



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ  
ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΟΥ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Νίκη Π. Κούκη

Επιβλέπων: Χρήστος Ν. Καψάλης

Αθήνα, Ιούνιος 2017





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ  
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

## ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ ΛΟΓΩ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ ΔΙΑΣΤΗΜΟΠΛΟΙΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νίκη Π. Κούκη

Επιβλέπων: Χρήστος Ν. Καψάλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή.

Αθήνα, Ιούνιος 2017

.....  
Χρήστος Καψάλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Παναγιώτης Κωττής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Γεώργιος Φικιώρης  
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Νίκη Κούκη  
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Νίκη Κούκη, 2017  
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

### Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κύριο Χρήστο Καψάλη, Καθηγητή Ε.Μ.Π, και τους υποψήφιους διδάκτορες για τη συμβολή τους στην διεκπεραίωση αυτής της εργασίας.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη και ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διαστημόπλοιου που πρόκειται να κινηθεί σε χαμηλή τροχιά γύρω από τη Γη. Η ανάγκη μοντελοποίησης της μαγνητικής συμπεριφοράς του διαστημοπλοίου προκύπτει εξαιτίας της ύπαρξης πιθανών υποσυστημάτων και εξαρτημάτων του διαστημόπλοιου, που δύναται να εκπέμπουν μαγνητικά πεδία και να επηρεάζουν τις μετρήσεις, καθώς και της παρουσίας του μαγνητικού πεδίου της Γης.

Για το λόγο αυτό και για απλοποίηση της μελέτης του προβλήματος μας, κάνουμε την παραδοχή και μοντελοποιούμε το διαστημόπλοιο ως ένα αγωγίμο κέλυφος σφαιρικού σχήματος. Κατόπιν, μέσω εφαρμογών της θεωρίας και μελέτης προβλημάτων που ταυτίζονται με το δικό μας προσπαθούμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται λόγω της περιστροφής του διαστημοπλοίου.

Στο κεφάλαιο 1, γίνεται μια ιστορική αναδρομή σχετικά με τη γνώση γύρω από τον υπολογισμό του γεωμαγνητικού πεδίου, της επίδρασης αυτού στα διαστημικά οχήματα γενικότεροι σχολιασμοί για το πρόβλημα καθώς επίσης και αναφορά στις οπτικές γωνίες από όπου μπορούμε να το μελετήσουμε.

Στο κεφάλαιο 2, παραθέτονται στοιχεία που αφορούν την ηλεκτρομαγνητική καθαρότητα για την επίτευξη των επιστημονικών στόχων που θέτονται, ενώ σχολιάζονται εκτενώς παραδείγματα που πλαισιώνουν την διαστημική περιστροφή γύρω από τη τροχιά της Γης.

Τέλος, στο κεφάλαιο 3 εφαρμόζοντας μαθηματικές σχέσεις, αντλούμενες από τη φυσική γεωμετρία και διάταξη που μας αφορά, παρατίθεται η υλοποίηση σε matlab για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου του περιστρεφόμενου σκάφους και τα ακόλουθα συμπεράσματα που εξάγονται από αυτήν την μελέτη.

**ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:** μαγνητικό πεδίο, μαγνητικό δίπολο, επίδραση, περιστροφή, σφαίρα, κέλυφος, διαστημικά οχήματα, αγωγός, τροχιά, Γη

## ABSTRACT

The purpose of this diploma thesis is to study and calculate the magnetic field of a spinning spacecraft that is located on a low Earth orbit. The need to measure and model the magnitude of the magnetic behavior that develops due to the existence of possible subsystems and components of the spacecraft as well as the presence of the Earth's magnetic field.

For this reason, and in order to simplify the study of our problem, we make the assumption and model the spacecraft as a hollow conducting sphere. Then, through applications of theory and study of similar identified analysis and calculation of the magnetic field of a spinning spacecraft is carried out.

In Chapter 1, there is a historical overview of the knowledge about the geomagnetic field calculation, its effect on the planes of general annotations on the problem, and reference to the perspectives from which we can study.

Chapter 2 lists electromagnetic cleanliness data to achieve the scientific objectives set forth, and examples regarding the rotation around the Earth's trajectory are extensively discussed and analyzed.

Finally, in Chapter 3, the mathematical relationships based on our physical geometry layout are implemented on the problem of the rotating spacecraft and, important conclusions drawn from this study are illustrated.

**KEY WORDS:** magnetic field, magnetic dipole, effect, rotation, sphere, shell, spacecraft, pipeline, orbit, Earth

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περίληψη.....	6
Abstract.....	7
Πίνακας Περιεχομένων.....	8
Πίνακας Γραφημάτων.....	10
Κεφάλαιο 1.....	11
11.1 Εισαγωγή.....	11
1.1.1 Ιστορική αναδρομή.....	11
1.1.2 Το μαγνητικό πεδίο της Γης.....	12
1.2 Μαγνητική επίδραση σε διαστημικά οχήματα.....	15
1.3 Ανάλυση της απόσβεσης ρεύματος που παρουσιάζεται κατά την περιστροφή σε διαστημικά συντρίμια.....	17
1.4 Σκοπός της ανάλυσης της εργασίας.....	19
1.4.1 Γενικότεροι σχολιασμοί για το πρόβλημα.....	21
Βιβλιογραφία.....	24
Κεφάλαιο 2.....	25
2.1.1 Πρακτική εφαρμογή της μελέτης του ζητήματος που εξετάζουμε.....	25
2.1.2 Ηλεκτρομαγνητική καθαρότητα.....	27
2.1.3 Ενεργητική ακτινοβολία σωματιδίων.....	29
2.2 Παραδείγματα για τη προσέγγιση του προβλήματος μας.....	30
2.2.1 Μαγνητικά διαπερατή σφαίρα σε στατικό μαγνητικό πεδίο.....	30
2.2.2 Απλά παραδείγματα για μαγνητικά πεδία σε κινούμενους αγωγούς.....	32
2.2.3 Η πυκνότητα φορτίου ηλεκτροστατικού όγκου μέσα στους κινούμενους αγωγούς.....	34
2.3 Παραδείγματα.....	35
2.3.1 Ομοιόμορφο πεδίο παράλληλο στον άξονα περιστροφής.....	35
2.3.2 Ομοιόμορφο πεδίο κάθετο στον άξονα περιστροφής.....	40
2.3.3 Άκαμπτο αντικείμενο, χωρίς περιστροφή, $J=0$ , $B_{ind}=0$ .....	42
2.3.4 Περιστρεφόμενη σφαίρα $J=0$ , $B_{ind}=0$ .....	44
2.3.5 Δίσκος Faraday $J \neq 0$ , $u \times B_{ind}=0$ .....	45
2.3.6 Το υγρό μέσα σε μια σφαίρα, $J \neq 0$ , $u \times B_{ind}=0$ .....	46
2.3.7 Συμπεράσματα.....	48
2.4 Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας $R$ με ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο $\sigma$ περιστρέφεται υπό γωνιακή ταχύτητα $\omega$ .....	48
2.5 Μεταλλικός δίσκος ακτίνας $a$ , γωνιακής ταχύτητας $\omega$ περιστρέφεται σε ομοιόμορφο πεδίο $B$ .....	53
Βιβλιογραφία.....	55
Κεφάλαιο 3.....	56
3.1 Προσέγγιση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου περιστρεφόμενου διαστημοπλοίου και συμπεράσματα.....	56
3.1.1 Θεωρητική ανάλυση.....	56
3.1.2 Υλοποίηση με κώδικα σε Matlab.....	59



3.1.3 Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διασημοπλοίου με $B_{ext}$ $\hat{x}$ .....	64
3.1.4 Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διασημοπλοίου με $B_{ext}$ σε δυο συνιστώσες.....	65
3.2 Μαγνητικό πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου και συμπεράσματα.....	67
3.2.1 Θεωρητική ανάλυση.....	67
3.2 Υπολογισμός του πεδίου ενός μαγνητικού διπόλου με γλώσσα matlab.....	69
Βιβλιογραφία.....	74
Παράρτημα.....	75

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1.....	13
Σχήμα 1.2.....	16
Σχήμα 2.1.....	26
Σχήμα 2.2.....	32
Σχήμα 2.3.....	36
Σχήμα 2.4.....	38
Σχήμα 2.5.....	39
Σχήμα 2.6.....	41
Σχήμα 2.7.....	42
Σχήμα 2.8.....	43
Σχήμα 2.9.....	45
Σχήμα 2.10.....	50
Σχήμα 2.11.....	51
Σχήμα 2.12.....	53
Σχήμα 3.1.....	56
Σχήμα 3.2.....	57
Σχήμα 3.3.....	59
Σχήμα 3.4.....	60
Σχήμα 3.5.....	60
Σχήμα 3.6.....	61
Σχήμα 3.7.....	61
Σχήμα 3.8.....	62
Σχήμα 3.9.....	62
Σχήμα 3.10.....	63
Σχήμα 3.11.....	63
Σχήμα 3.12.....	64
Σχήμα 3.13.....	65
Σχήμα 3.14.....	66
Σχήμα 3.15.....	66
Σχήμα 3.16.....	67
Σχήμα 3.17.....	67
Σχήμα 3.18.....	69
Σχήμα 3.19.....	70
Σχήμα 3.20.....	70
Σχήμα 3.21.....	71
Σχήμα 3.22.....	71
Σχήμα 3.23.....	72
Σχήμα 3.24.....	72
Σχήμα 3.25.....	73
Σχήμα 3.26.....	73

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## 1.1 Εισαγωγή

### 1.1.1 Ιστορική αναδρομή

Αφετηρία για την μελέτη και κατανόηση της αλληλεπίδρασης που προκύπτει ανάμεσα σε μια κοίλη αγώγιμη σφαίρα που περιστρέφεται υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου της Γης υπήρξε περίπου 50 χρόνια πριν. Αφορμή αποτέλεσε η εμφάνιση διαστημικών προγραμμάτων των οποίων η μελέτη καθιστούσε απαραίτητη τη γνώση του μαγνητικού πεδίου της Γης με περιστρεφόμενες διατάξεις που μοντελοποιούνταν ως κύλινδροι ή σφαίρες. Συνεπώς η ανάλυση ξεκίνησε στραμμένη στην παρατήρηση ομοιόμορφων μαγνητικών πεδίων με πρωτοπόρο σε αυτά τα βήματα να είναι ο Vinti<sup>1</sup>. Σε αυτήν την έρευνα όπου θεωρήθηκε μια αγώγιμη σφαίρα περιστρεφόμενη σε αργό ρυθμό προέκυψαν σημαντικές και λεπτομερείς παραδοχές. Χαρακτηριστικά ήταν τα αποτελέσματα που συνέβαλαν στην εκτίμηση του γήινου μαγνητικού πεδίου σε διαφορετικά υψόμετρα. Εκτιμήσεις οι οποίες ήρθαν στο φως λόγω της παρατήρησης ότι δημιουργείται ροπή αντίστασης που αναγκάζει την περιστρεφόμενη σφαίρα να γυρίζει σε μικρότερη ταχύτητα.

Όσοσο αρκετές ήταν οι ανακαλύψεις που βρέθηκαν και από άλλους επιστήμονες που θέλησαν να συνεχίσουν την έρευνα με σκελετό τις προγενέστερες προσπάθειες που είχαν γίνει στις αρχές του 19ου αιώνα. Μάλιστα γύρω στο 1824 ο Arago είχε παρατηρήσει την εμφάνιση του μαγνητισμού σε αντικείμενα που βρίσκονται υπό την κατάσταση περιστροφής. Σε λιγότερο από μια δεκαετία αργότερα ο Faraday έδωσε εξήγηση σε αυτό υποστηρίζοντας ότι οι αγωγοί οι οποίοι κινούνται σε μαγνητικό πεδίο δημιουργούν τάση. Η λύση βέβαια για το πρόβλημα με μια κοίλη αγώγιμη σφαίρα που περιστρέφεται υπό την παρουσία πεδίου δόθηκε περίπου πενήντα χρόνια αργότερα το 1880. Τότε ο 23-χρονος Hertz εκμεταλλευόμενος τις εξισώσεις του Maxwell που είχαν διατυπωθεί μια εικοσαετία πριν και περιέγραφαν τη συμπεριφορά των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων καθώς και τις αλληλεπιδράσεις τους με την ύλη κατάφερε να επιλύσει αυτό το ειδικό πρόβλημα με γενικές παραμέτρους. Συγκεκριμένα ασχολήθηκε με μια κοίλη σφαίρα που περιστρεφόταν σε οποιαδήποτε ταχύτητα τοποθετημένη σε μη-ομοιόμορφο, σταθερό μαγνητικό πεδίο.

Αυτή η γενική θεώρηση που προέκυψε από την έρευνα του Hertz είναι βασική και μπορεί να εφαρμοστεί σε έναν τομέα αυξανόμενου ενδιαφέροντος στο χώρο της διαστημικής κοινότητας. Ειδικά μεγάλο είναι το ενδιαφέρον που υπάρχει ώστε κατόπιν της εκτόξευσης ενός διαστημοπλοίου να παρέχεται η δυνατότητα ανεφοδιασμού των καυσίμων του καθώς επίσης και της αποτελεσματικής απομάκρυνσης των συντριμμίων αποφεύγοντας καταστροφικούς τρόπους. Πρόκειται για μια προσέγγιση την οποία καθιστά εξαιρετικά δύσκολη το γεγονός περιστροφής του διαστημικού οχήματος σε σχέση με το εκάστοτε διαστημικό σκάφος εξυπηρέτησης. Ο Bennett ήταν εκείνος που έδωσε περισσότερα στοιχεία στο σχετικό πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψιν την ηλεκτροστατική ως μια μέθοδο που θα

ευνοούσε και θα συντελούσε να αποκλιμακωθεί η ταχύτητα του περιστρεφόμενου διαστημικού αντικείμενου.

Η ηλεκτροστατική είναι μια επιθυμητή μέθοδος εφόσον μπορεί με φυσικό τρόπο να αιχμαλωτίζει αντικείμενα που καταρακυλούν και εγείρει σημαντικά ζητήματα με σχετική κίνηση ανίχνευσης και ελέγχου, αποφυγή συγκρούσεων ενώ σχετίζεται και με την κατανάλωση καυσίμου. Ωστόσο η μείωση του ρυθμού περιστροφής σε λιγότερο από μία μοίρες το δευτερόλεπτο θα διευκόλυνε την έννοια της μηχανικής σύνδεσης. Οι προοπτικές της ηλεκτροστατικής ενεργοποίησης έχουν διερευνηθεί από πολλούς επιστήμονες. Η ηλεκτροστατική αλληλεπίδραση μεταξύ δυο σκαφών στον κενό χώρο προσδιορίζεται με ακρίβεια χρησιμοποιώντας μεθόδους πεπερασμένων στοιχείων. Βέβαια αυτές οι μέθοδοι δεν κρίνονται πλήρως κατάλληλες για τον έλεγχο των διαστημοπλοίων σε πραγματικό χρόνο.

Ο στόχος όμως του συλλογισμού της ηλεκτροστατικής μεθόδου είναι να θεωρήσουμε μια εναλλακτική προσέγγιση χρήσης του μαγνητικού πεδίου σε ένα διαστημόπλοιο σαν τρόπο να κατευθύνουμε την ταχύτητα με την οποία τα διαστημικά αντικείμενα που περιστρέφονται πέφτουν προκειμένου να επιτευχθεί μηχανική σύνδεση.

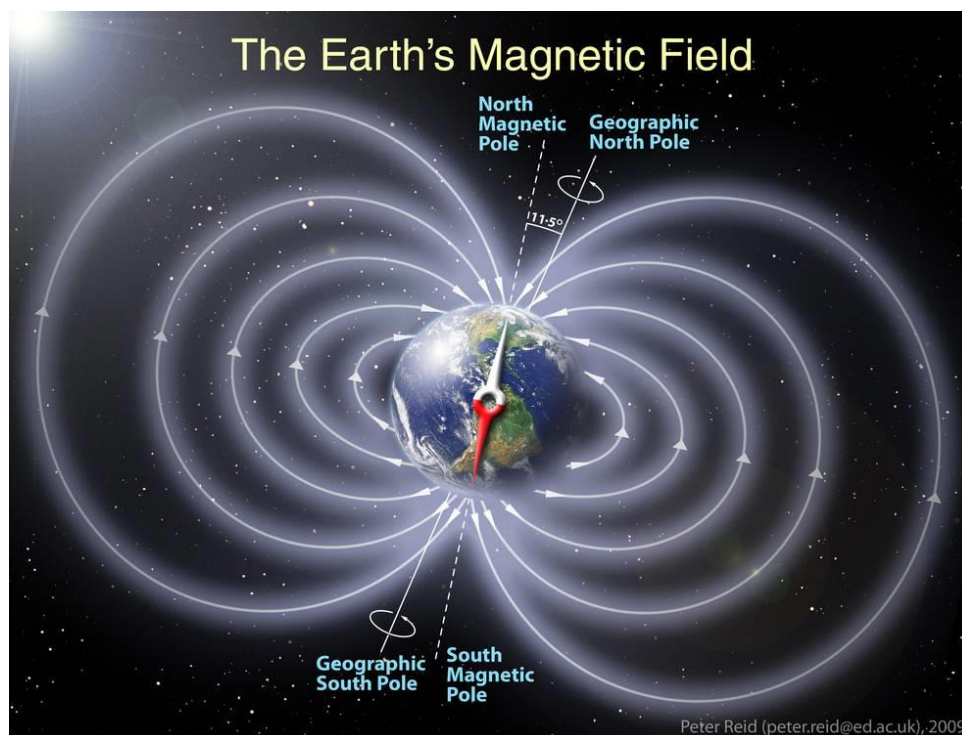
### **1.1.2 Το Μαγνητικό πεδίο της Γης**

Όπως είναι γνωστό η Γη αποτελεί ένα τεράστιο φυσικό μαγνήτη που έχει όλα τα ακόλουθα χαρακτηριστικά. Οι μαγνητικοί πόλοι της Γης, ο Βόρειος και ο Νότιος συνιστούν τα γήινα σημεία στα οποία εμφανίζεται η μεγαλύτερη μαγνητική ένταση καθώς ο Ισημερινός συνιστά την ουδέτερη μαγνητική ζώνη με την ελάχιστη ένταση μαγνητικού πεδίου. Λαμβάνοντας υπόψιν την πρώτη αντίληψη παρουσίας γεωμαγνητικού πεδίου προκύπτει ότι σε οποιοδήποτε σημείο της Γης τοποθετηθεί μια μαγνητική βελόνα, η οποία μπορεί ελεύθερα να περιστρέφεται, τότε αυτή πάντα θα λαμβάνει μια συγκεκριμένη θέση από το νότο προς το βορρά. Οι επιστήμονες κατανοούν ότι το μαγνητικό πεδίο της Γης έχει αναποδογυρίσει την πολικότητα πολλές φορές κατά τη διάρκεια των χιλιετιών. Με άλλα λόγια, αν κάποιος ήταν ζωντανός πριν από περίπου 800.000 χρόνια και αντιμετώπιζοντας αυτό που αποκαλούμε βορρά με μια μαγνητική πυξίδα στο χέρι, η βελόνα θα έδειχνε «νότια». Αυτό συμβαίνει επειδή μια μαγνητική πυξίδα βαθμονομείται με βάση τους πόλους της Γης. Τα σημάδια B-N μιας πυξίδας θα ήταν 180 μοίρες λανθασμένα αν αντιστραφεί η πολικότητα του σημερινού μαγνητικού πεδίου.

Η Γη τα τελευταία 20 εκατομμύρια χρόνια ακολουθεί ένα μοτίβο αντιστροφής πόλου περίπου κάθε 200.000 έως 300.000 χρόνια. Μια αντιστροφή συμβαίνει και διαρκεί για εκατοντάδες ή χιλιάδες χρόνια, ενώ δεν είναι ακριβώς ένα καθαρό γύρισμα προς τα πίσω. Τα μαγνητικά πεδία μεταμορφώνονται, ωθούνται και τραβούν το ένα το άλλο, με πολλαπλούς πόλους να εμφανίζονται σε παράξενα γεωγραφικά πλάτη καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας. Οι πυρήνες ιζημάτων που λαμβάνονται από βαθιά ωκεάνια πατώματα μπορούν να ενημερώσουν τους επιστήμονες σχετικά με τις μετατοπίσεις της μαγνητικής πολικότητας, Το μαγνητικό

πεδίο της Γης καθορίζει τη μαγνητισμό της λάβας, όπως αυτή καθορίζεται στον ωκεάνιο πάτο και στις δύο πλευρές του Μεσανατολικού. Βέβαια, μια αντιστροφή πολικότητας δεν θα επηρέαζε τον άξονα περιστροφής της Γης, καθώς η κλίση του άξονα περιστροφής του πλανήτη έχει σημαντική επίδραση στο κλίμα και στον παγετό.

Έτσι η Γη αποτελεί ένα τεράστιο μαγνητικό δίπολο με τις γήινες μαγνητικές γραμμές να έχουν φορά από το νότιο γεωγραφικό πόλο προς το βόρειο γεωγραφικό πόλο. Μάλιστα πρόκειται για μια ανακάλυψη που έχει τις ρίζες της στην αρχαιότητα ορμώμενη από την ιδιότητα του ορυκτού μαγνητίτη. Ωστόσο το μαγνητικό πεδίο της, καθώς επίσης και των περισσότερων βραχιδών πλανητών και μεγάλων δορυφόρων προέρχεται από την ύπαρξη στερεού σιδερένιου πυρήνα ο οποίος περιβάλεται από πετρώματα σε ρευστή ή ημίρευστη κατάσταση. Η μετακίνηση αυτών των ρευστών υπό την παρουσία διαφοράς θερμοκρασίας σε συνδυασμό με τη περιστροφή της Γης γεννά ένα γήινο δυναμό που καταλήγει στη δημιουργία ηλεκτρικών ρευμάτων μέσα στη Γη. Ακολούθως τα ρεύματα αυτά δημιουργούν το μαγνητικό πεδίο, το οποίο εύκολα διαπερνά τα τοιχώματα και εκτείνεται σε μεγάλη απόσταση γύρω από τη Γη.



Σχήμα 1.1

Σε σχέση με τον άξονα περιστροφής της Γης το μαγνητικό πεδίο της εμφανίζει μεγάλη επιρροή στις κινήσεις του πλάσματος και στα παγιδευμένα φορτισμένα σωματίδια υψηλής ενέργειας, τα οποία οδηγούν στη φόρτιση διαστημικών σκαφών και σε ζημιές στα ηλεκτρονικά. Το μαγνητικό πεδίο καθορίζει τις περιοχές του διαστημικού περιβάλλοντος όπου μπορεί να υπάρξει φόρτιση διαστημικών οχημάτων. Κατέχει επίσης ρόλο στον επιφανειακό μηχανισμό φόρτισης, καθώς

μπορεί να επηρεάσει τη διαφυγή των ηλεκτρονίων (όπως π.χ. φωτοηλεκτρονίων) που εκπέμπονται από την επιφάνεια του διαστημικού οχήματος. Εάν το μαγνητικό πεδίο είναι σχεδόν κάθετο στη διαστημική επιφάνεια του σκάφους, τα ηλεκτρόνια έχουν τη δυνατότητα να διαφύγουν. Από την άλλη πλευρά, αν το μαγνητικό πεδίο εμφανίζεται με κλίση σε σχέση με την επιφάνεια, τα ηλεκτρόνια μπορούν να επαναπροσανατολιστούν στην επιφάνεια (σύμφωνα με το νόμο του Lorentz). Αυτή η πρόληψη διαφυγής του ηλεκτρονίου από την επιφάνεια έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του αρνητικού επιφανειακού φορτίου. Σημειώνεται ότι το πέρασμα ενός διαστημικού σκάφους μέσω του μαγνητικού πεδίου της Γης προκαλεί επίσης δυνατότητες σε όλο το διαστημικό σκάφος, καθώς η κίνηση μέσω ενός μαγνητικού πεδίου δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο. Η κατεύθυνση του επαγόμενου δυναμικού είναι κάθετη προς την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου και το διάνυσμα ταχύτητας του διαστημικού οχήματος.

Ωστόσο, η ύπαρξη μαγνητικού πεδίου είναι αναμφισβήτητη απαραίτητη για την ανάπτυξη ζωής, εφόσον αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό κριτήριο για το εάν ένας πλανήτης κρίνεται κατοικήσιμος ή μη. Μια αξιοποίηση του γεωμαγνητικού πεδίου την εποχή του διαστήματος που διανύουμε, είναι η παραγωγή ρεύματος και η ανέξοδη μεταβολή της τροχιάς των δορυφόρων με το σύστημα του ηλεκτροδυναμικού ή διαστημικού λώρου. Το σύστημα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αρκετούς τρόπους, από το να παράγει ηλεκτρική ενέργεια καθώς «σαρώνει» κάθετα το μαγνητικό πεδίο της Γης με την ίδια αρχή λειτουργίας μιάς γεννήτριας, να αγκιστρώνει και να εκσφενδονίζει σε υψηλότερη τροχιά ελαφρούς δορυφόρους, ή εφόσον ενσωματωθεί εξαρχής σε νέους δορυφόρους να τους «φρενάρει» στο τέλος της ζωής τους για να τους βάλει γρήγορα στην ατμόσφαιρα της Γης ώστε να καούν και να διαλυθούν, πριν αποτελέσουν κίνδυνο για τους εν ενεργεία δορυφόρους και τα διαστημόπλοια.

Η μέτρηση του μαγνητικού ενός πλανήτη και γενικότερα ενός ουράνιου σώματος, χρειάζεται ώστε να οργανωθούν και να γίνουν αντιληπτές οι μετρήσεις των ενεργητικά φορτισμένων σωματιδίων και του πλάσματος και εν συνεχεία και προκύψουν στοιχεία που θα δώσουν νέες πληροφορίες για τον εκάστοτε πλανήτη. Η δύναμη Lorentz ευθύνεται για την κίνηση που εκτελούν τα φορτισμένα σωματίδια σε ένα μαγνητικό πεδίο, έτσι λοιπόν η γνώση της γεωμετρίας του μαγνητικού πεδίου ισοδυναμεί με ένα χάρτη διαδρομών του κέντρου που καθοδηγεί τα σωματίδια. Το ενδιαφέρον για τη μέτρηση του μαγνητικού πεδίου οδήγησε προφανώς σε διαστημικές αποστολές που είχαν ως σκοπό με τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια να οδηγηθούν σε ασφαλή συμπεράσματα

Επομένως, καθίσταται σαφές ότι η γνώση και η μελέτη του γεωμαγνητικού πεδίου κατά την περιστροφή διαστημοπλοίων στην τροχιά της Γης είναι απαραίτητο να μελετηθεί και να υπολογιστεί όσο το δυνατόν με καλύτερη προσέγγιση και ακρίβεια.

## 1.2 Μαγνητική επίδραση σε διαστημικά οχήματα

Είναι γνωστό από το 1824 ότι κάθε αγώγιμο σώμα που περιστρέφεται υπό την παρουσία μαγνητικού πεδίου θα υφίσταται διαρκώς μείωση της περιστροφής του, με την ανάγκη για ακριβή διατύπωση αυτού να προκύπτει το 1955 από σχέδια τεχνητών δορυφόρων.

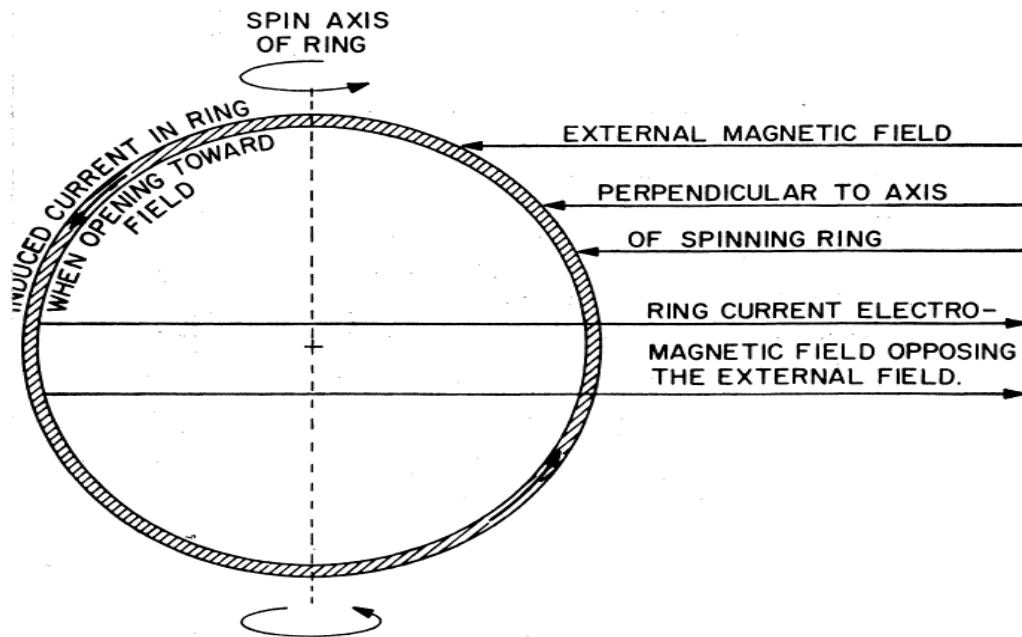
Η απλούστερη θεωρία για τη μαγνητική πέδηση είναι αυτή για ένα κλειστό δακτύλιο που περιστρέφεται από αγώγιμο υλικό γύρω από έναν άξονα στο επίπεδο του και τον οποίο περιβάλλει μαγνητικό πεδίο έχοντας μια αντίθετη κάθετη δύναμη στον άξονα. Ο νόμος του Lenz δηλώνει ότι γύρω από έναν τέτοιο δακτύλιο θα προκαλείται ηλεκτρικό ρεύμα που θα οδεύει σε τέτοια κατεύθυνση ώστε να παράγει μαγνητικό πεδίο πάντα αντίθετο στην πολικότητα του γύρω περιβάλλοντος, καθώς η αλληλεπίδραση των δύο να έχει το ρόλο της πέδησης στην περιστροφή του δακτυλίου. Γύρω στο 1890 ο Hertz, υλοποιώντας τη δική του διατριβή, ήταν ο πρώτος που επέκτεινε αυτή την αρχή προκειμένου να βρει έναν ακριβή τύπο για να αλλάξει την περιστροφή της αγώγιμης σφαίρας υπό μαγνητικό πεδίο.

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε ότι από τότε που εμφανίστηκε ο πρώτος τεχνητός δορυφόρος, πολλοί ερασιτέχνες καθώς και επαγγελματίες αστρονόμοι, έχουν συνεχίσει ενεργά την παρατήρηση των φωτεινότερων δορυφόρων, και οι δύο όσον αφορά τη θέση τους και την αντανάκλαση του ηλιακού φωτός. Αποτελέσματα γραφικών παραστάσεων έχουν δείξει καμπύλες της περιόδου περιστροφής που διαρκώς μεταβάλλεται για κάθε ένα από τα ρεκόρ δορυφόρων. Με άλλα λόγια η περίοδος ελεύθερης περιστροφής δορυφόρων στο μαγνητικό πεδίο της Γης αυξάνεται δυναμικά με το χρόνο, από λιγότερο από ένα δευτερόλεπτο σε σχεδόν ένα λεπτό μετά από δύο χρόνια σε κατάσταση τροχιάς, όσον αφορά μια μέση κατάσταση. Τέτοια εκθετική απόσβεση ενός περιστρεφόμενου αγωγού σε μαγνητικό πεδίο εξαιτίας της διάλυσης που προξενεί η θερμότητα από επαγόμενα δινορεύματα προβλέφθηκε από τον Hertz για την περίπτωση μιας σφαίρας.

Ένας αγώγιμος δακτύλιος ή ένα σωληνοειδές θα έχει ένα ηλεκτρικό ρεύμα που επάγεται σε αυτό με μεταβολές, καθώς περιστρέφεται ο δακτύλιος, περίφρακτος από το μαγνητικό πεδίο. Η απόσβεση που προκύπτει εξαρτάται μόνο από την περιοχή και όχι από το σχήμα του δακτυλίου, ώστε να υπάρχει απλότητα και επάρκεια για τα στερεά της περιστροφής που είναι επιθυμητό να ληφθούν κλειστοί τύποι. Επιπλέον αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε σώμα να περιστρέφεται, όπως ένα σφαιρικό κέλυφος θα μπορούσε να αναλυθεί ως ένας πίνακας από δακτυλίους στον οποίο τα επαγόμενα ηλεκτρικά ρεύματα ρέουν σε επίπεδο παράλληλα και στον άξονα περιστροφής και στο εξωτερικό πεδίο.

Οι πρόσφατοι τεχνητοί δορυφόροι ήταν απλοί συνδυασμοί σφαιρικού και κυλινδρικού σχήματος. Μάλιστα, Vanguard I ονομαζόταν ο πρώτος δορυφόρος που δημιούργησε στο εξωτερικό του κέλυφος ηλιακές κυψέλες που παρήγαγαν ηλιακό ρεύμα από το φως του ήλιου. Οι κυψέλες αυτές συνέχισαν να διατηρούν φορτισμένες τις μπαταρίες αποθήκευσης πάνω στο δορυφόρο ή απευθείας τροφοδοτούσαν τον πομπό αφότου οι μπαταρίες φόρτισης είχαν φθαρεί. Αυτά τα ραδιοσήματα που αυτομάτως και περιστασιακά μεταδίδονταν, κατέστησαν εφικτή τη

ραδιοφωνική παρακολούθηση χάρη στο Vanguard I με ραδιοφωνικά πιάτα στο έδαφος για αρκετά χρόνια. Η ποικίλη πτυχή με την οποία περιστρεφόταν η κεραία εξαιτίας της περιστροφής του δορυφόρου έδωσε τη δυνατότητα να παρατηρηθεί η ταχύτητα περιστροφής,  $\omega$ , η οποία συνεχώς μειωνόταν.



