ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παιχνίδια και Ιδιοτελής Δρομολόγηση

Χριστίνα Απέργη

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Καθ. Σ. Ζάχος

ΑΘΗΝΑ 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Παιχνίδια και Ιδιοτελής Δρομολόγηση

Χριστίνα Απέργη

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Καθ. Σ. Ζάχος

ΑΘΗΝΑ 2003

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 16$^{\eta}$ Ιουλίου 2003

Σ. Ζάχος	**Τ. Σελλής**	**Φ. Αφράτη**
Καθηγητής	**Καθηγητής**	**Καθηγήτρια**
ΕΜΠ	**ΕΜΠ**	**ΕΜΠ**

Χριστίνα Απέργη

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική μελετάει τη συμπεριφορά των ιδιοτελών χρηστών στο διαδίκτυο, αλλά και σε οποιοδήποτε δίκτυο στο οποίο οι χρήστες όχι μόνο έχουν αντικρουόμενα συμφέροντα αλλά έχουν και την ελευθερία να δράσουν ανάλογα με αυτά, δηλαδή να δρομολογήσουν κατάλληλα τα φορτία τους ή την κίνησή τους. Το ότι οι χρήστες αφενός είναι ιδιοτελείς, δηλαδή αποκλειστικός σκοπός τους είναι να ελαχιστοποιήσουν το δικό τους κόστος χωρίς να ενδιαφέρονται για το υπόλοιπο σύστημα, και αφετέρου έχουν διαφορετικά και συχνά αντικρουόμενα συμφέροντα φέρνει στο προσκήνιο τη θεωρία παιγνίων (game theory). Από την άλλη, θεωρούμε ότι οι χρήστες δε συνεργάζονται μεταξύ τους, οπότε μας ενδιαφέρει πιο συγκεκριμένα η μη συνεργατική θεωρία παιγνίων (non cooperative game theory). Για αυτό το λόγο γίνεται μια εισαγωγή στη μη συνεργατική θεωρία παιγνίων στο κεφάλαιο 2.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται τα τρία μοντέλα που έχουν μελετηθεί περισσότερο στη βιβλιογραφία και μοντελοποιούν την ιδιοτελή συμπεριφορά των χρηστών και τις συνέπειες αυτής της συμπεριφοράς για το δίκτυο. Επειδή και τα τρία έχουν μελετηθεί τα τελευταία χρόνια, δεν έχουν κάποιο επίσημο όνομα και ίσως τα ονόματα που δίνουμε να μην είναι τα πιο κατάλληλα. Το μοντέλο της μοιραζόμενης ροής είναι το πιο παλιό (αρχές της δεκαετίας του 90) και παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 3. Στο κεφάλαιο 4, παρουσιάζεται το μοντέλο της απειροστής ροής, το οποίο στηρίζεται σε παλιότερο μοντέλο για το οδικό δίκτυο, αλλά μελετήθηκε πριν από μερικά χρόνια. Στο κεφάλαιο 5 παρουσιάζεται το μοντέλο των μεικτών στρατηγικών, το οποίο επίσης μελετήθηκε τα τελευταία χρόνια. Τέλος, στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται κάποιοι τρόποι με τους οποίους μπορούν να αμβλυνθούν τα προβλήματα που δημιουργούνται λόγω της ιδιοτελούς συμπεριφοράς των χρηστών.

Abstract

This diploma thesis studies the behavior of selfish users in the Internet. The results hold for any network, in which the users have different interests and are allowed to act (route their traffic) accordingly. Situations where users are selfish and have different interests are studied by game theory. More specifically, in the case of the Internet, we assume that users do not cooperate. Therefore, non cooperative game theory is used (chapter 2).

In the next chapters we present three models that study the behavior of selfish users and the consequences for the network. All three models have been studied lately (since the early '90) and therefore do not have standard names. Chapter 3 deals with the model which was basically studied by Orda and Lazar and we call "shared flow". In chapter 4, we present a model which has been introduced by Roughgarden and is based on an older model for traffic networks. In chapter 5, the model of mixed strategies is presented, which was introduced by Koutsoupias and Papadimitriou. Finally, in chapter 6 we study how we can deal with the problems that arise from the selfish behavior of the users.

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Λόγω της καλπάζουσας ανάπτυξης και μεγέθυνσης του διαδικτύου τα τελευταία χρόνια, έχει δημιουργηθεί η ανάγκη της θεωρητικής μελέτης του. Με τη μελέτη αυτή, αφενός μπορούμε να βελτιώσουμε την απόδοση του διαδικτύου και αφετέρου πιθανόν να μπορέσουμε να προβλέψουμε την εξέλιξη του τα επόμενα χρόνια.

Η μελέτη αυτή είναι δύσκολη, γιατί αν και το διαδίκτυο κατασκευάστηκε από τον άνθρωπο, κανείς δεν ξέρει πώς ακριβώς λειτουργεί. Επίσης παρουσιάζει σημαντικές διαφορές σε σχέση με τα παραδοσιακά δίκτυα υπολογιστών.

Τα παραδοσιακά δίκτυα υπολογιστών σχεδιάστηκαν σαν μια οντότητα με βάση ένα κοινό στόχο. Αυτό δεν σημαίνει ότι το δίκτυα αυτά είναι απαραίτητα συγκεντρωτικά (και όχι κατανεμημένα), αλλά ότι οι χρήστες είναι παθητικοί και συχνά θυσιάζουν τη δική τους επίδοση για το καλό του δικτύου. Για παράδειγμα, πολλά πρωτόκολλα δρομολόγησης έχουν ως στόχο την ελαχιστοποίηση της μέσης καθυστέρησης στο δίκτυο.

Αντίθετα, στο διαδίκτυο δεν υπάρχει μια ενιαία διαχείριση, αλλά μια συνεργασία από δίκτυα, κάθε ένα από τα οποία έχει διαφορετική διαχείριση και άρα διαφορετικούς στόχους. Οι χρήστες και οι παροχείς υπηρεσιών στο διαδίκτυο δρουν εγωιστικά με στόχο να ελαχιστοποιήσουν τις δικές τους καθυστερήσεις. Δεν υπάρχει κάποια κεντρική αρχή που να ελέγχει και να ρυθμίζει την κίνηση στο δίκτυο για να επιτευχθεί κάποιο "κοινωνικό βέλτιστο".

Στην προσπάθεια μοντελοποίησης και μελέτης του διαδικτύου χρησιμοποιείται κατά κόρον η θεωρία παιγνίων (game theory). Πράγματι, η συμπεριφορά των χρηστών του διαδικτύου (ή των παροχέων υπηρεσιών), όταν είναι ανεξάρτητοι και δεν συνεργάζονται μεταξύ τους, μπορούν να μοντελοποιηθούν με μη συνεργατική θεωρία παιγνίων (non cooperative game theory). Θεωρούμε δηλαδή ότι πρόκειται για ένα παιχνίδι, στο οποίο παίκτες είναι οι χρήστες (ή οι παροχείς υπηρεσιών) και επιλέγουν στρατηγικές. Ανάλογα με τις στρατηγικές των παικτών, το σύστημα καταλήγει σε κάποιο σημείο ισορροπίας (Nash equilibrium), το οποίο κανένας παίκτης δεν έχει συμφέρον να αλλάξει.

Κεφάλαιο 2

Μη Συνεργατική Θεωρία Παιγνίων

Στο κεφάλαιο αυτό, παρουσιάζουμε μερικές βασικές έννοιες για τη μη συνεργατική θεωρία παιγνίων (non cooperative game theory) και κυρίως για την έννοια της Nash ισορροπίας. Στην πρώτη ενότητα δείχνουμε με παραδείγματα κάποια παιχνίδια και βλέπουμε τι περιμένουμε να κάνουν οι παίκτες σε αυτά. Στη δεύτερη ενότητα ορίζουμε τυπικά την έννοια της Nash ισορροπίας και δείχνουμε πώς μπορεί να υπολογιστεί. Στην τελευταία ενότητα ασχολούμαστε με κάποια παράδοξα.

2.1 Μη συνεργατικά Παιχνίδια

Σε ένα παιχνίδι έχουμε n παίκτες, καθένας από τους οποίους μπορεί να διαλέξει ανάμεσα σε ένα πεπερασμένο πλήθος διαφορετικών στρατηγικών, τις οποίες ονομάζουμε γνήσιες (pure strategies). Ανάλογα με τις στρατηγικές που διαλέγουν όλοι οι παίκτες καθορίζεται για κάθε έναν από αυτούς το όφελος του (payoff) από το παιχνίδι. Κάθε παίκτης έχει σκοπό να μεγιστοποιήσει το όφελός του. Θεωρούμε ότι όλοι οι παίκτες είναι λογικοί (rational) και ξέρουν τι όφελος θα έχει κάθε παίκτης από κάθε συνδυασμό στρατηγικών. Συνεπώς κάθε παίκτης παίζει έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το όφελός του, χωρίς να κάνει λάθος κινήσεις. Τα παιχνίδια που μας ενδιαφέρουν είναι μη συνεργατικά, δηλαδή θεωρούμε ότι οι παίκτες δεν έχουν τη δυνατότητα να συνεργαστούν.

Ας δούμε τα παραπάνω με ένα παράδειγμα ενός παιχνιδιού δύο παικτών. Τα παιχνίδια δύο παικτών συνήθως παριστάνονται με έναν πίνακα $m \times k$, όπου m και k τα πλήθη των γνήσιων στρατηγικών του πρώτου και του δεύτερου παίκτη αντίστοιχα. Στον παρακάτω πίνακα για παράδειγμα έχουμε $m = 2$ και $k = 3$.

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \pi_2^1 & \pi_2^2 & \pi_2^3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \pi_1^1 \\ \pi_1^2 \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} (1,1) & (2,-2) & (2,-3) \\ (5,6) & (1,1) & (2,-2) \end{array} \right] \end{array}$$

Ο πρώτος παίκτης έχει ως στρατηγικές τις γραμμές του πίνακα A και ο δεύτερος τις στήλες. Συμβολίζουμε με π_α^j την j-οστή στρατηγική του παίκτη α. Στη συνέχεια δε θα παρουσιάζουμε πάντα τις στρατηγικές πάνω στον πίνακα του παιχνιδιού, αλλά θα εννοούνται. Επίσης όταν το παιχνίδι είναι δύο παικτών, ο πρώτος θα παίζει τις γραμμές και ο δεύτερος τις στήλες.

Για κάθε συνδυασμό γνήσιων στρατηγικών των δύο παικτών, βλέπουμε από τον πίνακα τι κερδίζουν οι παίκτες. Αν ο παίκτης 1 παίξει την i-οστή στρατηγική του (δηλαδή την π_1^i) και ο παίκτης 2 τη j-οστή στρατηγική του (δηλαδή την π_2^j), το όφελος των δύο παικτών δίνεται από το διάνυσμα $A[i][j]$. Για παράδειγμα αν ο πρώτος παίκτης επιλέξει την στρατηγική π_1^1 και ο δεύτερος τη στρατηγική π_2^3, το όφελος του πρώτου παίκτη θα είναι 2 και του δεύτερου -3, δηλαδή ο πρώτος παίκτης θα κερδίσει 2 και ο δεύτερος θα χάσει 3.

Έχουμε θεωρήσει λοιπόν ότι κάθε παίκτης ξέρει τον πίνακα των κερδών, είναι λογικός και προσπαθεί να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, χωρίς να συνεργάζεται με τους υπόλοιπους παίκτες. Το ερώτημα σε ένα τέτοιο παιχνίδι είναι τι θα παίξουν οι παίκτες. Ας δούμε τι θα γίνει στο παιχνίδι του πίνακα A. Στο παιχνίδι αυτό και οι δύο παίκτες μεγιστοποιούν το κέρδος τους στο ίδιο σημείο του πίνακα, όταν ο πρώτος παίκτης παίξει την στρατηγική π_1^2 (δηλαδή τη δεύτερη γραμμή) και ο δεύτερος την π_2^1 (δηλαδή την πρώτη στήλη). Αυτό θα το καταλάβουν και οι δύο παίκτες και θα παίξουν τις αντίστοιχες στρατηγικές.

Έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι για να βρίσκουμε τη λύση ενός παιχνιδιού (solution concepts). Ένας από αυτούς είναι η κυριαρχία (dominance). Ας δούμε για παράδειγμα το παιχνίδι του πίνακα B.

$$B = \left[\begin{array}{cccc} (9,3) & (9,4) & (4,2) & (2,2) \\ (9,2) & (7,5) & (2,1) & (8,3) \end{array} \right]$$

Στο παιχνίδι αυτό ο πρώτος παίκτης επιλέγει γραμμή (και έχει δύο στρατηγικές) και ο δεύτερος επιλέγει στήλη (και έχει τέσσερις στρατηγικές). Από τον πίνακα του παιχνιδιού βλέπουμε πως ό,τι και αν παίξει ο πρώτος παίκτης, ο δεύτερος παίκτης έχει μεγαλύτερο κέρδος αν παίξει την στρατηγική π_2^2. Λέμε ότι σε αυτή την περίπτωση, η στρατηγική π_2^2 είναι η καλύτερη αντίδραση (best response) του παίκτη 2 ή αλλιώς ότι η στρατηγική π_2^2 κυριαρχεί ανάμεσα σε όλες τις άλλες στρατηγικές του παίκτη 2. Συνεπώς ο παίκτης 2 θα παίξει π_2^2. Ο παίκτης 1, που έχουμε υποθέσει ότι είναι λογικός (rational), το καταλαβαίνει αυτό και παίζει την στρατηγική π_1^1, η οποία μεγιστοποιεί το κέρδος του όταν ο δεύτερος παίκτης παίζει π_2^2. Επομένως η λύση του παιχνιδιού είναι (π_1^1, π_2^2).

Την κυριαρχία (dominance) μπορούμε να την εφαρμόσουμε και στο παιχνίδι του πίνακα A, και προκύπτει η λύση (π_1^2, π_2^1) που είπαμε και προηγουμένως.

Πολλές φορές, αντί να λέμε ότι οι παίκτες θα παίξουν τις κυρίαρχες (dominant) στρατηγικές τους (όπως στο παράδειγμα του πίνακα B), λέμε ότι οι παίκτες δε θα παίξουν τις κυριαρχούμενες (dominated) στρατηγικές τους. Μια στρατηγική λέγεται κυριαρχούμενη (dominated) για τον παίκτη j, αν ότι και αν παίξουν οι υπόλοιποι παίκτες, ο παίκτης j έχει μικρότερο κέρδος αν παίξει την στρατηγική αυτή από το αν παίξει οποιαδήποτε άλλη. Οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι για το παράδειγμα του πίνακα B, δηλαδή είτε κρατάμε μόνο τις κυρίαρχες στρατηγικές είτε απορρίπτουμε τις κυριαρχούμενες προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα. Γενικά αυτοί οι δύο τρόποι είναι ισοδύναμοι, όποτε η μέθοδος της κυριαρχίας έχει λύση, πράγμα που δε συμβαίνει πάντα, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Ας δούμε τώρα τι θα γίνει στο παιχνίδι του πίνακα C, στο οποίο έχουμε πάλι δύο παίκτες κάθε ένας από τους οποίους έχει 2 στρατηγικές. Στο παιχνίδι αυτό δεν υπάρχει κάποια στρατηγική που να κυριαρχεί των άλλων για κανέναν από τους δύο παίκτες. Δεν μπορούμε λοιπόν να βρούμε τη λύση του παιχνιδιού με τον τρόπο που εφαρμόσαμε παραπάνω, αλλά θα χρησιμοποιήσουμε μια πιο γενική έννοια για τη λύση, την Nash ισορροπία.

$$C = \begin{bmatrix} (2,3) & (1,1) \\ (1,0) & (5,2) \end{bmatrix}$$

Λέμε ότι ένα παιχνίδι βρίσκεται σε Nash ισορροπία, όταν όλοι οι παίκτες έχουν επιλέξει κάποια στρατηγική τους και κάθε παίκτης j, με δεδομένες τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών $i \neq j$, δεν έχει όφελος να επιλέξει άλλη στρατηγική. Τυπικός ορισμός της έννοιας δίνεται στην επόμενη παράγραφο. Το παιχνίδι του πίνακα C έχει δύο γνήσια Nash σημεία ισορροπίας, δηλαδή Nash σημεία ισορροπία στα οποία όλοι οι παίκτες παίζουν γνήσιες στρατηγικές[1]: το (π_1^1, π_2^1) και το (π_1^2, π_2^2). Πράγματι, αν ο παίκτης 1 ξέρει ότι ο 2 θα παίξει π_2^1, η καλύτερη στρατηγική που έχει να παίξει είναι η π_1^1, και από την άλλη αν ο παίκτης 2 ξέρει ότι ο παίκτης 1 θα παίξει π_1^1, τον συμφέρει να παίξει π_2^1. Αντίστοιχα βλέπουμε ότι και το (π_1^2, π_2^2) είναι Nash σημείο ισορροπίας.

Η έννοια της Nash ισορροπίας είναι, όπως είπαμε και προηγουμένως, πιο γενική από τις κυρίαρχες στρατηγικές γιατί αφενός εφαρμόζεται σε περισσότερες περιπτώσεις και αφετέρου οι λύσεις που προκύπτουν από τη κυριαρχία (dominance) είναι Nash σημεία ισορροπίας. Πράγματι, στο παράδειγμα του πίνακα B, που με τη μέθοδο των κυρίαρχων στρατηγικών βρήκαμε ότι η λύση είναι (π_1^1, π_2^2), το (π_1^1, π_2^2) είναι και Nash σημείο ισορροπίας.

[1] Θα δούμε παρακάτω ότι οι παίκτες δεν είναι απαραίτητο να παίζουν γνήσιες στρατηγικές (pure strategies)

Ας δούμε τώρα τι θα γίνει στο παιχνίδι, του οποίου ο πίνακάς είναι ο D. Το παιχνίδι αυτό είναι γνωστό ως η μάχη των φύλων (battle of sexes) και προκύπτει ως εξής: Ένα ζευγάρι θέλει να πάει σε μια συναυλία μουσικής. Η γυναίκα προτιμάει να ακούσει Bach, ενώ ο άντρας προτιμάει να ακούσει Mozart, αλλά και οι δύο θέλουν να βγούνε μαζί. Η γυναίκα έχει ως στρατηγικές του τις γραμμές και ο άντρας τις στήλες και οι δύο μπορούν να επιλέξουν είτε Bach (B) είτε Mozart(M). Θεωρούμε ότι οι στρατηγικές π_1^1 και π_2^1 αντιστοιχούν στη στρατηγική B και οι π_1^2 και π_2^2 στην M. Το παιχνίδι αυτό έχει δύο γνήσια Nash σημεία ισορροπίας σύμφωνα με τον τρόπο που τα ορίσαμε προηγουμένως: το (B,B) και το (M,M).

$$D = \begin{array}{c} \\ B \\ M \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B & M \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{array} \right] \end{array}$$

Μέχρι τώρα έχουμε θεωρήσει ότι οι παίκτες επιλέγουν σε κάθε Nash ισορροπία μια μόνο από τις στρατηγικές τους. Ας δούμε τι θα γίνει αν επιτρέψουμε στους παίκτες να παίξουν τις στρατηγικές τους με κάποιες πιθανότητες. Έτσι έχουμε μεικτές στρατηγικές (mixed strategies), σε αντίθεση με τις γνήσιες που θεωρούσαμε μέχρι τώρα. Η έννοια της Nash ισορροπίας είναι ίδια με προηγουμένως, δηλαδή είναι μια κατάσταση την οποία κανένας παίκτης δεν έχει όφελος να αλλάξει.

Στη μάχη των φύλων (πίνακας D), εκτός από τα δύο γνήσια Nash σημεία ισορροπίας (pure Nash equilibria), υπάρχει και ένα μεικτό σημείο ισορροπίας (mixed Nash equilibrium): ο άντρας να παίξει με πιθανότητα 2/3 τη στρατηγική M και με πιθανότητα 1/3 τη στρατηγική B, και η γυναίκα να παίξει με πιθανότητα 1/3 τη στρατηγική M και με πιθανότητα 2/3 τη στρατηγική B. Το αναμενόμενο κέρδος του κάθε παίκτη είναι $\frac{1}{3}1 + \frac{2}{3}2 = \frac{4}{3}$. Θα δούμε στις υποενότητες 2.2.1 και 2.2.2 γιατί οι πιθανότητες αυτές αποτελούν Nash σημείο ισορροπίας, δηλαδή πώς ελέγχεται αν κάποιες στρατηγικές αποτελούν Nash ισορροπία, και πώς γίνεται ο υπολογισμός τους αντίστοιχα.

$$E = \left[\begin{array}{cc} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{array} \right]$$

Υπάρχουν παιχνίδια που έχουν μόνο μεικτά Nash σημεία ισορροπίας, όπως αυτό του πίνακα E. Στο παιχνίδι αυτό δεν υπάρχει pure Nash σημείο ισορροπίας, γιατί οι παίκτες έχουν αυστηρά αντικρουόμενα συμφέροντα [2]. Το μόνο Nash σημείο ισορροπίας στο παιχνίδι αυτό είναι κάθε παίκτης να παίξει κάθε μία από τις δύο στρατηγικές του με πιθανότητα 1/2.

[2]Και στη μάχη των φύλων οι παίκτες είχαν αντικρουόμενα συμφέροντα, αλλά όχι αυστηρά αντικρουόμενα, αφού είχαν κάποιο κέρδος από το να βγουν μαζί

Από εδώ και πέρα, λέμε Nash σημεία ισορροπίας και τα γνήσια (pure) και τα μεικτά (mixed). Αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένο παιχνίδι έχει Nash σημείο ισορροπίας.

2.2 Nash ισορροπία

Ένα πεπερασμένο παιχνίδι, ορίζεται από:

- ένα πεπερασμένο πλήθος παικτών n
- για κάθε παίκτη i, ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο γνησίων στρατηγικών (pure strategies) $A_i = \{\pi_i^\alpha\}$
- για κάθε παίκτη i μια συνάρτηση $u_i : A_1 \times A_2 \times \ldots A_n \to R$ που εκφράζει το όφελος (payoff) του παίκτη

Μια μεικτή στρατηγική του παίκτη i είναι μια συλλογή μη αρνητικών αριθμών με άθροισμα 1, κάθε ένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε μια γνήσια στρατηγική του. Δηλαδή κάθε παίκτης παίζει τις γνήσιες στρατηγικές του με πιθανότητες και συμβολίζουμε με p_i^j την πιθανότητα να παίξει ο παίκτης i την στρατηγική του j. Ισχύει για κάθε παίκτη i: $\sum_{j \in A_i} p_i^j = 1$, δηλαδή το άθροισμα των πιθανοτήτων που παίζει είναι 1. Το αναμενόμενο όφελος (payoff) του παίκτη i εξαρτάται από τις πιθανότητες όλων των παικτών και από τη συνάρτηση u_i. Σκοπός κάθε παίκτη είναι να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο όφελός του.

Συμβολίζουμε με s_i τη μεικτή στρατηγική του παίκτη i, και με $\mathbf{s}$ το διάνυσμα των μεικτών στρατηγικών όλων των παικτών, δηλαδή $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n$. Συμβολίζουμε την αντικατάσταση της μεικτής στρατηγικής s_i από την στρατηγική t_i: $(\mathbf{s}_{-i}; t_i)$. Δηλαδή $(\mathbf{s}_{-i}; t_i) = (s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, t_i, s_{t+1}, \ldots s_n)$. Συμβολίζουμε τέλος το αναμενόμενο όφελος του παίκτη i, όταν οι στρατηγικές όλων των παικτών δίνονται από το διάνυσμα $\mathbf{s}$ με $o_i(\mathbf{s})$.

Ορισμός 2.1. *Ένα διάνυσμα στρατηγικών $\boldsymbol{s}$ είναι Nash σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν για κάθε χρήστη i ισχύει*

$$o_i(\boldsymbol{s}) = \max_{r_i}[o_i(\boldsymbol{s}_{-i}; r_i)]$$

Δηλαδή στο Nash σημείο ισορροπίας η στρατηγική κάθε παίκτη μεγιστοποιεί το όφελος του με δεδομένες τις στρατηγικές των άλλων παικτών. Λέμε ότι μια στρατηγική s_i χρησιμοποιεί μια γνήσια στρατηγική, αν ο παίκτης i παίζει την στρατηγική αυτή με μη μηδενική πιθανότητα. Επίσης λέμε ότι το διάνυσμα στρατηγικών $\mathbf{s}$ χρησιμοποιεί μια γνήσια στρατηγική π_i^j, αν ο παίκτης i χρησιμοποιεί τη j στρατηγική του.

Κάθε παίκτης έχει λόγο να παίξει με μη μηδενική πιθανότητα μόνο τις στρατηγικές του που μεγιστοποιούν το όφελός με δεδομένες τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών. Ισχύει λοιπόν για όλους τους παίκτες i

$$\max_{r_i}(o_i(\mathbf{s}; r_i)) = \max_j[o_i(\mathbf{s}, \pi_i^j)] \tag{2.1}$$

Θα δούμε το παραπάνω με το παράδειγμα του πίνακα F.

$$F = \begin{bmatrix} (5,2) & (3,4) \\ (2,3) & (4,3) \end{bmatrix}$$

Το παιχνίδι αυτό δεν έχει γνήσιο Nash σημείο ισορροπίας. Έστω τώρα ότι ο παίκτης που έχει ως στρατηγικές του τις στήλες (έστω παίκτης 2), παίζει την πρώτη στήλη με πιθανότητα x_1 και τη δεύτερη με πιθανότητα x_2. Ο παίκτης 1 που επιλέγει γραμμές έχει αναμενόμενο όφελος:

- $5x_1 + 3x_2$, αν παίξει την πρώτη γραμμή
- $2x_1 + 4x_2$, αν παίξει την δεύτερη γραμμή

Ο παίκτης 1 βέβαια θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος, δηλαδή το κέρδος του θα είναι:

$$\max(5x_1 + 3x_2, 2x_1 + 4x_2)$$

Με δεδομένες τις πιθανότητες x_1, x_2, αν το αναμενόμενο όφελος από τη μια γραμμή είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο όφελος από την άλλη, ο παίκτης θα παίξει μόνο τη γραμμή που μεγιστοποιεί το όφελός του, δηλαδή θα χρησιμοποιήσει γνήσια στρατηγική. Ο παίκτης 1 έχει λόγο να χρησιμοποιήσει μεικτή στρατηγική, αν και μόνο αν τα αναμενόμενα οφέλη από τις δύο γραμμές είναι ίσα, δηλαδή $5x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 4x_2$. Τα αντίστοιχα ισχύουν και για τον παίκτη 2, με δεδομένες τις πιθανότητες του παίκτη 1.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το πιο σημαντικό θεώρημα της θεωρίας παιγνίων, το οποίο εξασφαλίζει την ύπαρξη Nash σημείου ισορροπίας σε κάθε πεπερασμένο παίγνιο. Έχει επεκταθεί και σε περιπτώσεις μη πεπερασμένων παιγνίων, όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια.

Θεώρημα 2.2. *[Nas51] Κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει Nash σημείο ισορροπίας.*

2.2.1 Έλεγχος Nash ισορροπίας

Το θεώρημα του Nash είναι θεώρημα ύπαρξης, δηλαδή λέει ότι κάθε πεπερασμένο παίγνιο έχει Nash ισορροπία, αλλά δε δίνει κάποιο τρόπο για τον υπολογισμό της. Το πρόβλημα του υπολογισμού δεν έχει λυθεί στη γενική του περίπτωση. Είναι όμως αρκετά απλό να ελέγξουμε αν κάποιες στρατηγικές του παικτών, αποτελούν Nash σημείο ισορροπίας.

