Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Τμημα Ηλεκτρολογων Μηχανικων Και Μηχανικων Υπολογιστων

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Ανάλυση Ισορροπιών Σε Μηχανισμούς με Μερική Επαλήθευση

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Ελένης Κ. Μπάτζιου

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

31 Οκτωβρίου 2017

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών Και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής Και Υπολογιστών
Εργαστήριο Λογικής Και Επιστήμης Υπολογιστών

Ανάλυση Ισορροπιών Σε Μηχανισμούς με Μερική Επαλήθευση

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

της

Ελένης Κ. Μπάτζιου

Επιβλέπων: Δημήτριος Φωτάκης
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 31 Οκτωβρίου 2017.

....	....	....
Δημήτριος Φωτάκης	Αριστείδης Παγουρτζής	Νικόλαος Παπασπύρου
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2017

....

Ελένη Κ. Μπάτζιου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Βασική επιδίωξη στο ερευνητικό πεδίο του Σχεδιασμού Μηχανισμών αποτελεί η εγγύηση της φιλαλήθειας (truthfulness). Προς την κατεύθυνση αυτή, αξιοποιείται από τους μηχανισμούς η μέθοδος της επαλήθευσης. Πρόκειται για την δυνατότητα του μηχανισμού να ελέγχει, μερικώς ή καθολικά, κατά πόσο είναι αληθείς οι δηλώσεις των παικτών, σχετικά με τις προσωπικές τους προτιμήσεις σε ένα παίγνιο. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται προκειμένου να παρέχει τα απαραίτητα κίνητρα στους παίκτες, ώστε να καταστεί ο μηχανισμός φιλαλήθης, χωρίς όμως να είναι βέβαιο ότι επιτυγχάνει. Στην παρούσα εργασία, μελετάται η συμπεριφορά μηχανισμών όπου η ιδιότητα της φιλαλήθειας παύει να ισχυέι εν γένει. Αναλύουμε τέτοιους μηχανισμούς, αρχικά ως προς την ύπαρξη Ισορροπιών Nash, δηλαδή ως προς την σύγκλιση των παικτών σε μια στρατηγική που είναι για αυτούς βέλτιστη, από την οποία η περαιτέρω γνώση των ενεργειών των υπολοιπων, δεν βελτιώνει το προσωπικό όφελος κανενός εξ'αυτών. Ένα δεύτερο κριτήριο ως προς το οποίο αξιολογούμε τους μηχανισμούς, είναι το Τίμημα της Αναρχίας, και ερευνά κατά πόσο ο υπό εξέταση μηχανισμός προσεγγίζει την απόδοση του αντίστοιχου φιλαλήθους. Στην μελέτη αυτή, προτείνονται αποδείξεις ύπαρξης ισορροπιών και φραγμάτων για το Τίμημα της Αναρχίας, τόσο σε περιβάλλοντα δημοπρασιών, όσο και σε γενικότερα πλαίσια εφαρμογής.

Λέξεις-Κλειδιά: Σχεδιασμός Μηχανισμών, Συνδυαστικές Δημοπρασίες, Επαλήθευση, Ισορροπία Nash, Τίμημα της Αναρχίας

Abstract

A central research direction in the field of Mechanism Design is the design of mechanisms that maintain the property of truthfulness. In this direction, we study the notion of verification. The latter refers to the ability of a mechanism to verify, partially or globally, the extent to which the agents' declarations correspond to their true valuations in a certain game. By the use of verification, we aim at providing agents with the necessary incentives, in order to guarantee truthful reporting. However, this method does not always yield the desired results. To this end, we study mechanisms where truthfulness ceases to exist, and we use verification to approximate truthful behaviour. Initially, we focus on guaranteeing the existence of Nash Equilibria in mechanisms with verification, namely in terms of convergence of agents to a strategy that is optimal, in the sense that no agent can increase his payoff by unilaterally deviating from this specific strategy. Furthermore, we examine our mechanisms from the perspective of the Price of Anarchy, and the extent to which agents' selfishness approximates the Equilibrium solution, which corresponds to truthful behaviour. In this study, we prove the existence of Pure and Mixed Nash Equilibria and provide bounds on the Price of Anarchy, in auction environments as well as more general game-theoretic settings.

Keywords: Nash Equilibrium, Price of Anarchy, Verification, Mechanism Design, Combinatiorial Auctions

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο, γίνεται μια παρουσίαση του πλαισίου εντός του οποίου εξελίσσεται η μελέτη, στον τομέα της Θεωρίας Παιγνίων και του Σχεδιασμού Μηχανισμών, ειδικότερα στην κατεύθυνση των μηχανισμών που χρησιμοποιούν επαλήθευση. Συνεχίζοντας, αναφέρονται τα ερωτήματα στα οποία επιχειρούμε να απαντήσουμε με την παρούσα εργασία, και τα αποτελέσματα της έρευνάς μας. Τέλος, δίνεται ένα οργανωτικό πλάνο με τη δομή των κεφαλαίων και τη ροή που ακολουθείται.

1.1 Ερευνητικό Πλαίσιο

Στο ερευνητικό πεδίο της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων, μελετάται την αλληλεπίδραση στρατηγικών παικτών, καθένας εκ των οποίων ενεργεί με εγωιστικό τρόπο. Κάθε παίκτης αποζητά να βελτιστοποιήσει κάποια παράμετρο, ώστε να απολάβει τη μέγιστη δυνατή ωφέλεια και να επηρεάσει το αποτέλεσμα προς όφελός του. Κεντρικό ερώτημα στον κλάδο αυτόν αποτελεί η εύρεση των Ισορροπιών Nash. Η έννοια των ισορροπιών, προϋπήρχε στην επιστήμη των οικονομικών, αλλά εισήχθη με τη μορφή αυτή από τον John F. Nash στην κλασική εργασία του [1]. Οι ισορροπίες αυτές χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες, εκ των οποίων, κατά την παρούσα μελέτη, θα ασχοληθούμε με τις Αμιγείς και τις Μικτές. Ένα πολύ βασικό αποτέλεσμα για την επιστήμη της Θεωρίας Παιγνίων, απορρέει από το θεώρημα που απέδειξε ο Nash στο [2] ότι κάθε παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον μια Μικτή Ισορροπία Nash. Εν γένει, οι Αμιγείς Ισορροπίες Nash είναι πολύ πιο ισχυρές από τα Μικτές, και για τον λόγο αυτό είναι πολύ δυσκολότερη η απόδειξη ύπαρξής τους. Μάλιστα, το πρόβλημα απόφασης που αφορά στην ύπαρξη των Αμιγών Ισορροπιών Nash είναι NP-Complete, όπως παρουσιάζεται και στο [3]. Ακόμη, το πρόβλημα υπολογισμού αυτών, σε ένα παίγνιο 4 ή πλέον παικτών, είναι πλήρες στην κλάση πολυπλοκότητας PPAD (Polynomial Parity Arguments on Directed graphs), όπως αποδεικνύεται στο κλασικό αποτέλεσμα των Δασκαλάκη και Παπαδημητρίου [4]. Με την έννοια των Ισορροπιών Nash, εννοούμε ένα σύνολο στρατηγικών από τις οποίες κανένας παίκτης, αν αποκτούσε γνώση των ενεργειών των υπολοίπων παικτών, δε θα ήθελε να αλλάξει. Σε μεγάλα παίγνια, όπως όταν γίνονται με επαναλήψεις ακολουθιακά, η ύπαρξη ισορροπιών Nash εγγυάται την σύγκλιση για ένα πρόβλημα, που σημαίνει ότι δεν θα συνεχίζει αενάως μεταβαλλόμενο. Στις αμιγείς στρατηγικές, ο παίκτης επιλέγει κάποια στρατηγική από τις διαθέσιμες σε αυτόν με πιθανότητα ίση με 1, ενώ στις μικτές, κάθε παίκτης διαθέτει μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των στρατηγικών. Επομένως, η απόδειξη ύπαρξης Αμιγούς Ισορροπίας Nash συνεπάγεται ότι στο σύνολο στρατηγικών του παίκτη, υπάρχει μια, η οποία θα τον οδηγήσει σε σύγκλιση με τους υπόλοιπους παίκτες. Η μαθηματική ερμηνεία του Nash Equilibrium είναι ότι αυτό αποτελεί το σταθερό σημείο της συνάρτησης την οποία ο παίκτης επιθυμεί να μεγιστοποιήσει, δηλαδή της συνάρτησης ωφέλειας, στον πολυδιάστατο χώρο, για το σύνολο των παικτών. Αποδεικνύεται λοιπόν κομβικής σημασίας το να ευρεθούν οι ισορροπίες αυτές, ή έστω να εγγυηθούμε την ύπαρξή τους.

Σε συνέχεια της μελέτης των ισορροπιών Nash, ένα ακόμη χρήσιμο εργαλείο με το οποίο μπορούμε να χαρακτηρίσουμε ένα παίγνιο είναι το Τίμημα της Αναρχίας. Η έννοια αυτή εισήχθη από τους Κουτσουπιά και Παπαδημητρίου, στην εργασία [5]. Χρησιμοποιείται για να μετρήσουμε πως επηρεάζεται η απόδοση του συστήματος εξαιτίας της εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών, και ποιά η σχέση του με τη βέλτιστη λύση. Διαισθητικά, αντιπροσωπεύει το μέγεθος στο οποίο ο ανταγωνισμός προσεγγίζει την συνεργασία. Μια πρώτη εκτενής έρευνα στο πεδίο του Price of Anarchy, αφορούσε σε congestion games, από τους Roughgarden, Tardos [6], αποδεικνύοντας συγκεκριμένα ένα 4/3 upper bound για το PoA σε δίκτυα με γραμμική συνάρτηση κόστους (όμοια με δίκτυα Pigou). Στη συνέχεια, το ερευνητικό ενδιαφέρον στράφηκε στις δημοπρασίες, αποδεικνύοντας διάφορα tight άνω και κάτω φράγματα για το PoA. Συγκεκριμένα, για γενικές συναρτήσεις αξιολόγησης σε single-item auction, αποδεικνύεται ένα κάτω φράγμα $\Omega(m^{(1/2)-\epsilon})$ και αντίστοιχο άνω φράγμα $O(\sqrt{m})$ (παραπέμπουμε στο [7]) και για τις υποαθροιστικές αντιστοίχως το άνω και κάτω φράγμα ταυτίζονται και είναι ίσα με 2, όπως αποδεικνύεται στο [8]. Επιπλέον, η τεχνική του smoothness, που διατυπώθηκε αναλυτικότερα ως μέθοδος απόδειξης tight bounds στο [9] (αναφορές στο smoothness property σε παίγνια πλήρους ή μη πλήρους πληροφορίας, υπάρχουν βεβαίως ήδη από τα [7], [10], [11], [12]), αποτελεί ένα πλέον χρήσιμο εργαλείο στην κατεύθυνση αναζήτησης φραγμάτων για το PoA, σε οποιαδήποτε περίπτωση δημοπρασίας.

Στον σχεδιασμό μηχανισμών, βασικό στόχο αποτελεί η επίτευξη της ιδιότητας της φιλαλήθειας (truthfulness). Με την έννοια αυτή, όλοι οι παίκτες δηλώνουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις, και έτσι μπορούμε να έχουμε πλήρη εικόνα του παιγνίου. Σε πραγματικά settings, κάτι τέτοιο φυσικά δεν ισχύει, εάν δεν παρέχουμε τα απαραίτητα κίνητρα. Για παράδειγμα, στις δημοπρασίες, επιβάλλεται ένα παράβολο στον νικητή, με τη μορφή πληρωμής, ώστε να εξασφαλίζεται η ιδιότητα αυτή. Πρακτικά, ο σχεδιασμός φιλαλήθων μηχανισμών ανάγεται στον σχεδιασμό αλγορίθμων μέσα σε ένα περιορισμένο υπολογιστικό πλαίσιο. Χρήσιμη στην κατεύθυνση αυτή είναι η Revelation Principle [13], η οποία διατυπώνεται ως εξής: Εάν μια συνάρτηση κοινωνικής επιλογής μπορεί να υλοποιηθεί από έναν τυχαίο, αυθαίρετο μηχανισμό, δηλαδή εάν υπάρχει μηχανισμός που διαθέτει ισορροπία Nash και αυτή ταυτίζεται με το αποτέλεσμα της συνάρτησης κοινωνικής επιλογής, τότε η ίδια συνάρτηση μπορεί να υλοποιηθεί από έναν μηχανισμό στον οποίο όλοι οι παίκτες είναι φιλαλήθεις (incentive-compatible-direct mechanism), διατηρώντας το ίδιο σημείο ισορροπίας. Πρακτικά λοιπόν, εάν υπάρχει συνάρτηση της οποίας η λύση να ισούται με την ισορροπία Nash, μπορούν να κατασκευαστούν κίνητρα ώστε ο μηχανισμός να γίνει φιλαλήθης. Ένας κλασικός τρόπος να εξασφαλίσουμε φιλαλήθεια, που εφαρμόζεται σε περιβάλλοντα δημοπρασιών, είναι η επιβολή VCG payments. Ο μηχανισμός VCG λειτουργεί επιβάλλοντας σε όλους τους παίκτες της δημοπρασίας, ανεξαρτήτως αν κερδίζουν, πληρωμή ως ποινή ίση με την "ζημιά" που προκαλούν στους υπόλοιπους παίκτες.

Συχνά όμως δεν μπορούν να επιβληθούν πληρωμές στους παίκτες, και πρέπει ο Σχεδιαστής Μηχανισμών να αντιμετωπίσει με άλλο τρόπο το πρόβλημα. Ο τρόπος που μελετάται στην παρούσα εργασία, είναι η χρήση επαλήθευσης (verification). Με την έννοια αυτή, ο μηχανισμός εξετάζει τις δηλώσεις των παικτών, και μπορεί να κρίνει αν αυτές είναι αληθείς ή όχι. Εάν ο μηχανισμός εντοπίσει έναν παίκτη που ψεύδεται, τον αποκλείει από τη μελέτη. Συνεπώς, διαισθητικά αντιλαμβανόμαστε ότι ο παράγοντας αυτός θα μπορούσε να αποτελέσει κίνητρο για την φιλαλήθη συμπεριφορά των παικτών. Υπάρχουν διάφορες μορφές επαλήθευσης, που παρουσιάζονται εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 2. Εν προκειμένω, ασχολούμαστε με μερική επαλήθευση, όπου δηλαδή το εύρος του ψέματος του παίκτη περιορίζεται σε μια περιοχή $\pm\epsilon$. Αυτή η περιοχή είναι οσωνδήποτε διαστάσεων ορίζονται από το πρόβλημα, απλά περιορίζεται ως προς μέτρο κατά την παράμετρο ϵ. Στον μηχανισμό *Power* που μελετούμε, που εισάγεται και αναλύεται με την εκδοχή του με επαλήθευση, στο [14], αποδεικνύεται ότι, επαληθεύοντας μόλις $\ln m/\epsilon$ παίκτες, επιτυγχάνουμε $(1-\epsilon)-$truthfulness, όπου m είναι ο αριθμός των ενδεχομένων που μπορούν να προκύψουν ως αποτέλεσμα του μηχανισμού. Ο μηχανισμός αναθέτει πιθανότητες σε κάθε ενδεχόμενο, που προκύπτουν ως αναλογίες επί του συνόλου, και αποκλείει όσους εκ των $\ln m/\epsilon$ που εξακριβώνει, δηλώνουν ψευδείς προτιμήσεις.

Πρόσφατες έρευνες στα [15], [16], [17] αποδεικνύουν ότι η χρήση μερικής επαλήθευσης δεν συμβάλλει στην κατασκευή φιλαλήθων μηχανισμών. Επομένως, προτιμάται η επαλήθευση να είναι ακριβής, και αναζητείται στην κατεύθυνση αυτή ένας τρόπος περιορισμού του μεγέθους του συνόλου το οποίο εξετάζεται ή επιβολής μικρών ποινών. Συνεπώς, στην εργασία [14] προτείνεται η επιλεκτική επαλήθευση, επιδιώκοντας ένα καλό trade-off ανάμεσα στην προσέγγιση της φιλαλήθειας, την προσέγγιση της βέλτιστης λύσης ως προς την αντικειμενική συνάρτηση Social Welfare, και του μικρού μεγέθους συνόλου επαλήθευσης.

1.2 Στόχος της Εργασίας

Αρχική επιδώξη της παρούσας εργασίας είναι, αναλύοντας τον μηχανισμό $Power^{\ell}$ που προαναφέρθηκε, όπου ως ℓ συμβολίζεται ο αριθμός παικτών που επαληθεύονται από τον μηχανισμό, να μελετήσει την ύπαρξη Ισορροπιών Nash και το Τίμημα της Αναρχίας, σε καταστάσεις που μοντελοποιούνται με την κατανομή πιθανότητας που προτείνεται από τον μηχανισμό. Εμφωλεύοντας την έννοια του verification, μελετούμε την απόδοση του μηχανισμού, όταν αποδεχόμαστε κάποια ϵ μικρή απόκλιση από την πραγματικότητα. Τα settings τα οποία μελετούμε είναι τόσο αυτό με απλές εκβάσεις (outcomes), όπως το αρχικό που αναφέρεται στη βιβλιογραφία, όσο και αυτό που προκύπτει από την εφαρμογή των πιθανοτήτων του μηχανισμού σε περιβάλλοντα δημοπρασιών.

Στόχος μας είναι, αρχικά, να μελετήσουμε αν υπάρχουν σημεία Ισορροπίας, ειδικότερα Αμιγούς, στον μηχανισμό υπό εξέταση. Τα PNE εξασφαλίζουν ότι, για ανταγωνιστική συμπεριφορά των παικτών και παρά την ψευδή δήλωση που επιτρέπεται εντός των ορίων του ϵ, μπορεί να επιτευχθεί ισορροπία, από την οποία κανένας παίκτης δεν έχει λόγο να αποκλίνει. Θα θέλαμε να αποδείξουμε ότι, για κάθε παίκτη, η ισορροπία βρίσκεται στην μέγιστη δήλωσή του στην περιοχή ϵ, ανάλογα με την μονοτονία της συνάρτησης utility του παίκτη.

Μελετούμε λοιπόν κατά πόσο μια ϵ απόκλιση επηρεάζει την απόδοση του μηχανισμού. Επιδιώκουμε να αποδείξουμε ότι, για μεγάλα παίγνια πολλών παικτών, ο μηχανισμός με ϵ αποκλίσεις από την πραγματική τιμή, δηλαδή με χρήση partial verification, οδηγείται σε βέλτιστη λύση, τη λύση συνεργασίας που αντιστοιχεί στην θέση Ισορροπίας Nash. Έτσι, εξασφαλίζουμε ότι ο μηχανισμός μας επιτυγχάνει, σε εγωιστικό περιβάλλον ανταγωνισμού, τη βέλτιστη τιμή για το objective του Social Welfare.

Καταλήγοντας, έχουμε μια πλήρη εικόνα των μηχανισμών αυτών. Το γεγονός αυτό, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, σε διάφορα settings, ο μηχανισμός $Power^{\ell}$ με $\epsilon-$verification και οι εφαρμογές του σε δημοπρασίες, επιτυγχάνουν καλή προσέγγιση της βέλτιστης λύσης, καθώς, για μεγάλο αριθμό παικτών, η εγωιστική συμπεριφορά των παικτών τείνει προς την βέλτιστη λύση συνεργασίας. Το αποτέλεσμα αυτό καθιστά τον μηχανισμό ιδιαίτερα αποδοτικό. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι ο μηχανισμός $Power^{\ell}$ διαθέτει Αμιγείς Ισορροπίες και, στην περίπτωση που $\ell > 1$, μια αρκετά καλή προσέγγιση των PNE. Αυτό συνεπάγεται ότι, εφόσον εξετάζουμε μηχανισμούς με verification, το οποίο επιβάλλεται αντί των payments για να εξασφαλίσει μια προσέγγιση του truthfulness, μπορούν οι παίκτες, με $\pm\epsilon$ απόκλιση από την πραγματική τους valuation, να συγκλίνουν τελικά σε μια κατάσταση ισορροπίας.

1.3 Οργάνωση της Εργασίας

Κεντρικός άξονας της εργασίας μας είναι η απόδειξη ύπαρξης Nash Equilibria στον μηχανισμό *Power*. Η απόδειξη αυτή είναι κομβικής σημασίας, καθώς καθορίζει την σύγκλιση του μηχανισμού σε ένα σημείο, στο οποίο όλοι οι παίκτες έχουν στρατηγικό συμφέρον να παραμείνουν. Κάτι τέτοιο συνεπάγεται ότι ντετερμινιστικά θα υπάρχει βέλτιστη λύση ως προς το objective του Social Welfare για τους παίκτες. Μελετούμε τον μηχανισμό για το εύρος τιμών της παραμέτρου ℓ, επιδιώκοντας ιδανικά να αποδείξουμε την ύπαρξη Αμιγών Ισορροπιών Nash. Στην κατεύθυνση αυτή, προσπαθούμε να εκμεταλλευτούμε την κυρτότητα της συνάρτησης χρησιμότητας (utility function) του παίκτη, με στόχο να αποδείξουμε την ύπαρξη ενός σταθερού σημείου ή μεγίστου/ελαχίστου, στην περίπτωση που μπορούσαμε να εξασφαλίσουμε σταθερή κυρτότητα. Η μελέτη επομένως γίνεται αρχικά συναρτησιακά, αναλύοντας την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης, από την οποία προκύπτει η κυρτότητα. Εύκολα είναι αντιληπτό ότι για διαφορετικές τιμές του ℓ, με κατώφλι το 1, η κυρτότητα αλλάζει: συγκεκριμένα για $\ell \leq 1$ είναι κοίλη και για $\ell > 1$ εναλλάσσεται ανάμεσα σε κυρτή και κοίλη. Για την πρώτη περίπτωση, αξιοποιούμε το αποτέλεσμα του Rosen στο [18], εφόσον έχουμε κοίλο παίγνιο, και εξασφαλίζεται από εκεί η ύπαρξη Αμιγούς Ισορροπίας Nash, τουλάχιστον μίας. Στην δεύτερη περίπτωση, τείνουμε να πιστεύουμε (χωρίς να υπάρχει τυπική απόδειξη, αλλά με μορφή αντιπαραδειγμάτων) ότι δεν υπάρχουν Αμιγείς Ισορροπίες Nash. Οι γνωστές μέθοδοι που δοκιμάστηκαν, όπως η ύπαρξη συνάρτησης δυναμικού (potential function) που προτείνεται στο [19], ή το μαθηματικό εργαλείο του κριτηρίου δεύτερης παραγώγου, με χρήση του Hessian πίνακα, αποτυγχάνουν, καθώς δεν καταλήγουν σε ορθό συμπέρασμα ή έχουν πεπλεγμένη μορφή. Το ίδιο ισχύει εάν αντιληφθούμε το παίγνιο ως δυναμικό, με μορφή γύρων όπου οι παίκτες γνωρίζουν τι συνέβη προηγουμένως, όπου, επιχειρώντας να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει best-response cycle προκειμένου να εξασφαλιστεί η ύπαρξη Pure Nash Equilibrium για το παίγνιο, σύμφωνα με τη μέθοδο που προτείνεται στο [20], οι πειραματικές προσομοιώσεις που εκτελέστηκαν αποδεικνύουν ότι υπάρχουν περιπτώσεις που εμφανίζονται κύκλοι. Επομένως, δεν μπορεί να εξαχθεί ασφαλές συμπέρασμα για την ύπαρξη Ισορροπιών για $\ell > 1$. Καταφεύγουμε λοιπόν στην λύση των Mixed Nash Equilibria, αναζητώντας προσεγγιστικές ισορροπίες. Σε αυτό, αξιοποιούμε το αποτέλεσμα του Lipton στο [21], που εγγυάται ύπαρξη τέτοιων ισορροπιών, σε κάθε περίπτωση, ως ένα uniform σύνολο στρατηγικών, με subexponential πολυπλοκότητα υπολογισμού. Η διαίσθηση πίσω από αυτές τις ισορροπίες είναι ότι, δεδομένου ότι προκύπτουν με uniform τρόπο, είναι αρκετά κοντά στα Pure Nash Equilibria (PNE), που είναι επιθυμητό, ουσιαστικά πρόκειται για ένα “relaxation” των PNE. Με τον τρόπο αυτό, βρίσκουμε προσεγγιστική ισορροπία για το πρόβλημα, εξασφαλίζοντας ότι μπορούμε να συνεχίσουμε στην μελέτη του PoA. Αξιοποιούμε το αποτέλεσμα αυτό, καθώς δίνει ικανοποιητική πολυπλοκότητα, και παρέχει από τα καλύτερα υπολογιστικά bounds για υπολογισμό προσεγγιστικών ισορροπιών. Το γεγονός αυτό, αποδεικνύεται χρήσιμο, καθώς, συνδυαζόμενο με το αποτέλεσμα του

Roughgarden από το [22], για σύνδεση της πολυπλοκότητας επικοινωνίας με τα φράγματα του PoA, συνεπάγεται αρκούντως μικρά φράγματα για την τιμή του PoA.

Εξετάζουμε επιπλέον μια πιο πρακτική εφαρμογή των παραπάνω. Μελετούμε το πρόβλημα Facility Location, αναζητώντας την ελάχιστη τιμή του ϵ, της παραμέτρου κατά την οποία μπορούν να αποκλίνουν οι παίκτες από την πραγματική τους θέση κατά τη δήλωσή τους, για την οποία υπάρχουν Ισορροπίες Nash για το πρόβλημα αυτό. Πράγματι, καταλήγουμε σε μια τιμή για το ϵ που εγγυάται την ύπαρξη ισορροπιών, οπότε και ο μηχανισμός θα καθίσταται truthful για τιμές εντός του ορίου της παραμέτρου, καθώς η ύπαρξη ισορροπίας συνεπάγεται ότι, ακόμη και για μικρές αποκλίσεις, μπορούν να καταλήξουν σε σύγκλιση και σε ένα βέλτιστο αποτέλεσμα για το σύνολο των παικτών.

