ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ
ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Μια Θεωρητική Διερεύνηση Της Θερμικής Καταπόνησης Των Στατικών Ηλεκτρικών Επαφών Που Διαρρέονται Από Υψηλές Τιμές Ρεύματος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Κωνσταντίνου Γ. Καλιτσουνάκη

Επιβλέπων : Κ. Καραγιαννόπουλος
Αν. Καθηγητής

Αθήνα, Απρίλιος 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ
ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Μια Θεωρητική Διερεύνηση Της Θερμικής Καταπόνησης Των Στατικών Ηλεκτρικών Επαφών Που Διαρρέονται Από Υψηλές Τιμές Ρεύματος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Κωνσταντίνου Γ. Καλιτσουνάκη

Επιβλέπων : Κ. Καραγιαννόπουλος
Αν. Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17η Απριλίου 2003.

.....	.....	.....
Κ. Καραγιαννόπουλος	Π. Μπούρκας	Ν. Θεοδώρου
Αν. Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής

Αθήνα, Απρίλιος 2003

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ Γ. ΚΑΛΙΤΣΟΥΝΑΚΗΣ
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Πρόλογος,

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε στη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, στον τομέα Ηλεκτρικών Βιομηχανικών Διατάξεων και Συστημάτων Αποφάσεων.

Επιβλέπων ήταν ο αναπληρωτής καθηγητής Ε.Μ.Π. κ. Κ. Καραγιαννόπουλος, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με ένα θέμα εξαιρετικού ενδιαφέροντος.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Χ. Αρώνη (υποψήφιο διδάκτορα ηλεκτρολόγο μηχανικό), καθώς και τον κ. Ν. Κάτσενο (ηλεκτρολόγο μηχανικό και μηχανικό υπολογιστών Ε.Μ.Π.).

Πολύτιμη υπήρξε η συμπαράσταση της οικογένειάς μου, την οποία ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε.

Κωνσταντίνος Γ. Καλιτσουνάκης,
Αθήνα, Απρίλιος 2003.

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ – (ΟΙ ΣΤΑΤΙΚΕΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΕΣ ΕΠΑΦΕΣ)

Οι στατικές ηλεκτρικές επαφές, δηλαδή οι επαφές που δεν έχουν ισχύ διακοπής, μπορούν να χειρίζονται μόνο όταν το κύκλωμα έχει τεθεί εκτός τάσης μέσω ενός διακόπτη φορτίου ή ισχύος, ανάλογα με το είδος παροχής της τάσης. Επαφές αυτού του τύπου, που αναφέρονται στην διεθνή βιβλιογραφία ως "stationary contacts", χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε βιομηχανικές εφαρμογές σαν αποζεύκτες, γειωτές και ασφαλειοθήκες. Ως στατικές επαφές θεωρούνται επίσης και οι επαφές των αυτομάτων διακοπτών, των ασφαλειοαποζευκτών και των διακοπτών φορτίου (δηλαδή όλων των διακοπτών που έχουν ισχύ διακοπής) όταν όμως αυτές βρίσκονται ήδη σε λειτουργία στη θέση εντός.

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται βασικοί όροι και έννοιες που διέπουν κατά τη βιβλιογραφία τις στατικές ηλεκτρικές επαφές και θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Στην συνέχεια αναφέρονται περιληπτικά τα φαινόμενα που εκδηλώνονται κατά την λειτουργία των στατικών επαφών και δίνονται βασικές σχέσεις, που τις χαρακτηρίζουν.

1.1. Καθορισμός όρων και εννοιών.

Ως ηλεκτρική επαφή ορίζεται μια λυόμενη σύνδεση δύο αγωγών η οποία έχει τη δυνατότητα να άγει το ηλεκτρικό ρεύμα. Η παραπάνω λυόμενη σύνδεση αποτελείται από δύο μέρη, την κινητή και την σταθερή επαφή. Ως ανοικτή επαφή θεωρείται όχι μόνο αυτή, που έχει τεθεί, λόγω χειρισμού, στη θέση εκτός, αλλά και εκείνη στην οποία τα δυο μέρη έχουν μονωθεί ηλεκτρικά λόγω ξένων επικαθίσεων. Η δύναμη η οποία συγκρατεί τα δύο μέρη της επαφής μεταξύ τους καλείται δύναμη σύσφιξης των επαφών F.

Τα μέταλλα από τα οποία κατασκευάζονται συνήθως οι επαφές έχουν, για λόγους διευκόλυνσης της διάβασης του ρεύματος, μεγάλη ειδική ηλεκτρική αγωγιμότητα. Για το λόγο αυτό η σκληρότητα των μετάλλων αυτών δεν είναι μεγάλη, και υπό την επίδραση των δυνάμεων σύσφιξης παραμορφώνονται ελαστικά και πλαστικά στις περιοχές, που εφάπτονται υπό

την επίδραση της δύναμης σύσφιξης. Αποτέλεσμα των παραμορφώσεων αυτών είναι η δημιουργία ορισμένων περιοχών πάνω στον λυόμενο σύνδεσμο, οι οποίες φέρουν το φορτίο σύσφιξης της επαφής, χωρίς αυτό να σημαίνει αναγκαστικά ότι μέσω αυτών των περιοχών γίνεται διέλευση του ρεύματος. Το σύνολο των περιοχών αυτών δίνει την επιφάνεια σύσφιξης A_b. Η κατανομή των παραπάνω περιοχών είναι στατιστική και εξαρτάται κυρίως από το είδος των υλικών και την τραχύτητα των επιφανειών.

Ως πραγματική επιφάνεια A_c μιας επαφής εννοούμε την επιφάνεια μέσω της οποίας γίνεται τελικά η διέλευση του ρεύματος από το ένα μέρος της επαφής στο άλλο. Η επιφάνεια αυτή είναι, λόγω των ξένων επικαθίσεων στις επαφές (κυρίως οξείδια μετάλλων και σκόνη), μικρότερη από την A_b. Όταν παρατηρεί κανείς μια ηλεκτρική επαφή νομίζει ότι τα δύο μέρη της εφάπτονται σε μια πολύ ευρύτερη επιφάνεια από το σύνολο των περιοχών επαφής A_b που προαναφέρθηκαν. Αυτή η μακροσκοπικά παρατηρούμενη επιφάνεια ονομάζεται φαινόμενη επιφάνεια επαφής A_α και είναι κατά πολύ μεγαλύτερη από το σύνολο των επί μέρους επιφανειών πραγματικής επαφής A_c, οι οποίες έχουν την δυνατότητα να άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα.

Γενικά ισχύει:

$$A_\alpha > A_b > A_c \qquad (2.1\text{-}1)$$

Ο όρος αντίσταση διάβασης ο οποίος θα χρησιμοποιείται στην συνέχεια αφορά την αντίσταση που παρουσιάζει μία επαφή κατά τη διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος. Η αντίσταση διάβασης R περιλαμβάνει γενικά δύο όρους. Την αντίσταση στένωσης R_c (constriction resistance) και την αντίσταση του στρώματος των επικαθίσεων στις επαφές R_f. Η αντίσταση στένωσης R_c, είναι αποτέλεσμα της εξαναγκασμένης ροής του ηλεκτρικού ρεύματος από την επιφάνεια A_c. Η αντίσταση στένωσης περιλαμβάνει εξ ορισμού, την αντίσταση και στα δύο μέρη της επαφής. Η αντίσταση του στρώματος των επικαθίσεων οφείλεται στην δυσκολία των ηλεκτρικών

φορέων να διαπεράσουν το στρώμα αυτό.

1.2 Η πτώση τάσης σε μία επαφή σε σχέση με τη θερμοκρασία που αναπτύσσεται.

Η θερμική και η ηλεκτρική ροή υπακούουν σε παρεμφερείς νόμους. Η θερμική ενέργεια ρέει σε συνάρτηση με τις θερμοκρασιακές διαφορές και αντίστοιχα το ηλεκτρικό ρεύμα σε συνάρτηση προς την διαφορά δυναμικού. Σε συμμετρικά συστήματα ηλεκτρικών επαφών, η θερμική ροή ακολουθεί τον ίδιο δρόμο με την ροή του ηλεκτρικού ρεύματος. Ως εκ τούτου υπάρχει μία σχέση μεταξύ θερμοκρασιακής διαφοράς και διαφοράς δυναμικού. Η σχέση αυτή διερευνήθηκε κάτω από διάφορες παραδοχές, όπως π.χ. ότι ο αγωγός (που συνδέεται με την επαφή) είναι μονωμένος θερμικά και ηλεκτρικά σε όλο το μήκος του.

Για την διατύπωση μίας ενεργειακής σχέσης, που διέπει μία επαφή, έχουν γίνει οι παρακάτω παραδοχές:

- Σαν είσοδος του ηλεκτρικού ρεύματος νοείται η πραγματική επιφάνεια επαφής, και σαν έξοδος μία επιφάνεια αρκετά μακριά από την είσοδο ώστε η ροή σε αυτή να μην επηρεάζει την θερμική και ηλεκτρική ροή στο άμεσο περιβάλλον της επαφής.
- Το σύστημα των δύο μερών της ηλεκτρικής επαφής είναι συμμετρικό.

Η δεύτερη παραδοχή σημαίνει ότι τα δύο μέρη της επαφής είναι από το ίδιο υλικό, το οποίο είναι ισοτροπικό, δηλαδή ότι η ειδική αντίσταση ρ, και ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας λ_θ, εξαρτώνται μόνο από την θερμοκρασία. Σημαίνει επίσης ότι η επιφάνεια επαφής είναι ισοθερμική και ισοδυναμική (ταυτόχρονα για τα δύο μέρη της επαφής) και ότι αυτή έχει την υψηλότερη θερμοκρασία του συστήματος, λόγω συμμετρίας του οποίου δεν συμβαίνει ροή της θερμότητας από το ένα μέρος της επαφής προς το άλλο.

Κάτω από αυτές τις παραδοχές ως συνάρτηση μεταξύ θερμοκρασίας T και τάσης U, για μία συμμετρική αντίσταση στένωσης, έχει προταθεί η σχέση :

$$\int_0^{\Delta T} \rho(T)\lambda_\theta(T)dT = \frac{U^2}{8} \qquad (1.2\text{-}1)$$

όπου ΔT η διαφορά της θερμοκρασίας των σημείων επαφής από την θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Εάν χρησιμοποιηθεί η μέση τιμή του γινομένου $\overline{\rho\lambda}_\theta$ τότε η σχέση 1.2-1 γίνεται:

$$\overline{\rho\lambda}_\theta \cdot \Delta T = U^2/8 \qquad (1.2\text{-}2)$$

ή $U = \sqrt{8 \cdot \overline{\rho\lambda}_\theta \cdot \Delta T}$ (1.2-3)

Η σχέση 1.2-3 δίνει την μέγιστη θερμοκρασία που μπορεί να αναπτυχθεί σε επαφές λόγω της αντίστασης στένωσης για δεδομένη πτώση τάσης.

Σε περίπτωση, που μέρος της παραγόμενης θερμότητας, διαφεύγει προς το περιβάλλον μέσο (όπως συμβαίνει στην πράξη), τότε η σχέση 1.2-1 γίνεται:

$$\overline{\rho\lambda}_\theta \cdot \Delta T \le U^2/8 \qquad (1.2\text{-}4)$$

και $U \ge \sqrt{8 \cdot \overline{\rho\lambda}_\theta \cdot \Delta T}$ (1.2-5)

Θεωρώντας τον νόμο των Wiedemann – Franz – Lorenz, κατά τον οποίο:

$$\rho(T)\lambda_\theta(T) = LT \qquad (1.2\text{-}6)$$

όπου L σταθερά ανεξάρτητη από το μέταλλο $\left(L \cong 2{,}4 \cdot 10^{-8}(V/°K)^2\right)$, τότε η σχέση 1.2-1 γίνεται:

$$\int_0^{\Delta T} \rho(T)\lambda_\theta(T)dT = \int_{T_0}^{T} LTdT = \frac{L}{2}\left(T^2 - T_0^2\right) \le \frac{U^2}{8} \qquad (1.2\text{-}7)$$

ή $U \ge 2\sqrt{L\left(T^2 - T_0^2\right)}$ (1.2-8)

όπου T_0 η θερμοκρασία του περιβάλλοντος.

Οι σχέσεις 1.2-3, 1.2-5 και 1.2-8 παρέχουν την δυνατότητα του κατά προσέγγιση υπολογισμού της πτώσης τάσης σε επαφές χωρίς επικαθίσεις. Στις πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της ελάχιστης τιμής της πτώσης τάσης σε καινούργιες επαφές.

1.3. Οξείδια σε επαφές διακοπτών και η σημασία της θερμοκρασίας στην αύξηση του πάχους τους.

Οι επικαθίσεις σε μια επαφή είναι, όπως προαναφέρθηκε αιτία αύξησης της αντίστασης διάβασης και επομένως ο κύριος λόγος κακής λειτουργίας της. Μπορούμε να διακρίνουμε τις επικαθίσεις σύμφωνα με την σύνθεσή τους, σε δυο κατηγορίες: σε χημικές ενώσεις (όπως π.χ. τα οξείδια του μετάλλου της επαφής) και σε διάφορα παρασιτικά στοιχεία (όπως η σκόνη, τα λιπαντικά και υδρατμοί). Με διακριτικό στοιχείο το πάχος μπορούμε να διακρίνουμε τις παρακάτω κατηγορίες επικαθίσεων :

- επικαθίσεις με πάχος λίγων ατόμων (όπως ένα στρώμα μιας ή δύο στοιβάδων μορίων νερού).
- προστατευτικές επικαθίσεις, που είναι χημικές ενώσεις, και οι οποίες δεν αυξάνονται όταν αποκτήσουν ένα μικρό πάχος. Οι επικαθίσεις αυτές θεωρείται ότι προστατεύουν την επιφάνεια της επαφής, και
- επικαθίσεις, που είναι χημικές ενώσεις, στις οποίες συμμετέχει το μέταλλο της επαφής, των οποίων το πάχος αυξάνει με το χρόνο.

Για τις επικαθίσεις με πάχος λίγων ατόμων γίνεται διάκριση, σε αυτές που τα άτομα τους ενώνονται με το μέταλλο της επαφής μέσω δυνάμεων Van der Waals και δεσμούς της τάξης των 0,05eV και εκείνες που ενώνονται με ελεύθερους δεσμούς ατόμων της επιφάνειας του μετάλλου με ενέργεια από 1eV έως 8eV. Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στις χημικές ενώσεις που σχηματίζονται στην επιφάνεια των μετάλλων, που χρησιμοποιούνται στις επαφές.

Ορισμένες χημικές ενώσεις στην επιφάνεια της επαφής αυξάνουν από 10 έως 100Å και προστατεύουν με αυτόν τον τρόπο την επιφάνεια των μετάλλων της επαφής από την επίδραση του οξυγόνου της ατμόσφαιρας καθώς και από άλλα χημικά στοιχεία. Το ανοξείδωτο ατσάλι και το αλουμίνιο έχουν εξαιρετικά προστατευτικά οξείδια και ανήκουν σε αυτή την

κατηγορία. Τα οξείδια του χαλκού και του νικελίου δεν προστατεύουν αποτελεσματικά τα αντίστοιχα μέταλλα αλλά συνεχίζουν να αυξάνονται αργά μεν αλλά συνεχώς στην θερμοκρασία περιβάλλοντος. Ειδικά στο Ni το NiO σε ξηρή ατμόσφαιρα με σχετική υγρασία μικρότερη του 25% είναι προστατευτικό της επιφάνειας του μετάλλου αυτού, αλλά σε υγρή ατμόσφαιρα η οξείδωση προχωράει με αξιόλογο ρυθμό ιδίως όταν υπάρχει σκόνη. Το NiO είναι σκληρό όπως το νικέλιο και σπάνια αποκολλάται από την επιφάνεια της επαφής με τους χειρισμούς. Έχει επίσης μονωτικές ιδιότητες παρά τον αργό σχηματισμό του.

Ο ψευδάργυρος καλύπτεται από ένα προστατευτικό στρώμα που δρα μονωτικά και έχει χαμηλή σκληρότητα. Κατά την επαφή των δύο μερών το προστατευτικό αυτό στρώμα αποχωρίζεται από την επιφάνειά του, με αποτέλεσμα να δημιουργούνται αγώγιμες περιοχές οι οποίες οξειδώνονται επίσης με τον χρόνο. Σε αυτή τη περίπτωση η αντίσταση διάβασης γίνεται μεγαλύτερη (και επομένως και η θερμοκρασία) και έτσι αυξάνει δευτερογενώς η οξείδωση. Ο ψευδάργυρος δεν είναι ιδανικό υλικό για επαφές και για τον πρόσθετο λόγο ότι δεν έχει ικανοποιητική σκληρότητα με αποτέλεσμα να αυξάνει η επιφάνεια A_C, υπό την επίδραση της δύναμης σύσφιξης και να μειώνεται αντίστοιχα η πίεση, πράγμα που βοηθάει στην οξείδωση της επιφάνειάς του.

Ο μπρούντζος είναι ένα γενικός αποδεκτό υλικό επαφών σε χαμηλές θερμοκρασίες. Εμφανίζει παρεμφερή συμπεριφορά με τον χαλκό, με την διαφορά ότι τα οξείδια του, που αυξάνουν με σταθερό ρυθμό, δεν αποτελούν προστατευτικό στρώμα, όπως συμβαίνει με το οξείδιο του χαλκού.

Το βολφράμιο καλύπτεται από ένα στρώμα οξειδίου το οποίο δεν μπορεί να θεωρηθεί ως προστατευτικό. Σε θερμοκρασία χώρου αυτό το οξείδιο παραμένει στο πάχος των περίπου 50Å. Έχει διατυπωθεί η άποψη ότι μεγάλο ποσοστό αυτού του οξειδίου καταστρέφεται κατά την επαφή των δύο μερών, με αποτέλεσμα η διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος να γίνεται στις περιοχές

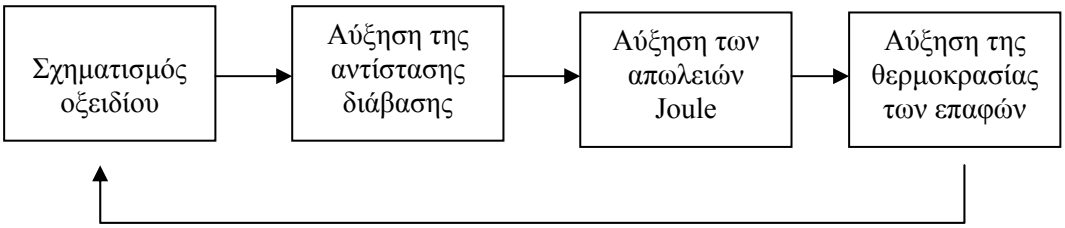
όπου έχει αποκολληθεί το οξείδιο. Η διέλευση του ηλεκτρικού ρεύματος σε περιοχές της επαφής, όπου δεν έχουν αποκολληθεί τα λεπτά στρώματα του οξειδίου, έχει αποδοθεί στην εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος. Παρεμφερή συμπεριφορά παρουσιάζει και το μολυβδαίνιο καθώς και οι καθαρές επαφές από χάλυβα.

Ο χρυσός δεν οξειδώνεται όπως είναι γνωστό στον αέρα. Προσβάλλεται όμως από το χλώριο στους 180°C περίπου και σχηματίζει υδατοδιαλυτό $AuCl_3$. Η μόνη επικάθιση η οποία υπάρχει στην επιφάνεια επαφών από χρυσό είναι μία στοιβάδα ατόμων οξυγόνου (που υπάρχει και σε κάθε μέταλλο), η οποία όμως δεν αυξάνεται με τον χρόνο και είναι διαπερατή στα ηλεκτρόνια λόγω του φαινομένου σήραγγος. Ο χρυσός είναι άριστο υλικό επαφών αλλά με απαγορευτικό κόστος.

Ο άργυρος οξειδώνεται σε Ag_2O σε θερμοκρασία χώρου, μόνο με την παρουσία του όζοντος. Το οξείδιο του αργύρου έχει χαμηλή σκληρότητα, αποχωρίζεται μηχανικά από το μέταλλο και αποσυντίθεται στους 200°C. Το παραπάνω οξείδιο δεν αυξάνει την αντίσταση διάβασης. Σε συνήθεις ατμοσφαιρικές συνθήκες ο άργυρος προσβάλλεται από ενώσεις του θείου και σχηματίζει ένα επιφανειακό ανθεκτικό στρώμα Ag_2S το οποίο δεν είναι προστατευτικό. Το στρώμα Ag_2S αυξάνεται αργά αλλά σταθερά γιατί η περιεκτικότητα γενικά του H_2S στον αέρα είναι χαμηλή. Περιεκτικότητα σε H_2S μεγαλύτερη από $1/10^{-9}$ στον ατμοσφαιρικό αέρα είναι καταστροφική για τις επαφές. Η ρύπανση γενικά του ατμοσφαιρικού αέρα, σε περιοχές με έντονη βιομηχανική δραστηριότητα, καταστρέφει στις επαφές από άργυρο. Η ειδική αντίσταση του Ag_2S κυμαίνεται από 10^5 Ωm έως 10^{10} Ωm ανάλογα με την κρυσταλλική δομή του. Αυτή είναι περίπου και η ειδική αντίσταση του οξειδίου τον χαλκού. Ορατά στρώματα του σουλφιδίου δρουν πρακτικά σαν μονωτές για τις επαφές. Δεδομένου ότι ο άργυρος είναι άριστο υλικό επαφών, έχει διερευνηθεί σε βάθος η προσβολή του σε Ag_2S και έχουν προταθεί διάφορα κράματα για πρακτικές εφαρμογές καθώς και η

δυνατότητα επιχρύσωσής του για μικροεπαφές.

Η επίδραση της θερμοκρασίας στην δημιουργία οξειδίων και γενικά επικαθίσεων στις επαφές παρουσιάζει ενδιαφέρον δεδομένου ότι το φαινόμενο ανακυκλώνεται κατά την σειρά που απεικονίζεται στο σχήμα 1.3-1. Ως παράδειγμα εξετάζονται παρακάτω επαφές από Cu ή Ni.



Σχήμα 1.3-1: Απλοποιημένη παράσταση της επίδρασης της θερμοκρασίας στη δημιουργία οξειδίων.

Όσον αφορά τον χαλκό, ο Ronnquist διερεύνησε το πάχος του Cu_2O και CuO, σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας, και του χρόνου, και διατύπωσε την σχέση:

$$s^2 = 20^2 + t \cdot 10^{(14,9-5100/T)} \qquad (1.3\text{-}1)$$

όπου s το πάχος σε Å, t ο χρόνος σε ώρες και T η θερμοκρασία σε ^oK. Έχει διαπιστωθεί επίσης ότι μέχρι τους 400^oC στην επιφάνεια του χαλκού δημιουργείται Cu_2O και σε υψηλότερες θερμοκρασίες CuO. Όταν τα παραπάνω οξείδια έχουν πάχος μεγαλύτερο από 100Å τότε μειώνουν συνήθως ηλεκτρικά την επαφή.

Παρεμφερής σχέση ισχύει για το πάχος NiO το οποίο σχηματίζεται σε θερμοκρασίες από 200^oC έως 600^oC :

$$s^2 = 5^2 + t \cdot 10^{(13,3-6000/T)} \qquad (1.3\text{-}2)$$

1.4. Η επίδραση της υγρασίας του ατμοσφαιρικού αέρα στην οξείδωση των επαφών.

