



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Fredholm στον
Ηλεκτρομαγνητισμό Χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο των
Ροπών και Σχήματα Ομαλοποίησης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Γ. Κωνσταντίνου

Επιβλέπων : Γεώργιος Φικιώρης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2015



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Επίλυση Ολοκληρωτικών Εξισώσεων Fredholm στον
Ηλεκτρομαγνητισμό Χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο των
Ροπών και Σχήματα Ομαλοποίησης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Γ. Κωνσταντίνου

Επιβλέπων : Γεώργιος Φικιώρης
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23^η Μαρτίου 2015.

.....
Γεώργιος Φικιώρης
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Ιωάννης Ρουμελιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Αθανάσιος Παναγόπουλος
Επικ. Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2015

.....
Δημήτριος Γ. Κωνσταντίνου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνου Δημήτριος 2015

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται οι ολοκληρωτικές εξισώσεις και πιο συγκεκριμένα οι εξισώσεις τύπου Fredholm. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν είτε αναλυτικά, είτε με αριθμητικές μεθόδους. Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μία διεξοδική βιβλιογραφική παρουσίαση των ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm και αρκετών διαδικασιών επίλυσης τους. Παρόλα αυτά, οι αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης των ολοκληρωτικών εξισώσεων δεν μπορούν να δώσουν πάντα σαφή αποτελέσματα. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητο να επιστρατεύονται αριθμητικές μέθοδοι με βάση τις οποίες, σύνθετες ολοκληρωτικές εξισώσεις επιλύονται αριθμητικά. Έτσι, στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μέθοδος των ροπών, σύμφωνα με την οποία μία ολοκληρωτική εξίσωση στον ηλεκτρομαγνητισμό, μετατρέπεται σε μία εξίσωση μητρώων που είναι εύκολα επιλύσιμη με τη βοήθεια λογισμικών όπως το MATLAB. Πιο συγκεκριμένα αφού παρουσιαστούν οι γενικοί κανόνες επίλυσης με τη βοήθεια της μεθόδου των ροπών, παρουσιάζεται η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén για μία γραμμική κεραία. Επιπρόσθετα, χρησιμοποιείται το λογισμικό MATLAB, για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén με σημειακή προσαρμογή χρησιμοποιώντας παλμικές συναρτήσεις βάσης. Στο τρίτο και τελευταίο Κεφάλαιο της διπλωματικής εργασίας, παρουσιάζεται μία μέθοδος ομαλοποίησης, η οποία αποσκοπεί στη μετατροπή μίας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm α' είδους σε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm β' είδους. Αρκετές ολοκληρωτικές εξισώσεις α' είδους, είναι δύσκολο να επιλυθούν ακόμα και με αριθμητικές μεθόδους δίνοντας έτσι ανακριβή αποτελέσματα. Για αυτό το λόγο με τη βοήθεια της θεωρίας τελεστών μία ολοκληρωτική εξίσωση α' είδους μπορεί να μετατραπεί σε εξίσωση β' είδους. Στην παρούσα διπλωματική θα εξετάσουμε δύο διαφορετικές μεθόδους που βασίζονται στην ομαλοποίηση (regularization) των εξισώσεων. Η πρώτη είναι η Method of Analytical Regularization που αναλύθηκε από τον A. Nosich και η δεύτερη είναι η Analytical Regularization Method του Y. Tuchkin. Σκοπός μας είναι η παρουσίαση της κάθε μεθόδου ξεχωριστά και έπειτα η εύρεση της μεταξύ τους συσχέτισης, χρησιμοποιώντας θεωρία τελεστών.

Λέξεις κλειδιά: Ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, Μέθοδος Ροπών, Τελεστής, Ολοκληρωτική εξίσωση Hallén, Σκέδαση

Abstract

This work examines the solvability of Fredholm type integral equations, using analytical or numerical methods. In the first chapter, there is a thorough demonstration on how someone can solve analytically a Fredholm integral equation. However, not every integral equation can be solved using these methods, so it is important to solve them numerically. Thus, the second chapter is demonstrated the method of moments. Especially, there is an example of point matching in order to solve Hallén's integral equation on a linear antenna, using MATLAB. In the final chapter of the thesis, regularization methods are discussed. These methods convert a Fredholm integral equation of the first kind into a second kind equation, with a smoother kernel. More specifically, we examine two methods, A. Nosich's Method of Analytical Regularization and Y. Tuchkin's Analytical Regularization Method. Our main objective is to find similarities differences between these methods using operator theory.

Key words: Fredholm integral equation, Method of Moments, Operator, Hallén's Integral Equation, Scattering

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα της εργασίας μου, αναπληρωτή καθηγητή, κύριο Γεώργιο Φικιώρη για την εμπιστοσύνη του και τη δυνατότητα που μου προσέφερε να ασχοληθώ με ένα τόσο ενδιαφέρον θέμα, που με έφερε σε επαφή με τη θεωρία των τελεστών, των ολοκληρωτικών εξισώσεων και του υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού. Τον ευχαριστώ επίσης για τη συνεχή βοήθεια και την καθοδήγηση που μου παρείχε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας εργασίας. Ακόμα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή, κύριο Ιωάννη Ρουμελιώτη για τις χρήσιμες γνώσεις που μου προσέφερε στα πλαίσια των μαθημάτων που διδάσκει. Τέλος, ευχαριστώ πολύ την μητέρα μου Ευαγγελία, την αδερφή μου Ανδριάνα και τους φίλους μου που στέκονται δίπλα μου και με στηρίζουν.

*Αφιερώνεται,
στη μνήμη του πατέρα μου,
Γιώργου.*

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις-Εξισώσεις Fredholm	13
1.1 Τα Είδη των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων	14
1.2 Μετατρέποντας προβλήματα διαφορικών εξισώσεων σε ολοκληρωτικές εξισώσεις	17
1.2.1 Το γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών	17
1.2.2 Η γενική περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών.	19
1.3 Εξισώσεις Fredholm	20
1.3.1 Εξισώσεις Fredholm με διαχωρίσιμο πυρήνα	20
1.3.2 Fredholm Alternative	27
1.3.3 Εξισώσεις Fredholm με συμμετρικό πυρήνα	28
1.4 Θεωρία Fredholm	31
1.4.1 Μέθοδος του επιλύοντα πυρήνα	31
1.4.2 Μέθοδος των επαναληπτικών πυρήνων	32
Κεφάλαιο 2 Επίλυση Ολοκληρωτικών εξισώσεων με τη μέθοδο των ροπών	35
2.1 Η μέθοδος των ροπών	35
2.1.1 Συναρτήσεις βάσης	39
2.2 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén σε γραμμική κεραία με τη μέθοδο των ροπών	44
2.2.1 Αναλυτική επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén	48
2.2.2 Μέθοδος των ροπών για τη γραμμική κεραία	51
Κεφάλαιο 3 Οι μέθοδοι αναλυτικής ομαλοποίησης (Regularization Methods)	65
3.1 Method of Analytical Regularization (MAR)	65
3.1.1 Διηλεκτρικός κύλινδρος κυκλικής διατομής σε ένα επίπεδο μέσο	66
3.1.2 Ταινία κυκλικού δίσκου με απώλειες σε ένα διηλεκτρικό υπόστρωμα	69
3.2 Η MAR και η μέθοδος Galerkin	71
3.2.1 Εφαρμογή της ισοδυναμίας σε παράδειγμα ολοκληρωτικής εξίσωσης λογαριθμικού πυρήνα	74
3.3 Analytical Regularization Method (ARM)	76
3.3.1 Εφαρμογή της ARM σε παράδειγμα ολοκληρωτικής εξίσωσης λογαριθμικού πυρήνα	78
3.4 Συσχέτιση της MAR με την ARM	80
Τελική Σύνοψη	85
Παράρτημα Α	87
A1 Συνθήκες Ορθογωνιότητας και Ορθοκανονικές Συναρτήσεις	87
A2 Θεώρημα Hilbert-Schmidt	88
A3 Ορισμός των συναρτήσεων Green μέσω των εξισώσεων Fredholm	90
A4 Τα είδη των ολοκληρωτικών εξισώσεων	93
A5 Κύριο όρισμα κατά Cauchy (principal value integrals)	94
Παράρτημα Β	97
B1 Χώροι Banach	97
B2 Χώροι Hilbert	98
B3 Ιδιότητες και Θεωρήσεις των Τελεστών	100
B4 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Fredholm και Θεωρία Τελεστών	103
Βιβλιογραφία	107

Κεφάλαιο 1 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις-Εξισώσεις Fredholm

Εισαγωγή

Ο ορισμός ολοκληρωτική εξίσωση χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον P. du Bois-Reymond το 1888, σε ένα άρθρο που αφορά το πρόβλημα του Dirichlet, ασχολείται με τις εξισώσεις της μορφής Bear-Neumann. Σε αυτό το άρθρο επισημαίνεται, ότι μία γενική θεωρία τέτοιων εξισώσεων, παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες και ότι δεν υπάρχουν αρκετές ανακαλύψεις πάνω σε αυτό τον τομέα. Η μετέπειτα δουλειά του Poincare και των μαθητών του δεν κατάφερε να εξάγει τίποτα παραπάνω από κάποιες προσεγγίσεις βασιζόμενες στη θεωρία των πιθανοτήτων, μέχρι που ένα σύντομο άρθρο του Fredholm το 1900 απέδειξε ότι όλη η θεωρία των ολοκληρωτικών εξισώσεων που είχε εξετασθεί μέχρι τότε ήταν ελλιπής συγκριτικά με ότι ήταν γνωστό πάνω στη θεωρία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Ο Ivar-Fredholm (1866-1927) ήταν μαθητής του Mittag-Leffler στη Στοκχόλμη την περίοδο (1888-1890). Έχει εκδώσει σχετικά λίγα άρθρα κατά τη διάρκεια της ζωής του, και τα περισσότερα αφορούσαν τις μερικές διαφορικές εξισώσεις. Έπειτα από μία επίσκεψη στο Παρίσι, αφού είχε έρθει σε επαφή με όλους του Γάλλους αναλυτές και είχε εξοικειωθεί με τα πρόσφατα άρθρα του Poincare, επικοινωνήσε με τον καθηγητή του τον Αύγουστο του 1899 για να τον ενημερώσει σχετικά με τα πρώτα αποτελέσματα του σχετικά με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, τα οποία εξέδωσε το 1900. Η μελέτη του ολοκληρώθηκε και εκδόθηκε 2 χρόνια αργότερα σε ένα άρθρο του περιοδικού Acta Mathematica.

Το μικρό άρθρο του Fredholm το 1900 "On a new method for the solution of Dirichlet's problem" ξεκινά με μια γενική ολοκληρωτική εξίσωση β' είδους (ορισμός που δόθηκε από τον Hilbert αργότερα). Στο άρθρο του ο Fredholm αρχικά θεωρεί την

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt$$

όπου το K υποτίθεται ότι είναι ορισμένη και τμηματικά συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b] \times [a, b]$, η φ συνεχής στο $[a, b]$ και λ μια μιγαδική παράμετρος. Σε μία διάλεξη του ανέφερε ότι η έμπνευση του προέκυψε από την ιδέα του Volterra στο άρθρο του "passage to the limit" για τη μετατροπή γραμμικών εξισώσεων σε ολοκληρωτικές καθώς και κάποιες αναφορές πάνω στη δουλειά του von Koch που αφορούν τους άπειρους τελεστές.

Αυτό το εξαιρετικό άρθρο του Fredholm μπορεί να θεωρηθεί ως η πηγή από την οποία συντελέστηκαν όλες οι εξελίξεις πάνω στη θεωρία φάσματος και της επεξεργασίας σημάτων. Έγινε μία βαθειά τομή στον μαθηματικό κόσμο και μέσα σε μια νύχτα, η δουλειά του έγινε πρώτο θέμα συζήτησης μεταξύ αναλυτών και μαθηματικών.

Μία ολοκληρωτική εξίσωση είναι μία εξίσωση σύμφωνα με την οποία η άγνωστη συνάρτηση εμφανίζεται μέσα σε ολοκλήρωμα. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται σε πολλούς κλάδους των θετικών επιστημών, όπως Θεωρία Δυναμικού, Ακουστική, Ελαστικότητα, Επεξεργασία σημάτων κ.α. Σε πολλές περιπτώσεις, προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για διαφορικές εξισώσεις μπορούν να συσχετιστούν ισοδύναμα με μία ολοκληρωτική εξίσωση.

Για παράδειγμα το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y'(x) = y(x), y(0) = 1, x \geq 0$$

ισοδυναμεί με την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$$

Όπως είναι εύκολο να διακρίνει κανείς και τα δύο προβλήματα έχουν λύση την $y(x) = e^x$. Όμως, υπάρχουν πολλά προβλήματα τα οποία οδηγούν κατευθείαν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις και δεν μπορούν να εκφραστούν με τη βοήθεια διαφορικών εξισώσεων.

1.1 Τα Είδη των Ολοκληρωτικών Εξισώσεων

Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τις ιδιότητες και τη μορφή που μπορούν να έχουν. Αναλύοντας πιο διεξοδικά, η πιο γενική ολοκληρωτική εξίσωση ως προς $y(x)$ μπορεί να παρασταθεί σε αναλυτική μορφή ως

$$h(x)y(x) = f(x) + \int_a^{b(x)} K(x, t)y(t) dt \quad (1)$$

Συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι έχουμε τα παρακάτω είδη:

- Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra αν $b(x) = x$, δηλαδή

$$h(x)y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t) dt \quad (2)$$

Ολοκληρωτική εξίσωση Volterra α' και β' είδους αν $h(x) = 0$ και $h(x) = 1$ αντίστοιχα, οπότε η (2) γίνεται

$$-f(x) = \int_a^x K(x, t)y(t) dt \quad (3)$$

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt \quad (4)$$

➤ Ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm αν η $b(x) = b$, είναι σταθερά, δηλαδή

$$h(x)y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (5)$$

Ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου και δευτέρου είδους αν $h(x) = 0$ και $h(x) = 1$ αντίστοιχα και η (5) γίνεται

$$-f(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (6)$$

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (7)$$

Η γνωστή συνάρτηση $K(x,t)$, η οποία είναι ολοκληρώσιμη για $a \leq x \leq b, a \leq t \leq b$ λέγεται πυρήνας (kernel) της εξίσωσης. Η $f(x)$ είναι μία γνωστή συνεχής συνάρτηση.

Γραμμικότητα ολοκληρωτικών εξισώσεων

Μια ολοκληρωτική εξίσωση θα λέγεται γραμμική (linear) ως προς την $y(x)$ όταν οι $y_1(x)$ και $y_2(x)$ είναι λύσεις καθώς και ο γραμμικός συνδυασμός τους $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ είναι επίσης λύση της.

Για παράδειγμα η ολοκληρωτική εξίσωση

$$f(x) = hy(x) + \int_{-\infty}^x K(x,t)y(t)dt \quad (8)$$

είναι γραμμική ως προς $y(x)$, αφού αν $y_1(x), y_2(x)$ είναι λύσεις της (8) τότε για παράδειγμα και η $2y_1(x) + \frac{1}{2}y_2(x)$ είναι επίσης λύση της.

Εξισώσεις που έχουν τη μορφή

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t,y(x),y(t))dt \quad (9)$$

ορίζονται ως μη γραμμικές (nonlinear) εξισώσεις Fredholm β' είδους.

Ειδικές περιπτώσεις της (9) αποτελούν:

- Η ολοκληρωτική εξίσωση Urysohn

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, y(t)) dt \quad (10)$$

- Η ολοκληρωτική εξίσωση Hammerstein

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \Phi(t, y(t)) ds \quad (11)$$

Περισσότερα είδη ολοκληρωτικών εξισώσεων υπάρχουν στο παράρτημα Α4.

Ιδιάζουσες (singular) ολοκληρωτικές εξισώσεις

Μία ολοκληρωτική εξίσωση θα λέγεται ιδιάζουσα, αν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι πολύ μεγάλο ή ο πυρήνας $K(x, t)$ απειρίζεται στο διάστημα στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η γενικευμένη ολοκληρωτική εξίσωση του Abel

$$f(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^a} dt, a < x < b, 0 < a < 1 \quad (12)$$

η οποία είναι μία ιδιάζουσα ολοκληρωτική εξίσωση Volterra α' είδους, καθώς ο πυρήνας της γίνεται άπειρος όταν $x = t$.

Ομογενείς ολοκληρωτικές εξισώσεις

Μία ολοκληρωτική εξίσωση θα λέγεται ομογενής αν

$$f(x) = 0, \forall x \in [a, b] \quad (13)$$

Διαφορετικά, η εξίσωση λέγεται μη ομογενής.

Ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις

Μερικές φορές ολοκληρωτικές εξισώσεις εμφανίζονται με την προσθήκη παραγώγου στην άγνωστη συνάρτηση, π.χ.

$$y'(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt = f(x), a \leq x \leq b \quad (14)$$

Σε μία τέτοια περίπτωση λέμε ότι έχουμε ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση.

1.2 Μετατρέποντας προβλήματα διαφορικών εξισώσεων σε ολοκληρωτικές εξισώσεις

Εδώ θα εξετάσουμε πως προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών ανάγονται σε ολοκληρωτικές εξισώσεις. Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι, προβλήματα αρχικών τιμών ανάγονται σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Volterra και προβλήματα συνοριακών τιμών σε ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι:

- ❖ Πρόβλημα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) έχουμε όταν μία διαφορική εξίσωση έχει ένα σύνολο αρχικών συνθηκών, δηλαδή συνθηκών που προσδιορίζονται από τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε ένα σημείο.
- ❖ Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ) έχουμε όταν, σε μία διαφορική εξίσωση συμπεριλαμβάνεται ένα σύνολο συνοριακών συνθηκών, δηλαδή συνθηκών που προσδιορίζονται από τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε περισσότερα από ένα σημεία.

1.2.1 Το γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών

Έστω το πρόβλημα

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = g(x), x \in [a, b] \quad (15)$$

$$y(a) = C_1, y'(a) = C_2 \quad (16)$$

όπου A, B και g συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$.

Ολοκληρώνοντας την (15) από a έως x και με τη χρήση των αρχικών συνθηκών έχουμε

$$y'(x) - C_2 + A(x)y(x) + \int_a^x [B(t) - A'(t)]y(t)dt - C_1A(a) = \int_a^x g(t)dt \quad (17)$$

Ολοκληρώνοντας τη (17) από a έως x και χρησιμοποιώντας πάλι τις αρχικές συνθήκες της σχέσης (16), έχουμε

$$\begin{aligned} y(x) - C_1 + \int_a^x A(t)y(t)dt + \int_a^x \int_a^t [B(u) - A'(u)]y(u)dudt \\ = \int_a^x \int_a^t g(u)dudt + [C_2 + C_1A(a)](x - a) \end{aligned} \quad (18)$$

ή μετατρέποντας το διπλό ολοκλήρωμα σε απλό παίρνουμε

$$y(x) = C_1 + [C_2 + C_1 A(a)](x - a) + \int_a^x (x - t)g(t)dt - \int_a^x \{A(t) + (x - t)[B(t) - A'(t)]\}y(t)dt \quad (19)$$

Έτσι θέτοντας

$$f(x) = C_1 + [C_2 + C_1 A(a)](x - a) + \int_a^x (x - t)g(t)dt \quad (20)$$

και

$$K(x, t) = -\{A(t) + (x - t)[B(t) - A'(t)]\} \quad (21)$$

προκύπτει η

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x, t)y(t)dt \quad (22)$$

η οποία είναι μία γενική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra β' είδους.

Εναλλακτική Επίλυση

Μία εναλλακτική μέθοδος μετατροπής του προβλήματος αρχικών τιμών σε ολοκληρωτική εξίσωση Volterra, είναι να θέσουμε

$$y''(x) = \psi(x) \quad (23)$$

όπου ψ είναι μία άγνωστη συνάρτηση και ολοκληρώνοντας την (23) δύο φορές παίρνουμε

$$y'(x) = \int_a^x \psi(t)dt + K_1, y(x) = \int_a^x (x - t)\psi(t)dt + K_1(x - a) + K_2 \quad (24)$$

τα K_1, K_2 υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες. Αντικαθιστώντας τις αρχικές συνθήκες βρίσκουμε

$$K_1 = C_2, K_2 = C_1 - C_2$$

και επομένως αντικαθιστώντας στην (15) βρίσκουμε

$$\psi(x) = g(x) - C_2 A(x) - B(x)[C_2 x + C_1 - C_2 a] - \int_a^x [A(x) + B(x)(x-t)]\psi(t)dt \quad (25)$$

Αν θέσουμε

$$f_1(x) = g(x) - C_2 A(x) - B(x)[C_2 x + C_1 - C_2 a] \quad (26)$$

και

$$K(x, t) = -[A(x) + B(x)(x-t)] \quad (27)$$

έχουμε

$$\psi(x) = f_1(x) + \int_a^x K(x, t)\psi(t)dt \quad (28)$$

η οποία είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση Volterra ως προς $\psi(x)$, με αποτέλεσμα βρίσκοντας την $\psi(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα την $y(x)$.

1.2.2 Η γενική περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Έστω το πρόβλημα

$$y''(x) + A(x)y'(x) + B(x)y(x) = g(x) \quad (29)$$

$$y(a) = C_0, y(b) = D_0 \quad (30)$$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (29) από a μέχρι x παίρνουμε

$$y'(x) - C + A(x)y(x) - A(a)C_0 - \int_a^x [A'(t) - B(t)]y(t)dt = \int_a^x g(t)dt \quad (31)$$

όπου C είναι η σταθερά ολοκλήρωσης.

Ολοκληρώνοντας ξανά, οδηγούμαστε στην

$$\begin{aligned} y(x) - C_0 - [A(a)C_0 + C](x-a) + \int_a^x \{A(t) - (x-t)(A'(t) - B(t))\}y(t)dt \\ = \int_a^x (x-t)g(t)dt \quad (32) \end{aligned}$$

Θέτοντας $x = b$ βρίσκουμε

$$C = \frac{1}{b-a} \left\{ D_0 - C_0 + \int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt - \int_a^b (b-t)g(t)dt \right\} - A(a)C_0 \quad (33)$$

Αντικαθιστώντας το C παίρνουμε

$$y(x) = C_0 + \frac{x-a}{b-a} \left\{ D_0 - C_0 + \int_a^b \{A(t) - (b-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt - \int_a^b (b-t)g(t)dt \right\} + \int_a^x (x-t)g(t)dt - \int_a^x \{A(t) - (x-t)[A'(t) - B(t)]\}y(t)dt \quad (34)$$

1.3 Εξισώσεις Fredholm

Εδώ θα εξετάσουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm. Μία σημαντική συνθήκη η οποία λέγεται συνθήκη κανονικότητας (regularity condition), την οποία πρέπει να ικανοποιούν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm, είναι ο πυρήνας $K(x, t)$ να είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση και ως προς τη μεταβλητή x και ως προς τη μεταβλητή t , στην περιοχή $\{(x, t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, δηλαδή να ισχύει η

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 dx dt < \infty \quad (35)$$

1.3.1 Εξισώσεις Fredholm με διαχωρίσιμο πυρήνα

Θα εξετάσουμε μία μέθοδο επίλυσης ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm β' είδους, δηλαδή της

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (36)$$

ή σε μορφή τελεστών

$$y = f + Ky \quad (37)$$

όπου ο πυρήνας K έχει τη μορφή

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t) \quad (38)$$

Ο πυρήνας είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα γινομένων $a_i(x)$, μία συνάρτηση του x μόνο και $b_i(t)$, μια συνάρτηση του t μόνο. Τέτοιοι πυρήνες λέγονται διαχωρίσιμοι (separable kernels).

Γενική περίπτωση

Θα εξετάσουμε τη μη ομογενή ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm β' είδους με διαχωρίσιμο πυρήνα γενικής μορφής

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (39)$$

όπου

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(t) = a_1(x)b_1(t) + \dots + a_n(x)b_n(t) \quad (40)$$

Οι συναρτήσεις $a_1(x), \dots, a_n(x)$ και $b_1(t), \dots, b_n(t)$ έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$ και είναι συνεχείς.

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις $a_1(x), \dots, a_n(x)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή η ισότητα $\sum_{i=1}^n m_i a_i(x) = 0$ με σταθερούς συντελεστές m_i , ισχύει για όλα τα $x \in [a, b]$ μόνο αν $m_1 = \dots = m_n = 0$.

Από τις (39) και (40) οδηγούμαστε στην:

$$y(x) = f(x) + \lambda a_1(x) \int_a^b b_1(t)y(t)dt + \dots + \lambda a_n(x) \int_a^b b_n(t)y(t)dt \quad (41)$$

Τα ολοκληρώματα είναι ανεξάρτητα του x , οπότε είναι σταθερές. Οι σταθερές αυτές έχουν τη μορφή

$$c_i = \int_a^b b_i(t)y(t)dt, i = 1, \dots, n \quad (42)$$

Αν υπάρχει η λύση $y(x)$, θα είναι το άθροισμα της συνάρτησης f και ενός γραμμικού συνδυασμού των συναρτήσεων $a_1(x), \dots, a_n(x)$, δηλαδή

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n a_i c_i = f(x) + \lambda c_1 a_1(x) + \dots + \lambda c_n a_n(x) \quad (43)$$

Οι συντελεστές c_1, \dots, c_n υπολογίζονται αντικαθιστώντας στην (42) τη λύση της $y(x)$ από τη (43). Έχουμε:

$$\begin{aligned} c_i &= \int_a^b b_i(t)y(t)dt = \int_a^b b_i(t)[f(t) + \lambda c_1 a_1(t) + \dots + \lambda c_n a_n(t)]dt \\ &= \int_a^b b_i(t)f(t)dt + \lambda c_1 \int_a^b b_i(t)a_1(t)dt + \dots \\ &\quad + \lambda c_n \int_a^b b_i(t)a_n(t)dt \quad (44) \end{aligned}$$

Θεωρώντας τις σταθερές

$$f_i = \int_a^b b_i(t)f(t)dt \quad (45)$$

$$A_{ij} = \int_a^b b_i(t) a_j(t)dt, j = 1, \dots, n \quad (46)$$

η παραπάνω σχέση εκφράζεται ως

$$c_i = f_i + \lambda A_{i1}c_1 + \dots + \lambda A_{in}c_n \quad (47)$$

ή

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^n A_{ij} c_j = f_i, i = 1, \dots, n \quad (48)$$

Γράφοντας την εξίσωση αναλυτικά παίρνουμε

$$\begin{array}{lll} (1 - \lambda A_{11})c_1 & -\lambda A_{12}c_2 \dots & -\lambda A_{1n}c_n = f_1 \\ -\lambda A_{21}c_1 & (1 - \lambda A_{22})c_2 \dots & -\lambda A_{2n}c_n = f_2 \\ \vdots & & \\ -\lambda A_{n1}c_1 & -\lambda A_{n2}c_2 \dots & (1 - \lambda A_{nn})c_n = f_n \end{array} \quad (49)$$

Το σύστημα των n γραμμικών εξισώσεων (49), παίρνει τη μορφή

$$(I - \lambda A)C = F \quad (50)$$

Η ορίζουσα $D(\lambda)$ του παραπάνω πίνακα είναι ένα πολυώνυμο ως προς το λ το οποίο δεν είναι ταυτοτικά μηδέν, επειδή για $\lambda = 0, D(0) = 1$.

Συνεπώς, για την επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm (39) με διαχωρίσιμο πυρήνα (40), απαιτείται η επίλυση ως προς c_n του συστήματος γραμμικών εξισώσεων (50). Η (50) έχει μοναδική λύση, αν η ορίζουσα $|I - \lambda A| \neq 0$ και έχει ή άπειρες ή καμία λύση αν $|I - \lambda A| = 0$.

