Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών

Διπλωματική εργασία:

Υβριδική Λογική

Ευάγγελος Τζανής

Τριμελής επιτροπή Καθηγητών:

Επιβλέπων: Στάθης Ζάχος

Μέλη: Τίμος Σελλής
Ανδρέας Γεώργιος Σταφυλοπάτης

Αθήνα, 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τμήμα Πληροφορικής

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Υβριδική Λογική

ΦΟΙΤΗΤΗΣ
Ευάγγελος Α. Τζανής

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Ευστάθιος Ζάχος, Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 16^h Ιουλίου 2003

Ευστάθιος Ζάχος
Καθηγητής ΕΜΠ

Ανδρέας Γεώργιος Σταφυλοπάτης
Καθηγητής ΕΜΠ

Τίμος Σελλής
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούνιος 2003

Τζανής Ευάγγελος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Περίληψη. Ο πυρήνας της τροπικής λογικής είναι ελκυστικά απλός: περιέχει την προτασιακή λογική και έναν νέο σύνδεσμο με συνέπεια να αποτελεί ένα επαρκώς ορισμένο κομμάτι της πρωτοβάθμιας λογικής(Melvin Fitting).

Η υβριδική λογική είναι είδος τροπικής λογικής με τον επιπλέον μηχανισμό αναφοράς στους κόσμους ενός Kripke μοντέλου. Για παράδειγμα , στην προτασιακή υβριδική λογική προσθέτουμε ένα δεύτερο είδος ατομικών τύπων. Τα ονόματα. Η ιδέα: κάθε όνομα είναι αληθές μόνο σε ένα κόσμο ενός μοντέλου. Επεκτείνουμε τη βασική υβριδική λογική με το σύμβολο για την ικανοποιησιμότητα @ (at). Τα προηγούμενα είναι θέματα του έκτου κεφαλαίου. Στο έβδομο κεφάλαιο περιλαμβάνονται προχωρημένα θέματα υβριδικής λογικής: Πολυπλοκότητα, Beth's Definability, Craig's Interpolation και Αμφιπροσομοίωση (bisimulation).

Προκειμένου να κατανοήσουμε τις τεχνικές και τις μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται στην υβριδική λογική μελετάμε τα εξής θέματα:

- **Κεφάλαιο 1ο :** Πρωτοβάθμια Γλώσσα. Η εργασία του Fitting στο πρόβλημα της επίλυσης (resolution).
- **Κεφάλαιο 2 και 3:** Παιχνίδια, μια σύντομη εισαγωγή προκειμένου:
  - να ορίσουμε την τροπική και την υβριδική.
  - να προσδιορίσουμε την κλάση πολυπλοκότητας του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας.
- **Κεφάλαιο 4:** Βασική τροπική Λογική. Αμφιπροσομοίωση. p-morphism. Πολυπλοκότητα. Η εργασία του Fitting σχετικά με τα ταμπλό της τροπικής λογικής.
- **Κεφάλαιο 5:** Εφαρμοσμένες τροπικές λογικές και η σχέση τους με την υβριδική λογική. Περιγραφική Λογική. Χρονική Λογική.

Abstract. The core of modal logic is elegantly simple: classical propositional logic with one extra operator, corresponding to a well-defined fragment of quantified classical logic. But over the years a number of addons have been proposed, all for good reasons. Melvin Fitting

For instance, taking an ordinary propositional modal logic and adding a second sort of atomic formula we construct a hybrid language. These new atoms are called **nominals**. Key idea: insist that each nominal be true at exactly one world in any model. Furthermore adding the symbol @ (at) for the satisfiability we expand the basic hybrid logic. These are the subjects of chapter six. In chapter seven several advanced themes are studied: Complexity, Craig's Interpolation, Beth's Definability and Hybrid Bisimulation.

In order to have an adequate background related to techniques and methods of hybrid's logic literature we studied the following themes:

- **Chapter 1:** First Order Logic. Fitting's work in the Resolution Problem.
- **Chapter 2 and 3:** Games. A short introduction in order:
  - to define modal and hybrid bisimulation using games terminology.
  - to determine the complexity class of satisfiability problem.
- **Chapter 4:** Basic Modal Logic. Bisimulation. P-morphism. Complexity. Fitting's destructive method.
- **Chapter 5:** Applied Modal Logic and their connection with Hybrid Logic. Descriptive Logic. Temporal Logic.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Πρωτοβάθμια Λογική

1.1 Εισαγωγή

Η Λογική που χρησιμοποιείται από τους μαθηματικούς για απόδειξη θεωρημάτων αποτελεί κλάδο των Μαθηματικών, όπως η συναρτησιακή ανάλυση, η άλγεβρα και η γεωμετρία είναι κλάδοι της Μαθηματικής επιστήμης.

Για αρκετά χρόνια **Λογική** σήμαινε **Κλασσική Λογική**, δηλαδή πρωτοβάθμια λογική (first order logic) και υπάρχουν λόγοι για αυτό. Η πρωτοβάθμια λογική παρέχει απλότητα, καθαρό τρόπο κατασκευής μοντέλων, ισχυρή εκφραστικότητα, συντακτική και σημασιολογική αυστηρότητα.

Αυτός ήταν ένας τρόπος να πούμε ότι η πρωτοβάθμια λογική... είναι ωραία. Είναι ωραία εφόσον είναι χρήσιμη για πολλές εφαρμογές. Αλλά δεν είναι η καταλληλότερη για εφαρμογές που απαιτούν αποτελεσματικά συμπερασματικά συστήματα. Με λίγα λόγια, το γεγονός ότι για την πρωτοβάθμια λογική το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας είναι μη αποκρίσιμο, αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα της συγκεκριμένης θεωρίας.

Επίσης, πλήθος εφαρμογών στους τομείς της Τεχνητής Νοημοσύνης, της Ανάπτυξης Λογισμικού και στις Βάσεις Δεδομένων έθεσαν τα όρια για αποτελεσματικούς συμπερασματικούς κανόνες. Η πρωτοβάθμια λογική δεν πληρούσε τις προηγούμενες επιταγές. Η ανάγκη για νέους συμπερασματικούς κανόνες ή για νέες λογικές ήταν αδήριτος. Όμως η υπολογιστική δύναμη της πρωτοβάθμιας λογικής ήταν δεδομένη. Άρα έπρεπε να αλλάξει η δομή της πρωτοβάθμιας λογικής. Νέες εφαρμογές, λοιπόν, οδήγησαν σε νέους φορμαλισμούς και επομένως σε νέους μηχανισμούς απόδειξης.

Στις επόμενες παραγράφους θα ορίσουμε τις πρωτοβάθμιες γλώσσες. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε τον τυπικό ορισμό των τροπικών λογικών καθώς και θα παρουσιάσουμε κάποιες ιδιότητές τους. Οι ιδιότητες αυτές θα έχουν διττό χαρακτήρα. Αφενός από μαθηματική πλευρά να αναδείξουν τη δομή των τροπικών λογικών αφετέρου να αποδείξουν ότι οι τροπικές λογικές έχουν όλα τα χαρακτηριστικά επαρκούς ορισμένης θεωρίας για εφαρμογές πληροφορικής.

1.2 Πρωτοβάθμια Λογική

Ορισμός 1.2.1 *Η πρωτοβάθμια γλώσσα L αποτελείται από τα εξής σύμβολα :*

Βασικά σύμβολα

- *Παρενθέσεις* : (,).
- *Σύνδεσμοι* : $\rightarrow$, $\neg$.
- *Μεταβλητές* : $v_1, v_2, ..., v_n, ...$
- *Ποσοδείκτης* : $\forall$.

Προαιρετικά Σύμβολα

- *Σύμβολο ισότητας* : =.
- *Σύμβολα Κατηγορήματος: Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 0$, υπάρχει σύνολο από n-μελή σύμβολα κατηγορήματος.*
- *Σύμβολα σταθερών : Ένα σύνολο από σύμβολα.*
- *Σύμβολα συναρτήσεων : Για κάθε φυσικό αριθμό $n > 0$, υπάρχει σύνολο n-μελών συμβόλων συναρτήσεων.*

Σημείωση 1.2.1 *Ένα συναρτησιακό σύμβολο n-θέσεων συμβολίζει συνάρτηση με n μεταβλητές. Για παράδειγμα, αν f είναι συνάρτηση τριών θέσεων, δηλαδή $f(v_1, v_2, v_3)$, τότε το προηγούμενο σύμβολο αναπαριστά τιμή που προκύπτει έπειτα από πράξη μεταξύ των μεταβλητών v_1, v_2, v_3. Ένα n-θέσεων κατηγορηματικό σύμβολο αναπαριστά ιδιότητα ή σχέση n μεταβλητών; για παράδειγμα, αν P σύμβολο 4-θέσεων σύμβολο κατηγορήματος, τότε $P(v_1, v_2, v_3, v_4)$ βεβαιώνει συγκεκριμένη ιδιότητα ή σχέση μεταξύ των αντικειμένων v_1, v_2, v_3, v_4. Τα κατηγορηματικά σύμβολα ωστόσο ονομάζονται και σχεσιακά σύμβολα (relation symbols).*

Παράδειγμα 1.2.1 Συναρτήσεις:

- **Γραμμικής άλγεβρας**:

$$f(t_1, t_2, t_3) = A \cdot \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}$$

- **Ανάλυσης** : $g(x, y) = sin(x \cdot y) + 2, f(x, y, z) = 3 \cdot x + 4 \cdot y + z$

Κατηγορηματικά Σύμβολα:

- **Θεωρίας αριθμών** $\equiv$:

$$a \equiv b(mod\ n)$$

  αν και μόνο αν ο αριθμός n *διαιρεί τέλεια τον αριθμό* $(a - b)$ *όπου οι αριθμοί* a, b, n *είναι φυσικοί αριθμοί.*

- **Γραμμικής άλγεβρας** :

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

  αν και μόνο αν τα διανύσματα x_1, x_2, x_3, x_4 *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, όπου* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R^4$.

Σημείωση 1.2.2 *Στον προηγούμενο ορισμό της πρωτοβάθμιας λογικής χρησιμοποιήσαμε το σύνολο* $(\neg, \rightarrow)$, *το οποίο είναι πλήρες σύνολο συμβόλων. Στην απόδειξη επάρκειας του προηγούμενου συνόλου μας βοηθά ο παρακάτω πίνακας:*

Αρχικός τύπος	*Συντομογραφία*
$p \vee q$	$\neg p \rightarrow q$
$p \wedge q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$
$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$\exists u P$	$\neg \forall u \neg p$

Παράδειγμα 1.2.2 *Ας δούμε μερικά παραδείγματα πρωτοβάθμιων γλωσσών:*

- **Ευκλείδεια Γεωμετρία** : $L = \{P, L, O, A, C, B, R, =\}$. Και περιέχει τα παρακάτω κατηγορήματα:

  1. $P(x)$ αν και μόνο αν το x είναι σημείο.
  2. $L(x)$ αν και μόνο αν x είναι γραμμή.
  3. $O(x, y)$ αν και μόνο αν x είναι σημείο στο y.
  4. $A(x)$ αν και μόνο αν x είναι μια γωνία.
  5. $C(x)$ αν και μόνο αν x είναι ένας κύκλος.
  6. $B(x, y, z)$ αν και μόνο αν το σημείο x είναι μεταξύ των σημείων y και z.
  7. $R(x, y)$ αν και μόνο αν x και y συγκλίνουν.

  Ο ποσοδείκτης $\forall$ σημαίνει: **για όλα τα αντικείμενα που ανήκουν στο ίδιο επίπεδο**. Άρα η πρόταση :

  $$\forall v_1 \forall v_2((P(v_1) \wedge P(v_2)) \rightarrow \exists v_3(L(v_3) \wedge (O(v_1, v_3) \wedge O(v_2, v_3)))$$

  δηλώνει ότι για κάθε δυο σημεία υπάρχει μια γραμμή που τα ενώνει.

- **Θεωρία Συνόλων**: L $= \{\in, =\}$ όπου το $\in$ είναι κατηγορηματικό σύμβολο δυο θέσεων. Γράφουμε $\in(x, y)$ αντί για $x \in y$. Ο Ο καθολικός ποσοδείκτης θα σημαίνει **για όλα τα σύνολα**. Στη γλώσσα L μπορεί κανείς να εκφράσει τα εξής:

  1. $\forall v_1 \exists v_2(v_1 \in v_2)$: Κάθε σύνολο είναι μέλος ενός άλλου συνόλου.
  2. $\forall v_3(v_3 \in v_1 \rightarrow v_3 \in v_2)$: Κάθε στοιχείο του v_1 είναι και στοιχείο του v_2
  3. $\forall v_2 \forall v_3((v_3 \in v_1 \wedge v_2 \in v_1) \rightarrow v_2 = v_3)$: Το v_1 έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο
  4. $\exists v_1(\exists v_2(v_2 \in v_1) \wedge \forall v_2(v_2 \in v_1 \rightarrow \exists v_3(v_3 \in v_1 \wedge v_2 \in v_3)))$: Υπάρχει στοιχείο με άπειρα στοιχεία.

- **Θεωρία Αριθμών**: L $= \{<, 0, S, +, \cdot, E\}$ όπου :

  – το $<$ είναι δυο θέσεων- σχεσιακό σύμβολο που σημαίνει μικρότερο από.
  – το 0 είναι σταθερό σύμβολο.
  – το S είναι συναρτησιακό σύμβολο μιας θέσης. Όπου $S(n) = n + 1$
  – οι πράξεις είναι συναρτησιακά σύμβολα δύο θέσεων $+, \cdot$

– το E είναι συναρτησιακό σύμβολο δυο θέσεων για δυνάμεις αριθμών $E(x, y) = x^y$.

Συνεπώς η πρόταση :

$$\forall v_1((v_1 > S(S(S(0))) \vee v_1 = S(S(S(0)))) \rightarrow \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 + (E(v_2, v_1), E(v_3, v_1)) \neq E(v_4, v_1))$$

δηλώνει το γνωστό θεώρημα Fermat: **Για όλους τους αριθμούς v_1 μεγαλύτερους ή ίσους με το 3, η εξίσωση $v_2^{v_1} + v_3^{v_1} = v_4^{v_1}$ δεν έχει λύσεις.**

Αν έκφραση είναι μια ακολουθία των συμβόλων πρωτοβάθμιας λογικής, τότε θα πρέπει αναγωγικά να ορίσουμε τις γραμματικά (wff) καλοφτιαγμένες προτάσεις της γλώσσας $\mathcal{L}$.

Ορισμός 1.2.2 Όρος *γλώσσας $\mathcal{L}$ είναι μια έκφραση t όπου:*

- είτε είναι μεταβλητή ή
- είτε είναι μια σταθερά ή
- ένα συναρτησιακό σύμβολο n-θέσεων: $f(t_1, t_2, ..., t_n)$ όπου κάθε t_i είναι **όρος**.

Σημείωση 1.2.3 *Αν η γλώσσα δεν έχει συναρτησιακά σύμβολα τότε όρος είναι οι μεταβλητές και οι σταθερές.*

Παράδειγμα 1.2.3 *Για τη θεωρία αριθμών έχουμε τους εξής όρους :*

- $S(S(S(0)))$
- $E(S(0), v_3)$

Ορισμός 1.2.3 *Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα. Η* **ατομική έκφραση** *της $\mathcal{L}$ είναι μια έκφραση* **A** *τέτοια ώστε να διατηρεί τις εξής ιδιότητες:*

- Η **A** έχει την μορφή $t_1 = t_2$ όπου t_1 και t_2 είναι όροι της $\mathcal{L}$.
- Η **A** έχει την μορφή $P(t_1, t_2, ..., t_n)$ όπου P είναι ένα n-θέσεων κατηγορηματικό σύμβολο $\mathcal{L}$ και t_i είναι όροι της $\mathcal{L}$.

Ορισμός 1.2.4 *Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα. Οι καλοφτιαγμένες εκφράσεις (τύποι ή φόρμουλες) (wff) της $\mathcal{L}$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής :*

- Η φ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν φ είναι μια ατομική πρόταση

- Η $(\neg\alpha)$ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν α είναι επίσης καλοφτιαγμένη.
- Η $(\ \alpha \to \beta)$ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν α και β είναι επίσης καλοφτιαγμένες.
- Η $\forall v_i \alpha$ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν α είναι επίσης καλοφτιαγμένη και v_i είναι μεταβλητή.

Οι καλοφτιαγμένες προτάσεις είναι οι συντακτικά ορθές προτάσεις της πρωτοβάθμιας γλώσσας. Εύκολα βλεπουμε ότι ο προηγούμενος ορισμός ικανοποιεί και την μοναδική αναγνωσιμότητα.

Ορισμός 1.2.5 *Έστω $\mathcal{L}$ πρωτοβάθμια γλώσσα και μια v μεταβλητή αυτής. Η ελεύθερη μεταβλητή σε μια καλοφτιαγμένη πρόταση της γλώσσας $\mathcal{L}$ ορίζεται αναδρομικά ως εξής:*

- Η v είναι ελεύθερη στην πρόταση φ αν και μόνο αν φ είναι ατομική πρόταση και η v εμφανίζεται ως σύμβολο σε αυτήν.
- Η v είναι ελεύθερη στην πρόταση $(\neg\alpha)$ αν και μόνο αν η v είναι ελεύθερη στην πρόταση α.
- Η v είναι ελεύθερη στην πρόταση $(\alpha \to \beta)$ αν και μόνο αν η v είναι ελεύθερη στην πρόταση α ή αν η v είναι ελεύθερη στην πρόταση β.
- Η v είναι ελεύθερη στην πρόταση $\forall v_i \alpha$ αν και μόνο αν η v είναι ελεύθερη στην πρόταση α και $v \neq v_i$.

Παράδειγμα 1.2.4 *Ας αναλογιστούμε τις παρακάτω προτάσεις της πρωτοβάθμιας γλώσσας της αριθμητικής :*

- $\forall v_1(v_1 = S(v_2) \to v_2 < v_1)$ η v_2 είναι ελεύθερη.
- $\forall v_1 \forall v_2(v_1 = S(v_2) \to v_2 < v_1)$ όλες δεσμευμένες.
- $\forall v_1 \forall v_2(v_1 = S(v_2) \to v_2 < v_1) \to v_1 = v_1)$ η μεταβλητή v_1 είναι ελεύθερη.

Αν φ είναι **σωστά συντακτικά πρόταση**, τ είναι **όρος** και x είναι μια **μεταβλητή** τότε το σύμβολο $\varphi\{\tau/x\}$ δηλώνει την αντικατάσταση της μεταβλητής x σε όλες τις ελεύθερες εμφανίσεις της από τον όρο τ.

1.3 Δομές πρωτοβάθμιας λογικής

Ορισμός 1.3.1 *Έστω $\mathcal{L} = \{P_1, P_2, ..., c_1, c_2, ..., f_1, f_2, ..., =\}$. Μια δομή $\mathcal{U}$ (ή ερμηνεία) για κάθε $\mathcal{L}$ είναι σύνολο της μορφής*

$$\mathcal{U} = (A, P_1^{\mathcal{U}}, P_2^{\mathcal{U}}, ..., c_1^{\mathcal{U}}, c_2^{\mathcal{U}}, ..., f_1^{\mathcal{U}}, f_2^{\mathcal{U}}, ...)$$

τέτοιο ώστε:

- το σύνολο A είναι διάφορο του κενού και αποτελεί το κόσμο ή το αρχικό σύνολο της δομής
- η δομή $\mathcal{U}$ αντιστοιχεί σε κάθε κατηγορηματικό σύμβολο n-θέσεων ένα κατηγορηματικό σύμβολο n-θέσεων P όπου $P^{\mathcal{U}} \subseteq A^{\mathcal{U}}$
- η δομή $\mathcal{U}$ αντιστοιχεί σε κάθε σύμβολο c σταθεράς ένα σύμβολο (στοιχείο) σταθεράς $c^{\mathcal{U}}$ στο κόσμο A.
- η δομή $\mathcal{U}$ αντιστοιχεί σε κάθε σύμβολο f συνάρτησης n-θέσεων, σύμβολο n-θέσεων συνάρτησης $f^{\mathcal{U}}$ στο κόσμο A, τέτοιο ώστε $f^{\mathcal{U}} : A^n \to A$

Παράδειγμα 1.3.1 *Για τη θεωρία συνόλων ορίζουμε την δομή: $\mathcal{U} = (\mathcal{N}, \in^{\mathcal{U}})$ όπου $\mathcal{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών, και $\in^{\mathcal{U}}$ είναι το σύνολο ζευγών για τα οποία $< m, n >$ τέτοια ώστε $m < n$. Άρα, $\in^{\mathcal{U}} = \{(m, n) : m < n$ και $m, n \in \mathcal{U}\}$. Η δομή αυτή ικανοποιεί την ιδιότητα 1 που ορίσαμε προηγουμένως, συνεπώς:*

$$\mathcal{U} \models \forall v_1 \exists v_2 (v_1 \in v_2)$$

Απονομή αλήθειας στη δομή $\mathcal{U}$ είναι η συνάρτηση α με αρχικό σύνολο μεταβλητών το $A^{\mathcal{U}}$. Η τιμή του $\alpha(\tau)$ του όρου τ στην δομή $\mathcal{U}$ υπό την απονομή α είναι $\alpha(x)$ αν ο όρος τ είναι η μεταβλητή x και $c^{\mathcal{U}}$ αν τ είναι σταθερά c.

Η σχέση αληθείας $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$ (με λόγια: η φ είναι αληθείς στην δομή $\mathcal{U}$ υπό την απονομή α) ορίζεται επαγωγικά στην κατασκευή της πρότασης φ με τον ακόλουθο τρόπο:

- $\mathcal{U} \models^{\alpha} P_i(\tau_1, ..., \tau_n)$ αν και μόνο αν $< \alpha(\tau_1), ..., \alpha(\tau_n) > \in P_i^{\mathcal{U}}$
- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \top$ και δεν ισχύει ασφαλώς το αντίθετο $\mathcal{U} \models^{\alpha} \bot$.

- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi \wedge \psi$ αν και μόνο αν $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$ και $\mathcal{U} \models^{\alpha} \psi$
- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi \vee \psi$ αν και μόνο αν $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$ ή $\mathcal{U} \models^{\alpha} \psi$
- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi \rightarrow \psi$ αν και μόνο αν $\mathcal{U} \models^{\alpha} \psi$ όταν $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$
- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \neg\varphi$ αν και μόνο αν δεν ισχύει $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$
- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \forall x\varphi$ αν και μόνο αν $\mathcal{U} \models^{b} \varphi$ για κάθε αποτίμηση b στη δομή $\mathcal{U}$ ώστε $\alpha(x) = b(y)$ για όλες τις μεταβλητές διαφορετικές του x
- $\mathcal{U} \models^{\alpha} \exists x\varphi$ αν και μόνο αν $\mathcal{U} \models^{b} \varphi$ για κάποια αποτίμηση b στη δομή $\mathcal{U}$ ώστε $\alpha(x) = b(y)$ για όλες τις μεταβλητές διαφορετικές του x
- στην περίπτωση ισότητας έπεται: $\mathcal{U} \models^{\alpha} \tau_1 = \tau_2$ αν και μόνο αν $\alpha(\tau_1) = \alpha(\tau_2)$.

Θα πρέπει να έχει γίνει σαφές ότι η αληθοτιμή μιας πρότασης $\varphi(x_1, ..., x_n)$ στη δομή $\mathcal{U}$ εξαρτάται από τις αληθοτιμές των μεταβλητών της και μόνο. Για αυτό μπορούμε να γράψουμε: Αντί $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$ γράφουμε $\mathcal{U} \models \varphi(\alpha(x_1), ..., \alpha(x_n))$.

Αν $\mathcal{U} \models^{\alpha} \varphi$ για όλες τις αποτιμήσεις στη δομή $\mathcal{U}$, τότε λέμε ότι η φ ικανοποιείται στην δομή $\mathcal{U}$ και γράφουμε $\mathcal{U} \models \varphi$. Η πρόταση φ ονομάζεται και ταυτολογία.

Το σύνολο προτάσεων έστω Γ είναι αληθές στη δομή $\mathcal{U}$ αν κάθε πρόταση του συνόλου Γ ικανοποιείται στη δομή $\mathcal{U}$. Το σύνολο Γ είναι αληθές σε κλάση δομών πρωτοβάθμιων δομών (δηλ. $\mathcal{C} \models \Gamma$) αν $\mathcal{U} \models \Gamma$ για κάθε $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$. Η θεωρία της κλάσης $\mathcal{C}$ είναι ένα σύνολο από προτάσεις οι οποίες είναι αληθές στο $\mathcal{C}$. Συνεπώς η κλασσική πρωτοβάθμια λογική ορίζεται ως το σύνολο των προτάσεων που ικανοποιούνται σε όλες τις πρωτοβάθμιες δομές. Για λόγους συντακτικής πληρότητας παραθέτουμε το **ακόλουθο σχήμα αξιωμάτων** και **κανόνων απαγωγής**.

Σχήμα αξιωμάτων:

1. $\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
2. $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow x)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow x))$
3. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi$
4. $\varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$

5. $\varphi \to (\varphi \to \varphi \wedge \psi)$
6. $\varphi \vee \psi \to \varphi$
7. $\varphi \vee \psi \to \psi$
8. $\varphi \vee \psi \to \psi$
9. $(\varphi \to \psi) \to ((x \to \psi) \to (\varphi \vee x \to \psi))$
10. $\bot \to \varphi$
11. $\varphi \vee (\varphi \to \bot)$

Κανόνες Απαγωγής

---

1. $\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$ (Modus Ponens(MP))
2. Αν $\psi \to \varphi$ τότε $\psi \to \forall x \phi$ όταν το x δεν είναι ελεύθερο στην ψ
3. Αν $\varphi \to \psi$ τότε $\exists x \phi \to \psi$ όταν το x δεν είναι ελεύθερο στην ψ

Μια πρόταση φ είναι αποδείξιμη στο σύνολο Γ αν υπάρχει ακολουθία προτάσεων οι οποίες τερματίζουν με την πρόταση φ και κάθε μέλος της ακολουθίας είναι είτε ταυτολογία, δηλαδή μέλος του συνόλου Γ, είτε είναι εφαρμογή προηγούμενων αξιωμάτων, ή προέκυψε από προηγούμενα μέλη της ακολουθίας με κανόνες απαγωγής. Σύμφωνα με το θεώρημα πληρότητας του Gödel για κάθε σύνολο προτάσεων Γ και κάθε πρόταση φ έχουμε $\Gamma \models \varphi$ αν και μόνο αν υπάρχει απόδειξη της φ από το σύνολο Γ ή γράφουμε: $\Gamma \vdash \varphi$.

Παράδειγμα 1.3.2 *Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι:* $\neg P \to (P \to Q)$. *Η απόδειξη είναι:*

Βήμα	Πρόταση	Απόδειξη
1	$\neg P \to (\neg P \to (P \to Q)) \to ((\neg P \to \neg P) \to (\neg P \to (P \to Q))$	**A2**
2	$\neg P \to (\neg P \to (P \to Q))$	**A1**
3	$(\neg P \to \neg P) \to (\neg P \to (P \to Q))$	MP 1 και 2
4	$\neg P \to \neg P$	**A1**
5	$\neg P \to (P \to Q)$	MP 3 και 4

1.4 Επίλυση Resolution

Θα περιοριστούμε στη μέθοδο επίλυσης **προτασιακής λογικής** σύμφωνα με το [1]. Οι προτάσεις της προτασιακής μεταβλητής χωρίζονται σε δυο κατηγορίες:

- Συζεύξεις, ας τις ονομάσουμε α. Όπου α_1 και α_2 τα στοιχεία των α-προτάσεων.
- Διαζεύξεις, ας τις ονομάσουμε β. Όπου β_1 και β_2 τα στοιχεία των β-προτάσεων.

α	α_1	α_2
$(X \wedge Y)$	X	Y
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \rightarrow Y)$	X	$\neg Y$

β	β_1	β_2
$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$(X \vee Y)$	X	Y
$(X \rightarrow Y)$	$\neg X$	Y

Διαισθητικά η πρόταση τύπου α είναι αληθής αν και μόνο αν τα α_1 και α_2 είναι αληθή. Για την πρόταση τύπου β έχουμε ότι είναι αληθής αν και μόνο αν ένα από τα β_1 ή β_2 είναι αληθή.

Τα βασικά δομικά στοιχεία της μεθόδου που έπεται είναι:

- $[X_1, ..., X_n]$ συνώνυμο του $X_1 \vee ... \vee X_n$
- $< X_1, ..., X_n >$ συνώνυμο του $X_1 \wedge ... \wedge X_n$
- το [] είναι αναγνωριστικό του false και το $<>$ είναι του true.
- Αν $X_1, ..., X_n$ είναι προτάσεις τότε το $[X_1, ..., X_n]$ λέγεται **πρόταση**.
- Για κάθε πρόταση C_i το $< C_1, ..., C_n >$ λέγεται **λίστα προτάσεων.**
- Αν L_i είναι λίστα προτάσεων τότε το $[X_1, ..., X_n]$ λέγεται **μπλοκ**.

Τα μπλοκ δε χρειάζονται στην επίλυση φόρμουλας προτασιακής λογικής.

Κάθε λίστα προτάσεων η οποία περιέχει την **κενή** πρόταση θα λέγεται **κλειστή**. Επίσης κλειστό λέγεται και το μπλοκ το οποίο περιέχει κλειστή λίστα προτάσεων. Το κλειστό μπλοκ προκύπτει χρησιμοποιώντας τους κανόνες που ακολουθούν. Όπως σε κάθε σύστημα επίλυσης έτσι και σε αυτό προκειμένου να αποδείξουμε ότι η πρόταση X είναι θεώρημα θα αποδείξουμε ότι το μπλοκ $[<\neg X>]$ είναι κλειστό. Οι κανόνες που ακολουθούν είναι δυο τύπων. Ο πρώτος αφορά αντικατάσταση και ο δεύτερος τύπος προσθήκη νέων προτάσεων.

Οι κανόνες είναι οι εξής:

- **Διπλή Άρνηση**: Η πρόταση $\neg\neg Z$ αντικαθίσταται από την Z. Σχηματικά:
$$\frac{\neg\neg Z}{Z}$$
- **Σύζευξη** : Αν α-πρόταση προκύπτει σε πρόταση C, τότε η πρόταση C μπορεί να αντικατασταθεί από δυο προτάσεις C_1 και C_2, όπου και οι δυο προτάσεις περιέχουν ότι η C και επιπροσθέτως τα στοιχεία α_1 και α_2 αντιστοίχως. Σχηματικά:
$$\frac{[A_1, ..., A_n, \alpha]}{[A_1, ..., A_n, \alpha_1], [A_1, ..., A_n, \alpha_2]}$$
- **Διάζευξη**: β-πρόταση αντικαθίσταται από δυο προτάσεις β_1 και β_2. Σχηματικά:
$$\frac{\beta}{\beta_1, \beta_2}$$
- **Κανόνας Επίλυσης**: Έστω δυο προτάσεις C_1, C_2, η C_1 περιέχει το Z, και η C_2 περιέχει το $\neg Z$. Τότε προστίθεται πρόταση C περιέχοντας τα μέλη των προτάσεων C_1, C_2 χωρίς τις εμφανίσεις των Z και $\neg Z$. Σχηματικά :
$$\frac{[Z, X_1, ..., X_k], [\neg Z, Y_1, ..., Y_m]}{[X_1, ..., X_k, Y_1, ..., Y_m], [Z, X_1, ..., X_k], [\neg Z, Y_1, ..., Y_m]}$$

Παράδειγμα 1.4.1 *Αποδείξτε την πρόταση :* $(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

1. $[< [\neg(P \wedge Q) \rightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)] >]$
2. $[< [P \wedge Q], [\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)] >]$
3. $[< [P \wedge Q], [\neg P \vee \neg Q] >]$
4. $[< [P], [Q], [\neg P \vee \neg Q] >]$

5. $[<[P],[Q],[\neg P,\neg Q]>]$

6. $[<[\neg Q],[P],[Q],[\neg P,\neg Q]>]$

7. $[<[],[\neg Q],[P],[Q],[\neg P,\neg Q]>]$

Το παραπάνω σύστημα είναι ορθό, πλήρες και μη αιτιοκρατικό. Περισσότερα στο [1].

