

1.



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Αυτόματου Ελέγχου

**Μη γραμμικός αναλογικός-ολοκληρωτικός (PI)
προσαρμοστικός έλεγχος**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΑΓΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΡΑΦΑΗΛ

Επιβλέπων : Χ.Ψυλλάκης
Λέκτορας

Αθήνα, Ιούλιος 2016



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Σημάτων, Ελέγχου και Ρομποτικής
Εργαστήριο Αυτομάτου Ελέγχου

**Μη γραμμικός αναλογικός-ολοκληρωτικός (PI)
προσαρμοστικός έλεγχος**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΛΑΓΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ ΡΑΦΑΗΛ

Επιβλέπων : Χ.Ψυλλάκης
Λέκτορας

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 7η Ιουλίου 2016.

.....
Χ.Ψυλλάκης
Λέκτορας

.....
Γ.Παπαβασιλόπουλος
Καθηγητής

.....
Κ.Τζαφέστας
Επίκουρος Καθηγητής

Αθήνα, Ιούλιος 2016

.....
Λαγός Αθανάσιος Ραφαήλ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Λαγός Αθανάσιος Ραφαήλ, 2016.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Κεφάλαιο

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία παρουσιάζει μια τεχνική σχεδίασης προσαρμοστικών νόμων ελέγχου με τη χρήση της μεθόδου του μη γραμμικού αναλογικού-ολοκληρωτικού (nonlinear PI) ελέγχου. Η σχεδίαση αφορά την επίλυση του προβλήματος παρακολούθησης για μη γραμμικά δυναμικά συστήματα σε μορφή αυστηρής ανάδρασης (τριγωνική δομή) των οποίων η δυναμική θεωρείται άγνωστη. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου και μη περιορισμένες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες. Το πρόβλημα λύνεται συνδυάζοντας επιτυχώς την τεχνική του προσαρμοστικού προσεγγιστικού ελέγχου (adaptive approximation control) με την μέθοδο του μη γραμμικού αναλογικού-ολοκληρωτικού (nonlinear PI) ελέγχου. Για την ανάλυση του συνδυαστικού προβλήματος νέα θεωρητικά αποτελέσματα έχουν αναπτυχθεί στα πλαίσια της παρούσης εργασίας. Το προτεινόμενο σχήμα ελέγχου αποτελεί μια εναλλακτική προσέγγιση σε σχέση με τις τεχνικές που βασίζονται στα κέρδη Nussbaum καθώς αυτές είναι γνωστό ότι πάσχουν από προβλήματα σθεναρότητας.

Λέξεις κλειδιά

μη γραμμικός αναλογικός-ολοκληρωτικός έλεγχος, προσαρμοστικός έλεγχος, κέρδη Nussbaum, συστήματα υπό μορφή αυστηρής ανάδρασης, άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου, μη περιορισμένες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες

Abstract

This diploma thesis presents a technique of designing adaptive controllers with the use of the nonlinear PI control method. The proposed controller class is designed to solve the tracking problem for nonlinear strict feedback systems (or equivalently systems with triangular structure) with unknown dynamics. Specifically we assume systems with unknown control directions and unknown unmatched nonlinearities without growth restrictions. A solution is provided through the successful combination of adaptive approximation control with the nonlinear PI control method. For the analysis of the combined problem, new theoretical tools have been developed in the current work. The proposed technique serves as an alternative approach to the existing Nussbaum gain schemes which are known to suffer from robustness issues.

Key words

nonlinear PI control, universal adaptive control, Nussbaum gains, strict feedback systems, unknown control directions, unmatched nonlinearities without growth restrictions

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαιτέρως τον Λέκτορα κ.Χ.Ψυλλάκη για την επίβλεψη της εργασίας, για την συνεχή συνεργασία και για τις πολύωρες συζητήσεις που με βοήθησαν να αποκτήσω βασικές γνώσεις επι του αντικειμένου. Ευχαριστώ επίσης τον Καθηγητή κ.Γ.Παπαβασιλόπουλο για αρκετές εποικοδομητικές συζητήσεις κατά τη διάρκεια της διατριβής μου, καθώς και τον Δρ. Ι. Κορδώνη για τη βοήθειά του και την προθυμία του στην επίλυση αποριών μου. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου για την πολύπλευρη στήριξη που μου παρέχουν τόσα χρόνια.

Λαγός Αθανάσιος Ραφαήλ,

Αθήνα, 7η Ιουλίου 2016

Contents

Περίληψη	9
Abstract	11
Ευχαριστίες	13
Contents	15
List of Figures	17
1. Κεφάλαιο 1	19
1.1 Εισαγωγή	19
1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής	20
1.3 Οργάνωση Τόμου	21
2. Κεφάλαιο 2	23
2.1 Backstepping	23
2.2 Nussbaum gains	24
2.3 Μη γραμμικός PI έλεγχος	26
2.4 Συγκριτική μελέτη της μεθόδου των κερδών Nussbaum σε σχέση με τον μη γραμμικό PI έλεγχο	29
3. Κεφάλαιο 3	33
3.1 Συνεισφορά της εργασίας	33
4. Κεφάλαιο 4	35
4.1 Γραμμικοί Παραμετρικοί Εκτιμητές (LPAs)	35
4.2 Συμβολισμοί και ιδιότητες	35
4.3 Διατύπωση προβλήματος	36
5. Κεφάλαιο 5	37
5.1 Κύριο Λήμμα	37
5.2 Σχεδίαση Ελέγχου με Backstepping	38
5.2.1 Βήμα 1	38
5.2.2 Βήμα i ($2 \leq i \leq n - 1$):	40
5.2.3 Βήμα n	43
5.3 Ευστάθεια και Ρύθμιση	45
6. Κεφάλαιο 6	47
6.1 Μοντέλο διασυνδεδεμένων δεξαμενών	47
6.1.1 Φυσικά μεγέθη	47
6.1.2 Τύπος δεξαμενής	47
6.1.3 Φυσικοί Νόμοι	48
6.1.4 Διασύνδεση και μοντελοποίηση	48
6.1.5 Εξισώσεις ελέγχου	49

6.1.6 Αποτελέσματα προσομοίωσης	50
6.1.7 Σχολιασμός	50
6.2 Μαθηματικό μοντέλο μη γραμμικού συστήματος	51
6.2.1 Εξισώσεις Δυναμικής	51
6.2.2 Εξισώσεις Ελέγχου	51
6.2.3 Αποτελέσματα προσομοίωσης	52
7. Επίλογος	59
7.1 Συμπεράσματα	59
7.2 Επεκτάσεις	60
Bibliography	61

List of Figures

2.1	Συνάρτηση Nussbaum $N(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και το $\int_0^\zeta N(s)ds$.	25
2.2	Το συνολικό κλειστού βρόχου σύστημα.	30
2.3	Το συνολικό κλειστού βρόχου σύστημα.	31
4.1	Γράφημα του $[x]_\delta$.	36
6.1	Απόκριση συστήματος διασυνδεδεμένων δεξαμενών	50
6.2	Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος για μακρινές αρχικές συνθήκες	52
6.3	Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος για κέρδος με χρήση νόρμας ∞ του διανύσματος παλινδρόμησης	52
6.4	Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος για κέρδος με χρήση ευκλείδειας νόρμας του διανύσματος παλινδρόμησης	53
6.5	Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος με deadzone	53
6.6	Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος με υψίσυχο σήμα αναφοράς	54
6.7	Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος με υψίσυχο σήμα αναφοράς και πιο έντονη μη γραμμικότητα x_1^2 αντί για $x_1 \cos(x_1)$	54
6.8	Γράφημα του σφάλματος παρακολούθησης	56
6.9	Γράφημα του εφαρμοζόμενου ελέγχου στο σύστημα	56
6.10	Γράφημα των εκτιμήσεων των φραγμάτων των άγνωστων μη γραμμικοτήτων	57

Chapter 1

Κεφάλαιο 1

1.1 Εισαγωγή

Η θεωρία του αυτομάτου ελέγχου ασχολείται με την ανάλυση δυναμικών συστημάτων και την σχεδίαση ελεγκτών. Το σύστημα που επιθυμούμε να ελέγξουμε μπορεί να μοντελοποιηθεί με διάφορους τρόπους. Βασικές έννοιες όπως η ανάδραση, η επίδοση, η ευστάθεια, η ευαισθησία στο θόρυβο ή στις διαταραχές είναι γενικές όμως οι τεχνικές και τα εργαλεία ποικίλουν ανάλογα με τύπο του μοντέλου που χρησιμοποιείται.

Αρχικά (ιστορικά πρώτα) μελετήθηκαν γραμμικά μοντέλα, δηλαδή μοντέλα στα οποία ισχύει η αρχή της υπέρθεσης. Τέτοια μοντέλα περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις για συστήματα συνεχούς χρόνου ή αντίστοιχα γραμμικές διαφορών για συστήματα διακριτού χρόνου. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που οι συντελεστές των εξισώσεων αυτών δεν μεταβάλλονται με το χρόνο το σύστημα καλείται γραμμικό χρονικά αναλλοίωτο και μπορεί να αναλυθεί στο χώρο της συχνότητας με ισχυρές-γενικές μαθηματικές τεχνικές όπως οι μετασχηματισμοί Laplace, Fourier και Z, ο γεωμετρικός τύπος ριζών, τα διαγράμματα Bode και το κριτήριο Nyquist οι οποίες δίνουν λύσεις και τεχνικές σχεδίασης ελεγκτών για τα περισσότερα ενδιαφέροντα προβλήματα.

Ωστόσο, σχεδόν όλα τα πραγματικά συστήματα είναι μη γραμμικά. Αυτό σημαίνει πως η δυναμική τους περιγράφεται από μη γραμμικά μοντέλα, δηλαδή από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ή μη γραμμικές διαφορών. Έτσι αναδεικνύεται η ανάγκη για μελέτη και ανάλυση αυτής της πολύ ευρύτερης κατηγορίας συστημάτων, το οποίο αποτελεί το αντικείμενο του μη γραμμικού αυτομάτου ελέγχου. Σε αυτή την περιοχή όμως οι μαθηματικές τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί είναι λιγότερο γενικές και αφορούν συγκεκριμένες υποκατηγορίες συστημάτων. Ορισμένες από αυτές είναι η θεωρία ευστάθειας Lyapunov, ο οριακός κύκλος, οι απεικονήσεις Poincaré κ.α.

Εαν βέβαια μας ενδιαφέρουν μόνο οι λύσεις που βρίσκονται κοντά σ' ένα σημείο ισορροπίας τα μη γραμμικά μοντέλα μπορούν συχνά να γραμμικοποιηθούν, δηλαδή να προσεγγιστούν με κατάλληλες τεχνικές από ένα γραμμικό σύστημα στο οποίο μπορούν να εφαρμοστούν γραμμικές τεχνικές ελέγχου. Σε αυτό το γεγονός οφείλεται ουσιαστικά η μεγάλη επιτυχία και διάδοση των γραμμικών ελεγκτών και η ευρεία εφαρμογή του γραμμικού ελέγχου, καθώς παρα την απλότητά του μπορεί να επιλύσει ικανοποιητικά αρκετά μη γραμμικά προβλήματα σε ορισμένες βέβαια - πολλές φορές μικρές - περιοχές τους. Επειδή όμως μερικές φορές η γραμμικοποίηση δεν είναι εφικτή ή προκειμένου να εξάγουμε πιο γενικά και πιο ακριβή συμπεράσματα - ειδικά πλέον που διαθέτουμε την απαραίτητη υπολογιστική ισχύ για την υλοποίηση πιο σύνθετων ελεγκτών - αξίζει να αναλυθούν τα πιο κοντινά στην πραγματικότητα μη γραμμικά μοντέλα. Επίσης, είναι αξιοσημείωτο ότι η σχεδίαση μη γραμμικών ελεγκτών είναι ορισμένες φορές οφέλιμη ακόμα και σε γραμμικά συστήματα καθώς μπορεί να πετύχει καλύτερες επιδόσεις με

μικρότερο κόστος, χαρακτηριστικό είναι εδώ το αντιπαράδειγμα του Witschenhausen [26] όπου αποδεικνύεται ότι η λύση του γραμμικού-τετραγωνικού προβλήματος του βέλτιστου στοχαστικού ελέγχου δεν είναι πάντα γραμμικός ελεγκτής.

Ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα το οποίο είχε ανακύψει ήδη κατά τη μελέτη γραμμικών συστημάτων είναι αν είναι εφικτή η σχεδίαση ελεγκτών όταν το σύστημα περιέχει άγνωστες παραμέτρους ή ακόμη γενικότερα για τα μη γραμμικά συστήματα όταν ολόκληρα τμήματα της δυναμικής τους είναι άγνωστα. Μία απάντηση σε αυτό το ερώτημα δίνουν οι μεθοδολογίες προσαρμοστικού ελέγχου, όπου ο ελεγκτής σχεδιάζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να προσαρμόζεται στην άγνωστη δυναμική του υπο έλεγχο συστήματος αξιοποιώντας ουσιαστικά την ιστορία του. Δηλαδή, στο νόμο ελέγχου χρησιμοποιούνται εκτός από την τρέχουσα και προηγούμενες τιμές των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος ή ειδικότερα το ολοκλήρωμά τους ή το οκλήρωμα κάποιας συνάρτησής τους.

$$u = \gamma(x(s)), s \leq t \quad (1.1)$$

ή

$$u = \gamma(x(t), \int_0^t x(s)ds) \quad (1.2)$$

ή

$$\begin{aligned} u &= \gamma(x(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) &= f(x(t), z(t)) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Το βασικό πλεονέκτημα του προσαρμοστικού ελέγχου είναι ότι, σε αντίθεση με τον σθεναρό έλεγχο ο οποίος επίσης επιλύει περιπτώσεις του προβλήματος της αβεβαιότητας των παραμέτρων του συστήματος, δεν απαιτεί a priori γνώση των φραγμάτων των αβέβαιων όρων. Απεναντίας, οι περισσότερες τεχνικές προσαρμοστικού ελέγχου πάσχουν από το γεγονός ότι αυξάνουν τη δυναμική τάξη του συστήματος εισάγοντας νέες διαφορικές εξισώσεις για την εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων ($z(t)$). Το ελλείμμα αυτό είναι γνωστό ως curse of dimensionality (κατάρρα της αύξησης των διαστάσεων) και συχνά οδηγεί σε προβλήματα σύγκλισης των παραμέτρων και δυσκολία υλοποίησης του ελέγχου.

1.2 Αντικείμενο Διπλωματικής

Στην εργασία αυτή θα μελετηθούν μη γραμμικά δυναμικά συστήματα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)h(u, t) + d(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

τα οποία ονομάζονται συστήματα σε μορφή αυστηρής ανάδρασης (strict feedback form)

Στα υπο εξέταση συστήματα οι συναρτήσεις f_i , g_i ($i = 1, \dots, n$) θα θεωρηθούν άγνωστες, ωστόσο για τις g_i θα ισχύει η παρακάτω υπόθεση:

Υπόθεση 1. Οι συναρτήσεις $g_i(\cdot)$ είναι συνεχείς και υπάρχουν άγνωστες θετικές σταθερές $g_{i1}, g_{i2} > 0$ τέτοιες ώστε $0 < g_{i1} \leq |g_i(\bar{x}_i)| \leq g_{i2}$ για κάθε $t \in [0, \infty)$. Έτσι οι άγνωστες συναρτήσεις $g_i(\cdot)$ (κατευθύνσεις ελέγχου - control directions) έχουν σταθερό αλλά άγνωστο πρόσημο.

Στόχος είναι η σχεδίαση ενός ελέγχου u που θα λύνει το πρόβλημα παρακολούθησης για τη συγκεκριμένη κατηγορία συστημάτων με χρήση ενός προσαρμοστικού μη γραμμικού ολοκληρωτικού-αναλογικού (PI) ελεγκτή.

Ουσιαστικά, στόχος μας είναι η επέκταση της χρήσης του μη γραμμικού PI ελεγκτή στο πλαίσιο της τεχνικής integrator backstepping που εισάγεται στην εργασία [23] στην περίπτωση που οι συναρτήσεις f_i, g_i ($i = 1, \dots, n$) δεν είναι συναρτήσεις του χρόνου αλλά μόνο της κατάστασης (δηλαδή για αυτόνομα συστήματα), ωστόσο χωρίς τον περιορισμό να είναι φραγμένες από γνωστές συναρτήσεις (υπόθεση 1 του [23]). Μπορεί εύκολα να δειχθεί ότι η προτεινόμενη μέθοδος γενικεύεται και για μη αυτόνομα συστήματα για τα οποία ισχύει η υπόθεση αυτή με άγνωστες πλέον τις συναρτήσεις - φράγματα $p_{ij}(\bar{x}_i)$.

Επίσης, επειδή γίνεται κατ' ουσίαν σχεδίαση ενός προσαρμοστικού νόμου ελέγχου αναζητείται ένας τρόπος ώστε να αποφευχθεί η υπερβολική αύξηση της τάξης του συστήματος, δηλαδή ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων.