Στην περίπτωση της ομογενούς εξίσωσης Fredholm, δηλαδή όταν $f(t) = 0$, αντί της (50) θα έχουμε την $(I - \lambda A)C = 0$. Αν $|I - \lambda A| \neq 0$ η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm έχει ως λύση την $y(x) = 0$.

Στην περίπτωση της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (51)$$

η παράμετρος $\lambda \neq 0$ για την οποία η (51) δεν έχει τη μηδενική λύση λέγεται ιδιοτιμή της ομογενούς εξίσωσης (51).

Η μη μηδενική λύση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λέγεται ιδιοσυνάρτηση της (51). Σε αυτή την περίπτωση οι ιδιοτιμές της (51) είναι λύσεις της $|I - \lambda A| = 0$ γιατί αν το λ δεν είναι λύση αυτής της εξίσωσης, τότε το $|I - \lambda A| \neq 0$ οπότε η (51) έχει τη μηδενική λύση. Μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από μία ιδιοσυναρτήσεις $\varphi_j(x)$ που να αντιστοιχούν σε μία συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ_j . Ο αριθμός m των ιδιοσυναρτήσεων $\varphi_{j+1}(x), \dots, \varphi_{j+m}(x)$ λέγεται πολλαπλότητα του λ_j και το λ_j λέγεται απλή ιδιοτιμή αν $m = 1$.

Ειδική περίπτωση

Έστω ότι ο πυρήνας έχει τη μορφή

$$K(x, t) = a(x)b(t), x, t \in [a, b] \quad (52)$$

Οι $a(x), b(t)$ είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και καμία δεν είναι μηδέν στο διάστημα αυτό. Τότε η μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm γράφεται ως

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt = f(x) + \lambda \int_a^b a(x)b(t)y(t)dt \\ &= f(x) + \lambda c a(x) \quad (53) \end{aligned}$$

όπου

$$c = \int_a^b b(t)y(t)dt \quad (54)$$

Αντικαθιστώντας την $y(x)$ στη c έχουμε

$$\begin{aligned} c &= \int_a^b b(t)y(t)dt = \int_a^b b(t)[f(t) + \lambda ca(t)]dt \\ &= \int_a^b b(t)f(t)dt + \lambda c \int_a^b b(t)a(t)dt \quad (55) \end{aligned}$$

Οπότε

$$\left(1 - \lambda \int_a^b a(x)b(x)dx\right)c = \int_a^b f(x)b(x)dx \quad (56)$$

Αν $\lambda \int_a^b a(x)b(x)dx \neq 1$ η (53) έχει μοναδική λύση και γράφεται ως

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda \int_a^b f(x)b(x)dx}{1 - \lambda \int_a^b a(x)b(x)dx} a(x), x \in [a, b] \quad (57)$$

Αντιθέτως, αν $\lambda \int_a^b a(x)b(x)dx = 1$ τότε η (53) δεν έχει μοναδική λύση. Πραγματικά, από την (56) η (53) δεν έχει λύση, εκτός και αν

$$\int_a^b f(x)b(x)dx = 0$$

Αν θέσουμε τις σταθερές, $\lambda_c = \left[\int_a^b a(x)b(x)dx\right]^{-1}$ και $f_c = \int_a^b f(x)b(x)dx$ έχουμε τα παρακάτω

- Αν $\lambda \neq \lambda_c$ τότε η (53) έχει μοναδική λύση την

$$y(x) = f(x) + \frac{\lambda \lambda_c f_c}{\lambda_c - \lambda} a(x) \quad (58)$$

- Αν $\lambda = \lambda_c$ και $f_c = 0$ τότε οποιαδήποτε λύση της (53) μπορεί έχει μορφή

$$y(x) = f(x) + C y_c(x), y_c(x) = a(x) \quad (59)$$

όπου C μία αυθαίρετη σταθερά και $y_c(x)$ ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_c .

- Αν $\lambda = \lambda_c$ και $f_c \neq 0$ η (53) δεν έχει λύση.

Σύνοψη επίλυσης

Για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων με διαχωρίσιμο πυρήνα και τις αποδείξεις από τα [4,20] οδηγούμαστε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Όταν $D(\lambda) \neq 0$, η μη ομογενής εξίσωση Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (60)$$

έχει λύση. Επίσης, η ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (61)$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση $y(x) = 0$.

- Όταν $D(\lambda) = 0$, ο αριθμός των λύσεων της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt$$

ισούται με τον αριθμό των ιδιοτιμών που βρίσκουμε αν θέσουμε $D(\lambda) = 0$. Στην περίπτωση αυτή η λύση έχει τη μορφή

$$y(x) = A_0\varphi_0(x) + A_1\varphi_1(x) + \dots \quad (62)$$

όπου $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις που συνδέονται με τις ρίζες της $D(\lambda) = 0$ δηλαδή, τις ιδιοτιμές $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ και οι A_0, A_1, \dots είναι αυθαίρετες σταθερές. Τις ιδιοσυναρτήσεις τις βρίσκουμε από την εξίσωση (43) με $f(x) = 0$ δηλαδή από την

$$y(x) = \lambda c_1 a_1(x) + \dots + \lambda c_n a_n(x) \quad (63)$$

αφού βρούμε τις σταθερές c_i . Οι ιδιοσυναρτήσεις φ_i είναι οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης

$$\varphi_i(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_i(t)dt, i = 0, \dots, n \quad (64)$$

- Όταν $D(\lambda) = 0$ η μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm δεν έχει γενικά λύση. Όμως, μπορεί να έχει λύση αν ο μη ομογενής όρος $f(x)$

ικανοποιεί κάποιες συνθήκες. Για να βρούμε αυτές τις συνθήκες παίρνουμε την ειδική περίπτωση όπου $K(x, t) = K(t, x)$ και πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της μη ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$y(x) = f(x) + \lambda_0 \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (65)$$

με $\varphi_i(x)$, η οποία είναι η ιδιοσυνάρτηση που ικανοποιεί την

$$\varphi_i(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)dt \quad (66)$$

όπου λ_0 είναι μία από τις ιδιοτιμές. Οπότε θα έχουμε

$$\varphi_i(x)y(x) = \varphi_i(x)f(x) + \varphi_i(x)\lambda_0 \int_a^b K(x, t)\varphi_i(t)dt \quad (67)$$

που αν την ολοκληρώσουμε από a έως b παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi_i(x)y(x)dx &= \int_a^b \varphi_i(x)f(x)dx \\ &+ \lambda_0 \int_a^b \varphi_i(x) \left\{ \int_a^b K(x, t)y(t)dt \right\} dx \quad (68) \end{aligned}$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα του δεύτερου μέλους η $\varphi_i(x)$ είναι σταθερά ως προς t και επομένως μπορεί να μπει μέσα στο ολοκλήρωμα. Έπειτα, αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης καθώς και λαμβάνοντας υπόψη ότι $K(x, t) = K(t, x)$, το δεύτερο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (68) γίνεται

$$\int_a^b y(t) \left\{ \lambda_0 \int_a^b \varphi_i(x) K(x, t)dx \right\} dt = \int_a^b y(t)\varphi_i(t)dt \quad (69)$$

οπότε

$$\int_a^b \varphi_i(x)f(x)dx = 0 \quad (70)$$

Η (70) ορίζει ότι η $\varphi_i(x)$ και η $f(x)$ είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και ουσιαστικά είναι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η $f(x)$ ώστε, η μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm να έχει λύση για μία ιδιοτιμή την $\lambda = \lambda_0$.

1.3.2 Fredholm Alternative

Ακόμα και όταν ο πυρήνας δεν είναι διαχωρίσιμος, παραμένουν να ισχύουν τα συμπεράσματα που αφορούν την ύπαρξη λύσεων του μη ομογενούς και του ομογενούς συστήματος n γραμμικών εξισώσεων $(I - \lambda A)C = F$ και $(I - \lambda A)C = 0$ αντίστοιχα, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο αυτά συσχετίζονται με την ύπαρξη λύσεων της μη ομογενούς και της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm.

Θεώρημα Fredholm Alternative

Αν η ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (71)$$

ή σε μορφή τελεστών

$$y = \lambda Ky \quad (72)$$

έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλαδή $y(x) = 0$, τότε η αντίστοιχη μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (73)$$

έχει πάντα μοναδική λύση. Αντίθετα, αν η ομογενής εξίσωση έχει μη μηδενικές λύσεις, τότε η μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση είτε δεν έχει λύσεις ή έχει άπειρες λύσεις και αυτό εξαρτάται από τη δοσμένη συνάρτηση $f(x)$.

Οι λύσεις $\{y_n(x)\} \neq 0$ της μη ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης (73) που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\{\lambda_n\}$, λέγονται ιδιοσυναρτήσεις της (73) και ορίζονται ως

$$y_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)y_n(t)dt \quad (74)$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη

Αν η ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (75)$$

έχει μία μη μηδενική λύση ή λύσεις της μορφής $\{y_j(x)\}$, τότε η αντίστοιχη μη ομογενής ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (76)$$

θα έχει λύση αν και μόνο αν ο μη ομογενής όρος $f(x)$ στην (76) είναι ορθογώνιος σε κάθε λύση $\{y_j(x)\}$ της ομογενούς (75).

Εδώ, θεωρούμε την ειδική περίπτωση όπου η παράμετρος λ της μη ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης (76) ισούται με λ_n , την ιδιοτιμή της ομογενούς εξίσωσης (75).

1.3.3 Εξισώσεις Fredholm με συμμετρικό πυρήνα

Θα εξετάσουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm με συμμετρικό πυρήνα (symmetric kernel). Δηλαδή, με πυρήνα της μορφής

$$K(x, t) = \overline{K(t, x)} \quad (77)$$

Στην περίπτωση πραγματικού πυρήνα ισχύει η ισότητα $K(x, t) = K(t, x)$. Έστω η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με συμμετρικό πυρήνα,

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt, K(x, t) = \overline{K(t, x)} \quad (78)$$

Μπορούμε να παραστήσουμε τον επιλύοντα πυρήνα της (78) σε μορφή σειράς, με όρους τις ορθοκανονικές ιδιοσυναρτήσεις (παράρτημα A1) της ομογενούς εξίσωσης με συμμετρικό πυρήνα

$$y_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(x, t)y_n(t)dt, K(x, t) = \overline{K(t, x)} \quad (79)$$

με ιδιοτιμές τις $\{\lambda_n\}$ και τις ιδιοσυναρτήσεις του συμμετρικού πυρήνα $\{y_n(x)\}$

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να εξάγουμε δύο βασικά συμπεράσματα για τη συμπεριφορά των ιδιοτιμών και των ιδιοσυναρτήσεων.

- Οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πυρήνα στην (79) είναι πραγματικές. Δηλαδή, $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$ και η λ_n είναι πραγματικός αριθμός.
- Οι ιδιοσυναρτήσεις $y_n(x)$ και $y_m(x)$ του συμμετρικού πυρήνα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_n, λ_m είναι ορθογώνιες, δηλαδή

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)dx = 0, \lambda_n \neq \lambda_m \quad (80)$$

Λήμμα Hilbert-Schmidt

Αν η $f(x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (81)$$

όπου $K(x,t)$ είναι συμμετρικός και τετραγωνικά ολοκληρώσιμος στο τετράγωνο $\{(x,t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$, τότε η $f(x)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε μία συγκλίνουσα σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x) \quad (82)$$

όπου για το a_i ισχύει

$$a_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \quad (83)$$

ως προς το ορθοκανονικό σύστημα των ιδιοσυναρτήσεων $\{\varphi_i(x)\}$ του συμμετρικού πυρήνα $K(x,t)$.

Θεώρημα Hilbert-Schmidt

Έστω ότι το λ δεν είναι ιδιοτιμή της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (84)$$

όπου $K(x,t)$ είναι συμμετρικός και τετραγωνικά ολοκληρώσιμος στο τετράγωνο $\{(x,t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$.

Τότε

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} \quad (85)$$

όπου $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$ οι ιδιοτιμές και $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots$ οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt \quad (86)$$

και

$$a_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)dx \quad (87)$$

Η απόδειξη το θεωρήματος των Hilbert-Schmidt παρατίθεται αναλυτικά στο παράρτημα Α2.

Τέλος, κλείνοντας τη θεωρία των εξισώσεων Fredholm με συμμετρικό πυρήνα πρέπει να αναφέρουμε το θεώρημα του Mercer

Θεώρημα του Mercer

Αν ο πυρήνας $K(x, t)$ είναι συμμετρικός και τετραγωνικά ολοκληρώσιμος στο τετράγωνο $\{(x, t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ και έχει μόνο ιδιοτιμές με ίδιο πρόσημο (ή το πολύ ένα πεπερασμένο αριθμό ιδιοτιμών με αντίθετο πρόσημο), τότε η σειρά

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(t)}}{\lambda_i} \quad (88)$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο $K(x, t)$ δηλαδή στο

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(t)}}{\lambda_i} \quad (89)$$

Συνοψίζοντας, για την επίλυση εξισώσεων Fredholm με συμμετρικό πυρήνα και με βάση τα [4,19], ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση β' είδους

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (90)$$

με την f συνεχή και τον πυρήνα $K(x, t)$ πραγματικό, συνεχή και συμμετρικό. Έστω $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$ οι ιδιοτιμές και $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots$ οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt \quad (91)$$

Τότε:

- ❖ Αν η παράμετρος λ δεν είναι ίση με καμία από τις ιδιοτιμές $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$, η (91) έχει μοναδική λύση, που δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} \quad (92)$$

όπου

$$a_i = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dt \quad (93)$$

- ❖ Αν η παράμετρος λ συμπίπτει με μία ιδιοτιμή, έστω την $\lambda_i = \lambda_{j+1}$ με πολλαπλότητα m , τότε η (90) έχει άπειρο αριθμό λύσεων αν και μόνο αν η $f(x)$ είναι ορθογώνια προς όλες τις ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_i , δηλαδή όταν επαληθεύονται οι m συνθήκες

$$\int_a^b f(x) \varphi_p(x) dx = 0, p = j + 1, \dots, j + m \quad (94)$$

Οι άπειρες λύσεις δίνονται από τη σχέση

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq j+1, \dots, j+m}}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} + B_1 \varphi_{j+1}(x) + \dots + B_m \varphi_{j+m}(x) \quad (95)$$

όπου οι συντελεστές a_i δίνονται από την (87), B_1, \dots, B_m είναι αυθαίρετες σταθερές και $\varphi_{j+1}(x), \dots, \varphi_{j+m}(x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{j+m}$, αντίστοιχα.

1.4 Θεωρία Fredholm

Έχοντας εξετάσει ολοκληρωτικές εξισώσεις Fredholm με διαχωρίσιμο ή συμμετρικό πυρήνα, εδώ θα μελετήσουμε τις μεθόδους για να λύσουμε μία γενική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm.

1.4.1 Μέθοδος του επιλύοντα πυρήνα

Έστω η γενική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (96)$$

της οποίας η λύση δίνεται από τη σχέση

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt \quad (97)$$

και ο επιλύοντας πυρήνας (resolvent kernel) ως

$$R(x, t, \lambda) = \frac{D(x, t, \lambda)}{D(\lambda)}, D(\lambda) \neq 0 \quad (98)$$

Η $D(x, t, \lambda)$ ορίζεται ως

$$D(x, t, \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} B_n(x, t) \quad (99)$$

όπου

$$B_n(x, t) = C_n K(x, t) - n \int_a^b K(x, t) B_{n-1}(t, u) du, B_0(x, t) = K(x, t) \quad (100)$$

με

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(t, t) dt, n = 1, 2, \dots, C_0 = 1 \quad (101)$$

και η $D(\lambda)$ ορίζεται ως

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} C_n, C_0 = 1 \quad (102)$$

1.4.2 Μέθοδος των επαναληπτικών πυρήνων

Μία ακόμα μέθοδος επίλυσης της εξίσωσης Fredholm β' είδους είναι η μέθοδος των επαναληπτικών πυρήνων (successive kernels). Η μέθοδος αυτή αρχίζει, με τη μηδενική προσέγγιση $y_0(x) = f(x)$ για τη λύση $y(x)$ της εξίσωσης (96) και παίρνουμε την πρώτη προσέγγιση

$$y_1(x) = f(x) + \lambda \varphi_1(x) \quad (103)$$

όπου

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, t) f(t) dt \quad (104)$$

Ακόμα μία φορά, η $y_1(x)$ αντικαθίσταται στο ολοκλήρωμα της (103) για να πάρουμε τη δεύτερη προσέγγιση $y_2(x)$

$$\begin{aligned}
 y_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y_1(t)dt \\
 &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left[f(t) + \lambda \int_a^b K(t,u)f(u)du \right] dt \\
 &= f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)f(t)dt + \lambda^2 \int_a^b \left[\int_a^b K(x,t)K(t,u)dt \right] f(u)du \\
 &= f(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2 \int_a^b K_2(x,u)f(u)du \\
 &= f(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) \quad (105)
 \end{aligned}$$

ορίζοντας τον επαναληπτικό πυρήνα

$$K_2(x,t) = \int_a^b K(x,u)K_1(u,t)du \quad (106)$$

με $K_1(x,t) = K(x,t)$ και θέτοντας

$$\varphi_2(x) = \int_a^b K_2(x,u)f(u)du \quad (107)$$

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία n φορές παίρνουμε τη n -οστή προσέγγιση για τη λύση της (103)

$$y_n(x) = f(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots + \lambda^n\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^n \lambda^k\varphi_k(x) \quad (108)$$

όπου

$$\varphi_k(x) = \int_a^b K_k(x,u)f(u)du \quad (109)$$

και

$$K_k(x,t) = \int_a^b K(x,u)K_{k-1}(u,t)du, k = 2, \dots, n \quad (110)$$

Ο $K_k(x,u)$ λέγεται k -οστος επαναληπτικός πυρήνας. Παίρνοντας τα όρια όταν $n \rightarrow \infty$ έχουμε τη σειρά Neumann

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \int_a^b K_k(x,t)f(t)dt = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \varphi_k(x) \quad (111)$$

Η ακολουθία των διαδοχικών προσεγγίσεων συγκλίνει αν:

- Η f είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη.
- $B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x, t) dx dt < \infty$
- $|\lambda B| < 1$

Παρατήρηση 1

Δύο πυρήνες $K(x, t)$ και $L(x, t)$ λέγονται ορθογώνιοι σε ένα διάστημα $[a, b]$ αν

$$\int_a^b K(x, u)L(u, t) du = 0 = \int_a^b L(x, u)K(u, t) du \quad (112)$$

Για έναν αυτο-ορθογώνιο πυρήνα δηλαδή ορθογώνιο με τον εαυτό του $K(x, t)$ είναι

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, u)K(u, t) du = 0 \quad (113)$$

Προφανώς όλοι οι επόμενοι επαναληπτικοί πυρήνες μηδενίζονται και άρα

$$R(x, t, \lambda) = K(x, t) \quad (114)$$

όπου για τους επαναληπτικούς πυρήνες $R(x, t, \lambda)$ ισχύει η

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_i(x, t) \quad (115)$$

Παρατήρηση 2

Αν ένας πυρήνας $K(x, t)$ είναι συμμετρικός τότε όλοι οι επαναληπτικοί πυρήνες είναι συμμετρικοί. Ισχύει ότι

$$K_2(x, t) = \int_a^b K(x, u)K_1(u, t) du = \int_a^b \overline{K(t, u)K_1(u, x)} du = \overline{K_2(t, x)} \quad (116)$$

Αν $K_n(x, t)$ είναι συμμετρικός τότε με επαγωγή έχουμε

$$K_{n+1}(x, t) = \int_a^b K(x, u)K_n(u, t) du = \int_a^b \overline{K_n(t, u)K(u, x)} du = \overline{K_{n+1}(t, x)} \quad (117)$$

Κεφάλαιο 2 Επίλυση Ολοκληρωτικών εξισώσεων με τη μέθοδο των ροπών

Εισαγωγή

Η αριθμητική επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι ένα θέμα που έχει μελετηθεί πολύ. Μία μεγάλη ποικιλία μεθόδων επίλυσης έχουν αναπτυχθεί, όπως η μέθοδος του Nystrom και οι επαναληπτικές τεχνικές. Στον ηλεκτρομαγνητισμό χωρίς καμία αμφιβολία η περισσότερο δημοφιλής τεχνική είναι η μέθοδος των ροπών (method of moments). Για να είμαστε ιστορικά ακριβείς, η μέθοδος είχε αρχικά εφαρμοστεί σε ειδικά προβλήματα από τους Mei [32] και Van Bladel, Andreassen, Richmond και Waterman. Εντούτοις, η πατρότητα της δίκαια αποδίδεται στον Harrington [24], καθώς αυτός ήταν που πρώτος ενοποίησε τις περιορισμένες ειδικές θεωρίες και έδωσε μία γενικευμένη περιγραφή της. Έθεσε με τον τρόπο αυτό τα θεμέλια για την αλματώδη ανάπτυξη που γνώρισε η μέθοδος τις τελευταίες δεκαετίες.

2.1 Η μέθοδος των ροπών

Η μέθοδος των ροπών ή μέθοδος των σταθμισμένων υπολοίπων (Method of moments, MOM), είναι ουσιαστικά μία προβολική μέθοδος. Για να λύσουμε ένα ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα με τη βοήθεια της, πρέπει πρώτα να εκφράσουμε το άγνωστο μέγεθος του προβλήματος σαν ένα γραμμικό συνδυασμό των κατάλληλων συναρτήσεων βάσης. Δηλαδή, το βασικό μας πρόβλημα είναι να αναλύσουμε την άγνωστη ποσότητα χρησιμοποιώντας ένα σύνολο γνωστών συναρτήσεων με άγνωστους συντελεστές. Έπειτα, να μετατρέψουμε την προκύπτουσα εξίσωση σε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων, κάνοντας χρήση των συνοριακών συνθηκών. Ασχολούμαστε με ολοκληρωτικές εξισώσεις της μορφής.

$$F(g) = h \quad (1)$$

όπου F είναι ένα γνωστός γραμμικός τελεστής, h είναι μία γνωστή συνάρτηση διέγερσης και g η συνάρτηση απόκρισης. Ο F μπορεί να είναι ένας ολοκληρωτικός ή ολοκληρωτικοδιαφορικός (για ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα) τελεστής. Στόχος είναι η εύρεση του g όταν είναι γνωστά τα F και h .

Ενώ η εύρεση του g σε κλειστή μορφή είναι συνήθως αδύνατη, η γραμμικότητα του τελεστή F επιτρέπει μία αριθμητική λύση. Με τη μέθοδο των ροπών, η άγνωστη συνάρτηση απόκρισης αναπτύσσεται σε ένα γραμμικό συνδυασμό N σταθμισμένων συναρτήσεων βάσης και γράφεται ως εξής

$$g(z') \cong a_1 g_1(z') + a_2 g_2(z') + \dots + a_N g_N(z') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(z') \quad (2)$$

Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $g_n(z')$ είναι το ίδιο με το πεδίο των $g(z')$. Αντικαθιστώντας την (2) στην (1), χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του τελεστή F ,

$$\sum_{n=1}^N a_n F(g_n) \approx h \quad (3)$$

και συνάρτηση υπολοίπου

$$R = h - \sum_{n=1}^N a_n F(g_n) \quad (4)$$

Οι συναρτήσεις βάσης g_n επιλέγονται έτσι ώστε κάθε $F(g_n)$ στην (3) να υπολογίζεται εύκολα, κατά προτίμηση σε κλειστή μορφή και τουλάχιστον αριθμητικά. Το μόνο που απομένει στη συνέχεια είναι η εύρεση των άγνωστων σταθερών a_n .

Η εξίσωση (3) δεν επαρκεί για τον προσδιορισμό των N αγνώστων σταθερών a_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Για αυτό το λόγο χρειάζονται N γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. Αυτές προκύπτουν από την εφαρμογή της (3) σε N διαφορετικά σημεία παρατήρησης-προσαρμογής (π.χ. εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες)

$$\sum_{n=1}^N a_n F(g_n) = h_m, m = 1, 2, \dots, N \quad (5)$$

που σε μορφή μητρών μετατρέπεται ως εξής

$$[F_{mn}][a_n] = [h_m] \quad (6)$$

Οι άγνωστοι συντελεστές a_n βρίσκονται από την επίλυση της (6) με τεχνικές αντιστροφής μητρών, γράφοντας την (6) ως

$$[a_n] = [F_{mn}]^{-1}[h_m] \quad (7)$$

Γενικότερα, ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο ή ροπή (moment) μεταξύ της συνάρτησης βάσης $g_n(r')$ και της συνάρτησης βάρους $g_m(r)$ με τον παρακάτω τρόπο

$$\langle g_m, g_n \rangle = \int_{g_m} g_m(r) \cdot \int_{g_n} g_n(r') dr' dr \quad (8)$$

όπου τα ολοκληρώματα μπορεί να είναι γραμμικά ή επιφανειακά και εξαρτώνται από τις συναρτήσεις βάσης. Επίσης έχουμε τις παρακάτω ιδιότητες

$$\langle g_m, g_n \rangle = \overline{\langle g_m, g_n \rangle} \quad (9)$$

$$\langle bf + cg_n, g_m \rangle = b\langle f, g_m \rangle + c\langle g_n, g_m \rangle \quad (10)$$

$$\langle \overline{g_n}, g_n \rangle > 0 \text{ εάν } g_n \neq 0 \quad (11)$$

$$\langle \overline{g_n}, g_n \rangle = 0 \text{ εάν } g_n = 0 \quad (12)$$

και απαιτείται ότι το εσωτερικό γινόμενο κάθε συνάρτησης βάσης με τη συνάρτηση υπολοίπου να είναι μηδέν με αποτέλεσμα να οδηγούμαστε στις

$$\sum_{n=1}^N a_n \langle g_m, F(g_n) \rangle = \langle g_m, h \rangle \quad (13)$$

$$[F_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle g_{m1}, F(g_1) \rangle & \langle g_{m1}, F(g_2) \rangle & \dots \\ \langle g_{m2}, F(g_1) \rangle & \langle g_{m2}, F(g_2) \rangle & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$[a_n] = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$[h_m] = \begin{bmatrix} \langle g_{m1}, h \rangle \\ \vdots \\ \langle g_{mN}, h \rangle \end{bmatrix} \quad (16)$$

Στην ουσία όλες οι παραπάνω οδηγούν σε μία μήτρα $N \times N$ της μορφής $\mathbf{Za} = \mathbf{b}$ με στοιχεία

$$Z_{mn} = \langle g_m, F(g_n) \rangle \quad (17)$$

και η μήτρα $[b]$ με στοιχεία της μορφής

$$b_m = \langle g_m, h \rangle \quad (18)$$

Σημειακή Προσαρμογή

Κατά τον υπολογισμό σύνθετων προβλημάτων με τη χρήση συναρτήσεων βάρους, υπάρχουν πολλές περιπτώσεις κατά τις οποίες οι υπολογισμοί απαιτούν αρκετό χρόνο. Υπάρχει όμως ένα μοναδικό σύνολο συναρτήσεων βάρους που μειώνουν τον απαιτούμενο αριθμό ολοκληρώσεων. Αυτές είναι οι συναρτήσεις δέλτα του Dirac. Στις περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε για συναρτήσεις βάρους τις συναρτήσεις δέλτα ισχύει η σχέση

$$g_m(r) = \delta(r) \quad (19\alpha)$$

ή

$$[g_m] = [\delta(p - p_m)] = [\delta(p - p_1), \delta(p - p_2), \dots] \quad (19\beta)$$

έχουμε σημειακή προσαρμογή (point matching), όπου το p προσδιορίζει μία θέση ως προς κάποιο σημείο αναφοράς και p_m είναι το σημείο που εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες. Οι υπολογισμοί της μεθόδου των ροπών μετατρέπονται στις παρακάτω

$$\langle \delta(p - p_m), h \rangle = \sum_n a_n \langle \delta(p - p_m), F(g_n) \rangle, m = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

$$\iint_S \delta(p - p_m) h ds = \sum_n a_n \iint_S \delta(p - p_m) F(g_n) ds, m = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

$$h|_{p=p_m} = \sum_n a_n F(g_n)|_{p=p_m}, m = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

Με τον τρόπο αυτό απομένουν μόνο οι ολοκληρώσεις που καθορίζονται από το $F(g_n)$. Ουσιαστικά οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν εξέλιξη της (6). Από φυσική άποψη, οι συναρτήσεις δέλτα συνιστούν μία χαλάρωση των οριακών συνθηκών, για αυτό και χρησιμοποιούνται μόνο σε διακριτά σημεία της επιφάνειας της δομής εξ'ού και το όνομα σημειακή προσαρμογή.

Υπάρχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα όταν γίνεται χρήση αυτής της μεθόδου. Ένα θετικό χαρακτηριστικό προκύπτει όταν γίνεται υπολογισμός των στοιχείων των μητρών, καθώς δεν απαιτείται επιπλέον υπολογισμός ολοκληρώματος για τη συνάρτηση βάρους, διευκολύνοντας έτσι την επίλυση. Σημαντικό μειονέκτημα, αποτελεί το γεγονός ότι οι συνοριακές συνθήκες αντιστοιχίζονται μόνο σε διακριτές περιοχές της επίλυσης. Παρόλα αυτά, η μέθοδος της σημειακής προσαρμογής χρησιμοποιείται συχνά.

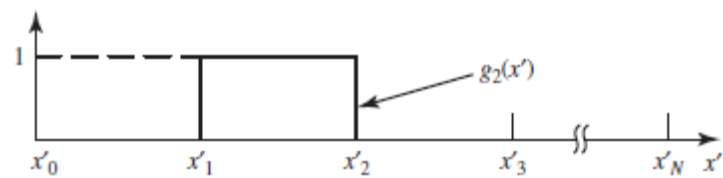
Μέθοδος Galerkin

Στα περισσότερα προβλήματα η επιλογή της συνάρτησης βάρους είναι πολύ σημαντική για να προκύψει το βέλτιστο αποτέλεσμα. Μία από τις πιο συχνά χρησιμοποιούμενες μεθόδους είναι η μέθοδος Galerkin όπου οι συναρτήσεις βάσεις είναι και συναρτήσεις βάρους. Αυτή η μέθοδος έχει το πλεονέκτημα της ενίσχυσης των οριακών συνθηκών στην περιοχή της λύσης, εν αντιθέσει με την μέθοδο σημειακής προσαρμογής όπου έχουμε μόνο διακριτά σημεία. Τα περισσότερα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα επιλύονται με τη μέθοδο Galerkin.

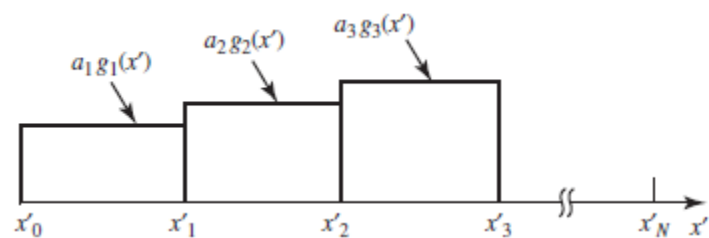
2.1.1 Συναρτήσεις βάσης

Ένα πολύ σημαντικό βήμα σε κάθε αριθμητική επίλυση είναι η επιλογή των συναρτήσεων βάσης. Η επιλογή τους γίνεται με κριτήριο την ικανότητα τους να μοιάζουν όσο γίνεται αντιπροσωπευτικότερα με την προβλεπόμενη άγνωστη συνάρτηση, ελαχιστοποιώντας συγχρόνως τον χρόνο των απαιτούμενων υπολογισμών. Θεωρητικά υπάρχουν πολλά σύνολα συναρτήσεων βάσης, στην πράξη όμως χρησιμοποιείται ένας περιορισμένος αριθμός τους. Τα σύνολα αυτά διακρίνονται σε δύο γενικές κατηγορίες. Η πρώτη αποτελείται από τμηματικές συναρτήσεις στο υποσύνολο ορισμού (subdomain), που είναι μη μηδενικές μόνο σε ένα τμήμα του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $g(x')$. Η δεύτερη κατηγορία περιέχει συναρτήσεις που ορίζονται σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού της άγνωστης συνάρτησης (ολικές συναρτήσεις). Η ανάπτυξη σε συναρτήσεις βάσης σε όλο το πεδίο ορισμού είναι ανάλογη με την ανάπτυξη σε σειρά Fourier.

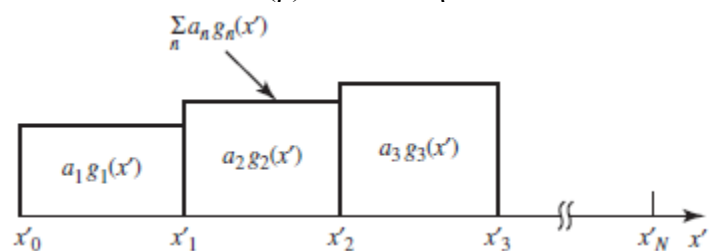
Τμηματικές (παλμικές) συναρτήσεις



(α) Απλή



(β) Πολλαπλή



(γ) Παράσταση της συνάρτησης

Σχήμα 1: Κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις

Από τους δύο τύπους συναρτήσεων βάσης, οι πλέον χρήσιμες είναι οι τμηματικές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να είναι γνωστή εκ των προτέρων η φύση της συνάρτησης που καλούνται να αντιπροσωπεύσουν. Σε αυτή την προσέγγιση, η δομή υποδιαιρείται σε N μη

αλληλοκαλυπτόμενα τμήματα όπως στο σχήμα 1, στον άξονα του οποίου τα τμήματα εμφανίζονται χάριν απλούστευσης συγγραμμικά και ισομήκη παρόλο που καμία τέτοια συνθήκη δεν είναι αναγκαία. Οι συναρτήσεις βάσης ορίζονται σε συσχέτιση με τα όρια ενός ή περισσοτέρων τμημάτων.

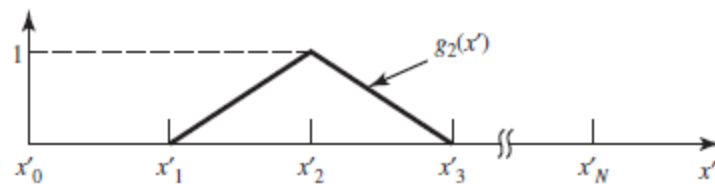
Η συνηθέστερη από τις συναρτήσεις βάσεις είναι η απλή κατά τμήματα σταθερή (παλμική) συνάρτηση που ορίζεται στο σχήμα 1(α) ως εξής

$$g_n(x') = \begin{cases} 1, & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (23)$$

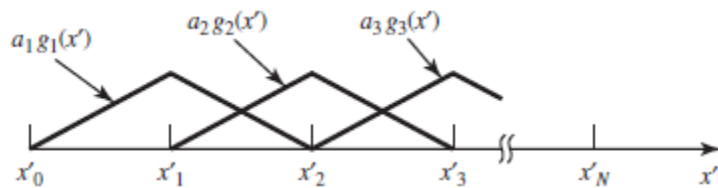
Μετά τον υπολογισμό των συντελεστών η συνάρτηση αυτή δίνει την κλιμακωτή συνάρτηση των σχημάτων 1(β) και 1(γ), που θα αντιπροσωπεύει την άγνωστη συνάρτηση.

Μία άλλη συνήθης συνάρτηση βάσης είναι η κατά τμήματα γραμμική, η "τριγωνική" συνάρτηση που ορίζεται ως

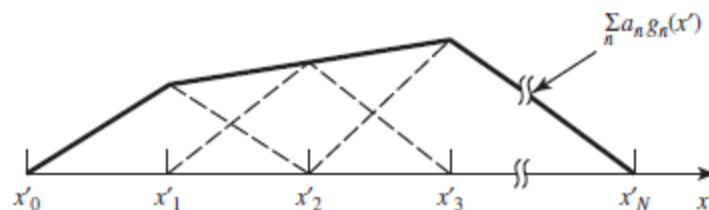
$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{x' - x'_{n-1}}{x'_n - x'_{n-1}}, & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{x'_{n+1} - x'}{x'_{n+1} - x'_n}, & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (24)$$



(α) Απλή



(β) Πολλαπλή



(γ) Παράσταση της συνάρτησης

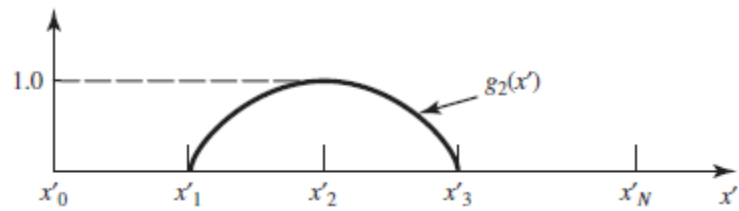
Σχήμα 2: Κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις αυτές καλύπτουν δύο τμήματα και τις γειτονικές συναρτήσεις όπως στο σχήμα 2(β). Η τελική συνάρτηση στο σχήμα 2(γ) είναι ομαλότερη από την "παλμική", αλλά απαιτεί μεγαλύτερο όγκο υπολογισμών.

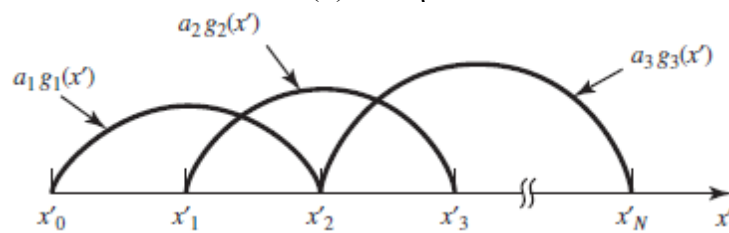
Η αύξηση της πολυπλοκότητας των συναρτήσεων βάσης του υποσυνόλου πέραν του επιπέδου της "τριγωνικής" δεν εγγυάται βελτίωση της ακρίβειας. Υπάρχουν βέβαια περιπτώσεις όπου μερικές ειδικές συναρτήσεις είναι χρήσιμες για άλλους λόγους. Παραδείγματος χάρη, μερικοί ολοκληρωτικοί τελεστές υπολογίζονται χωρίς αριθμητική ολοκλήρωση σε περίπτωση που οι ολοκληρωτικές συναρτήσεις πολλαπλασιαστούν επί μία συνάρτηση της μορφής $\sin(kx')$ ή $\cos(kx')$, όπου x είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης. Στις περιπτώσεις αυτές μπορεί να αποφευχθούν αρκετά σφάλματα και να κερδηθεί υπολογιστικός χρόνος.

Συνήθως χρησιμοποιούνται συναρτήσεις βάσης κατά τμήματα ημιτονικής μορφής όπως στο σχήμα (3)

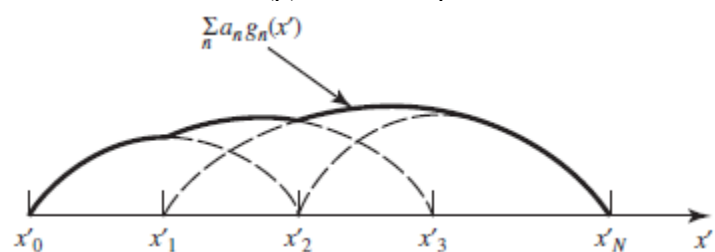
$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{\sin[k(x' - x'_{n-1})]}{\sin[k(x'_n - x'_{n-1})]}, & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{\sin[k(x'_{n+1} - x')]}{\sin[k(x'_{n+1} - x'_n)]}, & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (25)$$



(α) Απλή



(β) Πολλαπλή

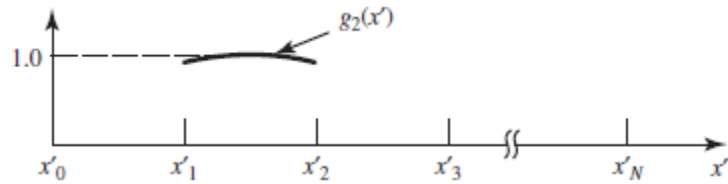


(γ) Παράσταση της συνάρτησης

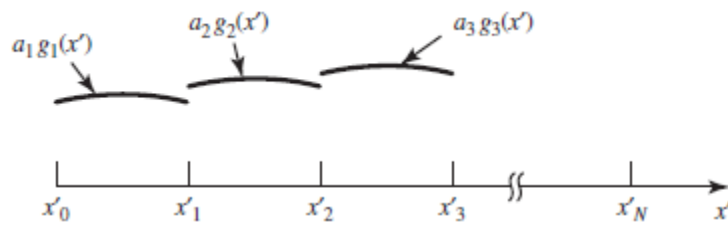
Σχήμα 3: Κατά τμήματα ημιτονικές συναρτήσεις στο υποσύνολο ορισμού

Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις ψαλιδισμένης συνημιτονικής μορφής ως εξής

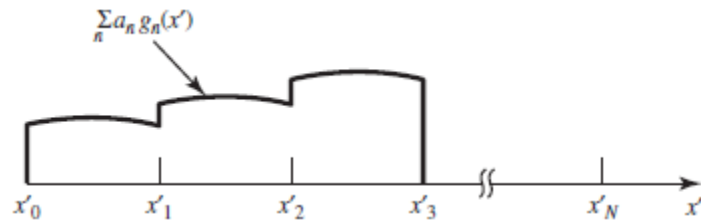
$$g_n(x') = \begin{cases} \cos \left[k \left(x' - \frac{x'_n - x'_{n-1}}{2} \right) \right], & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (26)$$



(α) Απλή



(β) Πολλαπλή



(γ) Παράσταση της συνάρτησης

Σχήμα 4: Συναρτήσεις ψαλιδισμένου συνημιτόνου στο υποσύνολο ορισμού

Συναρτήσεις ολικού πεδίου

Οι συναρτήσεις ολικού πεδίου (πλήρους πεδίου ορισμού) ορίζονται όπως υποδηλώνει και το όνομα τους ως εκείνες που είναι διαφορετικές από το μηδέν σε ολόκληρο το μήκος της δομής.

Μία συνηθής ομάδα τέτοιων συναρτήσεων βάσης είναι οι ημιτονικές συναρτήσεις της μορφής

$$g_n(x') = \cos \left[\frac{(2n-1)\pi x'}{l} \right], \quad -\frac{l}{2} \leq x' \leq \frac{l}{2} \quad (27)$$

Σημειώνεται ότι η ομάδα αυτή συναρτήσεων βάσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στη μοντελοποίηση της κατανομής ρεύματος σε δίπολο από σύρμα. Το κύριο πλεονέκτημα των ολικών συναρτήσεων αποδεικνύεται στα προβλήματα όπου η άγνωστη συνάρτηση υποτίθεται πως ακολουθεί ένα γνωστό δεδομένο διάγραμμα. Οι ολικές συναρτήσεις δίνουν αποδεκτές παραστάσεις της άγνωστης συνάρτησης

χρησιμοποιώντας πολύ λιγότερους όρους του αναπτύγματος (2) από όσους χρειάζονται οι τμηματικές συναρτήσεις βάσης. Η παράσταση μίας συνάρτησης με συνημιτονικές ή ημιτονικές ολικές συναρτήσεις είναι όμοια με την ανάπτυξη μιας τυχαίας συνάρτησης σε σειρά Fourier.

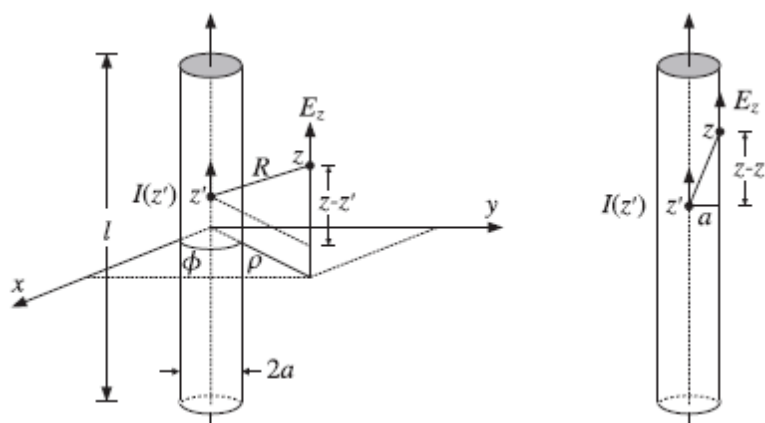
Λόγω του περιορισμού που απαιτεί να χρησιμοποιείται πεπερασμένος αριθμός συναρτήσεων, οι ολικές συναρτήσεις (πλήρους πεδίου ορισμού) δύσκολα προσφέρονται για τη μοντελοποίηση μίας τυχαίας ή πολύπλοκης συνάρτησης. Ομάδες συναρτήσεων βάσης πλήρους πεδίου ορισμού όπως η (27), προκύπτουν με τη χρησιμοποίηση πολωνύμων Tschebyscheff, Maclaurin, Legendre και Hermite ή άλλων εύχρηστων συναρτήσεων.

Πλήθος των συναρτήσεων βάσης

Για ένα δοσμένο πρόβλημα, ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης πρέπει να είναι τέτοιος ώστε να αντιπροσωπεύει αρκετά καλά όλες τις περιοχές της δομής που μελετάται. Επειδή μας αφορούν προβλήματα με αρμονικές εξαρτώμενες από το χρόνο, πρέπει να μοντελοποιήσουμε επακριβώς το μέτρο και τη φάση τους. Όταν χρησιμοποιούνται κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις βάσης, ένας γενικός κανόνας είναι να χρησιμοποιούνται τουλάχιστον δέκα άγνωστοι ανά μήκος κύματος για να αναπαριστώνται σωστά οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις. Αυτό το πλήθος θα πρέπει να αυξάνεται σε περιοχές όπου η λύση ποικίλλει, όπως σε περιοχές μιας επιφάνειας που υπάρχουν κενά, άκρα και τομές. Πρέπει επίσης να σημειωθεί, ότι σε περίπτωση που υπάρχουν υλικά με πολλαπλές διηλεκτρικές περιοχές, το μήκος κύματος του κάθε υλικού διαφέρει, συνεπώς και το πλήθος των συναρτήσεων βάσης.

Παρόλο που ο αριθμός των αγνώστων N πάντα αυξάνει ανάλογα με το μέγεθος του προβλήματος, ο ρυθμός της αύξησης εξαρτάται από το αν το σχήμα του προβλήματος είναι μία γραμμή, μία επιφάνεια ή ένας όγκος. Στην μέθοδο των ροπών, το N αυξάνει γραμμικά για μονοδιάστατα προβλήματα και εκθετικά για προβλήματα δύο διαστάσεων. Ο προκύπτων αριθμός μπορεί να εκτείνεται από μερικές εκατοντάδες σε μερικές χιλιάδες ή ακόμα και εκατομμύρια για μεγάλα προβλήματα. Αυτός ο αριθμός έχει μεγάλη επίπτωση στη μνήμη του υπολογιστικού συστήματος, καθώς απαιτείται να αποθηκευτεί μία μήτρα $N \times N$ και υψηλός υπολογιστικός χρόνος για την επίλυση της.

2.2 Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén σε γραμμική κεραία με τη μέθοδο των ροών



Σχήμα 5: Λεπτή κυλινδρική κεραία πάνω στον άξονα z

Μία κεραία, η οποία μπορεί να λειτουργεί είτε ως πομπός είτε ως δέκτης, πάντα καθοδηγείται από μία εξωτερική πηγή. Αυτή η εξωτερική πηγή καλείται προσπίπτον πεδίο (incident field) E^{in} και ουσιαστικά επάγει ρεύμα στην κεραία. Με τη σειρά του, το ρεύμα αυτό παράγει το δικό του πεδίο E^s το οποίο ακτινοβολείται (scattered). Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο του συστήματος είναι το άθροισμα

$$E^{tot} = E^s + E^{in} \quad (28)$$

Θεωρώντας ότι η κεραία είναι ιδανική, οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια της, επιβάλλουν ότι το εφαπτομενικό πεδίο πρέπει να είναι μηδενικό. Αυτές οι οριακές συνθήκες επαρκούν για τον υπολογισμό της κατανομής του ρεύματος που επάγεται.

Στο σχήμα 5 εικονίζεται μία λεπτή κυλινδρική κεραία πάνω στον άξονα z μήκους l και ακτίνας a , με κατανομή ρεύματος $I(z)$. Θα επικεντρωθούμε στη z-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_z που προκύπτει από το επαγόμενο ρεύμα. Η επίλυση του προβλήματος στηρίζεται στις κυλινδρικές συντεταγμένες. Σύμφωνα με τα [17] και [18], το ρεύμα στην επιφάνεια της κεραίας, για $\rho = a$ δίνεται από την

$$J_s(z) = \frac{I(z)}{2\pi a} \hat{z} \quad (29)$$

όπου υποθέτουμε ότι η πυκνότητα του ρεύματος είναι συμμετρική αζιμουθιακά, δηλαδή ανεξάρτητη της συντεταγμένης φ με αποτέλεσμα να προκύπτει η

$$J(r) = J_s(z)\delta(\rho - a) = \hat{z}I(z)\delta(\rho - a)\frac{1}{2\pi a} = \hat{z}J_z(r) \quad (30)$$

Με τον τρόπο αυτό, υπολογίζεται η z-συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού

$$A_z(z, \rho, \varphi) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J_z(r') e^{-jkR}}{R} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{I(z') \delta(\rho' - a) e^{-jkR}}{2\pi a R} \rho' d\rho' d\varphi' dz'$$

$$A_z(z, \rho, \varphi) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} \int_0^{2\pi} \frac{I(z') e^{-jkR}}{2\pi R} d\varphi' dz' \quad (31)$$

όπου

$$R = |r - r'| = \sqrt{(z - z')^2 + |\rho - \rho'|^2} \quad (32)$$

και χρησιμοποιώντας τη σχέση $\rho' = a$ μπορούμε να γράψουμε ότι

$$|\rho - \rho'| = \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\varphi - \varphi')} \quad (33)$$

και επειδή το φ' εμφανίζεται μόνο στη διαφορά $\varphi - \varphi'$, μπορούμε να μεταβάλουμε την μεταβλητή ολοκλήρωσης από φ' σε $\varphi' - \varphi$, πράγμα που οφείλεται στην κυλινδρική συμμετρία του A_z , που είναι ανεξάρτητο του φ . Οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$A_z(z, \rho) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') G(z - z', \rho) dz' \quad (34)$$

όπου ο ακριβής πυρήνας ορίζεται ως

$$G(z - z', \rho) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} d\varphi' \quad (35)$$

με

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \varphi'} \quad (36)$$

όπου έχουμε θέσει $\varphi = 0$ (το A_z είναι ανεξάρτητο του φ).

Όταν η ακτίνα της κεραίας τείνει να μηδενιστεί, δηλαδή όταν $a \rightarrow 0$, η εξίσωση (34) γίνεται ίση με

$$A_z(z, \rho) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') G_{app}(z - z', \rho) dz' \quad (37)$$

όπου ο $G_{app}(z - z', \rho)$ είναι ο προσεγγιστικός πυρήνας του προβλήματος και ισούται με

$$G_{app}(z - z', \rho) = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (38)$$

και

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2} \quad (39)$$

Με δεδομένο το δυναμικό $A_z(z, \rho)$, η z -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που παράγεται από το ρεύμα, υπολογίζεται από την εξίσωση

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z(z, \rho) = j\omega\mu\epsilon E_z^s(z, \rho) \quad (40)$$

οι τιμές του διανυσματικού δυναμικού A_z και του ηλεκτρικού πεδίου E_z^s στην επιφάνεια της γραμμικής κεραίας προκύπτουν θέτοντας στις εξισώσεις $\rho = a$. Οπότε

$$A_z(z, a) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') G(z - z', a) dz' \quad (41)$$

Για να απλοποιηθεί περισσότερο ο συμβολισμός θέτουμε

$$A_z(z, a) = A_z(z) \quad (42)$$

και

$$G(z - z', a) = G(z - z') \quad (43)$$

Η οριακή συνθήκη του ηλεκτρικού πεδίου για $\rho = a$ είναι η

$$E_z^{tot}(z, a) = E_z^s(z, a) + E_z^{in}(z, a) = 0 \quad (44)$$

Για περαιτέρω απλοποίηση θέτουμε

$$E^s(z) = E_z^s(z, a) \quad (45)$$

και

$$E^{in}(z) = E_z^{in}(z, a) \quad (46)$$

Από τη σχέση (44) έχουμε ότι

$$E^s(z) = -E^{in}(z) \quad (47)$$

και βάση της (40) το προσπίπτον πεδίο ισούται με

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)A_z(z) = -j\omega\mu\epsilon E^{in}(z) \quad (48)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην παραπάνω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθούν και ο ακριβής και ο προσεγγιστικός πυρήνας. Σε περίπτωση που τελικά χρησιμοποιηθεί ο προσεγγιστικός πυρήνας, ισχύουν ακόμα οι οριακές συνθήκες για $\rho = a$.

Για να συνοψίσουμε, με δοσμένο το προσπίπτον πεδίο κατά μήκος της κεραίας $E^{in}(z)$, μπορεί να υπολογιστεί το $A_z(z)$ μέσω της εξίσωσης (48) και έπειτα να βρεθεί το ρεύμα $I(z)$ επιλύοντας την ολοκληρωτική εξίσωση (41). Ανάλογα με τη διαδικασία επίλυσης που ακολουθείται και τη θέση του διαφορικού τελεστή $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)$ μπορούμε να οδηγηθούμε είτε στην εξίσωση Hallén ή στην εξίσωση Pocklington.

Η ολοκληρωτική εξίσωση Pocklington είναι η

$$\frac{\mu}{4\pi} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{-l/2}^{l/2} I(z')G(z-z')dz' = -j\omega\mu\epsilon E^{in}(z) \quad (49)$$

ή

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z') \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) G(z-z')dz' = -j\omega\mu\epsilon E^{in}(z) \quad (50)$$

και η ολοκληρωτική εξίσωση Hallén είναι η

$$\frac{\mu}{4\pi} \int_{-l/2}^{l/2} I(z')G(z-z')dz' = -j\omega\mu\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)^{-1} E^{in}(z) \quad (51)$$

Ο αντίστροφος διαφορικός τελεστής στην (51) μπορεί να γραφτεί και ως ένας συνελκτικός, ολοκληρωτικός τελεστής που επιδρά στο $E^{in}(z)$, πράγμα που θα αναλυθεί αργότερα.

