ιδιόμορφη όμως περίπτωση που τα $\epsilon_1, \mu_1, a_{inc}$ είναι μιγαδικά, όπως φαίνεται από τον πίνακα 3.1, έχουμε πάλι ανεξαρτησία των ρυθμών s και p για τις x και y συνιστώσες, ωστόσο τα δύο κύματα είναι πλήρως εξαρτημένα (και στις τρεις συνιστώσες τους)!

Κεφάλαιο 4

Διάδοση Επιπέδων Κυμάτων μέσα σε Ηλεκτρικώς Ανισοτροπικά Μέσα

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με *ισοτροπικά* μέσα όπως το κενό και τα περισσότερα αέρια και υγρά αλλά και αρκετά στερεά. Τα μέσα αυτά, όπως εξηγήσαμε στο κεφάλαιο 1, επιδεικνύουν συμπεριφορά η οποία είναι ανεξάρτητη της διεύθυνσης ή, όπως θα λέγαμε, του προσανατολισμού. Δηλαδή αν είχαμε μια σφαίρα φτιαγμένη με ένα τέτοιο υλικό τότε δε θα είχε καμία διαφορά αν την περιστρέφαμε γύρω από το κέντρο της με οποιονδήποτε τρόπο.

Για τα περισσότερα κρυσταλλικά στερεά όμως δεν ισχύει αυτό. Κι αυτό συμβαίνει κυρίως λόγω της μικροσκοπικής τους δομής. Όταν τα ατομικά σωματίδια που συνιστούν (άτομα/μόρια/ιόντα) ένα στερεό παρουσιάζουν μεγάλη ανομοιογένεια ή αν αντιθέτως είναι πλήρως διατεταγμένα αλλά με αρκετά συμμετρικό-σφαιρικό τρόπο (π.χ. άμορφα στερεά ή στερεά κυβικής κρυσταλλικής δομής), τότε μακροσκοπικά το υλικό είναι πρακτικά *ισοτροπικό*. Όταν όμως όλα τα σωματίδια είναι ομοιόμορφα διατεταγμένα με ασύμμετρο τρόπο έτσι ώστε να σχηματίζουν ομοίως προσανατολιζόμενες μορφές, το υλικό, μακροσκοπικά, "φαίνεται" να έχει κάποια "πολικότητα" και η συμπεριφορά του εξαρτάται από το πώς είναι προσανατολισμένο. Ένα τέτοιο υλικό είναι *ανισοτροπικό*.

Η συμπεριφορά αυτή (η έλλειψη δηλαδή αυτή της σφαιρικής συμμετρίας) είπαμε ότι μπορεί μάλιστα να μεταβάλλεται εξαρτώμενη από διάφορους παράγοντες όπως η συχνότητα ή ένα εξωτερικά εφαρμοζόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Η παρούσα εργασία επικεντρώνεται στα *οπτικά* ανισοτροπικά υλικά που είναι κυρίως διαφανείς κρύσταλλοι, όπως ο ασβεστίτης (calcite), ο χαλαζίας (quartz), η μίκα (mica) ή το δισόξινο φωσφορικό κάλιο (KDP), αλλά και οι γνωστοί υγροί κρύσταλλοι (*liquid crystals*).

Τα οπτικά αυτά υλικά χαρακτηρίζονται από *ηλεκτρική* ανισοτροπία και επειδή εμφανίζουν το φαινόμενο της *διπλής διάθλασης* ονομάζονται και *διπλοθλαστικά*. Τα περισσότερα από αυτά παρουσιάζουν επιπλέον και ιδιαίτερες ηλεκτροοπτικές και ακουστικοοπτικές ιδιότητες που, όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 1.1.1, τα καθιστούν ιδιαίτερος χρήσιμα σε διάφορες οπτικές εφαρμογές.

4.1 Ο διηλεκτρικός τανυστής ενός ηλεκτρικά ανισοτροπικού υλικού

Όπως είπαμε στο κεφάλαιο 1 η ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά ενός ηλεκτρικά *ισοτροπικού* υλικού περιγράφεται από το γεγονός ότι η ηλεκτρική πόλωση \vec{P} είναι παράλληλη με την ένταση \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου (σχέση 2.31).

Στα ηλεκτρικά *ανισοτροπικά* μέσα κάθε συνιστώσα της πόλωσης \vec{P} εξαρτάται και από τις τρεις συνιστώσες της έντασης \vec{E} του ηλεκτρικού πεδίου με αποτέλεσμα να μην είναι συγγραμική ως διάνυσμα με αυτό.

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0(\chi_{xx}E_x + \chi_{xy}E_y + \chi_{xz}E_z) \\ P_y &= \epsilon_0(\chi_{yx}E_x + \chi_{yy}E_y + \chi_{yz}E_z) \\ P_z &= \epsilon_0(\chi_{zx}E_x + \chi_{zy}E_y + \chi_{zz}E_z) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Αυτό παρουσιάζεται συνοπτικά σε μητρική μορφή ως εξής:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \bar{\chi} \vec{E} \quad (4.2)$$

Το $\bar{\chi}$ είναι ο τανυστής ηλεκτρικής επιδεκτικότητας και είναι ουσιαστικά ένας πίνακας 3×3 . Αντίστοιχα, η πυκνότητα της ηλεκτρικής ροής, βάσει της σχέσης 2.26

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (4.3)$$

θα εξαρτάται και αυτή και από τις τρεις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου και δε θα είναι παράλληλη με αυτό.

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0(1 + \bar{\chi})\vec{E} \\ &\quad \text{ή} \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \end{aligned} \quad (4.4)$$

και αναλυτικά

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx}E_x + \epsilon_{xy}E_y + \epsilon_{xz}E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx}E_x + \epsilon_{yy}E_y + \epsilon_{yz}E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y + \epsilon_{zz}E_z \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ο πίνακας $\bar{\epsilon}_r$ ονομάζεται αντίστοιχα τανυστής σχετικής ηλεκτρικής επιτρεπτότητας ή -χάρην συντομίας- (σχετικός) διηλεκτρικός τανυστής. Επειδή θα τον χρησιμοποιήσουμε συχνά στην ανάλυση που ακολουθεί, θα τον συμβολίσουμε με $\bar{\epsilon}$ (χρησιμοποιώντας δηλαδή καλλιγραφικό χαρακτήρα και παραλείποντας το δείκτη r).

$$\bar{\epsilon} := \bar{\epsilon}_r$$

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Αποδεικνύεται [7] ότι για υλικά χωρίς απώλειες (lossless) η διατήρηση της ενέργειας επιβάλλει ο $\bar{\varepsilon}$ να είναι ερμιτιανός, συνεπώς το υλικό χαρακτηρίζεται από έξι μεγέθη ως προς την ηλεκτρική του συμπεριφορά (όσον αφορά μία συγκεκριμένη συχνότητα).

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^* \quad (4.7)$$

για $i, j = 1, 2, 3$

Σημειώνεται εδώ ότι θεωρούμε ότι το υλικό που μελετούμε είναι ομοιογενές και άρα ο διηλεκτρικός ταυστής $\bar{\varepsilon}$ εξαρτάται μόνο από τη συχνότητα.

Συνεπώς, αν το μέσο δεν έχει απώλειες (lossless) τότε, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα [25], όλες οι ιδιοτιμές του $\bar{\varepsilon}$ είναι πραγματικές και υπάρχει μία διαγωνοποίησή του $\bar{\varepsilon} = \bar{P}\bar{\varepsilon}_0\bar{P}^\dagger$ (ως \bar{P}^\dagger συμβολίζουμε τον ανάστροφο-συζυγή του \bar{P}), όπου ο \bar{P} είναι ορθομοναδιαίος πίνακας, δηλαδή έχει την ιδιότητα $\bar{P} \cdot \bar{P}^\dagger = I$ (όπου I ο 3×3 μοναδιαίος πίνακας.)

Αν επιπλέον το υλικό στερείται προχωρημένων οπτικών ιδιοτήτων (γυροτροπικό, οπτικά ενεργό κλπ) δηλαδή, πρόκειται για ένα απλό διπλοθλαστικό υλικό, τότε ο πίνακας $\bar{\varepsilon}$ είναι πραγματικός, έχει θετικές ιδιοτιμές και έχει τέτοια μορφή που διαγωνοποιείται από πραγματικό πίνακα ($\bar{P}^\dagger = \bar{P}^T$). Ο πίνακας αυτός θα είναι, σύμφωνα με τα παραπάνω, ορθογώνιος και συνεπώς αποτελεί έναν πίνακα στροφής.

Στην τελευταία περίπτωση, λοιπόν, αυτό συνεπάγεται ότι μπορούμε να "στρέψουμε" το σύστημα συντεταγμένων κατάλληλα έτσι ώστε ο (νέος) $\bar{\varepsilon}$ (δηλαδή αυτός που συνδέει τα -ως προς το νέο σύστημα αξόνων- \vec{D} και \vec{E}) να γίνει διαγώνιος.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{P}\bar{\varepsilon}_0\bar{P}^T \quad (4.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Οι άξονες αυτοί ονομάζονται κύριοι άξονες του κρυστάλλου (principal dielectric axes) και το σύστημα αξόνων ονομάζεται αντίστοιχα κύριο σύστημα αξόνων του κρυστάλλου (principal axes system).

Στην περίπτωση αυτή ισχύει

$$\begin{aligned} D'_x &= \varepsilon_x E'_x \\ D'_y &= \varepsilon_y E'_y \\ D'_z &= \varepsilon_z E'_z \end{aligned} \quad (4.10)$$

δηλαδή οι συνιστώσες της διηλεκτρικής μετατόπισης \vec{D} και της έντασης \vec{E} είναι -σε αντίθεση με πριν- αποσυμπλεγμένες, δηλαδή κάθε μία συνιστώσα του ενός μεγέθους σχετίζεται μόνο με την αντίστοιχη συνιστώσα του άλλου μεγέθους.

Συχνά λοιπόν, για να περιγράψουμε τον διηλεκτρικό ταυστή ενός ανισοτροπικού υλικού, χρησιμοποιούμε τον κύριο διηλεκτρικό ταυστή και τον προσανατολισμό (περιστροφή) των κυρίων αξόνων ως προς το χρησιμοποιούμενο σύστημα συντεταγμένων.

Η περιστροφή περιγράφεται συνήθως από τρεις γωνίες στροφής των κυρίων αξόνων ως προς κάποιον άξονα εκ των x, y και z και συγκεκριμένα χρησιμοποιούνται πιο συχνά γωνίες Euler.

Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε, πιο συγκεκριμένα, τη σύμβαση

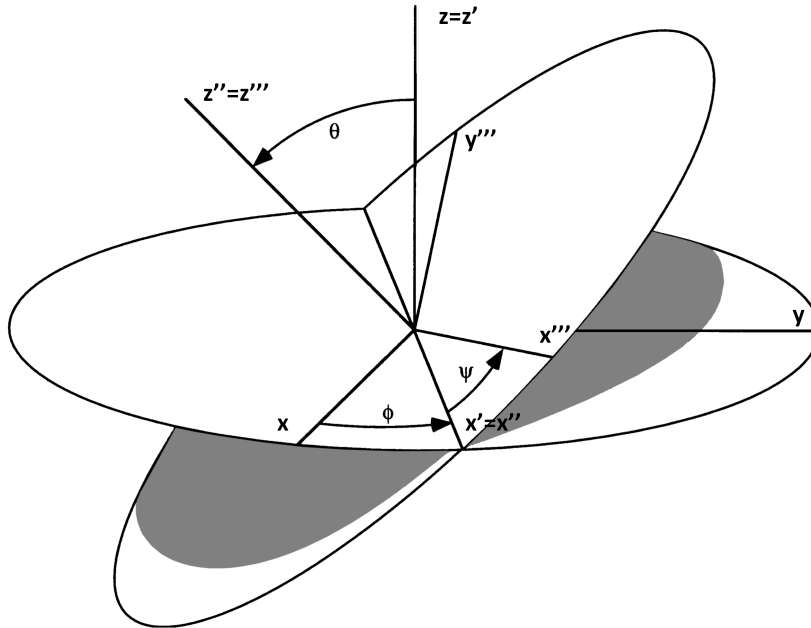
$$z - x' - z''$$

με αντίστοιχο συμβολισμό γωνιών:

$$\phi, \theta, \psi$$

που χρησιμοποιείται σε αρκετά σχετικά συγγράμματα (π.χ. [18], [9], [26]).

Θεωρούμε, δηλαδή, ότι το σύστημα κυρίων αξόνων περιστρέφεται αρχικά κατά ϕ ως προς τον άξονα z , έπειτα κατά θ ως προς τον (καινούριο) άξονα x και τέλος κατά ψ ως προς τον (καινούριο) άξονα z (Σχήμα 4.1).



Σχήμα 4.1: Γωνίες Euler τύπου z - x' - z'' (intrinsic rotations) (Πηγή:[9])

Υπολογίζουμε, σε αυτήν την περίπτωση, τον πίνακα στροφής \bar{P} της σχέσης 4.8: Έστω

$$\vec{q}^{(0)} = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

ένα διάνυσμα ως προς το κύριο σύστημα αξόνων του κρυστάλλου.

Αν περιστρέψουμε το σύστημα αξόνων κατά ϕ ως προς τον άξονα z έχουμε [27]:

$$\vec{q}^{(1)} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{q}^{(0)} \quad (4.12)$$

Αν έπειτα το περιστρέψουμε κατά θ ως προς τον άξονα x θα έχουμε:

$$\vec{q}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \vec{q}^{(1)} \quad (4.13)$$

Με την τρίτη περιστροφή (κατά ψ ως προς τον άξονα z) θα έχουμε:

$$\vec{q}^{(3)} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{q}^{(2)} \quad (4.14)$$

Τελικά, κάνοντας τις αντικαταστάσεις και τους επιμέρους πολλαπλασιασμούς πινάκων προκύπτει:

$$\vec{q}^{(3)} = \bar{P} \cdot \vec{q}^{(0)} \quad (4.15)$$

όπου

$$\begin{aligned} \bar{P} &= R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi) \\ &= \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.16) \end{aligned}$$

Αν τώρα, σαν διανύσματα \vec{q} θεωρήσουμε τα διανύσματα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} και της πυκνότητας της ηλεκτρικής ροής \vec{D} , τότε έχουμε:

$$\vec{D}^{(3)} = \bar{\epsilon}^{(3)} \vec{E}^{(3)} \quad (4.17)$$

$$\vec{D}^{(3)} = \bar{P} \vec{D}^{(0)} \quad (4.18)$$

$$\vec{E}^{(3)} = \bar{P} \vec{E}^{(0)} \quad (4.19)$$

Άρα:

$$\bar{P} \vec{D}^{(0)} = \bar{\epsilon}^{(3)} \bar{P} \vec{E}^{(0)} \quad (4.20)$$

από όπου προκύπτει ότι:

$$\bar{\epsilon}^{(0)} = \bar{P}^{-1} \bar{\epsilon}^{(3)} \bar{P} \quad (4.21)$$

ή

$$\bar{\epsilon}^{(3)} = \bar{P} \bar{\epsilon}^{(0)} \bar{P}^{-1} \quad (4.22)$$

ή απλούστερα, και επειδή \bar{P} ορθογώνιος, θα έχουμε:

$$\bar{\epsilon} = \bar{P} \bar{\epsilon}_0 \bar{P}^T \quad (4.23)$$

όπου

4.2 Επίπεδα κύματα - Κυματοεπιφάνεια

Θεωρούμε τώρα, όπως και στην ανάλυση για τα ιστροπικά υλικά, χώρο, στο εσωτερικό ενός ηλεκτρικά ανισοτροπικού υλικού, στον οποίο ισχύει $\rho = 0$ και $\vec{J} = 0$, δηλαδή ότι δεν υπάρχουν καθόλου επιβαλλόμενες πηγές και άρα τα όποια ηλεκτρομαγνητικά πεδία υπάρχουν έχουν δημιουργηθεί από πηγές που βρίσκονται αρκετά μακριά από το χώρο αυτό. Επιδιώκουμε να βρούμε τα μεγέθη $\vec{E}, \vec{H}, \vec{D}$ και \vec{B} χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell. Θεωρούμε ότι το υλικό είναι μη μαγνητικό, συνεπώς θεωρείται ότι $\mu = \mu_0$ ($\mu_r = 1$)

Θεωρούμε ότι το πεδίο έχει τη μορφή μονοχρωματικού επιπέδου κύματος, δηλαδή ότι:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (4.24)$$

και

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (4.25)$$

όπου

•

$$\vec{k} = k_0 n \hat{s} \quad (4.26)$$

είναι το κυματόνισμα (wave vector) ή k -vector του επιπέδου κύματος,

- n ο δείκτης διάθλασης για τη συγκεκριμένη κατεύθυνση και
- \hat{s} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση διάδοσης.

(Τα μεγέθη αυτά έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, βλ. σχέσεις 3.44, 3.45)

Το c είναι προφανώς η ταχύτητα διάδοσης των H/M κυμάτων στον κενό χώρο (ταχύτητα του φωτός).

Αντικαθιστώντας τις 4.25 και 4.24 στις 2.3 και 2.4 έχουμε:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu_0 \vec{H}_0 \quad (4.27)$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (4.28)$$

Οι άλλες δύο εξισώσεις του Maxwell μας δίνουν:

$$\vec{k} \cdot \vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (4.29)$$

και

$$\vec{k} \cdot \vec{H}_0 = 0 \quad (4.30)$$

Από τις τελευταίες δύο σχέσεις προκύπτει ότι η ένταση \vec{H}_0 του μαγνητικού πεδίου και η διηλεκτρική μετατόπιση \vec{D}_0 είναι κάθετες στο κυματόνισμα \vec{k} , κάτι το οποίο φυσικά ίσχυε και στην περίπτωση των επιπέδων κυμάτων μέσα σε ιστροπικά υλικά.

Παίρνοντας το στροβιλισμό των δύο μελών της 4.27 και χρησιμοποιώντας την 4.28 μπορούμε να απαλείψουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου \vec{H}_0 :

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0) + k_0 \vec{E}_0 = 0 \quad (4.31)$$

Εφαρμόζοντας τη διανυσματική ταυτότητα 3.12 έχουμε ισοδύναμα:

$$\vec{k} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) - \vec{E}_0 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) + k_0 \bar{\epsilon} \vec{E}_0 = 0 \quad (4.32)$$

Θεωρούμε τώρα τις σχετικές συνιστώσες του κυματανύσματος \vec{k} , δηλαδή τις συνιστώσες του \vec{k} διαιρεμένες με το k_0 (και αντίστοιχα το σχετικό κυματάνυσμα \vec{k}_r)

$$\vec{k} = k_0 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = k_0 \vec{k}_r \quad (4.33)$$

Προφανώς, συγκρίνοντας με την 4.26 θα ισχύει:

$$\vec{k}_r = n \hat{s} \quad (4.34)$$

Επίσης, θεωρούμε τις συνιστώσες της έντασης του πεδίου \vec{E}_0 . Έτσι, αντικαθιστώντας στην 4.31, έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} \cdot [\alpha \quad \beta \quad \gamma] \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.35)$$

\Leftrightarrow

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta\alpha & \beta^2 & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & \gamma\gamma \end{bmatrix} - n^2 \mathcal{I} + \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - n^2 + \epsilon_{xx} & \alpha\beta + \epsilon_{xy} & \alpha\gamma + \epsilon_{xz} \\ \beta\alpha + \epsilon_{yx} & \beta^2 - n^2 + \epsilon_{yy} & \beta\gamma + \epsilon_{yz} \\ \gamma\alpha + \epsilon_{zx} & \gamma\beta + \epsilon_{zy} & \gamma^2 - n^2 + \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

\Leftrightarrow

$$\begin{bmatrix} -\beta^2 - \gamma^2 + \epsilon_{xx} & \alpha\beta + \epsilon_{xy} & \alpha\gamma + \epsilon_{xz} \\ \beta\alpha + \epsilon_{yx} & -\alpha^2 - \gamma^2 + \epsilon_{yy} & \beta\gamma + \epsilon_{yz} \\ \gamma\alpha + \epsilon_{zx} & \gamma\beta + \epsilon_{zy} & -\alpha^2 - \beta^2 + \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.37)$$

\Leftrightarrow

$$\bar{A}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

αφού

$$n^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad (4.38)$$

Η εξίσωση 4.37 είναι η βασική εξίσωση από την οποία προκύπτουν οι λύσεις για τα κυματάνυσμα \vec{k}_r και τα διανύσματα \vec{E}_0 και \vec{H} .

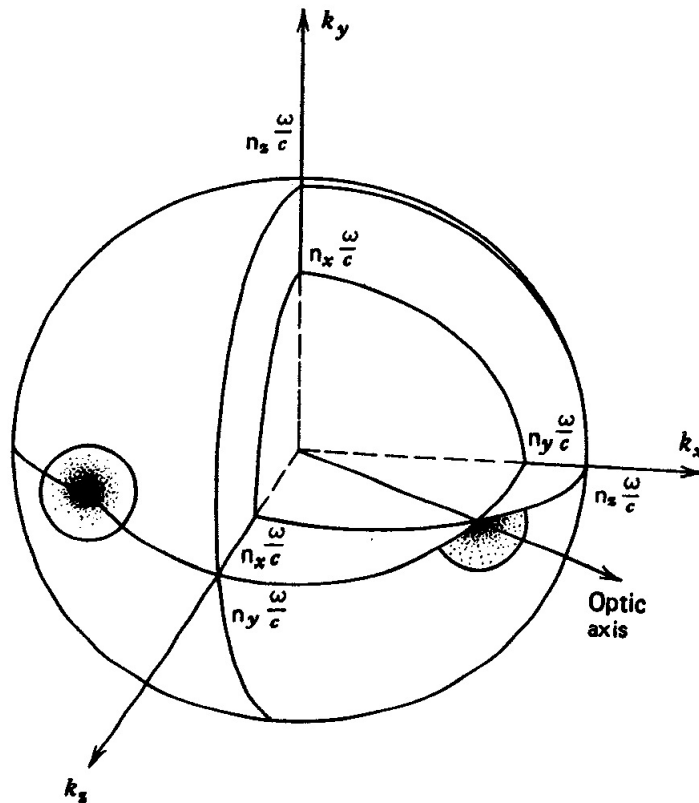
Μια προφανής τετριμμένη λύση για το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}_0 είναι η μηδενική. Από τη Γραμμική Άλγεβρα [25] γνωρίζουμε ότι για να υπάρξουν κι άλλες, μη τετριμμένες, λύσεις πρέπει ο πίνακας \bar{A} να είναι ιδιάζων δηλαδή να έχει ορίζουσα μηδενική. Αυτό οδηγεί σε μια εξίσωση για τις σχετικές συνιστώσες του κυματανύσματος \vec{k} .

$$\det(\bar{A}(\alpha, \beta, \gamma)) = 0 \quad (4.39)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα το σύνολο των πραγματικών τριάδων-λύσεων (α, β, γ) της 4.39 τότε μπορούμε να τις απεικονίσουμε στο χώρο. Το σχήμα που θα προκύψει σε αυτή την περίπτωση είναι μία διπλή επιφάνεια που μοιάζει με ελλειψοειδές (Σχήμα 4.2).

Η επιφάνεια αυτή ονομάζεται κυματο-επιφάνεια (wave-normal surface ή απλά normal surface [23]) (εναλλακτικά k -vector surface ή απλά k -surface) και ουσιαστικά χαρακτηρίζει κατά μοναδικό τρόπο (σε αντιστοιχία με το διηλεκτρικό τανυστή $\bar{\epsilon}$) ένα ομογενές (γραμμικό) ηλεκτρικά ανισοτροπικό υλικό.

Η κυματοεπιφάνεια αποτελείται από δύο επιφάνειες, την εσωτερική (inner) και την εξωτερική (outer) οι οποίες τέμνονται, εν γένει, σε τέσσερα σημεία. Αποδεικνύεται (λόγω της συμμετρίας του διηλεκτρικού τανυστή στο σύστημα των κυρίων αξόνων) ότι τα σημεία τομής είναι ανά δύο συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων. Οι δύο ευθείες που περνούν από την αρχή των αξόνων και τα τέσσερα αυτά σημεία ονομάζονται οπτικοί άξονες του κρυστάλλου.



Σχήμα 4.2: Η κυματο-επιφάνεια (normal surface) (Πηγή:[7])

Από την κυματοεπιφάνεια μπορούμε να δούμε για μία συγκεκριμένη κατεύθυνση διάδοσης

του επίπεδου κύματος ποιες είναι οι δυνατές πραγματικές τιμές-λύσεις της εξίσωσης 4.39 για το δείκτη διάθλασης n , μέτρου του σχετικού κυματανύσματος \vec{k}_r . Στη γενική, λοιπόν, περίπτωση υπάρχουν δύο δυνατά κυματανύσματα δεδομένης μιας κατεύθυνσης διάδοσης. Αυτά αντιστοιχούν σε διαφορετικές φασικές ταχύτητες ω/k του διαδιδόμενου κύματος. Στην περίπτωση, όμως, της διάδοσης κατά μήκος κάποιου οπτικού άξονα του κρυστάλλου η φασική ταχύτητα έχει μία τιμή.

Στην περίπτωση που το σύστημα αναφοράς ταυτίζεται με το κύριο σύστημα αξόνων του κρυστάλλου, και άρα ο διηλεκτρικός τανυστής είναι διαγώνιος, η εξίσωση 4.39 καταλήγει στην εξής μορφή:

$$\begin{bmatrix} -\beta^2 - \gamma^2 + \varepsilon_x & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \beta\alpha & -\alpha^2 - \gamma^2 + \varepsilon_y & \beta\gamma \\ \gamma\alpha & \gamma\beta & -\alpha^2 - \beta^2 + \varepsilon_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \quad (4.40)$$

η οποία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα \bar{A} με σχετική ευκολία. Έτσι, η εξίσωση 4.39 γίνεται:

$$\det(\bar{A}) = (\varepsilon_y - n^2)(\varepsilon_z - n^2)\alpha^2 + (\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_z - n^2)\beta^2 + (\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_y - n^2)\gamma^2 + (\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_y - n^2)(\varepsilon_z - n^2) = 0 \quad (4.41)$$

Η εξίσωση 4.41 μπορεί να γραφεί και σε μία πιο "κομψή" μορφή, στην περίπτωση που

$$n^2 \neq \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$$

(η ισότητα ισχύει όταν έχουμε διάδοση κατά μήκος των κυρίων ή των οπτικών αξόνων του κρυστάλλου). Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $(\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_y - n^2)(\varepsilon_z - n^2)$ έχουμε, λοιπόν την εξίσωση

$$\frac{\alpha^2}{n^2 - \varepsilon_x} + \frac{\beta^2}{n^2 - \varepsilon_y} + \frac{\gamma^2}{n^2 - \varepsilon_z} = 1 \quad (4.42)$$

η οποία είναι γνωστή ως η εξίσωση του Fresnel για τα ανισοτροπικά υλικά.

Αν τώρα θεωρήσουμε μία δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης τότε έχουμε σα δεδομένο το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{s} της εξίσωσης 4.34. Έτσι, αντικαθιστώντας στην εξίσωση 4.39 τις συνιστώσες α, β, γ με ns_x, ns_y, ns_z αντίστοιχα, η εξίσωση 4.39 καταλήγει σε μία δευτέρου βαθμού εξίσωση ως προς το n^2 της μορφής [24]:

$$An^4 + Bn^2 + C = 0 \quad (4.43)$$

Είναι, συνεπώς, πολύ εύκολο να βρούμε έτσι τις δύο τιμές n του δείκτη διάθλασης που προσδιορίζουν τα δύο δυνατά επίπεδα κύματα.

4.3 Ιδιοπολώσεις

Στην προηγούμενη ενότητα μιλήσαμε για τη λύση της εξίσωσης 4.39.

$$\det(\bar{A}(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$$

και μάλιστα είπαμε ότι για δεδομένη κατεύθυνση \hat{s} η εξίσωση αυτή γίνεται

$$\det(\bar{A}(n)) = 0 \quad (4.44)$$

Ποια είναι όμως η λύση για το διάνυσμα \vec{E}_0 ;

Όπως φαίνεται από την εξίσωση 4.37 τα διανύσματα - λύσεις του προβλήματος είναι ο πυρήνας (nullspace) του πίνακα \bar{A} .

Συνεπώς για να βρούμε το(τα) ιδιοδιάνυσμα(τα) \vec{E}_0 που αντιστοιχεί σε μία λύση-κυματάναυσμα \vec{k}_r της εξίσωσης 4.39 αντικαθιστούμε τη λύση αυτή (α, β, γ) στην εξίσωση 4.37 και βρίσκουμε τον πυρήνα του πίνακα \bar{A} . Κάθε ζευγάρι (\vec{k}_r, \vec{E}_0) αποτελεί έναν ιδιορυθμό ή απλά ρυθμό διάδοσης.

Στην περίπτωση πάλι που το σύστημα συντεταγμένων μας ταυτίζεται με το κύριο σύστημα του κρυστάλλου και αν και εφόσον δεν έχουμε διάδοση κατά μήκος κάποιου κυρίου ή κάπου οπτικού άξονα του κρυστάλλου και άρα $n^2 \neq \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, τότε αποδεικνύεται ότι προκύπτει ότι το ιδιοδιάνυσμα \vec{E}_0 που αντιστοιχεί στη λύση \vec{k}_r δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \frac{n^2 - \varepsilon_x}{\beta} \\ \frac{\gamma}{n^2 - \varepsilon_z} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

Από την εξίσωση 4.28 προκύπτει ότι

$$\vec{D}_0 = -\frac{n}{c} \hat{s} \times \vec{H}_0 \quad (4.46)$$

από την οποία βλέπουμε ότι το διάνυσμα \vec{D}_0 είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης \hat{s} και στο διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου \vec{H}_0 .

Αντίστοιχα, από την 4.27 προκύπτει ότι

$$\vec{H}_0 = \frac{n}{c} \hat{s} \times \vec{E}_0 \quad (4.47)$$

από την οποία βλέπουμε αντίστοιχα ότι το διάνυσμα \vec{H}_0 είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης \hat{s} και στο διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E}_0 . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα \vec{D}_0 , \vec{H}_0 και \hat{s} σχηματίζουν μαζί ένα τρισσορθογώνιο σύστημα αξόνων, ενώ το \vec{E}_0 βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με τα \vec{D}_0 και \vec{H}_0 χωρίς όμως να είναι κάθετο κατ'ανάγκη με το \vec{H}_0 (Σχήμα 4.3).

Το τελευταίο φαίνεται αν αντικαταστήσουμε την 4.47 στην 4.46, όπου και έχουμε ότι:

$$\vec{D}_0 = \frac{n^2}{c^2} (\vec{E}_0 - \hat{s} \cdot (\hat{s} \cdot \vec{E}_0)) \quad (4.48)$$

Η βαθμωτή ποσότητα $\hat{s} \cdot \vec{E}_0$ είναι ουσιαστικά η προβολή του διανύσματος \vec{E}_0 στην κατεύθυνση διάδοσης \hat{s} .

Σε κάθε ρυθμό (\vec{k}_r, \vec{E}_0) που ικανοποιεί την εξίσωση 4.37 αντιστοιχεί ένα ιδιοδιάνυσμα \vec{D}_0 και ένα \vec{E}_0 σύμφωνα με τη σχέση 4.4

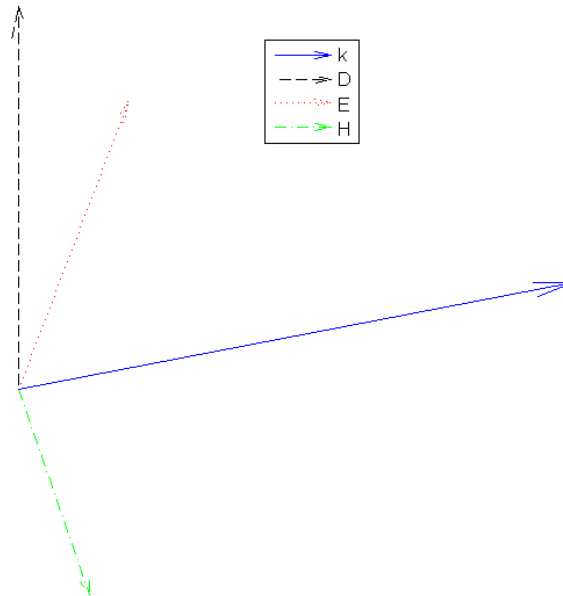
$$\vec{D} = \epsilon_0 \bar{\epsilon} \vec{E}$$

και τη σχέση 4.47

$$\vec{H}_0 = \frac{n}{c} \hat{s} \times \vec{E}_0$$

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα της αμοιβαιότητας του Lorentz [7] προκύπτει ότι για τα διανύσματα $\vec{D}_{01}, \vec{D}_{02}$ των δύο ιδιορυθμών ισχύει:

$$\vec{D}_{01} \cdot \vec{D}_{02} = 0 \quad (4.49)$$



Σχήμα 4.3: Προσανατολισμός διανυσμάτων \vec{D} , \vec{E} και \vec{H} σε σχέση με την κατεύθυνση διάδοσης \hat{s}

Άρα στην περίπτωση που είναι πραγματικά, τα δύο διανύσματα θα είναι κάθετα μεταξύ τους.

[Μην ξεχνούμε ότι όλα τα ιδιοδιανύσματα αυτά, καθώς και το \vec{k}_r , είναι εν γένει μιγαδικά, οπότε όλες οι γεωμετρικές έννοιες, καθώς και το Σχήμα 4.3) ισχύουν για την περίπτωση που τυγχάνουν να είναι πραγματικά]

4.4 Το ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης

Η ενεργειακή πυκνότητα του αποθηκευμένου ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (4.50)$$

Θεωρώντας σαν καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων το κύριο σύστημα αξόνων του κρυστάλλου και χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.4 έχουμε ότι:

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{\epsilon}^{-1} \vec{D} \cdot \vec{D} \quad (4.51)$$

Αν αναπτύξουμε το διάνυσμα \vec{D} στις συνιστώσες του η παραπάνω εξίσωση μπορεί να γραφεί:

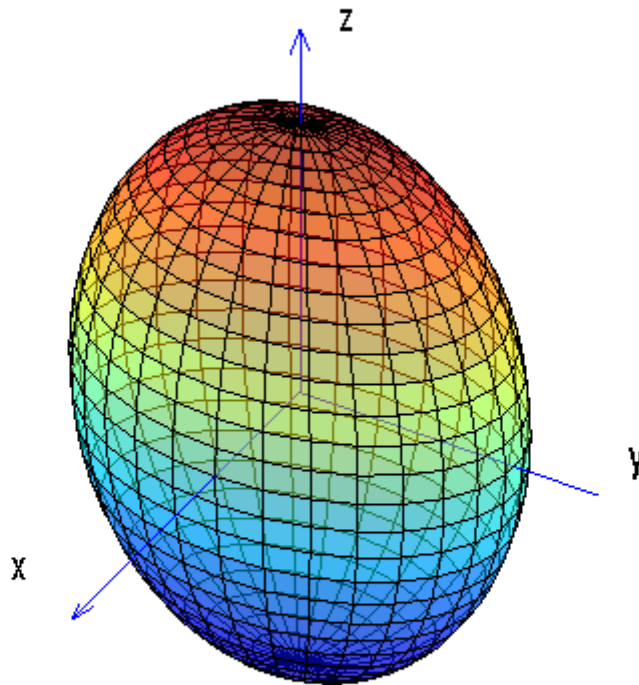
$$\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} = 2U_e \quad (4.52)$$

Αν απεικονίσουμε στο χώρο όλα τα διανύσματα \vec{D} που ικανοποιούν την εξίσωση 4.52 είναι φανερό ότι θα φτιαχτεί ένα ελλειψοειδές.

Αν θεωρήσουμε ότι $U_e = \frac{1}{2}$ τότε θα έχουμε το γεωμετρικό τόπο όλων των \vec{D} που έχουν ενέργεια $\frac{1}{2}$. Η εξίσωση 4.52 τότε θα είναι

$$\frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} = 1 \quad (4.53)$$

Το ειδικό αυτό ελλειψοειδές ονομάζεται *ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης* (*index ellipsoid* ή *optical indicatrix*) (βλ. σχήμα 4.4) Εμείς θα το ονομάσουμε, χάριν συντομίας και σε αντιστοιχία με την κυματοεπιφάνεια, *κυματοελλειψοειδές*. Άλλωστε, αντίστοιχος όρος ("ellipsoid of wavenormals") χρησιμοποιείται και στο [23]



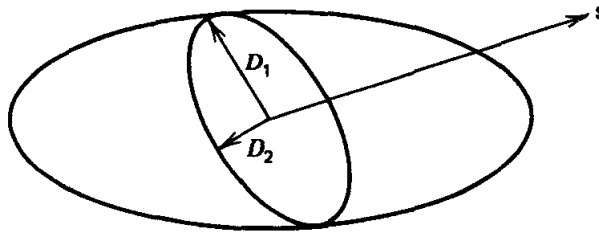
Σχήμα 4.4: Κυματοελλειψοειδές για $\varepsilon_x = 1$, $\varepsilon_y = 1.5$ και $\varepsilon_z = 2$

Το ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης είναι, όπως η κυματοεπιφάνεια, χαρακτηριστικό του κρυστάλλου και αποτελεί ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο καθότι μας επιτρέπει να βρούμε για μία δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης \hat{s} τους δύο ιδιορυθμούς διάδοσης, όσον αφορά δηλαδή το δείκτη

διάθλασης n και τη διηλεκτρική μετατόπιση \vec{D} .

Η διαδικασία που ακολουθούμε για την εύρεση των ιδιορρυθμών είναι η εξής (βλ. σχήμα 4.5):

Θεωρούμε το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης \hat{s} . Η τομή του επιπέδου αυτού με το κυματοελλειψοειδές είναι μια έλλειψη. Οι δύο άξονες αυτής της έλλειψης είναι ίσοι σε μήκος με τους δύο δείκτες διάθλασης n , ενώ η διεύθυνσή τους ταυτίζεται με τη διεύθυνση των αντιστοίχων ιδιοπολώσεων \vec{D} .



Σχήμα 4.5: Το κυματοελλειψοειδές (Πηγή: [7])

Σε επόμενη ενότητα θα δούμε διάφορα κυματοελλειψοειδή πιο αναλυτικά.

4.5 Φασική ταχύτητα και διάνυσμα Poynting

Επικεντρωνόμαστε στον έναν από τους δύο ρυθμούς. Η φασική ταχύτητα θα είναι

$$\vec{v}_p = \frac{\omega}{k} \hat{s} = \frac{\omega}{k_0 n} \hat{s} \quad (4.54)$$

δηλαδή θα έχει την κατεύθυνση του κυματανύσματος \vec{k} και θα είναι αντιστρόφως ανάλογη σε μέτρο με αυτό.

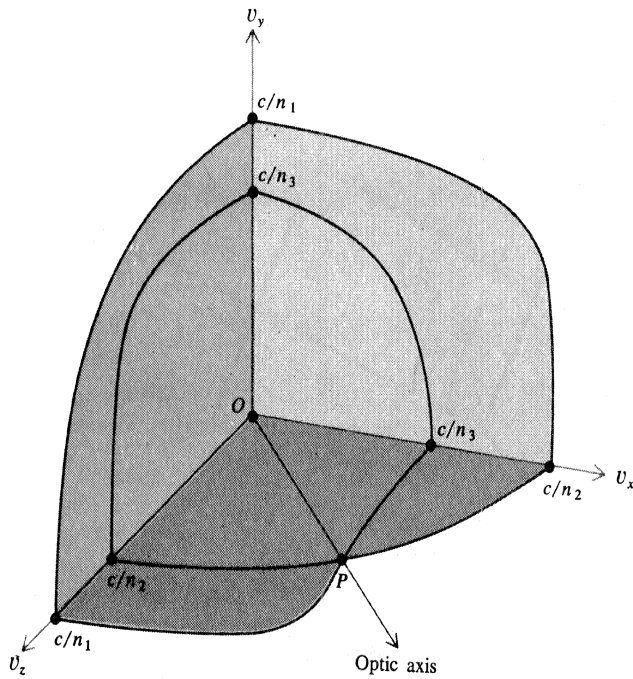
Αν σχεδιάσουμε τις δύο φασικές ταχύτητες των δύο ιδιορρυθμών για κάθε διεύθυνση διάδοσης μέσα στον κρύσταλλο θα προκύψει μια άλλη διπλή επιφάνεια (σε αντιστοιχία με την κυματοεπιφάνεια), η οποία ονομάζεται επιφάνεια φασικής ταχύτητας (ray velocity surface) [3]

Η επιφάνεια αυτή είναι παρόμοια με την κυματοεπιφάνεια. Η ουσιώδης διαφορά τους είναι ότι η εξωτερική επιφάνειά της (ιδιορρυθμός μεγαλύτερης ταχύτητας) αντιστοιχεί στην εσωτερική επιφάνεια της κυματοεπιφάνειας και αντίστοιχα η εσωτερική επιφάνειά της (ιδιορρυθμός μικρότερης ταχύτητας) αντιστοιχεί στην εξωτερική της άλλης.

Όσον αφορά το διάνυσμα Poynting, θα ισχύει, όπως γνωρίζουμε:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (4.55)$$

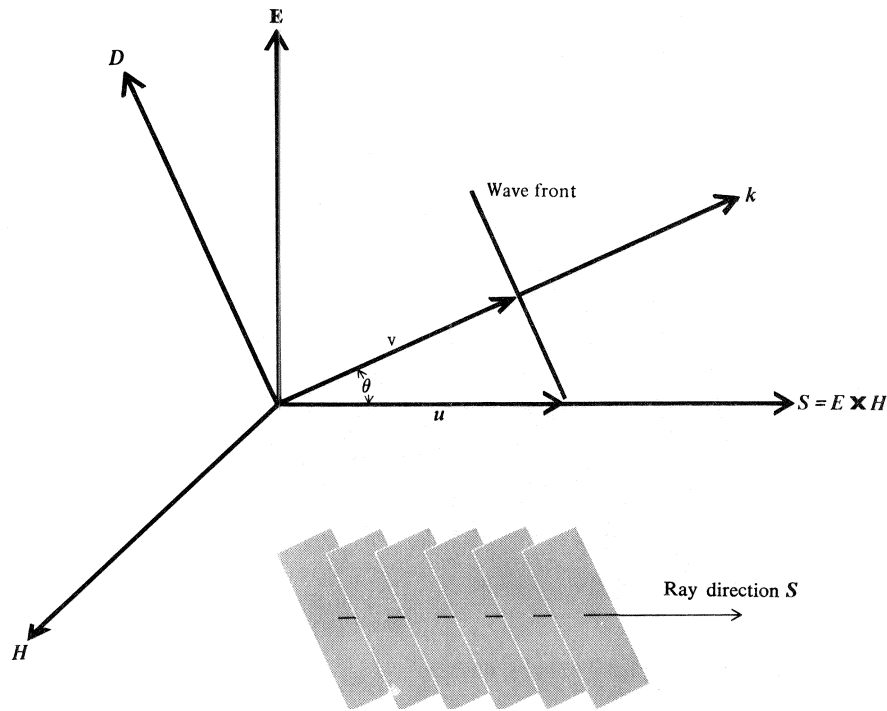
Όμως, όπως δείξαμε παραπάνω (ενότητα 4.3) γενικά έχουμε ότι τα \vec{D}_0 και \vec{E}_0 , και άρα και τα \vec{D} και \vec{E} δεν είναι συγγραμμικά. Αυτό συνεπάγεται ότι το διάνυσμα Poynting \vec{S} δε θα είναι συγγραμμικό με το την κατεύθυνση \hat{s} του κύματος. Όμως το διάνυσμα Poynting αντιπροσωπεύει τη διεύθυνση και το ρυθμό διάδοσης της ενέργειας του κύματος. Από αυτό προκύπτει κάτι πολύ σημαντικό:



Σχήμα 4.6: Η επιφάνεια φασικής ταχύτητας (Πηγή: [3])

Σε ένα ανισοτροπικό υλικό η ουσιαστική διεύθυνση διάδοσης της ενέργειας του κύματος δεν ταυτίζεται με τη διεύθυνση της φασικής ταχύτητας, δηλαδή της ταχύτητας με την οποία "ταξιδεύουν" τα μέτωπα, δηλαδή τα επίπεδα σταθερής φάσης του κύματος (βλ. Σχήμα 4.7).

Αυτό, δημιουργεί διάφορα αξιοσημείωτα φαινόμενα όπως διάθλαση ακόμα και σε κάθετη πρόσπτωση, κωνική διάθλαση κλπ.



Σχήμα 4.7: Επίπεδα σταθερής φάσης και διάδοση της ενέργειας του επίπεδου κύματος ενός ρυθμού (Πηγή: [3])

4.6 Διπλή Διάθλαση

Έστω ότι έχουμε επίπεδο μονοχρωματικό H/M κύμα διαδιδόμενο μέσα σε ιστροπικό μέσο (αέρας) και το οποίο προσπίπτει στην επίπεδη επιφάνεια ανιστροπικού (ή όπως είπαμε, για τις οπτικές συχνότητες, διπλοθλαστικού) υλικού (κρυστάλλου).

Αντίστοιχα με την περίπτωση της επαφής ιστροπικού-ιστροπικού (βλ. 3.4) θεωρούμε ότι το επίπεδο ανακλάται, κατά ένα μέρος, διαδιδόμενο ως επίπεδο κύμα προς τα πίσω εντός του ιστροπικού μέσου, και κατά το υπόλοιπο, διαθλάται, διαδιδόμενο ως επίπεδο κύμα στο ανιστροπικό μέσο.

Εφαρμόζοντας σε αυτήν την περίπτωση τον κανόνα του ταιριάσματος των φάσεων έχουμε πάλι ότι οι εφαπτομενικές συνιστώσες των κυματανυσμάτων πρέπει να είναι ίσες στη διαχωριστική επιφάνεια:

$$\vec{k}_{inc,t} = \vec{k}_{ref,t} = \vec{k}_{tra,t} \quad (4.56)$$

(όπου ο δείκτης t συμβολίζει την εφαπτομενική συνιστώσα)

Λόγω όμως της διπλής φύσης της κυματοεπιφάνειας (βλ. ενότητα 4.2) υπάρχουν εν γένει τέσσερα διαφορετικά κυματανύσματα-λύσεις για το διαδιδόμενο επίπεδο κύμα μέσα στο ανιστροπικό μέσο με προβολή ίδια με αυτή του κυματανύσματος του προσπίπτοντος κύματος. Αλγεβρικά, αυτό προκύπτει λύνοντας την εξίσωση 4.39

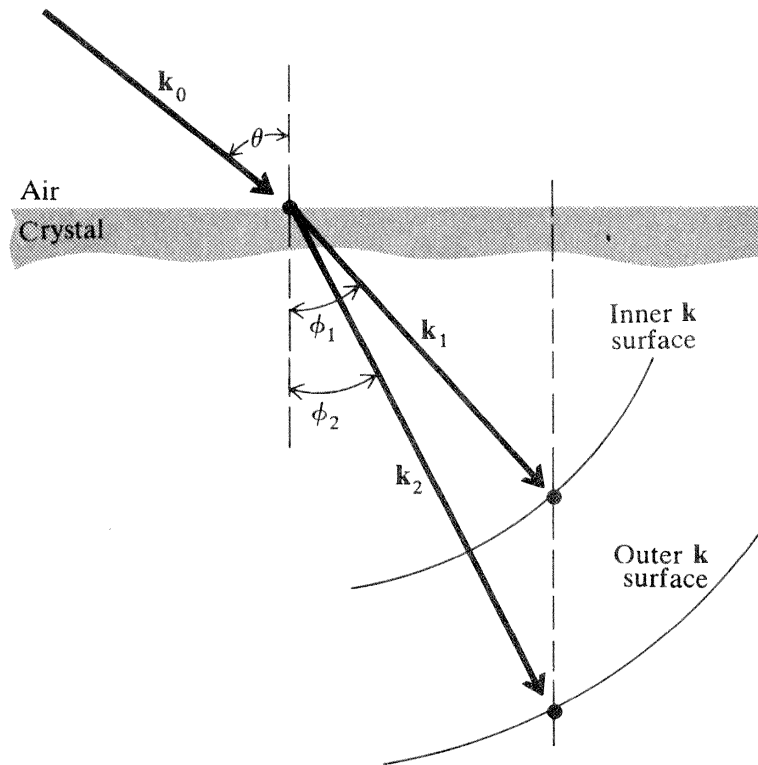
$$\det(\bar{A}(\alpha, \beta, \gamma)) = 0$$

Αν θεωρήσουμε π.χ. σαν διαχωριστική επιφάνεια την $x = 0$ τότε τα β, γ είναι δεδομένα και έτσι έχουμε μια εξίσωση τέταρτου βαθμού ως προς α (που έχει τέσσερις λύσεις). Από αυτά,

τα δύο αντιστοιχούν σε κύμα κατευθυνόμενο προς το ιστροπικό μέσο, δηλαδή ανακλώμενα και άρα τα απορρίπτουμε θεωρώντας ότι το ανισοτροπικό μέσο εκτείνεται απεριόριστα (και άρα δεν έχουμε περαιτέρω ανάκλαση του διαθλώμενου κύματος). Συνεπώς, έχουμε δύο διαθλώμενα επίπεδα κύματα, το ένα να αντιστοιχεί στην εσωτερική και το άλλο να αντιστοιχεί στην εξωτερική επιφάνεια της κυματοεπιφάνειας, και άρα δύο γωνίες διάθλασης (βλ. σχήμα 4.8)!

$$k_{inc} \sin \theta_{inc} = k_{tra,1} \sin \theta_{tra,1} = k_{tra,2} \sin \theta_{tra,2} \quad (4.57)$$

Η εξίσωση 4.57 μοιάζει με το νόμο του Snell. Παρόλαυτά, τα $k_{tra,1}, k_{tra,2}$ δεν είναι (εν γένει) σταθερά, παρά μόνο αν οι προβολές των δύο επιφανειών της κυματοεπιφάνειας στο επίπεδο πρόσπτωσης είναι κύκλοι (όπως συμβαίνει, όπως θα δούμε στη συνέχεια, στη μία επιφάνεια ενός μονοαξονικού κρυστάλλου).



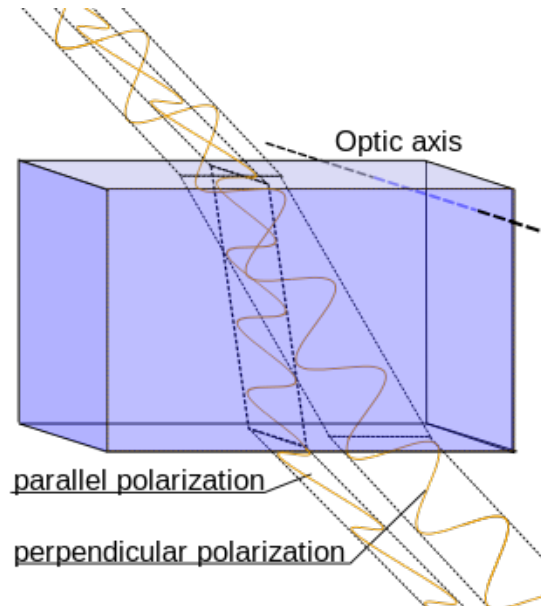
Σχήμα 4.8: Διπλή Διάθλαση (διεπαφή ιστροπικού - ανισοτροπικού μέσου) (Πηγή: [3])

Τα δύο διαθλώμενα επίπεδα κύματα έχουν συγκεκριμένη πόλωση, δηλαδή τα διανύσματα $\vec{E}_{tra,1}, \vec{E}_{tra,2}$ έχουν συγκεκριμένη διεύθυνση το καθένα, όπως προκύπτει από την εξίσωση 4.37 (βλ. σχήμα 4.9)

$$\bar{A}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0$$

Το συνιστάμενο διαθλώμενο κύμα αποτελεί γραμμικό συνδυασμό (με κατάλληλα πλάτη που

προκύπτουν και αυτά από τις οριακές συνθήκες) των δύο παραπάνω διαθλωμένων επιπέδων κυμάτων.



Σχήμα 4.9: Διπλή Διάθλαση - Πόλωση της κάθε διαθλωμένης συνιστώσας (Πηγή: [10])

4.6.1 Διπλή Διάθλαση σε κάθετη πρόσπτωση

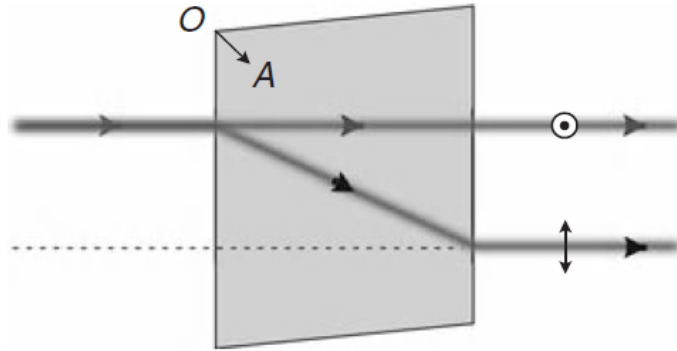
Στην περίπτωση που η γωνία πρόσπτωσης είναι μηδενική, οι δύο γωνίες διάθλασης (καθώς και η γωνία ανάκλασης, φυσικά) είναι επίσης μηδενικές (όπως φαίνεται και από την εξίσωση 4.57) Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε πάλι δύο διαφορετικά διαθλωμένα επίπεδα κύματα αλλά τα δύο κυματανύσματα $k_{tra,1}$, $k_{tra,2}$ έχουν την ίδια διεύθυνση.

Ωστόσο, δεν συμβαίνει απαραίτητα το ίδιο με το διάνυσμα Poynting. Επειδή η κάθε συνιστώσα του διαθλωμένου κύματος έχει διαφορετική ιδιοπόλωση, τα διανύσματα Poynting μπορεί να έχουν διαφορετικές διευθύνσεις σε σχέση με τη διεύθυνση των κυματανυσμάτων (που είναι η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια) αλλά και μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό γίνεται αντιληπτό, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 4.5 αν θεωρήσουμε ότι αντί του ιδανικού επιπέδου κύματος έχουμε ακτινοβολία περιορισμένου εύρους (όπως π.χ. μία λεπτή δέσμη φωτός εκπεμπόμενη από μία πηγή laser). Σε αυτήν την περίπτωση η ενέργεια της κάθε συνιστώσας διαθλάται (εν γένει) προς διαφορετική διεύθυνση ακόμα και όταν η πρόσπτωση είναι κάθετη (σχήμα 4.10).

4.7 Κατηγοριοποίηση κρυστάλλων

4.7.1 Μονοαξονικοί κρύσταλλοι

Έστω ότι τα δύο από τα τρία διαγώνια στοιχεία του ταυιστή διηλεκτρικής επιτρεπτότητας στο κύριο σύστημα αξόνων του κρυστάλλου είναι ίσα, για παράδειγμα το ϵ_x με το ϵ_y , δηλαδή:



Σχήμα 4.10: Διπλή Διάθλαση σε κάθετη πρόσπτωση (Πηγή: [11])

$$\begin{aligned}\varepsilon_x = \varepsilon_y &:= n_o^2 \\ \varepsilon_z &:= n_e^2\end{aligned}\quad (4.58)$$

Έτσι:

$$\bar{\varepsilon}_0 = \begin{bmatrix} n_o^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_e^2 \end{bmatrix}\quad (4.59)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση 4.38

$$n^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

και τη σχέση 4.58 στη σχέση 4.41

$$\begin{aligned}\det(\bar{A}) = (\varepsilon_y - n^2)(\varepsilon_z - n^2)\alpha^2 + (\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_z - n^2)\beta^2 + (\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_y - n^2)\gamma^2 \\ + (\varepsilon_x - n^2)(\varepsilon_y - n^2)(\varepsilon_z - n^2) = 0\end{aligned}\quad (4.60)$$

έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{n_e^2} + \frac{\gamma^2}{n_o^2} - 1 \right) \left(\frac{n^2}{n_o^2} - 1 \right)\quad (4.61)$$

Η κυματοεπιφάνεια αποτελείται συνεπώς από τις εξής δύο επιφάνειες:

- Ένα σφαιροειδές (ή ελλειψοειδές εκ περιστροφής)

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{n_e^2} + \frac{\gamma^2}{n_o^2} = 1\quad (4.62)$$

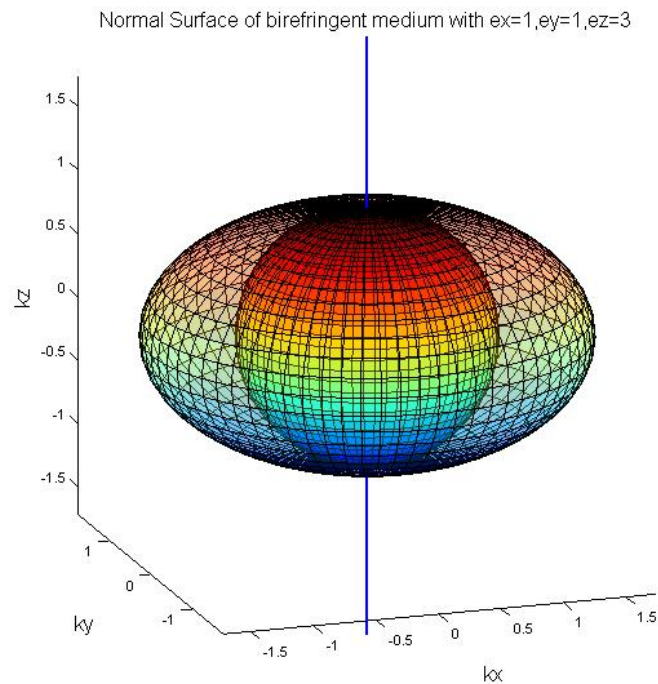
και μία

- σφαίρα

$$\frac{n^2}{n_o^2} = 1\quad (4.63)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι η λύση $n = n_o$ υπάρχει πάντοτε, ανεξάρτητα δηλαδή από την κατεύθυνση διάδοσης, ακριβώς όπως και σε ένα ιστροπικό υλικό. Για το λόγο αυτό, το κύμα που αντιστοιχεί στη λύση αυτή ονομάζεται *συνήθης* (*ordinary*), σε αντίθεση με την άλλη λύση που είναι μεταβλητή και ονομάζεται *ιδιάζουσα* (*extraordinary*) (εξ ου και οι συμβολισμοί n_o^2 και n_e^2)

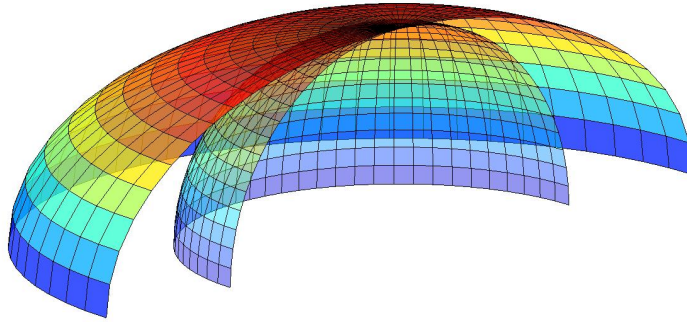
Οι δύο επιφάνειες τέμνονται σε δύο σημεία επί του άξονα του z . Αυτό φαίνεται αν θέσουμε $\alpha = \beta = 0$. Στα σημεία αυτά έχουμε σαν διπλή λύση το $n = n_o$. Συνεπώς, υπάρχει ένας μόνο οπτικός άξονας και για το λόγο αυτό αυτά τα ανιστροπικά υλικά ονομάζονται *μονοαξονικά* (*uniaxial*). Στο σχήμα 4.11 φαίνεται η κυματοεπιφάνεια ενός μονοαξονικού κρυστάλλου με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2 = 1$ και $\varepsilon_z = n_e^2 = 3$ (με την μπλε ευθεία απεικονίζεται ο οπτικός άξονας).



Σχήμα 4.11: Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2 = 1$ και $\varepsilon_z = n_e^2 = 3$ - Κυματοεπιφάνεια

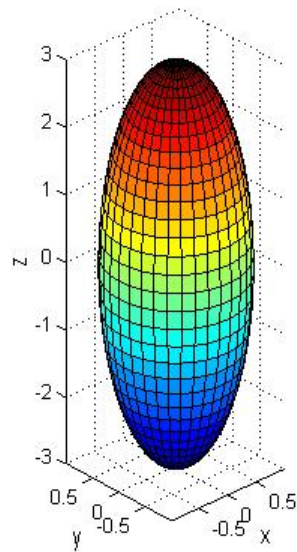
Στο σχήμα 4.12 φαίνεται μέρος της επιφάνειας έπειτα από τομή της από τα επίπεδα $z = 0$ και $y = 0$.

Όσον αφορά στο ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης, αυτό θα αποτελεί μία μακρόστενη έλλειψη εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα z (βλ. σχήμα 4.13). Είναι φανερό από αυτό ότι το διάνυσμα \vec{D}_o του ordinary ρυθμού θα ανήκει πάντα στο επίπεδο $z = 0$ και θα είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζουν η διεύθυνση διάδοσης του κύματος με τον οπτικό άξονα (άξονα z). Επιπλέον, επειδή $\varepsilon_x = \varepsilon_y$ θα ισχύει ότι το αντίστοιχο διάνυσμα \vec{E}_o θα είναι παράλληλο στο \vec{D}_o .



Σχήμα 4.12: Uniaxial κρύσταλλος με $\epsilon_x = \epsilon_y = 1$ και $\epsilon_z = 3$ - Τομή κυματοεπιφάνειας

Index ellipsoid of birefringent medium with $\epsilon_x = \epsilon_y = 1$, $\epsilon_z = 3$

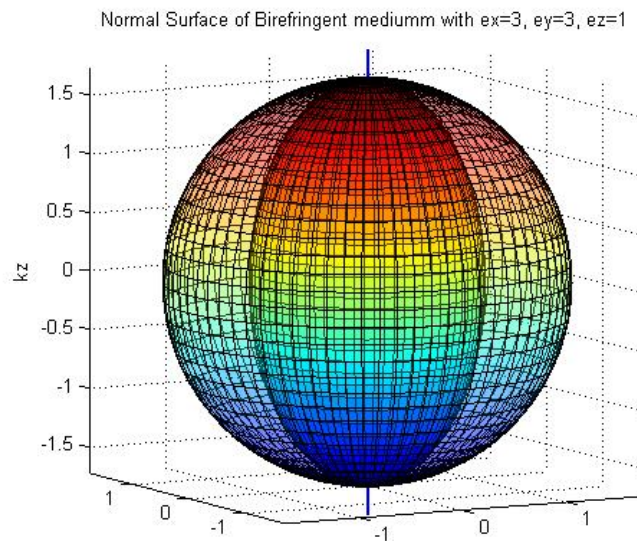


Σχήμα 4.13: Uniaxial κρύσταλλος με $\epsilon_x = \epsilon_y = n_o^2 = 1$ και $\epsilon_z = n_e^2 = 3$ - Ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης

Θετικοί και Αρνητικοί μοναξονικοί κρύσταλλοι

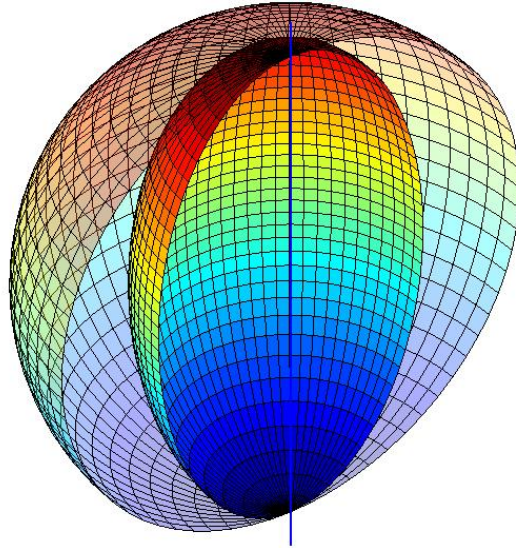
Στο παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω είχαμε $n_o < n_e$. Αυτό είχε σαν αποτέλεσμα το ordinary κύμα να διαδίδεται γρηγορότερα από το extraordinary. Αυτού του είδους οι κρύσταλλοι λέγονται *θετικά μοναξονικοί*. Αντίθετα, αν $n_o > n_e$ τότε έχουμε ένα *αρνητικά μοναξονικό μέσο*. Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι τόσο η κυματοεπιφάνεια όσο και το ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης θα έχουν διαφορετική μορφή αφού δεν έχουμε πλέον μακρόστενα αλλά πεπλατυσμένα σφαιροειδή.

Στα σχήματα 4.14, 4.16 και 4.15 φαίνονται οι αντίστοιχες χαρακτηριστικές επιφάνειες ενός κρυστάλλου με $\epsilon_x = \epsilon_y = n_o^2 = 3$ και $\epsilon_z = n_e^2 = 1$

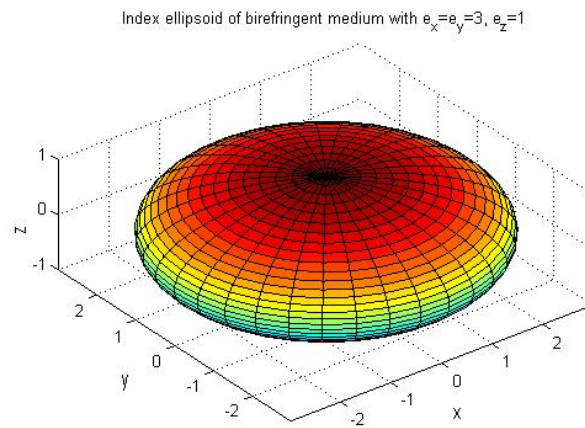


Σχήμα 4.14: Uniaxial κρύσταλλος με $\epsilon_x = \epsilon_y = n_o^2 = 3$ και $\epsilon_z = n_e^2 = 1$ - Κυματοεπιφάνεια

Στο σχήμα 4.15 φαίνεται η τομή της επιφάνειας από το επίπεδο $y = 0$.



Σχήμα 4.15: Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 3$ και $\varepsilon_z = 1$ - Τομή κυματοεπιφάνειας



Σχήμα 4.16: Uniaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = \varepsilon_y = n_o^2 = 3$ και $\varepsilon_z = n_e^2 = 1$ - Ελλειψοειδές του δείκτη διάθλασης

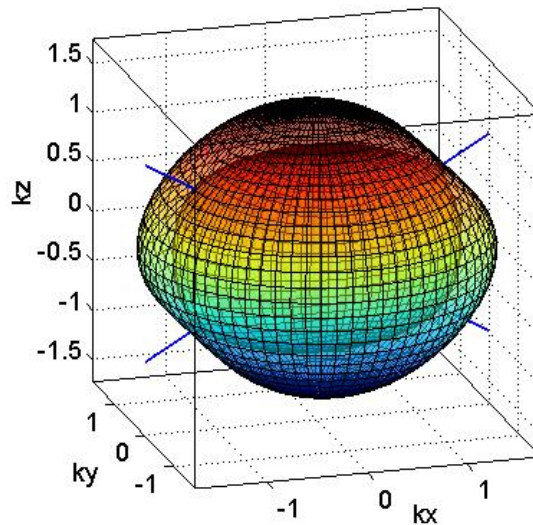
4.7.2 Διαξονικοί κρύσταλλοι

Στη γενικότερη περίπτωση τώρα που $\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$ τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα. Θεωρούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι ισχύει

$$\varepsilon_x < \varepsilon_y < \varepsilon_z \quad (4.64)$$

Η κυματοεπιφάνεια τότε π.χ. για $\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 2, \varepsilon_z = 3$ θα είναι όπως φαίνεται στο σχήμα 4.17 (πάλι με τις μπλε ευθείες επισημαίνονται οι οπτικοί άξονες).

Normal Surface of birefringent medium with $\varepsilon_x=1, \varepsilon_y=2, \varepsilon_z=3$



Σχήμα 4.17: Biaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = 1, \varepsilon_y = 2$ και $\varepsilon_z = 3$ - Κυματοεπιφάνεια

Αν τώρα θέσουμε $\beta = 0$ στη σχέση 4.41 προκύπτουν οι εξής δύο εξισώσεις:

- Μία εξίσωση κύκλου

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \varepsilon_y \quad (4.65)$$

και

- μία εξίσωση έλλειψης

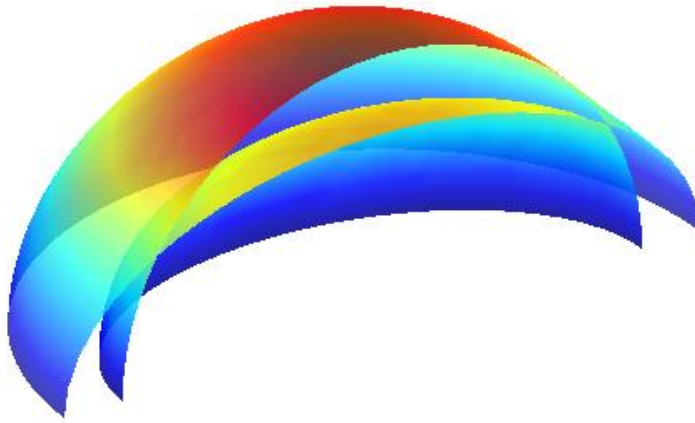
$$\frac{\alpha^2}{\varepsilon_x} + \frac{\gamma^2}{\varepsilon_x} = 1 \quad (4.66)$$

Λόγω της 4.64, είναι φανερό ότι ο κύκλος και η έλλειψη θα τέμνονται σε τέσσερα σημεία. Πρόκειται για τα σημεία από τα οποία διέρχονται οι οπτικοί άξονες του κρυστάλλου. Συνεπώς, οι οπτικοί άξονες θα είναι δύο και θα βρίσκονται στο επίπεδο $y = 0$. Ομοίως, προκύπτει ότι στη γενική περίπτωση (πέραν δηλαδή της σχέσης 4.64) οι οπτικοί άξονες θα βρίσκονται στο επίπεδο που αντιστοιχεί στο στοιχείο που βρίσκεται "ανάμεσα" αν διατάξουμε σε σειρά τα $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η γωνία που σχηματίζουν οι οπτικοί άξονες με τον άξονα z δίνεται από τη σχέση

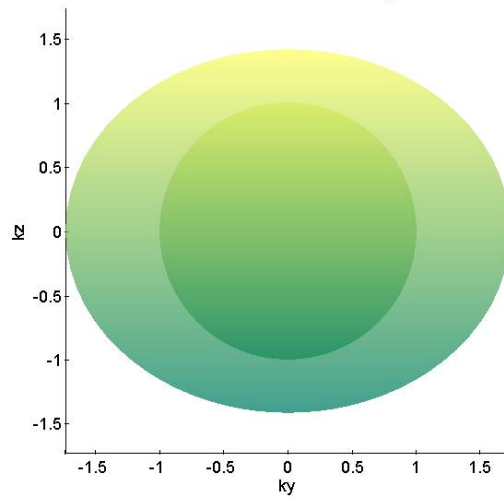
$$\tan^2 \theta = \frac{\varepsilon_z(\varepsilon_y - \varepsilon_x)}{\varepsilon_x(\varepsilon_z - \varepsilon_y)} \quad (4.67)$$

Στο σχήμα 4.18 φαίνεται ένα τεταρτημόριο της κυματοεπιφάνειας αν αυτή τμηθεί από τα επίπεδα $y = 0$ και $z = 0$ ενώ στο σχήμα 4.19 φαίνονται διάφορες κύριες τομές της παράλληλες με τους άξονες xyz .



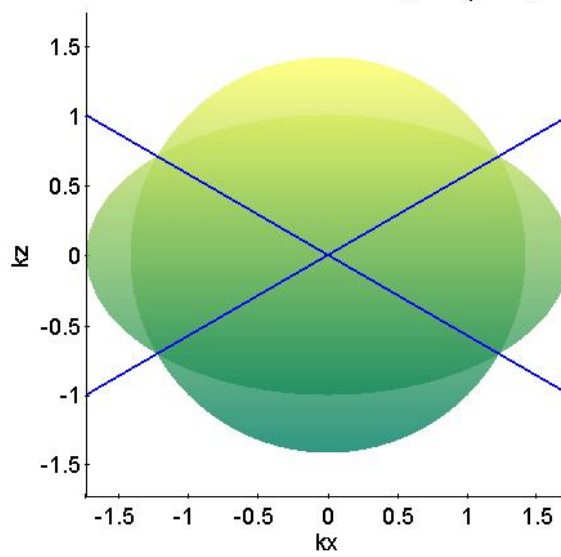
Σχήμα 4.18: Biaxial κρύσταλλος με $\varepsilon_x = 1$, $\varepsilon_y = 2$ και $\varepsilon_z = 3$ - Τεταρτημόριο Κυματοεπιφάνειας (τομή κατά $y = 0, z = 0$)

Normal Surface of birefringent medium with $\epsilon_x=1, \epsilon_y=2, \epsilon_z=3$ - x Intersection



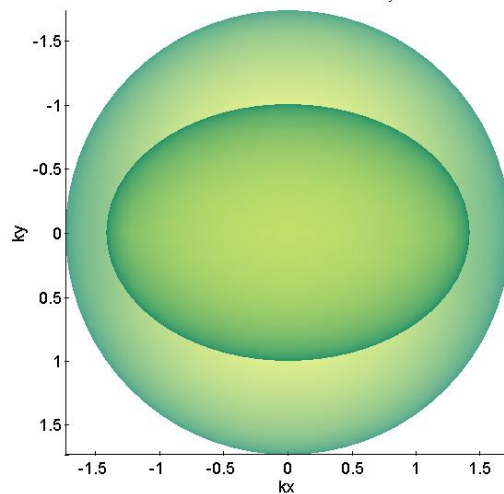
(α') Τομή $x = 0$

Normal Surface of birefringent medium with $\epsilon_x=1, \epsilon_y=2, \epsilon_z=3$ - y Intersection



(β') Τομή $y = 0$

Normal Surface of birefringent medium with $\epsilon_x=1, \epsilon_y=2, \epsilon_z=3$ - z Intersection



(γ') Τομή $z = 0$

Σχήμα 4.19: Βiaxial κρύσταλλος με $\epsilon_x = 1, \epsilon_y = 2$ και $\epsilon_z = 3$ - Τομές κυματοεπιφάνειας

Κεφάλαιο 5

Ανάκλαση - Διάθλαση από Στοιίβα Ανισοτροπικών Στρωμάτων

5.1 Διατύπωση του H/M προβλήματος

Θεωρούμε ένα βασικό καρτεσιανό σύστημα αξόνων xyz με τον άξονα των x οριζόντιο και με τα αυξανόμενα x προς τα δεξιά. Κατά μήκος του άξονα x θεωρούμε διατεταγμένα μία σειρά από παράλληλα συνεχόμενα στρώματα ανισοτροπικών διηλεκτρικών υλικών (κρυστάλλων, αν πρόκειται για οπτικές συχνότητες), που έχουν τις διαχωριστικές επιφάνειές τους παράλληλες στο επίπεδο $y - z$. Κάθε στρώμα θεωρούμε ότι εκτείνεται απεριόριστα κατά μήκος των αξόνων y και z , ενώ σαν διηλεκτρικό θεωρούμε ότι είναι γραμμικό και ομοιογενές, χωρίς χωρική διασπορά και χωρίς απώλειες και ότι έχει τους κύριους άξονές του (ως ανισοτροπικό) προσανατολισμένους σε μια αυθαίρετη κατεύθυνση. Συνεπώς ο ταυιστής διηλεκτρικής επιτρεπτότητας στο βασικό σύστημα αξόνων δεν είναι, γενικά, διαγώνιος. (Εφόσον δεν έχει απώλειες τότε ο διηλεκτρικός ταυιστής θα είναι ερμιτιανός και άρα θα διαγωνοποιείται, δηλαδή θα προσδιορίζεται ισοδύναμα από τον αντίστοιχο διαγώνιο πίνακα στο κύριο σύστημα αξόνων και τον προσανατολισμό του συστήματος αξόνων.)

