



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Μελέτη Διάδοσης Χαμηλών Συχνοτήτων Στο Γήινο Περιβάλλον

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Νικόλαου Γ. Μπαμιεδάκη

Επιβλέπων : Νικόλαος Γ. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2003



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Μελέτη Διάδοσης Χαμηλών Συχνοτήτων Στο Γήινο Περιβάλλον

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

Νικόλαου Γ. Μπαμιεδάκη

Επιβλέπων : Νικόλαος Γ. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 16^η Ιουλίου 2003.

.....
Νικόλαος Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Χρήστος Καψάλης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δήμητρα Κακλαμάνη
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2003

.....
Νικόλαος Γεωργίου Μπαμιεδάκης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Νικόλαος Γεωργίου Μπαμιεδάκης, 2003.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ	5
ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ	7
ΠΕΡΙΛΗΨΗ	9
ABSTRACT	11
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ	13
1.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	15
1.2 ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ Η/Μ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.....	15
1.3 ΙΟΝΟΣΦΑΙΡΑ	16
1.3.1 Χαρακτηριστικά της Ιονόσφαιρας	16
1.3.2 Υπολογισμός διηλεκτρικής σταθεράς Ιονόσφαιρας.....	18
1.4 "ΛΙΘΟΣΦΑΙΡΑ ΚΑΙ ΜΑΝΔΥΑΣ"	22
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΛΥΣΗ ΤΟΥ Η/Μ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	25
2.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	27
2.2 ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ	27
2.3 ΜΕΛΕΤΗ ΤΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ	31
2.4 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΟΡΙΑΚΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΚΑΙ ΕΞΑΓΩΓΗ ΤΩΝ ΠΕΔΙΩΝ	33
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ Η/Μ ΠΕΔΙΩΝ	41
3.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	43
3.2 ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	43
3.3 ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ	46
3.4 ΕΥΡΕΣΗ ΠΟΛΩΝ	48
3.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ.....	57
3.6 ΧΕΙΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΒΡΟΧΟΤΟΜΩΝ	61
3.7 ΕΥΡΕΣΗ ΠΕΔΙΩΝ	64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ	71
4.1 ΠΡΟΛΟΓΟΣ.....	73
4.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΑΡΧΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	73
4.3 ΜΕΛΕΤΗ ΠΕΔΙΩΝ ΓΙΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ 1 ΚΗΖ.....	74
4.3.1 Μελέτη συνεισφοράς βροχοτομών	74
4.3.2 Εύρεση πόλων.....	76
4.3.3 Υπολογισμός των πεδίων	78
4.4 ΜΕΛΕΤΗ ΓΙΑ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ 6 ΚΗΖ.....	94
4.4.1 Τα αρχικά μεγέθη , οι ρίζες και οι βροχοτομές.....	94
4.4.2 Υπολογισμός των πεδίων	96
4.5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	104
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	105
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ BESSEL	105
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	109

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1 : Μοντελοποίηση της Γης.....	16
Σχήμα 1.2:Μεταβολή της πυκνότητας των ηλεκτρονίων της Ιονόσφαιρας σε σχέση με το ύψος από την επιφάνεια της Γής	17
Σχήμα 2.1 Γεωμετρία του Η/Μ προβλήματος.....	27
Σχήμα 3.1 : Ο δρόμος ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο λ	47
Διάγραμμα 3.2 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ σε λογαριθμική κλίμακα.....	52
Διάγραμμα 3.3 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ σε λογαριθμική κλίμακα.....	52
Διάγραμμα 3.4 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρεις διαφορετικές συχνότητες f_0, f_1, f_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα)	53
Διάγραμμα 3.5 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρεις διαφορετικές συχνότητες f_0, f_1, f_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα)	53
Διάγραμμα 3.6 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά ύψη H_0, H_1, H_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα)	54
Διάγραμμα 3.7 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά ύψη H_0, H_1, H_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα)	54
Διάγραμμα 3.8 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά πάχη L_0, L_1, L_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα)	55
Διάγραμμα 3.9 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά πάχη L_0, L_1, L_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα)	55
Διάγραμμα 3.10: Μεταβολή του πραγματικού και φανταστικού μέρους του παράγοντα τ σε σχέση με το πάχος L της λιθόσφαιρας.....	56
Σχήμα 3.11 : Χειρισμός των βροχοτομών.....	62
Σχήμα 4.1 : Μεταβολή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f_0(\lambda)$ πάνω στην βροχοτομή B_1	75
Σχήμα 4.2 : Μεταβολή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f_0(\lambda)$ πάνω στην βροχοτομή B_3	75
Πίνακας 4.1 Οι πόλοι του μαγνητικού δυναμικού για $f=1$ KHz	77
Διάγραμμα 4.3 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας E_{z_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz	79
Διάγραμμα 4.4 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας E_{z_0} σε σχέση με το ύψος z για διάφορες αποστάσεις ρ , $\varphi=90^\circ$	80
Διάγραμμα 4.5 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας E_{z_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz	80
Διάγραμμα 4.6 : Κανονικοποιημένο πολικό διάγραμμα του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας E_{z_0} σε σχέση με την γωνία φ από τον κάθετο άξονα x	81
Διάγραμμα 4.7 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας $E_{z_0}(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz	82
Διάγραμμα 4.8 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας $E_{z_0}(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με το ύψος z για $\rho=10$ km, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz	83
Διάγραμμα 4.9 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz.	84
Διάγραμμα 4.10 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με το ύψος z για διάφορες αποστάσεις ρ , $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz.....	84
Διάγραμμα 4.11 : Μεταβολή του ορίσματος της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz	85
Διάγραμμα 4.12 : Κανονικοποιημένο πολικό διάγραμμα του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την γωνία φ από τον κάθετο άξονα x	85
Διάγραμμα 4.13 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας $E_{x_0}(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km, $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz.....	86
Διάγραμμα 4.14 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{y_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=0^\circ$, για $f=1$ KHz.	87
Διάγραμμα 4.15 : Μεταβολή του ορίσματος της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=0^\circ$, για $f=1$ KHz.....	87
Διάγραμμα 4.16 : Κανονικοποιημένο πολικό διάγραμμα του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{y_0} σε σχέση με την γωνία φ από τον κάθετο άξονα x	88
Διάγραμμα 4.17 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας $E_{y_0}(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km, $\varphi=0^\circ$, για $f=1$ KHz.....	89

Διάγραμμα 4.18 : Μεταβολή του μέτρου των εφαπτομενικών συνιστωσών Hx_0 και Hy_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km , για $f=1$ KHz.....	90
Διάγραμμα 4.19 : Μεταβολή του ορίσματος των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου H_{z_0} , Hx_0 και Hy_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km, για $f=1$ KHz.....	90
Διάγραμμα 4.20 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_2 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz.....	92
Διάγραμμα 4.21 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_2 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz.....	92
Διάγραμμα 4.23 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για πάχος $L=2$ km για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz.....	93
Διάγραμμα 4.24 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορες τιμές του πάχους L , $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz.....	94
Πίνακας 4.2: Οι πόλοι του μαγνητικού δυναμικού για $f=6$ KHz.....	95
Διάγραμμα 4.25 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	96
Διάγραμμα 4.26 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	97
Διάγραμμα 4.27 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με το ύψος z για διάφορες αποστάσεις ρ , $\varphi=90^\circ$	98
Διάγραμμα 4.28 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας $Ez_0(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km , $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	98
Διάγραμμα 4.29 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας $Ez_0(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km , $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	99
Διάγραμμα 4.30 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας Ex_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=6$ KHz.....	100
Διάγραμμα 4.31 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας Ey_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=6$ KHz.....	100
Διάγραμμα 4.32 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_2 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	101
Διάγραμμα 4.33 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_2 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	101
Διάγραμμα 4.34: Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 ως προς την απόσταση ρ για διάφορες τιμές του ύψους H , $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.....	102
Διάγραμμα 4.35: Μεταβολή του κανονικοποιημένου ως προς την συχνότητα, μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 ως προς την απόσταση ρ για διάφορες τιμές της συχνότητας f , $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $H=60$ km.....	103
Διάγραμμα 4.36: Μεταβολή του κανονικοποιημένου ως προς την συχνότητα, μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 ως προς την απόσταση ρ για διάφορες τιμές της συχνότητας f , $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $H=100$ km.....	104

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπό της διπλωματικής αυτής εργασίας αποτελεί η μελέτη της διάδοσης χαμηλών συχνοτήτων στο γήινο περιβάλλον .Πιο συγκεκριμένα , αντιμετωπίζεται το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα εκπομπής χαμηλών συχνοτήτων από κάθετη βροχοκεραία που τοποθετείται πάνω στην επιφάνεια της γής λαμβάνοντας υπόψη την επίδραση της Ιονόσφαιρας και των στρωμάτων του εδάφους .Τα κυματοδηγούμενα πεδία προσδιορίζονται θεωρητικά και μελετάται η συμπεριφορά τους.

Αρχικά γίνεται σύντομη αναφορά στις διάφορες περιοχές της γής που ενδιαφέρουν την μελέτη αυτή και παρουσιάζονται οι ιδιαιτερότητες τους. Στην συνέχεια ,παρουσιάζεται η μορφή της λύση της κυματικής εξίσωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες και εκφράζονται με κατάλληλες ολοκληρωτικές σχέσεις οι συνιστώσες του διεγερόμενου διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού σε κάθε περιοχή .Ακολουθως, εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες στις διαχωριστικές επιφάνειες και λύνεται το σύστημα των αγνώστων συντελεστών της κάθε συνιστώσας.

Η εξαγωγή των αναλυτικών σχέσεων του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου γίνεται μετατρέποντας τις ολοκληρώσεις πραγματικής μεταβλητής σε ολοκληρώσεις πάνω στο μιγαδικό επίπεδο .Για τον σκοπό αυτό χαράσσονται οι αναγκαίες βροχοτομές στο μιγαδικό επίπεδο και προσδιορίζονται οι πόλοι των ολοκληρωτέων συναρτήσεων, Στην συνέχεια , μελετάται η συμπεριφορά των πόλων σε σχέση με τις παραμέτρους του αρχικού προβλήματος , υπολογίζονται τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα τους και μελετάται ο χειρισμός των βροχοτομών για την ορθή αντιμετώπιση τους .Οπότε καταστρώνονται οι αναλυτικές εκφράσεις των ζητούμενων ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών.

Τα αποτελέσματα της θεωρητικής μελέτης χρησιμοποιούνται στην συνέχεια για τον πρακτικό υπολογισμό των συνιστωσών των πεδιακών μεγεθών. Με την βοήθεια διαγραμμάτων μελετάται η συμπεριφορά τους σε σχέση με την απόσταση ρ από την πηγή , το ύψος z από την επιφάνεια της γής και την γωνία ϕ από τον άξονα της βροχοκεραίας .

ABSTRACT

The scope of this thesis is the study of the propagation of very low frequencies in the Earth's environment. The Earth's environment, for the purposes of this study, is considered to be the ionosphere, the atmosphere and two different ground layers. The aim is to specify the electromagnetic field generated by a vertical loop antenna situated on the Earth's surface.

First of all, a short reference is made to the properties and characteristics of the different regions involved. Next, the expected form of the magnetic vector potential in every region and the necessary boundary conditions are presented. By applying those boundary conditions, a system of equations emerges, and thus, the unknown coefficients are found.

Furthermore, the real integration is transformed to a complex integration. The poles of the integrals are specified and their relation with the problem's parameters is investigated. The necessary branch cuts are drawn on the complex plane and special attention is paid to the integration around them. The residues of the poles are then calculated and finally, the analytical expressions of the field components are extracted.

The outcome of the theoretical analysis is used to present the variation of the field's basic components in relation to the horizontal distance ρ from the source, the height z and the observation angle φ .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Πρόλογος

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο διατυπώνεται το ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα του οποίου η λύση μελετάται στην παρούσα εργασία, και παρουσιάζονται αναλυτικότερα οι περιοχές του γήινου περιβάλλοντος και τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους που ενδιαφέρουν την μελέτη αυτή.

1.2 Διατύπωση του Η/Μ Προβλήματος

Θέμα της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη διάδοσης χαμηλών συχνοτήτων στο γήινο περιβάλλον. Ως γήινο περιβάλλον θεωρείται, απλοποιημένα, η Ιονόσφαιρα (περιοχή 1) η οποία καταλαμβάνει έκταση από το άπειρο έως ύψος H πάνω από την επιφάνεια της γής, το στρώμα αέρα πάχους H (περιοχή 0) που παρεμβάλλεται της γής και της Ιονόσφαιρας, ένα στρώμα εδάφους ("Λιθόσφαιρα") πάχους L (περιοχή 2) και ένα ημίπειρο στρώμα εδάφους που εκτείνεται από το βάθος L έως το μείον άπειρο ("Μανδύας"). Η γή συνεπώς χάνει την σφαιρικότητα της και θεωρείται επίπεδη στην παρούσα εργασία για την απλοποίηση του προβλήματος (Σχήμα 1.1). Ουσιαστικά λοιπόν, διερευνάται η λύση του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος που προκύπτει κατά την εκπομπή χαμηλών συχνοτήτων πάνω στην επιφάνεια της γής. Θεωρείται ότι τοποθετείται ηλεκτρομαγνητική πηγή πάνω στην επιφάνεια της γής (επίπεδο $z = 0$) και αναζητούνται τα κυματοδηγούμενα πεδία σε κάθε περιοχή σε συνάρτηση με τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της. Το πρόβλημα μοιάζει με την μελέτη κυματοδηγής σε κυματοδηγό παραλλήλων πλακών με δύο διαφορετικά στρώματα.

Πιο συγκεκριμένα θεωρείται βροχοκεραία πάνω στην επιφάνεια της γής και αναζητούνται οι διεγερόμενοι ρυθμοί σε συνάρτηση με το ύψος H , το πάχος L , τις διηλεκτρικές σταθερές κάθε περιοχής και την συχνότητα εκπομπής. Σημειώνεται, ότι η μαγνητική διαπερατότητα μ_i κάθε περιοχής λαμβάνεται σταθερή και ίση με την μαγνητική διαπερατότητα του αέρα μ_0 .



Σχήμα 1.1 : Μοντελοποίηση της Γης

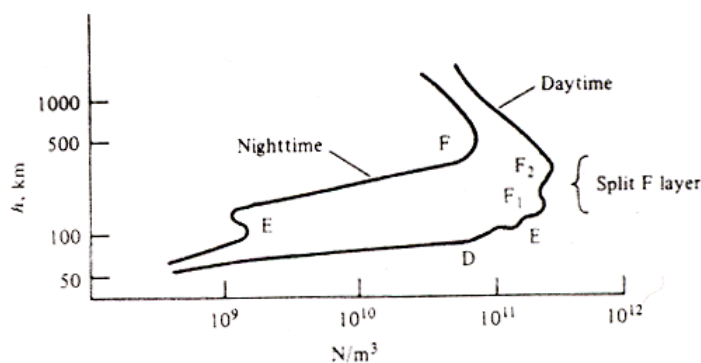
1.3 Ιονόσφαιρα

1.3.1 Χαρακτηριστικά της Ιονόσφαιρας

Η ιονόσφαιρα αποτελεί στρώμα της γήινης ατμόσφαιρας το οποίο είναι ισχυρά ιονισμένο (κυρίως λόγω της ηλιακής ακτινοβολίας .Κατά την διάρκεια της ημέρας , τα ιονισμένα στρώματα εκτείνονται από τα περίπου 60 km έως τα 1000 km πάνω από την επιφάνεια της γής ενώ κατά την διάρκεια της νύχτας από τα 100 km έως τα 1000 km περίπου.Η πυκνότητα N των ηλεκτρονίων είναι της τάξης των 10^{10} , 10^{12} ηλεκτρονίων ανά κυβικό μέτρο (electrons / m^3) .Υπάρχουν κυρίως τρία στρώματα στα οποία η πυκνότητα των ηλεκτρονίων αυξάνει σημαντικά : D, E και F . Κατά την διάρκεια της ημέρας το στρώμα F χωρίζεται σε δύο υποστρώματα F_1 και F_2 . Το σχήμα 1.2 παρουσιάζει την τυπική μεταβολή της πυκνότητας N των ηλεκτρονίων σε σχέση με το ύψος h από την επιφάνεια της γής κατά την διάρκεια της μέρας και της νύχτας .

Η ύπαρξη των διαφορετικών υποστρωμάτων εξηγείται από την διαφορετική ένταση της ηλιακής ακτινοβολίας που προκαλεί τον ιονισμό των μορίων των αερίων σε κάθε υψόμετρο και την μεταβολή της πυκνότητας της ατμόσφαιρας .Σε μεγάλα ύψη , η

ένταση των προσπίπτουσων ακτίνων είναι πολύ υψηλή , αλλά η συγκέντρωση των αέριων μορίων είναι μικρή , παράγοντας τελικά χαμηλή συγκέντρωση ηλεκτρονίων. Σε χαμηλότερα ύψη όπου η ατμόσφαιρα γίνεται πιο πυκνή , παρουσιάζεται αύξηση της συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων .Ενώ πλησιάζοντας προς την γή , η ένταση των ακτίνων ελλατώνεται λόγω της απορρόφησης των ανωτέρων στρωμάτων , δημιουργώντας μικρότερη πυκνότητα ηλεκτρονίων.Παράλληλα ,το γεγονός ότι η ατμόσφαιρα αποτελείται από διαφορετικά αέρια (κυρίως όμως οξυγόνο και άζωτο) των οποίων η συγκέντρωση μεταβάλλεται με το ύψος ενώ η συμπεριφορά τους κατά τον ιονισμό τους διαφέρει , οδηγεί στην δημιουργία τοπικών μεγίστων ή ελαχίστων στην συγκέντρωση των ηλεκτρονίων .Βέβαια , τα υποστρώματα E και F έχουν μόνιμη υπόσταση αν και τα ύψη όπου συναντώνται μεταβάλλονται σε καθημερινή βάση .



Typical variation of electron density versus height.

Σχήμα 1.2:Μεταβολή της πυκνότητας των ηλεκτρονίων της Ιονόσφαιρας σε σχέση με το ύψος από την επιφάνεια της Γής

Η συγκέντρωση N των ηλεκτρονίων μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της ημέρας ,ανά εποχή ,και κατά μεγάλες χρονικές περιόδους ετών που συσχετίζονται με την ηλιακή δραστηριότητα. Η διηλεκτρική σταθερά που εμφανίζει εξαρτάται από την συχνότητα εκπομπής και την συγκέντρωση N των ηλεκτρονίων.Έτσι , για μία δεδομένη συγκέντρωση N ηλεκτρονίων ,υφίστανται μια μέγιστη χρήσιμη συχνότητα , πάνω από την οποία τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διεισδύουν στην Ιονόσφαιρα .Η διάδοση των κυμάτων μέσω της Ιονόσφαιρας δεν παρέχει πολύ σταθερά χαρακτηριστικά , και κατά συνέπεια οι ζεύξεις που την χρησιμοποιούν παρουσιάζουν αρκετά μεγάλες διαλείψεις.

Τα υποστρώματα E και F παίζουν κυριάρχο ρόλο στις ραδιοηλεκτρονικές για συχνότητες από 3 έως 40 MHz .Για τις συχνότητες αυτές η Ιονόσφαιρα λειτουργεί ως ανακλαστήρας καθώς οι ραδιοακτίνες δεν μπορούν να διεισδύσουν μέσα σε αυτήν. Έτσι επιτυγχάνονται ραδιοζεύξεις πολλών χιλιομέτρων .

Το υπόστρώμα D της Ιονόσφαιρας είναι πλησιέστερα στην επιφάνεια της γής .Το ύψος όπου συναντάται κυμαίνεται από 60 km έως 70 km κατά την διάρκεια της ημέρας , και από 85 km έως 100 km ,κατά την διάρκεια της νύχτας .Η μέγιστη συγκέντρωση ηλεκτρονίων N κυμαίνεται από 5×10^8 έως 2×10^{10} ηλεκτρόνια ανά κυβικό μέτρο κατά την διάρκεια της μέρας , ενώ κατά την διάρκεια της νύχτας λαμβάνει τιμές μικρότερες κατά μια τάξη μεγέθους (από 10^7 έως 10^9 electrons/m³) .

Για τις πολύ χαμηλές συχνότητες **Very Low Frenquencies-VLF Band : 3 KHz-30 KHz** και **Extremely Low Frenquencies-ELF Band: 30 Hz-3 KHz** που ενδιαφέρουν την παρούσα μελέτη , η συχνότητα συγκρούσεων ν στο στρώμα **D** της Ιονόσφαιρας είναι πού μεγαλύτερη από την κυκλική συχνότητα ω του διεγερόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.Συνεπώς , η Ιονόσφαιρα λειτουργεί ως ένα αγωγίμο μέσο με αρκετά χαμηλή αγωγιμότητα βέβαια .Η γή παρομοίως λειτουργεί ως αγωγίμο έδαφος δημιουργώντας έτσι ένα ζεύγος ανακλαστήρων που παρέχει ουσιαστικά έναν σφαιρικό κυματοδηγό πάνω στην επιφάνεια της γής .Η κυματοπαγίδευση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μέσα στο στρώμα αυτό προκαλεί σαφώς πολύ μικρότερη απόσβεση σε σχέση με την απόσταση , στην ένταση του πεδίου από την αντίστοιχη του ελευθέρου χώρου .

Ο κυματοδηγός αυτός παρέχει έναν αρκετά σταθερό μονοπάτι διάδοσης , καθιστώντας τις χαμηλές συχνότητες ιδανικές για την μετάδοση χρονικών σημάτων και για θαλάσσιες επικοινωνίες. Μειονεκτήματα τους αποτελεί το μεγάλο μέγεθος των κεραιών εκπομπής και λήψης και το μικρό εύρος ζώνης που παρέχει .

1.3.2 Υπολογισμός διηλεκτρικής σταθεράς Ιονόσφαιρας

Όπως προαναφέρθηκε ,η διηλεκτρική σταθερά (για συγκεκριμένη συχνότητα) της Ιονόσφαιρας είναι ένα χρονικά και χωρικά μεταβαλλόμενο μέγεθος , λόγω της

μεταβολής της συγκέντρωσης N των ηλεκτρονίων με το ύψος από την επιφάνεια της γής. Καθόλη την παρούσα μελέτη, για λόγους απλοποίησης του εξεταζόμενου προβλήματος, θεωρείται σταθερή σε όλη την Ιονόσφαιρα με τιμή που προσδιορίζεται από την συχνότητα εκπομπής f . Για την εύρεση της διηλεκτρικής σταθεράς της Ιονόσφαιρας, υπολογίζεται αρχικά η διηλεκτρική σταθερά ενός ιονισμένου αέριου.

Έστω ένα ομοιογενές ιονισμένο αέριο με πυκνότητα ηλεκτρονίων N και ρυθμό συγκρούσεων κάθε ηλεκτρονίου με ουδέτερα άτομα ν ανά δευτερόλεπτο, μέσα στο οποίο διαδίδεται εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο E_z κατά την διεύθυνση x . Η στιγμιαία τιμή του πεδίου δίνεται από την σχέση :

$$\vec{E} = \hat{z} \cdot E_m e^{-j\omega t} \quad (1.1)$$

όπου ω η κυκλική συχνότητα του κύματος. (Σημειώνεται ότι για όλα τα χρονικά μεταβαλλόμενα μεγέθη θεωρείται χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-j\omega t)$).