1.3 Οργάνωση Τόμου

Η εργασία αυτή είναι οργανωμένη σε έξι κεφάλαια. Το κεφάλαιο αυτό (κεφ.1) αποτελεί την εισαγωγή. Στο Κεφάλαιο 2 δίνεται το θεωρητικό υπόβαθρο των βασικών μεθόδων σχεδίασης ελεγκτών που έχουν προταθεί για την επίλυση των υπο εξέταση προβλημάτων (άγνωστη δυναμική, άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου) σε παρόμοιες κατηγορίες συστημάτων. Αναφέρονται επίσης εργασίες που έχουν συνδράμει στην εξέλιξη - επέκταση των μεθόδων αυτών και γίνεται εν τέλει συγκριτική μελέτη τους. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μια πιο φορμαλιστική περιγραφή του προβλήματος και των υποθέσεων που λαμβάνονται. Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται η σχεδίαση του προσαρμοστικού μη γραμμικού PI ελεγκτή με τη χρήση δύο τεχνικών λημμάτων, καθώς και ενός θεωρήματος που αποδεικνύει ότι ο συγκεκριμένος έλεγχος επιλύει το ζητούμενο πρόβλημα. Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζονται δύο προσομοιώσεις, οι οποίες δείχνουν την εφαρμογή του ελέγχου σε ένα φυσικό σύστημα διασυνδεδεμένων δεξαμενών και σε ένα τυχαίο μαθηματικό μοντέλο μη γραμμικού δυναμικού συστήματος. Παρατίθενται γραφικές παραστάσεις των εξόδων ώστε να γίνουν αντιληπτά αφενός η λειτουργικότητα του εν λόγω ελέγχου, αφετέρου διάφορα ποιοτικά χαρακτηριστικά όπως η ταχύτητα σύγκλισης στην επιθυμητή τροχιά, η μέγιστη ανύψωση κατά τη μεταβατική περίοδο. Τέλος το Κεφάλαιο 6 αποτελεί επίλογο της εργασίας όπου συνοψίζονται κάποια συμπεράσματα, αποτιμάται η συνεισφορά της εργασίας αυτής και προτείνονται πιθανές μελλοντικές επεκτάσεις της προτεινόμενης μεθόδου.

Chapter 2

Κεφάλαιο 2

2.1 Backstepping

Το backstepping αποτελεί μια τεχνική σχεδίασης ελεγκτών για μια σημαντική κλάση μη γραμμικών συστημάτων, τα συστήματα που μπορούν να γραφούν ως αλληλουχία διασυνδεδεμένων υποσυστημάτων:

$$\dot{\eta} = f_a(\eta) + g_a(\eta)\xi \quad (2.1)$$

$$\dot{\xi} = f_b(\eta, \xi) + g_n(\eta, \xi)u \quad (2.2)$$

όπου $\eta \in R^n$, $\xi \in R$, f_a, g_a, f_b, g_b : λείες απεικονίσεις σε μια περιοχή που περιέχει την αρχή ($\eta = 0$, $\xi = 0$) και $f_a(0) = 0$

Η βασική ιδέα του backstepping είναι να θεωρηθεί το ξ , δηλαδή η κατάσταση - έξοδος του δεύτερου συστήματος 2.2 ως εικονικός έλεγχος (virtual control) για το πρώτο σύστημα 2.1 και να σχεδιαστεί κατάλληλα ένα $\xi = \phi(\eta)$ το οποίο να σταθεροποιεί το σύστημα 2.1. Έτσι αν γνωρίζουμε μια συνάρτηση Lyapunov V_a για το σύστημα 2.1 θα ισχύει:

$$\frac{\partial V_a}{\partial \eta} [f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta)] \leq -W(\eta) \quad (2.3)$$

όπου η $W(\eta)$ είναι θετικά ορισμένη.

Εφαρμόζοντας τώρα τον μετασχηματισμό $z = \xi - \phi(\eta)$ λαμβάνουμε το ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα :

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= f_a(\eta) + g_a(\eta)\phi(\eta) + g_a(\eta)z \\ \dot{z} &= F(\eta, z) + G(\eta, z)u \end{aligned} \quad (2.4)$$

για τη σταθεροποίηση του οποίου χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση Lyapunov :

$$V(\eta, \xi) = V_a(\eta) + \frac{1}{2}[\xi - \phi(\eta)]^2 \quad (2.5)$$

και σχεδιάζουμε κατάλληλα τον έλεγχο u ώστε η παράγωγος αυτής της συνάρτησης να γίνει αρνητικά ορισμένη, οπότε το συνολικό σύστημα θα συγκλίνει στην αρχή ισοδύναμα το $(\eta = 0, z = 0)$ θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και αν $\phi(0) = 0$ η αρχή $(\eta = 0, \xi = 0)$ θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθής.

Αυτή η τεχνική επινοήθηκε περί το 1990 από τον P.Kokotovic και άλλους [1] και αποτελεί κυρίαρχο εργαλείο για τη σχεδίαση ελεγκτών σε συστήματα που παρουσιάζουν αναδρομική δομή και πιο συγκεκριμένα στα συστήματα σε μορφή αυστηρής ανάδρασης, που έχουν την ακόλουθη τριγωνική δομή:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)u\end{aligned}\quad (2.6)$$

όπου $\bar{x}_i = [x_1 \dots x_i]$, f_i, g_i λείες απεικονίσεις, στα οποία η κατάσταση κάθε υποσυστήματος i μπορεί να θεωρηθεί ως εικονικός έλεγχος για το υποσύστημα $i - 1$ και να σχεδιαστεί καταλλήλως ώστε να το σταθεροποιεί. Έτσι ξεκινώντας από το πρώτο σύστημα ($i = 1$) και σχεδιάζοντας καταλλήλως τους εικονικούς ελέγχους μπορούμε να σχεδιάσουμε αναδρομικά τον έλεγχο u .

Για μια πιο αναλυτική και πλήρη περιγραφή της μεθόδου ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [20]

2.2 Nussbaum gains

Τα κέρδη τύπου Nussbaum αποτελούν μια τεχνική προσαρμοστικού ελέγχου που προτάθηκε από τον R.Nussbaum στην εργασία του "Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control" [4] για την επίλυση του παρακάτω προβλήματος:

Υπάρχουν κατάλληλες διαφορίσιμες συναρτήσεις $f: R^{m+1} \rightarrow R$, $g: R^{m+1} \rightarrow R^m$ ώστε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + \lambda f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0\end{aligned}\quad (2.7)$$

να έχει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

για κάθε $\lambda \neq 0$ και κάθε αρχική τιμή (x_0, y_0) ;

το οποίο διατυπώθηκε από τον A.S.Morse.

Το ενδιαφέρον χαρακτηριστικό αυτού του προβλήματος είναι ότι δεν είναι γνωστό το πρόσημο της άγνωστης παραμέτρου λ . Έτσι θεωρώντας τη δυναμική $\dot{y} = g(x, y)$ ως τη δυναμική των εκτιμώμενων παραμέτρων ενός προσαρμοστικού μοντέλου ελέγχου και τη συνάρτηση $f(x, y)$ ως τον εφαρμοζόμενο έλεγχο στο σύστημα $\dot{x} = x + \lambda u$ ουσιαστικά διατυπώνουμε το πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου (unknown control directions), το οποίο ονομάζεται έτσι καθώς αγνοώντας το πρόσημο του λ δεν γνωρίζουμε προς ποια κατεύθυνση επιδρά ο έλεγχός μας στο σύστημα.

Ο Nussbaum έλυσε το πρόβλημα αυτό εισάγοντας ως "κέρδος" στη συνάρτηση ελέγχου $u = f(x, y)$ μια συνάρτηση των παραμέτρων $y : h(y)$ με την εξής ιδιότητα:

$$\begin{aligned} \limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \int_{y_0}^y h(s) ds &= +\infty \\ \liminf_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{y} \int_{y_0}^y h(s) ds &= -\infty \end{aligned} \quad (2.8)$$

που ονομάστηκαν συναρτήσεις τύπου Nussbaum. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $h(y) = \cos(\frac{\pi y}{2})e^{y^2}$ ή γενικότερα η συνάρτηση $h(y) = k(y) \cos(y)$ όπου $k \in \mathcal{K}_\infty$. Έτσι αποδεικνύει ότι ο νόμος ελέγχου $u = h(y)x$ σταθεροποιεί το σύστημα (2.7) στην αρχή για κάθε λ και κάθε $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{m+1}$.

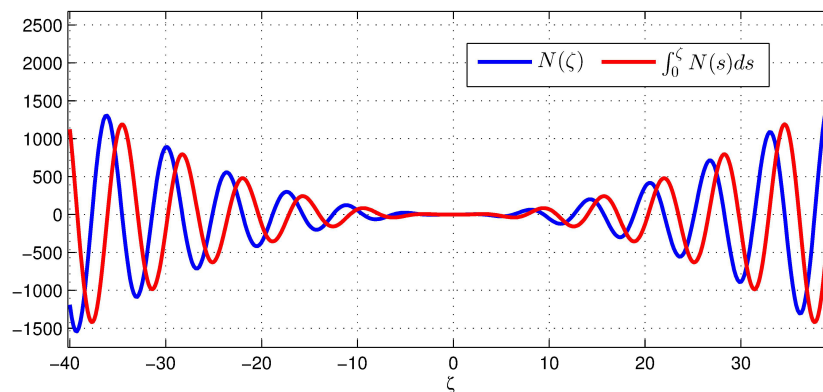


Figure 2.1: Συνάρτηση Nussbaum $N(\zeta) = \zeta^2 \sin(\zeta)$ και το $\int_0^\zeta N(s) ds$.

Η βασική ιδέα είναι ότι χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση η οποία αλλάζει διαρκώς πρόσημο και μεγαλώνει ταυτόχρονα σε μέτρο όσο αυξάνει το όρισμά της κάποια στιγμή θα πετύχει το αντίθετο πρόσημο από αυτό της άγνωστης παραμέτρου λ , θα βρει δηλαδή τη σωστή κατεύθυνση ελέγχου και θα έχει επίσης κατάλληλα υψηλό κέρδος ώστε να σταθεροποιήσει το σύστημα. Έκτοτε το όρισμα της συνάρτησης Nussbaum δεν θα μεταβάλλεται ουσιαστικά (οι παράμετροι θα συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές τους) με αποτέλεσμα να μην αλλάξει ξανά πρόσημο και ο έλεγχος να ασκείται κατά την επιθυμητή κατεύθυνση (να έχει δηλαδή τη μορφή μιας κλασικής ανάδρασης $u = -Kx$).

Το γεγονός ότι ο νόμος ελέγχου που προτείνει ο Nussbaum λύνει το πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου και είναι λείος αποτέλεσε αφορμή για αρκετές επεκτάσεις της μεθόδου με βασική αυτή των Ye-Yang [5] οι οποίοι γενίκευσαν την τεχνική σε συστήματα με μορφή αυστηρής ανάδρασης με χρήση της τεχνικής backstepping. Στην εργασία τους αυτή αφενός επέκτειναν την τεχνική που εισήγαγε ο Nussbaum για συστήματα 1ης τάξης σε συστήματα αυθαίρετης δυναμικής τάξης, αφετέρου απέδειξαν ότι έτσι μπορεί να λυθεί το πρόβλημα των μη αντιστοιχισμών αβεβαιοτήτων (unmatched uncertainties) χωρίς περιορισμούς στο μέγεθος της αβεβαιότητας με άγνωστες τις κατευθύνσεις ελέγχου, το οποίο λύνει και ο καθολικός προσαρμοστικός έλεγχος (global adaptive control) ο οποίος όμως χρειάζεται τη γνώση των κατευθύνσεων ελέγχου.

Άλλες επεκτάσεις της μεθόδου έχουν προταθεί για εφαρμογές ελέγχου με προσαρμοστικά νευρωνικά δίκτυα [21], [11] και για συστήματα με χρονικές καθυστερήσεις και νεκρές ζώνες (deadzones) [9], [10], [6], [14], [2].

Παρότι η μέθοδος των κερδών Nussbaum φαίνεται ελκυστική και παρουσιάζεται να έχει λύσει το βασικό και δύσκολο πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου πάσχει από ένα πολύ σημαντικό μειονέκτημα: τα υψηλά κέρδη.

Το γεγονός ότι τα κέρδη που εισάγει αυτή η μέθοδος είναι ουσιαστικά μη φραγμένα (essentially unbounded) μπορεί από μαθηματικής απόψεως να φαίνεται ασήμαντο, όμως ένας μηχανικός σίγουρα γνωρίζει ότι η εισαγωγή υψηλών κερδών στο βρόγχο ελέγχου μπορεί να αποβεί μοιραία. Αν και η χρήση υψηλών κερδών έχει παρατηρηθεί ότι προσφέρει ορισμένα επιθυμητά χαρακτηριστικά στο σύστημα καθώς βελτιώνει τη δυναμική του επίδοσης αυξάνοντας την ταχύτητά του και μειώνοντας το σφάλμα μόνιμης κατάστασης, οι αρνητικές επιδράσεις τους τα καθιστούν σχεδόν απαγορευμένα. Οι επιδράσεις αυτές είναι οι εξής:

- πρώτον, η εισαγωγή υψηλών κερδών ενισχύει τον παρεμβαλλόμενο στο σύστημα θόρυβο
- δεύτερον, αν το σήμα της ανάδρασης είναι ήδη μεγάλο εμφανίζεται κίνδυνος αστάθειας
- τρίτον, επειδή όλοι οι φυσικά υλοποιήσιμοι ενισχυτές παρουσιάζουν φαινόμενα κορεσμού ένας έλεγχος που απαιτεί πολύ υψηλό κέρδος είναι συχνά μη υλοποιήσιμος εκτός από επικίνδυνος

Αυτό το μειονέκτημα της μεθόδου του Nussbaum έγινε γρήγορα αντιληπτό και έχουν γίνει προσπάθειες αντιμετώπισής του. Δύο προταθείσες μέθοδοι είναι πρώτον οι φραγμένες k -τύπου συναρτήσεις Nussbaum που εισήχθησαν στο [13] ώστε να βελτιώσουν τη σθεναρότητα της μεθόδου του Nussbaum και δεύτερον η σχεδίαση με χρήση χωρικά φραγμένων συναρτήσεων Lyapunov (barrier Lyapunov functions, BLFs) που επιτρέπει τον περιορισμό της εξέλιξης της εξόδου και της εισόδου του συστήματος μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο, η τεχνική αυτή προτάθηκε από τον Χ.Ψυλλάκη στην εργασία [12].

2.3 Μη γραμμικός PI έλεγχος

Οι γραμμικοί PID ελεγκτές αποτελούν ίσως τον πιο διαδεδομένο τύπο ελεγκτή. Αυτό συμβαίνει διότι ακόμη και χωρίς σαφή εικόνα της δυναμικής του συστήματος μπορεί κάποιος με τη ρύθμιση ορισμένων - και μάλιστα λίγων- παραμέτρων, των κερδών K_P , K_I , K_D , να πετύχει πολύ καλά αποτελέσματα στην περίπτωση των γραμμικών συστημάτων. Στα μη γραμμικά συστήματα ωστόσο η συμπεριφορά τους είναι κατώτερη των απαιτήσεων και η εφαρμογή τους δεν μπορεί παρα να γίνεται τοπικά σε γραμμικοποιημένες περιοχές (gain scheduling methods).

Για την αντιμετώπιση των προβλημάτων που επιφέρουν οι άγνωστες συνήθως μη γραμμικότητες αναπτύχθηκε, όπως προαναφέρθηκε στην εισαγωγή, ο προσαρμοστικός έλεγχος, ο οποίος ωστόσο, όπως αναφέρθηκε ήδη και θα αναλυθεί στην επόμενη ενότητα, έχει ορισμένα σοβαρά μειονεκτήματα αν και λύνει πολλά από τα προβλήματα που έχουν ανακύψει.

Για την αποφυγή αρκετών εξ αυτών των προβλημάτων οι Ortega, Astolfi και Barabanov προτείνουν στην εργασία τους "Nonlinear PI control of uncertain systems: an alternative to parameter adaptation" [16] μία νέα μεθοδολογία σχεδίασης μη γραμμικών ελεγκτών, εμπνεόμενοι από την απλότητα και τη λειτουργικότητα των γραμμικών PID ελεγκτών, τους μη γραμμικούς PI ελεγκτές.

Στόχος τους είναι αντί να επιχειρήσουν να εκτιμήσουν το άγνωστο μοντέλο του συστήματος με έναν εκτιμητή παραμέτρων, ο οποίος έχει μεγάλη δυναμική τάξη - η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται κατα κόρον στον κλασικό προσαρμοστικό έλεγχο - να δημιουργήσουν μια ευσταθή εξίσωση για το σφάλμα της δυναμικής του συστήματος από την επιθυμητή δυναμική η οποία να αποτελείται από μία συνάρτηση διαταραχής που έχει τουλάχιστον μια ρίζα. Έτσι επιλέγοντας κατάλληλα τα κέρδη (μη γραμμικές συναρτήσεις πλέον) του NPI ελεγκτή

εξαναγκάζουν τις τροχιές του συστήματος να συγκλίνουν σε αυτή τη ρίζα με αποτέλεσμα η δυναμική του συστήματος να συγκλίνει στην επιθυμητή δυναμική.