Γνήσιες Στρατηγικές

Σε ένα πεπερασμένο παιχνίδι n παικτών μας δίνεται μια γνήσια στρατηγική για κάθε παίκτη, και θέλουμε να ελέγξουμε αν όταν οι παίκτες παίξουν αυτές τις στρατηγικές τους, έχουμε Nash ισορροπία. Για κάθε παίκτη i με δεδομένες τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών $k \neq i$, βρίσκουμε αν η στρατηγική που υποτίθεται ότι παίζει ο παίκτης i στη Nash ισορροπία μεγιστοποιεί το όφελός του, συγκρίνοντας το όφελός του από αυτή τη στρατηγική του με το όφελός του από οποιαδήποτε άλλη γνήσια στρατηγική του. Αν αυτό ισχύει για όλους τους παίκτες, οι δοσμένες στρατηγικές αποτελούν Nash ισορροπία. Ο έλεγχος αυτός γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Θα δούμε στην επόμενη υποενότητα, ότι και ο υπολογισμός των Nash σημείων ισορροπίας με γνήσιες στρατηγικές είναι σχετικά απλός.

Έστω ότι το παρακάτω παιχνίδι:

$$G = \begin{bmatrix} (1,-1) & (2,-2) \\ (-2,2) & (-3,3) \end{bmatrix}$$

Θέλουμε να ελέγξουμε αν έχουμε Nash ισορροπία όταν οι δύο παίκτες παίξουν την πρώτη τους στρατηγική, δηλαδή σύμφωνα με το συμβολισμό της ενότητας 2.1, θέλουμε να ελέγξουμε αν το (π_1^1, π_2^1) είναι Nash ισορροπία. Ο πρώτος παίκτης, με δεδομένο ότι ο δεύτερος παίκτης θα παίξει την πρώτη στήλη, δεν έχει συμφέρον να παίξει τη δεύτερη γραμμή (αντί για την πρώτη), γιατί ενώ παίζοντας την πρώτη γραμμή κερδίζει 1, παίζοντας τη δεύτερη κερδίζει -2 (χάνει 2). Και ο δεύτερος παίκτης όμως, με δεδομένο ότι ο πρώτος παίκτης παίζει την πρώτη γραμμή, δεν έχει συμφέρον να παίξει την δεύτερη στήλη (αντί για την πρώτη), γιατί ενώ παίζοντας την πρώτη στήλη κερδίζει -1 (χάνει 1), παίζοντας τη δεύτερη κερδίζει -2 (δηλαδή χάνει περισσότερα).

Μεικτές Στρατηγικές

Ας δούμε τώρα τι κάνουμε όταν δεν μας δίνονται γνήσιες στρατηγικές για τους παίκτες, αλλά μεικτές. Για κάθε παίκτη i, με δεδομένες τις πιθανότητες των υπόλοιπων παικτών $j \neq i$, υπολογίζουμε το αναμενόμενο όφελός του από κάθε γνήσια στρατηγική του π_i^α. Ελέγχουμε αν ο παίκτης i παίζει με μη μηδενική πιθανότητα μόνο τις γνήσιες στρατηγικές που μεγιστοποιούν το όφελός του. Αν αυτό ισχύει για όλους τους παίκτες, οι δοσμένες στρατηγικές αποτελούν Nash ισορροπία. Ο έλεγχος αυτός γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε σχέση με το πλήθος των παικτών n, αφού για κάθε παίκτη υπολογίζεται το αναμενόμενο όφελός του για κάθε μία από τις πεπερασμένου πλήθους στρατηγικές του και ο υπολογισμός του κάθε αναμενόμενου κόστους γίνεται γραμμικά σε σχέση με το n.

Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω για να ελέγξουμε αν στο παιχνίδι "η μάχη των φύλων" που είδαμε στην ενότητα 2.1 (πίνακας D) οι στρατηγικές $s_1 = (2/3, 1/3)$ $s_2 = (1/3, 2/3)$ για τους δύο παίκτες αντίστοιχα, αποτελούν Nash σημείο ισορροπίας. Με δεδομένη τη στρατηγική s_2, ο πρώτος παίκτης (η γυναίκα) έχει αναμενόμενο όφελος:

- $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$ αν παίξει την πρώτη γραμμή
- $\frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}1 = \frac{2}{3}$ αν παίξει την δεύτερη γραμμή

Τα οφέλη από τις δύο γραμμές είναι ίσα, οπότε η γυναίκα είναι αδιάφορη ως προς το ποια από τις δύο στρατηγικές της θα παίξει και μπορεί ισοδύναμα να τις παίξει και τις δύο με μη μηδενικές πιθανότητες. Δεν έχει δηλαδή κάποιο κίνητρο για να μην παίξει τη μεικτή στρατηγική $s_1 = (2/3, 1/3)$. Αν αντίστοιχα υπολογίσουμε τα αναμενόμενα οφέλη από τις δύο στρατηγικές του άντρα με δεδομένη τη στρατηγική s_1 της γυναίκας, θα δούμε ότι τα δύο οφέλη από τις δύο στήλες είναι ίσα, οπότε ο άντρας έχει λόγο να παίξει και τις δύο στήλες με πιθανότητες.

Ας ελέγξουμε τώρα για το ίδιο παιχνίδι (μάχη των φύλων) αν οι στρατηγικές $s_1 = (1/2, 1/2)$, $s_2 = (1/3, 2/3)$ είναι σημείο ισορροπίας. Με δεδομένη τη στρατηγική s_2, ο πρώτος παίκτης έχει αναμενόμενο όφελος όπως και προηγουμένως:

- $\frac{1}{3}2 + \frac{2}{3}0 = \frac{2}{3}$ αν παίξει την πρώτη γραμμή
- $\frac{1}{3}0 + \frac{2}{3}1 = \frac{2}{3}$ αν παίξει την δεύτερη γραμμή

Συνεπώς έχει λόγο να παίξει με μη αρνητικές πιθανότητες και τις δύο γραμμές. Με δεδομένη τη στρατηγική s_1, ο δεύτερος παίκτης έχει αναμενόμενο όφελος:

- $\frac{1}{2}1 + \frac{1}{2}0 = \frac{1}{2}$ αν παίξει την πρώτη στήλη
- $\frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2 = 1$ αν παίξει την δεύτερη στήλη

Το αναμενόμενο όφελος της δεύτερης στήλης είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο όφελος της πρώτης για τον παίκτη. Άρα ο δεύτερος παίκτης έχει συμφέρον να παίξει τη δεύτερη στήλη και όχι την στρατηγική $s_2 = (1/3, 2/3)$. Οπότε οι δοσμένες στρατηγικές για τους δύο παίκτες δεν αποτελούν Nash σημείο ισορροπίας.

2.2.2 Υπολογισμός Nash ισορροπίας

Ο υπολογισμός όλων ή ακόμα και ενός Nash σημείου ισορροπίας είναι ένα πρόβλημα που δεν έχει λυθεί στη γενική του περίπτωση. Είναι ακόμα ανοικτά, αφενός πολλά προβλήματα που σχετίζονται με τον υπολογισμό της Nash ισορροπίας καθώς επίσης και σε ποια κλάση πολυπλοκότητας ανήκει ο υπολογισμός αυτός. Είναι δύσκολο να κατατάξουμε το πρόβλημα σε κάποια κλάση, γιατί ξέρουμε πάντα την απάντηση ότι υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας (σύμφωνα με το θεώρημα του Nash). Δεν είναι δηλαδή όπως τα περισσότερα προβλήματα που η ύπαρξη και ο υπολογισμός είναι συνυφασμένα μεταξύ τους.

Στην υποενότητα αυτή θα δούμε πώς υπολογίζεται ένα γνήσιο Nash σημείο ισορροπίας (αν υπάρχει) καθώς και πώς υπολογίζονται τα σημεία ισορροπίας σε παιχνίδια δύο παικτών.

Υπολογισμός γνήσιας Nash ισορροπίας

Είδαμε στην υποενότητα 2.2.1 πώς γίνεται ο έλεγχος αν κάποιες γνήσιες στρατηγικές των παικτών είναι Nash σημείο ισορροπίας. Σε ένα πεπερασμένο παίγνιο, αφενός το πλήθος των παικτών είναι πεπερασμένο και αφετέρου όλοι οι παίκτες έχουν πεπερασμένο πλήθος γνησίων στρατηγικών. Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τον έλεγχο αυτό για όλους τους συνδυασμούς γνήσιων στρατηγικών και να βρούμε όλοι τα γνήσια Nash σημεία ισορροπίας ενός πεπερασμένου παιχνιδιού. Ο χρόνος για την εύρεση όλων των γνήσιων Nash σημείων ισορροπίας (αλλά και για την εύρεση ενός στη χειρότερη περίπτωση) είναι εκθετικός, αφού για παράδειγμα αν έχουμε n παίκτες κάθε ένας από τους οποίους έχει m γνήσιες στρατηγικές, πρέπει να ελέγξουμε m^n υποψήφια σημεία ισορροπίας, οπότε ο χρόνος θα είναι πολλαπλάσιο του m^n.

Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $m \times k$ παίγνια δύο παικτών (δηλαδή παίγνια δύο παικτών που ο πρώτος παίκτης έχει m γνήσιες στρατηγικές και ο δεύτερος k) μπορούμε να βρούμε όσα γνήσια Nash σημεία ισορροπίας υπάρχουν σε χρόνο $O(mk(m+k))$. Αυτό προκύπτει επειδή υπάρχουν mk υποψήφια Nash σημεία ισορροπίας και για κάθε ένα από αυτά πρέπει να συγκρίνουμε το όφελος του κάθε παίκτη με το όφελός του αν παίξει οποιαδήποτε άλλη στρατηγική του. Πρέπει δηλαδή να συγκρίνουμε το όφελος του πρώτου παίκτη με το όφελός από τις υπόλοιπες $m-1$ στρατηγικές του και το όφελος του δεύτερου παίκτη με το όφελός του από τις υπόλοιπες $k-1$ στρατηγικές του.

Zero-sum παιχνίδια

Zero-sum λέγονται τα παιχνίδια δύο παικτών που το συνολικό όφελος είναι πάντα 0, δηλαδή ότι κερδίζει ο ένας παίκτης το χάνει ο άλλος. Σε αυτά τα παιχνίδια αρκεί να έχουμε τον πίνακα με τα οφέλη του ενός παίκτη. Για παράδειγμα, αν ο πίνακας των κερδών του πρώτου παίκτη είναι:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

συμπεραίνουμε ότι ο πίνακας του παιχνιδιού είναι:

$$H = \begin{bmatrix} (4,-4) & (-1,1) \\ (1,-1) & (2,-2) \end{bmatrix}$$

Το παιχνίδι αυτό δεν έχει γνήσιο σημείο ισορροπίας. Έστω ότι ο παίκτης 2 που επιλέγει στήλη, παίζει την πρώτη στήλη με πιθανότητα y_1 και τη δεύτερη με πιθανότητα y_2. Προφανώς $y_1 + y_2 = 1$. Αν ο παίκτης 1 παίξει την πρώτη γραμμή, το αναμενόμενο όφελός του είναι $4y_1 - y_2$, αφού με πιθανότητα y_1 θα έχει όφελος 4 και με πιθανότητα y_2 όφελος -1. Αντίστοιχα, αν παίξει τη δεύτερη γραμμή, το αναμενόμενο όφελός του είναι $y_1 + 2y_2$. Ο παίκτης 1 θα παίξει έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο όφελός του, οπότε θα έχει όφελος:

$$max(4y_1 - y_2, y_1 + 2y_2)$$

Εφόσον το παιχνίδι είναι zero-sum, ο παίκτης 2 ξέρει ότι ό,τι κερδίζει ο παίκτης 1, το χάνει αυτός. Θα επιλέξει λοιπόν τις πιθανότητες y_1, y_2 έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει το αναμενόμενο όφελος του παίκτη 1, δηλαδή

$$\min_{y_1, y_2 : y_1 + y_2 = 1} \max(4y_1 - y_2, y_1 + 2y_2)$$

Εδώ εφαρμόζεται το θεώρημα minmax και το πρόβλημα λύνεται με γραμμικό προγραμματισμό.

Παίγνια δύο παικτών

Ας δούμε την περίπτωση που έχουμε $m \times k$ παίγνια στη γενική περίπτωση, που τα παίγνια δεν είναι απαραίτητα zero-sum. Ο πρώτος παίκτης παίζει με πιθανότητες $x_1, x_2, ..., x_m$ και ο άλλος με πιθανότητες $y_1, y_2, ..., y_k$.

Λέμε πλήρως μεικτό (fully mixed) ένα Nash σημείο ισορροπίας, στο οποίο όλοι οι παίκτες παίζουν όλες τις στρατηγικές τους με μη μηδενικές πιθανότητες. Σε ένα παιχνίδι δύο παικτών, αν υπάρχει πλήρως μεικτό Nash σημείο ισορροπίας, σε αυτό θα είναι $x_i > 0$ για κάθε γραμμή i και $y_j > 0$ για κάθε στήλη j. Προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις:

- Για κάθε παίκτη, το άθροισμα των πιθανοτήτων που παίζει είναι 1. (2 εξισώσεις)
- Με δεδομένες τις πιθανότητες του παίκτη 2 (y_j), ο παίκτης 1 έχει το ίδιο αναμενόμενο όφελος από όλες τις στρατηγικές του, γιατί αλλιώς δεν έχει λόγο να τις παίξει όλες με μη μηδενική πιθανότητα. Αν c_1 το αναμενόμενο όφελος του παίκτη 1, έχουμε m εξισώσεις και έναν επιπλέον άγνωστο, το c_1.

- Αντίστοιχα, θεωρούμε ότι το αναμενόμενο όφελος του παίκτη 2 είναι c_2, οπότε προκύπτουν άλλες k εξισώσεις.

Έχουμε λοιπόν συνολικά $m+k+2$ εξισώσεις και $m+k+2$ αγνώστους (οι m πιθανότητες του παίκτη 1, οι k του παίκτη 2 και τα οφέλη c_1, c_2). Μπορούμε λοιπόν να λύσουμε το σύστημα και να ελέγξουμε αν οι πιθανότητες που προκύπτουν είναι θετικές. Τον αλγόριθμο αυτό θα τον χρησιμοποιήσουμε στην υποενότητα 5.4.1.

Με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, βρίσκουμε μόνο τα πλήρως μεικτά σημεία ισορροπίας (αν υπάρχουν). Μπορούμε να τον γενικεύσουμε για οποιοδήποτε υποπαίγνιο ενός παιγνίου. Διαλέγουμε κάποιες στρατηγικές για κάθε παίκτη, τις οποίες θεωρούμε ότι θα παίξει με μη μηδενική πιθανότητα, έστω α για τον παίκτη 1 και β για τον παίκτη 2, όπου $\alpha \leq m$ και $\beta \leq k$. Αντίστοιχα με την πλήρως μεικτή περίπτωση, προκύπτουν $\alpha+\beta+2$ εξισώσεις με $\alpha+\beta+2$ αγνώστους. Λύνουμε το σύστημα και ελέγχουμε αν η λύση είναι πράγματι σημείο ισορροπίας, σύμφωνα με την ενότητα 2.2.1. Θα δούμε πώς εφαρμόζεται αυτή η ιδέα σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο δικτύων, στην υποενότητα 5.4.2.

Θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε τον παραπάνω αλγόριθμο για όλους τους συνδυασμούς στρατηγικών των δύο παικτών. Όμως τότε θα έπρεπε να τρέξουμε τον αλγόριθμο 2^{n+m} φορές, δηλαδή έχουμε εκθετικό χρόνο.

Ο πιο δημοφιλής αλγόριθμος για $n \times m$ παίγνια δύο παικτών είναι ο αλγόριθμος Lemke-Howsen. Ούτε ο αλγόριθμος αυτός φαίνεται ότι είναι εκθετικός (αλλά δεν έχει αποδειχθεί), αλλά στην πράξη είναι πιο γρήγορος από αυτόν που περιγράφηκε παραπάνω.

2.3 Παράδοξα

Ένα Nash σημείο ισορροπίας, όπως είδαμε παραπάνω, είναι ένα σημείο από το οποίο κανένας παίκτης με δεδομένες τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών δεν έχει όφελος να αποκλίνει. Με άλλα λόγια τα σημεία ισορροπίας είναι σημεία που σε γενικές γραμμές συμφέρουν τους παίκτες. Υπάρχουν όμως κάποια παράδοξα για τη Nash ισορροπία, δηλαδή παιχνίδια στα οποία το σημείο ισορροπίας όλοι οι παίκτες έχουν μικρότερο όφελος από ότι σε κάποιο άλλο σημείο.

2.3.1 Δίλημμα των φυλακισμένων

Το πιο γνωστό παράδοξο είναι το δίλημμα των φυλακισμένων (prisoner's dilemma), το οποίο προκύπτει από την παρακάτω ιστορία. Ένας αστυνόμος έχει συλλάβει δύο κλέφτες, αλλά δεν έχει αρκετά ενοχοποιητικά στοιχεία. Αν είχε, θα τους φυλάκιζε και τους δύο για 3 χρόνια, ενώ χωρίς στοιχεία μπορεί να τους φυλακίσει για 1. Για να τους αναγκάσει να ομολογήσουν, τους βάζει σε χωριστά δωμάτια και λέει στον καθένα ότι αν συνεργαστεί με την αστυνομία και ο άλλος δεν συνεργαστεί, θα χρησιμοποιήσει την κατάθεσή του για να ενοχοποιήσει τον άλλο, τον οποίο θα φυλακίσει για 4 χρόνια, ενώ αυτόν που ομολόγησε δε θα τον φυλακίσει καθόλου. Αν συνεργαστούν και οι δύο θα φυλακιστούν 3 χρόνια.

Από τα παραπάνω προκύπτει ένα παίγνιο δύο παικτών, στο οποίο κάθε παίκτης έχει δύο στρατηγικές. Η μία είναι να συνεργαστεί (Σ) με την αστυνομία και η άλλη να μην συνεργαστεί (ΜΣ). Η πρώτη στρατηγική του κάθε παίκτη (πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη αντίστοιχα για τους δύο παίκτες) είναι να συνεργαστεί και η άλλη είναι να μη συνεργαστεί. Στον πίνακα του παιχνιδιού βάζουμε τα χρόνια που θα πάει φυλακή κάθε παίκτης, τα οποία προφανώς θέλει να ελαχιστοποιήσει.

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \Sigma & M\Sigma \end{array} \\ \begin{array}{c} \Sigma \\ M\Sigma \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{array} \right] \end{array}$$

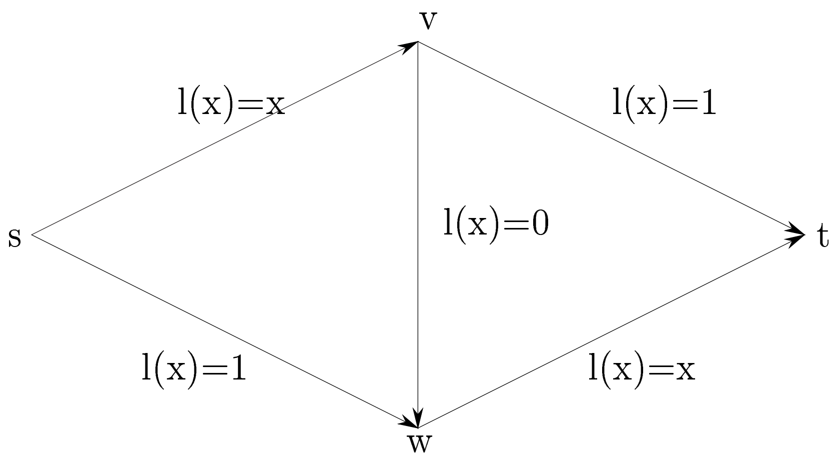
Από τον παραπάνω πίνακα (P) βλέπουμε ότι το παιχνίδι έχει ένα γνήσιο σημείο ισορροπίας το (Σ,Σ), δηλαδή να συνεργαστούν και οι δύο παίκτες με την αστυνομία. Στο σημείο ισορροπίας φυλακίζονται και οι δύο παίκτες για 3 χρόνια, ενώ αν και οι δύο δεν συνεργάζονταν θα φυλακίζονταν μόνο ένα χρόνο. Αυτό ακριβώς είναι το παράδοξο.

2.3.2 Παράδοξο του Braess

Το παράδοξο του Braess δεν αφορά ένα πεπερασμένο παίγνιο, αλλά ένα παίγνιο άπειρων παικτών[3]. Η έννοια της Nash ισορροπίας μπορεί να επεκταθεί σε αυτό το μοντέλο. Στο σχήμα 2.1 φαίνεται ένα δίκτυο με 5 κατευθυνόμενες ακμές. Υπάρχει κάποια ποσότητα κίνησης r που θέλει να πάει από τον κόμβο s στον κόμβο t χρησιμοποιώντας τα μονοπάτια του δικτύου. Η κίνηση r αποτελείται από την απειροστή ροή άπειρων παικτών (χρηστών του δικτύου) και κάθε παίκτης δρομολογεί τη ροή του ώστε να ελαχιστοποιήσει την καθυστέρησή του. Οι ακμές έχουν συναρτήσεις καθυστέρησης $l(x)$ που παρουσιάζονται στο σχήμα και έχουν όρισμα το x, δηλαδή την κίνηση που δρομολογείται στην ακμή. Αν για παράδειγμα, η ακμή st έχει κίνηση 1/2, η καθυστέρηση σε αυτήν είναι 1/2, ενώ η ακμή sw έχει καθυστέρηση 1, όση και να είναι η κίνηση.

Θεωρούμε ότι η συνολική κίνηση είναι $r = 1$. Το Nash σημείο ισορροπίας είναι όλη η κίνηση να δρομολογηθεί στο μονοπάτι $s- > v- > w- > t$. Τότε

[3] Το μοντέλο αυτό αναλύεται στο Κεφάλαιο 5



Σχήμα 2.1: Παράδοξο του Braess

η καθυστέρηση στην ακμή sv είναι 1, στην vw 0 και στην wt 1. Συνεπώς συνολικά το μονοπάτι έχει καθυστέρηση 2. Κανένας χρήστης δεν έχει λόγο να χρησιμοποιήσει άλλο μονοπάτι, γιατί δεν υπάρχει μονοπάτι με μικρότερη καθυστέρηση από 2, οπότε πράγματι πρόκειται για Nash ισορροπία.

Το παράδοξο είναι ότι αν αφαιρεθεί η μηδενικής καθυστέρησης ακμή vw από το δίκτυο, προκύπτει καλύτερη Nash ισορροπία για όλους τους χρήστες, δηλαδή ισορροπία στην οποία όλοι οι χρήστες έχουν μικρότερη καθυστέρηση από 2. Το Nash σημείο ισορροπίας του καινούργιου δικτύου είναι η μισή κίνηση να χρησιμοποιήσει το μονοπάτι $s->v->t$ και η υπόλοιπη το $s->w->t$. Τότε η καθυστέρηση και στα δύο μονοπάτια είναι 3/2, δηλαδή μικρότερη από 2.

Κεφάλαιο 3

Μοιραζόμενη Ροή

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το μοντέλο, στο οποίο κάθε χρήστης του δικτύου θέλει να στείλει δεδομένα, αρχεία ή οτιδήποτε άλλο με πεπερασμένο (μη απειροστό) ρυθμό από έναν κόμβο του δικτύου σε έναν άλλο. Στον ρυθμό αυτό αναφερόμαστε και ως ροή ή κίνηση. Σκοπός κάθε χρήστη είναι να δρομολογήσει έτσι τη ροή του στα μονοπάτια του δικτύου ώστε να ελαχιστοποιήσει την καθυστέρησή του. Το ότι η ροή κάθε παίκτη δεν είναι απειροστή σημαίνει ότι η δρομολόγηση κάθε παίκτη επηρεάζει τους υπόλοιπους. Βασικό χαρακτηριστικό του μοντέλου "μοιραζόμενη ροή" είναι ότι οι χρήστες μπορούν να μοιράζουν τη ροή τους σε πολλά μονοπάτια του δικτύου.

3.1 Δίκτυο παράλληλων ακμών

Αρχικά ασχολούμαστε με την περίπτωση που έχουμε δίκτυο παράλληλων ακμών [ORS93]. Θεωρούμε δηλαδή ότι το δίκτυο αποτελείται από m παράλληλες ακμές, οι οποίες κατευθύνονται από τον κόμβο πηγή στον κόμβο προορισμό. Επίσης θεωρούμε n χρήστες και κάθε ένας από αυτός θέλει να στείλει κίνηση r_i από την πηγή στον προορισμό. Οι χρήστες δρουν ιδιοτελώς και δεν συνεργάζονται μεταξύ τους για το πώς θα χρησιμοποιήσουν τις παράλληλες ακμές.

Επειδή θεωρούμε μοιραζόμενη δρομολόγηση, κάθε χρήστης μπορεί να μοιράσει την κίνηση του μεταξύ κάποιων ακμών. Δηλαδή ένας χρήστης που έχει να στείλει κίνηση w θα στείλει κίνηση $w \cdot x^1$ στην πρώτη ακμή, $w \cdot x^2$ στη δεύτερη, $\ldots$, $w \cdot x^m$ στην τελευταία (m-οστή), όπου $\sum_{j=1}^{m} x^j = 1$. Συμβολίζουμε τη ροή του χρήστη i στην ακμή j f_i^j. Οι χρήστες μπορούν να αποφασίσουν οποιαδήποτε στιγμή πώς θα μοιραστεί η κίνησή τους στις ακμές. Κάθε χρήστης i μπορεί να επιλέξει οποιεσδήποτε τιμές f_i^j για όλες τις ακμές j, που πληρούν τους παρακάτω περιορισμούς:

$$f_i^j \geq 0 \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_i^j = r_i \tag{3.2}$$

Με άλλα λόγια, οι χρήστες δεν μπορούν να επιλέξουν αρνητική ροή σε καμιά ακμή και κάθε χρήστης στέλνει όλη την κίνηση του στις ακμές.

Συμβολίζουμε την συνολική ροή μιας ακμής j, δηλαδή το άθροισμα των ροών όλων των παικτών στην ακμή αυτή f^j. Κάθε χρήστης i λοιπόν επιλέγει το διάνυσμα $f_i = (f_i^1, f_i^2, \ldots, f_i^m)$. Το δίκτυο χαρακτηρίζεται από τα διανύσματα αυτά που επιλέγουν οι παίκτες και συμβολίζεται $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Το διάνυσμα ροών f λέγεται εφικτό αν οι επιμέρους ροές των παικτών στις ακμές ικανοποιούν τις συνθήκες (3.1) και (3.2). Γενικά, με τον δείκτη θα συμβολίζουμε τον χρήστη (παίκτη) και με τον εκθέτη την ακμή.

Ο χρήστης i επιλέγει το διάνυσμα f_i, με σκοπό να ελαχιστοποιήσει τη συνάρτηση κόστους του $J_i(f)$. Η συνάρτηση κόστους του χρήστη i δεν εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα ροών του ίδιου, αλλά και από τα διανύσματα ροών των υπόλοιπων χρηστών και εφόσον οι χρήστες είναι ιδιοτελείς μας ενδιαφέρει η Nash ισορροπία του συστήματος. Είναι καλό να υπάρχει μοναδικό σημείο ισορροπίας, ώστε το παιχνίδι να έχει λύση.

Ορισμός 3.1. *Μια ροή f που είναι εφικτή είναι Nash σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν για κάθε χρήστη $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ και για κάθε $\hat{f}_i$ ισχύει*

$$J_i(f) \leq J_i(f_{-i}; \hat{f}_i)$$

Ο παραπάνω ορισμός είναι αντίστοιχος με τον ορισμό 2.1, μόνο που εδώ οι παίκτες (χρήστες) θέλουν να ελαχιστοποιήσουν το κόστος τους, ενώ στον 2.1 θέλουν να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους.

Θεωρούμε ότι για τη συνάρτηση κόστους $J_i(f)$ ισχύουν τα παρακάτω:

- J_i είναι το συνολικό κόστος του χρήστη i, δηλαδή $J_i(f) = \sum_{j=1}^{m} J_i^j(f^j)$
- $J_i^j : [0, \infty)^n \to [0, \infty]$ και είναι συνεχής συνάρτηση.
- Η συνάρτηση J_i^j είναι συνεχής στο f_i^j.
- Όπου είναι πεπερασμένη, η J_i^j είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Την πρώτη παράγωγο ως προς f_i^j την συμβολίζουμε K_i^j.
- Για κάθε ροή f του συστήματος αν κάποιοι χρήστες έχουν άπειρο κόστος, τότε τουλάχιστον ένας χρήστης με άπειρο κόστος μπορεί να αλλάξει τη ροή του έτσι ώστε να πετύχει πεπερασμένο κόστος.