Αρχικά, θεωρείται ότι υπάρχει ένα μόνο ελεύθερο φορτισμένο ηλεκτρόνιο e με μάζα m ανά κυβικό μέτρο, δηλαδή $N=1$. Το παλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο E ασκεί δύναμη F στο ηλεκτρόνιο που δίνεται από την σχέση :

$$\vec{F} = \hat{z} \cdot eE_m e^{-j\omega t} \quad (1.2)$$

και αναγκάζει το ηλεκτρόνιο να ταλαντώνεται στον άξονα z .

Παράλληλα, στο ηλεκτρόνιο ασκείται η δύναμη της "τριβής" που προέρχεται από τις συγκρούσεις του με τα υπόλοιπα ουδέτερα άτομα. Θεωρώντας ότι σε κάθε σύγκρουση το ηλεκτρόνιο δίνει όλη του την ορμή mdz/dt στο ουδέτερο άτομο, τότε σε κάθε δευτερόλεπτο η ορμή του μεταβάλλεται κατά $\nu mdz/dt$. Ο ρυθμός αυτός μεταβολής της ορμής εκφράζει την ασκούμενη δύναμη "τριβής". Οπότε προκύπτει συνολικά :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = eE - \nu m \frac{dz}{dt} \quad (1.3)$$

Η λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι : $z = z_m e^{-j\omega t}$

Είναι αναγκαίο να εκφραστεί η ταχύτητα dz/dt του ηλεκτρονίου ως συνάρτηση της χρονικής μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου dE/dt . Ισχύει :

$$\frac{dE}{dt} = -j\omega E \quad , \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -j\omega \frac{dz}{dt} \quad (1.4)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω διαφορική και λύνοντας ως προς την ταχύτητα dz/dt προκύπτει :

$$\begin{aligned} -\frac{e}{j\omega} \frac{dE}{dt} &= m \frac{dz}{dt} (v - j\omega) \Rightarrow \\ \frac{dz}{dt} &= -\frac{e}{j\omega(v - j\omega)m} \frac{dE}{dt} = \left[-\frac{e}{m(\omega^2 + v^2)} + j \frac{ve}{\omega m(\omega^2 + v^2)} \right] \cdot \frac{dE}{dt} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Θεωρώντας στην συνέχεια ότι κάθε κυβικό μέτρο αερίου περιέχει N ηλεκτρόνια ,καθ' ενός από τα οποία η ταχύτητα περιγράφεται από την παραπάνω σχέση , τότε η συνολική πυκνότητα ρεύματος δίνεται από την σχέση :

$$J_c = Ne \frac{dz}{dt} = \left[-\frac{Ne^2}{m(\omega^2 + v^2)} + j \frac{vNe^2}{\omega m(\omega^2 + v^2)} \right] \cdot \frac{dE}{dt} \quad (1.6)$$

Στον αέρα , δίχως ιονισμό , ένα εναλλασόμενο ηλεκτρικό πεδίο είναι γνωστό ότι δημιουργεί ένα ρεύμα μετατόπισης με πυκνότητα : $J_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt}$

Συνεπώς η συνολική πυκνότητα ρεύματος είναι :

$$J = J_d + J_c = \left[\epsilon_0 - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + v^2)} + j \frac{vNe^2}{\omega m(\omega^2 + v^2)} \right] \cdot \frac{dE}{dt} \quad (1.7)$$

Οπότε συμπεραίνεται ότι η μιγαδική διηλεκτρική σταθερά του αερίου ϵ_i είναι :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_i &= \epsilon_0 - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + v^2)} + j \frac{vNe^2}{\omega m(\omega^2 + v^2)} \Rightarrow \\ \dot{\epsilon}_i &= \epsilon_i + j \frac{\sigma_i}{\omega} \Rightarrow \\ \epsilon_i &= \epsilon_0 - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + v^2)} \quad , \quad \sigma_i = \frac{vNe^2}{m(\omega^2 + v^2)} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ανάλογα με την σχέση ω και v διακρίνονται οι εξής περιπτώσεις :

α. Αν $\omega^2 \gg \nu^2$ τότε βρίσκεται ότι :

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \quad , \quad \sigma_i = \frac{\nu Ne^2}{m\omega^2} \Rightarrow \\ \dot{\varepsilon}_i &= \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \left(1 - j \frac{\nu}{\omega}\right)\end{aligned}\tag{1.9}$$

β. Αν $\omega^2 \ll \nu^2$ τότε προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\nu^2} \quad , \quad \sigma_i = \frac{Ne^2}{m\nu} \Rightarrow \\ \dot{\varepsilon}_i &= \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m\nu^2} \left(1 - j \frac{\nu}{\omega}\right)\end{aligned}\tag{1.10}$$

Μέχρι τώρα αγνοήθηκε η ύπαρξη των θετικών ιόντων στο αέριο .Κατά αναλογία με τα ηλεκτρόνια , η δημιουργούμενη θετική πυκνότητα ρεύματος έχει αντίστοιχη μορφή και κατεύθυνση προφώς αντίθετη αυτής των ηλεκτρονίων .Άρα τα δύο ρεύματα προστίθενται ,και κατά συνέπεια στην διηλεκτρική σταθερά ε_i εμφανίζεται ένας όρος που εκφράζει την συνεισφορά των ιόντων .Αν m_i η μάζα των θετικών ιόντων ισχύει :

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + \nu^2)} - \frac{Ne^2}{m_i(\omega^2 + \nu^2)} \quad , \quad \sigma_i = \frac{\nu Ne^2}{m(\omega^2 + \nu^2)} + \frac{\nu Ne^2}{m_i(\omega^2 + \nu^2)}\tag{1.11}$$

Βέβαια , είναι γνωστό ότι μάζα των ιόντων είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτήν των ηλεκτρονίων , οπότε $m_e \ll m_i$, οπότε η συνεισφορά τους στην διηλεκτρική σταθερά μπορεί να αγνοηθεί σε πρώτη προσέγγιση .

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων , μπορεί να βρεθεί η σχετική διηλεκτρική σταθερά ε'_i της Ιονόσφαιρας .

Ισχύει γενικά σύμφωνα με τα παραπάνω :

$$\dot{\varepsilon}_i = \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{m(\omega^2 + \nu^2)} \cdot \left(1 - j \frac{\nu}{\omega}\right)\tag{1.12}$$

Θεωρείται ότι λόγω των χαμηλών συχνοτήτων $\omega \ll \nu$. Άρα προκύπτει :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1 &\approx \varepsilon_0 - \frac{Ne^2}{mv^2} \left(1 - j \frac{v}{\omega}\right) \approx \varepsilon_0 + j \frac{Ne^2}{m\omega v} = \varepsilon_0 \left(1 + j \frac{Ne^2}{m\omega v \varepsilon_0}\right) \Rightarrow \\ \dot{\varepsilon}_1 &\approx \varepsilon_0 \cdot \left(1 + j \frac{\omega_0}{\omega}\right) \quad , \quad \omega_0 = \frac{Ne^2}{mv\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Εκτός από την προσέγγιση $\omega \ll \nu$, θεωρήθηκε επίσης ότι $Ne^2/mv^2 \ll \varepsilon_0$ λόγω του ότι $\nu \gg \omega$.

1.4 “Λιθόσφαιρα και Μανδύας”

Οι όροι Λιθόσφαιρα και Μανδύας που χρησιμοποιούνται για τον χαρακτηρισμό των 2 περιοχών κάτω από την επιφάνεια της γής , ουσιαστικά δεν ανταποκρίνονται στην γεωλογική ερμηνεία των όρων .Χρησιμοποιούνται καταχρηστικά για λόγους ευκολίας για να περιγράψουν τα 2 στρώματα του εδάφους . Στην περίπτωση που εξετάζεται στην εργασία αυτή το πάχος L του υπερκείμενου στρώματος του εδάφους (περιοχή 2) λαμβάνεται της τάξεως του ενός με δύο χιλιόμετρα (1-2 km) ενώ στην πραγματικότητα , η Λιθόσφαιρα έχει πάχος μεγαλύτερο των 50 χιλιομέτρων .Για να περιγραφεί η μεταβολή της διηλεκτρικής σταθεράς ε_g σε σχέση με το βάθος μέσα στον φλοιό της γής , χρησιμοποιείται η προσέγγιση των επιπέδων στρωμάτων στο πρόβλημα αυτό .Αυτή η διαστρωματομένη αρχιτεκτονική παραπέμπει οπτικά στην γεωλογική δομή Λιθόσφαιρα – Μανδύα και οδηγεί στην υιοθέτηση αυτών των απλών ονομασιών για τις περιοχές 2 και 3 του προβλήματος .Συνεπώς , σε όλη την εργασία ο όρος “Λιθόσφαιρα” παραπέμπει στην ονομασία της περιοχής 2 : “Υπερκείμενο στρώμα εδάφους 1” και ο όρος “Μανδύας” στην ονομασία της περιοχής 3 : “Υποκείμενο στρώμα εδάφους 2” , και όχι στις γεωλογικές ιδιότητες και ιδιομορφίες των περιοχών αυτών.

Λόγω της πολυμορφίας του φλοιού της γής και της ανομοιογένειας των συστατικών του , είναι προφανές ότι η διηλεκτρική σταθερά του εδάφους ε_g μεταβάλλεται και χωρικά και στις 2 κατευθύνσεις (οριζόντια και κατακόρυφα) αλλά και χρονικά με τις ημέρες και τις εποχές .Το κάθε συστατικό του εδάφους έχει διαφορετική ηλεκτρική και μαγνητική συμπεριφορά , επηρεάζοντας έτσι την συμπεριφορά του όλου συστήματος .Βεβαίως , η μελέτη της διηλεκτρικής συμπεριφοράς του εδάφους αποτελεί πεδίο της γεωφυσικής και για τον λόγο αυτό δεν γίνεται εκτενή αναφορά

στο θέμα αυτό .Για την απλοποίηση όμως του προβλήματος που εξετάζεται ,γίνεται η θεώρηση ότι το έδαφος αποτελείται από 2 ομοιογενή στρώματα που χαρακτηρίζονται από τις διηλεκτρικές σταθερές ϵ_{g1} και ϵ_{g2} . Η προσέγγιση αυτή έχει βεβαίως λογική βάση και στηρίζεται στην διαφορετική σύσταση του εδάφους σε σχέση με το βάθος από την επιφάνεια της γής .

Ειδικότερα , η σχετική διηλεκτρική σταθερά του εδάφους ϵ_g δίνεται από την σχέση (για χρονική εξάρτηση $\exp(-j\omega t)$) :

$$\epsilon_g = \epsilon_i + j \frac{\sigma_i}{\epsilon_0 \omega} \quad (1.14)$$

Οι σύνηθεις τιμές κυμαίνονται ανάμεσα στις :

$\epsilon_i : 2 \sim 25$ (για υγρό έδαφος) , $\sigma_i : 0.0001 \sim 0.03 \text{ S/m}$ (για υγρό έδαφος) .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

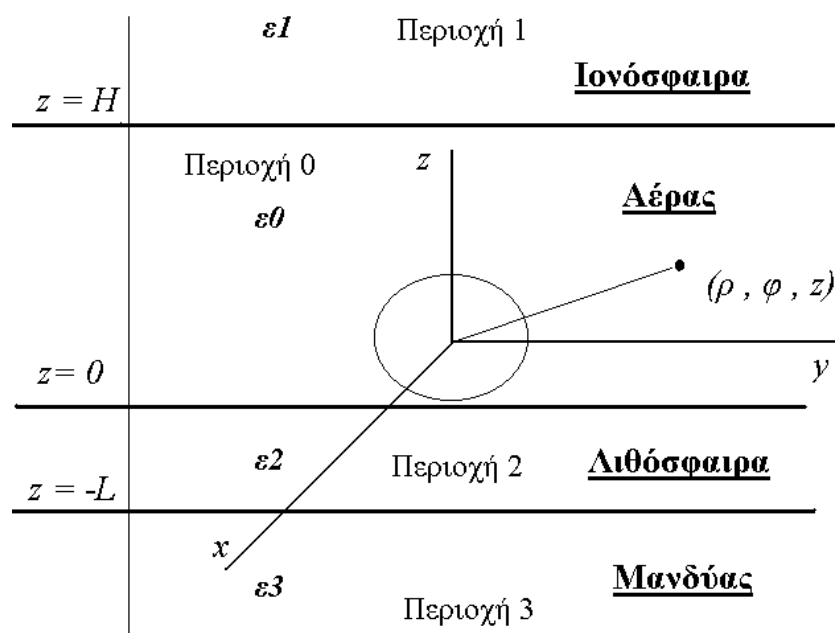
Λύση του Η/Μ προβλήματος

2.1 Πρόλογος

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται το πρωτεύον και τα επαγόμενα μαγνητικά δυναμικά σε κάθε περιοχή και διατυπώνονται οι οριακές συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται στις διαχωριστικές επιφάνειες. Τέλος εφαρμόζονται οι οριακές συνθήκες και επιλύεται το σύστημα των αγνώστων συντελεστών.

2.2 Λύση της κυματικής εξίσωσης

Η κάθετος βροχοκεραία τοποθετείται πάνω στην επιφάνεια της γής στο επίπεδο xy , ($z = 0$) θεωρώντας τον άξονα x κάθετο ως προς το κέντρο της. Το πρωτεύον πεδίο $\mathbf{M}_{0πρ}$ που δημιουργείται όταν τροφοδοτηθεί με ρεύμα \mathbf{I} , προκύπτει από την λύση της κυματικής εξίσωσης για κυλινδρικές συντεταγμένες (ρ, φ, z) για ομογενές μέσο: αέρας, με διηλεκτρική σταθερά ϵ_0 και μαγνητική διαπερατότητα μ_0 .



Σχήμα 2.1 Γεωμετρία του H/M προβλήματος

Το πρωτεύον πεδίο της καθέτου βροχοκεραίας εκφράζεται από το δυναμικό :

$$\mathbf{M}_{0πρ} = (M_{x_0}^{πρ}, 0, 0)$$

το οποίο γράφεται ως υπέρθεση στοιχειωδών Bessel συναρτήσεων μηδενικής τάξης.

$$Mx_0^{\pi\rho}(\rho, \phi, z) = \delta \cdot \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\mu_0|z-z_0|}}{\mu_0} \lambda d\lambda \quad (2.1)$$

όπου

$$\mu_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \quad , \quad \alpha\nu \lambda > k_0 \Rightarrow \mu_0 = \left| \sqrt{\lambda^2 - k_0^2} \right|$$

$$\lambda < k_0 \Rightarrow \mu_0 = -j \cdot \sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$$

Επίσης χρησιμοποιούνται τα σύμβολα :

δ : η διέγερση της βροχοκεραίας που δίνεται από την σχέση $\delta = \mu_0 A I / (4\pi)$,

όπου A : το εμβαδόν της βροχοκεραίας και

I : η ένταση του ρεύματος επί της κεραίας ,

z_0 : το ύψος της βροχοκεραίας πάνω από την επιφάνεια της γής .Για την περίπτωση μας για λόγους απλότητας θέτουμε $z_0 \rightarrow 0^+$.

$J_n(x)$: η συνάρτηση Bessel βαθμού n .

Στην συνέχεια , το επαγόμενο μαγνητικό δυναμικό γράφεται σε κάθε περιοχή του χώρου , λαμβάνοντας υπόψη ότι τόσο στην Ιονόσφαιρα (**Περιοχή 1**) όσο και στον Μανδύα (**Περιοχή 3**) λόγω της ημιάπειρης έκτασής τους ως προς τον άξονα z ,το δυναμικό αποσβένεται ,δηλαδή έχουμε εξάρτηση του δυναμικού ως προς z της μορφής $\exp(-\mu_i |z|)$,όπου μ_i ο κυματαριθμός στην περιοχή **i** , ενώ στον Αέρα (**Περιοχή 0**) και στη Λιθόσφαιρα (**Περιοχή 2**) λόγω του περιορισμένου ύψους τους το δυναμικό γράφεται στην μορφή : $\cosh(\mu_i z) + \sinh(\mu_i z)$.

Το πρόβλημα της διάδοσης των πολύ χαμηλών συχνοτήτων στο γήινο περιβάλλον λόγω της μεταβολή της διηλεκτρικής σταθεράς ϵ_i στα σύνορα Αέρα – Ιονόσφαιρας , Αέρα – Λιθόσφαιρας και Λιθόσφαιρας-Μανδύα μοιάζει με το πρόβλημα κυματοδήγησης σε διπλό κυματοδηγό παραλλήλων πλακών με τοιχώματα στις επιφάνειες των συνόρων $z = H$, $z = 0$ και $z = -L$.

Η z -συνιστώσα των επαγόμενων μαγνητικών δυναμικών , για να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες (βλέπε παρακάτω) , γράφεται ως γινόμενο Bessel συναρτήσεων πρώτης τάξης και συνημιτόνου $\cos\phi (J_1(\lambda\rho)\cos\phi$:προκύπτει από την μερική παράγωγο $\delta J_0(\lambda\rho)/\delta x$) .

Αναλυτικά σε κάθε περιοχή οι συνιστώσες του μαγνητικού δυναμικού γράφονται στην μορφή :

α. Περιοχή 0 : $0 \leq z \leq H$

Αέρας - Διηλεκτρική σταθερά : ϵ_0

Πρωτεύον δυναμικό :

$$Mx_0^{\pi\rho}(\rho, \phi, z) = \delta \cdot \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{e^{-\mu_0|z-z_0|}}{\mu_0} \lambda d\lambda \quad (2.2)$$

Επαγώμενο δυναμικό :

$$Mx_0^{\varepsilon\pi}(\rho, \phi, z) = \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\mu_0} J_0(\lambda\rho) \cdot (A_0 \cosh(\mu_0 z) + B_0 \sinh(\mu_0 z))$$

$$Mz_0^{\varepsilon\pi}(\rho, \phi, z) = \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_0} \cos\varphi \cdot J_1(\lambda\rho) \cdot (C_0 \cosh(\mu_0 z) + D_0 \sinh(\mu_0 z)) \quad (2.3)$$

$$\mu_0 = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}, \quad A_0 = A_0(\lambda), \quad B_0 = B_0(\lambda), \quad C_0 = C_0(\lambda), \quad D_0 = D_0(\lambda)$$

Το συνολικό δυναμικό είναι : $\vec{M}_0 = (Mx_0, 0, Mz_0)$

$$Mx_0(\rho, \phi, z) = Mx_0^{\pi\rho} + Mx_0^{\varepsilon\pi} =$$

$$= \delta \cdot \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\mu_0} J_0(\lambda\rho) e^{-\mu_0 z} + \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\mu_0} J_0(\lambda\rho) \cdot (A_0 \cosh(\mu_0 z) + B_0 \sinh(\mu_0 z)) \quad (2.4)$$

$$Mz_0 = Mz_0^{\varepsilon\pi} \quad (2.5)$$

β. Περιοχή 1 : $H \leq z \leq \infty$

Ιονόσφαιρα - Διηλεκτρική σταθερά : ϵ_1

Το συνολικό δυναμικό είναι : $\vec{M}_1 = (Mx_1, 0, Mz_1)$

$$\begin{aligned} Mx_1(\rho, \phi, z) &= \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\mu_1} J_0(\lambda\rho) \cdot A_1 \cdot e^{-\mu_1 z} \\ Mz_1(\rho, \phi, z) &= \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_1} \cos\phi \cdot J_1(\lambda\rho) \cdot C_1 \cdot e^{-\mu_1 z} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}, \quad k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_1}, \quad A_1 = A_1(\lambda), \quad C_1 = C_1(\lambda)$$

γ. Περιοχή 2 : $-L \leq z \leq 0$

Λιθόσφαιρα - Διηλεκτρική σταθερά : ε_2

Το συνολικό δυναμικό είναι : $\vec{M}_2 = (Mx_2, 0, Mz_2)$

$$\begin{aligned} Mx_2(\rho, \phi, z) &= \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\mu_2} J_0(\lambda\rho) \cdot (A_2 \cosh(\mu_2 z) + B_2 \sinh(\mu_2 z)) \\ Mz_2(\rho, \phi, z) &= \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_2} \cos\phi \cdot J_1(\lambda\rho) \cdot (C_2 \cosh(\mu_2 z) + D_2 \sinh(\mu_2 z)) \\ \mu_2 &= \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}, \quad k_2 = k_0 \sqrt{\varepsilon_2}, \quad A_2 = A_2(\lambda), \quad B_2 = B_2(\lambda), \quad C_2 = C_2(\lambda), \quad D_2 = D_2(\lambda) \end{aligned} \quad (2.7)$$

γ. Περιοχή 3 : $-\infty \leq z \leq -L$

Μανδύας - Διηλεκτρική σταθερά : ε_3

Το συνολικό δυναμικό είναι : $\vec{M}_3 = (Mx_3, 0, Mz_3)$

$$\begin{aligned}
Mx_3(\rho, \phi, z) &= \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda}{\mu_3} J_0(\lambda\rho) \cdot A_3 \cdot e^{\mu_3 z} \\
Mz_3(\rho, \phi, z) &= \int_0^{\infty} d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_3} \cos\phi \cdot J_1(\lambda\rho) \cdot C_3 \cdot e^{\mu_3 z} \\
\mu_3 &= \sqrt{\lambda^2 - k_3^2}, k_3 = k_0 \sqrt{\varepsilon_3}, A_3 = A_3(\lambda), C_3 = C_3(\lambda)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.3 Μελέτη των οριακών συνθηκών

Παρατηρείται ότι σε κάθε περιοχή \mathbf{i} ($i=0,1,2,3$) το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό \vec{M}_i δίνεται από την σχέση : $\vec{M}_i = (Mx_i, 0, Mz_i)$.

Η ένταση του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου \mathbf{E} και \mathbf{H} εκφράζονται από το μαγνητικό δυναμικό σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$\begin{aligned}
\vec{E}_i &= j \frac{k_i^2}{\omega \hat{\mu}_0 \varepsilon_i} \cdot \nabla \times \vec{M}_i \\
\vec{H}_i &= (k_i^2 + \nabla \nabla \cdot) \vec{M}_i
\end{aligned} \tag{2.9}$$

όπου: $\hat{\mu}_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H / m$: η μαγνητική διαπερατότητα του ελευθέρου χώρου (την συμβολίζουμε με το καπελάκι για να μην υπάρχει σύγχυση μεταξύ αυτής και του κυματαριθμού $\mu_0 = (\lambda^2 - k_0^2)^{1/2}$ του αέρα) και ω : η κυκλική συχνότητα της διέγερσης (έχοντας θεωρήσει χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-j\omega t)$).