Αυτές οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις πρέπει να επιλυθούν με τη σύμβαση ότι στα άκρα της κεραίας το ρεύμα μηδενίζεται. Δηλαδή

$$I(l/2) = I(-l/2) = 0 \quad (52)$$

Στην επιφάνεια της κεραίας ο ακριβής και ο προσεγγιστικός πυρήνας υπολογίζεται ότι είναι ίσοι με

Ακριβής πυρήνας

$$G(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' \quad (53)$$

με

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2 - 2a^2 \cos\varphi'} \quad (54)$$

Προσεγγιστικός πυρήνας

$$G_{app}(z - z') = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (55)$$

με

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2} \quad (56)$$

2.2.1 Αναλυτική επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén

Αντί να εργαζόμαστε με το διανυσματικό δυναμικό $A_z(z)$, είναι πιο βολικό να χρησιμοποιήσουμε την κλιμακωτή μορφή του που μετράται σε volts και ορίζεται ως

$$V(z) = 2jcA_z(z) \quad (57)$$

όπου c είναι η ταχύτητα του φωτός. Θεωρούμε επίσης το βαθμωτό δυναμικό $\varphi(z)$ για το οποίο ισχύει η

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -j\omega\mu\varphi(z) \quad (58)$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω με $2jc$ και γνωρίζοντας ότι $c\omega\mu = \frac{\omega}{c} = k$, οδηγούμαστε στην

$$\frac{\partial V(z)}{\partial z} = 2k\varphi(z) \quad (59)$$

Παρομοίως πολλαπλασιάζοντας την (48) με $2jc$, μπορούμε να τη γράψουμε ως

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) V(z) = 2kE^{in}(z) \quad (60)$$

ή

ή

$$V(z) = 2k \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right)^{-1} E^{in}(z) \quad (61)$$

Θεωρώντας ότι $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$ και ότι το μισό μήκος της κεραίας είναι ίσο με $h = l/2$ προκύπτει από την (51) η

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z-z') I(z') dz' = V(z) \quad (62)$$

Οι εξισώσεις (61) και (62) αποτελούν μια εναλλακτική μορφή της εξίσωσης του Hallén. Μία λύση της (60) υπολογίζεται με τη συμβολή της συνάρτησης Green $F(z)$, η οποία προκύπτει από την επίλυση της

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F(z) = 2k\delta(z) \quad (63)$$

Επιπρόσθετα απαιτείται να βρεθεί και η λύση της ομογενούς εξίσωσης

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) V(z) = 0 \quad (64)$$

που είναι η

$$V_{hom} = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} \quad (65)$$

Οπότε ως συνολική λύση της (60) ορίζεται η

$$V(z) = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^h F(z-z') E^{in}(z') dz' \quad (66)$$

ή

$$V(z) = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + \int_{-h}^h F(z-z') E^{in}(z') dz' \quad (67)$$

Συνήθως ως $F(z)$ χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις,

$$F(z) = j e^{-jk|z|} \quad (68)$$

με

$$V(z) = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^h j e^{-jk|z-z'|} E^{in}(z') dz' \quad (69)$$

και

$$F(z) = \sin k|z| \quad (70)$$

με

$$V(z) = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^h \sin(k|z - z'|) E^{in}(z') dz' \quad (71)$$

Συνδυάζοντας τις λύσεις αυτές με την εξίσωση (62), παίρνουμε την ισοδύναμη μορφή της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén, για ένα τυχαίο προσπίπτον πεδίο E^{in} η οποία είναι

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z - z') I(z') dz' = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^h F(z - z') E^{in}(z') dz' \quad (72)$$

ή εναλλακτικά

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z - z') I(z') dz' = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + \int_{-h}^h F(z - z') E^{in}(z') dz' \quad (73)$$

όπου οι C_1 και C_2 εξάγονται από τις συνθήκες $I(h) = I(-h) = 0$.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η κεραία στην οποία προσπίπτει ηλεκτρικό πεδίο το οποίο έχει μορφή

$$E^{in} = E_0 \sin\theta e^{jkz \cos\theta} \quad (74)$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Green $F(z) = je^{-jk|z|}$, η συνέλιξη της με το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο E^{in} μπορεί να βρεθεί εύκολα και δίνεται από την

$$\int_{-h}^h je^{-jk|z-z'|} E_0 \sin\theta e^{jkz' \cos\theta} dz' = \frac{2E_0}{k \sin\theta} e^{jkz \cos\theta} + C(z) \quad (75)$$

οι C είναι οι λύσεις της ομογενούς εξίσωσης και συνεπώς μπορούν να απορροφηθούν από τους υπόλοιπους ομογενείς όρους της $V(z)$, που οδηγούν στην εξίσωση του Hallén για την κεραία λήψης που είναι η

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z - z') I(z') dz' = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \frac{2E_0}{k \sin\theta} e^{jkz \cos\theta} \quad (76)$$

2.2.2 Μέθοδος των ροπών για τη γραμμική κεραία

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των ροπών για την επίλυση της εξίσωσης Hallén για ένα προσπίπτον πεδίο, εξαρτώμενο από τη συνάρτηση δέλτα και αργότερα θα εξεταστεί και η περίπτωση που το προσπίπτον πεδίο είναι τυχαίας μορφής. Ένα προσπίπτον πεδίο εξαρτώμενο από τη συνάρτηση δέλτα έχει μορφή

$$E^{in}(z) = V_0 \delta(z) \quad (77)$$

με

$$\int_{-h}^h F(z-z') E^{in}(z') dz' = \int_{-h}^h F(z-z') V_0 \delta(z') dz' = V_0 F(z) \quad (78)$$

συνεπώς έχουμε την ολοκληρωτική εξίσωση

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z-z') I(z') dz' = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + V_0 F(z) \quad (79)$$

επειδή η $E^{in}(z)$ είναι μία άρτια συνάρτηση ως προς z , μπορούμε να καταλάβουμε ότι $C_2 = 0$ και χρησιμοποιώντας ως συνάρτηση Green την $F(z) = \sin k|z|$, παίρνουμε

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z-z') I(z') dz' = C_1 \cos(kz) + V_0 \sin k|z| \quad (80)$$

ο πυρήνας $G(z-z')$ μπορεί να είναι είτε ο ακριβής είτε ο προσεγγιστικός.

Παρατηρήσεις

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα και για το συγκεκριμένο προσπίπτον πεδίο, θα αναλυθεί αριθμητικά η επίλυση της εξίσωσης Hallén με τη βοήθεια της μεθόδου των ροπών. Πριν γίνει η ανάλυση αυτή, πρέπει να σημειωθούν ορισμένες παρατηρήσεις οι οποίες διευκρινίζουν κάποια χαρακτηριστικά της συγκεκριμένης ολοκληρωτικής εξίσωσης σε αριθμητικές μεθόδους.

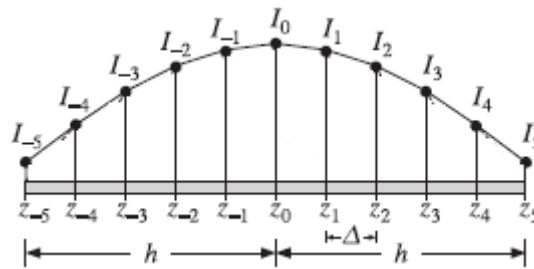
- Η αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Hallén χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα, δε συγκλίνει και δίνει ανακριβή αποτελέσματα ενόσω αυξάνεται ο αριθμός των τμημάτων N ή η ακτίνα της κυλινδρικής κεραίας a . Αντίθετα, με τη χρήση του ακριβή πυρήνα, η λύση συγκλίνει. Παρόλα αυτά, για μικρές τιμές του N μπορούμε να πάρουμε επαρκή αποτελέσματα και από τον προσεγγιστικό πυρήνα.

- Ενώ όπως προαναφέρθηκε, οι αριθμητικές μέθοδοι συγκλίνουν χρησιμοποιώντας τον ακριβή πυρήνα, στο σημείο $z = 0$, η λύση για το $I(z)$, χρησιμοποιώντας συναρτήσεις δέλτα δεν μπορεί να οριστεί λόγω της λογαριθμικής του εξάρτησης. Δηλαδή στο $z = 0$ έχουμε

$$I(z) \approx -j \frac{4kaV_0}{\eta} \ln(k|z|) \quad (81)$$

Παρόλο που το ρεύμα έχει αυτή την μορφή, η λύση δεν επηρεάζεται με τον ακριβή πυρήνα καθώς, η ασυνέχεια υφίσταται σε ένα μόνο σημείο του προβλήματος.

- Για λόγους απλότητας, θα μεταβληθεί η συμβολογραφία για τη μέθοδο των ροπών ως προς τις συναρτήσεις βάσης και βάρους. Πιο συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις βάσης g_n θα συμβολίζονται με b , οι συναρτήσεις βάρους g_m θα συμβολίζονται με w . Τέλος, επειδή αντιμετωπίζουμε μία κεραία ρεύματος I , τάσης v αντίστασης Z , η εξίσωση $[F_{mn}][a_n] = [h_m]$, μετασχηματίζεται στην $[Z_{mn}][I_n] = [v_m]$



Σχήμα 6: Τμήματα κατά μήκος της κεραίας (εδώ $N = 11, M = 5$)

Η κεραία όπως φαίνεται στο σχήμα (6) χωρίζεται σε $N = 2M + 1$ τμήματα μήκους $\Delta = l/N = \frac{2h}{2M+1}$, με κέντρα παρατήρησης στις θέσεις

$$z_m = m\Delta, -M \leq m \leq M \quad (82)$$

και το ρεύμα αναλύεται σε ένα άθροισμα τμηματικών συναρτήσεων βάσης ως εξής

$$I(z') = \sum_{m=-M}^M I_m b(z' - z_m) \quad (83)$$

όπου $b(z' - z_m)$ είναι οι συναρτήσεις βάσης που βρίσκονται στο m -οστό τμήμα. Αντικαθιστώντας την $I(z')$ στην εξίσωση του Hallén παίρνουμε

$$\frac{j\eta}{2\pi} \sum_{m=-M}^M I_m \int_{-h}^h G(z - z') b(z' - z_m) dz' = V(z) \quad (84)$$

Ουσιαστικά η συνάρτηση $b(z' - z_m)$ ορίζει το ολοκλήρωμα στην περιοχή του τμήματος m . Επίσης, απαιτείται μία συνάρτηση βάρους $w(z - z_n)$, σε κάθε σημείο με χαρακτηριστικό $z_n = n\Delta$. Η συνάρτηση βάρους είναι τέτοια ώστε η (84) να μετασχηματίζεται στην

$$\begin{aligned} \frac{j\eta}{2\pi} \sum_{m=-M}^M I_m \int_{-h}^h \int_{-h}^h w(z - z_n) G(z - z') b(z' - z_m) dz dz' \\ = \int_{-h}^h w(z - z_n) V(z) dz \quad (85) \end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί σε μορφή μίας μήτρας $N \times N$, ως εξής

$$\sum_{m=-M}^M Z_{nm} I_m = v_n, \quad -M \leq n \leq M \quad (86)$$

όπου

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h \int_{-h}^h w(z - z_n) G(z - z') b(z' - z_m) dz dz' \quad (87)$$

και

$$v_n = \int_{-h}^h w(z - z_n) V(z) dz \quad (88)$$

Όταν επιλύουμε αριθμητικά με τη μέθοδο της σημειακής προσαρμογής ισχύουν οι

$$w(z - z_n) = \delta(z - z_n) \quad (89)$$

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z_n - z') b(z' - z_m) dz' \quad (90)$$

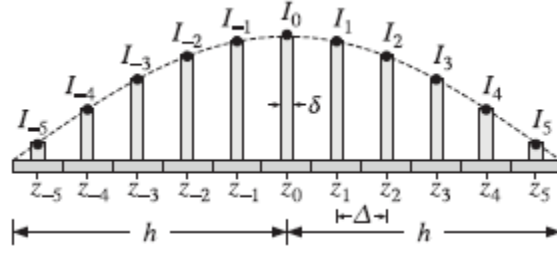
$$v_n = V(z_n) = C_1 \cos(kz_n) + V_0 \operatorname{sinc}|z_n| \quad (91)$$

Ομοίως για τη μέθοδο Galerkin ισχύουν οι εξισώσεις

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h \int_{-h}^h b(z - z_n) G(z - z') b(z' - z_m) dz dz' \quad (92)$$

$$v_n = \int_{-h}^h b(z - z_n) V(z) dz \quad (93)$$

Επίλυση με Σημειακή Προσαρμογή χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης τύπου δέλτα



Σχήμα 7: Τμήματα συναρτήσεων δέλτα κατά μήκος μιας κεραίας με $N = 11, M = 5$

Εδώ θα αναλυθεί η επίλυση της εξίσωσης Hallén, χρησιμοποιώντας ως συνάρτηση βάσης τη συνάρτηση δέλτα με σημειακή προσαρμογή. Η συνάρτηση βάσης του προβλήματος ορίζεται ως

$$b(z' - z_m) = \delta(z' - z_m)\Delta \quad (94)$$

Για λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω, στο σχήμα 7 παρατηρούμε ότι ως συναρτήσεις δέλτα, εφαρμόζονται παλμικές συναρτήσεις πολύ μικρού πλάτους δ . Οι συναρτήσεις αυτές πολλαπλασιάζονται με τον παράγοντα Δ , ο οποίος προσαρμόζει τις συναρτήσεις αυτές με βάση το ρεύμα $I(z')$. Βάζοντας τη βάση αυτή στις εξισώσεις (92) και (93) βρίσκουμε τις

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} G(z_n - z_m)\Delta, -M \leq n, m \leq M \quad (95)$$

$$v_n = C_1 \cos(kz_n) + V_0 \text{sinc}|z_n|, -M \leq n \leq M \quad (96)$$

Επειδή $z_n - z_m = (n - m)\Delta$, τα διαγώνια στοιχεία Z_{nn} αντιστοιχούν με τον υπολογισμό του πυρήνα $G(z)$ στο σημείο $z = 0$. Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, η τιμή $G_{app}(0)$, είναι πεπερασμένη και αντιστοιχεί στην πολύ μικρή τιμή της ακτίνας της κυλινδρικής κεραίας με $R = a$. Αντιθέτως, όταν εφαρμόζεται ο ακριβής πυρήνας δεν μπορεί να οριστεί για $z = 0$. Για το λόγο αυτό, ένας τρόπος μετατροπής των Z_{nn} είναι αντικατάσταση των απείρων λεπτών συναρτήσεων δέλτα, με παλμούς πολύ μικρού και πεπερασμένου πλάτους, ώστε

$$b(z) = \delta(z)\Delta \sim \frac{u(z + \delta/2) - u(z - \delta/2)}{\delta} \Delta \quad (97)$$

όπου η συνάρτηση $u(z)$ είναι η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος. Έτσι για τα διαγώνια στοιχεία Z_{nn} έχουμε

$$Z_{nn} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z_n - z') b(z' - z_n) dz' = \frac{\Delta j\eta}{\delta 2\pi} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} G(z) dz \quad (98)$$

Όταν $\delta = \Delta$ οδηγούμαστε σε επαρκή αποτελέσματα συγκριτικά με τις μεθόδους που χρησιμοποιούν άλλα είδη συναρτήσεων βάσης. Οπότε προκύπτει η

$$Z_{nn} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} G(z) dz, \quad -M \leq n \leq M \quad (99)$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των εξισώσεων (98) και (99), μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (86) σε πιο συμπαγή μορφή ως

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = C_1 \mathbf{c} + V_0 \mathbf{s} \quad (100)$$

όπου η \mathbf{Z} είναι η μήτρα $N \times N$ με στοιχεία τα Z_{nm} και τα $\mathbf{I}, \mathbf{c}, \mathbf{s}$ είναι μήτρες στήλες με $c_n = \cos kz_n$ και $s_n = \sin kz_n$. Η μήτρα \mathbf{I} είναι συμμετρική ως προς το κέντρο της (λόγω της συμμετρίας της κεραίας), με $I_n = I_{-n}$, συνθήκη η οποία ισχύει και για τις \mathbf{c}, \mathbf{s} .

Για τον υπολογισμό της άγνωστης μήτρας \mathbf{I} , πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τη σταθερά C_1 , που μπορεί να γίνει λαμβάνοντας υπόψη τις συνοριακές συνθήκες του σύρματος οι οποίες είναι

$$I_z(-h) = I_z(h) = 0 \quad (101)$$

Αυτές οι οριακές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν θέτοντας τις συναρτήσεις βάσης μηδέν σε κάθε άκρο. Αυτή η συνθήκη μπορεί να εκφραστεί σε μορφή μητρών ως $\mathbf{u}^T \mathbf{I} = 0$, όπου $\mathbf{u}^T = [1, 0, \dots, 0, 1]$. Έτσι η μήτρα \mathbf{I} μπορεί να υπολογιστεί μέσω της εξίσωσης

$$\mathbf{I} = C_1 \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{c} + V_0 \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s} \quad (102)$$

και πολλαπλασιάζοντας και τις δύο πλευρές με \mathbf{u}^T έχουμε

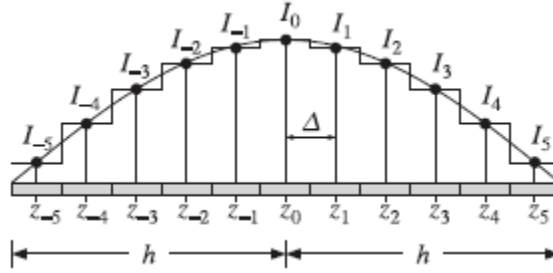
$$\mathbf{u}^T \mathbf{I} = C_1 \mathbf{u}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{c} + V_0 \mathbf{u}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s} = 0 \quad (103)$$

και επιλύοντας ως προς C_1

$$C_1 = -V_0 \frac{\mathbf{u}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{s}}{\mathbf{u}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{c}} \quad (104)$$

Επίλυση χρησιμοποιώντας παλμικές συναρτήσεις βάσης

Εδώ εξετάζουμε την αριθμητική επίλυση της εξίσωσης Hallén χρησιμοποιώντας παλμικές συναρτήσεις βάσης. Θα αναλυθούν η μέθοδος Galerkin και η σημειακή προσαρμογή, όπου για την τελευταία υπάρχει ένα αριθμητικό παράδειγμα βασισμένο σε κώδικα Matlab σύμφωνα με την καθοδήγηση των [17,23]. Επισημαίνουμε ότι και οι δύο μέθοδοι στηρίζονται στη συμπαγή εξίσωση (100).



Σχήμα 8: Παλμικές συναρτήσεις βάσης κατά μήκος της κεραίας (εδώ $N = 11, M = 5$)

Όπως και με τις προηγούμενες αναλύσεις, το ρεύμα κατά μήκος της κεραίας έχει τη μορφή

$$I(z') = \sum_{m=-M}^M I_m b(z' - z_m) \quad (105)$$

όπου η $b(z)$ είναι η παλμική συνάρτηση

$$b(z' - z_m) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2}\Delta \leq z' - z_m \leq \frac{1}{2}\Delta \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (106)$$

Η μέθοδος Galerkin χρησιμοποιεί την εξίσωση (100) με κάποιες μεταβολές στις ποσότητες $\mathbf{Z}, \mathbf{c}, \mathbf{s}$. Τα στοιχεία της μήτρας \mathbf{Z} , τα Z_{nm} δίνονται από την εξίσωση (92)

$$\begin{aligned} Z_{nm} &= \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h \int_{-h}^h b(z - z_n) G(z - z') b(z' - z_m) dz dz' \\ &= \frac{j\eta}{2\pi} \int_{z_n - \Delta/2}^{z_n + \Delta/2} \int_{z_m - \Delta/2}^{z_m + \Delta/2} G(z - z') dz dz' \\ &= \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} G(z_n - z_m + x - x') dx dx' \quad (107) \end{aligned}$$

όπου έχει γίνει αλλαγή μεταβλητής με $x = z - z_n$ και $x' = z' - z_m$, άρα $z = x - x'$, οπότε οδηγούμαστε στην απλοποιημένη μορφή

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} (\Delta - |z|) G(z_n - z_m + z) dz, -M \leq n, m \leq M \quad (108)$$

Ακολουθώντας, τα υπόλοιπα στοιχεία της εξίσωσης (100) βρίσκονται μέσω της

$$\begin{aligned} v_n &= \int_{-h}^h b(z - z_n) V(z) dz = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} V(z_n + x) dx \\ &= C_1 \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \text{cosk}(z_n + x) dx + V_0 \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \text{sink}|z_n + x| dx \\ &= C_1 c_n + V_0 s_n \quad (109) \end{aligned}$$

με

$$c_n = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \text{cosk}(z_n + x) dx = \frac{2}{k} \sin\left(\frac{k\Delta}{2}\right) \text{cosk}z_n \quad (110)$$

$$s_n = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} \text{sink}|z_n + x| dx = \frac{4}{k} \sin^2\left(\frac{k\Delta}{4}\right) \delta(n) + \frac{2}{k} \sin\left(\frac{k\Delta}{2}\right) \text{sink}|z_n| \quad (111)$$

όπου η $\delta(n)$ είναι το δέλτα του Kronecker και $z_n = n\Delta$ για $-M \leq n \leq M$.

Για τη σημειακή προσαρμογή ακολουθούνται οι παρακάτω εξισώσεις

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z_n - z') b(z' - z_m) dz' = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{z_m - \Delta/2}^{z_m + \Delta/2} G(z_n - z') dz' \quad (112)$$

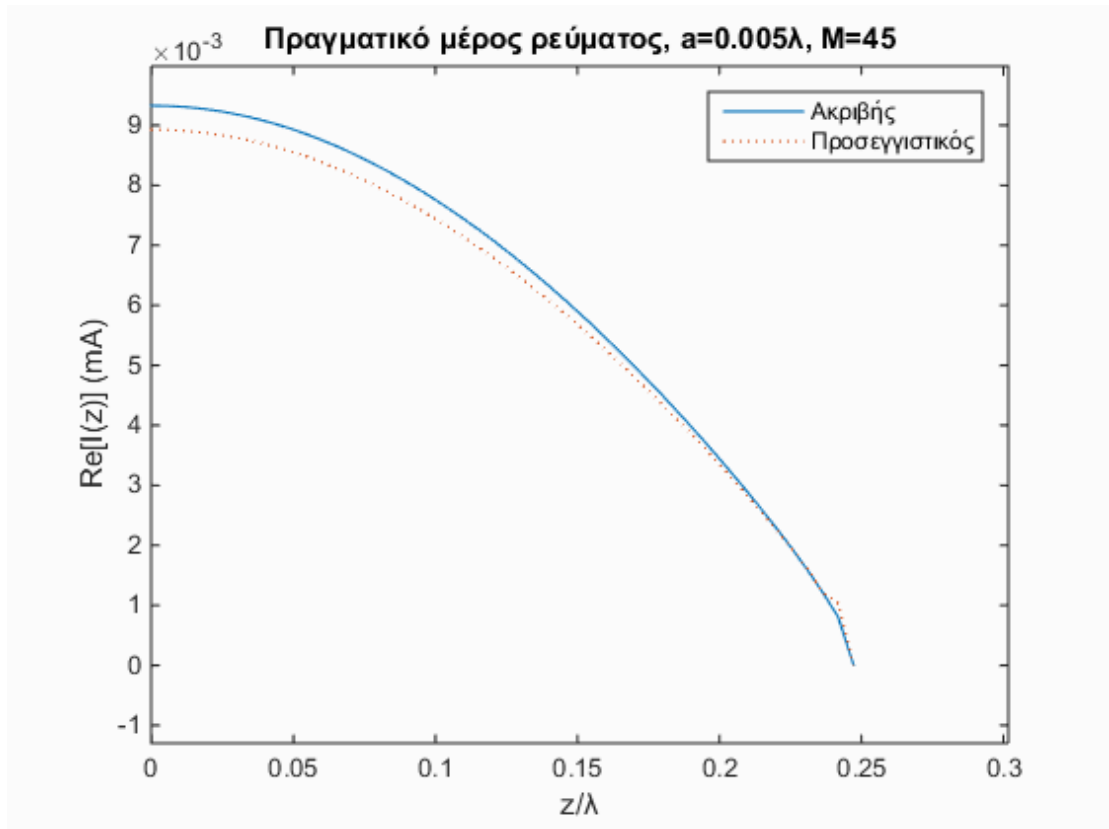
Αλλάζοντας τη μεταβλητή ολοκλήρωσης $z = z' - z_m$, προκύπτει

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} G(z_n - z_m - z) dz, -M \leq n, m \leq M \quad (113)$$

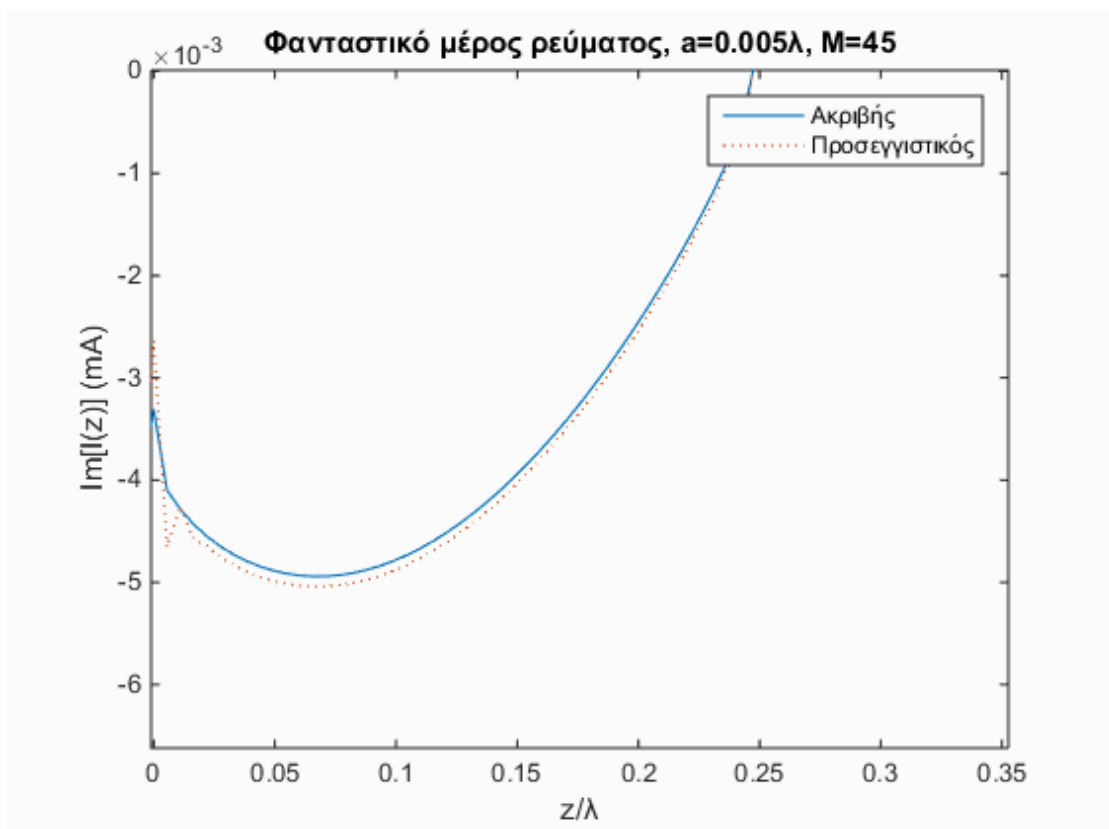
Λόγω συμμετρίας η ολοκλήρωση μπορεί να γίνει στο μισό τμήμα ως εξής

$$Z_{nm} = \frac{j\eta}{2\pi} \int_0^{\Delta/2} [G(z_n - z_m - z) + G(z_n - z_m + z)] dz \quad (114)$$

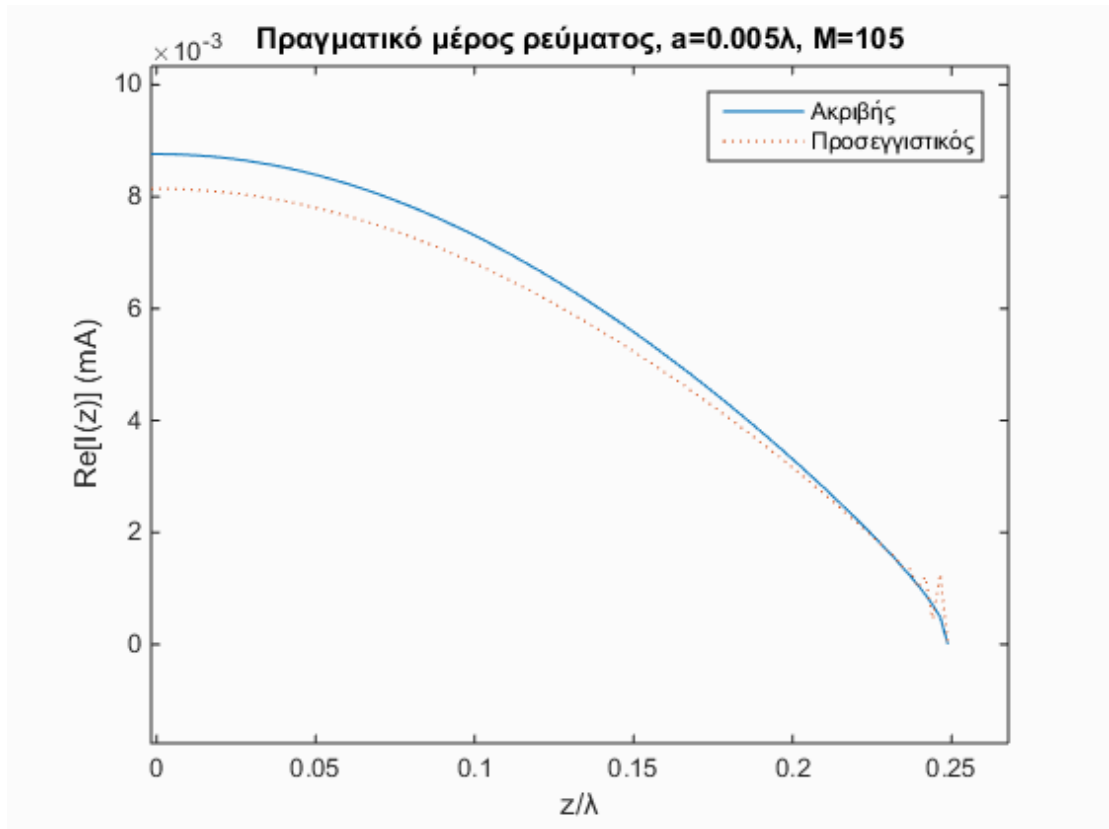
Με τη βοήθεια του Matlab στα σχήματα 9 έως 12, αναλύεται το πρόβλημα της σημειακής προσαρμογής, χρησιμοποιώντας τον ακριβή (συνεχής γραμμή) και τον προσεγγιστικό (διακεκομμένη γραμμή) πυρήνα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα επιλέγεται μήκος κεραίας $l = 0,5\lambda$ και ακτίνα κυλίνδρου $a = 0,005\lambda$.