Σχήμα 1.2

Στο Vanguard I αλλά και σε άλλους τεχνητούς δορυφόρους υπάρχουν αγώγιμα σχήματα διαφορετικά από σφαίρες για τα οποία πρέπει ομοίως να υπολογιστεί η περιστροφική πέδηση. Η διεξαγωγή τύπων για τέτοιες σχέσεις, σημειώνεται ότι η ίδια προσέγγιση χρησιμοποιείται και για το σφαιρικό κέλυφος, λαμβάνεται ως ένας πίνακας από αγώγιμους δακτυλίους όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.2 παραπάνω. Εφόσον η μαγνητική ροπή σε ένα περιστρεφόμενο δακτύλιο βασίζεται μόνο στην περιοχή που βρίσκεται και όχι στο σχήμα του, αυτοί οι δακτύλιοι θα μπορούσαν να είναι ελλειπτικοί ή ορθογώνιοι, όπως και στη περίπτωση ενός περιστρεφόμενου κυλίνδρου.



### 1.3 Ανάλυση της απόσβεσης ρεύματος που παρουσιάζεται κατά την περιστροφή σε διαστημικά συντρίμια

Κατά τα ανώτερα στάδια εκτόξευσης σε τροχιά γύρω από τη Γη παρουσιάζεται απόσβεση της δυναμικής περιστροφής σε συντρίμια που έχουν προκύψει. Τέτοια συντρίμια τα οποία μπορεί να αποτελούνται από τμήματα βαρέων εκτοξευτήρων που χαρακτηρίζονται από κυλινδρικό σχήμα και έχουν αρκετά λεπτό τοίχωμα, επηρεάζονται από τις ροπές που γεννιούνται από δινορεύματα, καθώς οι τροχιές των μη σιδηρομαγνητικών σωματικών τους τροχών περνούν μέσα από τη μαγνητόσφαιρα της Γης.

Παρακολουθώντας την σταθερή πορεία που ο αριθμός των συντριμμίων γύρω από τη Γη αυξάνεται από τις πρώτες μέρες εφαρμογής των διαστημικών προγραμμάτων, φαίνεται ότι το 2007 σημειώθηκε ένα κρίσιμο σημείο κατά την τροχιακή έκρηξη ενός κινέζικου δορυφόρου, ακολουθώντας δυο χρόνια αργότερα με την σύγκρουση δορυφόρου με διαστημικό σταθμό. Όπως αναφέρθηκε τα περιστατικά αυτά δημιούργησαν την παρουσία περισσότερων από 4000 συντριμμίων, διαφόρων μεγεθών και σχημάτων. Με τη σειρά τους, μελλοντικές συγκρούσεις όλων των συντριμμίων αναμένεται να δημιουργήσουν έναν αυξανόμενο αριθμό συντριμμίων και να ενισχύσουν σημαντικά τις πιθανότητες εμφάνισης ζημιών δημιουργώντας επιπτώσεις σε δορυφόρους και άλλα διαστημικά οχήματα, ειδικά σε χαμηλές τροχιές. Αυτό το πρόβλημα, όπως ήταν αναμενόμενο, ώθησε ένα πρόσφατο και ισχυρό ενδιαφέρον για την ανάπτυξη τεχνολογιών απορρόφησης των απορριμμάτων, με την ελπίδα να ελαφρυνθεί ο κίνδυνος, αφαιρώντας, τουλάχιστον, το μεγαλύτερο ή τα πιο επικίνδυνα συντρίμια. Έχουν προταθεί διάφορες υποψήφιες λύσεις με τη συντριπτική τους πλειοψηφία να προϋποθέτει τη σύλληψη των συντριμμίων από τον κυνηγό πριν από την απογείωση.

Συγκεκριμένα, δίχτυα, πρόσδεση, ηλιακή ιστιοπλοΐα, ενισχυτές είναι μέσα τα οποία έχουν ληφθεί υπόψιν. Οι περισσότερες από αυτές τις οραματισμένες τεχνολογίες έχουν ως κοινό παρανομαστή την κακή ευρωστία έναντι της δυναμικής περιστροφής των θραυσμάτων που εξετάζονται. Πράγματι, είναι πολύ δύσκολο να συνδεθεί μια συσκευή πρόσδεσης σε ένα περιστρεφόμενο σώμα, και μπορεί να αποδειχθεί αρκετά οδυνηρό να αιχμαλωτιστεί ένα περιστρεφόμενο σκουπίδι με ένα δίχτυ, ειδικά σε κατάσταση επίπεδης περιστροφής.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι τα αποτελέσματα του μαγνητικού πεδίου της Γης μπορούν να φανούν πολύ χρήσιμα εδώ. Σε κάθε στιγμή, το μόνιμο μαγνητικό πεδίο από τη μαγνητόσφαιρα δημιουργεί ρεύμα στο περιστρεφόμενο, αγώγιμο σώμα. Αυτά τα ρεύματα που δημιουργούνται από την επαγωγή παράγουν, με τη σειρά τους, μια ροπή σε αντίθεση με την περιστροφή του σώματος. Στη συνέχεια, μπορεί κανείς να περιμένει την αρχική περιστροφή για να βρεθεί ο χρόνος, και τελικά, σταθεροποιείται ασυμπτωτικά στο μηδέν. Ο σκοπός, λοιπόν, είναι μια μέθοδος για την καθιέρωση της δυναμικής απόσβεσης των συντριμμίων σε περιστροφή κατά μήκος ενός από τους άξονές της σε τροχιά γύρω από τη Γη. Η γεωμετρία μπορεί να είναι σχετικά γενική, αλλά η περίπτωση που απασχολεί έντονα μεγάλο μέρος είναι για ένα κυλινδρικό σώμα λεπτού τοιχώματος περικλειόμενο στα άκρα από λεπτών τοιχωμάτων ημισφαίρια.

Έχουν καθοριστεί νέοι κανόνες και κανονισμοί για να περιορίσουν τη διάρκεια ζωής των αντικειμένων στο διάστημα, καθώς τα παλαιότερα συντρίμια που βρίσκονται σε σταθερή τροχιά θα παραμείνουν και τελικά θα παράγουν περισσότερα θραύσματα από τις συγκρούσεις. Προσομοιώσεις έχουν δείξει ότι η κατάσταση δεν μπορεί να βελτιωθεί εκτός αν κάποια από τα συντρίμια απομακρύνονται πραγματικά. Η μείωση του αριθμού των αντικειμένων αποτελεί πλέον απαραίτητη προϋπόθεση για την εξασφάλιση της βιωσιμότητας του σεδιαστημικές δραστηριότητες. Η πιο μολυσμένη περιοχή είναι η χαμηλή τροχιά της Γης. Η αφαίρεση πρέπει να ξεκινά με τεράστια αντικείμενα που έχουν τις μεγαλύτερες πιθανότητες σύγκρουσης, συνήθως με στάδια οχημάτων ή δορυφόρους που είναι εκτός σειράς. Η γεωμετρία αυτών των αντικειμένων είναι γνωστή και προσφέρει μια σταθερή διασύνδεση η οποία είναι συμφέρουσα αν ληφθεί υπόψη η αλίευση. Αφ'ετέρου η στάση δεν είναι γνωστή και οι τρέχουσες τεχνολογίες δεν επιτρέπουν την αλίευση αντικειμένων που περιστρέφονται ταχύτερα από λίγους βαθμούς το δευτερόλεπτο. Το ανώτερο στάδιο του εκκινήτη συνήθως παθητικοποιείται στο τέλος της ζωής του, προκειμένου να μειωθεί ο προκειμένου να μειωθεί ο κίνδυνος της έκρηξης λόγω υπερπίεσης στις δεξαμενές καυσίμων, αλλά ο εξαερισμός αυτός προσδίδει στο στάδιο μια γωνιακή κίνηση που μπορεί να φτάσει μερικές δεκάδες βαθμούς ανά δευτερόλεπτο.

Τέτοιες υψηλές τιμές θα εμπόδιζαν πιθανώς τη σύλληψη της σκηνής βασισμένη στις τρέχουσες τεχνολογίες. Αρκετές από τις πιο ελπιδοφόρες λύσεις της βασικής γραμμής είναι η σύλληψη των συντριμμίων με ρομποτικό βραχίονα προτού εξοπλιστεί με τη μέθοδο της απορρόφησης όπως ένας ηλεκτροδυναμικός μάντας. Άλλες πιθανές λύσεις χρησιμοποιούν κατάλληλο τρόπο για να ωθήσουν ή να τραβήξουν τα συντρίμια στην ατμόσφαιρα της Γης χωρίς χρήση ενός ρομποτικού βραχίονα, αλλά παρ'όλα αυτά με τον προηγούμενο έλεγχο της δυναμικής των συντριμμίων. Τέλος, μπορεί κανείς να σημειώσει ότι ακόμα και χωρίς επαφή λύσεις όπως η χρήση της δέσμης λέιζερ για την "ώθηση" ή την "καταστροφή" του αντικειμένου μπορεί να διαταράσσεται έντονα από υψηλή περιστροφή της ταχύτητα των συντριμμίων. Για τη συντριπτική πλειοψηφία των δυνατών λύσεων, οι υψηλές γωνιακές ταχύτητες αντιπροσωπεύουν ένα περιοριστικό παράγοντα που ενδεχομένως σκοτώνει τις πιο ελπιδοφόρες έννοιες.

Το επόμενο βήμα στη μελέτη της υπολειμματικής κίνησης των παλαιών συντριμμίων στην τροχιά είναι φυσικά η παρατήρηση, προκειμένου να επικυρωθούν τα αποτελέσματα που προκύψουν μελετώντας το πρόβλημα με τις εξισώσεις του Maxwell καταλήγοντας σε μαθηματικές σχέσεις. Βεβαιώνεται ότι μπορεί κανείς να αναμένει πως οι στόχοι για την αφαίρεση των ενεργών συντριμμίων θα είναι σχετικά σταθερή, επομένως εύκολα πραγματοποιήσιμη. Τέτοιες παρατηρήσεις μπορούν να γίνουν επί τόπου, με τροχιακά στοιχεία που πλησιάζουν τον στόχο. Παρατηρήσεις με οπτικές μεθόδους ή ραντάρ σε 3 περιστροφικούς βαθμούς ελευθερίας, μπορεί να οδηγηθεί από το έδαφος. Δεδομένου ότι επί του παρόντος δεν υπάρχει διαθέσιμο τροχιακό σύστημα ικανό να παρακολουθεί την κίνηση των δορυφόρων, ή τουλάχιστον δεδομένου ότι τα αποτελέσματα αυτά δεν είναι

διαθέσιμα στο κοινό, η μόνη δυνατότητα που προσφέρεται σήμερα είναι από το έδαφος.

Πολλά ραντάρ είναι εκείνα που θεωρούνται υπεύθυνα για την παρατήρηση των συντριμμιών. Ένα από τα πιο αποτελεσματικά είναι το TIRA από το FGAN, στη Γερμανία. Είναι σε θέση να παρέχει κινηματική των μεγάλων αντικειμένων με ακρίβεια στο εύρος των 0,1°/δευτερόλεπτο προς όλες τις κατευθύνσεις, Ωστόσο αρκετά είναι τα δίκτυα ερασιτεχνών αστρονόμων που δημοσιεύουν τις παρατηρήσεις τους στο διαδίκτυο. Οι παρεχόμενες πληροφορίες παρέχουν λεπτομέρειες σχετικά με τις συνθήκες παρατήρησης και τις ημερομηνίες, καθώς παρέχουν επίσης ποιοτικές πληροφορίες σχετικά με την κίνηση του αντικειμένου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η συντριπτική πλειοψηφία των συντριμμιών σημειώνεται ως σταθερή ή σχεδόν σταθερή. Δυστυχώς, αυτές οι παρατηρήσεις δεν ποσοτικοποιούνται πραγματικά και δίνουν ποιοτικά αποτελέσματα. Επιπλέον, οι περισσότερες από τις παρατηρήσεις είναι σχετικά παλιές, μάλιστα τα περισσότερα αφορούν όσα έγιναν λίγο μετά την εκτόξευση και θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να τα ανανεωθούν. Ωστόσο, φαίνεται προφανές ότι μαρτυρούν μια σαφή απόσβεση της περιστροφικής κίνησης των συντριμμιών και τείνουν να επικυρώσουν την "Παραδοχή μαγνητικής απόσβεσης".

#### 1.4 Σκοπός της ανάλυσης της εργασίας

Η ανάλυση που τελικά θα πραγματοποιήσουμε μέσα από την μελέτη αρκετών παραδειγμάτων που προσομοιώνουν τη κίνηση ενός διαστημόπλοιου στη τροχιά της Γης με μια κοίλη αγώγιμη σφαίρα, έχει ως στόχο αρχικά να καθορίσουμε τη δυνατότητα εφαρμογής μείωσης της περιστροφικής ταχύτητας ενός διαστημικού αντικειμένου χρησιμοποιώντας την αλληλεπίδραση με ένα σταθερό, μη-ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο. Κατόπιν, σκοπός είναι κατανοώντας την φυσική που διέπει το πρόβλημα να πραγματοποιηθούν δοκιμές που θα επαληθεύσουν την θεωρία που μόλις διατυπώθηκε.

Επί του παρόντος, ο φυσικός χειρισμός ενός διαστημοπλοίου αποτελεί επικίνδυνη πρόταση όταν αυτό δεν είναι πρόθυμο να συνεργαστεί. Ευτυχώς, στη μεγαλύτερη πλειονότητα τα ανθρώπινα κατασκευάσματα στο διάστημα καθώς επίσης και ένας μεγάλος αριθμός αστεροειδών έχουν αγώγιμες επιφάνειες που προσφέρουν την ευκαιρία για ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση που μειώνει τον κίνδυνο. Ειδικά, ένα μαγνητικό πεδίο με ένα ταλαντούμενο στοιχείο από ένα διαστημόπλοιο μπορεί να επάγει δινορεύματα σε αυτά τα αγώγιμα αντικείμενα. Αν και ο ενεργός έλεγχος των δινορευμάτων έχει χρησιμοποιηθεί για επιβράδυνση της κίνησης και πέδηση, τα δινορεύματα δεν τα έχουν εκμεταλλευθεί ως ένα σύστημα ελεγχόμενης ενεργοποίησης ούτε έχουν επιπλέον ληφθή υπόψιν για χρήση σε διαστημικά συστήματα.

Καθώς, λοιπόν, η διαστημική εξερεύνηση διαρκώς λαμβάνει όλο και μεγαλύτερο ενδιαφέρον, τα διαστημόπλοια θα χρειαστεί να ολοκληρώσουν περισσότερα ζητήματα που απαιτούν φυσικούς χειρισμούς. Γίνεται σαφές ότι η στενή αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται μεταξύ ενός διαστημοπλοίου και ενός άλλου αντικειμένου, είτε αυτό είναι διαστημόπλοιο, αστεροειδής ή κομμάτι από συντρίμια θα πρέπει να μελετηθεί εφόσον θα είναι πάντα εκ φύσεως επικίνδυνο. Αν ο στόχος της αλληλεπίδρασης δεν είχε σχεδιαστεί με ηλεκτρομαγνητική ζεύξη, το διαστημόπλοιο θα έπρεπε να ασκούσε δύναμη μέσω άμεσης μηχανικής επαφής, δημιουργώντας κατά αυτό τον τρόπο και αυξάνοντας τον κίνδυνο για το ίδιο. Πρόσφατες μέθοδοι που έχουν υιοθετηθεί και αφορούν στην ακριβή τοποθέτηση μακροσκοπικών αντικειμένων απαιτούν την άμεση φυσική επαφή διαμέσω των συνδέσεων και των καλωδίων.

Λαμβάνοντας υπόψιν αυτά και θεωρώντας την παραδοχή χρήσης της σφαίρας ως παρόμοια ανάπτυξη με πρόσφατα διαστημικά προβλήματα, έχουμε στη διάθεση μας για την επίλυση ένα λεπτό τοίχωμα σφαιρικού κελύφους. Η επιλογή αυτή είναι απόλυτα αποδεκτή, μαθηματικά και φυσικά, αν αναλογιστούμε ότι τα περισσότερα αντικείμενα στο χώρο του διαστήματος έχουν ως εξωτερικό περίβλημα ένα λεπτό αγώγιμο κέλυφος, προκειμένου να προκύψει μια αναλυτική λύση που θα έχει παιδαγωγική αξία. Η ιδιότητα διατήρησης της στροφορμής και η αποκλιμάκωση της περιστροφής του διαστημικού αντικειμένου θα αναγκάσει το διαστημικό σκάφος εξυπηρέτησης να αποκτήσει αντίθετη κίνηση. Όμως θεωρούμε ότι αυτό μπορεί να αποφευχθεί και να ανασταλλεί εφόσον υπάρχουν προωθητήρες, διασφαλίζοντας ταυτόχρονα ένα σταθερό προσανατολισμό μεταξύ του αεροσκάφους και του σκάφους εξυπηρέτησης καθ' όλη τη διάρκεια της αποδυνάμωσης της περιστροφής.

Η παρουσία προωθητήρων μάλιστα μπορεί επιτυχώς να καταλάβει το ρόλο ελέγχου του εκάστοτε διαστημικού σκάφους σε συνδυασμό με τη δυνατότητα να αναστέλλει την επίδραση του παραγόμενου μαγνητικού πεδίου ως προς τα άλλα τμήματα του σκάφους. Επιπλέον συμβάλλει στη σταθεροποίηση της θέσης, έχει την ικανότητα εκτροπής από την τροχιά και πραγματοποίησης εξόδου, ενώ χωρίς πολλές δαπάνες και κόπο παρέχεται η ευκαιρία διπλασιασμού του χρόνου των διαστημικών αποστολών.

Σημαντικός παράγοντας όμως αποτελεί ο χρόνος που απαιτείται όταν υπάρχει αλληλεπίδραση του μαγνητικού πεδίου της Γης και με το διαστημικό σκάφος μέχρις ότου να συμβεί η αποκλιμάκωση της ταχύτητας του περιστρεφόμενου σκάφους. Επιπλέον άλλοι συντελεστές όπως η ακτινοβολούμενη πίεση μπορούν να διαφοροποιήσουν την κατάσταση και να δημιουργήσουν μια επιταχυνόμενη ροπή. Γεγονός το οποίο δικαιολογεί ότι τα περισσότερα διαστημικά οχήματα περιστρέφονται με αργούς ρυθμούς, χαρακτηριζόμενα από λίγες στροφές το λεπτό. Ωστόσο η ταχύτητα αυτή θεωρείται αρκετά γρήγορη ώστε να επιτρέψει την φόρτωση, αποτελώντας βέβαια μια σημαντική απλοποίηση στην ανάλυση. Όπως είναι διαισθητικά αναμενόμενο μια ταχιάως περιστρεφόμενη σφαίρα σχεδόν σίγουρα θα προκαλέσει την εμφάνιση δινορευμάτων στη σφαίρα. Κατά συνέπεια, η δημιουργία αυτών θα προκαλέσει μεταβολές στο μαγνητικό πεδίο καταλήγωντας σε μια ατέρμονη διαδικασία ανατροφοδότησης. Η ανάλυση του Hertz προσεγγίζει

επιτυχώς την ανάλυση με αυτό το τρόπο , εκφράζοντας κάθε πτυχή και οδηγείται τελικά σε αποτελέσματα. Βασισμένοι, λοιπόν, στους πρόσφατους αναλυτές των διαστημικών προγραμμάτων , μπορούμε εξαιτίας της αργής περιστροφικής ταχύτητας των διαστημικών οχημάτων να αγνοήσουμε την διαδικασία ανατροφοδότησης. Με γνώμονα αυτή τη παρατήρηση, θα πιστοποιήσουμε κατά την ανάλυση μας ότι το μέγεθος του προκαλούμενου από τη σφαίρα μαγνητικού πεδίου είναι σχετικά αμελητέο συγκρινόμενο πάντα με το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο.

#### 1.4.1 Γενικότεροι σχολιασμοί για το πρόβλημα

Ένα εμπειρικό ιστορικό παράδειγμα της εξέλιξης της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας είναι αρκετά ικανό να μας δώσει σαφή εικόνα για την ανάγκη μελέτης της αλληλεπίδρασης που αναπτύσσεται μεταξύ των κινούμενων αγωγών σε μαγνητικό πεδίο. Οι άνθρωποι γνώριζαν από καιρό ότι υπήρχαν μαγνητικά πεδία, αλλά η μόνη γνωστή πηγή αυτών των πεδίων ήταν οι μόνιμοι μαγνήτες και δεν έγινε σύνδεση με τον ηλεκτρισμό. Στις αρχές του 1800, ο Hans Christian Oersted άρχισε να κάνει τη σύνδεση μεταξύ ηλεκτρισμού και μαγνητισμού. Ο Oersted έκανε το μεγαλύτερο μέρος της δουλειάς του χρησιμοποιώντας βελόνες πυξίδας, αλλά εμείς θα αντλήσουμε την ύπαρξη μαγνητικών πεδίων και τη σχέση τους με την ηλεκτρική ενέργεια, χρησιμοποιώντας πιο συνηθισμένα συστήματα ρεύματος που μεταφέρουν καλώδια.

Εξετάζοντας δύο συρματόσχοινα τα οποία μεταφέρουν ρεύμα παράλληλα μεταξύ τους. Ένα ρεύμα είναι απλά μια συλλογή κινούμενων φορτίων. Η παραδοσιακή ηλεκτρική θεωρία προβλέπει ότι, εφόσον το καθαρό φορτίο σε κάθε σύρμα είναι μηδέν, δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο συρμάτων. Ωστόσο, τα πειράματα στη δεκαετία του 1800 έδειξαν ένα εκπληκτικό αποτέλεσμα: τα σύρματα ήταν πραγματικά ελκυστικά το ένα στο άλλο! Το πείραμα επαναλήφθηκε, με τα ρεύματα να κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις, με αποτέλεσμα τα καλώδια να απωθούνται αμοιβαία. Παράλληλα καλώδια που μεταφέρουν ρεύμα, τόσο σε παράλληλες όσο και σε αντιπαράλληλες κατευθύνσεις. Σε κάθε περίπτωση μια ελκτική ή απωθητική δύναμη γίνεται αισθητή από κάθε σύρμα. Το πείραμα αυτό έδειξε ότι υπήρχε κάποια σχέση μεταξύ μαγνητισμού και ηλεκτρισμού, αλλά έπρεπε να γίνουν κάποιες άλλες διακρίσεις για να δημιουργηθεί ένας συνεπής ορισμός. Πρώτον, εάν ένα μεταλλικό φύλλο (ένας αγωγός) τοποθετηθεί μεταξύ των δύο συρμάτων, δεν είχε καμία επίδραση στο φαινόμενο. Δεδομένου ότι οι αγωγοί προστατεύουν τις ηλεκτρικές δυνάμεις, σαφώς αυτό το φαινόμενο δεν ήταν το αποτέλεσμα κάποιας άγνωστης ηλεκτρικής αλληλεπίδρασης. Δεύτερον, εάν ένα στατικό φορτίο (δηλ. ένα φορτισμένο σωματίδιο που δεν κινείται) αντικαθιστά ένα από τα σύρματα, το ίδιο το φορτίο δεν θα αισθανόταν δυνάμεις.

Από αυτές τις εμπειρικές παρατηρήσεις μπορούμε να αναπτύξουμε μια ποιοτική κατανόηση των μαγνητικών δυνάμεων και πεδίων. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι το παρατηρούμενο φαινόμενο είναι στην πραγματικότητα το αποτέλεσμα ενός μαγνητικού πεδίου. Από πού προέρχεται το πεδίο; Λοιπόν, δεδομένου ότι τα μόνα αντικείμενα στο πείραμα είναι καλώδια, μπορούμε να κάνουμε την ακόλουθη δήλωση που συνδέει ηλεκτρισμό και μαγνητισμό: τα μαγνητικά πεδία προκαλούνται από τη μετακίνηση φορτίων.

Από περαιτέρω πειράματα, ο επιστήμονας διαπίστωσε ότι κάθε φορτισμένο σωματίδιο με ταχύτητα προκαλεί μαγνητικό πεδίο. Το δεύτερο ερώτημα που πρέπει να τεθεί σχετικά με τα μαγνητικά πεδία είναι με ποια αντικείμενα ενεργούν; Η παρατήρηση ότι δεν επηρεάζεται ένα φορτίο χωρίς μετακίνηση μας οδηγεί στη δεύτερη δήλωση σχετικά με τα μαγνητικά πεδία: τα μαγνητικά πεδία επηρεάζουν μόνο τα κινούμενα φορτία

Οι αγωγοί που κινούνται σε μαγνητικά πεδία είναι παντού. Για παράδειγμα, το ηλιακό πλάσμα εκπέμπει στο δικό του μαγνητικό πεδίο. Ορισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματα, όπως είναι οι ηλιακές κηλίδες, είναι δυναμογεννήτριες που παράγουν μαγνητικά πεδία (Lorrain 1995, Lorrain και Koutchmy 1993, 1996, 1998), ενώ σε άλλες περιοχές το ηλιακό πλάσμα μετατρέπεται σε μαγνητικά πεδία που παράγονται αλλού. Μάλιστα η θεωρία του δυναμó περιγράφει τη διαδικασία μέσω της οποίας ένα περιστρεφόμενο, κυλιόμενο και ηλεκτρικά αγώγιμο υγρό μπορεί να διατηρεί ένα μαγνητικό πεδίο πάνω από αστρονομικές χρονολογικές κλίμακες. Όσον αφορά το υγρό εξωτερικό κέλυφος του πυρήνα της γης παρομοίως κυριαρχεί στο δικό του μαγνητικό πεδίο (Lorrain 1993).

Υπάρχει μια άφθονη βιβλιογραφία για την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαγνητικών πεδίων και τους κινούμενους αγωγούς. Αλλά μόνο ο Lundquist (1952) έχει υπολογίσει την παραμόρφωση των γραμμών μαγνητικού πεδίου από τους κινούμενους αγωγούς σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Βρήκε ότι το καθαρό μαγνητικό πεδίο είναι στατικό. Ο Shercliff (1965) δίνει ένα παράδειγμα μαγνητικού πεδίου που δεν επηρεάζεται από κινούμενο αγωγό και ο κινούμενος αγωγός μετατοπίζει τις γραμμές του κινούμενου μαγνητικού πεδίου.

Η αλληλεπίδραση που αναπτύσσεται μεταξύ ενός σταθερού μαγνητικού πεδίου με ένα κινούμενο εκτεταμένο αγωγό είναι ένας σημαντικός τομέας σπουδών με εφαρμογές τόσο σε γραμμικούς ηλεκτροκινητήρες επαγωγής, πέδησης δινορευμάτων και μετεώρισης. Ωστόσο, το θέμα αυτό αντιμετωπίζεται ανεπαρκώς στα πιο σύγχρονα εγχειρίδια που αφορούν τον ηλεκτρομαγνητισμό. Μάλιστα μερικά κείμενα, όπως για παράδειγμα των Jackson και Schwinger, αγνοούν αυτό το θέμα, ενώ άλλοι ποιοτικά παρουσιάζονται να συζητούν τη δημιουργία ή την παρουσία του δινορευματος όπως η απλή περίπτωση του δίσκου Faraday (Lorrain και Corson και Griffiths). Στην ουσία, στο υλικό που παρουσιάζεται τα περισσότερα σύγχρονα βιβλία είναι ανεπαρκή για την επίλυση του πρόβληματος μιας περιστρεφόμενης κοίλης σφαίρας σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο. Σε αντιδιαστολή, το πρόβλημα αυτό έχει λυθεί ιστορικά αρκετά χρόνια πριν από τον Hertz, έχει εφαρμογή στη δυναμική των δορυφόρων και τις πρώτες μετρήσεις του μαγνητικού πεδίου της Γης, και είναι στο

πλαίσιο μιας προχωρημένης προπτυχιακής μελέτης που γίνονται προσπάθειες ώστε διαρκώς να εξελίσσεται μέσω της έρευνας.

Καθώς ένας εκτεταμένος, απομονωμένος αγωγός κινείται μέσω ενός σταθερού μαγνητικού πεδίου, παρουσιάζονται δυνάμεις οι οποίες ασκούνται στα ηλεκτρόνια του αγωγού. Συχνά υποτίθεται ότι παρατηρούνται δινορεύματα χωρίς όμως αυτό να συμβαίνει πάντα, όπως θα γίνει παρακάτω εμφανές. Στη γενική περίπτωση, τα ηλεκτρόνια θα αναδιανεμηθούν δημιουργώντας μια μη ομοιόμορφη πυκνότητα φόρτισης που θα προκαλέσει την εμφάνιση ηλεκτρικών πεδίων μέσα στον αγωγό. Έτσι, η πρώτη ενέργεια στην ανάλυση αυτού του προβλήματος θα είναι να προσδιορίσουμε την επαγόμενη πυκνότητα φόρτισης, και στη συνέχεια να βρούμε τις δυνατότητες και τον ηλεκτρικό πεδίο που αντιστοιχεί σε αυτό. Τότε, οι ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις του πεδίου συνδυάζονται και οι τυχόν καθαρές δυνάμεις δημιουργούν ροή ρεύματος εντός του αγωγού. Οι λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας θα παρουσιάζονται στην παρακάτω ανάλυση. Σημειώνεται βέβαια ότι αυτό δε θα αποτελέσει την γενική εισαγωγή σε αυτό τον τομέα, αντιθέτως πρόκειται για μια έκθεση σε ένα πρόβλημα που απασχολεί πέρα από το υπάρχον υλικό στα σύγχρονα εγχειρίδια.

Η διαδικασία της μελέτης που θα ακολουθηθεί αφορά στη μοντελοποίηση δυο περιπτώσεων. Κατ' αρχήν, όπως έχουμε αναφέρει και προηγουμένως, πρόκειται για την υπόθεση μιας αργά περιστρεφόμενης κοίλης σφαίρας που στην απλούστερη περίπτωση η σφαίρα περιστρέφεται γύρω από έναν ευθυγραμμισμένο άξονα σε ένα εφαρμοζόμενο ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο και κατόπιν θα μετακινείται σε ένα κάθετο άξονα περιστροφής. Στη συνέχεια θα επαναληφθούν αυτοί οι προσανατολισμοί σε μη-ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο που θα παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία γύρω από τον άξονα  $z$ . Η σφαίρα θα έχει ακτίνα που θα συμβολίζεται με  $a$ , ενώ το πάχος του τοιχώματος της θα συμβολίζεται με  $h$ , τέτοιο ώστε  $h \ll a$ . Επιπλέον η αγωγιμότητα της σφαίρας θα παριστάνεται σε  $\sigma$  και η πυκνότητα του υλικού της με  $\rho_m$ . Επομένως η σχέση για τη συνολική μάζα θα είναι:  $m = 4\pi a^2 \rho_m$ . Σε όλες τις περιπτώσεις η σφαίρα θα περιστρέφεται υπό γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , γύρω από τον άξονα  $z$ .

Κατά την μελέτη μας, εστιάζουμε μόνο σε αποτελέσματα σταθερής κατάστασης, καθώς οι μεταβατικές περίοδοι σε αγωγούς χάνονται πολύ γρήγορα, έτσι λοιπόν όλα τα πεδία, τα δυναμικά, τα ρεύματα και οι πυκνότητες φόρτισης θα είναι ανεξάρτητες από το χρόνο, όπως φαίνεται στο πλαίσιο του εργαστηρίου. Αρκετοί είναι οι επιστήμονες που επιλέγουν να εργαστούν στο πλαίσιο της σφαίρας και υιοθετούν ένα χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, γεγονός το οποίο φαίνεται να προσθέτει περισσότερες επιπλοκές παρά να διευκολύνει την κατάσταση, οπότε η ανάλυση παρακάτω ακολουθεί το εργαστηριακό πλαίσιο αναφοράς. Τέλος, θεωρείται ότι η σφαίρα δεν έχει καθαρό φορτίο.

## Βιβλιογραφία

[https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CE%AE%CE%B9%CE%BD%CE%BF\\_%CE%BC%CE%B1%CE%B3%CE%BD%CE%B7%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C\\_%CF%80%CE%B5%CE%B4%CE%AF%CE%BF](https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CE%AE%CE%B9%CE%BD%CE%BF_%CE%BC%CE%B1%CE%B3%CE%BD%CE%B7%CF%84%CE%B9%CE%BA%CF%8C_%CF%80%CE%B5%CE%B4%CE%AF%CE%BF)

3rd European Workshop on Space Debris Modelling and Remediation, CNES. 2014. "http://hanspeterschaub.info/Papers/Bennett2014a.pdf." June.

[http://mepolyaplalogia.blogspot.gr/2015/10/blog-post\\_11.html](http://mepolyaplalogia.blogspot.gr/2015/10/blog-post_11.html)

R. H. Wilson, "Magnetic effects on space vehicles and other celestial bodies," Irish Astron. J. 13, 1–13 (1977); available at <http://adsabs.harvard.edu/full/1977IrAJ...13....1W>.