Το πάχος του στρώματος της υγρασfας του ατμοσφαιρικού αέρα εξαρτάται από την τραχύτητα των επιφανειών της επαφής. Στον άργυρο, αυτό το στρώμα θεωρείται ότι είναι μικρότερο από 50Å. Στρώματα νερού του πάχους αυτού δεν αντέχουν την πίεση των δύο μερών της επαφής και γι' αυτό διατάσσονται περιφερειακά στην επιφάνεια A_C και στα πιθανά κενά που υπάρχουν. Έχει υποστηριχθεί ότι λεπτά στρώματα νερού, ανάμεσα σε μεταλλικές επιφάνειες αφ' ενός και οξείδια και άνθρακας αφ' ετέρου μπορούν να δημιουργήσουν τοπικά ηλεκτρικά στοιχεία, τα οποία με ηλεκτροχημική δράση οξειδώνουν τις επαφές. Αυτή η διεργασία χρειάζεται μικρότερο χρόνο από την οξείδωση της επαφής στον ατμοσφαιρικό αέρα. Για να συμβεί όμως αυτό απαιτούνται μεγάλες ποσότητες υγρασίας (πάνω από 70%) και λεπτά ασυνεχή στρώματα νερού (που μπορούν με ιόντα να άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα), ή υγροσκοπικά τεμάχια σκόνης.

Έχει διατυπωθεί επίσης η άποψη, ότι τα στρώματα του νερού και των στερεών λιπαντικών σε μία επαφή επηρεάζουν ελάχιστα την αντίσταση διάβασης γιατί ο κύριος όγκος τους απομακρύνεται με το κλείσιμο του λυόμενου συνδέσμου και μένουν μόνο απλές στοιβάδες ατόμων, οι οποίες είναι αγώγιμες λόγω εκδήλωσης του φαινομένου σήραγγος. Στερεά κατάλοιπα όμως μαύρου χρώματος και μικρού πάχους (έως 10Å), που έχουν γίνει αναπόσπαστο μέρος της επιφάνειας της επαφής παρουσιάζουν στην πράξη μεγάλη αντίσταση και μπορούν να γίνουν αιτία αύξησης της αντίστασης διάβασης. Μία ερμηνεία μπορεί να δοθεί από την μείωση των δυνατοτήτων απαγωγής θερμότητας, που έχουν γενικά οι επιφάνειες μαύρου χρώματος, συγκριτικά προς επιφάνειες με άλλη απόχρωση. Οι επικαθίσεις αυτές είναι συνήθως άμορφες οργανικές ουσίες μεγάλου μοριακού βάρους, που προέρχονται από οργανικούς ατμούς, οι οποίοι παράγονται στους οργανικούς μονωτές που χρησιμοποιούνται στην στήριξη των ηλεκτρικών

επαφών. 0 πολυμερισμός είναι πολύ διαδεδομένος στους υδρογονάνθρακες και έχει επισημανθεί ότι πάρα πολλά μονωτικά υλικά παράγουν ατμούς κατά τον πολυμερισμό τους. Ορισμένα υλικά επαφών όπως το Pd, Pt, Ru, Mo και το Cr δρουν καταλυτικά για την εναπόθεση οργανικών ουσιών σε αυτά και άλλα. Όχι, όπως π.χ.: Cu, Fe, W, Ag και το Ni. Τέλος όταν σε μια επαφή δημιουργούνται τοπικά μικρές ηλεκτρικές εκκενώσεις τότε τα οργανικά στρώματα, που προαναφέρθηκαν, απανθρακώνονται, με αποτέλεσμα από τα λεπτά στρώματα άνθρακα, να διευκολύνεται η εκδήλωση ηλεκτρικών εκκενώσεων μεγαλύτερης ενέργειας.

Ο σχηματισμός γενικά των επικαθίσεων στις επαφές διέπεται από περίπλοκους μηχανισμούς, που δεν έχουν ερμηνευτεί πλήρως, παρά τις εκτεταμένες έρευνες. Στην εργασία αυτή γίνεται μια προσπάθεια διερεύνησης των παραπάνω επικαθίσεων σχετικά με τις δυνατότητες τους να άγουν το ηλεκτρικό ρεύμα.

1.5. Η εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος στις επαφές.

Σύμφωνα με την κλασική φυσική, επικαθίσεις πάχους λίγων Angstrom μονώνουν ηλεκτρικά τα δυο μέρη μιας επαφής. Αντίθετα όμως κατά την κβαντική θεώρηση τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας μπορούν να περάσουν λεπτά στρώματα μονωτικών υλικών ως κύματα De Broglie. Αυτή η δυνατότητα, που έχουν τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας να μπορούν να διαπεράσουν φράγματα δυναμικού τα οποία έχουν εισαχθεί από ένα λεπτό στρώμα μονωτικού υλικού, ονομάζεται φαινόμενο σήραγγος. Οι Sommerfeld και Bethe έκαναν πρώτοι μια θεωρητική προσέγγιση του θέματος για μερικά mV πτώσης τάσης στα ηλεκτρόδια. Αργότερα ο R. Holm επεξέτεινε την θεωρία αυτή για μεγαλύτερες τιμές της πτώσης τάσης από προηγουμένως. Η εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος εξαρτάται κατά κύριο λόγο από το πάχος s του μονωτικού στρώματος μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων και από την τιμή του φράγματος δυναμικού που εισάγει το παραπάνω λεπτό μονωτικό στρώμα. Αυτά τα δύο μεγέθη δεν είναι ποτέ ακριβώς γνωστά και οι διάφοροι

υπολογισμοί έχουν γίνει με απλουστευτικές παραδοχές. Σημασία σε μία επαφή φαίνεται ότι έχει η πυκνότητα ρεύματος, που συνεπάγεται η εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος σε αυτή. Το θέμα αυτό εξετάζεται παρακάτω.

Αν θεωρήσουμε μια επαφή με επίπεδες επιφάνειες από το ίδιο μέταλλο και με απόσταση s μεταξύ των δυο μερών της (λόγω των επικαθίσεων), τότε τα επίπεδα δυναμικού στην περιοχή της επαφής δίδονται στο σχήμα 1.5-1α. Τα επίπεδα Fermi των δυο μεταλλικών μερών της επαφής (E_f)συμπίπτουν, όταν δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού μεταξύ τους. Τα φράγματα δυναμικού στην επιφάνεια κάθε μέρους της επαφής επεκτείνονται στη μεταξύ τους απόσταση s και διαμορφώνουν το φράγμα δυναμικού μεταξύ των δύο ηλεκτροδίων. Σε περίπτωση που η απόσταση s είναι αρκετά μεγάλη, η μέγιστη τιμή του ύψους του φράγματος δυναμικού φ_0 της επαφής ισούται με το έργο εξόδου Φ του μετάλλου (οι μονάδες μέτρησης των οποίων δίνονται συνήθως σε eV ή σε V). Όταν το πλάτος s είναι μικρό τότε τα φράγματα δυναμικού στην επιφάνεια των δύο μεταλλικών μερών της επαφής αλληλεπιδρούν μεταξύ τους σε μικρότερες τιμές με αποτέλεσμα η μέγιστη τιμή του φράγματος δυναμικού της επαφής να γίνεται μικρότερη από το έργο εξόδου Φ ($\varphi_0<\Phi$). Για ένα ηλεκτρόνιο μάζας m με ταχύτητα v_x, το οποίο πλησιάζει το φράγμα δυναμικού του σχήματος 1.5-1α ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\frac{1}{2}mv_x^2 = q_e\varphi_x \qquad (1.5\text{-}1)$$

όπου φ_x το δυναμικό του ηλεκτρονίου και q_e το φορτίο του. Σε περίπτωση που $\varphi_x>\varphi_0$ τότε το ηλεκτρόνιο θα βρεθεί στο άλλο μέρος της επαφής, όπου και θα αποδώσει το περίσσευμα της ενέργειάς του υπό μορφή ακτινοβολίας. Αυτό είναι γνωστό ως θερμιονική εκπομπή. Εάν το $\varphi_x<\varphi_0$ τότε κατά την κλασική φυσική ανακλάται το ηλεκτρόνιο πάνω στο φράγμα. Σύμφωνα όμως με την κβαντική θεωρία υπάρχει μια πιθανότητα το παραπάνω ηλεκτρόνιο να περάσει το φράγμα δυναμικού και να βρεθεί στο άλλο μέρος της επαφής.

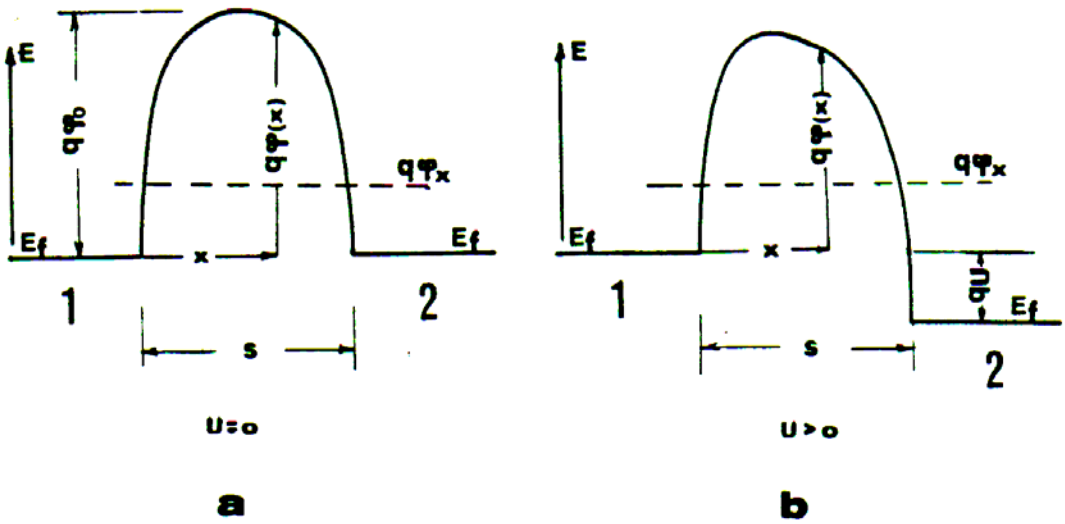
Αυτή η πιθανότητα εξαρτάται από έναν συντελεστή διάβασης $D(\varphi_x)$ για τον οποίο ισχύει η σχέση :

$$D(\varphi_x) = \exp\left[\frac{-4\pi}{h}\int_0^s \sqrt{2m[\varphi(x)-\varphi_x]}dx\right] \qquad (1.5\text{-}2)$$

όπου h η σταθερά του Planck και φ(x) η συνάρτηση του φράγματος δυναμικού της επαφής. Η παραπάνω σχέση βασίζεται στην κατά προσέγγιση λύση της εξίσωσης Schrödinger, όπως αυτή έγινε από τους Brillouin - Wentzel - Kramer.

Όταν το ηλεκτρόνιο διαπεράσει το φράγμα δυναμικού λόγω εκδήλωσης τον φαινομένου σήραγγος, τότε δεν χάνει την ενέργεια του (όπως συμβαίνει στην θερμιονική εκπομπή), αλλά αυτή παραμένει αμετάβλητη γιατί η συχνότητα de Broglie είναι σταθερά. Η ενέργεια όμως, που πιθανώς του δόθηκε από το πεδίο αποδίδεται στην άνοδο. Κατά την εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος, που προαναφέρθηκε, τα ηλεκτρόνια περνάνε το φράγμα δυναμικού από δεξιά προς αριστερά τόσο συχνά όσο και προς την αντίθετη διεύθυνση με αποτέλεσμα να μην μπορεί να παρατηρηθεί ροή ηλεκτρικού ρεύματος. Επισημαίνεται ότι η απόσταση s μεταξύ των δυο μερών της επαφής είναι συνήθως ένα λεπτό στρώμα οξειδίου του μετάλλου της επαφής, όπως αναφέρεται στην παράγραφο 1.5. Αν μεταξύ των δύο μερών της επαφής του σχήματος 1.5-1α υπάρχει μία διαφορά δυναμικού U, τότε όπως φαίνονται στο σχήμα 1.5-1b οι στάθμες Fermi διαφοροποιούνται μεταξύ τους κατά U, με αποτέλεσμα μια ροή ηλεκτρικού ρεύματος από την επαφή με το υψηλό δυναμικό προς την επαφή με το χαμηλό δυναμικό. Αυτό συμβαίνει γιατί το ρεύμα των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας, λόγω εκδήλωσης του φαινομένου σήραγγος, δεν είναι ίσο και κατά τις δύο διευθύνσεις με αποτέλεσμα η διαφορά του αριθμού των φορέων μεταξύ των δυο μερών της επαφής να μπορεί να μετρηθεί ως ηλεκτρικό ρεύμα. Από τις δύο σχέσεις 1.5-1 και 1.5-2 φαίνεται ότι μόνον η ταχύτητα του ηλεκτρονίου v_x, που είναι κάθετη στο φράγμα δυναμικού, λαμβάνεται υπ' όψιν στους υπολογισμούς

του συντελεστή διάβασης $D(\varphi_x)$ και επομένως και στον προσδιορισμό της πυκνότητας ρεύματος. Σε ένα καρτεσιανό σύστημα με συντεταγμένες x, y και z τα ηλεκτρόνια με υψηλές ταχύτητες v_y στη διεύθυνση y και v_z στη διεύθυνση z αλλά μικρή ταχύτητα v_x στη διεύθυνση x έχουν μικρή πιθανότητα να διαπεράσουν το φράγμα δυναμικού, αν και έχουν υψηλή συνολική ενέργεια.



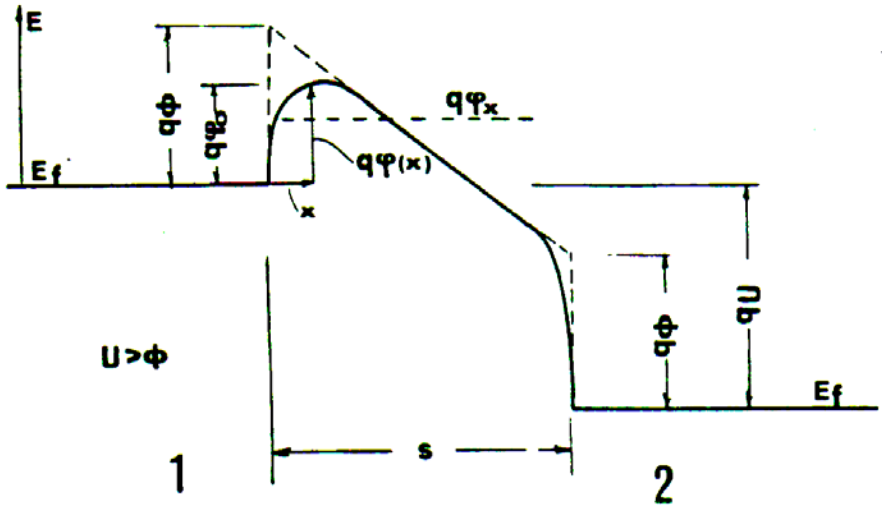
Σχήμα 1.5-1: Το φράγμα δυναμικού στο κενό s δύο επαφών από το ίδιο υλικό.
1 και 2: τα δύο μέρη της επαφής
α: χωρίς την επιβολή διαφοράς δυναμικού
b: με την επιβολή διαφοράς δυναμικού U

Στη βιβλιογραφία γίνεται διάκριση τριών περιπτώσεων εκδήλωσης του φαινομένου σήραγγος σε ένα σύστημα μέταλλο – μονωτή – μέταλλο (MIM) υπό την επίδραση συνεχούς τάσης.

- Η πρώτη περίπτωση αφορά πολύ μικρές τιμές της εφαρμοζόμενης τάσης U σε σχέση με το μέγιστο ύψος του φράγματος δυναμικού $\varphi_0 >> U > 0$. Το φαινόμενο θεωρείται ότι είναι ωμικό (η πυκνότητα ρεύματος J είναι ανάλογη της τάσης U).
- Στη δεύτερη περίπτωση η τιμή της εφαρμοζόμενης συνεχούς τάσης είναι μεγαλύτερη από προηγουμένως και ισχύει ότι $\varphi_0 > U$. Η πυκνότητα του

ρεύματος J αυξάνει μη γραμμικά σε σχέση με την τιμή της τάσης U.

- Η τρίτη περίπτωση (γνωστή από την βιβλιογραφία ως εκπομπή πεδίου) αφορά μεγαλύτερες τιμές της τάσης από προηγουμένως, υπό την προϋπόθεση ότι ισχύει $U>U_0$. Η πυκνότητα του ρεύματος J αυξάνει απότομα με την αύξηση της τάσης U στο σύστημα. Στο σχήμα 1.5-2 φαίνονται οι ενεργειακές στάθμες που αφορούν την περίπτωση αυτή. Παρατηρούμε ότι το μέγιστο ύψος του φράγματος δυναμικού φ_0 είναι αρκετά μικρότερο από το έργο εξόδου Φ. Σε αυτή την περίπτωση τα ηλεκτρόνια αγωγιμότητας μπορούν να μετακινούνται επάνω από φράγμα δυναμικού.



Σχήμα 1.5-2: Το φράγμα δυναμικού μεταξύ δύο ομοίων μεταλλικών ηλεκτροδίων που απέχουν μεταξύ τους κατά s για U>Φ.
1 και 2: τα δύο μέρη της επαφής

Ως ειδική αντίσταση σήραγγος ρ_T (tunnel resistivity) τον παραπάνω συστήματος των δυο ηλεκτροδίων έχει οριστεί το πηλίκο :

$$\rho_T = \frac{U}{J} \quad (\text{συνήθως σε } \Omega\text{m}^2) \qquad (1.5\text{-}3)$$

Το μέγεθος αυτό εξαρτάται από το πάχος s, το έργο εξόδου Φ του μετάλλου των ηλεκτροδίων (όταν πρόκειται για το ίδιο υλικό) και την σχετική διηλεκτρική σταθερά ε_r, των επικαθίσεων. Η τιμή ρ_T εξαρτάται επίσης από

την μορφή που έχει το φράγμα δυναμικού. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ισχύει γενικά:

$$\rho_T = f(s, \Phi, U, \varepsilon_r, \varphi(x)) \qquad (1.5\text{-}4)$$

Από τις σχέσεις 1.5-3 και 1.5-4 φαίνεται ότι για τον υπολογισμό της πυκνότητας ρεύματος J χρειάζεται να γίνει μια μαθηματική προσέγγιση για την συνάρτηση φ(x). Από τους ερευνητές, που ασχολήθηκαν με το θέμα, οι υπολογισμοί έγιναν με διάφορες παραδοχές. Κατά μία π.χ. προσέγγιση για μικρές τιμές του U και μεγάλο πάχος s θεωρείται η φ(x) ως τραπέζιο. Η προσέγγιση αυτή αν και αφορά χαμηλές θερμοκρασίες (T=0), δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα και σε θερμοκρασίες χώρου. Σε μία άλλη προσεγγιστική μέθοδο θεωρείται η φ(x) ως παραβολή. Στην προσέγγιση αυτή λαμβάνεται υπ' όψη η επίδραση της θερμοκρασίας, ανάλογα προς την οποία προκαλείται αύξηση της ενεργειακής στάθμης σημαντικού αριθμού ηλεκτρονίων πάνω από την στάθμη Fermi, γεγονός που βοηθά να διαπεράσουν οι φορείς αυτοί το φράγμα δυναμικού. Η παραπάνω προσέγγιση ενδείκνυται για μικρά πάχη s (τα μεγάλα πάχη επικαθίσεων δεν προσεγγίζονται ικανοποιητικά με παραβολή και είναι προτιμότερη η προσέγγιση τους με τραπέζιο).

Ο υπολογισμός της ειδικής αντίστασης σήραγγος επιχειρήθηκε από ερευνητές σε συνδυασμό με πειραματικά δεδομένα. Συνδυασμός αποτελεσμάτων υπολογισμών διαφόρων ερευνητών είναι το διάγραμμα $\log(\rho_T)=f(J,\varepsilon_r,\varphi_0,s)$ που παρουσιάζεται στο σχήμα 1.5-3. Στο διάγραμμα αυτό δίνεται η ειδική αντίσταση σήραγγος ρ_T σαν συνάρτηση της τάσης U για διαφορετικές τιμές του πάχους s, της σχετικής διηλεκτρικής σταθεράς er και του φράγματος δυναμικού φ_0.

1.6. Η φυσική διερεύνηση των φαινομένων μεταφοράς στις επαφές.

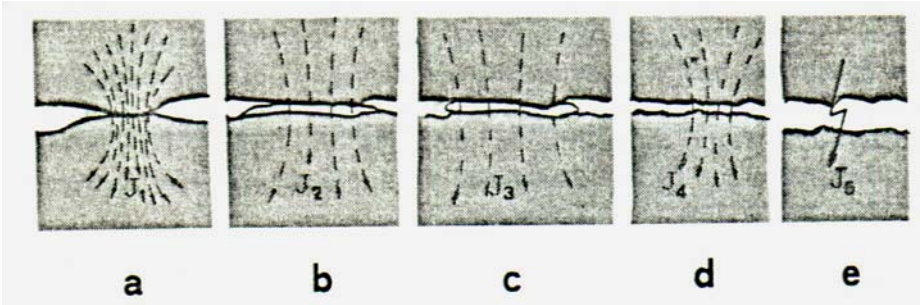
Η δοκιμή υπερθέρμανσης χρησιμοποιείται στην πράξη για τον προσδιορισμό του ονομαστικού ρεύματος των επαφών. Η μετρούμενη πτώση τάσης κατά μήκος των επαφών σχετίζεται με τα τεχνικά χαρακτηριστικά του λυομένου συνδέσμου καθώς επίσης και με την θερμοκρασία λειτουργίας του. Αν και η δοκιμή υπερθέρμανσης εφαρμόζεται για την τεχνικο-οικονομική μελέτη και τον έλεγχο των επαφών διακοπτών δεν δίνει επαρκείς πληροφορίες όσον αφορά την φυσική ερμηνεία φαινομένων που αναπτύσσονται κατά την μεταφορά των ηλεκτρικών φορέων μεταξύ των δύο μερών μιας επαφής.

Τύπος επαφής	Υλικό επαφών	Με θερμική καταπόνηση		Χωρίς θερμική καταπόνηση		Γραμμική παρεμβολή στις τιμές I* , ΔU*	
		I A	ΔU mV	I* A	ΔU* mV	I*' A	ΔU*' mV
αποζεύκτης 500V/100A	Άργυρος	37	19	44	21	37	17,6
αποζεύκτης 500V/100A	Χαλκός	26	13	36	16	26	11,5
αποζεύκτης 20kV/200A	Χαλκός	48	21	52	22	48	20,3
Ασφαλειοθήκη 20kV/100A	Ορείχαλκος	67	24	73	24	67	22,0

Πίνακας 1.6-1. Μετρήσεις σε επαφές εμπορίου που αφορούν τον προσδιορισμό τιμών ρεύματος και πτώσης τάσης πέραν των οποίων αναπτύσσεται μη γραμμική συμπεριφορά.