Ορισμός 1.4.1 *Λέμε ότι δυο προτάσεις C_1, C_2 είναι διαμέριση της πρότασης C αν C_1 και C_2 είναι διαφορετικά και τα μέλη των C_1, C_2 αποτελούν ακριβώς τα μέλη της C.*

- (**Κανόνας Ειδικής Περίπτωσης**): Αν λίστα προτάσεων L περιέχει την πρόταση T και T_1, T_2 είναι διαμέριση της T, τότε η λίστα L μπορεί να αντικατασταθεί από δυο λίστες προτάσεων L_1 και L_2, όπου η L_1 είναι όμοια με την L εκτός ότι στη θέση της T έχει την T_1, ομοίως για την L_2 όπου στη θέση της T έχει την T_2.Σχηματικά:

$$\frac{<[X_1,...,X_n,Y_1,...,Y_k],C_1,...,C_m]>}{<[X_1,...,X_n],C_1,...,C_m>,<[Y_1,...,Y_k],C_1,...,C_m>}$$

Κεφάλαιο 2

Ehrenfeucht-Fraïssé Games

2.1 Εισαγωγή

Τα παιχνίδια των Ehrenfeucht-Fraïssé είναι από τις λίγες τεχνικές με τις οποίες αποδεικνύεται ότι ιδιότητες όπως η συνεκτικότητα ενός γράφου δεν μπορούν να εκφραστούν στην πρωτοβάθμια λογική. Η μελέτη της τεχνικής αυτής θεωρείται αναγκαία και για τον επιπλέον λόγο ότι χρησιμοποιείται και για τον προσδιορισμό της πολυπλοκότητας διαφόρων της υβριδικής λογικής που θα δούμε στη συνέχεια. Για συντομία τα παιχνίδια των Ehrenfeucht-Fraïssé θα τα συμβολίζουμε ως $E.F.$.

Το επόμενο παράδειγμα θα αναδείξει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των $E.F.$ παιχνιδιών και της πρωτοβάθμιας λογικής. Έστω λοιπόν η πρόταση :

$$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \ \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Έστω δυο παίκτες. Ο S και ο D. Ξεκινά το παιχνίδι ο παίκτης S, και εναλλάσσοντας κινήσεις οι δυο αντίπαλοι επιλέγουν τιμές για τις μεταβλητές x_1, x_2, x_3. Υπάρχει τακτική κινήσεων του D ώστε οι επιλογές τιμών που κάνει να ικανοποιούν την πρόταση φ; Δηλαδή πώς μπορεί ο D να διαλέξει τιμή για τη μεταβλητή x_2 ώστε όποιες τιμές και αν διαλέξει ο παίκτης S για τις μεταβλητές x_1, x_3, εκείνος να νικά;

Βεβαίως, το παιχνίδι των $E.F.$ δεν χρησιμοποιεί μεταβλητές αλλά δομές. Οι δυο παίκτες παίζουν χρησιμοποιώντας δυο δομές, έστω I και J. Οι δυο δομές έχουν διακριτά μέλη. Έστω r ένας φυσικός αριθμός. Παιχνίδι $E.F.$, μήκους r, με δομές τις I και J, είναι το παιχνίδι που παίζεται από δυο παίκτες τους S και D και ολοκληρώνεται σε r το πολύ γύρους. Για την ακρίβεια ο παίκτης S ξεκινά επιλέγοντας μια δομή. Έπειτα επιλέγει ένα στοιχείο της συγκεκριμένης δομής. Ο παίκτης D στην επόμενη κίνηση διαλέγει ένα στοιχείο της δομής που δεν διάλεξε ο S. Έτσι ολοκληρώνεται ένας γύρος. Συνεχίζουμε όμοια.

Έστω α_i και β_i είναι οι αντίστοιχες κινήσεις των παικτών S και D στον γύρο i. Τότε η παρακάτω ακολουθία ζευγών είναι μια ολοκληρωμένη παρτίδα του παιχνιδιού:

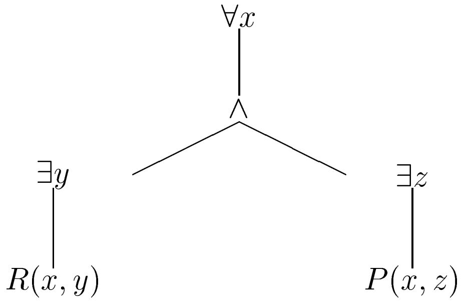
$$(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_r, \beta_r)$$

Έστω ότι το υποσύνολο $(\alpha_1, ..., \alpha_r)$ της δομής I συμβολίζεται ως $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}/\ (\alpha_1, ..., \alpha_r)$. Ομοίως για τη δομή J, $\mathrm{J}_1 = \mathrm{J}/\ (\beta_1, ..., \beta_r)$.

Θα λέμε ότι ο παίκτης D νικά στον γύρο k αν και μόνο αν είναι ισομορφισμός η αντιστοίχηση $\alpha_i \rightarrow \beta_i$ για τις δομές I_1 και J_1. Δηλαδή ανεξαρτήτως των κινήσεων του S ο παίκτης D νικά. Ο συμβολισμός για τον ισομορφισμό των δομών I και J είναι $I \equiv_r J$. Διαισθητικά το σύμβολο $\equiv_r$ δηλώνει ότι οι δυο δομές I και J δεν διακρίνονται από την επιλογή r στοιχείων τους.

Ορισμός 2.1.1 Βαθμός ποσοδείκτη *μιας πρόταση φ είναι ο μέγιστος αριθμός ποσοδεικτών που υπάρχουν σε μονοπάτι δέντρου από την κορυφή ως τα φύλλα. Η πρόταση φ έχει αναπαρασταθεί σε μορφή δέντρου.*

Συντακτικό Δέντρο της πρότασης: $\forall x\ (\exists y\ R(x,y) \wedge\ \exists z\ P(x,z))$



Ο βαθμός ποσοδείκτη της παραπάνω πρότασης είναι 2.

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω I και J δυο διακριτές δομές ορισμένες σε ένα λεξικό R. Αν $I \equiv_r J$ τότε για κάθε πρόταση φ πρωτοβάθμιας γλώσσας με ποσοδείκτη βάθους r, οι δυο δομές είτε ικανοποιούν (και οι δυο) την πρόταση φ είτε όχι.*

Απόδειξη: Επειδή η απόδειξη του θεωρήματος είναι πολύ τεχνική θα παρουσιάσουμε ένα σχέδιο της απόδειξης. Έστω η πρόταση: $\forall x\ (\exists y\ R(x,y) \wedge\ \exists z\ P(x,z))$, όπου η φ δεν έχει άλλους ποσοδείκτες. Επίσης έστω οι δομές I και J τέτοιες ώστε : $I \models \varphi$ και για τη δομή J ισχύει $J \not\models \varphi$. Τότε:

$$I \models \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3\ \varphi(x_1, x_2, x_3)$$

$$J \models \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3\ \neg\varphi(x_1, x_2, x_3)$$

Κινήσεις παιχνιδιού:

- Ο παίκτης S ξεκινά επιλέγοντας σταθερά b_1 από τη δομή J ώστε:
$$J \models \forall x_2 \exists x_3\ \neg\varphi(b_1, x_2, x_3)$$
- Ο παίκτης D απαντά με την επιλογή σταθεράς α_1 από την I:
$$I \models \exists x_2 \forall x_3\ \varphi(\alpha_1, x_2, x_3)$$
- Ο S επιλέγει τη δομή I και την τιμή α_2 αυτής.
$$I \models \forall x_3\ \varphi(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$$
- Ο παίκτης D επιλέγει την τιμή b_2 στη δομή J.
$$J \models \exists x_3\ \neg\varphi(b_1, b_2, x_3)$$
- Ένα βήμα πριν το τέλος ο παίκτης S διαλέγει την τιμή b_3 ώστε :
$$J \models\ \neg\varphi(b_1, b_2, b_3)$$
- Τελικά ο παίκτης D επιλέγει την τιμή α_3 ώστε:
$$I \models\ \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

Παίκτης	Δομή	Πρόταση
S	J	$J \models \forall x_2 \exists x_3\ \neg\varphi(b_1, x_2, x_3)$
D	I	$I \models \exists x_2 \forall x_3\ \varphi(\alpha_1, x_2, x_3)$
S	I	$I \models \forall x_3\ \varphi(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$
D	J	$J \models \exists x_3\ \neg\varphi(b_1, b_2, x_3)$
S	J	$J \models\ \neg\varphi(b_1, b_2, b_3)$
D	I	$I \models\ \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Άρα, δε συμπεραίνουμε αν η πρόταση φ ικανοποιείται ή όχι. Η στρατηγική νίκης του παίκτη D είναι η επιλογή εκείνων των μεταβλητών που ανήκουν στην εμβέλεια καθολικού ποσοδείκτη. Πλήρη απόδειξη του θεωρήματος απαιτεί μελέτη όλων των πιθανών κινήσεων των δυο παικτών.

2.2 Εφαρμογές

Με το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου έχει γίνει σαφές το εξής:

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η ιδιότητα μιας διακριτής δομής δεν μπορεί να οριστεί από μια πρωτοβάθμια γλώσσα πρέπει να ορίσουμε για κάθε γύρο του παιχνιδιού ότι η δομή I διατηρεί την ιδιότητα και η δομή J δεν τη διατηρεί, ενώ ο παίκτης D έχει στρατηγική νίκης.

Η επιλογή δομών με τέτοια χαρακτηριστικά δεν είναι πάντα κάτι τετριμμένο. Κατασκευαστικά η προηγούμενη απόδειξη παρέχει τη δυνατότητα να επιλέγουμε δομές οι οποίες διαφέρουν ως προς την εξεταζόμενη ιδιότητα, αλλά σε τοπικό επίπεδο την ικανοποιούν.Αυτό οφείλεται στον μερικό ισομορφισμό μεταξύ δομών, εξαιτίας του ποσοδείκτη βάθους r. Ας δούμε τώρα μια εφαρμογή των $F.E.$ παιχνιδιών.

Θα αποδείξουμε ότι η συνεκτικότητα ενός γράφου δεν μπορεί να εκφραστεί με πρωτοβάθμια λογική. Επειδή και αυτή η απόδειξη είναι πολύ τεχνική θα δείξουμε κομμάτια της απόδειξης.

Έστω δυο δομές. Η δομή I_r είναι συνεκτικός γράφος. Η δομή J_r είναι ένας μη συνεκτικός γράφος. Το r είναι οι γύροι του παιχνιδιού. Σε αυτήν την περίπτωση ήταν εύκολη επιλογή των δομών.

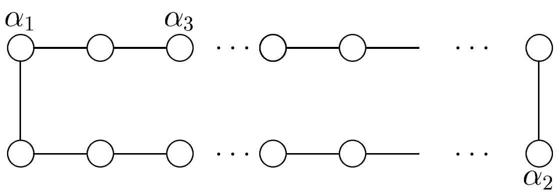
Για αρκετά μεγάλο n το οποίο εξαρτάται αποκλειστικά από το r ο γράφος I_r αποτελείται από έναν κύκλο έστω τον B με $2n$ κόμβους. Ενώ ο γράφος J_r αποτελείται από δυο ξεχωριστούς κύκλους, τον κύκλο B_1 και B_2.

Η στρατηγική νίκης του παίκτη D βασίζεται στο εξής: δυο σημεία του συνεκτικού γράφου έστω τα $\alpha, \alpha^{'}$ όταν είναι απομακρυσμένα συμπεριφέρονται σαν στοιχεία του μη συνεκτικού κύκλου τα οποία βρίσκονται σε δυο ξεχωριστούς κύκλους. Δυο δομές μπορεί να είναι διαφορετικές αλλά δεν είναι εύκολο να το διαπιστώσουμε σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων. Ο περιορισμός για r κινήσεις εμποδίζει, συνεπώς, τον παίκτη S στην κατασκευή μονοπατιού που ενώνει τα δυο σημεία του συνεκτικού γράφου $\alpha, \alpha^{'}$.

Ας τα δούμε τώρα όλα μαζί. Έστω ότι ο παίκτης S επιλέγει το στοιχείο α_1 στο I_r. Ο παίκτης D τότε απαντά με αυθαίρετο στοιχείο b_1 του κύκλου B_1. Αν ο πρώτος παίκτης επιλέξει στοιχείο b_2 του κύκλου B_2 τότε ο δεύτερος παίκτης επιλέγει στοιχείο του συνεκτικού γράφου α_2 τέτοιο ώστε να είναι μακριά του στοιχείου a_1. Ο πρώτος παίκτης επιλέγει το στοιχείο b_3 κοντά στο στοιχείο b_1. Ο παίκτης D απαντά επιλέγοντας το στοιχείο a_3 κοντά στο στοιχείο α_1.

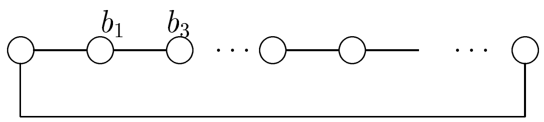
Άρα στρατηγική του παίκτη D είναι να αποτρέψει στον πρώτο παίκτη να αποδείξει την ιδιότητα ότι κάποιος από τους δυο γράφους είναι συνεκτικός ή όχι, εκμεταλλευόμενος το γεγονός ότι έχουν μόλις r κινήσεις. Δεν έχει σημασία ποιος νικά, αλλά αρκεί να νικά ανεξάρτητα από αυτό που παίζει ο άλλος.

Συνεκτικός γράφος

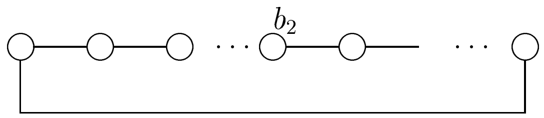


B

Μη Συνεκτικός γράφος



B_1



B_2

Κεφάλαιο 3

Πρωτοβάθμιες Λογικές με k-μεταβλητές.

3.1 Εισαγωγή

Οι προτάσεις της πρωτοβάθμιας λογικής μπορούν να μελετηθούν σε σχέση με:

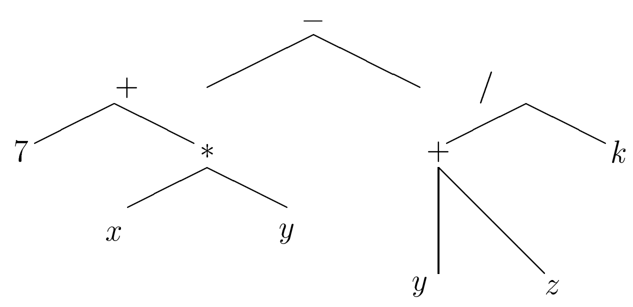
- το μήκος
- την εμβέλεια του ποσοδείκτη
- τον αριθμό των μεταβλητών που χρησιμοποιούν.

Στο κεφάλαιο αυτό επικεντρωνόμαστε στο τελευταίο κριτήριο. Σκοπός μας είναι να εξετάσουμε την εκφραστική δυνατότητα πρωτοβάθμιων γλωσσών με k-μεταβλητές. Με γνώμονα την προγραμματιστική επιταγή κατασκευής προγραμμάτων με ελάχιστη χρήση υπολογιστικής μνήμης, είναι εύκολο να δούμε γιατί οι συγκεκριμένες γλώσσες είναι πολύ σημαντικές.

Παράδειγμα 3.1.1 *Έστω το σύνολο των φυσικών αριθμών, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μοντέλο με την ιδιότητα της ολικής διάταξης. Χρησιμοποιώντας μόλις τρεις μεταβλητές αποδεικνύεται ότι ένας αριθμός έστω ο x έχει i αριθμούς μεγαλύτερους από εκείνον:*

- $\varphi^i(x_1) \equiv \forall x_2(x_1 < x_2 \lor x_1 = x_2)$
- $\varphi^{i+1}(x_1) \equiv \exists x_2(x_2 < x_1 \land \forall x_3(x_2 < x_3 \lor x_1 = x_3)) \land \exists x_1(x_1 = x_2 \land \varphi^i(x_1)))$

Παρόμοιο πρόβλημα είναι και ο αποδοτικός υπολογισμός μιας αριθμητικής παράστασης:



Δυαδικό δέντρο της παράστασης: $7 + (x \cdot y) - \frac{(y+z)}{k}$.

Ο όρος **αποδοτικός υπολογισμός** αριθμητικής παράστασης δηλώνει την απαίτηση χρήσης ελάχιστου δυνατού αριθμού καταχωρητών σε ελάχιστο δυνατό υπολογιστικό χρόνο.

Καταχωρητής
$r_1 = x$
$r_2 = y$
$r_3 = x * y$
$r_1 = 7$
$r_2 = 7 + x * y$
$r_1 = y$
$r_3 = z$
$r_4 = y + z$
$r_1 = k$
$r_3 = y * z + k$
$r_2 = (7 + x \cdot y) - ((y + z)/k)$

Το προηγούμενο πρόβλημα ανάγεται στο παιχνίδι με τα βότσαλα (pebble game). Τα φύλλα δυαδικού δέντρου θεωρούνται δεδομένα, οι ενδιάμεσοι κόμβοι ως κόμβοι υπολογισμού και οι κορυφές ως κορυφές εξόδου. Σκοπός του παιχνιδιού είναι η τοποθέτηση όσο το δυνατόν λιγότερου αριθμού από τα διαθέσιμα βότσαλα, με σκοπό όλα τα μονοπάτια να έχουν από ένα και μόνο βότσαλο.

Κανόνες και ερμηνεία παιχνιδιού :

- Σε κάθε κόμβο δεδομένων μπορούμε να τοποθετήσουμε βότσαλο οποιαδήποτε στιγμή. (load)
- Οποιαδήποτε στιγμή μπορούμε να αφαιρέσουμε ένα βότσαλο. (free)
- Μπορούμε να τοποθετήσουμε βότσαλο σε οποιοδήποτε κόμβο οι απόγονοι του οποίου έχουν ήδη έχουν βότσαλα. (compute)
- Σε κάθε κόμβο εξόδου να έχει τοποθετηθεί τουλάχιστον μια φορά ένα βότσαλο. (results)
- Χρήση ελαχίστου αριθμού βοτσάλων. (registers)
- Χρήση ελάχίστου αριθμού κινήσεων. (time)

Στην τελευταία περίπτωση εξυπακούεται ότι θα αφαιρέσουμε τα βότσαλα από τους απογόνους εφόσον το βότσαλο στο κόμβο-γονέα ανήκει και στα δυο επόμενα μονοπάτια.

Είναι πρόδηλο ότι η χρήση ελαχίστου αριθμού χαλικιών σε γράφο ισοδυναμεί με το πρόβλημα ελάχιστης χρήσης χώρου (καταχωρητών) και χρόνου (κινήσεων) σε ένα υπολογιστικό δέντρο. Ο περιορισμός στα βότσαλα είναι περιορισμός σε μεταβλητές.

Παράδειγμα 3.1.2 *Τοποθετώντας βότσαλα σε πλήρες δυαδικό δέντρο ύψους $h = 5$ απαιτούνται πέντε βότσαλα.*

3.2 Λογικές με πεπερασμένο αριθμό μεταβλητών και όχι μόνο

Η πρωτοβάθμια λογική με δυο μόνο μεταβλητές είναι κομμάτι της πρωτοβάθμιας λογικής (με ισότητα) και συμβολίζεται: FO^2. Οι προτάσεις της FO^2 χρησιμοποιούν μόνο δυο μεταβλητές x, y.

Η λογική $L^2_{\infty\omega}$, χρησιμοποιεί δυο μεταβλητές και είναι κλειστή ως προς τη διάζευξη ή τη σύζευξη σε σύνολα προτάσεων. Ενώ η λογική με τις παραπάνω ιδιότητες χωρίς περιορισμό μεταβλητών συμβολίζεται: $L_{\infty\omega}$.

Ορισμός 3.2.1 *Έστω k θετικός ακέραιος.*

- Τότε η λογική $L^k_{\infty\omega}$ αποτελείται από όλες τις προτάσεις της $L_{\infty\omega}$ με k διακριτές μεταβλητές.

- Η λογική $L^\omega_{\infty\omega}$ αποτελείται από τις προτάσεις της $L_{\infty\omega}$ με διακριτό αριθμό μεταβλητών, δηλαδή:
$$L^\omega_{\infty\omega} = \bigcup_{k<\omega} L^k_{\infty\omega}$$

- Έστω $L^k_{\omega\omega}$ το σύνολο όλων των πρωτοβάθμιων προτάσεων με το πολύ k μεταβλητές.

Οι παρακάτω ορισμοί άλλου είδους λογικών αναδεικνύουν εκείνα τα δομικά στοιχεία της πρωτοβάθμιας λογικής που τροποποιούνται ώστε η μαθηματική γλώσσα να γίνει πιο εκφραστική και ευσύνοπτη.

Η πρωτοβάθμια λογική με μετρητή συμβολίζεται ως C^2, αποτελεί επέκταση της πρωτοβάθμιας λογικής χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες της μορφής $\exists^{\leq\, m}$, $\exists^{\geq\, m}$, $\exists^{=\, m}$ για κάθε $m \geq 1$. Οι προηγούμενοι ποσοδείκτες είναι πρωτοβάθμια ορισμένοι αλλά δεν ορίζονται σε περίπτωση περιορισμού μεταβλητών.

$$\mathrm{FO}^2 \subseteq \mathrm{C}^2 \subseteq \mathrm{FO}$$

Το σύμβολο $\mathrm{C}^2{}_{\infty\omega}$ δηλώνει διάζευξη και σύζευξη σε σύνολα προτάσεων της C^2. Σαφώς η $\mathrm{C}^2_{\infty\omega}$ είναι επέκταση των L^2_ω και C^2.

Τα παρακάτω παραδείγματα αναδεικνύουν την εκφραστική ικανότητα των λογικών που ορίσαμε. Ουσιαστικά πρόκειται για προβλήματα που εξετάζουν την ικανοποιησιμότητα μιας ιδιότητας (πρότασης) σε δεδομένη δομή. Έστω το **A** σώμα των προσανατολισμένων γράφων με δυο κατηγορηματικά σύμβολα πλευράς E_1 και E_2 και δυο προτασιακά σύμβολα μιας μεταβλητής P_1 και P_2. Έστω η δομή $\mathcal{U} = (\mathrm{A}, \mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$. Όταν χρειαζόμαστε από τις δυο κλάσεις κατηγορημάτων το ένα από τα δυο κατηγορήματα, διώχνουμε το ένα από τα δυο και :

- $\mathcal{U} = (\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$

- $\mathcal{U} = (\mathrm{A}, \mathrm{E}, \mathrm{P})$

Παράδειγμα 3.2.1 *Είναι το κατηγόρημα E ντετερμινιστικό;*

- Στη λογική C^2 : $\forall\, x\ \exists^{\leq 1} y Exy$

- Στη πρωτοβάθμια λογική χρειαζόμαστε τρεις μεταβλητές : $\forall\ x \forall\ y \forall\ z(Exy \wedge Exz \rightarrow y = z)$

Παράδειγμα 3.2.2 *Είναι η δομή $\mathcal{U}$ δυαδικό δέντρο με δεξιούς και αριστερούς απογόνους της μορφής E_1 και E_2 αντίστοιχα;*

Στη λογική $\mathrm{C^2}_{\infty\omega}$ η παραπάνω πρόταση είναι σύζευξη προτάσεων της C^2:

- $\exists^{=1} x \forall y \neg(E_1 yx \vee E_2 yx)$
- $\forall x \forall y \neg(E_1 yx \wedge E_2 yx)$
- $\bigwedge_{i=1,2} \forall x \exists^{=1} y E_i xy$
- $\forall x \exists^{\leq 1} y(E_1 yx \vee E_2 yx)$
- $\forall x \bigvee_{n \in N} \varphi_n(x)$ όπου η πρόταση $\varphi_n(x)$ είναι πρόταση της FO^2 δηλώνοντας: δεν υπάρχει ($\mathrm{E}_1 \cup\ \mathrm{E}_2$) -μονοπάτι μήκους n στο x.

3.3 Pebble Games

Έστω δυο παίκτες. Ο παίκτης S και ο παίκτης D. Όπως και στα Ehrenfeucht-Fraïssé έτσι και εδώ ο S προσπαθεί να δείξει ότι δυο δομές είναι διαφορετικές και ο D το αντίθετο, ότι είναι ίδιες.

Ορισμός 3.3.1 *Το παιχνίδι με τα πετραδάκια είναι ως εξής:*

- Υπάρχουν $2k$ πετραδάκια (βότσαλα), δυο του κάθε χρώματος, κάθε αριθμού (ανάλογα με την εκδοχή του παιχνιδιού) $1...k$.
- Επίσης υπάρχουν δυο διακριτές δομές.
- Στην αρχή του παιχνιδιού ίσως ήδη έχουν παιχτεί βότσαλα σε οποιαδήποτε δομή.
- Σε κάθε γύρο ο παίκτης S επιλέγει δομή και τοποθετεί το βότσαλο που έχει διαλέξει σε σημείο -στοιχείο αυτής. Ο παίκτης D απαντά με την τοποθέτηση σε σημείο της δομής που δεν επιλέχθηκε από τον S, το βότσαλο που ανήκει στην ίδια κατηγορία με το βότσαλο του παίκτη S.

Αν τα πετραδάκια είναι ήδη τοποθετημένα, σε διάφορες θέσεις των δυο δομών, τότε ο παίκτης S που ξεκινά το παιχνίδι μπορεί να παίξει, μετακινώντας ένα πετραδάκι οποιασδήποτε δομής, τοποθετώντας το είτε σε άλλο σημείο της ίδιας ή σε σημείο της άλλης δομής.

Το σύνολο των στοιχείων της δομής $\mathcal{M}$ που είναι χρωματισμένα ή αριθμημένα το συμβολίζουμε ως $\overline{\alpha}$. Αντίστοιχα για τη δομή $\mathcal{N}$ έχουμε : $\overline{\beta}$.

Ο παίκτης S νικά όταν πρόκειται τα σύνολα μεταβλητών $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ να ικανοποιούν διαφορετική πρόταση, ιδιότητα των δομών.

Με άλλα λόγια. Πριν γίνει οποιαδήποτε κίνηση, τα πετραδάκια με χρώμα 3,4 και 6 έχουν ήδη τοποθετηθεί σε στοιχεία των δυο δομών. Έστω τα σημεία $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_6 \in \mathcal{M}$ και $\beta_3, \beta_4, \beta_6 \in \mathcal{N}$. Ο παίκτης S νικά το παιχνίδι εξαρχής (ένας γύρος) εφόσον υπάρχει πρόταση τριών μεταβλητών $\varphi(x, y, z)$ τέτοια ώστε η πρόταση $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi(\beta_3, \beta_4, \beta_6)$ δεν είναι αληθής. Δηλαδή ο παίκτης S κατάφερε και ανέδειξε διαφορά μεταξύ των δυο δομών.

Το παιχνίδι που περιγράψαμε είναι κλειστό. Ο παίκτης D νικά όταν δε χάνει ποτέ σε κάθε (πεπερασμένο) γύρο του παιχνιδιού. Άρα κάθε φορά νικά είτε ο S είτε ο D .

Ο παίκτης D έχει στρατηγική νίκης αν και μόνο αν οι δυο δομές συμφωνούν σε όλες τις προτάσεις της $\mathrm{L}^{\omega}_{\infty\omega}$, και το συμβολίζουμε : $\mathcal{M} \equiv^k_n \mathcal{N}$. Η στρατηγική νίκης του παίκτη D συμβολίζεται: $\mathcal{M} \sim^k_n \mathcal{N}$. Ο δείκτης m συμβολίζει τον αριθμό κινήσεων του παιχνιδιού.

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω το παιχνίδι με τα k βότσαλα όπου ήδη έχουν παιχθεί κάποια βότσαλα έστω $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ τα σημεία τους στις δομές, αν ο παίκτης D έχει στρατηγική νίκης τότε οι δυο δομές συμφωνούν σε όλες τις προτάσεις της $L^k_{\infty\omega}$. Ευσύνοπτα:*

$$\mathcal{M} \sim^k_n \mathcal{N} \Leftrightarrow \mathcal{M} \equiv^k_n \mathcal{N}$$

Απόδειξη:

(Ευθύ): Έστω ότι ο παίκτης D έχει στρατηγική νίκης. Προφανώς, $\mathcal{M} \models \varphi(\overline{\alpha})$ αν και μόνο αν $\mathcal{N} \models \varphi(\overline{\beta})$. Διαφορετικά ο παίκτης S έχει στρατηγική νίκης χωρίς να προηγηθούν κινήσεις. Αν η πρόταση είναι αρνητική ή αποτελεί σύζευξη ή διάζευξη προτάσεων είναι όμοιες με την προηγούμενη περίπτωση. Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{M} \models \exists x_i \varphi(x_1, ..., x_k)$, τότε $\mathcal{M} \models \varphi(\alpha_1, ..., \alpha_k)$ για κάποιο σημείο α' του $\mathcal{M}$. Αν ο παίκτης S επιλέξει το χρώμα i στο στοιχείο $\alpha' \in \mathcal{M}$, τότε ο παίκτης D εφόσον έχει στρατηγική νίκης, μπορεί να απαντήσει, τοποθετώντας το αντίστοιχο βότσαλο στο στοιχείο $\beta' \in \mathcal{N}$. Άρα εξαιτίας της στρατηγικής νίκης του D, για κάθε κίνηση του παίκτη S υπάρχει κίνηση του D ώστε να ικανοποιείται η πρόταση $\exists x_i \varphi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

(**Αντίστροφο**): Διαισθητικά εφόσον για τις δυο δομές ικανοποιούνται όλες οι προτάσεις της $\mathrm{L}^k_{\infty\omega}$, τότε για κάθε κίνηση του παίκτη S υπάρχει σύνολο προτάσεων που ικανοποιούνται και στις δυο δομές. Άρα υπάρχει κίνηση απάντηση του παίκτη D, τέτοια ώστε να ικανοποιηθεί η ίδια ιδιότητα ή το σύνολο προτάσεων που ικανοποιούνται στη δομή επιλογής του παίκτη S. Αυτό σημαίνει ότι ο παίκτης D δε χάνει ποτέ. Άρα έχει στρατηγική νίκης. Τεχνικά η απόδειξη περιορίζεται στο εξής σύνολο προτάσεων :

$$F_{a+1} = F_a \bigcup \{\exists x_i (\bigwedge \Phi \wedge \neg \bigvee (F_a \backslash \Phi)) : \Phi \subseteq F_a, i < k\}$$

όπου:

- Φ το σύνολο των προτάσεων που ικανοποιούνται έπειτα από μια κίνηση του παίκτη S
- $(F_a \backslash \Phi)$ το σύνολο των προτάσεων που είναι στο F_a αλλά δεν είναι στο Φ.

Το σύνολο των προτάσεων F_{a+1} δηλώνει ότι ο αριθμός των προτάσεων που είναι λογικά διαχωρίσιμες στην $\mathrm{L}^k_{\infty\omega}$ είναι πεπερασμένος.