4 TH EUROPEAN CONFERENCE FOR AEROSPACE SCIENCES, Nicolas Praly, Nicolas Petit. STUDY ON THE EDDY CURRENT DAMPING OF THE SPIN DYNAMICS OF SPATIAL DEBRIS FROM THE ARIANE LAUNCHER. " <http://cas.ensmp.fr/~petit/papers/EUCASS11/NP2.pdf> "

Eddy- current space tug, Benjamin Reinhardt, Mason A .Peck, 27-29 September 2011, California, American institute of aeronautics and Astronautics  
"https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/6.2011-7168 "

2012: Magnetic Pole Reversal Happens All The (Geologic) Time , *NASA Administrator*, July 31, 2015 ; available at <https://www.nasa.gov/topics/earth/features/2012-poleReversal.html>

<sup>1</sup>A slowly rotating hollow sphere in a magnetic field: First steps to de-spin a space object, Robert C. Youngquist, Mark A. Nurge, and Stanley O. StarrFrederick A. LeveMason Peck, American Association of Physics Teachers , "http://dx.doi.org/10.1119/1.4936633"

ΤΙ ΣΥΜΒΑΙΝΕΙ ΜΕ ΤΟ ΓΗΙΝΟ ΜΑΓΝΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ, Γ. Μεταξάς, Κυριακή, 11 Οκτωβρίου 2015, [http://mepolyaplalogia.blogspot.gr/2015/10/blog-post\\_11.html](http://mepolyaplalogia.blogspot.gr/2015/10/blog-post_11.html)

<http://www.sparknotes.com/physics/magneticforcesandfields/intro/section1.rhtml>, Introduction to Magnetic Forces and Fields, 2017 SparkNotes LLC,



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### 2.1.1 Πρακτική εφαρμογή της μελέτης του ζητήματος που εξετάζουμε

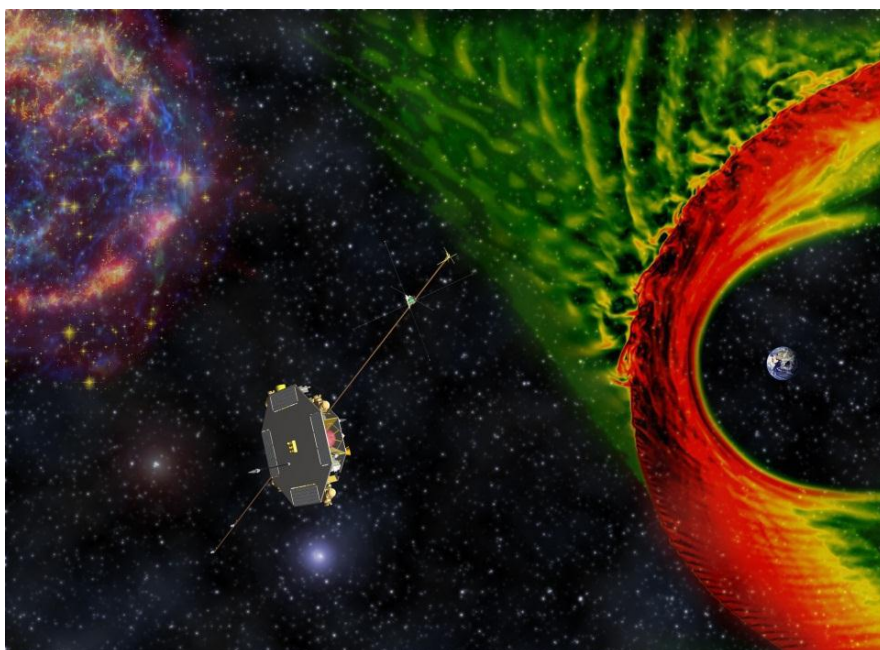
Αφορμή για την ανάλυση , μελέτη και διαδικασία που ακολουθούμε για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου που θα αναπτυχθεί κατά την περιστροφή ενός διαστημοπλοίου σε τροχιά της Γης αποτέλεσε η αποστολή ενός διαστημικού προγράμματος που ονομάζεται THOR. Πρόκειται για την εξερεύνηση της φυσικής του πλάσματος με έμφαση στη θέρμανση του πλάσματος και την επακόλουθη διασπορά ενέργειας, συμπεριλαμβανομένης της αλληλεπίδρασης του ηλιακού ανέμου με το Γεωμαγνητικό πεδίο.

Συγκεκριμένα το διαστημικό πρόγραμμα THOR (Turbulence Heating ObserveR) θα είναι η πρώτη αποστολή αφιερωμένη στην αναταραχή του πλάσματος. Θα διερευνήσει τις διαδικασίες κινητικής πλάσματος που καθορίζουν τη θεμελιώδη συμπεριφορά της πλειονότητας της βαρυονικής ύλης στο σύμπαν. Το THOR θα οδηγήσει σε κατανόηση των βασικών ενεργειών θέρμανσης πλάσματος και ενεργοποίησης σωματιδίων, της αποτελεσματικότητάς τους για διαφορετικά είδη πλάσματος καθώς επίσης και της σχετικής τους σημασίας σε διαφορετικά στροβιλώδη καθεστώτα. Επιπλέον θα δώσει μια σαφή απάντηση και ενδεχομένως ένα τέλος σε αυτά τα θεμελιώδη ερωτήματα κάνοντας λεπτομερείς επί τόπου μετρήσεις των πλησιέστερων διαθέσιμων αραιωμένων και τυρβώδων μαγνητισμένων πλάσμάτων με άνευ προηγουμένου χρονικό και χωρικό διαχωρισμό. Το THOR επικεντρώνεται σε συγκεκριμένες περιοχές: "ανέγγιχτος" ηλιακός άνεμος, το σοκ της γης και τα διαπλανητικά πλήγματα, οι συμπιεσμένες περιοχές ηλιακού ανέμου κατάντη των κραδασμών.

Αυτές οι περιοχές επιλέγονται λόγω των διαφορετικών χαρακτηριστικών τους στροβιλώδους διακύμανσης και αντικατοπτρίζουν παρόμοια αστροφυσικά περιβάλλοντα. Επιπλέον, τόσο οι χωρικές όσο και οι χρονικές χαρακτηριστικές κλίμακες πλάσματος στις βασικές περιοχές της επιστήμης είναι αρκετά μεγάλες, έτσι ώστε τα όργανα σωματιδίων να είναι σε θέση να επιλύσουν τις κινητικές κλίμακες. Το διαστημικό σκάφος THOR θα φέρει για πρώτη φορά ένα ολοκληρωμένο ωφέλιμο φορτίο προσαρμοσμένο για να διερευνήσει τη διέγερση του πλάσματος σε αναταράξεις, με αμφότερα τα πεδία και τα όργανα μέτρησης σωματιδίων που θα επιτρέψουν την ταυτόχρονη ανάλυση τόσο των στροβιλών διακυμάνσεων όσο και της υπογραφής της προκύπτουσας ενεργοποίησης πλάσματος. Το ωφέλιμο φορτίο αποτελείται από ώριμα μέσα με πρόσφατη κληρονομιά πτήσης που θα γίνει αντικείμενο εκμετάλλευσης. Σημειώνεται ακόμα ότι θα ανοίξει επίσης νέους δρόμους, παρέχοντας μετρήσεις που υπερβαίνουν τις τρέχουσες θεωρητικές προσδοκίες μας, επιτρέποντας κατά αυτό τον τρόπο την εξερεύνηση της νέας φυσικής και την πρόκληση των θεωριών μας.

Αξιοσημείωτο είναι ότι κατά τη διάρκεια του περασμένου αιώνα εξερεύνησης του Σύμπαντος, μάθαμε ότι η φυσιολογική ύλη στο Σύμπαν είναι κατά κύριο λόγο στην κατάσταση του πλάσματος. Είναι το θερμό αραιό πλάσμα (ιονισμένο αέριο)

μεταξύ των γαλαξιών και των συστάδων των γαλαξιών, και όχι των αστεριών, που κυριαρχούν στη βαρυονική ύλη. Επιπλέον, το μεγαλύτερο μέρος της βαρυονικής ύλης στο Σύμπαν δεν ανιχνεύεται στο ορατό φως, αλλά αντιθέτως γίνεται εμφανές μόνο στις ακτίνες Χ που παράγονται από θερμά πλαστικά. Το θερμό αραιό πλάσμα μπορεί επίσης να βρεθεί μέσα στους γαλαξίες, όπως το διαστρικό μέσο, οι εξωτερικές ατμόσφαιρες και οι αστρικοί άνεμοι των αστεριών, τα κορώνια των δίσκων προσαυξήσεων. Αυτά τα ζεστά πλάσματα μπορεί να θερμανθούν με την απορρόφηση των στροβιλισμών που προκαλούνται από κινήσεις διάτμησης μεγάλης κλίμακας, κύματα κρούσεων, πίδακες και άλλες αστάθειες και διαδικασίες μεγάλης κλίμακας. Τα αστροφυσικά πλάσματα είναι ταραχώδη και η διάχυση των στροβιλών διακυμάνσεων οδηγεί σε συνεχή θέρμανση του πλάσματος και στην επιτάχυνση των φορτισμένων σωματιδίων. Η κατανόηση των βασικών διεργασιών πλάσματος της θέρμανσης και της ενεργοποίησης του πλάσματος σε στροβιλώδη μαγνητισμένα πλάσματα έχει θεμελιώδη σημασία για την κατανόηση της εξέλιξης του Σύμπαντος.



Σχήμα 2.1 Εξερεύνηση του THOR γύρω από τη Γη

Οι διακυμάνσεις στα αστροφυσικά πλάσματα φτάνουν μέχρι και κλίμακες τόσο μεγάλες όσο τα αστέρια, οι φουσαλίδες ή τα "σύννεφα" που εκτοξεύονται από αστρικούς ανέμους ή ακόμα και από ολόκληρους γαλαξίες. Εντούτοις, το μεγαλύτερο μέρος της μη αναστρέψιμης διασποράς της ενέργειας μέσα από τυρβώδεις διακυμάνσεις συμβαίνει στις πολύ μικρές κλίμακες - κινητικές κλίμακες, όπου το πλάσμα δεν συμπεριφέρεται πλέον ως υγρό και οι ιδιότητες των μεμονωμένων ειδών πλάσματος (ηλεκτρόνια, πρωτόνια και άλλα ιόντα). Η αποτελεσματικότητα της θέρμανσης στο πλάσμα, η κατανομή της ενέργειας που μεταφέρεται σε διαφορετικά είδη σωματιδίων, η επιτάχυνση των σωματιδίων σε υψηλές ενέργειες - όλες καθοδηγούνται έντονα από τις κινητικές διαδικασίες που καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο διαχέονται οι τυρβώδεις ηλεκτρομαγνητικές διακυμάνσεις. Έτσι, οι

διεργασίες πλάσματος σε κινητικές κλίμακες επηρεάζουν άμεσα τις ιδιότητες μεγάλης κλίμακας του πλάσματος.

Γεγονός, βέβαια, είναι ότι το τοπικό περιβάλλον μας, κοντά στο χώρο της Γης, παρέχει μια μοναδική ευκαιρία για επί τόπου ανάλυση του πλάσματος σε ένα ευρύ φάσμα φυσικών παραμέτρων που αντανακλούν τις συνθήκες σε άλλες αστροφυσικές τοποθεσίες. Η κοινότητα του στροβιλισμού στο πλάσμα είναι μια από τις μεγαλύτερες διεπιστημονικές επιστημονικές κοινότητες. Τα προσεκτικά σχεδιασμένα εργαστηριακά πειράματα πλάσματος, καθώς και οι ολοένα και πιο εξελιγμένες αριθμητικές προσομοιώσεις θα συμπληρώσουν πειραματικά πειράματα όπως προτείνουμε να διεξαγάγουμε με το THOR. Το σύνολο των προσπαθειών αυτών θα οδηγήσει σε μια μεταστροφή της προσέγγισης στην κατανόηση των μηχανισμών αναταραχής και ενεργοποίησης σε αστροφυσικά πλάσματα και θα ανοίξει νέους ορίζοντες για τη μελέτη της θεμελιώδους φυσικής της ορατής ύλης.

### **2.1.2 Ηλεκτρομαγνητική καθαρότητα**

Ο στόχος αυτής της αποστολής είναι να εκτελέσει εξαιρετικά ακριβείς μετρήσεις του ηλεκτρικού καθώς και του μαγνητικού πεδίου μέσα αλλά και έξω από τη μαγνητόσφαιρα της Γης. Όλες οι μετρήσεις διαταράσσονται πολύ από το επαγόμενο πεδίο που πρόκειται να δημιουργηθεί στο ίδιο το διαστημικό σκάφος. Η κύρια πηγή αυτών των διαταραχών είναι όλα τα ηλεκτρικά ελεγχόμενα υποσυστήματα του διαστημοπλοίου αλλά και τα επιστημονικά όργανα. Έτσι όλες αυτές οι πηγές απαιτούν αυστηρή μείωση και ακριβή γνώση των αντίστοιχων ηλεκτρομαγνητικών εκπομπών τους.

Για την επίτευξη των επιστημονικών στόχων, οι ακόλουθες τρεις απαιτήσεις για την ηλεκτρομαγνητική καθαρότητα διατυπώθηκαν στην πρόταση αποστολής RD [1]:

#### Μαγνητική καθαρότητα χαμηλής συχνότητας

(1) Το συνολικό μαγνητικό πεδίο του διαστημικού σκάφους θα πρέπει να ελαχιστοποιείται (<5 nT) και να χαρακτηρίζεται σωστά από το έδαφος. Οι αργές παραλλαγές (περισσότερο από 1 ώρα) στο μαγνητικό πεδίο του διαστημικού σκάφους πρέπει να περιορίζονται σε 0,5 nT από κορυφή σε κορυφή μέγιστη και μεσαίες μεταβολές (1 δευτερόλεπτο έως 1 ώρα) έως 10 pT από κορυφή σε κορυφή.

### Ηλεκτροστατική καθαριότητα

(2) Η διαφοροποιημένη επιφανειακή φόρτιση του διαστημικού σκάφους θα πρέπει να ελαχιστοποιείται, ώστε να επιτρέπονται μετρήσεις DC ηλεκτρικού πεδίου από το όργανο EFI. Η τάση μεταξύ οποιωνδήποτε δύο σημείων στην επιφάνεια του διαστημικού οχήματος πρέπει να είναι το πολύ 1 V.

### AC ηλεκτρομαγνητικές εκπομπές

(3) Πρέπει να ελαχιστοποιηθούν και να ελεγχθούν οι ηλεκτρομαγνητικές εκπομπές τόσο από τα συστήματα διαστημικών οχημάτων όσο και από το ωφέλιμο φορτίο στην περιοχή συχνοτήτων των οργάνων EFI, MAG και SCM (DC έως 250 kHz). Οι συχνότητες εκπομπών που υπερβαίνουν το θόρυβο των οργάνων THOR πρέπει να είναι σταθερές και να συγχρονίζονται με όσο το δυνατόν λιγότερες διακριτές συχνότητες.

Σημειώνονται παρακάτω κάποια χαρακτηριστικά των οργάνων μέτρησης : τα εύρη συχνοτήτων των μαγνητομέτρων διπλού αισθητήρα ροής και μαγνητομέτρων αναζήτησης πηνίου μερικώς αλληλεπικαλύπτονται για να επιτρέπουν την εγκάρσια βαθμονόμηση των οργάνων. Ο εξωτερικός αισθητήρας του οργάνου μαγνητομέτρου fluxgate (MAG) είναι το βασικό όργανο για τη μαγνητική καθαριότητα μέχρι 1-10 Hz, όπου τα εξεταζόμενα όργανα μαγνητομέτρου αναζήτησης αρχίζουν να έχουν καλύτερη ευαισθησία. Για την περιοχή συχνότητας μαγνητικής καθαρότητας, πρέπει να ληφθεί υπόψη ο ρυθμός δειγματοληψίας των 200 kHz, συν μια πρόσθετη ζώνη συχνοτήτων ως προστασία έναντι των αλλοιώσεων από τον θόρυβο υποστυλώματος σε υψηλότερες συχνότητες.

Όσον αφορά το όργανο μέτρησης ηλεκτρικού πεδίου διαθέτει δύο συμπληρωματικούς αισθητήρες για μέτρηση μεταξύ DC και 100 kHz με μια περιοχή συχνοτήτων που κυμαίνεται μεταξύ 1-10 kHz. Ενώ το EFI-SDP μετρά τα δύο συστατικά του ηλεκτρικού πεδίου κάθετα προς τον άξονα περιστροφής και επιτρέπει την ανασυγκρότηση του τρίτου συστατικού μόνο έμμεσα από τις μετρήσεις διάνυσμα μαγνητικού πεδίου μέσω της ορθογωνικότητας μεταξύ των δύο πεδίων, τα μέτρα EFI-HFA πάνω από 1 kHz και τα τρία συστατικά του.

Τα όργανα μέτρησης του μαγνητικού πεδίου γίνονται όλο και πιο ευαίσθητα με την παρουσία της αυξανόμενης συχνότητας, γεγονός που επηρεάζει και τα απαιτούμενα όρια στις αντίστοιχες μεταβολές της μαγνητικής ροπής. Ενώ τα πραγματικά απαιτούμενα κατώτατα όρια ευαισθησίας πρόκειται ακόμη να εδραιωθούν, είναι προφανές ότι και τα δύο μαγνητόμετρα θα επωφεληθούν από μια περαιτέρω αύξηση του μήκους του βραχίονα. Ακόμα και σχετικά μικρές αυξήσεις του μήκους του βραχίονα θα παρέχουν υπερβολικά αναλογικά οφέλη λόγω του νόμου περί κυβικών αποστάσεων.

Στην επόμενη φάση μια τέτοια συνολική μαγνητική ροπή κορυφής πρέπει να πετάξει προς τον εξοπλισμό και την κατανομή των οργάνων για σύγκριση με ένα μαγνητικό

προϋπολογισμό από τη βάση προς τα πάνω (Σημείωση: Το μοντέλο MMS θα μπορούσε να επαναχρησιμοποιηθεί για μαγνητικό προϋπολογισμό).

Για τις μαγνητικές παραλλαγές όμως πρέπει επίσης να ληφθούν υπόψη τα μαγνητικά πεδία που βασίζονται στο ρεύμα. Δεδομένου ότι τα πραγματικά εσωτερικά ρεύματα του εξοπλισμού και των οργάνων εξαρτώνται ωστόσο όχι μόνο από τη γεωμετρία και την κατανάλωση ισχύος, αλλά και από τις διατάξεις του κυκλώματος και τις μεμονωμένες δευτερεύουσες τάσεις, οι σχετικές μεταβολές πρέπει να εκτιμηθούν σε μεταγενέστερη φάση.

### **2.1.3 Ενεργητική ακτινοβολία σωματιδίων**

Γενικά, το περιβάλλον των ενεργειακών σωματιδίων αποτελείται από γεωμετρικά παγιδευμένα φορτισμένα σωματίδια, δηλαδή ηλιακά πρωτόνια και γαλαξιακές κοσμικές ακτίνες. Τα διεισδυτικά σωματίδια δημιουργούν τα κύρια προβλήματα, τα οποία περιλαμβάνουν αναστάτωση στις ηλεκτρονικές συσκευές, παρεμβολές ωφέλιμου φορτίου, υποβάθμιση και βλάβη των εξαρτημάτων και των ηλιακών κυψελών. Τα κύρια συστατικά του περιβάλλοντος ακτινοβολίας είναι:

#### οι ζώνες ακτινοβολίας

Οι ζώνες ακτινοβολίας περικυκλώνουν τη Γη και περιέχουν ηλεκτρόνια και πρωτόνια που είναι παγιδευμένα στο γεω-μαγνητικό πεδίο. Ένας εσωτερικός σχετικά σταθερός ιμάντας περιέχει κυρίως πρωτόνια με ενέργειες έως και αρκετές εκατοντάδες MeVs που ποικίλλουν ανάλογα με τον ηλιακό κύκλο, με υψηλότερα επίπεδα που συναντώνται κατά τη διάρκεια του ηλιακού ελαχίστου. Μια εξωτερική, εξαιρετικά δυναμική, ζώνη αποτελείται κυρίως από ενεργητικά ηλεκτρόνια με ενέργειες μέχρι μερικά MeVs.

#### τα ηλιακά σωματίδια

Τα γεγονότα των έντονα ενισχυμένων ροών κυρίως πρωτονίων προέρχονται από τον Ήλιο, συνήθως με διάρκεια της τάξης των δύο ημερών. Αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν τυχαία και κυρίως κατά τις περιόδους μέγιστου ηλιακού κύκλου (περίπου 7 χρόνια του ηλιακού κύκλου 11 ετών). Τα γεγονότα συνοδεύονται επίσης από ενισχυμένες ροές βαρέων ιόντων. Το γεω-μαγνητικό πεδίο μπορεί να παρέχει ένα στοιχείο θωράκισης αυτών των σωματιδίων σε ισημερινές ζώνες σε χαμηλότερα ύψη.

### γαλαξιακές κοσμικές ακτίνες

Μια συνεχής ροή ακτινοβολίας πολύ υψηλής ενέργειας σωματιδίων λαμβάνεται από έξω από την ηλιόσφαιρα. Αν και η ροή είναι πολύ χαμηλή, περιλαμβάνουν βαρύ ιόντα ικανά να προκαλέσουν έντονο ιονισμό καθώς περνούν μέσα από την ύλη. Αν και η συμβολή τους στη συνολική δόση είναι ασήμαντη, είναι σημαντική κατά την ανάλυση των αποτελεσμάτων ενός μεμονωμένου συμβάντος. Το γεωμαγνητικό πεδίο μπορεί να παρέχει ένα στοιχείο θωράκισης αυτών των σωματιδίων σε ισημερινές ζώνες σε χαμηλότερα ύψη.

## **2.2 Παραδείγματα για τη προσέγγιση του προβλήματος μας**

Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο για την μελέτη του προβλήματος μας θεωρούμε μια κοίλη αγώγιμη σφαίρα, ως μια καλή προσέγγιση του διαστημοπλοίου, που θα βρίσκεται στην τροχιά της Γης και θέλουμε να καθορίσουμε την δυνατότητα μείωσης της περιστροφικής της κίνησης διαμέσω της μελέτης και του μαγνητικού πεδίου που της ασκείται από τη Γη, την σφαίρα ως σώμα αλλά και κάθε άλλο που συνεισφέρει σε αυτό. Προκειμένου να οδηγηθούμε εκεί μελετήσαμε παραδείγματα που πλησιάζουν αρκετά το πρόβλημα και την γεωμετρία του και κατόπιν προσαρμόσαμε τη δική μας γεωμετρία. Συγκεκριμένα σχετικές γεωμετρίες αναλύονται παρακάτω.

### **2.2.1 Μαγνητικά διαπερατή σφαίρα σε στατικό μαγνητικό πεδίο**

Θεωρούμε μια σφαίρα σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας μεγαλύτερης από το περιβάλλον στο οποίο εκτίθεται και βρίσκεται σε ένα ομοιόμορφο στατικό μαγνητικό πεδίο. Χρησιμοποιούνται δύο μεθοδολογίες για την επίλυση αυτού του προβλήματος και κατόπιν συζητούνται οι όποιες διαφορές προκύπτουν μεταξύ αυτών. Η ένταση του πεδίου μέσα στη σφαίρα υπολογίζεται και συγκρίνεται με την αναλυτική λύση. Η σφαίρα στο κέντρο περιβάλλεται από αέρα και και περικλείεται σε μια περιοχή από άπειρα στοιχεία.

Αναλυτικότερα θεωρούμε τρεις ομόκεντρες σφαίρες, όπου ο εσωτερικός χώρος αντιπροσωπεύει τη διαπερατή σφαίρα η οποία και μας ενδιαφέρει, ο περιβάλλοντος όγκος σφαιρικού κελύφους αντιπροσωπεύει τον ελεύθερο χώρο ενώ ο εξωτερικός όγκος του κελύφους υποδεικνύει μια περιοχή που εκτείνεται μέχρι το άπειρο,

διαμορφωμένη με ένα πεδίο άπειρου στοιχείου. Με τη χρήση των λειτουργιών πεδίων άπειρων στοιχείων, εξασφαλίζεται ότι η συνθήκη ορίων στο εξωτερικό του τομέα μοντελοποίησης δε θα επηρεάσει τη λύση. Με τη σχετική διαπερατότητα της σφαίρας να ποικίλει με τιμές εύρους από 2 – 1000, η αναλυτική λύση για το πεδίο μέσα σε μια διαπερατή σφαίρα εκτειθέμενη σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο είναι :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \left( \frac{3\mu_r}{\mu_r + 2} \right) \quad (2.1)$$

όπου  $\mathbf{B}_0$  είναι το εξωτερικό μαγνητικό πεδίο.

Υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορεί να διατυπωθεί αυτό το πρόβλημα. Τα μαγνητικά πεδία, η διατύπωση χωρίς ρεύματα επιλύει την εξίσωση διατήρησης της μαγνητικής ροής :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

μια μερική διαφορική εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο δυναμικού σκαλοειδούς δυναμικού,  $V_m$ :

$$\nabla \cdot \mu_r \mu_0 (\nabla V_m + \mathbf{H}_b) = 0 \quad (2.2)$$

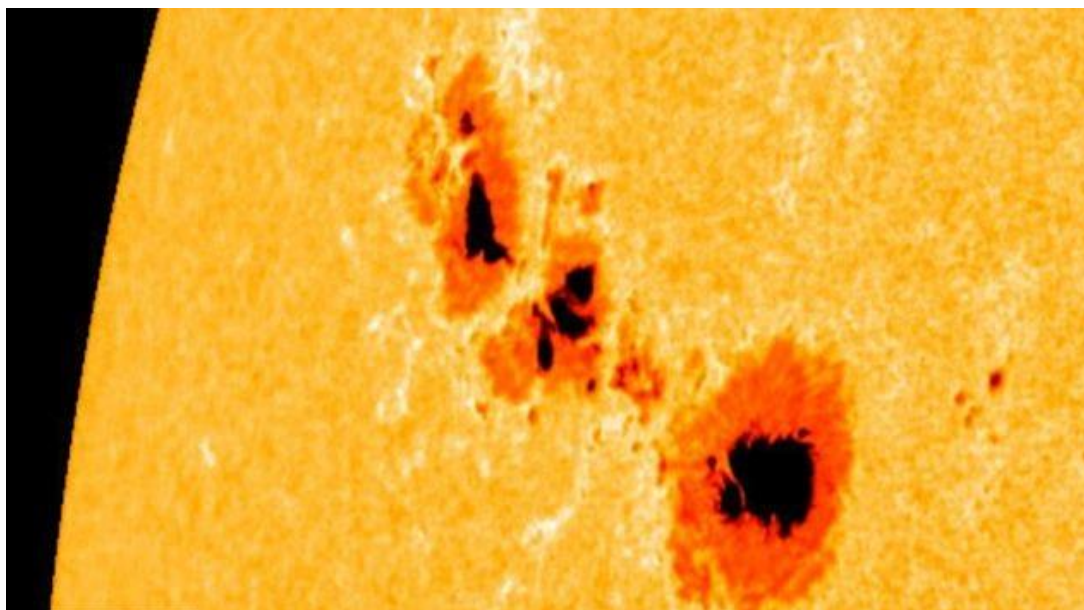
όπου το πεδίο του υποβάθρου καθορίζεται στα πλαίσια του πεδίου  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{H}_b$ . Το πεδίο  $\mathbf{B}$  υπολογίζεται τότε από το πεδίο  $-\mathbf{H}$  με τη γνωστή σχέση :  $\mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H}$ . Το μαγνητικό πεδίο με τη σειρά του υπολογίζεται από τη κλίση του μαγνητικού δυναμικού. Επειδή η βασική εξίσωση εκτιμά τις κλίσεις που αναφέρονται σε ένα κλιμακωτό πεδίο, χρησιμοποιείται η σχέση Lagrange. Σε αυτή τη σχέση το πεδίο υποβάθρου και οι οριακές συνθήκες για αυτό το πρόβλημα καθορίζονται σαφώς με όρους παραγώγων του πεδίου  $V_m$  και η λύση είναι μοναδική ως μια σταθερά. Στην περίπτωση αυτή για να κάνουμε άρση της απροσδιοριστίας, η τιμή του μαγνητικού κεκλιμένου δυναμικού πρέπει να περιοριστεί σε ένα σημείο του μοντέλου, ώστε να γίνει γνωστή η τιμή της σταθεράς. Οι σχέσεις που αφορούν τα μαγνητικά πεδία, από την άλλη μεριά, λύνουν την εξίσωση για δυναμικό του μαγνητικού διανύσματος,  $\mathbf{A}$  :

$$\nabla \times \mu_r^{-1} \mu_0^{-1} \nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{A}_b) = 0 \quad (2.3)$$

όπου το πεδίο  $\mathbf{B}$  είναι ο στροβιλισμός του πεδίου  $(\mathbf{A} + \mathbf{A}_b)$ . Σε αυτή τη προσέγγιση το πεδίο του υποβάθρου και οι οριακές συνθήκες καθορίζονται απευθείας από το πεδίο  $\mathbf{A}$ . Εδώ η βασική εξίσωση θεωρεί τον στροβιλισμό ενός εκτιμώμενου διανυσματικού πεδίου και αυτό το πρόβλημα επιλύεται κάνοντας χρήση του τύπου στροβιλισμού του στοιχείου. Αυτός ο τύπος δεν προϋποθέτει την ύπαρξη ενός λεπτού στρώματος όπως η σχέση του Lagrange για να επιτύχει την ίδια ακρίβεια.

### 2.2.2 Απλά παραδείγματα για μαγνητικά πεδία σε κινούμενους αγωγούς

Οι αγωγοί που κινούνται σε μαγνητικά πεδία είναι παντού. Απλό παράδειγμα αποτελεί το ηλιακό πλάσμα που εκπέμπει το δικό του μαγνητικό πεδίο. Χαρακτηριστικά γνωρίσματα, όπως είναι οι ηλιακές κηλίδες είναι γεννήτριες που δημιουργούν μαγνητικά πεδία (Lorrain 1995, Lorrain and Koutchmy 1993, 1996, 1998), ενώ σε άλλες περιοχές το ηλιακό πλάσμα μετατρέπεται σε μαγνητικά πεδία που παράγονται αλλού. Το υγρό εξωτερικό κέλυφος του πυρήνα της Γης παρομοίως κυριαρχεί στο δικό του μαγνητικό πεδίο (Lorrain 1993).



Σχήμα 2.2

Ηλιακές κηλίδες : είναι ψυχρές, σκοτεινές και προκαλούνται από διαταραχές του ηλιακού μαγνητικού πεδίου. Ο αριθμός τους αυξομειώνεται ( από το ελάχιστο στο μέγιστο και ξανά στο ελάχιστο ) κάθε 11 χρόνια την ίδια χρονική περίοδο που μεσολαβεί ανάμεσα στη αναστροφή των μαγνητικών πόλων του ήλιου.

Παρά την άφθονη βιβλιογραφία για την αλληλεπίδραση μεταξύ των μαγνητικών πεδίων και της κίνησης σε αγωγούς μόνο ο Lundquist (1952) έχει υπολογίσει την παραμόρφωση των γραμμών του μαγνητικού πεδίου από κινούμενους αγωγούς σε συγκεκριμένες περιπτώσεις. Βρήκε ότι το καθαρό μαγνητικό πεδίο είναι στατικό. Ο Shercliff (1965) δίνει ένα παράδειγμα μαγνητικού πεδίου που δεν επηρεάζεται από κινούμενο αγωγό και δύο παραδείγματα όπου ο κινούμενος αγωγός μετατοπίζει τις γραμμές μαγνητικού πεδίου διαμέσω μιας σύντομης και ποιοτικής συζήτησης. Τα καθαρά μαγνητικά πεδία του είναι επίσης στατικά.

Εδώ υπολογίζουμε τα επαγόμενα ρεύματα και το καθαρό μαγνητικό πεδίο σε απλές περιπτώσεις κάνοντας την παραδοχή ότι οι αγωγοί είναι συμπαγείς, εκτός από τη σφαίρα του Παραδείγματος 4, αλλά ισχύουν τα γενικά μας συμπεράσματα εξίσου



καλά με υγρά, π.χ. Σε διάστημα πλασμάτων (Peratt 1991). Η αγωγιμότητα "σ" μπορεί να έχει οποιαδήποτε αυθαίρετη τιμή, πεπερασμένη ή ακόμα και άπειρη. Υποθέτουμε συνθήκες σταθερής κατάστασης: σε σχέση με ένα σταθερό πλαίσιο αναφοράς S, τις μεταβλητές  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  του πεδίου, την πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος  $\mathbf{J}$  και τον ηλεκτροστατικό όγκο και την επιφανειακή πυκνότητα φόρτισης  $\mathbf{Q}$  και  $\mathbf{S}$ , είναι όλα ανεξάρτητα από το χρόνο. Όλα τα παροδικά φαινόμενα έχουν γίνει αμελητέα, τα φορτία μεταφέρονται στις θέσεις ισορροπίας τους και οι αγωγοί έχουν φτάσει τις ασυμπτωτικές ταχύτητές τους. Επιπλέον, ορίζουμε  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Εάν ο αγωγός κινείται σε ευθεία γραμμή, η ταχύτητα  $\mathbf{u}$  ενός δεδομένου εσωτερικού σημείου είναι σταθερή. Εάν ο αγωγός περιστρέφεται, τότε το  $\mathbf{u}$  είναι συνάρτηση του χρόνου, αλλά ο φορέας της γωνιακής ταχύτητας είναι σταθερός. Τότε οι εξισώσεις του Maxwell ισχύουν μόνο στη γειτονία ενός δεδομένου σημείου (Møller 1974). Οι αγωγοί κινούνται σε κενό και δεν υπάρχουν εξωτερικά εφαρμοζόμενα ηλεκτρικά φορτία, πεδία ή ρεύματα.

