



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén με τη χρήση
αριθμητικών μεθόδων και της τεχνικής σημειακής ισότητας και
βελτιστοποιήσεις της επίλυσής μας, με τη μέθοδο FMM**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Κ. Δημητριάδης

Επιβλέπων : Γεώργιος Φικιώρης
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2016



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης Hallén με τη χρήση
αριθμητικών μεθόδων και της τεχνικής σημειακής ισότητας και
βελτιστοποιήσεις της επίλυσής μας, με τη μέθοδο FMM**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος Κ. Δημητριάδης

Επιβλέπων : Γεώργιος Φικιώρης
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την _____ Ιουλίου 2016.

.....
Γ. Φικιώρης
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Π.Κωττής
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Χ.Καγάλης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2016

.....
Δημήτριος Κ. Δημητριάδης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Δημήτριος Κ. Δημητριάδης 2016

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή ασχολείται με την μελέτη των θεμελιωδών ιδιοτήτων των ολοκληρωτικών εξισώσεων Hallèn (Hallèn Equation-HE) και Pocklington (Pocklington Equation-PE) καθώς και με τη μελέτη της γραμμικής κεραίας τροφοδοτούμενης στο κέντρο της. Η κεραία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ο θεμελιώδης τύπος κεραίας εκπομπής. Η κεραία προσεγγίζεται από ένα θεωρητικό μοντέλο που ονομάζεται «σωληνοειδές δίπολο». Πρόκειται για έναν τέλεια αγωγίμο μεταλλικό σωλήνα με απείρως λεπτά τοιχώματα, με το σημείο τροφοδοσίας ακριβώς στο κέντρο του. Βασικός σκοπός της μελέτης αυτής, είναι ο προσδιορισμός της ρευματικής κατανομής κατά μήκος της κεραίας, και επομένως της συνθέτου αγωγιμότητας εισόδου αυτής. Με την βοήθεια των κυματικών εξισώσεων και εξισώσεων Maxwell, γίνονται η εξαγωγή της ολοκληρωτικό-διαφορικής εξίσωσης του Pocklington και κατόπιν της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallèn, για τον ακριβή πυρήνα. Χρησιμοποιούνται δύο μοντελοποιήσεις για την τροφοδοσία της κεραίας: η γεννήτρια δέλτα-συνάρτησης (delta function generator - DFG) και η γεννήτρια μαγνητικών κροσσών (frill generator - FG).

Οι αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων αποτελούν την πλέον διαδεδομένη μέθοδο, η οποία χρησιμοποιείται τις τελευταίες δεκαετίες κυρίως λόγω των ισχυρών επεξεργαστών και των καινούργιων λογισμικών των υπολογιστών. Επίσης στην εργασία αυτή προσπαθούμε να προσεγγίσουμε έναν γρήγορο και αποδοτικό αλγόριθμο για την επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων του Hallèn και του Pocklington, σχετικά με την κατανομή του ρεύματος στην πεπερασμένου μεγέθους γραμμική πολύ λεπτή κεραία.

Στην προσπάθεια μας αυτή χρησιμοποιούμε τη μέθοδο των ροπών (Method of Moments-MOM) η οποία αποτελεί μια ισχυρή αριθμητική τεχνική στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε δύο διαφορετικές μεθόδους ροπών: την μέθοδο Galerkin με παλμικές συναρτήσεις (Galerkin method pulse functions - GMPF) και την τεχνική σημειακής ισότητας με τριγωνικές συναρτήσεις (point-matching triangular functions - PMTF). Στους αριθμητικούς υπολογισμούς, χρησιμοποιούμε τον βελτιωμένο τύπο για την σταθερά C του δεξιού μέλους της εξίσωσης Hallèn, ο οποίος έχει προταθεί από τον κύριο Φικιώρη [1], έτσι ώστε η αριθμητική μας λύση να συγκλίνει ταχύτερα. Η σύγκλιση γίνεται ακόμη

ταχύτερη, όταν στα αποτελέσματά μας εφαρμόσουμε συγκεκριμένες μεθόδους επιτάχυνσης σύγκλισης (convergence acceleration methods - CAM), οι οποίες έχουν προταθεί από τον κύριο Φικιώρη [2]. Ακόμη χρησιμοποιήσαμε τη ταχεία πολυπολική μέθοδο (Fast Multipole Method-FMM) η οποία αποτελεί μια μαθηματική τεχνική για την επιτάχυνση της επίλυσης.

Ακολούθως, αυτές οι τεχνικές εφαρμόζονται στις ολοκληρωτικές εξισώσεις Hallèn και Rocklington (HE και PE) για λεπτή κεραία εκπομπής, η οποία τροφοδοτείται είτε από το μοντέλο της Γεννήτριας Πεπερασμένου Διακένου – ΓΠΔ (Finite Gap Generator-FGG) είτε από το μοντέλο της Γεννήτριας Δέλτα Συνάρτησης – ΓΔΣ (Delta Gap Generator-DFG) με στόχο τον προσδιορισμό της κατανομής του ρεύματος κατά μήκος της κεραίας.

Τέλος στην εργασία αυτή θα υπάρχει ένα τμήμα σχετικά με την επιλυσιμότητα και τη μη-επιλυσιμότητα των ολοκληρωτικών εξισώσεων Hallèn και Rocklington αντίστοιχα, καθώς και σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιώντας τις ανωτέρω μεθόδους επίλυσης. Τα συγκριτικά αποτελέσματα φαίνονται σε αντίστοιχα γραφήματα.

Λέξεις-κλειδιά: Κατανομή ρεύματος, γραμμική κεραία, ολοκληρωτική εξίσωση Hallèn, ολοκληρωτική εξίσωση Rocklington, ακριβής πυρήνας, μέθοδος Galerkin, DFG, FG, μέθοδοι ροπών, ταχεία πολυπολική μέθοδος (FMM), μέθοδοι επιτάχυνσης σύγκλισης (CAM)

ABSTRACT

This diploma thesis deals with the study of the fundamental properties of Hallèn's (HE) and Pocklington's (PE) equations as long as with the linear, center-driven antenna, which can be considered to be the most fundamental type of transmitting antenna. The antenna is approached by studying a theoretical model called "tubular dipole". This is a perfectly conducting metallic tube with infinitely thin walls, whose feed point is right at the center. The main purpose of this study is to compute the current distribution along the antenna, and therefore its input admittance. Using the wave equations and Maxwell's equations, we derive Pocklington's integral equation and then Hallèn's integral equation, for case of the exact kernel. We use two models for the feed of the antenna: the delta-function generator (DFG) and the frill generator (FG).

Numerical techniques in solving electromagnetics problems are the most common methods which are used during the last decades, especially due to the powerful processors and the new softwares of the computers. In this thesis, it is attempted to approach a fast efficient algorithm for solving the famous Hallèn and Pocklington integral equations, regarding the current distribution on a finite-length linear thin wire antenna.

In order to approach this aim we use a powerful numerical technique which is the Method of Moments (MOM) in order to solve integral equations. More specifically we use two different moment methods: the Galerkin method with pulse functions (GMPF) and the point-matching technique with triangular functions (PMTF). In numerical calculations, we use the improved formula for the constant C on the right-hand side of this equation, which has been introduced by Dr. Fikioris [1], so that our numerical solution converges faster. The convergence becomes even faster when we apply certain convergence acceleration methods (CAM) to our numerical results. These methods have been introduced by Dr. Fikioris [2] some years ago. Moreover we used the Fast Multipole Method (FMM) which is a mathematical technique that fastens the solution.

Afterward, this technique will be applied on Hallèn and Pocklington's integral equations (HE and PE) for a transmitting thin wire antenna which is energized either

by the model of Finite Gap Generator-FGG or by the model of Delta-Function Generator (DFG) in order to find current distribution along the antenna.

Finally, in this thesis there would be a part concerning the solvability and non-solvability of Hallén and Pocklington integral equations and also there is going to be comparison between the results that we derive using each of the aforementioned solution methods. The comparison results are shown in the respective charts.

Key-words: Current distribution, thin wire antenna, Hallén's integral equation, Pocklington's integral equation, exact kernel, Galerkin method, DFG, FG, Method of Moments (MOM), Fast Multipole Method (FMM), convergence acceleration method (CAM)

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στο σημείο αυτό θα ήθελα **από καρδιάς να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Φικιώρη** που με εμπιστεύτηκε για την εργασία μου αυτή, ενώ υπήρξε σημαντικότετος αρωγός με τις πολύτιμες γνώσεις του σε οποιοδήποτε πρόβλημα αντιμετώπισα. Η συμπαράσταση και η καθοδήγηση του υπήρξε καθοριστική.

Επίσης θέλω να ευχαριστήσω τον απόφοιτο διδάκτορα του τμήματός μας Ιωάννη Τατσόγλου, ο οποίος μου προσέφερε σημαντικότερες συμβουλές, καθώς και για το χρόνο που εκείνος διέθεσε παρά το φόρτο εργασίας του με σκοπό την άρτια εκπόνηση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η εν γένει συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια της μελέτης αυτής ήταν άψογη και εποικοδομητική.

Επιπρόσθετα ένα μεγάλο ευχαριστώ οφείλω στην οικογένεια μου για την ηθική συμπαράσταση και υποστήριξη που μου παρείχε όλα τα χρόνια των σπουδών μου. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω και το φίλο, συμφοιτητή και συνάδελφο πλέον Μιχάλη Καροτσιέρη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	12
1.1 ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΟΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΣΜΟΣ.....	12
1.2 ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΕΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ.....	14
1.3 ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΤΗΣ ΛΥΣΗΣ.....	15
1.4 ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	16
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 : ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΕΡΑΙΑ ΜΕΣΩ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ	17
2.1 ΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL.....	17
2.2 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΕΡΑΙΕΣ ΚΑΙ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΣΩΛΗΝΟΕΙΟΥΣ ΔΙΠΟΛΟΥ.....	23
2.3 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ Pocklington ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΚΡΙΒΗ ΠΥΡΗΝΑ	27
2.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΥΠΟΥ Hallèn.....	32
2.5 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΟΣ ΠΥΡΗΝΑΣ)	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 : ΜΟΝΤΕΛΑ ΤΡΟΦΟΔΟΣΙΑΣ - ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ – ΜΕΘΟΔΟΙ ΡΟΠΩΝ	36
3.1 ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΔΕΛΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΓΔΣ (DELTA FUNCTION GENERATOR – DFG).....	36
3.2 ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ ΔΙΑΚΕΝΟΥ – ΓΠΔ (FINITE GAP GENERATOR - FGG).....	38
3.3 ΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΡΟΣΣΩΝ (MAGNETIC FRILL GENERATOR – MFG).....	39
3.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΥΠΟΥ FREDHOLM	41
3.5 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ.....	42
3.6 ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN – ΕΠΙΛΟΓΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΒΑΣΗΣ και ΔΟΚΙΜΗΣ.....	44

3.7	ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ HALLEN ΜΕ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ / ΜΕΘΟΔΟΣ GALERKIN ΜΕ ΠΑΛΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (GALERKIN METHOD PULSE FUNCTIONS – GMPF) (METHOD A)	47
3.8	ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΗΜΕΙΑΚΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΤΡΙΓΩΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (POINT METHOD TECHNIQUE WITH THE USE OF TRIANGULAR FUNCTIONS – PTMF).....	50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 : ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ – FFM		53
4.1	Η ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟΝ ΑΚΡΙΒΗ ΠΥΡΗΝΑ: ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ.....	53
4.2	ΤΑΧΕΙΑ ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΠΟΛΩΝ – FAST MULTIPOLE METHOD (FMM).....	54
4.3	ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ FMM.....	57
4.4	ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ FMM ΚΑΙ ΕΚΦΥΛΙΣΜΟΣ ΠΥΡΗΝΑ.....	59
4.5	ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ FMM ΣΤΙΣ ΜΟΜ.....	62
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 : ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ		65
5.1	ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΥΠΟΥ HALLEN.....	65
5.2	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG ΜΕ GMPF.....	67
5.3	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ DFG ΜΕ PMTF	72
5.4	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FG ΜΕ GMPF.....	76
5.5	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FG ΜΕ PMTF.....	81
5.6	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FGG ΜΕ GMPF.....	86
5.7	ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ FGG ΜΕ PTMF.....	91
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ		97

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός

Μια ευρεία κατηγορία των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σκέδασης μπορεί να εκφραστεί ως ένα αναπόσπαστο σύστημα δύο εξισώσεων. Αυτού του είδους η ολοκληρωτική εξίσωση, που εμφανίζεται σε προβλήματα συνοριακών τιμών, όπου υπάρχει μία εξίσωση για μια συγκεκριμένη περιοχή και ακόμη μια για το διπλό τομέα, είναι σύνηθες σε προβλήματα περίθλασης. Ιδιαίτερη προσοχή έχει δοθεί από πολλούς ερευνητές στον τομέα της οπτικής, της ακουστικής, της σκέδασης ελαστικών κυμάτων, των επιταχυντών καθώς και στην θεωρία των κεραιών. Οι Τεχνικές Wiener-Hopf μας έχουν δώσει τη δυνατότητα να λύσουμε τέτοιου είδους ολοκληρωτικές εξισώσεις, όπου οι δύο περιοχές είναι γειτονικές και ημι-άπειρες. Δυστυχώς οι τεχνικές Wiener-Hopf δεν εφαρμόζονται, αν μία από τις περιοχές είναι πεπερασμένη, όπως για παράδειγμα στην περίπτωση των πραγματικών σκεδαστών, όπως οι ίριδες, οι κεραιές, και οι σωλήνες ολίσθησης σε επιταχυντές. Μια γενική μέθοδος για την επίλυση τέτοιων διπλών αναπόσπαστων εξισώσεων συζητείται και εφαρμόζεται σε μια συγκεκριμένη περίπτωση όπου εμφανίζεται η εξίσωση Hallén κυλινδρικής κεραιάς. Το 1897 ο Rocklington [3] παρουσίασε μία μονοδιάστατη ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση για το ρεύμα. Ο Hallén με σκοπό να προσδιορίσει επακριβώς το ρεύμα της κεραιάς [2], αρκετά χρόνια αργότερα, απέδειξε ότι το ρεύμα κατά μήκος μιας λεπτής γραμμικής κεραιάς ικανοποιεί μία ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους. Η πρώτη εργασία του σχετικά με το θέμα αυτό πηγαίνει πιθανώς πίσω το 1938. Αυτή του η εξίσωση, επέτρεψε να δείξουμε ότι σε λεπτό σύρμα το τρέχον ρεύμα κατανομής είναι περίπου ημιτονοειδές και διαδίδεται σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός.

Γενικά στον ηλεκτρομαγνητισμό υπάρχουν δύο βασικές μέθοδοι για την επίλυση των προβλημάτων. Η πρώτη είναι η δημιουργία μιας συγκεκριμένης υπολογιστικής μεθόδου για κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου χρησιμοποιούμε όλα τα δεδομένα του προβλήματος προκειμένου να το απλοποιήσουμε και εν συνεχεία λύνουμε το απλοποιημένο πρόβλημα και καταλήγουμε πιθανότατα σε κάποιο αποτέλεσμα πολύ κοντά στο πραγματικό. Η δεύτερη μέθοδος αφορά τη δημιουργία γενικών λύσεων οι οποίες καλύπτουν ένα μεγάλο εύρος προβλημάτων, αλλά όχι αναγκαστικά το δικό μας συγκεκριμένο πρόβλημα ή κάποιο άλλο ειδικά σχεδιασμένο πρόβλημα, ή πολύ πιθανόν να μην είναι τόσο συγκεκριμένα αποτελεσματική.

Οι αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης των ολοκληρωτικών εξισώσεων, ως γενικές λύσεις ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων, βασίζονται στον καταμερισμό της περιοχής ενδιαφερόντων μας σε μικρότερα μέρη με ολόδια γεωμετρικά σχήματα. Ύστερα, αφού διατυπώσουμε και εφαρμόσουμε τη μέθοδο μας χωριστά σε κάθε μέρος, στο τέλος όταν τα ξανασυνθέσουμε από τον αρχικό μας διαμερισμό, λαμβάνουμε τη συνολική λύση του αρχικού μας προβλήματος. Συνήθως σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, οι επιθυμητές παράμετροι τις οποίες αναζητούμε είναι άλλοτε την επιφανειακή ή την χωρική πυκνότητα φορτίου, άλλοτε την επιφανειακή ή την χωρική πυκνότητα ρεύματος και άλλοτε τον προσδιορισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Άλλες παράμετροι του προβλήματος όπως η χωρητικότητα, η αντίσταση εισόδου, το διάγραμμα ακτινοβολίας, οι απώλειες, η συχνότητα αποκοπής, κ.λπ., δύναται να βρεθούν από αυτά.

Η κυριότερη και βασικότερη διατύπωση από όλες τις αριθμητικές και υπολογιστικές μεθόδους στα ηλεκτρομαγνητικά πεδία, είναι αυτή των εξισώσεων του Maxwell. Στις περισσότερες των περιπτώσεων χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικές εξισώσεις εξαγόμενες από τις αρχικές εξισώσεις του Maxwell και διαμερίζοντας την περιοχή του ολοκληρώματος σε μικρότερα μέλη με παρόμοια γεωμετρικά σχήματα, μετατρέπουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις σε εξισώσεις πινάκων, οι οποίες δύνανται να επιλυθούν ευκολότερα, ειδικά με τη χρήση υπολογιστικών αλγορίθμων.

Επομένως, το πρώτο βήμα στην επίλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων με τη μέθοδο των ροπών είναι η διατύπωση του προβλήματος σε όρους ολοκληρωτικών εξισώσεων. Γενικά διατυπώνοντας κανείς ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα συναντάει τρεις τύπους ολοκληρωτικών εξισώσεων: 1) Ολοκληρωτικές εξισώσεις μαγνητικού πεδίου (magnetic field integral equation - MFIE), 2) Ολοκληρωτικές εξισώσεις ηλεκτρικού πεδίου (magnetic field integral equation -

CFIE) και 3) Ολοκληρωτικές εξισώσεις ηλεκτρομαγνητικού πεδίου (compound field integral equation – CFIE). Και οι τρεις τύποι των ανωτέρω ολοκληρωτικών εξισώσεων προέρχονται εν δυνάμει από τις εξισώσεις του Maxwell. Μετά τη διατύπωση του προβλήματος, εκτελούμε σπάσιμο της περιοχής του αντικειμένου που μας ενδιαφέρει σε μικρότερες, παράλληλα δε διακριτοποιούμε τη σχετιζόμενη ολοκληρωτική εξίσωση. Αυτό το λεγόμενο «Meshing», εφαρμόζεται με διαφορετικούς τρόπους ανάλογα το πρόβλημα και τα δεδομένα. Επιλέγουμε τον κάθε τρόπο, ανάλογα κυρίως από τον τύπο του αντικειμένου καθώς και από το γεωμετρικό του σχήμα.

Προφανώς, οι αριθμητικές λύσεις, σε αντίθεση με τις αναλυτικές σε προβλήματα ηλεκτρομαγνητισμού και ειδικά εκείνες στις οποίες ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγάλος, μας ωθούν αναγκαστικά στη χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή και στα αντίστοιχα προγράμματα για την επίλυση των δύσκολων μαθηματικών. Σε αυτή την εργασία, το MATLAB ως ένα ισχυρό μαθηματικό πρόγραμμα θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των επιθυμητών αγνώστων και για την απεικόνιση των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων.

1.2 Εφαρμοσμένες Αριθμητικές Μέθοδοι

Στα περισσότερα εκ των προβλημάτων των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, αρχικά υπολογίζουμε τη χωρική πυκνότητα ή την πυκνότητα ρεύματος και ύστερα υπολογίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, όμως ορισμένες - σπανιότερα - φορές προτεραιότητα δίνουμε στην εύρεση του πεδίου πρώτα. Για παράδειγμα στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων (Finite Element Method) πρώτα υπολογίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ύστερα εξάγουμε τις υπόλοιπες παραμέτρους, ενώ στη μέθοδο των ροπών αρχικά υπολογίζουμε τη πυκνότητα ρεύματος ή του φορτίου και εν συνεχεία όλα τα υπόλοιπα. Θα μελετήσουμε την κατανομή ρεύματος σε μια γραμμική κεραία τροφοδοτούμενη στο κέντρο της. Η κεραία αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως ο θεμελιώδης τύπος κεραίας εκπομπής και προσεγγίζεται από ένα θεωρητικό μοντέλο που ονομάζεται «σωληνοειδές δίπολο».

Σε επόμενο κεφάλαιο, αφού εισάγουμε την μέθοδο των ροπών θα επιλύσουμε δύο συγκεκριμένα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα, αυτά της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallén και του Rocklington. Για την επίλυση των δύο αυτών ολοκληρωτικών εξισώσεων θα χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικές κλάσεις της μεθόδου των ροπών, οι οποίες όπως προαναφέραμε στην περίληψη είναι η μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις (Galerkin method pulse functions – GMPF) και η τεχνική της σημειακής ισότητας με τριγωνικές συναρτήσεις (point-matching triangular functions – PTMF). Εν συνεχεία θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και με γραφικές παραστάσεις, ενώ οι κώδικες παρατίθενται σε Matlab στο τέλος της εργασίας.

1.3 Βελτιστοποίηση της λύσης

Με στόχο τον ταχύτερο υπολογισμό των αποτελεσμάτων μας, θα χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο της ταχείας πολυπολικής μεθόδου (Fast Multipole Method-FMM). Αυτός ο τρόπος επίλυσης δύναται να επιταχύνει τον υπολογισμό των αριθμητικών πράξεων, όπως το εξωτερικό γινόμενο πινάκων, καθώς και την επίλυση γραμμικού συστήματος το οποίο προκύπτει στο πρόβλημά μας όταν εφαρμόσουμε την μέθοδο Galerkin ή κάποια παρόμοια αριθμητική μέθοδο. Το αποτέλεσμα της χρήση της FMM είναι πως κερδίζουμε σε χρόνο, μνήμη και πολυπλοκότητα υπολογισμών. Ταχύτερα αποτελέσματα λαμβάνουμε ακόμα όταν εφαρμόζουμε συγκεκριμένες μεθόδους επιτάχυνσης σύγκλισης (convergence acceleration methods - CAM) οι οποίες έχουν προταθεί από τον κύριο Φικιώρη [2] και μας δίνουν επίσης βέλτιστα αποτελέσματα με εξοικονόμηση χρόνου και μνήμης.

1.4 Σκοπός της εργασίας

Στόχος μας είναι η επίλυση της χρονικά αρμονικής ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallén και του Pocklington εφαρμόζοντας τη μέθοδο Galerkin (που αποτελεί τύπο της μεθόδου των ροπών) αλλά και η εύρεση της κατανομής του ρεύματος κατά μήκος της γραμμικής κεραίας. Ακολούθως βελτιστοποιώντας την λύση μας με τη χρήση του αλγορίθμου FMM επιτυγχάνουμε τη μείωση της πολυπλοκότητας από $N \times N$ σε $N \log N$. Τέλος, ενώ στην πραγματικότητα υπάρχουν διάφοροι τύποι δομών, στις οποίες χρησιμοποιούνται απομονωτικά υλικά, όπως τα διηλεκτρικά, η ανάλυση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων σε αντίστοιχες δομές, απαιτεί τη χρήση μιας άλλης τάξης και φόρμουλας της μεθόδου των ροπών, την οποία και δεν θα αναλύσουμε στην παρούσα εργασία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΡΕΥΜΑΤΟΣ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΕΡΑΙΑ ΜΕΣΩ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

2.1 ΚΥΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ MAXWELL

Η Θεωρία των κεραιών βασίζεται κυρίως στις εξισώσεις του Maxwell οι οποίες είναι:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{B} = - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

όπου B η μαγνητική επαγωγή και H η ένταση του μαγνητικού πεδίου, ενώ D είναι η διηλεκτρική μετατόπιση. Οι πηγές των πεδίων που δημιουργούνται είναι αφ' ενός η χωρική πυκνότητα φορτίου ρ και αφ' ετέρου η χωρική πυκνότητα ρεύματος \vec{J} με χρονική εξάρτηση.

Τα ανωτέρω ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη που διασυνδέονται μέσω των ανωτέρω εξισώσεων είναι διανυσματικές και βαθμωτές συναρτήσεις του χρόνου και του χώρου. Η ανάλυση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων διευκολύνεται μέσω ορισμένων συναρτήσεων οι οποίες είναι γνωστές και ως συναρτήσεις δυναμικού.

Από την (2.2) μπορούμε να εκφράσουμε τη μαγνητική επαγωγή \vec{B} ως περιστροφή μιας βοηθητικής διανυσματικής συνάρτησης \vec{A} που ονομάζουμε **διανυσματικό δυναμικό**. Θα είναι δηλαδή :

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.6)$$

Η (1.3) από την (1.6) γίνεται:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Παρατηρούμε τώρα πως η διανυσματική συνάρτηση $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ έχει μηδενική περιστροφή για κάθε σημείο του χώρου και επομένως μπορεί να εκφρασθεί ως κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης φ η οποία ονομάζεται βαθμωτό δυναμικό.