Συμπέρασμα: Η μεθοδολογία δεν αλλάζει. Αν πρόκειται να αποδείξουμε ότι μια ιδιότητα δεν είναι δυνατόν να εκφραστεί με κάποιο είδος πρωτοβάθμιας λογικής χρησιμοποιούμε είτε τα παιχνίδια των Ehrenfeucht-Fraïssé (για πρωτοβάθμια λογική) είτε το παιχνίδι με τα βότσαλα (για πρωτοβάθμια λογική με διακριτό αριθμό μεταβλητών).

Παράδειγμα 3.3.1 *Το παιχνίδι με τα δυο βότσαλα (two pebble game)*

Έστω δυο ζεύγη χαλικιών όπου το πρώτο ζεύγος είναι με ετικέτα τον αριθμό 1 και το άλλο με τον αριθμό 2. Έστω, επίσης, οι δυο γράφοι G και H, ο G αποτελείται από δυο τρίγωνα και ο H από ένα τετράγωνο. Οι δυο γράφοι έχουν χρωματισμένες κορυφές όπως φαίνεται παρακάτω.

Έστω ότι ο παίκτης S επιλέγει μια κόκκινη κορυφή του γράφου G. Τότε ο παίκτης D μπορεί να απαντήσει, εφόσον υπάρχει στο γράφο H κόκκινη κορυφή. Έπειτα ο παίκτης S επιλέγει την κίτρινη κορυφή του γράφου H η οποία είναι γειτονική της κόκκινης κορυφής που επέλεξε ο D. Ο παίκτης D μπορεί να απαντήσει επιλέγοντας την κίτρινη κορυφή στο τρίγωνο του οποίου έχει επιλεγεί η κόκκινη κορυφή. Τώρα όλα τα ζεύγη χαλικιών έχουν επιλεγεί. Στη συνέχεια οι παίκτες μπορούν να μετακινούν τα βότσαλα από τις θέσεις τους αλλά ακολουθώντας τους ίδιους κανόνες. Αν δηλαδή ο παίκτης S μετακινήσει βότσαλο από τη μια δομή στην άλλη, τότε ο παίκτης D πρέπει να πάρει το αντίστοιχο βότσαλο και να το τοποθετήσει σε σημείο της δομής που δεν επέλεξε ο S. Σκοπός του παίκτη S είναι να αναδείξει διαφορά μεταξύ των δυο γράφων. Σκοπός του παίκτη S είναι να την ακυρώσει. Εφόσον η διαφορά μεταξύ των δυο γράφων είναι η ύπαρξη τριγώνου και η τριγωνική ιδιότητα δεν εκφράζεται σε FO^2, έπεται ότι ο παίκτης D νικά για οποιαδήποτε κίνηση του S.

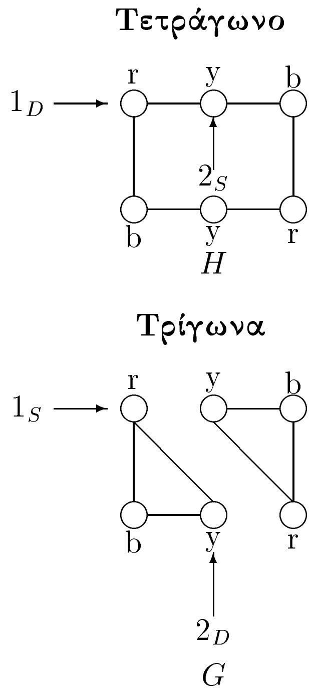
Χρησιμοποιώντας τρία ζεύγη χαλικιών ο παίκτης S έχει στρατηγική νίκης: μπορεί να αποδείξει ύπαρξη τριγώνου επιλέγοντας σε διαδοχικές κινήσεις τρεις κορυφές τριγώνου στο γράφο G. Με τρεις μεταβλητές έχουμε:

- $\mathrm{G} \models \Delta$, $\mathrm{H} \models \neg\Delta$

$$\Delta \equiv (\exists x_1)(\exists x_2)(\exists x_3)(E(x_1, x_2) \land E(x_2, x_3) \land E(x_3, x_1))$$

Τα σύμβολα r, y και b συμβολίζουν τα χρώματα κόκκινο, κίτρινο και μπλε ενώ οι δείκτες S και D συμβολίζουν το βότσαλο που έπαιξε ο αντίστοιχος παίκτης.

- Το 1_S δηλώνει: ο παίκτης S διάλεξε και έπαιξε με βότσαλο που έχει ετικέτα με αριθμό 1.
- Το 1_D δηλώνει: ο παίκτης D διάλεξε και έπαιξε με βότσαλο που έχει ετικέτα με αριθμό 1.


Τετράγωνο
r
y
b
1_D
2_S
b
y
r
H
Τρίγωνα
r
y
b
1_S
b
y
r
2_D
G

Κεφάλαιο 4

Τροπικές Λογικές

4.1 Εισαγωγή

Έστω η δομή $\mathcal{U} = \{A, E_1, ..., P_1, ..., \}$, η οποία ονομάζεται δομή $Kripke$. Τα στοιχεία της δομής $\mathcal{U}$ είναι:

- A: σύνολο πιθανών κόσμων.
- E_i : σχέση προσβασιμότητα.
- P_i : βασικά προτασιακά σύμβολα.

Το σύμβολο $(\mathcal{U}, \alpha) \models \varphi$ δηλώνει: στον κόσμο α αληθεύει η πρόταση φ.

Μιλώντας με όρους συστημάτων μετάβασης τότε οι κόσμοι λέγονται καταστάσεις, οι σχέσεις E_i θεωρούνται βασικές μεταβάσεις ή κινήσεις ή προγράμματα ανάλογα με την εφαρμογή και οι προτάσεις φ θεωρούνται προτάσεις καταστάσεων. Μιλώντας γραφοθεωρητικά, οι κόσμοι είναι οι κορυφές, οι σχέσεις E_i είναι οι ακμές ενός κατευθυνόμενου γράφου.

Συντακτικό Τροπικής Λογικής $\mathcal{ML}_n$

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $\mathcal{ML}$ πρωτοβάθμια γλώσσα. Οι καλοφτιαγμένες εκφράσεις (wff) της $\mathcal{ML}$ ορίζονται αναδρομικά ως εξής :*

- Η φ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν φ είναι ατομική πρόταση.
- Η $(\neg\varphi)$ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν φ είναι επίσης καλοφτιαγμένη.

- Η ($\varphi \to \psi$) είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν φ και ψ είναι επίσης καλοφτιαγμένες.
- Η $\Box_i\varphi$ είναι καλοφτιαγμένη πρόταση αν και μόνο αν φ είναι επίσης καλοφτιαγμένη.

Το σύμβολο $\Box$ ονομάζεται κουτί και το σύμβολο $\diamond$ ονομάζεται διαμάντι. Χρησιμοποιούμε το επαρκές σύνολο συμβόλων $(\neg, \to, \Box_i)$ εφόσον $\diamond_i : \neg\Box_i\neg$

Σημασιολογία Τροπικής Λογικής $\mathcal{ML}_n$

- Αν $\varphi = P_i$ ατομική φόρμουλα τότε : $(\mathcal{U}, \alpha) \models \varphi$ αν η πρόταση φ ικανοποιείται στον κόσμο α.
- $\bot, \top$ είναι η σταθερά ψεύδους και η σταθερά αλήθειας
- Για τους Boolean συνδέσμους ισχύουν εκείνα που διατυπώθηκαν και για την πρωτοβάθμια λογική.
- Έστω $\alpha \in A$, το $E_i[\alpha]$ δηλώνει το σύνολο των άμεσα E_i προσβάσιμων κόσμων από τον κόσμο α της δομής $\mathcal{U}$:

$$E_i[\alpha] := \{\alpha^{'} \in A : (\alpha, \alpha^{'}) \in E_i\}$$

- Έστω $(\mathcal{U}, \alpha) \models \Box_i\varphi$ αν $(\mathcal{U}, \alpha^{'}) \models \varphi$ για όλα τα $\alpha^{'} \in E_i[\alpha]$.
- Έστω $(\mathcal{U}, \alpha) \models \diamond_i\varphi$ αν υπάρχει κάποιο $\alpha^{'} \in E_i[\alpha]$ ώστε $(\mathcal{U}, \alpha^{'}) \models \varphi$.

Παράδειγμα 4.1.1 *Ως επέκταση των παραδειγμάτων 3.2.1 και 3.2.2 πώς μπορούμε να εκφράσουμε τις επόμενες προτάσεις (στο σώμα των κατευθυνόμενων γράφων) με χρήση της τροπικής λογικής $\mathcal{ML}_n$:*

1. Η κορυφή α έχει E_1-ακμή που προσεγγίζει κορυφή στην οποία αληθεύει η πρόταση P;
2. Για τις ακμές που προσεγγίζονται από την κορυφή α διαμέσου E_2-ακμής ισχύει η ιδιότητα του ερωτήματος (1) ;
3. Υπάρχει E-μονοπάτι μήκους 17 από την κορυφή α, το οποίο καταλήγει σε κορυφή που ικανοποιεί την πρόταση P;

- $\diamond_1 P$ εκφράζει το πρώτο ερώτημα.
- $\Box_2 \diamond_1 P$ για το δεύτερο ερώτημα.
- $(\diamond)^{17}P$ όπου $\diamond^{17}$ δηλώνει 17 φορές τη χρήση του διαμαντιού.

4.2 Περιορισμός Μεταβλητών

Έστω x μεταβλητή πρωτοβάθμιας λογικής. Η μετάφραση προτάσεων της τροπικής λογικής σε προτάσεις πρωτοβάθμιας λογικής $\mathcal{L}^{=}$ (με ισότητα) είναι η ακόλουθη:

- $\mathrm{ST}_x(p) = Px$
- $\mathrm{ST}_x(\bot) = x \neq x$
- $\mathrm{ST}_x(\neg\varphi) = \neg\ \mathrm{ST}_x(\varphi)$
- $\mathrm{ST}_x(\varphi \to \psi) = \mathrm{ST}_x(\varphi) \to \mathrm{ST}_x(\psi)$
- $\mathrm{ST}_x(\Box\varphi) = \forall y\ (\mathrm{R}_{xy} \to \mathrm{ST}_y(\varphi))$

Ενώ για το διαμάντι : $\mathrm{ST}_x(\diamond\varphi) = \exists y\ (\mathrm{R}_{xy} \wedge \mathrm{ST}_y(\varphi))$

Έστω η μετάφραση της πρότασης $\diamond(\Box p \to q)$:

1. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q))$
2. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q)) = \exists y_1(R_{xy_1} \wedge \mathrm{ST}_{y_1}\ (\Box p \to q))$
3. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q)) = \exists y_1(R_{xy_1} \wedge (\mathrm{ST}_{y_1}\ (\Box p) \to \mathrm{ST}_{y_1}(q)))$
4. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q)) = \exists y_1(R_{xy_1} \wedge (\forall y_2\ (R_{y_1y_2} \to Py_2) \to (Qy_1)))$

Με αναφορά το προηγούμενο κεφάλαιο, η επαναχρησιμοποίηση μεταβλητών x, y μας ανάγουν στη γλώσσα FO^2. Η προηγούμενη πρόταση μεταφράζεται ως εξής (χρήση δυο μεταβλητών):

1. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q))$
2. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q)) = \exists y(R_{xy} \wedge \mathrm{ST}_y\ (\Box p \to q))$
3. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q)) = \exists y(R_{xy} \wedge (\mathrm{ST}_y\ (\Box p) \to \mathrm{ST}_y(q)))$
4. $\mathrm{ST}_x(\diamond(\Box p \to q)) = \exists y(R_{xy} \wedge (\forall x\ (R_{yx} \to Px) \to (Qy)))$

Από την προηγούμενη μετάφραση έγινε σαφές το εξής: Ότι προκειμένου να μεταφράσουμε μια τροπική πρόταση σε πρόταση πρωτοβάθμιας γλώσσας αρκεί η χρήση δυο μεταβλητών. Αυτό οφείλεται στη χρήση ποσοδεικτών στον ορισμό των τροπικών συμβόλων. Για την ακρίβεια οι ποσοδείκτες έχουν περιορισμένο βάθος, εμβέλεια μόνο (ανάλογα την εφαρμογή) στους απογόνους της μεταβατικής σχέσης.

Οι κόσμοι της τροπικής λογικής έχουν όνομα αλλά ποτέ δε το χρησιμοποιούμε. Με τον όρο **επόμενος κόσμος**, ή κόμβος για τη δική μας εφαρμογή, δεν είναι αναγκαία η χρήση των ονομάτων κάθε επόμενου κόσμου. Κάθε φορά χρησιμοποιείται η ακολουθία : δεδομένος κόσμος και επόμενος κόσμος, όπου ο επόμενος κόσμος μπορεί να γίνει δεδομένος κόσμος και ομοίως συνεχίζουμε.

Συμπέρασμα: Η γλώσσα $\mathcal{ML}$ δεν είναι επέκταση της πρωτοβάθμιας λογικής, αλλά ενθυλακωμένη στην FO^2.

4.3 Ισοδυναμίες Μοντέλων

Στην προηγούμενη παράγραφο διαπιστώσαμε ότι κάθε πρόταση τροπικής λογικής είναι δυνατόν να μεταφραστεί σε πρόταση πρωτοβάθμιας λογικής με ισότητα. Όμως κάθε πρόταση πρωτοβάθμιας λογικής δεν είναι ισοδύναμη με πρόταση τροπικής λογικής. Αυτός είναι ο λόγος που οι τροπικές λογικές έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

- Κριτήριο ισοδυναμίας δομών Kripke (bisimulation). Αμφιπροσομοίωση.
- Ιδιότητα δενδρικού μοντέλου
- Ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου

Ορισμός 4.3.1 *Μοντέλο τροπικής λογικής είναι δομή της μορφής της μορφής* $M = (S, R, V)$*, το* (S, R) *λέγεται* **πλαίσιο** *και το* V *είναι η* **απονομή αλήθειας** *που καθορίζει την αληθοτιμή ατομικών προτάσεων σε κάθε κόσμο του πλαισίου.*

Ορισμός 4.3.2 *Έστω δυο διακριτές δομές Kripke K,* K' *και δυο διακριτά σημεία των προηγούμενων δομών υ και* $υ'$*. Τις δομές και τα αντίστοιχα σημεία θα τα συμβολίζουμε ως (K,υ) και (K,*$υ'$*). Διαισθητικά τα ζεύγη (K,υ) και (*K'*,*$υ'$*) είναι* *όμοια, εφόσον οποιοδήποτε μονοπάτι (διαδικασία) στη δομή K ξεκινώντας από την κορυφή υ αντιστοιχεί με μονοπάτι της δομής K′ ξεκινώντας από το σημείο υ′. Τυπικά ο ορισμός είναι:*

Έστω Z σχέση **αμφιπροσομοίωσης** (ισοδυναμίας) μεταξύ σημείων των δομών K και K′ τέτοια ώστε $\upsilon Z \upsilon'$ όταν uZu'. Δυο δομές (K,υ) και (K′,υ') είναι ισοδύναμες όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. u και u' δεν διακρίνονται από τις ατομικές προτάσεις που ικανοποιούν.
2. (**του μπροστά**) Για κάθε $\alpha \in A$ και $uE_a w$ ακμή της K υπάρχει ακμή της δομής K′ $u'E_a w'$ τέτοια ώστε wZw'.
3. (**του πίσω**) Όμοια για κάθε ακμή $u'E_a w'$ στη K′.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ο παραπάνω ορισμός είναι προσαρμοσμένος στη μορφή των παιχνιδιών των Ehrenfeucht και Fraïssé που μελετήσαμε στο 2^o κεφάλαιο. Από την ισοδυναμία δομών Kripke προκύπτει ότι οι δυο δομές δεν διακρίνονται από οποιαδήποτε πρόταση τροπικής λογικής. Όσες προτάσεις ικανοποιούνται στην πρώτη δομή ικανοποιούνται και στη δεύτερη, με αρχή τα σημεία υ και υ'.

Συμπέρασμα: (Van Benthem): Οι ιδιότητες που ορίζονται στην τροπική λογική ML είναι ορισμένες σε πρωτοβάθμια γλώσσα και διατηρούνται υπό το κριτήριο ισοδυναμίας δομών Kripke.

Ιδιότητα Δενδρικού Μοντέλου

Έστω δυο πλαίσια, βαθμού n.

$$\mathcal{F} = (W, R_1, ..., R_n) \quad \mathcal{B} = (V, S_1, ..., S_n)$$

Ορισμός 4.3.3 *η αντιστοίχηση f από τον κόσμο W στον κόσμο V ονομάζεται π - μορφισμός ($p - morphism$) από το πλαίσιο $\mathcal{F}$ στο $\mathcal{B}$ αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:*

- αν xR_iy τότε $f(x)S_if(y)$

- αν $f(x)S_iz$ τότε υπάρχει $y \in W$ τέτοιο ώστε xR_iy και $f(y) = z$

Εναλλακτικά:

Ορισμός 4.3.4 *Θα λέμε ότι f είναι π - μορφισμός ($p-morphism$) από το μοντέλο $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, h)$ στο μοντέλο $\mathcal{M}' = (\mathcal{F}', h')$ αν:*

- f είναι π - μορφισμός ($p - morphism$) από το πλαίσιο $\mathcal{F}$ στο $\mathcal{F}'$
- Αν $t \in W$ και p είναι ατομική πρόταση τότε: $M, t \models p$ αν και μόνο αν $M', f(t) \models p$

Η συνάρτηση f ικανοποιώντας μόνο την πρώτη συνθήκη του πρώτου ορισμού λέγεται ομο-μορφισμός από το $\mathcal{F}$ στο $\mathcal{B}$. Αν υπάρχει π - μορφισμός μεταξύ των δυο δομών τότε λέμε ότι το $\mathcal{B}$ είναι π - μορφική εικόνα του $\mathcal{F}$. Ομοίως ο π - μορφισμός f από το πλαίσιο $\mathcal{F}$ στο $\mathcal{B}$ λέγεται π - μορφισμός από το μοντέλο $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \mathcal{L})$ στο μοντέλο $\mathcal{N} = (\mathcal{B}, \mathcal{U})$, εφόσον για κάθε προτασιακή μεταβλητή p και κάθε σημείο $x \in W$, έχουμε $x \in \mathcal{L}(p)$ αν και μόνο αν $f(x) \in \mathcal{U}(p)$.

Είναι εύκολο να δούμε με επαγωγή ότι για όλες τις $\mathcal{ML}_n$ προτάσεις φ και για όλα τα $x \in W$, έπεται:

$$(\mathcal{M}, x) \models \varphi \textbf{ αν και μόνο αν } (\mathcal{N}, f(x)) \models \varphi$$

Σημείωση 4.3.1 *Η διαφορά μεταξύ του κριτηρίου ισοδυναμίας δομών Kripke και του π - μορφισμού είναι η εξής : Ο π-μορφισμός χρησιμοποιεί συναρτήσεις ενώ το κριτήριο ισοδυναμίας δομών Kripke δουλεύει με σχέσεις, οι οποίες είναι πιο γενικό μαθηματικό εργαλείο.*

Πλαίσιο $\mathcal{F} = (W, R_1, ..., R_n)$ βαθμού n λέγεται **πλαίσιο με ρίζα** αν υπάρχει σημείο $w_o \in W$ τέτοιο ώστε $W = (w \in W | w_o R^* w)$ όπου:

$$R = \bigcup_{1 \le i \le n} R_i$$

Το σημείο w_o λέγεται **ρίζα** του πλαισίου $\mathcal{F}$. Αν το $\mathcal{F}$ είναι πλαίσιο με **ρίζα** w_o τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε πλαίσιο $\mathcal{B} = (V, S_1, ..., S_n)$ ως εξής :

- το V είναι σύνολο που περιλαμβάνει τον κόσμο w_o και όλες τις πλειάδες $(w_o, R_{i_1}, ..., R_{i_k}, w_k)$ για $k > 0$ των κόσμων του W. Όπου $R_{i_j} \in (R_1, ..., R_n)$ τέτοιο ώστε $w_j R_{i_{j+1}} w_{j+1}$ για $j < k$.

- οι σχέσεις S_i κατασκευάζονται ως εξής: έστω δυο σημεία του κόσμου V τα $(w_o, ..., w_k)$ και x, έπεται:

$$(w_o, ..., w_k)S_j x \textbf{ αν και μόνο αν } \exists w \in W \ x = (w_o, ..., R_j, w_k).$$

Δηλαδή αν το x είναι επέκταση του $(w_o, ..., w_k)$ τότε ορίζεται και η σχέση S_j.

Το πλαίσιο $\mathcal{B}$ που προέκυψε λέγεται διμελές ή ανοιγμένο του πλαισίου $\mathcal{F}$. Για την κατασκευή του πλαισίου $\mathcal{B}$ πρέπει να ικανοποιούνται επιπλέον δυο συνθήκες:

1. $(w_o, ..., w_k) \mapsto w_k$ είναι π - μορφισμός $(p - morphism)$ από το πλαίσιο $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{F}$
2. και ότι το πλαίσιο $\mathcal{B}$ είναι **μη μεταβατικό δέντρο**.

Για τη συνθήκη (1) έπεται:

- $w_o S_i (w_o w_1)$ αν $w_o R_i w_1$
- $w_o R_i w_1$ τότε υπάρχει y τέτοιο ώστε $w_o S_i y$ όπου $y = (w_o w_1)$

Για τη γενική μορφή :

- $(w_o, ...w_k)S_j(w_o, ..., w)$ αν $w_k R_i w$
- $w_k R_i w$ τότε υπάρχει y τέτοιο ώστε $(w_o, ...w_k)S_i y$ όπου $y = (w_o, ..., w)$

Ένα πλαίσιο $\mathcal{F} = (W, R_1, ..., R_n)$ είναι μη μεταβατικό όταν :

- οι σχέσεις R_i είναι ανά δυο διαφορετικές.
- το $\mathcal{F}$ είναι πλαίσιο με ρίζα.
- για κάθε σχέση R_i, R_j $(1 \leq i, j \leq n)$ έχουμε :

$$\forall x, y, z \in W(xR_i y \wedge yR_j z \rightarrow \neg xR_i \wedge \neg xR_j z)$$

Κάθε πλαίσιο n-βαθμού με ρίζα είναι π-μορφική εικόνα κάποιου μη μεταβατικού δέντρου.

Αν μια πρόταση φ της $\mathcal{ML}_n$ είναι ικανοποιήσιμη σε ένα πλαίσιο τότε είναι επίσης ικανοποιήσιμη σε πεπερασμένο μη μεταβατικό δέντρο βάθους μικρότερο ή ίσο με το βαθμό της πρότασης φ.

Ιδιότητα Πεπερασμένου Μοντέλου

Για κάθε τροπική λογική L τίθεται το ερώτημα **αποκρισιμότητας**: Υπάρχει αλγόριθμος όπου για δεδομένη πρόταση φ της $\mathcal{ML}_n$ αποφασίζει αν η φ είναι θεώρημα της L ;

Συνεπώς το προηγούμενο πρόβλημα είναι το πρόβλημα **εγκυρότητας** της L ή το πρόβλημα **αποκρισιμότητας** της L. Η πρόταση φ για την οποία ο αλγόριθμος αποφασίζει αν είναι θεώρημα της L λέγεται **έγκυρη** στη γλώσσα L. Ενώ το σύστημα που διαθέτει αλγόριθμο αποκρισιμότητας λέγεται **αποκρίσιμο**.

Όμοιο και το πρόβλημα **ικανοποιησιμότητας**: Έστω πρόταση φ της $\mathcal{ML}_n$, υπάρχει πλαίσιο της L ώστε να ικανοποιεί την φ;

Είναι σαφές ότι για **πλήρες** Kripke μοντέλο μια από τις δυο προτάσεις φ και $\neg\varphi$ ικανοποιείται. Προφανώς το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας και το πρόβλημα αποκρισιμότητας είναι συμπληρωματικά.

Αν μια τροπική γλώσσα L είναι αναδρομικά αξιωματικοποιημένη τότε μπορούμε να απαριθμήσουμε όλες τις προτάσεις που παράγονται από του κανόνες απαγωγής. Δηλαδή είναι δυνατόν να ξέρουμε κατά πόσον μια πρόταση φ ανήκει στη γλώσσα L ή όχι.

Ορισμός 4.3.5 Ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου: *Αν πρόταση φ της $\mathcal{ML}_n$ ικανοποιείται σε μοντέλο αυθαίρετου βαθμού, τότε ικανοποιείται και σε πεπερασμένο μοντέλο.*

Η παραπάνω ιδιότητα μοντέλου για τις τροπικές λογικές προκύπτει από την ιδιότητα πεπερασμένου δενδρικού μοντέλου, που είδαμε προηγουμένως. Είναι σαφές ότι:

Η ιδιότητα πεπερασμένου μοντέλου εξασφαλίζει σχεδόν πάντα αποκρισιμότητα. Όμως, όχι πάντα. Αυτό εξασφαλίζεται από την ιδιότητα δενδρικού μοντέλου.

4.4 Τυπικοί Ορισμοί

Ορισμός 4.4.1 *Τροπική λογική K λέγεται το σύνολο των ML-προτάσεων που περιέχει τα αξιώματα $A1 - A10$ της πρωτοβάθμιας λογικής και το τροπικό αξίωμα:*

$$K \quad \Box(p_0 \to p_1) \to (\Box p_0 \to \Box p_1)$$

Και διαθέτει τους παρακάτω κανόνες απαγωγής:

- $\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$ *(Modus Ponens)*
- *Έστω η πρόταση $\varphi(p_1, ..., p_n)$. Τότε η πρόταση $\varphi(\psi_1/p_1, ..., \psi_n/p_n)$ προκύπτει από την αντικατάσταση των μεταβλητών $p_1, ..., p_n$ από τις προτάσεις $\psi_1, ..., \psi_n$. (Substitution)*
- *Αν ισχύει φ τότε $\Box\varphi$ (RN)*

Η τροπική λογική K είναι το μικρότερο κανονικό σύστημα τροπικής λογικής. Κάθε τροπική λογική L κατασκευάζεται επεκτείνοντας το σύστημα K με ένα (συνήθως πεπερασμένο) σύνολο αξιωμάτων. Για αυτό και ο συμβολισμός:

$$L = K \oplus \Sigma$$

Αν το σύνολο Σ είναι πεπερασμένο τότε η γλώσσα L λέγεται πεπερασμένα αξιωματικοποιήσιμη. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει λογικά σχήματα επεκτάσεις του σχήματος K.

Σχήμα	Επέκταση	Πλαίσιο
K	$-$	όλα τα πλαίσια
$K4$	$L = K \oplus \Box p_o \to \Box\Box p_0$	μεταβατικό πλαίσιο
T	$L = K \oplus \Box p_o \to p_0$	αυτοπαθές πλαίσιο
D	$L = K \oplus \Box p_o \to \Diamond p_0$	σειριακό πλαίσιο
$S4$	$L = K \oplus \Box p_o \to \Box\Box p_0 \oplus \Box p_0 \to p_0$	αυτοπαθές και μεταβατικό πλαίσιο

Μεταβατικό, αυτοπαθές, σειριακό πλαίσιο είναι τα πλαίσια που διαθέτουν την μεταβατική, αυτοπαθή και σειριακή σχέση. Οι παραπάνω σχέσεις ερμηνεύονται ακολούθως:

- Αυτοπαθή (reflexive) σχέση είναι η σχέση που συνδέει κάθε κόσμο με τον εαυτό του.
- Σειριακή (serial) σχέση είναι η σχέση που συνδέει κάθε κόσμο με έναν τουλάχιστον κόσμο.

- Μεταβατική (transitive) σχέση. Έστω τρεις κόσμοι με ονόματα Α, Β και Γ. Ο κόσμοι Α και Β συνδέονται μεταξύ τους. Ομοίως και οι κόσμοι Β και Γ. Από την μεταβατική σχέση έπεται η σύνδεση των κόσμων Α και Γ.

4.5 Παραδείγματα-Ορισμοί

Στόχος της παραγράφου είναι να αναδείξει διαμέσου παραδειγμάτων σημαντικές έννοιες της τροπικής λογικής.

Παιχνίδια και Ομοιότητες Μοντέλων

Έστω δυο μοντέλα Kripke: $M = (W, R, h)$ και $M^{'} = (W^{'}, R^{'}, h^{'})$. Επίσης έστω οι κόσμοι $t, t^{'}$ όπου $t \in W$ και $t \in W^{'}$. Δυο παίκτες ο $\forall$ και ο $\exists$ παίζουν μη πεπερασμένο παιχνίδι με τα μοντέλα $M, M^{'}$. Το παιχνίδι ξεκινά από το σημείο $(t, t^{'})$. Μετά από κάποιους γύρους το παιχνίδι βρίσκεται στο σημείο $(u, u^{'}) \in (W, W^{'})$. Τότε:

- Αν στο σημείο $(u, u^{'})$ έχουμε $M, u \models p$ και $M^{'}, u^{'} \models \neg p$ όπου p προτασιακή μεταβλητή τότε ο παίκτης $\exists$ χάνει.

- Διαφορετικά ο $\forall$ επιλέγει μοντέλο. Εφόσον επιλέξει μοντέλο, έστω το M, διαλέγει έστω τον κόσμο $v \in W$, ο οποίος ανήκει στο μοντέλο M και είναι προσβάσιμος από τον κόσμο u. Δηλαδή υπάρχει σχέση $R(u, v)$. Ομοίως, επιλέγοντας το μοντέλο $M^{'}$ διαλέγει τον κόσμο $v^{'} \in W^{'}$, ώστε $R(u^{'}, v^{'})$. Αν δε μπορεί να κάνει τίποτα, τότε ο $\exists$ νικά.

- Ο παίκτης $\exists$ απαντά με τον κόσμο v' αν ο $\forall$ έχει επιλέξει το μοντέλο M ή με τον κόσμο v αν ο $\forall$ έχει παίξει με το μοντέλο $M^{'}$.

Να αποδειχθεί ότι τα δυο μοντέλα M και $M^{'}$ είναι όμοια (αμφί) μόνο και μόνο όταν ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(Ευθύ): Ο παίκτης $\exists$ έχει τακτική νίκης.

- Ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης από την αρχή του παιχνιδιού άρα τα δυο μοντέλα είναι όμοια μέχρι το παιχνίδι καταλήξει στο γύρο $u, u^{'}$.

- Στη θέση $u, u^{'}$ ο παίκτης $\forall$ επιλέγει έναν από τους δυο κόσμους. Όμως ο παίκτης $\exists$ απαντά με τον κόσμο που δε διάλεξε ο παίκτης $\forall$.

- Έστω $t, t^{'}$ η νέα κατάσταση. Εφόσον είναι δεδομένο ότι ο παίκτης $\exists$ έχει τακτική νίκης τότε θα απαντά σε κάθε κίνηση του παίκτη $\forall$. Άρα τα δυο μοντέλα είναι όμοια.

(Αντίστροφο): Τα δυο μοντέλα είναι όμοια.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε σημείο του πρώτου μοντέλου υπάρχει σημείο του δεύτερου μοντέλου που ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες όπως εκείνο. Αυτό στη διαδικασία του παιχνιδιού δηλώνει ότι για κάθε κίνηση του παίκτη $\forall$ (ξεκινά πρώτος) υπάρχει κίνηση απάντηση του παίκτη $\exists$. Άρα ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης.