Οπότε , τα αντίστοιχα ηλεκτρομαγνητικά πεδία που αναπτύσσονται σε κάθε περιοχή \mathbf{i} ($i=0,1,2,3$) έχουν τις καρτεσιανές συνιστώσες :

$$\begin{aligned}
Ex_i &= j\omega \cdot \frac{\partial Mz_i}{\partial y} \quad , \quad Hx_i = k_i^2 Mx_i + \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial x \partial z} \\
Ey_i &= j\omega \cdot \left(\frac{\partial Mx_i}{\partial z} - \frac{\partial Mz_i}{\partial x} \right) \quad , \quad Hy_i = \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial z \partial y} \\
Ez_i &= -j\omega \cdot \frac{\partial Mx_i}{\partial y} \quad , \quad Hz_i = k_i^2 Mz_i + \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Οι οριακές συνθήκες , που επιτρέπουν τον υπολογισμό των αγνώστων συντελεστών σε κάθε περιοχή , προκύπτουν από την συνέχεια των εφαπτομενικών πεδίων \mathbf{E}_x , \mathbf{E}_y , \mathbf{H}_x και \mathbf{H}_y στις διαχωριστικές επιφάνειες $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, $\mathbf{z} = \mathbf{H}$ και $\mathbf{z} = -\mathbf{L}$.

$$\begin{aligned}
Ex_i &= Ex_{i+1} \\
Ey_i &= Ey_{i+1} \\
Hx_i &= Hx_{i+1} \\
Hy_i &= Hy_{i+1}
\end{aligned}$$

Οπότε πρέπει να ισχύει: $\gamma_i = \{0, 1, 2\}$ στις επιφάνειες $z = \{-L, 0, H\}$

Αντικαθιστώντας τα πεδία από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει :

$$Ex_i = Ex_{i+1} \Rightarrow \frac{\partial Mz_i}{\partial y} = \frac{\partial Mz_{i+1}}{\partial y} \Rightarrow Mz_i = Mz_{i+1} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
Ey_i = Ey_{i+1} &\Rightarrow \frac{\partial Mx_i}{\partial z} - \frac{\partial Mz_{i+1}}{\partial x} = \frac{\partial Mx_{i+1}}{\partial z} - \frac{\partial Mz_{i+1}}{\partial x} \Rightarrow \\
\text{από (2.11)} &\Rightarrow \frac{\partial Mx_i}{\partial z} = \frac{\partial Mx_{i+1}}{\partial z} \tag{2.12}
\end{aligned}$$

$$Hy_i = Hy_{i+1} \Rightarrow \frac{\partial Mx_i}{\partial x} + \frac{\partial Mz_i}{\partial z} = \frac{\partial Mx_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial Mz_{i+1}}{\partial z} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
Hx_i = Hx_{i+1} &\Rightarrow \\
k_i^2 Mx_i + \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial x \partial z} &= k_{i+1}^2 Mx_{i+1} + \frac{\partial^2 Mx_{i+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Mz_{i+1}}{\partial x \partial z} \Rightarrow \\
k_i^2 Mx_i + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Mx_i}{\partial x} + \frac{\partial Mz_i}{\partial z} \right) &= k_{i+1}^2 Mx_{i+1} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial Mx_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial Mz_{i+1}}{\partial z} \right) \\
\text{από (2.13)} &\Rightarrow k_i^2 Mx_i = k_{i+1}^2 Mx_{i+1}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Οπότε τελικά προκύπτουν οι τέσσερις παρακάτω οριακές συνθήκες που αφορούν το μαγνητικό δυναμικό $\vec{M}_i = (Mx_i, 0, Mz_i)$ και εφαρμόζονται σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια ($z = 0, z = H, z = -L$) :

$$Mz_i = Mz_{i+1} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial Mx_i}{\partial z} = \frac{\partial Mx_{i+1}}{\partial z} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial Mx_i}{\partial x} + \frac{\partial Mz_i}{\partial z} = \frac{\partial Mx_{i+1}}{\partial x} + \frac{\partial Mz_{i+1}}{\partial z} \quad (2.13) \quad (2.15)$$

$$k_i^2 Mx_i = k_{i+1}^2 Mx_{i+1} \quad (2.14)$$

2.4 Εφαρμογή των οριακών συνθηκών και εξαγωγή των πεδίων

Αντικαθιστώντας τις συνιστώσες του μαγνητικού δυναμικού κάθε περιοχής με τις παραπάνω αναλυτικές εκφράσεις (σχέσεις 2.4-2.8) και εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (σχέση 2.15) προκύπτουν οι άγνωστοι συντελεστές .

Αναλυτικότερα , οι οριακές συνθήκες δίνουν :

ΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ :

Για $z = -L$:

$$\alpha. Mz_2 = Mz_3 \Rightarrow C_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2} e^{\mu_3 L} [C_2 \cosh(\mu_2 L) - D_2 \sinh(\mu_2 L)] \quad (2.16)$$

$$\beta. \frac{\delta Mx_2}{\delta z} = \frac{\delta Mx_3}{\delta z} \Rightarrow A_3 = e^{\mu_3 L} [-A_2 \sinh(\mu_2 L) + B_2 \cosh(\mu_2 L)] \quad (2.17)$$

$$\gamma. k_2^2 Mx_2 = k_3^2 Mx_3 \Rightarrow \frac{\epsilon_3}{\mu_3} A_3 = e^{\mu_3 L} \frac{\epsilon_2}{\mu_2} [A_2 \cosh(\mu_2 L) - B_2 \sinh(\mu_2 L)] \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned}
\delta. \frac{\delta Mx_2}{\delta x} + \frac{\delta Mz_2}{\delta z} &= \frac{\delta Mx_3}{\delta x} + \frac{\delta Mz_3}{\delta z} \Rightarrow \\
\frac{1}{\mu_2}[-A_2 \cosh(\mu_2 L) + B_2 \sinh(\mu_2 L)] - C_2 \sinh(\mu_2 L) + D_2 \cosh(\mu_2 L) &= \\
= -\frac{e^{-\mu_3 L}}{\mu_3} A_3 + e^{-\mu_3 L} C_3 &
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Για $z = 0$:

$$\alpha. Mz_0 = Mz_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} C_0 \tag{2.20}$$

$$\beta. \frac{\delta Mx_0}{\delta z} = \frac{\delta Mx_2}{\delta z} \Rightarrow B_0 + \delta = B_2 \tag{2.21}$$

$$\gamma. k_0^2 Mx_0 = k_2^2 Mx_2 \Rightarrow A_2 = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 \mu_0} (A_0 + \delta) \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta. \frac{\delta Mx_0}{\delta x} + \frac{\delta Mz_0}{\delta z} &= \frac{\delta Mx_2}{\delta x} + \frac{\delta Mz_2}{\delta z} \Rightarrow -\frac{1}{\mu_0} (A_0 + \delta) + D_0 = -\frac{1}{\mu_2} A_2 + D_2 \\
&
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Για $z = H$:

$$\alpha. Mz_1 = Mz_0 \Rightarrow C_1 \frac{e^{-\mu_1 H}}{\mu_1} = \frac{1}{\mu_0} [C_0 \cosh(\mu_0 H) + D_0 \sinh(\mu_0 H)] \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}
\beta. \frac{\delta Mx_1}{\delta z} = \frac{\delta Mx_0}{\delta z} &\Rightarrow -A_1 e^{-\mu_1 H} = [A_0 \sinh(\mu_0 H) + B_0 \cosh(\mu_0 H)] - \delta e^{-\mu_0 H} \\
&
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\gamma. k_1^2 Mx_1 = k_0^2 Mx_0 \Rightarrow$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\mu_1} A_1 e^{-\mu_1 H} = \frac{1}{\mu_0} [A_0 \cosh(\mu_0 H) + B_0 \sinh(\mu_0 H)] + \delta \frac{e^{-\mu_0 H}}{\mu_0} \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\delta. \frac{\delta Mx_1}{\delta x} + \frac{\delta Mz_1}{\delta z} &= \frac{\delta Mx_0}{\delta x} + \frac{\delta Mz_0}{\delta z} \Rightarrow \\
-\frac{1}{\mu_0} [A_0 \cosh(\mu_0 H) + B_2 \sinh(\mu_0 H) + \delta e^{-\mu_0 H}] + C_0 \sinh(\mu_0 H) + D_0 \cosh(\mu_0 H) &= \\
= -\frac{e^{-\mu_1 H}}{\mu_1} A_1 - e^{-\mu_1 H} C_1 &
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Από τις οριακές συνθήκες προκύπτει ένα μη ομογενές σύστημα 12 εξισώσεων με 12 αγνώστους : $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, C_1, A_2, B_2, C_2, D_2, A_3, B_3, C_3$. Μελετώντας τις εξισώσεις παρατηρείται ότι τα 6 μεγέθη $A_0, B_0, A_1, A_2, B_2, A_3$ εμπλέκονται στις εξισώσεις (2.17),(2.18),(2.21),(2.22),(2.25),(2.26) δημιουργώντας ένα αυτόνομο μη ομογενές σύστημα 6×6 , το οποίο προκύπτει από τις οριακές συνθήκες που αφορούν αποκλειστικά το πεδίο στον άξονα x : Mx_0, Mx_1, Mx_2, Mx_3 .

Αρχικά, επιλύεται το μη ομογενές σύστημα 6×6 καταλήγοντας τελικώς μετά από σειρά πράξεων στις εξής αναλυτικές εκφράσεις για τους άγνωστους πεδιακούς συντελεστές $A_0, B_0, A_1, A_2, B_2, A_3$:

$$A_0 = \delta \cdot \left\{ \frac{e^{-\mu_0 H}}{\cosh(\mu_0 H)} \cdot (\varepsilon_1 \mu_0 - \mu_1) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) + \right. \\ \left. \frac{\left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) \cdot (\mu_1 + \mu_0 \varepsilon_1 \tanh(\mu_0 H)) + \right. \\ \left. + (\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1) \cdot \left[\left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) - \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 \mu_0} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L) \right) \right] \right\} \\ \left. + (\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1) \cdot \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 \mu_0} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L) \right) \right. \quad (2.28)$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση : $\frac{e^{-\mu_0 H}}{\cosh(\mu_0 H)} = 1 - \tanh(\mu_0 H)$, θέτοντας ως :

$$\Gamma = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 \mu_0} \cdot \frac{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L)}{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3}}, \quad Z = \frac{\mu_1 + \mu_0 \varepsilon_1 \tanh(\mu_0 H)}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1} \text{ και εκτελώντας}$$

μερικές πράξεις, ο συντελεστής A_0 δίνεται από την εξής απλή σχέση :

$$A_0 = \left(\frac{2}{Z + \Gamma} - 1 \right) \cdot \delta = (\Delta - 1) \cdot \delta \quad (2.29), \quad \text{όπου :} \quad \Delta = \frac{2}{Z + \Gamma} \quad (2.30)$$

Οι υπόλοιποι συντελεστές βρίσκονται και εκφράζονται με την βοήθεια των συμβολικών παραστάσεων Δ , Z και Γ για λόγους συντομίας :

Περιοχή 0 - Αέρας :

$$A_0 = (\Delta - 1) \cdot \delta \quad (2.31) \quad , \quad B_0 = (\Delta\Gamma - 1) \cdot \delta \quad (2.32)$$

Περιοχή 1 - Ιονόσφαιρα :

$$A_1 = \Delta \cdot \frac{\mu_1}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1} \cdot \frac{e^{\mu_1 H}}{\cosh(\mu_0 H)} \cdot \delta \quad (2.33)$$

Περιοχή 2 - Λιθόσφαιρα :

$$A_2 = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2 \mu_0} \cdot \Delta \cdot \delta \quad (2.34) \quad , \quad B_2 = \Delta \cdot \Gamma \cdot \delta \quad (2.35)$$

Περιοχή 3 - Μανδύας :

$$A_3 = \Delta \cdot \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} \cdot \frac{e^{\mu_3 L}}{\cosh(\mu_2 L)} \cdot \delta \quad (2.36)$$

Παρατηρώντας τις εκφράσεις Z και Γ , συμπεραίνεται ότι ο μεν πρώτος όρος Z οφείλεται στην επίδραση της Ιονόσφαιρας ενώ ο δε όρος Γ οφείλεται στην ύπαρξη του στρώματος της Λιθόσφαιρας .

Στην συνέχεια υπολογίζονται οι υπόλοιποι 6 συντελεστές $C_0, D_0, C_1, C_2, D_2, C_3$ που αναφέρονται στα εγκάρσια στην γή μαγνητικά δυναμικά $M_{z0}, M_{z1}, M_{z2}, M_{z3}$:

$$\begin{aligned}
C_0 = & \frac{\delta \cdot \Delta}{M} \cdot \left\{ \frac{(\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0)}{\mu_3 \mu_0 \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right)} \right. \\
& \cdot \left[\left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right) \cdot (1 - \tanh^2(\mu_2 L)) + \mu_3 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\mu_3}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + 1 \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) \right] + \\
& \left. + \frac{\mu_0 (\varepsilon_1 - 1) \cdot (1 - \tanh^2(\mu_0 H)) \cdot \left(\frac{\mu_3}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + 1 \right)}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1} \right\}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Χρησιμοποιώντας ως σύμβολα τους κεφαλαίους ελληνικούς χαρακτήρες Π , Ψ , X , Ξ , απλοποιείται η μορφή των σχέσεων που δίνουν τους άγνωστους συντελεστές :

$$C_0 = \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \frac{\Pi + \Xi}{\Psi + X} \tag{2.38}$$

όπου :

$$\Pi = \frac{1}{\mu_3} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right) \cdot \frac{1 - \tanh^2(\mu_2 L)}{\frac{\mu_3}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + 1} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} + \mu_3 \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \right\} \tag{2.39}$$

$$\Xi = \mu_0^2 \cdot (\varepsilon_1 - 1) \cdot \frac{1 - \tanh^2(\mu_0 H)}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0} \cdot \frac{1}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1} \tag{2.40}$$

$$\Psi = \frac{\mu_1 + \mu_0 \tanh(\mu_0 H)}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0}, \quad X = \frac{\mu_2}{\mu_0} \cdot \frac{\frac{\mu_3}{\mu_2} + \tanh(\mu_2 L)}{\frac{\mu_3}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + 1} \tag{2.41}$$

Από τις αναλυτικές αυτές εκφράσεις φαίνεται καθαρά η αντιστοιχία στην μορφή των των αναλυτικών εκφράσεων των μεγεθών M_x και M_z .

Οι παραστάσεις Ψ και X βρίσκονται σε πλήρη αντιστοιχία με τις παραστάσεις Z και Γ , καθώς διαφέρουν μόνο στην παρουσία των σχετικών διηλεκτρικών σταθερών ε_1 , ε_2 και ε_3 . Επίσης, οι εκφράσεις του αριθμητή Ξ και Π προέρχονται από την επίδραση

της Ιονόσφαιρας και της Λιθόσφαιρας αντίστοιχα .Οπότε παρατηρείται ένας σαφής διαχωρισμός των όρων που οφείλονται στην επίδραση κάθε περιοχής .

Οι υπόλοιποι συντελεστές υπολογίζονται και δίνονται από τις παρακάτω αναλυτικές σχέσεις και εκφράζονται με την βοήθεια των παραστάσεων Π, Ψ, X, Ξ :

Περιοχή 0 – Αέρας :

$$C_0 = \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \frac{\Pi + \Xi}{\Psi + X}, \quad D_0 = \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \frac{\Xi \cdot X - \Pi \cdot \Psi}{\Psi + X} \quad (2.42)$$

Περιοχή 1 - Ιονόσφαιρα :

$$C_1 = \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_1}{\mu_0} \cdot \frac{e^{\mu_1 H} \cosh(\mu_0 H)}{\Psi + X} \left[\Pi \cdot \frac{\mu_0 \cdot (1 - \tanh^2(\mu_0 H))}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0} + \Xi \cdot (1 + X \cdot \tanh(\mu_0 H)) \right] \quad (2.43)$$

Περιοχή 2 - Λιθόσφαιρα :

$$C_2 = \frac{\mu_2}{\mu_0} C_0 = \frac{\mu_2 \cdot \delta \cdot \Delta}{\mu_0^2} \cdot \frac{\Pi + \Xi}{\Psi + X} \quad (2.44)$$

$$D_2 = D_0 + \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) = \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \left[\frac{\Xi \cdot X - \Pi \cdot \Psi}{\Psi + X} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right] \quad (2.45)$$

Περιοχή 3 – Μανδύας :

$$C_3 = \frac{\delta \cdot \Delta}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_3}{\mu_2} \cdot \frac{e^{\mu_3 L} \cosh(\mu_2 L)}{\Psi + X} \cdot \left[\Pi \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} + \Psi \tanh(\mu_2 L) \right) + \Xi \cdot \frac{\mu_2}{\mu_0} \cdot \frac{1 - \tanh^2(\mu_2 L)}{\frac{\mu_3}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + 1} - \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot (\Psi + X) \cdot \tanh(\mu_2 L) \right] \quad (2.46)$$

Παρατηρείται από τις παραπάνω αρκετά πολύπλοκες εκφράσεις για τους συντελεστές C_1 και C_3 , η αντιστοιχία που υπάρχει στα πεδία μέσα στην Ιονόσφαιρα και τον Μανδύα της γης.

Συνεπώς, τα μαγνητικά δυναμικά \vec{M}_i σε κάθε περιοχή i ($i=0,1,2,3$) είναι πλέον γνωστά και δίνονται από τις αναλυτικές εκφράσεις:

Περιοχή 0 - Αέρας :

$$Mx_0(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{\mu_0} \cdot \frac{J_0(\lambda\rho)}{Z + \Gamma} \cdot \{\cosh(\mu_0 z) - Z \cdot \sinh(\mu_0 z)\} \quad (2.47)$$

$$Mz_0(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} \cos\phi \cdot \frac{J_1(\lambda\rho)}{(Z + \Gamma)} \cdot \left\{ \frac{\Pi + \Xi}{\Psi + X} \cdot \cosh(\mu_0 z) + \frac{\Xi X - \Pi\Psi}{\Psi + X} \cdot \sinh(\mu_0 z) \right\} \quad (2.48)$$

Περιοχή 1 - Ιονόσφαιρα :

$$Mx_1(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1} \cdot \frac{J_0(\lambda\rho)}{Z + \Gamma} \cdot \frac{e^{-\mu_1(z-H)}}{\cosh(\mu_0 H)} \quad (2.49)$$

$$Mz_1(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_0^2} \cos\phi \cdot \frac{J_1(\lambda\rho)}{(Z + \Gamma)} \cdot \frac{\cosh(\mu_0 H)}{\Psi + X} \cdot e^{-\mu_1(z-H)} \cdot \left[\frac{\Pi \cdot \mu_0 \cdot (1 - \tanh^2(\mu_0 H))}{\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0} + \Xi \cdot (1 + X \cdot \tanh(\mu_0 H)) \right] \quad (2.50)$$

Περιοχή 2 - Λιθόσφαιρα :

$$Mx_2(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{\mu_0 \varepsilon_2} \cdot \frac{J_0(\lambda\rho)}{Z + \Gamma} \cdot \{\cosh(\mu_2 z) + \Omega \cdot \sinh(\mu_2 z)\} \quad (2.51)$$

$$Mz_2(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_0 \mu_2} \cos\phi \cdot \frac{J_1(\lambda\rho)}{(Z + \Gamma)} \cdot \left\{ \frac{\mu_2 (\Pi + \Xi)}{\mu_0 (\Psi + X)} \cdot \cosh(\mu_2 z) + \left(\frac{\Xi \cdot X - \Pi \cdot \Psi}{\Psi + X} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot \sinh(\mu_2 z) \right\} \quad (2.52)$$

Περιοχή 3 – Μανδύας :

$$Mx_3(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda}{\mu_0 \mu_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_2 \tanh(\mu_2 L)}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right)} \cdot \frac{J_0(\lambda \rho)}{Z + \Gamma} \cdot \frac{e^{\mu_3(z+L)}}{\cosh(\mu_2 L)} \quad (2.53)$$

$$Mz_3(\rho, \phi, z) = 2\delta \int_0^\infty d\lambda \frac{\lambda^2}{\mu_0 \mu_2} \cos \phi \cdot \frac{J_1(\lambda \rho)}{(Z + \Gamma)} \cdot \frac{\cosh(\mu_2 L)}{\Psi + X} \cdot e^{\mu_3(z+L)} \\ \cdot \left[\Pi \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} + \Psi \tanh(\mu_2 L) \right) + \Xi \cdot \frac{\mu_2}{\mu_0} \cdot \frac{1 - \tanh^2(\mu_2 L)}{\frac{\mu_3}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + 1} - \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot (\Psi + X) \cdot \tanh(\mu_2 L) \right] \quad (2.54)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προσδιορισμός των Η/Μ πεδίων

3.1 Πρόλογος

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται ο υπολογισμός των ολοκληρωματικών σχέσεων που παρέχουν τα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε κάθε περιοχή. Αρχικά, η πραγματική ολοκλήρωση της μεταβλητής λ ανάγεται σε ολοκλήρωση στο μιγαδικό επίπεδο. Στην συνέχεια, βρίσκονται οι πόλοι και τα σημεία συνέχειας των ολοκληρωτέων συναρτήσεων, υπολογίζονται τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα και χειρίζονται με κατάλληλο τρόπο οι βροχοτομές. Τέλος, κάνοντας ορισμένες προσεγγίσεις και υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους που εμπλέκονται στον υπολογισμό των πεδίων, προσδιορίζονται έτσι τα ζητούμενα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη.

3.2 Χειρισμός των ολοκληρωμάτων

Ο αναλυτικός υπολογισμός των παραπάνω ολοκληρωμάτων για την εύρεση των εκφράσεων του μαγνητικού δυναμικού και στην συνέχεια, του παραγόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον χώρο είναι πολύ δύσκολος καθώς περιλαμβάνει περίπλοκες μαθηματικές εκφράσεις των οποίων ο χειρισμός είναι εξαιρετικά δυσχερές. Επιπλέον, η εφαρμογή αριθμητικής ολοκλήρωσης χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες τιμές για τις μεταβλητές (ρ, ϕ, z), είναι χρήσιμη μόνο για τον υπολογισμό του δυναμικού σε συγκεκριμένα σημεία του χώρου.

Αντίθετα, χρησιμοποιώντας την γνωστή σχέση που συνδέει τις συναρτήσεις *Bessel* με τις αντίστοιχες *Hankel* πρώτου και δεύτερου είδους (βλέπε Παράρτημα), η ολοκλήρωση της πραγματικής μεταβλητής λ ανάγεται σε μιγαδική ολοκλήρωση. Ισχύουν οι σχέσεις:

$$J_n(x) = \frac{1}{2}(H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)) \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + j \cdot Y_n(x) \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - j \cdot Y_n(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Εφαρμοζόντας τις παραπάνω σχέσεις για τις συναρτήσεις Bessel μηδενικής (n=0) και πρώτης (n=1) τάξης και θέτοντας όπου $x = \lambda\rho$, στις ολοκληρωματικές σχέσεις που εκφράζουν τις συνιστώσες του μαγνητικού δυναμικού (M_x, M_z) σε κάθε περιοχή, είναι δυνατή η μετατροπή των ολοκληρωμάτων σε μια πιο προσιτή μορφή.