Οι φυσικές ερμηνείες που αφορούν τα προαναφερθέντα φαινόμενα σχετίζονται άμεσα με την μεταφορά των ηλεκτρικών φορέων μέσα από τις διάφορες περιοχές επαφής (A_C), οι οποίες διαπερνώνται από υψηλές πυκνότητες ρεύματος. Η παρατηρούμενη μείωση της οριακής (κατωφλικής) τιμής της τάσης, για την ανάπτυξη μη γραμμικών φαινομένων στον πίνακα 1.6-1, πριν και μετά τη γήρανση των επαφών φαινομενικά δεν θα μπορούσε να αποδοθεί σε τρόπους ηλεκτρονικής αγωγιμότητας διαμέσου λεπτών

στρωμάτων οξειδίων, και γενικά επικαθίσεων. Αυτό γιατί μετά την γήρανση των επαφών το πάχος του οξειδίου αποκτά μεγαλύτερο εύρος και συνεπώς χρειάζεται μεγαλύτερη πεδιακή ένταση προκειμένου να υπάρξει ανάλογη πυκνότητα ρεύματος. Για να γίνει όμως μία λεπτομερής περιγραφή προκειμένου να εξαχθούν ορισμένα συμπεράσματα, απαιτούνται όμοιες εντάσεις ρεύματος και για τις δύο περιπτώσεις (πριν και μετά την γήρανση). Για μια δομή Μέταλλο – Μονωτής – Μέταλλο (MIM) η παραπάνω διαπίστωση συμφωνεί με την αναλυτική έκφραση για την ένταση ρεύματος (φαινομένου σήραγγος) η οποία είναι μη γραμμική συνάρτηση αμφοτέρων των μεταβλητών, δηλαδή και της πυκνότητας ρεύματος και του επιβαλλομένου δυναμικού ΔU.



Σχήμα 1.6-1. Μακροσκοπική απεικόνιση δύο μεταλλικών ηλεκτρικών επαφών. Μπορούμε να παρατηρήσουμε τις ακόλουθες μικροδομές.

a) Ιδεατή επαφή μέταλλο – μέταλλο (M – M).
b) Μικροδομή μέταλλο – μονωτής – μέταλλο (MIM)
c) Μικροδομή μέταλλο – οξείδιο – μέταλλο (MOM)
d) e)Μέταλλο – περιβάλλον υγρό ή αέριο μονωτικό – μέταλλο (MGM). Αυτές οι περιοχές μπορούν να γίνουν αγώγιμες πέραν μίας κρίσιμης τιμής του τοπικού ηλεκτρικού πεδίου.

J_1, J_2, J_3, J_4, J_5: πυκνότητες ρεύματος.

Με βασική αιτία την ανομοιομορφία στην επιφάνεια των επαφών (η οποία μπορεί να είναι μορφολογικής ή ηλεκτροχημικής φύσεως) το πεδίο μεταξύ των επαφών ενδέχεται να παρουσιάζει ανομοιογένειες. Έχει

διαπιστωθεί ότι ένα μικρό μέρος της φαινόμενης επιφάνειας της επαφής A_α άγει το ηλεκτρικό ρεύμα. Οι γραμμές ροής του ηλεκτρικού ρεύματος υποχρεώνονται να διέλθουν πολύ κοντά η μια στην άλλη ώστε να περάσουν από τις μικρές αγώγιμες περιοχές (οι οποίες απαρτίζουν την επιφάνεια A_C) οι οποίες είναι στατιστικά κατανεμημένες στην επιφάνεια A_α και οι οποίες συχνά καλύπτονται από στρώμα επικαθίσεων. Το ηλεκτρικό πεδίο ποικίλλει στην περιοχή της επαφής αφού και οι δύο επιφάνειες διαπερνώνται επιλεκτικά από υψηλή πυκνότητα ρεύματος και σύμφωνα με τον νόμο του Ohm θα πρέπει να υπάρχει επιφανειακή πτώση τάσης μεταξύ των σημείων διάβασης του ηλεκτρικού ρεύματος. Συνεπώς, η διαχωριστική επιφάνεια των δυο μεταλλικών μερών παύει να είναι ισοδυναμική. Εκτός τούτου, η παρουσία ακινήτων φορτίων ανά την επαφή (όπως: σταθερά, παγιδευμένα και φορτία ιόντων) εισάγουν κατοπτρικά ηλεκτρικά φορτία τα οποία κατανέμονται σε βάθος Thomas Fermi από την επιφάνεια. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτουν μεταβολές δυναμικού στην επιφάνεια επαφής ακόμα και όταν δεν εφαρμοστεί εξωτερική τάση, ένα φαινόμενο παρόμοιο με αυτό της εξάντλησης–αναστροφής (depletion–inversion) των ημιαγώγιμων επιφανειών.

Το σχήμα 1.6-1 παρουσιάζει μακροσκοπικά τα δύο μέρη μίας επαφής. Οι περιοχές M – M οι οποίες εφάπτονται ιδανικά χωρίς την παρεμβολή άλλου μέσου (a) είναι διανεμημένες τυχαία ανάμεσα σε περιοχές οι οποίες άγουν δια του φαινομένου σήραγγος (b) και (c). Οι περιοχές (b) και (c) ορίζονται από την στατιστική κατανομή της ανάπτυξης οξειδίων του μετάλλου στην περιοχή της επαφής και συμπεριφέρονται σαν λεπτά υμένια υλικών τα οποία πρέπει να τα διαπεράσουν τα ηλεκτρόνια προκειμένου να μεταφερθούν μέσα από την επαφή.

Οι περιοχές που άγουν δια του φαινομένου σήραγγος και έχουν πάχος της τάξης των 50Å ή και λιγότερο, αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως μικροδομές μέταλλο – οξείδιο – μέταλλο (MOM) ή μέταλλο – μονωτής –

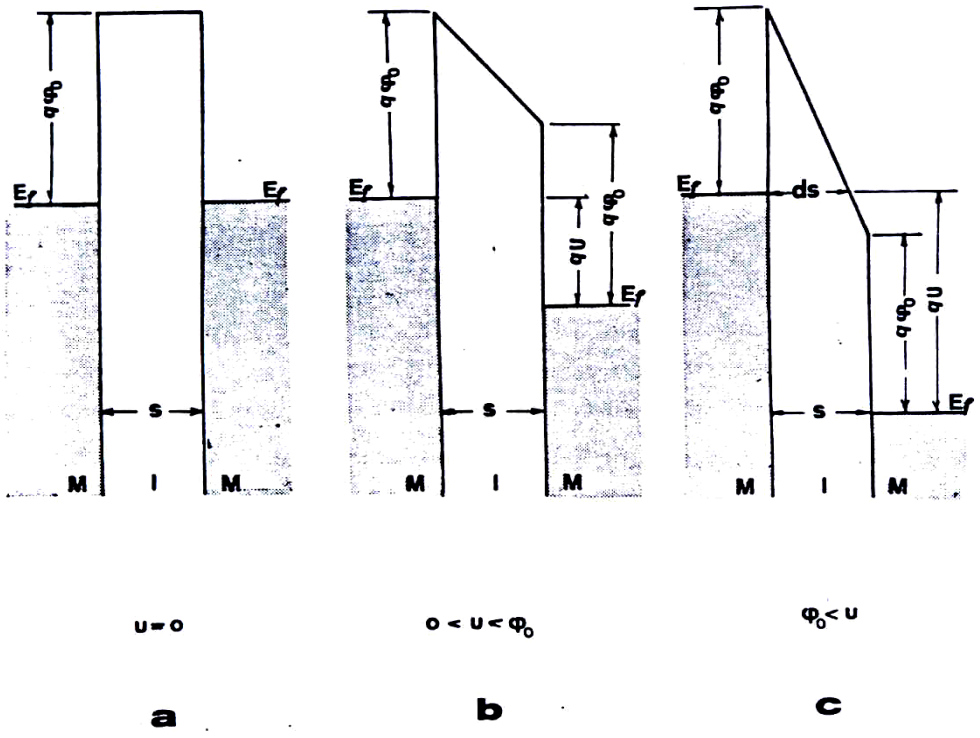
μέταλλο (MIM). Έχει παρατηρηθεί ότι οι επαφές των μετάλλων καλύπτονται αμέσως από λεπτό στρώμα οξειδίου (ή άλλων χημικών ενώσεων) πάχους 10÷50Å μόλις έρθουν σε επαφή με τον ατμοσφαιρικό αέρα. Όταν το πάχος του οξειδίου είναι μικρότερο από τα 50Å το φαινόμενο σήραγγος λαμβάνει χώρα ακόμα και για φαινομενικά μικρές τιμές πτώσης τάσης (εντός των προδιαγραφών, δηλαδή <55mV) αφού το ηλεκτρικό πεδίο στις μικροδομές μπορεί να φτάσει μέχρι 1MV/cm. Αυτή η υψηλή τιμή πεδίου αναμένεται να αναπτύσσεται στις προαναφερθείσες μικροδομές των επαφών αφού σε πειραματικά αποτελέσματα κατά τη βιβλιογραφία παρατηρήθηκε ότι η πτώση τάσης κατά μήκος των επαφών ήταν της τάξης των 50mV (σχήμα 1.5-1). Αυτή η πτώση τάσης δημιουργεί πεδία της τάξης των 0,1MV/cm έως 0,5MV/cm ή και περισσότερο (ανάλογα με το πάχος των επικαθίσεων) τα οποία έχουν την δυνατότητα να δημιουργήσουν ακόμη και συνθήκες εκπομπής πεδίου για την μεταφορά των φορέων μεταξύ των συνδέσμων. Οι διάφορες θέσεις στην επαφή οι οποίες εγχέουν τα φορτία είναι τυχαία κατανεμημένες μέσα στην φαινόμενη περιοχή επαφής και ενεργοποιούνται μόλις το τοπικό πεδίο αναπτυχθεί σε τιμές 0,lMV/cm περίπου. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να αναφερθεί ότι αν και η κλασσική θεωρία εκπομπής πεδίου, όπως προτάθηκε από τους Fowler και Nordheim, προβλέπει πεδία της τάξεως των 40MV/cm, στην πράξη τα απαιτούμενα εφαρμοζόμενα πεδία είναι σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία κατά πολύ μικρότερα. Αυτό έχει αποδοθεί σε ανομοιογένειες του πεδίου στην επιφάνεια των υλικών και την ύπαρξη παγιδευμένων φορτίων τα οποία δημιουργούν τοπικές συνθήκες επαύξησης του πεδίου.

Καθώς η ροή του ρεύματος διαμέσου των επαφών αυξάνει, τα φαινόμενα της επιφανειακής σκέδασης αρχίζουν να κυριαρχούν μόλις η διάβαση του φορτίου διαμέσου των ωμικών κέντρων (spots) φτάσει στον κορεσμό. Τότε η διαφορά δυναμικού κατά μήκος των μικροδομών MIM, MOM και MGM αυξάνει ραγδαία. Για μεγαλύτερες τιμές από μια κρίσιμη τιμή πεδίου,

περιοχές της επαφής οι οποίες έχουν ένα σημαντικό πάχος επικαθίσεων μπορούν και αυτές να άγουν. Επίσης περιοχές της επαφής οι οποίες δεν έχουν επικαθίσεις αλλά χωρίζονται από διάκενο (στο οποίο έχει εισχωρήσει το υγρό ή αέριο μονωτικό μέσο που περιβάλλει την επαφή όπως αέρας, λάδι, SF_6, κλπ) όπως φαίνεται στο σχήμα 1.6-1 (d) και (e) μπορούν επίσης να καταστούν αγώγιμες μόλις το πεδίο στα σημεία αυτά γίνει ικανό να εγχέει ηλεκτρόνια (εκπομπή πεδίου). Ιδεατά αυτές οι περιοχές θα έπρεπε να γίνουν ενεργές για τιμές της έντασης ρεύματος πέρα από το ονομαστικό ρεύμα της κάθε επαφής. Τον κύριο παράγοντα αποτελεί το γεγονός ότι τα ηλεκτρόνια αυτά (της εκπομπής πεδίου) αποδίδουν την επιπλέον ενέργεια τους μόλις προσκρούσουν στο θετικό ηλεκτρόδιο σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα (10^{-12} sec τυπικά). Τέτοια φαινόμενα αυξάνουν έντονα την θερμοκρασία των επαφών, ιονίζουν το διάκενο και αυξάνουν δραστικά την αγωγιμότητα, οδηγώντας στην ανεπιθύμητη δημιουργία τόξων.

Τα ηλεκτρόνια του φαινομένου σήραγγος μόλις μεταφερθούν στο άλλο μέρος του λυόμενου συνδέσμου αποδίδουν επιφανειακούς ρυθμούς ενεργειακών ταλαντώσεων που χαρακτηρίζονται από μη συγκεκριμένα ενεργειακά όρια (Surface plasmon polaritons). Οι ρυθμοί αυτοί με την παρουσία της επιφανειακής τραχύτητας μπορούν να μετατραπούν σε φωτόνιο. Η ενέργεια των φωτονίων εξαρτάται από την ενέργεια των ενεργειακών ταλαντώσεων που τα δημιούργησαν. Η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποκτηθεί από ένα ηλεκτρόνιο που διαπερνά το φράγμα δυναμικού στο φαινόμενο σήραγγος ισοδυναμεί με το φορτίο του ηλεκτρονίου επί την διαφορά δυναμικού κατά μήκος του φράγματος (δηλαδή την τοπική πτώση τάσης μεταξύ των δύο μεταλλικών ηλεκτροδίων). Σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία, η πτώση τάσης στις μικροδομές που άγουν, έχει την ίδια τιμή με την συνολική πτώση τάσης κατά μήκος των επαφών όταν παρατηρούνται τα μη γραμμικά φαινόμενα και κατά την διάρκεια λειτουργίας της επαφής τα παραγόμενα φωτόνια έχουν μέση

ενέργεια η οποία αντιστοιχεί στην υπέρυθρη περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος. Αυτό συνεπάγεται φαινόμενα αυτοθέρμανσης (self heating) κατά την λειτουργία των επαφών. Πτώση τάσης μεγαλύτερη από αυτή που προαναφέρθηκε (σε περιπτώσεις λειτουργίας της επαφής εκτός των προδιαγραφών) συνεπάγεται κατά τη βιβλιογραφία εκπομπή ακτινοβολίας που επεκτείνεται μέχρι τις υπεριώδεις ακτίνες. Γενικά κάθε απόκλιση από τη γραμμικότητα έχει αποδοθεί στην επαύξηση του πεδίου και στην παράλληλη παρουσία των μικροδομών MIM, MOM και MGM οι οποίες μπορούν να καταστούν αγώγιμες πέραν της κατωφλικής πεδιακής τιμής, διαμορφώνοντας την ενεργό διατομή της επαφής, A_C, ανάλογα με την τοπική πεδιακή ένταση. Στην περίπτωση αυτή παρουσιάζονται και φαινόμενα διαφοράς φάσεως τα οποία οφείλονται στην χωρητική φύση των μικροδομών που ενεργοποιήθηκαν.



Σχήμα 1.6-2: Διάγραμμα δυναμικής ενέργειας των ηλεκτρονίων για συμμετρική δομή MIM και για διαφορετικές τιμές δυναμικού. Το πάχος s δεν επιτρέπει το φαινόμενο σήραγγος για μικρή διαφορά δυναμικού στα

ηλεκτρόδια.

(α) U=0. Η διαφορά δυναμικού είναι μηδενική. Η επαφή δεν άγει.
(b) $0<U<\varphi_0$. Δεν έχει επιτευχθεί η αναγκαία διαφορά δυναμικού για την εκδήλωση του φαινομένου. Τυχόν ροή ρεύματος οφείλεται σε θερμιονική εκπομπή πάνω από το φράγμα δυναμικού.
(c) $\varphi_0<U$. Η επαφή άγει δια του φαινομένου σήραγγος διότι το πάχος s έχει μειωθεί σε ds.

Ειδικότερα η συμπεριφορά μιας μικροδομής MIM η οποία άγει πέρα από ένα κατώφλι εφαρμοζόμενου πεδίου, μπορεί να γίνει κατανοητή με την μελέτη του ενεργειακού διαγράμματος των εφαπτόμενων περιοχών κατά τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Συμμετρική μικροδομή MIM κάτω από μηδενική διαφορά δυναμικού (Σχήμα 1.6-2α). Το σύστημα δεν άγει λόγω του μεγάλου πάχους s (Σχήμα 1.6-2b).
- Εφαρμογή μέτριας τιμής πεδίου. Το σύστημα δεν άγει ακόμα λόγω του μεγάλου πάχους s (Σχήμα 1.6-2b)
- Εφαρμογή υψηλού ηλεκτρικού πεδίου. Η μονωτική ικανότητα (πάχος s) μεταξύ των ηλεκτροδίων έχει μειωθεί και η μικροδομή άγει (Σχήμα 1.6-2c)

Η κλασική μαθηματική προσέγγιση για μία μεμονωμένη δομή MIM εξετάζει την πυκνότητα του ρεύματος σήραγγος μέσα από ένα φράγμα δυναμικού με κλασσικά όρια x_1, x_2 κατά μήκος του άξονα των x. Η πυκνότητα ρεύματος J για δύο αγώγιμες περιοχές (ηλεκτρόδια) που διαχωρίζονται από ένα λεπτό φράγμα δυναμικού περιγράφεται από την ακόλουθη σχέση, η οποία ισχύει για 0 K :

$$J = J_0\left[\overline{\varphi}\cdot\exp\left(-B\sqrt{\overline{\varphi}}\right)-\left(\overline{\varphi}+U\right)\cdot\exp\left(-B\sqrt{\overline{\varphi}+U}\right)\right] \qquad (1.6\text{-}1)$$

όπου $J_0 = \dfrac{q^2}{2\pi h(ds)^2}$ (1.6-2)

$$B = \frac{4 \cdot \pi \cdot ds \cdot \sqrt{2mq}}{h} \qquad (1.6\text{-}3)$$

h είναι η σταθερά του Planck και m η μάζα του ηλεκτρονίου.

Οι παράγοντες οι οποίοι έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι το πλάτος του φράγματος δυναμικού, $ds=x_2-x_1$ το μέσον ύψος του φράγματος πάνω από τη στάθμη Fermi φ, και ο τρόπος που τα παραπάνω μεγέθη αλλάζουν με την επιβολή του ηλεκτρικού πεδίου. Για την περίπτωση της μηδενικής διαφοράς δυναμικού (σχήμα 1.6-2α) οι συνθήκες που απαγορεύουν την εκδήλωση φαινομένου σήραγγος είναι το σχετικά μεγάλο πάχος του στρώματος των επικαθίσεων (s). Το μέσο ύψος του φράγματος δυναμικού ($\varphi=\varphi_0$) προσδιορίζεται από το έργο εξόδου του μετάλλου και την σχετική θέση των επιπέδων Fermi.

Για μια πτώση τάσης μέσου μεγέθους κατά μήκος του φράγματος (διεύθυνση x) οπότε ισχύει (σχήμα 1.6-2b):

$$0<U<\varphi_0 \qquad (1.6\text{-}4)$$

εξακολουθούν να ισχύουν οι απαγορευτικές συνθήκες καθ' όσον το μέσο ύψος του φράγματος δυναμικού έχει ελάχιστα μειωθεί, σύμφωνα με την σχέση :

$$\overline{\varphi} = \varphi_0 - U/2 \qquad (1.6\text{-}5)$$

Εάν υπάρξει ροή φορέων, αυτή έχει αποδοθεί μόνο σε θερμιονική εκπομπή πάνω από το φράγμα δυναμικού.

Όταν η διαφορά δυναμικού έχει πλέον αυξηθεί περισσότερο και ικανοποιείται η σχέση (σχήμα 1.6-2c):

$$U \geq \varphi_0 \qquad (1.6\text{-}6)$$

το μέσο ύψος του φράγματος γίνεται:

$$\overline{\varphi} \leq \varphi_0/2 \qquad (1.6\text{-}7)$$

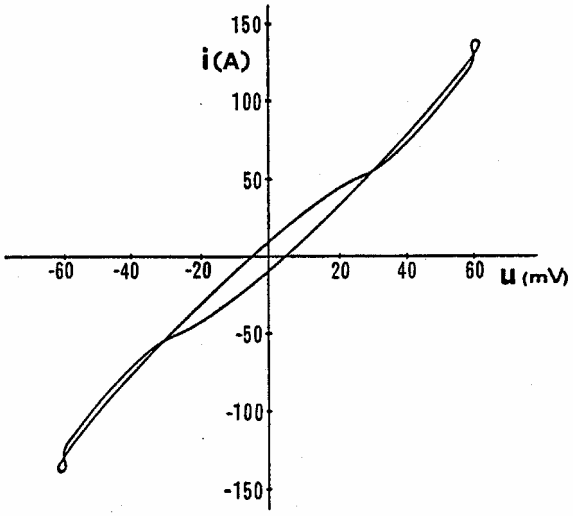
και το πλάτος του φράγματος δυναμικού έχει μειωθεί σημαντικά, και δίνεται από τη σχέση:

$$ds = s \cdot \varphi_0 / U \qquad (1.6\text{-}8)$$

Σύμφωνα με τα ανωτέρω όταν το φράγμα δυναμικού γίνει αρκετά λεπτό ώστε να επιτρέπει την εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος η αντίσταση στην διάβαση των ηλεκτρονίων μειώνεται κατά αρκετές τάξεις μεγέθους οπότε το ρεύμα αυξάνεται δραστικά. Τελικά, όταν η πτώση τάσης κατά μήκος του φράγματος γίνει (όπου E_F είναι η ενέργεια Fermi) :

$$U > \varphi_0 + E_F / q \qquad (1.6\text{-}9)$$

η σχέση (1.6-1) τείνει στην γνωστή σχέση των Fowler – Nordheim. Πρόσφατες πειραματικές εργασίες της βιβλιογραφίας, που αφορούν μικροδομές MOM απέδειξαν ότι η πτώση τάσης κατά μήκος του φράγματος δυναμικού προσδιορίζει κατά κύριο λόγο το χρώμα, του εκπεμπόμενου φωτός όταν η μικροδομή MOM άγει.



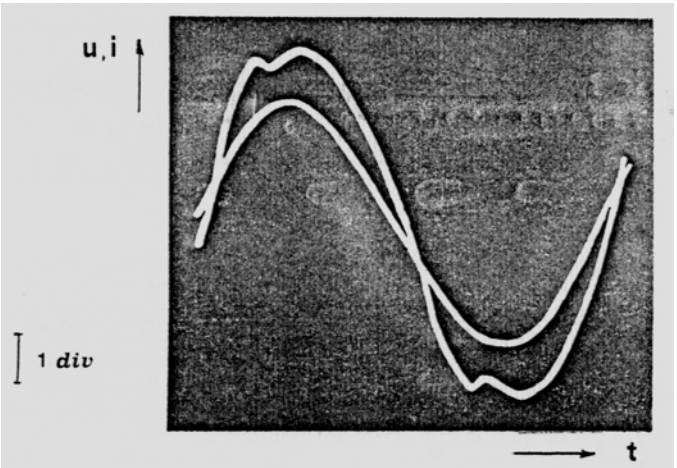
Σχήμα 1.6-3: Χαρακτηριστική ρεύματος – τάσης σε ένα αποζεύκτη 500V/100A με επαφές από χαλκό για μια περίοδο λειτουργίας.

