ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
και
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πλειονότιμες Τροπικές Λογικές
και
Εφαρμογές στην Πληροφορική

ΦΟΙΤΗΤΗΣ

Νικόλαος-Παύλος Γ. Τζεβελέκος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Ευστάθιος Ζάχος, Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τμήμα Πληροφορικής

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Πλειονότιμες Τροπικές Λογικές
και
Εφαρμογές στην Πληροφορική

ΦΟΙΤΗΤΗΣ

Νικόλαος-Παύλος Γ. Τζεβελέκος

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

Ευστάθιος Ζάχος, Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 16$^{\eta}$ Ιουλίου 2003

Ευστάθιος Ζάχος	**Γεώργιος Κολέτσος**	**Φώτω Αφράτη**
Καθηγητής ΕΜΠ	**Αν.Καθηγητής ΕΜΠ**	**Καθηγήτρια ΕΜΠ**

Αθήνα, Ιούνιος 2003

Νικόλαος-Παύλος Τζεβελέκος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Περίληψη

Οι τροπικές όπως και οι πλειονότιμες λογικές είναι δύο είδη μη-κλασικών λογικών που έχουν βρει πλήθος εφαρμογών κατά τον προηγούμενο και τον παρόντα αιώνα, ιδιαίτερα στην Επιστήμη της Πληροφορικής. Σε αυτή τη διπλωματική εργασία εξετάζουμε ένα συνδυασμό των δύο σε μια πλειονότιμη τροπική λογική, όπως παρουσιάστηκε από τον Melvin Fitting σε δύο δημοσιεύσεις του την περίοδο 1991-1992.

Εξετάζουμε πλειονότιμες τροπικές λογικές που έχουν πεπερασμένο αριθμό αληθοτιμών, οι οποίες ανήκουν σε επιμεριστικά δικτυωτά. Παρουσιάζεται μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία δικτυωτών, στην οποία αποδεικνύονται όλα τα θεωρήματα και οι προτάσεις που χρησιμοποιούνται στην προσέγγισή μας για τις πλειονότιμες λογικές. Επίσης, παρουσιάζεται μια σύντομη εισαγωγή στην τροπική λογική για λόγους πληρότητας · αν και αυτός ο όρος είναι δεσμευμένος.

Τέλος, παρουσιάζεται μια εφαρμογή των πλειονότιμων τροπικών λογικών στην Τεχνητή Νοημοσύνη. Εξετάζουμε συστήματα πολλών ειδικών, με μερικούς να επικρατούν σε άλλους, οι οποίοι αποφαίνονται για την αληθοτιμή τροπικών τύπων. Δείχνουμε ότι αυτά τα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών είναι ισοδύναμα με τα πλειονότιμα τροπικά μοντέλα. Επίσης, εισάγουμε πλειονότιμα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών, δηλαδή μοντέλα πολλών ειδικών οι οποίοι αποφαίνονται για την αληθοτιμή τροπικών προτάσεων με πλειονότιμο τρόπο. Αυτά τα μοντέλα δείχνουμε ότι ανάγονται σε πλειονότιμα τροπικά μοντέλα.

Abstract

Modal as well as many-valued logics are two types of non-standard logics that have found lots of applications during the past and current century, especially in Computer Science. In this diploma thesis we examine a combination of these two to a many-valued modal logic, as described by Melvin Fitting in his papers of 1991-1992.
We describe many-valued logics that have finite number of truth-values, which belong to distributive lattices. A short introduction to lattice theory is presented, where all theorems and propositions used in our approach to many-valued logics are proved. A short introduction to modal logic is also presented, for completeness purposes; though this is a reserved word. An application of many-valued modal logics to artificial intelligence is finally described. We examine the case of several experts, with some dominating others, that valuate the truth of modal formulas. These multiple-expert modal models are shown to be equivalent in a certain sense to many-valued modal models. Finally, we introduce many-valued multiple-expert modal models, i.e. multiple-expert modal models where experts reason in a many-valued fashion. These latter models are shown to be embeddible to many-valued modal models.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Μια κατηγορία μη-κλασικών μαθηματικών λογικών με ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την επιστήμη της πληροφορικής είναι αυτή των πλειονότιμων λογικών *many-valued logics*, δηλαδή λογικών στις οποίες δεχόμαστε περισσότερες αληθοτιμές από τις κλασικές δύο. Ενώ στην κλασική λογική μία πρόταση είναι είτε *αληθής* είτε *ψευδής*, σε μια πλειονότιμη λογική επιτρέπουμε να μην είναι τίποτα από τα δύο και να της ανατίθεται μια τρίτη αληθοτιμή. Η έννοια των παραπάνω από δύο αληθοτιμών είναι σχεδόν αυτονόητη τόσο σε πραγματικά συστήματα, όσο και σε πολλά θεωρητικά συστήματα. Για παράδειγμα, ο Lukasiewicz (1920) προσπάθησε να ενσωματώσει την έννοια του "ενδεχομένου", αυτού που σήμερα ονομάζουμε "τροπικότητα", σε λογικές προτάσεις με τη χρήση μιας τρίτιμης λογικής. Από την άλλη, ο Kleene ([Kle71]) εισάγει μια τρίτιμη λογική για την περιγραφή κατηγορημάτων που βασίζονται σε μερικές (partial) συναρτήσεις.

Οι πλειονότιμες λογικές έχουν βρει ένα πλήθος εφαρμογών στην πληροφορική κατά τις τελευταίες δεκαετίες, κυρίως σε συστήματα τεχνητής νοημοσύνης και σε συστήματα βάσεων δεδομένων. Στα πρώτα, εάν θέλουμε τα συστήματά μας να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα, πρέπει να δεχτούμε ότι η πραγματικότητα έχει παραπάνω από δύο αποτιμήσεις: ό,τι δεν είναι σωστό δεν είναι απαραίτητα λάθος. Ένας ολόκληρος κλάδος της τεχνητής νοημοσύνης, ο κλάδος της *fuzzy logic*, βασίζεται στην πλειονότιμη λογική. Από την άλλη πλευρά, στις βάσεις δεδομένων συμβαίνει πολύ συχνά να γίνονται επερωτήσεις (*queries*) που να επιδέχονται απαντήσεις διαφορετικές από ένα απλό "ναι" ή "όχι". Για παράδειγμα, μπορεί κάποιος ονόματι "Κωνσταντίνου Μιχάλης" να μην υπάρχει στη βάση μας, όμως μια "έξυπνη" βάση ενδεχομένως να ξέρει ότι η εγγραφή "Κωνσταντίνου Εμμανουήλ" είναι πολύ σχετική με την επερώτησή μας, οπότε να απαντήσει ότι η επερώτηση δεν ήταν μεν αληθής, όμως δεν ήταν ούτε ψευδής. Εκτός αυτού, η βάση μπορεί να μην απαντήσει καθόλου στην επερώτηση ή ακόμη μια ασυνεπής βάση μπορεί να απαντήσει "σωστό" και "λάθος" ταυτόχρονα (για διαφορετικούς λόγους). Μια τέτοια τετράτιμη λογική εξετάζει ο Belnap (1977) και επεκτείνει ο Fitting στο [Fit94].

Τέλος, η πλειονότιμη λογική έχει βρει πολλές σημαντικές εφαρμογές στη *γλωσσολογία (linguistics)*, στη φιλοσοφία και στη *σχεδίαση harware (hardware design)*. Στην τελευταία περίπτωση εξετάζονται μέθοδοι μελέτης και επεξεργασίας λογικών κυκλωμάτων από υψηλό επίπεδο, όπου τα σήματα είναι συνδυασμοί στοιχειωδών σημάτων και παίρνουν παραπάνω από δύο τιμές. Μια τέτοια προσπάθεια ενσωμάτωσης πλειονότιμης λογικής στη λογική σχεδίαση παρουσιάζεται στο [BK99].

Μια άλλη κατηγορία μη-κλασικής λογικής είναι η τροπική λογική. Φυσικά, η τροπική λογική δε χρειάζεται ιδιαίτερες συστάσεις, καθώς από το μισό του προηγούμενου αιώνα μέχρι τις μέρες μας είναι μάλλον ο πιο δραστήριος κλάδος της μαθηματικής λογικής, τόσο σε εφαρμογές, όσο και σε νέα θεωρητικά επιτεύγματα. Η τροπική λογική είναι η απάντηση στο πρόβλημα που δοκίμασε να λύσει ο Lukasievicz με πλειονότιμες λογικές, είναι δηλαδή η λογική της *ικανοποίησης σε πιθανούς κόσμους*.

Η εργασία αυτή βασίζεται σε δύο δημοσιεύσεις του Fitting ([Fit92a],[Fit92b]) πάνω σε λογικές που συνδυάζουν τόσο την πλειονότιμη όσο και την τροπική λογική, δηλαδή σε πλειονότιμες τροπικές λογικές. Στις δημοσιεύσεις αυτές παρουσιάζονται πλειονότιμες τροπικές λογικές με σύνολα αληθοτιμών τα οποία ανήκουν σε μια κατηγορία αλγεβρών ονόματι *δικτυωτά (lattices)* . Μια εισαγωγή στη θεωρία των δικτυωτών παρουσιάζεται στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της εργασίας και εκεί παρουσιάζονται αναλυτικά οι λόγοι για τους οποίους επιλέγει κανείς να έχει τις αληθοτιμές μιας λογικής πάνω σε ένα δικτυωτό. Στην ουσία, στο τέλος του πρώτου κεφαλαίου μια τέτοια επιλογή φαίνεται πλεόν *φυσιολογική*.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια πλειονότιμη λογική χωρίς τροπικούς τελεστές στην οποία οι αληθοτιμές αποτελούν στοιχεία ενός πεπερασμένου επιμεριστικού δικτυωτού. Πάνω σε αυτήν τη λογική ορίζουμε ένα σύστημα ακολουθητών, το σύστημα $SC_{\mathcal{T}}$, το οποίο αποδεικνύουμε ότι είναι ορθό και πλήρες. Η απόδειξη της πληρότητας βασίζεται σε αυτήν που παρουσιάζεται στο [Fit92a], όμως αποδεικνύουμε μια γενικότερη μορφή πληρότητας από αυτήν που αποδεικνύεται εκεί. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως πρωτότυπη εργασία, αν και η εν λόγω γενίκευση είναι μάλλον άμεση.

Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια σύντομη εισαγωγή στην τροπική λογική, με αναφορές από το [BdRV01] και κυρίως το [Ram97]. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην ερμηνεία των τροπικών τελεστών, ώστε να γίνουν κατανοητοί οι λόγοι για τους οποίους η τροπική λογική βρίσκει πολλές εφαρμογές. Επίσης, παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία θεωρίας αντιστοίχησης και το αποδεικτικό σύστημα **K**. Για το τελευταίο αναφέρουμε την ορθότητα και αποδεικνύουμε την πληρότητά του. Τέλος, παρουσιάζεται μια απόδειξη αποκρισιμότητας για τους έγκυρους τροπικούς τύπους.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζεται πλέον μια πλειονότιμη τροπική λογική. Ομοίως με την απλή πλειονότιμη λογική του δευτέρου κεφαλαίου, αφού παρουσιαστούν οι απαραίτητοι ορισμοί για τη λογική αυτή, παρουσιάζεται το ανάλογο σύστημα ακολουθητών $SC_{\mathcal{T}}^{mod}$. Για το σύστημα αυτό αποδεικνύουμε την ορθότητα και την πληρότητά του, με την απόδειξη της πληρότητας να ακολουθεί μεν τα βήματα αυτής του [Fit92b], αλλά να καταλήγει σε μια γενικότερη μορφή πληρότητας (παρόμοια με την απόδειξη πληρότητας στο δεύτερο κεφάλαιο).

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζεται μια εφαρμογή της πλειονότιμης τροπικής λογικής του τέταρτου κεφαλαίου στην τεχνητή νοημοσύνη και ειδικότερα σε *συστήματα ειδικών.* Η ιδέα είναι η χρήση μοντέλων πολλών ειδικών με την προσθήκη μιας *σχέσης επικράτησης* πάνω σε αυτούς. Τα μοντέλα αυτά δείχνουμε ότι είναι ισοδύναμα με παραγόμενες πλειονότιμες τροπικές λογικές, αλλά και αντίστροφα κάθε πλειονότιμη τροπική λογική είναι ισοδύναμη με ένα παραγόμενο μοντέλο πολλών ειδικών. Μέχρι αυτό το σημείο του κεφαλαίου παρουσιάζεται ύλη μέσα από το [Fit92b]. Στις τελευταίες δύο παραγράφους παρουσιάζουμε μια (πιθανόν πρωτότυπη) γενίκευση σε πλειονότιμα μοντέλα πολλών ειδικών, ειδικών δηλαδή που αποφαίνονται για την αληθοτιμή προτάσεων με αληθοτιμές από ένα πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό. Για τα μοντέλα αυτά αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν ισοδύναμα παραγόμενα πλειονότιμα τροπικά μοντέλα.

Κεφάλαιο 1

Στοιχεία Θεωρίας Δικτυωτών

Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την επέκταση της κλασικής λογικής σε λογικές στις οποίες η αλήθεια δεν παίρνει τιμές απο ένα δισύνολο διατεταγμένων τιμών, αλλά από μερικώς διατεταγμένα σύνολα με κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Μια εισαγωγή στις δομές αυτές, οι οποίες ονομάζονται **δικτυωτά (lattices)** θα κάνουμε σε αυτό το κεφάλαιο. Οι αναφορές μας είναι από το [Ras74], το [Grä78] και το [Bir67], με το τελευταίο να είναι ένα αρκετά πλήρες και, σε κάθε περίπτωση, κλασικό βιβλίο πάνω στη θεωρία δικτυωτών.

1.1 Μερικά διατεταγμένα σύνολα

Ορισμός 1.1 (*ΜΔ*–**σύνολα ή posets**)
Ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο (ΜΔ–σύνολο ή poset) είναι ένα σύνολο στο οποίο ορίζεται μια δυαδική σχέση $\leq$, η οποία για κάθε α, β, γ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

Ανακλαστική	$x \leq x$	(ΜΔ1)
Αντισυμμετρική	$\text{αν } \alpha \leq \beta \text{ και } \beta \leq \alpha, \text{ τότε } \alpha = \beta$	(ΜΔ2)
Μεταβατική	$\text{αν } \alpha \leq \beta \text{ και } \beta \leq \gamma, \text{ τότε } \alpha \leq \gamma$	(ΜΔ3)

Για ευκολία στο συμβολισμό, αν $\alpha \leq \beta$ και $\alpha \neq \beta$, γράφουμε $\alpha < \beta$, ενώ το $\alpha \leq \beta$ γράφεται και $\beta \geq \alpha$. Επίσης, πολύ συχνά όταν γράφουμε A, στην ουσία αναφερόμαστε στη δομή $\langle A, \leq \rangle$.

Σημείωση 1.2 Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι στον παραπάνω ορισμό δεν απαιτούμε για κάθε ζεύγος α, β να ισχύει ένα εκ των $\alpha \leq \beta, \beta \leq \alpha$. Ως εκ τούτου, σε ένα $M\Delta$–σύνολο μπορεί να υπάρχουν στοιχεία α, β που να είναι *μη συγκρίσιμα*, να ισχύει δηλαδή ότι $\alpha \nleq \beta$ και $\beta \nleq \alpha$.
Αν σε ένα υποσύνολο B ενός $M\Delta$–συνόλου A ισχύει ότι για κάθε $\alpha, \beta \in B$

$$\alpha \leq \beta \ \text{ ή } \ \beta \leq \alpha \tag{ΟΔ4}$$

όπου η σχέση $\leq$ είναι η αρχική περιορισμένη στο B, τότε το B λέγεται *αλυσίδα* ή *ολικά διατεταγμένο* σύνολο.

Από τον παραπάνω ορισμό, εύκολα βλέπουμε ότι:

Πρόταση 1.3 (Αρχή της Δυαδικότητας) *Αν A είναι ένα $M\Delta$–σύνολο με δυαδική σχέση την $\leq$, τότε το A είναι ένα $M\Delta$–σύνολο με δυαδική σχέση την $\geq$.*
Στη δεύτερη περίπτωση η δομή $\langle A, \geq \rangle$ συμβολίζεται $\breve{A}$.

Ορισμός 1.4 (Μεγιστικό και Μέγιστο – Ελαχιστικό και Ελάχιστο)
Ένα στοιχείο x ενός $M\Delta$–συνόλου A λέγεται μεγιστικό (ελαχιστικό) αν δεν υπάρχει στοιχείο $y \in A$ έτσι ώστε $x \leq y$ $(y \leq x)$ με $x \neq y$. Ένα $M\Delta$–σύνολο μπορεί να έχει περισσότερα του ενός μεγιστικά και ελαχιστικά στοιχεία.
Ένα στοιχείο x ενός $M\Delta$–συνόλου A λέγεται μέγιστο (ελάχιστο) αν για κάθε στοιχείο $y \in A$ ισχύει $y \leq x$ $(x \leq y)$. Ένα $M\Delta$–σύνολο μπορεί να έχει το πολύ ένα μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο.
Το μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο ενός $M\Delta$–συνόλου , αν υπάρχει, συμβολίζεται $\top$ $(\bot)$.

Σημείωση 1.5 Το ότι ένα σύνολο A έχει το πολύ ένα μέγιστο στοιχείο είναι σχεδόν προφανές, διότι αν είχε δύο μέγιστα, πχ. x, y, τότε θα ίσχυε $x \leq y$ και $y \leq x$ οπότε, από την ΜΔ2, $x = y$.

Ορισμός 1.6 (Suprenum και Infinum)
Ένα στοιχείο x του $M\Delta$–συνόλου A λέγεται άνω (κάτω) φράγμα ενός μη κενού υποσυνόλου A_0 του A αν $y \leq x$ $(x \leq y)$, για κάθε $y \in A_0$.
Αν το σύνολο όλων των άνω (κάτω) φραγμάτων του A_0 έχει ελάχιστο (μέγιστο) στοιχείο, αυτό λέγεται ελάχιστο άνω φράγμα ή suprenum (μέγιστο κάτω φράγμα ή infinum) του A_0 και συμβολίζεται με $\sup A_0$ $(\inf A_0)$.

Το Λήμμα του Zorn. *Αν A είναι ένα $M\Delta$–σύνολο τέτοιο, ώστε κάθε αλυσίδα στο A να έχει ένα άνω φράγμα στο A, τότε το A έχει τουλάχιστον ένα μεγιστικό στοιχείο.*
Το παραπάνω λήμμα είναι ισοδύναμο με το Αξίωμα της Επιλογής[1] οπότε δεν τίθεται ζήτημα απόδειξής του και το δεχόμαστε ως αξίωμα.

1.2 Δικτυωτά (lattices)

1.2.1 Δύο ορισμοί

Τα δικτυωτά ορίζονται είτε ως υποσύνολα *ΜΔ*–συνόλων , είτε απευθείας ως αφηρημένες άλγεβρες με δύο πράξεις.

[1] Το Αξίωμα της Επιλογής ”παρατηρήθηκε” (ως σιωπηλή υπόθεση σε πολλές αποδείξεις) πρώτα από τον Zermelo το 1904. Το αξίωμα λέει ότι για κάθε σύνολο I υπάρχει μια συνάρτηση f, η οποία για κάθε μη κενό υποσύνολο του I επιλέγει έναν αντιπρόσωπο του υποσυνόλου αυτού.

Ορισμός 1.7 (Πρώτος ορισμός)
Ένα δικτυωτό (lattice) είναι ένα $M\Delta$–σύνολο για κάθε δύο στοιχεία α, β του οποίου υπάρχει το $\sup\{\alpha, \beta\}$ και το $\inf\{\alpha, \beta\}$.
Το $\sup\{\alpha, \beta\}$ λέγεται ένωση και συμβολίζεται με $\alpha \vee \beta$, ενώ το $\inf\{\alpha, \beta\}$ λέγεται τομή και συμβολίζεται με $\alpha \wedge \beta$.

Ορισμός 1.8 (Αφηρημένες Άλγεβρες)
Αφηρημένη άλγεβρα ή άλγεβρα λέγεται μια δομή $\langle A, R_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ όπου A είναι ένα μη κενό σύνολο και, για κάθε $\delta \in \Delta$ υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε η R_δ είναι μια ν-μελής πράξη στο A.

Ορισμός 1.9 (Δεύτερος ορισμός)
Ένα δικτυωτό (lattice) είναι μια αφηρημένη άλγεβρα $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ με δύο δυαδικές πράξεις που ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$:

Αντιμεταθετικότητα $$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha, \quad \alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha \tag{L1}$$
Προσεταιρισμός $$\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma, \quad \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \tag{L2}$$
Απορρόφηση $$(\alpha \wedge \beta) \vee \beta = \beta, \quad \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha \tag{L3}$$

Για κάθε $\alpha, \beta \in A$, το $\alpha \wedge \beta$ λέγεται τομή και το $\alpha \vee \beta$ ένωση.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει πώς από ένα δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ προκύπτει ένα δικτυωτό $\langle A, \leq \rangle$ με sup και inf.

Πρόταση 1.10 *Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει ότι:*

$$\alpha \vee \beta = \beta \quad \textit{ανν} \quad \alpha \wedge \beta = \alpha \tag{1.1}$$

Επιπλέον, η σχέση $\leq$ ορισμένη στο $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ ως:

$$\alpha \leq \beta \quad \textit{ανν μία εκ των (1.1) ισχύει,} \tag{1.2}$$

είναι μια μερική διάταξη στο A.
Τέλος, για κάθε δύο στοιχεία $\alpha, \beta \in A$, $\quad \inf\{\alpha, \beta\} = \alpha \wedge \beta, \quad \sup\{\alpha, \beta\} = \alpha \vee \beta$.

Απόδ. Για το πρώτο θα δείξουμε τη μία κατεύθυνση. Η άλλη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.
Έστω ότι $\alpha \vee \beta = \beta$. Τότε από το δεύτερο σκέλος της (L3) έχουμε ότι $\alpha \wedge \beta = \alpha$.
Για το δεύτερο, αρκεί να δείξουμε τις (ΜΔ1–ΜΔ3). Η (ΜΔ1) αποδεικνύεται με χρήση της (L3):

$$\alpha \wedge \alpha = \alpha \wedge (\alpha \vee (\alpha \wedge \alpha)) = \alpha$$

Για τη (ΜΔ2) χρησιμοποιούμε την (L1):

$$\text{αν} \quad \alpha \vee \beta = \beta \quad \text{και} \quad \beta \vee \alpha = \alpha, \quad \text{τότε} \quad \alpha = \beta$$

Για τη (ΜΔ3), με χρήση της (L2):

$$\text{αν} \quad \alpha \vee \beta = \beta \quad \text{και} \quad \beta \vee \gamma = \gamma, \quad \text{τότε}$$

$$\alpha \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \beta \vee \gamma = \gamma$$

Τέλος, για να δείξουμε ότι $\sup\{\alpha, \beta\} = \alpha \vee \beta$, αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha, \beta \leq \alpha \vee \beta$ και επιπλέον για κάθε $\gamma \in A$, αν $\alpha, \beta \leq \gamma$, τότε $\alpha \vee \beta \leq \gamma$.
Αρχικά, $\alpha \leq \alpha \vee \beta$ ανν $\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha$, το οποίο ισχύει από (L3). Ομοίως $\beta \leq \alpha \vee \beta$.
Τώρα, αν $\alpha \leq \gamma$, τότε $\gamma = \alpha \vee \gamma$. Επιπλέον, $\beta \leq \gamma$ οπότε και $\gamma = \beta \vee \gamma$, άρα με χρήση της (L2):

$$\gamma = \alpha \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$$

δηλαδή $\alpha \vee \beta \leq \gamma$. Ομοίως για το $\inf\{\alpha, \beta\} = \alpha \wedge \beta$.
■
Όμως και κατά την αντίθετη κατεύθυνση, από ένα δικτυωτό $\langle A, \leq \rangle$ με sup και inf προκύπτει ένα δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ παίρνοντας ως τομή το inf και ένωση το sup. Επομένως, οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Πρόταση 1.11 *Έστω ένα δικτυωτό $\langle A, \leq \rangle$ με* sup *και* inf. *Τότε, αν συμβολίσουμε με $\alpha \wedge \beta$ το $\inf\{\alpha, \beta\}$ και με $\alpha \vee \beta$ το $\sup\{\alpha, \beta\}$, το $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ είναι δικτυωτό, ικανοποιούνται δηλαδή οι (L1–L3).*

Απόδ. Η (L1) είναι προφανής, όπως και η (L2), καθώς $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) = \sup\{\alpha, \beta, \gamma\} = (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ και ομοίως για το $\wedge$.
Για τη (L3) έχουμε ότι $\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \sup\{\alpha, \inf\{\alpha, \beta\}\} = \alpha$ και ομοίως για τον άλλον κανόνα.
■
Από τις παραπάνω προτάσεις προκύπτουν κάποιες απλές ιδιότητες, τις οποίες συγκεντρώνουμε στην παρακάτω πρόταση χωρίς απόδειξη.

Πρόταση 1.12 (Κάποιες απλές ιδιότητες) *Έστω ένα δικτυωτό A. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$ έχουμε:*

$$\begin{aligned}
\alpha \vee \alpha = \alpha, &\quad \alpha \wedge \alpha = \alpha \\
\alpha \leq \alpha \vee \beta, &\quad \alpha \wedge \beta \leq \alpha \\
\beta \leq \alpha \vee \beta, &\quad \alpha \wedge \beta \leq \beta \\
\text{αν} \quad \alpha \leq \gamma,\ \beta \leq \gamma,\ \text{τότε} \quad \alpha \vee \beta \leq \gamma, &\quad \text{αν} \quad \gamma \leq \alpha,\ \gamma \leq \beta,\ \text{τότε} \quad \gamma \leq \alpha \wedge \beta \\
\text{αν} \quad \alpha \leq \gamma,\ \beta \leq \delta, &\quad \text{τότε} \quad \alpha \vee \beta \leq \gamma \vee \delta, \quad \text{και} \quad \alpha \wedge \beta \leq \gamma \wedge \delta
\end{aligned}$$

Αν ένα δικτυωτό έχει μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο, τότε αυτό συμβολίζεται με $\top(\perp)$. Αν ένα δικτυωτό είναι πεπερασμένο, τότε σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχει $\top, \perp$. Για παράδειγμα, αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$, τότε:

$$\top = \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_\nu$$

$$\perp = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_\nu$$

Επιπλέον, αν ένα δικτυωτό έχει μέγιστο (ελάχιστο) στοιχείο, τότε για κάθε $\alpha \in A$:

$$\begin{aligned} \alpha \leq \top, &\quad \bot \leq \alpha \\ \alpha \vee \top = \top, &\quad \alpha \wedge \bot = \bot \\ \alpha \wedge \top = \alpha, &\quad \alpha \vee \bot = \alpha \end{aligned}$$

Τέλος, η παρακάτω πρόταση είναι μια επέκταση της Αρχής της Δυαδικότητας.

Πρόταση 1.13 *Αν το A είναι δικτυωτό, τότε και το $\breve{A}$ είναι δικτυωτό με ένωση και τομή την αρχική τομή και ένωση, αντίστοιχα.*

Απόδ. Από την Αρχή της Δυαδικότητας, το $\breve{A}$ είναι $M\Delta$–σύνολο . Επιπλέον, για κάθε $\alpha, \beta \in \breve{A}$ υπάρχουν τα $\breve{\sup}\{\alpha, \beta\}, \breve{\inf}\{\alpha, \beta\}$ και είναι τα $\inf\{\alpha, \beta\}, \sup\{\alpha, \beta\}$.
■

Πόρισμα 1.14 *Έστω ϕ μια πρόταση που ισχύει σε κάθε δικτυωτό. Τότε και η πρόταση $\breve{\phi}$, που προκύπτει από την ϕ αντικαθιστώντας τις εμφανίσεις των $\wedge$ με $\vee$, των $\vee$ με $\wedge$ και των $\leq$ με $\geq$, ισχύει σε κάθε δικτυωτό.*

Απόδ. Για κάθε δικτυωτό A, εφόσον η ϕ ισχύει στο A, η $\breve{\phi}$ ισχύει στο $\breve{A}$. Άρα, η $\breve{\phi}$ ισχύει σε κάθε δικτυωτό της μορφής $\breve{B}$. Επειδή όμως για κάθε δικτυωτό A έχουμε $A = \breve{\breve{A}}$, η $\breve{\phi}$ ισχύει σε κάθε δικτυωτό A.
■

1.2.2 Διαγράμματα Δικτυωτών

Μια πλήρης περιγραφή ενός πεπερασμένου δικτυωτού μπορεί να γίνει με δύο πίνακες τιμών για τις πράξεις $\wedge, \vee$. Έτσι, οι παρακάτω πίνακες ορίζουν ένα δικτυωτό 5 στοιχείων.

$\wedge$	$\top$	α	β	γ	$\bot$
$\top$	$\top$	α	β	γ	$\bot$
α	α	α	β	γ	$\bot$
β	β	β	β	$\bot$	$\bot$
γ	γ	γ	$\bot$	γ	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

$\vee$	$\top$	α	β	γ	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
α	$\top$	α	α	α	α
β	$\top$	α	β	$\top$	β
γ	$\top$	α	$\top$	γ	γ
$\bot$	$\top$	α	β	γ	$\bot$

Βέβαια, *δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι πρόκειται για την περιγραφή ενός δικτυωτού*, στους παραπάνω πίνακες πολλές τιμές είναι πλεονάζουσες, δηλαδή και χωρίς αυτές μπορούμε να έχουμε μια πλήρη περιγραφή του δικτυωτού. Έτσι, λόγω της (L1), δε χρειάζονται τα στοιχεία κάτω από τις διαγωνίους. Επίσης, είδαμε ότι για κάθε στοιχείο x ενός δικτυωτού ισχύει ότι $x \wedge x = x \vee x = x$, οπότε και τα στοιχεία των διαγωνίων είναι πλεονάζοντα. Εκτός αυτού, από τις σχέσεις $\alpha \wedge \beta = \beta, \alpha \wedge \top = \alpha$ συμπεραίνουμε ότι $\beta \leq \alpha, \alpha \leq \top$, οπότε $\beta \leq \top$, δηλαδή η τιμή του $\beta \wedge \top$ είναι επίσης πλεονάζουσα. Τέλος, γνωρίζοντας τον έναν πίνακα μπορούμε να συμπεράνουμε τις τιμές του άλλου, αφού μπορούμε να συμπεράνουμε ποιά ζεύγη στοιχείων ανήκουν

στη σχέση $\leq$.
Όμως, ούτε και η περιγραφή του δικτυωτού μέσω της σχέσης $\leq$ δεν είναι χωρίς πλεονασμούς. Ακόμη και η περιγραφή μέσω της $<$ έχει πλεονασμούς. Έτσι, στην προηγούμενη περίπτωση έχουμε:

$$"<" = \{(\bot,\alpha),(\bot,\beta),(\bot,\gamma),(\bot,\top),(\beta,\alpha),(\beta,\top),(\gamma,\alpha),(\gamma,\top),(\alpha,\top)\}$$

Πάλι παρατηρούμε ότι λόγω μεταβατικότητας κάποια ζεύγη είναι πλεονάζοντα, για παράδειγμα το $(\beta,\top)$. Αν λοιπόν είχαμε μια περιγραφή μόνο των "στενότερων" διατάξεων, θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε τις υπόλοιπες. Η περιγραφή αυτή γίνεται μεσω της *κάλυψης ή του αμέσως ανώτερου.*

Ορισμός 1.15 *Έστω ένα δικτυωτό A. Για $\alpha,\beta \in A$ λέμε ότι το α καλύπτει το β, αν $\alpha > \beta$ και δεν υπάρχει $\gamma \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha > \gamma > \beta$.*
Εναλλακτικά, σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το α είναι αμέσως ανώτερο του β.
Εάν το α καλύπτει το β, γράφουμε $\alpha \succ \beta$ ή $\beta \prec \alpha$ (το β καλύπτεται από το α).

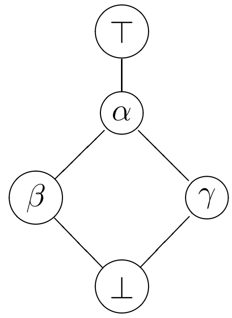
Μέσω της σχέσης κάλυψης μπορούμε να αναπαριστούμε τα δικτυωτά με διαγράμματα.

Ορισμός 1.16 *Το διάγραμμα ενός δικτυωτού $\langle A,\leq\rangle$ αναπαριστά τα στοιχεία του A μέσα σε κύκλους. Οι κύκλοι που αναπαριστούν δύο στοιχεία α,β, ενώνονται με ένα ευθύγραμμο τμήμα, αν το ένα στοιχείο καλύπτει το άλλο. Επιπλέον, αν το α καλύπτει το β, ο κύκλος του α βρίσκεται ψηλότερα από αυτόν του β.*

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για το δικτυωτό που εξετάζουμε η σχέση της κάλυψης είναι η:

$$"\prec" = \{(\bot,\beta),(\bot,\gamma),(\beta,\alpha),(\gamma,\alpha),(\alpha,\top)\}$$

Επομένως, το διάγραμμα του δικτυωτού δίνεται στο σχήμα. Πάντως, τα διαγράμματα είναι ένας πολύ κομψός τρόπος αναπαράστασης (πεπερασμένων) δικτυωτών.



1.2.3 Επιμερισμός

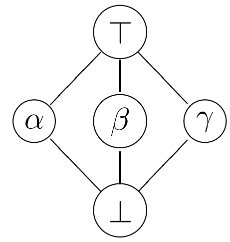
Ο επιμερισμός γενικά δεν ισχύει για τις δύο πράξεις των δικτυωτών. Πάντως, ισχύουν γενικά οι παρακάτω επιμεριστικές ανισότητες.

Πρόταση 1.17 *Έστω το δικτυωτό A. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in A$ ισχύουν οι παρακάτω επιμεριστικές ανισότητες.*

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \geq (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \leq (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

Απόδ. Ισχύει ότι $\alpha \wedge \beta \leq \alpha$ και $\alpha \wedge \beta \leq \beta \leq \beta \vee \gamma$, οπότε από πρόταση 1.12 $\alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$. Ομοίως, $\alpha \wedge \gamma \leq \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$, οπότε πάλι από πρόταση 1.12, $(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \leq \alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$.
Η δεύτερη ανισότητα αποδεικνύεται δυαδικά (πόρισμα 1.14).
■



Σχήμα 1.1: $\mathcal{M}_3$

Αν οι παραπάνω ανισότητες ισχύουν και ως ισότητες, τότε ισχύει ο επιμερισμός. Γενικά δεν ισχύει ο επιμερισμός σε ένα δικτυωτό. Για παράδειγμα, στο δικτυωτό του διπλανού σχήματος παρατηρούμε ότι:
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = \alpha \vee \bot = \alpha$, ενώ
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) = \top \vee \top = \top$.
Το δικτυωτό αυτό ονομάζεται $\mathcal{M}_3$ και, όπως είδαμε, δεν είναι επιμεριστικό.

Για να είναι ένα δικτυωτό επιμεριστικό, αρκεί να ισχύει η μία εκ των δύο επιμεριστικών ανισότητων ως ισότητα, σύμφωνα με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.18 *Έστω ένα δικτυωτό A. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \quad \textit{για κάθε } \alpha, \beta, \gamma \in A \tag{1.3}$$

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \quad \textit{για κάθε } \alpha, \beta, \gamma \in A \tag{1.4}$$

Απόδ. Αποδεικνύουμε ότι η (1.3) συνεπάγεται την (1.4). Η αντίθετη συνεπαγωγή προκύπτει από το πόρισμα 1.14 (δυαδικότητα).
Σε ένα δικτυωτό A, έχουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$:

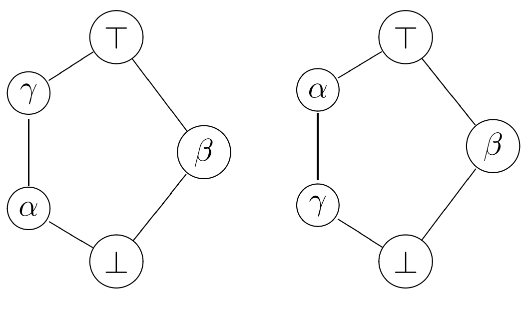
$$\begin{aligned}
(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) &= ((\alpha \vee \beta) \wedge \alpha) \vee ((\alpha \vee \beta) \wedge \gamma) && \text{από (1.3)} \\
&= \alpha \vee (\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)) && \text{από (L3,L1)} \\
&= \alpha \vee ((\gamma \wedge \alpha) \vee (\gamma \wedge \beta)) && \text{από (1.3)} \\
&= (\alpha \vee (\gamma \wedge \alpha)) \vee (\beta \wedge \gamma) && \text{από (L2α,L1)} \\
&= \alpha \vee (\beta \wedge \gamma) && \text{από (L3)}
\end{aligned}$$

■

Σημείωση 1.19 Η ισότητα της (1.3) για μια *μεμονωμένη* τριάδα στοιχείων σε ένα δικτυωτό *δεν είναι ισοδύναμη* με την ισότητα της (1.4) για την ίδια τριάδα.

Για παράδειγμα, δίπλα βλέπουμε δύο παραλλαγές του ίδιου δικτυωτού, του $\mathcal{N}_5$. Στην πρώτη παραλλαγή έχουμε ότι ισχύει η πρώτη ισότητα:
$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = \alpha \wedge \top = \alpha$
$(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) = \bot \vee \alpha = \alpha$

Δεν ισχύει όμως και η δεύτερη:
$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = \alpha \vee \bot = \alpha$
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) = \top \wedge \gamma = \gamma$



Σχήμα 1.2: Δύο παραλλαγές του $\mathcal{N}_5$

Στη δεύτερη παραλλαγή ισχύει η δεύτερη ισότητα, όχι όμως η πρώτη.

Ορισμός 1.20 (Επιμεριστικά Δικτυωτά)
Ένα δικτυωτό λέγεται επιμεριστικό αν ικανοποιεί την (1.3) ή την (1.4).

Πρόταση 1.21 *Κάθε αλυσίδα είναι επιμεριστικό δικτυωτό.*

Απόδ. Αν το $\langle A, \leq \rangle$ είναι αλυσίδα, τότε για κάθε ζεύγος στοιχείων $\alpha, \beta \in A$, τα α, β είναι συγκρίσιμα και έχουμε ότι $\alpha \wedge \beta = \inf\{\alpha, \beta\} = min\{\alpha, \beta\}$, $\alpha \vee \beta = \sup\{\alpha, \beta\} = max\{\alpha, \beta\}$. Επομένως, κάθε αλυσίδα είναι δικτυωτό.
Επιπλέον, για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$:

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = min\{\alpha, max\{\beta, \gamma\}\} = max\{min\{\alpha, \beta\}, min\{\alpha, \gamma\}\} = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

■

Μια σημαντική ιδιότητα των επιμεριστικών δικτυωτών είναι η παρακάτω.