Έτσι η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} εκφράζεται τώρα με τη βοήθεια συναρτήσεων δυναμικού υπό τη μορφή :

$$\vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Σε ένα ομογενές ιστροπικό μέσο ισχύει :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.9)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.10)$$

όπου ϵ και μ διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου αντίστοιχα. Επιστρέφοντας στις εξισώσεις του Maxwell παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις (2.12) και (2.13) που συνδέουν τις δύο προαναφερθείσες συναρτήσεις δυναμικού:

Από (2.1) έχουμε :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho && \implies \\ \nabla \cdot \epsilon \vec{E} &= \rho && \implies \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} && (2.11) \end{aligned}$$

Από (2.8) τώρα παίρνουμε:

$\nabla \vec{E} = -\nabla^2 \varphi - \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ η οποία τώρα λόγω της (2.11) γίνεται :

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.12)$$

Από (2.4) μέσω της (2.6), της (2.10) θα έχουμε :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \implies$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{J} + \mu \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \implies$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \left[-\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \quad \implies$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \left[-\nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \quad \implies$$

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} - \mu \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Στις σχέσεις (2.12) και (2.13) εάν χρησιμοποιήσουμε τη συνθήκη Lorentz

($\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}$), παίρνουμε :

$$\nabla^2 \varphi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (2.15)$$

Οι ανωτέρω δύο εξισώσεις (2.14) και (2.15) έχουν ως λύσεις κυματικές συναρτήσεις. Ενδεικτικά και κυρίως για λόγους φυσικής ερμηνείας, εξετάζεται η απλή περίπτωση χώρου χωρίς πηγές. Τότε η (2.14) γράφεται:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.16)$$

όπου c η ταχύτητα του φωτός στο μέσο διάδοσης. Η πλέον απλή περίπτωση για τη λύση της εξίσωσης (2.16) προκύπτει όταν το βαθμωτό δυναμικό φ είναι συνάρτηση

μίας μόνο χωρικής μεταβλητής, δηλαδή $\varphi = \varphi(z,t)$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της (2.16) είναι της μορφής:

$$\varphi(z,t) = f(t-z/c) + g(t+z/c) \quad (2.17)$$

όπου οι f, g είναι διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f(t-z/c)$ είναι κυματική συνάρτηση η οποία αντιπροσωπεύει οδεύον κύμα, κατά τη θετική φορά του άξονα z , ενώ η $g(t+z/c)$ αντιπροσωπεύει κύμα το οποίο οδεύει κατά την αρνητική φορά του άξονα z .

Οι γενικές λύσεις των δύο ανωτέρω εξισώσεων (2.14) και (2.15) προκύπτουν υπό τη μορφή χωρικών ολοκληρωμάτων σε πλήρη αντιστοιχία με τις λύσεις των εξισώσεων Poisson που προκύπτουν από τις (2.14) και (2.15) στη στατική περίπτωση ($\partial/\partial t = 0$). Θα είναι [5]:

$$\varphi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{R} \rho(x',y',z',t - \frac{R}{c}) dV' \quad (2.18)$$

$$\vec{A}(x,y,z,t) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{1}{R} \vec{J}(x',y',z',t - \frac{R}{c}) dV' \quad (2.19)$$

Όπου $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ η απόσταση μεταξύ του σημείου $\vec{r} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ όπου υπολογίζεται το δυναμικό και του σημείου $\vec{r}' = x'\vec{x} + y'\vec{y} + z'\vec{z}$ που καθορίζει τη θέση του στοιχειώδους όγκου $dV' = dx' dy' dz'$.

Στη συνέχεια η ανάλυση θα περιορισθεί στην περίπτωση πηγών και πεδίων που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Ο περιορισμός αυτός διευκολύνει ιδιαίτερα την ανάλυση των διαφόρων ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων μέσω της εισαγωγής φασιθετών, δηλαδή σημειακών συναρτήσεων οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τον χρόνο. Η σχέση που υιοθετείται για τη σύνδεση του φασιθέτη H ενός μεγέθους (που θα συμβολίζεται με κεφαλαίο) και της αντίστοιχης στιγμιαίας τιμής $h(t)$ είναι:

$$h(x,y,z,t) = \text{Re}\{H(x,y,z,t)e^{j\omega t}\} \quad (2.20)$$

όπου $\omega = 2\pi f$ η κυκλική συχνότητα του ημιτονοειδούς μεγέθους.

Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε πως η κεραία μας βρίσκεται στο κενό και οπότε θα ισχύουν οι σχέσεις :

$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$ όπου B η μαγνητική επαγωγή και H η ένταση του μαγνητικού πεδίου

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}$ όπου D η διηλεκτρική μετατόπιση και E η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου

Η μαγνητική διαπερατότητα μ_0 και η διηλεκτρική σταθερά του κενού ϵ_0 συνδέονται με την ταχύτητα του φωτός και με την αντίσταση του κενού χώρου σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \cdot \epsilon_0}} \text{ και } \zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \text{ αντίστοιχα.}$$

Γενικά στην εργασία μας θεωρούμε πως $c=3 \cdot 10^8$ m/s και $\zeta_0= 376.73\Omega$. Εάν πρόκειται για ισότροπο ομογενή χώρο με μαγνητική διαπερατότητα μ και διηλεκτρική σταθερά ϵ , τα παραπάνω μεγέθη τροποποιούνται αναλόγως και συνεχίζουμε όπως δείξαμε πιο πάνω.

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής πηγών και πεδίων (μορφή $e^{j\omega t}$) διέπεται από τις εξισώσεις του Maxwell οι οποίες έπειτα από μετασχηματισμό Fourier, λαμβάνουν την ακόλουθη σημειακή μορφή:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (\text{Νόμος του Gauss για τον Ηλεκτρισμό})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{Νόμος του Gauss για τον Μαγνητισμό})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (\text{Νόμος Faraday-Maxwell})$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (\text{Νόμος Ampere-Maxwell})$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \rho \quad (\text{Εξίσωση Συνέχειας})$$

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις δυναμικού όπως αποδείξαμε πιο πάνω καταλήγουμε στις εξής τέσσερις εξισώσεις:

$$\nabla^2 \vec{A} - k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.22)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.23)$$

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - j\omega \vec{A} \quad (2.24)$$

Στις ανωτέρω σχέσεις, k είναι ο κυματικός αριθμός στο μέσο διάδοσης με :

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega/c \quad (2.25)$$

Από το θεώρημα του Helmholtz στη διανυσματική ανάλυση, είναι γνωστό ότι ένα διάνυσμα \vec{A} είναι καθορισμένο κατά μοναδικό τρόπο, αν γνωρίζουμε την περιστροφή ($\nabla \times \vec{A}$) και την απόκλιση ($\nabla \cdot \vec{A}$) του. Η πρώτη εξασφαλίζεται με την συνθήκη ορισμού και η δεύτερη με την συνθήκη Lorentz. Με την παραπάνω επιλογή των συναρτήσεων δυναμικού, κάθε μία από τις συναρτήσεις-λύσεις ικανοποιεί την αντίστοιχη κυματική εξίσωση. Από αυτές έπεται ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος, ενώ το βαθμωτό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών φορτίου. Οι δύο αυτές κατανομές συνδέονται μέσω της εξίσωσης της συνέχειας, γεγονός που επιβεβαιώνει την αλληλεξάρτηση των \vec{A} και ϕ μέσω της συνθήκης Lorentz.

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\phi \quad (2.26)$$

Με χρήση της συνθήκης αυτής και της σχέσης (3) προκύπτει η έκφραση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} συναρτήσει μόνο του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} :

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \left(\frac{\omega}{k^2}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (2.27)$$

Οι γενικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων (2.21) και (2.22) για το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό, στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής, είναι αντίστοιχα:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (2.28)$$

$$\vec{A}(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (2.29)$$

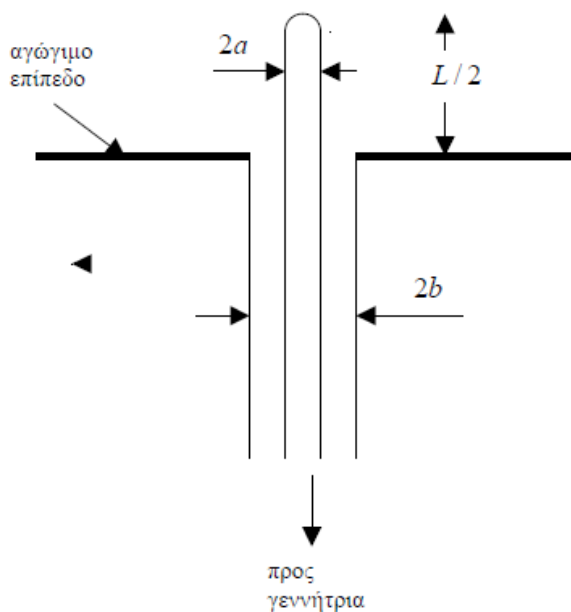
όπου $\vec{r} = (x, y, z)$ είναι το διάνυσμα παρατήρησης και $\vec{r}' = (x', y', z')$ είναι το διάνυσμα θέσης της πηγής και R είναι η απόσταση της θέσης της πηγής από την παρατήρηση, δηλαδή:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.30)$$

2.2 Πραγματικές κεραιές και το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου

Μία πραγματική κεραιά εικονίζεται στο Σχήμα 1. Ο εξωτερικός αγωγός, διαμέτρου $2b$, ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς καταλήγει σε αγωγίμο επίπεδο (ground plane), ενώ ο εσωτερικός αγωγός, διαμέτρου $2a$, εξέρχεται και σχηματίζει την μονοπολική κεραιά μήκους $L/2$. Η κεραιά μας είναι *λεπτή* με την έννοια ότι $a \ll L$, $ka \ll 1$ όπου k ο κυματαριθμός του ελευθέρου χώρου.

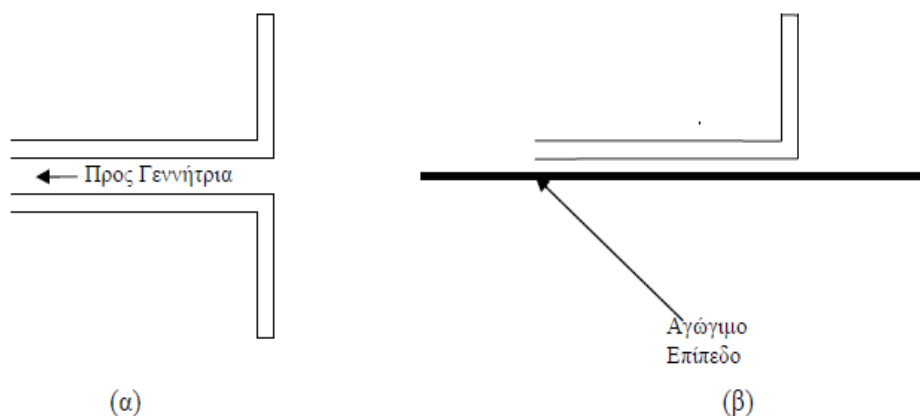
Με την θεωρία ειδώλων (τουλάχιστον για μικρά $b - a$), η όλη διάταξη είναι ισοδύναμη με μία διπολική, κεντρικά τροφοδοτούμενη γραμμική κεραιά μήκους L και διαμέτρου $2a$. Η συγκεκριμένη κεραιά του σχήματος έχει σφαιρικό καπάκι, αλλά συναντά κανείς και κεραιές με επίπεδο καπάκι, η και χωρίς καπάκι.



Σχήμα 2.1: Ένας απλός τύπος πραγματικής κεραιάς

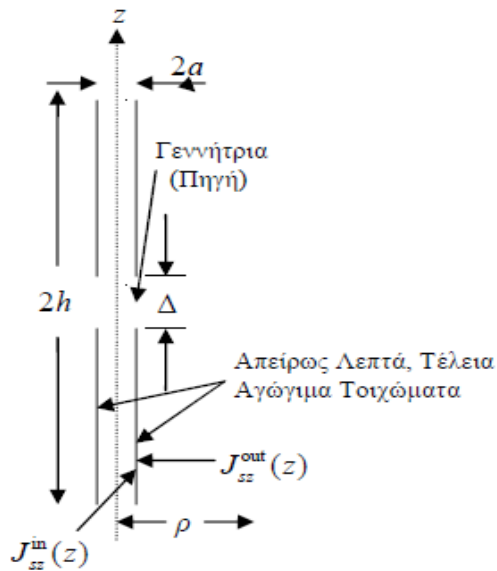
Η διάταξη του Σχήματος 2.1 είναι από τις πιο απλές που βρίσκουμε στην πράξη. Ακόμα και για την διάταξη αυτή όμως, η κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων Maxwell δεν είναι εύκολη υπόθεση [6]. Επιπλέον, στο Σχήμα 2.1 η κεραιά και η τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς αποτελούν ένα σύνθετο σύστημα, ενώ

συνήθως σκεφτόμαστε δύο ανεξάρτητα συστήματα. Με άλλα λόγια, συνήθως αγνοούμε την αλληλεπίδραση της κεραίας με την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς. (Αυτή η απλοποίηση καθίσταται απαραίτητη στην περίπτωση στοιχειοκεραιών πολλών στοιχείων όπου είναι πρακτικά αδύνατον να ληφθούν υπόψη όλες οι αλληλεπιδράσεις).



Σχήμα 2.2: Δύο ακόμα πραγματικές κεραίες, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δισύρματη γραμμή μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω σε αγώγιμο επίπεδο.

Για τους πιο πάνω λόγους, θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε ένα απλούστερο θεωρητικό μοντέλο, το λεγόμενο «σωληνοειδές δίπολο». Το σωληνοειδές δίπολο χρησιμεύει για την μοντελοποίηση όχι μόνον της κεραίας του σχήματος 1, αλλά και άλλων πραγματικών κεραιών, όπως π.χ. της διπολικής κεραίας του σχήματος 2(α) που τροφοδοτείται από δισύρματη γραμμή μεταφοράς, καθώς και της ισοδύναμης διάταξης του σχήματος 2(β) πάνω από αγώγιμο επίπεδο.



Σχήμα 2.3: Το σωληνοειδές δίπολο. Η γεννήτρια δ-συνάρτησης διατηρεί στο απειροστά μικρό διάκενο που βρίσκεται στο $z=0$ διαφορά δυναμικού V .

Το σωληνοειδές δίπολο φαίνεται αγωγίμο στο Σχήμα 1.3. Πρόκειται για έναν τέλειο αγωγίμο μεταλλικό σωλήνα με απείρως λεπτά τοιχώματα. Στο κέντρο $z=0$ του σωλήνα, υπάρχει ένα απειροστά μικρό διάκενο Δ (infinitesimal gap) στο οποίο βρίσκεται η λεγόμενη γεννήτρια δ-συνάρτησης (delta-function generator). Αυτή διατηρεί ένα δυναμικό V στο διάκενο, έτσι ώστε το βαθμωτό $\Phi(\rho, z)$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Phi(a, 0^+) - \Phi(a, 0^-) = V \quad (2.31)$$

ή ισοδύναμα

$$\Phi(a, \Delta/2) - \Phi(a, -\Delta/2) = V \quad (2.32)$$

Έτσι η z -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου $E_z(\rho=a, z)$ πάνω στον τέλειο αγωγίμο σωλήνα θα είναι παντού μηδέν εκτός από το $z=0$ όπου θα απειρίζεται σύμφωνα με την σχέση:

$$E_z(a, z) = -V\delta(z), \quad -L/2 < z < L/2 \quad (2.33)$$

Η (2.33) προκύπτει από την (2.31) και την (2.24) με γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(z)$ του Dirac.

Αναπτύσσεται ένα ολικό επιφανειακό ρεύμα \vec{K} , του οποίου η φ-συνιστώσα είναι μηδέν λόγω συμμετρίας. Η z-συνιστώσα K_z είναι το άθροισμα ενός επιφανειακού ρεύματος $K_{z,out}(z)$ στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, αλλά και ενός ρεύματος $K_{z,in}(z)$ στο εσωτερικό του. Το ολικό ρεύμα ορίζεται ως:

$$I(z) = 2\pi a [K_{z,out}(z) + K_{z,in}(z)], \quad -L/2 < z < L/2 \quad (2.34)$$

Λόγω συμμετρίας, το $I(z)$ είναι άρτια συνάρτηση. Επειδή τα επιφανειακά ρεύματα είναι γενικά συνεχή, στο άκρο $z = L/2$ του σωληνοειδούς διπόλου θα έχουμε $K_{z,out}(L/2) = -K_{z,in}(L/2)$ οπότε:

$$I(\pm L/2) = 0 \quad (2.35)$$

δηλαδή το ρεύμα $I(z)$ μηδενίζεται στα άκρα του σωλήνα. Σε ότι ακολουθεί, θέλουμε να προσδιορίσουμε το $I(z)$ μέσω των εξισώσεων Maxwell και των οριακών συνθηκών (2.33) και (2.35). Θα δούμε στην επόμενη ενότητα ότι το πρόβλημα ανάγεται στην επίλυση ολοκληρωτικής εξίσωσης [καθώς και της επιπλέον συνθήκης (2.35)].

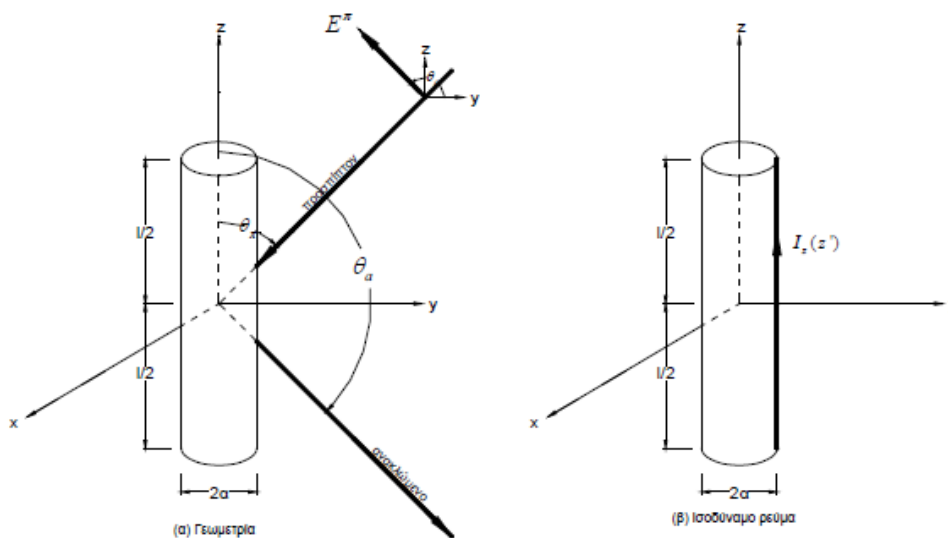
Έχοντας διατυπώσει με ακρίβεια το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε, γεννιέται άμεσα το ερώτημα: Γιατί να χρησιμοποιήσουμε το σωληνοειδές δίπολο ως μοντέλο; Δεν υπάρχουν άλλα μοντέλα πιο κοντά στις πραγματικές κεραίες; Η απάντηση είναι ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις που θα βρούμε είναι ακριβείς για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Αυτό είναι το πλεονέκτημα του σωληνοειδούς διπόλου και είναι καθαρά θεωρητικής φύσεως. Για άλλα μοντέλα, η για «πραγματικές» κεραίες, οι ολοκληρωματικές μας εξισώσεις θα είναι προσεγγιστικές. Δηλαδή, για λεπτές κεραίες, η ύπαρξη η μη των καπακιών, η ακριβής φύση της τροφοδοσίας κτλ. είναι, τελικά, λεπτομέρειες που δεν παίζουν ιδιαίτερο ρόλο και είναι γενικά σωστό να θεωρούμε την κεραία ξεχωριστά από την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς. Εδώ ακριβώς οφείλεται η επιτυχία του απλοποιημένου μας μοντέλου.

2.3 Ολοκληρωτική Εξίσωση Pocklington για τον ακριβή πυρήνα

Αρχικά θεωρούμε ένα λεπτό καλώδιο κεραίας όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4 όπου ένα τυχαίο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^i(\mathbf{r})$ προσκρούει στην επιφάνειά της. Ως εκ τούτου δημιουργείται μια γραμμική πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_s στην επιφάνειά της, η οποία ακτινοβολεί και παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο που ονομάζεται ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^s(\mathbf{r})$. Συνεπώς, σε κάθε σημείο του χώρου, το ολικό ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}^t(\mathbf{r})$ θα είναι το διανυσματικό άθροισμα του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου, δηλαδή:

$$\vec{E}^t(\mathbf{r}) = \vec{E}^i(\mathbf{r}) + \vec{E}^s(\mathbf{r}) \quad (2.36)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το ηλεκτρικό πεδίο που ακτινοβολείται από το δίπολο έχει μία ακτινική E_ρ και μία εφαπτομενική συνιστώσα E_z . Στην περίπτωση που το σημείο παρατήρησης βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της λεπτής και τέλεια αγωγίμης κεραίας, δηλαδή $\rho=a$, το ολικό εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο θα είναι μηδενικό. Επίσης, η εφαπτομενική στην επιφάνεια $\rho=a$ συνιστώσα E_z του ηλεκτρικού πεδίου, θα είναι συνεχής, οπότε λαμβάνουμε:



Σχήμα 2.4: Πλάγια πρόσπτωση ομοιόμορφου επίπεδου κύματος σε αγωγίμο σωλήνα

$$E_z^t(\rho = \alpha) = E_z^i(\rho=\alpha) + E_z^s(\rho=\alpha) = 0 \quad ==>$$

$$E_z^i(\rho=\alpha) = -E_z^s(\rho=\alpha) \quad (2.37)$$

Όταν η κεραία εκπέμπει, το πεδίο δημιουργείται από μια πηγή τάσης η οποία είναι συνδεδεμένη με τους ακροδέκτες του διπόλου στο κέντρο. Υπάρχουν τρεις τρόποι για την μοντελοποίηση της πηγής του προβλήματός μας. Η πρώτη ονομάζεται Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτηση – ΓΔΣ (Delta Gap Generator - DGG), η οποία αναφέρεται σε μια ιδανική γεννήτρια τοποθετημένη στο ένα διάκενο μεταξύ των βραχιόνων της κεραίας. Η δεύτερη καλείται Γεννήτρια Πεπερασμένου Διακένου – ΓΠΣ (Finite Gap Generator - FGG) και τέλος η τρίτη ονομάζεται Γεννήτρια Magnetic Frill – ΓΜΦ (Magnetic Frill Generator - MFG), η οποία είναι μία πολύ λεπτή δισκοειδής γεννήτρια, η οποία τοποθετείται στο κέντρο της κεραίας. Από τη σχέση 2.27 έχουμε πως το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο το οποίο παράγεται από την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E}^s(\mathbf{r}) = -j\omega\vec{A} - \left(\frac{\omega}{k^2}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -j\frac{1}{\epsilon\mu\omega}(k^2 \cdot \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})) \quad (2.38)$$

Για παρατηρήσεις που γίνονται πάνω στην αγωγίμη επιφάνεια, απαιτείται μόνο η z συνιστώσα του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου, η οποία γράφεται:

$$E_z^s(\mathbf{r}) = -j\frac{1}{\epsilon \cdot \mu \cdot \omega}(k^2 \cdot \vec{A}_z + \frac{\partial^2 \vec{A}_z}{\partial z^2}) \quad (2.39)$$

Επειδή η \vec{J}_s αντιπροσωπεύει γραμμική πυκνότητα (m^{-1}) το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.29) γίνεται επιφανειακό. Κατά συνέπεια, η z-συνιστώσα του διανυσματικού δυναμικού, θα είναι:

$$A_z(x,y,z) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J}_s(x',y',z') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (2.40)$$

όπου $dS' = \alpha \cdot d\varphi' \cdot dz'$ το στοιχειώδες εμβαδόν στην παράπλευρη επιφάνεια του σωληνοειδούς διπόλου και α η ακτίνα της κυλινδρικής κεραίας. Έτσι λοιπόν, παίρνουμε:

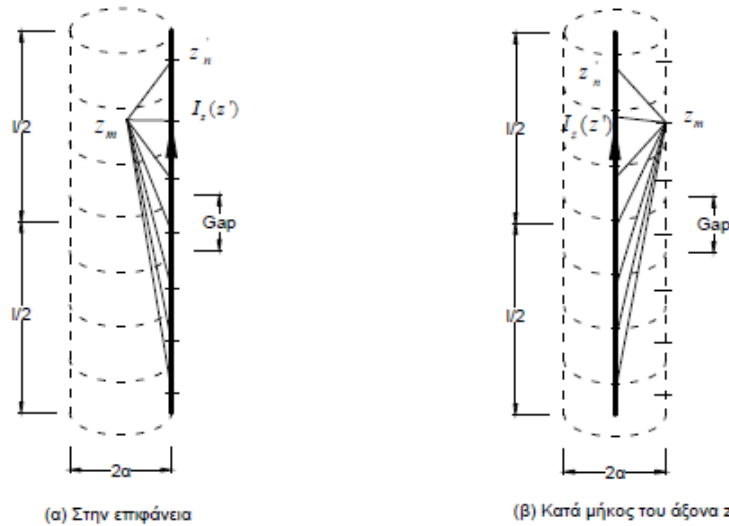
$$A_z(\rho,\varphi,z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{z'=-h}^h \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \vec{J}_z(\alpha, \varphi', z') \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \alpha \cdot d\varphi' \cdot dz' \quad (2.41)$$

Εάν τώρα ο αγωγός είναι αρκετά λεπτός, τότε η χωρική πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_z είναι ανεξάρτητη της αζιμουθιακής γωνίας και επομένως θεωρούμε πως :

$$2 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot \vec{J}_z = I_z(z') \quad \implies$$

$$\vec{J}_z = \frac{I_z(z')}{2 \cdot \pi \cdot \alpha} \quad (2.42)$$

Στη θεώρηση αυτή, το $I_z(z')$ είναι το ισοδύναμο γραμμικό ρεύμα που βρίσκεται σε ακτινική απόσταση $\rho = \alpha$ από τον άξονα z , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.5.



Σχήμα 2.5: Κατάτμηση διπόλου και το αντίστοιχο ρεύμα του

Έτσι η σχέση (2.41) γίνεται:

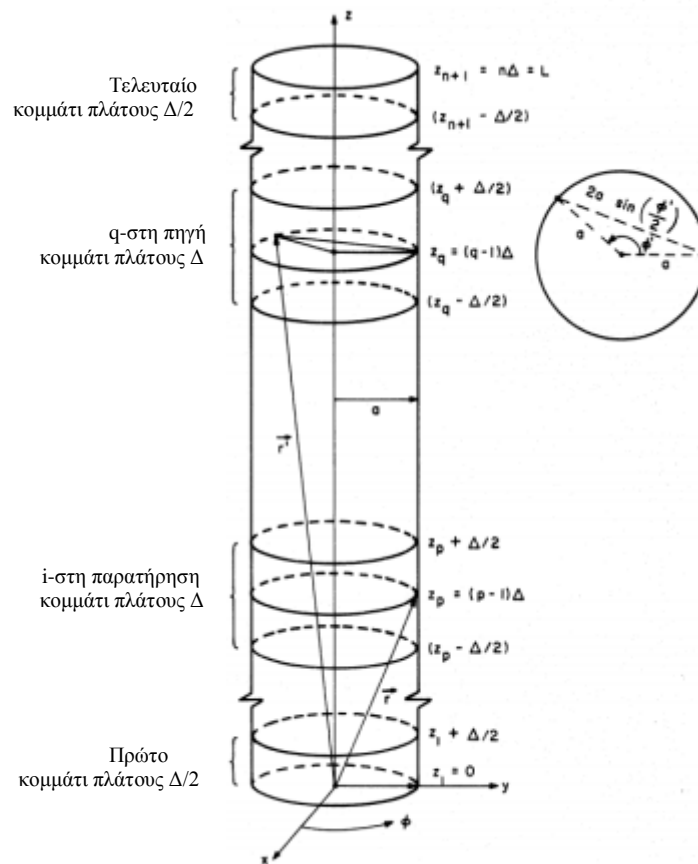
$$A_z(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{z'=-h}^h \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{R} \cdot \alpha \cdot d\varphi' \right) dz' \quad (2.43)$$

Όπου $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ (το ίδιο με τη σχέση 2.30) και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μετασχηματισμού $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ από τις καρτεσιανές συντεταγμένες σε πολικές θα έχουμε:

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad \implies$$

$$R = \sqrt{(\rho \cos \varphi - \alpha \sin \varphi')^2 + (\rho \cos \varphi - \alpha \sin \varphi')^2 + (z - z')^2} \quad \implies$$

$$R = \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2\rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2} \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.6: Γεωμετρία του προβλήματος που δείχνει την τμηματοποίηση για την κεραία διπόλου και την οριοθέτηση αυτής.