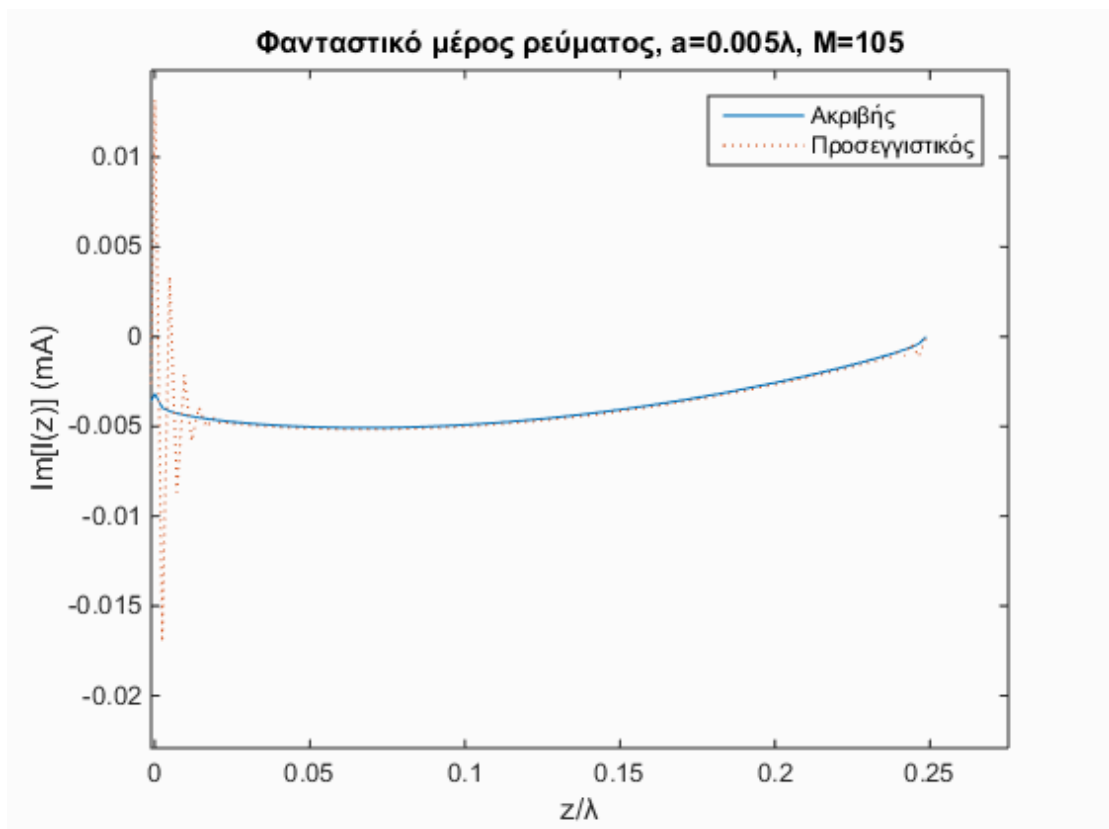
Σχήμα 9: Πραγματικό μέρος του $I(z)$, ως προς το δίπολο μήκους $0,5\lambda$, με $M = 45$, $a = 0,005\lambda$, χρησιμοποιώντας ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα.



Σχήμα 10: Φανταστικό μέρος του $I(z)$, ως προς το δίπολο μήκους $0,5\lambda$, με $M = 45$, $a = 0,005\lambda$, χρησιμοποιώντας ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα.



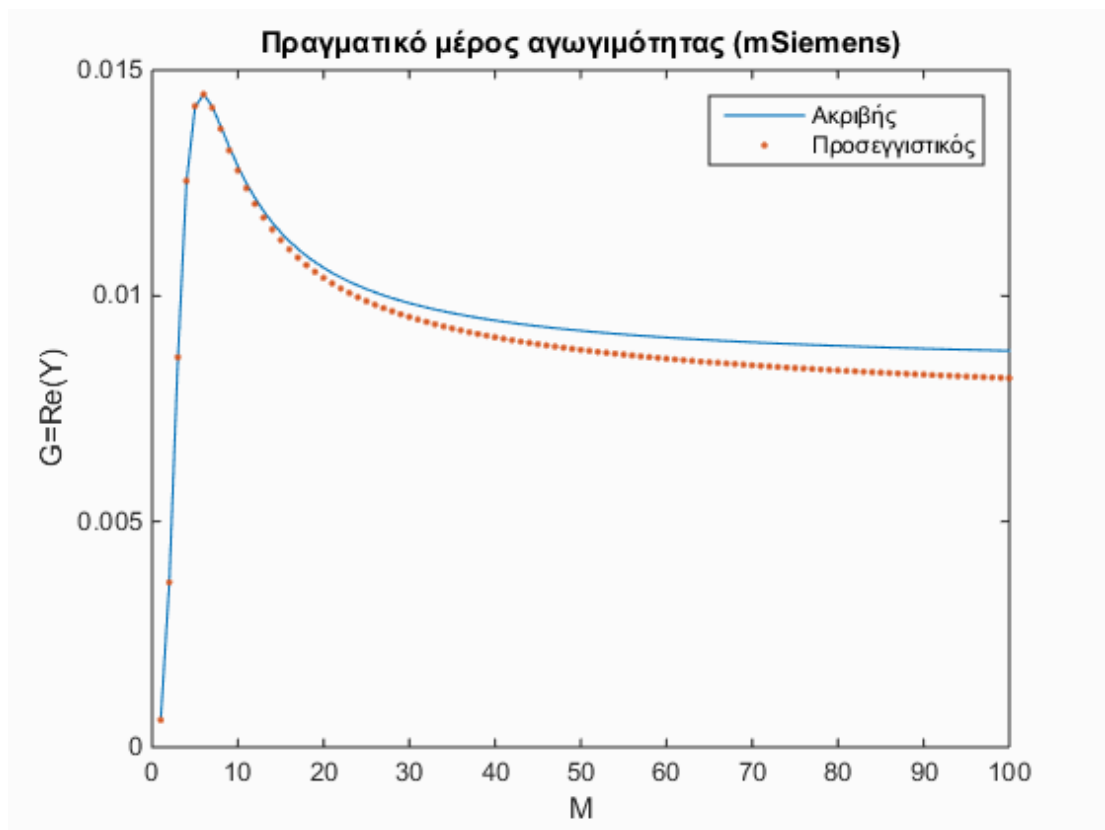
Σχήμα 11: Πραγματικό μέρος του $I(z)$, ως προς το δίπολο μήκους $0,5\lambda$, με $M = 105$, $a = 0,005\lambda$, χρησιμοποιώντας ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα.



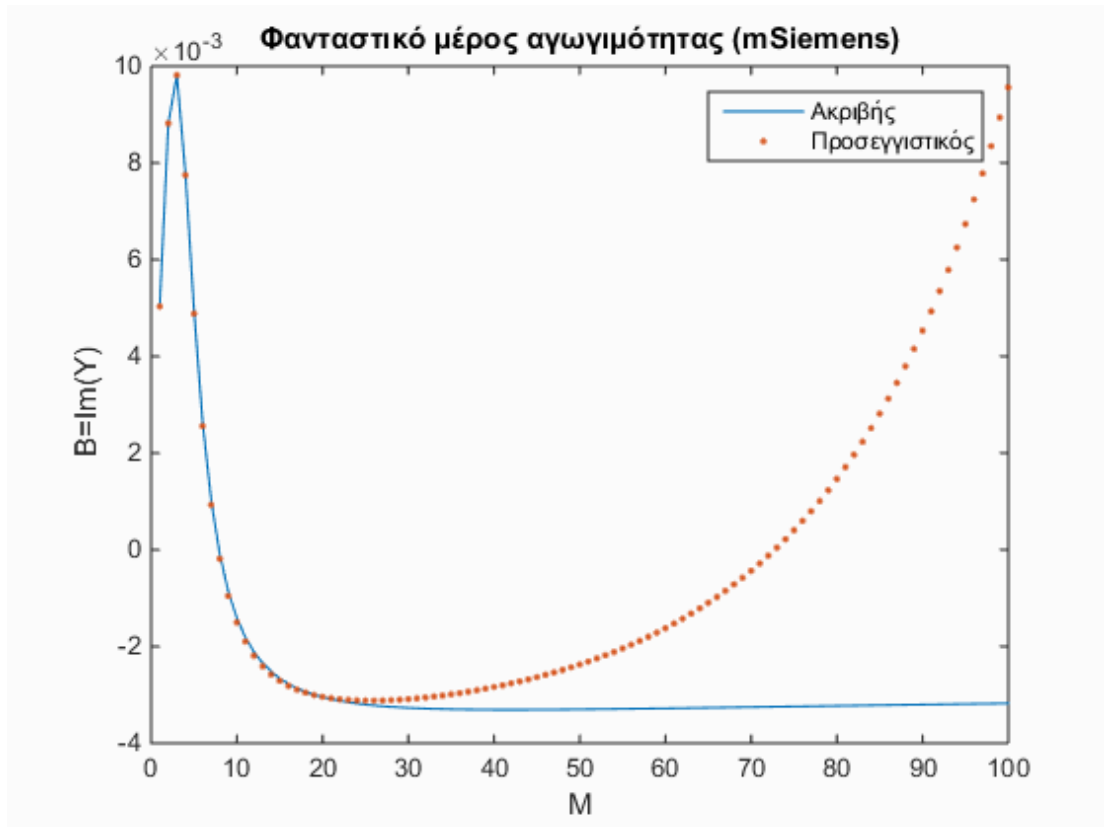
Σχήμα 12: Φανταστικό μέρος του $I(z)$, ως προς το δίπολο μήκους $0,5\lambda$, με $M = 105$, $a = 0,005\lambda$, χρησιμοποιώντας ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα.

Τα τέσσερα αυτά σχήματα, δείχνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, των δειγμάτων του ρεύματος I_n χρησιμοποιώντας $M = 45$, δηλαδή $N = 2M + 1 = 91$ τμήματα στα σχήματα 9 και 10 και $M = 105$, δηλαδή $N = 2M + 1 = 211$ τμήματα για τα σχήματα 11 και 12. Εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, ο προσεγγιστικός πυρήνας παρουσιάζει διακυμάνσεις κυρίως στη θέση του κέντρου $z = 0$ και στο άκρο $z = h$. Οι διακυμάνσεις αυτές αυξάνονται ενόσω αυξάνεται ο αριθμός των τμημάτων και η ακτίνα της διατομής. Τα δύο αυτά σχήματα αποδεικνύουν την παρατήρηση που έγινε στην αρχή της ενότητας κατά την οποία, δεν υπάρχει λύση της εξίσωσης (80) με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα.

Τέλος, εξετάζεται η σύγκλιση των αριθμητικών αποτελεσμάτων του ακριβή και του προσεγγιστικού πυρήνα καθώς ο αριθμός των τμημάτων M αυξάνει. Συγκεκριμένα, ελέγχεται η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου $Y = \frac{I}{V} = G + jB$ της κεραίας συναρτήσει του αριθμού των τμημάτων. Αυτό που μπορεί εύκολα να παρατηρηθεί από τα σχήματα 13 και 14, είναι ότι χρησιμοποιώντας τα δύο είδη πυρήνων, υπάρχει ομοιότητα των αποτελεσμάτων της σύνθετης αγωγιμότητας μόνο για $M \leq 30$. Για $M > 30$ τα αποτελέσματα αποκλίνουν.

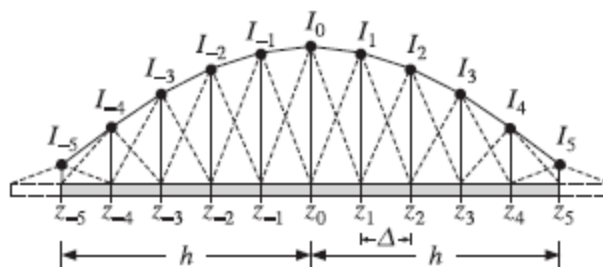


Σχήμα 13: Πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας, ως προς το δίπολο μήκους 0,5λ, με $a = 0,005\lambda$, χρησιμοποιώντας ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα.



Σχήμα 14: Φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας, ως προς το δίπολο μήκους 0,5λ, με $a = 0,005\lambda$, χρησιμοποιώντας ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα.

Επίλυση με Σημειακή Προσαρμογή χρησιμοποιώντας τριγωνικές συναρτήσεις βάσης



Σχήμα 15: Τριγωνικές συναρτήσεις βάσης κατά μήκος μιας κεραίας (με $N = 11, M = 5$)

Όπως και με τις προηγούμενες αναλύσεις, το ρεύμα κατά μήκος της κεραίας έχει τη μορφή

$$I(z') = \sum_{m=-M}^M I_m b(z' - z_m) \quad (115)$$

όπου η $b(z)$ είναι η τριγωνική συνάρτηση

$$b(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{\Delta}, & -\Delta \leq z \leq \Delta \\ 0, & \text{οπουδήποτε αλλού} \end{cases} \quad (116)$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 15, οι τριγωνικές συναρτήσεις βάσης έχουν πλάτος 2Δ , δηλαδή το διπλάσιο μέγεθος σε σχέση με τις παλμικές συναρτήσεις βάσης. Ο γραμμικός συνδυασμός της (115), ισοδυναμεί με τη σύνδεση των τιμών I_m με τα ευθύγραμμα τμήματα που είναι χωρισμένη η κεραία.

Η κεραία υποδιαιρείται σε $N = 2M$ τμήματα πλάτους $\Delta = l/(2M) = h/M$ και τα $2M + 1$ σημεία $z_m = m\Delta$, $-M \leq m \leq M$, βρίσκονται στα άκρα αυτών των τμημάτων. Όπως φαίνεται στο σχήμα 15, η επιρροή του τελευταίου δείγματος για το ρεύμα, I_M στο σημείο z_M καθώς και το I_{-M} στο σημείο z_{-M} , μπορεί το καθένα να θεωρηθεί ότι εκτείνεται σε ένα επιπλέον τμήμα πέρα από την κεραία. Δεν υπάρχει ρεύμα στα άκρα καθώς ισχύει $I_M = I_{-M} = 0$.

Για τη σημειακή προσαρμογή, η σύνθετη αντίσταση της εξίσωσης Hallén κατά την (90), δίνεται ως ακολούθως

$$\begin{aligned} Z_{nm} &= \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z_n - z') b(z' - z_m) dz' = \frac{j\eta}{2\pi} \int_{z_m - \Delta}^{z_m + \Delta} \left(1 - \frac{|z' - z_m|}{\Delta}\right) G(z_n - z') dz' \\ &= \frac{j\eta}{2\pi} \int_{-\Delta}^{\Delta} \left(1 - \frac{|z|}{\Delta}\right) G(z_n - z_m - z) dz \quad (117) \end{aligned}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση (117), διαφέρει από την αριθμητική επίλυση κατά Galerkin με παλμικές συναρτήσεις βάσης της εξίσωσης (108) κατά Δ . Αυτή η διαφορά οφείλεται στο διπλάσιο πλάτος των τριγωνικών συναρτήσεων βάσης συγκριτικά με τις παλμικές συναρτήσεις.

Τέλος παρατηρήθηκε ότι τα αποτελέσματα της αριθμητικής λύσης του παραπάνω προβλήματος ως προς το πραγματικό και φανταστικό μέρος του ρεύματος $I(z)$, δεν παρουσιάζουν κάποια αξιοσημείωτη διαφορά συγκριτικά με την αριθμητική επίλυση σημειακής προσαρμογής με παλμικές συναρτήσεις.

Επίλυση της εξίσωσης του Hallén όταν το προσπίπτον πεδίο έχει τυχαία μορφή

Στις προηγούμενες θεωρήσεις, το προσπίπτον πεδίο στην υπό εξέταση κεραία λεπτής διατομής είχε τη μορφή $E^{in}(z) = V_0 \delta(z)$. Αν έχουμε ένα τυχαίο προσπίπτον πεδίο η ολοκληρωτική εξίσωση Hallén έχει τη μορφή

$$\frac{j\eta}{2\pi} \int_{-h}^h G(z - z') I(z') dz' = C_1 e^{jkz} + C_2 e^{-jkz} + \int_{-h}^h F(z - z') E^{in}(z') dz' \quad (118)$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ροπών και πιο συγκεκριμένα τη σημειακή προσαρμογή, το ρεύμα και το προσπίπτον πεδίο παίρνει τη μορφή

$$I(z') = \sum_{m=-M}^M I_m b(z' - z_m) \quad (119)$$

$$E^{in}(z') = \sum_{m=-M}^M E_m b(z' - z_m) \quad (120)$$

Παίρνοντας δείγματα στα σημεία $z_n = n\Delta z$, η συνέλιξη του πεδίου με τη συνάρτηση Green $F(z)$ γίνεται

$$\int_{-h}^h F(z - z') E^{in}(z') dz' = \sum_{m=-M}^M E_m \int_{-h}^h F(z_n - z') b(z' - z_m) dz' \quad (121)$$

ορίζοντας ως F_{nm} τη μήτρα των συναρτήσεων Green για $-M \leq n, m \leq M$ ως

$$F_{nm} = \int_{-h}^h F(z_n - z') b(z' - z_m) dz' = \int_{-h}^h F(z_n - z_m - z) dz \quad (122)$$

Η διακριτή μορφή της εξίσωσης Hallén γράφεται

$$\sum_{m=-M}^M Z_{nm} I_m = C_1 e^{jk z_n} + C_2 e^{-jk z_n} + \sum_{m=-M}^M F_{nm} E_m \quad (123)$$

και το Z_{nm} ορίζεται όπως πριν ως

$$Z_{nm} = \int_{-h}^h F(z_n - z') b(z' - z_m) dz = \int_{-h}^h G(z_n - z_m - z) b(z) dz \quad (124)$$

με την (123) να ορίζεται με μορφή τελεστών ως εξής

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = C_1 \mathbf{s}_1 + C_2 \mathbf{s}_2 + \mathbf{d} \quad (125)$$

με

$$\mathbf{d} = \mathbf{F}\mathbf{E} = \sum_{m=-M}^M F_{nm} E_m \quad (126)$$

και μπορεί να επαναγραφτεί ως

$$\mathbf{Z}\mathbf{I} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2][C_1, C_2]^T + \mathbf{d} \quad (127)$$

Επιλύοντας ως προς \mathbf{I} , έχουμε

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}[\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2][C_1, C_2]^T + \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{d} \quad (128)$$

Πρέπει να βρεθούν οι σταθερές C_1, C_2 για τον υπολογισμό του \mathbf{I} . Θεωρώντας τη μήτρα $[\mathbf{U}] = [\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T]$ όπου τα διανύσματα $\mathbf{u}_1^T = [1, 0, \dots, 0, 0]$ και $\mathbf{u}_2^T = [0, 0, \dots, 0, 1]$ επιλέγονται για να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες, που έχουν μορφή

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} = 0 \quad (129)$$

εφαρμόζοντας την παραπάνω στην εξίσωση των μητρών έχουμε

$$\mathbf{U}^T \mathbf{I} = \mathbf{U}^T \mathbf{Z}^{-1} [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] [\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]^T + \mathbf{U}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{d} = 0 \quad (130)$$

και λύνοντας ως προς $[\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]$ προκύπτει η

$$[\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2]^T = \left[\mathbf{U}^T \mathbf{Z}^{-1} [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2] \right]^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{d} \quad (131)$$

Τώρα όπως και στα προηγούμενα, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί. Η μόνη διαφορά που υπάρχει βρίσκεται σε κάποια στοιχεία των μητρών δηλαδή

$$\mathbf{s}_{1,n} = e^{jkz_n}, \mathbf{s}_{2,n} = e^{-jkz_n} \quad (132)$$

Κεφάλαιο 3 Οι μέθοδοι αναλυτικής ομαλοποίησης (Regularization Methods)

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναλύσαμε μία πολύ γνωστή μέθοδο αριθμητικής επίλυσης ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, τη μέθοδο των ροπών. Η μέθοδος των ροπών είναι ένα σημαντικό εργαλείο για την επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Πολλές ολοκληρωτικές εξισώσεις α' είδους είναι δύσκολο να επιλυθούν ακόμα και με αριθμητικές προσεγγίσεις, αυξάνοντας τον υπολογιστικό χρόνο και σε κάποιες περιπτώσεις ακόμα και το μέγεθος των σφαλμάτων. Για αυτούς τους λόγους υπάρχουν κάποιες γενικευμένες μέθοδοι προσαρμογής και ομαλοποίησης (regularization) οι οποίες επιτρέπουν την μετατροπή μίας εξίσωσης Fredholm α' είδους σε μία εξίσωση Fredholm β' είδους με ομαλότερο πυρήνα. Αυτές οι διαδικασίες μετατροπής μπορούν να γίνουν αριθμητικά με τη χρήση της μεθόδου Galerkin και τη χρήση ενός ζεύγους συναρτήσεων βάσης. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε δύο διαφορετικές μεθόδους ομαλοποίησης, την Method of Analytical Regularization (MAR) την οποία εισήγαγε ο A. Nosich [27] και την Analytical Regularization Method (ARM), της οποίας συγγραφέας είναι ο Y. Tuchkin [30].

3.1 Method of Analytical Regularization (MAR)

Η μέθοδος που καλείται Method of Analytical Regularization (MAR), καλείται και Semi-inversion Method. Βασίζεται στον διαχωρισμό και την αντιστροφή ενός τελεστή (κύματος). Η αντιστροφή ενός τελεστή δεν είναι πάντα εφικτή αναλυτικά, οπότε είναι απαραίτητη η επιστράτευση αριθμητικών μεθόδων. Αυτή η αριθμητική αντιστροφή βασίζεται στις αρχές που εισήγαγαν οι Hilbert, Poincare και Noether στον τομέα των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Η κύρια ιδέα της MAR είναι απλή. Θεωρούμε ότι οι οριακές συνθήκες ενός προβλήματος παράγουν μία ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm α' είδους, η οποία σε μορφή τελεστών γράφεται ως

$$\hat{G}X = Y \quad (1)$$

όπου τα X και Y είναι η άγνωστη και η δοσμένη συνάρτηση αντίστοιχα. Σε προβλήματα σκέδασης κυμάτων, μια άμεση αναλυτική αντιστροφή του \hat{G} είναι αδύνατη, ενώ μία αριθμητική αντιστροφή δεν είναι απαραίτητο ότι θα δώσει εγγυημένα αποτελέσματα, οπότε απαιτείται μια περεταίρω ανάλυση. Έτσι χωρίζουμε τον τελεστή \hat{G} σε δύο μέρη όπου

$$\hat{G} = \hat{G}_1 + \hat{G}_2$$

$$(\hat{G}_1 + \hat{G}_2)X = Y \quad (2)$$

Θεωρώντας ότι ο \hat{G}_1 αντιστρέφεται στον \hat{G}_1^{-1} , τότε η εξίσωση (2) μετατρέπεται στην

$$(I + \hat{G}_1^{-1}\hat{G}_2)X = \hat{G}_1^{-1}Y \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) είναι της μορφής $X + \hat{A}X = B$ η οποία είναι μία εξίσωση β' είδους.

Παρόλα αυτά η (3) ισχύει μόνο αν η ολοκληρωτική εξίσωση είναι εξίσωση Fredholm. Αυτό σημαίνει ότι ο τελεστής \hat{A} είναι συμπαγής σε ένα χώρο Hilbert και ο B να ανήκει στον ίδιο χώρο (H). Επομένως, ο τελεστής \hat{G}_1 είναι φραγμένος. Έτσι μπορούμε να βρούμε την $X = (I + A)^{-1}B$ η οποία είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης. Τη λύση αυτή μπορούμε να τη βρούμε και αριθμητικά μέσω της παρακάτω προσέγγισης

$$(I + A^N)X^N = B \quad (4)$$

όπου ο τελεστής A^N είναι μία μήτρα $N \times N$ με σχετικό σφάλμα της μορφής

$$e(N) = \frac{\|X - X^N\|}{\|X\|} \leq \|(I + A)^{-1}\| \|A - A^N\| \quad (5)$$

Το σφάλμα μηδενίζεται όταν $N \rightarrow \infty$, καθώς ο πρώτος όρος στο δεξί μέρος της (5) είναι μία φραγμένη σταθερά, ενώ ο δεύτερος όρος μειώνεται. Σαφώς, η μείωση του σφάλματος $e(N)$ φτάνει μέχρι ένα συγκεκριμένο όριο και με αυτό τον τρόπο υπολογίζεται η απόδοση του αλγορίθμου που χρησιμοποιείται.

