



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**Διαφορά κυρτών συναρτήσεων: Επίλυση εξισώσεων
συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μάριος Κ. Θεοφίλου

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος
Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 2015



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

**Διαφορά κυρτών συναρτήσεων: Επίλυση εξισώσεων
συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Μάριος Κ. Θεοφίλου

Επιβλέπων: Νικόλαος Γ. Μαράτος
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την Τρίτη 7 Ιουλίου 2015

.....
Νικόλαος Μαράτος
Καθηγητής

.....
Κωνσταντίνος Βουρνάς
Καθηγητής

.....
Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 2015

.....

Μάριος Κ. Θεοφίλου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Copyright © Μάριος Κ. Θεοφίλου, 2015

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας, αφού πρωτίστως μετατραπούν σε συναρτήσεις κυρτών διαφορών. Η επίλυση αυτή ανάγεται σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης κοίλης συνάρτησης με κυρτούς περιορισμούς. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος, χρησιμοποιείται ένας επαναληπτικός αλγόριθμος εξωτερικής προσέγγισης (Αλγόριθμος της *K. L. Hoffman*), ο οποίος εγγυάται τη σύγκλιση σε ολικό ελάχιστο. Η υλοποίηση του αλγορίθμου αυτού και τα διάφορα παραδείγματα γίνονται στο διαδραστικό περιβάλλον MATLAB R2012b. Ακολούθως, εξετάζεται αν τα αποτελέσματα της συγκεκριμένης υλοποίησης είναι ορθά, καθώς και αν υπάρχουν περιπτώσεις περισσότερων λύσεων. Τέλος, αναφέρονται παρατηρήσεις και δυσκολίες που προκύπτουν σχετικά με την απόδοση και το υπολογιστικό κόστος του αλγορίθμου.

Λέξεις κλειδιά

Σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας – καρτεσιανές συντεταγμένες, ροή φορτίου, συναρτήσεις κυρτών διαφορών, κοίλη ελαχιστοποίηση, ολική ελαχιστοποίηση, μέθοδος εξωτερικής προσέγγισης, κυρτό σύνολο

Abstract

The goal of this thesis is to solve systems of nonlinear equations which are derived from an electric power system (power flow analysis). These functions are initially expressed as Difference of Convex (DC) functions. Thus, the system is transformed into an equivalent problem of concave minimization with convex constraints. This problem is solved with an outer approximation algorithm (*K. L. Hoffman* algorithm) which guarantees convergence to a global minimum. The algorithm and various examples are implemented using the interactive environment MATLAB R2012b. Subsequently, it is examined whether the results of the particular implementation are correct and if more solutions occur. Finally, observations and difficulties are reported regarding the performance and the computational cost of the algorithm.

Key words

Electric power system – Rectangular coordinates, power flow, Difference of Convex (DC) functions, concave minimization, global minimization, outer approximation method, convex set

Ευχαριστίες

Αυτή η διπλωματική εργασία κλείνει μια περίοδο γεμάτη προσπάθεια, αφοσίωση και κόπο, αξίες που χαρακτηρίζουν τη διαδρομή μου προς τη γνώση και την εξειδίκευση στον τομέα του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών τα τελευταία πέντε χρόνια. Η διαδρομή αυτή ήταν απαιτητική, αλλά καθ' όλα ενδιαφέρουσα. Θα ήθελα να ευχαριστήσω αρκετά πρόσωπα που βοήθησαν να μετατραπεί σε ένα ευχάριστο και γεμάτο εμπειρίες ταξίδι.

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Νικόλαο Μαράτο, επιβλέποντα καθηγητή αυτής της διπλωματικής εργασίας. Είμαι ευγνώμων για τη βοήθεια και την καθοδήγηση που μου παρείχε, για την άψογη συνεργασία του σε όλη την περίοδο εκπόνησης αυτής της διπλωματικής εργασίας, καθώς και για τις πολύτιμες συμβουλές του σχετικά με τις μετέπειτα σπουδές μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο κ. Κώστα Βαρελά, για τις συμβουλές του σχετικά με την υλοποίηση του κώδικα και τη βοήθεια του σε προβλήματα που ανεφύησαν.

Τελευταίους αφήνω τους φίλους και τους γονείς μου. Δίχως τη συντροφιά, την υποστήριξη και τη συμπαράσταση των στενών μου φίλων και συναδέλφων, η όλη διαδικασία σπουδών στο εξωτερικό θα ήταν ακατόρθωτη. Τέλος, ένα ευχαριστώ, που είναι όμως πολύ λίγο, απευθύνω στους γονείς μου, οι οποίοι στάθηκαν πλάι μου, αρωγοί ψυχολογικά και οικονομικά, σ' αυτή την προσπάθειά μου για κατάκτηση της γνώσης. Χωρίς αυτούς, δε θα μπορούσα να ήμουν σήμερα εδώ.

Σας ευχαριστώ όλους από τα βάθη της καρδιάς μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 – ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1	Σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας – Ροή φορτίου.....	1
1.1.1	Έγχυση ισχύος.....	2
1.1.2	Μήτρα αγωγιμοτήτων.....	3
1.1.3	Θεμελίωση του προβλήματος ροής φορτίου.....	4
1.1.4	Τύποι ζυγών ροής φορτίου.....	5
1.2	Κυρτές συναρτήσεις.....	6
1.2.1	Κριτήρια κυρτότητας.....	6
1.2.2	Πράξεις που διατηρούν την κυρτότητα.....	7
1.3	Το πρόβλημα της κοίλης ελαχιστοποίησης.....	9
1.3.1	Κοίλη ελαχιστοποίηση – Ιδιότητες.....	10
1.3.2	Μέθοδοι εξωτερικής προσέγγισης.....	14
1.4	Συναρτήσεις κυρτών διαφορών.....	17
1.4.1	Ιδιότητες συναρτήσεων κυρτών διαφορών.....	17
1.4.2	Αναπαράσταση των DC συναρτήσεων.....	19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 – ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ

2.1	Αναπαράσταση εξισώσεων ροής φορτίου ως εξισώσεις κυρτών διαφορών.....	23
2.1.1	Χρήσιμες σχέσεις.....	23
2.1.2	Κατασκευή εξισώσεων ροής φορτίου και μετατροπή σε DC συναρτήσεις.....	24
2.1.3	Συνοπτική επεξήγηση του προβλήματος.....	31
2.2	Μετατροπή σε ισοδύναμο πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης.....	32
2.3	Αλγόριθμος επίλυσης.....	34
2.3.1	Θεωρητικό μέρος.....	34
2.3.2	Βήματα αλγόριθμου.....	35
2.4	Προσαρμογή και τροποποιήσεις του προβλήματος.....	39
2.4.1	Καθορισμός αρχικού πολυέδρου.....	39
2.4.2	Υπολογισμός αρχικού σημείου p.....	42

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 – ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

3.1	Παράδειγμα 1	43
3.2	Παράδειγμα 2	51
3.3	Παράδειγμα 3	73
3.4	Παράδειγμα 4	91
3.5	Παράδειγμα 5	103
3.6	Παράδειγμα 6	116
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....		139
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ - Κώδικας MATLAB.....		141
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....		169

Το αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η επίλυση ενός συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ). Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν εκτενώς λεπτομέρειες που αφορούν ένα ΣΗΕ και το πρόβλημα της ροής φορτίου, καθώς και περαιτέρω πληροφορίες σχετικά με τις κυρτές συναρτήσεις, το πρόβλημα της κοίλης ελαχιστοποίησης και τις συναρτήσεις κυρτών διαφορών.

1.1 Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας – Ροή Φορτίου

Ένα *σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας* (ΣΗΕ) είναι ένα δίκτυο αποτελούμενο από ηλεκτρικά στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούνται για την παροχή, μεταφορά και χρήση της ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα παράδειγμα ΣΗΕ μπορεί να θεωρηθεί ένα δίκτυο το οποίο παρέχει ηλεκτρική ενέργεια σε μια περιοχή κατοικιών και βιομηχανιών. Ένα τέτοιο σύστημα αποτελείται από τέσσερις συνιστώσες:

- *Παραγωγή*, με χρήση γεννητριών (συμβατικές σύγχρονες γεννήτριες ή από ανανεώσιμες πηγές),
- *Μεταφορά* υψηλής (μεγαλύτερης των 60kV) και υπερυψηλής (μεγαλύτερης των 250kV) τάσης μέσω εσωτερικών και εξωτερικών διασυνδέσεων,
- *Διανομή* μέσης (μεγαλύτερης των 6kV) και χαμηλής τάσης,
- *Αξιοποίηση*, με χρήση κινητήρων (επαγωγής) σε βιομηχανικά δίκτυα και σε οικιακούς – εμπορικούς καταναλωτές.

Το κομμάτι με το οποίο θα ασχοληθούμε αφορά την λειτουργία ενός ΣΗΕ υπό συνθήκες μόνιμης κατάστασης (ΜΚ). Η ανάλυση σε λειτουργία ΜΚ ονομάζεται μελέτη *Ροής Φορτίου* και στοχεύει στον καθορισμό των τάσεων, ρευμάτων και της ροής ενεργού και άεργου ισχύος σε ένα σύστημα υπό καθορισμένες καταστάσεις παραγωγής και ζήτησης φορτίου.

Η μελέτη ροής φορτίου αποτελεί ένα πολύ σημαντικό μέρος των ΣΗΕ για διάφορους λόγους [2]. Ενδεικτικά, μερικοί από αυτούς είναι:

- Ο έλεγχος των τάσεων των ζυγών καθώς και των ροών ισχύος ούτως ώστε να διατηρούνται εντός προκαθορισμένων σημείων λειτουργίας,
- Η μελέτη των επιπτώσεων σε ενδεχόμενες διαταραχές (π.χ. απώλεια γραμμής, γεννήτριας κτλ),
- Η επιλογή της πιο οικονομικής λειτουργίας των γεννητριών που υφίστανται στο σύστημα. Έχοντας κατά τη διάρκεια της μέρας συνεχή μεταβολή του φορτίου, είναι απαραίτητος ο συνεχής υπολογισμός της παραγόμενης ισχύος κάθε γεννήτριας του συστήματος ώστε να έχουμε τροφοδότηση των φορτίων με τον οικονομικότερο τρόπο.
- Οι μελέτες ανάπτυξης και επέκτασης του συστήματος παραγωγής και μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

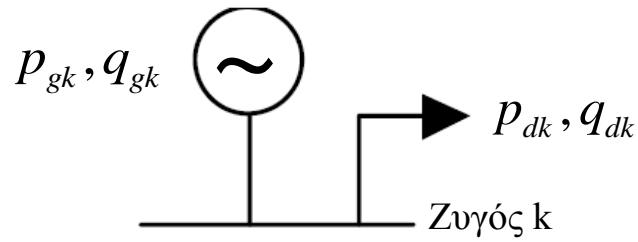
Τα μεγάλα δίκτυα μεταφοράς υψηλής τάσης πάντα περιέχουν τριφασικά κυκλώματα. Όμως, υπό συνθήκες ΜΚ, μπορούμε να αναλύσουμε το τριφασικό σύστημα μετατρέποντας το σε *ανά μονάδα σύστημα*. Με χρήση του ανά μονάδα συστήματος, λύνουμε το πρόβλημα της ροής φορτίου. Η ροή φορτίου σε ένα δίκτυο καθορίζεται από την τάση σε κάθε ζυγό (bus) του δικτύου και τις αγωγιμότητες των γραμμών μεταξύ των ζυγών. Το πρόβλημα αυτό συνίσταται στην εύρεση του συνόλου των τάσεων (μέτρο και γωνία) που μαζί με τις αγωγιμότητες του δικτύου παράγουν τη δεδομένη ροή φορτίου.

1.1.1 Έγχυση Ισχύος

Αρχικά, θεωρούμε το ΣΗΕ ως ένα σύνολο ζυγών συνδεδεμένων μεταξύ τους μέσω γραμμών μεταφοράς. Σε κάθε ένα από αυτούς τους ζυγούς μπορεί να συνδεθεί ηλεκτρικός εξοπλισμός ο οποίος θα παρέχει ή/και θα καταναλώνει ισχύ (ενεργό και άεργο) από το σύστημα. Συγκεκριμένα, ένας ζυγός μπορεί να έχει και παραγωγή και φορτίο, οδηγώντας έτσι στο ορισμό του όρου «έγχυση ισχύος» [1].

Η έγχυση ισχύος είναι η ισχύς, είτε ενεργός είτε άεργος, η οποία εγχέεται σε ή από ένα ζυγό όταν συνδέεται σε αυτόν ένα στοιχείο (μια γεννήτρια ή ένα φορτίο αντίστοιχα). Θεωρούμε θετική έγχυση αν ισχύς ρέει από το στοιχείο προς το ζυγό και αρνητική όταν

ρέει από τον ζυγό προς το στοιχείο. Στο Σχήμα 1.1.1, παρουσιάζεται η έγχυση ισχύος στον ζυγό k .



Σχήμα 1.1.1: Έγχυση ισχύος στον ζυγό k

Η έγχυση ενεργού ισχύος είναι:

$$P_k = P_{gk} - P_{dk} \quad (1.1)$$

Η έγχυση άεργου ισχύος είναι:

$$Q_k = Q_{gk} - Q_{dk} \quad (1.2)$$

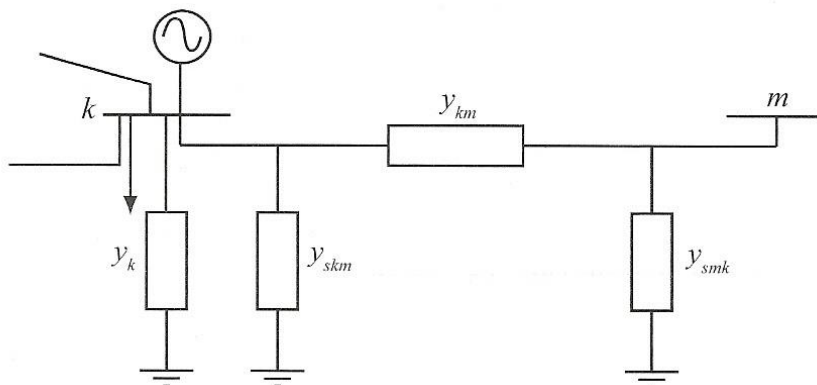
Μπορούμε να αναφερόμαστε στη μιγαδική έγχυση ισχύος ως $S_k = S_{gk} - S_{dk}$,

όπου

$$S_k = P_k + jQ_k \quad (1.3)$$

1.1.2 Μήτρα Αγωγιμοτήτων

Απαραίτητο για την επίλυση του προβλήματος της ροής φορτίου είναι ο σχηματισμός της μήτρας αγωγιμοτήτων [2]. Στο Σχήμα 1.1.2, απεικονίζεται ένας γενικευμένος ζυγός k του ΣΗΕ ο οποίος είναι συνδεδεμένος με έναν άλλο ζυγό m μέσω μιας γραμμής.



Σχήμα 1.1.2: Γενικευμένος ζυγός ΣΗΕ

Η γραμμή μεταφοράς μεταξύ των δύο ζυγών αναπαριστάται με το ονομαστικό Π μοντέλο. Αν θεωρήσουμε ότι

$$A(k) = \{m : y_{km} \neq 0\}, \quad (1.4)$$

είναι το σύνολο που περιέχει τους δείκτες όλων των ζυγών m που είναι διασυνδεδεμένοι με το ζυγό k , τότε τα στοιχεία του πίνακα αγωγιμοτήτων υπολογίζονται ως εξής:

$$Y_{kk} = y_k + \sum_{m \in A(k)} (y_{skm} + y_{km}) \quad (1.5)$$

$$Y_{km} = -y_{km} \quad (1.6)$$

όπου

y_k : η εγκάρσια αγωγιμότητα ζυγού k ,

y_{km} : η αγωγιμότητα σειράς της γραμμής μεταξύ των ζυγών k και m ,

y_{skm}, y_{smk} : οι εγκάρσιες αγωγιμότητες της γραμμής μεταξύ των ζυγών k και m .

1.1.3 Θεμελίωση του προβλήματος ροής φορτίου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, σκοπός του προβλήματος ροής φορτίου είναι ο υπολογισμός των άγνωστων τάσεων μέσω μη γραμμικών εξισώσεων που προκύπτουν από την ανάλυση του συστήματος.

Για να υπάρξει λύση, ο αριθμός των αγνώστων θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων. Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα το οποίο εξετάζουμε αποτελείται από N ζυγούς, το πρόβλημα του προσδιορισμού των ροών φορτίου ανάγεται στην επίλυση $N-1$ μιγαδικών εξισώσεων με $N-1$ μιγαδικούς αγνώστους. Αυτές οι μιγαδικές εξισώσεις μετατρέπονται σε πραγματικές και για την επίλυση αυτών των μη γραμμικών εξισώσεων απαιτείται η χρήση επαναληπτικού αλγόριθμου.

Σημειώνεται ότι οι πιο γνωστοί επαναληπτικοί αλγόριθμοι οι οποίοι σχετίζονται με το πρόβλημα ροής φορτίου υπολογίζουν και χρησιμοποιούν τις άγνωστες τάσεις σε πολική μορφή (μέτρο τάσης και φασική γωνία), δηλαδή

$$\tilde{V}_k = |V_k| \angle \delta_k \quad (1.7)$$

Στην διπλωματική αυτή, ο αλγόριθμος της *K. L. Hoffman* καθώς και η μετατροπή των μη γραμμικών εξισώσεων σε εξισώσεις κυρτών διαφορών απαιτεί τον μετασχηματισμό των τάσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες (πραγματικό και φανταστικό μέρος), δηλαδή

$$\tilde{V}_k = |V_k| \angle \delta_k = a_k + jf_k \quad (1.8)$$

1.1.4 Τύποι ζυγών ροής φορτίου

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες ζυγών [3]:

1. Ζυγός φορτίου ή ζυγός PQ (Load bus)

- i. Όσοι ζυγοί δεν διαθέτουν γεννήτρια, δηλαδή ισχύει $p_{gk} = q_{gk} = 0$.
- ii. Γνωστά μόνο η έγχυση ενεργού ισχύος (P) καθώς και άεργου (Q).

2. Ζυγός παραγωγής ή ζυγός PV (Generator bus ή Voltage – controlled bus)

- i. Γνωστά μόνο η έγχυση ενεργού ισχύος (P) και το μέτρο της τάσης ($|V|$) (στην περίπτωση μας, το $\sqrt{a_k^2 + f_k^2}$).

3. Ζυγός ταλάντωσης ή αναφοράς (slack bus ή swing bus)

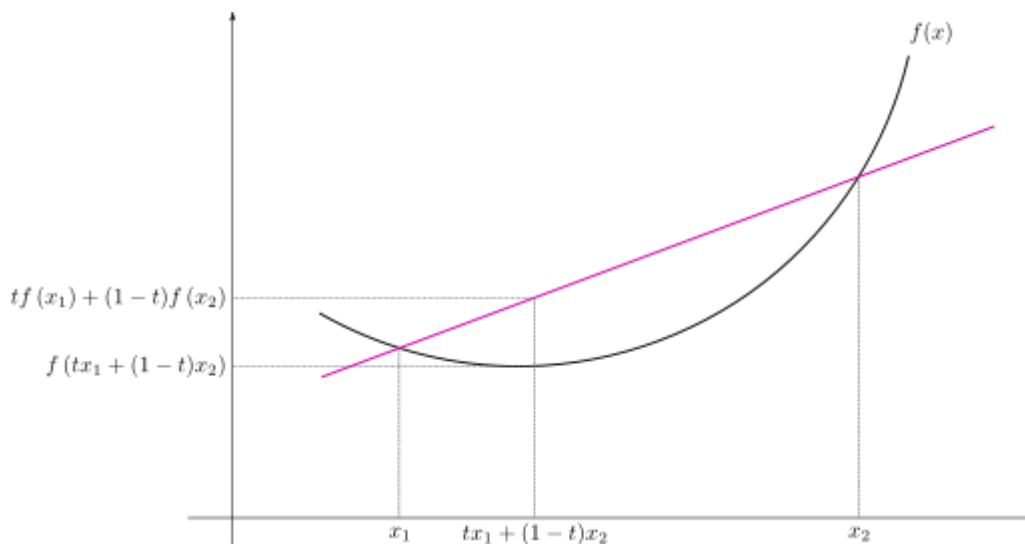
- i. Ειδικός ζυγός παραγωγής ο οποίος θεωρείται ως αναφορά για το ΣΗΕ.
- ii. Η τάση είναι γνωστή κατά μέτρο και γωνία ενώ η έγχυση ενεργού και άεργου ισχύος αφήνεται ελεύθερη. Θεωρούμε $\tilde{V}_1 = v_0 \angle 0^\circ = v_0 + j0$, δηλαδή $a_1 = v_0, f_1 = 0$.
- iii. Για λόγους απλότητας, στα παραδείγματα που εξετάζονται, θεωρούμε τον ζυγό 1 ως ζυγό αναφοράς.

Στην επόμενη ενότητα, γίνεται μια εισαγωγή στις κυρτές συναρτήσεις, οι οποίες είναι απαραίτητες στην κοίλη ελαχιστοποίηση.

1.2 Κυρτές συναρτήσεις

Ως γνωστόν, μια συνάρτηση $f(x): D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, ονομάζεται κυρτή αν

$$\forall x_1, x_2 \in D, \forall t \in [0,1]: f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad (1.9)$$



Σχήμα 1.2.1: Παράδειγμα κυρτής συνάρτησης μιας μεταβλητής

1.2.1 Κριτήρια κυρτότητας

Πιο κάτω, αναφέρονται μερικά κριτήρια που εγγυώνται την κυρτότητα μιας συνάρτησης, πέραν από τον ορισμό [10].

Κριτήριο πρώτης τάξης:

Έστω η $f(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο ανοικτό σύνολο D . Τότε η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού D είναι κυρτό και ισχύει

$$f(x) \geq f(y) + \nabla f(y)^T (x - y), \forall x, y \in D \quad (1.10)$$

Η f είναι αυστηρά κυρτή αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού D είναι κυρτό και ισχύει

$$f(x) > f(y) + \nabla f(y)^T (x - y), \forall x, y \in D, x \neq y \quad (1.11)$$

Κριτήριο δεύτερης τάξης:

Έστω η $f(x): D \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές διαφορίσιμη στο ανοικτό σύνολο D . Τότε η f είναι κυρτή αν και μόνο αν το πεδίο ορισμού D είναι κυρτό και η Hessian μήτρα είναι θετικά ημιορισμένη, δηλαδή:

$$\nabla^2 f(x) \geq 0, \forall x \in D \quad (1.12)$$

Η f είναι αυστηρά κυρτή αν

$$\nabla^2 f(x) > 0, \forall x \in D \quad (1.13)$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει.

1.2.2 Πράξεις που διατηρούν την κυρτότητα

Σ' αυτό το σημείο, μπορούμε να αναφέρουμε τις πράξεις οι οποίες διατηρούν την κυρτότητα των συναρτήσεων ή μας επιτρέπουν να κατασκευάσουμε νέες κυρτές συναρτήσεις [11]. Οι σημαντικότερες από αυτές, αρχικά οι πιο απλές και ακολούθως οι πιο εξειδικευμένες, παρουσιάζονται πιο κάτω.

1. Γραμμικός συνδυασμός κυρτών συναρτήσεων με μη αρνητικούς συντελεστές

Έστω οι κυρτές συναρτήσεις $f_i(x)$, $i=1, \dots, m$ και οι μη αρνητικοί συντελεστές

$w_i, i=1, \dots, m$. Τότε η συνάρτηση $\sum_{i=1}^m w_i f_i(x)$ είναι επίσης κυρτή.

Στην περίπτωση που οι συντελεστές $w_i, i=1, \dots, m$ είναι θετικοί, τότε η $\sum_{i=1}^m w_i f_i(x)$

είναι αυστηρά κυρτή.

Αυτές οι ιδιότητες επεκτείνονται σε άπειρα αθροίσματα και ολοκληρώματα. Για παράδειγμα, αν η $f(x, y)$ είναι κυρτή ως προς τη μεταβλητή $x, \forall y \in A$ και ισχύει $w(y) \geq 0, \forall y \in A$, τότε η συνάρτηση $g(x)$ που ορίζεται ως

$$g(x) = \int_A w(y) f(x, y) dy, \quad (1.14)$$

είναι κυρτή στο x (δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει).

2. Σύνθεση με αφινικό μετασχηματισμό:

Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$. Επίσης, ορίζουμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$g(x) = f(Ax + b), \quad (1.15)$$

με πεδίο ορισμού $D_g = \{x \mid Ax + b \in D_f\}$. Τότε, εάν η f είναι κυρτή, είναι και η g .

3. Κατά σημείο μέγιστο και supremum

Εάν οι $f_1(x), f_2(x)$ είναι κυρτές συναρτήσεις, τότε η κατά σημείο μέγιστο (pointwise maximum) συνάρτηση $f(x)$, που ορίζεται ως

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad (1.16)$$

με πεδίο ορισμού $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2}$, είναι επίσης κυρτή.

Η πιο πάνω ιδιότητα επεκτείνεται και στο κατά σημείο supremum (pointwise supremum) σε ένα άπειρο σύνολο κυρτών συναρτήσεων. Εάν $\forall y \in A$, η $f(x, y)$ είναι κυρτή στο x , τότε η συνάρτηση $g(x)$, που ορίζεται ως

$$g(x) = \sup_{y \in A} f(x, y), \quad (1.17)$$

με πεδίο ορισμού $D_g = \left\{x \mid (x, y) \in D_f \forall y \in A, \sup_{y \in A} f(x, y) < \infty\right\}$, είναι επίσης κυρτή.

4. Σύνθεση:

Έστω οι συναρτήσεις $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι δύο συναρτήσεις είναι δύο φορές παραγωγίσιμες με πεδία ορισμού $D_g = D_h = \mathbb{R}$. Επίσης, θεωρούμε τη σύνθεσή τους $f = h \circ g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως

$$f(x) = h(g(x)), \quad (1.18)$$

με πεδίο ορισμού $D_f = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_h\}$. Βάσει αυτών των υποθέσεων, ισχύουν τα πιο κάτω:

- Η f είναι κυρτή αν η h είναι κυρτή και αύξουσα και η g είναι κυρτή,
- Η f είναι κυρτή αν η h είναι κυρτή και φθίνουσα και η g είναι κοίλη.

Παρόμοια ισχύουν και για σύνθεση διανυσματικών συναρτήσεων.

5. Ελαχιστοποίηση

Εάν η f είναι κυρτή στο (x, y) και C είναι ένα κυρτό, μη κενό σύνολο, τότε η συνάρτηση

$$g(x) = \inf_{y \in C} f(x, y), \quad (1.19)$$

είναι κυρτή, δεδομένου ότι $g(x) > -\infty, \forall x$.

6. Προοπτική μιας συνάρτησης

Εάν $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, τότε η προοπτική της f είναι η συνάρτηση $g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως

$$g(x, t) = tf(x/t), \quad (1.20)$$

με πεδίο ορισμού $D_g = \{(x, t) \mid x/t \in D_f, t > 0\}$. Ο τελεστής της προοπτικής διατηρεί την κυρτότητα. Εάν η f είναι κυρτή συνάρτηση, τότε και η g είναι επίσης κυρτή.

Στην επόμενη ενότητα, επεξηγείται το πρόβλημα της κοίλης ελαχιστοποίησης.

1.3 Το πρόβλημα της κοίλης ελαχιστοποίησης

Με την μετατροπή των εξισώσεων ροής φορτίου για ένα ΣΗΕ σε εξισώσεις κυρτών διαφορών, αυτές οι εξισώσεις μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$f(x) = g(x) - h(x), \quad (1.21)$$

όπου $f(x), g(x), h(x): D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ και οι συναρτήσεις g και h είναι κυρτές.

Η επίλυση αυτού του συστήματος εξισώσεων ανάγεται σε ένα πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης, δηλαδή ελαχιστοποίησης μιας κοίλης συνάρτησης με κυρτούς περιορισμούς. Αυτό επιτυγχάνεται με μια μέθοδο που αναπτύσσεται στη διπλωματική εργασία του Σ. Κιναλή [4]. Το νέο πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης επιλύεται με τον αλγόριθμο ολικής ελαχιστοποίησης (εξωτερικής προσέγγισης) της K. L. Hoffman [5], ο οποίος υλοποιήθηκε στη διπλωματική εργασία του Κ. Βαρελά [6] και τροποποιήθηκε σ' αυτή τη διπλωματική για την επίλυση του προβλήματος της ροής φορτίου.

1.3.1 Κοίλη ελαχιστοποίηση - Ιδιότητες

Μια γενική διατύπωση του προβλήματος ολικής ελαχιστοποίησης είναι η πιο κάτω [7]:

Δεδομένου ενός μη κενού, κλειστού συνόλου $D \subset \mathbb{R}^n$ και μιας συνεχούς συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subset \mathbb{R}^n$ και $D \subset A$, βρες τουλάχιστον ένα σημείο $x^ \in D$ που ικανοποιεί $f(x^*) \leq f(x) \quad \forall x \in D$ ή δείξε πως τέτοιο σημείο δεν υπάρχει.*

Η αντίστοιχη τιμή της f , δηλαδή η $f(x^*)$, ονομάζεται ολικό ελάχιστο της f στο D .

Για να κατανοήσουμε την πληθώρα δυσκολιών που ενυπάρχουν στα προβλήματα ολικής ελαχιστοποίησης και στο υπολογιστικό τους κόστος, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι όλες οι γενικές τεχνικές που χρησιμοποιούνται μπορούν να εντοπίσουν κυρίως τοπικά ελάχιστα. Επιπρόσθετα, δεν υπάρχει τοπικό κριτήριο που να εγγυάται ότι ένα τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό. Συνεπώς, οι συμβατικές μέθοδοι βελτιστοποίησης που χρησιμοποιούν μαθηματικά εργαλεία όπως παραγώγους ή κλίσεις δεν είναι πάντα ικανές να εντοπίσουν ή να αναγνωρίσουν ένα ολικό ελάχιστο.

Όμως, υπάρχουν σημαντικές κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης που έχουν την ιδιότητα κάθε τοπικό ελάχιστο να είναι και ολικό. Ένα γνωστό παράδειγμα είναι η κυρτή ελαχιστοποίηση όπου η αντικειμενική συνάρτηση είναι μια κυρτή συνάρτηση και το επιτρεπτό σύνολο είναι επίσης κυρτό (κυρτοί περιορισμοί). Επομένως, σ' αυτές τις

κατηγορίες, μια συμβατική μέθοδος ελαχιστοποίησης μπορεί να χαρακτηριστεί επιτυχής.

Τα προβλήματα κοίλης ελαχιστοποίησης, το οποίο αποτελεί σημαντικό μέρος αυτής της διπλωματικής εργασίας, αποτελούν προβλήματα στα οποία η πιο πάνω ιδιότητα δεν υπάρχει, καθώς ένα σημείο τοπικού ελαχίστου δεν είναι απαραίτητα και σημείο ολικού ελαχίστου. Γενικοί αλγόριθμοι για προβλήματα μη γραμμικού προγραμματισμού μπορούν να εντοπίσουν προσεγγιστικά τοπικά ελάχιστα ή στάσιμα σημεία στα οποία οι τιμές κριτηρίου μπορεί να είναι μακριά από το ολικό ελάχιστο.

Μια γενική διατύπωση του προβλήματος της κοίλης ελαχιστοποίησης είναι η πιο κάτω:

Ελαχιστοποίησε την $f(x)$ με περιορισμό $x \in D$, δηλαδή

$$\min_x \{f(x) : x \in D\}, \quad (1.22)$$

όπου $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι μη κενό, κλειστό και κυρτό, και η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κοίλη στο $A \subset \mathbb{R}^n$ ($D \subset A$).

Η πιο πάνω ελαχιστοποίηση ισοδυναμεί με μεγιστοποίηση της $f(x)$ σε ένα κυρτό σύνολο D , όπου η $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή (κυρτή μεγιστοποίηση), δηλαδή:

$$\max_x \{f(x) : x \in D\} = -\min_x \{-f(x) : x \in D\} \quad (1.23)$$

Πιο κάτω, παρουσιάζονται μερικές ιδιότητες που διευκολύνουν τον χειρισμό και την επίλυση τέτοιων προβλημάτων [13]:

Ορισμός:

Ακραίο σημείο (extreme point) ενός κυρτού συνόλου $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα σημείο $x \in D$ με την ιδιότητα: αν $x = \theta y + (1-\theta)z$ με $y, z \in D$ και $\theta \in [0,1]$, τότε $y = x$ ή/και $z = x$.

Με άλλα λόγια, ακραίο σημείο είναι ένα σημείο το οποίο δεν είναι σημείο επί ενός ευθύγραμμου τμήματος που βρίσκεται εξ ολοκλήρου εντός του D και επίσης δεν είναι εσωτερικό σημείο του D .

Ιδιότητα 1:

Εστω $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ μια κοίλη συνάρτηση και $D \subset \mathbb{R}^n$ ένα μη κενό, συμπαγές και κυρτό σύνολο. Τότε, το ολικό ελάχιστο της f παρουσιάζεται σε ένα ακραίο σημείο του D .

Ιδιότητα 2:

Το επιτρεπτό σύνολο D αποτελεί τομή των κλειστών ημιχώρων που περιέχουν το D .

Ιδιότητα 3:

Η συνάρτηση f είναι παντού συνεχής. Επιπρόσθετα, είναι συνάρτηση Lipschitz στο D , δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \geq 0$, τέτοιος ώστε

$$|f(x^1) - f(x^2)| \leq a|x^1 - x^2|, \quad \forall x^1, x^2 \in D \quad (1.24)$$

Ιδιότητα 4:

Σε κάθε σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, υπάρχει ένα διάνυσμα $p(x)$ τέτοιο ώστε

$$f(y) - f(x) \leq p(x)^T (y - x), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad (1.25)$$

Πολλά μοντέλα αποφάσεων εμπνευσμένα από την έρευνα και τα μαθηματικά μπορούν να διατυπωθούν ως προβλήματα κοίλης ελαχιστοποίησης. Τέσσερις από τις πιο σημαντικές κατηγορίες παρουσιάζονται παρακάτω:

1. Οικονομίες κλίμακας και σχετικά προβλήματα

Πολλά σημαντικά προβλήματα συνιστώνται από την επιλογή επιπέδων $x_i, i = 1, \dots, n$ για n δραστηριότητες, οι οποίες παράγουν ανεξάρτητα κόστη $f_i(x_i)$, υπό τους (κυρτούς)

περιορισμούς $g_j(x) \leq 0, j=1, \dots, m$. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους $f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$ με τους συγκεκριμένους περιορισμούς.

2. Ακέραιος προγραμματισμός

Το πρόβλημα του ακέραιου προγραμματισμού μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$(IP): \min_x \{c^T x : Ax \leq b, x_i = 0 \text{ ή } x_i = 1, i = 1, \dots, n\}, \quad (1.26)$$

με δεδομένα $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$.

Έστω το διάνυσμα $e = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^n$ και επίσης, το πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$(CP_1): \min_x \{c^T x + Mx^T(e - x) : Ax \leq b, 0 \leq x \leq e\}, \quad (1.27)$$

όπου M θετικός πραγματικός αριθμός.

Η συνάρτηση $f(x)$ είναι το άθροισμα μιας γραμμικής συνάρτησης και μιας αρνητικά ορισμένης τετραγωνικής μορφής, άρα αποτελεί μια κοίλη συνάρτηση και το (CP_1) είναι ένα πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης. Εύκολα μπορεί να παρατηρηθεί ότι για αρκετά μεγάλο M , τα (IP) και (CP_1) είναι ισοδύναμα.

3. Προβλήματα γραμμικής συμπληρωματικότητας

Πρόκειται για το πρόβλημα εύρεσης του $x \in \mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε:

$$(LCP): Qx + g \geq 0, x \geq 0, x^T(Qx + g) = 0, \quad (1.28)$$

με δεδομένα $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}, g \in \mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι το (LCP) είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης:

$$(CP_2): \min \left\{ f(x) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \max \left[0, x_i - (Qx + g)_i \right] \right) : Qx + g \geq 0, x \geq 0 \right\} \quad (1.29)$$

Στο (CP_2) , η $f(x)$ είναι επίσης μια (τμηματικά γραμμική) κοίλη συνάρτηση, αφού $\max \left[0, x_i - (Qx + g)_i \right]$ είναι το μέγιστο δυο γραμμικών συναρτήσεων και άρα

τμηματικά γραμμικές και κυρτές. Συνεπώς, το (CP_2) είναι πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης.

4. Ελαχιστοποίηση διαφοράς δύο κυρτών συναρτήσεων:

Πρόκειται για το πρόβλημα:

$$(D): \min \left\{ f_1(x^{(1)}) - f_2(x^{(2)}) : (x^{(1)}, x^{(2)}) \in D \right\}, \quad (1.30)$$

όπου $x^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_1}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^{n_2}, f_1: \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}, f_2: \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτές συναρτήσεις και D είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο.

Το πιο πάνω πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης, εισάγοντας μια επιπλέον μεταβλητή t , οπότε έχουμε το πρόβλημα:

$$(CP_3): \min \left\{ t - f_2(x^{(2)}) : f_1(x^{(1)}) \leq t, (x^{(1)}, x^{(2)}) \in D \right\} \quad (1.31)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η αντικειμενική συνάρτηση $t - f_2(x^{(2)})$ είναι μια κοίλη συνάρτηση και το επιτρεπτό σύνολο είναι κυρτό.

Οι πιο σημαντικές ντετερμινιστικές προσεγγίσεις [8] για την κοίλη ελαχιστοποίηση χρησιμοποιούν τεχνικές απαρίθμησης, μεθόδους διαμοιρασμού επιπέδου (cutting plane methods) – εξωτερική προσέγγιση, διαδοχικές μεθόδους διαχωρισμού (branch and bound), επίλυση προσεγγιστικών υποπροβλημάτων, μεθόδους διγραμμικού προγραμματισμού (bilinear programming) ή διάφορους συνδυασμούς αυτών των τεχνικών. Επίσης, συγκεκριμένες μέθοδοι έχουν προταθεί για προβλήματα όπου η αντικειμενική συνάρτηση έχει συγκεκριμένη μορφή (τετραγωνική, διαχωρίσιμη, παραγοντοποιήσιμη κλπ) ή το επιτρεπτό σύνολο έχει μια απλοποιημένη γεωμετρία (πολύεδρο, υπερκύβος κλπ). Εμείς, θα επικεντρωθούμε στις μεθόδους εξωτερικής προσέγγισης.

1.3.2 Μέθοδοι εξωτερικής προσέγγισης

Η εξωτερική προσέγγιση [7] ενός επιτρεπτού συνόλου χρησιμοποιώντας μια ακολουθία απλούστερων συνόλων είναι μια βασική μέθοδος σε πολλούς τομείς της

βελτιστοποίησης. Σ' αυτές τις μεθόδους, το τρέχων προσεγγιστικό σύνολο δημιουργείται προσθέτοντας κατάλληλο περιορισμό.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα ολικής βελτιστοποίησης:

$$(P) \min_x \{f(x) : x \in D\}, \quad (1.32)$$

όπου η $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και το $D \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό.

Η ιδέα των μεθόδων εξωτερικής προσέγγισης για την επίλυση του (P) είναι η αντικατάστασή του με μια σειρά απλούστερων προβλημάτων:

$$(Q_k): \min_x \{f(x) : x \in D_k\}, \quad (1.33)$$

όπου $\mathbb{R}^n \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset D$ και $\min f(D_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \min f(D)$.

Στις πλείστες υλοποιήσεις μεθόδων εξωτερικής προσέγγισης, τα σύνολα D_k είναι κυρτά πολύεδρα που περιγράφονται με ανισοτικούς περιορισμούς.

Τα σύνολα D_k ανήκουν σε μια οικογένεια συνόλων \bar{F} με τις ακόλουθες ιδιότητες:

(α) Τα σύνολα $D_k \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά, και κάθε πρόβλημα (Q_k) με $D_k \in \bar{F}$ έχει μια λύση και μπορεί να λυθεί με γνωστούς αλγόριθμους,

(β) Για κάθε $D_k \in \bar{F}$ που περιέχει το D και για κάθε σημείο $x^k \in D_k \setminus D$, μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση περιορισμών $l_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τα εξής

$$l_k(x) \leq 0, \forall x \in D, \quad (1.34)$$

$$l_k(x^k) > 0, \quad (1.35)$$

$$\{x \in D_k : l_k(x) \leq 0\} \in \bar{F} \quad (1.36)$$

Πιο κάτω, παρουσιάζουμε μια μέθοδο εξωτερικής προσέγγισης:

Βήμα 1:

Επέλεξε ένα σύνολο $D_1 \in \bar{F}$ τέτοιο ώστε $D_1 \supset D$. Θέσε $k = 1$.

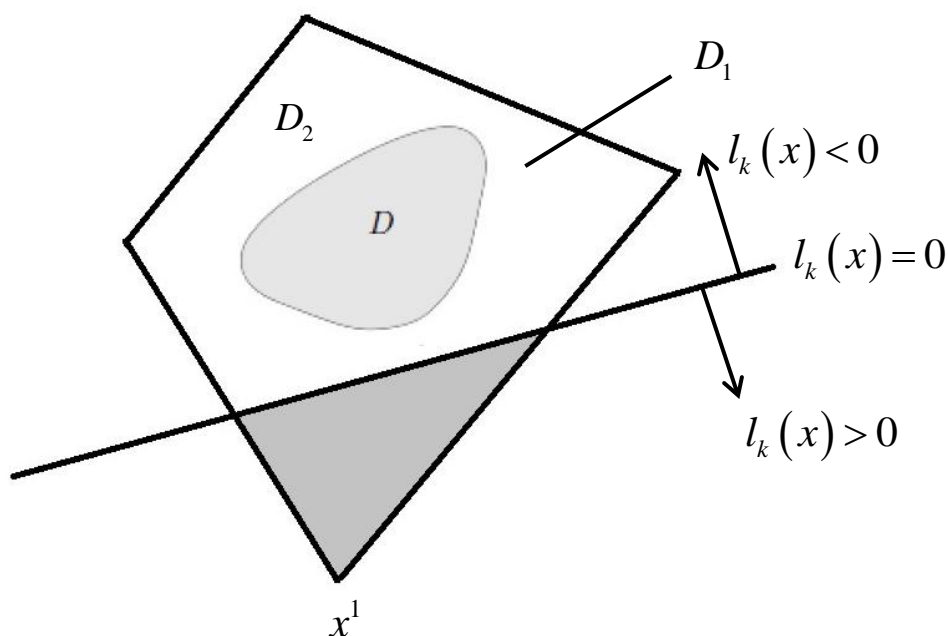
Βήμα k (k = 1, 2, ...):

Λύσε το πρόβλημα (Q_k) , όπου η λύση $x^k \in \arg \min f(D_k)$. Βάσει της Ιδιότητας 1 από την προηγούμενη παράγραφο, η λύση θα προκύπτει να είναι μια εκ των κορυφών του D_k .

Εάν $x^k \in D$, τότε σταμάτα: το x^k αποτελεί λύση του (P) . Αλλιώς, κατασκεύασε μια συνάρτηση περιορισμών $l_k(x) = ax + b$, όπου $l_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις (1.22) – (1.24) και θέσε

$$D_{k+1} = D_k \cap \{x: l_k(x) \leq 0\}, k = k + 1 \quad (1.37)$$

Ακολουθώντας, επέστρεψε στο βήμα k .



Σχήμα 1.2.1: Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου εξωτερικής προσέγγισης (για $k = 1$)

Στην τελευταία ενότητα, θα εξετάσουμε τις συναρτήσεις κυρτών διαφορών στις οποίες θα μετατρέψουμε τις εξισώσεις ροής φορτίου ενός ΣΗΕ. Η μετατροπή αυτή θα εξεταστεί σε επόμενο κεφάλαιο.

1.4 Συναρτήσεις κυρτών διαφορών

Μια πραγματική συνάρτηση f ορισμένη σε ένα κυρτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται συνάρτηση κυρτών διαφορών, ή αλλιώς Difference of Convex (DC) συνάρτηση, αν η f μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$f(x) = g(x) - h(x) \quad \forall x \in D, \quad f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad (1.38)$$

όπου οι $g(x), h(x)$ είναι κυρτές συναρτήσεις στο D .

1.4.1 Ιδιότητες συναρτήσεων κυρτών διαφορών

Πιο κάτω παρουσιάζονται μερικές ιδιότητες των DC συναρτήσεων [7][9].

Ιδιότητα 1:

Έστω $f_1(x), \dots, f_n(x)$ DC συναρτήσεις ορισμένες σε ένα κυρτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οποιοδήποτε πραγματικοί αριθμοί. Τότε, οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης DC:

$$(i) \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i, \quad (1.39)$$

$$(ii) \quad \max \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}, \quad (1.40)$$

$$(iii) \quad \min \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}, \quad (1.41)$$

$$(iv) \quad \prod_{i=1}^n f_i(x). \quad (1.42)$$

Ιδιότητα 2:

Έστω $f(x)$ DC συνάρτηση. Τότε, οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι επίσης DC:

$$(i) \quad \max \{0, f(x)\}, \quad (1.43)$$

$$(ii) \quad \min \{0, f(x)\}, \quad (1.44)$$

$$(iii) \quad |f(x)|. \quad (1.45)$$

Ιδιότητα 3:

Έστω D ένα κυρτό, ανοικτό ή κλειστό σύνολο. Τότε, οποιαδήποτε τοπικά DC συνάρτηση στο D είναι επίσης μια DC συνάρτηση στο D .

Ιδιότητα 4:

Μια C^2 (δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη) συνάρτηση είναι μια DC συνάρτηση σε οποιοδήποτε συμπαγές κυρτό σύνολο $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ιδιότητα 5:

Έστω $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια DC συνάρτηση και $g(y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια κυρτή συνάρτηση. Τότε, η σύνθετη συνάρτηση $g[f(x)]$ είναι μια DC συνάρτηση.

Ιδιότητα 6:

Έστω ένα μη κενό, κλειστό σύνολο $D \in \mathbb{R}^n$ και μια συνάρτηση απόστασης $d_D(x)$ η οποία ορίζεται ως

$$d_D(x) = \inf_{y \in D} \{\|y - x\|\}, \quad (1.46)$$

Τότε, το τετράγωνο της συνάρτησης απόστασης $d_D^2(x)$ είναι μια DC συνάρτηση.

Ιδιότητα 7:

Μια συνεχής τμηματικά γραμμική συνάρτηση είναι μια DC συνάρτηση.

Ιδιότητα 8:

Οποιαδήποτε πολυωνυμική συνάρτηση στο \mathbb{R}^n είναι μια DC συνάρτηση στο \mathbb{R}^n .

Ιδιότητα 9:

Η κατευθυντική παράγωγος $f'(x;d)$ μιας DC συνάρτησης $f(x) = g(x) - h(x)$ υπάρχει σε κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και σε κάθε κατεύθυνση $d \in \mathbb{R}^n$, και είναι μια DC συνάρτηση.

1.4.2 Αναπαράσταση των DC συναρτήσεων

Μια DC συνάρτηση μπορεί να γραφτεί ως διαφορά δύο κυρτών συναρτήσεων με ποικίλους τρόπους, και έτσι είναι μεγάλης σημασίας να αναγνωρίσουμε τις πιο αποτελεσματικές αναπαραστάσεις σε DC συναρτήσεις [9]. Σ' αυτό το μέρος, θα συζητηθεί ένας αριθμός από επιπλέον ιδιότητες που οδηγούν σε συγκεκριμένες μορφές των DC συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, επικεντρωνόμαστε στις:

1. Διαχωρίσιμες συναρτήσεις:

Μια διαχωρίσιμη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφτεί ως

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i), \quad (1.47)$$

όπου οι συναρτήσεις $f_i(x_i)$ είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής x_i .

Είναι προφανές ότι η διαχωρίσιμη συνάρτηση $f(x)$ είναι DC εάν οι $f_i(x_i)$ είναι επίσης DC συναρτήσεις. Ως εκ τούτου, το πώς θα αναπαραστήσουμε σε DC συνάρτηση μια διαχωρίσιμη συνάρτηση εξαρτάται από το πώς θα αναπαραστήσουμε σε DC τις συναρτήσεις μια μεταβλητής $f_i(x_i)$.

2. Γινόμενα κυρτών συναρτήσεων

Έστω οι κυρτές συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ ορισμένες στο \mathbb{R}_+^n . Μια αναπαράσταση του γινομένου τους σε DC συνάρτηση είναι:

$$f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{2}[f_1(x) + f_2(x)]^2 - \frac{1}{2}[f_1^2(x) + f_2^2(x)] \quad (1.48)$$

3. Αόριστες τετραγωνικές συναρτήσεις:

Έστω μια αόριστη τετραγωνική συνάρτηση $f(x) = x^T Q x$, όπου η Q είναι μια συμμετρική αόριστη μήτρα με φασματική ακτίνα $\rho(Q) (= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_m|\})$.

Τότε, η συνάρτηση $g(x)$ που ορίζεται ως:

$$g(x) = f(x) + \lambda \|x\|^2, \quad (1.49)$$

είναι κυρτή για κάθε $\lambda \geq \rho(Q)$.

Αφού η $g(x)$ είναι κυρτή, τότε η αόριστη τετραγωνική συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφτεί ως DC συνάρτηση.

4. C^2 (δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες) συναρτήσεις

Έστω η συνάρτηση $f(x) \in C^2$, $x \in [x^L, x^U]$ και η συνάρτηση $L(x)$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$L(x) = f(x) + a \sum_{i=1}^n (x_i^L - x_i)(x_i^U - x_i), \quad (1.50)$$

όπου $a \geq \max \left\{ \max_{x_i^L \leq x_i \leq x_i^U} \left\{ 0, -\frac{1}{2} \lambda_i^f \right\} \right\}$ και λ_i^f οι ιδιοτιμές της Hessian μήτρας της

συνάρτησης f . Τότε, η συνάρτηση $L(x)$ είναι κυρτή. Συνεπώς, μια αναπαράσταση σε DC συνάρτηση για την $f(x)$ είναι:

$$f(x) = L(x) - a \sum_{i=1}^n (x_i^L - x_i)(x_i^U - x_i), \quad (1.51)$$

5. Σύνθετες συναρτήσεις:

(α) Έστω ένα συμπαγές κυρτό σύνολο $D \in \mathbb{R}^n$, μια κυρτή συνάρτηση $f(x): D \rightarrow \mathbb{R}_+$, μια κυρτή συνάρτηση $g(x)$, μια κυρτή μη - αύξουσα συνάρτηση $q(y): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $q'_+(0) > -\infty$, και μια θετική σταθερά K τέτοια ώστε $K \geq |q'_+(0)|$, όπου $q'_+(y)$ είναι η δεξιά (πλευρική) παράγωγος της $q(y)$ στο σημείο y . Τότε, η συνάρτηση $q(f(x))$ που ορίζεται ως

$$q(f(x)) = g(x) - Kf(x), \quad (1.52)$$

είναι μια DC συνάρτηση στο D .

(β) Έστω ένα συμπαγές κυρτό σύνολο $D \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ όπου $f_1(x), f_2(x): D \rightarrow \mathbb{R}_+$ είναι κυρτές συναρτήσεις τέτοιες ώστε $0 \leq f(x) \leq a, \forall x \in D$, μια κυρτή συνάρτηση $g(x)$, μια κυρτή μη - φθίνουσα συνάρτηση $q(y): [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $q'_-(a) < +\infty$ και μια σταθερά K τέτοια ώστε $K \geq |q'_-(a)|$, όπου $q'_-(y)$ είναι η αριστερά (πλευρική) παράγωγος της $q(y)$ στο σημείο y . Τότε, η συνάρτηση $q(f(x))$ που ορίζεται ως

$$q(f(x)) = g(x) - K[a + f_2(x) - f_1(x)], \quad (1.53)$$

είναι μια DC συνάρτηση στο D .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Διατύπωση προβλήματος και αλγόριθμος επίλυσης

Αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνει την αναπαράσταση των εξισώσεων ροής φορτίου σε εξισώσεις κυρτών διαφορών. Στη συνέχεια, ακολουθεί η διατύπωση και η μετατροπή του προβλήματος μη γραμμικών εξισώσεων κυρτών διαφορών σε ισοδύναμο πρόβλημα κούλης ελαχιστοποίησης. Επίσης, παρουσιάζεται ο αλγόριθμος της *K. L. Hoffman*, ο οποίος χρησιμοποιήθηκε για να επιλυθεί το πρόβλημα. Τέλος, αναφέρονται κάποιες δυσκολίες που συναντήθηκαν κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου και με ποιο τρόπο αυτές αντιμετωπίστηκαν.

2.1 Αναπαράσταση εξισώσεων ροής φορτίου ως εξισώσεις κυρτών διαφορών

2.1.1 Χρήσιμες σχέσεις

Πιο κάτω παρουσιάζονται μερικές βασικές σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή των εξισώσεων ροής φορτίου.

Αρχικά, έστω ότι έχουμε ένα ΣΗΕ με N πλήθος ζυγών. Από τον ορισμό της έγχυσης της μιγαδικής ισχύος (1.3), είναι γνωστό ότι

$$s = p + jq , \quad (2.1)$$

όπου το s (τα p και q αντίστοιχα) έχει διαστάσεις $N \times 1$.

Η μήτρα αγωγιμοτήτων Y μπορεί να εκφραστεί ως

$$Y = G + jB , \quad (2.2)$$

όπου η Y (και οι G , B αντίστοιχα) έχει διαστάσεις $N \times N$.

Το διάνυσμα των τάσεων δίνεται από τη σχέση (1.8)

$$v = a + jf , \quad (2.3)$$

όπου το v (τα a και f αντίστοιχα) έχει διαστάσεις $N \times 1$.

Το αντίστοιχο μπορούμε να θεωρήσουμε και για το διάνυσμα των ρευμάτων

$$i = c + jd , \quad (2.4)$$

όπου το i (τα c και d αντίστοιχα) έχει διαστάσεις $N \times 1$.

Ως γνωστόν, από τη θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, ισχύει

$$Yv = i , \quad (2.5)$$

Ακόμη μια γνωστή σχέση από την θεωρία των ηλεκτρικών κυκλωμάτων, είναι αυτή που σχετίζεται με τη μιγαδική ισχύ

$$s = vi^* , \quad (2.6)$$

2.1.2 Κατασκευή εξισώσεων ροής φορτίου και μετατροπή σε DC συναρτήσεις

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.2) - (2.5) έχουμε

$$Yv = i \Leftrightarrow (G + jB)(a + jf) = c + jd$$

$$\Leftrightarrow c = Ga - Bf \quad (2.7)$$

$$\text{και } d = Ba + Gf \quad (2.8)$$

Οπότε για ένα ζυγό k του ΣΗΕ, κάνοντας χρήση των σχέσεων (1.3) και (2.6), ισχύει

$$s_k = v_k i_k^* \Rightarrow p_k + jq_k = (a_k + jf_k)(c_k - jd_k) = a_k c_k + f_k d_k + j(f_k c_k - a_k d_k)$$

$$\Leftrightarrow p_k = a_k c_k + f_k d_k \quad (2.9)$$

$$\text{και } q_k = f_k c_k - a_k d_k \quad (2.10)$$

Θεωρώντας τώρα ότι για τον ζυγό αναφοράς 1 ισχύουν $a_1 = v_0, f_1 = 0$, μπορούμε να κάνουμε τις εξής τροποποιήσεις:

- (i) $a = \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{a} \end{bmatrix}$, όπου $\bar{a} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_{N-1}]^T$, διάνυσμα διαστάσεων $(N-1) \times 1$,
- (ii) $f = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix}$, όπου $\bar{f} = [\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{N-1}]^T$, διάνυσμα διαστάσεων $(N-1) \times 1$,
- (iii) $G = \begin{bmatrix} g_1 & \bar{G} \end{bmatrix}$, όπου το g_1 διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ και η \bar{G} μήτρα διαστάσεων $N \times (N-1)$,
- (iv) $B = \begin{bmatrix} b_1 & \bar{B} \end{bmatrix}$, όπου το b_1 διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$ και η \bar{B} μήτρα διαστάσεων $N \times (N-1)$.

Οπότε, η σχέση (2.6) γίνεται

$$c = Ga - Bf = \begin{bmatrix} g_1 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{a} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix} = v_0 g_1 + \bar{G}\bar{a} - \bar{B}\bar{f} \quad (2.11)$$

Ομοίως, η σχέση (2.7) γίνεται

$$d = Ba + Gf = \begin{bmatrix} b_1 & \bar{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \bar{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & \bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f} \end{bmatrix} = v_0 b_1 + \bar{B}\bar{a} + \bar{G}\bar{f} \quad (2.12)$$

Αρχικά θα ασχοληθούμε με την σχέση (2.9). Για την σχέση (2.10) ακολουθείται ίδια μέθοδος. Θεωρούμε το εξής:

$$(a_k + c_k)^2 = a_k^2 + 2a_k c_k + c_k^2 \Rightarrow a_k c_k = \frac{1}{2}(a_k + c_k)^2 - \frac{1}{2}a_k^2 - \frac{1}{2}c_k^2$$

$$(a_k - c_k)^2 = a_k^2 - 2a_k c_k + c_k^2 \Rightarrow a_k c_k = -\frac{1}{2}(a_k - c_k)^2 + \frac{1}{2}a_k^2 + \frac{1}{2}c_k^2$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο πιο πάνω σχέσεις προκύπτει

$$a_k c_k = \frac{1}{4}(a_k + c_k)^2 - \frac{1}{4}(a_k - c_k)^2 \quad (2.13)$$

Από τη σχέση (2.11), έχουμε

$$c_k = e_k^T c = v_0 e_k^T g_1 + e_k^T \bar{G} \bar{a} - e_k^T \bar{B} \bar{f} , \quad (2.14)$$

όπου $e_k = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ (με τη μονάδα στην k θέση), διάνυσμα διαστάσεων $N \times 1$.

Επίσης,

$$a_k = e_k^T a = e_{k-1}^T \bar{a}, k \neq 1 , \quad (2.15)$$

όπου $e_{k-1} = [0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ (με τη μονάδα στην $k-1$ θέση), διάνυσμα διαστάσεων $(N-1) \times 1$.

Ισχύει $e_{k-1} = \begin{bmatrix} \emptyset_{(N-1) \times 1} & I_{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix} e_k$, όπου \emptyset μηδενικό διάνυσμα και I μοναδιαία μήτρα. Θεωρούμε τη μήτρα $II = \begin{bmatrix} \emptyset_{(N-1) \times 1} & I_{(N-1) \times (N-1)} \end{bmatrix}$, διαστάσεων $(N-1) \times N$.

Άρα,

$$e_{k-1} = II e_k \xrightarrow{(2.15)} a_k = e_k^T II^T \bar{a} , \quad (2.16)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.13) - (2.14) και (2.16), έχουμε

$$\begin{aligned} a_k c_k &= \frac{1}{4} \left(e_k^T II^T \bar{a} + v_0 e_k^T g_1 + e_k^T \bar{G} \bar{a} - e_k^T \bar{B} \bar{f} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(e_k^T II^T \bar{a} - v_0 e_k^T g_1 - e_k^T \bar{G} \bar{a} + e_k^T \bar{B} \bar{f} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[v_0 e_k^T g_1 + e_k^T \left[(II^T + \bar{G}) \bar{a} - \bar{B} \bar{f} \right] \right]^2 - \frac{1}{4} \left[-v_0 e_k^T g_1 + e_k^T \left[(II^T - \bar{G}) \bar{a} + \bar{B} \bar{f} \right] \right]^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \cancel{\left(v_0 e_k^T g_1 \right)^2} + 2v_0 e_k^T g_1 e_k^T \left[(II^T + \bar{G}) \bar{a} - \bar{B} \bar{f} \right] + \left[(II^T + \bar{G}) \bar{a} - \bar{B} \bar{f} \right]^T e_k e_k^T \left[(II^T + \bar{G}) \bar{a} - \bar{B} \bar{f} \right] \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left\{ \cancel{\left(v_0 e_k^T g_1 \right)^2} - 2v_0 e_k^T g_1 e_k^T \left[(II^T - \bar{G}) \bar{a} + \bar{B} \bar{f} \right] + \left[(II^T - \bar{G}) \bar{a} + \bar{B} \bar{f} \right]^T e_k e_k^T \left[(II^T - \bar{G}) \bar{a} + \bar{B} \bar{f} \right] \right\} \\ &= v_0 e_k^T g_1 e_k^T II^T \bar{a} + \frac{1}{4} \left[(II^T + \bar{G}) \bar{a} - \bar{B} \bar{f} \right]^T e_k e_k^T \left[(II^T + \bar{G}) \bar{a} - \bar{B} \bar{f} \right] - \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[(II^T - \bar{G}) \bar{a} + \bar{B} \bar{f} \right]^T e_k e_k^T \left[(II^T - \bar{G}) \bar{a} + \bar{B} \bar{f} \right] \end{aligned}$$

Άρα, αν θεωρήσουμε ως $x = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{f} \end{bmatrix}$ το διάνυσμα των άγνωστων μεταβλητών, έχουμε:

$$a_k c_k = \begin{bmatrix} v_0 e_k^T g_1 e_k^T H^T & \mathcal{O}_{1 \times (N-1)} \end{bmatrix} x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} H + \bar{G}^T \\ -\bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} H^T + \bar{G} & -\bar{B} \end{bmatrix} x - \\ - \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} H - \bar{G}^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} H^T - \bar{G} & \bar{B} \end{bmatrix} x, k \neq 1 \quad , \quad (2.17)$$

Ομοίως με τη (2.13), για το $f_k d_k$ προκύπτει

$$f_k d_k = \frac{1}{4} (f_k + d_k)^2 - \frac{1}{4} (f_k - d_k)^2, \quad (2.18)$$

Από τη σχέση (2.12), έχουμε

$$d_k = e_k^T d = v_0 e_k^T b_1 + e_k^T \bar{B} \bar{a} + e_k^T \bar{G} \bar{f}, \quad (2.19)$$

Επίσης,

$$f_k = e_k^T f = e_{k-1}^T \bar{f} = e_k^T H^T \bar{f}, \quad (2.20)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.18) - (2.20), έχουμε

$$f_k d_k = \frac{1}{4} \left(e_k^T H^T \bar{f} + v_0 e_k^T b_1 + e_k^T \bar{B} \bar{a} + e_k^T \bar{G} \bar{f} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(e_k^T H^T \bar{f} - v_0 e_k^T b_1 - e_k^T \bar{B} \bar{a} - e_k^T \bar{G} \bar{f} \right)^2 \\ = \frac{1}{4} \left[v_0 e_k^T b_1 + e_k^T \left[\bar{B} \bar{a} + (H^T + \bar{G}) \bar{f} \right] \right]^2 - \frac{1}{4} \left[-v_0 e_k^T b_1 + e_k^T \left[-\bar{B} \bar{a} + (H^T - \bar{G}) \bar{f} \right] \right]^2 \\ = \dots = v_0 e_k^T b_1 e_k^T H^T \bar{f} + \frac{1}{4} \left[\bar{B} \bar{a} + (H^T + \bar{G}) \bar{f} \right]^T e_k e_k^T \left[\bar{B} \bar{a} + (H^T + \bar{G}) \bar{f} \right] - \\ - \frac{1}{4} \left[-\bar{B} \bar{a} + (H^T - \bar{G}) \bar{f} \right]^T e_k e_k^T \left[-\bar{B} \bar{a} + (H^T - \bar{G}) \bar{f} \right]$$

Άρα, έχουμε:

$$f_k d_k = \left[\begin{array}{c} \mathcal{O}_{1 \times (N-1)} \\ v_0 e_k^T b_1 e_k^T H^T \end{array} \right] x + \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} \bar{B}^T \\ H + \bar{G}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} \bar{B} & H^T + \bar{G} \end{array} \right] x - \\ - \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} -\bar{B}^T \\ H - \bar{G}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} -\bar{B} & H^T - \bar{G} \end{array} \right] x, k \neq 1 \quad , \quad (2.21)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (2.9), (2.17) και (2.21), μπορούμε να σχηματίσουμε την 1^η εξίσωση της ροής φορτίου, η οποία σχετίζεται με την έγχυση ενεργού ισχύος στον ζυγό k .