Υποθέτουμε μη μαγνητικούς αγωγούς και μη - σχετικιστικές ταχύτητες  $\mu_r = 1$ ,  $u^2 \ll c^2$ , όπου  $c$  είναι η ταχύτητα του φωτός. Έπειτα οι εξισώσεις του Maxwell μειώνονται σε (Lorrain *et al* 1988):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\mathbf{Q}}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.7)$$

όπου  $\mathbf{Q}$  είναι η καθαρή πυκνότητα φορτίου ηλεκτρικού όγκου και  $\epsilon_0$  και  $\mu_0$  είναι οι τιμές της διαπερατότητας και της επιτρεπτότητας στον ελεύθερο χώρο. Η σχετική διαπερατότητα  $\epsilon_r$  ενός αγωγού δεν είναι μετρήσιμη, αλλά είναι πιθανώς της τάξης του 3, όσον αφορά τα διηλεκτρικά. Η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος  $\mathbf{J}$  προκύπτει από την κίνηση των ελεύθερων φορτίων: αγνοούμε τα ρεύματα πόλωσης. Θυμόμαστε ότι :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.8)$$

όπου  $\mathbf{V}$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό του όγκου και των επιφανειακών φορτίων και το  $\mathbf{A}$  είναι το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό που ορίζεται ως εξής :  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ . Εδώ έχουμε :

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 0 \text{ και } \mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.9)$$

Επιπλέον, υπενθυμίζουμε ότι αν ένα σώμα αγωγιμότητας  $\sigma$  κινείται σε μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  τότε η αγωγιμότητα πυκνότητας ρεύματος δίνεται από τη σχέση :

$$\mathbf{J} = \sigma [ \mathbf{E} + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) ] \quad (2.10)$$

όπου και οι πέντε μεταβλητές μετρούνται σε σχέση με ένα σταθερό πλαίσιο αναφοράς  $S$ . Αυτός είναι ο νόμος του Ohm για τους κινούμενους αγωγούς. Ας σημειωθεί ότι  $\mathbf{B}$  είναι το καθαρό πεδίο :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{ind}} \quad (2.11)$$

όπου  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  είναι το εξωτερικά εφαρμοζόμενο πεδίο και  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  είναι το μαγνητικό πεδίο από επαγόμενα ρεύματα. Έτσι,

$$\mathbf{J} = \sigma \{ \mathbf{E} + [\mathbf{u} \times (\mathbf{B}_{\text{ext}} + \mathbf{B}_{\text{ind}})] \} \quad (2.12)$$

και  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  είναι συνάρτηση του  $\mathbf{J}$  μέσω της εξίσωσης (2.7).

Η παραπάνω εξίσωση είναι περίπλοκη, διότι εκτός από την επιβαλλόμενη  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  και την επιβαλλόμενη  $\mathbf{u}$ , όλες οι μεταβλητές είναι συναρτήσεις όλων των άλλων.

Ονομάζουμε  $S'$  ένα πλαίσιο αναφοράς που ακολουθεί τον αγωγό. Έπειτα (Lorrain *et al* 1988)  $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$  καθώς και  $u^2 \ll c^2$ : παρατηρητές στα σταθερά και κινούμενα πλαίσια  $S$  και  $S'$ , μετράνε τα ίδια μαγνητικά πεδία. Στα παρακάτω παραδείγματα, τα επαγόμενα ηλεκτρικά ρεύματα και το καθαρά μαγνητικά πεδία είναι στατικά και στα δύο πλαίσια.

### 2.2.3 Η πυκνότητα φορτίου ηλεκτροστατικού όγκου μέσα στους κινούμενους αγωγούς

Είναι γνωστό ότι ο χρόνος χαλάρωσης των φορτίων ηλεκτροστατικού όγκου στους αγωγούς είναι συνήθως υπερβολικά σύντομος (Lorrain *et al* 1988). Επιπλέον είναι λιγότερο γνωστό ότι, αν ένας αγωγός κινείται σε ένα μαγνητικό πεδίο, τότε μπορεί να μεταφέρει ένα φορτίο όγκου πυκνότητας (van Bladel 1984, Lorrain 1990)

$$\mathbf{Q} = -\epsilon_r \epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.13)$$

Η απόδειξη είναι απλή. Θεωρούμε την απόκλιση της εξίσωσης (10), υποθέτοντας έναν ομοιόμορφο αγωγό:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma [\nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \quad (2.14)$$

Από την αρχή διατήρησης του φορτίου έχουμε ότι :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{dQ}{dt}$$

και κάτω από σταθερές συνθήκες η αριστερή πλευρά είναι μηδενική και ισχύει :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = - \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.15)$$

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση (2.4) οδηγούμαστε στην εξίσωση (2.13). Μάλιστα όπως παρατηρούμε το  $\mathbf{Q}$  είναι ανεξάρτητο από το  $\sigma$ . Τα ηλεκτροστατικά φορτία όγκου προκύπτουν από το γεγονός ότι το πεδίο  $(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  σαρώνει εσωτερικά ελεύθερα ηλεκτρόνια. Σε μια περιοχή όπου  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  είναι θετικό, μετακινούνται ηλεκτρόνια αγωγιμότητας και η περιοχή γίνεται αρνητική. Αν όμως η ποσότητα  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  είναι αρνητική, τότε κάποια ηλεκτρόνια θα μετακινούνται προς τα έξω και η περιοχή γίνεται θετική. Επομένως οι ποσότητες  $\mathbf{Q}$  και  $\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  έχουν αντίθετα πρόσημα, όπως παραπάνω.

Οι ηλεκτροστατικοί όγκοι και τα επιφανειακά φορτία κατέχουν σημαντικό ρόλο καθώς οι αγωγοί κινούνται σε μαγνητικό πεδίο, επειδή όπως θα δούμε και παρακάτω το πεδίο τους  $\mathbf{E}$  ακυρώνει τουλάχιστον τμήμα από το πεδίο του  $(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  στην εξίσωση (2.11).

Από την εξίσωση (2.13), η ποσότητα  $\mathbf{Q}$  είναι συνάρτηση του  $\mathbf{B}$ , η οποία βασίζεται σε άλλες μεταβλητές της εξίσωσης (2.12). Φυσικά, το δυναμικό  $\mathbf{V}$  και ως εκ τούτου το πεδίο  $\mathbf{E}$  στην εξίσωση (2.12) εξαρτάται από το  $\mathbf{Q}$  και συνεπώς από το  $\mathbf{B}$ .

Επομένως οι εξισώσεις (2.12) και (2.13) είναι και οι δύο αρκετά περίπλοκες και ίσως δε θα οδηγούσε σε κάποιο αξιόλογο συμπέρασμα η προσπάθεια για την ανάλυση τους. Γεγονός το οποίο παραπέμπει να επικεντρωθούμε και να ερευνήσουμε μόνο συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου θα ισχύει είτε ότι  $\mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$  είτε ότι  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$ . Τότε, λοιπόν, μπορούμε να αγνοήσουμε τους όρους  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  στις εξισώσεις (2.12) και (2.13), αλλά μπορούμε ακόμα να υπολογίσουμε τη συνιστώσα  $\mathbf{B}_{\text{ind}}$  από το  $\mathbf{J}$ .

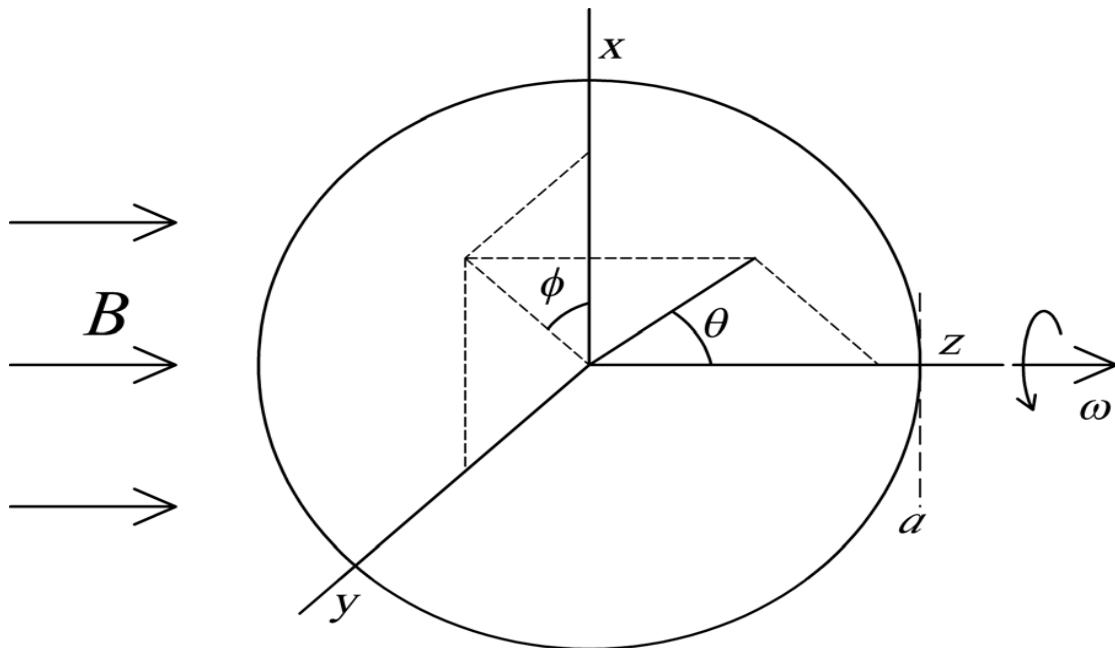
## 2.3 Παραδείγματα

### 2.3.1 Ομοιόμορφο πεδίο παράλληλο στον άξονα περιστροφής

Η περίπτωση αυτή έχει τις ρίζες της ανάπτυξης της στην έρευνα των Hertz και Vinti, ενώ ο Lorrain ήταν εκείνος που πρόσφατα ασχολήθηκε με την περιστροφή μιας στέρεας σφαίρας. Πρωτού ασχοληθούμε με πιο περίπλοκες περιπτώσεις, επαναλαμβάνουμε την διατύπωση προκειμένου να αναπτυχθεί σημειογραφία και έννοιες στα οποία και θα στηριχθούμε κατόπιν. Βασικές στη λογική που έχει αναπτυχθεί αποτελούν οι σχέσεις για την μετατροπή μεταξύ σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων. Συγκεκριμένα η βασική γεωμετρία την οποία μελετάμε φαίνεται στο σχήμα 2.3 συμπεριλαμβανομένων των σφαιρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων. Επομένως λαμβάνοντας τον άξονα  $z$  ευθυγραμμισμένο με το εφαρμοσμένο μαγνητικό πεδίο και το διάνυσμα περιστροφής  $\boldsymbol{\omega}$ .

Καθώς η σφαίρα βρίσκεται σε κατάσταση περιστροφής, υλικό κινείται μέσα στο εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο και σύμφωνα με το νόμο του Lorentz αυτό δημιουργεί δυνάμεις αναλογικά με το  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ , όπου  $\mathbf{u}$  είναι η ταχύτητα που φορτίζεται. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι η σφαίρα είναι ουδέτερη οι δυνάμεις στα σημεία που έχουμε αρνητική και θετική φόρτιση πρακτικά σχεδόν

αλληλοαναιρούνται. Ωστόσο η αγωγιμότητα που παρουσιάζει η σφαίρα προσδίδει την ιδιότητα τα ηλεκτρόνια να μπορούν να κινούνται ελεύθερα σε αντίθεση με τα πρωτόνια που μένουν ακίνητα, γεγονός το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε ανακατανομή του φορτίου και να γεννήσει πιθανά ρεύματα.



Σχήμα 2.3

Ο στόχος της ανάλυσης είναι να προσδιοριστεί ποιες (αν υπάρχουν) δυνάμεις και ροπές είναι αισθητές από τη σφαίρα ως αποτέλεσμα της αναδιανομής που προκύπτει από τη φόρτιση και τα ρεύματα που επάγονται. Για να αρχίσουμε, ορίζουμε ως διάνυσμα μήκους  $\alpha$  που δείχνει οποιαδήποτε θέση στην επιφάνεια της κοίλης σφαίρας ως εξής:

$$\alpha = \{\alpha \sin\theta \cos\phi, \alpha \sin\theta \sin\phi, \alpha \cos\theta\}. \quad (2.16)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό η ταχύτητα σε κάθε σημείο της σφαίρας θα δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha} \\ &= -\omega \alpha \sin\theta \sin\phi \hat{x} + \omega \alpha \sin\theta \cos\phi \hat{y} \\ &= \omega \alpha \sin\theta \hat{\phi} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Η έκφραση αυτή προϋποθέτει ότι το λεπτό τοίχωμα  $h$  της κοίλης σφαίρας θεωρείται πάρα πολύ μικρόσυγκρινόμενο με την ακτίνα της σφαίρας  $\alpha$ , μια υπόθεση η οποία θα χρησιμοποιείται επαναλαμβανόμενα στην ανάλυση του προβλήματος. Πρέπει να βρούμε τις κατανομές των φορτίων και τα ρεύματα που προκαλούνται από το μαγνητικό πεδίο. Για να γίνει αυτό, εκφράζουμε το νόμο της δύναμης του Lorentz ως γενικευμένο νόμο του Ohm.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.18)$$

όπου  $\mathbf{J}$  είναι το διάνυσμα της πυκνότητας ρεύματος,  $\mathbf{E}$  είναι το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου που προκαλείται από τις κατανομές των φορτίων. Η έκφραση για τη διατήρηση της φόρτισης είναι :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

αλλά καθώς εμείς ενδιαφερόμαστε μόνο για σταθερή κατάσταση, όπου η κατανομή φόρτισης είναι σταθερή ανεξάρτητη από το χρόνο, έχουμε ότι:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.19)$$

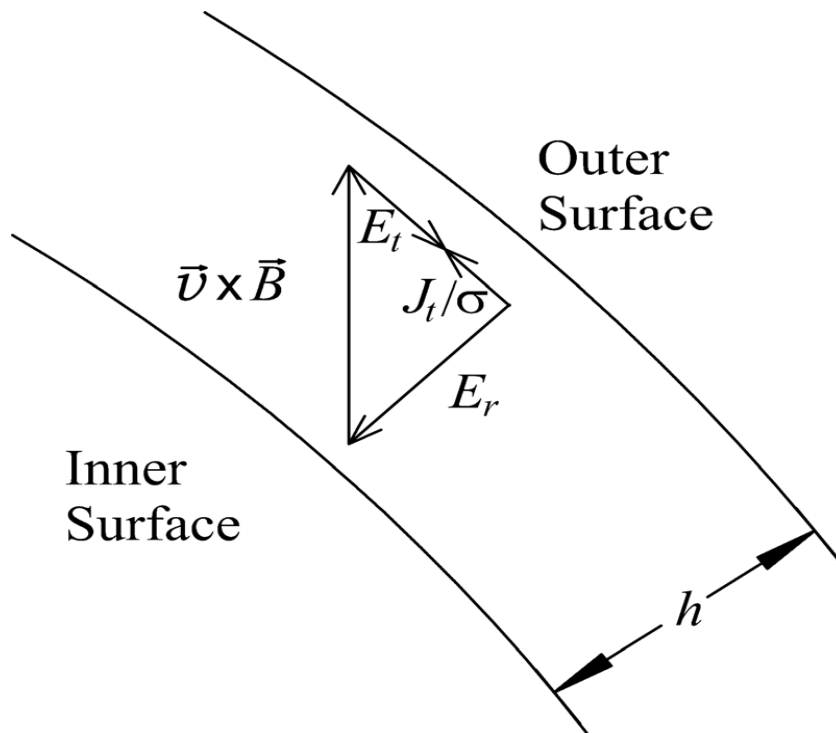
θεωρώντας όλα τα ρεύματα σε όλες τις καταστάσεις. Λαμβάνοντας υπόψιν την απόκλιση από την εξίσωση (2.18) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (2.19) καταλήγουμε ότι :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (2.20)$$

και ανακαλούμε από το νόμο του Gauss ότι η απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου είναι η κατανομή του φορτίου. Ωστόσο, πριν κάνοντας αυτή την συσχέτιση πρέπει να εξετάσουμε τη γεωμετρία του προβλήματος. Οι κατανομές των φορτίων και τα ρεύματα περιορίζονται στο ότι οι φορτίσεις δεν μπορούν να αφήσουν το κέλυφος και σε αυτόν τον περιορισμό πρέπει να ληφθούν υπόψιν τα μαθηματικά. Σε αυτό οδηγούμαστε υποθέτοντας ότι τα ρεύματα σταθερής ροής δε μπορούν να ρέουν ακτινικά σε ένα κέλυφος και έτσι μπορούν να έχουν μόνο ακτινική συνιστώσα. Στο σχήμα 2.4 παρουσιάζεται και γραφικά αυτή η υπόθεση. Αλλά το ακτινικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το αποτέλεσμα των φορτίσεων που κατανέμονται μεταξύ της εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας της σφαίρας. Βέβαια, επειδή η σφαίρα αποτελείται από ένα λεπτό κέλυφος, οι φορτίσεις αυτές θα συμβαίνουν κοντά η μία στην άλλη και επιπλέον σχεδόν θα ακυρώνονται, αποδίδοντας κατά αυτό τον τρόπο όχι καθαρές δυνάμεις ή ροπές στη σφαίρα. Επομένως, καθ'όλη την ανάλυση παρακάτω θα αγνοείται η ακτινική συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης και μόνο οι εφαπτομενικές συνιστώσες θα λαμβάνονται υπόψιν (οι εφαπτομενικές συνιστώσες θα υποδεικνύονται με το συμβολισμό "t"). Επιστρέφοντας ξανά στο σχήμα 2.4, παρατηρούμε ότι η εφαπτομενική συνιστώσα της μαγνητικής δύναμης αποτελείται ως συνδυασμός του (εφαπτομενικού) ηλεκτρικού πεδίου και του ρεύματος.

Τώρα, ανακαλώντας την ταχύτητα από την εξίσωση (2.17) μπορούμε να γράψουμε ότι:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \omega a B \sin\theta (\cos\phi \hat{x} + \sin\phi \hat{y}) \\ &= \omega a B \sin\theta (\sin\theta \hat{r} + \cos\theta \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (2.21)$$



Σχήμα 2.4

Ένα μικρό τμήμα της περιστρεφόμενης σφαίρας δείχνει την κατεύθυνση της πυκνότητας της δύναμης κατά τη φόρτιση στον κινούμενο αγωγό και στο ηλεκτρική αντισταθμιστική συνιστώσα πεδίου και ρεύματος.

Στη συνέχεια, μπορούμε να ορίσουμε μια επαπτομενική πυκνότητα ρεύματος ως  $\rho_t$  λαμβάνοντας την απόκλιση του επαπτομενικού τμήματος της μαγνητικής δύναμης και συνδυάζοντας και την εξίσωση (2.19) και με το νόμο του Gauss αποκτούμε την σχέση:

$$\begin{aligned}
 \rho_t &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_t \\
 &= -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\omega a B \sin\theta \cos\theta \hat{\theta}) \\
 &= -\epsilon_0 \omega B (2\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
 &= -2\epsilon_0 \omega B P_2^0(\cos\theta),
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

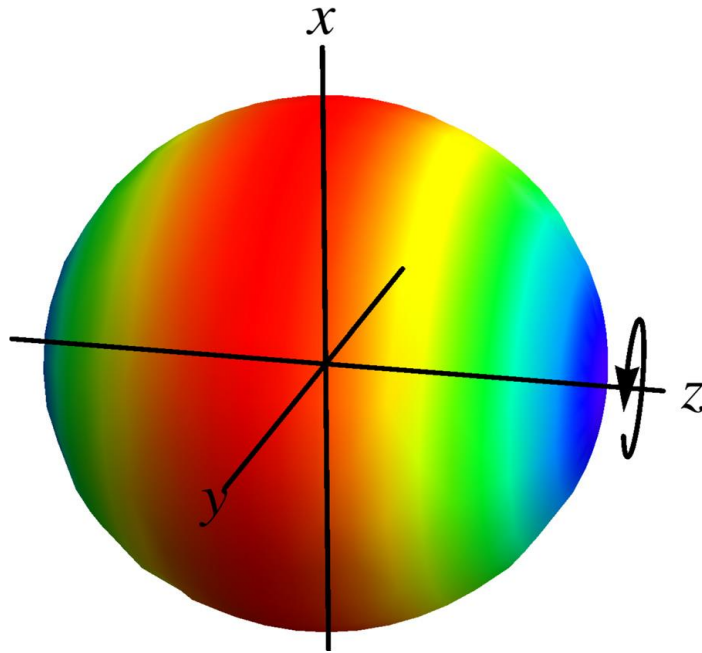
όπου  $P_2^0 = \cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta = \frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$ .

Αυτή η συνεισφορά φόρτισης παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5, όπου η θετική φόρτιση (κόκκινο) έχει ωθηθεί στο ταχύτερο μετακινούμενο τμήμα του ισημερινού της σφαίρας, αφήνοντας αρνητική φόρτιση (μπλε) στους πόλους. Έτσι, έχουμε την κατανομή των φορτίσεων αλλά δε γνωρίζουμε τα ρεύματα. Για να βρεθεί λύση για την τρέχουσα πυκνότητα, χρειάζεται να βρούμε το επαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο και στη συνέχεια να το αντικαταστήσουμε στο νόμο του Ohm. Για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση Poisson για το δυναμικό  $\Phi_t$  που προκύπτει από την κατανομή φόρτισης

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = \vec{\nabla}^2 \Phi_t = -\rho_t / \epsilon_0 = 2\omega B P_2^0(\cos\theta) \quad (2.23)$$

Κατόπιν χρησιμοποιώντας την εξίσωση :

$$\Phi(r,\theta,\phi) = \begin{cases} \frac{b\alpha^2 r^n}{n(n+1)(\alpha-\frac{h}{2})^n} P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi + \varphi_0), & r < \alpha - \frac{h}{2} \\ \frac{b\alpha^2}{n(n+1)} P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi + \varphi_0), & \alpha - \frac{h}{2} < r < \alpha + \frac{h}{2} \\ \frac{b\alpha^2 (\alpha+\frac{h}{2})^{(n+1)}}{n(n+1)(r)^{(n+1)}} P_n^m(\cos\theta) \cos(m\phi + \varphi_0), & r > \alpha + \frac{h}{2} \end{cases} \quad (A1)$$



Σχήμα 2.5

Η κατανομή του φορτίου σε ένα περιστρεφόμενο σφαιρικό κέλυφος σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα z. Το θετικό φορτίο (κόκκινο) βρίσκεται στον ισημερινό πλησίον της ζεύξης z=0 του επιπέδου x-y. Η αρνητική χρέωση (μπλε) βρίσκεται στους πόλους σε κάθε άκρο του άξονα z, κοντά στα σημεία x=0 και y=0.

το αντίστοιχο δυναμικό που προκύπτει είναι :

$$\Phi_t(\theta) = -\frac{\omega\alpha^2 B}{3} P_2^0(\cos\theta) = \frac{\omega\alpha^2 B}{6} 3(\cos^2\theta - 1) \quad (2.24)$$

Επιπλέον, το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο γίνεται :

$$\mathbf{E}_t = -\omega\alpha B \sin\theta \cos\theta \hat{\theta} \quad (2.25)$$

το οποίο είναι ίσο και αντίθετο προς την εφαπτομενική μαγνητική δύναμη,  $(\mathbf{u} \times \mathbf{B})_t$  γεγονός που υποδεικνύει ότι δεν υπάρχει πυκνότητα ρεύματος ( $\vec{j} = 0$ ) σε αυτή την περίπτωση. Αυτό και ενστικτωδώς μας οδηγεί, καθώς οι φορτίσεις έχουν ωθηθεί σε μια κυλινδρική συμμετρική διαμόρφωση, όπου βλέπουν μια σταθερή δύναμη καθώς

η σφαίρα περιστρέφεται , έτσι μπορεί να επιτευχθεί μια σταθερή κατάσταση χωρίς ρεύματα. Συνεπώς, στην πρώτη αυτή κατάσταση που εξετάζεται δεν υπάρχουν καθόλου ρεύματα και επιπλέον καθόλου ροπές ή δυνάμεις στη σφαίρα, αποτέλεσμα το οποίο έρχεται σε συμφωνία και με τη βιβλιογραφία.

Πρωτού προχωρήσουμε στη συμπλήρωση αυτού του τμήματος, ίσως κάποιος να μπορεί να υποστηρίξει τη γνώμη ότι η περιστροφή της σφαίρας φέρει μαζί της μια κατανομή φορτίου και δημιουργεί ένα πλέγμα ρεύματος γύρω από τον άξονα z. Αυτό είναι πράγματι σωστό. Καθώς το φορτίο μεταφέρεται από μια κινούμενη οντότητα, δημιουργεί ένα ρεύμα προσαγωγής (σε αντίθεση με ένα ωμικό ρεύμα), όπου τα ηλεκτρόνια κινούνται σε σχέση με τον αγωγό. Βέβαια, εξαιτίας της πολύ μικρής πυκνότητας φορτίου – ως σημειώσουμε τον παράγοντα  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  F/m στην εξίσωση (2.22) – και τη χαμηλή ταχύτητα περιστροφής της σφαίρας, το επαγόμενο ρεύμα εδώ θα είναι πολύ μικρό, της τάξης των νανοαμπερ και έτσι μπορεί να αγνοηθεί.

### 2.3.2 Ομοιόμορφο πεδίο κάθετο στον άξονα περιστροφής

Αυτή η περίπτωση είναι πιο αντιπροσωπευτική και περιγράφει με καλύτερη προσέγγιση την αλληλεπίδραση που προκύπτει ανάμεσα σε ένα διαστημικό αντικείμενο που περιστρέφεται με το μαγνητικό πεδίο της Γης και μελετήθηκε εκτενώς στα τέλη του 1950. Το σύστημα συντεταγμένων απεικονίζεται στο σχήμα 2.6 με τη σφαίρα να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x και το εφαρμοζόμενο πεδίο να ευθυγραμμίζεται με τον άξονα z ,  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Όσον αφορά το διάνυσμα περιστροφής αυτό δίνεται ως εξής :  $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{x}$  και το διάνυσμα της ταχύτητας προκύπτει να είναι

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha} = -\omega\alpha \cos\theta\hat{y} = \omega\alpha \sin\theta + \omega\alpha \sin\theta\sin\phi\hat{z} \quad (2.26)$$

Η μαγνητική δύναμη που δημιουργείται από την κίνηση του κελύφους δίνεται από τη σχέση :

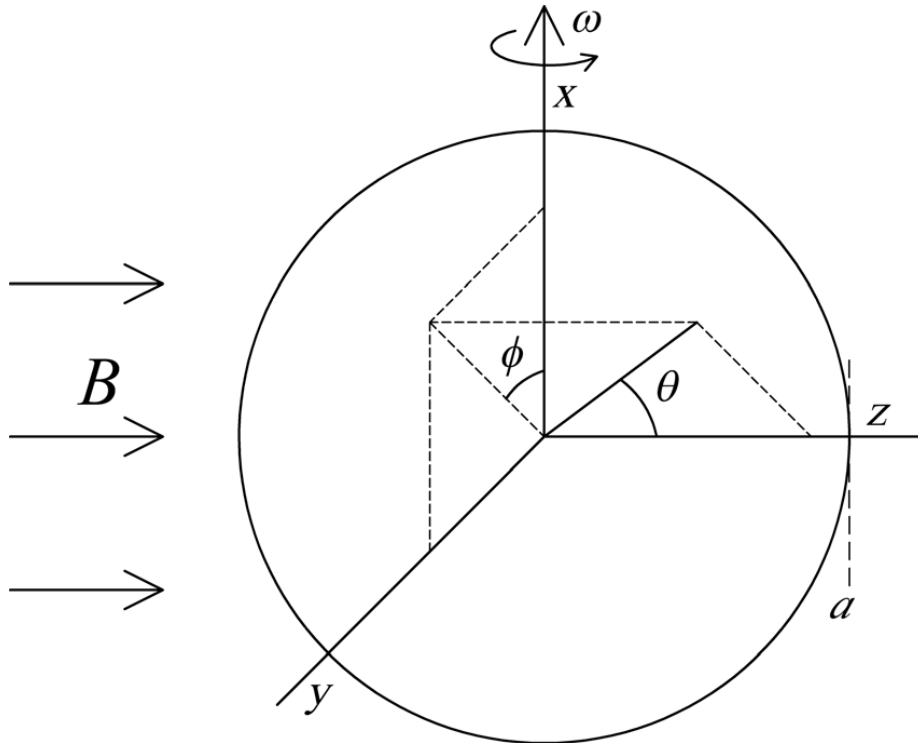
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= -\omega\alpha B \cos\theta\hat{x} \\ &= -\omega\alpha \sin\theta\cos\theta\cos\phi B\hat{r} - \omega\alpha \cos^2\theta\cos\phi B\hat{\theta} + \omega\alpha\cos\theta\sin\phi B\hat{\phi} \end{aligned} \quad (2.27)$$

και κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα x. Ομοίως με πριν μπορούμε να βρούμε την προκύπτουσα πυκνότητα επαπτομενικού φορτίου, θεωρώντας την απόκλιση του επαπτομενικού τμήματος της μαγνητικής δύναμης και έχουμε

$$\begin{aligned} \rho_t &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t \\ &= -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B})_t \\ &= -\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot (\omega\alpha \cos^2\theta\cos\phi B\hat{\theta} + \omega\alpha\cos\theta\sin\phi B\hat{\phi}) \\ &= -3\epsilon_0\omega B \cos\theta\sin\theta\cos\phi \\ &= -\epsilon_0\omega B P_2^1(\cos\theta)\cos\phi, \end{aligned} \quad (2.28)$$

όπου  $P_2^1(\cos\theta) = 3\cos\theta\sin\theta$





Σχήμα 2.6

Η βασική γεωμετρία και τα συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιήθηκαν για να μοντελοποιήσουν μια περιστρεφόμενη κοίλη σφαίρα όταν ο άξονας περιστροφής είναι κάθετος σε εφαρμόζόμενο ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο.

που αποδίδει την κατανομή φορτίου που απεικονίζεται στο σχήμα 2.7 παρακάτω. Θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από αυτήν την επαπτομενική πυκνότητα φορτίου. Έτσι, ξεκινώντας με την εξίσωση Poisson λαμβάνουμε :

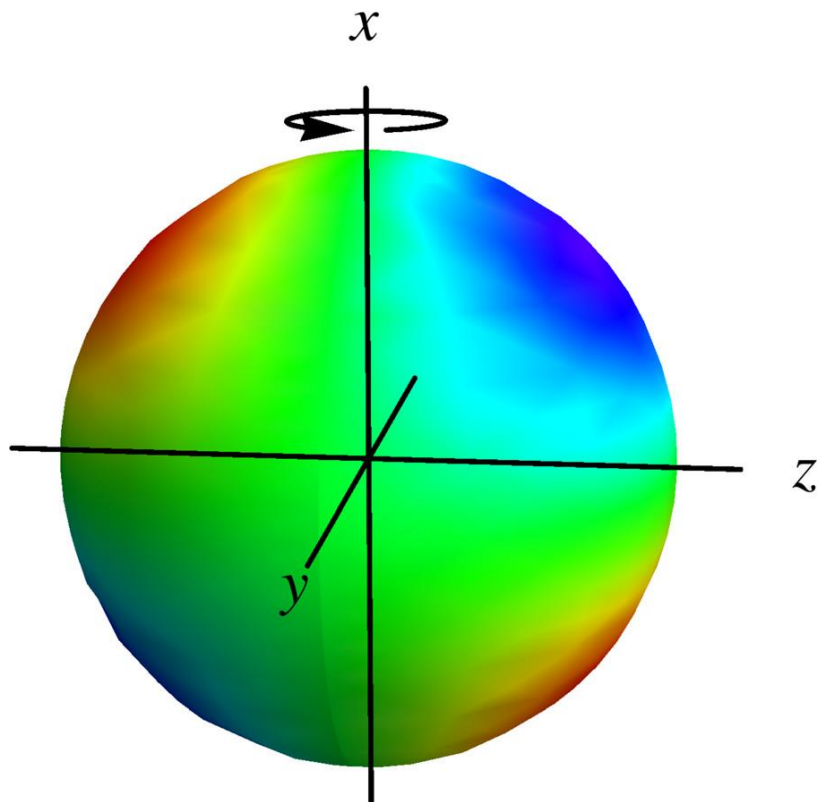
$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_t = \vec{\nabla}^2 \Phi_t = -\rho_t / \epsilon_0 = -\omega B P_2^1(\cos\theta) \cos\phi \quad (2.29)$$

Κάνοντας, λοιπόν, χρήση πάλι της σχέσης (A1) μπορούμε να υπολογίσουμε το αντίστοιχο δυναμικό :

$$\begin{aligned} \Phi_t(\theta, \phi) &= \frac{\omega \alpha^2 B}{6} P_2^1(\cos\theta) \cos\phi \\ &= -\frac{\omega \alpha^2 B}{2} \cos\theta \sin\theta \cos\phi \end{aligned} \quad (2.30)$$

Το επαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο κέλυφος γίνεται τότε :

$$\mathbf{E}_t = \frac{\omega \alpha B}{2} (1 - \sin^2\theta) \cos\phi \hat{\theta} - \frac{\omega \alpha B}{2} \cos\theta \sin\phi \hat{\phi} \quad (2.31)$$



Σχήμα 2.7

Η κατανομή του φορτίου σε ένα σφαιρικό κέλυφος που περιστρέφεται κάθετα σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο κατά μήκος του άξονα  $z$ . Η θετική φόρτιση (κόκκινο) συγκεντρώνεται κοντά στο  $y=0$  όπου  $x$  και  $z$  έχουν αντίθετες ενδείξεις ενώ το αρνητική φόρτιση (μπλε) συγκεντρώνεται κοντά στο  $y=0$  όπου  $x$  και  $z$  έχουν τα ίδια σημάδια.