Θεώρημα 1.22 *Ένα δικτυωτό A είναι επιμεριστικό αν και μόνο αν για κάθε $\alpha, \beta, x \in A$ έχουμε:*

$$\textit{αν} \quad x \wedge \alpha = x \wedge \beta \quad \textit{και} \quad x \vee \alpha = x \vee \beta, \quad \textit{τότε} \quad \alpha = \beta$$

Απόδ. Θα αποδείξουμε τη μία κατεύθυνση. Η απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης περιέχεται στο [Bir67]. Έστω ότι το A είναι επιμεριστικό και $\alpha, \beta \in A$, τότε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha \wedge (x \vee \alpha) = \alpha \wedge (x \vee \beta) = (\alpha \wedge x) \vee (\alpha \wedge \beta) \\ &= (\beta \wedge x) \vee (\alpha \wedge \beta) = \beta \wedge (x \vee \alpha) = \beta \wedge (x \vee \beta) = \beta \end{aligned}$$

■

Τέλος, μπορούμε με δύο προτάσεις να ορίσουμε *απευθείας* τα επιμεριστικά δικτυωτά.

Θεώρημα 1.23 (Sholander) *Η αφηρημένη άλγεβρα $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ είναι επιμεριστικό δικτυωτό αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για κάθε $\alpha, \beta \in A$:*

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha \tag{DL1}$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\gamma \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \alpha) \tag{DL2}$$

Απόδ. Αν η $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ είναι επιμεριστικό δικτυωτό, τότε οι παραπάνω ιδιότητες ικανοποιούνται για κάθε $\alpha, \beta \in A$.
Αντιθέτως, αν ικανοποιούνται οι (DL1,DL2), τότε έχουμε ότι για κάθε $\alpha \in A$:

$$\alpha = \alpha \wedge (\alpha \vee \alpha) = (\alpha \wedge \alpha) \vee (\alpha \wedge \alpha)$$

Επομένως, για κάθε $\alpha \in A$ υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $\alpha = x \vee x$, οπότε:

$$\begin{aligned} \alpha = x \vee x &= (x \wedge (x \vee x)) \vee (x \wedge (x \vee x)) && \text{(από DL1)} \\ &= (x \vee x) \wedge (x \vee x) && \text{(από DL2)} \\ &= \alpha \wedge \alpha \qquad \text{και επίσης:} \\ \alpha = \alpha \wedge (\alpha \vee \alpha) &= (\alpha \wedge \alpha) \vee (\alpha \wedge \alpha) = \alpha \vee \alpha \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta = \alpha \wedge (\beta \vee \beta) = (\beta \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \alpha) = \beta \wedge \alpha && \text{(δηλ. L1β)} \\ (\alpha \wedge \beta) \vee \beta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\beta \wedge \beta) = \beta \wedge (\beta \vee \alpha) = \beta && \text{(δηλ. L3α)} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, δύο χρήσιμες ιδιότητες είναι:

$$\alpha \vee (\alpha \vee \beta) = (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \vee (\alpha \vee \beta) = \alpha \vee \beta$$
$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \alpha = (\alpha \wedge \beta) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \vee \alpha) = \alpha \wedge \beta$$

Οπότε μπορούμε να δείξουμε και τις:

$$\begin{aligned}
\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) &= (\alpha \wedge \alpha) \vee (\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta)) \\
&= \alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \vee \alpha) \\
&= \alpha \wedge ((\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta)) \vee (\alpha \wedge \alpha)) \\
&= \alpha \wedge (\alpha \wedge (\alpha \vee (\alpha \wedge \beta))) \\
&= \alpha \wedge (\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \\
&= (\alpha \wedge (\alpha \wedge \beta)) \vee (\alpha \wedge \alpha) \\
&= (\alpha \wedge \beta) \vee \alpha = (\beta \wedge \alpha) \vee \alpha = \alpha \\
\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) &= (\alpha \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \alpha) \\
&= \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) = \alpha
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε ακόμη:

$$\alpha \vee \beta = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \beta) = (\beta \wedge (\alpha \vee \beta)) \vee (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) = \beta \vee \alpha \qquad \text{(δηλ. L1α)}$$

Για να δείξουμε τον προσεταιρισμό του $\vee$ χρειαζόμαστε πρώτα ότι:

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &= (\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)) \vee (\alpha \wedge \gamma) = \alpha \vee (\alpha \wedge \gamma) = \alpha \\
\beta \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &= (\beta \wedge (\alpha \vee \beta)) \vee (\beta \wedge \gamma) = \beta \vee (\beta \wedge \gamma) = \beta \\
\gamma \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) &= (\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)) \vee (\gamma \wedge \gamma) = (\gamma \wedge (\alpha \vee \beta)) \vee \gamma = \gamma
\end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) &= (\alpha \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)) \vee ((\beta \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)) \vee (\gamma \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)) \\
&= (\alpha \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)) \vee ((\beta \vee \gamma) \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)) \\
&= (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \wedge ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \qquad \text{και ομοίως:} \\
(\alpha \vee \beta) \vee \gamma &= ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \qquad \text{οπότε:} \\
\alpha \vee (\beta \vee \gamma) &= (\alpha \vee \beta) \vee \gamma \qquad \text{(δηλ. L2α)}
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η (DL1) είναι η (L3β), απομένει μόνον η (L2β) προς απόδειξη. Αυτή αποδεικνύεται ομοίως με την (L2α), με τη βοήθεια της:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

Η τελευταία ιδιότητα αποδεικνύεται από τις υπόλοιπες, όπως είδαμε στην πρόταση 1.18 (δε χρησιμοποιήθηκε η (L2β) σε εκείνη την απόδειξη).

■

Το παραπάνω αποτέλεσμα μοιάζει εντυπωσιακό και στην ίδια κατεύθυνση έχουν γίνει προσπάθειες ορισμού των δικτυωτών (όχι επιμεριστικών) με μία μόνο πρόταση, αντί των 6 του ορισμού 1.9. Τη στιγμή που γράφονται αυτές οι γραμμές, έχει αποδειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση μήκους 29 με 8 μεταβλητές είναι μια τέτοια πρόταση:

$$(((y \vee x) \wedge x) \vee (((z \wedge (x \vee x)) \vee (u \wedge x)) \wedge v)) \wedge (w \vee ((s \vee x) \wedge (x \vee t))) = x$$

Η απόδειξη βρίσκεται στη σχετική δημοσίευση, [MPV02].

1.3 Συμπληρώματα και ψευδο-συμπληρώματα

Η έννοια του συμπληρώματος ορίζεται σε ένα δικτυωτό ως εξής.

Ορισμός 1.24 (Συμπλήρωμα)
Έστω $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ δικτυωτό με $\top, \bot$. Αν $\alpha \in A$, τότε το $x \in A$ είναι το συμπλήρωμα του α, αν:

$$\alpha \wedge x = \bot \quad \textit{και} \quad \alpha \vee x = \top$$

Το δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ λέγεται συμπληρωμένο, αν κάθε στοιχείο $\alpha \in A$ έχει συμπλήρωμα.

Μπορούμε σε ένα δικτυωτό να ορίσουμε την έννοια του διαστήματος, με το συνήθη τρόπο.

Ορισμός 1.25 *Έστω ένα δικτυωτό $\langle A, \leq \rangle$. Τότε για $\alpha, \beta \in A$ με $\alpha \leq \beta$, ορίζουμε:*

$$[\alpha, \beta] = \{x \in A \mid \alpha \leq x, x \leq \beta\}$$

Το σχετικό συμπλήρωμα είναι το συμπλήρωμα σε ένα διάστημα.

Ορισμός 1.26 (Σχετικό συμπλήρωμα)
Έστω δικτυωτό $\langle A, \leq \rangle$ με $\alpha, \beta, \gamma \in A$ και $\alpha \in [\beta, \gamma]$. Τότε το $x \in A$ είναι το σχετικό συμπλήρωμα του α στο $[\beta, \gamma]$, αν:

$$\alpha \wedge x = \beta \quad \textit{και} \quad \alpha \vee x = \gamma$$

Ένα δικτυωτό λέγεται σχετικά συμπληρωμένο αν κάθε στοιχείο του έχει σχετικό συμπλήρωμα σε κάθε διάστημα που το περιέχει.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτόν και το θεώρημα 1.22, έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 1.27 *Ένα δικτυωτό είναι επιμεριστικό αν και μόνο αν τα σχετικά συμπληρώματα των στοιχείων του είναι μοναδικά.*

Όμοια με τα σχετικά συμπληρώματα ορίζουμε και τα σχετικά ψευδο-συμπληρώματα, στα οποία όμως έχουμε μια ελαστικότερη συνθήκη.

Ορισμός 1.28 (Σχετικό ψευδο-συμπλήρωμα)
Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ με $\alpha, \beta \in A$. Το σχετικό ψευδο-συμπλήρωμα του α ως προς το β, αν υπάρχει, είναι το μέγιστο στοιχείο του $S \subseteq A$, όπου:

$$S = \{x \in A \mid \alpha \wedge x \leq \beta\}$$

Το σχετικό ψευδο-συμπλήρωμα του α ως προς β συμβολίζεται με $\alpha \Rightarrow \beta$ και είναι μοναδικό (αφού είναι μέγιστο του S).
Ένα δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee\rangle$ λέγεται σχετικά ψευδο-συμπληρωμένο ή δικτυωτό του Brouwer αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$ υπάρχει το $\alpha \Rightarrow \beta$.

Παραθέτουμε κάποιες χρήσιμες προτάσεις για σχετικά ψευδο-συμπληρωμένα δικτυωτά.

Πρόταση 1.29 *Έστω σχετικά ψευδο-συμπληρωμένο δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee\rangle$. Τότε για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in A$ ισχύουν τα:*

1. $\gamma \ \leq\ \alpha \Rightarrow \beta \quad \textit{ανν} \quad \alpha \wedge \gamma \ \leq\ \beta$
2. $\alpha \Rightarrow \beta = \top \quad \textit{ανν} \quad \alpha \leq \beta$
3. $\alpha = \beta \quad \textit{ανν} \quad \alpha \Rightarrow \beta = \top \quad \textit{και} \quad \beta \Rightarrow \alpha = \top$
4. $\alpha \ \leq\ \beta \Rightarrow \alpha$
5. $\alpha \Rightarrow \top = \top$
6. $\top \Rightarrow \alpha = \alpha$
7. $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) = \alpha \wedge \beta$
8. $\beta \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) = \beta$
9. $\textit{αν} \quad \alpha \leq \beta, \quad \textit{τότε} \quad \gamma \Rightarrow \alpha \ \leq\ \gamma \Rightarrow \beta$
10. $\textit{αν} \quad \alpha \leq \beta, \quad \textit{τότε} \quad \beta \Rightarrow \gamma \ \leq\ \alpha \Rightarrow \gamma$
11. $(\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) = (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$
12. $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) = \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$
13. $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq\ (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$
14. $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \ =\ \beta \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma) \ =\ (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$
15. $\textit{αν} \quad \alpha \ \leq\ \beta \Rightarrow \gamma, \quad \textit{τότε} \quad \beta \ \leq\ \alpha \Rightarrow \gamma$
16. $\gamma \Rightarrow \alpha \ \leq\ (\gamma \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \beta)$
17. $(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq\ \alpha \Rightarrow \gamma$
18. $\alpha \ \leq\ \beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$
19. $\gamma \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta)) = \gamma \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$

Απόδ.
1. Αν $\alpha \wedge \gamma \ \leq\ \beta$, τότε από τον ορισμό $\gamma \ \leq\ \alpha \Rightarrow \beta$.
   Αντίθετα, αν $\gamma \ \leq\ \alpha \Rightarrow \beta$, τότε $\alpha \wedge \gamma \ \leq\ \alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq\ \beta$.
2. Αν $\alpha \leq \beta$, τότε για κάθε $x \in A$, $\alpha \wedge x \ \leq\ \alpha \ \leq\ \beta$. Αντίθετα, αν $\alpha \Rightarrow \beta = \top$, τότε $\alpha \wedge \top \ \leq\ \beta$ δηλαδή $\alpha \leq \beta$.

3. Απευθείας από το 1.
4. $\beta \wedge \alpha \ \leq \ \alpha$, οπότε $\alpha \ \leq \ \beta \Rightarrow \alpha$.
5. Απευθείας από το 1.
6. Απευθείας από τον ορισμό.
7. Από τον ορισμό έχουμε $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq \ \beta$, ενώ $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq \alpha$. Επομένως,
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq \ \alpha \wedge \beta$. Επίσης, από το 3,
$\beta \ \leq \ \alpha \Rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \wedge \beta \ \leq \ \alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$.
8. Έχουμε $\beta \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq \ \beta$.
Επίσης, $\alpha \wedge \beta \ \leq \beta \quad \rightsquigarrow \quad \beta \ \leq \ (\alpha \Rightarrow \beta) \quad \rightsquigarrow$
$\beta = \beta \wedge \beta \ \leq \ \beta \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$.
9. Έχουμε $\gamma \wedge (\gamma \Rightarrow \alpha) \ \leq \ \alpha \ \leq \ \beta \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \wedge (\gamma \Rightarrow \alpha) \ \leq \ \beta \quad \rightsquigarrow \quad \gamma \Rightarrow \alpha \ \leq \ \gamma \Rightarrow \beta$.
10. Έχουμε $\alpha \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \beta \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow \quad \beta \Rightarrow \gamma \ \leq \ \alpha \Rightarrow \gamma$
11. Έχουμε $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma$ και $\beta \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)) \vee (\beta \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \gamma \vee \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee (\beta \Rightarrow \gamma)) \wedge (\beta \vee (\alpha \Rightarrow \gamma)) \wedge ((\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge ((\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma$.
Για την αντίθετη ανισότητα έχουμε από το 9,
$(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma \ \leq \ \alpha \Rightarrow \gamma \quad , \quad (\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma \ \leq \ \beta \Rightarrow \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \vee \beta) \Rightarrow \gamma \ \leq \ (\alpha \Rightarrow \gamma) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)$.
12. Έχουμε $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq \ \beta$ και $\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \beta \wedge \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \wedge ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \beta \wedge \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma)$.
Για την αντίθετη ανισότητα έχουμε από το 8,
$\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma) \ \leq \ \alpha \Rightarrow \beta \quad , \quad \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma) \ \leq \ \alpha \Rightarrow \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma) \ \leq \ (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma)$.
13. Με τη βοήθεια των 6,8,11 έχουμε:
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) = \alpha \Rightarrow (\beta \wedge (\beta \Rightarrow \gamma)) = \alpha \Rightarrow (\beta \wedge \gamma) \ \leq \ \alpha \Rightarrow \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \alpha \Rightarrow \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ (\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)$.
14. Αρκεί να δείξουμε ότι $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$.
Έχουμε $(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) = \beta \wedge \alpha \wedge (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma))$
$\overset{6}{=} \beta \wedge \alpha \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \overset{6}{=} \alpha \wedge \beta \wedge \gamma \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma$.
Για την αντίθετη ανισότητα έχουμε, πάλι με τη βοήθεια του 6,
$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \ \leq \gamma \quad \rightsquigarrow \quad (\alpha \wedge \beta) \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\beta \wedge (\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma)) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \wedge ((\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \beta \Rightarrow \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \gamma \ \leq \ \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)$.

15. Απευθείας από το 14.
16. Έχουμε, με χρήση των 6,8,11, $\gamma \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \ \leq \ \gamma \Rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \Rightarrow (\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)) \ \leq \ \gamma \Rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow$
$(\gamma \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)) \wedge (\gamma \Rightarrow \alpha) \ \leq \ \gamma \Rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \Rightarrow \alpha \ \leq \ (\gamma \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow (\gamma \Rightarrow \beta)$.
17. Έχουμε, με χρήση του 6, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \wedge \beta \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \gamma \quad \rightsquigarrow$
$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \gamma) \ \leq \ \alpha \Rightarrow \gamma$.
18. Έχουμε $\beta \wedge \alpha \ \leq \ \alpha \wedge \beta \quad \rightsquigarrow \quad \alpha \ \leq \ \beta \Rightarrow (\alpha \wedge \beta)$.
19. Έχουμε, με χρήση του 6, $(\gamma \wedge \alpha) \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) = \gamma \wedge \alpha \wedge \beta \ \leq \ \gamma \wedge \beta \quad \rightsquigarrow$
$\alpha \Rightarrow \beta \ \leq \ (\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta) \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \ \leq \ \gamma \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta)) \quad \rightsquigarrow$
Για την αντίθετη ανισότητα έχουμε, με χρήση του 6,
$\alpha \wedge (\gamma \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta))) = (\alpha \wedge \gamma) \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta))$
$= \gamma \wedge \alpha \wedge \gamma \wedge \beta \ \leq \ \beta \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta)) \ \leq \ \alpha \Rightarrow \beta \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \wedge \gamma \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta)) \ \leq \ \gamma \wedge (\alpha \Rightarrow \beta) \quad \rightsquigarrow$
$\gamma \wedge ((\gamma \wedge \alpha) \Rightarrow (\gamma \wedge \beta)) \ \leq \ \gamma \wedge (\alpha \Rightarrow \beta)$.

■

Πρόταση 1.30 *Κάθε σχετικά ψευδο-συμπληρωμένο δικτυωτό A είναι επιμεριστικό και περιέχει μέγιστο στοιχείο $\top$.*

Απόδ. Για το πρώτο, έστω $\alpha, \beta, \gamma \in A$. Θέτοντας $\delta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$, και με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης και της πρότασης 1.12, έχουμε:

$$\begin{array}{l} (\alpha \wedge \beta) \leq \delta \quad \text{και} \quad (\alpha \wedge \gamma) \leq \delta \quad \text{οπότε} \\ \beta \leq \alpha \Rightarrow \delta \quad \text{και} \quad \gamma \leq \alpha \Rightarrow \delta \quad \text{άρα} \quad (\beta \vee \gamma) \leq \alpha \Rightarrow \delta \quad \text{οπότε} \\ \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \ \leq \ \alpha \wedge (\alpha \Rightarrow \delta) \ \leq \ \delta = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma) \end{array}$$

Η τελευταία ανισότητα μαζί με την επιμεριστική ανισότητα της πρότασης 1.17, συνεπάγονται ότι το A είναι επιμεριστικό.
Για το δεύτερο έχουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in A$ έχουμε $\beta \leq \alpha \Rightarrow \alpha$, αφού $\alpha \wedge \beta \leq \alpha$. Επομένως, για κάθε $\alpha \in A$:

$$\top = \alpha \Rightarrow \alpha$$

■

Τέλος, μια πρόταση για πεπερασμένα δικτυωτά.

Πρόταση 1.31 *Έστω πεπερασμένο δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Το A είναι επιμεριστικό αν και μόνο αν είναι σχετικά ψευδο-συμπληρωμένο.*

Απόδ. Αν το A είναι σχετικά ψευδοσυμπληρωμένο, τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι είναι επιμεριστικό.

Αντίθετα, αν το A είναι επιμεριστικό, έστω πάλι $S \subseteq A$ το σύνολο $S = \{x \in A \mid \alpha \wedge x \leq \beta\}$ και $y = \bigvee S$. Τότε $y = \alpha \Rightarrow \beta$, διότι για κάθε $x \in S$, $x \leq y$ και:

$$\alpha \wedge y = \alpha \wedge \bigvee S = \alpha \wedge \bigvee_{x \in S} x = \bigvee_{x \in S} (\alpha \wedge x) \;\leq\; \beta$$

Άρα το A είναι σχετικά ψευδο-συμπληρωμένο.
■

1.4 Φίλτρα και Ιδεώδη

Για κάθε δικτυωτό ορίζονται κάποιες ειδικές κατηγορίες υποσυνόλων του με κριτήριο την κλειστότητα ως προς τις πράξεις $(\wedge, \vee)$ και τη διάταξη $(\leq)$.

Ορισμός 1.32 (Φίλτρα)
Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Ένα μη κενό σύνολο $S \subseteq A$ λέγεται φίλτρο αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει:

$$(\alpha \wedge \beta) \in S \quad \textit{ανν} \quad \alpha \in S \;\; \textit{και} \;\; \beta \in S$$

ή ισοδύναμα αν για κάθε $\alpha, \beta \in S$ ισχύει:

$$\begin{array}{lll} \textit{αν} \;\; \alpha \in S \;\; \textit{και} \;\; \beta \in S, & \textit{τότε} & (\alpha \wedge \beta) \in S \\ \textit{αν} \;\; \alpha \in S \;\; \textit{και} \;\; \alpha \leq \beta, & \textit{τότε} & \beta \in S \end{array}$$

Ορισμός 1.33 (Ιδεώδη)
Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Ένα μη κενό σύνολο $T \subseteq A$ λέγεται ιδεώδες αν για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει:

$$(\alpha \vee \beta) \in T \quad \textit{ανν} \quad \alpha \in T \;\; \textit{και} \;\; \beta \in T$$

ή ισοδύναμα αν για κάθε $\alpha, \beta \in S$ ισχύει:

$$\begin{array}{lll} \textit{αν} \;\; \alpha \in T \;\; \textit{και} \;\; \beta \in T, & \textit{τότε} & (\alpha \vee \beta) \in T \\ \textit{αν} \;\; \alpha \in T \;\; \textit{και} \;\; \beta \leq \alpha, & \textit{τότε} & \beta \in T \end{array}$$

Θα αποδείξουμε κάποιες ιδιότητες για τα φίλτρα, καθώς θα μας χρειαστούν στα επόμενα κεφάλαια. Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για τα ιδεώδη.
Ξεκινάμε με κάποιους ορισμούς.

Ορισμός 1.34 *Έστω ένα δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Έχουμε τους ορισμούς:*

- *Ένα φίλτρο $S \subseteq A$ λέγεται γνήσιο αν $S \neq A$.*
- *Ένα φίλτρο $S \subseteq A$ λέγεται μεγιστικό αν είναι γνήσιο και για κάθε γνήσιο φίλτρο $S' \subseteq A$, αν $S \subseteq S'$, τότε $S = S'$.*

- *Ένα φίλτρο $S \subseteq A$ λέγεται μη-αναγώγιμο αν είναι γνήσιο και για όλα τα γνήσια φίλτρα $S_1, S_2 \subseteq S$, αν $S = S_1 \cap S_2$, τότε $S = S_1$ ή $S = S_2$.*
- *Ένα φίλτρο $S \subseteq A$ λέγεται πρώτο αν είναι γνήσιο και για κάθε $\alpha, \beta \in A$ ισχύει:*

$$\text{αν } (\alpha \vee \beta) \in S \quad \text{τότε} \quad \alpha \in S \text{ ή } \beta \in S$$

Μια απλή ιδότητα για τα πρώτα φίλτρα είναι η παρακάτω.

Πρόταση 1.35 *Έστω $\langle A, \wedge \vee \rangle$ δικτυωτό και $S \subseteq A$ πρώτο φίλτρο. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in S$ ισχύει:*

$$(\alpha \vee \beta) \in S \quad \text{ανν} \quad \alpha \in S \text{ ή } \beta \in S$$

Απόδ. Η μία κατεύθυνση ισχύει λόγω του ορισμού των πρώτων φίλτρων. Για την άλλη, αν πχ. $\alpha \in S$, επειδή $\alpha \leq \alpha \vee \beta$, τότε $(\alpha \vee \beta) \in S$.
■
Η επόμενη πρόταση αναφέρεται σε αλυσίδες από φίλτρα, δηλαδή κλάσεις από φίλτρα στις οποίες κάθε δύο μέλη είναι συγκρίσιμα (ως προς την $\subseteq$) μεταξύ τους.

Πρόταση 1.36 *Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Η ένωση κάθε αλυσίδας από φίλτρα στο A είναι φίλτρο στο A.*
Επίσης, η ένωση κάθε αλυσίδας από πρώτα φίλτρα στο A είναι πρώτο φίλτρο στο A.

Απόδ. Η απόδειξη του πρώτου είναι παρόμοια με αυτή του δεύτερου και παραλείπεται. Για το δεύτερο έστω η αλυσίδα $\mathcal{A}$ από πρώτα φίλτρα στο A. Τοτε για κάθε $\alpha, \beta \in A$, αν $(\alpha \vee \beta) \in \bigcup \mathcal{A}$, τότε υπαρχει πρώτο φίλτρο $S \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $(\alpha \vee \beta) \in S$, άρα $\alpha \in S$ ή $\beta \in S$, οπότε, επειδή $S \subseteq \bigcup \mathcal{A}$, $\alpha \in \bigcup \mathcal{A}$ ή $\beta \in \bigcup \mathcal{A}$.
■
Με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης αποδεικνύουμε το παρακάτω.

Πρόταση 1.37 *Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ και $\alpha \in A$. Αν S_0 είναι ένα φίλτρο στο A τέτοιο ώστε $\alpha \notin S_0$, τότε υπάρχει μη-αναγώγιμο φίλτρο S τέτοιο ώστε $S_0 \subseteq S$ και $\alpha \notin S$.*

Απόδ. Έστω $\mathcal{S}$ το $M\Delta$–σύνολο όλων των φίλτρων στο A που περιέχουν το S_0 και δεν περιέχουν το στοιχείο α. Από την πρόταση 1.36 έχουμε ότι κάθε αλυσίδα $\mathcal{A}$ από στοιχεία του $\mathcal{S}$ έχει ένα άνω φράγμα στο $\mathcal{S}$, το $\bigcup \mathcal{A}$. Επομένως, από το λήμμα του Zorn έχουμε ότι το $\mathcal{S}$ έχει μεγιστικό στοιχείο S.
Ισχύει ότι $S_0 \subseteq S$ και $\alpha \notin S$. Επιπλέον, έστω ότι $S = S_1 \wedge S_2$, όπου S_1, S_2 γνήσια φίλτρα στο A. Τότε $S_0 \subseteq S_1$ και $S_0 \subseteq S_2$, ενώ $\alpha \notin S_1$ ή $\alpha \notin S_2$. Επομένως, $S_1 \in \mathcal{S}$ ή $S_2 \in \mathcal{S}$, άρα, επειδή το S είναι μεγιστικό στοιχείο του $\mathcal{S}$, $S \subseteq S_1$ και $S \subseteq S_2$, έχουμε $S = S_1$ ή $S = S_2$.
■
Ακόμη, ορίζουμε την έννοια των παραγόμενων φίλτρων.

Πρόταση 1.38 *Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ και $B_0 \subseteq A$ μη κενό σύνολο. Τότε το σύνολο:*

$$S = \{\alpha \in A \mid (\bigwedge B) \leq \alpha, \ B \text{ πεπερασμένο υποσύνολο του } B_0\}$$

είναι φίλτρο στο A και λέγεται παραγόμενο φίλτρο του B_0.

Απόδ. Για κάθε $\alpha, \beta \in A$, αν $(\alpha \wedge \beta) \in S$, τότε υπάρχει πεπερασμένο $B \subseteq B_0$ τέτοιο ώστε $(\bigwedge B) \leq (\alpha \wedge \beta)$, επομένως $(\bigwedge B) \leq \alpha$ και $(\bigwedge B) \leq \beta$, άρα $\alpha, \beta \in S$.
Αντίθετα, αν $\alpha, \beta \in S$, υπάρχουν πεπερασμένα $B_1, B_2 \subseteq B_0$ τέτοια ώστε $(\bigwedge B_1) \leq \alpha$ και $(\bigwedge B_2) \leq \beta$. Επομένως, $(\bigwedge B_1) \wedge (\bigwedge B_2) = \bigwedge(B_1 \cup B_2) \leq \alpha, \beta$, άρα $\bigwedge(B_1 \cup B_2) \leq (\alpha \wedge \beta)$, οπότε $(\alpha \wedge \beta) \in S$.
■

Τέλος, αποδεικνύουμε δύο χρήσιμες προτάσεις για επιμεριστικά δικτυωτά.

Πρόταση 1.39 *Έστω επιμεριστικό δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$. Τότε κάθε μη-αναγώγιμο φίλτρο στο A είναι πρώτο.*

Απόδ. Έστω γνήσιο φίλτρο S στο A. Αν το S δεν είναι πρώτο, τοτε υπάρχουν $\alpha, \beta \in A$ τέτοια ώστε $(\alpha \vee \beta) \in S$ και $\alpha, \beta \notin S$. Αν S_1 είναι το παραγόμενο φίλτρο του $S \cup \{\alpha\}$ και S_2 το παραγόμενο φίλτρο του $S \cup \{\beta\}$, τότε $S_1 \cap S_2 \subseteq S$.
Το τελευταίο ισχύει διότι για κάθε $\gamma \in A$, αν $\gamma \in (S_1 \cap S_2)$, τότε υπάρχουν πεπερασμένα $B_1, B_2 \subseteq S$ τέτοια ώστε $(\bigwedge B_1) \wedge \alpha \leq \gamma$ και $(\bigwedge B_2) \wedge \beta \leq \gamma$. Επειδή το S είναι φίλτρο και τα B_1, B_2 είναι πεπερασμένα, υπάρχουν $\beta_1, \beta_2 \in S$ τέτοια ώστε $\beta_1 = (\bigwedge B_1)$ και $\beta_2 = (\bigwedge B_2)$, οπότε $(\beta_1 \wedge \alpha) \leq \gamma$ και $(\beta_2 \wedge \beta) \leq \gamma$. Επομένως, $(\beta_1 \wedge \alpha) \vee (\beta_2 \wedge \beta) \leq \gamma$.
Δεδομένου ότι το A είναι επιμεριστικό, έχουμε:

$$\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge (\alpha \vee \beta) \;\leq\; (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \alpha) \vee (\beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \beta) \;\leq\; (\beta_1 \wedge \alpha) \vee (\beta_2 \wedge \beta) \;\leq\; \gamma$$

Όλοι όροι στο αριστερότερο μέλος της παραπάνω σχέσης ανοίκουν στο S, επομένως και η τομή τους ανήκει στο S, άρα το γ ανήκει στο S.
Επιπλέον, ισχύει $S \subseteq S_1 \cap S_2$, οπότε $S = S_1 \cap S_2$. Επειδή $S \neq S_1$ και $S \neq S_2$, το S δεν είναι μη-αναγώγιμο.
■

Πρόταση 1.40 *Έστω δικτυωτό $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ και S_0 πρώτο φίλτρο στο A. Τότε για κάθε $\alpha, \beta \in A$, αν $(\alpha \Rightarrow \beta) \notin S_0$, τότε υπάρχει πρώτο φίλτρο S τέτοιο ώστε $S_0 \subseteq S$, $\alpha \in S$ και $\beta \notin S$.*

Απόδ. Έστω S' το παραγόμενο φίλτρο του $S_0 \cup \{\alpha\}$. Ισχύει ότι $\beta \notin S'$, διότι σε διαφορετική περίπτωση υπάρχει πεπερασμένο $B \subseteq S_0$ τέτοιο ώστε $(\bigwedge B) \wedge \alpha \leq \beta$, δηλαδή υπάρχει $\gamma \in S_0$ τέτοιο ώστε $(\gamma \wedge \alpha) \leq \beta$, οπότε $\gamma \leq (\alpha \Rightarrow \beta)$ και $(\alpha \Rightarrow \beta) \in S_0$.
Επιπλέον, $S_0 \cup \{\alpha\} \subseteq S'$ και, σύμφωνα με την πρόταση 1.37, υπάρχει μη-αναγώγιμο φίλτρο S τέτοιο ώστε $S' \subseteq S$ και $\beta \notin S$.
Επομένως, $S_0 \subseteq S$, $\alpha \in S$, $\beta \notin S$ και, σύμφωνα με την πρόταση 1.39, το S είναι πρώτο φίλτρο στο A.
■

1.5 Δικτυωτά και Πλειονότιμες Λογικές

Σε αντίθεση με την κλασική λογική, στις πλειονότιμες λογικές δεν αρκούμαστε σε απονομές αλήθειας με σύνολο τιμών το $\{\top, \bot\}$, αλλά επιτρέπουμε οι απονομές αλήθειας να δίνουν περισσότερες από δύο διακριτές τιμές. Φυσικά το να ορίσουμε μόνο το

σύνολο των αληθοτιμών που θα επιτρέψουμε δεν είναι αρκετό, πρέπει και να ορίσουμε τις λογικές πράξεις που μας χρειάζονται στο σύνολο των αληθοτιμών.
Η προσέγγιση που θα ακολουθήσουμε είναι να επιλέγουμε οι αληθοτιμές να αποτελούν τα στοιχεία ενός δικτυωτού. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζουμε τη σωστή, διαισθητική ερμηνεία των λογικών πράξεων {"και","η"} με τις πράξεις {"τομή","ένωση"} του δικτυωτού. Εκτός αυτού, ορίζουμε και μια μερική διάταξη στο σύνολο των αληθοτιμών, καθώς θέλουμε κάποιες αληθοτιμές να συγκρίνονται (πχ. οι $\top, \bot$ με όλες τις υπόλοιπες), *χωρίς όμως να επιβάλουμε όλα τα ζεύγη αληθοτιμών να είναι συγκρίσιμα.* Αυτό είναι πολύ σημαντικό, καθώς σε μια εφαρμογή πλειονότιμης λογικής δύσκολα θα μπορούσαμε να συγκρίνουμε για παράδειγμα τις αληθοτιμές "αναληθές με ποσοστό αλήθειας 70%" και "αναληθές λόγω βλάβης στην επεξεργασία".
Σημείωση. Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι όροι *αναληθές* (όχι $\top$) και *ψευδές* ($\bot$) δεν ταυτίζονται πλέον. Λέγοντας ότι κάτι είναι αναληθές (ή ότι δεν είναι αληθές), εννούμε ότι παίρνει κάποια αληθοτιμή δίαφορη του $\top$. Ομοίως, δεν ταυτίζονται οι όροι *αληθές* ($\top$) και *μη-ψευδές* (όχι $\bot$).
Επιπλέον, επιλέγουμε το πλήθος των αληθοτιμών να είναι πεπερασμένο, γεγονός που συνάδει με τα περισσότερα πρακτικά προβλήματα. Με τη χρήση κάποιου πεπερασμένου δικτυωτού έχουμε αυτόματα μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο ($\top, \bot$).
Για να έχει κάποια υπολογίσιμη ισχύ η λογική μας, πρέπει να συμπεριλάβουμε στα προτασιακά μας σύμβολα αυτό της συνεπαγωγής ($\supset$). Η ερμηνεία της λογικής συνεπαγωγής γίνεται με την πράξη του σχετικού ψευδο-συμπληρώματος ($\Rightarrow$), το οποίο υποθέτουμε ότι υπάρχει για κάθε ζεύγος αληθοτιμών. Για την επιλογή αυτή, μπορούμε εν συντομία να πούμε ότι *δίνουμε στη συνεπαγωγή τη μεγαλύτερη αληθοτιμή που τις "αξίζει"*, δηλαδή τη μεγαλύτερη αληθοτιμή ώστε η τομή της με την αληθοτιμή της υπόθεσης να μην υπερβαίνουν αυτήν του συμπεράσματος. Αναλυτικότερα μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε ως εξής.
Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την αλήθεια της έκφρασης $\phi \supset \psi$ και γνωρίζουμε ότι η αλήθεια της ϕ έχει την τιμή α, ενώ αυτή της ψ την τιμή β. Υπάρχουν τρία ενδεχόμενα:

- $\alpha \leq \beta$. Σε αυτήν την περίπτωση η συνεπαγωγή πρέπει να αληθεύει είτε "εν κενώ" (αν $\alpha < \beta$), είτε ταυτοτικά (αν $\alpha = \beta$). Με αυτόν τον τρόπο εξασφαλίζουμε εκτός των άλλων ότι, αν η συνεπαγωγή και η υπόθεση είναι αληθείς, τότε είναι και το συμπέρασμα.

- $\beta < \alpha$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε ένα συμπέρασμα που είναι αναληθέστερο της υπόθεσης, οπότε σίγουρα έχουμε μιαν αναληθή συνεπαγωγή. Εφόσον το συμπέρασμα δε συνάγεται από την υπόθεση, η συνεπαγωγή είναι τόσο (αν)αληθής, όσο (αν)αληθές είναι και το συμπέρασμα.

- $\alpha \nleq \beta, \beta \nleq \alpha$. Σε αυτήν την περίπτωση δεν είναι συγκρίσιμες οι αληθοτιμές της υπόθεσης και του συμπεράσματος, οπότε καταφεύγουμε στο επιχείρημα της μεγαλύτερης αληθοτιμής που αξίζει στη συνεπαγωγή.

Παραπάνω υποθέσαμε ότι για κάθε ζεύγος αληθοτιμών υπάρχει το σχετικό τους ψευδο-συμπλήρωμα, δηλαδή ότι οι αληθοτιμές ανήκουν σε ένα σχετικά ψευδο-συμπληρωμένο

δικτυωτό. Δεδομένου ότι το δικτυωτό των αληθοτιμών είναι πεπερασμένο, αυτό ισοδυναμεί (πρόταση 1.31) με την υπόθεση ενός επιμεριστικού δικτυωτού.
Εν κατακλείδι, οι πλειονότιμες λογικές που θα εξετάσουμε στα επόμενα κεφάλαια θα αναφέρονται σε **πεπερασμένα επιμεριστικά δικτυωτά αληθοτιμών**.

Κεφάλαιο 2

Πλειονότιμη Λογική

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο είναι βασισμένο στο [Fit92a], εξετάζουμε ένα παράδειγμα Πλειονότιμης Λογικής (ΠλΛ), το οποίο θα επεκτείνουμε στη συνέχεια με τροπικούς τελεστές. Όπως αναφέραμε και προηγούμενα, στις ΠλΛ που εξετάζουμε θεωρούμε ότι η αλήθεια δεν παίρνει τιμές από το σύνολο $\{\top, \bot\}$, αλλά από ένα **πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό** $\mathcal{T}$. Τις τιμές του $\mathcal{T}$ τις λέμε *αληθοτιμές*. Η διάταξη συμβολίζεται με $\leq$ και οι πράξεις της τομής και της ένωσης με $\wedge$ και $\vee$, αντίστοιχα. Καθώς το $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο, έχει μέγιστο στοιχείο $\top$ και ελάχιστο $\bot$, με $\bot < \top$.

2.1 Μερικοί ορισμοί

Στη συνέχεια ορίζουμε την προτασιακή γλώσσα στην οποία εργαζόμαστε, η οποία θα πρέπει τώρα να είναι συμβατή με το γεγονός ότι έχουμε αληθοτιμές πάνω σε δικτυωτό. Αν και στην κλασική λογική είναι εύκολο να αναπαραστήσουμε στη γλώσσα μας τα $\bot$ και $\top$, με τους τύπους $p \wedge \neg p$ και $p \vee \neg p$, εδώ δεν μπορεί να γίνει αυτό, τουλάχιστον στη γενική περίπτωση πεπερασμένων δικτυωτών που εξετάζουμε. Για το λόγο αυτό, προσθέτουμε για κάθε στοιχείο του συνόλου $\mathcal{T}$ μια σταθερά στη γλώσσα μας.