1^η εξίσωση ροής φορτίου (εξίσωση P):

$$p_k = a_k c_k + f_k d_k \Rightarrow f_p(x) = a_k c_k + f_k d_k - p_k = 0, \quad (2.22)$$

Επομένως,

$$f_p(x) = \left[\begin{array}{cc} v_0 e_k^T g_1 e_k^T H^T & v_0 e_k^T b_1 e_k^T H^T \end{array} \right] x + \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} H + \bar{G}^T \\ -\bar{B}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} H^T + \bar{G} & -\bar{B} \end{array} \right] x - \\ - \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} H - \bar{G}^T \\ \bar{B}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} H^T - \bar{G} & \bar{B} \end{array} \right] x + \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} \bar{B}^T \\ H + \bar{G}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} \bar{B} & H^T + \bar{G} \end{array} \right] x - \\ - \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} -\bar{B}^T \\ H - \bar{G}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} -\bar{B} & H^T - \bar{G} \end{array} \right] x - p_k \quad (2.23)$$

Τώρα, είναι εύκολο η πιο πάνω εξίσωση να αναπαρασταθεί ως DC συνάρτηση:

$$\boxed{f_p(x) = g_p(x) - h_p(x)}, \quad (2.24)$$

όπου

$$\boxed{g_p(x) = v_0 \left[\begin{array}{cc} e_k^T g_1 e_k^T H^T & e_k^T b_1 e_k^T H^T \end{array} \right] x + \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} H + \bar{G}^T \\ -\bar{B}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} H^T + \bar{G} & -\bar{B} \end{array} \right] x + \\ + \frac{1}{4} x^T \left[\begin{array}{c} \bar{B}^T \\ H + \bar{G}^T \end{array} \right] e_k e_k^T \left[\begin{array}{cc} \bar{B} & H^T + \bar{G} \end{array} \right] x} \quad (2.25)$$

και

$$h_p(x) = \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} \Pi - \bar{G}^T \\ \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} \Pi^T - \bar{G} & \bar{B} \end{bmatrix} x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} -\bar{B}^T \\ \Pi - \bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} -\bar{B} & \Pi^T - \bar{G} \end{bmatrix} x + p_k \quad (2.26)$$

Ίδια διαδικασία ακολουθείται για τον σχηματισμό της 2^{ης} εξίσωσης ροής φορτίου, η οποία σχετίζεται με την έγχυση άεργου ισχύος στον ζυγό k .

Προκύπτει ότι

$$f_k c_k = \begin{bmatrix} \emptyset_{1 \times (N-1)} & v_0 e_k^T g_1 e_k^T \Pi^T \end{bmatrix} x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} \bar{G}^T \\ \Pi - \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} \bar{G} & \Pi^T - \bar{B} \end{bmatrix} x - \\ - \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} -\bar{G}^T \\ \Pi + \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} -\bar{G} & \Pi^T + \bar{B} \end{bmatrix} x, k \neq 1 \quad (2.27)$$

και

$$a_k d_k = \begin{bmatrix} v_0 e_k^T b_1 e_k^T \Pi^T & \emptyset_{1 \times (N-1)} \end{bmatrix} x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} \Pi + \bar{B}^T \\ \bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} \Pi^T + \bar{B} & \bar{G} \end{bmatrix} x - \\ - \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} \Pi - \bar{B}^T \\ -\bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} \Pi^T - \bar{B} & -\bar{G} \end{bmatrix} x, k \neq 1 \quad (2.28)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις σχέσεις (2.10), (2.27) και (2.28), μπορούμε να σχηματίσουμε την 2^η εξίσωση της ροής φορτίου.

2^η εξίσωση ροής φορτίου (εξίσωση Q):

$$q_k = f_k c_k - a_k d_k \Rightarrow f_Q(x) = f_k c_k - a_k d_k - q_k = 0, \quad (2.29)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
f_Q(x) = & \left[\mathcal{O}_{1 \times (N-1)} \quad v_0 e_k^T g_1 e_k^T H^T \right] x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} \bar{G}^T \\ H - \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} \bar{G} & H^T - \bar{B} \end{bmatrix} x - \\
& - \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} -\bar{G}^T \\ H + \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} -\bar{G} & H^T + \bar{B} \end{bmatrix} x - \left[v_0 e_k^T b_1 e_k^T H^T \quad \mathcal{O}_{1 \times (N-1)} \right] x - \\
& - \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} H + \bar{B}^T \\ \bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} H^T + \bar{B} & \bar{G} \end{bmatrix} x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} H - \bar{B}^T \\ -\bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} H^T - \bar{B} & -\bar{G} \end{bmatrix} x - q_k
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Τώρα, είναι εύκολο η πιο πάνω εξίσωση να αναπαρασταθεί ως DC συνάρτηση:

$$\boxed{f_Q(x) = g_Q(x) - h_Q(x)} , \tag{2.31}$$

όπου

$$\boxed{
\begin{aligned}
g_Q(x) = & v_0 \left[\mathcal{O}_{1 \times (N-1)} \quad e_k^T g_1 e_k^T H^T \right] x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} \bar{G}^T \\ H - \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} \bar{G} & H^T - \bar{B} \end{bmatrix} x + \\
& + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} H - \bar{B}^T \\ -\bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} H^T - \bar{B} & -\bar{G} \end{bmatrix} x
\end{aligned}
} \tag{2.32}$$

και

$$\boxed{
\begin{aligned}
h_Q(x) = & v_0 \left[e_k^T b_1 e_k^T H^T \quad \mathcal{O}_{1 \times (N-1)} \right] x + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} -\bar{G}^T \\ H + \bar{B}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} -\bar{G} & H^T + \bar{B} \end{bmatrix} x + \\
& + \frac{1}{4} x^T \begin{bmatrix} H + \bar{B}^T \\ \bar{G}^T \end{bmatrix} e_k e_k^T \begin{bmatrix} H^T + \bar{B} & \bar{G} \end{bmatrix} x + q_k
\end{aligned}
} \tag{2.33}$$

Υπάρχει όμως και 3^η εξίσωση ροής φορτίου, η οποία προκύπτει σε περίπτωση που ο ζυγός k είναι ζυγός παραγωγής (PV).

3^η εξίσωση ροής φορτίου (εξίσωση V):

$$\bar{a}_{k-1}^2 + \bar{f}_{k-1}^2 = v_k^2 \Rightarrow f_V(x) = x^T E_{k-1}^T E_{k-1} x + x^T E_{N+k-2}^T E_{N+k-2} x - v_k^2 = 0 , \tag{2.34}$$

όπου $E_{k-1} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$ (με τη μονάδα στην $k-1$ θέση) , διάνυσμα διαστάσεων $2(N-1) \times 1$ και $E_{N+k-2} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$ (με τη μονάδα στην $N+k-2$ θέση) , επίσης διάνυσμα διαστάσεων $2(N-1) \times 1$.

Τώρα, είναι εύκολο η πιο πάνω εξίσωση να γραφτεί ως DC συνάρτηση:

$$\boxed{f_V(x) = g_V(x) - h_V(x)}, \quad (2.31)$$

όπου

$$\boxed{g_V(x) = x^T E_{k-1}^T E_{k-1} x + x^T E_{N+k-2}^T E_{N+k-2} x}, \quad (2.32)$$

και

$$\boxed{h_V(x) = v_k^2} \quad (2.33)$$

2.1.3 Συνοπτική επεξήγηση του προβλήματος

Θεωρώντας και πάλι ένα ΣΗΕ N ζυγών, αυτό το πρόβλημα ανάγεται σε επίλυση συστήματος $2(N-1)$ μη γραμμικών εξισώσεων με $2(N-1)$ άγνωστες μεταβλητές. Πιο κάτω θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει.

Αν θεωρήσουμε ότι στο συγκεκριμένο ΣΗΕ έχουμε 1 ζυγό αναφοράς, m ζυγούς PQ και l ζυγούς PV, τότε ισχύει

$$m+l+1 = N \Leftrightarrow m+l = N-1 \quad (2.34)$$

Επιπρόσθετα, λόγω των m ζυγών PQ, έχουμε m εξισώσεις P και m εξισώσεις Q και λόγω των l ζυγών PV, έχουμε l εξισώσεις P και l εξισώσεις V. Άρα, συνολικά $m+l$ εξισώσεις P, m εξισώσεις Q, l εξισώσεις V.

Επομένως, έχουμε συνολικά $2(m+l) = 2(N-1)$ μη γραμμικές εξισώσεις. Επιπλέον, αφού έχουμε να υπολογίσουμε $N-1$ τάσεις ζυγών και έχει γίνει η αναπαράσταση τους στη μορφή $\tilde{V}_k = \bar{a}_k + j\bar{f}_k, k \neq 1$, έχουμε και $2(N-1)$ άγνωστες μεταβλητές.

2.2 Μετατροπή σε ισοδύναμο πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης

Όπως έχει προαναφερθεί, έχουμε ένα σύστημα $2(N-1)$ εξισώσεων με $2(N-1)$ αγνώστους:

$$f_i(x) = 0, f_i : D \subset \mathbb{R}^{2(N-1)} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, 2(N-1) \quad (2.35)$$

όπου οι f_i είναι συναρτήσεις κυρτών διαφορών, δηλαδή $\exists g_i, h_i : D \subset \mathbb{R}^{2(N-1)} \rightarrow \mathbb{R}$ κυρτές συναρτήσεις τέτοιες ώστε

$$f_i = g_i - h_i, i = 1, \dots, 2(N-1) \quad (2.36)$$

Σύμφωνα με τη διπλωματική εργασία του Σ. Κιναλή [4], το πρόβλημα μετασχηματίζεται ως εξής:

$$f_i(x) = 0 \Leftrightarrow g_i(x) = h_i(x) = y_i \Leftrightarrow \begin{cases} g_i(x) - y_i = 0 \\ h_i(x) - y_i = 0 \end{cases}, i = 1, \dots, 2(N-1) \quad (2.37)$$

όπου y_i σταθερές συναρτήσεις.

Μπορούμε ισοδύναμα να εκφράσουμε το πρόβλημα ως εξής:

$$F_i(x, y) = 0, i = 1, \dots, 4(N-1), \quad (2.38)$$

όπου $F_i(x, y) : \mathbb{R}^{4(N-1)} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} F_i(x, y) = g_i(x) - y_i \\ F_{2(N-1)+i}(x, y) = h_i(x) - y_i \end{cases}, i = 1, \dots, 2(N-1) \quad (2.39)$$

Με τον τρόπο αυτό, το πρόβλημα ανάγεται σε $4(N-1)$ εξισώσεις με $4(N-1)$ αγνώστους. Η αύξηση των αγνώστων μεταβλητών θα προκαλέσει περαιτέρω δυσκολίες στην επίλυση του προβλήματος, κάτι το οποίο θα δειχθεί στα παραδείγματα. Το πλεονέκτημα είναι ότι οι συναρτήσεις F_i , $i = 1, \dots, 4(N-1)$ είναι επίσης κυρτές.

Οπότε, το πρόβλημα μπορεί να γραφεί ως πρόβλημα βελτιστοποίησης. Έστω η συνάρτηση

$$L: \mathbb{R}^{4(N-1)} \rightarrow \mathbb{R}, L(x, y) = \sum_{i=1}^{4(N-1)} F_i(x, y) \quad (2.40)$$

και το σύνολο $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{4(N-1)} : F_i(x, y) \leq 0, i = 1, \dots, 4(N-1)\}$. Τότε, κάθε ζεύγος $(x, y) \in \mathbb{R}^{4(N-1)}$ που ικανοποιεί το σύστημα εξισώσεων, ικανοποιεί και το πρόβλημα

$$\max_{(x,y)} \{L(x, y) : F_i(x, y) \leq 0, i = 1, \dots, 4(N-1)\}, \quad (2.41)$$

δηλαδή ικανοποιεί και το πρόβλημα

$$\min_{(x,y)} \{-L(x, y) : F_i(x, y) \leq 0, i = 1, \dots, 4(N-1)\} \quad (2.42)$$

Το τελευταίο πρόβλημα αποτελεί ένα πρόβλημα κοίλης ελαχιστοποίησης. Αφού η συνάρτηση L είναι κυρτή συνάρτηση – ως άθροισμα κυρτών συναρτήσεων – τότε η $-L$ είναι κοίλη συνάρτηση με κυρτές συναρτήσεις ανισοτικών περιορισμών (κυρτό επιτρεπτό σύνολο).

Έστω ότι (x^*, y^*) είναι η λύση του προβλήματος κοίλης ελαχιστοποίησης. Από τους περιορισμούς, θα ισχύει $F_i(x^*, y^*) \leq 0$. Άρα, εάν ισχύει

$$L(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{4(N-1)} F_i(x^*, y^*) = 0, \quad (2.43)$$

τότε

$$F_i(x^*, y^*) = 0, i = 1, \dots, 4(N-1) \quad (2.44)$$

Επομένως, η λύση του προβλήματος κοίλης ελαχιστοποίησης θα είναι και λύση του συστήματος εξισώσεων.

2.3 Αλγόριθμος επίλυσης

Ο αλγόριθμος της Karla Leigh Hoffman που θα παρουσιαστεί [5], λύνει το πρόβλημα της κοίλης ελαχιστοποίησης

$$(P): \min_x \{f(x) : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\}, \quad (2.45)$$

όπου η f είναι μια κοίλη συνάρτηση ορισμένη στο \mathbb{R}^n και οι g_i είναι κυρτές συναρτήσεις ορισμένες επίσης στο \mathbb{R}^n με συνεχείς κλίσεις.

2.3.1 Θεωρητικό μέρος

Ο αλγόριθμος παράγει γραμμικά προγράμματα οι λύσεις των οποίων ελαχιστοποιούν την κυρτή περιβάλλουσα της αρχικής συνάρτησης πάνω σε διαδοχικά στενά πολύτοπα που περικλείουν το επιτρεπτό σύνολο. Επίσης, ο αλγόριθμος εγγυάται τη σύγκλιση σε ολικό ελάχιστο.

Έστω το επιτρεπτό σύνολο

$$S = \{x : g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (2.46)$$

Ισχύει το θεώρημα (Ιδιότητα 1, σελίδα 11):

Θεώρημα 1:

Υπάρχει ένα ακραίο σημείο x^ του κυρτού και συμπαγές συνόλου S το οποίο αποτελεί ολικό ελάχιστο του προβλήματος (P).*

Συνοπτικά, ο αλγόριθμος περικλείει το σύνολο S εντός ενός πολυέδρου του οποίου τα ακραία σημεία είναι γνωστά. Με ελαχιστοποίηση στις τιμές της συνάρτησης στα ακραία αυτά σημεία, καθορίζεται ένα κάτω φράγμα του προβλήματος (P). Εάν το σημείο ελαχιστοποίησης είναι εντός του επιτρεπτού συνόλου S , τότε το σημείο είναι επίσης ένα άνω φράγμα και το πρόβλημα έχει λυθεί. Αλλιώς, το σημείο αυτό παραβιάζει τουλάχιστον ένα περιορισμό του (P). Τότε, κατασκευάζεται ένα εφαπτόμενο υπερεπίπεδο το οποίο διαμοιράζει το αρχικό πολύτοπο, δημιουργώντας ένα το οποίο

περικλείει πιο στενά το σύνολο S . Τα ακραία σημεία του νέου συνόλου υπολογίζονται εκ νέου και γίνεται η ελαχιστοποίηση της f στο νέο σύνολο.

2.3.2 Βήματα αλγορίθμου

Πιο κάτω παρουσιάζονται αναλυτικά τα βήματα του αλγόριθμου, θεωρώντας τις εξής παραδοχές:

- (i) Το σύνολο S είναι μη κενό και συμπαγές,
- (ii) Υπάρχει ένα σημείο p που βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό αυτού.

Επίσης επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ επαρκώς μικρό.

Βήμα 0:

Βρες ένα σημείο p αυστηρά στο εσωτερικό του S , δηλαδή

$$p \in \{x: g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m\} \quad (2.47)$$

Θέσε $u^0 = f(p)$ (το καλύτερο άνω φράγμα μέχρι στιγμής).

Βρες ένα γραμμικό πολύεδρο S^0 που περικλείει το σύνολο S τέτοιο ώστε όλες οι κορυφές του S^0 να είναι γνωστές, και μπορεί να περιγραφεί ως ένα σύνολο περιορισμών $Ax \leq b$.

Έστω $V^0 =$ το σύνολο των κορυφών του S^0 .

Θέσε $k = 1$.

Πήγαινε στο βήμα 1.

Βήμα k:

Αυτό το βήμα εισάγεται με ένα πολύεδρο S^{k-1} που περικλείει το S , με γνώση του συνόλου V^{k-1} , των ακραίων σημείων του S^{k-1} , και ένα τρέχων άνω φράγμα u^{k-1} για το πρόβλημα (P).

Λύσε το πρόβλημα

$$(P^k) : \min_x \{f(x) : x \in S^{k-1}\}, \quad (2.48)$$

επιλέγοντας το $\min_u \{f(u) : u \in V^{k-1}\}$.

Έστω ότι το x^k είναι η λύση του (P^k) .

Τώρα, έστω ότι το λ_k είναι η λύση του μονοδιάστατου προβλήματος βελτιστοποίησης

$$(Q^k) : \min \{\lambda : 0 \leq \lambda \leq 1, x^k + \lambda(p - x^k) \in S\} \quad (2.49)$$

Εάν $\lambda_k = 0$, τότε $x^k \in S$ και επομένως είναι η λύση του προβλήματος (P). Σταμάτα.

Εάν $\lambda_k \neq 0$, θέσε $z^k = x^k + \lambda_k(p - x^k)$. Αν $f(z^k) < u^{k-1}$, θέσε $u^k = f(z^k)$. Αλλιώς, θέσε $u^k = u^{k-1}$. Αν $|z^k - f(x^k)| < \varepsilon$ (ή ομοίως, αν $u^k - f(x^k) < \varepsilon$), τότε σταμάτα. Το x^k είναι η λύση. Αν όχι, τότε βρες όλους τους ενεργούς περιορισμούς στο z^k , όρισε

$$J^k = \{i : g_i(z^k) = 0, i = 1, \dots, m\} \quad (2.50)$$

και επέλεξε οποιοδήποτε $j^k \in J^k$.

Στους περιορισμούς του S^{k-1} πρόσθεσε τον περιορισμό

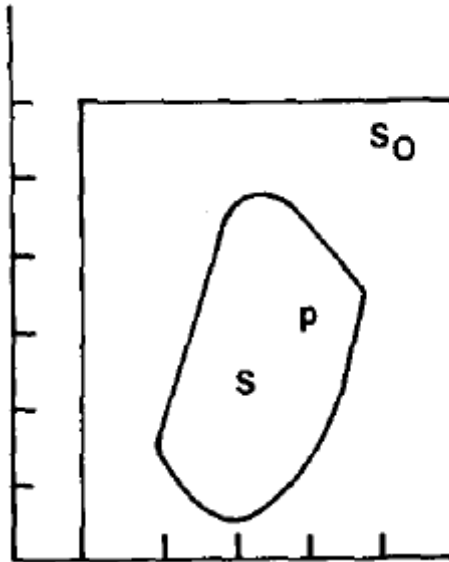
$$G_{j^k}^k(x) = g_{j^k}(z^k) + [\nabla g_{j^k}(z^k)]^T (x - z^k) \leq 0 \quad (2.51)$$

Η εξίσωση του περιορισμού $G_{j^k}^k$ αναπαριστά ένα υπερεπίπεδο εφαπτόμενο του S στο z^k και αυτός ο περιορισμός διαχωρίζει το σημείο x^k από το σύνολο S^k που θα οριστεί μετά. Θέσε

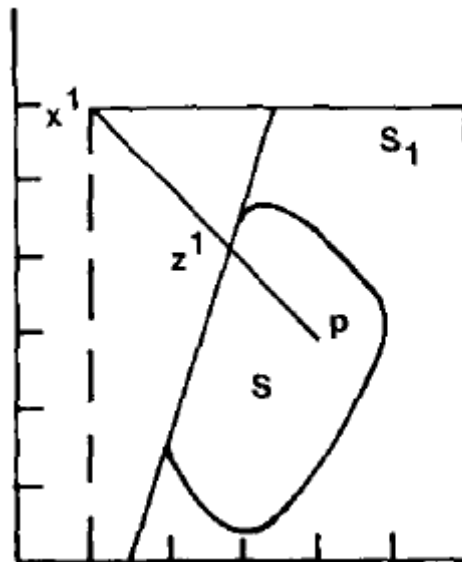
$$S^k = S^{k-1} \cap \{x : G_{j^k}^k(x) \leq 0\} \text{ και } V^k = \{\text{ακραία σημεία του } S^k\} \quad (2.52)$$

Θέσε $k = k + 1$. Επέστρεψε στο βήμα k .

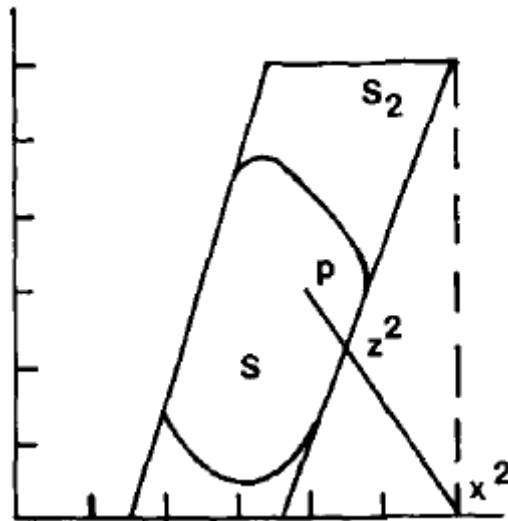
Για να γίνει περαιτέρω κατανοητός ο αλγόριθμος, πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά η δημιουργία των διαδοχικών πολύεδρων.



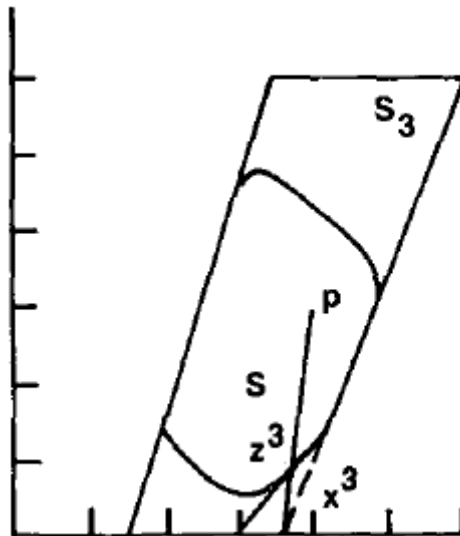
Σχήμα 2.3.1: Αρχικά, ξεκινάμε με ένα αρχικό πολύεδρο S^0 , το οποίο περικλείει το επιτρεπτό σύνολο S με p ένα σημείο αυστηρά στο εσωτερικό του



Σχήμα 2.3.2: Υπολογίζεται το σημείο ελαχίστου x^1 πάνω στο S^0 (για εκ των κορυφών του) και υπολογίζεται το σημείο z^1 το οποίο βρίσκεται στο σύνορο του S και επί της ευθείας που ενώνει τα p και x^1 . Η επαφτομένη του S στο z^1 σχηματίζει το νέο πολύεδρο S^1 , προσθέτοντας έναν επιπλέον γραμμικό περιορισμό.



Σχήμα 2.3.3: Υπολογίζεται το σημείο ελαχίστου x^2 πάνω στο S^1 (μια εκ των κορυφών του) και υπολογίζεται το σημείο z^2 το οποίο βρίσκεται στο σύνορο του S και επί της ευθείας που ενώνει τα p και x^2 . Η εφαπτομένη του S στο z^2 σχηματίζει το νέο πολύεδρο S^2 , προσθέτοντας έναν επιπλέον γραμμικό περιορισμό.



Σχήμα 2.3.4: Υπολογίζεται το σημείο ελαχίστου x^3 πάνω στο S^2 (μια εκ των κορυφών του) και υπολογίζεται το σημείο z^3 το οποίο βρίσκεται στο σύνορο του S και επί της ευθείας που ενώνει τα p και x^3 . Η εφαπτομένη του S στο z^3 σχηματίζει το νέο πολύεδρο S^3 , προσθέτοντας έναν επιπλέον γραμμικό περιορισμό. Η συγκεκριμένη διαδικασία επαναλαμβάνεται, σχηματίζοντας κάθε φορά όλο και πιο στενά πολύεδρα μέχρι να συγκλίνει σε σημείο ελαχίστου πάνω στο S .

2.4 Προσαρμογή και τροποποιήσεις του προβλήματος

Όπως αναφέρθηκε στην παράγραφο 2.2, το πρόβλημα επίλυσης των εξισώσεων ενός ΣΗΕ έχει αναχθεί στο πρόβλημα

$$\min_{(x,y)} \{-L(x,y) : F_i(x,y) \leq 0, i=1, \dots, 4(N-1)\},$$

$$\text{όπου } L(x,y) = \sum_{i=1}^{4(N-1)} F_i(x,y) \text{ και } \begin{cases} F_i(x,y) = g_i(x) - y_i \\ F_{2(N-1)+i}(x,y) = h_i(x) - y_i \end{cases}, i=1, \dots, 2(N-1).$$

Σύμφωνα με τη διπλωματική εργασία του Κ. Βαρελά [6], απαιτούνται κάποιες τροποποιήσεις για την επίλυση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο της Κ. L. Hoffman.

2.4.1 Καθορισμός αρχικού πολυέδρου

Έχει θεωρηθεί ότι το επιτρεπτό σύνολο S είναι κλειστό και φραγμένο. Στο πρόβλημά μας όμως, έχει οριστεί ως

$$S = \{(x,y) : g_i(x) - y_i \leq 0, h_i(x) - y_i \leq 0, i=1, \dots, 2(N-1)\}, \quad (2.54)$$

το οποίο δεν είναι φραγμένο.

Αυτό μπορεί να δειχθεί αν θεωρήσουμε ένα x_0 . Τότε $\forall y > y_0$, όπου

$$y_0 = \max_{i=1, \dots, 2(N-1)} \{\max\{g_i(x_0), h_i(x_0)\}\}, \quad (2.55)$$

το ζεύγος (x_0, y) ικανοποιεί πάντα τις συνθήκες που ορίζουν το S . Συνεπώς, δεν είναι φραγμένο σύνολο.

Το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε με επιβολή άνω και κάτω ορίων στις μεταβλητές. Για τις μεταβλητές x_i επιβλήθηκαν αυθαίρετα διαστήματα $[lx_i, ux_i]$ εντός των οποίων θα ανήκουν οι τιμές των x_i . Έστω πως το σύνολο καλείται X , δηλαδή

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{2(N-1)} : lx_i \leq x_i \leq ux_i, i=1, \dots, 2(N-1)\} \quad (2.56)$$

Στην περίπτωση μας, όπου έχουμε θεωρήσει ότι $x = [\bar{a} \ \bar{f}]^T$, θεωρήσαμε διαφορετικά διαστήματα για τις μεταβλητές \bar{a} και \bar{f} , δηλαδή

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^{2(N-1)} : la_i \leq x_i \leq ua_i, \quad lf_i \leq x_{i+N-1} \leq uf_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \right\} \quad (2.57)$$

Τα αντίστοιχα κάτω φράγματα για τις μεταβλητές y_i , έστω ly_i , βρίσκονται ως εξής

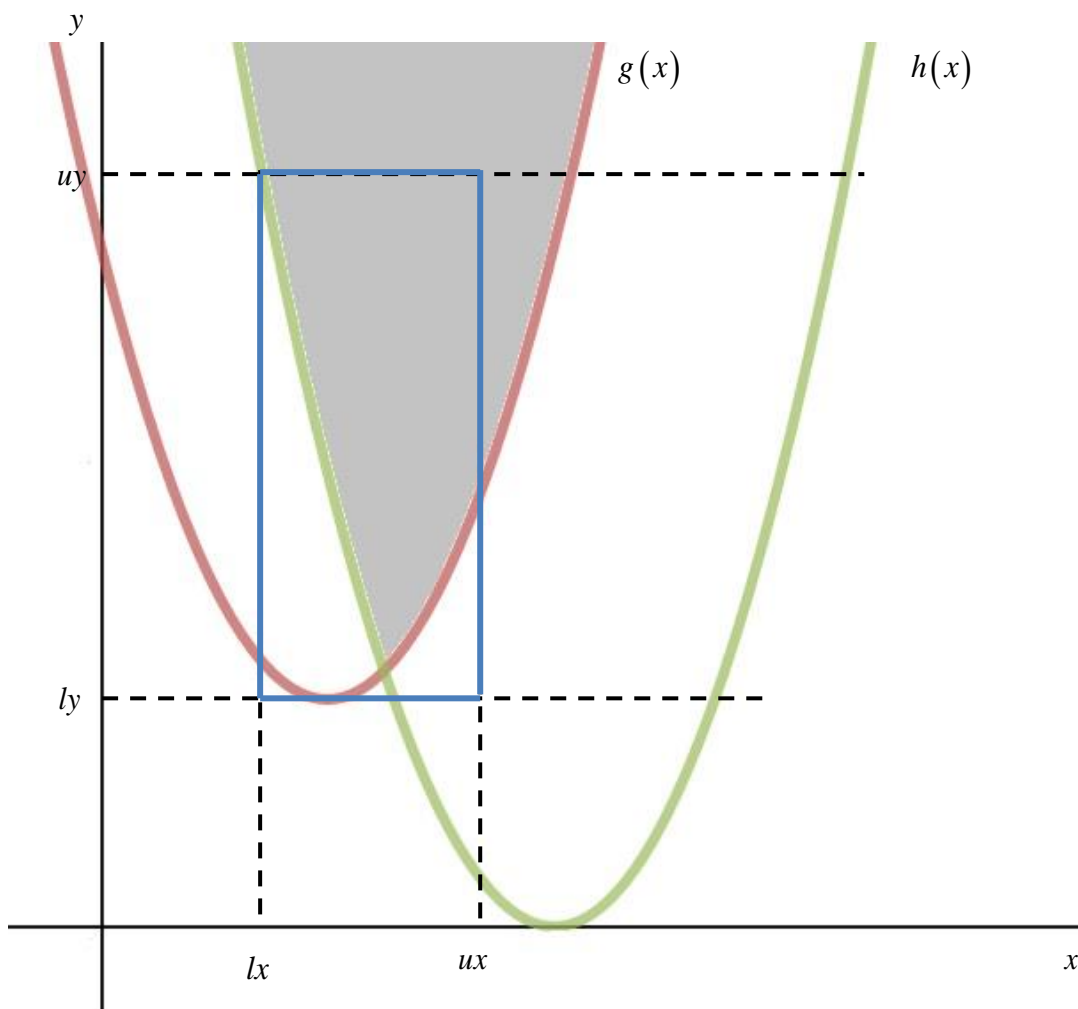
$$ly_i = \min_{x, y_i} \left\{ y_i : x \in X, g_i(x) - y_i \leq 0, h_i(x) - y_i \leq 0, i = 1, \dots, 2(N-1) \right\} \quad (2.58)$$

Τα αντίστοιχα άνω φράγματα για τις μεταβλητές y_i , έστω uy_i , βρίσκονται ως εξής

$$uy_i = \max \left\{ \max_x \{ g_i(x) : x \in X, i = 1, \dots, 2(N-1) \}, \max_x \{ h_i(x) : x \in X, i = 1, \dots, 2(N-1) \} \right\} \quad (2.59)$$

Σημειώνεται ότι για να βρεθούν τα άνω όρια των μεταβλητών y_i δεν απαιτείται η επίλυση του προβλήματος μεγιστοποίησης στο X . Απλά υπολογίζονται οι μέγιστες τιμές των g_i, h_i με έλεγχο των τιμών στις κορυφές του συνόλου X . Αυτό ισχύει λόγω της κυρτότητας των συναρτήσεων αυτών.

Στην επόμενη σελίδα, παρουσιάζεται σχηματικά αυτή η προσαρμογή. Με σκούρο περίγραμμα παρουσιάζεται το τελικό επιτρεπτό σύνολο.



Σχήμα 2.4.1: Απλοποιημένη αναπαράσταση του πολυέδρου που περικλείει μέρος του επιτρεπτού συνόλου (για μια μεταβλητή) με $X = [lx, ux]$,

$$ly = \min_{x,y} \{y : x \in X, g(x) - y \leq 0, h(x) - y \leq 0\},$$

$$uy = \max \left\{ \max_x \{g(x) : x \in X\}, \max_x \{h(x) : x \in X\} \right\}$$

Αν συμβολίσουμε ως Y το επιτρεπτό σύνολο των y_i , έχουμε με τον πιο πάνω τρόπο ορίσει ένα σύνολο $S^0 = X \times Y$ το οποίο είναι ένα πολυέδρο που περικλείει το S , το οποίο S δεν είναι το σύνολο όλων των ζευγών (x, y) τα οποία ικανοποιούν τους περιορισμούς $F_i(x, y) \leq 0$ αλλά το σύνολο

$$S = \{(x, y) : x \in X, F_i(x, y) \leq 0, i = 1, \dots, 4(N-1)\} \quad (2.60)$$

Με αυτό τον τρόπο η εφαρμογή του αλγορίθμου είναι εφικτή και θα βρεθούν μόνο λύσεις του προβλήματος εντός του συνόλου X .

2.4.2 Υπολογισμός αρχικού σημείου p

Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει ένα σημείο p αυστηρά στο εσωτερικό του S . Το εσωτερικό σημείο βρίσκεται επιλύοντας το πρόβλημα

$$\min_{x,y,\varepsilon} \{ \varepsilon : g_i(x) - y_i \leq \varepsilon, h_i(x) - y_i \leq \varepsilon, x \in X, y \in Y, i = 1, \dots, 2(N-1) \} \quad (2.61)$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η $(x^*, y^*, \varepsilon^*)$ αποτελεί λύση του προβλήματος, τότε το εσωτερικό σημείο είναι το $p = (x^*, y^*)$, το οποίο δεν είναι απαραίτητα αυστηρά στο εσωτερικό του S . Οπότε, σε μερικές περιπτώσεις, μετά την εύρεση του p , στην υλοποίηση του αλγορίθμου διευρύνονται τα άνω και κάτω όρια του συνόλου X (και συνεπώς και του Y) ώστε το p να βρίσκεται αυστηρά στο εσωτερικό του S αλλά και για να αναζητηθούν επιπλέον λύσεις στο εξεταζόμενο παράδειγμα ΣΗΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παραδείγματα, Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζονται 6 παραδείγματα ΣΗΕ. Για καθένα από αυτά τα παραδείγματα έγινε προσομοίωση στο λογισμικό *PowerWorld Simulator 18*, με σκοπό να επιβεβαιωθεί η ορθότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν με τον αλγόριθμο της K. L. Hoffman. Επίσης, για μερικά παραδείγματα, έγινε προσπάθεια αναζήτησης μιας πιθανής δεύτερης λύσης.

Στο τέλος του κεφαλαίου, αναφέρονται σημαντικές παρατηρήσεις και συμπεράσματα, καθώς και δυσκολίες που συναντήθηκαν κατά την υλοποίηση και εκτέλεση των παραδειγμάτων.

Οι τιμές βάσεων σε όλα τα παραδείγματα είναι $S_B = 100MVA$, $V_B = 230kV$.

3.1 Παράδειγμα 1

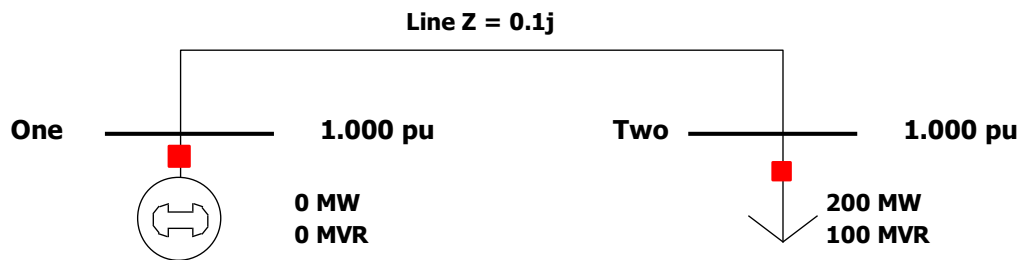
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	V (αμ)	P_g (αμ)	P_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1\angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός φορτίου PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1 = x_1 + jx_2$	0	2	0	1

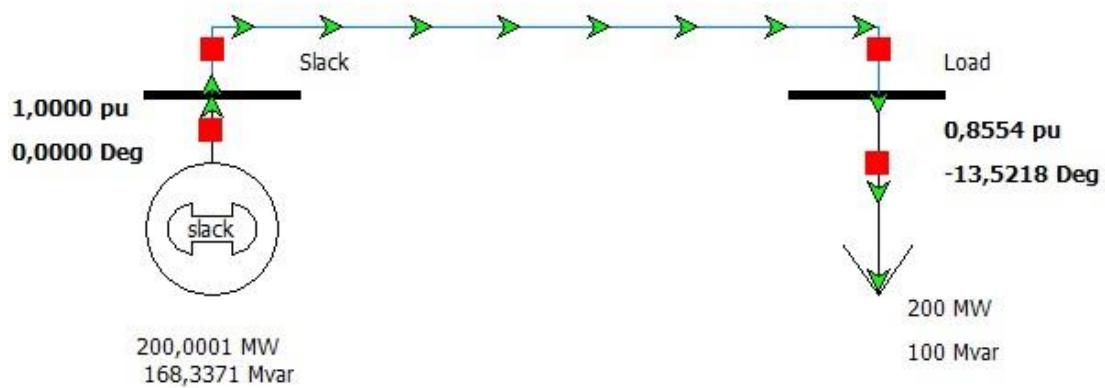
Δεδομένα γραμμών:

Από γραμμή	Προς γραμμή	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0	0.1

Πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά το ΣΗΕ δύο ζυγών:



Σχήμα 3.1.1 ΣΗΕ 2 ζυγών παραδείγματος 1



Σχήμα 3.1.2 Αποτέλεσμα προσομοίωσης με χρήση του λογισμικού PowerWorld Simulator 18

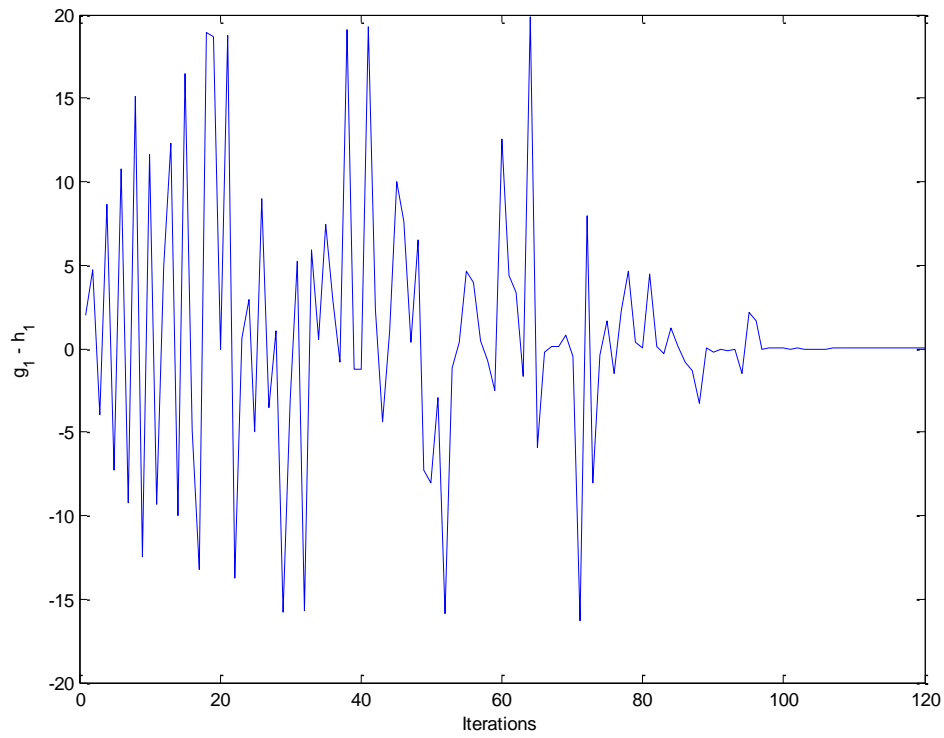
Σύμφωνα με το Σχήμα 3.1.2, αναμένουμε το αποτέλεσμα να είναι

$$\tilde{V}_2 = 0.8554 \angle -13.5218^\circ = 0.8313 - j0.1999 \quad (3.1)$$

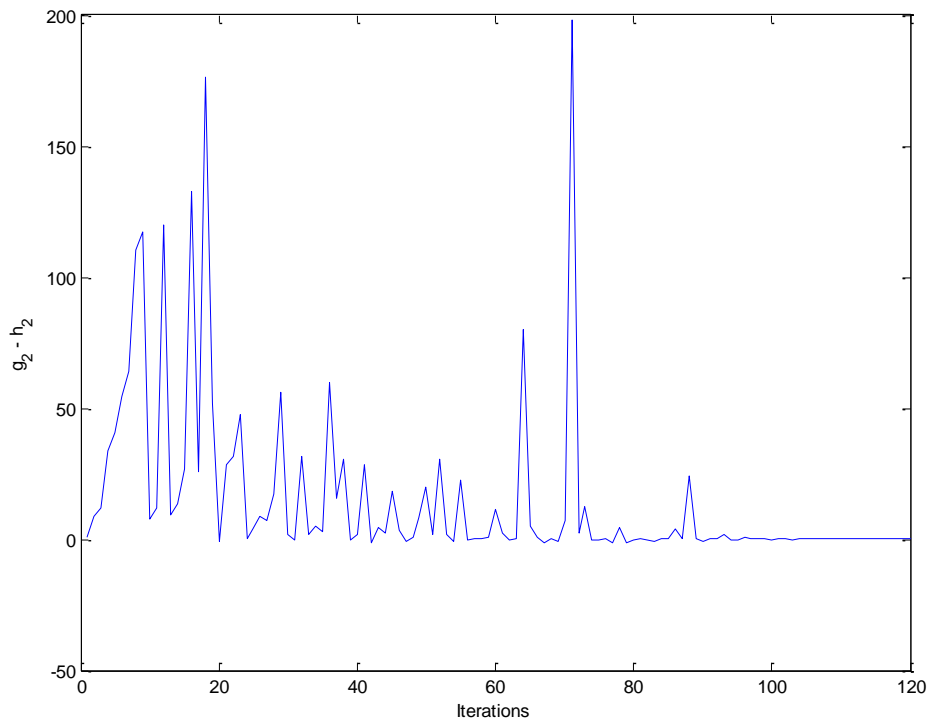
Σημειώνεται ότι, αφού έχουμε μόνο ένα ζυγό φορτίου PQ, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα σύστημα δύο μη γραμμικών εξισώσεων (μια εξίσωση P και μια εξίσωση Q) δύο αγνώστων.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο X ορίστηκε ως $[0,5] \times [-2,2]$ και το αντίστοιχο σύνολο Y υπολογίστηκε $[-0.9901, 752.2500] \times [0, 877.2500]$.

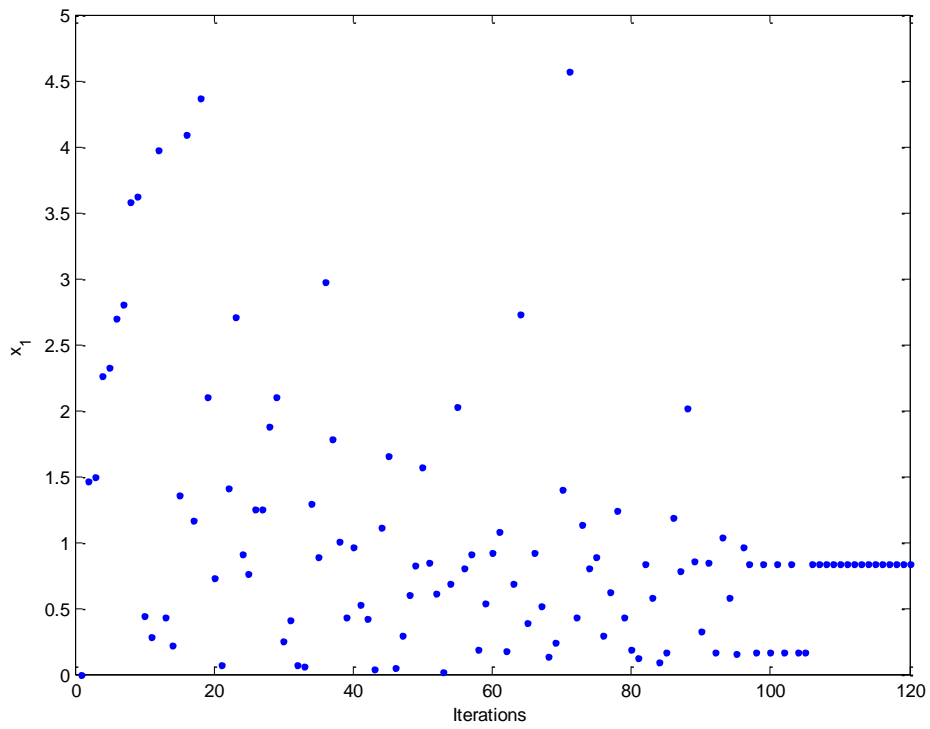
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



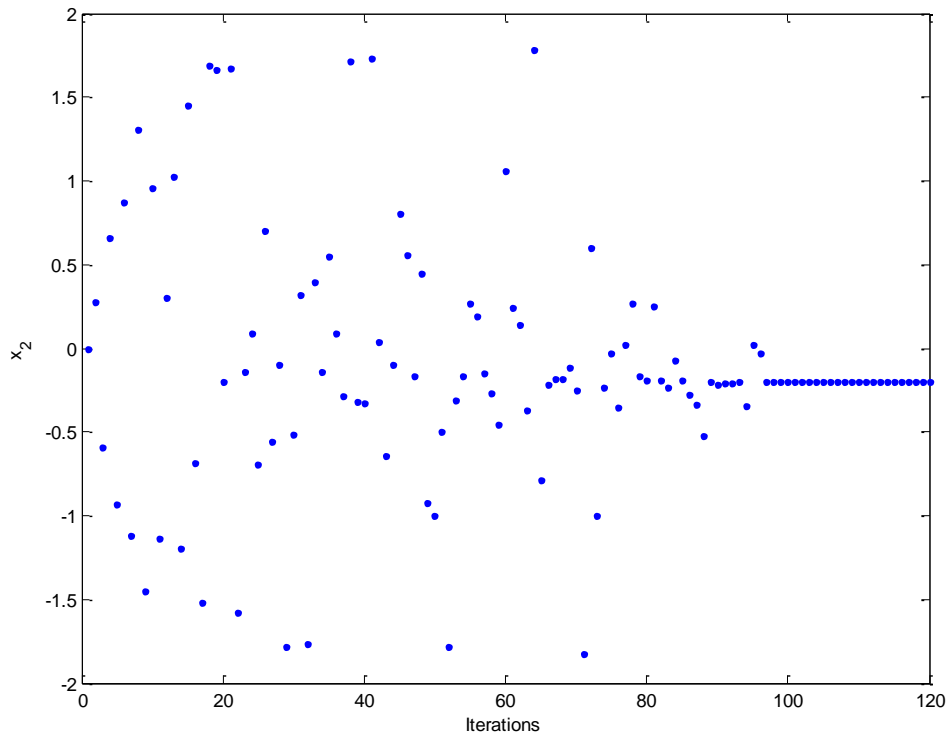
Σχήμα 3.1.3: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P)



Σχήμα 3.1.4: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q)



Σχήμα 3.1.5: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



Σχήμα 3.1.6: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{f}_1$

Από το Σχήμα 3.1.5, παρατηρείται μια εναλλαγή μεταξύ των τιμών της μεταβλητής x_1 . Αυτό υποδεικνύει ότι πιθανώς να υπάρχει ακόμη μια λύση στο σύστημα. Συγκεκριμένα οι λύσεις που προκύπτουν είναι:

$$\tilde{V}_{2a} = 0.8317 - j0.2000 = 0.8554 \angle -13.5213^\circ \quad (3.2)$$

$$\tilde{V}_{2b} = 0.1683 - j0.2000 = 0.2614 \angle -49.9194^\circ \quad (3.3)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε για κάθε λύση την έγχυση ενεργού και άεργου ισχύος σε κάθε ζυγό. Αρχικά, ας σχηματίσουμε τις εξισώσεις για τον υπολογισμό τους.

Για τον ζυγό αναφοράς:

Από τη σχέση (2.9), έχουμε ($a_1 = v_0 = 1, f_1 = 0$):

$$p_1 = a_1 c_1 + f_1 d_1 = v_0 c_1 \stackrel{(2.14)}{\Rightarrow} p_1 = e_1^T v_0 (v_0 g_1 + \bar{G}\bar{a} - \bar{B}\bar{f}) = e_1^T v_0 (v_0 g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x) \quad (3.4)$$

και από τη σχέση (2.10):

$$q_1 = f_1 c_1 - a_1 d_1 = -v_0 d_1 \stackrel{(2.19)}{\Rightarrow} q_1 = -e_1^T v_0 (v_0 b_1 + \bar{B}\bar{a} + \bar{G}\bar{f}) = -e_1^T v_0 (v_0 b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x) \quad (3.5)$$

Επομένως, για $x = [0.8317 \quad -0.2000]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 1.9999 \text{ αμ} = 199.99 \text{ MW} \text{ και } q_1 = 1.6833 \text{ αμ} = 168.33 \text{ MVar} \quad (3.6)$$

Για $x = [0.1683 \quad -0.2000]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 2.0000 \text{ αμ} = 200.00 \text{ MW} \text{ και } q_1 = 8.3173 \text{ αμ} = 831.73 \text{ MVar} \quad (3.7)$$

Για το ζυγό k:

Από τη σχέση (2.9) έχουμε

$$p_k = a_k c_k + f_k d_k = \bar{a}_{k-1} e_k^T (v_0 g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x) + \bar{f}_{k-1} e_k^T (v_0 b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x) \quad (3.8)$$

και από τη σχέση (2.10)

$$q_k = f_k c_k - a_k d_k = \bar{f}_{k-1} e_k^T (v_0 g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x) - \bar{a}_{k-1} e_k^T (v_0 b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x) \quad (3.9)$$

Άρα για $k = 2$:

Για $x = [0.8317 \quad -0.2000]^T$, προκύπτει

$$p_2 = -1.9999\alpha\mu = -199.99MW \text{ και } q_2 = -1.0000\alpha\mu = -100.00MVAr \quad (3.10)$$

Για $x = [0.1683 \quad -0.2000]^T$, προκύπτει

$$p_2 = -2.0000\alpha\mu = -200.00MW \text{ και } q_1 = -0.9996\alpha\mu = -99.96MVAr \quad (3.11)$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη λύση συμφωνεί με την προσομοίωση και έτσι θεωρείται η ορθή λύση.

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{f}_1$	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$
1	0,0000	0,0000	2,0000	1,0000
2	1,4649	0,2733	4,7333	8,5569
3	1,4896	-0,5943	-3,9426	11,8253
4	2,2612	0,6623	8,6227	33,9037
5	2,3276	-0,9298	-7,2980	40,5448
6	2,6992	0,8762	10,7620	54,5410
7	2,8071	-1,1219	-9,2186	64,3146
8	3,5807	1,3068	15,0678	110,4857
9	3,6264	-1,4499	-12,4993	117,2668
10	0,4393	0,9605	11,6052	7,7628
11	0,2817	-1,1322	-9,3219	11,7952
12	3,9707	0,2983	4,9829	119,8442
13	0,4357	1,0290	12,2903	9,1304
14	0,2225	-1,1980	-9,9798	13,6215
15	1,3524	1,4482	16,4818	26,7379
16	4,0947	-0,6888	-4,8880	132,4651
17	1,1604	-1,5195	-13,1948	25,9492
18	4,3651	1,6899	18,8990	176,4488
19	2,0964	1,6669	18,6687	51,7701
20	0,7334	-0,2019	-0,0191	-0,5477
21	0,0741	1,6745	18,7445	28,3522
22	1,4112	-1,5766	-13,7660	31,6602
23	2,7072	-0,1372	0,6281	47,4055
24	0,9068	0,0920	2,9198	0,2396
25	0,7573	-0,6952	-4,9522	3,9952
26	1,2493	0,6998	8,9978	9,0111
27	1,2523	-0,5558	-3,5583	7,2487

28	1,8734	-0,0952	1,0475	17,4530
29	2,1005	-1,7816	-15,8162	55,8575
30	0,2479	-0,5137	-3,1370	1,7746
31	0,4084	0,3207	5,2073	-0,3874
32	0,0649	-1,7661	-15,6610	31,5841
33	0,0542	0,3927	5,9271	2,0295
34	1,2964	-0,1430	0,5704	5,0470
35	0,8933	0,5479	7,4786	3,0483
36	2,9760	0,0919	2,9189	59,8921
37	1,7857	-0,2816	-0,8157	15,8219
38	1,0096	1,7117	19,1173	30,3967
39	0,4277	-0,3195	-1,1949	-0,4269
40	0,9609	-0,3255	-1,2550	1,6841
41	0,5259	1,7293	19,2927	28,4106
42	0,4253	0,0348	2,3480	-1,4321
43	0,0419	-0,6422	-4,4218	4,7223
44	1,1117	-0,0976	1,0237	2,3371
45	1,6553	0,8014	10,0140	18,2695
46	0,0461	0,5588	7,5877	3,6828
47	0,2974	-0,1653	0,3466	-0,8161
48	0,6028	0,4490	6,4895	0,6212
49	0,8269	-0,9255	-7,2554	8,1348
50	1,5646	-1,0011	-8,0112	19,8569
51	0,8418	-0,4947	-2,9473	2,1159
52	0,6071	-1,7831	-15,8313	30,4102
53	0,0173	-0,3125	-1,1253	1,8064
54	0,6892	-0,1656	0,3438	-0,8677
55	2,0242	0,2652	4,6520	22,4343
56	0,8035	0,1949	3,9493	-0,1987
57	0,9112	-0,1506	0,4943	0,4175
58	0,1832	-0,2708	-0,7076	0,2369
59	0,5420	-0,4519	-2,5191	0,5599
60	0,9166	1,0573	12,5734	11,4156
61	1,0828	0,2422	4,4222	2,4833
62	0,1803	0,1364	3,3642	-0,2920
63	0,6892	-0,3686	-1,6857	0,2163
64	2,7236	1,7863	19,8634	79,8559
65	0,3934	-0,7898	-5,8977	4,8510
66	0,9161	-0,2191	-0,1909	0,7111
67	0,5149	-0,1866	0,1342	-1,1497
68	0,1301	-0,1859	0,1406	0,2142
69	0,2361	-0,1166	0,8343	-0,6677
70	1,3987	-0,2481	-0,4809	7,1922
71	4,5738	-1,8293	-16,2934	197,9265

72	0,4332	0,5990	7,9901	2,1327
73	1,1371	-1,0032	-8,0317	12,6222
74	0,8042	-0,2346	-0,3464	-0,0242
75	0,8834	-0,0319	1,6806	-0,0201
76	0,2964	-0,3498	-1,4982	0,1383
77	0,6261	0,0243	2,2434	-1,3351
78	1,2382	0,2660	4,6597	4,6564
79	0,4293	-0,1635	0,3654	-1,1829
80	0,1894	-0,1940	0,0596	-0,1588
81	0,1253	0,2504	4,5045	0,5314
82	0,8359	-0,1899	0,1007	-0,0108
83	0,5783	-0,2336	-0,3360	-0,8930
84	0,0928	-0,0765	1,2352	0,2164
85	0,1619	-0,1899	0,1010	0,0038
86	1,1879	-0,2776	-0,7759	4,0029
87	0,7830	-0,3340	-1,3398	0,4166
88	2,0150	-0,5243	-3,2428	24,2019
89	0,8523	-0,1960	0,0399	0,1256
90	0,3221	-0,2176	-0,1763	-0,7099
91	0,8473	-0,2065	-0,0648	0,1324
92	0,1678	-0,2092	-0,0917	0,0410
93	1,0385	-0,2037	-0,0367	1,8150
94	0,5768	-0,3462	-1,4617	-0,2427
95	0,1558	0,0211	2,2111	-0,3106
96	0,9602	-0,0299	1,7011	0,6268
97	0,8304	-0,2030	-0,0297	0,0036
98	0,1644	-0,2000	0,0002	0,0264
99	0,8330	-0,1991	0,0090	0,0056
100	0,1695	-0,1998	0,0017	-0,0082
101	0,8325	-0,2000	-0,0003	0,0054
102	0,1682	-0,1999	0,0013	0,0003
103	0,8313	-0,2000	-0,0001	-0,0025
104	0,1684	-0,2002	-0,0020	0,0004
105	0,1683	-0,2000	0,0000	0,0004
106	0,8317	-0,2000	-0,0002	0,0000
107	0,8317	-0,2000	0,0001	0,0000
108	0,8317	-0,2000	0,0001	0,0000

Πίνακας 3.1.1: Οι τιμές των μεταβλητών και των DC συναρτήσεων

3.2 Παράδειγμα 2

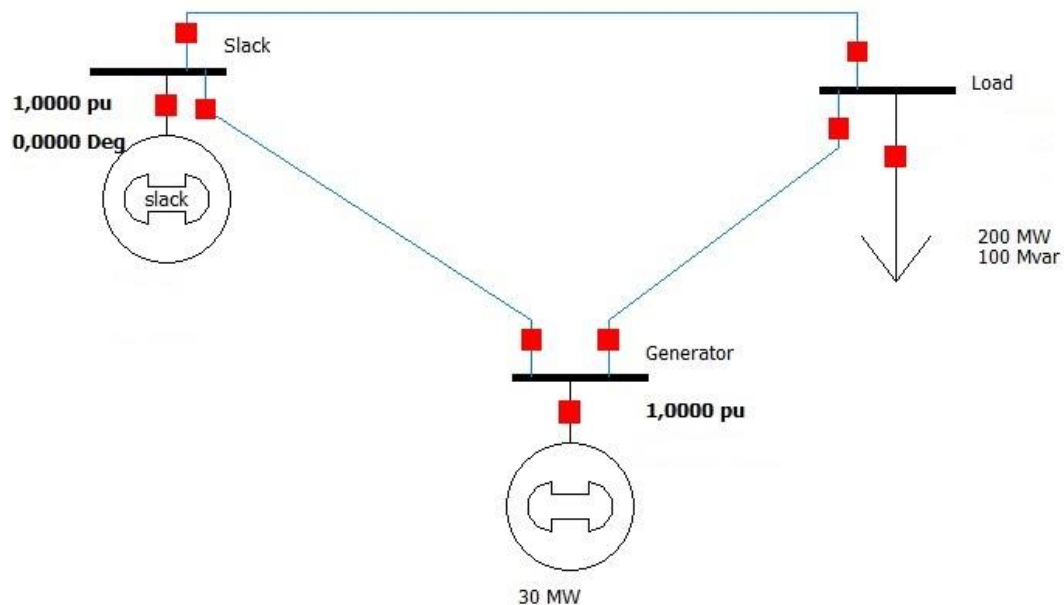
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	V (αμ)	P_g (αμ)	P_d (αμ)	Q_g (αμ)	Q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1\angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός φορτίου PQ	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1 = x_1 + jx_3$	0	2	0	1
3	Ζυγός παραγωγής PV	$1\angle ? = \bar{a}_2 + j\bar{f}_2 = x_2 + jx_4$	0.3	0	?	0

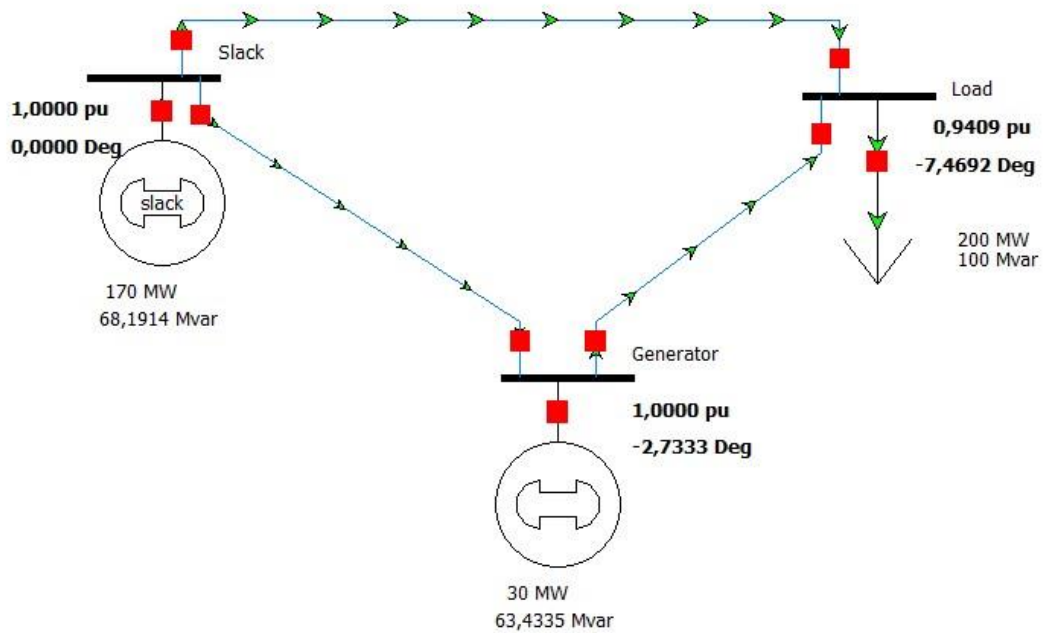
Δεδομένα γραμμών:

Από γραμμή	Προς γραμμή	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0	0.1
1	3	0	0.1
2	3	0	0.1

Πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά το ΣΗΕ τριών ζυγών:



Σχήμα 3.2.1 ΣΗΕ 3 ζυγών παραδείγματος 2



Σχήμα 3.2.2 Αποτέλεσμα προσομοίωσης με χρήση του λογισμικού PowerWorld Simulator 18

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.2.2, αναμένουμε το αποτέλεσμα να είναι

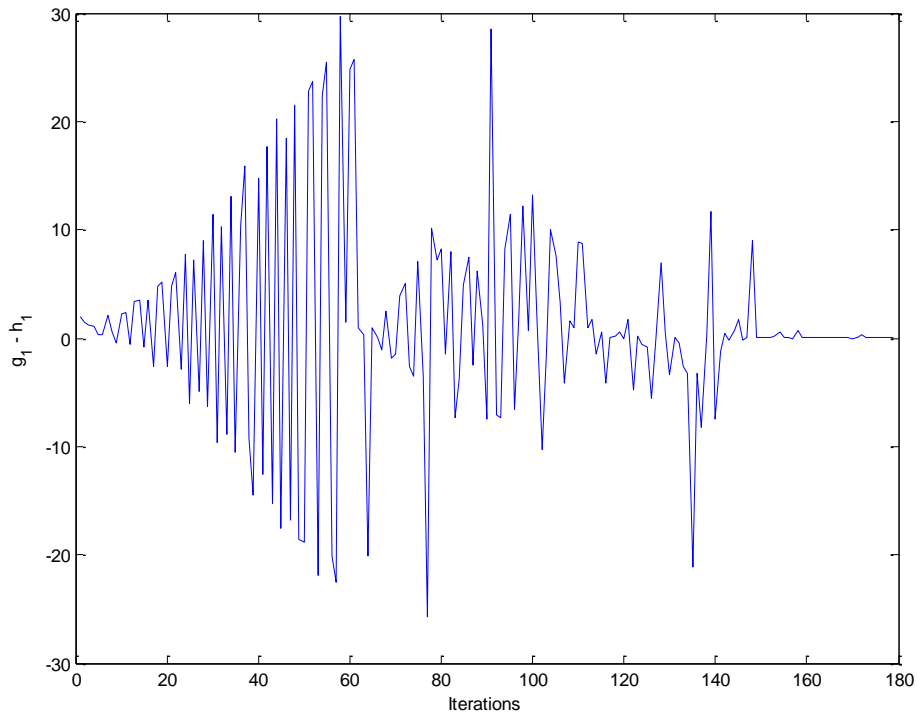
$$\tilde{V}_2 = 0.9409 \angle -7.4692^\circ = 0.9330 - j0.1223 \quad (3.12)$$

$$\tilde{V}_3 = 1.0000 \angle -2.7333^\circ = 0.9989 - j0.0476 \quad (3.13)$$

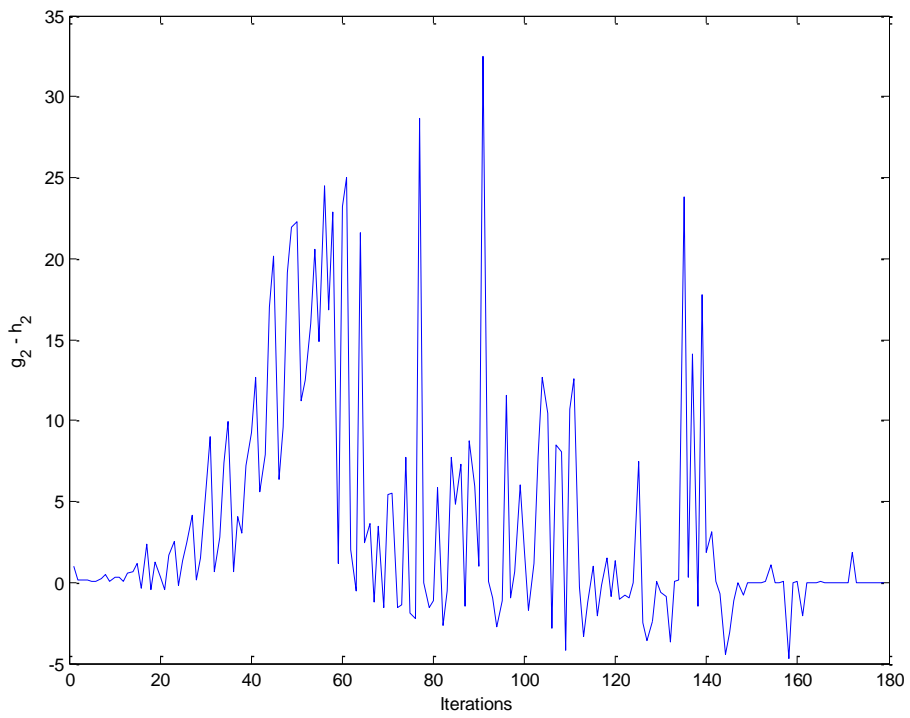
Σημειώνεται ότι, αφού έχουμε ένα ζυγό φορτίου PQ και ένα ζυγό παραγωγής PV, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα σύστημα τεσσάρων μη γραμμικών εξισώσεων (δύο εξισώσεις P, μια εξίσωση Q και μια εξίσωση V) τεσσάρων αγνώστων.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο X ορίστηκε ως $[0.75, 1.25] \times [0.75, 1.25] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ και το αντίστοιχο σύνολο Y υπολογίστηκε $[-0.9647, 322.2031] \times [7.2656, 328.1406] \times [1.3353, 322.2031] \times [1.0000, 2.5625]$.