Αριθμούμε τα στρώματα από το 1 μέχρι το N ξεκινώντας από αυτό που εκτείνεται στα χαμηλότερα x (δηλαδή το αριστερότερο). Με βάση την αρίθμηση αυτή, συμβολίζουμε τα πάχη τους d_1 έως d_N .

Θεωρούμε την αρχή των αξόνων του κυρίου συστήματος στη διαχωριστική επιφάνεια του στρώματος 1, που βρίσκεται προς τα χαμηλότερα x (δηλαδή την αριστερή).

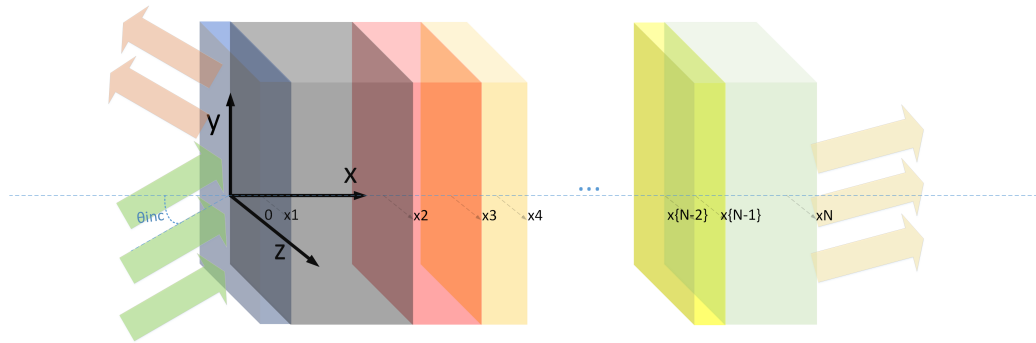
Συνεπώς η διάταξη της στοιίβας των ανισοτροπικών στρωμάτων έχει ως εξής (βλ. και σχήμα 5.1):

$$\begin{aligned}x \in [0, x_1): & \quad \text{Layer 1} \\x \in [x_1, x_2): & \quad \text{Layer 2} \\& \quad \dots \\x \in [x_{N-1}, x_N): & \quad \text{Layer } N\end{aligned}$$

Στην περιοχή $x \in (-\infty, 0)$ (ημιάπειρος χώρος) θεωρούμε ότι υπάρχει ιστροπικό υλικό (π.χ. κενό ή αέρας) το οποίο ονομάζουμε μέσο εισόδου. Στην περιοχή $x \in [x_N, +\infty)$ θεωρούμε πάλι ότι υπάρχει ιστροπικό υλικό και το ονομάζουμε μέσο εξόδου.

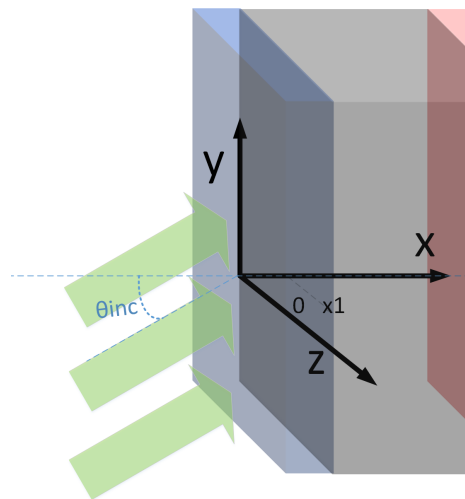
Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι τόσο τα μέσα εισόδου και εξόδου όσο και τα ανισοτροπικά στρώματα είναι μη μαγνητικά, συνεπώς ισχύει παντού $\mu_r = 1$.

82ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΑΝΑΚΛΑΣΗ - ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΑΠΟ ΣΤΟΙΒΑ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΚΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ



Σχήμα 5.1: Διάταξη του προβλήματος (επάλληλα διαδοχικά ανισοτροπικά στρώματα)

Θεωρούμε ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα οδεύον μέσα στο μέσο εισόδου με κατεύθυνση προς τα αυξανόμενα x . Το κύμα αυτό προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ του μέσου εισόδου και του στρώματος 1 υπό γωνία θ_{inc} (γωνία πρόσπτωσης) σε σχέση με την κάθετη στην διαχωριστική επιφάνεια (βλ. σχήμα 5.2).



Σχήμα 5.2: Προσπίπτον αρμονικό επίπεδο κύμα

Θεωρούμε ότι το επίπεδο πρόσπτωσης είναι το επίπεδο xy . Η παραδοχή αυτή γίνεται χωρίς βλάβη της γενικότητας, αφού στην περίπτωση που το επίπεδο πρόσπτωσης είναι διαφορετικό, το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το δικό μας, εφόσον στραφούν κατάλληλα οι κύριοι άξονες των ανισοτροπικών στρωμάτων (που όπως είπαμε θεωρούμε ότι έχουν αυθαίρετο προσανατολισμό). Συνεπώς, το κυματόνυσμα \vec{k}_{inc} του προσπίπτοντος αυτού κύματος θα έχει μόνο x και y συνιστώσες, δηλαδή

$$\vec{k} = k_0 \begin{bmatrix} a_{inc} \\ b_{inc} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

όπου $k_0 = \omega/c = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

Επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο (ένταση ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} και ένταση μαγνητικού πεδίου \vec{H}) καθώς και τη μέση ηλεκτρομαγνητική ισχύ (διάνυσμα Poynting) σε όλο το χώρο. Βάσει αυτών επιθυμούμε, επιπλέον, να υπολογίσουμε την Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα (Ανακλώμενη/Διαθλώμενη ισχύς διά την Προσπίπτουσα ισχύ), και τους συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης για κάθε περίπτωση πόλωσης.

Δεδομένα (Παράμετροι) του προβλήματος

Πιο συγκεκριμένα, ως δεδομένα του προβλήματος έχουμε τα εξής:

- πάχη στρωμάτων d_i
- διηλεκτρικός ταυυστής κάθε στρώματος στο κύριο σύστημα αξόνων του (διαγώνια στοιχεία) $\epsilon_x^l, \epsilon_y^l, \epsilon_z^l$
- γωνίες Euler (περιστροφής) ϕ, θ, ψ των κυρίων αξόνων ως προς το σύστημα αναφοράς σύμφωνα με τη σύμβαση $z - x' - z''$
- δείκτες διάθλασης μέσω εισόδου και εξόδου n_{in}, n_{out}
- μήκος κύματος λ_0 του προσπίπτοντος κύματος στο κενό
- γωνία πρόσπτωσης θ_{inc}

5.2 Μαθηματική Επίλυση - Μεθοδολογία

Η επίλυση του προβλήματος βασίστηκε κυρίως στη μεθοδολογία των I. J. Hodgkinson, S. Kassam και Q. H. Wu [28], η οποία με τη σειρά της βασίζεται στη μεθοδολογία του D. W. Berreman [29]. Επίσης αξιοποιήθηκε μερικώς και η μεθοδολογία του P. Yeh [26], η οποία εξηγείται και στο αντίστοιχο βιβλίο του [18].

Το προσπίπτον μονοχρωματικό επίπεδο κύμα στο μέσο εισόδου θα περιγράφεται από τις εξής σχέσεις για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{E}_{inc}(\vec{r}) = \vec{E}_{0,inc} \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) \quad (5.2)$$

$$\vec{H}_{inc}(\vec{r}) = \vec{H}_{0,inc} \exp(-i\vec{k}_{inc} \cdot \vec{r}) \quad (5.3)$$

Με δεδομένη τη γωνία πρόσπτωσης θ_{inc} και δεδομένου του δείκτη διάθλασης n_{in} του μέσου εισόδου μπορούμε άμεσα να υπολογίσουμε την προβολή του σχετικού κυματανύσματος $k_{r,inc}$ του προσπίπτοντος κύματος πάνω στη διαχωριστική επιφάνεια (y συνιστώσα). Έχουμε:

$$b_{in} = n_{in} \sin \theta_{inc} \quad (5.4)$$

Επικεντρωνόμαστε τώρα στο εσωτερικό κάθε ανισοτροπικού στρώματος.

Υποθέτουμε ότι το αναπτυσσόμενο πεδίο έχει και αυτό τη μορφή επιπέδου κύματος:

$$\vec{E}_l(\vec{r}) = \vec{E}_{0,l} \exp(-i\vec{k}_l \cdot \vec{r}) \quad (5.5)$$

όπου ο δείκτης l προσδιορίζει το εκάστοτε στρώμα, με βάση την αρίθμηση που έγινε στην προηγούμενη ενότητα. Χάρην απλότητας όμως, παραλείπουμε προς το παρόν το δείκτη αυτόν, όσο συνεχίζουμε την ανάλυση για το εκάστοτε στρώμα. Έτσι έχουμε:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.6)$$

και

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_0 \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.7)$$

όπου

$$\vec{k} = k_0 \vec{k}_r = k_0 \begin{bmatrix} k_{rx} \\ k_{ry} \\ k_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

5.2.1 Ταίριασμα των φάσεων

Λόγω του phase matching στη διαχωριστική επιφάνεια (βλ. ενότητα 3.4) θα έχουμε ότι

$$k_y = k_{inc_y} \text{ και } k_z = k_{inc_z} \quad (5.9)$$

\Leftrightarrow

$$\beta = \beta_{inc} \text{ και } \gamma = \gamma_{inc} = 0 \quad (5.10)$$

Με λίγα λόγια, δηλαδή, σε κάθε ανισοτροπικό στρώμα, η προβολή του κυματοδιανύσματος του υποτιθέμενου αναπτυσσόμενου επιπέδου κύματος στις επίπεδες διαχωριστικές επιφάνειες θα είναι ίση με την προβολή του κυματανύσματος του προσπίπτοντος κύματος.

5.2.2 Μετασχηματισμός σε Πρόβλημα Ιδιοτιμών

Από τις εξισώσεις του Maxwell 2.3 και 2.4 και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 5.6 και 5.7 έχουμε:

$$\vec{k} \times \vec{E}_0 = \omega \mu \vec{H}_0 \quad (5.11)$$

$$\vec{k} \times \vec{H}_0 = -\omega \epsilon_0 \vec{E}_0 \quad (5.12)$$

Επειδή θεωρούμε ότι $\mu_r = 1$ και επειδή

$$k_0 = \omega/c \quad (5.13)$$

και

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (5.14)$$

έχουμε τελικά:

$$\vec{k}_r \times \vec{E}_0 = z_o \vec{H}_0 \quad (5.15)$$

και

$$\vec{k}_r \times \vec{H}_0 = \frac{1}{z_0} \bar{\epsilon} \vec{E}_0 \quad (5.16)$$

όπου

$$z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (5.17)$$

(η λεγόμενη κυματική αντίσταση του κενού).

Αναπτύσσουμε τώρα τις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιώντας τη σχέση 5.10:

$$\begin{bmatrix} \beta E_{0z} \\ -\alpha E_{0z} \\ \alpha E_{0y} - b E_{0x} \end{bmatrix} = z_0 \begin{bmatrix} H_{0x} \\ H_{0y} \\ H_{0z} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\begin{bmatrix} \beta H_{0z} \\ -\alpha H_{0z} \\ \alpha H_{0y} - b H_{0x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{z_0} \bar{\epsilon} \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Ξεχωρίζουμε την πρώτη εξίσωση από την κάθε τριάδα εξισώσεων 5.18 και 5.19 και λύνουμε ως προς E_{0x} και H_{0x} , υποθέτοντας ότι $\epsilon_{xx} \neq 0$ [28]. Έχουμε:

$$E_{0x} = -(\epsilon_{xy} E_{0y} + \epsilon_{xz} E_{0z} + \beta z_0 H_{0z}) / \epsilon_{xx} \quad (5.20)$$

$$H_{0x} = (\beta / z_0) E_{0z} \quad (5.21)$$

Στις άλλες δύο εξισώσεις από κάθε τριάδα εξισώσεων 5.18 και 5.19, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις 5.20 και 5.21, απαλοψύμε τα E_{0x} και H_{0x} και έχουμε 4 εξισώσεις με αγνώστους μόνο τα E_{0y} , E_{0z} , H_{0y} , H_{0z} και a .

Τελικά οι τέσσερις εξισώσεις καταλήγουν στην εξής μητρική εξίσωση:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\beta \epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} & -z_0 \left(\frac{\beta^2}{\epsilon_{xx}} - 1 \right) & -\frac{\beta \epsilon_{xz}}{\epsilon_{xx}} & 0 \\ \frac{\epsilon_{yy} - \frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}}}{z_0} & -\frac{\beta \epsilon_{xy}}{\epsilon_{xx}} & \frac{\epsilon_{yz} - \frac{\epsilon_{xy} \epsilon_{xz}}{\epsilon_{xx}}}{z_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -z_0 \\ -\frac{\epsilon_{yz} - \frac{\epsilon_{xy} \epsilon_{xz}}{\epsilon_{xx}}}{z_0} & \frac{\beta \epsilon_{xz}}{\epsilon_{xx}} & \frac{\beta^2 - \epsilon_{zz} + \frac{\epsilon_{xz}^2}{\epsilon_{xx}}}{z_0} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0y} \\ H_{0z} \\ E_{0z} \\ H_{0y} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} E_{0y} \\ H_{0z} \\ E_{0z} \\ H_{0y} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

ή συντομογραφικά:

$$\bar{M}_\beta \vec{F} = \alpha \vec{F} \quad (5.23)$$

Η επίλυση των εξισώσεων ανάγεται, συνεπώς, στην εύρεση των ιδιοτιμών και των αντιστοιχών ιδιοδιανυσμάτων του πίνακα M_β . Κάτι τέτοιο υπολογίζεται πολύ εύκολα με τη συνάρτηση $\text{eig}()$ του MATLAB ως εξής:

$$[F, a] = \text{eig}(M_\beta)$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 5.20 και 5.21 μπορούμε να υπολογίσουμε για κάθε ιδιοδιάνυσμα \vec{F} τα αντίστοιχα E_{0x} και H_{0x} .

Η συνάρτηση $\text{eig}()$ θα μας επιστρέψει και τα τέσσερα ιδιοδιανύσματα στον πίνακα F , ενώ στη μεταβλητή a θα μας επιστρέψει ένα διαγώνιο πίνακα που περιέχει τις τέσσερις ιδιοτιμές με την αντίστοιχη σειρά.

Θεωρούμε λοιπόν και μεις ότι έχουμε όλα τα ιδιοδιανύσματα στον πίνακα \vec{F} και τις ιδιοτιμές στο διάνυσμα \vec{a} .

Για καθμία από τις τέσσερις ιδιοτιμές a αντιστοιχούν ένα ιδιοδιάνυσμα \vec{E}_0 και ένα \vec{H}_0 . Τα ιδιοδιανύσματα αυτά καθορίζουν την κατεύθυνση και την πόλωση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου.

Έτσι, υπάρχουν τέσσερα πιθανά "είδη" επιπέδων κυμάτων (τέσσερις ρυθμοί διάδοσης) που μπορούν να αναπτυχθούν μέσα στο στρώμα l . Καθένα χαρακτηρίζεται από το κυματόνυσμα \vec{k} και τα δύο ιδιοδιανύσματα (ιδιοπολώσεις) \vec{E}_0 και \vec{H}_0 . Τα τέσσερα κυματόνυμα έχουν ίδια y συνιστώσα ($k_0 \cdot \beta$) και ίδια z συνιστώσα (0).

5.2.3 Ιδιορυθμοί στα Μέσα Εισόδου και Εξόδου

Στα μέσα εισόδου και εξόδου, τώρα, θα έχουμε και εκεί ουσιαστικά τέσσερις ρυθμούς διάδοσης. Ισχύει και εκεί η εξίσωση 5.23.

Για το λόγο αυτό επεκτείνουμε την αρίθμηση που έχουμε ορίσει για τα στρώματα έτσι ώστε να συμπεριλαμβάνει και τα μέσα εισόδου και εξόδου σαν στρώματα (με δείκτες 0 και $N + 1$).

Επειδή όμως είναι ιστροπικά τα μέσα, τα τέσσερα κυματόνυμα θα αποτελούνται από δύο ίδια με διεύθυνση προς τα θετικά x , που αντιστοιχούν στο προσπίπτον/διαθλώμενο κύμα και δύο ίδια με διεύθυνση προς τα αρνητικά x (ανακλώμενο κύμα) (θα έχουμε δύο διπλές ιδιοτιμές α). Τα κυματόνυμα θα έχουν όλα ίδια εφαπτομενική (προς τις διαχωριστικές επιφάνειες) συνιστώσα $\beta = \beta_{inc}$, $\gamma = 0$ και αντίθετες x συνιστώσες (βλ. ενότητα 3.4).

Όσον αφορά τα ιδιοδιανύσματα \vec{E}_0 και \vec{H}_0 , λόγω της πολλαπλότητας των ιδιοτιμών, μπορούμε για κάθε διπλή ιδιοτιμή να επιλέξουμε οποιοδήποτε ζεύγος ιδιοδιανυσμάτων αρκεί να είναι κάθετα στο κυματόνυσμα \vec{k}_r !

Αντί να λύσουμε, λοιπόν, και για τα μέσα εισόδου και εξόδου την εξίσωση 5.23, ορίζουμε από μόνοι μας ("χειροκίνητα") τα ιδιοδιανύσματα \vec{E}_0 και \vec{H}_0 !

Είναι λογικό τα ιδιοδιανύσματα που θα επιλέξουμε να είναι αυτά της παράλληλης (p) και της κάθετης πόλωσης (s) για κάθε φορά διάδοσης (προς τα θετικά ή τα αρνητικά x) (βλ. ενότητα 3.4)).

Θα τα τοποθετήσουμε στον πίνακα \vec{F} με τη σειρά

$$p - p' - s - s' \quad (5.24)$$

(τα p' και s' συμβολίζουν τα ανακλώμενα κύματα)

Σημειώνουμε εδώ ότι:

Στην περίπτωση που η x συνιστώσα του κυματόνυσματος (ιδιοτιμή) α προκύψει μιγαδική τότε αντιστοιχούμε την ιδιοτιμή με το αρνητικό φανταστικό μέρος (θα έχουμε συζυγή ζεύγη ιδιοτιμών) στην προς τα δεξιά κατεύθυνση (p και s) αφού στο μέσο εξόδου θεωρούμε ότι δεν έχουμε ανάκλαση (ένα διαθλώμενο κύμα με θετικό εκθετικό όρο έρχεται σε αντίθεση με την αρχή διατήρησης της ενέργειας αφού το πλάτος των πεδίων θα αυξάνεται απεριόριστα προς τα αυξανόμενα x).

Έτσι, αν η ποσότητα

$$n^2 - \beta^2 \quad (5.25)$$

είναι θετική τότε

$$\alpha_p = \sqrt{n^2 - \beta^2} \quad (5.26)$$

αλλιώς:

$$\alpha_p = -i\sqrt{\beta^2 - n^2} \quad (5.27)$$

Σε κάθε περίπτωση:

$$\alpha_s = \alpha_p \quad \text{και} \quad \alpha_{p'} = \alpha_{s'} = -\alpha_p \quad (5.28)$$

δηλαδή

$$\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_p \\ -\alpha_p \\ \alpha_p \\ -\alpha_p \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Για τα ιδιοδιανύσματα έχουμε:

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{k}_r = 0 \quad (5.30)$$

\Leftrightarrow

$$\alpha E_{0x} + \beta E_{0y} = 0 \quad (5.31)$$

Για την κάθετη πόλωση (s) θα έχουμε $E_{0s,z} = 1$, δηλαδή προς τα θετικά z και για την παράλληλη θα έχουμε $\vec{E}_{0p} = \vec{E}_{0s} \times \hat{s}$. Σημειώνουμε ότι επιλέγουμε και εδώ κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα για το ηλεκτρικό πεδίο, δηλαδή που έχουν μέτρο 1, ώστε οι συντελεστές A να εκφράζουν για τα μέσα εισόδου και εξόδου το πλάτος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου (βλ. ενότητα 3.4.2).

Για την ένταση του μαγνητικού πεδίου θα έχουμε από την εξίσωση 5.15:

$$\vec{H}_0 = \frac{1}{z_0} \vec{k}_r \times \vec{E}_0 \quad (5.32)$$

Άρα τελικά:

$$\vec{E}_{0s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{E}_{0s'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\vec{E}_{0p} = \begin{bmatrix} -\beta/n \\ \alpha_p/n \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{E}_{0p'} = \begin{bmatrix} -\beta/n \\ -\alpha_p/n \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

και

$$\vec{H}_{0s} = \frac{1}{z_0} \begin{bmatrix} \beta \\ -\alpha_p \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{H}_{0s'} = \frac{1}{z_0} \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\vec{H}_{0p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n/z_0 \end{bmatrix}, \vec{H}_{0p'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ n/z_0 \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

Άρα ο πίνακας \vec{F} θα έχει ως εξής:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} E_{0p_y} & E_{0p'_y} & E_{0s_y} & E_{0s'_y} \\ H_{0p_z} & H_{0p'_z} & H_{0s_z} & H_{0s'_z} \\ E_{0p_z} & E_{0p'_z} & E_{0s_z} & E_{0s'_z} \\ H_{0p_y} & H_{0p'_y} & H_{0s_y} & H_{0s'_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_p/n & -\alpha_p/n & 0 & 0 \\ n/z_0 & n/z_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha_p/z_0 & \alpha_p/z_0 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

και αντίστοιχα για τα E_{0x} και H_{0x} έχουμε:

$$[E_{0p_x} \quad E_{0p'_x} \quad E_{0s_x} \quad E_{0s'_x}] = [-\beta/n \quad -\beta/n \quad 0 \quad 0] \quad (5.38)$$

και

$$[H_{0p_x} \quad H_{0p'_x} \quad H_{0s_x} \quad H_{0s'_x}] = [0 \quad 0 \quad \beta/z_0 \quad \beta/z_0] \quad (5.39)$$

5.2.4 Γενικός Τύπος για το Ηλεκτρικό Πεδίο

Θεωρούμε ότι το ολικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο εντός του ανισοτροπικού στρώματος αποτελεί γραμμικό συνδυασμό των τεσσάρων αυτών επιμέρους κυμάτων. Δηλαδή, θεωρούμε ότι:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{q=1}^4 \{A_q \vec{E}_{0q} \exp(-i\vec{k}_q \cdot \vec{r})\} \quad (5.40)$$

ή

$$\vec{E}(\vec{r}) = \exp(-ik_0\beta y) \cdot \sum_{q=1}^4 \{A_q \vec{E}_{0q} \exp(-ik_0\alpha_q x)\} \quad (5.41)$$

Αντίστοιχη θα είναι και η σχέση για το μαγνητικό πεδίο.

$$\vec{H}(\vec{r}) = \exp(-ik_0\beta y) \cdot \sum_{q=1}^4 \{A_q \vec{H}_{0q} \exp(-ik_0\alpha_q x)\} \quad (5.42)$$

Άρα, ακριβέστερα, για το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο στρώμα l , δηλαδή για $x \in [x_{l-1}, x_l]$ (βλ. Σχήμα 5.1) και δεδομένου αυτού του συστήματος αναφοράς που έχουμε ορίσει, θα έχουμε:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \exp(-ik_0\beta y) \cdot \sum_{q=1}^4 \{A_{q,l} \vec{E}_{0q,l} \exp(-ik_0\alpha_{q,l}(x - x_l))\}} \quad (5.43)$$

Αν τώρα επικεντρωθούμε μόνο στις εφαπτομενικές (ως προς τις διαχωριστικές επιφάνειες) συνιστώσες των πεδίων, δηλαδή τις E_{0y} , E_{0z} , H_{0y} και H_{0z} , οδηγούμαστε, με χρήση του πίνακα \vec{F} στην πολύ συνεπτυγμένη σχέση:

$$\begin{bmatrix} E_y \\ H_z \\ E_z \\ H_y \end{bmatrix} = \exp(-ik_0\beta y) \vec{F}_l \vec{P}_l(x - x_l) \vec{A}_l \quad (5.44)$$

όπου το διάνυσμα \vec{A} έχει τους τέσσερις συντελεστές A_q των επιμέρους κυμάτων

$$\vec{A}_l = \begin{bmatrix} A_{1,l} \\ A_{2,l} \\ A_{3,l} \\ A_{4,l} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

και το μέγεθος

$$\vec{P}_l(x) = \begin{bmatrix} \exp(-ik_0\alpha_{1,l}(x)) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-ik_0\alpha_{2,l}(x)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-ik_0\alpha_{3,l}(x)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-ik_0\alpha_{4,l}(x)) \end{bmatrix}$$

είναι ο λεγόμενος πίνακας φάσης.

Προφανώς, το διάνυσμα των συντελεστών \vec{A}_l δεν το έχουμε υπολογίσει ακόμα. Για να το υπολογίσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τις οριακές συνθήκες.

5.2.5 Οριακές Συνθήκες

Εφαρμόζουμε τώρα τις οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες $0, x_1 \dots x_N$. Έχουμε διηλεκτρικά μέσα, συνεπώς οι εφαπτομενικές συνιστώσες τόσο της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου όσο και της έντασης του μαγνητικού πεδίου στα όρια των διαχωριστικών επιφανειών θα είναι ίσες. Οι εφαπτομενικές συνιστώσες είναι οι y και z και άρα μας βολεύει πολύ που ο πίνακας \vec{F} περιέχει ακριβώς αυτές τις συνιστώσες!

Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια $x = x_l$ μπορούν να γραφούν στην εξής συνεπτυγμένη μορφή:

$$\begin{bmatrix} E_y(x_l^-) \\ E_z(x_l^-) \\ H_x(x_l^-) \\ H_z(x_l^-) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_y(x_l^+) \\ E_z(x_l^+) \\ H_x(x_l^+) \\ H_z(x_l^+) \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

χρησιμοποιώντας τη σχέση 5.44

\Leftrightarrow

$$\exp(-ik_0\beta y) \vec{F}_l \vec{P}_l(x_l - x_l) \vec{A}_l = \exp(-ik_0\beta y) \vec{F}_{l+1} \vec{P}_{l+1}(x_l - x_{l+1}) \vec{A}_{l+1} \quad (5.47)$$

\Leftrightarrow

$$\bar{F}_l \vec{A}_l = \bar{F}_{l+1} \bar{P}_{l+1} (x_l - x_{l+1}) \vec{A}_{l+1} \quad (5.48)$$

για $l = 0, 1, 2, \dots, N$

Σημειώνουμε εδώ ότι, χάριν γενικότητας των παραπάνω τύπων (για να ισχύουν δηλαδή και για $l = N$), ορίζουμε

$$\begin{aligned} x_{N+1} &= x_N \\ x_0 &= 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

Αναλυτικά, για όλες τις επιφάνειες, οι οριακές συνθήκες θα είναι:

Interface	Εξίσωση	
0	$\bar{F}_0 \vec{A}_0 = \bar{F}_1 \bar{P}_1 (-x_1) \vec{A}_1$	
1	$\bar{F}_1 \vec{A}_1 = \bar{F}_2 \bar{P}_2 (x_1 - x_2) \vec{A}_2$	
2	$\bar{F}_2 \vec{A}_2 = \bar{F}_3 \bar{P}_3 (x_2 - x_3) \vec{A}_3$	
	...	
$N-1$	$\bar{F}_{N-1} \vec{A}_{N-1} = \bar{F}_N \bar{P}_N (x_{N-1} - x_N) \vec{A}_N$	
N	$\bar{F}_N \vec{A}_N = \bar{F}_{N+1} \bar{P}_{N+1} (x_N - x_{N+1}) \vec{A}_{N+1}$	(5.50)

\Leftrightarrow

Interface	Εξίσωση	
0	$\vec{A}_0 = \bar{F}_0^{-1} \bar{F}_1 \bar{P}_1 (-x_1) \vec{A}_1$	
1	$\vec{A}_1 = \bar{F}_1^{-1} \bar{F}_2 \bar{P}_2 (x_1 - x_2) \vec{A}_2$	
2	$\vec{A}_2 = \bar{F}_2^{-1} \bar{F}_3 \bar{P}_3 (x_2 - x_3) \vec{A}_3$	
	...	
$N-1$	$\vec{A}_{N-1} = \bar{F}_{N-1}^{-1} \bar{F}_N \bar{P}_N (x_{N-1} - x_N) \vec{A}_N$	
N	$\vec{A}_N = \bar{F}_N^{-1} \bar{F}_{N+1} \vec{A}_{N+1}$	(5.51)

5.2.6 Σχέση μετασχηματισμού της διάταξης

Με διαδοχικές αντικαταστάσεις λαμβάνουμε την εξής εξίσωση που συνδέει τα πλάτη \vec{A}_0 του μέσου εισόδου με τα πλάτη \vec{A}_{N+1} του μέσου εξόδου:

$$\vec{A}_0 = \bar{F}_0^{-1} \bar{F}_1 \bar{P}_1 (-d_1) \bar{F}_1^{-1} \bar{F}_2 \bar{P}_2 (-d_2) \bar{F}_2^{-1} \bar{F}_3 \bar{P}_3 (-d_3) \dots \bar{F}_{N-1}^{-1} \bar{F}_N \bar{P}_N (-d_N) \bar{F}_N^{-1} \bar{F}_{N+1} \vec{A}_{N+1} \quad (5.52)$$

ή πιο εποπτικά:

$$\vec{A}_0 = \bar{F}_0^{-1} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \dots \bar{M}_{N-1} \bar{M}_N \bar{F}_{N+1} \vec{A}_{N+1} \quad (5.53)$$

ή

$$\vec{A}_0 = \bar{T}_{anis} \vec{A}_{N+1} \quad (5.54)$$

όπου

$$\bar{M}_l = \bar{F}_l \bar{P}_l (-d_l) \bar{F}_l^{-1} \quad (5.55)$$

και ο

$$\bar{T}_{anis} = \bar{F}_0^{-1} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \dots \bar{M}_{N-1} \bar{M}_N \bar{F}_{N+1} \quad (5.56)$$

είναι ο ολικός πίνακας μεταφοράς της διάταξης των ανιστροπικών στρωμάτων.

5.2.7 Εξαγωγή των πεδιακών συντελεστών

Από τη σχέση 5.54 έχουμε ότι

$$\begin{bmatrix} A_{1,0} \\ A_{2,0} \\ A_{3,0} \\ A_{4,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{anis_{1,1}} & T_{anis_{1,2}} & T_{anis_{1,3}} & T_{anis_{1,4}} \\ T_{anis_{2,1}} & T_{anis_{2,2}} & T_{anis_{2,3}} & T_{anis_{2,4}} \\ T_{anis_{3,1}} & T_{anis_{3,2}} & T_{anis_{3,3}} & T_{anis_{3,4}} \\ T_{anis_{4,1}} & T_{anis_{4,2}} & T_{anis_{4,3}} & T_{anis_{4,4}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,N+1} \\ A_{2,N+1} \\ A_{3,N+1} \\ A_{4,N+1} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

Για το μέσο εισόδου θεωρούμε δεδομένο το "προς τα δεξιά" κύμα. Είναι το προσπίπτον κύμα, το οποίο αποτελεί το "αίτιο" των υπολοίπων δημιουργουμένων πεδίων. Ωστόσο δε γνωρίζουμε το ανακλώμενο κύμα. Συνεπώς, τα στοιχεία

$$A_{1,0} = A_{p,in}$$

και

$$A_{3,0} = A_{s,in}$$

είναι γνωστά.

Αντίθετα, τα στοιχεία

$$A_{2,0} = A_{p',in}$$

και

$$A_{4,0} = A_{s',in}$$

προσδιορίζουν το ανακλώμενο κύμα (στο μέσο εισόδου) και είναι άγνωστα.

Όσον αφορά τώρα στο μέσο εξόδου, όπως είπαμε νωρίτερα, θεωρούμε ότι δεν έχουμε ανακλώμενο κύμα. Αυτό σημαίνει αυτόματα ότι τα στοιχεία

$$A_{2,N+1} = A_{p',out} = 0$$

και

$$A_{4,N+1} = A_{s',out} = 0$$

είναι επίσης γνωστά (και μάλιστα μηδενικά).

Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{p',in} \\ A_{s,in} \\ A_{s',in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{anis_{1,1}} & T_{anis_{1,2}} & T_{anis_{1,3}} & T_{anis_{1,4}} \\ T_{anis_{2,1}} & T_{anis_{2,2}} & T_{anis_{2,3}} & T_{anis_{2,4}} \\ T_{anis_{3,1}} & T_{anis_{3,2}} & T_{anis_{3,3}} & T_{anis_{3,4}} \\ T_{anis_{4,1}} & T_{anis_{4,2}} & T_{anis_{4,3}} & T_{anis_{4,4}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ 0 \\ A_{s,out} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

Συνεπώς μπορούμε να εξαγάγουμε την εξής σχέση:

$$\begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{p',in} \\ A_{s,in} \\ A_{s',in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{anis_{1,1}} & T_{anis_{1,3}} \\ T_{anis_{2,1}} & T_{anis_{2,3}} \\ T_{anis_{3,1}} & T_{anis_{3,3}} \\ T_{anis_{4,1}} & T_{anis_{4,3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Έτσι, έχουμε τελικά, ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{anis_{1,1}} & T_{anis_{1,3}} \\ T_{anis_{3,1}} & T_{anis_{3,3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} := \bar{T}_{inc_tra} \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

και

$$\begin{bmatrix} A_{p',in} \\ A_{s',in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{anis_{2,1}} & T_{anis_{2,3}} \\ T_{anis_{2,1}} & T_{anis_{2,3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} := \bar{T}_{ref_tra} \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

Αντιστρέφοντας συνεπώς τον πίνακα \bar{T}_{ref_tra} θα έχουμε τον πίνακα με τους συντελεστές διάθλασης:

$$\bar{t} = \begin{bmatrix} t_{pp} & t_{sp} \\ t_{sp} & t_{ss} \end{bmatrix} = \bar{T}_{inc_tra}^{-1} \quad (5.62)$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{pp} & t_{sp} \\ t_{sp} & t_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

ενώ πολλαπλασιάζοντας τον \bar{T}_{ref_tra} με τον \bar{t} θα έχουμε τον πίνακα με τους συντελεστές ανάκλασης:

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{bmatrix} = \bar{T}_{ref_tra} \cdot \bar{t} \quad (5.64)$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} A_{p',in} \\ A_{s',in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

Αντί για δύο συντελεστές, όπως είχαμε στην περίπτωση της πρόσπτωσης σε απλό interface ισοτροπικών υλικών, έχουμε τέσσερις αφού πλέον οι ρυθμοί s και p έχουν, εν γένει, κάποια σύζευξη, λόγω των ανισοτροπικών στρωμάτων που παρεμβάλλονται.

Όσον αφορά, τώρα, τους συντελεστές \vec{A}_l στο κάθε στρώμα έχουμε από τη σχέση 5.48 ότι:

$$\vec{A}_l = \bar{F}_l^{-1} \bar{F}_{l+1} \bar{P}_{l+1} (-d_{l+1}) \vec{A}_{l+1} \quad (5.66)$$

Με βάση τα όσα είπαμε παραπάνω για το \vec{A}_{N+1} θα ισχύει:

$$\vec{A}_{N+1} = \begin{bmatrix} t_{pp} & t_{sp} \\ 0 & 0 \\ t_{sp} & t_{ss} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

Έτσι, εφαρμόζοντας την 5.66 μπορούμε από το \vec{A}_{N+1} να υπολογίσουμε το \vec{A}_N συναρτήσει του $\begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix}$. Έπειτα, από το \vec{A}_N μπορούμε να υπολογίσουμε το \vec{A}_{N-1} συναρτήσει του $\begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix}$ κ.ο.κ. μέχρι και το \vec{A}_1 .

Έτσι τελικά, θα έχουμε για κάθε layer $l = 1..N + 1$:

$$\vec{A}_l = \begin{bmatrix} m_{p1,l} & m_{s1,l} \\ m_{p2,l} & m_{s2,l} \\ m_{p3,l} & m_{s3,l} \\ m_{p4,l} & m_{s4,l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Συνοπώς:

Ο πίνακας συντελεστών \bar{m}_l του κάθε layer

$$\begin{bmatrix} m_{p1,l} & m_{s1,l} \\ m_{p2,l} & m_{s2,l} \\ m_{p3,l} & m_{s3,l} \\ m_{p4,l} & m_{s4,l} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

μαζί με τις x συνιστώσες των επιμέρους κυμανατουσμάτων $\alpha_{q,l}$ προσδιορίζουν πλήρως το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μέσα σε κάθε στρώμα συναρτήσει των s και p συνιστωσών του προσπίπτοντος κύματος ($A_{p,in}, A_{s,in}$):

$$\vec{E}_l(\vec{r}) = \exp(-ik_0\beta y) \cdot \sum_{q=1}^4 \{ (m_{p,q,l} A_{p,in} + m_{s,q,l} A_{s,in}) \vec{E}_{0q,l} \exp(-ik_0\alpha_{q,l}(x - x_l)) \} \quad (5.70)$$

και

$$\vec{H}_l(\vec{r}) = \exp(-ik_0\beta y) \cdot \sum_{q=1}^4 \{ (m_{p,q,l} A_{p,in} + m_{s,q,l} A_{s,in}) \vec{H}_{0q,l} \exp(-ik_0\alpha_{q,l}(x - x_l)) \} \quad (5.71)$$

(όπου έγινε φυσικά χρήση της 5.43).

5.2.8 Μέση ροή ενέργειας - Διάνυσμα Poynting

Ενδιάμεσα ανισοτροπικά στρώματα

Από την 5.70 έχουμε ότι:

$$\vec{E}_l(x, y, z) = e^{-ik_0\beta y} (\vec{E}_{p,l}(x) A_{p,in} + \vec{E}_{s,l}(x) A_{s,in}) \quad (5.72)$$

όπου

$$\vec{E}_{p,l}(x) = \sum_{q=1}^4 \{ m_{p,q,l} \vec{E}_{0q,l} \exp(-ik_0\alpha_{q,l}(x - x_l)) \} \quad (5.73)$$

και

$$\vec{E}_{s,l}(x) = \sum_{q=1}^4 \{ m_{s,q,l} \vec{E}_{0q,l} \exp(-ik_0\alpha_{q,l}(x - x_l)) \} \quad (5.74)$$

(και αντίστοιχα για το $\vec{H}_l(x, y, z)$)

Έτσι, για τη μέση ροή ενέργειας στο στρώμα l θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \vec{S}_l \rangle &= \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E}_l \times \vec{H}_l^* \} \\ &= \frac{1}{2} \Re \{ e^{-ik_0\beta y} (\vec{E}_{p,l}(x) A_{p,in} + \vec{E}_{s,l}(x) A_{s,in}) \times e^{ik_0\beta^* y} (\vec{H}_{p,l}^*(x) A_{p,in}^* + \vec{H}_{s,l}^*(x) A_{s,in}^*) \} \end{aligned} \quad (5.75)$$

που όμως, επειδή $\beta \in \mathbb{R}$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{S}_l \rangle &= \frac{1}{2} \Re \{ (\vec{E}_{p,l}(x) A_{p,in} + \vec{E}_{s,l}(x) A_{s,in}) \times (\vec{H}_{p,l}^*(x) A_{p,in}^* + \vec{H}_{s,l}^*(x) A_{s,in}^*) \} \\
 &= \frac{1}{2} \Re \{ [\\
 &\quad (\vec{E}_{p,l}(x) \times \vec{H}_{p,l}^*(x)) |A_{p,in}|^2 \\
 &\quad + (\vec{E}_{p,l}(x) \times \vec{H}_{s,l}^*(x)) A_{p,in} A_{s,in}^* \\
 &\quad + (\vec{E}_{s,l}(x) \times \vec{H}_{p,l}^*(x)) A_{s,in} A_{p,in}^* \\
 &\quad + (\vec{E}_{s,l}(x) \times \vec{H}_{s,l}^*(x)) |A_{s,in}|^2 \\
 &\quad] \}
 \end{aligned} \tag{5.76}$$

Άρα η ισχύς εξαρτάται μόνο από το x και αποτελείται από τέσσερις όρους εξαρτώμενους από τα $|A_{p,in}|^2$, $A_{p,in} A_{s,in}^*$, $A_{s,in} A_{p,in}^*$ και $|A_{s,in}|^2$ αντίστοιχα.

Μέσα εισόδου και εξόδου

Τα μέσα εισόδου και εξόδου είναι ιστροπικά οπότε μπορούμε να καταλήξουμε σε πιο αναλυτικές εκφράσεις για το διάνυσμα Poynting χρησιμοποιώντας τον πίνακα 3.1 που ισχύει κανονικά και εδώ. Μάλιστα, επειδή το μέσο εισόδου έχουμε θεωρήσει ότι είναι lossless μπορούμε να διαχωρίσουμε τη ροή ενέργειας στην x διεύθυνση εντός του μέσου εισόδου σε ροή ενέργειας του προσπίπτοντος και ροή ενέργειας του ανακλώμενου κύματος (βλ. σχόλια σχετικά με τις σχέσεις 3.162 και 3.164).

Προσπίπτον κύμα Θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{S}_{inc_x} \rangle &= \frac{1}{2Z_{in}} (|A_{p,in}|^2 + |A_{s,in}|^2) \cos \theta_{inc} \\
 &= \frac{1}{2z_0} (|A_{s,in}|^2 + |A_{p,in}|^2) \alpha_{p,in}
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

αφού είπαμε ότι υποθέτουμε σε όλο το χώρο $\mu = \mu_0$

Ανακλώμενο κύμα

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{S}_{ref_x} \rangle &= \frac{1}{2Z_{in}} (|A_{p',in}|^2 + |A_{s',in}|^2) \cos \theta_{ref} \\
 &= \frac{1}{2z_0} (|A_{p',in}|^2 + |A_{s',in}|^2) \alpha_{p',in}
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

όπου τα $A_{p',in}$, $A_{s',in}$ συνδέονται τώρα με τα $A_{p,in}$, $A_{s,in}$ μέσω της σχέσης 5.65.

$$\begin{bmatrix} A_{p',in} \\ A_{s',in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{pp} & r_{sp} \\ r_{sp} & r_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix} \tag{5.79}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι η μέση ανακλώμενη ροή ενέργειας δεν είναι γραμμική ως προς τα $|A_{p,in}|^2$ και $|A_{s,in}|^2$, όπως είναι στην περίπτωση του απλού interface μεταξύ δύο ιστροπικών μέσων. Και αυτό διότι λόγω του τετραγώνου προκύπτουν όροι που εξαρτώνται από το γινόμενο των $A_{p,in}$ και $A_{s,in}$. Συνεπώς η συνολική ροή ενέργειας του ανακλώμενου κύματος, λόγω των p και s συνιστωσών του προσπίπτοντος κύματος, δεν είναι ίση με το άθροισμα των ροών ενέργειας που θα προέκυπταν αν το προσπίπτον κύμα είχε μόνο p ή μόνο s πόλωση.

Διαθλώμενο κύμα Το μέσο εξόδου θεωρούμε (για λόγους γενικότητας) ότι μπορεί και να έχει απώλειες. Εκτός αυτού, όπως δείξαμε στην ενότητα 3.4.2, η x συνιστώσα του κυματανύσματος μπορεί να προκύψει φανταστική και να έχουμε ολική ανάκλαση ακόμα και αν το n_{out} είναι πραγματικό.

Βάσει του πίνακα 3.3 θα έχουμε για την οριζόντια συνιστώσα του διαθλώμενου κύματος:

$$\langle S_{tra_x} \rangle = \frac{1}{2z_0} e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} (|A_{s,out}|^2 \Re\{\alpha_{p,out}\} + |A_{p,out}|^2 \Re\{\frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out}\}) \quad (5.80)$$

Παρατηρούμε ότι, αφού αντίστοιχα $\begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{s,out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{pp} & t_{sp} \\ t_{sp} & t_{ss} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,in} \\ A_{s,in} \end{bmatrix}$ (σχέση 5.63), ούτε η μέση διαθλώμενη ροή ενέργειας είναι γραμμική ως προς τα $|A_{p,in}|^2$ και $|A_{s,in}|^2$,

Ανακλαστικότητα και Διαθλαστικότητα Παρόλο που η μέση ανακλώμενη ροή ενέργειας δεν είναι γραμμική ως προς τα $|A_{p,in}|^2$ και $|A_{s,in}|^2$ μπορούμε να ορίσουμε τα μεγέθη R_{pp} , R_{sp} ως τις p -ροές ενέργειας -κατά τη x διεύθυνση- του ανακλώμενου κύματος που προκύπτουν αν το προσπίπτον είχε αντίστοιχα μόνο p ή μόνο s συνιστώσα προς την αντίστοιχη ροή ενέργειας του προσπίπτοντος. και ως R_{ps} και R_{ss} τις s -ροές ενέργειας -κατά τη x διεύθυνση- που προκύπτουν αν το προσπίπτον είχε αντίστοιχα μόνο p ή μόνο s συνιστώσα προς την αντίστοιχη ροή ενέργειας του προσπίπτοντος. Επειδή μάλιστα οι ανακλώμενες ροές είναι πάντα προς τα αριστερά (δηλαδή αρνητικές), προκειμένου τα μεγέθη να βγαίνουν θετικά θεωρούμε σαν pp , sp , ps και ss ανακλαστικότητα (*reflectance*) της διάταξης τα αντίθετα των μεγεθών που περιγράφουμε παραπάνω.

Δηλαδή

$$\begin{aligned} R_{pp} &= - \frac{\langle S_{ref_{x,p}} \rangle_{|A_{s,in}=0}}{\langle S_{inc_{x,p}} \rangle} \\ &= \frac{\frac{1}{2z_0} |A_{p',in}|^2 \alpha_{p',in} \Big|_{A_{s,in}=0}}{\frac{1}{2z_0} |A_{p,in}|^2 \alpha_{p,in}} \\ &= - \frac{\frac{1}{2z_0} |r_{pp}|^2 |A_{p,in}|^2 \alpha_{p,in}}{\frac{1}{2z_0} |A_{p,in}|^2 \alpha_{p,in}} \\ &= |r_{pp}|^2 \end{aligned} \quad (5.81)$$

και ομοίως:

$$R_{sp} = |r_{sp}|^2 \quad (5.82)$$

$$R_{ps} = |r_{ps}|^2 \quad (5.83)$$

$$R_{ss} = |r_{ss}|^2 \quad (5.84)$$

Ορίζουμε κατά συνέπεια την ανακλαστικότητα της διάταξης ως τον πίνακα

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} R_{pp} & R_{sp} \\ R_{sp} & R_{ss} \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

Αντίστοιχα, ορίζουμε και τις διαθλαστικότητες (*transmittances*) T_{pp} , T_{sp} , T_{ps} και T_{ss} :

$$\begin{aligned}
 T_{pp} &= \frac{\langle \mathcal{S}_{tra_x,p} \rangle|_{A_{s,in}=0}}{\langle \mathcal{S}_{inc_x,p} \rangle} \\
 &= \frac{\frac{1}{2z_0} e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} |A_{p,out}|^2 \Re e\left\{ \frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out} \right\} \Big|_{A_{s,in}=0}}{\frac{1}{2z_0} |A_{p,in}|^2 \alpha_{p,in}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2z_0} e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} |t_{pp}|^2 |A_{p,in}|^2 \Re e\left\{ \frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out} \right\} \Big|_{A_{s,in}=0}}{\frac{1}{2z_0} |A_{p,in}|^2 \alpha_{p,in}} \\
 &= e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} |t_{pp}|^2 \frac{\Re e\left\{ \frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out} \right\}}{\alpha_{p,in}}
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

και αντίστοιχα:

$$T_{sp} = e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} |t_{sp}|^2 \frac{\Re e\left\{ \frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out} \right\}}{\alpha_{p,in}} \tag{5.87}$$

$$T_{ps} = e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} |t_{ps}|^2 \frac{\Re e\{\alpha_{p,out}\}}{\alpha_{p,in}} \tag{5.88}$$

και

$$T_{ss} = e^{2k_0 \Im m\{\alpha_{p,out}\}x} |t_{ss}|^2 \frac{\Re e\{\alpha_{p,out}\}}{\alpha_{p,in}} \tag{5.89}$$

Ομοίως λοιπόν η διαθλαστικότητα της διάταξης θα έχει ως

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} T_{pp} & T_{sp} \\ T_{sp} & T_{ss} \end{bmatrix} \tag{5.90}$$

5.3 Σύντομη ανασκόπηση παρομοίων μεθόδων που υπάρχουν στη διεθνή βιβλιογραφία

Για το πρόβλημα του αποδοτικού υπολογισμού της ανάκλασης/διάθλασης από πολυστρωματικές διατάξεις έχουν αναπτυχθεί διάφορες μέθοδοι.

Μια αρκετά παλιά και γνωστή μεθοδολογία για τον υπολογισμό της μεταβολής της πόλωσης του φωτός κατά τη διέλευσή του από μία σειρά μονοαξονικών πλακιδίων είναι η 2×2 άλγεβρα του Jones [30]. Υποθέτουμε ότι κάθε πλακίδιο είναι μονοαξονικό, με επίπεδες κατακόρυφες πλευρές και με τον οπτικό του άξονα παράλληλο στα επίπεδα των πλευρών του. Θεωρούμε ένα επίπεδο οπτικό κύμα το οποίο προσπίπτει κάθετα στην επιφάνεια του πρώτου πλακιδίου. Αν αγνοήσουμε τις διάφορες εσωτερικές ανακλάσεις, τότε κάθε πλακίδιο, ανάλογα με τους δείκτες διάθλασής του, το πάχος του, και τη γωνία στροφής του οπτικού του άξονα, επιδρά στην πόλωση (και μόνο) του προσπίπτοντος σε αυτό κύματος και η επίδρασή του αυτή μπορεί να περιγραφεί συστηματικά, αν αναπαραστήσουμε το εισερχόμενο και το εξερχόμενο κύμα με ένα δισδιάστατο διάνυσμα, αυτό ουσιαστικά της πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου (είναι δισδιάστατο γιατί θα είναι αναγκαστικά κάθετο στην κατεύθυνση διάδοσης (λόγω του συγκεκριμένου προσανατολισμού του οπτικού άξονα)), και το πλακίδιο με έναν πίνακα μετασχηματισμού που επιδρά γραμμικά πάνω σε αυτό το διάνυσμα. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε διάδοση κατά μήκος του άξονα x τότε το κύμα μπορεί να αναπαρασταθεί με το διάνυσμα

$$\begin{bmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

ενώ ένα πλακίδιο περιστραμμένο κατά γωνία ψ ως προς το επίπεδο πρόσπτωσης μπορεί να αναπαρασταθεί με τον πίνακα μετασχηματισμού

$$\bar{T} = \bar{R}(-\psi)\bar{T}_0\bar{R}(\psi) \quad (5.92)$$

όπου

$$\bar{R}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \quad (5.93)$$

και

$$\bar{T}_0 = e^{-i\phi} \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

($\Gamma = \frac{2\pi d}{\lambda}$)

Με την ίδια μεθοδολογία μάλιστα, μπορούμε να μοντελοποιήσουμε για παράδειγμα και έναν ιδανικό πολωτή περιστραμμένο κατά γωνία ψ :

$$\bar{T} = \bar{R}(-\psi)\bar{P}\bar{R}(\psi) \quad (5.95)$$

όπου

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Με τον τρόπο αυτό η συνολική επίδραση μιας διάταξης πολλών πλακιδίων σε ένα εισερχόμενο κύμα προκύπτει εύκολα από τον πολλαπλασιασμό των πινάκων μετασχηματισμού του κάθε πλακιδίου.

Η μέθοδος του Jones ωστόσο δε μας εξυπηρετεί σε καταστάσεις όπου έχουμε πλάγια πρόσπτωση ή όπου οι ενδιάμεσες ανακλάσεις δεν μπορούν να αγνοηθούν. Ο D. Berreman, αρκετά

αργότερα [29], βασιζόμενος σε μια μεθοδολογία των S. Teitler και B. Henvis [31], ανέπτυξε μία βάση για τον υπολογισμό του επαγόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου κατά την πρόσπτωση επιπέδων κυμάτων σε ένα ανισοτροπικό διηλεκτρικό στρώμα. Πιο συγκεκριμένα, ξεκινώντας από τις εξισώσεις 2.3 και 2.4 του Maxwell και αξιοποιώντας το ταίριασμα των φάσεων, θεωρώντας δηλαδή ότι το ηλεκτρικό πεδίο θα έχει μορφή

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}_0(x) \exp(i\omega t - k_0 \beta y) \quad (5.97)$$

ανήγαγε το πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος των 6 εξισώσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη λύση μιας διαφορικής 4×4 εξίσωσης της μορφής:

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{\psi} = i\omega \bar{\Delta}_\beta(x) \vec{\psi} \quad (5.98)$$

όπου

$$\vec{\psi} = \begin{bmatrix} E_{0x} \\ H_{0y} \\ E_{0y} \\ H_{0x} \end{bmatrix} \quad (5.99)$$

η οποία είναι αρκετά γενική ώστε να καλύπτει διάφορες περιπτώσεις (το στρώμα θεωρείται ότι δεν είναι απαραίτητα ομοιογενές στην x κατεύθυνση και επίσης θεωρείται ότι εν γένει μπορεί να χαρακτηρίζεται επιπλέον από οπτική δράση ή φαινόμενο Faraday) χωρίς όμως η επίλυσή της να είναι φυσικά εύκολη. Η συγκεκριμένη δημοσίευση υπήρξε πηγή για πολυάριθμες άλλες δημοσιεύσεις που τη μελετούν και την εφαρμόζουν σε ειδικές διατάξεις (π.χ. [32],[33],[34]).

Παράλληλα, ο P. Yeh [26] δημοσίευσε λίγο αργότερα μια συστηματική 4×4 μέθοδο για τον υπολογισμό της διάδοσης μέσα από μία διάταξη πολλαπλών ομοιογενών και εν γένει διαξονικών ανισοτροπικών στρωμάτων και με αυθαίρετο προσανατολισμό των οπτικών τους αξόνων. Πιο συγκεκριμένα, από την εξίσωση 4.37

$$\begin{bmatrix} -\beta^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{xx} & \alpha\beta + \varepsilon_{xy} & \alpha\gamma + \varepsilon_{xz} \\ \beta\alpha + \varepsilon_{yx} & -\alpha^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{yy} & \beta\gamma + \varepsilon_{yz} \\ \gamma\alpha + \varepsilon_{zx} & \gamma\beta + \varepsilon_{zy} & -\alpha^2 - \beta^2 + \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix} = 0 \quad (5.100)$$

και θεωρώντας γνωστά τα β και γ (κάθετες συνιστώσες των σχετικών κυματανυσμάτων) λόγω του ταιριάσματος των φάσεων, προσδιορίζουμε τα α (οριζόντιες συνιστώσες των σχετικών κυ-

ματανυσμάτων) και τα αντίστοιχα τέσσερα διανύσματα βάσης $\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}$ για κάθε στρώμα και

έπειτα, εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες στα όρια των στρωμάτων, κατασκευάζουμε τους πίνακες μετασχηματισμού που συνδέουν τους συντελεστές των τεσσάρων ιδιοδιανυσμάτων βάσης στο κάθε στρώμα και πολλαπλασιάζοντάς τους διαδοχικά βρίσκουμε τη σχέση που συνδέει τους συντελεστές του μέσου εξόδου με το μέσο εισόδου.

Η παραπάνω μεθοδολογία δοκιμάστηκε αρχικά, αφού υλοποιήθηκε σε κατάλληλο κώδικα, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας. Αναδείχθηκε όμως ένα πρόβλημα το οποίο έγκειται στον

υπολογισμό των ιδιοδιανυσμάτων $\begin{bmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{bmatrix}$. Για να γίνει αυτό πρέπει πρώτα να λυθεί η τεταρτοβάθμια εξίσωση 4.39

$$\det(\bar{A}(\alpha, \beta, \gamma)) = 0 \quad (5.101)$$

προκειμένου να προσδιορισθούν τα α , τα οποία στη συνέχεια πρέπει να αντικατασταθούν πίσω στον πίνακα \bar{A} ώστε να υπολογισθούν τα ιδιοδιανύσματα \vec{E}_0 τα οποία, όπως είπαμε, ουσιαστικά αποτελούν τον πυρήνα (nullspace) του ιδιάζοντα πίνακα \bar{A} . Ωστόσο, λόγω της πολυπλοκότητας της τεταρτοβάθμιας εξίσωσης, τα α δεν δύναται να υπολογιστούν πάντα με ακρίβεια. Λόγω αυτού, καθώς και λόγω πιθανών σφαλμάτων στρογγύλευσης, όταν οι τιμές τοποθετούνται στον πίνακα \bar{A} δεν τον καθιστούν αναγκαστικά ιδιάζοντα και άρα δεν μπορούν να υπολογιστούν εύκολα τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα \vec{E}_0 .

Ένας αναλυτικός υπολογισμός, από την άλλη, τόσο των τιμών α όσο και των \vec{E}_0 είναι αρκετά δύσκολος και φυσικά αυξάνεται όσο περισσότερο επιτρέπουμε στον κάθε κρύσταλλο να έχει αυθαίρετο προσανατολισμό.

Επιπλέον, γενικότερα, υπάρχει ιδιομορφία στην περίπτωση που έχουμε διάδοση κατά μήκος ενός οπτικού άξονα του κρυστάλλου καθότι τότε σε μία λύση α αντιστοιχούν δύο ιδιοδιανύσματα \vec{E}_0 .

Τελικά, οι I. Hodgkinson S.Kassam και Q. Wu [28], μερικά χρόνια πιο μετά, ανέπτυξαν μια συστηματική μέθοδο όπου εφαρμόζουν στην ουσία τη μέθοδο του Berreman συνδυασμένη με μία συστηματική μέθοδο μητρών μετασχηματισμού (παρόμοια με αυτή στο [26]) για τον υπολογισμό του πεδίου σε μια διάταξη διαδοχικών ανιστροπικών ομοιογενών στρωμάτων. Λόγω του ότι τα στρώματα θεωρούνται ομοιογενή, η εξίσωση 5.98 εκφυλίζεται ουσιαστικά σε εξίσωση ιδιοτιμών, παρόμοια της σχέσης 5.22. Σε αυτήν, σε μεγάλο βαθμό, βασίζεται, όπως είπαμε και στην αρχή του κεφαλαίου, και η μεθοδολογία που υλοποιήθηκε στην παρούσα εργασία.

Πέραν των παραπάνω, έχουν δημοσιευθεί αρκετές άλλες παρόμοιες μεθοδολογίες που προσεγγίζουν ανάλογα προβλήματα. Κάποιες μάλιστα είναι καθαρά αναλυτικές (π.χ. [13], [35], [36]) και οδηγούν σε κλειστούς τύπους για τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης αλλά συνήθως έχουν κάποιους περιορισμούς στις παραμέτρους της διάταξης (π.χ. έχουν κάποιο περιορισμό ως προς τις δυνατές διευθύνσεις του οπτικού άξονα ή των αριθμό των στρωμάτων ή υποθέτουν ότι οι κρύσταλλοι είναι μονοαξονικοί). Κάποιες μέθοδοι, επίσης, χρησιμοποιούν ειδικά μαθηματικά εργαλεία όπως τη δυαδική συνάρτηση Green (π.χ. [12]). Τέλος, υπάρχουν δημοσιεύσεις βασισμένες σε αριθμητικές μεθόδους, οι οποίες μπορούν να εφαρμοστούν σε πιο γενικευμένες διατάξεις (π.χ. για μη ομοιογενή στρώματα βλ. [37]).

100ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΑΝΑΚΛΑΣΗ - ΔΙΑΘΛΑΣΗ ΑΠΟ ΣΤΟΙΒΑ ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΙΚΩΝ ΣΤΡΩΜΑΤΩΝ

Κεφάλαιο 6

Πρόγραμμα A - Ανάλυση πρόσπτωσης σε στοίβα Ανισοτροπικών Στρωμάτων

6.1 Υλοποίηση

Δημιουργήθηκε εργαλείο ανάλυσης και επίλυσης του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος της πρόσπτωσης επιπέδου H/M κύματος σε στοίβα ανισοτροπικών διηλεκτρικών στρωμάτων, όπως αυτό περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το πρόγραμμα υλοποιήθηκε σε περιβάλλον MATLAB.

6.1.1 Πρόγραμμα τελικού χρήστη: συνάρτηση *analyze_anis_stack()*

Το "end-user" πρόγραμμα είναι η συνάρτηση *analyze_anis_stack()*. Η συνάρτηση αυτή δέχεται ως είσοδο τα εξής:

d_microns,er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg,n_in,n_out δεδομένα που περιγράφουν τη διάταξη των ανισοτροπικών layers (διηλεκτρικοί ταυιστές, γωνίες προσανατολισμού του συστήματος αξόνων των κρυστάλλων, πάχη στρωμάτων σε μm) καθώς και τα μέσα εισόδου και εξόδου (δείκτες διάθλασης)

lamda_microns, thetak_deg χαρακτηριστικά του βασικού προσπίπτοντος επιπέδου κύματος: μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτινοβολίας σε μm στο κενό καθώς και γωνία πρόσπτωσης σε μοίρες

thetak_deg_array διάστημα γωνιών πρόσπτωσης (angle of incidence sweep)

lamda_microns_array διάστημα μηκών κύματος (frequency sweep)

xmin, xmax, dx διάστημα και step ανάλυσης κατά μήκος του άξονα x σε μm

και πραγματοποιεί τα εξής (καλώντας τις αντίστοιχες συναρτήσεις):

rt_theta() Υπολογίζει και αποτυπώνει σε γράφημα τους συντελεστές ανάκλασης \bar{r} και διάθλασης \bar{l} καθώς και τις ανακλαστικότητες \bar{R} - διαθλαστικότητες \bar{T} της διάταξης (βλ. σχέσεις 5.65,5.63,5.85 και 5.90) για το εύρος του δεδομένου διαστήματος γωνιών πρόσπτωσης. `thetak_deg_array`.

rt_lambda() Υπολογίζει και αποτυπώνει σε γράφημα τους συντελεστές ανάκλασης \bar{r} και διάθλασης \bar{l} καθώς και τις ανακλαστικότητες \bar{R} - διαθλαστικότητες \bar{T} της διάταξης για το εύρος του δεδομένου διαστήματος μηκών κύματος `lambda_microns_array`.

EH_along_x() υπολογίζει και αποτυπώνει το φασιθέτη της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του οριζόντιου άξονα της διάταξης, στο εύρος `[x_min,x_max]` με `step dx`. Οι τρεις συνιστώσες αποτυπώνονται σε κοινό γράφημα (με `subplot`)

Savg_along_x() υπολογίζει και αποτυπώνει τη μέση τιμή του μιγαδικού διανύσματος Poynting (και τις τρεις συνιστώσες) κατά μήκος του οριζόντιου άξονα της διάταξης, στο ίδιο εύρος `[x_min,x_max]` με `step dx` και με αντίστοιχο τρόπο (`subplot`).

kspols() φτιάχνει ένα 3D γράφημα το οποίο απεικονίζει τα κυματανύσματα \vec{k} και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα-ιδιοπολώσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε κάθε περιοχή (για κάθε στρώμα). Αν προκύψει μιγαδικό κυματάνυσμα ή ιδιοδιάνυσμα τότε το φανταστικό του μέρος αναπαρίσταται με διακεκομμένη γραμμή.

Επιπλέον ορίσματα

Η συνάρτηση παίρνει και κάποια επιπλέον ορίσματα:

titlepatch,figurenamepatch προαιρετικό κείμενο το οποίο επιθυμούμε να ενσωματώνεται στους τίτλους και τις επικεφαλίδες των παραθύρων των γραφημάτων (`figures`) που παράγονται.

figurenumber επιθυμητός αριθμός-δείκτης (`handle`) του πρώτου `figure` που θα εκτυπωθεί. Τα υπόλοιπα τυπώνονται όλα με διαδοχικά `handles`.

functionopt διάνυσμα 5 στοιχείων (όσες και οι συναρτήσεις-λειτουργίες που καλούνται) όπου κάθε στοιχείο αντιπροσωπεύει (ανάλογα με το αν είναι μη μηδενικό ή όχι) το αν θα εκτελεστεί η αντίστοιχη συνάρτηση.

saveplotopt μεταβλητή που υποδεικνύει αν είναι επιθυμητό από το χρήστη να σωθούν (σε μορφή `jpg`) τα `figures` που παράγονται.

mysavepath `string` που περιέχει τη διαδρομή του φακέλου μέσα στον οποίο θα αποθηκευτούν οι εικόνες (εφόσον φυσικά η `saveplot` είναι διάφορη του μηδενός).

Προαιρετική έξοδος

figurenumber Επόμενο διαθέσιμο `handle` (ο αριθμός που τελευταίου `figure` που δημιουργήθηκε + 1). Το ίδιο κάνει και η καθεμία από τις παραπάνω υποσυναρτήσεις. Αυτό γίνεται προκειμένου να ξέρουμε σε ποιον αριθμό "τελείωσε" η προηγούμενη συνάρτηση ώστε να "ζητήσουμε" από την επόμενη να αρχίσει από εκεί (χρησιμοποιώντας το ομώνυμο όρισμα `figurenumber`).

6.1.2 Πρόγραμμα - πυρήνας: συνάρτηση `compute_anis_stack()`

Το βασικό πρόγραμμα-πυρήνας που υλοποιεί την επίλυση του προβλήματος είναι η συνάρτηση `compute_anis_stack()`.

Η συνάρτηση αυτή δέχεται σαν είσοδο τα εξής:

- τη δομή `anis_stack` που περιγράφει τη διάταξη των ανισοτροπικών layers με τα μέσα εισόδου και εξόδου. Πιο συγκεκριμένα η δομή αποτελείται από τα πεδία:

d_microns διάνυσμα με πάχη στρωμάτων σε μm . Η διάσταση N του διανύσματος `d_microns` αποτελεί και τον αριθμό των στρωμάτων.

er0x,er0y,er0z διανύσματα μεγέθους N με τους διηλεκτρικούς ταυιστές κάθε στρώματος στο κύριο σύστημα αξόνων του (διαγώνια στοιχεία) $\epsilon_x^l, \epsilon_y^l, \epsilon_z^l$

theta_deg,phi_deg,psi_deg διανύσματα μεγέθους N με τις γωνίες Euler (περιστροφής) ϕ, θ, ψ των κυρίων αξόνων του κρυστάλλου ως προς το βασικό σύστημα αναφοράς σε μοίρες, σύμφωνα με τη σύμβαση $z - x' - z''$

n_in,n_out δείκτες διάθλασης μέσων εισόδου και εξόδου n_{in}, n_{out}

- χαρακτηριστικά του προσπίπτοντος επιπέδου κύματος, όπως και στην `analyze_anis_stack()` (**lamda_microns** και **thetak_deg**)

και επιστρέφει τα εξής:

b y -συνιστώσα του σχετικού κυματανύσματος του προσπίπτοντος κύματος \vec{k}_{rinc} και κατά συνέπεια (λόγω της εφαρμογής των οριακών συνθηκών στα interfaces) y -συνιστώσα των σχετικών κυματανυσμάτων όλων των ρυθμών-επιπέδων κυμάτων που δημιουργούνται μέσα στα layers. (βλ. σχέση 5.10)

a πίνακας διαστάσεων $4 \times [N+2]$ με όλες τις x -συνιστώσες των τεσσάρων επιμέρους σχετικών κυματανυσμάτων σε κάθε layer, συμπεριλαμβανομένων των μέσων εισόδου και εξόδου σαν layer 1 και layer $N+2$. Οι x -συνιστώσες είναι οι ιδιοτιμές που υπολογίζονται από τη σχέση 5.22

m πίνακας διαστάσεων $4 \times 2 \times [N+2]$ που έχει τους 8 συντελεστές του ηλεκτρικού πεδίου των επιμέρους ρυθμών στο κάθε layer (4 για την p και 4 για την s συνιστώσα του πλάτους ηλεκτρικού πεδίου του προσπίπτοντος κύματος). Προκειται για τους πίνακες συντελεστών \bar{m}_l , δηλαδή, της σχέσης 5.69.

p_E,p_H Πίνακες διαστάσεων $3 \times 4 \times [N+2]$ με τα τέσσερα ιδιοδιανύσματα βάσης $\vec{E}_{0q,l}$ και $\vec{H}_{0q,l}$ για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο για κάθε layer (βλ. σχέσεις 5.70 και 5.71)

r,t,Pr,Pt πίνακες διαστάσεων 2×2 που περιέχουν τους συντελεστές ανάκλασης \bar{r} , τους συντελεστές διάθλασης \bar{t} , την ανακλαστικότητα \bar{R} και την ανακλαστικότητα \bar{T} της διάταξης για τη συγκεκριμένη γωνία πρόσπτωσης και μήκος κύματος (βλ. σχέσεις 5.62, 5.64, 5.85 και 5.90).

Εν ολίγοις, η συνάρτηση υπολογίζει για δεδομένη ακτινοβολία προσπίπτουσα σε μία δεδομένη στοίβα ανισοτροπικών διηλεκτρικών το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που δημιουργείται, με την έννοια ότι υπολογίζει όλους τους συντελεστές των σχέσεων 5.70 και 5.71 από τις οποίες

αυτό μπορεί να προσδιοριστεί. Επιπλέον, υπολογίζει τους συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης και την ανακλαστικότητα/διαθλαστικότητα για τα συγκεκριμένα δεδομένα.

Η λογική του αλγορίθμου έχει ως εξής: Σε έναν επαναληπτικό βρόχο, ξεκινώντας από το μέσο εξόδου και καταλήγοντας (αφού περάσουμε από τα ενδιάμεσα ανισ. στρώματα) προς το μέσο εισόδου, υπολογίζουμε με χρήση της συνάρτησης `compute_anis()` τα ιδιοδιανύσματα $\vec{E}_{0q,l}$ και $\vec{H}_{0q,l}$ για κάθε layer. Για την ακρίβεια, σε κάθε βήμα υπολογίζουμε τον πίνακα

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} E_{0y_{1,l}} & E_{0y_{2,l}} & E_{0y_{3,l}} & E_{0y_{4,l}} \\ H_{0z_{1,l}} & H_{0z_{2,l}} & H_{0z_{3,l}} & H_{0z_{4,l}} \\ E_{0z_{1,l}} & E_{0z_{2,l}} & E_{0z_{3,l}} & E_{0z_{4,l}} \\ H_{0y_{1,l}} & H_{0y_{2,l}} & H_{0y_{3,l}} & H_{0y_{4,l}} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

και τα διανύσματα

$$[E_{0x_{1,l}} \quad E_{0x_{2,l}} \quad E_{0x_{3,l}} \quad E_{0x_{4,l}}] \quad (6.2)$$

και

$$[H_{0x_{1,l}} \quad H_{0x_{2,l}} \quad H_{0x_{3,l}} \quad H_{0x_{4,l}}] \quad (6.3)$$

Παράλληλα, στο ίδιο βήμα του βρόχου, υπολογίζουμε και αποθηκεύουμε τον πίνακα μεταφοράς \bar{T}_{l-out} που συνδέει τα πλάτη \vec{A}_l του στρώματος l με τα πλάτη \vec{A}_{N+1} του μέσου εξόδου.

$$\begin{bmatrix} A_{1,l} \\ A_{2,l} \\ A_{3,l} \\ A_{4,l} \end{bmatrix} = \bar{T}_{l-out} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ A_{p',out} \\ A_{s,out} \\ A_{s',out} \end{bmatrix} = \bar{T}_{l-out} \cdot \begin{bmatrix} A_{p,out} \\ 0 \\ A_{s,out} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Ο υπολογισμός γίνεται με χρήση της σχέσης 5.66 και συγκεκριμένα μέσω της πράξης

$$\bar{T}_{l-out} = \bar{F}_l^{-1} \bar{F}_{l+1} \bar{P}_{l+1} (-d_{l+1}) \bar{T}_{[l+1]-out} \quad (6.5)$$

Η μορφή της σχέσης 5.66 είναι αυτό που κατέστησε ιδιαίτερα βολικό το να εκτελέσουμε το loop αντίστροφα, δηλαδή πηγαίνοντας από το στρώμα με το μεγαλύτερο αύξοντα αριθμό l προς το στρώμα με τον μικρότερο αύξοντα αριθμό. Διότι με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε τόσο τα ιδιοδιανύσματα $\vec{E}_{0q,l}$ και $\vec{H}_{0q,l}$ και τις ιδιοτιμές $\bar{\alpha}_l$ όσο και τους πίνακες μεταφοράς \bar{T}_{l-out} στο ίδιο loop.

Σημειώνουμε εδώ ότι η αρίθμηση των στρωμάτων στον κώδικα αρχίζει από το 1 (λόγω της πολιτικής της MATLAB σχετικά με τους δείκτες των πινάκων), σε αντίθεση με την μαθηματική ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι, π.χ. το μέσο εξόδου είναι το $N + 1$ -οστό στρώμα στην μαθηματική ανάλυση αλλά το $N+2$ -οστό στρώμα στον υλοποιηθέντα MATLAB κώδικα.

Με αυτόν τον τρόπο, στο τελευταίο βήμα υπολογίζουμε τον ολικό πίνακα μεταφοράς της διάταξης \bar{T}_{anis} (βλ. σχέση 5.54)

Έπειτα, από τον \bar{T}_{anis} , με χρήση των σχέσεων 5.62 και 5.64 υπολογίζουμε τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης \bar{r} και \bar{t} .

Τέλος, "πακετάρουμε" τα $\vec{E}_{0q,l}$ και $\vec{H}_{0q,l}$ όλων των στρωμάτων στις μεταβλητές εξόδου `p_E` και `p_H`, τα οποία χρησιμοποιούν άλλες συναρτήσεις.

Οφείλουμε επιπλέον να επισημάνουμε τα εξής:

- η συνάρτηση δέχεται τα δεδομένα της διάταξης των στρωμάτων ομαδοποιημένα σε δομή, προκειμένου να ελαχιστοποιηθεί ο αριθμός των ορισμάτων. Ωστόσο, δε γίνεται το ίδιο και στην `analyze_anis_stack()` προκειμένου ο χρήστης να μπορεί να της περάσει αμεσότερα τα εν λόγω δεδομένα. Η τελευταία προφανώς αναλαμβάνει να τα "πακετάρει" στη δομή ώστε να τα περάσει στην `compute_anis_stack()`.
- Επειδή η διαθλαστικότητα, εν γένει, είναι συνάρτηση του x (βλ. π.χ. σχέση 5.86), αυτή που υπολογίζεται από το πρόγραμμα είναι η τιμή της για $x = 0$!, δηλαδή:

$$\begin{aligned}
 T_{pp} &= |t_{pp}|^2 \frac{1}{\alpha_{p,in}} \Re\left\{ \frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out} \right\} \\
 T_{sp} &= |t_{sp}|^2 \frac{1}{\alpha_{p,in}} \Re\left\{ \frac{n_{out}^*}{n_{out}} \alpha_{p,out} \right\} \\
 T_{ps} &= |t_{ps}|^2 \frac{\Re\{\alpha_{p,out}\}}{\alpha_{p,in}} \\
 T_{ss} &= |t_{ss}|^2 \frac{\Re\{\alpha_{p,out}\}}{\alpha_{p,in}}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

- τα πάχη d και τα μήκη κύματος λ δίνονται σε μm προκειμένου να διευκολύνει τη χρήση του προγράμματος σε οπτικές εφαρμογές. Άλλωστε αυτό είναι και το κύριο πεδίο εφαρμογής των συγκεκριμένων διατάξεων.