Ορισμός 2.1 *Η γλώσσα $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ του πλειονότιμου προτασιακού λογισμού με αληθοτιμές από το $\mathcal{T}$ ορίζεται από:*

- *Το σύνολο των λογικών συμβόλων, το οποίο περιέχει τα:*
  1. *Σύμβολα μεταβλητών: p, q, κλπ. Το σύνολο των μεταβλητών συμβολίζεται ΠM και είναι αριθμήσιμο.*
  2. *Σύμβολα λογικών πράξεων: $\wedge, \vee, \supset$.*
  3. *Βοηθητικά σύμβολα για παρενθέσεις, κόμμα, κλπ.*
- *Το σύνολο των μη λογικών συμβόλων, το οποίο αποτελείται από προτασιακές σταθερές, συμβ. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \ldots$, οι οποίες αναπαριστούν τα μέλη του $\mathcal{T}$ στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}$. Το σύνολο των προτασιακών σταθερών συμβολίζεται με $\Pi\Sigma$.*

  Οι αληθοτιμές $\top$ και $\bot$ αναπαρίστανται από τα ίδια σύμβολα $(\top, \bot)$ και η *διάκριση μεταξύ προτασιακών συμβόλων και αληθοτιμών γίνεται από τα συμφραζόμενα.*

Ας ορίσουμε τώρα και τους (σωστούς) προτασιακούς τύπους στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}$.

Ορισμός 2.2 *Οι προτασιακοί τύποι στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής.*

- *Ατομικοί τύποι της $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές (ΠM) και οι προτασιακές σταθερές ($\Pi\Sigma$). Το σύνολο των ατομικών τύπων συμβολίζεται AT ($AT = \Pi M \cup \Pi\Sigma$).*

- *Τύποι της $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ είναι οι ατομικοί τύποι, ενώ αν ϕ και ψ είναι τύποι, τότε οι $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$ και $(\phi \supset \psi)$ είναι επίσης τύποι της $\mathcal{L}_\mathcal{T}$. Το σύνολο των τύπων συμβολίζεται ΠT.*

Παρατηρούμε ότι στον παραπάνω ορισμό λείπει η κατηγορία προτασιακών τύπων της μορφής $\neg\phi$. Το σύμβολο $\neg$ δεν είναι πρωταρχικό και αντιστοιχεί στην πράξη του ψευδο-συμπληρώματος στο $\mathcal{T}$, δηλαδή του σχετικού ψευδο-συμπληρώματος ως προς $\bot$. Έχουμε λοιπόν ότι για κάθε τύπο ϕ, το $\neg\phi$ είναι συντομογραφία του $\phi \supset \bot$.
Μένει να ορίσουμε και τις συναρτήσεις απονομής αλήθειας, τις οποίες ονομάζουμε *αναθέσεις*. Οι αναθέσεις που χρειαζόμαστε πρέπει να αναθέτουν στα σύμβολα αληθοτιμών τις αντίστοιχες αληθοτιμές.

Ορισμός 2.3 *Ως ανάθεση ορίζουμε μια συνάρτηση $\upsilon : AT \to \mathcal{T}$, η οποία ικανοποιεί τον περιορισμό $\upsilon(\hat{\alpha}) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathcal{T}$, για κάθε $\hat{\alpha} \in \Pi\Sigma$.*

Αν η υ είναι μια ανάθεση, αυτή μπορεί να επεκταθεί σε μια γενικευμένη ανάθεση $\bar{\upsilon}$, η οποία έχει ως πεδίο ορισμού όχι μόνον το AT, αλλά το σύνολο των τύπων της $\mathcal{L}_\mathcal{T}$.

Ορισμός 2.4 *Η γενίκευση $\bar{\upsilon}$ της υ, είναι η συνάρτηση $\bar{\upsilon} : \Pi T \to \mathcal{T}$, που ορίζεται αναδρομικά ως εξής.*
Έστω ϕ, ψ τύποι και ϕ' ατομικός τύπος, τότε:

- $\bar{\upsilon}(\phi') = \upsilon(\phi')$
- $\bar{\upsilon}(\phi \wedge \psi) = \bar{\upsilon}(\phi) \wedge \bar{\upsilon}(\psi)$
- $\bar{\upsilon}(\phi \vee \psi) = \bar{\upsilon}(\phi) \vee \bar{\upsilon}(\psi)$
- $\bar{\upsilon}(\phi \supset \psi) = \bar{\upsilon}(\phi) \Rightarrow \bar{\upsilon}(\psi)$, *όπου με " $\Rightarrow$ " συμβολίζουμε την πράξη του σχετικού ψευδο-συμπληρώματος.*

Στο εξής θα συμβολίζουμε την $\bar{\upsilon}$ απλώς υ, δεδομένου ότι δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

Στις επόμενες παραγράφους θα αναπτύξουμε ένα λογισμό ακολουθητών τύπου Gentzen, ένα σύστημα δηλαδή αποδείξεων για την $\mathcal{L}_\mathcal{T}$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ορθότητα και την πληρότητα του συστήματος αυτού.

2.2 Ο Λογισμός Ακολουθητών $SC_{\mathcal{T}}$

Ο λογισμός ακολουθητών οφείλεται στον Gentzen και "*είναι η ομορφότερη εικονογράφηση των συμμετριών της Λογικής*" ([GTL89]). Όπως είπαμε, είναι ένα σύστημα αποδείξεων και βασίζεται στους *ακολουθητές (sequents)*.

Ορισμός 2.5 *Ένας ακολουθητής του $SC_{\mathcal{T}}$είναι μια έκφραση της μορφής:*

$$\Gamma \to \Delta$$

όπου τα Γ, Δ είναι σύνολα τύπων της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$.

Μια απλοϊκή ερμηνεία της παραπάνω έκφρασης είναι ότι η σύζευξη των προτάσεων αριστερά του βέλους συνεπάγεται τη διάζευξη αυτών στα δεξιά του βέλους. Στην περίπτωση της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}$, ορίζουμε την εγκυρότητα ενός ακολουθητή ως εξής.

Ορισμός 2.6 *Λέμε ότι η ανάθεση υ ικανοποιεί τον ακολουθητή $\Gamma \to \Delta$, αν είτε σε κάποιο στοιχείο του Γ δεν ανατίθεται το $\top$, είτε σε κάποιο στοιχείο του Δ ανατίθεται το $\top$.*
Αυτό μπορεί να διατυπωθεί εναλλακτικά ως:
Λέμε ότι η ανάθεση υ ικανοποιεί τον ακολουθητή $\Gamma \to \Delta$, αν είτε κάποιο στοιχείο του Γ δεν είναι αληθές, είτε κάποιο στοιχείο του Δ είναι αληθές μέσω της υ.
Ένας ακολουθητής λέγεται ικανοποιήσιμος, αν υπάρχει ανάθεση υ που να τον ικανοποιεί.
Ένας ακολουθητής λέγεται έγκυρος, αν ικανοποιείται από κάθε ανάθεση υ.

Για ευκολία στο συμβολισμό, στους ακολουθητές θα συμβολίζουμε με $\Gamma, \Delta, \ldots$ σύνολα τύπων, ενώ αν ϕ ένας τύπος, το $\Gamma \cup \{\phi\}$ θα το συμβολίζουμε συχνά Γ, ϕ. Γενικά οι τύποι θα συμβολίζονται με $\phi, \psi, \chi, \ldots$
Εισάγουμε κανόνες και αξιώματα, ξεκινώντας από την κατηγορία των δομικών κανόνων.

Αξίωμα Ταυτότητας

$$\phi \to \phi$$

Κανόνας Εξασθένησης ($Weakening$)

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \cup \Gamma' \to \Delta \cup \Delta'}$$

Κανόνας Τομής (Cut)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \phi \qquad \Gamma, \phi \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}$$

Ακολουθούν κανόνες για τη συνεπαγωγή.

Αξίωμα Μεταβατικότητας

$$\phi \supset \chi, \chi \supset \psi \to \phi \supset \psi$$

Κανόνας $RI \supset$

$$\frac{\Gamma, \hat{\alpha} \supset \phi \to \Delta, \hat{\alpha} \supset \psi \qquad (\text{για κάθε } \alpha \in \mathcal{T})}{\Gamma \to \Delta, \phi \supset \psi}$$

Κανόνας $\supset RI$

$$\frac{\Gamma, \psi \supset \hat{\alpha} \to \Delta, \phi \supset \hat{\alpha} \qquad (\text{για κάθε } \alpha \in \mathcal{T})}{\Gamma \to \Delta, \phi \supset \psi}$$

Ακολουθούν τα αξιώματα για τους λογικούς συνδέσμους.

Αξιώματα Σύζευξης

$$\to (\phi \wedge \psi) \supset \phi$$

$$\to (\phi \wedge \psi) \supset \psi$$

$$\chi \supset \phi, \chi \supset \psi \to \chi \supset (\phi \wedge \psi)$$

Αξιώματα Διάζευξης

$$\to \phi \supset (\phi \vee \psi)$$

$$\to \psi \supset (\phi \vee \psi)$$

$$\phi \supset \chi, \psi \supset \chi \to (\phi \vee \psi) \supset \chi$$

Αξιώματα Συνεπαγωγής

$$(\phi \wedge \psi) \supset \chi \to \phi \supset (\psi \supset \chi)$$

$$\phi \supset (\psi \supset \chi) \to (\phi \wedge \psi) \supset \chi$$

Ακολουθούν αξιώματα σχετικά με τις ιδιότητες του $\mathcal{T}$.

Αξιώματα Προτασιακών Σταθερών

$$\to \hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \qquad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathcal{T} \text{ με } \alpha \leq \beta$$

$$\hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \to \qquad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathcal{T} \text{ με } \alpha \not\leq \beta$$

Αξιώματα Μετατροπής

$$\phi \to (\top \supset \phi)$$

$$(\top \supset \phi) \to \phi$$

Έχοντας πλέον τους παραπάνω κανόνες, μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό της απόδειξης.

Ορισμός 2.7 *Απόδειξη σε ένα λογισμό ακολουθητών είναι ένα δένδρο (με τα φύλλα προς τα επάνω) στα φύλλα του οποίου υπάρχουν οι υποθέσεις, ενώ στη ρίζα το συμπέρασμα.*
Αν όλες οι υποθέσεις είναι αξιώματα, τότε το συμπέρασμα είναι θεώρημα.
Αν όλες οι υποθέσεις είναι είτε αξιώματα, είτε θεωρήματα, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα θεωρήματα με τις αποδείξεις τους και να έχουμε μια νέα απόδειξη με υποθέσεις μόνο αξιώματα. Συνεπώς, και σε αυτήν την περίπτωση το συμπέρασμα είναι θεώρημα.

Σημείωση 2.8 Θα χρησιμοποιούμε τη συντομογραφία $\phi \equiv \psi$ αντί του $(\phi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \phi)$.
Επιπλέον, πολύ συχνά θα χρησιμοποιούμε εξασθένηση και αμέσως μετά τομή. Σε αυτές τις περιπτώσεις, για ευκολία μπορούμε να μη γράφουμε καθόλου το βήμα της εξασθένησης. Έτσι, για παράδειγμα αντί να γράφουμε:

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, \phi \to \Delta}{\Gamma \cup \Gamma', \phi \to \Delta \cup \Delta'}\, W \quad \cfrac{\Gamma' \to \Delta', \phi}{\Gamma \cup \Gamma' \to \Delta \cup \Delta', \phi}\, W}{\Gamma \cup \Gamma' \to \Delta \cup \Delta'}\, C$$

Μπορούμε να γράφουμε απευθείας:

$$\frac{\Gamma, \phi \to \Delta \qquad \Gamma' \to \Delta', \phi}{\Gamma \cup \Gamma' \to \Delta \cup \Delta'}\, C$$

Παρακάτω παράθέτουμε κάποιες προτάσεις, οπότε μπορούμε να δούμε και κάποια παραδείγματα αποδείξεων.

Πρόταση 2.9 *Για κάθε τύπο ϕ,* $\to \phi \supset \phi$.

Απόδ. Έστω α ένα στοιχείο του $\mathcal{T}$. Τότε:

$$\frac{\hat{\alpha} \supset \phi \to \hat{\alpha} \supset \phi}{\to \phi \supset \phi}\, RI \supset$$

όπου η υπόθεση είναι αξίωμα (ταυτότητα).
∎

Πρόταση 2.10 *Για κάθε τύπο ϕ,* $\to \phi \supset \top$ *και* $\to \bot \supset \phi$.

Απόδ. Θα αποδείξουμε το δεύτερο. Το πρώτο αποδεικνύεται παρομοίως. Έστω α στοιχείο του $\mathcal{T}$, τότε:

$$\cfrac{\cfrac{\to \bot \supset \hat{\alpha}}{\phi \supset \hat{\alpha} \to \bot \supset \hat{\alpha}}\, W}{\to \bot \supset \phi}\, \supset RI$$

∎

Πρόταση 2.11 *Για όλους τους τύπους ϕ, ψ, χ ισχύει ότι:*

$$\phi \supset \chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \chi$$

$$\phi \supset \chi, \psi \supset \chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \chi$$

$$\chi \supset \phi \rightarrow \chi \supset (\phi \vee \psi)$$

Απόδ. Αποδεικνύουμε το πρώτο και το δεύτερο προκύπτει με εξασθένηση.

$$\frac{(\phi \wedge \psi) \supset \phi, \phi \supset \chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \chi \qquad \rightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \phi}{\phi \supset \chi \rightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \chi} C$$

Για το τρίτο έχουμε:

$$\frac{\chi \supset \phi, \phi \supset (\phi \vee \psi) \rightarrow \chi \supset (\phi \vee \psi) \qquad \rightarrow \phi \supset (\phi \vee \psi)}{\chi \supset \phi \rightarrow \chi \supset (\phi \vee \psi)} C$$

■

Πρόταση 2.12 *Σε κάθε ακολουθητή που εμφανίζεται ο τύπος ϕ μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με τον $\top \supset \phi$ και αντιστρόφως.*

Απόδ. Θα δείξουμε μόνον την περίπτωση που ο ϕ εμφανίζεται αριστερά του βέλους του ακολουθητή. Οι υπόλοιπες (τρεις) περιπτώσεις αποδεικνύονται παρομοίως.

$$\frac{\Gamma, \phi \rightarrow \Delta \quad \top \supset \phi \rightarrow \phi}{\Gamma, \top \supset \phi \rightarrow \Delta} C$$

■

Λόγω της παραπάνω πρότασης, μπορούμε να ταυτίζουμε κάθε τύπο ϕ με τον $\top \supset \phi$. Έτσι αποδεικνύονται εύκολα οι δύο παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση 2.13 *Για κάθε ζεύγος τύπων ϕ, ψ ισχύει* $\phi \wedge \psi \rightarrow \phi$.

Απόδ. Με εφαρμογή της παραπάνω πρότασης:

$$\frac{(\phi \wedge \psi) \supset \phi, \top \supset (\phi \wedge \psi) \rightarrow \top \supset \phi \quad \rightarrow (\phi \wedge \psi) \supset \phi}{\top \supset (\phi \wedge \psi) \rightarrow \top \supset \phi} C$$

■

Πρόταση 2.14 *Ο παρακάτω είναι παραγόμενος κανόνας.*

$$\frac{\Gamma \rightarrow \phi \quad \Gamma \rightarrow \psi}{\Gamma \rightarrow \phi \wedge \psi}$$

Απόδ. Έχουμε ότι:

$$\frac{\dfrac{\top \supset \phi, \top \supset \psi \rightarrow \top \supset (\phi \wedge \psi) \qquad \Gamma \rightarrow \top \supset \phi}{\Gamma, \top \supset \psi \rightarrow \top \supset (\phi \wedge \psi)} C \qquad \Gamma \rightarrow \top \supset \psi}{\Gamma \rightarrow \top \supset (\phi \wedge \psi)} C$$

■

Ο επόμενες δύο προτάσεις συνδέουν την ισοδυναμία με τη συνεπαγωγή στις δύο κατευθύνσεις.

Πρόταση 2.15 *Ο παρακάτω είναι παραγόμενος κανόνας.*

$$\frac{\Gamma \to \phi \supset \psi \quad \Gamma \to \psi \supset \phi}{\Gamma \to \phi \equiv \psi}$$

Απόδ. Εφαρμογή της πρότασης 2.14.

■

Πρόταση 2.16 *Για κάθε ζεύγος τύπων ϕ, ψ ισχύει ότι* $\phi \equiv \psi \to \phi \supset \psi$.

Απόδ. Εφαρμογή της πρότασης 2.13.

■

Πρόταση 2.17 *Για κάθε τύπο ϕ ισχύει ότι* $\phi \to \phi \equiv \top$ *και* $\phi \equiv \top \to \phi$.

Απόδ. Για το πρώτο με χρήση της πρότασης 2.12 έχουμε:

$$\dfrac{\to \top \supset (\phi \supset \top) \quad \dfrac{\phi \to \top \supset (\top \supset \phi) \quad \top \supset (\phi \supset \top), \top \supset (\top \supset \phi) \to \top \supset (\phi \equiv \top)}{\phi, \top \supset (\phi \supset \top) \to \top \supset (\phi \equiv \top)}\,C}{\phi \to \top \supset (\phi \equiv \top)}\,C$$

Για το δεύτερο με χρήση της πρότασης 2.16 έχουμε:

$$\frac{\phi \equiv \top \to \top \supset \phi \qquad \top \supset \phi \to \phi}{\phi \equiv \top \to \phi}\,C$$

■

Πρόταση 2.18 *Ο παρακάτω είναι παραγόμενος κανόνας.*

$$\frac{\Gamma \to \phi \supset \psi}{\Gamma, \phi \to \psi}$$

Απόδ.

$$\frac{\Gamma \to \phi \supset \psi \qquad \top \supset \phi, \phi \supset \psi \to \top \supset \psi}{\Gamma, \top \supset \phi \to \top \supset \psi}\,C$$

■

Σημείωση 2.19 Η αντίθετη κατεύθυνση του παραπάνω κανόνα δεν ισχύει, δηλαδή με υπόθεση το $\Gamma, \phi \to \psi$ δεν αποδεικνύεται το $\Gamma \to \phi \supset \psi$. Εξάλλου, αν για παράδειγμα

$$\mathcal{T} = \{\bot, \tau, \top\} \quad \text{με} \quad \bot < \tau < \top$$

τότε ο $\hat{\tau} \to \bot$ είναι έγκυρος, ενώ ο $\to \hat{\tau} \supset \bot$ όχι.

Πρόταση 2.20 *Ο παρακάτω είναι παραγόμενος κανόνας:*

$$\frac{\Gamma, (\phi \equiv \hat{\alpha}) \to \Delta \qquad (\text{για κάθε } \alpha \in \mathcal{T})}{\Gamma \to \Delta}$$

Απόδ. Η απόδειξη είναι δύσκολη και περιέχεται στο [Fit92a].

■

2.3 Ορθότητα και Πληρότητα

Η ορθότητα του λογισμού ακολουθητών που ορίσαμε είναι σχεδόν άμεση. Αρκεί για κάθε αξίωμα να ελέγξουμε την εγκυρότητά του και για κάθε κανόνα να ελέγξουμε ότι *διατηρεί την εγκυρότητα*, δηλαδή αν οι υποθέσεις του είναι έγκυρες, τότε είναι και το συμπέρασμά του.

Ενδεικτικά θα δείξουμε την ορθότητα του αξιώματος της μεταβατικότητας και του κανόνα της τομής.

Πρόταση 2.21 *Το αξίωμα της μεταβατικότητας και ο κανόνας της τομής είναι ορθοί.*

Απόδ. Για τη μεταβατικότητα έχουμε ότι για κάθε ανάθεση υ:

$$\begin{aligned} \upsilon(\phi \supset \chi) \wedge \upsilon(\chi \supset \psi) &= (\upsilon(\phi) \Rightarrow \upsilon(\chi)) \wedge (\upsilon(\chi) \Rightarrow \upsilon(\psi)) \\ &\leq \upsilon(\phi) \Rightarrow \upsilon(\psi) \qquad \text{από πρόταση 1.29} \\ &= \upsilon(\phi \supset \psi) \end{aligned}$$

Οπότε, αν $\upsilon(\phi \supset \chi) = \upsilon(\chi \supset \psi) = \top$, τότε $\upsilon(\phi \supset \psi) = \top$ και το αξίωμα είναι έγκυρο. Για την τομή ας υποθέσουμε ότι ο κανόνας δεν είναι ορθός, οπότε υπάρχει ανάθεση υ για την οποία ικανοποιούνται οι υποθέσεις ($\Gamma, \phi \to \Delta$ και $\Gamma \to \Delta, \phi$), όχι όμως και το συμπέρασμα ($\Gamma \to \Delta$), δηλαδή:

$$\upsilon(\phi_\gamma) = \top, \qquad \upsilon(\phi_\delta) < \top \qquad \text{για κάθε } \phi_\gamma \in \Gamma, \phi_\delta \in \Delta.$$

Τότε, επειδή η υ ικανοποιεί τον ακολουθητή $\Gamma, \phi \to \Delta$, θα έχουμε αναγκαστικά ότι:

$$\upsilon(\phi) < \top$$

Αυτό όμως συνεπάγεται ότι ο $\Gamma \to \Delta, \phi$ δεν ικανοποιείται από τη υ, άτοπο.

■

Η πληρότητα δεν είναι τόσο εύκολο αποτέλεσμα και για το λόγο αυτό παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Καταρχήν, ας δούμε τι σημαίνει πληρότητα σε αυτό το σύστημα αποδείξεων.

Ορισμός 2.22 *Ένας λογισμός ακολουθητών είναι πλήρης αν για κάθε ζεύγος Γ, Δ πεπερασμένων συνόλων από τύπους έχουμε ότι:*
Αν ο ακολουθητής $\Gamma \to \Delta$ είναι έγκυρος, τότε είναι και αποδείξιμος, αποτελεί δηλαδή θεώρημα.

Μια χρήσιμη πρόταση για την απόδειξη της πληρότητας είναι η επόμενη. Σημειώνουμε ότι χωρίς τη χρήση των διακριτικών για το διαχωρισμό των μελών του $\mathcal{T}$ από τα σύμβολα που τα αναπαριστούν στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}$, η πρόταση φαίνεται προφανής. Η απόδειξη της πρότασης, όμως, δεν είναι τόσο προφανής.

Πρόταση 2.23 *Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ αποδεικνύονται τα παρακάτω:*

$$\to \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \equiv (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})$$

$$\to \widehat{(\alpha \vee \beta)} \equiv (\hat{\alpha} \vee \hat{\beta})$$

$$\to \widehat{(\alpha \Rightarrow \beta)} \equiv (\hat{\alpha} \supset \hat{\beta})$$

Απόδ. Θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο. Τα υπόλοιπα προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο. Αρχικά αποδεικνύουμε τη μία συνεπαγωγή. Γνωρίζουμε ότι $\alpha \wedge \beta \leq \alpha$ και $\alpha \wedge \beta \leq \beta$ οπότε:

$$\dfrac{\dfrac{\widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset \hat{\alpha}, \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset \hat{\beta} \to \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \qquad \to \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset \hat{\alpha}}{\widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset \hat{\beta} \to \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})}\,C \qquad \to \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset \hat{\beta}}{\to \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})}\,C$$

Για την αντίθετη συνεπαγωγή εργαζόμαστε ως εξής.
Για κάθε $\tau \in \mathcal{T}$ έχουμε ότι:

$$\text{είτε } \tau \leq \alpha \text{ και } \tau \leq \beta \text{ ,είτε } \tau \not\leq \alpha \text{ , είτε } \tau \not\leq \beta$$

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε ότι $\tau \leq (\alpha \wedge \beta)$ από τον ορισμό της τομής (ορισμοί 1.7,1.9), άρα $\to \hat{\tau} \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)}$
Στη δεύτερη περίπτωση έχουμε ότι $\hat{\tau} \supset \hat{\alpha} \to$.
Στην τρίτη περίπτωση έχουμε ότι $\hat{\tau} \supset \hat{\beta} \to$.
Επομένως με εξασθένηση προκύπτει ότι για κάθε $\tau \in \mathcal{T}$ ισχύει:

$$\hat{\tau} \supset \hat{\alpha}, \hat{\tau} \supset \hat{\beta} \to \hat{\tau} \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)}$$

Άρα για κάθε $\tau \in \mathcal{T}$ έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\hat{\tau} \supset \hat{\alpha}, \hat{\tau} \supset \hat{\beta} \to \hat{\tau} \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \qquad AM1}{\hat{\tau} \supset \hat{\beta}, \hat{\tau} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}), (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\alpha} \to \hat{\tau} \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \qquad AM2}\,C}{\hat{\tau} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}), (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\alpha}, (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\beta} \to \hat{\tau} \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)}}\,C}{(\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\alpha}, (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\beta} \to (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \qquad A\Sigma 1}\,RI \supset}{(\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\beta} \to (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)} \qquad A\Sigma 2}\,C}{\to (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)}}\,C$$

όπου οι ακολουθητές $AM1, AM2$ είναι αξιώματα μεταβατικότητας και οι $A\Sigma 1, A\Sigma 2$ αξιώματα σύζευξης. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} AM1: &\quad \hat{\tau} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}), (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\alpha} \to \hat{\tau} \supset \hat{\alpha} \\ AM2: &\quad \hat{\tau} \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}), (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\beta} \to \hat{\tau} \supset \hat{\beta} \\ A\Sigma 1: &\quad \to (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\alpha} \\ A\Sigma 2: &\quad \to (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}) \supset \hat{\beta} \end{aligned}$$

Τέλος, από την πρόταση 2.15 έχουμε το ζητούμενο.

■

Η απόδειξη της πληρότητας γίνεται μέσω συνεπών συνόλων, τα οποία ορίζονται ως εξής.

Ορισμός 2.24 *Εστω Σ και S σύνολα από τύπους, με Σ πεπερασμένο και μη κενό. Λέμε ότι το S είναι Σ-ασυνεπές αν για κάποιο πεπερασμένο $\Gamma \subseteq S$ και κάποιο $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ο ακολουθητής $\Gamma \to \Sigma'$ είναι αποδείξιμος.*
Το S λέγεται Σ-συνεπές αν δεν είναι Σ-ασυνεπές.
Το S λέγεται μεγιστικό Σ-συνεπές αν είναι Σ-συνεπές και για κάθε τύπο $\phi \notin S$ το $S \cup \{\phi\}$ είναι Σ-ασυνεπές.

Η επόμενη πρόταση δίνει δύο ιδιότητες των συνεπών συνόλων που ορίσαμε.

Πρόταση 2.25 *Αν S' ένα Σ-συνεπές σύνολο τύπων, τότε υπάρχει ενα μεγιστικό Σ-συνεπές σύνολο S με $S' \subseteq S$.*
Αν S ένα μεγιστικό Σ-συνεπές σύνολο και $\Gamma \to \phi$ για κάποιο πεπερασμένο $\Gamma \subseteq S$, τότε $\phi \in S$.

Απόδ. Για το πρώτο απλά θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό 2.1 το σύνολο ΠM είναι αριθμήσιμο και το σύνολο $\Pi\Sigma$ πεπερασμένο, άρα υπάρχει μια απαρίθμηση $\{\psi_1, \psi_2, \dots\}$ όλων των τύπων. Δημιουργούμε μια ακολουθία συνόλων S_i ως εξής.

$$S_0 = S'$$
$$S_{\nu+1} = \begin{cases} S_\nu \cup \{\psi_{\nu+1}\} & \text{αν αυτό είναι } \Sigma\text{-συνεπές} \\ S_\nu & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οπότε παίρνοντας $S = \bigcup_i S_i$ έχουμε το ζητούμενο σύνολο.

Για το δεύτερο έστω ότι $\Gamma \subseteq S$ και $\Gamma \to \phi$ με $\phi \notin S$. Τότε, αφού το S είναι μεγιστικό Σ-συνεπές έχουμε ότι υπάρχει $\Gamma' \subseteq S$ και $\Sigma' \subseteq \Sigma$ ώστε $\Gamma', \phi \to \Sigma'$. Συνεπώς,

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \phi}{\Gamma \to \phi, \Sigma'}\,W \qquad \Gamma', \phi \to \Sigma'}{\Gamma \cup \Gamma' \to \Sigma'}\,C$$

Οπότε το S είναι Σ-ασυνεπές, άτοπο.

■

Τέλος, η χρησιμότητα των συνεπών συνόλων που ορίσαμε στην απόδειξη της πληρότητας έγκειται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.26 *Έστω S ένα μεγιστικό Σ-συνεπές σύνολο. Για κάθε τύπο ϕ υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha_\phi \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε $(\phi \equiv \widehat{\alpha_\phi}) \in S$.*

Απόδ. Αρχικώς έστω ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ με $\alpha \neq \beta$ και $(\phi \equiv \hat{\alpha}), (\phi \equiv \hat{\beta}) \in S$. Τότε, χβτγ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \nleq \beta$. Επίσης, επειδή $(\phi \equiv \hat{\alpha}) \to \hat{\alpha} \supset \phi$ και $(\phi \equiv \hat{\beta}) \to \phi \supset \hat{\beta}$, έχουμε ότι $(\hat{\alpha} \supset \phi), (\phi \supset \hat{\beta}) \in S$ και

$$\frac{\hat{\alpha} \supset \phi, \phi \supset \hat{\beta} \to \hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \qquad \hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \to}{\hat{\alpha} \supset \phi, \phi \supset \hat{\beta} \to} C$$

οπότε, επειδή $\emptyset \subseteq \Sigma$, το S είναι Σ-ασυνεπές, άτοπο.
Επίσης, έστω ότι δεν υπάρχει κανένα $\alpha \in \mathcal{T}$ για το οποίο $(\phi \equiv \hat{\alpha}) \in S$. Τότε, επειδή το S είναι μεγιστικό Σ-συνεπές, για κάθε $\alpha_i \in \mathcal{T}$ υπάρχει ένα πεπερασμένο $\Gamma_i \subseteq S$ και ένα $\Sigma_i \subseteq \Sigma$ ώστε $\Gamma_i, (\phi \equiv \hat{\alpha_i}) \to \Sigma_i$, άρα με εξασθένηση έχουμε $\bigcup_{i \leq n} \Gamma_i, (\phi \equiv \hat{\alpha_i}) \to \Sigma$, όπου $n = |\mathcal{T}|$. Έστω $\Gamma = \bigcup_{i \leq n} \Gamma_i$, $\Gamma \subseteq S$, τότε:

$$\frac{\Gamma, (\phi \equiv \hat{\alpha}) \to \Sigma \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathcal{T}}{\Gamma \to \Sigma} 2.20$$

Άρα καταλήγουμε στο ότι το S είναι Σ-ασυνεπές, δηλαδή σε άτοπο.
■
Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.27 *Έστω οι τύποι* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$. *Αν ο ακολουθητής* $\to \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$ *είναι έγκυρος, τότε είναι αποδείξιμος.*

Απόδ. Έστω ότι ο ακολουθητής $\to \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$ δεν είναι αποδείξιμος. Ορίζουμε $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu\}$. Θα δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ο ακολουθητής δεν είναι έγκυρος.
Αφού ο ακολουθητής δεν είναι αποδείξιμος, το $\emptyset$ είναι Σ-συνεπές και επεκτείνεται σε ένα μεγιστικό Σ-συνεπές σύνολο S. Ορίζουμε τότε την ανάθεση υ πάνω στους ατομικούς τύπους ως εξής.

$$\upsilon(\phi) = \alpha \quad \text{όπου } \alpha \in \mathcal{T} \text{ το μοναδικό τέτοιο ώστε } (\phi \equiv \hat{\alpha}) \in S \qquad (*)$$

Θεωρούμε την επεκταμένη υ $(\bar{\upsilon})$ και θέλουμε να δείξουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάθε τύπο ϕ. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή και, αφού η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη, μας ενδιαφέρουν οι παρακάτω περιπτώσεις, όπου σε κάθε περίπτωση έχουμε από την επαγωγική υπόθεση $(E\Upsilon)$ ότι $\upsilon(\phi) = \alpha, \upsilon(\psi) = \beta$ με $(\phi \equiv \hat{\alpha}), (\psi \equiv \hat{\beta}) \in S$.

- $\upsilon(\phi \wedge \psi) = \upsilon(\phi) \wedge \upsilon(\psi) \stackrel{E\Upsilon}{=} \alpha \wedge \beta$
- $\upsilon(\phi \vee \psi) = \upsilon(\phi) \vee \upsilon(\psi) \stackrel{E\Upsilon}{=} \alpha \vee \beta$
- $\upsilon(\phi \supset \psi) = \upsilon(\phi) \Rightarrow \upsilon(\psi) \stackrel{E\Upsilon}{=} \alpha \Rightarrow \beta$

Στην πρώτη περίπτωση αρκεί να δείξουμε ότι $((\phi \wedge \psi) \equiv \widehat{(\alpha \wedge \beta)}) \in S$. Αρχικά, με χρήση των πρότασεων 2.11 και 2.23 έχουμε ότι:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\phi \supset \hat{\alpha} \to (\phi \wedge \psi) \supset \hat{\alpha} \quad (\phi \wedge \psi) \supset \hat{\alpha}, (\phi \wedge \psi) \supset \hat{\beta} \to (\phi \wedge \psi) \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})}{\phi \supset \hat{\alpha}, (\phi \wedge \psi) \supset \hat{\beta} \to (\phi \wedge \psi) \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})} C \quad \psi \supset \hat{\beta} \to (\phi \wedge \psi) \supset \hat{\beta}}{\phi \supset \hat{\alpha}, \psi \supset \hat{\beta} \to (\phi \wedge \psi) \supset (\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta})} C}{\phi \supset \hat{\alpha}, \psi \supset \hat{\beta} \to (\phi \wedge \psi) \supset \widehat{(\alpha \wedge \beta)}} 2.23$$

Τώρα, για την αντίθετη συνεπαγωγή, πάλι με τη βοήθεια των προτάσεων 2.11 και 2.23:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\hat{\alpha} \supset \phi, (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \hat{\alpha} \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \phi \qquad \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \hat{\alpha}}{\hat{\alpha} \supset \phi \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \phi \qquad\qquad A\Sigma}\,C}{\hat{\alpha} \supset \phi, (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \psi \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset (\phi \wedge \psi) \qquad \hat{\beta} \supset \psi \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \psi}\,C}{\hat{\alpha} \supset \phi, \hat{\beta} \supset \psi \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset (\phi \wedge \psi)}\,C$$

όπου $A\Sigma$ είναι το παρακάτω αξίωμα σύζευξης.

$$A\Sigma : \qquad (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \phi, (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset \psi \to (\widehat{\alpha \wedge \beta}) \supset (\phi \wedge \psi)$$

Από τα δύο αυτά αποτελέσματα με εφαρμογή εξασθένησης και της πρότασης 2.15 παίρνουμε ότι:

$$\hat{\alpha} \supset \phi, \hat{\beta} \supset \psi, \phi \supset \hat{\alpha}, \psi \supset \hat{\beta} \to (\phi \wedge \psi) \equiv (\widehat{\alpha \wedge \beta})$$

Επειδή όλοι οι τύποι στα αριστερά του βέλους ανήκουν στο S, έχουμε ότι:

$$((\phi \wedge \psi) \equiv (\widehat{\alpha \wedge \beta})) \in S$$

δηλαδή του ζητούμενο. Οι άλλες δύο περιπτώσεις αποδεικνύονται με τον ίδιο τρόπο. Επομένως, η $(*)$ ισχύει για κάθε τύπο ϕ.
Μένει να δείξουμε ότι η υ δεν ικανοποιεί τον $\to \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$. Έστω ότι για κάθε i έχουμε $\upsilon(\phi_i) = \alpha_i$. Αν για κάποιο i έχουμε $\alpha_i = \top$, τότε $(\phi_i \equiv \top) \in S$ και, λόγω της πρότασης 2.17, το S είναι Σ-ασυνεπές, άτοπο.
Επομένως, ο ακολουθητής δεν είναι έγκυρος.
■
Για την απόδειξη της πληρότητας χρειαζόμαστε δύο ακόμη προτάσεις.

Πρόταση 2.28 *Αν $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ με $\alpha \neq \beta$, τότε για κάθε τύπο ϕ ισχύει ότι*

$$\phi \equiv \hat{\alpha}, \phi \equiv \hat{\beta} \to$$

Απόδ. Αν $\alpha \leq \beta$ και $\beta \leq \alpha$, τότε $\alpha = \beta$. Επομένως, αφού $\alpha \neq \beta$, έστω ότι έχουμε $\alpha \not\leq \beta$. Τότε, με τη βοήθεια της πρότασης 2.16 έχουμε:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\hat{\alpha} \supset \phi, \phi \supset \hat{\beta} \to \hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \qquad \hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \to}{\hat{\alpha} \supset \phi, \phi \supset \hat{\beta} \to \qquad\qquad \phi \equiv \hat{\alpha} \to \phi \supset \hat{\alpha}}\,C}{\phi \equiv \hat{\alpha}, \phi \supset \hat{\beta} \to \qquad\qquad \phi \equiv \hat{\beta} \to \phi \supset \hat{\beta}}\,C}{\phi \equiv \hat{\alpha}, \phi \equiv \hat{\beta} \to}\,C$$

Ομοίως αν έχουμε $\beta \not\leq \alpha$.
■

Πρόταση 2.29 *Έστω* $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu\}$, *με* $\tau_\nu = \top$. *Τότε ο παρακάτω είναι παραγόμενος κανόνας:*

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \phi \equiv \widehat{\tau_1}, \phi \equiv \widehat{\tau_2}, \dots, \phi \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}}{\Gamma, \phi \to \Delta}$$

Απόδ. Με τη βοήθεια της προηγούμενης πρότασης και της πρότασης 2.17 έχουμε:

$$\dfrac{\phi \to \phi \equiv \top \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta, \phi \equiv \widehat{\tau_1}, \phi \equiv \widehat{\tau_2}, \dots, \phi \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}} \qquad \phi \equiv \top, \phi \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}} \to}{\Gamma, \phi \equiv \top \to \Delta, \phi \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi \equiv \widehat{\tau_{\nu-2}}}\,C \qquad \phi \equiv \top, \phi \equiv \widehat{\tau_{\nu-2}} \to}{\Gamma, \phi \equiv \top \to \Delta, \phi \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi \equiv \widehat{\tau_{\nu-3}}}\,C}{\ddots}\,C}{\Gamma, \phi \equiv \top \to \Delta}\,C}{\Gamma, \phi \to \Delta}\,C$$

■

Τέλος, αποδεικνύουμε την πληρότητα.