Αναλυτικότερα για κάθε συνιστώσα προκύπτει :

Η συνιστώσα x στην περιοχή \mathbf{i} , ($i=0,1,2,3$) του μαγνητικού δυναμικού \vec{M}_i μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\begin{aligned} Mx_i &= \int_0^\infty J_0(\lambda\rho)F_{xi}(\lambda)\lambda d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\infty (H_0^{(1)}(\lambda\rho) + H_0^{(2)}(\lambda\rho)) \cdot F_{xi}(\lambda)\lambda d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty H_0^{(1)}(\lambda\rho)F_{xi}(\lambda)\lambda d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^\infty H_0^{(2)}(\lambda\rho)F_{xi}(\lambda)\lambda d\lambda \end{aligned} \quad (3.3)$$

Αντίστοιχα, η συνιστώσα z στην περιοχή \mathbf{i} , ($i=0,1,2,3$) του μαγνητικού δυναμικού \vec{M}_i μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\begin{aligned} Mz_i &= \int_0^\infty J_1(\lambda\rho)F_{zi}(\lambda)\lambda^2 d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\infty (H_1^{(1)}(\lambda\rho) + H_1^{(2)}(\lambda\rho)) \cdot F_{zi}(\lambda)\lambda^2 d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty H_1^{(1)}(\lambda\rho)F_{zi}(\lambda)\lambda^2 d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^\infty H_1^{(2)}(\lambda\rho)F_{zi}(\lambda)\lambda^2 d\lambda \end{aligned} \quad (3.4)$$

Για την μετατροπή του δεύτερου ολοκλήρωματος της Hankel συνάρτησης δεύτερου είδους, και στις δύο περιπτώσεις, γίνεται αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας όπου λ την μεταβλητή $-\mathbf{u}$. Οπότε προκύπτει για το διαφορικό $d\lambda = -d\mathbf{u}$ και νέα όρια ολοκλήρωσης από $\mathbf{0}$ έως $-\infty$. Εξετάζοντας τις αναλυτικές εκφράσεις των συνιστωσών του μαγνητικού δυναμικού σε κάθε περιοχή, παρατηρείται ότι οι συναρτήσεις $F_{xi}(\lambda)$ και $F_{zi}(\lambda)$ είναι άρτιες για κάθε i καθώς είναι συναρτήσεις των μεταβλητών $\mu_i = f(\lambda^2)$ ($i=0,1,2,3$), οπότε : $F_{xi}(-\mathbf{u}) = F_{xi}(\mathbf{u})$ και $F_{zi}(-\mathbf{u}) = F_{zi}(\mathbf{u})$.

Τέλος, εφαρμόζεται η παρακάτω γνωστή ιδιότητα των συναρτήσεων Hankel :

$$H_\nu^{(2)}(z \cdot e^{-j\pi}) = -e^{-j\nu\pi} \cdot H_\nu^{(1)}(z) \quad (3.5)$$

Οπότε για τις συναρτήσεις μηδενικής και πρώτης τάξης που εμπλέκονται στις αναλυτικές εκφράσεις ισχύει :

$$\begin{aligned} v = 0 &\Rightarrow H_0^{(2)}(-z) = -H_0^{(1)}(z) \\ v = 1 &\Rightarrow H_1^{(2)}(-z) = H_1^{(1)}(z) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Συνολικά προκύπτει για την συνιστώσα \mathbf{Mx}_i :

$$udu = \lambda d\lambda \quad , \quad 0 \leq u \leq -\infty \quad , \quad F_{xi}(-u) = F_{xi}(u) \quad , \quad H_0^{(2)}(-u\rho) = -H_0^{(1)}(u\rho) \quad (3.7)$$

οπότε το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H_0^{(2)}(\lambda\rho)F_{xi}(\lambda)\lambda d\lambda &= \int_0^{-\infty} H_0^{(2)}(-u\rho)F_{xi}(-u)udu = \\ &= -\int_0^{-\infty} H_0^{(1)}(u\rho)F_{xi}(u)udu = \int_{-\infty}^0 H_0^{(1)}(u\rho)F_{xi}(u)udu \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ενώ το συνολικό δυναμικό \mathbf{Mx}_i ($i=0,1,2,3$) γίνεται :

$$Mx_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^\infty H_0^{(1)}(\lambda\rho)F_{xi}(\lambda)\lambda d\lambda \quad (3.9)$$

Ενώ για την συνιστώσα \mathbf{Mz}_i :

$$u^2 du = -\lambda^2 d\lambda \quad , \quad 0 \leq u \leq -\infty \quad , \quad F_{zi}(-u) = F_{zi}(u) \quad , \quad H_1^{(2)}(-u\rho) = H_1^{(1)}(u\rho) \quad (3.10)$$

οπότε το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται στην μορφή:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H_1^{(2)}(\lambda\rho)F_{zi}(\lambda)\lambda^2 d\lambda &= -\int_0^{-\infty} H_1^{(2)}(-u\rho)F_{zi}(-u)u^2 du = \\ &= -\int_0^{-\infty} H_1^{(1)}(u\rho)F_{zi}(u)u^2 du = \int_{-\infty}^0 H_1^{(1)}(u\rho)F_{zi}(u)u^2 du \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ενώ το συνολικό δυναμικό \mathbf{Mz}_i ($i=0,1,2,3$) γίνεται :

$$Mz_i = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^\infty H_1^{(1)}(\lambda\rho)F_{zi}(\lambda)\lambda^2 d\lambda \quad (3.12)$$

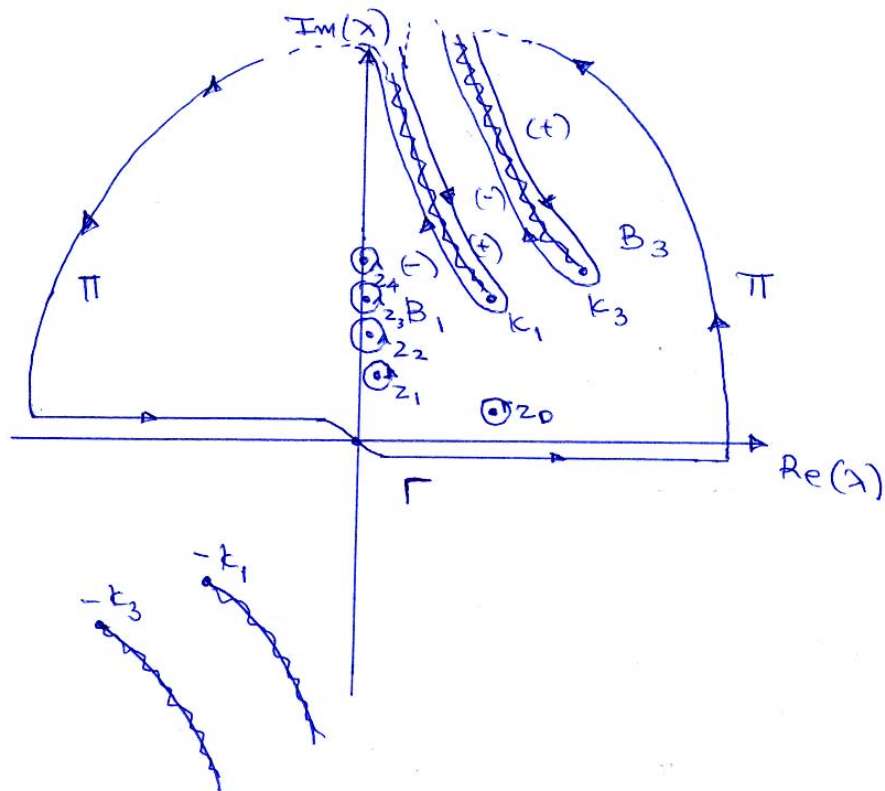
Συνεπώς ,για τον υπολογισμό της κάθε συνιστώσας πρέπει να γίνει ο υπολογισμός του παραπάνω αντίστοιχου ολοκληρώματος στο μιγαδικό επίπεδο όπου η μεταβλητή λ κινείται παράλληλα στον πραγματικό άξονα από το $-\infty$ έως ∞ (δρόμος Γ) .

3.3 Μιγαδική ολοκλήρωση

Λόγω της παρουσίας στις υπόολοκλήρωση συναρτήσεις των τετραγωνικών ριζών $\mu_i = (\lambda^2 - k_i^2)^{1/2}$ οι οποίες δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένες, είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός κατάλληλων βροχοτομών που εξασφαλίζουν τις αναγκαίες συνθήκες ακτινοβολίας $\text{Re}[\mu_1] > 0$, $\text{Re}[\mu_3] > 0$ στις περιοχές της Ιονόσφαιρας και του Μανδύα της Γής όπου και έχουμε εκθετική εξασθένηση του πεδίου προς τις κατευθύνσεις $z \rightarrow \infty$ και $z \rightarrow -\infty$ αντίστοιχα. Η εύρεση των "σημείων ασυνέχειας" (*branch points*) μπορεί να γίνει πρακτικά, εξετάζοντας κάθε όρο μ_i ξεχωριστά και παρατηρώντας αν η αλλαγή προσήμου από μ_i σε $-\mu_i$ αλλάζει την μορφή της υπο ολοκλήρωση συνάρτησης.

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω πρακτικό κανόνα για τις συναρτήσεις F_{xi} , F_{zi} ($i=0,1,2,3$), συμπεραίνεται ότι για τους όρους μ_0 και μ_2 που αναφέρονται στις περιοχές κυματοδήγησης του πεδίου, Αέρα και Λιθόσφαιρα, οι μεταβολές προσήμου για κάθε όρο χωριστά, αλληλοαναιρούνται αφήνοντας αναλλοίωτες τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις. Αντίθετα, για τους όρους μ_1 και μ_3 που αναφέρονται στις περιοχές εξασθένησης του πεδίου, Ιονόσφαιρα και Μανδύα, η μεταβολή του προσήμου τους οδηγεί σε αλλαγή της μορφής της ολοκληρωτέας συνάρτησης και κατά συνέπεια καθίσταται αναγκαίος ο ορισμός κατάλληλων βροχοτομών που ξεκινούν από τα σημεία ασυνέχειας $\pm k_1$ και $\pm k_3$ και εκτείνονται έως το άπειρο.

Ο δρόμος ολοκλήρωσης Γ στο μιγαδικό επίπεδο φαίνεται σχηματικά στο παρακάτω διάγραμμα, πάνω στο οποίο είναι σημειωμένες και οι βροχοτομές που προκύπτουν στα σημεία ασυνέχειας. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος ο δρόμος ολοκλήρωσης Γ κλείνεται με ένα ημικύκλιο Π με πολύ μεγάλη ακτίνα που τείνει στο άπειρο, και χαράσσονται οι δρόμοι ολοκλήρωσης B^+_1 και B^-_1 , B^+_3 και B^-_3 , γύρω από τις βροχοτομές στα σημεία $+k_1$ και $+k_3$ αντίστοιχα, που παρεμβάλλονται στον δρόμο ολοκλήρωσης.



Σχήμα 3.1 : Ο δρόμος ολοκλήρωσης C στο μιγαδικό επίπεδο λ .

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα του Cauchy για μιγαδικές συναρτήσεις, το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z)$ στον κλειστό δρόμο $C (= \Gamma + \Pi + B_1^+ + B_1^- + B_3^+ + B_3^-)$ ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της συνάρτησης $f(z)$ στους πόλους της z_i που περικλείονται από τον δρόμο C . Οπότε προκύπτει για το ζητούμενο ολοκλήρωμα :

$$\int_C f(z) dz = \left(\int_{\Gamma} + \int_{\Pi} + \int_{B_1^+} + \int_{B_1^-} + \int_{B_3^+} + \int_{B_3^-} \right) f(z) dz \Rightarrow$$

$$\int_C f(z) dz = 2\pi j \cdot \sum_i \text{Res}(f, z_i) \Rightarrow \quad (3.13)$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi j \cdot \sum_i \text{Res}(f, z_i) - \left(\int_{\Pi} + \int_{B_1^+} + \int_{B_1^-} + \int_{B_3^+} + \int_{B_3^-} \right) f(z) dz$$

Επειδή ο δρόμος Π εκτείνεται στο άπειρο όπου η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση μηδενίζεται ($\mathbf{H}_0^{(1)}(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{0}$ για $\mathbf{x} \rightarrow \infty$), η συμβολή του ολοκληρώματος αυτού είναι μηδενική : $\int_{\Pi} f(z) dz = 0$

Άρα για τον υπολογισμό του ζητούμενου ολοκληρώματος πάνω στον δρόμο Γ , είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων της συνάρτησης $f(z)$ στους

πόλους z_i και της συμβολής των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων πάνω στις βροχοτομές B_1 και B_3 .

3.4 Εύρεση πόλων

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων των ολοκληρωτέων συναρτήσεων είναι αναγκαίος ο προσδιορισμός των πόλων. Παρατηρώντας τις αναλυτικές εκφράσεις, είναι φανερό ότι οι πόλοι των υποολοκλήρωσης συναρτήσεων προκύπτουν από τις ρίζες των παρονομαστών τους :

Συνιστώσα x : $Z + \Gamma = 0$.

Συνιστώσα z : $Z + \Gamma = 0$ και $\Psi + X = 0$.

Είναι αναγκαία λοιπόν, η επίλυση των εξίσωσεων $Z + \Gamma = 0$ και $\Psi + X = 0$.

Η εξίσωση $Z + \Gamma = 0$ γράφεται στην μορφή :

$$\frac{\mu_1}{\varepsilon_1} + \mu_0 \tanh(\mu_0 H) + \left(\frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \cdot \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\tanh(\mu_0 H)}{\mu_0} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \right) \cdot \Omega = 0$$

$$\text{όπου } \Omega = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L)}{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} \quad (3.14)$$

Σχεδιάζοντας την συνάρτηση $\varphi(\lambda) = Z(\lambda) + \Gamma(\lambda)$ για $\lambda \in \mathbf{R}$, παρατηρείται ότι για τιμές γύρω από το $\lambda \approx k_0$, η $\varphi(\lambda)$ προσεγγίζει το μηδέν. Άρα, συμπεραίνεται ότι οι ρίζες της εξίσωσης $\varphi(\lambda) = 0$ βρίσκονται στην περιοχή αυτή και μάλιστα είναι μιγαδικές, όπως άλλωστε υποδεικνύει και η φυσική αλήθεια του προβλήματος.

Θεωρώντας $f_0 \leq 10 \text{ KHz} \Rightarrow k_0 \sim 10^{-5}$ και $\text{Im}(\varepsilon_1^{1/2}), \text{Im}(\varepsilon_2^{1/2}), \text{Im}(\varepsilon_3^{1/2}) \gg 1$, για $\lambda \approx k_0$ μπορούν να γίνουν οι εξής προσεγγίσεις :

$$\mu_1 \approx -j \cdot k_0 \sqrt{\varepsilon_1}, \mu_2 \approx -j \cdot k_0 \sqrt{\varepsilon_2}, \mu_3 \approx -j \cdot k_0 \sqrt{\varepsilon_3} \quad (3.15)$$

$$\frac{\mu_2 \mu_1}{\varepsilon_2 \varepsilon_1} \cdot \frac{\tanh(\mu_0 H)}{\mu_0} \approx -\frac{k_0^2 H}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1}} \frac{\tanh(\mu_0 H)}{\mu_0 H} \approx -\frac{k_0^2 H}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1}} \quad (3.16)$$

Οπότε η εξίσωση (3.14) γράφεται :

$$\begin{aligned} -j \cdot \frac{k_0}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \mu_0 \tanh(\mu_0 H) - j \cdot \frac{k_0 \cdot \Omega}{\sqrt{\varepsilon_2}} - \frac{k_0^2 H \cdot \Omega}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1}} = 0 \Rightarrow \\ \mu_0 \tanh(\mu_0 H) = j \cdot k_0 \cdot \tau, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_2}} - j \cdot \frac{k_0 H \cdot \Omega}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Αναλύοντας την υπερβολική εφαπτομένη : $\tanh(\mu_0 H) = \frac{e^{2\mu_0 H} - 1}{e^{2\mu_0 H} + 1}$, λύνοντας ως

$$\text{πρός } e^{2\mu_0 H} : \quad e^{2\mu_0 H} = \frac{1 + j \cdot \frac{k_0 \tau}{\mu_0}}{1 - j \cdot \frac{k_0 \tau}{\mu_0}} \text{ και λαμβάνοντας υπόψη ότι } k_0 \ll \mu_0, \tau \ll \mu_0,$$

$$\text{βρίσκεται η εξής προσεγγιστική σχέση :} \quad e^{2\mu_0 H} \approx 1 + 2j \cdot \frac{k_0 \tau}{\mu_0} \quad (3.18)$$

Λογαριθμίζοντας την μιγαδική αυτή σχέση, λύνεται η εξίσωση :

$$\begin{aligned} 2\mu_0 H = 2\pi n j + \ln(1 + 2j k_0 \tau / \mu_0) \approx 2\pi n j + 2j k_0 \tau / \mu_0 \Rightarrow \\ \mu_0 = \frac{\pi n}{H} j + j \frac{k_0 \tau}{\mu_0 H}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\text{Ο παράγοντας } \tau \text{ δίνεται από την σχέση : } \tau = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} + \frac{\Omega}{\sqrt{\varepsilon_2}} - j \cdot \frac{k_0 H \cdot \Omega}{\sqrt{\varepsilon_2 \varepsilon_1}} \quad (3.20).$$

Ο όρος Ω θεωρώντας τις παραπάνω προσεγγίσεις για τους παράγοντες μ_3, μ_2 , γράφεται ως εξής :

$$\Omega = \frac{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L)}{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3}} \approx \frac{\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{-jk_0} + \frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{-jk_0} \tanh(-jk_0 \sqrt{\varepsilon_2} L)}{\frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{-jk_0} \tanh(-jk_0 \sqrt{\varepsilon_2} L) + \frac{\sqrt{\varepsilon_3}}{-jk_0}} \Rightarrow$$

$$\Omega \approx \frac{1 - j \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}} \tan(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} L)}{\sqrt{\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}} - j \cdot \tan(k_0 \sqrt{\varepsilon_2} L)} \quad (3.21)$$

Οπότε οι τελικές ρίζες της εξίσωσης $\varphi(\lambda) = \mathbf{Z} + \mathbf{\Gamma} = \mathbf{0}$ δίνονται από τις σχέσεις :

$$n = 0 \rightarrow \lambda_0 = k_0 \sqrt{1 + j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}}$$

$$n \neq 0 \rightarrow \lambda_n = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{k_0 H}\right)^2 + 2j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}} \quad , n = 1, 2, \dots \quad (3.22)$$

Για κάθε αριθμό n προκύπτει ένα ζεύγος ριζών $\{\lambda n, -\lambda n\}$ λόγω της ύπαρξης της τετραγωνικής ρίζας το οποίο βρίσκεται αντιδιαμετρικά της αρχής των αξόνων .Οι μεν θετικές ρίζες λn βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου καθώς $\text{Re}[\lambda n] > 0$ και $\text{Im}[\lambda n] > 0$, ενώ οι αντίστοιχες αρνητικές $-\lambda n$ στο τέταρτο τεταρτημόριο με $\text{Re}[\lambda n] < 0$ και $\text{Im}[\lambda n] < 0$.

Ο δρόμος ολοκλήρωσης C που έχει επιλεγεί περικλείει τον θετικό φανταστικό άξονα ($\text{Im}[z] > 0$), οπότε οι ζητούμενοι πόλοι z_i προκύπτουν από τις θετικές ρίζες λn ($z_i = \lambda n$) . Βεβαίως , ότι ισχύει για τις θετικές ρίζες λn , ισχύει αντίστοιχα και για τις αντιδιαμετρικές τους $-\lambda n$.

Μελετώντας τις σχέσεις που δίνουν τις ρίζες λn , παρατηρείται ότι ανάλογα με την τάξη n προκύπτουν ρίζες με μεγάλο φανταστικό μέρος για $\pi n / k_0 H > 1$ που αντιστοιχούν σε εξασθενούντες ρυθμούς και ρίζες με μικρό φανταστικό μέρος για $\pi n / k_0 H < 1$ που αντιστοιχούν σε κυματοδηγούμενους ρυθμούς .

Ανάλογα με τις τιμές της συχνότητας f και του ύψους H της Ιονόσφαιρας, ο αριθμός M των κυματοδηγούμενων ρυθμών, μεταβάλλεται: $M = N + 1$, όπου N η μεγαλύτερη τάξη κυματοδηγούμενου ρυθμού, $N = \left\lfloor \frac{k_0 H}{\pi} \right\rfloor$ (ο όρος +1 προκύπτει λόγω της ύπαρξης του πόλου μηδενικής τάξης).

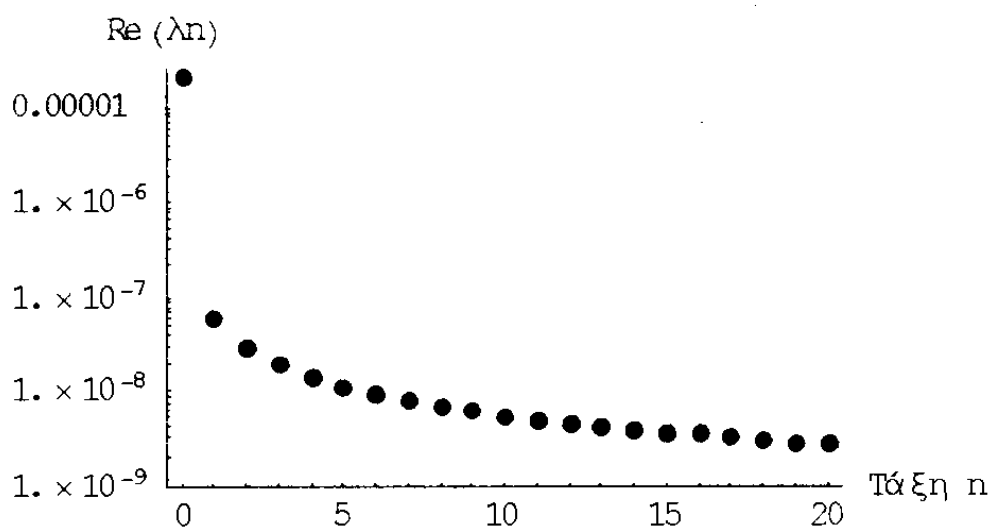
Οι ρίζες (πόλοι) λ_n που προκύπτουν για κυματοδηγούμενους ρυθμούς έχουν το χαρακτηριστικό ότι βρίσκονται πολύ κοντά στον πρωτεύοντα κυματαριθμό k_0 της αρχικής διέγερσης και έχουν πολύ μικρό φανταστικό μέρος. Αντίθετα, οι πόλοι των εξασθενούντων ρυθμών έχουν πολύ μικρό πραγματικό μέρος και βρίσκονται ουσιαστικά πάνω στον φανταστικό άξονα. Μάλιστα, όσο αυξάνεται η τάξη τους n , αυξάνεται και το φανταστικό τους μέρος, μετατοπίζοντας τους προς τα πάνω στον φανταστικό άξονα. Στα διαγράμματα που ακολουθούν έχει σχεδιασθεί η μεταβολή του πραγματικού $Re[\lambda_n]$ και του φανταστικού μέρους $Im[\lambda_n]$ όσο αυξάνεται η τάξη n των πόλων. Οι τιμές των παραμέτρων ε_i ($i=1,2,3$), k_0 , H και L έχουν ληφθεί με βάση την αναλυτική μελέτη της κυματοδότησης που γίνεται παρακάτω για συχνότητα $f = 1 \text{ KHz}$. Στην συνέχεια εξετάζεται αναλυτικότερα η επίδραση των μεγεθών k_0 , H και L στο πραγματικό και φανταστικό μέρος των ριζών λ_n . Όλα τα διαγράμματα είναι σε λογαριθμική κλίμακα.