6.1.3 Παρατηρήσεις σχετικά με τις λοιπές βοηθητικές συναρτήσεις

Συνάρτηση `compute_anis()`

Η συγκεκριμένη συνάρτηση καλείται από την `compute_anis_stack()`. Δέχεται σαν είσοδο το β και τα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου ανισοτροπικού στρώματος, δηλαδή τα στοιχεία του κύριου διηλεκτρικού ταυστή (διαγώνια στοιχεία) και τις γωνίες προσανατολισμού του κρυστάλλου (`er0x,er0y,er0z` και `theta_deg,phi_deg,psi_deg`), και βρίσκει τους τέσσερις ιδιορυθμούς ($\vec{E}_{0q,l}$, $\vec{H}_{0q,l}, \alpha_l$) μέσα στο συγκεκριμένο ανισοτροπικό στρώμα λύνοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών 5.22 με χρήση της συνάρτησης `eig()` της MATLAB.

Σε περίπτωση που τα τρία διαγώνια στοιχεία του κύριου διηλεκτρικού ταυστή είναι ίσα, τότε, επειδή πρόκειται για ιστροπικό υλικό, δε χρησιμοποιεί τον συγκεκριμένο τρόπο αλλά ορίζει τα ιδιοδιανύσματα χειροκίνητα βάσει των σχέσεων 5.37, 5.38 και 5.39. Αυτό έγινε για λόγους αποδοτικότητας και συμπίκνωσης του κώδικα (καθότι η ίδια συνάρτηση καλείται ακόμα και για τα μέσα εισόδου και εξόδου.)

Συναρτήσεις `rt_theta()` και `rt_lamda()`

Οι συναρτήσεις, όπως εξηγήθηκε παραπάνω, υπολογίζουν και απεικονίζουν σε γραφήματα τους συντελεστές ανάκλασης και τις ανακλαστικότητες/διαθλαστικότητες της διάταξης για ένα συγκεκριμένο εύρος γωνιών πρόσπτωσης ή ένα συγκεκριμένο εύρος μηκών κύματος αντίστοιχα.

Για να το επιτύχουν αυτό καλούν πολλές φορές την βασική συνάρτηση `compute_anis_stack` (για όλες τις γωνίες (ή όλα τα μήκη κύματος)) και έπειτα καλούν τη συνάρτηση `plot_rt_sp` η οποία παίρνει τα δεδομένα ($\vec{r}, \vec{t}, \vec{R}$ και \vec{T}) και τα τυπώνει. Για να το πετύχει αυτό, η συνάρτηση `plot_rt_sp` με τη σειρά της καλεί τέσσερις φορές τη συνάρτηση `plot_rt` (για κάθεμία από τις τέσσερις περιπτώσεις `-pp,ps,sp,ss-` (για καθένα από τα τέσσερα στοιχεία των 2×2 πινάκων $\vec{r}, \vec{t}, \vec{R}, \vec{T}$). Η δομημένη αυτή λύση έγινε προκειμένου να έχουμε ένα πιο ομοιόμορφο αποτέλεσμα

και ώστε να είναι πιο συμπαγής και πιο συντηρήσιμος ο κώδικας, να μπορούμε δηλαδή να κάνουμε μια αλλαγή σε ένα μόνο σημείο του κώδικα και αυτή να απεικονιστεί σε όλες τις περιπτώσεις που θέλουμε να τη δούμε.

Μάλιστα, σημειώνεται εδώ, ότι η συνάρτηση `plot_rt_sp` παίρνει σαν όρισμα και το `xlabel` προκειμένου να καλείται τόσο από την `rt_theta()` (όπου ο οριζόντιος άξονας δείχνει γωνίες σε μοίρες) όσο και από την `rt_theta()` (όπου ο οριζόντιος άξονας δείχνει μήκη κύματος σε μm)

Κάθε εκτέλεση της `plot_rt` παράγει ένα γράφημα που απεικονίζει τα \bar{R} και \bar{T} και άλλα δύο τα οποία απεικονίζουν τα \bar{r} και \bar{t} σε αναπαράσταση πραγματικού - φανταστικού μέρους και σε αναπαράσταση πολικής μορφής. Σημειώνεται εδώ ότι στην αναπαράσταση πολικής μορφής, όσον αφορά στη γωνία, έχει χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση `unwgar` η οποία επεκτείνει τη γωνία προκειμένου να φαίνεται το γράφημα πιο ομαλό.

Συνάρτηση `EH_along_x()`

Η συνάρτηση αυτή απεικονίζει σε γράφημα τις εντάσεις του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου (για την ακρίβεια τους φασιθέτες τους) που οφείλονται ξεχωριστά σε στην p και στην s συνιστώσα πόλωσης του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος ενός συγκεκριμένου διαστήματος επί του άξονα x (βλ. σχέσεις 5.73 και 5.74).

Καλεί για αυτό τη συνάρτηση `compute_EH_along_x()` η οποία κάνει ουσιαστικά τον απαιτούμενο υπολογισμό. Η ίδια παίρνει απλώς τα δεδομένα και καλεί τέσσερις φορές τη συνάρτηση `plot_cvector_along_x` η οποία τυπώνει τις τρεις συνιστώσες των μιγαδικών διανυσμάτων κατά μήκος του άξονα x .

Οι τέσσερις περιπτώσεις για τις οποίες γίνεται λόγος είναι τα μιγαδικά διανύσματα $\vec{E}_p(x)$, $\vec{E}_{s,l}(x)$, $\vec{H}_{p,l}(x)$ και $\vec{H}_{s,l}(x)$.

Όπως και πριν, η λογική της επαναχρησιμοποίησης και του υπερδομημένου προγραμματισμού στοχεύει στην καλύτερη εποπτεία, ομοιομορφία και συντηρησιμότητα του κώδικα.

Συνάρτηση `compute_EH_along_x()`

Χρησιμοποιεί τις σχέσεις 5.73 και 5.74 για να υπολογίσει τα $\vec{E}_p(x)$, $\vec{E}_{s,l}(x)$, $\vec{H}_{p,l}(x)$ και $\vec{H}_{s,l}(x)$ για κάθε σημείο x του διανύσματος `x_microns`

Παίρνει σαν ορίσματα τη (προαναφερθείσα) δομή `anis_stack` με τη διάταξη του προβληματος, τη γωνία πρόσπτωσης `thetak_deg` και το μήκος κύματος του προσπίπτοντος κύματος και το διάνυσμα `x_microns`.

Με βάση το πεδίο `d_microns` της δομής `anis_stack` και το διάνυσμα `x_microns` υπολογίζει το διάνυσμα `xseps_microns` το οποίο περιέχει τις θέσεις πάνω στον άξονα των x στις οποίες βρίσκονται τα `interfaces`, δηλαδή οι διαχωριστικές επιφάνειες (τα όρια) των στρωμάτων τα οποία βρίσκονται μεταξύ σημείων του `x_microns` και άρα καλό είναι να αποτυπωθούν στο όποιο γράφημα απεικονίζει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.

Για να εφαρμόσει τώρα τις σχέσεις 5.73 και 5.74 ώστε να υπολογίσει το H/M πεδίο, θα πρέπει να γνωρίζει -για το εκάστοτε στοιχείο του `x_microns`- ποιο είναι το l , δηλαδή σε ποιο στρώμα περιέχεται το συγκεκριμένο σημείο του άξονα x . Αυτό το "πληροφορείται" καλώντας τη συνάρτηση `findlayer()` η οποία επιστρέφει το αντίστοιχο l , αλλά και το "σχετικό" x δηλαδή τη $x - x_l$ της σχέσης 5.73.

Σημειώνεται ότι το διάνυσμα `x_microns` περιέχει απλά μια σειρά από σημεία του άξονα x . Δεν είναι απαραίτητο να είναι διαδοχικά ή με συγκεκριμένη απόσταση-βήμα μεταξύ τους.

Συνάρτηση Savg_along_x()

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. σχέση 5.76) η συνολική μέση ροή ενέργειας $\langle \vec{S} \rangle$ (διάνυσμα Poynting) κατά μήκος της διάταξης αποτελείται από τέσσερις παράγοντες ανάλογους των $|A_{p,in}|^2$, $A_{p,in}A_{s,in}^*$, $A_{s,in}A_{p,in}^*$ και $|A_{s,in}|^2$.

Η συγκεκριμένη λοιπόν συνάρτηση απεικονίζει σε ξεχωριστά γραφήματα τις τέσσερις αυτές συνιστώσες του μιγαδικού διανύσματος Poynting (δηλαδή του όρου $\vec{E} \times \vec{H}$ (υπενθυμίζεται ότι $\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}\}$) υπολογισμένες στα σημεία του διανύσματος x_microns (με αντίστοιχη λογική όπως στην απεικόνιση του H/M πεδίου από τη συνάρτηση EH_along_x()).

Χρησιμοποιεί και αυτή τις συναρτήσεις compute_EH_along_x() και plot_cvector_along_x, όπως και η EH_along_x().

Συνάρτηση ksnplots()

Η συνάρτηση αυτή καλεί την compute_anis_stack() η οποία της επιστρέφει τα b, a, p_E, p_H, δηλαδή τις y και x συνιστώσες των κυματανυσμάτων και τα ιδιοδιανύσματα βάσης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου και έπειτα απεικονίζει σε κάθε στρώμα με τρισδιάστατο τρόπο τις τρεις αυτές ομάδες διανυσμάτων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση quiver3() της MATLAB.

Επειδή τα κυματανύσματα $\vec{k}_{q,l}$ (που απεικονίζονται με μπλε χρώμα), με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{E}_{0q,l}$ (κόκκινο χρώμα) και τα αντίστοιχα $\vec{H}_{Hq,l}$ (πράσινο χρώμα) έχουν μεγάλη διαφορά στο πλάτος γίνεται κατάλληλο scaling στα $\vec{E}_{0q,l}$ και τα $\vec{H}_{Hq,l}$ ώστε όλα τα διανύσματα να έχουν παρόμοιο πλάτος και άρα να μπορούν να απεικονιστούν ικανοποιητικά.

Επίσης, σε περίπτωση που κάποιο διάνυσμα προκύψει μιγαδικό, απεικονίζονται σαν ξεχωριστά διανύσματα το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος, το πραγματικό με συνεχή γραμμή και το φανταστικό με διακεκομμένη.

Επιπλέον, απεικονίζεται με γαλάζιο χρώμα η ευθεία $y = \beta$ η οποία συναντά προφανώς το πέρασ όλων των κυματανυσμάτων. Αυτό γίνεται για να φαίνεται το ταίριασμα των φάσεων.

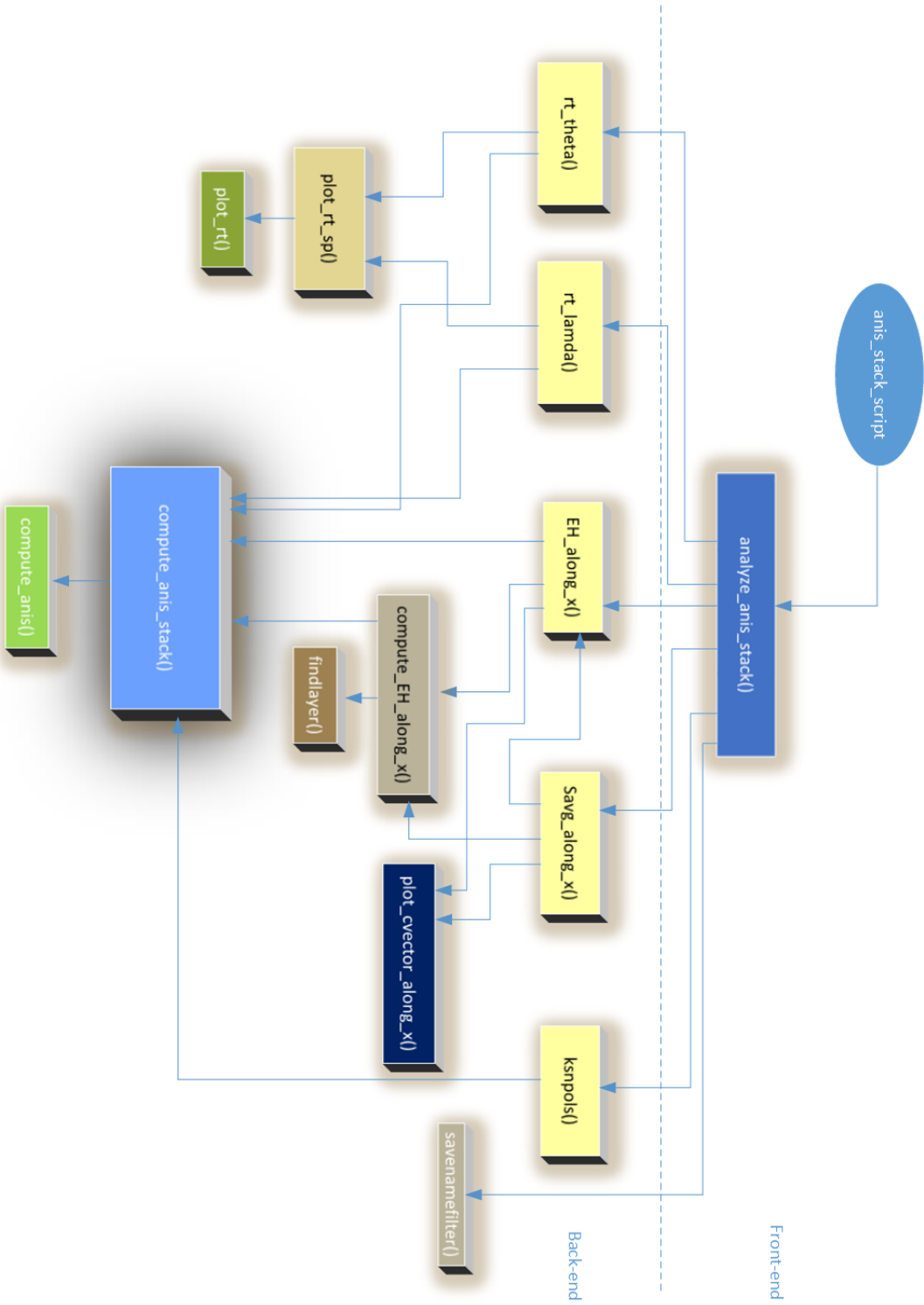
Σημειώνεται τέλος, ότι με χρήση της συνάρτησης mesh() απεικονίζονται επιπλέον στον τρισδιάστατο χώρο οι διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ των στρωμάτων.

Αρχείο εντολών anis_stack_script

Για την ευκολότερη κλήση της συνάρτησης analyze_anis_stack, η οποία έχει πολλά ορίσματα, διατίθεται αυτό το script αρχείο. Σε αυτό ανατίθενται τιμές για τα διάφορα ορίσματα της συνάρτησης με τρόπο κατανοητό και φιλικό προς το χρήστη.

6.1.4 Γενικά

Η αλληλεξάρτηση των διαφόρων συναρτήσεων που υλοποιήθηκαν φαίνεται, για καλύτερη κατανόηση, στο Σχήμα 6.1. Για τον κώδικα όλων των συναρτήσεων βλ. παράρτημα Α'.



Σχήμα 6.1: Διάγραμμα Δομής και Εξαρτήσεων του Προγράμματος

6.2 Παραδείγματα - Εφαρμογή σε συγκεκριμένες διατάξεις

Στην παρούσα ενότητα παρουσιάζονται μια σειρά από παραδείγματα διατάξεων στα οποία εφαρμόζεται η συνάρτηση που υλοποιήθηκε. Τα παραδείγματα αυτά επιλέχθηκαν διότι αποτελούν χαρακτηριστικές περιπτώσεις, δηλαδή αποτελούν αντιπροσωπευτικά δείγματα από διάφορες εφαρμογές στρωματοποιημένων διηλεκτρικών, και επειδή επιδεικνύουν την ορθότητα του προγράμματος.

6.2.1 Απλό interface μεταξύ δύο ισοτροπικών μέσων

Παραθέτουμε αρχικά σαν παράδειγμα την περίπτωση του απλού interface μεταξύ δυο ισοτροπικών μέσων (όπως αυτή συζητήθηκε στην ενότητα 3.4). Για το λόγο αυτό θεωρούμε (σαν είσοδο για το πρόγραμμα) ότι έχουμε ένα μόνο ενδιάμεσο ισοτροπικό στρώμα μηδενικού πάχους ($d_{\text{microns}}=0$). Επιλέγουμε $n_{in} = 1$, $n_{out} = 1.5$, $\lambda_0 = 0.633\mu\text{m}$ και βασική γωνία πρόσπτωσης $\theta_{inc} = 30^\circ$.

Στα σχήματα 6.2 μέχρι 6.12 βλέπουμε τα διαγράμματα που παρήχθησαν από τη συνάρτηση `rt_theta` και απεικονίζουν τη μεταβολή των συντελεστών ανάκλασης/διάθλασης \bar{r} , \bar{t} και της ανακλαστικότητας/διαθλαστικότητας \bar{R} , \bar{T} συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης. Παρατηρούμε ότι πράγματι οι ρυθμοί είναι ανεξάρτητοι, αφού τα $r_{ps}, r_{sp}, t_{ps}, t_{sp}, R_{ps}, R_{sp}, T_{ps}, T_{sp}$ είναι μηδενικά ανεξαρτήτως της θ_{inc} . Οι υπόλοιποι συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης έρχονται σε πλήρη συμφωνία με αυτούς που υπολογίζουμε από τις σχέσεις 3.128, 3.127, 3.123 και 3.122.

Στο σχήμα 6.4 βλέπουμε ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη γωνία όπου ο συντελεστής ανάκλασης p-p μηδενίζεται. Αυτό αντίθετα δε συμβαίνει με το συντελεστή ανάκλασης s-s (σχήμα 6.13). Πρόκειται για τη γωνία Brewster η οποία όπως είναι αναμενόμενη εμφανίζεται μόνο στην περίπτωση της παράλληλης πόλωσης. Μάλιστα, από τη σχέση 3.142 υπολογίζεται στις 56.3° , όσο δηλαδή φαίνεται και στο γράφημα.

Επίσης βλέπουμε ότι η ανακλαστικότητα και η διαθλαστικότητα (σχήματα 6.22 και 6.25) έχουν άθροισμα 1. Αυτό είναι επίσης κάτι αναμενόμενο αφού τα μέσα δεν παρουσιάζουν απώλειες ενώ οι ρυθμοί είναι ανεξάρτητοι και συνεπώς πρέπει να ισχύει $R_{ss} + T_{ss} = 1$ και $R_{pp} + T_{pp} = 1$.

Στα σχήματα 6.14 - 6.17 και 6.18 - 6.19 παρουσιάζονται η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και η ένταση του μαγνητικού πεδίου οφειλόμενες στις p και s συνιστώσες του προσπίπτοντος κύματος ξεχωριστά, καθώς και οι διάφοροι όροι του μιγαδικού διανύσματος Poynting ($\vec{E} \times \vec{H}^*$). Τα σχήματα αυτά παρήχθησαν προφανώς από τις συναρτήσεις `EH_along_x` και `Savg_along_x` του προγράμματος (επιλέχθηκε το διάστημα $[-1, 1]$ του άξονα x).

Παρατηρούμε ότι τα πεδία ταλαντώνονται με γρηγορότερο ρυθμό (καθώς "μετακινούμαστε" χωρικά) στο μέσο εξόδου απ ότι στο μέσο εισόδου κάτι που είναι πλήρως αναμενόμενο λόγω του ότι το μέσο εξόδου έχει μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης και άρα είναι πυκνότερο.

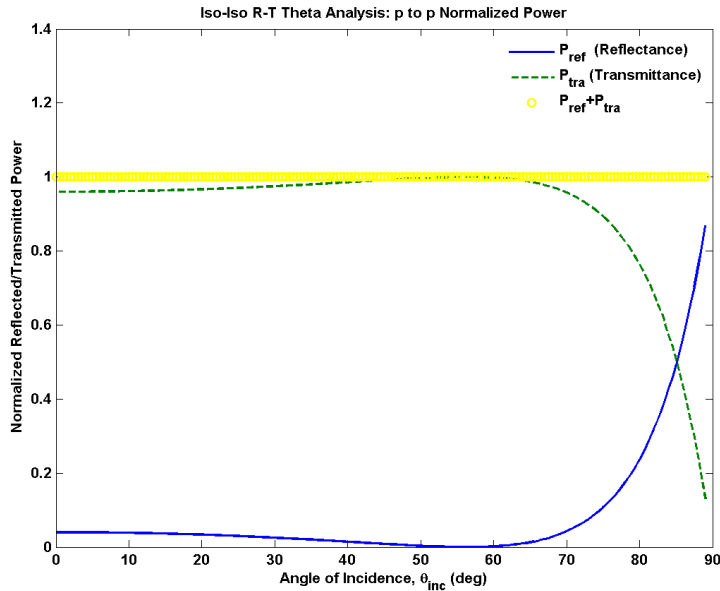
Βλέπουμε επίσης ότι κατά τη μετάβαση από το ένα μέσο στο άλλο οι y και z συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι συνεχείς. Δε συμβαίνει όμως το ίδιο και με τη x συνιστώσα. Αυτό είναι κάτι επίσης αναμενόμενο αφού η συνέχεια των y και z συνιστωσών (των εφαπτομενικών δηλαδή) των \vec{E} και \vec{H} είναι επιβεβλημένη από τις οριακές συνθήκες του Maxwell (σχέσεις 2.10 και 2.11) (και από το γεγονός ότι έχουμε διηλεκτρικά μέσα) και είναι μάλιστα το βασικό στοιχείο που χρησιμοποιήσαμε στη μεθοδολογία επίλυσής μας, τόσο στην ενότητα 3.4 όσο και στην ενότητα 5.2. Μάλιστα, επειδή από τη σχέση 2.12 φαίνεται ότι οι x συνιστώσες της ηλεκτρικής ροής πρέπει να είναι συνεχείς (κατά τη μετάβαση από το ένα μέσο στο άλλο) και αφού (επειδή έχουμε ισοτροπικά μέσα) ισχύει $D_x = \epsilon_0 n^2 E_x$ η x συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στα όρια της διαχωριστικής επιφάνειας πρέπει να είναι κατά μέτρο μικρότερη από την πλευρά

του μέσου εξόδου σε σχέση με την πλευρά του μέσου εισόδου (πράγμα που επιβεβαιώνεται από το σχήμα 6.14).

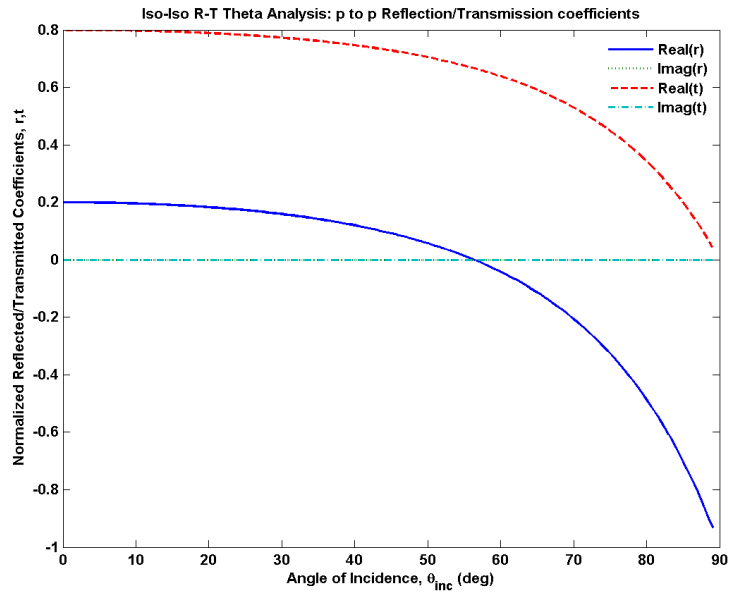
Παρατηρούμε επίσης ότι όσον αφορά στο μαγνητικό πεδίο και οι τρεις συνιστώσες είναι συνεχείς αφού τα δύο μέσα έχουν ίδια μαγνητική διαπερατότητα.

Όσον αφορά την ισχύ τώρα βλέπουμε ότι το προγραμματικό μέρος της x συνιστώσας είναι σταθερό καθόλο το μήκος του άξονα x . Αυτό έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με τις σχέσεις 3.156 και 3.158. Επιβεβαιώνεται επίσης από τις ίδιες σχέσεις ότι στο μέσο εισόδου η μεν y συνιστώσα της ισχύος έχει (εφόσον $\theta_{inc} \neq 0$) αρμονική εξάρτηση από το x και ότι εμφανίζεται μόνο στους όρους $|A_{inc,p}|^2$ και $|A_{inc,s}|^2$ (σχήματα 6.18 και 6.19) ενώ η z συνιστώσα έχει και αυτή αρμονική εξάρτηση από το x και εμφανίζεται μόνο στον όρο $A_{inc,p}A_{inc,s}^*$ (σχήμα 6.20)

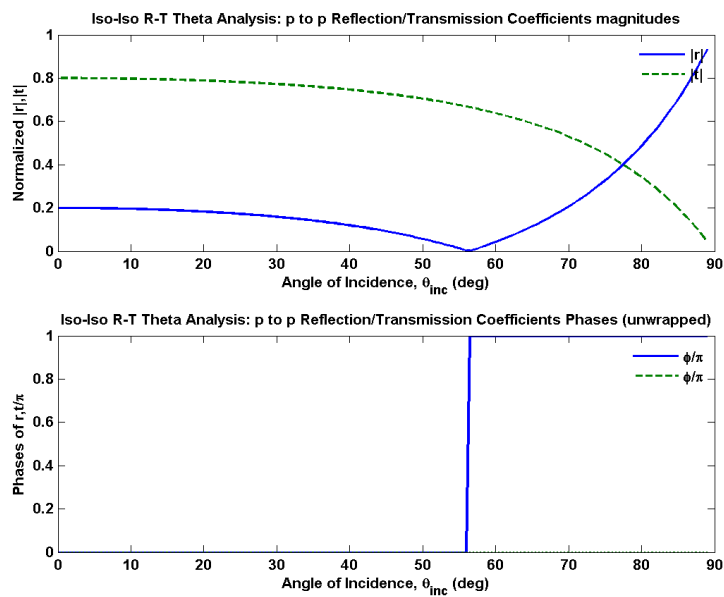
Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι τα γραφήματα που παρουσιάζουν την εξάρτηση των \bar{r} , \bar{t} , \bar{R} , \bar{T} από τη συχνότητα (όπως προκύπτουν από τη συνάρτηση `rt_lambda`) έχουν όλα τη μορφή μιας οριζόντιας ευθείας (δεν παρουσιάζονται εδώ για λόγους εξοικονόμησης χώρου αφού έχουν όλα την ίδια μορφή). Αυτό επιβεβαιώνει επίσης την ορθότητα του προγράμματος αφού από τις σχέσεις 3.128, 3.127, 3.123, 3.122 δεν προβλέπεται καμία εξάρτηση από τη συχνότητα (εφόσον φυσικά υποθέσουμε σταθερούς δείκτες διάθλασης).



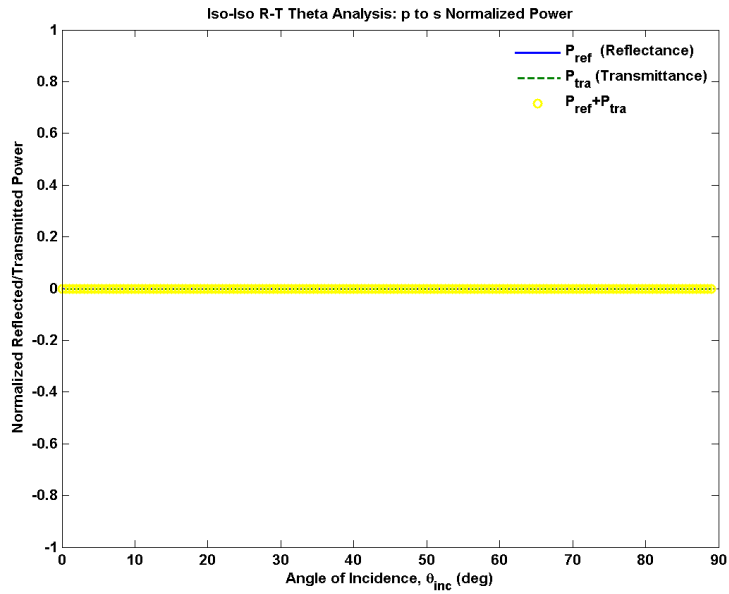
Σχήμα 6.2: Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



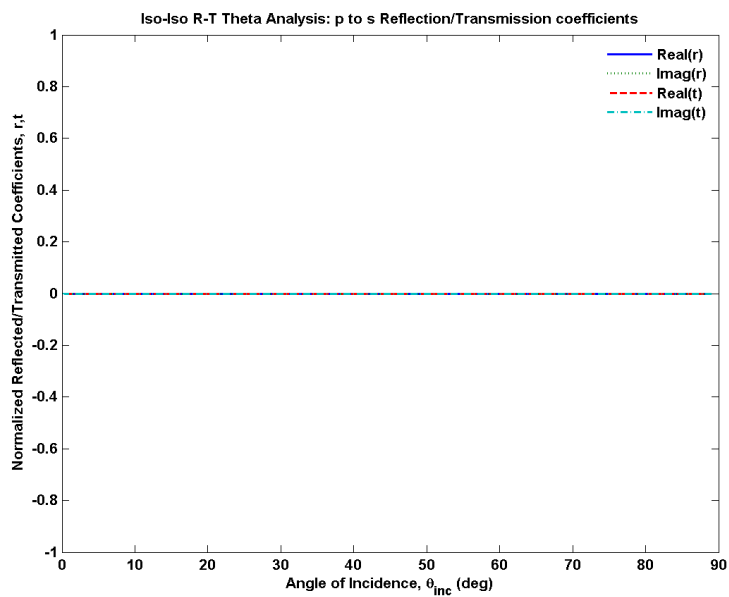
Σχήμα 6.3: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



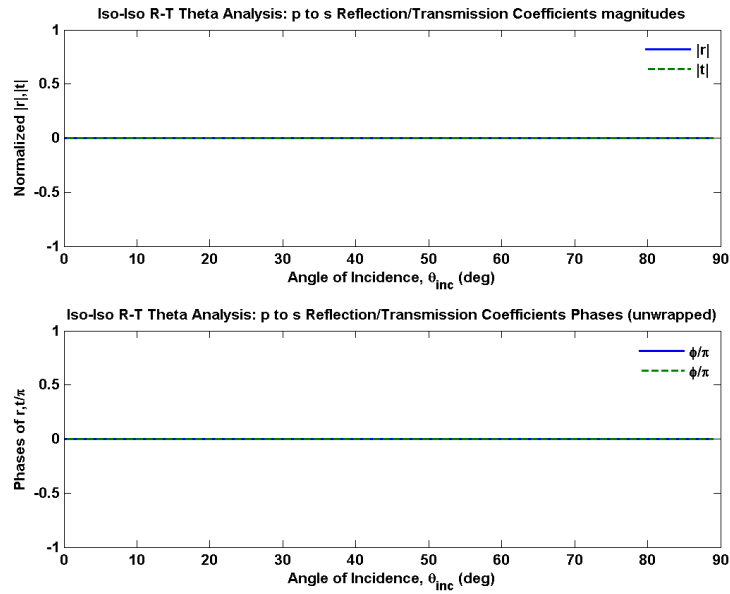
Σχήμα 6.4: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



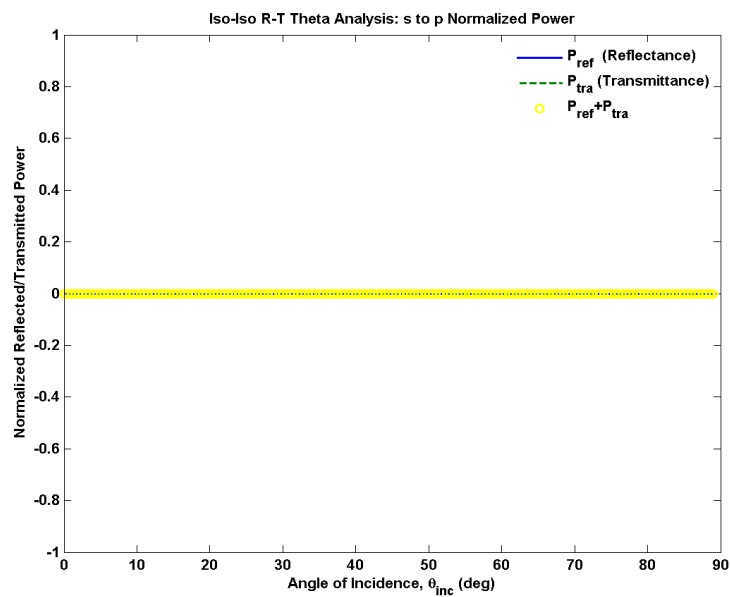
Σχήμα 6.5: Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



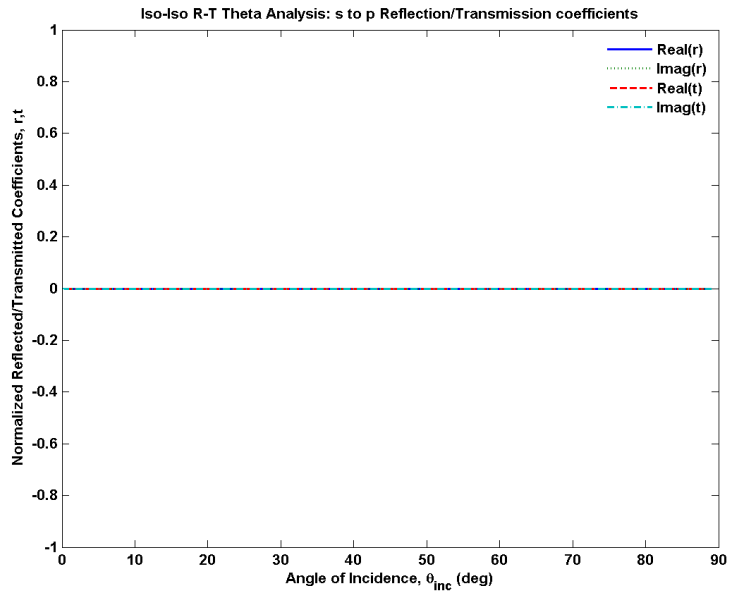
Σχήμα 6.6: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



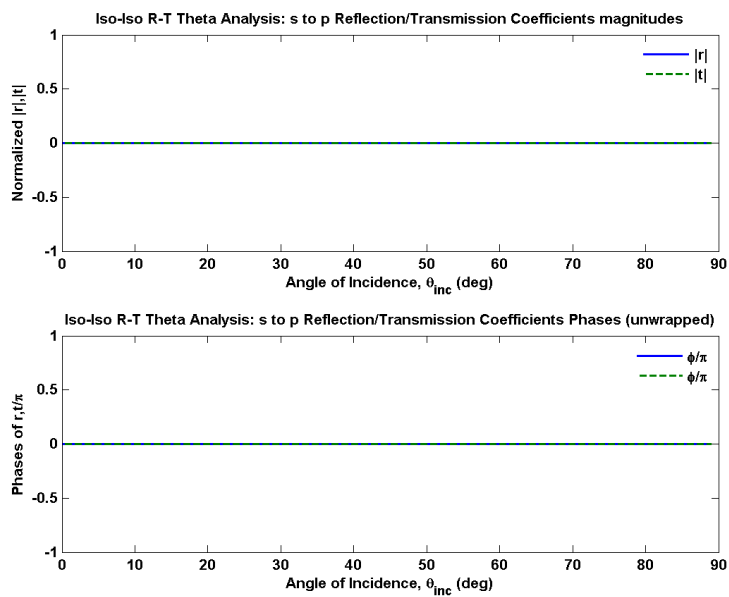
Σχήμα 6.7: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



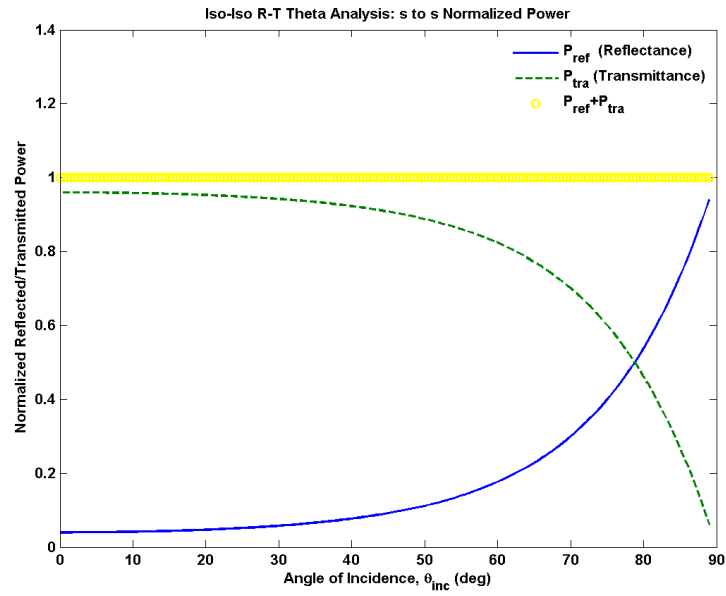
Σχήμα 6.8: Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



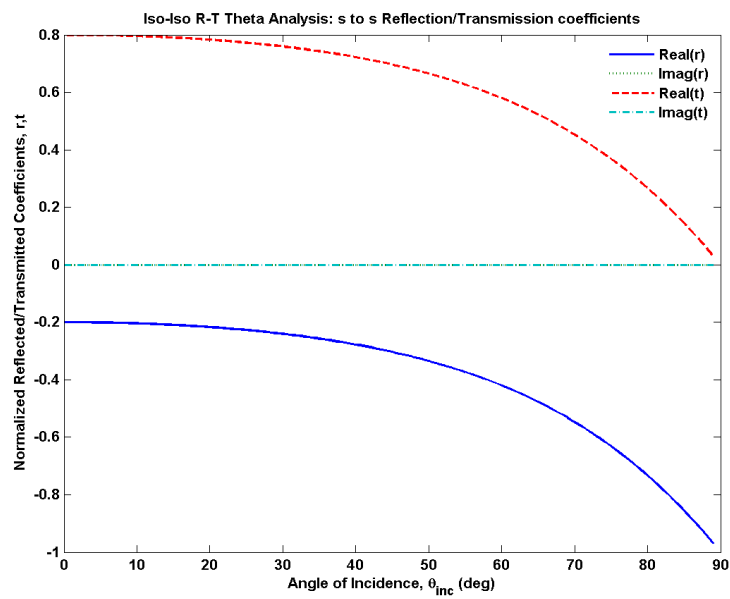
Σχήμα 6.9: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



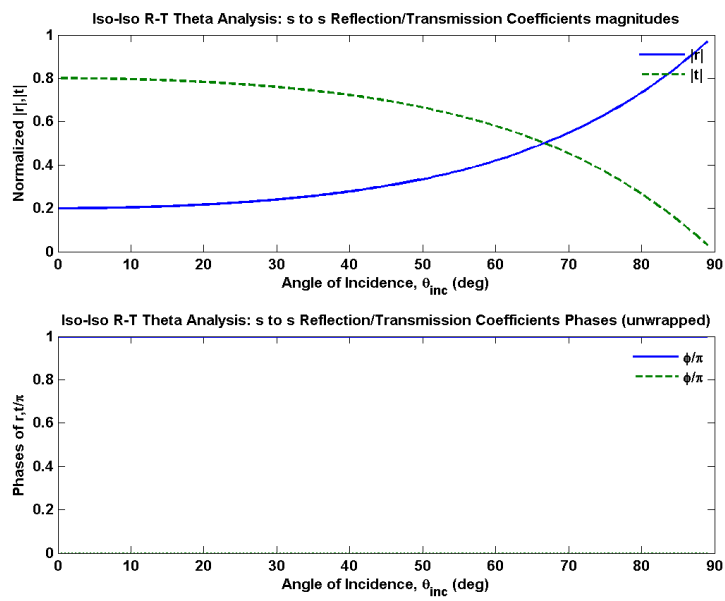
Σχήμα 6.10: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



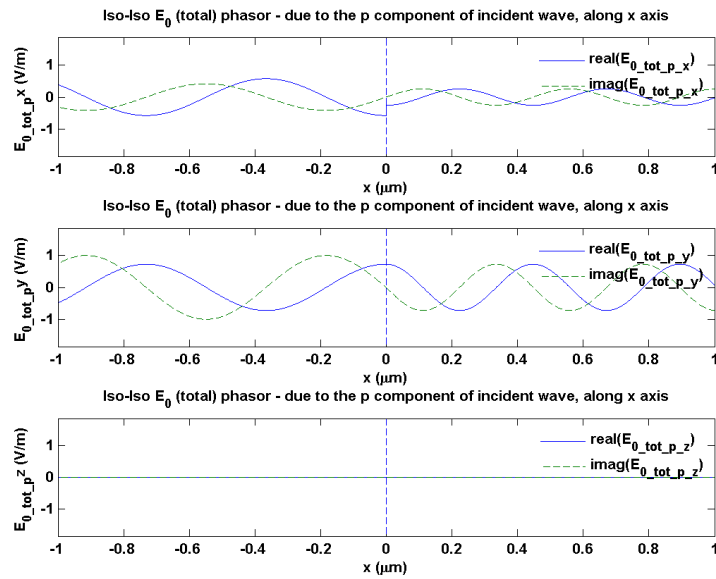
Σχήμα 6.11: Iso-Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



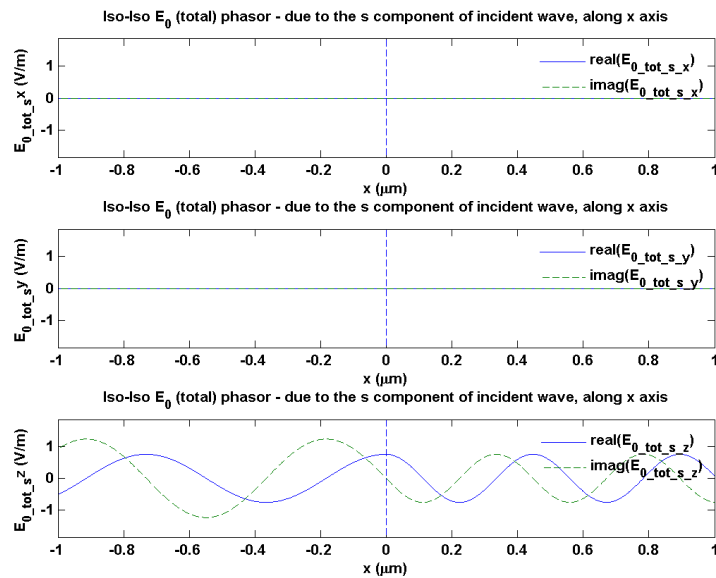
Σχήμα 6.12: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



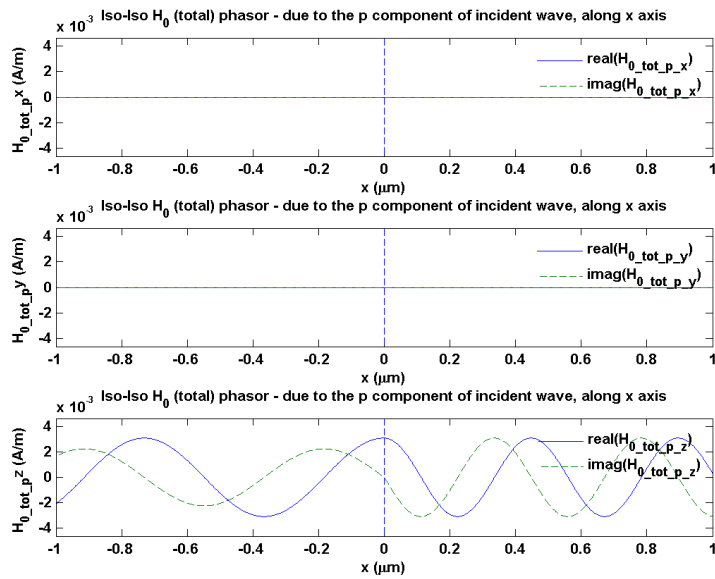
Σχήμα 6.13: Iso-Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



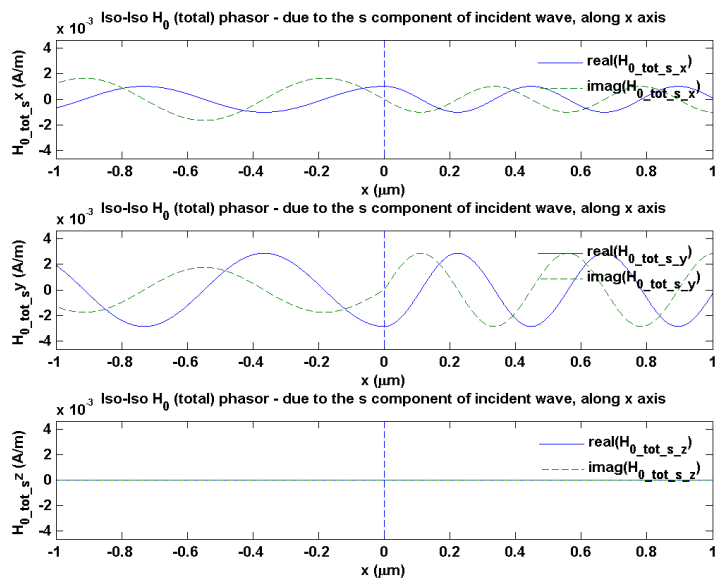
Σχήμα 6.14: Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



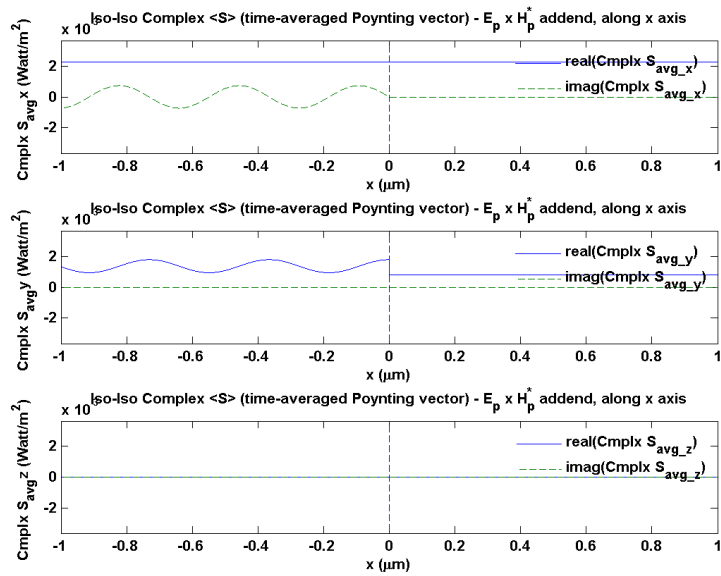
Σχήμα 6.15: Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



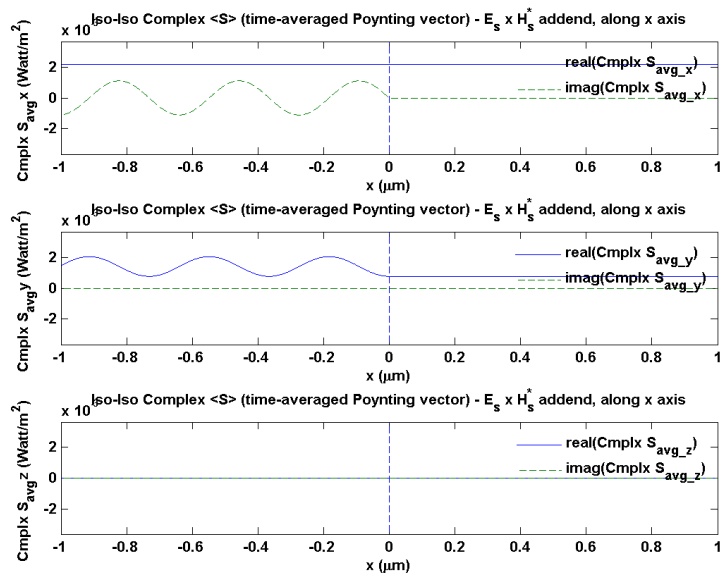
Σχήμα 6.16: Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



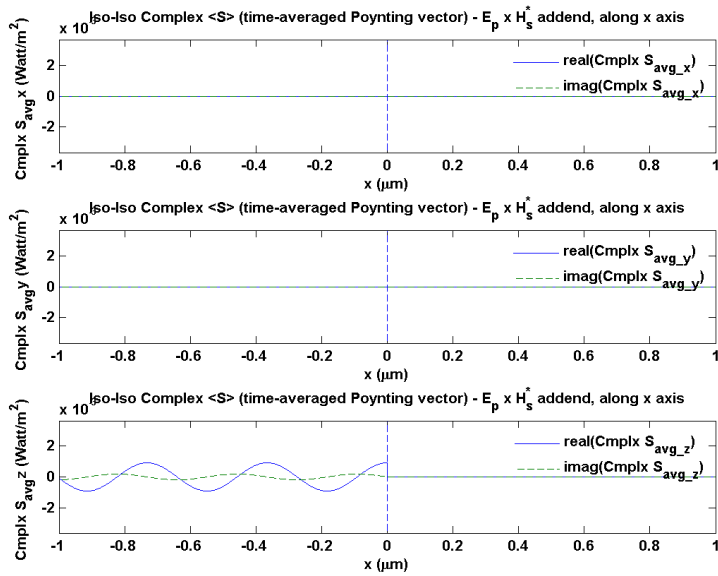
Σχήμα 6.17: Iso-Iso: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



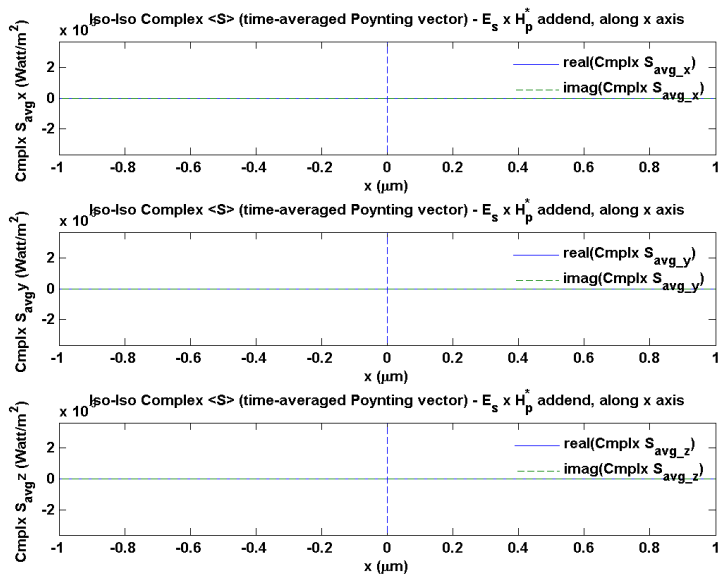
Σχήμα 6.18: Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{p,in}|^2$



Σχήμα 6.19: Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{s,in}|^2$



Σχήμα 6.20: Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$



Σχήμα 6.21: Iso-Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$

6.2.2 Στοιβα ιστροπικών στρωμάτων όμοιων με το μέσο εξόδου

Εδώ δίνεται ένα άλλο παράδειγμα που δεν αποτελεί κάποια ενδιαφέρουσα χαρακτηριστική περίπτωση αλλά είναι χρήσιμο διότι επιβεβαιώνει την ορθή λειτουργία του προγράμματος.

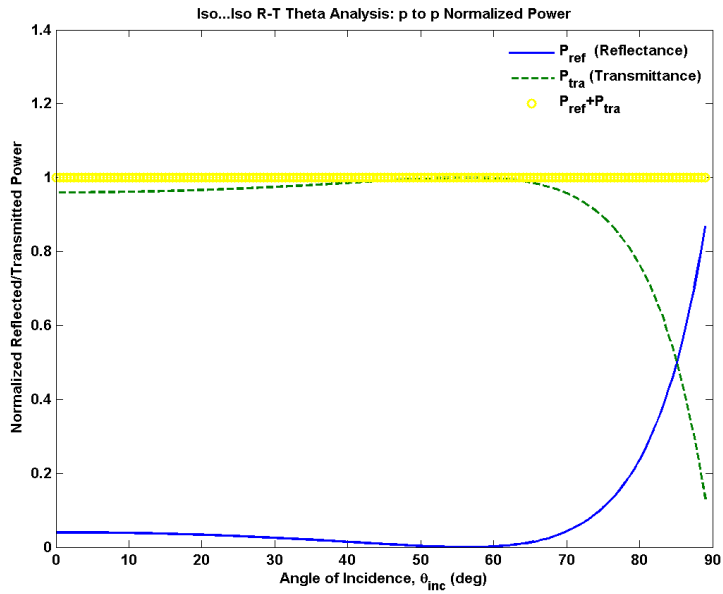
θεωρούμε ότι έχουμε τρία ενδιαμέσα ιστροπικά στρώματα με δείκτη διάθλασης όμοιο με αυτόν του μέσου εξόδου. Επιλέγουμε πάλι $n_{in} = 1$, $n_{out} = 1.5$, $\lambda_0 = 0.633\mu m$ αλλά αυτή τη φορά επιλέγουμε βασική γωνία πρόσπτωσης $\theta_{inc} = 0^\circ$ (προκειμένου να δούμε λίγο και τη διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση). Συνεπώς θέτουμε $er\theta x, er\theta y, er\theta z = n_{out}^2$. Όπως είναι φανερό, πρόκειται ουσιαστικά για διάταξη όμοια με αυτήν του προηγούμενου παραδείγματος αφού τα τρία ενδιαμέσα στρώματα μπορούν να θεωρηθούν σαν ενιαίο μέσο μαζί με το μέσο εξόδου.

Παρατηρούμε από τα σχήματα 6.22 - 6.26 ότι έχουμε πρακτικά τις ίδιες χαρακτηριστικές ανάκλασης/διάθλασης με το προηγούμενο παράδειγμα. Πιο συγκεκριμένα, οι συντελεστές διάθλασης δεν είναι ίδιοι (αν δούμε το πραγματικό και το φανταστικό τους μέρος) αλλά αν κοιτάξουμε το μέτρο τους φαίνεται ότι είναι ίδιοι. Αυτό που συμβαίνει ουσιαστικά είναι ότι μεταβάλλεται η φάση τους, κάτι που είναι επίσης αναμενόμενο αφού οι συντελεστές αυτοί αφορούν το πεδίο στην αρχή του μέσου εξόδου το οποίο αυτή τη φορά βρίσκεται αρκετά "δεξιότερα" σε σχέση με το προηγούμενο παράδειγμα. Άλλωστε βλέπουμε ότι αυτή η διαφορά αφορά μόνο τους συντελεστές διάθλασης και όχι και τους συντελεστές ανάκλασης. Όσον αφορά στις χαρακτηριστικές p-s και s-p προκύπτουν προφανώς και εδώ μηδενικές.

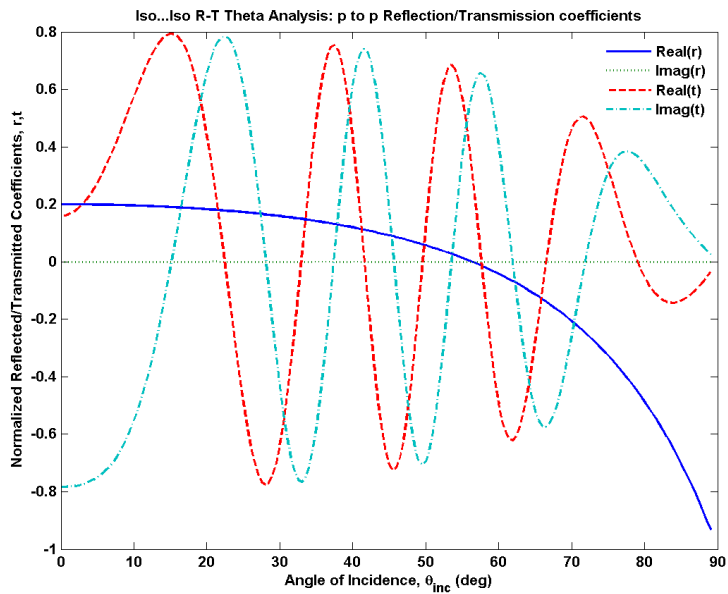
Εστιάζοντας τώρα στα πεδία, βλέπουμε από τα σχήματα 6.28 - 6.31 ότι το οφειλόμενο στην p πρόσπτωση ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο y συνιστώσα, ενώ το οφειλόμενο στην s πρόσπτωση ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο z συνιστώσα. Αυτό είναι κάτι απολύτως λογικό αφού έχουμε υποθέσει κάθετη πρόσπτωση. Αντίστοιχη (ανάποδη για την ακρίβεια) συμπεριφορά παρουσιάζει το μαγνητικό πεδίο. Βλέπουμε, επίσης, ότι πράγματι το πεδίο σε όλη την έκταση των ενδιαμέσων στρωμάτων και του μέσου εξόδου έχει ακριβώς όμοια μορφή (σαν να πρόκειται για ένα ενιαίο μέσο) και ότι η συχνότητα ταλάντωσης των πεδίων διαφοροποιείται μεταξύ των δύο μέσων (ακριβώς όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.)

Όσον αφορά την ισχύ (σχήματα 6.32-6.33) βλέπουμε ότι έχει μόνο x συνιστώσα (λογικό λόγω της κάθετης πρόσπτωσης) και ότι είναι φυσικά σταθερή σε όλη την έκταση της διάταξης. Η μεταβολή του φανταστικού μέρους δεν έχει ουσιαστικά σημασία αφού $\langle S \rangle = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}\}$.

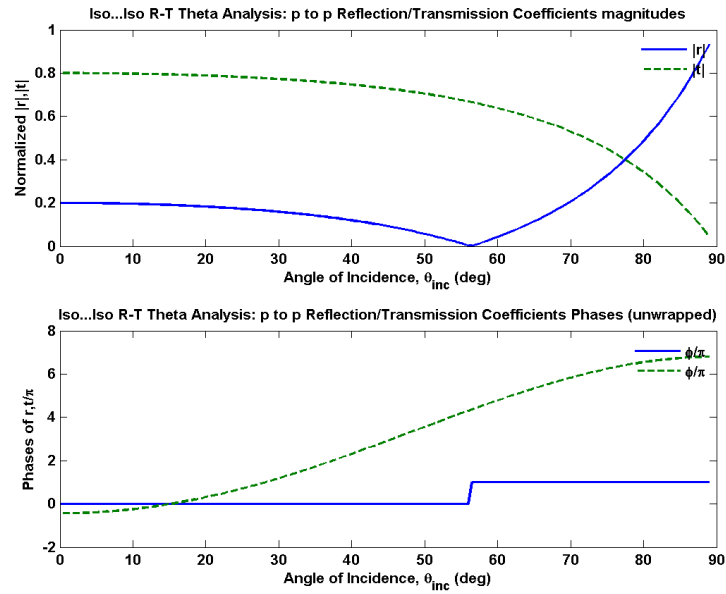
Τέλος, στο σχήμα 6.36 βλέπουμε τα κυματανύσματα και τις ιδιοπολώσεις σε κάθε στρώμα.



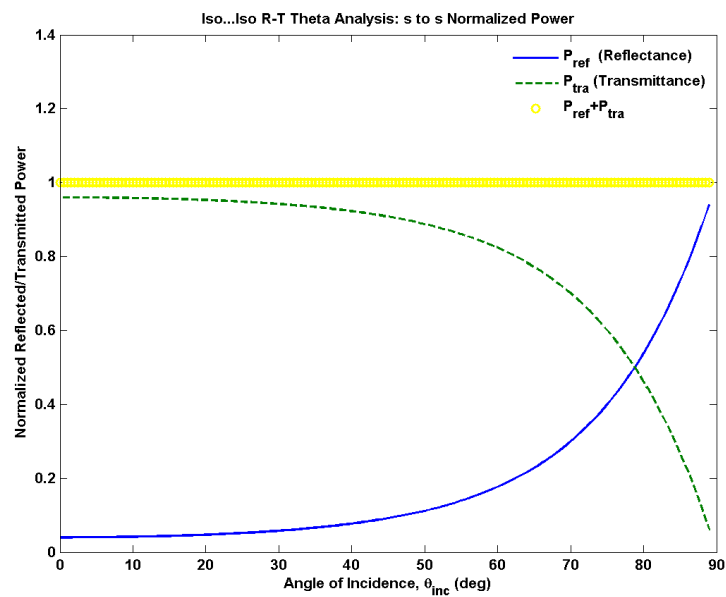
Σχήμα 6.22: Iso...Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



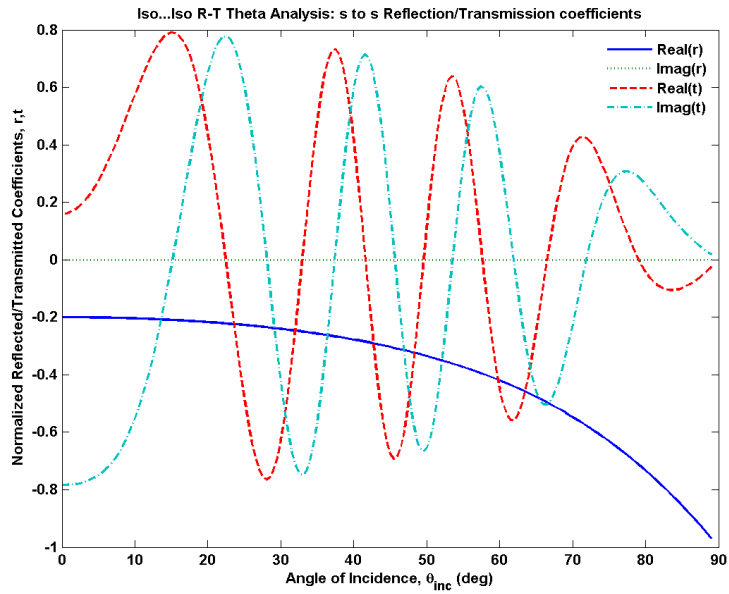
Σχήμα 6.23: Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



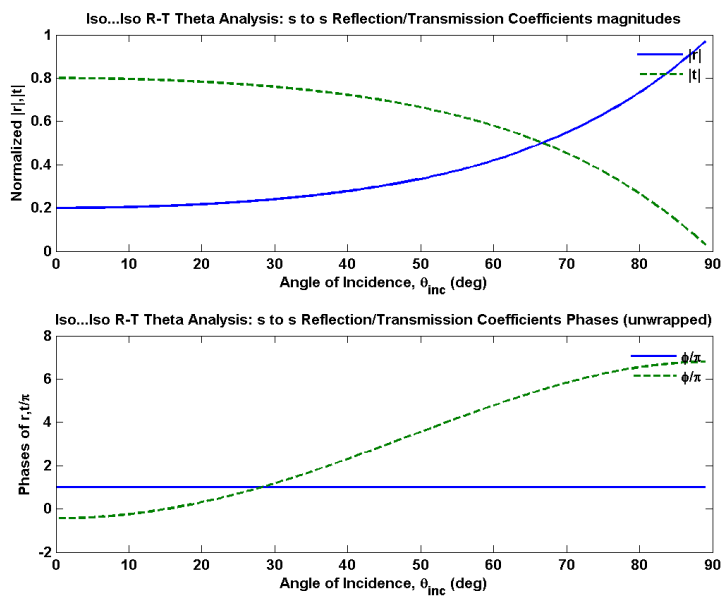
Σχήμα 6.24: Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



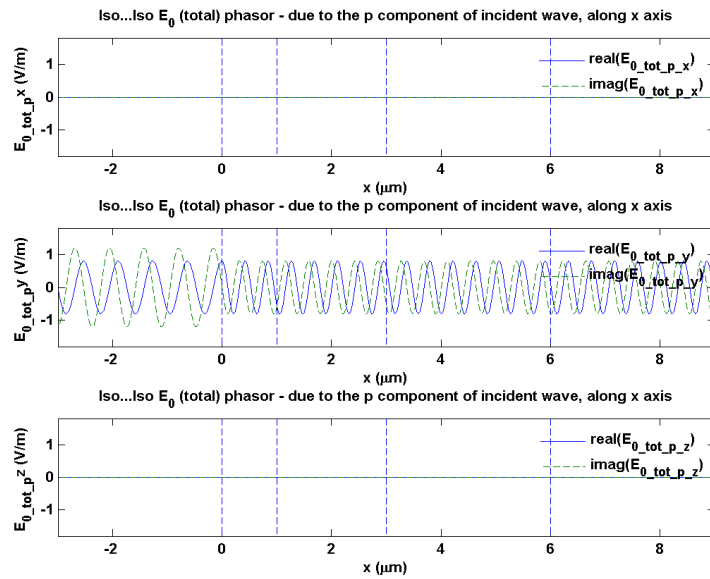
Σχήμα 6.25: Iso...Iso: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



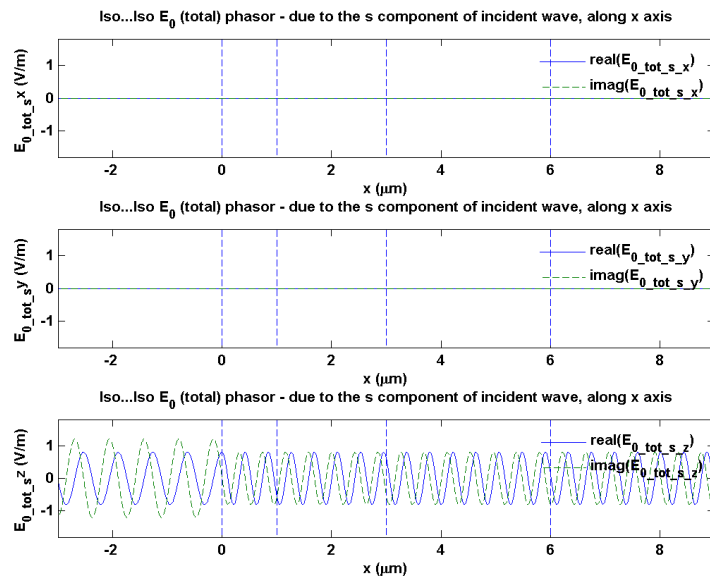
Σχήμα 6.26: Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



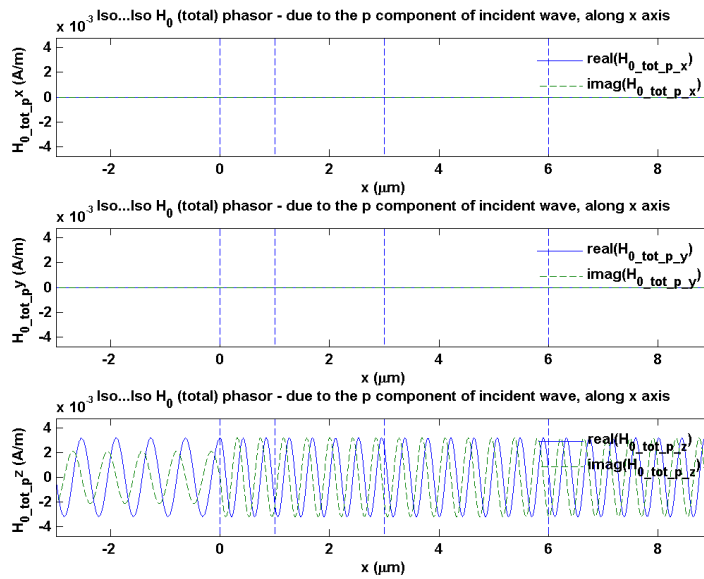
Σχήμα 6.27: Iso...Iso: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



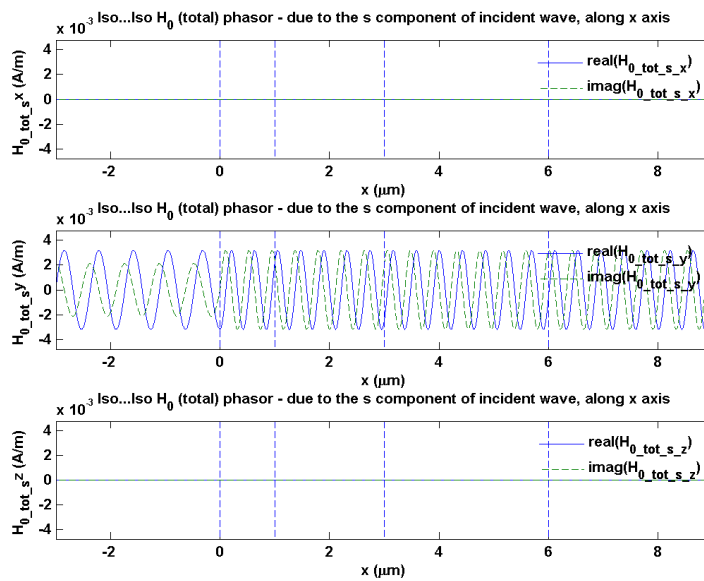
Σχήμα 6.28: Iso...Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



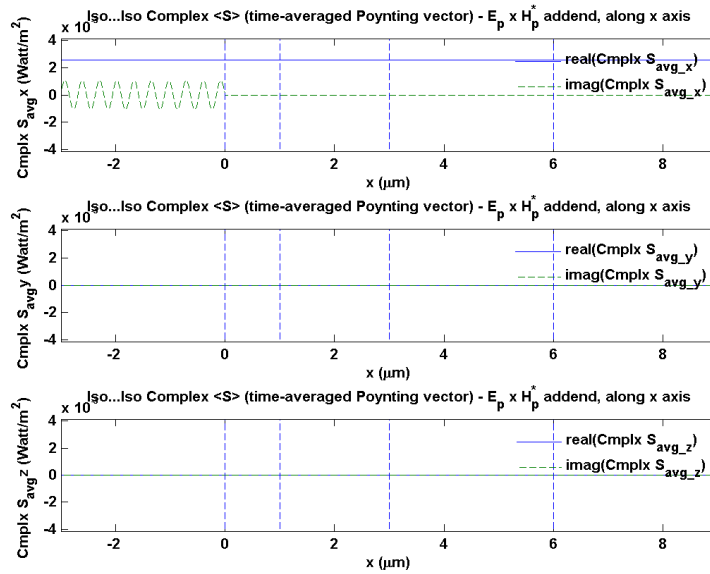
Σχήμα 6.29: Iso...Iso: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



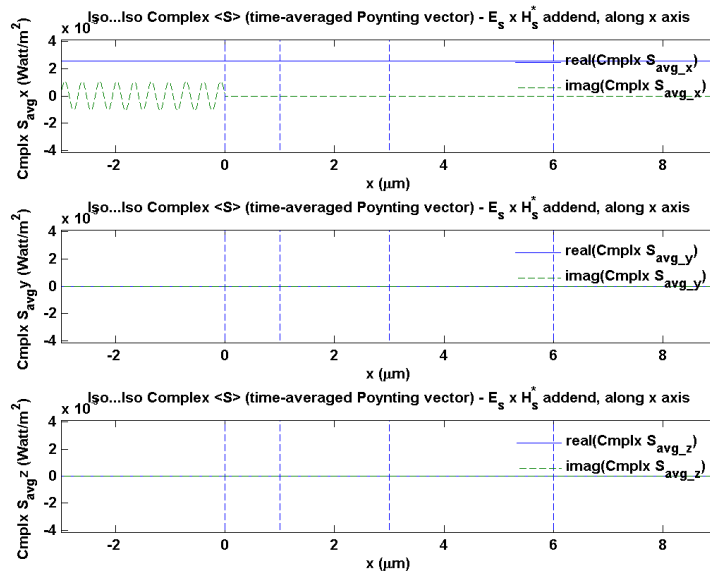
Σχήμα 6.30: Iso...Iso: Φασιοθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



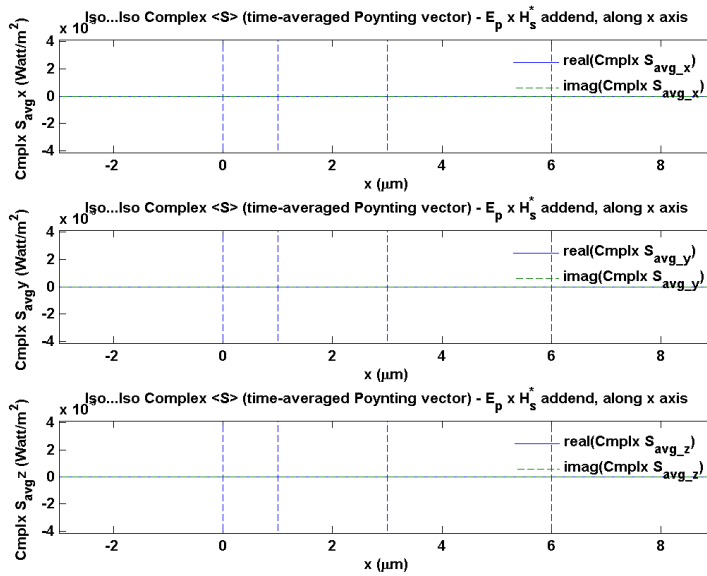
Σχήμα 6.31: Iso...Iso: Φασιοθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



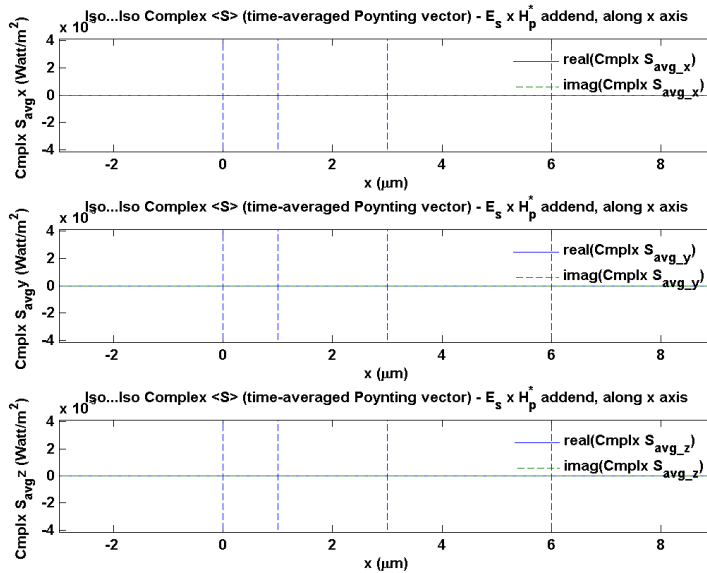
Σχήμα 6.32: Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{p,in}|^2$



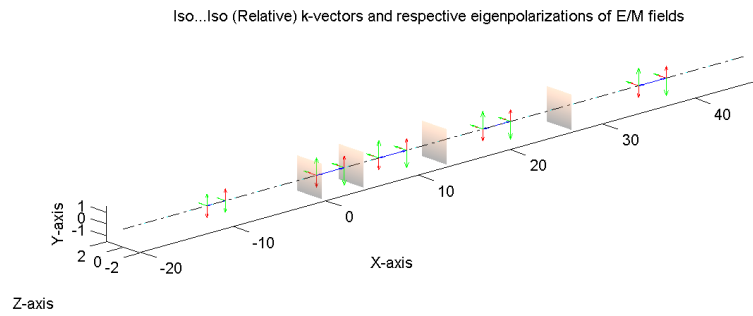
Σχήμα 6.33: Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{s,in}|^2$



Σχήμα 6.34: Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$



Σχήμα 6.35: Iso...Iso: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$



Σχήμα 6.36: Iso...Iso: 3D Αναπαράσταση των ιδιοπολώσεων και των κυματανυσμάτων

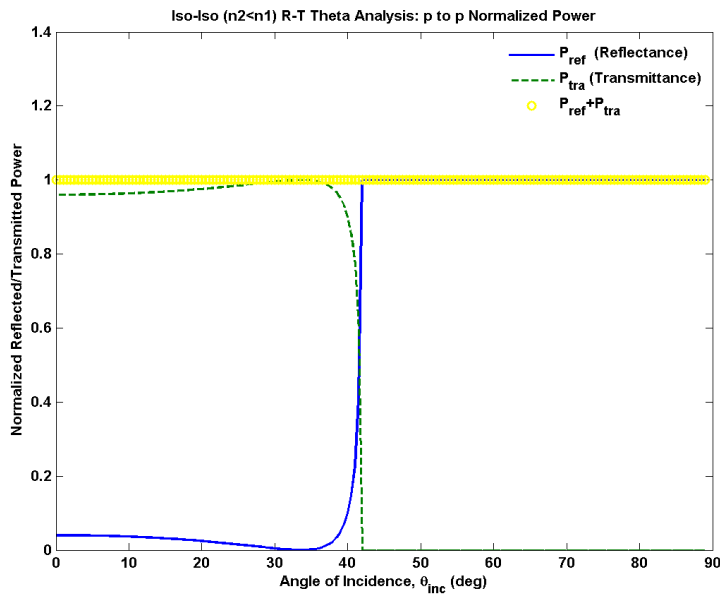
6.2.3 Απλό interface μεταξύ δύο ιστροπικών μέσων με $n_2 < n_1$

Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα αντίστοιχο με το πρώτο με τη διαφορά ότι έχουμε "αντιστρέφει" τους δείκτες διάθλασης. Δηλαδή έχουμε θεωρήσει ότι $n_{in} = 1.5$ και $n_{out} = 1$. Και αυτό επειδή είναι προφανές ότι στην περίπτωση αυτή παρουσιάζεται (για συγκεκριμένο εύρος γωνιών) το φαινόμενο της ολικής ανάκλασης. Μάλιστα μία ακόμη διαφορά είναι ότι έχουμε θεωρήσει γωνία 60° (αντί για 30°) προκειμένου να εξετάσουμε το πεδίο και την ισχύ σε συνθήκες ολικής ανάκλασης.

