ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Μοντελοποίηση και Μελέτη Σταθεροποίησης Χρέους σε ένα Δυναμικό Παίγνιο Ισορροπίας κατά Nash μεταξύ των Νομισματικών και Οικονομικών Αρχών υπό την παρουσία Ασφαλίστρων Κινδύνου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τζανής Ανεβλαβής

Επιβλέπων : Γ. Π. Παπαβασιλόπουλος

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Νοέμβριος 2015

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Μοντελοποίηση και Μελέτη Σταθεροποίησης Χρέους σε ένα Δυναμικό Παίγνιο Ισορροπίας κατά Nash μεταξύ των Νομισματικών και Οικονομικών Αρχών υπό την παρουσία Ασφαλίστρων Κινδύνου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Τζανής Ανεβλαβής

Επιβλέπων : Γ. Π. ΠΑΠΑΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

....	....	....
ΓΕΩΡΓΙΟΣ Π. ΠΑΠΑΒΑΣΙΛΟΠΟΥΛΟΣ Καθηγητής ΕΜΠ	ΠΕΤΡΟΣ ΜΑΡΑΓΚΟΣ Καθηγητής ΕΜΠ	JACOB ENGWERDA Associate Professor Tilburg University

Αθήνα, Νοέβριος 2015

....

Τζανής Ανεβλαβής

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Περίληψη

Η παγκόσμια οικονομική κρίση των τελευταίων ετών έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του χρέους των κρατών σε πολλές χώρες της Ευρώπης, ιδιαίτερα στο μπλοκ του νότου, και έτσι η σταθεροποίηση του κόστους αυτού έχει μετατραπεί σε κύριο μέλημα στην ατζέντα πολλών χωρών. Σε αυτή τη Διπλωματική Εργασία επικεντρωνόμαστε στο γεγονός ότι οι αγορές ασκούν πίεση στα κράτη που φαίνονται ευάλωτα ως προς το μέγεθος του εκάστοτε χρέους, αλλά ως και την τάση του, ανοδική ή καθοδική. Αυτές οι πιέσεις αποτυπώνονται με τη μορφή των ασφαλίστρων κινδύνου. Εισάγουμε σε αυτή την εργασία έναν συντελεστή που αποτελεί ασφάλιστρο κινδύνου, βασισμένο στην τάση του χρέους, μαθηματικά την παράγωγο, δηλαδή στο αν το χρέος είναι σταθερό, ή έχει ανοδική ή καθοδική πορεία. Αυτός ο συντελεστής, εκτός από την πίεση που ασκούν οι αγορές στα κράτη δανειολήπτες, μπορεί και να αποτελέσει μια μορφή επιβράβευσης στις κυβερνήσεις που καταφέρνουν και μειώνουν το χρέος τους. Η εισαγωγή ενός τέτοιου συντελεστή εισαγάγει μια ισχυρή μη-γραμμικότητα στο μαθηματικό μοντέλο μας. Επιπρόσθετα, αναλογιζόμενοι την περίπτωση των κρατών-μελών της Ευρωπαΐκής Νομισματικής Ένωσης, εμφανίζεται η εξής ιδιαιτερότητα: Τα κράτη-μέλη της ένωσης έχουν μια κοινή νομισματική πολιτική που ασκείται κεντρικά από την Ε.Κ.Τ., σε αντίθεση με την οικονομική πολιτική που ασκείται από το Υπουργείο Οικονομικών της εκάστοτε χώρας. Αυτή είναι επίσης η περίπτωση και στις περισσότερες βιομηχανικές χώρες. Αυτή η ιδιαιτερότητα, μας παρακινεί να προσεγγίσουμε την κατάσταση ως ένα Μη-γραμμικό Δυναμικό Παίγνιο Ισορροπίας κατά Nash, μεταξύ δύο παικτών, της Κεντρικής Τράπεζας και της Κυβέρνησης-Υπουργείο Οικονομικών. Οι δύο αυτές αρχές είναι ανεξάρτητες και μπορεί να μη συνεργάζονται. Για το λόγο αυτό, αναλύουμε την περίπτωση του Open-Loop Μη-Συνεταιριστικού Παιγνίου καθώς και την περίπτωση του Συνεταιριστικού Παιγνίου. Επίσης ερευνούμε την περίπτωση του Πεπερασμένου Ορίζοντα, επιπροσθέτως του Παιγνίου Απείρου Μήκους, καθώς αποτελεί μια πιο πρακτική σκοπιά μιας που το γεγονός να είναι κάποιος από τους δύο παίκτες δεσμευμένος για πρακτικά τόσο μεγάλο χρονικό διάστημα, δεν έχει πρακτική εφαρμογή.

Λέξεις-κλειδιά: σταθεροποίηση χρέους, παίγνια δύο παικτών, μη-γραμμικά δυναμικά συστήματα, ισορροπία κατά Nash, ασφάλιστρα κινδύνου, άπειρος ορίζοντας, πεπερασμένος ορίζοντας, οικονομικά δυναμικά συστήματα

Abstract

On the grounds that the global financial crisis during recent years has resulted in a significant increment of the government debt, in many OECD countries, especially in the “south-block”, government debt stabilization has taken a central stage in issues to be addressed. In this paper we focus on the fact that financial markets are adding pressures on countries that appear vulnerable when looking at the current levels of debt, as well as the current rate of change of the debt. This takes the form of requiring risk premia. The term we introduce, that depends on the rate of change of debt, represents apart from another form of pressure added by financial markets, can also be used to represent a measure of reward given by markets to governments that succeed in decreasing their debts. This term associated with the derivative of the governmental debt adds a strong nonlinearity to our mathematical model. In addition, when considering the Euro Area, an additional singularity arises: the members of the union are have a common monetary policy which is applied centrally by the E.C.B, in contrast with fiscal policy which is applied by each member country per se. This is also the case in most industrial countries, the size of fiscal deficits and the growth of monetary base are selected by two independent authorities. This suggests that we are facing a Two-Player Nonlinear Dynamic Nash Game under two modes of play, where the two authorities do or do not cooperate. Thus we analyze and solve under the Open-Loop Non-Cooperative mode of play and then under the Cooperative mode of play. We also investigate the finite time horizon, in addition to the infinite one, taking therefore a more practical approach as being bound in a policy for practically a really long time is sometimes of no application.

Keywords: debt stabilization, two-player games, nonlinear dynamic systems, dynamic nash game, risk premium, infinite horizon, finite horizon, economic dynamics

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Εισαγωγή

Η παγκόσμια οικονομική κρίση των τελευταίων ετών έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του χρέους των κρατών σε πολλές χώρες της Ευρώπης, ιδιαίτερα στο μπλοκ του νότου, και έτσι η σταθεροποίηση του κόστους αυτού έχει μετατραπεί σε κύριο μέλημα στην ατζέντα πολλών χωρών. Σε αυτή τη Διπλωματική Εργασία επικεντρωνόμαστε στο γεγονός ότι οι αγορές ασκούν πίεση στα κράτη που φαίνονται ευάλωτα ως προς το μέγεθος του εκάστοτε χρέους, αλλά ως και την τάση του, ανοδική ή καθοδική. Αυτές οι πιέσεις αποτυπώνονται με τη μορφή των ασφαλίστρων κινδύνου. Εισάγουμε σε αυτή την εργασία έναν συντελεστή που αποτελεί ασφάλιστρο κινδύνου, βασισμένο στην τάση του χρέους, μαθηματικά την παράγωγο, δηλαδή στο αν το χρέος είναι σταθερό, ή έχει ανοδική ή καθοδική πορεία. Αυτός ο συντελεστής, εκτός από την πίεση που ασκούν οι αγορές στα κράτη δανειολήπτες, μπορεί και να αποτελέσει μια μορφή επιβράβευσης στις κυβερνήσεις που καταφέρνουν και μειώνουν το χρέος τους. Η εισαγωγή ενός τέτοιου συντελεστή εισαγάγει μια ισχυρή μη-γραμμικότητα στο μαθηματικό μοντέλο μας. Επιπρόσθετα, αναλογιζόμενοι την περίπτωση των κρατών-μελών της Ευρωπαϊκής Νομισματικής Ένωσης, εμφανίζεται η εξής ιδιαιτερότητα: Τα κράτη-μέλη της ένωσης έχουν μια κοινή νομισματική πολιτική που ασκείται κεντρικά από την Ε.Κ.Τ., σε αντίθεση με την οικονομική πολιτική που ασκείται από το Υπουργείο Οικονομικών της εκάστοτε χώρας. Από τη στιγμή που οι δύο αυτές αρχές είναι σχετικώς ανεξάρτητες είναι λογικό να έχουν και διαφορετικά κίνητρα και στόχους. Αυτή είναι επίσης η περίπτωση και στις περισσότερες βιομηχανικές χώρες. Έτσι αυτό το γενικό πλαίσιο που θα αναλύσουμε μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε κράτος που λειτουργεί κατά αυτόν τον τρόπο. Συγκεκριμένα, στις Η.Π.Α. η νομισματική πολιτική ασκείται από τη Federal Reserve Bank, ενώ η οικονομική πολιτική από την κυβέρνηση. Υπάρχει όμως μια μεγάλη βασική διαφορά μεταξύ των Η.Π.Α και των κρατών-μελών της Ευρωπαϊκής Νομισματικής Ένωσης. Στην πρώτη περίπτωση και οι δύο αρχές παρατηρούν από κοντά την οικονομία και συνεργάζονται πιο στενά, ενώ έχουν και κοινούς στόχους. Στη δεύτερη περίπτωση ωστόσο η Ε.Κ.Τ. λαμβάνει υπόψην στατιστικά που έχουν να κάνουν με την ένωση στο σύνολό της. Αυτό μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα οι λιγότερο ισχυρές οικονομικά χώρες να αμελούνται όσο άλλες πιο ισχυρές αντισταθμίζουν τις στατιστικές. Σε αυτή τη Διπλωματική Εργασία θα εξετάσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των δύο αρχών υπό την παρουσία των ασφαλίστρων κινδύνου που θεσπίζουν οι αγορές. Οι δύο αυτές ανεξάρτητες αρχές παίρνουν μέρος σε ένα Δυναμικό Παίγνιο. Στην πραγματικότητα ωστόσο αν θέλαμε να έχουμε ακριβή απεικόνιση θα υπήρχαν παραπάνω οικονομικές αρχές οι οποίες όλες αλληλεπιδρούν με την ίδια νομισματική αρχή (κεντρική τράπεζα). Αλλά σε αυτή την εργασία δεν θα ασχοληθούμε εκτενέστερα με αυτή την περίπτωση, ωστόσο ενθαρρύνεται ως μελλοντική πρόταση.

Σε αυτή την Διπλωματική Εργασία εισαγάγουμε έναν νέο συντελεστή που αντιπροσωπεύει ασφάλιστρο κινδύνου και βασίζεται στην τάση του χρέους, δηλαδή αν είναι σταθερό, ή έχει είτε αυξητικές είτε μειωτικές τάσεις. Αυτός ο συντελεστής, εκτός από την πίεση που ασκούν οι αγορές στα κράτη δανειολήπτες, μπορεί και να αποτελέσει μια μορφή επιβράβευσης στις κυβερνήσεις που καταφέρνουν και μειώνουν το χρέος τους. Για παράδειγμα, η Ιαπωνία που είναι ένα κράτος με μεγάλο ονομαστικό χρέος, δανείζεται με ευνοϊκά επιτόκια καθώς παρά το μέγεθός του, το χρέος της παραμένει σταθερό και είναι απολύτως διαχειρίσιμο. Συγκριτικά με προηγούμενες εργασίες που υπάρχουν στη βιβλιογραφία και ασχολούνται κυρίως με Παίγνια Απείρου Μήκους, στη συγκεκριμένη Διπλωματική Εργασία θα ασχοληθούμε και με το πρόβλημα του Πεπερασμένου Ορίζοντα. Αυτή η προσέγγιση είναι πιο πρακτική καθώς δεν έχει πρακτική εφαρμογή να δεσμεύσει κάποιο κράτος την πολιτική του για πολύ μεγάλο χρονικό ορίζοντα, καθώς δεν μπορεί να προβλέψει όλες τις αλλαγές και τα συμβάντα που θα αλλάξουν τις δυναμικές τη εκάστοτε κατάστασης.