Στη συνέχεια, στο Κεφάλαιο 5, επικεντρωνόμαστε στην μελέτη του PoA, προκειμένου να αξιολογήσουμε την απόδοση του μηχανισμού, και το κατά πόσο η χρήση του θα είχε νόημα σε πρακτικές εφαρμογές. Θέλουμε να καταγράψουμε τη σχέση ανάμεσα στην τυχαία εγωιστική συμπεριφορά και την βέλτιστη λύση, έχοντας στόχο να καταλήξουμε σε μια καλή προσέγγιση αυτής, δηλαδή σε αποτέλεσμα τιμή 1. Μελετάμε την περίπτωση πολλών παικτών, για να εξάγουμε κατά το δυνατόν γενικότερο αποτέλεσμα, λαμβάνοντας το όριο του PoA όταν ο αριθμός των παικτών τείνει προς το άπειρο. Εξετάζουμε, εν προκειμένω, περιβάλλοντα δημοπρασιών, όπου προσαρμόζονται οι πιθανότητες σύμφωνα με τον μηχανισμό *Power*. Στην ακολουθιακή μορφή, αντιμετωπίζουμε τις δημοπρασίες των m αντικειμένων ανεξάρτητα. Ένα χρήσιμο αποτέλεσμα, που αναλύεται εκτενώς στο Κεφάλαιο 3, μας επιτρέπει να αντιμετωπίζουμε την δημοπρασία των m αντικειμένων ως m ανεξάρτητες single-item δημοπρασίες. Αξιοποιώντας την ιδιότητα του smoothness, που ισχύει για τον μηχανισμό που εξετάζουμε, εξάγουμε φράγμα για το PoA, που ισχύει, κατά συνέπεια, για τον συνολική δημοπρασία των m αντικειμένων.

Στην παράλληλη περίπτωση, όπου τα αντικείμενα δημοπραττούνται σε συνδυασμούς, και εν τέλει προκύπτουν 2^m από αυτούς, εφαρμόζεται διαφορετική προσέγγιση. Εκ των αντικειμένων που δημοπραττούνται, θεωρούμε ότι τα k από αυτά επαληθεύονται, αποτελούν δηλαδή το verification set. Επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι το PoA φράσσεται από το κλάσμα των αντικειμένων που επαληθεύονται, ως προς την δήλωση των valuations που έχουν για αυτά οι παίκτες, δηλαδή ότι $PoA \geq k/n$. Αναλύοντας τη σχέση, καταλήγουμε ότι πράγματι ισχύει το ζητούμενο.

Τέλος, μελετάμε το αρχικό setting του μηχανισμού *Power* με εκβάσεις. Όπως αποδείχθη στο Κεφάλαιο 4, οι ισορροπίες είναι της μορφής MNE για την γενική περίπτωση, καθώς αυτές ισχύουν καθολικά και σε κάθε περίπτωση. Επιχειρηματολογήσαμε ήδη για την πολυπλοκότητα υπολογισμού αυτών των ισορροπιών. Βασικό εργαλείο του κεφαλαίου είναι η εργασία του [22], όπου αποδεικνύεται ότι, αν υπάρχει μη-ντετερμινιστικός αλγόριθμος με εκθετική πολυπλοκότητα που διαχωρίζει ανάμεσα στη βέλτιστη και ρ-προσεγγίσεις της βέλτιστης λύσης, τότε το φράγμα για το PoA είναι ρ. Συνεπώς, στη δική μας μελέτη, μπορούμε, σε subexponential πολυπλοκότητα, να υπολογίσουμε το $\delta-$MNE, που είναι προσέγγιση της Ισορροπίας Nash. Έτσι, αντίστοιχα σε subexponential χρόνο, υπολογίζουμε τη διαφορά της βέλτιστης λύσης και οποιασδήποτε $1/\rho$ ποσότητας αυτής. Μπορούμε να διαχωρίσουμε, με την προαναφερθείσα πολυπλοκότητα υπολογισμού, τη λύση Ισορροπίας από οποιαδήποτε άλλη. Κατ'επέκταση, η παράμετρος ρ που εισάγει η μελέτη [22], ισοδυναμεί με την τιμή 1 στην περίπτωσή μας. Αξιοποιώντας λοιπόν το παραπάνω αποτέλεσμα, συμπεραίνουμε ότι το φράγμα για το PoA είναι 1, ολοκληρώνοντας έτσι τη μελέτη του μηχανισμού, σε ότι αφορά τις additive και subadditive valuation functions.

Κεφάλαιο 2

Γενικές Έννοιες

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων (Algorithmic Game Theory), καθώς και του Σχεδιασμού Μηχανισμών (Mechanism Design). Οι έννοιες αυτές θα χρησιμοποιηθούν εκτενώς καθ'όλη την έκταση της παρούσας εργασίας. Θα παρουσιάσουμε κάποια ενδεικτικά παραδείγματα βασικών προβλημάτων στο πεδίο της AGT, ορισμένα από τα οποία έχουν μελετηθεί στο πλαίσιο της εργασίας αυτής.

Στο παρόν κεφάλαιο, θα αναλύσουμε τα κίνητρα που μας ώθησαν στη συγκεκριμένη μελέτη. Τα επιπλέον εργαλεία που θα μας χρειαστούν, σε αναλυτικότερη και τυπική διατύπωση, θα αναλυθούν στο Κεφάλαιο 3.

2.1 Αλγοριθμική Θεωρία Παιγνίων

Ο τομέας της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων κείται στην τομή της Θεωρία Παιγνίων, όπως αυτή είναι γνωστή από την επιστήμη των Οικονομικών, και της επιστήμης των Αλγορίθμων. Στόχος της είναι ο σχεδιασμός αλγορίθμων σε στρατηγικά περιβάλλοντα, όπου υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ οντοτήτων. Οι αλγόριθμοι προσπαθούν να επιλύσουν προβλήματα στα οποία συμμετέχουν πολλοί παίκτες, ο καθένας εκ των οποίων έχει ένα προσωπικό ενδιαφέρον για το αποτέλεσμα του παιχνιδιού, δηλαδή αποζητά να μεγιστοποιήσει την προσωπική του ευχαρίστηση από το αποτέλεσμα. Το προς επίλυση πρόβλημα έχει πολλές παραμέτρους, εφόσον ο κάθε παίκτης λειτουργεί ατομικά και το κέρδος του ενός οδηγεί σε απώλεια του άλλου. Οι οντότητες καλούνται να λάβουν κάποιες αποφάσεις, προκειμένου να καθορίσουν την έκβαση του παιχνιδιού, και να μεγιστοποιήσουν το προσωπικό τους όφελος.

Καλούμε παίγνια όλες τις καταστάσεις αλληλεπίδρασης οντοτήτων, που υπακούουν στην παραπάνω περιγραφή. Οι οντότητες που λαμβάνουν μέρος στα παίγνια καλούνται παίκτες (ή αλλιώς agents), και το μέτρο ικανοποίησης του κάθε παίκτη είναι το σκορ του ή η "χρησιμότητά" (utility) που αποκομίζει από κάθε έκβαση. Το παίγνιο έχει πολλές δυνατές εκβάσεις, και αυτή που τελικά θα συμβεί καθορίζεται από τον τρόπο που επιλέγουν να ενεργήσουν οι παίκτες. Ο κάθε παίκτης επιλέγει μια στρατηγική, που είναι αυτή που θα ακολουθήσει κατά την εξέλιξη του παιγνίου, και καθορίζεται ενδεχομένως από το πως προβλέπει ότι θα ενεργήσουν οι συμπαίκτες του.

Μια βασική σύμβαση που πρέπει να ακολουθείται είναι ότι οι παίκτες θα πρέπει να είναι *ορθολογιστές* (perfectly rational). Αυτό σημαίνει ότι ο κάθε παίκτης αποσκοπεί μόνον στη δική του προσωπική μεγιστοποίηση ωφέλειας σε κάθε παίγνιο, και ενεργεί με αυτόν τον γνώμονα.

2.2 Σχεδιασμός Μηχανισμών

Ο Σχεδιασμός Μηχανισμών είναι μια πιο πρακτική προσέγγιση στο σχεδιασμό λύσεων για παίγνια όπου οι πληροφορίες των παικτών είναι ιδιωτικές. Ως πληροφορίες ορίζουμε την χρησιμότητα, ως συνάρτηση, του κάθε παίκτη για κάθε έκβαση του παιγνίου, και αυτές είναι γνωστές μόνο στο σχεδιαστή του μηχανισμού και όχι στους υπόλοιπους παίκτες (private information). Ουσιαστικά πρόκειται για μια αντιστροφή της διαδικασίας που ακολουθείται στη Θεωρία Παιγνίων, καθώς ο Σ.Μ. εκκινεί από το τέλος του παιγνίου, από την τελική του έκβαση, και εργάζεται προς τα πάνω. Γνωρίζουμε δηλαδή τον στόχο του παιγνίου, τη συνάρτηση που πρέπει να μεγιστοποιηθεί. Οι παίκτες μπορούν να δηλώνουν την αληθινή τους προτίμηση θ, και να είναι *truthful*, είτε να δηλώνουν ψευδώς άλλη τιμή $\hat{\theta}$ (*non-truthful*). Σκοπός ενός μηχανισμού είναι να δημιουργεί τα κατάλληλα κίνητρα για τους παίκτες, ώστε αυτοί να συμπεριφέρονται με truthful τρόπο, καθώς η αληθής δήλωση αποτελεί για αυτούς τη στρατηγική που τους εξασφαλίζει τη μέγιστη ωφέλεια. Ο μηχανισμός εκτελείται, με είσοδο τις δηλώσεις των παικτών, και αντιστοιχίζει την είσοδο αυτή με κάποια έξοδο, που είναι η τελική έκβαση του παιχνιδιού όπως την υπολογίζει, δηλαδή το τελικό outcome.

2.3 Δημοπρασίες

Δημοπρασία είναι η διαδικασία αγοράς ή πώλησης αντικειμένων ή υπηρεσιών, με την κατάθεση προσφορών από τη μεριά των υποψήφιων αγοραστών. Ο τρόπος διεξαγωγής της δημοπρασίας, καθώς και ο τρόπος με τον οποίο απονέμεται τελικά το αντικείμενο προς πώληση, μπορεί να ποικίλλει. Ένα παράδειγμα δημοπρασιών, που είναι η ευρύτερα γνωστότερη μορφή, είναι οι open ascending bid auctions (English auctions). Σε αυτές τις δημοπρασίες, οι συμμετέχοντες καταθέτουν αυξανόμενα υψηλότερες προσφορές, και σταματούν να δηλώνουν μόνο όταν δεν μπορούν να διαθέσουν το ποσό της τρέχουσας προσφοράς. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, έως ότου μείνει μόνο ένας παίκτης, και σε αυτόν ανατίθεται το προς πώληση αντικείμενο.

Η κοινότερη μορφή δημοπρασιών είναι η δημοπρασία ενός αντικειμένου (single item auction), κατά την οποία υπάρχει μόνο ένα αντικείμενο για το οποίο οι παίκτες καταθέτουν προσφορές. Τυπικά, θεωρούμε ότι υπάρχουν n παίκτες, καθένας εκ των οποίων έχει μια τιμή v_i, $i = 1, 2, ..n$, που αντιπροσωπεύει την πραγματική αξία (valuation) που θα αποκομίσει αν λάβει το αντικείμενο αυτό. Αυτή είναι η ιδιωτική πληροφορία του κάθε παίκτη. Ο κάθε παίκτης i καταθέτει μια προσφορά (bid) b_i, που μπορεί να αποκλίνει από την πραγματική του v_i. Με βάση όλα τα bids των παικτών, τα οποία κατατίθενται με κάποιον τρόπο στον δημοπράτη (auctioneer), καθορίζεται η έκβαση της δημοπρασίας. Ο πιο συνήθης τρόπος κατάθεσης των bids είναι με κρυφό τρόπο (sealed bid), ώστε να μην γνωρίζουν οι υπόλοιποι παίκτες πως έχουν συμπεριφερθεί κατά τη δημοπρασία. Στις κλασικές δημοπρασίες, ο παίκτης στον οποίο ανατίθεται το αντικείμενο είναι αυτός που έχει καταθέσει το μέγιστο b_i. Ο παίκτης που αποκτά το αντικείμενο, καλείται να καταβάλλει μια πληρωμή ώστε να το αποκτήσει, το payment p_i. Συνεπώς, η τελική του χρησιμότητα θα προκύπτει ως $u_i = v_i - p_i$.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κατά τον Σχεδιασμό Μηχανισμών, στόχος είναι η μεγιστοποίηση κάποιας αντικειμενικής συνάρτησης. Συνήθως, στα προβλήματα με δημοπρασίες, η συνάρτηση αυτή είναι η συνάρτηση του *Social Welfare* (Κοινωνική Ευχαρίστηση) και ορίζεται ως $\sum_{i=1}^{n} u_i$. Μια λύση που μεγιστοποιεί την παραπάνω συνάρτηση αποτελεί μια κοινωνικά βέλτιστη λύση.

Παρουσιάζουμε παρακάτω δύο επιπλέον κλασικά είδη δημοπρασιών. Η First-Price Auction είναι η δημοπρασία κατά την οποία ο νικητής καταβάλλει ως πληρωμή το ποσό του bid b_i του. Οι προσφορές κατατίθενται ταυτόχρονα και κρυφά στον δημοπράτη, και μόνο εκείνος γνωρίζει τα b_i όλων των παικτών. Οι δημοπρασίες αυτές δεν είναι truthful, καθώς ο παίκτης με το μεγαλύτερο b_i έχει κίνητρο να δηλώσει χαμηλότερη τιμή, εφόσον γνωρίζει ότι παραμένει νικητής και έχει το υψηλότερο bid σε σύγκριση με τους υπόλοιπους παίκτες. Συνεπώς, μπορεί να δηλώσει τιμή έως και αυτήν του αμέσως μικρότερου b_j ώστε να παραμείνει νικητής και να καταβάλλει μικρότερο payment p_i.

Το δεύτερο συχνό είδος δημοπρασιών είναι οι Second-Price Auctions (εναλλακτικά και Vickrey Auctions). Η διαδικασία υποβολής των προσφορών είναι ίδια με την First-Price Auction, και το αντικείμενο ανατίθεται στον παίκτη με το υψηλότερο bid. Στην περίπτωση αυτή όμως, ο νικητής πρέπει να καταβάλλει πληρωμή ίση με το δεύτερο μεγαλύτερο bid. Οι δημοπρασίες αυτές είναι truthful [23], δηλαδή κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει την χρησιμότητά του με το να δηλώσει ψευδές bid, που να διαφέρει από την πραγματική του v_i.

Σε επέκταση των single-item auctions που αναλύθηκαν παραπάνω, σε μια δημοπρασία ενδέχεται να προσφέρονται παραπάνω από ένα αντικείμενα. Κάθε παίκτης έχει δυνατότητα να λάβει περισσότερα από ένα αντικείμενα, ή να κάνει συνδυασμούς. Επομένως, θα πρέπει να ορίζεται η valuation v_i του παίκτη για κάθε έναν από τους πιθανούς συνδυασμούς αντικειμένων. Κατά συνέπεια, αν υπάρχουν m αντικείμενα προς δημοπρασία, ο κάθε παίκτης i θα καθορίζεται από μια συνάρτηση αξιολόγησης $v_i : 2^m \rightarrow \mathbb{R}$, που υποδηλώνει το valuation του παίκτη για κάθε πιθανό bundle αντικειμένων. Μια βασική σύμβαση που τηρείται είναι ότι τα valuations των παικτών θα πρέπει να είναι αύξοντα, πιο τυπικά ότι $v_i(S) \leq v_i(T)$ αν $S \subseteq T$. Οι δημοπρασίες αυτές καλούνται Συνδυαστικές Δημοπρασίες (*Combinatorial Auctions*), και θα μελετηθούν περαιτέρω κατά τη διάρκεια της παρούσας εργασίας.

2.4 Το πρόβλημα Facility Location

Ένα πολύ κλασικό πρόβλημα στο πεδίο της Επιστήμης Υπολογιστών είναι το πρόβλημα Facility Location. Πρόκειται για το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστης θέσης για τοποθέτηση κάποιου facility, με την ευρεία έννοια, με σκοπό να ελαχιστοποιείται το κόστος σύνδεσης των παικτών με αυτό. Στην απλούστερη εκδοχή του, το πρόβλημα μελετάται σε ευθεία γραμμή, όπου οι παίκτες είναι τοποθετημένοι σε διάφορα σημεία της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Η θέση του κάθε παίκτη κωδικοποιείται ως x_i. Η ζητούμενη θέση τοποθέτησης του facility είναι η θέση $y \in \mathbb{R}$ και ο κάθε παίκτης i απέχει απόσταση από αυτό ίση με $|y - x_i|$. Υπάρχουν διάφορες εναλλακτικές συναρτήσεις προς βελτιστοποίηση, η πιο συνήθης εκ των οποίων είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού κόστους όλων των παικτών από το facility, δηλαδή ως αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνουμε την $\sum_{i=1}^{n} |y - x_i|$.

Στην παραπάνω περίπτωση, η βέλτιστη λύση δίνεται επιλέγοντας ως θέση τοποθέτησης του facility την θέση επί της ευθείας των πραγματικών που αντιστοιχεί στη διάμεσο των θέσεων x_i που έχουν δηλωθεί από τους παίκτες. Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο μηχανισμός αυτός είναι truthful, δηλαδή όλοι οι παίκτες έχουν ελάχιστο κόστος αν δηλώσουν την πραγματική τους θέση x_i. Η απόδειξη του ισχυρισμού είναι απλή: έστω παίκτης j με $x_j < y$. Δηλώνοντας $x'_j > x_j$ το facility απομακρύνεται από τον παίκτη, επομένως το κόστος του αυξάνεται, εφόσον αυξάνεται η διάμεσος των τιμών. Δηλώνοντας $x''_j < x_j$ το αποτέλεσμα δεν μεταβάλλεται και ο παίκτης δεν έχει κάποιο συμφέρον από την δήλωση αυτή. Συνεπώς, η truthful δήλωση αποτελεί την βέλτιστη στρατηγική για τον κάθε παίκτη.

Το πρόβλημα του Facility Location γενικεύεται σε μετρικούς χώρους οσωνδήποτε διαστάσεων. Επίσης, μια επιπλέον γενίκευση του προβλήματος είναι η τοποθέτηση παραπάνω του ενός facility. Στις παραπάνω εκδοχές αυξάνεται ραγδαία η πολυπλοκότητα υπολογισμού της βέλτιστης λύσης, και κατά την παρούσα μελέτη θα αναλυθεί μόνον η απλούστερη εκδοχή του προβλήματος που παρουσιάστηκε αρχικά.

2.5 Verification

Όπως περιγράψαμε παραπάνω, οι μηχανισμοί χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: truthful και non-truthful. Βασική επιδίωξη του Σχεδιασμού Μηχανισμών είναι να επιτυγχάνουμε truthful συμπεριφορά παικτών.

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει μηχανισμούς στους οποίους οι παίκτες έχουν κίνητρο να δηλώσουν το πραγματικό valuation τους, δηλαδή να μην ψεύδονται. Αυτή η δήλωση αποτελεί τη βέλτιστη στρατηγική για κάθε παίκτη, του αποφέρει το μέγιστο δυνατό όφελος. Από την πλευρά του σχεδιαστή του μηχανισμού, αυτό μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους. Ο πιο συνήθης εξ'αυτών είναι με την επιβολή πληρωμών (payments) που οι παίκτες υποχρεώνονται να καταβάλλουν, εάν κάνουν ψευδή δήλωση. Με τον τρόπο αυτό, οι παίκτες έχουν κίνητρο να συμπεριφερθούν με truthful τρόπο, προκειμένου να μην "τιμωρηθούν" με την καταβολή του payment, και επιπλέον επιβραβεύονται αν δηλώσουν την αλήθεια. Τυπικό παράδειγμα τέτοιου μηχανισμού είναι ο VCG, που σε δημοπρασίες επιβάλλει payments σε κάθε παίκτη που ισούνται με την "ζημειά" που προκάλεσε στους υπόλοιπους παίκτες. Ο μηχανισμός αυτός είναι βέλτιστος συνολικά για όλους τους παίκτες, και εξασφαλίζει αληθή δήλωση των valuations των παικτών.

Στη δεύτερη κατηγορία υπάγονται όλοι οι μηχανισμοί για τους οποίους δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστούν αρκετά ισχυρά κίνητρα ώστε οι παίκτες να συμπεριφέρονται με truthful τρόπο. Αυτό συμβαίνει όταν δεν είναι εφικτό να επιβάλλουμε τα κατάλληλα payments, για ηθικούς ή πρακτικούς λόγους. Ένας τρόπος αντιμετώπισης του συγκεκριμένου προβλήματος, ο οποίος χρησιμοποιείται κατά την παρούσα εργασία, είναι η χρήση verification (επαλήθευση). Η μέθοδος αυτή υπάγεται στην γενικότερη κατηγορία του Προσεγγιστικού Σχεδιασμού Μηχανισμών χωρίς Χρήματα, που εισήχθη από τους Procaccia και Tennenholtz [24]. Χρησιμοποιούμε την επαλήθευση ώστε να ανιχνεύουμε εάν οι παίκτες ψεύδονται ή όχι, επιβάλλοντας ποινή για την ψευδή δήλωση. Συγκεκριμένα, οι μηχανισμοί που θα παρουσιαστούν, χρησιμοποιούν Επιλεκτική Επαλήθευση(Selective Verification). Υπό την έννοια αυτή, δεν ελέγχονται όλοι οι παίκτες ενός παιγνίου για το αν συμπεριφέρονται με truthful τρόπο, αλλά μόνο κάποιοι από αυτούς, με τυχαία επιλογή. Στο παράδειγμα του Facility Location, ελέγχουμε αποκλειστικά τους ακριανούς παίκτες, χρησιμοποιώντας επαλήθευση, και "εμπιστευόμαστε" τους ενδιάμεσους, θεωρώντας πως αυτοί a priori δηλώνουν την πραγματική τους θέση.

Ένα χαρακτηριστικό που προσδιορίζει το είδος του Verification στους μηχανισμούς είναι η συμμετρία. Συγκεκριμένα, αναφερόμαστε τυπικά σε Symmetric και Asymmetric Verification. Το *Symmetric Verification* συνήθως εφαρμόζεται σε κυρτούς χώρους, όπως οι Συνδυαστικές Δημοπρασίες που παρουσιάστηκαν παραπάνω, ή σε χώρους που υπάρχει η έννοια της απόστασης, όπως στο πρόβλημα του Facility Location. Η ιδέα πίσω από αυτό είναι ότι οι παίκτες μπορούν να δηλώσουν μια θέση y που δεν απέχει πολύ από την πραγματική τους x. Για παράδειγμα, στην M^{ϵ} Verification όλες οι πιθανές ψευδείς δηλώσεις κείνται σε μια μπάλα ακτίνας ϵ γύρω από τις συντεταγμένες της θέσης x. Το παραπάνω παράδειγμα υπάγεται στην ευρύτερη κατηγορία του ϵ verification, που θα μας απασχολήσει κατά την παρούσα εργασία. Όπως έχει αποδειχθεί και μελετηθεί και στα [15], [16], [17], το Symmetric Verification δεν συμβάλλει ιδιαίτερα στην εγγύηση του truthfulness σε έναν μηχανισμό, και η αρχή δεν μπορεί να επωφεληθεί αρκετά από αυτό. Με την απουσία χρημάτων, το Symmetric Verification ουσιαστικά οδηγεί σε μια έννοια τοπικής truthfulness στον μηχανισμό, δηλαδή με μια πιο αδύναμη συνθήκη, που είναι η επαλήθευση, επιτυγχάνουμε τη ζητούμενη γενικότερη ιδιότητα μόνο τοπικά.

Στον αντίποδα των παραπάνω, το *Assymetric Verification* είναι one-sided, μπορεί δηλαδή να ελέγξει με ακρίβεια μόνον την μια κατεύθυνση της ψευδούς δήλωσης. Συγκεκριμένα, επιτρέπουμε στους παίκτες να ψεύδονται με έναν από τους δύο τρόπους: είτε δηλώνοντας παραπάνω από την πραγματική τιμή τους, είτε δηλώνοντας παρακάτω. Για παράδειγμα, στις Συνδυαστικές Δημοπρασίες, ο παίκτης μπορεί να ψεύδεται μόνο δηλώνοντας μικρότερο valuation από το πραγματικό για κάποια αντικείμενα, ή στο πρόβλημα του Facility Location μπορεί μόνο να δηλώσει μικρότερη απόσταση από το facility από την πραγματική του θέση (επιδιώκοντας να το μετακινήσει πιο κοντά στην πραγματική του θέση, με βάση τον αλγόριθμο υπολογισμού θέσης που παρουσιάστηκε προηγουμένως). Το Assymetric Verification έχει συμβάλλει ιδιαίτερα στην κατεύθυνση της επίτευξης του truthfulness στους μηχανισμούς χωρίς χρήματα.

Μια σημαντική κατηγορία Verification, στην οποία ανήκουν οι μηχανισμοί που θα αναλύσουμε παρακάτω, είναι η *Μερική Επαλήθευση (Partial Verification)*. Πρόκειται για όλους τους μηχανισμούς στους οποίους επιτρέπεται στους παίκτες να ψεύδονται σε ένα συγκεκριμένο εύρος, πάνω στο domain, δηλαδή το πεδίο ορισμού. Συνεπώς, μηχανισμοί με Μερική Επαλήθευση περιορίζουν το πόσο μπορούν να ψεύδονται οι παίκτες, καταλήγοντας έτσι σε ένα αποτέλεσμα κατάτι πλησιέστερο στην truthful υλοποίηση. Ένας πιο τυπικός ορισμός της Μερικής Επαλήθευσης θα δοθεί στο Κεφάλαιο 3, όπου γίνεται ενδελεχής ανάλυση.