Πιο συγκεκριμένα οι NPI ελεγκτές ορίζονται από μια τριάδα συναρτήσεων $[\beta_p, w_I, \beta]$ των $y \in R^n, y^* \in R^n$

$$\begin{aligned}\beta_p &: R^n \times R^n \rightarrow R^q \\ w_I &: R^n \times R^n \times R^q \rightarrow R^q \\ \beta &: R^q \times R^n \times R^n \rightarrow R\end{aligned}\tag{2.9}$$

που υλοποιούν τον ελεγκτή q -τάξης:

$$\begin{aligned}u &= \beta(\beta_p(y, y^*) + \beta_I), y, y^* \\ \beta_I &= w_I(y, y^*, \beta_I)\end{aligned}\tag{2.10}$$

Για μια πιο φορμαλιστική περιγραφή της διαδικασίας σχεδίασης NPI ελεγκτών θα παρατεθεί το παράδειγμα που χρησιμοποιείται και στην εργασία [16].

Έστω το σύστημα

$$\dot{y} = \phi(y) + u$$

όπου $\phi(y)$: άγνωστη συνεχής συνάρτηση με τιμές στο $[0, 1]$. Θέλουμε με κατάλληλη σχεδίαση του νόμου ελέγχου να επιβάλλουμε στο σύστημα την επιθυμητή δυναμική $\dot{y} = -\lambda y$, $\lambda > 0$. Ορίζοντας $z = \beta_p(y) + \beta_I$, $u = \beta(z, y)$ λαμβάνουμε

$$\dot{y} = -\lambda y + [\phi(y) + \beta(z, y) + \lambda y]\tag{2.11}$$

Πλέον στόχος μας είναι να οδηγήσουμε τον όρο $f_y(z) = \phi(y) + \beta(z, y) + \lambda y$ ασυμπτωτικά στο μηδέν. Προκύπτει λοιπόν ένα πρόβλημα αναζήτησης ρίζας όπου επιχειρούμε να ορίσουμε την τριάδα $[\beta_p, w_I, \beta_I]$ με τέτοιο τρόπο ώστε:

•

$$\forall y \quad \exists z_y : \quad f_y(z_y, y) = 0\tag{2.12}$$

• η τροχιά $z(t)$ να συγκλίνει στο z_y .

Τη σχεδίαση αυτή των $[\beta_p, w_I, \beta_I]$ πετυχαίνουμε παραγωγίζοντας το z , φέρνοντας με κατάλληλη επιλογή του w_I τη δυναμική του z στη μορφή $\dot{z} = A(y)f_y(z)$ ώστε η ρίζα z_y να είναι σημείο ισορροπίας του z . Έπειτα με επιλογή κατάλληλης συνάρτησης Lyapunov σχεδιάζονται κατάλληλα τα β_p, β ώστε να καταστεί αυτό το σημείο ισορροπίας ασυμπτωτικά ευσταθές ώστε οι τροχιές του z να συγκλίνουν εκεί.

Στην ίδια εργασία παρουσιάζεται επίσης χρήση της προτεινόμενης μεθόδου σχεδίασης NPI ελεγκτών για την επίλυση του προβλήματος των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου. Συγκεκριμένα, προτείνεται και αποδεικνύεται η λειτουργία του ακόλουθου σθεναρού ελέγχου:

$$\begin{aligned}z &= \frac{x^2}{2} + \lambda \int_0^t x^2(s) ds \\ u &= z \cos(z)x\end{aligned}\tag{2.13}$$

Την ιδέα αυτή επεκτείνει στην εργασία [23] ο Χ.Ψυλλάκης στο πλαίσιο του back-stepping με ολοκληρωτές. Στην εργασία αυτή εφαρμόζεται η τεχνική σχεδίασης NPI ελεγκτών για την αναδρομική σχεδίαση των νοητών ελέγχων με αποτέλεσμα η επιλογή τους να γίνεται μέσω κατάλληλων μη γραμμικών ολοκληρωτικών εξισώσεων. Με αυτή τη σχεδίαση αποδεικνύεται πως επιτυγχάνεται ασυμπτωτική σθεναρή σταθεροποίηση χρονικά μεταβαλλόμενων συστημάτων υπό μορφή αυστηρής ανάδρασης με άγνωστες τις κατευθύνσεις ελέγχου, αλλά με φραγμένες τις μη γραμμικότητες από γνωστές συναρτήσεις της κατάστασης.

2.4 Συγκριτική μελέτη της μεθόδου των κερδών Nussbaum σε σχέση με τον μη γραμμικό PI έλεγχο

Στόχος αυτής της ενότητας είναι να αποδείξει μέσω μίας συγκριτικής μελέτης του NPI ελέγχου αρχικά με τον κλασικό προσαρμοστικό έλεγχο γενικά και έπειτα με την τεχνική των κερδών Nussbaum ειδικότερα την αξία σχεδίασης ελεγκτών με αυτή τη νέα τεχνική, τα πλεονεκτήματά της και τα πιθανά μειονεκτήματά της.

Ο κλασικός προσαρμοστικός έλεγχος στην πιο ευρέως διαδεδομένη μορφή του επιτυγχάνεται μέσω ενός παραμετροποιημένου νόμου ελέγχου και ενός εκτιμητή των αγνώστων παραμέτρων, ο οποίος σχεδιάζεται με κριτήριο την ελαχιστοποίηση κάποιου σφάλματος παρακολούθησης /εκτίμησης.

$u = \gamma(x, \hat{\theta})$: παραμετροποιημένος νόμος ανάδρασης $\dot{\hat{\theta}} = f(x, \hat{\theta})$: εκτιμητής

Το βασικό του μειονέκτημα είναι, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή, ότι για να προσεγγιστούν ικανοποιητικά οι άγνωστες μη γραμμικότητες η τάξη του εκτιμητή απαιτείται να είναι αρκετά μεγάλη, με αποτέλεσμα το πρόβλημα που είναι γνωστό ως "κατάρα των πολλών διαστάσεων" (curse of dimensionality). Μία λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η μη γραμμική παραμετροποίηση, η οποία όμως αποτελεί αφ'εαυτής δύσκολο πρόβλημα. Μία χρήσιμη παρατήρηση εδώ είναι πως η κυρτότητα εξασφαλίζει σύγκλιση ορισμένων μεθόδων τύπου τάχυστης καθόδου σε ορισμένες περιοχές του χώρου κατάστασης, ωστόσο στις υπόλοιπες περιοχές χρησιμοποιούνται συνήθως υψηλά κέρδη ώστε να υπερκεράσουν τις άγνωστες μη γραμμικότητες. Επίσης πολλές φορές απαιτείται εκ των προτέρων γνώση ορισμένων χαρακτηριστικών του συστήματος.

Στα συγκεκριμένα ζητήματα οι ελεγκτές NPI εμφανίζουν τα εξής πλεονεκτήματα:

- Πρώτον, δεν χρειάζεται να επιλυθούν προβλήματα σε έναν πολυδιάστατο χώρο παραμέτρων, καθώς η σχεδίαση απαιτεί απλώς την επίλυση ενός προβλήματος εύρεσης ρίζας στη δυναμική του σφάλματος.
- Δεύτερον, δεν απαιτείται εκ των προτέρων γνώση ορισμένων παραμέτρων του συστήματος, ωστόσο αν είναι διαθέσιμη μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση του ρυθμού σύγκλισης στην επιθυμητή δυναμική.
- Τρίτον, η σταθεροποίηση στην εξίσωση του σφάλματος γίνεται με τη δημιουργία συνόλων έλξης (attractive sets) αντι για σύγκλιση σε συγκεκριμένα σημεία ισορροπίας οπότε είναι πιο εύρωστη.
- Τέλος, οι παράμετροι που πρέπει να ρυθμιστούν (κέρδη) είναι πολύ λιγότερες με αποτέλεσμα ορισμένες φορές να είναι δυνατή η πρόβλεψη των επιδράσεών τους στο σύστημα.

Ειδικότερα τώρα συγκριτικά με την τεχνική σχεδίασης με χρήση κερδών τύπου Nussbaum οι NPI ελεγκτές υπερτερούν σε θέματα ευρωστείας. Οι Georgiou και Smith έχουν δείξει στην εργασία τους [15] ότι οι ελεγκτές με κέρδη Nussbaum δεν είναι εύρωστοι σε εξωτερικές διαταραχές (θόρυβος) και σε μη μοντελοποιημένα τμήματα της δυναμικής, των οποίων η επίδραση μπορεί να θεωρηθεί ως διαταραχή στο μοντέλο του συστήματος. Με μικρές μόνο διαταραχές ακόμα και ένα απλό γραμμικό σύστημα (με άγνωστη κατεύθυνση ελέγχου) υπό την επίδραση ενός νόμου ελέγχου με κέρδος Nussbaum μπορεί να οδηγηθεί σε αστάθεια. Εν αντιθέσει, ο μη γραμμικός PI ελεγκτής παρουσιάζει ευρωστία τόσο σε γρήγορα μεταβαλλόμενα τμήματα μη μοντελοποιημένης δυναμικής όσο και στην επίδραση

μετρήσιμου θορύβου - γεγονός λογικό αφού η σχεδίασή του γίνεται με χρήση τεχνικών ευστάθειας, οι οποίες εγγυώνται σθεναρότητα σε μικρές διαταραχές.

Πιο αναλυτικά, οι Georgiou, Smith [15] εξετάζουν την επίδραση του νόμου ελέγχου με χρήση κερδών τύπου Nussbaum

$$u = \zeta^2 \cos(\zeta) y \quad (2.14)$$

$$\dot{\zeta} = y^2 \quad (2.15)$$

στο σύστημα ενός απλού ολοκληρωτή που έχει μια μη μοντελοποιημένη δυναμική πρώτης τάξης στην έξοδο

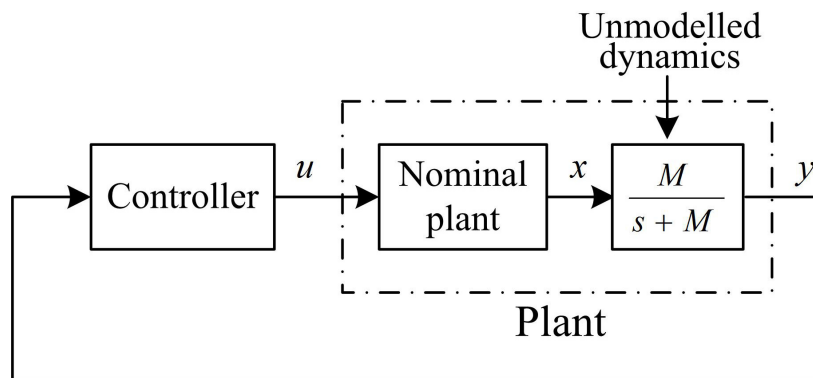


Figure 2.2: Το συνολικό κλειστού βρόχου σύστημα.

$$\dot{x} = bu \quad (2.16)$$

$$\dot{y} = M(x - y) \quad (2.17)$$

με άγνωστη την παράμετρο b (κατεύθυνση ελέγχου) και δείχνουν ότι το σύστημα αυτό με το συγκεκριμένο νόμο ελέγχου οδηγείται σε αστάθεια.

Εν αντιθέσει, η εφαρμογή ενός μη γραμμικού PI νόμου ελέγχου

$$u = z \cos(z) y \quad (2.18)$$

$$z = \frac{y^2}{2} + \lambda \int_0^t y^2(s) ds \quad (2.19)$$

στη λογική που προτείνουν οι Ortega, Astolfi, Barabanov στο [16] σταθεροποιεί το σύστημα για $\lambda < M$. Οπότε ο NPI αντιμετωπίζει το πρόβλημα των γρήγορων παρασιτικών διαταραχών πρώτης τάξης στην περίπτωση που το αρχικό σύστημα είναι ευσταθές.

Στην εργασία [24] ο Χ.Ψυλλάκης αποδεικνύει την ευρωστία του NPI και για συστήματα

$$\dot{x} = f(x) + bu \quad (2.20)$$

$$\dot{y} = M(x - y) \quad (2.21)$$

όπου η δυναμική είναι άγνωστη, άρα πιθανώς το σύστημα να είναι ασταθές, υπό την προϋπόθεση ότι

$$f(x) = a(x)x \quad (2.22)$$

$$a(x) \in [a_1, a_2] \forall x \in R \quad (2.23)$$

Στην περίπτωση αυτή η εφαρμογή ενός NPI νόμου ελέγχου

$$u = k(z)y \quad (2.24)$$

$$z = \frac{y^2}{2} + \lambda \int_0^t y^2(s) ds \quad (2.25)$$

εξασφαλίζει ευστάθεια και σταθεροποίηση αν η σχεδίαση ικανοποιεί τις παρακάτω προδιαγραφές:

- $0 < \lambda < M - \max(0, a_2)$
- $k(z)$ μια συνάρτηση τύπου Nussbaum
- $\frac{2\lambda}{\sqrt{M-\lambda}} [\sqrt{M - (\lambda + a_1)} + \sqrt{M - (\lambda + a_2)}] \geq a_2 - a_1$

Επίσης στην εργασία [25] η ευρωστία του NPI επεκτείνεται και στην περίπτωση που αγνοείται η δυναμική του επενεργητή, η οποία θεωρείται γρήγορη. Το γεγονός αυτό είναι συχνό σε πολλά συστήματα όπως στον ρομποτικό βραχίονα όπου οι ροπές θεωρούνται ως είσοδοι αγνοώντας τις δυναμικές των ηλεκτρικών κινητήρων που ασκούν τις ροπές αυτές. Εξετάζεται λοιπόν το ακόλουθο σύστημα:

$$\dot{y} = f(y) + bu \quad (2.26)$$

$$\dot{u} = M(u_{nom} - u) \quad (2.27)$$

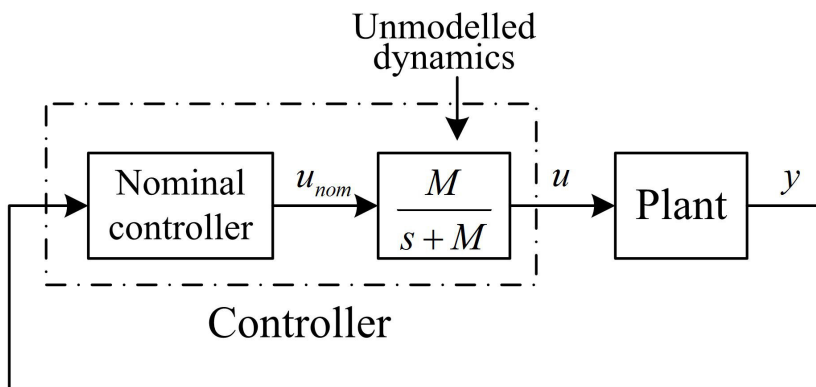


Figure 2.3: Το συνολικό κλειστού βρόχου σύστημα.

με πρώτης τάξης μη μοντελοποιημένη δυναμική στην είσοδο και την προϋπόθεση ότι

$$f(y) = a(y)y \quad (2.28)$$

$$a(y) \in [a_1, a_2] \forall y \in R \quad (2.29)$$

Για το σύστημα αυτό αποδεικνύεται ότι αν εφαρμόσουμε τον έλεγχο

$$u_{nom} = k(z)y \quad (2.30)$$

$$z = \frac{y^2}{2} + \lambda \int_0^t y^2(s)ds \quad (2.31)$$

του οποίου η σχεδίαση να πληρεί τις προδιαγραφές:

- $\lambda + a_2 < M$
- $k(z) = \beta(z) \cos(z)$ με $\beta(\cdot) \in \mathcal{K}_\infty$ και $\lim_{z \rightarrow \infty} [\frac{\beta(z+\epsilon)}{z} - c\beta(z)] = \infty \forall c, \epsilon > 0$

εξασφαλίζεται ότι όλα τα σήματα θα παραμένουν φραγμένα και επιτυγχάνεται σταθεροποίηση.

Αξίζει να αναφερθεί ότι τα δύο προαναφερθέντα προβλήματα επιλύονται και με την τεχνική του προσαρμοστικού ελέγχου [29]-[32], η οποία ωστόσο παρουσιάζει προβλήματα στη μεταβατική κατάσταση (μεγάλη υπερύψωση, μικρή ταχύτητα) εξαιτίας της αργής σύγκλισης των εκτιμώμενων παραμέτρων.

Συνεπώς, η δυνατή αποφυγή υπερπαραμετροποίησης και η εγγυημένη ευρωστία αποτελούν τα κυρίαρχα χαρακτηριστικά των μη γραμμικών PI ελεγκτών συγκριτικά με τους υπόλοιπους τύπους ελεγκτών που επιλύουν τα ίδια προβλήματα (άγνωστη δυναμική, άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου). Ωστόσο, όπως στις περισσότερες τεχνικές σχεδίασης σθεναρού ελέγχου, απαιτείται συνήθως τα άγνωστα τμήματα της δυναμικής να είναι φραγμένα και μάλιστα τα φράγματά τους ή οι συναρτήσεις που τα φράσσουν να είναι γνωστές.

Chapter 3

Κεφάλαιο 3

3.1 Συνεισφορά της εργασίας

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιαστεί εν συντομία η συνεισφορά της παρούσας εργασίας και οι καινοτομίες οι οποίες εισάγονται, τα οποία θα αναλυθούν εκτενέστερα κατά την διαδικασία της σχεδίασης και θα συνοψισθούν στον επίλογο, όπου θα παρουσιασθούν και τα αντίστοιχα συμπεράσματα.