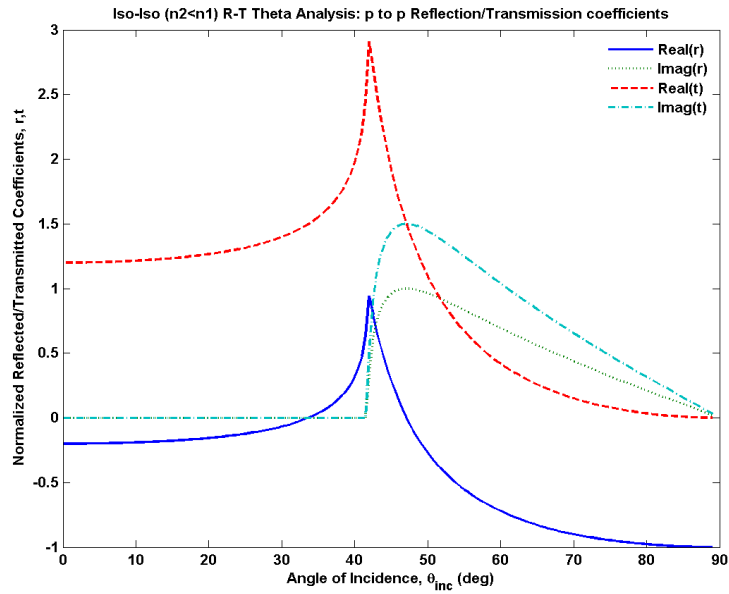
Βλέπουμε από τα γραφήματα ανάκλασης/διάθλασης ότι υπάρχει μια απότομη αλλαγή στην περιοχή των 40° . Από τη σχέση 3.159 προκύπτει ότι $\theta_{cr} = 38.2^\circ$ και επομένως αυτή είναι μια αναμενόμενη συμπεριφορά. Εστιάζοντας στα 6.37 και 6.40 βλέπουμε ότι όντως η διαθλαστικότητα μετά από τις 40° είναι μηδενική, ενώ η ανάκλαστικότητα είναι σταθερά ίση με τη μονάδα. Η οριζόντια συνιστώσα συνεπώς της προσπίπτουσας μέσης ισχύος ανακλάται πλήρως.

Παρατηρώντας τα γραφήματα 6.43 - 6.46 βλέπουμε ότι το τα πεδία στο μέσο εξόδου φθίνουν πολύ γρήγορα με αποτέλεσμα να είναι πρακτικά μηδενικά. Το γεγονός ότι ο συντελεστής διάθλασης δεν πέφτει άμεσα στο μηδέν για γωνία μεγαλύτερες της κρίσιμης γωνίας (όπως γίνεται με τη διαθλαστικότητα) δε μας προβληματίζει αφού η αποσβεννύμενη συμπεριφορά των πεδίων οφείλεται στο γεγονός ότι το $k_{tra,x}$ είναι φανταστικό.

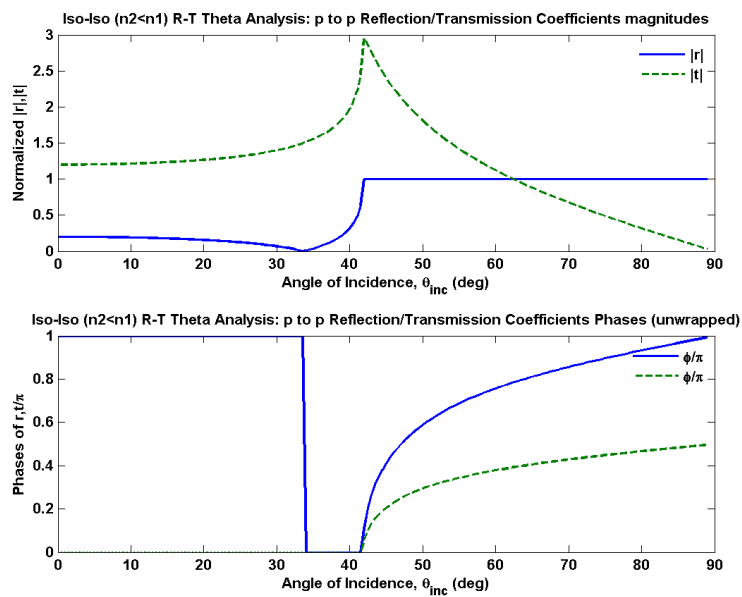
Τέλος, από τα γραφήματα 6.47 - 6.48 βλέπουμε ότι όντως η οριζόντια συνιστώσα του διανύσματος Poynting είναι σταθερά μηδενική. Οι άλλες παρουσιάζουν εκθετική συμπεριφορά πέφτοντας ταχύτατα επίσης στο μηδέν.



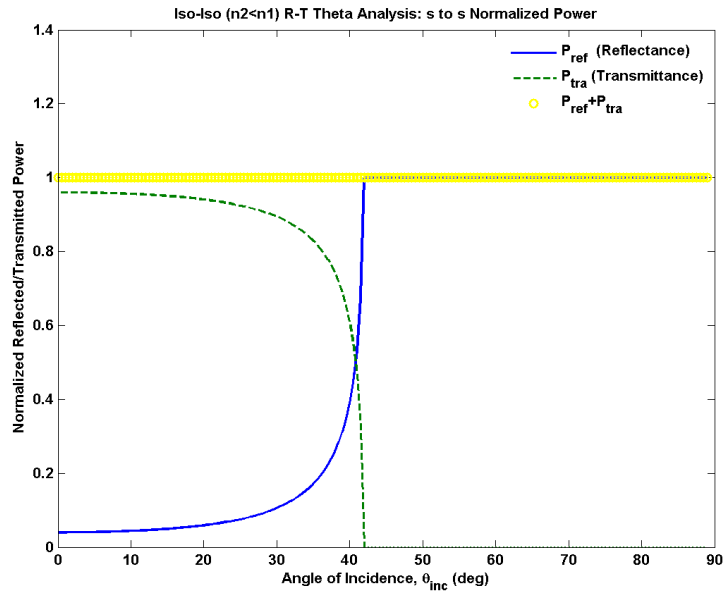
Σχήμα 6.37: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσε της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



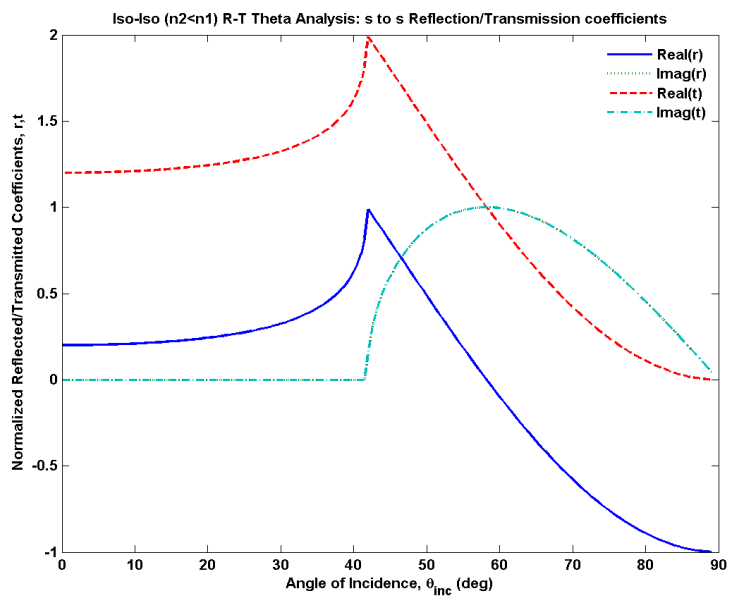
Σχήμα 6.38: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



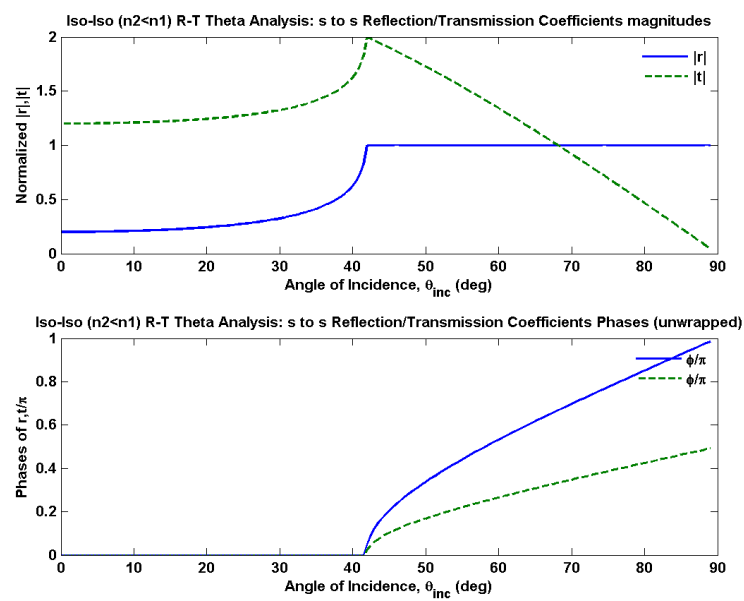
Σχήμα 6.39: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



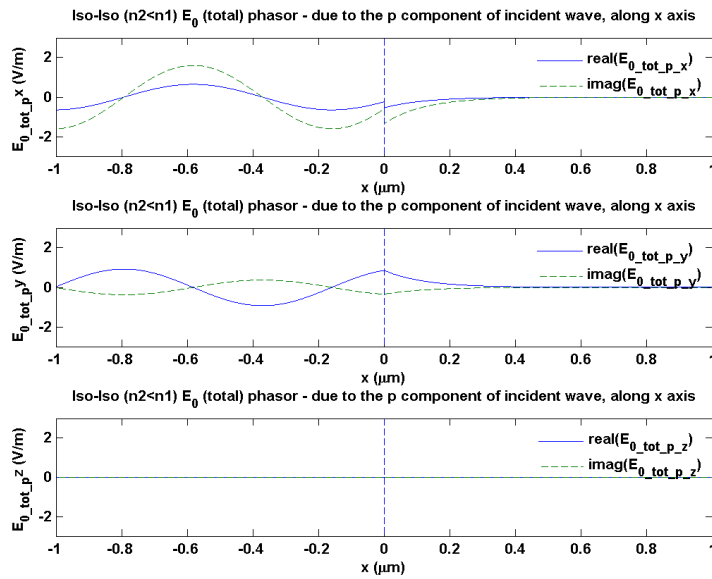
Σχήμα 6.40: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



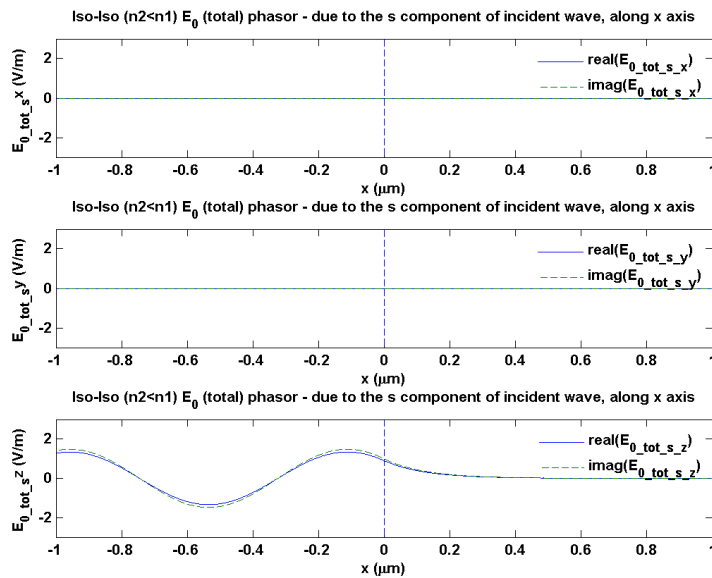
Σχήμα 6.41: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



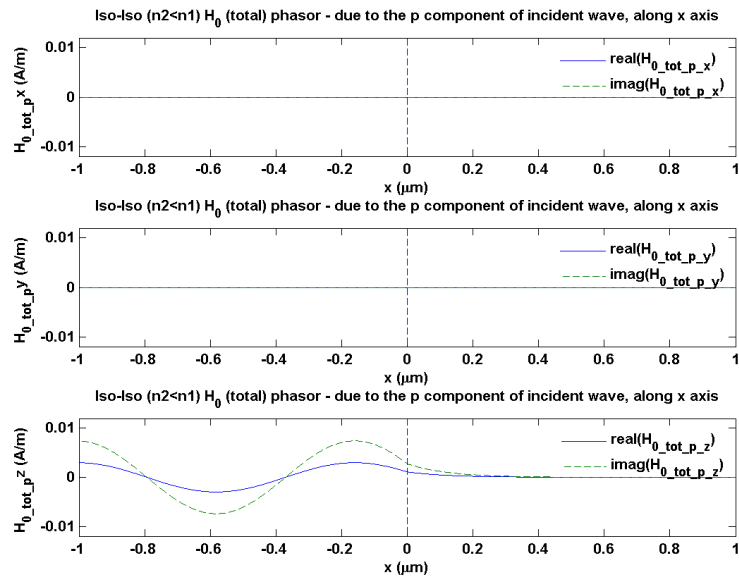
Σχήμα 6.42: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



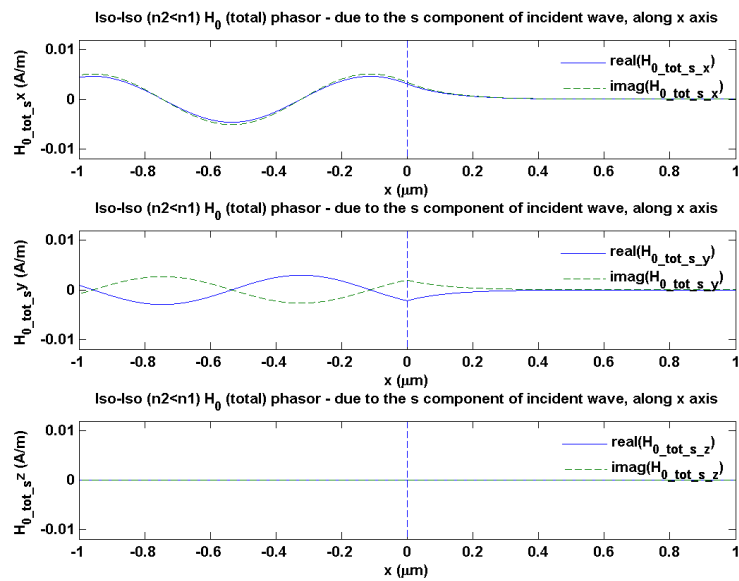
Σχήμα 6.43: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιοθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



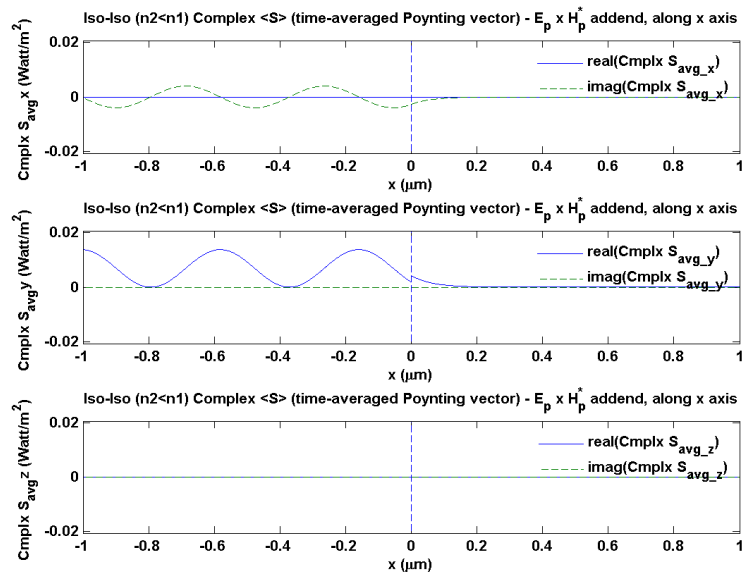
Σχήμα 6.44: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιοθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



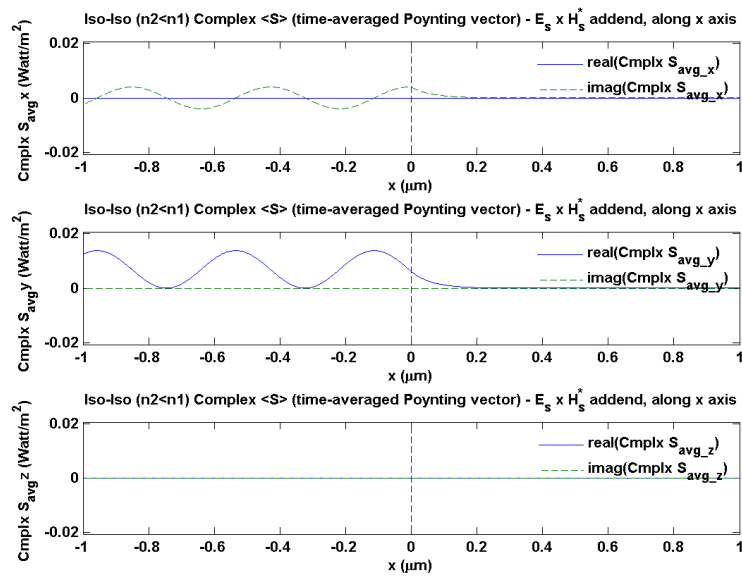
Σχήμα 6.45: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



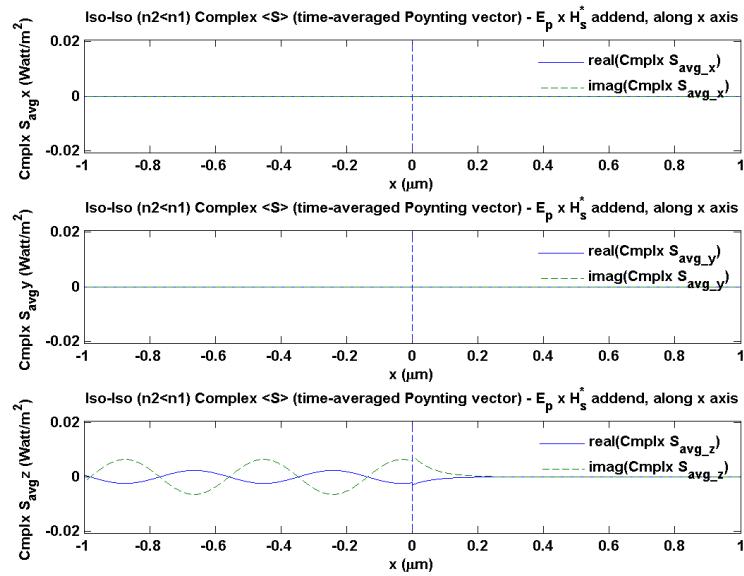
Σχήμα 6.46: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



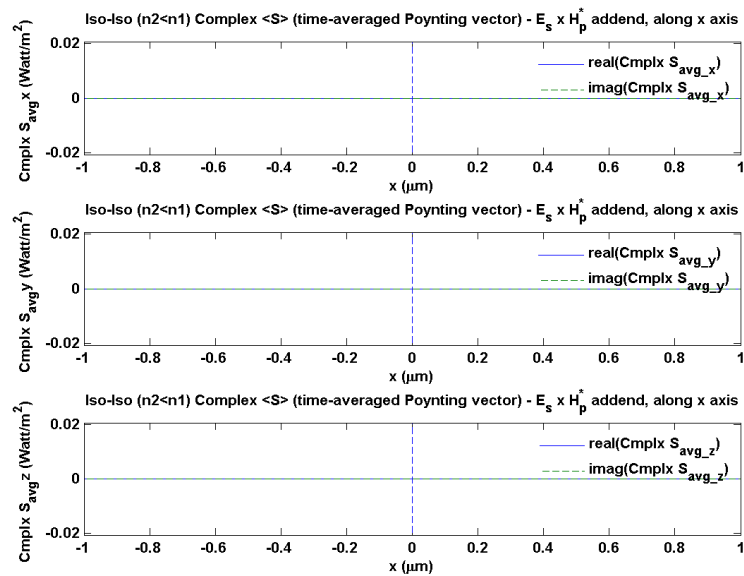
Σχήμα 6.47: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{p,in}|^2$



Σχήμα 6.48: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{s,in}|^2$



Σχήμα 6.49: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in} A_{s,in}^*$



Σχήμα 6.50: Iso-Iso ($n_2 < n_1$): Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in} A_{p,in}^*$

6.2.4 Πλακίδιο $\lambda/2$

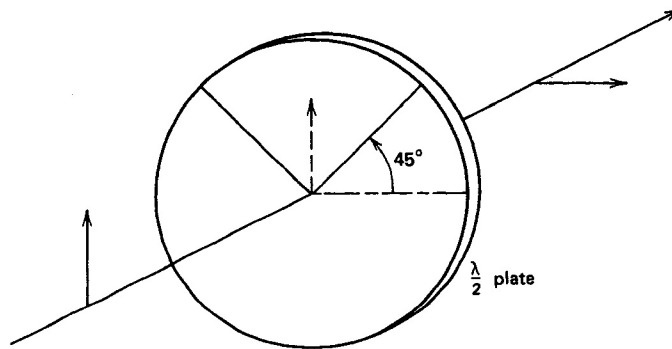
Θεωρούμε για τα μέσα εισόδου και εξόδου ότι $n_{in} = n_{out} = 1$ (αέρας/κενό) και ότι ενδιάμεσα έχουμε ένα θετικά μονοαξονικό ανισοτροπικό στρώμα του οποίου ο οπτικός άξονας βρίσκεται στο επίπεδο $y-z$. Αυτό προσομοιάζει τη διέλευση του φωτός μέσα από ένα πλακίδιο καθυστέρησης φάσης.

Λόγω του ότι ο οπτικός άξονας είναι παράλληλος στο επίπεδο της διαχωριστικής επιφάνειας είναι φανερό ότι αν έχουμε κάθετη πρόσπτωση, τότε οι δύο ρυθμοί διάθλασης εντός του στρώματος θα είναι κάθετοι μεταξύ τους και ο ένας θα "βλέπει" δείκτη διάθλασης n_o , ενώ ο άλλος n_e . Στο τέλος του στρώματος, οι δύο συνιστώσες (που αντιστοιχούν στους δύο ρυθμούς) θα έχουν υποστεί διαφορετική καθυστέρηση φάσης. Συνεπώς, αν το στρώμα έχει κατάλληλο -για τη συχνότητα της ακτινοβολίας- πάχος d μπορούμε να επιτύχουμε κατάλληλη αλλαγή της συνολικής πόλωσης του ηλεκτρικού πεδίου που θα παρατηρηθεί στο μέσο εξόδου.

Αν αγνοήσουμε τις ανακλάσεις εντός του ενδιάμεσου στρώματος και θεωρήσουμε κάθετη πρόσπτωση τότε η διαφορά Γ της καθυστέρησης φάσης που θα υποστεί η μία συνιστώσα από αυτήν που θα υποστεί η άλλη θα είναι $(n_e - n_o)k_0d$ (βλ. σχέση 5.1-4 [7]). Επιλέγοντας συνεπώς

$$d = \frac{\lambda}{2(n_e - n_o)} \quad (6.7)$$

έχουμε $\Gamma = \pi$. Αν λοιπόν ο οπτικός άξονας είναι υπό γωνία 45° τότε ένα p πολωμένο προσπίπτον κύμα θα καταλήξει διερχόμενο μέσα από το στρώμα να έχει s πόλωση, αφού οι συνιστώσες που αντιστοιχούν στους δύο ιδιορυθμούς εντός του στρώματος θα έχουν το ίδιο πλάτος. Αντίστοιχα, μία s πόλωση θα μετατραπεί σε p . Συνεπώς πρόκειται για μία διάταξη που "στρέφει" μία s ή p γραμμική πόλωση κατά 90 μοίρες (βλ. σχήμα 6.51).



Σχήμα 6.51: Πλακίδιο $\lambda/2$ (Πηγή: [7])

Για τα γραφήματα που ακολουθούν δόθηκαν σαν είσοδος στο πρόγραμμα τα εξής, στοχεύοντας στην προσομοίωση ενός πλακιδίου $\lambda/2$ δηλαδή ενός πλακιδίου που προκαλεί διαφορά καθυστέρησης φάσης κατά π , όπως αυτό που μόλις περιγράφηκε: $n_{in}=1, n_{out}=1, \text{er}\theta_x=n_o^2, \text{er}\theta_y=n_e^2, \text{er}\theta_z=n_o^2, \text{phi_deg}=0, \text{theta_deg}=45, \text{psi_deg}=0$ και $d_{\text{microns}}=0.633/(2*\text{abs}(n_e-n_o))$. (Επιλέχτηκε $\lambda = 0.633\mu\text{m}$, και $n_o = 1.5, n_e = 2$.)

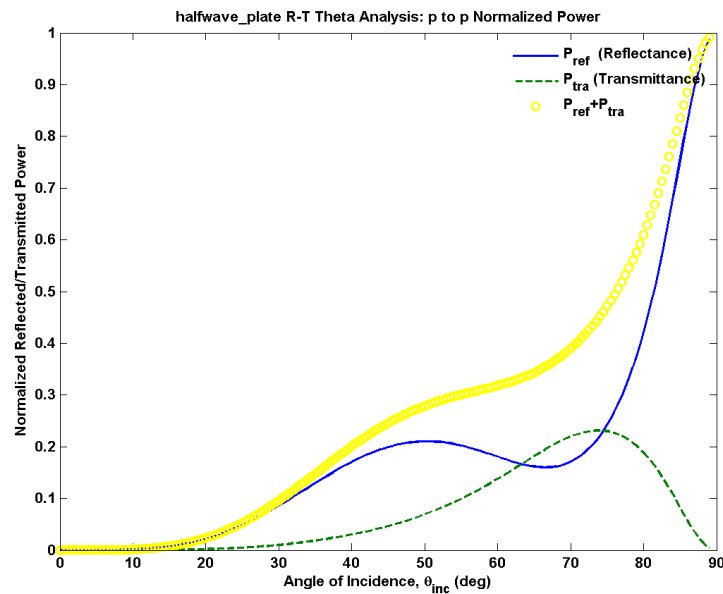
Παρατηρούμε ότι όλα τα γραφήματα παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον. Καταρχήν, από τα 6.55 - 6.59, βλέπουμε ότι καθώς αυξάνεται η γωνία πρόσπτωσης οι συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης $r_{ps}, t_{ps}, r_{sp}, t_{sp}$ παύουν να είναι μηδενικοί. Σε αντίθεση δηλαδή με τις προηγούμενες

περιπτώσεις όπου είχαμε μόνο ιστροπικά μέσα, εδώ έχουμε τη λεγόμενη σύζευξη των p και s ρυθμών.

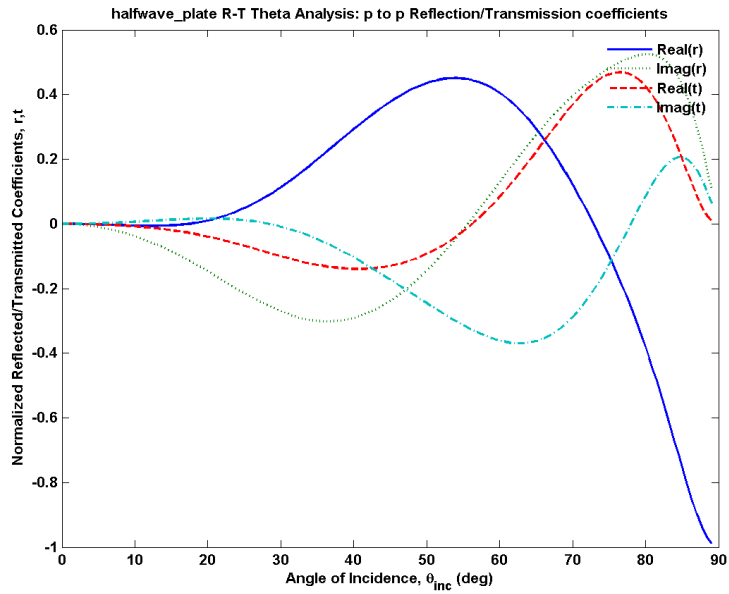
Το ίδιο ισχύει και για όλα τα γραφήματα 6.64 - 6.74 που παρουσιάζουν την εξάρτηση από το μήκος κύματος. Εδώ παρατηρούμε επιπροσθέτως ότι έχουμε και ένα είδος συντονισμού-προσαρμογής στο κεντρικό μήκος κύματος $\lambda_0 = 0.633\mu m$. Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη συχνότητα μηδενίζονται όλοι οι συντελεστές ανάκλασης/ανακλαστικότητα (p-p, p-s, s-p, s-s) αλλά και οι συντελεστές διάθλασης/διαθλαστικότητα p-p και s-s ενώ μεγιστοποιούνται πλήρως οι συντελεστές cross-διάθλασης/διαθλαστικότητας (δηλαδή p-s και s-p). Επίσης παρατηρούμε ότι υπάρχει μία ομοιότητα μεταξύ των γραφημάτων (αν εναλλάξουμε τα s και p). Συνεπώς στη συγκεκριμένη συχνότητα δεν έχουμε καθόλου ανάκλαση και η διάταξη μετατρέπει πλήρως την p πόλωση σε s και την s πόλωση σε p.

Το συμπέρασμα αυτό επιβεβαιώνεται απόλυτα αν κοιτάξουμε και τα γραφήματα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (σχήματα 6.76 - 6.79) τα οποία φυσικά αφορούν σε κάθετα προσπίπτον κύμα με μήκος κύματος λ_0 .

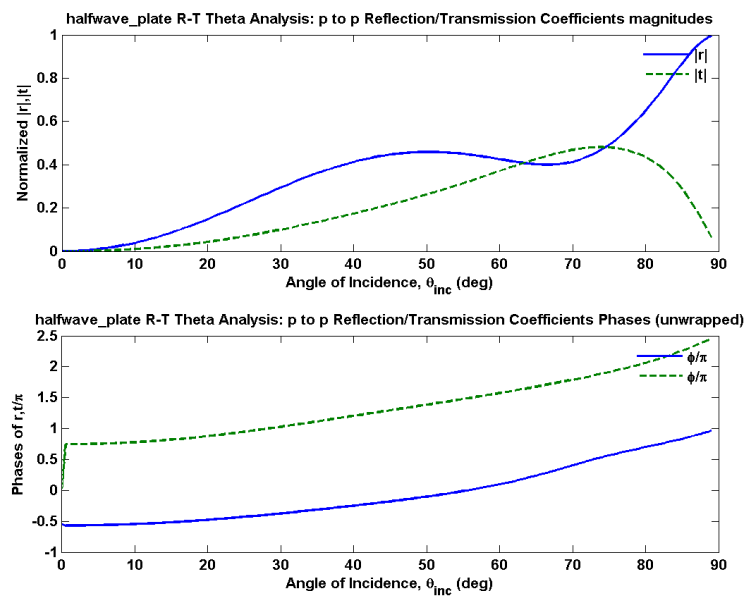
Τέλος, στο σχήμα 6.84 φαίνονται αρκετά καθαρά οι δύο διαφορετικοί ρυθμοί διάδοσης εντός του ενδιάμεσου στρώματος. Βλέπουμε ότι και στην προς τα δεξιά αλλά και την προς τα αριστερά κατεύθυνση έχουμε δύο κυματανύσματα άνισου μήκους (λόγω διαφοράς των n_o και n_e) με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα βάσης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του καθενός να είναι κάθετα μεταξύ τους.)



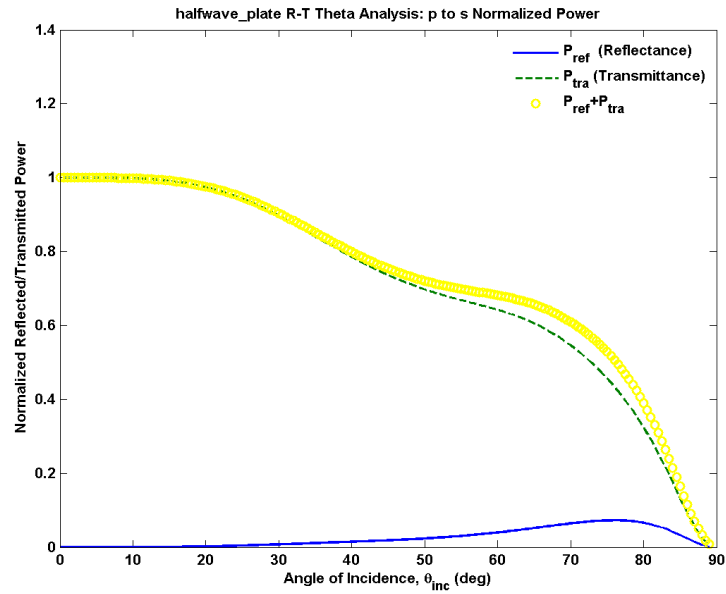
Σχήμα 6.52: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



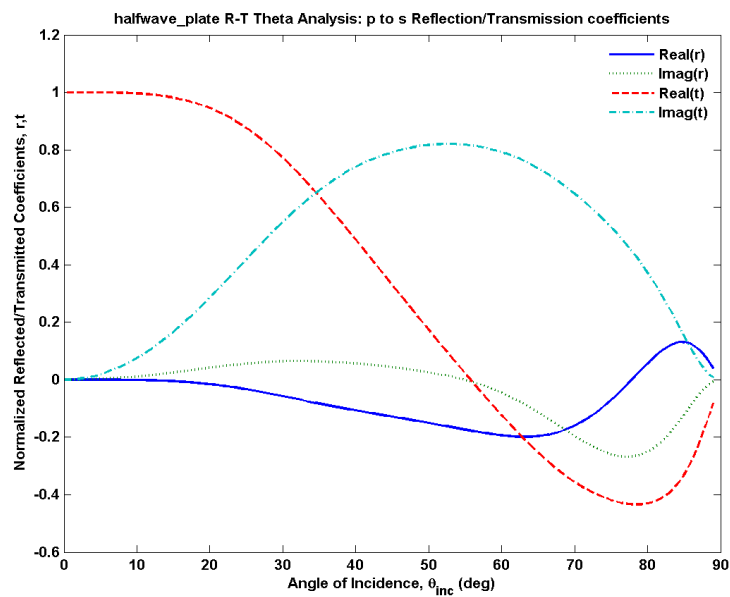
Σχήμα 6.53: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



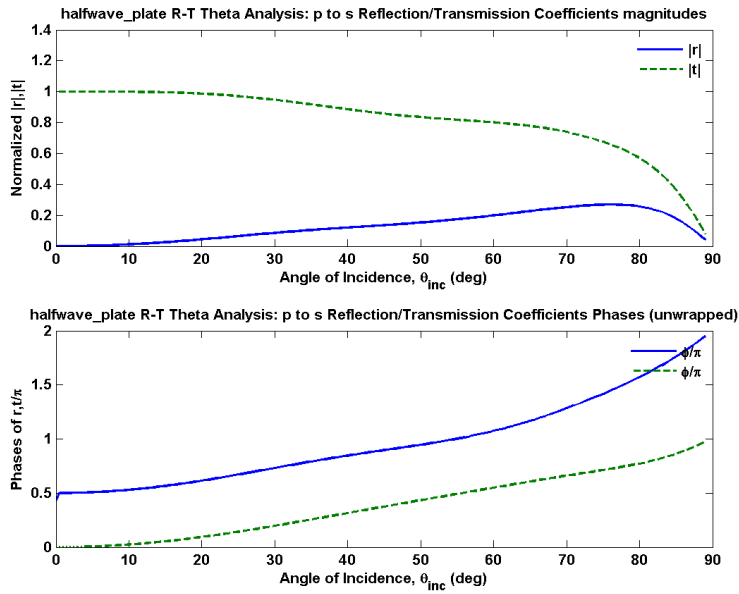
Σχήμα 6.54: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



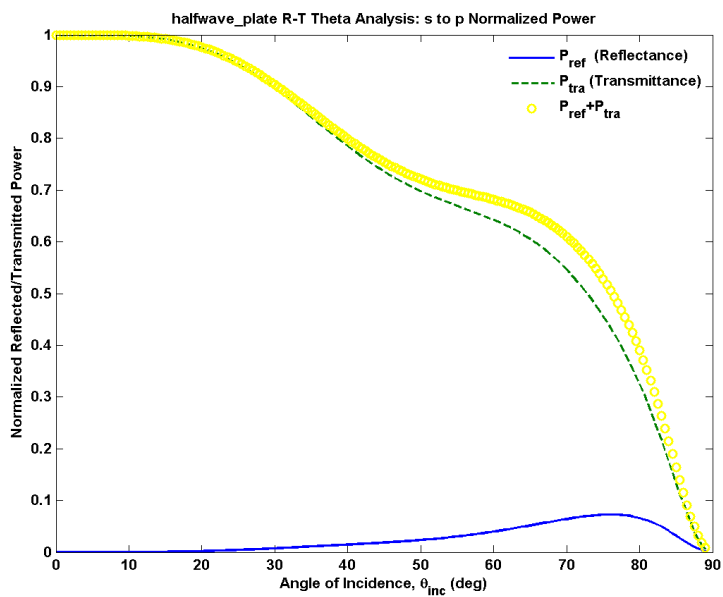
Σχήμα 6.55: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



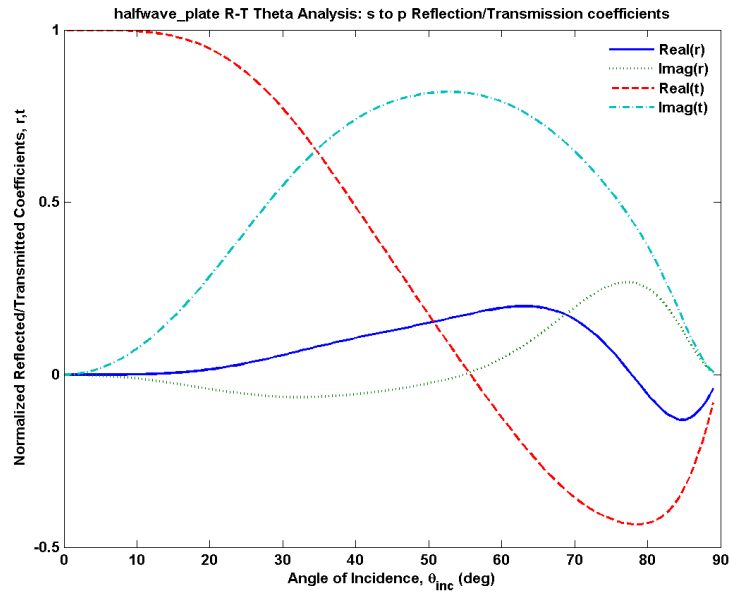
Σχήμα 6.56: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



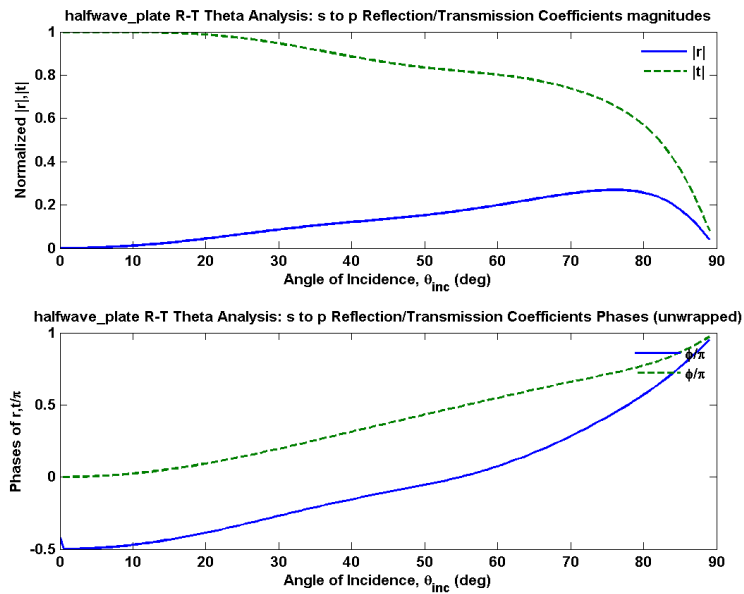
Σχήμα 6.57: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



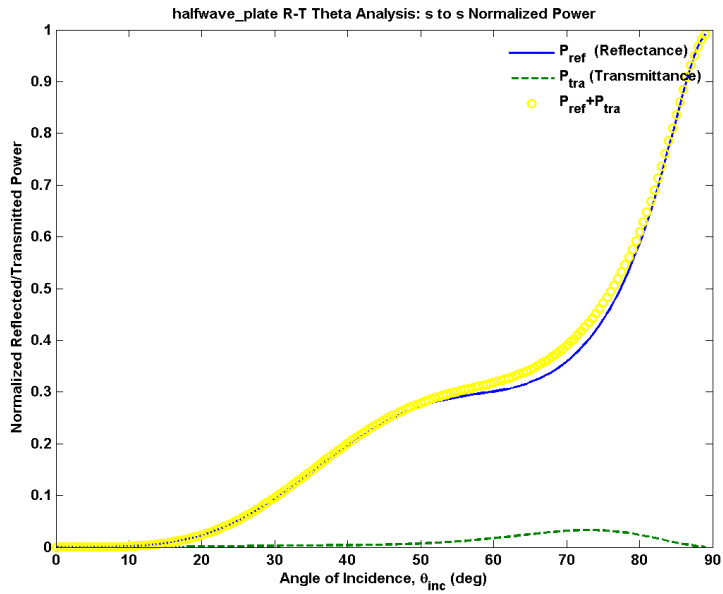
Σχήμα 6.58: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



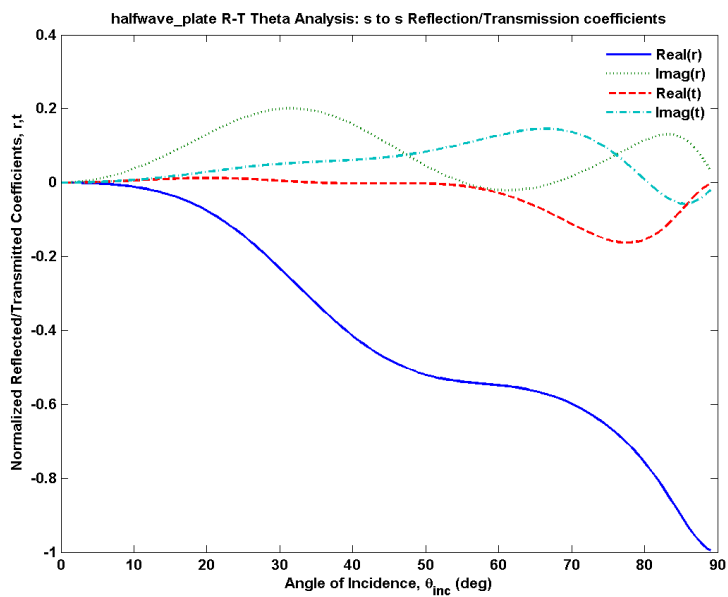
Σχήμα 6.59: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



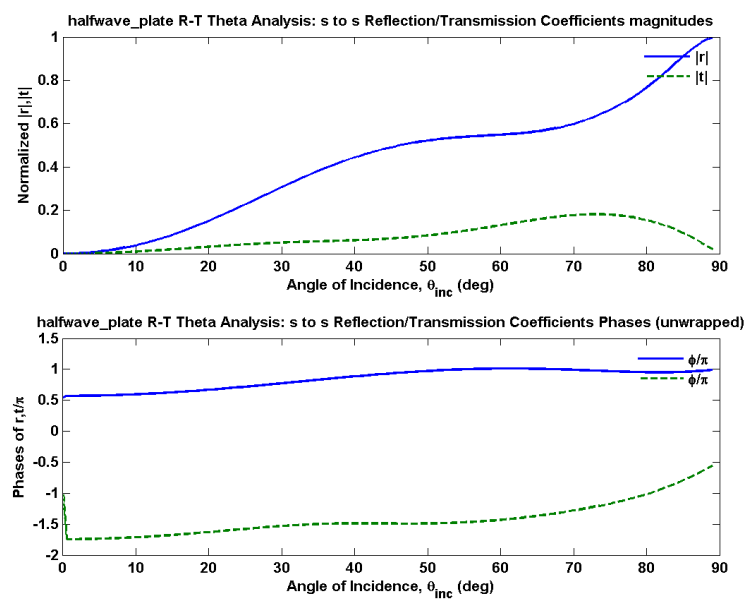
Σχήμα 6.60: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



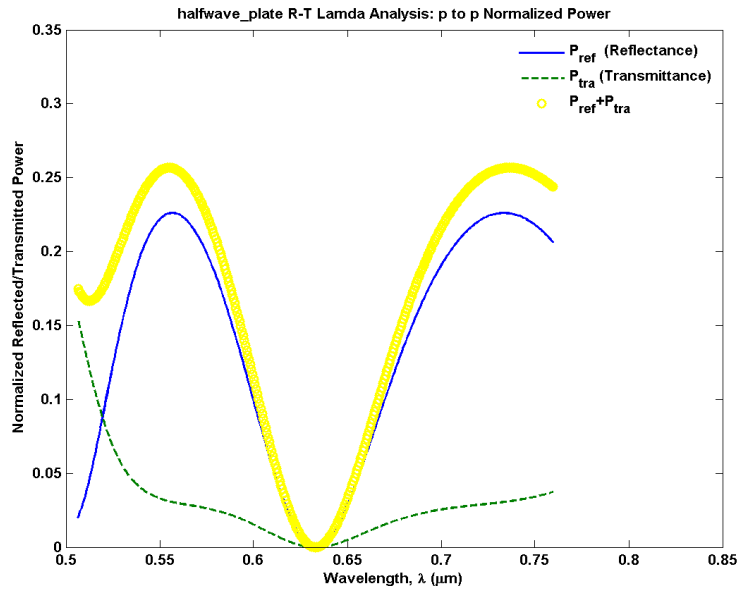
Σχήμα 6.61: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



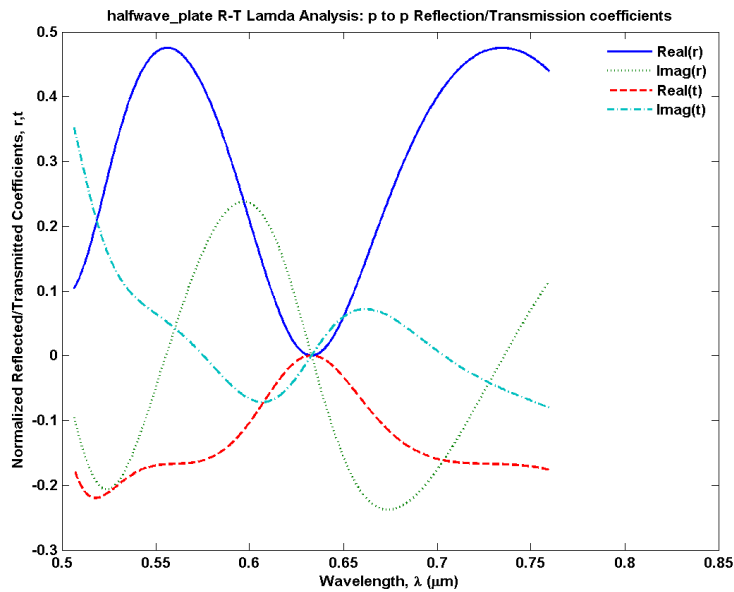
Σχήμα 6.62: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



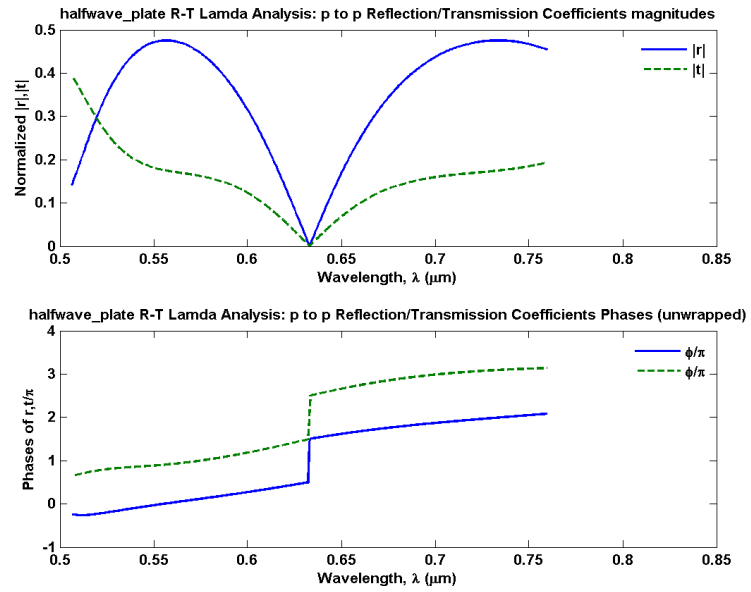
Σχήμα 6.63: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



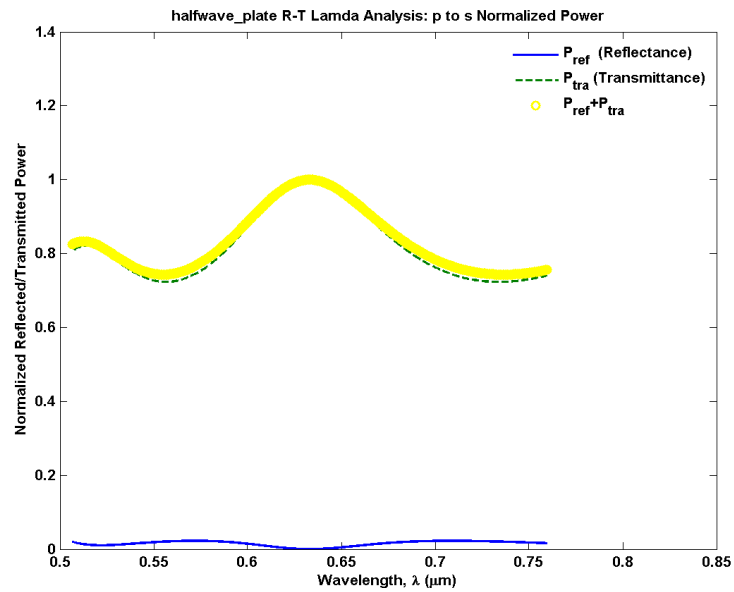
Σχήμα 6.64: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



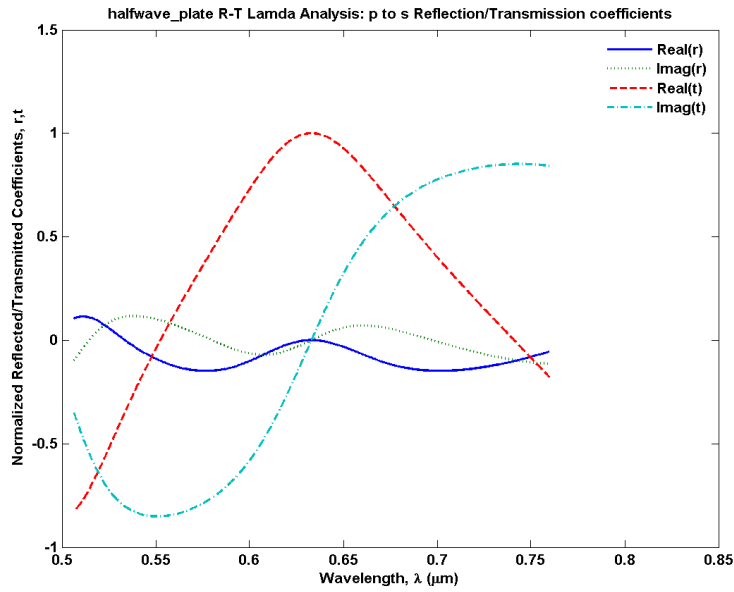
Σχήμα 6.65: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



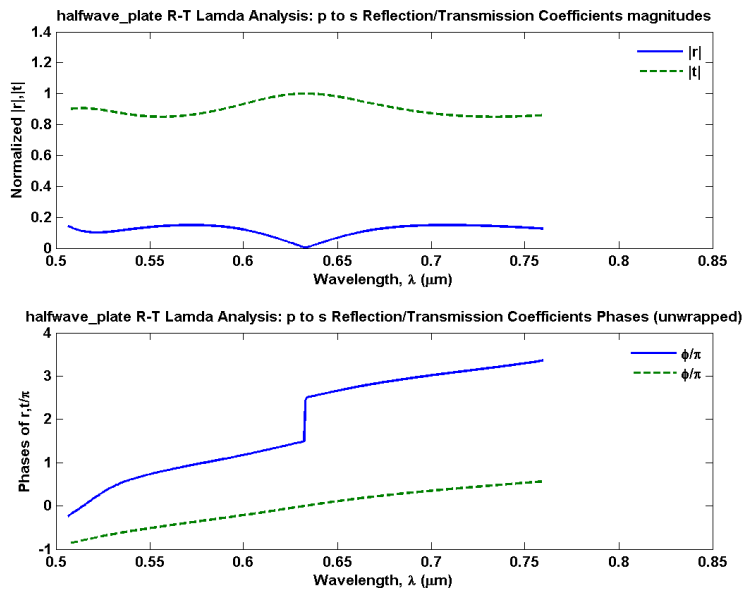
Σχήμα 6.66: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσε του μήκους κύματος λ_0



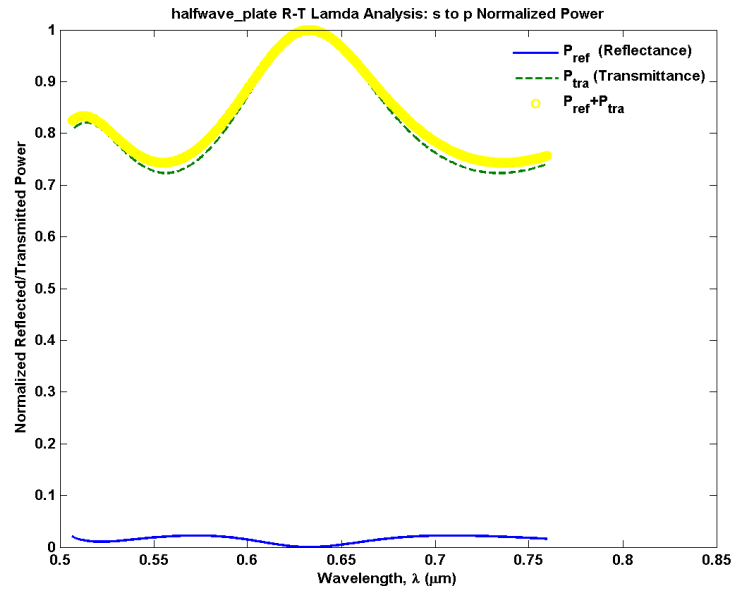
Σχήμα 6.67: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσε του μήκους κύματος λ_0



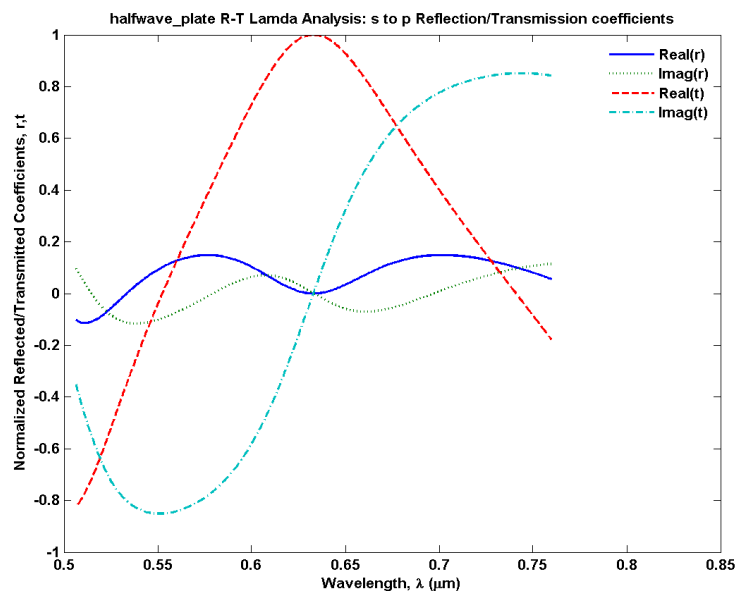
Σχήμα 6.68: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



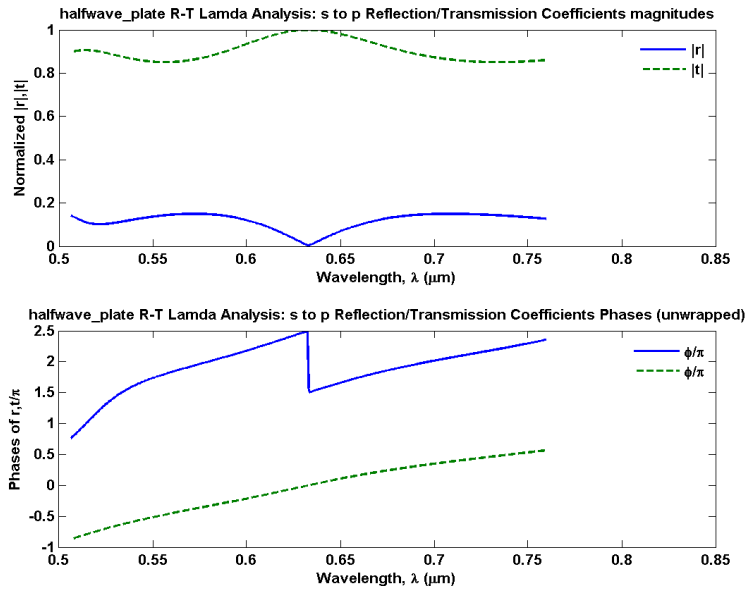
Σχήμα 6.69: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



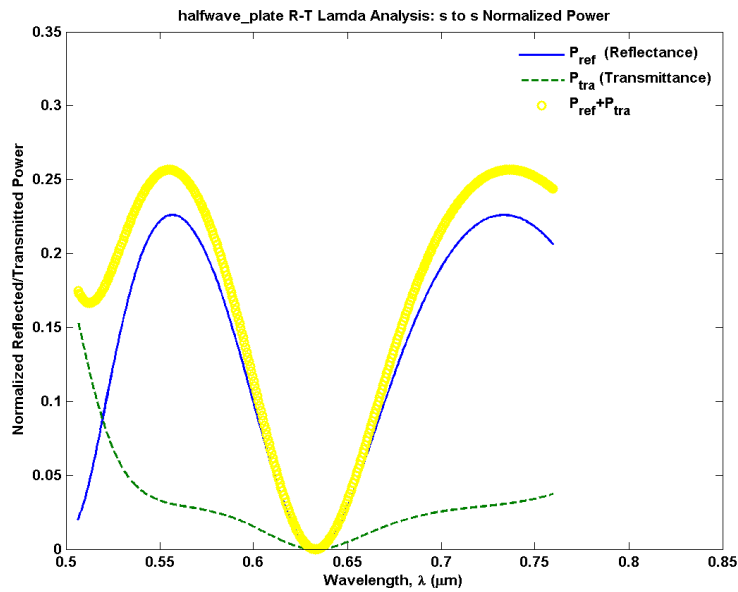
Σχήμα 6.70: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



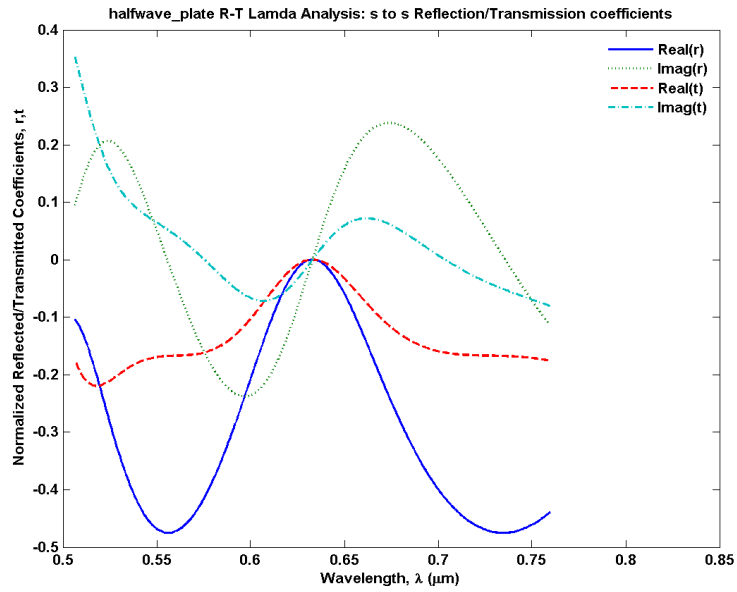
Σχήμα 6.71: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



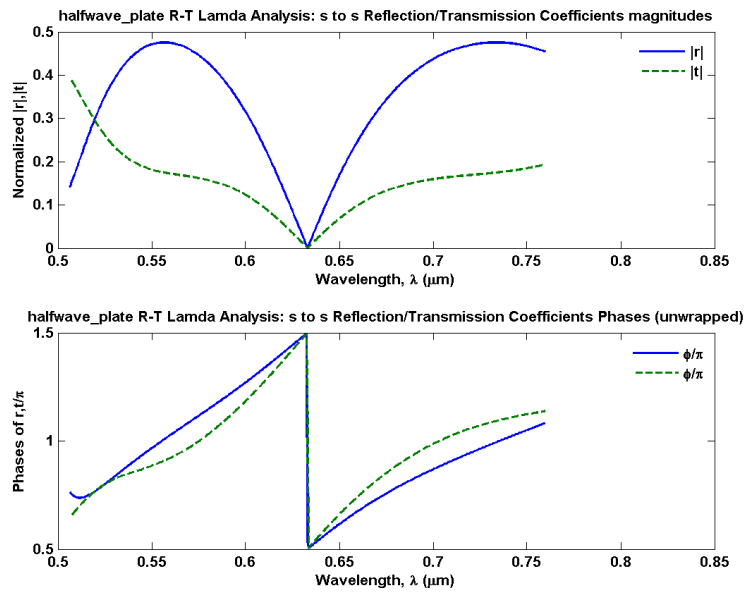
Σχήμα 6.72: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



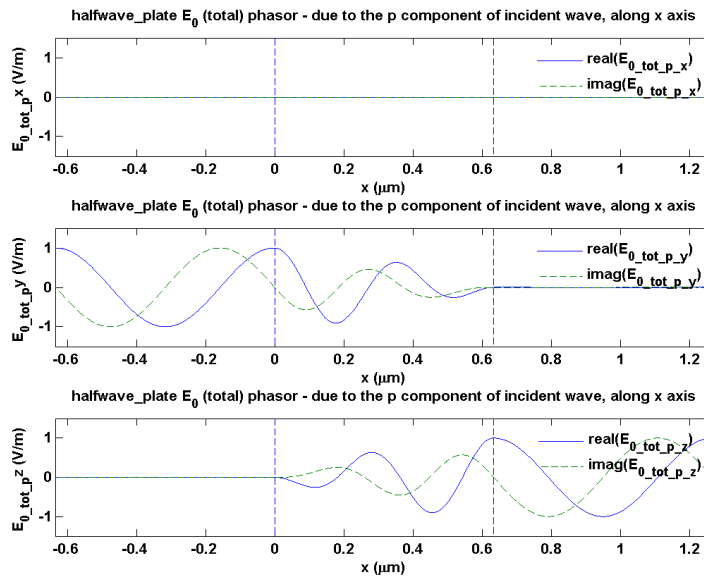
Σχήμα 6.73: halfwave_plate: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



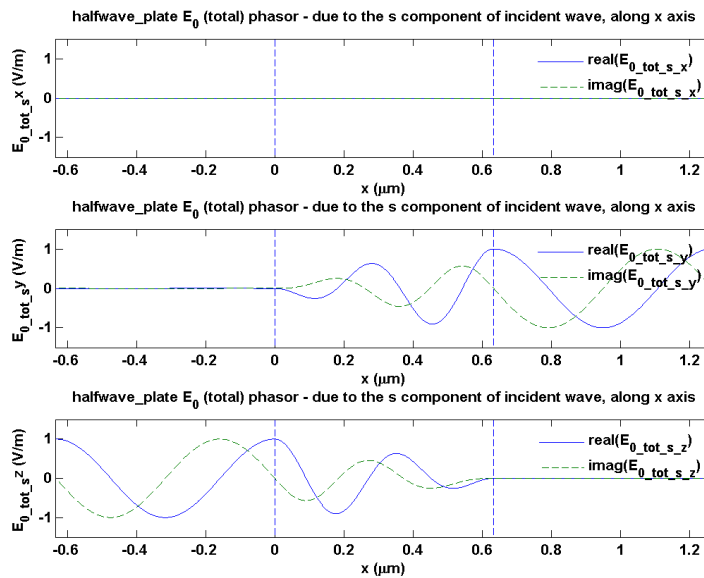
Σχήμα 6.74: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε του μήκους κύματος λ_0



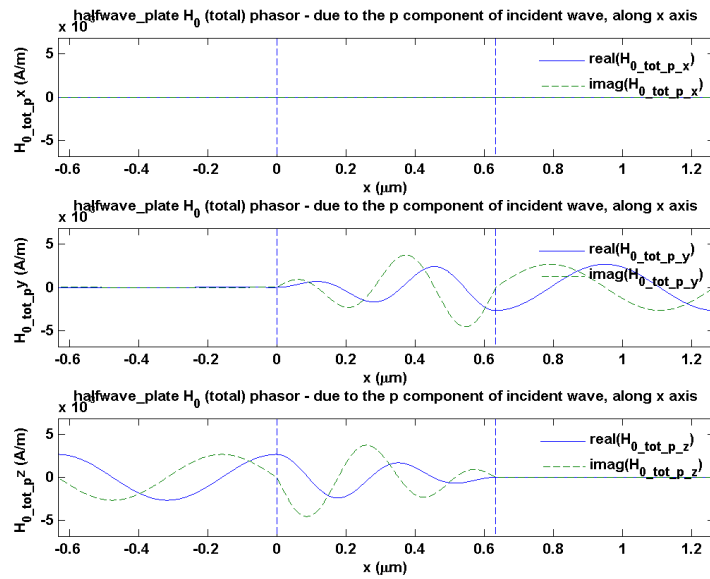
Σχήμα 6.75: halfwave_plate: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε του μήκους κύματος λ_0



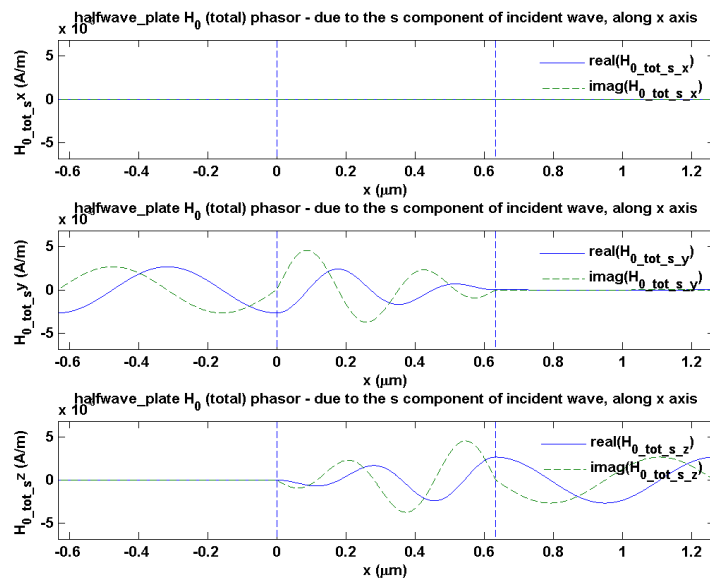
Σχήμα 6.76: halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



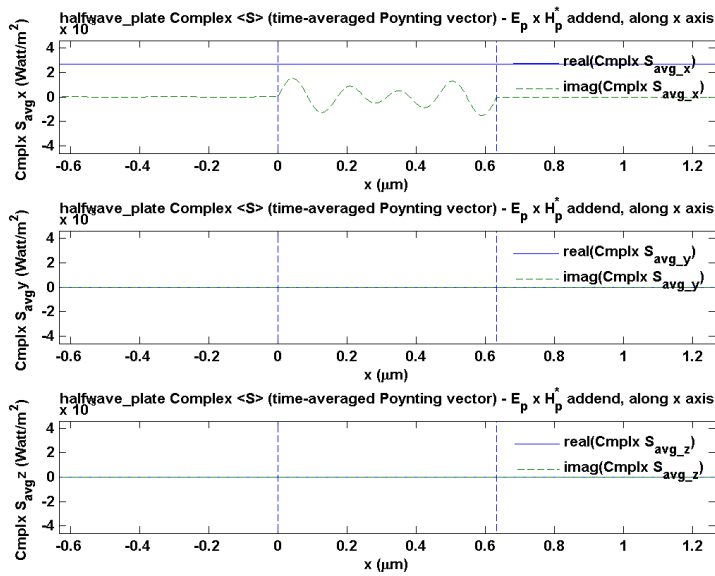
Σχήμα 6.77: halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



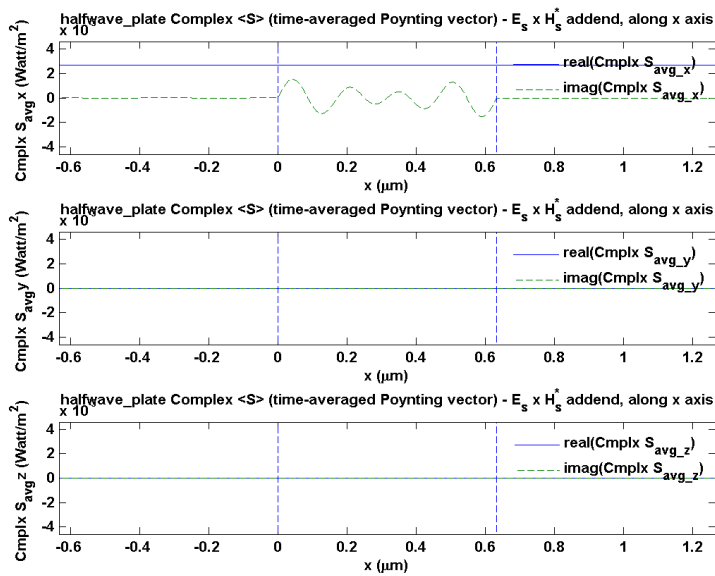
Σχήμα 6.78: halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



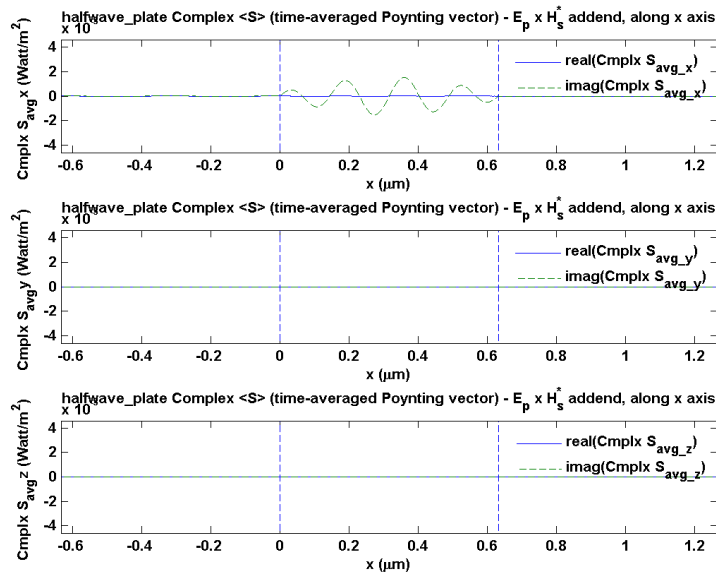
Σχήμα 6.79: halfwave_plate: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



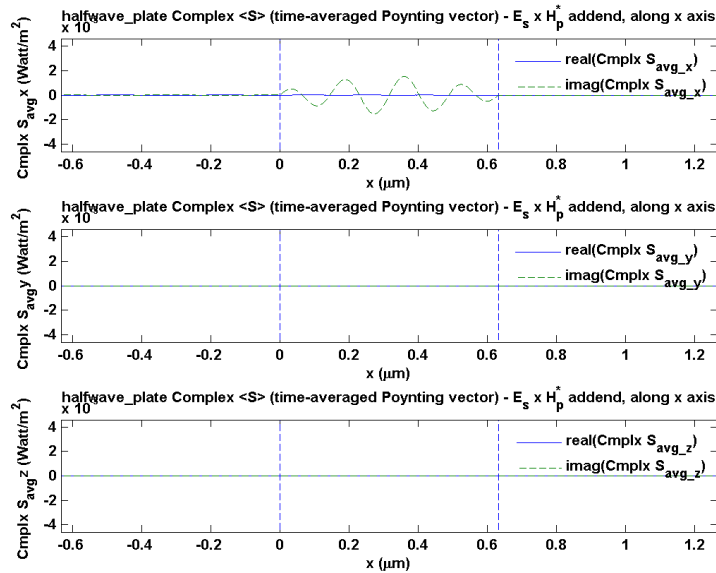
Σχήμα 6.80: halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{p,in}|^2$



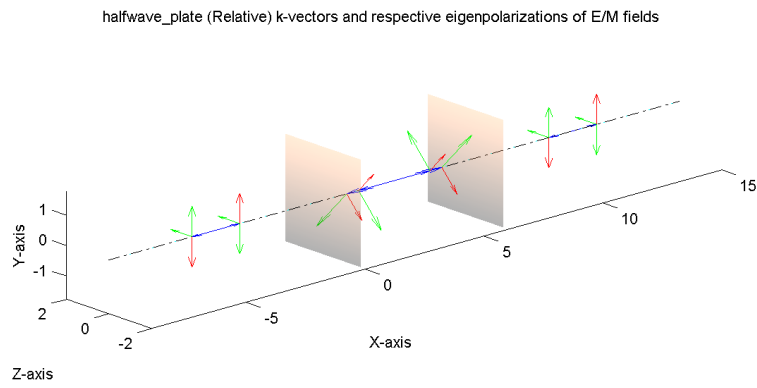
Σχήμα 6.81: halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{s,in}|^2$



Σχήμα 6.82: halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$



Σχήμα 6.83: halfwave_plate: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$



Σχήμα 6.84: halfwave_plate: 3D Αναπαράσταση των ιδιοπολώσεων και των κυματανυσμάτων

6.2.5 Ενδιάμεσο διαξονικό ανιστροπικό στρώμα - σύγκριση με γράφημα της βιβλιογραφίας

Στο [12] δίνονται γράφηματα ανάκλασης/διάθλασης συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης που αφορούν σε διαξονικό στρώμα με $\varepsilon_x = 3, \varepsilon_y = 4, \varepsilon_z = 5$ και με το κύριο σύστημα αξόνων του (ως κρύσταλλος) όμοιο με το σύστημα αναφοράς που χρησιμοποιείται (unrotated). Το στρώμα βρίσκεται εντός ελεύθερου χώρου ($n_{in} = n_{out} = 1$) και έχει πάχος $d = 0.4\lambda_0$ ενώ η γωνία πρόσπτωσης είναι 30° . Τα γραφήματα αυτά φαίνονται στα σχήματα 6.85 και 6.86 και έχουν υπολογιστεί με διαφορετική μεθοδολογία από αυτήν που χρησιμοποιήσαμε.