$\boxed{\pi\text{-}\textbf{μορφισμοί}}$

Έστω πλαίσιο $F = (\{0,1\}, R)$ και η σχέση R είναι ισχύει για κάθε $x, y \in \{0,1\}$. Τότε να αποδειχθεί ότι οποιαδήποτε τροπική πρόταση είναι έγκυρη στο $(\mathbb{N}, <)$ είναι έγκυρη και στο πλαίσιο F.

Έστω συνάρτηση f τέτοια ώστε: $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ και

- $f(n) = 0$ αν n άρτιος
- $f(n) = 1$ αν n περιττός.

Προφανώς η f είναι π-**μορφισμός**. Δηλαδή: $(\mathbb{N}, <) \to \mathcal{F}$.

$$1 \to 2 \to 3 \to 4 \to \dots$$

$$1 \rightleftharpoons 0$$

Θεώρημα 4.5.1 *Έστω τα μοντέλα $M = (W, R, h)$ και $M' = (W', R', h')$ και έστω f είναι π-μορφισμός από το M στο M'. Τότε για κάθε κόσμο t του μοντέλου M και για κάθε τροπική πρόταση φ έπεται :*

$$M, t \models \varphi \textit{ αν και μόνο αν } M', f(t) \models \varphi$$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει το ζητούμενο της προηγούμενης άσκησης. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι η εξής:

- Αν φ είναι ατομική πρόταση τότε το θεώρημα ισχύει εξ'ορισμού.
- Αν φ προκύπτει με εφαρμογή των λογικών συνδέσμων σε ατομικές προτάσεις προκύπτει ομοίως.
- Ενδιαφέρουσα η περίπτωση $\varphi = \Box\psi$. Τότε αν $M, t \models \Box\psi$. Έπεται $M, u \models \psi$ για $\forall u \in W$ με $R(t, u)$. Από τον π-μορφισμό έχουμε $M, f(u) \models \psi$ για $\forall u \in W$ με $R(t, u)$. Ομοίως $M', x \models \psi$ $(f(u) = x)$ για $\forall x \in W'$ με $R'(f(t), x)$. Τελικά $M', f(t) \models \Box\psi$.

Βαθμωτή Τροπική Λογική

Η **Βαθμωτή Τροπική Λογική** gradedML επιτρέπει βαθμωτούς τροπικούς τελεστές: $\diamond_i^{\leq m}$, $\diamond_i^{\geq m}$, $\diamond_i^{=m}$ για κάθε $m \geq 1$. Υπάρχει μετάφραση της gradedML στην C^2.Όπου :

$$\diamond_i^{\leq m}(x) \equiv \exists^{\leq m} y(E_i xy \wedge \varphi(y))$$

Πολυπλοκότητα

Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας για την τροπική λογική ML είναι **P**SPACE. Το ίδιο πρόβλημα για την FO^2 είναι **N**EXPTIME-complete. Η FO^2 έχει την ιδιότητα του πεπερασμένου μοντέλου, αλλά δεν ικανοποιεί πολύ σημαντικές μοντελο-θεωρητικές που ικανοποιούνται στην ML. Για παράδειγμα εκείνη του δενδρικού μοντέλου.

4.6 Επίλυση

Η μέθοδος επίλυσης που θα παρουσιαστεί βασίζεται στο άρθρο και αποτελεί συνέχεια της μεθόδου που παρουσιάστηκε στο πρώτο κεφάλαιο. Το σύστημα απόδειξης είναι για την τροπική λογική K και δεν είναι κατάλληλο για συμμετρικά πλαίσια και μοντέλα όπως το $S5$. Ας δούμε την επίλυση αναλυτικά:

Οι τροπικές προτάσεις χωρίζονται σε δυο κατηγορίες: τύπου ν και τύπου π. Κάθε κατηγορία έχει ένα στοιχείο ν_0 και π_0.

ν	ν_0
$\Box X$	X
$\neg\diamond X$	$\neg X$

π	π_0
$\neg\Box X$	$\neg X$
$\diamond X$	X

Ορισμός 4.6.1 *Για κάθε πρόταση C ορίζουμε δυο προτάσεις $C^\sharp, C^\flat$ ως ακολούθως: Η $C^\sharp$ περιέχει τις προτάσεις ν_0 τέτοιες ώστε ν ανήκει στην C. Και η $C^\flat$ περιέχει τις προτάσεις π_0 τέτοιες ώστε π είναι στην C.*

Παράδειγμα 4.6.1 *Αν $C = [\Box(X \wedge Y), \neg\Box A, \diamond(B \to C), \neg C]$ τότε $C^\sharp = [X, Y]$ και $C^\flat = [\neg A, B \to C]$*

Στο σύστημα επίλυσης για την τροπική λογική K θα συμπεριλάβουμε: ότι είχαμε στην επίλυση της προτασιακής λογικής, τον κανόνα ειδικής περίπτωσης και θα προσθέσουμε τον $K - \pi$ κανόνα:

- $K - \pi$: Έστω L είναι λίστα προτάσεων η οποία περιέχει την πρόταση C που αποτελείται μόνο από τύπου προτάσεις π. Τότε η L αντικαθίσταται από την L^*, η οποία περιέχει τις ακόλουθες προτάσεις:
  - Την $C^\flat$ έναντι της C και
  - για κάθε πρόταση S της L η οποία περιέχει μόνο προτάσεις τύπου ν προσθέτουμε την πρόταση $S^\sharp$.

Παράδειγμα 4.6.2 *Έστω η λίστα $L = <[P], [\Box Q, R], [\Box P, \neg\diamond Q], [\neg\Box R, \diamond S]>$ αντικαθίσταται από τις λίστες: $<[P, \neg Q]>, <[\neg R, S]>$.*

Παράδειγμα 4.6.3 *Στο σύστημα K αποδείξτε την πρόταση: $(\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q)$*

1. $[<[\neg((\Box P \wedge \Box Q) \to \Box(P \wedge Q))]>]$
2. $[<[\Box P \wedge \Box Q], [\neg\Box(P \wedge Q)]>]$
3. $[<[\Box P], [\Box Q], [\neg\Box(P \wedge Q)]>]$
4. $[<[P], [Q], [\neg(P \wedge Q)]>]$ $\quad K - \pi$ Στο 3
5. $[<[P], [Q], [\neg P, \neg Q)]>]$
6. $[<[\neg Q], [P], [Q], [(\neg P, \neg Q)]>]$
7. $[<[], [\neg Q], [P], [Q], [(\neg P, \neg Q)]>]$

Κεφάλαιο 5

Εφαρμοσμένες Τροπικές Λογικές

5.1 Χρονική Λογική

Οι τροπικές λογικές βρίσκουν εφαρμογή σε τομείς όπως η σχεδίαση πρωτοκόλλων επικοινωνίας και η Τεχνολογία Λογισμικού.

Δομικά στοιχεία της χρονικής λογικής:

- **Το πλαίσιο** $\mathcal{F}$=(T,<), όπου T σύνολο χρονικών σημείων και το σύμβολο < έχει τη συνηθισμένη ερμηνεία.
- **Ατομικές προτάσεις** $p, q, r, ...$ οι οποίες είναι χρονικά εξαρτημένες εκφράσεις της μορφής : Τώρα βρέχει. Αυτή τη χρονική στιγμή, έστω t_1, βρέχει, δηλαδή ισχύει η πρόταση p.

Χρονικές Προτάσεις

Οι παρακάτω χρονικές προτάσεις έχουν την ακόλουθη ερμηνεία:

- Fp: είναι αληθές τη στιγμή t αν και μόνο αν p είναι αληθές σε κάποιο χρονικό σημείο $u \in$ T όπου $u > t$. Το σύμβολο Fp διαβάζετε: **στο μέλλον**, p. Ισοδύναμος συμβολισμός: $\diamond_F p$
- $t \models \Box_F \psi$ αν και μόνο αν $(\forall\, t' > t)\ t \models \psi$

- $S(p,q)$: είναι τη χρονική στιγμή t αν και μόνο αν υπάρχει $u \in \mathrm{T}$ ώστε $u < t$ και το p είναι αληθές τη στιγμή u ενώ επιπλέον το q είναι αληθές για όλα τα σημεία στο διάστημα (u,t).Το σύμβολο $S(p,q)$ διαβάζετε : **εφόσον** p,q
- $t \models \Box_P\psi$ αν και μόνο αν $(\forall\, t^{'} < t)\ t \models \psi$
- $\Box_F \Diamond_F \varphi$: η πρόταση φ θα εμφανιστεί στο μέλλον άπειρες φορές.
- $\Box_F(\varphi \to \Diamond_P\psi) \wedge \Box_P(\varphi \to \Diamond_P\psi) \wedge (\varphi \to \Diamond_P\psi)$: η πρόταση φ εμφανίζεται έπειτα από μια άλλη ιδιότητα ψ.
- $\Box_\forall\varphi : \varphi \wedge \Box_F\varphi \wedge \Box_P\varphi$: καθολικός τροπικός σύνδεσμος
- $\Diamond_\exists\varphi = \varphi \vee \Diamond_F\varphi\, \Diamond_P\, \varphi$: υπαρξιακός τροπικός σύνδεσμος.
- $\circ\varphi$: υπάρχει άμεσα επόμενη στιγμή της t, ο $t+1$, ώστε $t+1 \models \varphi$
- $\Box_\forall(\varphi \to \circ\psi)$: Στις προγραμματιστικές τεχνικές η προηγούμενη πρόταση δηλώνει ότι σε κάθε χρονική στιγμή ένα πρόγραμμα μεταβαίνει από κατάσταση στην οποία ισχύει η πρόταση φ σε κατάσταση στην οποία ισχύει η ψ.

Θα ορίσουμε τον σύνδεσμο έως ότου, $\mathcal{U}$ το σύμβολό του. Με τον σύνδεσμο $\mathcal{U}$ και τον $S(p,q)$ (εφόσον) μπορούμε να εκφράσουμε τους υπόλοιπους τροπικούς συνδέσμους.

Εφόσον:

$t_1 \models \varphi\mathcal{U}\psi$ αν και μόνο αν $t_2 > t_1$ τέτοιο ώστε $t_2 \models \psi$ και $t \models \varphi$ για κάθε $t \in (t_2, t_1)$

$t_1 \models \varphi\mathcal{S}\psi$ αν και μόνο αν $t_2 < t_1$ τέτοιο ώστε $t_2 \models \psi$ και $t \models \varphi$ για κάθε $t \in (t_2, t_1)$

Τότε:

- $\Diamond_F\varphi = \top\mathcal{U}\varphi$
- $\Diamond_P\varphi = \top\mathcal{S}\varphi$
- $\circ\varphi = \bot\mathcal{U}\varphi$

Ενδιαφέρουσα πρόταση: Έστω δίκτυο επικοινωνίας. Το σύστημα θα απαντήσει σε αίτηση ($p : respond$) εφόσον πρώτα τη δεχθεί ($q : requset$).

$$\diamond_F p \rightarrow (\neg p)\mathcal{U}q$$

Όπως η τροπική λογική ομοίως και η χρονική λογική $ML_{\mathcal{U},\mathcal{S}}$ μεταφράζεται σε προτάσεις πρωτοβάθμιας λογικής ως ακολούθως:

- $p_i^* = P_i(t)$
- $(\varphi \rightarrow \psi)^* = \varphi^* \rightarrow \psi^*$
- $(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*$
- $(\varphi\mathcal{U}\psi)^* = \exists l' > l\ (\psi^*\{l'/l\}) \wedge \forall l''(l < l'' < l' \rightarrow (\psi^*\{l''/l\}))$
- $(\varphi\mathcal{S}\psi)^* = \exists t' > t\ (\psi^*\{t'/t\}) \wedge \forall t''(t' < t'' < t \rightarrow (\psi^*\{t''/t\}))$

5.1.1 Προτασιακή Χρονική Λογική PTL

Αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού η προτασιακή χρονική λογική (**P**ropositional **T**emporal **L**ogic), η οποία βρίσκει εφαρμογή στην επαλήθευση προγραμμάτων. Θα δούμε το σύστημα αξιωμάτων της και την πολυπλοκότητα του προβλήματος ικανοποιησιμότητας της γλώσσας αυτής.

Σχήμα αξιωμάτων:

1. $\Box_F(p \rightarrow q) \rightarrow (\Box_F p \rightarrow \Box_F q)$
2. $\circ(p \rightarrow q) \rightarrow (\circ \rightarrow \circ q)$
3. $\circ\neg p \rightarrow \neg \circ q$
4. $\Box_F p \leftrightarrow \circ p \wedge \circ\Box_F p$
5. $\Box_F(p \rightarrow \circ) \rightarrow (p \rightarrow \Box_F p)$
6. $p\mathcal{U}q \rightarrow \diamond_F q$
7. $p\mathcal{U}q \leftrightarrow \circ q \vee (p \wedge p\mathcal{U}q)$

$$\mathbf{PTL} = \mathrm{Log}_{\mathcal{SU}}(\mathbb{N}) \cap ML_{\mathcal{U}} \quad (S - free)$$

Κανόνες Απαγωγής:

– $\frac{\varphi \to \psi, \varphi}{\psi}$ (Modus Ponens)

– (Substitution)

– Αν ισχύει φ τότε $\Box_F \varphi$ (RN)

Θεώρημα 5.1.1 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας για την PTL είναι* **P**$SPACE$-**complete**.

Θεώρημα 5.1.2 *Η λογική* $Log_{\mathcal{SU}}(\mathbb{N})$ *ανάγεται πολυωνυμικά στην PTL.*

Θεώρημα 5.1.3 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας της* $Log_{\mathcal{SU}}(\mathbb{N})$ *είναι* **P**$SPACE$-**complete**.

5.2 Χρονικών Λογικών Συνέχεια

Αν αντί για χρονικές στιγμές χρησιμοποιήσουμε χρονικά διαστήματα τότε έχουμε νέες λογικές του χρόνου. Έστω οι προτάσεις:

– Η θερμοκρασία του σώματός μου είναι 40 C^o.

– Ο κ. Ζάχος επισκέπτεται συχνά τη μητέρα του.

– Ο William Shakespeare είναι ένας ηθοποιός

Η παραπάνω πρόταση επαληθεύεται σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η δεύτερη πρόταση είναι πρόταση που χρησιμοποιεί την έννοια του χρονικού διαστήματος. Και η τρίτη πρόταση συνδυάζει και την έννοια του χρονικού διαστήματος όσο και του χρονικού σημείου.

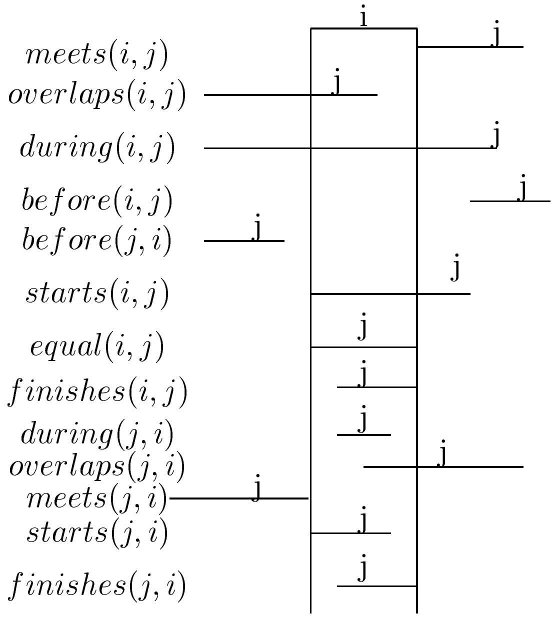
Ο James Allen το 1983 διαπίστωσε ότι προκειμένου να περιγράψουμε τις πιθανές σχέσεις δυο χρονικών διαστημάτων απαιτούνται 13 βασικές σχέσεις διαστημάτων. Ονομάζοντας τη γλώσσα αυτή $ALL - 13$ έχουμε:

- **Αλφάβητο**: 13 χρονικά κατηγορήματα: $before(i,j)$, $before(i,j)$, $meets(i,j)$,$meets(i,j)$, $overlaps(i,j)$,$overlaps(i,j)$, $during(i,j)$,$during(i,j)$,$starts(i,j)$,$starts(i,j)$, $finishes(i,j)$,
$finishes(i,j)$, $equals(i,j)$ και οι λογικοί τελεστές.
- **Προτάσεις**: Αφενός συνδυασμός ατομικών προτάσεων με λογικούς συνδέσμους αφετέρου συνδυασμός προτάσεων (καλοφτιαγμένων) μεταξύ τους πάλι με λογικούς συνδέσμους.
- **Πλαίσιο**: $\mathcal{F} = (W, <)$. Όπου W μπορεί να είναι το σύνολο ρητών και όχι μόνο των φυσικών αριθμών.
- **Απονομή Αλήθειας**: Για κάθε χρονικό διάστημα $\alpha(i)$ έπεται:

$$\forall x, y \in \alpha(i) \forall \in W(x < z < y \to z \in \alpha(i))$$

- **Σχέση Αλήθειας**: $\mathcal{F} \models^{\alpha} \varphi$.

Σχηματικά



Μετάφραση της $ALL-13$ σε Χρονική Λογική:

- $(equals(i,j))^* = \Box_\forall(p_i \leftrightarrow p_j)$
- $(before(i,j))^* = \Box_\forall(p_i \to \neg p_j \wedge \diamond_F p_j) \wedge \diamond_\exists(\neg p_i \wedge p_j \wedge \diamond_P p_i \wedge \diamond_F p_j)$
- $(meets(i,j))^* = \Box_\forall(p_i \to \neg p_j \wedge \diamond_F p_j) \wedge \neg \diamond_\exists (\neg p_i \wedge p_j \wedge \diamond_P p_i \wedge \diamond_F p_j)$
- $(overlaps(i,j))^* = \diamond_\exists(p_i \wedge p_j) \wedge \diamond_\exists(p_j \wedge \neg p_j \wedge \diamond_P p_j) \wedge \diamond_\exists(p_j \wedge \neg p_i \wedge \diamond_F p_i)$
- $(starts(i,j))^* = \Box_\forall(p_i \to p_j) \wedge \diamond_\exists(p_j \wedge \neg p_i) \wedge \Box_\forall(p_i \wedge p_j \to \Box_P(p_j \to p_i)$
- $(during(i,j))^* = \Box_\forall(p_i \to p_j) \wedge \diamond_\exists(p_j \wedge \neg p_i \wedge \diamond_P p_i) \wedge \diamond_\exists(p_j \wedge \neg p_i \wedge \diamond_F p_i)$
- $(starts(i,j))^* = \Box_\forall(p_i \to p_j) \wedge \diamond_\exists(p_j \wedge \neg p_i) \wedge \Box_\forall(p_i \wedge p_j \to \Box_F(p_j \to p_i))$

Η $ALL-13$ είναι η βάση της για πολυπλοκότερες γλώσσες που χρησιμοποιούν κατηγορήματα όπως:

- $HOLDS(P,i)$: η ιδιότητα P ικανοποιείται όσο διαρκεί το χρονικό διάστημα i.

Η χρήση του κατηγορήματος $HOLDS(P,i)$ είναι σημαντική για το επόμενο κεφάλαιο της **Υβριδικής Λογικής**.

5.3 Λογική της Περιγραφής

Η περιγραφική λογική (description logic) δεν είναι τροπική λογική, χρησιμοποιήθηκε στην Τεχνητή Νοημοσύνη ως εργαλείο αναπαράστασης της γνώσης, παρέχοντας, αποτελεσματικούς συμπερασματικούς κανόνες. Γνώρισε άνθιση τη δεκαετία του '80.Και στη δεκαετία του '90, εξακριβώθηκε ότι η περιγραφική λογική και η τροπική λογική έχουν μια στενή σχέση.

Έστω η γλώσσα $\mathcal{ALC}$. Το αλφάβητό της είναι:

- **Αφηρημένα ονόματα (concept names):** $C_0, C_1, ...$

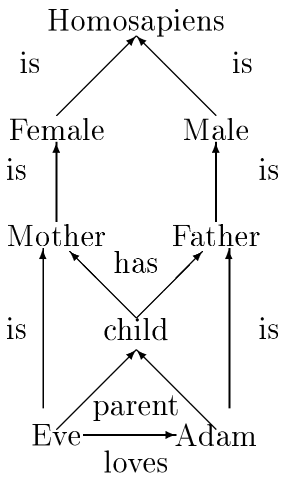
- **Ονόματα ρόλων (role names)**: $R, S, ...$
- **Ονόματα αντικειμένων object names**: $\alpha_0, \alpha_1, ...$
- **Λογικοί σύνδεσμοι αφηρημένων ονομάτων:** $\sqcap, \neg$
- **Υπαρξιακός ποσοδείκτης:** $\exists$
- **Λογικοί Σύνδεσμοι Προτάσεων:** $\vee, \wedge$
- **Τα σύμβολα:** . (τελεία), : (άνω και κάτω τελεία) και =.

Ορισμός 5.3.1 *Έστω η γλώσσα $\mathcal{ALC}$. Οι καλοφτιαγμένες εκφράσεις (wff) της $\mathcal{ALC}$ ορίζονται αναδρομικά:*

- Η $C \sqcap D$, $\neg C$ και $\exists R.C$ είναι αφηρημένα ονόματα.
- Η $\alpha : C$, αRb, $C = D$ είναι ατομικές προτάσεις.
- Συνδυασμός προτάσεων με λογικούς συνδέσμους είναι επίσης προτάσεις.

Σημείωση 5.3.1 *Η σχέση $C = D$ δηλώνει ότι η κλάση C και η κλάση D έχουν τα ίδια στοιχεία. Το σύμβολο $\sqcap$ δηλώνει τομή μεταξύ κλάσεων.*

Παράδειγμα 5.3.1



Για το παραπάνω παράδειγμα:

- Τα αφηρημένα ονόματα είναι ονόματα κλάσεων όπως:Mother, Male
- Τα ονόματα ρόλων είναι δυαδικές σχέσεις: has,love

– Ονόματα αντικειμένων: Eve, Adam

Βάση γνώσης για τη γλώσσα $\mathcal{ALC}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο προτάσεων της $\mathcal{ALC}$. Έστω Σ βάση γνώσης της $\mathcal{ALC}$. Η βάση διαθέτει δυο μέρη ή κουτιά:

– Το μέρος ή κουτί της ορολογίας (TBOX): Περιέχει προτάσεις της μορφής $C = D$.
– Το μέρος ή κουτί των βεβαιώσεων (ABOX): Περιέχει προτάσεις της μορφής $\alpha : C$ και $\alpha R b$

Συνεπώς για το προηγούμενο παράδειγμα :

TBOX

– Female $\sqcup$ Male $\sqsubseteq$ Homosapiens
– Mother $\sqsubseteq$ Female
– Father $\sqsubseteq$ Male
– Child $\sqsubseteq \exists has.Mother \sqcap \exists has.Father$

ABOX

– Eve: Mother
– Adam: Father
– Eve loves Adam
– Eve: ∃parent.Child
– Adam: ∃parent.Child

Τυπικά η σημασιολογία της $\mathcal{ALC}$ είναι η εξής, έστω το μοντέλο I:

$$I = (\Delta, R_0^I, ..., C_0^I, ..., \alpha_0^I, ...)$$

όπου :

- Δ είναι το σύνολο αντικειμένων.
- R_i^I: δυαδικές σχέσεις δηλαδή ονόματα ρόλων.
- C_i^I: ονόματα κλάσεων.
- α_i^I: όνομα αντικειμένων.

Επίσης έστω η τιμή C^I του ονόματος C στο I και έστω η σχέση αλήθειας: $I \models \varphi$. Συνεπώς:

- $(C \sqcap D)^I = C^I \cap D^I$
- $(\neg C)^I = \Delta - C^I$
- $(\exists \alpha R_i.C)^I = \{x \in \Delta | \exists y \in C^I x R_i^I y\}$
- $I \models \alpha : C$ αν και μόνο αν $\alpha^I \in C^I$
- $I \models \alpha R_i b$ αν και μόνο αν $\alpha^I R_i^I b^I$
- $I \models C = D$ αν και μόνο αν $C^I = D^I$
- $I \models \varphi \wedge \psi$ αν και μόνο αν $I \models \varphi$ και $I \models \psi$.
- $I \models \neg\varphi$ αν και μόνο αν όχι $I \models \varphi$

Βασικές εργασίες για βάση γνώση Σ της $\mathcal{ALC}$:

- **Ικανοποιησιμότητα κλάσης**: Υπάρχει μοντέλο I για τη βάση Σ ώστε C^I διάφορο του κενού;
- **Συνέπεια**: Ύπαρξη μοντέλου για το Σ.
- **Έλεγχος στιγμιοτύπου**: $\Sigma \models \alpha : C$. Ανήκει, δηλαδή, το α^I στο C^I για κάθε μοντέλο I του Σ;
- **Πρόβλημα Υποκλάσης:**$\Sigma \models C \sqsubseteq D$.
- **Ικανοποιησιμότητα**: Για δεδομένη πρόταση της $\mathcal{ALC}$, έστω η φ, να καθοριστεί κατά πόσο ικανοποιείται η φ στη δεδομένη βάση γνώσης.

Μετάφραση της πολυ-τροπικής λογικής $\mathbf{K}_n$ στην $\mathcal{ALC}$, έστω ! το σύμβολο της μετάφρασης (υπάρχει και η αντίστροφη μετάφραση):

- $p_i^! = C_i$
- $(\varphi \wedge \psi)^! = \varphi^! \sqcap \psi^!$
- $(\neg\varphi)^! = \neg\varphi^!$
- $\diamond_i \varphi = \exists R_i.\varphi^!$

Θεώρημα 5.3.1 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας κλάσης και το πρόβλημα υποκλάσης για την $\mathcal{ALC}$, με κενή βάση γνώσης, είναι* **PSPACE-complete**.

Το παραπάνω θεώρημα προκύπτει από μετάφραση της $\mathcal{ALC}$ στην $\mathbf{K_n}$ ή και την αντίστροφη.

Θεώρημα 5.3.2 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας κλάσης για την $\mathcal{ALC}$, σχετικά με το μέρος ορολογίας της βάσης γνώσης είναι* **EXPTIME-complete**.

Θεώρημα 5.3.3 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας προτάσεων της $\mathcal{ALC}$ είναι* **EXPTIME-complete**.

Παρατηρήσεις:

- Η γλώσσα $\mathcal{ALC}$ είναι εκφραστικότερη της K_n, αφενός αναφέρεται σε αντικείμενα (κόσμους) αφετέρου διαπιστώνει ιδιότητες αυτών. Για παράδειγμα :
$$\Sigma \models Eve : Female$$
- Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας τόσο προτάσεων όσο και κλάσεων της $\mathcal{ALC}$, μεν είναι **EXPTIME-complete** αλλά η πλειονότητα των αλγορίθμων τρέχουν σε διπλό εκθετικό χρόνο.

Κεφάλαιο 6

Υβριδική Λογική

6.1 Εισαγωγή

Η Υβριδική Λογική αποτελεί διασταύρωση της πρωτοβάθμιας λογικής, τροπικής λογικής και λογικών όπως η περιγραφική λογική.

- **Στη χρονική λογική η πρόταση: Ο Κώστας ξέχασε τα κλειδιά του** είναι πρόταση αορίστου χρόνου, χωρίς να δηλώνει την ακριβή στιγμή του γεγονότοςστο παρελθόν.Δηλαδή, έγινε κάτι στο παρελθόν, ο Κώστας κάποτε ξέχασε τα κλειδιά του αλλά δεν ξέρουμε πότε. Με χρονική λογική έπεται: P **Ο Κώστας ξέχασε τα κλειδιά του**, γενικά $\diamond_p\ \varphi$. Αναζητούμε, συνεπώς, στο παρελθόν τη στιγμή της επαλήθευσης της πρότασης φ. Η εργασία, επιπλέον, του James Allen παρέχει τη δυνατότητα να μιλάμε για γεγονότα συγκεκριμένου διαστήματος. Αυτό γίνεται σαφές με το σύνδεσμο:

  $$Hold(P, i)$$

  η ιδιότητα P ικανοποιείται για το διάστημα i.

- **Στην περιγραφική λογική** είδαμε ότι επιτρέπεται ερώτηση της μορφής:

  $$\Sigma \models Eve : Female$$

  Η γλώσσα γίνεται εκφραστικότερη εφόσον προσθέσουμε το σύμβολο $\mathcal{O}$. Η γραφή $\mathcal{O}$(Ευάγγελος, Μυρτώ,..., Ποσειδώνας) δηλώνει την επιλογή ονόματος από τα ονόματα (Ευάγγελος, Μυρτώ,..., Ποσειδώνας). Ομοίως, $\mathcal{O}$(Ευάγγελος) σημαίνει την επιλογή του Ευάγγελος. Άρα:

$$O(Eve, Adam) : Female$$

Τι πετύχαμε; Αναφορά σε στοιχειώδη αντικείμενα. Η παραπάνω τεχνική αναφέρεται στο $TBOX$.

Η ιδέα συνεπώς απλή: Διατηρούμε τη σημασιολογία δομών **Kripke**. Οι κόμβοι ή κόσμοι έχουν όνομα. Λογικό αυτόματο αναζητά σε γράφο ποίες προτάσεις ισχύουν και πού. Για την ακρίβεια το αυτόματο δεν αναζητά πληροφορία σε δεδομένο γράφο ή δομή. Κατασκευάζει το γράφο και ταυτόχρονα αναζητά. Άρα το αυτόματο είναι εκείνο που ονομάζει.

Συμπέρασμα: Η τροπική λογική αγνοεί τους κόσμους. Με επιλογή συγκεκριμένου πλαισίου αναζητούμε εκείνες τις προτάσεις που ικανοποιούνται στο συγκεκριμένο πλαίσιο που ίσως είναι μεταβατικό, αυτοπαθές κ.ο.κ.. **Αν θέλουμε αναφορά στους κόσμους τότε πρέπει πρώτα να τους ονομάσουμε, έπειτα να καθορίσουμε πώς θα τους συνδέουμε και τελικά με ποιόν τρόπο θα διαπιστώνουμε ποιες προτάσεις ικανοποιούνται στον κάθε έναν.**

6.2 Τυπικοί Ορισμοί της $H(@)$

Η Υβριδική λογική, οι υβριδικές γλώσσες δίνουν λύση στον προηγούμενο προβληματισμό, ο οποίος περιορίζεται στην παρακάτω αλληλουχία συλλογισμών:

Ζητούμενο η αναφορά στους κόσμους. Διατηρούμε σύνταξη και σημασιολογία της τροπικής λογικής. Στην τροπική λογική υπάρχουν μόνο τύπου (φόρμουλες). Άρα για να μιλήσουμε για ονόματα κόσμων, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τύπους. Για αυτό και προσθέτουμε νέο σύνολο προτάσεων, εκείνο των **ονομάτων** (*nominals*). Συντακτικά τα **ονόματα** είναι ατομικές προτάσεις. Σημασιολογικά είναι αληθή μόνο σε έναν κόσμο. Και πουθενά αλλού. Επομένως απομένει ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας, πώς δηλαδή θα ελέγχουμε την αλήθεια κάποιας πρότασης φ σε κόσμο με το όνομα i.

Ορισμός 6.2.1 Υβριδική Γλώσσα:

- Έστω τα προτασιακά σύμβολα $PROP = \{p, q, r, ...\}$, $NOM = \{j, i, k, l, ...\}$ τα οποία είναι μεταξύ τους διαφορετικά.
-

$$\text{WFF} := i \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \to \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid @_i\varphi.$$

Το σύμβολο $@_i\varphi$ δηλώνει το εξής: **Πήγαινε στον κόσμο i, όπου το i είναι αληθές, και μόνο εκεί, και δες αν η πρόταση φ ικανοποιείται.**

Ορισμός 6.2.2 Έστω Υβριδικό μοντέλο $\mathcal{M} = (W, R, V)$ *όπου:*

- W : σύνολο καταστάσεων
- R : δυαδική σχέση στο κόσμο των καταστάσεων W.
- V : απονομή αλήθειας, αντιστοιχώντας σε κάθε ατομική πρόταση σύνολο καταστάσεων στις οποίες ικανοποιούνται.