Παρόλο που η αντιστροφή του στατικού ή του τμήματος υψηλής συχνότητας φαίνεται ότι βασίζεται σε ειδικές τεχνικές συναρτησιακής ανάλυσης, είναι πολύ χρήσιμο να δείξουμε μία γενική μέθοδο για όλες τις παραπάνω περιπτώσεις. Αν είναι εφικτό να βρεθεί ένα σύνολο από ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις του διαχωρισμένου τελεστή \hat{G}_1 , τότε η μέθοδος Galerkin, με αυτές ως συναρτήσεις βάσης οδηγεί σε ένα ομαλοποιημένο αριθμητικό σχήμα.

3.1.1 Διηλεκτρικός κύλινδρος κυκλικής διατομής σε ένα επίπεδο μέσο

Η γεωμετρία του προβλήματος εισάγεται στο σχήμα 1. Το προσπίπτον πεδίο προσδιορίζεται από τη διέγερση. Αν είναι καθοδηγούμενο από την επιφάνεια του διηλεκτρικού υποστρώματος, τότε το πρόβλημα δρα σαν ένα μοντέλο δύο διαστάσεων του διηλεκτρικού συντονιστή ή αντηχείου (Dielectric Resonator, DR), που χρησιμεύει ως ζωνοφρακτικό φίλτρο. Λαμβάνοντας υπόψη την περίπτωση της πόλωσης του H , θα παρατηρήσουμε το σκεδαζόμενο πεδίο με βάση τα δυναμικά του

υποστρώματος. Οι οριακές συνθήκες στην επιφάνεια του αντηχείου οδηγούν στο παρακάτω σύνολο εξισώσεων:

$$\int_L \varphi(\vec{r}') G_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') dl' - \int_L \psi(\vec{r}') G_w(\vec{r}, \vec{r}') dl' = H_z^{in}(\vec{r}), r \in L \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow a-0} \frac{\partial}{\varepsilon \partial n} \int_L \varphi(\vec{r}') G_\varepsilon(\vec{r}, \vec{r}') dl' - \lim_{r \rightarrow a+0} \int_L \psi(\vec{r}') G_w(\vec{r}, \vec{r}') dl' = \frac{\partial H_z^{in}(\vec{r})}{\partial n} \quad (7)$$

Εδώ, οι συναρτήσεις φ και ψ είναι οι άγνωστες συναρτήσεις στο L που είναι η περίμετρος της διατομής του DR, \vec{n} είναι το εξωτερικό μοναδιαίο διάνυσμα και το $H_z^{in}(\vec{r})$ είναι το προσπίπτον πεδίο. Οι πυρήνες στις εξισώσεις (6) και (7) εξαρτώνται από τις συναρτήσεις Green:

$$G_0 = i/4H_0^{(1)}(k|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (8)$$

$$G_\varepsilon = i\varepsilon/4H_0^{(1)}(k\varepsilon^{1/2}|\vec{r} - \vec{r}'|) \quad (9)$$

και η συνάρτηση Green του επίπεδου μέσου είναι

$$G_w = G_0 + G_s = G_0 + \int_{-\infty}^{\infty} f(kd, \varepsilon_w, h) e^{i(1-h^2)^{1/2}k(y+y') + i h k(x-x')} dh \quad (10)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση G_s βρίσκεται αναλυτικά ως μία μερομορφική συνάρτηση στην επιφάνεια Riemann δύο επιπέδων της πραγματικής μεταβλητής h . Η ολοκλήρωση γίνεται στον άξονα των πραγματικών αριθμών, του επιλεγμένου επιπέδου. Τώρα εισάγουμε τα δύο διανύσματα X και Y και τη μήτρα 2×2 του πυρήνα G :

$$X = \begin{Bmatrix} \varphi \\ \psi \end{Bmatrix} \quad (11)$$

$$Y = \begin{Bmatrix} H_z^{in} \\ \frac{\partial H_z^{in}}{\partial n} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \hat{G}_\varepsilon & -\hat{G}_w \\ \varepsilon^{-1} \hat{G}'_{\varepsilon-} & -\hat{G}'_{w+} \end{pmatrix} \quad (13)$$

όπου

$$\hat{G}_{\varepsilon,w} = \int_L \dots G_{\varepsilon,w} dl', \hat{G}'_{\varepsilon,w} = \lim_{r \rightarrow a \pm 0} \frac{\partial}{\partial n} \int_L \dots G_{\varepsilon,w} dl'$$

Τότε μπορούμε να γράψουμε ξανά τις εξισώσεις (6) και (7), σε μορφή τελεστών που στην ουσία είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση α' είδους: $\hat{G}X = Y$. Τώρα σημειώνουμε ότι η συνάρτηση πυρήνα \hat{G}_w είναι ένα άθροισμα του μοναδικού όρου G_0 και του όρου G_s , που δίνεται από την ολοκληρωτική εξίσωση Fourier της εξίσωσης (10). Αυτό οδηγεί στον ακόλουθο διαμερισμό του τελεστή \hat{G} σε δύο τμήματα:

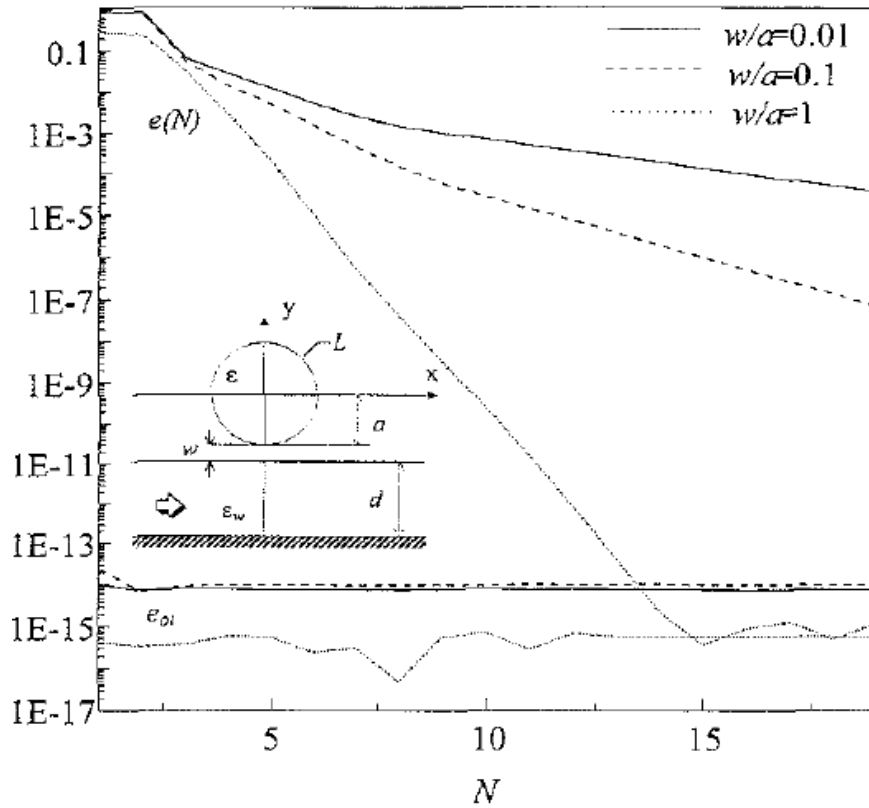
$$\hat{G} = \hat{G}_1 + \hat{G}_2 = \begin{pmatrix} \hat{G}_\varepsilon & -\hat{G}_0 \\ \varepsilon^{-1}\hat{G}'_\varepsilon & -\hat{G}'_{0+} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\hat{G}_s \\ 0 & -\hat{G}'_{s+} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Στην περίπτωση που το L είναι ένας κύκλος ακτίνας a , οι ορθογώνιες ιδιοσυναρτήσεις που διαγωνοποιούν και τους τέσσερεις τελεστές $\hat{G}_0, \hat{G}'_{0+}, \hat{G}_\varepsilon$ και \hat{G}'_ε βρίσκονται εύκολα σύμφωνα με τις εκθετικές παραμέτρους $e^{in\varphi}$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Προφανώς

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi'} H_0^{(1)} \left(2ka \sin \frac{1}{2} |\varphi - \varphi'| \right) d\varphi' &= e^{in\varphi} 2\pi J_n(ka) H_n^{(1)}(ka) \\ \lim_{r \rightarrow a \pm 0} \frac{\partial}{\partial n} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi'} H_0^{(1)} \left[k \sqrt{(r \cos \varphi - a \cos \varphi')^2 + (r \sin \varphi - a \sin \varphi')^2} \right] d\varphi' \\ &= e^{in\varphi} 2\pi k \begin{cases} H_n^{(1)}(ka) J_n(ka) \\ J_n'(ka) H_n^{(1)}(ka) \end{cases} \quad (15) \end{aligned}$$

όπου τα J_n και $H_n^{(1)}$ είναι οι συναρτήσεις πρώτου είδους Bessel και Hankel αντίστοιχα τάξης n .

Οπότε με αφαίρεση της πλάκας έχουμε $\hat{G}_2 = 0$ και είναι εφικτή η αντιστροφή του \hat{G} , και έτσι οδηγούμαστε σε επίλυση με μορφή σειράς Mie για τη σκέδαση ελεύθερου χώρου σε ένα κύλινδρο κυκλικής διατομής. Παρόλα αυτά, με την παρουσία της πλάκας, η αντιστροφή του \hat{G}_1 μέσω της διαγωνιοποίησης οδηγεί σε μερική αντιστροφή του τελεστή \hat{G} . Συνεπώς, μια τόσο ειδικευμένη επίλυση μέσω της μεθόδου των ροπών οδηγεί στη μήτρα της σχέσης (2), αντί για μία λύση σε μορφή σειράς. Αυτή η εξίσωση μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι μία εξίσωση Fredholm β' είδους στο χώρο l^2 . Η συμπεριφορά του σφάλματος $e(N)$ για την εξίσωση αυτή φαίνεται στο σχήμα 1. Το σφάλμα μειώνεται σταδιακά ενόσω αυξάνεται το N . Όσο μεγαλύτερη είναι η απόσταση μεταξύ των DR και της πλάκας τόσο λιγότερες είναι οι συναρτήσεις επέκτασης για να επιτευχθεί η αναγκαία ακρίβεια.



Σχήμα 1: Το σφάλμα της MAR συναρτήσει του αριθμού των συναρτήσεων βάσης σε ένα διηλεκτρικό κύλινδρο κυκλικής διατομής σε επίπεδο μέσο, [27].

3.1.2 Ταινία κυκλικού δίσκου με απώλειες σε ένα διηλεκτρικό υπόστρωμα

Η γεωμετρία του σχήματος φαίνεται στο σχήμα 2. Αυτή η διάταξη χρησιμεύει ως η απλούστερη τυπωμένη κεραία. Σε μία τέτοια γεωμετρία το πεδίο είναι ανεξάρτητο του φ και μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση δυναμικού μίας μεταβλητής της μορφής του μετασχηματισμού Fourier-Bessel. Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες στο δίσκο και στην ελεύθερη επιφάνεια του υποστρώματος, οδηγούμαστε σε μία ολοκληρωτική εξίσωση α' είδους της μορφής $\hat{G}X = Y$:

$$\int_0^{\infty} x(\kappa)W(\kappa, ka, h/a, \varepsilon)J_1(\kappa\rho)d\kappa = y(\rho), \rho = r/a < 1 \quad (16)$$

$$\int_0^{\infty} x(\kappa)J_1(\kappa\rho)d\kappa = 0, \rho > 1 \quad (17)$$

Εδώ το $x(\kappa)$ είναι η άγνωστη συνάρτηση και

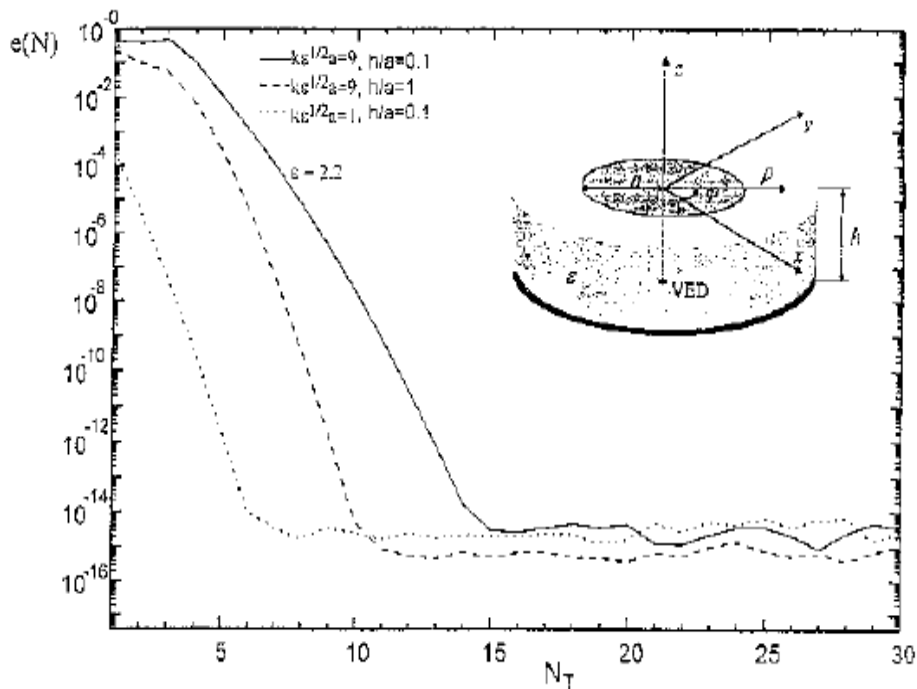
$$W(\kappa, ka, h/a, \varepsilon) = \kappa - \frac{\gamma\gamma_\varepsilon}{\gamma_\varepsilon + \gamma\varepsilon\cot(\gamma_\varepsilon h/a)} + i\kappa a R \quad (18)$$

με $\gamma = (\kappa^2 - k^2 a^2)^{1/2}$, $\gamma_\varepsilon = (\kappa^2 - k^2 a^2 \varepsilon)^{1/2}$ και R η αντίσταση κανονικοποιημένη με την σύνθετη αντίσταση ελεύθερου χρόνου.

Όπως μπορεί να δει κάποιος η εξίσωση (18) είναι μία μερομοφική συνάρτηση του κ με πεπερασμένο αριθμό πραγματικών πόλων και μιγαδικών πόλων. Η συνάρτηση $y(\rho)$ υπολογίζεται από τη θέση του διπόλου. Σε περίπτωση που $h/a \rightarrow \infty$ και $ka \rightarrow 0$, η συνάρτηση βάρους είναι η $W(\kappa) \rightarrow W_0 = \kappa \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$. Ευτυχώς, αν το W αντικατασταθεί από το κ , η εξίσωση (16) πολλαπλασιάζεται με ένα σύνολο ορθογώνιων ιδιοσυναρτήσεων που διαγωνιοποιούν αυτή την εξίσωση. Αυτές είναι οι:

$$f_n = \left[\frac{(4n+5)}{\kappa} \right]^{\frac{1}{2}} J_{2n+\frac{5}{2}}(\kappa), n = 0, 1, 2 \dots (19)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (17) ικανοποιείται από την εξίσωση (19). Συνεπώς, αν πάρουμε αυτό το σύνολο των εξισώσεων ως μία επέκταση στην αριθμητική μέθοδο Galerkin, παίρνουμε μία εξίσωση Fredholm β' είδους άπειρων μητρών της μορφής $(I + A^N)X^N = B$, που είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις (16) και (17) και έχει λύση στην περιοχή l_2 . Στο σχήμα παρατηρούμε τη συμπεριφορά του υπολογιστικού σφάλματος συναρτήσει του αριθμού των συναρτήσεων βάσης.



Σχήμα 2: Το σφάλμα της MAR συναρτήσει του αριθμού των συναρτήσεων βάσης σε μία ταινία κυκλικού δίσκου με απώλειες σε ένα διηλεκτρικό υπόστρωμα, [27].

3.2 Η MAR και η μέθοδος Galerkin

Σύμφωνα με το [28], αρχικά έχουμε υπόψη την εξίσωση $\hat{G}X = Y$ (1) και με αντιστροφή του \hat{G}_1 έχουμε την εξίσωση $(I + \hat{G}_1^{-1}\hat{G}_2)X = Y$ (3).

Όταν εφαρμοστεί στην εξίσωση (1) η μέθοδος Galerkin παίρνουμε την προσεγγιστική λύση

$$X_n^{(1)} = \sum_{j=0}^{n-1} x_{nj}^{(1)} \Phi_j \quad (20)$$

όπου

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\langle \hat{G}_1 \Phi_j, \Phi_i \rangle + \langle \hat{G}_2 \Phi_j, \Phi_i \rangle) x_{nj}^{(1)} = \langle Y, \Phi_i \rangle, i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (21)$$

Ενώ αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο Galerkin στην εξίσωση (3) έχουμε

$$X_n^{(2)} = \sum_{j=0}^{n-1} x_{nj}^{(2)} \Phi_j \quad (22)$$

όπου

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\langle \Phi_j, \Phi_i \rangle + \langle \hat{G}_1^{-1} \hat{G}_2 \Phi_j, \Phi_i \rangle) x_{nj}^{(2)} = \langle \hat{G}_1^{-1} Y, \Phi_i \rangle, i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (23)$$

Θεωρούμε την εξίσωση (21) ως μέθοδο 1 και την εξίσωση (23) ως μέθοδο 2.

Στόχος και σκοπός της παραπάνω διαδικασίας είναι να αποδειχθεί ότι οι μέθοδοι 1 και 2 δεν είναι ισοδύναμες. Για τον λόγο αυτό, κάνουμε την εξής παραδοχή.

Έστω ότι ο τελεστής \hat{G}_1 είναι τέτοιος ώστε

$$\langle \hat{G}_1 Z, W \rangle = \langle Z, \hat{G}_1 W \rangle, \forall Z, W \quad (24)$$

Εδώ $\langle Z, W \rangle$ είναι το εσωτερικό γινόμενο σε χώρο Hilbert. Σε αυτό το γινόμενο θεωρούμε ότι $\langle aZ, W \rangle = \langle Z, \bar{a}W \rangle = a\langle Z, W \rangle$, όπου όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το a είναι ένα μιγαδικό βαθμωτό μέγεθος και ο \bar{a} είναι ο συζυγής του.

Οι συναρτήσεις βάσης Φ_j είναι τέτοιες ώστε

$$\hat{G}_1 \Phi_j = \lambda_j \Phi_j, j = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (25)$$

Η εξίσωση (24) σημαίνει ότι ο \hat{G}_1 είναι ένας συμμετρικός γραμμικός τελεστής. Γνωρίζουμε ότι κάθε αναστρέψιμος γραμμικός τελεστής είναι συμμετρικός. Η εξίσωση (25) σημαίνει ότι οι n συναρτήσεις βάσης Φ_j επιλέγονται ώστε να είναι ιδιοσυναρτήσεις του \hat{G}_1 που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_j . Έχουμε θεωρήσει ότι ο \hat{G}_1^{-1} υπάρχει και όλα τα $\lambda_j \neq 0$. Σύμφωνα με τις παραπάνω θεωρήσεις, προκύπτουν τα εξής

$$\lambda_j = \bar{\lambda}_j \quad (26)$$

$$\langle \Phi_j, \Phi_i \rangle = \|\Phi_i\|^2 \delta_{ij} \quad (27)$$

$$\hat{G}_1^{-1} \Phi_j = \frac{1}{\lambda_j} \Phi_j \quad (28)$$

$$\langle \hat{G}_1^{-1} Z, W \rangle = \langle Z, \hat{G}_1^{-1} W \rangle \quad (29)$$

Στην εξίσωση (27) ο όρος $\|Z\| = \sqrt{\langle Z, Z \rangle}$ δείχνει τη νόρμα σε χώρο Hilbert και ο δ_{ij} είναι η συνάρτηση δέλτα του Kronecker. Οι εξισώσεις (26) και (27) είναι βασικές ιδιότητες των συμμετρικών τελεστών. Η (28) βασίζεται στο γεγονός ότι και ο τελεστής \hat{G}_1^{-1} είναι συμμετρικός και αποδεικνύεται ως εξής

$$\langle \hat{G}_1^{-1} Z, W \rangle = \langle \hat{G}_1^{-1} Z, \hat{G}_1 \hat{G}_1^{-1} W \rangle = \langle \hat{G}_1 \hat{G}_1^{-1} Z, \hat{G}_1^{-1} W \rangle = \langle Z, \hat{G}_1^{-1} W \rangle$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (25) και (26) και τις ιδιότητες των εσωτερικών γινομένων η εξίσωση (21) γίνεται

$$\sum_{j=0}^{n-1} (\lambda_i \|\Phi_i\|^2 \delta_{ij} + \langle \hat{G}_2 \Phi_j, \Phi_i \rangle) x_{nj}^{(1)} = \langle Y, \Phi_i \rangle, i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (30)$$

Ομοίως, χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (24) έως (29), η (23) γίνεται ίση με

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(\|\Phi_i\|^2 \delta_{ij} + \frac{1}{\lambda_j} \langle \hat{G}_2 \Phi_j, \Phi_i \rangle \right) x_{nj}^{(2)} = \frac{1}{\lambda_j} \langle Y, \Phi_i \rangle, i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (31)$$

Εξαιρώντας τον παράγοντα $\frac{1}{\lambda_i}$, η i -οστή εξίσωση της (30) είναι συνεπώς ισοδύναμη με την i -οστή εξίσωση της (31). Τα $n \times n$ συστήματα γραμμικών εξισώσεων είναι ανάλογα το ένα με το άλλο, έτσι ώστε $x_{nj}^{(1)} = x_{nj}^{(2)}$ και οι μέθοδοι 1 και 2 είναι ισοδύναμες. Αυτή ισοδυναμία ισχύει μόνο σε περίπτωση που ο τελεστής \hat{G}_1 είναι συμμετρικός και έχει ως συναρτήσεις βάσεις τις ιδιοσυναρτήσεις του. Επίσης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν μία από τις δύο μεθόδους συγκλίνει τότε συγκλίνει και η δεύτερη, τα όρια είναι τα ίδια καθώς επίσης τα σφάλματα και οι ταχύτητες σύγκλισης.

Είναι πολύ σημαντικό να επισημάνουμε, ότι για να αποδειχθεί η ισοδυναμία μεταξύ των μεθόδων 1 και 2 απαιτεί ότι ο τελεστής \hat{G}_1 είναι συμμετρικός, έχοντας ως συναρτήσεις βάρους τις ιδιοσυναρτήσεις του. Αυτή η απαίτηση της συμμετρίας είναι περιοριστική, αλλά η ισοδυναμία μπορεί να αποδειχθεί με βάση κάποιες συνθήκες.

Όπως φαίνεται και στο [28], σε περίπτωση που έχουμε n συναρτήσεις βάσης $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$, οι οποίες είναι μέλη του συνόλου $\{\Phi_0, \Phi_1, \dots\}$ για τις οποίες:

- Οι εξισώσεις (25) και (27) ισχύουν για όλα τα j .
- Το προαναφερθέν σύνολο, είναι ορθογώνιες βάσεις που ανήκουν στο χώρο Hilbert.

Με βάση τα παραπάνω και τη βοήθεια του ανάστροφου τελεστή \hat{G}_1^* , θα δείξουμε για ακόμα μία φορά την ισοδυναμία των δύο μεθόδων. Αρχικά, πρέπει να αποδειχθεί ότι η Φ_j είναι μία ιδιοσυνάρτηση του \hat{G}_1^* που αντιστοιχεί στο $\bar{\lambda}_j$. Για όλα τα i ισχύει

$$\begin{aligned} \langle (\hat{G}_1^* - \bar{\lambda}_j \hat{I}) \Phi_j, \Phi_i \rangle &= \langle \hat{G}_1^* \Phi_j, \Phi_i \rangle - \bar{\lambda}_j \langle \Phi_j, \Phi_i \rangle \\ &= \langle \Phi_j, \hat{G}_1 \Phi_i \rangle - \bar{\lambda}_j \delta_{ij} |\Phi_i|^2 \\ &= \langle \Phi_j, \lambda_i \Phi_i \rangle - \bar{\lambda}_j \delta_{ij} |\Phi_i|^2 = 0 \end{aligned}$$

Τα στοιχεία $(\hat{G}_1^* - \bar{\lambda}_j \hat{I}) \Phi_j$, είναι ορθογώνια ως προς όλα τα Φ_i , τα οποία είναι οι ορθογώνιες βάσεις. Συνεπώς το γινόμενο τους δίνει μηδέν με αποτέλεσμα να ισχύει

$$\hat{G}_1^* \Phi_j = \bar{\lambda}_j \Phi_j \quad (32)$$

Για οποιοδήποτε τυχαίο στοιχείο Z , έχουμε

$$\langle Z, \Phi_i \rangle = \langle \hat{G}_1 \hat{G}_1^{-1} Z, \Phi_i \rangle = \langle \hat{G}_1^{-1} Z, \hat{G}_1^* \Phi_i \rangle = \langle \hat{G}_1^{-1} Z, \bar{\lambda}_i \Phi_i \rangle = \bar{\lambda}_i \langle \hat{G}_1^{-1} Z, \Phi_i \rangle \quad (33)$$

Στην εξίσωση (21), καθώς και στις (25) και (27) χρησιμοποιείται η (33) για $Z = Y$ και για $Z = \hat{G}_2 \Phi_j$.

3.2.1 Εφαρμογή της ισοδυναμίας σε παράδειγμα ολοκληρωτικής εξίσωσης λογαριθμικού πυρήνα

Θεωρούμε την ολοκληρωτική εξίσωση α' είδους

$$\int_{-w}^w k(t-t')s(t')dt' = r(t), -w < t < w \quad (34)$$

όπου ο πυρήνας είναι μία λογαριθμική συνάρτηση του t ώστε

$$k(t) \sim \ln|t|, t \rightarrow 0 \quad (35)$$

Στην εξίσωση (34) δίνονται οι $r(t)$ και $k(t)$, η $s(t)$ είναι η άγνωστη και η w είναι μία θετική σταθερά. Οι ολοκληρωτικές εξισώσεις του παραπάνω τύπου εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα του ηλεκτρομαγνητισμού.

Εδώ η εξίσωση (34) επιλύεται με βάση τη σχέση του Calerman και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εφαρμογή της MAR.

Ορίζεται ότι

$$\xi(u) = - \int_{-w}^w [k(u-t') - \ln|u-t'|]s(t')dt' + r(u), -w < t < w \quad (36)$$

έτσι η (34) μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_{-w}^w \ln|t-t'|s(t')dt' + r(u) = \xi(t) \quad (37)$$

Θεωρώντας ότι η $\xi(t)$ είναι γνωστή συνάρτηση, η εφαρμογή της σχέσης Calerman στην (37) δίνει

$$s(t) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{w^2 - t^2}} \left[PV \int_{-w}^w \frac{\sqrt{w^2 - u^2} \xi'(u)}{u - t} du + \frac{1}{\ln(w/2)} \int_{-w}^w \frac{\xi(u)}{\sqrt{w^2 - u^2}} du \right] \quad (38)$$

το $PV \int$ είναι το κύριο όρισμα κατά Cauchy (principal value integral). Περισσότερες πληροφορίες για το κύριο όρισμα κατά Cauchy υπάρχουν στο παράρτημα Α5. Αντικαθιστώντας την εξίσωση (36) στην (38) και αλλάζοντας τα άκρα ολοκλήρωσης, δεν είναι δύσκολο να δει κάποιος ότι η εξίσωση (38) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής (3) και το δεξί μέρος της (38) αντιστοιχεί στην

$$-\hat{G}_1^{-1} \hat{G}_2 X + \hat{G}_1^{-1} Y$$

Προσεγγίζουμε την $s(t)$ ως

$$s_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} s_{nj} \frac{T_j(t/w)}{\sqrt{w^2 - t^2}} \quad (39)$$

όπου η $T_j(t)$ είναι το πολυώνυμο Chebyshev πρώτου είδους τάξης j . Με τις συναρτήσεις βάσης στην εξίσωση (39) και χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \alpha(t), \beta(t) \rangle = \int_{-w}^w \alpha(t) \overline{\beta(t)} dt \quad (40)$$

πρέπει να δείξουμε ότι ο υπολογισμός της s_{nj} εφαρμόζοντας την μέθοδο Galerkin στην εξίσωση α' είδους (34) ισοδυναμεί με την αντικατάσταση της (39) στην (38) και τον υπολογισμό των s_{nj} στις συναρτήσεις $T_j(t/w)$.

Δείχνουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα ξαναγράφοντας την (34) ως

$$\int_{-w}^w g(t, t') x(t') dt' = y(t) \quad (41)$$

όπου

$$g(t, t') = \frac{k(t - t')}{(w^2 - t^2)^{1/4} (w^2 - t'^2)^{1/4}} \quad (42)$$

$$y(t) = \frac{r(t)}{(w^2 - t^2)^{1/4}} \quad (43)$$

$$x(t') = s(t') (w^2 - t'^2)^{1/4} \quad (44)$$

Ο G αντιστοιχεί στον τελεστή ολοκλήρωσης με πυρήνα τον $g(t, t')$. Εφαρμόζοντας τις (42)-(44) στις (36) και (38) παίρνουμε

$$x(t) = \frac{1}{\pi^2 (w^2 - t^2)^{1/4}} \left[PV \int_{-w}^w \frac{\sqrt{w^2 - u^2} \xi'(u)}{u - t} du + \frac{1}{\ln(w/2)} \int_{-w}^w \frac{\xi(u)}{\sqrt{w^2 - u^2}} du \right] \quad (45)$$

όπου

$$\xi(u) = - \int_{-w}^w [k(u - t') - \ln|u - t'|] \frac{x(t')}{(w^2 - t'^2)^{1/4}} dt' + y(u) (w^2 - t^2)^{1/4} \quad (46)$$

Στις εξισώσεις (41) και (45) ο άγνωστος είναι η $x(t)$.

Στη μέθοδο 1 εφαρμόζεται η μέθοδος Galerkin στην εξίσωση α' είδους (41) με συναρτήσεις βάσης

$$\Phi_j(t) = \frac{T_j(t/w)}{\sqrt{w^2 - t^2}}, j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (47)$$

και στη μέθοδο 2 με συναρτήσεις βάσης τη $\Phi_j(t)$ εφαρμόζεται η μέθοδος Galerkin στην εξίσωση β' είδους (45)

Μέσα από απλούς υπολογισμούς διαφαίνεται η ισοδυναμία των μεθόδων, σύμφωνα με την

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^{n-1} x_{nj} \Phi_j(t) \quad (48)$$

που υπολογίζονται από τις προηγούμενες μεθόδους, είναι πανομοιότυπες με τους συντελεστές s_{nj} στην εξίσωση (39).

Γνωρίζοντας ότι $T_0(t) = 1$ και γνωρίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\int_{-w}^w \ln|t - t'| \frac{T_j(t/w)}{\sqrt{w^2 - t^2}} dt' = \begin{cases} \pi \ln(w/2), j = 0 \\ -(\pi/j) T_j(t/w), j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (49)$$

Οι συναρτήσεις βάσης $\Phi_j(t)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή ολοκλήρωσης \hat{G}_1 με πυρήνα

$$g_1(t, t') = \frac{\ln|t - t'|}{(w^2 - t^2)^{1/4} (w^2 - t'^2)^{1/4}} \quad (50)$$

ο αντίστροφος \hat{G}_1^{-1} που είναι ο ομαλοποιητής μας (regularizer). Επειδή $g_1(t, t') = \overline{g_1(t, t')}$, ο \hat{G}_1 είναι ένας συμμετρικός γραμμικός τελεστής. Συνεπώς ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες (26) και (27), και οι δύο μέθοδοι είναι ισοδύναμες.

3.3 Analytical Regularization Method (ARM)

Επειδή θέλουμε να παρουσιάσουμε επακριβώς τη μέθοδο ARM θα χρησιμοποιήσουμε τη σημειολογία του συγγραφέα Yuri Tuchkin, όπως τη διατυπώνει στα άρθρα του και ύστερα στην επεξεργασία και τη σύγκριση των μεθόδων θα τη μεταβάλλουμε για λόγους ευκολότερης κατανόησης.

Δοσμένου του \hat{A} οποίος είναι ένας τελεστής στο χώρο Hilbert $B_1 \rightarrow B_2$. Ο \hat{A} θεωρείται τελεστής β' είδους όταν ισχύουν τα παρακάτω

$$B_1 = B_2 = B \quad (51)$$

και

$$\hat{A} = \hat{I} + \hat{H} \quad (52)$$

όπου \hat{I} ο μοναδιαίος τελεστής και \hat{H} συμπαγής στο χώρο B . Η εξίσωση (52) είναι β' είδους.

Σε περίπτωση που ο \hat{A} είναι α' είδους, θεωρούμε το ζεύγος των (\hat{L}, \hat{R}) με το \hat{A} να ορίζεται στο χώρο $B_2 \rightarrow B$ και τον \hat{R} να περιέχεται στο χώρο $B \rightarrow B_1$ ούτως ώστε να έχουμε την

$$\hat{L}\hat{A}\hat{R} = \hat{I} + \hat{H}, \hat{L}\hat{A}\hat{R}: B \rightarrow B \quad (53)$$

επίσης όταν ισχύει $\hat{L} \neq \hat{I}$ και $\hat{R} \neq \hat{I}$ τότε το ζεύγος (L, R) ορίζεται ως ομαλοποιητής δύο πλευρών. Αν όμως $\hat{L} = \hat{I}$ ή $\hat{R} = \hat{I}$ τότε αυτό το ζεύγος ονομάζεται μονόπλευρος ομαλοποιητής.

Όταν δίνεται μία εξίσωση α' είδους της μορφής

$$\hat{A}x = b \quad (54)$$

και είναι γνωστό το ζεύγος των (\hat{L}, \hat{R}) , η εξίσωση μπορεί να μετατραπεί σε μία εξίσωση β' είδους ως εξής

$$(\hat{L}\hat{A}\hat{R})_y = (\hat{I} + \hat{H})_y = c, x = \hat{R}y, c = \hat{L}b, \text{ με } y, c \in B \quad (55)$$

Αριθμητικά το πλεονέκτημα της προσεγγιστικής λύσης y^M του πεπερασμένου συστήματος $(I + H^M)y^M = c^M$ τείνει πολύ κοντά στο αναλυτικό σύστημα y^∞ δηλαδή, $\|y^\infty - y^M\| \rightarrow 0$ εάν $\|H^M - H\| \rightarrow 0$ και $\|c^M - c\| \rightarrow 0$ για $M \rightarrow \infty$.

Η εφαρμογή των παραπάνω απαιτεί την αναλυτική κατασκευή των (L, R) . Αυτοί είναι ολοκληρωτικοί τελεστές σε απλή μορφή βασισμένη στον μετασχηματισμό Fourier-Chebyshev, και αντιστοιχεί σε άπειρους διαγώνιους πίνακες. Οπότε κάθε ολοκληρωτική εξίσωση που αφορά πρόβλημα σκέδασης μπορεί να μετατραπεί και να απλοποιηθεί σε μια εξίσωση β' είδους.

Συνοπτικά για την εφαρμογή της ARM πρέπει να ακολουθηθούν τα παρακάτω βήματα:

1. Να γίνει η σωστή επιλογή των χώρων B_1, B_2 .
2. Διαχωρισμός του τελεστή \hat{A} ως $\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2$ όπως και στην περίπτωση της MAR.
3. Ορισμός των $\hat{A}_1 = \hat{L}^{-1}\hat{R}^{-1}$ και $H = \hat{L}\hat{A}_1\hat{R}$, οι οποίοι είναι συμπαγείς.

4. Τελειοποίηση του ορισμού της ομαλοποίησης όπου $x = \hat{R}y$ και $(\hat{I} + \hat{L}\hat{A}_1\hat{R})y = \hat{L}b$ η οποία είναι μία εξίσωση β' είδους.

3.3.1 Εφαρμογή της ARM σε παράδειγμα ολοκληρωτικής εξίσωσης λογαριθμικού πυρήνα

Από τα [29,30], θεωρούμε την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_{-1}^1 \left\{ -\frac{1}{\pi} \ln|u-v| + K(u,v) \right\} z(v) dv = b(u), u \in [-1,1] \quad (56)$$

με άγνωστη συνάρτηση την $z(v)$. Έστω ότι οι όλες οι υπόλοιπες συναρτήσεις της (56) είναι αρκετά ομαλές για τον σκοπό μας. Συγκεκριμένα ο $K(u,v)$ είναι συνεχής με τις πρώτες και δεύτερες παραγώγους τετραγωνικά ολοκληρώσιμες.

Αναζητούμε λύσεις της $z(v)$ στη μορφή

$$z(v) = \frac{(1-v^2)^{-1}}{2m(v)}, v \in [-1,1] \quad (57)$$

Παρακάτω χρησιμοποιούμε ορθοκανονικά πολώνυμα Chebysen α' είδους $\hat{T}_n(x)$ τα οποία συνδέονται με τα κανονικά πολώνυμα Chebysen α' είδους $T_n(x)$ ως εξής

$$\hat{T}_n(x) = d_n^{-1} T_n(x), d_0 = \pi^{1/2}, d_n = (\pi/2)^{1/2}, n \neq 0 \quad (58)$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{-1/2} \hat{T}_n(x) \hat{T}_s(x) dx = \delta_{s,n}, s, n = 0,1,2, \dots \quad (59)$$

όπου το $\delta_{s,n}$ είναι το δέλτα του Kronecker.

Χρησιμοποιώντας την παρακάτω ισότητα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|, x \in [-2\pi, 2\pi] \quad (60)$$

έπειτα με μετασχηματισμό έχουμε την παρακάτω σχέση

$$-\frac{1}{\pi} \ln|u-v| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{T}_n(u) \hat{T}_n(v)}{\gamma_n^2}, u, v \in [-1,1] \quad (61)$$

$$\gamma_0 = (\ln 2)^{-1/2}, \gamma_n = |n|^{1/2}, n \neq 0 \quad (62)$$

Εξαιτίας των ιδιοτήτων των συναρτήσεων $z(v), b(u)$ και $K(u, v)$ η αντιστοίχισή τους με τις σειρές Fourier-Chebysen αναφέρεται παρακάτω ως

$$z(v) = (1 - u^2)^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} z_m \hat{T}_m(v) \quad (63)$$

$$b(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \hat{T}_n(u), u \in (-1, 1) \quad (64)$$

$$K(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} k_{sn} \hat{T}_n(v) \hat{T}_s(v), u, v \in [-1, 1] \quad (65)$$

όπου $\{z_m\}_{m=0}^{\infty}$ είναι οι άγνωστοι συντελεστές και $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ και $\{k_{s,n}\}_{s,n=0}^{\infty}$ είναι οι συντελεστές των συναρτήσεων $b(u)$ και $K(u, v)$ αντίστοιχα με

$$b_n = \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{-1/2} b(u) \hat{T}_n(u) du \quad (66)$$

$$k_{sn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{K(u, v) \hat{T}_s(u) \hat{T}_n(v)}{(1 - u^2)^{1/2} (1 - v^2)^{1/2}} du dv \quad (67)$$

Επιπρόσθετα, οι συντελεστές ικανοποιούν την ανισότητα

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + n^2)(1 + s^2) |k_{sn}|^2 < \infty \quad (68)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (56) τις (63)-(65), αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης και άθροισης, η ιδιότητα (59) μας δίνει την παρακάτω αναλυτική σχέση

$$\gamma_n^{-2} z_n + \sum_{s=0}^{\infty} k_{ns} z_s = b_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (69)$$

οι ισότητες (69) μπορούν να θεωρηθούν ως ένα άπειρο αλγεβρικό σύστημα που είναι εφικτό να επιλυθεί με εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων.

Είναι προφανές ότι η εξίσωση (69) είναι ένα σύστημα a' είδους. Για να εφαρμόσουμε την ARM πρέπει να ορίσουμε τους παρακάτω τελεστές μητρών:

$$L = \hat{R} = \text{diag}\{\gamma_n\}_{n=0}^{\infty} \quad (70)$$

$$\hat{K}_a = \hat{L}^{2-a} \hat{R} \hat{R}^a = \{\hat{k}_{sn}\}_{s,n=0}^{\infty} \quad (71)$$

$$\hat{k}_{sn} = \gamma_n^{2-a} \gamma_s^a k_{sn} \quad (72)$$

και τα διανύσματα στήλες

$$y = \hat{R}^{-a} z = \{y_n\}_{n=0}^{\infty} \quad (73)$$

$$y_n = \gamma_n^{-a} z_n \quad (74)$$

$$\hat{b} = \hat{L}^{2-a} b = \{\hat{b}_n\}_{n=0}^{\infty} \quad (75)$$

$$\hat{b}_n = \gamma_n^{2-a} b_n \quad (76)$$

όπου ο όρος *diag* δηλώνει ότι τα L, R είναι διαγώνιοι τελεστές και $a \in [0,2]$ είναι μία παράμετρος που πρέπει να επιλεγεί. Χρησιμοποιώντας τους νέους αγνώστους y_n αντί για z_n και πολλαπλασιάζοντας την n -οστή εξίσωση της (69) με τον όρο γ_n^{2-a} εξάγεται ένα άπειρο αλγεβρικό σύστημα με την παρακάτω μορφή

$$(I + \hat{K}_a)y = \hat{b}, y, b \in l_2 \quad (77)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η (77) είναι ένα σύστημα β' είδους. Αυτό σημαίνει ότι κατασκευάστηκε μία οικογένεια $(\hat{L}^{2-a}, \hat{R}^a)$ ομαλοποιητών και ο καθένας επιλύει το πρόβλημα που έχει σκοπό την εξαγωγή του αλγεβρικού συστήματος β' είδους. Συνεπώς, εδώ εγείρεται το θέμα της σωστής επιλογής του a . Από αριθμητική άποψη το a που επιλέγεται είναι εκείνο που δίνει και την ταχύτερη σύγκλιση στο πρόβλημα. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις επιλέγεται $a = 1$. Βέβαια το πιο σημαντικό θέμα στο παραπάνω πρόβλημα δεν είναι ο υπολογισμός του a αλλά ο τρόπος με τον οποίο θα ορίσουμε το \hat{K}_a . Επιλέγοντας $a = 1$ η ανίσωση (68) γίνεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (1+n)(1+s) |k_{sn}|^2 < \infty \quad (78)$$

3.4 Συσχέτιση της MAR με την ARM

Ο Yuri Tuchkin ο οποίος είναι ο εμπνευστής της ARM δηλώνει πως η μέθοδος του είναι μια γενική μέθοδος, της οποίας μια ειδική περίπτωση είναι η MAR την οποία μελετήσαμε παραπάνω. Συγκεκριμένα θεωρείται πως η MAR προκύπτει αν στο παραπάνω πρόβλημα θέσουμε $a = 2$ και $\hat{R} = \hat{I}$. Για να αποδειχθεί αυτή η υπόθεση, διαχωρίσαμε το πρόβλημα σε δύο υποθετικές περιπτώσεις. Στην πρώτη

περίπτωση, θεωρείται ότι η MAR είναι ειδική περίπτωση της ARM και στη δεύτερη, ότι η ARM είναι ειδική περίπτωση της MAR.

Συνοπτικά θεωρούμε την εξίσωση α' είδους $\hat{G}x = y$ και την $\hat{G} = \hat{G}_1 + \hat{G}_2$. Στην εξίσωση (3), δηλαδή στην

$$(I + \hat{G}_1^{-1}\hat{G}_2)X = \hat{G}_1^{-1}Y$$

θεωρούμε εκ νέου τον συντελεστή του X στο αριστερό μέλος της (3) ως

$$I + \hat{C}_{MAR}$$

με \hat{C}_{MAR} την

$$\hat{C}_{MAR} = \hat{G}_1^{-1}\hat{G}_2 = \hat{G}_1^{-1}G - \hat{I} = \hat{G}_1^{-1}(G - \hat{G}_1) \quad (79)$$

και η εξίσωση β' είδους γίνεται

$$[\hat{I} + \hat{G}_1^{-1}(G - \hat{G}_1)]x = \hat{G}_1^{-1}y \quad (80)$$

όταν ο $\hat{G}_1^{-1}(G - \hat{G}_1)$ είναι συμπαγής

Ομαλοποιώντας την εξίσωση $\hat{G}x = y$, εξάγουμε τον τελεστή β' είδους $\hat{L}\hat{G}\hat{R} = I + H$, και βάσει της εξίσωσης (55), παίρνουμε την

$$(\hat{L}\hat{G}\hat{R})x = \hat{L}y$$

θεωρούμε εκ νέου τον συντελεστή του X στο αριστερό μέλος της (55) ως

$$I + \hat{C}_{ARM}$$

με \hat{C}_{ARM} την

$$\hat{C}_{ARM} = \hat{L}\hat{G}\hat{R} - \hat{I} = \hat{L}(\hat{G} - \hat{L}^{-1}\hat{R}^{-1})\hat{R} \quad (81)$$

και η εξίσωση β' είδους γίνεται

$$[\hat{I} + \hat{L}(\hat{G} - \hat{L}^{-1}\hat{R}^{-1})\hat{R}]\hat{R}^{-1}x = \hat{L}y \quad (82)$$

όταν ο $\hat{L}(\hat{G} - \hat{L}^{-1}\hat{R}^{-1})\hat{R}$ είναι συμπαγής.

Περίπτωση 1: Η MAR είναι ειδική περίπτωση της ARM

Συγκρίνοντας τις (80) και (82) εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η MAR είναι υποπερίπτωση της ARM αν ισχύουν τα παρακάτω:

$$\hat{R} = \hat{I} \text{ και } \hat{L} = \hat{G}_1^{-1} \quad (83)$$

Επομένως η MAR είναι ειδική περίπτωση της ARM.

Περίπτωση 2: Η ARM είναι ειδική περίπτωση της MAR

Είναι ενδιαφέρον να εξετάσουμε και την περίπτωση αυτή προσπαθώντας να καταλήξουμε σε άτοπο. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να επιβεβαιώσουμε πως η περίπτωση 1 δηλαδή η θεώρηση του Yuri Tuchkin είναι αληθής. Έχουμε τα ακόλουθα:

Αν στη MAR πάρουμε

$$\hat{G}_1^{-1} = \hat{L}\hat{G}\hat{R}\hat{G}^{-1} \text{ ή } \hat{G}_1 = \hat{G}\hat{R}^{-1}\hat{G}^{-1}\hat{L}^{-1} \quad (84)$$

τότε ισχύει ότι

$$\hat{C}_{MAR} = \hat{G}_1^{-1}\hat{G} - \hat{I} = \hat{L}\hat{G}\hat{R}\hat{G}^{-1}\hat{G} - I = \hat{L}\hat{G}\hat{R} - \hat{I} = \hat{C}_{ARM} \quad (85)$$

Ουσιαστικά το πρόβλημα δεύτερης περίπτωσης, είναι ότι απλοποιείται όταν $\hat{G}_1^{-1} = \hat{L}\hat{R}$ και ιδιαίτερα όταν $\hat{G}\hat{R} = \hat{R}\hat{G}$. Η δυσκολία για την απόδειξη της ισοδυναμίας σε αυτή τη θεώρηση είναι ότι δεν μπορεί να βρεθεί μια ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση η οποία να ικανοποιεί τις δύο αυτές συνθήκες. Στόχος μας ήταν η εξεύρεση μίας τέτοιας εξίσωσης η οποία θα μπορούσε να μας δώσει απόδειξη της παραπάνω περίπτωσης. Για το λόγο αυτό μελετήσαμε διεξοδικά το βιβλίο [25], Handbook of Integral Equations, το οποίο περιέχει μία αρκετά μεγάλη ποικιλία ολοκληρωτικών εξισώσεων καθώς και των μεθόδων επίλυσης τους. Δυστυχώς όμως δεν μπορέσαμε να βρούμε την συγκεκριμένη ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση που ζητούσαμε.

Ένα συνοπτικό συμπέρασμα

Μέσα από την ανάλυση των δύο αυτών μεθόδων καταλήξαμε στο εξής απλό συμπέρασμα. Για την επίλυση με την Method of Analytical Regularization, απαιτείται η εξεύρεση ενός τελεστή \hat{G}_1 και ουσιαστικά του \hat{G}_1^{-1} που δίνει τη δυνατότητα μετατροπής της ολοκληρωτικής εξίσωσης α' είδους $\hat{G}x = y$, σε μία β' είδους. Από την άλλη πλευρά για την επίλυση με την Analytical Regularization Method σκοπός μας είναι να βρούμε δύο τελεστές \hat{L}, \hat{R} οι οποίοι τοποθετούμενοι αριστερά και δεξιά του \hat{G} , να δίνουν ένα τελεστή β' είδους.

Ο ισχυρισμός του Y. Tuchkin, περιλαμβάνει τον γενικό τύπο μετατροπής του τελεστή \hat{G} που είναι ο $\hat{L}^{2-a}\hat{G}\hat{R}^a$. Κατά τον συγγραφέα της ARM επιλέγοντας $a = 2$, μπορεί να επιλυθεί κάθε μορφή της MAR, δηλαδή θα έχουμε τον τελεστή ομαλοποίησης μόνο δεξιά του \hat{G} , δηλαδή την $\hat{G}\hat{R}^2$. Όμως, όπως φαίνεται και στο βιβλίο [19], υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις semi-inversion method (MAR), όπου υπάρχει τελεστής ομαλοποίησης μόνο αριστερά του \hat{G} .

Παρόλα αυτά, διαισθητικά η MAR και η ARM είναι τόσο συγγενείς μέθοδοι όπου είναι δύσκολο να κατανοήσουμε τη διαφορά τους και να γίνει μία πιο ουσιαστική ανάλυση της ARM.

Τελική Σύνοψη

Μέσα από τη παρούσα διπλωματική εργασία, εξετάσαμε την ανάλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων Fredholm, αναλυτικά και αριθμητικά. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας, παρουσιάστηκαν αρκετές μορφές αυτών των εξισώσεων και ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να τις επιλύσουμε αναλυτικά χωρίς τη βοήθεια κάποιου λογισμικού. Υπάρχουν όμως και κάποιες ολοκληρωτικές εξισώσεις οποίες δεν μπορούν να λυθούν με αναλυτικές μεθόδους. Οπότε στα κεφάλαια 2 και 3 παρουσιάζονται αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης τους. Πιο συγκεκριμένα, στο δεύτερο κεφάλαιο είδαμε τη μέθοδο των ροπών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, μια ολοκληρωτική εξίσωση, αναλύεται σε μορφή σειράς που στο εσωτερικό της εμπεριέχονται συναρτήσεις βάσης και βάρους, δίνοντας έτσι μία τελική μητρική μορφή, η οποία μέσω λογισμικών δίνει την επίλυση του προβλήματος. Στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται η εξίσωση Hallén για μία γραμμική κεραία με ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα. Με τη βοήθεια του λογισμικού MATLAB έγινε σημειακή προσαρμογή για το ίδιο πρόβλημα χρησιμοποιώντας παλμικές συναρτήσεις βάσης. Με τον τρόπο αυτό είδαμε πως η εξίσωση Hallén με προσεγγιστικό πυρήνα, δεν είναι επιλύσιμη, πράγμα που φαίνεται στα αποτελέσματα του αριθμητικού παραδείγματος μας όταν έγινε χρήση μεγάλου αριθμού δειγμάτων. Στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζεται η διαδικασία ομαλοποίησης που στόχος της είναι η μετατροπή μίας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm α' είδους σε ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm β' είδους. Πολλές ολοκληρωτικές εξισώσεις α' είδους δίνουν ανακριβή αποτελέσματα με αριθμητικές μεθόδους και για αυτό το λόγο, χρησιμοποιώντας τη θεωρία τελεστών μία ολοκληρωτική εξίσωση α' είδους μπορεί να μετατραπεί σε εξίσωση β' είδους. Στο ίδιο κεφάλαιο εξετάσαμε δύο διαφορετικές μεθόδους, που βασίζονται στην ομαλοποίηση (regularization) των εξισώσεων. Η πρώτη ονομάζεται Method of Analytical Regularization του A. Nosich και η δεύτερη Analytical Regularization Method του Y. Tichkin. Αφού παρουσιάσαμε ξεχωριστά κάθε μέθοδο με παραδείγματα, προσπαθήσαμε να βρούμε τη μεταξύ τους συσχέτιση. Από την σύγκριση των δύο μεθόδων καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι οι δύο αυτές μέθοδοι είναι τόσο συγγενείς μεταξύ τους που είναι δύσκολο να κάνουμε περαιτέρω ανάλυση των διαφορών τους

Παράρτημα Α

Α1 Συνθήκες Ορθογωνιότητας και Ορθοκανονικές Συναρτήσεις

- Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ορθογώνιες στο διάστημα $[a, b]$ αν και μόνο αν

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \quad (1)$$

- Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{\varphi_n\}, n = 1, 2, \dots$ θα λέγεται ορθογώνιο στο διάστημα $[a, b]$ αν

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, n \neq m \quad (2)$$

δηλαδή αν κάθε δύο διαφορετικά στοιχεία από το σύνολο είναι ορθογώνια στο σύστημα $[a, b]$.

- Μια συνάρτηση f θα λέγεται κανονικοποιημένη στο διάστημα $[a, b]$ αν και μόνο αν

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1 \quad (3)$$

- Ένα σύνολο συναρτήσεων $\{\varphi_n\}, n = 1, 2, \dots$ θα λέγεται ορθοκανονικό στο διάστημα $[a, b]$ αν

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases} \quad (4)$$

Οι ορθοκανονικές συναρτήσεις έχουν τις ίδιες ιδιότητες με τις ορθογώνιες συναρτήσεις αλλά αυτές είναι κανονικοποιημένες, δηλαδή κάθε συνάρτηση του ορθοκανονικού συστήματος έχει διαιρεθεί με τη νόρμα (norm) της συνάρτησης η οποία ορίζεται ως

$$\|\varphi_n\| = \left(\int_a^b \varphi_n^2(x) dx \right)^{1/2} \quad (5)$$

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $[a, b]$ μια συνάρτηση f μπορεί να εκφραστεί ως μια σειρά ορθοκανονικών συναρτήσεων $\varphi_1, \varphi_2, \dots$

Έστω ότι

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x), x \in [a, b] \quad (6)$$

Θα πρέπει να υπολογίσουμε τους συντελεστές c_n . Προς το παρόν, αγνοώντας το θέμα σύγκλισης, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\varphi_k(x)$, ολοκληρώνουμε από a έως b και παίρνουμε την

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx &= \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b c_n \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx \\ &= c_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = c_n \|\varphi_n\|^2 = c_n \quad (7) \end{aligned}$$

Εδώ έχουμε υποθέσει την εναλλαγή του ολοκληρώματος με το άθροισμα και χρησιμοποιήθηκε ότι το $\{\varphi_n\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο στο $[a, b]$.