### 2.3.3 Άκαμπτο αντικείμενο, χωρίς περιστροφή, $\mathbf{J}=0$ , $\mathbf{B}_{\text{ind}}=0$

Ένα άκαμπτο αγώγιμο αντικείμενο που θεωρούμε ότι έχει αυθαίρετη αγωγιμότητα, σχήμα και μέγεθος κινείται με σταθερή ταχύτητα  $\mathbf{u}$  και χωρίς περιστροφή, στο κενό χώρο σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Στη συνέχεια στο σχήμα 2.8 απεικονίζεται μια χάλκινη πλάκα σαν παράδειγμα. Σημειώνεται ότι δεν υπάρχει εξωτερικό κύκλωμα.

Αρχικά, η πλάκα είναι ακίνητη στο πεδίο  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$ . Κατόπιν, μια εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη  $F$  τραβάει την πλάκα στα δεξιά. Η πλάκα τότε επιταχύνει και αυτό έχει ως συνέπεια να αποκτά μια ταχύτητα  $u$ . Το πεδίο  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$  οδηγεί το επαγόμενο ηλεκτρικό ρεύμα πυκνότητας  $\mathbf{J}$  στην κατεύθυνση προς τα κάτω και ηλεκτροστατικά φορτία συσσωρεύονται στο πάνω και κάτω μέρος της πλάκας. Στο σχήμα 2.8 απεικονίζεται η δύναμη πεδήσεως, πυκνότητας  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , που αντιτίθεται στη δύναμη  $F$ , καθώς και στον προσανατολισμό του επαγόμενου μαγνητικού πεδίου. Ωστόσο το ερώτημα είναι τι συμβαίνει όταν έχει επιτευχθεί μια σταθερή κατάσταση.

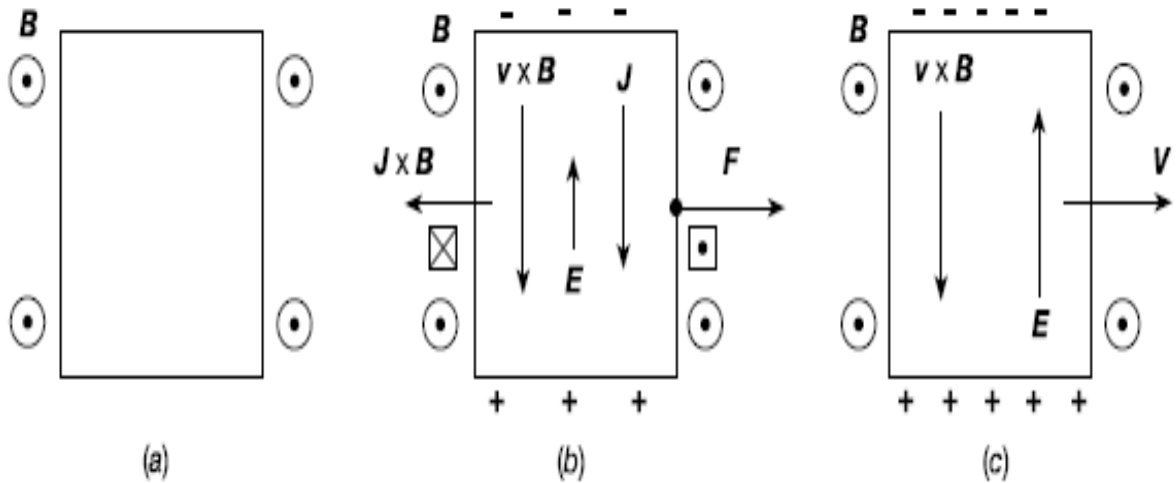
Στο υπόλοιπο πλαίσιο  $S'$  του αγωγού, το  $\mathbf{B}'$  είναι σταθερό. Χρησιμοποιώντας μια γενικότερη διατύπωση της εξίσωσης (6) με την χρονική παράγωγο του  $\mathbf{B}$  στα δεξιά,

$$\nabla' \times \mathbf{J}' = \sigma \nabla' \times \mathbf{E}' = -\sigma \frac{d\mathbf{B}'}{dt'} = 0 \quad (2.32)$$

Η αγωγιμότητα  $\sigma$  είναι η ίδια και στα δύο πλαίσια αν ισχύει ότι  $u^2 \ll c^2$ .

Εφόσον δεν υπάρχει εξωτερικό κύκλωμα τα επαγόμενα ρεύματα, που τυχόν υπάρχουν, μπορούν να ρέουν μόνο σε κλειστούς βρόχους. Ονομάζουμε αυθαίρετα  $C'$  έναν κλειστό βρόχο μέσα στη πλάκα και  $A'$  μια αυθαίρετη επιφάνεια που ορίζεται από το βρόχο  $C'$ . Έπειτα από το θεώρημα του Stokes λαμβάνουμε:

$$\oint_{C'} \mathbf{J}' \cdot d\mathbf{l}' \equiv \int_{A'} (\nabla' \times \mathbf{J}') \cdot d\mathbf{A}' = 0 \quad (2.33)$$



Σχήμα 2.8

**Σχήμα 2.8.** Παράδειγμα 1. Μια ορθογώνια πλάκα χαλκού κινείται προς τα δεξιά χωρίς περιστροφή με σταθερή ταχύτητα  $\mathbf{u}$  σε ένα ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$  που δείχνει έξω από το χαρτί. (α) Η πλάκα χαλκού είναι πρώτη ακίνητη στο πεδίο  $\mathbf{B}$ . (β) Μια εξωτερικά εφαρμοζόμενη δύναμη  $\mathbf{F}$  τραβάει την πλάκα προς τα δεξιά με τη σταθερή ταχύτητα  $\mathbf{u}$ . Το πεδίο  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  προκαλεί επαγωγικό ρεύμα, πυκνότητας  $\mathbf{J}$ , να ρέει προς τα κάτω, φορτίζοντας τις επάνω και κάτω επιφάνειες μέχρι το πεδίο  $\mathbf{E}$  που προκύπτει να ακυρώνει  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ . Τα τετράγωνα δείχνουν τον προσανατολισμό του μαγνητικού πεδίου του επαγόμενου ρεύματος. Υπάρχει μια μαγνητική δύναμη πεδήσεως, πυκνότητας  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , που αντιτίθεται σε μέρος της δύναμης  $\mathbf{F}$ . (γ) Σύντομα, τα ηλεκτροστατικά φορτία έχουν δημιουργήσει την τιμή ισορροπίας τους, και  $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{J} = 0$ . Δεν υπάρχει δύναμη πέδησης,  $\mathbf{F} = 0$ , και η πλάκα χαλκού συνεχίζει να κινείται προς τα δεξιά υπό την απουσία οποιασδήποτε δύναμης. Από εκεί και πέρα, η κινούμενη πλάκα χαλκού δεν έχει καμία επίδραση στο μαγνητικό πεδίο επειδή δεν υπάρχουν επαγόμενα ρεύματα. Δεν υπάρχουν ηλεκτροστατικά φορτία όγκου μέσα στη πλάκα και δεν υπάρχει μαγνητική δύναμη πέδησης.

Δεδομένου ότι το  $C'$  είναι αυθαίρετο, τότε  $J' = 0$  και μόλις επιτευχθεί μια σταθερή κατάσταση δεν υπάρχει καθόλου επαγόμενο μαγνητικό ρεύμα και καθόλου επαγόμενο μαγνητικό πεδίο. Από την εξίσωση παραπάνω έχουμε ότι :

$E + (u \times B_{ext}) = 0$  : η ποσότητα  $E$  του ηλεκτροστατικού φορτίου ακυρώνει το πεδίο

$u \times B$  ακριβώς μέσα σε κάθε σημείο της πλάκας, ανεξαρτήτως από την τιμή της αγωγιμότητας  $\sigma$ . Δηλαδή και οι δύο ποσότητες  $E$  και  $u \times B$  είναι ανεξάρτητες της τιμής της αγωγιμότητας  $\sigma$ . Καθώς η κινούμενη πλάκα δεν μεταφέρει ρεύμα, δεν διαταράσσει τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου.

Από την εξίσωση (2.13), το  $Q$  μέσα στην πλάκα είναι μηδέν επειδή το  $u \times B$  είναι ανεξάρτητο από τις συντεταγμένες. Επομένως υπάρχει καθαρή πυκνότητα φόρτισης μόνο στην επιφάνεια.

Αν η πλάκα χαλκού μετακινηθεί σε ένα αγωγίμο ρευστό, τότε το πεδίο  $E$  δεν θα ακύρωνε εντελώς το πεδίο  $u \times B$ , το ρεύμα θα ρέει τόσο μέσω της πλάκας όσο και του ρευστού και θα υπήρχε δύναμη μαγνητικής πέδησης. Στη συνέχεια, η εφαρμοζόμενη δύναμη  $F$  θα πρέπει να ρυθμιστεί ανάλογα για να διατηρηθεί σταθερή η ταχύτητα  $u$ .

### 2.3.4 Περιστρεφόμενη σφαίρα $J = 0$ , $B_{ind} = 0$

Μια ομοιογενής αγωγίμη σφαίρα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο. Ο άξονας περιστροφής είναι παράλληλος προς το πεδίο. Ένα ερώτημα που γεννάται είναι τι αποτέλεσμα έχει η σφαίρα στο πεδίο.

Όπως είδαμε και στο παράδειγμα 1, το  $B'$  είναι σταθερό. Στη συνέχεια δεν υπάρχει επαγόμενο ρεύμα στη σφαίρα και καθόλου επαγόμενο μαγνητικό πεδίο. Το μαγνητικό πεδίο δεν επηρεάζεται από την περιστρεφόμενη αγωγίμη σφαίρα. Σημειώνεται ότι αυτό ήταν γνωστό στον J J Thomson (1893) πάνω από έναν αιώνα πριν.

Αυτό το γεγονός έχει δημιουργήσει σύγχυση σε πολλούς συγγραφείς: πώς μπορεί δηλαδή να μην υπάρχει επαγόμενο ρεύμα όταν υπάρχει ένα πεδίο  $u \times B$ . Η εξήγηση είναι ότι το πεδίο  $E$  των ηλεκτροστατικών φορτίων ακυρώνει  $u \times B$  σε κάθε σημείο. Οι Bladel (1984) και Lorrain (1990) έδειξαν ότι ο όγκος και το φορτίο επιφανειακής πυκνότητας είναι, αντίστοιχα :

$$Q = -2 \epsilon_0 \epsilon_r \omega B \quad S = \epsilon_0 \omega B R \left[ \left( \frac{3}{2} + \epsilon_r \right) \sin^2 \theta - 1 \right] \quad (2.34)$$

όπου  $R$  είναι η ακτίνα της σφαίρας και  $\theta$  είναι η γωνία μεταξύ του διανύσματος θέσης  $r$  και  $B$ .

Τονίζεται ότι το μαγνητικό πεδίο δεν χρειάζεται να είναι ομοιόμορφο. Όσο το εφαρμοζόμενο μαγνητικό πεδίο είναι συμμετρικό ως προς τους άξονες,

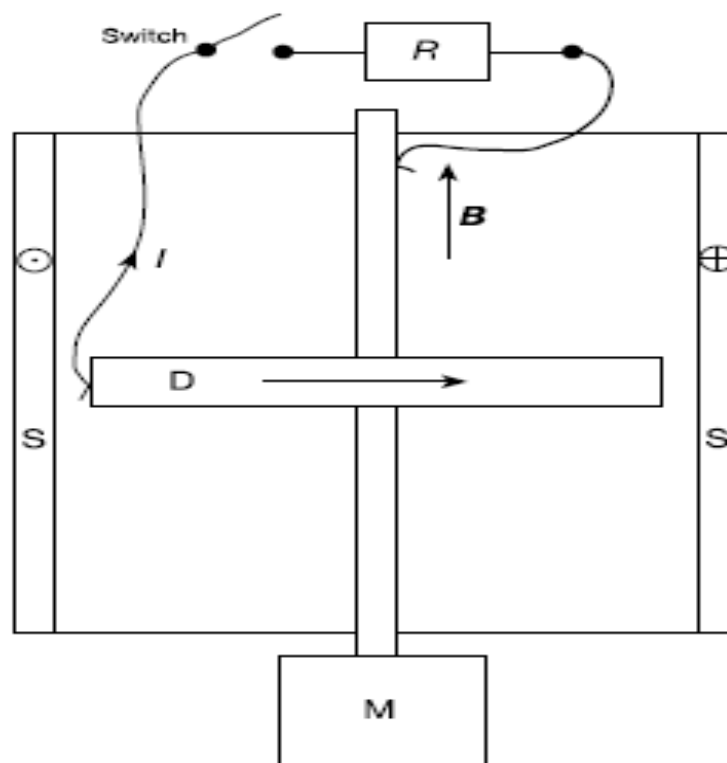
$$\frac{\partial B'}{\partial t} = 0$$

και δεν εμφανίζονται επαγόμενα ηλεκτρικά ρεύματα και κανένα επαγόμενο μαγνητικό πεδίο.

Το περιστρεφόμενο σώμα δεν χρειάζεται να είναι ούτε σφαιρικό ούτε ομοιογενές. Μέσα σε ένα αγωγίμο σώμα ανεξαρτήτως σχήματος, μεγέθους ή αγωγιμότητας που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε ένα αξονοσυμμετρικό μαγνητικό πεδίο, ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής βλέπει ένα σταθερό πεδίο. Και πάλι, δεν υπάρχει επαγωγή μαγνητικού πεδίου: το μαγνητικό πεδίο μένει αμετάβλητο από την παρουσία του περιστρεφόμενου σώματος.

### 2.3.5 Δίσκος Faraday $\mathbf{J} \neq 0$ , $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$

Στο σχήμα 2.9, παρακάτω, απεικονίζεται ένας δίσκος γεννήτριας ή ένας δίσκος Faraday ή αλλιώς μια ομοπολική γεννήτρια (Lorrain *et al* 1988, Lorrain 1990, 1995). Το πεδίο  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  στο δίσκο οδηγεί ένα ρεύμα  $I$  στη κατεύθυνση που φαίνεται. Προχωρούμε στην αφαίρεση του πεδίου του εξωτερικού κυκλώματος. Τα μαγνητικά πεδία ρεύματος που εμφανίζονται κατά μήκος του άξονα και στο δίσκο προσθέτουν αζιμουθιακά πεδία στο εφαρμοζόμενο αξονικό πεδίο  $\mathbf{B}$ . Έτσι έχουμε  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$ .



Σχήμα 2.9

Σχήμα 2.9. Παράδειγμα . Διατομή μέσω ενός δίσκου Faraday. Η συσκευή είναι συμμετρική σχετικά με τον κατακόρυφο άξονα. Μια μηχανή  $M$  περιστρέφει τον δίσκο  $D$  στο αξονικό μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς  $S$ . Με τις πολικότητες που φαίνονται το πεδίο  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  στο δίσκο οδηγεί ένα ρεύμα  $I$  στην

κατεύθυνση που φαίνεται διαμέσω του διακόπτη και της αντίστασης R. Υπάρχουν όλες οι επαφές γύρω από τον άξονα και το χείλος.

Είναι αρκετά απλό να δείξουμε ότι το καθαρό μαγνητικό πεδίο είναι στατικό, ανεξάρτητα από την περιστροφή : σταματώντας την περιστροφή, ανοίγοντας τον διακόπτη του κυκλώματος και κατόπιν εφαρμόζοντας στους ακροδέκτες του μια τάση που επαναφέρει το ρεύμα I. Κατά συνέπεια η ισχύουσα κατανομή και το μαγνητικό πεδίο θα μείνουν αμετάβλητα. Θα παρατηρήσουμε τελικά ότι το μαγνητικό πεδίο θα είναι στατικό ανεξαρτήτως αν ο δίσκος εκτελεί περιστροφική κίνηση ή όχι.

### 2.3.6 Το υγρό μέσα σε μια σφαίρα, $\mathbf{J} \neq 0$ , $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$

Το αγώγιμο υγρό μέσα στη σφαίρα ακτίνας R χαρακτηρίζεται από μια αζιμουθιακή ταχύτητα u που είναι συνάρτηση των ποσοτήτων ρ και z :

$$\mathbf{u} = \omega\rho [1 - K(z^2 / R^2)] \hat{\phi} \quad (2.35)$$

Αν η τιμή του K λαμβάνει θετικές τιμές, τότε η περιστροφή του ισημερινού θα είναι ταχύτερη από του πόλους. Η σφαίρα περιστρέφεται σε ένα ομοιόμορφο αξονικό μαγνητικό πεδίο τέτοιο ώστε :  $\mathbf{B}_{\text{ext}} \hat{z}$ .

Στο εσωτερικό της σφαίρας, το πεδίο  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ext}}$  δείχνει παντού στην κατεύθυνση  $\hat{\rho}$ , ενώ το πεδίο E προκύπτει από την παρουσία ηλεκτροστατικών φορτίων όγκου και επιφάνειας. Εξαιτίας της αξονοσυμμετρίας, το πεδίο E έχει μόνο  $\hat{\rho}$  και  $\hat{z}$  συνιστώσες. Έπειτα, από την εξίσωση (2.10), η ποσότητα J έχει μόνο  $\hat{\rho}$  και  $\hat{z}$  συνιστώσες και ένα φύλλο ρεύματος έχει το σχήμα ενός δακτυλίου. Συνεπώς το επαγόμενο μαγνητικό πεδίο είναι αζιμουθιακό, όπως η ταχύτητα  $\mathbf{u} = \omega\rho\hat{\phi}$  και επιπλέον  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$ .

Κάτω από σταθερές συνθήκες αν η παράμετρος σ είναι ομοιόμορφη ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \omega\rho\hat{\phi} \times (\mathbf{B}_{\text{ext}} \hat{z} + \mathbf{B}_{\text{ind}} \hat{\phi}) \\ &= \omega\rho\mathbf{B}_{\text{ext}} [1 - K(z^2 / R^2)] \hat{\rho} \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= -\epsilon_r\epsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\ &= -2\epsilon_r\epsilon_0 \omega\mathbf{B}_{\text{ext}} [1 - K(z^2 / R^2)] \end{aligned} \quad (2.37)$$

όπου  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{Q}$  και E είναι όλα ανεξάρτητα από την αγωγιμότητα σ.

Επιπροσθέτως,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{J} &= \sigma \nabla \times [-\nabla V + (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{ext})] \\ &= \sigma \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{ext})\end{aligned}\quad (2.38)$$

$$= -2\omega\sigma \mathbf{B}_{ext} K \left(\frac{\rho z}{R^2}\right) \hat{\phi}\quad (2.39)$$

Αν θεωρήσουμε ότι τα  $\omega$ ,  $\mathbf{B}_{ext}$ ,  $z$  είναι όλα θετικά, ο στροβιλισμός  $\nabla \times \mathbf{J}$  δείχνει στην κατεύθυνση  $-\hat{\phi}$ . Το μαγνητικό πεδίο είναι αυτό ενός σπειροειδούς πηνίου και τα  $\nabla \times \mathbf{J}$  και  $\mathbf{B}_{ind}$  δείχνουν προς την ίδια κατεύθυνση.

Λαμβάνοντας τα  $\omega$ ,  $\mathbf{B}_{ext}$ ,  $K$  να είναι όλα θετικά και το  $\mathbf{B}_{ind}$  να δείχνει στην κατεύθυνση  $-\hat{\phi}$  στο άνω ημισφαίριο και στην κατεύθυνση  $+\hat{\phi}$  στο κάτω ημισφαίριο: οι μαγνητικές πεδιακές γραμμές παραμορφώνονται στη φορά του ρεύματος, αλλά είναι ακίνητες.

Σε αυτό το σημείο κάνουμε την εξής υπόθεση, ότι τα μεγέθη  $\omega$  και  $\mathbf{B}_{ext}$  είναι ξανά θετικά, αλλά η ποσότητα  $K$  βρίσκεται μεταξύ των τιμών  $-1$  μέχρι  $0$ . Αυτό προκαλεί μεταβολή των προσήμων των  $\nabla \times \mathbf{J}$  και  $\mathbf{B}_{ind} \hat{\phi}$  με αποτέλεσμα οι πεδιακές μαγνητικές γραμμές να παραμορφώνονται αντίθετα στη φορά του ρεύματος. Υπογραμμίζεται ότι για μια δεδομένη γωνιακή ταχύτητα αυτά είναι στάσιμα.

Από την εξίσωση (2.39) εξάγεται ότι ο στροβιλισμός  $\nabla \times \mathbf{J}$  και επομένως η πυκνότητα ρεύματος  $\mathbf{J}$ , είναι ανάλογα με την αγωγιμότητα  $\sigma$ , το οποίο είναι σύμφωνο με την υπόθεση. Ακόμα η εξίσωση (2.10) δείχνει ότι το μέγεθος  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$  είναι ανεξάρτητο της αγωγιμότητας  $\sigma$ .

Επιπρόσθετα ως θεωρήσουμε μια κλειστή καμπύλη  $C$  που ακολουθεί τον αγωγό και τη μαγνητική ροή  $\Phi$  συνδέοντας την καμπύλη  $C$ . Η καθαρή πυκνότητα μαγνητικής ροής αποτελεί το άθροισμα του των πεδίων  $\mathbf{B}_{ext}$  και  $\mathbf{B}_{ind}$  τα οποία είναι αξονικό και αζιμουθιακό αντίστοιχα. Επισημαίνεται ότι η ταχύτητα του δοθέντος σημείου στην καμπύλη  $C$  είναι αζιμουθιακό.

Όσον αφορά την καμπύλη  $C$ , επιλέγουμε ένα κύκλο που βρίσκεται αρχικά σε ένα ακτινικό επίπεδο μέσω του άξονα συμμετρίας. Το κέντρο της καμπύλης  $C$  είναι στο σημείο  $\rho = R/2$ ,  $z = R/2$ . Δεδομένου ότι η ταχύτητα ενός σημείου στη καμπύλη  $C$  είναι καθαρά αζιμουθιακή, η ροή του αζιμουθιακού πεδίου  $\mathbf{B}_{ind}$  μέσω της καμπύλης  $C$  είναι συνεχής.

Ανεξαρτήτως αν η τιμή του  $K$  είναι θετική ή αρνητική, η αζιμουθιακή ταχύτητα ενός σημείου στη καμπύλη μεταβάλλεται με το  $z$ , όπως φαίνεται στην εξίσωση (2.35). Παρατηρώντας από προηγουμένως, η περιοχή η οποία περικλείεται από την καμπύλη αλλάζει με την πάροδο του χρόνου καθώς επίσης και το μέγεθος  $\Phi$  μεταβάλλεται με τη διέλευση του χρόνου.

Τέλος, η μαγνητική ροή  $\Phi$  η οποία συνδέεται με μια κλειστή καμπύλη  $C$  που κινείται με το ρευστό είναι γενικά μη σταθερή και δε λαμβάνεται υπόψιν η αγωγιμότητα  $\sigma$ .

### 2.3.7 Συμπεράσματα

Αυτά τα τέσσερα τελευταία παραδείγματα που αναφέρθηκαν παραπάνω είναι αρκετά πληροφοριακά (παρ' όλο που θεωρήθηκε ότι  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$  ή  $\mathbf{B}_{\text{ind}} = 0$ ) ακόμα και αν πρόκειται μόνο για καταστάσεις σταθερής κατάστασης.

Για τα παραδείγματα αυτά, και για τις υποθέσεις Lundquist (1952) και Shercliff (1965), έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα που προκύπτουν οποιαδήποτε και να είναι η τιμή της αγωγιμότητας  $\sigma$ . Συγκεκριμένα έχουμε:

- [1] Κάτω από σταθερές συνθήκες, υπό την παρουσία ενός κινούμενου αγωγού, οι μαγνητικές πεδιακές γραμμές μπορούν να διατηρηθούν ανεπηρέαστες, να παραμορφωθούν σύμφωνα με τη φορά του ρεύματος ή και αντίθετα με τη φορά του ρεύματος. Το καθαρό μαγνητικό πεδίο είναι στατικό. Οι μαγνητικές πεδιακές γραμμές δε σύρονται από τον κινούμενο αγωγό (Alfvén and Fälthammar 1963).
- [2] Είτε το πεδίο  $\mathbf{E}$  ακυρώνει το πεδίο  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  ακριβώς σε κάθε σημείο εσωτερικά του αγωγού ή το  $\mathbf{E}$  ακυρώνει μόνο ένα τμήμα του  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  και υπάρχουν επαγόμενα ρεύματα, ένα επαγόμενο μαγνητικό πεδίο, ο κινούμενος αγωγός παραμορφώνει τις μαγνητικές πεδιακές γραμμές σύμφωνα με τη φορά του ρεύματος ή αντίθετα, ενώ εμφανίζεται και μαγνητική δύναμη πέδησης. Το καθαρό μαγνητικό πεδίο είναι στατικό.
- [3] Τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$  είναι και τα δύο ανεξάρτητα της αγωγιμότητας  $\sigma$ : η αύξηση της αγωγιμότητας  $\sigma$  προκαλεί ανάλογη αύξηση στην πυκνότητα του ρεύματος  $\mathbf{J}$ .

### 2.4 Σφαιρικό κέλυφος ακτίνας $R$ με ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο $\sigma$ περιστρέφεται υπό γωνιακή ταχύτητα $\omega$

Προς υπενθύμιση των μαθηματικών σχέσεων που θα μας απασχολήσουν σε αυτό το πρόβλημα, γίνεται μια μικρή αναφορά παρακάτω. Όπως γνωρίζουμε σε σημεία συνέχειας ισχύει ότι  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$  και σύμφωνα με τη διανυσματική ανάλυση η εξίσωση ικανοποιείται αυτομάτως με την αντικατάσταση

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi.$$

Κατόπιν η εξίσωση  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ικανοποιείται με την αντικατάσταση

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.40)$$

όπου  $\mathbf{A}$  το διανυσματικό δυναμικό. Απομένει ο νόμος του Ampere σύμφωνα με τον οποίο ισχύει

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.41)$$



Τώρα, το διανυσματικό δυναμικό έχει μια ενσωματωμένη ασάφεια: μπορούμε να προσθέσουμε στο δυναμικό  $\mathbf{V}$  κάθε συνάρτηση της οποίας η απόκλιση είναι μηδενική (το οποίο σημαίνει κάθε σταθερά) χωρίς να μεταβάλλουμε τη φυσική ποσότητα του  $\mathbf{E}$ . Επιπλέον μπορούμε να αθροίσουμε στο μαγνητικό δυναμικό κάθε συνάρτηση της οποίας ο στροβιλισμός εξαφανίζεται (το οποίο σημαίνει την κλίση οποιουδήποτε μεγέθους), χωρίς να εμφανιστεί καμία επίδραση στην ποσότητα  $\mathbf{B}$ . Εκμεταλλευόμενοι, λοιπόν, αυτήν την ελευθερία εξαλείφουμε την απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.41)$$

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι αυτό καθίσταται πάντα εφικτό, προχωράμε στην υπόθεση ότι το αρχικό δυναμικό μας  $\mathbf{A}_0$ , δεν είναι αποκλίνον. Αν προσθέσουμε σε αυτό κλίση του  $\lambda$  (ώστε  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla\lambda$ ) η νέα τιμή της απόκλισης προκύπτει ως

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda.$$

Μπορούμε να συμπληρώσουμε την εξίσωση, αν υπάρχει συνάρτηση του  $\lambda$  που να ικανοποιεί

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0,$$

αλλά αυτό είναι ταυτόσημο με την εξίσωση του Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

με το δεύτερο μέλος  $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$  στη θέση του  $\frac{\rho}{\epsilon_0}$  ως την "πηγή". Γνωρίζοντας πως να λύσουμε την εξίσωση Poisson, αν το  $\rho$  πηγαίνει στο 0 καθώς τείνουμε στο άπειρο η λύση της εξίσωσης δίνει το δυναμικό:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho}{r'} dt'$$

και κατά την ίδια λογική αν  $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$  πηγαίνει στο 0 καθώς τείνουμε στο άπειρο, τότε καταλήγουμε ότι

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{r'} dt',$$

αν η ποσότητα  $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$  δεν πηγαίνει στο 0 καθώς τείνουμε στο άπειρο, θα πρέπει να προβούμε σε χρήση διαφορετικών τρόπων για να ανακαλύψουμε την κατάλληλη τιμή του  $\lambda$ , απλά όπως να λάβουμε το ηλεκτρικό δυναμικό με άλλο τρόπο καθώς η διανομή φορτίου να απειρίζεται. Όμως ο ουσιώδης στόχος παραμένει. Είναι παντα δυνατόν να έχουμε το διάνυσμα δυναμικού να αποκλίνει. Για να το θέσουμε αντίστροφα, ο ορισμός  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  προσδιορίζει το στροβιλισμό του  $\mathbf{A}$ , χωρίς όμως να δίνει καμία πληροφορία για την κλίση. Κάτω από αυτές τις συνθήκες με το διανυσματικό δυναμικό, από το νόμο του Ampere καταλήγουμε

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.42)$$

Σχέση η οποία δεν είναι αρκετή, όμως με την εξίσωση Poisson (και μάλιστα σε τρεις διαστάσεις, ειδικά για τις καρτεσιανές συντεταγμένες του  $\mathbf{A}$ , ώστε να έχουμε  $\nabla^2 \mathbf{A} = (\nabla^2 A_x) \hat{x} + (\nabla^2 A_y) \hat{y} + (\nabla^2 A_z) \hat{z}$  και η εξίσωση (2.27) να πάρει την μορφή  $\nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x$ ,  $\nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y$ ,  $\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z$ ) θεωρώντας ως δεδομένο ότι το  $\mathbf{J}$  μηδενίζεται καθώς πλησιάζουμε στο άπειρο βρίσκουμε ότι:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{r'} d\tau' \quad (2.43)$$

Όσον αφορά τα γραμμικά και επιφανειακά ρεύματα,

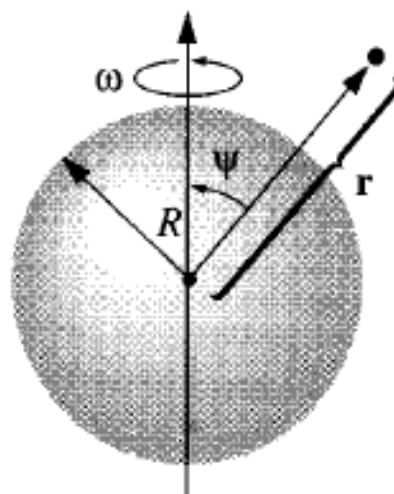
$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I}}{r'} dl' = \frac{\mu_0 \mathbf{I}}{4\pi} \int \frac{1}{r'} dl' \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{r'} da' \quad (2.44)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το  $\mathbf{A}$  δεν είναι χρήσιμο ως  $\mathbf{V}$ . Από τη μία πλευρά είναι ακόμα διάνυσμα και αν και ίσως είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις (2.43), (2.44) παρά να δουλέψουμε με το νόμο του Biot – Savart. Βολική λύση θα ήταν να εργαστούμε με ένα βαθμωτό δυναμικό

$$\mathbf{B} = -\nabla U \quad (2.45)$$

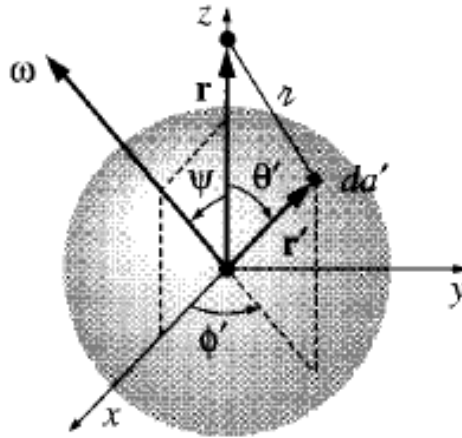
όμως έχει ως μειονέκτημα ότι είναι ασυμβίβαστο με το νόμο του Ampere, εφόσον ο στροβιλισμός της κλίσης είναι επίσης μηδενικός (ένα μαγνητοστατικό βαθμωτό δυναμικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί υπό την προϋπόθεση ότι θα κολληθεί σχολαστικά σε απλά συνδεδεμένες ελεύθερες περιοχές, αν και είναι κάτι που παρουσιάζει ελάχιστο ενδιαφέρον σε θεωρητικό επίπεδο). Επιπλέον καθώς οι μαγνητικές δυνάμεις δεν βοηθούν, το βαθμωτό δυναμικό  $\mathbf{A}$  δε δέχεται άλλη απλή φυσική ερμηνεία από τη σκοπιά πιθανής ενέργειας ανά μονάδα φόρτισης.

Εφαρμογή: ένα σφαιρικό κέλυφος ακτίνας  $R$ , μεταφέρει ομοιόμορφο επιφανειακό φορτίο  $\sigma$ , τίθεται σε περιστροφή υπό γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  (όπως παρουσιάζεται στο σχήμα 2.10).