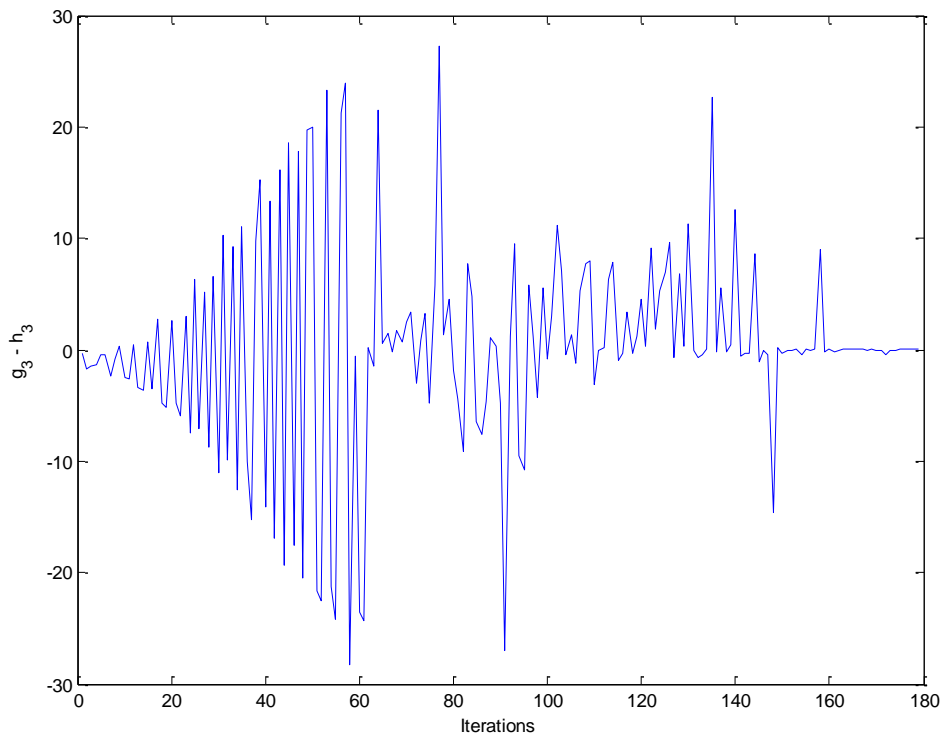
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



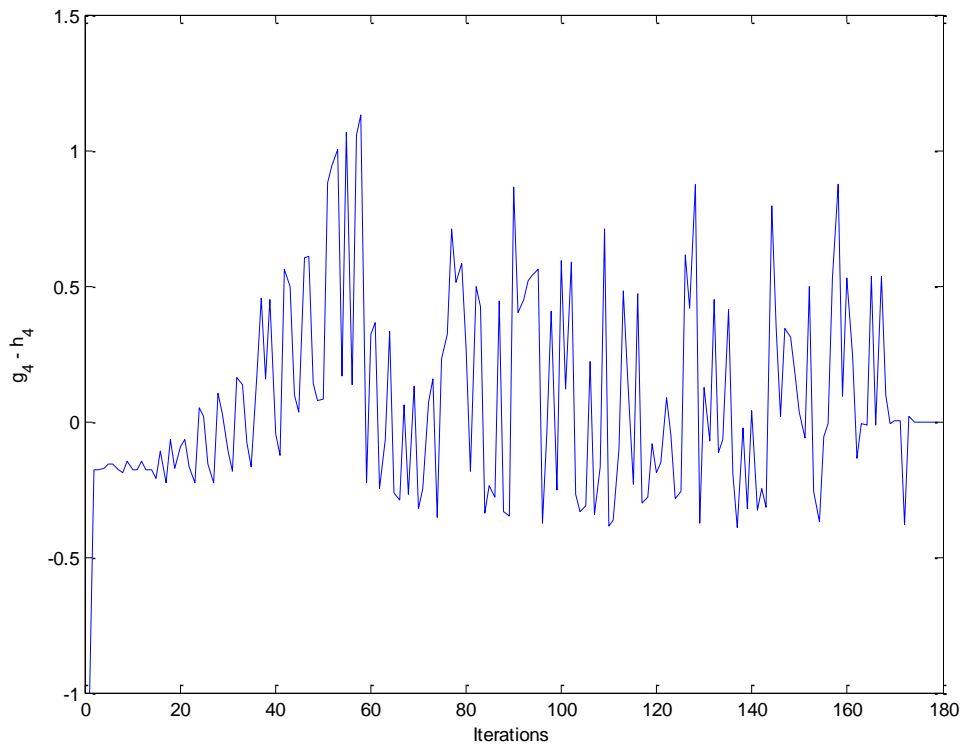
Σχήμα 3.2.3: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 - PQ)



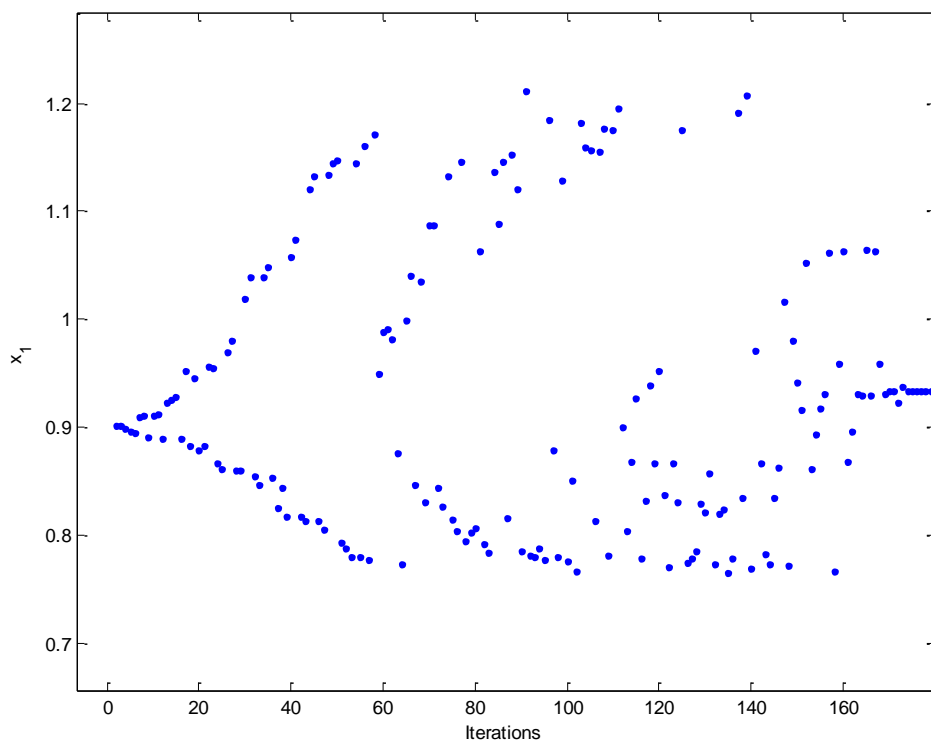
Σχήμα 3.2.4: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 2 - PQ)



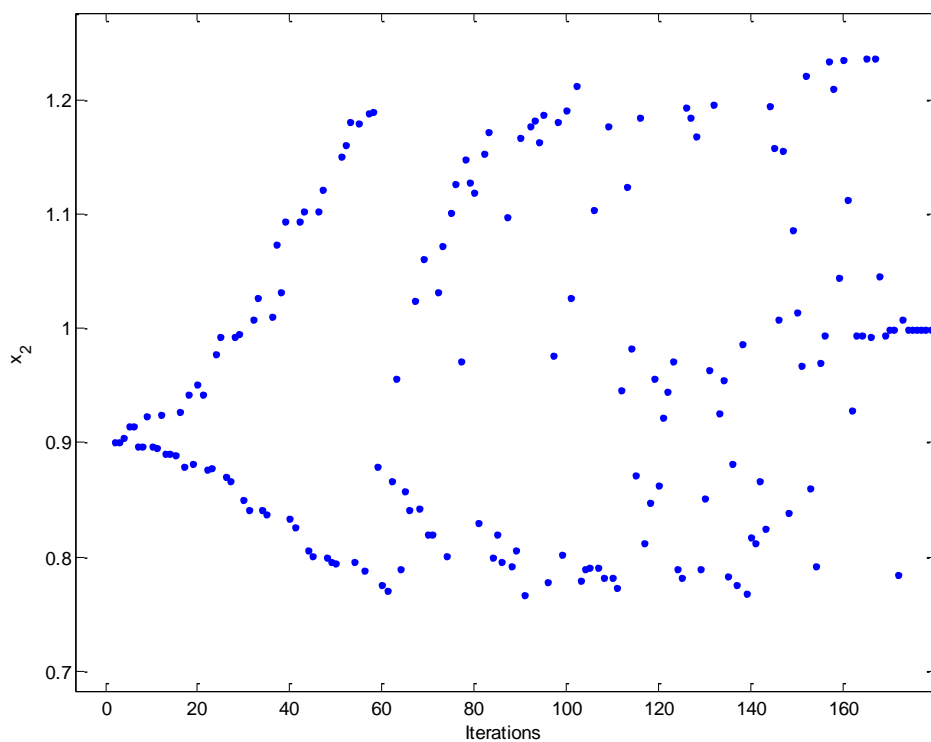
Σχήμα 3.2.5: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 - PV)



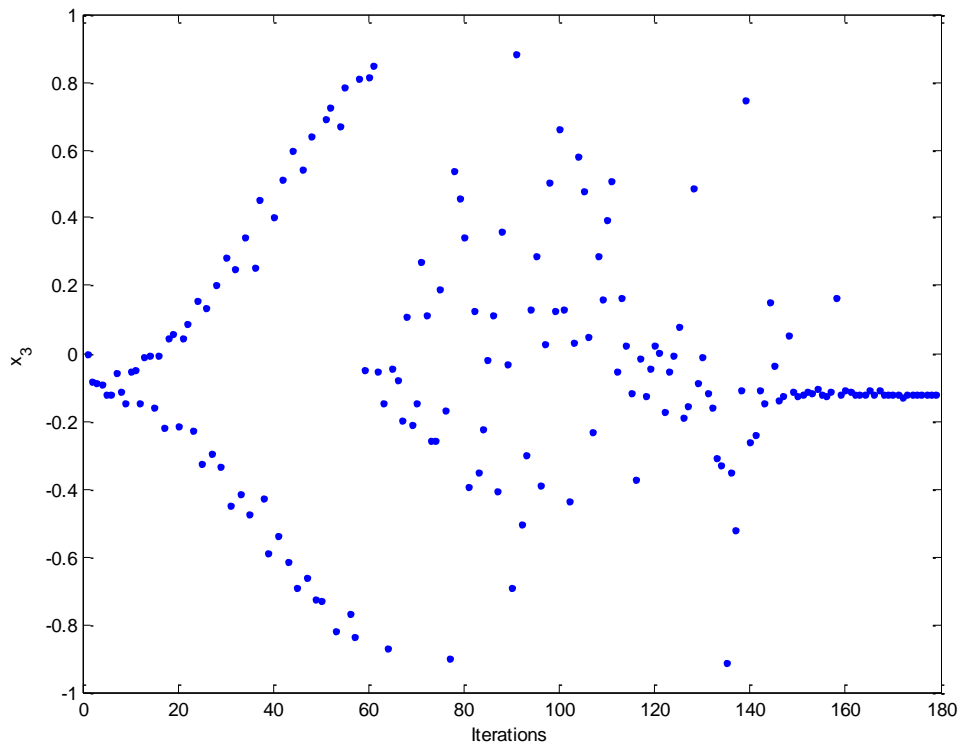
Σχήμα 3.2.6: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση V του ζυγού 3 - PV)



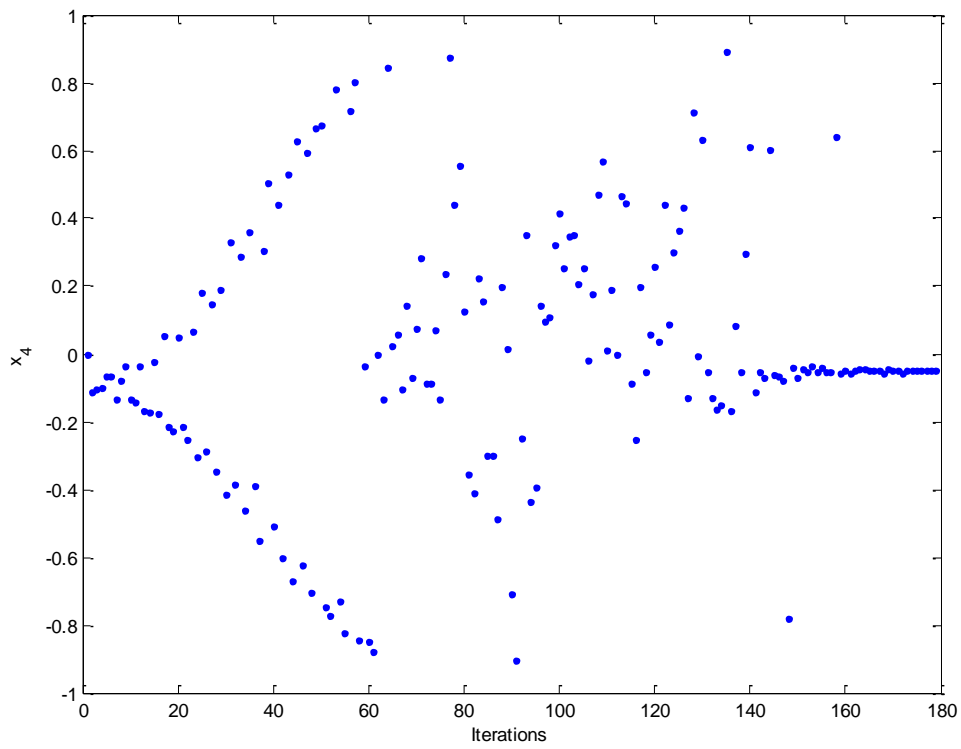
Σχήμα 3.2.7: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



Σχήμα 3.2.8: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



Σχήμα 3.2.9: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.2.10: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_2$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_3 = 0.9329 - j0.1223 = 0.9409 \angle -7.4687^\circ \quad (3.14)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_4 = 0.9988 - j0.0476 = 0.9999 \angle -2.7285^\circ \quad (3.15)$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν με αυτά τις προσομοίωσης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T \left(g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}] x \right) \text{ και } q_1 = -e_1^T \left(b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}] x \right)$$

Επομένως, για $x = [0.9329 \quad 0.9988 \quad -0.1223 \quad -0.0476]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 1.6989 \text{ αμ} = 169.89 \text{ MW} \text{ και } q_1 = 0.6824 \text{ αμ} = 68.24 \text{ MVar} \quad (3.16)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός φορτίου PQ):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 2$:

$$p_2 = -1.9994 \text{ αμ} = -199.94 \text{ MW} \text{ και } q_2 = -0.9999 \text{ αμ} = -99.99 \text{ MVar} \quad (3.17)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός παραγωγής PV):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 3$:

$$p_3 = 0.3005 \text{ αμ} = 30.05 \text{ MW} \text{ και } q_3 = 0.6338 \text{ αμ} = 63.38 \text{ MVar} \quad (3.18)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{f}_1$	$x_4 = \bar{f}_2$	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,0000	1,0000	-0,3000	-1,0000
2	0,9012	0,9004	-0,0811	-0,1129	1,4768	0,1570	-1,7166	-0,1765
3	0,9014	0,9003	-0,0886	-0,1052	1,2641	0,1852	-1,5026	-0,1783
4	0,8988	0,9038	-0,0924	-0,1006	1,1450	0,1224	-1,3756	-0,1730
5	0,8955	0,9144	-0,1202	-0,0669	0,2982	0,1026	-0,4697	-0,1593
6	0,8941	0,9147	-0,1210	-0,0659	0,2722	0,0813	-0,4419	-0,1589
7	0,9090	0,8971	-0,0571	-0,1326	2,1224	0,2700	-2,3190	-0,1776

8	0,9102	0,8965	-0,1117	-0,0773	0,5854	0,4709	-0,7750	-0,1902
9	0,8902	0,9238	-0,1447	-0,0372	-0,4538	0,0885	0,3345	-0,1452
10	0,9103	0,8965	-0,0528	-0,1361	2,2367	0,2937	-2,4258	-0,1778
11	0,9121	0,8957	-0,0474	-0,1406	2,3840	0,3258	-2,5633	-0,1779
12	0,8898	0,9246	-0,1469	-0,0346	-0,5199	0,0910	0,4053	-0,1439
13	0,9234	0,8909	-0,0125	-0,1692	3,3260	0,5741	-3,4426	-0,1777
14	0,9253	0,8900	-0,0064	-0,1742	3,4911	0,6252	-3,5968	-0,1775
15	0,9278	0,8890	-0,1576	-0,0216	-0,7770	1,1535	0,6852	-0,2093
16	0,8889	0,9267	-0,0049	-0,1754	3,4661	-0,3312	-3,5691	-0,1104
17	0,9519	0,8786	-0,2207	0,0549	-2,6680	2,3359	2,7103	-0,2251
18	0,8822	0,9423	0,0436	-0,2152	4,7443	-0,4370	-4,7604	-0,0658
19	0,9456	0,8813	0,0565	-0,2258	5,1993	1,2860	-5,1921	-0,1723
20	0,8786	0,9508	-0,2156	0,0488	-2,6347	0,3333	2,6662	-0,0936
21	0,8821	0,9427	0,0448	-0,2162	4,7764	-0,4379	-4,7903	-0,0646
22	0,9557	0,8769	0,0879	-0,2515	6,0527	1,7053	-5,9893	-0,1677
23	0,9549	0,8773	-0,2284	0,0643	-2,9020	2,5008	2,9608	-0,2262
24	0,8669	0,9780	0,1546	-0,3063	7,7139	-0,1656	-7,5307	0,0504
25	0,8606	0,9926	-0,3252	0,1816	-6,0422	1,3696	6,3067	0,0183
26	0,9701	0,8707	0,1325	-0,2882	7,2751	2,4083	-7,1316	-0,1588
27	0,9807	0,8661	-0,2960	0,1462	-4,9572	4,1196	5,1597	-0,2284
28	0,8604	0,9932	0,2017	-0,3449	8,9879	0,1656	-8,7203	0,1054
29	0,8593	0,9956	-0,3331	0,1913	-6,2917	1,4762	6,5732	0,0279
30	1,0193	0,8495	0,2848	-0,4132	11,4793	5,7263	-11,0625	-0,1076
31	1,0390	0,8410	-0,4484	0,3311	-9,6959	8,9701	10,2226	-0,1831
32	0,8539	1,0082	0,2485	-0,3834	10,2645	0,6227	-9,9128	0,1635
33	0,8461	1,0263	-0,4135	0,2888	-8,8230	2,7879	9,2756	0,1367
34	1,0384	0,8413	0,3441	-0,4618	13,1309	7,4027	-12,6078	-0,0790
35	1,0487	0,8368	-0,4736	0,3617	-10,4928	9,9320	11,0732	-0,1689
36	0,8530	1,0103	0,2549	-0,3886	10,4395	0,6950	-10,0763	0,1717
37	0,8257	1,0737	0,4521	-0,5504	15,9215	4,0908	-15,2045	0,4559
38	0,8440	1,0314	-0,4268	0,3048	-9,2414	3,0447	9,7220	0,1566
39	0,8171	1,0939	-0,5907	0,5036	-14,4828	7,1964	15,3121	0,4502
40	1,0573	0,8331	0,4028	-0,5099	14,7754	9,2759	-14,1470	-0,0459
41	1,0736	0,8261	-0,5388	0,4408	-12,5719	12,6304	13,2909	-0,1233
42	0,8171	1,0938	0,5146	-0,6017	17,6922	5,6378	-16,8630	0,5586
43	0,8134	1,1026	-0,6135	0,5312	-15,2193	7,9152	16,0971	0,4979
44	1,1200	0,8061	0,5969	-0,6693	20,2769	16,9810	-19,3001	0,0977
45	1,1320	0,8009	-0,6915	0,6259	-17,5384	20,1344	18,5822	0,0332
46	0,8135	1,1022	0,5405	-0,6230	18,4305	6,3451	-17,5549	0,6029
47	0,8052	1,1215	-0,6632	0,5916	-16,8334	9,6043	17,8170	0,6078
48	1,1345	0,7998	0,6418	-0,7061	21,5627	19,0929	-20,5053	0,1383
49	1,1444	0,7955	-0,7240	0,6653	-18,6126	21,9448	19,7255	0,0754
50	1,1467	0,7945	-0,7300	0,6726	-18,8139	22,2911	19,9396	0,0837
51	0,7928	1,1504	0,6903	-0,7459	22,7578	11,2024	-21,6135	0,8797

52	0,7882	1,1611	0,7237	-0,7733	23,7353	12,4629	-22,5310	0,9461
53	0,7797	1,1808	-0,8185	0,7799	-21,9316	15,9390	23,2456	1,0025
54	1,1441	0,7957	0,6718	-0,7307	22,4230	20,5702	-21,3119	0,1670
55	0,7800	1,1802	0,7832	-0,8221	25,4866	14,8667	-24,1756	1,0687
56	1,1613	0,7883	-0,7680	0,7186	-20,0789	24,5191	21,2854	0,1378
57	0,7765	1,1883	-0,8381	0,8037	-22,5810	16,8522	23,9367	1,0579
58	1,1711	1,1897	0,8125	-0,8462	29,7013	22,8653	-28,3376	1,1314
59	0,9493	0,8797	-0,0490	-0,0352	1,4125	1,2105	-0,5546	-0,2249
60	0,9879	0,7756	0,8163	-0,8493	24,8846	23,2390	-23,5141	0,3228
61	0,9912	0,7708	0,8503	-0,8771	25,7507	25,0133	-24,3193	0,3636
62	0,9809	0,8661	-0,0530	-0,0007	1,0181	1,9955	0,1455	-0,2499
63	0,8764	0,9558	-0,1470	-0,1354	0,3104	-0,5448	-1,4345	-0,0682
64	0,7725	0,7894	-0,8711	0,8436	-20,1040	21,6363	21,5298	0,3348
65	0,9991	0,8582	-0,0458	0,0239	0,9105	2,4524	0,5704	-0,2629
66	1,0398	0,8407	-0,0768	0,0554	0,0100	3,6440	1,4759	-0,2902
67	0,8468	1,0247	-0,1959	-0,1060	-1,0692	-1,2436	-0,2499	0,0613
68	1,0353	0,8426	0,1066	0,1408	2,5055	3,4372	1,6684	-0,2702
69	0,8311	1,0613	-0,2127	-0,0713	-1,7921	-1,5632	0,6523	0,1314
70	1,0875	0,8201	-0,1465	0,0761	-1,4933	5,4005	2,4891	-0,3217
71	1,0872	0,8202	0,2704	0,2816	3,8598	5,5513	3,3602	-0,2479
72	0,8440	1,0313	0,1136	-0,0854	5,0283	-1,5431	-3,0469	0,0710
73	0,8266	1,0718	-0,2591	-0,0880	-2,6394	-1,3461	0,8685	0,1565
74	1,1320	0,8009	-0,2583	0,0721	-3,4682	7,7629	3,3066	-0,3534
75	0,8139	1,1013	0,1903	-0,1326	7,0776	-1,8768	-4,8012	0,2304
76	0,8032	1,1263	-0,1699	0,2346	-3,4962	-2,2006	5,8428	0,3236
77	1,1460	0,9711	-0,8981	0,8764	-25,7451	28,6771	27,2282	0,7111
78	0,7938	1,1481	0,5402	0,4401	10,1096	0,0084	1,3932	0,5119
79	0,8024	1,1280	0,4571	0,5546	7,2761	-1,5540	4,5403	0,5799
80	0,8063	1,1190	0,3431	0,1254	8,2588	-1,1593	-1,8738	0,2679
81	1,0637	0,8304	-0,3916	-0,3534	-1,4085	5,8412	-4,3418	-0,1856
82	0,7918	1,1528	0,1276	-0,4088	7,9830	-2,6599	-9,0950	0,4960
83	0,7835	1,1721	-0,3505	0,2219	-7,3524	-0,5065	7,7667	0,4231
84	1,1362	0,7991	-0,2217	0,1557	-3,7575	7,7067	4,7983	-0,3372
85	1,0886	0,8196	-0,0176	-0,2984	4,9289	4,8452	-6,3891	-0,2391
86	1,1453	0,7952	0,1145	-0,3000	7,4917	7,2798	-7,6464	-0,2777
87	0,8156	1,0973	-0,4066	-0,4883	-2,5445	-1,4812	-4,7037	0,4426
88	1,1523	0,7921	0,3601	0,1983	6,1693	8,7865	1,1148	-0,3332
89	1,1202	0,8060	-0,0338	0,0136	1,2379	5,8949	0,2606	-0,3502
90	0,7854	1,1676	-0,6924	-0,7071	-7,4548	1,0060	-4,8407	0,8632
91	1,2119	0,7664	0,8819	-0,9031	28,5230	32,4865	-27,0349	0,4030
92	0,7814	1,1770	-0,5047	-0,2502	-7,0328	0,0331	1,1835	0,4478
93	0,7793	1,1818	-0,3011	0,3530	-7,3205	-0,9804	9,5398	0,5213
94	0,7873	1,1632	0,1299	-0,4342	8,2289	-2,7322	-9,5712	0,5415
95	0,7772	1,1866	0,2887	-0,3938	11,3734	-1,1093	-10,7248	0,5631

96	1,1846	0,7782	-0,3875	0,1407	-6,5576	11,5508	5,7889	-0,3746
97	0,8791	0,9761	0,0257	0,0961	1,6630	-0,9268	1,2544	-0,0380
98	0,7799	1,1805	0,5028	0,1067	12,1304	0,6781	-4,3357	0,4049
99	1,1288	0,8023	0,1256	0,3202	0,6496	6,0515	5,5078	-0,2538
100	0,7752	1,1914	0,6611	0,4168	13,2572	2,0180	-0,7783	0,5930
101	0,8502	1,0265	0,1317	0,2515	2,5306	-1,7567	3,0019	0,1170
102	0,7663	1,2120	-0,4375	0,3469	-10,3354	1,1394	11,1292	0,5893
103	1,1823	0,7792	0,0335	0,3495	-1,5355	7,8251	7,0664	-0,2706
104	1,1587	0,7894	0,5798	0,2078	9,9667	12,6376	-0,3905	-0,3337
105	1,1567	0,7902	0,4782	0,2512	7,6550	10,4247	1,3391	-0,3124
106	0,8126	1,1043	0,0492	-0,0197	3,1954	-2,8352	-1,2004	0,2199
107	1,1548	0,7911	-0,2324	0,1766	-4,2019	8,4784	5,3439	-0,3430
108	1,1770	0,7815	0,2862	0,4694	1,5738	8,0334	7,6828	-0,1689
109	0,7816	1,1765	0,1598	0,5702	1,0210	-4,1944	7,9781	0,7093
110	1,1756	0,7821	0,3922	0,0104	8,8678	10,7254	-3,1420	-0,3882
111	1,1956	0,7735	0,5087	0,1909	8,7397	12,5916	-0,0432	-0,3653
112	0,8996	0,9465	-0,0550	-0,0014	0,9417	-0,2652	0,1943	-0,1041
113	0,8040	1,1244	0,1635	0,4662	1,7240	-3,3799	6,2731	0,4817
114	0,8682	0,9822	0,0229	0,4465	-1,4219	-1,2257	7,8160	0,1641
115	0,9261	0,8711	-0,1157	-0,0864	0,6360	0,9924	-0,9565	-0,2337
116	0,7778	1,1853	-0,3739	-0,2522	-4,2088	-2,0443	-0,3525	0,4684
117	0,8316	0,8120	-0,0143	0,1961	0,1093	-0,2053	3,4086	-0,3022
118	0,9392	0,8473	-0,1253	-0,0538	0,1916	1,5380	-0,2826	-0,2792
119	0,8665	0,9563	-0,0438	0,0591	0,6309	-0,8703	1,2215	-0,0820
120	0,9522	0,8626	0,0250	0,2596	-0,0050	1,3460	4,5511	-0,1886
121	0,8374	0,9214	0,0001	0,0372	1,6913	-1,0658	0,3818	-0,1496
122	0,7698	0,9451	-0,1710	0,4416	-4,7249	-0,7823	9,1311	0,0882
123	0,8661	0,9711	-0,0513	0,0868	0,2382	-0,9710	1,8168	-0,0495
124	0,8305	0,7899	-0,0060	0,2999	-0,5987	-0,0516	5,2376	-0,2862
125	1,1750	0,7824	0,0802	0,3627	-0,8329	7,5068	6,9618	-0,2563
126	0,7741	1,1940	-0,1898	0,4328	-5,5132	-2,4578	9,6434	0,6129
127	0,7782	1,1843	-0,1570	-0,1301	-0,4167	-3,5974	-0,7545	0,4195
128	0,7852	1,1681	0,4860	0,7143	6,9279	-2,4410	6,7755	0,8747
129	0,8287	0,7899	-0,0885	-0,0073	0,4759	0,0528	0,2655	-0,3760
130	0,8211	0,8513	-0,0096	0,6320	-3,3666	-0,6539	11,2906	0,1240
131	0,8578	0,9633	-0,1184	-0,0520	0,1208	-0,9053	-0,1252	-0,0694
132	0,7733	1,1959	-0,1599	-0,1310	-0,4993	-3,7188	-0,7095	0,4472
133	0,8204	0,9256	-0,3087	-0,1650	-2,5904	0,0597	-0,4469	-0,1159
134	0,8232	0,9554	-0,3303	-0,1522	-3,2053	0,1353	0,0804	-0,0641
135	0,7644	0,7829	-0,9120	0,8932	-21,0870	23,8377	22,5997	0,4107
136	0,7787	0,8811	-0,3504	-0,1698	-3,2688	0,3397	-0,2335	-0,1948
137	1,1917	0,7751	-0,5228	0,0825	-8,2638	14,1467	5,5611	-0,3923
138	0,8339	0,9861	-0,1074	-0,0527	0,3052	-1,4804	-0,2064	-0,0248
139	1,2077	0,7682	0,7469	0,2948	11,6461	17,7714	0,4705	-0,3229

140	0,7686	0,8170	-0,2621	0,6103	-7,4532	1,8232	12,6359	0,0400
141	0,9710	0,8119	-0,2384	-0,1127	-1,2247	3,1321	-0,5856	-0,3282
142	0,8660	0,8663	-0,1099	-0,0521	0,3991	0,0213	-0,3193	-0,2468
143	0,7826	0,8242	-0,1464	-0,0685	-0,1345	-0,6983	-0,3141	-0,3160
144	0,7736	1,1951	0,1522	0,6040	0,6674	-4,4678	8,5943	0,7930
145	0,8346	1,1576	-0,0354	-0,0633	1,7642	-3,0737	-1,0509	0,3440
146	0,8626	1,0073	-0,1394	-0,0656	-0,2327	-1,1359	-0,1182	0,0189
147	1,0160	1,1560	-0,1258	-0,0767	0,0670	-0,0406	-0,3915	0,3423
148	0,7719	0,8388	0,0547	-0,7800	9,0262	-0,7909	-14,5801	0,3120
149	0,9801	1,0857	-0,1128	-0,0399	0,0390	-0,0208	0,1342	0,1802
150	0,9413	1,0139	-0,1256	-0,0689	0,1195	-0,0064	-0,3637	0,0327
151	0,9162	0,9670	-0,1212	-0,0468	0,0449	0,0042	-0,0244	-0,0627
152	1,0521	1,2217	-0,1131	-0,0537	0,0530	-0,0412	-0,0212	0,4955
153	0,8610	0,8604	-0,1169	-0,0352	0,1281	0,0412	0,0502	-0,2585
154	0,8927	0,7921	-0,1048	-0,0534	0,5987	1,1040	-0,4812	-0,3697
1551	0,9179	0,9697	-0,1196	-0,0421	0,0304	0,0059	0,0519	-0,0579
56	0,9303	0,9937	-0,1243	-0,0523	0,0077	0,0049	-0,0734	-0,0097
157	1,0618	1,2345	-0,1148	-0,0524	-0,0091	0,0252	0,0363	0,5268
158	0,7670	1,2105	0,1646	0,6415	0,7187	-4,7031	9,0424	0,8769
159	0,9588	1,0446	-0,1204	-0,0556	0,0702	0,0056	-0,1304	0,0943
160	1,0631	1,2349	-0,1090	-0,0493	0,0876	0,0289	0,0286	0,5275
161	0,8675	1,1124	-0,1133	-0,0587	0,1152	-2,0843	-0,1354	0,2409
162	0,8960	0,9288	-0,1223	-0,0505	0,0928	0,0115	-0,1217	-0,1347
163	0,9308	0,9941	-0,1207	-0,0464	0,0261	0,0024	0,0028	-0,0097
164	0,9295	0,9934	-0,1208	-0,0465	0,0242	-0,0130	0,0026	-0,0110
165	1,0639	1,2369	-0,1103	-0,0496	0,0597	0,0275	0,0413	0,5323
166	0,9291	0,9932	-0,1218	-0,0470	0,0092	-0,0145	0,0031	-0,0113
167	1,0628	1,2370	-0,1102	-0,0493	0,0592	0,0048	0,0463	0,5327
168	0,9591	1,0454	-0,1210	-0,0554	0,0574	0,0055	-0,1211	0,0960
169	0,9307	0,9945	-0,1219	-0,0465	0,0020	0,0015	0,0147	-0,0087
170	0,9330	0,9992	-0,1230	-0,0488	-0,0048	0,0009	-0,0132	0,0007
171	0,9333	0,9994	-0,1221	-0,0481	0,0068	0,0005	-0,0094	0,0012
172	0,9226	0,7838	-0,1277	-0,0587	0,2624	1,8166	-0,4265	-0,3821
173	0,9378	1,0074	-0,1218	-0,0486	0,0107	0,0007	-0,0144	0,0173
174	0,9329	0,9987	-0,1223	-0,0479	0,0026	0,0002	-0,0044	-0,0003
175	0,9329	0,9988	-0,1223	-0,0476	0,0006	0,0001	0,0005	-0,0001
176	0,9329	0,9988	-0,1223	-0,0476	0,0006	0,0001	0,0005	-0,0001
177	0,9329	0,9988	-0,1223	-0,0476	0,0006	0,0001	0,0005	-0,0001
178	0,9329	0,9988	-0,1223	-0,0476	0,0006	0,0001	0,0005	-0,0001
179	0,9329	0,9988	-0,1223	-0,0476	0,0006	0,0001	0,0005	-0,0001

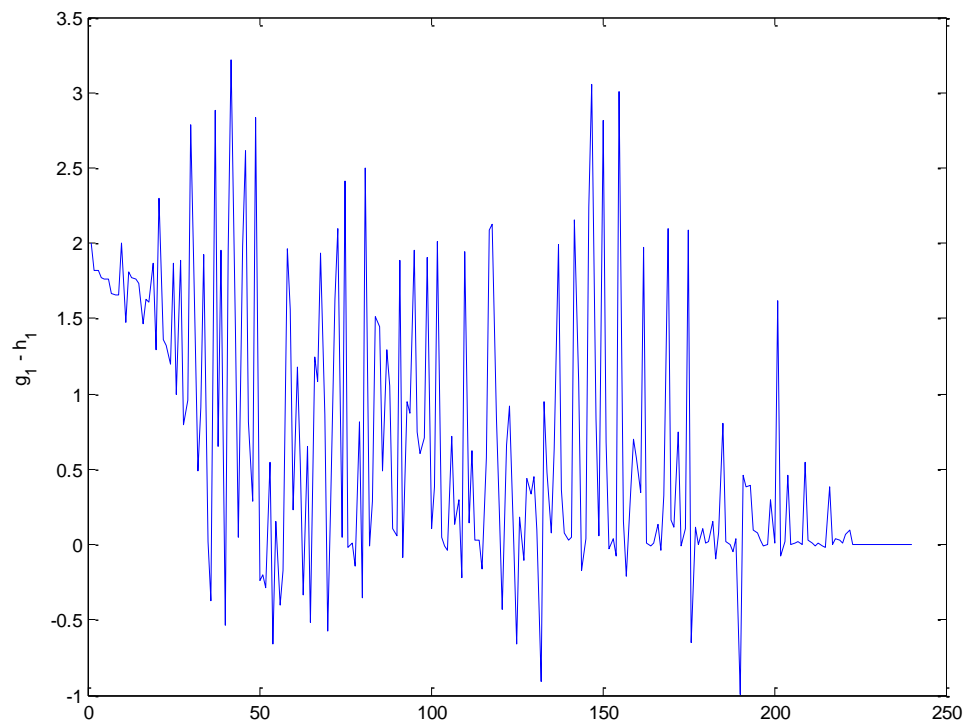
Πίνακας 3.2.1: Οι τιμές των μεταβλητών και των DC συναρτήσεων

Στη συνέχεια, δοκιμάστηκε ένα διαφορετικό επιτρεπτό σύνολο για τις άγνωστες μεταβλητές ώστε να αναζητηθεί μια δεύτερη λύση.

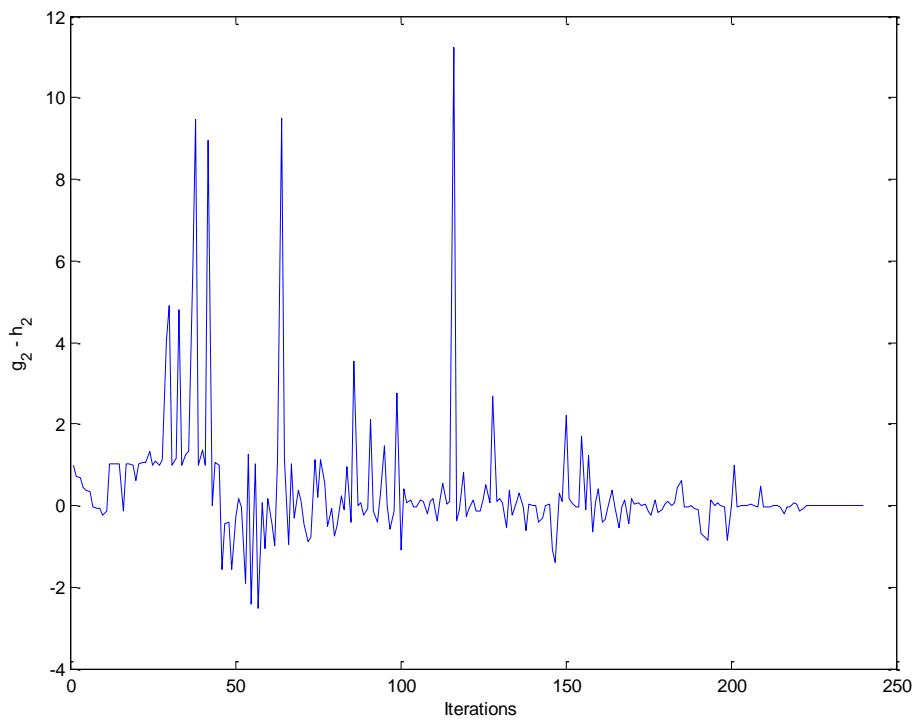
Συγκεκριμένα, το νέο σύνολο X ορίστηκε ως $[0,1.05] \times [0,1.05] \times [-0.15,0] \times [-0.15,0]$ ενώ το αντίστοιχο νέο σύνολο Y υπολογίστηκε

$$[-1.2361,111.8756] \times [0,124.0313] \times [0.3000,113.0813] \times [1.0000,1.1250] .$$

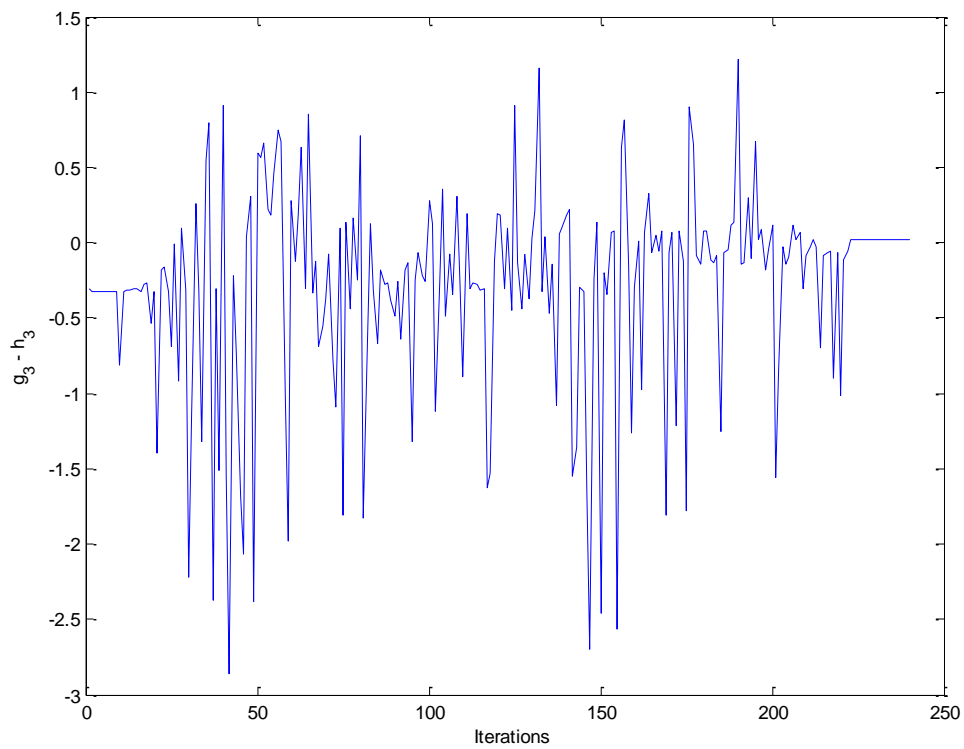
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



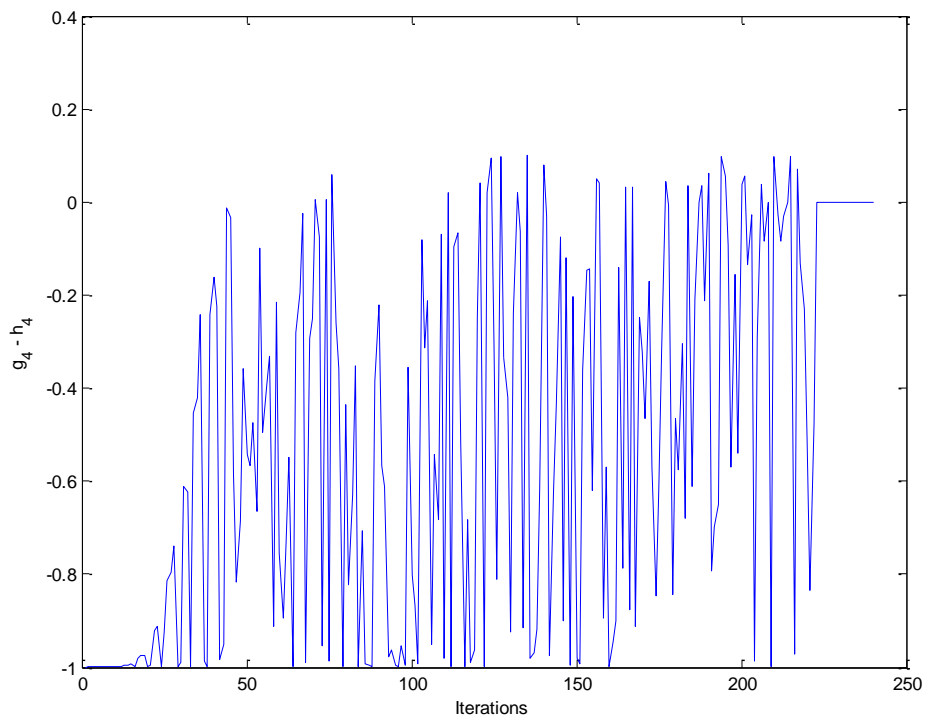
Σχήμα 3.2.11: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 - PQ)



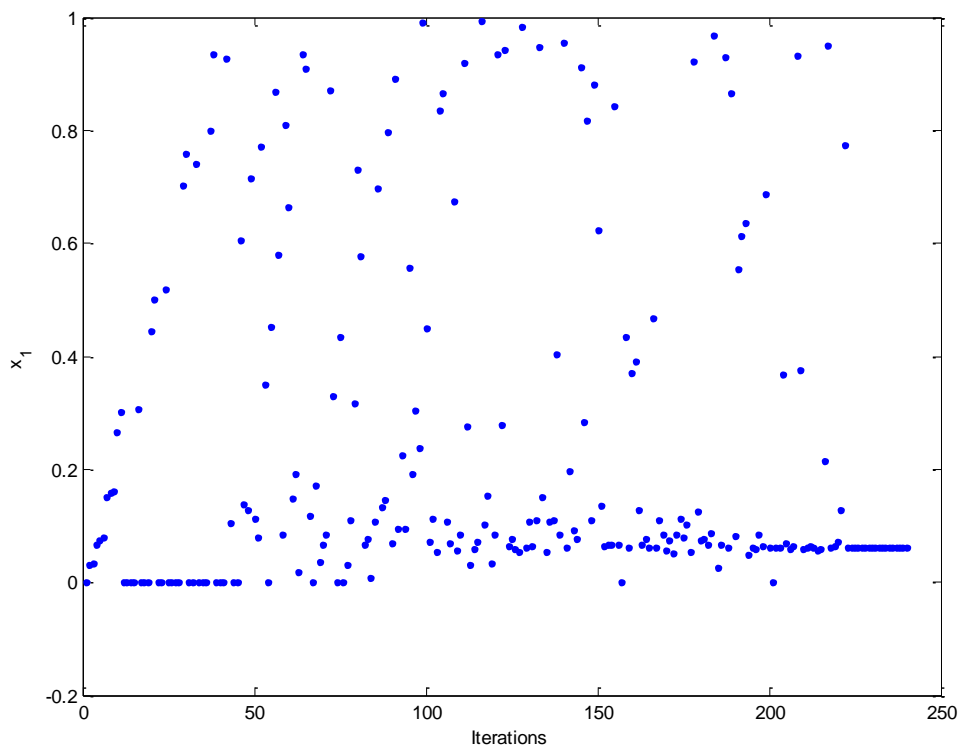
Σχήμα 3.2.12: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 2 - PQ)



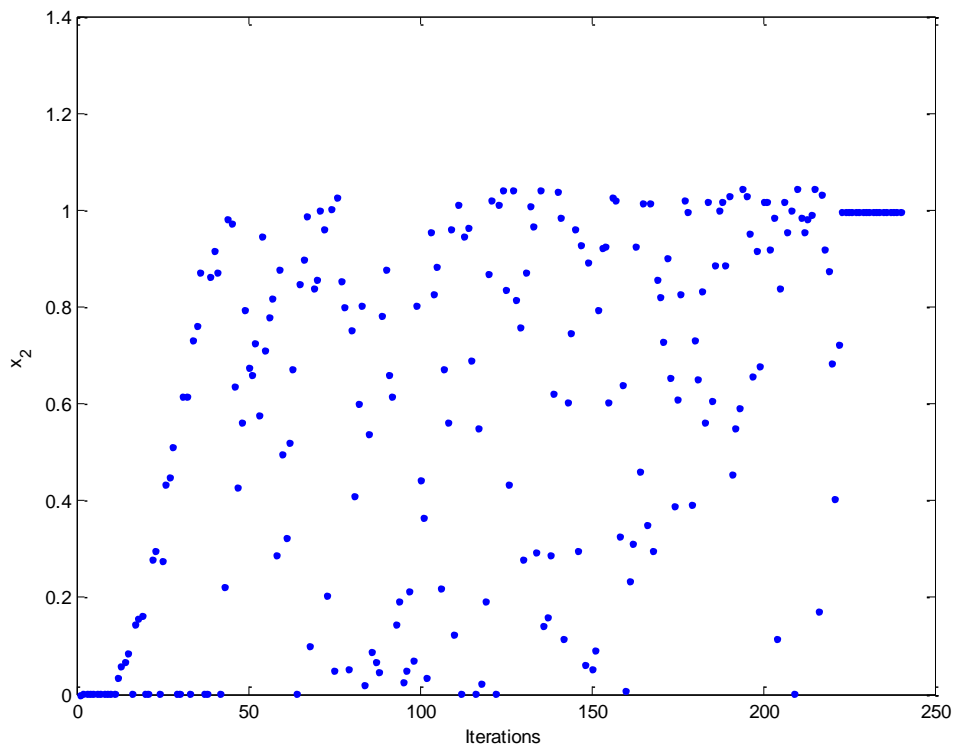
Σχήμα 3.2.13: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 - PV)



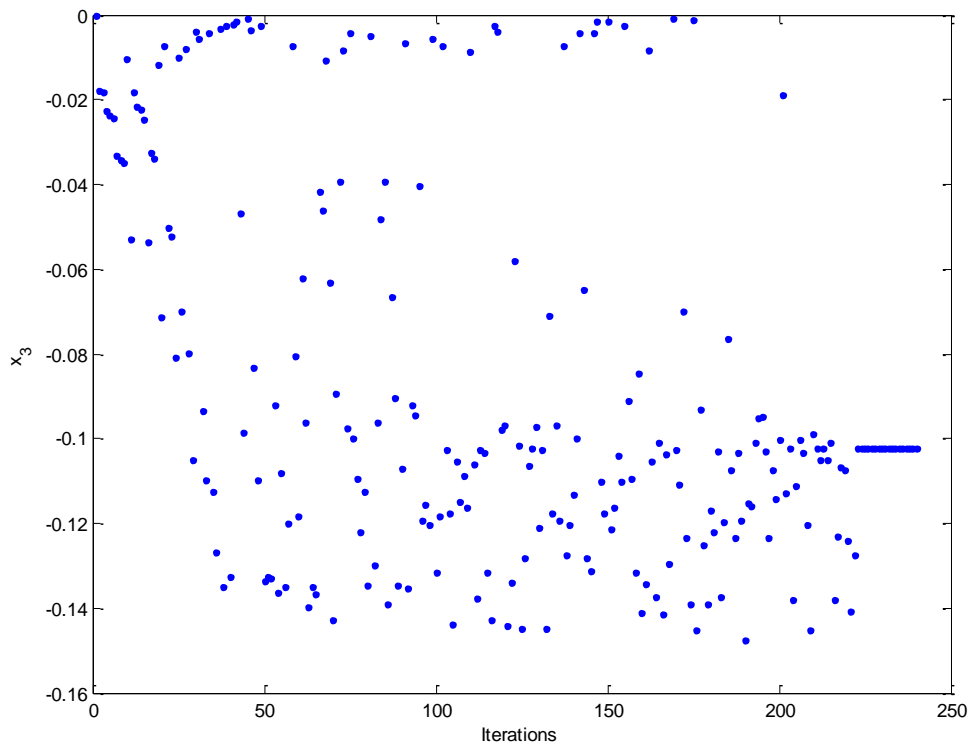
Σχήμα 3.2.14: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση V του ζυγού 3 - PV)



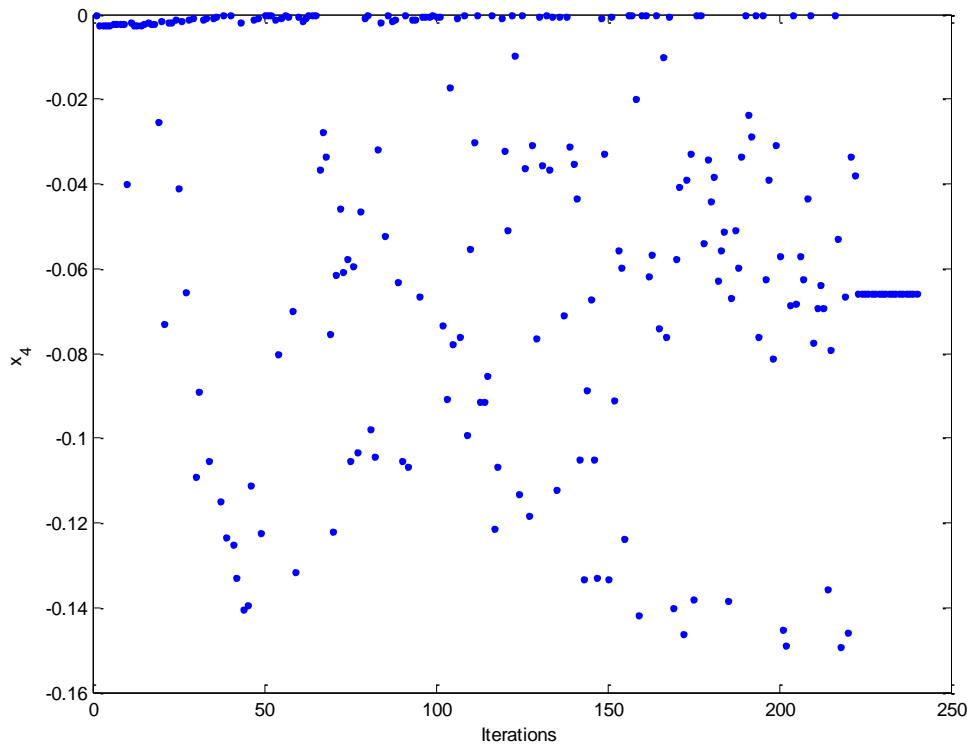
Σχήμα 3.2.15: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



Σχήμα 3.2.16: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



Σχήμα 3.2.17: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.2.18: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_2$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_3 = 0.0610 - j0.1022 = 0.1190 \angle -59.1683^\circ \quad (3.19)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_4 = 0.9974 - j0.0658 = 0.9996 \angle -3.7744^\circ \quad (3.20)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T \left(g_1 + \begin{bmatrix} \bar{G} & -\bar{B} \end{bmatrix} x \right) \text{ και } q_1 = -e_1^T \left(b_1 + \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{G} \end{bmatrix} x \right)$$

Επομένως, για $x = [0.0610 \quad 0.9974 \quad -0.1022 \quad -0.0658]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 1.6797 \text{ αμ} = 167.97 \text{ MW} \text{ και } q_1 = 9.4165 \text{ αμ} = 941.65 \text{ MVar} \quad (3.21)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός φορτίου PQ):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9) , για $k = 2$:

$$p_2 = -2.0015 \alpha\mu = -200.15MW \text{ και } q_2 = -1.0017 \alpha\mu = -100.17MVAr \quad (3.22)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός παραγωγής PV):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9) , για $k = 3$:

$$p_3 = 0.3218 \alpha\mu = 32.18MW \text{ και } q_3 = 9.3326 \alpha\mu = 933.26MVAr \quad (3.23)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{f}_1$	$x_4 = \bar{f}_2$	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,0000	1,0000	-0,3000	-1,0000
2	0,0312	0,0000	-0,0178	-0,0025	1,8227	0,7130	-0,3258	-1,0000
3	0,0339	0,0000	-0,0182	-0,0025	1,8192	0,6898	-0,3258	-1,0000
4	0,0675	0,0000	-0,0225	-0,0024	1,7765	0,4260	-0,3257	-1,0000
5	0,0753	0,0000	-0,0235	-0,0024	1,7665	0,3709	-0,3257	-1,0000
6	0,0808	0,0000	-0,0242	-0,0024	1,7595	0,3338	-0,3257	-1,0000
7	0,1499	0,0000	-0,0332	-0,0022	1,6712	-0,0282	-0,3254	-1,0000
8	0,1579	0,0000	-0,0342	-0,0022	1,6610	-0,0575	-0,3253	-1,0000
9	0,1618	0,0000	-0,0347	-0,0022	1,6560	-0,0709	-0,3253	-1,0000
10	0,2672	0,0000	-0,0103	-0,0401	2,0045	-0,2461	-0,8080	-0,9984
11	0,3015	0,0000	-0,0529	-0,0018	1,4767	-0,1420	-0,3239	-1,0000
12	0,0000	0,0353	-0,0183	-0,0025	1,8101	1,0063	-0,3184	-0,9987
13	0,0000	0,0596	-0,0215	-0,0024	1,7723	1,0087	-0,3115	-0,9964
14	0,0000	0,0666	-0,0224	-0,0024	1,7611	1,0095	-0,3092	-0,9956
15	0,0000	0,0837	-0,0246	-0,0024	1,7333	1,0115	-0,3031	-0,9930
16	0,3068	0,0000	-0,0536	-0,0018	1,4700	-0,1292	-0,3238	-1,0000
17	0,0000	0,1437	-0,0324	-0,0022	1,6295	1,0203	-0,2757	-0,9794
18	0,0000	0,1553	-0,0339	-0,0022	1,6083	1,0222	-0,2693	-0,9759
19	0,0000	0,1617	-0,0116	-0,0253	1,8648	0,9998	-0,5339	-0,9732
20	0,4437	0,0000	-0,0713	-0,0015	1,2933	0,6010	-0,3215	-1,0000
21	0,5021	0,0000	-0,0072	-0,0731	2,2951	1,0169	-1,3976	-0,9947
22	0,0000	0,2799	-0,0501	-0,0019	1,3592	1,0492	-0,1788	-0,9217
23	0,0000	0,2974	-0,0524	-0,0018	1,3208	1,0538	-0,1627	-0,9115
24	0,5176	0,0000	-0,0809	-0,0013	1,1975	1,3126	-0,3198	-1,0000
25	0,0000	0,2745	-0,0102	-0,0411	1,8705	0,9979	-0,6833	-0,9230
26	0,0000	0,4329	-0,0699	-0,0015	0,9979	1,0968	-0,0124	-0,8126
27	0,0000	0,4474	-0,0079	-0,0654	1,8857	0,9961	-0,9187	-0,7955
28	0,0000	0,5101	-0,0799	-0,0013	0,7929	1,1267	0,0945	-0,7398
29	0,7023	0,0000	-0,1049	-0,0009	0,9572	4,0603	-0,3145	-1,0000