Θεώρημα 2.30 *Έστω πεπερασμένα σύνολα τύπων* Γ, Δ. *Αν ο ακολουθητής* $\Gamma \to \Delta$ *είναι έγκυρος, τότε είναι αποδείξιμος.*

Απόδ. Θεωρούμε μια απαρίθμηση των στοιχείων του $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu\}$ έτσι ώστε $\tau_\nu = \top$, και θεωρούμε επίσης ότι $\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$, $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m\}$.
Τώρα έστω ότι ο ακολουθητής δεν είναι αποδείξιμος. Με διαδοχικές εφαρμογές της προηγούμενης πρότασης έχουμε ότι:

$$\dfrac{\dfrac{\to \Delta, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}, \dots, \phi_n \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi_n \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}}{\phi_n \to \Delta, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}, \dots, \phi_{n-1} \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi_{n-1} \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}}}{\vdots}$$

$$\frac{\phi_2, \dots, \phi_n \to \Delta, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_1}, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_2}, \dots, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}}{\Gamma \to \Delta}$$

Επομένως, ούτε ο ακολουθητής

$$\to \Delta, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}, \dots, \phi_n \equiv \widehat{\tau_1}, \dots, \phi_n \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}$$

είναι αποδείξιμος. Επομένως, από το θεώρημα 2.27 έχουμε ότι δεν είναι έγκυρος, υπάρχει δηλαδή ανάθεση υ τέτοια ώστε:

$$\upsilon(\psi_j) < \top \quad \text{και} \quad \upsilon(\phi_k \equiv \widehat{\tau_i}) \;=\; (\upsilon(\phi_k) \Rightarrow \tau_i) \wedge (\tau_i \Rightarrow \upsilon(\phi_k)) \;<\top$$

$$\text{για} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad k = 1, 2, \dots, n \quad i = 1, 2, \dots, \nu - 1$$

Από τη δεύτερη ομάδα σχέσεων έχουμε ότι $\upsilon(\phi_k) \neq \tau_i$ $, i = 1, 2, \dots, \nu - 1,$ άρα $\upsilon(\phi_k) = \top$ για όλα τα k.
Επομένως, ο $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \to \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$, δηλαδή ο $\Gamma \to \Delta$, δεν είναι ικανοποιήσιμος από τη υ, άρα δεν είναι έγκυρος.

■

Παραθέτουμε ένα απλό πόρισμα.

Πόρισμα 2.31 *Αν ο ακολουθητής* $\phi_1 \to \phi_2$ *είναι έγκυρος, τότε είναι αποδείξιμος.*

Κεφάλαιο 3

Τροπική Λογική

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στην τροπική λογική. Σκοπός είναι να ορίσουμε τη γλώσσα των τροπικών προτάσεων $\mathcal{L}^{mod}$, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια, και να εισάγουμε την έννοια του μοντέλου και της ικανοποίησης προτάσεων σε δεδομένες καταστάσεις. Τέλος, θα δείξουμε ή θα αναφέρουμε κάποια ενδιαφέροντα θεωρήματα τα οποία δείχνουν και την ιδιαιτερότητα της τροπικής λογικής. Οι αναφορές μας για αυτό το κεφάλαιο είναι από το [BdRV01] και το [Ram97].
Σημειώνουμε πάντως ότι το κεφάλαιο αυτό έχει ως σκοπό μια πολύ σύντομη εισαγωγή στην τροπική λογική και δεν έχει την ίδια σε βάθος ανάπτυξη με τα υπόλοιπα κεφάλαια.

3.1 Ορισμοί

Ξεκινάμε ορίζοντας τη γλώσσα της τροπικής λογικής.

Ορισμός 3.1 *Η γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}$ του τροπικού λογισμού ορίζεται από:*

- *Το σύνολο των λογικών συμβόλων, το οποίο περιέχει τα:*
    1. *Σύμβολα μεταβλητών: p, q, κλπ. Το σύνολο των μεταβλητών συμβολίζεται ΠM και είναι αριθμήσιμο.*
    2. *Σύμβολα λογικών πράξεων: $\wedge, \vee, \supset$.*
    3. *Σύμβολα τροπικών τελεστών: $\Box$.*
    4. *Βοηθητικά σύμβολα για παρενθέσεις, κόμμα, κλπ.*
- *Το σύνολο των μη λογικών συμβόλων, το οποίο αποτελείται από την προτασιακή σταθερά για την αντίφαση ($\perp$). Το (μονο)σύνολο των προτασιακών σταθερών συμβολίζεται με $\Pi\Sigma$.*

Ας ορίσουμε τώρα και τους (σωστούς) προτασιακούς τύπους στην $\mathcal{L}^{mod}$.

Ορισμός 3.2 *Οι προτασιακοί τύποι στην $\mathcal{L}^{mod}$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής.*

- *<u>Ατομικοί τύποι</u> της $\mathcal{L}^{mod}$ είναι οι προτασιακές μεταβλητές (ΠM) και η <u>προτασιακή σταθερά</u> $\perp$. Το σύνολο των ατομικών τύπων συμβολίζεται AT ($AT = \Pi M \cup \{\perp\}$).*

- *<u>Τύποι</u> της $\mathcal{L}^{mod}$ είναι οι ατομικοί τύποι, ενώ αν ϕ και ψ είναι τύποι, τότε οι $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \supset \psi)$ και $(\Box\phi)$ είναι επίσης τύποι της $\mathcal{L}^{mod}$. Το σύνολο των τύπων συμβολίζεται ΠT.*

Σημειώσεις στον παραπάνω ορισμό.
* Το σύμβολο $\neg$ δεν ορίζεται ως πρωταρχικό, αλλά αποτελεί συντομογραφία, δηλαδή για κάθε τύπο ϕ, το $\neg\phi$ σημαίνει $\phi \supset \perp$.
* Η αλήθεια ορίζεται ως το συμπλήρωμα της αντίφασης, $\top : \neg\perp$.
* Ορίζουμε τον τροπικό τελεστή $\Diamond$ ως το *δυαδικό τελεστή* του $\Box$. Για κάθε τύπο ϕ, το $\Diamond\phi$ σημαίνει $\neg\Box\neg\phi$.
* Θεωρούμε ότι οι τροπικοί τελεστές έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από τα υπόλοιπα σύμβολα και συχνά παραλέιπουμε τις παρενθέσεις. Έτσι, για παράδειγμα ο τύπος $\Box\phi \wedge \Diamond\psi$ είναι ο $(\Box\phi) \wedge (\Diamond\psi)$. Επίσης ο τελεστής $\neg$ έχει μεγαλύτερη προτεραιότητα από τους $\wedge, \vee, \supset$.

Σημείωση 3.3 Η ιδιαιτερότητα του τροπικού λογισμού έγκειται στη χρήση των τροπικών συμβόλων $\Diamond, \Box$. Για τα σύμβολα αυτά υπάρχουν αρκετές ερμηνείες και μεταφράσεις και η βασική ιδέα είναι αυτή της **ικανοποίησης σε πιθανούς κόσμους ή καταστάσεις**.
Στην τροπική λογική η αλήθεια ενός τύπου ϕ δεν εξετάζεται απαραίτητα γενικά (όπως πχ. του τύπου " υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί"), αλλά σε δεδομένες καταστάσεις. Για παράδειγμα, η πρόταση "ένα πρόγραμμα τερματίζει" μπορεί να είναι αληθής στην κλασική λογική, με την έννοια ότι αυτό το πρόγραμμα κάποτε θα τερματίσει, όμως στην τροπική λογική μπορούμε να ρωτήσουμε αν **τώρα** τερματίζει, δηλαδή αν η κατάσταση στην οποία βρίσκεται τώρα οδηγεί σε τερματισμό σε λιγότερο από πχ. τρία βήματα.
Φυσικά, μπορεί κανείς να σκεφτεί κατάλληλες προτάσεις στην κλασική λογική για να εκφράσει προτάσεις με τροπικό χαρακτήρα, τροπικές προτάσεις, όπως οι παραπάνω. Η τροπική λογική δεν είναι ισχυρότερη της κλασικής, το αντίθετο μάλιστα, οι ποσοδείκτες της κλασικής λογικής είναι πολύ ισχυρότεροι από τους τροπικούς τελεστές. Η αδυναμία, όμως, των ποσοδεικτών της κλασικής λογικής είναι ότι είναι πολύ "άκαμπτοι" στην περίπτωση που θέλουμε να εκφράσουμε και πολύ περισσότερο να ελέγξουμε τροπικές προτάσεις.
Σε γενικές γραμμές, η τροπική λογική είναι ένας πολύ κομψός και αποδοτικός τρόπος για να εκφράσουμε και να ελέγξουμε τροπικές προτάσεις. Όσον αφορά το τελευταίο, θα δούμε παρακάτω ότι στην τροπική λογική αν ένας τύπος ϕ ικανοποιείται σε ένα μοντέλο, τότε ικανοποιείται σε ένα (μικρό) πεπερασμένο μοντέλο.
Μένει λοιπόν να ερμηνεύσουμε τους τροπικούς τελεστές. Υπάρχουν πολλές ερμηνείες και συνήθως η ερμηνεία που δίνεται στους τελεστές αυτούς εξαρτάται από το σύστημα τροπικής λογικής που χρησιμοποιείται κάθε φορά. Πάντως, μια συνηθισμένη και αρκετά κατατοπιστική ερμηνεία είναι αυτή του $\Box\phi$ ως "οπωσδήποτε φ" και του $\Diamond\phi$

ως "πιθανώς φ". Μια καλύτερη εικόνα για τη λειτουργία των τροπικών τελεστών θα έχουμε αφού ορίσουμε τα τροπικά μοντέλα.

Η γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}$ που ορίσαμε αποτελεί στην ουσία τη **βασική** τροπική γλώσσα, καθώς στη γενικότερη μορφή τους οι τροπικές γλώσσες μπορούν να έχουν περισσότερους του ενός τροπικούς τελεστές. Θα προχωρήσουμε στον ορισμό των τροπικών γλωσσών κατά το γενικότερο τρόπο, όμως η τροπική γλώσσα που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου και στα επόμενα κεφάλαια είναι η $\mathcal{L}^{mod}$.

Ορισμός 3.4 *Ένας τροπικός τύπος ομοιότητας είναι ένα ζεύγος $\tau = (O, \rho)$, όπου O είναι ένα μη-κενό σύνολο και ρ είναι μια συνάρτηση $O \to \mathbb{N}$. Τα στοιχεία του O λέγονται τροπικοί τελεστές και συμβολίζονται με ∇, δηλαδή $\nabla_0, \nabla_1, \ldots$. Η συνάρτηση ρ για κάθε στοιχείο του O μας δίνει τον πεπερασμένο αριθμό των ορισμάτων του (arity).*

Η τροπική γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}_\tau$ ορίζεται όπως η $\mathcal{L}^{mod}$, με τη μόνη διαφορά ότι χρησιμοποιούμε το O ως σύνολο συμβόλων τροπικών τελεστών.

Οι δυαδικοί τελεστές των $\nabla_0, \nabla_1, \ldots$ συμβολίζονται $\triangle_0, \triangle_1, \ldots$.
Τα ∇ ενός ορίσματος συμβολίζονται $\Box$ και τα $\triangle$ ενός ορίσματος με $\Diamond$.

Σημειώνουμε ότι μπορούμε σε μια τροπική γλώσσα να ορίσουμε ως πρωταρχικούς τροπικούς τελεστές τους $\triangle$ και να ορίσουμε τους ∇ ως συντομογραφίες.
Παρακάτω έχουμε ένα παράδειγμα τροπικής γλώσσας.

Παράδειγμα 3.5 (Η Βασική Χρονική Γλώσσα) Η βασική χρονική γλώσσα χρησιμοποιεί το σύνολο τροπικών τελεστών $O = \{\langle F\rangle, \langle P\rangle\}$ με ένα όρισμα. Η ερμηνεία που δίνεται στον τύπο $\langle F\rangle\phi$ είναι "ο ϕ θα είναι αληθής κάποια στιγμή στο μέλλον (Future)", ενώ στον τύπο $\langle P\rangle\phi$ δίνεται η ερμηνεία "ο ϕ ήταν αληθής κάποια στιγμή στο παρελθόν (Past)". Παρατηρούμε ότι εδώ ορίζουμε ως πρωταρχικούς τους τελεστές $\triangle$.
Η τροπική λογική για αυτήν τη γλώσσα λέγεται χρονική λογική. Αντί για $\langle F\rangle\phi$ και $\langle P\rangle\phi$ γράφουμε $F\phi$ και $P\phi$. Οι δυαδικοί τελεστές είναι οι G και H, αντίστοιχα, με τις ανάλογες ερμηνείες: η ερμηνεία του τύπου $G\phi$ είναι ότι "πάντα θα ισχύει ο ϕ", ενώ του τύπου $H\phi$ ότι "πάντα ίσχυε ο ϕ".
Είναι δυνατό να εκφράσουμε πολλές ενδιαφέρουσες προτάσεις σχετικά με το χρόνο μέσω της βασικής χρονικής γλώσσας. Για παράδειγμα, ο τύπος $P\phi \supset GP\phi$ ερμηνεύεται ως "αν κάποτε ίσχυε ο ϕ, τότε πάντα θα ισχύει ότι κάποτε ίσχυε ο ϕ" και φαίνεται να εκφράζει μια γενική αλήθεια για το χρόνο. Από την άλλη, αν ο τύπος $F\phi \supset FF\phi$ είναι αληθής για κάθε τύπο ϕ, τότε ο χρόνος είναι πυκνός, καθώς ο τύπος λέει ότι "αν ο ϕ θα είναι αληθής κάποια στιγμή, τότε υπάρχει μια τρίτη στιγμή μεταξύ της παρούσας και εκείνης της πραγματοποίησης του ϕ".

3.2 Τροπικά Πλαίσια και Μοντέλα

Τα τροπικά μοντέλα ορίζονται μέσω των τροπικών πλαισίων. Υπενθυμίζουμε ότι αναφερόμαστε πάντα στη βασική τροπική γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}$.

Ορισμός 3.6 *Ένα τροπικό πλαίσιο είναι μια δομή $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, όπου το $\mathcal{W}$ είναι ένα μη κενό σύνολο και η $\mathcal{R}$ μια δυαδική σχέση στο $\mathcal{W}$.*
Το $\mathcal{W}$ λέγεται σύνολο καταστάσεων και η $\mathcal{R}$ σχέση πρόσβασης μεταξύ καταστάσεων.
Πολύ συχνά θα θεωρούμε την $\mathcal{R}$ ως συνάρτηση $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \{\top, \bot\}$, θέτοντας για κάθε $A, B \in \mathcal{W}$: $\mathcal{R}(A, B) = \top \iff A\mathcal{R}B$.

Οι καταστάσεις θα συμβολίζονται με κεφαλαία πρώτα ελληνικά, $\mathcal{W} = \{A, B, \dots\}$.
Τα τροπικά μοντέλα αποφαίνονται για την αληθοτιμή τροπικών τύπων μέσω συναρτήσεων ανάθεσης.

Ορισμός 3.7 *Ως ανάθεση στην $\mathcal{L}^{mod}$ ως προς το $\mathcal{F}$ ορίζουμε μια συνάρτηση $\upsilon : \mathcal{W} \times AT \to \{\top, \bot\}$, για την οποία ισχύει ότι για κάθε $A \in \mathcal{W}$, $\upsilon(A, \bot) = \bot$.*
Αν η υ είναι ανάθεση, η $\bar{\upsilon}$ είναι η γενίκευσή της στο $\mathcal{W} \times \Pi T$. Η $\bar{\upsilon} : \mathcal{W} \times \Pi T \to \{\top, \bot\}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής.
Έστω ϕ, ψ τύποι, ϕ' ατομικός τύπος και $A \in \mathcal{W}$, τότε:

- $\bar{\upsilon}(A, \phi') \ = \ \upsilon(A, \phi')$
- $\bar{\upsilon}(A, \phi \land \psi) \ = \ \bar{\upsilon}(A, \phi) \land \bar{\upsilon}(A, \psi)$
- $\bar{\upsilon}(A, \phi \lor \psi) \ = \ \bar{\upsilon}(A, \phi) \lor \bar{\upsilon}(A, \psi)$
- $\bar{\upsilon}(A, \phi \supset \psi) \ = \ \neg\bar{\upsilon}(A, \phi) \lor \bar{\upsilon}(A, \psi)$
- $\bar{\upsilon}(A, \Box\phi) \ = \ \bigwedge\{\neg\mathcal{R}(A, B) \lor \bar{\upsilon}(B, \phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$

Σημειώσεις στον παραπάνω ορισμό.
$*$ Η συνάρτηση $\bar{\upsilon}$ έχει ως πεδίο τιμών το $\{\top, \bot\}$. Με την προσθήκη των πράξεων $\land, \lor, \neg$ στο σύνολο αυτό έχουμε μια άλγεβρα Boole. Οι πράξεις λοιπόν μεταξύ τιμών της ανάθεσης γίνονται κατά το συνήθη τρόπο για αυτήν την άλγεβρα.
$*$ Χάριν ευκολίας θα συμβολίζουμε την $\bar{\upsilon}$ απλώς ως υ.
$*$ Έχουμε ότι για κάθε τύπο ϕ και $A \in \mathcal{W}$, $\upsilon(A, \neg\phi) = \neg\upsilon(A, \phi)$ και $\upsilon(A, \Diamond\phi) = \bigvee\{\mathcal{R}(A, B) \land \upsilon(B, \phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$.

Ορισμός 3.8 *Ένα τροπικό μοντέλο είναι μια δομή $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$, όπου το $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ είναι ένα τροπικό πλαίσιο και η υ μια ανάθεση.*
Το μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ λέμε ότι βασίζεται στο πλαίσιο $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ή ότι το $\mathcal{F}$ υπόκειται του $\mathcal{M}$. Επίσης, το μοντέλο $\langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ συμβολίζεται και $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$.

Η ικανοποιησιμότητα και η εγκυρότητα τροπικών τύπων για τροπικά μοντέλα και πλαίσια ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 3.9 *Ένας τύπος ϕ ικανοποιείται σε ένα μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ στην κατάσταση $A \in \mathcal{W}$, αν $\upsilon(A, \phi) = \top$. Επιπλέον, ένας τύπος ϕ λέγεται ικανοποιήσιμος σε ένα μοντέλο $\mathcal{M}$, αν ικανοποιείται σε κάποια κατάστασή του, ενώ λέγεται έγκυρος στο $\mathcal{M}$ ή $\mathcal{M}$-έγκυρος, αν ικανοποιείται σε κάθε κατάστασή του.*
Ομοίως, ένας τύπος ϕ λέγεται ικανοποιήσιμος σε ένα πλαίσιο $\mathcal{F}$, αν υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ στο οποίο να είναι ικανοποιήσιμος, ενώ λέγεται έγκυρος στο $\mathcal{F}$ ή

$\mathcal{F}$-έγκυρος, αν ικανοποιείται σε κάθε μοντέλο $\mathcal{M}$ που βασίζεται σε αυτό.
Τέλος, ένας τύπος ϕ λέγεται έγκυρος αν ικανοποιείται σε κάθε πλαίσιο $\mathcal{F}$. Αν ο ϕ είναι έγκυρος, γράφουμε $\models \phi$.

Σημείωση 3.10 Σε πολλά συγγράμματα, όπως τα [BdRV01] και [Ram97], τα τροπικά μοντέλα ορίζονται με διαφορετικό τρόπο, αν και η ουσία είναι η ίδια. Έτσι, αντί να ορίζεται μια ανάθεση όπως στον ορισμό 3.7, ορίζεται απευθείας το μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, V \rangle$, όπου $\mathcal{F}$ είναι ένα τροπικό πλαίσιο και η V είναι μια συνάρτηση $\Pi M \to \mathcal{P}(\mathcal{W})$.
Η V αντιστοιχεί σε κάθε προτασιακή μεταβλητή p ένα υποσύνολο του $\mathcal{W}$ με τις καταστάσεις στις οποίες ικανοποιείται η p. Στη συνέχεια, ορίζεται η ικανοποιησιμότητα ενός τύπου ϕ με επαγωγικό τρόπο, ισοδύναμο του ορισμού 3.7.
Τέλος, να σημειώσουμε πως σε αυτήν την περίπτωση όταν ο τύπος ϕ ικανοποιείται στην κατάσταση A του μοντέλου $\mathcal{M}$, γράφουμε $\mathcal{M}, \mathcal{A} \Vdash \phi$ ή $\mathcal{M}, \mathcal{A} \models \phi$.

3.3 Βασική Θεωρία Αντιστοίχησης

Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι η σημασιολογία του τροπικού τελεστή $\Box$ δίνεται σε κάθε πλαίσιο από τη σχέση πρόσβασης $\mathcal{R}$. Επομένως, μπορούμε υποθέτοντας ότι η σχέση $\mathcal{R}$ έχει κάποιες επιπλέον ιδιότητες, πχ. να είναι μεταβατική, να έχουμε και ένα πλαίσιο με αντίστοιχες ιδιότητες, οπότε και έναν τελεστή $\Box$ με επιπλέον ιδιότητες.
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αντίστροφη πορεία, αυτή δηλαδή του προσδιορισμού μιας συγκεκριμένης ιδιότητας για τροπικά πλαίσια μέσα από έναν ή περισσότερους τροπικούς τύπους. Αυτό είναι και το βασικό αντικείμενο της θεωρίας αντιστοίχησης.

Εάν ένας τύπος δεν είναι έγκυρος, αλλά είναι ικανοποιήσιμος, τότε είναι έγκυρος σε μια *υποκλάση μοντέλων* και ενδεχομένως και σε μια *υποκλάση πλαισίων*. Στην τελευταία περίπτωση, μπορούμε να πούμε ότι ο τύπος προσδιορίζει τη σχέση πρόσβασης στα πλαίσια αυτά.

Ορισμός 3.11 *Λέμε ότι ένας τύπος ϕ χαρακτηρίζει μία κλάση πλαισίων $\mathfrak{C}$ αν*

$$\mathfrak{C} = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \mid \text{ο } \phi \text{ είναι } \mathcal{F}\text{-έγκυρος}\}$$

Με $\mathfrak{F}$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των τροπικών πλαισίων για την $\mathcal{L}^{mod}$.
Στην επόμενη πρόταση εξετάζουμε έναν τύπο για το χαρακτηρισμό των ανακλαστικών πλαισίων.

Πρόταση 3.12 *Έστω $\mathfrak{C}$ η κλάση των ανακλαστικών πλαισίων, δηλαδή*

$$\mathfrak{C} = \{\mathcal{F} \in \mathfrak{F} \mid \mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle,\ \mathcal{R} \text{ ανακλαστική } \}$$

Τότε, αν $p \in \Pi M$, ο τύπος $\phi = \Box p \supset p$ χαρακτηρίζει τη $\mathfrak{C}$.

Απόδ. Έστω πλαίσιο $\mathcal{F} \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, τέτοιο ώστε ο ϕ να μην είναι $\mathcal{F}$-έγκυρος. Τότε υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ τετοιο ώστε για κάποιο $A \in \mathcal{W}$, $\upsilon(A, \Box p \supset p) = \bot$. Τότε έχουμε $\upsilon(A, \Box p) = \top$ και $\upsilon(A, p) = \bot$. Από το τελευταίο, επειδή $\mathcal{R}(A, A)$, έχουμε $\upsilon(A, \Box p) = \bot$, άτοπο.

Αντίθετα, έστω $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ένα πλαίσιο τέτοιο ώστε ο ϕ είναι $\mathcal{F}$-έγκυρος και $\mathcal{F} \notin \mathfrak{C}$. Τότε υπάρχει $A \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $(A, A) \notin \mathcal{R}$. Για κάθε μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ έχουμε $\upsilon(A, \Box p \supset p) = \top$. Έστω λοιπόν υ τέτοια ώστε $\upsilon(A, p) = \bot$ και $\upsilon(B, p) = \top$ για κάθε $B \in \mathcal{W} \backslash \{A\}$. Τότε θα έχουμε $\upsilon(A, \Box p) = \top$, ενώ $\upsilon(A, p) = \bot$, δηλαδή άτοπο.
■

Σημειώνουμε ότι μπορεί να υπάρχουν περισσότεροι από έναν τύποι που να χαρακτηρίζουν την ίδια κλάση πλαισίων. Για παράδειγμα, ο δυαδικός του προηγούμενου τύπου, ο $p \supset \Diamond p$, επίσης χαρακτηρίζει τα ανακλαστικά πλαίσια.
Στην επόμενη πρόταση χαρακτηρίζουμε τρεις κλάσεις πλαισίων.

Πρόταση 3.13 *Έστω $p \in \Pi M$, τότε:*

1. *Ο τύπος $\phi = \Box p \supset \Box\Box p$ χαρακτηρίζει την κλάση $\mathfrak{C}$ των μεταβατικών πλαισίων.*
2. *Ο τύπος $\phi = p \supset \Box\Diamond p$ χαρακτηρίζει την κλάση $\mathfrak{C}$ των συμμετρικών πλαισίων.*
3. *Ο τύπος $\phi = \Box p \supset \Diamond p$ χαρακτηρίζει την κλάση $\mathfrak{C}$ των σειριακών πλαισίων* [1].

Απόδ. Για το πρώτο, έστω πλαίσιο $\mathcal{F} \in \mathfrak{C}$, $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, τέτοιο ώστε ο ϕ να μην είναι $\mathcal{F}$-έγκυρος. Τότε υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ τετοιο ώστε για κάποιο $A \in \mathcal{W}$, $\upsilon(A, \Box p \supset \Box\Box p) = \bot$, οπότε έχουμε $\upsilon(A, \Box p) = \top$ και $\upsilon(A, \Box\Box p) = \bot$. Από το τελευταίο, υπάρχει $B \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{R}(A, B)$ και $\upsilon(B, \Box\phi) = \bot$, οπότε υπάρχει $\Gamma \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{R}(B, \Gamma)$ και $\upsilon(\Gamma, p) = \bot$. Εφόσον το $\mathcal{F}$ είναι μεταβατικό, έχουμε $\mathcal{R}(A, \Gamma)$, άρα $\upsilon(A, \Box p) = \bot$, άτοπο.
Αντίθετα, έστω $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ένα πλαίσιο τέτοιο ώστε ο ϕ είναι $\mathcal{F}$-έγκυρος και $\mathcal{F} \notin \mathfrak{C}$. Τότε υπάρχουν $A, B, \Gamma \in \mathcal{W}$ τέτοια ώστε $(A, B), (B, \Gamma) \in \mathcal{R}$ και $(A, \Gamma) \notin \mathcal{R}$. Για κάθε μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ έχουμε $\upsilon(A, \Box p \supset \Box\Box p) = \top$. Έστω λοιπόν υ τέτοια ώστε $\upsilon(\Gamma, p) = \bot$ και $\upsilon(\Delta, p) = \top$ για κάθε $\Delta \in \mathcal{W} \backslash \{\Gamma\}$. Τότε θα έχουμε $\upsilon(A, \Box p) = \top$, ενώ $\upsilon(B, \Box p) = \bot$, οπότε $\upsilon(A, \Box\Box p) = \bot$, δηλαδή άτοπο.
Οι άλλες δύο υποπροτάσεις αποδεικνύονται με παρόμοιο τρόπο.
■

Εκτός από θετικά αποτελέσματα, όπως τα προηγούμενα, μπορούμε να δείξουμε και αρνητικά αποτελέσματα.

Πρόταση 3.14 *Δεν υπάρχει τροπικός τύπος ο οποίος να χαρακτηρίζει την κλάση $\mathfrak{C}$ των αντιανακλαστικών πλαισίων* [2].

Απόδ. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τύπο ϕ_0, αν ο ϕ_0 είναι ικανοποιήσιμος, τότε είναι ικανοποιήσιμος σε ένα αντιανακλαστικό πλαίσιο. Σε αυτήν την περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι ο τύπος ϕ χαρακτηρίζει την κλάση $\mathfrak{C}$, τότε για κάθε πλαίσιο $\mathcal{F}' \notin \mathfrak{C}$ έχουμε ότι ο ϕ δεν είναι έγκυρος στο $\mathcal{F}'$, άρα ο $\neg\phi$ ικανοποιείται στο $\mathcal{F}'$. Επομένως, ο $\neg\phi$ είναι ικανοποιήσιμος, άρα είναι ικανοποιήσιμος σε κάποιο αντιανακλαστικό πλαίσιο, άτοπο.
Έστω λοιπόν τύπος ϕ_0 ικανοποιήσιμος και μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$ τέτοιο ώστε για

[1] Η δυαδική σχέση $\mathcal{R}$ στο $\mathcal{W}$ λέγεται σειριακή αν για κάθε $A \in \mathcal{W}$ υπάρχει $A' \in \mathcal{W}$, ώστε $\mathcal{R}(A, A')$.

[2] Η δυαδική σχέση $\mathcal{R}$ στο $\mathcal{W}$ λέγεται **αντιανακλαστική (irreflexive)** αν για κάθε $A \in \mathcal{W}$, $(A, A) \notin \mathcal{R}$.

κάποιο $A \in \mathcal{W}$, $\upsilon(A, \phi_0) = \top$. Αν η $\mathcal{R}$ δεν είναι αντιανακλαστική, ορίζουμε το νέο μοντέλο $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}', \upsilon' \rangle$ ως εξής.

- $\mathcal{W}' = \mathcal{W} \times \{0, 1\}$
- Για κάθε $A, B \in \mathcal{W}$ και $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$: [3]
  $\mathcal{R}'((A, \alpha), (B, \beta)) \stackrel{o\rho}{=} \mathcal{R}(A, B) \wedge ((A \neq B) \vee (\alpha \neq \beta))$
- Για κάθε $A \in \mathcal{W}, \alpha \in \{0, 1\}$ και $\phi \in AT$: $\upsilon((A, \alpha), \phi) = \upsilon(A, \phi)$.

Εκ κατασκευής η $\mathcal{R}'$ είναι αντιανακλαστική στο $\mathcal{W}'$. Επιπλέον, αν ισχύει ότι για κάθε $(A, \alpha) \in \mathcal{W} \times \{0, 1\}$ και κάθε τύπο ϕ ισχύει ότι $\upsilon((A, \alpha), \phi) = \upsilon(A, \phi)$, τότε ο ϕ_0 είναι ικανοποιήσιμος στο $\mathcal{M}'$, άρα είναι ικανοποιήσιμος σε ένα αντιανακλαστικό πλαίσιο. Για να το δείξουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη από τον ορισμό και οι περιπτώσεις των $\wedge, \vee, \supset$ είναι σχετικά απλές.
Έστω τώρα ο τύπος $\Box\phi$. Για κάθε $(A, \alpha) \in \mathcal{W} \times \{0, 1\}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\upsilon'((A,\alpha),\Box\phi) &= \bigwedge\nolimits_{(B,\beta)\in\mathcal{W}\times\{0,1\}} \Big(\neg\mathcal{R}'((A,\alpha),(B,\beta)) \vee \upsilon'((B,\beta),\phi)\Big) \\
&\stackrel{E\Upsilon}{=} \bigwedge\nolimits_{(B,\beta)\in\mathcal{W}\times\{0,1\}} \Big(\neg(\mathcal{R}(A,B) \wedge ((A \neq B) \vee (\alpha \neq \beta))) \vee \upsilon(B,\phi)\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{(B,\beta)\in\mathcal{W}\times\{0,1\}} \Big(\neg\mathcal{R}(A,B) \vee ((A = B) \wedge (\alpha = \beta)) \vee \upsilon(B,\phi)\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{(B,\beta)\in(\mathcal{W}\times\{0,1\}\setminus\{(A,\alpha)\})} \Big(\neg\mathcal{R}(A,B) \vee \upsilon(B,\phi)\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}} (\neg\mathcal{R}(A,B) \vee \upsilon(B,\phi)) \;=\; \upsilon(A,\Box\phi)
\end{aligned}$$

■
Ένα άλλο αρνητικό αποτέλεσμα παρουσιάζεται χωρίς απόδειξη στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.15 *Η τροπική λογική δεν μπορεί να ξεχωρίσει μεταξύ προ-διατάξεων* [4] *και μερικών διατάξεων, δηλαδή αν ένας τύπος ϕ είναι ικανοποιήσιμος σε ένα πλαίσιο με σχέση πρόσβασης μια προ-διάταξη, τότε είναι ικανοποιήσιμος σε ένα πλαίσιο με σχέση πρόσβασης μια μερική διάταξη.*

3.4 Το σύστημα K

Έχοντας αναλύσει το συντακτικό και τη σημασιολογία για την τροπική λογική, στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε ένα σύστημα αξιωμάτων και κανόνων απόδειξης για την $\mathcal{L}^{mod}$. Το σύστημα αυτό ονομάζεται σύστημα **K** (από τον Saul Kripke) και θα δείξουμε ότι είναι ορθό και πλήρες.

[3] Χάριν ευκολίας, χρησιμοποιούμε τη σύμβαση αναπαράστασης των δυαδικών σχέσεων ως συναρτήσεις με πεδίο τιμών το $\{\top, \bot\}$.
[4] Η δυαδική σχέση $\mathcal{R}$ λέγεται **προ-διάταξη (pre-ordering)** αν είναι ανακλαστική και μεταβατική.

Ορισμός 3.16 *Το αποδεικτικό σύστημα* **K** *αποτελείται από αξιώματα και κανόνες απόδειξης. Έστω οι τύποι* ϕ, ψ*:*
Τα αξιώματα του **K** *είναι τα στιγμιότυπα των προτασιακών ταυτολογιών και επιπλέον το:*

$$\Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi) \qquad (\mathbf{K})$$

Οι κανόνες απόδειξης του **K** *είναι οι:*

$$\frac{\phi, \quad \phi \supset \psi}{\psi} \qquad (\mathrm{MP})$$

$$\frac{\phi}{\Box\phi} \qquad (\mathrm{Nec})$$

Απόδειξη στο σύστημα **K** *είναι μια ακολουθία τύπων στην οποία κάθε τύπος είτε είναι αξίωμα, είτε προκύπτει από κάποιους προηγούμενους τύπους της ακολουθίας με την εφαρμογή κάποιου κανόνα απόδειξης.*

Ένας τύπος λέγεται αποδείξιμος ή θεώρημα του **K** *αν ανήκει σε μία απόδειξη στο* **K***. Αν ο τύπος* ϕ *είναι θεώρημα του* **K** *γράφουμε* $\vdash_K \phi$*.*

Στην επόμενη πρόταση δίνουμε κάποια παραδείγματα **K**-θεωρημάτων.

Πρόταση 3.17 *Οι παρακάτω τύποι είναι θεωρήματα του* **K** *.*

$$\begin{gathered}
(\Box\phi \wedge \Diamond\psi) \supset \Diamond(\phi \wedge \psi) \\
\Box(\phi \wedge \psi) \equiv (\Box\phi \wedge \Box\psi) \\
(\Box\phi \vee \Box\psi) \supset \Box(\phi \vee \psi) \\
\Diamond(\phi \vee \psi) \equiv (\Diamond\phi \vee \Diamond\psi) \\
\Diamond(\phi \wedge \psi) \supset (\Diamond\phi \wedge \Diamond\psi)
\end{gathered}$$

όπου ο τύπος $\phi \equiv \psi$ *είναι συντομογραφία του* $(\phi \supset \psi) \wedge (\psi \supset \phi)$*.*

Απόδ. Θα δείξουμε το πρώτο για να δούμε ένα παράδειγμα απόδειξης στο **K**. Έχουμε:

$$\begin{array}{rr}
\Box(\phi \supset \neg\psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\neg\psi) & (\mathbf{K}\ :\alpha) \\
(\Box(\phi \supset \neg\psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\neg\psi)) \supset (\neg(\Box\phi \supset \Box\neg\psi) \supset \neg\Box(\phi \supset \neg\psi)) & (\text{ταυτολογία}\ :\beta) \\
\neg(\Box\phi \supset \Box\neg\psi) \supset \neg\Box(\phi \supset \neg\psi) & (\mathrm{MP}\ \alpha,\beta\ :\gamma) \\
(\neg(\Box\phi \supset \Box\neg\psi) \supset \neg\Box(\phi \supset \neg\psi)) \supset ((\Box\phi \wedge \neg\Box\neg\psi) \supset \neg\Box\neg(\phi \wedge \psi)) & \\
 & (\text{ταυτολογία}\ :\delta) \\
(\Box\phi \wedge \neg\Box\neg\psi) \supset \neg\Box\neg(\phi \wedge \psi) & (\mathrm{MP}\ \gamma,\delta\ :\varepsilon)
\end{array}$$

■

Στην προηγούμενη απόδειξη παρατηρούμε ότι τα στιγμιότυπα πρατασιακών ταυτολογιών μπορεί να περιέχουν τροπικούς τύπους.

3.4.1 Ορθότητα και Πληρότητα

Για την ορθότητα του συστήματος **K** αρκεί να δείξουμε ότι τα αξιώματα είναι έγκυρα και ότι οι κανόνες απόδειξης διατηρούν την εγκυρότητα. Το τελευταίο σημαίνει ότι αν η υπόθεση ενός κανόνα είναι έγκυρη, τότε είναι έγκυρο και το συμπέρασμα. Η απόδειξη της ορθότητας δεν παρουσιάζει κάποιο ενδιαφέρον και παραλείπεται.

Θεώρημα 3.18 *Το σύστημα* **K** *είναι ορθό, δηλαδή για κάθε τύπο ϕ, αν $\vdash_K \phi$ τότε $\models \phi$.*

Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η πληρότητα του συστήματος **K**. Ορίζουμε πρώτα την έννοια της συνέπειας στο **K** σύστημα.

Ορισμός 3.19 *Ο τύπος ϕ λέγεται συνεπής αν ο $\neg\phi$ δεν είναι θεώρημα στο* **K** *.*
Ένα πεπερασμένο σύνολο τύπων $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu\}$ λέγεται συνεπές αν ο τύπος $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_\nu$ είναι συνεπής.
Ένα σύνολο τύπων λέγεται συνεπές αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του είναι συνεπές, ενώ λέγεται ασυνεπές αν δεν είναι συνεπές.
Τέλος, ένα σύνολο τύπων S λέγεται μεγιστικό συνεπές αν είναι συνεπές και για κάθε τύπο $\phi \notin S$ το $S \cup \{\phi\}$ είναι ασυνεπές.

Μια εύκολη πρόταση για τα συνεπή σύνολα στο **K** είναι η παρακάτω.