Επίσης:

- Το ζεύγος $\mathcal{F} = (W, R)$ καλείται πλαίσιο υπό το μοντέλο $\mathcal{M}$.
- Η απονομή αλήθειας V στο πλαίσιο $\mathcal{F}$ με $PROP \cup NOM \to Pow(W)$, ώστε για κάθε $i \in NOM$ να αντιστοιχεί το $V(i)$ (σύνολο ενός στοιχείου, κόσμου).
- Η συνάρτηση V κάνει το κάθε όνομα αληθές μόνο σε μια κατάσταση. Δίνει δηλαδή όνομα σε κάποια κατάσταση. Σύγκρουση ονομάτων δεν επιτρέπεται.

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \models p & \text{αν και μόνο αν} & w \in V(p),\ \text{όπου } p \in PROP \\
\mathcal{M}, w \models \neg\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, w \models \varphi \to \psi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w \not\models \varphi \text{ ή } \mathcal{M}, w \models \psi \\
\mathcal{M}, w \models \Diamond\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \exists w'(wRw' \ \&\ \mathcal{M}, w' \models \varphi) \\
\mathcal{M}, w \models \Box\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \forall w'(wRw' \ \Rightarrow\ \mathcal{M}, w' \models \varphi). \\
\mathcal{M}, w \models i & \text{αν και μόνο αν} & w \in V(i),\ \text{όπου } i \in \text{NOM} \\
\mathcal{M}, w \models @_i\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w' \models \varphi,\ \text{όπου } w' \text{ δηλώνει το } i.
\end{array}$$

Αν η φ ικανοποιείται σε όλες τις καταστάσεις του μοντέλου $\mathcal{M}$ τότε λέμε ότι η φ ικανοποιείται **καθολικά** στο $\mathcal{M}$ και γράφουμε $\mathcal{M} \models \varphi$

Αν $\mathcal{M} \models \varphi$ και $\mathcal{F}$ πλαίσιο του $\mathcal{M}$ τότε λέμε ότι η φ είναι **έγκυρη** στο $\mathcal{F}$.

Η υβριδική λογική, ας τη συμβολίζουμε HL, είναι **τροπική λογική** διότι παρέχει μηχανισμούς οικείους στην τροπική λογική:

– Τα ονόματα είναι ατομικές προτάσεις

– Ο **ικανοποιητής** @ ικανοποιεί τη συνθήκη:

$$@_i(\varphi \to \psi) \to (@_i\varphi \to @_i\psi)$$

Η τροπική λογική όπως είδαμε είναι κομμάτι της πρωτοβάθμιας λογικής. Η υβριδική λογική δεν αποτελεί εξαίρεση εφόσον υπάρχει μετάφρασή της στην πρωτοβάθμια γλώσσα:

$$\begin{array}{lcl}
ST_x(p) & = & \mathsf{P}(x),\, p \in PROP \\
ST_x(\neg\varphi) & = & \neg ST_x(\varphi) \\
ST_x(\varphi \wedge \psi) & = & ST_x(\varphi) \wedge ST_x(\psi) \\
ST_x(\diamond\varphi) & = & \exists y(x\mathsf{R}y \wedge ST_y(\varphi)) \\
ST_x(\Box\varphi) & = & \forall y(x\mathsf{R}y \to ST_y(\varphi)). \\
ST_x(i) & = & x = x_i,\, i \in \mathrm{NOM} \\
ST_x(@_i\varphi) & = & (ST_x(\varphi))[x_i/x]
\end{array}$$

$\boxed{\textbf{Η } HL \textbf{ είναι πράγματι υβριδική}}$

Από τη μετάφραση που προηγήθηκε είναι εμφανές ότι και η υβριδική λογική είναι κομμάτι(fragment της κλασσικής λογικής, όπως και η τροπική λογική. Αλλά προχωρά παραπέρα.

– Η πρόταση $@_i j$ δηλώνει ότι τα i και j είναι ταυτόσημα.

– Με την πρόταση $@_i \diamond j$ δηλώνεται ο σύνδεσμος (και ο τρόποςσύνδεσης) των κόσμων i και j, μπορούμε, δηλαδή, να μιλάμε για το πώς είναι η δομή Kripke.

Πλέον είναι σαφές:

- Η πρόταση **Ο Κώστας ξέχασε τα κλειδιά του** μπορεί να γραφεί ως εξής:
  $\diamond_p$ ($i\wedge$**Ο Κώστας ξέχασε τα κλειδιά του**). Πλέον το γεγονός δεν είναι αόριστο σε παρελθόντα χρόνο. Είναι ορισμένο τη στιγμή i.
- Είναι σαφές ότι ανάλογο του $Hold(P,i)$ είναι το $@_i$.

6.3 Υβρίδια

Η ιδέα της παραγράφου: Αντί για ονόματα προσθέτουμε **ατομικές μεταβλητές**, το σύνολο των οποίων το ονομάζουμε $INDIV = \{x, y, z, ...\}$. Ατομικές μεταβλητές και ονόματα λειτουργούν με τον ίδιο τρόπο. Επίσης, αντί για το σύμβολο του ικανοποιητή $@_i$ εισάγουμε το σύμβολο του **υπαρξιακού δεσμευτή** (binder) $\exists$.

$$\text{WFF} := x \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \to \psi \mid \Box_i\varphi \mid \exists x\varphi.$$

Συντακτικά, δηλαδή, υπάρχει συνδυασμός ιδεών της πρωτοβάθμιας και τροπικής λογικής αντίστοιχα. Η πρόταση :

$$\neg x \wedge (\neg p \to \exists x \diamond_i (x \wedge q))$$

είναι καλοφτιαγμένη πρόταση.

Το $\exists x$ δηλώνει:

- Επιλέγουμε στοιχείο (άτομο ή κόσμο ανάλογα την εφαρμογή) και το ονομάζουμε x.
- Ισοδύναμα, επιλέγουμε ένα στοιχείο και το δεσμεύουμε στην ατομική μεταβλητή x.

καθολικός δεσμευτής $\forall x\varphi = \neg\exists\neg\varphi$.

Έστω το μοντέλο $\mathcal{M} = (W, \{R_i\}_{i\in I}, V)$ και V απονομή αλήθειας στο $\mathcal{M}$. Αν $w \in W$ τότε:

$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \models p & \text{αν και μόνο αν} & w \in V(p),\ \text{όπου}\ p \in PROP \\
\mathcal{M}, w \models \neg\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w \not\models \varphi \\
\mathcal{M}, w \models \varphi \to \psi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w \not\models \varphi\ \text{ή}\ \mathcal{M}, w \models \psi \\
\mathcal{M}, w \models \diamond_i\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \exists w'(wR_iw'\ \&\ \mathcal{M}, w' \models \varphi) \\
\mathcal{M}, w \models \Box_i\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \forall w'(wR_iw' \ \Rightarrow\ \mathcal{M}, w' \models \varphi). \\
\mathcal{M}, w \models x & \text{αν και μόνο αν} & w = V(x),\ \text{όπου}\ x \in INDIV \\
\mathcal{M}, w \models \exists x\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w \models^{V'} \varphi,\ \text{όπου}\ V' \sim^x V.
\end{array}
$$

όπου $V' \sim^x V$: δυο απονομές που συμφωνούν σε όλα εκτός από την ανάθεση της V' στο x .

Παράδειγμα 6.3.1

$$\exists_{\geq 2}R\varphi := \exists x\exists y(\diamond(x \wedge \neg y) \wedge \diamond(y \wedge \neg x))$$

Η πρόταση $\exists_{\geq 2}R$ ικανοποιείται στο κόσμο w αν και μόνο αν η πρόταση φ ικανοποιείται σε δυο τουλάχιστον σημεία x και y, σε δυο διαφορετικούς απογόνους του w. Συνεπώς η πρόταση διαβάζεται ως εξής: Δεσμεύουμε τις μεταβλητές x και y σε δυο απογόνους R, κατά τέτοιον τρόπο ώστε το y να έχει στον κόσμο x την αληθοτιμή $false$ και το x να έχει στον κόσμο y την αληθοτιμή $false$.

Παράδειγμα 6.3.2

$$\forall x(x \to \neg \diamond x)$$

Οποιοδήποτε κόσμο και αν δεσμεύουμε, αν x είναι το όνομα του τρέχοντος κόσμου, τότε δεν μπορεί ο κόσμος αυτός να προσεγγίσει τον εαυτό του με R σχέση.

Παράδειγμα 6.3.3 $\exists x(\diamond(x \wedge Famous) \wedge \Box(\diamond x \to \neg Famous))$

Η παραπάνω πρόταση λέει ότι μπορούμε να δεσμεύσουμε μεταβλητή x τέτοια ώστε:

– Το x είναι συγγενής κάποιου άλλου και το ίδιο είναι διάσημος.

– Κάθε κόσμος που συγγενεύει με τον x δεν είναι διάσημος.

Υβριδική λογική $HL(K_{(m)})$

Σχήμα αξιωμάτων:

1. Q_1 $\forall v(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \forall v\psi)$ όπου το φ δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις του v
2. Q_2 $\forall v\varphi \rightarrow \varphi[w/v]$ όπου το w είναι αντικαταστάσιμο από το v στο φ
3. $Barcan$ $\forall v\Box_i \rightarrow \Box_i\forall v\varphi$, όπου $i \in I$
4. $Name$ $\exists vv$
5. Nom $\forall v[\Diamond_{(m)}(v \wedge \varphi) \rightarrow \Box_{(n)}(v \rightarrow \varphi)]$ όπου $\Diamond_{(m)} = \Diamond_{j_1}, ..., \Diamond_{j_m}$ και $\Box_{(n)} = \Box_{k_1}, ..., \Box_n$

Η σύνδεση των αξιωμάτων Q_1, Q_2 με την πρωτοβάθμια λογική είναι προφανή. Η πρόταση $Barcan$ υπάρχει και στην πρωτοβάθμια τροπική λογική και εδώ δεν είναι επιπλέον αξίωμα ή θεώρημα. Στην υβριδική λογική ορίζεται για όλες τις κλάσεις πλαισίων. Ας διευκρινίσουμε όμως τη σημασία των δυο επιπλέον αξιωμάτων $Name$ και Nom.

– Το $Name$ δηλώνει ότι μπορούμε να δεσμεύσουμε κόσμο σε μεταβλητή.
– Το Nom δεν είναι τόσο προφανές. Ακολουθώντας μονοπάτι $\Diamond_m$ προσεγγίζουμε κόμβο ή στοιχείο x στο οποίο ικανοποιείται η πρόταση φ. Άρα με οποιοδήποτε τρόπο ή μονοπάτι καταλήξουμε στον κόσμο x είναι σίγουρο ότι θα ισχύει η πρόταση φ.

Κανόνες Απαγωγής:

– $\frac{\varphi \rightarrow \psi, \varphi}{\psi}$ (Modus Ponens)
– (Substitution)
– Αν ισχύει φ τότε $\Box_i\varphi$ (RN)
– $\Box_i(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box_i\varphi \rightarrow \Box_i\psi)$

Για την ορθότητα και την πληρότητα της $HL(K_m)$ θα μιλήσουμε σε επόμενη παράγραφο.

6.4 Λογική $H(@, \downarrow)$

Στην υβριδική λογική $H(@)$ προσθέτουμε απαριθμήσιμα άπειρο σύνολο μεταβλητών καταστάσεων state variables, $SVAR = \{x, y, z, ...\}$. Διαφορετικό από τα σύνολα $PROP$ και NOM.

$$\text{WFF} := x \mid i \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \to \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid @_i\varphi \mid @_x\varphi \mid \downarrow x\varphi.$$

Η $H(@, \downarrow)$ διαθέτει (Δυο είδη ετικέτας (label): τα **ονόματα** και οι **καταστάσεις**. Οι καταστάσεις όμως είναι δεσμευμένες(δεσμεύονται) και τα ονόματα είναι ελεύθερα.

Στο μοντέλο της υβριδικής λογικής προσθέτουμε τα εξής (έστω V η απονομή αλήθειας):

$$\begin{array}{lll}
\mathcal{M}, w \models x & \text{αν και μόνο αν} & w \in V(x),\ \text{όπου } x \in SVAR \\
\mathcal{M}, w \models @_x\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, V(x) \models \varphi. \\
\mathcal{M}, w \models^V \downarrow x\varphi & \text{αν και μόνο αν} & \mathcal{M}, w \models^{V'} \varphi,\ \text{όπου} V' \sim^x V \text{και } V'(x) = w.
\end{array}$$

Χρησιμοποιώντας παραδείγματα θα αναδείξουμε την εκφραστική δύναμη του συμβόλου $\downarrow$ που ονομάζουμε **δεσμευτή**. Μάλιστα ο δεσμευτής διαθέτει τη δική του ερμηνεία, άρα δε συγκρούεται με τα υπόλοιπα σύμβολα της υβριδικής λογικής και κυρίως εκείνα του καθολικού και υπαρξιακού δεσμευτή.

Παράδειγμα 6.4.1 *Ορίζουμε* **ηττοπαθή** *εκείνον που δεν έχει* **αυτοσεβασμό**.

- Γράφοντας : $i \wedge \neg < Respect > i$ λέμε ότι στο πρόσωπο i λείπει η αυτοσεβασμό.
- Η πρόταση $\exists x(x \wedge \neg < Respect > x)$ ικανοποιείται σε εκείνα τα άτομα τα οποία δεν έχουν αυτοπεποίθηση. Δηλαδή, θέλουμε να ορίσουμε εκείνα τα άτομα ή κόσμους οι οποίοι δεν είναι αυτοπαθείς υπό την τροπική σχέση $< Respect >$.
- Στην πρώτη πρόταση εκφράσαμε τον ηττοπαθή σε ένα και μόνο άτομο. Στη συνέχεια θεωρήσαμε τον ηττοπαθή ως σύνολο εκείνων των ατόμων με

έλλειψη αυτοσεβασμού. Εμείς, όμως, θέλουμε κάτι επιπλέον. Τη δέσμευση, τον χαρακτηρισμό, **το μαρκάρισμα** συγκεκριμένου ατόμου, να του βάλουμε την ετικέτα του ανεξίτηλα αυτοπαθή. Αυτό κάνει ο **δεσμευτής**.

$$\downarrow x.\neg < Respect > x$$

Ο **ικανοποιητής μεταβλητών** $@_x\varphi$ όμοια λέει: πήγαινε στον κόσμομε την ετικέτα x και δες αν ικανοποιείται η πρόταση φ.

Παράδειγμα 6.4.2 *Ορίζουμε* **καθησυχαστικό πολιτικό** *εκείνον που σε όποιον και αν μιλά, κανένας δεν τον εμπιστεύεται.*

$\downarrow x.$ (**καθησυχαστικός** $\wedge \forall y$ (<Μιλά στον> $y \to \neg @_y$ <Εμπιστοσύνη> x).

Παράδειγμα 6.4.3 *Ορισμός του συμβόλου $\mathcal{U}$ της χρονικής μεταβλητής.*

$$Until(\varphi,\psi) = \downarrow x(\diamond \downarrow y(\varphi \wedge @_x\Box(\diamond y \to \psi)))$$

Δηλαδή: Ονόμασε την παρούσα θέση, κατάσταση x. Αναζητώντας σε επόμενες καταστάσεις βρίσκουμε κατάσταση με ετικέτα y στην οποία ισχύει η πρόταση φ, και κάθε κατάσταση ανάμεσα στο x και το y ικανοποιεί το ψ. **Προσοχή:** Η χρήση του $@_x$ είναι για να ξεκινήσουμε από εκεί που αρχίσαμε.

Όλα μαζί

$$\text{WFF} := x \mid i \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi \to \psi \mid \Box\varphi \mid \diamond\varphi \mid @_i\varphi \mid @_x\varphi \mid \downarrow x\varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall x\varphi.$$

6.5 Πλαίσια και $H(@)$

Τα ονόματα καταστάσεων $i \in NOM$ παρέχουν τη δυνατότητα να εκφράσουμε είδη πλαισίων. **Γνήσιοι τύποι** υβριδικής λογικής είναι εκείνες οι προτάσεις που περιέχουν αποκλειστικά ονόματα καταστάσεων.

– Αυτοπάθεια: $@_i\diamond i$ (Reflexivity)

- Συμμετρία: $@_i\Box\diamond i$ (Symmetry)
- Μεταβατικότητα: $\diamond\diamond i \rightarrow \diamond i$ (transitivity)
- Αιτιοκρατία: $\diamond i \rightarrow \Box i$ (Determinism)
- Πυκνότητα: $\diamond i \rightarrow \diamond\diamond i$ (Density)

Αιτιοκρατία σημαίνει ότι κάθε κατάσταση έχει το πολύ έναν απόγονο. Ορίζονται ωστόσο και κλάσεις πλαισίων οι οποίες δεν εκφράζονται σε τροπική λογική:

- Μη αυτοπάθεια:$@_i\neg\diamond i$ (Irreflexivity)
- Ασυμμετρία: $@_i\neg\diamond\diamond i$ (Asymmetry)
- Αντισυμμετρία: $@_i\Box(\diamond i \rightarrow i)$ (Antisymmetry)
- Καθολικότητα: $\diamond i$ (Universality)
- Μη μεταβατικότητα: $\diamond\diamond i \rightarrow \neg\diamond i$ (Intransitivity)
- Τριχοτομία: $@_i\diamond i \vee @_j i \vee @_i\diamond j$ (Trichotomy)
- ≤ 2 Καταστάσεις: $@_i(\neg j \wedge \neg k) \rightarrow @_j k$

Τις παραπάνω ιδιότητες μπορούμε να τις ορίσουμε και με χρονικούς συνδέσμους:

- F : σε μελλοντική στιγμή.
- $< P >$: σε στιγμή του παρελθόντος.
- $[F]$: για κάθε μελλοντική στιγμή.
- $[P]$: για κάθε στιγμή του παρελθόντος.

$@_i\neg\langle\mathsf{F}\rangle i$	$\forall x\neg(xR_F x)$ *(Irreflexivity)*
$@_i\neg\langle\mathsf{F}\rangle\langle\mathsf{F}\rangle i$	$\forall xy(xR_F y \rightarrow \neg yR_F x)$ *(Asymmetry)*
$@_i[\mathsf{F}](\langle\mathsf{F}\rangle i \rightarrow i)$	$\forall xy(xR_F y \wedge yR_F x \rightarrow x = y)$ *(Antisymmetry)*
$\langle\mathsf{F}\rangle\langle\mathsf{F}\rangle i \rightarrow \langle\mathsf{F}\rangle i$	$\forall xyz(xR_F y \wedge yR_F z \rightarrow xR_F z)$ *(Transitivity)*
$\langle\mathsf{F}\rangle i \rightarrow \langle\mathsf{F}\rangle\langle\mathsf{F}\rangle i$	$\forall xy(xR_F y \rightarrow \exists z(xR_F z \wedge zR_F y)$ *(Density)*
$@_i\langle\mathsf{F}\rangle j \vee @_i j \vee @_j\langle\mathsf{F}\rangle i$	$\forall xy(xR_F y \vee x = y \vee yR_F z)$ *(Trichotomy)*

Στους ορισμούς αφήσαμε τις σχέσεις R_F και R_P αόριστες. Ορίζουμε την R_F (σε πλαίσιο γραμμικής διάταξης), ως τη μελλοντική εξέταση προτάσεων και την R_P ως εξέταση του παρελθόντος. Οι έννοιες παρελθόν και μέλλον έχουν έννοια εφόσον μιλάμε για γραμμικό χρόνο.

6.6 Υβριδικά Ταμπλό Tableau

Το παρακάτω σύστημα ταμπλό υβριδικής λογικής είναι ανάλογο του συστήματος Gentzen.

$$\frac{@_s\neg\varphi}{\neg @_s\varphi}\,[\neg] \qquad\qquad \frac{\neg @_s\neg\varphi}{@_s\varphi}\,[\neg\neg]$$

$$\frac{@_s(\varphi\wedge\psi)}{\begin{array}{c}@_s\varphi\\ @_s\psi\end{array}}\,[\wedge] \qquad\qquad \frac{\neg @_s(\varphi\wedge\psi)}{\neg @_s\varphi \;\mid\; \neg @_s\psi}\,[\neg\wedge]$$

$$\frac{@_s@_t\varphi}{@_t\varphi}\,[@] \qquad\qquad \frac{\neg @_s@_t\varphi}{\neg @_t\varphi}\,[\neg @]$$

$$\frac{@_s\Diamond\varphi}{\begin{array}{c}@_s\Diamond a\\ @_a\varphi\end{array}}\,[\Diamond] \qquad\qquad \frac{\neg @_s\Diamond\varphi \quad @_s\Diamond t}{\neg @_t\varphi}\,[\neg\Diamond]$$

$$\frac{@_s\Box\varphi \quad @_s\Diamond t}{@_t\varphi}\,[\Box] \qquad\qquad \frac{\neg @_s\Box\varphi}{\begin{array}{c}@_s\Diamond a\\ \neg @_a\varphi\end{array}}\,[\neg\Box]$$

Η κεντρική ιδέα των αποδεικτικών μηχανισμών της υβριδικής λογικής είναι η ύπαρξη αυτομάτου το οποίο εξερευνεί ένα γράφο που το κατασκευάζει το ίδιο. Δηλαδή η αναλογία μεταξύ κατασκευής γράφου από το αυτόματο και της απόδειξης προτάσεων σε υβριδικό μοντέλο είναι :

– Η κατασκευή κόμβων αντιστοιχεί στην ονομασία κόσμων από το σύνολο NOM.

– Η κατασκευή ακμών αντιστοιχεί στον καθορισμό σχέσεων μεταξύ των κόσμων από το σύνολο R.

Προσοχή :

– s, t δεδομένα ονόματα καταστάσεων.

– α όνομα κατάστασης που κατασκευάζεται από το αυτόματο.

Οι προηγούμενοι κανόνες εξασφαλίζουν τον τρόπο σύνδεσης των κόσμων. Εντούτοις πρέπει να διαχειριστούμε την ισότητα μεταξύ των κόσμων. Άρα, έστω και το δεύτερο σύνολο κανόνων:

$$\frac{[s \text{ σε κλαδί}]}{@_s s}\ \text{[Ref]} \qquad \frac{@_t s}{@_s t}\ \text{[Sym]} \qquad \frac{@_s t \quad @_t \varphi}{@_s \varphi}\ \text{[Nom]} \qquad \frac{@_s \diamond t \quad @_t t'}{@_s \diamond t'}\ \text{[Bridge]}$$

Αποδείξεις με ταμπλό σημαίνει:

– Αποδεικνύουμε προτάσεις, αρχικά διαψεύδοντας, χρησιμοποιούμε τους προηγούμενους κανόνες με σκοπό την ανάδειξη αντίφασης.

– Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε την πρόταση φ. Επιλέγουμε όνομα i τέτοιο ώστε να μην είναι όνομα κατάστασης που προκύπτει στην πρόταση φ.

– Ρίζα δέντρου $\neg @_i \varphi$

Παραδείγματα της $HL(@)$

Παράδειγμα 6.6.1 *Αποδείξτε την πρόταση :*

$$\neg @_j(\langle \textsc{hor} \rangle \langle \textsc{vert} \rangle (i \wedge p) \wedge \langle \textsc{diag} \rangle i \rightarrow \langle \textsc{diag} \rangle p)$$

Στο παράδειγμα αυτό χρησιμοποιούμε τρεις τροπικούς συνδέσμους που έχουν και την αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία ως προς τον κόσμο με το όνομα i:

– $\langle \textsc{hor} \rangle$: οριζόντια

– $\langle \textsc{vert} \rangle$: κάθετα

– $\langle \textsc{diag} \rangle$: διαγώνια

1	$\neg @_j(\langle \text{HOR}\rangle\langle \text{VERT}\rangle(i \wedge p) \wedge \langle \text{DIAG}\rangle i \rightarrow \langle \text{DIAG}\rangle p)$	
2	$@_j(\langle \text{HOR}\rangle\langle \text{VERT}\rangle(i \wedge p) \wedge \langle \text{DIAG}\rangle i)$	$1, \neg\rightarrow$
$2'$	$\neg @_j\langle \text{DIAG}\rangle p$	Ditto
3	$@_j\langle \text{HOR}\rangle\langle \text{VERT}\rangle(i \wedge p)$	$2, \wedge$
$3'$	$@_j\langle \text{DIAG}\rangle i$	Ditto
4	$@_j\langle \text{HOR}\rangle k$	$3, \langle \text{HOR}\rangle$
$4'$	$@_k\langle \text{VERT}\rangle(i \wedge p)$	Ditto
5	$@_k\langle \text{VERT}\rangle l$	$4', \langle \text{VERT}\rangle$
$5'$	$@_l(i \wedge p)$	Ditto
6	$@_l i$	$5', \wedge$
$6'$	$@_l p$	Ditto
7	$@_i l$	$6, \text{Sym}$
8	$@_i p$	$6', 7, \text{Nom}$
9	$\neg @_i p$	$2', 3', \neg\langle \text{DIAG}\rangle$
	$\dagger\ 8, 9\ \dagger$	

– Στην αρχή χρησιμοποιήσαμε το όνομα κόσμου j αντί για το i.

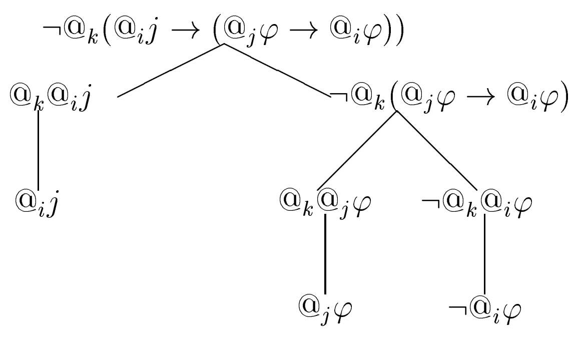
– Το παράδειγμα αυτό έχει γεωμετρική ερμηνεία εφόσον μπορούμε να εκφράσουμε την απόδειξη της πρότασης με αυτόματο που κινείται στο χώρο όπως δηλώνουν οι τροπικοί σύνδεσμοι. Ομοίως και η κατασκευή των κόσμων.

Ακολουθεί ένα τυπικό παράδειγμα:

Παράδειγμα 6.6.2 *Αποδείξτε την πρόταση :*

$$@_i j \rightarrow (@_j \varphi \rightarrow @_i \varphi)$$

1	$\neg @_k(@_i j \rightarrow (@_j \varphi \rightarrow @_i \varphi))$	
2	$@_k @_i j$	$1, \neg\rightarrow$
$2'$	$\neg @_k(@_j \varphi \rightarrow @_i \varphi)$	Ditto
3	$@_i j$	$2, @$
4	$@_k @_j \varphi$	$2', \neg\rightarrow$
$4'$	$\neg @_k @_i \varphi$	Ditto
5	$@_j \varphi$	$4, @$
6	$\neg @_i \varphi$	$4', \neg @$
7	$@_i \varphi$	3,5 Nom
	$\dagger\ 6, 7\ \dagger$	



Παραδείγματα της $HL(@, \downarrow)$

Για το **δεσμευτή** προσθέτουμε άλλους δυο κανόνες:

$$\frac{@_s{\downarrow} x\varphi}{@_s\varphi[s/x]}\ [\downarrow] \qquad\qquad \frac{\neg @_s{\downarrow} x\varphi}{\neg @_s\varphi[s/x]}\ [\neg\downarrow]$$

$\varphi[s/x]$: Αντικατάσταση των ελεύθερων εμφανίσεων του x από το s στο φ. Αν s μεταβλητή, πριν την αντικατάσταση, πρέπει να αλλάξουμε τις δεσμευμένες εμφανίσεις της s στο φ για αποφυγή συγκρούσεων.

Ο δεσμευτής είναι δυαδικός, δηλαδή:

$$\downarrow x\varphi \leftrightarrow \neg \downarrow x \neg\varphi$$

Το παραπάνω θα το αποδείξουμε με τη βοήθεια του υβριδικού συστήματος. Θα δουλέψουμε μόνο με τη μια κατεύθυνση, όμοια αποδεικνύεται και η άλλη.

1	$\neg @_i{\downarrow} x\varphi \leftrightarrow \neg \downarrow x\neg\varphi$	
2	$@_i{\downarrow} x\varphi$	$1, \neg\to$
$2'$	$\neg @_i \neg \downarrow x\neg\varphi$	Ditto
3	$@_i{\downarrow} x\neg\varphi$	$2', \neg\neg$
4	$@_i\neg\varphi[i/x]$	$4, \downarrow$
5	$@_i\neg\varphi[i/x]$	$3, \downarrow$
	$\dagger\ 4, 5\ \dagger$	

Παράδειγμα 6.6.3 *Αποδείξτε την πρόταση:*

$$\downarrow xx$$

1	$\neg @_i \downarrow xx$	
2	$\neg @_i i$	$1, \downarrow$
3	$\neg @_i i$	Ref
	$\dagger\ 2, 3\ \dagger$	

Παραδείγματα, όλα μαζί

Χρησιμοποιώντας ποσοδείκτες πρέπει να προσθέσουμε επιπλέον κανόνες:

$$\frac{@_s \exists x \varphi}{@_s \varphi[\alpha/x]}\ [\exists] \qquad \frac{\neg @_s \exists x \varphi}{\neg @_s \varphi[t/x]}\ [\neg\exists] \qquad \frac{@_s \forall x \varphi}{@_s \varphi[t/x]}\ [\forall] \qquad \frac{\neg @_s \forall x \varphi}{\neg @_s \varphi[\alpha/x]}\ [\neg\forall]$$

Οι παραπάνω κανόνες θα διασαφηνιστούν με τα παρακάτω παραδείγματα:

Παράδειγμα 6.6.4 *Αποδείξτε την πρόταση:*

$$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$$

όταν η x δεν εμφανίζεται ελεύθερη στην φ

1		$\neg @_i(\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi))$	
2		$@_i \forall x(\varphi \to \psi)$	$1, \neg\to$
$2'$		$\neg @_i(\varphi \to \forall x\psi)$	Ditto
3		$@_i\varphi$	$2', \neg \to$
$3'$		$\neg @_i \forall x\psi$	Ditto
4		$\neg @_i \neg\psi[j/x]$	$3', \neg\forall$
5		$(@_i\varphi \to \psi)[j/x]$	$2, \forall$
6		$\neg @_i\varphi[j/x] \quad @_i\psi[j/x]$	$6, \to$
	$\dagger\ 3,6\ \dagger$	$\dagger\ 4,6\ \dagger$	

Παράδειγμα 6.6.5 *Αποδείξτε την πρόταση:*

$$\diamond \exists x\varphi \to \exists x \diamond \varphi$$

1	$\neg @_i(\diamond\exists x\varphi \to \exists x \diamond \varphi)$	
2	$@_i \diamond \exists x$	$1, \neg\to$
$2'$	$\neg @_i \exists x \diamond \varphi$	Ditto
3	$@_i \diamond j$	$2, \diamond, j$
$3'$	$@_j \exists x\varphi$	Ditto
4	$@_j \varphi[j/x]$	$3', \exists, k$
5	$\neg @_j \diamond\varphi[k/x]$	$2', \neg\exists, k$
6	$\neg @_j \varphi[k/x]$	$3, 5, \neg\diamond$
	$\dagger\ 4,6\ \dagger$	

6.7 Υβριδική Ταξινόμηση

Η υβριδική λογική είναι ενδιαφέρουσα για τους επιπλέον λόγους:

– **Είναι πράγματι υβριδική**. Δηλαδή, αποτελεί διασταύρωση αφενός των πρωτοβάθμιων λογικών αφετέρου των τροπικών λογικών. Η ονομασία των κόσμων αποτελεί, ίσως, ιδιορρυθμία αλλά η επιλογή δικαιώνεται εφόσον προκύπτουν: ελκυστική πολυπλοκότητα, σαφές αποδεικτικό σύστημα και ξεκάθαρη κατασκευή μοντέλων. Εδώ ας σημειώσουμε ότι οι προτάσεις που αποτελούνται μόνο από τον ικανοποιητή και ονόματα κόσμων λέγονται **γνήσιες** ή **αυθεντικές** προτάσεις υβριδικής λογικής. Τότε, αν οι γνήσιες προτάσεις χρησιμοποιηθούν ως αξιώματα ορίζουν είδη πλαισίων όπως εκείνα της τροπικής λογικής.