30	0,7579	0,0000	-0,0038	-0,1090	2,7878	4,9062	-2,2160	-0,9881
31	0,0000	0,6164	-0,0057	-0,0891	1,9082	0,9956	-1,1562	-0,6121
32	0,0000	0,6145	-0,0935	-0,0011	0,4907	1,1738	0,2637	-0,6224
33	0,7398	0,0000	-0,1098	-0,0008	0,9081	4,7887	-0,3132	-1,0000
34	0,0000	0,7311	-0,0042	-0,1052	1,9277	0,9960	-1,3216	-0,4545
35	0,0000	0,7610	-0,1125	-0,0007	0,0189	1,2523	0,5490	-0,4209
36	0,0000	0,8702	-0,1267	-0,0004	-0,3692	1,3204	0,7980	-0,2427
37	0,8001	0,0000	-0,0033	-0,1149	2,8868	5,7994	-2,3687	-0,9868
38	0,9341	0,0000	-0,1350	-0,0003	0,6531	9,4735	-0,3055	-1,0000
39	0,0000	0,8611	-0,0025	-0,1235	1,9539	0,9971	-1,5135	-0,2432
40	0,0000	0,9152	-0,1325	-0,0003	-0,5377	1,3507	0,9093	-0,1625
41	0,0000	0,8719	-0,0023	-0,1250	1,9563	0,9972	-1,5296	-0,2241
42	0,9282	0,0000	-0,0016	-0,1329	3,2175	8,9459	-2,8624	-0,9823
43	0,1045	0,2232	-0,0470	-0,0019	1,4275	-0,0163	-0,2167	-0,9502
44	0,0000	0,9830	-0,0986	-0,1406	0,0443	1,0559	-0,7364	-0,0140
45	0,0000	0,9739	-0,0010	-0,1393	1,9803	0,9986	-1,6834	-0,0322
46	0,6061	0,6354	-0,0036	-0,1113	2,6154	-1,5688	-2,0644	-0,5839
47	0,1386	0,4280	-0,0833	-0,0013	0,8126	-0,4576	0,0420	-0,8169
48	0,1270	0,5603	-0,1099	-0,0008	0,2856	-0,4179	0,3074	-0,6861
49	0,7163	0,7926	-0,0026	-0,1225	2,8315	-1,5817	-2,3822	-0,3568
50	0,1132	0,6753	-0,1335	-0,0003	-0,2356	-0,2848	0,5978	-0,5440
51	0,0793	0,6588	-0,1325	-0,0003	-0,1983	0,1615	0,5696	-0,5660
52	0,7720	0,7245	-0,1330	-0,0003	-0,2914	-0,0399	0,6580	-0,4752
53	0,3489	0,5777	-0,0922	-0,0011	0,5485	-1,9010	0,2182	-0,6662
54	0,0000	0,9457	-0,1365	-0,0803	-0,6553	1,2629	0,1878	-0,0992
55	0,4521	0,7105	-0,1081	-0,0008	0,1544	-2,4126	0,4567	-0,4951
56	0,8696	0,7781	-0,1350	-0,0003	-0,3973	1,0263	0,7448	-0,3946
57	0,5801	0,8179	-0,1199	-0,0006	-0,1760	-2,5283	0,6715	-0,3311
58	0,0843	0,2861	-0,0075	-0,0699	1,9629	0,0539	-1,0369	-0,9133
59	0,8101	0,8763	-0,0804	-0,1317	1,5576	-1,0508	-1,9788	-0,2148
60	0,6648	0,4972	-0,1182	-0,0006	0,2337	0,1642	0,2779	-0,7528
61	0,1492	0,3234	-0,0621	-0,0017	1,1809	-0,4531	-0,1183	-0,8954
62	0,1913	0,5206	-0,0962	-0,0010	0,5397	-0,9926	0,1885	-0,7290
63	0,0193	0,6714	-0,1397	-0,0002	-0,3354	1,0758	0,6361	-0,5493
64	0,9354	0,0000	-0,1351	-0,0003	0,6513	9,5114	-0,3054	-1,0000
65	0,9101	0,8479	-0,1365	-0,0003	-0,5202	1,1208	0,8526	-0,2811
66	0,1182	0,8976	-0,0418	-0,0365	1,2494	-0,9441	-0,3325	-0,1931
67	0,0000	0,9878	-0,0462	-0,0276	1,0821	1,0299	-0,1198	-0,0235
68	0,1718	0,0992	-0,0109	-0,0336	1,9383	-0,2992	-0,6831	-0,9890
69	0,0366	0,8384	-0,0631	-0,0755	0,8669	0,3856	-0,5538	-0,2914
70	0,0661	0,8576	-0,1429	-0,1221	-0,5736	0,0938	-0,3763	-0,2497
71	0,0839	1,0002	-0,0894	-0,0615	0,2635	-0,4326	-0,0727	0,0042
72	0,8707	0,9606	-0,0393	-0,0456	1,6260	-0,8964	-0,7759	-0,0751
73	0,3303	0,2041	-0,0083	-0,0606	2,0998	-0,7990	-1,0895	-0,9547

74	0,0000	1,0012	-0,0976	-0,0578	0,0476	1,1340	0,0988	0,0058
75	0,4335	0,0492	-0,0042	-0,1054	2,4133	0,2061	-1,8092	-0,9865
76	0,0000	1,0276	-0,0998	-0,0593	-0,0230	1,1400	0,1327	0,0596
77	0,0319	0,8534	-0,1094	-0,1035	0,0062	0,5549	-0,4344	-0,2610
78	0,1103	0,8000	-0,1221	-0,0465	-0,1459	-0,5004	0,1606	-0,3579
79	0,3159	0,0534	-0,1126	-0,0007	0,8164	-0,0791	-0,2492	-0,9971
80	0,7306	0,7510	-0,1346	-0,0003	-0,3550	-0,7549	0,7060	-0,4360
81	0,5780	0,4084	-0,0049	-0,0979	2,4976	-0,4634	-1,8255	-0,8236
82	0,0659	0,5992	-0,1300	-0,1043	-0,0098	0,2358	-0,6332	-0,6301
83	0,0761	0,8034	-0,0961	-0,0319	0,2920	-0,1031	0,1289	-0,3535
84	0,0083	0,0189	-0,0482	-0,0019	1,5089	0,9624	-0,3103	-0,9996
85	0,1069	0,5381	-0,0395	-0,0523	1,4487	-0,4048	-0,6668	-0,7077
86	0,6983	0,0888	-0,1392	-0,0002	0,4863	3,5370	-0,1799	-0,9921
87	0,1342	0,0668	-0,0665	-0,0016	1,2930	0,0158	-0,2735	-0,9955
88	0,1454	0,0472	-0,0904	-0,0011	1,0547	0,0629	-0,2702	-0,9978
89	0,7958	0,7814	-0,1345	-0,0630	0,1056	-0,2340	-0,3803	-0,3854
90	0,0682	0,8763	-0,1072	-0,1054	0,0610	-0,0698	-0,4867	-0,2210
91	0,8925	0,6588	-0,0068	-0,0003	1,8900	2,1270	-0,2602	-0,5659
92	0,0945	0,6143	-0,1352	-0,1068	-0,0821	-0,1253	-0,6378	-0,6112
93	0,2243	0,1458	-0,0922	-0,0011	0,9464	-0,3948	-0,1790	-0,9788
94	0,0944	0,1935	-0,0944	-0,0011	0,8743	0,2289	-0,1288	-0,9626
95	0,5559	0,0266	-0,0403	-0,0665	1,9552	1,4791	-1,3233	-0,9949
96	0,1912	0,0478	-0,1193	-0,0006	0,7507	0,0119	-0,2498	-0,9977
97	0,3032	0,2139	-0,1154	-0,0007	0,6007	-0,5761	-0,0616	-0,9543
98	0,2384	0,0708	-0,1204	-0,0006	0,7125	-0,1271	-0,2217	-0,9950
99	0,9905	0,8028	-0,0055	-0,0001	1,9021	2,7661	-0,2585	-0,3556
100	0,4488	0,4436	-0,1316	-0,0003	0,1012	-1,1043	0,2789	-0,8032
101	0,0712	0,3658	-0,1183	-0,0006	0,3843	0,4081	0,1264	-0,8662
102	0,1136	0,0336	-0,0072	-0,0733	2,0093	0,0799	-1,1140	-0,9935
103	0,0536	0,9545	-0,1025	-0,0907	0,0451	0,1271	-0,2776	-0,0806
104	0,8357	0,8276	-0,1178	-0,0172	-0,0087	-0,0487	0,3593	-0,3147
105	0,8658	0,8840	-0,1437	-0,0779	-0,0334	-0,0179	-0,4826	-0,2125
106	0,1070	0,2194	-0,1052	-0,0008	0,7182	0,1445	-0,0786	-0,9519
107	0,0691	0,6722	-0,1148	-0,0759	0,1325	0,1159	-0,3399	-0,5423
108	0,6740	0,5621	-0,1089	-0,0002	0,3001	-0,2058	0,3081	-0,6841
109	0,0562	0,9592	-0,1162	-0,0993	-0,2203	0,1160	-0,2349	-0,0702
110	0,0856	0,1228	-0,0088	-0,0554	1,9482	0,1824	-0,8903	-0,9818
111	0,9197	1,0101	-0,1060	-0,0301	0,1468	-0,3770	0,1925	0,0211
112	0,2752	0,0000	-0,1375	-0,0002	0,6252	0,1407	-0,3030	-1,0000
113	0,0310	0,9461	-0,1027	-0,0915	0,0291	0,5325	-0,2711	-0,0965
114	0,0589	0,9621	-0,1034	-0,0914	0,0252	0,0334	-0,2726	-0,0660
115	0,0729	0,6894	-0,1315	-0,0854	-0,1585	0,1083	-0,3096	-0,5175
116	0,9942	0,0000	-0,1428	-0,0001	0,5738	11,2341	-0,3027	-1,0000
117	0,1031	0,5495	-0,0027	-0,1215	2,0839	-0,3877	-1,6251	-0,6833

118	0,1540	0,0223	-0,0040	-0,1066	2,1228	-0,1038	-1,5295	-0,9881
119	0,0340	0,1929	-0,0979	-0,0010	0,8327	0,8083	-0,1214	-0,9628
120	0,0849	0,8684	-0,0968	-0,0323	0,2196	-0,2858	0,1899	-0,2448
121	0,9350	1,0191	-0,1442	-0,0510	-0,4347	-0,0517	0,1834	0,0412
122	0,2796	0,0000	-0,1341	-0,0002	0,6599	0,1267	-0,3025	-1,0000
123	0,9416	1,0106	-0,0581	-0,0097	0,9235	-0,1377	0,0981	0,0214
124	0,0646	1,0408	-0,1016	-0,1131	-0,0011	-0,1439	-0,4466	0,0961
125	0,0758	0,8348	-0,1448	-0,0001	-0,6574	0,1434	0,9080	-0,3032
126	0,0584	0,4325	-0,1281	-0,0361	0,1860	0,5132	-0,1284	-0,8117
127	0,0529	1,0410	-0,1064	-0,1183	-0,1087	0,0770	-0,4377	0,0976
128	0,9840	0,8151	-0,1023	-0,0307	0,4443	2,6821	-0,0743	-0,3346
129	0,0621	0,7572	-0,0973	-0,0765	0,3369	0,1011	-0,3758	-0,4208
130	0,1064	0,2774	-0,1211	-0,0005	0,4536	0,1601	0,0299	-0,9231
131	0,0637	0,8721	-0,1027	-0,0356	0,1008	0,0631	0,2164	-0,2382
132	0,1098	1,0094	-0,1447	-0,0001	-0,9082	-0,5464	1,1599	0,0189
133	0,9466	0,9676	-0,0708	-0,0366	0,9530	0,3707	-0,3275	-0,0624
134	0,1517	0,2926	-0,1177	-0,0006	0,4797	-0,2243	0,0373	-0,9144
135	0,0530	1,0424	-0,0970	-0,1123	0,0792	0,0523	-0,4719	0,0993
136	0,1073	0,1413	-0,1195	-0,0006	0,6371	0,2905	-0,1376	-0,9800
137	0,1110	0,1594	-0,0074	-0,0711	1,9935	-0,0447	-1,0779	-0,9695
138	0,4039	0,2876	-0,1274	-0,0004	0,3620	-0,6141	0,0602	-0,9173
139	0,0836	0,6196	-0,1204	-0,0310	0,0759	0,0384	0,1098	-0,6151
140	0,9563	1,0389	-0,1132	-0,0353	0,0291	0,0080	0,1857	0,0806
141	0,0619	0,9839	-0,0999	-0,0432	0,0446	0,0056	0,2239	-0,0301
142	0,1965	0,1155	-0,0042	-0,1049	2,1592	-0,4237	-1,5505	-0,9757
143	0,0912	0,6021	-0,0649	-0,1331	1,0820	-0,2973	-1,3622	-0,6197
144	0,0760	0,7468	-0,1282	-0,0887	-0,1718	0,0030	-0,2970	-0,4344
145	0,9132	0,9593	-0,1311	-0,0671	0,0428	0,0412	-0,3250	-0,0752
146	0,2840	0,2969	-0,0042	-0,1050	2,2437	-1,0742	-1,6356	-0,9008
147	0,8185	0,9283	-0,0016	-0,1329	3,0571	-1,3867	-2,7022	-0,1206
148	0,1111	0,0599	-0,1100	-0,0008	0,8349	0,3108	-0,2425	-0,9964
149	0,8810	0,8926	-0,1177	-0,0328	0,0615	0,0880	0,1339	-0,2022
150	0,6230	0,0532	-0,0016	-0,1333	2,8142	2,1990	-2,4631	-0,9794
151	0,1352	0,0916	-0,1213	-0,0005	0,6769	0,1831	-0,1951	-0,9916
152	0,0655	0,7934	-0,1163	-0,0909	-0,0267	0,0766	-0,3458	-0,3622
153	0,0659	0,9226	-0,1038	-0,0555	0,0401	-0,0218	0,0661	-0,1458
154	0,0670	0,9242	-0,1100	-0,0599	-0,0758	-0,0237	0,0775	-0,1423
1551	0,8432	0,6036	-0,0024	-0,1239	3,0055	1,6952	-2,5687	-0,6203
56	0,0661	1,0249	-0,0910	0,0000	0,1583	-0,0854	0,6319	0,0504
157	0,0000	1,0197	-0,1095	-0,0001	-0,2117	1,2397	0,8159	0,0399
158	0,4353	0,3256	-0,1316	-0,0198	0,3420	-0,6602	-0,1555	-0,8936
159	0,0629	0,6402	-0,0846	-0,1419	0,7010	0,0708	-1,2668	-0,5699
160	0,3697	0,0078	-0,1413	-0,0002	0,5771	0,4067	-0,2912	-0,9999
161	0,3905	0,2324	-0,1344	-0,0003	0,3446	-0,4015	0,0083	-0,9460

162	0,1282	0,3117	-0,0082	-0,0619	1,9714	-0,3567	-0,9723	-0,8990
163	0,0662	0,9246	-0,1053	-0,0566	0,0106	-0,0250	0,0707	-0,1419
164	0,0769	0,4610	-0,1374	-0,0002	-0,0078	0,3720	0,3311	-0,7875
165	0,0616	1,0132	-0,1009	-0,0740	0,0135	-0,0358	-0,0628	0,0321
166	0,4680	0,3506	-0,1413	-0,0100	0,1388	-0,5550	0,0480	-0,8770
167	0,0623	1,0135	-0,1036	-0,0760	-0,0394	-0,0408	-0,0566	0,0330
168	0,1110	0,2971	-0,1294	-0,0004	0,3217	0,1411	0,0801	-0,9118
169	0,0847	0,8551	-0,0009	-0,1401	2,1016	-0,4290	-1,8122	-0,2491
170	0,0570	0,8204	-0,1027	-0,0577	0,1626	0,1796	-0,0673	-0,3237
171	0,0736	0,7292	-0,1109	-0,0407	0,1130	0,0361	0,0715	-0,4665
172	0,0519	0,8996	-0,0700	-0,1463	0,7466	0,0630	-1,2097	-0,1693
173	0,0856	0,6540	-0,1233	-0,0391	-0,0055	-0,0138	0,0814	-0,5707
174	0,1116	0,3902	-0,1390	-0,0328	0,1038	0,0382	-0,1227	-0,8467
175	0,0787	0,6077	-0,0011	-0,1382	2,0910	-0,1434	-1,7837	-0,6116
176	0,1026	0,8253	-0,1452	-0,0001	-0,6508	-0,2401	0,8976	-0,3189
177	0,0533	1,0212	-0,0932	0,0000	0,1161	0,1525	0,6516	0,0428
178	0,9211	0,9958	-0,1251	-0,0538	-0,0006	-0,1691	-0,0883	-0,0055
179	0,1266	0,3926	-0,1390	-0,0341	0,1069	-0,1033	-0,1384	-0,8447
180	0,0746	0,7307	-0,1169	-0,0440	0,0093	0,0422	0,0814	-0,4641
181	0,0768	0,6500	-0,1219	-0,0383	0,0175	0,1020	0,0802	-0,5760
182	0,0671	0,8324	-0,1029	-0,0628	0,1566	0,0080	-0,1132	-0,3031
183	0,0880	0,5621	-0,1373	-0,0556	-0,0965	0,0811	-0,1331	-0,6810
184	0,9678	1,0164	-0,1198	-0,0511	0,0790	0,4446	-0,0882	0,0356
185	0,0249	0,6068	-0,0763	-0,1385	0,8088	0,6225	-1,2568	-0,6126
186	0,0671	0,8874	-0,1074	-0,0670	0,0178	-0,0183	-0,0619	-0,2080
187	0,9301	0,9979	-0,1236	-0,0508	0,0040	-0,0380	-0,0477	-0,0016
188	0,0607	1,0162	-0,1034	-0,0597	-0,0478	0,0025	0,1170	0,0362
189	0,8666	0,8862	-0,1193	-0,0335	0,0389	-0,0811	0,1332	-0,2135
190	0,0828	1,0305	-0,1475	0,0000	-0,9955	-0,1096	1,2197	0,0619
191	0,5549	0,4552	-0,1151	-0,0237	0,4562	-0,6783	-0,1451	-0,7923
192	0,6136	0,5485	-0,1159	-0,0287	0,3813	-0,7356	-0,1279	-0,6983
193	0,6354	0,5923	-0,1010	-0,0001	0,3920	-0,8391	0,2967	-0,6492
194	0,0497	1,0452	-0,0951	-0,0760	0,0930	0,1406	-0,1044	0,0983
195	0,0619	1,0280	-0,0948	0,0000	0,0779	0,0010	0,6742	0,0568
196	0,0598	0,9509	-0,1030	-0,0623	0,0273	0,0526	0,0189	-0,0919
197	0,0837	0,6558	-0,1234	-0,0391	-0,0106	0,0100	0,0858	-0,5684
198	0,0652	0,9149	-0,1072	-0,0812	-0,0007	-0,0199	-0,1842	-0,1564
199	0,6867	0,6772	-0,1141	-0,0309	0,2975	-0,8604	-0,0475	-0,5405
200	0,0610	1,0178	-0,1003	-0,0572	0,0120	-0,0123	0,1136	0,0392
201	0,0000	1,0167	-0,0188	-0,1453	1,6216	0,9798	-1,5624	0,0548
202	0,0620	0,9189	-0,1129	-0,1490	-0,0737	-0,0269	-0,8448	-0,1335
203	0,0611	0,9840	-0,1022	-0,0686	0,0149	0,0009	-0,0227	-0,0271
204	0,3680	0,1134	-0,1382	-0,0002	0,4620	-0,0070	-0,1463	-0,9871
205	0,0685	0,8393	-0,1113	-0,0681	-0,0001	0,0053	-0,0941	-0,2909

206	0,0587	1,0169	-0,1002	-0,0572	0,0122	0,0278	0,1139	0,0374
207	0,0637	0,9546	-0,1033	-0,0625	0,0215	-0,0145	0,0212	-0,0849
208	0,9318	0,9991	-0,1202	-0,0433	0,0005	-0,0256	0,0649	0,0001
209	0,3769	0,0000	-0,1451	-0,0001	0,5493	0,4930	-0,3013	-1,0000
210	0,0590	1,0452	-0,0987	-0,0775	0,0262	-0,0184	-0,0885	0,0984
211	0,0624	0,9833	-0,1023	-0,0692	0,0137	-0,0210	-0,0287	-0,0283
212	0,0641	0,9552	-0,1049	-0,0637	-0,0110	-0,0175	0,0247	-0,0836
213	0,0611	0,9828	-0,1023	-0,0692	0,0134	0,0012	-0,0284	-0,0292
214	0,0567	0,9897	-0,1049	-0,1358	-0,0094	0,0131	-0,6972	-0,0020
215	0,0594	1,0453	-0,1010	-0,0791	-0,0187	-0,0201	-0,0821	0,0989
216	0,2145	0,1719	-0,1381	-0,0002	0,3820	-0,2121	-0,0654	-0,9705
217	0,9503	1,0335	-0,1232	-0,0530	-0,0026	-0,0250	-0,0594	0,0710
218	0,0608	0,9196	-0,1068	-0,1491	0,0409	-0,0237	-0,9001	-0,1321
219	0,0633	0,8749	-0,1072	-0,0666	0,0316	0,0521	-0,0700	-0,2301
220	0,0709	0,6835	-0,1241	-0,1457	0,0147	0,0335	-1,0126	-0,5116
221	0,1288	0,4038	-0,1409	-0,0335	0,0650	-0,1264	-0,1087	-0,8358
222	0,7734	0,7221	-0,1276	-0,0380	0,0962	-0,0790	-0,0525	-0,4771
223	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
224	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
225	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
226	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
227	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
228	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
229	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
230	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
231	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
232	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
233	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
234	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
235	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
236	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
237	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
238	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
239	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009
240	0,0610	0,9974	-0,1022	-0,0658	-0,0015	-0,0017	0,0218	-0,0009

Πίνακας 3.2.2: Οι τιμές των μεταβλητών και των DC συναρτήσεων για τη δεύτερη λύση

3.3 Παράδειγμα 3

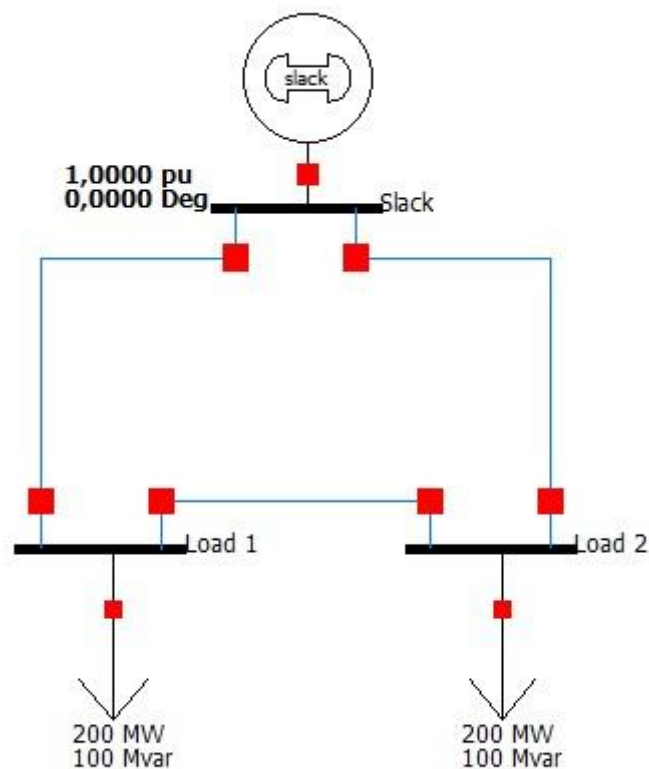
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	V (αμ)	p_g (αμ)	p_d (αμ)	q_g (αμ)	q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1\angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός φορτίου PQ 1	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1 = x_1 + jx_3$	0	2	0	1
3	Ζυγός φορτίου PQ 2	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2 = x_2 + jx_4$	0	2	0	1

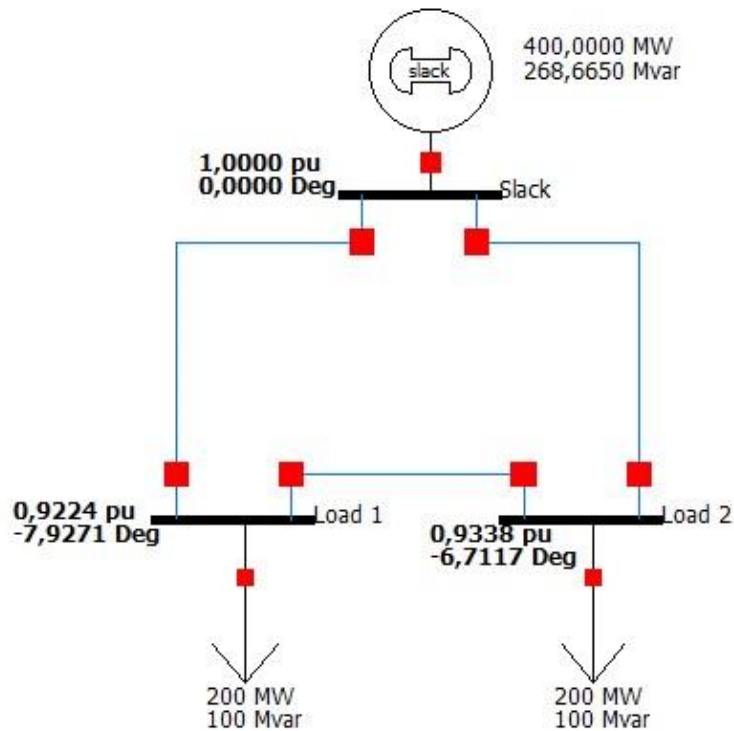
Δεδομένα γραμμών:

Από γραμμή	Προς γραμμή	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0	0.07
1	3	0	0.05
2	3	0	0.1

Πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά το ΣΗΕ τριών ζυγών:



Σχήμα 3.3.1 ΣΗΕ 3 ζυγών παραδείγματος 3



Σχήμα 3.3.2 Αποτέλεσμα προσομοίωσης με χρήση του λογισμικού PowerWorld Simulator 18

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.3.2, αναμένουμε το αποτέλεσμα να είναι

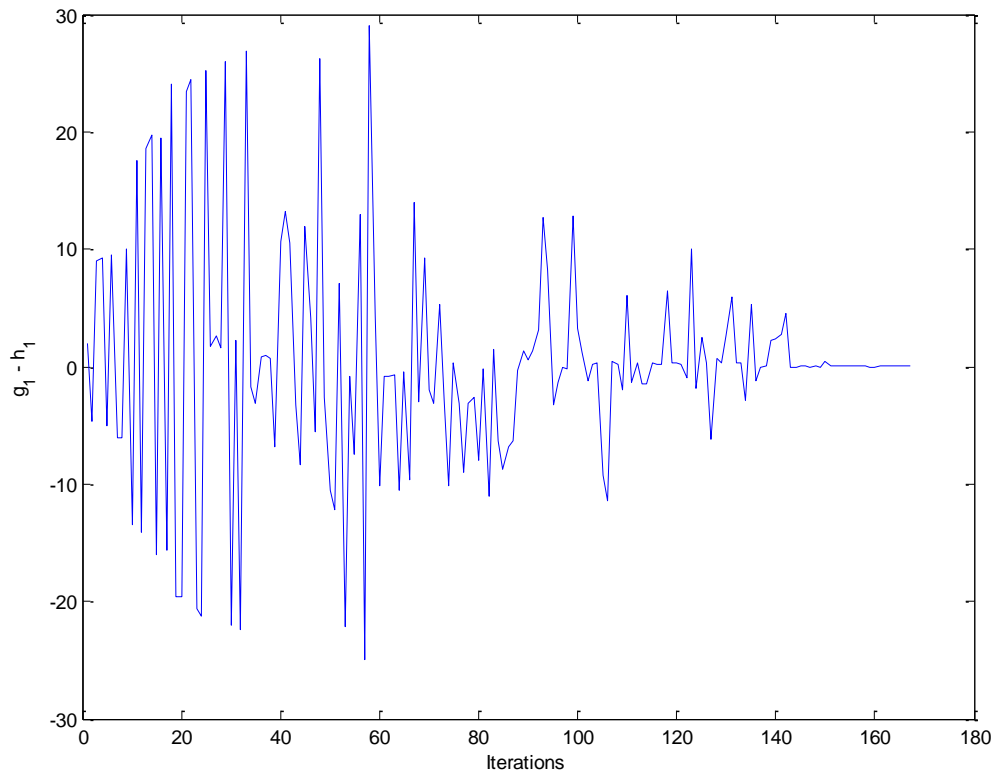
$$\tilde{V}_2 = 0.9224 \angle -7.9271^\circ = 0.9136 - j0.1272 \quad (3.24)$$

$$\tilde{V}_3 = 0.9338 \angle -6.7117^\circ = 0.9274 - j0.1091 \quad (3.25)$$

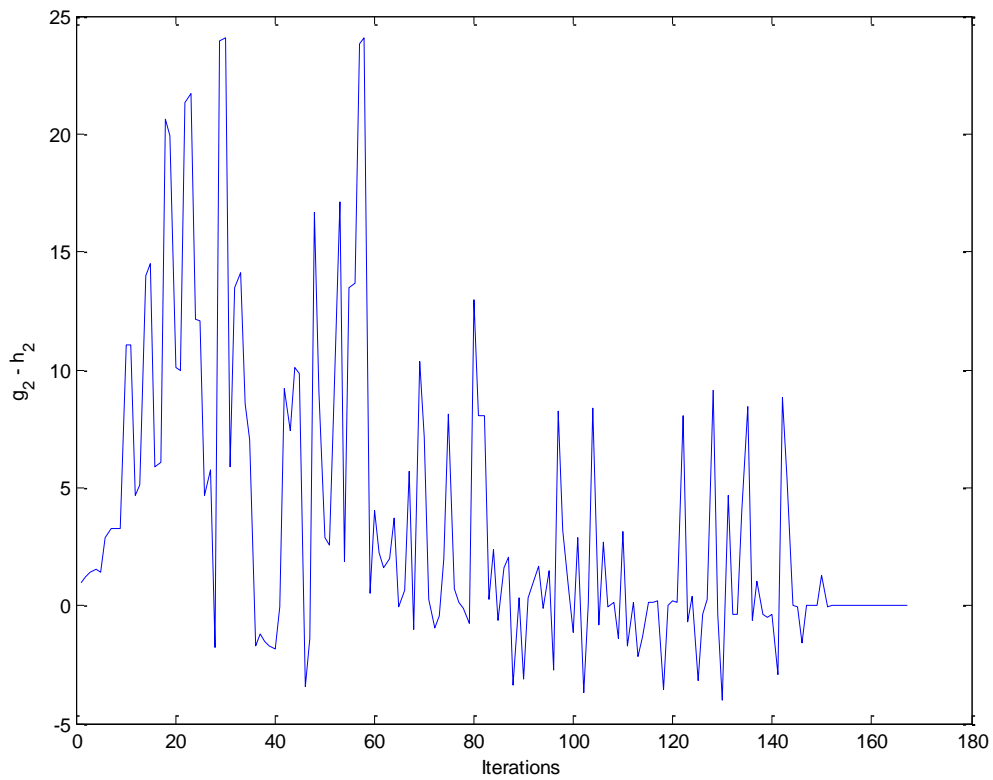
Σημειώνεται ότι, αφού έχουμε δύο ζυγούς φορτίου PQ, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα σύστημα τεσσάρων μη γραμμικών εξισώσεων (δύο εξισώσεις P και δύο εξισώσεις Q) τεσσάρων αγνώστων.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο X ορίστηκε ως $[0.8, 1.2] \times [0.8, 1.2] \times [-0.85, 0.85] \times [-0.85, 0.85]$ και το αντίστοιχο σύνολο Y υπολογίστηκε $[10.6268, 345.2651] \times [21.4131, 349.6937] \times [32.4445, 511.0406] \times [46.3600, 516.7906]$.

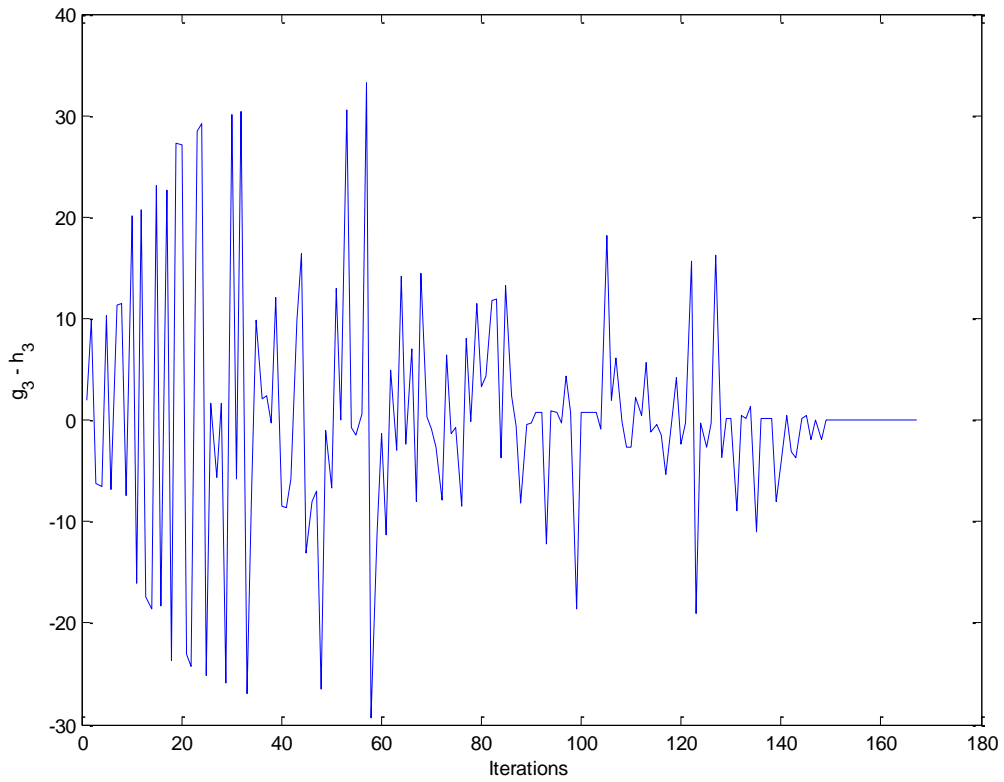
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



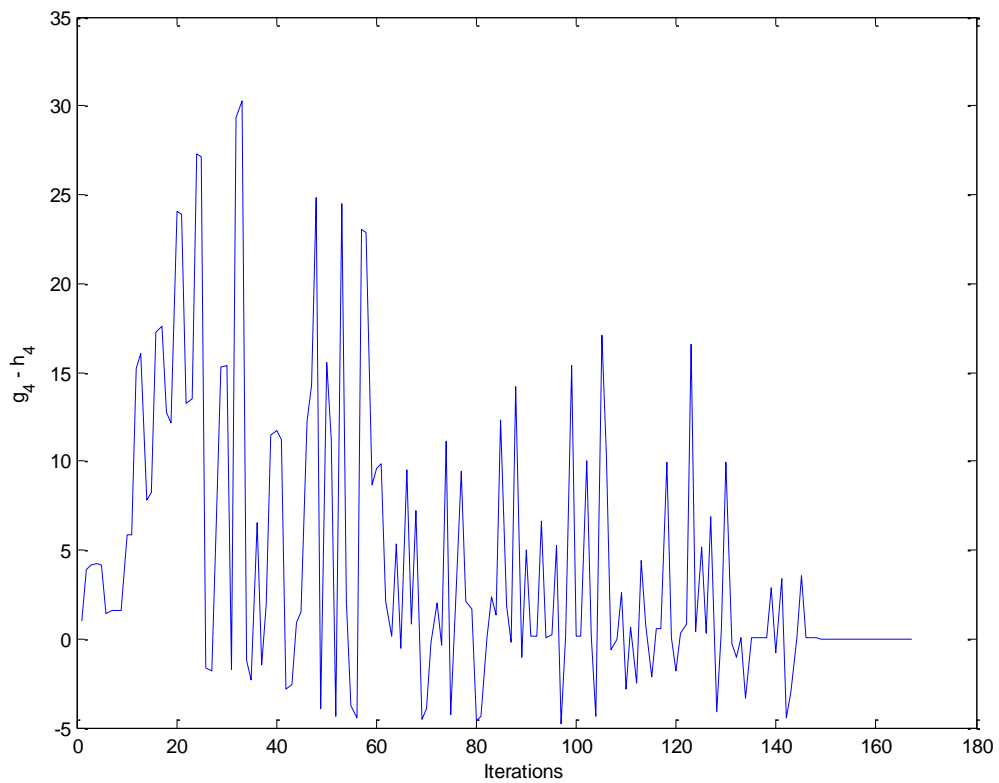
Σχήμα 3.3.3: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 - PQ)



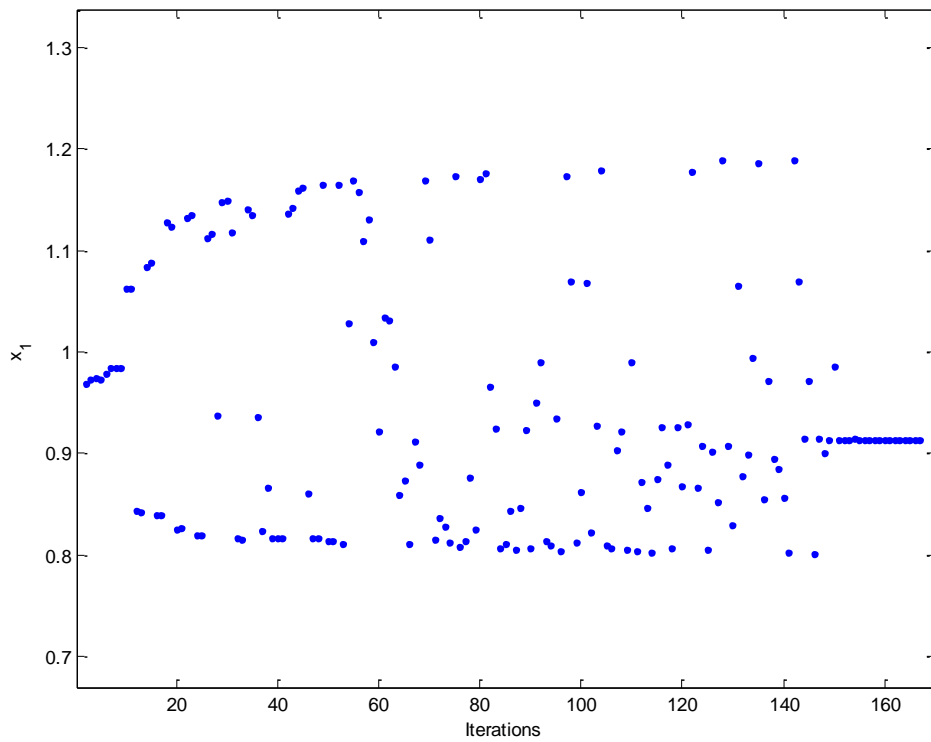
Σχήμα 3.3.4: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 2 - PQ)



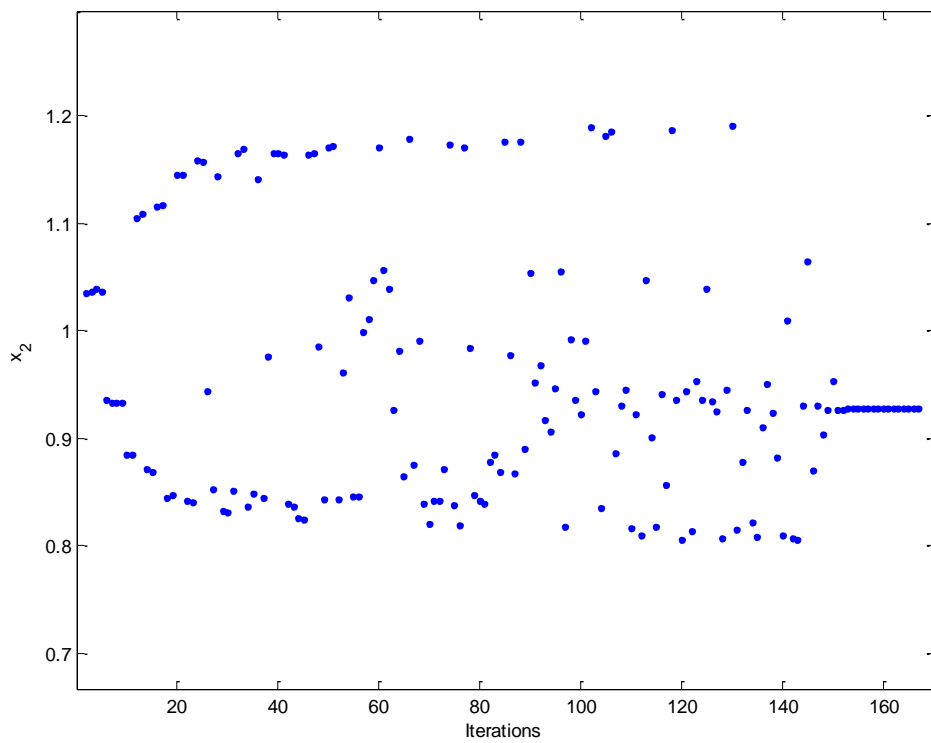
Σχήμα 3.3.5: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 - PQ)



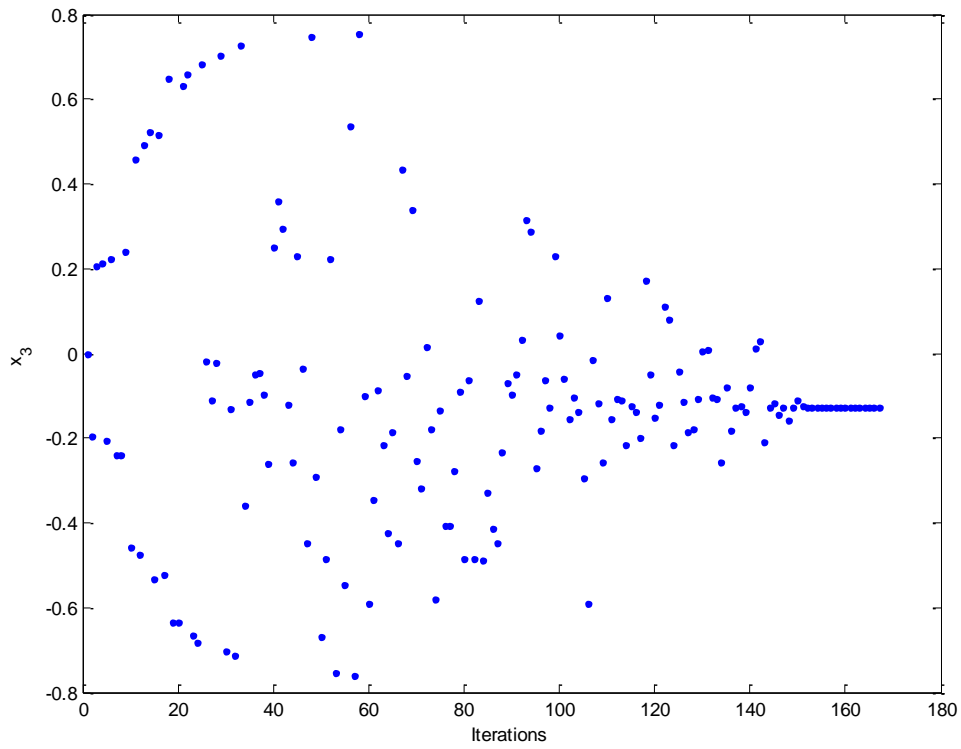
Σχήμα 3.3.6: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 3 - PQ)



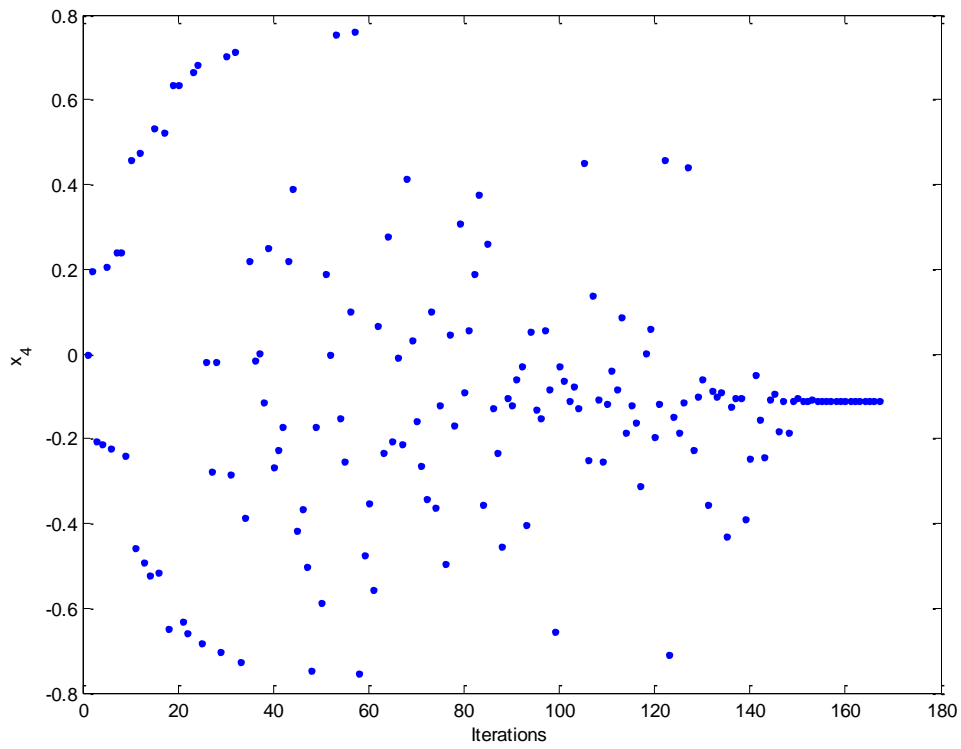
Σχήμα 3.3.7: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



Σχήμα 3.3.8: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



Σχήμα 3.3.9: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.3.10: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_2$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_3 = 0.9136 - j0.1272 = 0.9224 \angle -7.9271^\circ \quad (3.26)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_4 = 0.9274 - j0.1091 = 0.9338 \angle -6.7117^\circ \quad (3.27)$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν με αυτά τις προσομοίωσης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T \left(g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}] x \right) \text{ και } q_1 = -e_1^T \left(b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}] x \right)$$

Επομένως, για $x = [0.9136 \quad 0.9274 \quad -0.1272 \quad -0.1091]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 4.0000 \text{ αμ} = 400.00 \text{ MW} \text{ και } q_1 = 2.6868 \text{ αμ} = 268.68 \text{ MVar} \quad (3.28)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός φορτίου PQ 1):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 2$:

$$p_2 = -2.0000 \text{ αμ} = -200.00 \text{ MW} \text{ και } q_2 = -1.0001 \text{ αμ} = -100.01 \text{ MVar} \quad (3.29)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός φορτίου PQ 2):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 3$:

$$p_3 = -2.0000 \text{ αμ} = -200.00 \text{ MW} \text{ και } q_3 = -1.0000 \text{ αμ} = -100.00 \text{ MVar} \quad (3.30)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{f}_1$	$x_4 = \bar{f}_2$	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,0000	1,0000	2,0000	1,0000
2	0,9691	1,0348	-0,1958	0,1958	-4,7212	1,2506	9,8402	3,9331
3	0,9724	1,0371	0,2051	-0,2051	9,0531	1,4301	-6,2254	4,1251
4	0,9747	1,0388	0,2116	-0,2116	9,2836	1,5581	-6,4927	4,2623
5	0,9724	1,0371	-0,2051	0,2051	-5,0531	1,4301	10,2254	4,1251
6	0,9792	0,9364	0,2244	-0,2244	9,5028	2,8534	-6,7848	1,4220
7	0,9847	0,9330	-0,2399	0,2399	-6,0271	3,2657	11,3979	1,5702

8	0,9849	0,9329	-0,2405	0,2405	-6,0465	3,2813	11,4205	1,5760
9	0,9847	0,9330	0,2399	-0,2399	10,0271	3,2657	-7,3979	1,5702
10	1,0620	0,8853	-0,4589	0,4589	-13,4930	11,0385	20,1156	5,8293
11	1,0621	0,8852	0,4593	-0,4593	17,5046	11,0532	-16,1290	5,8389
12	0,8441	1,1054	-0,4753	0,4753	-14,0566	4,6606	20,7727	15,2551
13	0,8423	1,1093	0,4908	-0,4908	18,5900	5,1122	-17,3946	16,0225
14	1,0843	0,8714	0,5223	-0,5223	19,6773	13,9692	-18,6620	7,8169
15	1,0882	0,8691	-0,5332	0,5332	-16,0547	14,5050	23,1018	8,1936
16	0,8394	1,1154	0,5151	-0,5151	19,4273	5,8538	-18,3707	17,2659
17	0,8387	1,1170	-0,5214	0,5214	-15,6444	6,0525	22,6236	17,5960
18	1,1284	0,8442	0,6471	-0,6471	24,0102	20,6344	-23,7081	12,7220
19	1,1241	0,8469	-0,6349	0,6349	-19,5838	19,9289	27,2118	12,1833
20	0,8254	1,1454	-0,6340	0,6340	-19,5521	10,0807	27,1749	24,0756
21	0,8258	1,1446	0,6305	-0,6305	23,4305	9,9426	-23,0334	23,8588
22	1,1327	0,8416	0,6594	-0,6594	24,4387	21,3542	-24,2068	13,2756
23	1,1348	0,8403	-0,6653	0,6653	-20,6455	21,7054	28,4474	13,5470
24	0,8195	1,1581	-0,6842	0,6842	-21,3055	12,1624	29,2153	27,3100
25	0,8198	1,1575	0,6816	-0,6816	25,2135	12,0490	-25,1082	27,1352
26	1,1120	0,9437	-0,0199	-0,0189	1,7386	4,6554	1,5995	-1,6431
27	1,1158	0,8520	-0,1096	-0,2771	2,5927	5,7779	-5,7006	-1,7695
28	0,9369	1,1437	-0,0233	-0,0197	1,5847	-1,7735	1,6892	6,6586
29	1,1480	0,8321	0,7026	-0,7026	25,9491	23,9769	-25,9639	15,3235
30	1,1486	0,8317	-0,7045	0,7045	-22,0163	24,0967	30,0420	15,4181
31	1,1172	0,8512	-0,1294	-0,2850	2,2339	5,8796	-5,7830	-1,7295
32	0,8160	1,1657	-0,7144	0,7144	-22,3624	13,4980	30,4446	29,3559
33	0,8144	1,1691	0,7276	-0,7276	26,8264	14,1034	-26,9842	30,2768
34	1,1413	0,8363	-0,3606	-0,3866	-1,7543	8,5485	-7,1291	-1,1993
35	1,1355	0,8484	-0,1146	0,2186	-3,0916	7,0268	9,8271	-2,3227
36	0,9362	1,1411	-0,0495	-0,0160	0,8768	-1,7206	2,0961	6,5578
37	0,8239	0,8443	-0,0473	0,0020	0,9080	-1,1854	2,4572	-1,4563
38	0,8665	0,9767	-0,0964	-0,1135	0,6652	-1,4914	-0,3121	1,8982
39	0,8160	1,1656	-0,2610	0,2516	-6,8246	-1,6861	12,1265	11,4913
40	0,8161	1,1654	0,2499	-0,2675	10,6660	-1,8094	-8,4464	11,7426
41	0,8168	1,1639	0,3590	-0,2278	13,1661	-0,0252	-8,5938	11,2271
42	1,1368	0,8391	0,2934	-0,1706	10,5913	9,1953	-5,8124	-2,8251
43	1,1414	0,8362	-0,1214	0,2183	-3,2421	7,4120	9,8743	-2,5960
44	1,1591	0,8253	-0,2560	0,3909	-8,3009	10,0968	16,4617	0,9456
45	1,1615	0,8238	0,2286	-0,4175	11,9981	9,8266	-13,0821	1,4976
46	0,8613	1,1646	-0,0364	-0,3665	4,2123	-3,4209	-8,0633	12,2641
47	0,8160	1,1657	-0,4488	-0,5031	-5,5383	-1,3641	-6,9359	14,2740
48	0,8162	0,9852	0,7488	-0,7488	26,1863	16,7018	-26,4652	24,8025
49	1,1643	0,8427	-0,2919	-0,1728	-2,6174	9,0431	-1,0077	-3,9708
50	0,8138	1,1703	-0,6679	-0,5859	-10,5895	2,8543	-6,6703	15,5447
51	0,8133	1,1715	-0,4852	0,1903	-12,1630	2,5571	13,0367	11,2256

52	1,1643	0,8425	0,2229	-0,0017	7,0818	8,6900	0,0682	-4,3604
53	0,8112	0,9615	-0,7546	0,7546	-22,1566	17,1152	30,4686	24,4811
54	1,0278	1,0315	-0,1777	-0,1518	-0,8125	1,8685	-0,7626	2,1078
55	1,1691	0,8461	-0,5469	-0,2539	-7,4720	13,4754	-1,4180	-3,7924
56	1,1582	0,8457	0,5347	0,1008	12,9935	13,6406	0,6622	-4,4859
57	1,1096	0,9993	-0,7613	0,7613	-24,9318	23,8341	33,2822	23,0684
58	1,1310	1,0115	0,7557	-0,7557	28,9874	24,0483	-29,3058	22,8694
59	1,0102	1,0469	-0,0994	-0,4736	4,3246	0,5452	-11,2161	8,6236
60	0,9223	1,1708	-0,5903	-0,3528	-10,0889	4,0635	-1,4000	9,5609
61	1,0335	1,0569	-0,3460	-0,5569	-0,8457	2,2325	-11,2351	9,8271
62	1,0313	1,0390	-0,0866	0,0658	-0,8167	1,6222	4,8952	2,0757
63	0,9861	0,9260	-0,2145	-0,2320	-0,7625	2,0169	-2,9417	0,1889
64	0,8586	0,9818	-0,4231	0,2779	-10,5838	3,7314	14,0989	5,3446
65	0,8740	0,8640	-0,1857	-0,2070	-0,4485	-0,0324	-2,3441	-0,5351
66	0,8102	1,1782	-0,4474	-0,0084	-9,5944	0,6448	7,0345	9,4990
67	0,9117	0,8752	0,4333	-0,2144	13,9353	5,6699	-8,0329	0,8023
68	0,8892	0,9904	-0,0538	0,4142	-2,9842	-1,0138	14,5001	7,1820
69	1,1697	0,8396	0,3374	0,0338	9,2574	10,3459	0,2395	-4,5440
70	1,1108	0,8204	-0,2542	-0,1591	-1,9504	7,1484	-0,8638	-3,9746
71	0,8156	0,8418	-0,3199	-0,2627	-3,1213	0,2828	-2,7031	-0,2128
72	0,8357	0,8423	0,0168	-0,3429	5,2472	-0,9520	-7,8654	1,9838
73	0,8281	0,8715	-0,1772	0,0991	-2,8954	-0,4561	6,3467	-0,3903
74	0,8127	1,1727	-0,5808	-0,3616	-10,1695	1,9912	-1,3599	11,0968
75	1,1728	0,8382	-0,1342	-0,1195	0,3603	8,0955	-0,6678	-4,2485
76	0,8077	0,8186	-0,4067	-0,4942	-3,1480	0,7014	-8,5465	3,4356
77	0,8136	1,1707	-0,4084	0,0446	-8,9781	0,1606	8,0355	9,4207
78	0,8764	0,9840	-0,2761	-0,1693	-3,1787	-0,1051	-0,1515	2,1354
79	0,8247	0,8466	-0,0911	0,3078	-2,6118	-0,7635	11,4648	1,7095
80	1,1708	0,8422	-0,4847	-0,0891	-7,9632	12,9758	3,2567	-4,6184
81	1,1756	0,8397	-0,0644	0,0572	-0,1330	8,0352	4,3576	-4,3781
82	0,9664	0,8786	-0,4863	0,1876	-11,0320	8,0408	11,8371	0,0620
83	0,9243	0,8849	0,1257	0,3750	1,4408	0,2768	11,8551	2,3627
84	0,8064	0,8683	-0,4901	-0,3571	-6,3766	2,3542	-3,7662	1,3248
85	0,8114	1,1755	-0,3301	0,2606	-8,7106	-0,6337	13,2060	12,3031
86	0,8436	0,9774	-0,4121	-0,1266	-6,8468	1,5885	2,4274	1,8253
87	0,8049	0,8677	-0,4460	-0,2319	-6,3748	2,0477	-0,6359	-0,1720
88	0,8457	1,1763	-0,2348	-0,4551	-0,2665	-3,3905	-8,1891	14,1815
89	0,9233	0,8896	-0,0682	-0,1026	1,3671	0,3436	-0,3935	-1,0191
90	0,8064	1,0533	-0,0971	-0,1200	0,5576	-3,1085	-0,3443	5,0397
91	0,9500	0,9520	-0,0503	-0,0579	1,3535	0,3358	0,7693	0,1756
92	0,9900	0,9674	0,0332	-0,0292	3,0848	1,1186	0,8052	0,1863
93	0,8143	0,9176	0,3138	-0,4043	12,6548	1,6584	-12,2572	6,6086
94	0,8089	0,9057	0,2876	0,0516	8,2955	-0,1310	0,8453	0,0996
95	0,9350	0,9460	-0,2703	-0,1301	-3,2021	1,4520	0,7397	0,2381

96	0,8036	1,0547	-0,1817	-0,1513	-1,2963	-2,7455	-0,3254	5,2151
97	1,1739	0,8175	-0,0632	0,0561	-0,0785	8,2334	4,2963	-4,7680
98	1,0697	0,9923	-0,1262	-0,0826	-0,1724	3,1772	0,7179	0,1781
99	0,8129	0,9357	0,2306	-0,6560	12,7844	0,6321	-18,6113	15,3716
100	0,8619	0,9221	0,0439	-0,0276	3,2708	-1,1603	0,8052	0,1526
101	1,0675	0,9910	-0,0597	-0,0614	1,2106	2,8949	0,7082	0,1405
102	0,8220	1,1891	-0,1556	-0,1113	-1,1585	-3,6926	0,7096	10,0597
103	0,9281	0,9437	-0,1037	-0,0760	0,2461	0,0834	0,7530	0,1791
104	1,1785	0,8345	-0,1386	-0,1263	0,3514	8,3507	-0,8590	-4,3287
105	0,8088	1,1811	-0,2937	0,4506	-9,3087	-0,8024	18,1249	17,0899
106	0,8069	1,1852	-0,5895	-0,2490	-11,3994	2,6937	1,9985	10,2651
107	0,9034	0,8864	-0,0162	0,1373	0,3845	-0,0638	6,1299	-0,5765
108	0,9222	0,9299	-0,1172	-0,1085	0,2367	0,1114	-0,0821	-0,0062
109	0,8057	0,9459	-0,2563	-0,2552	-2,0285	-1,4246	-2,7369	2,6020
110	0,9899	0,8161	0,1306	-0,1187	6,1055	3,1455	-2,6134	-2,8421
111	0,8036	0,9219	-0,1534	-0,0405	-1,2796	-1,6958	2,2789	0,6370
112	0,8712	0,8097	-0,1084	-0,0843	0,3072	0,1277	0,4588	-2,4583
113	0,8460	1,0469	-0,1118	0,0874	-1,5064	-2,1598	5,6566	4,4114
114	0,8022	0,9014	-0,2150	-0,1847	-1,5284	-1,3375	-1,2364	0,7431
115	0,8742	0,8172	-0,1234	-0,1218	0,2925	0,1474	-0,4915	-2,1594
116	0,9267	0,9412	-0,1390	-0,1634	0,2191	0,1372	-1,4734	0,6024
117	0,8888	0,8565	-0,1975	-0,3112	0,2539	0,2074	-5,2993	0,5566
118	0,8064	1,1863	0,1724	0,0008	6,5004	-3,5743	-0,0223	9,9269
119	0,9261	0,9364	-0,0505	0,0581	0,2672	0,0185	4,1726	0,0347
120	0,8682	0,8050	-0,1529	-0,1965	0,2909	0,1816	-2,4063	-1,7902
121	0,9283	0,9441	-0,1203	-0,1162	0,2235	0,1154	-0,2664	0,3577
122	1,1780	0,8136	0,1096	0,4593	-0,9529	8,0780	15,7057	0,8272
123	0,8657	0,9535	0,0800	-0,7091	10,0450	-0,6979	-19,0827	16,6009
124	0,9078	0,9358	-0,2173	-0,1465	-1,8086	0,3780	-0,2249	0,3867
125	0,8044	1,0395	-0,0424	-0,1844	2,4368	-3,1728	-2,7306	5,2067
126	0,9024	0,9347	-0,1140	-0,1149	0,3426	-0,3655	-0,2692	0,3465
127	0,8518	0,9245	-0,1869	0,4402	-6,1469	0,2480	16,2823	6,9131
128	1,1889	0,8068	-0,1790	-0,2251	0,6753	9,1264	-3,7335	-4,0828
129	0,9073	0,9458	-0,1080	-0,1001	0,3446	-0,3753	0,1107	0,5307
130	0,8296	1,1910	0,0051	-0,0606	2,6359	-4,0140	0,2243	9,9687
131	1,0653	0,8149	0,0075	-0,3553	5,9533	4,6885	-8,9530	-0,2422
132	0,8781	0,8779	-0,1029	-0,0860	0,3810	-0,3598	0,4281	-1,0107
133	0,8988	0,9261	-0,1082	-0,0999	0,3508	-0,3680	0,1047	0,0747
134	0,9946	0,8213	-0,2584	-0,0902	-2,9156	4,0346	1,4208	-3,3471
135	1,1855	0,8090	-0,0817	-0,4312	5,2849	8,4141	-11,0756	0,0897
136	0,8553	0,9103	-0,1834	-0,1245	-1,2260	-0,6499	0,1160	0,1031
137	0,9711	0,9507	-0,1279	-0,1053	-0,0197	1,0596	0,0868	0,0656
138	0,8943	0,9242	-0,1249	-0,1054	0,0054	-0,3706	0,1024	0,0777
139	0,8851	0,8822	-0,1370	-0,3894	2,2809	-0,5051	-8,0251	2,9107

140	0,8562	0,8094	-0,0792	-0,2475	2,3476	-0,4025	-4,4291	-0,8213
141	0,8030	1,0096	0,0126	-0,0510	2,7175	-2,9096	0,4418	3,3662
142	1,1883	0,8072	0,0282	-0,1557	4,4806	8,7896	-3,1915	-4,4179
143	1,0689	0,8054	-0,2092	-0,2429	-0,0768	5,4233	-3,7706	-2,9946
144	0,9144	0,9308	-0,1261	-0,1060	-0,0058	-0,0159	0,0852	0,0667
145	0,9721	1,0646	-0,1165	-0,0939	0,0079	-0,0658	0,4503	3,5139
146	0,8013	0,8697	-0,1456	-0,1829	0,1198	-1,5736	-1,8570	0,0649
147	0,9141	0,9303	-0,1279	-0,1104	-0,0075	-0,0139	-0,0279	0,0783
148	0,8999	0,9031	-0,1571	-0,1858	0,0100	-0,0076	-1,9708	0,0230
149	0,9126	0,9269	-0,1281	-0,1107	-0,0070	-0,0130	-0,0375	0,0031
150	0,9851	0,9532	-0,1100	-0,1029	0,3934	1,2843	-0,0218	0,0083
151	0,9129	0,9271	-0,1251	-0,1098	0,0541	-0,0218	-0,0375	0,0027
152	0,9127	0,9269	-0,1277	-0,1106	0,0021	-0,0139	-0,0384	0,0026
153	0,9128	0,9272	-0,1270	-0,1089	0,0021	-0,0142	0,0047	0,0010
154	0,9149	0,9279	-0,1271	-0,1089	0,0014	0,0220	0,0040	0,0006
1551	0,9136	0,9274	-0,1271	-0,1090	0,0008	0,0000	0,0034	0,0002
56	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0008	0,0001	-0,0003	0,0003
157	0,9136	0,9273	-0,1272	-0,1091	0,0008	0,0001	-0,0003	-0,0017
158	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0007	0,0001	-0,0004	0,0000
159	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1092	-0,0001	0,0001	-0,0004	0,0000
160	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	-0,0001	0,0001	0,0000	0,0000
161	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000
162	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
163	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
164	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
165	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
166	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000
167	0,9136	0,9274	-0,1272	-0,1091	0,0000	-0,0001	0,0000	0,0000

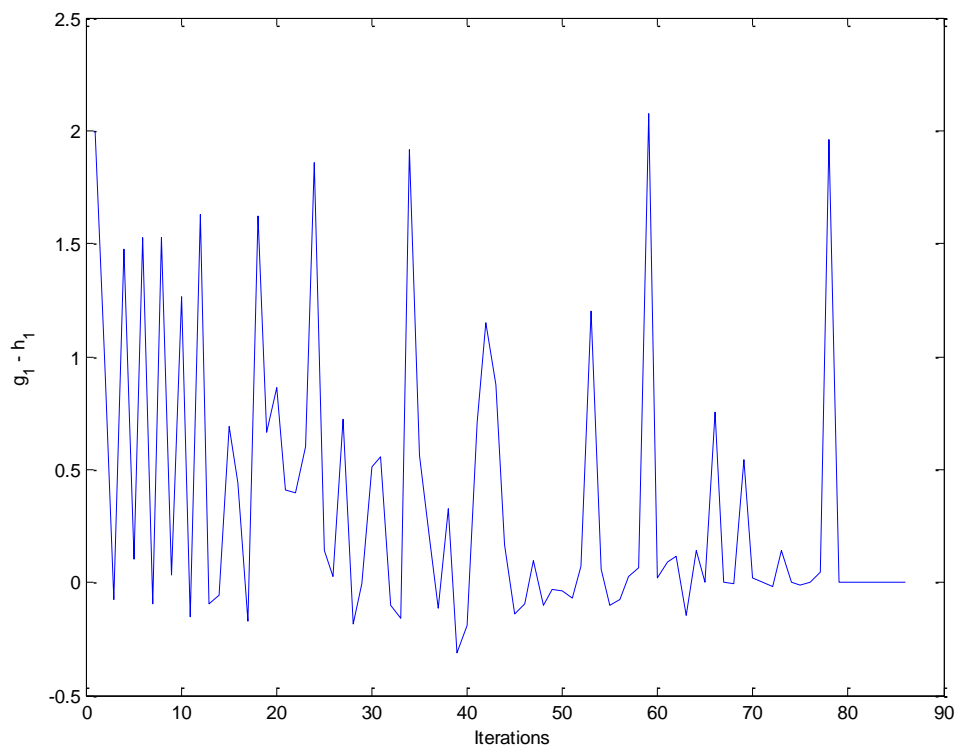
Πίνακας 3.3.1: Οι τιμές των μεταβλητών και των DC συναρτήσεων

Στη συνέχεια, δοκιμάστηκε ένα διαφορετικό επιτρεπτό σύνολο για τις άγνωστες μεταβλητές ώστε να αναζητηθεί μια δεύτερη λύση.