Πρόταση 3.20 *Αν S' είναι ένα συνεπές σύνολο τύπων, τότε υπάρχει ενα μεγιστικό συνεπές σύνολο S με $S' \subseteq S$.*
Αν S είναι ένα μεγιστικό συνεπές σύνολο τύπων, τότε για κάθε τύπο ϕ ένας ακριβώς από τους τύπους $\phi, \neg\phi$ ανήκει στο S.
Αν S είναι ένα μεγιστικό συνεπές σύνολο τύπων και υπάρχουν τύποι ϕ, ψ τέτοιοι ώστε $\phi, \phi \supset \psi \in S$, τότε $\psi \in S$, δηλαδή το S είναι κλειστό ως προς τον κανόνα MP.
Τέλος, αν S είναι ένα μεγιστικό συνεπές σύνολο τύπων, τότε κάθε θεώρημα του **K** *ανήκει στο S.*

Απόδ. Για το πρώτο, η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν της πρότασης 2.25.
Για το δεύτερο, αν για κάποιον τύπο ϕ ανήκουν στο S οι $\phi, \neg\phi$, τότε το S είναι ασυνεπές, αφού ο τύπος $\neg(\phi \wedge \neg\phi)$ είναι ταυτολογία.
Από την άλλη, έστω ότι για κάποιον τύπο ϕ δεν ανήκει στο S ούτε ο ϕ, ούτε ο $\neg\phi$. Τότε, επειδή το S είναι μεγιστικό συνεπές, υπαρχουν τύποι $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\kappa \in S$ τέτοιοι ώστε οι τύποι $\phi \wedge \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_\nu$, $\neg\phi \wedge \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\kappa$ να είναι ασυνεπείς. Επομένως, οι τύποι $\neg\phi \vee \neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_\nu$, $\phi \vee \neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_\kappa$ είναι αποδείξιμοι. Επειδή ο τύπος $(\neg\phi \vee \phi') \supset ((\phi \vee \psi') \supset (\phi' \vee \psi'))$ είναι ταυτολογία, μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι και ο τύπος $\neg\phi_1 \vee \ldots \vee \neg\phi_\nu \vee \neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_\kappa$ είναι αποδείξιμος, άρα το S είναι ασυνεπές, άτοπο.
Για το τρίτο, έστω τύποι ϕ, ψ τέτοιοι ώστε $\phi, \phi \supset \psi, \neg\psi \in S$. Επειδή ο τύπος $\neg(\phi \wedge (\phi \supset \psi) \wedge \neg\psi)$ είναι ταυτολογία, το S είναι ασυνεπές, άτοπο.
Για το τέταρτο, αν ο τύπος ϕ είναι θεώρημα και δεν ανήκει στο S, τότε $\neg\phi \in S$ και ο $\neg\neg\phi$ είναι θεώρημα, οπότε το S είναι ασυνεπές, άτοπο.
■

Θεώρημα 3.21 *Το σύστημα* **K** *είναι πλήρες, δηλαδή για κάθε τύπο ϕ, αν $\models \phi$ τότε $\vdash_K \phi$.*

Απόδ. Θα δείξουμε ότι κάθε συνεπής τύπος είναι ικανοποιήσιμος. Δεδομένου αυτού, αν ένας τύπος ϕ είναι δεν αποδείξιμος, τότε ο $\neg\phi$ είναι συνεπής, άρα ικανοποιήσιμος, επομένως ο ϕ δεν είναι έγκυρος.
Έστω ο συνεπής τύπος ϕ_0. Θα κατασκευάσουμε για τον ϕ_0 ένα **κανονικό μοντέλο**. Αρχικά ορίζουμε το σύνολο των καταστάσεων ως το σύνολο των μεγιστικών συνόλων από τύπους:

$$\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{P}(\mathit{\Pi T}) \mid A \text{ μεγιστικό συνεπές}\}$$

Στο $\mathcal{W}$ ορίζουμε τη δυαδική σχέση $\sqsubseteq$ ως εξής. Για κάθε $A, B \in \mathcal{W}$:

$$A \sqsubseteq B \iff \{\phi \in \mathit{\Pi T} \mid \Box\phi \in A\} \subseteq B \iff \{\Diamond\phi \in \mathit{\Pi T} \mid \phi \in B\} \subseteq A$$

Για τη δεύτερη ισοδυναμία έχουμε ότι αν $\{\phi \in \mathit{\Pi T} \mid \Box\phi \in A\} \subseteq B$, για κάθε τύπο ϕ:

$$\Diamond\phi \notin A \rightsquigarrow \neg\Diamond\phi \in A \rightsquigarrow \neg\neg\Box\neg\phi \in A \rightsquigarrow \Box\neg\phi \in A \rightsquigarrow \neg\phi \in B \rightsquigarrow \phi \notin B$$

Ενώ αντίθετα, αν $\{\Diamond\phi \in \mathit{\Pi T} \mid \phi \in B\} \subseteq A$, τότε για κάθε τύπο ϕ:

$$\Box\phi \in A \rightsquigarrow \neg\Box\phi \notin A \rightsquigarrow \neg\Box\neg\neg\phi \notin A \rightsquigarrow \Diamond\neg\phi \notin A \rightsquigarrow \neg\phi \notin B \rightsquigarrow \phi \in B$$

Έστω λοιπόν το τροπικό πλαίσιο $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \sqsubseteq \rangle$ και το μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$, όπου η υ ορίζεται ως εξής. Για κάθε ατομικό τύπο ϕ και $A \in \mathcal{W}$:

$$\upsilon(A, \phi) = \top \iff \phi \in A \tag{$*$}$$

Αν η $(*)$ ισχύει για κάθε τύπο ϕ, τότε, εφόσον ο ϕ_0 είναι συνεπής, υπάρχει μεγιστικό συνεπές σύνολο $A_0 \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\phi_0 \in A_0$, επομένως $\upsilon(A_0, \phi_0) = \top$. Επομένως, ο ϕ_0 ικανοποιείται στο κανονικό του μοντέλο.
Μένει να δείξουμε ότι η $(*)$ ικανοποιείται για κάθε τύπο ϕ. Αυτό γίνεται με επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη, οπότε για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και $\phi, \psi \in \mathit{\Pi T}$:

$$\begin{aligned} \upsilon(A, \phi \wedge \psi) \;=\; \upsilon(A,\phi) \wedge \upsilon(A,\psi) \;=\; \top &\iff \\ \upsilon(A,\phi) \;=\; \upsilon(A,\psi) \;=\; \top &\overset{E\Upsilon}{\iff} \\ \phi \in A \,,\; \psi \in A \quad \overset{(**)}{\iff} \quad (\phi \wedge \psi) \in A & \end{aligned}$$

όπου η $(**)$ ισχύει επειδή το A είναι μεγιστικό συνεπές και οι τύποι: $(\phi \wedge \psi) \supset \phi$, $(\phi \wedge \psi) \supset \psi$, $\phi \supset (\psi \supset (\phi \wedge \psi))$ είναι ταυτολογίες.
Ομοίως εργαζόμαστε για τις περιπτώσεις των $\vee, \supset$. Τώρα, για κάθε τύπο ϕ και για κάθε $A \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} \upsilon(A, \Box\phi) \;=\; \textstyle\bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\neg(A \sqsubseteq B) \vee \upsilon(B,\phi)) \;=\; \top &\iff \\ \neg(A \sqsubseteq B) \vee \upsilon(B,\phi) \;=\; \top, \quad \forall B \in \mathcal{W} &\iff \\ \neg(A \sqsubseteq B) \;\text{ ή }\; \upsilon(B,\phi) = \top, \quad \forall B \in \mathcal{W} &\overset{E\Upsilon}{\iff} \\ \neg(A \sqsubseteq B) \;\text{ ή }\; \phi \in B, \quad \forall B \in \mathcal{W} & \end{aligned}$$

Επομένως, αν $\Box\phi \in A$, τότε για κάθε $B \in \mathcal{W}$, είτε θα ισχύει $\neg(A \sqsubseteq B)$, είτε θα ισχύει $A \sqsubseteq B$, άρα και $\phi \in B$.
Αντίθετα, αν $\Box\phi \notin A$, τότε $\Diamond\neg\phi \in A$. Ορίζουμε το σύνολο:

$$\Gamma_0 = \{\phi \in \Pi T \mid \Box\phi \in A\} \cup \{\neg\phi\}$$

Το Γ_0 είναι συνεπές, διότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολό του $\{\psi_1, \ldots, \psi_\nu, \neg\phi\}$, με χρήση των προτάσεων 3.17 και 3.20, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\{\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_\nu, \Diamond\neg\phi\} \subseteq A \quad &\rightsquigarrow \\
(\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_\nu \wedge \Diamond\neg\phi) \in A \quad &\rightsquigarrow \\
(\Box(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\nu) \wedge \Diamond\neg\phi) \in A \quad &\rightsquigarrow \\
\Diamond(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_\nu \neg\phi) \in A \quad &\rightsquigarrow \\
\neg\Box(\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_\nu \vee \phi) \in A \quad &
\end{aligned}$$

οπότε, αν το $\{\psi_1, \ldots, \psi_\nu, \neg\phi\}$ είναι ασυνεπές, ο τύπος $\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_\nu \vee \phi$ είναι **K**-αποδείξιμος, άρα (Nec) ο $\Box(\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_\nu \vee \phi)$ είναι αποδείξιμος, δηλαδή το A είναι ασυνεπές, άτοπο.
Επομένως, το Γ_0 είναι συνεπές και επεκτείνεται σε ένα μεγιστικό συνεπές σύνολο $\Gamma \in \mathcal{W}$. Προφανώς, $\neg\phi \in \Gamma$, οπότε $\phi \notin \Gamma$. Επιπλέον, από τον ορισμό του Γ_0 έχουμε ότι $A \sqsubseteq \Gamma$, άρα $v(A, \Box\phi) = \bot$.
∎

3.5 Αποκρισιμότητα (Decidability)

Η αποκρισιμότητα είναι μια ιδιότητα που θα εξετάσουμε μόνο για τα τροπικά μοντέλα και στην οποία δε θα αναφερθούμε ξανά στα επόμενα κεφάλαια.

Στην προηγούμενη ενότητα αναπτύξαμε το **K** σύστημα αξιωμάτων και κανόνων για την τροπική λογική και δείξαμε ότι είναι ορθό και πλήρες. Επομένως, το σύνολο των έγκυρων τύπων είναι καταγράψιμο (effectively enumerable) [5]. Αν δείξουμε ότι το σύνολο των ικανοποιήσιμων τύπων είναι επίσης καταγράψιμο, τότε τόσο το σύνολο των ικανοποιήσιμων όσο και των έγκυρων τύπων, είναι αποκρίσιμο (decidable) [6].
Για το τελευταίο, αρκεί να δείξουμε την *ιδιότητα του πεπερασμένου μοντέλου*, δηλαδή ότι αν ένας τύπος ϕ είναι ικανοποιήσιμος σε ένα μοντέλο, τότε είναι ικανοποιήσιμος σε ένα πεπερασμένο μοντέλο [7].

Αντί αυτού μάλιστα θα δείξουμε κάτι ακόμη καλύτερο, την **ιδιότητα του μικρού μοντέλου**:

[5] Αυτό συμβαίνει επειδή το σύνολο των έγκυρων τύπων είναι το σύνολο των **K**-θεωρημάτων και το σύνολο των **K**- αξιωμάτων είναι αποκρίσιμο. Περισσότερες λεπτομέρειες για αποκρισιμότητα σε θεωριές μπορεί να βρει κανείς στο κλασικό βιβλίο για εισαγωγή στην κλασική λογική, [End72].

[6] Διότι ένας τύπος ϕ δεν είναι ικανοποιήσιμος αν και μόνο αν ο $\neg\phi$ είναι έγκυρος.

[7] Το σύνολο των πεπερασμένων μοντέλων είναι καταγράψιμο και ο έλεγχος αλήθειας σε ένα πεπερασμένο μοντέλο είναι αναδρομική διαδικασία

Θεώρημα 3.22 *Για κάθε τύπο ϕ, αν ο ϕ είναι ικανοποιήσιμος, τότε είναι ικανοποιήσιμος σε ένα μοντέλο το μέγεθος του οποίου φράσσεται από μια εκθετική συνάρτηση του $|\phi|$.*

Απόδ. Το μικρό μοντέλο θα το κατασκευάσουμε με τη μέθοδο του *φιλτραρίσματος (filtration)*. Αυτό σημαίνει ότι, ξεκινώντας από το μοντέλο που ικανοποιεί τον ϕ, θα κρατήσουμε μόνο τις καταστάσεις που είναι απαραίτητες για την ικανοποίηση των υποτύπων του ϕ και θα ενσωματώσουμε όλες τις υπόλοιπες σε αυτές.
Για κάθε τύπο ϕ το σύνολο $Cl(\phi)$ ορίζεται ως το μικρότερο σύνολο τύπων το οποίο περιέχει τον ϕ και επιπλέον για κάθε $\psi, \psi_1, \psi_2 \in \Pi T$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

- αν $(\psi_1 \wedge \psi_2) \in Cl(\phi)$, τότε $\psi_1, \psi_2 \in Cl(\phi)$.
- αν $(\psi_1 \vee \psi_2) \in Cl(\phi)$, τότε $\psi_1, \psi_2 \in Cl(\phi)$.
- αν $(\psi_1 \supset \psi_2) \in Cl(\phi)$, τότε $\psi_1, \psi_2 \in Cl(\phi)$.
- αν $\Box\psi \in Cl(\phi)$, τότε $\psi \in Cl(\phi)$.

Το σύνολο $Cl(\phi)$ είναι κλειστό ως προς τους υποτύπους και έχει μέγεθος γραμμικό ως προς το $|\phi|$.
Έστω τώρα ο ικανοποιήσιμος τύπος ϕ_0 και $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$ ένα μοντέλο τέτοιο ώστε για κάποιο $A_0 \in \mathcal{W}$, $\upsilon(A_0, \phi_0) = \top$. Θα ονομάζουμε το σύνολο $Cl(\phi_0)$, απλώς Cl. Στο $\mathcal{W}$ ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας $\sim$ ως εξής. Για κάθε $A, A' \in \mathcal{W}$:

$$A \sim A' \iff \upsilon(A, \phi) = \upsilon(A', \phi), \ \ \forall \phi \in Cl$$

Για κάθε $A \in \mathcal{W}$, συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας στην οποία ανήκει η A με $[A]$. Ορίζουμε το μικρό μοντέλο $\mathcal{M}' = \langle \mathcal{W}', \mathcal{R}', \upsilon' \rangle$, όπου:

- $\mathcal{W}' = \{[A] \mid A \in \mathcal{W}\}$
- Για κάθε $[A], [B] \in \mathcal{W}'$: $[A]\mathcal{R}'[B]$ αν και μόνο αν υπάρχουν $\Gamma_1 \in [A]$ και $\Gamma_2 \in [B]$ τέτοια ώστε $\Gamma_1 \mathcal{R} \Gamma_2$. Εναλλακτικά,
για κάθε $[A], [B] \in \mathcal{W}'$: $\mathcal{R}'([A], [B]) = \bigvee \{\mathcal{R}(\Gamma_1, \Gamma_2) \mid \Gamma_1 \in [A], \Gamma_2 \in [B]\}$.
- Για κάθε κάθε $[A] \in \mathcal{W}$, $\phi \in AT$: $\upsilon'([A], \phi) = \upsilon(A, \phi)$, αν $\phi \in Cl$,
διαφορετικά $\upsilon'([A], \phi) = \perp$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και τύπο $\phi \in (AT \cap Cl)$ έχουμε:

$$\upsilon'([A], \phi) = \upsilon(A, \phi) \qquad (*)$$

Αν η $(*)$ ισχύει για κάθε τύπο $\phi \in Cl$, τότε, επειδή $\phi_0 \in Cl$, έχουμε ότι $\upsilon'([A_0], \phi_0) = \top$, δηλαδή ο ϕ_0 ικανοποιείται στο μικρό μοντέλο.
Μένει να δείξουμε ότι η $(*)$ ισχύει για κάθε τύπο $\phi \in Cl$. Αυτό θα γίνει με επαγωγή στον ϕ. Η περίπτωση που ο ϕ είναι ατομικός τύπος είναι εξασφαλισμένη από τον ορισμό. Επιπλέον, αν ϕ, ψ τύποι και $(\phi \wedge \psi) \in Cl$, τότε $\phi, \psi \in Cl$ και για κάθε $A \in \mathcal{W}$:

$$\upsilon'([A], \phi \wedge \psi) \ = \ \upsilon'([A], \phi) \wedge \upsilon'([A], \psi) \ \stackrel{E\Upsilon}{=} \ \upsilon(A, \phi) \wedge \upsilon(A, \psi) \ = \ \upsilon(A, \phi \wedge \psi)$$

και ομοίως για τις περιπτώσεις των $\vee, \supset$.
Έστω τύπος ϕ τέτοιος ώστε $\Box\phi \in Cl$. Τότε $\phi \in Cl$ και για κάθε $A \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}
\upsilon'([A], \Box\phi) &= \bigwedge\nolimits_{[B]\in\mathcal{W}'}(\neg\mathcal{R}'([A],[B]) \vee \upsilon'([B],\phi)) \\
&\overset{E\Upsilon}{=} \bigwedge\nolimits_{[B]\in\mathcal{W}'}\Big(\neg(\bigvee\nolimits_{(\Gamma_1,\Gamma_2)\in[A]\times[B]}\mathcal{R}(\Gamma_1,\Gamma_2)) \vee \upsilon(B,\phi)\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{[B]\in\mathcal{W}'}\Big(\bigwedge\nolimits_{(\Gamma_1,\Gamma_2)\in[A]\times[B]}(\neg\mathcal{R}(\Gamma_1,\Gamma_2)) \vee \upsilon(B,\phi)\Big) \\
&\overset{(**)}{=} \bigwedge\nolimits_{[B]\in\mathcal{W}'}\Big(\bigwedge\nolimits_{(\Gamma_1,\Gamma_2)\in[A]\times[B]}(\neg\mathcal{R}(\Gamma_1,\Gamma_2) \vee \upsilon(\Gamma_2,\phi))\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{[B]\in\mathcal{W}',(\Gamma_1,\Gamma_2)\in[A]\times[B]}\Big(\neg\mathcal{R}(\Gamma_1,\Gamma_2) \vee \upsilon(\Gamma_2,\phi)\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{\Gamma_1\in[A],\Gamma_2\in\mathcal{W}}\Big(\neg\mathcal{R}(\Gamma_1,\Gamma_2) \vee \upsilon(\Gamma_2,\phi)\Big) \\
&= \bigwedge\nolimits_{\Gamma_1\in[A]}\upsilon(\Gamma_1,\Box\phi) \;=\; \bigwedge\nolimits_{\Gamma_1\in[A]}\upsilon(A,\Box\phi) \;=\; \upsilon(A,\Box\phi)
\end{aligned}$$

όπου η $(**)$ ισχύει διότι $\Gamma_2 \in [B]$, οπότε για κάθε τύπο $\phi \in Cl$, $\upsilon(\Gamma_2,\phi) = \upsilon(B,\phi)$.
Επομένως, ο ϕ_0 ικανοποιείται στο μικρό μοντέλο $\mathcal{M}'$. Το μέγεθος του μικρού μοντέλου είναι $|\mathcal{W}'|$, όπου το $\mathcal{W}'$ περιέχει τις κλάσεις ισοδυναμίας της σχέσης $\sim$. Από τον ορισμό της τελευταίας, έχουμε ότι $|\mathcal{W}'| \leq |\mathcal{P}(Cl)| = 2^{|Cl|}$ και, επειδή το $|Cl|$ είναι γραμμικό ως προς το $|\phi_0|$, έχουμε ότι το $|\mathcal{M}'|$ φράσσεται από μία εκθετική συνάρτηση του $|\phi_0|$.
■

Επομένως, το σύνολο των έγκυρων τύπων για την $\mathcal{L}^{mod}$ είναι αποκρίσιμο, όπως και το σύνολο των ικανοποιήσιμων τύπων.

Κεφάλαιο 4

Πλειονότιμη Τροπική Λογική

Στο κεφάλαιο αυτό, το οποίο είναι βασισμένο στο [Fit92b], επεκτείνουμε τη γλώσσα $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ με την προσθήκη τροπικών τελεστών. Όπως και προηγούμενα, για τη γλώσσα αυτή θα αναπτύξουμε ένα λογισμό ακολουθητών και θα αποδείξουμε την ορθότητα και την πληρότητα του τελευταίου. Υπενθυμίζουμε ότι η αλήθεια παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό $\mathcal{T}$, με μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο $(\top, \bot)$.

4.1 Ορισμοί

Ορίζουμε τη νέα γλώσσα όπως την $\mathcal{L}_\mathcal{T}$ και προσθέτοντας τους τροπικούς τελεστές $\Box, \Diamond$. Σημειώνουμε ότι και οι δύο τελεστές προστίθενται ως πρωταρχικοί, καθώς, όπως θα δούμε παρακάτω, δεν ισχύει η δυαδικότητά τους.

Ορισμός 4.1 *Η γλώσσα $\mathcal{L}_\mathcal{T}^{mod}$ του πλειονότιμου τροπικού λογισμού με αληθοτιμές από το $\mathcal{T}$ ορίζεται από:*

- *Το σύνολο των λογικών συμβόλων, το οποίο περιέχει τα:*
    1. *Σύμβολα μεταβλητών: p, q, κλπ. Το σύνολο των μεταβλητών συμβολίζεται ΠM και είναι αριθμήσιμο.*
    2. *Σύμβολα λογικών πράξεων: $\wedge, \vee, \supset$.*
    3. *Σύμβολα τροπικών τελεστών: $\Box, \Diamond$.*
    4. *Βοηθητικά σύμβολα για παρενθέσεις, κόμμα, κλπ.*
- *Το σύνολο των μη λογικών συμβόλων, το οποίο αποτελείται από προτασιακές σταθερές, συμβ. $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \ldots$, οι οποίες αναπαριστούν τα μέλη του $\mathcal{T}$ στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}^{mod}$. Το σύνολο των προτασιακών σταθερών συμβολίζεται με $\Pi\Sigma$.*

Ας ορίσουμε τώρα και τους (σωστούς) προτασιακούς τύπους στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}^{mod}$.

Ορισμός 4.2 *Οι προτασιακοί τύποι στην $\mathcal{L}_\mathcal{T}^{mod}$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής.*

- *Ατομικοί τύποι* της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ *είναι οι προτασιακές μεταβλητές* (ΠM) *και οι προτασιακές σταθερές* $(\Pi\Sigma)$. *Το σύνολο των ατομικών τύπων συμβολίζεται* AT $(AT = \Pi M \cup \Pi\Sigma)$.
- *Τύποι της* $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ *είναι οι ατομικοί τύποι, ενώ αν* ϕ *και* ψ *είναι τύποι, τότε οι* $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \supset \psi)$, $(\Box\phi)$ *και* $(\Diamond\phi)$ *είναι επίσης τύποι της* $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$. *Το σύνολο των τύπων συμβολίζεται* ΠT.

Σημειώνουμε πάλι ότι το σύμβολο $\neg$ δεν είναι πρωταρχικό και ότι χρησιμοποιούμε το $\neg\phi$ ως συντομογραφία του $\phi \Rightarrow \bot$. Επίσης, θεωρούμε ότι οι τροπικοί τελεστές έχουν μεγαλύτερη προτεραιότητα από τα υπόλοιπα σύμβολα και συχνά παραλείπουμε τις παρενθέσεις. Έτσι, για παράδειγμα ο τύπος $\Box\phi \wedge \Diamond\psi$ είναι ο $(\Box\phi) \wedge (\Diamond\psi)$.

4.2 $\mathcal{T}$-τροπικά Μοντέλα

Τα πλαίσια που ορίζουμε για την $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ διαφέρουν από τα κλασικά τροπικά πλαίσια, καθώς στη θέση της κλασικής σχέσης πρόσβασης έχουμε συνάρτηση πρόσβασης με πεδίο τιμών το $\mathcal{T}$.

Ορισμός 4.3 *Ένα* $\mathcal{T}$*-τροπικό πλαίσιο είναι μια δομή* $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, *όπου το* $\mathcal{W}$ *είναι ένα μη κενό σύνολο καταστάσεων και η* $\mathcal{R}$ *είναι μια συνάρτηση* $\mathcal{R} : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{T}$.

Οι καταστάσεις θα συμβολίζονται με κεφαλαία ελληνικά, $\mathcal{W} = \{A, B, \Gamma, \dots\}$.
Δεδομένου ενός πλαισίου $\mathcal{F}$ ορίζουμε τη συνάρτηση ανάθεσης.

Ορισμός 4.4 *Ως ανάθεση στην* $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ *ως προς το* $\mathcal{F}$ *ορίζουμε μια συνάρτηση* $v : \mathcal{W} \times AT \to \mathcal{T}$, *η οποία ικανοποιεί τον περιορισμό* $v(A, \hat{\alpha}) = \alpha$, *όπου* $\alpha \in \mathcal{T}$, *για κάθε* $\hat{\alpha} \in \Pi\Sigma$ *και* $A \in \mathcal{W}$.
Αν η v *είναι ανάθεση, η* $\bar{v}$ *είναι η γενίκευσή της στο* $\mathcal{W} \times \Pi T$. *Η* $\bar{v} : \mathcal{W} \times \Pi T \to \mathcal{T}$ *ορίζεται αναδρομικά ως εξής.*
Έστω ϕ, ψ *τύποι,* ϕ' *ατομικός τύπος και* $A \in \mathcal{W}$, *τότε:*

- $\bar{v}(A, \phi') = v(A, \phi')$
- $\bar{v}(A, \phi \wedge \psi) = \bar{v}(A, \phi) \wedge \bar{v}(A, \psi)$
- $\bar{v}(A, \phi \vee \psi) = \bar{v}(A, \phi) \vee \bar{v}(A, \psi)$
- $\bar{v}(A, \phi \supset \psi) = \bar{v}(A, \phi) \Rightarrow \bar{v}(A, \psi)$
- $\bar{v}(A, \Box\phi) = \bigwedge\{\mathcal{R}(A, B) \Rightarrow \bar{v}(B, \phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$
- $\bar{v}(A, \Diamond\phi) = \bigvee\{\mathcal{R}(A, B) \wedge \bar{v}(B, \phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$

Στο εξής θα συμβολίζουμε την $\bar{v}$ *απλώς* v.

Μπορούμε πλέον να ορίσουμε και τα μοντέλα που θα χρησιμοποιήσουμε.

Ορισμός 4.5 *Ένα $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο είναι μια δομή $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$, όπου το $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ είναι ένα $\mathcal{T}$-τροπικό πλαίσιο και η υ είναι μια ανάθεση στην $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{T}}$ ως προς το $\mathcal{F}$.*
Το μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ λέμε ότι βασίζεται στο πλαίσιο $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ή ότι το $\mathcal{F}$ υπόκειται του $\mathcal{M}$. Επίσης, το μοντέλο $\langle \mathcal{F}, \upsilon \rangle$ συμβολίζεται και $\langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$.

Η ικανοποιησιμότητα και η εγκυρότητα τύπων για $\mathcal{T}$-μοντέλα και πλαίσια ορίζεται όπως και στην περίπτωση των (απλών) τροπικών πλαισίων και μοντέλων (ορισμός 3.9). Όπως είπαμε, οι δύο τροπικοί τελεστές δεν είναι δυαδικοί. Αυτό φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 4.6 Έστω $\mathcal{T} = \{\perp, \alpha, \top\}$ με $\perp < \alpha < \top$. Επιπλέον, έστω $\mathcal{M} = \langle \{A\}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$ με $\mathcal{R}(A, A) = \top$. Τότε, θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\upsilon(A, \Box\hat{\alpha}) &= \mathcal{R}(A, A) \Rightarrow \upsilon(A, \hat{\alpha}) \\
&= \top \Rightarrow \alpha = \alpha \\
\upsilon(A, \neg\Diamond\neg\hat{\tau}) &= \upsilon(A, \Diamond\neg\hat{\alpha}) \Rightarrow \perp \\
&= (\mathcal{R}(A, A) \wedge \upsilon(A, \neg\hat{\alpha})) \Rightarrow \perp \\
&= (\mathcal{R}(A, A) \wedge (\upsilon(A, \hat{\alpha}) \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \\
&= (\top \wedge (\alpha \Rightarrow \perp)) \Rightarrow \perp \\
&= (\top \wedge \perp) \Rightarrow \perp \\
&= \perp \Rightarrow \perp = \top
\end{aligned}$$

Επομένως, δεν ισχύει η δυαδικότητα των τροπικών τελεστών, όπως ισχύει στην κλασική τροπική λογική.

4.3 Ο Τροπικός Λογισμός Ακολουθητών $SC^{mod}_{\mathcal{T}}$

Όπως και στην περίπτωση της (απλής) πλειονότιμης λογικής, θα αναπτύξουμε ένα λογισμό ακολουθητών. Έχουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.7 *Ένας ακολουθητής του $SC^{mod}_{\mathcal{T}}$είναι μια έκφραση της μορφής $\Gamma \to \Delta$, όπου Γ, Δ πεπερασμένα σύνολα τύπων της $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{T}}$.*

Ορισμός 4.8 *Λέμε ότι ο ακολουθητής $\Gamma \to \Delta$ ικανοποιείται στην κατάσταση A του $\mathcal{T}$-τροπικού μοντέλου $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$ αν σε κάποιο στοιχείο του Δ ανατίθεται η τιμή $\top$ ή σε κάποιο στοιχείου του Γ δεν ανατίθεται η τιμή $\top$ στην κατάσταση αυτή.*
Ο ακολουθητής λέγεται έγκυρος στο μοντέλο $\mathcal{M}$ αν ικανοποιείται σε κάθε κατάστασή του, ενώ λέγεται έγκυρος στο πλαίσιο $\mathcal{F}$ αν είναι έγκυρος σε κάθε μοντέλο που βασίζεται στο $\mathcal{F}$.
Τέλος, ο ακολουθητής λέγεται έγκυρος αν είναι έγκυρος σε κάθε πλαίσιο $\mathcal{F}$.

Προχωρούμε στους κανόνες και τα αξιώματα για τους ακολουθητές, ξεκινώντας από τα γνωστά:

Αξίωμα Ταυτότητας

$$\phi \to \phi$$

Κανόνας Εξασθένησης (*Weakening*)

$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \cup \Gamma' \to \Delta \cup \Delta'}$$

Κανόνας Τομής (*Cut*)

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \phi \qquad \Gamma, \phi \to \Delta}{\Gamma \to \Delta}$$

Αξίωμα Μεταβατικότητας

$$\phi \supset \chi, \chi \supset \psi \to \phi \supset \psi$$

Κανόνας $RI \supset$

$$\frac{\Gamma, \hat{\alpha} \supset \phi \to \Delta, \hat{\alpha} \supset \psi \qquad (\text{για κάθε α} \in \mathcal{T})}{\Gamma \to \Delta, \phi \supset \psi}$$

Κανόνας $\supset RI$

$$\frac{\Gamma, \psi \supset \hat{\alpha} \to \Delta, \phi \supset \hat{\alpha} \qquad (\text{για κάθε α} \in \mathcal{T})}{\Gamma \to \Delta, \phi \supset \psi}$$

Αξιώματα Σύζευξης

$$\to (\phi \wedge \psi) \supset \phi$$

$$\to (\phi \wedge \psi) \supset \psi$$

$$\chi \supset \phi, \chi \supset \psi \to \chi \supset (\phi \wedge \psi)$$

Αξιώματα Διάζευξης

$$\to \phi \supset (\phi \vee \psi)$$

$$\to \psi \supset (\phi \vee \psi)$$

$$\phi \supset \chi, \psi \supset \chi \to (\phi \vee \psi) \supset \chi$$

Αξιώματα Συνεπαγωγής

$$(\phi \wedge \psi) \supset \chi \to \phi \supset (\psi \supset \chi)$$

$$\phi \supset (\psi \supset \chi) \to (\phi \wedge \psi) \supset \chi$$

Αξιώματα Προτασιακών Σταθερών

$$\to \hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \qquad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathcal{T} \text{ με } \alpha \leq \beta$$

$$\hat{\alpha} \supset \hat{\beta} \to \qquad \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathcal{T} \text{ με } \alpha \not\leq \beta$$

Αξιώματα Μετατροπής

$$\phi \to (\top \supset \phi)$$

$$(\top \supset \phi) \to \phi$$

Επιπλέον, έχουμε τα παρακάτω τροπικά αξιώματα και κανόνες.

Κανόνας Καθολικής Συνεπαγωγής (Inference Necessitation)

$$\frac{\to \phi}{\to \Box\phi}$$

Τροπικά Αξιώματα

$$\to \Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi)$$

$$\text{Για κάθε } \alpha \in \mathcal{T},\ \to (\hat{\alpha} \supset \Box\phi) \equiv \Box(\hat{\alpha} \supset \phi)$$

$$\text{Για κάθε } \alpha \in \mathcal{T},\ \to (\Diamond\phi \supset \hat{\alpha}) \equiv \Box(\phi \supset \hat{\alpha})$$

Για τον ορισμό της απόδειξης μπορεί να ανατρέξει κανείς στον ορισμό 2.7 στη σελίδα 35. Υπενθυμίζουμε ακόμη ότι επιτρέπουμε συμπτύξεις εξασθένησης και τομής σε ένα βήμα.
Παρακάτω παραθέτουμε κάποιες προτάσεις με τις αποδείξεις τους.

Πρόταση 4.9 *Για κάθε $\alpha \in \mathcal{T}$, $\to \hat{\alpha} \supset \Box\hat{\alpha}$.*

Απόδ. Η απόδειξη προκύπτει με τη βοήθεια της καθολικής συνεπαγωγής (IN), των τροπικών αξιωμάτων και της πρότασης 2.18.

$$\dfrac{\dfrac{\to \hat{\alpha} \supset \hat{\alpha}}{\to \Box(\hat{\alpha} \supset \hat{\alpha})}\,IN \quad \Box(\hat{\alpha} \supset \hat{\alpha}) \to \hat{\alpha} \supset \Box\hat{\alpha}}{\to \hat{\alpha} \supset \Box\hat{\alpha}}\,C$$

■

Πρόταση 4.10 *Για όλους τους τύπους ϕ, ψ ισχύει ότι:*

$$\frac{\to \phi \supset \psi}{\to \Box\phi \supset \Box\psi}$$

Απόδ. Πάλι με χρήση της καθολικής συνεπαγωγής, των τροπικών αξιωμάτων και της πρότασης 2.18, έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\to \phi \supset \psi}{\to \Box(\phi \supset \psi)}\,IN \quad \Box(\phi \supset \psi) \to \Box\phi \supset \Box\psi}{\to \Box\phi \supset \Box\psi}\,C$$

■

Πρόταση 4.11 *Για όλους τους τύπους ϕ, ψ ισχύει:*

$$\to (\Box\phi \wedge \Box\psi) \equiv \Box(\phi \wedge \psi)$$

Απόδ. Για τη μία συνεπαγωγή έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\to (\phi\wedge\psi)\supset(\phi\wedge\psi) \quad (\phi\wedge\psi)\supset(\phi\wedge\psi)\to\phi\supset(\psi\supset(\phi\wedge\psi))}{\to \phi\supset(\psi\supset(\phi\wedge\psi))}\,C}{\to\Box(\phi\supset(\psi\supset(\phi\wedge\psi))) \quad :[1]}\,IN$$

$$\dfrac{\dfrac{[1] \quad \Box(\phi\supset(\psi\supset(\phi\wedge\psi)))\to\Box\phi\supset\Box(\psi\supset(\phi\wedge\psi))}{\to\Box\phi\supset\Box(\psi\supset(\phi\wedge\psi))}\,C \qquad AM}{\Box(\psi\supset(\phi\wedge\psi))\supset\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi)\to\Box\phi\supset(\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi)) \quad :[2]}\,C$$

$$\dfrac{\dfrac{[2] \quad \to\Box(\psi\supset(\phi\wedge\psi))\supset\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi)}{\to\Box\phi\supset(\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi))}\,C \qquad \Box\phi\supset(\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi))\to(\Box\phi\wedge\Box\psi)\supset\Box(\phi\wedge\psi)}{\to(\Box\phi\wedge\Box\psi)\supset\Box(\phi\wedge\psi)}\,C$$

όπου AM είναι το παρακάτω αξίωμα μεταβατικότητας.

$AM: \ \Box\phi\supset\Box(\psi\supset(\phi\wedge\psi)), \Box(\psi\supset(\phi\wedge\psi))\supset\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi)\to\Box\phi\supset(\Box\psi\supset\Box(\phi\wedge\psi))$

Για την άλλη συνεπαγωγή έχουμε ότι:

$$\dfrac{\dfrac{\to(\phi\wedge\psi)\supset\phi}{\to\Box((\phi\wedge\psi)\supset\phi)}\,IN \qquad \Box((\phi\wedge\psi)\supset\phi)\to\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\phi}{\to\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\phi}\,C$$

Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\ \to\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\psi$, οπότε:

$$\dfrac{\dfrac{\to\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\phi \quad \Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\phi,\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\psi\to\Box(\phi\wedge\psi)\supset(\Box\phi\wedge\Box\psi)}{\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\psi\to\Box(\phi\wedge\psi)\supset(\Box\phi\wedge\Box\psi)}\,C \qquad \to\Box(\phi\wedge\psi)\supset\Box\psi}{\to\Box(\phi\wedge\psi)\supset(\Box\phi\wedge\Box\psi)}\,C$$

■

Πρόταση 4.12 *Έστω* $\chi,\ \phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_n,\ \psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_m$ *τύποι και* $\gamma,\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,$ $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m$ *στοιχεία του* $\mathcal{T}$. *Τότε οι παρακάτω είναι παραγόμενοι κανόνες.*

$$\dfrac{\to\Big(\bigwedge_{i\le n}(\hat{\alpha_i}\supset\phi_i)\wedge\bigwedge_{j\le m}(\psi_j\supset\hat{\beta_j})\Big)\supset(\hat{\gamma}\supset\chi)}{\to\Big(\bigwedge_{i\le n}(\hat{\alpha_i}\supset\Box\phi_i)\wedge\bigwedge_{j\le m}(\Diamond\psi_j\supset\hat{\beta_j})\Big)\supset(\hat{\gamma}\supset\Box\chi)}$$

$$\dfrac{\to\Big(\bigwedge_{i\le n}(\hat{\alpha_i}\supset\phi_i)\wedge\bigwedge_{j\le m}(\psi_j\supset\hat{\beta_j})\Big)\supset(\chi\supset\hat{\gamma})}{\to\Big(\bigwedge_{i\le n}(\hat{\alpha_i}\supset\Box\phi_i)\wedge\bigwedge_{j\le m}(\Diamond\psi_j\supset\hat{\beta_j})\Big)\supset(\Diamond\chi\supset\hat{\gamma})}$$

Απόδ. Για τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι, εάν ισχύει:

$$\to\Big(\bigwedge_{i\le n}(\hat{\alpha_i}\supset\phi_i)\wedge\bigwedge_{j\le m}(\psi_j\supset\hat{\beta_j})\Big)\supset(\hat{\gamma}\supset\chi)$$

τότε, από τις δύο προηγούμενες προτάσεις και ένα τροπικό αξίωμα, ισχύουν διαδοχικά:

$$\to\Box\Big(\bigwedge_{i\le n}(\hat{\alpha_i}\supset\phi_i)\wedge\bigwedge_{j\le m}(\psi_j\supset\hat{\beta_j})\Big)\supset\Box(\hat{\gamma}\supset\chi)$$

$$\to \Big(\bigwedge\nolimits_{i\leq n}\Box(\hat{\alpha}_i \supset \phi_i) \wedge \bigwedge\nolimits_{j\leq m}\Box(\psi_j \supset \hat{\beta}_j)\Big) \supset \Box(\hat{\gamma} \supset \chi)$$

$$\to \Big(\bigwedge\nolimits_{i\leq n}\Box(\hat{\alpha}_i \supset \phi_i) \wedge \bigwedge\nolimits_{j\leq m}\Box(\psi_j \supset \hat{\beta}_j)\Big) \supset (\hat{\gamma} \supset \Box\chi)$$

απ'όπου καταλήγουμε στο ζητούμενο με εφαρμογή των τροπικών αξιωμάτων και των αξιωμάτων της συνεπαγωγής. Έτσι πχ. αν
$\phi' = \Big(\bigwedge_{2\leq i\leq n}(\hat{\alpha}_i \supset \Box\phi_i) \wedge \bigwedge_{j\leq m}(\Diamond\psi_j \supset \hat{\beta}_j)\Big)$, έχουμε:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\to (\Box(\hat{\alpha}_1 \supset \phi_1) \wedge \phi') \supset (\hat{\gamma} \supset \Box\chi)}{\to \Box(\hat{\alpha}_1 \supset \phi_1) \supset (\phi' \supset (\hat{\gamma} \supset \Box\chi))}\text{αξ. συνεπαγωγής}}{\to (\hat{\alpha}_1 \supset \Box\phi_1) \supset (\phi' \supset (\hat{\gamma} \supset \Box\chi))}\text{τροπικό αξ.}}{\to ((\hat{\alpha}_1 \supset \Box\phi_1) \wedge \phi') \supset (\hat{\gamma} \supset \Box\chi)}\text{αξ. συνεπαγωγής}$$

με τον ίδιο τρόπο αλλάζουμε και τους υπόλοιπους όρους μέσα στη μεγάλη παρένθεση. Ο δεύτερος κανόνας προκύπτει παρομοίως.