Το ∞ συμπεριλαμβάνεται στο πεδίο τιμών της J_i^j για την περίπτωση που η χωρητικότητα της ακμής είναι μικρότερη από τη συνολική ροή στην ακμή αυτή, οπότε το κόστος απειρίζεται. Η τελευταία συνθήκη συνεπάγεται ότι όταν το σύστημα είναι σε Nash ισορροπία όλοι οι χρήστες έχουν πεπερασμένο κόστος.

Εκτός από τις παραπάνω γενικές συνθήκες μπορούμε να θεωρήσουμε επιπλέον ότι:

1. Η J_i^j είναι συνάρτηση δύο ορισμάτων. Εξαρτάται από τη ροή του χρήστη i στην ακμή j (f_i^j) και από τη συνολική ροή στην ακμή j (f^j).
2. Η J_i^j είναι αύξουσα ως προς τα δύο ορίσματά της.
3. Η συνάρτηση K_i^j έχει επίσης δύο ορίσματα και όποτε η J_i^j είναι πεπερασμένη, η K_i^j είναι γνησίως αύξουσα ως προς τα ορίσματά της.

Οι συναρτήσεις που ικανοποιούν όλες τις παραπάνω συνθήκες, ονομάζονται στη βιβλιογραφία συναρτήσεις τύπου A (type-A functions).

Μια ροή f αποτελεί Nash ισορροπία σύμφωνα με τον ορισμό 3.1 και το [Lue84] αν και μόνο αν ικανοποιούνται οι συνθήκες Kuhn-Tucker, δηλαδή για κάθε χρήστη i υπάρχει λ_i τέτοιο ώστε:

$$\lambda_i = \frac{dJ_i}{df_i^j}(f), \text{ αν } f_i^j > 0, \ j \in \{1, 2, \dots m\}$$

$$\lambda_i \leq \frac{dJ_i}{df_i^j}(f), \text{ αν } f_i^j = 0, \ j \in \{1, 2, \dots m\}$$

Θεώρημα 3.2. *Σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών, όπου οι συναρτήσεις κόστους είναι τύπου A, υπάρχει μοναδικό Nash σημείο ισορροπίας.*

Απόδειξη. Έστω $f \in F$ και $\hat{f} \in F$ δύο Nash σημεία ισορροπίας του δικτύου. Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $f^j = \hat{f}^j$ για όλες τις ακμές j και στη συνέχεια ότι $f_i = \hat{f}_i$ για όλους τους χρήστες i.

Τα f και $\hat{f}$ θα ικανοποιούν τις συνθήκες Kuhn-Tucker, δηλαδή:

$$K_i^j(f_i^j, f^j) \geq \lambda_i; f_i^j > 0 \rightarrow K_i^j(f_i^j, f^j) = \lambda_i, \forall i, j$$

$$K_i^j(\hat{f}_i^j, \hat{f}^j) \geq \hat{\lambda}_i; \hat{f}_i^j > 0 \rightarrow K_i^j(\hat{f}_i^j, \hat{f}^j) = \hat{\lambda}_i, \forall i, j$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και το ότι η $K_i^j(f_i^j, f^j)$ είναι αύξουσα ως προς τα δύο ορίσματά της, μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

$$\{\hat{\lambda}_i \leq \lambda_i, \hat{f}^j \geq f^j\} \rightarrow \hat{f}_i^j \leq f_i^j \tag{3.3}$$

$$\{\hat{\lambda}_i \geq \lambda_i, \hat{f}^j \leq f^j\} \rightarrow \hat{f}_i^j \geq f_i^j \tag{3.4}$$

Οι δύο αυτές συνεπαγωγές είναι συμμετρικές, οπότε αρκεί να αποδείξουμε τη μία. Θα αποδείξουμε την (3.3).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\hat{\lambda}_i \leq \lambda_i$ και $\hat{f}^j \geq f^j$ για κάποια ακμή j και κάποιον χρήστη i. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $\hat{f}_i^j = 0$. Στην περίπτωση αυτή η σχέση $\hat{f}_i^j \leq f_i^j$ προφανώς ισχύει.

- $\hat{f}_i^j > 0$. Σε αυτή την περίπτωση λόγω των συνθηκών Kuhn-Tucker και των υπόλοιπων υποθέσεων που έχουμε κάνει, ισχύει:

  $$K_i^j(\hat{f}_i^j, \hat{f}^j) = \hat{\lambda}_i \leq \lambda_i \leq K_i^j(f_i^j, f^j) \leq K_i^j(f_i^j, \hat{f}^j)$$

  Η πρώτη ισότητα προκύπτει από τις συνθήκες Kuhn-Tucker, εφόσον έχουμε υποθέσει ότι η ροή του χρήστη i στην ακμή j είναι θετική και η τελευταία ανισότητα προκύπτει επειδή η K_i^j είναι αύξουσα ως προς το όρισμα f^j. Όμως η συνάρτηση K_i^j είναι αύξουσα και ως προς το όρισμα f_i^j, οπότε $\hat{f}_i^j \leq f_i^j$.

Θα αποδείξουμε ότι τα σύνολα $\{j : \hat{f}^j > f^j\}$ και $\{j : \hat{f}^j < f^j\}$ είναι κενά. Θέτουμε $\mathcal{J}^1 = \{j : \hat{f}^j > f^j\}$, $\mathcal{I}_a = \{i : \hat{\lambda}^i > \lambda^i\}$ και $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J} - \mathcal{J}^1 = \{j : \hat{f}^j \leq f^j\}$. Για κάθε ακμή $j \in \mathcal{J}^2$ και κάθε χρήστη $i \in \mathcal{I}_a$, λόγω της (3.4) είναι $\hat{f}_i^j \geq f_i^j$. Έστω ότι το $\mathcal{J}^1$ δεν είναι κενό. Ισχύει $\sum_{j=1}^m f_i^j = \sum_{j=1}^m \hat{f}_i^j = r_i$, γιατί οι ροές f, $\hat{f}$ πρέπει να είναι εφικτές. Οπότε $\forall i \in \mathcal{I}_a$ χρησιμοποιώντας την (3.4) έχουμε:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}^1} \hat{f}_i^j = r_i - \sum_{j \in \mathcal{J}^2} \hat{f}_i^j \leq r_i - \sum_{j \in \mathcal{J}^2} f_i^j = \sum_{j \in \mathcal{J}^1} f_i^j$$

Για κάθε χρήστη i που δεν ανήκει στο $\mathcal{I}_a$ και κάθε ακμή $j \in \mathcal{J}^1$, είναι:

$$\sum_{j \in \mathcal{J}^1} \hat{f}^j = \sum_{j \in \mathcal{J}^1} \sum_{i=1}^{n} \hat{f}_i^j \leq \sum_{j \in \mathcal{J}^1} \sum_{i=1}^{n} f_i^j = \sum_{j \in \mathcal{J}^1} f_i^j$$

Η παραπάνω ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει, αφού εξ ορισμού ισχύει $\hat{f}^j > f^j$ για όλες τις ακμές $j \in \mathcal{J}^1$. Επομένως το σύνολο $\mathcal{J}^1 = \{j : \hat{f}^j > f^j\}$ είναι κενό. Αντίστοιχα αποδεικνύεται και για το $\{\hat{f}^j < f^j\}$ ότι είναι κενό. Συνεπώς:

$$f^j = \hat{f}^j, \forall j$$

Για να δείξουμε ότι $\lambda_i = \hat{\lambda}_i, \forall i$, θα αποδείξουμε πρώτα ότι:

$$\{\hat{\lambda}_i < \lambda_i, \hat{f}^j = f^j\} \rightarrow \hat{f}_i^j < f_i^j \text{ or } \hat{f}_i^j = f_i^j = 0 \tag{3.5}$$

Η απόδειξη είναι αντίστοιχη με την απόδειξη της (3.3) που είδαμε προηγουμένως. Για την περίπτωση που $\hat{f}_i^j = 0$, η συνεπαγωγή είναι προφανής. Διαφορετικά, αν δηλαδή $\hat{f}_i^j > 0$, όπως και προηγουμένως αποδεικνύεται ότι $K_i^j(\hat{f}_i^j, \hat{f}^j) \leq K_i^j(f_i^j, \hat{f}^j)$, και εφόσον η K_i^j είναι αύξουσα $\hat{f}_i^j \leq f_i^j$.

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο χρήστη i είναι $\hat{\lambda}_i < \lambda_i$. Εφόσον $\sum_{j=1}^m \hat{f}_i^j = r_i > 0$, πρέπει τουλάχιστον για μια ακμή j να ισχύει $\hat{f}_i^j > 0$. Έτσι από την συνεπαγωγή (3.5), αφού έχουμε αποδείξει ότι $f^j = \hat{f}^j$ για κάθε ακμή j, έχουμε:

$$\sum_{j=1}^{m} f_i^j > \sum_{j=1}^{m} \hat{f}_i^j = r_i$$

Η τελευταία σχέση δεν μπορεί να ισχύει, αφού πρέπει $\sum_{j=1}^m f_i^j = r_i$. Συνεπώς δεν μπορεί να ισχύει $\hat{\lambda}_i < \lambda_i$ για κανένα χρήστη i. Αντίστοιχα αποδεικνύεται ότι δεν μπορεί να ισχύει $\hat{\lambda}_i > \lambda_i$ για κανένα i, οπότε $\hat{\lambda}_i = \lambda_i$ για κάθε χρήστη i. Επειδή επιπλέον ισχύει $f^j = \hat{f}^j$, συμπεραίνουμε ότι $f_i^j = \hat{f}_i^j$. 'Αρα το Nash σημείο ισορροπίας είναι μοναδικό. □

3.1.1 Ιδιότητες

Μπορούμε να δείξουμε κάποιες ιδιότητες του Nash σημείου ισορροπίας, αν θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις κόστους των χρηστών είναι τύπου A και είναι όμοιες για όλους τους χρήστες, δηλαδή για κάθε χρήστη i και για κάθε ακμή j, $J_i^j(f_i^j, f^j) = J^j(f_i^j, f^j)$. Προφανώς και οι παράγωγοι των συναρτήσεων κόστους είναι ίδιες. Τέτοιες συναρτήσεις είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις τύπου B (type-B functions), οι οποίες έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $J_i^j(f_i^j, f^j) = f_i^j \cdot l^j(f^j)$
2. $l_i^j : [0, \infty)^n \to [0, \infty]$
3. Η συνάρτηση $l^j(f^j)$ είναι θετική, γνησίως αύξουσα, κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη.

Στις συναρτήσεις τύπου B δηλαδή θεωρούμε ότι το κόστος ενός χρήστη i σε μια ακμή j ισούται με το γινόμενο της ποσότητας που στέλνει ο χρήστης i στην ακμή αυτή (f_i^j) επί την καθυστέρηση στην ακμή αυτή ($l^j(f^j)$). Η συνάρτηση $l^j(\cdot)$ εκφράζει την καθυστέρηση στην ακμή j και έχει ως όρισμα τη ροή που περνάει από την ακμή (f^j).

Ιδιότητα 3.1. *Έστω ένα δίκτυο παράλληλων ακμών με όμοιες συναρτήσεις κόστους τύπου A που ισχύει $f_i^{\hat{j}} > f_k^{\hat{j}}$ για κάποια ακμή $\hat{j}$ και κάποιους χρήστες i και k, τότε*

1. *Ισχύει* $f_i^j \geq f_k^j$ *για όλες τις ακμές* j *του δικτύου.*
2. *Στην περίπτωση που* $f_k^j > 0$, *ισχύει* $f_i^j > f_k^j$.

Απόδειξη. Έστω μια τυχαία ακμή j. Για την περίπτωση που $f_k^j = 0$, η ιδιότητα είναι προφανής. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος, δηλαδή στην περίπτωση που $f_k^j > 0$. Από τις συνθήκες Kuhn-Tucker εφόσον ο χρήστης k έχει θετική ροή στην ακμή j, θα ισχύει:

$$K_k^j(f_k^j, f^j) \leq K_k^{\hat{j}}(f_k^{\hat{j}}, f^{\hat{j}}) \tag{3.6}$$

Από την υπόθεση $f_i^{\hat{j}} \geq f_k^{\hat{j}}$ συνεπάγεται ότι $f_i^{\hat{j}} > 0$, οπότε από τις συνθήκες Kuhn-Tucker:

$$K_i^{\hat{j}}(f_i^{\hat{j}}, f^{\hat{j}}) \leq K_i^j(f_i^j, f^j) \tag{3.7}$$

Το δίκτυο έχει όμοιες συναρτήσεις κόστους, δηλαδή $J_i^j(f_i^j, f^j) = J^j(f_i^j, f^j)$ για όλα τα i, j, οπότε και οι παράγωγοι των συναρτήσεων κόστους θα είναι όμοιες για όλους τους χρήστες. Έτσι από τις ανισότητες (3.6) και (3.7) έχουμε:

$$K_k^j(f_k^j, f^j) \leq K_k^{\hat{j}}(f_k^{\hat{j}}, f^{\hat{j}}) = K_i^{\hat{j}}(f_k^{\hat{j}}, f^{\hat{j}}) < K_i^{\hat{j}}(f_i^{\hat{j}}, f^{\hat{j}}) \leq K_k^{\hat{j}}(f_k^{\hat{j}}, f^{\hat{j}}) = K_i^{\hat{j}}(f_k^{\hat{j}}, f^{\hat{j}})$$

Από την παραπάνω ανισότητα σε συνδυασμό με το ότι η παράγωγος της συνάρτησης κόστους είναι αύξουσα, προκύπτει ότι $f_i^j > f_k^j$. □

Ιδιότητα 3.2. *Σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών με όμοιες συναρτήσεις κόστους τύπου Α, για κάθε ζευγάρι χρηστών* i, k $r_k \geq r_i$ *είναι* $f_k^j \geq f_i^j, \forall j$. *Επιπλέον αν* $r_k > r_i$, *η προηγούμενη ανισότητα ισχύει ως ισότητα μόνο αν* $f_k^j = f_i^j = 0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $r_k \geq r_i$. Αν $r_k > r_i$ θα υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $\hat{j}$ για την οποία $f_k^{\hat{j}} \geq f_i^{\hat{j}}$, οπότε από την ιδιότητα 3.1 προκύπτει ότι $f_k^j \geq f_i^j$ για όλες τις ακμές j. □

Συνδυάζοντας τις δύο παραπάνω ιδιότητες, συμπεραίνουμε ότι ισχύει:

Ιδιότητα 3.3. *Σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών με όμοιες συναρτήσεις κόστους τύπου Α ένας χρήστης με μεγαλύτερη ζήτηση* r_i *χρησιμοποιεί περισσότερες ακμές και τις χρησιμοποιεί περισσότερο.*

Ιδιότητα 3.4. *Σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών με συναρτήσεις κόστους τύπου Β, στο οποίο για οποιεσδήποτε 2 ακμές* $j, \hat{j}$ *ισχύει*

$$l^j(f^j) > l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) \Leftrightarrow \frac{dl^j(f^j)}{df^j} > \frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}}$$

αν $f_i^{\hat{j}} > f_i^j$, *τότε* $f_k^{\hat{j}} \geq f_k^j$ *για όλους τους χρήστες* k *και αν επιπλέον* $f_k^j > 0$, *ισχύει αποκλειστικά η αυστηρή ανισότητα* $f_k^{\hat{j}} > f_k^j$.

Απόδειξη. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, το ότι η ιδιότητα ισχύει όταν $f_i^j = 0$ είναι προφανές. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος της ιδιότητας. Θεωρούμε δηλαδή ότι $f_k^j > 0$. Εφόσον η ροή αυτή είναι θετική, λόγω των συνθηκών Kuhn-Tucker θα ισχύει $K_k^j(f_k^j, f^j) \leq K_k^{\hat{j}}(f_k^{\hat{j}}, f^{\hat{j}})$, και αφού οι συναρτήσεις κόστους είναι τύπου B:

$$l^j(f^j) + f_k^j \cdot \frac{dl^j(f^j)}{df^j} \leq l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) + f_k^{\hat{j}} \cdot \frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}}$$

Αν δείξουμε ότι είναι $l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) \leq l^j(f^j)$ και $\frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}} \leq \frac{dl^j(f^j)}{df^j}$, το ζητούμενο (δηλαδή ότι $f_k^{\hat{j}} > f_k^j$) προκύπτει από την παραπάνω ανισότητα. Έχουμε θεωρήσει ότι είναι $f_i^{\hat{j}} > f_i^j$ και $f_i^{\hat{j}} > 0$. Οπότε αντίστοιχα, λόγω των συνθηκών Kuhn-Tucker, θα ισχύει:

$$l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) + f_i^{\hat{j}} \cdot \frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}} \leq l^j(f^j) + f_i^j \cdot \frac{dl^j(f^j)}{df^j}$$

Εφόσον είναι $f_i^{\hat{j}} > f_i^j$, λόγω της παραπάνω ανισότητας θα είναι είτε $l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) \leq l^j(f^j)$ είτε $\frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}} \leq \frac{dl^j(f^j)}{df^j}$. Όμως από την υπόθεση, οι δύο ανισότητες συνεπάγονται η μία την άλλη, οπότε ισχύουν και οι δύο. Άρα αποδείξαμε την ιδιότητα. □

Μια κλάση συναρτήσεων κόστους που ικανοποιούν την υπόθεση της παραπάνω ιδιότητας (ότι δηλαδή $l^j(f^j) > l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) \Leftrightarrow \frac{dl^j(f^j)}{df^j} > \frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}}$) είναι οι συναρτήσεις τύπου C. Αυτές αντιστοιχούν στο μοντέλο M/M/1 και ικανοποιούν τις παρακάτω υποθέσεις:

1. Η $J_i^j(f_i^j, f^j) = f_i^j \cdot l^j(f^l)$ είναι συνάρτηση τύπου B.
2. Θεωρούμε ότι c^j είναι η χωρητικότητα της ακμής j και η συνάρτηση καθυστέρησης ορίζεται

$$l^j(f^j) = \begin{cases} \frac{1}{c^j - f^j} & f^j < c^j \\ \infty & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Ιδιότητα 3.5. *Σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών, όπου οι συναρτήσεις κόστους των χρηστών είναι τύπου C, σε μια ακμή με μεγαλύτερη χωρητικότητα, κάθε χρήστης στέλνει περισσότερη ροή, δηλαδή $c^{\hat{j}} > c^j \Rightarrow f_i^{\hat{j}} \geq f_i^j$ για κάθε χρήστη i. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f_i^j > 0$, τότε $f_i^{\hat{j}} > f_i^j$.*

Απόδειξη. Αν $f_i^j = 0$ η ιδιότητα προφανώς ισχύει. Θεωρούμε ότι $f_i^j > 0$. Από τις συνθήκες Kuhn-Tucker έχουμε ότι:

$$l^j(f^j) + f_i^j \cdot \frac{dl^j(f^j)}{df^j} \leq l^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) + f_i^{\hat{j}} \cdot \frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}} \tag{3.8}$$

Αν ήταν $f_i^{\hat{j}} \leq f_i^j$, τότε από την ιδιότητα 3.4 θα είχαμε $f_k^{\hat{j}} \leq f_k^j$ για όλους τους χρήστες k, οπότε και $f^{\hat{j}} \leq f^j$. Όμως έχουμε υποθέσει ότι $c^{\hat{j}} > c^j$, οπότε $T^{\hat{j}}(f^{\hat{j}}) < T^j(f^j)$ (λόγω του ορισμού της συνάρτησης) και $\frac{dl^{\hat{j}}(f^{\hat{j}})}{df^{\hat{j}}} \leq \frac{dl^j(f^j)}{df^j}$, που δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα λόγω της ανισότητας των συνθηκών Kuhn-Tucker (3.8). Άρα $f_i^{\hat{j}} > f_i^j$. □

Γενικά λοιπόν, σε ένα δίκτυο με συναρτήσεις κόστους τύπου C που βρίσκεται σε ισορροπία Nash παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει η χωρητικότητα της ακμής τόσο περισσότεροι χρήστες την χρησιμοποιούν. Αυτή την ιδιότητα δεν την έχουν όλα τα δίκτυα, γιατί γενικά ισχύει το εξής: όταν το r_i είναι μικρό σχετικά με των άλλων παικτών, ο χρήστης αναζητεί ακμές με μικρή καθυστέρηση, ενώ όταν είναι μεγάλο αναζητεί ακμές με μικρή παράγωγο καθυστέρησης. Στην περίπτωση που το δίκτυο έχει συναρτήσεις κόστους τύπου C, οι ακμές που έχουν μικρή καθυστέρηση έχουν και μικρή παράγωγο καθυστέρησης, οπότε όλοι οι χρήστες προτιμούν τις ίδιες ακμές.

Θα δούμε τα παραπάνω με ένα παράδειγμα. Θεωρούμε ότι έχουμε δύο παίκτες και το δίκτυο αποτελείται από δύο παράλληλες ακμές. Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης σε κάθε ακμή j είναι: $l^j(f^j) = f^j + \frac{1}{c^j - f^j}$, όπου $c^1 = 201, c^2 = 100$ και η κίνηση που στέλνουν οι δύο χρήστες είναι $r_1 = 9.53$ και $r_2 = 290$ αντίστοιχα. Το Nash σημείο ισορροπίας είναι ο πρώτος παίκτης να στείλει όλη την κίνησή του στην δεύτερη ακμή, και ο δεύτερος να στείλει 200 στην πρώτη ακμή και 90 στη δεύτερη. Πράγματι λοιπόν, ο χρήστης που στέλνει μικρή ποσότητα κίνησης, επιλέγει την ακμή με τη μικρή καθυστέρηση, ενώ ο χρήστης με τη μεγάλη ποσότητα κίνησης προτιμάει την ακμή με τη μικρότερη παράγωγο.

3.2 Γενικό Δίκτυο

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα, για την περίπτωση που δεν περιοριζόμαστε σε δίκτυο παράλληλων ακμών [ABJS00]. Θεωρούμε λοιπόν έναν κατευθυνόμενο γράφο (V, E), όπου V το σύνολο των κόμβων και E το σύνολο των ακμών. Χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό με προηγουμένως, οπότε f_i^j είναι η ροή που στέλνει ο χρήστης i στην ακμή j, f^j είναι η συνολική ροή που δρομολογείται στην ακμή j, r_i η συνολική κίνηση που θέλει να στείλει ο χρήστης i, J_i το συνολικό κόστος του χρήστη i και l^j η συνάρτηση καθυστέρησης στην ακμή j.

Εισάγουμε επιπλέον συμβολισμό, επειδή τώρα δεν είναι απαραίτητο να έχουν όλοι οι χρήστες την ίδια αφετηρία και τον ίδιο προορισμό (όπως στα δίκτυα παράλληλων ακμών). Συγκεκριμένα, για κάθε χρήστη i, s_i είναι η αφετηρία και t_i ο κόμβος προορισμού.

Αντίστοιχα με τις συνθήκες (3.1) και (3.2) που πρέπει να ισχύουν για τις ροές σε ένα δίκτυο παράλληλων ακμών, στο γενικό δίκτυο πρέπει να ισχύουν οι επόμενες συνθήκες:

$$f_i^j \geq 0 \tag{3.9}$$

$$r_i(v) + \sum_{j \in In(v)} f_i^j = \sum_{j \in Out(v)} f_i^j \tag{3.10}$$

όπου In(v) το σύνολο των εισερχόμενων ακμών στον κόμβο v, Out(v) το πλήθος των εξερχόμενων και:

$$r_i(v) = \begin{cases} r_i & \text{αν } v = s_i \\ -r_i & \text{αν } v = t_i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η συνθήκη (3.9) είναι ίδια με την συνθήκη (3.1) στο δίκτυο παράλληλων ακμών και εκφράζει το ότι οι χρήστες δεν μπορούν να επιλέξουν αρνητική ροή σε καμιά ακμή. Η συνθήκη (3.10) δηλώνει ότι σε κάθε κόμβο πρέπει να διατηρείται η ροή του κάθε χρήστη. Για την ειδική περίπτωση που έχουμε δίκτυο παράλληλων ακμών και όλοι οι χρήστες έχουν αφετηρία τον έναν κόμβο του δικτύου και προορισμό τον άλλο, η συνθήκη (3.10) μεταφράζεται στην (3.2).

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις καθυστέρησης σε κάθε ακμή j είναι της μορφής:

$$l^j(f^j) = a^j \cdot (f^j)^{p(j)} + b^j \tag{3.11}$$

όπου $a^j, b^j, p(j)$ θετικές σταθερές που εξαρτώνται από την ακμή j. Οι συναρτήσεις καθυστέρησης που δίνονται από την εξίσωση (3.11) για τις οποίες $p(j) = p$, δηλαδή η παράμετρος $p(j)$ δεν εξαρτάται από την ακμή j, χρησιμοποιούνται συχνά για την προσομοίωση της καθυστέρησης στο οδικό δίκτυο. Όταν είναι $p(j) = 1$, οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι γραμμικές. Παραθέτουμε το παρακάτω αποτέλεσμα χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 3.3. *Σε οποιαδήποτε δίκτυο με συναρτήσεις καθυστέρησης της μορφής (3.11) και n χρήστες, για τα οποία ισχύει* $0 < p(j) < \frac{3n-1}{n-1}$*, το Nash σημείο ισορροπίας είναι μοναδικό.*

Κεφάλαιο 4

Απειροστή Ροή

Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το μοντέλο της απειροστής ροής, δηλαδή το δίκτυο αποτελείται από άπειρους χρήστες, καθένας από τους οποίους έχει απειροστή ροή να στείλει [Rou02]. Εφόσον η ροή είναι απειροστή, έχουμε δύο βασικές διαφορές από το μοντέλο "Μοιραζόμενη Ροή" του προηγούμενου κεφαλαίου: αφενός οι χρήστες δεν μπορούν να μοιράσουν τη ροή τους σε διαφορετικά μονοπάτια και αφετέρου η δρομολόγηση ενός χρήστη δεν επηρεάζει τους υπόλοιπους.

4.1 Μοντέλο

Θεωρούμε το δίκτυο ως έναν κατευθυνόμενο γράφο G=(V,E), όπου V το σύνολο των κορυφών και E το σύνολο των ακμών. Δεν είναι απαραίτητο όλοι οι χρήστες να έχουν την ίδια αφετηρία και τον ίδιο προορισμό. Έτσι θεωρούμε k ζευγάρια από κόμβους $(s_1, t_1), (s_2, t_2), \dots (s_k, t_k)$, και k σύνολα παικτών, όπου s_i η αφετηρία και t_i ο προορισμός του i-οστού συνόλου χρηστών. Το σύνολο των μονοπατιών από τον κόμβο s_i στον κόμβο t_i (μονοπάτια s_i-t_i) συμβολίζονται $\mathcal{P}_i$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}$ το σύνολο όλων των μονοπατιών. Ροή είναι μια συνάρτηση f: $\mathcal{P} \to R^+$. Για κάποια ακμή e συμβολίζουμε με f_e τη συνολική ροή που περνάει από την ακμή αυτή, δηλαδή $f_e = \sum_{P:p\in\mathcal{P}} f_P$.

Με κάθε ζευγάρι (s_i, t_i) συνδέεται ένας πεπερασμένος θετικός ρυθμός κυκλοφορίας (traffic rate) r_i. Το r_i δηλαδή είναι η ποσότητα της ροής με πηγή τον κόμβο s_i και προορισμό το t_i. Συμβολίζουμε $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$. Η ροή f είναι εφικτή (feasible) αν για όλα τα i, $\sum_{P\in\mathcal{P}_i} f_P = r_i$, δηλαδή η κυκλοφορία με πηγή s_i και προορισμό t_i ισούται με το άθροισμα των ροών σε όλα τα μονοπάτια $s_i - t_i$.

Κάθε ακμή e έχει μια συνάρτηση καθυστέρησης που συμβολίζεται $l_e(.)$. Η συνάρτηση αυτή θεωρούμε ότι είναι μη αρνητική, συνεχής και μη φθίνουσα.