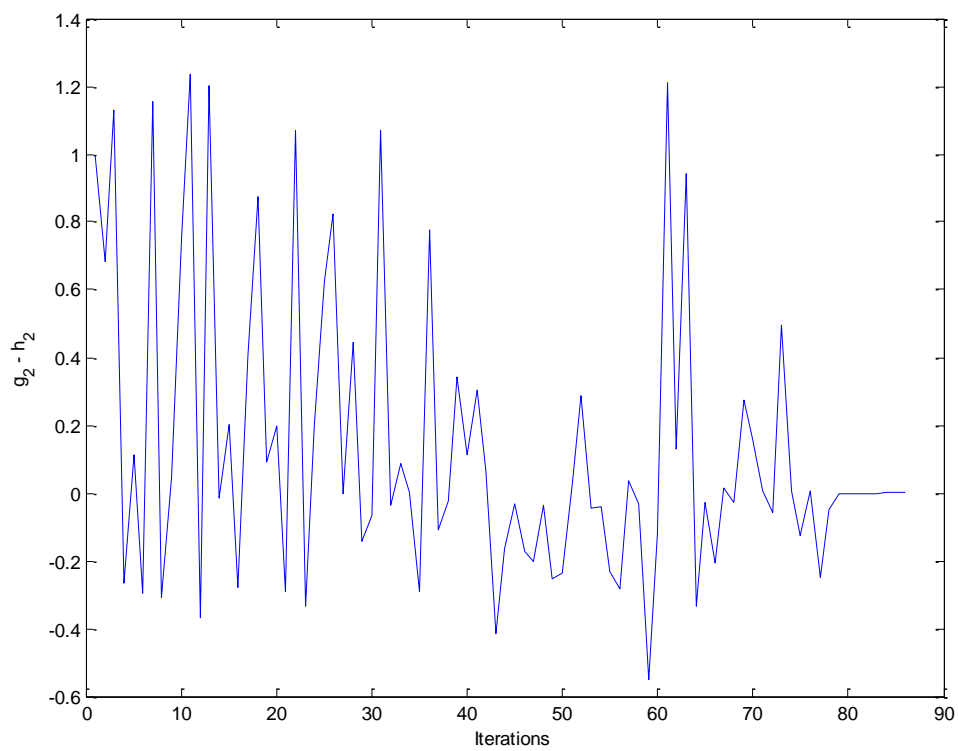
Συγκεκριμένα, το νέο σύνολο X ορίστηκε ως $[0,0.15] \times [0,.15] \times [-0.15,0] \times [-0.15,0]$ ενώ το αντίστοιχο νέο σύνολο Y υπολογίστηκε

$$[-1.2626, 4.6465] \times [0, 7.2429] \times [-1.4761, 8.1363] \times [0, 11.4613] .$$

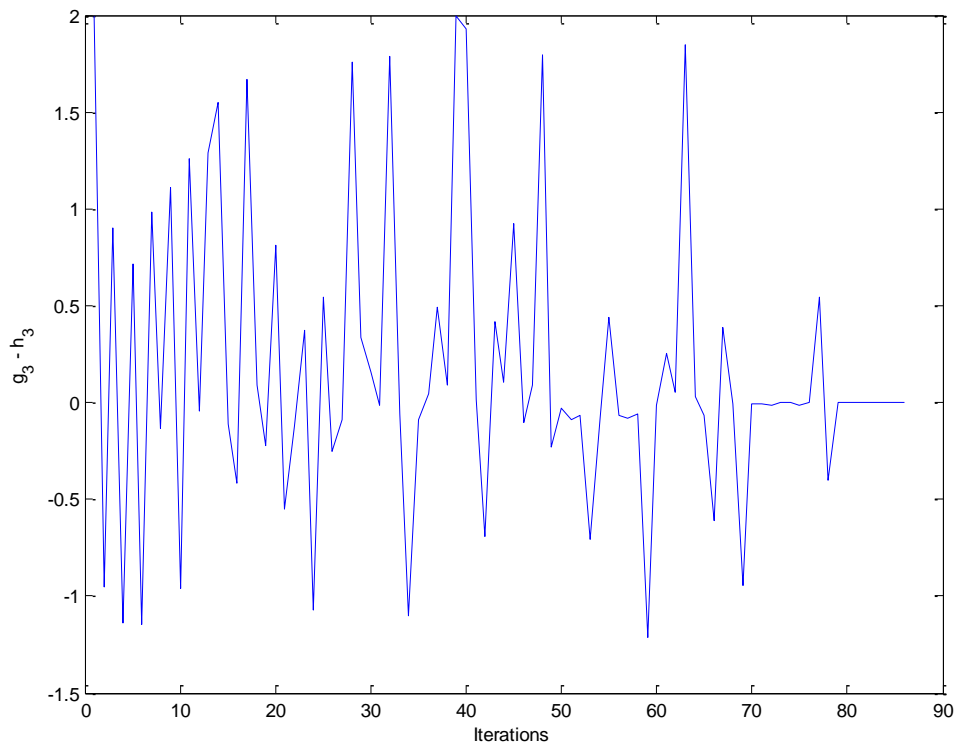
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



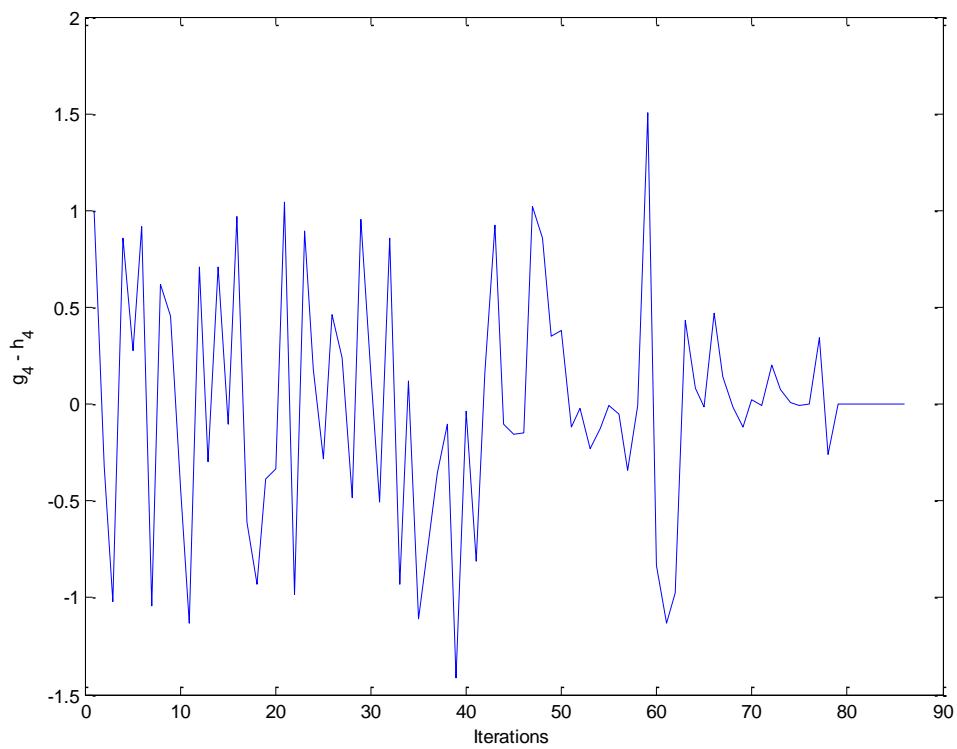
Σχήμα 3.3.11: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 - PQ)



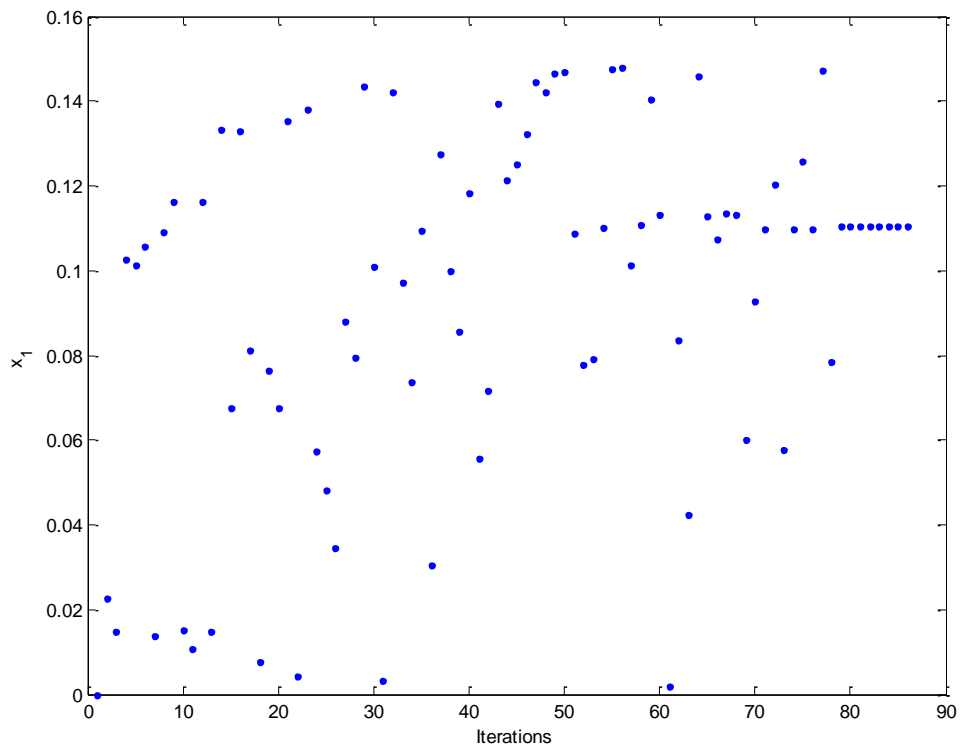
Σχήμα 3.3.12: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 2 - PQ)



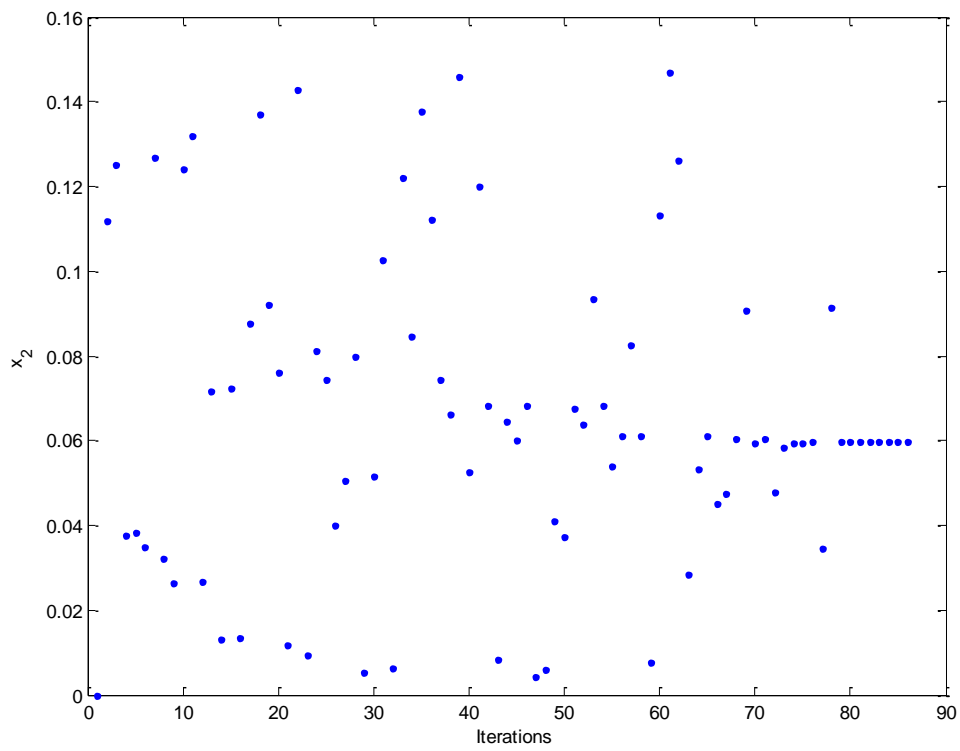
Σχήμα 3.3.13: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 - PQ)



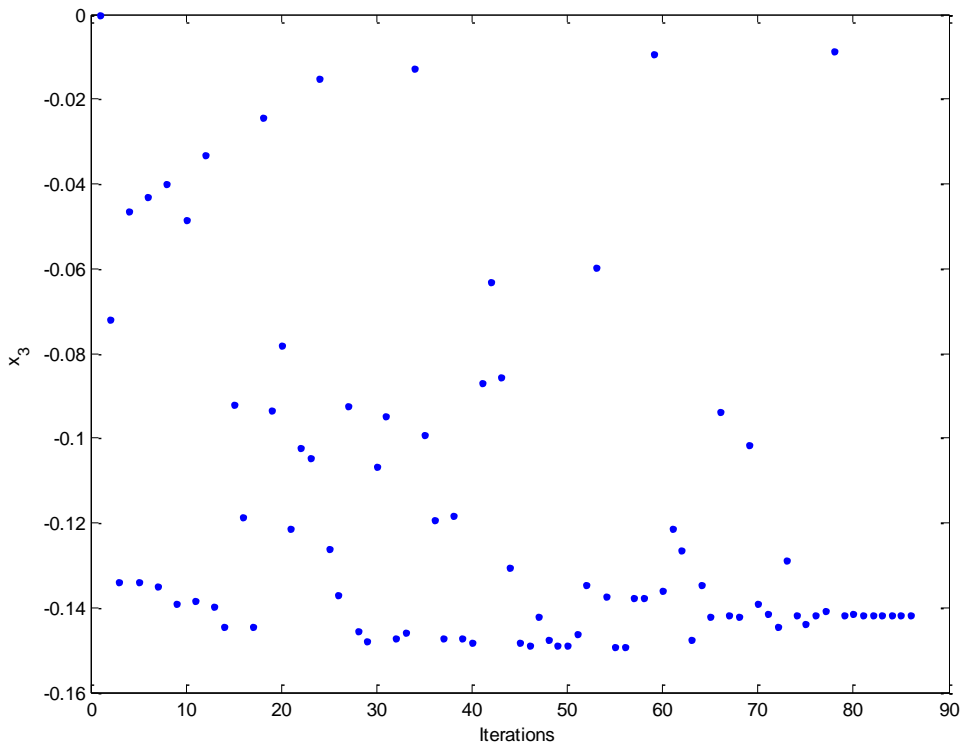
Σχήμα 3.3.14: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 3 - PQ)



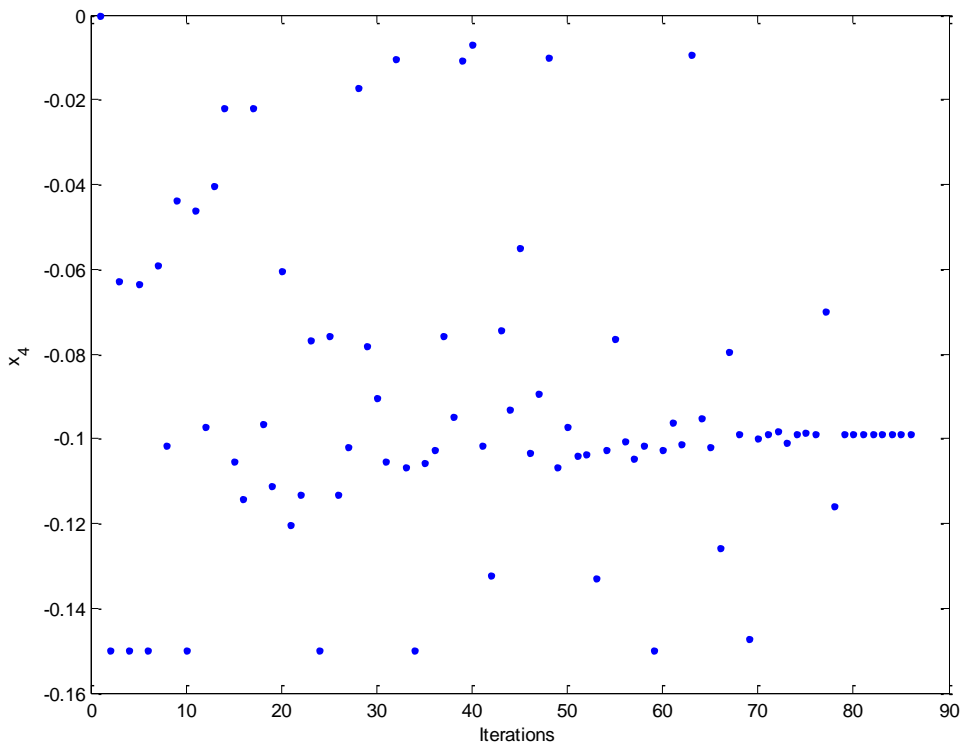
Σχήμα 3.3.15: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



Σχήμα 3.3.16: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



Σχήμα 3.3.17: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.2.18: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_2$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_3 = 0.1105 - j0.1417 = 0.1797 \angle -52.0523^\circ \quad (3.31)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_4 = 0.0597 - j0.0988 = 0.1154 \angle -58.8575^\circ \quad (3.32)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T (g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x) \text{ και } q_1 = -e_1^T (b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x)$$

Επομένως, για $x = [0.1105 \quad 0.0597 \quad -0.1417 \quad -0.0988]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 4.0000 \text{ αμ} = 400.00 \text{ MW} \text{ και } q_1 = 31.5140 \text{ αμ} = 3151.40 \text{ MVar} \quad (3.33)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός φορτίου PQ 1):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 2$:

$$p_2 = -2.0000 \text{ αμ} = -200.00 \text{ MW} \text{ και } q_2 = -0.9999 \text{ αμ} = -99.99 \text{ MVar} \quad (3.34)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός φορτίου PQ 2):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 3$:

$$p_3 = -2.0000 \text{ αμ} = -200.00 \text{ MW} \text{ και } q_3 = -1.0000 \text{ αμ} = -100.00 \text{ MVar} \quad (3.35)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{f}_1$	$x_4 = \bar{f}_2$	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	2,0000	1,0000	2,0000	1,0000
2	0,0225	0,1119	-0,0719	-0,1500	0,9258	0,6837	-0,9533	-0,3202
3	0,0146	0,1252	-0,1341	-0,0627	-0,0747	1,1304	0,9042	-1,0179
4	0,1025	0,0375	-0,0463	-0,1500	1,4748	-0,2646	-1,1364	0,8599
5	0,1012	0,0384	-0,1339	-0,0636	0,1002	0,1140	0,7145	0,2728
6	0,1058	0,0348	-0,0431	-0,1500	1,5287	-0,2961	-1,1437	0,9133
7	0,0138	0,1267	-0,1351	-0,0590	-0,0925	1,1538	0,9834	-1,0446
8	0,1091	0,0322	-0,0398	-0,1016	1,5290	-0,3068	-0,1306	0,6208

9	0,1164	0,0265	-0,1389	-0,0438	0,0298	0,0430	1,1096	0,4575
10	0,0152	0,1242	-0,0486	-0,1500	1,2676	0,7540	-0,9624	-0,4384
11	0,0108	0,1318	-0,1383	-0,0461	-0,1534	1,2358	1,2555	-1,1286
12	0,1161	0,0267	-0,0330	-0,0971	1,6319	-0,3677	-0,0453	0,7064
13	0,0148	0,0718	-0,1398	-0,0403	-0,0917	1,2018	1,2892	-0,2999
14	0,1332	0,0133	-0,1444	-0,0219	-0,0535	-0,0145	1,5513	0,7053
15	0,0677	0,0725	-0,0920	-0,1053	0,6908	0,2039	-0,1096	-0,1051
16	0,1328	0,0136	-0,1185	-0,1141	0,4419	-0,2807	-0,4177	0,9715
17	0,0812	0,0875	-0,1445	-0,0219	-0,1725	0,4049	1,6715	-0,6084
18	0,0076	0,1371	-0,0244	-0,0967	1,6253	0,8728	0,0926	-0,9314
19	0,0763	0,0920	-0,0936	-0,1111	0,6622	0,0902	-0,2210	-0,3901
20	0,0674	0,0760	-0,0781	-0,0605	0,8657	0,1966	0,8087	-0,3347
21	0,1352	0,0117	-0,1215	-0,1202	0,4127	-0,2910	-0,5532	1,0429
22	0,0043	0,1427	-0,1022	-0,1131	0,3992	1,0709	-0,1217	-0,9811
23	0,1379	0,0095	-0,1047	-0,0766	0,5994	-0,3353	0,3714	0,8951
24	0,0574	0,0810	-0,0153	-0,1500	1,8558	0,1959	-1,0738	0,1817
25	0,0483	0,0745	-0,1262	-0,0758	0,1402	0,6213	0,5422	-0,2834
26	0,0346	0,0400	-0,1370	-0,1133	0,0272	0,8220	-0,2511	0,4649
27	0,0881	0,0505	-0,0924	-0,1021	0,7236	-0,0017	-0,0853	0,2407
28	0,0794	0,0799	-0,1456	-0,0173	-0,1827	0,4447	1,7560	-0,4856
29	0,1434	0,0052	-0,1478	-0,0781	-0,0073	-0,1413	0,3334	0,9563
30	0,1010	0,0514	-0,1068	-0,0905	0,5107	-0,0668	0,1533	0,1477
31	0,0032	0,1025	-0,0947	-0,1053	0,5539	1,0685	-0,0129	-0,5046
32	0,1421	0,0062	-0,1474	-0,0103	-0,1002	-0,0361	1,7891	0,8562
33	0,0971	0,1221	-0,1460	-0,1066	-0,1598	0,0851	-0,0573	-0,9276
34	0,0738	0,0845	-0,0128	-0,1500	1,9163	0,0002	-1,0999	0,1175
35	0,1096	0,1378	-0,0991	-0,1056	0,5635	-0,2911	-0,0903	-1,1076
36	0,0305	0,1121	-0,1192	-0,1027	0,1945	0,7754	0,0486	-0,7058
37	0,1276	0,0744	-0,1471	-0,0759	-0,1138	-0,1087	0,4952	-0,3554
38	0,0998	0,0663	-0,1184	-0,0947	0,3251	-0,0222	0,0904	-0,1039
39	0,0855	0,1458	-0,1473	-0,0106	-0,3102	0,3433	1,9937	-1,4152
40	0,1182	0,0525	-0,1482	-0,0069	-0,1875	0,1121	1,9311	-0,0388
41	0,0558	0,1200	-0,0869	-0,1015	0,7117	0,3063	0,0169	-0,8138
42	0,0716	0,0683	-0,0632	-0,1321	1,1488	0,0664	-0,6937	0,1645
43	0,1393	0,0085	-0,0856	-0,0743	0,8737	-0,4161	0,4168	0,9235
44	0,1215	0,0644	-0,1304	-0,0932	0,1664	-0,1637	0,1062	-0,1018
45	0,1252	0,0601	-0,1481	-0,0550	-0,1364	-0,0314	0,9210	-0,1588
46	0,1324	0,0681	-0,1490	-0,1034	-0,0928	-0,1705	-0,1023	-0,1465
47	0,1445	0,0043	-0,1420	-0,0895	0,0949	-0,2010	0,0869	1,0209
48	0,1422	0,0061	-0,1474	-0,0101	-0,1008	-0,0364	1,7921	0,8582
49	0,1467	0,0410	-0,1489	-0,1068	-0,0317	-0,2537	-0,2307	0,3533
50	0,1468	0,0371	-0,1489	-0,0972	-0,0404	-0,2342	-0,0305	0,3826
51	0,1088	0,0677	-0,1460	-0,1039	-0,0721	0,0261	-0,0921	-0,1173
52	0,0776	0,0638	-0,1346	-0,1036	0,0719	0,2881	-0,0673	-0,0205

53	0,0791	0,0933	-0,0596	-0,1329	1,1979	-0,0453	-0,7067	-0,2286
54	0,1103	0,0683	-0,1372	-0,1027	0,0590	-0,0389	-0,0735	-0,1257
55	0,1477	0,0539	-0,1492	-0,0765	-0,0995	-0,2331	0,4377	-0,0088
56	0,1479	0,0612	-0,1493	-0,1006	-0,0756	-0,2811	-0,0696	-0,0493
57	0,1014	0,0825	-0,1377	-0,1046	0,0246	0,0347	-0,0836	-0,3448
58	0,1108	0,0611	-0,1376	-0,1016	0,0627	-0,0324	-0,0599	-0,0075
59	0,1405	0,0075	-0,0093	-0,1500	2,0778	-0,5500	-1,2101	1,5024
60	0,1131	0,1134	-0,1361	-0,1026	0,0182	-0,1233	-0,0129	-0,8339
61	0,0019	0,1467	-0,1215	-0,0960	0,0875	1,2117	0,2564	-1,1318
62	0,0835	0,1261	-0,1264	-0,1012	0,1187	0,1317	0,0503	-0,9713
63	0,0423	0,0285	-0,1476	-0,0095	-0,1465	0,9422	1,8479	0,4313
64	0,1459	0,0533	-0,1346	-0,0950	0,1437	-0,3325	0,0323	0,0853
65	0,1128	0,0611	-0,1421	-0,1020	-0,0018	-0,0257	-0,0681	-0,0119
66	0,1075	0,0450	-0,0938	-0,1259	0,7535	-0,2077	-0,6106	0,4696
67	0,1134	0,0476	-0,1416	-0,0794	-0,0008	0,0132	0,3891	0,1395
68	0,1133	0,0606	-0,1420	-0,0990	-0,0022	-0,0264	-0,0055	-0,0164
69	0,0600	0,0908	-0,1016	-0,1474	0,5445	0,2763	-0,9435	-0,1218
70	0,0928	0,0596	-0,1392	-0,0998	0,0207	0,1602	-0,0052	0,0197
71	0,1096	0,0603	-0,1415	-0,0990	0,0014	0,0058	-0,0036	-0,0092
72	0,1202	0,0479	-0,1446	-0,0982	-0,0173	-0,0582	-0,0127	0,2008
73	0,0578	0,0584	-0,1289	-0,1008	0,1413	0,4958	0,0005	0,0752
74	0,1099	0,0593	-0,1417	-0,0989	0,0003	0,0054	-0,0022	0,0074
75	0,1256	0,0595	-0,1437	-0,0986	-0,0149	-0,1262	-0,0113	-0,0079
76	0,1099	0,0597	-0,1417	-0,0989	0,0004	0,0051	-0,0018	-0,0002
77	0,1474	0,0346	-0,1406	-0,0699	0,0452	-0,2468	0,5470	0,3418
78	0,0784	0,0915	-0,0086	-0,1158	1,9601	-0,0502	-0,3980	-0,2589
79	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0989	-0,0003	-0,0004	-0,0018	-0,0003
80	0,1104	0,0597	-0,1414	-0,0988	0,0039	-0,0006	-0,0015	-0,0003
81	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0988	0,0001	-0,0006	-0,0015	-0,0003
82	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0987	0,0001	-0,0006	0,0008	-0,0002
83	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0988	0,0001	-0,0007	-0,0001	-0,0002
84	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0988	0,0000	0,0001	0,0000	-0,0002
85	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0988	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000
86	0,1105	0,0597	-0,1417	-0,0988	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000

Πίνακας 3.3.2: Οι τιμές των μεταβλητών και των DC συναρτήσεων για τη δεύτερη λύση

3.4 Παράδειγμα 4

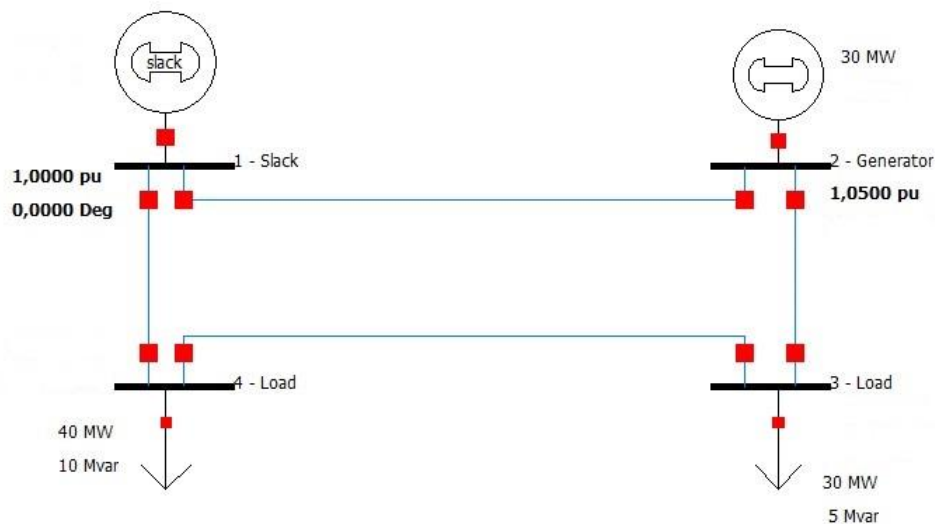
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	V (αμ)	P_g (αμ)	P_d (αμ)	Q_g (αμ)	Q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός παραγωγής PV	$1.05 \angle ? = \bar{a}_1 + j\bar{f}_1 = x_1 + jx_4$	0.3	0	?	0
3	Ζυγός φορτίου PQ 1	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2 = x_2 + jx_5$	0	0.3	0	0.05
4	Ζυγός φορτίου PQ 2	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3 = x_3 + jx_6$	0	0.4	0	0.1

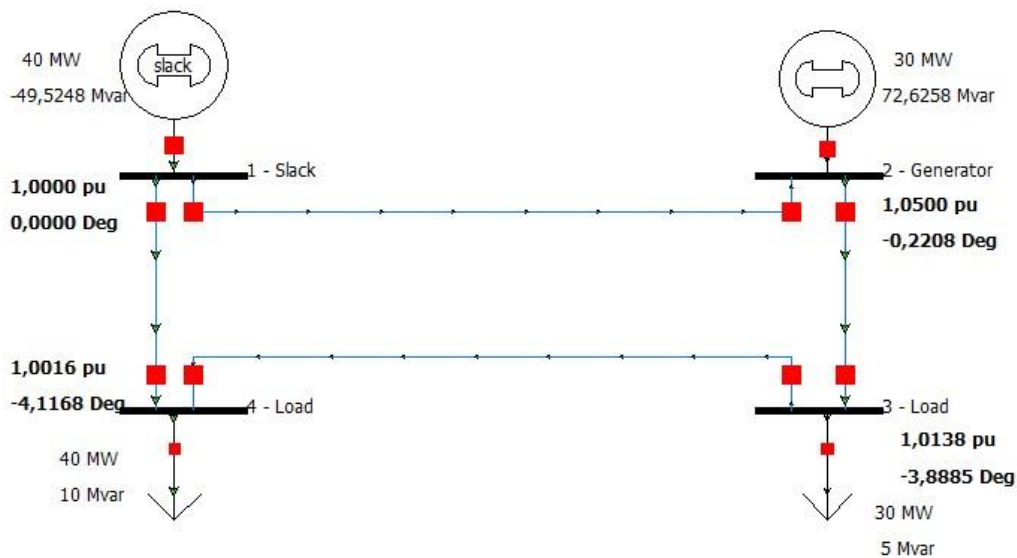
Δεδομένα γραμμών:

Από γραμμή	Προς γραμμή	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0	0.1
1	4	0	0.2
2	3	0	0.2
3	4	0	0.1

Πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά το ΣΗΕ τεσσάρων ζυγών:



Σχήμα 3.4.1 ΣΗΕ 4 ζυγών παραδείγματος 4



Σχήμα 3.4.2 Αποτέλεσμα προσομοίωσης με χρήση του λογισμικού PowerWorld Simulator 18

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.4.2, αναμένουμε το αποτέλεσμα να είναι

$$\tilde{V}_2 = 1.0500 \angle -0.2208^\circ = 1.0500 - j0.0040 \quad (3.36)$$

$$\tilde{V}_3 = 1.0138 \angle -3.8885^\circ = 1.0015 - j0.0688 \quad (3.37)$$

$$\tilde{V}_4 = 1.0016 \angle -4.1168^\circ = 0.9990 - j0.0719 \quad (3.38)$$

Σημειώνεται ότι, αφού έχουμε ένα ζυγό παραγωγής PV και δύο ζυγούς φορτίου PQ, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα σύστημα έξι μη γραμμικών εξισώσεων (τρεις εξισώσεις P, μια εξίσωση V και δύο εξισώσεις Q) έξι αγνώστων.

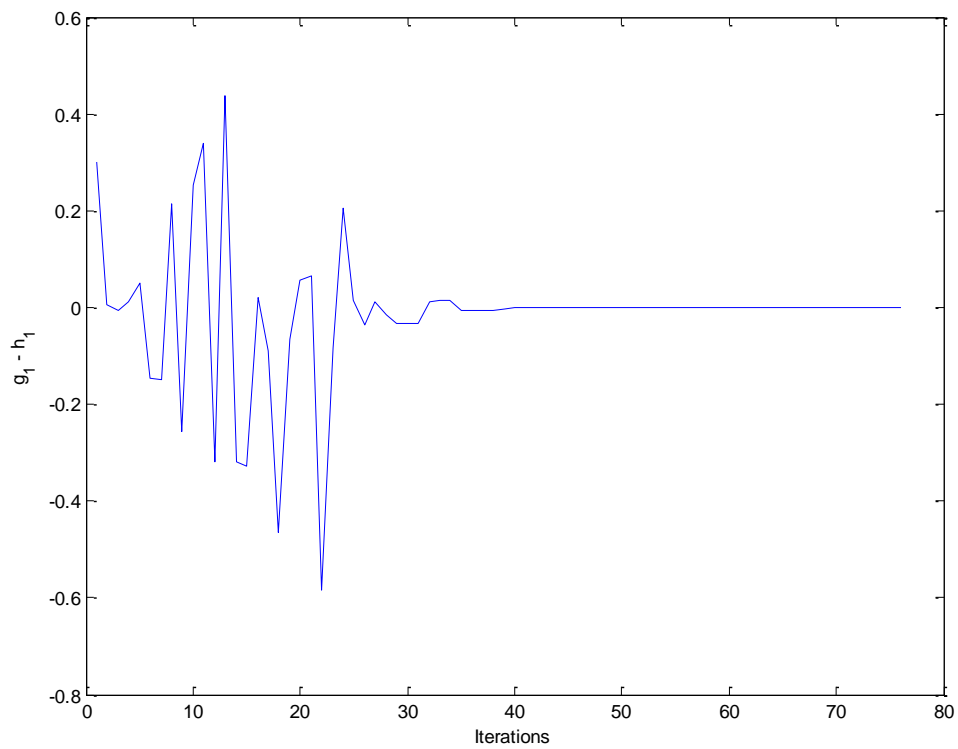
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο X ορίστηκε ως

$$[0.98, 1.06] \times [0.98, 1.06] \times [0.98, 1.06] \times [-0.08, 0] \times [-0.08, 0] \times [-0.08, 0]$$

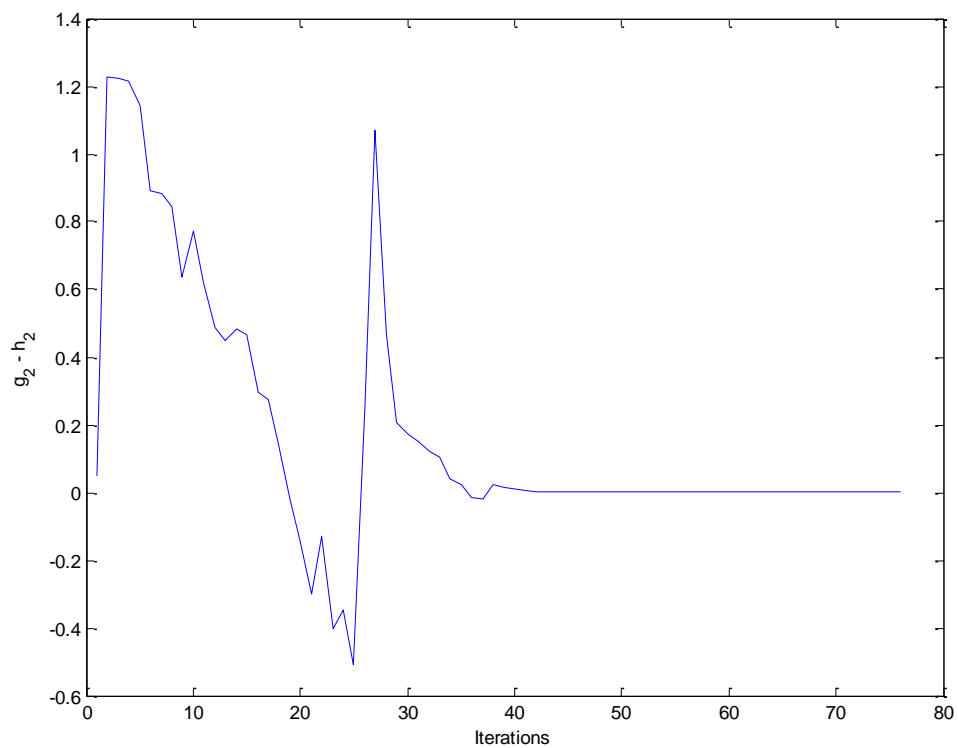
και το αντίστοιχο σύνολο Y υπολογίστηκε

$$[0.1136, 1.6369] \times [0.2158, 1.6865] \times [4.0829, 10.1674] \times [7.2336, 13.2260] \times [22.4740, 31.3885] \times [1.1025, 1.1300]$$

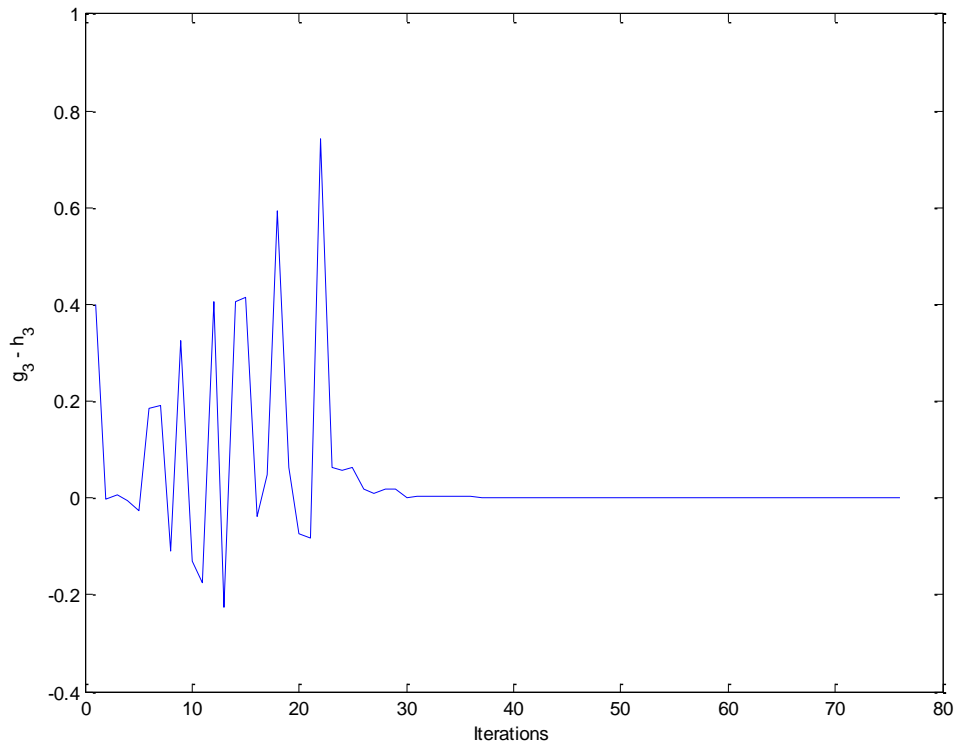
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



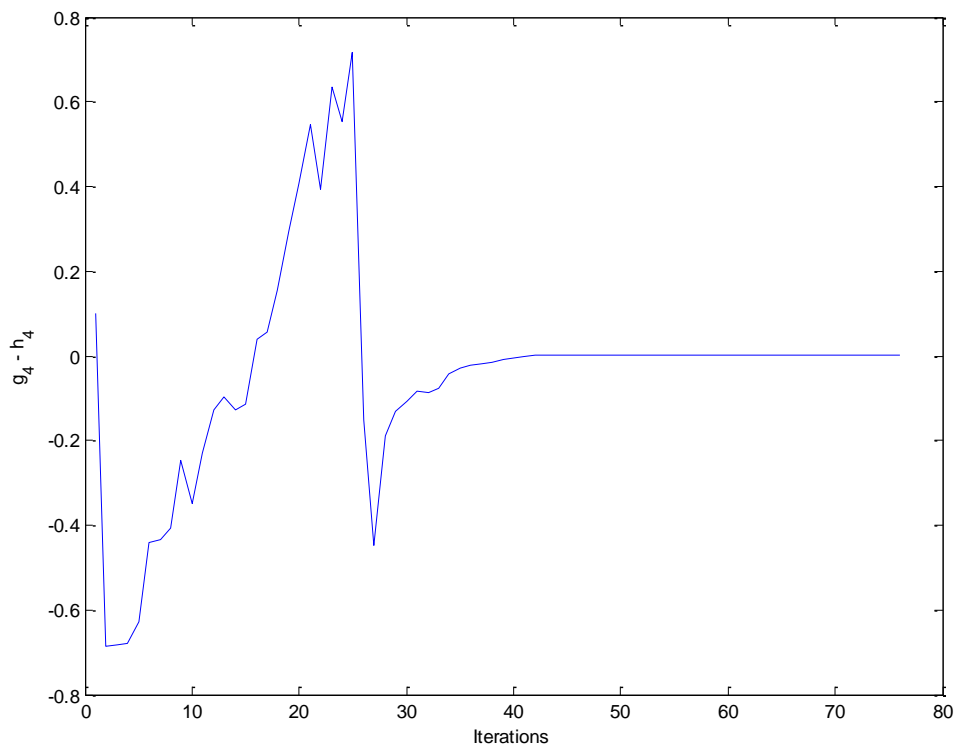
Σχήμα 3.4.3: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 – PQ)



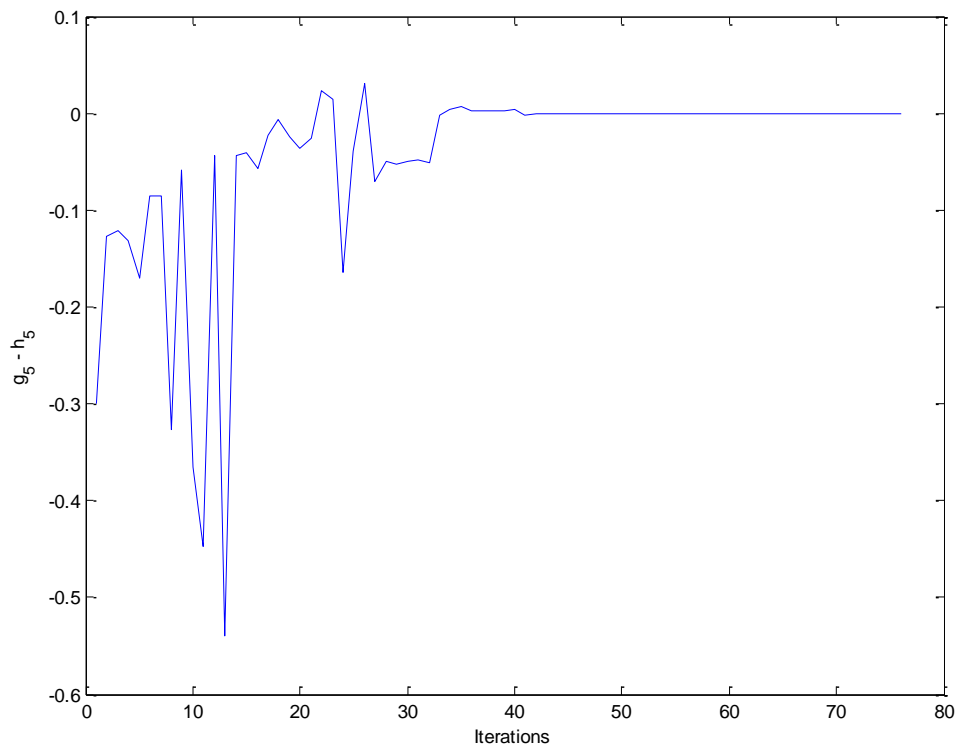
Σχήμα 3.4.4: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 3 – PQ)



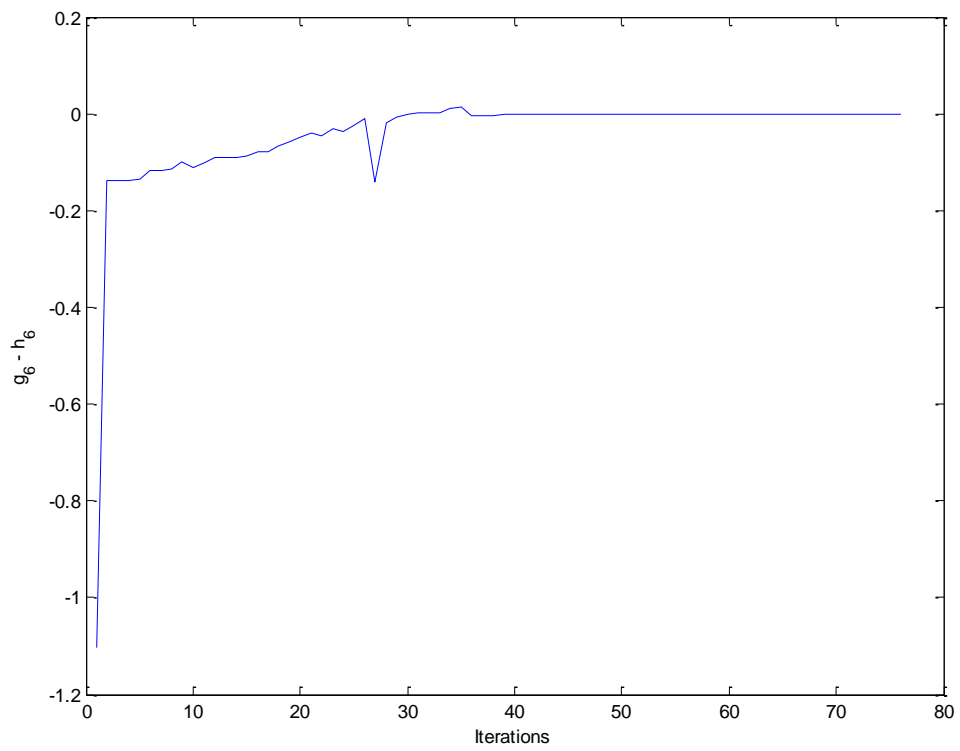
Σχήμα 3.4.5: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 4 – PQ)



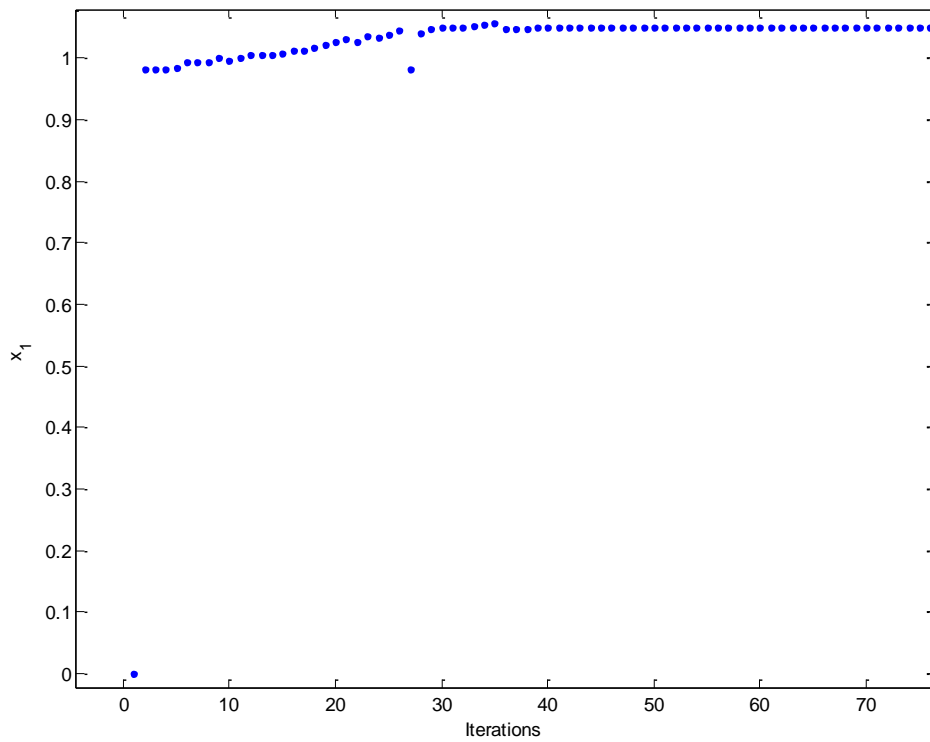
Σχήμα 3.4.6: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 4 – PQ)



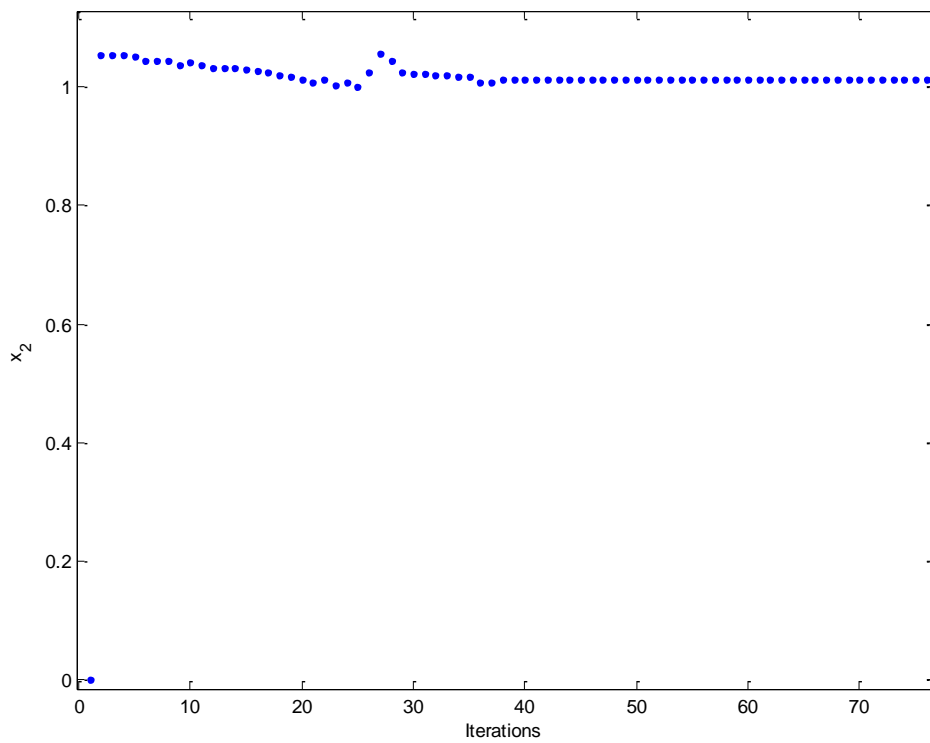
Σχήμα 3.4.7: Οι τιμές της πέμπτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 – PV)



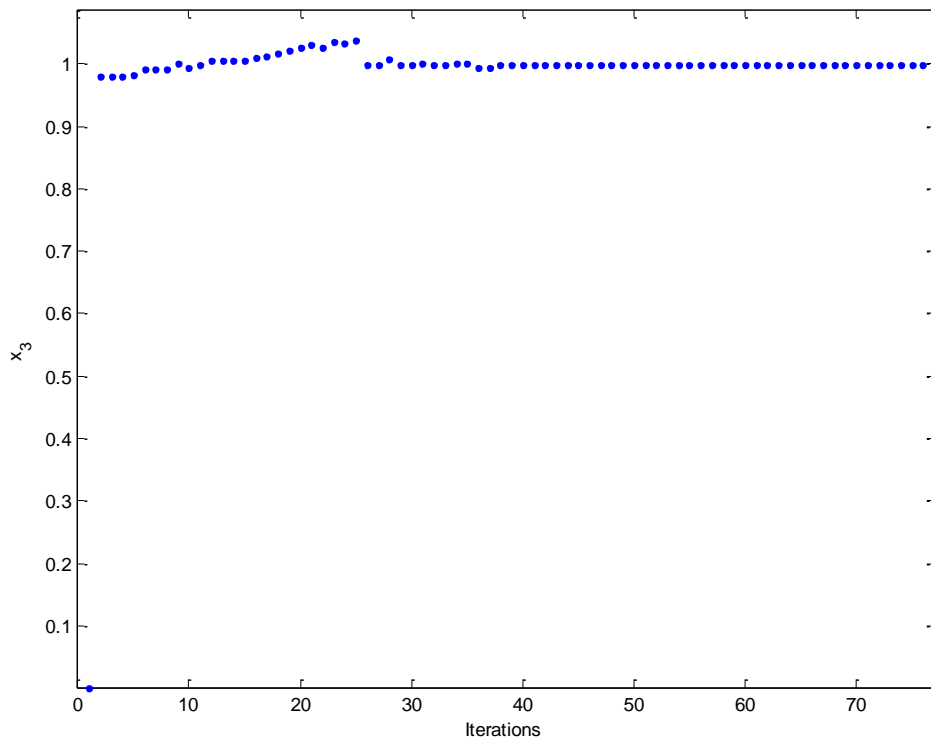
Σχήμα 3.4.8: Οι τιμές της έκτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση V του ζυγού 2 – PV)



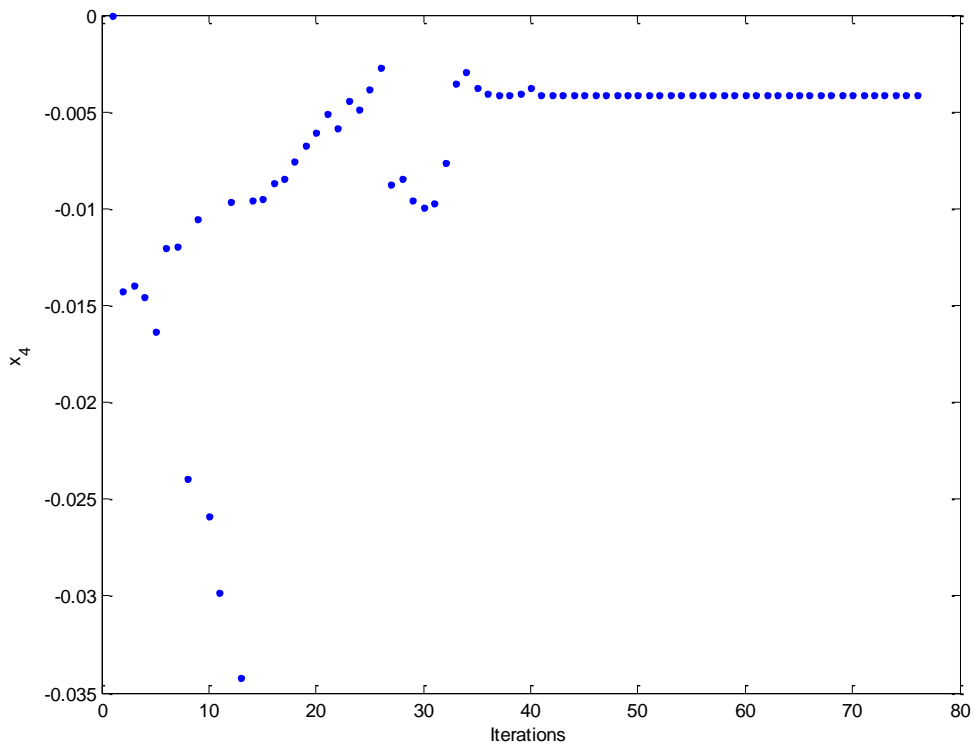
Σχήμα 3.4.9: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



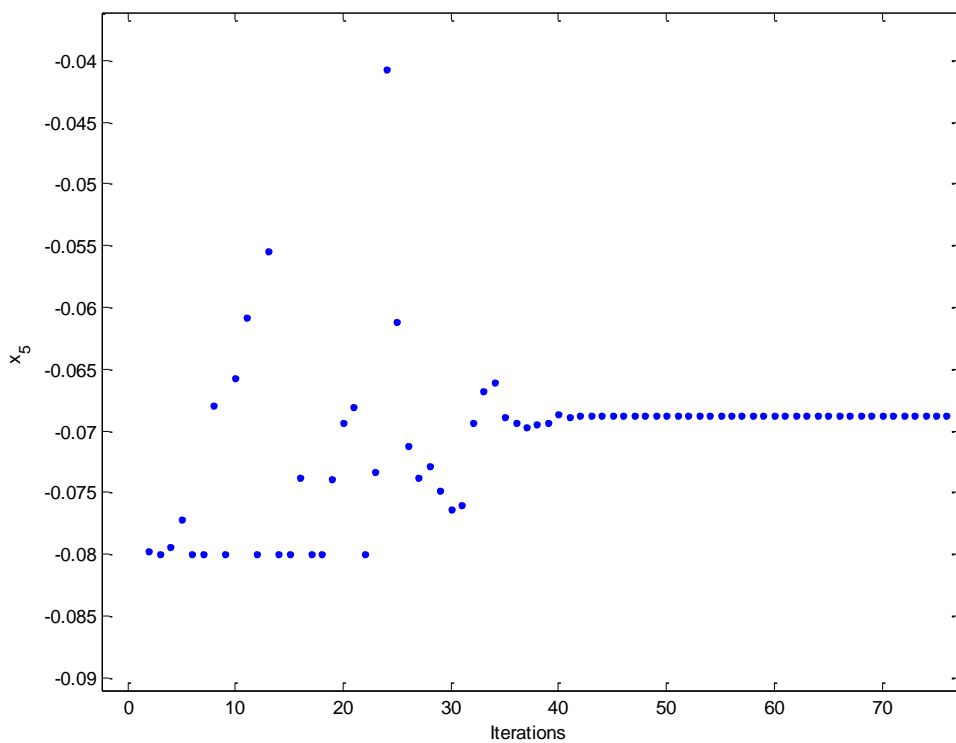
Σχήμα 3.4.10: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



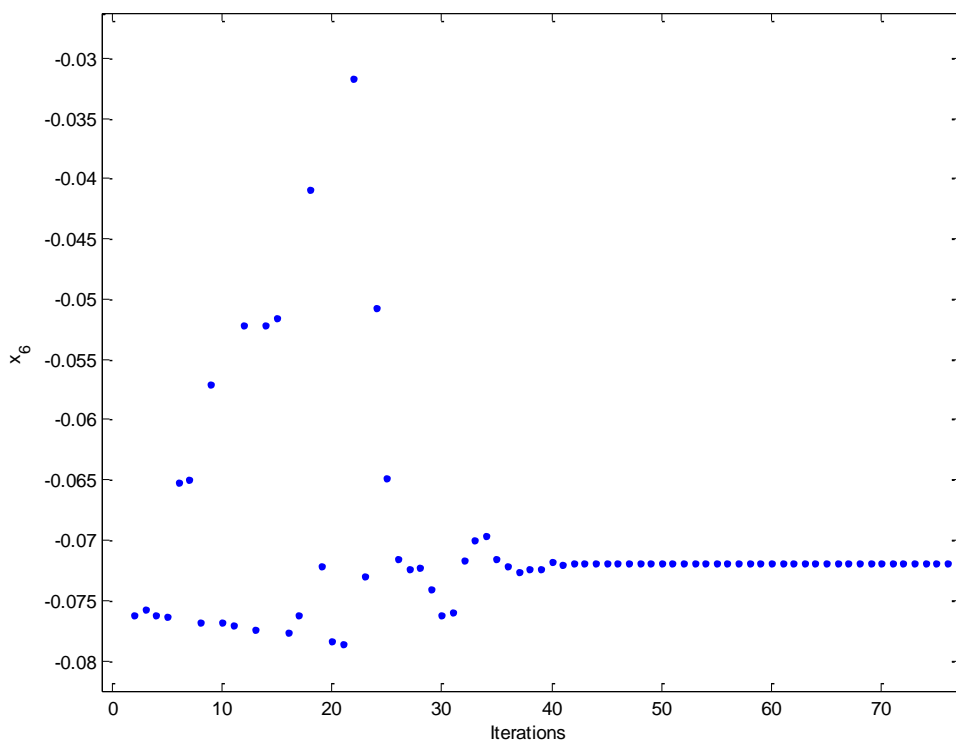
Σχήμα 3.4.11: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{a}_3$



Σχήμα 3.4.12: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.4.13: Οι τιμές της μεταβλητής $x_5 = \bar{f}_2$



Σχήμα 3.4.14: Οι τιμές της μεταβλητής $x_6 = \bar{f}_3$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_4 = 1.0498 - j0.0041 = 1.0498 \angle -0.2238^\circ \quad (3.39)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_5 = 1.0117 - j0.0687 = 1.0140 \angle -3.8847^\circ \quad (3.40)$$

$$\tilde{V}_4 = x_3 + jx_6 = 0.9992 - j0.0719 = 1.0018 \angle -4.1158^\circ \quad (3.41)$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν με αυτά τις προσομοίωσης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T \left(g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x \right) \text{ και } q_1 = -e_1^T \left(b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x \right)$$

Επομένως, για $x = [1.0498 \quad 1.0117 \quad 0.9992 \quad -0.0041 \quad -0.0687 \quad -0.0719]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 0.4006 \text{ αμ} = 40.06 \text{ MW} \text{ και } q_1 = -0.4945 \text{ αμ} = -49.45 \text{ MVA}r \quad (3.42)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός παραγωγής PV):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 2$:

$$p_2 = 0.2988 \text{ αμ} = 29.88 \text{ MW} \text{ και } q_2 = 0.7224 \text{ αμ} = 72.24 \text{ MVA}r \quad (3.43)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός φορτίου PQ 1):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 3$:

$$p_3 = -0.2996 \text{ αμ} = -29.96 \text{ MW} \text{ και } q_3 = -0.0472 \text{ αμ} = -4.72 \text{ MVA}r \quad (3.44)$$

Για τον ζυγό 4 (ζυγός φορτίου PQ 2):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 4$:

$$p_4 = -0.3999 \text{ αμ} = -39.99 \text{ MW} \text{ και } q_4 = -0.1000 \text{ αμ} = -10.00 \text{ MVA}r \quad (3.45)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{a}_3$	$x_4 = \bar{f}_1$	$x_5 = \bar{f}_2$	$x_6 = \bar{f}_3$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,9816	1,0534	0,9803	-0,0143	-0,0797	-0,0762
3	0,9818	1,0532	0,9805	-0,0140	-0,0800	-0,0758
4	0,9819	1,0531	0,9806	-0,0145	-0,0794	-0,0762
5	0,9841	1,0511	0,9828	-0,0164	-0,0772	-0,0763
6	0,9926	1,0431	0,9915	-0,0120	-0,0800	-0,0653
7	0,9929	1,0428	0,9918	-0,0120	-0,0800	-0,0650
8	0,9931	1,0426	0,9920	-0,0239	-0,0680	-0,0768
9	1,0011	1,0351	1,0001	-0,0105	-0,0800	-0,0570
10	0,9954	1,0405	0,9943	-0,0258	-0,0657	-0,0769
11	1,0001	1,0360	0,9991	-0,0298	-0,0609	-0,0771
12	1,0061	1,0305	1,0052	-0,0096	-0,0800	-0,0522
13	1,0054	1,0311	1,0045	-0,0342	-0,0555	-0,0774
14	1,0062	1,0304	1,0053	-0,0096	-0,0800	-0,0521
15	1,0067	1,0299	1,0058	-0,0095	-0,0800	-0,0516
16	1,0115	1,0254	1,0107	-0,0087	-0,0738	-0,0777
17	1,0124	1,0245	1,0116	-0,0085	-0,0800	-0,0762
18	1,0178	1,0195	1,0171	-0,0075	-0,0800	-0,0409
19	1,0221	1,0155	1,0215	-0,0068	-0,0739	-0,0721
20	1,0259	1,0119	1,0254	-0,0061	-0,0694	-0,0784
21	1,0313	1,0069	1,0308	-0,0051	-0,0681	-0,0786
22	1,0273	1,0106	1,0268	-0,0058	-0,0800	-0,0316
23	1,0353	1,0031	1,0349	-0,0044	-0,0734	-0,0730
24	1,0325	1,0058	1,0320	-0,0049	-0,0407	-0,0508
25	1,0386	1,0001	1,0382	-0,0038	-0,0612	-0,0648
26	1,0447	1,0250	0,9981	-0,0027	-0,0712	-0,0716
27	0,9808	1,0561	0,9993	-0,0087	-0,0738	-0,0724
28	1,0407	1,0443	1,0087	-0,0085	-0,0729	-0,0723
29	1,0471	1,0230	0,9981	-0,0095	-0,0749	-0,0740
30	1,0495	1,0219	0,9987	-0,0099	-0,0764	-0,0763
31	1,0508	1,0223	1,0007	-0,0097	-0,0760	-0,0760
32	1,0503	1,0189	0,9982	-0,0076	-0,0693	-0,0717
33	1,0514	1,0184	0,9986	-0,0035	-0,0668	-0,0700
34	1,0553	1,0165	0,9996	-0,0029	-0,0660	-0,0697
35	1,0569	1,0159	1,0002	-0,0038	-0,0688	-0,0716
36	1,0481	1,0067	0,9945	-0,0040	-0,0694	-0,0721
37	1,0482	1,0065	0,9944	-0,0042	-0,0697	-0,0726
38	1,0486	1,0121	0,9985	-0,0041	-0,0695	-0,0724
39	1,0490	1,0121	0,9989	-0,0041	-0,0694	-0,0723
40	1,0493	1,0120	0,9991	-0,0038	-0,0686	-0,0718
41	1,0497	1,0118	0,9992	-0,0042	-0,0688	-0,0720
42	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
43	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719

44	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
45	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
46	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
47	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
48	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
49	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719
50	1,0498	1,0117	0,9992	-0,0041	-0,0687	-0,0719

Πίνακας 3.4.1: Οι τιμές των μεταβλητών

Επανάληψη	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$	$g_5 - h_5$	$g_6 - h_6$
1	0,3000	0,0500	0,4000	0,1000	-0,3000	-1,1025
2	0,0053	1,2272	-0,0024	-0,6870	-0,1266	-0,1388
3	-0,0055	1,2228	0,0074	-0,6839	-0,1205	-0,1385
4	0,0110	1,2163	-0,0054	-0,6792	-0,1322	-0,1381
5	0,0500	1,1433	-0,0254	-0,6266	-0,1699	-0,1338
6	-0,1468	0,8902	0,1862	-0,4420	-0,0859	-0,1171
7	-0,1505	0,8814	0,1909	-0,4354	-0,0850	-0,1165
8	0,2131	0,8443	-0,1098	-0,4053	-0,3266	-0,1156
9	-0,2558	0,6344	0,3246	-0,2462	-0,0590	-0,1002
10	0,2544	0,7705	-0,1312	-0,3490	-0,3660	-0,1110
11	0,3406	0,6182	-0,1762	-0,2310	-0,4481	-0,1014
12	-0,3190	0,4863	0,4051	-0,1288	-0,0433	-0,0902
13	0,4377	0,4504	-0,2270	-0,0977	-0,5399	-0,0905
14	-0,3202	0,4836	0,4066	-0,1266	-0,0430	-0,0900
15	-0,3272	0,4671	0,4156	-0,1134	-0,0413	-0,0889
16	0,0212	0,2936	-0,0385	0,0382	-0,0576	-0,0793
17	-0,0905	0,2754	0,0481	0,0548	-0,0234	-0,0774
18	-0,4654	0,1442	0,5923	0,1542	-0,0067	-0,0666
19	-0,0659	-0,0187	0,0618	0,2959	-0,0242	-0,0577
20	0,0562	-0,1414	-0,0731	0,4057	-0,0356	-0,0499
21	0,0640	-0,3001	-0,0825	0,5451	-0,0258	-0,0389
22	-0,5832	-0,1301	0,7435	0,3937	0,0232	-0,0471
23	-0,0851	-0,4042	0,0624	0,6353	0,0136	-0,0307
24	0,2050	-0,3454	0,0558	0,5543	-0,1637	-0,0365
25	0,0139	-0,5087	0,0634	0,7177	-0,0395	-0,0239
26	-0,0356	0,2486	0,0195	-0,1521	0,0309	-0,0110
27	0,0111	1,0722	0,0107	-0,4461	-0,0712	-0,1404
28	-0,0146	0,4640	0,0181	-0,1891	-0,0496	-0,0194
29	-0,0329	0,2065	0,0195	-0,1310	-0,0522	-0,0059
30	-0,0331	0,1704	0,0020	-0,1085	-0,0496	-0,0009
31	-0,0329	0,1500	0,0032	-0,0834	-0,0478	0,0019
32	0,0129	0,1209	0,0034	-0,0883	-0,0507	0,0007
33	0,0132	0,1030	0,0035	-0,0783	-0,0020	0,0030

34	0,0146	0,0425	0,0034	-0,0436	0,0042	0,0112
35	-0,0059	0,0221	0,0034	-0,0290	0,0070	0,0146
36	-0,0070	-0,0151	0,0033	-0,0208	0,0027	-0,0040
37	-0,0071	-0,0173	-0,0006	-0,0194	0,0030	-0,0037
38	-0,0047	0,0241	-0,0006	-0,0154	0,0021	-0,0029
39	-0,0047	0,0167	-0,0005	-0,0083	0,0028	-0,0020
40	0,0003	0,0124	-0,0005	-0,0057	0,0032	-0,0015
41	0,0004	0,0056	-0,0006	-0,0016	-0,0014	-0,0007
42	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
43	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
44	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
45	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
46	0,0004	0,0056	-0,0006	-0,0016	-0,0014	-0,0007
47	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
48	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
49	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003
50	0,0004	0,0028	0,0001	0,0000	-0,0012	-0,0003

Πίνακας 3.4.2: Οι τιμές των DC συναρτήσεων

Σ' αυτό το παράδειγμα, δεν ήταν δυνατός ο εντοπισμός δεύτερης λύσης.