Ενεργός τιμή του ρεύματος : 100A
Δύναμη σύσφιξης επαφών : 200p
u : στιγμιαία τιμή της τάσης.
i : στιγμιαία τιμή του ρεύματος

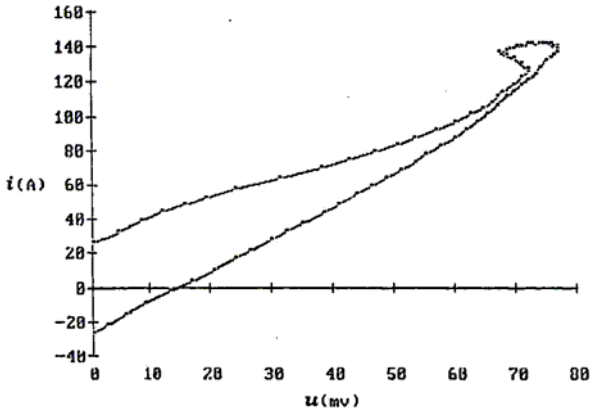
Ειδικά μία ηλεκτρική επαφή των πρακτικών εφαρμογών σύμφωνα με τη

βιβλιογραφία παρουσιάζει περιοχές (spots) στις οποίες η αγωγή ρεύματος γίνεται δια του φαινομένου σήραγγος και οι οποίες είναι τυχαία κατανεμημένες στην φαινόμενη επιφάνεια της επαφής. Οι μικροδομές MIM δημιουργούνται από τις επικαθίσεις στην μεταλλική επιφάνεια, οι οποίες επιφέρουν φράγματα δυναμικού, των οποίων το πάχος και το ύψος ποικίλει. Η επίδραση του μη ομοιόμορφου πάχους των διηλεκτρικών στρωμάτων των επαφών στην πυκνότητα τον ρεύματος δια μέσου περιοχών που άγουν με το φαινόμενο σήραγγος, καθώς και άλλων που παρουσιάζουν χωρητικότητα, διερευνήθηκε θεωρητικά από τον Hurysch. Γενικά μία εις βάθος φυσική προσέγγιση απαιτεί την εξέταση της ροής θερμών ηλεκτρονίων σε μία ανομοιογενή κατανομή πεδίου.

Οι μη γραμμικές χαρακτηριστικές που φαίνονται στα σχήματα 1.6-3 και 1.6-4 έχουν αποδοθεί κατά τη βιβλιογραφία στα φαινόμενα μεταφοράς φορτίου διαμέσου λεπτών μονωτικών στρωμάτων (πρωτεύον φαινόμενο), και παρατηρήθηκαν σε μια περίοδο 50Hz.



α)



β)

Σχήμα 1.6-4:

α) Τυπικό παλμογράφημα τάσης ρεύματος στις επαφές ενός αποζεύκτη 500V/100A με επάργυρες επαφές από χαλκό ο οποίος λειτουργεί υπό ονομαστικό ρεύμα 100A. Κλίμακα τάσης 20mV/div, κλίμακα ρεύματος 60A/div, κλίμακα χρόνου 2ms/div.

β) Χαρακτηριστική ρεύματος – τάσης του παραπάνω παλμογραφήματος για μία ημιπερίοδο (50Hz) λειτουργίας.

Δύναμη σύσφιξης των επαφών : 400p.

1.7. Οι επαφές σαν ένα μη γραμμικό δυναμικό σύστημα

Η μη γραμμική συμπεριφορά των ηλεκτρικών επαφών σύμφωνα με τη βιβλιογραφία εξηγείται λαμβάνοντας υπ' όψιν τις ακόλουθες παραμέτρους συνολικά ή μέρος από αυτές:

- Τις μικροδομές MM, MIM, MOM και MOM συνδεδεμένες παράλληλα μεταξύ τους (§1.6).
- Την στατιστική φύση των μικροδομών των οξειδίων στην φαινόμενη επιφάνεια της επαφής, δηλαδή τις μικροδομές MOM και την δράση του φαινομένου σήραγγος.
- Την εκπομπή πεδίου στις προηγούμενες μικροδομές.
- Την ανάπτυξη πέρα από ένα όριο, ενός μηχανισμού σκέδασης (π.χ. σκέδαση στην επιφάνεια), ο οποίος θα μπορούσε πιθανώς να προκαλέσει απρόσμενες διακυμάνσεις της ειδικής αντίστασης διάβασης της επαφής, με αποτέλεσμα χαοτικά φαινόμενα.
- Την πιθανή μαγνητική φύση των επικαθίσεων στην επαφή και γύρω από αυτή, οι οποίες θα έφταναν στον κόρο όταν το τοπικό μαγνητικό πεδίο περάσει μία συγκεκριμένη τιμή.

Όπως και άλλα κυκλώματα οι επαφές οι οποίες λειτουργούν κάτω από υψηλούς ρυθμού έγχυσης φορτίου έχουν μοντελοποιηθεί από μία διαφορική εξίσωση σύμφωνα με τη βιβλιογραφία. Αυτή προσδιορίζει την συμπεριφορά των χαρακτηριστικών ποσοτήτων (αγνώστων) όπως το ρεύμα και η τάση σε συνάρτηση με τον χρόνο. Εξ αιτίας της μη γραμμικής φύσης ενός τουλάχιστον στοιχείου του κυκλώματος, ως ανωτέρω ανεφέρθη, επαφές που λειτουργούν κάτω από υψηλούς ρυθμούς έγχυσης φορτίου εκλαμβάνονται ως μη γραμμικά δυναμικά συστήματα. Τέτοια συστήματα μπορούν να επιδεικνύουν διαφορετική απόκριση ανάλογα με τις αρχικές τους συνθήκες. Μπορούν ακόμα να περνούν από την μία κατάσταση στην άλλη με αφορμή

μία μικρή αλλαγή σε μία από τις παραμέτρους τους. Το απλούστερο μη γραμμικό δυναμικό κύκλωμα που παρουσιάζεται στη σχετική βιβλιογραφία για την περίπτωση των ηλεκτρικών επαφών που δεν έχουν ισχύ διακοπής, όταν λειτουργούν σε υψηλή πυκνότητα ρεύματος, αποτελείται από μία πηγή ημιτονοειδούς τάσης, μία χωρητικότητα προερχομένη από την παρουσία επιφανειακών οξειδίων και γενικά επικαθίσεων στις επαφές και μία μη γραμμική αντίσταση σε συνδυασμό με μία επαγωγή που να προσομοιώνει την έγχυση φορτίων διαμέσου μικροεπαφών (που έχουν ενεργοποιηθεί) και οι οποίες είναι τυχαία κατανεμημένες στην φαινόμενη επιφάνεια της επαφής. Όλα τα παραπάνω στοιχεία είναι συνδεδεμένα σε σειρά, και μόνον ο πυκνωτής παράλληλα.

Εάν η καμπύλη κόρου (ρεύμα σαν συνάρτηση της μαγνητικής ροής) της επαγωγής αποδίδεται από μία κυβική σχέση, τότε η διαφορική εξίσωση δευτέρου βαθμού που αποδίδει το σύστημα είναι του ακόλουθου τύπου :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + x^3 = b\cos(t) \qquad (1.7\text{-}1)$$

όπου η παράμετρος b χαρακτηρίζει την πηγή τάσης και η παράμετρος k τις απώλειες της αντιστάσεως στο κύκλωμα. Για ορισμένες τιμές των παραμέτρων b και k οι επαφές χωρίς ισχύ διακοπής έχουν επιδείξει κατά τη βιβλιογραφία, χαοτικά φαινόμενα ικανά να εισάγουν μη προβλέψιμη συμπεριφορά του δυναμικού συστήματος μετά από μακρά λειτουργία.

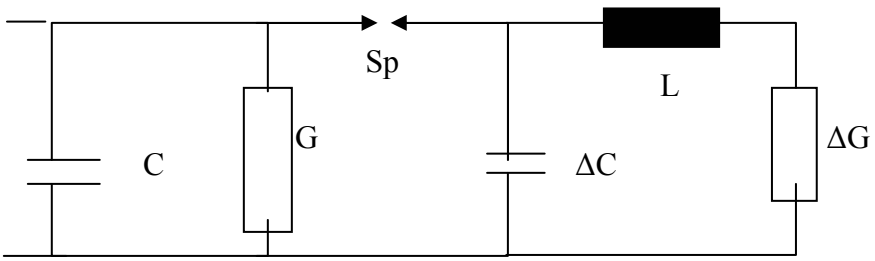
Για λόγους καλύτερης κατανόησης, η συμπεριφορά των δυναμικών συστημάτων συνήθως παρατηρείται σε διάγραμμα ενός φασικού χώρου. Για την κάθε στιγμή η κατάσταση λειτουργίας αντιστοιχεί σε ένα σημείο που έχει συντεταγμένες τις μεταβλητές που το προσδιορίζουν (διέγερση – απόκριση συστήματος). Σε αυτό το διάγραμμα η απόκριση του συστήματος, όταν αυτό ενεργοποιείται από μία εξωτερική πηγή δείχνεται από μία τροχιά σημείων (τουλάχιστον για ένα κλασικό φυσικό σύστημα). Στην περίπτωση ενός συστήματος που ενεργοποιείται από μία περιοδική πηγή, η απόκριση του

συστήματος είναι γενικά περιοδική, και η αντίστοιχη τροχιά των προαναφερθέντων σημείων είναι μία κλειστή καμπύλη. Συστήματα που παρουσιάζουν συνολικά τυχαία συμπεριφορά τείνουν να γεμίσουν το σύνολο του χώρου παρατήρησης του διαγράμματος από σημεία που παρουσιάζουν την κατάσταση μετά από κάποιο χρόνο λειτουργίας. Εξάλλου στην περίπτωση των συστημάτων με χαοτική συμπεριφορά οι τροχιές των σημείων περιβάλλονται από συγκεκριμένες περιβάλλουσες (όρια) με περίπλοκη γεωμετρία, γνωστές στη διεθνή βιβλιογραφία ως "strange attractors". Σε μαθηματικούς όρους είναι αντικείμενα φραγής που χαρακτηρίζονται από μη ακέραιες ευκλείδειες διαστάσεις. Η μαθηματική θεωρία της διστάθειας (bifurcation theory) έδωσε τα απαραίτητα εργαλεία προκειμένου να μελετηθεί και να κατανοηθεί η απόκριση αυτών των συστημάτων.

Τα διαγράμματα διστάθειας βοηθούν στην απεικόνιση των σταθερών και ασταθών καταστάσεων μη γραμμικών δυναμικών συστημάτων με πολλά σημεία λειτουργίας (σταθερότητας). Στην προκειμένη περίπτωση τα διαγράμματα της σχετικής βιβλιογραφίας παρουσιάζουν μία παράμετρο διέγερσης του κυκλώματος (το ρεύμα της πηγής) και μία παράμετρο απόκρισης που χαρακτηρίζει την επαφή, την πτώση τάσης σε έναν κύκλο 50Hz. Η ανάπτυξη της διστάθειας μπορεί να διερευνηθεί συστηματικά με την μεταβολή μιας ακόμα φυσικής παραμέτρου. Στην περίπτωση των επαφών τέτοιες παράμετροι είναι κατά τη βιβλιογραφία, η δύναμη σύσφιξης, ή η αναπτυσσόμενη θερμοκρασία. Σαν μία γενική παρατήρηση, έχει λεχθεί ότι για μία δεδομένη ένταση ρεύματος υψηλότερες τιμές για την δύναμη σύσφιξης των επαφών τείνουν να αποκαταστήσουν γραμμική συμπεριφορά παρά το γεγονός ότι η πολυστάθεια είναι προφανής κατά τις μέγιστες τιμές ρεύματος σε όλες τις περιπτώσεις.

1.8. Ένα ισοδύναμο κύκλωμα για την ερμηνεία των μη γραμμικών φαινομένων στις επαφές.

Ένα ισοδύναμο κύκλωμα που κατά τη βιβλιογραφία ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις δίνεται στο σχήμα 1.8-1. Πρόκειται για μία συμπλήρωση του ισοδύναμου κυκλώματος των μερικών εκκενώσεων κατά Gemant και Philipoff, όπου όμως η τιμή του ρεύματος έχει σημασία για την εκδήλωση των επιμέρους φαινομένων. Οι τιμές C και G εκφράζουν την ιδανική συμπεριφορά της επαφής (αντίσταση στένωσης και χωρητική συμπεριφορά). Για τιμές ρεύματος (μικρότερες του ονομαστικού) οι οποίες έχουν την ικανότητα να δημιουργήσουν ισχυρά τοπικά πεδία στις μικροδομές MIM, MOM και MOM διασπάται ο σπινθηριστής Sp και στο κύκλωμα εισάγεται ο πυκνωτής ΔC, η μη γραμμική αγωγιμότητα ΔG, και πιθανώς η επαγωγή L. Σε συνδυασμό αυτά τα στοιχεία είναι ένα απλό μη γραμμικό δυναμικό σύστημα το οποίο μπορεί να εμφανίσει αρνητική διαφορική αντίσταση (NDR).



Σχήμα 1.8-1. Το προτεινόμενο ισοδύναμο κύκλωμα.

C: Πυκνωτής που αποδίδει την χωρητική συμπεριφορά της επαφής

G: Η γραμμική αγωγιμότητα στένωσης

Sp: Σπινθηριστής

ΔC: Η αύξηση της χωρητικής συμπεριφοράς αφού διασπασθεί η σπινθηριστής Sp

ΔG:Η μη γραμμική αγωγιμότητα των επικαθίσεων

L: Επαγωγή που αποδίδει την πιθανή επαγωγική συμπεριφορά επαφών, την εκδήλωση του φαινομένου σήραγγος καθώς και την πιθανή εκδήλωση της αρνητικής διαφορικής αντίστασης.

2. ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Στην εργασία αυτή επιχειρείται να προσομοιωθεί με κατάλληλο μαθηματικό μοντέλο, το θερμικό φαινόμενο το οποίο εκδηλώνεται σε ένα σύστημα δυο όμοιων αγωγών, μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένας ηλεκτρικός σύνδεσμος για ζεύξη και απόζευξη του κυκλώματος. Ο ηλεκτρικός σύνδεσμος είναι μη αμελητέων διαστάσεων και καθορίζεται από υπολογίσιμες ποσότητες μάζας και επιφάνειας.

3. ΤΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΠΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΕΤΑΙ

Το σύστημα που μελετείται αποτελείται από δυο όμοιους αγωγούς μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ηλεκτρικός σύνδεσμος, ώστε να είναι δυνατή η ζεύξη και η απόζευξη του κυκλώματος. Σε αυτό το σύστημα μελετείται το θερμικό φαινόμενο. Οι ηλεκτρικές επαφές του συνδέσμου θεωρούνται στατικές.

Για την κατάστρωση του μαθηματικού μοντέλου που προσομοιώνει το θερμικό φαινόμενο γίνονται οι ακόλουθες παραδοχές:

Οι αγωγοί θεωρούνται απείρου μήκους.

1) Ο ηλεκτρικός σύνδεσμος θεωρείται μη αμελητέων διαστάσεων.
2) Το υλικό των αγωγών θεωρείται ισοτροπικό.
3) Αγνοείται η απαγωγή θερμότητας δι' ακτινοβολίας από το σύστημα «σύνδεσμος-αγωγοί» προς το περιβάλλον. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει λόγω του ότι οι θερμοκρασίες που αναπτύσσονται στο προαναφερόμενο σύστημα είναι γενικά πολύ μικρότερες από εκείνες που θα μπορούσαν να οδηγήσουν σε μια υπολογίσιμη απαγωγή θερμότητας δι' ακτινοβολίας.

Με βάση αυτές τις παραδοχές καταστρώνονται οι μαθηματικές εξισώσεις του ισοζυγίου ισχύος στο υπό μελέτη σύστημα. Το σύστημα αυτό περιγράφει, εκτός από τις στατικές επαφές, και τους σταθερούς ηλεκτρικούς συνδέσμους και τις κλειστές επαφές των αυτόματων διακοπτών και των διακοπτών φορτίου, υπό τη έννοια ότι αυτές οι επαφές βρίσκονται σε μια στατική κατάσταση.

3.1 Σύστημα «ηλεκτρικός σύνδεσμος-αγωγοί τροφοδοσίας».

Από την αρχή διατήρησης της ισχύει ότι:

$$dQ_{\varepsilon\iota\sigma} - dQ_{\varepsilon\xi} + dQ_{\pi\eta\gamma\acute{\omega}\nu} = dH \qquad (3.1\text{-}1)$$

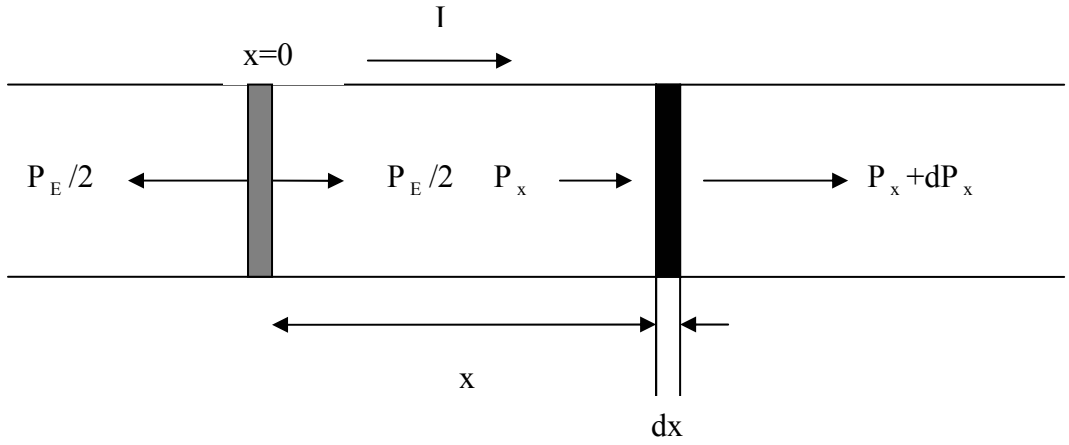
Οι δυο πρώτοι όροι της εξίσωσης (3.1-1) εκφράζουν τη θερμική ροή που εισέρχεται και εξέρχεται αντίστοιχα από και προς το περιβάλλον. Ο τρίτος όρος εκφράζει τη ροή θερμότητας των πηγών ενώ ο τέταρτος όρος είναι η μεταβολή της ενθαλπίας.

Με βάση τη σχέση (3.1-1), για το υπό μελέτη σύστημα προκύπτει ότι, σε ένα στοιχειώδες τμήμα του αγωγού dx, το οποίο βρίσκεται σε απόσταση x από το σύνδεσμο, το ισοζύγιο ισχύος αποδίδεται από την ακόλουθη σχέση:

$$P_F + P_R = P_D + P_A \qquad (3.1\text{-}2)$$

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης (3.1-2) είναι το τμήμα της θερμικής ισχύος που προέρχεται από το σύνδεσμο και μεταφέρεται κατά μήκος του αγωγού δι' αγωγής, που συσσωρεύεται στο τμήμα dx. Ο δεύτερος όρος είναι η θερμική ισχύς που εκλύεται λόγω του φαινομένου Joule στο ίδιο το στοιχειώδες τμήμα dx. Ο τρίτος όρος είναι η ισχύς που απορροφάται για την αύξηση της ενθαλπίας της μάζας του στοιχειώδους τμήματος dx. Ο τέταρτος όρος είναι η θερμική ισχύς που απάγεται στο περιβάλλον από την περιμετρική εξωτερική επιφάνεια του τμήματος dx.

Το προς μελέτη σύστημα μπορεί να παρασταθεί σχηματικά σύμφωνα με το σχήμα 3.1-1. Σύμφωνα με το σχήμα αυτό, το υπό εξέταση σύστημα συμπεριφέρεται σαν ένας αγωγός που θερμαίνεται κατά μήκος του, λόγω των απωλειών Joule, και σε μια συγκεκριμένη θέση (x=0) περιλαμβάνει μια μη σημειακή πηγή θερμότητας λόγω της αντίστασης διάβασης του συνδέσμου. Στη συνέχεια δίνονται οι αναλυτικές εκφράσεις των επιμέρους όρων της εξίσωσης (3.1-2).



Σχήμα 3.1-1: Απλοποιημένη σχεδίαση του συστήματος «ηλεκτρικός σύνδεσμος – αγωγοί τροφοδοσίας».
x=0 : θέση ηλεκτρικού συνδέσμου,
dx : στοιχειώδες τμήμα του αγωγού σε απόσταση x από το σύνδεσμο,
P_E : η παραγόμενη ηλεκτρική ισχύς στο σύνδεσμο,
P_x : η θερμική ισχύς δι' αγωγής σε απόσταση x από το σύνδεσμο,
I : ενεργός τιμή του ρεύματος.

3.1.1 Η συσσωρευμένη στο στοιχειώδες τμήμα dx θερμική ισχύς (P_F) λόγω αγωγής κατά μήκος του αγωγού

Η επαφή του ηλεκτρικού συνδέσμου του συστήματος, λόγω της αντίστασης διάβασής της, μπορεί να θεωρηθεί σαν μια μη σημειακή πηγή θερμότητας με θερμική ισχύ P_E λόγω του φαινομένουJoule:

$$P_E = I^2 \cdot R_{\varepsilon\pi.} = I \cdot \Delta V \qquad (3.1\text{-}3)$$

όπου $R_{\varepsilon\pi.}$ η αντίσταση διάβασης της επαφής στη θερμοκρασία λειτουργίας της, I η ενεργός τιμή του ρεύματος και ΔV η πτώση τάσης στο σύνδεσμο. Επομένως, στον ηλεκτρικό σύνδεσμο παράγεται συνεχώς κάποια θερμότητα η οποία διαχέεται λόγω θερμικής αγωγής σε ίσα μέρη στα δεξιά και αριστερά του συνδέσμου μέσω των αγωγών τροφοδοσίας. Αυτή η αγόμενη θερμική ισχύς P_x δίνεται από το νόμο του Fourier:

$$P_x = -\lambda F \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (3.1\text{-}4)$$

όπου λ ο συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού του αγωγού, F η διατομή του και T η θερμοκρασία του αγωγού.