Ακόμη λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας του διπόλου θα έχουμε $\partial/\partial\phi=0$, τα μετρούμενα πεδιακά μεγέθη θα είναι ανεξάρτητα της γωνίας ϕ , και επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε πως $\phi=0^\circ$. Με τη θεώρηση αυτή η σχέση (2.43) γίνεται:

$$A_z(\rho=\alpha, \phi, z) = \mu \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') \left(\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \alpha} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \cdot \alpha \cdot d\phi' \right) dz' \quad \implies$$

$$A_z(\rho=\alpha, \phi, z) = \mu \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') K(z, z') dz' \quad (2.45)$$

$$\text{Όπου } K(z, z') = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{\phi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \quad (2.46)$$

είναι ο «πυρήνας» της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Τέτοιου είδους πυρήνες, ονομάζονται και «πυρήνες διαφοράς» («difference kernels»).

Και για $\rho=\alpha$ και $\varphi=0$ από την (2.44) θα έχουμε :

$$R = \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2\rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2} \quad \implies$$

$$R = \sqrt{2\alpha^2(1 - \cos \varphi') + (z - z')^2} \quad \implies$$

$$R = \sqrt{4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + (z - z')^2} \quad (2.47)$$

Έτσι η (2.46) γίνεται:

$$K_{\text{ex}}(z - z') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + (z-z')^2}}{\sqrt{4\alpha^2 \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + (z-z')^2}} d\varphi' \quad (2.48)$$

είναι ο «πυρήνας» της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Τέτοιου είδους πυρήνες, ονομάζονται και «πυρήνες διαφοράς» («difference kernels»).

Και χρησιμοποιώντας αυτό το R της σχέσης (2.47) και το διανυσματικό δυναμικό A_z της (2.45) στην σχέση (2.39) παίρνουμε:

$$E_z^s(r) = -j \frac{1}{\varepsilon \cdot \omega} (k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') K(z, z') dz' \quad (2.49)$$

Χρησιμοποιώντας την οριακή συνθήκη συνέχειας των εφαπτομενικών συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου στην τέλεια αγωγίμη επιφάνεια του διπόλου, θα λάβουμε:

$$E_z^i(\rho=\alpha) = -E_z^s(\rho=\alpha) \text{ που έχουμε από την (2.37) και έτσι} \quad \implies$$

$$(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') K(z, z') dz' = -j \cdot \varepsilon \cdot \omega \cdot E_z^i(\rho=\alpha) \quad (2.50)$$

Και στο κενό θα είναι:

$$(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') K(z, z') dz' = -j \cdot \varepsilon_0 \cdot \omega \cdot E_z^i(\rho=\alpha) \quad (2.51)$$

Η (2.49) με τη χρήση των σχέσεων $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = 2\pi/\lambda$ και $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 376.73 \text{ Ohm}$ η χαρακτηριστική εξίσωση (κυματική) αντίσταση του κενού - του μέσου που περιβάλλει την κεραία, γίνεται:

$$(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z')K(z, z')dz' = -\frac{j \cdot k}{\zeta_0} \cdot E_z^i(\rho=\alpha) \quad (2.52)$$

Η παραπάνω εξίσωση (2.50) καλείται **ολοκληρωτική εξίσωση του Pocklington** και με την επίλυσή της υπολογίζουμε το ισοδύναμο ρεύμα γραμμικής κατανομής, άρα και της πυκνότητας ρεύματος στην επιφάνεια του διπόλου, με γνωστό το προσπίπτον πεδίο στην επιφάνεια του. Εάν τώρα θεωρήσουμε πως το δίπολο είναι αρκετά λεπτό, τόσο ώστε να είναι $\alpha \ll \lambda$ (όπου λ το μήκος κύματος του πεδίου) τότε μπορούμε να θεωρήσουμε από την (2.46) πως $K(z, z') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}$ και έτσι από την (2.50) παίρνουμε:

$$\int_{z'=-h}^h I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} [(1 + jkR)(2R^2 - 3\alpha^2) + k^2\alpha^2 R^2] dz' = -j \epsilon \omega \cdot E_z^i(\rho=\alpha) \quad (2.53)$$

Με το $K(z, z')$ να είναι ο «πυρήνας» της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Τέτοιου είδους πυρήνες, ονομάζονται και «πυρήνες διαφοράς» («difference kernels»).

2.4 Ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallèn

Η εξίσωση του Hallèn είναι ισοδύναμη με αυτή του Pocklington, μόνο που δεν περιέχει τον τελεστή $\hat{T} = (\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2)$. Αναφερόμενοι στο σχήμα 2.5 και όσο $\alpha \ll \lambda$ και $\alpha \ll l$ ώστε να μπορούμε να αμελήσουμε τις επιδράσεις των άκρων, και σύμφωνα με τις συνοριακές συνθήκες καθώς και με την παραδοχή της τέλει αγωγιμότητας μπορούμε να πούμε πως το συνολικό εφαπτομενικό πεδίο E στην επιφάνεια του διπόλου καθώς και τα ρεύματα στις ακραίες επιφάνειες του κυλίνδρου εκμηδενίζονται. Δεδομένου ότι το ρεύμα επάγεται επί της επιφάνειας του διπόλου κατά τη διεύθυνση του A_z μπορούμε να γράψουμε :

$$E_z^t = -j\omega A_z - j \frac{1}{\omega \epsilon \mu} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -j \frac{1}{\omega \epsilon \mu} (\frac{d^2 A_z}{dz^2} + \omega^2 \epsilon \mu \cdot A_z) \quad (2.54)$$

Δεδομένου ότι το συνολικό εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδενικό στην επιφάνεια του κυλίνδρου η παραπάνω εξίσωση μειώνεται σε :

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k \cdot A_z = 0 \quad (2.55)$$

Επειδή η πυκνότητα ρεύματος είναι συμμετρική ως προς το δίπολο, το δυναμικό A_z είναι επίσης συμμετρικό, και έτσι η λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης θα είναι:

$$A_z(z) = -j\sqrt{\mu\epsilon}[C\cos(kz) + D\sin(k|z|)] \quad (2.56)$$

Όπου C και D σταθερές $\in \mathbb{R}$.

Ακόμα γενικά για ένα καλώδιο μεταφοράς ρεύματος, το δυναμικό δίνεται από τη σχέση:

$$A_z(z') = \mu \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' \quad \text{και επομένως από τη (2.54) θα έχουμε:}$$

$$\int_{z'=-h}^h I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -\frac{j}{\zeta} [C\cos(kz) + D\sin(k|z|)] \quad (2.57)$$

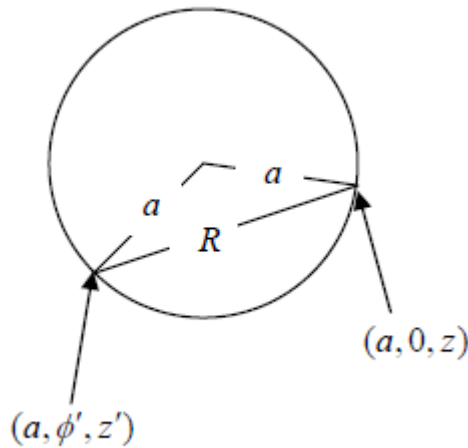
όπου ζ όπως είδαμε και πιο πάνω η χαρακτηριστική εξίσωση (κυματική) αντίσταση του μέσου που περιβάλλει την κεραία. Εάν τώρα εφαρμόσουμε στους ακροδέκτες της κεραίας, τάση V , εύκολα αποδεικνύεται πως η σταθερά D ισούται με $V/2$, (δηλαδή $D=V/2$), και η σταθερά C μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας συνοριακές συνθήκες το τέλος (άκρη) της επιφάνειας του κυλινδρικού διπόλου. Εάν ακόμα είμαι στο κενό με την αντίσταση του μέσου που περιβάλλει την κεραία να ισούται με ζ_0 καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\int_{z'=-h}^h I_z(z') \cdot K(z-z') dz' = C \cdot \cos(kz) + \frac{jV}{2\zeta_0} \sin(k|z|) \quad (2.58)$$

2.5 Προσεγγιστικές ολοκληρωτικές εξισώσεις (Προσεγγιστικός Πυρήνας)

Ένα πρόβλημα που συναντούμε στις (2.50) και (2.58) είναι η πολυπλοκότητα του λεγόμενου «ακριβή πυρήνα» («exact kernel») $K_{ex}(z)$, ο οποίος δίνεται από το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.50). Στο εδάφιο αυτό βρίσκουμε, με μια κατάλληλη προσέγγιση, μία απλούστερη μορφή του ανωτέρω πυρήνα, που χρησιμοποιείται

συχνά στην βιβλιογραφία. Στη σχέση (2.48), η απόσταση $2\alpha|\sin(\frac{\varphi'}{2})|$ ολοκληρώνουμε, με μέγιστη τιμή $\max_{\varphi'}\{2\alpha|\sin(\frac{\varphi'}{2})|\} = 2\alpha$ και ελάχιστη τιμή $\min_{\varphi'}\{2\alpha|\sin(\frac{\varphi'}{2})|\} = 0$ όπως φαίνεται στο σχήμα 2.7



Σχήμα 2.7 Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, η απόσταση R δίνεται από τη σχέση (1.16). Εδώ δείχνουμε προβολή στο επίπεδο $z = 0$. Η προβολή του R είναι $2\alpha|\sin(\frac{\varphi'}{2})|$, με μέγιστη τιμή 2α και ελάχιστη τιμή 0 .

Η εν λόγω προσέγγιση είναι $2\alpha|\sin(\frac{\varphi'}{2})| \cong \alpha$, δηλαδή προσεγγίζουμε όλες τις δυνατές αποστάσεις με την ακτίνα a . Υλοποιώντας, αναλυτικά την ολοκλήρωση στην (1.18), εύκολα, παίρνουμε τον λεγόμενο «προσεγγιστικό πυρήνα» («approximate» ή «reduced kernel»):

$$K_{ap}(z - z') = \frac{e^{-jk\sqrt{z^2 + \alpha^2}}}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}}, |z| < h \quad (2.59)$$

Η προσέγγιση μας είναι λογική καθότι η κεραία είναι λεπτή. Η (1.17)/(1.22) με το $K_{ap}(z)$ στη θέση του $K_{ex}(z)$ ονομάζεται «προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση» («approximate integral equation») τύπου Pocklington/Hallén. Η απλοποίηση είναι προφανώς σημαντική καθώς ο $K_{ap}(z)$ χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη. Σημειώνουμε τέλος ότι σε αντίθεση με τον ακριβή πυρήνα - ο προσεγγιστικός πυρήνας δεν απειρίζεται για $z = 0$. Βέβαια, πρέπει να αναφέρουμε

ότι το $K_{ap}(z)$ (ακριβέστερα το πραγματικό του μέρος) έχει μέγιστο για $z = 0$ και το μέγιστο αυτό γίνεται οξύτερο για λεπτότερες κεραίες.

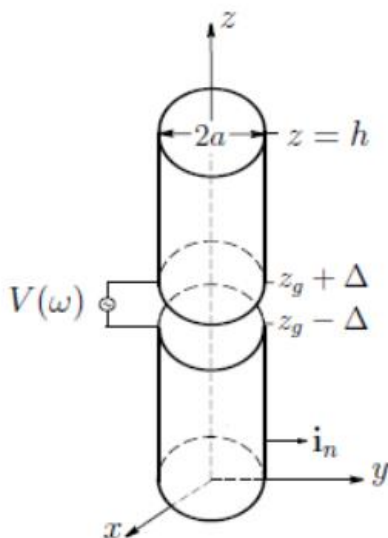
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Μοντέλα Τροφοδοσίας/Αριθμητικές Μέθοδοι/Μέθοδοι Ροπών

3.1 Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης – ΓΔΣ (Delta Function Generator – DFG)

Η Γεννήτρια Δέλτα συνάρτησης DFG(Delta Gap Generator) αποτελεί μια απλή και συχνότατα χρησιμοποιούμενη πηγή σε θεωρητικό επίπεδο ως μοντέλο τροφοδοσίας στις γραμμικές κεραίες, που όμως υστερεί σε ακρίβεια στον υπολογισμό των αγωγιμοτήτων εισόδου. Πρόκειται για την παρουσία μιας σταθερής διαφοράς δυναμικού V η οποία δημιουργεί μια ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση κατά μήκος του απειροστά μικρού διακένου $\Delta \rightarrow 0$, όπως είδαμε στις σχέσεις (2.31) και (2.32).

Συγκεκριμένα η τιμή της δίνεται από τον τύπο : $E(a,z) = V\delta(z)$ με $|z| < h$ όπου h το μισό μήκος της κεραίας. Όπου $\delta(z)$ είναι η γνωστή συνάρτηση dirac. Η αναπαράστασή της δίνεται στο σχήμα 3.1



Σχήμα 3.1: Κεραία Τροφοδοτούμενη από ιδανική Γεννήτρια Δέλτα Συνάρτησης-DFG

Η z-συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι μηδενική σε όλα τα σημεία της επιφάνειας της κεραίας, εκτός του διακένου. Στο διάκενο τροφοδοσίας η ένταση του προσπίπτοντος και η ένταση του ανακλωμένου πεδίου πρέπει να είναι αντίθετες. Η διαφορά δυναμικού στο διάκενο V , δίνεται από την σχέση:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} E_z^i(z) dz \quad \implies$$

$$E_z^i(z) = V \cdot \delta(z) \quad (3.1)$$

με $|z| < h$ όπου h το μισό μήκος της κεραίας. Όπου $\delta(z)$ είναι η γνωστή συνάρτηση dirac. Η παραπάνω σχέση (3.1) απορρέει από γνωστή ιδιότητα της συνάρτησης δέλτα.

Έτσι, δεδομένου ότι $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ και $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, αντικαθιστώντας στην σχέση (2.50) λαμβάνουμε:

$$\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') K_{ex}(z-z') dz' = \frac{j \cdot k \cdot V}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \quad , \quad -h \leq z \leq h \quad (3.2)$$

όπου

$$K_{ex}(z-z') = K(z-z') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' \quad \text{από την (2.47)} \implies$$

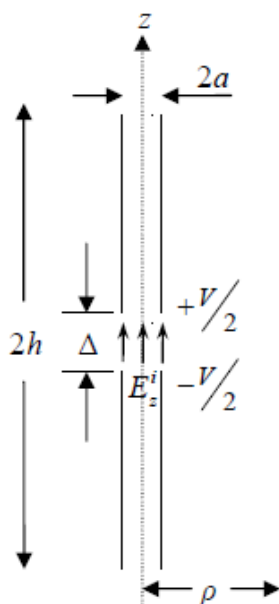
$$K_{ex}(z-z') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jk \sqrt{4a^2 \sin^2(\frac{\varphi'}{2}) + (z-z')^2}}}{\sqrt{4a^2 \sin^2(\frac{\varphi'}{2}) + (z-z')^2}} d\varphi' \quad (3.3)$$

είναι ο πυρήνας αυτής της ολοκληρωτικής εξίσωσης, που προφανώς εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $z-z'$ και όχι από τα z και z' ξεχωριστά, αποτελώντας έτσι έναν πυρήνα διαφοράς. Στην παραπάνω σχέση και τα δύο μέλη, δίνουν την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στο σωληνοειδές δίπολο. Κατά την εξαγωγή της δεν έγινε καμία προσέγγιση, συνεπώς είναι ακριβής για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Με εξαίρεση όμως την περίπτωση της κεραίας απείρου μήκους ($h \rightarrow \infty$), η (3.2) δεν μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή.

Η σχέση (3.2) είναι η εξίσωση Poisson για γεννήτρια δέλτα συνάρτησης (delta function generator) για τον ακριβή πυρήνα.

3.2 Γεννήτρια Πεπερασμένου Διάκενου – ΓΠΔ (Finite Gap Generator - FGG)

Στην παράγραφο 2.2 περιγράψαμε το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Θεωρήσαμε μία κυλινδρική λεπτή σωλήνα με τέλεια αγωγιμα τοιχώματα στο κέντρο της οποίας υπήρχε διάκενο Δ . Στην ΓΔΣ είδαμε ότι το προαναφερθέν διάκενο είναι απειροστά μικρό ($\Delta \rightarrow 0$). Στην περίπτωση όπου το Δ είναι πεπερασμένο το μοντέλο τροφοδοσίας που προκύπτει είναι γνωστό ως ΓΠΔ. Το μαθηματικό μοντέλο της ΓΠΔ δίνεται στο Σχήμα 3.2.



Σχήμα 3.2: Μοντέλο τροφοδοσίας Γεννήτριας Πεπερασμένου Διάκενου – ΓΠΔ (Finite Gap Generator)

Στην πραγματικότητα, πρόκειται για μία γενικότερη περίπτωση της ΓΔΣ καθώς αν $\Delta \rightarrow 0$ τα δύο μοντέλα ταυτίζονται. Η ηλεκτρεγερτική πεδιακή ένταση εντός του διακένου (εσωτερικά της πηγής), που για το μοντέλο της ΓΠΔ θεωρείται σταθερή, δίνεται από την σχέση:

$$E_z(\alpha, z) = Vg(z), \quad -\Delta/2 < z < \Delta/2 \quad (3.4)$$

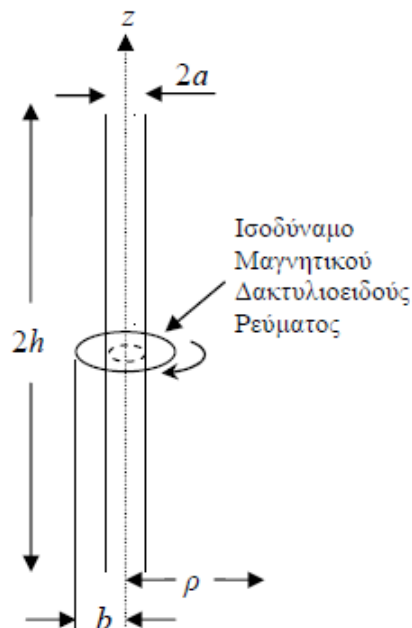
όπου:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & |z| < \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \frac{\Delta}{2} < |z| < h \end{cases} \quad (3.5)$$

Είναι προφανές από την (3.5) ότι όταν $\Delta \rightarrow 0$, η συνάρτηση $g(z)$ ταυτίζεται με την δέλτα συνάρτηση. Ολοκληρώνοντας, θα πρέπει να αναφέρουμε ότι στο μοντέλο της ΓΠΔ που περιγράψαμε θεωρήσαμε το πεδίο κατά μήκος του διακένου, σταθερό. Εν τούτοις, το εν λόγω μοντέλο μπορεί να επεκταθεί και σε άλλες κατανομές πεδίου όπως για παράδειγμα είναι η κατανομή τετραγωνικής ρίζας (square-root distribution).

3.3 Γεννήτρια Μαγνητικών κροσσών (Magnetic Frill Generator - MFG)

Για την συγκεκριμένη μοντελοποίηση της πηγής βασιζόμαστε στο ακόλουθο σχήμα:



Σχήμα 3.3: Μοντέλο τροφοδοσίας Γεννήτριας Μαγνητικών Κροσσών (Magnetic Frill Generator - FG)

Η Γεννήτρια Μαγνητικών κροσσών αναπτύχθηκε με σκοπό τον υπολογισμό του εγγύς και μακράν πεδίου μεταξύ των δύο αγωγών μιας ομοαξονικής γραμμής [7]. Στην ΓΜΦ, το διάκενο τροφοδοσίας, αντικαθίσταται από μία μαγνητική πυκνότητα ρεύματος που αναπτύσσεται σε ένα δακτυλιοειδές διάφραγμα, εγκάρσιο στην διεύθυνση της κεραίας, με εσωτερική ακτίνα a , η οποία συνήθως επιλέγεται ίση με την ακτίνα της κεραίας, και εξωτερική ακτίνα b , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Καθώς το δίπολο τροφοδοτείται μέσω γραμμών μεταφοράς, η εξωτερική ακτίνα b του ισοδύναμου δακτυλιοειδούς διαφράγματος της γεννήτριας προσδιορίζεται από την μαθηματική έκφραση για την χαρακτηριστική σύνθετη αντίσταση της γραμμής.

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \cdot \frac{\ln(b/a)}{2\pi}} \quad (3.6)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο που εφάπτεται του δακτυλιοειδούς διαφράγματος της FG, ταυτίζεται με την κατανομή του πεδίου του ρυθμού TEM (Transverse ElectroMagnetic) που διαδίδεται σε μία ομοαξονική γραμμή. Επομένως:

$$E_\rho = \frac{V}{2 \cdot \rho \cdot \ln(b/a)} \quad (3.7)$$

Κατά συνέπεια η αντίστοιχη ισοδύναμη πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος M_φ της γεννήτριας μαγνητικών κροσσών που αντιπροσωπεύει το άνοιγμα, θα είναι:

$$M_\varphi = -2 \cdot \vec{n} \times E_\rho = -\frac{V}{\rho \cdot \ln(b/a)} \quad (3.8)$$

Η γεννήτρια μαγνητικών κροσσών δημιουργεί στην επιφάνεια του διπόλου πεδία, που μπορούν να προσεγγιστούν από εκείνα που βρέθηκαν κατά μήκος του άξονα (δηλαδή για $\rho = 0$). Με αυτή την προσέγγιση, λαμβάνουμε την ακόλουθη απλή σχέση για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου:

$$E_z^i(\rho = 0, -h \leq z \leq h) = -\frac{V}{2 \cdot \ln(b/a)} \cdot \left(\frac{e^{-jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{e^{-jk\sqrt{z^2+b^2}}}{\sqrt{z^2+b^2}} \right) \quad (3.9)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (3.9) στην σχέση (2.50) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ισότητες $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 2\pi/\lambda$ και $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$, λαμβάνουμε:

$$(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \cdot \int_{z'=-h}^h I_z(z') K_{ex}(z, z') dz' = \frac{j \cdot k \cdot V}{2\zeta_0 \cdot \ln(b/a)} \cdot \left(\frac{e^{-jk\sqrt{z^2+\alpha^2}}}{\sqrt{z^2+\alpha^2}} - \frac{e^{-jk\sqrt{z^2+b^2}}}{\sqrt{z^2+b^2}} \right) \quad (3.10)$$

για $-h \leq z \leq h$

$$\text{όπου } K_{ex}(z, z') = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{4\alpha^2 \sin^2(\frac{\varphi'}{2}) + (z-z')^2}}}{\sqrt{4\alpha^2 \sin^2(\frac{\varphi'}{2}) + (z-z')^2}} d\varphi' \quad \{\text{όπως στη σχέση (3.3)}\}$$

Η σχέση (3.10) είναι η εξίσωση Pocklington για γεννήτρια μαγνητικών κροσσών (frill generator) για τον ακριβή πυρήνα.

3.4 Ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm

$$\text{Η εξίσωση } \int_{z_1}^{z_2} g(z, z') J(z') dz = f(z), \quad z_1 \leq z \leq z_2 \quad (3.11)$$

[4] με γνωστές τις συναρτήσεις $g(z, z')$ και $f(z)$ ($z_1 \leq z, z' \leq z_2$) και άγνωστη τη συνάρτηση $J(z')$ ($z_1 \leq z' \leq z_2$) ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Fredholm πρώτου είδους. Το $g(z, z')$ είναι ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Παρατηρούμε ότι το διάστημα στο οποίο η εξίσωση ισχύει είναι ίδιο με το διάστημα ολοκλήρωσης.

Τέτοιου είδους εξίσωση παίρνουμε και με την εναλλαγή \hat{T} και ολοκληρώματος στην προσεγγιστική εξίσωση του Pocklington. Στο εδάφιο αυτό λοιπόν περιγράφουμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων. Με ορισμένες τροποποιήσεις [8] τέτοιες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοσθούν ακόμα και στην ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση (2.50).

Στη σύγχρονη βιβλιογραφία, οι ανωτέρω εξισώσεις (ή μικρές παραλλαγές τους) αναφέρονται ως ολοκληρωτικές εξισώσεις των Pocklington (Pocklington's Equation - PE) και Hallén (Hallén's Equation - HE) αντίστοιχα. Απαντώνται στη βιβλιογραφία σε δύο μορφές, την προσεγγιστική και την ακριβή αναλόγως του πυρήνα (προσεγγιστικός/ακριβής) που χρησιμοποιείται.