Συνεπώς κάτω από τις κατάλληλες συνθήκες σύγκλισης οι συντελεστές c_n θα δίνονται από τη σχέση

$$c_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

και ονομάζονται συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)$ ως προς το ορθογώνιο σύνολο $\{\varphi_n\}$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ λέγεται σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Έτσι με βάση τα παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε στο θεώρημα Fredholm Alternative που αναλύεται στο κεφάλαιο 1.

A2 Θεώρημα Hilbert-Schmidt

Υποθέτουμε ότι το λ δεν είναι ιδιοτιμή της ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

όπου $K(x, t)$ είναι συμμετρικός και τετραγωνικά ολοκληρώσιμος στο τετράγωνο $\{(x, t): a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$. Τότε σύμφωνα με το [20] έχουμε

$$y(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda}$$

όπου $\lambda_i, i = 1, 2, \dots$ οι ιδιοτιμές και $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots$ οι αντίστοιχες κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις της ομογενούς ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt$$

Απόδειξη

Γράφουμε την ολοκληρωτική εξίσωση στη μορφή

$$h(x) = y(x) - f(x) = \lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \quad (9)$$

Αναπτύσσουμε την $h(x)$ σε σειρά Fourier με βάση λήμμα Hilbert-Schmidt (σελ. 30)

$$h(x) = y(x) - f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i(x) \quad (10)$$

όπου

$$b_i = \int_a^b h(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b y(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx = d_i - a_i \quad (11)$$

θέτοντας

$$d_i = \int_a^b y(x) \varphi_i(x) dx \quad (12)$$

Αλλά

$$\begin{aligned} b_i &= \int_a^b [y(x) - f(x)] \varphi_i(x) dx = \int_a^b \left(\lambda \int_a^b K(x, t) y(t) dt \right) \varphi_i(x) dx \\ &= \lambda \int_a^b y(t) \left(\int_a^b K(t, x) \varphi_i(t) dx \right) dt, K(x, t) = K(t, x) \quad (13) \end{aligned}$$

Επειδή

$$\varphi_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, t) \varphi_i(t) dt \quad (14)$$

η παραπάνω σχέση δίνει

$$b_i = \lambda \int_a^b y(t) \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(t) dt = \frac{\lambda}{\lambda_i} \int_a^b y(t) \varphi_i(t) dt = \frac{\lambda}{\lambda_i} d_i \quad (15)$$

Συνεπώς $b_k = \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} a_k$ και άρα

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi_i(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} \quad (16)$$

Αντικαθιστώντας το a_k η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i - \lambda} \int_a^b f(t) \varphi_i(t) dt \\ &= f(x) - \lambda \int_a^b f(t) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(t)}{\lambda - \lambda_i} \right] dt \\ &= f(x) - \lambda \int_a^b R(x, t, \lambda) f(t) dt \quad (17) \end{aligned}$$

ορίζοντας ότι ο επιλύοντας πυρήνας $R(x, t, \lambda)$ είναι ο

$$R(x, t, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(t)}{\lambda - \lambda_i}, \lambda \neq \lambda_i \quad (18)$$

A3 Ορισμός των συναρτήσεων Green μέσω των εξισώσεων Fredholm

Η μέθοδος των συναρτήσεων Green είναι μία από τις σημαντικότερες μεθόδους για την επίλυση προβλημάτων με συνοριακές τιμές, σε μη ομογενείς συνήθειες ή μερικές διαφορικές εξισώσεις. Οι συναρτήσεις Green χρησιμοποιούνται για ναδειχθεί πως ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών ανάγεται σε μία ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm με τη συνάρτηση Green ως πυρήνα. Γενικά μελετάμε μια πολύ σημαντική ειδική περίπτωση του προβλήματος συνοριακών τιμών, το πρόβλημα Sturm-Liouville. Θα ορίσουμε την συνάρτηση Green για το μη ομογενές πρόβλημα

$$Ly + \lambda y = f \quad (19)$$

Εδώ ο τελεστής L καλείται αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλαδή είναι ένας τελεστής ο οποίος ισούται με τον συζυγή του $L = L^*$.

Ουσιαστικά ο L ορίζεται ως

$$L = p(x) \frac{d^2}{dx^2} + q(x) \frac{d}{dx} + r(x) \quad (20)$$

και στο πρόβλημα μας

$$Ly = py'' + p'y' + ry = (py')' + ry \quad (21)$$

Σκοπός του προβλήματος μας είναι να αναπτύξουμε την $y(x)$ σε σειρά Fourier ως προς τις ορθοκανονικές συναρτήσεις $\varphi_k(x)$.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Sturm-Liouville που αποτελείται από την διαφορική εξίσωση

$$(p(x)y')' + [q(x) + \lambda r(x)]y = f(x) \quad (22)$$

και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Οι συνοριακές συνθήκες είναι οι ίδιες με αυτές που ικανοποιούν οι ιδιοσυναρτήσεις y_n του προβλήματος Sturm-Liouville

$$(p(x)y_n')' + [q(x) + \lambda_n r(x)]y_n = 0 \quad (23)$$

Παρατηρούμε ότι είναι $\lambda \neq \lambda_n$. Είναι προτιμότερο να δουλεύουμε με κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις. Αν η $y_n(x)$ δεν είναι κανονικοποιημένη, ορίζουμε

$$\varphi_n(x) = \frac{y_n(x)}{\left(\int_a^b y_n^2(x) dx\right)^{1/2}} \quad (24)$$

έτσι ώστε

$$\int_a^b \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m \end{cases}$$

Η $y(x)$ παριστάνεται με όρους της $\varphi_n(x)$

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \quad (25)$$

Αντικαθιστώντας την $y(x)$ στην (22) έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \varphi_n(x) + \lambda r(x) \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = f(x) \quad (26)$$

Όμως είναι λόγω της (23)

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{d}{dx} \right] + q(x) \right\} \varphi_n(x) = -\lambda_n r(x) \varphi_n(x) \quad (27)$$

οπότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-\lambda_n + \lambda) r(x) \varphi_n(x) = f(x) \quad (28)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (28) με $\varphi_m(x)$ και ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n (-\lambda_n + \lambda) \int_a^b r(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_m(x) dx \quad (29)$$

και χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ορθογωνιότητας με συνάρτηση βάρους την $r(x)$ έχουμε

$$c_n (-\lambda_n + \lambda) = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \quad (30)$$

Επομένως η λύση $y(x)$ δίνεται από την

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\lambda - \lambda_n} \int_a^b f(t) \varphi_n(t) dt \right] \varphi_n(x) \quad (31)$$

Υποθέτοντας ότι μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά ολοκλήρωσης με το άθροισμα, η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$y(x) = \int_a^b f(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n(t) \varphi_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \right] dt \quad (32)$$

Αν ορίσουμε τη συνάρτηση Green ως

$$G(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\varphi_n(x) \varphi_n(t)}{\lambda - \lambda_n} \right] \quad (33)$$

τότε η λύση $y(x)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$y(x) = \int_a^b f(t) G(x, t) dt \quad (34)$$

A4 Τα είδη των ολοκληρωτικών εξισώσεων

Στον πίνακα που ακολουθεί μπορούμε να εντοπίσουμε όλα τα είδη και τις μορφές των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

<u>Όνομα της εξίσωσης</u>	<u>Μορφή της εξίσωσης</u>
<u>Fredholm β' είδους</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)y(t)dt$
<u>Fredholm α' είδους</u>	$-f(x) = \int_a^b K(x,t)y(t)dt$
<u>Volterra β' είδους</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)y(t)dt$
<u>Volterra α' είδους</u>	$-f(x) = \int_a^x K(x,t)y(t)dt$
<u>Urysohn β' είδους</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t,y(t))dt$
<u>Urysohn α' είδους</u>	$-f(x) = \int_a^b K(x,t,y(t))dt$
<u>Hammerstein</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\Phi(t,y(t))dt$
<u>Urysohn-Volterra</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t,y(t))dt$
<u>Hammerstein-Volterra</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\Phi(t,y(t))dt$
<u>Abel</u>	$f(x) = \int_0^x \frac{y(t)}{(x-t)^a} dt, a < x < b$
<u>Wiener-Hopf</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^\infty K(x-t)y(t)dt$
<u>Renewal</u>	$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x-t)y(t)dt$
<u>Chandrasekhar</u>	$f(x) = 1 + \lambda \int_a^b \frac{xy(x)y(t)}{x+t} dt$
Πίνακας 1: Τα διαφορετικά είδη ολοκληρωτικών εξισώσεων [4]	

A5 Κύριο όρισμα κατά Cauchy (principal value integrals)

Σε ορισμένες περιπτώσεις ολοκλήρωσης συναρτήσεων, η ορισμένη ολοκλήρωση καταλήγει σε απροσδιοριστία. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$$

δεν μπορεί να υπολογιστεί.

Για να αντιμετωπιστούν αυτού του τύπου τα ολοκληρώματα, θα πρέπει να υπολογιστεί το κύριο όρισμα κατά Cauchy (principal value integral). Το κύριο όρισμα κατά Cauchy μίας συνάρτησης $f(x)$, μπορεί να συμβολιστεί ως

$$PV \int f(x) dx$$

Έστω η συνάρτηση $f(x)$ και θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$PV \int_a^c f(x) dx$$

όπου στο διάστημα $[a, c]$, υπάρχει ένα σημείο b στην οποία η συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x)$, είναι τέτοια ώστε

$$\int_a^b f(x) dx = \pm\infty, \forall a < b \quad (35)$$

και

$$\int_b^c f(x) dx = \mp\infty, \forall c > b \quad (36)$$

τότε το κύριο όρισμα κατά Cauchy ορίζεται

$$PV \int_a^c f(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{b-\delta} f(x) dx + \int_{b+\delta}^c f(x) dx \right] \quad (37)$$

Για παράδειγμα πρέπει να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα,

$$\int_0^4 \frac{1}{x-3} dx$$

το οποίο οδηγεί σε απροσδιοριστία.

Έτσι παίρνουμε το κύριο όρισμα κατά Cauchy ως

$$PV \int_0^4 \frac{1}{x-3} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\int_0^{3-\delta} \frac{1}{x-3} dx + \int_{3+\delta}^4 \frac{1}{x-3} dx \right]$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left[\ln|x-3| \Big|_0^{3-\delta} + \ln|x-3| \Big|_{3+\delta}^4 \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{\delta}{3} + \ln \frac{1}{\delta} \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \ln \frac{1}{3} = -\ln 3$$

Παράρτημα Β

Για τη συγγραφή του παραρτήματος αυτού, βασιστήκαμε στους ορισμούς των βιβλίων [3,4,19].

B1 Χώροι Banach

Ορισμός 1

Ένας γραμμικός χώρος X θα λέγεται σταθμητός, αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός $\|x\|$, που ονομάζεται στάθμη (norm) τέτοιος ώστε:

$$\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$\|ax\| = |a|\|x\|, \forall a \in \mathbb{R}, \forall x \in X$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$$

Ο χώρος X περιλαμβάνει τη στάθμη $\|\cdot\|$ και συμβολίζεται σύντομα ως $(X, \|\cdot\|)$. Ο χώρος ονομάζεται σταθμητός διανυσματικός. Ένας σταθμητός διανυσματικός χώρος είναι ταυτόχρονα και μετρικός χώρος με μετρική d που δίνεται από τον τύπο

$$d(x, y) = \|x - y\|, x, y \in X$$

και λέγεται μετρική που επάγεται από τη στάθμη.

Παρατήρηση 1

Ένας μετρικός χώρος είναι ένα ζεύγος (X, d) όπου X είναι ένα σύνολο και d μία συνάρτηση από το $X \times X$ στο \mathbb{R} που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες

$$d(x, y) = 0 \text{ ανν } x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι η $d > 0$. Από την τρίτη συνθήκη έχουμε

$$d(x, y) + d(y, x) \geq d(x, x)$$

και από τις άλλες ισχύει ότι $2d(x, y) \geq 0$ συνεπώς, $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.

Παρατήρηση 2

Ένας μετρικός χώρος, δεν είναι πάντα σταθμητός.

Ας θεωρήσουμε τον χώρο X των ακολουθιών x_i με μετρική που ορίζεται ως

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ και $y = (y_1, \dots, y_n, \dots)$. Μπορούμε να δείξουμε ότι η d είναι μετρική και συνεπώς ο χώρος (X, d) είναι μετρικός χώρος. Αυτός ο χώρος δεν είναι και σταθμητός χώρος. Επειδή αν υπήρχε στάθμη $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $d(x, y) = \|x - y\|$, τότε θα έπρεπε να ισχύει

$$d(ax, ay) = \|ax - ay\| = |a|\|x - y\| = |a|d(x, y)$$

Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού

$$d(ax, ay) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a||x_i - y_i|}{1 + |a||x_i - y_i|}$$

και

$$|a|d(x, y) = |a| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}$$

B2 Χώροι Hilbert

Έστω ένας γραμμικός διανυσματικός χώρος X υπεράνω του σώματος \mathbb{R} ή \mathbb{C} . Ένα εσωτερικό γινόμενο στον X είναι μία συνάρτηση $\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow (\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$, τέτοια ώστε για όλα τα $x, y, z \in X$ και όλα τα $\lambda \in (\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$ να έχουμε:

Ορισμός θετικότητας

$$\langle x, x \rangle \geq 0$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$$

Γραμμικότητα ως προς την πρώτη μεταβλητή

$$\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

Συζυγής συμμετρία

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο είναι ένας γραμμικός χώρος με ένα εσωτερικό γινόμενο. Από τη δεύτερη και την τρίτη ιδιότητα έχουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικά συζυγές ως προς τη δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή

$$\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$$

και

$$\langle x, \lambda y \rangle = \bar{\lambda} \langle x, y \rangle, \forall x, y \in X \text{ και } \lambda \in (\mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$$

Ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο ορίζει μία στάθμη που δίνεται από την

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

και μία μετρική που δίνεται από την

$$d(x - y) = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

Ορισμός 1

Χώρος Hilbert είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς τη μετρική που εισάγεται από το εσωτερικό γινόμενο. Κάθε χώρος Hilbert είναι χώρος Banach (το αντίστροφο δεν ισχύει).

Θεώρημα 1

Έστω $\| \cdot \|$ μία στάθμη σε ένα γραμμικό χώρο X . Τότε υπάρχει ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον X τέτοιο ώστε $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ ανν (δηλ. αν και μόνο αν) η στάθμη ικανοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \forall x, y \in X$$

Στην ουσία το άθροισμα των τετραγώνων των διαγωνίων ενός παραλληλογράμμου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του παραλληλογράμμου. Από το παραπάνω θεώρημα καταλάβαμε ότι μας δίνεται η δυνατότητα να κατασκευάσουμε ένα εσωτερικό γινόμενο από μία στάθμη και να εισάγουμε μία στάθμη από ένα εσωτερικό γινόμενο που να ικανοποιεί την

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2, \forall x, y \in X$$

Σε μία τέτοια περίπτωση το εσωτερικό γινόμενο είναι μοναδικό και δίνεται από τη σχέση

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2)$$

Ο χώρος l^2

Ο l^2 είναι ο χώρος όλων των τετραγωνικά αθροίσιμων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών και είναι χώρος Hilbert.

Ο l^2 έχει εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$$

και στάθμη

$$\|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$$

B3 Ιδιότητες και Θεωρήσεις Τελεστών

Ορισμός 1

Μία απεικόνιση $A: X \rightarrow Y$, όπου X και Y είναι διανυσματικοί χώροι, θα λέγεται γραμμική αν

$$A(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 A x_1 + a_2 A x_2$$

για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και κάθε $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2

Μία απεικόνιση $A: X \rightarrow Y$, όπου X και Y είναι διανυσματικοί χώροι, θα λέγεται φραγμένη αν υπάρχει σταθερή $K > 0$ τέτοια ώστε

$$\|Ax\| \leq K\|x\|, \forall x \in X$$

Πρέπει να επισημάνουμε ότι η έννοια φραγμένη, διαφέρει από τον ορισμό φραγμένη συνάρτηση του απειροστικού λογισμού, όπου φραγμένες είναι οι συναρτήσεις των οποίων το πεδίο τιμών τους είναι φραγμένο σύνολο.

Ορισμός 3

Μία φραγμένη γραμμική απεικόνιση μεταξύ σταθμητών διανυσματικών χώρων, θα λέγεται τελεστής. Ένας τελεστής είναι πάντα συνεχής.

Θεώρημα 1

Μία γραμμική απεικόνιση, που είναι συνεχής σε ένα τυχαίο σημείο ενός σταθμητού διανυσματικού χώρου X , είναι συνεχής στον X .

Θεώρημα 2

Μία γραμμική απεικόνιση A σε ένα σταθμητό χώρο X είναι συνεχής αν και μόνο αν είναι φραγμένη.

Ορισμός 4

Έστω $f: X \rightarrow Y$ μία συνεχής συνάρτηση, όπου X και Y είναι σταθμητοί γραμμικοί χώροι.

Η f θα λέγεται συμπαγής (compact), αν το $f(X)$ είναι ένα σχετικά συμπαγές σύνολο του Y

Η f θα λέγεται πλήρως συνεχής (completely continuous) αν για κάθε φραγμένο υποσύνολο S του X το σύνολο $f(S)$ είναι σχετικά συμπαγές. Ουσιαστικά μία πλήρως συνεχής είναι μία απεικόνιση η οποία είναι συμπαγής όταν την περιορίσουμε σε τυχαίο φραγμένο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της.

Θεώρημα 3

Ένας μετρικός χώρος είναι συμπαγής αν κάθε ακολουθία στον X είναι συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα 4

Αν X και Y είναι διανυσματικοί χώροι και $A: X \rightarrow Y$ είναι μία γραμμική απεικόνιση για την οποία η αντίστροφη A^{-1} υπάρχει, τότε η A^{-1} είναι επίσης γραμμική απεικόνιση

Σημείωση στο θεώρημα 4

Υποθέτουμε ότι $A: X \rightarrow Y$ είναι μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και Y με την ιδιότητα ότι η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = u, x \in X$ είναι η $x = u$. Σε αυτή την περίπτωση, αν x_1 και x_2 είναι σημεία του X τέτοια ώστε $Ax_1 = Ax_2$, τότε $A(x_1 - x_2) = u$ και άρα πρέπει να έχουμε $x_1 - x_2 = u$ ή $x_1 = x_2$. Αυτό σημαίνει ότι η A είναι ένας προς ένα. Αν η A είναι και επί, τότε αυτό είναι ικανό για να υπάρξει η αντιστροφή A^{-1} .

Θεώρημα 5

Η αντίστροφη A^{-1} μίας επί γραμμικής απεικόνισης $A: X \rightarrow Y$ μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και Y υπάρχει αν η μοναδική λύση της εξίσωσης $Ax = u, x \in X$ είναι η $x = u$.

Θεώρημα 6 (ικανή και αναγκαία συνθήκη)

Έστω $A: X \rightarrow Y$ μία επί γραμμική απεικόνιση μεταξύ των διανυσματικών χώρων X και Y . Η αντίστροφη A^{-1} υπάρχει και είναι φραγμένη αν υπάρχει σταθερά $m > 0$ τέτοια ώστε $\|Ax\| \geq m\|x\|, \forall x \in X$.

Θεώρημα 7

Έστω A ένας τελεστής από έναν σταθμητό χώρο X στον εαυτό του. Υποθέτουμε ότι $\|A\| < 1$ και ο τελεστής $(I - A)$ είναι επί. Τότε ο αντίστροφος τελεστής $(I - A)^{-1}$ υπάρχει και

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Θεώρημα 8

Έστω A ένας τελεστής από ένα χώρο Banach στον εαυτό του και υποθέτουμε ότι $\|A\| < 1$. Τότε ο τελεστής $(I - A)$ είναι επί, ο αντίστροφος $(I - A)^{-1}$ υπάρχει και $\forall y \in X$,

$$(I - A)^{-1}y = \sum_{n=0}^{\infty} A^n y$$

B4 Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Fredholm και Θεωρία Τελεστών

Γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις

Θεώρημα 1

Έστω $K(x, t)$ είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b] \times [a, b]$, με φράγμα M . Τότε $\forall f \in C[a, b]$ η εξίσωση

$$y(t) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

έχει μοναδική λύση στο $C[a, b]$, αν $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$

Θεώρημα 2

Έστω $K(x, t)$ είναι μία συνεχής πραγματική συνάρτηση ορισμένη και μετρήσιμη στο τετράγωνο $a \leq x, t \leq b$ και τέτοια ώστε

$$P = \int_a^b \int_a^b K^2(x, t)dxdt < \infty$$

και έστω $f \in L_2[a, b]$. Τότε η πάνω ολοκληρωτική εξίσωση έχει μοναδική λύση $y \in L_2[a, b]$, αν $|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{P}}$.

Μη Γραμμικές Ολοκληρωτικές Εξισώσεις Fredholm

Θεώρημα 1

Έστω $K: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz

$$|K(x, t, y) - K(x, t, z)| \leq L|y - z|, (x, t) \in [a, b] \times [a, b], y, z \in \mathbb{R}$$

τότε $\forall f \in C[a, b]$ η εξίσωση

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)y(t)dt$$

έχει μοναδική λύση στο $C[a, b]$, αν $|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}$

Θεώρημα 2

Υποθέτουμε ότι

- η $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
- ο $K: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής
- η μερική παράγωγος $K_y: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι επίσης συνεχής και

$$|K_y(x, t, y)| \leq L, \forall x, t \in [a, b], y \in \mathbb{R}$$

Τέλος υποθέτουμε ότι $|\lambda|(b-a)L < 1$. Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t, y(t)) dt$$

έχει μοναδική λύση στο $C[a, b]$.

Θεώρημα 3

Υποθέτουμε ότι

- η $f \in L_2[a, b]$,
- ο K ικανοποιεί τη συνθήκη του Lipschitz ως προς την τρίτη μεταβλητή,

$$|K(x, t, y) - K(x, t, z)| \leq N(x, t)|y - z|, \forall y, z$$

όπου N είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη με

$$\int_a^b \int_a^b |N(x, t)|^2 dx dt = P^2$$

- $K(x, t, 0)$ είναι συνεχής για $x, t \in [a, b]$
- $\lambda < 1/|P|$

Τότε η ολοκληρωτική εξίσωση

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, y(t)) dt$$

έχει μοναδική λύση με $y \in L_2[a, b]$.

Θεώρημα 4

Θεωρούμε τη γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t, y(t)) dt$$

με $\Omega \subset \mathbb{R}$ ένα φραγμένο χωρίο και $\lambda \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι:

$$f \in C(\Omega)$$

$$K \in C(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [-r, r]), |K| \leq M$$

$$|K(x, t, y) - K(x, t, z)| \leq L|y - z|, \forall (x, t, y), (x, t, z) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \times [-r, r]$$

$$|\lambda| \leq \frac{R}{Mm(\Omega)}, |\lambda| \leq \frac{1}{LM(\Omega)}$$

όπου $m(\Omega)$ είναι το μέτρο του Ω και R η ακτίνα της σφαίρας $\bar{B}(f, R)$, η οποία επιλέγεται έτσι ώστε $y \in \bar{B}(f, R) \rightarrow \|y\| \leq r$.

Τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση στη σφαίρα $\bar{B}(f, R)$.

Βιβλιογραφία

- [1] Τραχανάς Σ. "Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις-Σειρές Fourier και Προβλήματα Συνοριακών Τιμών", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο 2008.
- [2] Δάσιος Γ. "Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2001.
- [3] Κατάβολος Α. "Εισαγωγή στη Θεωρία Τελεστών", Εκδόσεις Συμμετρία 2008.
- [4] Ντούγιας Σ. "Ολοκληρωτικές Εξισώσεις", Εκδόσεις Συμμετρία 2009.
- [5] Τσαλαμέγκας Ι., Ρουμελιώτης Ι. "Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Τόμος Α", Εκδόσεις Τζιόλα 2010.
- [6] Τσαλαμέγκας Ι., Ρουμελιώτης Ι. "Ηλεκτρομαγνητικά Πεδία Τόμος Β", Εκδόσεις Τζιόλα 2010.
- [7] Τσιμπούκης Θ. "Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο. Βασική Θεωρία και Εφαρμογές Τόμος Ι", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2011.
- [8] Τσιμπούκης Θ. "Ηλεκτρομαγνητικό Πεδίο. Βασική Θεωρία και Εφαρμογές Τόμος ΙΙ", Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης 2011.
- [9] Κωττής Π., Καυάλης Χ. "Κεραίες-Ασύρματες Ζεύξεις", Εκδόσεις Τζιόλα 2002.
- [10] Χατζίκος Ε. "Matlab 7 Για Μηχανικούς", Εκδόσεις Τζιόλα 2007.
- [11] Κακλαμάνη Δ. Θ. "Υπολογιστικές Τεχνικές Για Συστήματα Μετάδοσης Πληροφορίας", ΕΜΠ 2005.
- [12] Φικιώρης Γ. "Προσδιορισμός Ρεύματος Σε Γραμμική Κεραία Μέσω Ολοκληρωτικών Εξισώσεων", Σημειώσεις ΕΜΠ 2006
- [13] Dieudonne J. "History of Functional Analysis", North-Holland Mathematics Studies 1983.
- [14] Balanis C.A. "Antenna Theory: Analysis and design, 3rd Edition", John Wiley & Sons, 2005.
- [15] Balanis C.A. "Advanced Engineering Electromagnetics, 2nd Edition", John Wiley & Sons, 2012.
- [16] Sadiku M. N. O. "Numerical Techniques in Electromagnetics, 2nd Edition", CRC Press, 2001.
- [17] Orfanidis S. "Electromagnetic Waves and Antennas", Rutgers University, published online 1999-2014.
- [18] Volakis J. L. "Integral Equation Methods for Electromagnetics", Scitech Publishing INC 2012.
- [19] Kress R. "Linear Integral Equations 2nd Edition", Springer 1999.
- [20] Pipkin A. C. "A Course On Integral Equations", Springer-Verlag 1991.
- [21] Wazwaz A. B. "Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Applications", Springer 2011.
- [22] Kirsch A. "An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, 2nd Edition", Springer 2011.
- [23] Gibson W.C "The Method of Moments in Electromagnetics, 2nd Edition", Chapman & Hall/CRC Press 2014.

- [24] Harrington R. F. "*Field Computation by Method of Moments*", Wiley-IEEE Press Reprint edition 1993.
- [25] Polyanin A. D., Manzhirov A. V. "*Handbook of Integral Equations, 2nd Edition*", Chapman & Hall/CRC Press 2008.
- [26] Shestopalov Y.V., Smirnov Y.G. "*Integral Equations*", Karlstad University 2002.
- [27] Nosich A. I. "*The Method of Analytical Regularization in Wave-Scattering and Eigenvalue Problems: Foundations and Review of Solutions*", IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 41, No. 3, June 1999.
- [28] Fikioris G. "*A Note on the Method of Analytical Regularization*", IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 43, No. 2, April 2001.
- [29] Panin S. B., Turetken B., Poyedinchuk A.Y., Tuchkin Y.A. "*Diffraction from a Grating on Chiral Medium: Application of Analytical Regularization Method*", Progress In Electromagnetics Research B, Vol. 59, 19-29, 2014.
- [30] Dikmen F., Tuchkin Y. A. "*Analytical regularization method for electromagnetic wave diffraction biaxially symmetrical thin annular strips*", Turk J Elec Eng & Comp Sci, Vol. 17, No.2, 2009 TUBITAK.
- [31] Poyedinchuk A.Y., Tuchkin Y.A, Shestopalov V. P. "*New Numerical-analytical Methods in Diffraction Theory*", Pergamon Mathematical and Computer Modeling 32 1029-1046 2000.
- [32] K. K. Mei "*On the integral equations of thin wire antennas*", IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-13, pp.374 -378 1965.