Σχήμα 2.10

Ίσως φαίνεται εύλογο να ευθυγραμμίσουμε τον πολικό άξονα κατά μήκος του  $\omega$ , αλλά στην πραγματικότητα η ολοκλήρωση γίνεται ακόμα πιο εύκολη αν αφήσουμε το  $r$  να βρίσκεται στον άξονα  $z$ , έτσι ώστε το  $\omega$  να αποδίδεται στην γωνία  $\psi$ . Μπορούμε να προσανατολίσουμε τον άξονα  $z$ , ώστε το  $\omega$  να βρίσκεται στο επίπεδο  $xz$  όπως απεικονίζεται παρακάτω στο σχήμα 2.11 και σύμφωνα με την εξίσωση (2.44) :  $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}}{r} d\alpha'$



Σχήμα 2.11

όπου  $\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v}$ ,  $r = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrcos\theta'}$  και  $da' = R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$ . Τώρα η ταχύτητα σε ένα σημείο  $r'$  στο περιστρεφόμενο άκαμπτο σώμα της σφαίρας δίνεται από τη ποσότητα  $\omega \times r'$ : μάλιστα σε αυτή την περίπτωση αναλυτικά έχουμε

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}' = \begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \omega \sin\psi & 0 & \omega \cos\psi \\ R \sin\theta' \cos\phi' & R \sin\theta' \sin\phi' & R \cos\theta' \end{bmatrix}$$

$$= R\omega [-(\cos\psi \sin\theta' \sin\phi') \hat{x} + (\cos\psi \sin\theta' \cos\phi') \hat{y} + (\sin\psi \sin\theta' \sin\phi') \hat{z}].$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι καθένας από αυτούς τους όρους, εκτός από έναν, περιέχει είτε το  $\sin\phi'$  είτε το  $\cos\phi'$ . Επιπροσθέτως γνωρίζουμε ότι

$$\int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = 0$$

και τέτοιοι όροι δε συνεισφέρουν στον υπολογισμό. Παραμένει

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = - \frac{\mu_0 R^3 \sigma \omega \sin\psi}{2} \left( \int_0^\pi \frac{\cos\theta' \sin\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rrcos\theta'}} d\theta' \right) \hat{y}$$

και αφότου θέσουμε  $u \equiv \cos\theta'$ , το ολοκλήρωμα θα πάρει τη μορφή

$$\int_{-1}^1 \frac{u}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru}} du = - \frac{(R^2 + r^2 + Rru)}{3R^2 r^2} \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rru} \Big|_{-1}^1$$

$$= -\frac{1}{3R^2r^2} [ (R^2 + r^2 + Rr)|R - r| - (R^2 + r^2 - Rr)|R + r| ] .$$

Στην περίπτωση όπου το  $r$  θα βρίσκεται μέσα στη σφαίρα, τότε  $R > r$  και αυτή η έκφραση ελατώνεται κατά  $(2r/3R^2)$ , ενώ αν το σημείο  $r$  βρίσκεται εκτός της σφαίρας ώστε  $R < r$ , τότε μειώνεται κατά  $(2R/3r^2)$ . Υπογραμμίζεται ότι ισχύει :  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega r \sin\psi \hat{\boldsymbol{\phi}}$  και τελικά θα έχουμε :

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \text{για σημεία μέσα στη σφαίρα} \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \text{για σημεία έξω από τη σφαίρα} \end{cases} \quad (2.46)$$

Έχοντας φτάσει στον υπολογισμό του ολοκληρώματος επιστρέφουμε στις φυσικές συντεταγμένες, όπου τώρα η ταχύτητα  $\boldsymbol{\omega}$  συμπίπτει με τον άξονα  $z$  και το σημείο  $r$  είναι στο  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin\theta \hat{\boldsymbol{\phi}}, & \text{όταν } r \leq R \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma \sin\theta}{3r^2} \hat{\boldsymbol{\phi}}, & \text{όταν } r \geq R \end{cases} \quad (2.47)$$

Περιέργως, το πεδίο εσωτερικά του σφαιρικού κελύφους είναι ομοιόμορφο

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{2\mu_0 R \omega \sigma}{3} (\cos\theta \hat{\mathbf{r}} - \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{2}{3} \mu_0 R \omega \sigma \hat{\mathbf{z}} = \frac{2}{3} \mu_0 R \omega \sigma \quad (2.48)$$

Όσον αφορά το πεδίο εξωτερικά του κελύφους καταλήγουμε ότι

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma}{3r^3} (2\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}) \quad (2.49)$$

Παρατηρούμε σύμφωνα με το αποτέλεσμα της σχέσης (2.34) ότι η συμπεριφορά του πεδίου εξωτερικά του κελύφους ταυτίζεται με αυτήν ενός μαγνητικού διπόλου. Μάλιστα από τη θεωρία για έναν κυκλικό βρόχο ακτίνας  $a$ , ο οποίος διαρρέεται από ρεύμα  $I$  γνωρίζουμε ότι αληθεύουν οι σχέσεις (2.44). Ολοκληρώνοντας, λοιπόν, τη γωνία  $\phi$  από 0 μέχρι  $2\pi$  βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} A_\phi &= \frac{\mu I a}{4\pi r^2} \left( \int_0^{2\pi} 1 + \frac{a}{r} \sin\theta \cos\phi' \right) \cos\phi' d\phi' \\ &= \frac{\mu I a^2 \sin\theta}{4\pi r^2} \left( \int_0^{2\pi} \cos^2\phi' d\phi' \right) \\ &= \frac{\mu I \pi a^2 \sin\theta}{4\pi r^2} \end{aligned}$$

και τελικά προκύπτει η γνωστή σχέση για το μαγνητικό πεδίο ενός διπόλου

$$\mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{A}_\phi \hat{\boldsymbol{\phi}})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_{\varphi}) \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_{\varphi}) \hat{\theta} \\
&= \frac{\mu I \pi \alpha^2}{4 \pi r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})
\end{aligned}$$

## 2.5 Μεταλλικός δίσκος ακτίνας $\alpha$ , γωνιακής ταχύτητας $\omega$ περιστρέφεται σε ομοιόμορφο πεδίο $\mathbf{B}$

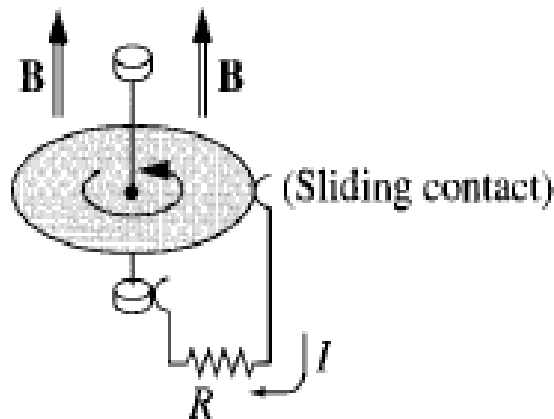
Θεωρούμε ένα μεταλλικό δίσκο ακτίνας  $\alpha$ , ο οποίος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  σε κατακόρυφο άξονα, σε ομοιόμορφο πεδίο  $\mathbf{B}$  που δείχνει προς τα πάνω. Δημιουργείται κύκλωμα συνδέοντας το ένα άκρο της αντίστασης στον άξονα και το άλλο σε μια συρόμενη επαφή, η οποία έρχεται σε επαφή με το πιο εξωτερικό σημείο του δίσκου όπως φαίνεται και στο ακόλουθο σχήμα 2.12.

Η ταχύτητα ενός τυχαίου σημείου του δίσκου που βρίσκεται σε απόσταση  $s$  από τον άξονα περιστροφής δίνεται από τη σχέση  $u = \omega s$ , έτσι λοιπόν η δύναμη ανά μονάδα φορτίου θα ισούται με  $f_{\text{mag}} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \omega s \mathbf{B} \hat{s}$ . Ακολουθώντας υπολογίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο από τη σχέση :

$$\mathbf{E} = \int_0^{\alpha} f_{\text{mag}} ds = \omega B \int_0^{\alpha} s ds = \frac{\omega B \alpha^2}{2}$$

και το ρεύμα είναι

$$I = \frac{E}{R} = \frac{\omega B \alpha^2}{2R}$$



Σχήμα 2.12

Το πρόβλημα με τον κανόνα ροής είναι ότι θεωρεί την τρέχουσα ροή διαμέσω ενός καλά ορισμένου μονοπατιού, ενώ σε αυτό το παράδειγμα το ρεύμα διαδίδεται στην επιφάνεια ολόκληρου του δίσκου. Δεν είναι ακόμα αρκετά ξεκάθαρα ποια είναι

η ροή διαμέσω του κυκλώματος που αναφέρεται σε αυτό το απόσπασμα. Σημειώνεται επίσης ότι ακόμα πιο απαιτηλή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί η περίπτωση που αφορά τα δινορεύματα. Λαμβάνοντας ένα μεγάλο κομμάτι από αλουμίνιο και κουνώντας το γύρω από ένα μη ομοιόμορφο μαγνητικό πεδίο θα παρατηρήσουμε τη δημιουργία ρευμάτων στο υλικό . Τα δινορεύματα είναι περίφημα δύσκολο να μελετηθούν και να υπολογιστούν ωστόσο είναι δραματικά απλό να τα δείξουμε.

## Βιβλιογραφία

Paul Lorrain, James McTavish and Francois Lorrain, Magnetic fields in moving conductors: four simple examples, Received 22 June 1998 - Printed in the UK

Introduction of electrodynamics, David J. Griffiths, September 1994

CDF STUDY REPORT THOR , Assessment of Mission to Explore Plasma Energisation in Space Turbulence , July 2015

Ασυνήθιστη σιωπή – οι ηλιακές κηλίδες σχεδόν άφαντες εδώ και μήνες , 3/9/2008, <http://www.sfak.org/page/%CE%95%CE%B9%CE%B4%CE%B7%CF%83%CE%B5%CE%B9%CF%82/276>

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3.1 Προσέγγιση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου περιστρεφόμενου διαστημόπλοιου και συμπεράσματα

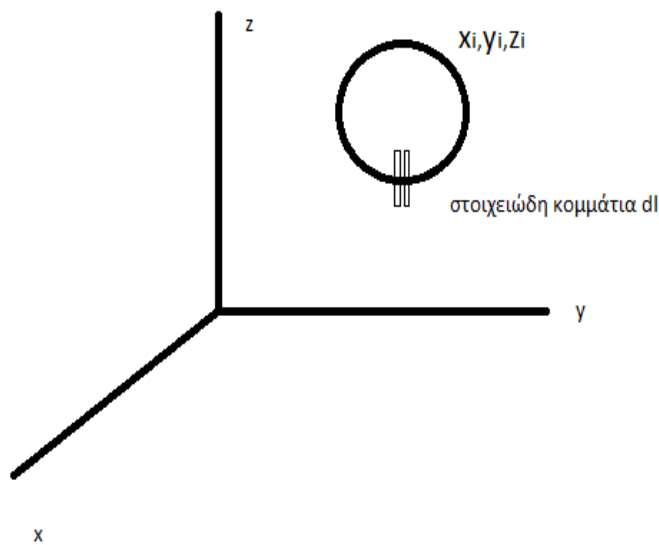
#### 3.1.1 Θεωρητική ανάλυση

Για τον θεωρητικό υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου της Γης θα υποθέσουμε έναν κυκλικό βρόχο, δηλαδή ουσιαστικά έναν δακτύλιο αμελητέου πάχους που περικλείει τον όγκο της Γης. Θα μελετήσουμε την περίπτωση που έχουμε  $z$  – συνιστώσα, ώστε η συνιστώσα του εξωτερικού μαγνητικού πεδίου να είναι η  $\mathbf{B}_z$ , η γωνιακή ταχύτητα θα έχει συνιστώσα  $\omega_z$  και κάθε στοιχειώδες κομμάτι του βρόχου  $d\mathbf{l}$  θα ισούται με  $d\mathbf{l} = R d\phi$  όπου ο δείκτης  $\phi$  θα λαμβάνει τιμές από  $1^\circ$  μέχρι  $360^\circ$  δηλώνοντας κατά αυτό τον τρόπο την ολοκλήρωση επαλληλίας που θα πραγματοποιηθεί σε όλο το μήκος του βρόχου, ώστε  $\phi_i = 1^\circ$  (όπως σχήμα 3.1 και σχήμα 3.2).

Η ταχύτητα κάθε σημείου του δακτυλίου θα δίνεται από τη σχέση :

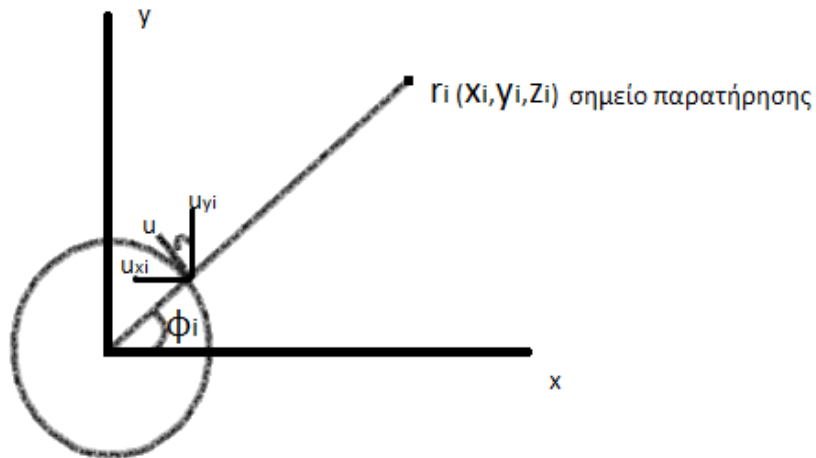
$$|\mathbf{u}_i| = \omega R$$

όπου  $\mathbf{u}_i = -|\mathbf{u}_i| \sin\phi_i \hat{x} + |\mathbf{u}_i| \cos\phi_i \hat{y}$



Σχήμα 3.1





Σχήμα 3.2

Η ζητούμενη μαγνητική δύναμη βρίσκεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ U_x & U_y & 0 \\ 0 & 0 & B_z \end{vmatrix} \\
 &= U_y B_z \hat{x} - U_x B_z \hat{y} \\
 &= B_z (U_y \hat{x} - U_x \hat{y})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Κατόπιν βρίσκουμε το φορτίο  $\mathbf{Q}$  με χρήση και της σχέσης (3.1) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q} &= -\epsilon_0 \epsilon_r \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\
 &= -\epsilon_0 \epsilon_r \left[ \frac{\partial}{\partial x} (U_y B_z) - \frac{\partial}{\partial y} (U_x B_z) \right] \\
 &= -\epsilon_0 \epsilon_r B_z \left[ \frac{\partial}{\partial x} U_y - \frac{\partial}{\partial y} U_x \right]
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

επιπλέον έχουμε ότι :

$$U_x = -U \frac{y_i}{R} \quad \text{και} \quad U_y = U \frac{x_i}{R}$$

επομένως το φορτίο από τη σχέση (3.2) θα ισούται με:

$$\mathbf{Q}(\phi_i) = -\epsilon_0 \epsilon_r B_z 2\omega$$

Στη συνέχεια ο υπολογισμός του ρεύματος μας δίνει:

$$\begin{aligned}
 J &= \Delta V \cdot Q(x, y, z, t) U(x, y, z, t) \Rightarrow \\
 J(\varphi_i) &= R d\varphi \cdot Q(\varphi_i) \begin{bmatrix} U_x(\varphi_i) \\ U_y(\varphi_i) \\ U_z(\varphi_i) \end{bmatrix} \\
 &= \frac{\pi}{180^\circ} R Q(\varphi_i) U_x(\varphi_i) + \frac{\pi}{180^\circ} R Q(\varphi_i) U_y(\varphi_i)
 \end{aligned}$$

Τονίζεται ότι

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U_x(\varphi_i)}{\partial x} &= \frac{U_x(\varphi_{i+1}) - U_x(\varphi_i)}{x(\varphi_{i+1}) - x(\varphi_i)} \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{U_x(\varphi_{i+1}) - U_x(\varphi_i)}{x(\varphi_{i+1}) - x(\varphi_i)} + \frac{U_x(\varphi_i) - U_x(\varphi_{i-1})}{x(\varphi_i) - x(\varphi_{i-1})} \right)
 \end{aligned}$$

Το διανυσματικό δυναμικό στο τυχαίο σημείο παρατήρησης  $(x_j, y_j, z_j)$  δίνεται από το ολοκλήρωμα επαλληλίας

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{r_i} \mathbf{J}(x, y, z, t - \frac{r_i}{c}) dV \Rightarrow \\
 \mathbf{A}(x_j, y_j, z_j) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\varphi=1^\circ}^{\varphi=360^\circ} \frac{1}{r_i} \mathbf{J}(x_i, y_i, z_i) R d\varphi
 \end{aligned}$$

όπου σημειώνεται ότι

$$r_i = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad \text{και}$$

$$\mathbf{J}(\varphi_i) = \mathbf{J}(x_i, y_i, 0) = -|\mathbf{J}(x_i, y_i, 0)| \sin\varphi_i \hat{x} + |\mathbf{J}(x_i, y_i, 0)| \cos\varphi_i \hat{y}$$

Τελικά το ζητούμενο μαγνητικό πεδίο προκύπτει ως ο στροβιλισμός του βαθμωτού δυναμικού:

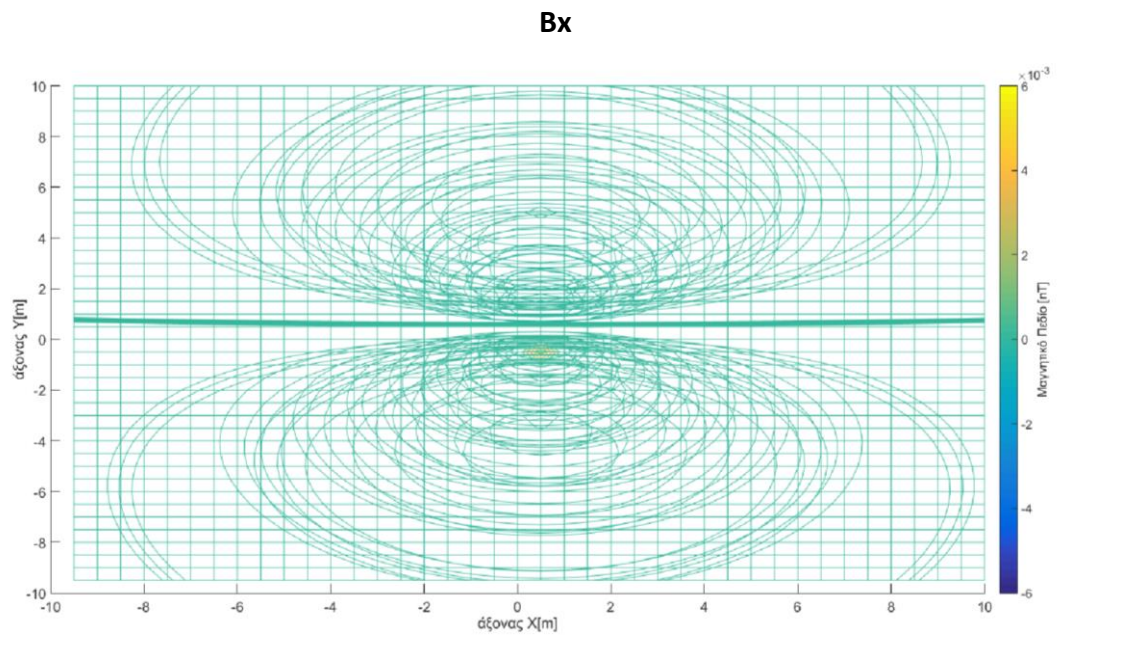
$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(x_j, y_j, z_j) &= \nabla \times \mathbf{A}(x_j, y_j, z_j) \\
 &= \frac{\partial A_x}{\partial z} \hat{y} + \frac{\partial A_y}{\partial x} \hat{z} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \hat{z} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \hat{x}
 \end{aligned}$$

και μάλιστα

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{A(x_j, y_j, z_{j+1}) - A(x_j, y_j, z_j)}{z_{j+1} - z_j}$$

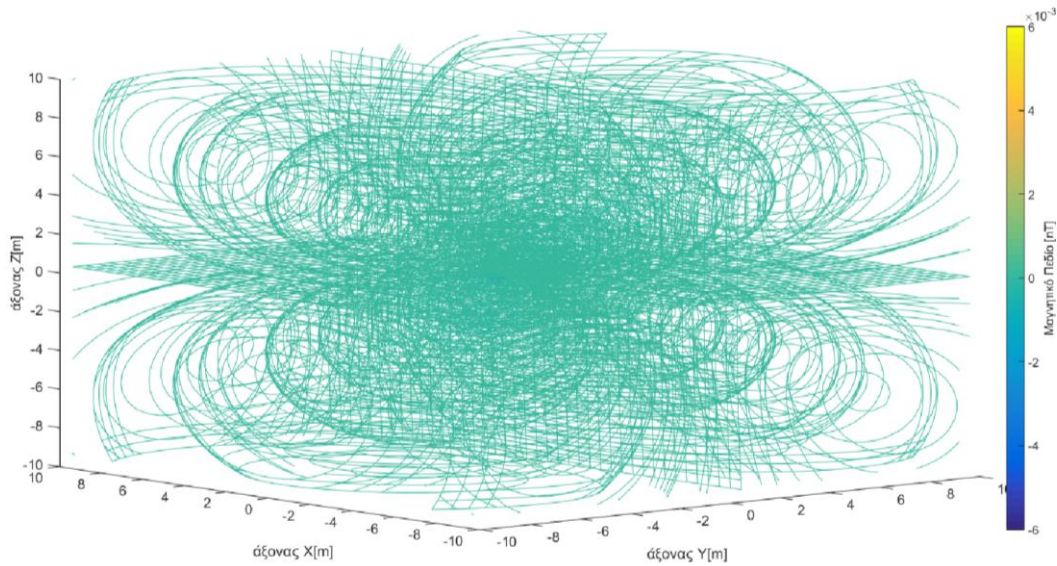
### 3.1.2 Υλοποίηση με κώδικα σε Matlab

Οι εξισώσεις που αναλύθηκαν στην αμέσως προηγούμενη παράγραφο για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου υλοποιήθηκαν με γλώσσα Matlab. Η εκτέλεση του κώδικα μας εμφανίζει τις γραφικές παραστάσεις που θα προκύψουν για την κάθε μια συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  παρακάτω, όπου για κάθε συνιστώσα έχουμε τρία διαφορετικά στιγμιότυπα ως προς τους άξονες:



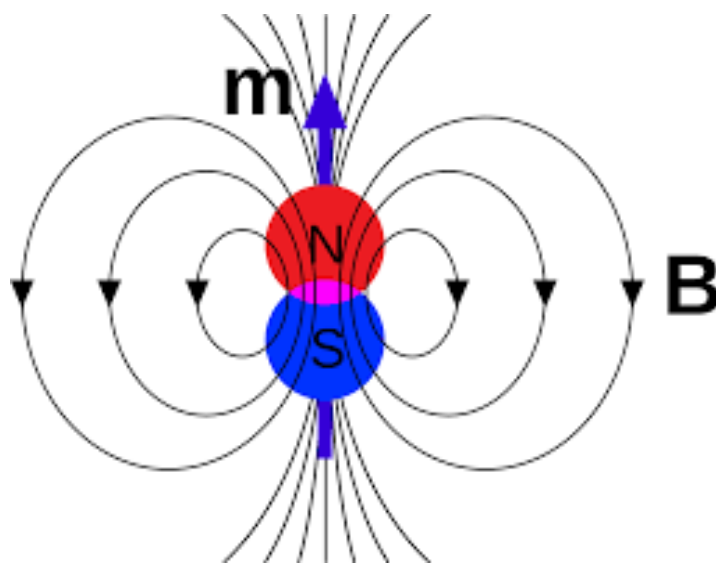
Σχήμα 3.3  $B_x$  στο  $xy$  επίπεδο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

Ένα μαγνητικό πεδίο, όπως γνωρίζουμε μπορεί να αναπαρασταθεί με γραμμές πεδίου. Αυτές οι γραμμές (και το μαγνητικό πεδίο) δείχνουν από τον βόρειο πόλο ενός μαγνήτη στον νότιο πόλο ενός μαγνήτη, όπως φαίνεται και στο σχήμα. Αντίθετα με τις γραμμές του ηλεκτρικού πεδίου, οι γραμμές μαγνητικού πεδίου είναι πάντα κλειστές – δηλαδή δεν έχουν ποτέ σημείο εκκίνησης ή σημείο στάσης. Κάθε φορά που έχουμε βόρειο πόλο, πρέπει να έχουμε φυσικά και έναν νότιο πόλο. Ένας άλλος τρόπος να το εκφράσουμε είναι υποστηρίζοντας ότι δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα (μεμονωμένοι πόλοι).

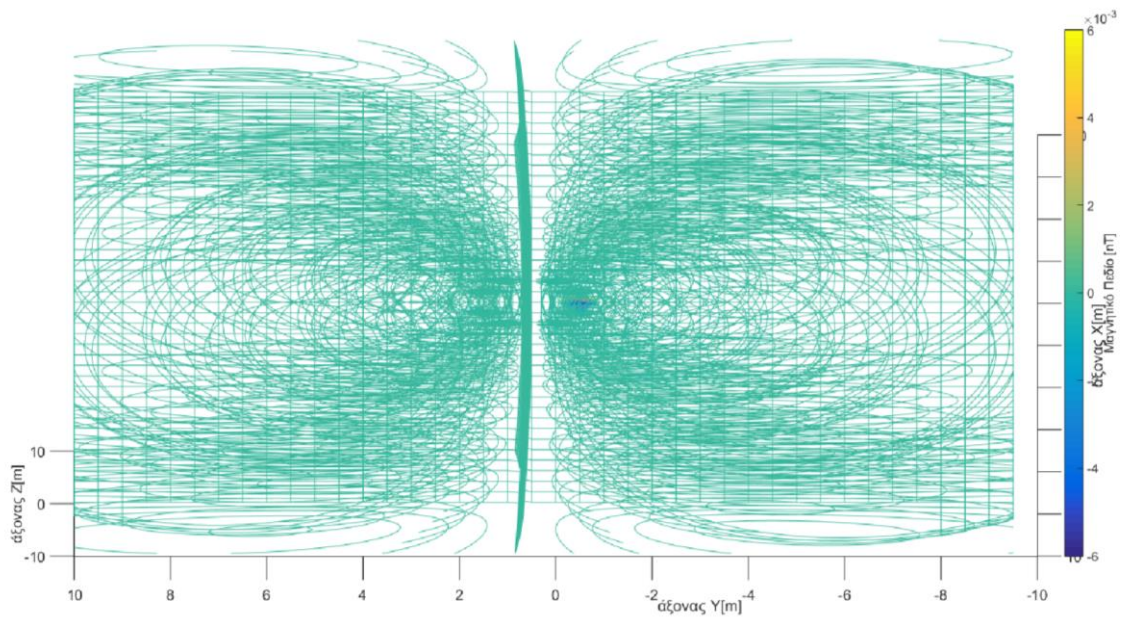


Σχήμα 3.4 Bx στο χώρο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην z – κατεύθυνση

Στο παραπάνω σχήμα 3.4 φαίνεται το μαγνητικό πεδίο που αναπτύσσεται εξαιτίας της κίνησης ενός περιστρεφόμενου αεροσκάφους σε τρεις διαστάσεις. Το παραγόμενο μαγνητικό πεδίο πρέπει να σχηματίζει πλήρεις βρόχους όπως φαίνεται να επιβεβαιώνεται και από το σχήμα. Ο κανόνας του δεξιού χεριού δίνει την κατεύθυνση του πεδίου μέσα στο βρόχο που δημιουργείται. Το μαγνητικό πεδίο γυρίζει προς τα πίσω με τρόπο εκτός του βρόχου. Όπως φαίνεται το μαγνητικό πεδίο από έναν βρόχο που μεταφέρει ρεύμα μοιάζει με το πεδίο από έναν μόνιμο μαγνήτη. Πράγματι, παρακάτω φαίνεται η σχηματική αναπαράσταση του πεδίου ενός μαγνητικού διπόλου, όπου κάθε βέλος αντιπροσωπεύει την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου σε αυτό το σημείο.



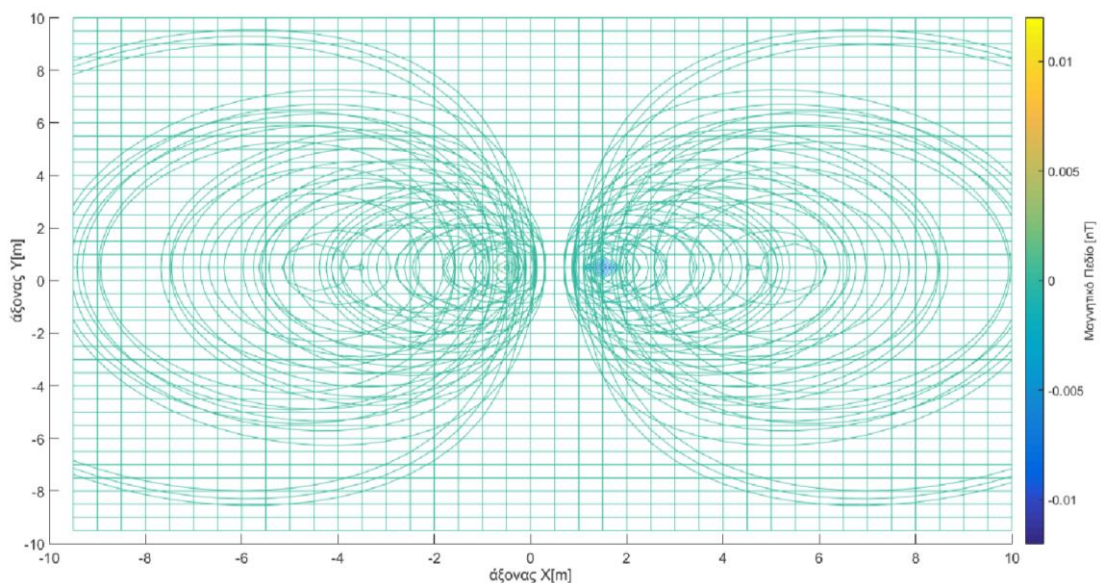
Σχήμα 3.5 Μαγνητικές γραμμές του πεδίου ενός διπόλου



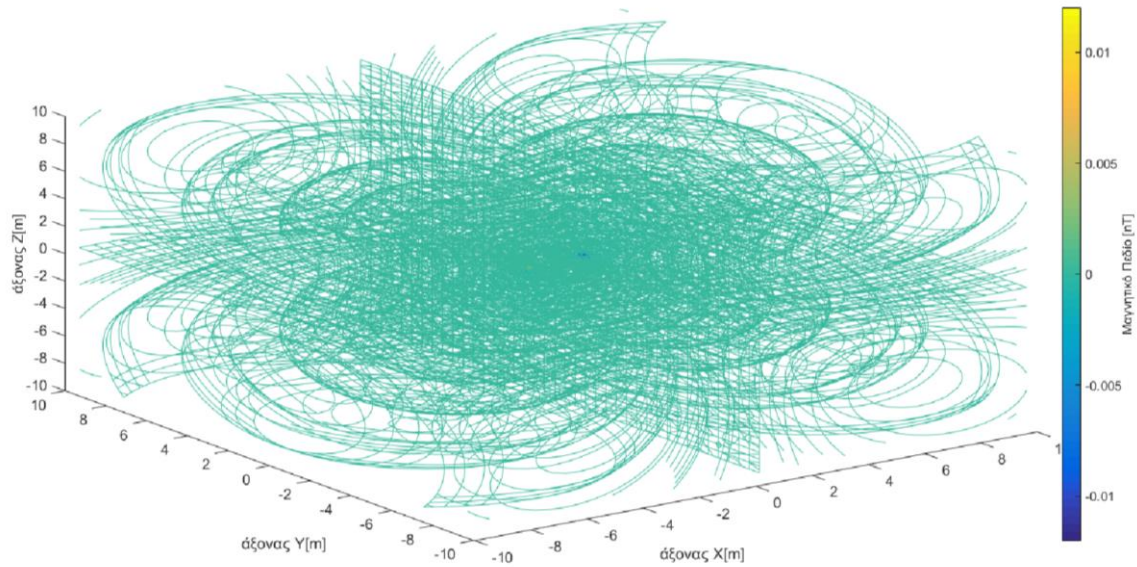
Σχήμα 3.6  $B_x$  στο επίπεδο  $yz$  με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

Κατόπιν, φαίνεται η συνιστώσα  $B_y$  ως προς τους άξονες  $x$  και  $y$ . Ομοίως με πριν οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι σε κάθε σημείο ενός ρεύματος που φέρει κυκλικό βρόχο. Η κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου κάθε τμήματος του κυκλικού βρόχου μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας τον κανόνα του δεξιού χεριού. Στο κέντρο του κυκλικού βρόχου, οι γραμμές μαγνητικού πεδίου είναι ευθείες γεγονός το οποίο αποτυπώνεται καλύτερα στα σχήματα 3.3 και 3.6. Κάθε τμήμα κυκλικού ρεύματος βρόχου παράγει γραμμές μαγνητικού πεδίου προς την ίδια κατεύθυνση με τον βρόχο. Σε αυτό το επίπεδο το πεδίο είναι σχεδόν μηδενικό, όπως περιμένουμε γιατί ο βρόχος περιστρέφεται στο  $xy$  επίπεδο.