Κεφάλαιο 3

Βασικοί Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο, θα παρουσιαστούν αναλυτικά οι βασικότερες έννοιες του Σχεδιασμού Μηχανισμών και της Αλγοριθμικής Θεωρίας Παιγνίων, που θα χρησιμοποιηθούν κατά την παρούσα εργασία. Δίνονται οι ορισμοί για όλα τα εργαλεία που θα αξιοποιηθούν στην κατεύθυνση απόδειξης των ζητουμένων της παρούσας εργασίας, καθώς και κάποια θεμελιώδη θεωρήματα για το πεδίο αυτό.

3.1 Παίγνια

Αρχικά, θα δώσουμε έναν τυπικό ορισμό των παιγνίων. Όπως παρουσιάστηκε και στο Κεφάλαιο 1, τα παίγνια είναι οι καταστάσεις στις οποίες κάποιες αντικρουόμενες οντότητες επιλέγουν τρόπους ενέργειας, σε συνθήκες αλληλεξάρτησης και δρώντας ορθολογικά, δηλαδή με γνώμονα το προσωπικό τους αντικειμενικό όφελος.

Ορισμός 3.1. Ένα παίγνιο σε *κανονική μορφή (Normal Form Game)* ορίζεται ως μια δομή $G =< n, A, u >$, όπου:

1. Υπάρχει πεπερασμένο πλήθος παικτών που συμμετέχουν στο παίγνιο, έστω n
2. Σε κάθε παίκτη i αντιστοιχεί ένα σύνολο στρατηγικών A_i, που περιγράφει τις πιθανές ενέργειες του παίκτη αυτού. Συνολικά, το παίγνιο καθορίζεται από όλα τα προφιλ στρατηγικών των παικτών, δηλαδή τελικά $A = A_1 \times A_2 \times A_3 ... \times A_n$

3. Μια συνάρτηση u_i που για κάθε παίκτη i δίνει την χρησιμότητα (utility) που λαμβάνει με κάποια έκβαση του παιχνιδιού. Εδώ $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, επομένως η utility function δέχεται ως είσοδο το προφίλ στρατηγικών (δηλαδή τη στρατηγική όχι μόνο του παίκτη i, αλλά του συνόλου των παικτών) και επιστρέφει το όφελος αυτού του αποτελέσματος για τον παίκτη i.

Στην απλούστερη εκδοχή τους, τα παίγνια σε κανονική μορφή παρουσιάζονται με μορφή πίνακα, εφόσον ο αριθμός παικτών που συμμετέχουν είναι μικρός. Ένα κλασικό παράδειγμα στη Θεωρία Παιγνίων είναι το Δίλημμα του Φυλακισμένου (Prisoner's Dilemma), το οποίο διατυπώνεται ως εξής:

Παράδειγμα 2.1 (Prisoner's Dilemma)

Έστω δύο άτομα A και B, τα οποία συλλαμβάνονται από την αστυνομία, ως ύποπτοι για κάποια εγκληματική ενέργεια. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν επαρκή ενοχοποιητικά στοιχεία, τοποθετούνται σε χωριστά κελιά, ώστε να μην επικοινωνούν μεταξύ τους. Οι ύποπτοι έχουν τις εξής εναλλακτικές, όταν καταθέτουν στον εισαγγελέα:

- Αν ο ένας καταθέσει εναντίον του άλλου, και ο άλλος δεν μιλήσει, ο πρώτος απελευθερώνεται ενώ ο δεύτερος τιμωρείται με τρια χρόνια φυλάκισης
- Αν δεν καταθέσει κανείς εκ των δύο, τιμωρούνται και οι δύο με έναν χρόνο φυλάκισης ο καθένας
- Αν αμοιβαία καταθέσουν ο ένας εναντίον του άλλου, τιμωρούνται με δύο χρόνια φυλάκισης ο καθένας

Παρακάτω, κωδικοποιούμε το πρόβλημα σε μορφή πίνακα, όπου σε κάθε κελί υπάρχει η τούπλα (a, b) όπου a είναι η χρησιμότητα του παίκτη A από τη συγκεκριμένη στρατηγική, και b η αντίστοιχη χρησιμότητα του παίκτη B.

A/B	Cooperate	Defect
Cooperate	-1, -1	-3, 0
Defect	0, -3	-2, -2

Μια κατηγορία παιγνίων που θα μας απασχολήσει κατά την παρούσα μελέτη, είναι τα Ακολουθιακά Παίγνια (Sequential Games). Αυτά υπάγονται στην ευρύτερη κατηγορία των Δυναμικών Παιγνίων, όπου οι παίκτες παίζουν σε "γύρους". Ένας παίκτης επιλέγει μια ενέργεια, και, με βάση την επιλογή του πρώτου, επιλέγουν αμέσως μετά οι υπόλοιποι παίκτες. Το παίγνιο έτσι εξελίσσεται με ακολουθιακό τρόπο, και κατά συνέπεια οι παίκτες αποκτούν ολοένα αυξανόμενη πληροφορία για τις ενέργειες των άλλων παικτών, και με αυτόν τον τρόπο καθορίζουν τις δικές τους ενέργειες. Τα παίγνια αυτά κωδικοποιούνται κατά προτίμηση με τη μορφή δένδρου αποφάσεων, παρά με τη μορφή πίνακα που παρουσιάστηκε παραπάνω. Πρόκειται για παίγνια πλήρους πληροφορίας, γνωστά παραδείγματα των οποίων είναι το σκάκι, το Go, και η τρίλιζα.

Αντιστοίχως, τα Παράλληλα Παίγνια (Simultaneous Games) είναι τα παίγνια στα οποία όλοι οι παίκτες παίζουν παράλληλα, δηλαδή συγχρόνως. Εν προκειμένω, οι παίκτες δεν έχουν καμία πληροφορία για τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών.

3.2 Στρατηγικές

Στρατηγική για έναν παίκτη i αποτελεί οποιαδήποτε από τις επιλογές που μπορεί να κάνει, σε ένα setting στο οποίο το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται μόνο από αυτόν, αλλά και από τις ενέργειες των υπόλοιπων παικτών. Η στρατηγική προσδιορίζει την ενέργεια που θα επιλέξει σε ένα οποιοδήποτε στάδιο του παιγνίου.

Ένας παίκτης έχει πεπερασμένο σύνολο στρατηγικών, εάν έχει έναν αριθμό διακριτών στρατηγικών στη διάθεσή του κατά το παιχνίδι. Για παράδειγμα, στο Δίλημμα του Φυλακισμένου που παρουσιάστηκε προηγουμένως, ο παίκτης μπορεί να επιλέξει ανάμεσα σε δύο ενέργειες: Defect, Cooperate . Σε δυναμικά παίγνια, όπου οι παίκτες δρουν ακολουθιακά σε γύρους, το σύνολο στρατηγικών αποτελείται από όλους τους πιθανούς κανόνες που ο παίκτης ορίζει ότι θα ακολουθηθούν στο παίγνιο.

Ορισμός 3.2. Μια *Αμιγής Στρατηγική* παρέχει τον πλήρη προσδιορισμό του τρόπου που θα ενεργήσει ο παίκτης στο παίγνιο, σε όποια κατάσταση και αν βρεθεί. Το σύνολο στρατηγικών (strategy set) ενός παίκτη είναι το σύνολο αμιγών στρατηγικών που είναι διαθέσιμες σε αυτόν.

Ορισμός 3.3. *Μικτή Στρατηγική* καλείται η ανάθεση πιθανοτήτων σε κάθε Αμιγή Στρατηγική. Επομένως, ο παίκτης επιλέγει τυχαία, ή με βάση κάποια κατανομή πιθανότητας, μια από τις Αμιγείς Στρατηγικές που του είναι διαθέσιμες. Δεδομένου ότι οι πιθανότητες είναι συνεχείς, υπάρχουν άπειρες Μικτές Στρατηγικές διαθέσιμες για έναν παίκτη. Τυπικά, ορίζουμε το σύνολο των Μικτών Στρατηγικών ενός παίκτη ως $S_i = \Pi(A_i)$, που προκύπτει από την κατανομή πιθανότητας Π πάνω στο σύνολο ενεργειών A_i του παίκτη i, όπως αυτό ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα.

Ορισμός 3.4. Ένα *προφίλ στρατηγικών* ορίζεται ως μια n-tuple των στρατηγικών όλων των παικτών. Συμβολίζεται τυπικά ως $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ όπου $\sigma_i \in \Pi(A_i)$ και για το σύνολο όλων των πιθανών προφίλ στρατηγικών ενός παιγνίου $\Sigma = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$.

Στην πραγματικότητα, η Αμιγής Στρατηγική αποτελεί μια εκφυλισμένη μορφή της Μικτής Στρατηγικής, όπου μόνο σε μια στρατηγική έχει ανατεθεί η πιθανότητα 1, ενώ οι υπόλοιπες επιλέγονται μηδενική πιθανότητα.

3.3 Βέλτιστη Απόκριση (Best Response)

Στη θεωρία παιγνίων, ορίζουμε ως βέλτιστη απόκριση τη στρατηγική (ή στρατηγικές) εκείνη που καταλήγει στο βέλτιστο αποτέλεσμα για τον παίκτη, θεωρώντας δεδομένες τις ενέργειες των υπολοίπων παικτών. Η έννοια αυτή είναι κεντρική για την απόδειξη ισορροπιών Nash, όπως θα δούμε στην αμέσως επόμενη ενότητα. Πρόκειται για την στρατηγική η οποία, για τον παίκτη i, μεγιστοποιεί την χρησιμότητά (utility) του u_i, είναι δηλαδή η βέλτιστη επιλογή του, και ο ίδιος ατομικά δεν έχει λόγο να αποκλίνει από αυτήν, με δεδομένη τη συμπεριφορά των υπολοίπων.
Σημείωση: Εφεξής, θα συμβολίζουμε το διάνυσμα που περιέχει όλες τις συνιστώσες πλην της i ως $v_{-i} = (v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..v_n)$.

Ορισμός 3.5. Η *βέλτιστη απόκριση (Best Response)* του παίκτη i, με δεδομένες τις στρατηγικές των υπολοίπων παικτών s_{-i}, είναι η στρατηγική ${s_i}^*$ που τον οδηγεί σε μέγιστη χρησιμότητα, δηλαδή, αν ορίσουμε την χρησιμότητα του παίκτη ως u_i:

$$u_i({s_i}^*, s_{-i}) > u_i({s_i}', s_{-i}) \forall {s_i}' \neq {s_i}^*$$

Ορίζουμε επίσης το σύνολο των στρατηγικών βέλτιστης απόκρισης του παίκτη i με δεδομένες τις θ_{-i} ως $BR_i(\theta_{-i})$.

Μια επιπλέον χρήσιμη έννοια είναι αυτή της κυρίαρχης στρατηγικής (Dominant Strategy). Ένας παίκτης διαθέτει λύση κυρίαρχης στρατηγικής αν κάθε παίκτης έχει μια μοναδική βέλτιστη στρατηγική, που παραμένει ίδια, ανεξάρτητα από το ποιά στρατηγική ακολουθούν οι υπόλοιποι παίκτες. Ακολουθεί ο αυστηρός ορισμός:

Ορισμός 3.6. Μια στρατηγική ${s_i}^*$ καλείται *Κυρίαρχη Στρατηγική (dominant strategy)* αν για τον παίκτη i αποτελεί αυστηρά την βέλτιστη απόκριση του σε όποια στρατηγική και αν επιλέξουν οι υπόλοιποι, δηλαδή η ${s_i}^*$ του αποφέρει πάντα το μέγιστο utility. Τυπικά:

$$u_i({s_i}^*, s_{-i}) > u_i({s_i}', s_{-i}) \forall s_{-i}, \forall {s_i}' \neq {s_i}^*$$

Η πλειοψηφία των παιγνίων δεν διαθέτουν Κυρίαρχη Στρατηγική. Όμως, το Δίλημμα του Φυλακισμένου που παρουσιάστηκε παραπάνω διαθέτει Κυρίαρχη Στρατηγική. Αυτή είναι η (Defect, Defect). Αυτό ισχύει διότι, και για τους δύο παίκτες, το payoff μεγιστοποιείται όταν δεν συνεργάζονται, όποια στρατηγική και αν διαλέξει ο άλλος εκ των δύο.

Σημειώνεται επίσης ότι η Κυρίαρχη Στρατηγική δεν είναι κατ'ανάγκην η βέλτιστη λύση ως προς την χρησιμότητα των παικτών.

3.4 Ισορροπίες Nash

Κεντρική επιδίωξη στη Θεωρία Παιγνίων είναι η μελέτη της συμπεριφοράς των παικτών σε καταστάσεις ανταγωνισμού. Βασικό εργαλείο για τη Θεωρία Παιγνίων, που επίσης αποτελεί αντικείμενο της παρούσας μελέτης, είναι η Ισορροπία Nash. Η Ισορροπία Nash είναι μια ευσταθής λύση, που κανείς από τους παίκτες δεν μπορεί να αυξήσει την χρησιμότητά του, μεταβάλλοντας μονομερώς τη στρατηγική του. Θεωρώντας τις στρατηγικές των υπολοίπων παικτών σταθερές και αμετάβλητες, η Ισορροπία Nash είναι η έκβαση (outcome) αυτή, από την οποία ο παίκτης που αλλάζει (deviating player) δεν έχει κίνητρο να μετακινηθεί.

Ορισμός 3.7. Ένα προφίλ στρατηγικών $s \in S$ καλείται *Αμιγής Ισορροπία Nash (Pure Nash Equilibrium - PNE)*, αν για κάθε παίκτη i και κάθε άλλο προφίλ στρατηγικών $s' \in S$ ισχύει ότι:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i({s_i}', s_{-i})$$

Συγκεκριμένα, το παραπάνω υποδηλώνει ότι κανένας παίκτης δεν μπορεί να αυξήσει το utility του με μονομερή απόκλιση.

Στο Δίλημμα του Φυλακισμένου, η μοναδική Αμιγής Ισορροπία Nash είναι η Defect, Defect. Παρατηρείται ότι, όπως επιχειρηματολογήσαμε και παραπάνω, η ενέργεια Defect αποτελεί για καθέναν παίκτη την Κυρίαρχη Στρατηγική του. Επομένως, η εύρεση της Αμιγούς Ισορροπίας Nash ανάγεται στην εύρεση της Κυρίαρχης Στρατηγικής του κάθε παίκτη, αν αυτή υπάρχει.

Πολύ συχνά, στα παίγνια δεν υπάρχει Αμιγής Ισορροπία Nash, εφόσον είναι δυνατόν να μην υπάρχει Κυρίαρχη Στρατηγική, που για οποιαδήποτε στρατηγική των υπολοίπων παικτών, να παραμένει αμετάβλητη. Συνεπώς, πρέπει να εισαχθεί μια νέα έννοια Ισορροπίας προκειμένου να γενικευτεί ο ορισμός.

Ορισμός 3.8. Ένα προφίλ μικτών στρατηγικών $s^* = (s_1{}^*, s_2{}^*, ..., s_n{}^*)$ ονομάζεται *Μικτή Ισορροπία Nash (Mixed Nash Equilibrium - MNE)*, εάν, για κάθε παίκτη i και κάθε άλλη μικτή στρατηγική $s_i{}'$ που θα μπορούσε να επιλέξει ο i, ισχύει ότι :

$$\mathbb{E}[u_i(s_i{}^*, s_{-i}{}^*)] \geq \mathbb{E}[u_i(s_i{}', s_{-i}{}^*)] \forall i \in N, s \in S_i$$

Από τα παραπάνω, καθίσταται εμφανές ότι τα PNE αποτελούν ουσιαστικά μια ειδική περίπτωση των MNE.

Γενικεύοντας περαιτέρω την έννοια της Ισορροπίας Nash, αναφερόμαστε και στην έννοια της $\epsilon-$προσεγγιστικής Ισορροπίας. Πρόκειται για μια κατάσταση όπου οι παίκτες δεν μπορούν, μεταβάλλοντας μονομερώς τη στρατηγική τους, να αυξήσουν την χρησιμότητά τους περισσότερο από έναν παράγοντα ϵ. Παρακάτω, διατυπώνουμε τον επίσημο ορισμό:

Ορισμός 3.9. Ένα προφίλ στρατηγικών $s \in S$ αποτελεί $\epsilon - MNE$ αν για κάθε παίκτη i και κάθε άλλο προφίλ στρατηγικών $s_i{}' \in S_i$ έχουμε:

$$\mathbb{E}[u_i(s_i{}^*, s_{-i}{}^*)] \geq \mathbb{E}[u_i(s_i{}', s_{-i}{}^*)] + \epsilon, \forall i \in N, s \in S_i$$

Ένα πολύ χρήσιμο θεώρημα, που εξασφαλίζει την ύπαρξη ισορροπιών σε οποιοδήποτε παίγνιο, διατυπώθηκε από τον John F. Nash το 1950. Το θεώρημα αυτό, που αποδεικνύεται ([2]) με χρήση θεωρημάτων Σταθερού Σημείου, ορίζεται παρακάτω:

Θεώρημα 3.1. Κάθε πεπερασμένο παίγνιο διαθέτει τουλάχιστον ένα MNE.

3.5 Price of Anarchy

Όπως έχει ειπωθεί στα παραπάνω, οι παίκτες που λαμβάνουν μέρος στα παίγνια ενεργούν εγωιστικά (selfishly). Είναι προφανές ότι, όταν οι παίκτες συμπεριφέρονται με selfish τρόπο, η έκβαση στην οποία καταλήγουν απέχει από την κοινωνικά βέλτιστη λύση, καθώς ο καθένας αποζητά να μεγιστοποιήσει το δικό του προσωπικό κέρδος. Η έκβαση αυτή λοιπόν δεν είναι βέλτιστη για το κοινωνικό σύνολο. Στα παίγνια εν γένει, ενδιαφερόμαστε να ποσοτικοποιήσουμε την απόκλιση της τελικής έκβασης από μια αντικειμενική συνάρτηση (objective function), την οποία επιθυμούμε να μεγιστοποιήσουμε. Με τον τρόπο αυτό, λαμβάνουμε ένα μέτρο του πόσο "καλή" ή "κακή" είναι η λύση που προέκυψε, με βάση το πόσο απέχει από τη βέλτιστη, με βάση το κριτήριο που έχει εξαρχής τεθεί. Η έννοια που εκφράζει την ποσοτικοποίηση της χειρότερης επίδοσης συγκριτικά με την επίδοση με ύπαρξη κάποιου συντονιστή, δηλαδή τη βέλτιση, είναι το Τίμημα της Αναρχίας (Price of Anarchy - PoA). Εισήχθη αρχικά από τους Κουτσουπιά και Παπαδημητρίου στο [5], και παρουσιάζεται ως ανάλογο του λόγου των προσεγγιστικών αλγορίθμων.

Ορισμός 3.10. Έστω ένα παίγνιο $G =< n, A, u >$, με n παίκτες, σύνολα στρατηγικών S_i, συνάρτηση χρησιμότητας $u_i : S \to \mathbb{R}$, και αντικειμενική συνάρτηση που αποζητούμε να βελτιστοποιήσουμε $f : S \to \mathbb{R}$. Τότε, το *Price of Anarchy(PoA)* ορίζεται ως:

$$PoA = \frac{max_{s \in S} f(s)}{max_{s \in Equil} f(s)}$$

Η σχέση αυτή αποτυπώνει αυτό που διατυπώθηκε περιγραφικά παραπάνω, δηλαδή η μέγιστη χρησιμότητα από κάποια έκβαση που προκύπτει με εγωιστική συμπεριφορά των παικτών, προς τη βέλτιστη λύση ισορροπίας. Δηλαδή, προσπαθούμε να συμπεράνουμε πόσο καλά προσεγγίζεται η βέλτιστη λύση.

Φυσικά, ο παραπάνω ορισμός γενικεύεται για αναμενόμενες τιμές, για Μικτές Στρατηγικές, όπου αντί για $max_{s \in S} f(s)$ θα έχουμε $max_{s \in S} \mathbb{E}_{a \sim s}[f(a)]$. Επιπλέον, αν βασική επιδίωξη στο παίγνιο είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης (πχ. συνάρτηση Κόστους), το max του παραπάνω ορισμού αντικαθίσταται από min.

Στο παράδειγμα του Διλήμματος του Φυλακισμένου που παρουσιάστηκε, αιτιολογήσαμε παραπάνω ότι η Ισορροπία Nash βρίσκεται στη στρατηγική Defect, Defect. Στην περίπτωση αυτή, το συνολικό payoff των παικτών θα είναι -2-2 = -4. Η μέγιστη τιμή του συνολικού αθροίσματος των payoffs, αν τεθεί αυτή ως αντικειμενική συνάρτηση θα είναι ίση με -1-1=-2. Άρα, η τιμή της PoA, που προκύπτει ως λόγος της βέλτιστης λύσης προς τη λύση Ισορροπίας, είναι $PoA = -2/-4 = 0.5$.

3.6 Smoothness

Η έννοια των smooth παιγνίων, εισήχθη αρχικά από τον Tim Roughgarden. Ορίστηκε στο πλαίσιο των παιγνίων ελαχιστοποίησης κόστους (cost minimization games). Ένα τέτοιο παίγνιο ορίζεται από μια 3-τούπλα (N, S, C), όπου N είναι το σύνολο των παικτών, S το σύνολο στρατηγικών των παικτών, και $C = \prod_i C_i$, όπου $C_i : S \leftarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση κόστους του παίκτη i. Το κοινωνικό κόστος για ένα παίγνιο και ένα διάνυσμα στρατηγικών $s \in S$ δίνεται από τη συνάρτηση: $C(s) = \sum_{i \in N} C_i(s)$.

Ορισμός 3.11. Ένα παίγνιο ελαχιστοποίησης κόστους καλείται (λ, μ)-*smooth*, αν για κάθε ζεύγος στρατηγικών (s^*, s) ισχύει ότι:

$$\sum C_i({s_i}^*, s_{-i}) \leq \lambda C(s^*) + \mu C(s)$$

Διαισθητικά, το παραπάνω σημαίνει ότι δεδομένων δύο στρατηγικών s και s^*, το παίγνιο καλείται smooth εάν το άθροισμα των κοστών των παικτών εξαιτίας μονομερούς μεταβολής στρατηγικής από s σε s^*, μπορεί να φραχθεί από άνω από έναν γραμμικό συνδυασμό του κοινωνικού κόστους των στρατηγικών s και s^*.

Με κίνητρο την ιδέα του Roughgarden, οι Syrgkanis, Tardos στο [9] γενίκευσαν την ιδέα του smoothness στο πεδίο του Σχεδιασμού Μηχανισμών.

Σημείωση: Ορίζουμε ως Quasilinear Preference την utility function που ακολουθεί τη μορφή value-payment $u_i = v_i - p_i$, όπου το value μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή, όμως η utility παραμένει γραμμική συνάρτηση των value και payment.

Ορισμός 3.12. Ένας μηχανισμός αποτελείται από n παίκτες, ένα σύνολο από εκβάσεις $\mathcal{X} \subset \times_i \mathcal{X}_i$, όπου $\mathcal{X}_i$ το σύνολο των ενεργειών διαθέσιμων στον παίκτη i, και μια συνάρτηση valuation $v_i : \mathcal{X}_i \to \mathbb{R}_+$. Για να θεωρείται *μηχανισμός μϵ Quasilinear Preferences*, δεδομένης μιας ενέργειας $x_i \in \mathcal{X}_i$ και ενός payment $p_i \in \mathbb{R}_+$, η utility του παίκτη i θα πρέπει δίνεται από τον τύπο:

$$u_i(x_i, p_i) = v_i(x_i) - p_i$$

Δεδομένου χώρου των εκβάσεων $\mathcal{X}$, ένας μηχανισμός $\mathcal{M}$ είναι μια τούπλα $(S, \mathcal{X}, \mathcal{P})$, όπου $S = \prod_i S_i$ είναι ο χώρος στρατηγικών των παικτών, $X : S \to \mathcal{X}$ είναι η συνάρτηση allocation, δηλαδή που αντιστοιχίζει τη στρατηγική σε μια έκβαση, και $\mathcal{P} : S \to \mathbb{R}_{n+}$ είναι ο κανόνας με τον οποίον κατανέμονται τα payments.

Ορισμός 3.13. Ένας μηχανισμός $\mathcal{M}$ ονομάζεται *smooth μηχανισμός*, εάν για κάθε προφίλ valuation $v \in \times \mathcal{V}_i$ και κάθε προφίλ ενεργειών a, υπάρχει μια τυχαία (randomized) ενέργεια $a_i{}^*(v, a_i)$ για κάθε παίκτη i τέτοια ώστε:

$$\textstyle\sum_i u_i(a_i{}^*(v, a_i), a_{-i}) \geq \lambda OPT(v) - \mu \sum_i \mathcal{P}_i(a)$$

Οι smooth μηχανισμοί, ενδιαφέρουν κυρίως διότι, με χρήση κάποιων βασικών θεωρημάτων, μπορούν να δώσουν φράγματα για το Price of Anarchy, που είναι κεντρικό ζητούμενο στην ανάλυση μηχανισμών. Συγκεκριμένα, ένα χρήσιμο θεώρημα διατυπώνεται στην επόμενη σελίδα από το [7].