Κατά τη διέλευση μιας ποσότητας θερμότητας από ένα τμήμα του αγωγού κατακρατείται στο τμήμα αυτό κάποια ποσότητα P_F. Για το στοιχειώδες τμήμα dx, όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.1-1, θα ισχύει:

$$P_F = P_x - (P_x + dP_x) = -dP_x \qquad (3.1\text{-}5)$$

Από τη σχέση (3.1-4) προκύπτει:

$$-dP_x = \lambda F \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (3.1\text{-}6)$$

Συνεπώς από τις σχέσεις (3.1-5) και (3.1-6) έπεται ότι:

$$P_F = \lambda F \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (3.1\text{-}7)$$

3.1.2 Οι απώλειες Joule (P_R) στο στοιχειώδες τμήμα dx

Λόγω του ότι το στοιχειώδες τμήμα dx διαρρέεται από ρεύμα, θα υπάρχει έκλυση θερμότητας εξαιτίας του φαινομένου Joule. Η αντίστοιχη θερμική ισχύς P_R δίνεται ως γνωστόν από τη σχέση:

$$P_R = I^2 \cdot R = I^2 \rho \frac{dx}{F} \tag{3.1-8}$$

όπου ρ η ειδική αντίσταση του υλικού του αγωγού στη θερμοκρασία λειτουργίας του, για την οποία ισχύει:

$$\rho = \rho_\alpha (1 + \alpha \cdot \Delta T) \tag{3.1-9}$$

όπου ρ_α η ειδική αντίσταση του αγωγού στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος, T_α, α ένας θερμικός συντελεστής και ΔT η διαφορά θερμοκρασίας μεταξύ του αγωγού και περιβάλλοντος ($\Delta T = T - T_\alpha$). Συνεπώς:

$$P_R = I^2 \rho_\alpha (1 + \alpha \cdot \Delta T) \frac{dx}{F} \tag{3.1-10}$$

3.1.3 Η απορροφόμενη θερμική ισχύς (P_D) για την αύξηση της ενθαλπίας της μάζας του στοιχειώδους τμήματος dx

Η ισχύς, P_D, που απορροφάται για την αύξηση της ενθαλπίας της μάζας dm του στοιχειώδους τμήματος dx σε κάποιο χρονικό διάστημα dt, δίνεται από τη σχέση:

$$P_D = dm \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon \cdot dV \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon \cdot F \cdot dx \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon \cdot F \cdot c \frac{\partial T}{\partial t} dx \tag{3.1-11}$$

όπου c η ειδική θερμότητα του υλικού του αγωγού, ε το ειδικό βάρος του και dV ο όγκος του στοιχειώδους τμήματος dx.

3.1.4 Η γενική διαφορική εξίσωση του θερμικού φαινομένου στο στοιχειώδες τμήμα dx

Έστω ότι η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι T_α και παραμένει σταθερή, τότε θα ισχύει:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial (T - T_\alpha)}{\partial t} = \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \tag{3.1-12}$$

Αντιστοίχως η σχέση (3.1-7) και (3.1-11) γίνονται:

$$P_F = \lambda F \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} \tag{3.1-13}$$

και

$$P_D = \varepsilon \cdot F \cdot c \frac{\partial \Delta T}{\partial t} dx \tag{3.1-14}$$

ενώ η σχέση $P_A = K \cdot S \cdot T \cdot dx$ γίνεται:

$$P_A = K \cdot S \cdot \Delta T \cdot dx \tag{3.1-15}$$

Τελικά η σχέση (3.1-2) συναρτήσει των (3.1-10), (3.1-13), (3.1-14), (3.1-15) γίνεται:

$$\lambda F \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} + I^2 \rho_\alpha (1 + \alpha \cdot \Delta T) \frac{dx}{F} = \varepsilon \cdot F \cdot c \frac{\partial \Delta T}{\partial t} dx + K \cdot S \cdot \Delta T \cdot dx \tag{3.1-16}$$

ώστε εξάγεται το συμπέρασμα ότι η διαφορά θερμοκρασίας ΔΤ θα είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών, της απόστασης x από τον ηλεκτρικό σύνδεσμο και του χρόνου λειτουργίας t του συστήματος.

3.1.5 Περιγραφή των συντελεστών που καθορίζουν τη διαφορική εξίσωση και τις οριακές συνθήκες που προκύπτουν

K: συντελεστής μεταβίβασης θερμότητας
S: περίμετρος του αγωγού
F: διατομή του αγωγού
I: ενεργός τιμή του ρεύματος
λ: συντελεστής θερμικής αγωγιμότητας του υλικού του αγωγού
ρ_α: ειδική αντίσταση του αγωγού στη θερμοκρασία περιβάλλοντος
α: θερμικός συντελεστής του υλικού του αγωγού
ε: ειδικό βάρος του αγωγού
c: ειδική θερμότητα του υλικού του αγωγού
G: επιφάνεια επαφής
α_1: θερμικός συντελεστής του υλικού της επαφής
Q_α: παραγόμενη θερμότητα
M_1: μάζα επαφής
ΔV : πτώση τάσης στο σύνδεσμο

3.2 Καθορισμός των συντελεστών της διαφορικής εξίσωσης του θερμικού φαινομένου στο στοιχειώδες τμήμα dx

$$\frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2} - m^2 \Delta T(x,t) - \frac{1}{A}\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t} + C = 0 \qquad (1)$$

Η σχέση (1) είναι μια διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων της συνάρτησης ΔΤ. Από αυτή την εξίσωση μπορεί να υπολογιστεί η διαφορά θερμοκρασίας του συστήματος που μελετείται σε αυτή την εργασία, συναρτήσει των μεταβλητών x, t. Συμβολίζεται με t ο χρόνος λειτουργίας και με x η απόσταση από τη θέση του ηλεκτρικού συνδέσμου. Η λύση γίνεται με παραμέτρους τα m^2 , $\frac{1}{A}$, C για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$m^2 = \frac{KSF - I^2 \rho_\alpha \alpha}{\lambda F^2} \qquad (2)$$

$$C = \frac{I^2 \rho_\alpha}{\lambda F^2} \qquad (3)$$

$$A \hat{=} \frac{\lambda}{\varepsilon c} \qquad (4)$$

3.2.1 Καθορισμός των οριακών συνθηκών της διαφορικής εξίσωσης (1)

Για μια διαφορική εξίσωση όπως αυτή της σχέσης (1) απαιτείται η γνώση των οριακών συνθηκών. Υπάρχουν οριακές συνθήκες χρονικές και τοπικές οι οποίες καθορίζουν το φαινόμενο.

● Οι χρονικές οριακές συνθήκες χαρακτηρίζουν δυο κρίσιμες χρονικές στιγμές, για t=0 και t→∞.

►Τη χρονική στιγμή t=0 το κύκλωμα είναι ανοικτό με αποτέλεσμα να μην υπάρχει μεταβολή της θερμοκρασίας του αγωγού ως προς το περιβάλλον και ισχύει:

$$\Delta T(x,0)=0 \tag{5}$$

►Όταν η πάροδος του χρονικού διαστήματος είναι τέτοια ώστε t→∞, επέρχεται θερμική ισορροπία μεταξύ του τμήματος dx του αγωγού και του περιβάλλοντος έτσι ώστε:

$$\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}\Big|_{t\to\infty}=0 \tag{6}$$

δηλαδή το τμήμα dx απορροφάει τόση θερμότητα όση ακριβώς αποβάλει.

● Οι τοπικές οριακές συνθήκες χαρακτηρίζουν δυο καθοριστικές θέσεις, για x=0 και x→∞.

►Όταν το τμήμα dx είναι σε τέτοια απόσταση ώστε x→∞, τότε η θερμοκρασία του αγωγού δεν μεταβάλλεται κατά μήκος του και ισχύει:

$$\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x\to\infty}=0 \tag{7}$$

►Στη θέση x=0 ισχύει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}=[n^2\Delta T(x,t)+B\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}-C_1]\Big|_{x=0} \tag{8}$$

Η τελευταία σχέση περιέχει τις παραμέτρους n^2, B, C_1 για τις οποίες ισχύουν οι σχέσεις:

$$n^2=\frac{KG-\alpha_1 Q_\alpha}{2\lambda F} \tag{9}$$

$$B = \frac{M_1 C_1}{2\lambda F} \tag{10}$$

$$C_1 = \frac{Q_\alpha}{2\lambda F} \tag{11}$$

3.2.2 Διαδικασία επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης (1)

Για να λυθεί η διαφορική εξίσωση (1) χρησιμοποιείται η μέθοδος μετασχηματισμού Laplace. Οι βασικές σχέσεις αυτής της μεθόδου παρατίθενται παρακάτω μαζί με τις απαραίτητες ιδιότητες.

Πίνακας 1.

<u>Ορισμοί</u>

● **Ευθύς μετασχηματισμός Laplace**

$$F(p)=£\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

● **Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace**

$$f(t)=£^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\, F(p)dp$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{pt} F(p)dp$$

Με $\gamma>0$ και αρκετά μεγάλο, ώστε ένα κατακόρυφο ευθύγραμμο τμήμα με εξίσωση :
$Z= \gamma+it$, $-T\leq t\leq T$, να βρίσκεται δεξιά από κάθε πόλο της F.

Πίνακας 2.

<u>Ιδιότητες</u>

α/α	F(p)	f(t)
Ω1	$aF_1(p) + bF_2(p)$	$af_1(t) + bF_2(t)$
Ω2	pF(p)-f(0)	$f^{/}(t)$
Ω3	$\frac{1}{p}$	1
Ω4	$\frac{1}{p-a}$	e^{at}
Ω5	$\frac{1}{(p-a)(p-b)}$ a#b	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
Ω6	F(p-a)	$e^{at}f(t)$
Ω7	$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} e^{-u^2/4t} f(u)du$
Ω8	$\frac{e^{-b\sqrt{p}}}{\sqrt{p}}$	$\frac{e^{-b^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
Ω9	$\frac{R(p)}{Q(p)}$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{R(a_k)}{Q^{/}(a_k)} e^{a_k t}$

Όπου R(p) , Q(p) πολυώνυμα με (βαθμόςQ ≥ βαθμόςR +1) και το Q(p) έχει απλά σημεία μηδενισμού. “Θεώρημα αναπτύγματος Heaviside”.

Ω10	F(p)G(p)	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

Είναι η λεγόμενη συνέλιξη δυο συναρτήσεων.

Έτσι λοιπόν αρχίζει η διαδικασία επίλυσης :

$$£\{\frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2} - m^2 \Delta T(x,t) - \frac{1}{A}\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t} + C\} = 0 \qquad (12)$$

Χρησιμοποιείται αρχικά η ιδιότητα Ω1 του πίνακα 2 οπότε:

$$£\{\frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2}\} - m^2 £\{\Delta T(x,t)\} - \frac{1}{A} £\{\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}\} + £\{C\} = 0 \qquad (13)$$

Τώρα αντιμετωπίζεται κάθε όρος της σχέσης (12) χωριστά. Για τον πρώτο όρο χρησιμοποιώ τον ορισμό (πίνακα 1) του μετασχηματισμού Laplace ως εξής:

$$£\{\frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2}\} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 \Delta T(x,t)}{\partial x^2} e^{-pt} dt$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty \Delta T(x,t) e^{-pt} dt = \frac{\partial^2 F(x,p)}{\partial x^2} \qquad (14)$$

Ο δεύτερος όρος δίνει προφανώς:

$$-m^2 £\{\Delta T(x,t)\} = -m^2 F(x,p) \qquad (15)$$

Ο τρίτος όρος μετασχηματίζεται με τη χρήση της ιδιότητας Ω2 του πίνακα 2, άρα:

$$-\frac{1}{A} £\{\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}\} = -\frac{1}{A}(pF(x,p) - \Delta T(x,0) \qquad (16)$$

Όμως από την οριακή συνθήκη που δίνεται από την σχέση (4) είναι $\Delta T(x,0)=0$, ώστε η (15) γίνεται:

$$-\frac{1}{A} £\{\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t}\} = -\frac{1}{A} pF(x,p) \qquad (17)$$

Ο τέταρτος όρος απαιτεί χρήση των ιδιοτήτων Ω1 και Ω3 του πίνακα 2 με αποτέλεσμα:

$$£\{C\} = \frac{C}{p} \tag{18}$$

Η σχέση (12) συναρτήσει των (13), (14), (16) και (17) τροποποιείται ως εξής:

$$\frac{\partial^2 F(x,p)}{\partial x^2} - m^2 F(x,p) - \frac{1}{A} pF(x,p) + \frac{C}{p} = 0 \tag{19}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 F(x,p)}{\partial x^2} - (m^2 + \frac{p}{A})F(x,p) + \frac{C}{p} = 0 \tag{20}$$

Η σχέση (19) είναι μια μη ομογενής διαφορική εξίσωση, για αυτό θα λύσω πρώτα την «αντίστοιχη ομογενή» και στη συνέχεια θα βρω μια μερική λύση. Η λύση της εξίσωσης (19) θα αποτελείται από το άθροισμα της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής λύσης.

Η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση είναι:

$$\frac{\partial^2 F(x,p)}{\partial x^2} - (m^2 + \frac{p}{A})F(x,p) = 0 \tag{21}$$

και η λύση της δίνεται από τη σχέση:

$$F_{ομογ}(x,p) = b_1 e^{-x\sqrt{m^2 + p/A}} + b_2 e^{x\sqrt{m^2 + p/A}} \tag{22}$$

(όπου b_1 και b_2 αυθαίρετοι συντελεστές)

Τώρα μένει να βρεθεί η μερική λύση. Από τη μορφή της σχέσης (19) φαίνεται ότι η μερική λύση θα είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής x. Επομένως θεωρείται ως μερική λύση η :

$$F_{μερ}(x,p) = D \tag{23}$$

Αυτή απαιτείται να ικανοποιεί την σχέση (19) οπότε :

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} - (m^2 + \frac{p}{A})D + \frac{C}{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 - (m^2 + \frac{p}{A})D + \frac{C}{p} = 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + \frac{p}{A})D = \frac{C}{p}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{C}{p(m^2 + p/A)}$$

$$\Leftrightarrow D = \frac{CA}{p(m^2 A + p)} \qquad (24)$$

Από (23) , (24) έπεται:

$$F_{\mu\varepsilon\rho}(x,p) = \frac{CA}{p(m^2 A + p)} \qquad (25)$$

Συνεπώς η λύση της εξισώσεως (19) είναι:

$$F(x,p) = F_{o\mu o\gamma}(x,p) + F_{\mu\varepsilon\rho}(x,p)$$

$$\Leftrightarrow F(x,p) = b_1 e^{-x\sqrt{m^2 + p/A}} + b_2\ e^{x\sqrt{m^2 + p/A}} + \frac{CA}{p(m^2 A + p)} \qquad (26)$$

Χρησιμοποιείται τώρα η οριακή συνθήκη:

$$\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x \to \infty} = 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace αυτής της σχέσης είναι:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} \Big|_{x \to \infty} = 0 \qquad (27)$$

Αν παραγωγίσουμε την σχέση (26) ως προς x τότε:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} = - b_1 \sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}\, e^{-x\sqrt{m^2+p/A}} + b_2 \sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}\, e^{x\sqrt{m^2+p/A}} \qquad (28)$$

Στη σχέση (28) για x→∞, σύμφωνα με τη σχέση (27) το πρώτο μέλος μηδενίζεται. Αντιστοίχως για το δεύτερο μέλος, ο πρώτος όρος μηδενίζεται ενώ ο δεύτερος όρος απειρίζεται. Άρα για να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη που δίνεται από τη σχέση (7), πρέπει b_2=0. Άρα η σχέση (26) γίνεται:

$$F(x,p) = b_1 e^{-x\sqrt{m^2+p/A}} + \frac{CA}{p(m^2A+p)} \qquad (29)$$

Η παραγώγιση της σχέσης (29) ως προς x δίνει:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} = - b_1 \sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}\, e^{-x\sqrt{m^2+p/A}} \qquad (30)$$

Μένει να χρησιμοποιηθεί η οριακή συνθήκη που δίνεται από τη σχέση (8) και εκφράζεται ως εξής:

$$\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial x} |_{x=0} = [n^2 \Delta T(x,t) + B \frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial t} - C_1] |_{x=0}$$

Η σχέση αυτή με τη χρήση των ιδιοτήτων Ω1, Ω2 και Ω3 του πίνακα 2 μετασχηματίζεται κατά Laplace:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} |_{x=0} = [n^2 F(x,p) + B[pF(x,p) - \Delta T(x,0)] - \frac{C_1}{p}] |_{x=0}$$

Όμως από την οριακή συνθήκη που δίνεται από την σχέση (4) είναι ΔT(x,0)=0 ώστε η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} |_{x=0} = [n^2 F(x,p) + BpF(x,p) - \frac{C_1}{p}] |_{x=0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = [(n^2 + Bp)F(x,p) - \frac{C_1}{p}]\Big|_{x=0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = (n^2 + Bp)F(0,p) - \frac{C_1}{p} \qquad (31)$$

Για να λυθεί μια τέτοια διαφορική εξίσωση ακολουθείται η κάτωθι διαδικασία. Λύνεται πρώτα η ομογενής και βρίσκεται μια λύση. Στη συνέχεια βρίσκεται η μερική λύση. Η τελική λύση είναι το άθροισμα των δυο λύσεων.
Λύση αντίστοιχης ομογενούς:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x} - (n^2 + Bp)F(x,p) = 0$$

Η παραπάνω ομογενής διαφορική εξίσωση έχει λύση της μορφής

$$F_o(x,p) = ke^{(n^2+Bp)x} \qquad (32)$$

Η μερική λύση θα έχει μορφή

$$F_\mu(x,p) = k(x)e^{(n^2+Bp)x}$$

και απαιτείται να ικανοποιεί την πλήρη διαφορική εξίσωση (31), οπότε με αντικατάσταση θα είναι:

$$k'(x)e^{(n^2+Bp)x} + k(x)(n^2+Bp)e^{(n^2+Bp)x} =$$

$$= (n^2+Bp)k(x)e^{(n^2+Bp)x} - \frac{C_1}{p}$$

$$\Rightarrow k'(x)e^{(n^2+Bp)x} = -\frac{C_1}{p}$$

$$\Rightarrow k'(x) = -\frac{C_1}{p}e^{-(n^2+Bp)x}$$

$$\Rightarrow k(x) = \int (-\frac{C_1}{p}) e^{-(n^2+Bp)x} dx$$

$$\Rightarrow k(x) = (-\frac{C_1}{p}) \frac{1}{-(n^2+Bp)} e^{-(n^2+Bp)x}$$

$$\Rightarrow k(x) = \frac{C_1}{p(n^2+Bp)} e^{-(n^2+Bp)x}$$

Επομένως :

$$F_\mu(x, p) = k(x) e^{(n^2+Bp)x}$$

$$\Rightarrow F_\mu(x, p) = \frac{C_1}{p(n^2+Bp)} e^{-(n^2+Bp)x} e^{(n^2+Bp)x}$$

$$\Rightarrow F_\mu(x, p) = \frac{C_1}{p(n^2+Bp)} \qquad (33)$$

Η τελική λύση είναι:

$$F(x,p) = F_0(x,p) + F_\mu(x,p)$$

$$F(x,p) = ke^{(n^2+Bp)x} + \frac{C_1}{p(n^2+Bp)}$$

Όμως η λύση αυτή αντιστοιχεί σε μια διαφορική (σχέση (31)) η οποία ισχύει για x=0, άρα η τελική λύση είναι

$$F(0,p) = ke^0 + \frac{C_1}{p(n^2+Bp)}$$

$$\Rightarrow F(0,p) = k + \frac{C_1}{p(n^2+Bp)} \qquad (34)$$

Αν αντικαταστήσω την σχέση (34) στη σχέση (31) τότε :

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = (n^2 + Bp)(k + \frac{C_1}{p(n^2 + Bp)}) - \frac{C_1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = (n^2 + Bp)k + \frac{C_1}{p} - \frac{C_1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = (n^2 + Bp)k \qquad (35)$$

Τώρα θα δημιουργηθεί το σύστημα από το οποίο θα υπολογίζονται οι άγνωστες σταθερές b_1 , k.
Η σχέση (29) για x=0 δίνει:

$$F(0,p) = b_1 e^0 + \frac{CA}{p(m^2 A + p)}$$

$$\Rightarrow F(0,p) = b_1 + \frac{CA}{p(m^2 A + p)} \qquad (36)$$

Η σχέση (30) για x=0 δίνει:

$$\frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = - b_1 \sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}\, e^0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F(x,p)}{\partial x}\Big|_{x=0} = - b_1 \sqrt{m^2 + \frac{p}{A}} \qquad (37)$$

Από τις σχέσεις (34) και (36) βγαίνει η σχέση:

$$k + \frac{C_1}{p(n^2 + Bp)} = b_1 + \frac{CA}{p(m^2 A + p)} \qquad (38)$$

Ενώ από τις σχέσεις (35) και (37) βγαίνει η σχέση:

$$(n^2 + Bp)k = -b_1\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}} \qquad (39)$$

Από την σχέση (39) μπορεί να ληφθεί το k συναρτήσει του b_1 , δηλαδή:

$$k = \frac{-b_1\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}}{n^2 + Bp}$$

Αντικαθιστώ το k στη σχέση (38) οπότε :

$$\frac{-b_1\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}}{n^2 + Bp} + \frac{C_1}{p(n^2 + Bp)} = b_1 + \frac{CA}{p(m^2A + p)}$$

$$\Rightarrow \frac{-b_1\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}}{n^2 + Bp} - b_1 = \frac{CA}{p(m^2A + p)} - \frac{C_1}{p(n^2 + Bp)}$$

$$\Rightarrow -b_1\left(\frac{\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}}{n^2 + Bp} + 1\right) = \frac{CA}{p(m^2A + p)} - \frac{C_1}{p(n^2 + Bp)}$$

$$\Rightarrow b_1\left(\frac{\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}}}{n^2 + Bp} + 1\right) = \frac{C_1}{p(n^2 + Bp)} - \frac{CA}{p(m^2A + p)}$$

$$\Rightarrow b_1\frac{\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}} + n^2 + Bp}{n^2 + Bp} = \frac{1}{p}\left(\frac{C_1(m^2A + p) - CA(n^2 + Bp)}{(n^2 + Bp)(m^2A + p)}\right)$$

$$\Rightarrow b_1\frac{\sqrt{m^2 + \frac{p}{A}} + n^2 + Bp}{1} = \frac{1}{p}\left(\frac{C_1(m^2A + p) - CA(n^2 + Bp)}{(m^2A + p)}\right)$$

$$\Rightarrow b_1 = \frac{C_1(m^2A + p) - CA(n^2 + Bp)}{p(m^2A + p)(n^2 + Bp + \sqrt{m^2 + \frac{p}{A}})} \qquad (40)$$

Επομένως αρκεί να αντικατασταθεί στην σχέση (29), το b_1 από τη σχέση (40) ώστε να εμφανιστεί η πλήρης λύση της διαφορικής εξίσωσης της σχέσης (20). Πράγματι:

$$F(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{p(m^2A+p)(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})} e^{-x\sqrt{m^2+p/A}} + \frac{CA}{p(m^2A+p)}$$

$$\Rightarrow F(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{pA(m^2+\frac{p}{A})(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})} e^{-x\sqrt{m^2+p/A}} + \frac{CA}{p(m^2A+p)}$$

$$\Rightarrow F(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{A(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} \frac{e^{-x\sqrt{m^2+p/A}}}{p\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} + \frac{CA}{p(m^2A+p)} \quad (41)$$

Το μόνο που μένει για εκφραστεί η $\Delta T(x,t)$ που αναζητείται, είναι να εφαρμοστεί αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace στη σχέση (41). Η σχέση αυτή αποτελείται από δυο μέρη $F_1(x,p)$ και $F_2(x,p)$ όπου:

$$\Rightarrow F_1(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{A(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} \frac{e^{-x\sqrt{m^2+p/A}}}{p\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} \quad (42)$$

και

$$F_2(x,p) = \frac{CA}{p(m^2A+p)} \quad (43)$$

● ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ $F_1(x,p)$

Η συνάρτηση $F_1(x,p)$ είναι αρκετά πολύπλοκη και δεν μπορεί να αντιστραφεί απευθείας με τη χρήση κάποιων απλών ιδιοτήτων. Αυτό σημαίνει ότι η $F_1(x,p)$ πρέπει να τεμαχιστεί σε μικρότερες συναρτήσεις ώστε η αντιστροφή να γίνει τμηματικά. Στη συνέχεια θα γίνει συνέλιξη των επιμέρους συναρτήσεων και θα προκύψει η νέα συνάρτηση $f_1(x,t)$ που αναζητείται.