Πιο συγκεκριμένα, η πρώτη καινοτομία είναι ο συνδυασμός της μεθοδολογίας *integrator backstepping*, όπου χρησιμοποιούμε μη γραμμικό αναλογικό ολοκληρωτικό έλεγχο με αποτέλεσμα οι νόμοι ελέγχου να προκύπτουν από ολοκληρωτικές εξισώσεις, με τη μεθοδολογία του προσαρμοστικού ελέγχου. Έτσι προκύπτει ένας προσαρμοστικός μη γραμμικός αναλογικός ολοκληρωτικός έλεγχος.

Δεύτερον, εξαιτίας της εισαγωγής της μεθόδου του προσαρμοστικού ελέγχου ο προτεινόμενος ελεγκτής μπορεί να αντιμετωπίσει μη φραγμένες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες, καθώς είναι πλέον εφικτή η προσέγγιση των φραγμάτων τους τα οποία είναι απαραίτητα για τη σχεδίαση του μη γραμμικού αναλογικού ολοκληρωτικού ελέγχου.

Τρίτον, η μεθοδολογία του *integrator backstepping* με NPI νόμο ελέγχου επεκτείνεται σε πρόβλημα παρακολούθησης, όπως προτείνεται στις πιθανές επεκτάσεις του [23].

Τέταρτον, εξετάζεται και η περίπτωση που ο επενεργητής παρουσιάζει μη ομαλές μη γραμμικότητες - όπως *deadzones*, *backslash* ή υστέρηση - γεγονός αρκετά συχνό στους περισσότερους επενεργητές.

Chapter 4

Κεφάλαιο 4

Στο κεφάλαιο αυτό θα δωθούν στοιχεία από την θεωρία προσεγγίσεως των γραμμικών παραμετρικών εκτιμητών, θα περιγραφούν κάποιοι συμβολισμοί και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν κατά την ακόλουθη σχεδίαση του ελεγκτή, και θα καθοριστεί φορμαλιστικά το πρόβλημα που θα επιλυθεί στο επόμενο κεφάλαιο, με τις απαραίτητες υποθέσεις που πρέπει να ληφθούν.

4.1 Γραμμικοί Παραμετρικοί Εκτιμητές (LPAs)

Είναι γνωστό ότι κάθε συνεχής μη γραμμική συνάρτηση $f_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μπορεί να προσεγγιστεί μέσα σε ένα συμπαγές σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ από έναν κατάλληλο γραμμικό παραμετρικό εκτιμητή (LPA) όπως οι συναρτήσεις ακτινικής βάσης (Radial Basis Functions, RBFs) ή τα νευρωνικά δίκτυα υψηλής τάξεως (High Order Neural Networks, HONNs) [33], [34]

$$f_0(x) = \theta^{*T} \Phi(x) + \epsilon(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (4.1)$$

όπου

$$\theta^* := \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^\ell} \sup_{x \in \Omega} \|f_0(x) - \theta^T \Phi(x)\| \quad (4.2)$$

και ℓ ο αριθμός των νευρώνων στο ενδιάμεσο στρώμα του νευρωνικού δικτύου. Σύμφωνα με την "universal approximation property" η νόρμα του βέλτιστου σφάλματος προσέγγισης $\epsilon_M := \sup_{x \in \Omega} |\epsilon(x)|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή επιλέγοντας αρκετά μεγάλο αριθμό νευρώνων ℓ και κατάλληλο διάνυσμα βάσης $\Phi(x)$ [33], [34].

4.2 Συμβολισμοί και ιδιότητες

Ορίζουμε

$$[x]_\delta := \begin{cases} x - \delta \operatorname{sgn}(x), & |x| \geq \delta \\ 0, & |x| < \delta \end{cases} \quad (4.3)$$

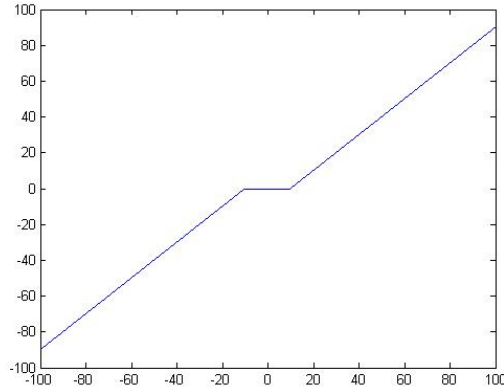


Figure 4.1: Γράφημα του $[x]_\delta$

Μία σημαντική ιδιότητα που θα χρησιμοποιηθεί κατά τη σχεδίαση είναι η εξής:

$$x[x]_\delta = |x| \quad |[x]_\delta| \geq \delta \quad |[x]_\delta| \quad (4.4)$$

Ορίζουμε επίσης το διάνυσμα $\bar{x}_i := [x_1, \dots, x_i] \in \mathbb{R}^i$.

4.3 Διατύπωση προβλήματος

Να επιλυθεί το πρόβλημα παρακολούθησης για το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)x_{i+1} \\ \dot{x}_n &= f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)h(u, t) + \delta(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Όπου οι συναρτήσεις f_i , g_i ($i = 1, \dots, n$) θα θεωρηθούν λείες αλλά άγνωστες, η συνάρτηση $h(u, t)$ παριστά μη ομαλές μη γραμμικότητες του επενεργητή (nonsmooth actuator nonlinearities) όπως οι νεκρές ζώνες, η υστέρηση κ.α. ενώ η συνάρτηση $\delta(t)$ παριστά μια μικρή διαταραχή στην είσοδο.

Υπόθεση 2. Οι συναρτήσεις $g_i(\cdot)$ είναι συνεχείς και υπάρχουν άγνωστες θετικές σταθερές $g_{i1}, g_{i2} > 0$ τέτοιες ώστε $0 < g_{i1} \leq |g_i(\bar{x}_i)| \leq g_{i2}$ για κάθε $t \in [0, \infty)$. Έτσι, οι άγνωστες συναρτήσεις $g_i(\cdot)$ (κατευθύνσεις ελέγχου) έχουν σταθερό αλλά άγνωστο πρόσημο.

Chapter 5

Κεφάλαιο 5

Το κεφάλαιο αυτό περιέχει τα βασικά θεωρητικά αποτελέσματα της εργασίας [28].

5.1 Κύριο Λήμμα

Τα αποτελέσματά μας βασίζονται στο ακόλουθο λήμμα που είναι μια γενίκευση του λήμματος 1 του [23].

Λήμμα 1. Έστω οι συνεχείς διαφορίσιμες μη αρνητικές συναρτήσεις $V_i, L_i : [0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}_+$, η συνεχής συνάρτηση $Q_i : [0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) και οι συναρτήσεις $P_i, \bar{P}_i : [0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζονται ακολούθως:

$$P_i(t) := V_i(t) + L_i(t) + \lambda_i \int_0^t V_i(s) ds - \epsilon_{i+1} \lambda_{i+1} \int_0^t V_{i+1}(s) ds \quad (5.1)$$

$$\bar{P}_i(t) := P_i(t) + Q_i(t) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (5.2)$$

με $\epsilon_i, \lambda_i > 0$. Ορίζουμε επίσης την $V_{n+1} \equiv 0$ για να εξασφαλιστεί ομοιομορφία στο συμβολισμό. Επιπλέον, έστω n συνεχείς συναρτήσεις $g_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν θετικές σταθερές $g_{i1}, g_{i2} > 0$ τέτοιες ώστε $0 < g_{i1} \leq |g_i(t)| \leq g_{i2}$ για κάθε $t \in [0, \infty)$. Αν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση $\Theta_i : [0, t_f) \rightarrow \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε

$$\frac{d\bar{P}_i}{dt} \leq [\eta_i^* + g_i(t)\kappa_i(P_i)]\Theta_i(t) \quad (5.3)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Theta_i(t) dt \geq c_i |Q(t_2) - Q(t_1)| \quad \forall 0 \leq t_1 \leq t_2 < t_f \quad (5.4)$$

με σταθερές $c_i > 0$, $\eta_i^* \geq 0$, $\kappa_i(P_i) := \varphi_i(P_i^2) \cos(P_i)$ και $\varphi_i(\cdot)$ μια συνάρτηση κλάσης \mathcal{K}_∞ τότε όλες οι P_i είναι άνω φραγμένες στο $[0, t_f)$.

Επιπρόσθετα, αν $\epsilon_i < 1$ τότε όλες οι $V_i, \int_0^t V_i(s) ds$ είναι φραγμένες στο $[0, t_f)$.

Το γεγονός ότι οι P_i είναι άνω φραγμένες μπορεί να αποδειχθεί εφαρμόζοντας απαγωγή σε άτοπο. Εάν υποθέσουμε ότι οι P_i δεν είναι άνω φραγμένες τότε υπάρχει μια ακολουθία από χρονικές στιγμές $\{t_{i,1k}\}, \{t_{i,2k}\}$ που ορίζονται ακολούθως:

$$t_{i,2k} = \inf \left\{ t \in [0, t_f) \mid P_i(t) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(g_i) + \frac{3\pi}{4} \right\} \quad (5.5)$$

$$t_{i,1k} = \sup \left\{ t \in [0, t_{2k}) \mid P_i(t) = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(g_i) + \frac{\pi}{4} \right\} \quad (5.6)$$

τέτοιες ώστε

$$g_i(t)\kappa_i(P_i(t)) \leq -\frac{g_{i1}}{\sqrt{2}} \varphi_i((2k\pi - \pi/4)^2), \quad \forall t \in [t_{i,1k}, t_{i,2k}] \quad (5.7)$$

ολοκληρώνοντας την (5.3) στο $[t_{i,1k}, t_{i,2k}]$ λαμβάνουμε

$$\bar{P}_i(t_{i,2k}) - \bar{P}_i(t_{i,1k}) \leq \int_{t_{i,1k}}^{t_{i,2k}} [\eta_i^* + g_i(t)\kappa_i(P_i)]\Theta_i(t)dt \quad (5.8)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την ιδιότητα (5.7) στην παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\bar{P}_i(t_{i,2k}) - \bar{P}_i(t_{i,1k}) \leq - \left[\frac{g_{i1}}{\sqrt{2}}\varphi_i((2k\pi - \pi/4)^2) - \eta_i^* \right] \int_{t_{i,1k}}^{t_{i,2k}} \Theta_i(t)dt \quad (5.9)$$

Για κατάλληλα μεγάλο $k \geq 1 + \lceil (1/2\pi)\varphi_i^{-1}(\sqrt{2}\eta_i^*/g_{i1}) \rceil$ λαμβάνουμε από τις (5.9) και (5.4)

$$\bar{P}_i(t_{i,2k}) - \bar{P}_i(t_{i,1k}) \leq -c_i \left[\frac{g_{i1}}{\sqrt{2}}\varphi_i((2k\pi - \pi/4)^2) - \eta_i^* \right] |Q_i(t_{i,2k}) - Q_i(t_{i,1k})| \quad (5.10)$$

Επίσης από τον όρισμό των \bar{P}_i στην (5.2) και από τις (5.5), (5.6) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bar{P}_i(t_{i,2k}) - \bar{P}_i(t_{i,1k}) &= P_i(t_{i,2k}) - P_i(t_{i,1k}) + Q_i(t_{i,2k}) - Q_i(t_{i,1k}) \\ &= Q_i(t_{i,2k}) - Q_i(t_{i,1k}) + \pi/2 \\ &\geq -|Q_i(t_{i,2k}) - Q_i(t_{i,1k})| + \pi/2. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Συνδυάζοντας τις (5.10), (5.11) λαμβάνουμε

$$\frac{\pi}{2} + \left[c_i \frac{g_{i1}}{\sqrt{2}}\varphi_i((2k\pi - \pi/4)^2) - c_i\eta_i^* - 1 \right] |Q_i(t_{i,2k}) - Q_i(t_{i,1k})| \leq 0 \quad (5.12)$$

το οποίο δεν μπορεί να ισχύει για κατάλληλα μεγάλο k (άτοπο). Έτσι, οι P_i είναι άνω φραγμένες.

Εάν $\epsilon_i < 1$ τότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι P_i είναι άνω φραγμένες μπορούμε να αθροίσουμε όλες τις (5.1) και να λάβουμε ότι όλες οι $V_i, \int_0^t V_i(s)ds$ είναι φραγμένες στο $[0, t_f]$.

5.2 Σχεδίαση Ελέγχου με Backstepping

5.2.1 Βήμα 1

Εάν ορίσουμε την πρώτη μεταβλητή σφάλματος $z_1 := x_1 - y_d$ τότε

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 - \dot{y}_d. \quad (5.13)$$

Έστω τώρα ο πρώτος εικονικός έλεγχος α_1 και η νέα μεταβλητή σφάλματος $z_2 := x_2 - \alpha_1$. Για τη μη αρνητική συνεχή και διαφορίσιμη συνάρτηση $V_1 := (1/2)[z_1]_{\delta_1}^2$ έχουμε

$$\dot{V}_1 = [z_1]_{\delta_1} \dot{z}_1 = [z_1]_{\delta_1} [f_1(x_1) + g_1(x_1)z_2 - \dot{y}_d + g_1(x_1)\alpha_1] \quad (5.14)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.4) και την ανισότητα

$$\begin{aligned} g_1(x_1)z_2[z_1]_{\delta_1} &\leq |g_1(x_1)||z_2| |[z_1]_{\delta_1}| \\ &\leq |g_1(x_1)|(|[z_2]_{\delta_2}| + \delta_2) |[z_1]_{\delta_1}| \\ &\leq g_{12}\delta_2 |[z_1]_{\delta_1}| + \frac{1}{4\epsilon_2\lambda_2}g_1^2(x_1)[z_1]_{\delta_1}^2 + \epsilon_2\lambda_2[z_2]_{\delta_2}^2 \end{aligned} \quad (5.15)$$

στην (5.14) έχουμε ότι

$$\dot{V}_1 \leq [z_1]_{\delta_1} [F_1(x_1, z_1) - \dot{y}_d + g_1(x_1)\alpha_1] + \epsilon_2 \lambda_2 [z_2]_{\delta_2}^2 \quad (5.16)$$

με

$$F_1(x_1, z_1) := f_1(x_1) + \frac{g_{12}\delta_2}{\delta_1} z_1 + \frac{1}{4\epsilon_2 \lambda_2} g_1^2(x_1) [z_1]_{\delta_1} \quad (5.17)$$

Έστω τώρα μια προσέγγιση της μη γραμμικότητας F_1 σε κάποιο συμπαγές σύνολο $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ από έναν γραμμικό παραμετρικό εκτιμητή LPA τέτοιο ώστε

$$F_1(x_1, z_1) = \theta_1^{*T} \Phi_1(x_1, z_1) + \epsilon_{a1}(x_1, z_1), \quad \forall (x_1, z_1) \in \Omega_1 \quad (5.18)$$

με $\theta_1^* \in \mathbb{R}^{\ell_1}$ το βέλτιστο βάρος εκτίμησης, $\Phi_1(x_1, z_1) \in \mathbb{R}^{\ell_1}$ το διάνυσμα παλινδρόμησης (regressor vector) και $\epsilon_{a1}(x_1, z_1)$ το σφάλμα της εκτίμησης. Το σφάλμα είναι φραγμένο στο Ω_1 δηλαδή υπάρχει κάποιο $\epsilon_{M1} > 0$ τέτοιο ώστε $|\epsilon_{a1}(x_1, z_1)| \leq \epsilon_{M1}$ για όλα τα $(x_1, z_1) \in \Omega_1$. Εάν εισάγουμε μια εκτίμηση β_1 της νόρμας του βέλτιστου βάρους $\|\theta_1^*\|$, και τις συναρτήσεις $L_1 := (1/2\gamma_1)\beta_1^2$

$$P_1 := V_1 + L_1 + \lambda_1 \int_0^t V_1(s) ds - \epsilon_2 \lambda_2 \int_0^t [z_2(s)]_{\delta_2}^2 ds \quad (5.19)$$

τότε

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &\leq [z_1]_{\delta_1} [\theta_1^{*T} \Phi_1(x_1, z_1) + \epsilon_{a1}(x_1, z_1)] \\ &\quad + (1/2)\lambda_1 [z_1]_{\delta_1} - \dot{y}_d + g_1(x_1)\alpha_1 + \frac{1}{\gamma_1} \beta_1 \dot{\beta}_1 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Ορίζοντας επίσης τις συναρτήσεις $Q_1 := (1/2\gamma_1)(\tilde{\beta}_1^2 - \beta_1^2)$ όπου $\tilde{\beta}_1 := \beta_1 - \|\theta_1^*\|$ το σφάλμα εκτίμησης της νόρμας του βάρους

$$\bar{P}_1 := P_1 + Q_1 \quad (5.21)$$

και επιλέγοντας τον ακόλουθο νόμο εκτίμησης

$$\dot{\beta}_1 = \gamma_1 \|\Phi_1(x_1, z_1)\| | [z_1]_{\delta_1} | \quad (5.22)$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}_1}{dt} &\leq \frac{1}{\delta_1} [z_1]_{\delta_1} \left[\beta_1 \|\Phi_1(x_1, z_1)\| z_1 + (\epsilon_{M1} + y_{M1}) z_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta_1 \lambda_1 [z_1]_{\delta_1} + \delta_1 g_1(x_1)\alpha_1 \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Από την ανισότητα Young ισχύει

$$\beta_1 \|\Phi_1(x_1, z_1)\| \leq \frac{1}{2} (\|\Phi_1(x_1, z_1)\|^2 + \beta_1^2). \quad (5.24)$$

Επιλέγοντας τώρα τον ακόλουθο νόμο εικονικού ελέγχου

$$\alpha_1 = \kappa_1(P_1)(1 + \|\Phi_1(x_1, z_1)\|^2 + \beta_1^2) z_1 \quad (5.25)$$

και λαμβάνοντας υπόψη την (5.24) η (5.23) γράφεται

$$\frac{d\bar{P}_1}{dt} \leq [\eta_1^* + g_1(x_1(t))\kappa_1(P_1)] \Theta_1(t) \quad (5.26)$$

με

$$\Theta_1(t) := (1 + \|\Phi_1(x_1, z_1)\|^2 + \beta_1^2) z_1 \lfloor z_1 \rfloor_{\delta_1} \quad (5.27)$$

$$\eta_1^* := \max \left\{ \frac{1}{2\delta_1}, \frac{\lambda_1}{2} + \frac{1}{2\delta_1} + \frac{\epsilon_{M1} + y_{M1}}{\delta_1} \right\} \quad (5.28)$$

Ισχύει επίσης ότι

$$\begin{aligned} Q_1(t_1) - Q_1(t_2) &= \frac{1}{\gamma_1} \|\theta_1^*\| (\beta_1(t_2) - \beta_1(t_1)) \\ &= \frac{1}{\gamma_1} \|\theta_1^*\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_1(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} \|\theta_1^*\| \|\Phi_1(x_1, z_1)\| \lfloor z_1 \rfloor_{\delta_1} ds \\ &\leq \frac{1}{2\delta_1} \int_{t_1}^{t_2} (\|\theta_1^*\|^2 + \|\Phi_1(x_1, z_1)\|^2) z_1 \lfloor z_1 \rfloor_{\delta_1} ds \\ &\leq \frac{\max\{1, \|\theta_1^*\|^2\}}{2\delta_1} \int_{t_1}^{t_2} \Theta_1(s) ds \end{aligned} \quad (5.29)$$

Έτσι οι συνθήκες του λήμματος 1 ισχύουν και συνεπώς οι P_1 είναι άνω φραγμένες.