Θεώρημα 3.2. Αν ένας μηχανισμός είναι $(\lambda, \mu)-$ smooth, τότε για το PoA ισχύει η σχέση:

$$PoA \leq \frac{max(\mu,1)}{\lambda}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ένα randomized προφίλ ενεργειών a αποτελεί λύση Ισορροπίας για το παίγνιο. Ως αντικειμενική συνάρτηση θεωρούμε τη συνάρτηση $W : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ (Welfare), που μετράει την κοινωνική ευημερία. Τότε, εξ'ορισμού της Ισορροπίας θα έχουμε ότι, για κάθε παίκτη i και κάθε άλλο προφίλ ενεργειών $a_i{}^*$:

$$u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i{}^*, a_{-i})$$

Επομένως,

$$\begin{gathered} W(a) = \textstyle\sum_i (v_i(X_i(a))) \\ \textstyle\sum_i u_i(a_i, a_{-i}) + \sum_i \mathcal{P}_i(a) \\ \geq \textstyle\sum_i u_i(a_i{}^*(v, a_i), a_{-i}) + \sum_i \mathcal{P}_i(a) \\ \geq \lambda OPT(v) + (1-\mu) \textstyle\sum_i \mathcal{P}_i(a) \end{gathered}$$

Όπου η πρώτη γραμμή προκύπτει από τον ορισμό των quasilinear utilities, και οι επόμενες από την υπόθεση του smoothness του μηχανισμού. Αν $\mu < 1$, το αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα, δεδομένου ότι $\mathcal{P}_i(a) > 0$. Αν όμως $\mu > 1$, επειδή σε κάθε Ισορροπία οι παίκτες έχουν μη αρνητική utility, θα ισχύει ότι $v_i(X_i(a)) > \mathcal{P}_i(a) \rightarrow W(a) \geq \sum_i \mathcal{P}_i(a)$. Επομένως, με βάση την τελευταία σχέση από το παραπάνω, θα έχουμε:

$$W(a) \geq \lambda OPT(v) + (1-\mu)W(a)$$

Και τελικά,

$$W(a) \geq \frac{\lambda}{\mu} OPT$$

Επομένως, εφόσον $PoA = \frac{OPT(v)}{W(a)}$

$$PoA \leq \frac{\mu}{\lambda}$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, αρκούμαστε στο να αποδεικνύουμε το smoothness property των μηχανισμών. Ένα τέτοιο παράδειγμα, είναι η First-Price Auction, η οποία παρουσιάστηκε και στο Κεφάλαιο 1.

Θεώρημα 3.3. Η First-Price Auction είναι $(1-1/e,1)-$smooth.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα valuation profile v και ένα bidding profile b. Τότε, έχουμε $OPT = max_i v_i$ και $\sum_i \mathcal{P}_i(a) = max b_i$. Έστω ότι έχουμε μεταβολή από το προφίλ b : Ο bidder με το μεγαλύτερο valuation $max_i v_i = v_{max}$, καταθέτει ένα bid, τυχαία επιλεγμένο από την κατανομή $f(b^*) = \frac{1}{v_{max}-b*}$ και με support $[0,(1-1/e)v_{max}]$, και οι υπόλοιποι παίκτες καταθέτουν μηδενικά bids. (Υπενθυμίζεται ότι ως support μιας κατανομής πιθανότητας ορίζεται ως η κλειστότητα του συνόλου των πιθανών τιμών μιας τυχαίας μεταβλητής με την συγκεκριμένη κατανομή)

Έστω i^* ο bidder με το υψηλότερο bid. Όταν οι υπόλοιποι παίκτες παίζουν b_{-i}, και αυτός καταθέτει το $b^* = b$, η utility του εκφράζεται ως:

$$u_i(b,b_{-i}) = \begin{cases} v_{max} - b & \text{if } b > max_{k \neq i^*} b_k \\ 0 & \text{ow} \end{cases}$$

Επομένως, η αναμενόμενη utility του παίκτη i^* θα είναι:

$$u_i(b^*,b_{-i}) = \int_{max_{k \neq i^*} b_k}^{(1-1/e)v_{max}} \frac{v_{max}-b}{v_{max}-b} db$$

$$\geq (1-1/e)v_{max} - max_k b_k$$
$$= (1-1/e)OPT(v) - \textstyle\sum_i \mathcal{P}_i(a)$$

Δεδομένου ότι οι utilities των υπολοίπων παικτών είναι μη αρνητικές, η παραπάνω ανισότητα δείχνει ότι η First-Price Auction είναι $(1-1/e,1)-$smooth, και συνεπώς, με βάση το Θεώρημα 2.1, θα ισχύει για αυτήν ότι $PoA \leq \frac{1}{1-1/e}$.

Η έννοια του smoothness των μηχανισμών είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην παρούσα μελέτη, και γενικότερα στον τομέα του Σχεδιασμού Μηχανισμών. Ο λόγος για αυτό είναι ότι, από τη σχέση της συνάρτησης utility με την βέλτιστη λύση, εξάγουμε συμπεράσματα για το Price of Anarchy. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε την σχέση μεταξύ της βέλτιστης εγωιστικής λύσης με την λύση ισορροπίας, και το smoothness μας παρέχει την αναλογία αυτή.

3.7 Valuation Functions

Αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, ότι βασικό αντικείμενο της έρευνάς μας είναι οι Συνδυαστικές Δημοπρασίες(Combinatorial Auctions). Παρακάτω, δίνεται ο τυπικός ορισμός τους. Για να ορίσουμε τις Συνδυαστικές Δημοπρασίες, πρέπει πρωτίστως να ορίσουμε τυπικά τις Συναρτήσεις Αξιολόγησης(Valuation Functions), καθώς και τις Αναθέσεις(Allocations).

Ορισμός 3.14. Μια *συνάρτηση αξιολόγησης (valuation function)* v είναι μια πραγματική συνάρτηση τέτοια ώστε, για κάθε υποσύνολο αντικειμένων S, η $v(S)$ να αντιπροσωπεύει την τιμή που ο bidder i κερδίζει αν λάβει το συγκεκριμένο σύνολο αντικειμένων. Η συνάρτηση αξιολόγησης θα πρέπει να είναι μονότονη, δηλαδή για $S \subseteq T$ θα πρέπει να ισχύει η σχέση $v(S) \leq v(T)$, και επίσης να κανονικοποιείται ως $v(\emptyset) = 0$.

Η συνάρτηση valuation ουσιαστικά κωδικοποιεί το πόσο ένας παίκτης επιθυμεί ένα αντικείμενο, ή έναν συνδυασμό αντικειμένων. Η συνάρτηση αυτή τίθεται ως είσοδος σε έναν μηχανισμό, ο οποίος ενεργεί με βάση την έκφραση των προσωπικών προτιμήσεων των παικτών.

Ορισμός 3.15. Ένα *allocation (ανάθεση)* των αντικειμένων στους παίκτες είναι $S_1, ..., S_n$ όπου $S_i \cap S_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$, και αποτυπώνει τον τρόπο με τον οποίο μοιράζονται τα αντικείμενα στους παίκτες. Η Κοινωνική Ευημερία (Social Welfare) που επιτυγχάνεται από το συγκεκριμένο allocation είναι $\sum_i v_i(S_i)$. Ένα κοινωνικά βέλτιστο allocation είναι αυτό που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση του Social Welfare ανάμεσα σε όλα τα πιθανά allocations.

Ουσιαστικά, πρόκειται για τα διαφορετικές εκβάσεις του μηχανισμού. Για παράδειγμα, σε μια δημοπρασία, το allocation είναι ο τρόπος με τον οποίο κατανεμήθηκαν τα αντικείμενα, ανάμεσα στους νικητές.

Ορισμός 3.16. Έστω σύνολο παικτών n, σύνολο M από m διακριτά αντικείμενα, και valuation function $v_i : 2^M \rightarrow \mathbb{R}_+$. Αναζητούμε το allocation $S = S_1, S_2, ..., S_n$ των m αντικειμένων το οποίο να μεγιστοποιεί το objective του Social Welfare. Η δημοπρασία αυτή καλείται *Combinatorial Auction*.

Οι valuation functions χωρίζονται σε διάφορες κλάσεις, οι πιο γνωστές εκ των οποίων παρουσιάζονται παρακάτω:

- Γενικές

$$v(S) \leq v(T) \ \forall S \subseteq T$$
$$\text{και } v(\emptyset) = 0$$

- Additive

$$v(S) = \sum_{x \in S} v(\{x\}) \ \forall S \subseteq M$$

- Sudadditive

$$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T) \ \forall S, T \subseteq M$$

- Submodular

$$v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T) \ \forall S \subseteq T, \, S, T \subseteq M, \, x \notin T$$

- Fractionally Subadditive (XOS)

$$\exists \text{ additive valuations } a_1, a_2, ..., a_t \ s.t. \ v(S) = max_i a_i(S)$$

Κατά την παρούσα εργασία, θα ασχοληθούμε με Additive και Subadditive valuation functions. Εν προκειμένω, οι παίκτες αποτρέπονται από το να αντιμετωπίζουν τα αντικείμενα ως συμπληρωματικά, δηλαδή αποκτούν μέγιστη ευχαρίστηση όταν αποκτούν τα αντικείμενα χωριστά, παρά το bundle των αντικειμένων.

3.8 Partial Verification

Αναφερθήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στην έννοια του verification σε έναν μηχανισμό, και παρουσιάσαμε, από θεωρητική σκοπιά, τα βασικά είδη του verification που χρησιμοποιούνται από τους επιστήμονες της Θεωρίας Παιγνίων.

Στην πραγματικότητα, ο λόγος για τον οποίο χρησιμοποιείται η επαλήθευση, είναι να υποκαταστήσει τη χρήση χρημάτων στους μηχανισμούς. Τα χρήματα, υπό την μορφή payments που υποβάλλουν οι παίκτες, για παράδειγμα σε μια δημοπρασία εάν όντως νικήσουν ένα αντικείμενο, υπό ορισμένες συνθήκες, εξασφαλίζουν truthfulness στον μηχανισμό αυτόν. Δίνουν δηλαδή κίνητρο στους παίκτες να μην αποκλίνουν από τις πραγματικές τους προτιμήσεις. Όμως, η χρήση χρηματικών "ποινών" δεν είναι πάντα επιθυμητή, ούτε εφικτή.

Κατ'επέκταση, χρησιμοποιώντας την έννοια του verification μπορούμε να υπερκεράσουμε το εμπόδιο αυτό. Το γεγονός αυτό ισχύει διότι, αν ο μηχανισμός μας με verification, μέσα στο σύνολο το οποίο κάνει verify, το verification set, εντοπίσει τους παίκτες που ψεύδονται, τους αποκλείει από τον μηχανισμό. Επομένως, περιορίζεται το όφελος που μπορεί να απολαμβάνουν οι παίκτες, από την ψευδή δήλωση.

Στην ενότητα αυτή, επιχειρείται μια τυπική παρουσίαση της έννοιας του verification σε μηχανισμούς χωρίς χρήματα. Η ανάλυση στηρίζεται κυρίως στην εργασία [17].

Στην παρακάτω ανάλυση, εξετάζουμε μόνο έναν παίκτη, θεωρώντας ότι οι υπόλοιποι συμπεριφέρονται με fixed τρόπο. Η ανάλυση αυτή ονομάζεται principle agent model [15]. Άλλωστε, η ιδιότητα του truthfulness εξασφαλίζει ότι για κάθε παίκτη η βέλτιστη στρατηγική είναι να δηλώσει το πραγματικό του valuation, ανεξαρτήτως του προφίλ των υπολοίπων παικτών.

Έστω επίσης ότι O είναι το σύνολο των εκβάσεων του μηχανισμού, και η χρησιμότητα του παίκτη δίνεται από τον τύπο $x : O \to \mathbb{R}$, για κάθε πιθανή έκβαση. Το σύνολο των πιθανών τύπων για έναν παίκτη είναι το domain του, και συμβολίζεται ως D. Η συνάρτηση που υλοποιείται από τον μηχανισμό ορίζεται ως $f : D \to O$, και αντιστοιχίζει δηλαδή τον τύπο x που δέχεται ως είσοδο σε μια έκβαση $f(x)$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται social choice function. Παρακάτω, παρουσιάζουμε κάποιους βασικούς ορισμούς για τον σχεδιασμό μηχανισμών με επαλήθευση.

Ορισμός 3.17. Μια social choice function $f : D \to O$ ονομάζεται *truthfully implementable* εάν $\forall x, y \in D : xf(x) \geq xf(y)$.

Ο παραπάνω ορισμός δηλώνει ότι μια συνάρτηση f θεωρείται truthfully implementable εάν κανένας παίκτης με πραγματικό τύπο x δεν μπορεί να αυξήσει την χρησιμότητά του, δηλώνοντας ψευδώς y.

Ορισμός 3.18. Έστω μια συνάρτηση $M : D \to 2^D$, που περιορίζει τις δηλώσεις του παίκτη, για το μοντέλο του *partial verification*. Θα ισχύει ότι, ένας παίκτης με πραγματικό τύπο x μπορεί να δηλώσει ψευδώς έναν τύπο y, υπό την παρουσία του $M-$verification, αν και μόνο αν $M(x) \in D$.

Συνεπώς, με βάση τον παραπάνω ορισμό, η ύπαρξη του partial verification περιορίζει το εύρος των ψεμάτων που μπορούν να δηλώσουν οι παίκτες. Συγκεκριμένα, αν το εύρος ψεμάτων περιοριστεί σε μια περιοχή ϵ, όπως συμβαίνει και στον μηχανισμό που αναλύεται κατά την παρούσα εργασία, η έννοια του verification διατυπώνεται ως εξής:

Ορισμός 3.19. Δεδομένου $\epsilon > 0$, ορίζουμε το $\epsilon-$verification τυπικά ως:

$$M^\epsilon(x) = \{y \in D : |x - y| \leq \epsilon\}$$

Υπό το partial $M-$verification, η έννοια του truthfulness μετασχηματίζεται ως εξής:

Ορισμός 3.20. Μια social choice function $f : D \to O$ ονομάζεται *M-truthfully implementable* εάν $\forall x \in D,\, y \in M(x) : xf(x) \geq xf(y)$.

Αφού παρουσιάστηκαν με τυπικό τρόπο οι έννοιες του partial verification, αποκτούμε πλέον μια πιο ακριβή εικόνα της λειτουργίας αυτού στον Σχεδιασμό Μηχανισμών. Η διαίσθηση πίσω από αυτό είναι απλή: το partial verification περιορίζει το εύρος ψεμάτων που μπορούν να δηλώσουν οι παίκτες, προσπαθώντας να εξασφαλίζει truthfulness.

Συμπληρωματικά, αναφερόμαστε απλώς στην έννοια του Symmetric και Asymmetric Verification, παρουσιάζοντας τυπικά τον ορισμό αυτών.

Ορισμός 3.21. Το M-verification δύναται να αναπαρασταθεί από ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G_M = (D, \{(x,y) : y \in M(x)\})$, που έχει ως σύνολο κορυφών το σύνολο των πιθανών τύπων D και όπου μια ακμή (x,y) συμβολίζει ότι ο παίκτης με τύπο x επιτρέπεται να δηλώσει ψευδώς τύπο y.

Με χρήση της social choice function, μπορούμε να εισάγουμε βάρη στις ακμές ως εξής:

$$G_{M,f} = (D, \{(x,y) : y \in M(x)\}, w), w(x,y) = xf(x) - xf(y)$$

Ουσιαστικά, τα βάρη αποτυπώνουν το όφελος ή την απώλεια που απολαμβάνει ο παίκτης, δηλώνοντας ψευδή τύπο y.

Ορισμός 3.22. Αν το παραπάνω γράφημα G_M είναι συμμετρικό, δηλαδή για κάθε $x, y \in E(G_M)$ ισχύει επίσης $(y,x) \in E(G_M)$ τότε το verification καλείται *Symmetric*.
Αν το παραπάνω γράφημα G_M είναι ένα ακυκλικό τουρνουά (acyclic tournament), δηλαδή για κάθε $x, y \in V(G_M)$ ισχύει είτε $(x,y) \in E(G_M)$ είτε $(y,x) \in E(G_M)$ και δεν σχηματίζονται κύκλοι, τότε το verification καλείται *Assymetric*.

Κεφάλαιο 4

Ισορροπίες Nash

Στο παρόν κεφάλαιο, εξειδικεύεται η μελέτη μας στην ανάλυση ισορροπιών συγκεκριμένων μηχανισμών. Αρχικά, θα διερευνήσουμε την ύπαρξη Αμιγών Ισορροπιών Nash (PNE) στους μηχανισμούς αυτούς. Όπως αναλύθηκε στα προηγούμενα κεφάλαια, η ύπαρξη των PNE δεν είναι εγγυημένη σε όλους τους μηχανισμούς. Χρησιμοποιώντας ορισμένα εργαλεία από γνωστά αποτελέσματα της Θεωρίας Παιγνίων, αποδεικνύουμε την ύπαρξη PNE μέχρι ένα συγκεκριμένο όριο. Γενικεύοντας το παραπάνω, εργαζόμαστε με τη μέθοδο των μικτών ισορροπιών Nash (MNE), που επίσης παρουσιάστηκαν παραπάνω. Επομένως, έχουμε προσεγγιστική ισορροπία, και, εν τέλει, αποκτούμε μια πλήρη εικόνα των ισορροπιών για τους υπό εξέταση μηχανισμούς. Στην τελευταία ενότητα, παρουσιάζουμε μια εκδοχή του Facility Location problem, το οποίο μελετήσαμε υπό το πρίσμα του partial verification, και τον τρόπο με τον οποίο προέκυψαν οι ισορροπίες Nash στην περίπτωση αυτή.

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τους μηχανισμούς που μελετήσαμε, και θα αναφέρουμε ορισμένες σημαντικές ιδιότητες που τους χαρακτηρίζουν. Οι μηχανισμοί αυτοί είναι γνωστοί στην Θεωρία Παιγνίων, και αναλύθηκαν εκτενώς ως προς τις ιδιότητές τους στο [25]. Στη συνέχεια, θα αναλύσουμε τα εργαλεία με τα οποία αποδείξαμε τις ισορροπίες, καθώς και θα παραθέσουμε τις συγκεκριμένες αποδείξεις.

4.1 Εισαγωγικά

Για κάθε ακέραιο $m \geq 1$, θεωρούμε $[m] \equiv \{1, 2, ..., m\}$ το σύνολο των αντικειμένων, και n στρατηγικούς παίκτες. Σε συνδυαστικά προβλήματα, υποθέτουμε O το σύνολο των εκβάσεων, πεπερασμένο και τέτοιο ώστε $m \equiv |O|$ να είναι ο αριθμός των διαφορετικών εκβάσεων. Για ένα πεπερασμένο σύνολο S, το $\Delta(S)$ αποτελεί το μοναδιαίο (unit) simplex επί του S, που περιλαμβάνει όλες τις κατανομές πιθανότητας πάνω στο S. Για ένα μη κενό σύνολο $S \subseteq [m]$, $x_S = (x_j)_{j \in S}$ είναι η προβολή του διανύσματος x επί του S. Για το διάνυσμα x και πραγματικό θετικό αριθμό ℓ, ισχύει ότι $x^\ell = ({x_1}^\ell, {x_2}^\ell, ..., {x_m}^\ell)$ και η ℓ-norm του x είναι η $\|x\|_\ell = (\sum_{j=1}^{m} x_j{}^\ell)^{1/\ell}$. Επιπλέον, ορίζουμε ως $\|x\|_1 = |x|$ την $1-$νόρμα του x, καθώς και $\|x\|_\infty = max_{j\in[m]}\{x_j\}$ την άπειρη νόρμα του x.

Κάθε παίκτης έχει ιδιωτικές προτιμήσεις, και καθορίζεται από την valuation function (στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρεται και ως type) $x_i : O \to \mathbb{R}_+$, την οποία ο παίκτης i προσπαθεί να μεγιστοποιήσει. Το σύνολο των πιθανών valuations είναι το πεδίο $D = \mathbb{R}^m{}_+$. Συμβολιζουμε ως $x_i = (x_i(j))_{j\in[m]}$ την valuation του παίκτη i και ως $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ το προφίλ valuation που αποτελείται από τις αξιολογήσεις όλων των παικτών. Τέλος, θεωρούμε το βάρος μιας έκβασης ως τη συνάρτηση $w(x) = x_1+x_2+...+x_n$, το διάνυσμα της συνολικής αξιολόγησηςς δεδομένου του προφίλ x (συνήθως αντί για $w(x)$ συμβολίζουμε με απλό w).

Ένας randomized κανόνας allocation $f : D^n \to \Delta(O)$ αντιστοιχίζει κάθε προφίλ valuation σε μία κατανομή πιθανότητας επί του O. Θεωρούμε την κατανομή πιθανότητας επί εισόδου x ως ένα διάνυσμα με την μορφή: $f(x) = (f_j(x))_{j\in[m]}$, όπου $f_j(x)$ η πιθανότητα της έκβασης j. Το παραπάνω συνεπάγεται ότι η αναμενόμενη χρησιμότητα (expected utility) του παίκτη i από το $f(x)$ είναι ίση με $x_i \cdot f(x)$. Ένας κανόνας allocation καλείται *πλήρης*, όταν για κάθε x ισχύει ότι $|f(x)| = 1$, και ο μηχανισμός πάντα έχει ως έξοδο κάποια έκβαση $o \in O$.

Επιπλέον σημαντική ιδιότητα είναι η *scale invariance*. Ένας κανόνας allocation καλείται scale invariant αν για κάθε προφίλ valuation x και κάθε $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $f(\alpha x) = f(x)$, δηλαδή μεγέθυνση κατά α δεν μεταβάλλει το allocation. Επιπλέον, ο μηχανισμός που μελετάται είναι *strongly anonymous*. Υπό την έννοια αυτή, ο κανόνας allocation εξαρτάται μόνον από το διάνυσμα $w(x)$ των βαρών των εκβάσεων.

Στον μηχανισμό που μελετάμε, χρησιμοποιείται ως *αντικειμενική συνάρτηση* που πρέπει να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση του Social Welfare, δηλαδή η $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x)$. Η βέλτιστη τιμή για ένα προφίλ x είναι η $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|_\infty$.

Θα λέμε ότι ένας κανόνας allocation έχει *λόγο προσέγγισης* $\rho \in (0, 1]$ αν για όλα τα προφίλ x ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot f(x) \geq \rho \|\sum_{i=1}^{n} x_i\|_\infty$.

Ένας μηχανισμός F ονομάζεται *αναδρομικός*, αν υπάρχει ένας κανόνας allocation f τέτοιος ώστε ο F να ενεργεί ως ακολούθως: σε ένα προφίλ valuation y, ο F επιλέγει μια έκβαση o με πιθανότητα $f_o(y)$ και ένα σύνολο επαλήθευσης $V(y)$, και έπειτα υπολογίζει το σύνολο $L = \{i \in V(y) : ver(i) = 0\}$, που είναι οι παίκτες που ψεύδονται από αυτούς που ελέγχθηκαν στο σύνολο $V(y)$. Αν $L = \emptyset$, ο F επιστρέφει την έκβαση o. Σε αντίθετη περίπτωση, ο F αναδρομικά εξετάζει το σύνολο των υπολοίπων παικτών y_{-L}.

Ένας μηχανισμός F καλείται $\epsilon-$truthful για κάποιο $\epsilon \in (0,1]$, αν για κάθε παίκτη i, κάθε ζεύγος valuations x_i, y_i και όλες τις δηλωμένες valuations y_{-i} και διανύσματα επαλήθευσης s_{-i}, ισχύει ότι:

$$x_i \cdot F((y_{-i}, x_i), (s_{-i}, 1)) \geq \epsilon \cdot x_i \cdot F((y_{-i}, x_i), (s_{-i}, 1))$$

Μια ακόμη σημαντική ιδιότητα των μηχανισμών είναι το robustness. Τυπικά, ένας μηχανισμός καλείται *robust*, εάν για όλα τα δηλωμένα valuations και τα διανύσματα επαλήθευσης s ισχύει η σχέση $F(y,s) = F(y_{T(s)}, (1,1,...1))$, όπου η ισότητα αναφέρεται στην κατανομή πιθανότητας της F, και $T(s) = \{i \in N : s_i = 1\}$ το σύνολο των truthful παικτών, δηλαδή αυτών που δηλώνουν το πραγματικό τους valuation στον μηχανισμό.

4.2 Ο μηχανισμός *Power* με Μερική Επαλήθευση

Αφού αναλύσαμε στην παραπάνω ενότητα τις βασικές ιδιότητες του μηχανισμού που θα μελετήσουμε, προχωρούμε στον επίσημο ορισμό του.

Mechanism 1 Power Mechanism $Pow^{\ell}(x,s)$

let N be the set of the remaining agents and let $L \leftarrow \emptyset$
pick an outcome $j \in O$ and a tuple $t \in N^{\ell}$
  with probability proportional to the value of the term $x_{t_1}(j)x_{t_2}(j)...x_{t_\ell}(j)$
for each agent $i \in t$ do
  if $ver(i) \neq 1$ then $L \rightarrow L \cup \{i\}$
if $L \neq \emptyset$ then return $Pow^{\ell}(x_{-L}, s_{-L})$
else return outcome j

Ο μηχανισμός *Power* είναι αναδρομικός με επαλήθευση. Δημιουργεί ένα allocation αναθέτοντας πιθανότητες ίσες με το βάρος της κάθε έκβασης υψωμένο στην ℓ. Κατά συνέπεια, για κάθε προφίλ valuation, η έκβαση εξαρτάται από το διάνυσμα βαρών, δηλαδή το $w = \sum_{i=1}^{n} x_i$.