3.5 Περιγραφή της μεθόδου των ροπών

Οι μέθοδοι αυτές αποτελούν σημαντικό εργαλείο του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού και, ειδικότερα, της σύγχρονης Θεωρίας Κεραιών [23]. Η μέθοδος έχει τρία βήματα:

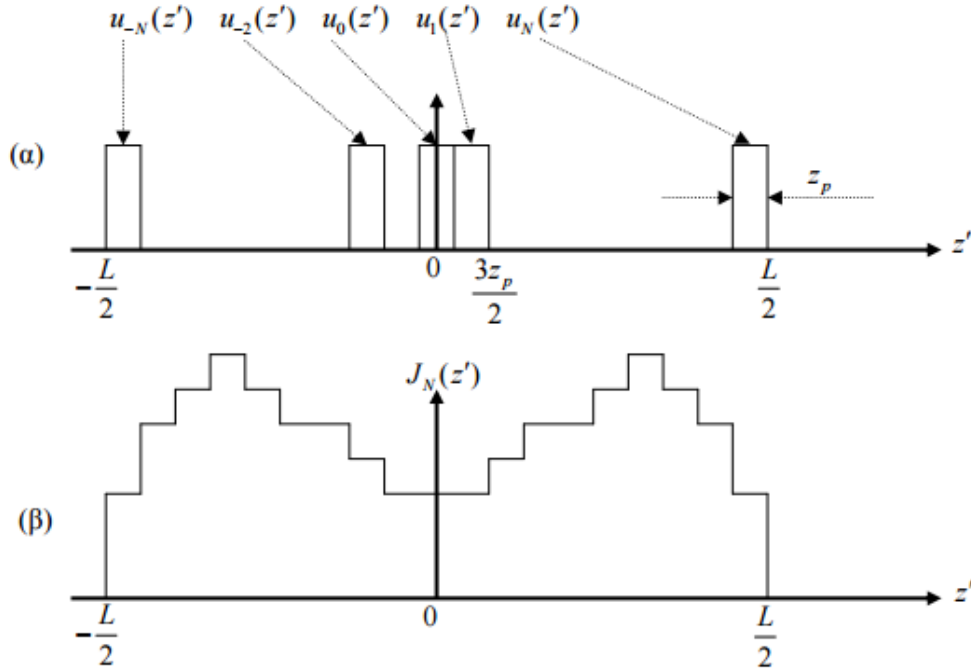
ΜοΜ, Βήμα 1: Αναπτύσσουμε τον άγνωστο $J(z')$ σε πεπερασμένο άθροισμα $2N+1$ συναρτήσεων βάσης (basis functions) $u_{-N}(z'), u_{-(N-1)}(z), \dots, u_N(z')$ με αγνώστους συντελεστές J_n .

$$J(z') \cong \sum_{n=-N}^N J_n u_n(z') \quad (3.12)$$

Στην ανωτέρω σχέση χρησιμοποιήσαμε το \cong και όχι το $=$ διότι η λύση $J(z')$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.11) γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης. Οι συναρτήσεις βάσης είναι γνωστές. Το πιο απλό παράδειγμα συναρτήσεων βάσης είναι οι παλμικές συναρτήσεις (pulse functions) πλάτους z_p , όπου:

$$(2N + 1)z_p = L \quad (3.13)$$

Ο περιττός αριθμός συναρτήσεων βάσης $(2N + 1)$ είναι απλά για ευκολία και μόνο, μιας και θα μπορούσαμε να είχαμε επιλέξει και άρτιο αριθμό. Αυτές εικονίζονται στο Σχήμα 3.3(α). Στο σχήμα 3.3(β) φαίνεται πως η προσέγγιση $J_n = \sum_{n=-N}^N J_n u_n(z')$, που είναι επαλληλία των $u_n(z')$, έχει γενικά κλιμακωτή μορφή. Πιο συγκεκριμένα, το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $J_n(z')$ έχουν κλιμακωτή μορφή, ενώ οι συντελεστές J_n είναι μιγαδικοί.



Σχήμα 3.4: Στο επάνω σχήμα (α), φαίνονται οι παλμικές συναρτήσεις $u_{-N}(z')$, $u_{-(N-1)}(z)$, ..., $u_N(z')$. Η καθεμία έχει πλάτος z_p . Η $u_0(z')$ έχει κέντρο το $z' = 0$, ενώ η $u_N(z')$ τελειώνει στο $z' = L/2$, με κέντρο στο $z' = (L - z_p)/2$. Στο αποκάτω σχήμα (β), δείχνουμε μια υπέρθεση $J_N(z')$ παλμικών συναρτήσεων.

ΜοΜ, Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την προσέγγιση (3.12) στην ολοκληρωτική εξίσωση (3.11) και έχουμε:

$$\sum_{n=-N}^N [J_n \int_{-L/2}^{-L/2} g(z, z') u_N(z') dz'] \cong f(z) \quad (3.14)$$

Στην οποία χρησιμοποιήσαμε το \cong και όχι το $=$, διότι γενικά δεν υπάρχουν αριθμοί J_n που να κανοποιούν την (3.14) για όλα τα z με $|z| < L/2$

ΜοΜ, Βήμα 3: Παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (3.14) με $(2N + 1)$ άλλες συναρτήσεις δοκιμής (testing functions) $w_{-N}(z)$, $w_{-(N-1)}(z)$, ..., $w_N(z)$. Επομένως πολλαπλασιάζουμε την (3.14) με $w_1^*(z)$ (όπου το * δηλώνει συζυγή) και ολοκληρώνουμε για $-L/2 \leq z \leq L/2$. Έτσι έχουμε:

$$\sum_{n=-N}^N J_n \int_{-L/2}^{L/2} w_1^*(z) [\int_{-L/2}^{-L/2} g(z, z') u_N(z') dz'] dz = \int_{-L/2}^{L/2} w_1^*(z) f(z) dz,$$

$$l = -N, -(N-1), \dots, N \quad (3.15)$$

που γράφονται και ως

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} J_n = B_l \quad l = -N, -(N-1), \dots, N \quad (3.16\alpha)$$

όπου

$$\int_{-L/2}^{L/2} w_l^*(z) \left[\int_{-L/2}^{-L/2} g(z, z') u_N(z') dz' \right] dz, \quad \mu\epsilon \quad -N \leq z \text{ και } n \leq N \quad (3.16\beta)$$

και

$$B_l = \int_{-L/2}^{L/2} w_l^*(z) f(z) dz, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N \quad (3.16\gamma)$$

Οι συναρτήσεις δοκιμής είναι και αυτές γνωστές. Οι εξισώσεις (3.15) ή (3.16) είναι σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα J_n . Το πρόβλημα λοιπόν έχει αναχθεί στη επίλυση του $(2N + 1) \times (2N + 1)$ συστήματος (3.16a), όπου οι μιγαδικοί αριθμοί A_{ln} και B_l βρίσκονται από τα ολοκληρώματα στις (3.16b) και (3.16c). Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα, οι ολοκληρώσεις δεν μπορούν να γίνουν σε κλειστή μορφή και γίνονται αριθμητικά. Προγράμματα όπως το MATLAB και το MATHEMATICA διαθέτουν έτοιμες ρουτίνες επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, καθώς και αριθμητικής ολοκλήρωσης.

3.6 Μέθοδοι Galerkin-Επιλογή Συναρτήσεων Βάσης και Δοκιμής

Οι MoM είναι οικογένεια μεθόδων, διότι υπάρχουν πολλές επιλογές των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής. Δίνουμε μερικές συνήθειες επιλογές, χωρίς να συζητήσουμε το σημαντικό θέμα, του πώς κάνουμε επιτυχημένες επιλογές. Επισημαίνουμε ότι μία επιτυχημένη επιλογή συναρτήσεων βάσης και δοκιμής απαιτεί γνώση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών κάθε προβλήματος ενώ πολλές φορές βοηθά και η γνώση γενικότερων μαθηματικών αρχών [9], [10].

3.6.1 Επιλογή συναρτήσεων δοκιμής: Μέθοδος Galerkin

Η μέθοδος Galerkin είναι ειδική περίπτωση των MoM κατά την οποία οι συναρτήσεις βάσης και δοκιμής είναι ίδιες $w_l(z) = u_l(z)$.

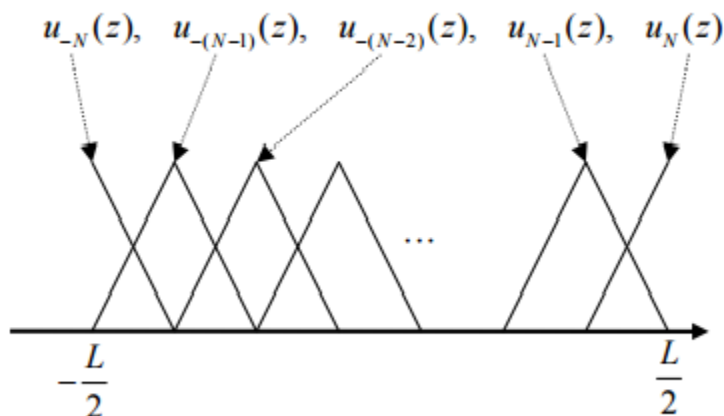
Επιλογή συναρτήσεων δοκιμής: Τεχνική σημειακής ισότητας (point – matching technique or collocation technique): Στην τεχνική σημειακής ισότητας, ικανοποιούμε την (18) σε $2N+1$ σημεία $z_{-N}, z_{-(N-1)}, \dots, z_N$ όπου $|z_l| \leq L/2$. Συνήθως τα σημεία αυτά είναι ισαπέχοντα. Καταλήγουμε στο σύστημα (20α) όπου:

$$A_{ln} = \int_{-L/2}^{L/2} g(z_l, z') u_n(z') dz', \quad B_{ln} = f(z_l), \quad -N \leq l, n \leq N \quad (3.17)$$

Αυτή η τεχνική μπορεί να ειπωθεί σαν την ειδική περίπτωση των MoM όπου οι συναρτήσεις δοκιμής είναι συναρτήσεις δέλτα, $w_l(z) = \delta(z - z_l), l = -N, \dots, N$.

3.6.2 Επιλογή συναρτήσεων βάσης: Τριγωνικές συναρτήσεις (triangular functions).

Οι απλούστερες συναρτήσεις βάσης είναι οι παλμικές συναρτήσεις του Σχήματος 6(α). Άλλες συναρτήσεις βάσης είναι οι τριγωνικές του σχήματος 3.5.



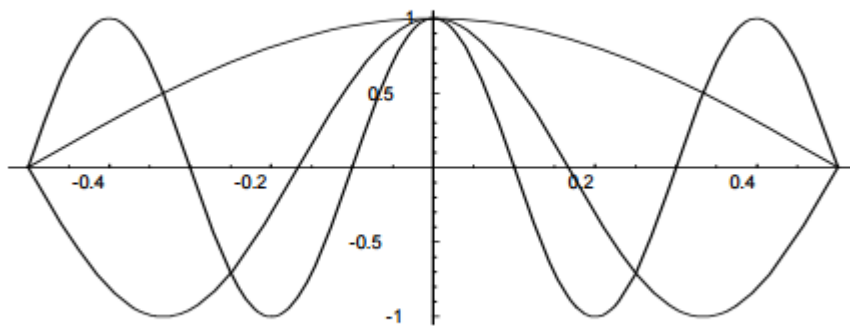
Σχήμα 3.5: Οι λεγόμενες τριγωνικές συναρτήσεις. Οι δύο τελευταίες $u_{-N}(z)$ και $u_N(z)$ είναι στην πραγματικότητα μισά τρίγωνα.

Οι συναρτήσεις αυτές περιλαμβάνουν και δύο μισά τρίγωνα στα άκρα του διαστήματος (αλλιώς ο γραμμικός συνδυασμός $J_N(z)$ θα μηδενιζόταν στα άκρα $z = \pm L/2$). Το $J_N(z)$ εδώ έχει την μορφή τμηματικά γραμμικής συνάρτησης.

3.6.3 Επιλογή συναρτήσεων βάσης: Συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου (entire domain basis functions)

Οι παλμικές και τριγωνικές συναρτήσεις παλμού είναι μη-μηδενικές μόνο σε ένα τμήμα του διαστήματος $(-L/2, L/2)$. Για τον λόγο αυτόν λέγονται συναρτήσεις βάσεις υποπεδίου (subdomain basis functions) και λέμε ότι κάνουμε διακριτικοποίηση (discretization) της εξίσωσης. Μπορούμε όμως να επιλέξουμε και συναρτήσεις ολικού πεδίου που είναι μη μηδενικές σε ολόκληρο το διάστημα $(-L/2, L/2)$ (εκτός ίσως από μεμονωμένα σημεία του διαστήματος). Για παράδειγμα, οι συνημιτονικές συναρτήσεις του σχήματος 8 είναι κατάλληλες όταν η λύση $J(z)$ είναι άρτια και μηδενίζεται στα άκρα $z = \pm L/2$, όπως συμβαίνει για το ρεύμα $I(z)$ σε μία κεραία.

$$u_N(z') = \cos\left(\frac{[2(n+N)+1]\pi z}{L}\right), \quad l = -N, -(N-1), \dots, N, \quad \text{με } |z| < L/2 \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.6: Οι τρεις πρώτες συνημιτονικές συναρτήσεις $u_{-N}(z)$, $u_{-(N-1)}(z)$, $u_{-(N-2)}(z)$, της σχέσης (22). Όλες είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα $z = \pm L/2$.

Σαν δεύτερο παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις:

$$u_N(z) = \frac{T_{2(n+N)} \frac{2\pi}{L}}{\sqrt{1 - (\frac{2\pi}{L})^2}}, \quad l = -N, -(N-1), \dots, N, \quad \text{με } |z| < L/2 \quad (3.19)$$

όπου $T_0(x)$, $T_2(x)$, $T_4(x)$ τα γνωστά πολυώνυμα Chebyshev. Αυτά είναι κατάλληλα όταν η λύση $J(z)$ είναι άρτια και απειρίζεται [16] στα άκρα $z = \pm L/2$.

Επιλογή του αριθμού των συναρτήσεων βάσης: Μία ακόμη παράμετρος που πρέπει να επιλεγεί είναι ο αριθμός N . Γενικά μεγαλώνοντας το N αυξάνουμε (η τουλάχιστον ελπίζουμε ότι αυξάνουμε) την ακρίβεια, σε βάρος όμως του υπολογιστικού κόστους. Πολλές φορές – ιδίως σε μεγάλα προβλήματα – το N επιλέγεται εκ των προτέρων με εμπειρικά κριτήρια. Έτσι, για διακριτικοποίηση, βρίσκουμε συχνά στην βιβλιογραφία κριτήρια όπως «ο αριθμός σημείων ανά μήκος κύματος». Σε μικρότερα προβλήματα, πολλές φορές αυξάνουμε το N μέχρι η αριθμητική λύση να «καταλήξει» σε κάποια τελική τιμή. Αυτή η τελική τιμή συνήθως είναι κοντά στην πραγματική τιμή της λύσης της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

3.7 Επίλυση ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Hallén με αριθμητικές μεθόδους / Μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις (Galerkin Method Pulse Functions – GMPF) (Method A)

Από την (2.58) έχουμε :

$$\int_{z'=-h}^h I_z(z') \cdot K(z-z') dz' = C \cdot \cos(kz) + \frac{jV}{2\zeta_0} \sin(k|z|) \quad , \quad \text{όπου } \zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} =$$

376.73 Ohm η χαρακτηριστική εξίσωση (κυματική) αντίσταση του κενού - του μέσου που περιβάλλει την κεραία.

Υποθέτουμε $I_{ex}(z)$ και $I_{ap}(z)$ το άγνωστο ρεύμα στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.58) με τον ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα αντίστοιχα, και $I(z)$ οποιοδήποτε από τα ανωτέρω. Έστω επίσης $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ συναρτήσεις που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$\int_{z'=-h}^h I^{(1)}(z') \cdot K(z-z') dz' = \frac{jV}{2\zeta_0} \sin(k|z|) \quad (3.20a)$$

και

$$\int_{z'=-h}^h I^{(2)}(z') \cdot K(z-z') dz' = \cos(kz) \quad (3.20b)$$

αντίστοιχα, με $z < h$. Επιλύουμε αριθμητικά την (2.58) εφαρμόζοντας την Μέθοδο των Ροπών στις εξισώσεις (3.20a) και (3.20b). Για την μέθοδο Galerkin με παλμικές συναρτήσεις, υποθέτουμε λύση της μορφής:

$$I^{(1)} \cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(1)} u_n(z) \quad (3.21)$$

και

$$I^{(2)} \cong \sum_{n=-N}^N I_n^{(2)} u_n(z) \quad (3.22)$$

όπου η παλμική συνάρτηση $u_n(z)$ δίνεται από την σχέση:

$$u_n(z) = \begin{cases} 1 & , & (n - \frac{1}{2}) \cdot z_0 < z < (n + \frac{1}{2}) \cdot z_0 \\ 0 & , & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.23)$$

Το πλάτος του παλμού z_0 συνδέεται με το πλήθος των παλμών $2N+1$ σύμφωνα με την σχέση:

$(2N+1)z_0 = 2h$, όπου $2h = L$ μήκος κεραίας και N το πλήθος των τμημάτων κατά την κατάτμηση. Συγκεκριμένα σπάμε τον αγωγό έστω μήκους L , κατά τον άξονα των z , σε N το πλήθος μικρά κομμάτια πλάτους z_0 και υπολογίζουμε τα επιμέρους I . Στο τέλος υπολογίζουμε το συνολικό.

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (3.21) και (3.22) στις εξισώσεις (3.20a) και (3.20b) αντιστοίχως, πολλαπλασιάζοντας με $u_l(z)$ και ολοκληρώνοντας από $z = -h$ έως $z = h$, καταλήγουμε στα δύο ακόλουθα συστήματα εξισώσεων:

$$\sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(1)} = B_l^{(1)} \quad \text{και} \quad \sum_{n=-N}^N A_{ln} I_n^{(2)} = B_l^{(2)}, \quad \text{με } l=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N \quad (3.24)$$

Στην (3.24), οι συντελεστές A_{ln} , που είναι διπλά ολοκληρώματα που εξαρτώνται μόνο από την παράμετρο $l - n$ και όχι από τα l και n ξεχωριστά. Για τον λόγο αυτό χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό A_{l-n} αντί του $A_{ln} = A_{-ln}$. Επιπλέον, το διπλό ολοκλήρωμα, με χρήση μαθηματικής ταυτότητας:

$$\int_{-\frac{z_p}{2}}^{\frac{z_p}{2}} \int_{-\frac{z_p}{2}}^{\frac{z_p}{2}} f(x-x') dx' dx = \int_0^{z_p} (z_p - z) [(f(z) + f(-z))] dz, \quad (3.25)$$

δύναται να απλοποιηθεί έτσι ώστε:

$$A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z) [K_{ap}(z + lz_0) + K_{ap}(z - lz_0)] dz \quad (3.26)$$

Οι συντελεστές $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ υπολογίζονται αναλυτικά από τα εξής ολοκληρώματα:

$$B_l^{(1)} = \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \frac{jV}{2\zeta_0} \sin(k|z|) dz = \begin{cases} \frac{2jV}{k\zeta_0} \sin^2\left(\frac{kz_0}{4}\right) \\ \frac{2jV}{k\zeta_0} \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right) \sin(kz_0|l|) \end{cases} \quad (3.27)$$

$$B_l^{(2)} = \int_{(l-\frac{1}{2})z_0}^{(l+\frac{1}{2})z_0} \cos(kz) dz = \frac{2}{k} \cdot \sin\left(\frac{kz_0}{2}\right) \cos(kz_0|l|) \quad (3.28)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε πως $\cos(|\omega|) = \cos(\omega) = \cos(-\omega)$

Μετά τον υπολογισμό των $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$, προσδιορίζουμε την σταθερά C από τη σχέση:

$$C \cong -\frac{I_n^{(1)}}{I_n^{(2)}} \quad (3.29)$$

Και έτσι καταλήγουμε στην τελική αριθμητική λύση:

$$I(z) \cong \sum_{n=-N}^N I_n u_n(z) = \sum_{n=-N}^N [I_n^{(1)} + CI_n^{(2)}] u_n(z) \quad (3.30)$$

Συμβολίζουμε με $I_{ex,n}$ και $I_{ap,n}$ τις τιμές του I_n στην περίπτωση του ακριβούς και του προσεγγιστικού πυρήνα αντίστοιχα. Αρκεί λοιπόν να λύσουμε τα δύο συμμετρικά συστήματα Toeplitz (3.24) διαστάσεων $(2N+1) \times (2N+1)$ για τα $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$, και στη συνέχεια να προσδιορίσουμε την σταθερά C από τη (3.29). Επιπροσθέτως, ισχύει πως $I_n^{(1)} = I_{-n}^{(1)}$ και $I_n^{(2)} = I_{-n}^{(2)}$.

Αποδεικνύεται ότι οι (3.24) και (3.29) (ελλείψει σφαλμάτων στρογγυλοποίησης) είναι ισοδύναμες με ένα απλό γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τις μεταβλητές I_0, I_1, \dots, I_N και C. Οι παράμετροι h, a και z_0 , στην πράξη,

μπορούν να εκφραστούν ως πολλαπλάσια του μήκους κύματος $l=2\pi/k$. Σημειώνουμε ότι ο παλμός $u_0(z)$ είναι τοποθετημένος στο σημείο $z=0$ και ότι το μέγεθος I_0/V εκφράζει την, κατά προσέγγιση, σύνθετη αγωγιμότητα στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας. Όλες οι αριθμητικές ολοκληρώσεις εκτελούνται με επαρκώς μικρό σφάλμα ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο.

3.8 Τεχνική σημειακής ισότητας με τριγωνικές συναρτήσεις (Point-Matching Technique with the use of Triangular functions)-PTMF

Στη μέθοδο αυτή αναπτύσσουμε το άγνωστο ρεύμα $I(z)$ σε ένα πεπερασμένο άθροισμα $2N-1$ συναρτήσεων βάσης $g_n(z)$ και έχουμε:

$$I(z) \cong \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n g_n(z) \quad (3.31)$$

Οι άγνωστοι στην παραπάνω εξίσωση είναι οι συντελεστές I_n . Στην ανωτέρω σχέση χρησιμοποιήσαμε το \cong και όχι το $=$ διότι η λύση $I(z)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης (3.31) γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης, ακριβώς όπως και στην (3.12). Οι τριγωνικές συναρτήσεις βάσης $g_n(z)$ που επιλέξαμε στη λύση μας είναι της μορφής:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{z_0-|z|}{z_0}, & -z_0 \leq z \leq z_0 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{με } z_0 = \frac{h}{N} \quad (3.32)$$

Για $|n| \leq N-1$ το πεδίο ορισμού της $g(z-l \cdot z_0)$ είναι $((l-1) \cdot z_0, (l+1) \cdot z_0)$.

Τώρα εάν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.32) στην εξίσωση του Hallèn (2.58) θα έχουμε:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} I_n \int_{z'=-h}^h g(z-n \cdot z_0) \cdot K(z-z') dz' \cong C \cdot \cos(kz) + \frac{jV}{2z_0} \sin(k|z|),$$

$$\text{με } -h < z < h \quad (3.33)$$

Αν τώρα επιβάλλουμε την ισότητα στα $2N+1$ σημεία καταμερισμού του σωληνοειδούς διπόλου $z=l \cdot z_0$ με $|l| \leq N$, τότε πρόκειται για τεχνική

αντιστοίχισης σημείων (point matching technique), και προκύπτει το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} D_{ln} I_n = z_0 \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_0) + \frac{jV \cdot z_0}{2\zeta_0} \sin(k|l \cdot z_0|), \text{ με } |l| \leq N \quad (3.34)$$

$$\text{όπου } D_{ln} = z_0 \cdot \int_{-h}^h K(z' - l \cdot z_0) \cdot g(z' - n \cdot z_0) dz' \quad (3.35)$$

με $|l| \leq N$ και $|n| \leq N - 1$

Από τον ορισμό των τριγωνικών συναρτήσεων και επειδή από τη σχέση (3.3) έχουμε ότι ο ακριβής πυρήνας $K_{ex}(z - z')$ είναι άρτια συνάρτηση του z , θα έχουμε πως:

$$D_{ln} = z_0 \cdot \int_{-h}^h K(z' - l \cdot z_0) \cdot g(z' - n \cdot z_0) dz' \quad \implies$$

$$D_{ln} = z_0 \int_{(n-1) \cdot z_0}^{(n+1) \cdot z_0} K(z' - l \cdot z_0) \cdot \frac{z_0 - |z' - n \cdot z_0|}{z_0} dz' \quad \implies$$

(αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα με $z = z' - n \cdot z_0 \implies dz' = dz$)

$$D_{ln} = \int_{-z_0}^{z_0} K(z + (n-1) \cdot z_0 - |z|) dz \quad \implies$$

$$D_{ln} = \int_{-z_0}^0 K(z + (n-1) \cdot (z_0 - |z|)) dz + \int_0^{z_0} K(z + (n-1) \cdot (z_0 - |z|)) dz \quad \implies$$

$$D_{ln} = \int_{-z_0}^0 K(z + (n-1) \cdot (z_0 + z)) dz + \int_0^{z_0} K(z + (n-1) \cdot (z_0 - z)) dz \quad \implies$$

$$D_{ln} = \int_0^{z_0} K(-z + (n-1) \cdot (z_0 - z)) dz + \int_0^{z_0} K(z + (n-1) \cdot (z_0 - z)) dz \quad \implies$$

$$D_{ln} = \int_0^{z_0} K(z + (n-1) \cdot z_0) + K(z - (n-1) \cdot z_0)(z_0 - |z|) dz \quad (3.36)$$

Έτσι $D_{ln} = D_{nl}$ και οι συντελεστές D_{ln} εξαρτώνται μόνο από τη διαφορά $l - n$ και όχι από τα l και n ξεχωριστά, επομένως θα είναι $D_{ln} = A_{l-n}$, με $A_l = A_{-l} = \int_0^{z_0} (z_0 - z)[K_{ap}(z + lz_0) + K_{ap}(z - lz_0)] dz$ όπως και στη σχέση (3.26), για $|l| \leq N$

Συνεπώς το σύστημα των εξισώσεων της (3.34) γίνεται:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} I_n = z_0 \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_0) + \frac{jV \cdot z_0}{2\zeta_0} \sin(k|l \cdot z_0|), \quad (3.37)$$

με $|l| \leq N$ και $l=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots, \pm N$

και A_l αυτό που φαίνεται πιο πάνω (δηλαδή το ίδιο με τη σχέση 3.26)

Το παραπάνω σύστημα της (3.37) είναι ισοδύναμο με τα δύο ακόλουθα συστήματα Toeplitz:

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} I_n^{(1)} = \frac{jV \cdot z_0}{2\zeta_0} \sin(k|l| \cdot z_0) = B_l^{(1)}, \text{ για } l=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots, \pm N \quad (3.38a)$$

$$\sum_{n=-(N-1)}^{N-1} A_{l-n} I_n^{(2)} = z_0 \cdot C \cdot \cos(k \cdot l \cdot z_0) = B_l^{(2)}, \text{ για } l=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\dots, \pm N \quad (3.38b)$$

Όπως και στην περίπτωση της GMPF (βλέπε σχέση 3.29), έτσι και εδώ οι άγνωστοι συντελεστές I_n δίνονται από τις σχέσεις:

$$I_n = I_n^{(1)} + C I_n^{(2)} \quad (3.39)$$

$$C \cong -\frac{I_n^{(1)}}{I_n^{(2)}} \quad (3.40)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΕΙΣ – FFM

4.1 Η ολοκληρωτική εξίσωση για τον ακριβή πυρήνα: Βελτιώσεις

Στην παρούσα παράγραφο θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε έναν βελτιωμένο τύπο για την σταθερά C της σχέσης (3.29), ο οποίος απορρέει από την γνώση της συμπεριφοράς του ρεύματος κοντά στα άκρα της κεραίας [1].