Η δομή αυτής της Διπλωματικής Εργασίας έχει ως ακολούθως: Η ενότητα 2 περιγράφει το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε. Στην ενότητα 3 προσεγγίζουμε το Open-Loop Μη-Συνεταιριστικό Παίγνιο και την επίδραση του νέου όρου ασφάλιστρου κινδύνου που εισάγουμε. Στην ενότητα 4 ασχολούμαστε με το Συνεταιριστικό Παίγνιο και την επίδραση της ισχύς του κάθε παίκτη. Τέλος στην ενότητα 5 συνοψίζονται τα αποτελέσματα και προτείνονται κάποιες κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

2 Μαθηματική Μοντελοποίηση

Το πλαίσιο στο οποίο θα αναλύσουμε το παίγνιο είναι εμπνευσμένο από τη δουλειά των Tabellini [1] και Engwerda, Van Aarle et al. [2]. Εμείς θα αναλύσουμε τη σταθεροποίηση χρέους υπό την παρουσία ασφαλίστρων κινδύνου και στο μέγεθος του χρέους της χώρας, αλλά και στην τάση που ακολουθεί το συγκεκριμένο χρέος. Αυτή η επέκταση με την εισαγωγή του δεύτερου συντελεστή ασφαλιστρου κινδύνου προσδίδει μία ισχυρή μη-γραμμικότητα στο πρόβλημα. Οι δύο παίκτες Νομισματική Αρχή – Κεντρική Τράπεζα και Οικονομική Αρχή – Υπουργείο Οικονομικών ή Κυβέρνηση έχουν εκτός από το στόχο της σταθεροποίησης του χρέους τα δικά τους ξεχωριστά κίνητρα και στόχους.

Το μοντέλο μας λοιπόν αποτελείται από δύο παίκτες, οι οποίοι υπόκεινται στην παρακάτω διαφορική εξίσωση του χρέους, και προσπαθούν να ελαχιστοποιήσουν ο καθένας το δικό του κριτήριο κόστους.

$$\dot{d}(t) = r(t)d(t) + u_F(t) - u_M(t) \tag{1.a}$$

Σε αυτή την διαφορική εξίσωση:

- d: το κρατικό χρέος ως ποσοστό του ΑΕΠ
- u_F: το οικονομικό έλλειμα ως ποσοστό του ΑΕΠ, ενώ αρνητικές του τιμές δηλώνουν πλεόνασμα
- u_M: η νομισματική χρηματοδότιση
- r: το πραγματικό επιτόκιο

Όλα τα μεγέθη είναι πραγματικά και μονοδιάστατα. Πιο συγκεκριμένα οι πολιτικές των δύο παικτών ανήκουν σε σύνολα $U_F \; και \; U_M$ αντιστοίχως.

Όπως αναφέραμε κάθε αρχή έχει το δικό της κριτήριο κόστους το οποίο επιθυμεί να ελαχιστοποιήσει. Οι Οικονομικές Αρχές έχουν:

$$J_F = {}^1\!/_2 \int_0^T e^{-\theta t} \left(\left(u_F(t) - \bar{f}\right)^2 + \beta_F \left(d(t) - \overline{d_F}\right)^2 \right) dt \tag{1.b}$$

όπου $\overline{d_F}$ αποτελεί τον στόχο της Οικονομικής Αρχής για το χρέος, και β_F είναι το βάρος που του αντιστοιχίζει. Επίσης $\bar{f}$ είναι ο στόχος της Οικονομικής Αρχής για την τιμή του ελλείματος.

Αντίστοιχα ο στόχος των Νομισματικών Αρχών είναι:

$$J_M = {}^1\!/_2 \int_0^T e^{-\theta t} \left((u_M(t) - \bar{m})^2 + \beta_M \left(d(t) - \overline{d_M}\right)^2 \right) dt \tag{1.c}$$

όπου $\overline{d_M}$ αποτελεί τον στόχο της Νομισματικής Αρχής για το χρέος, και β_M είναι το βάρος που του αντιστοιχίζει. Επίσης $\bar{m}$ είναι ο στόχος της Νομισματικής Αρχής για τη δική της πολιτική.

Η παράμετρος θ, μας δίνει την ταχύτητα με την οποία φθίνει εκθετικά το κόστος και συνεπώς το πόσο ενδιαφέρονται οι δύο αρχές για την εξέλιξη του χρέους στο δεδομένο χρονικό ορίζοντα.

Το επιτόκιο έχει την ακόλουθη μορφή που βασίζεται σε όσα συζητήθηκαν για τα ασφάλιστρα κινδύνου:

$$r(t) = \bar{r} + a\, d(t) + b\, \dot{d}(t) \tag{1.d}$$

- $\bar{r}$: υποδηλώνει τη διαφορά μεταξύ ονομαστικού επιτοκίου και πληθωρισμού, και η οποία υποθέτουμε πως είναι σταθερή στην προσέγγισή μας
- a: ασφάλιστρο κινδύνου βασισμένο στο μέγεθος του χρέους
- b: ασφάλιστρο κινδύνου βασισμένο στην παράγωγο του χρέους
- Τα $a\ και\ b$ είναι θετικοί, πραγματικοί αριθμοί

Εμπειρικές μελέτες επιβεβαιώνουν αρχικά την εξάρτηση των ασφαλίστρων κινδύνου τόσο με το επίπεδο του χρέους, όσο και με τις διάφορες διακυμάνσεις του. Για την επιλογή κατάλληλων τιμών για τα ασφάλιστρα κινδύνου, οι De Grauwe και Ji [3] υποστηρίζουν ότι κατά την αρχή της περιόδου της κρίσης οι αγορές έσφαλαν στην υπερεκτίμηση των ρίσκων ενώ πριν από αυτή την περίοδο έσφαλαν στην ακριβώς αντίθετη κατεύθυνση της υποτίμησης. Μέσα από τις μελέτες τους ερμήνευσαν τις εμπειρικές εκτιμήσεις για το a μεταξύ 0.02 και 0.08, και ίσως ακόμα περισσότερο όσο η κρίση βαθαίνει. Επιπλέον, οι Engen και Hubbard [4] συμπεραίνουν, ότι η μεταβολή του χρέους ως ποσοστό του ΑΕΠ κατά 1% οδηγούσε σε μακροπρόθεσμη αύξηση του επιτοκίου κατά 0,035%. Συμπέραναν λοιπόν ότι αν και μικρή η επιρροή ήταν θετική. Κατά αυτά επιλέγουμε τις τιμές για το a να είναι περί το 0.10 ή και λίγο μεγαλύτερες, ενώ του b περί το 0.20.

3 Μη-Συνεταιριστικό Open-Loop Παίγνιο Ισορροπίας κατά Nash

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ότι οι δύο παίκτες δεν έχουν μέσα επικοινωνίας και η δομή πληροφόρησης που έχουν είναι open-loop. Επίσης το ότι παίζουν ένα παίγνιο ισορροπίας κατά Nash σημαίνει ότι δεν έχουν λόγο να αποκλίνουν από τις στρατηγικές ισορροπίας. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για κάθε παίκτη και να λυθεί χρησιμοποιώντας την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin (A.W.Starr & Y.C.Ho [6]). Συνδιάζοντας τις εξισώσεις (1.a) και (1.d) λαμβάνουμε:

$$\dot{d}(t) = \frac{\bar{r}\, d(t) + a\, d(t)^2 + u_F(t) - u_M(t)}{1 - b\, d(t)} \tag{3.1}$$

Ενώ οι παίκτες θέλουν να ελαχιστοποιήσουν τις αντίστοιχες συναρτήσεις κόστους:

$$J_F = {}^1\!/_2 \int_0^T e^{-\theta t} \left(\left(u_F(t) - \bar{f} \right)^2 + \beta_F \left(d(t) - \overline{d_F} \right)^2 \right) dt = \int_0^T h_F(t, d, u_F)\, dt \quad \text{(3.2.a)}$$

$$J_M = {}^1\!/_2 \int_0^T e^{-\theta t} \left((u_M(t) - \bar{m})^2 + \beta_M \left(d(t) - \overline{d_M} \right)^2 \right) dt = \int_0^T h_M(t, d, u_M)\, dt \quad \text{(3.2.b)}$$

Υποθέτοντας την ύπαρξη λύσης θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή ελαχίστου του Pontryagin η οποία δίνει τις αναγκαίες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν οι στρατηγικές των δύο παικτών ώστε να αποτελούν Ισορροπία κατά Nash.

- Εφαρμόζουμε την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin για τις Οικονομικές Αρχές:
  - Hamiltonian: $H_F = \frac{1}{2} e^{-\theta t} \left(\left(u_F - \bar{f} \right)^2 + \beta_F \left(d - \overline{d_F} \right)^2 \right) + \lambda_F \, \frac{\bar{r}\, d + a\, d^2 + u_F - u_M}{1 - b\, d}$
  - $\dot{\lambda_F} = -{}^{\partial H_F}\!/_{\partial d}$, $\lambda_F(T) = 0$
  - $u_F{}^* = arg \min\limits_{u_F} \{H_F\}$

- Εφαρμόζουμε την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin για τις Νομισματικές Αρχές:
  - Hamiltonian: $H_M = \frac{1}{2} e^{-\theta t} \left((u_M - \bar{m})^2 + \beta_M \left(d - \overline{d_M} \right)^2 \right) + \lambda_M \, \frac{\bar{r}\, d + a\, d^2 + u_F - u_M}{1 - b\, d}$
  - $\dot{\lambda_M} = -{}^{\partial H_M}\!/_{\partial d}$, $\lambda_M(T) = 0$
  - $u_M{}^* = arg \min\limits_{u_M} \{H_M\}$

Ορίζουμε: $\mu_F = e^{\theta t} \lambda_F$, $\mu_M = e^{\theta t} \lambda_M$, και: $\mu = \mu_F + \mu_M$. Αυτός ο μετασχηματισμός διευκολύνει σημαντικά τους υπολογισμούς μας.

Αντικαθιστώντας τις πολιτικές που προέκυψαν στις διαφορικές εξισώσεις, λαμβάνουμε:

$$\dot{d}^*(t) = \frac{1}{1-b\,d(t)}\left(\bar{r}\,d(t) + a\,d(t)^2 - \mu\frac{1}{1-b\,d(t)} + \bar{f} - \bar{m}\right) \qquad (3.3.a)$$

$$\begin{aligned}\dot{\mu}^*(t) &\\ &= -\left(\beta_F\left(d(t) - \overline{d_F}\right) + \beta_M\left(d(t) - \overline{d_M}\right)\right) \\ &+ \mu\left(\theta - \frac{\left(\bar{r} + 2a\,d(t)\right)\left(1 - b\,d(t)\right) + b\left(\bar{r}\,d(t) + a\,d^2 + \bar{f} - \bar{m}\right)}{\left(1 - b\,d(t)\right)^2}\right) \\ &+ \mu^2\frac{\mathrm{b}}{\left(1 - b\,d(t)\right)^3}\end{aligned} \qquad (3.3.\mathrm{b})$$

Με $d^*(0) = d_0$. Και οι εκφράσεις για τις πολιτικές των παικτών είναι:

$$u_F{}^*(t) = \bar{f} - e^{\theta t}\lambda_F{}^*(t)\frac{1}{1-b\,d(t)} = \bar{f} - \mu_F{}^*(t)\frac{1}{1-b\,d(t)} \qquad (3.4.a)$$

$$u_M{}^*(t) = \bar{m} + e^{\theta t}\lambda_M{}^*(t)\frac{1}{1-b\,d(t)} = \bar{m} + \mu_M{}^*(t)\frac{1}{1-b\,d(t)} \qquad (3.4.b)$$

Θέτοντας τις διαφορικές ίσες με το 0 προσδιορίζουμε τα σημεία ισορροπίας εφόσον ο ορίζοντας είναι αρκετά μεγάλος ώστε να επιτευχθεί η ισορροπία.

$$\mu_e^{OL} = -a\,b\,(d_e^{OL})^3 + (a - b\,\bar{r})\,(d_e^{OL})^2 + \left(\bar{r} - b\left(\bar{f} - \bar{m}\right)\right)\,d_e^{OL} + \left(\bar{f} - \bar{m}\right) \qquad (3.5)$$

Και τελικά η εξίσωση για την τιμή ισορροπίας του χρέους είναι:

$$-a\,(2a + b\,\theta)\,(d_e^{OL})^3 + \left(a\,\gamma_2 - \bar{r}(2a + b\,\theta)\right)(d_e^{OL})^2 + \left(\bar{r}\,\gamma_2 - \bar{u}(2a + b\,\theta) - (\beta_F + \beta_M)\right)d_e^{OL} + (\gamma_3 + \bar{u}\,\gamma_2) = 0 \qquad (3.6)$$

όπου: $\gamma_1 = 1 - b\,d_e^{OL}$, $\gamma_2 = \theta - \bar{r}$, $\gamma_3 = \beta_F\overline{d_F} + \beta_M\overline{d_M}$, $\bar{u} = \bar{f} - \bar{m}$

Επίσης, για το Παίγνιο Απείρου Μήκους, οι εξισώσεις που προκύπτουν για τα σημεία ισορροπίας είναι οι ίδιες. Οπότε εικάζουμε πως για έναν πεπερασμένο ορίζοντα αρκετά μεγάλο, οι εξισώσεις αυτές ικανοποιούνται. Υπάρχει δηλαδή ένα χρονικό διάστημα όταν ο ορίζοντας είναι αρκετά μεγάλος έτσι ώστε η τροχιά του χρέους καθώς και των πολιτικών του κάθε παίκτη εισέρχεται σε μία σταθερή τιμή πολύ κοντά στην τιμή ισορροπίας του άπειρου ορίζοντα. Ωστόσο για κάποιο διάστημα κοντά στο τέλος του ορίζοντα, οι τροχιές θα αποκλίνουν από την σταθερή αυτή τιμή επειδή πρέπει να ικανοποιηθούν οι τελικές συνθήκες που προϋποθέτει η Αρχή Ελαχίστου $\lambda_{\mathrm{i}}(\mathrm{T}) = 0, \mathrm{i} = \mathrm{F}, \mathrm{M}$. Αν και δεν θα ασχοληθούμε περεταίρω με την θεωρητική θεμελίωση αυτής της υπόθεσης, οι προσομοιώσεις μας δείχνουν πως είναι πιθανόν υπαρκτή αυτή η ιδιότητα.