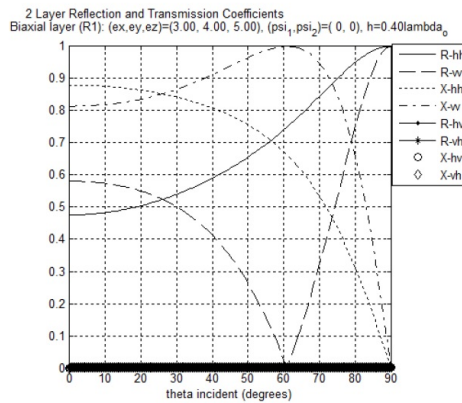
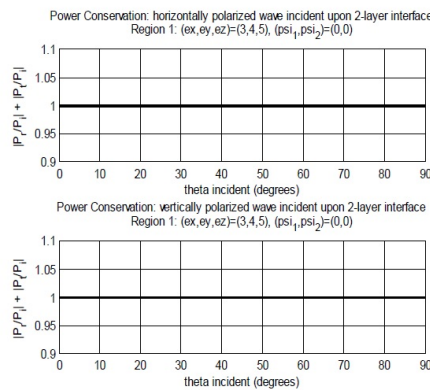


Figure 2-55: Two-layer coefficients for wave incident from the isotropic medium unrotated biaxial substrate

Σχήμα 6.85: Συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης p-p, p-s από ενδιάμεσο διαξονικό στρώμα (Πηγή: [12])



Σχήμα 6.86: Συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης p-s, s-p από ενδιάμεσο διαξονικό στρώμα (Πηγή: [12])

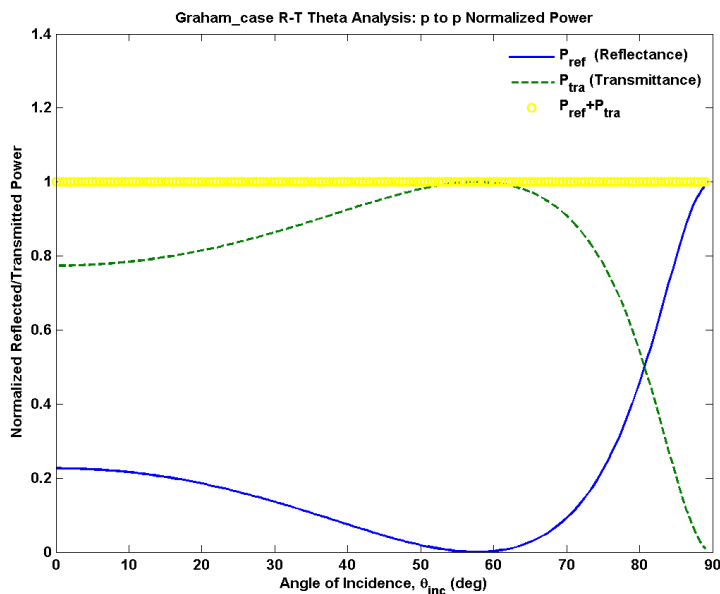
Τρέχουμε λοιπόν το πρόγραμμα με αντίστοιχη είσοδο. Επειδή στη δική μας περίπτωση χρησιμοποιείται διαφορετικό σύστημα αξόνων (οριζόντιος άξονας είναι ο x αντί του z) κάνουμε την

απαιτούμενη αντιστοιχία για τα στοιχεία του διηλεκτρικού ταχυστή ($\epsilon_{r\theta x}=5$, $\epsilon_{r\theta y}=3$, $\epsilon_{r\theta z}=4$). Επίσης επιλέγουμε αντίστοιχα $\lambda_{microns}=0.633$, $d_{microns}=0.4*0.633$ και $\theta_{deg}=30$.

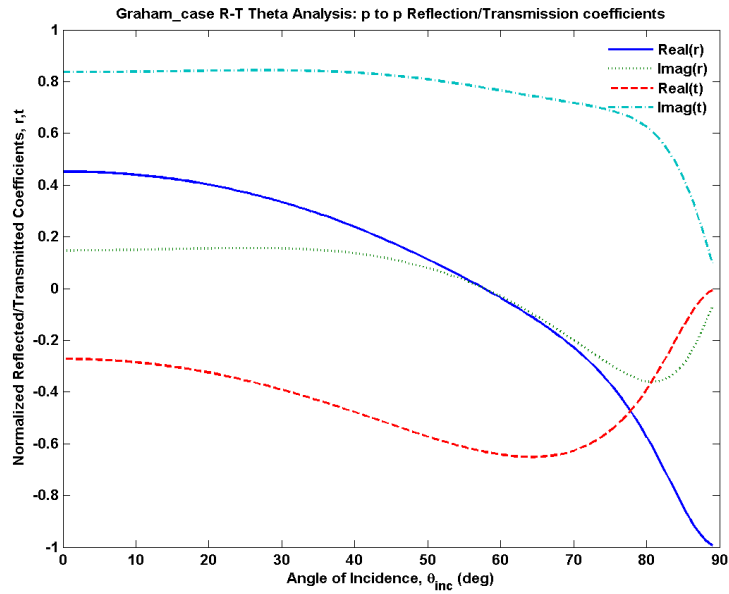
Κοιτώντας τα αντίστοιχα γραφήματα που προκύπτουν από το δικό μας πρόγραμμα (σχήματα 6.89, 6.92, 6.95 και 6.95) βλέπουμε ότι έχουμε πολύ καλή συμφωνία.

Κατά τα υπόλοιπα οφείλουμε να σημειώσουμε ότι λόγω του ότι το επίπεδο πρόσπτωσης είναι το επίπεδο $x - y$ και επειδή οι άξονες του κρυστάλλου ταυτίζονται με τους άξονες του συστήματος αναφοράς δεν έχουμε σύζευξη των ρυθμών s and p , όπως είχαμε στην προηγούμενη περίπτωση παρόλο που το στρώμα είναι ανισοτροπικό.

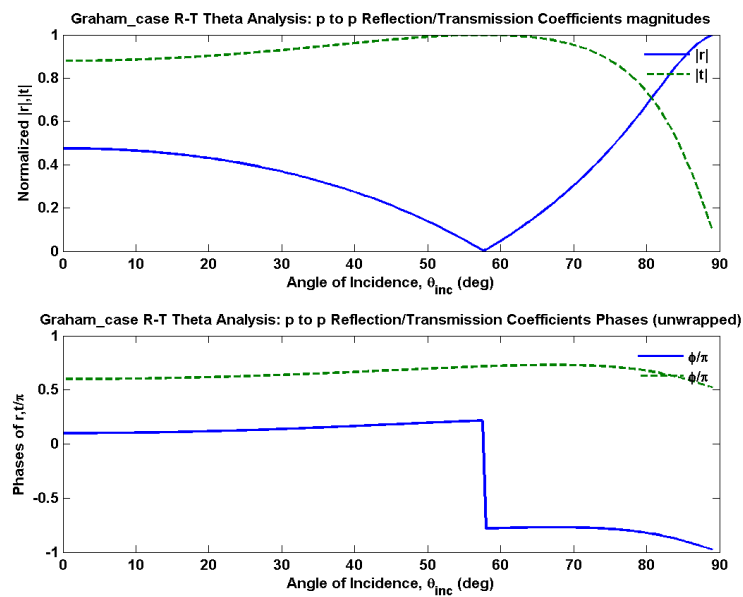
Στο σχήμα 6.107 βλέπουμε ότι τα τέσσερα κυματανύσματα που προκύπτουν από το ταίριασμα των φάσεων δεν έχουν την ίδια διεύθυνση (ούτε φυσικά οι αντίστοιχες ιδιοπολώσεις). Αυτό συμβαίνει ακριβώς λόγω της διπλής φύσης της κυματοεπιφάνειας και του γεγονότος ότι δεν "πετυχαίνουμε" κάποιον από τους οπτικούς άξονες του κρυστάλλου.



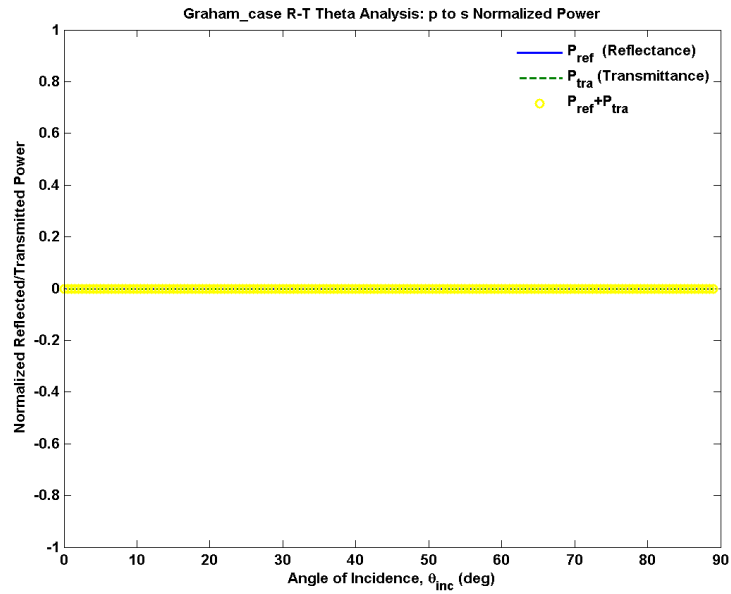
Σχήμα 6.87: Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



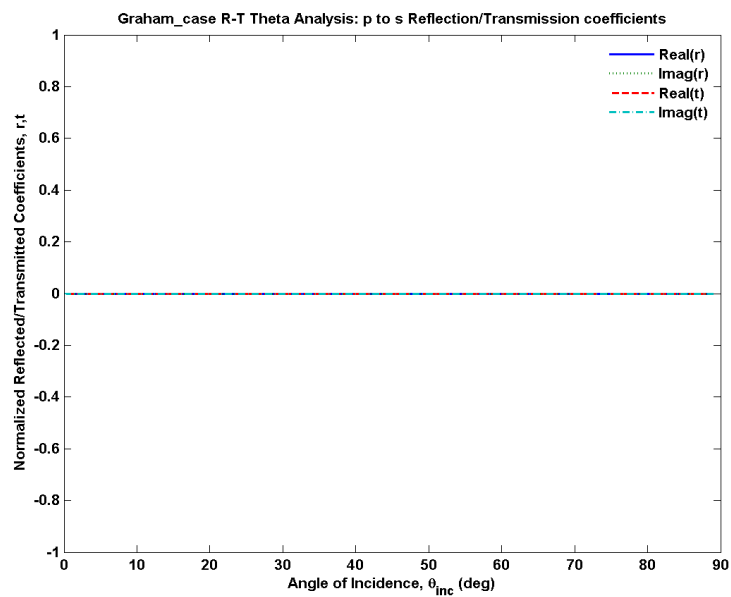
Σχήμα 6.88: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



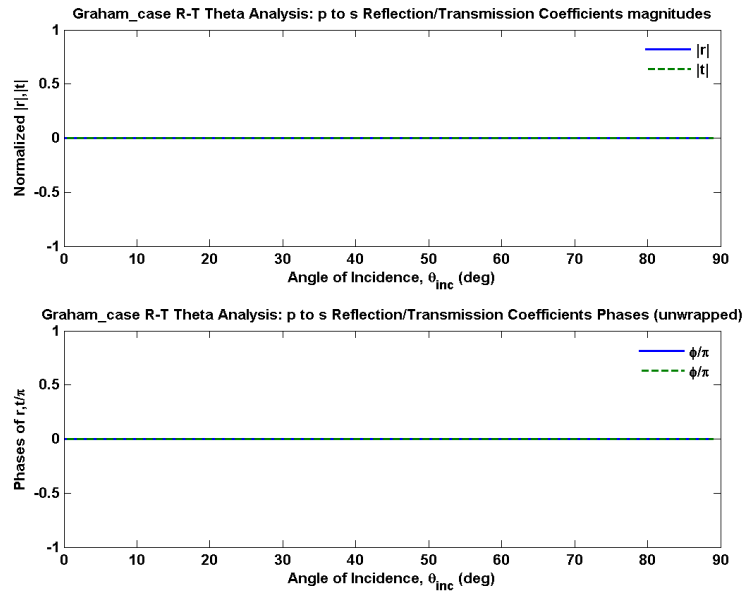
Σχήμα 6.89: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



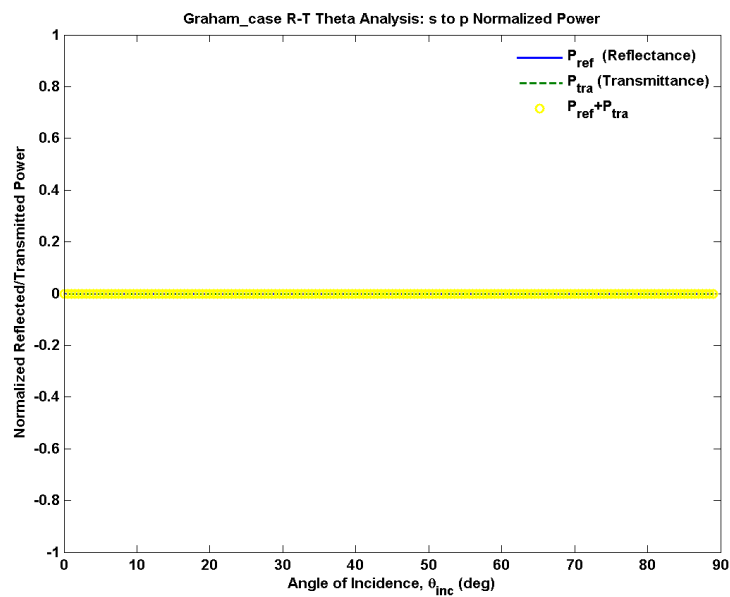
Σχήμα 6.90: Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



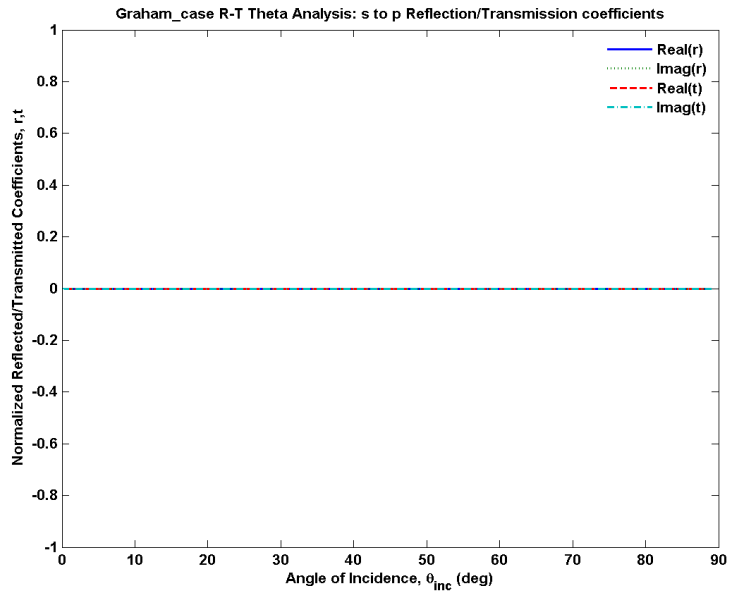
Σχήμα 6.91: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



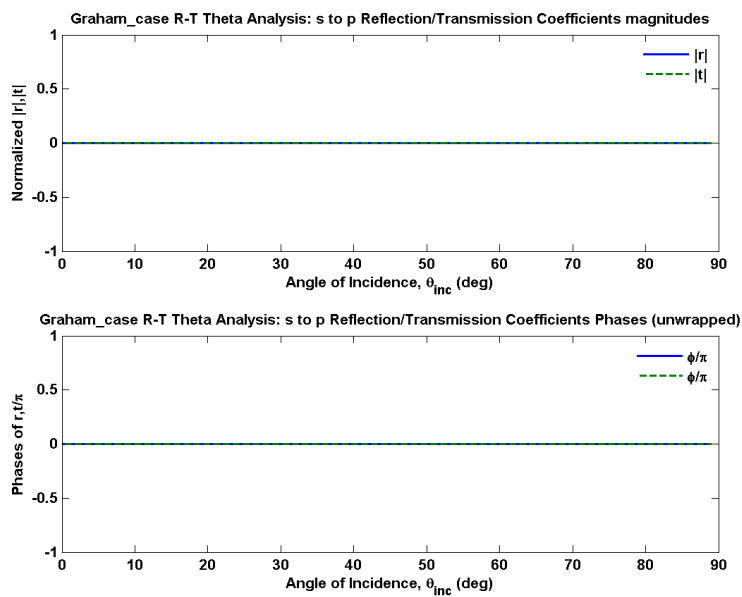
Σχήμα 6.92: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



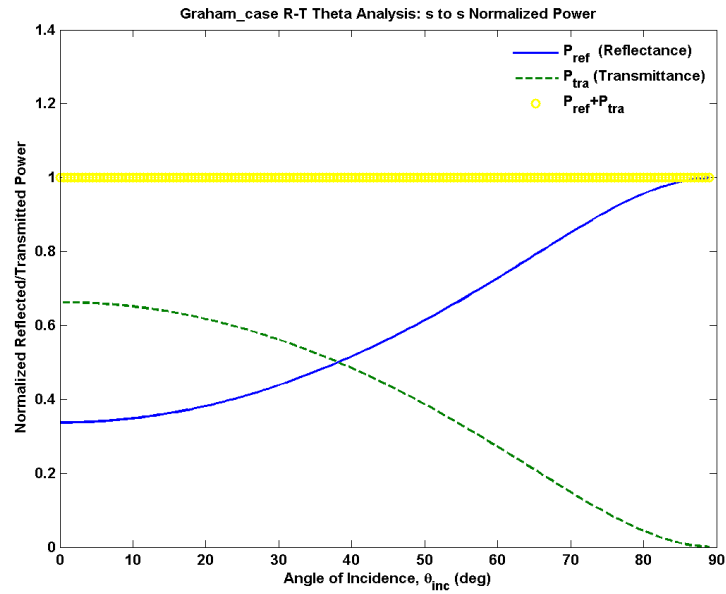
Σχήμα 6.93: Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



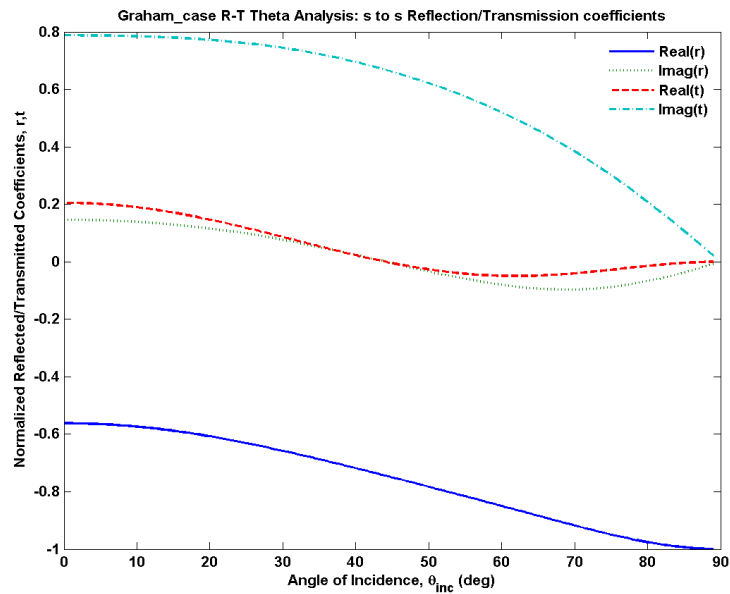
Σχήμα 6.94: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



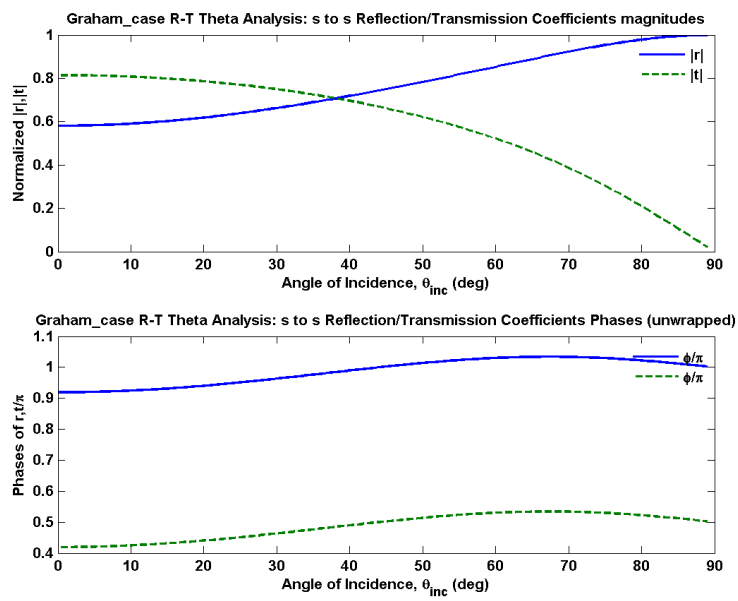
Σχήμα 6.95: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



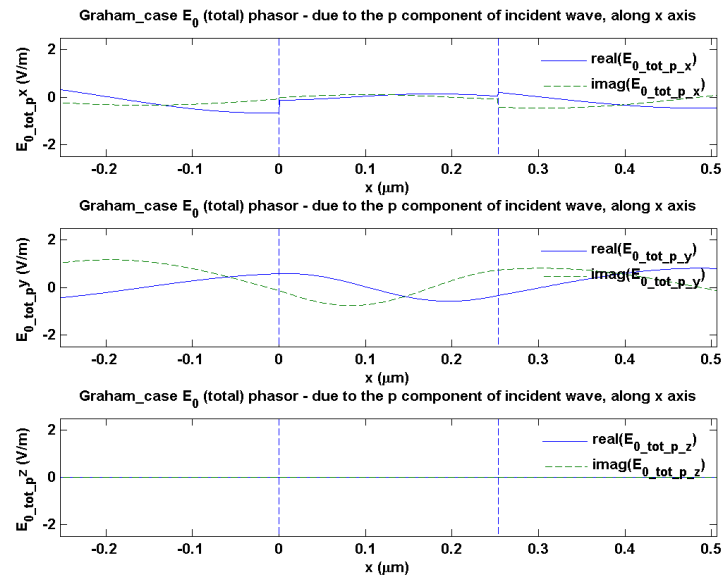
Σχήμα 6.96: Graham_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



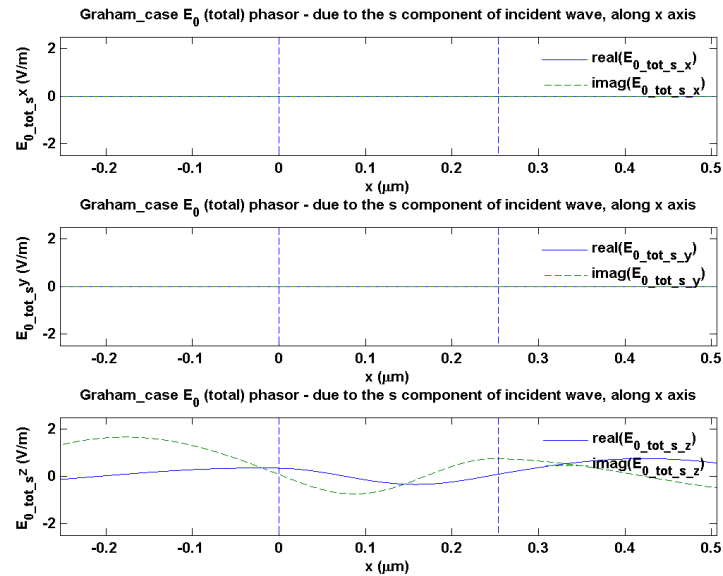
Σχήμα 6.97: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



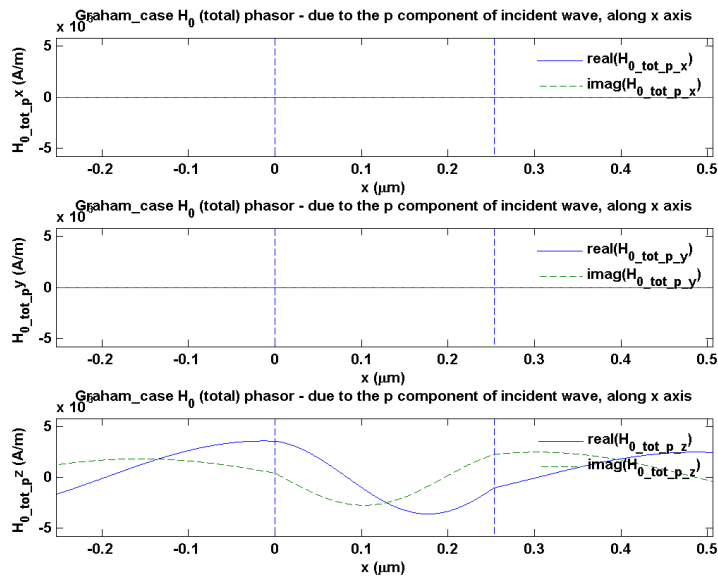
Σχήμα 6.98: Graham_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



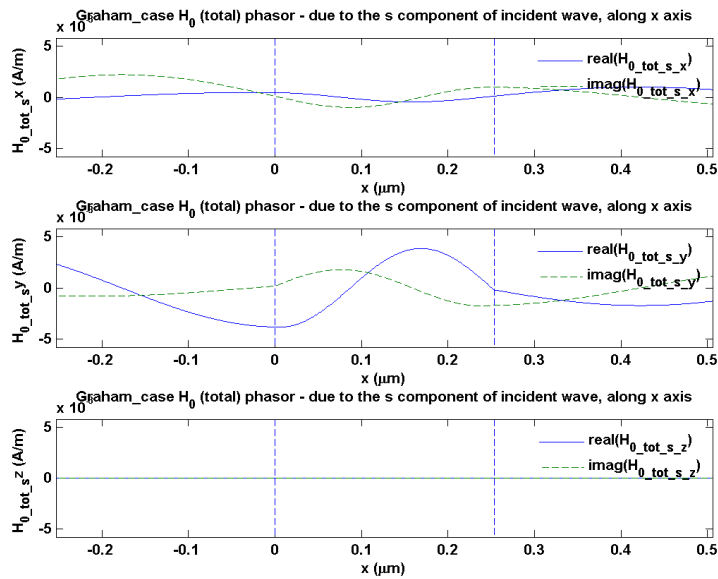
Σχήμα 6.99: Graham_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



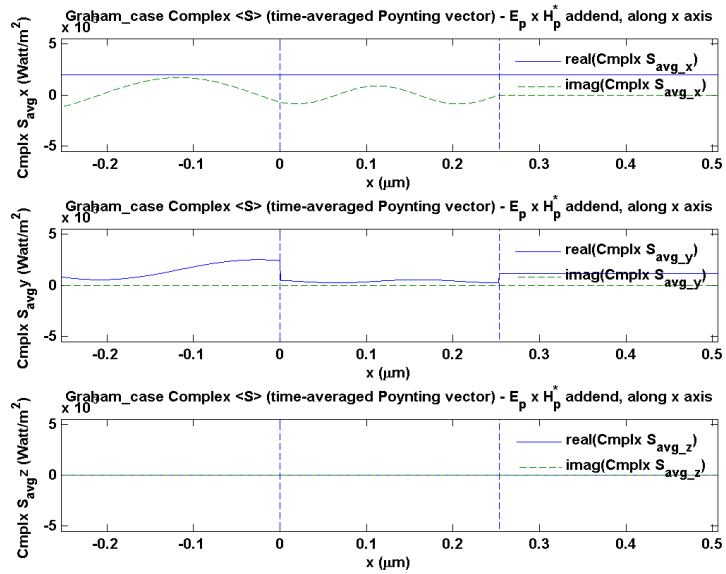
Σχήμα 6.100: Graham_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



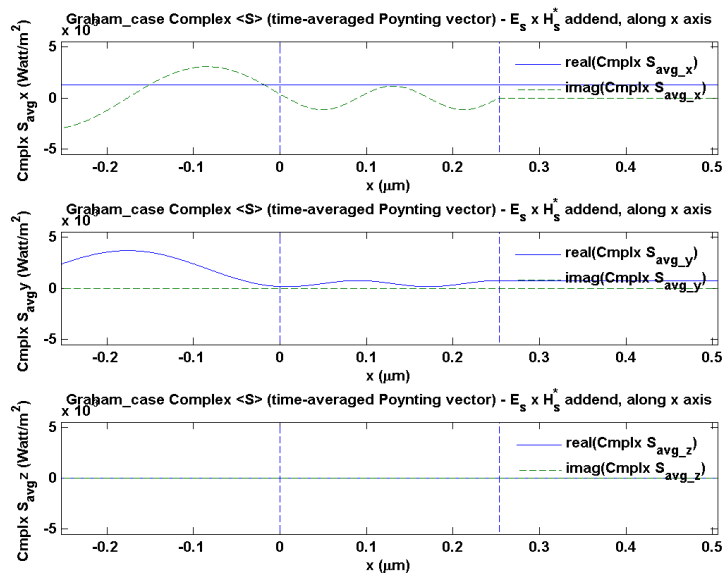
Σχήμα 6.101: Graham_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



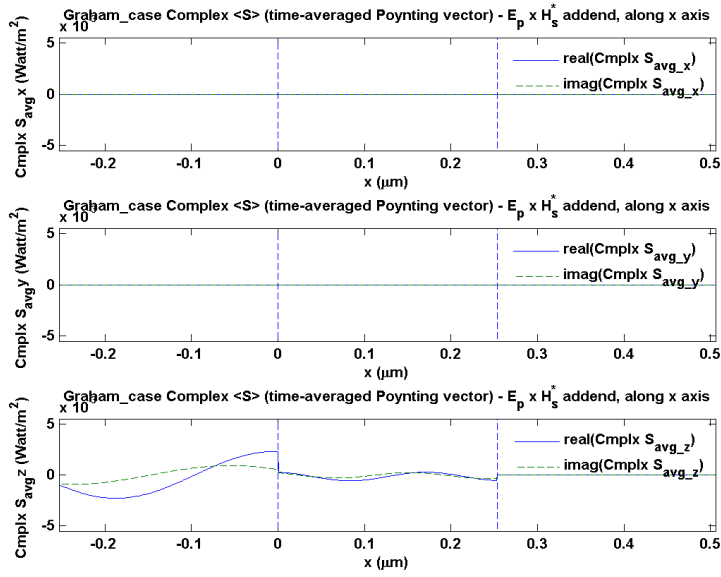
Σχήμα 6.102: Graham_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



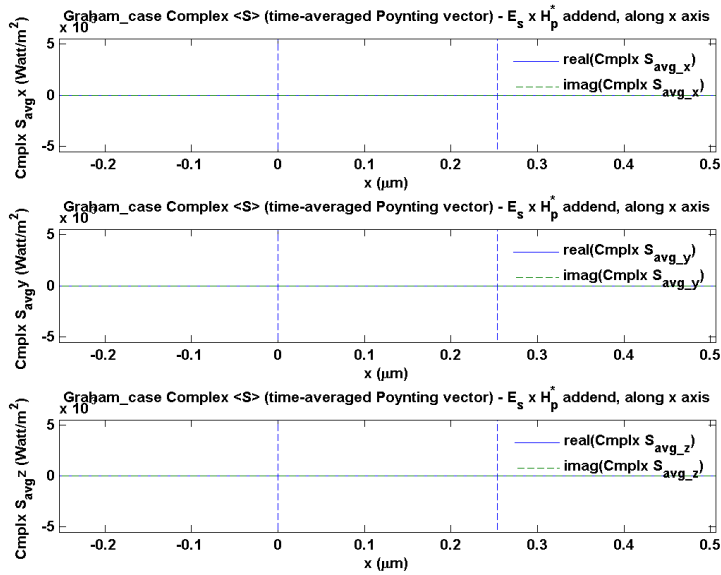
Σχήμα 6.103: Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{p,in}|^2$



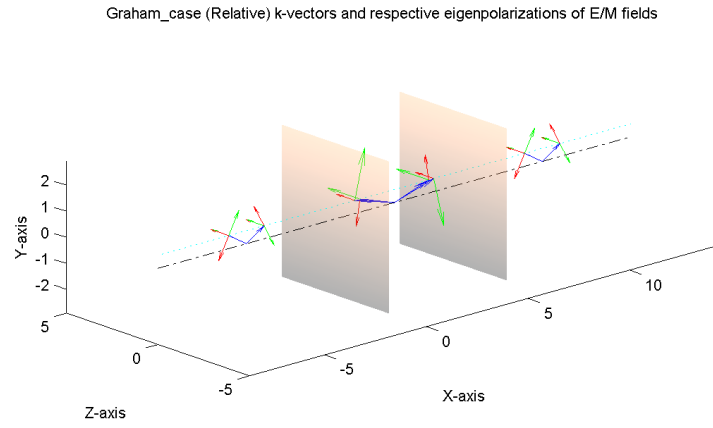
Σχήμα 6.104: Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{s,in}|^2$



Σχήμα 6.105: Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$



Σχήμα 6.106: Graham_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$



Σχήμα 6.107: Graham_case: 3D Αναπαράσταση των ιδιοπολώσεων και των κυματανυσμάτων

6.2.6 Τέσσερα ενδιάμεσα μονοαξονικά στρώματα - σύγκριση με γράφημα της βιβλιογραφίας

Στο [13] δίνεται γράφημα ανάκλασης/διάθλασης συναρτήσει της συχνότητας που αφορά σε διάταξη τεσσάρων μονοαξονικών στρωμάτων της μορφής $n_0|n_H n_L n_H n_L|n_s$ όπου τα n_H αντιστοιχούν σε στρώματα με διηλεκτρικό τανυστή $\begin{bmatrix} n_H^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και αντίστοιχα τα n_L αντιστοι-

χούν σε στρώματα $\begin{bmatrix} n_L^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Πιο συγκεκριμένα $n_H = 2.32, n_L = 1, n_s = 1.6$ ενώ τα πάχη των στρωμάτων είναι $d_H = d_L = \lambda_0/2$. Τα στρώματα θεωρούνται unrotated, η βασική γωνία πρόσπτωσης είναι $\theta_{inc} = 45^\circ$ και η κεντρική συχνότητα είναι $f_0 = 12GHz$. Το εν λόγω γράφημα φαίνεται στο σχήμα 6.108

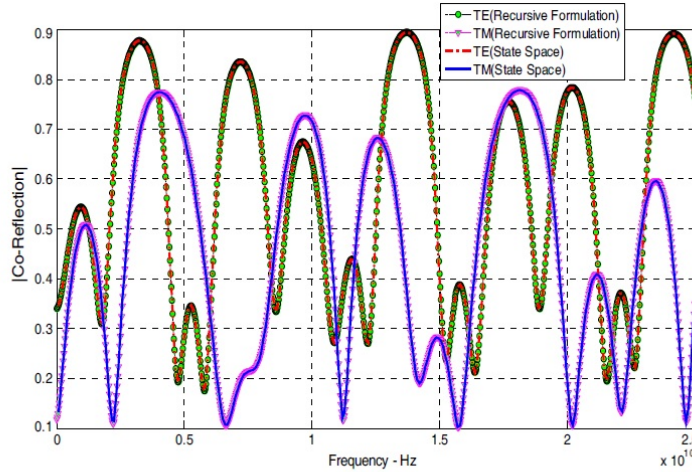
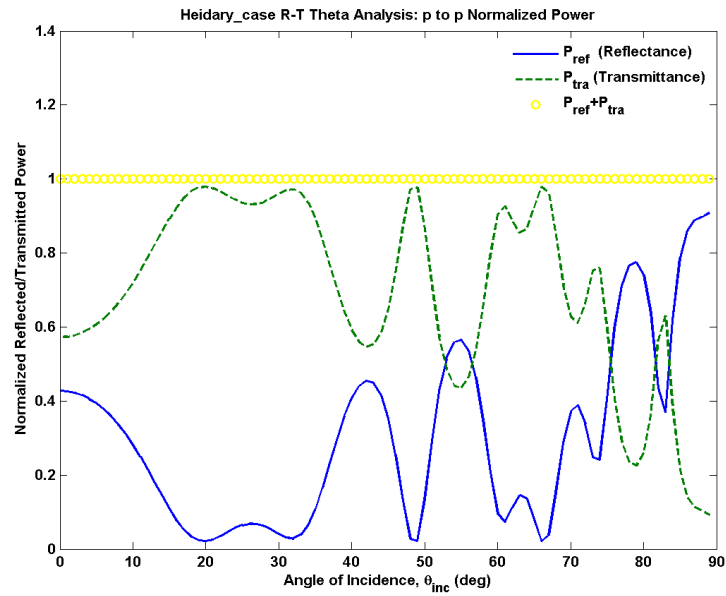


Figure 2. The results obtained from the state space relations and the derived relations.

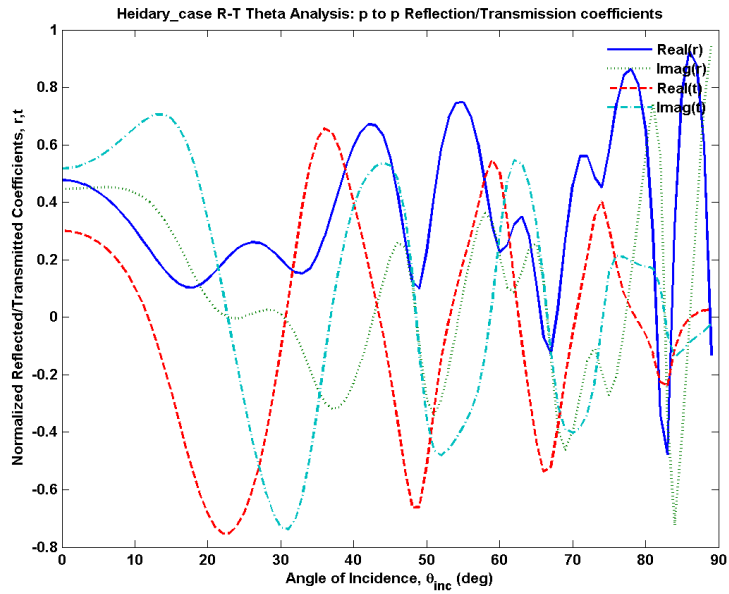
Σχήμα 6.108: Συντελεστές ανάκλασης/διάθλασης p-p, p-s από ενδιάμεσο διαξονικό στρώμα (Πηγή: [13])

Εκτελούμε λοιπόν το δικό μας πρόγραμμα για την ίδια διάταξη. Λαμβάνουμε υπόψιν ότι και πάλι το δικό μας σύστημα αξόνων είναι διαφορετικό και άρα πρέπει να θέσουμε $er\theta x = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$, $er\theta y = [n_H^2 \ n_L^2 \ n_H^2 \ n_L^2]$, $er\theta z = [n_H^2 \ n_L^2 \ n_H^2 \ n_L^2]$. Σαν βασικό μήκος κύματος επιλέγουμε αυτό που αντιστοιχεί στη δεδομένη κεντρική συχνότητα βάσει της σχέση $c_0 = \lambda_0 * f_0$. Εκτός αυτού το δικό μας πρόγραμμα παράγει γράφηματα ανάκλασης/διάθλασης συναρτήσει του μήκους κύματος και όχι της συχνότητας. Μετατρέπουμε λοιπόν το απεικονιζόμενο (στο σχήμα 6.108) εύρος συχνοτήτων στο αντίστοιχο εύρος μηκών κύματος. Επιλέγουμε να αρχίσουμε όμως όχι από τη μηδενική συχνότητα (αφού το αντίστοιχο μήκος κύματος θα πρέπει να είναι άπειρο) αλλά από τα $5GHz$. Ωστόσο, λόγω της αντίστροφης σχέσης μεταξύ μήκους κύματος και συχνότητας, οι διάφορες συχνότητες δεν κατανέμονται με τον ίδιο ομοιόμορφο τρόπο στα διάφορα μήκη κύματος και στα γράφηματα που προκύπτουν (βλ. σχήματα 6.123 και 6.126) με αποτέλεσμα να μην προκύπτει ένα παρόμοιο γράφημα. Για να ξεπεραστεί αυτό υλοποιήθηκε πολύ εύκολα (χάριν της generic μορφής των συναρτήσεων `plot_rt_sp` και `plot_rt`)

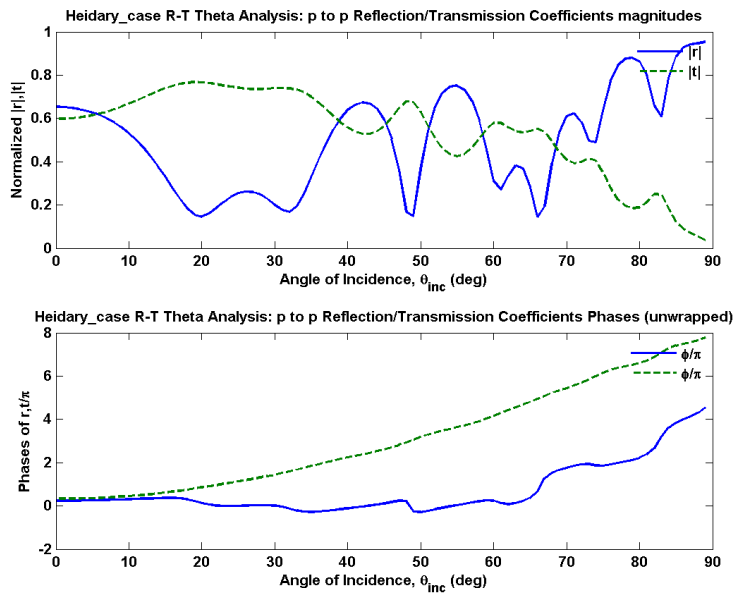
αντίστοιχη συνάρτηση rt_f βάσει της rt_lamda η οποία αποτυπώνει την ανάκλαση-διάθλαση καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα του προσπίπτοντος κύματος. Παρατηρώντας πλέον τα γραφήματα 6.129 και 6.138 και εστιάζοντας στους συντελεστές ανάκλασης η ομοιότητα είναι φανερή. Αυτό γίνεται ακόμα πιο σαφές αν συνδυάσουμε τις δύο καμπύλες των συντελεστών ανάκλασης σε κοινό γράφημα (βλ. σχήμα 6.147).



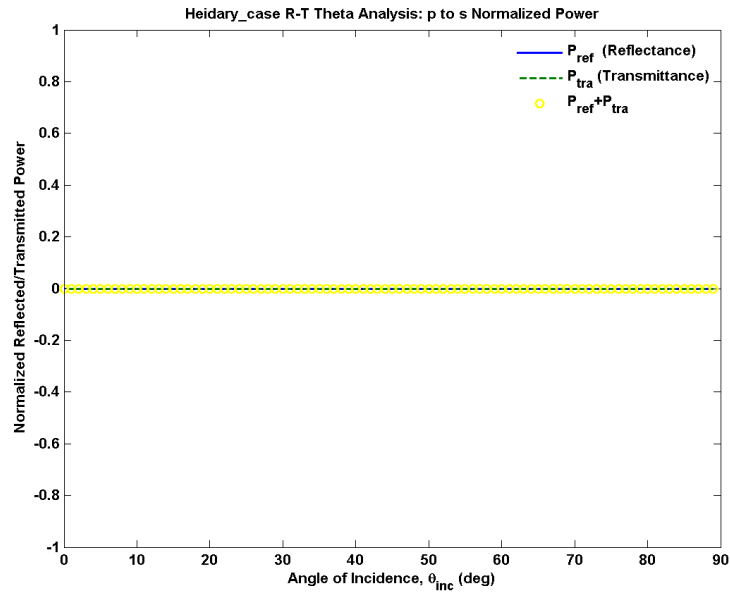
Σχήμα 6.109: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



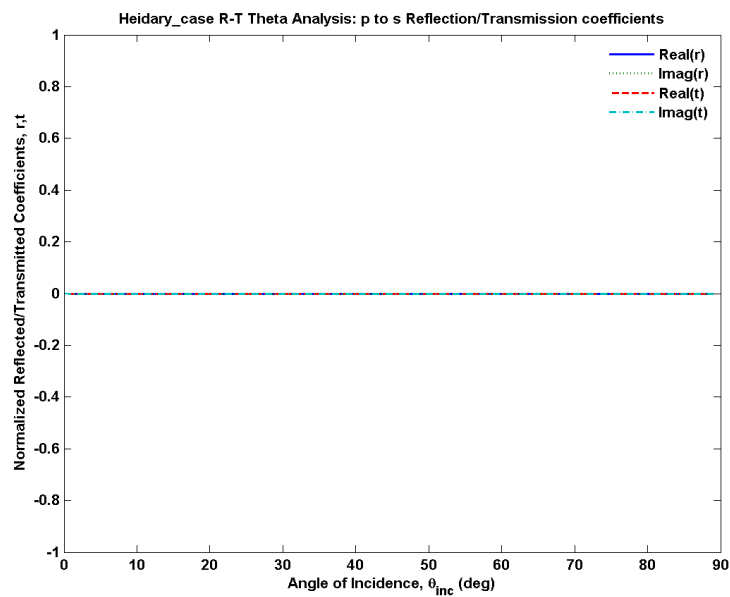
Σχήμα 6.110: Heidayry_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



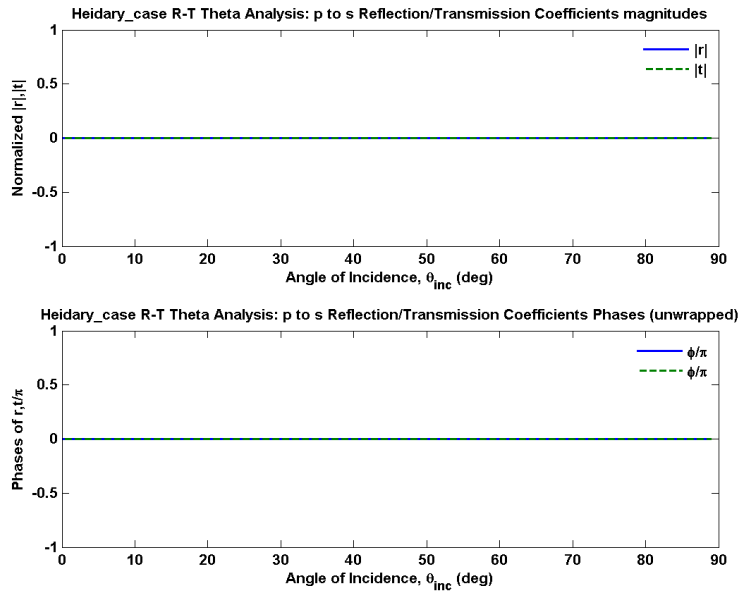
Σχήμα 6.111: Heidayry_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσεϊ της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



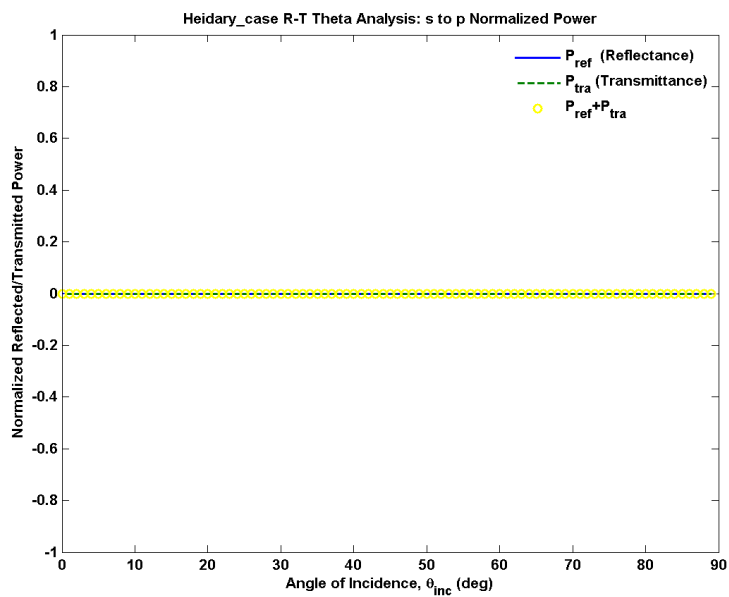
Σχήμα 6.112: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



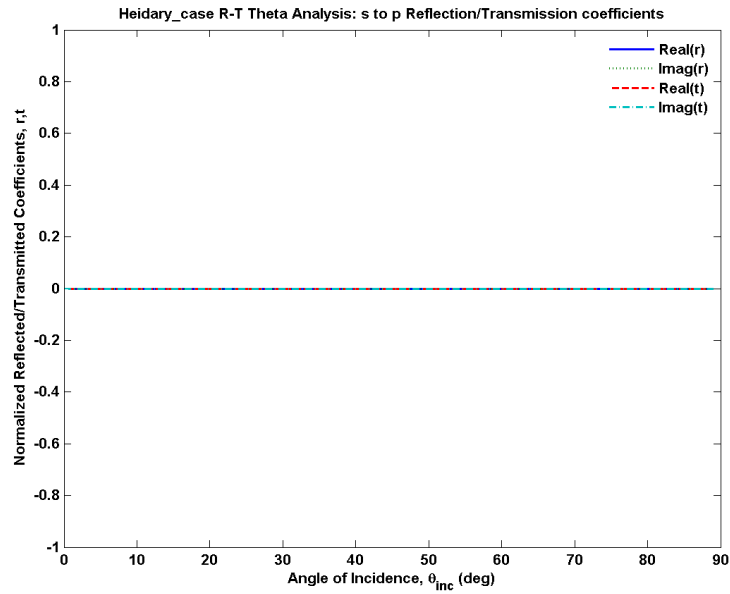
Σχήμα 6.113: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



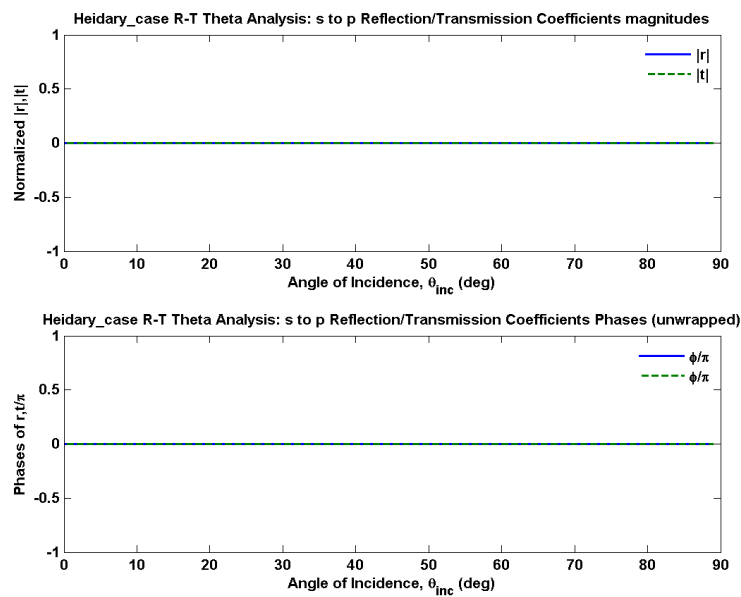
Σχήμα 6.114: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



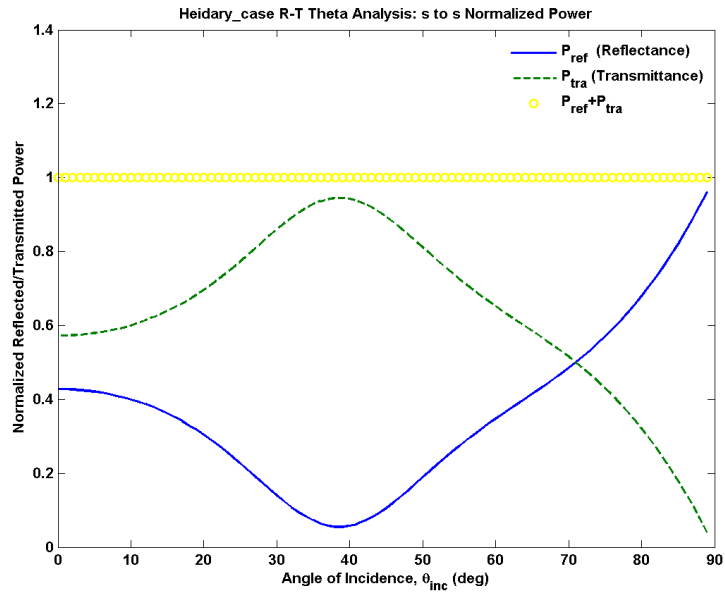
Σχήμα 6.115: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



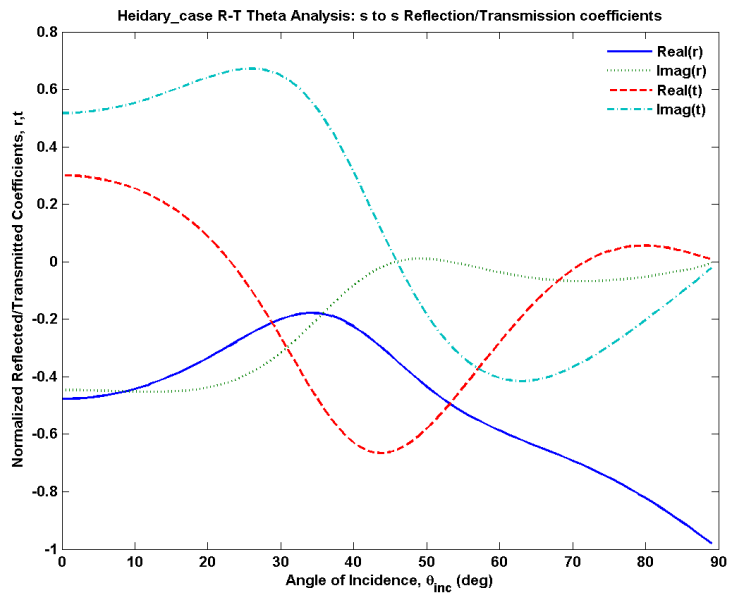
Σχήμα 6.116: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



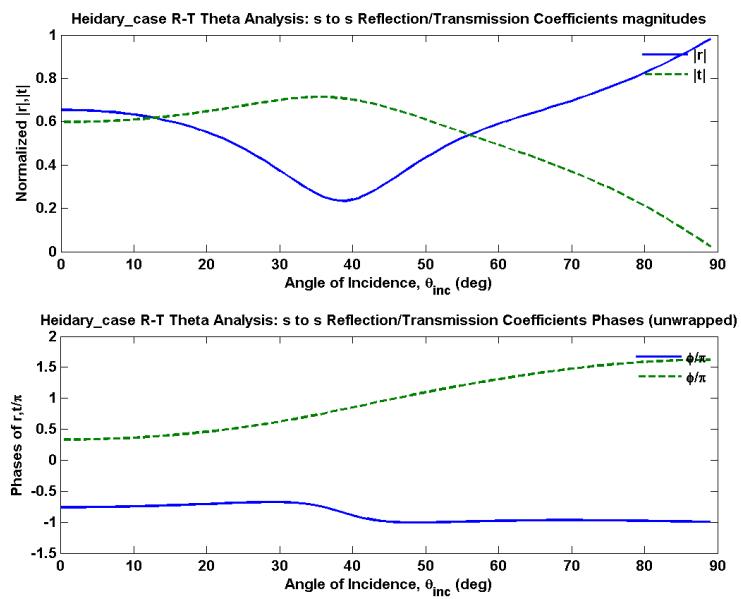
Σχήμα 6.117: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



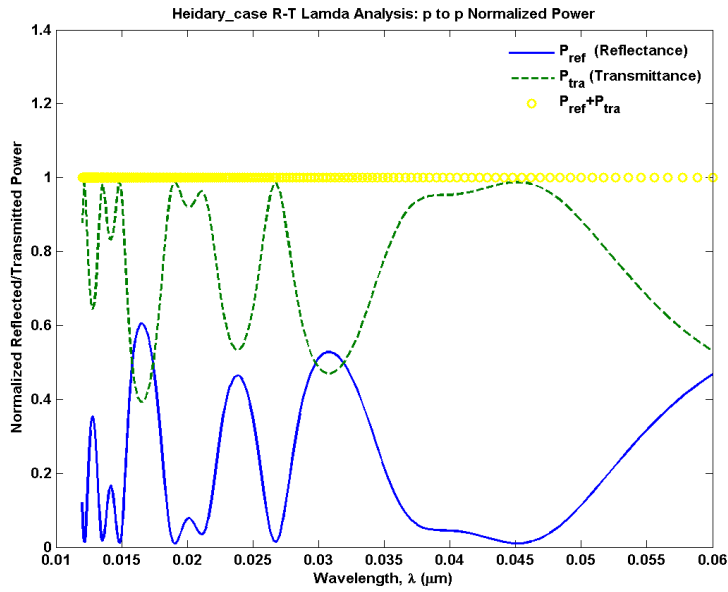
Σχήμα 6.118: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



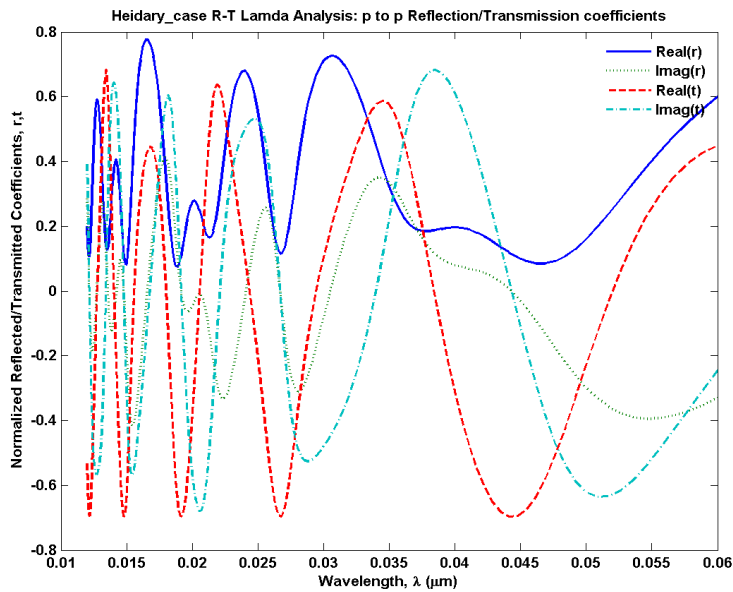
Σχήμα 6.119: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



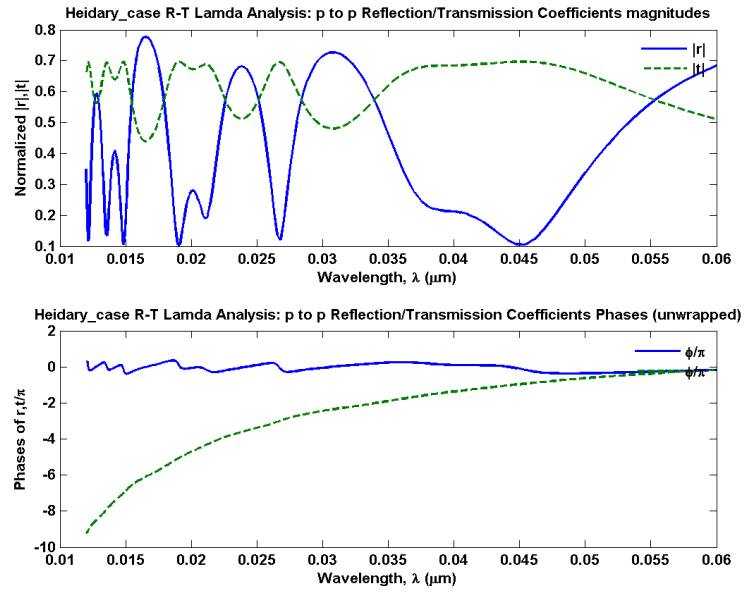
Σχήμα 6.120: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης θ_{inc}



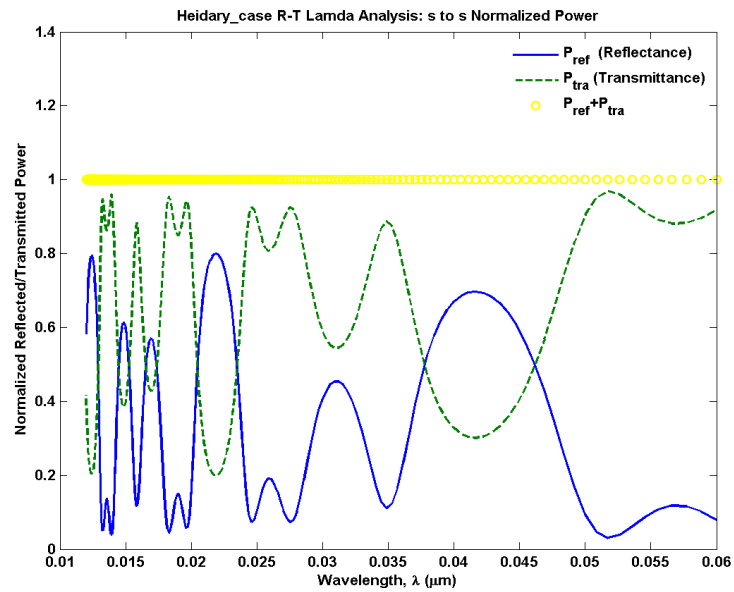
Σχήμα 6.121: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



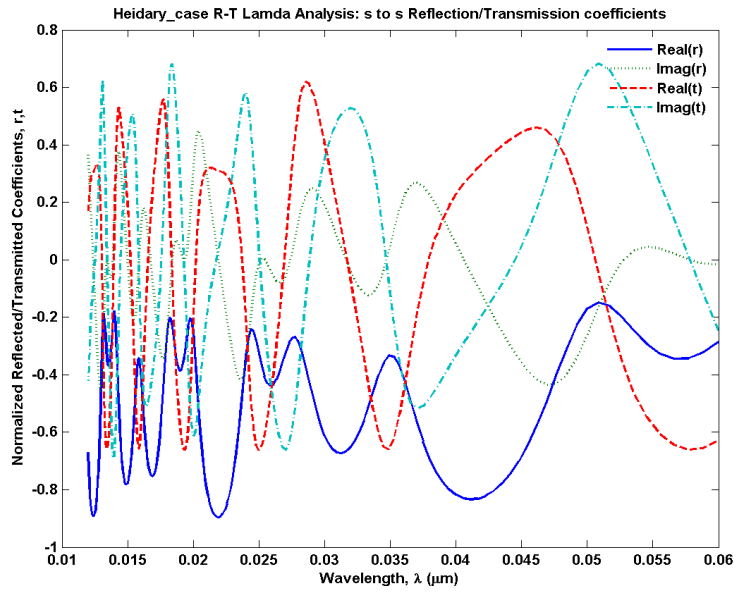
Σχήμα 6.122: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



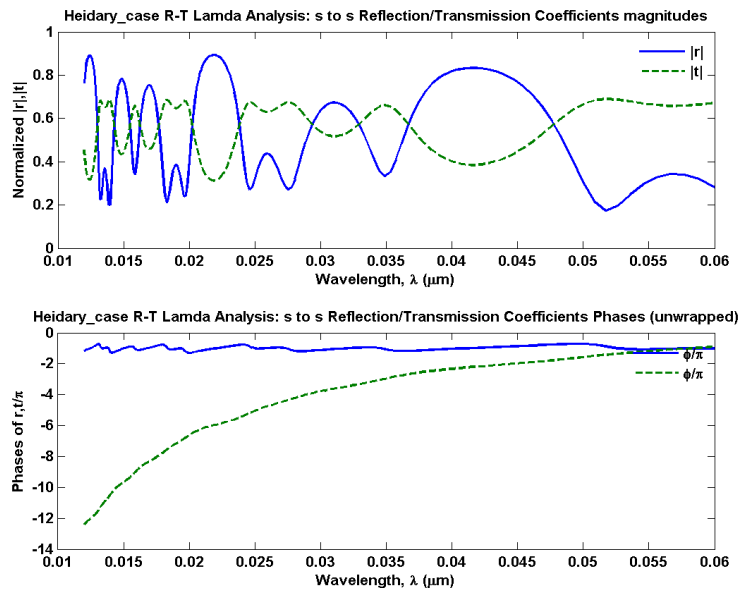
Σχήμα 6.123: Heidayry_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



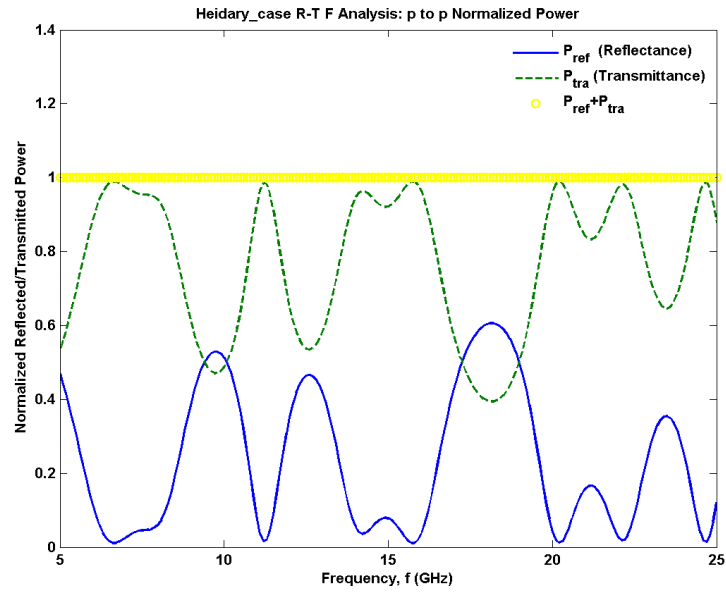
Σχήμα 6.124: Heidayry_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



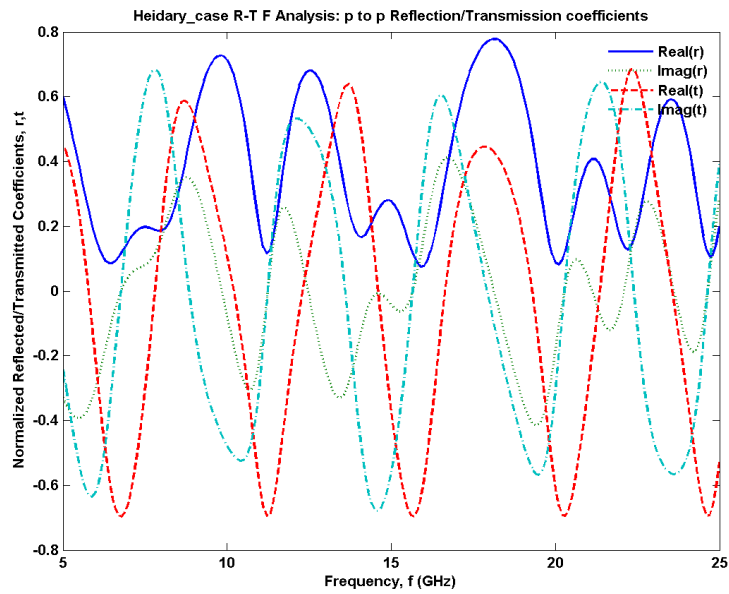
Σχήμα 6.125: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



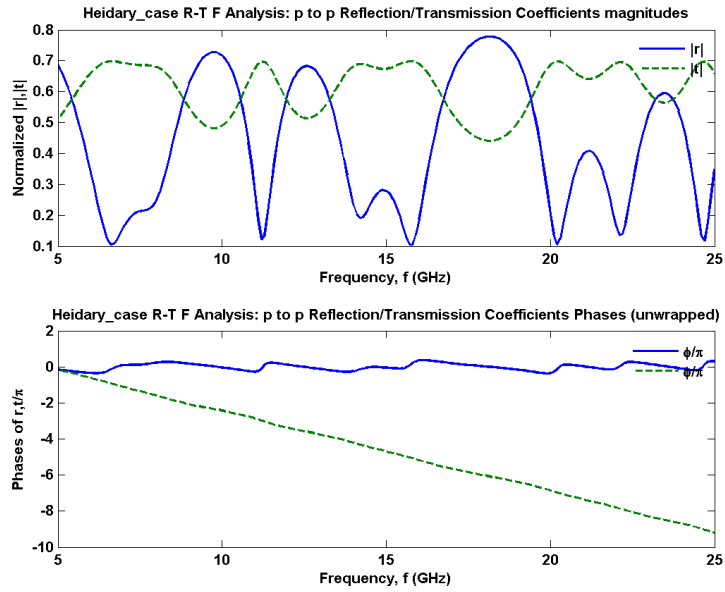
Σχήμα 6.126: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσει του μήκους κύματος λ_0



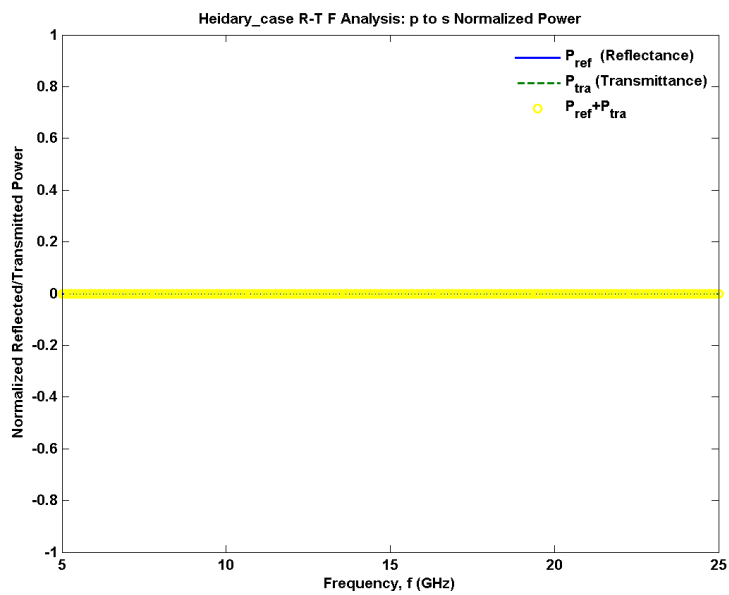
Σχήμα 6.127: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-p συναρτήσει της συχνότητας f



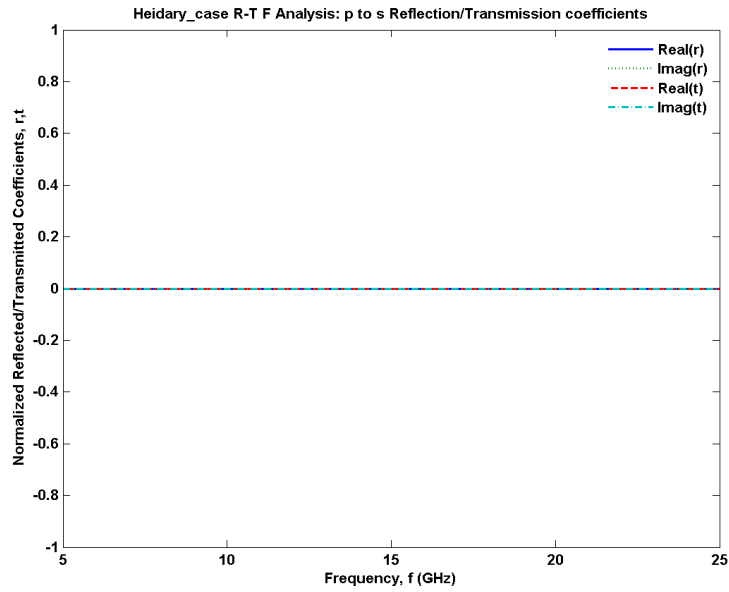
Σχήμα 6.128: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της συχνότητας f



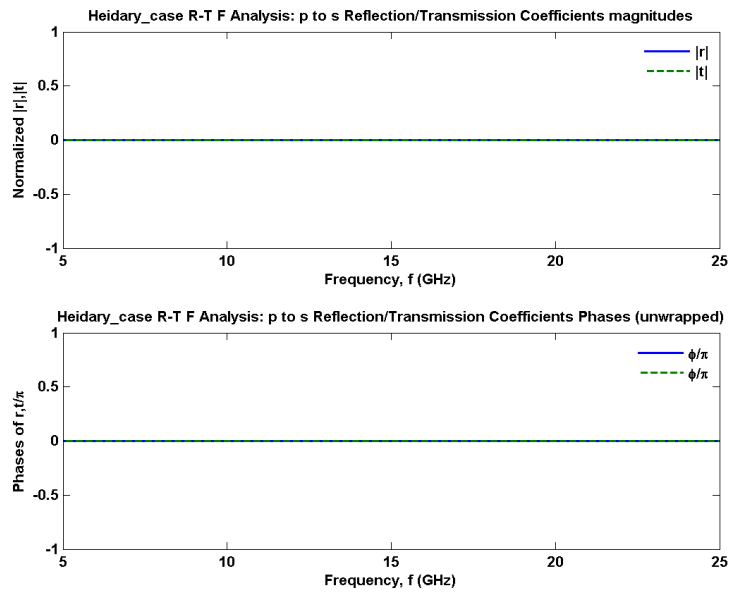
Σχήμα 6.129: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-p συναρτήσει της συχνότητας f



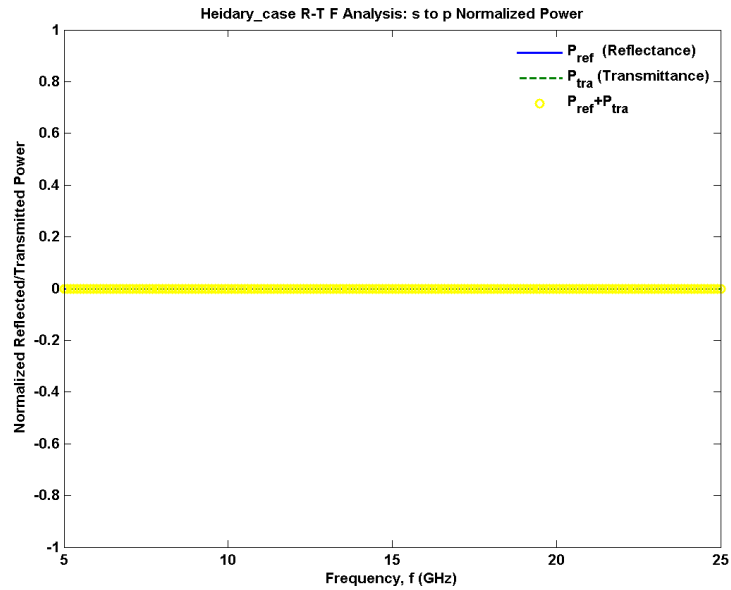
Σχήμα 6.130: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα p-s συναρτήσει της συχνότητας f