$$\Rightarrow F_1(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{A(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} \; \frac{e^{-x\sqrt{m^2+p/A}}}{p\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}}$$

Άρα η $F_1(x,p)$ διασπάται σε δύο τμήματα $F_3(x,p)$ και $F_4(x,p)$ όπου:

$$F_3(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{A(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} \tag{44}$$

$$F_4(x,p) = \frac{e^{-x\sqrt{m^2+p/A}}}{p\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}} \tag{45}$$

►Υπολογισμός της $f_3(x,t)$

Για να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F_3(x,p)$ γίνονται οι ακόλουθες τροποποιήσεις:

$$F_3(x,p) = \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{A(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}}$$

$$= \frac{C_1(m^2A+p) - CA(n^2+Bp)}{\sqrt{A}(n^2+Bp+\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{A}\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}}$$

$$=\frac{C_1(m^2A+p)-CA(n^2+Bp)}{(\sqrt{A}n^2+\sqrt{A}Bp+\sqrt{A}\sqrt{m^2+\frac{p}{A}})\sqrt{m^2A+p}}$$

$$=\frac{C_1(m^2A+p)-CA(n^2+Bp)}{(\sqrt{A}n^2+\sqrt{A}Bp+\sqrt{m^2A+p})\sqrt{m^2A+p}}$$

$$\Rightarrow F_3(x,p)=\frac{C_1(m^2A+p)-CAn^2-CABp}{(\sqrt{A}n^2+\sqrt{A}Bp+\sqrt{m^2A+p})\sqrt{m^2A+p}} \qquad (46)$$

Θεωρείται $m^2A+p=s$ οπότε:

$$\Rightarrow F_3(x,s)=\frac{C_1s-CAn^2-CAB(s-m^2A)}{(\sqrt{A}n^2+\sqrt{A}B(s-m^2A)+\sqrt{s})\sqrt{s}}$$

$$=\frac{(C_1-CAB)s-CAn^2+CABm^2A}{(\sqrt{A}n^2+\sqrt{A}B(s-m^2A)+\sqrt{s})\sqrt{s}}$$

$$=\frac{(C_1-CAB)s+(CABm^2A-CAn^2)}{(\sqrt{A}n^2+\sqrt{A}Bs-\sqrt{A}Bm^2A+\sqrt{s})\sqrt{s}}$$

$$=\frac{(C_1-CAB)s+(CA^2Bm^2-CAn^2)}{(\sqrt{A}Bs+\sqrt{s}+\sqrt{A}n^2-\sqrt{A}Bm^2A)\sqrt{s}}$$

$$=\frac{(C_1-CAB)(\sqrt{s})^2+(CA^2Bm^2-CAn^2)}{[\sqrt{A}B(\sqrt{s})^2+\sqrt{s}+(\sqrt{A}n^2-\sqrt{A}Bm^2A)]}\frac{1}{\sqrt{s}}$$

$$\Rightarrow F_3(x,s)=\frac{(C_1-CAB)(\sqrt{s})^2+(CA^2Bm^2-CAn^2)}{[\sqrt{A}B(\sqrt{s})^2+\sqrt{s}+(\sqrt{A}n^2-\sqrt{A}Bm^2A)]}\frac{1}{\sqrt{s}} \qquad (47)$$

Στην $F_3(x,s)$ εφαρμόζονται οι ιδιότητες Ω6, Ω7 και Ω9 του πίνακα 2 ώστε να προκύψει η $f_3(x,t)$. Αρχικά εφαρμόζεται η ιδιότητα Ω9 στο τμήμα:

$$F_{3A}(x,s)=\frac{(C_1-CAB)(\sqrt{s})^2+(CA^2Bm^2-CAn^2)}{[\sqrt{A}B(\sqrt{s})^2+\sqrt{s}+(\sqrt{A}n^2-\sqrt{A}Bm^2A)]} \qquad (48)$$

σύμφωνα με την οποία ισχύει η αντιστοιχία:

Ω9	$\frac{R(p)}{Q(p)}$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{R(a_k)}{Q^{/}(a_k)} e^{a_k t}$

Όπου R(p) , Q(p) πολυώνυμα με (βαθμόςQ ≥ βαθμόςR +1) και το Q(p) έχει απλά σημεία μηδενισμού. "Θεώρημα αναπτύγματος Heaviside".

Το $F_{3A}(x,s)$ έχει παρονομαστή δευτέρου βαθμού ως προς $\sqrt{s}$ και επομένως για θετική διακρίνουσα έχει δύο πραγματικές ρίζες a_1, a_2. Οι ρίζες a_1, a_2 είναι:

$$a_1 = \frac{-1+\sqrt{1^2 - 4\sqrt{A}B(\sqrt{A}n^2 - \sqrt{A}Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{-1+\sqrt{1 \ -4AB(n^2 - Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B} \tag{49}$$

και συνεπώς

$$a_2 = \frac{-1-\sqrt{1 \ -4AB(n^2 - Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B} \tag{50}$$

Επίσης τα πολυώνυμα R, $Q^{/}$ της ιδιότητας Ω9 είναι:

$$R(a_k) = (C_1 - CAB)(a_k)^2 + (CA^2Bm^2 - CAn^2) \tag{51}$$

$$Q^{/}(a_k) = 2\sqrt{A}B(a_k) + 1 \tag{52}$$

Άρα ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της σχέσεως (48) είναι:

$$f_{3A}(x,t) = \sum_{k=1}^{2} \frac{R(a_k)}{Q^{/}(a_k)} e^{a_k t}$$

$$\Rightarrow f_{3A}(x,t) = \frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} e^{a_1 t} + \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} e^{a_2 t} \tag{53}$$

η οποία προσδιορίζεται πλήρως από τις σχέσεις (49), (50), (51), (52).

Τώρα που βρέθηκε ο αντίστροφος μετασχηματισμός της σχέσης (48), για να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός της σχέσης (47) εφαρμόζεται η ιδιότητα Ω7 του πίνακα 2 σύμφωνα με την οποία:

Ω7	$\frac{F(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t} f(u)du$

Συνεπώς αρχίζει η διαδικασία για την εύρεση του παραπάνω ολοκληρώματος:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}[\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}e^{a_1u}+\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}e^{a_2u}]du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty[\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}e^{-u^2/4t}\,e^{a_1u}+\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}e^{-u^2/4t}e^{a_2u}]du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\{\int_0^\infty\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}e^{-u^2/4t}\,e^{a_1u}\,du+\int_0^\infty\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}e^{-u^2/4t}e^{a_2u}du\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\{\int_0^\infty\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}e^{a_1u-u^2/4t}\,du+\int_0^\infty\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}e^{a_2u-u^2/4t}\,du\}$$

$$\Rightarrow f_{3B}(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\{\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}\int_0^\infty e^{a_1u-u^2/4t}\,du+\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}\int_0^\infty e^{a_2u-u^2/4t}\,du\} \qquad (54)$$

Όμως ισχύει από τύπο ολοκληρωμάτων ότι:

$$\int_0^\infty e^{au-u^2/4t}du=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1/4t}}\,e^{\frac{a^2}{4(1/4t)}}\,\mathrm{erfc}\frac{-a}{2\sqrt{1/4t}}$$

$$\int_0^\infty e^{au-u^2/4t}du=\frac{1}{2}2\sqrt{\pi t}\,e^{a^2t}\,\mathrm{erfc}\frac{-a}{2\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

$$\int_0^\infty e^{au-u^2/4t}du = \sqrt{\pi t}\, e^{a^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a\sqrt{t}) \qquad (55)$$

Η σχέση (54) σε συνδυασμό με τη σχέση (55) δίνει:

$$f_{3B}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\{\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}\sqrt{\pi t}\, e^{a_1^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}\sqrt{\pi t}\, e^{a_2^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{t})\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}\sqrt{\pi t}\, e^{a_1^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}\sqrt{\pi t}\, e^{a_2^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{t})\}$$

$$\Rightarrow f_{3B}(x,t) = \frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} e^{a_1^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} e^{a_2^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{t})$$

Για να βρεθεί η τελική σχέση που δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό της σχέσης (44) πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι είχε γίνει η αντικατάσταση $P+m^2 A = s$ και συνεπώς πρέπει να εφαρμοσθεί η ιδιότητα Ω6 του πίνακα 2, σύμφωνα με την οποία:

Ω6	F(p-a)	$e^{at} f(t)$

Άρα τελικά :

$$f_3(x,t) = e^{-m^2 At}\{\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} e^{a_1^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} e^{a_2^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{t})\}$$

$$\Rightarrow f_3(x,t) = e^{-m^2 At}\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} e^{a_1^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + e^{-m^2 At}\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} e^{a_2^2 t}\ \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{t})$$

$$f_3(x,t) = \frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} e^{(a_1^2 - m^2 A)t}\ \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} e^{(a_2^2 - m^2 A)t}\ \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{t}) \qquad (56)$$

►Υπολογισμός της $f_4(x,t)$

Για να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός $f_4(x,t)$ της σχέσης (45) δηλαδή της:

$$F_4(x,p) = \frac{e^{-x\sqrt{m^2+p/A}}}{p\sqrt{m^2+\frac{p}{A}}}$$

ακολουθείται η διαδικασία:
Με βάση τον ορισμό του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace που δίνεται στον πίνακα 1 και με αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης
από $p \rightarrow$ σε $s = m^2 + p/A$, προκύπτει:

$$f_4(x,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m^2+\gamma/A-i\infty}^{m^2+\gamma/A+i\infty} e^{A(s-m^2)t}\,\frac{e^{-x\sqrt{s}}}{A(s-m^2)\sqrt{s}}\,A\,ds \qquad (57)$$

Η σχέση (57) μετά από απλές πράξεις παίρνει τη μορφή:

$$f_4(x,t) = \frac{e^{-m^2At}}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{e^{Ast}e^{-x\sqrt{s}}}{(s-m^2)\sqrt{s}}\,ds = \frac{e^{-m^2At}}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} G(s)\,ds \qquad (58)$$

όπου k μια σταθερά με $k > m^2$ και

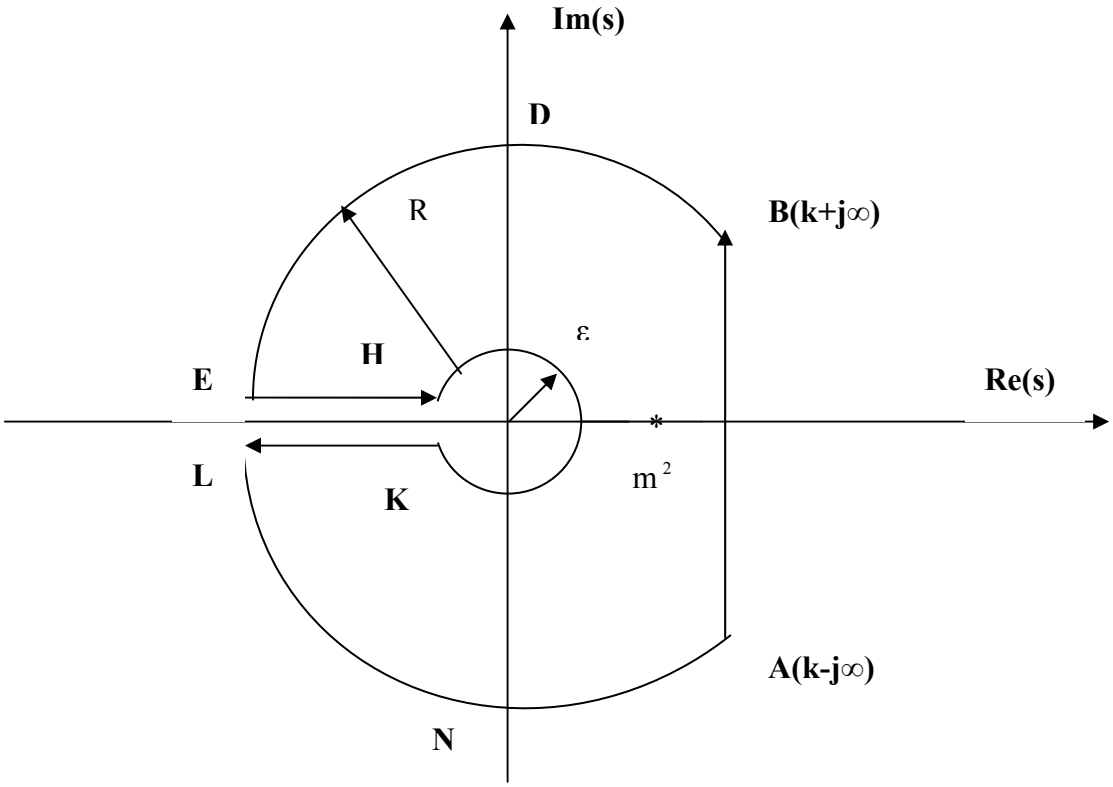
$$G(s) = \frac{e^{(Ast - x\sqrt{s})}}{(s-m^2)\sqrt{s}} \qquad (59)$$

Έστω τώρα το μιγαδικό ολοκλήρωμα I που δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_c G(s)\,ds \qquad (60)$$

όπου c είναι η καμπύλη ολοκλήρωσης που εμφανίζεται στο σχήμα 1.

ΣΧΗΜΑ 1.



Στο παραπάνω σχήμα είναι φανερό ότι η καμπύλη c δεν περιέχει το ανώμαλο σημείο s=0 της G(s) αλλά περιέχει τον πόλο $s=m^2$. Άρα με βάση τη θεωρία των μιγαδικών ολοκληρωμάτων είναι:

$$I=\sum \mathrm{Res}\{G(s)\}=\underset{s=m^2}{\mathrm{Res}}\{G(s)\}=\lim_{s\to m^2}(s-m^2)G(s) \qquad (61)$$

η οποία λόγω της σχέσης (59) δίνει:

$$I=\underset{s=m^2}{\mathrm{Res}}\{G(s)\}=\lim_{s\to m^2}(s-m^2)\frac{e^{(Ast-x\sqrt{s})}}{(s-m^2)\sqrt{s}}=\frac{e^{(m^2At-mx)}}{m} \qquad (62)$$

Ακόμα ισχύει η σχέση:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_{AB}+\int_{BE}+\int_{EH}+\int_{HK}+\int_{KL}+\int_{LA}\right]G(s)ds \qquad (63)$$

Συνεπώς για να γίνει ο υπολογισμός της $f_4(x,t)$ πρέπει να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της σχέσης (63).

Για τα ολοκληρώματα κατά μήκος των τμημάτων BE και LA χρησιμοποιείται το παρακάτω θεώρημα:

«Εάν είναι δυνατή η εύρεση δυο σταθερών M>0 και k>0 τέτοιων ώστε, πάνω σε μια καμπύλη Γ, για την $s=Re^{i\theta}$, να ισχύει $|F(s)|<M/R^k$, τότε το ολοκλήρωμα επί της Γ της $e^{sx}F(s)$ τείνει στο 0 καθώς το R τείνει στο ∞.»
Εδώ λοιπόν που είναι $G(s)=e^{Ast}F(s)$ με

$$F(s) = \frac{e^{-x\sqrt{s}}}{(s-m^2)\sqrt{s}} = \frac{e^{-\sqrt{R}\,xe^{i\frac{\theta}{2}}}}{\sqrt{R}\,e^{i\frac{\theta}{2}}(Re^{i\theta}-m^2)}$$

οπότε όταν το R τείνει στο άπειρο τότε:

$$|F(s)| < \frac{1}{\sqrt{R}\,|e^{i\frac{\theta}{2}}|\,|Re^{i\theta}-m^2|} < \frac{1}{\sqrt{R}} = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}}.$$ Επομένως:

$$[\int_{BE} + \int_{LA}]G(s)ds = 0 \qquad (64)$$

Όμως λόγω της σχέσης (58) είναι:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{AB} G(s)ds = e^{m^2At}f_4(x,t) \qquad (65)$$

Άρα από τις σχέσεις (63), (64) και (65) έπεται ότι:

$$f_4(x,t) = e^{-m^2At}\{I - \frac{1}{2}\frac{1}{\pi i}[\int_{EH} + \int_{HK} + \int_{KL}]G(s)ds\} \qquad (66)$$

ενώ λόγω της (62) είναι:

$$f_4(x,t) = \frac{e^{-mx}}{m} - e^{-m^2At}\frac{1}{2}\frac{1}{\pi i}[\int_{EH} + \int_{HK} + \int_{KL}]G(s)ds \qquad (67)$$

Συνεπώς αρκεί να υπολογιστούν τα τρία επικαμπύλια ολοκληρώματα της σχέσης (67).

Α) Υπολογισμός ολοκληρώματος κατά μήκος της καμπύλης ΕΗ

Κατά μήκος της καμπύλης ΕΗ, $s=we^{i\pi} = -w$ και ενώ το s μεταβάλλεται από –R προς –ε, το w μεταβάλλεται από R προς ε. Επίσης $\sqrt{s} = \sqrt{w}e^{i\pi\frac{1}{2}} = i\sqrt{w}$ και ds= - dw. Άρα:

$$\int_{EH} G(s)ds = \int_R^{\varepsilon} e^{-wAt} \frac{e^{-ix\sqrt{w}}}{-i\sqrt{w}(w+m^2)}(-dw) = \int_R^{\varepsilon} e^{-wAt} \frac{e^{-ix\sqrt{w}}}{i\sqrt{w}(w+m^2)}dw \qquad (68)$$

Β) Υπολογισμός ολοκληρώματος κατά μήκος της καμπύλης KL

Κατά μήκος της καμπύλης KL, $s=we^{-i\pi} =-w$ και ενώ το s μεταβάλλεται από –ε προς –R, το w μεταβάλλεται από ε προς R. Επίσης $\sqrt{s} = -i\sqrt{w}$ και ds = - dw. Άρα:

$$\int_{KL} G(s)ds = \int_{\varepsilon}^{R} e^{-wAt} \frac{e^{ix\sqrt{w}}}{-(-i\sqrt{w})(w+m^2)}(-dw)$$

$$\Leftrightarrow \int_{KL} G(s)ds = -\int_{\varepsilon}^{R} e^{-wAt} \frac{e^{ix\sqrt{w}}}{i\sqrt{w}(w+m^2)}dw \qquad (69)$$

Γ) Υπολογισμός ολοκληρώματος κατά μήκος της καμπύλης ΗΚ

Κατά μήκος της καμπύλης ΗΚ, ισχύει $s= \varepsilon e^{i\theta}$ με το θ να μεταβάλλεται από –π έως π. Επίσης $\sqrt{s} = \sqrt{\varepsilon}e^{i\theta\frac{1}{2}}$ και $ds= i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$. Άρα:

$$G(s)ds = e^{A\varepsilon e^{i\theta}t} \frac{e^{-x\sqrt{\varepsilon}e^{i\theta\frac{1}{2}}}}{(\varepsilon e^{i\theta} - m^2)\sqrt{\varepsilon}\, e^{i\theta\frac{1}{2}}}\; i\,\varepsilon\, e^{i\theta} d\theta =$$

$$= \frac{i\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon e^{i\theta} - m^2} e^{(A\varepsilon te^{i\theta} + i\theta\frac{1}{2} - x\sqrt{\varepsilon}\, e^{i\theta\frac{1}{2}})} d\theta \qquad (70)$$

και όταν το ε τείνει στο μηδέν το G(s)ds τείνει στο μηδέν. Επομένως:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{HK} G(s)ds=0 \tag{71}$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (68), (69) και (71) στη σχέση (67) προκύπτει:

$$f_4(x,t)=\frac{e^{-mx}}{m}-e^{-m^2At}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\{\frac{1}{2}\frac{1}{\pi i}\int_R^{\varepsilon} e^{-wAt}\frac{e^{-ix\sqrt{w}}}{i\sqrt{w}(w+m^2)}dw-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\pi i}\int_{\varepsilon}^{R} e^{-wAt}\frac{e^{ix\sqrt{w}}}{i\sqrt{w}(w+m^2)}dw\}$$

$$\Leftrightarrow f_4(x,t)=\frac{e^{-mx}}{m}-e^{-m^2At}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\{-\frac{1}{2}\frac{1}{\pi i}\int_{\varepsilon}^{R} e^{-wAt}\frac{e^{-ix\sqrt{w}}}{i\sqrt{w}(w+m^2)}dw-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\pi i}\int_{\varepsilon}^{R} e^{-wAt}\frac{e^{ix\sqrt{w}}}{i\sqrt{w}(w+m^2)}dw\}$$

$$=\frac{e^{-mx}}{m}-e^{-m^2At}\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-wAt}\frac{e^{-ix\sqrt{w}}}{\sqrt{w}(w+m^2)}dw+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-wAt}\frac{e^{ix\sqrt{w}}}{\sqrt{w}(w+m^2)}dw\}$$

$$\Leftrightarrow f_4(x,t)=\frac{e^{-mx}}{m}-\frac{e^{-m^2At}}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-wAt}\frac{e^{ix\sqrt{w}}+e^{-ix\sqrt{w}}}{\sqrt{w}(w+m^2)}dw$$

$$\Leftrightarrow f_4(x,t)=\frac{e^{-mx}}{m}-\frac{e^{-m^2At}}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-wAt}\frac{2\cos(x\sqrt{w})}{\sqrt{w}(w+m^2)}dw \tag{72}$$

Με αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης στη σχέση (72), $w = u^2 \Rightarrow$ $dw = 2u\,du$, επομένως:

$$\Leftrightarrow f_4(x,t) = \frac{e^{-mx}}{m} - 2\frac{e^{-m^2At}}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-u^2 A t}\frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)}du \qquad (73)$$

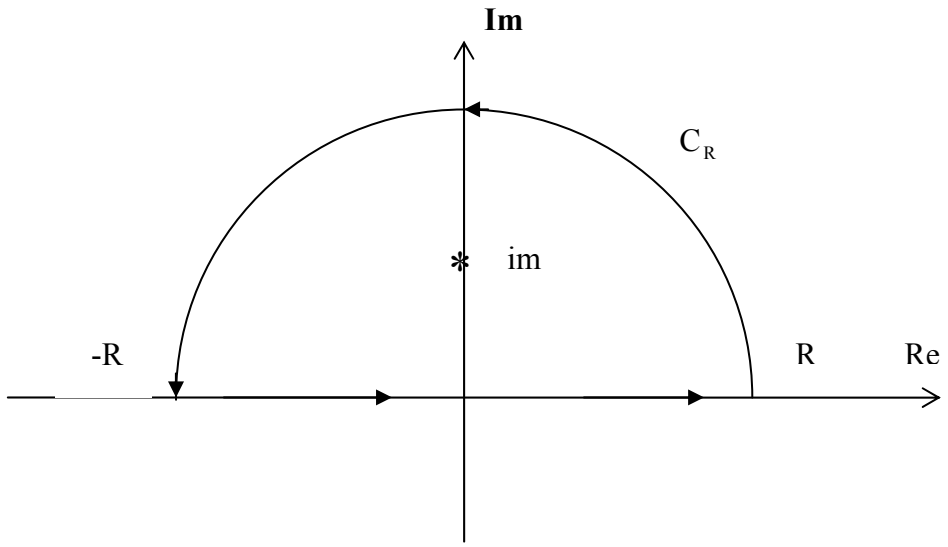
Το ολοκλήρωμα της σχέσης (73) δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά παρά μόνο για $t = 0$. Σε αυτή την περίπτωση γίνεται:

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)}du \qquad (74)$$

όπου το x εκφράζει την απόσταση και είναι $x \geq 0$.