Σε περίπτωση που όλοι οι παίκτες είναι truthful, ο Pow^{ℓ} καταλήγει σε κάθε έκβαση j με πιθανότητα ανάλογη του ${w_j}^{\ell}$, συγκεκριμένα:

$$\frac{{w_j}^{\ell}}{\sum_{q=1}^{m} {w_q}^{\ell}}$$

Συγκεκριμένα, ο όρος ${w_j}^{\ell}$ έχει ανάπτυγμα ως εξής:

$${w_j}^{\ell} = (\sum_{i \in N} x_i(j))^{\ell} = \sum_{t \in N^{\ell}} x_{t_1}(j)x_{t_2}(j)...x_{t_\ell}(j)$$

Το παραπάνω συνεπάγεται ότι, εφόσον σε κάθε όρο βάρους, συνεισφέρουν το πολύ ℓ παίκτες, μπορούμε να προσεγγίσουμε το truthfulness επαληθεύοντας τις δηλώσεις το πολύ ℓ παικτών.

Ένα ενδιαφέρον θεώρημα από το [25] αποδεικνύει ότι, θέτοντας $\ell = lnm/\epsilon$, ο Pow^ℓ είναι $(1-\epsilon)-$truthful και επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης $(1-\epsilon)$ στη συνάρτηση του Social Welfare.

4.3 Nash Equilibria για $\ell \leq 1$

Μελετώντας τον μηχανισμό Pow^ℓ με επαλήθευση, που παρουσιάστηκε παραπάνω, αποζητούμε να επιβεβαιώσουμε την ύπαρξη Ισορροπιών Nash. Όπως έχει αναφερθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι Ισορροπίες Nash είναι κομβικής σημασίας για τα παίγνια, καθώς εξασφαλίζουν ότι το παίγνιο κάποια στιγμή συγκλίνει. Επομένως, το συμπέρασμα που θα εξάγουμε είναι ότι, παρά τις μικρές αποκλίσεις από την πραγματική τιμή valuation των παικτών, μπορούμε ακόμη να βρούμε κάποια σημεία από τα οποία κανένας παίκτης δεν επιθυμεί να αλλάξει στρατηγική. Συγκεκριμένα, όπως θα φανεί παρακάτω, τα σημεία αυτά είναι τα άκρα της $\pm\epsilon$ περιοχής του επιτρεπτού deviation, και αν όλοι οι παίκτες συμπεριφέρονται με τον ακραίο αυτό τρόπο, τελικά επιτυγχάνεται η ζητούμενη σύγκλιση, στην περίπτωση φυσικά που $\ell \leq 1$.

Αναλύοντας την συνάρτηση του utility, που εκφράζει την χρησιμότητα του παίκτη i από κάθε έκβαση j, σε ένα πρώτο στάδιο μελετούμε την κυρτότητα της συνάρτησης. Αφορμή για τη μελέτη αυτή είναι το ισχυρό αποτέλεσμα του Rosen [18], που εγγυάται την ύπαρξη Ισορροπιών Nash σε χώρους με συγκεκριμένη κυρτότητα.

Ως γνωστόν, μια συνάρτηση καλείται *κοίλη (concave)* όταν στο διάστημα $[a, b]$, για οποιαδήποτε δύο σημεία x_1 και x_2 στο $[a, b]$ ισχύει ότι η $-f(x)$ είναι κυρτή στο διάστημα αυτό. Μια συνεχής συνάρτηση θεωρείται *κυρτή (convex)*, εάν η τιμή της στο μέσο κάθε διαστήματος του πεδίου ορισμού της δεν υπερβαίνει τον αριθμητικό μέσο των τιμών της στα άκρα του διαστήματος. Μια δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι κοίλη αν και μόνο αν η δεύτερη παράγωγός της είναι αρνητική ή μηδέν, και είναι *αυστηρά κοίλη* αν είναι γνησίως αρνητική.

Γενικεύοντας την έννοια αυτή σε παίγνια, καταλήγουμε στον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.1. Ορίζουμε ένα *κοίλο παίγνιο* (concave game) ως ένα παίγνιο στο οποίο ένας παίκτης i επιλέγει μια ενέργεια $x_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, τέτοια ώστε $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in C$, όπου C είναι ένα κλειστό και κυρτό σύνολο. Η συνάρτηση χρησιμότητας (payoff function) του παίκτη i είναι η $\phi_i(x)$ και είναι συνεχής στο x και κοίλη στο x_i για $x \in C$.

Όπως παρουσιάσαμε στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου, η συνάρτηση του utility για τον μηχανισμό Pow^{ℓ} δίνεται από τον τύπο $x_i \cdot f(x)$, όπου f το allocation που προκύπτει ως αποτέλεσμα του μηχανισμού. Συγκεκριμένα δηλαδή, για έναν παίκτη i :

$$u_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{m} x_{i_j} \cdot (\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{\ell}}{\sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{\ell}}$$

Ως bi_j εννοείται η ενέργεια του παίκτη i στην έκβαση j. Μπορούμε να αντιληφθούμε τον μηχανισμό Pow^{ℓ} σαν μια διαδικασία Συνδυαστικής Δημοπρασίας, που αναθέτει πιθανότητες στις εκβάσεις, και αντιμετωπίζουμε τις ενέργειες των παικτών σαν bids, τα οποία κινούνται στην $\epsilon-$περιοχή του πραγματικού τους valuation δηλαδή ισχύει ότι $b_{i_j} = x_{i_j} \pm \epsilon$. Στον προαναφερθέντα τύπο, θέσαμε ως εύρος των πιθανών ψεμάτων, δηλαδή κατά πόσο δηλώνει ψευδή πληροφορία ο παίκτης κατά $\pm\epsilon$. Για τον λόγο αυτό, τα βάρη του μηχανισμού προκύπτουν ως το true valuation του παίκτη από το οποίο προσθαφαιρούμε την ποσότητα ϵ, καθώς τόσο επιτρέπεται να απέχει από την πραγματικότητα σύμφωνα με το $\epsilon-$verification. Με την εισαγωγή του verification, περιορίζουμε το μέγεθος των επιτρεπτών ψεμάτων που μπορούν να δηλώσουν οι παίκτες, όπως έχει αναλυθεί εκτενώς στα προηγούμενα κεφάλαια.

Αναλύοντας τη συνάρτηση utility, και εφόσον πρόκειται για συνάρτηση πολλών μεταβλητών, θα αναλύσουμε την μερική παράγωγο ανά ενδεχόμενο. Συγκεκριμένα, για να εγγυηθούμε την ιδιότητα του concave game, θα εξετάσουμε ανά έκβαση την τιμή της παραγώγου, και αν εξασφαλίζεται η ιδιότητα. Δεν αναφερόμαστε στο συνολικό παίγνιο, αλλά στο ανά ενδεχόμενο παίγνιο. Συνεπώς, στον ορισμό θα θέσουμε αντί για $x_i \pm \epsilon$ το b_{i_j} και $b_j = (b_{1_j}, b_{2_j}, ..., b_{n_j})$ για κάποια έκβαση j. Επομένως, η απαίτησή μας είναι η συνάρτηση utility του παίκτη i, η u_i να είναι συνεχής στο b_j και κοίλη στο b_{i_j} για $b_j \in C$, όπου C κυρτό και κλειστό σύνολο. Εν γένει, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων valuation είναι συμπαγή και κυρτά, καθώς και φραγμένα.

Η u_i'', δεύτερη παράγωγος του utility ως προς ένα ενδεχόμενο j είναι της μορφής:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial {b_{i_j}}^2} = \frac{l \cdot (x_{i_j} (\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{\ell} - \sum_{q \neq j} x_{i_q} (\sum_{i=1}^{n} b_{i_q})^{\ell}) \cdot (2\ell (\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{2\ell-2} + (\ell-1)(\sum_{q=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{\ell})(\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{\ell-2})}{(\sum_{q=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} b_{i_j})^{\ell})^3}$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ordering των true valuations ως $x_{i_1} > x_{i_2} > ... > x_{i_m}$. Όπως είναι προφανές από τον παραπάνω τύπο, για $\ell \leq 1$, η δεύτερη παράγωγος ανά έκβαση j είναι αρνητική, και επομένως η συνάρτηση u_{i_j} είναι κοίλη (δεν είναι όμως αυστηρά κοίλη, καθώς για $\ell = 1$ η παράγωγος λαμβάνει την τιμή 0).

Έχουμε τη δυνατότητα να εξετάζουμε τις εκβάσεις ανεξάρτητα, και να αποφανθούμε για την κυρτότητα μόνο ανά έκβαση j, δεδομένου ότι η συνάρτηση utility ακολουθεί τη μορφή αυτή. Συνεπώς, ο τύπος της δεύτερης παραγώγου που αναφέρθηκε παραπάνω ισχύει πανομοιότυπα και για οποιαδήποτε έκβαση, με μόνη σύμβαση την διάταξη των valuations.

Αντιθέτως, για $\ell > 1$, είναι προφανές ότι η συνάρτηση παύει να είναι κοίλη. Δεν διαθέτει πλέον σταθερή κυρτότητα, αλλά εξαρτάται από επιπλέον όρους, και από τα bids των παικτών. Εφόσον δεν είναι a priori γνωστή μια τιμή για αυτά, η συνάρτηση εναλλάσσεται μεταξύ κυρτής και κοίλης ανά διαστήματα. Συνεπώς, δεν μπορούν να εφαρμοστούν γνωστά θεωρήματα είτε της Κυρτής Βελτιστοποίησης, είτε το αποτέλεσμα του Rosen που χρησιμοποιήθηκε για $\ell \leq 1$. Στην επόμενη ενότητα, θα αναλυθεί η προσέγγιση που ακολουθήθηκε για την εύρεση ισορροπιών Nash στην περίπτωση αυτή.

Συνεχίζοντας, διατυπώνουμε τον ορισμό του Nash Equilibrium σε concave games παρακάτω, με βάση τους αρχικούς συμβολισμούς που ακολουθήθηκαν.

Ορισμός 4.2. Ορίζουμε την Ισορροπία Nash ως $x^0 \in C$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση $\phi_i(x^0) \geq \phi_i({x_{-i}}^0, y_i)\ \forall y_i$, όπου $({x_{-i}}^0, y_i) \in C$. Εν προκειμένω, συμβολίζουμε ως $({x_{-i}}^0, y_i)$ το διάνυσμα στο οποίο η ενέργεια του i-οστού παίκτη αντικαθίσταται από την y_i.

Στην περίπτωσή μας, επεκτείνουμε τον παραπάνω ορισμό, ανά διάσταση, δηλαδή ανά έκβαση του παιγνίου. Τα outcomes αντιμετωπίζονται ανεξάρτητα. Το βασικότερο αποτέλεσμα του Rosen είναι ότι τα concave games έχουν πάντα τουλάχιστον μια Ισορροπία Nash. Η απόδειξη στηρίζεται σε θεώρημα σταθερού σημείου. Συγκεκριμένα, βασίζεται στο Kakutani Fixed Point Theorem, το οποίο χρησιμοποιήθηκε και από τον John F. Nash για την απόδειξη Ισορροπιών στο [1], που αναφέρεται σε συναρτήσεις ορισμένες σε κυρτούς και συμπαγείς υποχώρους του Ευκλείδιου χώρου, οι οποίοι διαθέτουν την ιδιότητα του σταθερού σημείου. Το θεώρημα αυτό γενικεύει το Brower's Fixed Point Theorem, το οποίο αρχικά είχε χρησιμοποιηθεί από τον Nash για την απόδειξη ύπαρξης Ισορροπιών, που εγγυάται την ύπαρξη σταθερού σημείου για συνεχείς συναρτήσεις f που αντιστοιχίζουν ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο στον εαυτό του.

Θεώρημα 4.1. Ένα concave game έχει τουλάχιστον ένα Nash Equilibrium.

Απόδειξη. Ορίζουμε $\rho(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_{-i}, y_i)\ \forall\ (x, y) \in C^2$ και $\rho*(x) := max_{z \in C} \rho(x, z)$, όπου $\rho(x, y)$ είναι το άθροισμα των utilities όλων των παικτών, για κάθε ενέργεια y_i του παίκτη i, και $\rho*$ είναι το μέγιστο άθροισμα, δεδομένου του προφίλ ενεργειών των υπολοίπων παικτών, που προκύπτει με μια συγκεκριμένη ενέργεια z του i που μεγιστοποιεί την ωφέλεια. Στη συνέχεια, ορίζουμε $\Gamma(x) := \{y \in C | \rho(x, y) = \rho * (x)\}$, που αναπαριστά το σύνολο ενεργειών του i, που με δεδομένες ενέργειες των υπολοίπων, μεγιστοποιούν την utility. Διαισθητικά, η $\Gamma(x)_i$ είναι η ενέργεια του i δεδομένου του x. Συνεπώς, ένα σταθερό σημείο στο σύνολο Γ, έστω $x \in \Gamma(x)$, θα αποτελεί Nash Equilibrium για το παίγνιο αυτό.
Αν γνωρίζουμε ότι το σύνολο Γ είναι κυρτό και συμπαγές, χρησιμοποιώντας το Kakutani Fixed Point Theorem, αποδεικνύεται ότι διαθέτει την ιδιότητα του Σταθερού Σημείου. Στην περίπτωσή μας, κάτι τέτοιο προκύπτει από την συνέχεια του $\rho(x, z)$ και από το γεγονός ότι η $\rho(x, z)$ είναι κοίλη στο z, για συγκεκριμένο x. Συνεπώς, το Γ είναι μια upper semi-continuous αντιστοίχιση, που αντιστοιχίζει κάθε σημείο του κυρτού συνόλου σε ένα κυρτό

και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Κατ'επέκταση, το θεώρημα Kakutani εφαρμόζεται πάντα στα concave games, και πάντα υπάρχουν Ισορροπίες Nash.

Για την απόδειξη του Kakutani Fixed Point Theorem, παραπέμπουμε στο [26].

Από τη στιγμή που εξασφαλίστηκε παραπάνω η ιδιότητα του concavity για το υπό εξέταση παίγνιο, η ύπαρξη Nash Equilibrium εξασφαλίζεται από το παραπάνω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2. Ο μηχανισμός Pow^{ℓ} έχει τουλάχιστον ένα Nash Equilibrium, για κάθε διάσταση του παιγνίου, δηλαδή κάθε έκβαση j.

Ο παραπάνω ορισμός, δεδομένου ότι όπως παρουσιάσαμε παραπάνω το πρόβλημα μπορεί να γίνει αντιληπτό ως δημοπρασία όπου οι παίκτες καταθέτουν bids και οι εκβάσεις είναι ισοδύναμες με πιθανότητες για απονομή των m διακριτών items, είναι ισοδύναμος με την εξής δήλωση: Ο μηχανισμός Pow^{ℓ} έχει τουλάχιστον ένα Nash Equilibrium για κάθε item που δημοπραττείται.

Κάνοντας χρήση ισχυρότερων ιδιοτήτων του χώρου του παιγνίου, μπορεί να εξασφαλιστεί η μοναδικότητα της παραπάνω Ισορροπίας Nash. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται Diagonally Strict Concavity (DSC), και ο όρος αποδίδεται στα αγγλικά καθώς δεν υπάρχει η αντιστοιχία του στην ελληνική βιβλιογραφία.

Ορισμός 4.3. Η συνάρτηση $\sigma(x,r) := \sum_{i=1}^{n} r_i \phi_i(x)$, $r \in \mathbb{R}^n$ είναι Diagonally Strict Concavity (DSC), αν $(x^1 - x^0)' g(x^0, r) + (x^0 - x^1)' g(x^1, r) > 0 \ \forall x^0 \neq x^1 \in C$. Ισχύει ότι $g_i(x,r) := r_i \nabla_i \phi_i(x)$ και $'$ είναι η πράξη αναστροφής.

Η ιδιότητα αυτή διαισθητικά σημαίνει ότι σε κάθε κατεύθυνση, η συνάρτηση φθίνει.

Θεώρημα 4.3. Εάν $\exists r > 0 \ s.t. \ \sigma(x,r) := \sum_{i=1}^{n} r_i \phi_i(x)$ να είναι Diagonally Strictly Concave, τότε το Nash Equilibrium υπάρχει και είναι μοναδικό.
Μια ισοδύναμη συνθήκη με την παραπάνω είναι να είναι ο πίνακας $[G(x,r) + G'(x,r)]$ αρνητικά ορισμένος για $x \in C$, όπου $G_{i,j}(x,r) := \frac{\partial^2 g(x,r)}{\partial x_i \partial x_j}$.
Ένας συμμετρικός πίνακας καλείται αρνητικά ορισμένος εάν όλες του οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές, και τυπικά όταν $x^T A x < 0 \ \forall x > 0$, δηλαδή όταν όλοι οι κύριοι υποπίνακές του έχουν αρνητική ορίζουσα.

Επομένως, αν ένα παίγνιο διαθέτει την ιδιότητα DSC, τότε η ισορροπία Nash που διαθέτει είναι μοναδική.

4.4 Nash Equilibria για $\ell > 1$

Στην προηγούμενη ενότητα, αποδείχθηκε η ύπαρξη Ισορροπιών Nash για τον μηχανισμό Pow^{ℓ}, με $\ell \leq 1$. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, και είναι προφανές από τον τύπο της δεύτερης παραγώγου του utility κάποιου παίκτη i, η κυρτότητα της συνάρτησης εναλλάσσεται για $\ell > 1$, οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε οτιδήποτε σχετικό με την ύπαρξη ισορροπιών στην περιοχή τιμών του ℓ αυτή.

Αρχικά, ελέγχοντας τον Hessian πίνακα της συνάρτησης u (utility), βλέπουμε ότι προκύπτει indefinite, καθώς έχει αρνητική υποορίζουσα, και επομένως δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την κυρτότητα της συνάρτησης εν γένει. Δοκιμάζοντας διάφορα εργαλεία, όπως Potential Functions, Best Response Cycles και άλλα, καταλήγουμε ότι δεν υπάρχει μέθοδος απόδειξης ύπαρξης ακριβών Ισορροπιών Nash.

Στην κατεύθυνση αυτή, προκειμένου να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη ισορροπιών Nash, θα πρέπει να "χαλαρώσουμε" την μορφή αυτών. Συγκεκριμένα, αντί να αναζητούμε ακριβείς ισορροπίες, πλέον στρεφόμαστε στις προσεγγιστικές ισορροπίες. Χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα του Lipton [21], που χρησιμοποιεί τυχαία δειγματοληψία στο χώρο των αμιγών στρατηγικών, για να αποδείξουμε το ζητούμενο Equilibrium. Σημαντικό πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής, είναι ότι ο αλγόριθμος που περιγράφεται εντοπίζει τις $\epsilon-$προσεγγιστικές Ισορροπίες Nash, σε *quasi-polynomial* χρόνο και λογαριθμικό support, δίνοντας υποεκθετικό αλγόριθμο, με αρκετά μειωμένη πολυπλοκότητα. Το αποτέλεσμα αυτό, καθώς και ο χρόνος υπολογισμού του, αποδεικνύονται χρήσιμα για το επόμενο κεφάλαιο, όπου μελετάται το Price of Anarchy του μηχανισμού. Σημαντικό ακόμη είναι ότι οι ισορροπίες αυτές, δεδομένου ότι είναι ομοιόμορφες στρατηγικές, προσεγγίζουν αρκετά καλά τις Αμιγείς Ισορροπίες Nash, που είναι ουσιαστικά το ζητούμενό μας.

Οι Ισορροπίες Nash, στη γενική περίπτωση, είναι αρκετά δύσκολο και πολύπλοκο να υπολογιστούν. Επομένως, οι παίκτες αναζητούν απλούστερες στρατηγικές κατά τη διάρκεια του παιγνίου, και ενδέχεται να επιλέγουν μια υπο-βέλτιστη στρατηγική, αντί για μια στρατηγική δύσκολα υλοποιήσιμη. Κατά τη μελέτη αυτή, αναφερόμαστε σε παίγνια σε Κανονική Μορφή, και απλές στρατηγικές με μικρό σύνολο support. Στο αποτέλεσμα που παρουσιάζουμε, χρησιμοποιείται μόνο λογαριθμικό support στο σύνολο των αμιγών στρατηγικών, και καταλήγουμε σε έναν αλγόριθμο με πολυπλοκότητα $O(n^{\log n})$, για τον υπολογισμό των $\epsilon-$προσεγγιστικών ισορροπιών, όπου ως n συμβολίζεται ο αριθμός των διαθέσιμων στον παίκτη αμιγών στρατηγικών.

Για τις αποδείξεις των θεωρημάτων που παρατίθενται παρακάτω, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [21].

Αρχικά, εκκινούμε από ένα παίγνιο δύο παικτών G, όπου m ο αριθμός των αμιγών στρατηγικών διαθέσιμων σε κάθε παίκτη, και τα payoffs συμβολίζονται ως πίνακες R, C αντίστοιχα.

Ως γνωστόν, μικτή στρατηγική για έναν παίκτη καλείται η κατανομή πιθανότητας επί του συνόλου των αμιγών στρατηγικών, και αναπαρίσταται από το διάνυσμα $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$, με $x_i \geq 0$ και $\sum x_i = 1$, όπου x_i η πιθανότητα ο παίκτης να επιλέξει την i-οστή αμιγή στρατηγική. Το support του $x, Supp(x)$ είναι το σύνολο των αμιγών στρατηγικών που χρησιμοποιεί, αυτές δηλαδή από το διάνυσμα x που έχουν $x_i \geq 0$. Μια μικτή στρατηγική καλείται k-ομοιόμορφη, αν ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή σε ένα πολυσύνολο S αμιγών στρατηγικών, όπου $|S| = k$. Το payoff του παίκτη σε γραμμή (row player), για ένα ζεύγος μικτών στρατηγικών x, y, είναι η αναμενόμενη τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής ίσης με R_{ij}, και επιλέγεται με πιθανότητα $x_i y_j$. Επομένως, το payoff του παίκτη-γραμμή είναι (x, Ry), δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο $x \cdot Ry$ δύο m-διάστατων διανυσμάτων. Εντελώς όμοια, το payoff του παίκτη-στήλη είναι (x, Cy). Η ισορροπία Nash στα παίγνια αυτά, ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 4.4. Ένα ζεύγος στρατηγικών x^*, y^* καλείται *σημείο Ισορροπίας Nash* εάν:

1. Για κάθε (μικτή) στρατηγική $\bar{x}$ του παίκτη-γραμμή ισχύει $(\bar{x}, Ry^*) \leq (x^*, Ry^*)$
2. Για κάθε (μικτή) στρατηγική $\bar{y}$ του παίκτη-στήλη ισχύει $(x^*, R\bar{y}) \leq (x^*, Ry^*)$

Χαλαρώνοντας τον αυστηρό ορισμό, ορίζουμε την $\epsilon-$προσεγγιστική ισορροπία Nash, την οποία θα αξιοποιήσουμε με τα θεωρήματα.

Ορισμός 4.5. Για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$, ένα ζεύγος μικτών στρατηγικών x', y' καλείται *σημείο $\epsilon-$ισορροπίας Nash* εάν:

1. Για κάθε (μικτή) στρατηγική $\bar{x}$ του παίκτη-γραμμή ισχύει $(\bar{x}, Ry') \leq (x'Ry') + \epsilon$
2. Για κάθε (μικτή) στρατηγική $\bar{y}$ του παίκτη-στήλη ισχύει $(x', R\bar{y}) \leq (x', Ry') + \epsilon$

Παρακάτω, παραθέτουμε το βασικό θεώρημα του [21] για παίγνια 2 παικτών, όπου όλες οι είσοδοι των πινάκων R και C βρίσκονται μεταξύ 0 και 1. Κατόπιν, θα γενικευτεί το θεώρημα αυτό, σε παίγνια n παικτών, ώστε να δύναται να εφαρμοστεί το αποτέλεσμα στο δικό μας setting.

Θεώρημα 4.4. Για κάθε Nash equilibrium x^*, y^* και κάθε πραγματικό αριθμό ϵ μεταξύ 0 και 1, υπάρχει, για κάθε $k \geq \frac{12lnn}{\epsilon^2}$, ένα ζεύγος k-ομοιόμορφων στρατηγικών x', y', τέτοιες ώστε:

1. Το ζεύγος x', y' να αποτελεί Ισορροπία Nash
2. $|(x', Ry') - (x^*, Ry^*)| < \epsilon$, δηλαδή ο παίκτης-γραμμή απολαμβάνει σχεδόν το ίδιο payoff με το αντίστοιχο στην ισορροπία Nash
3. $|(x', Cy') - (x^*, Cy^*)| < \epsilon$, δηλαδή ο παίκτης-στήλη απολαμβάνει σχεδόν το ίδιο payoff με το αντίστοιχο στην ισορροπία Nash

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βασίζεται στην πιθανοτική μέθοδο, με τυχαία δειγματοληψία k φορές από τον χώρο των αμιγών στρατηγικών. Ένα επίσης ενδιαφέρον αποτέλεσμα, αναφέρει ότι δεδομένου ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{n+k-1}{k}^2$ πιθανά πολυσύνολα, και εξ'ου και η πολυπλοκότητα προκύπτει quasi-polynomial, με εξαντλητική αναζήτηση μπορούν στον χρόνο αυτό να υπολογιστούν όλα τα k-ομοιόμορφα $\epsilon-$Equilibria. Η γενίκευση του θεωρήματος για n παίκτες παρουσιάζεται αμέσως παρακάτω:

Θεώρημα 4.5. Έστω $s_1{}^*, s_2{}^*, ..., s_n{}^*$ μια Ισορροπία Nash σε ένα παίγνιο με n παίκτες, και $p_1{}^*, p_2{}^*, ..., p_n{}^*$ τα payoffs των παικτών στην ισορροπία. Τότε για κάθε πραγματικό αριθμό ϵ μεταξύ 0 και 1, για κάθε $k > \frac{3n^2lnn^2m}{\epsilon^2}$, υπάρχει ένα $k-$ομοιόμορφο προφίλ στρατηγικών $s'_1, s'_2, ..., s'_n$ τέτοιο ώστε:

1. Οι $s'_1, s'_2, ..., s'_n$ αποτελούν Nash Equilibrium
2. $|p'_i - p_i{}^*| < \epsilon$ για $i = 1, 2, ..n$

όπου ως p'_i συμβολίζουμε τα αντίστοιχα payoffs των παικτών στην ισορροπία.