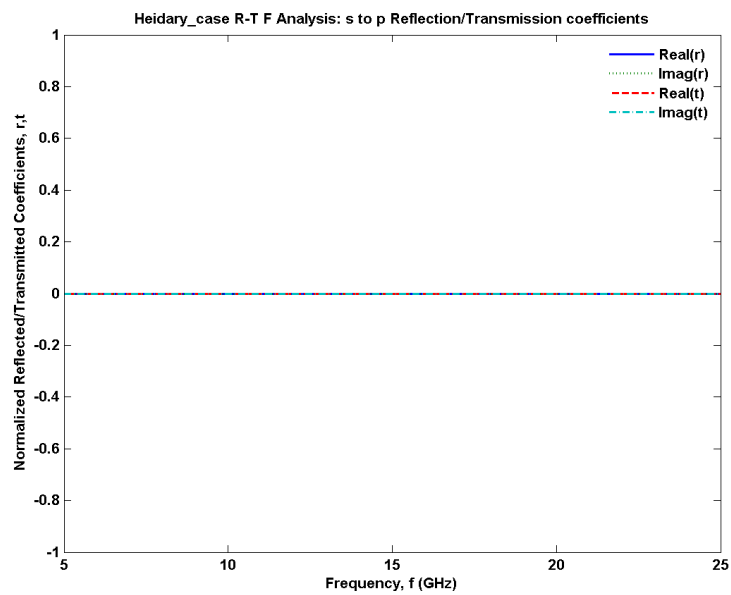
Σχήμα 6.131: Heidayr_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της συχνότητας f



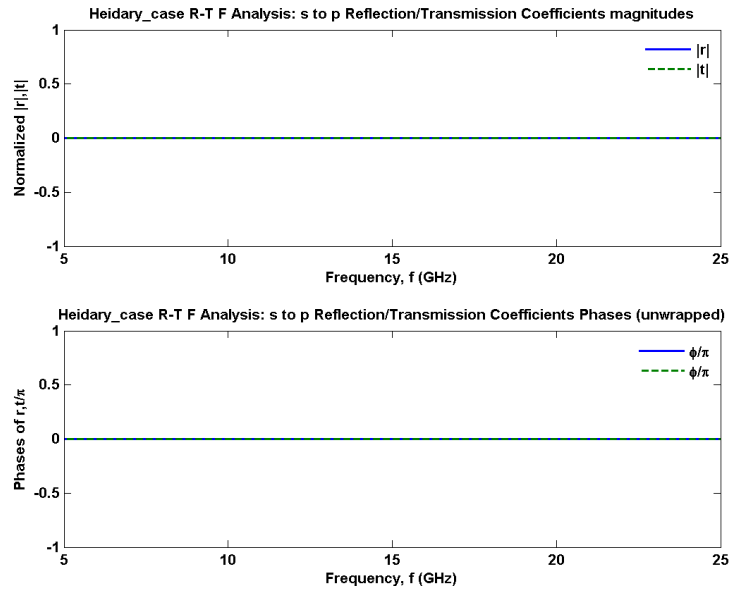
Σχήμα 6.132: Heidayr_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης p-s συναρτήσει της συχνότητας f



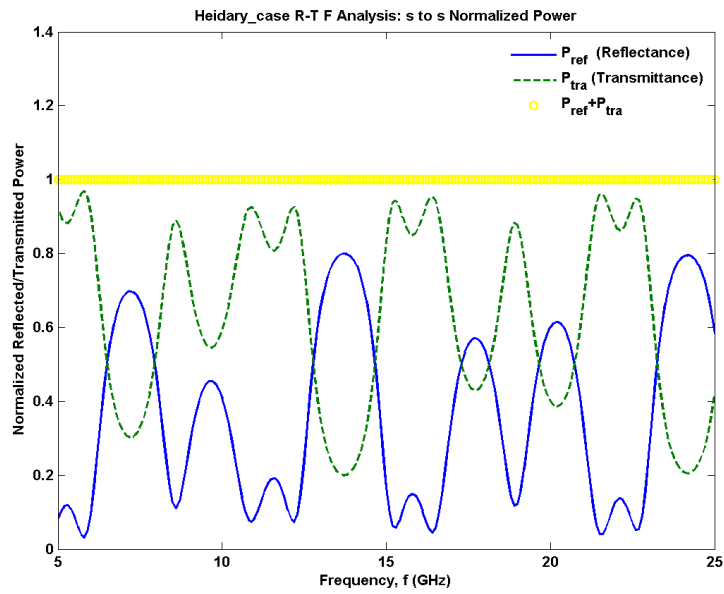
Σχήμα 6.133: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-p συναρτήσεως της συχνότητας f



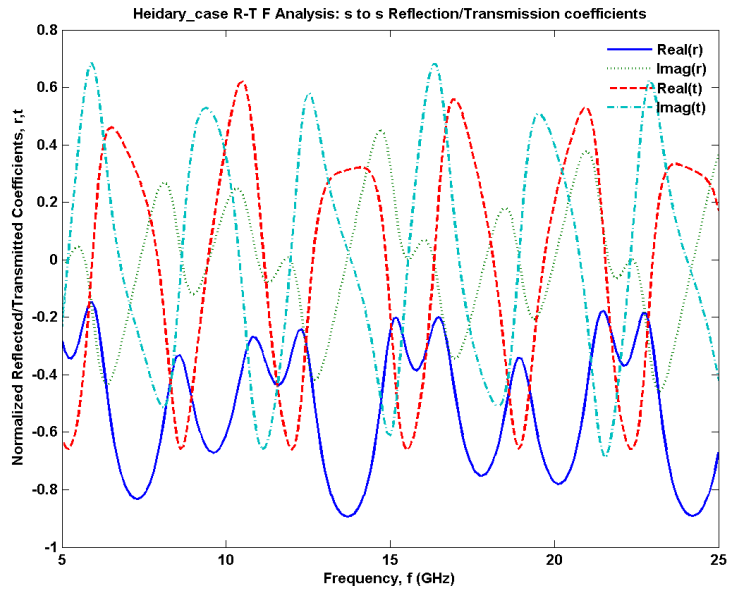
Σχήμα 6.134: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσεως της συχνότητας f



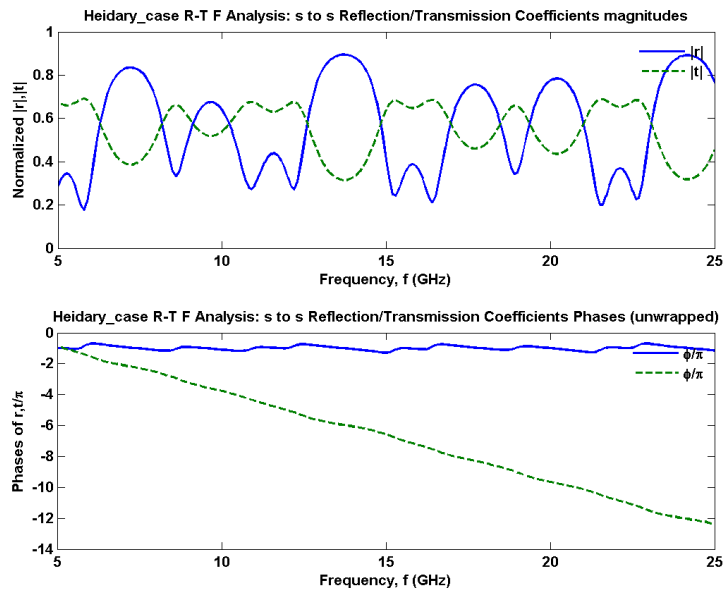
Σχήμα 6.135: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-p συναρτήσει της συχνότητας f



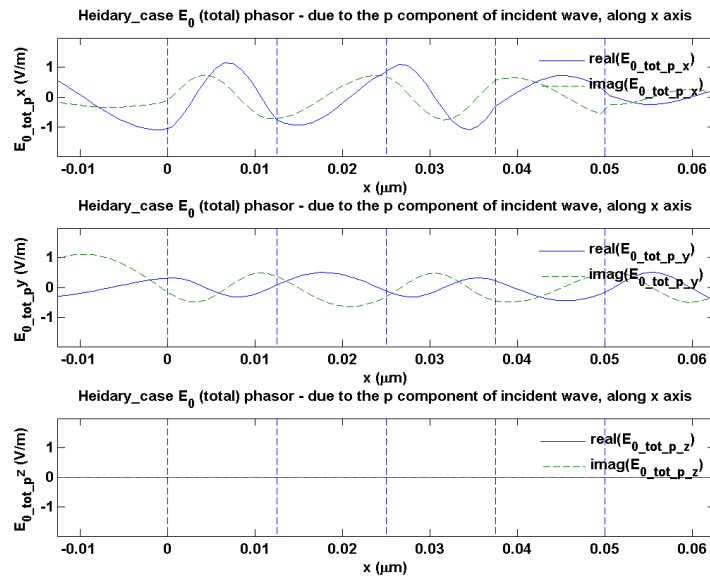
Σχήμα 6.136: Heidary_case: Ανακλαστικότητα/Διαθλαστικότητα s-s συναρτήσει της συχνότητας f



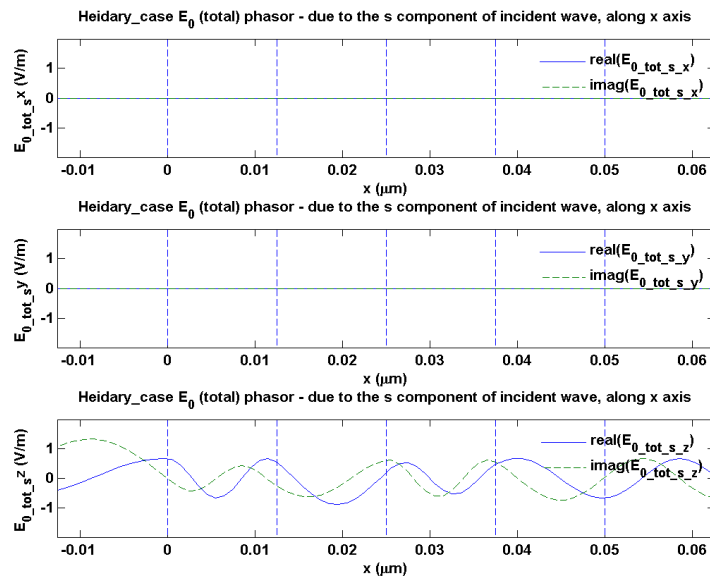
Σχήμα 6.137: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε της συχνότητας f



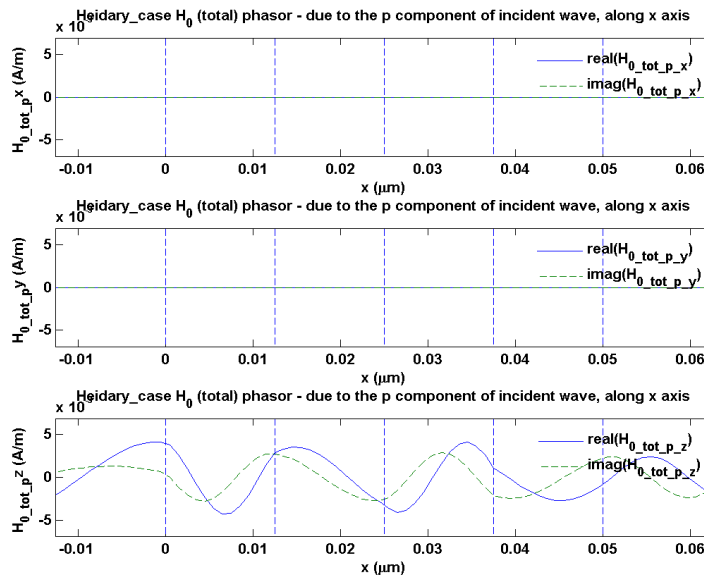
Σχήμα 6.138: Heidary_case: Συντελεστής Ανάκλασης/Διάθλασης s-s συναρτήσε της συχνότητας f



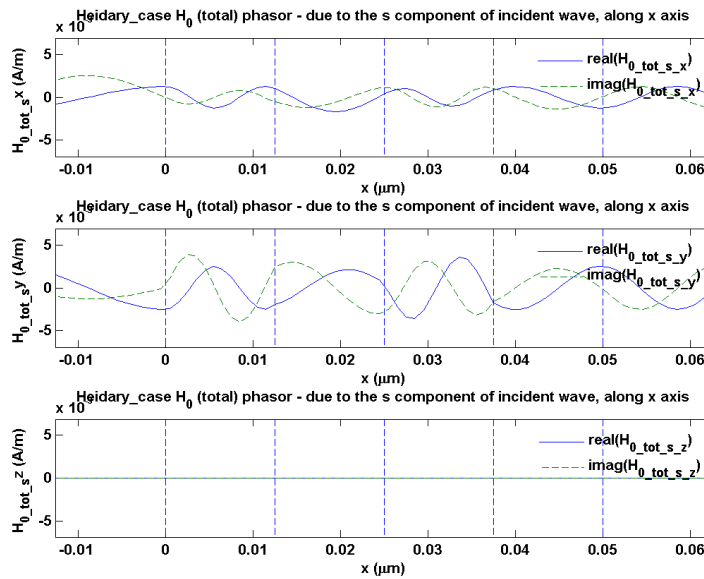
Σχήμα 6.139: Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



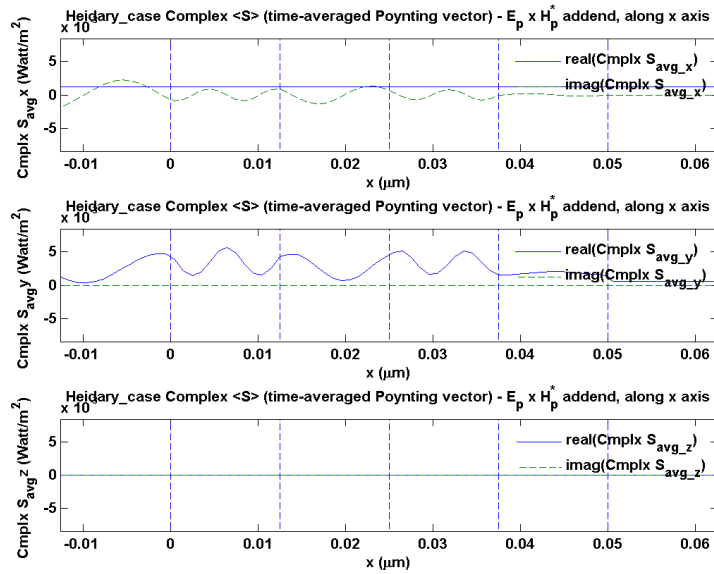
Σχήμα 6.140: Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Ηλεκτρικού Πεδίου $\vec{E}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



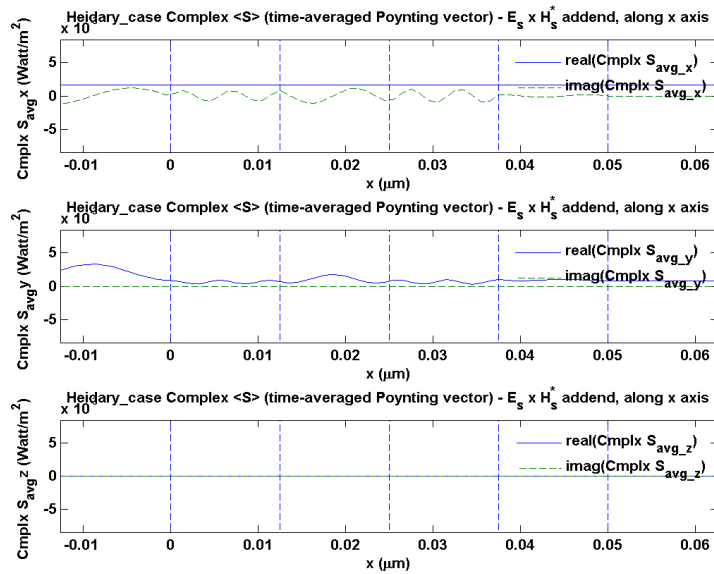
Σχήμα 6.141: Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_p(x)$ οφειλόμενου στην p συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



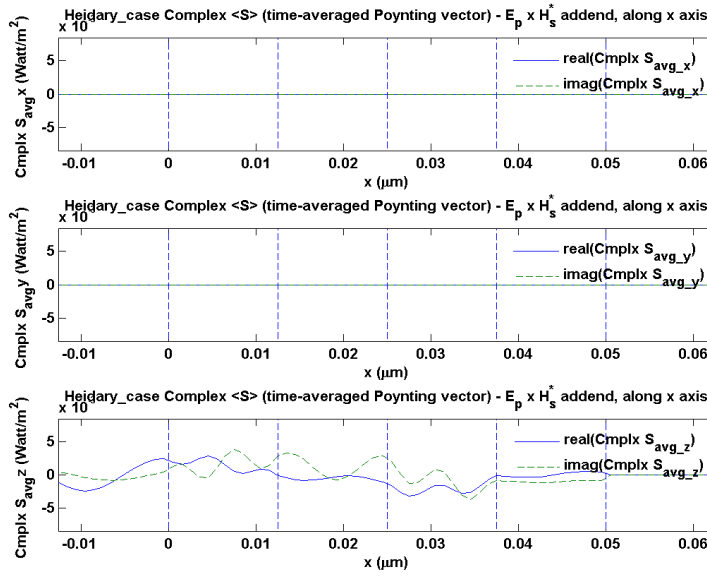
Σχήμα 6.142: Heidary_case: Φασιθέτης έντασης Μαγνητικού Πεδίου $\vec{H}_s(x)$ οφειλόμενου στην s συνιστώσα του προσπίπτοντος κύματος κατά μήκος του άξονα x



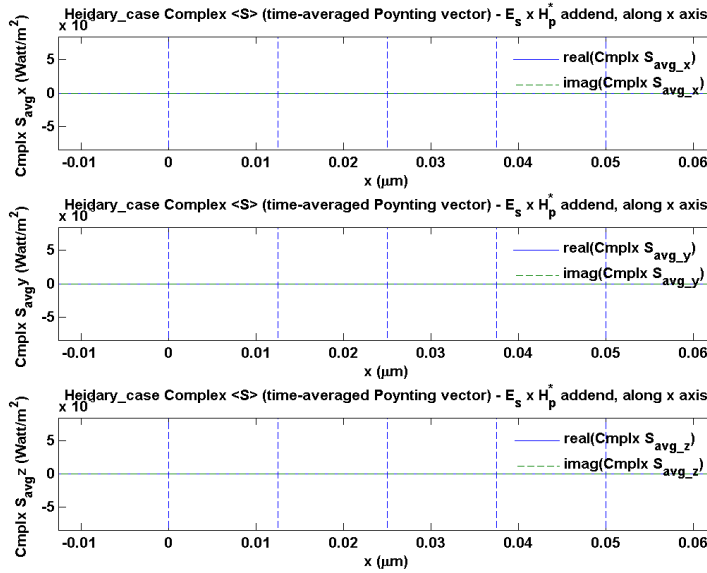
Σχήμα 6.143: Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{p,in}|^2$



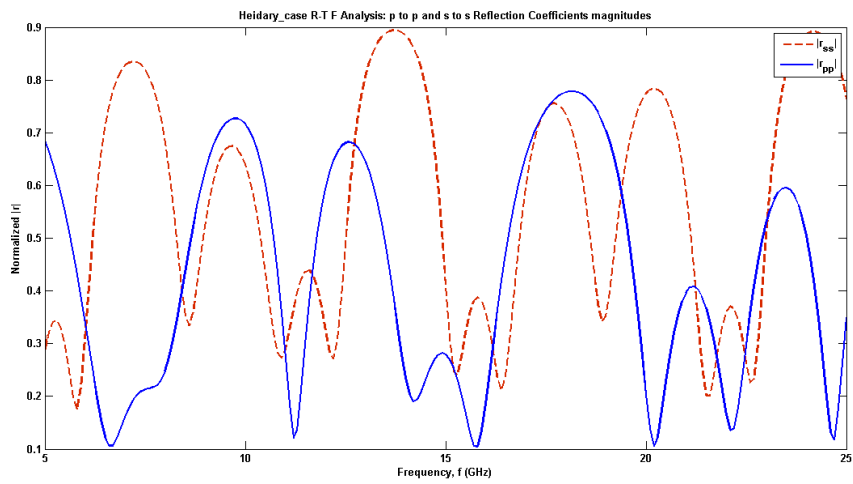
Σχήμα 6.144: Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $|A_{s,in}|^2$



Σχήμα 6.145: Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{p,in}A_{s,in}^*$



Σχήμα 6.146: Heidary_case: Μιγαδικό διάνυσμα Poynting - συντελεστής του $A_{s,in}A_{p,in}^*$



Σχήμα 6.147: Heidary_case: Συντελεστές Ανάκλασης p-p και s-s συναρτήσει της συχνότητας f

Κεφάλαιο 7

Προγράμμα Β - Γραφικό Περιβάλλον Υπολογισμού και προσομοίωσης της Κυματοεπιφάνειας ενός ανισοτροπικού μέσου

Κατά τη μελέτη της διάδοσης των επιπέδων H/M κυμάτων εντός ανισοτροπικών μέσων θεωρήθηκε ιδιαίτερα χρήσιμο το να υπήρχε ένας εύκολος, άμεσος τρόπος να απεικονίσουμε την κυματοεπιφάνεια (ή κανονική επιφάνεια, βλ. υποενότητα 4.2) ενός ανισοτροπικού μέσου, με δεδομένο τον ταχυστή ηλεκτρικής επιτρεπτότητάς του.

Κρίθηκε λοιπόν σκόπιμο, στα πλαίσια της εργασίας, να δημιουργηθεί πρόγραμμα με γραφικό περιβάλλον αλληλεπίδρασης (Graphical User Interface (GUI)) το οποίο θα δέχεται τον διηλεκτρικό ταχυστή, με τρόπο φιλικό προς το χρήστη και θα αποτυπώνει την κυματοεπιφάνειά του, παρέχοντας παράλληλα διάφορες επιλογές που αφορούν στην απεικόνιση αυτή προκειμένου να καλύπτει τυχόν διαφορετικές ανάγκες του κάθε χρήστη. Η εφαρμογή αυτή δημιουργήθηκε στο MATLAB. Στις παρακάτω ενότητες λοιπόν δίνονται οι δυνατότητες και τα χαρακτηριστικά του προγράμματος, αναλύεται ο τρόπος υλοποίησής του και δίνονται κάποια παραδείγματα εφαρμογής.

7.1 Προδιαγραφές

7.1.1 Παράμετροι κατασκευής της κυματοεπιφάνειας (ρυθμίσεις προ της αποτύπωσής της)

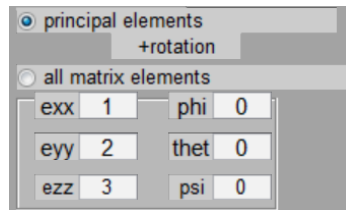
Στο πρόγραμμα ο χρήστης ορίζει διάφορες παραμέτρους βάσει των οποίων θα κατασκευαστεί η κυματοεπιφάνεια.

Διηλεκτρικός ταυυστής

Καταρχήν δίνεται προφανώς ο διηλεκτρικός ταυυστής του ανισοτροπικού μέσου. Όπως εξηγήσαμε στην ενότητα 4.1 ένα lossless ανισοτροπικό μέσο έχει διηλεκτρικό ταυυστή ο οποίος μπορεί να διαγωνοποιηθεί και να εκφραστεί μέσω του κύριου, και διαγώνιου, διηλεκτρικού ταυυστή (στο σύστημα κυρίων αξόνων του κρυστάλλου) και των γωνιών περιστροφής του συστήματος κυρίων αξόνων του.

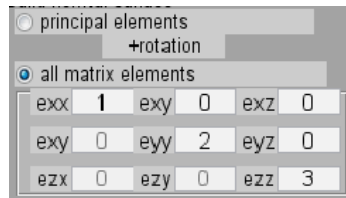
Για το λόγο αυτό, θεωρήθηκε χρήσιμο το πρόγραμμα να δέχεται τον διηλεκτρικό ταυυστή και με τις δύο μορφές:

- είτε εισάγοντας τα διαγώνια στοιχεία του κύριου διηλεκτρικού ταυυστή και τις γωνίες περιστροφής, και συγκεκριμένα τις γωνίες Euler τύπου $z - x' - z''$



Σχήμα 7.1: Ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή βάσει του κύριου διηλεκτρικού ταυυστή και των γωνιών Euler περιστροφής του κρυστάλλου

- είτε εισάγοντας τα έξι από τα εννιά στοιχεία του ουσιαστικού διηλεκτρικού ταυυστή (τα άλλα τρία λόγω της συμμετρίας ορίζονται αυτόματα βάσει των άλλων στοιχείων)



Σχήμα 7.2: Απευθείας ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή (βάσει των στοιχείων του)

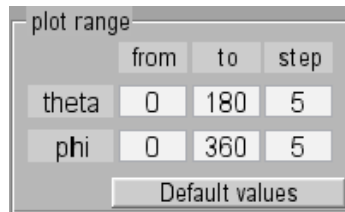
Ο χρήστης επιλέγει ένα από τα δύο radiobuttons και ορίζει έτσι με ποιον τρόπο θέλει να εισαγάγει τον διηλεκτρικό ταυυστή. Ωστόσο το πρόγραμμα παρέχει και την εξής δυνατότητα: Μόλις ο χρήστης δώσει εντολή να τυπωθεί η κυματοεπιφάνεια, ο διηλεκτρικός ταυυστής μετατρέπεται από τη μορφή που επέλεξε ο χρήστης στην άλλη μορφή, έτσι ώστε οι δύο μορφές να είναι "συγχρονισμένες". Δηλαδή, αν ο χρήστης επιλέξει το άλλο radiobutton αφού έχει δημιουργηθεί το γράφημα της κυματοεπιφάνειας, τα δεδομένα που θα δει μέσα στα editboxes θα αντιστοιχούν και αυτά στην κυματοεπιφάνεια που προβάλλεται.

Εύρος γωνιών απεικόνισης της κυματοεπιφάνειας

Είναι πολύ χρήσιμο για την κατανόηση της μορφής της κυματοεπιφάνειας να μπορεί να οριστεί συγκεκριμένο εύρος γωνιών θ και ϕ αποτύπωσης της κυματοεπιφάνειας, αντί να αποτυπωθεί αυτή ολόκληρη. Για παράδειγμα, αν έχουμε έναν διαξονικό κρύσταλλο με $\epsilon_x < \epsilon_y < \epsilon_z$

βολεύει αρκετά, προκειμένου να κατανοήσουμε τη μορφή της κυματοεπιφάνειας, να αποτυπώσουμε την τομή της από το επίπεδο $y = 0$, όπου κείνται οι οπτικοί άξονες. Βολεύει δηλαδή να επιλέξουμε σαν εύρος γωνιών ϕ το $[0, 180]$ αντί του $[0, 360]$.

Στο γραφικό περιβάλλον που υλοποιήθηκε λοιπόν υπάρχει και αυτή η δυνατότητα. Ο χρήστης ορίζει το εύρος γωνιών θ και ϕ καθώς επίσης και το βήμα υπολογισμού (που καθορίζει πόσο "πυκνή" θα είναι η κυματοεπιφάνεια) μέσα από κατάλληλα editboxes. Επίσης πατώντας το κουμπί "Default values" μπορεί με γρήγορο τρόπο να επαναφέρει το εύρος γωνιών στις πλήρεις τιμές προκειμένου να σχεδιαστεί ολόκληρη η κυματοεπιφάνεια.

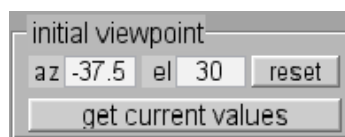


Σχήμα 7.3: Ορισμός εύρους γωνιών αποτύπωσης της κυματοεπιφάνειας

Αρχική οπτική γωνία γραφήματος

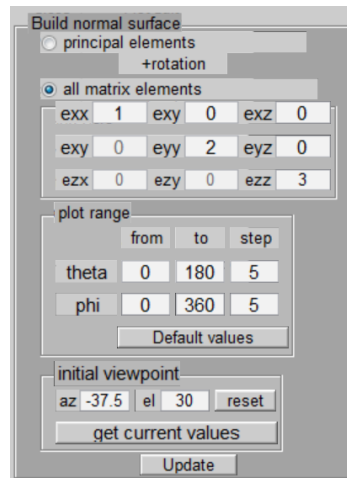
Ο χρήστης μπορεί να ορίσει μέσα από κατάλληλα αντίστοιχα editboxes την αζιμουθιακή γωνία και τη γωνία ανύψωσης που καθορίζουν την διεύθυνση από την οποία θα "κοιτούμε" την κυματοεπιφάνεια, πριν αυτή αποτυπωθεί. Ωστόσο, μπορεί να περιστρέψει το γράφημα (αλλάζοντας δηλαδή την οπτική μας γωνία) και αφού αυτό δημιουργηθεί. Αν βρει μία συγκεκριμένη οπτική γωνία που τον εξυπηρετεί ιδιαίτερα και επιθυμεί να δει υπό την ίδια οπτική γωνία τις κυματοεπιφάνειες κι άλλων κρυστάλλων τότε μπορεί να πατήσει το κουμπί "get current values". Αυτό "αντιγράφει" τις γωνίες που καθορίζουν την τρέχουσα οπτική γωνία στα editboxes. Αυτές θα υπάρχουν εκεί συνέχεια με αποτέλεσμα οι επόμενες κυματοεπιφάνειες να αποτυπωθούν υπό την ίδια οπτική γωνία (και άρα π.χ. να είναι πιο εύκολη η σύγκρισή τους).

Εκτός αυτού, ο χρήστης μπορεί να πατήσει και το κουμπί "reset" επαναφέροντας έτσι τις δύο γωνίες στις αρχικές τους τιμές (για την επόμενη φορά που θα αποτυπωθεί κάποια κυματοεπιφάνεια).



Σχήμα 7.4: Ορισμός αρχικής οπτικής γωνίας γραφήματος

Όλες οι παραπάνω επιλογές βρίσκονται σε ξεχωριστά panels τα οποία όμως βρίσκονται όλα μαζί σε ένα buttongroup στην αριστερή πλευρά του γραφικού περιβάλλοντος. Η κυματοεπιφάνεια σχεδιάζεται, λαμβάνοντας υπόψιν τα δεδομένα και τις επιλογές που έδωσε ο χρήστης παραπάνω, όταν ο τελευταίος πατήσει το πλήκτρο "Update".



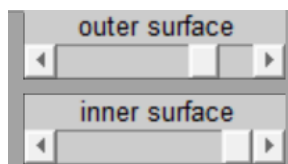
Σχήμα 7.5: Οι επιλογές που αφορούν στην αρχική κατασκευή της κυματοεπιφάνειας "ομαδοποιημένες" σε ένα κοινό buttongroup

7.1.2 Ρυθμίσεις γραφήματος (κατόπιν κατασκευής του)

Στη δεξιά πλευρά του γραφικού περιβάλλοντος υπάρχουν διάφορα κουμπιά που επιτρέπουν στο χρήστη να ρυθμίσει διάφορες προτιμήσεις του σχετικά με το γράφημα τόσο πριν όσο και μετά την κατασκευή της κυματοεπιφάνειας.

Βαθμός διαφάνειας των επιμέρους επιφανειών

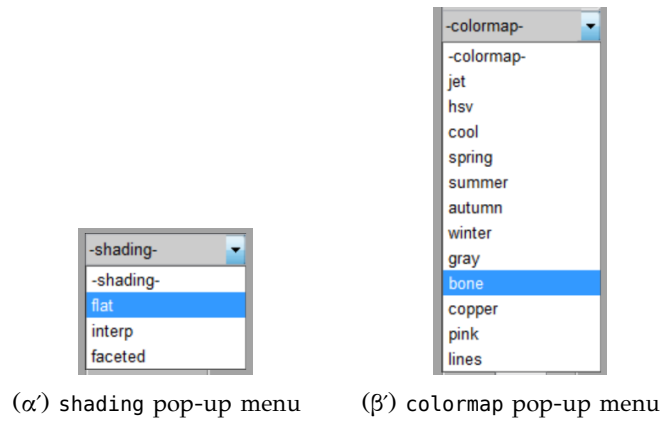
Είναι επίσης χρήσιμο για την καλύτερη κατανόηση της μορφής της κυματοεπιφάνειας να μπορούμε να ρυθμίσουμε το βαθμό διαφάνειας (transparency) της εξωτερικής και της εσωτερικής επιφάνειας της κυματοεπιφάνειας. Αυτό γίνεται με τη χρήση δύο sliders.



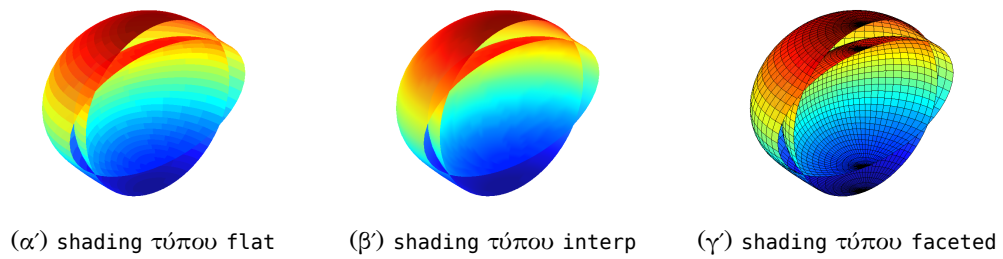
Σχήμα 7.6: Ορισμός αρχικής οπτικής γωνίας γραφήματος

Αλλαγή του shading και της απεικόνισης χρωμάτων

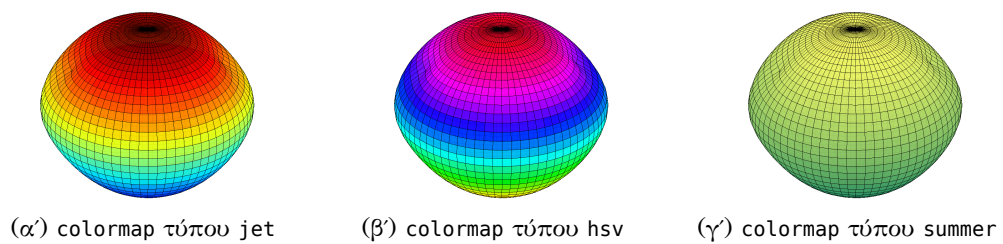
Με δύο pop-up menus ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μεταξύ των τριών διαφορετικών τύπων shading (flat, interp, faceted, βλ. αντίστοιχα σχήματα 7.8α', 7.8β' και 7.8γ') αλλά και των διαφόρων τύπων colormap (π.χ. jet, hsv, summer, βλ. σχήματα 7.9α', 7.9β' και 7.9γ') που παρέχει η MATLAB ανάλογα με το ποιος τον εξυπηρετεί καλύτερα (σχήμα 7.7).



Σχήμα 7.7: Ρύθμιση των shading και colormap



Σχήμα 7.8: Διάφορες επιλογές shading

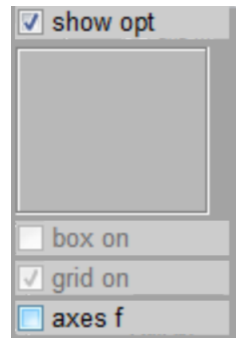


Σχήμα 7.9: Διάφορες ενδεικτικές επιλογές απεικόνισης χρωμάτων

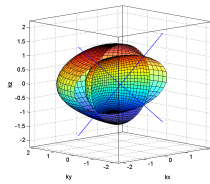
Εμφάνιση/απόκρυψη οπτικών αξόνων αλλά και των axes, box, grid

Το πρόγραμμα υπολογίζει και απεικονίζει και τους οπτικούς άξονες του κρυστάλλου, μιας και αυτό κρίθηκε ιδιαίτερο χρήσιμο. Επειδή όμως ο χρήστης μπορεί αυτό να μην το επιθυμεί, υπάρχει κατάλληλο checkbox με το οποίο επιλέγει αν αυτοί θα εμφανίζονται ή όχι.

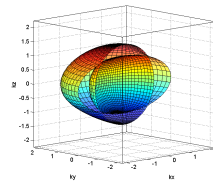
Επίσης, υπάρχουν και κάποια ακόμα checkboxes σχετικά με το αν θα εμφανίζεται το axes (άξονες του συστήματος συντεταγμένων μαζί με το άσπρο background πίσω από το γράφημα), καθώς και το αν θα απεικονίζεται πλέγμα (grid), και κάποιο πλαίσιο (box). Οι δύο τελευταίες επιλογές μάλιστα δεν έχουν νόημα αν δεν εμφανίζεται το axes συνεπώς το πρόγραμμα τις απενεργοποιεί σε περίπτωση που η επιλογή axes είναι unchecked.



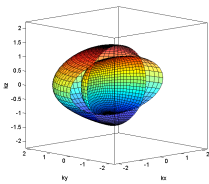
Σχήμα 7.10: Επιλογές εμφάνισης οπτικών αξόνων αλλά και axes, grid, box



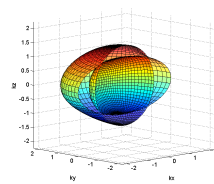
(α') με axes, grid, box και επιδεικνύοντας τους οπτικούς άξονες



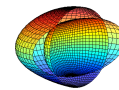
(β') με axes, grid και box



(γ') με axes και box



(δ') με axes και grid



(ε') χωρίς καθόλου axes

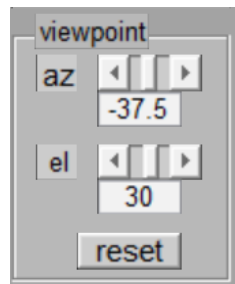
Σχήμα 7.11: Διαφορές επιλογές απεικόνισης (με/χωρίς οπτικούς άξονες, με/χωρίς axes, grid ή box)

Ρύθμιση της οπτικής γωνίας (viewpoint)

Ο χρήστης μπορεί να περιστρέφει την κυματοεπιφάνεια (προκειμένου να τη μελετήσει καλύτερα) είτε με το ποντίκι του (με το που δημιουργείται το γράφημα το ποντίκι τίθεται άμεσα σε

λειτουργία περιστροφής τύπου *box*) είτε χρησιμοποιώντας τα *sliders*, *editboxes* και *buttons* της δεξιάς παλέτας επιλογών. Το πρόγραμμα φροντίζει με κατάλληλες *callback functions* να συγχρονίζει τους διαφορετικούς αυτούς τρόπους περιστροφής (δηλαδή μόλις ο χρήστης τελειώσει την περιστροφή του γραφήματος με το ποντίκι, τα *editboxes* και τα *sliders* ενημερώνονται ανάλογα). Εκτός αυτού, το πρόγραμμα φροντίζει να κάνει κατάλληλο "wrapping", στην περίπτωση που ο χρήστης προσεγγίσει οριακές τιμές γωνιών. Δηλαδή, για παράδειγμα, μόλις ο *cursor* του *slider* φτάσει στο ανώτατο δεξιά σημείο (360°), το πρόγραμμα τον επαναφέρει στο μέση (0°).

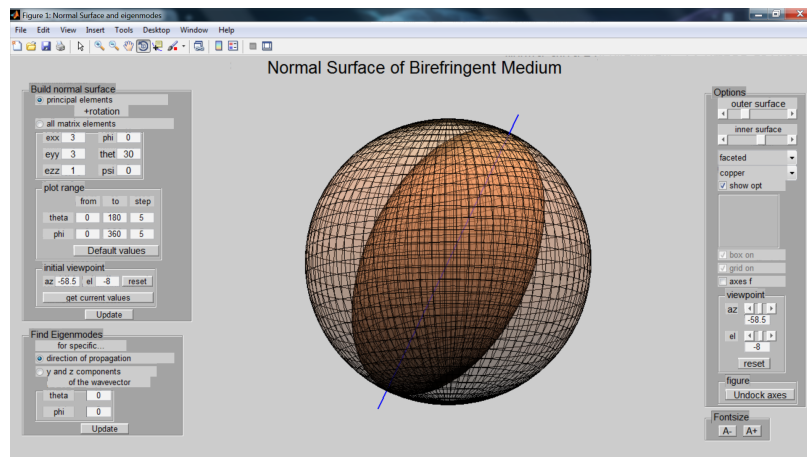
Πατώντας το κουμπί "reset", η οπτική γωνία επαναφέρεται στην *default* τιμή της.



Σχήμα 7.12: Ρύθμιση της οπτικής γωνίας (*viewpoint*) με επιπλέον εργαλεία

Διάσπαση γραφικού περιβάλλοντος για απομονωμένη αποτύπωση του γραφήματος

Το γραφικό περιβάλλον περιλαμβάνει στο κεντρικό του μέρος το γράφημα και γύρω από αυτό (αριστερά και δεξιά) όλα τα εργαλεία εισαγωγής παραμέτρων και ρύθμισής του, τα οποία περιγράφηκαν παραπάνω. (βλ. σχήμα 7.13)

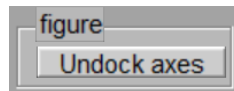


Σχήμα 7.13: Προεπιλεγμένο γραφικό περιβάλλον (GUI) (περιλαμβάνει τόσο το γράφημα όσο και τα εργαλεία σε κοινό παράθυρο)

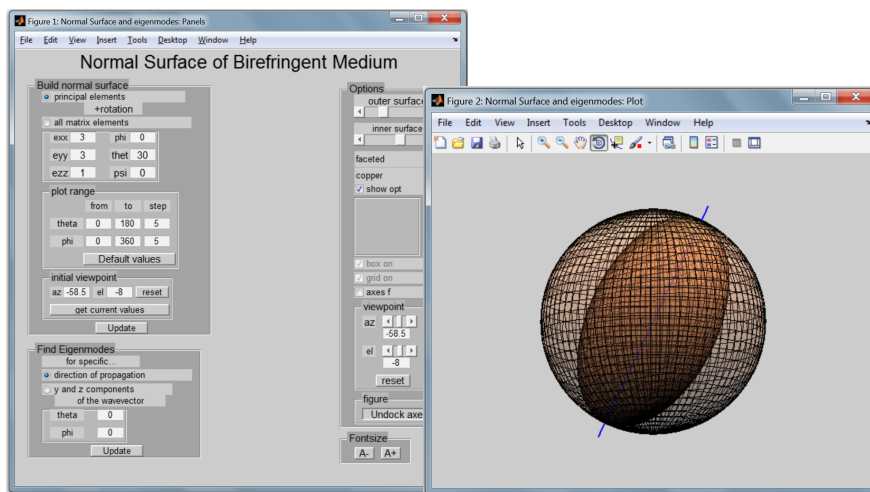
Ο χρήστης, ωστόσο, είναι πιθανό κάποιες φορές να τον εξυπηρετεί να εξαγάγει το γράφημα σε ξεχωριστό παράθυρο (*figure*), π.χ. προκειμένου να το αποτυπώσει ή να το μεγιστοποιήσει. Το πρόγραμμα παρέχει αυτή τη δυνατότητα μέσα από το κουμπί "undock axes". Πατώντας το,

δημιουργείται ένα άλλο παράθυρο και το γράφημα "μεταναστεύει" εκεί. Το παλιό παράθυρο περιέχει πλέον μόνο τα διάφορα panels με τα εργαλεία ρύθμισης, τα οποία εξακολουθούν να επηρεάζουν και να επηρεάζονται από το νέο παράθυρο (βλ. σχήμα 7.15)!

Αν ο χρήστης θελήσει πάλι να "επιστρέψει" στο ενιαίο γραφικό περιβάλλον τότε είτε κλείνει το νέο παράθυρο είτε πατάει πάλι το κουμπί "undock axes" το οποίο, ως toggle button παραμένει μέχρι εκείνη τη στιγμή "πατημένο" (από την πρώτη φορά που το πάτησε).



Σχήμα 7.14: Κουμπί που προκαλεί την εξαγωγή του γραφήματος σε νέο, ξεχωριστό παράθυρο



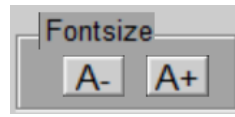
(α') Παράθυρο που περιέχει τα panels με τα εργαλεία ρύθμισης

(β') Παράθυρο που περιέχει το γράφημα

Σχήμα 7.15: Γραφικό περιβάλλον με το γράφημα και τα εργαλεία σε ξεχωριστά (αλλά αλληλοεξαρτώμενα) παράθυρα.

Αυξομείωση μεγέθους γραμματοσειράς

Οι διαστάσεις όλων των GUI components (objects) ρυθμίζονται, μετά την αρχική κατασκευή του GUI, να έχουν σχετικές μονάδες (normalized). Λόγω αυτού, αν ο χρήστης κάνει resize το παράθυρο, γίνονται αυτόματα resize και όλα τα components και όλοι οι χαρακτήρες ώστε αυτά να εξακολουθούν να κατανέμονται ομοιόμορφα μέσα στο γραφικό περιβάλλον. Ωστόσο, μπορεί για διάφορους λόγους ο χρήστης να μην είναι ικανοποιημένος με το μέγεθος των χαρακτήρων (fontsize). Για το λόγο αυτό, στο κάτω δεξιό panel του GUI, υπάρχουν πλήκτρα τα οποία επιτρέπουν την αυξομείωση της γραμματοσειράς όλων των χαρακτήρων.

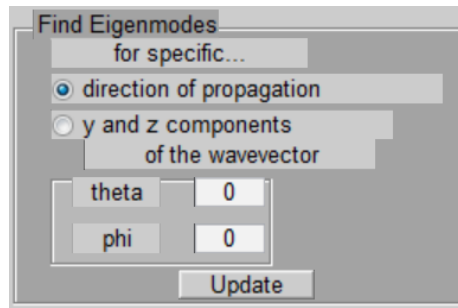


Σχήμα 7.16: Πλήκτρα ρύθμισης μεγέθους των γραμματοσειρών

7.1.3 Εργαλείο Εύρεσης Ιδιορυθμών - Μελλοντική επέκταση

Κρίθηκε αρκετά χρήσιμο το ίδιο το πρόγραμμα να παρέχει και τη δυνατότητα εύρεσης των κυματανυσμάτων και των αντιστοιχών ιδιορυθμών και της απεικόνισής τους πάνω στην κυματοεπιφάνεια. Για το λόγο αυτό το γραφικό περιβάλλον περιέχει στο κάτω αριστερά μέρος του κατάλληλο panel το οποίο παρέχει τις εξής λειτουργίες

- εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης. Ο χρήστης δίνει δύο γωνίες θ και ϕ που ορίζουν τη διεύθυνση του κυματανύσματος \vec{k} .



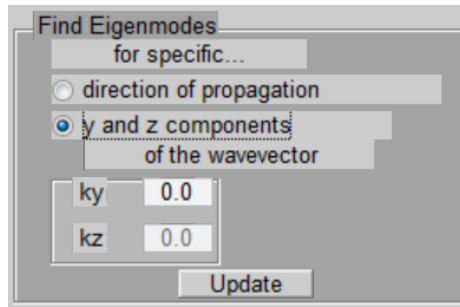
Σχήμα 7.17: Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης

- εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένη εφαπτομενική συνιστώσα κυματανύσματος (για δεδομένη y -συνιστώσα και μηδενική z -συνιστώσα). Ο χρήστης δηλαδή δίνει τη y συνιστώσα (β) του σχετικού κυματανύσματος \vec{k}_r . Η z συνιστώσα (γ) υποτίθεται μηδενική. Αυτό δεν αποτελεί βλάβη της γενικότητας αφού σε περίπτωση που δεν είναι μηδενική ο χρήστης μπορεί να θεωρήσει μία "περιεστραμμένη" κατά τον άξονα των x κυματοεπιφάνεια (αλλάζοντας τον αντίστοιχο διηλεκτρικό τανυστή ϵ). Η λειτουργία αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την εύρεση των ιδιορυθμών στην περίπτωση πρόσπτωσης σε επίπεδη διηλεκτρική ασυνέχεια (όπως στο κεφάλαιο 5).

Η πλοήγηση μεταξύ των δύο επιλογών γίνεται (όπως και στην εισαγωγή του διηλεκτρικού τανυστή) επιλέγοντας το κατάλληλο radiobutton, το οποίο εμφανίζει το κατάλληλο panel αποκρύπτοντας το άλλο.

Πατώντας "Update", και εφόσον έχει ήδη γίνει plot η κυματοεπιφάνεια του κρυστάλλου, το πρόγραμμα σχεδιάζει πάνω σε αυτήν τα κυματανύσματα που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη κατεύθυνση διάδοσης ή τη συγκεκριμένη εφαπτομενική συνιστώσα και μαζί με αυτά σχεδιάζονται και τα ιδιοδιανύσματα βάσης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου \vec{E} και \vec{H} καθώς και της ηλεκτρικής ροής \vec{D} . Σχεδιάζονται τόσο το \vec{E} όσο και το \vec{D} επειδή ακριβώς λόγω της ανισοτροπικής φύσης του κρυστάλλου τα δύο διανύσματα δεν είναι εν γένει παράλληλα.

Η τελευταία αυτή λειτουργία ωστόσο αφήνεται σαν μελλοντική επέκταση καθώς δεν έχει τελείως υλοποιηθεί. Υλοποιήθηκε μόνο το μέρος που αφορά στην κατασκευή των components



Σχήμα 7.18: Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένες y και z συνιστώσες του κυματανύσματος

του GUI από τα οποία ο χρήστης εισάγει τα δεδομένα (σχήματα 7.17 και 7.18). Εκτός αυτού προβλέφθηκε κάποιος χώρος στο panel με τις ρυθμίσεις του γραφήματος, για επιλογές που αφορούν στην αποτύπωση των κυματανυσμάτων και των ιδιοδιανυσμάτων ιδιοπολώσεων (βλ. σχήμα 7.10).

7.2 Θέματα Υλοποίησης

7.2.1 Σχετικά με τις διαστάσεις των διαφόρων components

Το υλοποιηθέν γραφικό περιβάλλον αλληλεπίδρασης με το χρήστη (GUI), αποτελείται από διάφορα συστατικά (components). Αυτά είναι, για παράδειγμα, τα διάφορα πλήκτρα (pushbuttons), οι μπάρες κύλισης sliders, ή τα πεδία εισαγωγής δεδομένων (editboxes) που χρησιμοποιεί ο χρήστης για να εισάγει δεδομένα και να κάνει τις διάφορες ρυθμίσεις, ή ακόμα τα panels που περιλαμβάνουν όλα αυτά τα εργαλεία ομαδοποιημένα (πλαίσια στην αριστερή και τη δεξιά πλευρά του GUI) αλλά και το ίδιο το παράθυρο (figure) που περιλαμβάνει ολοκληρωτο το γραφικό περιβάλλον). Το μοντέλο που χρησιμοποιεί η MATLAB είναι προφανώς αντικειμενοστρεφές. Κάθε component "ανήκει" σε κάποιο άλλο component, ενώ το ίδιο ενδέχεται να είναι "πατέρας" κάποιων άλλων components. Κάθε component δηλαδή είναι ένα αντικείμενο (object) και έχει κάποιο χειριστή (handle) με τον οποίο μπορούμε να προσπελάσουμε και να τροποποιήσουμε τις ιδιότητές του.

Ένα βασικό χαρακτηριστικό λοιπόν του κώδικα που υλοποιεί το εν λόγω πρόγραμμα είναι ότι οι διαστάσεις του κάθε component του γραφικού περιβάλλοντος υπολογίζονται δυναμικά βάσει του μήκους των διαφόρων συμβολοσειρών (strings) που περιέχονται στο ίδιο ή σε άλλα components. Και αυτό γιατί προφανώς οι ιδανικές διαστάσεις ενός component εξαρτώνται από τις διαστάσεις των υπολοίπων, προκειμένου το GUI να είναι λειτουργικό. Για παράδειγμα, το panel στην αριστερή πλευρά του GUI που περιέχει τις παραμέτρους κατασκευής της κυματοεπιφάνειας (βλ. ενότητα 7.1.1) έχει μέγεθος τέτοιο ώστε να χωράει ικανοποιητικά τα components τα οποία περιέχει. Κάθε component, με τη σειρά του, έχει τέτοιο μέγεθος ώστε να χωράει ικανοποιητικά τη συμβολοσειρά που περιέχει. Αντίστοιχα, όλο το παράθυρο (figure) έχει τέτοιο μέγεθος ώστε να χωράει όλα τα panels διατηρώντας κάποιες επιθυμητές αποστάσεις μεταξύ τους. Αν για παράδειγμα αντικαταστήσουμε (επεμβαίνοντας στον κώδικα) τη συμβολοσειρά "get current values" (που βρίσκεται στο αντίστοιχο πλήκτρο που αφορά στην αρχική οπτική γωνία του γραφήματος ("initial viewpoint" panel)) με κάποια μεγαλύτερη, το αντίστοιχο πλήκτρο, το panel που περιέχει το πλήκτρο, αλλά και όλο το GUI θα φτιαχτούν με μεγαλύτερες διαστάσεις προκειμένου το οπτικό αποτέλεσμα να είναι ικανοποιητικό και το πρόγραμμα να παραμένει φιλικό προς το χρήστη. Ως εκ τούτου, το GUI δημιουργείται *programmatically* και όχι χρησιμοποιώντας το σχετικό οδηγό του MATLAB για γρήγορη κατασκευή GUI (GUIDE).

Αυτό έγινε προφανώς για λόγους συντηρησιμότητας και επεκτασιμότητας. Έτσι ώστε δηλαδή αν στην πορεία θελήσουμε να αλλάξουμε κάποια συμβολοσειρά (π.χ. προκειμένου να αποδίδει με πιο κατανοητό τρόπο τις λειτουργίες του προγράμματος), να χρειάζεται να επέμβουμε μόνο στο σημείο του κώδικα που ορίζεται η συγκεκριμένη συμβολοσειρά και όχι σε διάφορα άλλα σημεία του.

Για να επιτευχθεί η δυνατότητα αυτή όμως, και λόγω του μεγάλου πλήθους των components του συγκεκριμένου GUI, ο κώδικας περιλαμβάνει ένα τεράστιο πλήθος από μεταβλητές, που αφορούν στις διαστάσεις και τα handles των διαφόρων συστατικών. Για μεγαλύτερη πάλι συντηρησιμότητα και διευκόλυνση του προγραμματισμού χρησιμοποιήθηκε ένας συστηματικός τρόπος ονομασίας των μεταβλητών αυτών και φτιάχτηκε σχεδιάγραμμα-χάρτης που επιδεικνύει την σημασία τους (βλ. παράρτημα Γ').

7.2.2 Βασική δομή του κώδικα (επεξήγηση με έμφαση στα σημεία που παρουσιάζουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον)

Εξηγούνται επιγραμματικά τα βασικά μέρη του κώδικα με τη σειρά που παρουσιάζονται σε αυτόν:

- Δημιουργείται και προβάλλεται μπάρα φόρτωσης (waitbar) με σκοπό να ενημερώνει το χρήστη για την πρόοδο κατασκευής του γραφικού περιβάλλοντος (λόγω του πλήθους των συστατικών που περιέχει, το GUI μπορεί να πάρει κάποιο χρόνο (της τάξης του μισού δευτερολέπτου) μέχρι να κατασκευαστεί πλήρως) Η μπάρα φόρτωσης αυτή ενημερώνεται προφανώς στη συνέχεια στα διάφορα σημεία του κώδικα μέχρι το γραφικό περιβάλλον να κατασκευαστεί πλήρως (όταν γίνει αυτό τότε καταργείται).
- Δηλώνονται κάποιες global μεταβλητές οι οποίες προσπελάζονται από τις διάφορες callback συναρτήσεις. (Κάθε component έχει κάποια callback συνάρτηση η οποία καλείται όταν ο χρήστης αλληλεπιδρά με αυτό.)
- Ορίζονται οι συμβολοσειρές των διαφόρων components καθώς και διάφορες στοιχειώδεις διαστάσεις (π.χ. επιθυμητές αποστάσεις μεταξύ γειτονικών στοιχείων) και υπολογίζονται οι διαστάσεις των components με σειρά "από κάτω προς τα πάνω", δηλαδή ξεκινώντας από τα μικρά components, περνώντας στα panels που τα περιλαμβάνουν και καταλήγοντας στο figure (αφού όπως εξηγήσαμε παραπάνω ένα panel π.χ. φτιάχνεται τόσο μεγάλο ώστε να χωράει ικανοποιητικά τα "παιδιά" του).
- Κατασκευάζονται (με χρήση των built-in συναρτήσεων figure(), uicontrol(), uipanel()) ένα-ένα τα components με σειρά "από πάνω προς τα κάτω" (Πρώτα π.χ. πρέπει να κατασκευαστεί ένα panel και μετά τα buttons/editboxes που αυτό περιέχει) Πρώτα απ όλα φτιάχνεται το figure το οποίο όμως γίνεται invisible μέχρι να φτιαχτούν όλα τα στοιχεία που το αποτελούν. Μαζί με αυτό φτιάχνεται (και επίσης γίνεται invisible) και ένα δεύτερο παράθυρο το οποίο θα "φιλοξενήσει" το γράφημα αν και όταν ο χρήστης πατήσει το πλήκτρο "undock axes".
- Ορίζεται η callback συνάρτηση για την περιστροφή των γραφημάτων (αυτή δηλαδή που θα καλείται αν ο χρήστης περιστρέψει με το ποντίκι του το γράφημα). Αυτό γίνεται προκειμένου να επιτυγχάνεται ο συγχρονισμός των εργαλείων που σχετίζονται με την οπτική γωνία του γραφήματος, όπως εξηγήσαμε στην ενότητα 7.1.2
- Όλες οι μονάδες των διαστάσεων/αποστάσεων/γραμματοσειρών μετατρέπονται σε normalized. Αυτό γίνεται, όπως είπαμε στην ενότητα 7.1.2, ώστε να μπορεί ο χρήστης να αυξομειώνει το μέγεθος του figure χωρίς να επηρεάζεται η λειτουργικότητα του GUI.
- Γίνεται κατάλληλο calibration του παραθύρου σε περίπτωση που η ανάλυση της οθόνης του χρήστη δεν είναι αρκετά μεγάλη. Πιο συγκεκριμένα, αν το γραφικό περιβάλλον δε χωράει κατά πλάτος στην οθόνη τότε μειώνονται οι διαστάσεις του axes component (μεσαίος χώρος όπου αποτυπώνεται το γράφημα). Αν όμως η διαφορά ανάλυσης είναι μεγάλη τότε εκτός αυτού γίνεται και κατάλληλο οριζόντιο scaling όλου του figure. Αν το GUI δε χωράει καθ' ύψος, τότε γίνεται αντίστοιχα, κατάλληλο κατακόρυφο scaling.

7.2.3 Κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τις callback συναρτήσεις

- Η "μετάβαση" μεταξύ των δύο τρόπων εισαγωγής του διηλεκτρικού τανυστή (βλ. ενότητα 7.1.1) γίνεται κάνοντας visible: on το αντίστοιχο panel και visible: off το άλλο, καθώς

τα δύο panels βρίσκονται ουσιαστικά στην ίδια θέση και άρα δε γίνεται να εμφανιστούν ταυτόχρονα.

- Όταν πατηθεί το πλήκτρο "Update" του πάνω αριστερά panel τότε το πρόγραμμα μετατρέπει τον διηλεκτρικό ταυυστή από τη μία μορφή στην άλλη ([πλήρης πίνακας] ή [διαγώνια στοιχεία κύριου διηλεκτρικού ταυυστή + γωνίες Euler περιστροφής των κυρίων αξόνων κρυστάλλου]) με χρήση των συναρτήσεων `er2erθ_euler()` και `erθ_euler2er()` (εξηγούνται στην ενότητα 7.2.5). Στη συνέχεια, "διαβάζει" και τις ρυθμίσεις του δεξιού panel καλεί τη συνάρτηση `buildsurf()` η οποία τυπώνει την κυματοεπιφάνεια και τους οπτικούς άξονες βάσει του διηλεκτρικού ταυυστή και για ένα δεδομένο εύρος γωνιών θ και ϕ (εξηγείται στην ενότητα 7.2.4)
- Όπως είπαμε στην ενότητα 7.1.2, ο χρήστης, εάν έχει προηγουμένως επιλέξει εξαγωγή του γραφήματος σε άλλο παράθυρο (πατώντας το πλήκτρο "undock axes"), μπορεί να "επιστρέψει" στην αρχική προβολή "ενιαίου παραθύρου" είτε κλείνοντας απλά το άλλο παράθυρο ή πατώντας πάλι το πλήκτρο "undock axes". Προκειμένου να υλοποιηθεί ο πρώτος τρόπος αξιοποιήθηκε η ιδιότητα 'DeleteFcn' των δεύτερου figure. Μέσω αυτής ορίσαμε τη συνάρτηση που θα καλείται όταν ο χρήστης κλείσει το figure αυτό.

7.2.4 Συνάρτηση-πυρήνας `buildsurf()`

Η συνάρτηση αυτή χωρίζει το δεδομένο εύρος γωνιών σε πολλά σημεία. Για κάθε (θ, ϕ) , που αποτελεί μία διεύθυνση διάδοσης, λύνει την δευτεροβάθμια εξίσωση 4.43 προκειμένου να βρει τους δύο δείκτες διάθλασης. Πιο συγκεκριμένα οι συντελεστές έχουν ως εξής:

$$A = -s_x^2 \epsilon_{yy} - s_y^2 \epsilon_{zz} + \epsilon_{zx} s_x s_z - s_x^2 \epsilon_{zz} - \epsilon_{yy} s_z^2 + \epsilon_{zz} - \epsilon_{xx} s_z^2 + \epsilon_{yz} s_y s_z + s_x s_y \epsilon_{xy} + s_x s_z \epsilon_{xz} + \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{yx} s_x s_y - \epsilon_{xx} s_y^2 + s_y s_z \epsilon_{zy} \quad (7.1)$$

$$B = -\epsilon_{yx} s_x s_y \epsilon_{zz} - s_x s_z \epsilon_{xz} \epsilon_{yy} + s_x^2 \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} - \epsilon_{zx} s_x s_z \epsilon_{yy} + \epsilon_{zx} \epsilon_{xy} s_y s_z - \epsilon_{xx} \epsilon_{zz} + \epsilon_{yx} \epsilon_{xy} + \epsilon_{zx} \epsilon_{xz} - \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} - \epsilon_{zx} \epsilon_{xz} s_y^2 + \epsilon_{yz} \epsilon_{zy} - s_x^2 \epsilon_{yz} \epsilon_{zy} - \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} - s_x s_y \epsilon_{xy} \epsilon_{zz} + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} s_z^2 + \epsilon_{xx} s_y^2 \epsilon_{zz} - \epsilon_{xx} s_y s_z \epsilon_{zy} + \epsilon_{yx} s_x s_z \epsilon_{zy} + s_x s_y \epsilon_{xz} \epsilon_{zy} - \epsilon_{xx} \epsilon_{yz} s_y s_z + \epsilon_{zx} s_x s_y \epsilon_{yz} + s_x s_z \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} - \epsilon_{yx} \epsilon_{xy} s_z^2 + \epsilon_{yx} \epsilon_{xz} s_y s_z \quad (7.2)$$

και

$$C = \epsilon_{zx} \epsilon_{xy} \epsilon_{yz} + \epsilon_{yx} \epsilon_{xz} \epsilon_{zy} - \epsilon_{xx} \epsilon_{yz} \epsilon_{zy} + \epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} - \epsilon_{zx} \epsilon_{xz} \epsilon_{yy} - \epsilon_{yx} \epsilon_{xy} \epsilon_{zz} \quad (7.3)$$

όπου

$$\begin{aligned} s_x &= \sin \theta \cos \phi \\ s_y &= \sin \theta \sin \phi \\ s_z &= \cos \theta \end{aligned} \quad (7.4)$$

Αν κάποιος δείκτης διάθλασης προκύψει φανταστικός τότε εμφανίζει κατάλληλο μήνυμα.

Έπειτα πλοτάρει όλα τα s_x, s_y, s_z πολλαπλασιασμένα με τους αντίστοιχους δύο δείκτες διάθλασης προκειμένου να αποτυπώσει την κυματοεπιφάνεια.

7.2.5 Εύρεση γωνιών περιστροφής Euler

Με δεδομένο τον κύριο διηλεκτρικό ταυυστή $\bar{\epsilon}_0$ και τις γωνίες Euler ϕ, θ, ψ είναι πολύ απλός ο υπολογισμός του "ουσιαστικού" διηλεκτρικού ταυυστή $\bar{\epsilon}$ χρησιμοποιώντας τις σχέσεις 4.23 και 4.16.

Το αντίστροφο όμως δεν είναι τόσο απλό. Απαιτεί, πρώτον, να διαγωνοποιήσουμε τον πίνακα $\bar{\varepsilon}$ και, δεύτερον, να εξαγάγουμε από τον πίνακα στροφής (που διαγωνιοποιεί τον $\bar{\varepsilon}$) τις γωνίες Euler. Για το πρώτο βήμα χρησιμοποιούνται οι built-in συναρτήσεις `eig()` και `orth()` ενώ για το δεύτερο έγινε εφαρμογή σχετικού αλγορίθμου που παρουσιάζεται στο [38] (προσαρμόστηκε στη δική μας περίπτωση ($z - x' - z''$)).

Για τον κώδικα του προγράμματος βλ. παράρτημα Β'.

Κεφάλαιο 8

Συμπεράσματα

Όπως φάνηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, στα πλαίσια της διπλωματικής εργασίας ερευνήθηκε καταρχήν τη διάδοση των επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα σε ιστροπικά μέσα, δίνοντας έμφαση στην περίπτωση επίπεδης διηλεκτρικής ασυνέχειας (ανάκλαση/διάθλαση σε επίπεδη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ δύο ιστροπικών διηλεκτρικών) περνώντας στη συνέχεια στα απλά ανιστροπικά διηλεκτρικά μέσα, διερευνώντας τα χαρακτηριστικά τους, τη διάδοση κυμάτων μέσα σε αυτά και τους ρυθμούς κυμάτων που επάγονται στην περίπτωση επίπεδης ασυνέχειας. Η όλη θεωρία και ηλεκτρομαγνητική ανάλυση που γράφτηκε παρουσιάζει αρκετή ομοιομορφία, αυτονομία και συνοχή περιορίζοντας ταυτόχρονα τη θεωρία που θεωρείται ως δεδομένη.

Με βάση τη θεωρία αυτή μελετήθηκε το πρόβλημα της ανάκλασης/διάθλασης από συνεχόμενα επίπεδα διπλοθλαστικά στρώματα, επιτρέποντας στους οπτικούς άξονες του κάθε στρώματος να έχουν οποιοδήποτε προσανατολισμό. Η ανάλυση που έγινε βασίζεται στη μέθοδο του D. Berreman [29] για την εύρεση των τεσσάρων ιδιορυθμών που δημιουργούνται μέσα στο κάθε στρώμα, ανάγοντας το πρόβλημα σε πρόβλημα εύρεσης ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων το οποίο λύνεται αριθμητικά. Παρατηρήθηκε ότι η μέθοδος αυτή παρουσιάζει υψηλή ευστάθεια και μεγάλη απόδοση, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους (π.χ. [26]) που εφαρμόστηκαν και αυτές πρωτίτερα, οι οποίες παρατηρήθηκε ότι "υποφέρουν" σημαντικά από σφάλματα στρογγύλευσης και ασταθή συμπεριφορά σε ιδιαίζουσες περιπτώσεις (π.χ. διάδοση σχεδόν κατά μήκος του οπτικού άξονα).

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω ανάλυση αναπτύχθηκε ρουτίνα στο MATLAB η οποία προσομοιώνει την πρόσπτωση επιπέδου H/M κύματος σε μία τέτοια διάταξη ανιστροπικών πλακών, παίρνοντας σαν κύρια ορίσματα τη συχνότητα και τη γωνία πρόσπτωσης του κύματος καθώς και τα πάχη και διηλεκτρικά χαρακτηριστικά των ανιστροπικών πλακών και των δύο γειτονικών (υποτιθέμενων ως ιστροπικών) μέσων. Το πρόγραμμα τυπώνει χαρακτηριστικές συντελεστών ανάκλασης/διάθλασης και ανακλαστικότητας/διαθλαστικότητας συναρτήσει της γωνίας πρόσπτωσης ή του μήκους κύματος και υπολογίζει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και τη ροή ενέργειας κατά μήκος της διάταξης για συγκεκριμένο προσπίπτον κύμα. Επίσης απεικονίζει τα κυματανύσματα και τους αντίστοιχους ιδιορυθμούς που επάγονται μέσα σε κάθε στρώμα. Είναι αρκετά φιλικό προς το χρήστη, αποδοτικό και δομημένο και παρέχει τη δυνατότητα εύκολης τροποποίησης/επέκτασης. Η ορθότητα του προγράμματος επαληθεύτηκε με την εφαρμογή του σε συγκεκριμένα παραδείγματα χαρακτηριστικών διατάξεων.

Εκτός της παραπάνω ρουτίνας υλοποιήθηκε πρόγραμμα με γραφικό περιβάλλον αλληλεπίδρασης που υπολογίζει και απεικονίζει την κυματοεπιφάνεια ενός ανιστροπικού μέσου βάσει του τανυστή ηλεκτρικής επιτρεπτότητάς του. Το πρόγραμμα αυτό παρέχει πολλές δυνατότητες

και ευκολίες στο χρήστη ώστε να αποτυπώσει και να εξετάσει την επιφάνεια με τον τρόπο που εκείνος επιθυμεί.

Παράρτημα Α'

Κώδικας προγράμματος Α - Ανάλυση πρόσπτωσης σε στοίβα Ανισοτροπικών Στρωμάτων

Α.1 Βασική συνάρτηση

Α.1.1 Αρχείο `analyze_anis_stack.m`

```
function varargout=analyze_anis_stack(n_in,n_out,er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,...
    psi_deg,d_microns,lamda_microns,thetak_deg,lamda_microns_array,thetak_deg_array,xmin...
    ,xmax,dx,titlepatch,figurenumber,figurenamepatch,functionopt,saveplopt,mysavepath)
% ANALYZE_ANIS_STACK general analysis of an anisotropic-layered stack
% analyze_anis_stack(n_in,n_out,er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg,d_microns,...
    lamda_microns,thetak_deg,lamda_microns_array,thetak_deg_array,xmin,xmax,dx,...
    titlepatch,figurenumber,figurenamepatch,functionopt,saveplopt,mysavepath)
%
% ... analyzes an anisotropic-layered stack by plotting r/t characteristics, ...
    computing the E/M field phasor along the configuration axis, showing the wavevectors...
    and E/M eigenvectors, e.t.c.
% INPUT:
% //Characteristics of the layer configuration://
% - n_in = relative dielectric constant of input (isotropic) medium
% - n_out = relative dielectric constant of output (isotropic) medium
% - d_microns = thickness of layers in microns (N row)
% ||diagonal elements of relative dielectric tensors in the principal axes systems ...
of the crystals:
% - er0x = upper left element of each dielectric tensor (N row)
% - er0y = center element of each dielectric tensor (N row)
% - er0z = lower right element of each dielectric tensor (N row)
% ||orientation of each layer's principal axes system relative to the base xyz ...
system:
% - theta_deg = theta angle, in degrees (N row)
% - phi_deg = phi angle, in degrees (N row)
% - psi_deg = psi angle, in degrees (N row)
% //Characteristics of input (incident) wave://
% - lamda_microns = basic wavelength of input wave in vacuum, in microns
% - thetak_deg = basic angle of incidence, in degrees
% - lamda_microns_array = array with different wavelengths, in microns (for rt_lamda...
)
% - thetak_deg_array = array with different angles of incidence, in degrees (for ...
rt_theta)
% //Plot/Figure parameters://
```

```

% - xmin, xmax= x-axis limits (in microns) for the E/M field and average Power plots
% - dx = step (in microns) for the x-axis scan
% - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
% - figurenumber = handle of the first figure to be created
% - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
created
% - functionopt = array of 5 bits indicating which functions to be executed
% - saveplopt = scalar indicating whether the created figures should be saved or ...
not
% - mysavepath = path where the figures should be saved (if saveplopt≠0) (end with...
'\')
% OUTPUT:
% - creation of twenty-four figures
% - [optional:] nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
% REQUIREMENTS:
% - 'rt_theta' function
% - 'rt_lamda' function
% - 'EH_along_x' function
% - 'Savg_along_x' function
% - 'ksnpols' function
% - 'savenamfilter' function

% store initial figurenumber
firstfigurenumber=figurenumber;

% create the struct describing the anisotropic-layered stack in order to pass it as an ...
argument to functions more easily
anis_stack=struct('n_in',n_in,...
                 'n_out',n_out,...
                 'er0x',er0x,...
                 'er0y',er0y,...
                 'er0z',er0z,...
                 'theta_deg',theta_deg,...
                 'phi_deg',phi_deg,...
                 'psi_deg',psi_deg,...
                 'd_microns',d_microns...
                 );

if functionopt(1)
    figurenumber = rt_theta(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg_array,titlepatch,...
        figurenumber,figurenamepatch);
end
if functionopt(2)
    figurenumber = rt_lamda(anis_stack,lamda_microns_array,thetak_deg,titlepatch,...
        figurenumber,figurenamepatch);
end
x_microns=xmin:dx:xmax;

if functionopt(3)
    figurenumber = EH_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,x_microns,titlepatch,...
        figurenumber,figurenamepatch);
end
if functionopt(4)
    figurenumber = Savg_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,x_microns,titlepatch...
        ,figurenumber,figurenamepatch);
end

if functionopt(5)
    [figurenumber,k_real_h,k_imag_h,p_E_real_h,p_E_imag_h,p_H_real_h,p_H_imag_h,blineh,...
        xaxish,interfacesh] = ksnpols(anis_stack,thetak_deg,titlepatch,figurenumber,...
        figurenamepatch);
end
% Afterwards we can use the handles to edit the plot (e.g hide some of the lines)
% set(k_real_h,'Visible','Off');
% set(k_imag_h,'Visible','Off');
% set(p_E_real_h,'Visible','Off');

```

```
% set(p_E_imag_h, 'Visible', 'Off');
% set(p_H_real_h, 'Visible', 'Off');
% set(p_H_imag_h, 'Visible', 'Off');
% set(blineh, 'Visible', 'Off');
% set(xaxish, 'Visible', 'Off');
% set(interfacesh, 'Visible', 'Off');

if saveplotopt
    numoffigures=figurenumber - firstfigurenumber;
    for figidx=1:numoffigures
        saveas(firstfigurenumber+figidx -1,[mysavepath savenamemfilter(get(...
            firstfigurenumber+figidx -1, 'Name'))], 'png');
    end
end
if nargout==1
    varargout{1}=figurenumber;
end
end
```

A.1.2 Αρχείο `anis_stack_script.m`

```

%% ANIS_STACK_SCRIPT
% Sample script that demonstrates the proper call
% of 'analyze_anis_stack' function

%% ATTENTION!!
% The following three commands will clear the command window and
% the variables and will close all existing figures
clc;
clear;
close all;

%% Specify the anisotropic-layered stack configuration
% refraction index of input medium
n_in=1;
% refraction index of output medium
n_out=2;
% diagonal elements of the principal dielectric tensors of each layer (in its principal ...
% axes system)
er0x=[3 4];
er0y=[4 5];
er0z=[3 4];
% euler angles specifying the orientation of each crystal's principal axes system
phi_deg=[32 45]; % rotation about the z axis (first step)
theta_deg=[30 60]; % rotation about the (new) x axis (second step)
psi_deg=[0 0]; % rotation about the (new) z axis (third step)
% thickness of layers
d_microns=[1.2 1];

%% Specify input (incident) wave(s)
% main wavelength
lamda_microns=0.633;
% wavelength sweep range (for rt_lamda function)
lamda_microns_array=0.633*[0.95:0.001:1.05];
% main angle of incidence
thetak_deg=30;
% angle of incidence sweep range (for rt_theta function)
thetak_deg_array=0:1:89;

%% Specify x-axis range
% starting point of the x axis to be displayed (for the EH_along_x and Savg_along_x ...
% functions)
xmin=-max(d_microns);
% ending point of the x axis to be displayed (for the EH_along_x and Savg_along_x ...
% functions)
xmax=sum(d_microns)+max(d_microns);
% step of computation along x axis (for the EH_along_x and Savg_along_x functions)
dx=min(d_microns)/50;

%% Some other things
% string to be added in the beginning of every figure title
titlepatch='Mytest: ';
% string to be added in the beginning of every figure window
figurenamepatch='Mytest: ';
% first figure handle (number of the first figure that will be created)
figurenumber=100;

% specify which functions should be executed
functionopt=[1 1 1 1 1];

% specify whether the created figures should be saved or not
saveplotopt=0;
% folder in which to save the figures (if saveplot≠0)

```

```
% (ATTENTION! The folder should already exist!)
mysavepath='./mysubfolder_of_plots\'

% Call 'analyze_anis_stack' function
nextfigurenumber=analyze_anis_stack(n_in,n_out,er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg,...
    d_microns,lamda_microns,thetak_deg,lamda_microns_array,thetak_deg_array,xmin,xmax,dx...
    ,titlepatch,figurenumber,figurenamepatch,functionopt,saveplopt,mysavepath);
```

Α.2 Βοηθητικές Συναρτήσεις

Α.2.1 Αρχείο `rt_theta.m`

```

function varargout=rt_theta(anis_stack, lamda_microns, thetak_deg_array, titlepatch, ...
    figurenumber, figurenamepatch)
% RT_THETA angle of incidence analysis of an anisotropic-layered stack
%   rt_theta(anis_stack, lamda_microns, thetak_deg_array, titlepatch, figurenumber, ...
%   figurenamepatch)
%
%   ... plots reflection and transmission coefficients as well as reflectance and ...
%   transmittance of an anisotropic-layered stack for the four cases of in/out ...
%   polarization components for different angles of incidence for the input wave.
% INPUT:
%   - anis_stack = structure describing the layer configuration (see the help text of ...
%   'compute_anis_stack' for more info)
%   - lamda_microns = wavelength of input wave in vacuum, in microns
%   - thetak_deg_array = array with different angles of incidence, in degrees
%   - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
%   - figurenumber = handle of the first figure to be created
%   - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
%   created
% OUTPUT:
%   - creation of twelve figures
%   - [optional:] nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
% REQUIREMENTS:
%   - 'compute_anis_stack' function
%   - 'plot_rt_sp' function

theta_deg_array_length=size(thetak_deg_array,2);
r_array=zeros(2,2,theta_deg_array_length);
t_array=zeros(2,2,theta_deg_array_length);
Pr_array=zeros(2,2,theta_deg_array_length);
Pt_array=zeros(2,2,theta_deg_array_length);

for idx=1:theta_deg_array_length
    [r,t,Pr,Pt,r,r,r,r]=compute_anis_stack(anis_stack, lamda_microns, ...
        thetak_deg_array(idx));
    r_array(:,:,idx)=r;
    t_array(:,:,idx)=t;
    Pr_array(:,:,idx)=Pr;
    Pt_array(:,:,idx)=Pt;
end

nextfigurenumber=plot_rt_sp(r_array, t_array, Pr_array, Pt_array, thetak_deg_array, '...
    Angle of Incidence, \theta_{inc} (deg)', [titlepatch ' R-T Theta Analysis:'], ...
    figurenumber, [figurenamepatch ' R-T Theta Analysis']);
if nargout==1
    varargout{1}=nextfigurenumber;
end
end

```

Α.2.2 Αρχείο `rt_lamda.m`

```

function varargout=rt_lamda(anis_stack, lamda_microns_array, thetak_deg, titlepatch, ...
    figurenumber, figurenamepatch)
% RT_LAMDA wavelength analysis of an anisotropic-layered stack
%   rt_lamda(anis_stack, lamda_microns_array, thetak_deg, titlepatch, figurenumber, ...
%   figurenamepatch)
%
%   ... plots reflection and transmission coefficients as well as reflectance and ...
%   transmittance of an anisotropic-layered stack for the four cases of in/out ...