Έστω η συνάρτηση $F(Z) = e^{xiZ}/(Z^2+m^2)$ ενώ με C συμβολίζεται η καμπύλη του σχήματος 2.

ΣΧΗΜΑ 2.



Η καμπύλη C αποτελείται από το τμήμα $-R \leq u \leq +R$ του πραγματικού άξονα και από την ημιπεριφέρεια C_R με ακτίνα $R>1$ η οποία βρίσκεται στο πάνω

μέρος του ημιεπιπέδου και διαγράφεται κατά τη θετική φορά. Το σημείο Z=im είναι ο μόνος πόλος της F(Z) εντός της καμπύλης C.

Σύμφωνα με τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων ισχύει:

«Εάν μια συνάρτηση F(Z) είναι αναλυτική εντός και επί μιας τμηματικής λείας και κλειστής καμπύλης C εκτός των μεμονωμένων ιδιαζόντων σημείων $Z_1, Z_2, \ldots, Z_N$ τα οποία βρίσκονται εντός της C τότε ισχύει:

$$\int_C F(Z)dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{Z=Z_k} F(Z) \quad ».$$

Εδώ είναι N=1 οπότε ισχύει:

$$\int_C F(Z)dZ = 2\pi i \operatorname*{Res}_{Z=im} F(Z) \tag{75}$$

Αλλά ισχύει:

$$\operatorname*{Res}_{Z\to im} F(Z) = \lim_{Z\to im}(Z-im)\frac{e^{ixZ}}{Z^2+m^2} = \lim_{Z\to im}\frac{e^{ixZ}}{Z+im} = \frac{e^{i^2mx}}{im+im} = \frac{e^{-mx}}{2im} \tag{76}$$

οπότε η (75) λόγω της (76) δίνει:

$$\int_{-R}^{R} F(Z)dZ + \int_{C_R} F(Z)dz = \frac{e^{-mx}}{2im}2\pi i = \frac{\pi}{m}e^{-mx} \tag{77}$$

Για τον υπολογισμό του $\int_{C_R} F(Z)dZ$ χρησιμοποιείται το θεώρημα:

«Εάν η G(Z) είναι συνεχής παντού στο άνω μέρος του μιγαδικού επιπέδου και εάν $|G(Z)| \le M / R^k$ για $Z=Re^{i\theta}$ όπου k>0 και M=σταθερά, τότε:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{imZ}G(Z)dZ = 0 \tag{78}$$

όπου C_R είναι το ημικύκλιο (0,R) που βρίσκεται στο εν λόγω επίπεδο και m θετική σταθερά.»

Έστω G(Z) = 1 / (Z^2+m^2) και για τα σημεία της ημιπεριφέρειας C_R είναι Z=$Re^{i\theta}$, οπότε |G(Z)| = | 1 / (Z^2+m^2) | = $\frac{1}{|R^2e^{i2\theta}+m^2|} \leq \frac{1}{R^2}$

Η σχέση (77) σε συνδυασμό με το τελευταίο θεώρημα δίνει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xu)}{u^2+m^2}du + 0 = \frac{\pi}{m}e^{-mx} \qquad (79)$$

Άρα:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{u^2+m^2}du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xu)}{u^2+m^2}du = \frac{\pi}{2m}e^{-mx} \qquad (80)$$

Η σχέση (80) αποτελεί τη λύση του ολοκληρώματος της σχέσης (73) για t = 0.

Αντιστοίχως για t →∞, το ολοκλήρωμα μηδενίζεται γιατί μηδενίζεται ο όρος e^{-u^2At}.

►Τελικό στάδιο υπολογισμού της $f_1(x,t)$

Η σχέση (42) εκφράζει την $F_1(x,p)$. Οι σχέσεις (44) και (45) εκφράζουν τις $F_3(x,p)$ και $F_4(x,p)$ αντιστοίχως, έτσι ώστε να ισχύει:

$$F_1(x,p) = F_3(x,p)F_4(x,p)$$

Όμως σύμφωνα με την ιδιότητα Ω10 του πίνακα 2 ισχύει:

Ω10	F(p)G(p)	$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$

Δηλαδή ο αντίστροφος μετασχηματισμός της F_1 θα προκύψει από τη συνέλιξη των αντίστροφων μετασχηματισμών των F_3 και F_4.Αλλά οι αντίστροφοι των F_3 και F_4 έχουν προσδιοριστεί από τις σχέσεις [(56) ως f_3] και [(73) ως f_4] αντιστοίχως. Άρα:

$f_1(x,t) = f_3(x,t) * f_4(x,t) = f_4(x,t) * f_3(x,t)$ (Συμβολισμός Συνέλιξης)

$\Rightarrow f_1(x,t) = f_4(x,t) * f_3(x,t)$

$\Rightarrow f_1(x,t) = \int_0^t f_4(x, t-\tau) f_3(x,\tau) d\tau$

$$\Rightarrow f_1(x,t) = \int_0^t \left[\frac{e^{-mx}}{m} - 2\frac{e^{-m^2A(t-\tau)}}{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 A(t-\tau)} \frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)} du \right] \bullet$$

$$\bullet \left[\frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} e^{(a_1^2 - m^2A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau}) + \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} e^{(a_2^2 - m^2A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) \right] d\tau \qquad (81)$$

Η σχέση (81) δίνει τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της $F_1(x,p)$. Ωστόσο μπορεί να λάβει απλούστερη μορφή ως εξής:

$$\Rightarrow f_1(x,t) = \frac{e^{-mx}}{m} \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} \int_0^t e^{(a_1^2 - m^2A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\, d\tau$$

$$+ \frac{e^{-mx}}{m} \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} \int_0^t e^{(a_2^2 - m^2A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) d\tau$$

$$+ \frac{-2}{\pi} \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} \int_0^t \left[e^{a_1^2\tau - m^2At} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau}) \int_0^\infty e^{-u^2 A(t-\tau)} \frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)} du \right] d\tau$$

$$+ \frac{-2}{\pi} \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} \int_0^t \left[e^{a_2^2\tau - m^2At} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) \int_0^\infty e^{-u^2 A(t-\tau)} \frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)} du \right] d\tau$$

σχέση (82)

- ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΥ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ ΤΗΣ $F_2(x,p)$

Η $F_2(x,p)$ δίνεται από την σχέση (43)

$$F_2(x,p) = \frac{CA}{p(m^2A + p)}$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός της είναι σχετικά απλός. Με βάση τις ιδιότητες Ω1 και Ω5 του πίνακα 2 θα είναι:

$$f_2(x,t) = CA\frac{e^{-m^2At} - e^0}{-m^2A - 0} = \frac{C}{m^2}(1 - e^{-m^2At}) \qquad (83)$$

Επομένως η συνάρτηση ΔT(x,t) που αναζητείται είναι:

$$\Delta T(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t) =$$

$$= \frac{e^{-mx}}{m}\frac{R(a_1)}{Q'(a_1)}\int_0^t e^{(a_1^2 - m^2A)\tau}\,\mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\,d\tau$$

$$+ \frac{e^{-mx}}{m}\frac{R(a_2)}{Q'(a_2)}\int_0^t e^{(a_2^2 - m^2A)\tau}\,\mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})\,d\tau$$

$$+ \frac{-2}{\pi}\frac{R(a_1)}{Q'(a_1)}\int_0^t \left[\, e^{a_1^2\tau - m^2At}\,\mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau}) \int_0^\infty e^{-u^2A(t-\tau)}\frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)}du \,\right] d\tau$$

$$+ \frac{-2}{\pi}\frac{R(a_2)}{Q'(a_2)}\int_0^t \left[\, e^{a_2^2\tau - m^2At}\,\mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) \int_0^\infty e^{-u^2A(t-\tau)}\frac{\cos(xu)}{(u^2+m^2)}du \,\right] d\tau$$

$$+ \frac{C}{m^2}(1 - e^{-m^2At}) \qquad \text{σχέση (84)}$$

όπου:

$$a_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4AB(n^2 - Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B}$$

$$a_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4AB(n^2 - Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B}$$

$$R(a_k) = (C_1 - CAB)(a_k)^2 + (CA^2Bm^2 - CAn^2)$$

$$Q'(a_k) = 2\sqrt{A}B(a_k) + 1$$

i) Περίπτωση της ΔT(x,t) όταν t=0.

Παρατηρείται ότι για t=0, οι τέσσερις πρώτοι όροι εμφανίζουν ολοκλήρωμα μεταξύ ορίων ολοκλήρωσης από 0 έως 0. Άρα οι τέσσερις πρώτοι όροι μηδενίζονται. Όμως και ο πέμπτος όρος με απλή αντικατάσταση μηδενίζεται. Δηλαδή ΔT(x,0)=0 ώστε επιβεβαιώνεται η οριακή συνθήκη της σχέσης (5).

ii)Περίπτωση της ΔT(x,t) όταν t→∞.

Ο τρίτος και ο τέταρτος μηδενίζονται γιατί περιέχουν τα $e^{a_1^2\tau - m^2 At}$, $e^{a_2^2\tau - m^2 At}$ αντιστοίχως. Για τους δυο πρώτους όρους αλλάζει στα ολοκληρώματα το πάνω όριο ολοκλήρωσης και γίνεται ∞. Ο πέμπτος όρος απλοποιείται και μένει C / m^2.

Τελικά προκύπτει:

$$\Delta T(x,\infty) = \frac{e^{-mx}}{m} \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} \int_0^\infty e^{(a_1^2 - m^2 A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\, d\tau$$

$$+ \frac{e^{-mx}}{m} \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} \int_0^\infty e^{(a_2^2 - m^2 A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) d\tau + \frac{C}{m^2} \qquad (85)$$

iii)Περίπτωση της ΔT(x,t) όταν x=0.

$$\Delta T(0,t) =$$

$$= \frac{1}{m} \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} \int_0^t e^{(a_1^2 - m^2 A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} \int_0^t e^{(a_2^2 - m^2 A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) d\tau$$

$$+ \frac{-2}{\pi} \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} \int_0^t \left[e^{a_1^2\tau - m^2 At} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau}) \int_0^\infty e^{-u^2 A(t-\tau)} \frac{1}{(u^2 + m^2)} du \right] d\tau$$

$$+ \frac{-2}{\pi} \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} \int_0^t \left[e^{a_2^2\tau - m^2 At} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) \int_0^\infty e^{-u^2 A(t-\tau)} \frac{1}{(u^2 + m^2)} du \right] d\tau$$

$$+ \frac{C}{m^2}(1 - e^{-m^2 At}) \qquad (86)$$

iv)Περίπτωση της ΔT(x,t) όταν x=0 και t→∞

$$\Delta T(0,\infty) = \frac{1}{m} \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} \int_0^\infty e^{(a_1^2 - m^2 A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{m} \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} \int_0^\infty e^{(a_2^2 - m^2 A)\tau} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{\tau}) d\tau + \frac{C}{m^2} \qquad (87)$$

3.2.2.α Απλουστευμένη λύση της ΔT(x,t)

Η σχέση (84) δίνει την αναλυτική λύση της ΔT(x,t). Όμως μπορεί να προκύψει μία σχετικά απλούστερη λύση, εάν ακολουθηθεί η παρακάτω διαδικασία.

Ισχύει ότι

$\Delta T(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$

όπου

$$f_2(x,t) = CA\frac{e^{-m^2At} - e^0}{-m^2A - 0} = \frac{C}{m^2}(1 - e^{-m^2At})$$

ενώ

$f_1(x,t) = f_3(x,t) * f_4(x,t) = f_4(x,t) * f_3(x,t)$ (Συμβολισμός Συνέλιξης)

με

$$f_3(x,t) = \frac{R(a_1)}{Q'(a_1)} e^{(a_1^2 - m^2A)t} \operatorname{erfc}(-a_1\sqrt{t}) + \frac{R(a_2)}{Q'(a_2)} e^{(a_2^2 - m^2A)t} \operatorname{erfc}(-a_2\sqrt{t})$$

και

$$f_4(x,t) = \frac{e^{-mx}}{m} - 2\frac{e^{-m^2At}}{\pi}\int_0^\infty e^{-u^2At}\frac{\cos(xu)}{(u^2 + m^2)}du$$

Αλλά η $f_4(x,t)$ προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την

$$f_{new} = \frac{e^{-mx}\operatorname{erf}(\sqrt{m^2At})}{m}$$

Άρα η νέα συνάρτηση $f_1(x,t)$ προκύπτει από

$f_1(x,t) = f_{new}(x,t) * f_3(x,t)$

$$= \int_0^t f_{new}(x, t - \tau) f_3(x, \tau) d\tau$$

$$=\int_0^t \frac{e^{-mx}\,\mathrm{erf}(\sqrt{m^2A(t-\tau)})}{m}\bullet$$

$$[\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}e^{(a_1^2-m^2A)\tau}\,\mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})+\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}e^{(a_2^2-m^2A)\tau}\,\mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})]d\tau$$

$$\Leftrightarrow f_1(x,t)=\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}\frac{e^{-mx}}{m}\int_0^t e^{(a_1^2-m^2A)\tau}\mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\mathrm{erf}(\sqrt{m^2A(t-\tau)})d\tau+$$

$$+\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}\frac{e^{-mx}}{m}\int_0^t e^{(a_2^2-m^2A)\tau}\mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})\mathrm{erf}(\sqrt{m^2A(t-\tau)})d\tau$$

Άρα $\Delta T(x,t) = f_1(x,t) + f_2(x,t)$

$$\Leftrightarrow \Delta T(x,t)=\frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)}\frac{e^{-mx}}{m}\int_0^t e^{(a_1^2-m^2A)\tau}\mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\mathrm{erf}(\sqrt{m^2A(t-\tau)})d\tau+$$

$$+\frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)}\frac{e^{-mx}}{m}\int_0^t e^{(a_2^2-m^2A)\tau}\mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})\mathrm{erf}(\sqrt{m^2A(t-\tau)})d\tau$$

$$+\frac{C}{m^2}(1-e^{-m^2At})$$

σχέση (88)

όπου:

$$a_1=\frac{-1+\sqrt{1-4AB(n^2-Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B}$$

$$a_2=\frac{-1-\sqrt{1-4AB(n^2-Bm^2A)}}{2\sqrt{A}B}$$

$$R(a_k)=(C_1-CAB)(a_k)^2+(CA^2Bm^2-CAn^2)$$

$$Q^{/}(a_k)=2\sqrt{A}B(a_k)+1$$

i)Περίπτωση της $\Delta T(x,t)$ για $t=0$.

Τα δυο πρώτα ολοκληρώματα της σχέσης (88) μηδενίζονται γιατί προκύπτουν όρια ολοκληρώσεως από μηδέν έως μηδέν. Επίσης ο τρίτος όρος φαίνεται με απλή αντικατάσταση ότι μηδενίζεται, δηλαδή $\Delta T(x,0) = 0$ ώστε επιβεβαιώνεται η οριακή συνθήκη της σχέσης (5).

ii)Περίπτωση της $\Delta T(x,t)$ για $t\to\infty$.

Για t→∞, δεδομένου ότι $e^{-\infty} \to 0$ και erf(∞) = 1 η σχέση (88) γίνεται:

$$\Delta T(x,\infty) = \frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} \frac{e^{-mx}}{m} \int_0^{\infty} e^{(a_1^2 - m^2 A)\tau} \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})d\tau +$$

$$+ \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} \frac{e^{-mx}}{m} \int_0^{\infty} e^{(a_2^2 - m^2 A)\tau} \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})d\tau + \frac{C}{m^2} \qquad (89)$$

iii)Περίπτωση της ΔT(x,t) για x=0.

$$\Leftrightarrow \Delta T(0,t) = \frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} \frac{1}{m} \int_0^{t} e^{(a_1^2 - m^2 A)\tau} \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})\mathrm{erf}(\sqrt{m^2 A(t-\tau)})d\tau +$$

$$+ \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} \frac{1}{m} \int_0^{t} e^{(a_2^2 - m^2 A)\tau} \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})\mathrm{erf}(\sqrt{m^2 A(t-\tau)})d\tau$$

$$+ \frac{C}{m^2}(1 - e^{-m^2 At}) \qquad (90)$$

iv) Περίπτωση της ΔT(x,t) για x=0 και t→∞.

$$\Delta T(0,\infty) = \frac{R(a_1)}{Q^{/}(a_1)} \frac{1}{m} \int_0^{\infty} e^{(a_1^2 - m^2 A)\tau} \mathrm{erfc}(-a_1\sqrt{\tau})d\tau +$$

$$+ \frac{R(a_2)}{Q^{/}(a_2)} \frac{1}{m} \int_0^{\infty} e^{(a_2^2 - m^2 A)\tau} \mathrm{erfc}(-a_2\sqrt{\tau})d\tau + \frac{C}{m^2} \qquad (91)$$

4. <u>Ποιοτική ανάλυση της λύσης που εκφράζει την ΔT(x,t)</u>

4.1 Τα αριθμητικά μεγέθη των συντελεστών

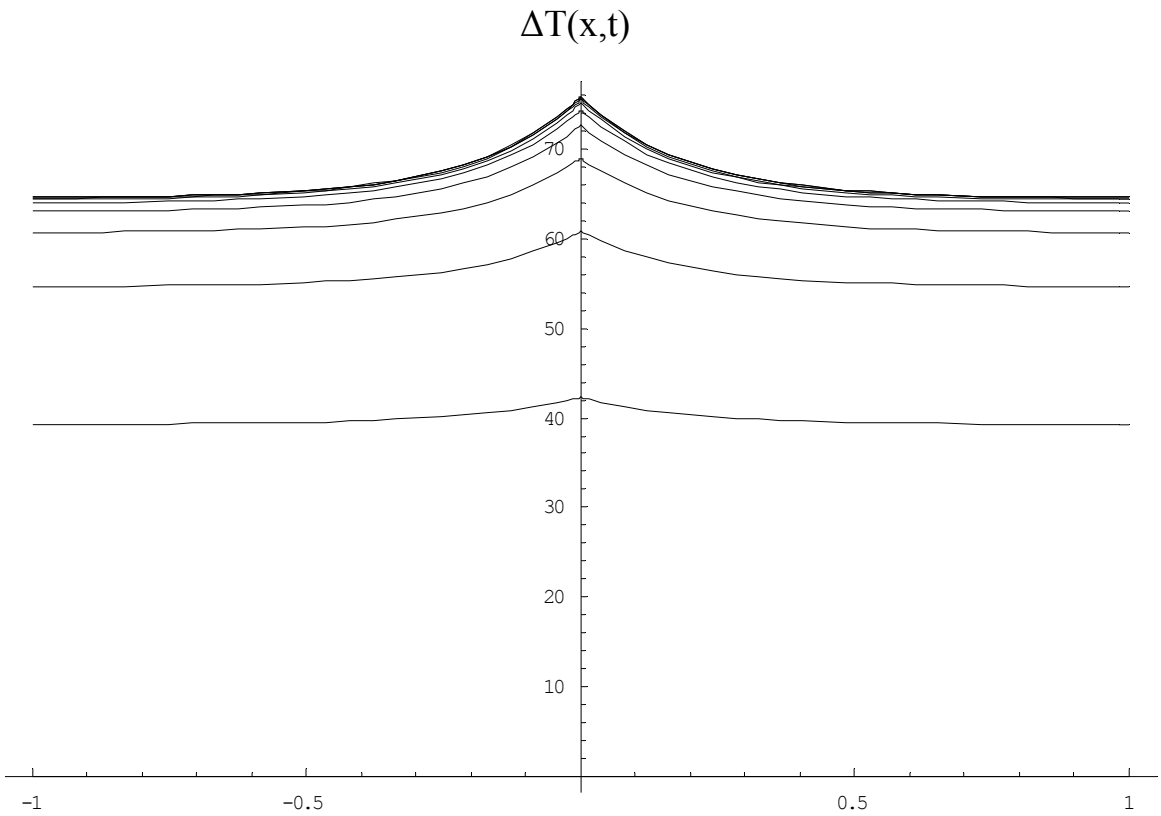
$\rho_\alpha = 0.0175*10^{-6}$
$\alpha = 0.00392$
$\lambda = 395$
$A = 1.166*10^{-4}$
$F = 16*10^{-6}$
$S = 14.16*10^{-3}$
$K = 15$
$I = 100$
$\Delta V = 0.05$
$c = 0.3809$
$\alpha_1 = 2 * 0.00392 / 3 = 0.00261333$

Το Q_α προκύπτει από τη σχέση $Q_\alpha = I * \Delta V$ ενώ τα m^2, C, B, n^2, C_1, a_1, a_2, $R(a_k)$, $Q^/(a_k)$ προκύπτουν από τις σχέσεις (2), (3), (10), (9), (11), (49), (50), (51), (52) αντιστοίχως.