Οι ποσότητες $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ συμπεριφέρονται όπως η ποσότητα $(h^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ καθώς το $z \rightarrow \pm h$, ενώ το συνολικό ρεύμα εξασθενεί ως $(h^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός, ότι οι ενδιάμεσες λύσεις $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Δηλαδή τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{+\infty} |I^{(1)}(z)|^2 dz$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} |I^{(2)}(z)|^2 dz$ αποκλίνουν.

Η συμπεριφορά αυτή δημιουργεί μία μικρή δυσκολία στην εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου, εάν η σταθερά C προσδιοριστεί από την σχέση (3.29). Καθώς η ποσότητα N μεγαλώνει, η C (και μαζί της η συνολική αριθμητική λύση) συγκλίνει μάλλον αργά.

Η σύγκλιση δύναται να επιταχυνθεί σημειώνοντας ότι $I_{ex} = O(\sqrt{h-z})$, καθώς $z \rightarrow h$, γεγονός που συνεπάγεται πως $\lim_{z_0 \rightarrow 0} [I(h - \frac{z_0}{2}) / I(h - \frac{3z_0}{2})] = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Επομένως αντί της (3.29) μπορούμε να υπολογίζουμε την σταθερά C από την σχέση:

$$C \cong -\frac{\sqrt{3} I_N^{(1)} - I_{N-1}^{(1)}}{\sqrt{3} I_N^{(2)} - I_{N-1}^{(2)}} \quad (4.1)$$

Έτσι η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου στο κέντρο της κεραίας ($z=0$ – diving point) θα είναι μετά τη βελτίωση της σταθεράς C θα είναι:

$$Y_m = G_m + i \cdot B_m \quad (4.2)$$

με:

$$Y_m = \frac{I_0}{V} \quad G_m = \text{Re}(Z_m) \quad B_m = \text{Im}(Z_m) \quad C \cong -\frac{\sqrt{3} I_N^{(1)} - I_{N-1}^{(1)}}{\sqrt{3} I_N^{(2)} - I_{N-1}^{(2)}}$$

Εμείς υπολογίζουμε την αγωγιμότητα $Y_m = \frac{I_0}{V}$, η οποία θεωρώντας $V=1$ καταχρηστικά υπολογίζουμε το ρεύμα I_0 .

4.2 Ταχεία μέθοδος πολλαπλών πόλων-Fast Multipole Method (FMM)

Ο αλγόριθμος της μεθόδου FMM αναπτύχθηκε από τους Greengard & Rokhlin[13] και χρησιμοποιεί αναπτύγματα πολυπόλων για τον υπολογισμό των δυναμικών ή των δυνάμεων με την επιθυμητή ακρίβεια. Συγκεκριμένα στηρίζεται στην επέκταση της διανυσματικής εξίσωσης του Helmotz για περισσότερους από έναν πόλους.

Η αρχική εισαγωγή της ταχείας πολυπολικής μεθόδου – FMM συστάθηκε για πρώτη φορά από τους Greengard και Rokhlin στα 2D και 3D προβλήματα, με σκοπό τη μείωση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των «N-body» προβλημάτων, εφαρμόζοντας μια προσεγγιστική τεχνική ελεγχόμενου σφάλματος στην συνάρτηση Green του συστήματός μας. Ο αλγόριθμος FMM των Greengard και Rokhlin (1987) θεωρείται ένας εκ των 10 κορυφαίων του 20^{ου} αιώνα ενώ βελτιώθηκε αργότερα από τους Schmidt & Lee[14] οι οποίοι και τον εφάρμοσαν σε σύστημα περιοδικών συνθηκών.

Ακόμα η τεχνική αυτή επιτρέπει την αλληλεπίδραση που οφείλεται σε μία ομάδα σωματιδίων σαν να οφειλόταν σε ένα μονάχα σωματίδιο. Όταν η μέθοδος FMM εφαρμόζεται σε διανυσματικά ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα, η αλληλεπίδραση μεταξύ καλά χωρισμένων ομάδων από συναρτήσεις βάσεως μπορεί να υπολογιστεί αρκετά γρήγορα. Αυτό οδηγεί σε έναν ταχύτατο υπολογισμό του

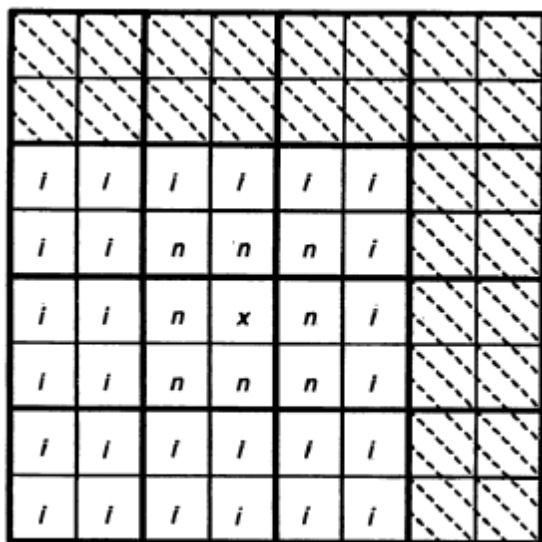
γινόμενου διανυσματικών πινάκων δίχως την αποθήκευση πολλών εκ των στοιχείων των πινάκων. Αυτή η τεχνική επομένως επιταχύνει τους υπολογισμούς ενώ μειώνει σημαντικά το κόστος της μνήμης που απαιτείται για τέτοιου είδους προβλήματα.

Εφαρμόζεται επίσης ευρέως σε μεγάλα συστήματα προβλημάτων μοριακής δυναμικής, στη φυσική πλάσματος, στη ρεολογία και κυρίως στην ουράνια μηχανική, έναν από τους πιο βασικούς κλάδους της αστρονομίας. Μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι ο υπολογιστικός της χρόνος κλιμακώνεται ως $O(N)$. Εάν εφαρμόσουμε τη μέθοδο FMM στον υπολογισμό γινόμενου διανυσματικών πινάκων τότε η πολυπλοκότητα της λύσης μας μπορεί να μειωθεί από $O(N^2)$ σε πολυπλοκότητα τάξης $O(N)$.

Στη μέθοδο FMM το κελί της προσομοίωσης χωρίζεται σε πολλά μικρότερου μεγέθους κελιά, σύμφωνα με τον λεγόμενο τρόπο «tree structure or true codes». Εν συνεχεία υπολογίζονται απ' ευθείας οι ηλεκτροστατικές αλληλεπιδράσεις μικρής εμβέλειας, ενώ οι αλληλεπιδράσεις μεγαλύτερης εμβέλειας υπολογίζονται προσεγγιστικά με αναπτύγματα πολυπόλων μεταξύ ομάδων (clusters) των σωματιδίων. Οι ομάδες σωματιδίων δηλαδή, σε μεγάλες αποστάσεις θεωρούνται ως μία ενιαία ομάδα. Στη συνέχεια ομαδοποιώντας το σύστημα σε αυξανόμενου μεγέθους ομάδες, οι αλληλεπιδράσεις υπολογίζονται προσεγγιστικά. Η προσέγγιση αυτή της ομαδοποίησης των σωματιδίων προτάθηκε αρχικά από τον Appel[15] με τον αντίστοιχο αλγόριθμο να κλιμακώνεται με βάση τον υπολογιστικό του χρόνο ως $O(N)$ [16]. Ο αλγόριθμος αυτός στη συνέχεια βελτιώθηκε από τους Barnes et al[17]. Λεπτομέρειες της μεθόδου σχετικά με την ακρίβεια και την υπολογιστική της πολυπλοκότητα περιγράφονται σε αντίστοιχο άρθρο του Esselink[18].

Όπως αναφέρεται στην αναφορά [19] στο σχήμα 2.6[19] παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο είναι κατανομημένα με ιεραρχικό τρόπο τα κελιά σ' έναν αλγόριθμο «tree code». Το επίπεδο 0 αναφέρεται στο αρχικό κελί της προσομοίωσης, ενώ τα επίπεδα $l+1$ στην υποδιαίρεση κάθε κελιού το οποίο αντιστοιχεί σε οχτώ ίσα κελιά, δηλαδή ο αριθμός των κελιών που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο l είναι 8^l . Θεωρώντας για παράδειγμα το επίπεδο 3 του κελιού του Σχήματος 2.6, στο κελί με το όνομα x αντιστοιχούν οι κοντινοί του γείτονες που συμβολίζονται με n . Επίσης με i συμβολίζονται τα κελιά τα οποία αποτελούν τις λίστες αλληλεπίδρασης του κελιού x . Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η ιεραρχία επιπέδου στα κελιά χρησιμοποιείται προκειμένου να γίνει ομαδοποίηση των σωματιδίων σε διάφορες κλίμακες του χώρου έτσι ώστε, να πραγματοποιηθεί ο υπολογισμός του ηλεκτροστατικού δυναμικού

ανάμεσα σε απομακρυσμένες ομάδες σωματιδίων, χρησιμοποιώντας αναπτύγματα πολυπόλων.



Σχήμα 4.1: Δισδιάστατη αναπαράσταση των κοντινών γειτόνων και των λιστών αλληλεπίδρασης ενός προσομοιωτή κελιού με την μέθοδο FMM.

Για ένα κελί το οποίο αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο, σχηματίζεται το αντίστοιχο ανάπτυγμα πολυπόλων βαθμού p , το οποίο εκφράζει το πεδίο του δυναμικού αλληλεπίδρασης του κελιού αυτού. Στη συνέχεια υπολογίζεται το ανάπτυγμα αυτό για κάθε ένα σωματίδιο το οποίο αλληλεπιδρά με τη λίστα αλληλεπίδρασης.

Η εφαρμογή της FMM σε σύστημα τριών διαστάσεων απαιτεί τρεις μετασχηματισμούς του αναπτύγματος πολυπόλων του ηλεκτροστατικού δυναμικού. Έστω ότι έχουμε μία κατανομή φορτίων σε μία θέση $\mathbf{r}_i = (r_i, \theta_i, \varphi_i)$ με φορτίο q_i . Το ηλεκτροστατικό δυναμικό σε ένα σημείο $\mathbf{r}_j = (r_j, \theta_j, \varphi_j)$ αρκετά απομακρυσμένο εκφράζεται σαν ανάπτυγμα πολυπόλων της παρακάτω μορφής:

$$\varphi(\mathbf{r}_j) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r^{n+1}} P_n^m(\theta_j, \varphi_j) \quad (4.3)$$

$$M_n^m = \sum_{i=1}^k q_i r_i^n P_n^{-m}(\theta_i, \varphi_i) \quad (4.4)$$

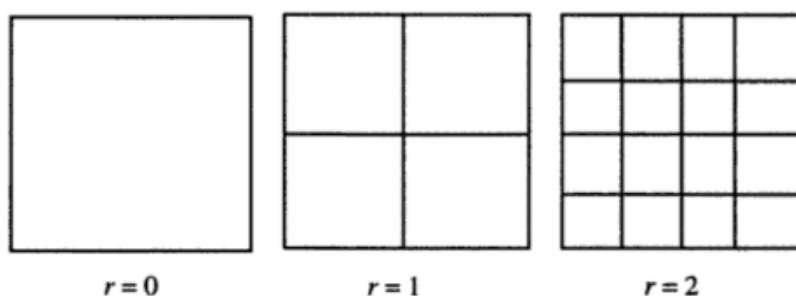
Όπου τα P_n^{-m} υποδηλώνουν τις τοπικές σταθερές Legendre.

Άλλες μέθοδοι οι οποίες βασίζονται σε αναπτύγματα πολυπόλων, για τον υπολογισμό ηλεκτροστατικών αλληλεπιδράσεων περιλαμβάνουν την Reduced cell Multipole method (RCMM)[20], την Particle- Particle Particle-Mesh/Multipole expansion (PPPM/MPE)[21][22] και την μέθοδο Macroscopic Multipole Method (MMM).

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι η μέθοδος άθροισης κατά Ewald αποτελεί την πιο αξιόπιστη προσέγγιση στο πρόβλημα υπολογισμού των ηλεκτροστατικών αλληλεπιδράσεων σε προσομοιώσεις μοριακής δυναμικής. Εναλλακτικές μέθοδοι οι οποίες βασίζονται σε μετασχηματισμούς Fourier και σε αναπτύγματα πολυπόλων κερδίζουν έδαφος τα τελευταία χρόνια λόγω της μεγάλης μείωσης του υπολογιστικού τους χρόνου. Θα μπορούσαμε συνεπώς να επισημάνουμε ότι για συστήματα που αποτελούνται από συνολικό αριθμό σωματιδίων N :

- Για $N \leq 1000$ χρησιμοποιείται η αυθεντική μέθοδος άθροισης κατά Ewald
- Για αριθμό σωματιδίων μεταξύ $10^3 \geq N \geq 10^4$ χρησιμοποιούνται μέθοδοι οι οποίες βασίζονται σε γρήγορους μετασχηματισμούς Fourier όπως η PPPM και η PME μέθοδος.
- Για αριθμό σωματιδίων $N \geq 10^5$, οι πλέον αποτελεσματικές είναι μέθοδοι που χρησιμοποιούν αναπτύγματα πολυπόλων.

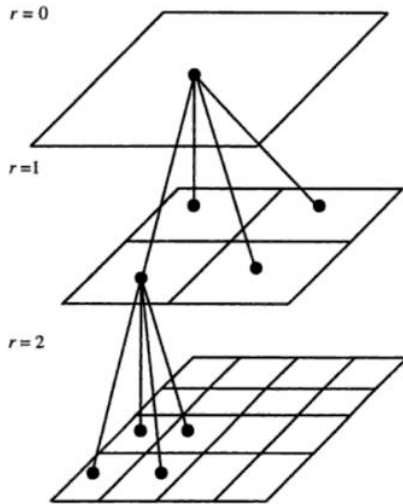
4.3 Βασικά στοιχεία και επεξήγηση της μεθόδου FMM



Σχήμα 4.2: Διδιάστατο παράδειγμα προσομοίωσης της διαίρεσης ενός κουτιού με την μέθοδο FMM.

Η μέθοδος FMM επί της ουσίας προτείνει το διαχωρισμό μια συνάρτησης f σε συγκεκριμένο αριθμό ομάδων οι οποίες θα εμπεριέχουν σημεία πηγής καθώς επίσης και σημεία από τον τελικό μας στόχο τα οποία βρίσκονται κοντά το ένα με το άλλο σε διαστάσεις, έτσι ώστε να μπορούμε να αντιμετωπίζουμε τις ομάδες αυτές των σημείων σαν ένα σημείο πηγής και να το ονομάσουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ τους ως αλληλεπίδραση «κοντινού πεδίου».

Η αλληλεπίδραση του κοντινού πεδίου καθώς και η αξιολόγηση του τελικού σημείου εκτελείται από την κανονική αλληλεπίδραση των σημείων ανά δύο. Για την προσέγγιση του μακρινού πεδίου εκτελούμε τρία στάδια: αυτό της άθροισης - συγκέντρωσης (aggregation), της μετάφρασης (translation) και της ανάλυσης (disaggregation). Αυτά τα στάδια βασίζονται στον εκφυλισμό του πυρήνα K . Η διαδικασία της άθροισης αφορά το συσχετισμό των σημείων της πηγής, και τη συγκέντρωσή τους σε ομάδες ενός σημείου, το οποίο και συνήθως στο κέντρο του γκρουπ, μέσω κάποιας συνάρτησης. Όταν ολοκληρωθεί αυτή η διαδικασία για όλες τις ομάδες, ομαδοποιούμε σε ένα σύνολο αλληλεπιδράσεων, όλες τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ οποιονδήποτε δύο μη - γειτονικών κέντρων των ομάδων, και αξιολογούμε τις επιδράσεις των σημείων του ενός γκρουπ, με αυτές από κάποιο άλλο και τη διαδικασία αυτή την καλούμε «μετάφραση» (translation). Σημειώστε ότι αυτή η διαδικασία γίνεται μόνο μεταξύ των κέντρων των ομάδων, ανεξάρτητα από τις θέσεις των σημειακών πηγών.



Σχήμα 4.2: Διδιάστατη αναπαράσταση αλληλεξάρτησης μεταξύ του κέντρου βάρους των πόλων σε διαφορετικά επίπεδα της μεθόδου FMM

Πιο συγκεκριμένα θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο FMM με στόχο την επιτάχυνση του επαναληπτικής μεθόδου επίλυσης της μεθόδου των ροπών(MOM). Εμείς θα εξετάσουμε την εφαρμογή της μεθόδου σε μονοδιάστατο πρόβλημα της λεπτής γραμμικής κεραίας. Ακολουθώς επικεντρώμαστε στις βασικές αρχές του FMM αλγορίθμου και στα βασικά στάδια του σχηματισμού της λύσης με τη μέθοδο FMM.

4.4 Ανάλυση μεθόδου FMM και εκφυλισμός πυρήνα

Μετά από μια γενική επισκόπηση του αλγορίθμου FMM, είναι καιρός να δούμε πώς μπορούμε να υλοποιήσουμε τα στάδια της συνάθροισης (συσσωμάτωσης), αλλαγής (μετάφρασης) και επιμερισμού για δύο ξεχωριστά σύνολα τα οποία είναι πολύ μακριά το ένα από το άλλο σε μια συγκεκριμένη εξίσωση Kernel, (που στην περίπτωσή μας είναι η συνάρτηση του Green της εξίσωση Helmholtz, δίχως τη σταθερά $1/4\pi$). Ας υποθέσουμε πυρήνα της μορφής:

$$K(r, r') = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (4.5)$$

(πολύ κοντά στον προσεγγιστικό πυρήνα της μορφής $K_{ap}(z) = \frac{e^{-jk\sqrt{z^2+\alpha^2}}}{\sqrt{z^2+\alpha^2}}$, $|z| < h$ όπως είχαμε δει στην εξίσωση)

όπου r' και r είναι τα σημεία πηγής και παρατήρησης αντίστοιχα. Ο απο πάνω πυρήνας καλείται διαχωρίσιμος ή εκφυλισμένος εάν :

$$K(r, r') = \sum_{l=1}^N f_l(r) g_l(r') \quad (4.6)$$

Χρειαζόμαστε αυτόν τον εκφυλισμό ώστε να παρουσιάσουμε την εξίσωση (4.5) σε μορφή πολλαπλασιασμού πινάκων ώστε να μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημά μας. Ας τροποποιήσουμε λίγο τη σχέση (4.6) προσθέτοντας μια μικρή θετική σταθερά d (offset) στην θέση της πηγής μας. Έτσι θα έχουμε:

$$\frac{e^{-jk|r-r'+d|}}{|r-r'+d|} = \frac{e^{-jk|D+d|}}{|D+d|} \quad (4.7)$$

$$\text{όπου } D = r - r' \quad (4.8)$$

Από τον ορισμό της δευτέρου είδους σφαιρικής συνάρτησης Hankel και με τη χρήση του θεωρήματος πρόσθεσης για σφαιρικά κύματα [11] έχουμε:

$$\frac{e^{-jk|D+d|}}{|D+d|} = -jk \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \cdot (2l+1) \cdot J_1(k|d|) \cdot h_1^{(2)}(k|D|) P_l(\hat{d}, \hat{D}) \quad (4.9)$$

Με $J_1(x)$ να είναι οι σφαιρικές Bessel συναρτήσεις και $P_l(x)$ τα πολώνυμα Legendre βαθμού l . Σύμφωνα με το [12] μπορούμε να μετατρέψουμε την εξίσωση (4.7) σε ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα επάνω στη μοναδιαία σφαίρα μέσω της σχέσης:

$$4\pi \cdot (-j)^l \cdot J_1(k|d|) \cdot P_l(\hat{d}, \hat{D}) = \iint_S e^{-jk\hat{k}\cdot d} P_l(\hat{k}, \hat{D}) dS \quad (4.10)$$

Όπου \hat{k} είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα στην επιφάνεια της σφαίρας. Έτσι μέσω της (4.10) η (4.9) γίνεται:

$$\frac{e^{-jk|D+d|}}{|D+d|} = -\frac{k}{4\pi} \iint_S e^{-jk\hat{k}\cdot d} \sum_{l=0}^{\infty} (-j)^{l+1} \cdot (2l+1) \cdot h_1^{(2)}(k|D|) P_l(\hat{d}, \hat{D}) dS \quad (4.11)$$

Με το άθροισμα να διακόπτεται σε έναν πεπερασμένο αριθμό L (αριθμός αποκοπής), ο οποίος και οριοθετεί τις αποδεκτές τιμές των d και D . Έτσι θα έχουμε:

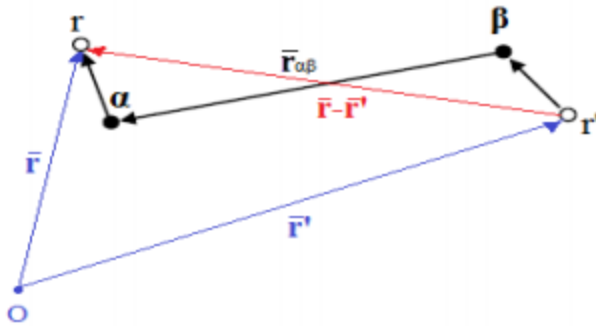
$$\frac{e^{-jk|D+d|}}{|D+d|} = \iint_S e^{-jk\hat{k}\cdot d} T_L(k, \hat{k}, D) dS \quad (4.12)$$

όπου

$$T_L(k, \hat{k}, D) = \frac{k}{4\pi} \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} \cdot (2l+1) \cdot h_1^{(2)}(k|D|) P_l(\hat{d}, \hat{D}) \quad (4.13)$$

η οποία αναφέρεται ως συνάρτηση μεταφοράς. Αυτή η συνάρτηση μεταφοράς μετατρέπει τα εξερχόμενα κύματα που ακτινοβολούνται από μια σημειακή πηγή σε ένα σύνολο από εισερχόμενα σφαιρικά κύματα στο σημείο παρατήρησης [14].

Τώρα εάν θεωρήσουμε το διάταξη που φαίνεται παρακάτω στο σχήμα 4.4, όπου α και β είναι τα δύο σημεία παρατήρησης και πηγής αντίστοιχα σχετικά κοντά μεταξύ τους σε σχέση με τον μήκος κύματος λ με τα r και r' και την απόσταση $D(r - r')$.



Σχήμα 4.4 Ανάλυση διανύσματος

Μπορούμε να γράψουμε πως:

$$V = (r - a) + (a - \beta) + (\beta - r')$$

$$\text{ή } V = r_{ra} + r_{ab} - r_{r'\beta} \quad (4.14)$$

Με χρήση της εξίσωσης (4.12) και από τη συνάρτηση Green παίρνοντας το άθροισμα για όλα τα N σημεία πηγής προκύπτει:

$$\sum_{n=1}^N \frac{e^{-jk|D+d|}}{|D+d|} = \iint_S \sum_{n=1}^N e^{-jk\hat{k}\cdot(r_{ra}-r_{r'n\beta})} T_L(k, \hat{k}, r_{a\beta}) dS \quad (4.15)$$

με συνάρτηση μεταφοράς:

$$T_L(k, \hat{k}, r_{a\beta}) = \frac{k}{4\pi} \sum_{l=0}^L (-j)^{l+1} \cdot (2l+1) \cdot h_1^{(2)}(k|r_{a\beta}|) P_l(\hat{d}, \widehat{r_{a\beta}}) dS \quad (4.16)$$

Οι ανωτέρω εξίσωση (4.16) αποδεικνύει πως η συνάρτηση μεταφοράς εξαρτάται μόνο από το $r_{\alpha\beta}$ που δηλώνει την απόσταση μεταξύ των κέντρων δύο γειτονικών ομάδων. Επιπροσθέτως, εάν μετακινήσουμε την πηγή ή τα σημεία (r, r') κατά μια μικρή απόσταση από την προηγούμενη θέση τους, τότε η συνάρτηση μεταφοράς δεν θα αλλάξει και ο υπολογισμός της μας δείχνει την αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται κοντά στα κέντρα α και β . Παρατηρώντας την εξίσωση (4.13), βλέπουμε πως ο υπολογισμός του αθροίσματος συναρτήσεων Green μεταξύ του σημείου r και όλων των σημείων πηγής r_n κοντά στο β μπορεί εύκολα να διεξαχθεί, αποδεικνύοντας έναν γρήγορο τρόπο υπολογισμού γινομένου διανυσματικών πινάκων.

Έτσι για κάθε σημείο πηγής r_n υπολογίζουμε την τιμή $e^{-jk\hat{k}r_{n\beta}}$ την οποία και καλούμε συνάρτηση ακτινοβολίας. Έπειτα όλες αυτές οι συναρτήσεις για κάθε πηγή αθροίζονται με στόχο τον υπολογισμό του τοπικού πεδίου στο β , στο κέντρο του τμήματος. Εν συνεχεία το πεδίο αυτό μεταδίδεται με τη χρήση της συνάρτησης μεταφοράς και δημιουργεί τοπικό πεδίο στο α , στο κέντρο του τμήματος. Ο πολλαπλασιασμός αυτού του τοπικού πεδίου με $e^{-jk\hat{k}r_{\alpha}}$ και με την ολοκλήρωσή του επί της μοναδιαίας σφαίρας, προκύπτει το επιθυμητό άθροισμα.