- **Είναι κοινός τόπος**. Ερευνητές διαφορετικών πεδίων έχουν κοινό τόπο την υβριδική λογική. Καλύτερα, επηρεάζουν την τελική της μορφή. Αλλά κυρίως εκείνο που ενώνει τα επιστημονικά πεδία όπως της Τεχνητής Νοημοσύνης, των Βάσεων Δεδομένων, Μαθηματικών, Αλγορίθμων και Πολυπλοκότητας είναι η χρήση γράφων. Γράφοι, διάγραμμα καταστάσεων, αυτόματα, υβριδική λογική και γενικότερα τροπική λογική αποτελούν χώρο μιας **κοινωνικής** (social) επιστημονικής συνάντησης.
- **Παρέχει ταξινόμηση της πληροφορίας.** Στην τεχνητή νοημοσύνη η γνώση ότι συγκεκριμένη ιδιότητα, μεταβλητή, είναι μέρος ή σχετίζεται με μια άλλη πληροφορία, παρέχει αποτελεσματικότερα συστήματα γνώσης. Ήδη στην υβριδική λογική διαπιστώσαμε μια σταδιακή ταξινόμηση των προτασιακών συμβόλων με το σύνολο των ονομάτων. Ενώ το σύμβολο του ικανοποιητή @ παρέχει πλήρες και συνεπές συμπερασματικό σύστημα. Η υβριδική λογική ανήκει στην κατηγορία των sorted modal logics.

Παράδειγμα 6.7.1 *Ο Patrick Blackburn παρουσιάζει χρονική τροπική λογική με πολυ-ταξινόμηση των χρονικών διαστημάτων ως προς τη διάρκειά τους (δευτερόλεπτα, λεπτά, ώρες, χρόνια,...).*

$\langle \mathsf{P} \rangle(\mathsf{3.05} \wedge \mathsf{P.M.} \wedge \mathsf{Friday} \wedge \mathsf{26th} \wedge \mathsf{March} \wedge \mathsf{1999} \wedge \text{Ο Γιάννης τράβηξε τη σκανδάλη })$

Συνεπώς το γεγονός **Ο Γιάννης τράβηξε τη σκανδάλη** είναι χρονικά καθορισμένο. Η διαφορά με τα προηγούμενα είναι ότι εδώ το χρονικό διάστημα δεν είναι χρονική στιγμή, π.χ. ένα i. Αλλά σειρά στοιχείων που καθορίζουν τελικά τη στιγμή του γεγονότος. Παρόμοια ταξινόμηση είναι και η χρήση εννοιών της : **τώρα, χτες, σήμερα και αύριο.**

$$\langle \mathsf{P} \rangle(\mathsf{Yesterday} \wedge \mathsf{Marvin's\text{-}head\text{-}explode}).$$

Το γεγονός ότι ταξινομούμε τα προτασιακά σύμβολα, άρα έχουμε κατηγορίες προτάσεων, σημαίνει την εξασφάλιση της σημασιολογικής εγκυρότητας της γλώσσας. Στο προηγούμενο παράδειγμα πρέπει να εξασφαλιστεί ότι: $\langle \mathsf{F} \rangle(\mathsf{yesterday} \wedge \varphi)$ είναι ψευδές σε κάθε κατάσταση του μοντέλου, εφόσον το $yesterday$ ανήκει στο παρελθόν και μόνο.

Παράδειγμα 6.7.2 *Σε εφαρμογές που έχουν παράμετρο την έννοια του χρόνου είναι μερικές φορές χρήσιμο να βεβαιώνουμε ότι ένα γεγονός θα συμβαίνει σε όλα τα μελλοντικά χρονικά μονοπάτια. Αυτό δεν μπορεί να γίνει με τα σύμβολα* $\langle \mathsf{P} \rangle, \langle \mathsf{F} \rangle$ *και* @*. Ο R. Bull έλυσε το παραπάνω πρόβλημα με περαιτέρω ταξινόμηση. Έθεσε την εξής τριπλά ταξινομημένη γλώσσα:*

Εκτός από τα προτασιακά σύμβολα και τα ονόματα των κόσμων προστέθηκαν ονόματα μονοπατιών και ατομικές προτάσεις που ικανοποιούνται σε συγκεκριμένα σημεία ενός μονοπατιού δεδομένου πλαισίου. Συνεπώς η πρόταση **υπάρχει μελλοντική κατάσταση όπου η** φ **ικανοποιείται για κάθε μέλλον** εκφράζεται με τροπική λογική:

$$\langle \textsc{every-fut} \rangle \varphi \ := \ \forall \rho (\rho \to \langle \mathsf{F} \rangle \exists x (x \wedge \rho \wedge \varphi)).$$

– Το ρ είναι όνομα μονοπατιού.

– Το x είναι δεσμευμένο όνομα κατάστασης.

Συνεπώς η προηγούμενη πρόταση λέει: **Σε κάθε μονοπάτι** ρ **ξεκινώντας από την τρέχουσα κατάσταση, υπάρχει μελλοντική κατάσταση** x **όπου η πρόταση** φ **ικανοποιείται.**

6.8 Αξιωματικοποίηση

Έστω φ και ψ τύποι (φόρμουλες), v μεταβλητή κατάστασης, c όνομα (nominal), και έστω s, t σύμβολα καταστάσεων. Η υβριδική γλώσσα $K[H_s(@, \downarrow)]$ είναι το μικρότερο σύνολο προτάσεων της $H_s(@, \downarrow)]$ που: περιέχει όλες τις προτασιακές ταυτολογίες, είναι κλειστή στους αποδεικτικούς κανόνες και έχει το παρακάτω αξιωματικό σύστημα:

MP	$\vdash \varphi \to \psi,\ \vdash \varphi \Rightarrow \vdash \psi$	
K	$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$	
N	$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \Box\varphi$	
Q_1	$\downarrow v.(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \downarrow v.\psi)$	Το φ δεν έχει ελεύθερες εμφανίσεις του v
Q_2	$\downarrow v.\varphi \to (s \to \varphi[v/s])$	Το s είναι αντικαταστάσιμο από το v στηνφ
Q_3	$\downarrow v.(v \to \varphi) \to \downarrow v.\varphi$	
$SelfDual_{\downarrow}$	$\downarrow v.\varphi \leftrightarrow \neg \downarrow v.\neg\varphi$	
$N_{\downarrow}$	$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash \downarrow v.\varphi$	
$K_{@}$	$@_s(\varphi \to \psi) \to (@_s\varphi \to @_s\psi)$	
$SelfDual_{@}$	$@_s\varphi \leftrightarrow \neg @_s \neg\varphi$	
$Elim_{@}$	$(s \wedge @_s\varphi) \to \varphi$	
$Label$	$@_s s$	
$Scope$	$@_t @_s\varphi \to @_s\varphi$	
$N_{@}$	$\vdash \varphi \Rightarrow \vdash @_s\varphi$	
$M_{@}$	$@_s\varphi \to \Box @_s\varphi$	
$Naming$	$\vdash \varphi \to \neg c \Rightarrow \vdash \varphi \to \bot$	$c \notin NOM(\varphi)$
$Paste$	$\vdash \varphi \to @_s\Box(\psi \to \neg c) \Rightarrow \vdash \varphi \to @_s\Box(\psi \to \bot)$	$s \notin NOM(\{\varphi, \psi, c\})$

Θεώρημα 6.8.1 *Έστω S σύνολο γνήσιων προτάσεων της $H_S(@, \downarrow)$ και έστω* **S** *επέκταση της $K[H_s(@, \downarrow)]$ που προέκυψε θέτοντας το S ως αξιώματα. Τότε, κάθε συνεπές σύνολο* **S** *προτάσεων της $H_s(@, \downarrow)$ είναι ικανοποιήσιμο σε απαριθμήσιμο υβριδικό μοντέλο, σύμφωνα με το πλαίσιο εκείνο στο οποίο κάθε τύπος της* **S** *είναι έγκυρος.*

Κεφάλαιο 7

Υβριδική Συζήτηση

7.1 Εισαγωγή

Η υβριδική λογική δεν παύει να είναι τροπική λογική. Άρα ο ορισμός της **αμφιπροσομοίωσης** πρέπει να αλλάξει. Επίσης δεν παύει να είναι και πρωτοβάθμια γλώσσα εφόσον χρησιμοποιεί μεταβλητές. Συνεπώς ο ορισμός της **αμφιπροσομοίωσης** θα πρέπει να χρησιμοποιήσει αφενός τις μεταβλητές αφετέρου και την επίδραση των νέων συνδέσμων(π.χ. δεσμευτής) στον ορισμό.

Η εξέταση συγκεκριμένων ιδιοτήτων που σε άλλες λογικές δεν ικανοποιούνται είναι επίσης σημαντική. Δυο ιδιότητες που θα εξετάσουμε είναι εκείνη της παρεμβολής (κατά Craig) και της ορισιμότητας κατά Beth.

Τέλος θα εξετάσουμε την πολυπλοκότητα της υβριδική λογικής. Συμπεριλαμβάνονται επίσης και παραδείγματα εφαρμογής των υβριδικών λογικών.

7.2 Υβριδική Προσομοίωση

Ξεκινάμε με την υβριδική λογική η οποία διαθέτει ονόματα και όχι τον **ικανοποιητή**, και τα πράγματα είναι απλά. Ο ορισμός της αμφιπροσομοίωσης τροποποιείται προκειμένου να χρησιμοποιήσει τα ονόματα ως ξεχωριστό ατομικό σύνολο προτάσεων.

Έστω $\mathcal{M}=(M, R^{\mathcal{M}}, V^{\mathcal{M}})$ και $\mathcal{N}=(N, R^{\mathcal{N}}, V^{\mathcal{N}})$ δυο υβριδικά μοντέλα. Η μη κενή δυαδική σχέση $\sim$ λέγεται **αμφιπροσομοίωση** μεταξύ των δυο μοντέλων $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ εφόσον ικανοποιούνται οι παρακάτω προτάσεις/συνθήκες:

1. (**prop**) Αν $m \sim n$ τότε $m \in V^{\mathcal{M}}(\alpha)$ αν και μόνο αν $n \in V^{\mathcal{N}}(\alpha)$, όπου $\alpha \in PROP \cup NOM$
2. (**του μπροστά**) Αν $m \sim n$ και $mR^{\mathcal{M}}m^{'}$ τότε υπάρχει $\exists n^{'}$ τέτοιο ώστε $nR^{\mathcal{M}}n^{'}$ και $m^{'} \sim n^{'}$.
3. (**του πίσω**) Η ίδια πρόταση από το $\mathcal{N}$ στο $\mathcal{M}$.

Διαισθητικά χρησιμοποιώντας τα παιχνίδια των Ehrenfeucht-Fraïssé παρατηρούμε ότι η αμφιπροσομοίωση είναι η διαδικασία όπου ο ένας παίκτης επιλέγει μοντέλο και κόσμο και ο άλλος παίκτης επιλέγει κόσμο ο οποίος ικανοποιεί τις ίδιες συνθήκες με τον κόσμο του πρώτου παίκτη. Βεβαίως στην υβριδική λογική έχουμε κάτι επιπρόσθετο: οι δυο κόσμοι πρέπει να έχουν το ίδιο όνομα ή καλύτερα όσα ονόματα δηλώνουν τους κόσμους του πρώτου παίκτη να χαρακτηρίζουν και τους κόσμους του άλλου παίκτη.

Αμφιπροσομοίωση της $HL(@)$

Διαισθητικά η ύπαρξη του **ικανοποιητή**, παίζοντας με Ehrenfeucht-Fraïssé παιχνίδι, δεν αλλάζει τίποτα. Και αυτό διότι ο ικανοποιητής απλά μας μετακινεί από τρέχον κόσμο σε άλλον κόσμο. Αν δηλαδή τα δυο μοντέλα είναι ισοδύναμα, έχουν δηλαδή την ιδιότητα της αμφιπροσομοίωσης, τότε με το σύνδεσμο @ θα είναι πάλι ισοδύναμα. Για να είμαστε τυπικοί όμως πρέπει να προσθέσουμε τον **κανόνα** @, ο οποίος δηλώνει ότι δυο κόσμοι είναι όμοιοι εφόσον χώρια των υπολοίπων έχουν υπό το @ το ίδιο ακριβώς ονόμα.

Η μη κενή δυαδική σχέση $\sim$ λέγεται **αμφιπροσομοίωση** μεταξύ των δυο μοντέλων $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ εφόσον ικανοποιούνται οι παρακάτω προτάσεις/συνθήκες:

1. (**prop**) Αν $m \sim n$ τότε $m \in V^{\mathcal{M}}(\alpha)$ αν και μόνο αν $n \in V^{\mathcal{N}}(\alpha)$, όπου $\alpha \in PROP \cup NOM$
2. (**του μπροστά**) Αν $m \sim n$ και $mR^{\mathcal{M}}m^{'}$ τότε υπάρχει $\exists n^{'}$ τέτοιο ώστε $nR^{\mathcal{N}}n^{'}$ και $m^{'} \sim n^{'}$.
3. (**του πίσω**) Η ίδια πρόταση από το $\mathcal{N}$ στο $\mathcal{M}$.

4. (@) Αν $m \sim n$ τότε για κάθε όνομα i έχουμε $V^{\mathcal{M}}(i) = \{m\}$ και $V^{\mathcal{N}}(i) = \{n\}$.

Ίσως, για τον προηγούμενο ορισμό, είναι καλύτερα να λέμε για **οποιοδήποτε όνομα** i αντί **για κάθε όνομα** i , τονίζοντας το γεγονός ότι κάθε όνομα για τον κόσμο m πρέπει να χαρακτηρίζει και τον κόσμο n. Δεν είναι ανάγκη όλα τα ονόματα να αναφέρονται σε έναν μόνο κόσμο. Ίσως τον κανόνα πρέπει να το διαβάζουμε: Εφόσον οι δυο κόσμοι είναι ισοδύναμοι, τότε για κάθε όνομα του κόσμου w υπάρχει το ίδιο όνομα και για τον κόσμο n. Αρκεί δηλαδή όσα ονόματα αναφέρονται στον κόσμο m να δηλώνονται και στον n. Επίσης, δε χρησιμοποιούμε την αντίστροφη διατύπωση του κανόνα @ εφόσον ο **ικανοποιητής** είναι δυαδικός. Παρακάτω δίνεται στα αγγλικά η πρόταση του κανόνα @ ώστε ο αναγνώστης να έχει καλύτερη εικόνα:

(@) For all nominals i, if $V^{\mathcal{M}}(i) = \{m\}$ and $V^{\mathcal{N}}(i) = \{n\}$, then $m \sim n$

Αμφιπροσομοίωση της $HL(@, \downarrow)$

Η χρήση **δεσμευτή** στην υβριδική γλώσσα σημαίνει και την ταυτόχρονη χρήση των καταστάσεων ως μεταβλητών. Ως μεταβλητών δηλαδή που ορίζουν το τρέχον κόσμο ή κατάσταση με μια επιπλέον ιδιότητα. Οι μεταβλητές ωστόσο στην αμφιπροσομοίωση δηλώνουν κάτι πολύ σημαντικό: την μετακίνησή μας από τα παιχνίδια των Ehrenfeucht-Fraïssé σε εκείνα των Pebble Games.

Έστω ότι δυο υβριδικά μοντέλα $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$. Ας τα φανταστούμε ως γράφους. Στις κορυφές κάθε γράφου υπάρχουν είτε ατομικές προτάσεις είτε σύνθετες προτάσεις υβριδικής λογικής. Συνεπώς, όπως συνηθίζεται στην υβριδική λογική αν ορίσουμε μια ιδιότητα με ατομικές προτάσεις τότε εύκολα τη διατυπώνουμε και για τις σύνθετες προτάσεις.

Κατά τον γνωστό ορισμό έχουμε δυο παίκτες και πεπερασμένο σύνολο από ζεύγη μεταβλητών. Δηλαδή ο πρώτος παίκτης επιλέγει γράφο (μοντέλο δηλαδή) και παίζει τη μεταβλητή σε κόσμο του γράφου. Ο δεύτερος παίκτης προσπαθεί να απαντήσει επιλέγοντας κόσμο του άλλου γράφου, με τις ίδιες ιδιότητες με εκείνες του κόσμου του πρώτου παίκτη. Εδώ βεβαίως οι ιδιότητες είναι ατομικές ή σύνθετες προτάσεις. Συνεπώς αν το παιχνίδι δε σταματά τότε οι δυο γράφοι είναι ισοδύναμοι και περιγράφονται με k μεταβλητές. Όμως, εφόσον οι γράφοι είναι υβριδικά μοντέλα είναι ισοδύναμα ως προς k μεταβλητές.

Άρα πετύχαμε αυτό που θέλαμε: Να δώσουμε στα υβριδικά μοντέλα, άρα και στην υβριδική λογική, πρωτοβάθμια εκφραστικότητα. Τέλος ας σημειωθεί ότι η τοποθέτηση μεταβλητής σε κορυφή ισοδυναμεί με τη χρήση του δεσμευτή. Αυτό ήταν μια διαισθητική προσέγγιση.

Δουλεύοντας με αμφιπροσομοίωση πρέπει να προσθέσουμε στους ήδη ορισμούς ειδικούς κανόνες για τις μεταβλητές, τον ικανοποιητή των μεταβλητών και το δεσμευτή μεταβλητών. Οι ορισμοί χωρίζονται σε δυο κατηγορίες. Σε πεπερασμένο σύνολο και σε άπειρα αριθμήσιμο μεταβλητών. Αρχικά παραθέτουμε τους ορισμούς και έπειτα σχολιάζουμε μερικά σημεία.

Ορισμός 7.2.1 Αμφιπροσομοίωση k κινήσεων: *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ υβριδικά μοντέλα. Έστω $\overset{k}{\sim}$ δυαδική σχέση μεταξύ $({}^k\mathcal{M}, \mathcal{M})$ και $({}^k\mathcal{N}, \mathcal{N})$. Τότε το $\overset{k}{\sim}$ σχετίζει την ακολουθία $((m_1, ..., m_k), m)$ με την ακολουθία $((n_1, ..., n_k), n)$. Θα γράφουμε τις ακολουθίες ως εξής: $(\overline{m}, m)$. Το $\overline{m}$ θεωρείται απονομή κόσμων στις μεταβλητές: $(x_1, ..., x_k)$. Μη κενή σχέση $\overset{k}{\sim}$ καλείται αμφιπροσομοίωση k κινήσεων αν και ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

- (**prop**) Αν $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ τότε $m \in V^{\mathcal{M}}(\alpha)$ αν και μόνο αν $n \in V^{\mathcal{N}}(\alpha)$, όπου $\alpha \in PROP \cup NOM$
- (**του μπροστά**) Αν $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ και $mR^{\mathcal{M}}m'$ τότε υπάρχει $\exists n'$ τέτοιο ώστε $nR^{\mathcal{N}}n'$ και $m' \sim^k n'$.
- (**του πίσω**) Η ίδια πρόταση από το $\mathcal{N}$ στο $\mathcal{M}$.
- (@) Αν $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ τότε για κάθε **όνομα** $i \in NOM$, αν $m' \in V^{\mathcal{M}}(i)$ και $n' \in V^{\mathcal{N}}(i)$ τότε $(\overline{m}, m') \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n')$ και για $j \leq k$ $(\overline{m}, m_j) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n_j)$
- ($\downarrow$) Αν $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ τότε για $j \leq k$ $(\overline{m}^{x_j}_{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}^{x_j}_{n}, n)$
- (**var**) Αν $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ τότε $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ τότε για $j \leq k$ $m_j = m$ αν και μόνο αν $n_j = n$

Αν δεν έχουμε περιορισμό μεταβλητών τότε υπάρχει **αμφιπροσομοίωση** ω **κινήσεων**.

Ορισμός 7.2.2 Αμφιπροσομοίωση ω κινήσεων: *Έστω $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ υβριδικά μοντέλα. Η αμφιπροσομοίωση ω κινήσεων μεταξύ των μοντέλων $\mathcal{M}$ και $\mathcal{N}$ είναι οικογένεια (σύνολο) αμφιπροσομοιώσεων k κινήσεων που ικανοποιούν τη συνθήκη:*

store: Αν $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ τότε $(\overline{m} * m, m) \overset{k+1}{\sim} (\overline{n} * n, n)$

Το σύμβολο $(\overline{m} * m, m)$ δηλώνει την αλληλουχία μεταξύ των $\overline{m}$ και m.

Σχολιάζοντας τους παραπάνω ορισμούς σημειώνουμε:

– Ο κανόνας **var** εξασφαλίζει ότι δυο κόσμοι είναι ισοδύναμοι όταν να έχουν τις ίδιες αναθέσεις μεταβλητών. Δηλαδή, αν στο κόσμο m δηλώθηκαν οι μεταβλητές x_1, x_2, οι ίδιες μεταβλητές πρέπει να έχει και ο κόσμος n.

– Ο κανόνας $\downarrow$ εξασφαλίζει ότι η μεταβλητή x_j **μαρκάρεται** στον κόσμο m.

– Το σύμβολο $(\overline{m}, m)$ δηλώνει ότι ξεκινάμε ή ξεκινήσαμε το bebble game από το κόσμο m και οι μεταβλητές $x_1, ..., x_k$ δηλώνουν αντίστοιχα (έχουν τοποθετηθεί) τους κόσμους $m_1, ..., m_k$. Χρησιμοποιώντας λοιπόν το σύμβολο @ μετακινούμαστε από έναν κόσμο σε άλλον, χωρίς να μας ενδιαφέρει ύπαρξη μετάβασης μεταξύ των δυο κόσμων. Το μόνο που πρέπει να εξασφαλιστεί είναι ότι αν μεταβούμε στον κόσμο $m' \in \mathcal{M}$ τότε για $n' \in \mathcal{N}$ πρέπει οι δυο κόσμοι να είναι ισοδύναμοι. Επειδή το @χρησιμοποιείται αφενός για ονόματα καταστάσεων αφετέρου για μεταβλητές καταστάσεων έπεται ότι και ο ορισμός θα χωρίζεται σε δυο μέρη. Το ένα για τα ονόματα το άλλο για τις μεταβλητές.

– Ο κανόνας **store** αποτελεί κανόνα επέκτασης μεταβλητών. Αν έχουμε k μεταβλητές χρησιμοποιούμε $k + 1$ μεταβλητές, τοποθετώντας τη νέα μεταβλητή στο τρέχον κόσμο m ή σε κάποιον άλλο του μοντέλου. Η ιδέα είναι απλή. Εφόσον δυο μοντέλα είναι ισοδύναμα και η σημασιολογική ερμηνεία της μεταβλητής είναι να **μαρκάρουμε** έναν κόσμο με μια ιδιότητα, τότε χρησιμοποιώντας νέα μεταβλητή σύμφωνα με το παραπάνω σκεπτικό αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι δεσμεύοντας τον κόσμο $m' \in \mathcal{M}$ πρέπει να δεσμεύσουμε ισοδύναμο κόσμο $n' \in \mathcal{N}$. Ο κόσμος n' υπάρχει εφόσον έχει προηγηθεί ισοδυναμία μεταξύ των k μεταβλητών. Στον ορισμό είδαμε ότι η νέα μεταβλητή δέσμευσε τον κόσμο m.

Βεβαίως, όπως και στις τροπικές λογικές, η αμφιπροσομοίωση σχετίζεται και εξηγεί αποτελέσματα πολυπλοκότητας και διατήρησης της αλήθειας. Η αμφιπροσομοίωση, συνεπώς, βοηθά στην κατασκευή μοντέλων.

Υβριδική Αλήθεια

– **Αν** $\mathcal{M} \overset{k}{\sim} \mathcal{N}$ το $\overset{k}{\sim}$ ορίζεται στο σύνολο $PROP \cup NOM$, **τότε** για όλες τις προτάσεις $\varphi \in \mathcal{H}_S(@,\downarrow)$ της υπογραφής $< REL, PROP, NOM, \{x_1, ..., x_k\} >$, $(\overline{m}, m) \overset{k}{\sim} (\overline{n}, n)$ συνεπάγεται:

$$\mathcal{M}, \overline{m}, m \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N}, \overline{n}, n \models \varphi$$

– **Αν** $(\mathcal{M}, m) \overset{\omega}{\sim} (\mathcal{N}, n)$ το $\overset{\omega}{\sim}$ ορίζεται στο σύνολο $PROP \cup NOM$, **τότε** για όλες τις προτάσεις $\varphi \in \mathcal{H}_S(@,\downarrow)$ της υπογραφής $< REL, PROP, NOM, SVAR >$, $(\overline{m}, m) \overset{\omega}{\sim} (\overline{n}, n)$ συνεπάγεται:

$$\mathcal{M}, m \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{N}, n \models \varphi$$

Τέλος, κάτι τυπογραφικό. Το σύμβολο $\mathcal{H}_S$ συμβολίζει υβριδική γλώσσα με $x_1, ..., x_n \in SVAR$. Ομοίως το $\mathcal{H}_N$ δηλώνει υβριδική γλώσσα με ονόματα του συνόλου NOM.

7.3 Craig Παρεμβολή και Beth (προσδι)ορισιμότητα

Οι επιδιώξεις σου όταν ασχολείσαι με λογική είναι σαφείς: εκφραστικότητα της λογικής γλώσσας, καλή συμπεριφορά του αποδεικτικού συστήματος το λεγόμενο well behaved του Fitting και βεβαίως η διατήρηση βασικών ιδιοτήτων όπως εκείνο της ορισιμότητας κατά **Beth** και η παρεμβολή κατά **Craig**.

Νόμος $0-1$ (**νόμος του μηδέν και του ένα**) λογικών με χρήση διακριτού πλήθους μεταβλητών, ορισμοί της παρεμβολής κατά Craig και της ορισιμότητας κατά Beth αφενός για τις προηγούμενες λογικές αφετέρου για την υβριδική λογική αποτελούν τη θεματολογία της παραγράφου.

$\boxed{\textbf{Νόμος} \text{ του } 0 \text{ και του } 1}$

Ορισμός 7.3.1 *Έστω σ λεξικό πεπερασμένων κατηγορηματικών συμβόλων, το κάθε σύμβολο είναι δεδομένου βαθμού. Έστω C_n κλάση όλων των πεπερασμένων δομών ορισμένες στο σ στον κόσμο $\{1, 2, ..., n\}$.*

Το σύμβολο μ_n ορίζεται στη κλάση C_n και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο. Η χρήση του ορίζεται καλύτερα με παράδειγμα. Ας σημειώσουμε όμως ότι $\mu_n(P)$ όπου P ιδιότητα ορισμένη του λεξικού σ και του κόσμου $\{1, 2, ..., n\}$ μέτρο όλων των δομών που έχουν την ιδιότητα P.

Παράδειγμα 7.3.1 *Έστω ότι το σ αποτελείται από δυαδικό σχεσιακό σύμβολο E. Έστω P η ιδιότητα: $\forall x : \neg Exx$. Το P δεν ικανοποιείται σχεδόν ποτέ. Με άλλα λόγια, σχεδόν κάθε* **τυχαίος γράφος** *στον οποίο επιτρέπονται κύκλοι έχει κύκλους. Τυχαίος γράφος είναι ο γράφος οι κορυφές του οποίου προκύπτουν με πιθανότητα p. Το σύνολο γράφων με n κορυφές και πιθανότητας p συμβολίζεται ως $\mathcal{G}(n, p)$.*

Η πιθανότητα να ισχύει το Eii είναι $\frac{1}{2}$. Ισχύει ή δεν ισχύει. Εφόσον λοιπόν έχουμε n στοιχεία έπεται : $\frac{1}{2^n}$. Άρα:

$$n \to \infty, \quad \mu_n(P) = \frac{1}{2^n} = 0$$

ομοίως η ιδιότητα ότι ένα μοντέλο (γράφος) έχει περιττό αριθμό κόμβων, δεν εκφράζεται με πρωτοβάθμια λογική.

Η διαφορά εδώ έναντι των κεφαλαίων 2 και 3 είναι ότι η αδυναμία έκφρασης δεν προκύπτει από τη μέθοδο των παιχνιδιών αλλά από ένα μέτρο το μ. Ουσιαστικά όμως ο λογισμός είναι ο ίδιος, σε μια δομή R έχουμε $R \models P$ και $R \models \neg P$. Δηλαδή, το $\mu(P)$ είναι είτε μηδέν είτε ένα.

Θεώρημα 7.3.1 *Ο νόμος $0 - 1$ ισχύει για τις λογικές $L^{\omega}_{\infty\omega}$ (Kolaitis-Vardi).*

Πρωτοβάθμιες συζητήσεις

Η πρόταση Z λέγεται πρόταση παρεμβολής της $X \to Y$ όταν αφενός όλα τα προτασιακά σύμβολα και οι παράμετροι της πρότασης Z εμφανίζονται και στο X και στο Y αφετέρου είναι έγκυρες οι προτάσεις: $X \to Z$ και $Z \to Y$. Ακριβώς αυτό διατυπώνει το θεώρημα παρεμβολής του Craig, δηλώνει δηλαδή τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για την ύπαρξη της παρεμβολικής πρότασης Z.

Το προτασιακό σύμβολο p είναι παρεμβολική πρόταση της $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$.

Έστω πεπερασμένο σύνολο προτάσεων A χωρίς παραμέτρους. Ονομάζουμε το σύνολο αυτό **πρωτοβάθμια θεωρία**. Τα στοιχεία του συνόλου A λέγονται αξιώματα. Γράφοντας $A \vdash X$ δηλώνουμε τα παρακάτω:

- η πρόταση X είναι αληθής σε όλες τις ερμηνείες του A.
- υπάρχει κλειστό ταμπλό για το $\{A, \neg X\}$.
- η σειρά $A \rightarrow X$ είναι αποδείξιμη.
- Προσθέτοντας τα μέλη του A ως αξιώματα στο πρωτοβάθμιο σύστημα X τότε το X είναι αποδείξιμο.

Το X λέγεται **θεώρημα** της θεωρίας A όταν ισχύει έστω και μια από τις παραπάνω προτάσεις.

Έστω $P, P_1, ..., P_n$ κατηγορηματικά σύμβολα που εμφανίζονται στο A. Επίσης το P είναι πρώτης τάξης. Το P λέγεται ότι είναι **ορισμένο με σαφήνεια**(explicity) από το $P_1, ..., P_n$ στη θεωρία A αν υπάρχει πρόταση $\varphi(x)$ με ελεύθερη μεταβλητή x και ορισμένη υπό τα κατηγορήματα $P_1, ..., P_n$ όταν:

$$A \models (\forall x)(P(x) \leftrightarrow \varphi(x))$$

Η πρόταση $\varphi(x)$ λέγεται **σαφής** ορισμός της P στο σύνολο $P_1, ..., P_n$.