Οπότε μελετάται η συμπεριφορά των πόλων λ_n ανάλογα με:

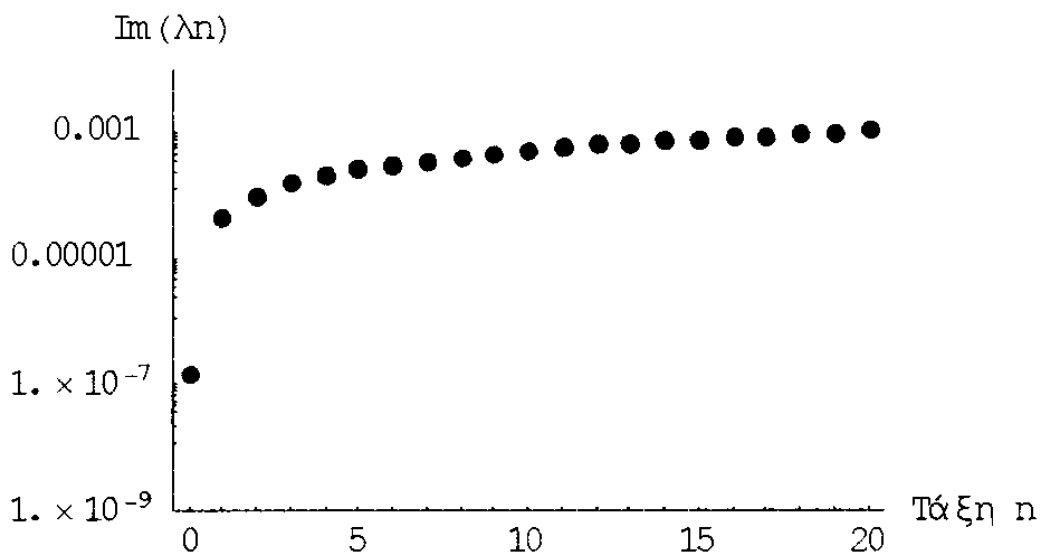
a. την τάξη n :

Φαίνεται καθαρά από τις γραφικές παραστάσεις:

- το μεγάλο πραγματικό και το μικρό φανταστικό μέρος του κυματοδηγούμενου ρυθμού $n = 0$, σε σχέση με τα αντίστοιχα μέρη των εξασθενούντων ρυθμών ($n \geq 1$),
- η ελάττωση του πραγματικού μέρους με την αύξηση της τάξης n των ρυθμών και αύξηση του φανταστικού τους μέρους.



Διάγραμμα 3.2 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ σε λογαριθμική κλίμακα.

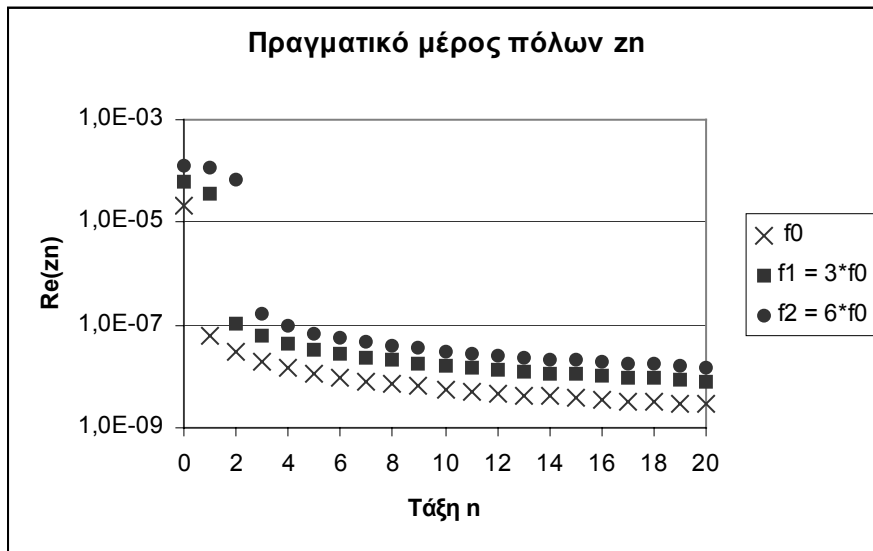


Διάγραμμα 3.3 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ σε λογαριθμική κλίμακα.

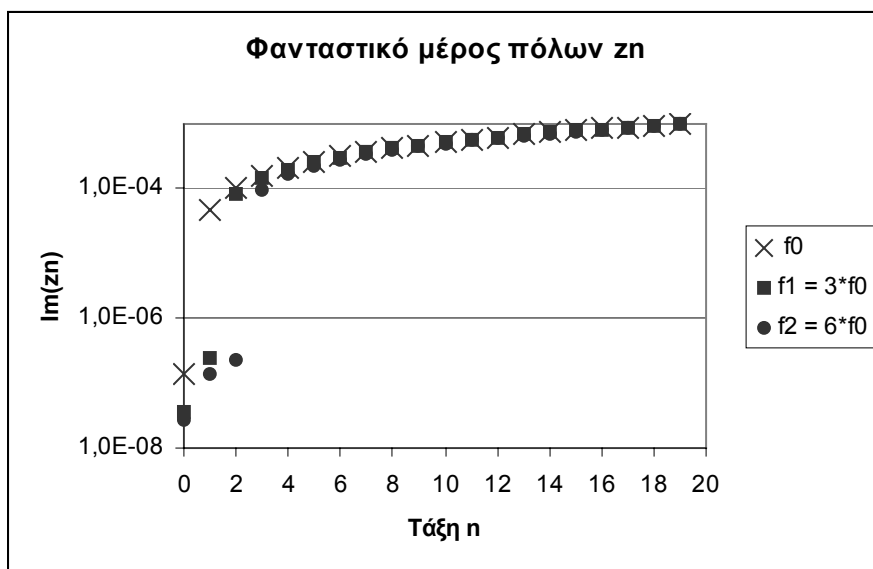
β.την συχνότητα f:

Ως αρχική συχνότητα θεωρείται η $f_0=1$ KHz, και σχεδιάζονται οι πόλοι για τις πολλαπλάσιες συχνότητες $f_1=3 f_0=3$ KHz και $f_2=6 f_0=6$ KHz .Είναι προφανές ότι η

αύξηση της συχνότητας προκαλεί μετατόπιση αριθμού ριζών από τον φανταστικό άξονα, “κοντά” στον πραγματικό άξονα και οδηγεί σε αύξηση του αριθμού M των κυματοδηγούμενων ρυθμών. Γενικά, σε όσες ρίζες δεν μεταβαίνουν από την εξασθένιση στην κυματοδότηση, προκαλείται αύξηση του πραγματικού τους μέρους ενώ το φανταστικό τους μέρος δεν μεταβάλλεται ουσιαστικά. Από τα διαγράμματα παρατηρείται ότι για: $f_0 : M=1$, $f_1 : M=2$, $f_2 : M=3$.



Διάγραμμα 3.4 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρεις διαφορετικές συχνότητες f_0, f_1, f_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα).

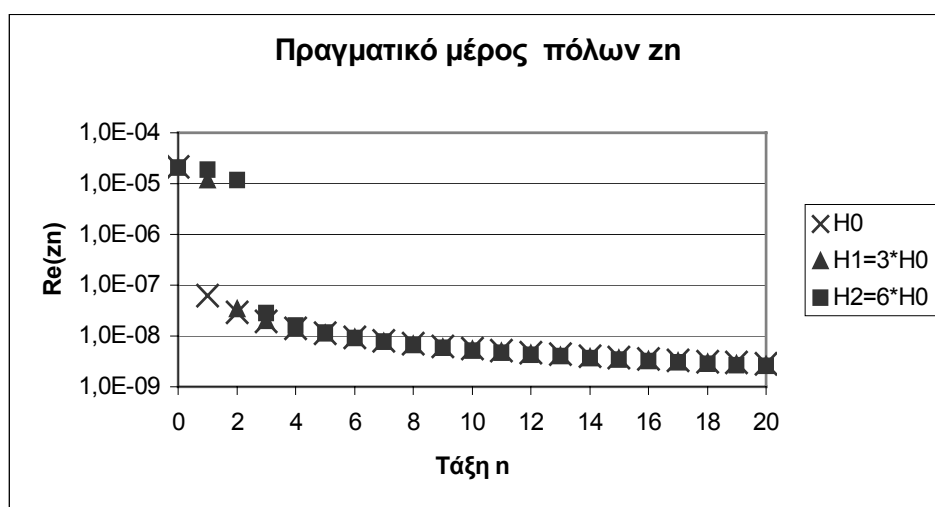


Διάγραμμα 3.5 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρεις διαφορετικές συχνότητες f_0, f_1, f_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα).

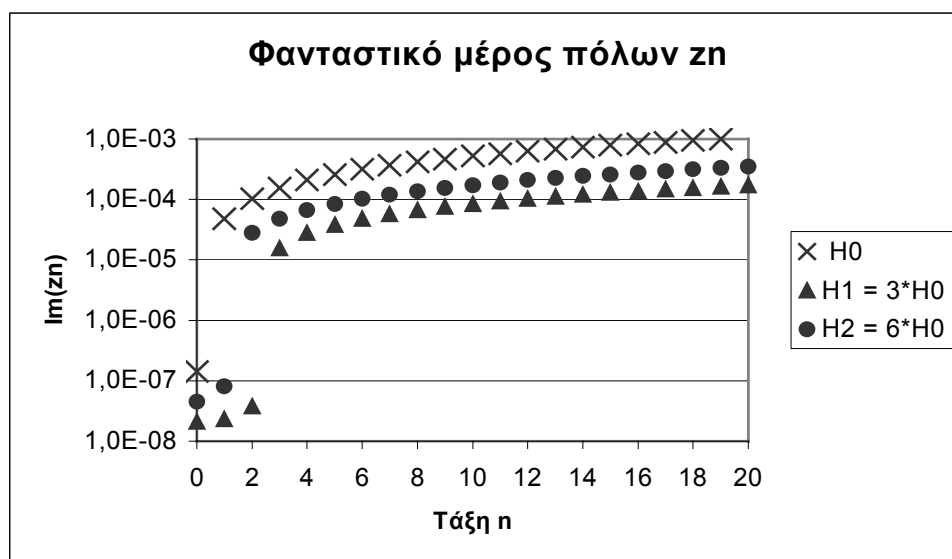
γ.το ύψος H

Ως αρχικό ύψος θεωρείται το $H_0=H_0=60$ km, και σχεδιάζονται οι πόλοι για τα πολλαπλάσια ύψη $H_1=3 H_0=180$ km και $H_2= 6 H_0=360$ km.

Είναι προφανές ότι αύξηση του ύψους H , οδηγεί σε αύξηση του αριθμού των κυματοδηγούμενων ρυθμών.Από τα διαγράμματα συμπεραίνεται επίσης ότι ελλατώνεται το φανταστικό μέρος των "εξασθενούντων" πόλων , ενώ το πραγματικό τους μέρος παραμένει ουσιαστικά σταθερό .



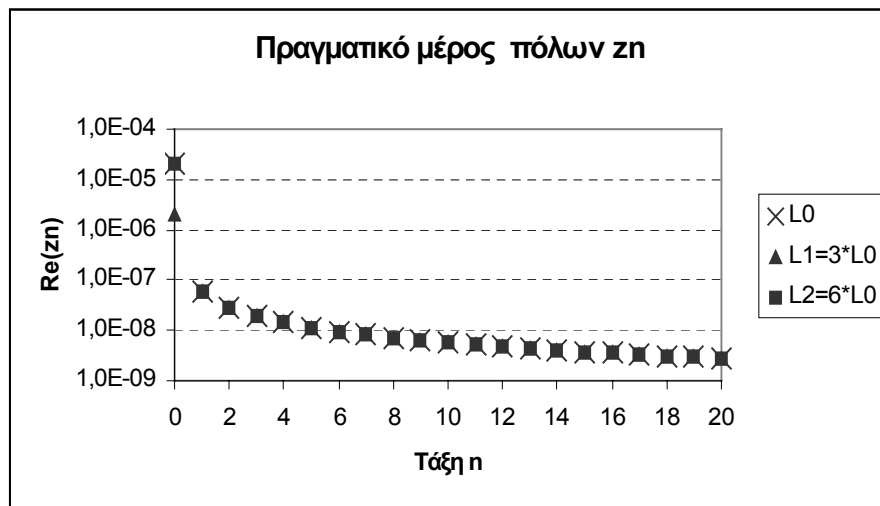
Διάγραμμα 3.6 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά ύψη H_0, H_1, H_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα) .



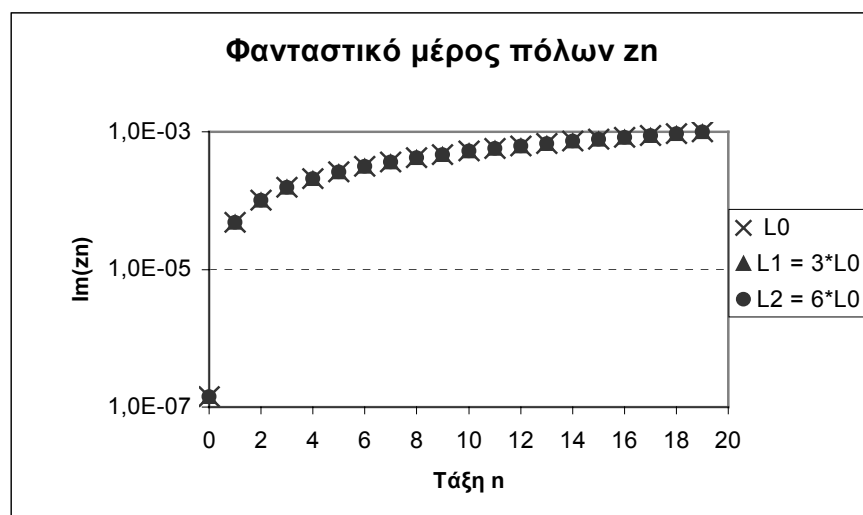
Διάγραμμα 3.7 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά ύψη H_0, H_1, H_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα) .

δ.το πάχος L:

Ως αρχικό πάχος θεωρείται το $L_0=L_0=1$ km, και σχεδιάζονται οι πόλοι για τα πολλαπλάσια πάχη $L_1=3 L_0=3$ km και $L_2= 6 L_0=6$ km. Από τα διαγράμματα παρατηρείται ότι το πάχος L δεν επηρεάζει ουσιαστικά την θέση των ριζών στο μιγαδικό επίπεδο. Οι "μονές" κουκίδες οφείλονται σε επικάλυψη των τριών συμβόλων .

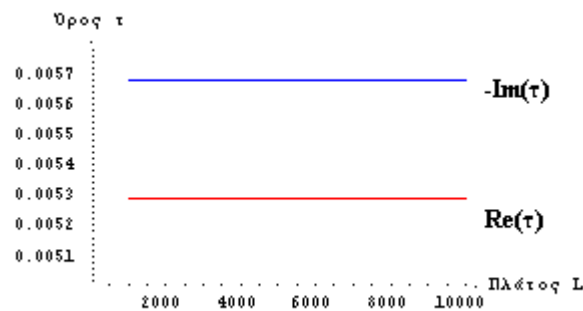


Διάγραμμα 3.8 : Το πραγματικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά πάχη L_0, L_1, L_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα) .



Διάγραμμα 3.9 : Το φανταστικό μέρος των πόλων z_n , για $0 \leq n \leq 20$ για τρία διαφορετικά πάχη L_0, L_1, L_2 , (σε λογαριθμική κλίμακα) .

Συμπερασματικά , η συχνότητα f και το ύψος H επηρεάζουν σημαντικά τον αριθμό των κυματοδηγούμενων ρυθμών ,ενώ μεταβάλλουν με αντίθετο τρόπο την θέση των πόλων των εξασθενούντων ρυθμών στο μιγαδικό επίπεδο .Αντίθετα το πάχος L ουσιαστικά δεν επηρεάζει την θέση των πόλων . Η συμπεριφορά αυτή ήταν αναμενόμενη καθώς ο παράγοντας L υπεισέρχεται στις αναλυτικές εκφράσεις (3.18) μέσω του όρου τ ο οποίος δεν μεταβάλλεται σημαντικά από την μεταβολή του πάχους L .Στο διάγραμμα που ακολουθεί παρουσιάζεται οι τιμές του παράγοντα τ για τιμές του πάχους L από 1km έως 10km .



Διάγραμμα 3.10: Μεταβολή του πραγματικού και φανταστικού μέρους του παράγοντα τ σε σχέση με το πάχος L της λιθόσφαιρας.

Αντίστοιχη μεθοδολογία πρέπει να ακολουθηθεί για τον υπολογισμό των ριζών του παράγοντα $\Psi + \mathbf{X} = \mathbf{0}$ που παρουσιάζεται στον παρονομαστή του εγκάρσιου δυναμικού Mz_0 . Ορίζοντας την συνάρτηση $\beta(\lambda) = \Psi(\lambda) + \Gamma(\lambda)$, και μελετώντας την για τιμές του λ κοντά στον κυματαριθμό k_0 : $\lambda \sim k_0$, παρατηρείται ότι δεν έχει ρίζες και συνεπώς από αυτήν δεν προκύπτουν κυματοδηγούμενα πεδία .

Συμπερασματικά , οι πόλοι z_i της ολοκληρωτέας συνάρτησης οι οποίοι περικλείονται από τον κλειστό δρόμο C , αποτελούν τις θετικές ρίζες του όρου του παρονομαστή $Z + \Gamma$.

$$n = 0 \rightarrow \lambda_0 = k_0 \sqrt{1 + j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}}$$

$$n \neq 0 \rightarrow \lambda_n = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{k_0 H}\right)^2 + 2j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}} \quad , n = 1, 2, \dots$$

3.5 Υπολογισμός ολοκληρωτικών υπολοίπων

Ο υπολογισμός των ολοκληρωτικών υπολοίπων στους πόλους λ_n απαιτεί την εύρεση της παραγώγου $\delta/\delta\lambda$ του παρονομαστή των ολοκληρωτέων συναρτήσεων $\varphi(\lambda) = \mathbf{Z}(\lambda) + \mathbf{\Gamma}(\lambda)$ από όπου προκύπτουν οι πόλοι λ_n . Για λόγους ευκολίας γράφεται η συνάρτηση $\varphi(\lambda)$ στην μορφή $\varphi(\lambda) = \mathbf{S}(\lambda) / \mathbf{R}(\lambda)$, ενώ ισχύει βέβαια $\mathbf{S}(\lambda_n) = \mathbf{0}$ και $\mathbf{R}(\lambda_n) \neq \mathbf{0}$ για κάθε n .

$$\begin{aligned}
 S(\lambda) &= \varepsilon_2 \mu_0 \cdot (\mu_1 + \mu_0 \varepsilon_1 \tanh(\mu_0 H)) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) \\
 &\quad + \mu_2 \cdot (\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L) \right) \quad (3.23) \\
 R(\lambda) &= \varepsilon_2 \mu_0 \cdot (\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right)
 \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωτικών υπολοίπων αρκεί η εύρεση της παραγώγου $\mathbf{S}'(\lambda) = \delta\mathbf{S}/\delta\lambda$. Με την βοήθεια των επιμέρους παραγωγίσεων ως προς λ :

$$\frac{d\mu_i}{d\lambda} = \frac{\lambda}{\mu_i}, \quad \frac{d\mu_i^{-1}}{d\lambda} = -\frac{\lambda}{\mu_i^3}, \quad \frac{d \tanh(\mu_i H)}{d\lambda} = \frac{\lambda H}{\mu_i \cdot \cosh^2(\mu_i H)}, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

προκύπτει η εξής "μακριά" έκφραση για την ζητούμενη παράγωγο $\mathbf{S}'(\lambda)$:

$$\begin{aligned}
S'(\lambda) &= \frac{dS(\lambda)}{d\lambda} = \varepsilon_2 \frac{\lambda}{\mu_0} \cdot (\mu_1 + \mu_0 \varepsilon_1 \tanh(\mu_0 H)) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) + \\
&+ \varepsilon_2 \mu_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_0} \varepsilon_1 \tanh(\mu_0 H) + \lambda \varepsilon_1 \cosh^{-2}(\mu_0 H) \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \right) + \\
&+ \varepsilon_2 \mu_0 \cdot (\mu_1 + \mu_0 \varepsilon_1 \tanh(\mu_0 H)) \cdot \left(-\frac{\varepsilon_2 \lambda}{\mu_2^3} \tanh(\mu_2 L) + \frac{\varepsilon_2 \lambda L}{\mu_2^2 \cosh^2(\mu_2 L)} - \frac{\varepsilon_3 \lambda}{\mu_3^3} \right) + \\
&+ \frac{\lambda}{\mu_2} \cdot (\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L) \right) + \\
&+ \mu_2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu_1} \tanh(\mu_0 H) + \frac{\mu_1 \lambda H}{\mu_0 \cosh^2(\mu_0 H)} + \frac{\lambda \varepsilon_1}{\mu_0} \right) \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_2} + \frac{\varepsilon_3}{\mu_3} \tanh(\mu_2 L) \right) + \\
&+ \mu_2 \cdot (\mu_1 \tanh(\mu_0 H) + \mu_0 \varepsilon_1) \cdot \left(-\frac{\varepsilon_2 \lambda}{\mu_2^3} + \frac{\varepsilon_3 \lambda L}{\mu_3 \mu_2 \cosh^2(\mu_2 L)} - \frac{\varepsilon_2 \lambda}{\mu_2^3} \tanh(\mu_2 L) \right)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Συνεπώς , τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα κάθε πόλου λ_n για κάθε μια συνιστώσα του μαγνητικού δυναμικού \vec{M}_i σε κάθε περιοχή i ($=0,1,2,3$) δίνονται από τις παρακάτω αναλυτικές σχέσεις στις οποίες χρησιμοποιούνται οι παρακάτω συμβολικές εκφράσεις για λόγους συντομίας :

$$\begin{aligned}
\mu_{i\lambda_n} &= \mu_i(\lambda_n) = \sqrt{\lambda_n^2 - k_i^2} \quad , \quad i = 0, 1, 2, 3 \\
V_{\lambda_n}^j &= V^j(\lambda_n) \quad , \quad V^j = \{Z, \Gamma, \Omega, \Xi, \Psi, \Pi, X\}
\end{aligned}$$

Περιοχή 0 –Αέρας :

$$\text{Res}[f_{x0}(\lambda), \lambda_n] = 2\delta \cdot \frac{\lambda_n}{\mu_0 \lambda_n} \cdot H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot \{ \cosh(\mu_0 \lambda_n z) - Z_{\lambda_n} \sinh(\mu_0 \lambda_n z) \} \tag{3.26}$$

$$\text{Res}[f_{z0}(\lambda), \lambda_n] = 2\delta \cdot \cos \phi \cdot \frac{\lambda_n^2}{\mu_0^2 \lambda_n} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot F_{z0}(z) \tag{3.27}$$

$$F_{z0}(z) = \left\{ \frac{\Pi_{\lambda_n} + \Xi_{\lambda_n}}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \cosh(\mu_0 \lambda_n z) - \frac{\Xi_{\lambda_n} X_{\lambda_n} - \Pi_{\lambda_n} \Psi_{\lambda_n}}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \cdot \sinh(\mu_0 \lambda_n z) \right\}$$