Όμοια με το [23] σημειώνουμε ότι ο εικονικός έλεγχος α_1 ορίζεται από μια ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \kappa_1 \left[V_1 + L_1 - \epsilon_2 \lambda_2 \int_0^t [x_2(s) - \alpha_1(s)]_{\delta_2}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \int_0^t V_1(s) ds \right] (1 + \|\Phi_1(x_1, z_1)\|^2 + \beta_1^2) z_1. \end{aligned} \quad (5.30)$$

5.2.2 Βήμα i ($2 \leq i \leq n-1$):

Αν για το i -οστο βήμα ορίσουμε τη μεταβλητή σφάλματος $z_i := x_i - \alpha_{i-1}$ τότε

$$\dot{z}_i = f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i) z_{i+1} + g_i(\bar{x}_i) \alpha_i - \dot{\alpha}_{i-1} \quad (5.31)$$

με α_i τον i -στο εικονικό έλεγχο. Το ακόλουθο λήμμα ισχύει.

Λήμμα 2. Έστω το μη γραμμικό σύστημα (4.5), οι μεταβλητές σφάλματος $z_1 = x_1 - y_d$, $z_i = x_i - \alpha_{i-1}$, $z_{n+1} \equiv 0$ και οι ολοκληρωτικοί όροι

$$I_i = \int_0^t [z_i]_{\delta_i}^2(s) ds. \quad (5.32)$$

Εάν επιλέξουμε νόμους εικονικών ελέγχων της μορφής

$$\alpha_i = A_i(\bar{x}_i, \bar{z}_i, \bar{I}_{i+1}, \bar{\beta}_i), \quad (1 \leq i \leq n-1) \quad (5.33)$$

με β_i εκτιμώμενους όρους οριζόμενους σε κάθε βήμα του backstepping με την ιδιότητα

$$|\dot{\beta}_i| \leq B_i(\bar{x}_i, \bar{z}_i, \bar{I}_i, \bar{\beta}_{i-1}) \quad (5.34)$$

με $\xi_i := [\bar{x}_i, \bar{z}_i, \bar{I}_i, \bar{\beta}_{i-1}]$, $B_i \circ \xi_i \in C^1([t_0, t_f], \mathbb{R}_+)$ τότε υπάρχουν συνεχείς διαφορίσιμες συναρτήσεις $H_i \circ \xi_{i+1} \in C^1([t_0, t_f], \mathbb{R}_+)$ τέτοιες ώστε

$$|\dot{\alpha}_i| \leq H_i(\bar{x}_{i+1}, \bar{z}_{i+1}, \bar{I}_{i+1}, \bar{\beta}_i). \quad (5.35)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της επαγωγής για να αποδείξουμε το (5.35). Για $i = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(f_1 + g_1 x_2) + \frac{\partial A_1}{\partial z_1}(f_1 + g_1 x_2 - \dot{y}_d) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial A_1}{\partial I_j} [z_j]_{\delta_j}^2 + \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} \dot{\beta}_1\end{aligned}\quad (5.36)$$

εκ του οποίου συνάγεται

$$\begin{aligned}|\dot{\alpha}_1| &\leq \left| \frac{\partial A_1}{\partial x_1}(f_1 + g_1 x_2) \right| + \left| \frac{\partial A_1}{\partial z_1} \right| (|f_1 + g_1 x_2| + y_{M1}) \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left| \frac{\partial A_1}{\partial I_j} \right| [z_j]_{\delta_j}^2 + \left| \frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} \right| B_1 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} \right)^2 + (f_1 + g_1 x_2)^2 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z_1} \right)^2 + \frac{y_{M1}^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_1}{\partial \beta_1} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[\left(\frac{\partial A_1}{\partial I_j} \right)^2 + [z_j]_{\delta_j}^4 \right] + \frac{1}{2} B_1^2 := H_1(\bar{x}_2, \bar{z}_2, \bar{I}_2, \beta_1)\end{aligned}\quad (5.37)$$

Εστω ότι η (5.35) ισχύει $\forall j = 1, 2, \dots, i-1$. Θα δείξουμε ότι η (5.35) ισχύει επίσης για $j = i$.

Παίρνοντας την χρονική παράγωγο της (5.33) έχουμε ότι

$$\dot{\alpha}_i = \sum_{j=1}^i \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^i \frac{\partial A_i}{\partial z_j} \dot{z}_j + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\partial A_i}{\partial I_j} \dot{I}_j + \sum_{j=1}^i \frac{\partial A_i}{\partial \beta_j} \dot{\beta}_j\quad (5.38)$$

Από την (4.5) και από την υπόθεσή μας έχουμε $\dot{x}_j = h_{x,j}(\bar{x}_{j+1})$ και

$$\begin{aligned}|\dot{z}_j| &\leq |f_j(\bar{x}_j) + g_j(\bar{x}_j)x_{j+1}| + |\dot{\alpha}_{j-1}| \\ &\leq (f_j(\bar{x}_j) + g_j(\bar{x}_j)x_{j+1})^2 + H_{j-1} + \frac{1}{4} \\ &:= h_{z,j}(\bar{x}_{j+1}, \bar{z}_j, \bar{I}_j, \bar{\beta}_{j-1})\end{aligned}\quad (5.39)$$

Έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}|\dot{\alpha}_i| &\leq \sum_{j=1}^i \left| \frac{\partial A_i}{\partial x_j} h_{x,j} \right| + \sum_{j=1}^i \left| \frac{\partial A_i}{\partial z_j} \right| h_{z,j} + \sum_{j=1}^{i+1} \left| \frac{\partial A_i}{\partial I_j} \right| [z_j]_{\delta_j}^2 + \sum_{j=1}^i \left| \frac{\partial A_i}{\partial \beta_j} \right| B_j \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_i}{\partial z_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_i}{\partial \beta_j} \right)^2 + h_{x,j}^2 + h_{z,j}^2 + B_j^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i+1} \left[\left(\frac{\partial A_i}{\partial I_j} \right)^2 + 1 \right] [z_j]_{\delta_j}^2 := H_i(\bar{x}_{i+1}, \bar{z}_{i+1}, \bar{I}_{i+1}, \bar{\beta}_i)\end{aligned}\quad (5.40)$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.

Σχεδίαση

Προφανώς το α_1 που ορίζεται στην (5.25) είναι της μορφής (5.33). Επίσης, η δυναμική του β_1 που δίνεται από την (5.24)

$$|\dot{\beta}_1| \leq \frac{\gamma_1}{2} (\|\Phi_1(x_1, z_1)\|^2 + [z_1]_{\delta_1}^2) := B_1(x_1, z_1, I_1)\quad (5.41)$$

η οποία είναι στη μορφή της (5.34). Υποθέτοντας ότι όλοι οι νοητοί έλεγχοι α_j και οι δυναμικές των β_j είναι στις μορφές (5.33) και (5.34) αντίστοιχα για κάθε $j \in \{1, 2, \dots, i-1\}$. Επιλέγουμε τώρα τα α_i, β_i που είναι επίσης στις μορφές (5.33), (5.34).

θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $V_i = \frac{1}{2} |z_i|_{\delta_i}^2$. Η χρονική παράγωγος της V_i είναι

$$\dot{V}_i = |z_i|_{\delta_i} [f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)z_{i+1} + g_i(\bar{x}_i)\alpha_i - \dot{\alpha}_{i-1}]. \quad (5.42)$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2 έχουμε ότι

$$\dot{V}_i \leq |z_i|_{\delta_i} [f_i(\bar{x}_i) + g_i(\bar{x}_i)z_{i+1} + g_i(\bar{x}_i)\alpha_i + (1/\delta_i)z_i H_{i-1}(\bar{x}_i, \bar{z}_i, \bar{I}_i, \bar{\beta}_{i-1})]. \quad (5.43)$$

Όμοια με το βήμα 1, εξ. (5.15) οι όροι $g_i(\bar{x}_i)z_{i+1}|z_i|_{\delta_i}$ είναι φραγμένοι από

$$g_i(\bar{x}_i)z_{i+1}|z_i|_{\delta_i} \leq g_{i2}\delta_{i+1} ||z_i|_{\delta_i}| + \frac{1}{4\epsilon_{i+1}\lambda_{i+1}} g_i^2(\bar{x}_i) |z_i|_{\delta_i}^2 + \epsilon_{i+1}\lambda_{i+1} |z_{i+1}|_{\delta_{i+1}}^2. \quad (5.44)$$

Ορίζουμε τώρα το διάνυσμα $\xi_i := [\bar{x}_i, \bar{z}_i, \bar{I}_i, \bar{\beta}_{i-1}] \in \mathbb{R}^{4i-1}$ και την μη γραμμικότητα

$$F_i(\xi_i) := f_i(\bar{x}_i) + \frac{g_{i2}\delta_{i+1}}{\delta_i} z_i + \frac{1}{4\epsilon_{i+1}\lambda_{i+1}} g_i^2(\bar{x}_i) |z_i|_{\delta_i} + \frac{1}{\delta_i} z_i H_{i-1}(\xi_i). \quad (5.45)$$

Εστω τώρα μια προσέγγιση της μη γραμμικότητας $F_i(\xi_i)$ σε κάποιο συμπαγές σύνολο $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{4i-1}$ από ένα LPA τέτοιο ώστε

$$F_i(\xi_i) := \theta_i^{*T} \Phi_i(\xi_i) + \epsilon_{ai}(\xi_i), \quad \forall \xi_i \in \Omega_i \quad (5.46)$$

με $\theta_i^* \in \mathbb{R}^{\ell_i}$ το βέλτιστο βάρος εκτίμησης, $\Phi_i(\xi_i) \in \mathbb{R}^{\ell_i}$ το διάνυσμα παλινδρόμησης και $\epsilon_{ai}(\xi_i)$ το σφάλμα εκτίμησης. Το σφάλμα είναι φραγμένο στο Ω_i δηλαδή υπάρχει $\epsilon_{Mi} > 0$ τέτοιο ώστε $|\epsilon_{ai}(\xi_i)| \leq \epsilon_{Mi}$ για κάθε $\xi_i \in \Omega_i$. Εάν εισάγουμε μια εκτίμηση β_i της νόρμας του βέλτιστου βάρους $\|\theta_i^*\|$, και συναρτήσεις $L_i := (1/2\gamma_i)\beta_i^2$

$$P_i := V_i + L_i + \lambda_i \int_0^t V_i(s) ds - \epsilon_{i+1}\lambda_{i+1} \int_0^t |z_{j+1}(s)|_{\delta_{j+1}}^2 ds \quad (5.47)$$

τότε

$$\dot{P}_i \leq |z_i|_{\delta_i} [\theta_i^{*T} \Phi_i(\xi_i) + \epsilon_{ai}(\xi_i) + \lambda_i |z_i|_{\delta_i} + g_i(\bar{x}_i)\alpha_i] + \frac{1}{\gamma_i} \beta_i \dot{\beta}_i \quad (5.48)$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Cauchy-Swartz προκύπτει

$$\dot{P}_i \leq |z_i|_{\delta_i} [\epsilon_{ai}(\xi_i) + \lambda_i |z_i|_{\delta_i} + g_i(\bar{x}_i)\alpha_i] + \|\theta_i^*\| \|\Phi_i(\xi_i)\| |z_i|_{\delta_i} + \frac{1}{\gamma_i} \beta_i \dot{\beta}_i. \quad (5.49)$$

Ορίζουμε επίσης τις συναρτήσεις $Q_i := (1/2\gamma_i)(\tilde{\beta}_i^2 - \beta_i^2)$ με $\tilde{\beta}_i = \beta_i - \|\theta_i^*\|$ και

$$\bar{P}_i := P_i + Q_i. \quad (5.50)$$

Εάν επιλέξουμε τους νόμους εκτίμησης

$$\dot{\beta}_i = \gamma_i \|\Phi_i(\xi_i)\| |z_i|_{\delta_i} \quad (5.51)$$

τότε

$$B_i = \frac{\|\gamma_i \Phi_i(\xi_i)\|^2 + \|z_i\|^2}{2} \quad (5.52)$$

και

$$\frac{d\bar{P}_i}{dt} \leq [z_i]_{\delta_i} [\lambda_1 [z_i]_{\delta_i} + \epsilon_{Mi} z_i / \delta_i + g_i(\bar{x}_i) \alpha_i] + |\beta_i| \|\Phi_i(\xi_i)\| |z_i]_{\delta_i}|. \quad (5.53)$$

Ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας μπορεί να φραγεί από διαφορίσιμες συναρτήσεις ως εξής

$$|\beta_i| \|\Phi_i(\xi_i)\| |z_i]_{\delta_i}| \leq \frac{1}{2\delta_i} (|\beta_i|^2 + \|\Phi_i(\xi_i)\|^2) [z_i]_{\delta_i} z_i. \quad (5.54)$$

Επιλέγοντας τον εικονικό έλεγχο

$$\alpha_i = \kappa_i(P_i)(1 + |\beta_i|^2 + \|\Phi_i(\xi_i)\|^2) z_i \quad (5.55)$$

έχουμε

$$\frac{d\bar{P}_i}{dt} \leq [\eta_i^* + g_i(\bar{x}_i(t)) \kappa_i(P_i)] \Theta_i(t) \quad (5.56)$$

με

$$\Theta_i(t) := (1 + |\beta_i|^2 + \|\Phi_i(\xi_i)\|^2) z_i [z_i]_{\delta_i} \quad (5.57)$$

$$\eta_i^* := \lambda_i + \frac{1}{2\delta_i} + \frac{\epsilon_{Mi}}{\delta_i}. \quad (5.58)$$

Ισχύει επίσης

$$\begin{aligned} Q_i(t_2) - Q_i(t_1) &= \frac{1}{\gamma_i} \|\theta_i^*\| (\beta_i(t_2) - \beta_i(t_1)) \\ &= \frac{1}{\gamma_i} \|\theta_i^*\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_i(s) ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\theta_i^*\| \|\Phi_i(\xi_i)\| |z_i]_{\delta_i}| ds \\ &\leq \frac{1}{2\delta_i} \int_{t_1}^{t_2} (\|\theta_i^*\| \|\Phi_i(\xi_i)\|) z_i [z_i]_{\delta_i} ds \\ &\leq \frac{\max\{1, \|\theta_i^*\|\}}{2\delta_i} \int_{t_1}^{t_2} \Theta_i(s) ds. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Έτσι οι συνθήκες του λήμματος 1 ισχύουν και επομένως οι P_i είναι άνω φραγμένες.

Όμοια με το [23] σημειώνουμε ότι ο εικονικός έλεγχος α_i ορίζεται από μια ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής

$$\begin{aligned} \alpha_i(t) &= \kappa_i \left[V_i + L_i - \epsilon_{i+1} \lambda_{i+1} \int_0^t [x_{i+1}(s) - \alpha_i(s)]_{\delta_{i+1}}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + \lambda_i \int_0^t V_i(s) ds \right] (1 + \|\hat{\theta}_i\|^2 + \|\Phi_i(\xi_i)\|^2) z_i. \end{aligned} \quad (5.60)$$

5.2.3 Βήμα n

Για το n -οστό βήμα ορίζουμε τη μεταβλητή σφάλματος $z_n := x_n - \alpha_{n-1}$ με παράγωγο

$$\dot{z}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n) h(u, t) + \delta(t) - \dot{\alpha}_{n-1} \quad (5.61)$$

όπου ο όρος $h(u, t)$ αναπαριστά μη ομαλές μη γραμμικότητες του επενεργητή, οι οποίες όπως αποδεικνύεται στο [27] μπορούν να γραφούν στη γενική μορφή $h(u, t) = m(t)u + l(t)$.