3.1.1 Προσομοιώσεις

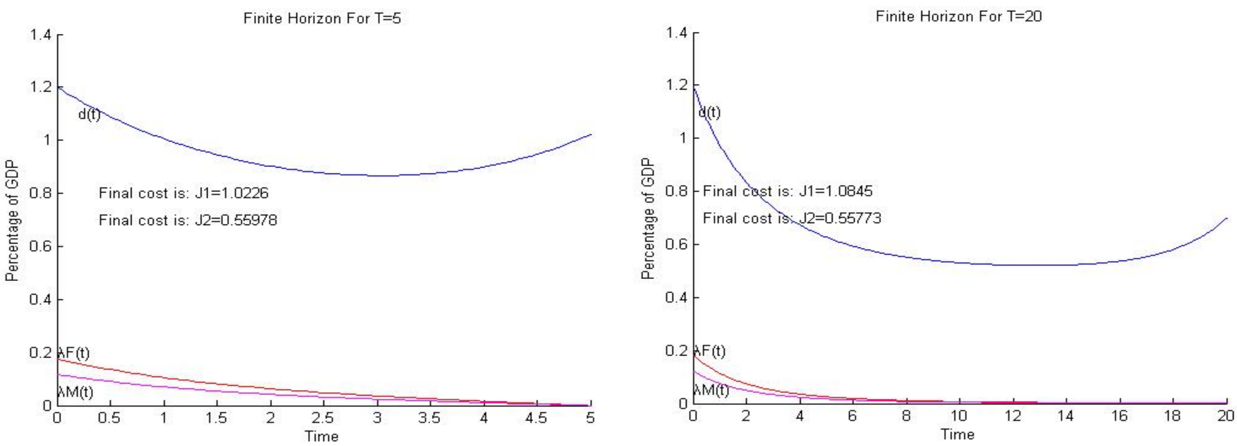
Επιλέγουμε τις παρακάτω τιμές για $a = 0.1 \; και \; b = 0.2$:

$$\beta_F = 0.06 \;\; , \beta_M = 0.04 \;\; , \overline{d_F} = \overline{d_M} = 0.5, \bar{r} = 0.03 \; , \theta = 0.15$$

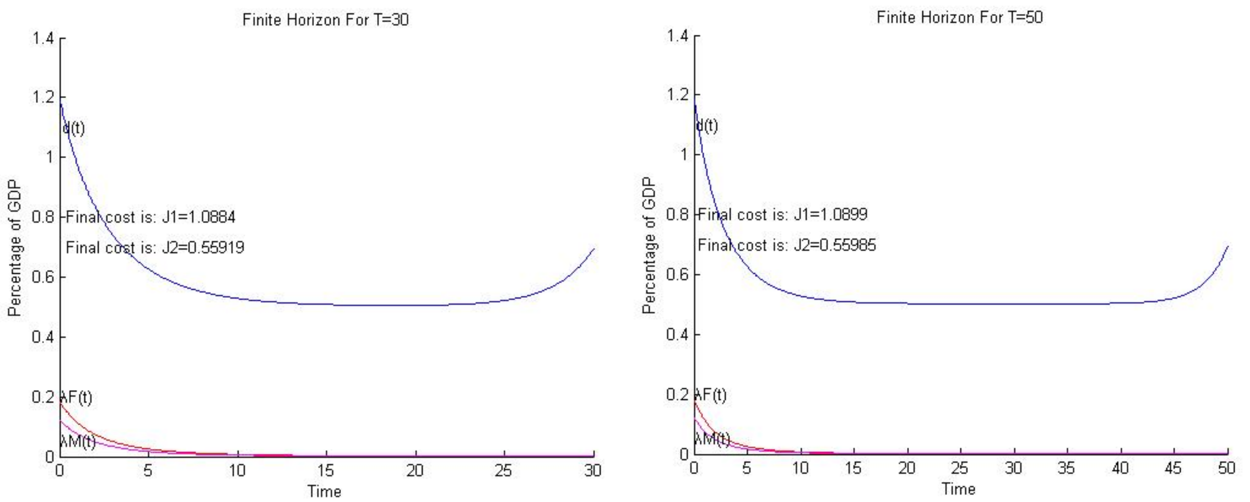
Ενώ οι τιμές-στόχοι για τις πολιτικές των δύο παικτών είναι $\bar{f} = 0.01 \; και \;\; \bar{m} = 0$, για την Οικονομική και τη Νομισματική Αρχή αντίστοιχα.

3.1.1.1 Τροχιές χρέους και βέλτιστες πολιτικές για πεπερασμένο ορίζοντα:

Φαίνεται στις γραφικές 3.1 έως 3.4 ότι η τροχιά του χρέους στον πεπερασμένο ορίζοντα, έλκεται από μία συγκεκριμένη τιμή, αυτή του άπειρου ορίζοντα, και όσο μεγαλώνει το μέγεθος του ορίζοντα τόσο πιο πολύ προσεγγίζεται αυτή η τιμή. Ωστόσο στο τέλος του ορίζοντα αποκλίνουν οι βέλτιστες τροχιές ώστε να ικανοποιήσουν τις τερματικές συνθήκες. Ως προς τα κόστη φαίνεται η σημασία του να εισέρχεται η τροχιά σε αυτό το σταθερό μονοπάτι καθώς για παράδειγμα για T=20 το κόστος για την Οικονομική αρχή είναι J1=1.0845, ενώ για T=50 είναι J1=1.0899.

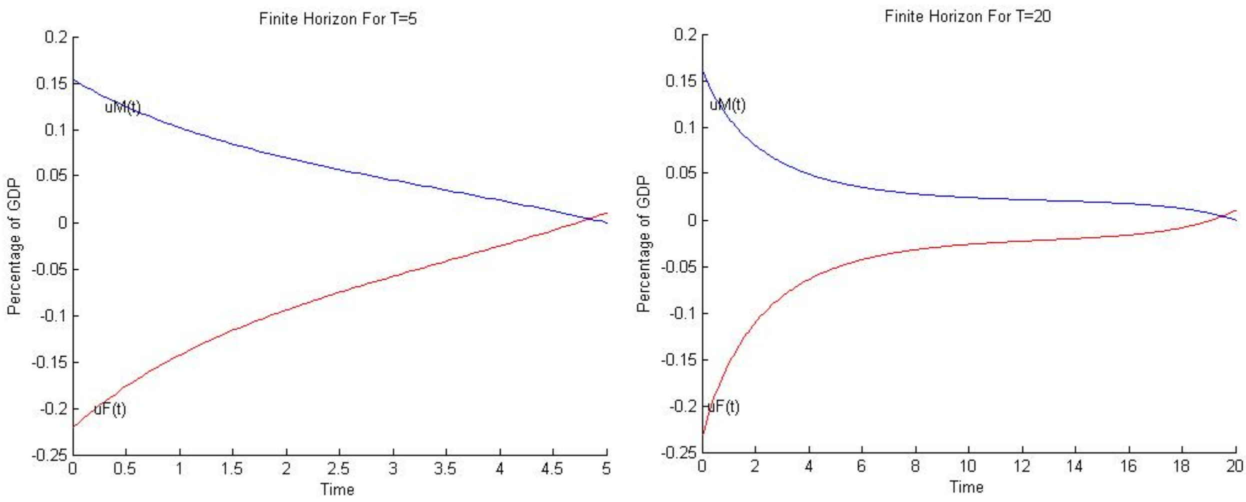


<u>Γράφημα 3.1 - 3.2:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών

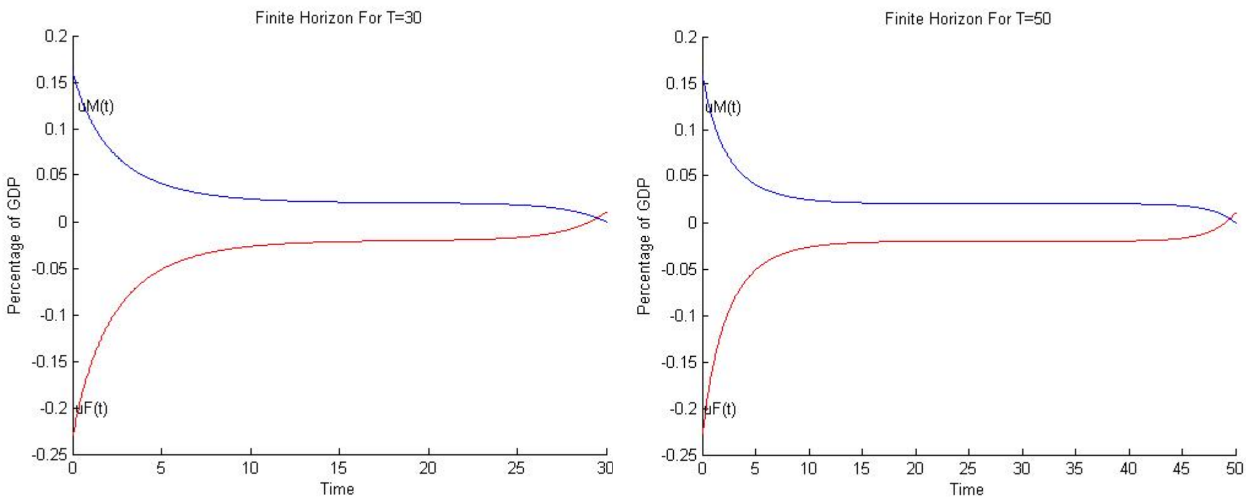


<u>Γράφημα 3.3 - 3.4:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών

Επιπλέον αυτή η απόκλιση από το σταθερό μονοπάτι έχει αντίκτυπο και στις πολιτικές των δύο παικτών. Από τις εξισώσεις (3.4): $u_F{}^*(t) = \bar{f} - e^{\theta t}\lambda_F{}^*(t)\frac{1}{1-b\,d(t)}$, $u_M{}^*(t) = \bar{m} + e^{\theta t}\lambda_M{}^*(t)\frac{1}{1-b\,d(t)}$ φαίνεται πως όταν $\lambda_F(T) = 0, \lambda_M(T) = 0$ τότε $u_F{}^*(T) = \bar{f},\ u_M{}^*(T) = \bar{m}$. Και αυτό φαίνεται στις γραφικές 3.5-3.8.



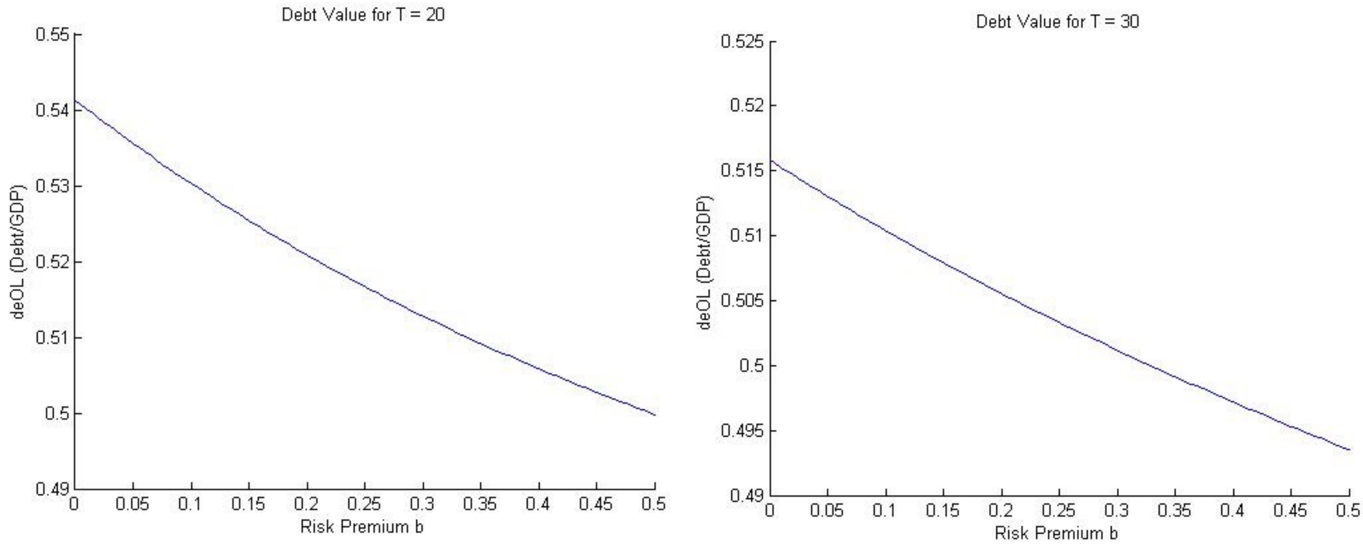
<u>Γράφημα 3.5 - 3.6:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές πολιτικών των δύο παικτών