Οι παραδοχές αυτές, με εξαίρεση την παραδοχή της συνέχειας, είναι απόλυτα ρεαλιστικές, αφού αφενός καμία ακμή ενός δικτύου δεν μπορεί να έχει αρνητικές καθυστερήσεις και αφετέρου η καθυστέρηση ενός δρόμου (μιας ακμής στο δίκτυο) δεν μειώνεται όσο αυξάνει η κίνηση σε αυτόν. Συναρτήσεις που παραβιάζουν την παραδοχή της συνέχειας μπορούν να γίνουν συνεχείς με απώλεια κάποιας πληροφορίας.

Η καθυστέρηση σε ένα μονοπάτι P όταν η ροή του δικτύου είναι f, συμβολίζεται $l_P(f)$ και είναι το άθροισμα των καθυστερήσεων στις ακμές του μονοπατιού, δηλαδή $l_P(f) = \sum_{e \in P} l_e(f_e)$. Η τριάδα (G, r, l) ονομάζεται στιγμιότυπο, δηλαδή ένα στιγμιότυπο χαρακτηρίζεται από το γράφο του δικτύου G, τις συναρτήσεις καθυστέρησης l και την κίνηση που πρέπει να σταλεί από κάθε κόμβο αφετηρίας στον αντίστοιχο κόμβο προορισμού. Κόστος $C(f)$ κάποιας ροής f ονομάζεται η συνολική καθυστέρηση που υφίσταται η ροή f. Το κόστος μιας ποσότητας ροής x στην ακμή e είναι $l_e(x)x$, δηλαδή ισούται με το γινόμενο της ποσότητας της ροής επί την καθυστέρηση στην ακμή. Το συνολικό κόστος $C(f)$ γράφεται:

$$C(f) = \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e \tag{4.1}$$

Αυτό το κόστος μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$C(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} l_P(f) f_P \tag{4.2}$$

αν η άθροιση γίνει στα μονοπάτια (και όχι στις ακμές όπως προηγουμένως).

4.2 Ορισμοί

Η έννοια του Nash σημείου ισορροπίας μπορεί να επεκταθεί για τα δίκτυα που μελετάμε ως εξής:

Ορισμός 4.1. *Μια ροή f που είναι εφικτή για το στιγμιότυπο (G, r, l) είναι Nash σημείο ισορροπίας αν και μόνο αν για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ και $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{P_1} > 0$, ισχύει $l_{P_1}(f) \leq l_{P_2}(f)$.*

Όταν το δίκτυο είναι σε Nash ισορροπία σημαίνει ότι κάθε μονάδα ροής χρησιμοποιεί το μονοπάτι με την ελάχιστη καθυστέρηση και επομένως δεν έχει λόγο να αλλάξει μονοπάτι. Ονομάζουμε αυτή την ελάχιστη καθυστέρηση των μονοπατιών $s_i - t_i$ σε Nash ισορροπία με ροή f, $L_i(f)$. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε στιγμιότυπο (G, r, l) με συνεχείς και μη φθίνουσες συναρτήσεις καθυστέρησης υπάρχει μοναδικό Nash σημείο ισορροπίας [Rou02].

Τόσο η ύπαρξη όσο και η μοναδικότητα του Nash σημείου ισορροπίας δεν ισχύουν όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης δεν είναι συνεχείς. Σε αυτό το σημείο έγκειται η βασική διαφορά μεταξύ του μοντέλου που μελετάμε και του μοντέλου της θεωρίας του Nash. Στα παίγνια του Nash το πλήθος των παικτών είναι πεπερασμένο και υπάρχει σημείο ισορροπίας όχι απαραίτητα μοναδικό. Αντίθετα, στο μοντέλο που μελετάμε οι χρήστες (παίκτες) είναι άπειροι. Επιπλέον, αν οι συναρτήσεις καθυστέρησης δεν είναι μόνο μη φθίνουσες, παύει να ισχύει η μοναδικότητα του σημείου ισορροπίας.

Εφόσον λοιπόν στο μοντέλο υπάρχει πάντα μοναδικό σημείο ισορροπίας, τα $L_i(f)$ ορίζονται μονοσήμαντα για κάθε σύνολο μονοπατιών $\mathcal{P}_i$. Το συνολικό κόστος του δικτύου μπορεί να γραφεί

$$C(f) = \sum_{i=1}^{k} L_i(f) r_i \tag{4.3}$$

Μας ενδιαφέρει η βέλτιστη ροή, δηλαδή κάποια ροή που ελαχιστοποιεί τη συνολική καθυστέρηση. Έτσι προκύπτει το παρακάτω μη γραμμικό πρόβλημα:

Σύστημα Εξισώσεων 4.2.

$$\min \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned} &\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i, \forall i \in \{1, 2, ..., k\} \\ &f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P, \forall e \in E \\ &f_P \geq 0, \forall P \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Κάποια ροή αποτελεί τοπικό ελάχιστο, αν και μόνο αν η μεταφορά ροής από ένα μονοπάτι σε ένα άλλο αυξάνει το συνολικό κόστος. Με άλλα λόγια έχουμε τοπικό ελάχιστο, αν το οριακό κέρδος της μείωσης ροής σε οποιοδήποτε $s_i - t_i$ μονοπάτι είναι το πολύ όσο το οριακό κόστος της αύξησης της ροής σε οποιοδήποτε άλλο $s_i - t_i$ μονοπάτι. Στο πρόβλημα αυτό, αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις του κόστους κυρτές, το τοπικό ελάχιστο συμπίπτει με το ολικό ελάχιστο, οπότε η παραπάνω συνθήκη αρκεί για τον χαρακτηρισμό του ολικού ελαχίστου.

Το οριακό κόστος σε ένα μονοπάτι P ισούται με την παράγωγο του κόστους για το μονοπάτι αυτό. Η παράγωγος του κόστους σε ένα μονοπάτι P ισούται με το άθροισμα των παραγώγων του κόστους στις ακμές του μονοπατιού. Δηλαδή $J'_P(f) = \sum_{e \in P} J'_e(f_e)$. Από τους παραπάνω ορισμούς για το Nash σημείο ισορροπίας και την βέλτιστη ροή συμπεραίνουμε ότι:

Λήμμα 4.3. *Για κάθε στιγμιότυπο (G, r, l) με παραγωγίσιμες συναρτήσεις καθυστέρησης, όπου η $x \cdot l_e(x)$ είναι κυρτή συνάρτηση για κάθε ακμή e, με οριακά κόστη l^*, η βέλτιστη εφικτή ροή f^* είναι ισορροπία Nash για το στιγμιότυπο (G, r, l^*).*

Γενικά θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση οριακού κόστους σε μια ακμή e, $l_e^*(\cdot)$, τη βέλτιστη ροή f^* και τη ροή της Nash ισορροπίας f.

4.3 Το κόστος της αναρχίας

Μέχρι τώρα έχουμε ασχοληθεί με τις ιδιότητες του Nash σημείου ισορροπίας ενός δικτύου. Ξέρουμε βέβαια ότι το σημείο αυτό της ισορροπίας δεν είναι βέλτιστο, όχι μόνο για το σύστημα γενικά, αλλά ίσως και για όλους τους χρήστες (παράδοξο του Braess). Ορίζεται λοιπόν στο [KP99] ο λόγος συντονισμού (coordination ratio) ή αλλιώς κόστος της αναρχίας (price of anarchy) ως ο λόγος του κόστους στο χειρότερο Nash σημείο ισορροπίας προς το ελάχιστο κόστος, δηλαδή το κόστος της βέλτιστης ροής. Όμως, επειδή στο μοντέλο που εξετάζουμε αποδεικνύεται ότι το Nash σημείο ισορροπίας είναι μοναδικό για κάθε στιγμιότυπο (G, r, l), όπως είπαμε και προηγουμένως [Rou02], το κόστος της αναρχίας είναι ο λόγος του κόστους του μοναδικού Nash σημείο ισορροπίας προς το κόστος της βέλτιστης ροής. Για το στιγμιότυπο (G, r, l) συμβολίζουμε το κόστος της αναρχίας $\rho(G, r, l)$ και είναι $\rho(G, r, l) = \frac{C(f)}{C(f^*)}$.

4.3.1 Γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης

Αναζητούμε πρώτα το κόστος της αναρχίας στην περίπτωση που έχουμε μόνο γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης στις ακμές του δικτύου, δηλαδή για κάθε ακμή e, $l_e(x) = a_e x + b_e$, όπου $a_e, b_e \geq 0$. Όπως και προηγουμένως, f είναι η ροή στο σημείο ισορροπίας και f^* η βέλτιστη ροή. Το οριακό κόστος είναι $l_e^*(f) = [x(a_e x + b_e)]' = 2a_e x + b_e$ Εφαρμόζοντας τους ορισμούς για την ισορροπία Nash και τη βέλτιστη ροή, για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις καθυστέρησης, έχουμε ότι:

Λήμμα 4.4. *Για κάθε στιγμιότυπο (G, r, l) με συναρτήσεις καθυστέρησης $l_e(x) = a_e x + b_e$ για κάθε ακμή $e \in E$, ισχύουν:*

- *μια εφικτή ροή f είναι σε Nash ισορροπία για το (G, r, l) αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι κόμβων αφετηρίας-προορισμού i και μονοπάτια $P, P' \in \mathcal{P}_i$ με $f_P > 0$,*

$$\sum_{e \in P} a_e f_e + b_e \leq \sum_{e \in P'} a_e f_e + b_e \tag{4.4}$$

- *μια εφικτή ροή f^* είναι βέλτιστη για το στιγμιότυπο (G, r, l) αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι κόμβων αφετηρίας-προορισμού i και μονοπάτια $P, P' \in \mathcal{P}_i$ με $f^*_P > 0$,*

$$\sum_{e \in P} 2a_e f^*_e + b_e \leq \sum_{e \in P'} 2a_e f^*_e + b_e \tag{4.5}$$

Θεώρημα 4.5. *[RT00] Αν το στιγμιότυπο (G, r, l) έχει γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης ($l_e(x) = a_e x + b_e$ για κάθε ακμή e), τότε $\rho(G, r, l) \leq \frac{4}{3}$.*

Απόδειξη. Έστω f η ροή στην ισορροπία Nash και $C(f) = \sum_{i=1}^k L_i(f) r_i$ το αντίστοιχο κόστος. Η ροή $f/2$ είναι βέλτιστη για το στιγμιότυπο $(G, r/2, l)$, γιατί η ροή f ως σημείο ισορροπίας ικανοποιεί την (4.4) και επομένως η ροή $f/2$ ικανοποιεί την (4.5). Από τις (4.4), (4.5) συμπεραίνουμε επίσης ότι το οριακό κόστος για να αυξηθεί η ροή σε μια ακμή e όταν το δίκτυο έχει ροή $f/2$ ισούται με την καθυστέρηση στην ακμή e όταν η ροή στο δίκτυο είναι f, δηλαδή ισχύει $l^*_e(f_e/2) = l_e(f_e)$ για κάθε ακμή e. Επομένως και $L^*_i(f/2) = L_i(f)$. Αν στο στιγμιότυπο $(G, r/2, l)$ προσθέσουμε κίνηση $r/2$ διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι το κόστος αυξάνεται τουλάχιστον κατά $\sum_{i=1}^k L^*_i(\frac{f}{2})\frac{r_i}{2}$, αφού για κάθε μοναδιαία ποσότητα ροής u που προστίθεται σε κάποιο μονοπάτι του αγαθού i με οριακό κόστος $L^*_i(\frac{f}{2})$, το συνολικό κόστος αυξάνεται τουλάχιστον κατά $L^*_i(\frac{f}{2})u$. Αυτό αποδεικνύεται βέβαια και τυπικά [Rou02]. Συνεπώς ισχύει:

$$C(f^*) \geq C(\frac{f}{2}) + \sum_{i=1}^k L^*_i(\frac{f}{2})\frac{r_i}{2}$$

$$C(f^*) \geq C(\frac{f}{2}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k L_i(f) r_i$$

$$C(f^*) \geq C(\frac{f}{2}) + \frac{1}{2}C(f)$$

Επίσης μπορούμε να φράξουμε το κόστος της ροής $f/2$.

$$C(\frac{f}{2}) = \sum_e a_e(\frac{f_e}{2})^2 + b_e(\frac{f_e}{2})$$

$$C(\frac{f}{2}) = \sum_e \frac{1}{4}a_e f_e^2 + \frac{1}{2}b_e f_e$$

$$C(\frac{f}{2}) \geq \frac{1}{4}\sum_e a_e f_e^2 + b_e f_e$$

$$C(\frac{f}{2}) \geq \frac{1}{4}C(f)$$

και άρα $C(f^*) \geq \frac{3}{4}C(f)$. Το κόστος της αναρχίας είναι $\rho(G,r,l) = \frac{C(f)}{C(f^*)}$, οπότε είναι το πολύ 4/3. $\square$

4.3.2 Συναρτήσεις καθυστέρησης $l_e(x) = a_e x^p + b_e$

Η παραπάνω ανάλυση μπορεί να γίνει και για την γενικότερη περίπτωση που οι συναρτήσεις καθυστέρησης στις ακμές είναι της μορφής $l_e(x) = a_e x^p + b_e$, όπου $a_e, b_e \geq 0$. Αντίστοιχα με την προηγούμενη παράγραφο, προκύπτει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.6. *Για κάθε στιγμιότυπο (G,r,l) με συναρτήσεις καθυστέρησης $l_e(x) = a_e x^p + b_e$ για κάθε ακμή $e \in E$, ισχύουν:*

1. *μια εφικτή ροή f είναι σε Nash ισορροπία για το (G,r,l) αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι κόμβων αφετηρίας-προορισμού i και $P, P' \in \mathcal{P}_i$ με $f_P > 0$,*

$$\sum_{e \in P} a_e f_e^p + b_e \leq \sum_{e \in P'} a_e f_e^p + b_e$$

2. *μια εφικτή ροή f^* είναι βέλτιστη για το στιγμιότυπο (G,r,l) αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι κόμβων αφετηρίας-προορισμού i και $P, P' \in \mathcal{P}_i$ με $f_P^* > 0$,*

$$\sum_{e \in P}(p+1)a_e(f_e^*)^p + b_e \leq \sum_{e \in P'}(p+1)a_e(f_e^*)^p + b_e$$

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι αν η ροή f αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash για το στιγμιότυπο (G,r,l), τότε η ροή $\frac{f}{(p+1)^{1/p}}$ είναι βέλτιστη ροή για το στιγμιότυπο $(G, \frac{r}{(p+1)^{1/p}}, l)$. Θέτουμε $c = (p+1)^{1/p}$ για να έχουμε απλούστερους τύπους στη συνέχεια. Ισχύει επίσης ότι αν η ροή σε Nash ισορροπία είναι f, το οριακό κόστος για να αυξηθεί η ροή σε ένα μονοπάτι P όταν η ροή είναι f/c ισούται με την καθυστέρηση στο μονοπάτι P όταν η ροή είναι f. Εφαρμόζουμε την αντίστοιχη διαδικασία με προηγουμένως:

$$C(f^*) \geq C(\frac{f}{c}) + \sum_{i=1}^{k} L_i^*(\frac{f}{c})(r_i - \frac{r_i}{c})$$

$$C(f^*) \geq C(\frac{f}{c}) + \frac{c-1}{c}\sum_{i=1}^{k} L_i(f)r_i$$

$$C(f^*) \geq C(\frac{f}{c}) + \frac{c-1}{c}C(f)$$

Επίσης μπορούμε να φράξουμε το κόστος της ροής f/c.

$$C(\frac{f}{c}) = \sum_e a_e(\frac{f_e}{c})^{p+1} + b_e(\frac{f_e}{c})$$

$$C(\frac{f}{c}) = \sum_e \frac{1}{c^{p+1}} a_e f_e^{p+1} + \frac{1}{c} b_e f_e$$

$$C(\frac{f}{c}) \geq \frac{1}{c^{p+1}} \sum_e a_e f_e^{p+1} + b_e f_e$$

$$C(\frac{f}{c}) \geq \frac{1}{c^{p+1}} C(f)$$

και άρα $C(f^*) \geq (\frac{1}{c^{p+1}} + \frac{c-1}{c})C(f)$
ή ισοδύναμα:

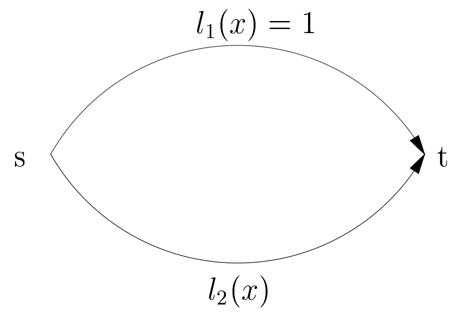
$$\rho(G,r,l) \leq (1 - p(p+1)^{-(p+1)/p})^{-1} = \Theta(\frac{p}{lnp})$$

Από την τελευταία σχέση φαίνεται ότι δεν υπάρχει κάποια σταθερά που να αποτελεί άνω φράγμα για το λόγο της αναρχίας σε δίκτυα με καθυστερήσεις της μορφής $l_e(x) = a_e x^p + b_e$ για οποιοδήποτε p, αφού όταν το p τείνει στο άπειρο, και ο λόγος της αναρχίας τείνει στο άπειρο.

4.3.3 Άλλες συναρτήσεις καθυστέρησης

Η ανάλυση που εφαρμόστηκε παραπάνω σε δίκτυα που οι συναρτήσεις καθυστέρησης στις ακμές ήταν της μορφής $l_e(x) = a_e x + b_e$ και $l_e(x) = a_e x^p + b_e$, δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε πιο γενικές περιπτώσεις συναρτήσεων. Αυτό οφείλεται στο ότι δεν μπορεί να βρεθεί κάποια σταθερά c, τέτοια ώστε αν η ροή f αποτελεί σημείο ισορροπίας Nash για το στιγμιότυπο (G,r,l), η ροή f/c να είναι βέλτιστη ροή για το στιγμιότυπο $(G,r/c,l)$. Πρέπει λοιπόν να αναζητήσουμε κάποιον άλλο τρόπο ανάλυσης.

Ας δούμε από τι εξαρτάται το κόστος της αναρχίας. Είδαμε στην προηγούμενη υποενότητα, ότι όταν οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι της μορφής $l_e(x) = a_e x^p + b_e$, το κόστος της αναρχίας μεγαλώνει καθώς μεγαλώνει το p. Το κόστος της αναρχίας λοιπόν εξαρτάται από το πόσο απότομες (steep) είναι οι συναρτήσεις καθυστέρησης. Όπως και προηγουμένως, συμβολίζουμε το οριακό κόστος l^*. Το αποτελέσματα αυτής της υποενότητας είναι για κανονικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Μια συνάρτηση $l(x)$ είναι κανονική, αν είναι παραγωγίσιμη και η $x \cdot l(x)$ είναι κυρτή στο $[0,\infty)$. Μια κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης L είναι κανονική αν περιέχει μια μη μηδενική συνάρτηση και κάθε $l \in L$ είναι κανονική.



Σχήμα 4.1: Τιμή της αναρχίας

Ορισμός 4.7. *Το απότομο (steepness) $\Sigma(l)$ μιας κανονικής συνάρτησης καθυστέρησης l είναι:*

$$\Sigma(l) = \sup_{x>0} \frac{l^*(x)}{l(x)}$$

όπου θεωρούμε ότι $\frac{0}{0} = 1$. Για ένα στιγμιότυπο (G, r, l) με κανονικές συναρτήσεις καθυστέρησης είναι:

$$\Sigma(G, r, l) = \max_{e \in E} \Sigma(l_e)$$

Σε κάθε κλάση συναρτήσεων L αντιστοιχούμε την τιμή $\alpha(L)$, την οποία ονομάζουμε τιμή της αναρχίας. Θα ορίσουμε πρώτα την τιμή αυτή για μία συνάρτηση καθυστέρησης και στη συνέχεια θα στηριχτούμε στον ορισμό αυτό για να ορίσουμε την τιμή της αναρχίας για μια κλάση συναρτήσεων.

Ορισμός 4.8. *Έστω l μια μη μηδενική κανονική (standard) συνάρτηση καθυστέρησης. Η τιμή της αναρχίας $\alpha(l)$ είναι:*

$$\alpha(l) = \sup_{r>0: l(r)>0} [\lambda\mu + (1-\lambda)]^{-1} \tag{4.6}$$

όπου το $\lambda \in (0, 1)$ ικανοποιεί την $l^*(\lambda r) = l(r)$ και το $\mu \in [0, 1]$ ικανοποιεί την $\mu = \frac{l(\lambda r)}{l(r)}$.

Ορισμός 4.9. *Η τιμή της αναρχίας $\alpha(L)$ μιας κανονικής κλάσης συναρτήσεων L συναρτήσεων καθυστέρησης είναι:*

$$\alpha(L) = \sup_{l \in L: l \neq 0} \alpha(l) \tag{4.7}$$

Ας δούμε με ένα παράδειγμα του σχήματος 4.1, πώς προκύπτει διαισθητικά ο παραπάνω ορισμός. Θεωρούμε ότι η σταθερή συνάρτηση $l_1(x) = 1$ ανήκει στην κλάση L. Έστω ότι το δίκτυο αποτελείται από δύο κόμβους και δύο ακμές. Η πάνω ακμή έχει συνάρτηση καθυστέρησης την l_1 και η κάτω την πιο απότομη συνάρτηση καθυστέρησης της κλάσης L, την οποία ονομάζουμε l_2. Υποθέτουμε ότι είναι $l_2(0) < 1$ και $l_2(x) > 1$ για κάποιο $x > 0$. Επιλέγουμε την κίνηση r έτσι ώστε $l_2(r) = 1$. Στην Nash ισορροπία, όλη η κίνηση r δρομολογείται στην κάτω ακμή και η καθυστέρηση είναι 1. Οπότε το κόστος στην Nash ισορροπία είναι: $C(f) = r \cdot 1 = r$. Βέλτιστη δρομολόγηση έχουμε όταν τα οριακά κόστη των δύο ακμών είναι ίσα. Το οριακό κόστος της πάνω ακμής είναι $l_1^*(x) = 1$ και έστω ότι $\lambda \in (0, 1)$ είναι το ποσοστό της κίνησης που δρομολογείται στην κάτω ακμή. Άρα στη βέλτιστη δρομολόγηση πρέπει να είναι $l_2^*(\lambda r) = 1$. Αν λύσουμε την εξίσωση βρίσκουμε την τιμή του λ και η ροή της κάτω ακμής είναι λr και της πάνω $(1-\lambda)r$. Το κόστος στη βέλτιστη δρομολόγηση είναι $C(f^*) = \lambda r l_2(\lambda r) + (1-\lambda)r$ και ο λόγος του κόστους στην Nash ισορροπία προς το βέλτιστο κόστος είναι $\frac{C(f)}{C(f^*)} = \frac{1}{r l_2(\lambda r) + (1-\lambda)} = [\lambda\mu + (1-\lambda)]^{-1}$, όπου $\mu = l_2(\lambda r)$.

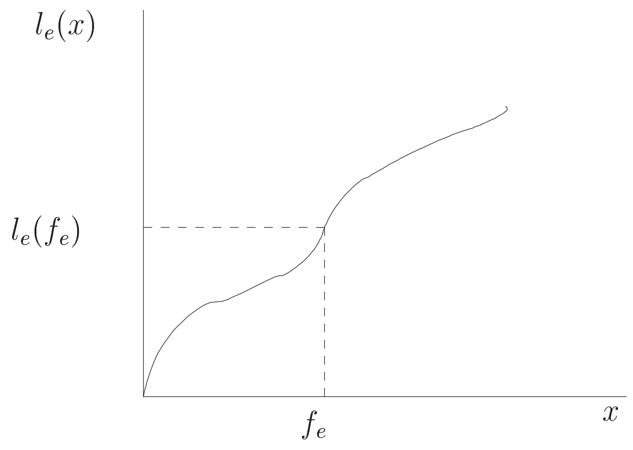
Από το παραπάνω παράδειγμα βλέπουμε ότι στην περίπτωση που το δίκτυο αποτελείται από δύο κόμβους και δύο ακμές και οι συναρτήσεις καθυστέρησης πληρούν κάποιες ιδιότητες, το κόστος της αναρχίας είναι το πολύ όσο τη τιμή της αναρχίας $\alpha(L)$ που ορίσαμε παραπάνω. Γενικά αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.10. *Έστω L μια κανονική κλάση συναρτήσεων καθυστέρησης με τιμή αναρχίας $\alpha(L)$. Αν (G, r, l) ένα στιγμιότυπο με συναρτήσεις καθυστέρησης από την κλάση L, τότε $\rho(G, r, l) \leq \alpha(L)$.*

Αποδεικνύεται ότι το κόστος της αναρχίας είναι ανεξάρτητο από την τοπολογία του δικτύου και εξαρτάται μόνο από τις συναρτήσεις καθυστέρησης [Rou02]. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και στο πιο απλό δίκτυο (ένα δίκτυο με δύο μόνο κόμβους για παράδειγμα) μπορεί το κόστος της αναρχίας να είναι τόσο μεγάλο όσο σε ένα πολύπλοκο δίκτυο που έχει ίδιες συναρτήσεις καθυστέρησης στις ακμές του. Το αποτέλεσμα αυτό επιτρέπει την εύρεση του κόστους της αναρχίας για διάφορες συναρτήσεις καθυστέρησης, αφού μελετώντας τις συναρτήσεις καθυστέρησης σε ένα απλό δίκτυο μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα για οποιοδήποτε δίκτυο που έχει αυτού του τύπου καθυστερήσεις.

4.4 Σύγκριση κοστών

Στην ενότητα αυτή βλέπουμε πώς μπορούμε να συγκρίνουμε τα κόστη διαφορετικών στιγμιοτύπων, το οποία είτε έχουν διαφορετική συνολική κίνηση είτε διαφορετικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται προέρχονται από το [RT00].



Σχήμα 4.2: Αρχικές συναρτήσεις καθυστέρησης $l_e(x)$

4.4.1 Διαφορετική συνολική κίνηση

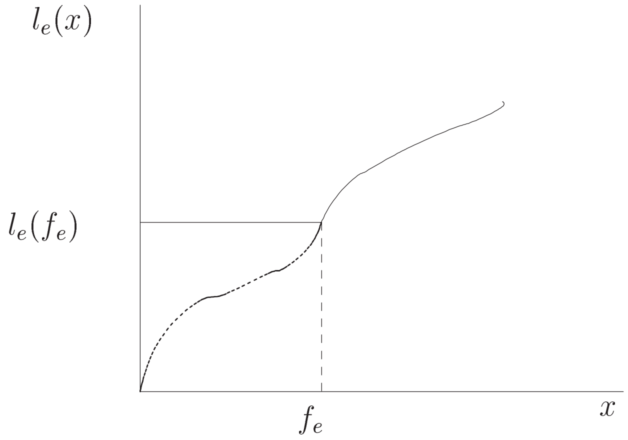
Θα συγκρίνουμε το κόστος του Nash σημείου ισορροπίας του στιγμιοτύπου (G,r,l) με το κόστος οποιασδήποτε εφικτής ροής του στιγμιοτύπου (G, 2r, l). Για τις συναρτήσεις καθυστέρησης θεωρούμε ότι είναι μη φθίνουσες. Θα δείξουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.11. *Αν f είναι η ροή στο Nash σημείο ισορροπίας για το (G,r,l) και f^* οποιαδήποτε εφικτή ροή για το (G, 2r, l), τότε $C(f) \leq C(f^*)$.*

Απόδειξη.
Η f είναι ροή σε Nash ισορροπία και για κάθε ζευγάρι κόμβων αφετηρίας-προορισμού $i = 1, 2, \ldots k$ συμβολίζουμε με $L_i(f)$ την καθυστέρηση σε οποιοδήποτε $s_i - t_i$ μονοπάτι, οπότε το συνολικό κόστος είναι $C(f) = \sum_{i=1}^{k} L_i(f) r_i$. Θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο συναρτήσεων $\bar{l}$ με βάση της συναρτήσεις καθυστέρησης του δικτύου l, έτσι ώστε αφενός να προσεγγίζουν τις συναρτήσεις καθυστέρησης l και αφετέρου να μπορούμε να φράξουμε από κάτω το κόστος οποιουδήποτε εφικτού κόστους με συναρτήσεις $\bar{l}$. Ορίζουμε λοιπόν τις νέες συναρτήσεις καθυστέρησης $\bar{l}_e(x)$ ως εξής:

$$\bar{l}_e(x) = \begin{cases} l_e(f_e) & \text{αν } x \leq f_e \\ l_e(x) & \text{αν } x \geq f_e \end{cases}$$

Το f_e είναι η τιμή της ροής στην Nash ισορροπία στην ακμή e. Εφόσον οι συναρτήσεις l_e είναι μη φθίνουσες για κάθε ακμή e, λόγω κατασκευής και οι συναρτήσεις $\bar{l}_e$ είναι μη φθίνουσες. Στα σχήματα 4.2 και 4.3 φαίνονται γραφικά οι αρχικές και οι νέες συναρτήσεις καθυστέρησης που ορίσαμε αντίστοιχα.