Συγκεκριμένα, το ϵ των παραπάνω θεωρημάτων αποτυπώνει ποσοτικά το κίνητρο να διαφέρουν οι δηλώσεις των παικτών από την πραγματική τους τιμή.

Στην απλή εκδοχή του προβλήματος που αναλύθηκε, οι R, C περιέχουν δεδομένα στην περιοχή τιμών $[0, 1]$. Εφεξής αποκαλούμε το ϵ του προσεγγιστικού MNE ως δ, για να αποφεύγεται η σύγχυση με την παράμετρο ϵ του verification. Γενικεύοντας το παραπάνω, για οποιεσδήποτε τιμές valuation, μέχρι ένα threshold V_{max}, επομένως οι παίκτες θα δηλώνουν τιμές στο εύρος $[0, V_{max} + \epsilon]$, πολλαπλασιάζουμε την σταθερά επί V_{max}, και καταλήγοντας λαμβάνουμε $\epsilon' = (V_{max} + \epsilon)\delta$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρήσαμε ότι οι παίκτες έχουν πιθανά valuations έως κάποια τιμή V_{max}, καθώς όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, αυτές ανήκουν σε ένα συμπαγές (και κατ'επέκταση κλειστό) υποσύνολο του $\mathbb{R}$, και συνεπώς υπάρχει η ευχέρεια να προβούμε σε μια τέτοια παραδοχή.

Εν προκειμένω, θεωρούμε ότι όλοι οι παίκτες έχουν τον ίδιο αριθμό αμιγών στρατηγικών στη διάθεσή τους, επομένως δεν απαιτείται να προχωρήσουμε σε επιπλέον τροποποιήσεις του κάτω φράγματος της τιμής k.

Αξιοποιώντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, μεγεθύνοντας κατάλληλα την ποσότητα ϵ, καταλήγουμε για τον μηχανισμό Pow^{ℓ} με $\ell > 1$ στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.6. Ο μηχανισμός Pow^{ℓ} με $\ell > 1$ διαθέτει $k-$ομοιόμορφο προφίλ στρατηγικών $s_1, s_2, ..., s_n$, με $k \geq \frac{3n^2 lnn^2 m}{\delta^2}$, το οποίο αποτελεί $(V_{max} + \epsilon)\delta-$προσεγγιστική Ισορροπία Nash.

Το παραπάνω θεώρημα ολοκληρώνει την μελέτη ισορροπιών στον μηχανισμό Pow^{ℓ}, ο οποίος διαθέτει ακριβείς ισορροπίες Nash για $\ell \leq 1$ και προσεγγιστικές ισορροπίες για $\ell > 1$.

4.5 Ισορροπίες Nash στο πρόβλημα Facility Location

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των Ισορροπιών Nash, αφορά στην εύρεση αυτών στο πρόβλημα Facility Location, σε μηχανισμούς που χρησιμοποιούν επαλήθευση. Επικεντρωθήκαμε στο πρόβλημα του Facility Location σε μια διάσταση, δηλαδή στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Αρχικά, θα αναλυθεί το πρόβλημα τοποθέτησης δύο facilities, το οποίο εύκολα γενικεύεται και στην περίπτωση $k > 2$ facilities, με n συμμετέχοντες παίκτες-ενδιαφερόμενους. Η λύση του προβλήματος με $k = 1$, είναι γνωστή και βρίσκεται στον median του διαστήματος μεταξύ των δύο ακραίων παικτών (agents).

Στην συγκεκριμένη περίπτωση, η μελέτη μας επικεντρώνεται στην εύρεση κατάλληλης τιμής της παραμέτρου ϵ του verification που να εγγυάται την ύπαρξη Nash Equilibria, με εφαρμογή κάποιου μηχανισμού για το πρόβλημα του Facility Location.

Ο ντετερμινιστικός μηχανισμός που εφαρμόζεται είναι ο EQUAL COST, που περιγράφεται στο [14]. Ο EQUAL COST λειτουργεί εξισώνοντας τα αναμενόμενα κόστη όλων των παικτών. Αρχικά, δοκιμάζει μήκος ℓ τέτοιο ώστε το κόστος $c(\ell)$ να είναι διπλάσιο από το βέλτιστο μέγιστο κόστος οποιουδήποτε παίκτη, και διαμερίζει το χώρο σε k μη επικαλυπτόμενα διαστήματα μήκους ℓ. Έπειτα, υπολογίζει μια τυχαία μεταβλητή X στο διάστημα $[0, \ell]$, λαμβάνοντας υπόψιν την συνάρτηση κόστους c. Η X πρέπει να είναι τέτοια ώστε να αναθέτει τα facilities σε τέτοιες θέσεις στο διάστημα $[0, \ell]$, ώστε όλοι οι παίκτες από τις θέσεις $x \in [0, \ell]$ να έχουν το ίδιο αναμενόμενο κόστος από το facility που τους αντιστοιχεί, υπό την συνάρτηση c, δηλαδή όλοι θα προκύπτουν με αναμενόμενο κόστος $c(X)$.

Δύο σημαντικές ιδιότητες που ωθούν στην επιλογή του μηχανισμού EQUAL COST είναι το group strategyproofness και το πεπερασμένο approximation ratio. Συγκεκριμένα, ένας μηχανισμός καλείται *strategyproof* όταν κανένας παίκτης δεν επωφελείται αυξάνοντας την ωφέλειά του, από τη δήλωση ψευδούς θέσης. Αντιστοίχως, ένας μηχανισμός καλείται *group strategyproof* όταν για κάθε πιθανό "συνασπισμό" παικτών, υπάρχει τουλάχιστον ένας που δεν αυξάνει την ωφέλειά του. Δύο αντικειμενικές συναρτήσεις που προσεγγίζει ο EQUAL COST είναι το Social Cost, δηλαδή το συνολικό κόστος όλων των παικτών από τα facilities στα οποία αντιστοιχίζονται, και το Max Cost, δηλαδή το μέγιστο κόστος οποιουδήποτε παίκτη από το facility που βρίσκεται πιο κοντά του. Εν προκειμένω, ο EQUAL COST επιτυγχάνει λόγο προσέγγισης 2 για το objective του Max Cost, και n για το Social Cost. Αμέσως παρακάτω ακολουθεί η περιγραφή των βημάτων του μηχανισμού EQUAL COST.

- *Βήμα 1.* Υπολογίζουμε την βέλτιστη διαμέριση σε k μη επικαλυπτόμενα διαστήματα $[a_i, a_i + \ell]$ που ελαχιστοποιεί το μήκος ℓ, υποθέτοντας ότι $a_i < a_{i+1}$
- *Βήμα 2.* Κατασκευάζουμε μια τυχαία μεταβλητή $X(\ell) \in [0, \ell]$ τέτοια ώστε όλοι οι παίκτες να έχουν ίσο αναμενόμενο κόστος από facility ίσο με $\mathbb{E}[c|x - X|]$
- *Βήμα 3.* Για κάθε διάστημα $[a_i, a_i + \ell]$, ο μηχανισμός τοποθετεί ένα facility στη θέση $a_i + X$ εάν i περιττό, ή $a_i + \ell - X$ εάν i άρτιο

Ο τρόπος με τον οποίο ο EQUAL COST διαμερίζει τα διαστήματα είναι στην πράξη ο εξής: χρησιμοποιούμε δυαδική αναζήτηση στις πιθανές τιμές του ℓ, οι οποίες είναι $m^2/2$ συνολικά. Θέτουμε το αποτέλεσμα ως ℓ'. Για κάθε ℓ', ξεκινάμε από τον πρώτο "ακάλυπτο" παίκτη, έστω i σε θέση x_i, και κατασκευάζουμε το διάστημα $[x_i, x_i + \ell]$. Όσο υπάρχουν ακάλυπτοι παίκτες, δημιουργούμε διαστήματα με αυτόν τον τρόπο. Εάν τα συνολικά διαστήματα που δημιουργήθηκαν είναι k, τότε $\ell' = \ell$ και βρέθηκε το ζητούμενο ελάχιστο μήκος. Εναλλακτικά, δοκιμάζουμε με μικρότερα ή μεγαλύτερα μήκη, ανάλογα αν το σύνολο προέκυψε μικρότερο ή μεγαλύτερο του k αντίστοιχα.

Αρχικά, για την μελέτη μας, θεωρούμε ότι οι παίκτες έχουν όριο στο μέγεθος του ψέματος που μπορούν να δηλώσουν. Συγκεκριμένα, επιτρέπουμε σε έναν παίκτη i να δηλώνει θέσεις που κείνται στην $\pm\epsilon$ περιοχή της πραγματικής του θέσης x_i.

Έστω ότι εξετάζουμε το πρόβλημα τοποθέτησης δύο facilities. Η ιδέα πίσω από την προσέγγισή μας είναι η εξής: σύμφωνα με την αρχή λειτουργίας του EQUAL COST, η μέγιστη πιθανή τιμή του μήκους διαστήματος είναι $\ell = (x_n - x_0)/2$, όπου οι παίκτες έχουν αριθμηθεί με βάση τη θέση του στον άξονα των πραγματικών αριθμών, δηλαδή x_0 είναι ο αριστερότερος και x_n ο δεξιότερος παίκτης. Καλούμε τη θέση αυτή $x^* = (x_n - x_0)/2$, και ως αρχή μέτρησης (δηλαδή το σημείο 0) θεωρούμε τη θέση του x_0. Επομένως, αν οποιοσδήποτε παίκτης που βρίσκεται αριστερότερα του x^*, δηλώσει θέση δεξιότερα του x^*, ανατίθεται στο δεύτερο interval που κατασκευάζεται με τον μηχανισμό, και επομένως η απόστασή του από το κοντινότερο facility αυξάνεται. Έτσι, δεν έχει συμφέρον να δηλώσει θέση όπου για το ϵ της απόκλισής του να ισχύει $\epsilon < \ell/2$. Αναζητούμε το μέγιστο δυνατό ϵ για το οποίο να υπάρχουν ισορροπίες. Όπως επιχειρηματολογήσαμε παραπάνω, ο παίκτης αριστερότερα του

x^*, δεν έχει συμφέρον να δηλώσει θέση μακρύτερα του μέσου του διαστήματος μεταξύ των δύο ακραίων παικτών. Το ίδιο bound που ισχύει για τον παίκτη αριστερότερα του x^* για ψευδή δήλωση προς τα δεξιά, προφανώς ισχύει και για την αριστερή κατεύθυνση ψεμάτων. Δηλώνοντας ψευδώς θέση αριστερότερα από την πραγματική του, καταλήγει σε αύξηση του μήκους του διαστήματος ℓ, και συνεπώς απομάκρυνση του facility από την πραγματική του θέση, οπότε δεν έχει συμφέρον να δηλώσει θέση αριστερότερα της πραγματικής του θέσης. Προκειμένου να υπολογίσουμε το ελάχιστο ϵ, ακολουθούμε την εξής μέθοδο:

- *Βήμα 1.* Υπολογίζουμε τη θέση $x^* = (x_n - x_0)/2$
- *Βήμα 2.* Υπολογίζουμε τις αποστάσεις όλων των σημείων x_i $\forall i \in n$, και θέτουμε την ελάχιστη εξ'αυτών ίση με ϵ

Η μέθοδος αυτή εξασφαλίζει ότι το clustering, δηλαδή ο διαχωρισμός των παικτών σε διαστήματα δεν θα αλλάξει. Επομένως, η τιμή αυτή του ϵ εξασφαλίζει την Ισορροπία Nash, με βάση τον μηχανισμό Equal Cost. Τυπικά, μπορούμε να ορίσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.7. Το πρόβλημα 2-Facility Location με επαλήθευση, με $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνάρτηση απόστασης, διαθέτει Nash Equilibria για κάθε:

$$\epsilon \leq min[d(x_i, \frac{x_n - x_0}{2})] \forall i \in n$$

Η παραπάνω μέθοδος ουσιαστικά αποδεικνύει ότι η ισορροπία του προβλήματος καθορίζεται από τους ακραίους παίκτες σε κάθε διάστημα. Η μετακίνηση των θέσεων των ενδιάμεσων, δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, καθώς δεν μετακινούν τα άκρα του διαστήματος. Στην πραγματικότητα, το πρόβλημα είναι όμοιο με το πρόβλημα εύρεσης ισορροπιών για $k = 1$ facility, εφόσον έχουμε διαχωρίσει τα διαστήματα. Στην περίπτωση που υπάρχει ένας παίκτης, για τον οποίο ισχύει $x_i + \epsilon < \ell$, όπου ℓ το μήκος του διαστήματος όπως αυτό έχει ανατεθεί από τον Equal Cost, δηλώνοντας $x_i + \epsilon$ διατηρεί σταθερό το κόστος του, αφού η πραγματική του απόσταση δεν έχει μεταβληθεί, και έχει αλλάξει μόνο η δήλωσή του. Η ύπαρξη ισορροπίας στην περίπτωση αυτή εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι το κόστος διατηρείται σταθερό, εφόσον οι δύο ακραίοι παίκτες μετακινούνται κατά ϵ προς την αντίστοιχη πλευρά, και οι ενδιάμεσοι παίκτες σε κάθε διάστημα δεν επηρεάζουν το μήκος.

Επεκτείνοντας τη μέθοδο για k facilities, ακολουθούμε την εξής διαδικασία: Θέτουμε ως μήκος διαστήματος την απόσταση $\ell = x_n - x_0$. Θέτοντας ως αρχή μέτρησης τη θέση του παίκτη 0, x_0, θεωρούμε διαχωρισμό με βάση τα σημεία $x_1{}^* = \ell$, $x_2{}^* = 2\ell$, $...x_k{}^* = k\ell$, οπότε προκύπτουν τα διαστήματα $[x_0, x_1{}^*], [x_1{}^*, x_2{}^*], ..., [x_{k-1}{}^*, x_k{}^*]$. Σε κάθε διάστημα, βρίσκουμε την ελάχιστη τιμή του ϵ, μετρώντας τις αποστάσεις των παικτών από τα πλησιέστερα σε αυτούς σημεία $x_j{}^*$. Η καθολικά μικρότερη απόσταση αποτελεί το μέγιστο ϵ που εγγυάται την ύπαρξη Nash Equilibria στο πρόβλημα $k-$Facility Location, με βάση τον μηχανισμό Equal Cost.

Κεφάλαιο 5

Price of Anarchy

Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα μελετηθεί το Τίμημα της Αναρχίας, για τις διάφορες εκδοχές υπό τις οποίες αντιλαμβανόμαστε τον μηχανισμό Pow^{ℓ}. Όπως αναλύθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο τρόπος με τον οποίο ο μηχανισμός αναθέτει πιθανότητες σε κάθε έκβαση, δίνει την ευχέρεια να τον αντιληφθούμε ως Συνδυαστική Δημοπρασία.

Συγκεκριμένα, μελετούμε το Price of Anarchy (PoA), σε περιπτώσεις τόσο ακολουθιακών(sequential) δημοπρασιών, όσο και παράλληλων. Οι έννοιες αυτές θα αναλυθούν στις επόμενες ενότητες. Μελετούμε φράγματα για το PoA, προσπαθώντας να περιορίσουμε τα όρια την εγωιστικής συμπεριφοράς των παικτών. Τέλος, αναλύουμε το PoA στο αρχικό setting, με εκβάσεις (outcomes), όπως αρχικά περιγράψαμε τον μηχανισμό Pow^{ℓ}. Εκεί, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιήσουμε εναλλακτικές προσεγγίσεις της ακριβούς λύσης, καθώς όπως παρουσιάσαμε και παραπάνω, τα Nash Equilibria είναι προσεγγιστικά.

Όπως έχει αναλυθεί στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1, στόχος της μελέτης αυτής είναι η κατά το δυνατόν καλύτερη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Κατά συνέπεια, επιδιώκουμε να αποδείξουμε ότι $PoA = 1$, στα περιβάλλοντα που μελετούμε, ώστε να μπορούμε να εγγυηθούμε ότι προσεγγίζουν, για μεγάλο αριθμό παικτών, την κατάσταση ισορροπίας.

5.1 Δημοπρασίες

Αναφερθήκαμε παραπάνω στην εφαρμογή του μηχανισμού Pow^{ℓ} σε δημοπρασίες. Εν προκειμένω, αντιστοιχίζουμε τον αριθμό m των εκβάσεων με m αντικείμενα, και αντιλαμβανόμαστε τις δηλώσεις των παικτών ως bids, όπου η δυνατή απόκλιση είναι το $\pm\epsilon$ του true valuation. Συνεπώς, καταλήγουμε σε ένα setting Συνδυαστικής Δημοπρασίας, με n bidders, m items, την ίδια utility function για κάθε παίκτη και τις πιθανότητες να λάβει κάποιο αντικείμενο, όπως αυτές προκύπτουν από τον μηχανισμό Pow^{ℓ}.

Η ιδιαιτερότητα του setting των δημοπρασιών, σε σχέση με την αρχική εκδοχή του μηχανισμού Pow^{ℓ}, είναι ότι στην περίπτωσή μας θα υπάρχουν 2^m valuations για κάθε παίκτη. Επομένως, ο παίκτης έχει τα γνωστά valuations για κάθε αντικείμενο, όπως αυτά έχουν τεθεί εξ'ορισμού του μηχανισμού, και εισάγουμε επιπλέον τα valuations για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς (bundles) αντικειμένων. Συγκεκριμένα, αναλύουμε τα όρια του PoA για additive και subadditive valuation functions. Οι κλάσεις αυτές είναι αρκετά γενικές, και κατ'επέκταση οποιαδήποτε εξειδίκευση σε άλλη κλάση, όπως για παράδειγμα η κλάση των submodular, θα είναι επαρκώς απλούστερη.

Ως αντικειμενική συνάρτηση για τις δημοπρασίες που αναλύουμε χρησιμοποιείται η συνάρτηση του Social Welfare, επιθυμούμε δηλαδή το άθροισμα των utilities των παικτών, από το allocation των αντικειμένων, να είναι το μέγιστο δυνατό.

Για την ανάλυση του PoA σε Συνδυαστικές Δημοπρασίες, θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του Nash Equilibrium, θεωρώντας δεδομένη την ύπαρξη αυτού. Μάλιστα, ακολουθείται η προσέγγιση του First-Price Auction, όπου δεχόμαστε ως σημείο ισορροπίας OPT την τιμή του μέγιστου valuation είτε ενός αντικειμένου είτε του μέγιστου σε αξία bundle. Η παραπάνω παραδοχή είναι αποδεκτή, αξιοποιώντας το αποτέλεσμα του [27] για simultaneous First-Price Auctions. Η μοναδική διαφορά είναι ότι αν οι ισορροπίες δεν υπάρχουν πραγματικά, και κατασκευάζονται μόνο σε θεωρητικό επίπεδο, το συγκεκριμένο όριο στερείται φυσικής σημασίας. Την παραδοχή αυτή πιστοποιούμε αξιοποιώντας το παρακάτω θεώρημα του [10].

Θεώρημα 5.1. Τα περισσότερα γνωστά φράγματα του PoA ισχύουν ακόμα και σε περίπτωση που το σύστημα δεν βρίσκεται σε Nash Equilibrium.

Όπως έχουμε αναλύσει στα προηγούμενα κεφάλαια, το PoA δίνει φράγματα για την εγωιστική συμπεριφορά των παικτών και προκύπτει από τον τύπο:

$$PoA = \frac{max_{s \in Allocations} Welf(s)}{max_{s \in Equil.Allocations} Welf(s)}$$

5.1.1 Ακολουθιακές (Sequential)

Η πρώτη προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε για τις Συνδυαστικές Δημοπρασίες υπό τον μηχανισμό *Power* είναι οι sequential δημοπρασίες. Πρόκειται ουσιαστικά για την σειριακή δημοπρασία των m αντικειμένων, σε ξεχωριστές και ανεξάρτητες διαδικασίες. Ο παίκτης που καταθέτει ένα bid για το αντικείμενο k, γνωρίζει πλήρως το αποτέλεσμα των δημοπρασιών για τα αντικείμενα $1, 2, ..., k-1$. Στην πραγματικότητα, η δημοπρασία δεν είναι απαραίτητο να γίνεται σε διαδοχικές χρονικές στιγμές. Το βασικό ζήτημα που επιθυμούμε να διαχωρίσουμε, σε σχέση με τις παράλληλες δημοπρασίες, είναι ο τρόπος που αντιλαμβανόμαστε τα bundles. Στην περίπτωση των sequential δημοπρασιών, μπορούμε να αναφερθούμε και σε simultaneous διαδικασίες. Υπό την έννοια αυτή, δημοπραττούνται τα m αντικείμενα ταυτόχρονα, σε ανεξάρτητες δημοπρασίες. Επομένως, ο κάθε παίκτης έχει ένα valuation για κάθε αντικείμενο, και δεν μπορεί να αντιληφθεί τα bundles, εφόσον στον δικό του τύπο του utility θα προκύπτουν αθροιστικά ως μεμονομένα αντικείμενα. Κατά την παρούσα μελέτη, εξετάζουμε valuations που είναι additive, επομένως η γνώση των παικτών για τα αποτελέσματα των προηγούμενων δημοπρασιών δεν επηρεάζει, αφού, εάν προκύπτουν αθροιστικά, κάθε παίκτης προσπαθεί να αποκτήσει όλα τα αντικείμενα. Συνεπώς, σε κάθε ανεξάρτητη δημοπρασία ενός αντικειμένου, συμπεριφέρεται με τον ίδιο τρόπο, προσπαθώντας να μεγιστοποιήσει το bid του.

Υπό το πρίσμα αυτό, η sequential δημοπρασία των m αντικειμένων εκφυλίζεται σε m ανεξάρτητες πανομοιότυπες δημοπρασίες. Οι δημοπρασίες αυτές, εφόσον γίνονται για single-item, επιλέγουμε να είναι First-Price Auctions, δηλαδή το αντικείμενο απονέμεται στον υψηλότερο bidder, με τις πιθανότητες κατά τα γνωστά. Καταλήγοντας λοιπόν, προκύπτουν m S1A (Simultaneous First-Price Auctions).

Οι valuation functions που θα εξετάσουμε είναι additive. Αυτό ισχύει διότι οι subadditive valuation functions χάνουν πλέον το νόημά τους σε αυτού του είδους δημοπρασίες, καθώς όπως παρουσιάσαμε προηγουμένως, οι παίκτες συμμετέχουν σε ανεξάρτητες S1As και έτσι οι ωφέλειές τους μετρούν μόνον αθροιστικά.

Συμβολίζουμε b_i το bidding profile του παίκτη i, ένα m-διάστατο διάνυσμα με τα bids που υποβάλλει, όπου $b_i(j) = v_i(j) \pm \epsilon$.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 που παρουσιάστηκε παραπάνω, μπορούμε να εξάγουμε bounds για το PoA, αξιοποιώντας την ιδιότητα του smoothness, εφόσον αυτή ισχύει σε έναν μηχανισμό. Όπως αναλύθηκε, εάν ένας μηχανισμός είναι $(\lambda, \mu)-$smooth, τότε για το φράγμα ισχύει ότι $PoA \leq \frac{max(\mu,1)}{\lambda}$. Συνεπώς, το πλάνο που ακολουθούμε στην προσέγγισή μας είναι το εξής: Εφόσον στο sequential setting έχουμε ουσιαστικά χωριστές, ανεξάρτητες δημοπρασίες των m αντικειμένων, αρκεί να αποδείξουμε ότι το bound του PoA για τα m αντικείμενα ταυτόχρονα είναι το ίδιο με m ξεχωριστές δημοπρασίες, τύπου S1A. Αυτό αποδεικνύεται αξιοποιώντας ένα σημαντικό θεώρημα, που παρουσιάζεται στο [7]. Στη συνέχεια, αρκεί για την S1A, single-item, να βρούμε τις παραμέτρους του smoothness και κατ'επέκταση να βρούμε το ειδικό PoA, το οποίο θα ισχύει και στην simultaneous δημοπρασία των m αντικειμένων, με additive valuations, που διαθέτουν επίσης την κλασική ιδιότητα της μονοτονίας.

Αρχικά, διατυπώνουμε το θεώρημα που επεκτείνει την έννοια του single-item S1A σε multi-item S1A με τις ίδιες παραμέτρους smoothness και συνεπώς τα ίδια φράγματα για το PoA. Το θεώρημα αυτό αποδεικνύεται τυπικά στο [7], και δίνεται εν προκειμένω ένα proof sketch, προκειμένου να γίνει διαισθητικά αντιληπτή η έννοια της συγκεκριμένης γενίκευσης.

Θεώρημα 5.2. Αν για μια single-item δημοπρασία μπορεί να αποδειχθεί, με χρήση $(\lambda, \mu)-$smoothness, η Αμιγής Ισορροπία Nash (PNE), με τον συγκεκριμένο παίκτη να αλλάζει τιμή, τότε το PoA παραπάνω simultaneous δημοπρασιών είναι επίσης $PoA \leq \frac{\mu}{\lambda}$.
Σημείωση: Για τις ανάγκες της εν λόγω απόδειξης, στο αρχικό paper, η προσέγγιση γίνεται μέσω της σύνθεσης μηχανισμών. Κάτι τέτοιο κρίθηκε περιττό να παρουσιαστή στην δική μας περίπτωση, καθώς η μέθοδος αυτή δεν αποδεικνύεται χρήσιμη για τις ανάγκες τις παρούσας εργασίας.