■

4.4 Ορθότητα

Δεδομένης της ορθότητας στη μη τροπική περίπτωση, για την ορθότητα του τροπικού λογισμού ακολουθητών πρέπει να δείξουμε ότι ο κανόνας της καθολικής συνεπαγωγής είναι ορθός και ότι τα τροπικά αξιώματα είναι έγκυρα.

Πρόταση 4.13 *Ο κανόνας της καθολικής συνεπαγωγής είναι ορθός.*

Απόδ. Έστω τύπος ϕ και μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon\rangle$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{W}$ έχουμε:

$$\upsilon(A, \Box\phi) = \bigwedge\{\mathcal{R}(A, B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$$

οπότε, αν η υπόθεση του κανόνα (ϕ) είναι έγκυρη, τότε $\upsilon(B, \phi) = \top$ για κάθε $B \in \mathcal{W}$. Επομένως, εφόσον το $\mathcal{W}$ δεν είναι κενό, έχουμε:

$$\begin{aligned}\upsilon(A, \Box\phi) &= \bigwedge\{\mathcal{R}(A, B) \Rightarrow \top \mid B \in \mathcal{W}\}\\ &= \bigwedge\{\top \mid B \in \mathcal{W}\} = \top\end{aligned}$$

Άρα ο κανόνας είναι ορθός.

■

Πρόταση 4.14 *Τα τροπικά αξιώματα είναι έγκυρα.*

Απόδ. Έστω τύποι ϕ, ψ και μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$. Τότε για το πρώτο αξίωμα και για κάθε $A \in \mathcal{W}$, με χρήση της πρότασης 1.29, έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&\upsilon(A, \Box(\phi \supset \psi) \supset (\Box\phi \supset \Box\psi)) \;= \\
&\qquad = \; \upsilon(A, \Box(\phi \supset \psi)) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\phi \supset \Box\psi) \\
&\qquad = \; \upsilon(A, \Box(\phi \supset \psi)) \Rightarrow (\upsilon(A, \Box\phi) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi)) \\
&\qquad = \; (\upsilon(A, \Box(\phi \supset \psi)) \wedge \upsilon(A, \Box\phi)) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \\
&\qquad = \; \Big(\bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi \supset \psi)) \wedge \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi)) \Big) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \\
&\qquad = \; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow (\upsilon(B, \phi \supset \psi) \wedge \upsilon(B, \phi)) \Big) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \\
&\qquad = \; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow ((\upsilon(B, \phi) \Rightarrow \upsilon(B, \psi)) \wedge \upsilon(B, \phi)) \Big) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \\
&\qquad = \; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow (\upsilon(B, \phi) \wedge \upsilon(B, \psi)) \Big) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \\
&\qquad = \; \Big(\bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi)) \wedge \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \psi)) \Big) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \\
&\qquad = \; (\upsilon(A, \Box\phi) \wedge \upsilon(A, \Box\psi)) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\psi) \;=\; \top
\end{aligned}
$$

Για το δεύτερο αξίωμα έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και κάθε $\alpha \in \mathcal{T}$:

$$
\begin{aligned}
\upsilon(A, \hat{\alpha} \supset \Box\phi) \;&=\; \upsilon(A, \hat{\alpha}) \Rightarrow \upsilon(A, \Box\phi) \\
&=\; \alpha \Rightarrow \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi) \Big) \\
&=\; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\alpha \Rightarrow (\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi)) \Big) \\
&=\; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big((\alpha \wedge \mathcal{R}(A,B)) \Rightarrow \upsilon(B, \phi) \Big) \\
&=\; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \upsilon(B, \phi)) \Big) \\
&=\; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow (\upsilon(B, \hat{\alpha}) \Rightarrow \upsilon(B, \phi)) \Big) \\
&=\; \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B, \hat{\alpha} \supset \phi) \Big) \\
&=\; \upsilon(A, \Box(\hat{\alpha} \supset \phi))
\end{aligned}
$$

Τέλος, για το τρίτο αξίωμα έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και κάθε $\alpha \in \mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}
\upsilon(A, \Diamond\phi \supset \hat{\alpha}) &= \upsilon(A, \Diamond\phi) \Rightarrow \upsilon(A, \hat{\alpha}) \\
&= \bigvee_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi)\Big) \Rightarrow \alpha \\
&= \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big((\mathcal{R}(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi)) \Rightarrow \alpha\Big) \\
&= \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow (\upsilon(B,\phi) \Rightarrow \alpha)\Big) \\
&= \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi \supset \hat{\alpha})\Big) \\
&= \upsilon(A, \Box(\phi \supset \hat{\alpha}))
\end{aligned}$$

■

Επομένως, ο τροπικός λογισμός ακολουθητών είναι ορθός.

4.5 Πληρότητα

Η πληρότητα του τροπικού λογισμού ακολουθητών είναι πιο επίπονο συμπέρασμα από την ορθότητα. Η απόδειξη ακολουθεί παρόμοια βήματα με αυτήν της πληρότητας του απλού λογισμού ακολουθητών σε προηγούμενη ενότητα.
Αρχικά επαναλαμβάνουμε τον ορισμό της πληρότητας.

Ορισμός 4.15 *Ένας λογισμός ακολουθητών είναι πλήρης αν για κάθε ζεύγος Γ, Δ πεπερασμένων συνόλων από τύπους έχουμε ότι:*
Αν ο ακολουθητής $\Gamma \to \Delta$ είναι έγκυρος, τότε είναι και αποδείξιμος, αποτελεί δηλαδή θεώρημα.

Η απόδειξη της πληρότητας γίνεται μέσω συνεπών ζευγών συνόλων που ορίζουμε ως εξής.

Ορισμός 4.16 *Έστω Σ, S και T σύνολα από τύπους, με το Σ πεπερασμένο και μη κενό. Το ζεύγος $\langle S, T\rangle$ λέγεται Σ-ασυνεπές αν υπάρχουν $\Sigma' = \{\phi_1, \ldots, \phi_\nu\} \subseteq \Sigma$, και πεπερασμένα $\Gamma \subseteq S$ και $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu \subseteq T$ τέτοια ώστε ο ακολουθητής:*

$$\Gamma \to (\bigwedge \Delta_1) \supset \phi_1, \ldots, (\bigwedge \Delta_\nu) \supset \phi_\nu$$

να είναι αποδείξιμος. Επιτρέπουμε το Γ ή κάποιο Δ_i να είναι κενό. Σε αυτήν την περίπτωση ταυτίζουμε το $\bigwedge\emptyset \supset \phi_i$ με το $\top \supset \phi_i$, δηλαδή με το ϕ_i. Επίσης, αν $\Sigma = \{\phi\}$, τότε το $\langle S, T\rangle$ λέγεται και ϕ-ασυνεπές.
Το $\langle S, T\rangle$ λέγεται Σ-συνεπές αν δεν είναι Σ-ασυνεπές.
Το $\langle S, T\rangle$ λέγεται μεγιστικό Σ-συνεπές αν είναι Σ-συνεπές και για κάθε Σ-συνεπές ζεύγος $\langle S', T\rangle$ με $S \subseteq S'$, έχουμε $S = S'$.

Οι επόμενες δύο προτάσεις είναι αντίστοιχες των προτάσεων 2.25 και 2.26.

Πρόταση 4.17 *Αν το $\langle S', T\rangle$ είναι Σ-συνεπές, τότε υπάρχει μεγιστικό Σ-συνεπές ζεύγος $\langle S, T\rangle$ με $S' \subseteq S$.*
Αν το $\langle S, T\rangle$ είναι μεγιστικό Σ-συνεπές και για κάποιο τύπο ϕ υπάρχει πεπερασμένο $\Gamma \subseteq S$ τέτοιο ώστε $\Gamma \rightarrow \phi$, τότε $\phi \in S$.

Απόδ. Για το πρώτο μπορεί να ανατρέξει κανείς στην απόδειξη της πρότασης 2.25. Για το δεύτερο έστω ότι $\Gamma \subseteq S$ και $\Gamma \rightarrow \phi$, όπου $\phi \notin S$. Καθώς το $\langle S, T\rangle$ είναι μεγιστικό Σ-συνεπές, το $\langle S \cup \{\phi\}, T\rangle$ είναι Σ-ασυνεπές, υπάρχουν δηλαδή πεπερασμένα $\Gamma' \subseteq S$ και $\Delta_1, \ldots, \Delta_\nu \subseteq T$ ώστε $\Gamma', \phi \rightarrow (\bigwedge \Delta_1) \supset \phi_1, \ldots, (\bigwedge \Delta_\nu) \supset \phi_\nu$, όπου $\Sigma' = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu\} \subseteq \Sigma$. Τότε έχουμε:

$$\frac{\Gamma \rightarrow \phi \qquad \Gamma', \phi \rightarrow (\bigwedge \Delta_1) \supset \phi_1, \ldots, (\bigwedge \Delta_\nu) \supset \phi_\nu}{\Gamma \cup \Gamma' \rightarrow (\bigwedge \Delta_1) \supset \phi_1, \ldots, (\bigwedge \Delta_\nu) \supset \phi_\nu}\, C$$

όπου $\Gamma \cup \Gamma' \subseteq S$, άρα το $\langle S, T\rangle$ είναι Σ-ασυνεπές, άτοπο.
■

Πρόταση 4.18 *Έστω $\langle S, T\rangle$ ένα μεγιστικό Σ-συνεπές ζεύγος συνόλων. Για κάθε τύπο ϕ υπάρχει ακριβώς ένα $\alpha_\phi \in \mathcal{T}$ έτσι ώστε $(\phi \equiv \widehat{\alpha_\phi}) \in S$.*

Απόδ. Αρχικώς έστω ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$ με $\alpha \neq \beta$ και $(\phi \equiv \hat{\alpha}), (\phi \equiv \hat{\beta}) \in S$. Τότε, χβτγ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha \not\leq \beta$. Επίσης, επειδή $(\phi \equiv \hat{\alpha}) \rightarrow \hat{\alpha} \supset \phi$ και $(\phi \equiv \hat{\beta}) \rightarrow \phi \supset \hat{\beta}$, έχουμε ότι $(\hat{\alpha} \supset \phi), (\phi \supset \hat{\beta}) \in S$ και, καθώς ισχύει $\hat{\alpha} \supset \phi, \phi \supset \hat{\beta} \rightarrow$, το $\langle S, T\rangle$ είναι Σ-ασυνεπές, άτοπο.
Επίσης, έστω ότι δεν υπάρχει κανένα $\alpha \in \mathcal{T}$ για το οποίο $(\phi \equiv \hat{\alpha}) \in S$. Τότε, επειδή το $\langle S, T\rangle$ είναι μεγιστικό Σ-συνεπές, για κάθε $\alpha_i \in \mathcal{T}$ υπάρχουν πεπερασμένα $\Gamma_i \subseteq S$ και $\Delta_1^i, \ldots, \Delta_{\nu_i}^i$ και ένα $\Sigma_i = \{\phi_1^i, \ldots, \phi_{\nu_i}^i\} \subseteq \Sigma$ ώστε:

$$\frac{\Gamma_i, (\phi \equiv \hat{\alpha}_i) \rightarrow (\bigwedge \Delta_1^i) \supset \phi_1^i, \ldots, (\bigwedge \Delta_{\nu_i}^i) \supset \phi_{\nu_i}^i}{\bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_i, (\phi \equiv \hat{\alpha}_i) \rightarrow (\bigwedge \Delta_1^i) \supset \phi_1^i, \ldots, (\bigwedge \Delta_{\nu_i}^i) \supset \phi_{\nu_i}^i}\, W$$

όπου $n = |\mathcal{T}|$. Έστω $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu\}$. Για κάθε ϕ_i υπάρχουν πεπερασμένα $\Delta_{i,1}, \ldots, \Delta_{i,\mu_i} \subseteq T$ (ενδεχομένως $\mu_i = 0$), ώστε ακριβώς οι όροι $(\bigwedge \Delta_{i,j}) \supset \phi_i$, $1 \leq j \leq \mu_i$, να εμφανίζονται στους παραπάνω ακολουθητές. Εάν σε έναν από τους παραπάνω ακολουθητές εμφανίζεται ο όρος $(\bigwedge \Delta_{i,j}) \supset \phi_i$ για κάποιο j, με χρήση της πρότασης 2.11 μπορούμε να τον αντικαταστήσουμε με τον όρο $(\bigwedge(\bigcup_{1 \leq j \leq \mu_i} \Delta_{i,j})) \supset \phi_i$. Εάν δεν εμφανίζεται καθόλου όρος με τον τύπο ϕ_i, τότε με εξασθένηση μπορούμε να προσθέσουμε τον όρο $(\bigwedge(\bigcup_{1 \leq j \leq \mu_i} \Delta_{i,j})) \supset \phi_i$. Θέτοντας $\Gamma = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \Gamma_i \subseteq S$ και $\Delta_i = \bigcup_{1 \leq j \leq \mu_i} \Delta_{i,j} \subseteq T$ έχουμε ότι για κάθε $\hat{\alpha} \in \mathcal{T}$ αποδεικνύεται:

$$\Gamma, (\phi \equiv \hat{\alpha}) \rightarrow (\bigwedge \Delta_1) \supset \phi_1, \ldots, (\bigwedge \Delta_\nu) \supset \phi_\nu$$

οπότε με χρήση της πρότασης 2.20, έχουμε:

$$\Gamma \rightarrow (\bigwedge \Delta_1) \supset \phi_1, \ldots, (\bigwedge \Delta_\nu) \supset \phi_\nu$$

Άρα καταλήγουμε στο ότι το $\langle S,T\rangle$ είναι Σ-ασυνεπές, δηλαδή σε άτοπο.
■

Πόρισμα 4.19 *Αν $\langle S,T\rangle$ είναι ένα μεγιστικό Σ-συνεπές ζεύγων συνόλων, τότε για κάθε $\alpha \in \mathcal{T}$, $(\hat{\alpha} \equiv \hat{\alpha}) \in S$.*

Ορισμός 4.20 *Ένα σύνολο τύπων S λέγεται αριστερό συνεπές αν υπάρχουν σύνολα τύπων T και Σ με το Σ πεπερασμένο και μη κενό, έτσι ώστε το ζεύγος $\langle S,T\rangle$ να είναι Σ-συνεπές.*
Ένα σύνολο τύπων S λέγεται μεγιστικό αριστερό συνεπές αν υπάρχουν σύνολα τύπων T και Σ με το Σ πεπερασμένο και μη κενό, έτσι ώστε το ζεύγος $\langle S,T\rangle$ να είναι μεγιστικό Σ-συνεπές.

Πόρισμα 4.21 *Έστω S ένα μεγιστικό αριστερό συνεπές σύνολο τύπων. Τότε για κάθε τύπο ϕ:*

- *αν για κάποιο πεπερασμένο $\Gamma \subseteq S$, $\Gamma \to \phi$, τότε $\phi \in S$.*
- *υπάρχει μοναδικό $\alpha_\phi \in \mathcal{T}$ τέτοιο ώστε $(\phi \equiv \widehat{\alpha_\phi}) \in S$.*

Απόδ. Εφόσον το S είναι μεγιστικό αριστερό συνεπές, υπάρχουν σύνολα τύπων T, Σ με το Σ πεπερασμένο, έτσι ώστε το $\langle S,T\rangle$ να είναι Σ-συνεπές. Συνεπώς, λόγω των προτάσεων 4.17 και 4.18, έχουμε τα ζητούμενα.
■
Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το βασικό θεώρημα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 4.22 *Έστω οι τύποι $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$. Αν ο ακολουθητής $\to \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$ είναι έγκυρος, τότε είναι αποδείξιμος.*

Απόδ. Έστω ότι ο ακολουθητής $\to \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$ δεν είναι αποδείξιμος. Ορίζουμε $\Sigma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu\}$. Θα δείξουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ο ακολουθητής δεν είναι έγκυρος.
Έστω $\mathcal{W}$ το σύνολο όλων των μεγιστικών αριστερών συνεπών συνόλων από τύπους. **Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathcal{W} \times \Pi T \to \mathcal{T}$ έτσι ώστε για κάθε τύπο ϕ και για κάθε $A \in \mathcal{W}$ το $f(A,\phi)$ να είναι το μοναδικό $\alpha \in \mathcal{T}$ για το οποίο $(\phi \equiv \hat{\alpha}) \in A$.** Όπως είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 2.27, για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και για όλους τους τύπους ϕ, ψ ισχύει ότι:

- $(\phi \wedge \psi) \equiv \overline{(f(A,\phi) \wedge f(A,\psi))} \in A$, οπότε $f(A,\phi \wedge \psi) = f(A,\phi) \wedge f(A,\psi)$
- $(\phi \vee \psi) \equiv \overline{(f(A,\phi) \vee f(A,\psi))} \in A$, οπότε $f(A,\phi \vee \psi) = f(A,\phi) \vee f(A,\psi)$
- $(\phi \supset \psi) \equiv \overline{(f(A,\phi) \Rightarrow f(A,\psi))} \in A$, οπότε $f(A,\phi \supset \psi) = f(A,\phi) \Rightarrow f(A,\psi)$

όπου η γραμμή πάνω από κάποιους όρους χρησιμοποιείται για το διαχωρισμό των μελών του $\mathcal{T}$ από τις προτασιακές σταθερές που τα αναπαριστούν στη γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$. Στη συνέχεια αυτής της απόδειξης θα εγκαταλείψουμε αυτόν το συμβολισμό, ο οποίος

πάντως είναι χρήσιμος και γενικά βοηθά να αποφύγουμε κάποια εύκολα λάθη.
Ορίζουμε τη σχέση $\mathcal{R}$ ως εξής. Για όλα τα $A, B \in \mathcal{W}$ έχουμε:

$$\mathcal{R}(A,B) = \bigwedge_{\psi \in \Pi T} \Big(f(A, \Box\psi) \Rightarrow f(B,\psi) \Big) \wedge \bigwedge_{\chi \in \Pi T} \Big(f(B,\chi) \Rightarrow f(A, \Diamond\chi) \Big)$$

Τέλος, ορίζουμε την ανάθεση υ στους ατομικούς τύπους ως εξής. Για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και $\phi \in AT$: $\upsilon(A,\phi) = f(A,\phi)$. Επεκτείνουμε τη υ ($\bar{\upsilon}$) σε όλους τους τύπους και έστω ότι:

$$\text{για κάθε } A \in \mathcal{W} \text{ και } \phi \in \Pi T \ : \upsilon(A,\phi) = f(A,\phi) \tag{$*$}$$

Θα δείξουμε ότι στο $\mathcal{T}$-μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$ υπάρχει μια κατάσταση στην οποία δεν ικανοποιείται κανένα ϕ_i. Εφόσον ο $\quad \to \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_\nu$ δεν είναι αποδείξιμος, το $\langle \emptyset, \emptyset \rangle$ είναι Σ-συνεπές και επεκτείνεται σε ένα μεγιστικό Σ-συνεπές ζεύγος $\langle A, \emptyset \rangle$. Σε αυτήν την περίπτωση $A \in \mathcal{W}$. Έστω $\upsilon(A,\phi_i) = \alpha_i$ για κάθε $\phi_i \in \Sigma$.
Αν για κάποιο i είναι $\alpha_i = \top$, έχουμε $(\phi_i \equiv \top) \in A$. Από την πρόταση 2.17, έχουμε ότι $(\phi_i \equiv \top) \to \phi_i$, οπότε το $\langle A, \emptyset \rangle$ είναι Σ-ασυνεπές, άτοπο. Επομένως, $\upsilon(A,\phi_i) < \top$ για κάθε $\phi_i \in \Sigma$ και ο ακολουθητής δεν είναι έγκυρος.

Φυσικά η απόδειξη δεν έχει τελειώσει, αφού μένει να αποδείξουμε την $(*)$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων ισχύει εξ'ορισμού, ενώ για την περίπτωση των λογικών πράξεων έχουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και για όλους τους τύπους ϕ, ψ:

- $\upsilon(A, \phi \wedge \psi) = \upsilon(A,\phi) \wedge \upsilon(A,\psi) \overset{E\Upsilon}{=} f(A,\phi) \wedge f(A,\psi) = f(A, \phi \wedge \psi)$
- $\upsilon(A, \phi \vee \psi) = \upsilon(A,\phi) \vee \upsilon(A,\psi) \overset{E\Upsilon}{=} f(A,\phi) \vee f(A,\psi) = f(A, \phi \vee \psi)$
- $\upsilon(A, \phi \supset \psi) = \upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi) \overset{E\Upsilon}{=} f(A,\phi) \Rightarrow f(A,\psi) = f(A, \phi \supset \psi)$

Απομένουν λοιπόν οι περιπτώσεις των τροπικών τελεστών. Έστω τύπος ϕ_0 και έστω ότι για κάθε $A_0 \in \mathcal{W}$ ισχύει $\upsilon(A_0,\phi_0) = f(A_0,\phi_0)$. Θα δείξουμε ότι $\upsilon(A_0, \Box\phi_0) = f(A_0, \Box\phi_0)$.

$\rightsquigarrow f(A_0, \Box\phi_0) \leq \upsilon(A_0, \Box\phi_0)$
Εξ'ορισμού έχουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{W}$, $\mathcal{R}(A_0, B) \leq (f(A_0, \Box\phi_0) \Rightarrow f(B,\phi_0))$. Επομένως, σύμφωνα με την πρόταση 1.29, $f(A_0, \Box\phi_0) \leq (\mathcal{R}(A_0,B) \Rightarrow f(B,\phi_0))$, για κάθε $B \in \mathcal{W}$, οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό της τομής:

$$\begin{aligned} f(A_0, \Box\phi_0) \ &\leq \ \bigwedge\nolimits_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}(A_0,B) \Rightarrow f(B,\phi_0)) \\ &\overset{E\Upsilon}{=} \ \bigwedge\nolimits_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}(A_0,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi_0)) \\ &= \ \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \leq f(A_0, \Box\phi_0)$
Έστω ότι $\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \not\leq f(A_0, \Box\phi_0)$. Ορίζουμε ως T το σύνολο όλων των τύπων της μορφής $f(A_0, \Box\psi) \supset \psi$ και $\chi \supset f(A_0, \Diamond\chi)$ [1]. Ορίζοντας για κάθε $B \in \mathcal{W}$, $f(B, T) = \{f(B, \psi) \mid \psi \in T\}$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(A_0, B) &= \textstyle\bigwedge_{\psi \in \Pi T}\Big(f(A_0, \Box\psi) \Rightarrow f(B, \psi)\Big) \wedge \bigwedge_{\chi \in \Pi T}\Big(f(B, \chi) \Rightarrow f(A_0, \Diamond\chi)\Big) \\
&\overset{4.19}{=} \textstyle\bigwedge_{\psi \in \Pi T}\Big(f(B, f(A_0, \Box\psi)) \Rightarrow f(B, \psi)\Big) \wedge \bigwedge_{\chi \in \Pi T}\Big(f(B, \chi) \Rightarrow f(B, f(A_0, \Diamond\chi))\Big) \\
&= \textstyle\bigwedge_{\psi \in \Pi T}\Big(f(B, f(A_0, \Box\psi) \supset \psi)\Big) \wedge \bigwedge_{\chi \in \Pi T}\Big(f(B, \chi \supset f(A_0, \Diamond\chi))\Big) \\
&= \textstyle\bigwedge f(B, T)
\end{aligned}$$

Έστω επίσης $\phi = \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \phi_0$. Τότε το ζεύγος $\langle \emptyset, T \rangle$ είναι ϕ-συνεπές.

Ας υποθέσουμε ότι το $\langle \emptyset, T \rangle$ είναι ϕ-ασυνεπές, οπότε υπάρχουν τύποι $\psi_1, \ldots, \psi_n$, $\chi_1, \ldots, \chi_m$, έτσι ώστε ο παρακάτω ακολουθητής να είναι αποδείξιμος.

$$\rightarrow \Big(\bigwedge_{i \leq n}\Big(f(A_0, \Box\psi_i) \supset \psi_i\Big) \wedge \bigwedge_{j \leq m}\Big(\chi_j \supset f(A_0, \Diamond\chi_j)\Big)\Big) \supset \Big(\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \phi_0\Big)$$

οπότε, λόγω της πρότασης 4.12, είναι αποδείξιμος και ο:

$$\rightarrow \underbrace{\Big(\bigwedge_{i \leq n}\Big(f(A_0, \Box\psi_i) \supset \Box\psi_i\Big) \wedge \bigwedge_{j \leq m}\Big(\Diamond\chi_j \supset f(A_0, \Diamond\chi_j)\Big)\Big)}_{\Phi} \supset \Big(\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \Box\phi_0\Big)$$

Επομένως, ο τύπος δεξιά του βέλους ανήκει στο A_0 (πόρισμα 4.21). Εκτός αυτού, και οι τύποι $f(A_0, \Box\psi_i) \supset \Box\psi_i$ και $\Diamond\chi_j \supset f(A_0, \Diamond\chi_j)$ ανήκουν στο A_0, για κάθε i, j, από τον ορισμό της f, οπότε, με τη βοήθεια του τρίτου αξιώματος σύζευξης, έχουμε ότι ο τύπος Φ ανήκει στο A_0. Επειδή το επόμενο είναι αξίωμα

$$\top \supset \Phi, \Phi \supset (\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \Box\phi_0) \rightarrow \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \Box\phi_0$$

έχουμε ότι ο $\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \Box\phi_0$ ανήκει στο A_0. Και λόγω του αξιώματος

$$\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \Box\phi_0, \Box\phi_0 \supset f(A_0, \Box\phi_0) \rightarrow \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset f(A_0, \Box\phi_0)$$

έχουμε ότι ο $\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset f(A_0, \Box\phi_0)$ ανήκει στο A_0. Επειδή υποθέσαμε ότι $\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \not\leq f(A_0, \Box\phi_0)$, αποδεικνύεται ο ακολουθητής $\upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset f(A_0, \Box\phi_0) \rightarrow$, οπότε το $\langle A_0, T \rangle$ είναι Σ'-ασυνεπές για κάθε επιλογή (κατάλληλων) συνόλων T, Σ', άτοπο.
Επομένως, το $\langle \emptyset, T \rangle$ είναι ϕ-συνεπές και επεκτείνεται στο μεγιστικό ϕ-συνεπές $\langle B_0, T \rangle$ με $B_0 \in \mathcal{W}$. Ισχύει ότι $\bigwedge f(B_0, T) \not\leq f(B_0, \phi)$.

Ας υποθέσουμε ότι $\bigwedge f(B_0, T) \leq f(B_0, \phi)$. Έχουμε ότι $f(B_0, T) \subseteq \mathcal{T}$, οπότε, καθώς

[1]Προσοχή, εδώ οι $f(A_0, \Box\psi)$, $f(A_0, \Diamond\chi)$ είναι προτασιακές σταθερές!.

το $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει πεπερασμένο $T_0 \subseteq T$ έτσι ώστε $f(B_0, T) = f(B_0, T_0)$. Επομένως:

$$\begin{gathered}
\bigwedge f(B_0, T) \leq f(B_0, \phi) \quad \rightsquigarrow \\
\bigwedge f(B_0, T_0) \leq f(B_0, \phi) \quad \rightsquigarrow \\
f(B_0, \bigwedge T_0) \leq f(B_0, \phi) \quad \rightsquigarrow \\
f(B_0, \bigwedge T_0) \Rightarrow f(B_0, \phi) = \top \quad \rightsquigarrow \\
f(B_0, (\bigwedge T_0) \supset \phi) = \top \quad \rightsquigarrow \\
\Big(((\bigwedge T_0) \supset \phi) \equiv \top\Big) \in B_0
\end{gathered}$$

Όμως, $((\bigwedge T_0) \supset \phi) \equiv \top \to (\bigwedge T_0) \supset \phi$, δηλαδή το $\langle B_0, T\rangle$ είναι ϕ-ασυνεπές, άτοπο. Επομένως, ισχύει $\bigwedge f(B_0, T) \not\leq f(B_0, \phi)$.

Έχουμε επίσης ότι:

$$f(B_0, \phi) = f(B_0, \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \supset \phi_0) = \upsilon(A_0, \Box\phi_0) \Rightarrow f(B_0, \Box\phi_0)$$

και

$$\begin{aligned}
\upsilon(A_0, \Box\phi) &= \bigwedge\{\mathcal{R}(A_0, B) \Rightarrow \upsilon(B, \phi) \mid B \in \mathcal{W}\} \\
&\leq \mathcal{R}(A_0, B_0) \Rightarrow \upsilon(B_0, \phi) \\
&\overset{E\Upsilon}{=} \mathcal{R}(A_0, B_0) \Rightarrow f(B_0, \phi) \quad \rightsquigarrow \\
\mathcal{R}(A_0, B_0) &\leq \upsilon(A_0, \Box\phi) \Rightarrow f(B_0, \phi)
\end{aligned}$$

οπότε, συγκεντρώνοντας όλα τα επιμέρους αποτελέσματα έχουμε:

$$\bigwedge f(B_0, T) \;=\; \mathcal{R}(A_0, B_0) \;\leq\; f(A_0, \Box\phi_0) \Rightarrow f(B_0, \Box\phi_0) \;=\; f(B_0, \phi)$$

καταλήγουμε δηλαδή σε άτοπο. Επομένως, $\upsilon(A_0, \Box\phi) \leq f(A_0, \Box\phi)$.
■
Με τη βοήθεια του προηγούμενου θεωρήματος αποδεικνύουμε την πληρότητα.

Θεώρημα 4.23 *Έστω πεπερασμένα σύνολα τύπων Γ, Δ. Αν ο ακολουθητής $\Gamma \to \Delta$ είναι έγκυρος, τότε είναι αποδείξιμος.*

Απόδ. Θεωρούμε απαριθμήσεις για τα $\mathcal{T}, \Gamma, \Delta$: $\mathcal{T} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu\}$, $\Gamma = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\}$, $\Delta = \{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m\}$.
Έστω ότι ο $\Gamma \to \Delta$ δεν είναι αποδείξιμος. Τότε ούτε ο παρακάτω ακολουθητής είναι αποδείξιμος [2].

$$\to \Delta, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_1}, \ldots, \phi_1 \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}, \ldots, \phi_n \equiv \widehat{\tau_1}, \ldots, \phi_n \equiv \widehat{\tau_{\nu-1}}$$

[2]Για λεπτομέρειες μπορεί να ανατρέξει κανείς στην απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος (2.30) για (απλές) πλειονότιμες λογικές.

Επομένως, από το θεώρημα 4.22 έχουμε ότι δεν είναι έγκυρος, υπάρχει δηλαδή μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}, \upsilon \rangle$ τέτοιο ώστε για κάποια κατάσταση $A \in \mathcal{W}$:

$$\upsilon(A, \psi_j) < \top \quad \text{και} \quad \upsilon(A, \phi_k \equiv \widehat{\tau_i}) \;=\; (\upsilon(A, \phi_k) \Rightarrow \tau_i) \wedge (\tau_i \Rightarrow \upsilon(A, \phi_k)) \;< \top$$

$$\text{για} \quad j = 1, 2, \ldots, m \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$$

Από τη δεύτερη ομάδα σχέσεων έχουμε ότι $\upsilon(A, \phi_k) \neq \tau_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu - 1$, άρα $\upsilon(A, \phi_k) = \top$ για όλα τα k.
Επομένως, ο $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \to \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$, δηλαδή ο $\mathit{\Gamma} \to \mathit{\Delta}$, δεν είναι ικανοποιήσιμος από τη υ στο A, οπότε δεν είναι έγκυρος στο $\mathcal{M}$, άρα δεν είναι έγκυρος.
■

Κεφάλαιο 5

Μοντέλα πολλών ειδικών

Στην Τεχνητή Νοημοσύνη μελετώνται συχνά **συστήματα ειδικών**. Σε γενικές γραμμές ένας ειδικός είναι κάποιος ο οποίος είναι σε θέση να αποφαίνεται για την τιμή μιας συνάρτησης σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με ειδικούς οι οποίοι αποφαίνονται για την αλήθεια λογικών τύπων.
Συνήθως θέλουμε οι ειδικοί να αποφαίνονται για την αλήθεια λογικών τύπων με **συνεπή τρόπο**. Έτσι, για παράδειγμα, όταν ένας ειδικός αποφανθεί $\top$ για τον τύπο ϕ, περιμένουμε να αποφανθεί $\perp$ για τον $\neg\phi$. Όταν έχουμε ένα μόνο ειδικό, αυτό ισοδυναμεί με τη χρήση μιας τυπικής ανάθεσης. Σε συστήματα πολλών ειδικών, εάν οι ειδικοί είναι ανεξάρτητοι, δηλαδή η γνώμη του ενός δεν επηρεάζει αυτήν του άλλου, η παραπάνω απαίτηση ισοδυναμεί με τη χρήση πολλών αναθέσεων.

5.1 Δύο αλληλοεξαρτώμενοι ειδικοί

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον, όμως, παρουσιάζει η περίπτωση πολλών ειδικών οι οποίοι αλληλοεξαρτώνται. Έτσι, για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο ειδικούς e, f, οι οποίοι αποφαίνονται για την αλήθεια λογικών τύπων δίνοντας αληθοτιμές $\top$ ή $\perp$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο e **επικρατεί ή είναι επικρατής** του f (ισοδύναμα, ο f **υπακούει ή είναι υπήκοος** του e). Η σχέση επικράτησης σημαίνει ότι, αν για έναν τύπο ϕ ο e αποφαίνεται $\top$, τότε και ο f αποφαίνεται $\top$. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ως (ολική) αληθοτιμή του ϕ σε αυτό το σύστημα ειδικών το σύνολο των ειδικών που αποφαίνονται $\top$ για τον ϕ, οι πιθανές αληθοτιμές είναι τρεις: $\emptyset$, $\{f\}$, $\{e, f\}$. Η αληθοτιμή $\{e\}$ εκ των πραγμάτων δεν μπορεί να αποδοθεί σε κανέναν τύπο.
Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο παράδειγμά μας οι αληθοτιμές για έναν τύπο ϕ είναι τρεις, οπότε έχουμε μια πλειονότιμη λογική. Βέβαια, αν οι δύο ειδικοί ήταν ανεξάρτητοι, πάλι θα είχαμε μια πλειονότιμη λογική, τεσσάρων αληθοτιμών: $\emptyset, \{e, f\}, \{e\}, \{f\}$. Σε αυτές τις αληθοτιμές ορίζονται οι πράξεις της τομής, της ένωσης και του συμπληρώματος, οπότε σε αυτήν την περίπτωση οι αληθοτιμές θα αποτελούσαν στοιχεία μιας **άλγεβρας Boole**. Με την εξάρτηση που υποθέσαμε για τους ειδικούς οι αληθοτιμές δεν αποτελούν στοιχεία μιας τέτοιας άλγεβρας, καθώς δεν μπορούμε να ορίσουμε την πράξη του συμπληρώματος. Σε αυτήν την περίπτωση, οι αληθοτιμές μας αποτελούν στοιχεία ενός **πεπερασμένου επιμεριστικού δικτυωτού**.