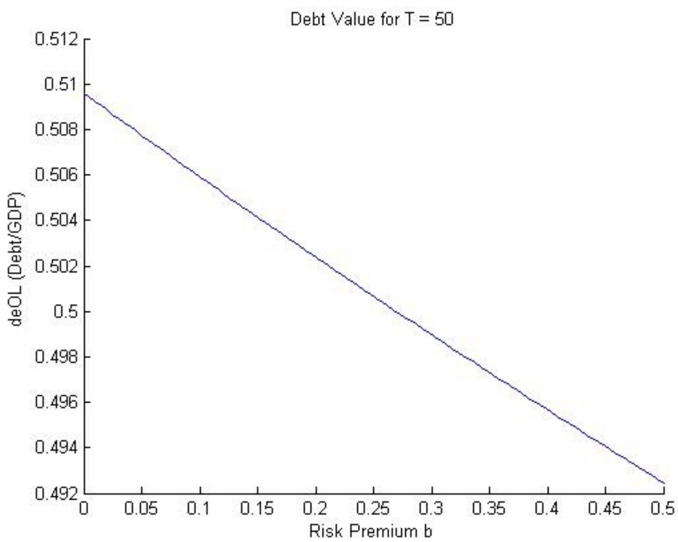
<u>Γράφημα 3.7 - 3.8:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές πολιτικών των δύο παικτών

3.1.1.2 Επίδραση ασφαλίστρων κινδύνου στην σταθερή τιμή του χρέους

Στις γραφικές 3.9-3.11 παρατηρούμε πως μεταβάλλεται η τιμή του χρέους όταν μεταβάλλεται το μέγεθος του ασφαλίστρου κινδύνου που σχετίζεται με την παράγωγο του χρέους. Εν γένει βλέπουμε πως η συμπεριφορά του χρέους ως προς την αύξηση του ασφαλίστρου κινδύνου είναι γραμμική και φθίνουσα. Επίσης, όσον αφορά την τιμή που λαμβάνει το χρέος στο σταθερό κομμάτι της τροχιάς του πεπερασμένου ορίζοντα, όσο περισσότερο αυξάνεται το χρονικό μήκος του ορίζοντα τόσο μικρότερη είναι η τιμή του χρέους. Δηλαδή τόσο περισσότερο μπορεί να προσεγγίσει την τιμή ισορροπίας του άπειρου ορίζοντα.

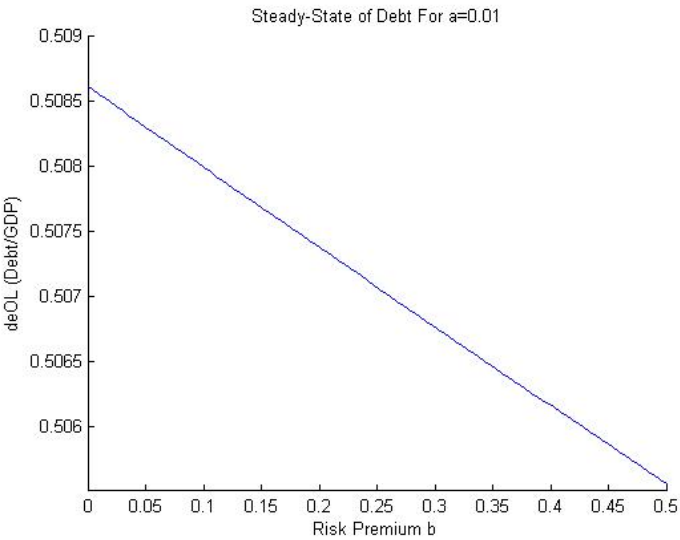


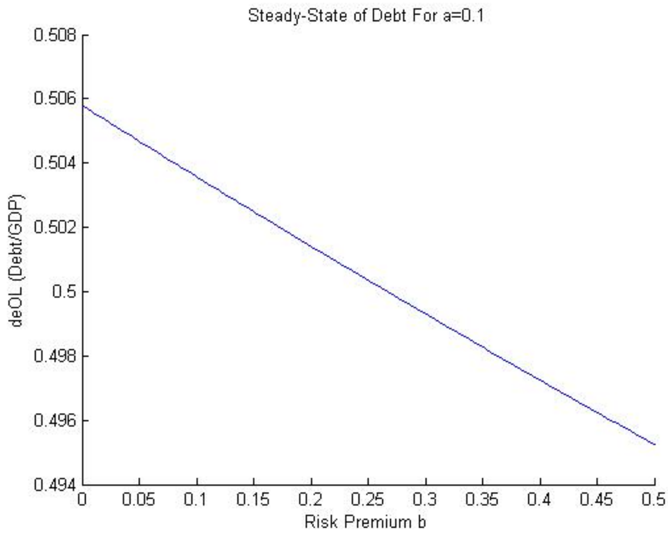
<u>Γράφημα 3.9 - 3.10:</u> Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στο σταθερό τμήμα της τροχιάς του Πεπερασμένου Ορίζοντα



<u>Γράφημα 3.11:</u> Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στο σταθερό τμήμα της τροχιάς του Πεπερασμένου Ορίζοντα

Ενώ επίσης και στην τιμή ισορροπίας του άπειρου ορίζοντα παρατηρούμε αντίστοιχη γραμμική σχέση της τιμής του χρέους με το μέγεθος του ασφαλίστρου κινδύνου που αφορά την παράγωγο του χρέους. Επιπροσθέτως, παρατηρούμε και μια κάθετη μετατόπιση προς τα κάτω, περαιτέρω μείωση δηλαδή, στο χρέος όσο αυξάνεται και ο ασφάλιστρο κινδύνου που σχετίζεται με το μέγεθος του χρέους.

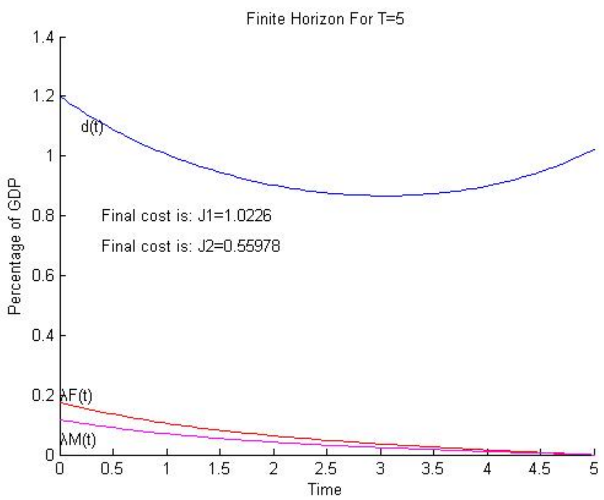


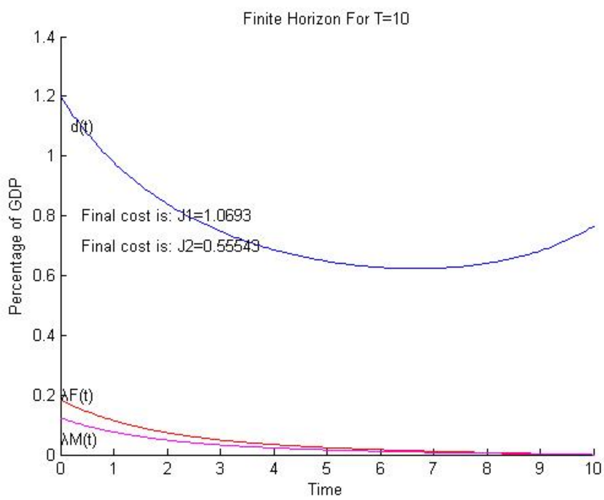


<u>Γράφημα 3.12 - 3.13:</u> Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στην τιμή ισορροπίας του χρέους για τον Άπειρο Ορίζοντα

3.1.1.3 Επίδραση ασφάλιστρου κινδύνου στην τελική τιμή χρέους του Πεπερασμένου Ορίζοντα

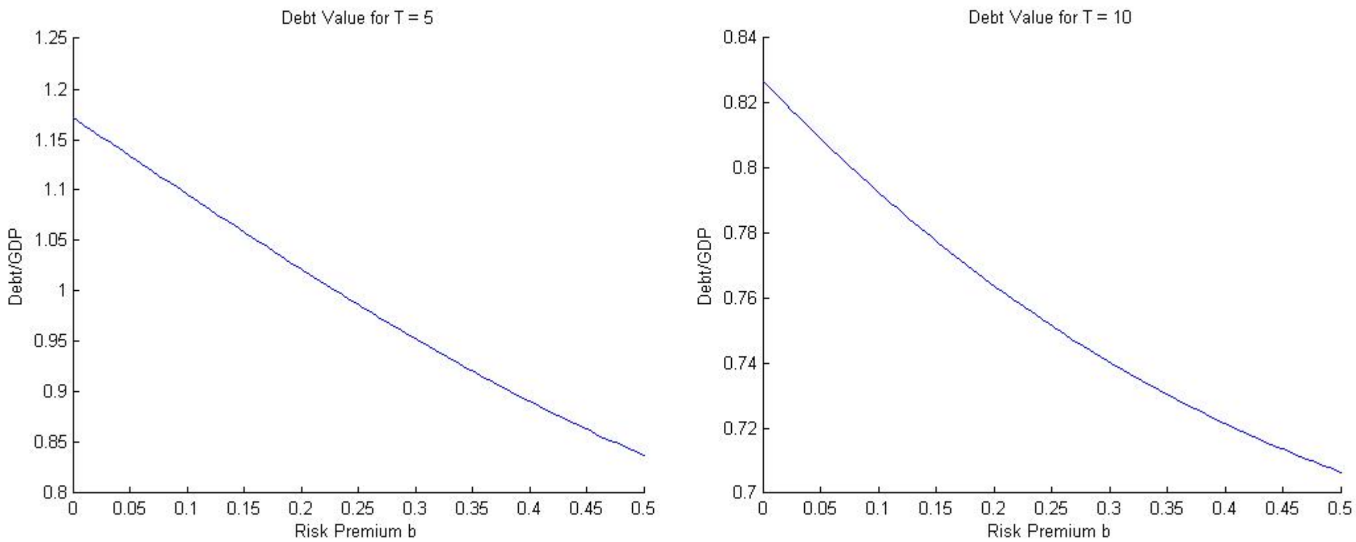
Για μικρές τιμές του Πεπερασμένου Ορίζοντα δεν είναι τόσο εμφανής η προσέγγιση ενός σταθερού τμήματος τροχιάς. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στις παρακάτω γραφικές.





<u>Γράφημα 3.14 - 3.15:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών

Το ασφάλιστρο κινδύνου που εισαγάγαμε, ακόμα και σε μικρότερους ορίζοντες, συνεισφέρει σημαντικά στη μείωση του χρέους. Μια σημαντική επιτυχία σε αυτό είναι ότι το χρέος μειώνεται σημαντικά σε τόσο σύντομο διάστημα. Επίσης όπως φαίνεται από τις προηγούμενες γραφικές αυτή δεν είναι η πιο χαμηλή τιμή του χρέους σε όλο τον ορίζοντα. Έτσι διαφαίνεται και το πώς συμβάλλει το ασφάλιστρο κινδύνου στη σταθεροποίηση του χρέους.