Λέμε ότι τα αξιώματα του A ορίζουν **επαγωγικά** το P από τα $P_1, ..., P_n$ ή ότι το P ορίζεται επαγωγικά από τα $P_1, ..., P_n$ όταν ισχύει η συνθήκη: επιλέγουμε προτασιακό σύμβολο μιας θέσης $P^{'}$ το οποίο δεν προκύπτει στο A και έστω $A^{'}$ να είναι το αποτέλεσμα της αντικατάστασης του $P^{'}$ για κάθε εμφάνιση του P στο A. Τότε P λέγεται **επαγωγικά** (implicity) ορίσιμο από τα $P_1, ..., P_n$ στο A όταν:

$$A \cup A^{'} \vdash (\forall x)[P(x) \leftrightarrow P^{'}(x)]$$

Είναι προφανές ότι αν το A ορίζει με σαφήνεια το P από τα $P_1, ..., P_n$ τότε ορίζει και επαγωγικά το P από τα $P_1, ..., P_n$. Έστω το P είναι σαφές από τα $P_1, ..., P_n$ στο A. Τότε:

- Από την σαφήνεια έπεται $A \vdash (\forall x)(P(x) \leftrightarrow \varphi(x))$

– Νέο σύμβολο P', νέο σύνολο A', άρα $A' \vdash (\forall x)(P'(x) \leftrightarrow \varphi(x))$

– Τότε $A \cup A' \vdash (\forall x)(P(x) \leftrightarrow \varphi(x)) \wedge (\forall x)(P'(x) \leftrightarrow \varphi(x))$

– Συνεπώς $A \cup A' \vdash (P(x) \leftrightarrow P'(x))$ (Γιατί;)

Η ορισιμότητα κατά Beth ισχυρίζεται το αντίστροφο: **Αν το A ορίζει επαγωγικά το P από τα $P_1, ..., P_n$ τότε το A ορίζει το P και με σαφήνεια από τα $P_1, ..., P_n$.**

Η αποτυχία Craig και Beth

Φυσικά ούτε ο Craig ούτε ο Beth αποτύχανε. Απλά, οι αντίστοιχες ιδιότητες δεν ισχύουν για λογικές πεπερασμένων μεταβλητών. Ας τα δούμε αναλυτικά.

Ορισμός 7.3.2 – *Αν $<$ είναι δυαδικό σύμβολο, έστω $lin(<)$ πρόταση της $L^3_{\infty\omega}$ η οποία δηλώνει ότι $<$ είναι μη αυτοπαθής γραμμική σειρά.*

– *Για κάθε $n < \omega$ έστω $len_{\geq n}(<)$ η ακόλουθη πρόταση της $L^2_{\infty\omega}$:*

$$\exists x \exists y (x < y \wedge \exists x (y < x \wedge \ldots)) \cdots)$$

Άρα $len_{\geq n}$ δηλώνει την αλυσίδα n στοιχείων.

– *Έστω $len_n(<) = len_{\geq n}(<) \wedge \neg len_{\geq n+1}(<)$*

Συνεπώς η πρόταση :

$$lin(<) \wedge \bigvee_{n \in S} len_n(<)$$

δηλώνει εκείνες τις γραμμικές διατάξεις με μήκος στο σύνολο $S \subseteq \omega$.

Έστω δυο προτάσεις της $L^3_{\infty\omega}$:

$$A = lin(<) \wedge \bigvee_{n\ even} len_n(<) \qquad B = lin(\prec) \wedge \bigvee_{n\ even} len_n(\prec)$$

όπου $<, \prec$ είναι δυαδικά σχεσιακά σύμβολα. Ας δούμε αν η πρόταση $\models A \to B$ έχει σύμβολο παρεμβολής. Έστω C το προηγούμενο σύμβολο. Το C είναι πρόταση $L^\omega_{\infty\omega}$. Όπως θα αποδείξουμε το C θα εκφράζει εκείνες τις δομές με περιττό μέγεθος.

Δεδομένα:

$$\models A \to C \models C \to B$$

- Έστω $M \models C$. Έστω η γραμμική σειρά $\prec$ στο M. Θα έχουμε $(M, \prec) \models C$, εφόσον C είναι ανεξάρτητο της γραμμικής σειράς. $\models C \to B$ τότε $(M, \prec) \models B$. Άρα $(M, \prec) \models \bigvee_{n\ even} len_n(<)$, δηλαδή το M είναι πεπερασμένο και περιττού μήκους.
- Αντιστρόφως, αν M έχει περιττό μέγεθος τότε επιλέγοντας τη γραμμική διάταξη $<$ στο M έχουμε: $(M, <) \models A$. Εφόσον $\models A \to C$ τότε $(M, <) \models C$. Το C είναι ανεξάρτητο γραμμικής σειράς έχουμε $M \models C$.

Το C εκφράζει εκείνα τα μοντέλα, τις δομές με περιττό μήκος. Άρα η **παρεμβολική πρόταση** υπάρχει (ως έννοια): **δομές περιττού μήκους**, σύμφωνα όμως με τον νόμος $0-1$ η προηγούμενη πρόταση δεν μπορεί να εκφραστεί στην $L^{\omega}_{\infty\omega}$. Επίσης, ακολουθώντας τη μεθοδολογία των pebble games αποδεικνύεται ότι το περιττό μέγεθος ενός μοντέλου δεν είναι δυνατό να εκφραστεί:

- Κατασκευάζουμε δυο γράφους. Έναν περιττού μήκους και έναν άλλο άρτιο μήκους. Το πλήθος κόμβων των δυο γράφων θεωρείται ένας πολύ μεγάλος αριθμός. Το παιχνίδι παίζεται ως εξής: ο παίκτης S προσπαθεί να αναδείξει διαφορά μεταξύ των γράφων. Ο δεύτερος D αντιθέτως προσπαθεί να αναιρέσει τη διαφορά.
- Εφόσον οι δυο γράφοι είναι μεγάλοι σε πλήθος κόμβων έπεται ότι ο στόχος του S να αναδείξει την περιττότητα κάποιου κόμβου θα αποτύχει. Πάντα θα υπάρχει κίνηση του παίκτη D ώστε να εξασφαλίζει την αρτιότητα. Η απόδειξη μοιάζει με εκείνη της συνεκτικότητας γράφων. Ακριβώς σε αυτό το σημείο συγκεντρώνεται η έννοια του λογισμού-μ. Προτάσεις - ιδιότητες που δεν είναι δυνατόν να τις αποδείξουμε σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων (μεταβλητών) θα έχουν μηδενικό μέτρο.

Προσοχή: Εφόσον το C δεν είναι εκφράσιμο στην $L^{\omega}_{\infty\omega}$ πώς μπορούν να εκφρασθούν τα A και B; Οι προτάσεις A και B δηλώνουν τρόπο κατασκευής δομής περιττού μήκους. Και αυτός ο τρόπος είναι η γραμμική δομή. Είναι άλλο να κατασκευάζουμε δομές περιττού μήκους και άλλο να ελέγχουμε αν το μέγεθος της δομής είναι περιττό ή άρτιο. Αυτή είναι η διαφορά μεταξύ των προτάσεων A και B.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι η ορισιμότητα κατά Beth δεν ικανοποιείται σε λογικές με πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών. Η απόδειξη στηρίζεται στην ίδια τεχνική όπως εκείνης της παρεμβολής Craig και ένα πολύ καλό άρθρο για αυτό το θέμα είναι το .

Η ιδέα απόδειξης ότι η μη ορισιμότητα κατά Beth βασίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 7.3.2 *Για τα $k \geq 3$ υπάρχει θεωρία T_k στο $L^3_{\infty\omega}$ που ορίζει* **επαγωγικά** *μια γραμμική σειρά η οποία όμως δεν μπορεί να οριστεί με σαφήνεια στο $L^k_{\infty\omega}$.*

Υβριδικός Craig και Beth

Έστω οι συνεπείς και πλήρεις θεωρίες T_1 και T_2 (έχουν δηλαδή μοντέλο) και συμφωνούν επιπλέον σε κοινή γλώσσα, τότε και η γλώσσα $T_1 \cup T_2$ έχει μοντέλο.

Βασικοί ορισμοί:

- Η πρόταση φ είναι ικανοποιήσιμη όταν υπάρχει μοντέλο $\mathcal{M}$, απονομή αλήθειας g και κόσμος $m \in M$ ώστε $\mathcal{M}, g, m \models \varphi$
- Πρόταση φ λέγεται **έγκυρη** αν για όλα τα μοντέλα $\mathcal{M} \models \varphi$.
- Πρόταση φ είναι **τοπικά συνεπαγόμενη** από σύνολο προτάσεων T αν για όλα τα μοντέλα $\mathcal{M}$, τις απονομές g και τα σημεία $m \in \mathcal{M}$ ισχύει:

$$\mathcal{M}, g, m \models T \text{ συνεπάγεται } \mathcal{M}, g, m \models \varphi$$

- Πρόταση φ είναι **καθολικά συνεπαγόμενη** από σύνολο προτάσεων T αν για όλα τα μοντέλα $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M} \models T \text{ συνεπάγεται } \mathcal{M} \models \varphi$$

Συμβολισμοί:

- Η καθολική συνεπαγωγή συμβολίζεται με : $T \models^{glo} \varphi$
- Η τοπική ομοίως: $T \models^{loc} \varphi$

Προφανώς η τοπική συνεπαγωγή είναι αυστηρώς πιο ισχυρή από εκείνη της καθολικής.

Για να προλάβουμε τυχόν παρανοήσεις. Αν η γλώσσα μας δεν έχει μεταβλητές καταστάσεων τότε η διάκριση σε καθολική και τοπική συνεπαγωγή δεν απαιτείται. Όταν η γλώσσα εμπλουτίζεται με μεταβλητές καταστάσεων τότε μπορούμε να αποδεικνύουμε διάφορες προτάσεις, αδιαφορώντας για τη γενική συμπεριφορά του μοντέλου (μεταβατικό, κ.ο.κ.), αναφερόμενοι μόνο στο συγκεκριμένο κόσμο. Και αυτό είναι ελκυστικό διότι ο κάθε κόσμος έχει εκφραστική και αποδεικτική ανεξαρτησία.

Από την παραπάνω διάκριση στην έννοια της συνεπαγωγής έπεται ότι θα διακρίνουμε και δυο είδη παρεμβολής. Αλλά αυτή η διάκριση αναφέρεται στην καθολικότητα και την τοπικότητα. Όχι στο είδος της παρεμβολής. Έστω $\mathcal{P}(\varphi)$ το σύνολο ατομικών συμβόλων που εμφανίζονται στην φ. Συνεπώς:

- Η παρεμβολή **βέλους** (AIP) (**Arrow Interpolation Property)** ισχύει όταν:
  1. Όταν $\models \varphi \to \psi$ υπάρχει τύπος θ ώστε $\models \varphi \to \theta$, $\models \theta \to \psi$
  2. $\mathcal{P}(\theta) \subseteq \mathcal{P}(\varphi) \cap \mathcal{P}(\psi)$
- Η **περιστροφική** παρεμβολή (TIP) (**Turnstile Interpolation Property)** ισχύει όταν:
  1. Όταν $\varphi \models \psi$ υπάρχει τύπος θ τέτοιος ώστε $\varphi \models \theta$, $\theta \models \psi$
  2. $\mathcal{P}(\theta) \subseteq \mathcal{P}(\varphi) \cap \mathcal{P}(\psi)$

Επαναλαμβάνουμε, η παραπάνω διάκριση είναι τετριμμένη στην περίπτωση της πρωτοβάθμιας λογικής. Επίσης, έχουμε τοπική και καθολική παρεμβολή βέλους, ομοίως τοπική και καθολική περιστροφικής παρεμβολής.

1. Για την τοπική συνεπαγωγή το AIP και το TIP είναι ισοδύναμα.
2. Αν $\models^{loc}$ είναι συμπαγές, τότε από το AIP συνεπάγεται το TIP.

Άρα το **TIP** ορίζεται χρησιμοποιώντας την καθολική συνεπαγωγή. Συχνά τα δυο είδη παρεμβολής λέγονται αντίστοιχα η ισχυρή AIP και η αδύναμη TIP παρεμβολική ιδιότητα.

Πριν αποδείξουμε την ιδιότητα AIP για τη γλώσσα $H_S(@, \downarrow)$ θα συνδέσουμε την παρεμβολή με την ορισημότητα Beth.

Περιληπτικά η ορισημότητα του Beth λεει ότι αν υπάρχει επαγωγικός ορισμός μιας πρότασης τότε υπάρχει και σαφής ορισμός της. Αναλυτικά, ακολουθώντας τη διάκριση της τοπικής και καθολικής συνεπαγωγής:

- Λογική έχει **τοπική ορισημότητα** κατά Beth εφόσον για όλους τους τύπους $\varphi(\overline{\alpha}, \alpha)$ των οποίων τα ατομικά σύμβολα είναι μεταξύ των $\alpha, \overline{\alpha}$ έπεται:
  Αν $\models \varphi(\overline{\alpha}, \alpha/b_1) \wedge \varphi(\overline{\alpha}, \alpha/b_2) \rightarrow (b_1 \leftrightarrow b_2)$ τότε υπάρχει τύπος $\theta(\overline{\alpha})$ τέτοιο ώστε $\models \varphi(\overline{\alpha}, \alpha) \rightarrow (\theta(\overline{\alpha}) \leftrightarrow a)$
- Λογική έχει **καθολική ορισημότητα** κατά Beth εφόσον για όλους τους τύπους $\varphi(\overline{\alpha}, \alpha)$ των οποίων τα ατομικά σύμβολα είναι μεταξύ των $\alpha, \overline{\alpha}$ έπεται:
  Αν $\varphi(\overline{\alpha}, \alpha/b_1) \wedge \varphi(\overline{\alpha}, \alpha/b_2) \models^{glo} (b_1 \leftrightarrow b_2)$ τότε υπάρχει τύπος $\theta(\overline{\alpha})$ τέτοιο ώστε $\varphi(\overline{\alpha}, \alpha) \models^{glo} (\theta(\overline{\alpha}) \leftrightarrow a)$

Έστω $\mathcal{L}$ υβριδική γλώσσα που ικανοποιεί την ιδιότητα AIT. Τότε η $\mathcal{L}$ ικανοποιεί αφενός την τοπική αφετέρου την καθολική ορισημότητα κατά Beth.

Αρκεί να δείξουμε το **AIT**. Η απόδειξη έχει ως εξής:

Ορισμοί και κανόνες

Ορισμός 7.3.3 *Έστω T,U,L σύνολο προτάσεων. Θα λέμε ότι το ζεύγος* **(T,U)** *είναι διαχωρίσιμο υπό το σύνολο προτάσεων L, όταν υπάρχει πρόταση $\theta \in L$ τέτοια ώστε $T \models \theta$ και $U \models \neg\theta$. Τα σύνολα (T, U) λέγονται αδιαχώριστα υπό το σύνολο L αν δεν είναι διαχωρίσιμα στο L.*

Θεωρήματα και ιδιότητες:

$$K_{\downarrow} \downarrow v.(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\downarrow v.\varphi \rightarrow \downarrow v.\psi).$$

$$\text{Distr}_{@} \quad @_s(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (@_s\varphi \wedge @_s\psi).$$

Intr$_@$ $\quad (s \wedge \varphi) \rightarrow @_s\varphi$.

Βασική Υπόθεση

- Δεν υπάρχει παρεμβολική πρόταση $\varphi_0 \rightarrow \psi_0$. Θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει μοντέλο για την $\varphi_0 \rightarrow \psi_0$, δηλ. $\not\models \varphi_0 \rightarrow \psi_0$.

Πρόσθετοι Ορισμοί

- Έστω σύνολο $\mathcal{L}$ προτάσεων της $H(@, \downarrow)$ στο σύνολο $(PROP, NOM, SVAR)$ και $\mathcal{L}'$ σύνολο προτάσεων στο σύνολο $(PROP, NOM \cup N, SVAR)$ όπου $N = \{n_o, ..., n_k, ...\}$ είναι απείρως αριθμήσιμο σύνολο νέων **ονομάτων**.
- Έστω η πρόταση φ τότε $\mathcal{L}_\varphi = \{\xi \in \mathcal{L} | \mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{P}(\varphi)\}$
- Ομοίως $\mathcal{L}'_\varphi = \{\xi \in \mathcal{L}' | \mathcal{P}(\xi) \subseteq \mathcal{P}(\varphi) \cup N\}$
- Επίσης έστω : $\mathcal{L}'_{\varphi_0\psi_0} = \mathcal{L}'_{\varphi_0} \cap \mathcal{L}'_{\psi_0}$

Βήματα Απόδειξης

- Κατασκευή δυο μοντέλων, όπου κάθε κόσμος έχει το δικό του όνομα. Τα δυο μοντέλα κατασκευάζονται σε συμφωνία των $\mathcal{L}_\varphi$ και $\mathcal{L}_\psi$
- Τα δυο μοντέλα είναι αδιαχώριστα στη γλώσσα $\mathcal{L}'_{\varphi_0\psi_0}$.
- Εφόσον τα δυο μοντέλα είναι αδιαχώριστα και συμφωνούν σε πλαίσιο και είναι ορισμένα σε κοινή γλώσσα τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα περί τη σύνθεσης δυο μοντέλων, αναδεικνύουμε αντίθεση.

Απόδειξη:

`Κατασκευή μοντέλων.`

Έστω $\varphi_1, .., \varphi_k, ...$ (αντίστοιχα $\psi_1, ..., \psi_k, ...$) είναι απαρίθμηση όλων των προτάσεων της $\mathcal{L}'_{\varphi_0}$ και $\mathcal{L}'_{\psi_0}$. Ορίζουμε τις ακολουθίες:

- $\{n_0\} \cup \{\varphi_0\} = T_0 \subseteq T_1 \subseteq ...$
- $\{n_0\} \cup \{\neg\psi_0\} = U_0 \subseteq U_1 \subseteq ...$

Όπου:

Αν $T_j \cup \{\varphi\}$ και U_j είναι διαχωρίσιμα στην $\mathcal{L}'_{\varphi_0\psi_0}$ τότε $T_{j+1} = T_j$, διαφορετικά:

- Αν $\varphi_j \neq @_s s$ και $\varphi \neq @_s \diamond \varphi^{'}$ για $s \in SSYM = SVAR \cup NOM$ τότε $T_{j+1} = T_j \cup \{\varphi_j\}$
- Αν $\varphi_j = @_s s$ τότε $T_{j+1} = T_j \cup \{\varphi_j\} \cup \{@_s(n_k \wedge s) | n_k \in N\ NOM(T_j \cup U_j)\}$
- Αν $\varphi_j \neq @_s \diamond \varphi^{'}$ τότε $T_{j+1} = T_j \cup \{\varphi_j\} \cup \{@_s \diamond (n_k \wedge \varphi^{'}) | n_k \in N\ NOM(T_j \cup U_j \cup \{\varphi_j\})\}$

Αν T_{j+1} και $U_j \cup \{\psi_j\}$ είναι διαχωρίσιμα στην $\mathcal{L}^{'}{}_{\varphi_0\psi_0}$ τότε $T_{j+1} = T_j$, διαφορετικά:

- Αν $\psi_j \neq @_s s$ και $\psi \neq @_s \diamond \psi^{'}$ για $s \in SSYM = SVAR \cup NOM$ τότε $U_{j+1} = U_j \cup \{\psi_j\}$
- Αν $\psi_j = @_s s$ τότε $U_{j+1} = U_j \cup \{\psi_j\} \cup \{@_s(n_k \wedge s) | n_k \in N\ NOM(T_{j+1} \cup U_j)\}$
- Αν $\psi_j \neq @_s \diamond si^{'}$ τότε $T_{j+1} = T_j \cup \{si_j\} \cup \{@_s \diamond (n_k \wedge \varphi^{'}) | n_k \in N\ NOM(T_j \cup U_j \cup \{\psi_j\})\}$

Τα νέα ονόματα διαδραματίζουν το ρόλο των σταθερών, μάρτυρες Henkin στην πρωτοβάθμια θεωρία. Μας βεβαιώνουν ότι κάθε κόσμος έχει όνομα και ικανοποιεί συγκεκριμένο σύνολο προτάσεων. Ορίζουμε λοιπόν,

$$T_\omega = \bigcup_{j \in \omega} T_j \quad U_\omega = \bigcup_{j \in \omega} U_j$$

Ορισμός 7.3.4 *Για όλα τα* $j \in \omega$, (T_j, U_j) *είναι αδιαχώριστα υπό το* $\mathcal{L}^{'}{}_{\varphi_0\psi_0}$. *Τότε και* (T_ω, U_ω) *είναι επίσης αδιαχώριστο ζευγάρι στην* $\mathcal{L}^{'}{}_{\varphi_0\psi_0}$.

$$\theta \in \mathcal{L}^{'}{}_{\varphi_0\psi_0} \quad \theta \in T_\omega \Leftrightarrow \theta \in U_\omega$$

Η απόδειξη βασίζεται στην επαγωγή του j. Εμείς θα περιοριστούμε στη βασική περίπτωση. Έστω (T_0, U_0) ικανά να διαχωριστούν. Τότε υπάρχει τύπος $\theta \in \mathcal{L}^{'}{}_{\varphi_0\psi_0}$ τέτοιο ώστε $\models n_0 \wedge \varphi_0 \rightarrow \theta$ και $\models n_0 \wedge \neg\psi_0 \rightarrow \neg\theta$. ο τύπος θ ίσως περιέχει κάποια ονόματα N, έστω τα $\{n_{i_1}, ..., n_{i_k}\}$, $k \geq 0$. Έστω $x_0, x_{i_1}, ..., x_{i_k} \in SVAR$ που δεν εμφανίζονται στα φ_0, ψ_0, θ. Θα γράψουμε την πρόταση $\theta(x_0, ..., x_{i_k})$ της φόρμουλας θ με αντικατάσταση των n_i με τα x_{i_j} και του n_0 με το x_0. Τότε σύμφωνα με την αξιωματικοποίηση της υβριδικής λογικής έπεται:

- $\models \varphi_0 \rightarrow (n_0 \rightarrow \theta)$

- $\models \downarrow x_{i_k}.(\varphi_0 \to (n_0 \to \theta[x_{i_k}]))$ $K_\downarrow$
- $\models \varphi_0 \to (n_0 \to \downarrow x_{i_k}.\theta[x_{i_k}]))$ Q_1
- $\models \varphi_0 \to (n_0 \to \downarrow x_{i_1} ... \downarrow x_{i_k}.\theta[x_{i_1}, ..., x_{i_k}]))$ Όμοια
- $\models \downarrow x_0.(\varphi_0 \to (x_0 \to \downarrow x_{i_1} ... \downarrow x_{i_k}.\theta[x_0 x_{i_1}, ..., x_{i_k}]))$ $K_\downarrow$
- $\models \varphi_0 \to \downarrow x_0.(x_0 \to \downarrow x_{i_1} ... \downarrow x_{i_k}.\theta[x_0 x_{i_1}, ..., x_{i_k}]))$ Q_1
- $\models \varphi_0 \to \downarrow x_0 \downarrow x_{i_1} ... \downarrow x_{i_k}.\theta[x_0 x_{i_1}, ..., x_{i_k}]$ Q_3

Ομοίως:

- $\models \neg\psi_0 \to (n_0 \to \neg\theta)$
- $\models \neg\psi_0 \to \downarrow x_0 \downarrow x_{i_1} ... \downarrow x_{i_k}.\neg\theta[x_0 x_{i_1}, ..., x_{i_k}]$ Όπως πριν
- $\models \neg\psi_0 \to \downarrow x_0 \downarrow x_{i_1} ... \downarrow x_{i_k}.\theta[x_0 x_{i_1}, ..., x_{i_k}]$ Δυαδικότητα του $\downarrow$

Συνεπώς ο τύπος $\theta[x_0 x_{i_1}, ..., x_{i_k}]$ είναι τύπος της $\mathcal{L}_{\varphi_0} \cap \mathcal{L}_{\psi_0}$ και για αυτό το λόγο τα $\{\varphi_0\}$ και $\{\neg\psi_0\}$ διαχωρίζονται στην $\mathcal{L}_{\varphi_0} \cap \mathcal{L}_{\psi_0}$.
Τα επόμενα βήματα :

- **Υπόθεση** (T_j, U_j) είναι αδιαχώριστο ζευγάρι.
- Όπως και προηγουμένως αποδεικνύουμε τον μη διαχωρισμό του ζεύγους (T_{j+1}, U_{j+1}).

Ορισμός 7.3.5 Μέγιστο συνεπές *(maximal consistent) μοντέλο τύπου MCS λέγεται το μοντέλο εκείνο που είναι* **επικολλημένο** *(pasted) δηλαδή:*

- *αν $@_s\varphi \in \Gamma$ συνεπάγεται $@_s(i \wedge \varphi) \in \Gamma$ για κάποιο i*
- *αν $@_s\Diamond\varphi \in \Gamma$ συνεπάγεται $@_s\Diamond(i \wedge \varphi) \in \Gamma$ για κάποιο i*

Ένα μοντέλο τύπου MCS το οποίο διαθέτει την ιδιότητα pasted λέγεται **επώνυμο** ή μοντέλο με **ετικέτα** στον κόσμο i όταν $i \in \Gamma$.

Έστω το προηγούμενο μοντέλο, τότε για όλα τα σύμβολα καταστάσεων s $\in \Gamma$ τότε $\Delta_s = \{\varphi | @_s\varphi \in \Gamma\}$. Τότε το μοντέλο με ετικέτα (labeled model) που προκύπτει από το Γ είναι το $\mathcal{M} = (M, R, V)$ όπου:

- $M = \{\Delta_s | s$ είναι σύμβολο κατάστασης στο $\Gamma\}$
- $R(\Delta, \Delta')$ αν και μόνο αν $\{\varphi | \Box\varphi \in \Delta\} \subseteq \Delta'$

– $\Delta \in V(p)$ αν και μόνο αν $p \in \Delta$, για p προτασιακό σύμβολο ή όνομα.

– Ορίζουμε την απονομή αλήθειας ως $g : SVAR \rightarrow M$ με $g(x) = \{m \in M | x \in m\}$.

Από την κατασκευή των T_ω και U_ω παρατηρούμε ότι ανήκουν στην προηγούμενη κλάση μοντέλων. Μάλιστα τα δυο μοντέλα κατασκευάστηκαν με βάση την κατάσταση $n_0 \in N$. Έστω $\mathcal{M}_{\varphi_0} =< M_{\varphi_0}, R_{\varphi_0}, V_{\varphi_0} >$ είναι μοντέλο ετικέτας που προέκυψε από το T_ω και ομοίως $\mathcal{M}_{\psi_0} =< M_{\psi_0}, R_{\psi_0}, V_{\psi_0} >$ προέκυψε από το U_ω. Τα $\Delta_s^{\varphi_0}, \Delta_s^{\psi_0}$ συμβολίζουν τα στοιχεία των $\mathcal{M}_{\varphi_0}$ και $\mathcal{M}_{\psi_0}$.

Οι παρακάτω προτάσεις, η απόδειξη των οποίων είναι προφανής, συμπληρώνουν τη συλλογιστική μας

– $\Delta_{n_0}^{\varphi_0} = T_\omega$ και $\Delta_{n_0}^{\psi_0} = U_\omega$.

– Για $\Delta_s^{\varphi_0} \in \mathcal{M}_{\varphi_0}$ υπάρχει $n \in N$ τέτοιο ώστε $n \in \Delta_s^{\varphi_0}$. Ομοίως για $\Delta_s^{\psi_0} \in \mathcal{M}_{\psi_0}$

– έστω συνάρτηση $h : \mathcal{M}_{\varphi_0} \rightarrow \mathcal{M}_{\psi_0}$ ορίζεται ως $h(\Delta_n^{\varphi_0}) = \Delta_n^{\psi_0}$ για $n \in N$. Τότε υπάρχει ομομορφισμός στη γλώσσα $\mathcal{L}'_{\varphi_0\psi_0}$. Συγκεκριμένα: $g_{\psi_0} = h \circ g_{\varphi_0}$

Συμπληρώνουμε ότι:

Ορισμός 7.3.6 *Ομομορφισμός από το M στο N λέγεται η αντιστοίχηση $h : M \rightarrow N$ τέτοιο ώστε για κάθε ατομική φόρμουλα $\varphi(\overline{x})$ και $\overline{\alpha} \in M$*

$$M \models \varphi(\overline{x}) \Rightarrow N \models \varphi(h(\overline{\alpha}))$$

Εφόσον τα δυο μοντέλα έχουν κοινό πλαίσιο σε κοινή γλώσσα και μάλιστα συνδέονται με σχέση ομομορφισμού έπεται ότι μπορούμε να ενώσουμε τα δυο μοντέλα T_ω, U_ω με αποτέλεσμα:

$$\mathcal{M}, g, \Delta_{n_0} \models \varphi_0 \wedge \neg\psi_0$$

Τελικά, λαμβάνοντας υπόψη ότι το θεώρημα παρεμβολής κατά Craig δεν ισχύει στις λογικές πεπερασμένων μεταβλητών έπεται ότι η υβριδική λογική με πεπερασμένες μεταβλητές ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα. Συγκεντρωτικά:

Γλώσσα	AIP	TIP
$H_S(@, \downarrow)$	ναι	ναι
πολυ-τροπική$H_S(@, \downarrow)$	ναι	ναι
$H_S(@)$	όχι	ναι
πεπερασμένη-$H_S(@, \downarrow)$	όχι	όχι

7.4 Υβριδικά Μοντέλα

Υβριδικά μοντέλα και έλεγχος μοντέλου. Ο έλεγχος μοντέλου είναι μια διαδικασία στην οποία έχουμε ένα δεδομένο μοντέλο (Kripke) και μια συγκεκριμένη ιδιότητα και πρέπει να δούμε κατά πόσον το μοντέλο ικανοποιεί τη συγκεκριμένη ιδιότητα.

Συνεπώς υπάρχουν δυο αντίπαλοι: η **απόδειξη θεωρημάτων** (theorem proving) και ο **έλεγχος μοντέλου**. Τα πλεονεκτήματα του τελευταίου είναι :

- Είναι ήδη αυτοματοποιημένο.
- Παρέχει παραδείγματα που ενημερώνουν για τη λάθος συμπεριφορά του μοντέλου.

Εφαρμογές για τις οποίες ο έλεγχος μοντέλου είναι απαραίτητος είναι τα παρακάτω:

$\boxed{\text{Κινητή Τηλεφωνία}}$

Τα δίκτυα κινητής τηλεφωνίας αποτελούν ασύγχρονα συστήματα κατά τα οποία όπου διάφορες διαδικασίες καταμερίζονται χωρικά και μπορούν να αλλάζουν περιοχές διαχείρισης. Ένα τέτοιο δίκτυο απαιτεί το συνδυασμό χρονικών και χωρικών γεγονότων. Άρα πρέπει να υπάρχει μηχανισμός ονομασίας γεγονότων είτε χρονικών είτε χωρικών.