Σχήμα 4.3: Νέες συναρτήσεις καθυστέρησης $\bar{l}_e(x)$

Αρχικά θα συγκρίνουμε το κόστος της ροής f^* με τις νέες συναρτήσεις καθυστέρησης $\bar{l}$ με το κόστος της ροής f^* με τις αρχικές συναρτήσεις καθυστέρησης l, δηλαδή το $C(f^*)$. Είναι:

$$\bar{l}_e(x) - l_e(x) = \begin{cases} l_e(f_e) - l_e(x) & \text{αν } x \leq f_e \\ 0 & \text{αν } x \geq f_e \end{cases}$$

Στην περίπτωση που $x \leq f_e$, το γινόμενο $x(\bar{l}_e(x) - l_e(x))$ είναι το πολύ $l_e(f_e)f_e$. Αυτή τη μέγιστη τιμή την φτάνει όταν το x είναι κάτι λιγότερο από f_e και η καθυστέρηση στην ακμή e είναι 0 για $x < f_e$. Άρα για όλα τα $x \geq 0$ ισχύει η παρακάτω ανισότητα:

$$x(\bar{l}_e(x) - l_e(x)) \leq l_e(f_e)f_e \tag{4.8}$$

Μπορούμε λοιπόν να φράξουμε τη διαφορά των κοστών με τις συναρτήσεις καθυστέρησης $\bar{l}$ από τις συναρτήσεις καθυστέρησης l για οποιαδήποτε ροή f^* ως εξής:

$$\sum_e \bar{l}_e(f_e^*)f_e^* - C(f^*) = \sum_e f_e^*(\bar{l}_e(f_e^*) - l_e(f_e^*))$$

Δηλαδή, αν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα (4.8):

$$\sum_e \bar{l}_e(f_e^*)f_e^* - C(f^*) \leq \sum_e l_e(f_e)f_e = C(f) \tag{4.9}$$

Με άλλα λόγια ο υπολογισμός του κόστους οποιαδήποτε ροής f^* με συναρτήσεις καθυστέρησης $\bar{l}$ (αντί για τις l) αυξάνει το κόστος το πολύ κατά $C(f)$, δηλαδή το κόστος του Nash σημείου ισορροπίας.

Τώρα θα βρούμε ένα κάτω όριο για το κόστος $\sum_e \bar{l}_e(f_e^*)f_e^*$, το οποίο γράφεται ισοδύναμα $\sum_P \bar{l}_P(f^*)f_P^*$ αν η άθροιση γίνει στα μονοπάτια αντί για τις ακμές. Συμβολίζουμε με f_0 τη μηδενική ροή στον γράφο G. Για κάθε μονοπάτι $P \in \mathcal{P}_i$ είναι $\bar{l}_P(f_0) \geq L_i(f)$, από τον τρόπο κατασκευής των $\bar{l}$. Και επειδή οι συναρτήσεις $\bar{l}$ είναι μη φθίνουσες, ισχύει $\bar{l}_P(f^*) \geq L_i(f)$ για κάθε μονοπάτι $P \in \mathcal{P}_i$. Έχουμε λοιπόν:

$$\sum_P \bar{l}_P(f^*) f_P^* \geq \sum_i \sum_{P \in \mathcal{P}_\rangle} L_i(f) f_P^* \tag{4.10}$$

και επειδή έχουμε υποθέσει ότι η ροή f^* είναι εφικτή ροή για το στιγμιότυπο (G, 2r, l) μπορούμε να γράψουμε:

$$\sum_P \bar{l}_P(f^*) f_P^* \geq \sum_i 2L_i(f) r_i = 2C(f) \tag{4.11}$$

Από τις εξισώσεις (3.2) και (3.4) προκύπτει:

$$C(f^*) \geq \sum_P \bar{l}_P(f^*) f_P^* - C(f) \geq 2C(f) - C(f) = C(f)$$

. □

Αντίστοιχα μπορεί να αποδειχθεί, το παρακάτω γενικότερο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.12. *Αν f είναι η ροή στο Nash σημείο ισορροπίας για το (G,r,l) και f^* οποιαδήποτε εφικτή ροή για το (G, (1+ξ)r, l), τότε $C(f) \leq \frac{1}{\xi} C(f^*)$.*

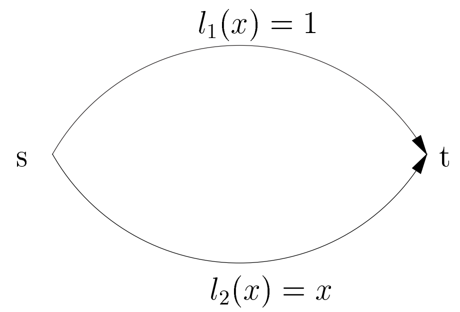
4.4.2 Διαφορετικές συναρτήσεις καθυστέρησης

Όπως στην προηγούμενη υποενότητα συγκρίναμε το κόστος της ροής f σε Nash ισορροπία με το κόστος οποιασδήποτε ροής f^* (άρα και της βέλτιστης) σε κάποιο στιγμιότυπο με αυξημένη κίνηση, μπορούμε να συγκρίνουμε και το κόστος της ροής f σε Nash ισορροπία με μειωμένες συναρτήσεις καθυστέρησης με οποιαδήποτε ροή στο στιγμιότυπο με τις αρχικές συναρτήσεις καθυστέρησης.

Θεώρημα 4.13. *Έστω (G, r, l) ένα στιγμιότυπο. Με βάση τις συναρτήσεις καθυστέρησης l, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\tilde{l}$ ως εξής: $\tilde{l}_e(x) = \frac{1}{2} l_e(\frac{x}{2})$ για κάθε ακμή e. Αν $\tilde{f}$ είναι η ροή στο Nash σημείο ισορροπίας για το $(G, r, \tilde{l})$ και f^* οποιαδήποτε εφικτή ροή για το (G, r, l), τότε το κόστος της ροής $\tilde{f}$ με συναρτήσεις καθυστέρησης $\tilde{l}$ είναι το πολύ όσο το κόστος της ροής f^* με συναρτήσεις καθυστέρησης l.*

Απόδειξη. Έστω ότι η ροή f είναι η Nash ροή για το στιγμιότυπο $(G, r/2, l)$ και f^* μια εφικτή ροή για το (G, r, l). Από το θεώρημα (4.11) προκύπτει ότι

$$\sum_e l_e(f_e) f_e \leq \sum_e l_e(f_e^*) f_e^* \tag{4.12}$$



Σχήμα 4.4: Παράδειγμα του Pigou

Θεωρούμε τώρα τη ροή $\tilde{f} = 2f$, η οποία είναι εφικτή για το $(G, r, \tilde{l})$. Όμως για κάθε ακμή e είναι:

$$\tilde{l}_e(\tilde{f}_e) = \frac{1}{2} l_e(\frac{\tilde{f}_e}{2}) = \frac{1}{2} l_e(f_e)$$

και επειδή έχουμε υποθέσει ότι η ροή f είναι Nash ροή για το στιγμιότυπο $(G, r/2, l)$, η ροή $\tilde{f}$ είναι Nash ροή για το $(G, r, \tilde{l})$. Επίσης:

$$\sum_e \tilde{l}_e(\tilde{f}_e)\tilde{f}_e = \sum_e (\frac{1}{2} l_e(f_e)(2f_e)) = \sum_e l_e(f_e) f_e$$

Από την παραπάνω εξίσωση και την (4.12) έχουμε ότι:

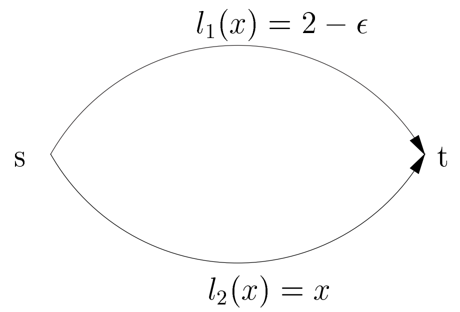
$$\sum_e \tilde{l}_e(\tilde{f}_e)\tilde{f}_e \leq \sum_e l_e(f_e^*) f_e^*$$

όπου η $\tilde{f}$ είναι Nash ροή για το $(G, r, \tilde{l})$. □

4.5 Πόσο άδικη είναι η βέλτιστη δρομολόγηση

Η έννοια της αδικίας (unfairness) έχει οριστεί με πολλούς τρόπους. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του Pigou, που φαίνεται στο σχήμα 4.4. Πρόκειται για ένα δίκτυο με δύο κόμβους και δύο παράλληλες ακμές από τον ένα κόμβο στον άλλο, με συναρτήσεις καθυστέρησης $l_1(x) = 1$ στην πάνω ακμή και $l_2(x) = x$ στην κάτω και έστω ότι έχουμε συνολική κίνηση r=1. Στην Nash ισορροπία όλη η κίνηση θα προτιμήσει την κάτω ακμή, οπότε όλοι οι χρήστες θα έχουν καθυστέρηση 1. Στη βέλτιστη δρομολόγηση η μισή κίνηση θα πάει στην πάνω ακμή και η άλλη μισή στην κάτω. Όσοι δρομολογηθούν στην πάνω ακμή θα έχουν καθυστέρηση 1, ενώ οι υπόλοιποι θα έχουν καθυστέρηση 1/2. Όσοι



Σχήμα 4.5: Παραλλαγή του παραδείγματος του Pigou

λοιπόν δρομολογηθούν στην πάνω ακμή θα προτιμούσαν να είχαν δρομολογηθεί στην άλλη ακμή. Δεν είναι τόσο άδικη όμως αυτή η δρομολόγηση, γιατί κανένας χρήστης δεν έχει μεγαλύτερη καθυστέρηση από ότι είχε στην Nash ισορροπία.

Ας δούμε όμως τώρα μια παραλλαγή του παραδείγματος του Pigou, που φαίνεται στο σχήμα 4.5. Θεωρούμε το δίκτυο του Pigou, με τη διαφορά ότι η πάνω ακμή έχει σταθερή καθυστέρηση $l_1(x) = 2 - \epsilon$ για κάποια μικρή σταθερά $\epsilon > 0$ (αντί για $l_1(x) = 1$). Και σε αυτή την περίπτωση, στην Nash ισορροπία όλοι οι χρήστες προτιμάνε την κάτω ακμή και έχουν καθυστέρηση 1. Στην βέλτιστη κατάσταση, η ροή της πάνω ακμής είναι $\epsilon/2$ και της κάτω $1 - \epsilon/2$. Σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα κίνησης $\epsilon/2$ που δρομολογείται στην πάνω ακμή υφίσταται καθυστέρηση $2 - \epsilon$, η οποία για $\epsilon < 1$, είναι μεγαλύτερη όχι μόνο από την καθυστέρηση που υφίσταται η ροή που δρομολογείται στην άλλη ακμή, αλλά και από την καθυστέρηση στην Nash ισορροπία. Με άλλα λόγια, θυσιάζουμε κάποια ποσότητα κίνησης στέλνοντάς την σε ακμή με μεγαλύτερη καθυστέρηση για να επιτύχουμε μικρότερη συνολική μέση καθυστέρηση. Το ερώτημα λοιπόν που τίθεται είναι πόσο άδικη είναι η βέλτιστη δρομολόγηση.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που όλη η κίνηση έχει την ίδια αφετηρία και τον ίδιο προορισμό.

Ορισμός 4.14. *Ορίζουμε την αδικία (unfairness) ενός στιγμιοτύπου* (G, r, l) *ως το μέγιστο λόγο της καθυστέρησης ενός μονοπατιού με μη μηδενική ροή στη βέλτιστη κατάσταση προς τη καθυστέρηση ενός μονοπατιού με μη μηδενική ροή στην Nash ισορροπία και τη συμβολίζουμε με* $u(G, r, l)$.

Η τιμή της $u(G, r, l)$ μπορεί να είναι τυχαία μεγάλη. Ας θεωρήσουμε πάλι το δίκτυο με τους δύο κόμβους και τις δύο ακμές με συναρτήσεις καθυστέρησης $l(x) = (p + 1)(1 - \epsilon)$ και $l(x) = x^p$. Σε αυτή την περίπτωση είναι $u(G, r, l) = (p + 1)(1 - \epsilon)$, που τείνει στο άπειρο καθώς το p τείνει στο άπειρο.

Στο παρακάτω θεώρημα, θα φράξουμε από πάνω την αδικία χρησιμοποιώντας τον ορισμό (4.7) του απότομου (steepness).

Θεώρημα 4.15. *[Rou] Για κάθε στιγμιότυπο (G, r, l) με κοινή αφετηρία και προορισμό για όλη την κίνηση r και κανονικές συναρτήσεις καθυστέρησης είναι:*

$$u(G, r, l) \leq \Sigma(G, r, l)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το στιγμιότυπο (G, r, l) με αφετηρία s, προορισμό t, κανονικές συναρτήσεις καθυστέρησης l και απότομο (steepness) σ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι η μέγιστη καθυστέρηση σε ένα μονοπάτι με μη μηδενική ροή στη βέλτιστη ροή είναι το πολύ σ επί την καθυστέρηση σε ένα μονοπάτι με μη μηδενική ροή στην Nash ισορροπία.΄Οπως συνήθως, συμβολίζουμε με f τη ροή σε Nash ισορροπία και με f^* τη βέλτιστη ροή.

Έστω ότι δεν ισχύει το θεώρημα και υπάρχουν μονοπάτια P_1, P_2 με αφετηρία τον κόμβο s και προορισμό τον κόμβο t με $f_{P_1} > 0$, $f^*_{P_2} > 0$ και $l(f^*_{P_2}) > \sigma \cdot l(f_{P_1})$. Εφόσον η ροή f είναι σε Nash ισορροπία, όλα τα μονοπάτια από τον s στον t με μη μηδενική ροή θα έχουν κάποια κοινή καθυστέρηση L. Επίσης όλα τα μονοπάτια της ροής f^* με μη μηδενική ροή θα έχουν ίδιο οριακό κόστος, που το συμβολίζουμε με L^*.

Οι συναρτήσεις καθυστέρησης l_e είναι μη φθίνουσες σε όλες τις ακμές e και ισχύει $l^*_e(x) = l_e(x) + x \cdot l'_e(x)$, οπότε θα είναι $l^*_e(x) \geq l_e(x)$ για όλες τις ακμές e και όλα τα x. Από τα παραπάνω έχουμε:

$$L = l_{P_1}(f) < \frac{1}{\sigma} l_{P_2}(f^*) \leq \frac{1}{\sigma} l^*_{P_2}(f^*) = \frac{L^*}{\sigma}$$

Το κόστος στην Nash ισορροπία είναι $C(f) = rL$, αφού όλη η κίνηση r έχει καθυστέρηση L. Το κόστος της βέλτιστης ροής f^* δεν υπολογίζεται εύκολα, γιατί δεν είναι απαραίτητο ότι όλα τα μονοπάτια θα έχουν την ίδια καθυστέρηση. Από τον ορισμό 4.7 του απότομου (steepness) μπορούμε να φράξουμε το κόστος $l^*_P(f^*)$ για κάθε μονοπάτι P ως εξής: $l^*_P(f^*) \leq \sigma \cdot l_P(f^*)$ και άρα:

$$C(f^*) \geq \frac{1}{\sigma} \sum_{P \in \mathcal{P}} l^*_P(f^*) f^*_P = \frac{1}{\sigma} r L^*$$

Από την προηγούμενη σειρά ανισοτήτων όμως έχει προκύψει ότι $\frac{L^*}{\sigma} > L$, οπότε:

$$C(f^*) < rL = C(f)$$

Δεν μπορεί όμως να είναι $C(f^*) < C(f)$, γιατί η ροή f^* είναι βέλτιστη. Εφόσον λοιπόν καταλήξαμε σε αντίφαση με την υπόθεση ότι δεν ισχύει το θεώρημα, το αποδείξαμε. □

Όταν η αδικία είναι μεγαλύτερη του 1, δεν έχουν όλοι οι χρήστες συμφέρον να ακολουθήσουν τη βέλτιστη δρομολόγηση. Θα δούμε πώς αντιμετωπίζεται αυτό το πρόβλημα στο κεφάλαιο 6.

4.6 Επεκτάσεις

Στην ενότητα αυτή θα δούμε κάποιους τρόπους που μπορεί να επεκταθεί το μοντέλο που μελετήσαμε μέχρι τώρα ώστε να γίνει πιο ρεαλιστικό.

4.6.1 Προσεγγιστικά σημεία ισορροπίας

Είναι συχνά παράλογο να περιμένουμε ότι οι χρήστες μπορούν να υπολογίσουν την καθυστέρηση των διαφόρων μονοπατιών στο δίκτυο με απόλυτη ακρίβεια. Μπορούμε λοιπόν να επεκτείνουμε το μοντέλο θεωρώντας ότι οι χρήστες μπορούν να υπολογίσουν τις καθυστερήσεις με κάποια ακρίβεια (έστω ε) [RT00]. Η έννοια της Nash ισορροπίας λοιπόν γίνεται ως εξής:

Ορισμός 4.16. *Μια ροή f εφικτή για το στιγμιότυπο (G, r, l) είναι ε-προσέγγιση Nash ισορροπίας αν για κάθε $i \in \{1, 2, \dots k\}$, $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_i$ με $f_{P_1} > 0$, είναι $l_{P_1}(f) \leq (1+\epsilon) l_{P_2}(f)$.*

Αντίστοιχα με το θεώρημα 4.11, αποδεικνύεται το παρακάτω:

Θεώρημα 4.17. *Αν f είναι ε-προσέγγιση Nash ισορροπία για το (G, r, l), όπου $\epsilon < 1$ και f^* είναι οποιαδήποτε εφικτή ροή για το $(G, 2r, l)$, ισχύει $C(f) \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} C(f^*)$.*

Απόδειξη. Όπως και στο θεώρημα 4.11, ορίζουμε τις συναρτήσεις $\bar{l}_e$. Παρατηρούμε επίσης ότι στην ε-προσέγγιση Nash ισορροπία, το κόστος κάθε μονοπατιού είναι το πολύ $(1+\epsilon)L_i(f)$, όπου $L_i(f)$ η ελάχιστη καθυστέρηση στο σύνολο μονοπατιών $s_i - t_i$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, φράξουμε το κόστος οποιασδήποτε εφικτής ροής f^* για το στιγμιότυπο $(G, 2r, l)$ από πάνω και από κάτω και από τις δύο ανισότητες που προκύπτουν συμπεραίνουμε ότι $C(f) \leq \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} C(f^*)$. □

Μπορούμε να επεκτείνουμε και άλλα θεωρήματα που είδαμε ως τώρα στην προσεγγιστική περίπτωση. Ας δούμε για παράδειγμα πόσο είναι το κόστος της αναρχίας όταν έχουμε γραμμικές συναρτήσεις (αντίστοιχα με το Θεώρημα 4.5). Συμβολίζουμε με $\rho_\epsilon(G, r, l)$ το λόγο του κόστους της ε-προσέγγισης της Nash ισορροπίας προς το βέλτιστο κόστος.

Θεώρημα 4.18. *Αν το στιγμιότυπο (G, r, l) έχει γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης ($l_e(x) = a_e x + b_e$ για κάθε ακμή e), τότε $\rho_\epsilon(G, r, l) \leq \frac{4+4\epsilon}{3-\epsilon}$.*

Απόδειξη. Θα συμβολίσουμε με f την ροή στην ε-προσέγγιση Nash ισορροπία και με f^* τη βέλτιστη ροή. Ισχύει ότι $C(f/2) \geq \frac{1}{4} C(f)$, όπως αποδεικνύεται και στο θεώρημα 3.1, μόνο που εδώ η ροή $f/2$ δεν είναι βέλτιστη, αλλά προσεγγιστικά βέλτιστη. Το κόστος κάθε μονοπατιού είναι το πολύ $(1+\epsilon)L_i(f)$, όπου $L_i(f)$ η ελάχιστη καθυστέρηση σε οποιοδήποτε μονοπάτι $s_i - t_i$. Συνεπώς το συνολική κόστος της ροής f φράσσεται ως εξής:

$$C(f) \leq (1+\epsilon)L_i(f)r_i \tag{4.13}$$

Επίσης κάθε $s_i - t_i$ έχει οριακό κόστος στην ροή $f/2$ τουλάχιστον $L_i(f)$ και το πολύ $(1+\epsilon)L_i(f)$.

Το μόνο που μένει είναι να υπολογίσουμε το κόστος να αυξήσουμε τη ροή $f/2$ στην βέλτιστη f^*. Η μεγαλύτερη διαφορά προκύπτει όταν αφαιρούνται $r_i/2$ μονάδες ροής για κάθε ζευγάρι κόμβων αφετηρίας προορισμού $i \in \{1, k\}$ με οριακό κέρδος $(1+\epsilon)L_i(f)$ και προστίθενται r_i μονάδες ροής με οριακό κόστος $L_i(f)$. Το συνολικό κόστος αυξάνεται το πολύ κατά: $-(1+\epsilon)\sum_{i=1}^{k} L_i(f)\frac{r_i}{2} + \sum_{i=1}^{k} L_i(f)r_i = \frac{1-\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{k} L_i(f)r_i$ Από τα παραπάνω έχουμε:

$$C(f^*) \geq \frac{1}{4}C(f) + \frac{1-\epsilon}{2}\sum_{i=1}^{k} L_i(f)r_i$$

Και χρησιμοποιώντας την (4.13):

$$C(f^*) \geq C(f)\left(\frac{1}{4} + \frac{1-\epsilon}{2(1+\epsilon)}\right) = \frac{3-\epsilon}{4+4\epsilon}C(f)$$

Οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο. □

4.6.2 Περιορισμοί χωρητικότητας

Μέχρι τώρα θεωρήσαμε ότι οι ακμές δεν είχαν κανέναν περιορισμό ως προς τη χωρητικότητα. Υποθέσαμε δηλαδή ότι η δρομολόγηση γίνεται μόνο με βάση τις συναρτήσεις καθυστέρησης. Η υπόθεση αυτή δεν είναι ρεαλιστική, αφού κάθε ακμή e έχει συγκεκριμένη χωρητικότητα c_e, την οποία η ροή f_e δεν μπορεί να ξεπεράσει. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι κάθε ακμή e έχει χωρητικότητα c_e [SM03]. Στο γραμμικό σύστημα 3.1 πρέπει τώρα να προσθέσουμε τους περιορισμούς χωρητικότητας:

Σύστημα Εξισώσεων 4.19.

$$\min \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e$$

με περιορισμούς:

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_i} f_P = r_i, \forall i \in \{1,2,...,k\}$$

$$f_e = \sum_{P\in\mathcal{P}:e\in P} f_P, \forall e \in E$$

$$f_P \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}$$

$$f_e \leq c_e, \forall e \in E$$

Τώρα που εισάγαμε τους περιορισμούς χωρητικότητας, δεν ισχύει ο Ορισμός 3.1 για την Nash ισορροπία. Το σύστημα φτάνει σε Nash ισορροπία όταν καμία απειροστή ροή δεν έχει συμφέρον να μεταφερθεί σε άλλο μονοπάτι του οποίου όλες οι ακμές έχουν χώρο για επιπλέον ροή. Πιο τυπικά έχουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.20. *Μια ροή f είναι Nash σημείο ισορροπίας αν για κάθε $i \in \{1,k\}$ και για κάθε ζευγάρι μονοπατιών P_1, $P_2 \in \mathcal{P}_i$ τέτοια ώστε $f_{P_1} > 0$ ισχύει $\min_{e\in P_2}(c_e - f_e) > 0 \to l_{P_1}(f) \leq l_{P_2}(f)$.*

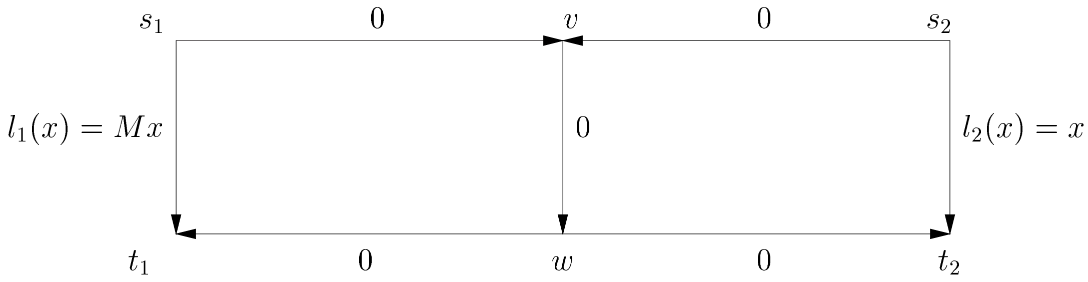
Σε αυτή την περίπτωση όλα τα μονοπάτια που χρησιμοποιούνται με κοινούς κόμβους αφετηρίας και προορισμού δεν έχουν την ίδια καθυστέρηση. Συμβολίζουμε με $\bar{L}_i(f)$ την μέγιστη καθυστέρηση στα μονοπάτια $s_i - t_i$ που χρησιμοποιούνται, δηλαδή $\bar{L}_i(f) = \max(l_P(f) : P \in \mathcal{P}_i, f_P > 0)$. Το Nash σημείο ισορροπίας ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

$$l_P(f) > \bar{L}_i(f) \to f_P = 0 \tag{4.14}$$

$$l_P(f) < \bar{L}_i(f) \to \min_{e\in P}(c_e - f_e) = 0 \tag{4.15}$$

Η συνθήκη (4.14) λέει ότι όσα μονοπάτια έχουν καθυστέρηση μεγαλύτερη από τη μέγιστη δε χρησιμοποιούνται και η συνθήκη (4.15) λέει ότι όσα μονοπάτια έχουν μικρότερη καθυστέρηση από τη μέγιστη έχουν τουλάχιστον μία γεμάτη ακμή (με ροή όση η χωρητικότητά της). Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι έχουμε τριών ειδών μονοπάτια: αυτά που έχουν καθυστέρηση μεγαλύτερη από $\bar{L}_i(f)$ και δεν χρησιμοποιούνται, αυτά που έχουν καθυστέρηση ακριβώς $\bar{L}_i(f)$ και αυτά που έχουν καθυστέρηση μικρότερη από $\bar{L}_i(f)$ και κάποια ακμή τους είναι γεμάτη.

Σε αντίθεση με την περίπτωση που δεν είχαμε περιορισμούς χωρητικότητας και το Nash σημείο ισορροπίας ήταν μοναδικό, εδώ δεν ισχύει η μοναδικότητα. Η ύπαρξη πολλών σημείων ισορροπίας οφείλεται στο ότι ο κορεσμός κάποιων ακμών περιορίζει το σύνολο των ακμών που διατίθεται στην υπόλοιπη κίνηση. Ας δούμε ένα παράδειγμα.