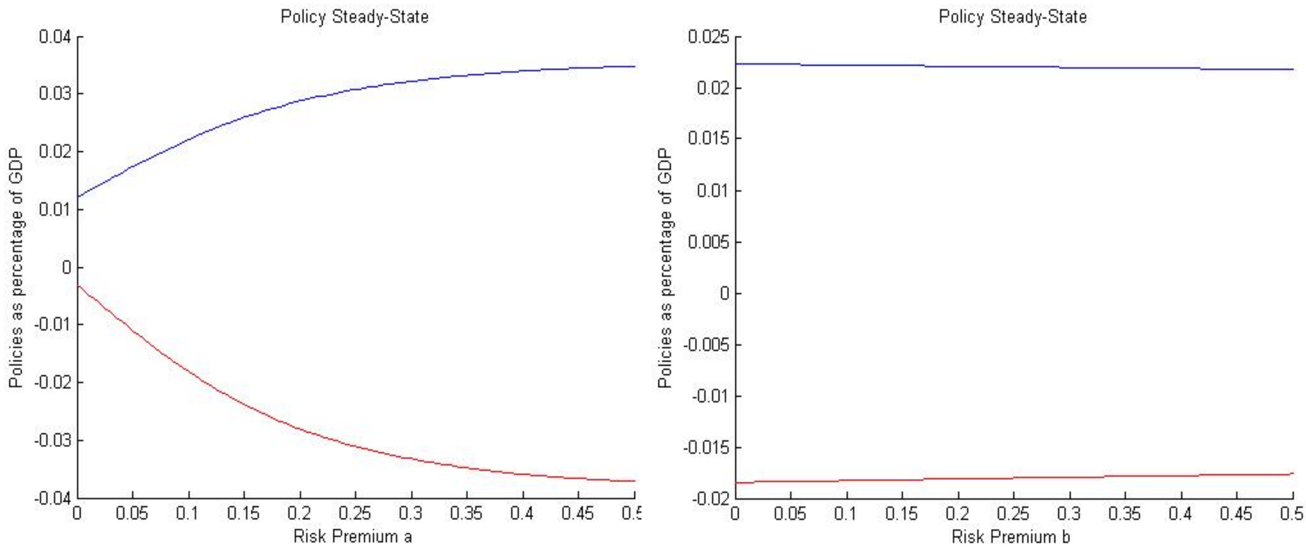


Γράφημα 3.16 - 3.17: Πεπερασμένος ορίζοντας: Τιμή χρέους στο τέλος του ορίζοντα – Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στην παράγωγο του χρέους

3.1.1.4 Επίδραση ασφαλίστρων κινδύνου στις πολιτικές ισορροπίας

Τέλος, παρέχουμε παραδείγματα της επίδρασης των ασφαλίστρων κινδύνου στις τιμές των πολιτικών των δύο παικτών, στην κατάσταση ισορροπίας. Όσο αυξάνεται το μέγεθος του ασφαλίστρου κινδύνου που σχετίζεται με το μέγεθος του χρέους, τότε αυξάνεται και η τιμή των δύο στρατηγικών κατά απόλυτο μέγεθος. Διαισθητικά, αυτό αντιπροσωπεύει το γεγονός ότι όταν οι αγορές είναι πιο σκληρές τότε και οι κυβερνήσεις όπως και η κεντρική τράπεζα είναι περισσότερο ενεργές ώστε να κρατάνε το μέγεθος του χρέους όσο το δυνατόν χαμηλότερο, κοντά στα αποδεκτά μεγέθη (Γράφημα 3.18).

Αντιθέτως, όταν το ασφάλιστρο κινδύνου που σχετίζεται με την παράγωγο του χρέους αυξάνεται, ενώ το χρέος μειώνεται παράλληλα, οι παίκτες γίνονται λιγότερο ενεργοί. Αυτό θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως εξής: Το χρέος μειώνεται με τη βοήθεια του όρου του ασφαλίστρου κινδύνου όπως έχει αναφερθεί, και έτσι οι παίκτες δεν χρειάζεται να είναι το ίδιο ενεργοί.



<u>Figure 3.18, 3.29:</u> Επίδραση ασφαλίστρων κινδύνου στις πολιτικές των παικτών σε ισορροπία

Αριστερά: Επίδραση όρου που σχετίζεται με το μέγεθος του χρέους (a)
Δεξιά: Επίδραση όρου που σχετίζεται με την παράγωγο του χρέους (b)
Red represents fiscal deficits, Blue represents money growth

4 Συνεταιριστικό Παίγνιο

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε το παίγνιο (1.a)-(1.d) υπό την προϋπόθεση ότι οι δύο αρχές που έχουμε συνεργάζονται. Κάθε παίκτης έχει τη δική του διαπραγματευτική ισχύ σε αυτή τη συνεργασία και ορίζουμε ως $\omega, 0 < \omega < 1$ την ισχύ της Οικονομικής Αρχής.Συνεπώς η ισχύς της Νομισματικής Αρχής είναι $(1-\omega)$. Έτσι λαμβάνουμε το εξής πρόβλημα, βέλτιστου ελέγχου:

$$\min_{u_F, u_M} J, \quad J = \omega J_F + (1-\omega) J_M \tag{4.1}$$

$$= {}^1\!/_2 \int_0^T e^{-\theta t}\, \omega \left(\left(u_F(t) - \bar{f}\right)^2 + \beta_F \left(d(t) - \overline{d_F}\right)^2 \right) dt$$
$$+ {}^1\!/_2 \int_0^T e^{-\theta t}\, (1-\omega) \left((u_M(t) - \bar{m})^2 + \beta_M \left(d(t) - \overline{d_M}\right)^2 \right) dt$$

Υπό τον περιορισμό:

$$\dot{d}(t) = \frac{\bar{r}\, d(t) + a\, d(t)^2 + u_F(t) - u_M(t)}{1 - b\, d(t)} \tag{4.2}$$

Πλέον το δυναμικό παίγνιο μετασχηματίστηκε σε ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου. Αν λυθεί το πρόβλημα αυτό για κάθε $\omega \in (0,1)$ λαμβάνουμε μια επιφάνεια βέλτιστων κατά Pareto λύσεων. Το ποια καμπύλη θα επιλεχθεί από τους παίκτες εξαρτάται από την τιμή του ω. Θα λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας την Αρχή Ελαχίστου του Pontryagin.

- Εφαρμόζουμε την Αρχή Ελαχίστου:
  - Hamiltonian:
    $$H = \tfrac{1}{2} e^{-\theta t} \omega \left(\left(u_F - \bar{f}\right)^2 + \beta_F \left(d - \overline{d_F}\right)^2 \right)$$
    $$+ \tfrac{1}{2} e^{-\theta t}\, (1-\omega) \left((u_M(t) - \bar{m})^2 + \beta_M \left(d(t) - \overline{d_M}\right)^2 \right) + \lambda\, \frac{\bar{r}\, d + a\, d^2 + u_F - u_M}{1 - b\, d}$$
  - $\dot{\lambda} = -{}^{\partial H}\!/_{\partial d}, \lambda(T) = 0$
  - $u_F{}^* = arg \min_{u_F}\{H\}$
  - $u_M{}^* = arg \min_{u_M}\{H\}$
  - $\left(u_F{}^* - \bar{f}\right) = -\frac{1-\omega}{\omega} (u_M{}^* - \bar{m})$

Ενώ ορίζουμε ξανά: $\mu = e^{\theta t} \lambda$. Αντικαθιστώντας τις πολιτικές που προέκυψαν στις διαφορικές εξισώσεις, λαμβάνουμε:

$$\dot{d}^*(t) = \frac{1}{1 - b\, d(t)} \left(\bar{r}\, d(t) + a\, d(t)^2 - \mu \frac{1}{\omega(1-\omega)(1 - b\, d(t))} + \bar{f} - \bar{m} \right) \tag{4.3.a}$$

$$\dot{\mu^*}(t) = -\left(\omega \beta_F \left(d(t) - \overline{d_F}\right) + (1-\omega) \beta_M \left(d(t) - \overline{d_M}\right) \right)$$
$$+ \mu \left(\theta - \frac{\left(\bar{r} + 2a\, d(t)\right)\left(1 - b\, d(t)\right) + b\left(\bar{r}\, d(t) + a\, d^2 + \bar{f} - \bar{m}\right)}{\left(1 - b\, d(t)\right)^2} \right) + \mu^2 \frac{\mathrm{b}}{\omega(1-\omega)\left(1 - b\, d(t)\right)^3}$$

(4.3.b)

Ενώ οι βέλτιστες πολιτικές είναι: $u_F{}^* - u_M{}^* = \bar{f} - \bar{m} - \mu \frac{1}{\omega(1-\omega)(1-b\,d)}$ *(4.4)*

Με $d^*(0) = d_0$. Θέτοντας τις διαφορικές ίσες με το 0 προσδιορίζουμε τα σημεία ισορροπίας εφόσον ο ορίζοντας είναι αρκετά μεγάλος ώστε να επιτευχθεί η ισορροπία:

$$\mu_e^{CO} = \omega(1-\omega)\left(-ab(d_e^{CO})^3 + (a - b\bar{r})(d_e^{CO})^2 + \left(\bar{r} - \ b\left(\bar{f} - \bar{m}\right)\right)\ d_e^{CO} + \left(\bar{f} - \bar{m}\right)\right)$$
(4.5)

Και τελικά η εξίσωση για την τιμή ισορροπίας του χρέους είναι:

$$\delta_3\ (d_e^{CO})^3 + \delta_2\ (d_e^{CO})^2 + \delta_1\ d_e^{CO} + \delta_0 = 0 \qquad (4.6)$$

Όπου: $\delta_3 = -\omega(1-\omega)a(2a + b\theta), \delta_2 = \omega(1-\omega)\left(a\,\gamma_2 - \bar{r}(2\alpha + b\theta)\right),$

$\delta_1 = \omega(1-\omega)(\bar{r}\,\gamma_2 - \bar{u}(2\alpha + b\theta) - (\omega\beta_F + (1-\omega)\beta_M)\ ,$

$\delta_0 = \omega(1-\omega)\bar{u}\,\gamma_2 + \omega\beta_F\overline{d_F} + (1-\omega)\beta_M\overline{d_M}$

Και: $\gamma_1 = 1 - b\ d_e^{OL}\ ,\ \ \gamma_2 = \theta - \bar{r}\ ,\ \ \gamma_3 = \beta_F\overline{d_F} + \beta_M\overline{d_M}\ ,\ \ \bar{u} = \bar{f} - \bar{m}$

Παρατηρούμε πως αν θέσουμε $\beta_F{}^{CO} = (1-\omega)\beta_F{}^{OL}$ και $\beta_M{}^{CO} = \omega\beta_M{}^{OL}$ το πολυώνυμο (4.6) για το Συνεταιριστικό Παίγνιο είναι πανομοιότυπο με το αντίστοιχο του Μη-Συνεταιριστικού Open-Loop Παιγνίου πολλαπλασιασμένο με $\omega(1-\omega)$. Δηλαδή $d_e^{CO} = d_e^{OL}$ και επίσης η εξίσωση ισορροπίας δίνει $\mu_e^{CO} = \omega(1-\omega)\mu_e^{OL}$. Δηλαδή ίδιο σημείο ισορροπίας στα δύο παίγνια υπό αυτές τις προϋποθέσεις.

4.1.1 Προσομοιώσεις

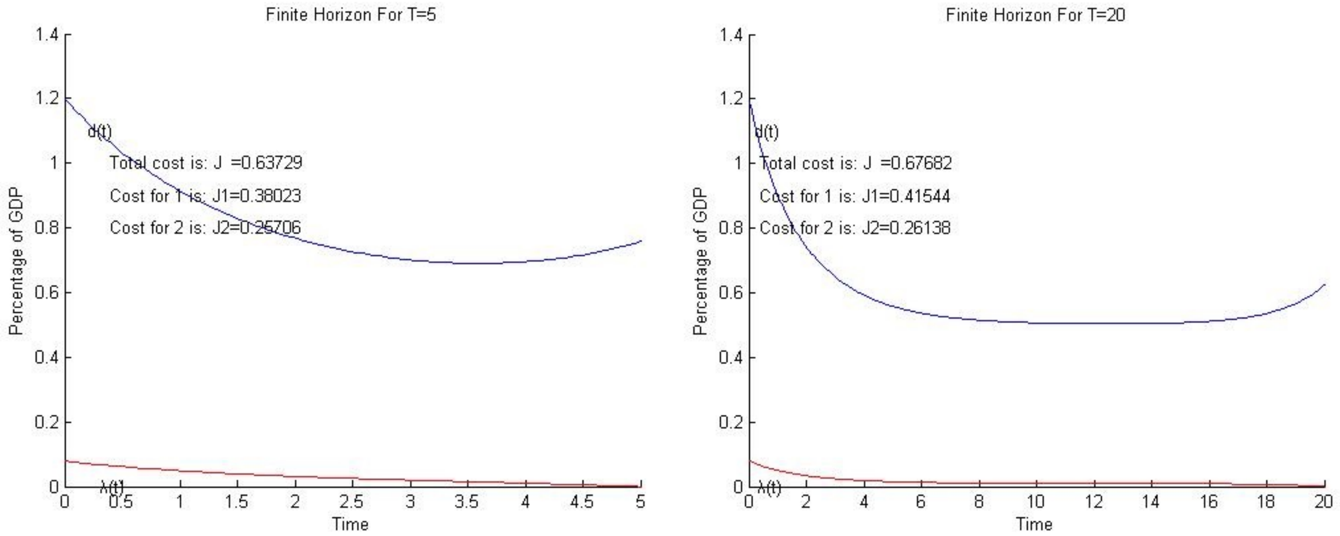
Επιλέγουμε τις παρακάτω τιμές για $a = 0.1\ \kappa\alpha\iota\ b = 0.2$:

$$\beta_F = 0.06\ \ , \beta_M = 0.04\ \ , \overline{d_F} = \overline{d_M} = 0.5, \bar{r} = 0.03\ , \theta = 0.15$$

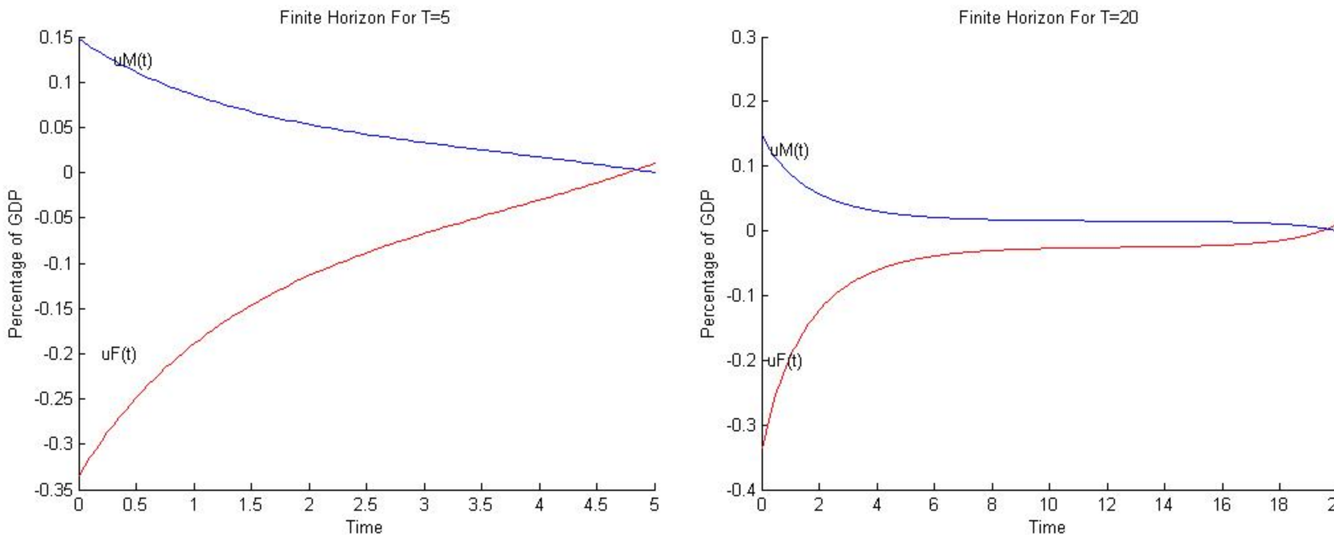
Ενώ οι τιμές-στόχοι για τις πολιτικές των δύο παικτών είναι $\bar{f} = 0.01\ \kappa\alpha\iota\ \ \bar{m} = 0$, για την Οικονομική και τη Νομισματική Αρχή αντίστοιχα.