Η χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση $m(t)$ είναι φραγμένη με σύνολο τιμών ένα κλειστό διάστημα $I = [m^-, m^+]$ με $0 \notin I$ και η $l(t)$ είναι μια χρονομεταβλητή φραγμένη συνάρτηση που ικανοποιεί την $\|l(t)\| \leq l^*$ για μια άγνωστη σταθερά l^* ενώ ο όρος $\delta(t)$ παριστά μια άγνωστη φραγμένη διαταραχή, που ικανοποιεί την $\|\delta(t)\| \leq \delta^*$ για μια άγνωστη σταθερά δ^* . Έτσι η εξίσωση (5.61) μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$\dot{z}_n = f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)m(t)\alpha_n + g_n(\bar{x}_n)l(t) + \delta(t) - \dot{\alpha}_{n-1} \quad (5.62)$$

με $u = \alpha_n$ τον επιλεγμένο νόμο ελέγχου για ολόκληρο το σύστημα.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $V_n = \frac{1}{2}[z_n]_{\delta_n}^2$ η χρονική παράγωγος της οποίας είναι:

$$\dot{V}_n = [z_n]_{\delta_n} [f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)m(t)\alpha_n + g_n(\bar{x}_n)l(t) + \delta(t) - \dot{\alpha}_{n-1}]. \quad (5.63)$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq [z_n]_{\delta_n} [f_n(\bar{x}_n) + g_n(\bar{x}_n)m(t)\alpha_n + g_n(\bar{x}_n)l(t) + \delta(t) \\ + (1/\delta_n)z_n H_{n-1}(\bar{x}_n, \bar{z}_n, \bar{I}_n, \bar{\beta}_{n-1})]. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Ορίζουμε τώρα το διάνυσμα $\xi_n := [\bar{x}_n, \bar{z}_n, \bar{I}_n, \bar{\beta}_{n-1}] \in \mathbb{R}^{4n-1}$ και την συνάρτηση

$$F_n(\xi_n) := f_n(\bar{x}_n) + \frac{1}{\delta_n}z_n H_{n-1}(\xi_n). \quad (5.65)$$

Θεωρούμε μια προσέγγιση της μη γραμμικότητας $F_n(\xi_n)$ σε ένα συμπαγές σύνολο $\Omega_n \subset \mathbb{R}^{4n-1}$ από ένα LPA τέτοιο ώστε

$$F_n(\xi_n) := \theta_n^{*T} \Phi_n(\xi_n) + \epsilon_{an}(\xi_n), \quad \forall \xi_n \in \Omega_n \quad (5.66)$$

με $\theta_n^* \in \mathbb{R}^{\ell_n}$ το βέλτιστο βάρος προσέγγισης, $\Phi_n(\xi_n) \in \mathbb{R}^{\ell_n}$ το διάνυσμα παλινδρόμησης και $\epsilon_{an}(\xi_n)$ το σφάλμα εκτίμησης. Το σφάλμα είναι φραγμένο στο Ω_n δηλαδή υπάρχει κάποιο $\epsilon_{Mn} > 0$ τέτοιο ώστε $|\epsilon_{an}(\xi_n)| \leq \epsilon_{Mn}$ για κάθε $\xi_n \in \Omega_n$. Εάν εισάγουμε μια εκτίμηση β_n της νόρμας του βέλτιστου βάρους $\|\theta_n^*\|$ και συναρτήσεις $L_n := (1/2\gamma_n)\beta_n^2$

$$P_n := V_n + L_n + \lambda_n \int_0^t V_n(s) ds \quad (5.67)$$

τότε

$$\begin{aligned} \dot{P}_n \leq [z_n]_{\delta_n} [\theta_n^{*T} \Phi_n(\xi_n) + \epsilon_{an}(\xi_n) + \lambda_n [z_n]_{\delta_n} \\ + g_n(\bar{x}_n)m(t)\alpha_n + g_n(\bar{x}_n)l(t) + \delta(t)] + \frac{1}{\gamma_n}\beta_n\dot{\beta}_n. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Χρησιμοποιώντας στην (5.68) την ανισότητα των Cauchy-Swartz έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{P}_n \leq [z_n]_{\delta_n} [\epsilon_{an}(\xi_n) + \lambda_n [z_n]_{\delta_n} + g_n(\bar{x}_n)m(t)\alpha_n \\ + g_n(\bar{x}_n)l(t) + \delta(t)] + \|\theta_n^*\| \|\Phi_n(\xi_n)\| |[z_n]_{\delta_n}| + \frac{1}{\gamma_n}\beta_n\dot{\beta}_n. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ορίζουμε επίσης τις συναρτήσεις $Q_n := (1/2\gamma_n)(\tilde{\beta}_n^2 - \beta_n^2)$ με $\tilde{\beta}_n = \beta_n - \|\theta_n^*\|$ και

$$\bar{P}_n := P_n + Q_n. \quad (5.70)$$

Εάν επιλέξουμε το ακόλουθο νόμο εκτίμησης

$$\dot{\beta}_n = \gamma_n \|\Phi_n(\xi_n)\| |[z_n]_{\delta_n}| \quad (5.71)$$

τότε

$$B_n = \frac{\|\gamma_n \Phi_n(\xi_n)\|^2 + \|z_n\|^2}{2} \quad (5.72)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{P}_n}{dt} &\leq [z_n]_{\delta_n} [\lambda_n [z_n]_{\delta_n} + (\epsilon_{Mn} + g_n 2l^* + \delta^*) z_n / \delta_n \\ &\quad + g_n(\bar{x}_n) m(t) \alpha_n] + |\beta_n| \|\Phi_n(\xi_n)\| |[z_n]_{\delta_n}|. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Ο τελευταίος όρος στο δεξιό μέλος της παραπάνω ανισότητας μπορεί να φραγεί από διαφορίσιμες συναρτήσεις ως εξής

$$|\beta_n| \|\Phi_n(\xi_n)\| |[z_n]_{\delta_n}| \leq \frac{1}{2\delta_n} (|\beta_n|^2 + \|\Phi_n(\xi_n)\|^2) [z_n]_{\delta_n} z_n \quad (5.74)$$

Επιλέγοντας το νόμο ελέγχου

$$u = \alpha_n = \kappa_n(P_n)(1 + |\beta_n|^2 + \|\Phi_n(\xi_n)\|^2) z_n \quad (5.75)$$

προκύπτει ότι

$$\frac{d\bar{P}_n}{dt} \leq [\eta_n^* + g_n(\bar{x}_n) m(t) \kappa_n(P_n)] \Theta_n(t) \quad (5.76)$$

με

$$\Theta_n(t) := (1 + |\beta_n|^2 + \|\Phi_n(\xi_n)\|^2) z_n [z_n]_{\delta_n} \quad (5.77)$$

$$\eta_n^* := \lambda_n + \frac{1}{2\delta_n} + \frac{\epsilon_{Mn} + g_n 2l^* + \delta^* + y_{Mn}}{\delta_n}. \quad (5.78)$$

Ισχύει επίσης

$$\begin{aligned} Q_n(t_2) - Q_n(t_1) &= \frac{1}{\gamma_n} \|\theta_n^*\| (\beta_n(t_2) - \beta_n(t_1)) \\ &= \frac{1}{\gamma_n} \|\theta_n^*\| \int_{t_1}^{t_2} \dot{\beta}_n(s) ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \|\theta_n^*\| \|\Phi_n(\xi_n)\| |[z_n]_{\delta_n}| ds \\ &\leq \frac{1}{2\delta_n} \int_{t_1}^{t_2} (\|\theta_n^*\| \|\Phi_n(\xi_n)\|) z_n [z_n]_{\delta_n} ds \\ &\leq \frac{\max\{1, \|\theta_n^*\|\}}{2\delta_n} \int_{t_1}^{t_2} \Theta_n(s) ds. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Έτσι οι συνθήκες του λήμματος 1 ισχύουν και συνεπώς οι P_n είναι άνω φραγμένες.

5.3 Ευστάθεια και Ρύθμιση

Με βάση τη σχεδίαση των εικονικών νόμων ελέγχου και του τελικώς εφαρμοζόμενου ελέγχου στο σύστημα, η οποία αναλύθηκε στις προηγούμενες υποενότητες και με βάση τις συνθήκες που τίθενται στο Λήμμα 1 μπορεί πλέον να αποδειχθεί ότι η εφαρμογή του συγκεκριμένου ελέγχου επιλύει το πρόβλημα παρακολούθησης για το σύστημα (4.5) όπως αυτό ορίστηκε στο κεφάλαιο 3.

Θεώρημα 1. Έστω το μη γραμμικό σύστημα υπό μορφή αυστηρής ανάδρασης που περιγράφεται από τις εξισώσεις (4.5) και ικανοποιεί τις υποθέσεις 2 4.1. Αν η είσοδος ελέγχου σχεδιαστεί σύμφωνα με την εξίσωση (5.75) όπου οι εικονικοί έλεγχοι έχουν επιλεχθεί σύμφωνα με τις εξισώσεις (5.55) και $\epsilon_i < 1$ τότε όλα τα σήματα κλειστού βρόχου παραμένουν φραγμένα και $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_d(t)| \leq \delta_1$.

Εξαιτίας των ολοκληρωτικών όρων και των εκτιμήσεων των φραγμάτων των αγνώστων μη γραμμικοτήτων η τάξη του συστήματος κλειστού βρόχου γίνεται $3n$. Ορίζουμε λοιπόν το επαυξημένο διάνυσμα κατάστασης $x_{ag} = [x^T, I^T, \beta^T]^T$ με α_i που δίνονται από τις (5.55) και είναι της μορφής (5.33) και με u που δίνεται από την (5.75). Η δυναμική του συστήματος κλειστού βρόχου μπορεί να γραφεί $\dot{x}_{ag} = f(\bar{x}_{ag})$ με $\bar{f} : R^{3n} \rightarrow R^{3n}$ κάποιο συνεχές διανυσματικό πεδίο. Λεπτομερείς υπολογισμοί μπορούν να εγγραφούν ότι το πεδίο \bar{f} είναι τοπικά Lipschitz ως προς x_{ag} σε κάποια περιοχή του $[x_0^T, 0^T, 0^T]^T$ έτσι σύμφωνα με το θεώρημα 3.1 του [20] υπάρχει μοναδική λύση σε κάποιο χρονικό διάστημα $[0, t_f]$.

Από την ανάλυση στην υποενότητα 4.2 οι ανισότητες (5.3) ισχύουν για τα $P_i (1 \leq i \leq n)$ που ορίζονται στις (5.21) (5.50) (5.70) και τις μη αρνητικές συναρτήσεις $\Theta_i(t)$. Επιλέγοντας επιπλέον $\epsilon_i < 1$ και εφαρμόζοντας το λήμμα 1 προκύπτει ότι τα $P_i, V_i, \int_0^t V_i(s) ds$ είναι φραγμένα στο $[0, t_f] \forall i = 1, \dots, n$. Από τον ορισμό (5.32) τα I_i είναι φραγμένα. Επίσης, από τη σχέση

$$L_i = P_i - V_i - \lambda_i \int_0^t V_i(s) ds + \epsilon_{i+1} \lambda_{i+1} \int_0^t 2V_{i+1}(s) ds \quad (5.80)$$

τα $L_i = \frac{1}{2} \beta_i^2$ είναι φραγμένα στα Ω_i , άρα και τα β_i είναι φραγμένα στα Ω_i . Οπότε και οι εικονικοί έλεγχοι $\alpha_i = A_i(\bar{x}_i, \bar{z}_i, I_{i+1}, \bar{\beta}_i)$ είναι φραγμένοι, διότι σύμφωνα με την (5.55) οι συναρτήσεις A_i είναι συνεχείς και τα σύνολα Ω_i είναι συμπαγή. Συνεπώς και τα $x_i = z_i - a_{i-1}$ είναι φραγμένα. Εξαιτίας του γεγονότος ότι το επαυξημένο διάνυσμα x_{ag} παραμένει φραγμένο ο τελικός χρόνος t_f μπορεί να επεκταθεί στο άπειρο: $t_f = +\infty$ (no finite explosion time).

Έχει αποδειχθεί λοιπόν ότι τα $[z_i]_{\delta_i} \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ και τα $x_i, I_i, \beta_i, \alpha_i, u \in \mathcal{L}_\infty$. Οπότε από την (5.31) έχουμε ότι $\dot{z}_i \in \mathcal{L}_\infty$. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Barbalat προκύπτει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} [z_i(t)]_{\delta_i} = 0$ και τελικά $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_d(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |z_1(t)| \leq \delta_1$.

Πρέπει εδώ να αναφερθεί ότι τα αποτελέσματα αυτά είναι ημικαθολικά (semiglobal) διότι ισχύουν μόνο όσο τα $x_i(t)$ παραμένουν στα φραγμένα σύνολα Ω_i η συμπάγεια των οποίων είναι απαραίτητη και για την απόδειξη. Ωστόσο, τόσο τα Ω_i όσο και οι προς εκτίμηση παράμετροι β_i^* μπορούν να είναι αυθαίρετως μεγάλα. Στην περίπτωση δε που η ανισότητα $|\epsilon_{ai}(\xi_i)| < \epsilon_{Mi}$ ισχύει για όλα τα $\xi_i \in R^{4n-i}$, δηλαδή όταν οι αγνώστες μη γραμμικότητες μπορούν να εκτιμηθούν αρκετά καλά από έναν LPA παντού και ομοιόμορφα, τα αποτελέσματά μας ισχύουν καθολικά (globally).

Chapter 6

Κεφάλαιο 6

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιατούν αναλυτικά δυο προσομοιώσεις συστημάτων στα οποία εφαρμόστηκε η προτεινόμενη μεθοδολογία ελέγχου. Το πρώτο είναι ένα φυσικό σύστημα διασυνδεδεμένων δεξαμενών ενώ το δεύτερο είναι ένα μαθηματικό μοντέλο μη γραμμικού δυναμικού συστήματος. Τέλος, γίνεται σχολιασμός των εξαγόμενων γραφημάτων σε κάθε περίπτωση.

6.1 Μοντέλο διασυνδεδεμένων δεξαμενών

6.1.1 Φυσικά μεγέθη

Καταρχάς, θα ορίσουμε τα σύμβολα των φυσικών μεγεθών που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη μοντελοποίηση:

- h_i : η στάθμη του νερού της i δεξαμενής
- h_{0i} : η αρχική στάθμη του νερού της i δεξαμενής, θεωρούμε $h_{01} = 0$
- ρ : η πυκνότητα του νερού ($\rho=1$)
- g : η επιτάχυνση της βαρύτητας ($g=10$)
- w_{ij} : η ροή εισόδου νερού στην j δεξαμενή
- w_{oj} : η ροή εξόδου νερού από την j δεξαμενή
- p_i : η πίεση του νερού στην i δεξαμενή
- p_{0i} : η αρχική πίεση του νερού στην i δεξαμενή, αφού $h_{01} = 0$ συνεπάγεται $p_{01} = 0$

6.1.2 Τύπος δεξαμενής

Οι δεξαμενές της προσομοίωσης έχουν κυκλική βάση ακτίνας r_0 και παραβολικά τοιχώματα, επομένως το εμβαδόν της επιφάνειας του υγρού δίνεται συναρτήσει του ύψους του από τον τύπο:

$$A(h) = \pi(r_0 + \sqrt{h})^2 \quad (6.1)$$

6.1.3 Φυσικοί Νόμοι

Οι φυσικοί νόμοι που ισχύουν για το σύστημα της μιας δεξαμενής είναι οι εξής

$$\begin{aligned}w_0 &= k\sqrt{\Delta p} \\ \Delta p &= p - p_0 = \rho gh - \rho gh_0 \\ h_0 &= 0 \Rightarrow w_0 = k\sqrt{\rho gh}\end{aligned}\quad (6.2)$$

$$A(h)dh = (w_i - w_o)dt \Rightarrow \dot{h} = \frac{w_i - k\sqrt{\rho gh}}{A(h)} \Rightarrow \dot{h} = f(h) + g(h)w_i \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

όπου

$$f(h) = \frac{-k\sqrt{\rho gh}}{A(h)} \quad (6.5)$$

και

$$g(h) = \frac{1}{A(h)} \quad (6.6)$$

6.1.4 Διασύνδεση και μοντελοποίηση

Αν συνδέσουμε σε σειρά δύο τέτοιες δεξαμενές θα έχουμε: $w_{i2} = w_{o1}$ συνεπώς :

$$\begin{aligned}w_{i2} &= k\sqrt{\Delta p} \\ \Delta p &= p_1 - p_2 = \rho gh_1 - \rho g(h_2 - h_{02}) \\ \Rightarrow w_{i2} &= k\sqrt{\rho gh_1 - \rho g(h_2 - h_{02})}\end{aligned}\quad (6.7)$$

το οποίο απλοποιείται σημαντικά αν η αντλία που τροφοδοτεί τη δεύτερη δεξαμενή βρίσκεται στον αέρα από πάνω της, οπότε $p_2 = 0$ άρα $w_{i2} = k\sqrt{\rho gh_1}$