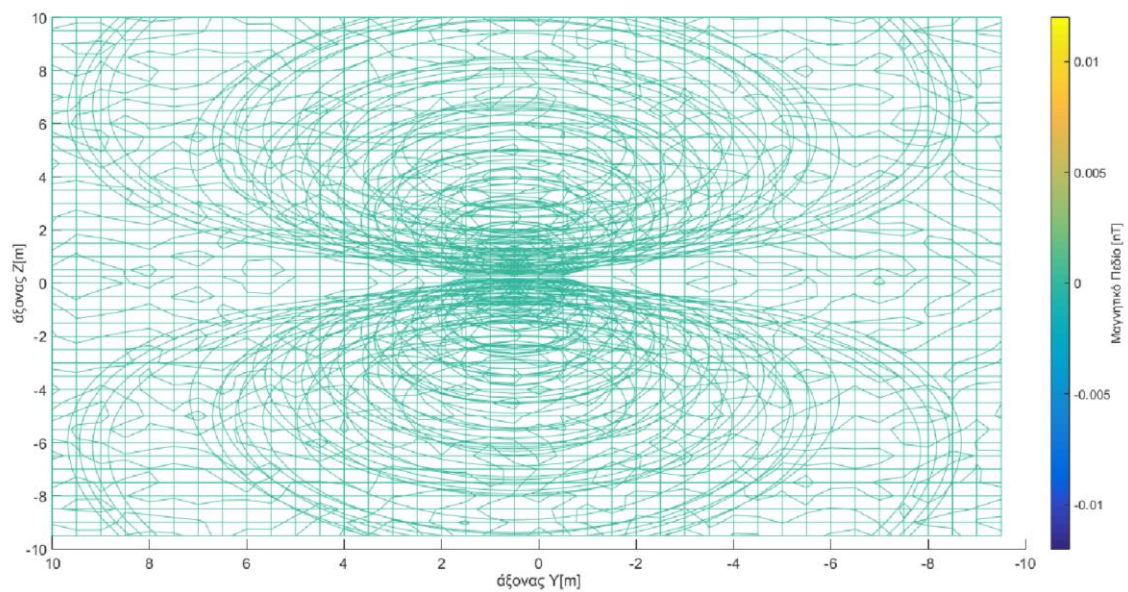
### $B_y$



Σχήμα 3.7  $B_y$  στο  $xy$  επίπεδο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση



Σχήμα 3.8  $B_y$  στο χώρο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

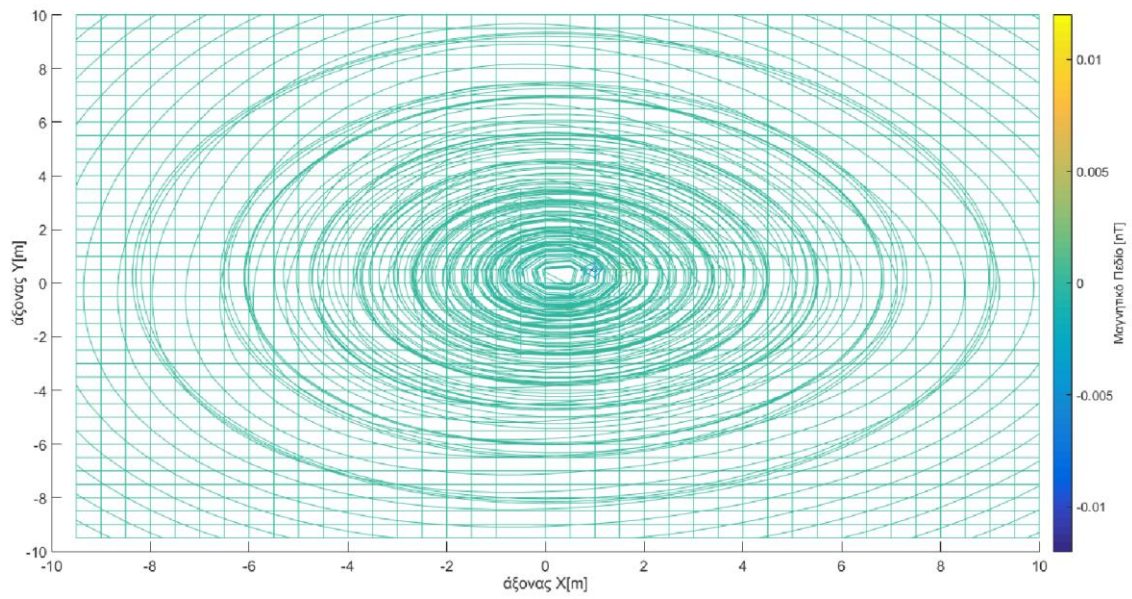


Σχήμα 3.9  $B_y$  στο  $yz$  επίπεδο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

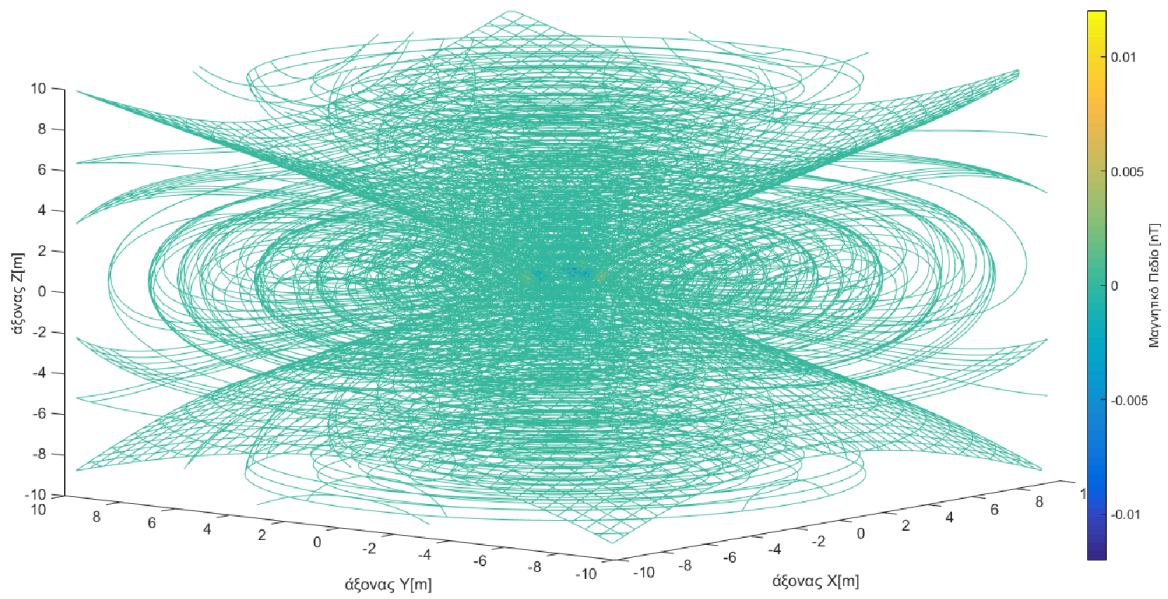
Τέλος για τη  $B_z$  συνιστώσα έχουμε να παρατηρήσουμε ότι δημιουργούνται ομόκεντροι πυκνοί κύκλοι γεγονός το οποίο γίνεται καλύτερα αντιληπτό στο σχήμα 3.11 που απεικονίζονται οι τρεις διαστάσεις . Παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν είναι σαφώς ότι :

- α) το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου είναι ευθέως ανάλογο του μεγέθους του ρεύματος μέσω του βρόχου.
- β) το μέγεθος του μαγνητικού πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογο της ακτίνας του κυκλικού βρόχου.

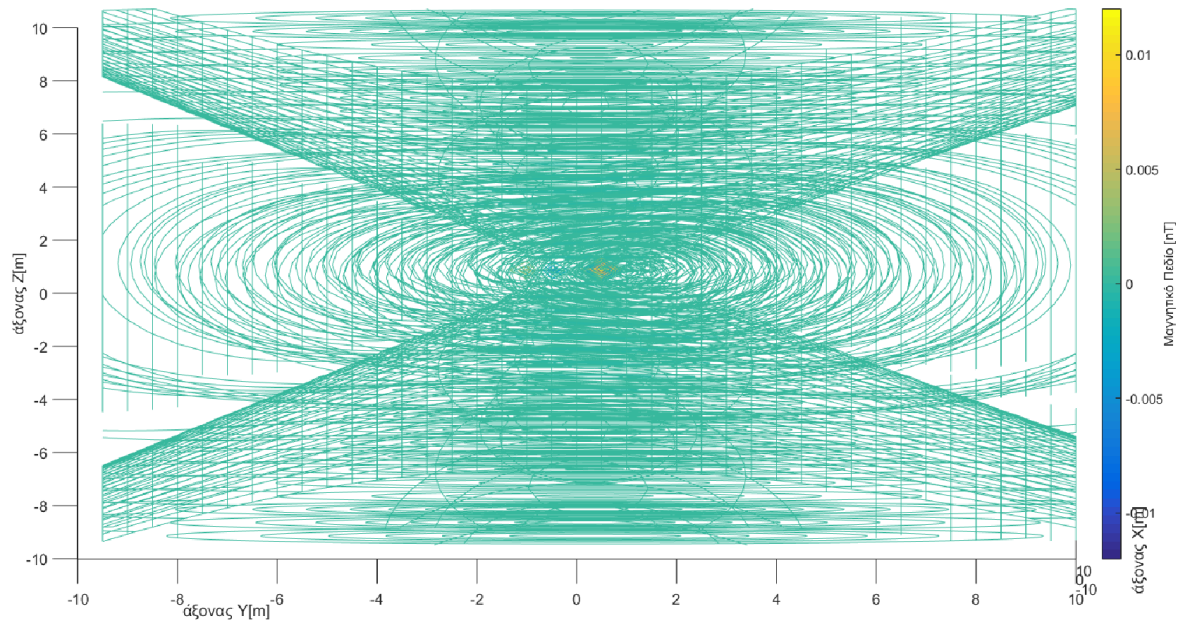
### Bz



Σχήμα 3.10  $B_z$  στο  $xy$  επίπεδο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση



Σχήμα 3.11  $B_z$  στο χώρο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση



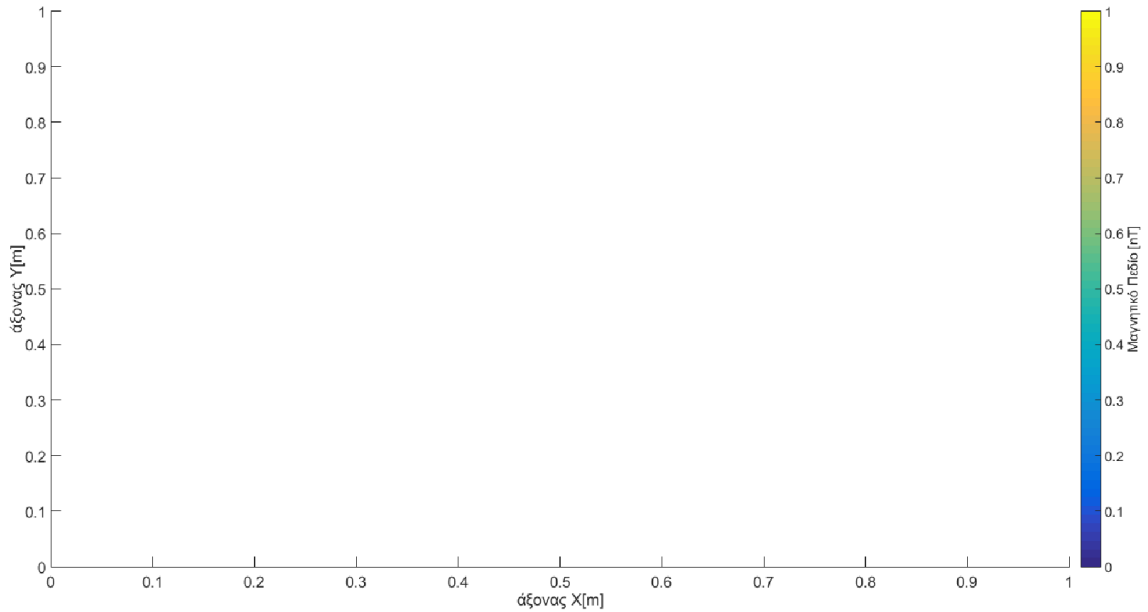
Σχήμα 3.12  $B_z$  στο  $yz$  επίπεδο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

Όπως φαίνεται από τις γραφικές παραστάσεις που τελικά προέκυψαν το μαγνητικό πεδίο ενός περιστρεφόμενου διαστημοπλοίου σε τροχιά γύρω από τη Γη προσεγγίζει αρκετά καλά το μαγνητικό πεδίο ενός διπόλου. Για να πειστούμε περισσότερο αρκεί να υπολογίσουμε το πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου και κατόπιν να τα συγκρίνουμε, όπως γίνεται σε επόμενη παράγραφο.

### 3.1.3 Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διαστημοπλοίου με $\mathbf{B}_{\text{ext}}$

Η τροποποίηση του αρχικού κώδικα που εφαρμόζουμε, με τον οποίο υπολογίσαμε και αναπαραστήσαμε το μαγνητικό πεδίο του περιστρεφόμενου σκάφους που προέκυψε στις τρεις συνιστώσες του χώρου, αφορά τη διεύθυνση του εξωτερικού πεδίου  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  που τώρα θα έχει τη διεύθυνση του  $x$  άξονα και θα είναι μηδενικό στις υπόλοιπες συνιστώσες. Τα αποτελέσματα που τελικά προκύπτουν κατόπιν αυτής της εκτέλεσης όσον αφορά τον ποσοτικό τομέα του μαγνητικού πεδίου είναι μηδενικά στις τρεις συνιστώσες όπως και περιμέναμε. Το διάγραμμα που προέκυψε φαίνεται παρακάτω:





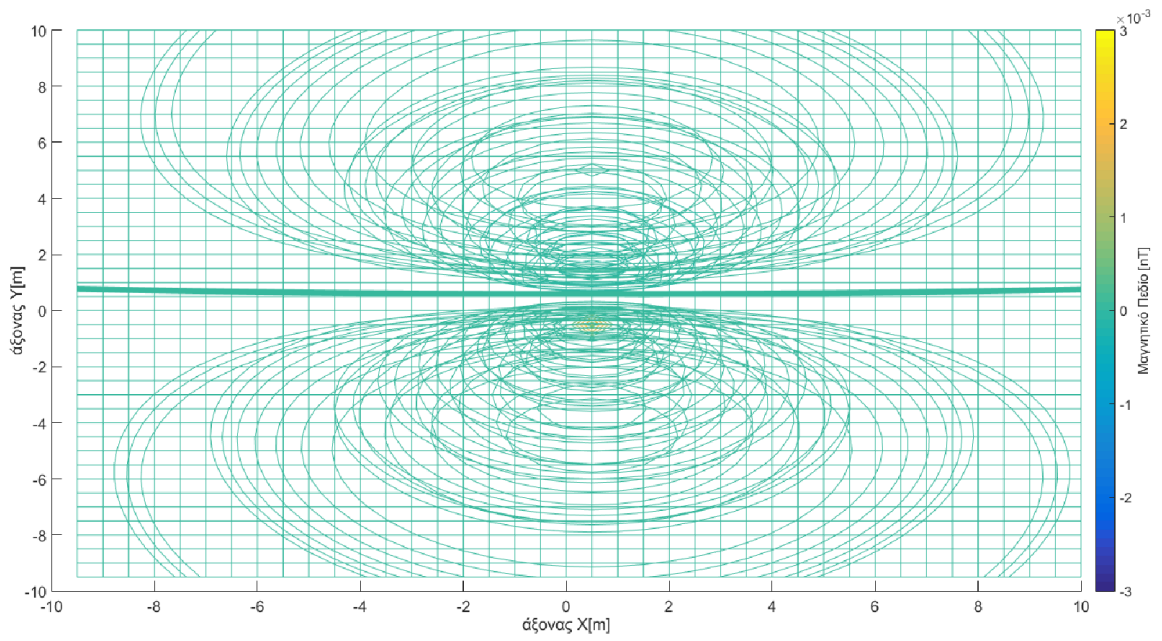
Σχήμα 3.13  $B_x$  στο επίπεδο  $xy$  με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

### 3.1.4 Υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διαστημοπλοίου με $\mathbf{B}_{ext}$ σε δυο συνιστώσες

Ανάλογα με πριν τροποποιούμε τον αρχικό κώδικα που εφαρμόζουμε, με τον οποίο υπολογίσαμε και αναπαραστήσαμε το μαγνητικό πεδίο του σκάφους που προέκυψε στις τρεις συνιστώσες του χώρου, και τώρα η διεύθυνση του εξωτερικού πεδίου  $\mathbf{B}_{ext}$  που υλοποιούμε θα έχει τη διεύθυνση στους  $y$  και  $z$  άξονες και θα είναι μηδενικό στη συνιστώσα  $x$ . Συγκεκριμένα εφαρμόζουμε  $\mathbf{B}_{ext} = (0, 0.5B_z, 0.5B_z)$ , όπου  $B_z$  αφορά την αρχική τιμή που είχαμε δώσει κατά την πρώτη εκτέλεση του κώδικα. Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν όπως είναι διαισθητικά αναμενόμενο θα αφορούν υποδιπλασιασμό των ποσοτικών τιμών των ρευματικών κατανομών  $\mathbf{J}$ , καθώς επίσης και των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$ .

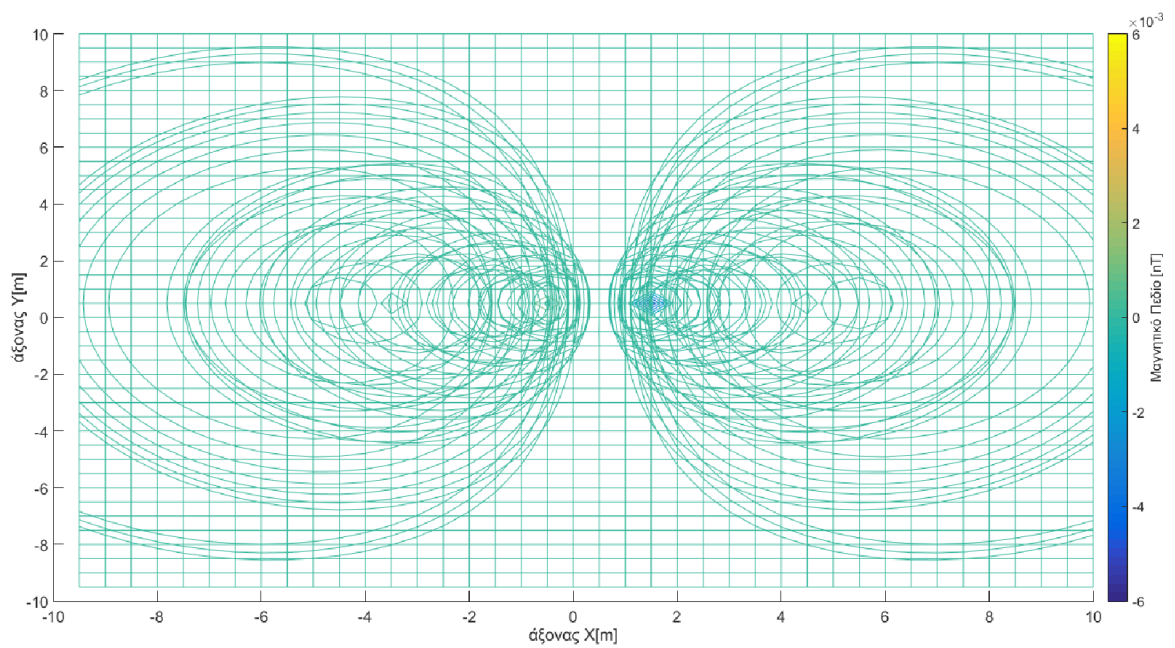
Τα στιγμιότυπα αφορούν τους άξονες  $x$  και  $y$  και ομοίως με πριν έχουμε να παρατηρήσουμε ότι οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου σχηματίζουν ομόκεντρους κύκλους, ενώ στο κέντρο του κυκλικού βρόχου φαίνονται ως ευθείες γραμμές οι οποίες είναι πάντα κλειστές. Η διαφορά που προκύπτει είναι ως προς ένταση των ρευματικών κατανομών εξαιτίας του υποδιπλασιασμού που έχουμε επιβάλει.

### Bx

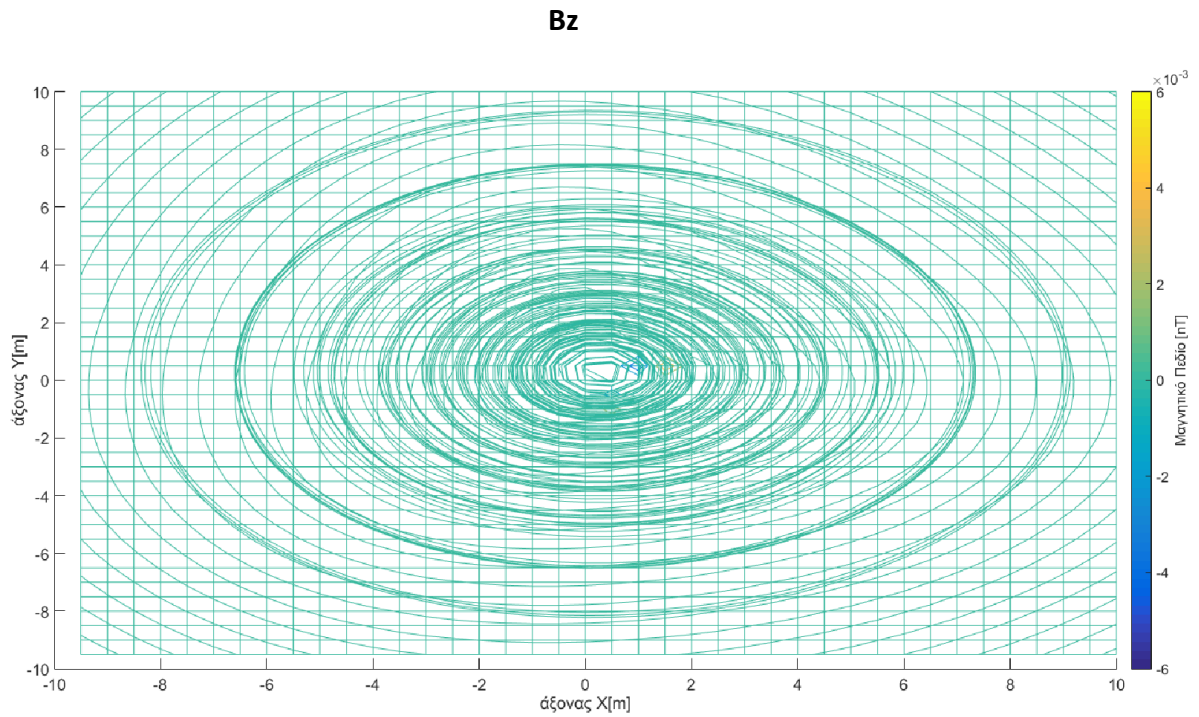


Σχήμα 3.14  $B_x$  στο επίπεδο  $xy$  με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

### By



Σχήμα 3.15  $B_y$  στο επίπεδο  $xy$  με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

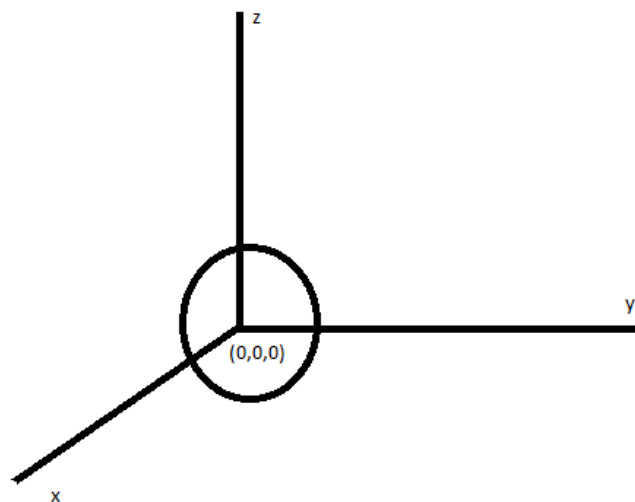


Σχήμα 3.16 Bz στο επίπεδο xy με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην z – κατεύθυνση

### 3.2 Μαγνητικό πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου και συμπεράσματα

#### 3.2.1 Θεωρητική ανάλυση

Θεωρούμε μια μόνιμη ρευματική κατανομή, η οποία εκτείνεται στον τρισδιάστατο χώρο με κέντρο την αρχή των αξόνων  $(0,0,0)$  όπως απεικονίζεται στο σχήμα 3.17.



Σχήμα 3.17

Για τα διάφορα σημεία του χώρου, έστω αυτά  $\mathbf{r}'=(x_0, y_0, z_0)$  το διάνυσμα της απόστασης του εκάστοτε σημείου παρατήρησης από την αρχή των αξόνων  $\mathbf{r}=(0,0,0)$  ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}-\mathbf{r}' &= (0\hat{x} + 0\hat{y} + 0\hat{z}) - (x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}) \\ &= (0-x_0)\hat{x} + (0-y_0)\hat{y} + (0-z_0)\hat{z}\end{aligned}$$

και το μέτρο της απόστασης δίνεται από τη σχέση :

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(0-x_0)^2 + (0-y_0)^2 + (0-z_0)^2}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη μαγνητική διπολική ροπή της κατανομής ρεύματος  $\mathbf{J}$

δεδομένου ότι :

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= I * \text{Εμβαδόν} \\ &= I * \pi a^2 \hat{z}\end{aligned}$$

τελικά προκύπτει

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')] (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \quad (3.3)$$

και μάλιστα

$$\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}') = m_z \cdot (0-z_0).$$

Επομένως η σχέση (3.3) θα δώσει για κάθε συνιστώσα του πεδίου ξεχωριστά το μαγνητικό πεδίο

$$\begin{aligned}B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[m_z \cdot (0-z_0)](0-x_0)\hat{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{m_x}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[m_z \cdot (0-z_0)](0-x_0)\hat{x}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \right)\end{aligned}$$

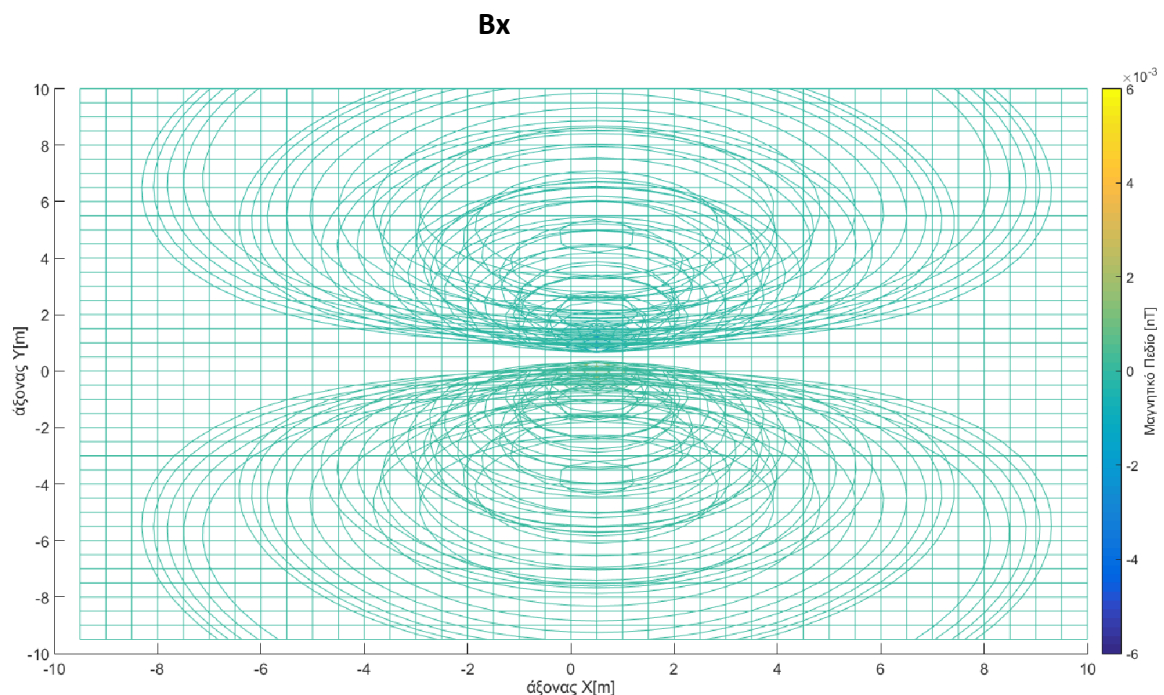
$$\begin{aligned}B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[m_z \cdot (0-z_0)](0-y_0)\hat{y}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{m_y}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[m_z \cdot (0-z_0)](0-y_0)\hat{y}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} \right)\end{aligned}$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3[m_z \cdot (0-z_0)](0-z_0)\hat{z}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^5} - \frac{m_z}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} \right)$$

### 3.2.2 Μαγνητικό πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου με γλώσσα matlab

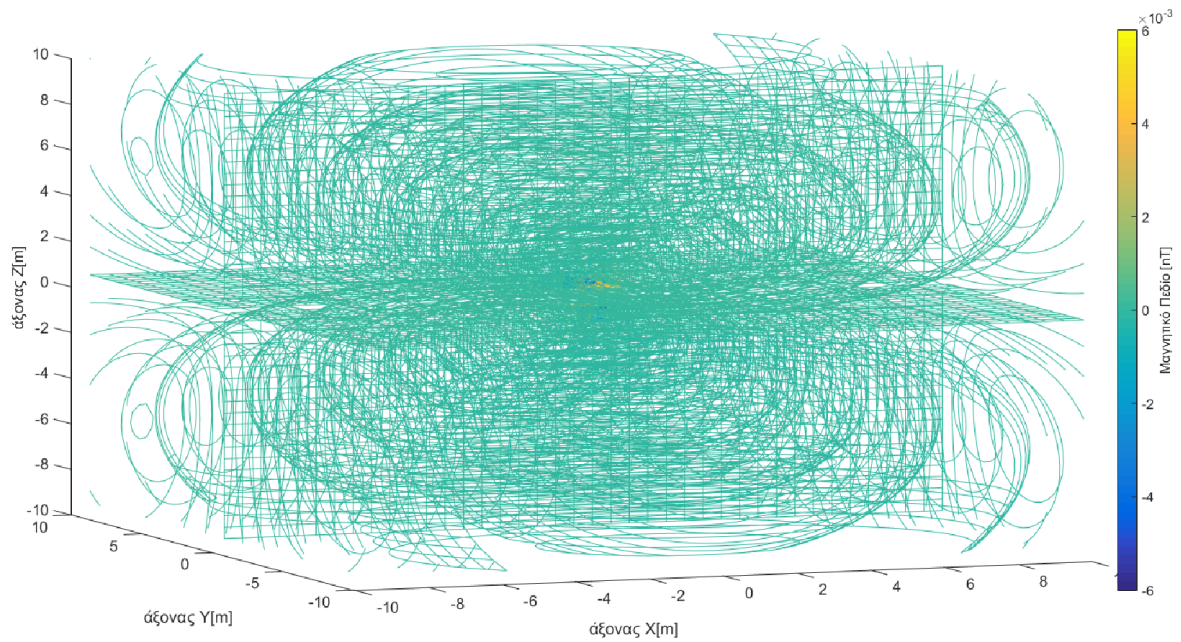
Το μαγνητικό πεδίο ενός μαγνητικού διπόλου απεικονίζεται στα σχήματα παρακάτω. Οι γραμμές μαγνητικού πεδίου μπορούν να ανιχνευθούν από το βορρά προς το νότο (ανάλογα με τις γραμμές ηλεκτρικού πεδίου) όπου σε κάθε σημείο είναι εφαπτόμενες στο μαγνητικό φορέα πεδίου. Όσο πιο πυκνά είναι αποτυπωμένες οι γραμμές, το πεδίο χαρακτηρίζεται ισχυρότερο σε αυτό το σημείο.

Οι γραφικές παραστάσεις που προέκυψαν αντίστοιχα για τις τρεις συνιστώσες του πεδίου ενός μαγνητικού διπόλου ταυτίζονται αρκετά με αυτές που βρήκαμε για το μαγνητικό πεδίο του περιστρεφόμενου αεροσκάφους όπως και αναμέναμε. Για περισσότερη σαφήνεια παρατίθενται στη συνέχεια:



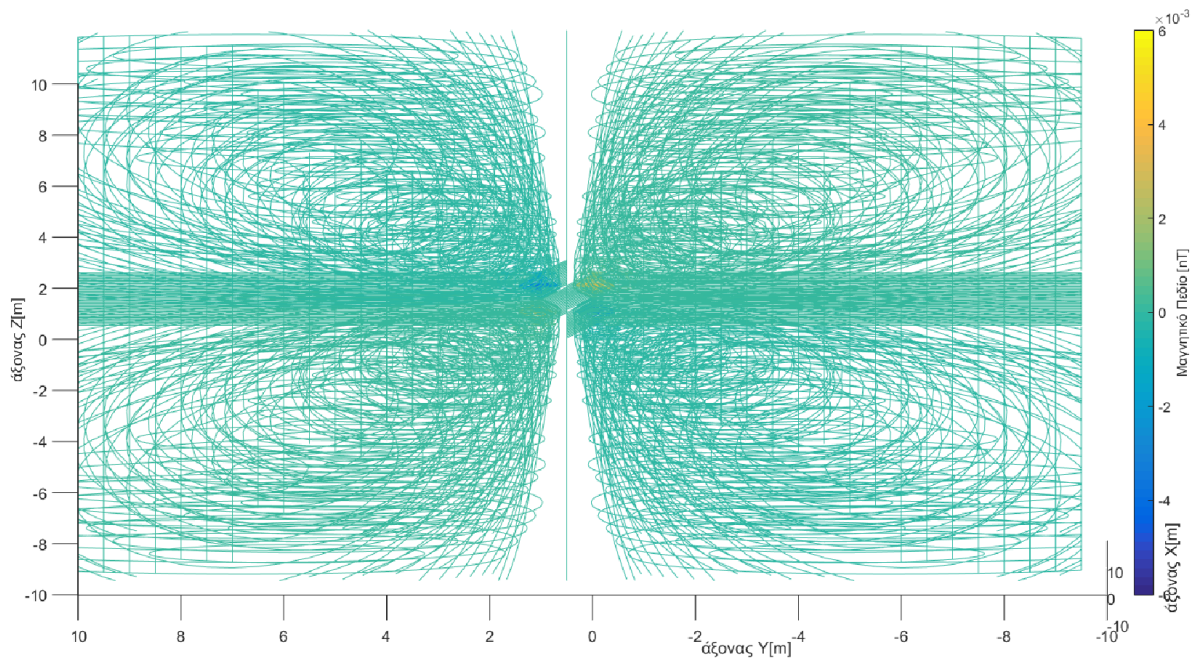
Σχήμα 3.18  $B_x$  συνιστώσα ενός διπόλου στο επίπεδο  $xy$  με μαγνητική ροπή στον  $z$  – άξονα και τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων

Οι γραμμές μαγνητικού πεδίου όπως τονίστηκε και προηγουμένως είναι πάντα κλειστές διαδρομές. Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της ιδιομορφίας των γραμμών του πεδίου διπόλων είναι ότι σε σταθερό γεωγραφικό πλάτος κάνουν όλοι την ίδια γωνία σε σχέση με την ακτίνα. Χαρακτηριστικό είναι ακόμα ότι οι εξισώσεις πεδίου ενός διπόλου λένε ότι ένα πεδίο είναι παράλληλο στην ακτινική κατεύθυνση πάνω από τους πόλους και κάθετο στην ακτινική κατεύθυνση στον ισημερινό. Δηλαδή είναι δύο φορές πιο ισχυρό στον πόλο όσο στον ισημερινό σε σταθερή ακτινική απόσταση, ενώ σε οποιοδήποτε γεωγραφικό πλάτος, η ένταση του πεδίου μειώνεται με ακτινική απόσταση ως  $1 / r^3$ .