Proof Sketch. Καταρχάς, δεχόμαστε ότι οι παίκτες είναι unit-demand. Με τον όρο αυτό, εννοούμε ότι, για τα valuations των παικτών θα ισχύει: $v_i(S) = max_{j \in S} v_i^j$. Κάτι τέτοιο ασφαλώς ισχύει, εφόσον έχουμε εξ'ορισμού στο πρόβλημά μας additive valuation function και ελέγχουμε μόνο μονοσύνολα. Για τη συνέχεια της απόδειξης, χρησιμοποιούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.1. Έστω ότι αναφερόμαστε σε παίγνιο πλήρους πληροφορίας, επομένως τα valuations όλων των παικτών είναι γνωστά σε όλους. Τότε, η First-Price Auction ενός αντικειμένου, σε complete information setting διαθέτει Αμιγή Ισορροπία Nash, και είναι $(\frac{1}{2}, 1)-$smooth.

Απόδειξη Λήμματος. Επιθυμούμε να αποδείξουμε ότι:

$$\sum_i u_i({b_i}^*, b_{-i}) \geq \frac{1}{2} OPT - \sum_i p_i(b)$$

όπου οι συμβολισμοί τηρούνται από το κεφάλαιο 2, και θυμίζεται ότι $p_i(b)$ το payment που πληρώνει ο παίκτης i με βάση το bidding profile b. Δοκιμάζουμε στρατηγική ${b_i}^* = v_i/2$. Ορίζουμε j τον παίκτη με τη μέγιστη valuation, δηλαδή $j = argmax_i v_i$. Εάν στη δημοπρασία νικήσει ο j, η τιμή του utility που απολαμβάνει θα είναι $u_j = v_j - {b_j}^*(v_j) = \frac{v_j}{2} \geq \frac{1}{2} v_j - \sum_i p_i(b)$. Σε αντίθετη περίπτωση, αν ο j χάσει, τότε $u_j = 0$ και $\sum_i p_i(b) = max_i b_i > \frac{1}{2} v_j \Rightarrow u_j = 0 > \frac{1}{2} v_j - \sum_i p_i(b)$. Για όλους τους υπόλοιπους παίκτες με $i \neq j$, θα ισχύει: $u_i({b_i}^*, b_{-i}) \geq 0$. Τέλος, αθροίζοντας για όλους τους παίκτες, λαμβάνουμε:

$$\sum_i u_i({b_i}^*, b_{-i}) \geq \frac{1}{2} v_j - \sum_i p_i(b) = \frac{1}{2} OPT - \sum_i p_i(b)$$

Αφού λοιπόν απεδείχθη ότι η First-Price Auction για ένα αντικείμενο είναι $(\frac{1}{2}, 1)-$smooth, από το Θεώρημα 3.2 που παρουσιάστηκε παραπάνω, θα έχει $PoA \leq 2$. Έτσι, έχουμε μια τοπική έννοια smoothness, όπου αν ${v_i}^j$ θεωρηθεί το valuation του παίκτη i για το αντικείμενο

j, τότε θα ισχύει:

$$u_i(b_i', b_{-i}) \geq \frac{{v_i}^{{j_i}^*}}{2} - p_{{j_i}^*}(b)$$

Αθροίζοντας τον παραπάνω τύπο για τους n παίκτες, λαμβάνουμε τελικά τη σχέση:

$$\sum_i u_i(b_i', b_{-i}) \geq \frac{1}{2} OPT - REV(b)$$

όπου ως $REV(b)$ συμβολίζουμε το άθροισμα των payments που καταβάλουν οι παίκτες που αποκτούν τα αντικείμενα, συγκεκριμένα το *revenue* του δημοπράτη. Καταλήγουμε λοιπόν ότι η τοπική έννοια του smoothness γενικεύεται καθολικά, για περισσότερες simultaneous S1As, και όλες συνολικά διατηρούν το bound $PoA \leq 2 \quad \square$.

Η παραπάνω απόδειξη δεν είναι πλήρης, αλλά το σκεπτικό που ακολουθείται είναι χρήσιμο για τη δική μας προσέγγιση, στην απόδειξη φραγμάτων για το PoA. Για την πλήρη απόδειξη, ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [7].

Εν συνεχεία, απομένει να αποδειχθεί το PoA bound που ισχύει στους δικούς μας μηχανισμούς. Αυτό, θα γενικευτεί, μέσω του παραπάνω θεωρήματος, από single-item auction σε δημοπρασία με m αντικείμενα, που είναι και το ζητούμενο.

Μελετώντας το πρόβλημα με bids, ο τύπος για την utility ενός παίκτη i, από ένα αντικείμενο, στον οποίο καταλήγουμε είναι:

$$u_i = \frac{v_i(j) b_i(j)^\ell}{\sum_{q=1}^n b_q(j)^\ell}$$

όπου συμβολίζουμε $b_i(j)$ το bid του παίκτη i για το αντικείμενο j. Συνεπώς, το συνολικό Social Welfare, που θα προκύπτει ως άθροισμα των utilities όλων των παικτών, δηλαδή ως (true valuation)×(πιθανότητα να κερδίσει το αντικείμενο j), θα είναι:

$$SW = \frac{\sum_{i=1}^n v_i(j) b_i(j)^\ell}{\sum_{i=1}^n b_i(j)^\ell}$$

Ως γνωστόν, το lower bound του 1 είναι το φυσικό κάτω φράγμα του PoA, καθώς αν κάποιο allocation έδινε καλύτερη τιμή για το objective του Social Welfare, τότε θα αποτελούσε αυτό την βέλτιστη τιμή σε ισορροπία. Άρα, εν γένει ισχύει ότι $1 \leq PoA \leq +\infty$. Επιδιώκουμε, όσο αυξάνεται το πλήθος των παικτών, το PoA να τείνει στην τιμή 1. Κάτι τέτοιο διαισθητικά σημαίνει ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των παικτών και αυτοί δρουν εγωιστικά, τόσο η τελική έκβαση της δημοπρασίας τείνει να προσεγγίζει την συμπεριφορά σε ισορροπία. Δηλαδή, αύξηση του πλήθους οδηγεί σε σύγκλιση, δηλαδή σε ισορροπία.

Για τον υπολογισμό του PoA συγκρίνουμε με την OPT τιμή. Η τιμή αυτή θα είναι, για First-Price Auctions η τιμή του μέγιστου bid για το συγκεκριμένο αντικείμενο που δημοπραττείται. Επομένως, θέτουμε $OPT = max_i b_i(j)$. Θα θέλαμε να συγκρίνουμε την ποσότητα αυτή με τον τύπο του utility του ενός παίκτη, προκειμένου να προκύψουν τα PoA bounds. Επιδιώκοντας να καταλήξουμε σε ένα κάτω φράγμα για την τιμή του PoA, θα συγκρίνουμε την χειρότερη λύση σε ισορροπία, με την υπόθεση ότι αυτή υπάρχει, με την καλύτερη λύση ανάμεσα στα πιθανά allocations, εν προκειμένω την OPT, όπου όντως ο μέγιστος bidder κερδίζει το αντικείμενο προς δημοπρασία. Καταλήγουμε τελικά στον παρακάτω τύπο:

$$PoA = \frac{OPT}{\frac{\sum_{i=1}^{n} v_i(j) b_i(j)^{\ell}}{\sum_{i=1}^{n} b_i(j)^{\ell}}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} OPT \cdot b_i(j)^{\ell}}{\sum_{i=1}^{n} v_i(j) b_i(j)^{\ell}}$$

Για την προσέγγιση της worst-case λύσης ισορροπίας, μελετούμε την ακραία περίπτωση, προκειμένου να λάβουμε την ελάχιστη τιμή του Social Welfare, η οποία είναι να έχει ένας bidder την μέγιστη τιμή για το valuation, σε κάποιο δεδομένο εύρος τιμών, έστω max, και οι υπόλοιποι $n-1$ παίκτες να έχουν την ελάχιστη τιμή στο πεδίο ορισμού αυτό, έστω min. Το Social Welfare στην περίπτωση αυτή θα έχει τη μορφή:

$$\frac{max(max+\epsilon)^{\ell} + min(n-1)(min+\epsilon)^{\ell}}{(max+\epsilon)^{\ell} + (min+\epsilon)^{\ell}}$$

Έτσι, το PoA θα έχει τη μορφή:

$$PoA \leq \frac{max(max+\epsilon)^{\ell} + min(n-1)(min+\epsilon)^{\ell}}{max(max+\epsilon)^{\ell} + max(n-1)(min+\epsilon)^{\ell}}$$

Ο παραπάνω τύπος όμως, αναλύοντας για $n \to \infty$, για να μπορέσουμε να έχουμε μια πλήρη εικόνα της συμπεριφοράς του PoA και να καθιερώσουμε το φράγμα, καταλήγει σε απροσδιόριστη μορφή, και χωρίς περαιτέρω γνώση των συγκεκριμένων χαρακτηριστικών του μηχανισμού δεν μπορεί να δώσει αποτελέσματα. Στόχος μας είναι να αποδείξουμε ότι το κάτω φράγμα για το PoA είναι η τιμή 1, για $n \to \infty$.

Μια λύση για το πρόβλημα αυτό, είναι να ορίσουμε τιμή στην παράμετρο ℓ. Γενικά, όπως αντιλαμβανόμαστε την έννοιας του ℓ στο [25], αντιπροσωπεύει τον αριθμό των παικτών που επαληθεύει ο μηχανισμός $Power$. Επομένως, παρά το γεγονός ότι πλέον αναφερόμαστε στον μηχανισμό αυτό σε δημοπρασίες, γενικά η τιμή της παραμέτρου θα επιθυμούσαμε να είναι μια συνάρτηση του ℓ. Θέτοντας στην περίπτωσή μας $\ell = c \cdot ln(n)$, όπου $c \in \mathbb{R}$ τυχαίος αριθμός, εξετάζουμε αν λαμβάνουμε τη ζητούμενη τιμή του ορίου.

Έπειτα από πράξεις με βάση τύπο του PoA που παρουσιάσαμε, και για την τιμή του ℓ που προτάθηκε αμέσως παραπάνω, καταλήγουμε ότι για τιμή $c = ln(\frac{min+\epsilon}{max+\epsilon})$ προκύπτει το ζητούμενο φράγμα.

Θεώρημα 5.3. Οι Συνδυαστικές Δημοπρασίες με m αντικείμενα και n παίκτες, που λειτουργούν υπό τον μηχανισμό Pow^{ℓ}, για $\ell = ln(\frac{min+\epsilon}{max+\epsilon}) \cdot ln(n)$, για $n \to \infty$, διαθέτουν $PoA = 1$.

Το παραπάνω βέβαια, ισχύει γενικεύοντας το φράγμα του 1 που βρέθηκε, μέσω του θεωρήματος 2 που παρουσιάσαμε παραπάνω, εφόσον διαθέτουν πράγματι την ιδιότητα του $(1,1)-$smoothness για single-item auction. Το φράγμα εκφυλίζεται σε ισότητα αφού γνωρίζουμε ότι $PoA \geq 1$ και αποδείξαμε ότι $PoA \leq 1$. Συνεπώς, ολοκληρώνοντας την μελέτη της ενότητας αυτής, παρουσιάσαμε σε μορφή θεωρήματος στο πόρισμα που εξήχθη.

5.1.2 Παράλληλες (Parallel)

Το υπό εξέταση setting γίνεται αρκετά πιο σύνθετο, όταν μελετούμε τις Παράλληλες Δημοπρασίες. Με τον όρο αυτό, εννοούμε ότι τα m αντικείμενα που δημοπραττούνται, γίνονται διαθέσιμα στον ίδιο χρόνο. Επομένως, οι παίκτες πλέον πρέπει να αποφανθούν αν επιθυμούν ένα αντικείμενο ή τον συνδυασμό αυτού με άλλα. Κατ'επέκταση, πρέπει να ληφθούν υπόψιν όλα τα δυνατά bundles, οπότε το μέγεθος του χώρου υπό μελέτη αυξάνει εκθετικά. Η συνάρτηση valuation ενός παίκτη i θα είναι της μορφής: $v_i : 2^m \to \mathbb{R}_+$.

Για έναν παίκτη i, και στο απλούστερο setting των δύο αντικειμένων, οι πιθανές εκβάσεις της δημοπρασίας είναι οι εξής: είτε κερδίζει μόνο το αντικείμενο 1 με πιθανότητα $p_{i_1} \cdot (1-p_{i_2})$, είτε μόνο το αντικείμενο 2 με πιθανότητα $p_{i_2} \cdot (1-p_{i_1})$, ή κερδίζει το bundle $\{1,2\}$ με πιθανότητα $p_{i_1} \cdot p_{i_2}$. Η μορφή της utility function, για m αριθμό αντικειμένων, θα προκύπτει από τις πιθανότητες με τον τρόπο που προέκυψαν, επί το αντίστοιχο valuation, λαμβάνοντας όλα τα πιθανά bundles σε αύξουσα σειρά μεγέθους. Για παράδειγμα, για 3 αντικείμενα, η utility function ενός παίκτη i θα είναι:

$$\mathbb{E}[u_i] = v_1 p_1 (1-p_2)(1-p_3) + v_2 p_2 (1-p_1)(1-p_3) + v_3 p_3 (1-p_1)(1-p_2)$$

$$+ v_{12} p_1 p_2 (1-p_3) + v_{23} p_2 p_3 (1-p_1) + v_{123} p_1 p_2 p_3$$

Θυμίζουμε ότι τα valuations είναι subadditive και έχουν την ιδιότητα της μονοτονίας, δηλαδή $v_1 < v_{12}$ και $v_2 < v_{12}$, αλλά $v_1 + v_2 \geq v_{12}$.

Με τον ίδιο τρόπο αντιμετωπίζουμε την αναμενόμενη utility σε οσοδήποτε μεγάλο αριθμό αντικειμένων, καθώς τα ενδεχόμενα να αποκτήσει μόνο ένα αντικείμενο A ή μόνο ένα B ή τον συνδυασμό αυτών $\{A, B\}$, είναι ξένα μεταξύ τους, οπότε οι πιθανότητες προκύπτουν πολλαπλασιαστικά, για οσαδήποτε αντικείμενα.

Ξεκινάμε μελετώντας τη σχέση του utility και το αντίστοιχο PoA bound για 2 αντικείμενα. Εκεί, έχουμε:

$$\mathbf{E}[u_i] = p_1 \cdot (1 - p_2) \cdot v_1 + p_2 \cdot (1 - p_1) \cdot v_2 + p_1 \cdot p_2 \cdot v_{12}$$

και

$$OPT = max\{v_{12(max)}, v_{1(max)} + v_{2(max)}\}$$

καθώς για τη βέλτιστη λύση υπάρχουν δύο πιθανότητες: είτε τα αντικείμενα να ανατεθούν και τα δύο ως bundle στον υψηλότερο bidder, είτε διαφορετικοί bidders να καταθέτουν το υψηλότερο bid για κάθε αντικείμενο, οπότε αθροίζουμε τα χωριστά μεμονομένα valuations των δύο μεγίστων. Πέραν αυτών που αποκτούν το αντικείμενο, για τους υπόλοιπους παίκτες το OPT έχει την τιμή 0. Οπότε μπορούμε, στον έλεγχο του PoA, να καταλήξουμε σε κάτι ήδη γνωστό, ότι δηλαδή $\mathbb{E}[u_i] \geq 0$.

Αναλύοντας τη συνάρτηση utility, λαμβάνουμε:

$$\mathbf{E}[u_i] = p_1 \cdot v_1 + p_2 \cdot v_2 + (v_{12} - v_2 - v_1) \cdot p_1 \cdot p_2$$

Εξετάζουμε αρχικά τον παίκτη που κερδίζει το αντικείμενο στη δημοπρασία, και επιδιώκουμε να βρούμε τη σχέση του PoA για αυτόν, δηλαδή το φράγμα x για το οποίο $\mathbb{E}[u_i] \geq \frac{OPT}{x}$. Έπειτα, αξιοποιώντας την τεχνική του θεωρήματος που αποδείχθη παραπάνω, θα αθροίσουμε για όλους τους παίκτες την αντίστοιχη σχέση, καταλήγοντας σε ένα καθολικό φράγμα.

Προκειμένου να αποδειχθεί το ζητούμενο φράγμα, αρκεί να βρούμε την ελάχιστη δυνατή τιμή του αναμενόμενου utility για την οποία να ισχύει ότι $\mathbb{E}[u_i] \geq \frac{OPT}{x}$. Από τη στιγμή που θα εξασφαλιστεί ότι η ανισότητα επαληθεύεται για την ελάχιστη τιμή του utility, προφανώς θα ισχύει και για όλες τις κατανομές πιθανότητας που δίνουν μεγαλύτερα αποτελέσματα. Άλλωστε, η σύγκριση της ανισότητας για τους υπόλοιπους παίκτες, που δεν κερδίζουν κανένα αντικείμενο, θα γίνει με την τιμή 0, οπότε δεν επηρεάζουν το αποτέλεσμα.

Για τον παίκτη που κερδίζει το bundle a_3, η ελάχιστη τιμή δίνεται από την πιθανότητα $\frac{1}{n}$, αφού n είναι ο αριθμός των παικτών, δηλαδή την uniform κατανομή, για κάθε ένα αντικείμενο. Το γεγονός αυτό προκύπτει από το ότι, αν ο παίκτης j νικάει, τότε η ελάχιστη τιμή με την οποία μπορεί να βγει νικητής είναι να έχει ίση πιθανότητα με όλους τους άλλους. Οπότε, θα έχουμε:

$$v_1 \cdot 1/n + v_2 \cdot 1/n + (v_{12} - v_1 - v_2) \cdot 1/n^2$$
$$\Rightarrow \frac{(n-1) \cdot v_1}{n^2} + \frac{(n-1) \cdot v_2}{n^2} + \frac{v_{12}}{n^2}$$

και αθροίζοντας για όλους τους παίκτες λαμβάνουμε:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(n-1)\cdot v_1}{n^2}+\frac{(n-1)\cdot v_2}{n^2}+\frac{v_{12}}{n^2}\right)=n\cdot(n-1)\cdot\frac{v_1}{n^2}+n\cdot(n-1)\cdot\frac{v_2}{n^2}+n\cdot\frac{v_{12}}{n^2}$$

Πριν συνεχίσουμε παρακάτω, διευκρινίζεται ότι η παράμετρος k είναι το μέγεθος των συνόλων στα οποία κάνουμε verification, υπό την έννοια ότι επαληθεύουμε το value όλων των συνδυασμών μεγέθους k και όλων των υποσυνόλων τους. Θα περιμέναμε λοιπόν, το φράγμα για το PoA να προκύπτει συναρτήσει του $\frac{k}{m}$, δηλαδή του ποσοστού επί των συνολικών αντικειμένων που επαληθεύει ο μηχανισμός μας. Κάτι τέτοιο είναι λογικό, καθώς στην περίπτωση χωρίς bundles, το φράγμα προκύπτει 1 (συγκεκριμένα δηλαδή $\frac{m}{m}$, εφόσον επαληθεύουμε τις δηλώσεις για κάθε αντικείμενο μια φορά), ενώ στην περίπτωση που εξετάζουμε συνδυασμούς, ελέγχουμε σύνολα μεγέθους k, τα οποία πρέπει να εξακριβώσουμε. Άρα, θα δοκιμάσουμε να επαληθεύσουμε το φράγμα $\frac{k}{m}$ για το PoA ως εξής:

$$\Rightarrow (n-1)\cdot\frac{v_1}{n}+(n-1)\cdot\frac{v_2}{n}+\frac{v_{12}}{n}\geq\frac{k}{m}OPT$$

$$\Rightarrow m\cdot(n-1)\cdot(v_1+v_2)+m\cdot v_{12}\geq n\cdot k\cdot v_{12}$$

Εν προκειμένω, η μικρότερη πιθανή τιμή για το σύνολο των αντικειμένων m είναι k, αφού στη χειρότερη περίπτωση τα επαληθεύουμε όλα ως μονοσύνολα, και δεν τα λαμβάνουμε ως bundles από το δυναμοσύνολο, οπότε η σχέση γίνεται:

$$k\cdot(n-1)\cdot(v_1+v_2)+k\cdot v_{12}\geq n\cdot k\cdot v_{12}\Rightarrow k\cdot(n-1)\cdot(v_1+v_2)\geq k\cdot(n-1)\cdot v_{12}$$

Η παραπάνω σχέση προφανώς ισχύει, εφόσον τα valuations είναι subadditive.

Με τον ίδιο τρόπο ισχύει η σχέση, στην περίπτωση που διαφορετικοί παίκτες λαμβάνουν το κάθε αντικείμενο. Φυσικά, αφού ισχύει το φράγμα για $OPT = v_{12(max)}$, σίγουρα θα ισχύει για $v_{1(max)}$ και $v_{2(max)}$ ανεξάρτητα αντιστοίχως, αφού τα valuations είναι μονότονα. Η σχέση που καταλήγουμε θα είναι ακριβώς η ίδια.

Δεδομένου ότι η περίπτωση των δύο αντικειμένων είναι αρκετά απλουστευμένη, θα μελετήσουμε την περίπτωση 3 αντικειμένων, για να μπορέσουμε, εξάγοντας ένα επαγωγικό συμπέρασμα, να επαληθεύσουμε τον ισχυρισμό για το φράγμα που δίνουμε. Για τα παρακάτω, ως OPT δεχόμαστε το $v_{123} == v_4$, που είναι το valuation για το bundle $\{1,2,3\}$. Ισχύει λοιπόν η παρακάτω ανισότητα:

$$v_1p_1(1-p_2)(1-p_3)+v_2p_2(1-p_1)(1-p_3)+v_3p_3(1-p_1)(1-p_2)+v_{12}p_1p_2(1-p_3)+$$

$$+v_{23}p_2p_3(1-p_1)+v_{23}p_2p_3(1-p_1)+v_{123}p_1p_2p_3\geq\frac{k}{m}v_4$$

Στην περίπτωση αυτή, οι πιθανότητες για τον παίκτη i είναι: να κερδίσει μόνο το αντικείμενο 1, μόνο το 2, μόνο το 3, τα $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ και $\{1,2,3\}$. Ξανά, η χειρότερη πιθανότητα για τον νικητή δίνεται από την uniform κατανομή και σε worst-case έχουμε:

$$v_1\frac{(n-1)^2}{n^3}+v_2\frac{(n-1)^2}{n^3}+v_3\frac{(n-1)^2}{n^3}+v_{12}\frac{n-1}{n^3}+v_{23}\frac{n-1}{n^3}+v_{13}\frac{n-1}{n^3}+v_4\frac{1}{n^3}\geq\frac{k}{m}v_4$$

$$\sum_{i=1}^{n}(v_1\frac{(n-1)^2}{n^3}+v_2\frac{(n-1)^2}{n^3}+v_3\frac{(n-1)^2}{n^3}+v_{12}\frac{n-1}{n^3}+v_{23}\frac{n-1}{n^3}+v_{13}\frac{n-1}{n^3}+v_4\frac{1}{n^3})\geq\frac{k}{m}v_4$$

$$m(n-1)^2(v_1+v_2+v_3)+m(n-1)(v_{12}+v_{23}+v_{13})\geq k(n^2-1)v_4$$

Όπως προηγουμένως, η χειρότερη τιμή για το κάτω άκρο δίνεται από τη σχέση $m=k$, επομένως:

$$(n-1)^2(v_1+v_2+v_3)+(n-1)(v_{12}+v_{23}+v_{13})\geq(n-1)(n+1)v_4$$

$$\Rightarrow(n-1)(v_1+v_2+v_3)+(v_{12}+v_{13}+v_{23})\geq(n+1)v_4$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι, από subadditivity θα ισχύει ότι: $v_{12}+v_3\geq v_4$, $v_{13}+v_2\geq v_4$, $v_{23}+v_1\geq v_4$ Επομένως:

$$\Rightarrow(n-2)(v_1+v_2+v_3)+(v_1+v_2+v_3)+(v_{12}+v_{13}+v_{23})\geq(n+1)v_4$$

$$\Rightarrow(n-2)(v_1+v_2+v_3)+(v_{12}+v_3)+(v_{13}+v_2)+(v_{23}+v_1)\geq(n+1)v_4$$

Και παίρνοντας το lower bound των ανισοτήτων, θα έχουμε:

$$\Rightarrow(n-2)(v_1+v_2+v_3)+3v_4\geq(n+1)v_4$$

$$\Rightarrow(n-2)(v_1+v_2+v_3)\geq(n-2)v_4$$

$$\Rightarrow(v_1+v_2+v_3)\geq v_4$$

και γνωρίζουμε ότι η τελευταία σχέση αληθεύει στο εξ'ορισμού.

Καταλήγοντας λοιπόν σε μια σχέση που ισχύει, από την υπόθεση του subadditivity των valuations των παικτών, αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση των τριών αντικειμένων, το φράγμα $PoA\leq\frac{k}{m}$ ισχύει.

Αντιστοίχως, για 4 αντικείμενα καταλήγουμε σε μια σχέση της μορφής:

$$(n^2-5n+3)(v_1+v_2+v_3+v_4)\geq(n^2-5n+3)v_5$$

που επίσης ισχύει.

Εργαζόμενοι επαγωγικά, συμπεραίνουμε ότι κάθε φορά, αν k ο αριθμός των αντικειμένων που εξετάζουμε με το verification και m ο συνολικός αριθμός των αντικειμένων, θα καταλήγουμε σε σχέση της μορφής:

$$n^{k-2} + (-\binom{k}{2} + 1)n^{k-3} + ((k-3)\binom{k}{2} - \binom{k}{3} + 1)n^{k-4} +$$

$$(-(k-3)\binom{k}{2} + (k-4)\binom{k}{3} - \binom{k}{4} + 1)n^{k-5} + .. + (-\binom{k}{k-1} + 1)$$

όπου τα πρόσημα είναι εναλλασσόμενα.