Σχήμα 4.6: Παράδειγμα πολλαπλών σημείων ισορροπίας

Στο δίκτυο του σχήματος 4.6, έχουμε δύο ζευγάρια αφετηρίας -προορισμού, το $s_1 - t_1$ με κίνηση r_1 και το $s_2 - t_2$ με κίνηση r_2. Όλες οι ακμές του γράφου έχουν μηδενική καθυστέρηση, εκτός από την ακμή $s_1 t_1$ που έχει καθυστέρηση $l_1(x) = Mx$, όπου M μια θετική σταθερά και την ακμή $s_2 - t_2$ με καθυστέρηση $l_2(x) = x$. Υπάρχουν δύο $s_1 - t_1$ μονοπάτια, το $s_1 - > t_1$ και το $s_1 - > v - > w - > t_1$ και δύο $s_2 - t_2$ μονοπάτια, το $s_2 - t_2$ και το $s_2 - > v - > w - > t_2$. Αν οι ακμές του δικτύου δεν είχαν περιορισμούς χωρητικότητας όλοι οι χρήστες θα χρησιμοποιούσαν τα μονοπάτια $s_1 - > v - > w - > t_1$ και $s_2 - > v - > w - > t_2$, που έχουν μηδενική καθυστέρηση. Αν όμως η ακμή vw έχει χωρητικότητα c και η συνολική κίνηση $r_1 + r_2$ είναι μεγαλύτερη από c, ποσότητα της κίνησης $r_1 + r_2 - c$ πρέπει να χρησιμοποιήσει τα άλλα μονοπάτια. Δεν καθορίζεται μονοσήμαντα όμως ποιο ή ποια άλλα μονοπάτια θα χρησιμοποιηθούν, οπότε προκύπτουν πολλά Nash σημεία ισορροπίας.

Ο υπολογισμός του κόστους της αναρχίας είναι δύσκολος, γιατί όχι μόνο υπάρχουν πολλά σημεία ισορροπίας, αλλά αυτά αποτελούν μη κυρτό χώρο. Η εύρεση λοιπόν του χειρότερου Nash σημείου ισορροπίας (που χρειαζόμαστε για τον υπολογισμό του κόστους της αναρχίας) απαιτεί τη μεγιστοποίηση μιας κυρτής συνάρτησης σε μη κυρτό χώρο. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται στο [SM03] με τη χρήση μιας άλλης έννοιας: του Beckman σημείου ισορροπίας. Αποδεικνύεται ότι για κάθε στιγμιότυπο (G, r, l) με συναρτήσεις καθυστέρησης από την κλάση L είναι

$$C(f) \leq \alpha(L) C(f^*) \tag{4.16}$$

όπου $\alpha(L)$ η τιμή της αναρχίας για την κλάση L σύμφωνα με τον ορισμό (4.9), $C(f^*)$ το κόστος της βέλτιστης ροής και $C(f)$ το κόστος του καλύτερου Nash σημείου ισορροπίας. Η τιμή της αναρχίας $\alpha(L)$ λοιπόν δεν είναι απαραίτητο ότι ταυτίζεται με το κόστος της αναρχίας σε αυτή την περίπτωση, αφού η σχέση (4.16) ισχύει για το καλύτερο Nash σημείο ισορροπίας και όχι για το χειρότερο.

4.6.3 Πεπερασμένο πλήθος χρηστών

Επίσης είναι δυνατόν να γίνουν προσαρμογές στο μοντέλο για την περίπτωση που δεν θεωρούμε άπειρους χρήστες. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις με πεπερασμένους χρήστες, ανάλογα με το αν κάθε παίκτης χρησιμοποιεί ένα μονοπάτι (unsplittable flow) ή οποιοδήποτε αριθμό μονοπατιών (splittable flow) για να στείλει τη ροή από την πηγή στον προορισμό [RT00].

4.7 Παρατηρήσεις

Είδαμε ότι στο μοντέλο αυτό υπάρχουν σημαντικά αποτελέσματα. Ένα εύλογο ερώτημα είναι κατά πόσο τα αποτελέσματα αυτά μπορούν να επεκταθούν στο μοντέλο της μοιραζόμενης ροής. Μια ιδέα είναι να ανάγουμε κάθε στιγμιότυπο του μοντέλου μοιραζόμενης ροής σε κάποιο στιγμιότυπο του μοντέλου απειροστής ροής και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι κάθε χρήστης με ροή r_i που θέλει να στείλει ροή από τον κόμβο α στον κόμβο β, στο μοντέλο της απειροστής ροής είναι κίνηση r_i που αποτελείται από την απειροστή κίνηση πολλών χρηστών, με αφετηρία $s_i = \alpha$ και προορισμό $t_i = \beta$. Αυτό όμως δεν μπορεί να γίνει, γιατί στο μοντέλο μοιραζόμενης ροής ένας χρήστης μπορεί να έχει συμφέρον να δρομολογήσει ένα μέρος της ροής του σε κάποιο αργό μονοπάτι, ώστε η υπόλοιπη ροή του να δρομολογηθεί σε κάποιο γρήγορο. Αντίθετα, στο μοντέλο απειροστής ροής, κάθε απειροστή ποσότητα ροής στην Nash ισορροπία δρομολογείται στο πιο γρήγορο μονοπάτι.

Κεφάλαιο 5

Μεικτές Στρατηγικές

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με το μοντέλο στο οποίο θεωρούμε ότι κάθε χρήστης θέλει να στείλει κάποιο πεπερασμένο φορτίο (και όχι ροή όπως στα προηγούμενα κεφάλαια) από έναν κόμβο του δικτύου σε έναν άλλο. Σκοπός του χρήστη είναι να δρομολογήσει έτσι το φορτίο του ώστε να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο αποστολής. Δεν μπορεί να μοιράσει το φορτίο αυτό σε πολλά μονοπάτια του δικτύου, αλλά διαλέγει μεικτές στρατηγικές για να το στείλει. Οι γνήσιες στρατηγικές ενός χρήστη είναι να στείλει όλη του τη ροή σε ένα μονοπάτι, οπότε το πλήθος των γνησίων στρατηγικών κάθε χρήστη είναι το πλήθος των μονοπατιών του δικτύου από τον κόμβο αφετηρίας στον κόμβο προορισμού του. Στο μοντέλο αυτό μέχρι τώρα έχει μελετηθεί μόνο το δίκτυο με παράλληλες ακμές.

5.1 Ορισμοί

Όπως και στο κεφάλαιο 3 θεωρούμε ένα δίκτυο με δύο κόμβους, εκ των οποίων ο ένας είναι η πηγή (source) και ο άλλος ο προορισμός (destination), και m παράλληλες ακμές με κατεύθυνση από τη πηγή στον προορισμό. Θεωρούμε επίσης n χρήστες, καθένας από τους οποίους θέλει να στείλει κάποιο φορτίο από τη πηγή στον προορισμό, χρησιμοποιώντας τις ακμές του δικτύου. Όπως και στο κεφάλαιο 3, με τον δείκτη συμβολίζουμε τον χρήστη (παίκτη) και με τον εκθέτη την ακμή. Το φορτίο του παίκτη i συμβολίζεται w_i. Σκόπιμα δε χρησιμοποιείται ο συμβολισμός r_i όπως στα δύο προηγούμενα κεφάλαια, γιατί το r_i εκφράζει ροή (συνεχές ρυθμό με τον οποίο στέλνει ο παίκτης i) και όχι φορτίο που θέλουμε σε αυτή την περίπτωση.

Κάθε χρήστης έχει m pure στρατηγικές. Η i-οστη pure στρατηγική είναι να στείλει όλη του την κίνηση στην ακμή i. Ο χρήστης τελικά επιλέγει μια μεικτή στρατηγική, η οποία καθορίζει με τι πιθανότητα θα χρησιμοποιήσει κάθε μια από τις pure στρατηγικές του. Η επιλογή μιας συγκεκριμένης ακμής από κάποιον χρήστη γίνεται αν ο χρήστης θέσει πιθανότητα 1 στην ακμή αυτή και 0 στις υπόλοιπες. Συμβολίζουμε με p_i^j την πιθανότητα με την οποία στέλνει ο χρήστης i στην ακμή j.

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις καθυστερήσεις στις ακμές. Θεωρούμε ότι κάθε ακμή j χαρακτηρίζεται από κάποια χωρητικότητα c^j και ότι η καθυστέρηση σε μια ακμή είναι ανάλογη με τη ροή που περνάει από αυτή και αντιστρόφως ανάλογη με τη χωρητικότητά της. Δηλαδή η καθυστέρηση στην ακμή j που έχει ροή r είναι $\frac{r}{c^j}$. Θεωρούμε ότι η καθυστέρηση ενός πακέτου (και γενικότερα της ροής ενός χρήστη) σε μια ακμή ισούται με τη συνολική καθυστέρηση όλων τω πακέτων (και γενικότερα της ροής όλων των χρηστών) στην ακμή αυτή.

Υποθέτουμε δηλαδή ότι η ακμή εξυπηρετεί τα πακέτα με μια μέθοδο σχετική με την round-robin. Κανονικά, στην μέθοδο round-robin, δεν έχουν όλα τα φορτία την ίδια καθυστέρηση, αλλά τα μικρότερα φορτία τελειώνουν πιο γρήγορα, γιατί τα φορτία χωρίζονται σε κομμάτια ίδιου μεγέθους και στη συνέχεια εξυπηρετούνται κυκλικά. Εδώ θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε μια παραλλαγή της round-robin, στην οποία όλα τα φορτία χωρίζονται στον ίδιο αριθμό κομματιών (και όχι σε κομμάτια ίδιου μεγέθους). Υπάρχει και ένα εναλακτικό μοντέλο [KP99], στο οποίο η ακμή στέλνει τα φορτία με τυχαία σειρά (batch model).

Ορίζουμε λοιπόν την έννοια της αναμενόμενης κίνησης (expected traffic) σε μια ακμή j ως εξής:

$$W^j = \sum_i p_i^j w_i{}^1 \tag{5.1}$$

Στην παραπάνω σχέση έχουμε θεωρήσει ότι οι ακμές του συστήματος δεν έχουν αρχικό φορτίο, δηλαδή πρέπει να εξυπηρετήσουν μόνο τους n χρήστες. Η υπάρξη αρχικού φορτίου στις ακμές μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής: Θεωρούμε ότι κάθε ακμή j έχει αρχικό φορτίο L^j και η αναμενόμενη καθυστέρηση σε κάθε ακμη j είναι: $W^j = L^j + \sum_i p_i^j w_i$. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την περίπτωση που οι ακμές δεν έχουν αρχικά φορτία, δηλαδή $L^j = 0, \forall j$, οπότε θα χρησιμοποιούμε τη σχέση 5.1.

Ορίζουμε επίσης την αναμενόμενη καθυστέρηση (expected latency) σε μια ακμή j:

$$\Lambda^j = \frac{W^j}{c^j}$$

Ορίζουμε το αναμενόμενο κόστος καθυστέρησης (expected latency cost) για

[1] Στη βιβλιογραφία η αναμενόμενη κίνηση συμβολίζεται και M^j.

κάθε χρήστη i σε κάθε ακμή j:

$$\lambda_i^j = \frac{w_i + \sum_{k=1,k\neq i}^{n} p_k^j w_k}{c^j} = \frac{(1-p_i^j)w_i + W^j}{c^j} \tag{5.2}$$

Το αναμενόμενο κόστος καθυστέρησης λ_i^j εκφράζει την αναμενόμενη καθυστέρηση που θα υποστεί ο χρήστης i αν στείλει όλο του το φορτίο w_i στην ακμή j με δεδομένες τις πιθανότητες που θα χρησιμοποιήσουν οι υπόλοιποι χρήστες k, $(k \neq i)$. Κάθε χρήστης i θα χρησιμοποιήσει με μη μηδενικές πιθανότητες μόνο τις ακμές εκείνες που έχουν το μικρότερο αναμενόμενο κόστος καθυστέρησης.

Συμβολίζουμε λοιπόν το ελάχιστο αναμενόμενο κόστος καθυστέρησης (minimum expected latency cost) για κάθε χρήστη i: λ_i, δηλαδή $\lambda_i = \min_j \lambda_i^j$. Όταν το σύστημα βρίσκεται σε Nash ισορροπία, θα ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1. $p_i^j > 0 \to \lambda_i^j = \lambda_i$
2. $p_i^j = 0 \to \lambda_i^j \geq \lambda_i$

Οι παραπάνω συνθήκες ερμηνεύονται ως εξής: Ο χρήστης i έχει λόγο να παίξει με μη μηδενική πιθανότητα μόνο τις ακμές εκείνες που ελαχιστοποιούν το αναμενόμενο κόστος καθυστέρησής του. Πράγματι, αν παίξει με μη μηδενική πιθανότητα κάποια ακμή j για την οποία $\lambda_i^j > \lambda_i$, το σύστημα δεν βρίσκεται σε Nash ισορροπία, αφού ο παίκτης i έχει λόγο να αλλάξει στρατηγική και να παίξει με μηδενική πιθανότητα την ακμή j για την οποία $\lambda_i^j > \lambda_i$ και να αυξήσει την πιθανότητα σε κάποιες από τις ακμές στις οποίες το αναμενόμενο κόστος καθυστέρησής του είναι ελάχιστο.

5.2 Κοινωνικό κόστος

Για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε το κόστος της αναρχίας, πρέπει να ορίσουμε μια συνάρτηση που μας ενδιαφέρει να ελαχιστοποιήσουμε. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτή η συνάρτηση ήταν η μέση καθυστέρηση των χρηστών: $C(f) = \sum_{e\in E} l_e(f_e)f_e$, όπου f_e η συνολική ροή στην ακμή e και $l_e(f_e)$ η συνάρτηση καθυστέρησης στην ακμή e.

Εδώ θεωρούμε ως κοινωνικό κόστος (social cost) το αναμενόμενο μέγιστο κόστος σε μια ακμή και το συμβολίζουμε SC. Οπότε:

$$SC = \sum_{j_1=1}^{m} \dots \sum_{j_n=1}^{m} \prod_{i=1}^{n} p_i^{j_i} \max_j \frac{\sum_{k:j_k=j} w_k}{c^j} \tag{5.3}$$

Δηλαδή βρίσκουμε την πιθανότητα κάθε ανάθεσης φορτίων και την πολλαπλασιάζουμε με το κόστος της ακμής με το μέγιστο κόστος στην κατάσταση αυτή. Στη συνέχεια προσθέτουμε όλους αυτούς τους όρους και έτσι προκύπτει το αναμενόμενο μέγιστο κόστος σε μια ακμή.

Θεωρούμε δηλαδή ως κοινωνικό κόστος το αναμενόμενο μέγιστο κόστος και όχι το μέγιστο αναμενόμενο κόστος. Ας δούμε με ένα παράδειγμα, γιατί αυτά τα δύο μεγέθη είναι διαφορετικά και γιατί το αναμενόμενο μέγιστο κόστος είναι καλύτερο μέτρο για την αξιολόγηση μιας ισορροπίας. Έστω ένα δίκτυο με m παράλληλες ακμές με ίδιες χωρητικότητες $c = 1$ και m χρήστες με το ίδιο φορτίο w. Μια ισορροπία προκύπτει όταν κάθε χρήστης χρησιμοποιήσει μια γνήσια στρατηγική και δρομολογήσει το φορτίο του σε διαφορετική ακμή του δικτύου. Εφόσον ο αριθμός των χρηστών και των ακμών είναι ίδιος, αυτό είναι εφικτό και κάθε ακμή έχει κόστος w. Κάθε χρήστης i δρομολογεί το φορτίο του στην ακμή j με πιθανότητα:

$$p_i^j = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αυτή είναι η βέλτιστη ισορροπία και σε αυτήν το αναμενόμενο μέγιστο κόστος ισούται με το μέγιστο αναμενόνεμο κόστος. Το αναμενόμενο μέγιστο κόστος είναι πάντα ίσο με το μέγιστο αναμενόμενο κόστος όταν κανένας χρήστης δε χρησιμοποιεί μεικτή στρατηγική, οπότε έχουμε μια μόνο πιθανή κατάσταση και το αναμενόμενο μέγιστο είναι το μέγιστο στην κατάσταση αυτή και το μέγιστο αναμενόμενο είναι επίσης το μέγιστο.

Μια άλλη ισορροπία στο ίδιο δίκτυο (με τις m παράλληλες ίδιας χωρητικότητας ακμές και τους m ισοδύναμους χρήστες) έχουμε όταν κάθε χρήστης i στείλει το φορτίο του σε κάθε ακμή j με πιθανότητα $p_i^j = \frac{1}{m}$. Η ισορροπία αυτή είναι χειρότερη από την ισορροπία της προηγούμενης παραγράφου (στην οποία κάθε χρήστης στέλνει το φορτίο του σε διαφορετική ακμή), γιατί υπάρχει πιθανότητα περισσότεροι από έναν χρήστη να στείλουν στην ίδια ακμή. Το αναμενόμενο κόστος όμως σε κάθε ακμή είναι ίδιο και ίσο με w, οπότε και το μέγιστο αναμενόμενο κόστος είναι w. Από την άλλη το αναμενόμενο μέγιστο κόστος είναι μεγαλύτερο από w, που είναι και διαισθητικά σωστό. Για αυτό τον λόγο χρησιμοποιούμε για κοινωνικό κόστος το αναμενόμενο μέγιστο κόστος.

5.3 Nash ισορροπία

Στην ενότητα αυτή θα δούμε τι συμβαίνει στην κατάσταση ισορροπίας και θα υπολογίσουμε τις πιθανότητες που θα παίξουν οι παίκτες σε αυτή.

Όπως είπαμε και παραπάνω, οι πιθανότητες p_i^j ορίζουν μια Nash ισορροπία αν κανένας παίκτης-χρήστης δεν έχει κίνητρο να αλλάξει στρατηγική. Επομένως, ο χρήστης i θα χρησιμοποιήσει με μη μηδενικές πιθανότητες μόνο τις ακμές j που ελαχιστοποιούν το αναμενόμενο κόστος καθυστέρησης λ_i^j. Συμβολίζουμε αυτή την ελάχιστη τιμή λ_i και ορίζουμε την υποστήριξη (support) του παίκτη i ως το σύνολο των ακμών που αυτός χρησιμοποιεί με μη μηδενική πιθανότητα. Επίσης ορίζουμε τις μεταβλητές I_i^j ως εξής:

$$I_i^j = \begin{cases} 1 & \text{αν } p_i^j > 0 \\ 0 & \text{αν } p_i^j = 0 \end{cases}$$

Οι πιθανότητες σε μια Nash ισορροπία ορίζονται μονοσήμαντα από τις μεταβλητές I_i^j. Για όσα i, j είναι $I_i^j = 0$, προφανώς $p_i^j = 0$, ενώ για τα υπόλοιπα αν λύσουμε την (5.2) ως προς τις πιθανότητες είναι:

$$p_i^j = \frac{W^j + w_i - c^j \lambda_i}{w_i} \tag{5.4}$$

με περιορισμούς:

1. $W^j = \sum_i I_i^j (W^j + w_i - c^j \lambda_i)$, για όλες τις ακμές j
2. $r^i = \sum_j I_i^j (W^j + w_i - c^j \lambda_i)$, για όλους τους χρήστες i

Ο τύπος που δίνει τις πιθανότητες, προκύπτει αν λύσουμε τη σχέση ορισμού των λ_i^j (5.2) ως προς p_i^j και παρατηρήσουμε ότι οι πιθανότητες είναι θετικές μόνο αν $\lambda_i^j = \lambda_i$. Ο πρώτος περιορισμός προκύπτει από τον ορισμό της αναμενόμενης καθυστέρησης σε μια ακμή (5.1) και ο δεύτερος περιορισμός ουσιαστικά λέει ότι το άθροισμα των μη μηδενικών πιθανοτήτων ενός παίκτη, πρέπει να είναι 1.

Για οποιαδήποτε ακμή j για την οποία δεν είναι $p_i^j > 0$ για ακριβώς ένα παίκτη i, ισχύει:

$$W^j = \frac{-\sum_i I_i^j w_i + c^j \sum_i I_i^j \lambda_i}{\sum_i I_i^j - 1}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει αν λύσουμε τον περιορισμό 1 ως προς W^j. Δεν ισχύει αν $p_i^j > 0$ για ακριβώς ένα χρήστη, γιατί τότε ο παρανομαστής είναι 0. Οι ακμές j για τις οποίες $p_i^j > 0$ για ακριβώς ένα χρήστη i ονομάζονται solo ακμές.

Οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν τις πιθανότητες που παίζουν οι χρήστες σε Nash ισορροπία με βάση την υποστήριξη κάθε παίκτη, αλλά δε δίνουν πληροφορίες σχετικά με την ύπαρξη ή την μοναδικότητα Nash σημείων ισορροπίας.

5.4 Υπολογισμός των Nash Πιθανοτήτων

Οι σχέσεις που είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, εκφράζουν τις πιθανότητες που παίζουν οι χρήστες σε Nash ισορροπία με βάση την υποστήριξη κάθε παίκτη, αλλά δε δίνουν κάποιο τρόπο να υπολογίσουμε τις πιθανότητες αυτές.

5.4.1 Πλήρως μεικτές στρατηγικές

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση που όλοι οι χρήστες χρησιμοποιούν πλήρως μεικτές στρατηγικές, δηλαδή $I_i^j = 1$ για όλους τους χρήστες i και όλες τις ακμές j.

Θεώρημα 5.1. *[MS01] Στην πλήρως μεικτή περίπτωση, για όλους τους χρήστες i και όλες τις ακμές j:*

$$(1 - \frac{mc^j}{\sum_{l=1}^{m} c^l}) \cdot (1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{(n-1)w_i}) + \frac{c^j}{\sum_{l=1}^{m} c^l} \in (0,1) \tag{5.5}$$

αν και μόνο αν υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας με πιθανότητες:

$$p_i^j = (1 - \frac{mc^j}{\sum_{l=1}^{m} c^l}) \cdot (1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{(n-1)w_i}) + \frac{c^j}{\sum_{l=1}^{m} c^l} \tag{5.6}$$

για κάθε χρήστη i και κάθε ακμή j.

Απόδειξη. Οι παραπάνω σχέσεις για τις πιθανότητες προκύπτουν με πράξεις στους τύπους που έχουμε θεωρήσει μέχρι τώρα, θέτωντας $I_i^j = 1$ για όλα τα i, j. Εφόσον όμως θεωρούμε την πλήρως μεικτή περίπτωση, πρέπει όλες οι πιθανότητες να είναι μεγαλύτερες του 0 και μικρότερες του 1. Λεπτομερής απόδειξη υπάρχει στο [MS01]. □

Από το θεώρημα 5.1 βλέπουμε ότι στην πλήρως μεικτή περίπτωση, μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει Nash ισορροπία και να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες πιθανότητες σε χρόνο $O(mn)$. Πράγματι, υπολογίζουμε για κάθε χρήστη i και κάθε ακμή j την τιμή της παράστασης $(1 - \frac{mc^j}{\sum_{l=1}^{m} c^l}) \cdot (1 - \frac{\sum_{k=1}^{n} w_k}{(n-1)w_i}) + \frac{c^j}{\sum_{l=1}^{m} c^l}$ και ελέγχουμε αν είναι μεγαλύτερη του 0 και μικρότερη του 1. Αν δεν είναι μέσα στα όρια, σημαίνει ότι δεν υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας, στο οποίο όλοι οι παίκτες χρησιμοποιούν πλήρως μεικτές στρατηγικές. Διαφορετικά, συνεχίζουμε τον υπολογισμό και τον έλεγχο της παράστασης για τα υπόλοιπα i, j. Αν η τιμή της παράστασης είναι μέσα στα επιτρεπτά όρια για όλα τα i, j, υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας και οι πιθανότητες είναι οι τιμές που έχουν υπολογιστεί.

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα 5.1 για την περίπτωση που όλες οι ακμές έχουν την ίδια χωρητικότητα c, ενώ οι χρήστες έχουν τυχαία φορτία.

Προκύπτει ότι υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας για πλήρως μεικτές στρατηγικές, αν $\frac{1}{m} \in (0,1)$. Η παραπάνω συνθήκη προφανώς ισχύει για όλα τα $m > 1$, οπότε υπάρχει μοναδικό πλήρως μεικτό Nash σημείο ισορροπίας σε αυτή την περίπτωση με πιθανότητες: $p_i^j = \frac{1}{m}$ για κάθε χρήστη i και κάθε ακμή j.

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που όλοι οι χρήστες έχουν το ίδιο φορτίο, δηλαδή για όλους τους χρήστες i, $w_i = w$. Ορίζουμε επίσης την ανηγμένη χωρητικότητα της ακμής j ως: $\tilde{c}^j = \frac{c^j}{\sum_{l=1}^m c^l}$. Προφανώς $\sum_{j=1}^m \tilde{c}^j = 1$. Με αντικατάσταση των παραπάνω στη συνθήκη (5.5) προκύπτει ότι πρέπει:

$$\frac{(n+m-1)\tilde{c}^j - 1}{n-1} \in (0,1)$$

ή ισοδύναμα:

$$\tilde{c}^j \in (\frac{1}{m+n-1}, \frac{n}{m+n-1})$$

Επομένως, αν όλοι οι χρήστες έχουν ίδιο φορτίο και χρησιμοποιούν πλήρως μεικτές στρατηγικές, για όλες τις ακμές j:

$$\tilde{c}^j \in (\frac{1}{m+n-1}, \frac{n}{m+n-1}) \tag{5.7}$$

αν και μόνο αν υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας με πιθανότητες:

$$p_i^j = \frac{(n+m-1)\tilde{c}^j - 1}{n-1} \tag{5.8}$$

για όλους τους χρήστες i και όλες τις ακμές j. Από τη σχέση (5.8) φαίνεται ότι σε κάθε ακμή j όλοι οι χρήστες χρησιμοποιούν τις ίδιες πιθανότητες.

Για να υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας με πλήρως μεικτές στρατηγικές, πρέπει να ισχύουν $2m$ συνθήκες για τις ανηγμένες χωρητικότητες $\tilde{c}^j$ από τη συνθήκη (5.7) (m για το άνω όριο και m για το κάτω όριο). Όμως επειδή το άθροισμα των ανηγμένων χωρητικοτήτων είναι 1 λόγω κατασκευής, αρκεί να ισχύουν μόνο οι m συνθήκες του ενός ορίου (έστω του κάτω) [FKK$^+$02]. Πράγματι, ακόμα και αν οι $m-1$ ακμές έχουν ανηγμένες χωρητικότητες πολύ κοντά στο κάτω όριο $\frac{1}{m+n-1}$, δηλαδή είναι $\frac{1}{m+n-1} + \epsilon$, όπου $\epsilon > 0$, η άλλη ακμή θα έχει μικρότερη ανηγμένη χωρητικότητα από το πάνω όριο $\frac{n}{m+n-1}$. Για να ισχύουν οι m συνθήκες του κάτω ορίου, αρκεί η ελάχιστη ανηγμένη χωρητικότητα να είναι μεγαλύτερη από το κάτω όριο. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε σε χρόνο $O(m)$, βρίσκοντας την ελάχιστη χωρητικότητα και ελέγχοντας αν η αντίστοιχη ανηγμένη χωρητικότητα είναι μεγαλύτερη από $\frac{1}{m+n-1}$.

5.4.2 Μεικτές στρατηγικές

Θα γενικεύσουμε το αποτέλεσμα για τον υπολογισμό της Nash ισορροπίας όταν οι χρήστες έχουν πλήρως μεικτές στρατηγικές και ίδιο φορτίο της προηγούμενης υποενότητας, για την περίπτωση που οι χρήστες έχουν ίδιο φορτίο, αλλά δεν χρησιμοποιούν απαραίτητα πλήρως μεικτές στρατηγικές.

Όταν στο Nash σημείο ισορροπίας υπάρχει ένα υποσύνολο των ακμών που το ονομάζουμε L, τέτοιο ώστε για κάθε χρήστη i και κάθε ακμή j, $I_i^j = 1$ αν $j \in L$ και $I_i^j = 0$ αλλιώς, λέμε ότι οι χρήστες χρησιμοποιούν γενικευμένες πλήρως μεικτές στρατηγικές (generalized fully mixed strategies). Οι πλήρως μεικτές στρατηγικές είναι ειδική περίπτωση των γενικευμένων πλήρως μεικτών στρατηγικών όπου το σύνολο L αποτελείται από όλες τις ακμές.