Σχήμα 3.19 Bx συνιστώσα ενός διπόλου στο χώρο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην z – κατεύθυνση

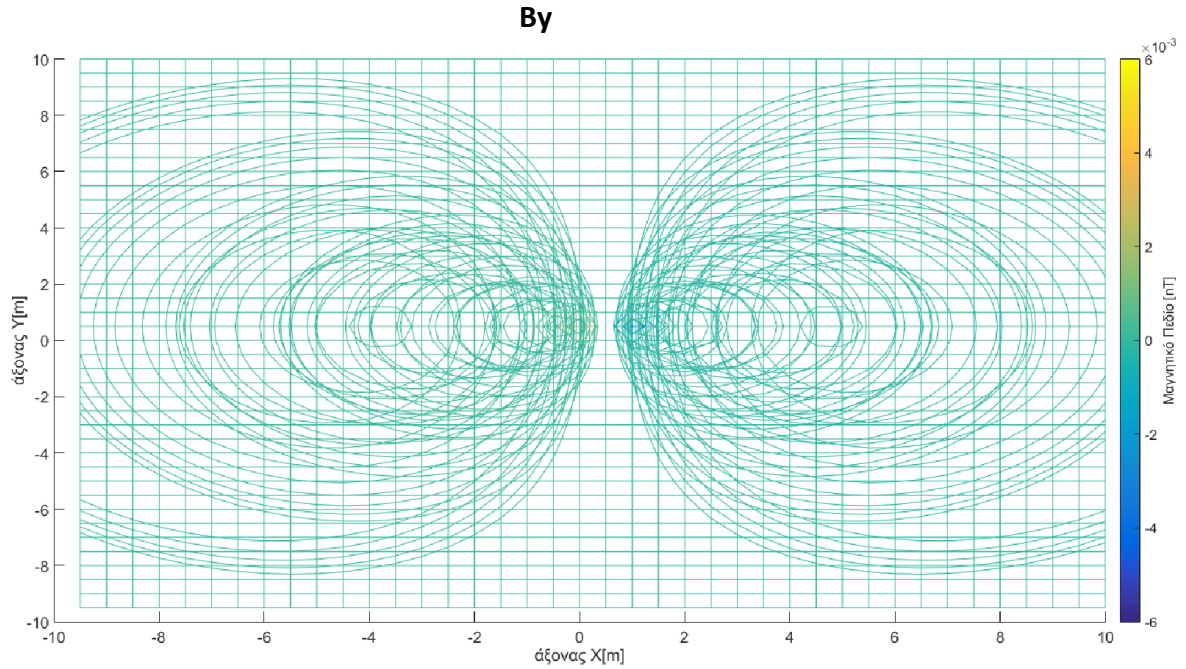
Όπως φαίνεται να επιβεβαιώνουν και τα σχήματα έχουμε τη δημιουργία από πλήρεις βρόχους. Ο κανόνας του δεξιού χεριού δίνει την κατεύθυνση του πεδίου που αναπτύσσεται μέσα στο βρόχο .



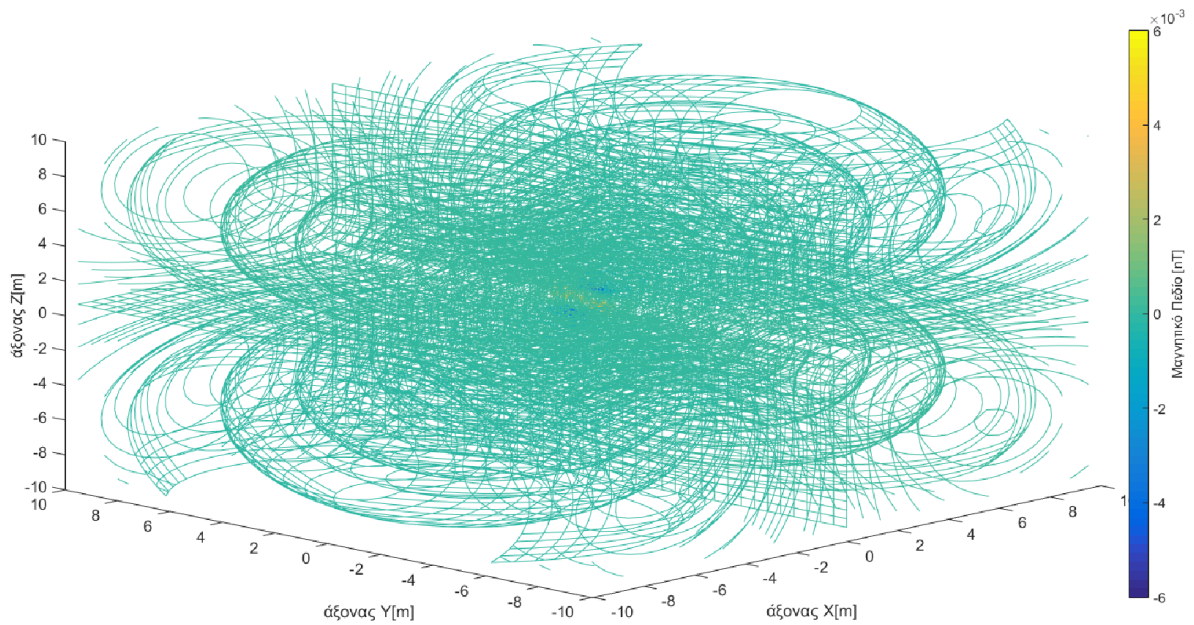
Σχήμα 3.20 Bx συνιστώσα ενός διπόλου στο επίπεδο yz με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην z – κατεύθυνση

Ακριβώς όπως και πριν οι γραμμές του μαγνητικού πεδίου είναι ομόκεντροι κύκλοι σε κάθε σημείο ενός ρεύματος που φέρει κυκλικό βρόχο. Στο κέντρο του

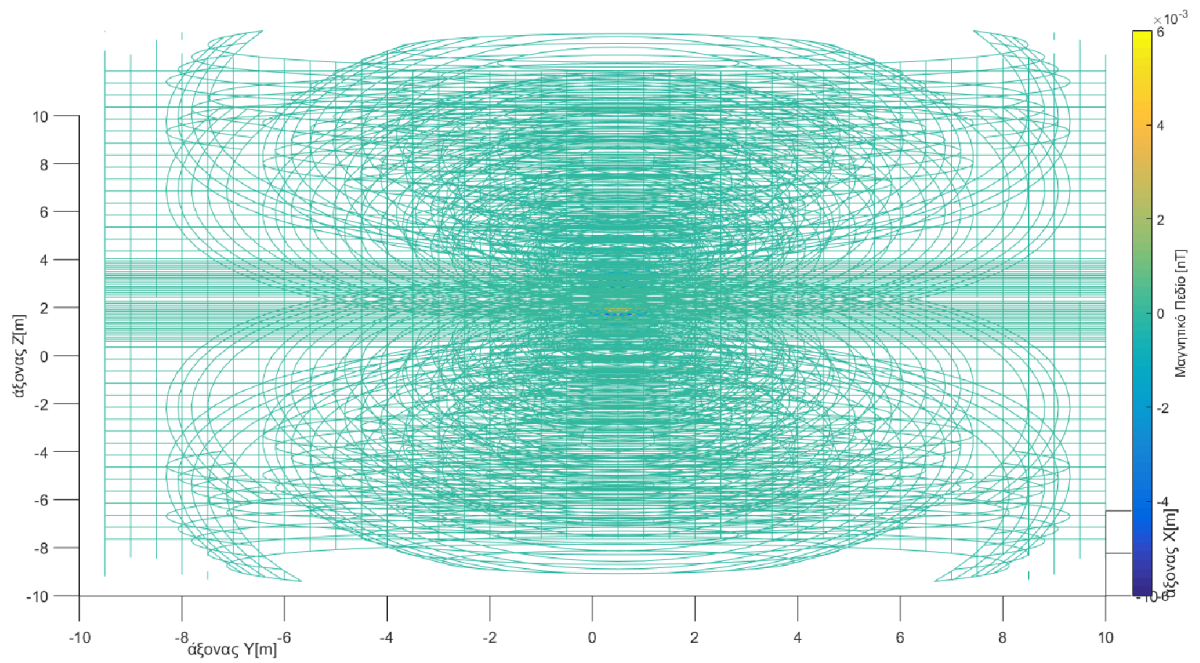
κυκλικού βρόχου οι γραμμές μαγνητικού πεδίου είναι ευθείες, σχεδόν παράλληλες και ανάλογα με την ένταση είναι πυκνότερες όπου αυτή είναι μεγαλύτερη. Επιπλέον το πεδίο ανάμεσα στους πόλους έχει φορά αντίθετη με τη μαγνητική ροπή (διάνυσμα που κατευθύνεται προς τον βόρειο μαγνητικό πόλο), ενώ μέσα σε έναν βρόχο ρεύματος έχει τη φορά της ροπής.



Σχήμα 3.21  $B_y$  συνιστώσα ενός διπόλου στο επίπεδο  $xy$  με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση



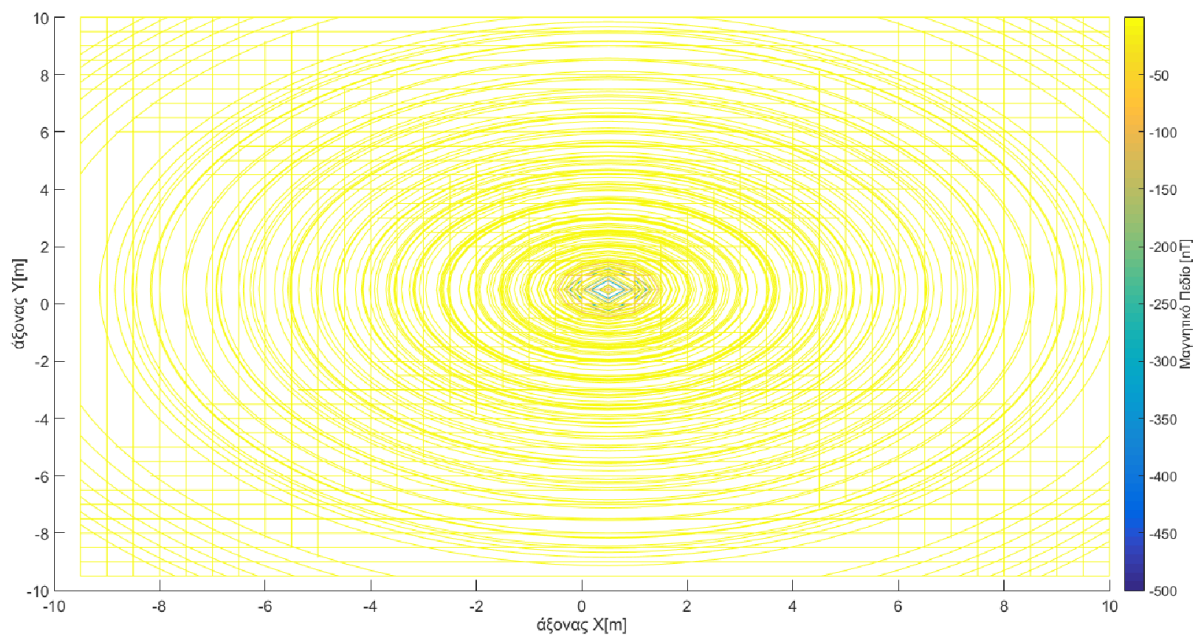
Σχήμα 3.22  $B_y$  συνιστώσα ενός διπόλου στο χώρο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση



Σχήμα 3.23  $B_y$  συνιστώσα ενός διπόλου στο επίπεδο yz με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην z – κατεύθυνση

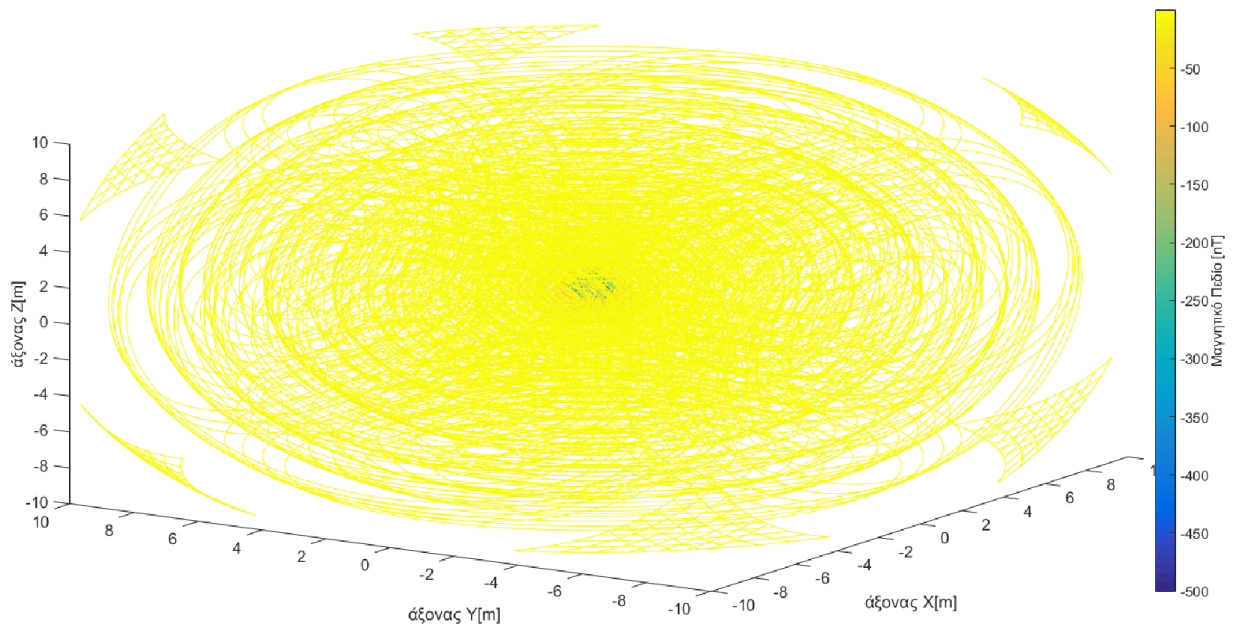
Στη  $B_z$  συνιστώσα έχουμε να επισημάνουμε ότι φαίνεται ξεκάθαρα η δημιουργία κυκλικών βρόχων που πυκνώνουν στο κέντρο όπως φαίνεται έντονα και στο τρισδιάστατο σχήμα 3.25 .

### **$B_z$**

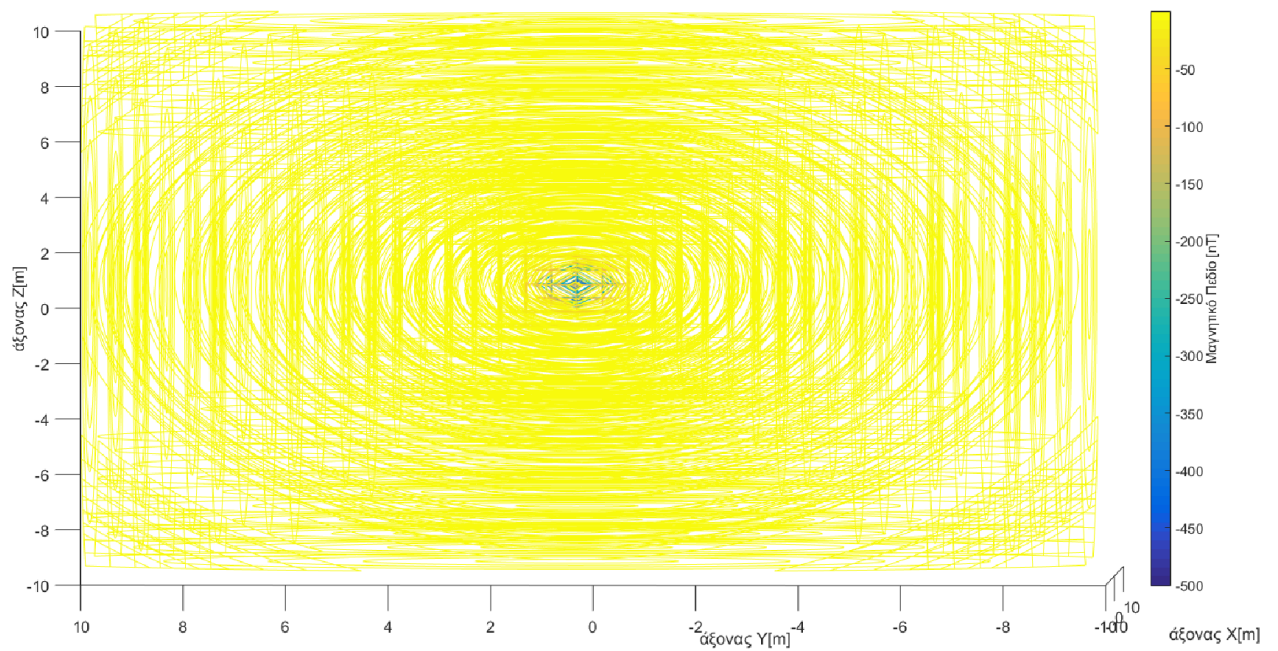


Σχήμα 3.24  $B_z$  συνιστώσα ενός διπόλου στο επίπεδο xy με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην z – κατεύθυνση





Σχήμα 3.25  $B_z$  συνιστώσα ενός διπόλου στο χώρο με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση



Σχήμα 3.26  $B_z$  συνιστώσα ενός διπόλου στο επίπεδο yz με εξωτερικό μαγνητικό πεδίο στην  $z$  – κατεύθυνση

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Η αντιστροφή του γήινου μαγνητικού πεδίου, Ιούνιος 2001,  
<http://www.physics4u.gr/faq/earthmagnet.html>

[http://www.rpi.edu/dept/phys/ScIT/InformationStorage/faraday/magnetism\\_a.html](http://www.rpi.edu/dept/phys/ScIT/InformationStorage/faraday/magnetism_a.html),  
2001-2002 Doris Jeanne Wagner , Introduction to Magnetism and Induced Currents

[https://ccmc.gsfc.nasa.gov/RoR\\_WWW/presentations/Dipole.pdf](https://ccmc.gsfc.nasa.gov/RoR_WWW/presentations/Dipole.pdf), Properties of  
Magnetic Dipoles

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

### Κώδικας Matlab για τον υπολογισμό μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διαστημοπλοίου

```
clc;
clear;
close all;

B = 4;
alpha = 1;% ακτίνα
sigma = 1e7;% conductivity
epsilon_0 = 8.8541878176e-12;
epsilon_r = 3;
phi = pi/180:pi/180:2*pi;
xcircle = alpha*cos(phi);
ycircle = alpha*sin(phi);
zcircle = zeros(size(phi));

positionvector = [xcircle; ycircle; zcircle]; % thesi tou
current loop

omega = [zeros(size(phi)); zeros(size(phi));
ones(size(phi))]; % goniaki taxitita

velocityvector = cross(omega, positionvector); % dianisma
taxititas

Bexternal = [zeros(size(phi)); zeros(size(phi));
B*ones(size(phi))]; % eksoteriko pedio
Force = cross(velocityvector, Bexternal); % omega x B

dx = xcircle(2:end) - xcircle(1:(end-1));
dy = ycircle(2:end) - ycircle(1:(end-1));

DForce = Force(:, 2:end) - Force(:, 1:(end-1));

divx = DForce(1, :)./dx;
divy = DForce(2, :)./dy;

divergenceF = divx+divy;

Q = - epsilon_r*epsilon_0*divergenceF;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dphi = pi/180;

Jx = alpha*dphi*Q.*velocityvector(1, 1:end-1);
Jy = alpha*dphi*Q.*velocityvector(2, 1:end-1);
Jz = alpha*dphi*Q.*velocityvector(3, 1:end-1);
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0 = -10:0.5:10;    %observation point
y0 = -10:0.5:10;
%z0 = 0;
z0 = -10:0.5:10;

% x0=[0];
% y0=[0];
% z0=[5];

for i=1:1:length(x0);
    for j = 1:1:length(y0);
        for k = 1:1:length(z0);
R = sqrt((xcircle-x0(i)).^2+ (ycircle-y0(j)).^2 +(zcircle-
z0(k)).^2);

Ax(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jx./R(1:end-1) );
Ay(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jy./R(1:end-1) );
%Az(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jz./R(1:end-1) );
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
diffx0 = x0(2:end) - x0(1:(end-1));
diffy0 = y0(2:end) - y0(1:(end-1));
diffz0 = z0(2:end) - z0(1:(end-1));

DAxy = Ax(:, 2:end,:) - Ax(:, 1:(end-1),:);
DAYx = Ay(2:end, :, :) - Ay(1:(end-1), :, :);
DAxz = Ax(:, :, 2:end) - Ax(:, :, 1:(end-1));
DAYz = Ay(:, :, 2:end) - Ay(:, :, 1:(end-1));

for i=1:1:length(x0)-1;
    for j = 1:1:length(y0)-1;
        for k = 1:1:length(z0)-1;
Bx(i, j, k) = -DAYz(i, j, k)/diffz0(k);
By(i, j, k) = DAxz(i, j, k)/diffz0(k);
Bz(i, j, k) = DAYx(i, j, k)/diffx0(i) - DAxy(i, j,
k)/diffy0(j);

        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=-9.5:0.5:10;%Εύρος τιμών για να κάνουμε γραφική
παράσταση
y1=-9.5:0.5:10;
z1=-9.5:0.5:10;

```

```

%Γραφικές Παραστάσεις για την κάθε συνιστώσα του πεδίου
contourslice(x1,y1,z1,Bx,x1,y1,z1);
xlabel('άξονας X[m]')
ylabel('άξονας Y[m]')
zlabel('άξονας Z[m]')
colorbar
c=colorbar
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
figure;
contourslice(x1,y1,z1,By,x1,y1,z1)
xlabel('άξονας X[m]')
ylabel('άξονας Y[m]')
zlabel('άξονας Z[m]')
colorbar
c=colorbar
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
figure;
contourslice(x1,y1,z1,Bz,x1,y1,z1)
xlabel('άξονας X[m]')
ylabel('άξονας Y[m]')
zlabel('άξονας Z[m]')
colorbar
c=colorbar
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')

```

**Κώδικας Matlab για τον υπολογισμό μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διαστημολοίου με  $B_{ext}$**

```

clc;
clear;
close all;

B = 4;
alpha = 1;% aktina
sigma = 1e7; % conductivity
epsilon_0 = 8.8541878176e-12;
epsilon_r = 3;
phi = pi/180:pi/180:2*pi;
xcircle = alpha*cos(phi);
ycircle = alpha*sin(phi);
zcircle = zeros(size(phi));

positionvector = [xcircle; ycircle; zcircle]; % thesi tou current loop

omega = [zeros(size(phi)); zeros(size(phi)); ones(size(phi))]; % goniaki taxitita

velocityvector = cross(omega, positionvector); % dianisma taxititas

Bexternal = [B*ones(size(phi)); zeros(size(phi)); zeros(size(phi))]; % eksoteriko pedio

Force = cross(velocityvector, Bexternal); % omega x B

dx = xcircle(2:end) - xcircle(1:(end-1));
dy = ycircle(2:end) - ycircle(1:(end-1));

DForce = Force(:, 2:end) - Force(:, 1:(end-1));

divx = DForce(1, :)./dx;
divy = DForce(2, :)./dy;

divergenceF = divx+divy;

Q = - epsilon_r*epsilon_0*divergenceF;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dphi = pi/180;

Jx = alpha*dphi*Q.*velocityvector(1, 1:end-1);
Jy = alpha*dphi*Q.*velocityvector(2, 1:end-1);
Jz = alpha*dphi*Q.*velocityvector(3, 1:end-1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0 = -10:0.5:10; %observation point

```

```

y0 = -10:0.5:10;
%z0 = 0;
z0 = -10:0.5:10;

% x0=[0];
% y0=[0];
% z0=[5];

for i=1:1:length(x0);
    for j = 1:1:length(y0);
        for k = 1:1:length(z0);
            R = sqrt((xcircle-x0(i)).^2+ (ycircle-y0(j)).^2 +(zcircle-z0(k)).^2);

            Ax(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jx./R(1:end-1) );
            Ay(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jy./R(1:end-1) );
            %Az(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jz./R(1:end-1) );
        end
    end
end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
diffx0 = x0(2:end) - x0(1:(end-1));
diffy0 = y0(2:end) - y0(1:(end-1));
diffz0 = z0(2:end) - z0(1:(end-1));

DAxy = Ax(:, 2:end,:) - Ax(:, 1:(end-1),:);
DAyx = Ay(2:end, :, :) - Ay(1:(end-1), :, :);
DAXz = Ax(:, :, 2:end)- Ax(:, :,1:(end-1));
DAyz = Ay(:, :, 2:end)- Ay(:, :,1:(end-1));

for i=1:1:length(x0)-1;
    for j = 1:1:length(y0)-1;
        for k = 1:1:length(z0)-1;
            Bx(i, j, k) = -DAyz(i, j, k)/diffz0(k);
            By(i, j, k) = DAXz(i, j, k)/diffz0(k);
            Bz(i, j, k) = DAyx(i, j, k)/diffx0(i)- DAxy(i, j, k)/diffy0(j);

        end
    end
end

x1=-9.5:0.5:10;%Εύρος τιμών για να κάνουμε γραφική παράσταση
y1=-9.5:0.5:10;

```

```
z1=-9.5:0.5:10;
```

```
%Γραφικές Παραστάσεις για την κάθε συνιστώσα του πεδίου
```

```
contourslice(x1,y1,z1,Bx,x1,y1,z1);
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

```
figure;
```

```
contourslice(x1,y1,z1,By,x1,y1,z1)
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

```
figure;
```

```
contourslice(x1,y1,z1,Bz,x1,y1,z1)
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```



**Κώδικας Matlab για τον υπολογισμό μαγνητικού πεδίου ενός περιστρεφόμενου διασημπολίου με  $B_{ext}$  σε δυο συνιστώσες**

```
clc;
clear;
close all;

B = 4;
alpha = 1;% aktina
sigma = 1e7; % conductivity
epsilon_0 = 8.8541878176e-12;
epsilon_r = 3;
phi = pi/180:pi/180:2*pi;
xcircle = alpha*cos(phi);
ycircle = alpha*sin(phi);
zcircle = zeros(size(phi));

positionvector = [xcircle; ycircle; zcircle]; % thesi tou current loop

omega = [zeros(size(phi)); zeros(size(phi)); ones(size(phi))]; % goniaki taxitita

velocityvector = cross(omega, positionvector); % dianisma taxititas

Bexternal = [zeros(size(phi)); 0.5*B*ones(size(phi)); 0.5*B*ones(size(phi))]; %
eksoteriko pedio

Force = cross(velocityvector, Bexternal); % omega x B

dx = xcircle(2:end) - xcircle(1:(end-1));
dy = ycircle(2:end) - ycircle(1:(end-1));

DForce = Force(:, 2:end) - Force(:, 1:(end-1));

divx = DForce(1, :)./dx;
divy = DForce(2, :)./dy;

divergenceF = divx+divy;

Q = - epsilon_r*epsilon_0*divergenceF;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
dphi = pi/180;

Jx = alpha*dphi*Q.*velocityvector(1, 1:end-1);
Jy = alpha*dphi*Q.*velocityvector(2, 1:end-1);
Jz = alpha*dphi*Q.*velocityvector(3, 1:end-1);
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0 = -10:0.5:10; %observation point
y0 = -10:0.5:10;
%z0 = 0;
z0 = -10:0.5:10;

% x0=[0];
% y0=[0];
% z0=[5];

for i=1:1:length(x0);
    for j = 1:1:length(y0);
        for k = 1:1:length(z0);
            R = sqrt((xcircle-x0(i)).^2+ (ycircle-y0(j)).^2 +(zcircle-z0(k)).^2);

            Ax(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jx./R(1:end-1) );
            Ay(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jy./R(1:end-1) );
            %Az(i, j, k) = 1e-7* alpha *sum(Jz./R(1:end-1) );
            end
        end
    end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
diffx0 = x0(2:end) - x0(1:(end-1));
diffy0 = y0(2:end) - y0(1:(end-1));
diffz0 = z0(2:end) - z0(1:(end-1));

DAxy = Ax(:, 2:end,:) - Ax(:, 1:(end-1),:);
DAyx = Ay(2:end, :, :) - Ay(1:(end-1), :, :);
DAxz = Ax(:, :, 2:end)- Ax(:, :,1:(end-1));
DAyz = Ay(:, :, 2:end)- Ay(:, :,1:(end-1));

for i=1:1:length(x0)-1;
    for j = 1:1:length(y0)-1;
        for k = 1:1:length(z0)-1;
            Bx(i, j, k) = -DAyz(i, j, k)/diffz0(k);
            By(i, j, k) = DAxz(i, j, k)/diffz0(k);
            Bz(i, j, k) = DAyx(i, j, k)/diffx0(i)- DAxy(i, j, k)/diffy0(j);

            end
        end
    end
end

```

```
x1=-9.5:0.5:10;%Εύρος τιμών για να κάνουμε γραφική παράσταση
y1=-9.5:0.5:10;
z1=-9.5:0.5:10;
```

```
%Γραφικές Παραστάσεις για την κάθε συνιστώσα του πεδίου
```

```
contourslice(x1,y1,z1,Bx,x1,y1,z1);
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

```
figure;
```

```
contourslice(x1,y1,z1,By,x1,y1,z1)
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

```
figure;
```

```
contourslice(x1,y1,z1,Bz,x1,y1,z1)
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

## Κώδικας Matlab για τον υπολογισμό μαγνητικού πεδίου ενός μαγνητικού διπόλου

```
clc;
clear;
close all;

aktina = 1;
mh = 12.56637061435917e-7;
emvadon = pi * aktina^2;
r = [0,0,0];%dianysmathesis
cost = mh/(4*pi);
I = -0.00046348667780485285211433834132e+7;

x=0;%σημείο που είναι το δίπολο
y=0;
z=0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x0 = -10:0.5:10; %observation point
y0 = -10:0.5:10;
z0 = -10:0.5:10;

m = I* emvadon;%dipolikhroph

for i=1:1:length(x0);
    for j = 1:1:length(y0);
        for k = 1:1:length(z0);

R(i, j, k) = sqrt((x-x0(i)).^2+ (y-y0(j)).^2 +(z-z0(k)).^2);

            end
        end
    end

    for i=1:1:length(x0)-1;
        for j = 1:1:length(y0)-1;
            for k = 1:1:length(z0)-1;

Bx(i, j, k) =cost*(3*m*((z-z0(k))*(x-x0(i)))/(R(i, j, k)^5);
By(i, j, k) =cost*(3*m*((z-z0(k))*(y-y0(j)))/(R(i, j, k)^5);
Bz(i, j, k) =cost*(3*m*((z-z0(k))*(z-z0(k)))/(R(i, j, k)^5)- m/(R(i, j, k)^3));

            end
        end
    end
```

```
end  
end
```

```
x1=-9.5:0.5:10;%Εύρος τιμών για να κάνουμε γραφική παράσταση  
y1=-9.5:0.5:10;  
z1=-9.5:0.5:10;
```

```
%Γραφικές Παραστάσεις για την κάθε συνιστώσα του πεδίου
```

```
contourslice(x1,y1,z1,Bx,x1,y1,z1);
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

```
figure;
```

```
contourslice(x1,y1,z1,By,x1,y1,z1)
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```

```
figure;
```

```
contourslice(x1,y1,z1,Bz,x1,y1,z1)
```

```
xlabel('Άξονας X[m]')
```

```
ylabel('Άξονας Y[m]')
```

```
zlabel('Άξονας Z[m]')
```

```
colorbar
```

```
c=colorbar
```

```
ylabel(c,'Μαγνητικό Πεδίο [nT]')
```