4.5 Εφαρμογή της FMM στις MOM

4.5.1 Επανεξέταση του προβλήματος

Η λύση μας στη μέθοδο των ροπών ξεκινάει με τη διακριτοποίηση του πεδίου του προβλήματος σε σημεία πηγής z_n και παρατήρησης z_m στον άξονα και στην επιφάνεια αντίστοιχα (τα οποία χρησιμοποιούμε και στους αντίστοιχους κώδικες με Matlab). Η προσέγγιση του ρεύματος από την άθροιση των συναρτήσεων βάσης στην περίπτωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallén με συναρτήσεις βάσης τις $f(z') = \cos\left(\frac{n\pi z'}{h}\right)$ θα δώσει:

$$\int_0^h \sum_{n=1}^N I_n \cos\left(\frac{n\pi z'}{h}\right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -\frac{j}{\zeta} [C\cos(kz) + D\sin(k|z|)] \quad \implies$$

$$\sum_{n=1}^N I_n \int_0^h \cos\left(\frac{n\pi z'}{h}\right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' = -\frac{j}{\zeta} [C\cos(kz) + D\sin(k|z|)] \quad (4.17)$$

όπου $R = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}$, και εάν πάρουμε το εσωτερικό γινόμενο στην (4.17) και στις δύο μεριές τις εξίσωσης με τις συναρτήσεις βάσεων $w(z) = \cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right)$ και ολοκληρώσουμε θα έχουμε:

$$\sum_{n=1}^N I_n \int_0^h \cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right) \int_0^h \cos\left(\frac{n\pi z'}{h}\right) \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' dz = \int_0^h -\frac{j}{\zeta} \cos\left(\frac{n\pi z'}{h}\right) [C\cos(kz) + D\sin(k|z|)] dz' \quad (4.18)$$

Η παραπάνω εξίσωση (4.18) μπορεί να μετατραπεί σε μία εξίσωση πινάκων της μορφής $Y_m = \frac{I_0}{V}$ (όπως δείξαμε στην παράγραφο 3.7 και εν συνεχεία σε βελτίωση στην 4.1) με αγνώστους ρευματικούς συντελεστές I_n . Ο ευθύς υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα της σύνθετης Y_m , η αντιστροφή του πίνακα Y καθώς και ο πολλαπλασιασμός πινάκων $I_0 = (Y_m)^{-1} \cdot V$ απαιτούν χρόνο καθώς και υψηλή κατανάλωση μνήμης. Για το λόγο αυτό τροποποιούμε την λύση την οποία έχουμε ήδη κάνει στην εξίσωση Hallén με τη χρήση του αλγορίθμου FMM.

4.5.1 FMM και Galerkin

Στη λύση FMM της μεθόδου Galerkin, λαμβάνουμε υπόψη την απόσταση μεταξύ κάθε ζεύγους σημείων πηγής και τελικού (επιθυμητού) σημείου, μιας και αρκετά εξ αυτών είναι αρκετά μακριά μεταξύ τους. Ως εκ τούτου, στις διανυσματικές μήτρες αλληλεπίδρασης Y_m και I, V δύναται κανείς να αναλύσει κάθε όρο των διανυσματικών πινάκων αυτών στη μορφή:

$$Y_m \cdot I = \begin{bmatrix} Y_m^{\text{near}} & Y_m^{\text{far}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I^{\text{near}} \\ I^{\text{far}} \end{bmatrix} = Y_m^{\text{near}} \cdot I^{\text{near}} + Y_m^{\text{far}} \cdot I^{\text{far}} = V_m$$

Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε σημείο παρατήρησης, η συνολική επίδραση της πηγής είναι η άθροιση της επίδρασης των πηγών κοντά στο σημείο παρατήρησης (στο εγγύς πεδίο) και της επίδρασης των πηγών μακρινού πεδίου. Για τις πηγές του εγγύς-πεδίου

από το σημείο παρατήρησης, εφαρμόζουμε τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό διανυσματικών πινάκων όπως προέκυψε από τη μέθοδο Galerkin, και κρατάμε τις τιμές που βρίσκουμε για κάθε σημείο παρατήρησης z_m . Έπειτα υπολογίζουμε τις επιδράσεις (αποτελέσματα) του μακρινού πεδίου για το ίδιο σημείο παρατήρησης και τέλος προσθέτουμε τις τιμές αυτές στις προηγούμενες τιμές που είχαμε κρατήσει για να βρούμε το συνολικό αποτέλεσμα στο συγκεκριμένο τελικό σημείο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Αποτελέσματα επίλυσης ολοκληρωτικής εξίσωσης τύπου Hallén

Μας ενδιαφέρει γενικά η μιγαδική τιμή του ρεύματος και έχουμε μιγαδική αντίσταση εισόδου.

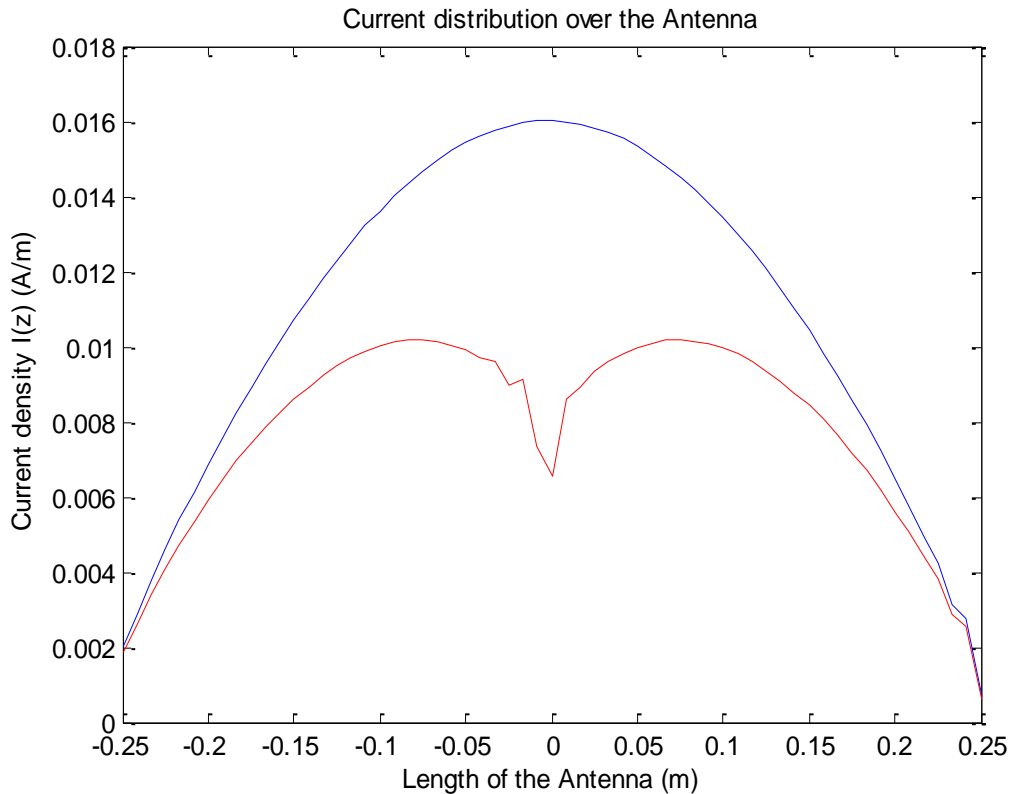
Με χρήση της εξίσωσης του Hallén υπολογίζουμε την κατανομή του ρεύματος $I(z)$ σε ένα δίπολο μήκους l . Στα ακόλουθα σχήματα φαίνεται το ρεύμα I_{re} και I_{imag} κατά μήκος του άξονα z .

Στην επίλυσή μας χρησιμοποιήσαμε για συναρτήσεις βάσης που είναι συναρτήσεις υποπεδίου καθώς και τη συνάρτηση δέλτα του Dirac. Η αριθμητική λύση της εξίσωσης φαίνεται στα σχήματα που ακολουθούν.

Με κόκκινο χρώμα απεικονίσαμε το φανταστικό μέρος I_{imag} και με μπλέ το πραγματικό I_{re} του ρεύματος I ή άλλως της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου Y_m , εφόσον θεωρούμε τάση $V=1$ στο διάκενο.

Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με $1V$ και ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ (καθαρός αριθμός σε συσχετισμό με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Οι παράμετροι h , a και z_0 , στην πράξη, μπορούν να εκφραστούν ως πολλαπλάσια του μήκους κύματος $\lambda=2\pi / k$. Σημειώνουμε ότι το μέγεθος I_0/V εκφράζει την - κατά προσέγγιση - σύνθετη αγωγιμότητα στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας. Στα αριθμητικά αποτελέσματα που ακολουθούν, οι αριθμητικές ολοκληρώσεις εκτελούνται με επαρκώς μικρό σφάλμα ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο.



Σχήμα 5.1 Κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 2 \cdot l$ ($h/\lambda=1$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=61$

Ο αντίστοιχος κώδικας σε Matlab (HALLEN.m) ακολουθεί.

```

clc
clear all
syms z
c=3.0e+08; %Speed of light%
f=3.0e+08; %Operating Frequency%
ze=120*pi; %ze = zeta = 376.7303, approximately
zeta=120*pi%
V0 = 1; %Assumed applied gap voltage V0 = 1%
l = c/f; %Wavelength of the field-lambda%
L = l/2; %Length of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1%
a = 0.0047; %Radius of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1%
k = 2*pi/l;
N = 100; %Number of Segments%
q =1; %Charge%
h =L/2; %Antenna half-length%
z0 = h/N; %sample spacing%
D = 2*q*z0; %Delta%
y=linspace (-0.5*L,0.5*L,N);
zm = -0.5*L-D;
for j=1:N+1
    zm=zm+D;
    zn=-0.5*L+D/2;
    for n=1:N+1
        A(j,n)= kernel (z, a, zm, zn, k, D);
    end
end

```

```

        zn=zn+D;
    end
    A(j,N+1)=-i*cos(k*z_m)/(z_e);
    V(j,1)=[-i*V0*sin(k*abs(z_m))]/(2*z_e);
end
Ainv=inv(A);
I=(Ainv*V);
for i=1:N
    H(i,1)=I(i,1);
end
plot(y,abs(H),y,real(H),'y',y,imag(H),'m')
xlabel('Length of the Antenna (m)')
ylabel('Current density I(z) (A/m)')
title('Current distribution over the Antenna')

function f=kernel(z,a,z_m,z_n,k,D)
    R=sqrt(a^2+(z-z_m)^2);
    g=inline([exp(-i*k*R)/(4*pi*R)]);
    f=quad(g,z_n,z_n+D/2);
end

```

5.2 Μοντελοποίηση DFG με GMPF

Ο ακόλουθος κώδικας αντιστοιχεί στα κεφάλαια 3.1, 3.7 και 4.1. Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με 1V και ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ (καθαρός αριθμός σε συσχέτιση με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Το ακόλουθο πρόγραμμα μας βοηθά στον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας Y_m στο κέντρο της κεραίας ($z=0$) καθώς και το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας. Καλούμε το πρόγραμμα DFGGMPF1.m:

```

clc
clear all

c=3.0e+08; %syms z
f=3.0e+08; %Speed of light%
l=c/f; %Operating Frequency%
ze=120*pi; %Wavelength of the field - lamda%
zeta=120*pi;% %ze = zeta = 376.7303, approximately
V0=1; %Assumed applied gap voltage V0 = 1%
L=0.5; %Length of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1% %Radius of the Antenna in Wavelengths -
a=0.007022; %as lamda%
k=2*pi; %k = 2*pi/lambda, (lambda=1 units)%

```

```

N=200; %Number of Segments%
q=1; %Charge%
h=L/2; %Antenna half-length%
z0=(2*h)/(2*N+1); %sample spacing%
D=2*q*z0; %Delta%
for l=1:(2*(N)+1)
    B1(l)=(i*V0)*sin(k*z0/2)*sin(k*z0*abs(N+1-l))/(ze*k);
end
B1(N+1)=(i*2*V0)*(sin(k*z0/4))*(sin(k*z0/4))/(ze*k);
for l=1:(2*(N)+1)
    B2(l)=(2/k)*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*(N+1-l));
end
B11 = B1(:);
B12 = B2(:);
for l=1:(2*(N)+1)
    [M,errbnd]=quadgk(@ (z)pA(z,a,k,z0,l),0,z0,'RelTol',1e-
13,'AbsTol',1e-13);
    A1(l)=M;
end
for d=1:(2*(N)+1)
    for e=1:(2*(N)+1)
        A(d,e)=A1(1+abs(d-e));
    end
end
I11=inv(A)*B11;
I12=inv(A)*B12;
C=(I11(2*N)-sqrt(3)*I11(2*N+1))./(sqrt(3)*I12(2*N+1)-I12(2*N)); %From
(4.1)%
Z1=(I11(N)+C*I12(N));
G1=real(Z1);
B1=imag(Z1);
Z=(I11(N+1)+C*I12(N+1)); %From (3.30) and
(4.2)%
G=real(Z);
B=imag(Z);
In=(I11+C*I12); %I(z)%
z=linspace(-h,h,2*N+1);
figure(1);
plot(z,real(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Real Part of Current density (A/m)')
figure(2);
plot(z,imag(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Imaginary Part of Current density (A/m)')

```

όπου

```

function f=pA(z,a,k,z0,l)
    f1=purhnasex1(z+1*z0,a,k);
    f2=purhnasex1(z-1*z0,a,k);
    f=(z0-z).*(f1+f2);
end

```

και

```

function f = purhnasex1(z,a,k)
    g=(quadv(@(th)(exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
    f=g./(8*pi^2);

```

end

και ανοίγουμε τα προγράμματα με τα αντίστοιχα ονόματα pA.m και purhnasex1.m.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

-Ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 0.5 \cdot 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.25$

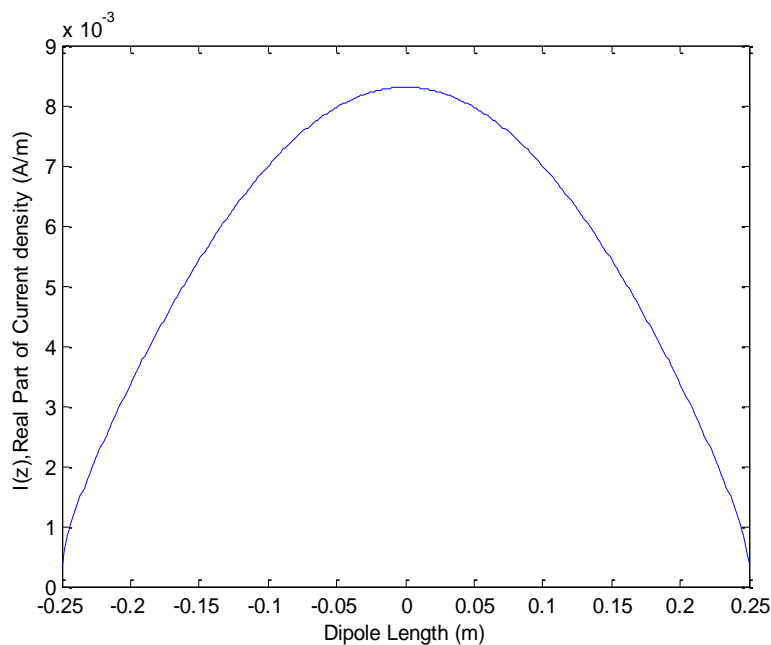
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας, δίνει :

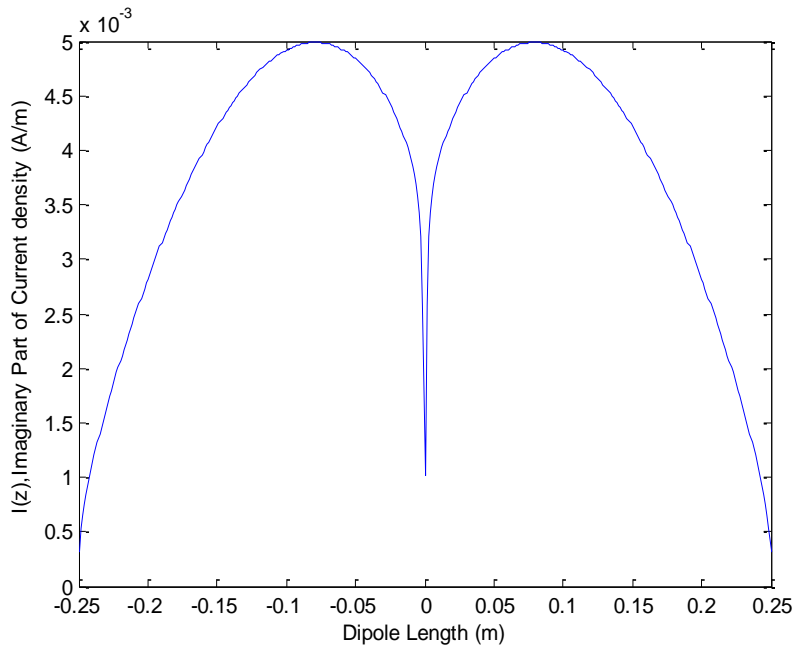
$Y_m = 0.0083 + 0.0010i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$G = 0.0083$ ($\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$)

$B = 0.0010$ ($\text{Im}\{I_{ex,0}/V\}$)



Σχήμα 5.2 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 0.5 \cdot 1$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.3 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 0.5 \cdot 1$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Τα ανωτέρω αποτελέσματα είναι σε πλήρη ταύτιση με τα αποτελέσματα της διδακτορικής διατριβής του Ιωάννη Τατσσόγλου [24] (σχήματα 2.1-2.2)

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

-Ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.5$

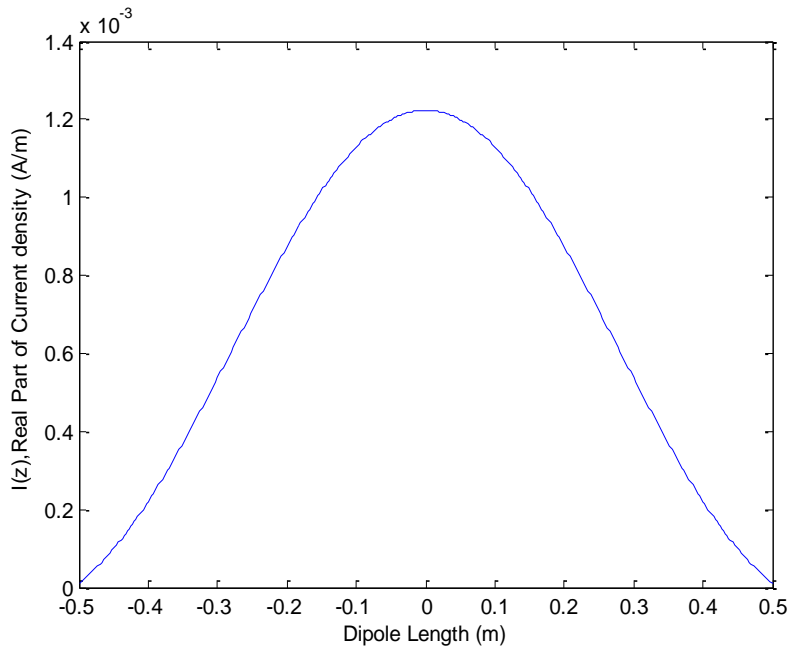
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας, δίνει :

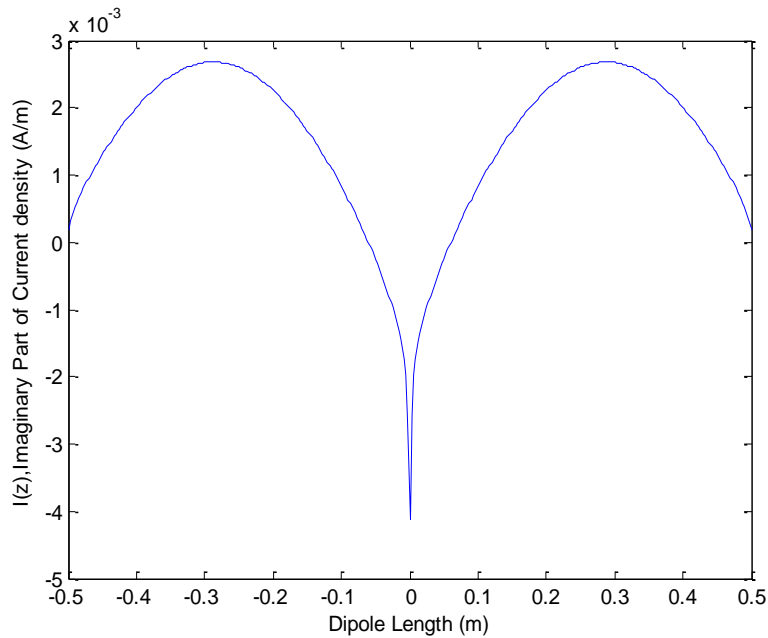
$$Y_m = 0.0012 - 0.0041i \text{ (Σύνθετη αγωγιμότητα-}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$G = 0.0012 \text{ (Re}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$B = - 0.0041 \text{ (Im}\{I_{ex,0}/V\})$$



Σχήμα 5.4 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.5 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$

Όπως έχουμε πει και πιο πάνω στην εργασία μας, υπολογίζοντας τη σύνθετη αγωγιμότητα Y_m υπολογίζουμε και το ρεύμα I μίας και $V=1$.

5.3 Μοντελοποίηση DFG με PMTF

Ο ακόλουθος κώδικας αντιστοιχεί στα κεφάλαια 3.1, 3.8 και 4.1. Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με 1V και ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ (καθαρός αριθμός σε συσχέτισμό με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Το ακόλουθο πρόγραμμα μας βοηθά στον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας Y_m στο κέντρο της κεραίας ($z=0$) καθώς και το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας. Καλούμε το πρόγραμμα DFGPMTF1.m:

```
clc
clear all

c=3.0e+08; %syms z
f=3.0e+08; %Speed of light%
l=c/f; %Operating Frequency%
ze=120*pi; %Wavelength of the field - lamda%
zeta=120*pi% %ze = zeta = 376.7303, approximately
V0=1; %Assumed applied gap voltage V0 = 1%
L=0.5; %Length of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1% %Radius of the Antenna in Wavelengths
a=0.007022;
- as lamda%
k=2*pi; %k = 2*pi/lambda, (lambda=1 units)%
N=200; %Number of Segments%
q=1; %Charge%
h=L/2; %Antenna half-length%
z0=h/N; %sample spacing%
D=2*q*z0; %Delta%
for l=1:(2*(N)+1)
    B1(l)= z0*(i*V0/(2*ze)).*(sin(k*abs((N+1-l)*z0)));
end
for l=1:(2*(N)+1)
    B2(l)=z0*cos(k*((N+1-l)*z0));
end
B11 = B1(:);
B12 = B2(:);
for l=1:(2*(N)+1)
    [A,errbnd]=quadgk(@(z)pA(z,a,k,z0,l),0,z0,'RelTol',1e-
10,'AbsTol',0);
    g(l)=A;
end
for d=1:(2*(N)+1)
    for e=1:(2*(N)+1)
        A(d,e)=g(1+abs(d-e));
    end
end
I11=inv(A)*B11;
I12=inv(A)*B12;
```



```

C=(I11(2*N)-sqrt(3)*I11(2*N+1))./(sqrt(3)*I12(2*N+1)-I12(2*N)); %From
(4.1)%
Z1=(I11(N)+C*I12(N));
G1=real(Z1);
B1=imag(Z1);
Z=(I11(N+1)+C*I12(N+1)) %From (3.30) and
(4.2)%
G=real(Z);
B=imag(Z);
In=(I11+C*I12); %I(z)%
z=-h:z0:h;
figure(1);
plot(z,real(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Real Part of Current density (A/m)')
figure(2);
plot(z,imag(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Imaginary Part of Current density (A/m)')

```

όπου

```

function f=pA(z,a,k,z0,l)
    f1=purhnasex1(z+l*z0,a,k);
    f2=purhnasex1(z-l*z0,a,k);
    f=(z0-z).*(f1+f2);
end

```

και

```

function f = purhnasex1(z,a,k)
g=(quadv(@(th)(exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*
a*sin(th/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
f=g./(8*pi^2);
end

```

και ανοίγουμε τα προγράμματα με τα αντίστοιχα ονόματα pA.m και purhnasex1.m.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

-Ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$, δηλαδή $h/\lambda=0.25$

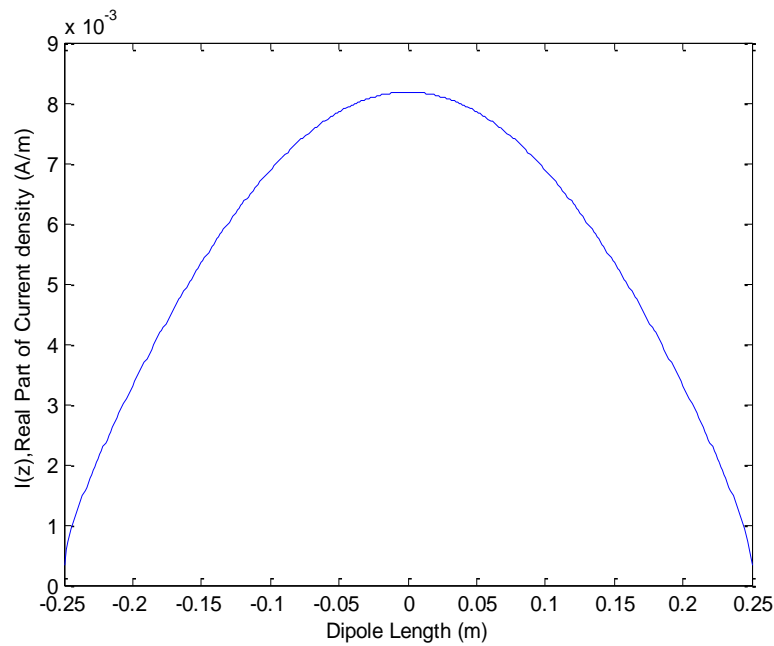
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας, δίνει :