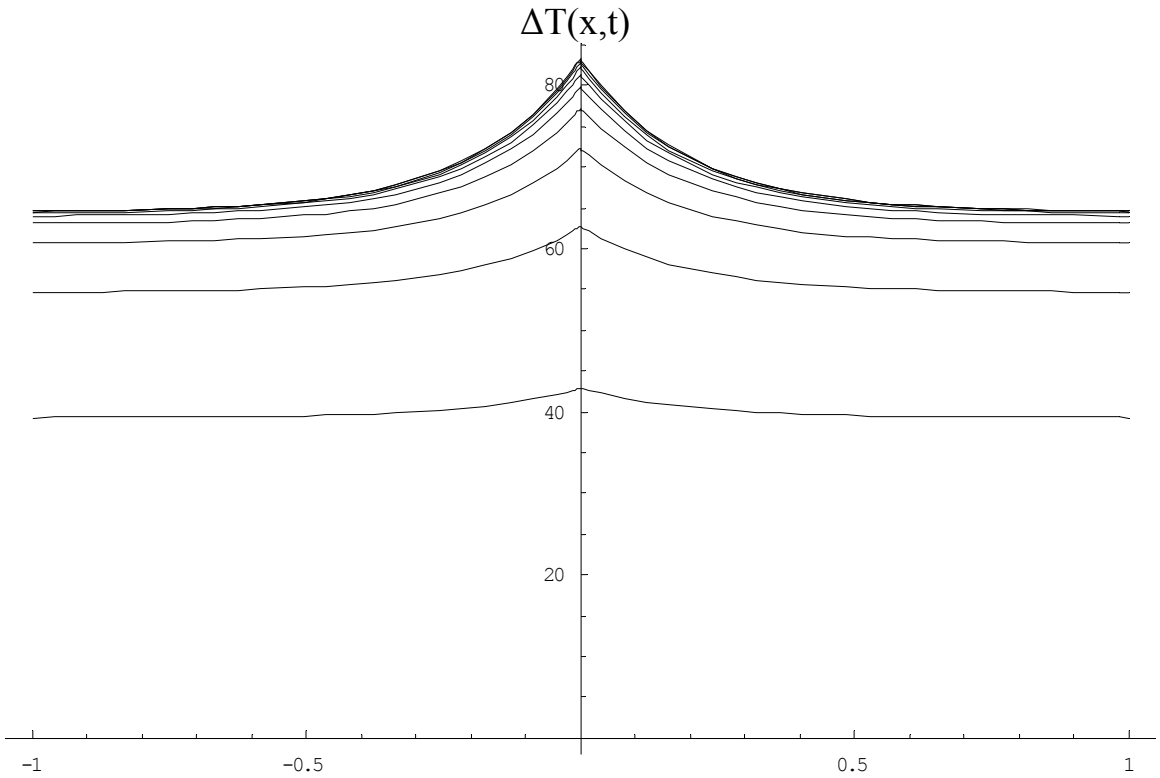
Στην επόμενη παράγραφο παρατίθενται οι γραφικές παραστάσεις της ΔT(x,t) για συγκεκριμένα ζεύγη τιμών M_1, G (μάζα επαφής, επιφάνεια επαφής), ώστε να εξαχθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

4.2 Γραφικές παραστάσεις

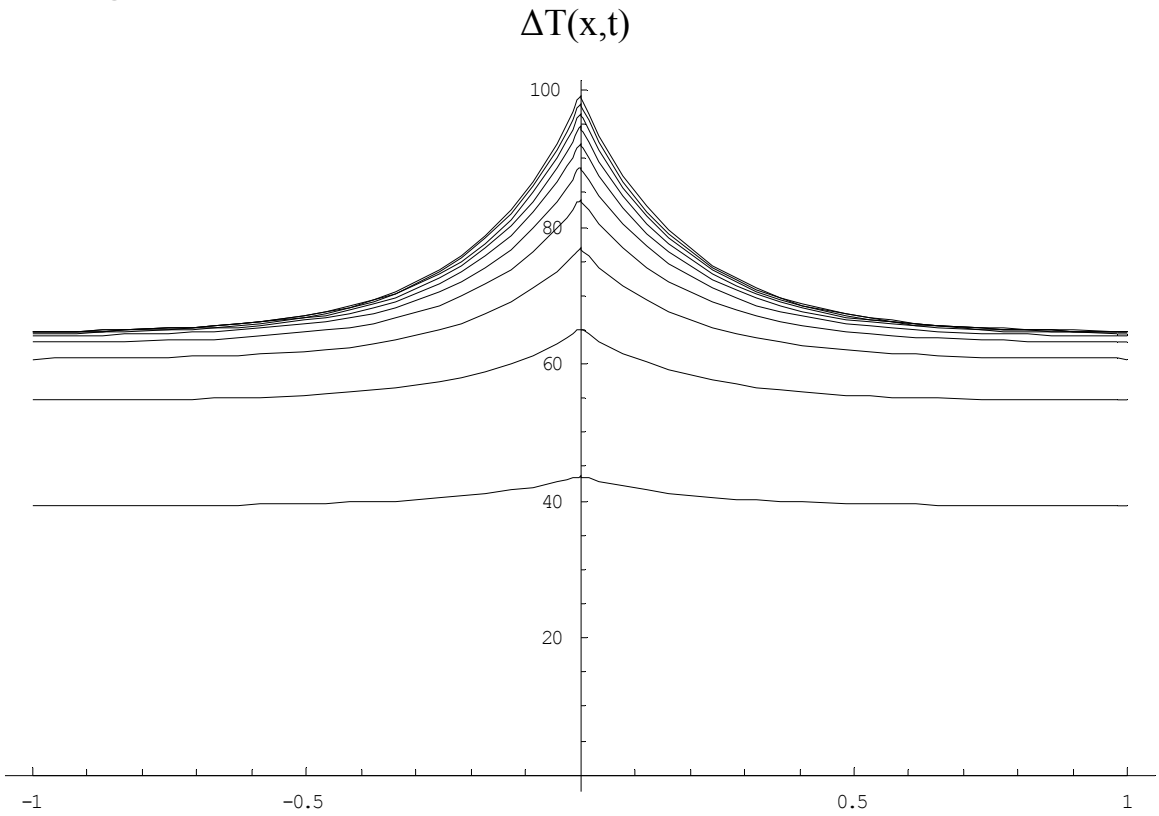
M=600g G=0.03m ^{2}



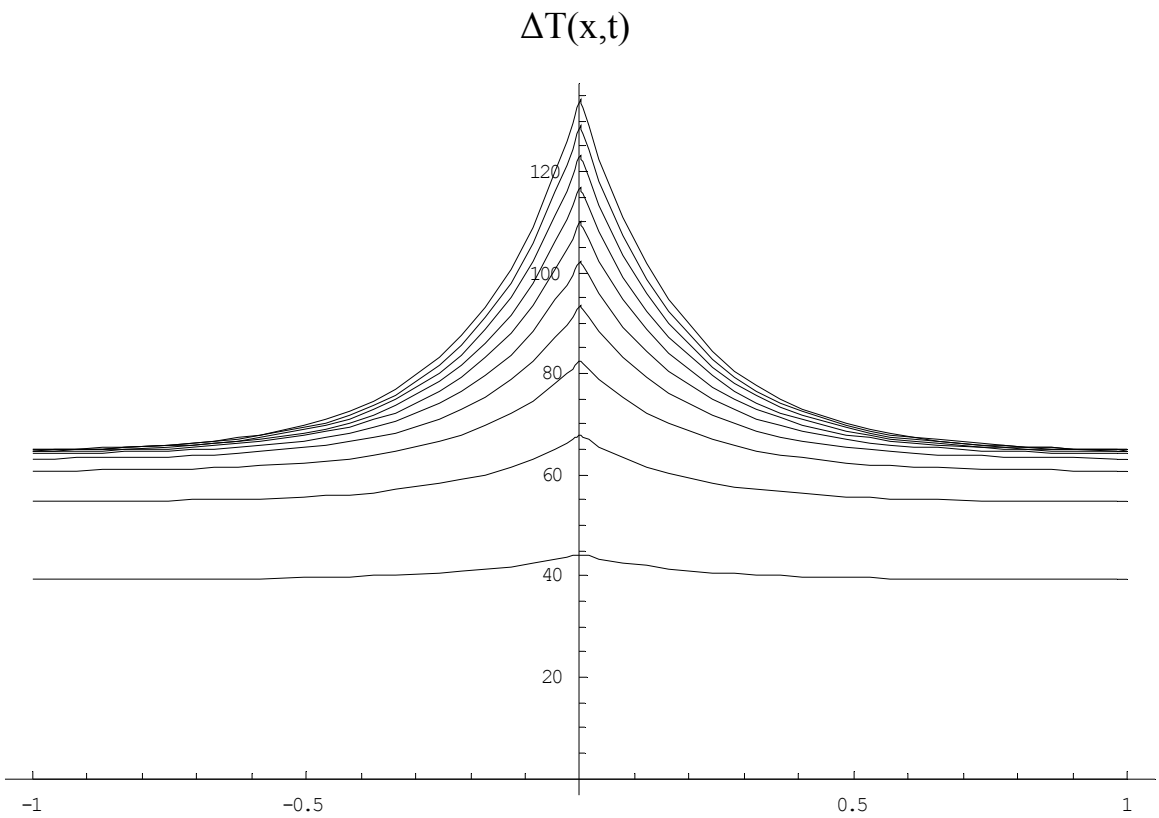
M=600g G=0.02m ^{2}



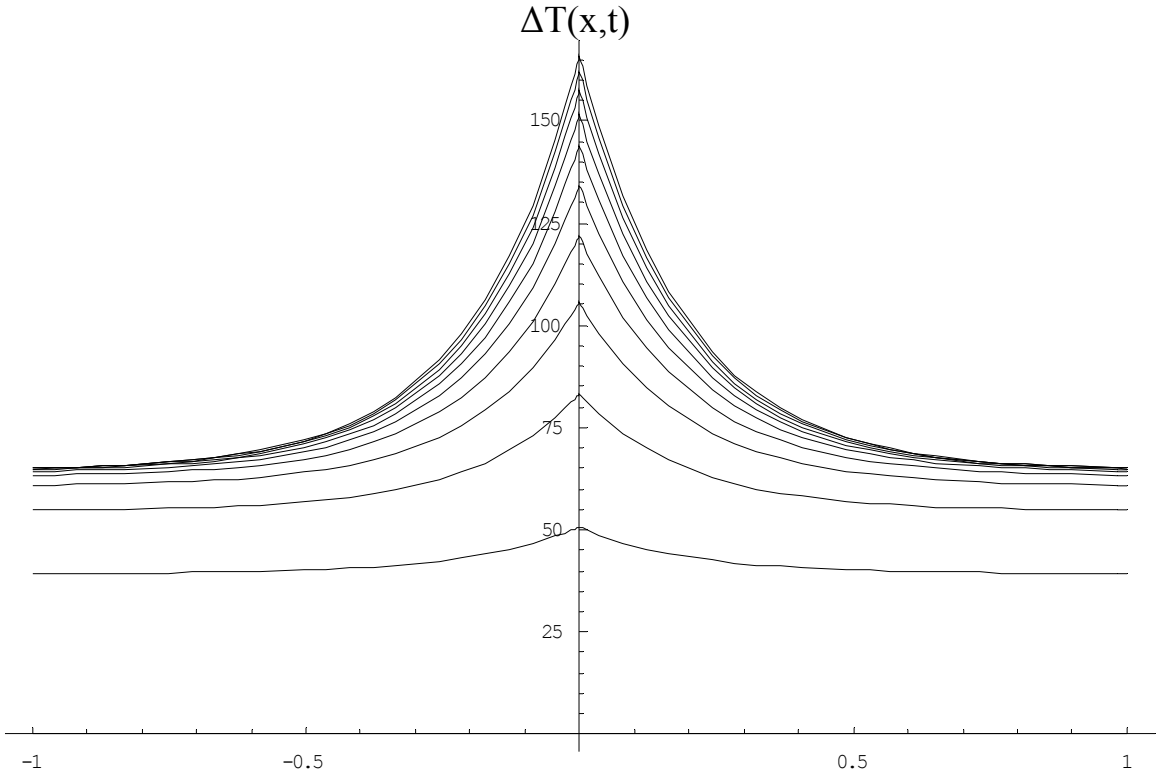
M=600g G=0.01m^2



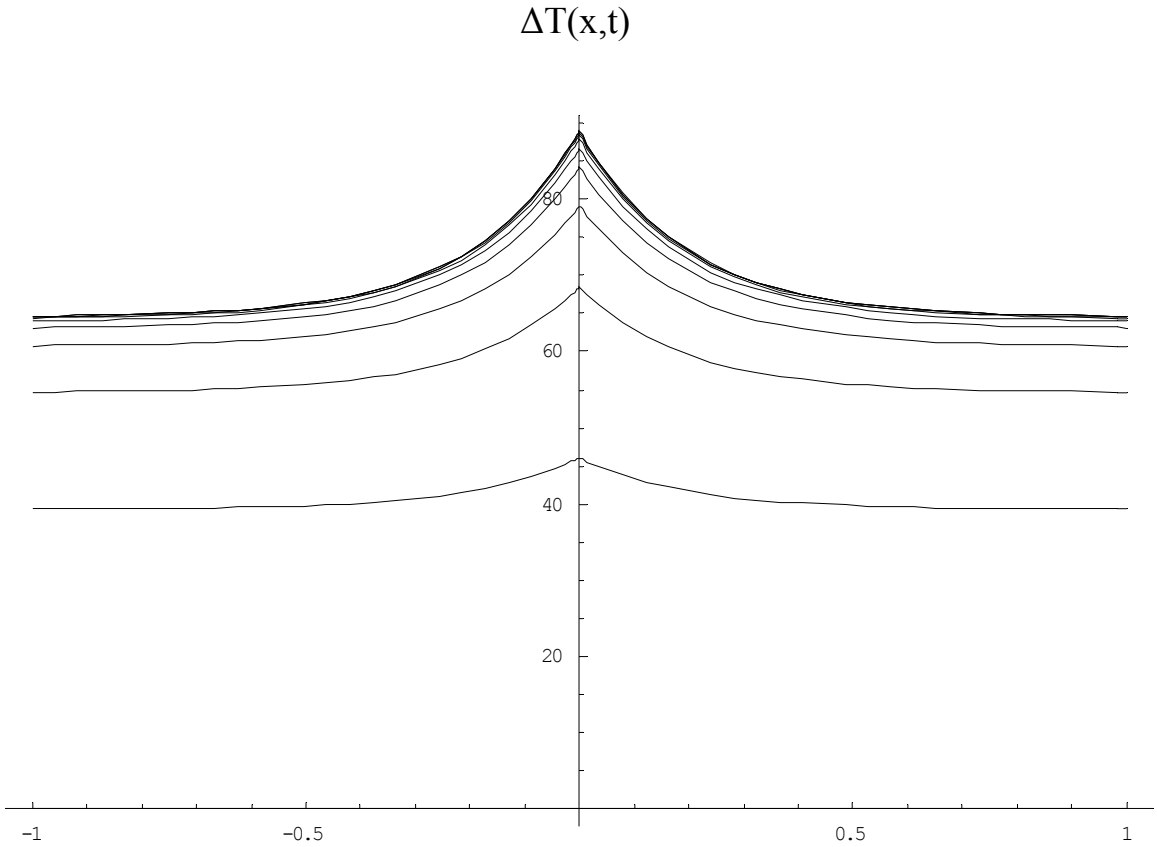
M=600g G=0.001m^2



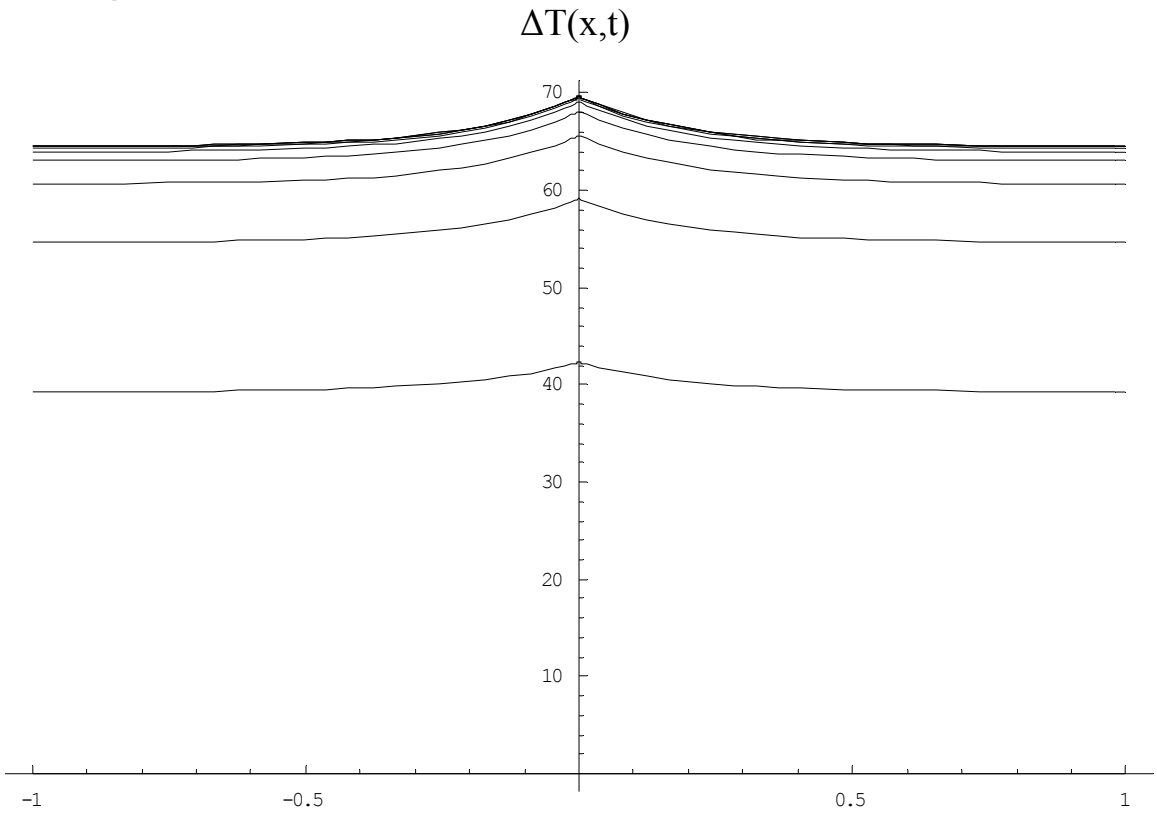
M=200g G=0.001m^2



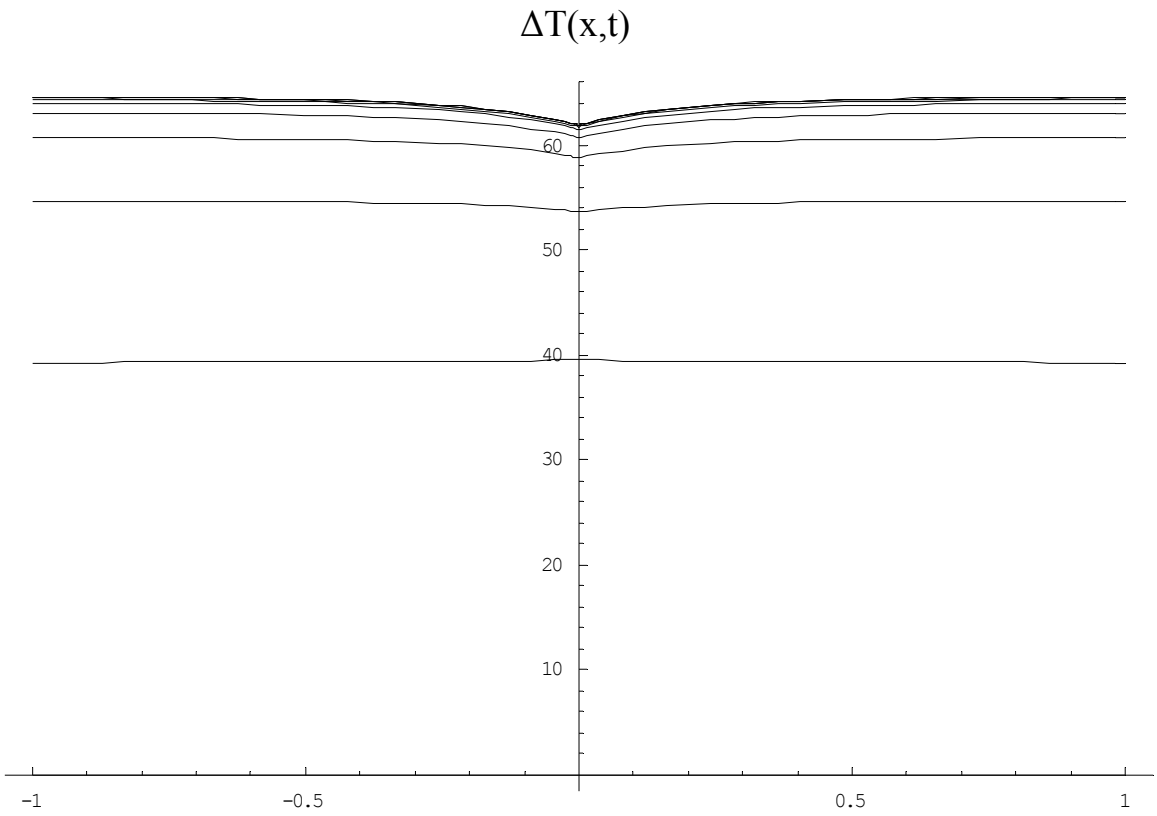
M=200g G=0.01m^2



M=200g G=0.02m ^{2}



M=200g G=0.03m ^{2}



4.3 Σχόλια και συμπεράσματα

Οι γραφικές παραστάσεις της παραγράφου 4.2 περιγράφονται ως εξής: στον κατακόρυφο άξονα είναι οι τιμές της θερμοκρασίας, στον οριζόντιο άξονα είναι οι τιμές του μήκους, και σε κάθε διάγραμμα εμφανίζονται γραφήματα για συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα.

Ι)Σχόλια ως προς το χρόνο.

Μετά από την πάροδο κάποιου χρονικού διαστήματος παρατηρείται ότι η συνάρτηση τείνει να σταθεροποιηθεί. Για τον ρυθμό σταθεροποίησης ανάλογα με το αν μεταβάλλεται η μάζα ή η επιφάνεια ισχύουν τα ακόλουθα:

i)Για δεδομένη μάζα, όσο μεγαλώνει η επιφάνεια της πηγής η συνάρτηση σταθεροποιείται γρηγορότερα σε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία
ii)Αντιθέτως για δεδομένη επιφάνεια, μεγαλώνοντας τη μάζα της πηγής αυξάνεται ο χρόνος για να σταθεροποιηθεί η συνάρτηση σε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία.

ΙΙ)Σχόλια ως προς το μήκος

Παρατηρείται ότι για μεγάλη απόσταση από την πηγή η κλίση της συνάρτησης τείνει να γίνει αμελητέα. Αυτό εξάλλου επιβεβαιώνεται και από την οριακή συνθήκη της σχέσης (7):

$$\frac{\partial \Delta T(x,t)}{\partial x} \Big|_{x \to \infty} = 0$$

Βιβλιογραφία

[1] Holm R.: "Calculation of the temperature development in a contact heated in the contact surface and application to the problem of the temperature rise in a sliding contact". J. Appl. Phys. 19, p.361 (1948).

[2] Holm R.: "The electric tunnel effect across thin insulator films in contacts", J. Appl. Phys. 22, p.569 (1951).

[3] Simmons J.G.: "Generalized formula for the electric tunnel effect between similar electrodes separated by a thin insulating film", J. Appl. Phys., 34,No 6, pp. 1793 – 1803, (1963).

[4] Holm R.: "Electric contacts. Theory and applications", Springer- Verlang, 4th edition, Berlin, (1979).

[5] Bourkas P.D., Kayafas E.A. and Machias A.V.: "Specified current in emergency load switches", IEE Proceedings, Vol. 135, Pt. C, No 4, pp. 330-333, (1988).

[6] Bourkas P.D., Machias A.V., Stathopoulos I.A., Topalis F.V.: "No-Load Medium Voltage Switches Design For Industrial Applications", IASTED Int Symp High Technology In the Power Industry, Valencia, Spain, pp.635-639, (1989).

[7] Karagiannopoulos C.G., Bourkas P.D., Dervos C.T.: "Measurements on contacts of no-load Switches, using different currents and clamping spring force values", Proc. Int. Sypm. Applied Modeling and Simulations, Lugano, p.94-97, (1990).

[8] Karagiannopoulos C.G., Bourkas P.D., Dervos C.T., Kagarakis C.A.: "Physical interpretations concerning non- linear conductivity phenomena across no-load switching contacts", ICEC-IEEE Holim 90 15th Int. conf. on Electrical contacts, p. 611-618, (1990).

[9] Μ.Π. Φιλιππάκου: "Ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων και πειραματική διερεύνηση θερμικών και ηλεκτρικών φαινομένων καταπόνησης σε επαφές διακοπτών", Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., (1999).

[10] Κ.Σ. Ψωμόπουλου: "Μη γραμμικά φαινόμενα σε μονωτές και επαφές διακοπτών υψηλών τάσεων, μέσω αναλογικών / ψηφιακών μετατροπέων", Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π.,(2002).