```



```

    polarization components for different wavelengths of the input wave.
% INPUT:
%   - anis_stack = structure describing the layer configuration (see the help text of ...
%   'compute_anis_stack' for more info)
%   - lamda_microns_array = array with different wavelengths of input wave in vacuum, ...
%   in microns
%   - thetak_deg = angle of incidence, in degrees
%   - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
%   - figurenumber = handle of the first figure to be created
%   - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
%   created
% OUTPUT:
%   - creation of twelve figures
%   - [optional:] nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
% REQUIREMENTS:
%   - 'compute_anis_stack' function
%   - 'plot_rt_sp' function

lamda_microns_array_length=size(lamda_microns_array,2);
r_array=zeros(2,2,lamda_microns_array_length);
t_array=zeros(2,2,lamda_microns_array_length);
Pr_array=zeros(2,2,lamda_microns_array_length);
Pt_array=zeros(2,2,lamda_microns_array_length);
for idx=1:lamda_microns_array_length
    [r,t,Pr,Pt,~,~,~]=compute_anis_stack(anis_stack,lamda_microns_array(idx),...
        thetak_deg);
    r_array(:,:,idx)=r;
    t_array(:,:,idx)=t;
    Pr_array(:,:,idx)=Pr;
    Pt_array(:,:,idx)=Pt;
end

nextfigurenumber=plot_rt_sp(r_array,t_array,Pr_array,Pt_array,lamda_microns_array,'...
    Wavelength, \lambda (\text{nm})',[titlepatch 'R-T Lamda Analysis:'],figurenumber,[...
    figurenamepatch 'R-T Lamda Analysis']);
if nargin==1
    varargout{1}=nextfigurenumber;
end
end

```

A.2.3 Αργείο EH_along_x.m

```

function nextfigurenumber=EH_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,x_microns,...
    titlepatch,figurenumber,figurenamepatch)
% EH_ALONG_X plot E/M field phasors along the axis of an anisotropic-layered stack
%   EH_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,x_microns,titlepatch,figurenumber,...
%   figurenamepatch)
%
%   ... plots the two addends of the total Electric field intensity (time-)phasor (E0)...
%   and the respective two addends of the Magnetic field intensity (time-)phasor (H_0) ...
%   in an anisotropic-layered stack, computed along its axis (x-axis). The first 'p'- ...
%   addend is to multiplied with the p coefficient of field of the incident wave, ...
%   whereas the second addend is to be multiplied with the s coefficient.
% INPUT:
%   - anis_stack = structure describing the layer configuration (see the help text of ...
%   'compute_anis_stack' for more info)
%   - lamda_microns = wavelength of input wave in vacuum, in microns
%   - thetak_deg = angle of incidence, in degrees
%   - x_microns = x-axis limits (in microns) for the plot
%   - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
%   - figurenumber = handle of the first figure to be created
%   - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
%   created
% OUTPUT:

```

```

% - creation of four figures
% - nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
% REQUIREMENTS:
% - 'compute_EH_along_x' function
% - 'plot_cvector_along_x' function

[xE0,xH0,xseps_microns]=compute_EH_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,...
    x_microns);
xE0total=squeeze(sum(xE0,3));
xH0total=squeeze(sum(xH0,3));
heiE=1.5*max(max(max(max(abs(xE0total)))));
heiH=1.5*max(max(max(max(abs(xH0total)))));
EHp_or_s= {'p' 's'};
for psidx=1:2
    figurenumber=plot_cvector_along_x(xE0total(:,:,psidx),x_microns,xseps_microns,...
        heiE,figurenumber,[figurenamepatch 'E_0 (total)' ' based on ' EHp_or_s{...
        psidx} ' incidence'],[titlepatch 'E_0 (total) phasor - due to the ' ...
        EHp_or_s{psidx} ' component of incident wave, along x axis'],['E_{0\_tot}' '...
        \_ ' EHp_or_s{psidx} ' ''],'\mmm','V/m');
end
for psidx=1:2
    figurenumber=plot_cvector_along_x(xH0total(:,:,psidx),x_microns,xseps_microns,...
        heiH,figurenumber,[figurenamepatch 'H_0 (total)' ' based on ' EHp_or_s{...
        psidx} ' incidence'],[titlepatch 'H_0 (total) phasor - due to the ' ...
        EHp_or_s{psidx} ' component of incident wave, along x axis'],['H_{0\_tot}' '...
        \_ ' EHp_or_s{psidx} ' ''],'\mmm','A/m');
end
nextfigurenumber=figurenumber;
end

```

A.2.4 Αρχείο Savg_along_x.m

```

function nextfigurenumber=Savg_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,x_microns,...
    titlepatch,figurenumber,figurenamepatch)
% SAVG_ALONG_X plot power along the axis of an anisotropic-layered stack
% Savg_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,x_microns,titlepatch,figurenumber...
% ,figurenamepatch)
%
% ... plots the three addends of the time-averaged Poynting vector in an anisotropic...
% -layered stack, on its axis (x-axis). The first 'pp'- addend is to multiplied with ...
% the square of the p coefficient of field of the incident wave, whereas the second ...
% addend is to be multiplied with the square of the s coefficient. The third addend is...
% to be multiplied with the both of the s and p coefficients (i.e. the product of ...
% them).
% INPUT:
% - anis_stack = structure describing the layer configuration (see the help text of ...
% 'compute_anis_stack' for more info)
% - lamda_microns = wavelength of input wave in vacuum, in microns
% - thetak_deg = angle of incidence, in degrees
% - x_microns = x-axis limits (in microns) for the plot
% - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
% - figurenumber = handle of the first figure to be created
% - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
% created
% OUTPUT:
% - creation of three figures
% - nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
% REQUIREMENTS:
% - 'compute_EH_along_x' function
% - 'plot_vector_along_x' function

[xE0,xH0,xseps_microns]=compute_EH_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,...
    x_microns);
xE0total=squeeze(sum(xE0,3));

```

```

xH0total=squeeze(sum(xH0,3));
xSavg=zeros(3,size(x_microns,2),3); %preallocation
xSavg(:,:,1)=cross(xE0total(:,:,1),conj(xH0total(:,:,1)));
xSavg(:,:,2)=cross(xE0total(:,:,2),conj(xH0total(:,:,2)));
xSavg(:,:,3)=cross(xE0total(:,:,1),conj(xH0total(:,:,2)));
xSavg(:,:,4)=cross(xE0total(:,:,2),conj(xH0total(:,:,1)));
heiS=1.5*max(max(max(max(abs(xSavg)))));
Sp_or_s= {'E_p x H_p^*' 'E_s x H_s^*' 'E_p x H_s^*' 'E_s x H_p^*'};
for psidx=1:4
    figurenumber=plot_cvector_along_x(xSavg(:,:,psidx),x_microns,xseps_microns,heiS,...
        figurenumber,[figurenamepatch '<S>' ' Sp_or_s{psidx}' ' addend'],[...
        titlepatch ' Complex <S> (time-averaged Poynting vector) - ' Sp_or_s{psidx} ...
        ' addend, along x axis'],['Cmplx S_{avg}''],'\mmm','Watt/m^2');
end
nextfigurenumber=figurenumber;
end

```

A.2.5 Αρχείο ksnpols.m

```

function [nextfigurenumber,k_real_h,k_imag_h,p_E_real_h,p_E_imag_h,p_H_real_h,p_H_imag_h...
    ,blinex ,xaxish ,interfash]=ksnpols(anis_stack ,thetak_deg ,titlepatch ,figurenumber ,...
    figurenamepatch)
% KSNPOLS visualize wavevectors and respective eigenpolarizations in an anisotropic-...
    layered stack.
%     ksnpols(anis_stack ,thetak_deg ,titlepatch ,figurenumber ,figurenamepatch)
%
%     ... creates a 3D plot showing the wavevectors (phase velocity vectors) and the ...
    respective eigenpolarizations of the EM field of the four partial waves in each of ...
    the layers of an anisotropic-layered stack.
%     The wavevectors are plotted in blue, the Electric field eigenvectors are plotted ...
    in red and the Magnetic field eigenvectors are plotted in green. Because all vectors...
    are ,generally, complex, the real and imaginary parts are plotted separately, with ...
    solid and dashed lines respectively.
%     The E/M eigenvectors are scaled in order to allow clearer visualization.
% INPUT:
%     - anis_stack = structure describing the layer configuration (see the help text of ...
    'compute_anis_stack' for more info)
%     - thetak_deg = angle of incidence, in degrees
%     - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
%     - figurenumber = handle of the first figure to be created
%     - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
    created
% OUTPUT:
%     - creation of one figure
%     - nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
%     - k_real_h = handle of the real parts of the wavevectors
%     - k_imag_h = handle of the imaginary parts of the wavevectors
%     - p_E_real_h = handle of the plot of the real parts of the Electric field ...
    eigenvectors
%     - p_E_imag_h = handle of the plot of the imaginary parts of the Electric field ...
    eigenvectors
%     - p_H_real_h = handle of the plot of the real parts of the Magnetic field ...
    eigenvectors
%     - p_H_imag_h = handle of the plot of the imaginary parts of the Magnetic field ...
    eigenvectors
%     - blinex = handle of the plot of the line indicating the common y-component of the...
    wavevectors
%     - interfash = handle of the plot of the interfaces of layers (planes 'separating...
    ' the layers if different materials)
% REQUIREMENTS:
%     - 'compute_anis_stack' function

[b,~,~,~,~,p_E,p_H,~,a]=compute_anis_stack(anis_stack,0.633,thetak_deg);
d=anis_stack.d_microns;

```

```

N=size(d,2);
d_in=max(d)*1.5;
d_out=d_in;
xdd=cumsum(d);
xseps=[0 xdd];
xsup=[0 xdd xdd(end)+d_out];
dd=[d_in d d_out];
xm=xsup-dd*0.5;
scale1=max(2*max(abs(a))./dd)*1.5;

x0_k= repmat(xm,4,1)*scale1;
y0_k=0*x0_k;
z0_k=0*x0_k;
kx_real=real(a(:,1:N+2));
kx_imag=imag(a(:,1:N+2));
ky_real=real(b)*ones(4,N+2);
ky_imag=imag(b)*ones(4,N+2);
kz=zeros(4,N+2);
figure(figurenumber);
set(gcf,'Name',[figurenamepatch ' Visualization of wavevectors and polarizations']);
hold on;
k_real_h=quiver3(x0_k,z0_k,y0_k,kx_real,kz,ky_real,0,'-b','ShowArrowHead','on');
k_imag_h=quiver3(x0_k,z0_k,y0_k,kx_imag,kz,ky_imag,0,'--b','ShowArrowHead','on');
realk=sqrt(real(a).^2+real(b).^2);
imagk=sqrt(imag(a).^2+imag(b).^2);
realp_E=sqrt(squeeze(sum(real(p_E).^2,1)));
imagp_E=sqrt(squeeze(sum(imag(p_E).^2,1)));
realp_H=sqrt(squeeze(sum(real(p_H).^2,1)));
imagp_H=sqrt(squeeze(sum(imag(p_H).^2,1)));
maxk=max(realk,imagk);
maxp_E=max(realp_E,imagp_E);
maxp_H=max(realp_H,imagp_H);
scaleE=min(min(maxk./maxp_E));
scaleH=min(min(maxk./maxp_H));

p_Ex_real=real(squeeze(p_E(1,:,1:N+2)))*scaleE;
p_Ex_imag=imag(squeeze(p_E(1,:,1:N+2)))*scaleE;
p_Ey_real=real(squeeze(p_E(2,:,1:N+2)))*scaleE;
p_Ey_imag=imag(squeeze(p_E(2,:,1:N+2)))*scaleE;
p_Ez_real=real(squeeze(p_E(3,:,1:N+2)))*scaleE;
p_Ez_imag=imag(squeeze(p_E(3,:,1:N+2)))*scaleE;
p_Hx_real=real(squeeze(p_H(1,:,1:N+2)))*scaleH;
p_Hx_imag=imag(squeeze(p_H(1,:,1:N+2)))*scaleH;
p_Hy_real=real(squeeze(p_H(2,:,1:N+2)))*scaleH;
p_Hy_imag=imag(squeeze(p_H(2,:,1:N+2)))*scaleH;
p_Hz_real=real(squeeze(p_H(3,:,1:N+2)))*scaleH;
p_Hz_imag=imag(squeeze(p_H(3,:,1:N+2)))*scaleH;
x0_p=x0_k+kx_real;
y0_p=y0_k+ky_real;
z0_p=z0_k+kz;
p_E_real_h=quiver3(x0_p,z0_p,y0_p,p_Ex_real,p_Ez_real,p_Ey_real,0,'-r','ShowArrowHead','...
on');
p_E_imag_h=quiver3(x0_p,z0_p,y0_p,p_Ex_imag,p_Ez_imag,p_Ey_imag,0,'--r','ShowArrowHead','...
on');
p_H_real_h=quiver3(x0_p,z0_p,y0_p,p_Hx_real,p_Hz_real,p_Hy_real,0,'-g','ShowArrowHead','...
on');
p_H_imag_h=quiver3(x0_p,z0_p,y0_p,p_Hx_imag,p_Hz_imag,p_Hy_imag,0,'--g','ShowArrowHead','...
on');
blinsh=plot3([-d_in xseps(end)+d_out]*scale1,[0 0],[b b],':c');
xaxish=plot3([-d_in xseps(end)+d_out]*scale1,[0 0],[0 0],'-k');
Nofgrids=40;
hei=max(max(abs(max(max(y0_p+p_Ey_real,y0_p+p_Ey_imag)+max(y0_p+p_Hy_real,y0_p+p_Hy_imag...
)))));

y=linspace(-hei,hei,Nofgrids);
z=y;

```

```

[Y,Z]=meshgrid(y,z);
interfaces=zeros(1,N+1);
for idx=1:N+1
    interfacesh(idx)=surf(xseps(idx)*scale1*ones(Nofgrids,Nofgrids),Y,Z);
    shading interp;
    alpha(interfacesh(idx),0.3);
    colormap('copper');
end
hold off;
title(['titlepatch ' (Relative) k-vectors and respective eigenpolarizations of E/M fields...
      ']);
xlabel('X-axis');
ylabel('Z-axis');
zlabel('Y-axis');
axis tight;
axis equal;
view(-42,18);
nextfigurenumber=gcf+1;
end

```

A.2.6 Αρχείο compute_anis_stack.m

```

function [b,r,t,Pr,Pt,p_E,p_H,m,a]=compute_anis_stack(anis_stack,lamda_microns,...
    thetak_deg)
% COMPUTE_ANIS_STACK simulate propagation through an anisotropic-layered stack
% [b,r,t,Pr,Pt,p_E,p_H,m,a]=compute_anis_stack(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg)
%
% ...computes the e/m field created in an anisotropic-layered stack by the incidence...
% of a planar wave of specific wavelength and angle of incidence. The anisotropic-...
% layered stack is an arrangement of a number of anisotropic homogenous dielectric ...
% layers (birefringent (crystal) plates of great surface) placed vertically along the ...
% x-axis and parallel to each other. 'Out' of the layer stack there are infinite ...
% isotropic homogenous media. A planar wave is incident on the left plate of the stack...
% ('coming' from the "input" isotropic medium) thus creating a reflected wave in the ...
% input medium and a transmitted wave in the "ouput" medium. Inside every layer four ...
% partial waves are excited.We assume that there is no reflected wave in the ouput ...
% medium.
% INPUT:
% //Characteristics of the layer configuration://
% - anis_stack = structure describing the layer configuration consisting of the ...
% following fields:
% -> n_in = relative dielectric constant of input (isotropic) medium (this should be...
% a real scalar)
% -> n_out = relative dielectric constant of output (isotropic) medium (not ...
% necessarily real)
% -> d_microns = thickness of layers in microns (N row)
% ||diagonal elements of relative dielectric tensors in the principal axes systems ...
% of the crystals:
% -> er0x = upper left element of each dielectric tensor (N row)
% -> er0y = center element of each dielectric tensor (N row)
% -> er0z = lower right elemenet of each dielectric tensor (N row)
% ||orientation of each layer's principal axes system relative to the base xyz ...
% system:
% -> theta_deg = theta angle, in degrees (N row)
% -> phi_deg = phi angle, in degrees (N row)
% -> psi_deg = psi angle, in degrees (N row)
% //Characteristics of input (incident) wave://
% -lamda_microns = wavelength of input wave in vacuum, in microns
% -thetak_deg = angle of incidence, in degrees
% OUTPUT:
% - b = the (common) vertical (y) component of the (relative i.e. k/k0) k-vectors
% //reflection/transmission for the four cases of in/out polarization components://
% - r = reflection coefficients (2-by-2 matrix)
% - t = transmission coefficients (2-by-2 matrix)

```

```

% - Pr = Reflectance (abs(Savg_x_reflected/Savg_x_incident)) (2-by-2 matrix)
% - Pt = Transmittance (abs(Savg_x_transmitted/Savg_x_incident)) (2-by-2 matrix)
% - p_E,p_H = polarization of the electric and magnetic field for every layer (3-by...
-4-by-(N+2) array)
% - m = the eight coefficients of the electric field (to be multiplied with the ...
polarization vector and with As and Ap (four coefficients are to be multiplied with ...
Ap and the other four with As)) for every layer (4-by-2-by-(N+2) array)
% - a = the horizontal components of the four k-vectors for every layer(4-by-(N+2) ...
matrix)
% REQUIREMENTS:
% 'compute_anis' function
% check if input data are in the right form

if (~isrow(anis_stack.d_microns))&&(~isempty(anis_stack.d_microns))||(~isreal(...
anis_stack.d_microns))
    error('d_microns must be a row vector of real numbers, or the empty matrix');
end
[emptd,N]=size(anis_stack.d_microns);

if any(size(anis_stack.er0x)≠[emptd,N])
    error('"er0x" must be a row vector with the same length as "d_microns"');
end
if any(size(anis_stack.er0y)≠[emptd,N])
    error('"er0y" must be a row vector with the same length as "d_microns"');
end
if any(size(anis_stack.er0z)≠[emptd,N])
    error('"er0z" must be a row vector with the same length as "d_microns"');
end
if any(size(anis_stack.theta_deg)≠[emptd,N])
    error('"theta_deg" must be a row vector with the same length as "d_microns"');
end
if any(size(anis_stack.phi_deg)≠[emptd,N])
    error('"phi_deg" must be a row vector with the same length as "d_microns"');
end
if any(size(anis_stack.psi_deg)≠[emptd,N])
    error('"psi_deg" must be a row vector with the same length as "d_microns"');
end
if ~isscalar(thetak_deg)
    error('"thetak_deg" must be scalar');
end
if ~isscalar(lamda_microns)
    error('"lamda_microns" must be scalar');
end
if ~isscalar(anis_stack.n_in)
    error('"n_in" must be scalar');
end
if ~isreal(anis_stack.n_in)
    error('"n_in" must be real');
end
if ~isscalar(anis_stack.n_out)
    error('"n_out" must be scalar');
end

%% Constants
% physical constants
c0=3E8;
m0=4*pi*1E-7;
Z0=c0*m0;

%% Begin Computations

```

```

lamda=1E-6*lamda_microns;
k0=2*pi/lamda;

d=[1E-6*anis_stack.d_microns 0];
my_er0x=[anis_stack.n_in^2 anis_stack.er0x];
my_er0y=[anis_stack.n_in^2 anis_stack.er0y];
my_er0z=[anis_stack.n_in^2 anis_stack.er0z];
my_theta_deg=[0 anis_stack.theta_deg];
my_phi_deg=[0 anis_stack.phi_deg];
my_psi_deg=[0 anis_stack.psi_deg];

b=anis_stack.n_in*sin(thetak_deg*pi/180);

% compute phase velocity and polarization vectors for all layers
[F_next,a_next,Ex(N+2,:),Hx(N+2,:)] = compute_anis(b,anis_stack.n_out^2,anis_stack.n_out...
^2,anis_stack.n_out^2,0,0,0,Z0);
Tinout=eye(4);
F(:, :, N+2)=F_next;
a(:, N+2)=a_next;
for layeridx=N+1:-1:1
    [F_cur,a_cur,Ex(layeridx,:),Hx(layeridx,:)] = compute_anis(b,my_er0x(layeridx),my_er0y...
(layeridx),my_er0z(layeridx),my_theta_deg(layeridx),my_phi_deg(layeridx),...
my_psi_deg(layeridx),Z0);
    Tinout=inv(F_cur)*F_next*diag(exp(1i*k0*a_next*d(layeridx)))*Tinout;
    F(:, :, layeridx)=F_cur;
    a(:, layeridx)=a_cur;
    T(:, :, layeridx)=Tinout;
    F_next=F_cur;
    a_next=a_cur;
end

% compute reflection and transmission matrices
t=inv(Tinout([1 3],[1 3]));
r=Tinout([2 4],[1 3])*t;

% compute Reflectance and Transmittance matrices
Pr=abs(r(:,:)).^2;
abs_t_2=abs(t(:,:)).^2;
Pt=1/a(1,1)*real(a(1,N+2)*conj(anis_stack.n_out)/anis_stack.n_out,0;0,1)*abs_t_2;

% compute coefficients for all layers
for layeridx=1:N+1
    m(:, :, layeridx)=T(:, [1 3], layeridx)*t;
end
m(:, :, N+2)=[t(1,:);0 0;t(2,:);0 0];

for layeridx=1:N+2
    p_E(:, :, layeridx)=[Ex(layeridx, :);F(1, :, layeridx);F(3, :, layeridx)];
    p_H(:, :, layeridx)=[Hx(layeridx, :);F(4, :, layeridx);F(2, :, layeridx)];
end

end

```

A.2.7 Αρχείο compute_anis.m

```

function [F,a,Ex,Hx]=compute_anis(b,er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg,Z0)
% COMPUTE_ANIS compute polarization vectors of a (generally) anisotropic layer
% [F,a,Ex,Hx]=compute_anis(b,er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg,Z0)
%
% ... computes the k-vectors (actually the x-component) and the corresponding ...
% polarization vectors of the four partial waves excited in a (generally) anisotropic ...
% layer by a planar wave incident on one surface of the layer. If the layer is ...

```

```

    anisotropic then the eigenvectors are computed using Hodgkinson's method (by finding...
    the eigenvectors of a 4 x 4 matrix). If the layer is isotropic, the polarization ...
    vectors are set "manually" to p and s.
% INPUT:
%   b = the relative y component of the k-vectors (kx=k0*a and ky=k0*b)
%   er0x,er0y,er0z = the diagonal elements of the dielectric tensor of the anisotropic...
%   layer in its principal axes system
%   theta_deg,phi_deg,psi_deg = Euler angles describing the orientation of the the ...
%   layer's principal axes system relative to our base xyz system, in degrees
%   Z0 = the wave impedance of vacuum
% OUTPUT:
%   F = matrix consisting of the vertical (y and z) components of E and H polarization...
%   vectors. (will be used as it is to apply the continuity of the tangential ...
%   components in order to compute the field coefficients in a stack of parallel ...
%   anisotropic layers)
%   a = the x-components of the four k-vectors of the layer
%   Ex,Hx = the x components of the E and H polarization vectors.

if er0x==er0y && er0x==er0z
% layer isotropic
    n=sqrt(er0x);
    tmp=sqrt(n^2-b^2);
    if ~isreal(tmp)
        if imag(tmp)>0
            tmp=-tmp;
        end
    end
    F= [ tmp/n    -tmp/n    0        0;
        n/Z0   n/Z0   0        0;
        0      0      1        1;
        0      0      -tmp/Z0  tmp/Z0
        ];

    a=[tmp; -tmp; tmp; -tmp];
    tmp=-b/n;
    Ex=[-b/n -b/n 0 0];
    tmp=b/Z0;
    Hx=[0 0 b/Z0 b/Z0];
else
% layer anisotropic
% Construct principal dielectric tensor
er0=diag([er0x er0y er0z]);
% Compute orientation of index ellipsoid in rad
R=Rot(theta_deg,phi_deg,psi_deg);
er=R*er0*inv(R);
A=[-b*er(1,2)/er(1,1) (1-b*b/er(1,1))*Z0 -b*er(1,3)/er(1,1) 0;
  (er(2,2)-er(1,2)^2/er(1,1))/Z0 -b*er(1,2)/er(1,1) (er(2,3)-er(1,2)*er(1,3)/er...
  (1,1))/Z0 0;
  0 0 0 -Z0;
  (-er(2,3)+er(1,2)*er(1,3)/er(1,1))/Z0 b*er(1,3)/er(1,1) (b^2+er(1,3)^2/er(1,1)-...
  er(3,3))/Z0 0
  ];
[Ftmp,atmp]=eig(A);
F=Ftmp;
%because we are not sure if diag returns a row or a column in different
%versions of Matlab.
a=reshape(diag(atmp),4,1);
Ex=-(er(1,2)*F(1,:) + er(1,3)*F(3,:) + b*Z0*F(2,:))/er(1,1);
Hx=(b/Z0)*F(3,:);
end
end

function R=Rot(theta_deg, phi_deg, psi_deg)
theta=theta_deg*pi/180;
phi=phi_deg*pi/180;
psi=psi_deg*pi/180;

```



```

R=[
    cos(psi)*cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)*sin(psi) -sin(psi)*cos(phi)-cos(theta)*sin...
        (phi)*cos(psi) sin(theta)*sin(phi)
    cos(psi)*sin(phi)+cos(theta)*cos(phi)*sin(psi) -sin(psi)*sin(phi)+cos(theta)*cos...
        (phi)*cos(psi) -sin(theta)*cos(phi)
    sin(theta)*sin(psi) sin(theta)*cos(psi) cos(theta)
];
end

```

A.2.8 Αρχείο plot_rt_sp.m

```

function nextfigurenumber=plot_rt_sp(r,t,Pr,Pt,x,rt_xlabel,titlepatch,figurenumber,...
    figurenamepatch)
% PLOT_RT_SP 'p-p', 'p-s', 's-p' and 's-s' reflection/transmission plots
% nextfigurenumber=plot_rt_sp(r,t,pr,pt,x,rt_xlabel,titlepatch,figurenumber,...
    figurenamepatch)
%
% ... plots reflection and transmission coefficients as well as reflectance and ...
% transmittance for the four cases of in/out polarization components versus the ...
% parameter x.
% INPUT:
% - x = variable along which r and t are computed (e.g.angle of incidence or ...
% wavelength) (vector)
% - r = reflection coefficients (2-by-2-by-length(x) array)
% - t = transmission coefficients (2-by-2-by-length(x) array)
% - Pr = Reflectance (abs(Savg_x_reflected/Savg_x_incident)) (2-by-2-by-length(x) ...
% array)
% - Pt = Transmittance (abs(Savg_x_transmitted/Savg_x_incident)) (2-by-2-by-length(x...
% ) array)
% - rt_xlabel = label of the x-axis of the plots
% - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
% - figurenumber = handle of the first figure to be created
% - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
% created
% OUTPUT:
% - creation of twelve figures
% - nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created
% REQUIREMENTS:
% - 'plot_rt' function

p_or_s=['p' 's'];
for ps_inidx=1:2
    for ps_outidx=1:2
        myr=squeeze( r(ps_outidx,ps_inidx,:));
        myPr=squeeze(Pr(ps_outidx,ps_inidx,:));
        myt=squeeze( t(ps_outidx,ps_inidx,:));
        myPt=squeeze(Pt(ps_outidx,ps_inidx,:));
        mytitlepatch=[' ' p_or_s(ps_inidx) ' to ' p_or_s(ps_outidx)];
        myfigurenamepatch=mytitlepatch;
        figurenumber=plot_rt(x,myr,myt,myPr,myPt,rt_xlabel,[titlepatch mytitlepatch...
            ],figurenumber,[figurenamepatch myfigurenamepatch]);
    end
end
nextfigurenumber=figurenumber;
end

```

A.2.9 Αρχείο plot_rt.m

```

function nextfigurenumber=plot_rt(x,r,t,Pr,Pt,rt_xlabel,titlepatch,figurenumber,...
    figurenamepatch)
% PLOT_RT reflection/transmission plots
% nextfigurenumber=plot_rt(x,r,t,pr,pt,rt_xlabel,titlepatch,figurenumber,...
    figurenamepatch)

```

```

%
% ... plots reflection and transmission coefficients R,T as well as reflectance and ...
% transmittance PR, PT versus the parameter X.
% INPUT:
% - x = variable along which r and t are computed
% - r = reflection coefficients
% - t = transmission coefficients
% - Pr = Reflectance (abs(Savg_x_reflected/Savg_x_incident))
% - Pt = Transmittance (abs(Savg_x_transmitted/Savg_x_incident))
% - rt_xlabel = label of the x-axis of the plots
% - titlepatch = text to be added to the titles of figures to be created
% - figurenumber = handle of the first figure to be created
% - figurenamepatch = text to be added to the top of the windows of figures to be ...
% created
% OUTPUT:
% - creation of three figures
% - nextfigurenumber = 1 + handle of the last figure created

%% Reflectance and Transmittance
figure(figurenumber)
set(gcf, 'Name', [figurenamepatch ' Pr-Pt']);
plot(x, Pr, '-', x, Pt, '--', x, Pr+Pt, 'oy', 'Linewidth', 1.5)
set(gca, 'FontWeight', 'Bold')
xlabel(rt_xlabel, 'FontWeight', 'Bold')
ylabel('Normalized Reflected/Transmitted Power', 'FontWeight', 'Bold')
legend('P_{ref} (Reflectance)', 'P_{tra} (Transmittance)', 'P_{ref}+P_{tra}')
legend boxoff
title([titlepatch ' Normalized Power'])

%% Reflection/Transmission Coefficients (real and imaginary parts)
figure(figurenumber+1)
set(gcf, 'Name', [figurenamepatch ' r-t (real,imag)']);
plot(x, real(r), '-', x, imag(r), ':', x, real(t), '--', x, imag(t), '-.', 'Linewidth', 1.5)
set(gca, 'FontWeight', 'Bold')
xlabel(rt_xlabel, 'FontWeight', 'Bold')
ylabel('Normalized Reflected/Transmitted Coefficients, r,t', 'FontWeight', 'Bold')
legend('Real(r)', 'Imag(r)', 'Real(t)', 'Imag(t)')
legend boxoff
title([titlepatch ' Reflection/Transmission coefficients'])

%% Reflection/Transmission Coefficients (in polar form)
figure(figurenumber+2)
set(gcf, 'Name', [figurenamepatch ' r-t (polar)']);
subplot(2,1,1)
plot(x, abs(r), '-', x, abs(t), '--', 'Linewidth', 1.5)
set(gca, 'FontWeight', 'Bold')
xlabel(rt_xlabel, 'FontWeight', 'Bold')
ylabel('Normalized |r|, |t|', 'FontWeight', 'Bold')
legend('|r|', '|t|')
legend boxoff
title([titlepatch ' Reflection/Transmission Coefficients magnitudes'])
subplot(2,1,2)
plot(x, unwrap(angle(r))/pi, '-', x, unwrap(angle(t))/pi, '--', 'Linewidth', 1.5)
set(gca, 'FontWeight', 'Bold')
xlabel(rt_xlabel, 'FontWeight', 'Bold')
ylabel('Phases of r, t/\pi', 'FontWeight', 'Bold')
legend('\phi/\pi', '\phi/\pi')
legend boxoff
title([titlepatch ' Reflection/Transmission Coefficients Phases (unwrapped)'])

%%
nextfigurenumber=figurenumber+3;
end

```

A'.2.10 Αρχείο plot_cvector_along_x.m

```

function nextfigurenumber=plot_cvector_along_x(cvector,x,xseps,hei,figurenumber,...
    figurename,mytitle,cvectorname,xunits,cvectorunits)
% PLOT_CVECTOR_ALONG_X
if ~isrow(x)
    error('"x" must be a row vector');
end
if any(size(cvector)≠[3 length(x)])
    error('cvector must be a 3 x length(x) matrix!');
end
xyz=['x' 'y' 'z'];
figure(figurenumber);
set(gcf,'Name',figurename);
for idx=1:3
    subplot(3,1,idx);
    plot(x,real(cvector(idx,:)),'-',x,imag(cvector(idx,:)),'--');
    hold on;
    for xseps_i=xseps
        plot([xseps_i xseps_i xseps_i],[-hei 0 hei],'--');
    end
    hold off;
    set(gca,'FontWeight','Bold');
    title(mytitle);
    xlabel(['x (' xunits ')']);
    ylabel(['cvectorname xyz(idx) (' cvectorunits ')'],'FontWeight','Bold');
    legend({'real(' cvectorname '_{\_}' xyz(idx) ')'} ['imag(' cvectorname '_{\_}' ...
        xyz(idx) ')'}]);
    legend boxoff;
    axis tight;
end
nextfigurenumber=gcf+1;
end

```

A.2.11 Αρχείο compute_EH_along_x.m

```

function [xE0,xH0,xseps_microns]=compute_EH_along_x(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg,...
    x_microns)

[~,~,~,~,~,p_E,p_H,m,a]=compute_anis_stack(anis_stack,lamda_microns,thetak_deg);

if ~isrow(x_microns)
    error('"x_microns" must be a row vector');
end
d_microns=anis_stack.d_microns;
xdd=cumsum(d_microns);
x0=[0 xdd xdd(end)];
xseps_microns=x0((x0>min(x_microns))&(x0≤max(x_microns)));
x_length=length(x_microns);
k0=2*pi/(lamda_microns*1E-6);

xE0=zeros(3,4,x_length,2);
xH0=zeros(3,4,x_length,2);
for xidx=1:x_length
    [layeridx,lx_microns]=findlayer(d_microns,x_microns(xidx));
    for psidx=1:2
        tmp=(exp(-1i*k0*lx_microns*(1E-6)*a(:,layeridx))).*(m(:,psidx,layeridx));
        xE0(:, :, xidx, psidx)=p_E(:, :, layeridx)*diag(tmp);
        xH0(:, :, xidx, psidx)=p_H(:, :, layeridx)*diag(tmp);
    end
end
xE0=permute(xE0,[1 3 2 4]);
xH0=permute(xH0,[1 3 2 4]);
end

```

A.2.12 Αρχείο findlayer.m

```

function [layeridx ,lx]=findlayer(d,x)
% FINDLAYER find corresponding layer
%   [layeridx ,lx]=findlayer(d,x)
%
%   ... returns in layeridx the layer that includes x and in lx the "relative" x, i.e ...
%   the x referred to the layer's axes system

if ~isscalar(x)
    error('"x" must be scalar');
end
if isempty(d)
    layeridx=1+(x>0);
else
    if ~isrow(d)
        error('"d" must be either a row vector or empty ("[]")');
    end
    N=length(d);
    xdd=cumsum(d);
    xd=[0 xdd xdd(end)];
    if x>xdd(end)
        tmp=N+2;
    else
        tmp=0;
        n=1;
        while(tmp==0)
            if x<=xd(n)
                tmp=n;
            end
            n=n+1;
        end
    end
    layeridx=tmp;
    lx=x-xd(tmp);
end
end

```

A.2.13 Αρχείο savenamefilter.m

```

function newstring=savenamefilter(mystring)
newstring=regexprep(mystring,{ '/' , '\ ' , '?' , '%' , '*' , ':' , '\|' , '"' , '<' , '>' , '^' , ' ' , '\. ' ...
},{' _ '});
end

```

Παράρτημα Β΄

Κώδικας προγράμματος Β - Γραφικό περιβάλλον Υπολογισμού και απεικόνισης της κυματοεπιφάνειας ενός ανισοτροπικού μέσου

Β.1 Βασική συνάρτηση

Β.1.1 Αρχείο normsurf.m

```
function varargout=normsurf(varargin)
% NORMSURF compute and plot the normal surface of a birefringent medium (GUI)

% close all hidden;
% clc;
% set(0,'DefaultFigureWindowStyle','normal');

%% DEFINE GLOBAL VARIABLES
h = waitbar(0,'Please wait (Defining Global Variables...)');
er0x=1;
er0y=1;
er0z=1;
theta_deg=0;
phi_deg=0;
psi_deg=0;
myeps=128*eps;
innersurfh=0;
outersurfh=0;
optsemaxis1h=0;
optsemaxis2h=0;
optsemaxis3h=0;
optsemaxis4h=0;
optsemaxis5h=0;
optsemaxis6h=0;
optsemaxis7h=0;
optsemaxis8h=0;
newfh=0;
init_viewpoint=[-37.5 30];
```

```

fontscale=1;
textcolor=[0.941176 0.941176 0.941176];
textcolor=[1 1 1]*0.8;
text2color=textcolor;
panelcolor=textcolor*0.9;
text3color=textcolor;
text4color=textcolor;
editcolor=[1 1 1]*0.95;
pan1color=textcolor*0.8;
pan2color=pan1color;
bg1color=pan1color;
bg2color=pan1color;
pbcolor=[1 1 1]*0.8;
%% DEFINE AND COMPUTE GUI PROPERTIES
waitbar(0.1,h,'Please wait (Computing Gui properties...)');
%% Panel 1 of Buttongroup 1
bg1pan1edittooltip={'element (1,1) of the (diagonal) dielectric tensor in the principal ...
    axes system'),'rotation step 1: rotate about z-axis';'element (2,2) of the (diagonal...
    ) dielectric tensor in the principal axes system'),'rotation step 2: rotate about (...
    the new x-axis';'element (3,3) of the (diagonal) dielectric tensor in the principal...
    axes system'),'rotation step 3: rotate about (the new) z-axis (again)'};
bg1pan1texttooltip=bg1pan1edittooltip;
bg1pan1hmargin=1;
bg1pan1vmargin=0.2;
bg1pan1hspace=2;
bg1pan1vspace=0.5;
bg1pan1editwid=4;
bg1pan1text={'exx','phi';'eyy','theta';'ezz','psi'};
bg1pan1edit={'1.0','0';'2.0','0';'3.0','0'};
bg1pan1textwid=[length(bg1pan1text{1,1}),length(bg1pan1text{1,2})];
bg1pan1hei=2*bg1pan1vmargin+3+2*bg1pan1vspace;
bg1pan1wid=2*bg1pan1hmargin+bg1pan1textwid(1)+bg1pan1textwid(2)+2*bg1pan1editwid+...
    bg1pan1hspace;

%% Panel 2 of Buttongroup 1
bg1pan2hmargin=bg1pan1hmargin;
bg1pan2vmargin=bg1pan1vmargin;
bg1pan2hspace=0;
bg1pan2vspace=bg1pan1vspace;
bg1pan2editwid=4.5;
bg1pan2text={'exx','exy','exz';'exy','eyy','eyz';'ezx','ezy','ezz'};
bg1pan2edit={'1.0','0','00';'0','2.0','0';'0','0','3.0'};
bg1pan2textwid=max(max(cellfun('length',bg1pan2text)));
bg1pan2hei=2*bg1pan2vmargin+3+2*bg1pan2vspace;
bg1pan2wid=2*bg1pan2hmargin+3*bg1pan2textwid+3*bg1pan2editwid+2*bg1pan2hspace;

%% Panels 1&2 of Buttongroup 1
bg1pan12maxhei=max([bg1pan1hei, bg1pan2hei]);
bg1pan12maxwid=max([bg1pan1wid, bg1pan2wid]);

%% Panel 3 of Buttongroup 1
bg1pan3title='plot range';
bg1pan3titlefontscale=1;
bg1pan3titlemargin=2;
bg1pan3vmargin=bg1pan1vmargin;
bg1pan3hmargin=bg1pan1hmargin;
bg1pan3hspace1=bg1pan1hspace/5;
bg1pan3hspace2=bg1pan1hspace/5;
bg1pan3vspace1=bg1pan1vspace;
bg1pan3vspace2=bg1pan1vspace;
bg1pan3vspace3=bg1pan1vspace;
bg1pan3vspace4=bg1pan1vspace;
bg1pan3text1={'from','to','step'};
bg1pan3text2={'phi','theta'};
bg1pan3pb='Default values';
bg1pan3edit={'0','180','5';'0','360','5'};

```

```

bg1pan3text1wid=max( cellfun( 'length',bg1pan3text1));
bg1pan3text2wid=max( cellfun( 'length',bg1pan3text2));
bg1pan3pbwid=length(bg1pan3pb);
bg1pan3dist=bg1pan3text2wid;
bg1pan3hei=bg1pan3vmargin+4+bg1pan3vspace1+bg1pan3vspace2+bg1pan3vspace3+bg1pan3vspace4+...
    bg1pan3titlefontscale;
bg1pan3wid=...
max([ bg1pan3titlemargin+bg1pan3titlefontscale*length(bg1pan3title), ...
    2*bg1pan3hmargin+max([bg1pan3dist+length(bg1pan3pb), ...
        3*bg1pan3text1wid+2*bg1pan3hspace2+bg1pan3hspace1+...
            bg1pan3text2wid])]);

%% Panel 4 of Buttongroup 1
bg1pan4title='initial viewpoint';
bg1pan4titlefontscale=1;
bg1pan4titlemargin=bg1pan3titlemargin;
bg1pan4vmargin=bg1pan1vmargin;
bg1pan4hmargin=bg1pan1hmargin;
bg1pan4hspace1=0;
bg1pan4hspace2=0.5;
bg1pan4hspace3=0.4;
bg1pan4vspace1=bg1pan1vspace;
bg1pan4vspace2=bg1pan1vspace;
bg1pan4text={'az','el'};
bg1pan4texttooltip={'azimuth angle (az=phi-90) [for more info type ''doc view'' in the ...
    Command Window]','elevation angle (el=90-theta) [for more info type ''doc view'' in ...
    the Command Window]'};
bg1pan4edittooltip=bg1pan4texttooltip;
bg1pan4pb1='get current values';
bg1pan4pb2='reset';
bg1pan4edit={num2str(init_viewpoint(1)),num2str(init_viewpoint(2))};
bg1pan4textwid=[length(bg1pan4text{1}),length(bg1pan4text{2})];
bg1pan4editwid=4;
bg1pan4pb1wid=length(bg1pan4pb1);
bg1pan4pb2wid=length(bg1pan4pb2);
%bg1pan4dist=0.1
bg1pan4hei=bg1pan4vmargin+2+bg1pan4vspace1+bg1pan4vspace2+bg1pan4titlefontscale;
bg1pan4wid=max([bg1pan4titlemargin+bg1pan4titlefontscale*length(bg1pan4title), ...
    2*bg1pan4hmargin+max([bg1pan4textwid(1)+bg1pan4textwid(2)+2*...
        bg1pan4editwid+2*bg1pan4hspace1+bg1pan4hspace2+bg1pan4pb2wid, ...
            bg1pan4pb1wid])]);

%% Buttongroup 1
bg1titlefontscale=1;
bg1titlemargin=2;
bg1updfontscale=1;
bg1pb='Update';
bg1pbhei=bg1updfontscale;
bg1pbwid=bg1updfontscale*(length(bg1pb)+2);
bg1vspace1=0.2;
bg1vspace2=bg1vspace1;
bg1vspace3=bg1vspace1;
bg1vspace4=bg1vspace1;
bg1vspace5=bg1vspace1;
bg1vspace6=bg1vspace1;
bg1hmargin=bg1titlemargin;
bg1vmargin=0;
bg1rbffset=4;
bg1title='Build normal surface';
bg1rb1='principal elements';
bg1rb2='all matrix elements';
bg1text='+rotation';
bg1wid=max([ ...
    bg1titlemargin+bg1titlefontscale*length(bg1title), ...
    2*bg1hmargin+max([ ...
        bg1rbffset+max([length(bg1rb1),length(bg1rb2),length(bg1text)])], ...

```

```

        bg1pan12maxwid...
        bg1pan3wid...
        bg1pan4wid...
        bg1pbwid,...
    ]) ...
]);
bg1hei=bg1titlefontscale+3+bg1vspace1+bg1vspace2+bg1vspace3+bg1vspace4+bg1vspace5+...
        bg1vspace6+bg1pan12maxhei+bg1pan3hei+bg1pan4hei+bg1pbhei+bg1vmargin;

%% Panel 1 of Buttongroup 2
bg2pan1hmargin=1;
bg2pan1vmargin=0.2;
bg2pan1hspace=2;
bg2pan1vspace=0.5;
bg2pan1editwid=4;
bg2pan1text={'theta','phi'};
bg2pan1edit={'0','0'};
bg2pan1textwid=max(cellfun('length',bg2pan1text));
bg2pan1wid=2*bg2pan1hmargin+bg2pan1textwid+bg2pan1hspace+bg2pan1editwid;
bg2pan1hei=2*bg2pan1vmargin+bg2pan1vspace+2;

%% Panel 2 of Buttongroup 2
bg2pan2hmargin=bg2pan1hmargin;
bg2pan2vmargin=bg2pan1vmargin;
bg2pan2hspace=bg2pan1hspace;
bg2pan2vspace=bg2pan1vspace;
bg2pan2editwid=bg2pan1editwid;
bg2pan2text={'ky','kz'};
bg2pan2edit={'0.0','0.0'};
bg2pan2textwid=max(cellfun('length',bg2pan2text));
bg2pan2wid=2*bg2pan2hmargin+bg2pan2textwid+bg2pan2hspace+bg2pan2editwid;
bg2pan2hei=2*bg2pan2vmargin+bg2pan2vspace+2;

%% Panels 1 & 2 of Buttongroup 2
bg2pan12maxhei=max([bg2pan1hei, bg2pan2hei]);
% bg2pan12maxwid=max([bg2pan1wid, bg2pan2wid]);

%% Buttongroup 2
bg2title='Find Eigenmodes';
bg2titlemargin=bg1titlemargin;
bg2titlefontscale=1;
bg2vspace1=0.2;
bg2vspace2=0.2;
bg2vspace3=0.2;
bg2vspace4=0.2;
bg2vspace5=0.2;
bg2vmargin=bg1vmargin;
bg2hmargin=bg1hmargin;
bg2rboffset=2;
bg2rb1='direction of propagation';
bg2rb2='y and z components';
bg2text1='for specific...';
bg2text2='of the wavevector';
bg2updfontscale=1;
bg2pb='Update';
bg2pbwid=bg2updfontscale*(length(bg2pb)+2);
bg2pbhei=bg2updfontscale;
bg2hei=bg2titlefontscale+bg2vspace1+bg2vspace2+bg2vspace3+bg2vspace4+bg2vspace5+4+...
        bg2pan12maxhei+bg2pbhei+bg2vmargin;

bg2wid=max([ ...
        bg2titlemargin+bg2titlefontscale*length(bg2title), ...
        2*bg2hmargin+max([
                length(bg2text1), ...
                bg2rboffset+length(bg2rb1)-3, ...
                bg2rboffset+length(bg2rb2), ...

```



```

        length(bg2text2), ...
        bg2pan1wid, ...
        bg2pan2wid, ...
        bg2pbwid ...
    ]), ...
]);

%% Buttongroups 1 & 2
bg12maxwid=max([bg1wid, bg2wid]);

pan1pan1hei=5;
pan1pan1wid=10;

%% Panel 2 of Panel 1
pan1pan2title='viewpoint';
pan1pan2titlefontscale=1;
pan1pan2titlemargin=2;
pan1pan2text={'az', 'el'};
pan1pan2textwid=max(cellfun('length', pan1pan2text));
pan1pan2slddb={'@pan1pan2sld_1cb', '@pan1pan2sld_2cb'};
pan1pan2sldmin=[-360, -180];
pan1pan2sldmax=[360, 180];
pan1pan2sldwid=5;
pan1pan2editwid=4;
pan1pan2edit={num2str(init_viewpoint(1)), num2str(init_viewpoint(2))};
pan1pan2editcb={'@pan1pan2edit_1cb', '@pan1pan2edit_2cb'};
pan1pan2vspace1=0.5;
pan1pan2vspace2=0.5;
pan1pan2vspace3=0.5;
pan1pan2hspace=1;
pan1pan2pb='reset';
pan1pan2pbfontscale=1;
pan1pan2pbwid=pan1pan2pbfontscale*length(pan1pan2pb);
pan1pan2pbhei=pan1pan2pbfontscale;
pan1pan2hmargin=1;
pan1pan2vmargin=0.2;
pan1pan2hei=pan1pan2vmargin+pan1pan2titlefontscale+pan1pan2vspace1+2+pan1pan2vspace2+2+...
    pan1pan2vspace3+pan1pan2pbhei;
pan1pan2wid=max([ pan1pan2titlemargin+pan1pan2titlefontscale*length(pan1pan2title), ...
    2*pan1pan2hmargin+max([ pan1pan2textwid+pan1pan2hspace+max([ ...
        pan1pan2sldwid, pan1pan2editwid]), ...
        pan1pan2pbwid])]);

%% Panel 3 of Panel 1
pan1pan3title='figure';
pan1pan3titlefontscale=1;
pan1pan3titlemargin=2;
pan1pan3vspace=0.5;
pan1pan3tog='Undock axes';
pan1pan3togfontscale=1;
pan1pan3toghei=pan1pan3togfontscale;
pan1pan3togwid=pan1pan3togfontscale*length(pan1pan3tog);
pan1pan3hmargin=1;
pan1pan3vmargin=0.2;
pan1pan3hei=pan1pan3titlefontscale+pan1pan3vspace+pan1pan3toghei+pan1pan3vmargin;
pan1pan3wid=max([ pan1pan3titlemargin+pan1pan3titlefontscale*length(pan1pan3title), ...
    2*pan1pan3hmargin+pan1pan3togwid]);

%% Panel 1
pan1title='Options';
pan1titlefontscale=1;
pan1titlemargin=2;
pan1choffset=3;
pan1hmargin=2;
pan1vmargin=0.2;

```

```

pan1vspace1=0.2;
pan1vspace2=pan1vspace1+0.2;
pan1vspace3=pan1vspace1+0.2;
pan1vspace4=pan1vspace1;
pan1vspace5=pan1vspace1;
pan1vspace6=pan1vspace1;
pan1vspace7=pan1vspace1;
pan1vspace8=pan1vspace1;
pan1text={'outer surface','inner surface'};
pan1textwid=max(cellfun('length',pan1text));
pan1sldwid=pan1textwid;
pan1pumwid=pan1textwid;
pan1pumstring={{'-shading-','flat','interp','faceted'},{'-colormap-','jet','hsv','cool',...
' spring','summer','autumn','winter','gray','bone','copper','pink','lines'}}};
pan1ch1='show opt';
pan1ch2={'box on','grid on','axes f'};
pan1sldcb={'@pan1sld_1cb','@pan1sld_2cb'};
pan1ch2cb={'@pan1ch2_1cb','@pan1ch2_2cb','@pan1ch2_3cb'};
pan1pumcb={'@pan1pum_1cb','@pan1pum_2cb','@pan1pum_3cb'};
pan1chwid=pan1choffset+max(cellfun('length',[pan1ch1,pan1ch2]));
init_outer_transparency=0.8;
init_inner_transparency=1;
init_transparency=[init_outer_transparency,init_inner_transparency];
init_optaxes=1;
init_box=1;
init_grid=1;
init_axis=1;
init_pan1ch1=init_optaxes;
init_pan1ch2=[init_box,init_grid,init_axis];
pan1hei=pan1titlefontscale+pan1vspace1+3+3*pan1vspace2+3+pan1vspace3+1+pan1vspace4+...
pan1pan1hei+pan1vspace5+3+2*pan1vspace6+pan1vspace7+pan1pan2hei+pan1vspace8+...
pan1pan3hei+pan1vmargin;
pan1wid=max([ pan1titlemargin+pan1titlefontscale*length(pan1title),...
2*pan1hmargin+max([ pan1textwid,...
pan1sldwid,...
pan1pumwid,...
pan1pan1wid,...
pan1chwid,...
pan1pan2wid,...
pan1pan3wid ])]);

%% Panel 2
pan2title='FontSize';
pan2titlefontscale=1;
pan2titlemargin=2;
pan2hmargin=2;
pan2vmargin=0.2;
pan2pbfontscale=1;
pan2pb={'A-','A+'};
pan2pbwid=1.5*pan2pbfontscale*cellfun('length',pan2pb);
pan2pbhei=pan2pbfontscale;
pan2pbc={'@pan2pb_1cb','@pan2pb_2cb'};
pan2hspace=1;
pan2vspace=0.5;
pan2wid=max([ pan2titlemargin+pan2titlefontscale*length(pan2title)
2*pan2hmargin+pan2pbwid(1)+pan2hspace+pan2pbwid(2) ]);
pan2hei=pan2titlefontscale+pan2vspace+pan2pbhei+pan2vmargin;

%% Panel 1 & 2
pan12maxwid=max([pan1wid,pan2wid]);

%% Figure
hmargin=2;
vmargin=2;
vspace=0.5;
toolbhei=0;

```

```

figurename='Normal Surface and eigenmodes';
ftitle='Normal Surface of Birefringent Medium';
ftitlefontscale=1.5;
ftitlewid=ftitlefontscale*(length(ftitle)+4);
ftitlehei=ftitlefontscale*1.3;
axeshei=1.02*max([bg1hei+bg2hei, pan1hei+pan2hei]);
dist12=axeshei - bg1hei - bg2hei;
dist1=0.6*dist12;
dist2=0.4*dist12;
dist56=axeshei - pan1hei - pan2hei;
dist5=0.4*dist56;
dist6=0.6*dist56;
dist3=10;
dist4=dist3;
dfwid=0;
dfhei=0;
axeswid=2*axeshei;
minaxeswid=bg12maxwid;
fhei=vmargin+axeshei+vspace+ftitlehei+toolbhei;
fwid=2*hmargin+bg12maxwid+dist3+axeswid+dist4+pan12maxwid;

%% BUILD FIGURE (CREATE COMPONENTS)
waitbar(0.3,h,'Please wait (Building Gui ...)');
basefontsize=10;
%% Create Figure
fh=figure('Visible','on',...
    'HandleVisibility','on',...
    'Toolbar','figure',...
    'Name',figurename,...
    'Units','characters',...
    'Position',[dfwid,dfhei,fwid,fhei],...
    'Resize','On',...
    'NumberTitle','on',...
    'DeleteFcn',@fdelfcn,...
    'Visible','off');
% set (fh, 'Units', 'pixels');
% get (fh, 'Position')

%% Create NewFigure (hidden)
newfh=figure('Name',[figurename ': Plot'],...
    'HandleVisibility','on',...
    'Toolbar','figure',...
    'Resize','On',...
    'NumberTitle','on',...
    'DeleteFcn',@newfdelfcn,...
    'Visible','off');

%% Create components of Figure
ftitleh=uicontrol('Parent',fh,...
    'Style','text',...
    'BackgroundColor',textcolor,...
    'FontSize',basefontsize*ftitlefontscale,...
    'Visible','on',...
    'String',ftitle,...
    'Units','characters',...
    'Position',[(fwid-ftitlewid)/2,vmargin+axeshei+vspace,ftitlewid,ftitlehei]);

bg1h=uibuttongroup('Parent',fh,...
    'Visible','on',...
    'Title',bg1title,...
    'BackgroundColor',bg1color,...
    'Units','Characters',...
    'Position',[hmargin,vmargin+dist2+bg2hei+dist1,bg1wid,bg1hei],...

```

```

    'SelectionChangeFcn', @bg1selchcb);
basefontsize=get(bg1h, 'FontSize');

bg2h=uibuttongroup('Parent', fh, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', bg2title, ...
    'Units', 'Characters', ...
    'BackgroundColor', bg2color, ...
    'Position', [hmargin, vmargin+dist2, bg2wid, bg2hei], ...
    'SelectionChangeFcn', @bg2selchcb);

axesh=axes('Parent', fh, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Units', 'Characters', ...
    'Position', [hmargin+bg12maxwid+dist3, vmargin, axeswid, axeshei]);

pan1h=uipanel('Parent', fh, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', pan1title, ...
    'BackgroundColor', pan1color, ...
    'FontSize', basefontsize*pan1titlefontscale, ...
    'Units', 'Characters', ...
    'Position', [hmargin+bg12maxwid+dist3+axeswid+dist4, vmargin+axeshei - dist5 - pan1hei, ...
    pan1wid, pan1hei]);

pan2h=uipanel('Parent', fh, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', pan2title, ...
    'BackgroundColor', pan2color, ...
    'FontSize', basefontsize*pan2titlefontscale, ...
    'Units', 'Characters', ...
    'Position', [hmargin+bg12maxwid+dist3+axeswid+dist4, vmargin, pan2wid, pan2hei]);

%% Create components of Buttongroup 1
bg1rb1h=uicontrol('Parent', bg1h, ...
    'Style', 'radiobutton', ...
    'BackgroundColor', textcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg1rb1, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1hmargin, bg1hei - bg1titlefontscale - bg1vspace1 - 1, length(bg1rb1)+...
    bg1rboffset, 1]);

bg1texth=uicontrol('Parent', bg1h, ...
    'Style', 'text', ...
    'BackgroundColor', text3color, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg1text, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1hmargin+(length(bg1rb1)+bg1rboffset - length(bg1text))/2, bg1hei - ...
    bg1titlefontscale - bg1vspace1 - 2, length(bg1text), 1]);

bg1rb2h=uicontrol('Parent', bg1h, ...
    'Style', 'radiobutton', ...
    'BackgroundColor', textcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg1rb2, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1hmargin, bg1hei - bg1titlefontscale - bg1vspace1 - bg1vspace2 - 3, length(...
    bg1rb2)+bg1rboffset, 1]);

bg1pbh=uicontrol('Parent', bg1h, ...
    'Style', 'pushbutton', ...
    'BackgroundColor', text2color, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg1pb, ...

```

```

        'FontSize', basefontsize*bg1updfontscale, ...
        'Units', 'characters', ...
        'Position', [bg1lmargin+(bg1wid-2*bg1lmargin-bg1pbwid)/2, bg1vmargin, bg1pbwid, ...
                    bg1pbhei], ...
        'Callback', @bg1pbc);

bg1pan1h=uipanel('Parent', bg1h, ...
    'BackgroundColor', panelcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', '', ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1lmargin, bg1hei - bg1titlefontscale - bg1vspace1 - 2 - bg1vspace2 - 1 - bg1vspace3...
                - bg1pan12maxhei, bg1pan1wid, bg1pan1hei]);

bg1pan2h=uipanel('Parent', bg1h, ...
    'BackgroundColor', panelcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', '', ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1lmargin, bg1hei - bg1titlefontscale - bg1vspace1 - 2 - bg1vspace2 - 1 - bg1vspace3...
                - bg1pan12maxhei, bg1pan2wid, bg1pan2hei]);

bg1pan3h=uipanel('Parent', bg1h, ...
    'BackgroundColor', panelcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', bg1pan3title, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1lmargin, bg1vmargin+bg1pbhei+bg1vspace6+bg1pan4hei+bg1vspace5, ...
                bg1pan3wid, bg1pan3hei]);

bg1pan4h=uipanel('Parent', bg1h, ...
    'BackgroundColor', panelcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Title', bg1pan4title, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg1lmargin, 2*bg1vmargin+bg1pbhei+bg1vspace6, bg1pan4wid, bg1pan4hei]);

%% Create components of Panel 1 of ButtonGroup 1
for ii=1:3
    for jj=1:2
        bg1pan1texth(ii, jj)=uicontrol('Parent', bg1pan1h, ...
            'Style', 'text', ...
            'BackgroundColor', text2color, ...
            'Visible', 'on', ...
            'String', bg1pan1text{ii, jj}, ...
            'Units', 'characters', ...
            'TooltipString', bg1pan1texttooltip{ii, jj}, ...
            'Position', [bg1pan1lmargin+(bg1pan1textwid(1)+bg1pan1editwid+bg1pan1hspace)...
                        *(jj-1), bg1pan1vmargin+(3-ii)*(1+bg1pan1vspace), bg1pan1textwid(jj), 1]);

        bg1pan1edit(ii, jj)=uicontrol('Parent', bg1pan1h, ...
            'Style', 'edit', ...
            'BackgroundColor', editcolor, ...
            'Visible', 'on', ...
            'String', bg1pan1edit{ii, jj}, ...
            'TooltipString', bg1pan1edittooltip{ii, jj}, ...
            'Units', 'characters', ...
            'Position', [bg1pan1lmargin+bg1pan1textwid(1)+(bg1pan1textwid(2)+...
                        bg1pan1editwid+bg1pan1hspace)*(jj-1), bg1pan1vmargin+(1+bg1pan1vspace)...
                        *(3-ii), bg1pan1editwid, 1]);
    end
end

%% Create components of Panel 2 of ButtonGroup 1
for ii=1:3
    for jj=1:3

```

```

    bg1pan2texth(ii,jj)=uicontrol('Parent',bg1pan2h,...
        'Style','text',...
        'BackgroundColor',text2color,...
        'Visible','on',...
        'String',bg1pan2text{ii,jj},...
        'Units','characters',...
        'Position',[bg1pan2hmargin+(bg1pan2textwid+bg1pan2editwid+bg1pan2hspace)*(jj...
            -1),bg1pan2vmargin+(1+bg1pan2vspace)*(3-ii),bg1pan2textwid,1]);

    bg1pan2edith(ii,jj)=uicontrol('Parent',bg1pan2h,...
        'Style','edit',...
        'BackgroundColor',editcolor,...
        'Visible','on',...
        'String',bg1pan2edit{ii,jj},...
        'Units','characters',...
        'Position',[bg1pan2hmargin+bg1pan2textwid+(bg1pan2textwid+bg1pan2editwid+...
            bg1pan2hspace)*(jj-1),bg1pan2vmargin+(1+bg1pan2vspace)*(3-ii),...
            bg1pan2editwid,1]);
end
end

st={'2,1','3,1','3,2'};

for idx=1:3
    eval(['set(bg1pan2edith(' st{idx} '), 'Enable', 'off')']);
end

set(bg1pan2edith(1,2),'Callback',@bg1pan2editacb);
set(bg1pan2edith(1,3),'Callback',@bg1pan2editbcb);
set(bg1pan2edith(2,3),'Callback',@bg1pan2editccb);

%% Create components of Panel 3 of ButtonGroup 1
for ii=1:3
    bg1pan3text1h(ii)=uicontrol('Parent',bg1pan3h,...
        'Style','text',...
        'BackgroundColor',text2color,...
        'Visible','on',...
        'String',bg1pan3text1{ii},...
        'Units','characters',...
        'Position',[bg1pan3hmargin+bg1pan3text2wid+bg1pan3hspace1+(bg1pan3text1wid+...
            bg1pan3hspace2)*(ii-1),bg1pan3vmargin+bg1pan3vspace2+bg1pan3vspace3+...
            bg1pan3vspace4+3,bg1pan3text1wid,1]);
end

for ii=1:2
    bg1pan3text2h(ii)=uicontrol('Parent',bg1pan3h,...
        'Style','text',...
        'BackgroundColor',text2color,...
        'Visible','on',...
        'String',bg1pan3text2{ii},...
        'Units','characters',...
        'Position',[bg1pan3hmargin,bg1pan3vmargin+1+bg1pan3vspace4+(1+bg1pan3vspace3)*(...
            ii-1),bg1pan3text2wid,1]);
end

for ii=1:2
    for jj=1:3
        bg1pan3edith(ii,jj)=uicontrol(...
            'Parent',bg1pan3h,...
            'Style','edit',...
            'BackgroundColor',editcolor,...
            'Visible','on',...
            'String',bg1pan3edit{ii,jj},...
            'Units','characters',...
            'Position',[bg1pan3hmargin+bg1pan3text2wid+bg1pan3hspace1+(bg1pan3text1wid+...
                bg1pan3hspace2)*(jj-1),bg1pan3vmargin+1+bg1pan3vspace4+(1+bg1pan3vspace3)...
```

```

        )*(2-ii),bg1pan3text1wid,1]);
    end
end

bg1pan3pbh=icontrol( ...
    'Parent',bg1pan3h,...
    'Style','pushbutton',...
    'BackgroundColor',text2color,...
    'Visible','on',...
    'String',bg1pan3pb,...
    'Units','characters',...
    'Position',[bg1pan3hmargin+bg1pan3dist,bg1pan3vmargin,length(bg1pan3pb),1],...
    'Callback',@bg1pan3pbc);

%% Create components of Panel 4 of ButtonGroup 1
for ii=1:2
    bg1pan4text{ii}=icontrol('Parent',bg1pan4h,...
        'Style','text',...
        'BackgroundColor',text2color,...
        'Visible','on',...
        'String',bg1pan4text{ii},...
        'Tooltipstring',bg1pan4texttooltip{ii},...
        'Units','characters',...
        'Position',[bg1pan4hmargin+(bg1pan4textwid(1)+bg1pan4hspace1+bg1pan4editwid+...
            bg1pan4hspace2)*(ii-1),bg1pan4vmargin+1+bg1pan4vspace2,bg1pan4textwid(ii)...
            ,1]);
end

for ii=1:2
    bg1pan4edith{ii}=icontrol('Parent',bg1pan4h,...
        'Style','edit',...
        'BackgroundColor',editcolor,...
        'Visible','on',...
        'String',bg1pan4edit{ii},...
        'Tooltipstring',bg1pan4edittooltip{ii},...
        'Units','characters',...
        'Position',[bg1pan4hmargin+bg1pan4textwid(1)+bg1pan4hspace1+(bg1pan4editwid+...
            bg1pan4hspace2+bg1pan4textwid(2)+bg1pan4hspace1)*(ii-1),bg1pan4vmargin+1+...
            bg1pan4vspace2,bg1pan4editwid,1]);
end

bg1pan4pb1h=icontrol( ...
    'Parent',bg1pan4h,...
    'Style','pushbutton',...
    'BackgroundColor',text2color,...
    'Visible','on',...
    'String',bg1pan4pb1,...
    'Units','characters',...
    'Position',[bg1pan4hmargin,bg1pan4vmargin,length(bg1pan4pb1),1],...
    'Callback',@bg1pan4pb1cb);

bg1pan4pb2h=icontrol( ...
    'Parent',bg1pan4h,...
    'Style','pushbutton',...
    'BackgroundColor',text2color,...
    'Visible','on',...
    'String',bg1pan4pb2,...
    'Units','characters',...
    'Position',[bg1pan4hmargin+bg1pan4textwid(1)+bg1pan4textwid(2)+2*bg1pan4editwid+2*...
        bg1pan4hspace1+bg1pan4hspace2+bg1pan4hspace3,bg1pan4vmargin+1+bg1pan4vspace2,...
        length(bg1pan4pb2),1],...
    'Callback',@bg1pan4pb2cb);

%% Create components of ButtonGroup 2
bg2text1h=icontrol('Parent',bg2h,...

```

```

'Style','text',...
'BackgroundColor',text4color,...
'Visible','on',...
'String',bg2text1,...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin,bg2hei-bg2titlefontscale-bg2vspace1-1,length(bg2text1),1]);

bg2rb1h=uicontrol('Parent',bg2h,...
'Style','radiobutton',...
'BackgroundColor',textcolor,...
'Visible','on',...
'String',bg2rb1,...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin,bg2hei-bg2titlefontscale-bg2vspace1-1-bg2vspace2-1,length(...
bg2rb1)+bg2rboffset-3,1]);

bg2rb2h=uicontrol('Parent',bg2h,...
'Style','radiobutton',...
'BackgroundColor',textcolor,...
'Visible','on',...
'String',bg2rb2,...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin,bg2hei-bg2titlefontscale-bg2vspace1-1-bg2vspace2-1-bg2vspace3...
-1,length(bg2rb2)+bg2rboffset,1]);

bg2text2h=uicontrol('Parent',bg2h,...
'Style','text',...
'BackgroundColor',text3color,...
'Visible','on',...
'String',bg2text2,...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin+bg2rboffset,bg2vmargin+bg2pbhei+bg2vspace5+bg2pan12maxhei+...
bg2vspace4,length(bg2text2),1]);

bg2pan1h=uipanel('Parent',bg2h,...
'BackgroundColor',panelcolor,...
'Visible','on',...
'Title','',...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin,bg2vmargin+bg2pbhei+bg2vspace5+bg2pan12maxhei-bg2pan1hei,...
bg2pan1wid,bg2pan1hei]);

bg2pan2h=uipanel('Parent',bg2h,...
'BackgroundColor',panelcolor,...
'Visible','on',...
'Title','',...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin,bg2vmargin+bg2pbhei+bg2vspace5+bg2pan12maxhei-bg2pan2hei,...
bg2pan2wid,bg2pan2hei]);

bg2pbh=uicontrol('Parent',bg2h,...
'Style','pushbutton',...
'BackgroundColor',[0.8 0.8 0.8],...
'Visible','on',...
'String',bg2pb,...
'FontSize',basefontsize*bg2updfontscale,...
'Units','characters',...
'Position',[bg2hmargin+(bg2wid-2*bg2hmargin-bg2pbwid)/2,bg2vmargin,bg2pbwid,...
bg2pbhei],...
'Callback',@bg2pbc);

%% Create components of Panel 1 of ButtonGroup 2
for ii=1:2
    bg2pan1texth(ii)=uicontrol('Parent',bg2pan1h,...
'Style','text',...
'BackgroundColor',text2color,...

```



```

    'Visible', 'on', ...
    'String', bg2pan1text{ii}, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg2pan1hmargin, bg2pan1vmargin+(1+bg2pan1vspace)*(2-ii), ...
                bg2pan1textwid, 1]);

    bg2pan1edith(ii)=uicontrol('Parent', bg2pan1h, ...
    'Style', 'edit', ...
    'BackgroundColor', editcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg2pan1edit{ii}, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg2pan1hmargin+bg2pan1textwid+bg2pan1hspace, bg2pan1vmargin+(1+...
                bg2pan1vspace)*(2-ii), bg2pan1editwid, 1]);
end

%% Create components of Panel 2 of ButtonGroup 2
for ii=1:2
    bg2pan2text(ii)=uicontrol('Parent', bg2pan2h, ...
    'Style', 'text', ...
    'BackgroundColor', text2color, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg2pan2text{ii}, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg2pan2hmargin, bg2pan2vmargin+(1+bg2pan2vspace)*(2-ii), ...
                bg2pan2textwid, 1]);

    bg2pan2edith(ii)=uicontrol('Parent', bg2pan2h, ...
    'Style', 'edit', ...
    'BackgroundColor', editcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', bg2pan2edit{ii}, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [bg2pan2hmargin+bg2pan2textwid+bg2pan2hspace, bg2pan2vmargin+(1+...
                bg2pan2vspace)*(2-ii), bg2pan2editwid, 1]);
end

set(bg2pan2edith(2), 'Enable', 'Off');

% Create components of Panel 1
for ii=1:2
    pan1text(ii)=uicontrol('Parent', pan1h, ...
    'Style', 'text', ...
    'BackgroundColor', text2color, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', pan1text{ii}, ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [pan1hmargin, pan1hei-pan1titlefontscale-pan1vspace1-1-(2+pan1vspace2)...
                *(ii-1), pan1textwid, 1]);

    pan1sldh(ii)=uicontrol('Parent', pan1h, ...
    'Style', 'slider', ...
    'BackgroundColor', pbcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'Min', 0, 'Max', 1, 'Value', init_transparency(ii), ...
    'Sliderstep', [0.1 0.2], ...
    'Units', 'characters', ...
    'Position', [pan1hmargin, pan1hei-pan1titlefontscale-pan1vspace1-2-(2+pan1vspace2)...
                *(ii-1), pan1sldwid, 1], ...
    'Callback', eval(pan1sldcb{ii}));

    pan1pumh(ii)=uicontrol('Parent', pan1h, ...
    'Style', 'popupmenu', ...
    'BackgroundColor', pbcolor, ...
    'Visible', 'on', ...
    'String', pan1pumstring{ii}, ...