Για παράδειγμα:

- Η διαδικασία που εκτελείται στην περιοχή A βρίσκεται σε αδιέξοδο.

$$\boxed{@_A \text{ deadlock}}$$

– Υπάρχει διαδικασία που τρέχει σε κάποια τοποθεσία και είναι σε αδιέξοδο.

$$\boxed{\exists x\ @_x \mathrm{deadlock}}$$

– Η διαδικασία της **τρέχουσας θέσης** μπορεί και επικοινωνεί με διαδικασία της περιοχής A και αντίστροφα.

$$\boxed{\downarrow x.F(A \wedge Fx)}$$

$$\boxed{\text{Δομές Δεδομένων}}$$

Η γραφική αναπαράσταση του διαδικτύου (Web) αποτελεί εφαρμογή των δομών δεδομένων. Αντικείμενα ονομάζονται οι κόμβοι του γράφου. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή αντικείμενα είναι οι ιστοσελίδες. Επίσης οι ακμές αυτού του γράφου έχουν όνομα. Το όνομα οφείλεται στον τρόπο μετάβασης. Άρα, οι σύνδεσμοι μιας σελίδας τα λεγόμενα links είναι τρόποι μετάβασης σε νέες σελίδες. Παραδείγματα:

– Η ρίζα ανήκει σε κάποιο κύκλο.

$$\boxed{\mathrm{Root} \wedge \mathrm{F\ Root}}$$

– Η τρέχουσα ρίζα (σελίδα) ανήκει σε κάποιο κύκλο.

$$\boxed{\downarrow x.x \wedge Fx}$$

– Υπάρχει κάποιος κόμβος που ανήκει σε κάποιο κύκλο.

$$\boxed{\exists x.@_x(x \wedge Fx)}$$

Τα ερωτήματα που μας απασχολούν είναι τα εξής:

$$\boxed{\textbf{Ικανοποιησιμότητα}}$$

– **Χρονο-διακλαδώσεις**: Για δεδομένο υβριδικό τύπο φ, υπάρχει υβριδική δομή **Kripke** έστω $\mathcal{M}$ και κατάσταση s του $\mathcal{M}$ τέτοια ώστε $\mathcal{M}, s \models \varphi$;

– **Γραμμικός χρόνος**: Για δεδομένο υβριδικό τύπο φ, υπάρχει υβριδική δομή **Kripke** ισομορφική του $(N, \leq)$ που ικανοποιεί αρχικά τον προτασιακό τύπο φ;

Έλεγχος Μοντέλου

– **Χρονο-διακλαδώσεις**: Για δεδομένη υβριδική δομή **Kripke** έστω $\mathcal{M}$, κατάσταση s του $\mathcal{M}$, και υβριδικό τύπο φ, ικανοποιείται η $\mathcal{M}, s \models \varphi$;

– **Γραμμικός χρόνος**: Για δεδομένη υβριδική δομή **Kripke** έστω $\mathcal{M}$, κατάσταση s του $\mathcal{M}$, και υβριδικό τύπο φ, υπάρχει υβριδικό πεπερασμένο μονοπάτι του $\mathcal{M}$ ξεκινώντας από το s ικανοποιώντας το φ εξ'αρχής;

Πολυπλοκότητα

Ξεκινώντας με τις Χρονο-διακλαδώσεις και σύμφωνα με την εργασία των Carlos Areces, Patrick Blackburn και Maarten Marx λαμβάνουμε τον παρακάτω πίνακα πολυπλοκότητας για το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας:

Γλώσσα	Branch Time Satisfiabilty
$HL(@,F)$	PSPACE-complete
$HL(@,F,P)$	EXPTIME-complete
$HL(@,U)$	EXPTIME-complete
$HL(@,U,S,X,X^{-1})$	EXPTIME-complete
$HL(\downarrow,F)$	Undecidable
$HL(\downarrow,@,F)$	Undecidable
$HL(\exists,F)$	Undecidable

Για υβριδικά μοντέλα και γραμμικό χρόνο έπεται:

Γλώσσα	Model Checking	Satisfiability
$HL(@,F)$	[NP,PSPACE]	[NP,PSPACE]
$HL(@,F,P)$	[NP,PSPACE]	[NP,PSPACE]
$HL(@,U)$	PSPACE-complete	PSPACE-complete
$HL(@,U,S,X,X^{-1})$	PSPACE-complete	PSPACE-complete
$HL(\downarrow,F)$	NP-complete	NP-complete
$HL(\downarrow,@,F)$	Nonelementary	Nonelementary
$HL(\exists,F)$	Nonelementary	Nonelementary

Με τον όρο μη στοιχειώδης non-elementary πολυπλοκότητα δηλώνουμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για να αποφασιστεί αν μια πρόταση φ (arbitary) είναι αποκρίσιμη δεν έχει φράγμα για οποιαδήποτε πεπερασμένη εκθετική πυργική μορφή:

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{|\varphi|}}}}$$

Η ικανοποιησιμότητα μιας πρότασης στην πρωτοβάθμια λογική της $(N, <)$ είναι μη στοιχειωδώς αποκρίσιμη. Για τους παραπάνω πίνακες ας σημειώσουμε πώς συμπληρώνονται κάποιες στήλες:

Θεώρημα 7.4.1 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας για γραμμικό χρόνο και τη γλώσσα $HL(\exists, F)$ είναι μη στοιχειωδώς αποκρίσιμο.*

Απόδειξη

Μετατροπή της πρωτοβάθμιας λογικής $(N, \leq)$ στην $HL(\exists, F)$:

$$\tau(x = y) = F(x \wedge y)$$

$$\tau(x \leq y) = F(x \wedge Fy)$$

$$\tau(P(x)) = F(x \wedge P)$$

$$\tau(\alpha \wedge \beta) = \tau(\alpha) \wedge \tau(\beta)$$

$$\tau(\neg\alpha) = \neg\tau(\alpha)$$

$$\tau(\exists x.\alpha) = \exists x.\tau(\alpha)$$

Θεώρημα 7.4.2 *Το πρόβλημα ικανοποιησιμότητας για γραμμικό χρόνο και τη γλώσσα $HL(@, \downarrow, F)$ είναι είναι μη στοιχειωδώς αποκρίσιμο.*

Απόδειξη

Μετατροπή της πρωτοβάθμιας λογικής του $(N, \leq)$ στην $HL(@, \downarrow, F)$:

$$\tau(x = y) = F(x \wedge y)$$

$$\tau(x \leq y) = F(x \wedge Fy)$$

$$\tau(P(x)) = F(x \wedge P)$$

$$\tau(\alpha \wedge \beta) = \tau(\alpha) \wedge \tau(\beta)$$

$$\tau(\neg\alpha) = \neg\tau(\alpha)$$

$$\tau(\exists x.\alpha) = \downarrow y.F \downarrow x.@_y\tau(\alpha)$$

Για τις υπόλοιπες υβριδικές λογικές η διαδικασία είναι η ίδια. Μετασχηματίζοντας την υβριδική λογική HL σε βασική χρονική λογική προσδιορίζουμε την πολυπλοκότητα της HL, για το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας.

Ας δούμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό:

Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε υβριδική γλώσσα με ονόματα, τον ικανοποιητή και τον τροπικό σύνδεσμο X. Τότε:

$$nominal(i) = \neg iU(i \wedge XG\neg i)$$

$$@_i\varphi = F(i \wedge \varphi) \vee P(i \wedge \varphi)$$

όπου οι τελεστές H και G είναι οι γνωστοί σύνδεσμοι του Arthur Prior με την εξής ερμηνεία (γενικά εξαρτάται της εφαρμογής):

– G : αληθές σε κάθε μελλοντική χρονική στιγμή. Αληθές πάντοτε.

– H : αληθές σε κάθε στιγμή του παρελθόντος. Ιστορικά αληθές.

Το X μπροστά από τους δυο συνδέσμους συγκεκριμενοποιεί το είδος της μετάβασης. Αν το X είναι μελλοντικό και το X^{-1} είναι το παρελθόν, τότε:

$$nominal(i) = F(i \wedge X^{-1}H\neg i \wedge XG\neg i).$$

Εφόσον σε αυτή τη γλώσσα $H(@,F)$ περιέχεται η προτασιακή λογική η οποία είναι $NP - hard$ και η χρονική λογική $TL(U, X, S, X^{-1})$ η οποία ανήκει σε $PSPACE$ έπεται τελικά:

$$SAT_{H(@,F)} \in [NP, PSPACE]$$

7.5 Υβριδικό ταμπλό

Έχουμε ήδη σημειώσει τη δυνατότητα που μας δίνουν οι γνήσιες προτάσεις της υβριδικής λογικής. Όμως αυτό δε σημαίνει ότι μπορούμε υβριδικά και εκφράζονται όλες οι κατηγορίες πλαισίων. Για την ακρίβεια έχουμε πρόβλημα να διαχειριστούμε ιδιότητες πλαισίων που ταξινομούν τους κόσμους. Η μεταβατικότητα ή η αυτοπάθεια είναι δυο ιδιότητες που αφορούν τον κάθε κόσμο μεμονωμένα. Δεν εμπλέκονται άλλοι κόσμοι, και αν εμπλέκονται έχουν την ίδια συμπεριφορά. Ας δούμε όμως δυο περιπτώσεις πλαισίων που δε συμβαίνει αυτό:

$$\forall wvu \exists t (wRv \wedge wRu \to vRu \wedge uRt) \text{ Church-Rosser}$$

$$\forall vu \exists t (vRt \wedge uRt) \text{ Right Directed}$$

Η διαφορά των προηγούμενων προτάσεων με τις προτάσεις που έχουμε ήδη διατυπώσει αφορά τη θέση του $\exists$ στην πρόταση. Αλλά αν θέλουμε να το δούμε ακόμη πιο αναλυτικά τότε :

$$\forall xy \exists x (@_x \diamond \wedge @_y \diamond z) \text{ Right Directed}$$

Αυτή η ιδιότητα δεν εκφράζεται σε υβριδική λογική δίχως ποσοδείκτες. Επιπλέον όμως κατηγοριοποιεί τους κόσμους. Η ιδιότητα αφορά δυο κόσμους οι οποίοι τελικά έχουν κοινή αναφορά.

Ο τρόπος αντιμετώπισης για την κατασκευή τέτοιων πλαισίων είναι ο εξής: Εισάγουμε κανόνες για την κατασκευή κόσμων σύμφωνα με τις απαιτήσεις του πλαισίου. Άρα για την κάθε περίπτωση έπεται:

$$\begin{array}{c} \dfrac{@_i \diamond j @_j \diamond k}{@_j \diamond l} \; [Church - Rosser] \\ @_k \diamond l \end{array}$$

$$\frac{j, k \textit{ occur on the branch}}{@_j \diamond i \wedge @_k \diamond i} \; [RightDirected]$$

Η απόδειξη προτάσεων στα υβριδικά ταμπλό έχουν την εξής στρατηγική: **Προσπαθούμε κάθε πρόταση να τη σπάμε σε μικρά κομμάτια. Αυτά τα μικρά κομμάτια είναι δυο ειδών. Αφενός γνήσιες υβριδικές προτάσεις αφετέρου προτάσεις που λένε ποια πρόταση ικανοποιούνται πού. Άρα με αυτόν τον τρόπο γίνεται η κατασκευή του γράφου. Αυτό είναι το πρώτο στάδιο. Το δεύτερο στάδιο αποτελεί τη διαδικασία στην οποία αξιοποιούνται οι ιδιότητες του γράφου.**

7.6 Υβριδικής πολυπλοκότητας συνέχεια

Στο κεφάλαιο των υβριδικών μοντέλων (7.4) μελετήσαμε αφενός την πολυπλοκότητα του προβλήματος της ικανοποιησιμότητας για γραμμικούς χρόνους αφετέρου την πολυπλοκότητα του ίδιου προβλήματος για διάταξη χρόνου με διακλαδώσεις. Στην πρώτη περίπτωση, εκείνης του γραμμικού χρόνου, είδαμε ότι η πολυπλοκότητα προκύπτει μεταφράζοντας τη μια γλώσσα σε γλώσσα με γνωστή πολυπλοκότητα για την ικανοποιησιμότητα. Στη δεύτερη περίπτωση απλά είδαμε τον πίνακα αποτελεσμάτων. Σε αυτό το κεφάλαιο προσπαθήσαμε να αναδείξουμε την τεχνική κατά την οποία όταν ο χρόνος δεν είναι γραμμικός πώς διερευνούμε το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας. **Η μέθοδος είναι τα παιχνίδια, τα games**, συνήθως μεταξύ δυο παικτών.

Στην κλασσική τροπική λογική προσθέτοντας το σύνολο των ατομικών προτάσεων που ονομάζουμε **ονόματα**, το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας προφανώς είναι $PSPACE - complete$. Προσθέτοντας το σύνδεσμο @ (**τον ικανοποιητή**) το πρόβλημα παραμένει στο $PSPACE - complete$. Γνωρίζοντας ότι:

$$@_i\varphi \Leftrightarrow E(i \wedge \varphi)$$

όπου E ο υβριδικός υπαρξιακός ποσοδείκτης τότε θα δουλέψουμε το πρόβλημα της ικανοποιησιμότητας χρησιμοποιώντας παιχνίδι δυο παικτών. Δίνοντας αρχικά χρήσιμους ορισμούς για την κατανόηση του παιχνιδιού καταλήγουμε στους κανόνες και την εκτέλεση του παιχνιδιού.

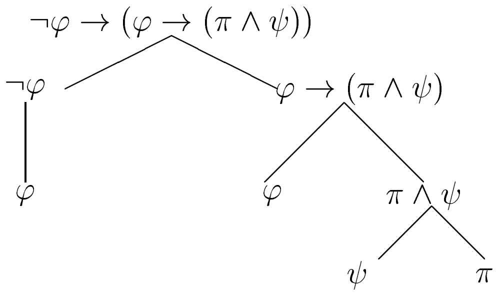
$\boxed{\textbf{Ορισμοί}}$

Ορισμός 7.6.1 Hintikka (set) *είναι το σύνολο* S *με τις εξής ιδιότητες:*

- H_0 : Αν P είναι ένας τύπος με πρόθεμα μια αληθοτιμή τότε: $P \in \theta \rightarrow \neg P \notin \theta$
- H_1 : Αν $\alpha \in S$ τότε $\alpha_1 \in S$ και $\alpha_2 \in S$
- H_2 : Αν $\beta \in S$ τότε $\beta_1 \in S$ ή $\beta_2 \in S$.

Η έννοια της φόρμουλας με πρόθεμα αληθοτιμή (signed formula) είναι οι τύποι που προκύπτουν από τα ταμπλό Hintikka εισάγοντας πριν από αυτούς τις αληθοτιμές T και F. Επίσης ο όρος θ είναι ουσιαστικά το σύνολο S, αλλά το διατηρήσαμε προκειμένου ο αναγνώστης να καταλάβει ότι το σύνολο Hintikka αποτελεί ένα μονοπάτι από τα ταμπλό Hintikka.

Σημαντική επίσης είναι και η έννοια των **υποτύπων**. Οι υποτύποι είναι μέρη ενός τύπου που και αυτοί με τη σειρά τους είναι τύποι. Οι υποπροτάσεις προκύπτουν εύκολα από το δένδρο αναγνωσιμότητας. Ας δούμε ένα παράδειγμα:



Συνεπώς το σύνολο των υποπροτάσεων της $\neg\varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow (\pi \wedge \psi))$ είναι: $\{\varphi, \neg\varphi, \psi, \pi, \pi \wedge \psi, \varphi \rightarrow (\pi \wedge \psi)\}$.

Προδιαγραφές ξ Παιχνιδιού

- **Παίκτες**: Δυο παίκτες, ο υπαρξιακός $\exists$ και ο καθολικός $\forall$.
- **Σκοπός**: Αν ο υπαρξιακός παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης τότε ικανοποιείται η πρόταση ξ.
- **Βήματα**: Το παιχνίδι παίζεται σε πολύ $|SF(\xi)|$ όπου $SF(\xi)$ είναι το σύνολο υποπροτάσεων της ξ. Κάθε φορά το πολύ $|SF(\xi)|$ Hintikka σύνολα βρίσκονται στην τσόχα!

Κανόνες ξ Παιχνιδιού

Έστω η πρόταση ξ. Ξεκινά ο $\exists$. Αρχικά ρίχνει στην τσόχα μια σειρά από Hintikka σύνολα $X_0, ..., X_k$ της πρότασης ξ. Η κατασκευή των συνόλων περιορίζεται στους τρεις παρακάτω κανόνες:

- Το X_0 περιέχει το ξ. Το $|X_0, ..., X_k|$ είναι μικρότερο του $|SF(\xi)|$.
- Κανένα όνομα i δεν προκύπτει σε δυο διαφορετικά *Hintikka* σύνολα.
- Για κάθε σύνολο X_l, για κάθε $E\varphi \in SF(\xi)$, $\varphi \in X_l$ αν και μόνο αν $\varphi \in X_k$ για κάποιο k.

Αν ο υπαρξιακός παίκτης δε βρίσκει τα παραπάνω σύνολα, χάνει αμέσως. Αν μπορεί το παιχνίδι συνεχίζεται. Τότε ο καθολικός παίκτης επιλέγει σύνολο X_l και την ελλατωματική πρόταση $\diamond\varphi$. Θεωρούμε την πρόταση αυτή ελλατωματική διότι δεν μπορούμε να τις δώσουμε μια αληθοτιμή. Άρα ο παίκτης $\exists$ θα αποκρούσει την προηγούμενη απάντηση κατασκευάζοντας σύνολο Y που ικανοποιεί τις παρακάτω απαιτήσεις:

- $\varphi \in Y$ και για όλα τα $\diamond\psi \in SF(\xi)$, αν $\diamond\psi \in X_l$ τότε $\diamond\psi \notin Y$ και $\psi \notin Y$.
- για όλα τα $E\varphi \in SF(\xi)$, αν $\varphi \in Y$ τότε $E\varphi \in Y$ και $E\varphi \in Y$ αν και μόνο αν $E\varphi \in X_l$.
- Αν $i \in Y$ για κάποιο όνομα i, τότε U είναι ένα από τα Hintikka σύνολα που έπαιξε ο παίκτης $\exists$ στην αρχή. Σε αυτό το σημείο ο υπαρξιακός παίκτης νικά και το παιχνίδι ολοκληρώνεται.

Αν ο παίκτης $\exists$ δε μπορεί να απαντήσει τότε ο παίκτης $\exists$ νικά. Κάθε κίνηση του παίκτη $\exists$ καταγράφεται σε λίστα κινήσεων. Σε κάθε γύρο του παιχνιδιού ο παίκτης $\forall$ πρέπει να επιλέξει την πρόταση $\diamond\varphi$ από το τρέχον Hintikka σύνολο (το πιο πρόσφατο σύνολο). Όπως είδαμε και από το σύνολο κανόνων του συνόλου Y ο παίκτης Y μπορεί να απαντήσει με το ίδιο σύνολο που απάντησε αρχικά, αρκεί να μην ικανανοποιείται ο κανόνας με τα ονόματα.

Το παιχνίδι που μόλις διατυπώσαμε έχει τη γνωστή σε μας δομή των Ehrenfeucht-Fraïssé Games. Ο παίκτης $\exists$ προσπαθεί να αποδείξει ότι η πρόταση ξ ικανοποιείται και ο καθολικός παίκτης να αφήσει το πρόβλημα ανοικτό.

Ας αποδείξουμε όμως ότι αν ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης τότε η πρόταση $\forall$ ικανοποιείται.

$\Rightarrow$: Υποθέτουμε ότι ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης. Άρα θα αποδείξουμε ότι το μοντέλο που κατασκευάζεται από τις κινήσεις των παικτών ικανοποιεί την πρόταση ξ.

Έστω ότι το μοντέλο M κατασκευάζεται ως εξής:

- Το M_0 είναι το $\{X_0, ..., X_k\}$.
- Το M_j υποθέτουμε ότι έχει οριστεί.
- Το M_{j+1} είναι το σύνολο που προκύπτει από την κατασκευή του συνόλου Y ως απόκριση του παίκτη $\exists$ στον παίκτη $\forall$.

Το M αποτελεί την ένωση των συνόλων M_j. Επίσης η σύνδεση μεταξύ των κόσμων (που είναι Hintikka σύνολα) καθορίζεται ειδικά για να εξασφαλίσει την ιδιότητα μεταβατικότητας του μοντέλου. Για όλα τα $\diamond\varphi \in SF(\xi)$ ορίζουμε τη εξής σχέση πρόσβασης $Rmm^{'}$:

$$\diamond\varphi \notin m \Rightarrow [\diamond\varphi \notin m^{'} \wedge \varphi \notin m^{'}]$$

Γενικά η ιδέα είναι η εξής: Όπως είδαμε και στην μέθοδο ταμπλό του Fitting προσπαθούμε να σπάσουμε την αρχική πρόταση σε φόρμουλες για να διαπισώσουμε αν τελικά η πρόταση αληθεύει ή όχι. Στον Fitting ή διαδικασία μοιάζει με αυτήν του παιχνιδιού. Τα σύνολα προτάσεων που κατασκευάζονται είναι ουσιαστικά Hintikka σύνολα. Μη ξεχνάμε ότι τα σύνολα του Hintikka είναι πίνακας αλήθειας για κάθε πρόταση. Άρα η διαδικασία του παιχνιδιού είναι αντίστροφη. Αντί να καταστρέφει την πρόταση σταδιακά την έχει διαμελίσει σε υποπροτάσεις από την αρχή. Με τη διαφορά ότι έπειτα προσπαθεί να αποδείξει ότι τελικά για την προβληματική πρόταση $\diamond\varphi$ υπάρχει κόσμος για τον οποίο ισχύει η πρόταση φ.

Ο παραπάνω συλλογισμός φαίνεται με την επόμενη πρόταση, ολοκληρώνοντας την απόδειξη αυτής της κατεύθυνσης:

Για όλες τις προτάσεις $\psi \in SF(\xi)$ και για όλους τους κόσμους $m \in M$ έπεται ότι:

$$\mathcal{M}, m \models \psi \text{ αν και μόνο αν } \psi \in m$$

Προφανώς αν ο τύπος ψ είναι είτε ατομική πρόταση είτε λογικός σύνδεσμος ατομικών προτάσεων ή το υπαρξιακό σύμβολο η απόδειξη της προηγούμενης πρότασης είναι εύκολη. Το μόνο που απομένει είναι ο σύνδεσμος $\diamond$. Έστω ότι $\diamond\psi \in m$. Τότε ο $\forall$ επιλέγει σύνολο που περιέχει τον τροπικό σύνδεσμο $\diamond$ και ο $\exists$ αποκρούει επιλέγοντας σύνολο Y που ικανοποιεί τις συνθήκες που είδαμε προηγουμένως. Η ύπαρξη του συνόλου Y είναι δεδομένη εφόσον ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης.

Το αντίστροφο. Έστω $\diamond\psi \notin m$. Από τον ορισμό της σχέσης R συνεπάγεται ότι $\psi \notin m^{'}$, άρα $\mathcal{M}, m^{'} \not\models \psi$. Εφόσον θέλουμε να διατηρήσουμε τη σχέση μεταβατικότητας και το $m^{'}$ ήταν τυχαίο έπεται: $\mathcal{M}, m^{'} \not\models \diamond\psi$.

Ας δούμε και την απόδειξη της άλλης κατεύθυνσης.

$\Leftarrow$: Έστω ότι η πρόταση ξ ικανοποιείται. Τότε υπάρχει μοντέλο και σημείο αυτού για το οποίο ισχύει : $\mathcal{M}, m_0 \models \xi$. Εφόσον η ιδιότητα της μεταβατικότητας εκφράζεται σε τροπική λογική έπεται ότι υπάρχει φίλτρο ($\pi-$ μορφισμός) του μοντέλου $\mathcal{M}$. Η ύπαρξη αυτού του μοντέλου σημαίνει το εξής: Εφόσον η πρόταση ξ ικανοποιείται τότε υπάρχουν κόσμοι του μοντέλου $\mathcal{M}$ για τον οποίο ικανοποιούνται υποπροτάσεις της ξ. Άρα κυρίως για την πρόταση $\diamond\varphi$ μπορούμε να βρούμε σύνολο (κόσμο) Hintikka για τον οποίο θα ικανοποιούνται οι απαιτήσεις του παιχνιδιού. Εφόσον υπάρχει αυτός ο κόσμος Y από την ύπαρξη του $\pi-$ μορρφισμού έπεται ότι και ο παίκτης $\exists$ έχει στρατηγική νίκης.

Συμπέρασμα: Με το προηγούμενο παιχνίδι μεταξύ δυο παικτών έγινε η αναγωγή του προβλήματος ικανοποιησιμότητας για μεταβατικά μοντέλα υβριδικής λογικής στο ίδιο πρόβλημα για μεταβατικά πλαίσια τροπικής λογικής. Η πολυπλοκότητα για το τελευταίο είναι γνωστή: $PSPACE$. Άρα και για την υβριδική λογική με συνδέσμους @ και E η κλάση πολυπλοκότητας της ικανοποιησιμότητας παραμένει στο $PSPACE$.

Βιβλιογραφία

[1] Mel Fitting. *Destructive Modal Resolution*, August 3 1989.

[2] Ian Hodkinson. *Finite Variable logics*, Imperial College.

[3] Erich Gradël. *Why are modal logics so robustly decidable?*, RWTH Aachen.

[4] Carlos Areces, Juan Heguiabehere. *HyLoRes: A Hybrid Logic Prover Based on Direct Resolution*, ILLC Amsterdam.

[5] Patric Blackburn. *Representation, Reasoning and Relational Structures: a Hybrid Logic Manifesto*, INRIA Lorraine.

[6] Patric Blackburn, Maarten Marx. *Tableaux for Quantified Hybrid Logic*, ILLC and INRIA.

[7] Patric Blackburn, Balder ten Cate. *Beyond Pure Axioms: Node Creating Rules in Hybrid Tableaux*, Lorria France.

[8] Robin Hirsch and Ian Hodkinson. *Relation Algebras by Games*, Volume 147, Stuties in Logic and the Foundations of Mathematics, North Holland 2002.

[9] Patrick Blackburn, Maarten de Rijke and Yde Venema. *Modal Logic*, Cambridge University Press, 2001

[10] Raymond M. Smullyan. *First-Order Logic*, Dover Publications

[11] Angelo Margaris. *First Order Mathematical Logic*, Dover Publications

[12] Garry Chartrand. *Introductory Graph Theory*, Dover Publications

[13] Evgeniy Kazakov. *Realization of Multi-modal logic in Logic with Explicit Modalities*, Moscow State University, Department of Mathematical Logic

[14] Patrick Blackburn and Miroslava Tzakova. *Hybrid Concept Languages*, Germany, Max-Plank-Institut für Informatik, Universät des Saarlandes

[15] Erich Grädel , Phokion G. Kolaitis and Moshe Y. Vardi. *On the decision problem for two variable First Order Logic*, Bulletin of Symbolic Logic, Volume 3, March 1997

[16] Martin Otto. *Modal and Guarded characterisation Theorems over Finite Transition Systems*, United Kindom, Computer Science Department, University of Wales Swansea

[17] Lauri Hella. *Lectures on Finite Model Theory*, Finland, Department of Mathematics, University of Helsinki

[18] Maarten Marx and Yde Venema *Local variations on a loose theme: modal logic and decidability*, The Netherlands, ILLC, University of Amsterdam

[19] Erich Grädel, Martin Otto. *On Logics with two Variables*, Germany, RTWH Aachen

[20] Carlos Eduardo Areces. *Logic Engineering, The case of Description and Hybrid Logics*, The Netherlands, ILLC, University of Amsterdam

[21] Sergei N. Artemov. *Explicit Provability and Constructive Semantics*, Bulletin of Symbolic Logic, Volume 3, March 300

[22] Carlos Areces, Patrick Blackburn and Maarten Marx. *Characterization, Interpolation and Complexity*, The Netherlands, ILLC, University of Amsterdam

[23] Carlos Areces and Patrick Blackburn. *Bringing them all Together*, ILLC and INRIA Lorraine

[24] Carlos Areces, Patrick Blackburn and Maarten Marx. *Hybrid Logics is the bounded fragment of first order logic*, ILLC, University of Amsterdam, Universät des Saarlandes

[25] Stephan Tobies. *PSpace Reasoning for Graded Modal Logics*, Oxford University, Theoretische Informatik, Aachen Germany

[26] D.M. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter and M. Zakharyaschev. *Many-Dimensional Modal Logics: Theory and Applications*, Volume 148, Stuties in Logic and the Foundations of Mathematics, North Holland 2003.

[27] Valentin Goranko. *Temporal Logic with Reference Pointers*, Department of Mathematics, University of the North, QwaQwa Campus, South Africa

[28] Anuj Dawar. *Infinite and Finite Model Theory*, Computer Laboratory, University of Cambridge

[29] S. Arora and R. Fagin. *Ehrenfeucht-Fraïssé Games*, Theoretical Computer Science (174) 1997 97-121

[30] Jeremy Seligman. *Internalization: The case of Hybrid Logics.*, Department of Philosophy, the University of Aucland

[31] D.M. Gabbay and G. Malod. *Naming Worlds in Modal and Temporal logic*, on line version May 2000

[32] Johan Van Benthem. *Modal Foundations for Predicate Logic*, The Netherlands, ILLC, University of Amsterdam

[33] Johan Van Benthem. *Logic and game theory*, The Netherlands, ILLC, University of Amsterdam

[34] Kousha Etessami. Moshe Y. Vardi and Thomas Wilke. *First Order Logic with Two Variables and Unary Temporal Logic*, Basic research in Computer Science, March 1997

[35] Andrew Ladd. *Infinitary Logics and 0-1 Laws*, Rice University

[36] Melvin Fitting. *Modal Logics Between Propositional and First Order*, CUNY, Dept. Mathematics and Computer Science, July 2001

[37] Melvin Fitting. *Modal Logics: A Summary of the Well-Behaved*, CUNY, Dept. Mathematics and Computer Science. September 1989

[38] Hylo page. `http://www.hylo.net/`, Papers, Bibliography, Course Slides...

[39] Logic in Computer Science. `http://www.tcs.hut.fi/Studies/T-79.146/1998/`, Laboratory for Theoretical Computer Science

[40] Valentin Goranko. `http://general.rau.ac.za/maths/goranko/`, Teaching and Research

[41] Logic. `http://www.logic.math.helsinki.fi/`, The Helsinki Logic Group

[42] Vu Binh Tran. `http://goanna.cs.rmit.edu.au/~tvubinh/projects/PhD.shtml`, PhD Proposal Expectation Logic in Social Agent Cooperation, School of Computer Science and IT RMIT University

[43] John T. Baldwin. `http://www2.math.uic.edu/~jbaldwin/talks.html`, Department of Mathematics, Statistics, and Computer Science University of Illinois at Chicago

[44] Johann (Janos) A. Makowsky. `http://www.cs.technion.ac.il/~janos/`, Technion - Israel Institute of Technology

[45] Moshe Y. Vardi. `http://www.cs.rice.edu/~vardi/`, Department of Computer Science, Rice University

[46] Patrick Blackburn `http://www.loria.fr/~blackbur/`, INRIA Lorraine

[47] Neil Immerman `http://www.cs.umass.edu/~immerman/cs691/cs691.html`, Pebble Games Department of Computer Science, University of Massachusetts

[48] Cristoph Kreitz `http://www.cs.cornell.edu/Info/People/kreitz/`, Teaching Department of Computer Science, Cornell University

[49] Edited by Alban Ponse, Maarten de Rijke and Yde Venema. *Modal Logic and Process Algebra, A bisimulation Perspective* CSLI Publications

[50] G.E. Hughes and M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge London and New York

[51] Brian F. Chellas. *Modal Logic, an introduction*, Cambridge 1980