Αναλυτικότερα, για την τομή και την ένωση στις παραπάνω αληθοτιμές μπορούμε να εξετάσουμε τις περιπτώσεις τύπων της μορφής $\phi \wedge \psi$ ή $\phi \vee \psi$, θεωρώντας ότι οι ειδικοί αποτιμούν με συνεπή τρόπο, δηλαδή αποφαίνονται $\top$ για το $\phi \wedge \psi$ μόνον όταν αποφαίνονται $\top$ για τα ϕ, ψ και ομοίως για το $\phi \vee \psi$. Συμβολίζουμε την ανάθεση αληθοτιμών από το δικτυωτό με υ. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα και το διάγραμμα του δικτυωτού:

$\upsilon(\phi)$	$\upsilon(\psi)$	$\upsilon(\phi \wedge \psi)$	$\upsilon(\phi \vee \psi)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\emptyset$	$\{f\}$	$\emptyset$	$\{f\}$
$\emptyset$	$\{e,f\}$	$\emptyset$	$\{e,f\}$
$\{f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{f\}$
$\{f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
$\{f\}$	$\{e,f\}$	$\{f\}$	$\{e,f\}$
$\{e,f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e,f\}$
$\{e,f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$	$\{e,f\}$
$\{e,f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,f\}$

$$\begin{tikzcd} \{f,e\} \arrow[d, dash] \\ \{f\} \arrow[d, dash] \\ \emptyset \end{tikzcd}$$

Η περίπτωση της συνεπαγωγής παρουσιάζει μια μάλλον αναμενόμενη επιπλοκή. Έστω ότι οι τύποι ϕ, ψ αποτιμούνται με $\perp$ από τον e, ενώ ο f αποτιμά τον ϕ με $\top$ και τον ψ με $\perp$. Μέχρι αυτό το σημείο η σχέση επικράτησης ικανοποιείται κανονικά. Εάν όμως αφήσουμε τους δύο ειδικούς να αποφανθούν ανεξάρτητα για την αληθοτιμή του $\phi \supset \psi$, λαμβάνοντας δηλαδή ο καθένας υπόψιν του μόνο τις δικές του αποτιμήσεις για τα ϕ, ψ, τότε ο e θα αποφανθεί $\top$, ενώ ο f, παραβιάζοντας τη σχέση επικράτησης, θα αποφανθεί $\perp$. Επομένως, πρέπει ο ένας ειδικός να αποφανθεί σύμφωνα και με την απόφαση του άλλου. Σε αυτήν την περίπτωση κάνουμε τη σύμβαση ότι ο επικρατής θα αποφανθεί εξετάζοντας τις αποφάσεις των υπηκόων του. Έτσι, *ένας ειδικός αποφαίνεται με $\top$ για τον τύπο $\phi \supset \psi$, μόνο αν ο ίδιος και όλοι οι ειδικοί των οποίων επικρατεί, είτε αποφαίνονται με $\perp$ για τον ϕ, είτε με $\top$ για τον ψ.* Με τον τρόπο αυτό είμαστε σε θέση να επεκτείνουμε την ανάθεση υ σε τύπους της μορφής $\phi \supset \psi$ με το συνήθη τρόπο, δηλαδή με χρήση του σχετικού ψευδο-συμπληρώματος, όπως βλέπουμε και στο διπλανό πίνακα. Στη δεύτερη γραμμή του πίνακα έχουμε το ενδεχόμενο που μόλις εξετάσαμε.

$\upsilon(\phi)$	$\upsilon(\psi)$	$\upsilon(\phi \supset \psi) =$ $\upsilon(\phi) \Rightarrow \upsilon(\psi)$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\{e,f\}$
$\emptyset$	$\{f\}$	$\{e,f\}$
$\emptyset$	$\{e,f\}$	$\{e,f\}$
$\{f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
$\{f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,f\}$
$\{e,f\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{e,f\}$	$\{f\}$	$\{f\}$
$\{e,f\}$	$\{e,f\}$	$\{e,f\}$

Μια παρόμοια επιπλοκή αναμένεται και στην πράξη του συμπληρώματος, την οποία όμως δε θα τη θεωρήσουμε πρωταρχική και θα την ορίσουμε κατά τον συνήθη σε αυτήν την εργασία τρόπο ($\neg\phi \ : \ \phi \supset \perp$).

5.2 Τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών

Το μοντέλο των δύο ειδικών που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα μπορεί να γενικευτεί για πεπερασμένο πλήθος ειδικών που αποφαίνονται για την αλήθεια τροπικών προτάσεων, δηλαδή προτάσεων του $\mathcal{L}^{mod}$. Στην περίπτωση αυτή, η σχέση εξάρτησης επεκτείνεται τόσο στους τροπικούς τελεστές, όσο και στη σχέση πρόσβασης.
Η σχέση πρόσβασης είναι διαφορετική για τον κάθε ειδικό, δηλαδή ο κάθε ειδικός έχει τη δική του άποψη για το ποιές καταστάσεις είναι προσβάσιμες από μια δεδομένη κατάσταση. Επιπλέον, αν ο ειδικός e είναι επικρατής του f και ο e υποστηρίζει ότι υπάρχει πρόσβαση από την κατάσταση A στη B, τότε και ο υπήκοος f θα υποστηρίζει το ίδιο.
Τα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών βασίζονται σε αντίστοιχα πλαίσια. Στον ορισμό των τροπικών πλαισίων πολλών ειδικών βλέπουμε πώς η σχέση επικράτησης επηρεάζει τη σχέση πρόσβασης για κάθε ειδικό.

Ορισμός 5.1 *Ένα τροπικό πλαίσιο πολλών ειδικών είναι μια δομή* $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, *όπου:*

- *Το* $\mathcal{E}$ *είναι ένα πεπερασμένο μη-κενό σύνολο, το σύνολο των ειδικών.*
- *Η* $\mathcal{D} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \{\top, \bot\}$ *είναι μια μερική διάταξη στο* $\mathcal{E}$ *και αποτελεί τη σχέση επικράτησης πάνω στους ειδικούς.*
- *Το* $\mathcal{W}$ *είναι ένα μη κενό σύνολο, το σύνολο των καταστάσεων.*
- *Η* $\mathcal{R} : \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \{\top, \bot\}$ *είναι η σχέση πρόσβασης μεταξύ των καταστάσεων και είναι διαφορετική για κάθε ειδικό. Εν συντομία θα γράφουμε* $\mathcal{R}_e(A, B)$ *αντί για* $\mathcal{R}(e, A, B) = \top$.
  $*$ *Για την* $\mathcal{R}$ *έχουμε την παρακάτω συνθήκη επικράτησης.*
  Για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$ *και* $A, B \in \mathcal{W}$*, αν* $\mathcal{R}_e(A, B)$ *και* $\mathcal{D}(e, f)$*, τότε* $\mathcal{R}_f(A, B)$.

Πριν ορίσουμε τα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών, θα επεκτείνουμε τη γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}$ με την προσθήκη κάποιων σταθερών.

Ορισμός 5.2 *Ένα υποσύνολο* S *του* $\mathcal{E}$ *λέγεται* $\mathcal{D}$*-κλειστό αν για κάθε* $e \in S$ *έχουμε ότι, για κάθε* $f \in \mathcal{E}$ *με* $\mathcal{D}(e, f)$, $f \in S$.

Παρατηρούμε ότι τα $\mathcal{D}$-κλειστά σύνολα είναι οι "ολικές" αληθοτιμές που μπορούμε να αποδώσουμε στους τύπους (πχ. οι αληθοτιμές $\emptyset, \{f\}, \{e, f\}$ του αρχικού μας παραδείγματος). Έτσι, αν ο ειδικός e επικρατεί του f, τότε, σε κάθε αληθοτιμή που ανήκει ο e, ανήκει αναγκαστικά και ο υπήκοος f.

Ορισμός 5.3 *Η γλώσσα* $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$ *του τροπικού λογισμού πολλών ειδικών ορίζεται από το σύνολο των λογικών συμβόλων της* $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{T}}$ *(ορισμός 4.1) και από το σύνολο των μη λογικών συμβόλων, δηλαδή το σύνολο των προτασιακών σταθερών* $\Pi\Sigma$*:*

$$\Pi\Sigma = \{\hat{\alpha} \mid \alpha \subseteq \mathcal{E} \ , \ \alpha \text{ είναι } \mathcal{D}\text{-κλειστό}\}$$

Σημειώσεις στον παραπάνω ορισμό.

$*$ Η $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$ είναι επέκταση της $\mathcal{L}^{mod}$, στην οποία υποθέσαμε αρχικώς ότι βρίσκονται οι τύποι για τους οποίους αποφαίνονται οι ειδικοί. Η προτασιακή σταθερά $\perp$ της $\mathcal{L}^{mod}$ αντιστοιχίζεται στην $\hat{\emptyset}$.

$*$ Το συνολο των ατομικών τύπων της $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$ είναι το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών και των προτασιακών σταθερών ($AT = \Pi M \cup \Pi\Sigma$).

$*$ Το συνολο των προτασιακών τύπων της $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$ είναι το σύνολο των ατομικών τύπων κλειστό ως προς τα $\wedge, \vee, \supset, \Box$ και $\Diamond$ (ορισμός 4.2).

Ορισμός 5.4 *Ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών είναι μια δομή* $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{E}}, w\rangle$, *όπου:*

- $\mathcal{F}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}\rangle$ *είναι ένα τροπικό πλαίσιο πολλών ειδικών.*
- $w \; : \; \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times AT \to \{\top, \perp\}$ *είναι μία ανάθεση, η οποία ορίζεται πάνω στις καταστάσεις και τους ατομικούς τύπους της* $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$ *και είναι διαφορετική για κάθε ειδικό. Εν συντομία θα γράφουμε* $w_e(A, \phi)$ *αντί για* $w(e, A, \phi)$.
  Για κάθε $e \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ *και* $\hat{\alpha} \in \Pi\Sigma$ *ορίζουμε:* $w_e(A, \hat{\alpha}) = \top$ *αν και μόνο αν* $e \in \alpha$.
  $*$ *Για την* w *έχουμε την παρακάτω συνθήκη επικράτησης.*
  Για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ *και* $\phi \in AT$, *αν* $w_e(A, \phi) = \top$ *και* $\mathcal{D}(e, f)$, *τότε* $w_f(A, \phi) = \top$.

Η ανάθεση w επεκτείνεται στο σύνολο των προτασιακών τύπων (της $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$) με τρόπο συμβατό με τη σχέση επικράτησης.

Ορισμός 5.5 *Έστω* $\langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w\rangle$ *ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών. Η συνάρτηση* $\bar{w}$ *είναι η γενίκευση της* w, $\bar{w} \; : \; \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times \Pi T \to \{\top, \perp\}$, *και ορίζεται αναδρομικά ως εξής.*
Έστω ϕ, ψ *τύποι,* ϕ' *ατομικός τύπος,* $e \in \mathcal{E}$ *και* $A \in \mathcal{W}$, *τότε:*

- $\bar{w}_e(A, \phi') \; = \; w_e(A, \phi')$
- $\bar{w}_e(A, \phi \wedge \psi) \; = \; \bar{w}_e(A, \phi) \wedge \bar{w}_e(A, \psi)$
- $\bar{w}_e(A, \phi \vee \psi) \; = \; \bar{w}_e(A, \phi) \vee \bar{w}_e(A, \psi)$
- $\bar{w}_e(A, \phi \supset \psi) \; = \; \top$ *αν και μόνο αν για κάθε* $f \in \mathcal{E}$ *με* $\mathcal{D}(e, f)$, *είτε* $\bar{w}_f(A, \phi) = \perp$, *είτε* $\bar{w}_f(A, \psi) = \top$.
- $\bar{w}_e(A, \Box\phi) \; = \; \top$ *αν και μόνο αν για κάθε* $f \in \mathcal{E}$ *με* $\mathcal{D}(e, f)$ *και για κάθε* $B \in \mathcal{W}$ *με* $\mathcal{R}_f(A, B)$, $\bar{w}_f(B, \phi) = \top$.
- $\bar{w}_e(A, \Diamond\phi) \; = \; \top$ *αν και μόνο αν υπάρχει* $B \in \mathcal{W}$ *έτσι ώστε* $\mathcal{R}_e(A, B)$ *και* $\bar{w}_e(B, \phi) = \top$.

Σημειώσεις στον παραπάνω ορισμό.

$*$ Στο εξής θα συμβολίζουμε την ανάθεση $\bar{w}$ απλώς ως w.

$*$ Η $\mathcal{D}$ είναι μια μερική διάταξη, οπότε για κάθε $e \in \mathcal{E}$ ισχύει $\mathcal{D}(e, e)$.

$*$ Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η πράξη του συμπληρώματος ορίζεται ως συνεπαγωγή της αντίφασης ($\neg\phi \ : \ \phi \supset \bot$), οπότε για κάθε $e \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{W}$ και για κάθε τύπο ϕ, $w_e(A, \neg\phi) = \top$ αν και μόνο αν για κάθε $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, $\bar{w}_f(A, \phi) = \bot$.

Η παρακάτω πρόταση εξασφαλίζει ότι η ανάθεση w εκφράζει τη σχέση επικράτησης μεταξύ ειδικών με τον τρόπο που αναφέραμε.

Πρόταση 5.6 *Έστω ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών $\langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$. Τότε, για κάθε τύπο ϕ και για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, έχουμε ότι, αν $w_e(A, \phi) = \top$, τότε $w_f(A, \phi) = \top$.*

Απόδ. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη από τον ορισμό της w, ενώ οι περιπτώσεις των $\wedge, \vee$ είναι προφανείς. Η περίπτωση της συνεπαγωγής εξετάστηκε και προηγούμενα και προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της w ($\bar{w}$). Επομένως, μένει να εξετάσουμε τις περιπτώσεις των τροπικών τελεστών.

Έστω $e \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{W}$ και τύπος ϕ, έτσι ώστε $w_e(A, \Box\phi) = \top$. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$ τέτοιο ώστε $w_f(A, \Box\phi) = \bot$. Από τον προηγούμενο ορισμό έχουμε ότι υπάρχουν $g \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(f, g)$ και $B \in \mathcal{W}$ με $\mathcal{R}_g(A, B)$, τέτοια ώστε να ισχύει $w_g(B, \phi) = \bot$. Επειδή η σχέση $\mathcal{D}$ ως μερική διάταξη είναι μεταβατική, έχουμε επίσης ότι $\mathcal{D}(e, g)$, οπότε $w_e(A, \Box\phi) = \bot$, άτοπο.

Για την περίπτωση του τελεστη $\Diamond$, έστω $e \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{W}$ και τύπος ϕ, έτσι ώστε $w_e(A, \Diamond\phi) = \top$. Τότε, από τον προηγούμενο ορισμό υπάρχει $B \in \mathcal{W}$ έτσι ώστε $\mathcal{R}_e(A, B)$ και $w_e(B, \phi) = \top$. Από τον ορισμό του μοντέλου έχουμε ότι για κάθε $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$ ισχύει $\mathcal{R}_f(A, B)$, και από την επαγωγική υπόθεση $w_f(B, \phi) = \top$, οπότε $w_f(A, \Diamond\phi) = \top$.

$\blacksquare$

Σημείωση 5.7 Τελικώς παρατηρούμε ότι η σχέση επικράτησης είναι αμφίδρομη μεταξύ επικρατούντων και υπηκόων. Παρόλο που, όταν ένας επικρατής ειδικός αποφαίνεται $\top$ για έναν τύπο, όλοι οι υπήκοοί του αποφαίνονται επίσης $\top$, ο τρόπος που επιτυγχάνεται αυτό είναι με αλληλεπίδραση μεταξύ επικρατή και υπηκόων. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στις περιπτώσεις των $\supset, \Box$ του ορισμού 5.5.

Διαισθητικά μπορούμε να πούμε ότι οι επικρατείς ειδικοί ενημερώνουν τους υπηκόους τους σχετικά με το ποιούς ατομικούς τύπους θεωρούν σωστούς και μετά, όταν θέλουν να αποτιμήσουν έναν τύπο $\phi \supset \psi$ ή $\Box\phi$, χρειάζεται να συμβουλευτούν όλους τους υπηκόους τους πριν αποφανθούν.

Έχοντας ορίσει τις αναθέσεις για τα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών, μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια της ολικής αληθοτιμής για τους τύπους.

Ορισμός 5.8 *Έστω το τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$. Για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και για κάθε τύπο ϕ, ορίζουμε ως ολική αληθοτιμή του ϕ στην A το σύνολο $\alpha = \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A, \phi) = \top\}$.*

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, η ολική αληθοτιμή ενός τύπου ϕ σε μια κατάσταση $A \in \mathcal{W}$ είναι $\mathcal{D}$-κλειστό σύνολο.

5.2.1 Παραγόμενα $\mathcal{T}$-τροπικά μοντέλα

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι κάθε τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών είναι ισοδύναμο με ένα παραγόμενο πλειονότιμο τροπικό μοντέλο ($\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο), όπου **τα στοιχεία του δικτυωτού $\mathcal{T}$ θα είναι οι ολικές αληθοτιμές του τροπικού μοντέλου πολλών ειδικών**. Η ισοδυναμία έγκειται στο ότι εάν ένας τύπος ϕ κρίνεται αληθής σε μία κατάσταση $A \in \mathcal{W}$ από ένα σύνολο ειδικών $\alpha \subseteq \mathcal{E}$, τότε το $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο αναθέτει στον ϕ στην κατάσταση A την αληθοτιμή α, και αντιστρόφως.
Χάριν ευκολίας, χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για μια πρόταση ϕ, είτε αυτή βρίσκεται στην $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$, είτε στην $\mathcal{L}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$, δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε το ίδιο ΠM, υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση των σταθερών της μίας γλώσσας επί αυτών της άλλης και όλα τα υπόλοιπα σύμβολα είναι κοινά για τις δύο γλώσσες.
Αρχικά ορίζουμε το δικτυωτό $\mathcal{T}$ στο οποίο θα ορίσουμε τα $\mathcal{T}$-τροπικά μοντέλα.

Πρόταση 5.9 *Έστω ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w\rangle$. Τότε το*

$$\mathcal{T} \ = \ \{\alpha \subseteq \mathcal{E} \mid \alpha \text{ είναι } \mathcal{D}\text{-κλειστό } \}, \text{ με ένωση και τομή τις } \cup, \cap$$

είναι ένα πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό.
Η μερική διάταξη στο $\mathcal{T}$ δίνεται από τη σχέση $\subseteq$.

Απόδ. Αρχικώς πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathcal{T}$ είναι κλειστό ως προς τις $\vee, \wedge$ που ορίσαμε. Έστω $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$.
Για κάθε $e \in (\alpha \vee \beta)$, έχουμε $e \in \alpha$ ή $e \in \beta$. Τώρα, αν $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, επειδή τα α, β είναι $\mathcal{D}$-κλειστά, $f \in \alpha$ ή $f \in \beta$, οπότε $f \in (\alpha \vee \beta)$. Επομένως, το $\alpha \vee \beta$ είναι $\mathcal{D}$-κλειστό, άρα $(\alpha \vee \beta) \in \mathcal{T}$.
Για κάθε $e \in (\alpha \wedge \beta)$, έχουμε $e \in \alpha$ και $e \in \beta$. Τώρα, αν $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, επειδή τα α, β είναι $\mathcal{D}$-κλειστά, $f \in \alpha$ και $f \in \beta$, οπότε $f \in (\alpha \wedge \beta)$. Επομένως, $(\alpha \wedge \beta) \in \mathcal{T}$.
Εφόσον το $\mathcal{E}$ είναι πεπερασμένο, το $\mathcal{T}$ είναι επίσης πεπερασμένο. Επομένως, μένει να δείξουμε πλέον ότι το $\mathcal{T}$ είναι επιμεριστικό δικτυωτό. Σύμφωνα με το θεώρημα 1.23, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{T}$:

$$\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) = \alpha$$

$$\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\gamma \wedge \alpha) \vee (\beta \wedge \alpha)$$

τα οποία προφανώς ισχύουν.
■
Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τα παραγόμενα $\mathcal{T}$-τροπικά μοντέλα.

Ορισμός 5.10 *Έστω ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w\rangle$. Ορίζουμε το $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', v\rangle$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ ως εξής.*

- $\mathcal{T} \ = \ \{\alpha \subseteq \mathcal{E} \mid \alpha \text{ είναι } \mathcal{D}\text{-κλειστό } \}$, *με ένωση και τομή τις* $\cup, \cap$.

- *Το $\mathcal{W}$ είναι αυτό του $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$.*
- *Για κάθε $A, B \in \mathcal{W}$, $\mathcal{R}'(A,B) = \{e \in \mathcal{E} \mid \mathcal{R}_e(A,B) = \top\}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{R}$, αυτό είναι $\mathcal{D}$-κλειστό σύνολο, οπότε $\mathcal{R}' : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{T}$.*
- *Για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και $\phi \in AT$, $\upsilon(A,\phi) = \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\phi) = \top\}$. Σύμφωνα με τον ορισμό 5.4, $\upsilon : \mathcal{W} \times AT \to \mathcal{T}$.*
  Η υ επεκτείνεται σε μια γενικευμένη υ ($\bar{\upsilon}$), $\upsilon : \mathcal{W} \times \Pi T \to \mathcal{T}$, με τον τρόπο που περιγράφουμε στον ορισμό 4.4.

Το $\mathcal{M}$ λέγεται παραγόμενο $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο του $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$.

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει την ισοδυναμία ενός τροπικού μοντέλου πολλών ειδικών με το παραγόμενο $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο του.

Θεώρημα 5.11 *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών και $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', \upsilon \rangle$ το παραγόμενο $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο του. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και για κάθε τύπο ϕ, $\upsilon(A,\phi) = \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\phi) = \top\}$, δηλαδή για κάθε $e \in \mathcal{E}$, $w_e(A,\phi) = \top$ αν και μόνο αν $e \in \upsilon(A,\phi)$.*

Απόδ. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη από τον προηγούμενο ορισμό.
Έστω οι τύποι ϕ, ψ. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{W}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \upsilon(A, \phi \wedge \psi) &= \upsilon(A,\phi) \wedge \upsilon(A,\psi) \\ &\overset{E\Upsilon}{=} \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\phi) = \top\} \cap \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\psi) = \top\} \\ &= \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\phi) = \top, w_e(A,\psi) = \top\} \\ &= \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\phi \wedge \psi) = \top\} \end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται και η περίπτωση του $\phi \vee \psi$. Για την περίπτωση του $\phi \supset \psi$ επιχειρηματολογούμε ως εξής.
Έστω $\alpha = \upsilon(A, \phi \supset \psi)$ και $\beta = \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(\phi \supset \psi) = \top\}$. Ισχύει ότι $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$. Αρχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} \alpha &= \upsilon(A, \phi \supset \psi) \ = \ \upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi) \text{ , και} \\ \beta \cap \upsilon(A,\phi) &\overset{E\Upsilon}{=} \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A, \phi \supset \psi) = \top\} \cap \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\phi) = \top\} \\ &= \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A, \phi \supset \psi) = w_e(A,\phi) = \top\} \\ &\overset{(*)}{\subseteq} \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\psi) = \top\} \overset{E\Upsilon}{=} \upsilon(A,\psi) \text{ , επομένως } \beta \subseteq \alpha \end{aligned}$$

όπου η $(*)$ ισχύει διότι, αν $w_e(A, \phi \supset \psi) = \top$, λόγω του ορισμού 5.4 και του $\mathcal{D}(e,e)$, έχουμε ότι είτε $w_e(A,\phi) = \bot$, είτε $w_e(A,\psi) = \top$.
Επιπλέον, έστω $e \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $e \in \alpha$ και $e \notin \beta$. Τότε $w_e(A, \phi \supset \psi) = \bot$, οπότε, λόγω του ορισμού 5.4, υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e,f)$, τέτοιο ώστε $w_f(A,\phi) = \top$ (δηλαδή $f \in \upsilon(A,\phi)$, λόγω $E\Upsilon$) και $w_f(A,\psi) = \bot$. Επειδή το α είναι $\mathcal{D}$-κλειστό, έχουμε $f \in \alpha$, οπότε $f \in (\alpha \cap \upsilon(A,\phi))$, όπου $\alpha \cap \upsilon(A,\phi) = \upsilon(A,\phi) \cap \upsilon(A,\psi)$, άρα

$f \in \upsilon(A,\psi)$. Το τελευταίο, λόγω της $E\Upsilon$, συνεπάγεται ότι $w_f(A,\psi) = \top$, άτοπο. Συνεπώς, $\alpha = \beta$.
Για την περίπτωση του $\Box\phi$ επιχειρηματολογούμε παρομοίως. Έστω $\gamma, \delta \in \mathcal{T}$ με $\gamma = \upsilon(A, \Box\phi)$ και $\delta = \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\Box\phi) = \top\}$, τότε:

$$\begin{aligned}
\gamma &= \upsilon(A,\Box\phi) = \bigcap\{\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi) \mid B \in \mathcal{W}\}\ . \text{ Για κάθε } B \in \mathcal{W}: \\
\delta \cap \mathcal{R}'(A,B) &= \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(A,\Box\phi) = \top\} \cap \{e \in \mathcal{E} \mid \mathcal{R}_e(A,B)\} \\
&= \{e \in \mathcal{E} \mid \mathcal{R}_e(A,B)\ ,\ w_e(A,\Box\phi) = \top\} \\
&\overset{(**)}{\subseteq} \{e \in \mathcal{E} \mid w_e(B,\phi) = \top\} \overset{E\Upsilon}{=} \upsilon(B,\phi) \quad \text{, επομένως} \\
\delta &\subseteq \mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi) \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{W}, \text{ άρα} \quad \delta \subseteq \gamma
\end{aligned}$$

όπου η $(**)$ ισχύει επειδή, αν $w_e(A,\Box\phi) = \top$ και $\mathcal{R}_e(A,B)$, λόγω του ορισμού 5.4 και του $\mathcal{D}(e,e)$, έχουμε $w_e(B,\phi) = \top$.
Επιπλέον, έστω $e \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $e \in \gamma$ και $e \notin \delta$. Τότε $w_e(A,\Box\phi) = \bot$, οπότε υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e,f)$ και $B \in \mathcal{W}$ με $\mathcal{R}_f(A,B)$, δηλαδή $f \in \mathcal{R}'(A,B)$, τέτοιο ώστε $w_f(B,\phi) = \bot$. Επειδή το γ είναι $\mathcal{D}$-κλειστό, έχουμε $f \in \gamma$, άρα $f \in (\gamma \cap \mathcal{R}'(A,B))$. Επίσης, επειδή

$$\gamma = \bigcap\{\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi) \mid B \in \mathcal{W}\} \subseteq \mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi) \quad \text{για κάθε } B \in \mathcal{W}$$

έχουμε ότι $\gamma \cap \mathcal{R}'(A,B) \subseteq \upsilon(B,\phi)$, άρα $f \in \upsilon(B,\phi)$. Το τελευταίο, λόγω της $E\Upsilon$, συνεπάγεται ότι $w_f(B,\phi) = \top$, άτοπο. Συνεπώς, $\gamma = \delta$.
Η περίπτωση του $\Diamond\phi$ αποδεικνύεται σχετικά εύκολα. Για κάθε $e \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
&w_e(A,\Diamond\phi) = \top \iff \\
&\quad \text{υπάρχει } B \in \mathcal{W} \text{ τ.ώ.: } \mathcal{R}_e(A,B) = \top \quad \text{και} \quad w_e(B,\phi) = \top \overset{E\Upsilon}{\iff} \\
&\quad \text{υπάρχει } B \in \mathcal{W} \text{ τ.ώ.: } e \in \mathcal{R}'(A,B) \quad \text{και} \quad e \in \upsilon(B,\phi) \iff \\
&\quad \text{υπάρχει } B \in \mathcal{W} \text{ τ.ώ.: } e \in (\mathcal{R}'(A,B) \cap \upsilon(B,\phi)) \iff \\
&\quad e \in \bigcup\nolimits_{B \in \mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B) \cap \upsilon(B,\phi)\Big) \iff e \in \upsilon(A,\Diamond\phi)
\end{aligned}$$

■

5.2.2 Παραγόμενα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε το αντίθετο από αυτό που δείξαμε στην προηγούμενη. Για κάθε $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο θα ορίσουμε ένα παραγόμενο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών και θα δείξουμε ότι τα δύο μοντέλα είναι ισοδύναμα.
Έχοντας ξεκαθαρίσει από την προηγούμενη ενότητα την έννοια αυτής της ισοδυναμίας, προχωρούμε κατευθείαν σε ορισμούς.

Ορισμός 5.12 *Έστω ένα $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', \upsilon \rangle$. Ορίζουμε το τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών $\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{E},\mathcal{D}}$ ως εξής.*

- $\mathcal{E} = \{e \subseteq \mathcal{T} \mid e$ *είναι πρώτο φίλτρο*$\}$.

- *Η $\mathcal{D}$ είναι η σχέση εγκλεισμού, δηλαδή για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$, $\mathcal{D}(e, f) = \top$ αν και μόνο αν $e \subseteq f$.*

- *Το $\mathcal{W}$ είναι αυτό του $\mathcal{M}$.*

- *Για κάθε $e \in \mathcal{E}$, $A, B \in \mathcal{W}$, $\mathcal{R}_e(A, B) = \top$ αν και μόνο αν $\mathcal{R}'(A, B) \in e$.*

- *Για κάθε $e \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ και $\phi \in AT$, $w_e(A, \phi) = \top$ αν και μόνο αν $\upsilon(A, \phi) \in e$.*
  Η w επεκτείνεται σε μια γενικευμένη w ($\bar{w}$), $w: \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times \Pi T \to \{\top, \bot\}$, με τον τρόπο που περιγράφουμε στον ορισμό 5.5.

Το $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ λέγεται παραγόμενο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών του $\mathcal{M}$.

Στον παραπάνω ορισμό έχουμε θεωρήσει ότι η οριζόμενη δομή $\langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ ικανοποιεί τις συνθήκες ενός τροπικού μοντέλου πολλών ειδικών. Αυτό βέβαια χρειάζεται απόδειξη, η οποία δίνεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.13 *Το $\mathcal{M}_\mathcal{E} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ του παραπάνω ορισμού είναι ένα τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών.*

Απόδ. Ανατρέχοντας στους ορισμούς 5.1 και 5.4 βλέπουμε ότι τα $\mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w$ είναι καλώς ορισμένα και το μόνο που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι οι $\mathcal{R}, w$ ικανοποιούν τις συνθήκες επικράτησης.
Έτσι, για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$ και $A, B \in \mathcal{W}$ έχουμε ότι, αν $\mathcal{R}_e(A, B)$ και $\mathcal{D}(e, f)$, τότε $\mathcal{R}'(A, B) \in e$ και $e \subseteq f$, οπότε $\mathcal{R}'(A, B) \in f$, άρα $\mathcal{R}_f(A, B)$.
Επιπλέον, για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ και τύπο ϕ, αν $w_e(A, \phi) = \top$ και $\mathcal{D}(e, f)$, τότε $\upsilon(A, \phi) \in e$ και $e \subseteq f$, οπότε $\upsilon(A, \phi) \in f$, επομένως $w_f(A, \phi) = \top$.
∎
Το παρακάτω θεώρημα δείχνει την αναμενόμενη ισοδυναμία.

Θεώρημα 5.14 *Έστω $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', \upsilon \rangle$ ένα $\mathcal{T}$-τροπικό μοντέλο και $\mathcal{M}_\mathcal{E} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ το παραγόμενο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών αυτού. Τότε για κάθε $e \in \mathcal{E}, A \in \mathcal{W}$ και για κάθε τύπο ϕ, $w_e(A, \phi) = \top$ αν και μόνο αν $\upsilon(A, \phi) \in e$.*

Απόδ. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη από τον ορισμό 5.12. Την περίπτωση των λογικών συνδέσμων θα τη δείξουμε αναλυτικά ώστε να φανούν οι λόγοι για τους οποίους απαιτούμε κάθε $e \in \mathcal{E}$ να είναι πρώτο φίλτρο του $\mathcal{T}$.
Έστω τύποι ϕ, ψ. Για κάθε $e \in \mathcal{E}$ και $A \in \mathcal{W}$ έχουμε:

$$
\begin{aligned}
w_e(A, \phi \wedge \psi) &= w_e(A, \phi) \wedge w_e(A, \psi) = \top \iff \\
&\quad w_e(A, \phi) = \top \,,\, w_e(A, \psi) = \top \overset{ET}{\iff} \\
&\quad \upsilon(A, \phi) \in e \,,\, \upsilon(A, \psi) \in e \overset{e\ \text{φίλτρο}}{\iff} \\
&\quad (\upsilon(A, \phi) \wedge \upsilon(A, \psi)) \in e \iff \upsilon(A, \phi \wedge \psi) \in e
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} w_e(A, \phi \vee \psi) &= w_e(A,\phi) \vee w_e(A,\psi) \;=\; \top \iff \\ & w_e(A,\phi) = \top \text{ ή } w_e(A,\psi) = \top \overset{ET}{\iff} \\ & \upsilon(A,\phi) \in e \;\text{ ή }\; \upsilon(A,\psi) \in e \overset{e \text{ πρώτο φίλτρο}}{\iff} \\ & (\upsilon(A,\phi) \vee \upsilon(A,\psi)) \in e \iff \upsilon(A, \phi \vee \psi) \in e \end{aligned}$$

Επιπλέον $w_e(A, \phi \supset \psi) \;=\; \top \iff$

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } f \in \mathcal{E}, \text{ αν } \mathcal{D}(e,f), \text{ τότε } w_f(A,\phi) = \bot \text{ ή } w_f(A,\psi) = \top \overset{ET}{\iff} \\ &\text{για κάθε } f \in \mathcal{E}, \text{ αν } e \subseteq f, \text{ τότε } \upsilon(A,\phi) \notin f \text{ ή } \upsilon(A,\psi) \in f \end{aligned}$$

ενώ $\upsilon(A, \phi \supset \psi) \;=\; \upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi)$. Οπότε, αν $\upsilon(A, \phi \supset \psi) \notin e$, τότε, από πρόταση 1.40, υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ ώστε $e \subseteq f$, $\upsilon(A,\phi) \in f$ και $\upsilon(A,\psi) \notin f$, άρα $w_e(A, \phi \supset \psi) = \bot$.
Επίσης, αν $\upsilon(A, \phi \supset \psi) \in e$, τότε, για κάθε $f \in \mathcal{E}$ με $e \subseteq f$, $\upsilon(A, \phi \supset \psi) \in f$. Επιπλέον, για κάθε τέτοιο f, αν $\upsilon(A,\psi) \notin f$, τότε $\upsilon(A,\phi) \notin f$, καθώς $\upsilon(A, \phi \supset \psi) \wedge \upsilon(A,\phi) = \upsilon(A,\phi) \wedge \upsilon(A,\psi)$ και το f είναι φίλτρο. Επομένως, $w_e(A, \phi \supset \psi) = \top$.
Για την περίπτωση του τροπικού τελεστή $\Box$ έχουμε ότι: $w_e(A, \Box\phi) = \top \iff$

$$\begin{aligned} &\text{για κάθε } f \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{W}, \text{ αν } \mathcal{D}(e,f) \text{ και } \mathcal{R}_f(A,B), \text{ τότε } w_f(B,\phi) = \top \overset{ET}{\iff} \\ &\text{για κάθε } f \in \mathcal{E}, B \in \mathcal{W}, \text{ αν } e \subseteq f \text{ και } \mathcal{R}'(A,B) \in f, \text{ τότε } \upsilon(B,\phi) \in f \end{aligned}$$

ενώ $\upsilon(A, \Box\phi) \;=\; \bigwedge\{\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$. Οπότε, αν $\upsilon(A, \Box\phi) \notin e$, τότε, επειδή το e είναι φίλτρο και το $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει $B \in \mathcal{W}$ έτσι ώστε $(\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)) \notin e$. Επομένως, από πρόταση 1.40, υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ ώστε $e \subseteq f$, $\mathcal{R}'(A,B) \in f$ και $\upsilon(B,\phi) \notin f$, άρα $w_e(A, \Box\phi) = \bot$.
Αντίθετα, αν $\upsilon(A, \Box\phi) \in e$, τότε, για κάθε $f \in \mathcal{E}$ με $e \subseteq f$, έχουμε $\upsilon(A, \Box\phi) \in f$, οπότε $(\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)) \in f$, για κάθε $B \in \mathcal{W}$. Επιπλέον, για κάθε τέτοιο f και για κάθε $B \in \mathcal{W}$, αν $\mathcal{R}'(A,B) \in f$, τότε $(\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi)) \in f$, οπότε $\upsilon(B,\phi) \in f$. Επομένως, $w_e(A, \Box\phi) = \top$.
Τέλος, έχουμε ότι: $w_e(A, \Diamond\phi) = \top$ αν και μόνο αν υπάρχει $B \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $\mathcal{R}_e(A,B)$ και $w_e(B,\phi)$, δηλαδή (ET) $\mathcal{R}'(A,B) \in e$ και $\upsilon(B,\phi) \in e$. Επίσης, $\upsilon(A, \Diamond\phi) = \bigvee\{\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi) \mid B \in \mathcal{W}\}$.
Επομένως, αν $\upsilon(A, \Diamond\phi) \notin e$, τότε για κάθε $B \in \mathcal{W}$, $(\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi)) \notin e$, επειδή $\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi) \;\leq\; \upsilon(A, \Diamond\phi)$ και e είναι φίλτρο. Συνεπώς $\mathcal{R}'(A,B) \notin e$ ή $\upsilon(B,\phi) \notin e$, άρα $w_e(A, \Diamond\phi) = \bot$.
Αντίθετα, αν $\upsilon(A, \Diamond\phi) \in e$, τότε, επειδή το e είναι πρώτο φίλτρο και το $\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει $B \in \mathcal{W}$ τέτοιο ώστε $(\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi)) \in e$, οπότε $\mathcal{R}'(A,B) \in e$ και $\upsilon(B,\phi) \in e$. Επομένως, $w_e(A, \Diamond\phi) = \top$.
■

5.3 Πλειονότιμα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε συστήματα πολλών ειδικών οι οποίοι αποφαίνονται για την αληθοτιμή τροπικών τύπων κατά τον κλασσικό τρόπο, δηλαδή με $\top$ ή $\bot$. Φυσικά,

μπορούμε να επεκτείνουμε τα μοντέλα αυτά, ώστε οι ειδικοί να αποδίδουν αληθοτιμές επιλεγμένες από ένα πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό $\mathcal{T}$ και έχοντας υπόψιν τους μια συνάρτηση πρόσβασης από τα ζεύγη καταστάσεων στο $\mathcal{T}$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε πλειονότιμα μοντέλα πολλών ειδικών, οι οποίοι αποφαίνονται για την αληθοτιμή τύπων της γλώσσας $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$.
Όπως και προηγούμενα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μεταξύ των ειδικών υπάρχουν σχέσεις επικράτησης. Έτσι, αν ένας ειδικός e είναι επικρατής του f, όποτε ο e αποφαίνεται $\alpha \in \mathcal{T}$ για έναν τύπο ϕ, ο f αποφαίνεται μια τιμή $\beta \in \mathcal{T}$ για τον ϕ τέτοια ώστε $\alpha \leq \beta$. Ομοίως, αν ο e υποστηρίζει ότι η πρόσβαση από την κατάσταση A στη B έχει τιμή $\alpha \in \mathcal{T}$, ο υπήκοος f υποστηρίζει ότι έχει μια τιμή $\beta \in \mathcal{T}$ τέτοια ώστε $\alpha \leq \beta$. Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω για την περίπτωση όπου $\mathcal{T} = \{\top, \bot\}$ μας δίνουν τις συνθήκες που αναφέραμε προηγούμενα για τα κλασικά τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών.
Ξεκινάμε ορίζοντας τα πλειονότιμα τροπικά πλαίσια πολλών ειδικών. Στον ορισμό βλέπουμε την τυπική μορφή της σχέσης πρόσβασης, η οποία είναι συμβατή με τη σχέση επικράτησης.