3.5 Παράδειγμα 5

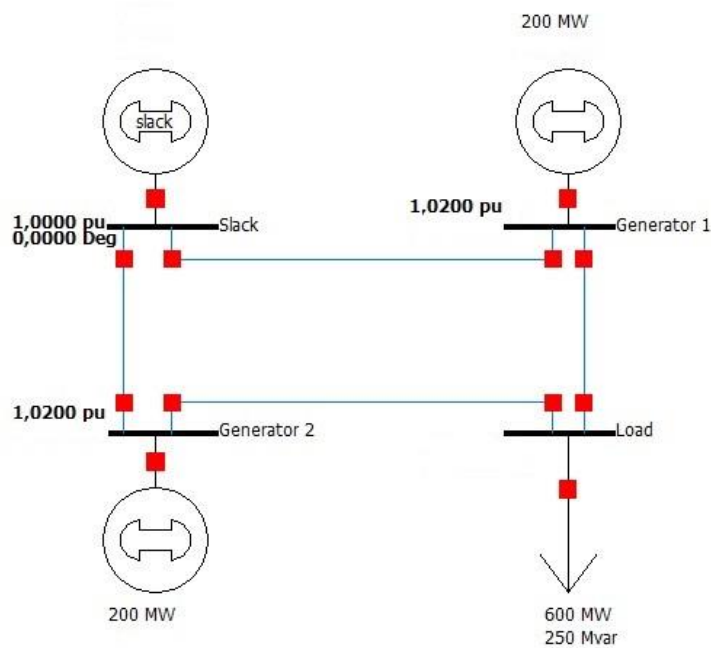
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	V (αμ)	P_g (αμ)	P_d (αμ)	Q_g (αμ)	Q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1\angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός παραγωγής PV 1	$1.02\angle ? = \bar{a}_1 + j\bar{f}_1 = x_1 + jx_4$	2	0	?	0
3	Ζυγός παραγωγής PV 2	$1.02\angle ? = \bar{a}_2 + j\bar{f}_2 = x_2 + jx_5$	2	0	?	0
4	Ζυγός φορτίου PQ	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3 = x_3 + jx_6$	0	6	0	2.5

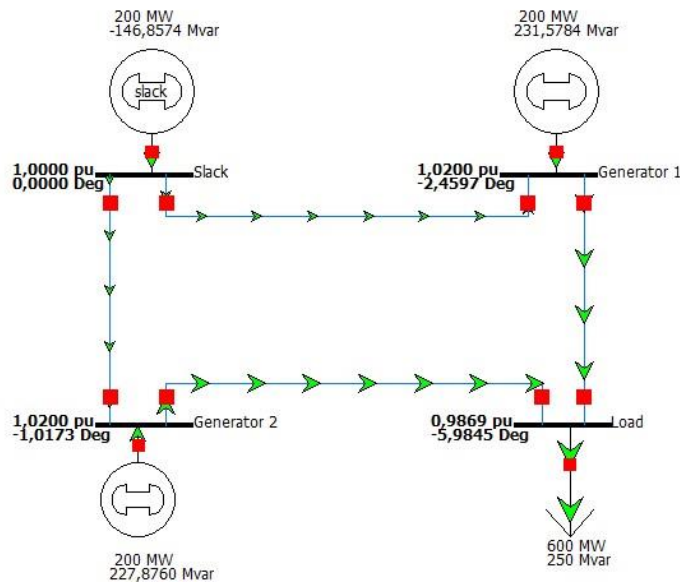
Δεδομένα γραμμών:

Από γραμμή	Προς γραμμή	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0	0.04
1	3	0	0.02
2	4	0	0.02
3	4	0	0.03

Πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά το ΣΗΕ τεσσάρων ζυγών:



Σχήμα 3.5.1 ΣΗΕ 4 ζυγών παραδείγματος 5



Σχήμα 3.5.2 Αποτέλεσμα προσομοίωσης με χρήση του λογισμικού PowerWorld Simulator 18

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.5.2, αναμένουμε το αποτέλεσμα να είναι

$$\tilde{V}_2 = 1.0200 \angle -2.4597^\circ = 1.0191 - j0.0438 \quad (3.46)$$

$$\tilde{V}_3 = 1.0200 \angle -1.0173^\circ = 1.0198 - j0.0181 \quad (3.47)$$

$$\tilde{V}_4 = 0.9869 \angle -5.9845^\circ = 0.9815 - j0.1029 \quad (3.48)$$

Σημειώνεται ότι, αφού έχουμε δύο ζυγούς παραγωγής PV και ένα ζυγό φορτίου PQ, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα σύστημα έξι μη γραμμικών εξισώσεων (τρεις εξισώσεις P, δύο εξισώσεις V και μια εξίσωση Q) έξι αγνώστων.

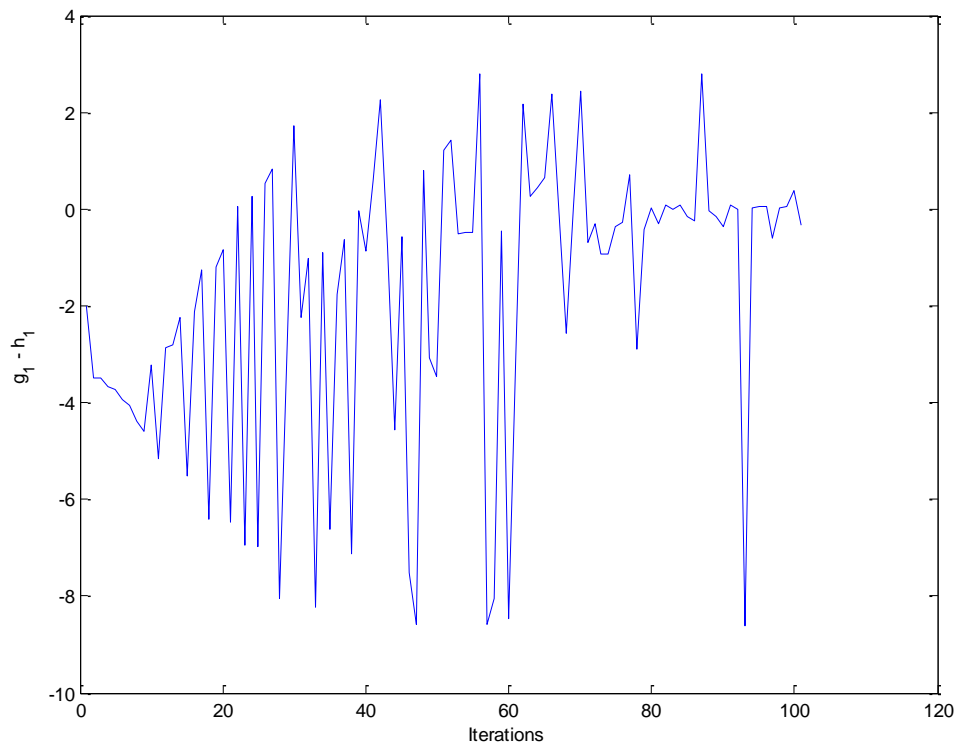
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο X ορίστηκε ως

$$[0.97, 1.03] \times [0.97, 1.03] \times [0.97, 1.03] \times [-0.08, 0] \times [-0.11, 0] \times [-0.11, 0]$$

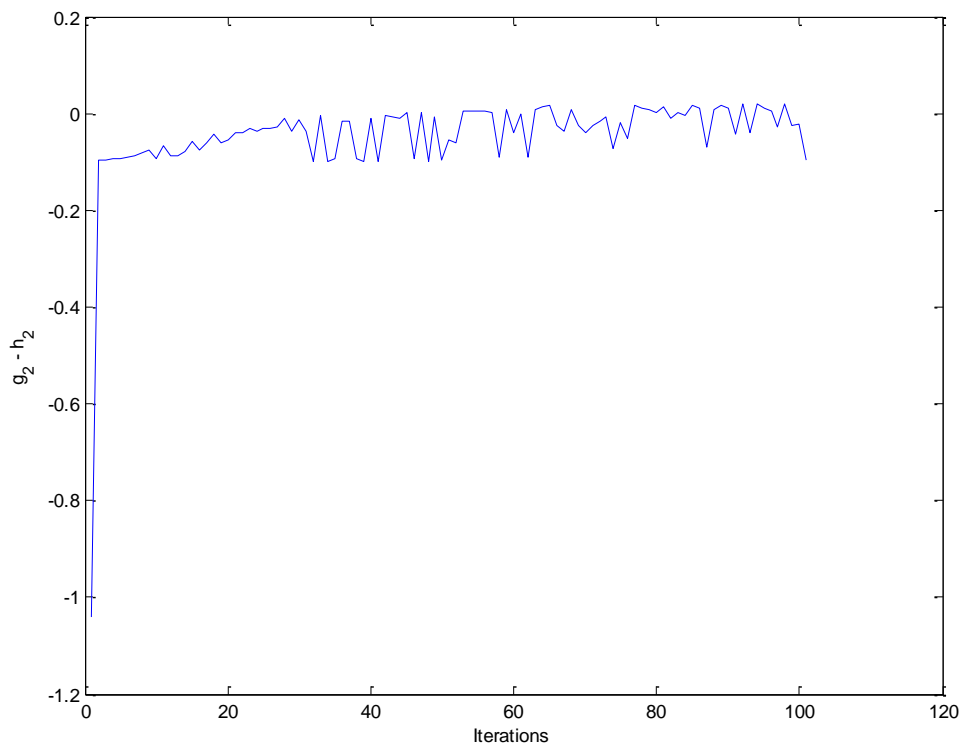
και το αντίστοιχο σύνολο Y υπολογίστηκε

$$[-4.1738 \cdot 10^{-9}, 32.2430] \times [-9.6356 \cdot 10^{-7}, 30.6044] \times [114.2298, 228.5920] \times [1.0404, 1.0730] \times [541.7327, 740.6160] \times [1.0404, 1.0730]$$

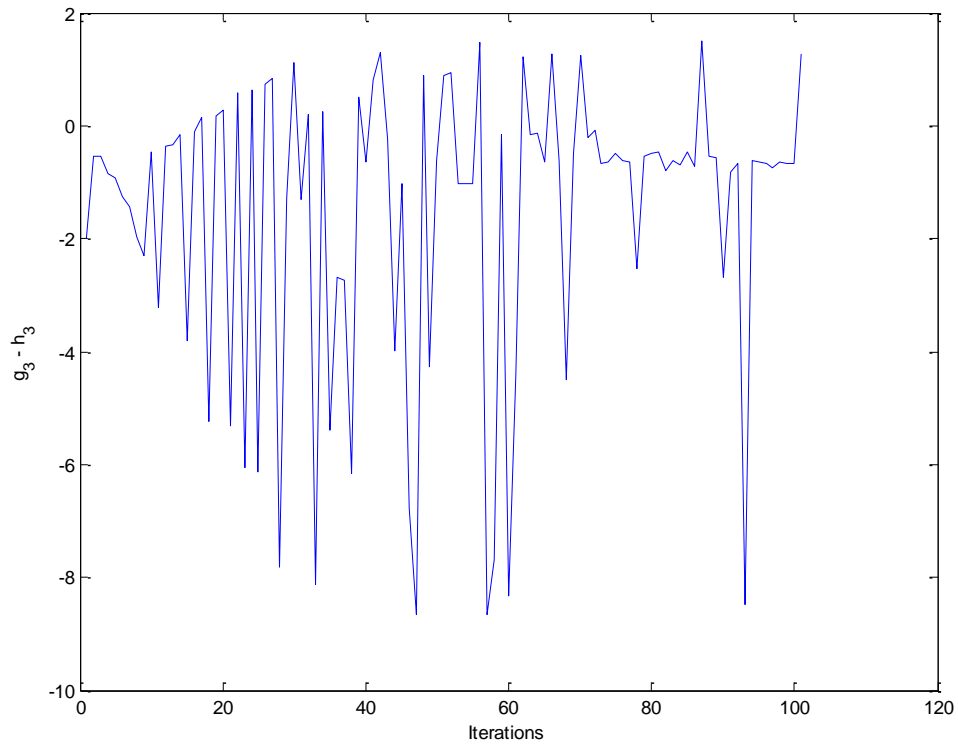
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



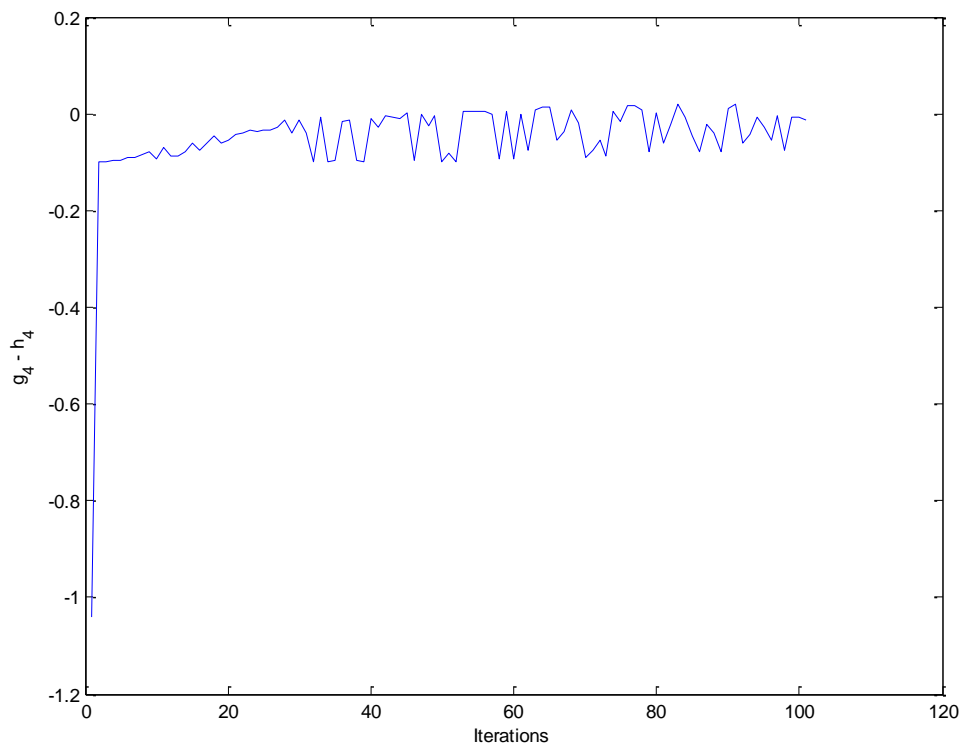
Σχήμα 3.5.3: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 - PV)



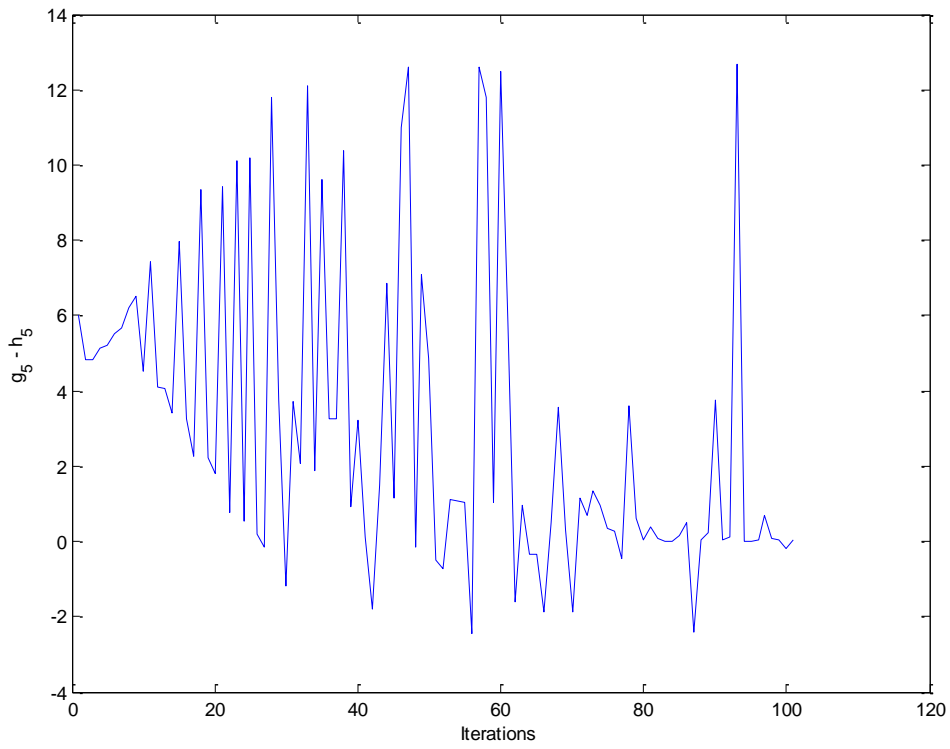
Σχήμα 3.5.4: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση V του ζυγού 2 - PV)



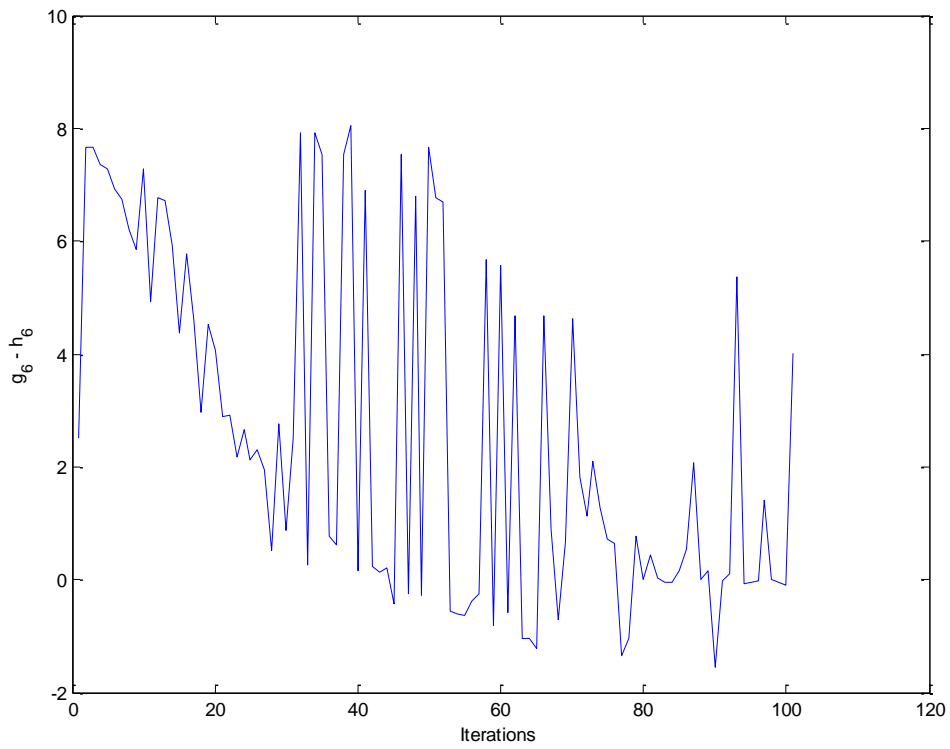
Σχήμα 3.5.5: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 - PV)



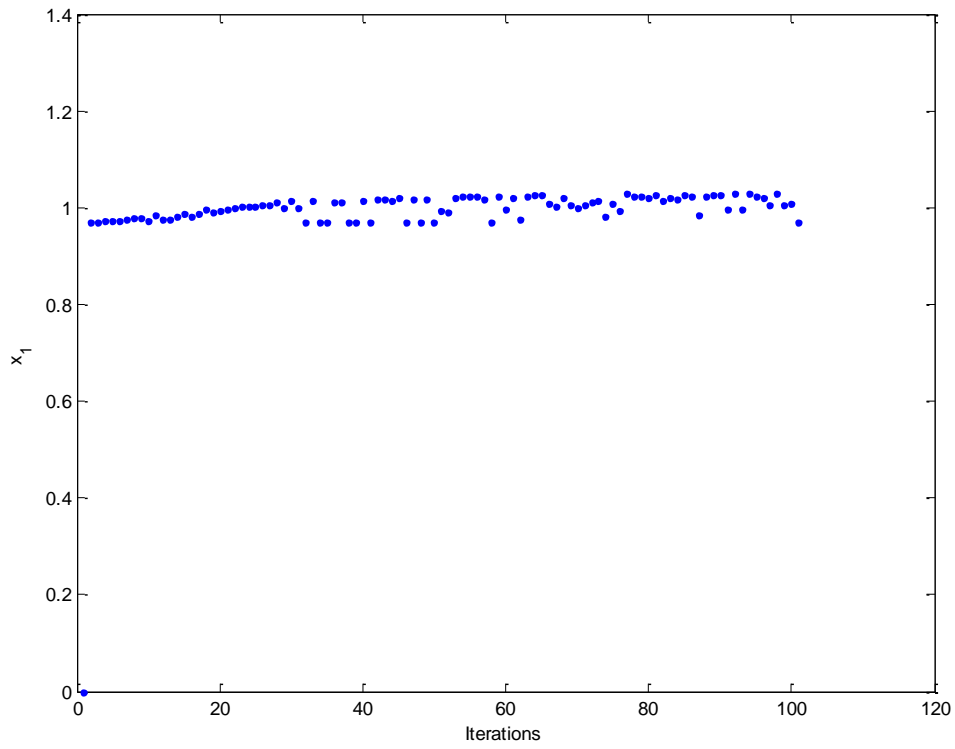
Σχήμα 3.5.6: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση V του ζυγού 3 - PV)



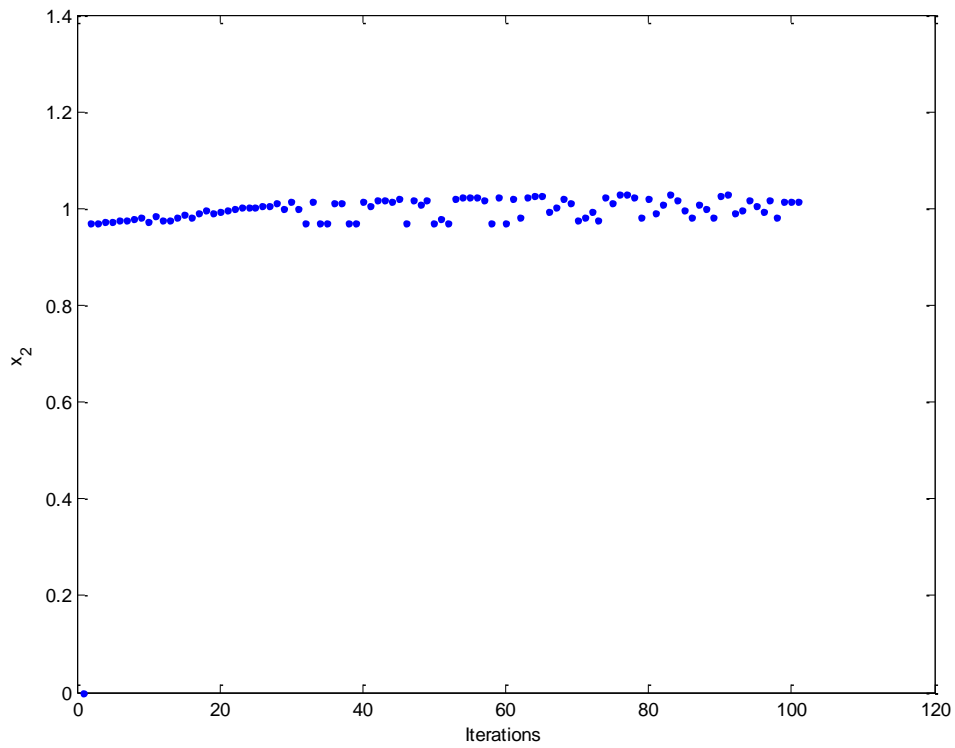
Σχήμα 3.5.7: Οι τιμές της πέμπτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 4 - PQ)



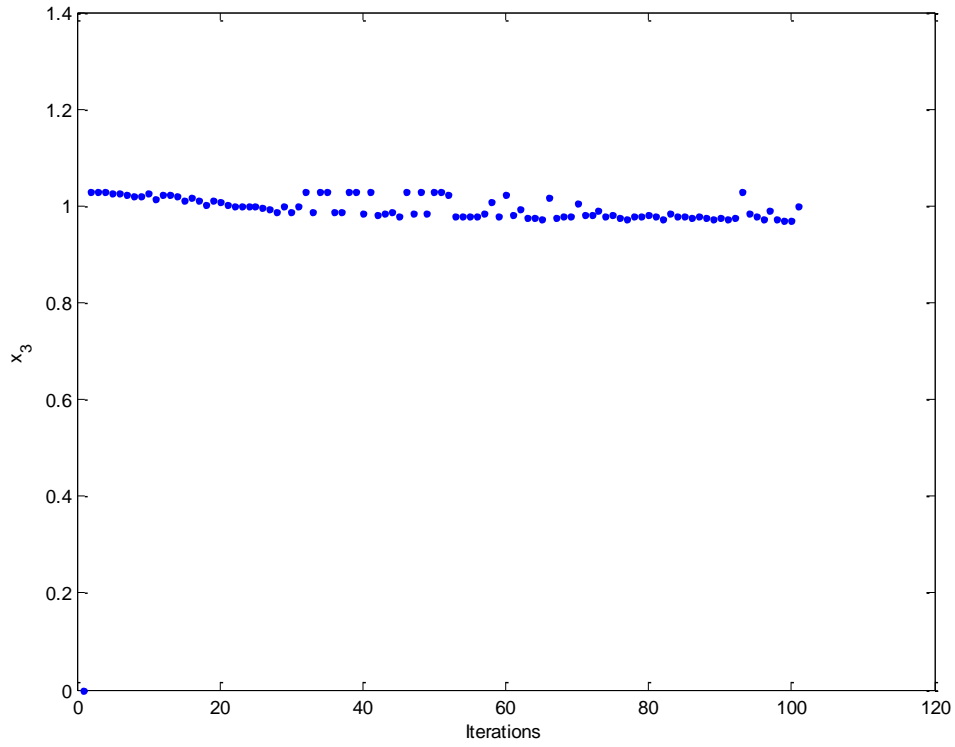
Σχήμα 3.4.8: Οι τιμές της έκτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 4 - PQ)



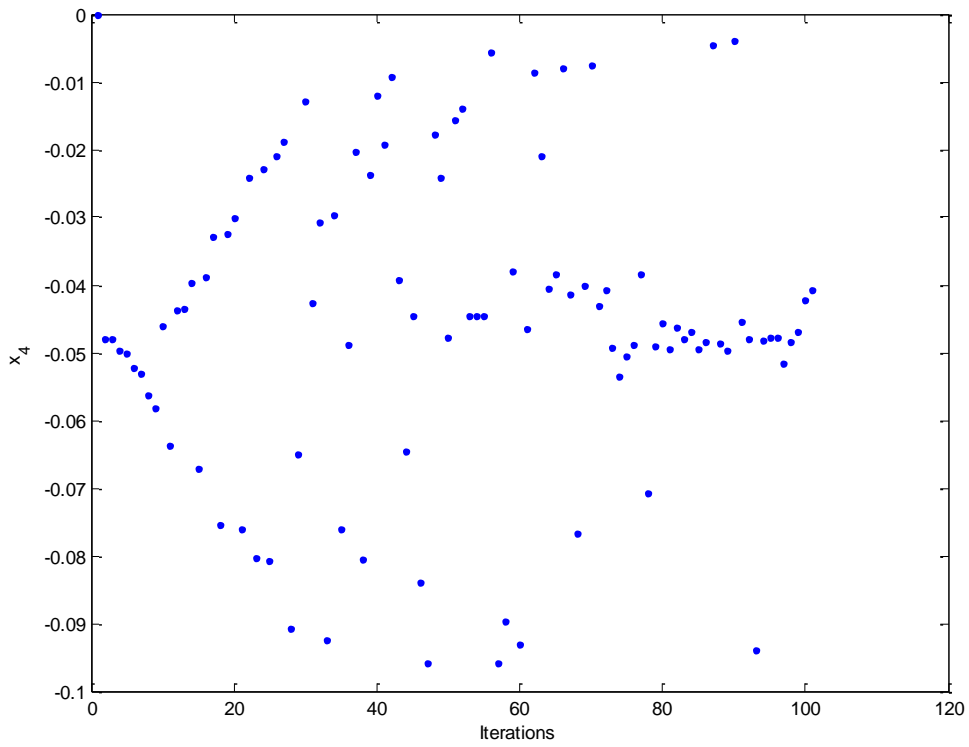
Σχήμα 3.5.9: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



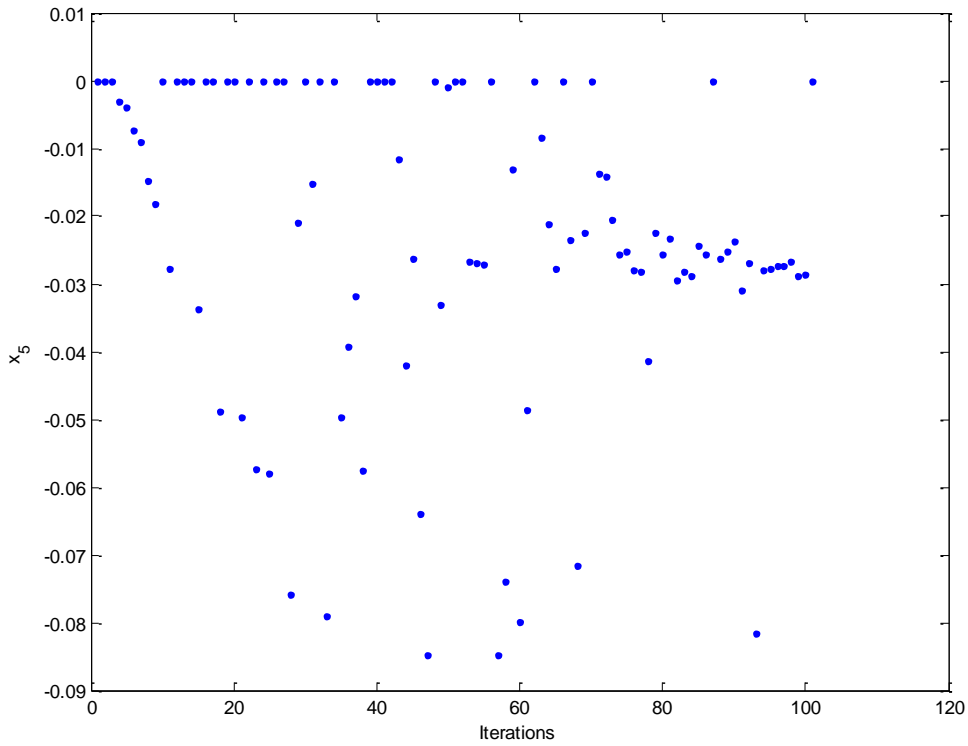
Σχήμα 3.5.10: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



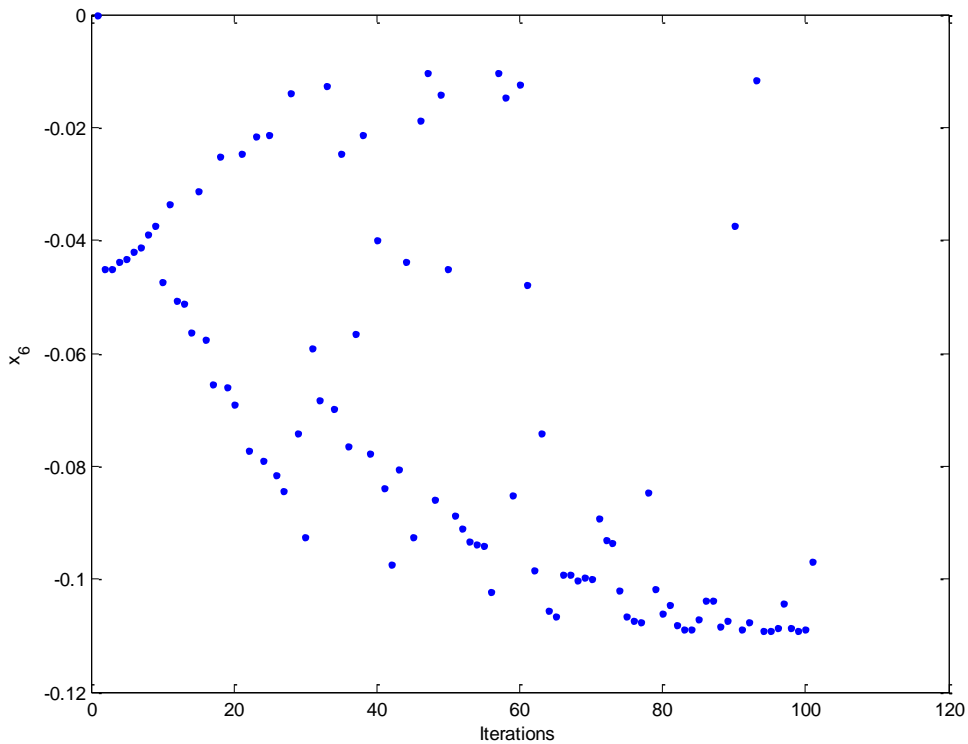
Σχήμα 3.5.11: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{a}_3$



Σχήμα 3.5.12: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.5.13: Οι τιμές της μεταβλητής $x_5 = \bar{f}_2$



Σχήμα 3.5.14: Οι τιμές της μεταβλητής $x_6 = \bar{f}_3$

Τα πιο πάνω αποτελέσματα αντιστοιχούν σε προσομοίωση 101 επαναλήψεων. Ο αλγόριθμος δεν επέστρεψε τα αναμενόμενα αποτελέσματα καθώς δεν τερμάτισε ποτέ (μεγάλο υπολογιστικό κόστος).

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{a}_3$	$x_4 = \bar{f}_1$	$x_5 = \bar{f}_2$	$x_6 = \bar{f}_3$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,9700	0,9703	1,0296	-0,0480	0,0000	-0,0449
3	0,9700	0,9703	1,0296	-0,0480	0,0000	-0,0449
4	0,9717	0,9719	1,0279	-0,0498	-0,0031	-0,0437
5	0,9721	0,9724	1,0275	-0,0502	-0,0039	-0,0434
6	0,9740	0,9742	1,0256	-0,0522	-0,0073	-0,0420
7	0,9750	0,9752	1,0247	-0,0532	-0,0091	-0,0412
8	0,9781	0,9783	1,0216	-0,0563	-0,0148	-0,0389
9	0,9799	0,9802	1,0197	-0,0583	-0,0182	-0,0375
10	0,9723	0,9726	1,0273	-0,0462	0,0000	-0,0475
11	0,9852	0,9854	1,0145	-0,0637	-0,0278	-0,0336
12	0,9753	0,9756	1,0243	-0,0438	0,0000	-0,0507
13	0,9757	0,9760	1,0239	-0,0434	0,0000	-0,0512
14	0,9805	0,9807	1,0192	-0,0396	0,0000	-0,0564
15	0,9884	0,9886	1,0113	-0,0670	-0,0338	-0,0312
16	0,9815	0,9818	1,0182	-0,0388	0,0000	-0,0575
17	0,9889	0,9891	1,0108	-0,0329	0,0000	-0,0655
18	0,9966	0,9967	1,0032	-0,0755	-0,0487	-0,0250
19	0,9894	0,9895	1,0104	-0,0325	0,0000	-0,0660
20	0,9923	0,9925	1,0074	-0,0301	0,0000	-0,0692
21	0,9971	0,9972	1,0027	-0,0760	-0,0496	-0,0247
22	0,9998	1,0000	1,0000	-0,0241	0,0000	-0,0773
23	1,0012	1,0014	0,9986	-0,0803	-0,0573	-0,0215
24	1,0015	1,0016	0,9984	-0,0228	0,0000	-0,0791
25	1,0016	1,0018	0,9982	-0,0807	-0,0580	-0,0213
26	1,0039	1,0040	0,9960	-0,0209	0,0000	-0,0817
27	1,0064	1,0065	0,9935	-0,0189	0,0000	-0,0844
28	1,0114	1,0115	0,9885	-0,0908	-0,0759	-0,0139
29	0,9993	0,9994	1,0005	-0,0649	-0,0209	-0,0743
30	1,0139	1,0139	0,9860	-0,0129	0,0000	-0,0925
31	1,0007	1,0008	0,9991	-0,0426	-0,0153	-0,0591
32	0,9700	0,9702	1,0298	-0,0307	0,0000	-0,0684
33	1,0131	1,0132	0,9868	-0,0925	-0,0790	-0,0127
34	0,9700	0,9702	1,0298	-0,0297	0,0000	-0,0697
35	0,9700	0,9701	1,0298	-0,0760	-0,0496	-0,0247
36	1,0116	1,0117	0,9883	-0,0489	-0,0393	-0,0765
37	1,0123	1,0124	0,9876	-0,0202	-0,0318	-0,0566
38	0,9700	0,9701	1,0298	-0,0805	-0,0576	-0,0214
39	0,9700	0,9701	1,0298	-0,0237	0,0000	-0,0779
40	1,0149	1,0149	0,9851	-0,0121	0,0000	-0,0400
41	0,9700	1,0060	1,0299	-0,0193	0,0000	-0,0839
42	1,0184	1,0184	0,9815	-0,0093	0,0000	-0,0974
43	1,0165	1,0166	0,9834	-0,0393	-0,0117	-0,0806

44	1,0137	1,0137	0,9862	-0,0645	-0,0420	-0,0439
45	1,0205	1,0206	0,9794	-0,0446	-0,0263	-0,0927
46	0,9700	0,9701	1,0298	-0,0840	-0,0639	-0,0189
47	1,0162	1,0163	0,9837	-0,0958	-0,0848	-0,0103
48	0,9700	1,0079	1,0291	-0,0178	0,0000	-0,0860
49	1,0168	1,0168	0,9831	-0,0241	-0,0331	-0,0141
50	0,9700	0,9703	1,0296	-0,0478	-0,0009	-0,0451
51	0,9928	0,9785	1,0299	-0,0156	0,0000	-0,0888
52	0,9899	0,9701	1,0238	-0,0140	0,0000	-0,0910
53	1,0213	1,0214	0,9786	-0,0446	-0,0268	-0,0934
54	1,0218	1,0218	0,9782	-0,0445	-0,0270	-0,0939
55	1,0220	1,0220	0,9780	-0,0445	-0,0271	-0,0940
56	1,0229	1,0229	0,9771	-0,0057	0,0000	-0,1022
57	1,0162	1,0163	0,9837	-0,0958	-0,0848	-0,0103
58	0,9700	0,9701	1,0089	-0,0896	-0,0739	-0,0148
59	1,0228	1,0228	0,9772	-0,0380	-0,0130	-0,0852
60	0,9953	0,9701	1,0222	-0,0931	-0,0800	-0,0123
61	1,0188	1,0189	0,9811	-0,0465	-0,0486	-0,0478
62	0,9742	0,9827	0,9947	-0,0086	0,0000	-0,0984
63	1,0240	1,0240	0,9760	-0,0209	-0,0084	-0,0741
64	1,0258	1,0258	0,9742	-0,0405	-0,0211	-0,1055
65	1,0269	1,0269	0,9730	-0,0385	-0,0278	-0,1067
66	1,0075	0,9923	1,0179	-0,0080	0,0000	-0,0992
67	1,0012	1,0009	0,9748	-0,0414	-0,0234	-0,0993
68	1,0209	1,0210	0,9790	-0,0768	-0,0716	-0,1002
69	1,0062	1,0106	0,9786	-0,0400	-0,0225	-0,0997
70	0,9997	0,9741	1,0054	-0,0075	0,0000	-0,0998
71	1,0063	0,9819	0,9828	-0,0430	-0,0138	-0,0893
72	1,0109	0,9921	0,9807	-0,0407	-0,0141	-0,0930
73	1,0148	0,9767	0,9894	-0,0492	-0,0206	-0,0935
74	0,9826	1,0227	0,9773	-0,0534	-0,0257	-0,1020
75	1,0092	1,0112	0,9810	-0,0505	-0,0253	-0,1067
76	0,9925	1,0277	0,9763	-0,0487	-0,0279	-0,1075
77	1,0278	1,0278	0,9722	-0,0383	-0,0283	-0,1077
78	1,0229	1,0229	0,9771	-0,0708	-0,0414	-0,0847
79	1,0223	0,9811	0,9779	-0,0490	-0,0224	-0,1016
80	1,0196	1,0209	0,9822	-0,0456	-0,0256	-0,1062
81	1,0250	0,9898	0,9786	-0,0495	-0,0233	-0,1046
82	1,0133	1,0088	0,9735	-0,0464	-0,0294	-0,1082
83	1,0204	1,0289	0,9854	-0,0479	-0,0282	-0,1088
84	1,0174	1,0159	0,9777	-0,0469	-0,0288	-0,1089
85	1,0274	0,9974	0,9792	-0,0494	-0,0244	-0,1070
86	1,0242	0,9804	0,9757	-0,0483	-0,0256	-0,1038
87	0,9856	1,0094	0,9791	-0,0045	0,0000	-0,1039

88	1,0225	1,0006	0,9754	-0,0485	-0,0263	-0,1085
89	1,0275	0,9809	0,9725	-0,0498	-0,0251	-0,1072
90	1,0255	1,0255	0,9745	-0,0038	-0,0237	-0,0373
91	0,9975	1,0289	0,9711	-0,0454	-0,0310	-0,1088
92	1,0278	0,9896	0,9755	-0,0479	-0,0269	-0,1076
93	0,9957	0,9952	1,0299	-0,0940	-0,0815	-0,0116
94	1,0291	1,0163	0,9852	-0,0482	-0,0280	-0,1091
95	1,0244	1,0054	0,9777	-0,0479	-0,0279	-0,1090
96	1,0214	0,9929	0,9712	-0,0477	-0,0274	-0,1087
97	1,0054	1,0178	0,9907	-0,0515	-0,0274	-0,1043
98	1,0287	0,9816	0,9713	-0,0484	-0,0267	-0,1086
99	1,0066	1,0157	0,9708	-0,0469	-0,0288	-0,1091
100	1,0084	1,0155	0,9710	-0,0422	-0,0287	-0,1089
101	0,9700	1,0134	0,9986	-0,0407	0,0000	-0,0970

Πίνακας 3.5.1: Οι τιμές των μεταβλητών

Επανάληψη	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$	$g_5 - h_5$	$g_6 - h_6$
1	-2,0000	-1,0404	-2,0000	-1,0404	6,0000	2,5000
2	-3,4930	-0,0972	-0,5482	-0,0990	4,8395	7,6655
3	-3,4941	-0,0971	-0,5499	-0,0990	4,8412	7,6637
4	-3,6788	-0,0937	-0,8457	-0,0957	5,1256	7,3564
5	-3,7258	-0,0929	-0,9209	-0,0949	5,1979	7,2785
6	-3,9352	-0,0890	-1,2562	-0,0912	5,5202	6,9321
7	-4,0438	-0,0870	-1,4299	-0,0893	5,6871	6,7535
8	-4,3832	-0,0806	-1,9729	-0,0831	6,2088	6,1981
9	-4,5914	-0,0767	-2,3059	-0,0794	6,5286	5,8600
10	-3,2176	-0,0929	-0,4612	-0,0945	4,5248	7,2794
11	-5,1692	-0,0658	-3,2295	-0,0687	7,4149	4,9318
12	-2,8612	-0,0872	-0,3505	-0,0887	4,1178	6,7797
13	-2,8117	-0,0864	-0,3351	-0,0879	4,0613	6,7108
14	-2,2434	-0,0774	-0,1572	-0,0785	3,4109	5,9274
15	-5,5256	-0,0589	-3,7988	-0,0620	7,9608	4,3669
16	-2,1224	-0,0755	-0,1191	-0,0766	3,2723	5,7625
17	-1,2464	-0,0614	0,1583	-0,0621	2,2662	4,5891
18	-6,4248	-0,0415	-5,2340	-0,0446	9,3355	2,9669
19	-1,1927	-0,0605	0,1755	-0,0612	2,2044	4,5184
20	-0,8403	-0,0548	0,2882	-0,0554	1,7986	4,0571
21	-6,4769	-0,0405	-5,3172	-0,0435	9,4151	2,8868
22	0,0529	-0,0402	0,5762	-0,0405	0,7673	2,9136
23	-6,9374	-0,0315	-6,0514	-0,0344	10,1176	2,1852
24	0,2472	-0,0370	0,6393	-0,0372	0,5425	2,6697
25	-6,9806	-0,0306	-6,1201	-0,0335	10,1833	2,1199
26	0,5359	-0,0322	0,7334	-0,0324	0,2080	2,3104

27	0,8354	-0,0272	0,8314	-0,0274	-0,1393	1,9417
28	-8,0524	-0,0092	-7,8271	-0,0115	11,8142	0,5264
29	-3,1599	-0,0376	-1,2705	-0,0411	3,7612	2,7644
30	1,7292	-0,0123	1,1263	-0,0124	-1,1784	0,8656
31	-2,2327	-0,0372	-1,3030	-0,0386	3,7063	2,5027
32	-1,0338	-0,0986	0,2112	-0,0992	2,0544	7,9073
33	-8,2369	-0,0055	-8,1205	-0,0077	12,0942	0,2575
34	-0,8922	-0,0986	0,2548	-0,0992	1,8941	7,9251
35	-6,6138	-0,0937	-5,3853	-0,0968	9,6194	7,5428
36	-1,7664	-0,0147	-2,6771	-0,0154	3,2592	0,7786
37	-0,6401	-0,0152	-2,7262	-0,0144	3,2699	0,6078
38	-7,1148	-0,0930	-6,1618	-0,0959	10,3867	7,5406
39	-0,0377	-0,0989	0,5180	-0,0993	0,9267	8,0418
40	-0,8726	-0,0103	-0,6483	-0,0103	3,2179	0,1607
41	0,5963	-0,0991	0,8138	-0,0283	0,1084	6,9053
42	2,2719	-0,0032	1,3070	-0,0032	-1,8112	0,2298
43	-0,8199	-0,0056	-0,2367	-0,0068	1,4898	0,1359
44	-4,5717	-0,0087	-3,9954	-0,0110	6,8549	0,2010
45	-0,5715	0,0031	-1,0247	0,0019	1,1638	-0,4301
46	-7,5109	-0,0924	-6,7757	-0,0952	10,9934	7,5424
47	-8,5818	0,0015	-8,6691	-0,0003	12,6175	-0,2411
48	0,8116	-0,0992	0,8878	-0,0245	-0,1432	6,8031
49	-3,0731	-0,0060	-4,2608	-0,0053	7,0760	-0,2740
50	-3,4671	-0,0972	-0,6203	-0,0990	4,8472	7,6672
51	1,2143	-0,0545	0,8973	-0,0830	-0,5022	6,7622
52	1,4375	-0,0604	0,9433	-0,0994	-0,7310	6,6975
53	-0,5233	0,0047	-1,0303	0,0035	1,1017	-0,5494
54	-0,4958	0,0056	-1,0334	0,0045	1,0661	-0,6173
55	-0,4849	0,0060	-1,0347	0,0048	1,0521	-0,6441
56	2,8068	0,0059	1,4863	0,0059	-2,4361	-0,3838
57	-8,5825	0,0015	-8,6702	-0,0003	12,6186	-0,2421
58	-8,0475	-0,0915	-7,7013	-0,0939	11,8136	5,6846
59	-0,4502	0,0071	-0,1692	0,0059	1,0180	-0,8096
60	-8,4740	-0,0411	-8,3275	-0,0930	12,4754	5,5742
61	-3,0073	-0,0002	-4,3935	0,0001	5,8092	-0,5870
62	2,1543	-0,0913	1,2236	-0,0747	-1,5918	4,6791
63	0,2572	0,0086	-0,1641	0,0083	0,9645	-1,0493
64	0,4264	0,0135	-0,1316	0,0124	-0,3601	-1,0545
65	0,6450	0,0157	-0,6434	0,0150	-0,3552	-1,2261
66	2,3889	-0,0253	1,2803	-0,0557	-1,8691	4,6765
67	-0,0850	-0,0363	-0,6219	-0,0381	0,5000	0,9069
68	-2,5642	0,0078	-4,5036	0,0071	3,5700	-0,7113
69	0,0561	-0,0263	-0,4969	-0,0185	0,3169	0,6589
70	2,4263	-0,0409	1,2417	-0,0916	-1,8555	4,6276

71	-0,6950	-0,0259	-0,2212	-0,0761	1,1505	1,8056
72	-0,3122	-0,0169	-0,0858	-0,0559	0,6773	1,1376
73	-0,9236	-0,0081	-0,6688	-0,0861	1,3301	2,0918
74	-0,9337	-0,0719	-0,6477	0,0061	0,9584	1,2705
75	-0,3601	-0,0195	-0,4971	-0,0172	0,3283	0,7215
76	-0,2657	-0,0530	-0,6234	0,0165	0,2747	0,6435
77	0,7126	0,0175	-0,6422	0,0169	-0,4421	-1,3531
78	-2,8995	0,0109	-2,5286	0,0076	3,5901	-1,0468
79	-0,4288	0,0071	-0,5304	-0,0774	0,6109	0,7623
80	0,0376	0,0012	-0,5018	0,0025	0,0471	0,0039
81	-0,2970	0,0128	-0,4722	-0,0602	0,3673	0,4312
82	0,0682	-0,0114	-0,7848	-0,0220	0,0881	0,0370
83	-0,0076	0,0032	-0,6071	0,0191	0,0040	-0,0354
84	0,0718	-0,0032	-0,6960	-0,0074	0,0091	-0,0549
85	-0,1566	0,0176	-0,4573	-0,0450	0,1584	0,1505
86	-0,2501	0,0110	-0,7214	-0,0785	0,4840	0,5375
87	2,7838	-0,0691	1,4949	-0,0215	-2,3918	2,0714
88	-0,0359	0,0074	-0,5494	-0,0384	0,0583	0,0033
89	-0,1551	0,0177	-0,5655	-0,0775	0,2194	0,1583
90	-0,3716	0,0112	-2,6790	0,0118	3,7701	-1,5618
91	0,0907	-0,0433	-0,8201	0,0192	0,0462	-0,0271
92	-0,0045	0,0183	-0,6675	-0,0605	0,1294	0,0990
93	-8,6082	-0,0401	-8,4898	-0,0433	12,6723	5,3773
94	0,0349	0,0210	-0,6253	-0,0068	-0,0138	-0,0598
95	0,0484	0,0112	-0,6462	-0,0287	0,0083	-0,0553
96	0,0424	0,0051	-0,6638	-0,0538	0,0572	-0,0119
97	-0,5988	-0,0269	-0,7402	-0,0037	0,6788	1,4177
98	0,0257	0,0201	-0,6448	-0,0761	0,0761	0,0025
99	0,0410	-0,0249	-0,6775	-0,0080	0,0247	-0,0565
100	0,3852	-0,0217	-0,6775	-0,0083	-0,1976	-0,1021
101	-0,3422	-0,0978	1,2768	-0,0133	0,0488	4,0231

Πίνακας 3.5.2: Οι τιμές των DC συναρτήσεων

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν ήταν δυνατός ο εντοπισμός δεύτερης λύσης.

3.6 Παράδειγμα 6

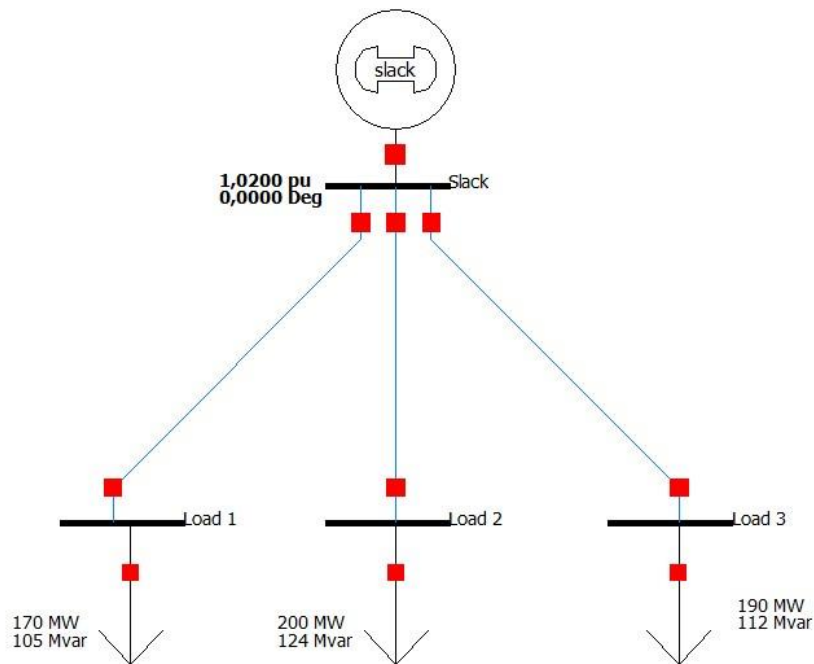
Δεδομένα ζυγών:

Αριθμός ζυγού	Τύπος ζυγού	V (αμ)	P_g (αμ)	P_d (αμ)	Q_g (αμ)	Q_d (αμ)
1	Ζυγός αναφοράς	$1.02 \angle 0^\circ$?	0	?	0
2	Ζυγός φορτίου PQ 1	$\bar{a}_1 + j\bar{f}_1 = x_1 + jx_4$	0	1.7	0	1.05
3	Ζυγός φορτίου PQ 2	$\bar{a}_2 + j\bar{f}_2 = x_2 + jx_5$	0	2	0	1.24
4	Ζυγός φορτίου PQ 3	$\bar{a}_3 + j\bar{f}_3 = x_3 + jx_6$	0	1.9	0	1.12

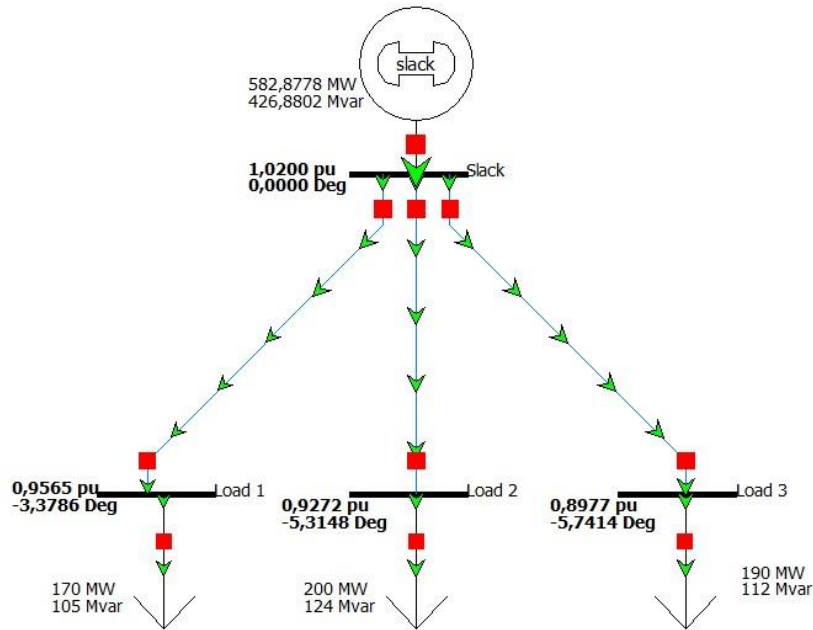
Δεδομένα γραμμών:

Από γραμμή	Προς γραμμή	R (αμ)	X (αμ)
1	2	0.01	0.04
1	3	0.01	0.05
1	4	0.02	0.06

Πιο κάτω παρουσιάζεται σχηματικά το ΣΗΕ τεσσάρων ζυγών:



Σχήμα 3.6.1 ΣΗΕ 4 ζυγών παραδείγματος 6



Σχήμα 3.6.2 Αποτέλεσμα προσομοίωσης με χρήση του λογισμικού PowerWorld Simulator 18

Σύμφωνα με το Σχήμα 3.6.2, αναμένουμε το αποτέλεσμα να είναι

$$\tilde{V}_2 = 0.9565 \angle -3.3786^\circ = 0.9548 - j0.0564 \quad (3.49)$$

$$\tilde{V}_3 = 0.9272 \angle -5.3148^\circ = 0.9232 - j0.0859 \quad (3.50)$$

$$\tilde{V}_4 = 0.8977 \angle -5.7414^\circ = 0.8932 - j0.0898 \quad (3.51)$$

Σημειώνεται ότι, αφού έχουμε τρεις ζυγούς φορτίου PQ, το πρόβλημα ανάγεται σε ένα σύστημα έξι μη γραμμικών εξισώσεων (τρεις εξισώσεις P και τρεις εξισώσεις Q) έξι αγνώστων.