4.1.1.1 Τροχιές χρέους και βέλτιστες πολιτικές για πεπερασμένο ορίζοντα:

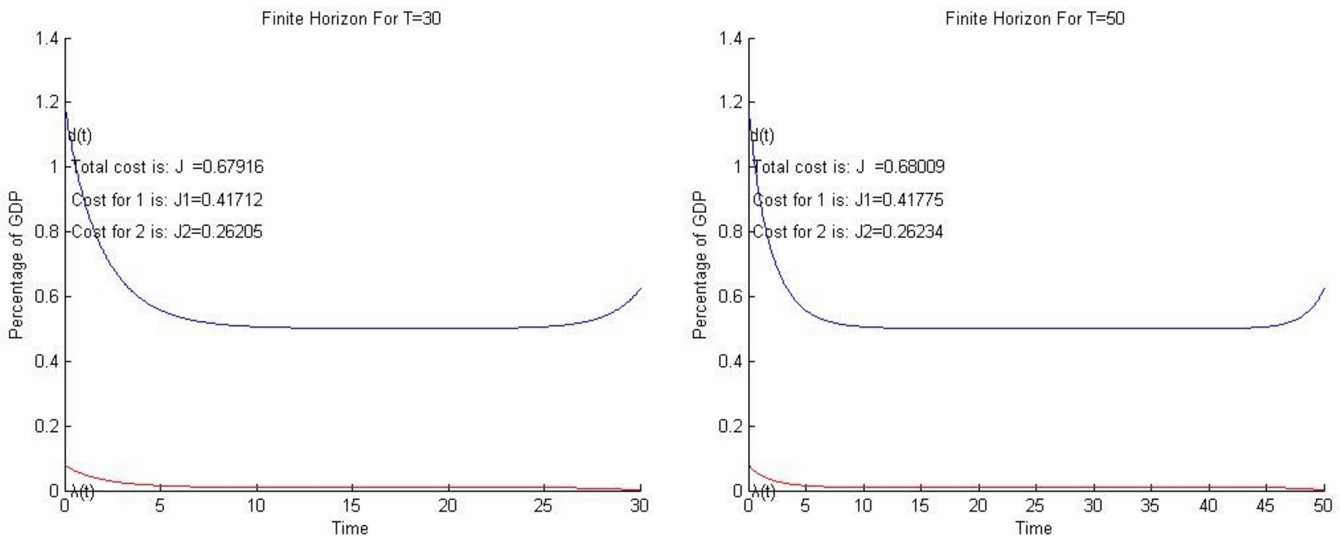
Για διαπραγματευτική ισχύ ω=0.3 της Οικονομικής Αρχής, δηλαδή θεωρούμε πως η Νομισματική αρχή είναι αρκετά πιο ισχυρή, παρουσιάζουμε τις γραφικές των τροχιών χρέους καθώς και των πολιτικών που προκύπτουν για κάθε παίκτη και διάφορους ορίζοντες. Αν συγκρίνουμε αυτές τις γραφικές με τις αντίστοιχες για το Μη-Συνεταιριστικό Παίγνιο θα παρατηρήσουμε ότι το κόστος του κάθε παίκτη έχει μειωθεί σημαντικά, συγκεκριμένα πάνω από 50%. Για παράδειγμα όταν Τ=5 στην προηγούμενη περίπτωση είχαμε *J1=1.0226, J2=0.55978* ενώ τώρα *J1=0.3802, J2=0.25706*. Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε και για μεγαλύτερους ορίζοντες. This is due to the fact that the trajectory, as well as the controls, stay in the vicinity of a turnpike as long as possible. Therefore, both players do want to cooperate as they benefit from it (at least when ω=0.3, we will examine other cases as well on the next section).



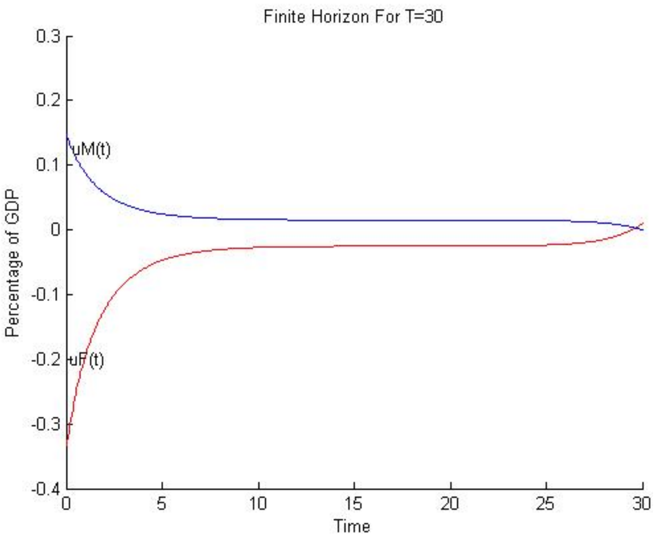
<u>Γράφημα 4.1 - 4.2:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών

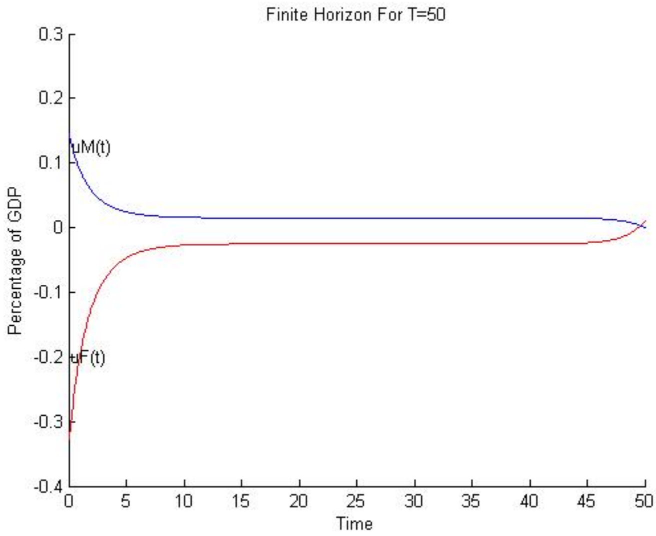


<u>Γράφημα 4.3 - 4.4:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών



<u>Γράφημα 4.5 - 4.6:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών

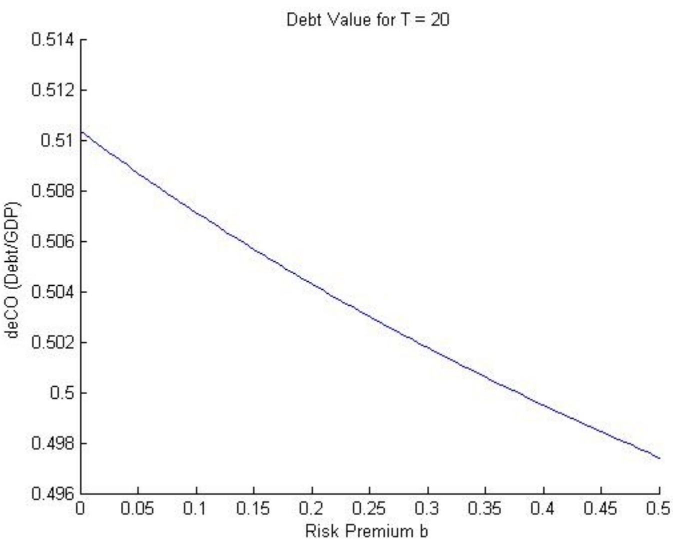


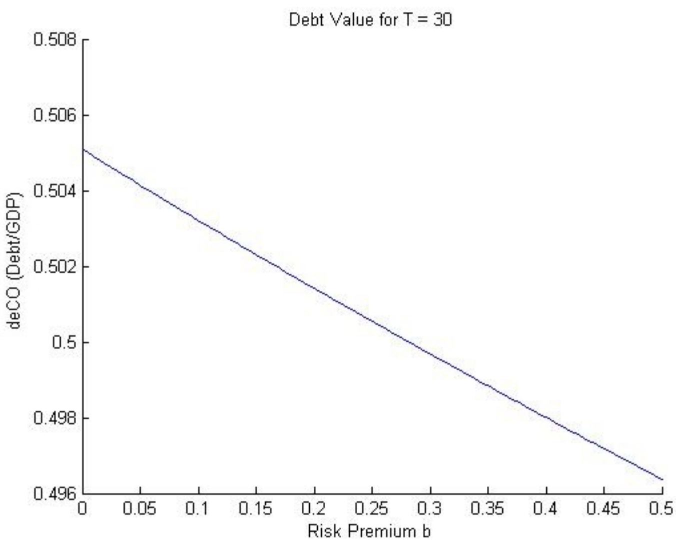


<u>Γράφημα 4.7 - 4.8:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών

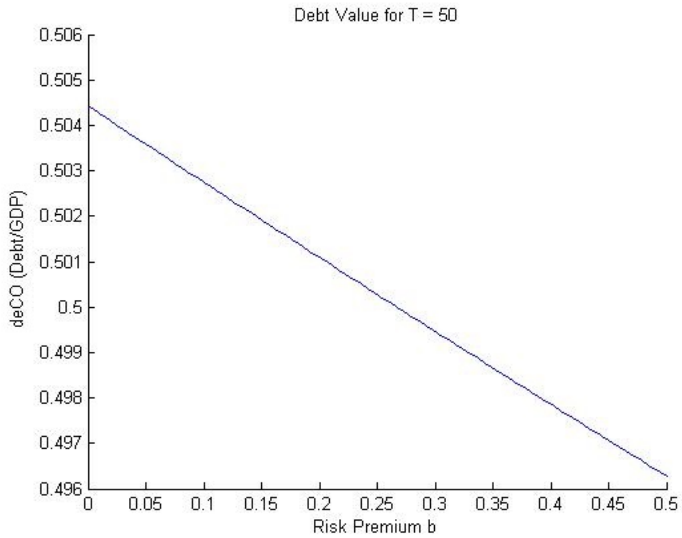
4.1.1.2 Επίδραση ασφαλίστρων κινδύνου στην σταθερή τιμή του χρέους:

Στις γραφικές 4.9-4.11 παρατηρούμε πως μεταβάλλεται η τιμή του χρέους όταν μεταβάλλεται το μέγεθος του ασφαλίστρου κινδύνου που σχετίζεται με την παράγωγο του χρέους. Εν γένει βλέπουμε πως η συμπεριφορά του χρέους ως προς την αύξηση του ασφαλίστρου κινδύνου είναι γραμμική και φθίνουσα. Επίσης, όσον αφορά την τιμή που λαμβάνει το χρέος στο σταθερό κομμάτι της τροχιάς του πεπερασμένου ορίζοντα, όσο περισσότερο αυξάνεται το χρονικό μήκος του ορίζοντα τόσο μικρότερη είναι η τιμή του χρέους. Δηλαδή τόσο περισσότερο μπορεί να προσεγγίσει την τιμή ισορροπίας του άπειρου ορίζοντα. Συγκριτικά με το Μη-Συνεταιριστικό Παίγνιο επιτυγχάνουμε σημαντικά μικρότερες τιμές στο χρέος περίπου 30% μικρότερες τιμές χρέους σε κάθε περίπτωση.