Περιοχή 1 Ιονόσφαιρα :

$$\text{Res}[f_{x1}(\lambda), \lambda_n] = \frac{\lambda_n}{\mu_{1\lambda_n} \tanh(\mu_{0\lambda_n} H) + \mu_{0\lambda_n} \varepsilon_1} \cdot H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot \frac{e^{-\mu_{1\lambda_n}(z-H)}}{\cosh(\mu_{0\lambda_n} H)} \quad (3.28)$$

$$\text{Res}[f_{z1}(\lambda), \lambda_n] = 2\delta \cdot \cos \phi \cdot \frac{\lambda_n^2}{\mu_{0\lambda_n}^2} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot F_{z1}(z)$$

$$F_{z1}(z) = \frac{\cosh(\mu_{0\lambda_n} H)}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \left\{ \frac{\Pi_{\lambda_n} \cdot \mu_{0\lambda_n} \cdot (1 - \tanh^2(\mu_{0\lambda_n} H))}{\mu_{1\lambda_n} \tanh(\mu_{0\lambda_n} H) + \mu_{0\lambda_n}} + \right. \quad (3.29)$$

$$\left. + \Xi_{\lambda_n} \cdot (1 + X_{\lambda_n} \cdot \tanh(\mu_{0\lambda_n} H)) \right\} \cdot e^{-\mu_{1\lambda_n}(z-H)}$$

Περιοχή 2 –Λιθόσφαιρα :

$$\text{Res}[f_{x2}(\lambda), \lambda_n] = 2\delta \cdot \frac{\lambda_n}{\mu_{0\lambda_n} \varepsilon_2} \cdot H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot \{ \cosh(\mu_{2\lambda_n} z) + \Omega_{\lambda_n} \sinh(\mu_{2\lambda_n} z) \} \quad (3.30)$$

$$\text{Res}[f_{z2}(\lambda), \lambda_n] = 2\delta \cdot \cos \phi \cdot \frac{\lambda_n^2}{\mu_{0\lambda_n} \mu_{2\lambda_n}} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot F_{z2}(z)$$

$$F_{z2}(z) = \left\{ \frac{\mu_{2\lambda_n}}{\mu_{0\lambda_n}} \frac{\Pi_{\lambda_n} + \Xi_{\lambda_n}}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \cosh(\mu_{2\lambda_n} z) - \left(\frac{\Xi_{\lambda_n} X_{\lambda_n} - \Pi_{\lambda_n} \Psi_{\lambda_n}}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot \sinh(\mu_{2\lambda_n} z) \right\} \quad (3.31)$$

Περιοχή 3 –Μανδύας :

$$\text{Res}[f_{x3}(\lambda), \lambda_n] = \frac{\lambda_n}{\mu_{0\lambda_n} \mu_{3\lambda_n} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2}{\mu_{2\lambda_n}} \tanh(\mu_{2\lambda_n} L) + \frac{\varepsilon_3}{\mu_{3\lambda_n}} \right)} \cdot H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot \frac{e^{\mu_{3\lambda_n}(z+L)}}{\cosh(\mu_{2\lambda_n} L)} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned}
\text{Res}[f_{z_3}(\lambda), \lambda_n] &= 2\delta \cdot \cos \phi \cdot \frac{\lambda_n^2}{\mu_{0\lambda_n} \mu_{2\lambda_n}} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot F_{z_3}(z) \\
F_{z_3}(z) &= \frac{\cosh(\mu_{2\lambda_n} L)}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \left[\Pi_{\lambda_n} \frac{\mu_{2\lambda_n}}{\mu_{0\lambda_n}} + \Psi_{\lambda_n} \tanh(\mu_{2\lambda_n} L) \right] + \\
&+ \Xi_{\lambda_n} \cdot \frac{\mu_{2\lambda_n}}{\mu_{0\lambda_n}} \cdot \frac{1 - \tanh^2(\mu_{2\lambda_n} L)}{\frac{\mu_{3\lambda_n}}{\mu_{2\lambda_n}} \tanh(\mu_{2\lambda_n} L) + 1} - \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \cdot (\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}) \cdot \tanh(\mu_{2\lambda_n} L) \cdot e^{\mu_{3\lambda_n}(z+L)}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Οπότε η συμβολή των ολοκληρωτικών υπολοίπων των πόλων λ_n σε κάθε περιοχή \mathbf{i} ($i=0,1,2,3$) και για κάθε συνιστώσα \mathbf{j} ($j=x,z$) δίνεται από την άπειρο άθροιση :

$$2\pi j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f_{ji}, \lambda_n) \tag{3.34}$$

Η συμβολή των πόλων των κυματοδηγούμενων ρυθμών $\mathbf{0} \leq n \leq \mathbf{N}$ είναι πολύ σημαντική καθώς εκφράζουν την συμπεριφορά του μαγνητικού δυναμικού σε αποστάσεις μακρινές της βροχοκεραίας $\rho \gg$. Η συμβολή όμως, των υπολοίπων εξασθενούντων ρυθμών (για $\mathbf{n} > \mathbf{N}$) δεν είναι αμελητέα, όπως θα φανεί και σχηματικά παρακάτω, ιδιαίτερα για αποστάσεις ρ κοντινές της βροχοκεραίας. Το γεγονός ότι δεν μπορούν να αγνοηθούν οφείλεται στην συμπεριφορά των Hankel συναρτήσεων.

Είναι γνωστό ότι η συμπεριφορά των Hankel συναρτήσεων για αρκετά μεγάλο όρισμα δίνεται από την ασυμπτωτική έκφραση :

$$H_\nu^{(1)}(x) \xrightarrow{x \gg} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[j \cdot \left(x - \frac{1}{2} \nu \pi - \frac{1}{4} \pi\right)\right] \tag{3.35}$$

Συνεπώς, για τους πόλους της ολοκληρωτέας συνάρτησης παρατηρείται μια εκθετική μείωση του μέτρου της Hankel συναρτήσης, ανάλογη του φανταστικού μέρους του πόλου :

$$x = \lambda_n \cdot \rho, \lambda_n = a + j \cdot b \Rightarrow$$

$$H_v^{(1)}(\lambda_n \cdot \rho) \xrightarrow{\rho \gg} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \exp(-b \cdot \rho) \cdot \exp\left[j \cdot \left(a\rho - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right] \quad (3.36)$$

Οπότε, όσο αυξάνεται η τάξη n των πόλων λ_n (που ισοδυναμεί με αύξηση του φανταστικού τους μέρους), και όσο αυξάνει η απόσταση ρ από την βροχοκεραία, ελλοτώνεται εκθετικά η συμβολή τους στον υπολογισμό του παραγόμενου δυναμικού. Αντίθετα, οι κυματοδηγούμενοι ρυθμοί οι οποίοι έχουν πολύ μικρό φανταστικό μέρος, έχουν συμπεριφορά της μορφής $\sim \rho^{-1/2}$ σε αρκετά μεγάλες αποστάσεις ρ .

Ο αριθμός των πόλων λ_n που κρίνεται απαραίτητος για έναν σχετικά ακριβή προσδιορισμό τόσο του μαγνητικού δυναμικού όσο και των παραγόμενων ηλεκτρομαγνητικών πεδίων εξαρτάται από την απόσταση παρατήρησης καθώς για κοντινές αποστάσεις αναμφισβήτητα απαιτούνται πολλοί όροι, ενώ για τις αποστάσεις που μελετώνται, μακριά από την κεραία ($\rho > 10\text{km}$), 10 έως 20 όροι αρκούν για την εξαγωγή ασφαλών συμπερασμάτων.

3.6 Χειρισμός των βροχοτομών

Ο υπολογισμός των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων γύρω από τις βροχοτομές \mathbf{B}_1 και \mathbf{B}_3 χρειάζεται ειδικό χειρισμό καθώς απαιτείται προσοχή στον καθορισμό των τιμών των τετραγωνικών ριζών μ_1 και μ_3 γύρω από τις βροχοτομές.

Ο γεωμετρικός τόπος των βροχοτομών \mathbf{B}_i στο μιγαδικό επίπεδο z καθορίζεται από τα σημεία ασυνέχειας \mathbf{k}_i από όπου ξεκινάνε :

$$\text{Re}[z] \cdot \text{Im}[z] = \text{Re}[k_i] \cdot \text{Im}[k_i]$$

$$z = x + j \cdot y \Rightarrow \quad (3.37)$$

$$y = \frac{c}{x}, \quad c = \text{σταθερά}$$

Συνεπώς , αποτελούν υπερβολές που ξεκινάνε από το άπειρο και καταλήγουν στα σημεία ασυνέχειας .

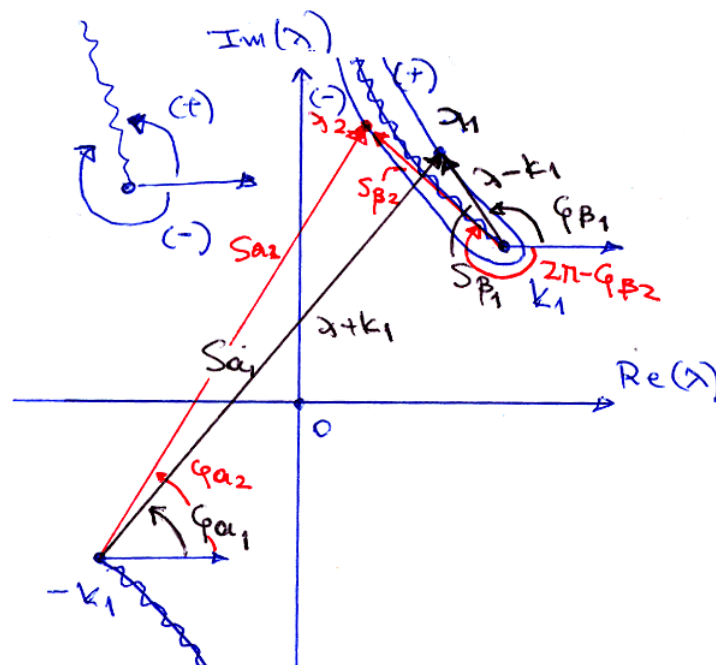
Η τιμή της ρίζας μ_i ,που εμπλέκει το αντίστοιχο σημείο ασυνέχειας k_i ,στην θετική B_i^+ και την αρνητική B_i^- παρειά της βροχοτομής διαφέρει και καθορίζεται με τέτοιο τρόπο ώστε να μην καταστρατηγείται η βροχοτομή .

Έτσι ο παράγων μ_i γράφεται στην μορφή :

$$\begin{aligned} \mu_i &= \sqrt{\lambda^2 - k_i^2} = \sqrt{\lambda + k_i} \cdot \sqrt{\lambda - k_i} \Rightarrow \\ \sqrt{\lambda + k_i} &= \sqrt{S_a} e^{j\frac{\phi_a}{2}} \quad , \quad S_a = |\lambda + k_i| \quad , \quad \phi_a = \text{Arg}[\lambda + k_i] \\ \sqrt{\lambda - k_i} &= \begin{cases} \sqrt{S_b} e^{j\frac{\phi_b}{2}} \quad , \quad B_i^+ \\ \sqrt{S_b} e^{j\frac{(2\pi - \phi_b)}{2}} \quad , \quad B_i^- \end{cases} \quad , \quad S_b = |\lambda - k_i| \quad , \quad \phi_b = \text{Arg}[\lambda - k_i] \end{aligned} \quad (3.38)$$

Οπότε συνολικά :

$$\mu_i = \begin{cases} \sqrt{S_a S_b} \cdot e^{j\frac{1}{2}(\phi_a + \phi_b)} \quad , \quad B_i^+ \\ -\sqrt{S_a S_b} \cdot e^{j\frac{1}{2}(\phi_a - \phi_b)} \quad , \quad B_i^- \end{cases} \quad (3.39)$$



Σχήμα 3.11 : Χειρισμός των βροχοτομών

Για τον σαφή ορισμό του μ_i η γωνία φ_b του διανύσματος $(\lambda - \mathbf{k}_i)$ μετριέται κατά την θετική φορά (αριστερόστροφα) για τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στην δεξιά παρειά \mathbf{B}_i^+ της βροχοτομής ενώ για την αριστερή παρειά \mathbf{B}_i^- μετριέται δεξιόστροφα παίρνοντας τιμή $2\pi - \varphi_b$. Έτσι, ουσιαστικά στην αρνητική παρειά (\mathbf{B}_i^-) αντί της τιμής της ρίζας του διανύσματος $(\lambda - \mathbf{k}_i)$ πάνω στην θετική παρειά (\mathbf{B}_i^+) παίρνεται η αρνητική (-) συζυγή τιμή της :

$$\sqrt{\lambda - k_i} \Big|_{\mathbf{B}_i^-} = -\sqrt{\lambda - k_i} \Big|_{\mathbf{B}_i^+} \quad (3.40)$$

Ο παράγον $(\lambda + \mathbf{k}_i)$ που εκφράζει το διάνυσμα από το αντιδιαμετρικό σημείο ασυνέχειας $-\mathbf{k}_i$ δεν επηρεάζει την τιμή του όρου μ_i , και η γωνία του φ_a μετριέται κανονικά (αριστερόστροφα).

Στο παραπάνω διάγραμμα του μιγαδικού επιπέδου που ακολουθεί φαίνονται καθαρά τα διανύσματα $(\lambda + \mathbf{k}_i)$ και $(\lambda - \mathbf{k}_i)$ και οι όροι S_a , φ_a , S_b , φ_b , για ένα σημείο λ_1 που ανήκει στην θετική παρειά (\mathbf{B}_i^+) της της βροχοτομής και ένα σημείο λ_2 της αρνητικής (\mathbf{B}_i^-).

Η συμβολή της κάθε βροχοτομής \mathbf{B}_i δίνεται από το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της ολοκληρωτέας συνάρτησης πάνω στην θετική \mathbf{B}_i^+ και αρνητική \mathbf{B}_i^- παρειά της. Αφού ο γεωμετρικός τόπος της βροχοτομής \mathbf{B}_i αποτελεί τμήμα της υπερβολής $y = \mathbf{c}_i / x$, η μεταβλητή ολοκλήρωσης λ γράφεται παραμετρικά ως εξής : $\lambda(x) = x + \mathbf{j} \cdot \mathbf{c}_i / x$. Η φορά διαγραφής της βροχοτομής καθορίζει και τα όρια ολοκλήρωσης σε κάθε παρειά : $\mathbf{B}_i^+ : 0 < x < \text{Re}[\mathbf{k}_i]$, $\mathbf{B}_i^- : \text{Re}[\mathbf{k}_i] < x < 0$.

Οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f_i(\lambda)$ πάνω στην βροχοτομή \mathbf{B}_i γράφεται :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{B}_i} f_i(\lambda) d\lambda &= \int_{\mathbf{B}_i^+} f_i^+(\lambda) d\lambda + \int_{\mathbf{B}_i^-} f_i^-(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_0^{\text{Re}[k_i]} f_i^+(\lambda(x)) \cdot \lambda'(x) \cdot dx + \int_{\text{Re}[k_i]}^0 f_i^-(\lambda(x)) \cdot \lambda'(x) \cdot dx = \\ &= \int_0^{\text{Re}[k_i]} [f_i^+(\lambda(x)) - f_i^-(\lambda(x))] \cdot \lambda'(x) \cdot dx \end{aligned} \quad (3.41)$$

Οι συναρτήσεις $f_i^+(\lambda)$ και $f_i^-(\lambda)$ προκύπτουν από την ολοκληρωτέα συνάρτηση $f_i(\lambda)$ με αντικατάσταση του "ευαίσθητου" όρου μ_i με τις κατάλληλες προαναφερθείσες τιμές μ_i^+ και μ_i^- για κάθε μία παρειά της βροχοτομής .

Με την βοήθεια των παραπάνω παρατηρήσεων ,καθίσταται δυνατός ο ορθός υπολογισμός της συμβολής των δύο βροχοτομών \mathbf{B}_1 και \mathbf{B}_3 (σημεία συνέχειας : k_1, k_3) στο παραγόμενο μαγνητικό δυναμικό και κατά συνέπειαν και στο διεγερόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε κάθε περιοχή του χώρου .Ο αναλυτικός υπολογισμός τους είναι πολύ δύσκολος λόγω της πολυπλοκότητας των ολοκληρωτέων συναρτήσεων , οπότε καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές τεχνικές και αριθμητικούς μεθόδους .Η συμβολή τους , αναμφισβήτητα , δεν μπορεί να θεωρηθεί αμελητέα δίχως προτού να εξακριβωθεί αριθμητικά .

3.7 Εύρεση πεδίων

Στην περίπτωση που μελετάται , όπως θα φανεί και στην συνέχεια ,σε πρώτη προσέγγιση , για αποστάσεις μακρινές από την κεραία $\rho > 10\text{km}$, η συμβολή των ολοκληρωμάτων πάνω στις βροχοτομές μπορεί να αγνοηθεί καθώς η συνεισφορά τους είναι αμελητέα . Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα πάνω στον δρόμο $\Gamma (-\infty, \infty)$ ισούται προσεγγιστικά με το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων :

$$\int_{\Gamma} f_{ij}(z) dz = 2\pi j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f_{ij}, \lambda_n) - \left(\int_{\Pi} + \int_{B_1^+} + \int_{B_1^-} + \int_{B_3^+} + \int_{B_3^-} \right) f_{ij}(z) dz \approx$$

$$\approx 2\pi j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f_{ij}, \lambda_n) \quad (3.42)$$

Οποτε προκύπτει τελικά η εξής αναλυτική έκφραση για κάθε συνιστώσα \mathbf{i} ($\mathbf{i}=\mathbf{x}, \mathbf{z}$) του μαγνητικού δυναμικού σε κάθε περιοχή \mathbf{j} ($\mathbf{j}=\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$) :

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f_{ij}(z) dz \approx \pi j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f_{ij}, \lambda_n) \quad (3.43)$$

Από την σχέση αυτή ,μπορούμε να εξάχθούν τα παραγόμενα ηλεκτρομαγνητικά πεδία σε κάθε περιοχή καθώς συνδέονται με τις γνωστές σχέσεις που έχουν προαναφερθεί .

$$\begin{aligned}
Ex_i &= j\omega \cdot \frac{\partial Mz_i}{\partial y} & , & \quad Hx_i = k_i^2 Mx_i + \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial x \partial z} \\
Ey_i &= j\omega \cdot \left(\frac{\partial Mx_i}{\partial z} - \frac{\partial Mz_i}{\partial x} \right) & , & \quad Hy_i = \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial z \partial y} \\
Ez_i &= -j\omega \cdot \frac{\partial Mx_i}{\partial y} & , & \quad Hz_i = k_i^2 Mz_i + \frac{\partial^2 Mx_i}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Mz_i}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Οι συνιστώσες Mx_i και Mz_i εξαρτώνται από τις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y μέσω των **Hankel** συναρτήσεων με όρισμα $\lambda n \rho$ και των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin \phi$ και $\cos \phi$. Η μερική παραγωγή των όρων αυτών ως προς τις μεταβλητές x και y γίνεται με την βοήθεια της μεθόδου της αλυσίδας :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_i^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\partial x} &= \frac{\partial H_i^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} & , & \quad \frac{\partial H_i^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\partial y} = \frac{\partial H_i^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} \\
\rho = \sqrt{x^2 + y^2} &\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \phi & , & \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \phi \\
\frac{\partial \cos \phi}{\partial x} &= \frac{\sin^2 \phi}{\rho} & , & \quad \frac{\partial \cos \phi}{\partial y} = -\frac{\cos \phi \cdot \sin \phi}{\rho}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Η παράγωγος της Hankel συνάρτησης πρώτου είδους n -οστής τάξης δίνεται από την σχέση :

$$\frac{\partial H_n^{(1)}(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} (H_{n-1}^{(1)}(x) - H_{n+1}^{(1)}(x)) \tag{3.46}$$

Επίσης , ισχύει η γνωστή ιδιότητα των Hankel συναρτήσεων που συνδέει την n -οστή τάξη με τις τάξεις $n+1$ και $n-1$:

$$\frac{2n}{x} \cdot H_n^{(1)}(x) = H_{n-1}^{(1)}(x) + H_{n+1}^{(1)}(x) \tag{3.47}$$

Οπότε ,για τις παραγώγους των Hankel συναρτήσεων πρώτου είδους μηδενικής και πρώτης τάξης που εμπλέκονται στις συναρτήσεις που εκφράζουν τα πεδία βρίσκεται :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_0^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\partial \rho} &= -\lambda_n \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \\
\frac{H_1^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\lambda_n \rho} &= \frac{1}{2} \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) + H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) \\
\frac{\partial H_1^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\partial \rho} &= \frac{\lambda_n}{2} \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) = \lambda_n \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - \frac{H_1^{(1)}(\lambda_n \rho)}{\lambda_n \rho})
\end{aligned}
\tag{3.48}$$

Κάθε συνιστώσα \mathbf{j} ($\mathbf{j}=\mathbf{x},\mathbf{z}$) του μαγνητικού δυναμικού σε κάθε περιοχή \mathbf{i} ($\mathbf{i}=\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}$) γράφεται στην μορφή :

$$\begin{aligned}
Mj_i(\rho, \phi, z) &= j \cdot 2\pi\delta \cdot \sum_n g_{ji}(\lambda_n) \cdot G_{ji}(\rho, \phi, z, \lambda_n) \\
G_{ji}(\rho, \phi, z, \lambda_n) &= f_{ji}(\rho, \phi, \lambda_n) \cdot F_{ji}(z, \lambda_n)
\end{aligned}
\tag{3.49}$$

όπου : $\mathbf{g}_{ij}(\lambda\mathbf{n})$: ο όρος που εξαρτάται από κάθε πόλο,

$\mathbf{G}_{ji}(\rho, \phi, z, \lambda\mathbf{n})$: ο όρος που εκφράζει την εξάρτηση του πεδίου από τις χωρικές συντεταγμένες ρ, ϕ και z γράφεται ως γινόμενο των συναρτήσεων :

$\mathbf{f}_{ji}(\rho, \phi, \lambda\mathbf{n})$: γινόμενα Hankel συναρτήσεων πρώτου είδους με τριγωνομετρικές

$\mathbf{F}_{ji}(z, \lambda\mathbf{n})$: γραμμικός συνδιασμός υπερβολικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Για την εύρεση των αναλυτικών εκφράσεων των πεδίων σε κάθε περιοχή είναι αναγκαίος ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων $\mathbf{G}_{ji}(\rho, \phi, z, \lambda\mathbf{n})$ πρώτης και δεύτερης τάξης που εμφανίζονται στις εκφράσεις των ζητούμενων πεδίων για κάθε συνιστώσα (x και z) .Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των Hankel συναρτήσεων που αναφέρονται παραπάνω ,υπολογίζονται αναλυτικά οι ζητούμενες μερικές παράγωγοι .