Στην προηγούμενη υποενότητα, βρίσκαμε αν υπήρχε Nash σημείο ισορροπίας και υπολογίζαμε τις αντίστοιχες πιθανότητες για την περίπτωση που όλοι οι χρήστες χρησιμοποιούσαν πλήρως μεικτές στρατηγικές. Ξέραμε δηλαδή την υποστήριξη του κάθε χρήστη, η οποία ήταν όλο το σύνολο των ακμών. Εδώ, θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες σε κάποιο Nash σημείο ισορροπίας, χωρίς να ξέρουμε την υποστήριξη του κάθε παίκτη. Θα το κάνουμε αυτό για γενικευμένες πλήρως μεικτές στρατηγικές, όπου όλοι οι χρήστες έχουν την ίδια υποστήριξη (χρησιμοποιούν τις ίδιες ακμές). Αποδεικνύεται [FKK+02] ότι όταν όλοι οι χρήστες έχουν το ίδιο φορτίο, υπάρχει Nash σημείο ισορροπίας με γενικευμένες πλήρως μεικτές στρατηγικές, το οποίο βρίσκουμε ως εξής:

1. Ταξινομούμε τις χωρητικότητες των ακμών σε μη φθίνουσα σειρά και υπολογίζουμε την ανηγμένη χωρητικότητα που αντιστοιχεί στην ακμή με τη μικρότερη χωρητικότητα, την οποία συμβολίζουμε $\tilde{c}$. Θέτουμε L το σύνολο όλων των ακμών και m' το μέγεθος του L

2. Αν $\tilde{c} > \frac{1}{m'+n-1}$, τελειώσαμε.

3. Αλλιώς βγάζουμε την ακμή με τη μεγαλύτερη χωρητικότητα από το σύνολο L, οπότε το m' μειώνεται κατά ένα και ενημερώνουμε την τιμή της ελάχιστης ανηγμένης χωρητικότητας και επαναλαμβάνουμε το βήμα 2.

Στο πρώτο και στο τρίτο βήμα του παραπάνω αλγορίθμου, δε χρειάζεται να υπολογίσουμε όλες τις ανηγμένες χωρητικότητες του συνόλου L. Αρκεί να υπολογίσουμε την ανηγμένη χωρητικότητα μόνο για την ακμή με τη μικρότερη χωρητικότητα, αφού με αυτή θα γίνει ο έλεγχος στο βήμα 3. Ο αλγόριθμος αυτός είναι πολυωνυμικός (έχει πολυπλοκότητα $\Theta(m \log m)$). Πράγματι, στο πρώτο βήμα χρειαζόμαστε χρόνο $\Theta(m \log m)$ για την ταξινόμηση και $\Theta(m)$ για τον υπολογισμό της ανηγμένης χωρητικότητας. Το δεύτερο και το τρίτο βήμα επαναλαμβάνονται το πολύ m φορές και έχουν σταθερό χρόνο.

5.4.3 Γνήσιες στρατηγικές

Ας δούμε τώρα τι αποτελέσματα υπάρχουν για την περίπτωση που περιοριζόμαστε σε γνήσιες στρατηγικές, δηλαδή για κάθε χρήστη i υπάρχει μια ακμή j, τέτοια ώστε $I_i^j = 1$ και $I_i^l = 0$ για κάθε $l \neq j$ (ή ισοδύναμα $p_i^j = 1$ και $p_i^l = 0$ για κάθε $l \neq j$). Στην περίπτωση αυτή λοιπόν αν βρούμε στην Nash ισορροπία την υποστήριξη κάθε χρήστη (η οποία θα είναι μονοσύνολο), ξέρουμε και τις πιθανότητες στο σημείο ισορροπίας.

Στο [FKK$^+$02] αποδεικνύεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα pure Nash σημείο ισορροπίας και προτείνεται ένας πολυωνυμικός αλγόριθμος για την εύρεση των συνόλων υποστήριξης των χρηστών. Ο αλγόριθμος θεωρεί τα φορτία των χρηστών σε μη αύξουσα σειρά ($w_1 \geq w_2 \geq \ldots \geq w_n$) και με τη σειρά αυτή αναθέτει το φορτίο του κάθε χρήστη στην ακμή αυτή που ελαχιστοποιεί το κόστος καθυστέρησης του χρήστη, δηλαδή είναι σαν να βάζει σε κάθε βήμα i τον χρήστη με το i-οστο μεγαλύτερο φορτίο να επιλέξει την ακμή που τον συμφέρει με βάση τις επιλογές των χρηστών στα προηγούμενα βήματα. Προφανώς μετά την εκτέλεση του αλγορίθμου όλοι οι χρήστες έχουν γνήσιες στρατηγικές, αφού το φορτίο του κάθε χρήστη ανατίθεται σε ακριβώς μία ακμή με πιθανότητα 1.

Θα αποδείξουμε ότι από τον παραπάνω αλγόριθμο σε κάθε βήμα i προκύπτει Nash σημείο ισορροπίας, δηλαδή όλοι οι χρήστες με φορτία $w_1, \ldots w_i$ είναι ικανοποιημένοι από την ακμή που επέλεξαν, ακόμα και αν όταν έκαναν την επιλογή δεν ήξεραν τι θα επέλεγαν οι χρήστες στα επόμενα βήματα. Θα το αποδείξουμε επαγωγικά:

- Για $i = 1$ προφανώς ισχύει.
- Έστω ότι ισχύει για $i = k$, δηλαδή όλοι οι χρήστες είναι ικανοποιημένοι από την κατάσταση μετά την επιλογή του χρήστη k.
- Θα δείξουμε ότι ισχύει και για $i = k + 1$. Ο χρήστης $k + 1$ επιλέγει μια ακμή j για την οποία ισχύει:

$$\frac{w_{k+1} + X^j}{c^j} \leq \frac{w_{k+1} + X^l}{c^l} \tag{5.9}$$

όπου X^l το συνολικό φορτίο στην ακμή l μετά την επιλογή του παίκτη k. Ο χρήστης με το μικρότερο φορτίο (w_{k+1}) δεν έχει λόγο να αλλάξει ακμή, εφόσον επέλεξε ακμή τελευταίος - ξέροντας τι είχαν επιλέξει οι υπόλοιποι. Έστω τώρα ότι κάποιος προηγούμενος χρήστης με φορτίο w_p (όπου $w_p \geq w_{k+1}$ και $p < k+1$), έχει λόγο να αλλάξει ακμή μετά την επιλογή του χρήστη $k+1$. Αν το φορτίο w_{k+1} ανατέθηκε σε διαφορετική ακμή το w_p, ο χρήστης με φορτίο w_p δεν έχει λόγο να αλλάξει ακμή, αφού όχι μόνο δεν επιβαρύνθηκε η ακμή στην οποία είχε δρομολογήσει το φορτίο του, αλλά επιβαρύνθηκε κάποια άλλη ακμή. Αν τα φορτία w_{k+1} και w_p ανατέθηκαν στην ίδια ακμή j, για να έχει λόγο να αλλάξει ακμή ο παίκτης p πρέπει να υπάρχει κάποια ακμή y τέτοια ώστε:

$$\frac{w_p + X_y}{c^y} < \frac{w_{k+1} + X^j}{c^j}$$

Όμως είναι $w_p \geq w_{k+1}$, οπότε θα είναι $\frac{w_{k+1}+X_y}{c^y} < \frac{w_{k+1}+X^j}{c^j}$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της (5.9). Με άλλα λόγια, αν τα φορτία w_{k+1} και w_p ανατέθηκαν στην ίδια ακμή, δεν υπάρχει κάποια άλλη ακμή l με μικρότερο κόστος για το φορτίο w_p, γιατί τότε η l θα είχε μικρότερο κόστος και για το φορτίο w_{k+1}, αφού $w_p \geq w_{k+1}$ και θα την επέλεγε ο παίκτης $k+1$.

Με τον παραπάνω αλγόριθμο βρίσκουμε την υποστήριξη (και άρα και τις πιθανότητες) για ένα Nash σημείο ισορροπίας. Αυτό όμως το σημείο ισορροπίας δεν μπορούμε να το αξιολογήσουμε με βάση το κοινωνικό του κόστος. Αποδεικνύεται ότι τα προβλήματα του υπολογισμού του καλύτερου και του χειρότερου Nash σημείου ισορροπίας με γνήσιες στρατηγικές είναι NP-πλήρη με αναγωγή στο bin-packing [FKK$^+$02].

5.5 Κόστος της αναρχίας

Το κόστος της αναρχίας ορίζεται ως ο μέγιστος λόγος του κοινωνικού κόστος σε κάποιο Nash σημείο ισορροπίας προς τα ελάχιστο κοινωνικό κόστος [KP99]. Ισοδύναμα, το κόστος της αναρχίας είναι ο λόγος του κοινωνικού κόστους στο χειρότερο Nash σημείο ισορροπίας προς το ελάχιστο κοινωνικό κόστος. Σε αυτό το μοντέλο η Nash ισορροπία δεν είναι μοναδική (όπως στο μοντέλο της απειροστής ροής), συνεπώς πρέπει να υπολογίζουμε το κόστος στο χειρότερο Nash σημείο ισορροπίας. Θέλουμε λοιπόν να συγκρίνουμε το μέγιστο κοινωνικό κόστος σε Nash ισορροπία (δηλαδή το κοινωνικό κόστος στο χειρότερο Nash σημείο ισορροπίας) με το βέλτιστο κοινωνικό κόστος (opt).

Η βέλτιστη κατάσταση opt, μπορεί πάντα να προκύψει ως ένα γνήσιο Nash σημείο ισορροπίας, δηλαδή οι χρήστες να χρησιμοποιούν αποκλειστικά γνήσιες στρατηγικές. Ο υπολογισμός του κοινωνικού βέλτιστου opt είναι NP-πλήρες πρόβλημα, γιατί μπορούμε να ανάγουμε σε αυτό το partition πρόβλημα. Ισχύει όμως το εξής κάτω φράγμα: opt$\geq \frac{\max_{i\in\{1,n\}} w_i}{\min_{j\in\{1,m\}} c^j}$.

Αλλά ούτε ο υπολογισμός του κοινωνικού κόστους SC ενός Nash σημείου ισορροπίας μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο σε σχέση με το πλήθος των ακμών m ή των χρηστών n αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση 3, γιατί πρέπει να υπολογιστούν και να αθροιστούν m^n όροι. Στο [FKK+02] προτείνεται ένας πολυωνυμικός προσεγγιστικός αλγόριθμος για τον υπολογισμό του κοινωνικού κόστους στην περίπτωση που όλες οι ακμές έχουν την ίδια χωρητικότητα και αποδεικνύεται ότι ο υπολογισμός του όταν περιοριζόμαστε σε μεικτές στρατηγικές είναι ♯P-πλήρες πρόβλημα.

Το κόστος της αναρχίας έχει υπολογιστεί για το δίκτυο παράλληλων ακμών για διάφορες περιπτώσεις, ανάλογα με τον αριθμό των χρηστών, το πλήθος των ακμών, το αν οι χρήστες έχουν ίδιο φορτίο και το αν οι ακμές έχουν ίδια χωρητικότητα. Στη συνέχεια παραθέτουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα καθώς και τις αποδείξεις για κάποια από αυτά.

5.5.1 Δίκτυο δύο ακμών

Ο πρώτος υπολογισμός του κόστους της αναρχίας έγινε στο [KP99], όπου και ορίστηκε η έννοια και αφορούσε την περίπτωση που το δίκτυο αποτελείται από δύο παράλληλες ακμές με ίδιες χωρητικότητες.

Θεώρημα 5.2. *[KP99] Το κόστος της αναρχίας για ένα δίκτυο δύο ακμών με ίδιες χωρητικότητες είναι 3/2.*

Απόδειξη. Αποδεικνύεται αφενός ότι το κόστος της αναρχίας είναι το πολύ 3/2 (άνω όριο) και αφετέρου ότι υπάρχει στιγμιότυπο με κόστος της αναρχίας ακριβώς 3/2 (κάτω όριο), οπότε αποδεικνύεται το θεώρημα.

Το κάτω όριο αποδεικνύεται με ένα απλό παράδειγμα. Θεωρούμε ένα δίκτυο με 2 χρήστες, που έχουν και οι δύο φορτίο 1. Υπάρχουν τρία Nash σημεία ισορροπίας (δύο με pure στρατηγικές και ένα με μεικτές), εκ των οποίων το χειρότερο είναι όταν χρησιμοποιηθούν μεικτές στρατηγικές και οι πιθανότητες είναι $p_i^j = 1/2$ για $i, j = 1, 2$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $SC = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}$, ενώ στη βέλτιστη κατάσταση το φορτίο κάθε παίκτη ανατίθεται σε διαφορετική ακμή, οπότε opt=1. Σε αυτή την περίπτωση δηλαδή το κόστος της αναρχίας είναι 3/2.

Για αποδείξουμε το άνω όριο θεωρούμε ότι το βέλτιστο opt είναι αφενός τουλάχιστον όσο το μέγιστο φορτίο των παικτών και αφετέρου τουλάχιστον όσο ο μέσος όρος των αναμενόμενων καθυστερήσεων στις ακμές. Αν θεωρήσουμε ότι οι παίκτες είναι ταξινομημένοι σε φθίνουσα σειρά ανάλογα με το φορτίο τους, τότε opt$\geq \max(w_1, \frac{\sum_j W^j}{m})$. Θεωρούμε τώρα την πιθανότητα το φορτίο του χρήστη i να δρομολογηθεί στην ακμή με το μέγιστη καθυστέρηση και την συμβολίζουμε q_i. Με βάση αυτές τις πιθανότητες, το κοινωνικό κόστος μπορεί να γραφεί: SC=$\sum_i q_i w_i$. Θεωρούμε επίσης την πιθανότητα t_{ik} τα φορτία των χρηστών i και k να δρομολογηθούν στην ίδια ακμή. Για τις πιθανότητες που θεωρήσαμε ισχύει ότι: $q_i + q_k \leq 1 + t_{ik}$ και αποδεικνύεται ότι: $\sum_{k \neq i} t_{ik} w_k = \lambda_i - w_i$. Από τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.3. *[KP99] Το κόστος της αναρχίας για ένα δίκτυο δύο ακμών με χωρητικότητες $c^1 \leq c^2$ είναι τουλάχιστον $1+\frac{c^2}{c^1+c^2}$.*

5.5.2 Πλήρως μεικτές στρατηγικές

Στην υποενότητα 5.4.1 μελετήσαμε ιδιαίτερα την περίπτωση που όλοι οι χρήστες χρησιμοποιούν πλήρως μεικτές σταρτηγικές και είδαμε πώς μπορούν να υπολογιστούν οι πιθανότητες στην Nash ισορροπία. Αποδεικνύεται στο [MS01] ότι στην περίπτωση που έχουμε πλήρως μεικτές στρατηγικές:

- Αν το δίκτυο αποτελείται από m ακμές ίδιας χωρητικότητας, ο λόγος συντονισμού στη χειρότερη περίπτωση είναι $\Theta(\frac{\log m}{\log \log m})$.
- Αν το δίκτυο αποτελείται από m ακμές με τυχαίες χωρητικότητες και έχει n χρήστες με ίδια φορτία, με $n \geq m$, ο λόγος συντονισμού στη χειρότερη περίπτωση είναι $\Theta(\frac{\log n}{\log \log n})$.

5.5.3 Δίκτυο m ακμών

Θα δούμε τώρα τη γενική περίπτωση, όπου το δίκτυο έχει m ακμές και οι χρήστες μπορούν να χρησιμοποιήσουν οποιαδήποτε στρατηγική.

Θεώρημα 5.4. *[KP99] Το κόστος της αναρχίας σε ένα δίκτυο με m ακμές ίδιας χωρητικότητας είναι $\Omega(\frac{\ln m}{\ln \ln m})$.*

Απόδειξη. Έστω ότι το δίκτυο έχει m χρήστες με μοναδιαία φορτία ($w_i = 1$). Οι πιθανότητες $p_i^j = 1/m$ για όλους τους χρήστες και όλες τις ακμές αποτελούν Nash σημείο ισορροπίας. Το πρόβλημα είναι ίδιο με το πρόβλημα που έχουμε m μπάλες και m καλάθια, με πιθανότητα $1/m$ ρίχνουμε κάθε μπάλα σε κάθε καλάθι και ψάχνουμε τον αναμενόμενο μέγιστο αριθμό μπαλών σε ένα καλάθι. Η απάντηση είναι γνωστή από τη θεωρία πιθανοτήτων και είναι $O(\frac{\ln m}{\ln \ln m})$. □

Θεώρημα 5.5. *[KMS02] Το κόστος της αναρχίας σε ένα δίκτυο με m παράλληλες ακμές ίδιας χωρητικότητας είναι $\Theta(\frac{\ln m}{\ln \ln m})$.*

Απόδειξη. Λόγω του θεωρήματος 5.4, αρκεί να αποδειχτεί το άνω όριο, δηλαδή ότι το κόστος της αναρχίας είναι $O(\frac{\ln m}{\ln \ln m})$. Η απόδειξη που προτείνεται στο [KMS02] χρησιμοποιεί πάλι το πρόβλημα από τη θεωρία πιθανοτήτων στο οποίο ρίχνουμε μπάλες με πιθανότητα $\frac{1}{m}$ σε m καλάθια. Τα φορτία των χρηστών αντιστοιχούν στις μπάλες και οι ακμές του δικτύου στα καλάθια. Πρέπει με κάποιο τρόπο να μοντελοποιήσουμε το ότι στη γενική περίπτωση τα φορτία των χρηστών είναι διαφορετικά, δηλαδή και οι μπάλες πρέπει να χαρακτηρίζονται από κάποιο βάρος, ώστε να μη γεμίζουν ισοδύναμα τα καλάθια.

Όμως για να χρησιμοποιηθούν τα αποτελέσματα από τη θεωρία πιθανοτήτων, πρέπει όλες οι μπάλες να έχουν το ίδιο βάρος. Αυτό επιτυγχάνεται με τη "συγχώνευση μπαλών" (ball fusion). Δύο μπάλες με βάρη α και β, που ρίχνονται στο καλάθι j με πιθανότητες p_α^j και p_β^j αντίστοιχα, μπορούν να ενωθούν σε μία με βάρος $\alpha + \beta$ και πιθανότητα $\frac{p_\alpha^j \alpha + p_\beta^j \beta}{\alpha+\beta}$ χωρίς να αλλάξει το αναμενόμενο βάρος σε μια ακμή, άρα και οι πιθανότητες των άλλων μπαλών (χρηστών) στην Nash ισορροπία. Αποδεικνύεται ότι το κοινωνικό κόστος μετά τη συγχώνευση είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κοινωνικό κόστος πριν τη συγχώνευση. Αυτό δε μας λέει τίποτα για το κόστος της αναρχίας, γιατί μετά τη συγχώνευση πιθανόν να αλλάζει και το βέλτιστο.

Εφαρμόζουμε την παραπάνω συγχώνευση για τις δύο μπάλες με το μικρότερο βάρος κάθε φορά, εώς ότου όλες οι μπάλες έχουν βάρος στο διάστημα $[\max_i w_i, 2\max_i w_i]$. Με οποιοδήποτε συνδυασμό βαρών καταλήγουμε στο παραπάνω διάστημα. Δηλαδή όλες οι μπάλες που έχουμε τελικά έχουν βάρη που διαφέρουν μεταξύ τους το πολύ κατά ένα παράγοντα 2. Το κοινωνικό κόστος τώρα είναι το πολύ όσο το κοινωνικό κόστος όταν όλες οι μπάλες έχουν βάρος $2\max_i w_i$, δηλαδή $O(\frac{\ln m}{\ln \ln m})$. □

Θεώρημα 5.6. *[CV02] Το κόστος της αναρχίας σε ένα δίκτυο με m παράλληλες ακμές είναι $\Theta(\frac{\ln m}{\ln \ln \ln m})$.*

Κεφάλαιο 6

Τρόποι Βελτίωσης της Nash Ισορροπίας

Όπως είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, τα Nash σημεία ισορροπίας δεν έχουν συνήθως το ελάχιστο δυνατό κόστος για το σύστημα. Στο μοντέλο των μεικτών στρατηγικών (κεφάλαιο 5), αν είναι γνωστή η βέλτιστη δρομολόγηση, οι χρήστες έχουν συμφέρον να την εφαρμόσουν. Αντίθετα, στα μοντέλα της μοιραζόμενης ροής (κεφάλαιο 3) και της απειροστής ροής (κεφάλαιο 4), ακόμα και όταν είναι γνωστή η βέλτιστη δρομολόγηση, δεν έχουν πάντα συμφέρον να την ακολουθήσουν. Αν υπήρχε κάποια κεντρική αρχή που μπορούσε να επιβάλλει στους χρήστες πώς να δρομολογήσουν τη ροή τους το πρόβλημα θα λυνόταν. Όμως επειδή θεωρούμε ότι στο σύστημα δεν υπάρχει κάποια τέτοια κεντρική αρχή, έχουν προταθεί διάφοροι τρόποι βελτίωσης της Nash ισορροπίας. Θα μπορούσε για παράδειγμα, να σχεδιαστεί κατάλληλα το δίκτυο, ώστε αφενός να αποφεύγονται καταστάσεις σαν το παράδοξο του Braess και αφετέρου να συντονίζονται οι χρήστες (ενότητα 6.1). Επίσης, έχει μελετηθεί μια παραλλαγή, στην οποία ελέγχεται ένα μέρος της συνολικής κίνησης κεντρικά και να δρομολογείται κατάλληλα (ενότητα 6.2). Τέλος, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα πιο δίκαιο "βέλτιστο" στο οποίο οι χρήστες να θέλουν να δρομολογούνται σύμφωνα με το κοινωνικό βέλτιστο (ενότητα 6.3).

6.1 Σχεδιασμός Δικτύου

Ένας τρόπος που προτείνεται στη βιβλιογραφία για την επίτευξη καλύτερων σημείων ισορροπίας για το σύστημα είναι ο κατάλληλος σχεδιασμός του δικτύου. Πριν τεθεί το σύστημα σε λειτουργία (όταν ακόμα σχεδιάζουμε το δίκτυο) μπορούμε να αυξήσουμε τη χωρητικότητα σε ορισμένες ακμές στο μοντέλο της μοιραζόμενης ροής και να αφαιρέσουμε κάποιες ακμές από το δίκτυο στο μοντέλο της απειροστής ροής. Επίσης μπορούμε να εισάγουμε φόρους στις ακμές του δικτύου ή να προσδιορίσουμε κάποια σειρά προτεραιότητας με την οποία κάθε ακμή θα στέλνει τα φορτία της.

6.1.1 Μοντέλο Μοιραζόμενης Ροής

Θεωρούμε το μοντέλο μοιραζόμενης ροής με συναρτήσεις κόστους τύπου C, δηλαδή οι συναρτήσεις καθυστέρησης είναι:

$$T^j(f^j) = \begin{cases} \frac{1}{c^j - f^j} & f^j < c^j \\ \infty & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

όπου c^j η χωρητικότητα της ακμής j και f^j η συνολική ροή που δρομολογείται στην ακμή j.

Ο σχεδιασμός δικτύου γίνεται ως εξής [KLO95], [KLO97]: Θεωρούμε δεδομένο έναν αρχικό γράφο (δίκτυο), στον οποίο κάθε ακμή j έχει χωρητικότητα c^j, και έχουμε διαθέσιμη επιπλέον χωρητικότητα Δ. Θέλουμε να κατανείμουμε αυτή την επιπλέον χωρητικότητα (ή ένα μέρος της) στις ακμές του δικτύου, ώστε να βελτιώσουμε την απόδοσή του. Συμβολίζουμε τις νέες χωρητικότητες των ακμών $\hat{c}^j$ και ισχύει: $\hat{c}^j \geq c^j$ για κάθε ακμή j. Επίσης, αφού η επιπλέον διαθέσιμη χωρητικότητα είναι Δ: $\sum_{j=1}^{m}(\hat{c}^j - c^j) \leq \Delta$.

Δύο διανύσματα χωρητικοτήτων μπορούν να συγκριθούν αφενός ως προς το κόστος κάθε χρήστη i και αφετέρου ως προς το συνολικό κόστος των χρηστών. Προφανώς αν σε ένα διάνυσμα χωρητικοτήτων $\hat{c}$, όλοι οι χρήστες i έχουν μικρότερο κόστος από ότι στο διάνυσμα χωρητικοτήτων $\bar{c}$, τότε και το συνολικό κόστος των χρηστών είναι μικρότερο με τις χωρητικότητες $\hat{c}$ (από ότι με τις $\bar{c}$).

Αποδεικνύεται, ότι όταν έχουμε δίκτυο παράλληλων ακμών και συναρτήσεις κόστους τύπου C, η αύξηση της χωρητικότητας δεν χειροτερεύει την απόδοση του δικτύου (όπως συμβαίνει με το παράδοξο του Braess). Η βέλτιστη κατανομή της επιπλέον χωρητικότητας Δ είναι να ανατεθεί όλη στην ακμή με τη μικρότερη χωρητικότητα. Αν θεωρήσουμε τις ακμές σε μη φθίνουσα σειρά ($c^1 \leq c^2 \leq \ldots \leq c^m$), η βέλτιστη ανάθεση είναι:

- $\hat{c}^1 = c^1 + \Delta$
- $\hat{c}^j = c^j$, για κάθε $j \neq 1$

6.1.2 Μοντέλο Απειροστής Ροής

Με δεδομένο ένα στιγμιότυπο (G, r, l), όπου G ο γράφος του δικτύου, l οι συναρτήσεις καθυστέρησης στις ακμές του και r η συνολική ροή που πρέπει να δρομολογηθεί σε αυτό με κοινή αφετηρία και κοινό προορισμό, ψάχνουμε τον υπογράφο που ελαχιστοποιεί τη μέση καθυστέρηση των ιδιοτελών χρηστών που απαρτίζουν τη ροή r. Θέλουμε δηλαδή να αφαιρέσουμε από το γράφο εκείνες τις ακμές που μειώνουν την απόδοση του συστήματος ή ισοδύναμα αυξάνουν τη μέση καθυστέρηση. Για παράδειγμα, στο παράδοξο του Braess (σχήμα 2.1), θα αφαιρούσαμε την ακμή vw και η μέση καθυστέρηση των χρηστών στην Nash ισορροπία θα μειωνόταν από 2 σε 3/2. Η αφαίρεση μιας ακμής e από το δίκτυο ισοδυναμεί με το να απειρίσουμε τη συνάρτηση καθυστέρησης σε αυτήν ($l_e = \infty$).

Για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, αποδεικνύεται [Rou01a]το παρακάτω θεώρημα μη-προσεγγισιμότητας.

Θεώρημα 6.1. *Έστω το στιγμιότυπο (G, r, l), όπου όλες οι ακμές έχουν γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης ($l_e(x) = a_e x + b_e$). Για κάθε $\epsilon > 0$ δεν υπάρχει $\frac{4}{3} - \epsilon$ προσεγγιστικός αλγόριθμος για την εύρεση του βέλτιστου υπογράφου H, εκτός αν P=NP.*

Δηλαδή, αν θεωρήσουμε πολύ μικρό ϵ, βλέπουμε ότι όταν έχουμε γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε τη βέλτιστη λύση περισσότερο από 4/3. Όμως σύμφωνα με το θεώρημα 5.2, 4/3 είναι το κόστος της αναρχίας για γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης. Συνεπώς ο απλοϊκός αλγόριθμος που απλά επιστρέφει τον αρχικό γράφο G (χωρίς να αφαιρέσει καμία ακμή) είναι βέλτιστος, αφού η μέση καθυστέρηση του στιγμιοτύπου (G, r, l) είναι το πολύ 4/3 επί τη μέση καθυστέρηση του στιγμιοτύπου (H, r, l) για οποιοδήποτε υπογράφο H του G εξ ορισμού του κόστους της αναρχίας.