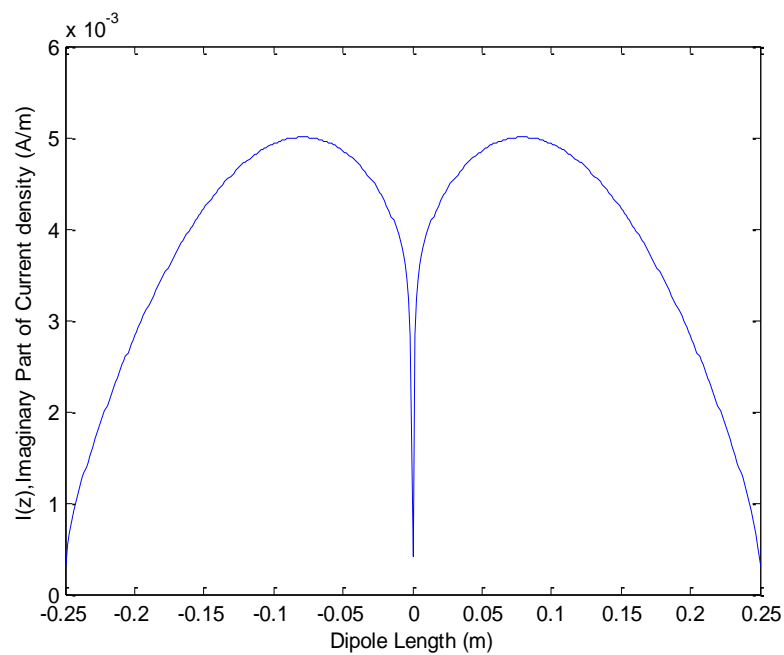
$Y_m = 0.0082 + 0.0004i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$$G = 0.0082 (\text{Re}\{I_{\text{ex},0}/V\})$$

$$B = 4.2036\text{e-}04 (\text{Im}\{I_{\text{ex},0}/V\})$$



Σχήμα 5.6 $\text{Re}\{I_{\text{ex}}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 0.5 \cdot \lambda$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.7 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 0.5 \cdot 1$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

-Ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.5$

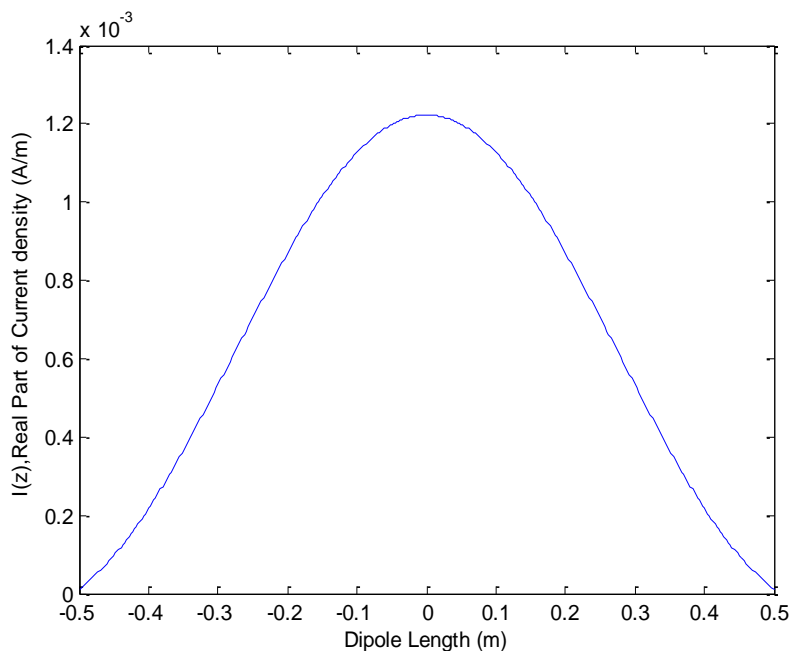
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας δίνει :

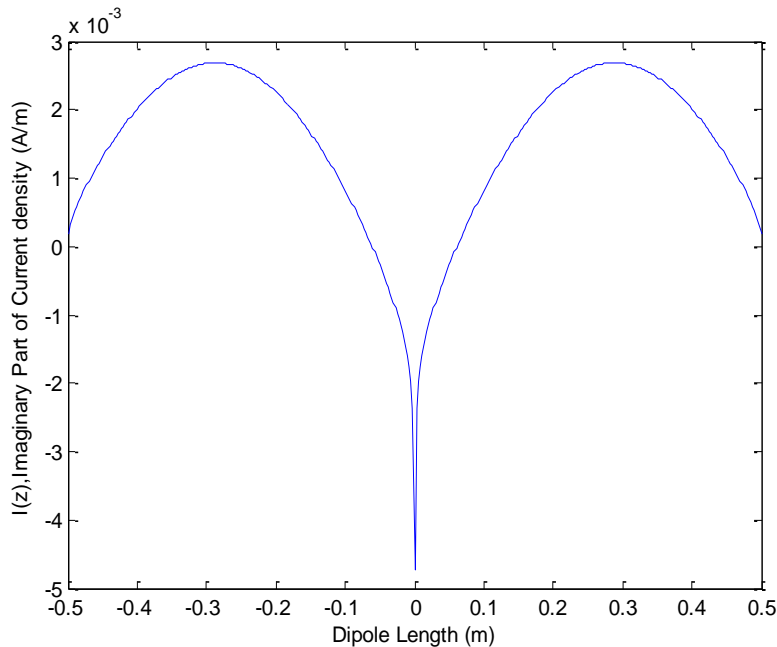
$Y_m = 0.0012 - 0.0047i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$G = 0.0012$ ($\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$)

$B = - 0.0047$ ($\text{Im}\{I_{ex,0}/V\}$)



Σχήμα 5.8 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.9 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$

5.4 Μοντελοποίηση FG με GMPF

Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με 1V και εσωτερική ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ και εξωτερική ακτίνα κεραίας $b=010533$ (καθαρός αριθμός σε συσχέτισμό με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Το ακόλουθο πρόγραμμα μας βοηθά στον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας Y_m στο κέντρο της κεραίας ($z=0$) καθώς και το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας. Καλούμε το πρόγραμμα FGGMPF1.m:

```

clc
clear all

c=3.0e+08;
f=3.0e+08;
l=c/f;
ze=120*pi;
zeta=120*pi%
V0=1;

%syms z
%Speed of light%
%Operating Frequency%
%Wavelength of the field - lamda%
%ze = zeta = 376.7303, approximately
%Assumed applied gap voltage V0 = 1%

```

```

L=0.5; %Length of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1%
a=0.007022; %Inside Radius of the Antenna in
Wavelengths - as lamda%
b=0.010533; %Outside Radius of the Antenna in
Wavelengths - as lamda%
k=2*pi; %k = 2*pi/lambda, (lambda=1 units)%
N=200; %Number of Segments%
q =1; %Charge%
h =L/2; %Antenna half-length%
z0=(2*h)/(2*N+1); %sample spacing%
D = 2*q*z0; %Delta%
for l=-N:N
    B1(N+1+l)= quadgk(@(y) funct (y,k,a,b,ze) , (l-0.5)*z0, (l+0.5)*z0) ;;
end
for l=-N:N
    B2(N+1+l)=(2/k)*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*l);
end
B11=B1(:);
B12=B2(:);
for l=1:(2*(N)+1)
    [A,errbnd]=quadgk(@(z)pA(z,a,k,z0,l),0,z0,'RelTol',1e-
10,'AbsTol',0);
    g(l)=A;
end
for d=1:(2*(N)+1)
    for e=1:(2*(N)+1)
        A(d,e)=g(1+abs(d-e));
    end
end
I11=inv(A)*B11;
I12=inv(A)*B12;
C=(I11(2*N)-sqrt(3)*I11(2*N+1))./(sqrt(3)*I12(2*N+1)-I12(2*N)); %From
(4.1)%
Z1=(I11(N)+C*I12(N));
G1=real(Z1) ;
B1=imag(Z1) ;
Z=(I11(N+1)+C*I12(N+1)) %From (3.30) and
(4.2)%
G=real(Z)
B=imag(Z)
In=(I11+C*I12); %I(z)%
z=linspace(-h,h,2*N+1);
figure(1);
plot(z,real(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Real Part of Current density (A/m)')
figure(2);
plot(z,imag(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Imaginary Part of Current density (A/m)')

```

όπου

```

function f=funct (y,k,a,b,ze)
    f=(quadv(@(x) (i/(2*ze*log(b/a))*sin(k*(y
x.*y)).*y.*(exp(i*k*sqrt((x.*y).^2+a^2))./sqrt((x.*y).^2+a^2)-
exp(i*k*sqrt((x.*y).^2+b^2))./sqrt((x.*y).^2+b^2))),0,1,1.e-17));
end

```

και

```
function f=pA(z,a,k,z0,l)
    f1=purhnasex1(z+1*z0,a,k);
    f2=purhnasex1(z-1*z0,a,k);
    f=(z0-z).*(f1+f2);
end
```

και

```
function f = purhnasex1(z,a,k)
    g=(quadv(@(th) (exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
    f=g./(8*pi^2);
end
```

και ανοίγουμε τα προγράμματα με τα αντίστοιχα ονόματα funct.m, pA.m και purhnasex1.m.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

- Εσωτερική ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

- Εξωτερική ακτίνα $b=0.010355$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $b/\lambda = 0.010533$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$, δηλαδή $h/\lambda=0.25$

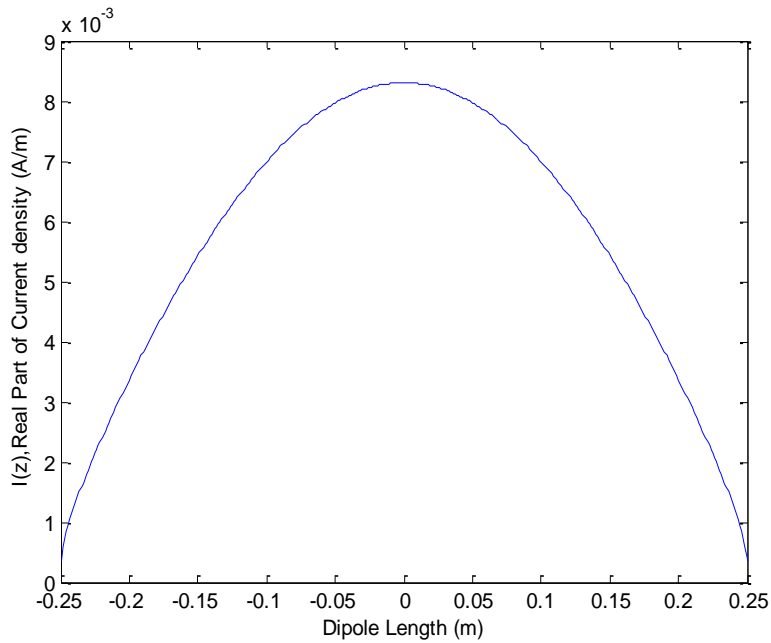
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας, δίνει :

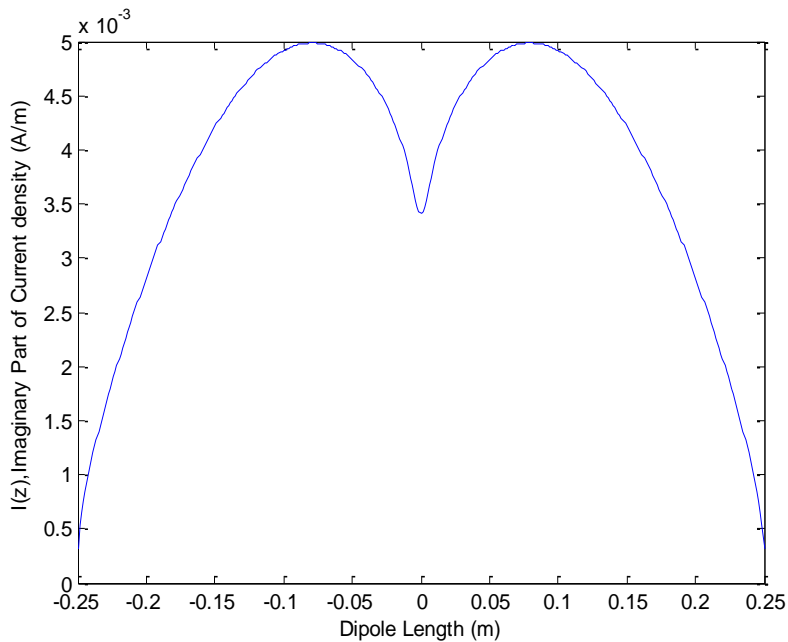
$$Y_m = 0.0083 + 0.0034i \text{ (Σύνθετη αγωγιμότητα-}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$G = 0.0083 \text{ (Re}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$B = 0.0034 \text{ (Im}\{I_{ex,0}/V\})$$



Σχήμα 5.10 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.11 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

$-k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

- Εσωτερική ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

- Εξωτερική ακτίνα $b=0.010533$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $b/\lambda = 0.010533$

-Μήκος κεραιάς $L = 2 * h = 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.5$

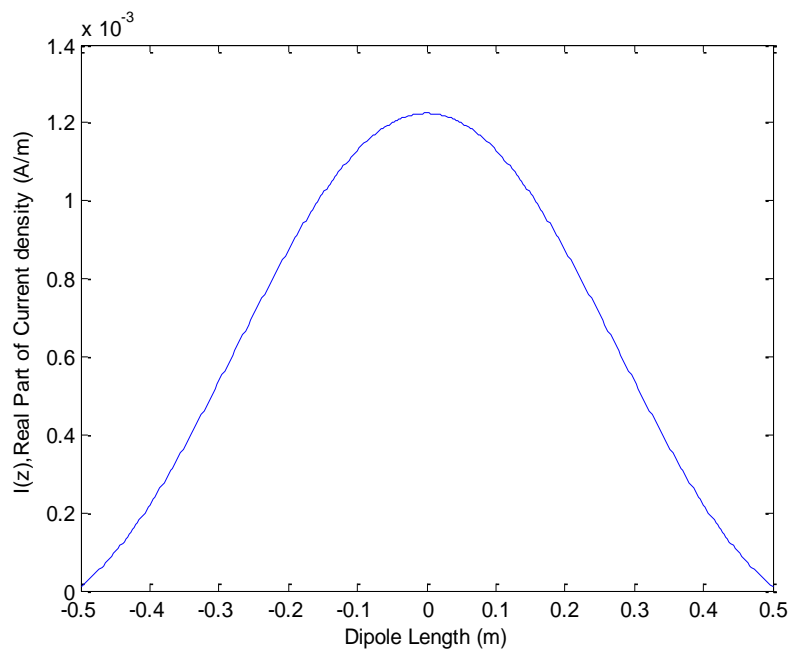
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας δίνει :

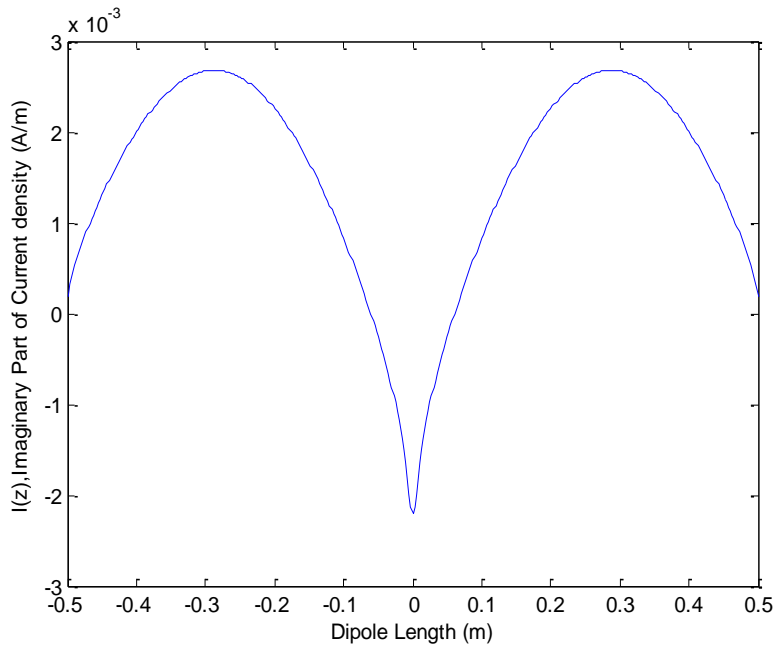
$$Y_m = 0.0012 - 0.0022i \text{ (Σύνθετη αγωγιμότητα-}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$G = 0.0012 \text{ (Re}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$B = -0.0022 \text{ (Im}\{I_{ex,0}/V\})$$



Σχήμα 5.12 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.13 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$

5.5 Μοντελοποίηση FG με PTMF

Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με 1V και εσωτερική ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ και εξωτερική ακτίνα κεραίας $b=0.010533$ (καθαρός αριθμός σε συσχέτισμό με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Το ακόλουθο πρόγραμμά μας βοηθά στον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας Y_m στο κέντρο της κεραίας ($z=0$) καθώς και το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας. Καλούμε το πρόγραμμα FGPTMF1.m:

```

clc
clear all

c=3.0e+08; %speed of light%
f=3.0e+08; %Operating Frequency%
l=c/f; %Wavelength of the field - lamda%
ze=120*pi; %ze = zeta = 376.7303, approximately
zeta=120*pi%
V0=1; %Assumed applied gap voltage V0 = 1%
L=0.5; %Length of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1%
a=0.007022; %Inside Radius of the Antenna in
Wavelengths - as lamda%

```

```

b=0.010533; %Outside Radius of the Antenna in
Wavelengths - as lamda%
k=2*pi; %k = 2*pi/lambda, (lambda=1 units)%
N=200; %Number of Segments%
q=1; %Charge%
h=L/2; %Antenna half-length%
z0=h/N; %sample spacing%
D=2*q*z0; %Delta%
for l= -N:N
    y = z0*l;
    B1(N+1+l)= z0*funct(y,k,a,b,ze);
end
for l=-N:N
    B2(N+1+l)=z0*cos(k*(l*z0));
end
B11=B1(:);
B12=B2(:);
for l=1:(2*(N)+1)
    [A,errbnd]=quadgk(@(z)pA(z,a,k,z0,l),0,z0,'RelTol',1e-
10,'AbsTol',0);
    g(l)=A;
end
for d=1:(2*(N)+1)
    for e=1:(2*(N)+1)
        A(d,e)=g(1+abs(d-e));
    end
end
I11=inv(A)*B11;
I12=inv(A)*B12;
C=(I11(2*N)-sqrt(3)*I11(2*N+1))./(sqrt(3)*I12(2*N+1)-I12(2*N)); %From
(4.1)%
Z1=(I11(N)+C*I12(N));
G1=real(Z1);
B1=imag(Z1);
Z=(I11(N+1)+C*I12(N+1)) %From (3.30) and
(4.2)%
G=real(Z)
B=imag(Z)
In=(I11+C*I12); %I(z)%
z=-h:z0:h;
figure(1);
plot(z,real(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Real Part of Current density (A/m)')
figure(2);
plot(z,imag(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Imaginary Part of Current density (A/m)')

```

όπου

```

function f=funct(y,k,a,b,ze)
    f=(quadv(@(x)(i/(2*ze*log(b/a))*sin(k*(y
x.*y)).*y.*(exp(i*k*sqrt((x.*y).^2+a^2))./sqrt((x.*y).^2+a^2)-
exp(i*k*sqrt((x.*y).^2+b^2))./sqrt((x.*y).^2+b^2))),0,1,1.e-17));
end

```

και

```
function f=pA(z,a,k,z0,l)
    f1=purhnasex1(z+1*z0,a,k);
    f2=purhnasex1(z-1*z0,a,k);
    f=(z0-z).*(f1+f2);
end
```

και

```
function f = purhnasex1(z,a,k)
    g=(quadv(@(th) (exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
    f=g./(8*pi^2);
end
```

και ανοίγουμε τα προγράμματα με τα αντίστοιχα ονόματα funct.m, pA.m και purhnasex1.m.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

- Εσωτερική ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

- Εξωτερική ακτίνα $b=0.010355$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $b/\lambda = 0.010533$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$, δηλαδή $h/\lambda=0.25$

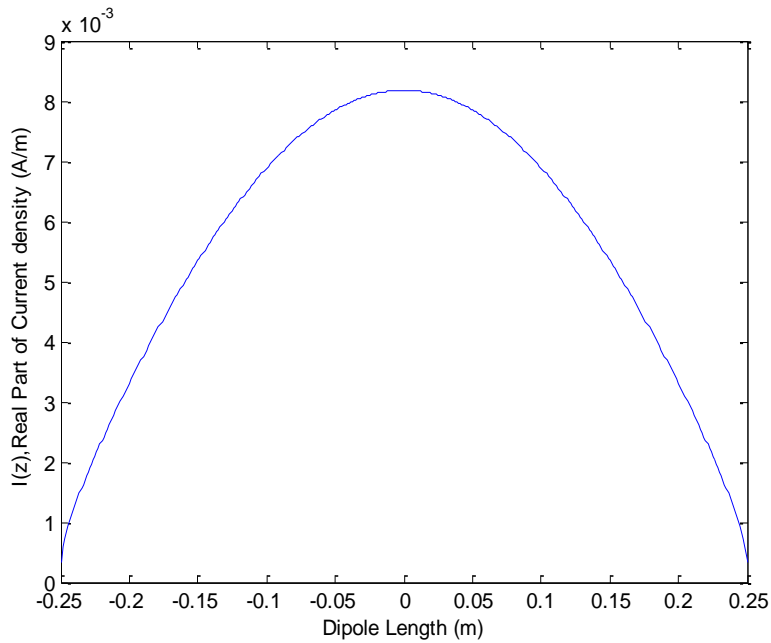
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας, δίνει :

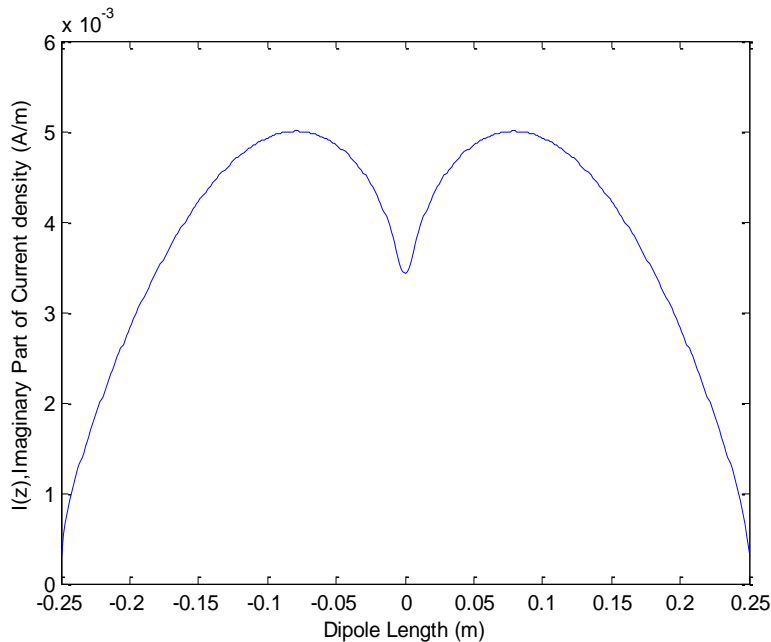
$$Y_m = 0.0082 + 0.0034i \text{ (Σύνθετη αγωγιμότητα-}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$G = 0.0082 \text{ (Re}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$B = 0.0034 \text{ (Im}\{I_{ex,0}/V\})$$



Σχήμα 5.14 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.15 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

$-k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

- Εσωτερική ακτίνα $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

- Εξωτερική ακτίνα $b=0.010533$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $b/\lambda = 0.010533$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.5$

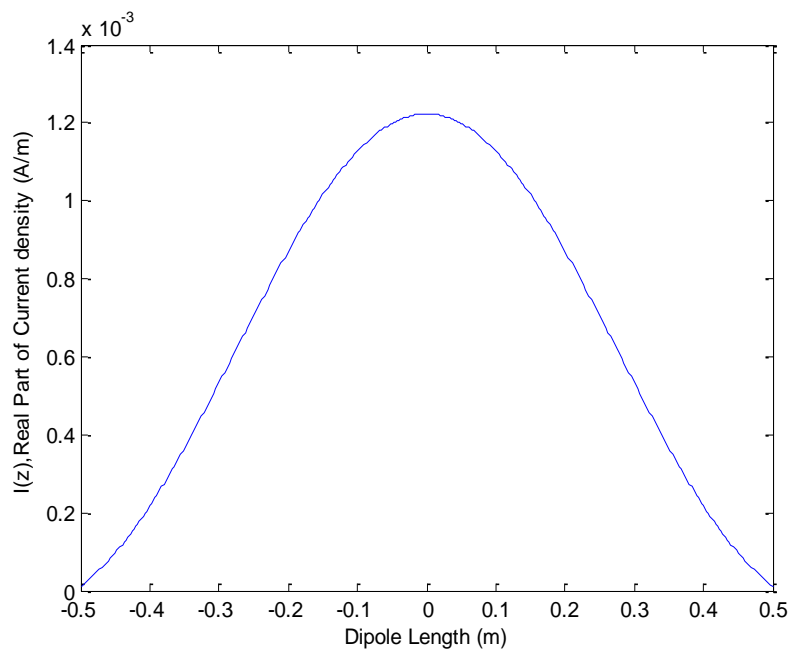
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας, δίνει :

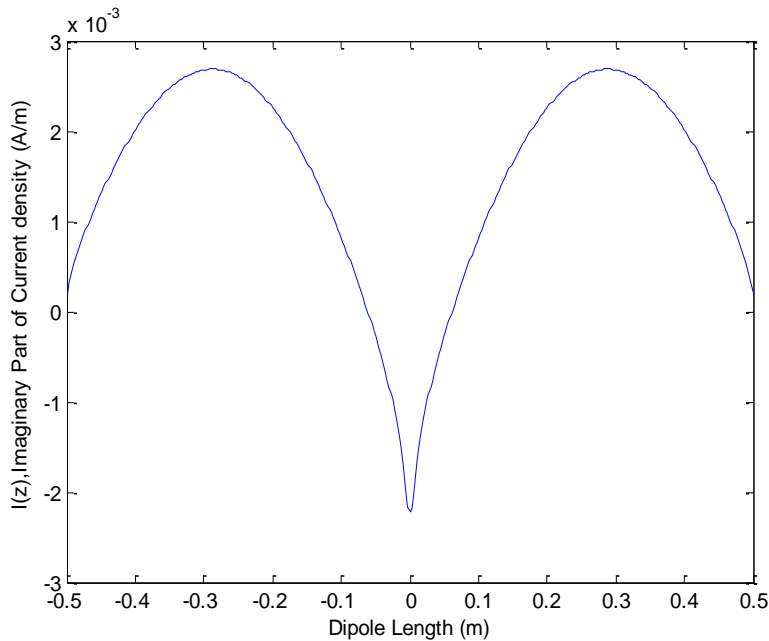
$$Y_m = 0.0012 - 0.0022i \text{ (Σύνθετη αγωγιμότητα-}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$G = 0.0012 \text{ (Re}\{I_{ex,0}/V\})$$

$$B = -0.0022 \text{ (Im}\{I_{ex,0}/V\})$$



Σχήμα 5.16 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.17 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$