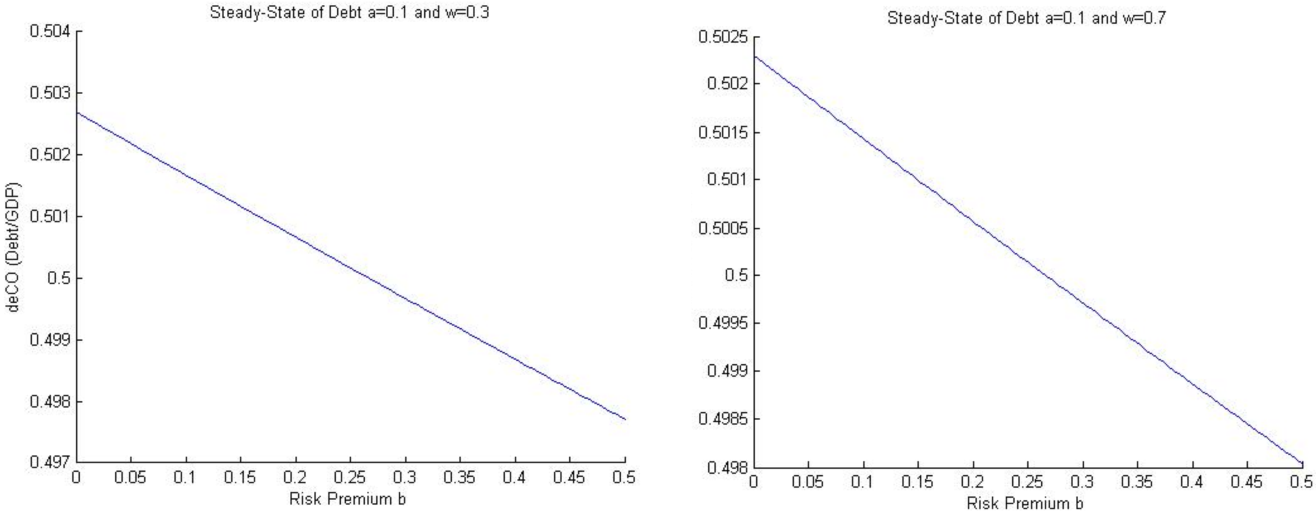


<u>Γράφημα 4.9 -4.10:</u> Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στο σταθερό τμήμα της τροχιάς του Πεπερασμένου Ορίζοντα

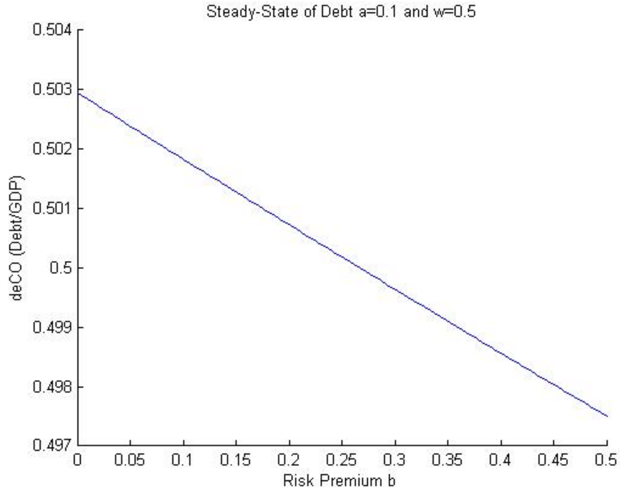


<u>Γράφημα 4.11:</u> Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στο σταθερό τμήμα της τροχιάς του Πεπερασμένου Ορίζοντα

Στα γραφήματα 4.12-4.14 παρουσιάζουμε το πώς αλλάζει η τιμή ισορροπίας του χρέους για διάφορες τιμές του ω (ω=0.3, 0.5, 0.7). Φαίνεται ότι για μικρές τιμές του b εδώ έχουμε καλύτερα αποτελέσματα, ενώ για μεγαλύτερες τιμές η Μη-Συνεταιριστική περίπτωση δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Συγκριτικά με τις γραφικές 3.9-3.11 είναι φανερό ότι στη Συνεταιριστική περίπτωση φθάνουμε πιο κοντά στην τιμή ισορροπίας σε λιγότερο μάλιστα χρόνο. Για παράδειγμα για T=20 το μέγεθος του χρέους είναι 30% χαμηλότερο από ότι στην Μη-Συνεταιριστική περίπτωση και απέχει από την τιμή ισορροπίας περίπου 6%, ενώ στην Μη-Συνεταιριστική περίπτωση αυτή η απόκλιση ήταν περίπου 31%.



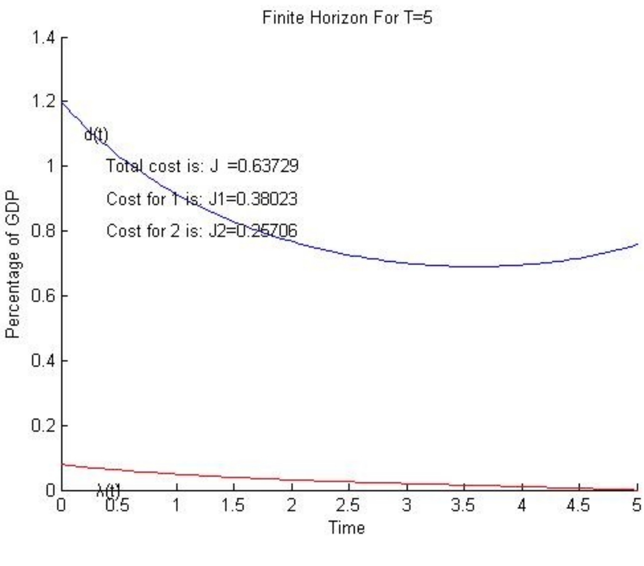
<u>Γράφημα 4.12 - 4.13:</u> Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στην τιμή ισορροπίας του χρέους
Αριστερά: ω=0.3, Δεξιά: ω=0.7

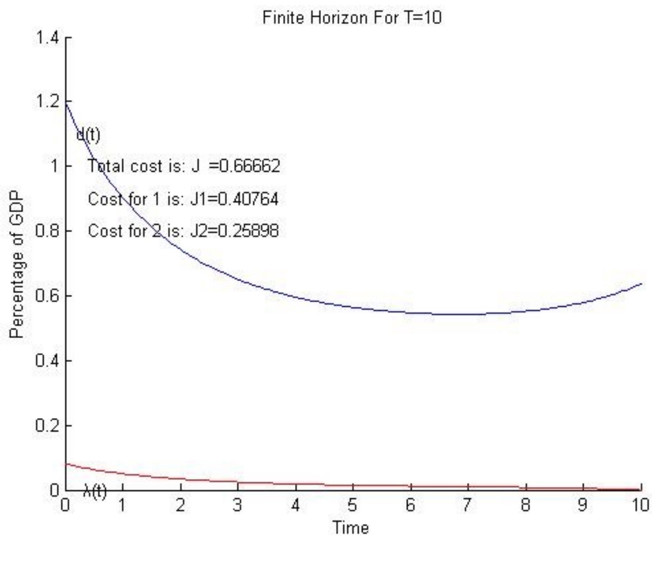


<u>Γράφημα 4.14:</u> *Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στην τιμή ισορροπίας του χρέους ω=0.5*

4.1.1.3 Επίδραση ασφάλιστρου κινδύνου στην τελική τιμή χρέους του Πεπερασμένου Ορίζοντα

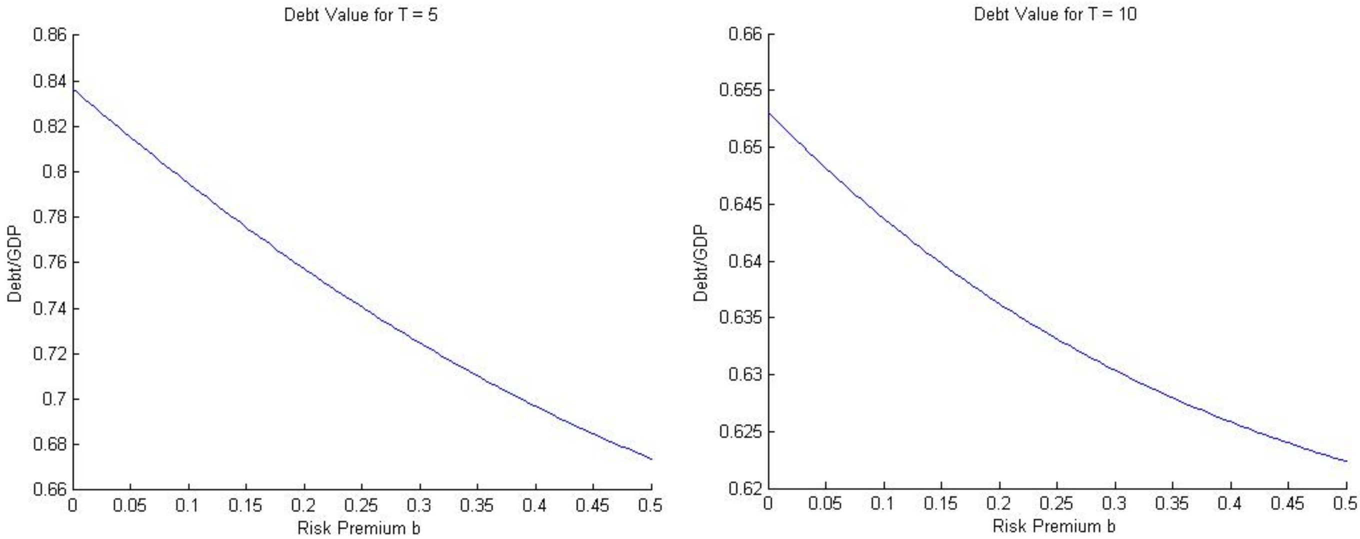
Για τον πεπερασμένο ορίζοντα παρατηρούμε ότι όπως και στη Μη-Συνεταιριστική περίπτωση το χρέος δεν φτάνει σε τόσο χαμηλά επίπεδα όπως προηγουμένως ούτε δείχνει να εισέρχεται το ίδιο έντονα σε μια σταθερή τροχιά. Ωστόσο για T=5 τα κόστη είναι *Jtot=0.63729, J1=0.38023 και J2=0.25706*, ενώ για T=10 λαμβάνουμε *Jtot=0.66662, J1=0.40764 and J2=0.25898*. Αν συγκρίνουμε αυτά τα μεγέθη με τα αντίστοιχα από την προηγούμενη ενότητα βλέπουμε σημαντική βελτίωση.





<u>Γράφημα 4.15 - 4.16:</u> *Πεπερασμένος ορίζοντας: Τροχιές κόστους και βοηθητικών μεταβλητών*

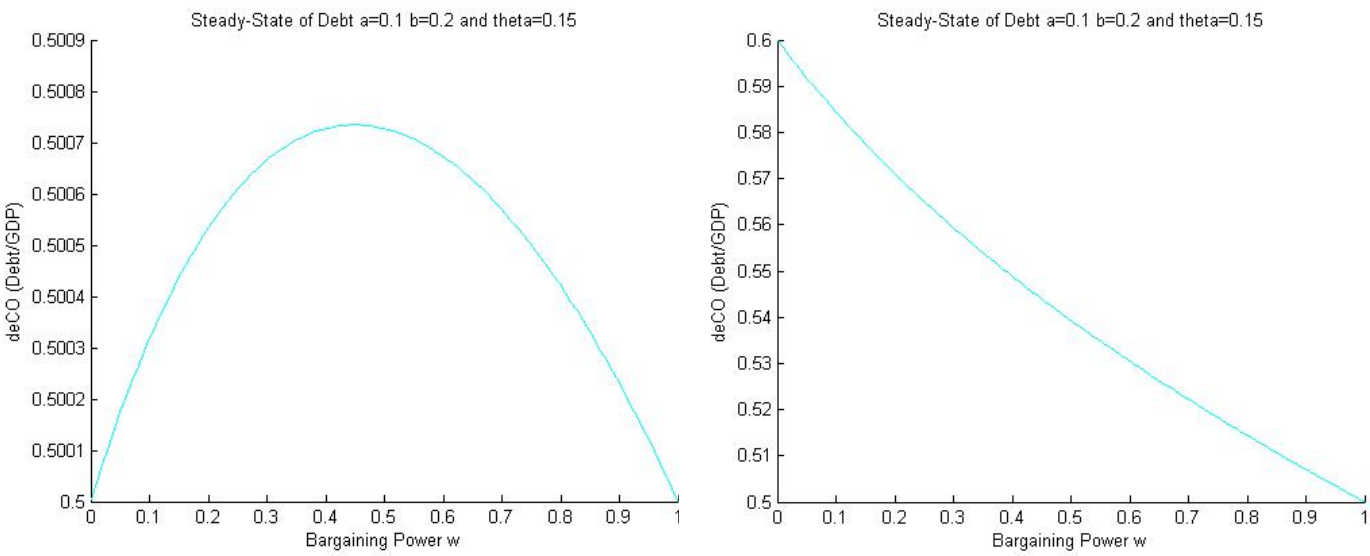
Και εδώ θα αναλύσουμε την επίδραση του ασφάλιστρου κινδύνου στην τελική τιμή του χρέους. Παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά όπως στην προηγούμενη ενότητα, μετατοπισμένη σε χαμηλότερα επίπεδα χρέους. Εδώ διαφαίνεται το κέρδος της συνεργασίας ξανά, αν αναλογιστούμε το πόσο πολύ μπορεί να μειωθεί το χρέος σε τόσο μικρό χρονικό διάστημα.