Για τη γενική περίπτωση που θεωρούμε οποιεσδήποτε συναρτήσεις καθυστέρησης σε ένα δίκτυο με n κόμβους, αποδεικνύεται [Rou01a] ότι η λύση που επιστρέφει ο απλοϊκός αλγόριθμος (δηλαδή ολόκληρος ο αρχικός γράφος G) έχει κόστος (μέση καθυστέρηση) το πολύ $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ φορές το κόστος της βέλτιστης λύσης. Αυτή όμως είναι η καλύτερη προσέγγιση, αφού αποδεικνύεται ότι:

Θεώρημα 6.2. *Για κάθε $\epsilon > 0$ δεν υπάρχει $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ προσεγγιστικός αλγόριθμος, εκτός αν P=NP.*

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα της εύρεσης ενός υπογράφου H του αρχικού γράφου του δικτύου G, στον οποίο η Nash ισορροπία να έχει ελάχιστη μέση καθυστέρηση. Μια άλλη ιδέα είναι να κρατήσουμε ολόκληρο το γράφο G και να εισάγουμε φόρους στις ακμές του [YR], έτσι ώστε να προκύπτει καλό Nash σημείο ισορροπίας για το σύστημα. Προφανώς, όταν σε μια ακμή θέτουμε πολύ μεγάλο φόρο είναι σαν την βγάζουμε από το δίκτυο, αφού κανένας χρήστης δε θα έχει συμφέρον να τη χρησιμοποιήσει. Συμβολίζουμε με τ τους φόρους στις ακμές και το στιγμιότυπο με φόρους τ, συναρτήσεις καθυστέρησης l, κίνηση r και γράφο G: $(G, r, l + \tau)$. Οι φόροι τ είναι "στην ίδια μονάδα μέτρησης" με τις συναρτήσεις καθυστέρησης l. Αντί να εισάγουμε φόρους, θα μπορούσαμε ισοδύναμα να αυξάναμε τις συναρτήσεις καθυστέρησης. Όλες οι απειροστές ροές (χρήστες) θα επιλέξουν τις ακμές e με το ελάχιστο κόστος $l_e(f) + \tau_e$. Στη βέλτιστη δρομολόγηση ελαχιστοποιείται το συνολικό κόστος: $C(f, \tau) = \sum_{e \in E} [l_e(f_e) + \tau_e] f_e$.

Λέμε ότι οι φόροι είναι οριακού κόστους, όταν κάθε χρήστης της ακμής e, πληρώνει φόρο ίσο με την καθυστέρηση που προκαλεί στους άλλους χρήστες της e. Με δεδομένη λοιπόν κάποια εφικτή ροή f, ο φόρος σε κάθε ακμή του δικτύου e είναι $\tau_e = f_e \cdot \frac{dl_e(f_e)}{df_e}$, αφού κάθε χρήστης αυξάνει τη καθυστέρηση στην ακμή κατά $\frac{dl_e(f_e)}{df_e}$. Αν f^* η βέλτιστη ροή για το (G, r, l), η ροή f^* αποτελεί Nash ισορροπία για το $(G, r, l + \tau)$, όπου οι φόροι τ είναι οριακού κόστους. Πράγματι, το στιγμιότυπο $(G, r, l + \tau)$ ισοδυναμεί με το (G, r, l^*), όπου για κάθε ακμή e οι συναρτήσεις καθυστέρησης l^* είναι: $l^*_e(f_e) = l_e(f_e) + f_e \cdot \frac{dl_e(f_e)}{df_e}$, οπότε η προηγούμενη πρόταση προκύπτει από το λήμμα 4.3.

Στην περίπτωση που έχουμε αποκλειστικά γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, η επιβολή φόρων οριακού κόστους δε μειώνει το συνολικό κόστος της Nash ισορροπίας, δηλαδή αν f Nash ισορροπία για το (G, r, l) και f^τ Nash ισορροπία για το $(G, r, l + \tau)$ είναι $C(f, 0) \leq C(f^\tau, \tau)$. Για τις γραμμικές συναρτήσεις, αποδεικνύεται επίσης ότι η εισαγωγή οποιωνδήποτε φόρων δεν έχει καλύτερα αποτελέσματα από την αφαίρεση ακμών. Υπάρχουν όμως συναρτήσεις καθυστέρησης, για τις οποίες η εισαγωγή φόρων έχει καλύτερα αποτελέσματα από την απομάκρυνση ακμών.

Αντίστοιχα με τα θεωρήματα 6.1 και 6.2, προκύπτουν αποτελέσματα μη προσεγγισιμότητας για το πρόβλημα της βέλτιστης εισαγωγής φόρων. Για την περίπτωση που έχουμε γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης, δεν υπάρχει $(\frac{4}{3} - \epsilon)$-προσεγγιστικός αλγόριθμος, εκτός αν P=NP. Επίσης σε ένα δίκτυο n ακμών με οποιεσδήποτε συναρτήσεις καθυστέρησης, δεν υπάρχει $O(n^{1-\epsilon})$-προσεγγιστικός αλγόριθμος (εκτός αν P=NP). Από τα παραπάνω προκύπτει, ότι αν $P \neq NP$, ο απλοϊκός αλγόριθμος που θέτει σε όλες τις ακμές μηδενικούς φόρους ($\tau_e = 0$ για κάθε ακμή e) είναι βέλτιστος όταν έχουμε γραμμικές συναρτήσεις καθυστέρησης (αφού το κόστος της αναρχίας είναι $4/3$) και σχεδόν βέλτιστος σε οποιοδήποτε δίκτυο n ακμών. Πράγματι, η εισαγωγή μηδενικών φόρων ισοδυναμεί με το να μην αφαιρείται καμιά ακμή από το δίκτυο, οπότε το κόστος σε ένα δίκτυο n κόμβων είναι το πολύ $\frac{n}{2}$ φορές το βέλτιστο, δηλαδή $O(n)$.

6.1.3 Μεικτές Στρατηγικές

Για το μοντέλο των μεικτών στρατηγικών, το πρόβλημα είναι διαφορετικής φύσης. Το κοινωνικό κόστος (SC) ορίζεται έτσι ώστε στη βέλτιστη δρομολόγηση το σύστημα να είναι όσο το δυνατόν πιο δίκαιο (όλες οι ακμές να έχουν σχεδόν την ίδια καθυστέρηση) και όχι να ελαχιστοποιείται το μέσο κόστος των χρηστών. Βέβαια δεν είναι πάντα εφικτό τα φορτία των χρηστών να μοιραστούν έτσι στις ακμές, ώστε όλες να έχουν ακριβώς την ίδια καθυστέρηση, οπότε κάποιοι χρήστες μπορεί να νοιώθουν ότι αδικούνται επειδή κάποιοι άλλοι σε άλλες ακμές έχουν μικρότερο κόστος. Σε καμία περίπτωση όμως δεν έχει κάποιος συμφέρον να αποκλίνει από τη βέλτιστη δρομολόγηση. Το κόστος της αναρχίας στην περίπτωση αυτή προκύπτει επειδή οι χρήστες δεν έχουν τη δυνατότητα να συνεργαστούν μεταξύ τους και όχι επειδή δε θέλουν. Προτείνεται λοιπόν ο σχεδιασμός μηχανισμών που συντονίζουν τους χρήστες για να καταλήξουν στη βέλτιστη δρομολόγηση. Οι μηχανισμοί αυτοί λέγονται μηχανισμοί συντονισμού (coordination mechanisms).

Ένας μηχανισμός συντονισμού σχεδιάζεται έτσι ώστε να ωθήσει τους χρήστες να καταλήξουν σε ένα σημείο ισορροπίας, που είναι καλό για το σύστημα, δηλαδή κατά κάποιο τρόπο τους αναγκάζει να συνεργαστούν. Ένας μηχανισμός συντονισμού μπορεί να προσθέτει κόστη στο σύστημα. Έχουμε δηλαδή m παράλληλες ακμές (αγαθά) και n χρήστες (παίκτες) με φορτία $w_1, w_2, \ldots, w_n$, κάθε ένας από τους οποίους θέλει να χρησιμοποιήσει τις ακμές έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο αποστολής του φορτίου του, σύμφωνα με το μοντέλο των μεικτών στρατηγικών. Ένας μηχανισμός συντονισμού πρέπει να πληρεί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Οι καθυστερήσεις (κόστη) σε κάθε ακμή εξαρτώνται μόνο από τα φορτία που δρομολογούνται σε αυτή (τοπικότητα).
- Όταν ένα φορτίο δεν δρομολογείται σε μια ακμή, έχει μηδενικό κόστος από την ακμή αυτή.
- Το κόστος ενός φορτίου w σε μια ακμή με χωρητικότητα c είναι τουλάχιστον $\frac{w}{c}$.

Στη συνέχεια ασχολούμαστε αποκλειστικά με δίκτυα παράλληλων ακμών στα οποία όλες οι ακμές έχουν την ίδια χωρητικότητα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι η χωρητικότητα αυτή είναι μοναδιαία.

Έστω ένα δίκτυο με δύο παράλληλες ακμές ($m = 2$), το οποίο χρησιμοποιούν δύο παίκτες ($n = 2$) με φορτία w_1 και w_2, όπου $w_1 \geq w_2$. Το κόστος της αναρχίας είναι $3/2$, σύμφωνα με το θεώρημα 5.2. Αυτό το κόστος της αναρχίας προκύπτει όταν οι χρήστες παίζουν με πλήρως μεικτές στρατηγικές, δηλαδή με πιθανότητες $p_i^j = \frac{1}{2}$. Όταν ένας από τους δύο παίξει γνήσια στρατηγική και στείλει όλο το φορτίο του στη μία ακμή, ο άλλος παίκτης έχει όφελος να στείλει το φορτίο του στην άλλη ακμή. Ο μηχανισμός συντονισμού πρέπει κάπως να "αναγκάζει" τους χρήστες να δρομολογήσουν τα φορτία τους σε διαφορετικές ακμές . Ένας τρόπος είναι η μια ακμή να εξυπηρετεί τα φορτία κατά φθίνουσα σειρά και η άλλη κατά αύξουσα. Έτσι το φορτίο w_1 έχει όφελος να δρομολογηθεί στην ακμή που εξυπηρετεί τα φορτία κατά αύξουσα σειρά και το w_2 στην άλλη που εξυπηρετεί τα φορτία κατά φθίνουσα σειρά. Με αυτό τον τρόπο το κόστος της αναρχίας είναι 1, δηλαδή επιτυγχάνεται πάντα βέλτιστη δρομολόγηση των φορτίων.

Ο παραπάνω μηχανισμός συντονισμού είναι βέλτιστος και για την περίπτωση που έχουμε δύο παράλληλες ακμές και τρεις χρήστες με φορτία w_1, w_2, w_3, όπου $w_1 \geq w_2 \geq w_3$. Η βέλτιστη δρομολόγηση είναι τα δύο μικρότερα φορτία να πάνε στην ίδια ακμή και το μεγαλύτερο στην άλλη, πράγμα που επιτυγχάνεται με αυτό τον μηχανισμό συντονισμού. Συνεπώς το κόστος της αναρχίας είναι 1.

Στην περίπτωση που έχουμε 2 παράλληλες ακμές και 4 χρήστες όμως, ο παραπάνω μηχανισμός συντονισμού δεν επιτυγχάνει πάντα το βέλτιστο (το κόστος της αναρχίας δεν είναι 1). Ας δούμε την περίπτωση που $w_1 = w_2 = 2$ και $w_3 = w_4 = 1$ και έστω ότι η ακμή 1 στέλνει τα φορτία σε φθίνουσα σειρά και η 2 σε αύξουσα. Ο χρήστης 1 θα στείλει το φορτίο του (w_1) στην πρώτη ακμή, γιατί εκεί σίγουρα θα εξυπηρετηθεί πρώτο. Αντίστοιχα το φορτίο w_4 θα δρομολογηθεί στην ακμή 2. Ο χρήστης 3 τώρα ξέρει ότι στην ακμή 2 το φορτίο του θα έχει καθυστέρηση 2, ενώ στην ακμή 1 τουλάχιστον 3, επομένως θα δρομολογήσει το φορτίο w_3 στην ακμή 2. Τέλος για τον χρήστη 2 και οι δύο ακμές είναι ισοδύναμες, γιατί και στις δύο θα έχει κόστος 4.

Με αυτό το μηχανισμό συντονισμού, το σύστημα έχει κόστος 4, ενώ με βέλτιστη δρομολόγηση το κόστος θα ήταν 3 (το φορτίο w_1 θα δρομολογούταν μαζί με το w_4 και το w_2 μαζί με το w_3. Αποδεικνύεται (αν πάρουμε περιπτώσεις για τις σχέσεις των φορτίων μεταξύ τους) ότι αυτή είναι η χειρότερη περίπτωση. Συνεπώς, το κόστος της αναρχίας αυτού του μηχανισμού συντονισμού για δύο ακμές και τέσσερις παίκτες είναι 4/3. Ο μηχανισμός αυτός λοιπόν δεν είναι βέλτιστος, αλλά μειώνει το κόστος της αναρχίας από 3/2 σε 4/3.

Το πρόβλημα με τον παραπάνω μηχανισμό στους 4 χρήστες προκύπτει στις περιπτώσεις που στη βέλτιστη δρομολόγηση το μικρότερο φορτίο (w_4) πρέπει να είναι στην ίδια ακμή με το μεγαλύτερο (w_1). Μια λύση λοιπόν θα μπορούσε να είναι να δρομολογείται πάντα το w_1 με το w_4 και το w_2 με το w_3. Σε αυτό τον μηχανισμό προκύπτει πρόβλημα όταν στη βέλτιστη δρομολόγηση τα τρία μικρότερα φορτία πάνε στην ίδια ακμή και το μεγαλύτερο στην άλλη, όταν δηλαδή

$$w_1 \geq w_2 + w_3 + w_4 \tag{6.1}$$

Ο λόγος της αναρχίας είναι $R = \frac{w_1+w_4}{w_1} = 1 + \frac{w_4}{w_1}$. Το κόστος της αναρχίας R γίνεται μέγιστο όταν μεγιστοποιείται ο λόγος $\frac{w_4}{w_1}$. Το φορτίο w_4 έχουμε υποθέσει ότι είναι το μικρότερο φορτίο, οπότε λόγω της 6.1 είναι το πολύ $\frac{w_1}{3}$.

Επομένως το κόστος της αναρχίας είναι 4/3- όσο δηλαδή και στον προηγούμενο μηχανισμό συντονισμού.

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με πολύ συγκεκριμένες περιπτώσεις: οι χρήστες ήταν 2, 3 ή 4 και το δίκτυο είχε ακριβώς δύο παράλληλες ακμές. Για τη γενική περίπτωση που το δίκτυο έχει m παράλληλες ακμές αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 6.3. *Σε ένα δίκτυο με m παράλληλες ακμές ίδιας χωρητικότητας, υπάρχει μηχανισμός συντονισμού με κόστος αναρχίας $\frac{4}{3} - \frac{1}{3m}$.*

Στη γενική περίπτωση που έχουμε m ακμές ίδιας χωρητικότητας, μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξής ιδέα: Κάθε ακμή j στέλνει τα φορτία της σε φθίνουσα σειρά και προσθέτει καθυστερήσεις ώστε να τελειώνει την εξυπηρέτηση ενός φορτίου μόνο τις χρονικές στιγμές t, όπου $t = j - 1 (\mod m)$. Αν δηλαδή έχουμε δύο ακμές, η μία θα τελειώνει τις ζυγές χρονικές στιγμές και η άλλη τις μονές. Έτσι κάθε φορτίο έχει συμφέρον να δρομολογηθεί σε ακριβώς μία ακμή και σπάει η συμμετρία.

Με ένα παράδειγμα μπορούμε να δούμε ότι το κόστος της αναρχίας είναι τουλάχιστον 7/6. Όταν τα βάση των παικτών είναι 3,3,2,2, και το δίκτυο έχει δύο ακμές, στη βέλτιστη δρομολόγηση τα τριάρια χωρίζονται και το κόστος είναι 5. Αν τα τριάρια δεν χωριστούν, το κόστος είναι 6, οπότε το κόστος της αναρχίας είναι 6/5. Από την άλλη όταν τα βάρη των παικτών είναι 3,3,2,2,2 και το δίκτυο έχει πάλι δύο ακμές, τα τριάρια πρέπει να πάνε στην ίδια ακμή. Το ελάχιστο κόστος είναι λοιπόν 6, ενώ αν τα τριάρια πάνε σε διαφορετικές ακμές το κόστος είναι 7. Συνεπώς το κόστος της αναρχίας σε αυτή την περίπτωση είναι 7/6. Λόγω της τοπικότητας που υποθέσαμε ότι πρέπει να ισχύει στον μηχανισμό, κάθε ακμή δεν μπορούν να διακρίνουν ανάμεσα στις δύο αυτές περιπτώσεις, γιατί λειτουργεί μόνο βάσει των φορτίων που δρομολογούνται σε αυτή (και όχι όλων των φορτίων του συστήματος). Επομένως, το κόστος της αναρχίας είναι τουλάχιστον $\max(\frac{6}{5}, \frac{7}{6}) = \frac{7}{6}$.

6.2 Stackelberg Δρομολόγηση

Μέχρι τώρα είδαμε τι μπορεί να γίνει πριν αρχίσει να λειτουργεί το δίκτυο (provisioning phase), ώστε αυτό να έχει καλύτερη απόδοση, δηλαδή καλύτερα Nash σημεία ισορροπίας. Η Stackelberg δρομολόγηση είναι ένας τρόπος να επιτευχθούν καλύτερα σημεία ισορροπίας, την ώρα που λειτουργεί το σύστημα (run-time phase). Η ιδέα της Stackelberg προέρχεται από τα παιχνίδια Stackelberg. Σε αυτά τα παιχνίδια, υπάρχει ένας αρχηγός (leader) και πολλά απλοί παίκτες (followers). Ο αρχηγός με τις κινήσεις του, επηρεάζει τις κινήσεις των απλών παικτών και συνεπώς και το αποτέλεσμα του παιχνιδιού.

Οι έννοιες των Stackelberg παιχνιδιών επεκτείνονται τόσο στο μοντέλο της μοιραζόμενης ροής [KLO95] όσο και στο μοντέλο της απειροστής ροής [Rou01b]ως εξής:

- Οι απλοί παίκτες (followers) είναι οι ιδιοτελείς χρήστες του δικτύου.
- Ο αρχηγός είναι η κεντρική αρχή και ελέγχει κεντρικά μέρος της συνολικής ροής.

Στο μοντέλο της μοιραζόμενης ροής, ο αρχηγός θεωρείται ότι είναι ένας χρήστης που θέλει να δρομολογήσει ροή ίση με την κεντρικά ελεγχόμενη ροή. Η διαφορά του με τους υπόλοιπους χρήστες είναι ότι δε δρομολογεί τη ροή του ιδιοτελώς, αλλά με σκοπό να φέρει το σύστημα σε κάποιο καλό σημείο ισορροπίας. Ο αρχηγός (leader) γνωρίζει τον ιδιοτελή χαρακτήρα των υπόλοιπων χρηστών.

Στο μοντέλο της απειροστής ροής, η κεντρική αρχή θεωρείται ότι ελέγχει ποσοστό της συνολικής κίνησης. Δε μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί σαν ένας χρήστης του συστήματος, αφού οι χρήστες στο μοντέλο αυτό έχουν απειροστή ροή, ενώ η κεντρική αρχή μπορεί να ελέγχει πεπερασμένο ποσοστό της συνολικής ροής. Ένα Stackelberg στιγμιότυπο συμβολίζεται (G, r, l, β), όπου τα G, r, l ορίζονται όπως προηγουμένως και $\beta \in [0, 1]$ το ποσοστό της κίνησης που ελέγχεται κεντρικά. Θεωρούμε ότι όλη η κίνηση r έχει την ίδια αφετηρία και τον ίδιο προορισμό.

Διαισθητικά καταλαβαίνουμε ότι, στη Stackelberg δρομολόγηση η κεντρικά ελεγχόμενη ροή θα δρομολογείται γενικά στα πιο αργά μονοπάτια που χρησιμοποιούνται στην βέλτιστη ισορροπία, γιατί οι ιδιοτελείς χρήστες έτσι και αλλιώς θα δρομολογηθούν στα πιο γρήγορα. Ο αλγόριθμος αυτός, που ταξινομεί τα μονοπάτια που χρησιμοποιούνται στη βέλτιστη δρομολόγηση από το πιο αργό στο πιο γρήγορο και στη συνέχεια τα "γεμίζει" με την κεντρικά ελεγχόμενη ροή, ονομάζεται LLF (Largest Latency First). Αποδεικνύεται ότι στο μοντέλο της απειροστής ροής, όταν έχουμε δίκτυο παράλληλων ακμών το συνολικό κόστος που προκύπτει από τον αλγόριθμο LLF είναι το πολύ β φορές το βέλτιστο (ελάχιστο) κόστος. Το αποτέλεσμα αυτό είναι σημαντικό, αφού στα δίκτυα παράλληλων ακμών με τυχαίες συναρτήσεις καθυστέρησης το κόστος της αναρχίας δεν φράσσεται από πάνω.

6.3 Περιορισμοί μήκους

Στην ενότητα αυτή θεωρούμε ότι έχουμε το μοντέλο της απειροστής ροής και ότι υπάρχει μια υπηρεσία που μπορεί να υπολογίζει τη βέλτιστη δρομολόγηση των χρηστών και να τους ενημερώνει. Αυτό γίνεται για παράδειγμα στα οδικά δίκτυα με τα συστήματα καθοδήγησης δρομολόγησης (route-guidance systems). Οι χρήστες όμως που στη βέλτιστη δρομολόγηση δρομολογούνται σε αργά μονοπάτια για το καλό των υπολοίπων, έχουν συμφέρον να μην ακολουθήσουν τις οδηγίες του συστήματος. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί με τη δημιουργία ενός πιο δίκαιου "βέλτιστου", το οποίο δρομολογεί όλους τους χρήστες σε μονοπάτια που δε διαφέρουν πολύ μεταξύ τους [JMSM02],[SM03]. Για τον ορισμό του, χρειαζόμαστε την έννοια της κανονικής καθυστέρησης.

Ορισμός 6.4. *Η κανονική καθυστέρηση (normal travel time)* $\bar{l}_e$ *μιας ακμής* e *είναι η καθυστέρηση που πιστεύουν οι χρήστες ότι έχει η ακμή* e.

Με βάση τις κανονικές καθυστερήσεις στις ακμές, υπολογίζονται οι κανονικές καθυστερήσεις στα μονοπάτια. Σε κάθε μονοπάτι P, η κανονική καθυστέρηση (δηλαδή η καθυστέρηση που πιστεύουν ότι θα υποστούν σε αυτό οι χρήστες) είναι: $\bar{l}_P = \sum_{e \in P} \bar{l}_e$. Συμβολίζουμε με $\bar{L}_i$ την ελάχιστη κανονική καθυστέρηση σε όλα τα $s_i - t_i$ μονοπάτια. Δηλαδή κάθε απειροστή ροή της κίνησης r_i που έχει ως κόμβο αφετηρίας τον s_i και προορισμού τον t_i, περιμένει ότι θα έχει καθυστέρηση τουλάχιστον $\bar{L}_i$.

Για κάποιο $\gamma \geq 0$, ορίζουμε το σύνολο των μονοπατιών $\mathcal{P}_\gamma$ ως το υποσύνολο όλων των μονοπατιών $\mathcal{P}$, που περιέχει για όλα τα αγαθά (commodities) τα μονοπάτια $P \in P_i$ για τα οποία ισχύει: $\bar{l}_P \leq (1+\gamma)\bar{L}_i$. Οι χρήστες τώρα πρέπει να δρομολογηθούν μόνο σε μονοπάτια του συνόλου $\mathcal{P}_\gamma$. Για κάποιο $\gamma \geq 0$, συμβολίζουμε το στιγμιότυπο (G, r, l, γ), όπου τα G, r, l ορίζονται όπως προηγουμένως.

Το βέλτιστο του στιγμιοτύπου (G, r, l, γ) είναι η λύση του παρακάτω συστήματος:

Σύστημα Εξισώσεων 6.5.

$$\min \sum_{e \in E} l_e(f_e) f_e$$

με περιορισμούς:

$$\begin{aligned}
&\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P = r_i, \forall i \in \{1, 2, ..., k\} \\
&f_e = \sum_{P \in \mathcal{P}: e \in P} f_P, \forall e \in E \\
&f_P \geq 0, \forall P \in \mathcal{P}_\gamma \\
&f_P = 0, \forall P \in \bar{\mathcal{P}}_\gamma
\end{aligned}$$

Συμβολίζουμε με f^*_γ το βέλτιστο του στιγμιοτύπου (G, r, l, γ).

Ορίζουμε επίσης την αποδοτικότητα (efficiency) για ένα στιγμιότυπο (G, r, l, γ) ως εξής:

$$\rho(G, r, l, \gamma) = \frac{C(f)}{C(f^*_\gamma)}$$

Αν f^* η βέλτιστη ροή του (G, r, l) και f^*_γ η γ-βέλτιστη ροή του (G, r, l, γ) είναι $C(f^*) \leq C(f^*_\gamma)$, γιατί η ροή f^*_γ χρησιμοποιεί ένα υποσύνολο των μονοπατιών που χρησιμοποιεί η f^*. Συνεπώς είναι $\rho(G, r, l, \gamma) \leq \rho(G, r, l)$ για οποιοδήποτε $\gamma \geq 0$, όπου $\rho(G, r, l)$ το κόστος της αναρχίας.

Η λογική πίσω από την εύρεση της γ-βέλτιστης ροής είναι ότι θυσιάζουμε ένα ποσοστό της απόδοσης του δικτύου, ώστε το γ-βέλτιστο να είναι υλοποιήσιμο. Θεωρούμε επίσης ότι οι χρήστες δέχονται να δρομολογηθούν σε κάποιο μονοπάτι που έχει καθυστέρηση το πολύ κατά έναν μικρό παράγοντα γ μεγαλύτερη από την ελάχιστη.

Βιβλιογραφικές Αναφορές

[ABJS00] Eitan Altman, Tamer Basar, Tania Jimenez, and Nahum Shimkin. Competitive routing in networks with polynomial cost. In *INFOCOM (3)*, pages 1586–1593, 2000.

[CV02] A. Czumaj and B. Vocking. Tight bounds for worst-case equilibria. In *Proceedings of the 13th Annual Symposium on Discrete Algorithms*, 2002.

[FKK+02] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis, Elias Koutsoupias, Marios Mavronicolas, and Paul Spirakis. The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game. In *29-th International Colloquium on Automata,Languages and Programming*, pages 123–134, 2002.

[JMSM02] O. Jahn, R. Mohring, A. Schulz, and N. Moses. System-ortimal routing of traffic flows with user constraints in networks with congestion. In *MIT Sloan School of Management Working Paper*, number 4394-02, 2002.

[KLO95] Yannis A. Korilis, Aurel A. Lazar, and Ariel Orda. Architecting noncooperative networks. *IEEE Journal of Selected Areas in Communications*, 13(7):1241–1251, 1995.

[KLO97] Y. Korilis, A. Lazar, and A. Orda. Capacity allocation under noncooperative routing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:309–325, 1997.

[KMS02] Elias Koutsoupias, Marios Mavronicolas, and Paul Spirakis. Approximate equilibria and ball fusion. In *Proceedings of the 9th International Colloquium on Structural Information and Communication Complexity*, pages 404–413, 2002.

[KP99] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. *Lecture Notes in Computer Science*, 1563:404–413, 1999.

[Kre90] David M. Kreps. *A course in Microeconomic Theory.* Princeton University Press, 1990.

[Lue84] D. G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming.* Addison Wesley, 1984.

[MS01] Marios Mavronicolas and Paul Spirakis. The price of selfish routing. In *ACM Symposium on Theory of Computing*, 2001.

[Nas51] J. F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.

[ORS93] Ariel Orda, Raphael Rom, and Nahum Shimkin. Competitive routing in multiuser communication networks. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 1(5):510–521, 1993.

[Rou] Tim Roughgarden. How unfair is optimal routing?

[Rou01a] Tim Roughgarden. Designing networks for selfish users is hard. In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 472–481, 2001.

[Rou01b] Tim Roughgarden. Stackelberg scheduling strategies. In *ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 104–113, 2001.

[Rou02] Tim Roughgarden. Selfish routing, 2002.

[RT00] Tim Roughgarden and Eva Tardos. How bad is selfish routing? In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 93–102, 2000.

[SM03] A. Schulz and N. Moses. On the performance of user equilibria in traffic networks. In *MIT Sloan School of Management Working Paper*, number 4274-02, 2003.

[YR] Richard Cole Yevgeniy and Tim Roughgarden. How much can taxes help selfish routing?