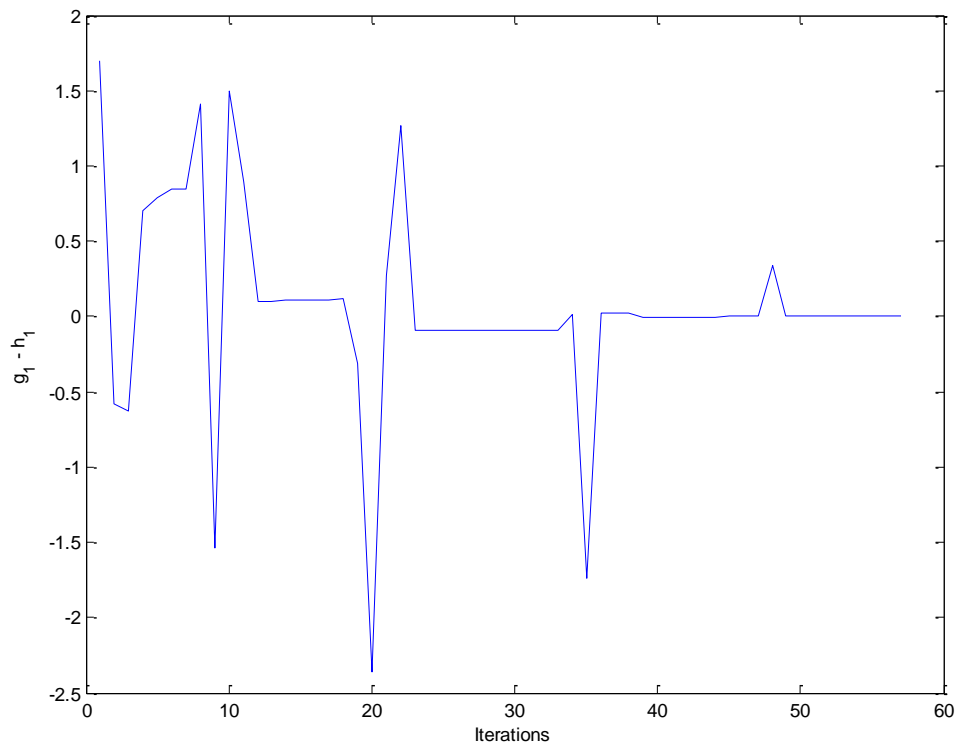
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, το σύνολο X ορίστηκε ως

$$[0.88, 1.02] \times [0.88, 1.02] \times [0.88, 1.02] \times [-0.15, 0] \times [-0.15, 0] \times [-0.15, 0]$$

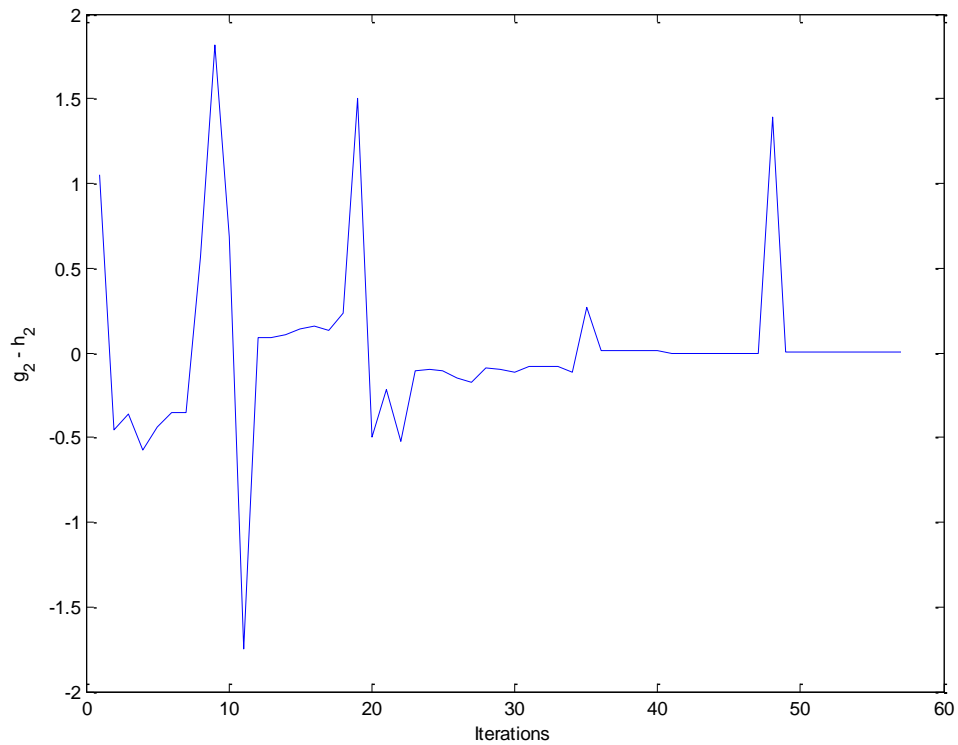
και το αντίστοιχο σύνολο Y υπολογίστηκε

$$[-4.0226 \cdot 10^{-7}, 79.7254] \times [-1.0932 \cdot 10^{-7}, 80.2435] \times [57.5801, 301.2689] \times [1.0404, 1.0629] \\ \times [387.7505, 818.2227] \times [1.0404, 1.0629]$$

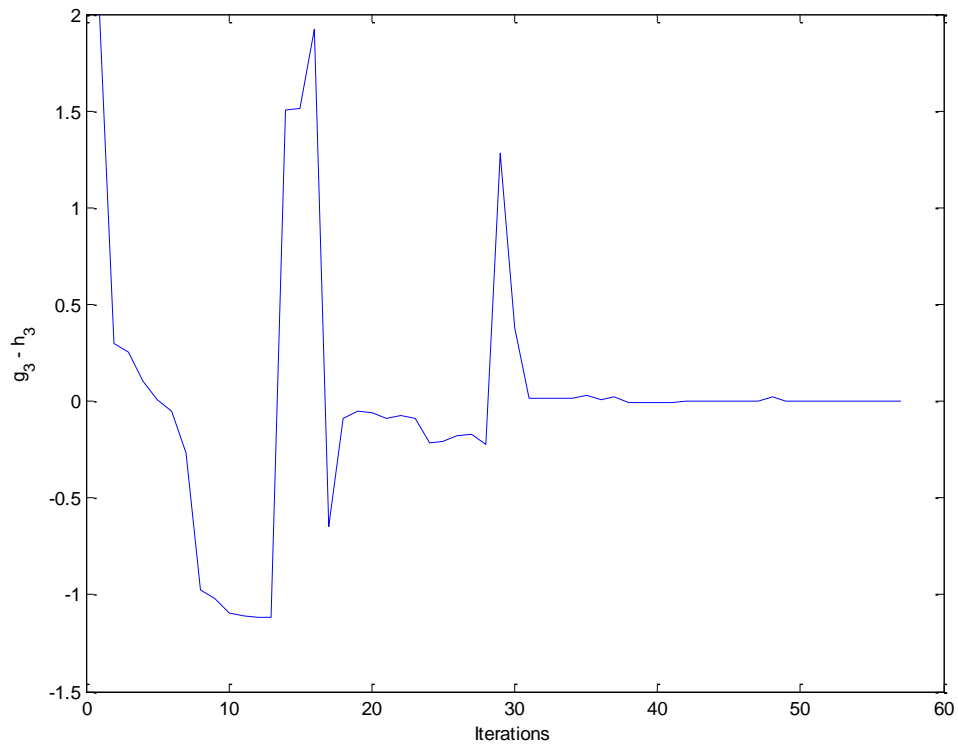
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



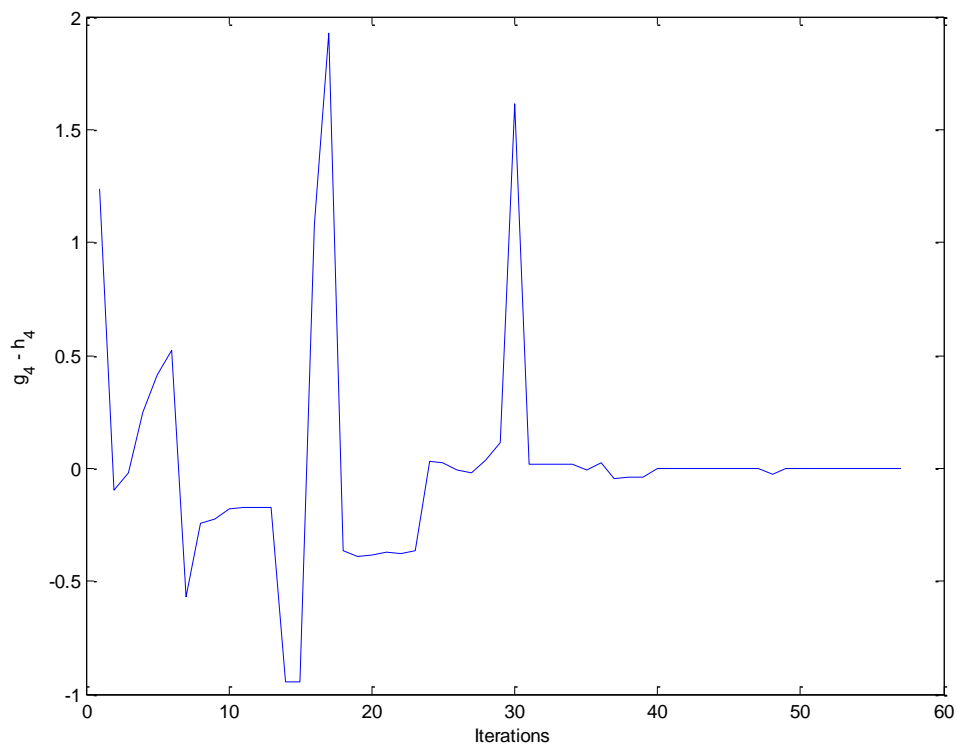
Σχήμα 3.6.3: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 - PQ)



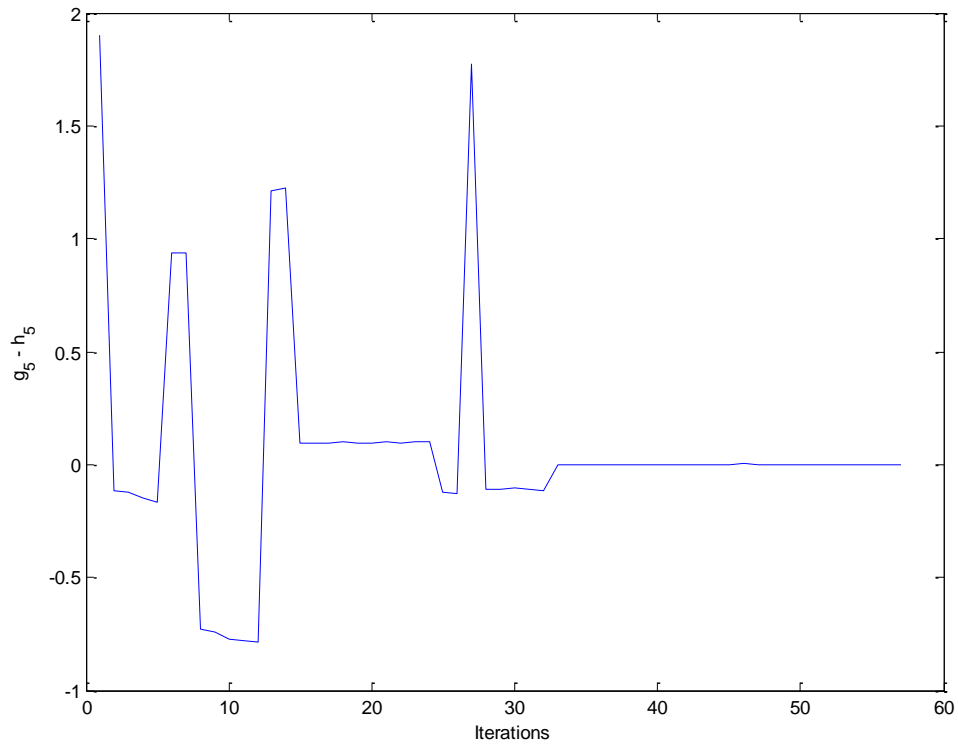
Σχήμα 3.6.4: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 2 - PQ)



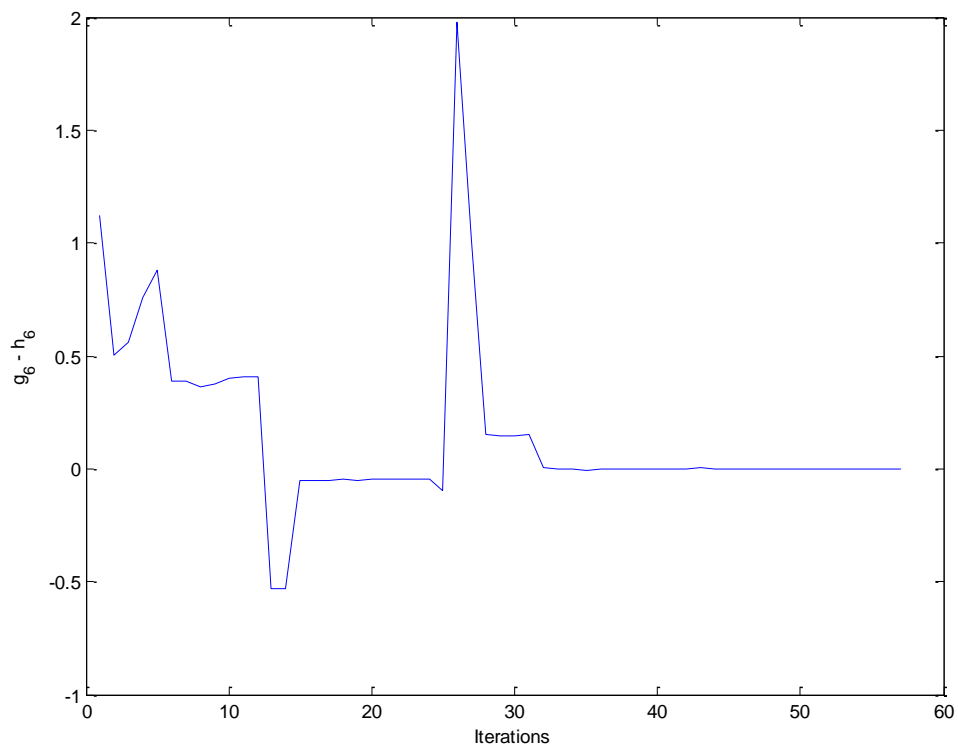
Σχήμα 3.6.5: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 – PQ)



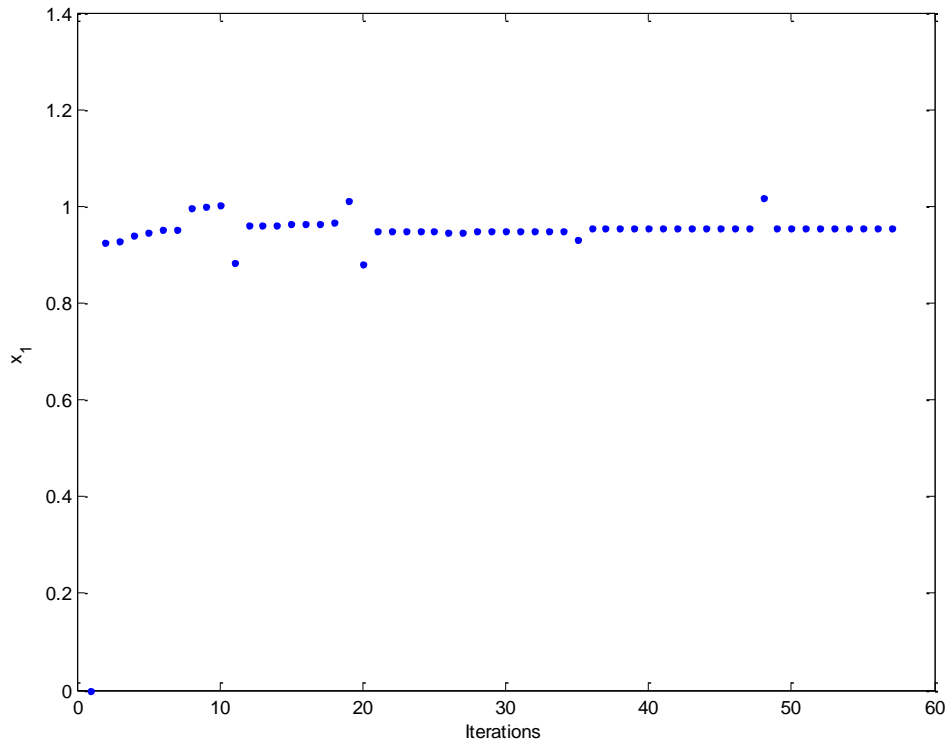
Σχήμα 3.6.6: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 3 – PQ)



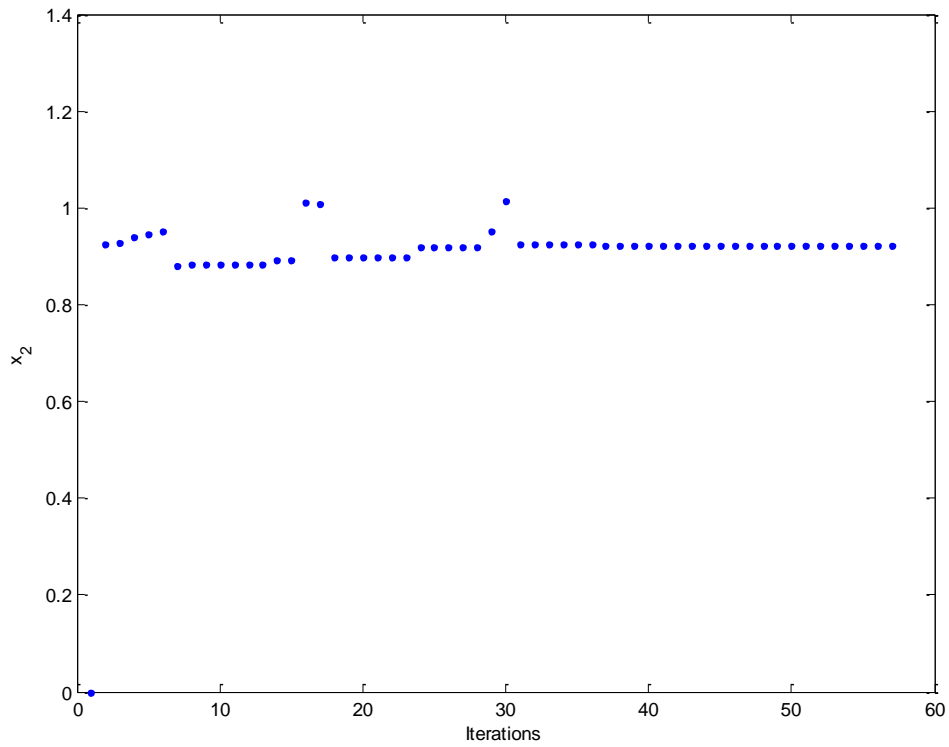
Σχήμα 3.6.7: Οι τιμές της πέμπτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 4 – PQ)



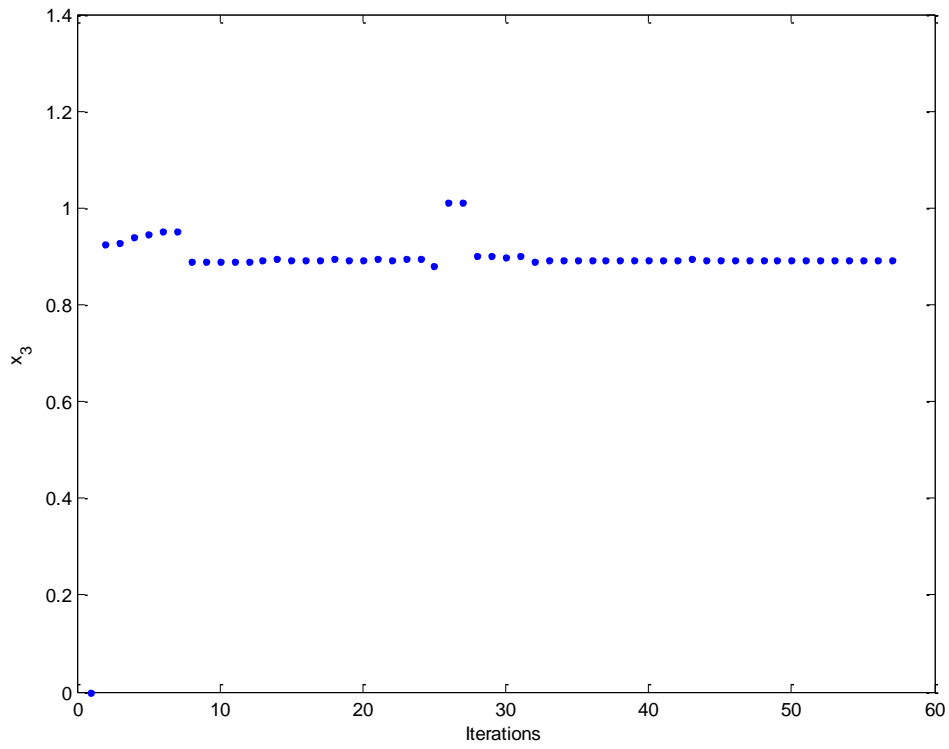
Σχήμα 3.6.8: Οι τιμές της έκτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 4 – PQ)



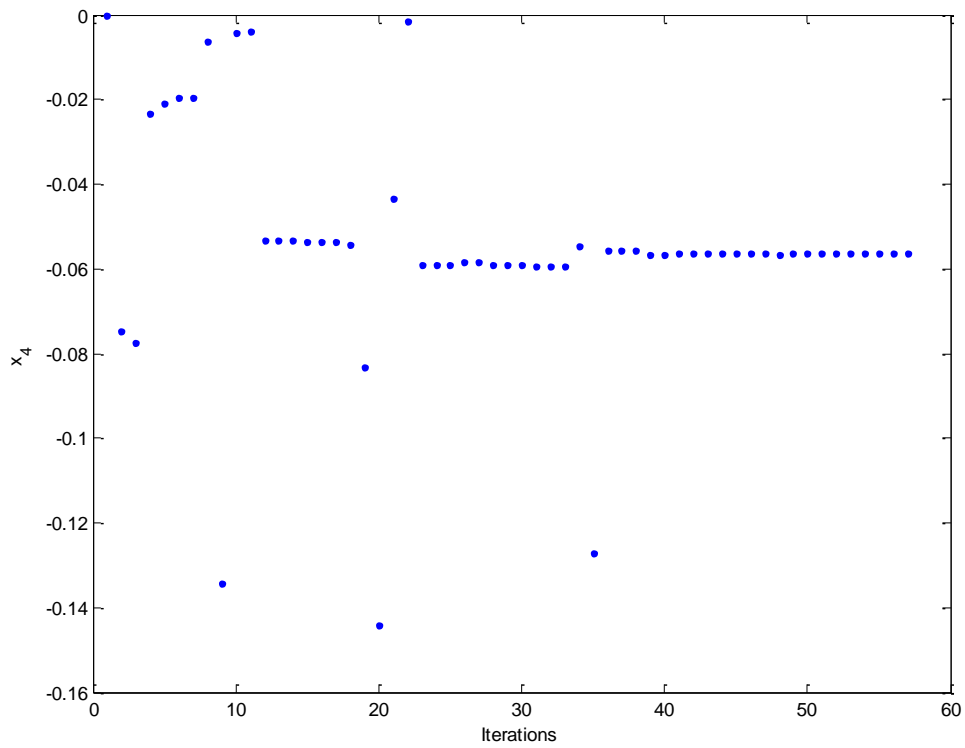
Σχήμα 3.6.9: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



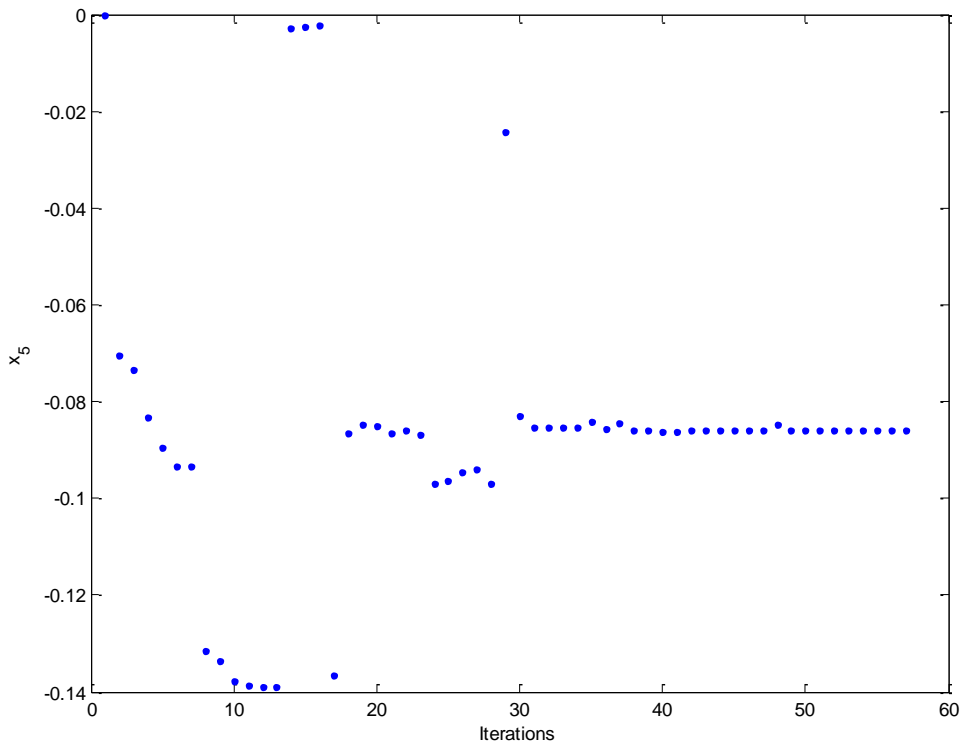
Σχήμα 3.6.10: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



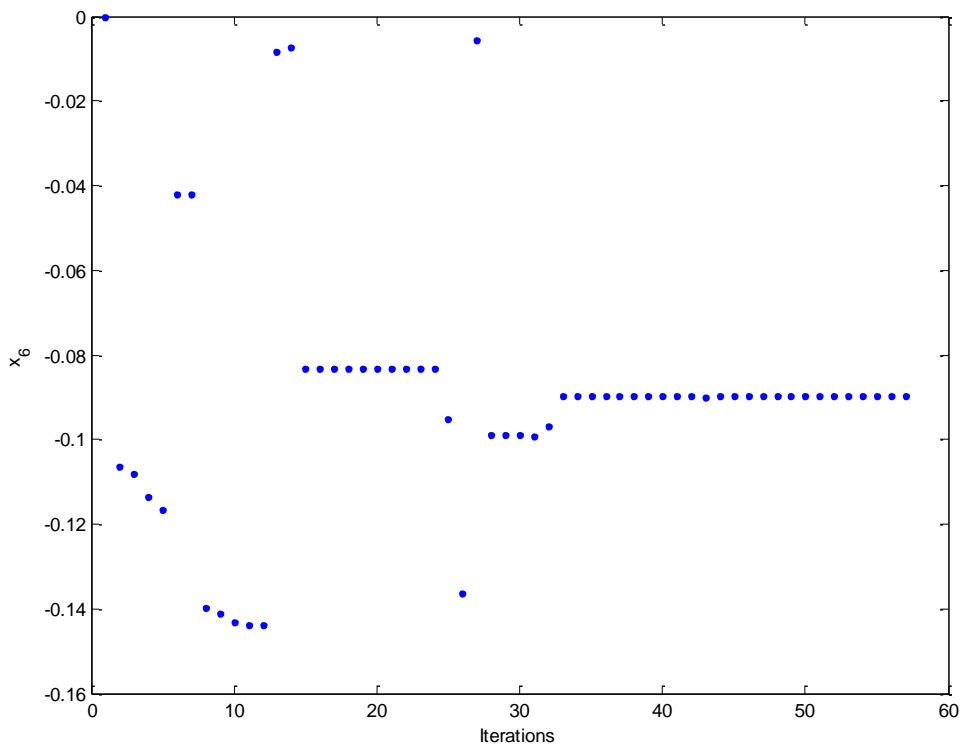
Σχήμα 3.6.11: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{a}_3$



Σχήμα 3.6.12: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.6.13: Οι τιμές της μεταβλητής $x_5 = \bar{f}_2$



Σχήμα 3.6.14: Οι τιμές της μεταβλητής $x_6 = \bar{f}_3$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_4 = 0.9549 - j0.0564 = 0.9566 \angle -3.3802^\circ \quad (3.52)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_5 = 0.9232 - j0.0859 = 0.9272 \angle -5.3158^\circ \quad (3.53)$$

$$\tilde{V}_4 = x_3 + jx_6 = 0.8932 - j0.0898 = 0.8977 \angle -5.7411^\circ \quad (3.54)$$

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν συμφωνούν με αυτά τις προσομοίωσης.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T \left(g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x \right) \text{ και } q_1 = -e_1^T \left(b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x \right)$$

Επομένως, για $x = [0.9549 \quad 0.9232 \quad 0.8932 \quad -0.0564 \quad -0.0859 \quad -0.0898]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 5.8288 \alpha\mu = 582.88 MW \text{ και } q_1 = 4.2687 \alpha\mu = 426.87 MVar \quad (3.55)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός παραγωγής PQ 1):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 2$:

$$p_2 = -1.7000 \alpha\mu = -170.00 MW \text{ και } q_2 = -1.0499 \alpha\mu = -104.99 MVar \quad (3.56)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός φορτίου PQ 2):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 3$:

$$p_3 = -2.0000 \alpha\mu = -200.00 MW \text{ και } q_3 = -1.2400 \alpha\mu = -124.00 MVar \quad (3.57)$$

Για τον ζυγό 4 (ζυγός φορτίου PQ 3):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 4$:

$$p_4 = -1.9000 \alpha\mu = -190.00 MW \text{ και } q_4 = -1.1200 \alpha\mu = -112.00 MVar \quad (3.58)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{a}_3$	$x_4 = \bar{f}_1$	$x_5 = \bar{f}_2$	$x_6 = \bar{f}_3$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,9239	0,9239	0,9239	-0,0748	-0,0704	-0,1063
3	0,9275	0,9275	0,9275	-0,0776	-0,0733	-0,1080
4	0,9395	0,9395	0,9395	-0,0232	-0,0833	-0,1134
5	0,9469	0,9469	0,9469	-0,0211	-0,0894	-0,1168
6	0,9518	0,9518	0,9518	-0,0197	-0,0934	-0,0421
7	0,9518	0,8817	0,9518	-0,0197	-0,0934	-0,0421
8	0,9976	0,8827	0,8877	-0,0065	-0,1314	-0,1398
9	1,0001	0,8828	0,8878	-0,1344	-0,1335	-0,1410
10	1,0034	0,8829	0,8882	-0,0042	-0,1378	-0,1433
11	0,8842	0,8829	0,8882	-0,0040	-0,1386	-0,1438
12	0,9605	0,8829	0,8883	-0,0532	-0,1389	-0,1439
13	0,9606	0,8829	0,8936	-0,0532	-0,1390	-0,0082
14	0,9613	0,8918	0,8937	-0,0533	-0,0029	-0,0075
15	0,9627	0,8920	0,8931	-0,0535	-0,0024	-0,0833
16	0,9634	1,0112	0,8933	-0,0537	-0,0021	-0,0833
17	0,9622	1,0092	0,8931	-0,0535	-0,1366	-0,0833
18	0,9668	0,8991	0,8938	-0,0542	-0,0867	-0,0831
19	1,0113	0,8984	0,8933	-0,0833	-0,0846	-0,0833
20	0,8800	0,8985	0,8934	-0,1441	-0,0851	-0,0832
21	0,9494	0,8990	0,8938	-0,0436	-0,0865	-0,0832
22	0,9491	0,8988	0,8936	-0,0016	-0,0858	-0,0832
23	0,9488	0,8992	0,8939	-0,0591	-0,0868	-0,0831
24	0,9491	0,9200	0,8939	-0,0591	-0,0969	-0,0831
25	0,9486	0,9198	0,8808	-0,0590	-0,0965	-0,0951
26	0,9466	0,9186	1,0126	-0,0585	-0,0947	-0,1362
27	0,9459	0,9182	1,0111	-0,0583	-0,0940	-0,0055
28	0,9493	0,9202	0,8997	-0,0592	-0,0971	-0,0990
29	0,9490	0,9527	0,8996	-0,0591	-0,0242	-0,0990
30	0,9482	1,0156	0,8994	-0,0589	-0,0830	-0,0988
31	0,9497	0,9244	0,8998	-0,0593	-0,0853	-0,0991
32	0,9498	0,9245	0,8887	-0,0593	-0,0854	-0,0968
33	0,9498	0,9245	0,8930	-0,0593	-0,0854	-0,0898
34	0,9502	0,9246	0,8930	-0,0547	-0,0854	-0,0898
35	0,9323	0,9236	0,8927	-0,1271	-0,0843	-0,0898
36	0,9557	0,9247	0,8931	-0,0556	-0,0856	-0,0898
37	0,9557	0,9211	0,8931	-0,0557	-0,0845	-0,0899
38	0,9558	0,9206	0,8931	-0,0557	-0,0860	-0,0899
39	0,9554	0,9206	0,8931	-0,0567	-0,0860	-0,0899
40	0,9555	0,9229	0,8931	-0,0567	-0,0864	-0,0899
41	0,9546	0,9229	0,8931	-0,0565	-0,0864	-0,0899
42	0,9546	0,9232	0,8931	-0,0565	-0,0858	-0,0899
43	0,9546	0,9232	0,8938	-0,0565	-0,0858	-0,0900

44	0,9547	0,9232	0,8931	-0,0565	-0,0858	-0,0899
45	0,9547	0,9232	0,8931	-0,0563	-0,0858	-0,0899
46	0,9547	0,9232	0,8933	-0,0563	-0,0858	-0,0896
47	0,9547	0,9232	0,8932	-0,0563	-0,0858	-0,0898
48	1,0169	0,9222	0,8929	-0,0567	-0,0847	-0,0897
49	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0858	-0,0898
50	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
51	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
52	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
53	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
54	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
55	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
56	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898
57	0,9549	0,9232	0,8932	-0,0564	-0,0859	-0,0898

Πίνακας 3.6.1: Οι τιμές των μεταβλητών

Επανάληψη	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$	$g_5 - h_5$	$g_6 - h_6$
1	1,7000	1,0500	2,0000	1,2400	1,9000	1,1200
2	-0,5841	-0,4580	0,2975	-0,0954	-0,1141	0,5005
3	-0,6316	-0,3607	0,2521	-0,0180	-0,1224	0,5590
4	0,7014	-0,5768	0,1020	0,2465	-0,1490	0,7575
5	0,7888	-0,4424	0,0114	0,4125	-0,1644	0,8811
6	0,8477	-0,3511	-0,0488	0,5254	0,9400	0,3870
7	0,8478	-0,3508	-0,2683	-0,5713	0,9402	0,3871
8	1,4138	0,5642	-0,9779	-0,2428	-0,7288	0,3644
9	-1,5369	1,8136	-1,0163	-0,2234	-0,7440	0,3768
10	1,5004	0,6848	-1,0955	-0,1825	-0,7753	0,4026
11	0,8986	-1,7520	-1,1108	-0,1745	-0,7814	0,4077
12	0,1036	0,0909	-1,1151	-0,1722	-0,7831	0,4091
13	0,1038	0,0930	-1,1174	-0,1710	1,2102	-0,5314
14	0,1050	0,1098	1,5026	-0,9474	1,2216	-0,5338
15	0,1071	0,1397	1,5130	-0,9466	0,0937	-0,0507
16	0,1083	0,1574	1,9238	1,0771	0,0946	-0,0495
17	0,1063	0,1294	-0,6498	1,9261	0,0932	-0,0514
18	0,1139	0,2348	-0,0889	-0,3659	0,0985	-0,0442
19	-0,3090	1,5062	-0,0530	-0,3912	0,0947	-0,0493
20	-2,3603	-0,4960	-0,0606	-0,3859	0,0955	-0,0482
21	0,2712	-0,2206	-0,0857	-0,3682	0,0982	-0,0447
22	1,2648	-0,5240	-0,0738	-0,3766	0,0969	-0,0464
23	-0,0945	-0,1023	-0,0921	-0,3636	0,0989	-0,0437
24	-0,0948	-0,0971	-0,2180	0,0318	0,0992	-0,0433
25	-0,0943	-0,1065	-0,2117	0,0252	-0,1220	-0,0984
26	-0,0919	-0,1530	-0,1806	-0,0072	-0,1290	1,9807

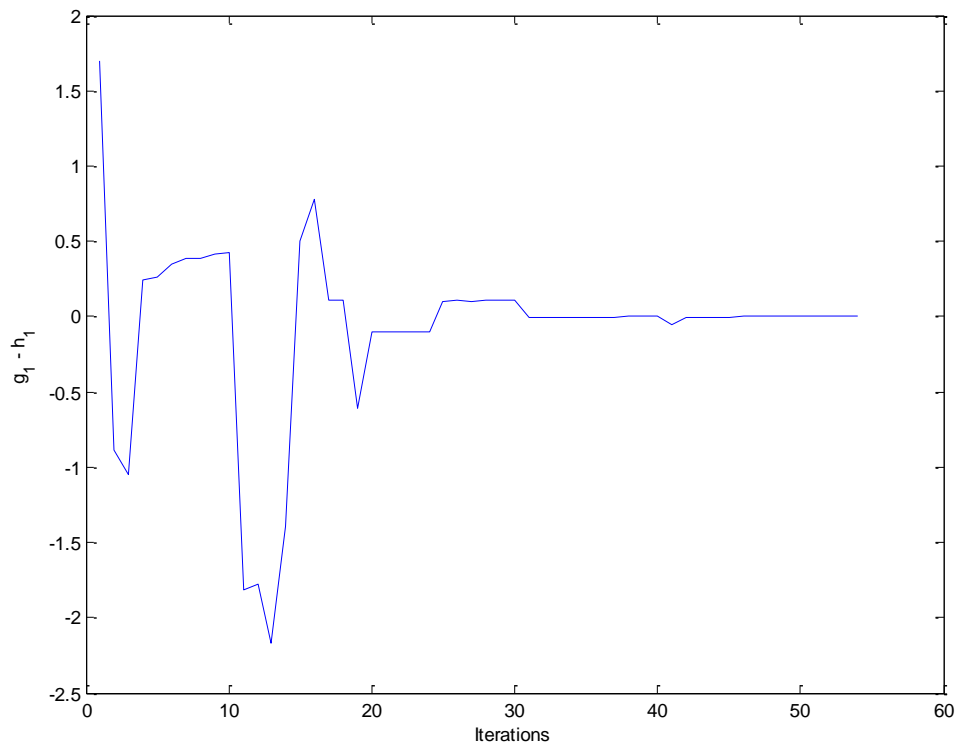
27	-0,0910	-0,1707	-0,1687	-0,0196	1,7706	1,0130
28	-0,0951	-0,0919	-0,2214	0,0354	-0,1074	0,1491
29	-0,0947	-0,0994	1,2815	0,1125	-0,1069	0,1476
30	-0,0938	-0,1178	0,3822	1,6127	-0,1057	0,1437
31	-0,0955	-0,0832	0,0158	0,0150	-0,1080	0,1509
32	-0,0957	-0,0796	0,0140	0,0174	-0,1180	0,0039
33	-0,0957	-0,0792	0,0138	0,0177	-0,0011	-0,0019
34	0,0157	-0,1125	0,0133	0,0183	-0,0011	-0,0018
35	-1,7355	0,2680	0,0319	-0,0057	-0,0011	-0,0057
36	0,0210	0,0102	0,0099	0,0227	-0,0011	-0,0011
37	0,0210	0,0117	0,0199	-0,0429	-0,0011	-0,0009
38	0,0210	0,0123	-0,0099	-0,0400	-0,0011	-0,0009
39	-0,0055	0,0145	-0,0101	-0,0398	-0,0011	-0,0008
40	-0,0055	0,0153	-0,0100	-0,0011	-0,0011	-0,0008
41	-0,0043	-0,0041	-0,0103	-0,0007	-0,0011	-0,0007
42	-0,0043	-0,0040	0,0010	-0,0009	-0,0011	-0,0007
43	-0,0043	-0,0039	0,0010	-0,0008	-0,0012	0,0083
44	-0,0043	-0,0035	0,0008	-0,0006	-0,0011	0,0000
45	0,0002	-0,0035	0,0008	-0,0006	-0,0011	0,0000
46	0,0002	-0,0034	0,0007	-0,0005	0,0028	0,0000
47	0,0002	-0,0034	0,0007	-0,0005	0,0000	0,0000
48	0,3400	1,3919	0,0192	-0,0236	0,0000	-0,0039
49	0,0002	0,0000	0,0006	-0,0003	0,0000	0,0000
50	0,0002	0,0000	0,0000	-0,0003	0,0000	0,0000
51	0,0002	0,0001	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000
52	0,0002	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
53	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
54	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
55	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
56	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
57	0,0000	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Πίνακας 3.6.2: Οι τιμές των DC συναρτήσεων

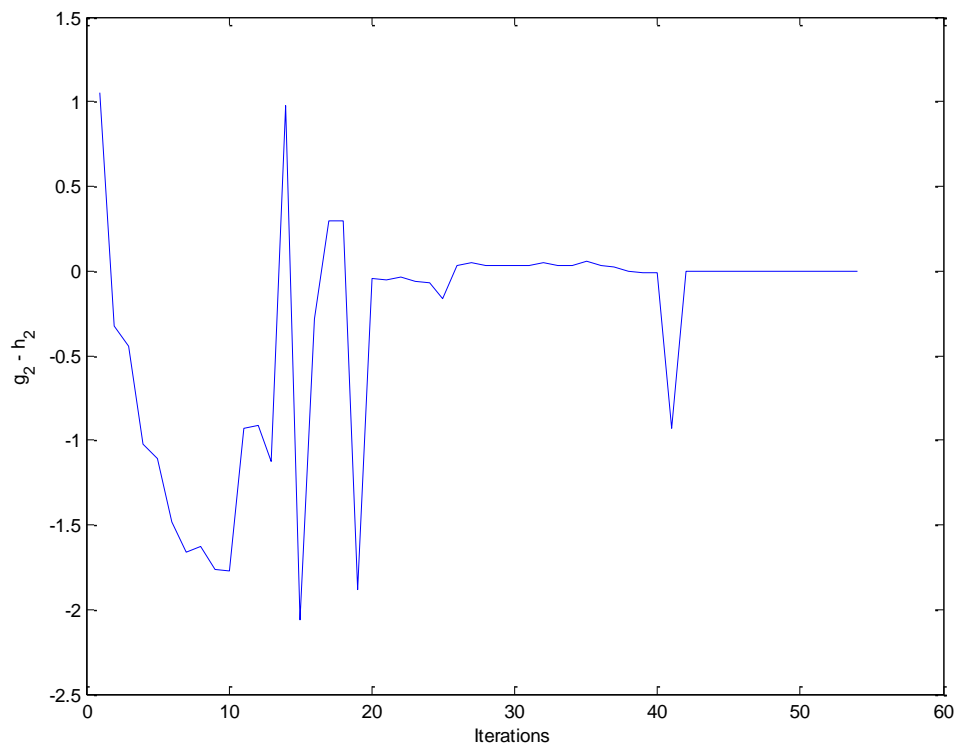
Στη συνέχεια, δοκιμάστηκε ένα διαφορετικό επιτρεπτό σύνολο για τις άγνωστες μεταβλητές ώστε να αναζητηθεί μια δεύτερη λύση.

Συγκεκριμένα, το νέο σύνολο X ορίστηκε ως $[0.05, 0.2] \times [0.05, 0.2] \times [0.05, 0.2] \times [-0.15, 0] \times [-0.15, 0] \times [-0.15, 0]$ ενώ το αντίστοιχο νέο σύνολο Y υπολογίστηκε $[-0.8224, 7.3230] \times [0.4889, 12.2215] \times [-0.9256, 3.9050] \times [0.2650, 8.1074] \times [-0.9873, 1.8656] \times [0.1756, 5.3931]$.

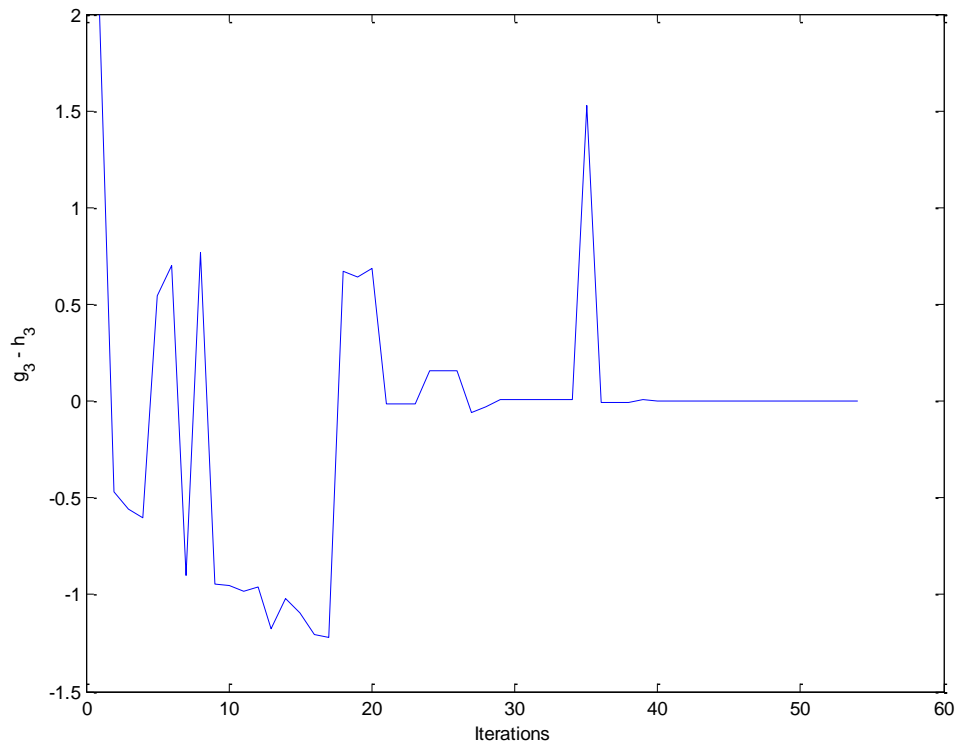
Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:



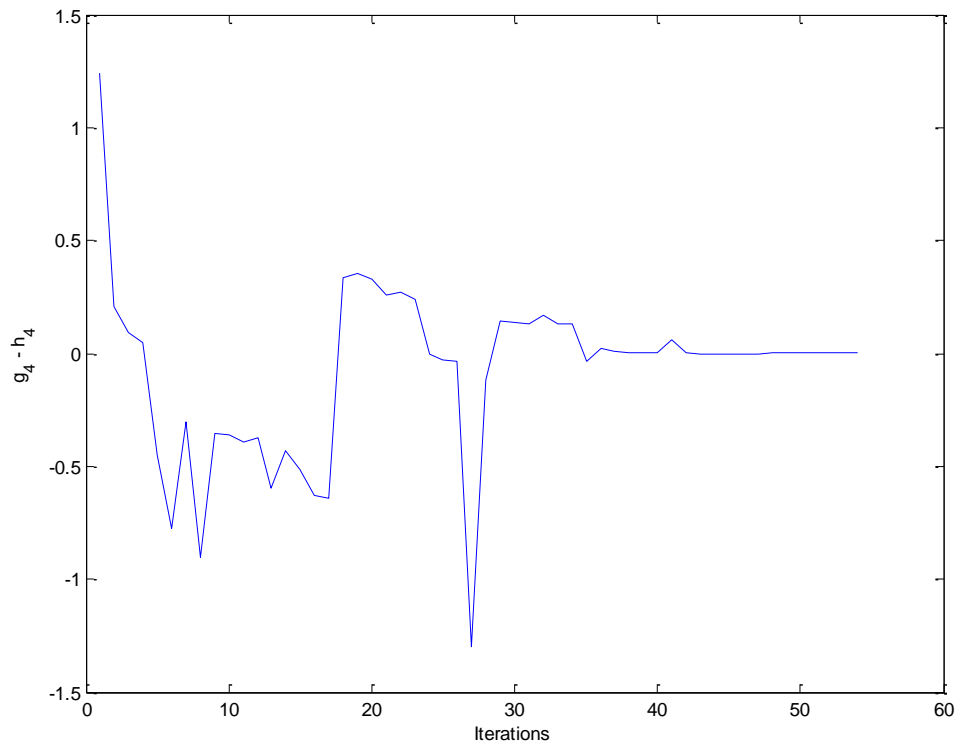
Σχήμα 3.6.15: Οι τιμές της πρώτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 2 – PQ)



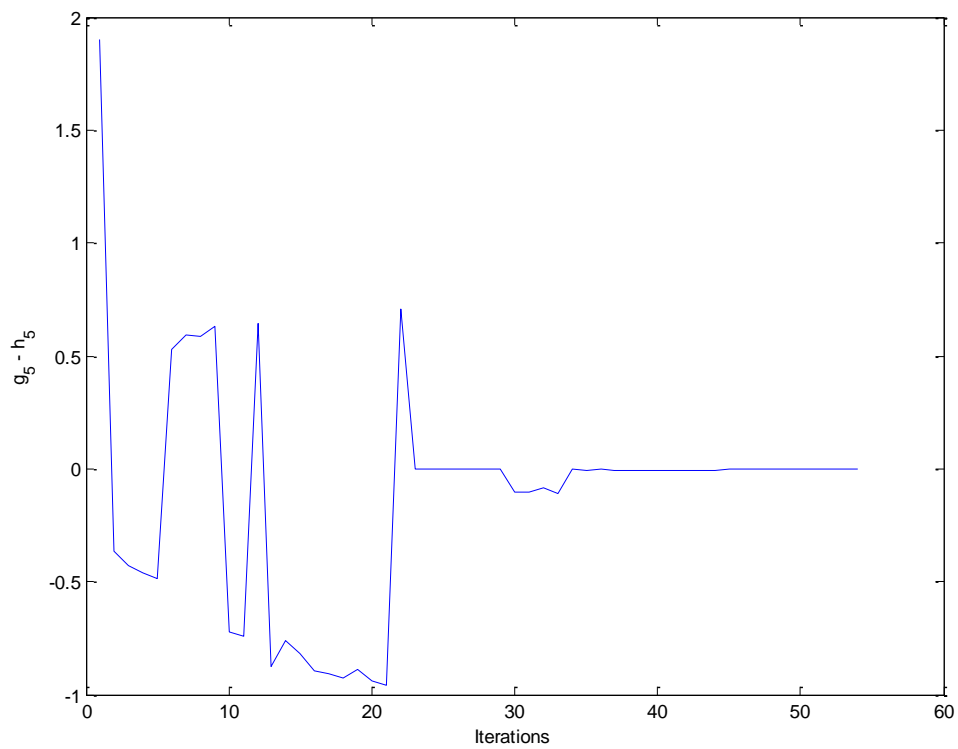
Σχήμα 3.6.16: Οι τιμές της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 2 – PQ)



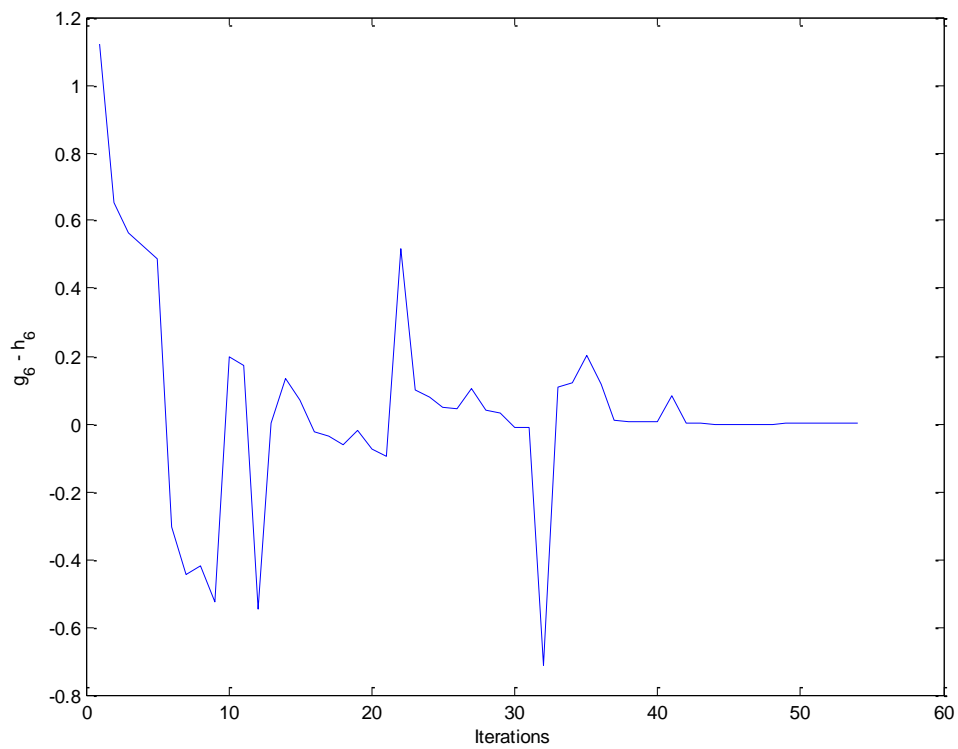
Σχήμα 3.6.17: Οι τιμές της τρίτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 3 – PQ)



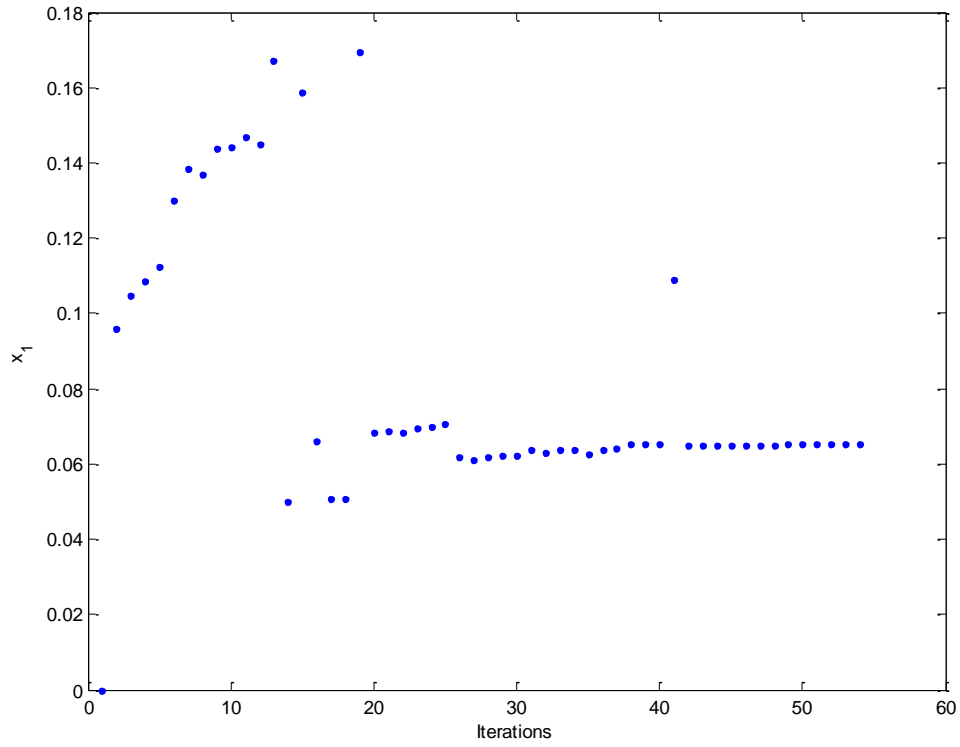
Σχήμα 3.6.18: Οι τιμές της τέταρτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 3 – PQ)



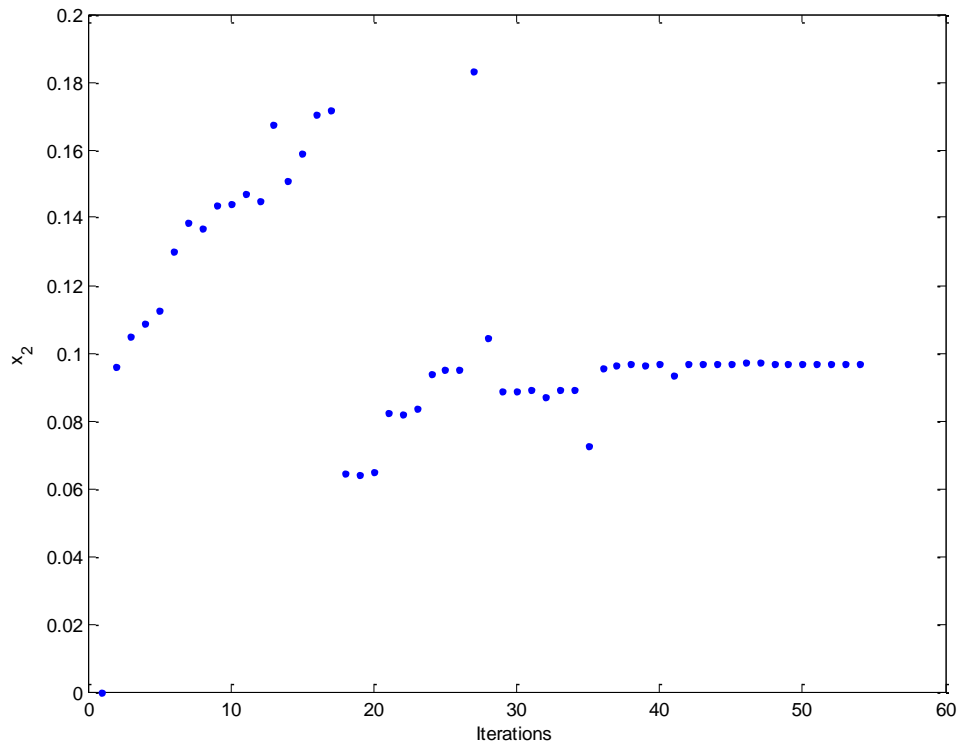
Σχήμα 3.6.19: Οι τιμές της πέμπτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση P του ζυγού 4 – PQ)



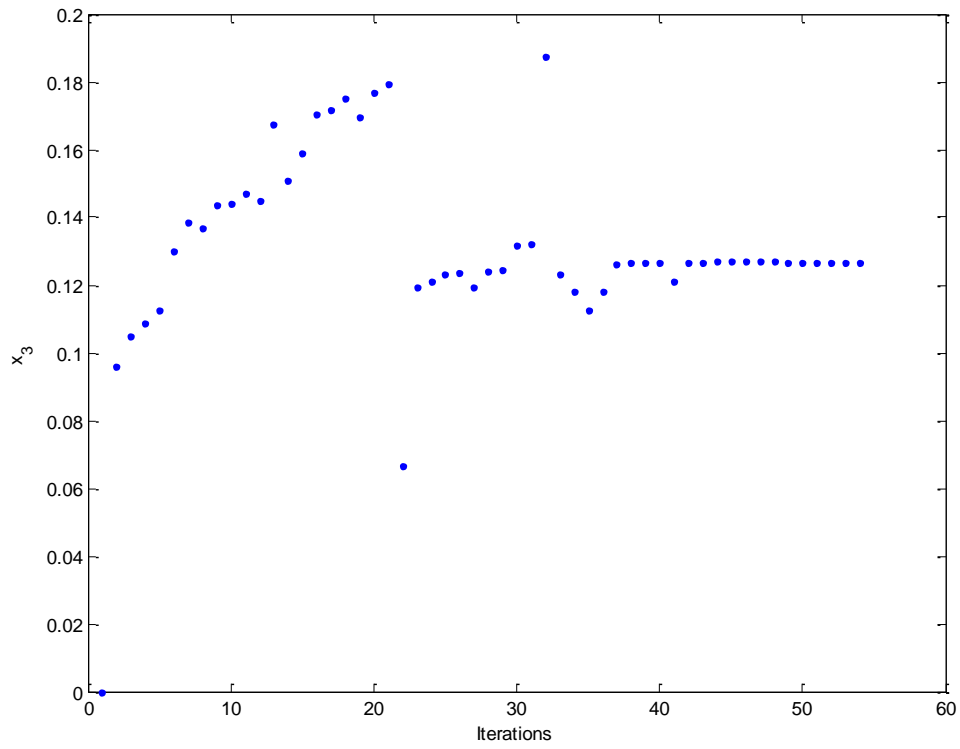
Σχήμα 3.6.20: Οι τιμές της έκτης εξίσωσης του συστήματος (εξίσωση Q του ζυγού 4 – PQ)



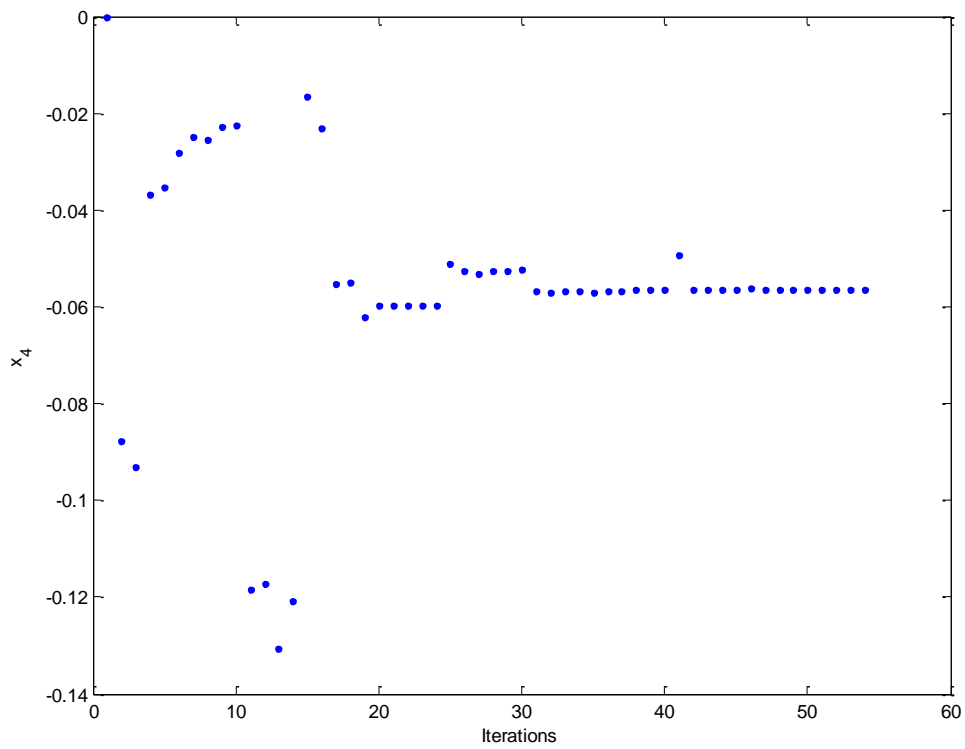
Σχήμα 3.6.21: Οι τιμές της μεταβλητής $x_1 = \bar{a}_1$



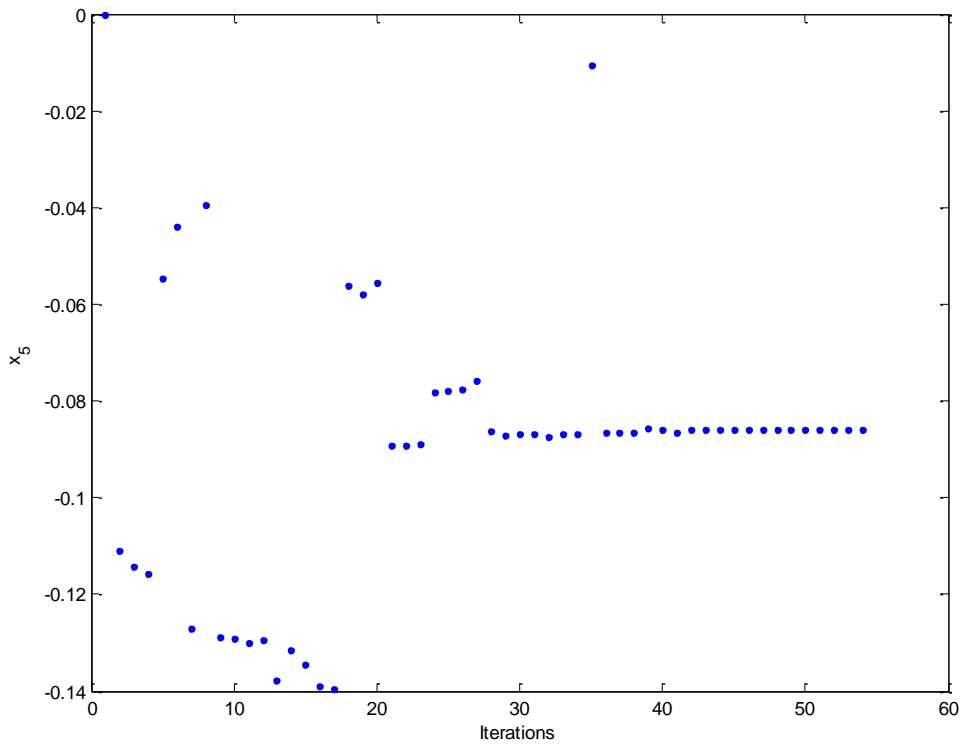
Σχήμα 3.6.22: Οι τιμές της μεταβλητής $x_2 = \bar{a}_2$



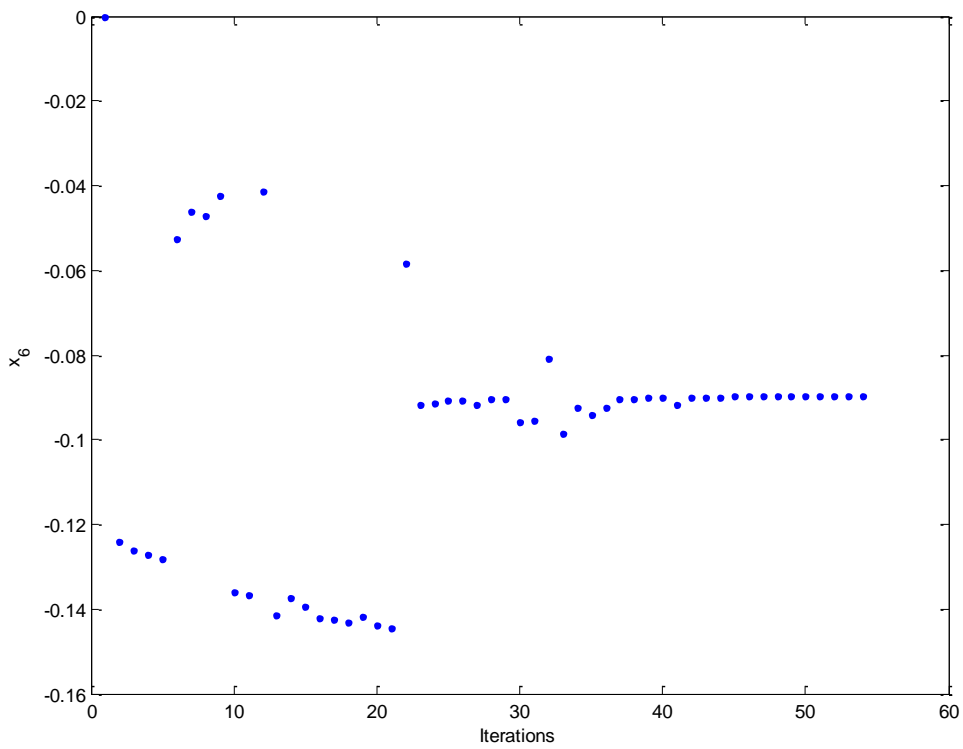
Σχήμα 3.6.23: Οι τιμές της μεταβλητής $x_3 = \bar{a}_3$



Σχήμα 3.6.24: Οι τιμές της μεταβλητής $x_4 = \bar{f}_1$



Σχήμα 3.6.25: Οι τιμές της μεταβλητής $x_5 = \bar{f}_2$



Σχήμα 3.6.14: Οι τιμές της μεταβλητής $x_6 = \bar{f}_3$

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του αλγόριθμου, η λύση που προκύπτει είναι

$$\tilde{V}_2 = x_1 + jx_4 = 0.0651 - j0.0564 = 0.0861 \angle -40.9043^\circ \quad (3.59)$$

$$\tilde{V}_3 = x_2 + jx_5 = 0.0968 - j0.0859 = 0.1294 \angle -41.5857^\circ \quad (3.60)$$

$$\tilde{V}_4 = x_3 + jx_6 = 0.1268 - j0.0898 = 0.1554 \angle -35.3062^\circ \quad (3.61)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την έγχυση ισχύος στους ζυγούς.