Ορισμός 5.15 *Ένα πλειονότιμο τροπικό πλαίσιο πολλών ειδικών είναι μια δομή* $\mathcal{F}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$, *όπου* $\mathcal{T}$ *ένα πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό και:*

- *Το* $\mathcal{E}$ *είναι ένα πεπερασμένο μη-κενό σύνολο, το σύνολο των ειδικών.*
- *Η* $\mathcal{D} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{T}$ *είναι μια μερική διάταξη στο* $\mathcal{E}$ *και αποτελεί τη σχέση επικράτησης πάνω στους ειδικούς. Σημειώνουμε ότι η* $\mathcal{D}$ *έχει το πεδίο τιμών της μέσα στο* $\mathcal{T}$.
- *Το* $\mathcal{W}$ *είναι ένα μη κενό σύνολο, το σύνολο των καταστάσεων.*
- *Η* $\mathcal{R} : \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{T}$ *είναι η συνάρτηση πρόσβασης και είναι διαφορετική για κάθε ειδικό. Εν συντομία θα γράφουμε* $\mathcal{R}_e(A, B)$ *αντί για* $\mathcal{R}(e, A, B)$.
  ∗ *Για την* $\mathcal{R}$ *έχουμε την παρακάτω συνθήκη επικράτησης.*
  Για κάθε $f \in \mathcal{E}$ *και* $A, B \in \mathcal{W}$, $\mathcal{R}_f(A, B) = \bigvee\{\mathcal{D}(e, f) \wedge \mathcal{R}_e(A, B) \mid e \in \mathcal{E}\}$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$, αν έχουμε $\mathcal{D}(e, f)$, τότε για κάθε $A, B \in \mathcal{W}$, $\mathcal{R}_e(A, B) \leq \mathcal{R}_f(A, B)$. Επίσης, για κάθε $e \in \mathcal{E}$ έχουμε $\mathcal{D}(e, e)$.
Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό των μοντέλων, πρέπει να αποφασίσουμε τη μορφή των ολικών αληθοτιμών. Εφόσον οι ειδικοί αποφαίνονται για την αλήθεια των τροπικών προτάσεων με αληθοτιμές από ένα πεπερασμένο δικτυωτό $\mathcal{T}$, δεν μπορούμε πλεόν να περιγράψουμε τις ολικές αληθοτιμές με υποσύνολα του $\mathcal{E}$. Για την περιγραφή των ολικών αληθοτιμών θέλουμε δομές οι οποίες να περιέχουν για κάθε ειδικό την αληθοτιμή που δίνει. Μια οικογένεια κατάλληλων τέτοιων δομών είναι οι συναρτήσεις από το $\mathcal{E}$ στο $\mathcal{T}$. Επομένως, μπορούμε από τώρα να ορίσουμε τις ολικές αληθοτιμές.

Ορισμός 5.16 *Το σύνολο* $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{T}$ *λέγεται ολική αληθοτιμή αν είναι (ολική) συνάρτηση από το* $\mathcal{E}$ *στο* $\mathcal{T}$, *δηλαδή για κάθε* $e \in \mathcal{E}$ *υπάρχει μοναδικό* $\alpha \in \mathcal{T}$, *έτσι ώστε* $(e, \alpha) \in \mathfrak{a}$. *Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε* $\mathfrak{a}(e) = \alpha$.

Πάνω στις ολικές αληθοτιμές ορίζουμε την έννοια της $\mathcal{D}$-συμβατότητας για κάθε σχέση επικράτησης $\mathcal{D}$.

Ορισμός 5.17 *Έστω $\mathcal{F}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ ένα πλειονότιμο τροπικό πλαίσιο πολλών ειδικών. Μια ολική αληθοτιμή $\mathfrak{a}$ λέμε ότι είναι $\mathcal{D}$-συμβατή αν για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, έχουμε $\mathfrak{a}(e) \leq \mathfrak{a}(f)$.*

Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι οι προτάσεις για τις οποίες αποφαίνονται οι ειδικοί είναι στη γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$. Θα κάνουμε μια αλλαγή σε αυτήν τη γλώσσα προσθέτοντας τις $\mathcal{D}$-συμβατές ολικές αληθοτιμές. Τη γλώσσα που προκύπτει ονομάζουμε γλώσσα του πλειονότιμου τροπικού λογισμού πολλών ειδικών.

Ορισμός 5.18 *Η γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$ του πλειονότιμου τροπικού λογισμού πολλών ειδικών ορίζεται από το σύνολο των λογικών συμβόλων της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ (ορισμός 4.1) και από το σύνολο των μη λογικών συμβόλων, δηλαδή το σύνολο των προτασιακών σταθερών $\Pi\Sigma$:*

$$\Pi\Sigma = \{\hat{\mathfrak{a}} \mid \mathfrak{a} \ \mathcal{D}\text{-συμβατή ολική αληθοτιμή}\}$$

Σημειώσεις στον παραπάνω ορισμό.
$*$ Η $\mathcal{L}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$ είναι κατ'ουσίαν επέκταση της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$, αφού μπορούμε κάθε προτασιακή σταθερά $\hat{\alpha}$ της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$ να την αντιστοιχήσουμε στη σταθερά $\hat{\mathfrak{a}}$ της $\mathcal{L}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$, θέτοντας $\mathfrak{a} = \{(e, \alpha) \mid e \in \mathcal{E}\}$, δηλαδή τη σταθερή συνάρτηση α.
$*$ Ως συνήθως, το συνολο των ατομικών τύπων της $\mathcal{L}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$ είναι το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών και των προτασιακών σταθερών ($AT = \Pi M \cup \Pi\Sigma$) και επεκτείνεται στο σύνολο των προτασιακών τύπων (ΠT).
Τα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών ορίζονται για τη γλώσσα $\mathcal{L}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$ ως εξής.

Ορισμός 5.19 *Ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών είναι μια δομή $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{E},\mathcal{T}}, w \rangle$, όπου:*

- *$\mathcal{F}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R} \rangle$ είναι ένα πλειονότιμο τροπικό πλαίσιο πολλών ειδικών.*
- *$w : \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times AT \to \mathcal{T}$ είναι μία ανάθεση, η οποία ορίζεται πάνω στις καταστάσεις και τους ατομικούς τύπους της $\mathcal{L}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}^{mod}$ και είναι διαφορετική για κάθε ειδικό. Εν συντομία θα γράφουμε $w_e(A, \phi)$ αντί για $w(e, A, \phi)$.*
  Για κάθε $e \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ και $\hat{\mathfrak{a}} \in \Pi\Sigma$ ορίζουμε: $w_e(A, \hat{\mathfrak{a}}) = \mathfrak{a}(e)$.
  $*$ Για τη w έχουμε την παρακάτω συνθήκη επικράτησης.
  Για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ και $\phi \in AT$, αν $\mathcal{D}(e, f)$, τότε $w_e(A, \phi) \leq w_f(A, \phi)$.

Η ανάθεση w επεκτείνεται στο σύνολο των προτασιακών τύπων με τρόπο συμβατό με τη σχέση επικράτησης.

Ορισμός 5.20 *Έστω $\langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών. Η συνάρτηση $\bar{w}$ είναι η γενίκευση της w, $\bar{w} : \mathcal{E} \times \mathcal{W} \times \Pi T \to \mathcal{T}$, και ορίζεται αναδρομικά ως εξής.*
Έστω ϕ, ψ τύποι, ϕ' ατομικός τύπος, $e \in \mathcal{E}$ και $A \in \mathcal{W}$, τότε:

- $\bar{w}_e(A, \phi') \ = \ w_e(A, \phi')$

- $\bar{w}_e(A, \phi \wedge \psi) \;=\; \bar{w}_e(A, \phi) \wedge \bar{w}_e(A, \psi)$
- $\bar{w}_e(A, \phi \vee \psi) \;=\; \bar{w}_e(A, \phi) \vee \bar{w}_e(A, \psi)$
- $\bar{w}_e(A, \phi \supset \psi) \;=\; \bigwedge_{f \in \mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(e, f) \Rightarrow (w_f(A, \phi) \Rightarrow w_f(A, \psi))\Big)$
- $\bar{w}_e(A, \Box\phi) \;=\; \bigwedge_{f \in \mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(e, f) \Rightarrow \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}_f(A, B) \Rightarrow w_f(B, \phi))\Big)$
- $\bar{w}_e(A, \Diamond\phi) \;=\; \bigvee_{B \in \mathcal{W}} \Big(\mathcal{R}_e(A, B) \wedge w_e(B, \phi)\Big)$

Στο εξής θα συμβολίζουμε την ανάθεση $\bar{w}$ απλώς ως w.
Η επόμενη πρόταση εξασφαλίζει ότι η ανάθεση ενός πλειονότιμου τροπικού μοντέλου πολλών ειδικών υλοποιεί τη σχέση επικράτησης μεταξύ ειδικών.

Πρόταση 5.21 *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών. Τότε, για κάθε τύπο ϕ και για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, έχουμε ότι $w_e(A, \phi) \leq w_f(A, \phi)$.*

Απόδ. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη από τον ορισμό της w, ενώ οι περιπτώσεις των $\wedge, \vee$ είναι σχετικά απλές, πχ. για κάθε $A \in \mathcal{W}$, $e, f \in \mathcal{E}$ και $\phi, \psi \in \mathit{\Pi T}$ έχουμε ότι, αν $\mathcal{D}(e, f)$, τότε:

$$w_e(A, \phi \wedge \psi) \;=\; w_e(A, \phi) \wedge w_e(A, \psi) \;\overset{E\Upsilon}{\leq}\; w_f(A, \phi) \wedge w_f(A, \psi) \;=\; w_f(A, \phi \wedge \psi)$$

και ομοίως για το $\phi \vee \psi$. Για την περίπτωση του $\phi \supset \psi$ έχουμε ότι αν $\mathcal{D}(e, f)$, τότε, επειδή η $\mathcal{D}$ είναι μεταβατική, για κάθε $g \in \mathcal{E}$, αν $\mathcal{D}(f, g) = \top$, τότε $\mathcal{D}(e, g) = \top$, άρα για κάθε $e, f, g \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ και τύπους ϕ, ψ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f, g) \;&\leq\; \mathcal{D}(e, g) \quad \overset{1.18}{\rightsquigarrow} \\
\mathcal{D}(e, g) \Rightarrow (w_g(A, \phi) \Rightarrow w_g(A, \psi)) \;&\leq\; \mathcal{D}(f, g) \Rightarrow (w_g(A, \phi) \Rightarrow w_g(A, \psi)) \quad \rightsquigarrow \\
\bigwedge_{g \in \mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(e, g) \Rightarrow (w_g(A, \phi) \Rightarrow w_g(A, \psi))\Big) \;&\leq\; \bigwedge_{g \in \mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(f, g) \Rightarrow (w_g(A, \phi) \Rightarrow w_g(A, \psi))\Big) \quad \rightsquigarrow \\
w_e(A, \phi \supset \psi) \;&\leq\; w_f(A, \phi \supset \psi)
\end{aligned}$$

Ομοίως, για κάθε $e, f, g \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{W}$ και τύπο ϕ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(f, g) \;&\leq\; \mathcal{D}(e, g) \quad \overset{1.18}{\rightsquigarrow} \\
\mathcal{D}(e, g) \Rightarrow \bigwedge\nolimits_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}_g(A, B) \Rightarrow w_g(B, \phi)) \;&\leq\; \mathcal{D}(f, g) \Rightarrow \bigwedge\nolimits_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}_g(A, B) \Rightarrow w_g(B, \phi)) \quad \rightsquigarrow \\
\bigwedge_{g \in \mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(e, g) \Rightarrow \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}_g(A, B) \Rightarrow w_g(B, \phi))\Big) \;&\leq\; \bigwedge_{g \in \mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(f, g) \Rightarrow \bigwedge_{B \in \mathcal{W}} (\mathcal{R}_g(A, B) \Rightarrow w_g(B, \phi))\Big) \quad \rightsquigarrow \\
w_e(A, \Box\phi) \;&\leq\; w_f(A, \Box\phi)
\end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $e, f \in \mathcal{E}$, $A, B \in \mathcal{W}$ και τύπο ϕ, αν $\mathcal{D}(e, f)$, τότε, λόγω και της $E\Upsilon$:

$$\begin{aligned} w_e(B,\phi) \ \leq \ w_f(B,\phi) \quad , \quad \mathcal{R}_e(A,B) \ \leq \ \mathcal{R}_f(A,B) \quad &\rightsquigarrow \\ \mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(B,\phi) \ \leq \ \mathcal{R}_f(A,B) \wedge w_f(B,\phi) \quad &\rightsquigarrow \\ \bigvee{}_{B\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(B,\phi)) \ \leq \ \bigvee{}_{B\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(B,\phi)) \quad &\rightsquigarrow \\ w_e(A,\Diamond\phi) \ \leq \ w_f(A,\Diamond\phi) \end{aligned}$$

■

Σημείωση 5.22 Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, οι ολικές αληθοτιμές που έχουμε για ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w\rangle$ είναι $\mathcal{D}$-συμβατές.

5.3.1 Παραγόμενα $\mathcal{T}'$-τροπικά μοντέλα

Σε αυτήν την ενότητα θα παράγουμε ισοδύναμα πλειονότιμα τροπικά μοντέλα από πλειονότιμα τροπικά μοντέλα πολλών ειδικών. Μέχρι τώρα είδαμε ότι η ολική αληθοτιμή κάποιου τύπου σε ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών είναι μια $\mathcal{D}$-συμβατή συνάρτηση από το σύνολο των ειδικών $\mathcal{E}$ στο δικτυωτό $\mathcal{T}$. Θέλουμε, όπως και στην περίπτωση των απλών τροπικών μοντέλων πολλών ειδικών, να βρούμε παραγόμενα ισοδύναμα $\mathcal{T}'$-τροπικά μοντέλα, όπου $\mathcal{T}'$ θα είναι ένα δικτυωτό με στοιχεία τις ολικές αληθοτιμές.
Αρχικά ορίζουμε το δικτυωτό $\mathcal{T}'$.

Πρόταση 5.23 *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w\rangle$ ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών. Τότε το*

$$\mathcal{T}' \ = \ \{\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{E}\times\mathcal{T} \mid \mathfrak{a} \text{ είναι συνάρτηση } \mathcal{D}\text{-συμβατη}\}$$

με ένωση και τομή τις $\vee, \wedge$ για συναρτήσεις (από το $\mathcal{E}$ στο $\mathcal{T}$), δηλαδή για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$ και $e \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})(e) &= \mathfrak{a}(e)\wedge\mathfrak{b}(e) \\ (\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})(e) &= \mathfrak{a}(e)\vee\mathfrak{b}(e) \end{aligned}$$

είναι ένα πεπερασμένο επιμεριστικό δικτυωτό.
Η μερική διάταξη στο $\mathcal{T}'$ δίνεται από τη σχέση $\leq$ για συναρτήσεις (από το $\mathcal{E}$ στο $\mathcal{T}$), δηλαδή για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$:

$$\mathfrak{a}\leq\mathfrak{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{για κάθε } e\in\mathcal{E},\ \mathfrak{a}(e)\leq\mathfrak{b}(e)$$

Απόδ. Αρχικώς πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathcal{T}'$ είναι κλειστό ως προς τις $\vee, \wedge$ που ορίσαμε, δηλαδή για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$, να δείξουμε ότι οι $\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b}, \mathfrak{a}\vee\mathfrak{b}$ είναι $\mathcal{D}$-συμβατές συναρτήσεις.
Για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$ και $e, f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e, f)$, επειδή οι $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ είναι $\mathcal{D}$-συμβατές, έχουμε:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})(e) &= \mathfrak{a}(e)\wedge\mathfrak{b}(e) \ \leq \ \mathfrak{a}(f)\wedge\mathfrak{b}(f) \ = \ (\mathfrak{a}\wedge\mathfrak{b})(f) \\ (\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})(e) &= \mathfrak{a}(e)\vee\mathfrak{b}(e) \ \leq \ \mathfrak{a}(f)\vee\mathfrak{b}(f) \ = \ (\mathfrak{a}\vee\mathfrak{b})(f) \end{aligned}$$

Επομένως, το $\mathcal{T}'$ είναι κλειστό ως προς τις $\wedge, \vee$. Επιπλέον, εφόσον τα $\mathcal{E}, \mathcal{T}$ είναι πεπερασμένα, το $\mathcal{E}\times\mathcal{T}$ είναι πεπερασμένο, άρα το $\mathcal{T}'$ είναι πεπερασμένο. Συνεπώς, μένει να δείξουμε ότι το

$\mathcal{T}'$ είναι επιμεριστικό δικτυωτό, δηλαδή, σύμφωνα με το θεώρημα 1.23, ότι για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c} \in \mathcal{T}'$ και κάθε $e \in \mathcal{E}$:

$$(\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}))(e) = \mathfrak{a}(e)$$

$$(\mathfrak{a} \wedge (\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}))(e) = ((\mathfrak{c} \wedge \mathfrak{a}) \vee (\mathfrak{b} \wedge \mathfrak{a}))(e)$$

τα οποία ισχύουν, αφού τα $\mathfrak{a}(e), \mathfrak{b}(e), \mathfrak{c}(e)$ είναι στοιχεία του επιμεριστικού δικτυωτού $\mathcal{T}$.
■
Ορίζουμε τα παραγόμενα $\mathcal{T}'$-τροπικά μοντέλα ως εξής.

Ορισμός 5.24 *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w \rangle$ ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών. Ορίζουμε το $\mathcal{T}'$-τροπικό μοντέλο $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', v \rangle$ για τη γλώσσα $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{T}'}$ ως εξής.*

- *$\mathcal{T}' = \{\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{T} \mid \mathfrak{a}$ είναι συνάρτηση $\mathcal{D}$-συμβατη$\}$, με ένωση και τομή τις $\vee, \wedge$ για συναρτήσεις.*
- *Το $\mathcal{W}$ είναι αυτό του $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}}$.*
- *Για κάθε $A, B \in \mathcal{W}$, $\mathcal{R}'(A,B) = \{(e, \mathcal{R}_e(A,B)) \mid e \in \mathcal{E}\}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{R}$, αυτή είναι $\mathcal{D}$-συνεπής συνάρτηση, οπότε $\mathcal{R}' : \mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{T}'$.*
- *Για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και $\phi \in AT$, $v(A,\phi) = \{(e, w_e(A,\phi)) \mid e \in \mathcal{E}\}$. Σύμφωνα με τον ορισμό 5.19, $v : \mathcal{W} \times AT \to \mathcal{T}'$.*
  Η v επεκτείνεται σε μια γενικευμένη v ($\bar{v}$), $v : \mathcal{W} \times \Pi T \to \mathcal{T}'$, με τον τρόπο που περιγράφουμε στον ορισμό 4.4. Για κάθε $A \in \mathcal{W}$, $e \in \mathcal{E}$ και τύπο ϕ θα γράφουμε $v(A,\phi)(e)$ αντί για $(v(A,\phi))(e)$.

Το $\mathcal{M}$ λέγεται παραγόμενο $\mathcal{T}'$-τροπικό μοντέλο του $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}}$.

Μπορούμε να χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για μια πρόταση ϕ, είτε αυτή βρίσκεται στην $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{T}'}$, είτε στην $\mathcal{L}^{mod}_{\mathcal{T},\mathcal{E},\mathcal{D}}$, δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε το ίδιο ΠM, υπάρχει μία 1-1 απεικόνιση των σταθερών της μίας γλώσσας επί αυτών της άλλης και όλα τα υπόλοιπα σύμβολα είναι κοινά για τις δύο γλώσσες.
Η επόμενη πρόταση θα φανεί χρήσιμη για την απόδειξη του θεωρήματος αυτής της ενότητας.

Πρόταση 5.25 *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}}$ πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών και $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', v \rangle$ το παραγόμενο $\mathcal{T}'$-τροπικό μοντέλο αυτού. Τότε για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$ και $e \in \mathcal{E}$:*

$$(\mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b})(e) \ \leq \ \mathfrak{a}(e) \Rightarrow \mathfrak{b}(e)$$

Απόδ. Για κάθε $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$, η συνάρτηση $\mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b}$ είναι το μεγαλύτερο $\mathfrak{c} \in \mathcal{T}'$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{c} \leq \mathfrak{b}$, δηλαδή για κάθε $e \in \mathcal{E}$:

$$\mathfrak{a}(e) \wedge \mathfrak{c}(e) \ \leq \ \mathfrak{b}(e) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathfrak{c}(e) \ \leq \ \mathfrak{a}(e) \Rightarrow \mathfrak{b}(e)$$

Επομένως για κάθε $e \in \mathcal{E}$, $(\mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b})(e) \ \leq \ \mathfrak{a}(e) \Rightarrow \mathfrak{b}(e)$.
■
Το παρακάτω θεώρημα δείχνει την ισοδυναμία ενός πλειονότιμου τροπικού μοντέλου πολλών ειδικών με το παραγόμενο $\mathcal{T}'$-τροπικό μοντέλο του.

Θεώρημα 5.26 *Έστω $\mathcal{M}_{\mathcal{E},\mathcal{T}} = \langle \mathcal{E}, \mathcal{D}, \mathcal{W}, \mathcal{R}, w\rangle$ ένα πλειονότιμο τροπικό μοντέλο πολλών ειδικών και $\mathcal{M} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{R}', \upsilon\rangle$ το παραγόμενο $\mathcal{T}'$-τροπικό μοντέλο του. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και για κάθε τύπο ϕ,*

$$\upsilon(A,\phi) = \{(e, w_e(A,\phi)) \mid e \in \mathcal{E}\}, \quad \textit{δηλαδή για κάθε } e \in \mathcal{E} \quad w_e(A,\phi) = \upsilon(A,\phi)(e)$$

Απόδ. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Η περίπτωση των ατομικών τύπων είναι εξασφαλισμένη από τον προηγούμενο ορισμό.
Έστω οι τύποι ϕ, ψ. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{W}$ και $e \in \mathcal{E}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \upsilon(A,\phi\wedge\psi)(e) &= (\upsilon(A,\phi)\wedge\upsilon(A,\psi))(e) \\ &= \upsilon(A,\phi)(e)\wedge\upsilon(A,\psi)(e) \\ &\overset{E\Upsilon}{=} w_e(A,\phi)\wedge w_e(A,\psi) \;=\; w_e(A,\phi\wedge\psi) \end{aligned}$$

και ομοίως για την περίπτωση του $\phi \vee \psi$. Για την περίπτωση του $\phi \supset \psi$ έστω τα $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathcal{T}'$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \upsilon(A,\phi\supset\psi) \;=\; \upsilon(A,\phi)\Rightarrow\upsilon(A,\psi) \\ \mathfrak{b} &= \{(e, w_e(A,\phi\supset\psi)) \mid e\in\mathcal{E}\} \end{aligned}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Αρχικώς έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\wedge\upsilon(A,\phi) &\overset{E\Upsilon}{=} \{(e, w_e(A,\phi\supset\psi)) \mid e\in\mathcal{E}\} \wedge \{(e, w_e(A,\phi)) \mid e\in\mathcal{E}\} \\ &= \{(e, w_e(A,\phi\supset\psi)\wedge w_e(A,\phi)) \mid e\in\mathcal{E}\} \\ &\overset{(*)}{\leq} \{(e, w_e(A,\psi)) \mid e\in\mathcal{E}\} \\ &\overset{E\Upsilon}{=} \upsilon(A,\psi)\ , \text{ επομένως } \quad \mathfrak{b}\leq\mathfrak{a} \end{aligned}$$

όπου η $(*)$ ισχύει διότι για κάθε $e \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} w_e(A,\phi\supset\psi)\wedge w_e(A,\phi) &= \bigwedge_{f\in\mathcal{E}} \Big(\mathcal{D}(e,f)\Rightarrow(w_f(A,\phi)\Rightarrow w_f(A,\psi))\Big)\wedge w_e(A,\phi) \\ &\leq (\mathcal{D}(e,e)\Rightarrow(w_e(A,\phi)\Rightarrow w_e(A,\psi)))\wedge w_e(A,\phi) \\ &\overset{\mathcal{D}(e,e)=\top}{=} (w_e(A,\phi)\Rightarrow w_e(A,\psi))\wedge w_e(A,\phi) \\ &= w_e(A,\phi)\wedge w_e(A,\psi) \;\leq\; w_e(A,\psi) \end{aligned}$$

Επιπλέον, έστω ότι $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$, δηλαδή υπάρχει $e \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{a}(e) > \mathfrak{b}(e)$, δηλαδή:

$$\begin{aligned} (\upsilon(A,\phi)\Rightarrow\upsilon(A,\psi))(e) &> w_e(A,\phi\supset\psi) \\ &= \textstyle\bigwedge_{g\in\mathcal{E}}\Big(\mathcal{D}(e,g)\Rightarrow(w_g(A,\phi)\Rightarrow w_g(A,\psi))\Big) \\ &\overset{E\Upsilon}{=} \textstyle\bigwedge_{g\in\mathcal{E}}\Big(\mathcal{D}(e,g)\Rightarrow(\upsilon(A,\phi)(g)\Rightarrow\upsilon(A,\psi)(g))\Big) \\ &= \textstyle\bigwedge_{g\in\mathcal{E},\mathcal{D}(e,g)=\top}\Big(\upsilon(A,\phi)(g)\Rightarrow\upsilon(A,\psi)(g)\Big) \end{aligned}$$

Αν για κάθε $g \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e,g)$ έχουμε $\quad (\upsilon(A,\phi)\Rightarrow\upsilon(A,\psi))(e) \;\leq\; \upsilon(A,\phi)(g)\Rightarrow\upsilon(A,\psi)(g)$, τότε ισχύει ότι $\quad (\upsilon(A,\phi)\Rightarrow\upsilon(A,\psi))(e) \;\leq\; \bigwedge_{g\in\mathcal{E},\mathcal{D}(e,g)=\top}\Big(\upsilon(A,\phi)(g)\Rightarrow\upsilon(A,\psi)(g)\Big)$.
Επομένως, υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e,f)$, τέτοιο ώστε:

$$(\upsilon(A,\phi)\Rightarrow\upsilon(A,\psi))(e) \;\not\leq\; \upsilon(A,\phi)(f)\Rightarrow\upsilon(A,\psi)(f)$$

Επειδή όμως η $\upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi)$ είναι $\mathcal{D}$-συμβατή ($\mathfrak{a} \in \mathcal{T}'$), έχουμε:

$$(\upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi))(e) \;\leq\; (\upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi))(f) \quad \text{επομένως,}$$

$$(\upsilon(A,\phi) \Rightarrow \upsilon(A,\psi))(f) \;\not\leq\; \upsilon(A,\phi)(f) \Rightarrow \upsilon(A,\psi)(f)$$

το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με την πρόταση 5.25. Επομένως, $w_e(A,\phi \supset \psi) = \upsilon(A,\phi)(e)$.

Για την περίπτωση του $\Box\phi$ επιχειρηματολογούμε παρομοίως. Έστω τα $\mathfrak{c},\mathfrak{d} \in \mathcal{T}'$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{c} &= \upsilon(A,\Box\phi) \;=\; \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)\Big) \\
\mathfrak{d} &= \{(e, w_e(A,\Box\phi)) \mid e \in \mathcal{E}\}
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $\mathfrak{c} = \mathfrak{d}$. Αρχικώς έχουμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{d} \wedge \mathcal{R}'(A,B) &= \{(e, w_e(A,\Box\phi)) \mid e \in \mathcal{E}\} \wedge \{(e, \mathcal{R}_e(A,B)) \mid e \in \mathcal{E}\} \\
&= \{(e, \mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(A,\Box\phi)) \mid e \in \mathcal{E}\} \\
&\overset{(**)}{\leq} \{(e, w_e(B,\phi)) \mid e \in \mathcal{E}\} \overset{E\Upsilon}{=} \upsilon(B,\phi) \quad \rightsquigarrow \\
\mathfrak{d} &\leq \mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi) \quad \text{επομένως} \quad \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c}
\end{aligned}$$

όπου η $(**)$ ισχύει διότι για κάθε $e \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(A,\Box\phi) &= \mathcal{R}_e(A,B) \wedge \bigwedge\nolimits_{g\in\mathcal{E}}\Big(\mathcal{D}(e,g) \Rightarrow \bigwedge\nolimits_{\Gamma\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_g(A,\Gamma) \Rightarrow w_g(\Gamma,\phi))\Big) \\
&\leq \mathcal{R}_e(A,B) \wedge (\mathcal{D}(e,e) \Rightarrow \bigwedge\nolimits_{\Gamma\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_e(A,\Gamma) \Rightarrow w_e(\Gamma,\phi))) \\
&\overset{\mathcal{D}(e,e)=\top}{=} \mathcal{R}_e(A,B) \wedge \bigwedge\nolimits_{\Gamma\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_e(A,\Gamma) \Rightarrow w_e(\Gamma,\phi)) \\
&\leq \mathcal{R}_e(A,B) \wedge (\mathcal{R}_e(A,B) \Rightarrow w_e(B,\phi)) \\
&= \mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(B,\phi) \;\leq\; w_e(B,\phi)
\end{aligned}$$

Επιπλέον, έστω ότι $\mathfrak{c} \neq \mathfrak{d}$, δηλαδή υπάρχει $e \in \mathcal{E}$ τέτοιο ώστε $\mathfrak{c}(e) > \mathfrak{d}(e)$, δηλαδή:

$$\upsilon(A,\Box\phi)(e) \;>\; w_e(A,\Box\phi) \;=\; \bigwedge\nolimits_{g\in\mathcal{E}}\Big(\mathcal{D}(e,g) \Rightarrow \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_g(A,B) \Rightarrow w_g(B,\phi))\Big)$$

τότε, επιχειρηματολογώντας όπως στην περίπτωση του $\phi \supset \psi$, υπάρχει $f \in \mathcal{E}$ με $\mathcal{D}(e,f)$ τέτοιο ώστε:

$$\upsilon(A,\Box\phi)(e) \;\not\leq\; \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}(\mathcal{R}_f(A,B) \Rightarrow w_f(B,\phi))$$

Επειδή όμως η $\upsilon(A,\Box\phi)$ είναι $\mathcal{D}$-συμβατή, έχουμε $\upsilon(A,\Box\phi)(e) \leq \upsilon(A,\Box\phi)(f)$, επομένως,

$$\begin{aligned}
\upsilon(A,\Box\phi)(f) &\;\not\leq\; \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}_f(A,B) \Rightarrow w_f(B,\phi)\Big) \quad \Longleftrightarrow \\
\Big(\bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)\Big)\Big)(f) &\;\not\leq\; \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}_f(A,B) \Rightarrow w_f(B,\phi)\Big) \quad \overset{E\Upsilon}{\Longleftrightarrow} \\
\bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big((\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi))(f)\Big) &\;\not\leq\; \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B)(f) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)(f)\Big)
\end{aligned}$$

Άτοπο, διότι, σύμφωνα με την πρόταση 5.25, για κάθε $B \in \mathcal{W}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi))(f) &\;\leq\; \mathcal{R}'(A,B)(f) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)(f) \quad \rightsquigarrow \\
\bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{E}}\Big((\mathcal{R}'(A,B) \Rightarrow \upsilon(B,\phi))(f)\Big) &\;\leq\; \bigwedge\nolimits_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B)(f) \Rightarrow \upsilon(B,\phi)(f)\Big)
\end{aligned}$$

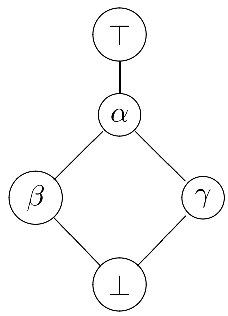
Η περίπτωση του $\Diamond\phi$ είναι σχετικά εύκολη. Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\begin{aligned} w_e(A, \Diamond\phi) &= \bigvee_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}_e(A,B) \wedge w_e(B,\phi)\Big) \\ &\overset{E\Upsilon}{=} \bigvee_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B)(e) \wedge \upsilon(B,\phi)(e)\Big) \\ &= \bigvee_{B\in\mathcal{W}}\Big((\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi))(e)\Big) \\ &= \Big(\bigvee_{B\in\mathcal{W}}\Big(\mathcal{R}'(A,B) \wedge \upsilon(B,\phi)\Big)\Big)(e) \;=\; \upsilon(A,\Diamond\phi)(e) \end{aligned}$$

■

5.3.2 Ένα Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε πάλι τους δύο αρχικούς ειδικούς e, f με τον e να επικρατεί του f. Τώρα οι ειδικοί αποφαίνονται για την αλήθεια τροπικών προτάσεων δίνοντας αληθοτιμές από το διπλανό δικτυωτό. Επομένως, εξετάζουν προτάσεις της $\mathcal{L}_{\mathcal{T}}^{mod}$, όπου $\mathcal{T}$ το εν λόγω δικτυωτό. Εφόσον ο e επικρατεί του f, οι αληθοτιμές που δίνει ο f για κάθε τύπο είναι μεγαλύτερες ή ίσες από τις αντίστοιχες του e. Μπορούμε λοιπόν με αυτόν τον απλό κανόνα να βρούμε το σύνολο των ολικών αληθοτιμών, οι οποίες είναι 14 στο πλήθος και αποτελούν τα στοιχεία του $\mathcal{T}'$. Τις παραθέτουμε στον παρακάτω πίνακα.



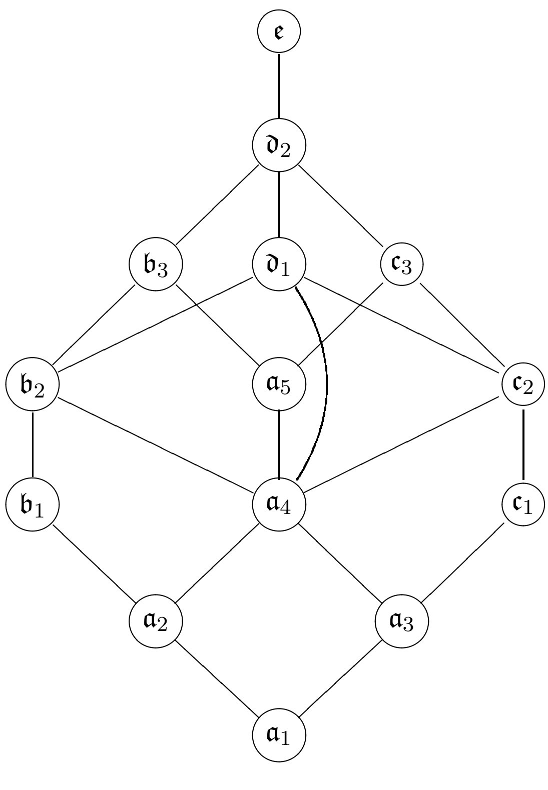
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1(e) = \bot$	$\mathfrak{a}_1(f) = \bot$
$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2(e) = \bot$	$\mathfrak{a}_2(f) = \beta$
$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3(e) = \bot$	$\mathfrak{a}_3(f) = \gamma$
$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4(e) = \bot$	$\mathfrak{a}_4(f) = \alpha$
$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_5(e) = \bot$	$\mathfrak{a}_5(f) = \top$
$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1(e) = \beta$	$\mathfrak{b}_1(f) = \beta$
$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2(e) = \beta$	$\mathfrak{b}_2(f) = \alpha$
$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3(e) = \beta$	$\mathfrak{b}_3(f) = \top$
$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1(e) = \gamma$	$\mathfrak{c}_1(f) = \gamma$
$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2(e) = \gamma$	$\mathfrak{c}_2(f) = \alpha$
$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3(e) = \gamma$	$\mathfrak{c}_3(f) = \top$
$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1(e) = \alpha$	$\mathfrak{d}_1(f) = \alpha$
$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{d}_2(e) = \alpha$	$\mathfrak{d}_2(f) = \top$
$\mathfrak{e}$	$\mathfrak{e}(e) = \top$	$\mathfrak{e}(f) = \top$

Για το δικτυωτό $\mathcal{T}$ μπορούμε να υπολογίσουμε αρχικώς το αποτέλεσμα της πράξης του $\wedge$ για κάθε ζεύγος στοιχείων του. Παραθέτουμε λοιπόν έναν πίνακα συμπληρωμένο κατά το ήμισυ (λόγω συμμετρίας) για την πράξη του $\wedge$ στο $\mathcal{T}'$.

$\bigwedge$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{e}$
$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_1$
$\mathfrak{a}_2$		$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$
$\mathfrak{a}_3$			$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_3$
$\mathfrak{a}_4$				$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$
$\mathfrak{a}_5$					$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{a}_5$
$\mathfrak{b}_1$						$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{a}_1$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{a}_2$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$	$\mathfrak{b}_1$
$\mathfrak{b}_2$							$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_2$
$\mathfrak{b}_3$								$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{a}_3$	$\mathfrak{a}_4$	$\mathfrak{a}_5$	$\mathfrak{b}_2$	$\mathfrak{b}_3$	$\mathfrak{b}_3$
$\mathfrak{c}_1$									$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$	$\mathfrak{c}_1$
$\mathfrak{c}_2$										$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_2$
$\mathfrak{c}_3$											$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_2$	$\mathfrak{c}_3$	$\mathfrak{c}_3$
$\mathfrak{d}_1$												$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$	$\mathfrak{d}_1$
$\mathfrak{d}_2$													$\mathfrak{d}_2$	$\mathfrak{d}_2$
$\mathfrak{e}$														$\mathfrak{e}$

Αν και ο προηγούμενος πίνακας λόγω του μεγέθους του δεν είναι εύκολα αναγνώσιμος, μας βοηθά να κατασκευάσουμε το διάγραμμα του $\mathcal{T}'$.

Επομένως, το παραγόμενο και ισοδύναμο $\mathcal{T}'$-μοντέλο για το παράδειγμά μας είναι μεγέθους 14, με τις αληθοτιμές του να είναι τα στοιχεία του δικτυωτού το οποίο βλέπουμε στο διπλανό σχήμα.



Βιβλιογραφία

[BdRV01] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal Logic*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.

[Bir67] Garrett Birkhoff. *Lattice Theory*. American Mathematical Society, Providence Rhode Island, third edition, 1967.

[BK99] Robert K Brayton and Sunil P Khatri. Multi-valued logic synthesis. In *Proceedings of the 12th International Conference on VLSI Design*, 1999.

[End72] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, San Diego, California, 1972.

[Fit92a] Melvin C. Fitting. Many-valued modal logics. *Fundamenta Informaticae*, 15:235–254, 1992.

[Fit92b] Melvin C. Fitting. Many-valued modal logics II. *Fundamenta Informaticae*, 17:55–73, 1992.

[Fit94] Melvin C. Fitting. Kleene's three valued logics and their children. *Fundamenta Informaticae*, 20:113–131, 1994.

[Grä78] George Grätzer. *General Lattice Theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1978.

[GTL89] Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont. *Proofs and Types*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989.

[Kle71] Stephen Cole Kleene. *Introduction to Metamathematics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1971.

[MPV02] William McCune, R. Padmanabhan, and Robert Veroff. Yet another single law for lattices. Forthcoming in *Algebra Universalis*, 2002.

[Ram97] R. Ramanujam. Lecture notes on modal logic in computer science. Available online, 1996–1997.

[Ras74] Helena Rasiowa. *An Algebraic Approach to Non-Classical Logics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1974.

Ευρετήριο