5.6 Μοντελοποίηση FGG με GMPF

Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με 1V και ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ (καθαρός αριθμός σε συσχετισμό με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Το ακόλουθο πρόγραμμά μας βοηθά στον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας Y_m στο κέντρο της κεραίας ($z=0$) καθώς και το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας. Καλούμε το πρόγραμμα FGGGMPF.m:

```

clc
clear all

c=3.0e+08; %syms z
f=3.0e+08; %Speed of light%
l=c/f; %Operating Frequency%
ze=120*pi; %Wavelength of the field - lamda%
zeta=120*pi% %ze = zeta = 376.7303, approximately
V0=1; %Assumed applied gap voltage V0 = 1%
L=0.5; %Length of the Antenna in Wavelengths -
as lamda=1%
a=0.007022; %Radius of the Antenna in Wavelengths -
as lamda%
```

```

k=2*pi; %k = 2*pi/lambda, (lambda=1 units)%
N=200; %Number of Segments%
q=1; %Charge%
h =L/2; %Antenna half-length%
z0=(2*h)/(2*N+1); %sample spacing%
D=2*q*z0; %Delta%
for l=-N:N
    if abs(l)<q
        B1(N+1+1)=i*(2*pi*z0-
2*cos(2*pi*l*z0)*sin(pi*z0))/(ze*4*pi*pi*D);
    elseif abs(l)>q
        B1(N+1+1)=i*(sin(pi*z0)*sin(2*pi*l*z0-
pi*D*0.5)*sin(pi*D*0.5))/(ze*4*pi*pi*D);
    elseif abs(l)==q
        B1(N+1+1)=(i*(2*pi*z0-4*sin(pi*z0*0.5)*cos(pi*D-
pi*z0*0.5))/(ze*8*pi*pi*D)+(i*sin(pi*z0*0.5)*sin(pi*(0.5*z0+D*0.5))*
sin(pi*D*0.5)/(ze*pi*pi*D));
    end
end
for l=-N:N
    B2(N+1+1)=(2/k)*sin(k*z0/2)*cos(k*z0*l);
end
B11=B1(:);
B12=B2(:);
for l=1:(2*(N)+1)
    [A,errbnd]=quadgk(@(z)pA(z,a,k,z0,l),0,z0,'RelTol',1e-
10,'AbsTol',0);
    g(l)=A;
end
for d=1:(2*(N)+1)
    for e=1:(2*(N)+1)
        A(d,e)=g(1+abs(d-e));
    end
end
I11=inv(A)*B11;
I12=inv(A)*B12;
C=(I11(2*N)-sqrt(3)*I11(2*N+1))./(sqrt(3)*I12(2*N+1)-I12(2*N)); %From
(4.1)%
Z1=(I11(N)+C*I12(N));
G1=real(Z1);
B1=imag(Z1);
Z=(I11(N+1)+C*I12(N+1)) %From (3.30) and
(4.2)%
G=real(Z)
B=imag(Z)
In=(I11+C*I12); %I(z)%
z=linspace(-h,h,2*N+1);
figure(1);
plot(z,real(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Real Part of Current density (A/m)')
figure(2);
plot(z,imag(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Imaginary Part of Current density (A/m)')

```

όπου

```

function f=pA(z,a,k,z0,l)
    f1=purhnasex1(z+l*z0,a,k);

```

```

    f2=purhnasex1(z-1*z0,a,k);
    f=(z0-z).*(f1+f2);
end

και

function f = purhnasex1(z,a,k)
    g=(quadv(@(th) (exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
    f=g./(8*pi^2);
end

```

και ανοίγουμε τα προγράμματα με τα αντίστοιχα ονόματα pA.m και purhnasex1.m.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

-Ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 0.5 \cdot 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.25$

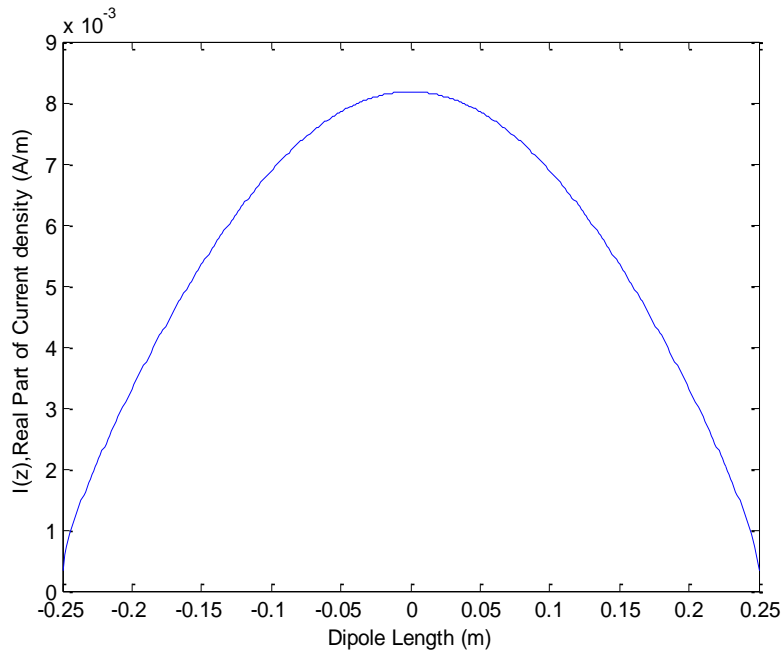
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας δίνει :

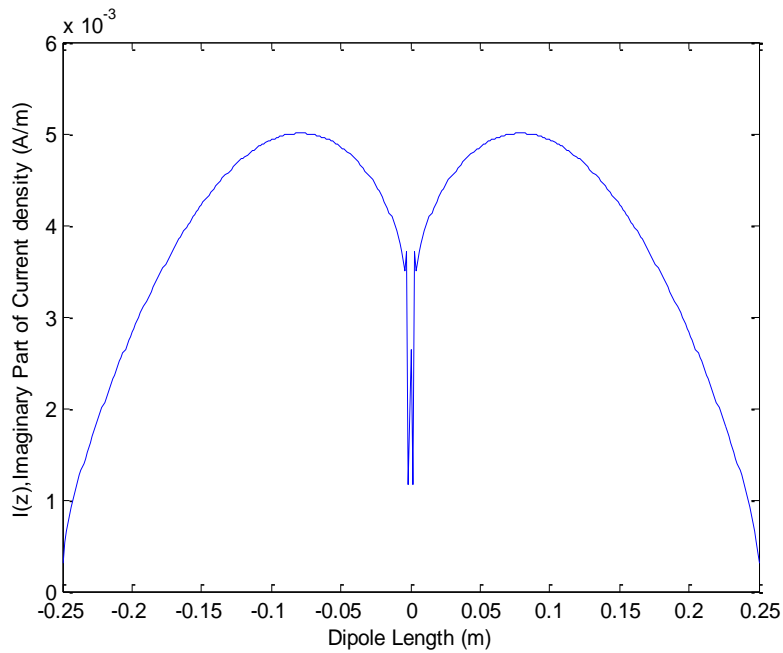
$Y_m = 0.0083 + 0.0025i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$G = 0.0083$ ($\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$)

$B = 0.0025$ ($\text{Im}\{I_{ex,0}/V\}$)



Σχήμα 5.18 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.19 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

- Ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.5$

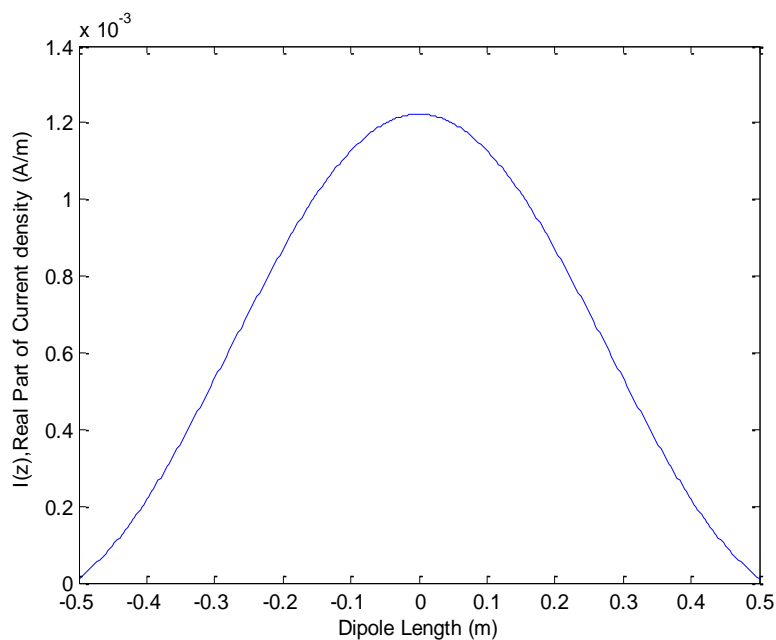
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας δίνει :

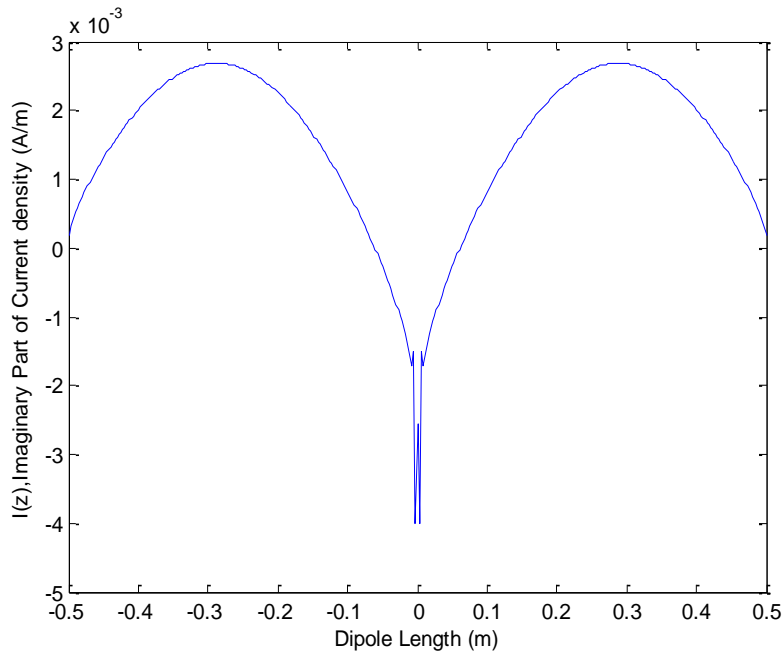
$Y_m = 0.0013 - 0.0026i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$G = 0.0013$ ($\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$)

$B = -0.0026$ ($\text{Im}\{I_{ex,0}/V\}$)



Σχήμα 5.20 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.21 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$

5.7 Μοντελοποίηση FGΓ με PTMF

Σε όλα τα κάτωθι αποτελέσματα έχουμε υποθέσει εφαρμοζόμενη τάση διάκενου ίση με 1V και ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ (καθαρός αριθμός σε συσχετισμό με το μήκος κύματος $l(\lambda)$ - όπου και το μήκος κύματος λόγω της υπόθεσης μας $\lambda=c/f$ με $c=f$ είναι μοναδιαίο).

Το ακόλουθο πρόγραμμά μας βοηθά στον υπολογισμό της σύνθετης αγωγιμότητας Y_m στο κέντρο της κεραίας ($z=0$) καθώς και το πραγματικό αλλά και το φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας. Καλούμε το πρόγραμμα FGGPTMF.m:

```

clc
clear all

c=3.0e+08; %syms z
f=3.0e+08; %Speed of light%
l=c/f; %Operating Frequency%
ze=120*pi; %Wavelength of the field - lamda%
zeta=120*pi;% ze = zeta = 376.7303, approximately
V0=1; %Assumed applied gap voltage V0 = 1%
L=1; %Length of the Antenna in Wavelengths - as
lamda=1%
a=0.007022; %Inside Radius of the Antenna in
Wavelengths - as lamda%

```

```

k=2*pi; %k = 2*pi/lambda, (lambda=1 units)%
N=200; %Number of Segments%
q=1; %Charge%
h=L/2; %Antenna half-length%
z0=h/N; %sample spacing%
D=2*q*z0; %Delta%
for l=-N:N
    if abs(l)<q
        B1(N+1+1)=i*z0*(1-cos(k*l*z0))/(ze*k*D);
    elseif abs(l)>q
        B1(N+1+1)=i*z0*(cos(k*abs(l)*z0-k*D/2)-cos(k*l*z0))/(ze*k*D);
    end
end
for l=-N:N
    B2(N+1+1)=z0*cos(k*(l*z0));
end
B11=B1(:);
B12=B2(:);
for l=1:(2*(N)+1)
    [A,errbnd]=quadgk(@ (z)pA(z,a,k,z0,l),0,z0,'RelTol',1e-
10,'AbsTol',0);
    g(l)=A;
end
for d=1:(2*(N)+1)
    for e=1:(2*(N)+1)
        A(d,e)=g(1+abs(d-e));
    end
end
I11=inv(A)*B11;
I12=inv(A)*B12;
C=(I11(2*N)-sqrt(3)*I11(2*N+1))./(sqrt(3)*I12(2*N+1)-I12(2*N)); %From
(4.1)%
Z1=(I11(N)+C*I12(N));
G1=real(Z1);
B1=imag(Z1);
Z=(I11(N+1)+C*I12(N+1)) %From (3.30) and
(4.2)%
G=real(Z)
B=imag(Z)
In=(I11+C*I12); %I(z)%
z=-h:z0:h;
figure(1);
plot(z,real(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Real Part of Current density (A/m)')
figure(2);
plot(z,imag(In))
xlabel('Dipole Length (m)')
ylabel('I(z),Imaginary Part of Current dens

```

όπου

```

function f=pA(z,a,k,z0,l)
    f1=purhnasex1(z+l*z0,a,k);
    f2=purhnasex1(z-l*z0,a,k);
    f=(z0-z).*(f1+f2);
end

```

και

```
function f = purhnasex1(z,a,k)
    g=(quadv(@(th) (exp(i*k.*sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2))./sqrt(z.^2+(2*a*sin(th/2)).^2)), -pi, pi,1.e-8));
    f=g./(8*pi^2);
End
```

και ανοίγουμε τα προγράμματα με τα αντίστοιχα ονόματα pA.m και purhnasex1.m.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

-Ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 0.5 \cdot 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.25$

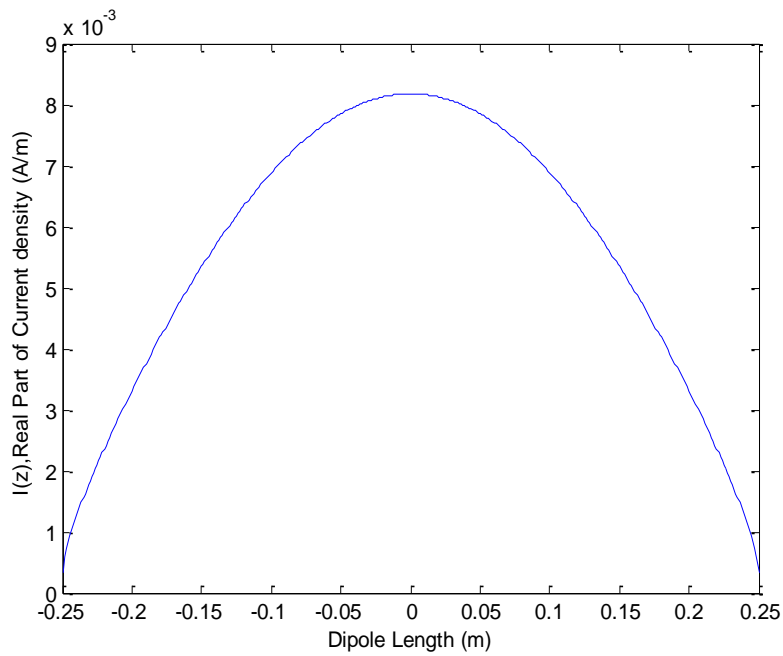
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας δίνει :

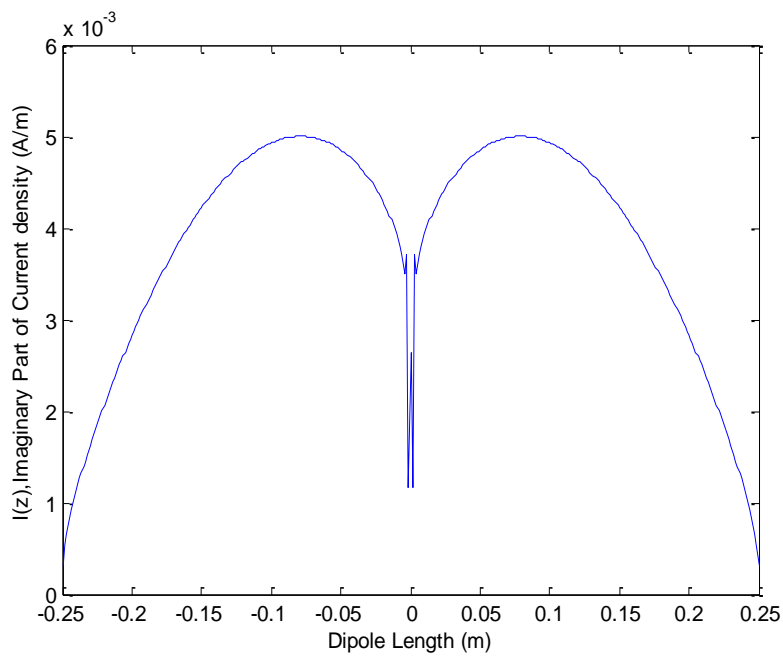
$Y_m = 0.0082 + 0.0026i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$G = 0.0082$ ($\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$)

$B = 0.0026$ ($\text{Im}\{I_{ex,0}/V\}$)



Σχήμα 5.22 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.23 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 0.5 \cdot l$ ($h/\lambda=0.25$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Αποτελέσματα ανωτέρω κώδικα με τις κάτωθι αναγραφόμενες σταθερές, δηλαδή για :

- $k=2 \cdot \pi$ (ο κυματαριθμός)

- Ακτίνα κεραίας $a=0.007022$ μονάδες μήκους κύματος (θεωρούμε μοναδιαίο μήκος κύματος $\lambda=1$, αφού θεωρούμε $c=f$), δηλαδή $a/\lambda = 0.007022$

-Μήκος κεραίας $L = 2 * h = 1$, δηλαδή $h/\lambda=0.5$

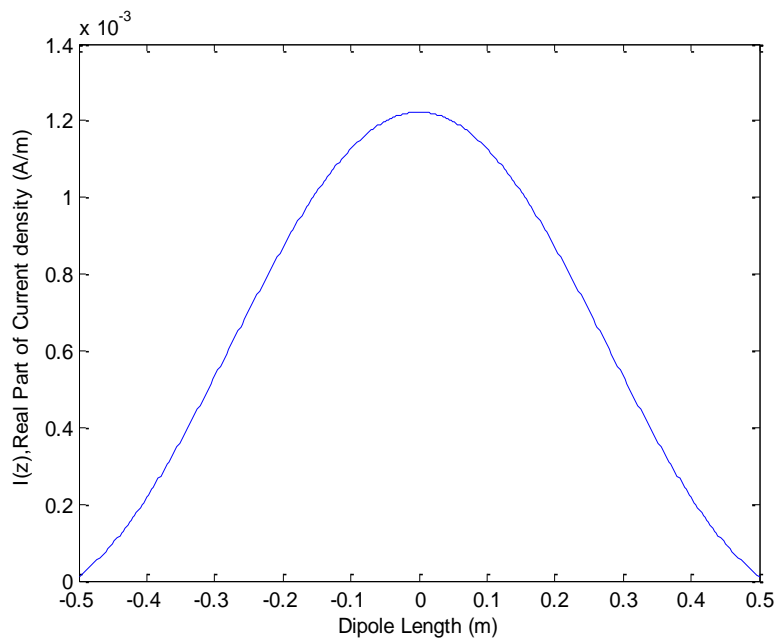
-Πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.

Με τις ανωτέρω σταθερές η κλήση του προγράμματός μας δίνει :

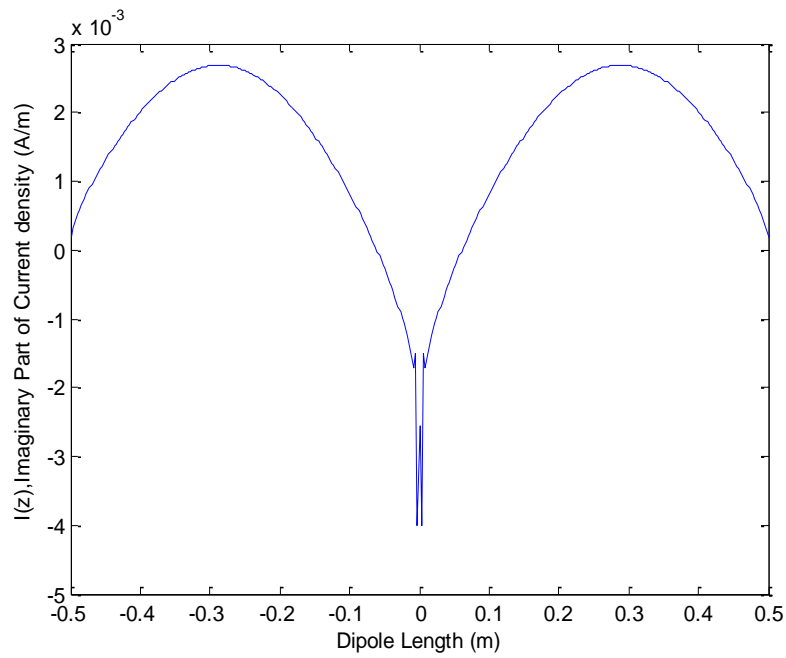
$Y_m = 0.0012 - 0.0026i$ (Σύνθετη αγωγιμότητα- $\{I_{ex,0}/V\}$)

$G = 0.0012$ ($\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$)

$B = -0.0026$ ($\text{Im}\{I_{ex,0}/V\}$)



Σχήμα 5.24 $\text{Re}\{I_{ex}/V\}$. Πραγματική κατανομή ρεύματος για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$.



Σχήμα 5.25 $\text{Im}\{I_{ex}/V\}$. Φανταστικό μέρος του ρεύματος της κεραίας για $L = 2 * h = 1$ ($h/\lambda=0.5$) και πλήθος τμημάτων διακριτοποίησης $N=200$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] G. Fikioris and T. T. Wu, “On the application of numerical methods to Hallen's equation,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 49, no. 3, pp. 383—392, March 2001.
- [2] G. Fikioris, “An application of convergence acceleration methods,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 47, no. 12, pp. 1758—1760, Dec. 1999.
- [3] H. C. Pocklington, “Electrical Oscillations in Wires”, *Cambridge Phil. Soc. Proc.* 9, Oct. 18
- [4] Γ. Φικιώρης, Σημειώσεις μαθήματος “Ασύρματες Ζεύξεις και διάδοση”, 8^ο εξάμηνο, ΣΗΜΜΥ, ΕΜΠ, Φεβρουάριος 2011.97, 324-332, London, England.
- [5] Χ. Καψάλη και Π. Κωττή, *Κεραίες-Ασύρματες Ζεύξεις*. Θεσσαλονίκη Τζιόλας 2005.
- [6] J. G. Maloney, G. S. Smith, and W. R. Scott, Jr., “Accurate Computation of the Radiation from Simple Antennas Using the Finite-Difference Time-Domain Method,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. 38, no. 7, pp. 1059—1068, July 1990.
- [7] L. L. Tsai, “A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Magnetic Current,” *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-20, no. 5, pp. 569-576, Sep. 1972.
- [8] D. R. Wilton and C. M. Butler, “Effective methods for solving integral and integrodifferential equations,” *Electromagnetics*, vol. 1, pp. 289—308, 1981.
- [9] Kress, *Linear Integral Equations*, 2nd Ed. New York, Springer, 1999.
- [10] B. P. Rynne, “On the Well-Posedness of Pocklington’s Equation for a Straight Wire Antenna and Convergence of Numerical Solutions,” *Journal of*

- Electromagnetic Waves and Applications, vol. 14, pp. 1489—1503, 2000.
- [11] Chew, W. C., Jin, J. M., & Song, E. M. (2001). Fast and Efficient Algorithms in Computational Electromagnetics. Massachusetts, USA: Hard Cover.
- [12] Gibson, W. C. (2008). The Method of Moments in Electromagnetics. New York, USA: Taylor & Francis Group.
- [13] Greengard and V. Rokhin, J. Comp. Phys. 73 (1987) 325
- [14] K. E. Schmidt and M. A. Lee, J. Stat. Phys. 63 (1991) 1223
- [15] A.W. Appel, Sci. Stat. Comput. 6 (1985) 85
- [16] K. Esselink. Inf. Proc. Lett. 41 (1992) 141
- [17] J. Bernes and P. Hut, Lett Nat. 324 (1986) 446
- [18] R. Hockney and J. Eastwood, Computer simulation using particles, Mc-Graw Hill, New York (1981)
- [19] L. Greengard, Science. 265 (1994) 909
- [20] H. Ding, N. Karasawa and W. A. Goddard tria, Chem. Phys. Lett 196 (1992) 6
- [21] J. Shimada, H. Kaneko and T. Takada, J. Comp Chem 14 (1993) 867
- [22] J. Shimada, H. Kaneko and T. Takada, J. Comp Chem 14 (1994) 28
- [23] A. Hoorfar and V. Jamnejad, “Electromagnetic Modeling and Analysis of Wireless Communication Antennas,” IEEE Microwave Magazine, vol. 4, March 2003, pp. 51—67.
- [24] Ιωάννης – Ι. Π. Τατσσόγλου, Θεμελιώδεις ιδιότητες των ολοκληρωτικων Εξισώσεων Hallèn και Pocklington σε Γραμμικές Κεραίες Τροφοδοτούμενες Μέσω Διακένων, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Αθήνα Μάιος 2014.