Σε κάθε περιοχή \mathbf{i} του χώρου ο όρος της συνιστώσα \mathbf{x} είναι της μορφής:

$$Gx_i = H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot Fx_i(z, \lambda_n) \tag{3.50}$$

Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Gx_i}{\partial x} &= -\lambda_n \cdot \cos \phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot F_{xi}(z, \lambda_n) \\
\frac{\partial Gx_i}{\partial y} &= -\lambda_n \cdot \sin \phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot F_{xi}(z, \lambda_n) \\
\frac{\partial Gx_i}{\partial z} &= H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{\partial F_{xi}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Gx_i}{\partial x^2} &= -\lambda_n \cdot \left[\frac{\lambda_n}{2} \cos^2 \phi \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) + \frac{\sin^2 \phi}{\rho} H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \right] \cdot F_{xi}(z, \lambda_n) = \\
&= -\frac{\lambda_n^2}{2} \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - \cos(2\phi) \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) \cdot F_{xi}(z, \lambda_n) \\
\frac{\partial^2 Gx_i}{\partial x \partial y} &= -\lambda_n \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot \left[\frac{\lambda_n}{2} (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) - \frac{1}{\rho} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \right] \cdot F_{xi}(z, \lambda_n) = \\
&= \lambda_n^2 \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot F_{xi}(z, \lambda_n) \\
\frac{\partial^2 Gx_i}{\partial x \partial z} &= -\lambda_n \cos \phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{\partial F_{xi}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Σε κάθε περιοχή \mathbf{i} του χώρου ο όρος της συνιστώσα \mathbf{z} είναι της μορφής :

$$Gz_i = \cos \phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot Fx_i(z, \lambda_n) \tag{3.53}$$

Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_{z_i}}{\partial x} &= \left[\frac{\lambda_n}{2} \cdot \cos^2 \phi \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) + \frac{\sin^2 \phi}{\rho} H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \right] \cdot F_{z_i}(z, \lambda_n) = \\
&= \frac{\lambda_n}{2} \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - \cos(2\phi) \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) \cdot F_{z_i}(z, \lambda_n) \\
\frac{\partial G_{z_i}}{\partial y} &= \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \left[\frac{\lambda_n}{2} \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) - \frac{1}{\rho} H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \right] \cdot F_{z_i}(z, \lambda_n) = \\
&= -\lambda_n \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot F_{z_i}(z, \lambda_n) \\
\frac{\partial G_{z_i}}{\partial z} &= \cos \phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{\partial F_{z_i}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 G_{z_i}}{\partial z^2} &= \cos \phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{\partial^2 F_{z_i}}{\partial z^2} \\
\frac{\partial^2 G_{z_i}}{\partial x \partial z} &= \left[\frac{\lambda_n}{2} \cos^2 \phi \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) + \frac{\sin^2 \phi}{\rho} H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \right] \cdot \frac{\partial F_{z_i}}{\partial z} = \\
&= \frac{\lambda_n}{2} \cdot (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - \cos(2\phi) \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) \cdot \frac{\partial F_{z_i}}{\partial z} \\
\frac{\partial^2 G_{z_i}}{\partial y \partial z} &= \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot \left[\frac{\lambda_n}{2} (H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)) - \frac{1}{\rho} H_1^{(1)}(\lambda_n \rho) \right] \cdot \frac{\partial F_{z_i}}{\partial z} = \\
&= -\lambda_n \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho) \cdot \frac{\partial F_{z_i}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Για λόγους συντομίας παρατίθενται στην συνέχεια μόνο οι αναλυτικές εκφρασεις των καρτεσιανών συνιστωσών x, y, z , του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στον Αέρα (Περιοχή θ).

Οι συνιστώσες του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού \mathbf{M}_0 δίνονται από τις σχέσεις :

Συνιστώσα Mx_0 :

$$\begin{aligned} Mx_0(\rho, \phi, z) &= j \cdot 2\pi\delta \cdot \sum_n g_{x0}(\lambda_n) \cdot G_{x0}(\rho, \phi, z, \lambda_n) \\ G_{x0}(\rho, \phi, z, \lambda_n) &= f_{x0}(\rho, \phi, \lambda_n) \cdot F_{x0}(z, \lambda_n) \\ g_{x0}(\lambda_n) &= \frac{\lambda_n}{\mu_{0\lambda_n}} \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)}, \quad f_{x0}(\rho, \phi, \lambda_n) = H_0^{(1)}(\lambda_n \rho), \\ F_{x0}(z, \lambda_n) &= \{\cosh(\mu_{0\lambda_n} z) - Z_{\lambda_n} \cdot \sinh(\mu_{0\lambda_n} z)\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

Συνιστώσα Mz_0 :

$$\begin{aligned} Mz_0(\rho, \phi, z) &= j \cdot 2\pi\delta \cdot \sum_n g_{z0}(\lambda_n) \cdot G_{z0}(\rho, \phi, z, \lambda_n) \\ G_{z0}(\rho, \phi, z, \lambda_n) &= f_{z0}(\rho, \phi, \lambda_n) \cdot F_{z0}(z, \lambda_n) \\ g_{z0}(\lambda_n) &= \frac{\lambda_n^2}{\mu_{0\lambda_n}^2} \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)}, \quad f_{z0}(\rho, \phi, \lambda_n) = \cos\phi \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n \rho), \\ F_{z0}(z, \lambda_n) &= \left\{ \frac{\Pi_{\lambda_n} + \Xi_{\lambda_n}}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \cosh(\mu_{0\lambda_n} z) + \frac{\Xi_{\lambda_n} X_{\lambda_n} - \Pi_{\lambda_n} \Psi_{\lambda_n}}{\Psi_{\lambda_n} + X_{\lambda_n}} \cdot \sinh(\mu_{0\lambda_n} z) \right\} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων οι συνιστώσες των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων βρίσκονται εύκολα :

Ηλεκτρικό πεδίο E_0 :

$$\vec{E}_0 = (Ex_0, Ey_0, Ez_0)$$

$$Ex_0(\rho, \phi, z) = j\omega \cdot \frac{\partial Mz_0}{\partial y} = -2\pi\delta\omega \sum_n g_{z0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial Gz_0}{\partial y} \quad (3.58)$$

$$Ey_0(\rho, \phi, z) = j\omega \cdot \left(\frac{\partial Mx_0}{\partial z} - \frac{\partial Mz_0}{\partial x} \right) = -2\pi\delta\omega \sum_n \left[g_{x0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial Gx_0}{\partial z} - g_{z0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial Gz_0}{\partial x} \right] \quad (3.59)$$

$$Ez_0(\rho, \phi, z) = -j\omega \cdot \frac{\partial Mx_0}{\partial y} = 2\pi\delta\omega \sum_n g_{x0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial Gx_0}{\partial y} \quad (3.60)$$

Μαγνητικό πεδίο H_0 :

$$\vec{H}_0(\rho, \phi, z) = (Hx_0, Hy_0, Hz_0)$$

$$\begin{aligned} Hx_0(\rho, \phi, z) &= k_0^2 Mx_0 + \frac{\partial^2 Mx_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Mz_0}{\partial x \partial z} = \\ &= j2\pi\delta \sum_n [g_{x0} \cdot (k_0^2 \cdot Gx_0 + \frac{\partial^2 Gx_0}{\partial x^2}) + g_{z0} \cdot \frac{\partial^2 Gz_0}{\partial x \partial z}] \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$Hy_0(\rho, \phi, z) = \frac{\partial^2 Mx_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Mz_0}{\partial y \partial z} = j2\pi\delta \sum_n [g_{x0} \cdot \frac{\partial^2 Gx_0}{\partial x \partial y} + g_{z0} \cdot \frac{\partial^2 Gz_0}{\partial y \partial z}] \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} Hz_0(\rho, \phi, z) &= k_0^2 Mz_0 + \frac{\partial^2 Mx_0}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 Mz_0}{\partial z^2} = \\ &= j2\pi\delta \sum_n [g_{z0} \cdot (k_0^2 \cdot Gz_0 + \frac{\partial^2 Gz_0}{\partial z^2}) + g_{x0} \cdot \frac{\partial^2 Gx_0}{\partial x \partial z}] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Στις υπόλοιπες περιοχές του χώρου, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο εξάγεται με ανάλογο τρόπο και παριστάνεται με τις αντίστοιχες σχέσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Παρουσίαση αριθμητικών αποτελεσμάτων

4.1 Πρόλογος

Στο κεφάλαιο αυτό επιχειρείται μια σύντομη παρουσίαση των κυριοτέρων ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών με την βοήθεια των αναλυτικών σχέσεων και των προσεγγίσεων που έγιναν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το μέγεθος που ενδιαφέρει την μελέτη προτίστως είναι το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο Ez_0 στον αέρα και σε αυτό δίνεται περισσότερο βάρος. Επίσης παρουσιάζονται, πιο συνοπτικά όμως, τα εφαπτομενικά πεδία Ex_0 και Ey_0 , οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου H_0 στον αέρα και το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο Ez_2 της λιθόσφαιρας. Η μελέτη γίνεται για δύο συχνότητες $f_0=1\text{KHz}$ και $f_1=6\text{KHz}$ ενώ, επίσης, παρουσιάζονται οι αλλαγές που επιφέρουν στα κυματοδηγούμενα πεδία οι μεταβολές του ύψους H και του πάχους L . Σημειώνεται ότι οι τιμές που δίνονται στα αρχικά μεγέθη είναι ενδεικτικές καθώς η αναλυτική λύση που παρουσιάστηκε μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε συνδυασμό τιμών ϵ_i , f , H και L .

4.2 Ορισμός των αρχικών μεγεθών

Με την βοήθεια όσων έχουν λεχθεί παραπάνω, ο πρακτικός υπολογισμός του μαγνητικού δυναμικού και στην συνέχεια των παραγόμενων ηλεκτρομαγνητικών πεδίων καθίσταται δυνατός.

Από την στιγμή που έχουμε επιλέξει να εκφράσουμε την αρχική διέγερση και τα παραγόμενα πεδία σαν συνάρτηση του χρόνου της μορφής $\exp(-j\omega t)$, οι μιγαδικές διηλεκτρικές σταθερές ϵ_i σε κάθε περιοχή i ($i=0,1,2,3$) γράφονται στην μορφή :

$$\dot{\epsilon}_i = \epsilon'_i + j\epsilon''_i \quad (4.1)$$

Αναλυτικότερα σε κάθε περιοχή έχουμε :

α. Περιοχή 0 – Αέρας : ϵ_0

β. Περιοχή 1 – Ιονόσφαιρα :

Θεωρείται ότι : $v \sim 10^6 \text{ r/sec}$, $\omega_0 = 2\pi 10^7 \text{ rad/sec}$, ενώ οι συχνότητες f που μελετώνται δεν ξεπερνούν τα $f \leq 10\text{KHz} \Rightarrow \omega \leq 2\pi 10^4 \text{ rad/sec}$. Επίσης $\epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi$.

Θεωρούμε σχετική μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ϵ_1 :

$$\epsilon_1 \approx 1 + j \frac{\omega_0}{\epsilon_0 \cdot \omega} \quad (4.2)$$

γ.Περιοχή 2 - Λιθόσφαιρα :

Θεωρούμε σχετική μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ϵ_2 :

$$\epsilon_2 = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\epsilon_0} = 4 + j \frac{0.01}{\omega \cdot \epsilon_0} \quad (4.3)$$

δ.Περιοχή 3 - Μανδύας :

Θεωρούμε σχετική μιγαδική διηλεκτρική σταθερά ϵ_3 :

$$\epsilon_3 = \frac{\dot{\epsilon}_3}{\epsilon_0} = 2 + j \frac{0.001}{\omega \cdot \epsilon_0} \quad (4.4)$$

Όσον αφορά το ύψος H της Ιονόσφαιρας και το πάχος L της Λιθόσφαιρας θέτουμε αρχικά $H=60 \text{ km}$, $L=1 \text{ km}$.

4.3 Μελέτη πεδίων για συχνότητα 1 KHz

Έστω συχνότητα εκπομπής $f = 1 \text{ KHz}$.Τα μεγέθη που ενδιαφέρουν λαμβανούν τις ακόλουθες τιμές :

$$\begin{aligned} f = 1 \text{ KHz} &\Rightarrow k_0 = \omega / c = 2\pi / 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \\ \epsilon_1 &= 1 + j \cdot 10^4 \quad , \quad \epsilon_2 = 4 + j \cdot 18 \cdot 10^4 \quad , \quad \epsilon_3 = 2 + j \cdot 18 \cdot 10^3 \\ H &= 60000 \text{ m} \quad , \quad L = 1000 \text{ m} \end{aligned} \quad (4.5)$$

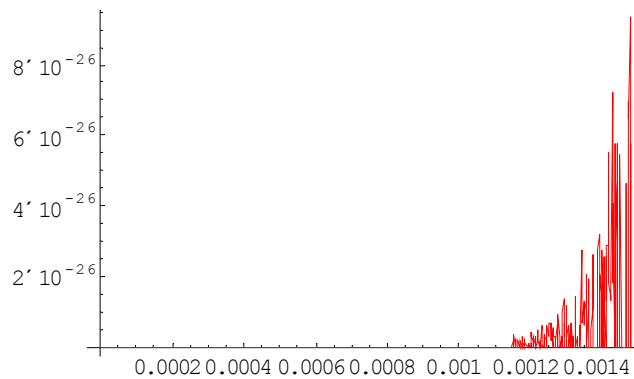
4.3.1 Μελέτη συνεισφοράς βροχοτομών

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.41) που έχουν εξαχθεί για τον υπολογισμό των δυναμικό πάνω στις βροχοτομές, μελετάται η συμβολή τους.

$$\int_{B_i} f_i(\lambda) d\lambda = \int_0^{\text{Re}[k_i]} [f_i^+(\lambda(x)) - f_i^-(\lambda(x))] \cdot \lambda'(x) \cdot dx$$

Αρχικά σχεδιάζεται η υποολοκλήρωση συνάρτηση στο διάστημα ολοκλήρωσης και στην συνέχεια με την βοήθεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης γίνεται μια πρώτη προσέγγιση των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων σε κάθε βροχοτομή :

Βροχοτομή B_1 – σημείο ασυνέχειας : k_1



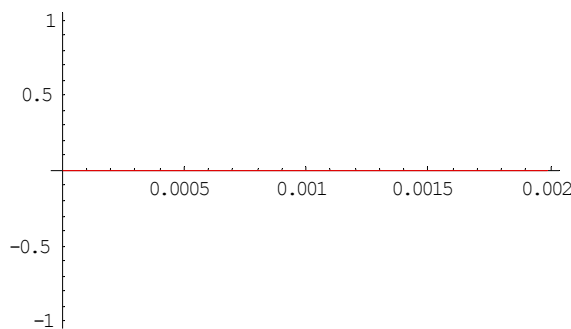
Σχήμα 4.1 : Μεταβολή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f_0(\lambda)$ πάνω στην βροχοτομή B_1

Το πρόγραμμα **Mathematica** σε πρώτη προσέγγιση (χωρίς την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια) υπολογίζει την τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος στην :

$$\int_{B_1} f_1(\lambda) d\lambda = -6.40231 \times 10^{-30} + j \cdot 1.3954 \times 10^{-29}$$

Βροχοτομή B_3 – σημείο ασυνέχειας : k_3

Η υποολοκλήρωση συνάρτηση λαμβάνει τόσο μικρές τιμές που το **Mathematica** παρουσιάζει μηδενικές τιμές στην περιοχή ολοκλήρωσης :



Σχήμα 4.2 : Μεταβολή της ολοκληρωτέας συνάρτησης $f_0(\lambda)$ πάνω στην βροχοτομή B_3

Συνεπώς ,το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ολοκληρωτέας συνάρτησης πάνω στην βροχοτομή B3 βρίσκεται περίπου μηδέν :

$$\int_{B_3} f_3(\lambda) d\lambda \approx 0$$

4.3.2 Εύρεση πόλων

Οπότε , όπως και έχει ήδη σημειωθεί ,το μαγνητικό δυναμικό δίνεται πρακτικά από το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων των πόλων της υπο ολοκλήρωσης συνάρτησης .

$$M_{ij} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} f_{ij}(z) dz \approx \pi j \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \text{Res}(f_{ij}, \lambda_n) \quad (4.6)$$

Απαιτείται συνεπώς η εύρεση των πόλων (ριζών) λ_n .Με την βοήθεια του προγράμματος **Mathematica** και των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης εξισώσεων είναι δυνατός ο ακριβής προσδιορισμός τους .Χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική σχέση (3.22) στην οποία καταλήξαμε από την αρχική εξίσωση $\mathbf{Z}+\mathbf{\Gamma}=\mathbf{0}$, ελέγχουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων :

$$n = 0 \rightarrow \lambda_0 = k_0 \sqrt{1 + j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}}$$

$$n \neq 0 \rightarrow \lambda_n = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{k_0 H}\right)^2 + 2j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}} \quad , n = 1, 2, \dots$$

Μάλιστα , τροποποιώντας λίγο την σχέση αυτή επιτυγχάνεται μια ακόμα καλύτερη προσέγγιση των ριζών λ_n ' :

$$n = 0 \rightarrow \lambda'_0 = k_0 \sqrt{1 + j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}}$$

$$n \neq 0 \rightarrow \lambda'_n = k_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n}{k_0 H}\right)^2 + 3.22 \cdot j \cdot \frac{\tau}{k_0 H}} \quad , n = 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

Στην συνέχεια παρατίθενται οι ακριβείς πόλοι \mathbf{z}_n που βρίσκονται μέσω του **Mathematica** για μερικές τάξεις ριζών \mathbf{n} , οι πόλοι (ρίζες) λ_n που προκύπτουν από

την προσεγγιστική σχέση (3.22) και οι αντίστοιχες τιμές λ_n που προκύπτουν από την εμπειρική σχέση (4.7).

Για τις αριθμητικές τιμές συχνότητας f και ύψους H , αναμένεται ότι από τους παραγόμενους ρυθμούς κυματοδηγούμενοι είναι εκείνοι που έχουν τάξη n :

$$n < \frac{k_0 H}{\pi} \xrightarrow[H=6 \cdot 10^4]{k_0 = \frac{2\pi \cdot 10^{-5}}{3}} n < 0.4$$

Συνεπώς στην περίπτωση αυτή, μόνο ο μηδενικής τάξης $n=0$ ρυθμός κυματοδηγείται

n	z_n	λ_n	λ_n'
0	$0.0000210168 + j \cdot 7.28542 \times 10^{-8}$	$0.0000209913 + j \cdot 4.39984 \times 10^{-8}$	$0.0000209913 + j \cdot 4.39984 \times 10^{-8}$
1	$6.37017 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000047925$	$3.85248 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000047947$	$6.20576 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000047922$
2	$2.97153 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000102574$	$1.80062 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000102585$	$2.89933 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000102573$
3	$1.95535 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000155657$	$1.18663 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000155664$	$1.91057 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000155657$
4	$1.45797 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000208375$	$8.86439 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000208380$	$1.452721 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000208374$
5	$1.16152 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000260949$	$1.16152 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000260953$	$1.13966 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000260948$
6	$9.64243 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000313451$	$7.07853 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000313454$	$9.48773 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000313450$
7	$8.23253 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000365912$	$5.89293 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000365915$	$8.12746 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000365912$
8	$7.17310 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000418348$	$4.41535 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000418350$	$7.10876 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000418347$
9	$6.34681 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000470767$	$3.92371 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000470769$	$6.31721 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000470766$
10	$5.68347 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000523174$	$3.53067 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000523176$	$5.68441 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000523174$
11	$5.13856 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000575572$	$3.20925 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000575574$	$5.16691 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000575572$
12	$4.68246 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000627964$	$2.94150 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000627966$	$4.73583 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000627964$
13	$4.29467 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000680351$	$2.71501 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000680353$	$4.37117 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000680351$
14	$3.96060 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000732735$	$2.52091 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000732736$	$4.05867 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000732735$
15	$3.66953 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000785115$	$2.35272 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000785116$	$3.78789 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000785115$
16	$3.41347 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000837492$	$2.20558 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000837494$	$3.41347 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000837492$
17	$3.18628 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000889868$	$2.07577 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000889869$	$3.34199 \times 10^{-9} + j \cdot 0.000889868$

Πίνακας 4.1 Οι πόλοι του μαγνητικού δυναμικού για $f=1$ KHz.

Συγκρίνοντας τις τιμές που προκύπτουν, παρατηρείται ότι επιτυγχάνεται αρκετά μεγάλη ακρίβεια μεταξύ των πραγματικών και των προσεγγιστικών τιμών στο πραγματικό μέρος των ριζών των κυματοδηγούμενων ρυθμών και στο φανταστικό

μέρος των εξασθενούντων δηλαδή στα μέρη εκείνα που χαρακτηρίζουν την συμπεριφορά των ρυθμών αυτών. Ακόμη, παρατηρείται ότι η εμπειρική τροποποιημένη σχέση (4.7) παρέχει ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια αποτελεσμάτων καθώς τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος των ριζών λ_n προσεγγίζουν σε πολύ μεγάλο βαθμό τα αντίστοιχα μέρη των πραγματικών ριζών z_n .

Επίσης επαληθεύεται η ύπαρξη ενός μόνο κυματοδηγούμενου ρυθμού (για $n=0$) και η συμπεριφορά των ριζών των εξασθενούντων ρυθμών (αύξηση του φανταστικού τους μέρους) όσο αυξάνεται η τάξη τους n .

4.3.3 Υπολογισμός των πεδίων

Οι σχέσεις (3.58 – 3.60) δίνουν την δυνατότητα του απευθείας υπολογισμού και μελέτης των δημιουργώμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου $\mathbf{E}_0(\rho, \phi, z)$ και $\mathbf{H}_0(\rho, \phi, z)$.

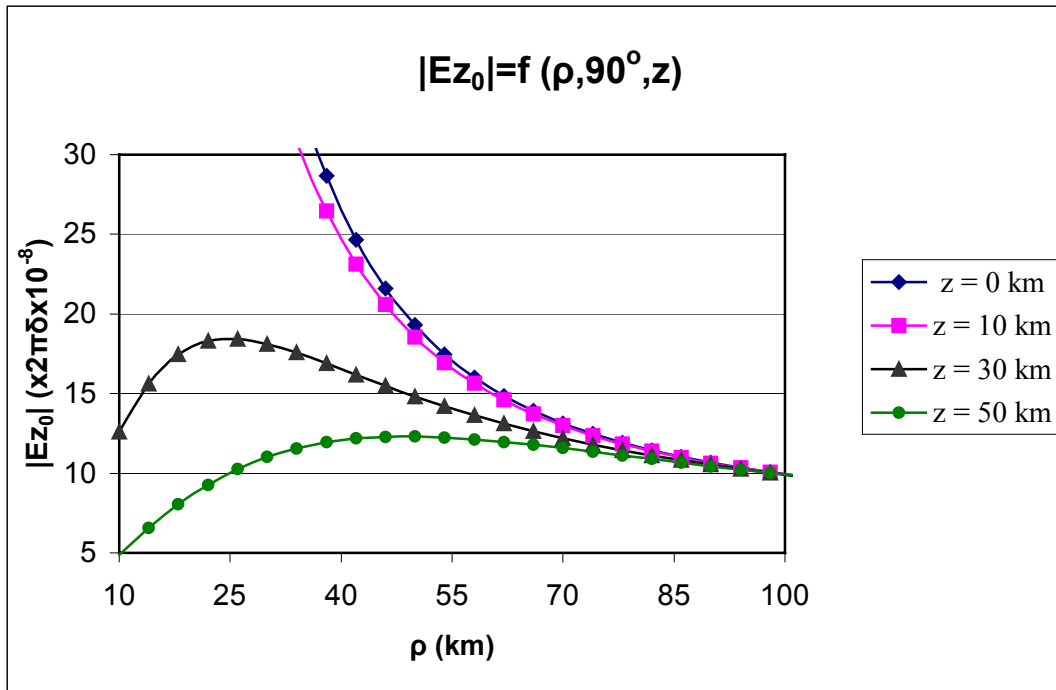
Σημειώνεται ότι στα διαγράμματα που ακολουθούν σχεδιάζεται η κανονικοποιημένη τιμή του μεγέθους ως προς την αρχική διέγερση δ (H' αλλιώς θέτουμε $\delta=1$). Παρατηρώντας τις αναλυτικές εκφράσεις των πεδίων, είναι φανερό ότι το μέτρο τους είναι ανάλογο της ποσότητας $\{|E_{ij}|, |H_{ij}|\} \propto 2\pi\delta$.