Συμπερασματικά, διατυπώνουμε το παρακάτω θεώρημα, που επαληθεύει την υπόθεσή μας για το φράγμα του PoA.

Θεώρημα 5.4. Ο μηχανισμός *Power*, εφαρμοζόμενος σε παράλληλες Συνδυαστικές Δημοπρασίες με k το πλήθος των αντικειμένων που γίνονται verify από τον μηχανισμό, δίνει

$$PoA \geq \frac{k}{m}$$

Με το τελευταίο αυτό θεώρημα, ολοκληρώνεται η μελέτη του Price of Anarchy στην περίπτωση που ο μηχανισμός *Power* εφαρμόζεται σε Συνδυαστικές Δημοπρασίες. Στην επόμενη ενότητα, μελετάται η συμπεριφορά του μηχανισμού στο αρχικό setting, με χρήση ενδεχομένων, που προσθέτει μια πιο αφαιρετική σκοπιά στην μελέτη του μηχανισμού *Power*.

5.2 Outcomes

Στην ενότητα αυτή, θα εξετάσουμε τον μηχανισμό Pow^{ℓ}, με την αρχική μορφή που έχει παρουσιαστεί στο [25]. Σε αντίθεση με την προηγούμενη ενότητα, πλέον αναφερόμαστε σε εκβάσεις (outcomes) και όχι σε δημοπρασίες.

Η παραπάνω παραδοχή, καθιστά τη μελέτη πιο σύνθετη, καθώς πλέον δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα που αναφέρθηκαν, εφόσον η ισχύς τους περιορίζεται στο πλαίσιο δημοπρασιών. Επιπλέον, για την μελέτη του PoA πρέπει να γνωρίζουμε τη μορφή των ισορροπιών.

Όπως παρουσιάστηκε στο Κεφάλαιο 3, η μορφή των ισορροπιών Nash, στην περίπτωση του μηχανισμού Pow^{ℓ} με εκβάσεις δεν είναι ακριβής. Αναγκαστικά, καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές λύσεις, και συγκεκριμένα καταλήγουμε σε μια $k-$ομοιόμορφη στρατηγική, η οποία αποτελεί $\epsilon-$προσεγγιστική ισορροπία Nash για το πρόβλημα.

Προς την κατεύθυνση προσδιορισμού φραγμάτων για το PoA στο συγκεκριμένο setting, χρησιμοποιήθηκαν κάποια βασικά θεωρήματα από το [22]. Στην προαναφερθείσα μελέτη, επιχειρείται η σύνδεση φραγμάτων για τη πολυπλοκότητα επικοινωνίας και το Price of Anarchy. Συγκεκριμένα, στην εφαρμογή που εξετάζεται στην παρούσα εργασία, βασιζόμενοι στο κόστος υπολογισμού ισορροπιών στον μηχανισμό, εξάγουμε τα φράγματα για το PoA.

Αρχικά, γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στην έννοια της πολυπλοκότητας επικοινωνίας, και ακολουθεί ο ορισμός των δύο βασικών θεωρημάτων που χρησιμοποιούνται στην παρούσα μελέτη.

Το setting υπό μελέτη ισχύει όπως έχει περιγραφεί στο Κεφάλαιο 2, δηλαδή ο μηχανισμός Pow^{ℓ}, με φράγμα για τα valuations των παικτών την τιμή V_{max}. Κατά τα γνωστά, η αντικειμενική συνάρτηση στο πρόβλημα είναι το Social Welfare, και θεωρούμε ότι τα valuations των παικτών είναι subadditive. Προς αποφυγή συγχύσεων, σημειώνεται επίσης ότι στα παρακάτω συμβολίζεται ως δ ο λόγος προσέγγισης της ισορροπίας, όπως αναφέρθηκε από το αποτέλεσμα του Lipton στο Κεφάλαιο 4, και ϵ τη σταθερά του verification.

Με τον όρο πολυπλοκότητα επικοινωνίας (Communication Complexity (CC)), σε προβλήματα όπως το παρόν, ορίζουμε τον αριθμών των bits που ανταλλάσσονται, μεταξύ δύο πλευρών, προκειμένου να υπολογιστεί κάποια δεδομένη συνάρτηση. Ο όρος εισήχθη από τον A. Yao [28], και αρχικά χρησιμοποιήθηκε στην επιστήμη της Κρυπτογραφίας. Ένα πρακτικό παράδειγμα είναι το παρακάτω: Υπάρχουν δύο φίλοι, η Alice και ο Bob, καθένας εκ των οποίων διαθέτει από ένα κλειδί αποτελούμενο από από n bits, έστω x το κλειδί της Alice και y του Bob. Ζητούμενο του παιχνιδιού είναι ένας από τους δύο, με ανταλλαγή πληροφοριών, να υπολογίσει το κλειδί του άλλου, δηλαδή να υπολογίσει μια συνάρτηση $f : \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Στον σχεδιασμό αλγορίθμων και στην μελέτη της πολυπλοκότητας επικοινωνίας, το ζητούμενο είναι να υπολογιστεί η συνάρτηση με ανταλλαγή όσο το δυνατόν λιγότερων bits πληροφορίας. Ένας προφανής τρόπος για αυτό, είναι να στείλει ένας εκ των δύο όλο το κλειδί του στον άλλον, δηλαδή με ανταλλαγή n bits, ώστε ο δεύτερος να υπολογίσει την τιμή της f. Κάτι τέτοιο όμως αυξάνει την πολυπλοκότητα επικοινωνίας, και δεν αποτελεί βέλτιστη λύση. Δίνουμε και τυπικά έναν ορισμό με βάση το παράδειγμα.

Ορισμός 5.1. Η *πολυπλοκότητα επικοινωνίας(CC) ενός πρωτοκόλλου* $\mathcal{P}$ για τον υπολογισμό συνάρτησης f είναι:

$$CC(\mathcal{P}) = max_{x,y}\{\#\text{ bits που ανταλλάσσουν οι Alice και Bob}\}$$

Και για την έννοια της συνάρτησης, ο ορισμός τροποποιείται ως:

Ορισμός 5.2. Η *πολυπλοκότητα επικοινωνίας(CC) μιας συνάρτησης* f ορίζεται ως η βέλτιστη πολυπλοκότητα πρωτοκόλλου για την f:

$$CC(f) = min_{\mathcal{P}} CC(\mathcal{P})$$

Για τις ανάγκες της προσέγγισής μας, ορίζουμε την πολυπλοκότητα επικοινωνίας ως τον ελάχιστο αριθμό των bits που απαιτούνται για τον υπολογισμό κάποιας συνάρτησης.

Ως προς τη μορφή των ισορροπιών, όπως έχει αναλυθεί, αυτές θα είναι της μορφής $\delta - MNE$, δηλαδή Μικτές Ισορροπίες Nash. Για τα παρακάτω, θα θεωρηθεί ότι τα valuations των παικτών είναι πολλαπλάσια μιας ποσότητας $\frac{1}{\kappa}$, όπου $\kappa << \epsilon$. Κάτι τέτοιο αποδεικνύεται χρήσιμο, εφόσον αντιμετωπίζουμε subadditive valuations, ώστε να υπολογίζονται ευκολότερα οι τιμές του valuation για bundles αντικειμένων. Επομένως, ο αριθμός στρατηγικών διαθέσιμων σε κάθε παίκτη θα είναι:

$$N = (\frac{2\epsilon}{\kappa})^m$$

Το παραπάνω ισχύει δεδομένου ότι ο παίκτης παίζει στην περιοχή $\pm\epsilon$ από την πραγματική του valuation, και ο αριθμός των αντικειμένων είναι m. Πιο τυπικά, θα ισχύει το παρακάτω:

Θεώρημα 5.5. Ο μηχανισμός Pow^{ℓ}, με n παίκτες, όπου κάθε παίκτης έχει στη διάθεσή του N ενέργειες, και όλα τα valuations κείνται στην περιοχή $[0, V_{max} + \epsilon]$, για κάθε $\delta > 0$ διαθέτει ένα $(12n^2 ln(n^2 N))/\delta^2$-ομοιόμορφο $\delta(V_{max} + \epsilon) - MNE$.

Όπως παρουσιάζεται και στην αντίστοιχη εργασία του Lipton, τα προσεγγιστικά k-ομοιόμορφα Equilibria υπάρχουν πάντα. Η πολυπλοκότητα υπολογισμού τους είναι subexponential, συγκεκριμένα είναι $N^{O(\ln N)}$, όπου ως N συμβολίζεται ο αριθμός αμιγών στρατηγικών διαθέσιμων σε κάθε παίκτη, όπως αιτιολογήθηκε παραπάνω. Επομένως, το ζητούμενο είναι να συνδεθεί η πολυπλοκότητα επικοινωνίας στο πρόβλημα, συγκεκριμένα δηλαδή η πολυπλοκότητα υπολογισμού των προσεγγιστικών ισορροπιών, με τα φράγματα για το PoA. Στην κατεύθυνση αυτή, παρουσιάζονται τα κομβικής σημασίας θεωρήματα, που παρέχουν τα απαραίτητα εργαλεία. Αρχικά, δίνονται κάποιες χρήσιμες προτάσεις, που αξιοποιούνται στην πορεία απόδειξης του ζητουμένου. Οι προτάσεις αυτές απορρέουν άμεσα από την εργασία του Lipton, και την ύπαρξη και πολυπλοκότητα υπολογισμού των ισορροπιών που προτείνονται.

Πρόταση 1. Για κάθε $\delta > 0$, κάθε S1A διαθέτει ένα $k-$ομοιόμορφο $\delta V_{max} - MNE$, όπου το k φράσσεται άνω από μια ποσότητα πολυωνυμική στα n, m, ϵ^{-1}.

Το παραπάνω είναι προφανές από τον τρόπο με τον οποίο εξαρχής ορίστηκε το k.

Πρόταση 2. Το πρόβλημα απόφασης εάν ένα k-ομοιόμορφο προφίλ μικτών στρατηγικών σε μια S1A αποτελεί $\delta V_{max} - MNE$ μπορεί να επιλυθεί με επικοινωνία πολυωνυμική στα n, m, k.

Πρόταση 3. Το πρόβλημα υπολογισμού του αναμενόμενου Social Welfare για ένα k-ομοιόμορφο προφίλ μικτών στρατηγικών σε μια S1A μπορεί να υπολογιστεί με επικοινωνία πολυωνυμική στα n, m, k.

Η επόμενη πρόταση χρησιμεύει ώστε να γνωρίζουμε ότι πάντα υπάρχει κάποιο allocation, ως αποτέλεσμα του μηχανισμού που εφαρμόζουμε, που να δίνει τη βέλτιστη λύση για το πρόβλημα. Εν προκειμένω, αναφερόμαστε σε S1A, αλλά η πρόταση ισχύει και γενικότερα για προβλήματα βελτιστοποίησης με αντικειμενική συνάρτηση το Social Welfare.

Πρόταση 4. Για κάθε S1A, υπάρχει ένα προφίλ ενεργειών που καταλήγει σε allocation με μέγιστο δυνατό Social Welfare.

Απόδειξη. Εάν $({S_1}^*, {S_2}^*, ..., {S_n}^*)$ είναι ένα allocation που μεγιστοποιεί το Social Welfare, κάθε παίκτης i μπορεί να κάνει bid 1 για κάθε αντικείμενο στο ${S_i}^*$ και 0 για όλα τα υπόλοιπα.

Προχωρούμε τώρα στην διατύπωση του πρώτου θεωρήματος.

Θεώρημα 5.6. Έστω $\mathcal{V}$ το σύνολο των προφίλ valuation, με μέγιστη τιμή V_{max}. Υποθέτουμε ότι κάθε μη ντετερμινιστικό πρωτόκολλο επικοινωνίας που διαχωρίζει τα προφίλ με $v \in \mathcal{V}$ με μέγιστο δυνατό Social Welfare τουλάχιστον ίσο με W^*, από αυτά με μέγιστο δυνατό Social Welfare W^*/ρ, απαιτεί επικοικοινωνία εκθετική στο m, για κάθε αρκούντως μεγάλα n, m.
Τότε, για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση $p(n, m)$ των n, m, η χειρότερη τιμή για το PoA του $p(n, m)^{-1}V_{max} - MNE$ σε S1A με προφίλ valuation στο $\mathcal{V}$ είναι τουλάχιστον ρ.

Απόδειξη. Επιλέγουμε πολυωνυμική συνάρτηση $p(n, m)$ και θεωρούμε το εξής μη ντετερμινιστικό πρωτόκολλο $\mathcal{P}$:

1. Δοθέντος προφίλ $v \in \mathcal{V}$, σε έναν μηχανισμό, υπολογίζουμε μη ντετερμινιστικά ένα $k-$ομοιόμορφο $p(n, m)^{-1}V_{max}-MNE$ x του παιγνίου, με $k = (12n^2 \ln(n^2 N))/p(n, m)^2$, όπου για τις ανάγκες τις απόδειξης $N = (V_{max} + 1)^m$.
2. Επαληθεύουμε ότι το x όντως αποτελεί $p(n, m)^{-1}V_{max} - MNE$ για το πρόβλημα.
3. Υπολογίζουμε την αναμενόμενη τιμή του Social Welfare για το x, έστω W^*.
4. Απαντούμε YES αν και μόνο αν $W^* > W^*/\rho$

Από τις προτάσεις 1-3, αντιλαμβανόμαστε ότι το πρωτόκολλο $\mathcal{P}$ είναι καλά ορισμένο, και χρησιμοποιεί επικοινωνία πολυωνυμική στα n, m, καθώς η V_{max} είναι πολυωνυμική στα n, m. Σύμφωνα με την πρόταση 4, το αναμενόμενο Welfare W^* του x θα είναι τουλάχιστον ένα α κλάσμα της βέλτιστης allocation, όπου ως α συμβολίζεται το PoA χειρότερης περίπτωσης για το πρόβλημα αυτό. Επομένως, αν $\alpha < \rho$, τότε ο $\mathcal{P}$ απαντά YES όταν υπάρχει allocation με Welfare τουλάχιστον W^*, αλλιώς απαντά NO αν κάθε allocation έχει welfare μικρότερο από W^*/ρ. Το παραπάνω αντιβαίνει στην αρχική υπόθεση για αρκούντως μεγάλο m, οπότε θα ισχύει πάντα ότι $\alpha \geq \rho$. $\square$

Το θεώρημα που παρουσιάστηκε σκιαγραφεί τον τρόπο με τον οποίο, από bounds στον υπολογισμό των ισορροπιών, εξάγουμε φράγματα για το PoA. Στο πρόβλημά μας, το να διαχωρίσουμε τα στιγμιότυπα, συνεπάγεται να υπολογίσουμε την ισορροπία Nash. Υπολογίζοντας αυτήν, γνωρίζουμε το optimal Social Welfare και μπορούμε να το διαχωρίσουμε σε γραμμικό χρόνο από τα υπόλοιπα στιγμιότυπα. Επομένως, το πρόβλημα ανάγεται στην πολυπλοκότητα υπολογισμού του Mixed Nash Equilibrium. Η πολυπλοκότητα επικοινωνίας του προβλήματος είναι η πολυπλοκότητα υπολογισμού της ισορροπίας $\delta - MNE$, ο χρόνος δηλαδή που απαιτεί όπως ορίστηκε παραπάνω. Το επόμενο θεώρημα γενικεύει το Θεώρημα 2, και το αποτέλεσμά του είναι αυτό που χρησιμοποιείται κατά την παρούσα μελέτη. Το θεώρημα αυτό απορρέει άμεσα από το Θεώρημα 5.6 που αναλύθηκε παραπάνω, και παρατίθεται χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 5.7. Έστω $\Pi(n, m, \mathcal{V})$ ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης του Social Welfare, με μέγιστη valuation $V_{max} + \epsilon$ και $\mathcal{M}$ ένας φραγμένος από $V_{max} + \epsilon$ μηχανισμός επί του παιγνίου $\Pi(n, m, \mathcal{V})$ τέτοιος ώστε, σε κάθε παίγνιο $\mathcal{M}(v)$ αποτέλεσμα του $\mathcal{M}$, το PoA του $\delta(V_{max} + \epsilon) - MNE$ να είναι μικρότερο από ρ. Ως N συμβολίζεται ο μέγιστος αριθμός ενεργειών διαθέσιμων σε κάθε παίκτη του $\mathcal{M}(v)$.
Τότε, υπάρχει ένα μη ντετερμινιστικό πρωτόκολλο που χρησιμοποιεί επικοινωνία πολυωνυμική στα $n, \frac{1}{\delta}, \log N, \log(V_{max} + \epsilon)$ και για κάθε W διαχωρίζει μεταξύ στιγμιοτύπων του $\Pi(n, m, \mathcal{V})$ με μέγιστο Social Welfare τουλάχιστον W, και στιγμιοτύπων του $\Pi(n, m, \mathcal{V})$ με μέγιστο Social Welfare μικρότερο από W/ρ.

Αξιοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, ερμηνεύοντάς το κατάλληλα για την εφαρμογή υπό μελέτη, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι ο μηχανισμός Pow^{ℓ} έχει $PoA \leq N^{O(\ln N)}$. Ο υπολογισμός της ισορροπίας απαιτεί subexponential communication complexity. Επομένως, ο διαχωρισμός των στιγμιοτύπων με optimal Social Welfare από τα υπόλοιπα απαιτεί συνολικά, μαζί με τον υπολογισμό της ισορροπίας, το ίδιο. Μπορούμε λοιπόν, μέσω του παραπάνω θεωρήματος, να συμπεράνουμε ότι το PoA του μηχανισμού φράσσεται από τα όρια της πολυπλοκότητας επικοινωνίας. Ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, εφόσον ο αριθμός N στον τύπο της πολυπλοκότητας εξαρτάται από την παράμετρο ϵ του verification, αύξηση του ϵ οδηγεί σε μεγαλύτερη πολυπλοκότητα, και κατ'επέκταση μεγαλύτερη τιμή για το PoA bound. Κάτι τέτοιο μπορεί να εξηγηθεί διαισθητικά, εφόσον επιτρέποντας στους παίκτες να πουν ολοένα και μεγαλύτερα ψέματα σε σχέση με το true valuation, δηλαδή να αποκλίνουν περισσότερο, η σύγκλιση δυσκολεύει καθώς μεγαλώνει και το εύρος των τιμών και των στρατηγικών υπό εξέταση.

Καταλήγοντας, το συμπέρασμά μας υπό μορφή θεωρήματος, παρουσιάζεται παρακάτω.

Θεώρημα 5.8. Για τον μηχανισμό Pow^{ℓ}, με είσοδο ένα valuation profile $v \in \mathcal{V}$, φραγμένο από V_{max}, ισχύει ότι $PoA = 1$.

Το παραπάνω συμπέρασμα είναι αρκετά σημαντικό, καθώς συνδέει υπο-εκθετικά όρια υπολογισμού, δηλαδή μειωμένη πολυπλοκότητα αλγορίθμων, με βέλτιστες προσεγγίσεις, σε περιβάλλοντα δημοπρασιών. Το θεώρημα αυτό αποδεικνύει πως από την υπολογιστική πολυπλοκότητα επικοινωνίας μπορούμε να εξάγουμε συμπεράσματα για την ποιότητα των Ισορροπιών. Γνωρίζουμε ότι το πρόβλημα απόδειξης ύπαρξης των Ισορροπιών Nash είναι NP-Hard πρόβλημα. Το αποτέλεσμα όμως μας επιτρέπει να προσπερνούμε τη δυσκολία υπολογισμού, δίνοντας καλές έως και βέλτιστες προσεγγίσεις, αξιοποιώντας την υπολογιστική πολυπλοκότητα επίλυσης ενός προβλήματος. Ενδέχεται να μην γνωρίζουμε την ακριβή μορφή των Ισορροπιών, μπορούμε όμως να χαρακτηρίσουμε την ποιότητά τους σε χρόνο υπο-εκθετικό, όση είναι η απαιτούμενη επικοινωνία που απαιτείται για το υπολογιστικό πρόβλημα. Μας δίνεται λοιπόν ένα ισχυρό μέτρο χαρακτηρισμού των Ισορροπιών, που απορρέει από μη-ντετερμινιστικό αλγόριθμο με πολυπλοκότητα αρκούντως μικρότερη από εκθετική, επιτρέποντας έτσι να ξεπεραστεί το φράγμα υπολογιστικού χρόνου.

Με το αποτέλεσμα αυτό, ολοκληρώνεται η μελέτη του μηχανισμού Pow^{ℓ}, τόσο σε ότι αφορά την ύπαρξη ισορροπιών, όσο και στο Τίμημα της Αναρχίας. Έχουμε λοιπόν μια πλήρη εικόνα της εξέλιξης του μηχανισμού αυτού, ως προς τη σύγκλιση και την συμπεριφορά υπό εγωιστικές συνθήκες των παικτών, και την προσέγγιση της βέλτιστης λύσης του truthfulness. Βλέποντας ότι ο μηχανισμός δίνει τιμή 1 για το Price of Anarchy, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αποδίδει βέλτιστα σε τυχαίες συνθήκες, οπότε προσφέρεται για πρακτική εφαρμογή, σε περιβάλλοντα δημοπρασιών ή σε γενικότερα πλαίσια.

Βιβλιογραφία

[1] J. F. Nash. "Equilibrium Points in n-Person Games". *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 36.* pp. 48-49, 1950.

[2] J. F. Nash. "Non-cooperative Games". *Annals of Mathematics, vol. 54.* pp. 289-295, 1951.

[3] G. Gottlob, G. Greco and F. Scarcello. "Pure Nash Equilibria: Hard and Easy Games". *Journal of Artificial Intelligence, vol. 24.* pp. 357-406, 2005.

[4] C. Daskalakis, P. W. Goldberg and C. H. Papadimitriou. "The Complexity of Computing a Nash Equilibrium". *Proceedings of STOC.* 2006.

[5] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. "Worst-case Equilibria". *Computer Science Review.* pp.65-59, 2009.

[6] T. Roughgarden and E. Tardos (March 2002). "How Bad is Selfish Routing?" *Journal of the ACM.*, page 49 (2): 236–259. doi: 10.1145/506147.506153.

[7] V. Syrgkanis and E. Tardos (2013). "Composable and efficient mechanisms". In: *Proceedings of the Forty-fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '13, pp. 211–220, New York, NY, USA. ACM.

[8] M. Feldman et al. "Simultaneous Auctions are (almost) Efficient". In: *CoRR* abs/1209.4703 (2012).

[9] T. Roughgarden, V. Syrgkanis and E. Tardos (2013). "The Price of Anarchy in Auctions". In: *CoRR abs/1607.07684.*

[10] T. Roughgarden (2015). "Intrinsic robustness of the price of anarchy". *Journal of the ACM*, 62(5), 32.

[11] T. Roughgarden (2012). "The price of anarchy in games of incomplete information". In: *Proceedings of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce*, EC '12, pp. 862– 879.

[12] V. Syrgkanis (2012). "Bayesian games and the smoothness framework". In: *CoRR, abs/1203.5155.*

[13] V. Vazirani, N. Nisan, T. Roughgarden and E. Tardos. *Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, pp. 224-225, 2007. ISBN 0-521-87282-0.

[14] D. Fotakis and C. Tzamos. "Facility Location for Concave Cost Functions". *Algorithmica 76(1).* pp. 143-176.

[15] A. Archer and R. Kleinberg. "Truthful germs are contagious: A local-to-global characterization of truthfulness". In *Proc. of the 9th ACM Conference on Electronic Commerce (EC '08)*, pp. 21-30, 2008.

[16] I. Caragiannis, E. Elkind, M. Szegedy, and L. Yu. "Mechanism design: from partial to probabilistic verification". In *Proc.of the 13th ACM Conference on Electronic Commerce (EC '12)*, pp. 266-283, 2012.

[17] D. Fotakis and E. Zampetakis. "Truthfulness flooded domains and the power of verification for mechanism design". In *Proc. of the 9th Workshop on Internet and Network Economics (WINE '13)*, LNCS 8289, pp. 202-215, 2013.

[18] J. B. Rosen. "Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N-Person Games". *Econometrica*, Vol.33, Issue 3 (Jul. 1965), pp.520-534.

[19] D. Monderer and L. Shapley (1996). "Potential Games". *Games and Economic Behavior.* 14: 124–143. doi:10.1006/game.1996.0044.

[20] M. Voorneveld. "Best-response potential games". *Economics letters 66 (3)*, pp.289-295.

[21] R. J. Lipton, E. Markakis and A. Mehta. "Playing Large Games using Simple Strategies". *ACM Conference on Electronic Commerce (EC)*, pp. 36-41, 2003.

[22] T. Roughgarden. "Barriers to Near-Optimal Equilibria". *FOCS '14*, pp.71-80.

[23] W. Vickrey (1961). "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders". *The Journal of Finance 16 (1): 8–37*, doi:10.1111/j.1540-6261.1961.tb02789.x.

[24] A. D. Procaccia and M. Tennenholtz. "Approximate Mechanism Design Without Money". In: *ACM Trans. Econ. Comput.* 1.4 (Dec 2013), 18:1-18:26.

[25] D. Fotakis, C. Tzamos and E. Zampetakis. "Who to Trust for Truthfully Maximizing Welfare?" In: *CoRR abs/1507.02301* (2015).

[26] S. Kakutani (1941). "A generalization of Brouwer's fixed point theorem". *Duke Mathematical Journal, vol. 8, Number 3*, pp. 457-459.

[27] K. Bhawalkar and T. Roughgarden. "Simultaneous Single-Item Auctions". *WINE 2012*: 337-349.

[28] A. C-C. Yao. "Some Complexity Questions Related to Distributive Computing (Preliminary Report)". In: *Proceedings of the Eleventh Annual ACM Symposium on Theory of Computing.* STOC '79. Atlanta, Georgia. pp. 209-213.