```

```

    'Value',1,...
    'Units','characters',...
    'Position',[panlhmarg,panlhei-panltitlefontscale-panlvspace1-2*panlvspace2...
        -5-(1+panlvspace2)*(ii-1),panlpumwid,1],...
    'Callback',eval(panlpumcb{ii});
end

panlchl=icontrol('Parent',panlh,...
    'Style','checkbox',...
    'BackgroundColor',text2color,...
    'Visible','on',...
    'Value',init_panlch1,...
    'String',panlch1,...
    'Units','characters',...
    'Position',[panlhmarg,panlhei-panltitlefontscale-panlvspace1-3-3*panlvspace2-3-...
        panlvspace3-1,panlchwid,1],...
    'Callback',@panlchlcb);

panlpanh=uipanel('Parent',panlh,...
    'BackgroundColor',panelcolor,...
    'Visible','on',...
    'Title','',...
    'Units','characters',...
    'Position',[panlhmarg,panlhei-panltitlefontscale-panlvspace1-3-3*panlvspace2-3-...
        panlvspace3-1-panlvspace4-panlpanlhei,panlpanlwid,panlpanlhei]);

for ii=1:3
    panlch2h(ii)=icontrol('Parent',panlh,...
        'Style','checkbox',...
        'BackgroundColor',text2color,...
        'Visible','on',...
        'Value',init_panlch2(ii),...
        'String',panlch2{ii},...
        'Units','characters',...
        'Position',[panlhmarg,panlhei-panltitlefontscale-panlvspace1-3-3*panlvspace2...
            -3-panlvspace3-1-panlvspace4-panlpanlhei-panlvspace5-1-(1+panlvspace6)*(ii...
            -1),panlchwid,1],...
        'Callback',eval(panlch2cb{ii}));
end

if ~init_panlch2(3)
    set([panlch2h(1) panlch2h(2)],'Enable','off');
end

panlpan2h=uipanel('Parent',panlh,...
    'BackgroundColor',panelcolor,...
    'Visible','on',...
    'Title',panlpan2title,...
    'FontSize',basefontsize*panlpan2titlefontscale,...
    'Units','characters',...
    'Position',[panlhmarg,panlvmargin+panlpan3hei+panlvspace8,panlpan2wid,panlpan2hei...
        ]);

panlpan3h=uipanel('Parent',panlh,...
    'BackgroundColor',panelcolor,...
    'Visible','on',...
    'Title',panlpan3title,...
    'FontSize',basefontsize*panlpan3titlefontscale,...
    'Units','characters',...
    'Position',[panlhmarg,panlvmargin,panlpan3wid,panlpan3hei]);

% Create components of Panel 2 of Panel 1
for ii=1:2
    panlpan2texth(ii)=icontrol('Parent',panlpan2h,...
        'Style','text',...

```

```

    'BackgroundColor',text2color,...
    'Visible','on',...
    'String',pan1pan2text{ii},...
    'Units','characters',...
    'Position',[pan1pan2hmargin,pan1pan2hei-pan1pan2titlefontscale-pan1pan2vspace1...
        -1-(2+pan1pan2vspace2)*(ii-1),pan1pan2textwid,1]);

pan1pan2sldh(ii)=uicontrol('Parent',pan1pan2h,...
    'Style','slider',...
    'BackgroundColor',pbcolor,...
    'Visible','on',...
    'Min',pan1pan2sldmin(ii),'Max',pan1pan2sldmax(ii),'Value',init_viewpoint(ii),...
    'Sliderstep',[0.001 0.002],...
    'Units','characters',...
    'Position',[pan1pan2hmargin+pan1pan2textwid+pan1pan2hspace,pan1pan2hei-...
        pan1pan2titlefontscale-pan1pan2vspace1-1-(2+pan1pan2vspace2)*(ii-1),...
        pan1pan2sldwid,1],...
    'Callback',eval(pan1pan2sldeb{ii}));

pan1pan2edith(ii)=uicontrol('Parent',pan1pan2h,...
    'Style','edit',...
    'BackgroundColor',editcolor,...
    'Visible','on',...
    'String',pan1pan2edit{ii},...
    'Units','characters',...
    'Position',[pan1pan2hmargin+pan1pan2textwid+pan1pan2hspace,pan1pan2hei-...
        pan1pan2titlefontscale-pan1pan2vspace1-2-(2+pan1pan2vspace2)*(ii-1),...
        pan1pan2editwid,1],...
    'Callback',eval(pan1pan2editcb{ii}));
end

pan1pan2pbh=uicontrol('Parent',pan1pan2h,...
    'Style','pushbutton',...
    'BackgroundColor',pbcolor,...
    'Visible','on',...
    'String',pan1pan2pb,...
    'FontSize',basefontsize*pan1pan2pbfonscale,...
    'Units','characters',...
    'Position',[pan1pan2hmargin+(pan1pan2wid-2*pan1pan2hmargin-pan1pan2pbwid)/2,...
        pan1pan2vmargin,pan1pan2pbwid,pan1pan2pbhei],...
    'Callback',@pan1pan2pbc);

% Create components of Panel 3 of Panel 1
pan1pan3togh=uicontrol('Parent',pan1pan3h,...
    'Style','togglebutton',...
    'BackgroundColor',pbcolor,...
    'Visible','on',...
    'String',pan1pan3tog,...
    'Value',0,...
    'FontSize',basefontsize*pan1pan3togfontscale,...
    'Units','characters',...
    'Position',[pan1pan3hmargin+(pan1pan3wid-2*pan1pan3hmargin-pan1pan3togwid)/2,...
        pan1pan3vmargin,pan1pan3togwid,pan1pan3toghei],...
    'Callback',@pan1pan3togcb,...
    'Enable','Off');

% Create components of Panel 2
for ii=1:2
    pan2pbh(ii)=uicontrol('Parent',pan2h,...
        'Style','pushbutton',...
        'BackgroundColor',pbcolor,...
        'Visible','on',...
        'String',pan2pb{ii},...
        'FontSize',basefontsize*pan2pbfonscale,...
        'Units','characters',...
        'Position',[pan2hmargin+(pan2pbwid(1)+pan2hspace)*(ii-1),pan2vmargin,pan2pbwid(...

```

```

        ii),pan2pbhei],...
        'Callback',eval(pan2pbc{ii}));
end

%% FINALIZE GUI
% handles_list=findall(fh);
waitbar(0.6,h,'Please wait (Finalizing Gui ...)');
cur_viewpoint=init_viewpoint;
rotateh=rotate3d(fh);
set(rotateh,'ActionPostCallback',@rotatecb,'RotateStyle','box','Enable','on');
newrotateh=rotate3d(newfh);
set(newrotateh,'ActionPostCallback',@rotatecb,'RotateStyle','orbit','Enable','off');

% change dimensions and fontsizes of all components to "normalized"
handles_list=[
    ftitleh
    axesh
    bg1h
    bg2h
    pan1h
    pan2h

    % Buttongroup 1
    bg1rb1h
    bg1texth
    bg1rb2h
    bg1pan1h
    bg1pan2h
    bg1pan3h
    bg1pan4h
    bg1pbh

    % Panel 1 of Buttongroup 1
    bg1pan1texth(:,1)
    bg1pan1texth(:,2)
    bg1pan1edith(:,1)
    bg1pan1edith(:,2)

    % Panel 2 of Buttongroup 1
    bg1pan2texth(:,1)
    bg1pan2texth(:,2)
    bg1pan2texth(:,3)
    bg1pan2edith(:,1)
    bg1pan2edith(:,2)
    bg1pan2edith(:,3)

    % Panel 3 of Buttongroup 1
    bg1pan3text1h.'
    bg1pan3text2h.'
    bg1pan3edith(:,1)
    bg1pan3edith(:,2)
    bg1pan3edith(:,3)
    bg1pan3pbh

    % Panel 4 of Buttongroup 1
    bg1pan4texth.'
    bg1pan4edith.'
    bg1pan4pb1h
    bg1pan4pb2h

    % Buttongroup 2
    bg2text1h

```

```

    bg2rb1h
    bg2rb2h
    bg2text2h
    bg2pan1h
    bg2pan2h
    bg2pbh

    % Panel 1 of Buttongroup 2
    bg2pan1texth.'
    bg2pan1edith.'

    % Panel 2 of Buttongroup 2
    bg2pan2texth.'
    bg2pan2edith.'

    % Panel 1
    pan1texth.'
    pan1sldh.'
    pan1pumh.'
    pan1chlh
    pan1ch2h.'
    pan1pan1h
    pan1pan2h
    pan1pan3h

    % Panel 2 of Panel 1
    pan1pan2texth.'
    pan1pan2sldh.'
    pan1pan2edith.'
    pan1pan2pbh

    % Panel 3 of Panel 1
    pan1pan3togh

    % Panel 2
    pan2pbh.'
    ];

level1_handles_list=[
    ftitleh
    axesh
    bg1h
    bg2h
    pan1h
    pan2h
    ];

for ii=1:length(handles_list)
    set(handles_list(ii), 'Units', 'normalized');
end

for ii=1:length(handles_list)
    set(handles_list(ii), 'FontUnits', 'normalized');
end

% show figure (now that all components are built)
set(fh, 'visible', 'on');

% wait a bit cause it takes some time for the fontunits
% to be completely changed to normalized form.
pause(1);

% hide panels no 2 of buttongroups since the default
% (initial) selection is panel 1
set([bg1pan2h bg2pan2h], 'Visible', 'Off');

```

```

% store all font sizes
allfontszs=zeros(1,length(handles_list)); % preallocation (for performance)
for ii=1:length(handles_list)
    allfontszs(ii)=get(handles_list(ii),'FontSize');
end
% [r,c,v]=find(allfontszs<0)

% ---- Adjust figure in case the screen resolution is not high enough----

% Evaluate difference of real figure from the "ideal" one and fix sizes if needed.
% (If the screen is not big enough, Matlab sets the figure dimensions not to the
% preferred values (ideal) but to the ones that allow it to fit in the screen (real).
% However, dimensions of inner figure components are not changed accordingly (by Matlab)...

% Therefore, the GUI is not very functional. In that case, we have to
% change the sizes of inner components, ourselves.

% store dimensions of figure
fdims=get(fh,'Position');

% calculate differences
Δx=fwid-fdims(3);
Δy=fhei-fdims(4);

if Δx>0.5 % if figure width is smaller than expected
    disp('horizontal resolution of screen is small!');
    if minaxeswid>axeswid
        error('minaxeswid>axeswid!');
    end
    Δx2=minaxeswid-(axeswid-Δx);
    if Δx2>0
        disp('horizontal resolution TOO small! Had to horizontally zoom out the figure')...
        ;
        newaxeswid_n=minaxeswid/fdims(3);
        Δx3=Δx-Δx2;
        fwid2=2*hmargin+bg12maxwid+dist3+minaxeswid+dist4+pan12maxwid;
        xscale=(fwid2-Δx2)/fwid2;
    else
        newaxeswid_n=(axeswid-Δx)/fdims(3);
        Δx2=0;
        Δx3=Δx;
        xscale=1;
    end
%
newpan12l_n=(hmargin+bg12maxwid+dist3+dist4)/fdims(3)+newaxiswid_n;
Δx3_n=Δx3/fdims(3);
set(axesh,'Position',get(axesh,'Position')-[0 -Δx3_n*axeshei/axeswid/2 Δx3_n Δx3_n...
*axeshei/axeswid]);
set(pan1h,'Position',get(pan1h,'Position')-[Δx3_n 0 0 0]);
set(pan2h,'Position',get(pan2h,'Position')-[Δx3_n 0 0 0]);
set(titleh,'Position',get(titleh,'Position')-[Δx3_n/2 0 0 0]);
else
    xscale=1;
    Δx2=0;
end

if Δy>0.5 % if figure height is smaller than expected
    disp('vertical resolution of screen is small! Had to vertically zoom out the figure'...
    );
    yscale=(fhei-Δy)/fhei;
else
    yscale=1;
end

% if width and/or height were smaller than expected, figure components must be scaled

```

```

% according to the differences computed above.
if  $\Delta x^2 + \Delta y > 0.5$ 
    scale_vec=[xscale yscale xscale yscale];
    for ii=1:length(level1_handles_list)
        tmpPosition=get(level1_handles_list(ii), 'Position');
        set(level1_handles_list(ii), 'Position', scale_vec.*tmpPosition);
    end
    disp('figure window was scaled');
end
% store final dimensions of "top level" components so that
% we can dock the axes back, if undocked (in case the user undocks the axes
% and then chooses to dock it back).
final_axesdims=get(axesh, 'Position');
final_pan1dims=get(pan1h, 'Position');
final_pan2dims=get(pan2h, 'Position');
final_titledims=get(ftitleh, 'Position');
final_bg1dims=get(bg1h, 'Position');
final_bg2dims=get(bg2h, 'Position');
set([bg1pan1h bg1pan2h bg2pan1h bg2pan2h pan1pan1h], 'Title', '');

% Enable "Undock axes" toggle button
set(pan1pan3togh, 'Enable', 'On');

% Initially, the axes component is docked. Thus, we
% hide the second figure
set(newfh, 'Visible', 'off');

% update waitbar and close it
waitbar(1,h, 'Complete');
close(h)

%% COMPONENTS CALLBACK FUNCTIONS

function pan1pan3togcb (hObject, eventdata, handles)
% "Undock axes" toggle button callback

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles     structure with handles and user data (see GUIDATA)

% if toggle button was pressed in, undock the axes and transfer it into the "new figure"
if get(hObject, 'Value')==1
    cur_fdsims=get(fh, 'Position');
    % temporarily disable rotation
    set(rotateh, 'Enable', 'off');
    % extract axes component and "migrate" it into the "new figure". Bring the "old"...
    figure
    % components closer to one another (now that the axes component is missing).
    set(pan1h, 'Position', final_pan1dims-[final_axesdims(3) 0 0 0]);
    set(pan2h, 'Position', final_pan2dims-[final_axesdims(3) 0 0 0]);
    set(ftitleh, 'Position', final_titledims-[final_axesdims(3)/2 0 0 0]);
    % change old figure name and change its size
    set(fh, 'Name', [figurename ' : Panels'], 'Toolbar', 'none', 'Position', cur_fdsims-[0 0...
        final_axesdims(3)*cur_fdsims(3) 0]);
    scale_vec=[1/(1-final_axesdims(3)) 1 1/(1-final_axesdims(3)) 1];
    for ii=1:length(level1_handles_list)
        tmpPosition=get(level1_handles_list(ii), 'Position');
        set(level1_handles_list(ii), 'Position', scale_vec.*tmpPosition);
    end
    % if "new figure" exists then make it visible
    if ishghandle(newfh)
        set(newfh, 'Visible', 'on');
    % else recreate it (in case the user had already undocked the figure before and ...
        closed it)
    else

```

```

    newfh=figure('Name',[figurename ' : Plot'],'DeleteFcn',@newfdelfcn,'Visible',...
        'on');
    newrotateh=rotate3d(newfh);
    set(newrotateh,'ActionPostCallback',@rotatecb,'RotateStyle','orbit','Enable'...
        , 'off');
end
% migrate axes to the "new figure"
set(axesh,'Parent',newfh,'Position',[0.05 0.1 0.9 0.8]);
set(newrotateh,'Enable','on');

% if toggle button was pressed out, dock the axes back to the "old figure"
else
    dockback();
%     set(newfh,'Visible','off');
end
end

function dockback()
    set(newfh,'Visible','off');
    % increase "old figure" size (correspondingly to its current size)
    % so that it fits (again) the axes (which is docked back into it)
    cur_fdims=get(fh,'Position');
    set(fh,'Name',figurename,'Toolbar','figure','Position',cur_fdims+[0 0 final_axesdims...
        (3)*cur_fdims(3) 0]);
    pause(2);
    % dock axes back to the "old figure"
    set(axesh,'Parent',fh,'Position',final_axesdims);
    % restore dimensions of "top level" components to their previous values (before the ...
    undocking)
    set(pan1h,'Position',final_pan1dims);
    set(pan2h,'Position',final_pan2dims);
    set(ftitleh,'Position',final_titledims);
    set(bg1h,'Position',final_bg1dims);
    set(bg2h,'Position',final_bg2dims);
    set(rotateh,'Enable','on');
    % set the toggle button to 0 (pressed out) anyway because dockback
    % function might have been called due to closing of the "new figure" window
    set(pan1pan3togh,'Value',0);
end

function newfdelfcn(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when "new figure" window is closed

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

    dockback();
end

function fdelfcn(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when "old figure" window is closed

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% if "new figure" exists then close it as well
    if ishghandle(newfh)
        close(newfh);
    end
end

function pan2pb_1cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when "-" button of bottom right panel is pressed

```



```

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
    if fontsize>0.1
        fontsize=fontsize-0.05;
        for ii=1:length(handles_list)
            set(handles_list(ii),'FontSize',allfontszs(ii)*fontsize);
        end
    end
end

function pan2pb_2cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when "+" button of bottom right panel is pressed

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
    if fontsize<1.9
        fontsize=fontsize+0.05;
        for ii=1:length(handles_list)
            set(handles_list(ii),'FontSize',allfontszs(ii)*fontsize);
        end
    end
end

function rotatecb(obj,event_obj)
% function to be called when user rotates the plot

% update "current viewpoint" variable and viewpoint panel (sliders and edit boxes)
    cur_viewpoint=get(axesh,'View');
    set(pan1pan2edith(1),'String',num2str(cur_viewpoint(1)));
    set(pan1pan2edith(2),'String',num2str(cur_viewpoint(2)));
    set(pan1pan2sldh(1),'Value',cur_viewpoint(1));
    set(pan1pan2sldh(2),'Value',cur_viewpoint(2));
end

function pan1pan2sld_1cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user uses the azimuth rotation slider

%     hObject    handle to slider1 (see GCBO)
%     eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
%     handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
%     Hints: get(hObject,'Value') returns position of slider
%           get(hObject,'Min') and get(hObject,'Max') to determine range of slider

% if the slider cursor reaches the limits (-2pi or 2pi) then restore to 0
tmp=get(hObject,'Value');
if tmp==360||tmp==-360
    set(hObject,'Value',0);
    tmp=0;
end
cur_viewpoint(1)=tmp;
% update "current viewpoint" variable and edit boxes of viewpoint panel
set(pan1pan2edith(1),'String',num2str(tmp));
view(axesh,cur_viewpoint);
end

function pan1pan2sld_2cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user uses the elevation rotation slider

%     hObject    handle to slider1 (see GCBO)
%     eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
%     handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%

```

```

%           Hints: get(hObject,'Value') returns position of slider
%           get(hObject,'Min') and get(hObject,'Max') to determine range of slider

% update "current viewpoint" variable and edit boxes of viewpoint panel
tmp=get(hObject,'Value');
% if tmp==180||tmp==-180
%     set(hObject,'Value',0);
%     tmp=0;
% end
cur_viewpoint(2)=tmp;
set(pan1pan2edith(2),'String',num2str(tmp));
view(axesh,cur_viewpoint);
end

function pan1pan2edit_1cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user defines the azimuth angle directly
% in the viewpoint edit box

% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a double

tmp=str2double(get(hObject,'String'));
% if the value exceeds the [-360,360] range add/subtract
% 360 in order to bring it within the range
if abs(tmp)>360
    tmp=rem(tmp,360);
    set(hObject,'String',num2str(tmp));
end
cur_viewpoint(1)=tmp;
set(pan1pan2sldh(1),'Value',tmp);
view(axesh,cur_viewpoint);
end

function pan1pan2edit_2cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user defines the elevation angle directly
% in the viewpoint edit box

% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a double
tmp=str2double(get(hObject,'String'));
if tmp<-180
    tmp=rem(tmp,360)+360;
    set(hObject,'String',num2str(tmp));
elseif tmp>180
    tmp=rem(tmp,360)-360;
    set(hObject,'String',num2str(tmp));
end
cur_viewpoint(2)=tmp;
set(pan1pan2sldh(2),'Value',tmp);
view(axesh,cur_viewpoint);
end

function pan1pan2pbc(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user presses the "reset" button of viewpoint panel

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB

```

```

% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
cur_viewpoint=init_viewpoint;
set(pan1pan2sldh(1), 'Value', cur_viewpoint(1));
set(pan1pan2sldh(2), 'Value', cur_viewpoint(2));
set(pan1pan2edith(1), 'String', num2str(cur_viewpoint(1)));
set(pan1pan2edith(2), 'String', num2str(cur_viewpoint(2)));
view(axesh, cur_viewpoint);
end

function bg1selchcb(hObject, eventdata)
% function to be called when user selects a radio button from buttongroup 1
% ("principal elements + rotation" or "all matrix elements")

% hObject    handle to the selected object in uipanel3
% eventdata  structure with the following fields (see UIBUTTONGROUP)
%   EventName: string 'SelectionChanged' (read only)
%   OldValue: handle of the previously selected object or empty if none was selected
%   NewValue: handle of the currently selected object
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

    if strcmp(get(eventdata.NewValue, 'String'), bg1rb1)
        set(bg1pan1h, 'Visible', 'On');
        set(bg1pan2h, 'Visible', 'Off');
    else
        set(bg1pan1h, 'Visible', 'Off');
        set(bg1pan2h, 'Visible', 'On');
    end
end

function bg2selchcb(hObject, eventdata)
% function to be called when user selects a radio button from buttongroup 1
% ("direction of propagation" or "y and z components of the wavevector")

% hObject    handle to the selected object in uipanel3
% eventdata  structure with the following fields (see UIBUTTONGROUP)
%   EventName: string 'SelectionChanged' (read only)
%   OldValue: handle of the previously selected object or empty if none was selected
%   NewValue: handle of the currently selected object
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

    if strcmp(get(eventdata.NewValue, 'String'), bg2rb1)
        set(bg2pan1h, 'Visible', 'On');
        set(bg2pan2h, 'Visible', 'Off');
    else
        set(bg2pan1h, 'Visible', 'Off');
        set(bg2pan2h, 'Visible', 'On');
    end
end

% functions to be called when user inserts a value in the editboxes of
% "all matrix elements" panel of buttongroup 1. In this case, the corresponding
% (symmetrical) element in the lower triangular part of the dielectric tensor
% gets updated accordingly (so that the tensor is hermitian).

function bg1pan2editacb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject, 'String') returns contents of edit3 as text
%        str2double(get(hObject, 'String')) returns contents of edit3 as a double
set(bg1pan2edith(2,1), 'String', num2str(conj(str2double(get(hObject, 'String'))));
end

function bg1pan2editbcb(hObject, eventdata, handles)

```

```

% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a double
set(bg1pan2edith(3,1),'String',num2str(conj(str2double(get(hObject,'String'))));
end

function bg1pan2editccb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to edit3 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% Hints: get(hObject,'String') returns contents of edit3 as text
%         str2double(get(hObject,'String')) returns contents of edit3 as a double
set(bg1pan2edith(3,2),'String',num2str(conj(str2double(get(hObject,'String'))));
end

function bg1pbcx(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user presses the "Update" button of buttongroup 1
% i.e. the one which triggers the plotting of the normal surface

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

% if update was pressed in "principal elements + rotation" mode,
% compute the actual dielectric tensor matrix and display its elements
% on the "all matrix elements" panel
if strcmp(get(bg1pan1h,'Visible'),'on')
    er0x=str2double(get(bg1pan1edith(1,1),'String'));
    er0y=str2double(get(bg1pan1edith(2,1),'String'));
    er0z=str2double(get(bg1pan1edith(3,1),'String'));
    phi_deg=str2double(get(bg1pan1edith(1,2),'String'));
    theta_deg=str2double(get(bg1pan1edith(2,2),'String'));
    psi_deg=str2double(get(bg1pan1edith(3,2),'String'));
    er=er0_euler2er(er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg);
    for ii=1:3
        for jj=1:3
            set(bg1pan2edith(ii,jj),'String',num2str(er(ii,jj)));
        end
    end
end
% if update was pressed in "all matrix elements" mode,
% compute the principal dielectric tensor matrix (diagonal) and rotation angles,
% by diagonalizing the actual dielectric tensor matrix, and display the values
% on the "principal elements + rotation" panel
else
    for ii=1:3
        for jj=1:3
            er(ii,jj)=str2double(get(bg1pan2edith(ii,jj),'String'));
        end
    end
    [er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg]=er2er0_euler(er);
    set(bg1pan1edith(1,1),'String',num2str(er0x));
    set(bg1pan1edith(2,1),'String',num2str(er0y));
    set(bg1pan1edith(3,1),'String',num2str(er0z));
    set(bg1pan1edith(1,2),'String',num2str(theta_deg));
    set(bg1pan1edith(2,2),'String',num2str(phi_deg));
    set(bg1pan1edith(3,2),'String',num2str(psi_deg));
end

% In any case, compute and plot the normal surface using the
% actual dielectric tensor ("all matrix elements" form) and
% the optic axes using the rotation angles

```

```

% convert angles from degrees to rad form
thetamin=pi/180*str2double(get(bg1pan3edith(1,1),'String'));
thetamax=pi/180*str2double(get(bg1pan3edith(1,2),'String'));
thetastep=pi/180*str2double(get(bg1pan3edith(1,3),'String'));
phimin=pi/180*str2double(get(bg1pan3edith(2,1),'String'));
phimax=pi/180*str2double(get(bg1pan3edith(2,2),'String'));
phistep=pi/180*str2double(get(bg1pan3edith(2,3),'String'));

% compute and plot the normal surface
    buildsurf(er,thetamin,thetamax,thetastep,phimin,phimax,phistep)
end

function buildsurf(er,thetamin,thetamax,thetastep,phimin,phimax,phistep)
% main core function - computes and plots the normal surface

% Construct an array of unit vectors manually, for a certain area
% (e.g complete sphere (with radius 1), a semisphere, or a quadrant of it)
    theta=thetamin:thetastep:thetamax;
    phi=phimin:phistep:phimax;
    cmin=1;
    cmax=length(theta);
    rmin=1;
    rmax=length(phi);
    [T,P]=meshgrid(theta,phi);
    sx=sin(T).*cos(P);
    sy=sin(T).*sin(P);
    sz=cos(T);

% If we wanted the whole surface we could compute the sx,sy,sz arrays by use of the '...
    sphere'
% function, too:
%     N=50;
%     [sx,sy,sz]=sphere(N);

%% Compute the quadratic function coefficients for every point (every unit vector)
C=er(3,1).*er(1,2).*er(2,3)+er(2,1).*er(1,3).*er(3,2)-er(1,1).*er(2,3).*er(3,2)+er...
(1,1).*er(2,2).*er(3,3)-er(3,1).*er(1,3).*er(2,2)-er(2,1).*er(1,2).*er(3,3);
B=-er(2,1).*sx.*sy.*er(3,3)-sx.*sz.*er(1,3).*er(2,2)+sx.^2.*er(2,2).*er(3,3)-er(3,1)...
.*sx.*sz.*er(2,2)+er(3,1).*er(1,2).*sy.*sz-er(1,1).*er(3,3)+er(2,1).*er(1,2)+er...
(3,1).*er(1,3)-er(1,1).*er(2,2)-er(3,1).*er(1,3).*sy.^2+er(2,3).*er(3,2)-sx.^2.*...
er(2,3).*er(3,2)-er(2,2).*er(3,3)-sx.*sy.*er(1,2).*er(3,3)+er(1,1).*er(2,2).*sz.*...
.^2+er(1,1).*sy.^2.*er(3,3)-er(1,1).*sy.*sz.*er(3,2)+er(2,1).*sx.*sz.*er(3,2)+sx.*...
sy.*er(1,3).*er(3,2)-er(1,1).*er(2,3).*sy.*sz+er(3,1).*sx.*sy.*er(2,3)+sx.*sz.*...
er(1,2).*er(2,3)-er(2,1).*er(1,2).*sz.^2+er(2,1).*er(1,3).*sy.*sz;
A=-sx.^2.*er(2,2)-sy.^2.*er(3,3)+er(3,1).*sx.*sz-sx.^2.*er(3,3)-er(2,2).*sz.^2+er...
(3,3)-er(1,1).*sz.^2+er(2,3).*sy.*sz+sx.*sy.*er(1,2)+sx.*sz.*er(1,3)+er(1,1)+er...
(2,2)+er(2,1).*sx.*sy-er(1,1).*sy.^2+sy.*sz.*er(3,2);

%principal axis
%     C=ex*ey*ez;
%     B=sx.^2.*ey.*ez-ex.*ez+ex.*sy.^2.*ez-ex.*ey+ex.*ey.*sz.^2-ey.*ez;
%     A=-ex.*sy.^2-ex.*sz.^2+ex-sx.^2.*ez-ey.*sz.^2-sy.^2.*ez-sx.^2.*ey+ey+ez;

%% Compute the two indices of refraction
% for every point (every unit vector)by solving each quadratic function
    D=B.^2-4.*A.*C;
    D(D<0)=0;
    rootD=sqrt(D);
    n1sq=(-B+rootD)./(2*A);
    n2sq=(-B-rootD)./(2*A);
    if ~isreal(n1sq) | any(n1sq<0) | ~isreal(n2sq) | any(n2sq<0)
        error('complex or negative solution for n1^2! (If Material is lossless then ...
            it probably has either negative principal indices of refraction or is ...
            optically active)', 'Electric permittivity tensor: Unusual Matrix Elements ...
            inserted');
    end
    uwait(errorh);

```

```

end
n1=sqrt(n1sq);
n2=sqrt(n2sq);

%% Build the normal surface
% (the set of k-vectors) by multiplying each unit vectors with its
% corresponding indices of refraction.

% build outer (bigger) surface
X1=n1.*sx;
Y1=n1.*sy;
Z1=n1.*sz;
% build inner (smaller) surface
X2=n2.*sx;
Y2=n2.*sy;
Z2=n2.*sz;

%% Build rotation matrix
R=euler2R(theta_deg, phi_deg, psi_deg);

%% Build the optic axes
if (er0y - er0x > myeps & er0y - er0z < -myeps) | (er0y - er0x < -myeps & er0y - er0z > myeps)
%   if er0y is between the other two
asq=er0z*(er0x - er0y)/(er0x - er0z);
bsq=0;
csq=er0x*(er0z - er0y)/(er0z - er0x);
elseif (er0z - er0x < -myeps & er0z - er0y > myeps) | (er0z - er0x > myeps & er0z - er0y < -myeps)
%   if er0z is between the other two
asq=er0y*(er0x - er0z)/(er0x - er0y);
bsq=er0x*(er0y - er0z)/(er0y - er0x);
csq=0;
elseif (er0x - er0z < -myeps & er0x - er0y > myeps) | (er0x - er0z > myeps & er0x - er0y < -myeps)
%   if er0x is between the other two
asq=0;
bsq=er0z*(er0y - er0x)/(er0y - er0z);
csq=er0y*(er0z - er0x)/(er0z - er0y);
elseif abs(er0x - er0y) < myeps & abs(er0y - er0z) < myeps
asq=0;
bsq=0;
csq=0;
elseif abs(er0x - er0y) < myeps
asq=0;
bsq=0;
csq=1;
elseif abs(er0x - er0z) < myeps
asq=0;
bsq=1;
csq=0;
else
asq=1;
bsq=0;
csq=0;
end
absa=sqrt(asq);
absb=sqrt(bsq);
absc=sqrt(csq);
% a=[absa absa -absa -absa];
% c=[absc -absc absc -absc];
% b=[absb -absb absb -absb];
a=[absa -absa absa -absa absa -absa absa -absa];
b=[absb absb -absb -absb absb absb -absb -absb];
c=[absc absc absc absc -absc -absc -absc -absc];
optaxis0=[a;b;c];
optaxis=R*optaxis0;
optaxis=optaxis/diag(sqrt(sum(optaxis.^2))); % normalization

```

```

%% Plot the two surfaces in the same figure.
axlim=max(max(sqrt(er)));
optaxis=axlim*sqrt(2)*optaxis; optaxis=optaxis/sqrt(2)*1.15;
axes(axesh);
cla;
outersurfh=surf(axesh,X1([rmin:rmax],[cmin:cmax]),Y1([rmin:rmax],[cmin:cmax]),Z1([rmin:...
    rmax],[cmin:cmax]));
alpha(outersurfh,get(pan1slhd(1),'Value'));
hold on;
innersurfh=surf(X2([rmin:rmax],[cmin:cmax]),Y2([rmin:rmax],[cmin:cmax]),Z2([rmin:rmax],[...
    cmin:cmax]));
alpha(innersurfh,get(pan1slhd(2),'Value'));
optsemiaxis1h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,1)],[0 optaxis(2,1)],[0 optaxis(3,1)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis2h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,2)],[0 optaxis(2,2)],[0 optaxis(3,2)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis3h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,3)],[0 optaxis(2,3)],[0 optaxis(3,3)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis4h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,4)],[0 optaxis(2,4)],[0 optaxis(3,4)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis5h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,5)],[0 optaxis(2,5)],[0 optaxis(3,5)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis6h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,6)],[0 optaxis(2,6)],[0 optaxis(3,6)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis7h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,7)],[0 optaxis(2,7)],[0 optaxis(3,7)'],'...
    Linewidth',1.5);
optsemiaxis8h=plot3(axesh,[0 optaxis(1,8)],[0 optaxis(2,8)],[0 optaxis(3,8)'],'...
    Linewidth',1.5);

if get(pan1ch1h,'Value')==get(pan1ch1h,'Min')
    set([optsemiaxis1h optsemiaxis2h optsemiaxis3h optsemiaxis4h optsemiaxis5h ...
        optsemiaxis6h optsemiaxis7h optsemiaxis8h],'Visible','off');
end

if get(pan1ch2h(1),'Value')==get(pan1ch2h(2),'Max')
    box(axesh,'on');
else
    box(axesh,'off');
end

if get(pan1ch2h(2),'Value')==get(pan1ch2h(2),'Max')
    grid(axesh,'on');
else
    grid(axesh,'off');
end

if get(pan1ch2h(3),'Value')==get(pan1ch2h(3),'Max')
    axis(axesh,'on');
else
    axis(axesh,'off');
end

hold off;
xlabel(axesh,'kx');
ylabel(axesh,'ky');
zlabel(axesh,'kz');
axis square;
axis([-axlim axlim -axlim axlim -axlim axlim]);
idx=get(pan1pumh(1),'Value');
if idx>1
    shading(axesh,pan1pumstring{1}{idx});
end
idx=get(pan1pumh(2),'Value');
if idx>1

```

```

    colormap(axesh, pan1pumstring{2}{idx});
end

az_string=get(bg1pan4edith(1), 'String');
el_string=get(bg1pan4edith(2), 'String');

az=str2double(az_string);
el=str2double(el_string);
view(axesh, az, el);
cur_viewpoint=[az, el];
set(pan1pan2edith(1), 'String', az_string);
set(pan1pan2edith(2), 'String', el_string);

end

% functions to be called when user makes use of the upper sliders of the Options panel
% (which adjust the transparency of the two surfaces (inner and outer))
function pan1sld_1cb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to slider1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
% Hints: get(hObject, 'Value') returns position of slider
%        get(hObject, 'Min') and get(hObject, 'Max') to determine range of slider
alpha(outersurfh, get(hObject, 'Value'));
end

function pan1sld_2cb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to slider1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
% Hints: get(hObject, 'Value') returns position of slider
%        get(hObject, 'Min') and get(hObject, 'Max') to determine range of slider
alpha(innersurfh, get(hObject, 'Value'));
end

function pan1pum_1cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user selects a shading style from the Shading pop-up menu
%
% hObject    handle to slider1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
% Hints: get(hObject, 'Value') returns position of slider
%        get(hObject, 'Min') and get(hObject, 'Max') to determine range of slider
idx=get(hObject, 'Value');
if idx>1
    shading(axesh, pan1pumstring{1}{idx});
end
end

function pan1pum_2cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user selects a colormap style from the Color pop-up menu
%
% hObject    handle to slider1 (see GCBO)
% eventdata reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
%
% Hints: get(hObject, 'Value') returns position of slider
%        get(hObject, 'Min') and get(hObject, 'Max') to determine range of slider
idx=get(hObject, 'Value');
if idx>1
    colormap(axesh, pan1pumstring{2}{idx});
end
end

```



```

end
end

% functions to be called when user uses the checkboxes of the Options panel
function pan1ch1cb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to checkbox2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of checkbox2
    if (get(hObject,'Value') == get(hObject,'Max'))
        % Checkbox is checked-take appropriate action
        set([optsemiaxis1h optsemiaxis2h optsemiaxis3h optsemiaxis4h optsemiaxis5h ...
            optsemiaxis6h optsemiaxis7h optsemiaxis8h], 'Visible', 'on');
    else
        % Checkbox is not checked-take appropriate action
        set([optsemiaxis1h optsemiaxis2h optsemiaxis3h optsemiaxis4h optsemiaxis5h ...
            optsemiaxis6h optsemiaxis7h optsemiaxis8h], 'Visible', 'off');
    end
end

function pan1ch2_1cb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to checkbox2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of checkbox2
    if (get(hObject,'Value') == get(hObject,'Max'))
        % Checkbox is checked-take appropriate action
        box(axesh, 'on');
    else
        % Checkbox is not checked-take appropriate action
        box(axesh, 'off');
    end
end

function pan1ch2_2cb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to checkbox2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of checkbox2
    if (get(hObject,'Value') == get(hObject,'Max'))
        % Checkbox is checked-take appropriate action
        grid(axesh, 'on');
    else
        % Checkbox is not checked-take appropriate action
        grid(axesh, 'off');
    end
end

function pan1ch2_3cb(hObject, eventdata, handles)
% hObject    handle to checkbox2 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
% Hint: get(hObject,'Value') returns toggle state of checkbox2
    if (get(hObject,'Value') == get(hObject,'Max'))
        % Checkbox is checked-take appropriate action
        axis(axesh, 'on');
        set(pan1ch2h(1), 'Enable', 'on');
        set(pan1ch2h(2), 'Enable', 'on');
    else
        % Checkbox is not checked-take appropriate action
        axis(axesh, 'off');
        set(pan1ch2h(1), 'Enable', 'off');
        set(pan1ch2h(2), 'Enable', 'off');
    end
end
end

```

```

function bg1pan3pbc(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user presses the "Default Values" button of buttongroup 1

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
set(bg1pan3edith(1,1), 'String', '0');
set(bg1pan3edith(1,2), 'String', '180');
set(bg1pan3edith(1,3), 'String', '5');
set(bg1pan3edith(2,1), 'String', '0');
set(bg1pan3edith(2,2), 'String', '360');
set(bg1pan3edith(2,3), 'String', '5');
end

function bg1pan4pb1cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user presses the "get current values" button of buttongroup...
1

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

set(bg1pan4edith(1), 'String', num2str(cur_viewpoint(1)));
set(bg1pan4edith(2), 'String', num2str(cur_viewpoint(2)));
end

function bg1pan4pb2cb(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user presses the "reset" button of buttongroup 1

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)
set(bg1pan4edith(1), 'String', num2str(init_viewpoint(1)));
set(bg1pan4edith(2), 'String', num2str(init_viewpoint(2)));
end

function bg2pbc(hObject, eventdata, handles)
% function to be called when user presses the update button from the buttongroup 2

% hObject    handle to pushbutton4 (see GCBO)
% eventdata  reserved - to be defined in a future version of MATLAB
% handles    structure with handles and user data (see GUIDATA)

%-- future extension--

end

end

```

B.2 Βοηθητικές Συναρτήσεις

B.2.1 Αρχείο er0_euler2er.m

```
function er=er0_euler2er(er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg)
    er0=diag([er0x,er0y,er0z]);
    Rn=euler2R(theta_deg,phi_deg,psi_deg);
    er=Rn*er0*Rn';
end
```

B.2.2 Αρχείο er2er0_euler.m

```
function [er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg]=er2er0_euler(er)
    myeps=256*eps;
    [R, D] = eig(er);
    [d, didx]=sort(diag(D));
    if abs(d(2)-d(1))<myeps
        if abs(d(3)-d(2))<myeps
            % isotropic
            disp('isotropic !!');
            newR=orth(R);
        else
            newRpart=orth([R(:,didx(1)) R(:,didx(2))]);
            newR(:,didx(1))=newRpart(:,1);
            newR(:,didx(2))=newRpart(:,2);
            newR(:,didx(3))=R(:,didx(3));
            msg(didx(1))='o';
            msg(didx(2))='o';
            msg(didx(3))='e';
            % disp(['uniaxial of the form ' msg ' !!']);
        end
    elseif abs(d(3)-d(2))<myeps
        newRpart=orth([R(:,didx(2)) R(:,didx(3))]);
        newR(:,didx(2))=newRpart(:,1);
        newR(:,didx(3))=newRpart(:,2);
        newR(:,didx(1))=R(:,didx(1));
        msg(didx(2))='o';
        msg(didx(3))='o';
        msg(didx(1))='e';
        % disp(['uniaxial of the form ' msg]);
    else
        disp('biaxial !!');
        newR=R;
    end
    % error=norm(newR'*newR-eye(3))
    newR*D*newR';
    [theta_deg,phi_deg,psi_deg]=R2euler(newR);

    R2=euler2R(theta_deg,phi_deg,psi_deg);

    er0x=D(1,1);
    er0y=D(2,2);
    er0z=D(3,3);
    er2=er0_euler2er(er0x,er0y,er0z,theta_deg,phi_deg,psi_deg)
end
```

B.2.3 Αρχείο euler2R.m

```
function R=euler2R(theta_deg,phi_deg,psi_deg)
    deg2rad=pi/180;
```

```

theta=theta_deg*deg2rad;
phi=phi_deg*deg2rad;
psi=psi_deg*deg2rad;
R=[
cos(psi)*cos(phi)-cos(theta)*sin(phi)*sin(psi) -sin(psi)*cos(phi)-cos(theta)*sin(phi...
)*cos(psi) sin(theta)*sin(phi)
cos(psi)*sin(phi)+cos(theta)*cos(phi)*sin(psi) -sin(psi)*sin(phi)+cos(theta)*cos(phi...
)*cos(psi) -sin(theta)*cos(phi)
sin(theta)*sin(psi) sin(theta)*cos(psi) cos(theta)
];
% error=norm(R*R' - eye(3))
end

```

Β.2.4 Αρχείο R2euler.m

```

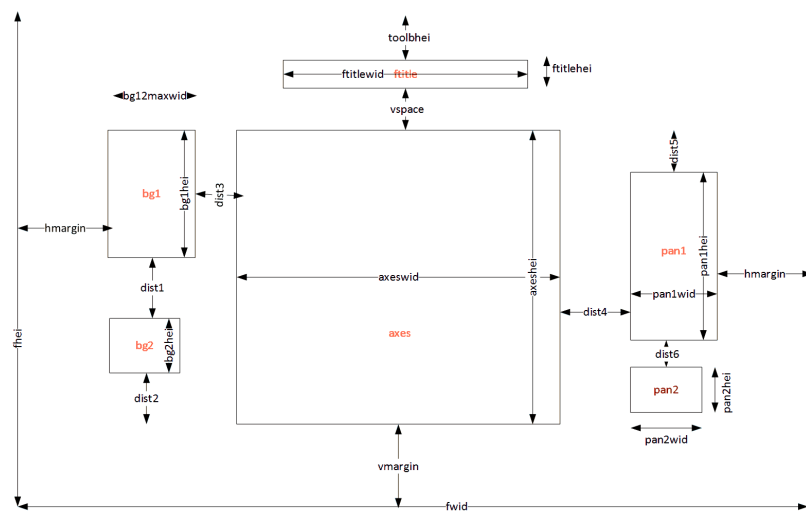
function [theta_deg,phi_deg,psi_deg]=R2euler(R)
sin_theta=sqrt(R(3,1)^2+R(3,2)^2);
if sin_theta>eps*16
psi=atan2(R(3,1),R(3,2));
theta=atan2(sin_theta,R(3,3));
phi=atan2(R(1,3),-R(2,3));
else
psi=atan2(-R(1,2),R(1,1));
theta=atan2(sin_theta,R(3,3));
phi=0;
end
rad2deg=180/pi;
theta_deg=theta*rad2deg;
phi_deg=phi*rad2deg;
psi_deg=psi*rad2deg;
end

```

Παράρτημα Γ'

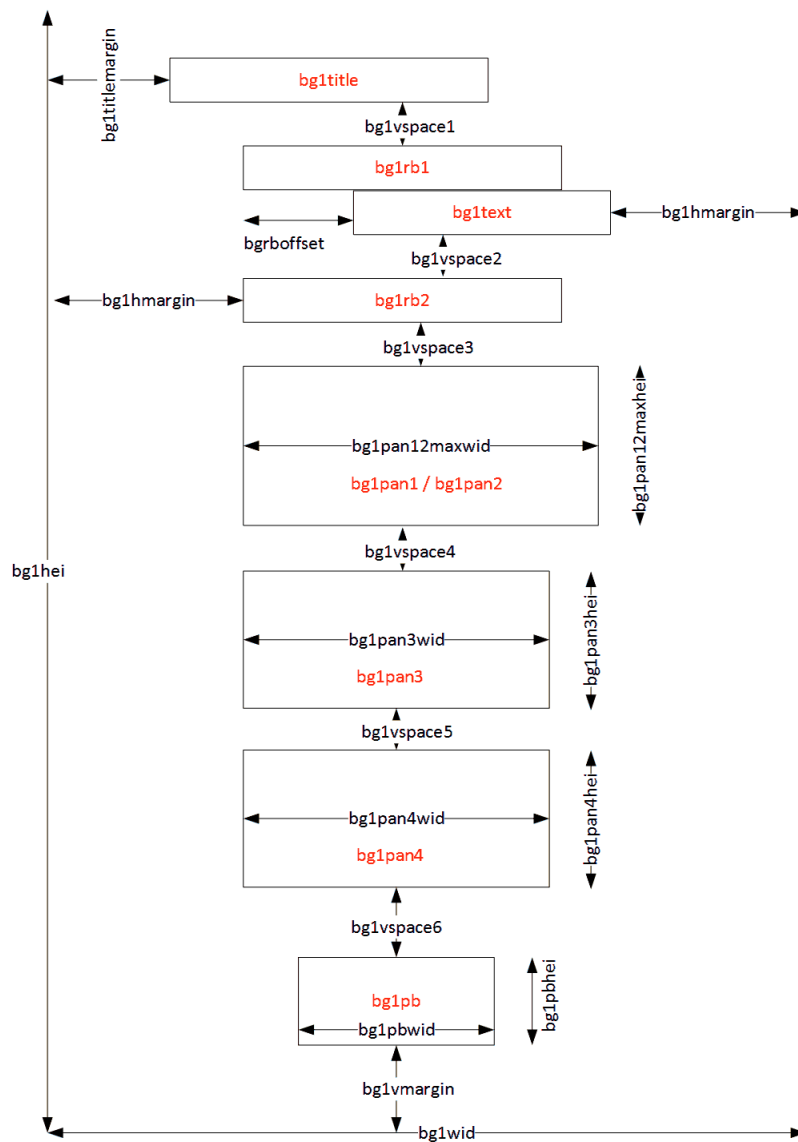
Χάρτης μεταβλητών προγράμματος B

Γ.1 Βασικό παράθυρο γραφικού περιβάλλοντος

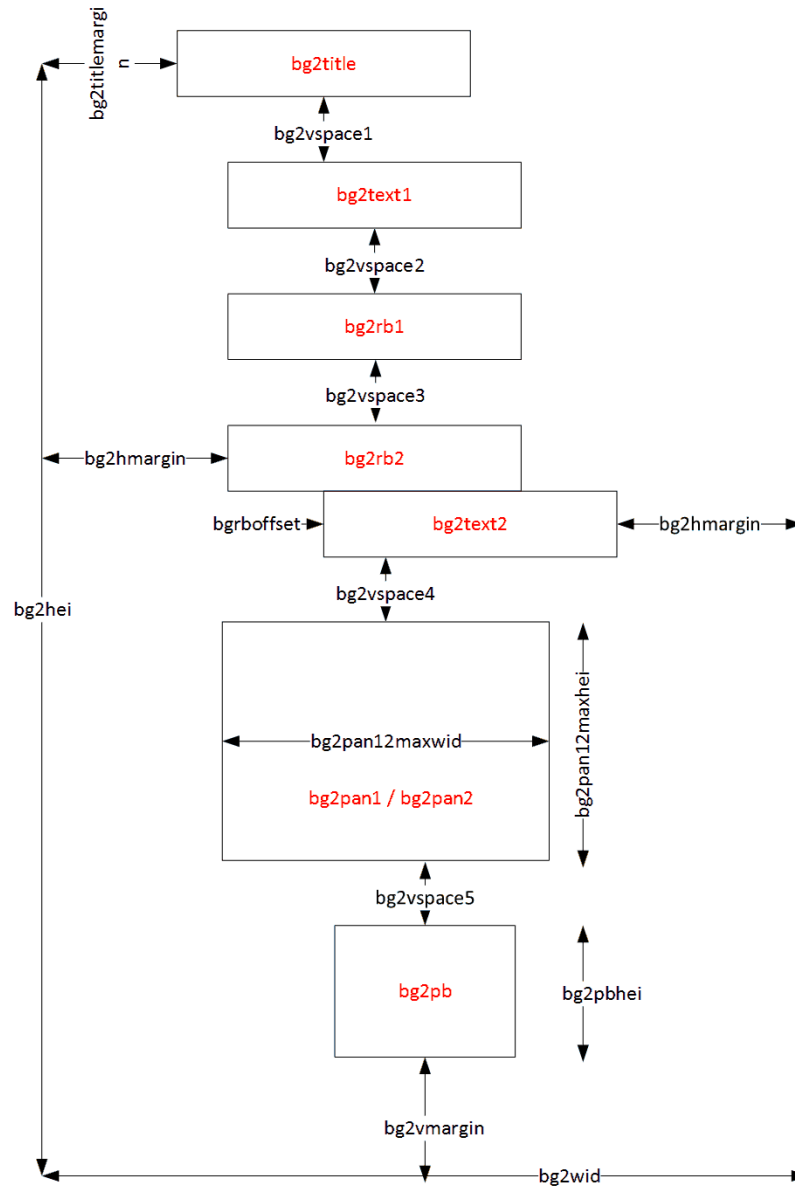


Σχήμα Γ.1: Χάρτης μεταβλητών ολόκληρου του GUI (*figure component*)

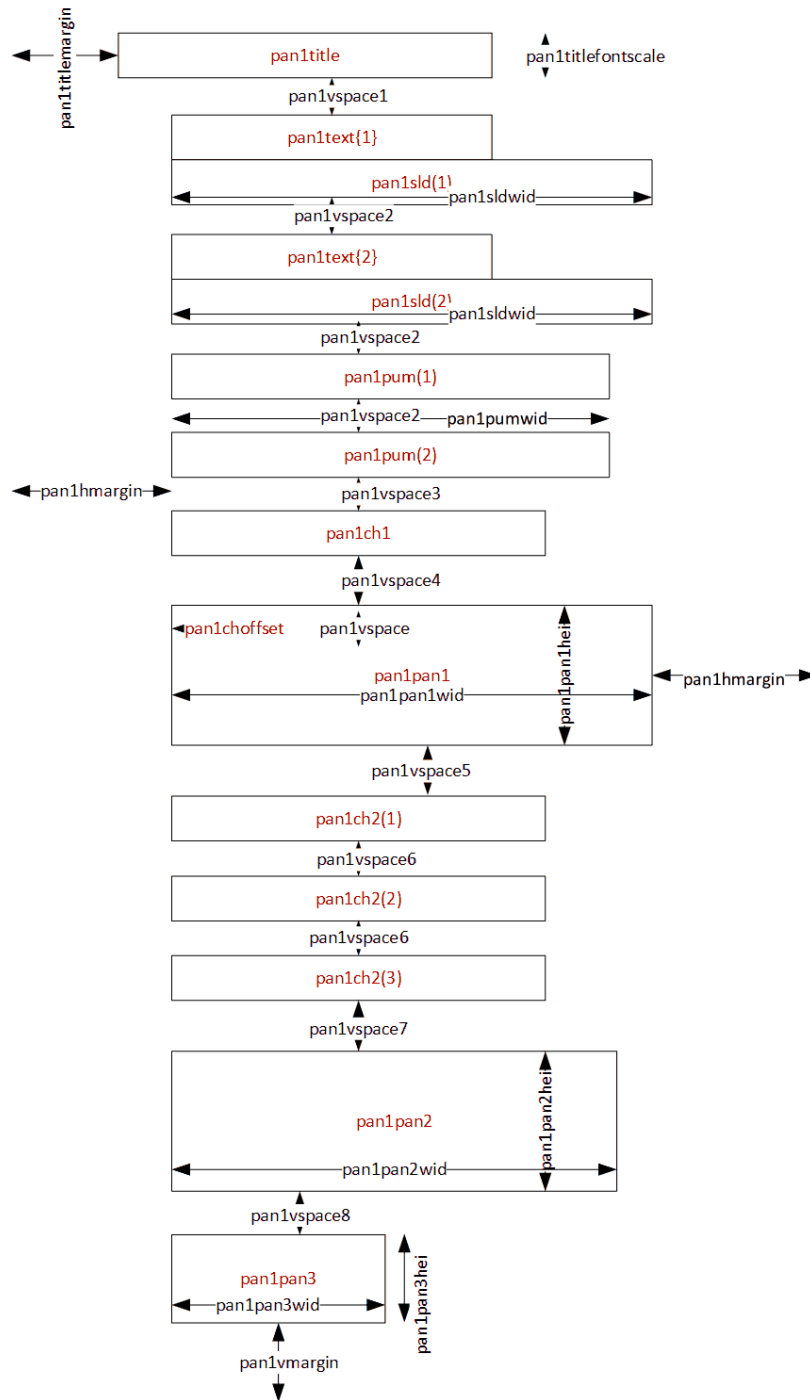
Γ.2 Κύρια panels του GUI



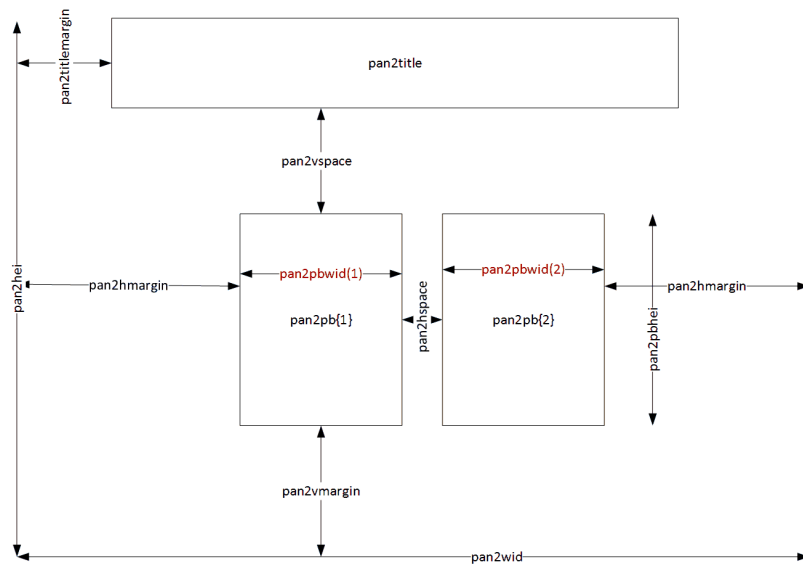
Σχήμα Γ.2: Χάρτης μεταβλητών του πάνω αριστερά πάνελ του GUI ($bg1$ component) (παράμετροι κατασκευής της κυματοεπιφάνειας)



Σχήμα Γ.3: Χάρτης μεταβλητών του κάτω αριστερά πάνελ του GUI (*bg2* component) (Εργαλείο Εύρεσης ιδιορυθμών)

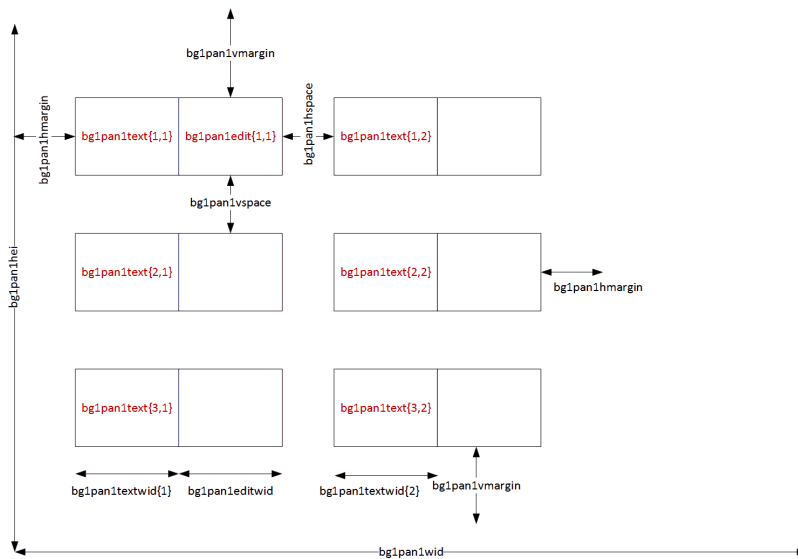


Σχήμα Γ.4: Χάρτης μεταβλητών του πάνω δεξιά πάνελ του GUI (*pan1* component) (Ρυθμίσεις γραφήματος (κατόπιν κατασκευής του))

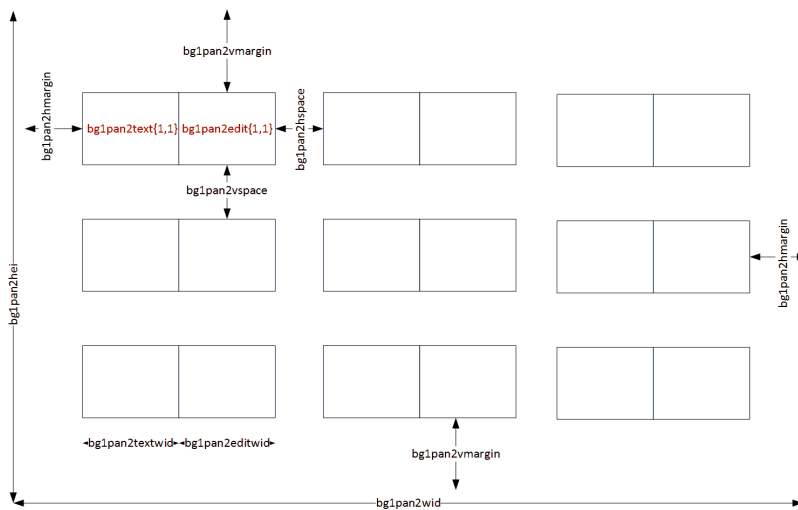


Σχήμα Γ.5: Χάρτης μεταβλητών του κάτω δεξιού πάνελ του GUI (*pan2* component) (Πλήκτρα Αυξομείωσης μεγέθους όλων των γραμματοσειρών του GUI)

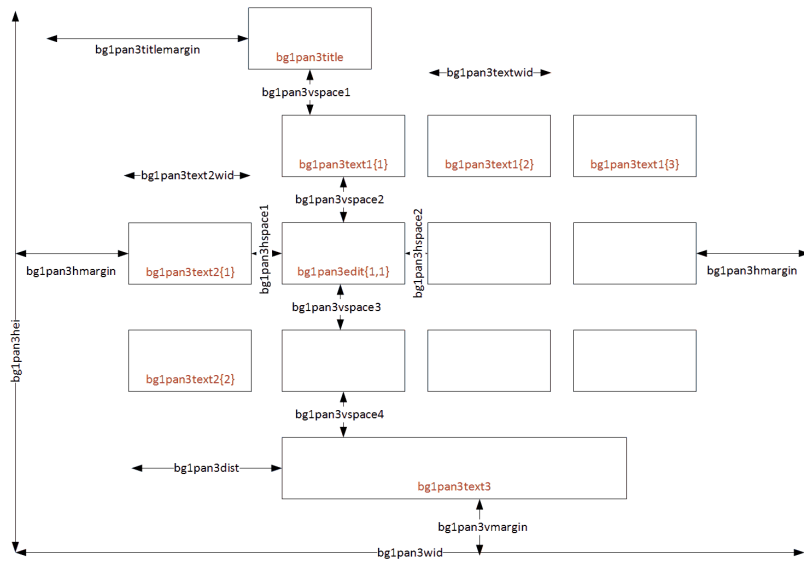
Γ.3 Components του πάνω αριστερά panel (bg1)



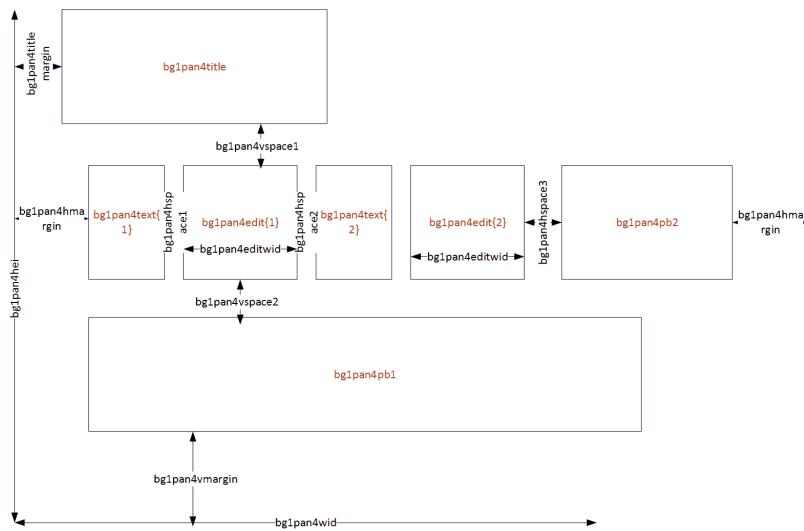
Σχήμα Γ.6: Χάρτης μεταβλητών του `bg1pan1` component (Ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή βάσει του κύριου διηλεκτρικού ταυυστή και των γωνιών Euler περιστροφής του κρυστάλλου)



Σχήμα Γ.7: Χάρτης μεταβλητών του `bg1pan2` component (Απευθείας ορισμός του διηλεκτρικού ταυυστή (βάσει των στοιχείων του))

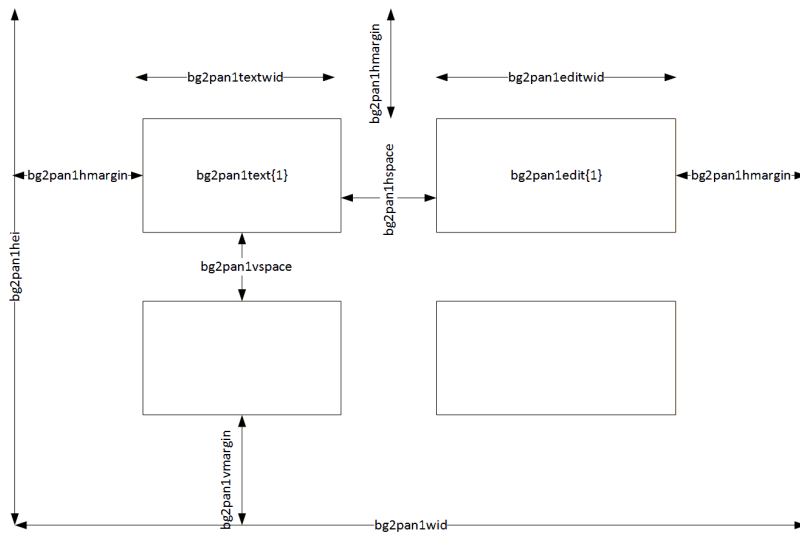


Σχήμα Γ.8: Χάρτης μεταβλητών του `bg1pan3` component (Εύρος γωνιών απεικόνισης της κυματοεπιφάνειας)

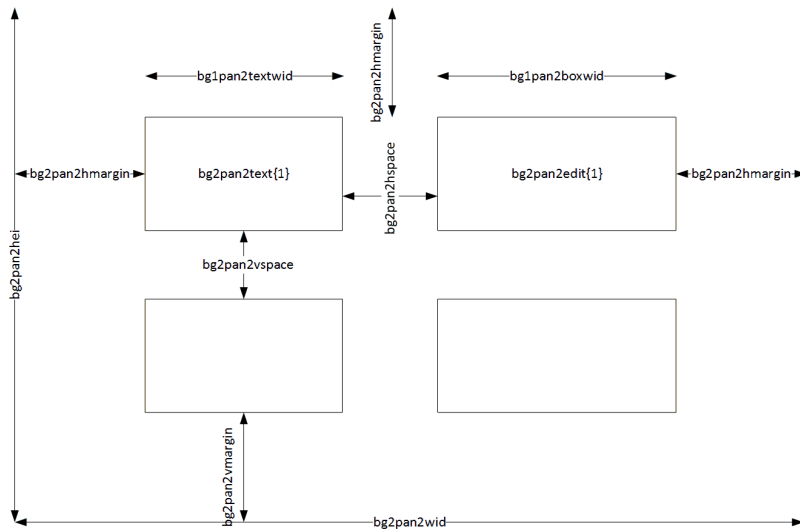


Σχήμα Γ.9: Χάρτης μεταβλητών του `bg1pan4` component (Αρχική οπτική γωνία γραφήματος)

Γ.4 Components του κάτω αριστερά panel (bg2)

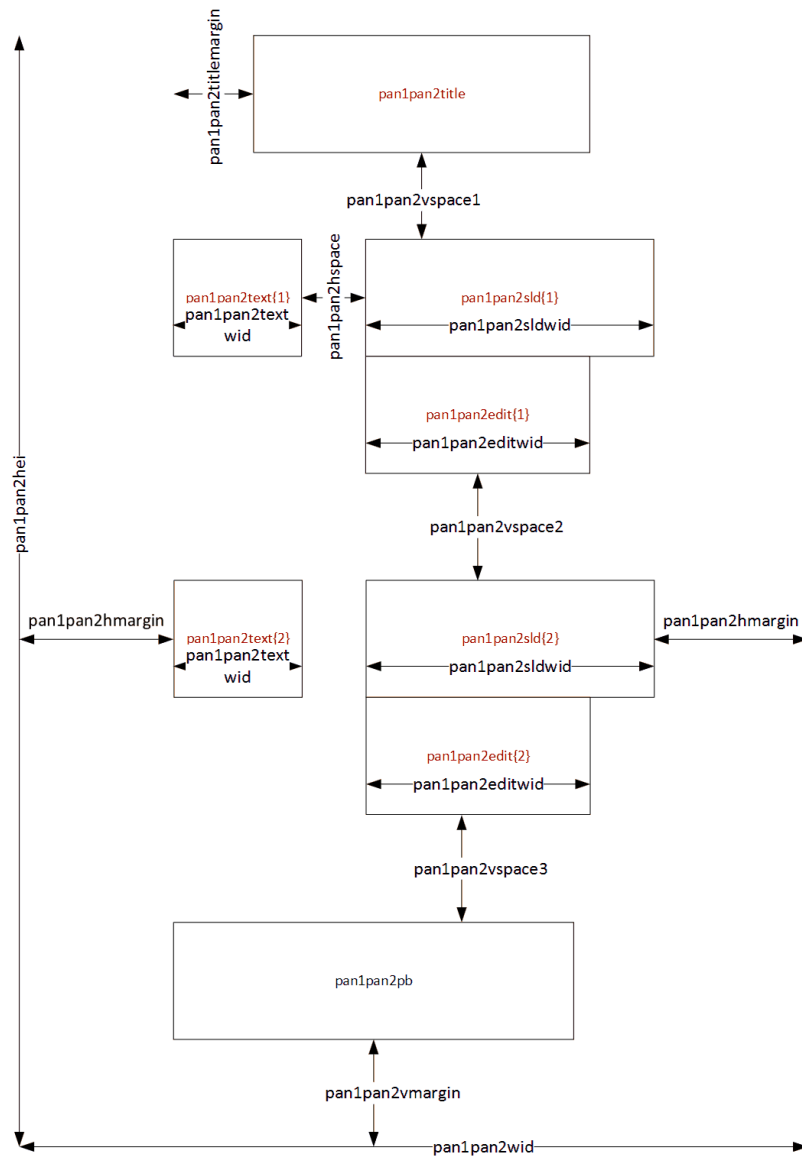


Σχήμα Γ.10: Χάρτης μεταβλητών του *bg2pan1* component (Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένη κατεύθυνση διάδοσης)

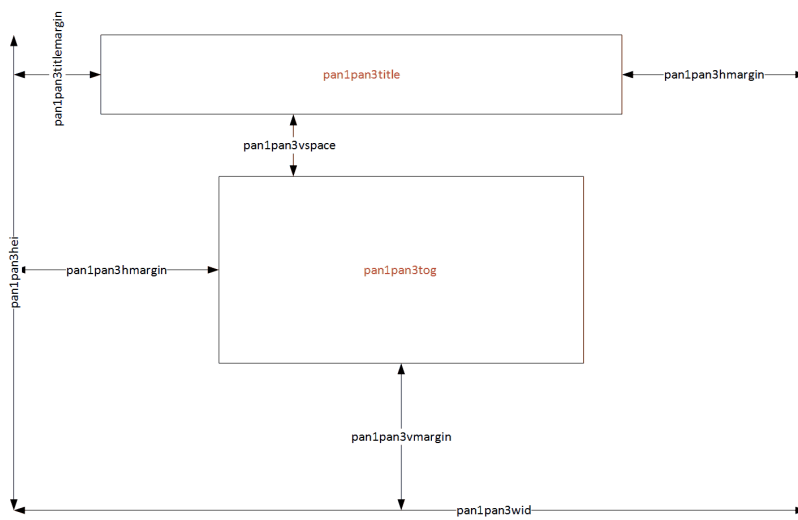


Σχήμα Γ.11: Χάρτης μεταβλητών του *bg2pan2* component (Εύρεση ιδιορυθμών για δεδομένες y και z συνιστώσες του κυματανύσματος)

Γ.5 Components του πάνω δεξιά panel (pan1)



Σχήμα Γ.12: Χάρτης μεταβλητών του `pan1pan2` component (Ρύθμιση της οπτικής γωνίας)



Σχήμα Γ.13: Χάρτης μεταβλητών του `pan1pan3` component (Εξαγωγή γραφήματος σε ξεχωριστό παράθυρο)

Βιβλιογραφία

- [1] S. Sze. *Semiconductor Devices: Physics and Technology*. John Wiley & Sons, Limited, 2012.
- [2] Wikipedia. Crystal structure — wikipedia, the free encyclopedia, 2014.
- [3] G. Fowles. *Introduction to Modern Optics*. Holt, Rinehart & Winston, Incorporated, 1975.
- [4] O. Aharon and I. Abdulhalim. Tunable optical filter having a large dynamic range. *Opt. Lett.*, 34(14):2114–2116, Jul 2009.
- [5] O. Aharon, A. Safrani, R. Moses, and I. Abdulhalim. Liquid crystal tunable filters and polarization controllers for biomedical optical imaging, 2008.
- [6] Wikipedia. Plane wave — wikipedia, the free encyclopedia, 2014.
- [7] A. Yariv and P. Yeh. *Optical Waves in Crystals*. John Wiley & Sons.
- [8] Wikipedia. Sinusoidal plane-wave solutions of the electromagnetic wave equation — wikipedia, the free encyclopedia, 2014.
- [9] G. Landry and T. Maldonado. Complete method to determine transmission and reflection characteristics at a planar interface between arbitrarily oriented biaxial media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12(9):2048–2063, Sep 1995.
- [10] Wikipedia. Birefringence — wikipedia, the free encyclopedia, 2014.
- [11] S. Lipson, H. Lipson, and D. Tannhauser. *Optical Physics*. Optical Physics. Cambridge University Press, 1995.
- [12] J. Graham. Arbitrarily oriented biaxially anisotropic media: Wave behavior and microstrip antennas.
- [13] M. Heidary, A. Abdolali, and M. Salary. An exact formulation for the reflection coefficient from anisotropic multilayer structures with arbitrary backing. *Progress In Electromagnetics Research M*, 30:79–93, 2013.
- [14] S. Kasap. *Principles of Electronic Materials and Devices*. McGraw-Hill, Inc., New York, NY, USA, 3 edition, 2006.
- [15] <http://www.unistudyguides.com/wiki/Polarisation>.
- [16] Wikipedia. Waveplate — wikipedia, the free encyclopedia, 2014.
- [17] Wikipedia. Polarizer — wikipedia, the free encyclopedia, 2014.

- [18] P. Yeh. *Optical Waves in Layered Media (Wiley Series in Pure and Applied Optics)*. Wiley-Interscience, 2nd edition, March 2005.
- [19] J. Beeckman, T. Hui, P. Vanbrabant, R. Zmijan, and K. Neyts. Polarization selective wavelength tunable filter. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 502(1):19–28, 2009.
- [20] <http://demoweb.physics.ucla.edu/content/10-birefringence>.
- [21] <http://www.snipview.com/q/Liquid>
- [22] Ι. Τσαλαμέγκας and Ι. Ρουμελιώτης. *Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία και Κύματα*. Εκδόσεις Τζιόλα, 2010.
- [23] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 7 edition, 1999.
- [24] Η. Γλύτσης. *Ανακεφαλαίωση Αρχών Ηλεκτρομαγνητισμού. Σημειώσεις μαθήματος "Ηλεκτροοπτική και Εφαρμογές"*, 2012.
- [25] Ν. Καδιανάκης and Σ. Καρανάσιος. *Γραμμική Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές*. Εκδόσεις ΕΜΠ.
- [26] P. Yeh. Electromagnetic propagation in birefringent layered media. *J. Opt. Soc. Am.*, 69(5):742–756, May 1979.
- [27] Κ. Τζαφέστας. *Σημειώσεις μαθήματος Ρομποτική Ι: Ανάλυση, Έλεγχος, Εργαστήριο*.
- [28] I. Hodgkinson, S. Kassam, and Q. Wu. Eigenequations and compact algorithms for bulk and layered anisotropic optical media: Reflection and refraction at a crystal-crystal interface. 133(1):75–83, may 1997.
- [29] D. Berreman. Optics in stratified and anisotropic media: 4×4 -matrix formulation. *J. Opt. Soc. Am.*, 62(4):502–510, Apr 1972.
- [30] R. Jones. A new calculus for the treatment of optical systems. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7):488–493, Jul 1941.
- [31] S. Teitler and B. Hennis. Refraction in stratified, anisotropic media. *J. Opt. Soc. Am.*, 60(6):830–834, Jun 1970.
- [32] H. Wöhler, M. Fritsch, G. Haas, and D. Mlynski. Characteristic matrix method for stratified anisotropic media: optical properties of special configurations. *J. Opt. Soc. Am. A*, 8(3):536–540, Mar 1991.
- [33] S. Stallnga. Berreman 4 matrix method for reflective liquid crystal displays. *Journal of Applied Physics*, 85(6):3023–3031, Mar 1999.
- [34] K. Eidner. Light propagation in stratified anisotropic media: orthogonality and symmetry properties of the 4×4 matrix formalisms. *J. Opt. Soc. Am. A*, 6(11):1657–1660, Nov 1989.
- [35] I. Abdulhalim. Analytic propagation matrix method for linear optics of arbitrary biaxial layered media. *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, 1(5):646, 1999.
- [36] A. Eroglu, Y. Lee, and J. Lee. Wave propagation and fresnel coefficients for three layered uniaxially anisotropic media with arbitrarily oriented optic axes.

- [37] V. Fesenko, I. Sukhoivanov, S. Shul'ga, and J. Andrade Lucio. Propagation of electromagnetic waves in anisotropic photonic structures. 2013.
- [38] K. Shoemake. Graphics gems iv. chapter "Euler Angle Conversion", pages 222–229. Academic Press Professional, Inc., San Diego, CA, USA, 1994.
- [39] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 4 edition, 1998.
- [40] P. Yeh and C. Gu. *Optics of Liquid Crystal Displays*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley, 2010.
- [41] T. Scharf. *Polarized Light in Liquid Crystals and Polymers*. Wiley, 2007.
- [42] D. Yang and S. Wu. *Fundamentals of Liquid Crystal Devices*. Wiley Series in Display Technology. Wiley, 2014.
- [43] Η. Αβραμόπουλος. Φωτονική Τεχνολογία στις Τηλεπικοινωνίες. Σημειώσεις μαθήματος "Φωτονική Τεχνολογία για Τηλεπικοινωνίες", 2012.
- [44] D. Cheng. *Field and Wave Electromagnetics*.
- [45] D. Pozar. *Microwave Engineering*. Wiley, 2004.
- [46] I. Hodgkinson and Q. Wu. Effective principal refractive indices and column angles for periodic stacks of thin birefringent films. *J. Opt. Soc. Am. A*, 10(9):2065–2071, Sep 1993.
- [47] I. Hodgkinson and D. Endelega. Bound modes in anisotropic multilayer thin film waveguides. *Appl. Opt.*, 29(30):4424–4426, Oct 1990.
- [48] J. Graham and J. Lee. Reflection and transmission from biaxially anisotropic-isotropic interfaces. *Progress In Electromagnetics Research*, 136:681–702, 2013.
- [49] J. Tsalamengas. Interaction of electromagnetic waves with general bianisotropic slabs. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 40(10):1870–1878, Oct 1992.
- [50] P. Yeh, A. Yariv, and C. Hong. Electromagnetic propagation in periodic stratified media. i. general theory. *J. Opt. Soc. Am.*, 67(4):423–438, Apr 1977.
- [51] V. Skomorovsky, G. Kushtal, and V. Sadokhin. Wide-field solc-type birefringent filter, 2012.