Για τον ζυγό 1 (ζυγό αναφοράς):

Από τις σχέσεις (3.4) και (3.5) έχουμε

$$p_1 = e_1^T \left(g_1 + [\bar{G} \quad -\bar{B}]x \right) \text{ και } q_1 = -e_1^T \left(b_1 + [\bar{B} \quad \bar{G}]x \right)$$

Επομένως, για $x = [0.0651 \quad 0.0968 \quad 0.1268 \quad -0.0564 \quad -0.0859 \quad -0.0898]^T$, προκύπτει

$$p_1 = 18.3179 \alpha\mu = 1831.79 MW \text{ και } q_1 = 53.5589 \alpha\mu = 5355.89 MVar \quad (3.62)$$

Για τον ζυγό 2 (ζυγός παραγωγής PQ 1):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 2$:

$$p_2 = -1.7000 \alpha\mu = -170.00 MW \text{ και } q_2 = -1.0500 \alpha\mu = -105.00 MVar \quad (3.63)$$

Για τον ζυγό 3 (ζυγός φορτίου PQ 2):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 3$:

$$p_3 = -2.0000 \alpha\mu = -200.00 MW \text{ και } q_3 = -1.2400 \alpha\mu = -124.00 MVar \quad (3.64)$$

Για τον ζυγό 4 (ζυγός φορτίου PQ 3):

Από τις σχέσεις (3.8) και (3.9), για $k = 4$:

$$p_4 = -1.9000 \alpha\mu = -190.00 MW \text{ και } q_4 = -1.1200 \alpha\mu = -112.00 MVar \quad (3.65)$$

Επανάληψη	$x_1 = \bar{a}_1$	$x_2 = \bar{a}_2$	$x_3 = \bar{a}_3$	$x_4 = \bar{f}_1$	$x_5 = \bar{f}_2$	$x_6 = \bar{f}_3$
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,0959	0,0959	0,0959	-0,0879	-0,1110	-0,1240
3	0,1048	0,1048	0,1048	-0,0932	-0,1143	-0,1262
4	0,1087	0,1087	0,1087	-0,0368	-0,1158	-0,1271
5	0,1124	0,1124	0,1124	-0,0353	-0,0547	-0,1281
6	0,1299	0,1299	0,1299	-0,0283	-0,0438	-0,0526
7	0,1386	0,1386	0,1386	-0,0247	-0,1270	-0,0460
8	0,1370	0,1370	0,1370	-0,0254	-0,0394	-0,0473
9	0,1437	0,1437	0,1437	-0,0227	-0,1289	-0,0422
10	0,1442	0,1442	0,1442	-0,0225	-0,1291	-0,1360
11	0,1470	0,1470	0,1470	-0,1184	-0,1301	-0,1367
12	0,1450	0,1450	0,1450	-0,1172	-0,1294	-0,0412
13	0,1673	0,1673	0,1673	-0,1305	-0,1377	-0,1414
14	0,0500	0,1509	0,1509	-0,1207	-0,1316	-0,1373
15	0,1588	0,1588	0,1588	-0,0166	-0,1346	-0,1393
16	0,0661	0,1704	0,1704	-0,0230	-0,1389	-0,1421
17	0,0508	0,1717	0,1717	-0,0551	-0,1394	-0,1424
18	0,0508	0,0645	0,1751	-0,0550	-0,0562	-0,1433
19	0,1695	0,0639	0,1695	-0,0620	-0,0578	-0,1419
20	0,0685	0,0647	0,1769	-0,0598	-0,0556	-0,1437
21	0,0689	0,0824	0,1795	-0,0598	-0,0891	-0,1444
22	0,0685	0,0817	0,0665	-0,0598	-0,0892	-0,0584
23	0,0695	0,0834	0,1196	-0,0597	-0,0889	-0,0918
24	0,0699	0,0937	0,1210	-0,0597	-0,0783	-0,0914
25	0,0706	0,0951	0,1232	-0,0510	-0,0778	-0,0907
26	0,0619	0,0953	0,1235	-0,0526	-0,0777	-0,0906
27	0,0612	0,1831	0,1194	-0,0530	-0,0759	-0,0919
28	0,0620	0,1044	0,1239	-0,0525	-0,0863	-0,0905
29	0,0621	0,0885	0,1245	-0,0525	-0,0870	-0,0903
30	0,0622	0,0888	0,1316	-0,0524	-0,0870	-0,0957
31	0,0638	0,0890	0,1319	-0,0568	-0,0869	-0,0956
32	0,0631	0,0871	0,1876	-0,0570	-0,0873	-0,0810
33	0,0638	0,0890	0,1233	-0,0568	-0,0869	-0,0985
34	0,0638	0,0891	0,1180	-0,0568	-0,0869	-0,0924
35	0,0627	0,0725	0,1125	-0,0571	-0,0107	-0,0940
36	0,0639	0,0956	0,1183	-0,0568	-0,0866	-0,0923
37	0,0642	0,0966	0,1262	-0,0567	-0,0865	-0,0903
38	0,0654	0,0967	0,1264	-0,0563	-0,0864	-0,0902
39	0,0654	0,0965	0,1267	-0,0563	-0,0856	-0,0902
40	0,0654	0,0966	0,1267	-0,0563	-0,0859	-0,0902
41	0,1090	0,0932	0,1210	-0,0494	-0,0865	-0,0918
42	0,0651	0,0967	0,1267	-0,0564	-0,0859	-0,0902
43	0,0651	0,0970	0,1267	-0,0564	-0,0859	-0,0902

44	0,0651	0,0970	0,1271	-0,0564	-0,0859	-0,0901
45	0,0651	0,0970	0,1269	-0,0564	-0,0859	-0,0898
46	0,0650	0,0970	0,1269	-0,0562	-0,0858	-0,0897
47	0,0651	0,0970	0,1269	-0,0564	-0,0858	-0,0897
48	0,0651	0,0968	0,1270	-0,0564	-0,0859	-0,0897
49	0,0651	0,0968	0,1268	-0,0564	-0,0859	-0,0898
50	0,0651	0,0968	0,1268	-0,0564	-0,0859	-0,0898
51	0,0651	0,0968	0,1268	-0,0564	-0,0859	-0,0898
52	0,0651	0,0968	0,1268	-0,0564	-0,0859	-0,0898
53	0,0651	0,0968	0,1268	-0,0564	-0,0859	-0,0898
54	0,0651	0,0968	0,1268	-0,0564	-0,0859	-0,0898

Πίνακας 3.6.3: Οι τιμές των μεταβλητών

Επανάληψη	$g_1 - h_1$	$g_2 - h_2$	$g_3 - h_3$	$g_4 - h_4$	$g_5 - h_5$	$g_6 - h_6$
1	1,7000	1,0500	2,0000	1,2400	1,9000	1,1200
2	-0,8848	-0,3267	-0,4709	0,2079	-0,3629	0,6531
3	-1,0496	-0,4438	-0,5615	0,0951	-0,4307	0,5634
4	0,2421	-1,0276	-0,6005	0,0474	-0,4597	0,5254
5	0,2602	-1,1102	0,5451	-0,4501	-0,4880	0,4886
6	0,3465	-1,4821	0,7028	-0,7745	0,5315	-0,3047
7	0,3912	-1,6618	-0,8990	-0,3011	0,5955	-0,4461
8	0,3826	-1,6280	0,7676	-0,9013	0,5833	-0,4195
9	0,4176	-1,7640	-0,9486	-0,3560	0,6332	-0,5263
10	0,4203	-1,7745	-0,9538	-0,3616	-0,7202	0,1971
11	-1,8133	-0,9299	-0,9813	-0,3917	-0,7403	0,1728
12	-1,7780	-0,9095	-0,9619	-0,3706	0,6434	-0,5477
13	-2,1706	-1,1232	-1,1777	-0,5981	-0,8761	0,0007
14	-1,3959	0,9756	-1,0191	-0,4325	-0,7622	0,1361
15	0,4988	-2,0622	-1,0961	-0,5141	-0,8176	0,0695
16	0,7800	-0,2833	-1,2076	-0,6283	-0,8974	-0,0240
17	0,1053	0,2940	-1,2200	-0,6407	-0,9062	-0,0342
18	0,1086	0,2923	0,6735	0,3357	-0,9288	-0,0602
19	-0,6128	-1,8805	0,6438	0,3568	-0,8914	-0,0170
20	-0,0973	-0,0410	0,6832	0,3287	-0,9411	-0,0742
21	-0,0989	-0,0492	-0,0141	0,2555	-0,9590	-0,0945
22	-0,0971	-0,0403	-0,0137	0,2682	0,7069	0,5174
23	-0,1015	-0,0614	-0,0146	0,2381	-0,0009	0,0998
24	-0,1032	-0,0697	0,1547	-0,0044	-0,0003	0,0800
25	0,0967	-0,1596	0,1597	-0,0302	0,0005	0,0484
26	0,1053	0,0350	0,1603	-0,0333	0,0007	0,0445
27	0,0984	0,0530	-0,0563	-1,2986	-0,0009	0,1024
28	0,1059	0,0335	-0,0327	-0,1158	0,0008	0,0395
29	0,1069	0,0307	0,0050	0,1411	0,0011	0,0306

30	0,1078	0,0283	0,0050	0,1360	-0,1025	-0,0089
31	-0,0029	0,0317	0,0050	0,1336	-0,1028	-0,0127
32	-0,0036	0,0473	0,0049	0,1667	-0,0869	-0,7107
33	-0,0029	0,0315	0,0050	0,1331	-0,1105	0,1096
34	-0,0029	0,0309	0,0050	0,1320	-0,0028	0,1228
35	-0,0040	0,0569	1,5267	-0,0362	-0,0045	0,2003
36	-0,0029	0,0295	-0,0098	0,0253	-0,0027	0,1184
37	-0,0026	0,0224	-0,0100	0,0083	-0,0048	0,0109
38	-0,0007	-0,0052	-0,0100	0,0062	-0,0048	0,0082
39	-0,0006	-0,0065	0,0062	0,0025	-0,0047	0,0044
40	-0,0006	-0,0065	0,0000	0,0028	-0,0047	0,0043
41	-0,0546	-0,9322	-0,0001	0,0617	-0,0065	0,0824
42	-0,0011	0,0008	0,0000	0,0027	-0,0047	0,0042
43	-0,0011	0,0007	0,0000	-0,0033	-0,0046	0,0041
44	-0,0011	0,0007	0,0000	-0,0033	-0,0048	-0,0012
45	-0,0011	0,0007	0,0000	-0,0034	0,0004	-0,0016
46	0,0034	0,0005	0,0000	-0,0037	0,0004	-0,0020
47	0,0000	0,0005	0,0000	-0,0038	0,0004	-0,0021
48	0,0000	0,0004	0,0000	0,0006	0,0004	-0,0024
49	0,0000	0,0002	0,0000	0,0001	0,0003	0,0001
50	0,0000	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
51	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
52	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
53	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
54	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Πίνακας 3.6.4: Οι τιμές των DC συναρτήσεων

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Κάνοντας μια ανακεφαλαίωση, επικεντρωθήκαμε στην επίλυση του προβλήματος ροής φορτίου αφού αρχικά το μετατρέψαμε σε ένα σύστημα μη γραμμικών εξισώσεων κυρτών διαφορών. Αυτό το σύστημα δείχθηκε ότι μπορεί να επιλυθεί ως ένα ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης κοίλης συνάρτησης με κυρτούς περιορισμούς, εκφράζοντας τις μη γραμμικές εξισώσεις σαν συναρτήσεις κυρτών διαφορών και ορίζοντας κατάλληλα το επιτρεπτό σύνολο στο οποίο θα αναζητηθεί η λύση του συστήματος. Για την επίλυση του νέου προβλήματος χρησιμοποιήθηκε ο αλγόριθμος εξωτερικής προσέγγισης της K. L. Hoffman. Ο αλγόριθμος αυτός υλοποιήθηκε στο διαδραστικό περιβάλλον MATLAB R2012b (τροποποιώντας και επεκτείνοντας τη σχετική υλοποίηση του βασικού αλγόριθμου από τη διπλωματική εργασία του K. Βαρελά [6]) και εφαρμόστηκε σε έξι παραδείγματα ΣΗΕ.

Μετά την μελέτη αυτών των παραδειγμάτων, είναι προφανές ότι η γενίκευση του προβλήματος ροής φορτίου σε πρόβλημα συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων κυρτών διαφορών (όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 2) ούτως ώστε να επιλυθεί με χρήση του αλγορίθμου K. L. Hoffman, καθίσταται επιτυχής. Σε μερικά παραδείγματα επιτεύχθηκε η εύρεση λύσης στο σύστημα, ακόμα και εντοπισμός δεύτερης λύσης (παραδείγματα 3.1, 3.2, 3.3 και 3.6). Παρ' όλα αυτά, υπήρχαν περιπτώσεις όπου ο χρόνος εκτέλεσης για τον εντοπισμό κάποιας λύσης ήταν απαγορευτικός (παραδείγματα 3.4 και 3.5). Το γεγονός αυτό οφείλεται κυρίως στο ότι καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνεται, τα γραμμικά υποπροβλήματα μεγαλώνουν με την προσθήκη νέων γραμμικών περιορισμών. Επίσης, είναι άξιο επισήμανσης το γεγονός ότι για την επίλυση ενός συστήματος $2(N-1)$ άγνωστων μεταβλητών, όπου N το πλήθος των ζυγών ενός ΣΗΕ, είναι αναγκαίο να υπολογιστεί ο διπλάσιος αριθμός μεταβλητών, αφού απαιτείται και ο υπολογισμός των y_i .

Προσπαθήσαμε με αρκετές μεθόδους να μειώσουμε αισθητά το χρόνο εκτέλεσης. Αρχικά, αυτή η δυσκολία εμφανίστηκε σε παραδείγματα ΣΗΕ 3 ζυγών (παραδείγματα 3.2 και έπειτα). Ο περιορισμός του επιτρεπτού συνόλου καθώς και η υλοποίηση μιας νέας μεθόδου υπολογισμού των κορυφών (όταν προστίθενται γραμμικοί περιορισμοί σε κάθε επανάληψη) δεν προσέφεραν ιδιαίτερη βελτίωση. Ακολούθως έγινε χρήση του προγραμματιστικού πακέτου της MATLAB R2012b, Parallel Computing Toolbox, το οποίο επιτρέπει την εκτέλεση του προγράμματος χρησιμοποιώντας πολλαπλούς πυρήνες μιας CPU. Αυτή η τροποποίηση μείωσε σημαντικά τον χρόνο εκτέλεσης αλλά δημιούργησε άλλα προβλήματα κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου, τα οποία υπόκεινται στην κατηγορία του παράλληλου προγραμματισμού. Τέλος, παρά τη σημαντική μείωση του χρόνου εκτέλεσης, το πρόβλημα εξακολούθησε να υφίσταται σε παραδείγματα ΣΗΕ 4 ζυγών. Γι' αυτές τις περιπτώσεις, το επιτρεπτό σύνολο περιορίστηκε ακόμη περισσότερο.

Από άποψη υπολογιστικού κόστους, οι αλγόριθμοι εξωτερικής προσέγγισης, αλλά και γενικότερα τα προβλήματα κοίλης ελαχιστοποίησης, ανήκουν στην κλάση NP – Hard προβλημάτων. Περισσότερες πληροφορίες περί πολυπλοκότητας σε προβλήματα ολικής βελτιστοποίησης μπορούν να βρεθούν στο [12].

Τέλος, μπορεί να κριθεί ότι η επίλυση του προβλήματος ροής φορτίου με μετατροπή σε ισοδύναμο πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι εφικτή αλλά δεν είναι η βέλτιστη μέθοδος, ιδιαίτερα σε περιπτώσεις ΣΗΕ πολλών ζυγών. Εν τούτοις, μας δίνεται η δυνατότητα υπολογισμού μιας δεύτερης λύσης, κάτι που δεν παρέχεται από τις γνωστές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων ροής φορτίου (Μέθοδος Newton – Raphson, Μέθοδος Gauss – Seidel, Μέθοδος Fast Decoupled - Ταχεία Αποζευγμένη Newton).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Κώδικας MATLAB

bus_data.m

Ανάγνωση των χαρακτηριστικών του ΣΗΕ (πλήθος ζυγών, είδος ζυγών και δεδομένα)

```
clear all;  
clc;
```

```
display('-----Bus Data-----');  
nbranch = input('Enter the number of branches in the system: ');
```

```
p = zeros(nbranch,1);  
q = zeros(nbranch,1);  
v = zeros(nbranch,1); % $v^2 = a^2 + f^2$ 
```

```
v_0 = input('Enter value of slack bus voltage: ');
```

```
npv = input('Enter total of PV buses in the system: ');  
pv = zeros(npv,1);  
for n = 1:npv  
    pv(n,1) = input('Enter PV bus number: ');  
    v(pv(n,1),1) = input('Enter value of voltage: ');  
    p(pv(n,1),1) = input('Enter value of active power: ');  
end
```

```
npq = input('Enter total of PQ buses in the system: ');  
pq = zeros(npq,1);  
for n = 1:npq  
    pq(n,1) = input('Enter PQ bus number: ');  
    p(pq(n,1),1) = input('Enter value of active power: ');  
    q(pq(n,1),1) = input('Enter value of reactive power: ');  
end
```

```
display(' ');  
admittance_matrix  
nbus = 2;  
save variables.mat
```

admittance matrix.m

Σχηματισμός μήτρας αγωγιμοτήτων

```
display('-----Admittance Matrix Formation-----');

display('Enter line data: ');
for n = 1:nbranch
    from_bus = input('Enter from bus: ');
    to_bus = input('Enter to bus: ');
    R = input('Enter value of resistance: ');
    X = input('Enter value of reactance: ');
    b = input('Enter value of line charging admittance (b/2): ');
    Z = R + 1i * X;
    y = 1./Z;
    Line_data(n,:) = [from_bus to_bus R X b y];
end

from_bus = Line_data(:,1);
to_bus = Line_data(:,2);
R = Line_data(:,3);
X = Line_data(:,4);
b = Line_data(:,5);
y = Line_data(:,6);

b = 1i*b;

nbus = max( max(from_bus) , max(to_bus) );
Y = zeros(nbus,nbus);

%non diagonal elements
for k = 1:nbranch
    Y(from_bus(k),to_bus(k)) = - y(k);
    Y(to_bus(k),from_bus(k)) = Y(from_bus(k),to_bus(k));
end

%diagonal elements
for k = 1:nbus
    for n = 1:nbranch
        if ((from_bus(n) == k) || (to_bus(n) == k))
            Y(k,k) = Y(k,k) + y(n) + b(n);
        end
    end
end

G = real(Y);
B = imag(Y);

g1 = G(:,1);
b1 = B(:,1);

G_bar = G(:,2:end);
B_bar = B(:,2:end);
```


final.m

Το κυρίως πρόγραμμα, όπου γίνεται η ανάγνωση των δεδομένων και η εκτέλεση του αλγόριθμου K. L. Hoffman.

```
clear all
load variables.mat

matlabpool open;
%Orismos synarthsewn me bash tis dotheises funcs kai grads

[f_str, n]=CreateFuncStructure(nbus,p,q,v,v_0,pv,pq,g1,G_bar,b1,B_bar);
g_str=CreateGradStructure(nbus,v,v_0,npq,pq,g1,G_bar,b1,B_bar);

%Kouti gia x
parfor i=1:(n/2)%a_bar
    xmin(i) = 0.5;
    xmax(i) = 1.5;
end %f_bar
parfor i=(n/2 + 1):n
    xmin(i) = -0.8;
    xmax(i) = 0.8;
end
xmin=xmin';
xmax=xmax';

%Katw fragmata tou y
%options = optimset('GradObj','on','GradConstr','off');
parfor i=1:n
    infin(i)=Inf;
end
a=zeros(2*n,n);

options=optimset('Algorithm','active-set');
options = optimset(options,'UseParallel','always');
a(:,1) = fmincon(@(z) fun1(z,n),zeros(2*n,1),[],[],[],[],[xmin' -infin],[xmax' infin],@(z)
nonlcon1(z,f_str,n),options);
%options = optimset('GradObj','on','GradConstr','off');
a(:,2) = fmincon(@(z) fun2(z,n),zeros(2*n,1),[],[],[],[],[xmin' -infin],[xmax' infin],@(z)
nonlcon2(z,f_str,n),options);
parfor i=1:n
    ymin(i)=a(n+i,i);
end
ymin=ymin';

%Anw fragmata tou y
ymax=[];

res1=[];
res2=[];

parfor i=1:n
```

```

res=zeros(2,n);
res(:,i)=[-1 1]';
res1=[res1;res];
end

for i=1:n
    res2(2*i-1)=-xmin(i);
    res2(2*i)=xmax(i);
end
res2=res2';
W=[con2vert(res1,res2) zeros(2^n,n)]; %O pinakas W exei ws sthles tis koryfes

values=[];
% for i=1:(2^n)
% values(:,i)=funcc(W(:,i)); %O values einai (2*n) x (2^n)
% end

for i=1:(2*n)
    parfor j=1:(2^n)
        values(i,j)=f_str{i}(W(:,j)); %O values einai (2*n) x (2^n)
    end
end

maxima=max(values');

parfor i=1:n
    ymax(i)=max([maxima(i) maxima(n+i)]);
end

ymax=ymax';

%Teliko kouti (z)
zmin=[xmin' ymin'];
zmax=[xmax' ymax'];

%options = optimset('GradObj','on','GradConstr','off');
options = optimset('UseParallel','always');
pp=fmincon(@(ze) fun(ze,n),zeros(2*n+1,1),[],[],[],[],[zmin' -Inf],[ zmax'
Inf],@(ze)nonlcon3(ze(1:(2*n)),f_str,n,ze(2*n+1)),options);

%Sth sunexeia dieuryrontai ta oria tw n metavlhtwn wste to p na einai austhra sto
%eswteriko tou polyedrou

%Neo Kouti gia x

xmin=[];
xmax=[];
ymin=[];
parfor i=1:(n/2)%a_bar
    xmin(i) = 0;
    xmax(i) = 5;
end %f_bar

```

```

parfor i=(n/2 + 1):n
    xmin(i) = -2;
    xmax(i) = 2;
end
xmin=xmin';
xmax=xmax';

%Katw fragmata tou y
%options = optimset('GradObj','on','GradConstr','off');
parfor i=1:n
    infin(i)=Inf;
end
a=zeros(2*n,n);
options = optimset('UseParallel','always');
a(:,1) = fmincon(@(z) fun1(z,n),zeros(2*n,1),[],[],[],[],[xmin' -infin],[xmax' infin],@(z)
nonlcon1(z,f_str,n),options);
%options = optimset('GradObj','on','GradConstr','off');
a(:,2) = fmincon(@(z) fun2(z,n),zeros(2*n,1),[],[],[],[],[xmin' -infin],[xmax' infin],@(z)
nonlcon2(z,f_str,n),options);
parfor i=1:n
    ymin(i)=a(n+i,i);
end
ymin=ymin';

%Anw fragmata tou y
ymax=[];

res1=[];
res2=[];

parfor i=1:n
res=zeros(2,n);
res(:,i)=[-1 1]';
res1=[res1;res];
end

for i=1:n
    res2(2*i-1)=-xmin(i);res2(2*i)=xmax(i);
end
res2=res2';
W=[con2vert(res1,res2) zeros(2^n,n)]'; %O pinakas W exei ws sthles tis koryfes

values=[];

for i=1:(2*n)
    parfor j=1:(2^n)
        values(i,j)=f_str{i}(W(:,j)); %O values einai (2*n) x (2^n)
    end
end

maxima=max(values');

parfor i=1:n
    ymax(i)=max([maxima(i) maxima(n+i)]);
end

```

```

end

ymax=ymax';

%Neo Teliko kouti (z)
zmin=[xmin' ymin'];
zmax=[xmax' ymax'];

pp=pp(1:2*n);

[LQ,Lb]=enclosing_linear_polyhedron(zmax,zmin,2*n);

V{1} = (con2vert(LQ,Lb));
u(1) = minfunc(pp,f_str,n);
x(:,1)=zeros(2*n,1);
z(:,1)=zeros(2*n,1);
num=length(Lb);
for i = 1:size(V{1},2)
    K{1}(:,i) = find(abs(LQ * V{1}(:,i) - Lb) < 1e-12);
end
k=2;
stop=0;
y=[]; %Apo edw kai katw : algorithmos K.L.Hoffman

while stop == 0
    y=[];

    Vtemp=V{k-1};

    parfor i=1:size(Vtemp,2)
        y(i)=minfunc(Vtemp(:,i),f_str,n);
    end

    [II,I]=min(y);

    x(:,k)=Vtemp(:,I);

    options = optimset('GradObj','on','GradConstr','off','Algorithm','active-set');
    lamvda = fmincon(@(l) id_grad(l),0,[],[],[],[],0,1,@(l) (nonlcon4(x(:,k)+l*(pp-
x(:,k)),f_str,n)),options);

    if lamvda > 0
        z(:,k) = x(:,k)+lamvda*(pp-x(:,k));
        if minfunc(z(:,k),f_str,n)<u(k-1)
            u(k)=minfunc(z(:,k),f_str,n);
        else
            u(k)=u(k-1);
        end
        if abs(u(k)-minfunc(x(:,k),f_str,n))<1e-5
            stop=1;
        else
            [g,gg]=nonlcon4(z(:,k),f_str,n);

```

```

J{k}=[];
for i=1:(2*n)
    if abs(g(i))<1e-4
        J{k}=J{k};i;
    end
end
Jtemp=max(J{k});
num=num+1;
gradients=[];
funs=[];
parfor i=1:(2*n)
    gradients(:,i)=g_str{i}(z(:,k));
    funs(i)=f_str{i}(z(:,k));
end
for i=1:n
    if Jtemp==i
        LQ(num,:)=gradients(:,i)';
        Lb(num,:)=z(n+i,k)+gradients(:,i)*z(:,k)-funs(i);
    end
end
for i=(n+1):(2*n)
    if Jtemp==i
        LQ(num,:)=gradients(:,i)';
        Lb(num,:)=z(i,k)+gradients(:,i)*z(:,k)-funs(i);
    end
end
V{k} = V{k-1};
K{k} = K{k-1};
VV = [];
KK = [];
parfor i = 1:size(V{k},2)
    if LQ(num,:) * V{k}(:,i) - Lb(num,:) > 0
        Kv = K{k}(:,i)';
        for j = 1:size(Kv,2)
            qq = Kv(j);
            set1 = setdiff(Kv,qq);
            An = zeros(2*n,2*n);
            Bn = zeros(2*n,1);
            for m = 1:size(set1,2)
                An(m,:) = LQ(set1(m),:);
                Bn(m,:) = Lb(set1(m),:);
            end
            An(size(set1,2)+1,:) = LQ(num,:);
            Bn(size(set1,2)+1,:) = Lb(num,:);
            Ktemp = [set1';num];
            if abs(det(An)) > 1e-8
                vnew = An \ Bn;
                set2 = 1:(num-1);
                set3 = setdiff(set2,Kv);
                rr = union(set3,qq);
                if LQ(rr,:) * vnew - Lb(rr,:) <= 0
                    knew = Ktemp;
                    VV = [VV vnew];
                    KK = [KK knew];
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
end
else
    VV = [VV V{k}(:,i)];
    KK = [KK K{k}(:,i)];
end
end
V{k} = VV;
K{k} = KK;
% [VV,nr,nre]=lcon2vert(LQ,Lb);
% V{k} = VV';
% Vtemp2=V{k};
% for i=1:size(Vtemp2,2)
%     plot(Vtemp2(1,i),Vtemp2(2,i),'o');
% end

end
else
    stop=1;
end
disp(['k = ' num2str(k)]);
k=k+1;
if k==121
    stop=1;
end
end
end

matlabpool close;

```

CreateFuncStructure.m

Κατασκευή συστήματος μη γραμμικών εξισώσεων κυρτών διαφορών του ΣΗΕ

```

function [f n]=CreateFuncStructure(nbus,p,q,v_0,pv,pq,g1,G_bar,b1,B_bar) %Orismos
tw n kyrtnw synarthsewn g_i , h_i , n o sunolikos
%arithmos tw n g_i kai h_i. H metavlth z exei mesa tis metavlhtes x kai y
%px gia nbranch = 2, [z1 z2 z3 z4]=[x1 x2 y1 y2] = [a_bar1 f_bar1 y1 y2]

n = 2*(nbus - 1);
II = [zeros(nbus-1,1),eye(nbus-1,nbus-1)];
%Synartiseis g_i
MatrixA = [II'+G_bar, -B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixB = [B_bar, II'+G_bar,zeros(nbus,n)];
MatrixC = [G_bar, II' - B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixD = [II'-B_bar, -G_bar, zeros(nbus,n)];
f{1} = @(z)v_0*[g1(pq)*II(:,pq)',b1(pq)*II(:,pq)',zeros(1,n)]*z + ...
    + 0.25*z'*MatrixA(pq,:)'*MatrixA(pq,:)*z + ...
    + 0.25*z'*MatrixB(pq,:)'*MatrixB(pq,:)*z;
f{2} = @(z)v_0*[zeros(1,nbus-1), g1(pq)*II(:,pq)',zeros(1,n)]*z + ...
    + 0.25*z'*MatrixC(pq,:)'*MatrixC(pq,:)*z + ...

```

```

+ 0.25*z'*MatrixD(pq,:)'*MatrixD(pq,:)*z;

%Synartiseis h_i
MatrixE = [II'-G_bar, B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixF = [-B_bar, II'-G_bar,zeros(nbus,n)];
MatrixG = [-G_bar, II' + B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixH = [II'+B_bar, G_bar, zeros(nbus,n)];
f{3} = @(z)0.25*z'*MatrixE(pq,:)'*MatrixE(pq,:)*z + ...
+ 0.25*z'*MatrixF(pq,:)'*MatrixF(pq,:)*z + p(pq);
f{4} = @(z)v_0*[b1(pq)*II(:,pq),zeros(1,nbus-1),zeros(1,n)]*z + ...
+ 0.25*z'*MatrixG(pq,:)'*MatrixG(pq,:)*z + ...
+ 0.25*z'*MatrixH(pq,:)'*MatrixH(pq,:)*z + q(pq);
end

```

CreateGradStructure.m

Κατασκευή κλίσεων των μη γραμμικών εξισώσεων κυρτών διαφορών

```

function f =CreateGradStructure(nbus,v,v_0,pv,pq,g1,G_bar,b1,B_bar)% Orismos tw n
klisewn tw n kyrtwn synarthsewn F_i=g_i-y_i , F_n+i=h_i-y_i
n = 2*(nbus - 1);
II = [zeros(nbus-1,1),eye(nbus-1,nbus-1)];

%kliseis sinartisewn g_i
%%%%%%%%%%%%%%
MatrixA = [II'+G_bar, -B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixB = [B_bar, II'+G_bar,zeros(nbus,n)];
MatrixC = [G_bar, II' - B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixD = [II'-B_bar, -G_bar, zeros(nbus,n)];

f{1} = @(z)v_0*[g1(pq)*II(:,pq)',b1(pq)*II(:,pq)',zeros(1,n)]' + ...
+ 0.5*MatrixA(pq,:)'*MatrixA(pq,:)*z + ...
+ 0.5*MatrixB(pq,:)'*MatrixB(pq,:)*z + [0 0 -1 0]';
f{2} = @(z)v_0*[zeros(1,nbus-1), g1(pq)*II(:,pq),zeros(1,n)]' + ...
+ 0.5*MatrixC(pq,:)'*MatrixC(pq,:)*z + ...
+ 0.5*MatrixD(pq,:)'*MatrixD(pq,:)*z + [0 0 0 -1]';

%kliseis sinartisewn h_i
%%%%%%%%%%%%%%

MatrixE = [II'-G_bar, B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixF = [-B_bar, II'-G_bar,zeros(nbus,n)];
MatrixG = [-G_bar, II' + B_bar, zeros(nbus,n)];
MatrixH = [II'+B_bar, G_bar, zeros(nbus,n)];

f{3} = @(z)0.5*MatrixE(pq,:)'*MatrixE(pq,:)*z + ...
+ 0.5*MatrixF(pq,:)'*MatrixF(pq,:)*z + [0 0 -1 0]';
f{4} = @(z)v_0*[b1(pq)*II(:,pq)',zeros(1,nbus-1),zeros(1,n)]' + ...
+ 0.5*MatrixG(pq,:)'*MatrixG(pq,:)*z + ...
+ 0.5*MatrixH(pq,:)'*MatrixH(pq,:)*z + [0 0 0 -1]';
end

```

Οι ακόλουθες τέσσερις συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για τον ορισμό των αγνώστων μεταβλητών στη συνάρτηση *fmincon* (πρόβλημα ελαχιστοποίησης για εντοπισμό των κάτω φραγμάτων του y):

fun1.m

```
function [f,fgrad] = fun1(x,n)
    f = x(n+1);
    fgrad=zeros(n,1);
    fgrad(n+1) = 1;
end
```

fun2.m

```
function [f,fgrad] = fun2(x,n)
    f = x(n+2);
    fgrad=zeros(n,1);
    fgrad(n+2) = 1;
end
```

nonlcon1.m

```
function [c ceq] = nonlcon1(z,s,n) %synarthsh gia tous periorismous. Sto orisma s
mpainei h domh synarthsewn f_str
c= [s{1}(z)-z(n+1) s{n+1}(z)-z(n+1)]';
ceq=[];
end
```

nonlcon2.m

```
function [c, ceq]= nonlcon2(z,s,n)
c= [s{2}(z)-z(n+2) s{n+2}(z)-z(n+2)]';
ceq= [];
end
```


con2vert.m

Μετατροπή ενός κυρτού συνόλου από ανισοτικούς περιορισμούς σε σύνολο κορυφών

```
function [V,nr] = con2vert(A,b)
% CON2VERT - convert a convex set of constraint inequalities into the set
% of vertices at the intersections of those inequalities;i.e.,
% solve the "vertex enumeration" problem. Additionally,
% identify redundant entries in the list of inequalities.
%
% V = con2vert(A,b)
% [V,nr] = con2vert(A,b)
%
% Converts the polytope (convex polygon, polyhedron, etc.) defined by the
% system of inequalities A*x <= b into a list of vertices V. Each ROW
% of V is a vertex. For n variables:
% A = m x n matrix, where m >= n (m constraints, n variables)
% b = m x 1 vector (m constraints)
% V = p x n matrix (p vertices, n variables)
% nr = list of the rows in A which are NOT redundant constraints
%
% NOTES: (1) This program employs a primal-dual polytope method.
% (2) In dimensions higher than 2, redundant vertices can
% appear using this method. This program detects redundancies
% at up to 6 digits of precision, then returns the
% unique vertices.
% (3) Non-bounding constraints give erroneous results; therefore,
% the program detects non-bounding constraints and returns
% an error. You may wish to implement large "box" constraints
% on your variables if you need to induce bounding. For example,
% if x is a person's height in feet, the box constraint
% -1 <= x <= 1000 would be a reasonable choice to induce
% boundedness, since no possible solution for x would be
% prohibited by the bounding box.
% (4) This program requires that the feasible region have some
% finite extent in all dimensions. For example, the feasible
% region cannot be a line segment in 2-D space, or a plane
% in 3-D space.
% (5) At least two dimensions are required.
% (6) See companion function VERT2CON.
% (7) ver 1.0: initial version, June 2005
% (8) ver 1.1: enhanced redundancy checks, July 2005
% (9) Written by Michael Kleder
%
% EXAMPLES:
%
% % FIXED CONSTRAINTS:
% A=[ 0 2; 2 0; 0.5 -0.5; -0.5 -0.5; -1 0];
% b=[4 4 0.5 -0.5 0]';
% figure('renderer','zbuffer')
% hold on
% [x,y]=ndgrid(-3:.01:5);
% p=[x(:) y(:)]';
% p=(A*p <= repmat(b,[1 length(p)]));
```

```

% p = double(all(p));
% p=reshape(p,size(x));
% h=pcolor(x,y,p);
% set(h,'edgecolor','none')
% set(h,'zdata',get(h,'zdata')-1) % keep in back
% axis equal
% V=con2vert(A,b);
% plot(V(:,1),V(:,2),'y.')
%
% % RANDOM CONSTRAINTS:
% A=rand(30,2)*2-1;
% b=ones(30,1);
% figure('renderer','zbuffer')
% hold on
% [x,y]=ndgrid(-3:.01:3);
% p=[x(:) y(:)];
% p=(A*p <= repmat(b,[1 length(p)]));
% p = double(all(p));
% p=reshape(p,size(x));
% h=pcolor(x,y,p);
% set(h,'edgecolor','none')
% set(h,'zdata',get(h,'zdata')-1) % keep in back
% axis equal
% set(gca,'color','none')
% V=con2vert(A,b);
% plot(V(:,1),V(:,2),'y.')
%
% % HIGHER DIMENSIONS:
% A=rand(15,5)*1000-500;
% b=rand(15,1)*100;
% V=con2vert(A,b)
%
% % NON-BOUNDING CONSTRAINTS (ERROR):
% A=[0 1;1 0;1 1];
% b=[1 1 1]';
% figure('renderer','zbuffer')
% hold on
% [x,y]=ndgrid(-3:.01:3);
% p=[x(:) y(:)];
% p=(A*p <= repmat(b,[1 length(p)]));
% p = double(all(p));
% p=reshape(p,size(x));
% h=pcolor(x,y,p);
% set(h,'edgecolor','none')
% set(h,'zdata',get(h,'zdata')-1) % keep in back
% axis equal
% set(gca,'color','none')
% V=con2vert(A,b); % should return error
%
% % NON-BOUNDING CONSTRAINTS WITH BOUNDING BOX ADDED:
% A=[0 1;1 0;1 1];
% b=[1 1 1]';
% A=[A;0 -1;0 1;-1 0;1 0];
% b=[b;4;1000;4;1000]; % bound variables within (-1,1000)

```

```

% figure('renderer','zbuffer')
% hold on
% [x,y]=ndgrid(-3:.01:3);
% p=[x(:) y(:)];
% p=(A*p <= repmat(b,[1 length(p)]));
% p = double(all(p));
% p=reshape(p,size(x));
% h=pcolor(x,y,p);
% set(h,'edgecolor','none')
% set(h,'zdata',get(h,'zdata')-1) % keep in back
% axis equal
% set(gca,'color','none')
% V=con2vert(A,b);
% plot(V(:,1),V(:,2),'y.','markersize',20)
%
% % JUST FOR FUN:
% A=rand(80,3)*2-1;
% n=sqrt(sum(A.^2,2));
% A=A./repmat(n,[1 size(A,2)]);
% b=ones(80,1);
% V=con2vert(A,b);
% k=convhulln(V);
% figure
% hold on
% for i=1:length(k)
%   patch(V(k(i,:),1),V(k(i,:),2),V(k(i,:),3),'w','edgecolor','none')
% end
% axis equal
% axis vis3d
% axis off
% h=camlight(0,90);
% h(2)=camlight(0,-17);
% h(3)=camlight(107,-17);
% h(4)=camlight(214,-17);
% set(h(1),'color',[1 0 0]);
% set(h(2),'color',[0 1 0]);
% set(h(3),'color',[0 0 1]);
% set(h(4),'color',[1 1 0]);
% material metal
% for x=0:5:720
%   view(x,0)
%   drawnow
% end

c = A\b;
if ~all(A*c < b);
    [c,f,ef] = fminsearch(@obj,c,'params',{A,b});
    if ef ~= 1
        error('Unable to locate a point within the interior of a feasible region.')
    end
end
b = b - A*c;
D = A ./ repmat(b,[1 size(A,2)]);
[k,v2] = convhulln([D;zeros(1,size(D,2))]);

```

```

[k,v1] = convhulln(D);
if v2 > v1
    error('Non-bounding constraints detected. (Consider box constraints on variables.)')
end
nr = unique(k(:));
G = zeros(size(k,1),size(D,2));
for ix = 1:size(k,1)
    F = D(k(ix,:),:);
    G(ix,:)=F\ones(size(F,1),1);
end
V = G + repmat(c',[size(G,1),1]);
[null,I]=unique(num2str(V,6),'rows');
V=V(I,:);
return
function d = obj(c,params)
A=params{1};
b=params{2};
d = A*c-b;
k=(d>=-1e-15);
d(k)=d(k)+1;
d = max([0;d]);
return

```

Οι ακόλουθες δύο συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για τον ορισμό των αγνώστων μεταβλητών στη συνάρτηση *fmincon* (πρόβλημα ελαχιστοποίησης για εντοπισμό του εσωτερικού σημείου p):

fun.m

```

function [f,fgrad] =fun(x,n)
    f = x(2*n+1);
    fgrad = [zeros(2*n,1);1];
end

```

nonlcon3.m

```

function [c, ceq]= nonlcon3(z,s,n,e)
c = [s{1}(z)-z(n+1)-e s{2}(z)-z(n+2)-e s{3}(z)-z(n+1)-e s{4}(z)-z(n+2)-e]';
ceq= [];
end

```

enclosing linear polyedron.m

Μετατροπή αρχικού πολυέδρου σε γραμμικές ανισώσεις

```
function [A,b] = enclosing_linear_polyhedron (x_max,x_min,n) %Metatrepei to polyedro  
που orizetai apo ta dianysmata x_max , x_min  
%se grammikes aniswseis Ax<=b
```

```
A=[eye(n);-eye(n)];  
b=[x_max;-x_min];
```

```
end
```

minfunc.m

Υπολογισμός άνω φράγματος u

```
function f = minfunc(x,s,n) %Antikeimenikh synarthsh  
f=0;  
for i=1:n  
f=f-s{i}(x)-s{n+i}(x)+2*x(n+i);  
end
```

Οι ακόλουθες δύο συναρτήσεις χρησιμοποιούνται για τον ορισμό της παραμέτρου λ στη συνάρτηση `fmincon` (πρόβλημα ελαχιστοποίησης για εντοπισμό της παραμέτρου λ):

id_grad.m

```
function [f,fgrad] = id_grad(x) %tautotikh synarthsh  
f = x;  
fgrad = 1;  
end
```

nonlconv4.m

```
function [c, ceq]= nonlcon4(z,s,n)  
c= [s{1}(z)-z(n+1) s{2}(z)-z(n+2) s{3}(z)-z(n+1) s{4}(z)-z(n+2)]';  
ceq= [];  
End
```

lcon2vert.m

Μετατροπή ενός πολυέδρου αποτελούμενο από ισοτικούς και ανισοτικούς περιορισμούς σε σύνολο κορυφών

```
function [V,nr,nre]=lcon2vert(A,b,Aeq,beq,TOL,checkbounds)
%An extension of Michael Kleder's con2vert function, used for finding the
%vertices of a bounded polyhedron in  $R^n$ , given its representation as a set
%of linear constraints. This wrapper extends the capabilities of con2vert to
%also handle cases where the polyhedron is not solid in  $R^n$ , i.e., where the
%polyhedron is defined by both equality and inequality constraints.
%
%SYNTAX:
%
% [V,nr,nre]=lcon2vert(A,b,Aeq,beq,TOL)
%
%The rows of the  $N \times n$  matrix V are a series of N vertices of the polyhedron
%in  $R^n$ , defined by the linear constraints
%
%  $A*x \leq b$ 
%  $Aeq*x = beq$ 
%
%By default, Aeq=beq=[], implying no equality constraints. The output "nr"
%lists non-redundant inequality constraints, and "nre" lists non-redundant
%equality constraints.
%
%The optional TOL argument is a tolerance used for both rank-estimation and
%for testing feasibility of the equality constraints. Default=1e-10.
%The default can also be obtained by passing TOL=[];
%
%
%EXAMPLE:
%
%The 3D region defined by  $x+y+z=1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ 
%is described by the following constraint data.
%
%
% A =
%
%    0.4082 -0.8165  0.4082
%    0.4082  0.4082 -0.8165
%   -0.8165  0.4082  0.4082
%
%
% b =
%
%    0.4082
%    0.4082
%    0.4082
%
%
% Aeq =
%
%    0.5774  0.5774  0.5774
```

```

%
%
% beq =
%
% 0.5774
%
%
% >> V=lcon2vert(A,b,Aeq,beq)
%
% V =
%
% 1.0000 0.0000 0.0000
% 0.0000 0.0000 1.0000
% -0.0000 1.0000 0.0000
%
%
%
```

```
%%initial argument parsing
```

```

nre=[];
nr=[];
if nargin<5 || isempty(TOL), TOL=1e-10; end
if nargin<6, checkbounds=true; end

switch nargin

    case 0

        error 'At least 1 input argument required'

    case 1

        b=[]; Aeq=[]; beq=[];

    case 2

        Aeq=[]; beq=[];

    case 3

        beq=[];
        error 'Since argument Aeq specified, beq must also be specified'

end

b=b(:); beq=beq(:);

if xor(isempty(A), isempty(b))
```

```

    error 'Since argument A specified, b must also be specified'
end

if xor(isempty(Aeq), isempty(beq))
    error 'Since argument Aeq specified, beq must also be specified'
end

nn=max(size(A,2)*~isempty(A),size(Aeq,2)*~isempty(Aeq));

if ~isempty(A) && ~isempty(Aeq) && ( size(A,2)~=nn || size(Aeq,2)~=nn)

    error 'A and Aeq must have the same number of columns if both non-empty'

end

inequalityConstrained=~isempty(A);
equalityConstrained=~isempty(Aeq);

[A,b]=rownormalize(A,b);
[Aeq,beq]=rownormalize(Aeq,beq);

if equalityConstrained && nargout>2

    [discard,nre]=lindep([Aeq,beq].',TOL);

    if ~isempty(nre) %reduce the equality constraints

        Aeq=Aeq(nre,:);
        beq=beq(nre);

    else
        equalityConstrained=false;
    end

end

end

%%Find 1 solution to equality constraints within tolerance

if equalityConstrained

    Neq=null(Aeq);

    x0=pinv(Aeq)*beq;

    if norm(Aeq*x0-beq)>TOL*norm(beq), %infeasible

```



```

nre=[]; nr=[]; %All constraints redundant for empty polytopes
V=[];
return;

elseif isempty(Neq)

V=x0(:).';
nre=(1:nn).'; %Equality constraints determine everything.
nr=[];%All inequality constraints are therefore redundant.
return

end

rkAeq= nn - size(Neq,2);

end

%%
if inequalityConstrained && equalityConstrained

AAA=A*Neq;
bbb=b-A*x0;

elseif inequalityConstrained

AAA=A;
bbb=b;

elseif equalityConstrained && ~inequalityConstrained

error('Non-bounding constraints detected. (Consider box constraints on variables.)')

end

nnn=size(AAA,2);

if nnn==1 %Special case

idxu=sign(AAA)==1;
idxl=sign(AAA)==-1;
idx0=sign(AAA)==0;

Q=bbb./AAA;
U=Q;
U(~idxu)=inf;
L=Q;
L(~idxl)=-inf;

[ub,uloc]=min(U);
[lb,lloc]=max(L);

```

```

if ~all(bbb(idx0)>=0) || ub<lb %infeasible

    V=[]; nr=[]; nre=[];
    return

elseif ~isfinite(ub) || ~isfinite(lb)

    error('Non-bounding constraints detected. (Consider box constraints on
variables.)')

end

Zt=[lb;ub];

if nargout>1
    nr=unique([lloc,uloc]); nr=nr(:);
end

else

    if nargout>1
        [Zt,nr]=con2vert(AAA,bbb,TOL,checkbounds);
    else
        Zt=con2vert(AAA,bbb,TOL,checkbounds);
    end

end

if equalityConstrained && ~isempty(Zt)

    V=bsxfun(@plus,Zt*Neq.',x0(:).');

else

    V=Zt;

end

if isempty(V),
    nr=[]; nre=[];
end

function [V,nr] = con2vert(A,b,TOL,checkbounds)
% CON2VERT - convert a convex set of constraint inequalities into the set
% of vertices at the intersections of those inequalities;i.e.,
% solve the "vertex enumeration" problem. Additionally,
% identify redundant entries in the list of inequalities.
%
% V = con2vert(A,b)

```

```

% [V,nr] = con2vert(A,b)
%
% Converts the polytope (convex polygon, polyhedron, etc.) defined by the
% system of inequalities A*x <= b into a list of vertices V. Each ROW
% of V is a vertex. For n variables:
% A = m x n matrix, where m >= n (m constraints, n variables)
% b = m x 1 vector (m constraints)
% V = p x n matrix (p vertices, n variables)
% nr = list of the rows in A which are NOT redundant constraints
%
% NOTES: (1) This program employs a primal-dual polytope method.
% (2) In dimensions higher than 2, redundant vertices can
% appear using this method. This program detects redundancies
% at up to 6 digits of precision, then returns the
% unique vertices.
% (3) Non-bounding constraints give erroneous results; therefore,
% the program detects non-bounding constraints and returns
% an error. You may wish to implement large "box" constraints
% on your variables if you need to induce bounding. For example,
% if x is a person's height in feet, the box constraint
% -1 <= x <= 1000 would be a reasonable choice to induce
% boundedness, since no possible solution for x would be
% prohibited by the bounding box.
% (4) This program requires that the feasible region have some
% finite extent in all dimensions. For example, the feasible
% region cannot be a line segment in 2-D space, or a plane
% in 3-D space.
% (5) At least two dimensions are required.
% (6) See companion function VERT2CON.
% (7) ver 1.0: initial version, June 2005
% (8) ver 1.1: enhanced redundancy checks, July 2005
% (9) Written by Michael Kleder
%
% Modified by Matt Jacobson - March 30, 2011
%

%%%3/4/2012 Improved boundedness test - unfortunately slower than Michael
Kleder's
if checkbounds

[aa,bb,aaeq,bbeq]=vert2lcon(A,TOL);

if any(bb<=0) || ~isempty(bbeq)
    error('Non-bounding constraints detected. (Consider box constraints on
variables.)')
end

clear aa bb aaeq bbeq

end

dim=size(A,2);

```

```

%%%Matt J initialization
if strictinpoly(b,TOL)

    c=zeros(dim,1);

else

    slackfun=@(c)b-A*c;

    %Initializer0
    c = pinv(A)*b; %02/17/2012 -replaced with pinv()
    s=slackfun(c);

    if ~approxinpoly(s,TOL) %Initializer1

        c=Initializer1(TOL,A,b,c);
        s=slackfun(c);

    end

    if ~approxinpoly(s,TOL) %Attempt refinement

        %disp 'It is unusually difficult to find an interior point of your polytope. This
may take some time... '
        %disp ' '

        c=Initializer2(TOL,A,b,c);
        %[c,fval]=Initializer1(TOL,A,b,c,10000);
        s=slackfun(c);

    end

    if ~approxinpoly(s,TOL)

        %error('Unable to locate a point near the interior of the feasible region.')
        V=[];
        nr=[];
        return
    end

    if ~strictinpoly(s,TOL) %Added 02/17/2012 to handle initializers too close to
polytope surface

        %disp 'Recurring...'

        idx=( abs(s)<=max(s)*TOL );

        Amod=A; bmod=b;
        Amod(idx,:)=[];

```

```

bmod(idx)=[];

Aeq=A(idx,:); %pick the nearest face to c
beq=b(idx);

faceVertices=lcon2vert(Amod,bmod,Aeq,beq,TOL,1);
if isempty(faceVertices)
    disp 'Something's wrong. Couldn't find face vertices. Possibly polyhedron is
unbounded.'
    keyboard
end

c=faceVertices(1,:).'; %Take any vertex - find local recession cone vector
s=slackfun(c);

idx=( abs(s)<=max(s)*TOL );

Asub=A(idx,:); bsub=b(idx,:);

[aa,bb,aaeq,bbeq]=vert2lcon(Asub);
aa=[aa;aaeq;-aaeq];
bb=[bb;bbeq;-bbeq];

clear aaeq bbeq

[bmin,idx]=min(bb);

if bmin>=-TOL
    disp 'Something's wrong. We should have found a recession vector (bb<0).'
    keyboard
end

Aeq2=null(aa(idx,:)).';
beq2=Aeq2*c; %find intersection of polytope with line through facet centroid.

linetips = lcon2vert(A,b,Aeq2,beq2,TOL,1);

if size(linetips,1)<2
    disp 'Failed to identify line segment through interior.'
    disp 'Possibly {x: Aeq*x=beq} has weak intersection with interior({x: Ax<=b}).'
    keyboard
end

lineCentroid=mean(linetips);%Relies on boundedness

clear aa bb

c=lineCentroid(:);
s=slackfun(c);

```

```

    end

    b = s;
end
%% end Matt J initialization

D=bsxfun(@rdivide,A,b);

k = convhulln(D);
nr = unique(k(:));

G = zeros(size(k,1),dim);
ee=ones(size(k,2),1);
discard=false( 1, size(k,1) );

for ix = 1:size(k,1) %02/17/2012 - modified

    F = D(k(ix,:),:);
    if lindep(F,TOL)<dim;
        discard(ix)=1;
        continue;
    end

    G(ix,:)=F\ee;

end

G(discard,:)=[];

V = bsxfun(@plus, G, c.);

[discard,I]=unique( round(V*1e6),'rows');
V=V(I,:);

return

function [c,fval]=Initializer1(TOL, A,b,c,maxIter)

thresh=-10*max(eps(b));

if nargin>4
    [c,fval]=fminsearch(@(x) max([thresh;A*x-b]), c,optimset('MaxIter',maxIter));
else
    [c,fval]=fminsearch(@(x) max([thresh;A*x-b]), c);

```

```

end

return

function c=Initializer2(TOL,A,b,c)
%norm( (I-A*pinv(A))*(s-b) ) subj. to s>=0

maxIter=100000;

[mm,nn]=size(A);

Ap=pinv(A);
Aaug=speye(mm)-A*Ap;
Aaugt=Aaug.';

M=Aaugt*Aaug;
C=sum(abs(M),2);
C(C<=0)=min(C(C>0));

slack=b-A*c;
slack(slack<0)=0;

% relto=norm(b);
% relto =relto + (relto==0);
%
% relres=norm(A*c-b)/relto;

IterThresh=maxIter;
s=slack;
ii=0;
%for ii=1:maxIter
while ii<=2*maxIter %HARDCODE

    ii=ii+1;
    if ii>IterThresh,
        %warning 'This is taking a lot of iterations'
        IterThresh=IterThresh+maxIter;
    end

s=s-Aaugt*(Aaug*(s-b))./C;
s(s<0)=0;

c=Ap*(b-s);
%slack=b-A*c;

```

```

    %relres=norm(slack)/relto;
    %if all(0<slack,1)||relres<1e-6||ii==maxIter, break; end

end

return

function [r,idx,Xsub]=lindep(X,tol)
%Extract a linearly independent set of columns of a given matrix X
%
% [r,idx,Xsub]=lindep(X)
%
%in:
%
% X: The given input matrix
% tol: A rank estimation tolerance. Default=1e-10
%
%out:
%
% r: rank estimate
% idx: Indices (into X) of linearly independent columns
% Xsub: Extracted linearly independent columns of X

if ~nnz(X) %X has no non-zeros and hence no independent columns

    Xsub=[]; idx=[];
    return
end

if nargin<2, tol=1e-10; end

[Q, R, E] = qr(X,0);

diagr = abs(diag(R));

%Rank estimation
r = find(diagr >= tol*diagr(1), 1, 'last'); %rank estimation

if nargout>1
    idx=sort(E(1:r));
    idx=idx(:);
end

if nargout>2
    Xsub=X(:,idx);
end

```



```
function [A,b]=rownormalize(A,b)
%Modifies A,b data pair so that norm of rows of A is either 0 or 1
```

```
if isempty(A), return; end
```

```
normsA=sqrt(sum(A.^2,2));
idx=normsA>0;
A(idx,:)=bsxfun(@rdivide,A(idx,:),normsA(idx));
b(idx)=b(idx)./normsA(idx);
```

```
function tf=approxpoly(s,TOL)
```

```
smax=max(s);
```

```
if smax<=0
    tf=false; return
end
```

```
tf=all(s>=-smax*TOL);
```

```
function tf=strictpoly(s,TOL)
```

```
smax=max(s);
```

```
if smax<=0
    tf=false; return
end
```

```
tf=all(s>=smax*TOL);
```


ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- ❖ [1] J. D. McCalley – The Power Flow Problem, Iowa State University, 2012
- ❖ [2] Κ. Βουρνάς, Γ. Κονταξής – Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, Εκδόσεις Συμμετρία, 2010
- ❖ [3] J. J. Grainger, W. D. Stevenson Jr. – Power System Analysis, McGraw – Hill, 1994
- ❖ [4] Σ. Κιναλής – Επίλυση συστημάτων εξισώσεων κυρτών συναρτήσεων με χρήση αλγορίθμου ολικής βελτιστοποίησης, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2013
- ❖ [5] K. L. Hoffman – A method for globally minimizing concave functions over convex sets, Mathematical Programming, 20, North Holland Publishing Company, 1981
- ❖ [6] Κ. Βαρελάς – Επίλυση συστημάτων μη γραμμικών εξισώσεων κυρτών διαφορών, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, 2014
- ❖ [7] R. Horst, H. Tuy – Global Optimization: Deterministic Approaches, 3rd Edition, Springer, 1995
- ❖ [8] P. M. Pardalos, J. B. Rosen – Methods for global concave minimization: A bibliographic survey, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1986
- ❖ [9] C. A. Floudas – Deterministic Global Optimization: Theory, Methods and Applications, Springer, 2000
- ❖ [10] G. Lebanon – Convex Functions, Georgia Institute of Technology, 2006
- ❖ [11] S. Boyd, L. Vanderberghe – Convex Optimization, Cambridge University Press, 2004
- ❖ [12] R. Horst, P. M. Pardalos - Handbook of Global Optimization (S. A. Vavasis – Complexity Issues in Global Optimization: A Survey), Springer, 1995
- ❖ [13] R. Horst - On the Global Minimization of Concave Functions: Introduction and Survey, University of Oldenburg, 1984