οπότε το μοντέλο του συστήματος είναι το εξής:

$$\dot{h}_2 = -\frac{k\sqrt{\rho gh_2}}{A(h_2)} + \frac{k\sqrt{\rho gh_1}}{A(h_2)} \quad (6.8)$$

$$\dot{h}_1 = -\frac{k\sqrt{\rho gh_1}}{A(h_1)} + \frac{1}{A(h_2)}u \quad (6.9)$$

$$u = w_{i1} \quad (6.10)$$

εφαρμόζοντας τώρα τον μετασχηματισμό $x_1 = h_2$, $x_2 = \frac{h_1^2}{2}$ το σύστημα 6.8 γράφεται στη μορφή:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1) + g_1(x_1)x_2 \quad (6.11)$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_2) + g_2(x_2)u \quad (6.12)$$

$$\text{where} \quad (6.13)$$

$$f_1(x_1) = -\frac{k\sqrt{\rho g x_1}}{A(x_1)}$$

$$g_1(x_1) = \frac{k\sqrt{\rho g/2}}{A(x_1)}$$

$$f_2(x_2) = -\frac{k\sqrt{2x_2\rho g\sqrt{2x_2}}}{A(\sqrt{2x_2})}$$

$$g_2(x_2) = \frac{\sqrt{2x_2}}{A(\sqrt{2x_2})}$$

$$(6.14)$$

6.1.5 Εξισώσεις ελέγχου

Ο έλεγχος που εφαρμόζουμε στο σύστημα αυτό σχεδιάζεται με βάση την διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4. Η διαδικασία περιλαμβάνει δύο βήματα αφού η τάξη του διασυνδεδεμένου συστήματος είναι 2. Αρχικά σχεδιάζεται ένας νοητός έλεγχος a_1 κι έπειτα ο εφαρμοζόμενος έλεγχος u . Οι παράμετροι του NPI ελεγκτή ρυθμίστηκαν ως ακολούθως:

- $\delta_1 = 0.05$: ακτίνα deadzone της z_1
- $\delta_2 = 0.05$: ακτίνα deadzone της z_2
- $\lambda_1 = 1$: κέρδος του πρώτου ολοκληρωτή
- $\lambda_2 = 1$: κέρδος του δεύτερου ολοκληρωτή
- $\epsilon_2 = 0.5$
- $Rn = [1, 1]$: νόρμες του διανύσματος παλινδρόμησης
- $\gamma = [2, 2]$: κέρδη των εκτιμητών

6.1.6 Αποτελέσματα προσομοίωσης

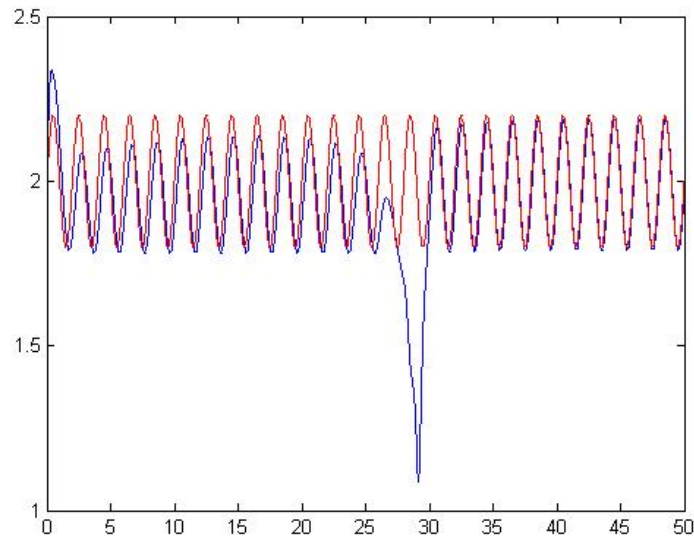


Figure 6.1: Απόκριση συστήματος διασυνδεδεμένων δεξαμενών

6.1.7 Σχολιασμός

Στο γράφημα αυτό παρατηρούμε ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία ελέγχου δουλεύει στο πραγματικό (φυσικό) σύστημα των διασυνδεδεμένων δεξαμενών και επιλύει επιτυχώς το πρόβλημα παρακολούθησης - στην περίπτωσή μας ενός ημιτονοειδούς σήματος - για το σύστημα αυτό αγνοώντας τόσο τη δυναμική του όσο και τις κατευθύνσεις ελέγχου. Ωστόσο, παρατηρούμε μια σχετική καθυστέρηση στην σύγκλιση στην επιθυμητή αναφορά, γεγονός που είναι ένα τίμημα που πληρώνουμε διότι δεν χρησιμοποιούμε υψηλά κέρδη αλλά μικρά κέρδη εξαρτώμενα από το ολοκλήρωμα του σφάλματος, το οποίο αν ξεκινάμε κοντά στο επιθυμητό σημείο είναι αρχικά μικρό. Η συμπεριφορά αυτή μπορεί βεβαίως να βελτιωθεί με προσεκτική ρύθμιση των παραμέτρων του ελεγκτή μετά από πολλές προσομοιώσεις για το εξεταζόμενο κάθε φορά σύστημα.

6.2 Μαθηματικό μοντέλο μη γραμμικού συστήματος

6.2.1 Εξισώσεις Δυναμικής

Θεωρούμε το παρακάτω μαθηματικό μοντέλο ενός δυναμικού συστήματος με μορφή αυστηρής ανάδρασης που ικανοποιεί της υποθέσεις μας

$$\dot{x}_1 = x_1 \cos(x_1) + (1 + \sin(x_1)^2)x_2 \quad (6.15)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 x_2 - (2\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + 0.5)h(u). \quad (6.16)$$

Εξετάζουμε την περίπτωση που ο επενεργητής είναι γραμμικός δηλαδή $h(u) = u$ καθώς επίσης και την περίπτωση που παρουσιάζει μη ομαλές μη γραμμικότητες και συγκεκριμένα μια συμμετρική deadzone, η οποία σύμφωνα με το [27] περιγράφεται από τη συνάρτηση:

$$h(u) = \begin{cases} u - d & \text{αν } u \geq d \\ 0 & \text{αν } u \in [-d, d] \\ u + d & \text{αν } u < -d \end{cases}$$

6.2.2 Εξισώσεις Ελέγχου

Ο έλεγχος που εφαρμόζουμε στο σύστημα αυτό σχεδιάζεται με βάση την διαδικασία που περιγράφηκε στο κεφάλαιο 4. Η διαδικασία περιλαμβάνει δύο βήματα αφού η τάξη του διασυνδεδεμένου συστήματος είναι 2. Αρχικά σχεδιάζεται ένας νοητός έλεγχος a_1 κι έπειτα ο εφαρμοζόμενος έλεγχος u . Οι παράμετροι του NPI ελεγκτή ρυθμίστηκαν ως ακολούθως:

- $\delta_1 = 0.05$: ακτίνα deadzone της z_1
- $\delta_2 = 0.05$: ακτίνα deadzone της z_2
- $\lambda_1 = 1$: κέρδος του πρώτου ολοκληρωτή
- $\lambda_2 = 1$: κέρδος του δεύτερου ολοκληρωτή
- $\epsilon_2 = 0.5$
- $Rn = [1, 1]$: νόρμες του διανύσματος παλινδρόμησης
- $\gamma = [2, 2]$: κέρδη των εκτιμητών

6.2.3 Αποτελέσματα προσομοίωσης

Γραφήματα εξόδου

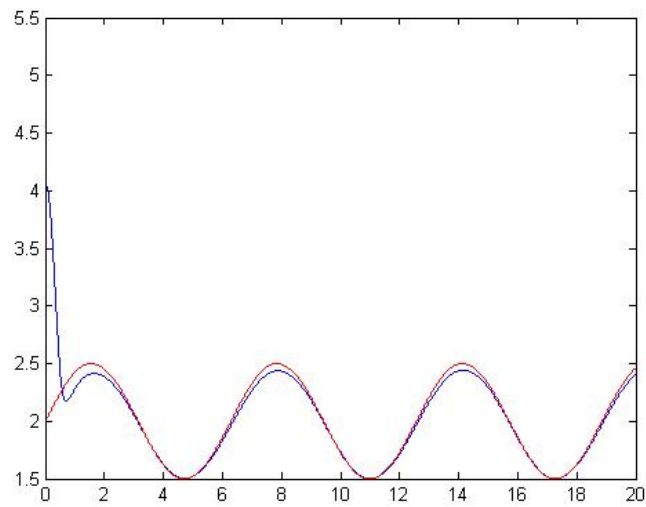


Figure 6.2: Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος για μακρινές αρχικές συνθήκες

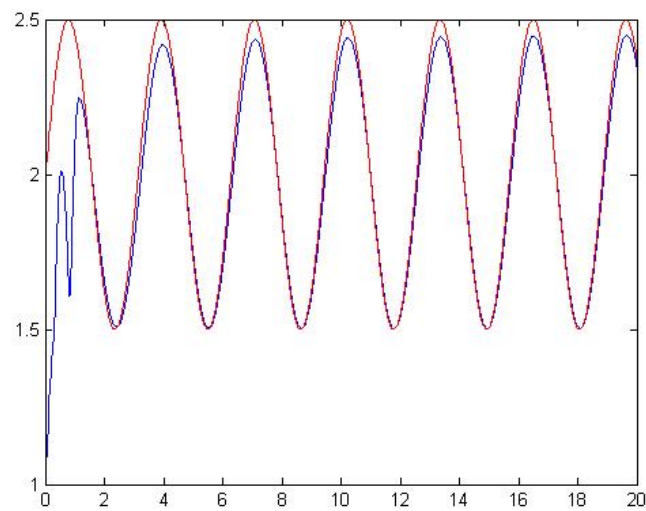


Figure 6.3: Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος για κέρδος με χρήση νόρμας ∞ του διανύσματος παλινδρόμησης

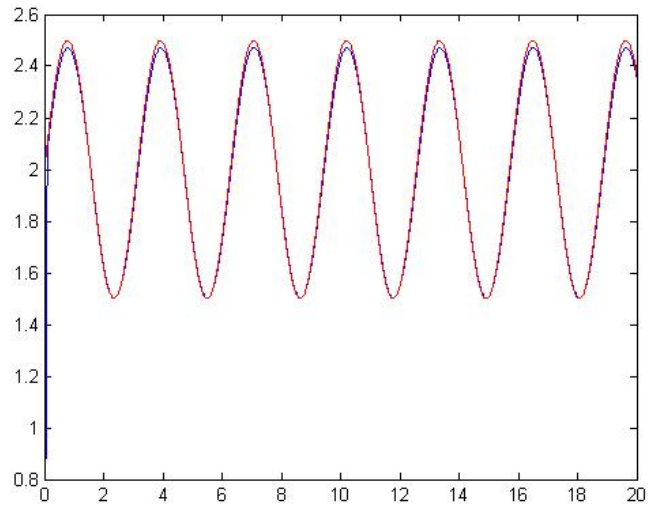


Figure 6.4: Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος για κέρδος με χρήση ευκλείδιας νόρμας του διανύσματος παλινδρόμησης

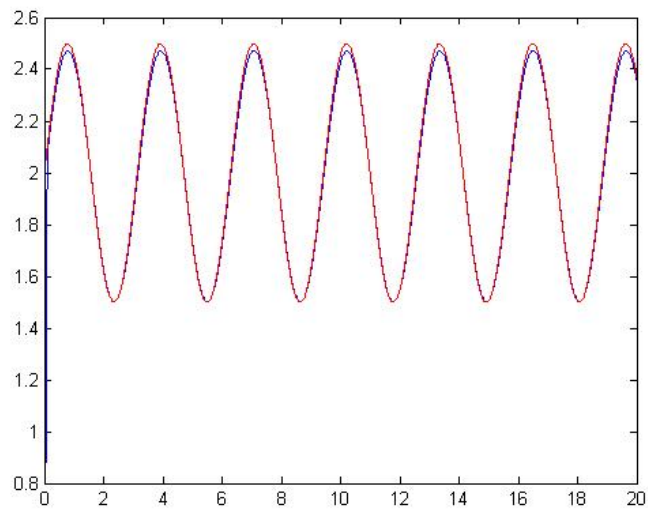


Figure 6.5: Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος με deadzone

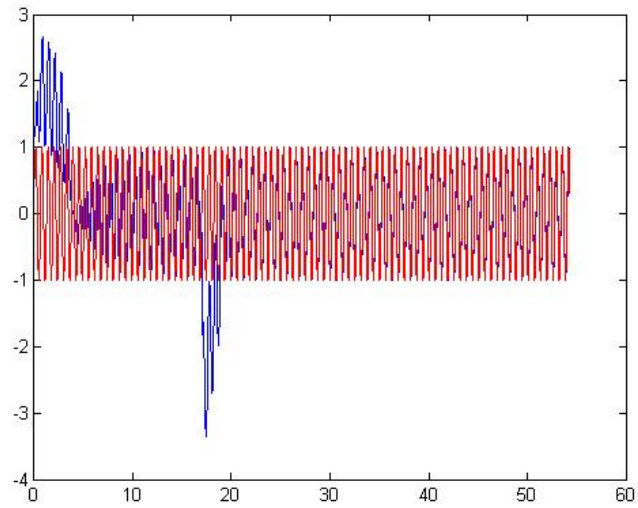


Figure 6.6: Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος με υψίσυχο σήμα αναφοράς

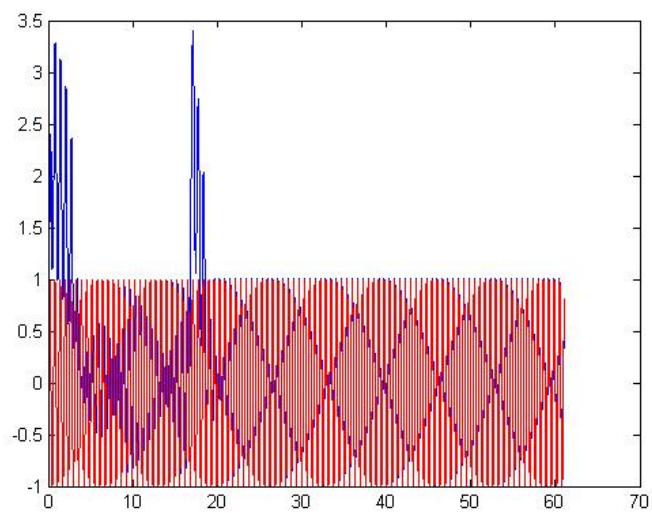


Figure 6.7: Απόκριση του μαθηματικού μοντέλου μη γραμμικού συστήματος με υψίσυχο σήμα αναφοράς και πιο έντονη μη γραμμικότητα x_1^2 αντί για $x_1 \cos(x_1)$

Σχολιασμός

Σε αυτό το μαθηματικό μοντέλο μη γραμμικού συστήματος παρατηρούμε επίσης την επιτυχημένη λειτουργία της προτεινόμενης τεχνικής ελέγχου. Επιλέγοντας επίσης το αρχικό σημείο λίγο μακρύτερα από την επιθυμητή τροχιά παρατηρούμε τη γρήγορη σύγκλισή μας σε αυτήν 6.2. Εδώ αυτό είναι δυνατό διότι το σύστημα είναι τεχνητό, ενώ στο φυσικό σύστημα έχουμε και φυσικούς περιορισμούς, δηλαδή αν επιλέξουμε μακριά το αρχικό σημείο η πρώτη δεξαμενή γρήγορα θα στερέψει και πλέον κανένας έλεγχος δεν θα μπορεί να εφαρμοστεί...

Επίσης, στις δύο επόμενες προσομοιώσεις παρατηρούμε την επίδραση της εκάστοτε χρησιμοποιούμενης νόρμας του διανύσματος παλινρόμησης στην μεταβατική συμπεριφορά του συστήματός μας. Συγκεκριμένα, αν χρησιμοποιήσουμε την νόρμα ∞ , η οποία είναι μόνο το μέγιστο στοιχείο του διανύσματος παλινδρόμησης (δηλαδή το πολύ 1) υλοποιούμε ουσιαστικά ένα ελεγκτή χαμηλού κέρδους, ανεξάρτητου της τάξης του εκτιμητή και συνεπώς πιο αργού. Αντιθέτως, αν χρησιμοποιήσουμε την ευκλείδεια νόρμα, η οποία εξαρτάται από την τάξη του εκτιμητή (είναι το πολύ \sqrt{n}), υλοποιούμε ένα έλεγχο με κέρδος εξαρτώμενο από την τάξη του εκτιμητή, ισοδυνάμως από την ακρίβεια της προσέγγισης, ο οποίος παρουσιάζει καλύτερη μεταβατική συμπεριφορά. Έτσι διαπιστώνουμε ότι παρουσιάζεται το αναμενόμενο trade off μεταξύ χρήσης υψηλού κέρδους και γρήγορης μεταβατικής απόκρισης, στο οποίο πρέπει να αποφανθούμε κατα περίπτωση ανάλογα με τις απαιτήσεις του προβλήματός μας ρυθμίζοντας κατάλληλα τις παραμέτρους (εδώ την χρησιμοποιούμενη νόρμα) του ελεγκτή μας.