<u>Γράφημα 4.17 - 4.18:</u> Πεπερασμένος ορίζοντας: Τιμή χρέους στο τέλος του ορίζοντα – Επίδραση ασφαλίστρου κινδύνου στην παράγωγο του χρέους

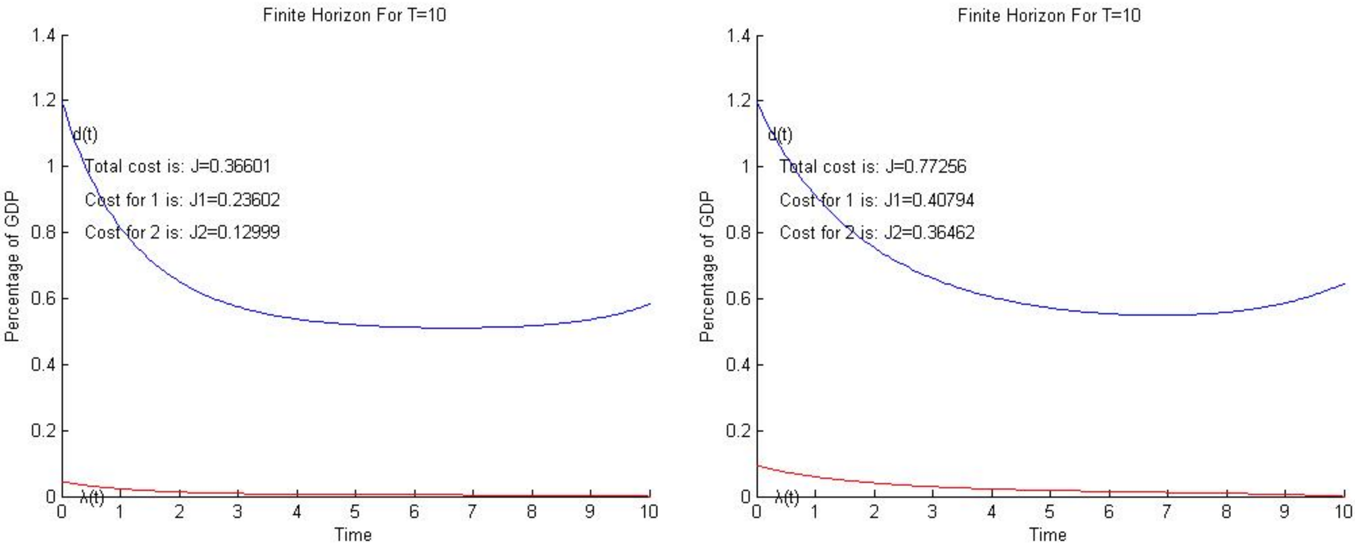
4.1.1.4 Επίδραση της Διαπραγματευτικής Ισχύος

Σε αυτές τις προσομοιώσεις θα αναλύσουμε την επίδραση της διαπραγματευτικής ισχύος των παικτών. Στο πρώτο γράφημα (4.15) παρουσιάζουμε την επίδραση της διαπραγματευτικής ισχύος στην τιμή ισορροπίας του χρέους. Αυτό το γράφημα έχει γίνει για δύο παίκτες με κοινή τιμή-στόχο για το χρέος. Στη συνέχεια το γράφημα 4.2 συμπληρώνει και επιβεβαιώνει ότι όσο πιο απόλυτη γίνεται η κυριαρχία ενός παίκτη τόσο πιο κοντά στην τιμή που επιθυμεί πάει στο χρέος. Στην 4.2 οι Οικονομικές Αρχές

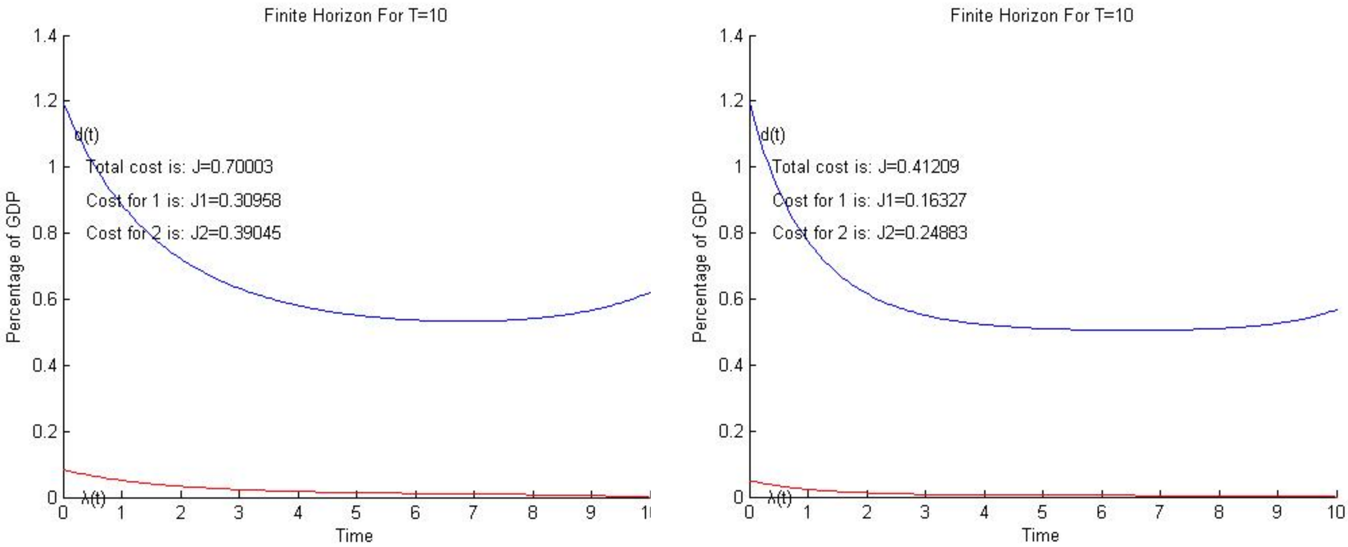


<u>Γράφημα 4.19-4.20:</u> Επίδραση της διαπραγματευτικής ισχύος στην τιμή ισορροπίας του χρέους
Αριστερά: Ίδια τιμή-στόχος για τους δύο παίκτες
Δεξιά: Διαφορετική τιμή-στόχος

Τέλος, για να εξετάσουμε αν οι παίκτες επωφελούνται από την συνεργασία για διάφορες τιμές των διαπραγματευτικών δυνάμενών τους παρουσιάζουμε τα κόστη για ένα σχετικά μικρό ορίζοντα T=10. Εξετάζουμε πρώτα έναν πολύ ασθενή Οικονομικό Παίκτη (ω=0.1) και αντίστοιχα έναν πολύ ισχυρό (ω=0.9). Επίσης παρουσιάζουμε και για κάποιες ενδιάμεσες τιμές περαιτέρω. Όπως φαίνεται από το γράφημα 4.23 και το αντίστοιχό του 4.26, όταν κάποιος από τους δύο είναι πολύ ισχυρός και οι δύο επωφελούνται, ωστόσο ο ισχυρότερος πετυχαίνει μικρότερο κόστος. Από τα γραφήματα αυτά φαίνεται ότι σε κάθε περίπτωση οι παίκτες δεν έχουν λόγο να μην συνεργάζονται.



<u>Γράφημα 4.22-4.23:</u> Τροχιές χρέους για διαφορετικές τιμές διαπραγματευτικών δυνάμεων και ορίζοντα T=10
Αριστερά: ω=0.1 , Δεξιά: ω=0.5



<u>Γράφημα 4.23-4.24:</u> Τροχιές χρέους για διαφορετικές τιμές διαπραγματευτικών δυνάμεων και ορίζοντα T=10
Αριστεράt: ω=0.7 , Δεξιά: ω=0.9

5 Επίλογος

Σε αυτή τη Διπλωματική Εργασία αναλύσαμε τον αντίκτυπο που έχει η εισαγωγή ενός ασφαλίστρου κινδύνου που σχετίζεται με την παράγωγο του χρέους, δηλαδή την τάση του στο πως κινείται. Η ανάλυση έγινε σε ένα Δυναμικό Παίγνιο ισορροπίας κατά Nash μεταξύ των Νομισματικών και των Οικονομικών αρχών. Εξετάσαμε την Μη-Συνεταιριστική Open-Loop Ισορροπία κατά Nash καθώς και Συνεταιριστικό Παίγνιο, και τα δύο για Πεπερασμένο και Άπειρο Ορίζοντα μέσω των προσομοιώσεων.

Θεωρήσαμε ότι και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά του Πεπερασμένου Ορίζοντα, αν αυτό είναι αρκετά μεγάλος, καταλήγει σε σημείο ισορροπίας, διαφορετικά έλκεται από αυτό, χωρίς όμως να εισέρχεται σε αυτό ποτέ, καθώς αποκλίνει γρήγορα για να ικανοποιήσει τις τελικές συνθήκες. Αυτό φάνηκε να ισχύει μέσα από τις προσομοιώσεις που πραγματοποιήσαμε.

Δείξαμε ότι το χρέος έχει περίπου γραμμική σχέση με τις τιμές του νέου ασφαλίστρου κινδύνου, και μειώνεται καθώς το ασφάλιστρο αυξάνεται. Επίσης παρατηρήσαμε πως όταν οι παίκτες συνεργάζονται επωφελούνται και οι δύο και μάλιστα πιο πολύ ο ισχυρότερος εκ των δύο. Ωστόσο, όσον αφορά την επίδραση του ασφαλίστρου ασφάλειας, όταν αυξάνεται πέρα από κάποια τιμή το Μη-Συνεταιριστικό Παίγνιο δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Ως μελλοντικές κατευθύνσεις για έρευνα προτείνουμε την ανάλυση αντίστοιχου παιγνίου με περισσότερους Οικονομικούς Παίκτες, για τον ίδιο Νομισματικό Παίκτη. Ένα παίγνιο δηλαδή που θα αντικατοπτρίζει ακόμα καλύτερα τις συνθήκες της Ευρωπαϊκής Νομισματικής Ένωσης. Άλλη μία ενδιαφέρουσα προσέγγιση θα ήταν η μοντελοποίηση και ανάλυση του πληθωρισμού, ώστε να φανεί πως επιδρά στα επιτόκια. Τέλος οι τιμές για τις σταθερές, ασφάλιστρα κινδύνου, επιτόκια και άλλα, θα μπορούσαν να βρεθούν μέσω προσαρμοστικού ελέγχου χρησιμοποιώντας κάποια βάση δεδομένων που περιέχει τις τιμές εισόδου-εξόδου του μοντέλου μας.

6 Βιβλιογραφία

[1] Tabellini G., 1986. *Money, debt and deficits in a dynamic game*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol.10, pp.427-442

[2] Engwerda J., van Aarle B., Plasmans J., Weeren A., 2012. *Debt stabilization in the presence of risk premia*,

[3] De Grauwe P., Ji Y., 2012. *Mispricing of sovereign risk and multiple equilibria in the Eurozone*,

[4] Engen E.M., Hubbard R.G., 2004. *Federal Government Debt and Interest Rates*, NBER Macroeconomics Annual Conference

[5] Schuknecht L., von Hagen J., Wolswijk G., 2010. *Government bond risk premiums in the EU revisited: The Impact of Financial Crisis*,

[6] Starr A.W., Ho Y.C., 1969. *Nonzero-Sum Differential Games*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.3, No.3

[7] Starr A.W., Ho Y.C., 1969. *Further Properties of Nonzero-Sum Differential Games*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.3, No.4

[8] Bressan A, 2010. *Noncooperative Differential Games. A Tutorial*,

[9] Papavassilopoulos G.P., Olsder G.J., 1984. *On the Linear-Quadratic, Closed-Loop, No-Memory Nash Game*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.42, No.4

[10] Mageirou E., 1976. *Values and Strategies for Infinite Time Linear Quadratic Games,* IEEE Transactions on Automatic Control

[11] Basar T., Olsder J., 1999. *Dynamic Noncooperative Game Theory*, SIAM Philadelphia

[12] Engwerda J., 2005. *LQ Dynamic Optimization and Differential Games*, John Wiley & Sons, LTD

[13] Haurie A. , 2002. *Decision and Control in Management Science: Essays in Honor of Alain Haurie,* Advances in Computational Management Science, Vol. 4, Springer Science+Business Media, LLC

[14]Fershtman C., Kamien M., 1990. *Turnpike Properties in a Finite-Horizon Differential Game: Dynamic Duopoly*