Στην περίπτωση που έχουμε μη ομαλές μη γραμμικότητες στον επενεργητή και συγκεκριμένα συμμετρικές deadzones παρατηρούμε ότι η προτεινόμενη μεθοδολογία ελέγχου δουλεύει και μάλιστα αρκετά καλά - δηλαδή σχεδόν όπως όταν δεν υπήρχε η deadzone - η οποία ωστόσο πρέπει να σημειωθεί ότι έχει ληφθεί σχετικά μικρού εύρους ανταποκρινόμενη στα διάφορα φυσικά μοντέλα επενεργητών, για τα οποία μια μεγάλη deadzone παύει να παριστά κατασκευαστικό περιορισμό αλλά εκγράφει μάλλον ακαταλληλότητα του συγκεκριμένου επενεργητή για το συγκεκριμένο σύστημα.

Τέλος, στην περίπτωση που έχουμε υψίσυχνα σήματα αναφοράς παρατηρούμε πως το πρόβλημα παρακολούθησης δυσκολεύει και τα σφάλματα παρακολούθησης παραμένουν μεγαλύτερα της επιβεβλημένης deadzone για μεγαλύτερη χρονική διάρκεια, με αποτέλεσμα να παρατηρούμε δύο εναλλαγές της κατεύθυνσης ελέγχου μέχρι την τελική επιτυχή παρακολούθηση του σήματος αναφοράς και συνεπώς αύξηση της μεταβατικής περιόδου και των ανεπιθύμητων μεταβατικών φαινομένων. Τα ίδια φαινόμενα παρατηρούνται και στην περίπτωση που η άγνωστη μη αντιστοιχίσιμη μη γραμμικότητα είναι πιο έντονη, στην εξεταζόμενη περίπτωση x_1^2 αντί για $x_1 \cos(x_1)$, όπου ο ελεγκτής μας ευσταθιοποιεί το σύστημα (no finite explosion time) ωστόσο με αύξηση της μεταβατικής περιόδου. Αυτή η ανεπιθύμητη αύξηση της μεταβατικής περιόδου και των ανεπιθύμητων φαινομένων που αυτή περιέχει μπορεί να αποφευχθεί με τον κατάλληλο περιορισμό του σφάλματος παρακολούθησης σε κάποια επιθυμητή συμπεριφορά με την χρήση Barrier Lyapunov Functions (BLFs), το οποίο όμως αποτελεί μια πιθανή επέκταση της προτεινόμενης μεθόδου και δεν θα αναλυθεί σε αυτήν την εργασία.

Γραφήματα λοιπών παραμέτρων

Εξετάζεται η περίπτωση που ο επενεργητής έχει deadzone

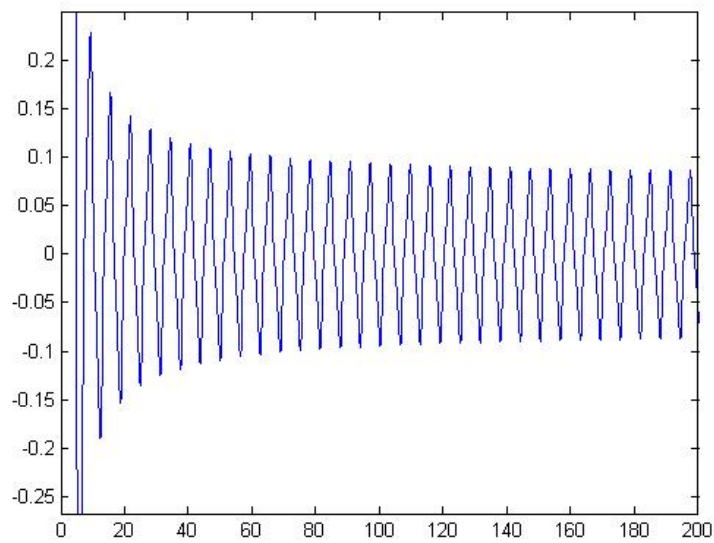


Figure 6.8: Γράφημα του σφάλματος παρακολούθησης

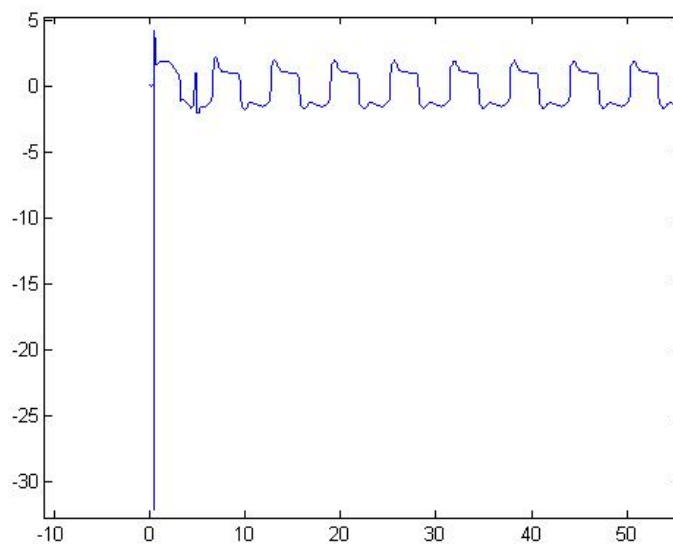


Figure 6.9: Γράφημα του εφαρμοζόμενου ελέγχου στο σύστημα

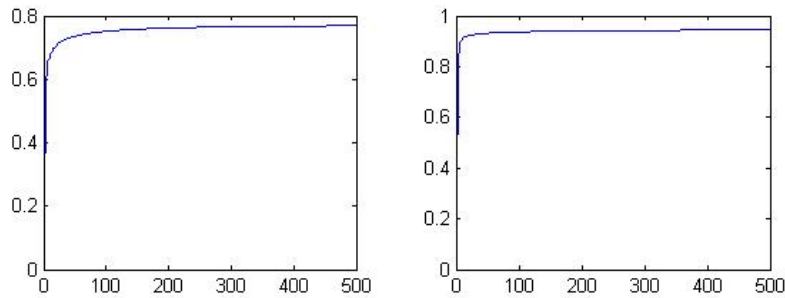


Figure 6.10: Γράφημα των εκτιμήσεων των φραγμάτων των άγνωστων μη γραμμικοτήτων

Σχολιασμός

Από τα παραπάνω γραφήματα συνάγουμε τα εξής:

Καταρχάς, το σφάλμα παρακολούθησης συγκλίνει στο εύρος της επιβεβλημένης από εμάς deadzone και συνεπώς με κατάλληλη ρύθμιση αυτής της παραμέτρου μπορεί να γίνει όσο μικρό επιθυμούμε.

Δεύτερον, ο εφαρμοζόμενος έλεγχος αρχικά καταβάλλει μία σχετικά υψηλή προσπάθεια -όχι όμως απαγορευτικά μεγάλη - μέχρι να βρει τη σωστή κατεύθυνση ελέγχου, και έπειτα είναι ένας χαμηλού κέρδους περιοδικός έλεγχος συγκρίσιμος με τα σήματα εξόδου και αναφοράς.

Τρίτον, τα εκτιμώμενα φράγματα των αγνώστων μη γραμμικοτήτων παραμένουν φραγμένα και μάλιστα σε χαμηλές τιμές, γεγονός που μας δείχνει ότι ο εφαρμοζόμενος έλεγχος επιλύει το πρόβλημα παρακολούθησης σε κάποια περιοχή του χώρου κατάστασης όπου οι άγνωστες μη αντιστοιχίσιμες μη γραμμικότητες είναι αρκετά μικρές με συνέπεια να μην χρειάζεται υψηλά κέρδη για να τις υπερκεράσει - παρατήρηση αρκετά θετική.

Chapter 7

Επίλογος

7.1 Συμπεράσματα

Τα βασικά χαρακτηριστικά της προταθείσας μεθόδου σχεδίασης προσαρμοστικών μη γραμμικών PI ελεγκτών είναι τα εξής:

1. Ευρωστία. Η μέθοδος λύνει το πρόβλημα των αγνώστων κατευθύνσεων ελέγχου, το οποίο επιλύει και η τεχνική ελέγχου με χρήση κερδών Nussbaum, ωστόσο υπερτερεί έναντι αυτής σε ευρωστία σε εξωτερικές διαταραχές (θόρυβος) και σε μη μοντελοποιημένα τμήματα της δυναμικής.
2. Αποφυγή υπερπαραμετροποίησης. Η μέθοδος λύνει το πρόβλημα των μη αντιστοιχίσιμων αβεβαιοτήτων χωρίς περιορισμούς στο μέγεθος της αβεβαιότητας, το οποίο επιλύει και ο προσαρμοστικός έλεγχος, με αποφυγή όμως της υπερπαραμετροποίησης από την οποία υποφέρει αυτός. Αυτό επιτυγχάνεται καθώς αντι να εκτιμηθούν ολόκληρες οι μη γραμμικότητες (πολλή πληροφορία που απαιτεί πολλές παραμέτρους για την εκτίμησή της) εκτιμώνται μόνο τα φράγματα τους τα οποία είναι χρήσιμα για την σχεδίαση ενός σθεναρού νόμου ελέγχου.
3. Δεν χρειάζεται πληροφορία για περιορισμούς στο μέγεθος της αβεβαιότητας των οποίων η γνώση απαιτείται για την σχεδίαση των περισσότερων σθεναρών μεθόδων ελέγχου. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη περάγραφο η προσέγγιση σε πραγματικό χρόνο των φραγμάτων αυτών μας απαλλάσσει από την αναγκαιότητα για a priori γνώση τους
4. Οι εικονικοί έλεγχοι και ο τελικά εφαρμοζόμενος έλεγχος στο σύστημα προκύπτουν από ολοκληρωτικές εξισώσεις, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν ευκολότερα από μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις.

Έτσι τελικά έχει κατασκευαστεί ένας προσαρμοστικός και σθεναρός ελεγκτής που μπορεί να επιλύσει ταυτόχρονα ένα σύνολο προβλημάτων (σταθεροποίηση και παρακολούθηση υπό άγνωστες μη φραγμένες μη γραμμικότητες και άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου) στην κλάση των συστημάτων που έχουν μορφή αυστηρής ανάδρασης.

7.2 Επεκτάσεις

Προτεινόμενες μελλοντικές επεκτάσεις της μεθόδου είναι η γενίκευση στην περίπτωση πολυμεταβλητών συστημάτων καθώς και η μελέτη της περίπτωσης όπου οι άγνωστες κατευθύνσεις ελέγχου δεν είναι σταθερές, δηλαδή τα απόλυτα των συναρτήσεων $|g_i(x, t)|$ δεν είναι κάτω φραγμένα από θετικές σταθερές, αλλά ενδέχεται να μηδενίζονται με αποτέλεσμα οι συναρτήσεις αυτές πιθανώς να αλλάζουν πρόσημο. Ωστόσο, αν ο υπόχωρος που ορίζουν οι εξισώσεις των μηδενισμών αυτών περιέχει το επιθυμητό σημείο (set point) ή διαχωρίζει το αρχικό σημείο από το επιθυμητό σημείο το σύστημα καθίσταται μη ελέγξιμο οπότε το πρόβλημα αυτό είναι μη επιλύσιμο. Στην πολυμεταβλητή περίπτωση αυτή η συνθήκη ισοδυναμεί με την ύπαρξη ιδιομορφιών στον πίνακα που πολλαπλασιάζει την είσοδο.

Bibliography

- [1] Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P., Morse, S., 1991. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36, 1241-1253.
- [2] Du, H. Shao, and Yao, P., 2006. Adaptive neural network control for a class of low-triangular-structured nonlinear systems, *IEEE Trans. Neural Networks*, 17(2), 509-514.
- [3] Krstic, M., Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P., 1995. *Nonlinear and Adaptive Control Design*, John Wiley and Sons.
- [4] Nussbaum, R.D., 1983. Some remarks on a conjecture in parameter adaptive control. *Syst. & Control Lett.*, 3, 243-246.
- [5] Ye, X., Jiang, J., 1998. Adaptive nonlinear design without a priori knowledge of control directions. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 43, 1617-1621.
- [6] Zhang, T.P. and Ge, S.S., 2009. Adaptive neural network tracking control of MIMO nonlinear systems with unknown dead zones and control directions. *IEEE Trans. Neural Networks*, 20(3), 483-497.
- [7] Ye, X., Ding, Z., 2001. Robust tracking control of uncertain nonlinear systems with unknown control directions. *Syst. & Contr. Letters*, 42, 1-10.
- [8] Zhang, Y., Wen, C., Soh, Y., 2000. Adaptive backstepping control design for systems with unknown high-frequency gain. *IEEE Trans. Automat. Control*, 45, 2350-2354.
- [9] Ge, S.S., Hong, F. and Lee, T.H., 2004. Adaptive neural control of nonlinear time-delay systems with unknown virtual control coefficients. *IEEE Trans. Syst., Man Cybern. B*, 34(1), 499-516.
- [10] Psillakis, H.E., 2009. Projection-based adaptive neurocontrol with switching logic deadzone tuning. *IEEE Trans. Neural Networks*, 20 (9), 1520-1527.
- [11] Jiang, P., Chen, M. 2005. Nussbaum Gain Based Iterative Learning Control for a Class of Multi-input Multi-output Nonlinear Systems. *Proceedings of the 44th IEEE CDC, and the ECC 2005, Seville, Spain, December 12-15.*
- [12] Psillakis, H.E., 2012. Improving Transient Performance Of Nussbaum Gain-Based Controllers With Barrier Lyapunov Functions. *Proceedings of the IA STED International Conference Control and Applications (CA 2012), Crete, Greece.*
- [13] Lei, J., Zhao, G., Liang, Wu, H., Wang, S. and Yang, X. . *Research on Bounded Nussbaum Gain Adaptive Method.*

- [14] Ding, Z., 2015. Adaptive consensus output regulation of a class of nonlinear systems with unknown high-frequency gain. *Automatica*, 51, 348-355.
- [15] Georgiou, T.T., Smith, M.C., 1997. Robustness analysis of nonlinear feedback systems: an input-output approach. *IEEE Trans. Automatic Contr.*, 42, 1200-1221.
- [16] Ortega, R. Astolfi, A., Barabanov, N.E., 2002. Nonlinear PI control of uncertain systems: an alternative to parameter adaptation. *Systems & Control Letters*, 47, 259-278.
- [17] Astolfi, A., Karagiannis, D., Ortega, R. 2008. *Nonlinear and Adaptive Control with Applications*. Springer-Verlag.
- [18] Psillakis, H.E., 2014. An extension of the Georgiou-Smith example: Boundedness and attractivity in the presence of unmodelled dynamics via nonlinear PI control. (e-print, [arXiv:1407.7213 \[cs.SY\]](#)).
- [19] Psillakis, H.E., 2014. Robustness of the nonlinear PI control method to ignored actuator dynamics. (e-print, [arXiv:1408.3229 \[cs.SY\]](#)).
- [20] Khalil, H., 2002. *Nonlinear Systems*, 3rd Edition, Prentice Hall.
- [21] Psillakis, H.E., 2010. Further Results on the Use of Nussbaum Gains in adaptive neural network control. *IEEE Trans. Automatic Control.*, 55(12), 2841-2846.
- [22] Seto, D. , Annaswamy, A.M., Baillieal, J. , 1994. Adaptive Control of Nonlinear Systems with a triangular structure. *IEEE Trans. Automatic Control.*, 39 (7), 1411-1428.
- [23] Psillakis, H.E., 2016. Integrator backstepping with the nonlinear PI method: An integral equation approach. *European Journal of Control*, 28, 49-55.
- [24] Psillakis , H.E., 2016. An extension of the Georgiou-Smith example: Boundedness and attractivity in the presence of unmodelled dynamics via nonlinear PI control. *Systems & Control Letters*, 92, 1-4.
- [25] Psillakis, H.E., 2016. Further results on robustness of the nonlinear PI control method: the ignored actuator dynamics case. 24th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED), Athens, Greece, 77-81.
- [26] Witsehausen, H. S., 1968. A Counterexample In Stochastic Optimum Control, *Siam J. Control*, 6(1), Printed in U.S.A.
- [27] Zheng, Y., Wen, C. and Li, Z., 2013. Robust adaptive asymptotic tracking control of uncertain nonlinear systems subject to nonsmooth actuator nonlinearities. *Int. J. Adapt. Control Signal Process.*, 27, 108-121.
- [28] Psillakis, H.E. and Lagos, T., Adaptive nonlinear PI control of uncertain nonlinear systems, (in preparation).
- [29] Martensson, B. and Polderman, J.W., 1993. Correction and simplification to "The order of any stabilizing regulator is sufficient a priori information for adaptive stabilization" . *Systems & Control Letters*, 20, 465-470.
- [30] Pomet, J.-B., 1992. Remarks on sufficient information for adaptive regulation. *Proc. 31st IEEE Conf. Dec. Control*, 1737-1741.

- [31] Ilchmann, A., 1997. Universal adaptive stabilization of nonlinear systems. *Dynamics & Control*, 7, 199-213.
- [32] Gorban, A., Tyukin, I., Steur, E. and Nijmeijer, H., 2013. Lyapunov-like conditions of forward invariance and boundedness for a class of unstable systems. *SIAM J. Control Optim.*, 51, 2306-2334.
- [33] Kosmatopoulos, E.B., Polycarpou, M.M., Christodoulou, M.A. and Ioannou, P.A., 1995. High-order neural network structures for identification of dynamical systems. *IEEE Trans. Neural Networks*, 6, 422-431.
- [34] Sanner, R.M. and Slotine, J.E., 1992. Gaussian networks for direct adaptive control," *IEEE Trans. Neural Networks*. 3, 837-863.