Η παρουσίαση των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου ξεκινά από την κάθετη συνιστώσα E_{z_0} (σχέση 3.60) καθώς είναι εκείνη που ενδιαφέρει περισσότερο.

$$E_{z_0}(\rho, \phi, z) = -2\pi\omega\delta \sin\phi \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{\mu_{0\lambda_n}} \cdot H_1^{(1)}(\lambda_n\rho) \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)} \cdot \{\cosh(\mu_{0\lambda_n} z) - Z_{\lambda_n} \sinh(\mu_{0\lambda_n} z)\}$$

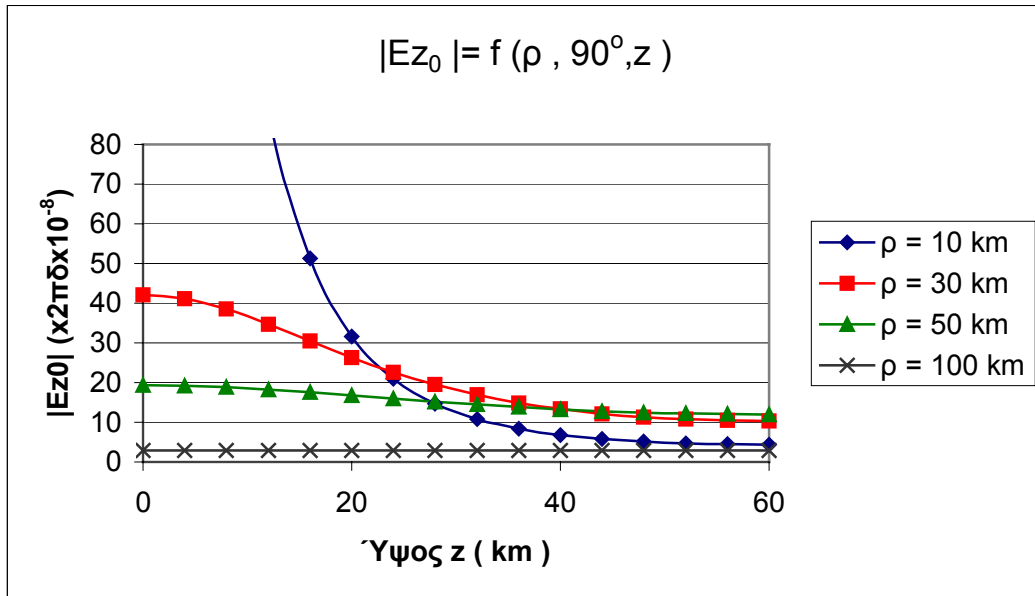
Για τον αριθμητικό υπολογισμό της συνιστώσας λήφθηκαν υπόψη οι ρίζες μέχρι και 17-ής τάξης. Όπως έχει ήδη σημειωθεί παραπάνω και φαίνεται παρακάτω, οι ρίζες ανωτέρας τάξης έχουν αμελητέα συμβολή στο άθροισμα.

Αρχικά παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου της $|Ez_0|$ σε συνάρτηση με την απόσταση ρ από την βροχοκεραία για διάφορα ύψη $z = \{0, 10, 30, 50\} km$ πάνω από την επιφάνεια της γής. Η γωνία φ λαμβάνεται ίση με 90° (πάνω στον y άξονα) έτσι ώστε να λαμβάνονται οι μέγιστες τιμές σε κάθε υψόμετρο.



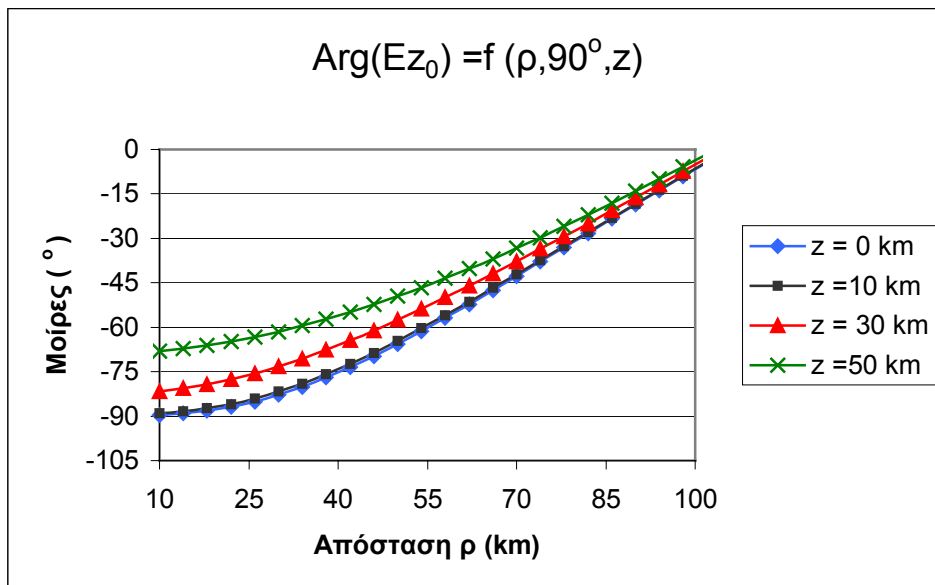
Διάγραμμα 4.3 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη $z, \varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz .

Στην συνέχεια , σχεδιάζεται η μεταβολή του μέτρου της συνιστώσας Ez_0 σε συνάρτηση της κάθετης απόστασης z από την επιφάνεια της Γής για διάφορες οριζόντιες αποστάσεις $\rho = \{10, 30, 50, 100\} km$ από την βροχοκεραία και για γωνία παρατήρησης $\varphi=90^\circ$.



Διάγραμμα 4.4 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με το ύψος z για διάφορες αποστάσεις ρ , $\varphi=90^\circ$.

Ακολουθεί η μεταβολή της γωνίας της συνιστώσας $\text{Arg}(Ez_0)$ σε συνάρτηση με την απόσταση ρ και για τα ίδια ύψη z . Η γωνία παρατήρησης φ λαμβάνεται ξανά 90° .

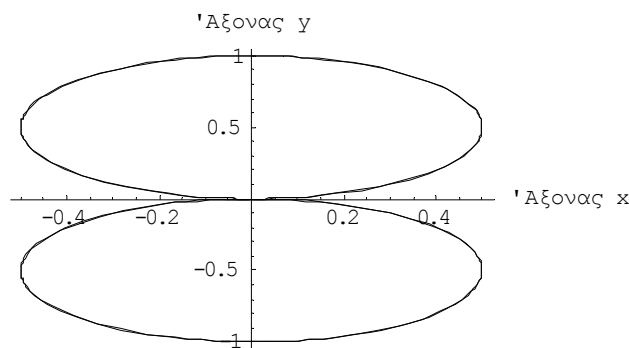


Διάγραμμα 4.5 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=1 \text{ KHz}$.

Από τα τρία αυτά γραφήματα παρατηρείται η μείωση του πλάτους $|Ez_0|$ της συνιστώσας με σχέση με την οριζόντια απόσταση ρ και την κατακόρυφη z . Λόγω της συμπεριφοράς της Hankel συνάρτησης έχουμε μείωση σε σχέση με την οριζόντια

απόσταση της μορφής $\sim \rho^{-1/2}$. Για μικρές αποστάσεις ρ , η ένταση του εγκάρσιου πεδίου είναι μεγαλύτερη σε χαμηλά ύψη, κοντά στην βροχοκεραία. Από κάποια απόσταση και μετά ($\rho > 70 \text{ km}$) η τιμή του μέτρου $|\mathbf{Ez}_0|$ γίνεται ανεξάρτητη από το ύψος παρατήρησης z . Η γωνία $\text{Arg}(\mathbf{Ez}_0)$ αυξάνεται σχεδόν γραμμικά σε συνάρτηση με την απόσταση ρ , ξεκινώντας από τιμές κοντά στις -90° κοντά στην πηγή.

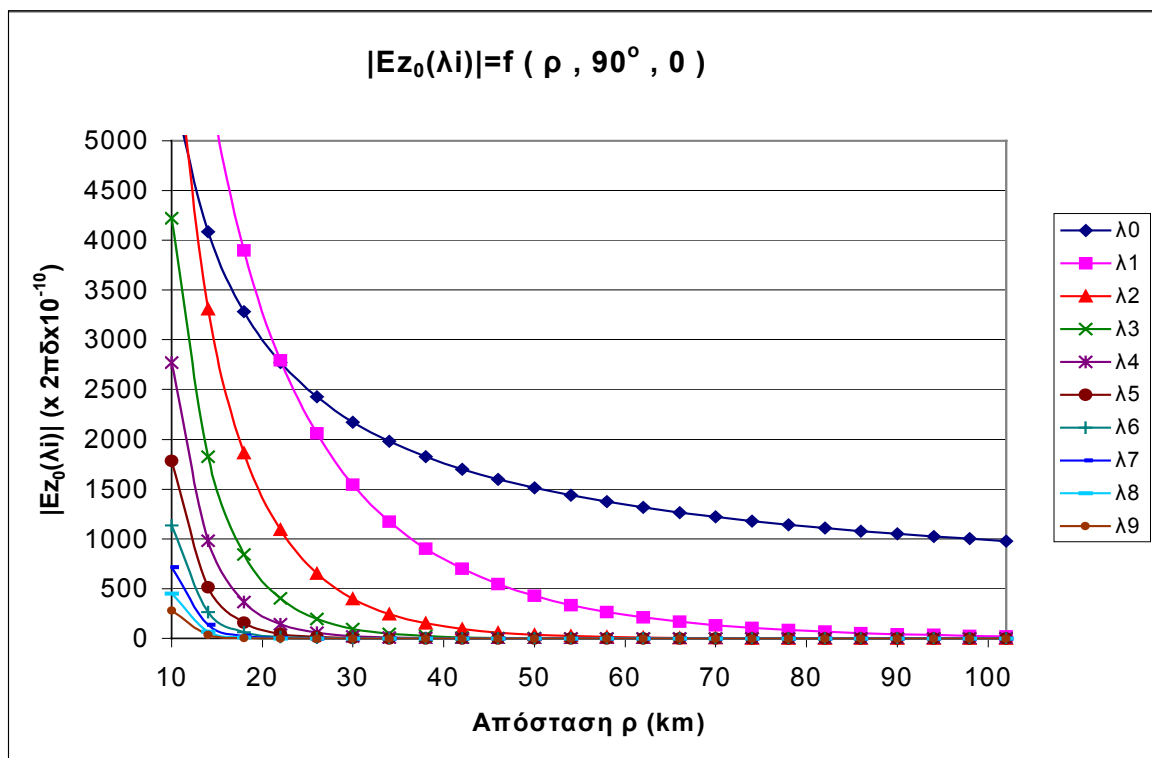
Το μέτρο $|\mathbf{Ez}_0|$ παρουσιάζει ημιτονική εξάρτηση ως προς την γωνία φ : $|\mathbf{Ez}_0| \sim \sin\varphi$. Συνεπώς το διάγραμμα ακτινοβολίας για την εγκάρσια συνιστώσα Ez_0 παρουσιάζει την εξής μορφή σε πολικό διάγραμμα:



Διάγραμμα 4.6 : Κανονικοποιημένο πολικό διάγραμμα του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την γωνία φ από τον κάθετο άξονα x .

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η βροχοκεραία είναι τοποθετημένη παράλληλα στον άξονα y , είναι φανερό ότι η εγκάρσια συνιστώσα \mathbf{Ez}_0 μηδενίζεται κατά μήκος του άξονα της βροχοκεραίας ($\varphi=0^\circ$).

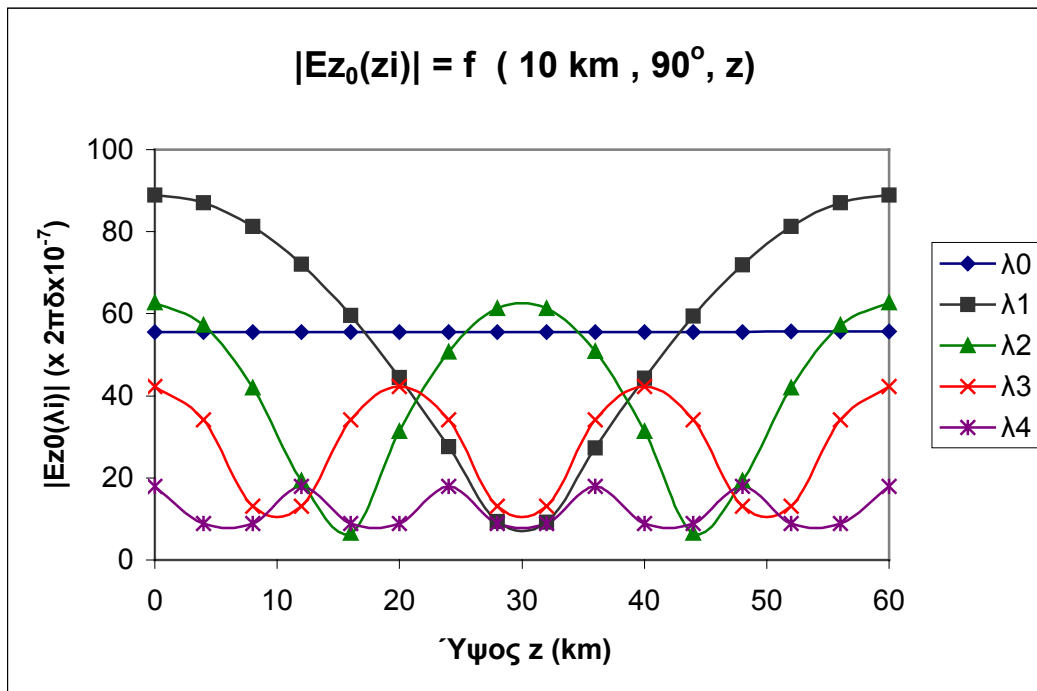
Για την μελέτη της συμβολής του κάθε ρυθμού, που χαρακτηρίζεται από την αντίστοιχη ρίζα λ_n , στην δημιουργία του συνιστάμενου πεδίου στον άξονα z , σχεδιάζουμε τους όρους του αθροίσματος που αντιστοιχούν στις πρώτες τάξεις των ριζών (για $n=0,1, \dots, 9$) σε συνάρτηση με την οριζόντια απόσταση ρ . Θεωρείται ότι $z = 0$ και ότι $\varphi = 90^\circ$.



Διάγραμμα 4.7 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας $Ez_0(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0 \text{ km}$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1 \text{ KHz}$

Το διάγραμμα αυτό δικαιολογεί πλήρως τις παρατηρήσεις που έχουν γίνει ήδη για την συμβολή κάθε ρυθμού στο συνιστάμενο πεδίο. Είναι φανερή η εκθετική μείωση των όρων μεγαλύτερης τάξης, που αντιστοιχούν σε εξασθενούντες ρυθμούς, με την αύξηση της απόστασης ρ . Μάλιστα, όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη n της ρίζας, τόσο ταχύτερη εξασθένηση παρατηρείται. Αντίθετα, ο μοναδικός κυματοδηγούμενος ρυθμός λ_0 για μεγάλες αποστάσεις ρ μειώνεται ανάλογα του $\sim 1/\rho^{1/2}$, και ως επακόλουθο, το ολικό πεδίο \mathbf{Ez}_0 ακολουθεί την συμπεριφορά αυτή. Επίσης, είναι προφανές ότι για τον υπολογισμό του μέτρου της συνιστώσας Ez_0 σε κοντινές αποστάσεις ρ ($\rho < 30 \text{ km}$), είναι απαραίτητο να ληφθούν υπόψη και οι ρυθμοί ανώτερης τάξης.

Ενδιαφέρον ακόμη παρουσιάζει η συμπεριφορά του κάθε ρυθμού σε σχέση με το κατακόρυφο ύψος z . Παρατηρείται ότι ο ρυθμός n -οστής τάξης αντιστοιχεί σε n μηδενισμούς στην περιοχή κυματοδότησης (Αέρας) από $z = 0 \text{ km}$ έως $z = 60 \text{ km}$. Οι καμπύλες αντιστοιχούν σε $\rho = 10 \text{ km}$ και $\varphi = 90^\circ$. Επειδή η απόσταση παρατήρησης ρ είναι αρκετά μικρή, οι ρυθμοί πρώτης $n=1$ και δεύτερης τάξης $n=2$ λαμβάνουν αρκετά μεγάλες τιμές σε σχέση με τον πρωτεύοντα ρυθμό $n=0$.

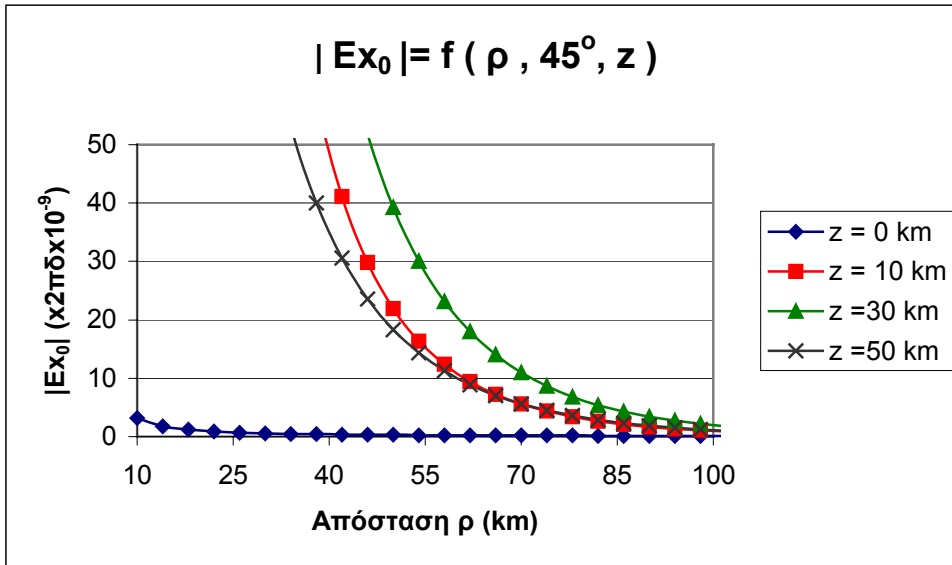


Διάγραμμα 4.8 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας $Ez_0(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με το ύψος z για $\rho = 10 \text{ km}$, $\varphi = 90^\circ$, για $f = 1 \text{ KHz}$.

Στην συνέχεια μελετώνται οι εφαπτομενικές συνιστώσες $\mathbf{E}x_0$ και $\mathbf{E}y_0$ του ηλεκτρικού πεδίου (σχ. 3.59):

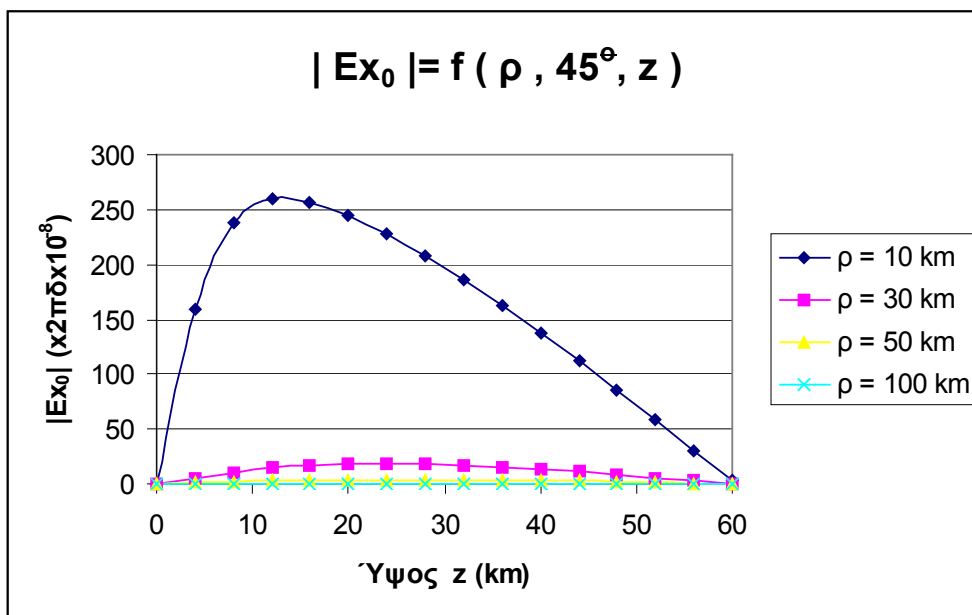
$$Ex_0(\rho, \phi, z) = j\omega \cdot \frac{\partial Mz_0}{\partial y} = -2\pi\delta\omega \sum_n g_{z_0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial Gz_0}{\partial y}$$

Αρχικά χαράσσεται η μεταβολή του μέτρου και της γωνίας της $\mathbf{E}x_0$ συνιστώσας σε συνάρτηση με την οριζόντια απόσταση ρ για διάφορα ύψη z . Παρατηρείται ότι κοντά στην επιφάνεια της Γής ($z = 0$), το μέτρο της συνιστώσας λαμβάνει πολύ μικρές τιμές ενώ παρουσιάζει μέγιστη ένταση περίπου στο μέσο του στρώματος Αέρα – Ιονόσφαιρας .Μάλιστα , όσο απομακρυνόμαστε από την πηγή , το σημείο μέγιστης έντασης προσεγγίζει το μέσον της απόστασης Γής – Ιονόσφαιρας .



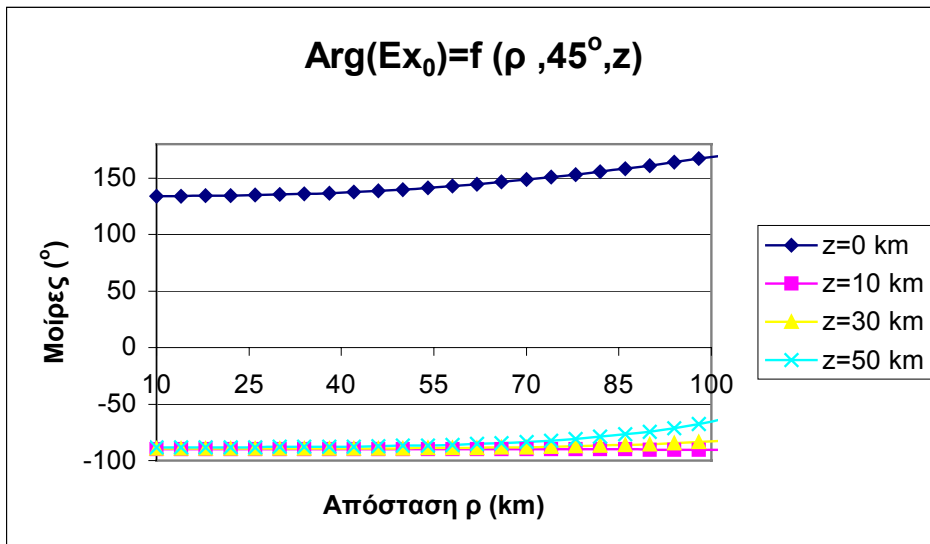
Διάγραμμα 4.9 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz.

Ακολουθεί η μεταβολή του μέτρου της συνιστώσας σε συνάρτηση με το ύψος z από την επιφάνεια της γής για διάφορες αποστάσεις ρ από την βροχοκεραία. Παρατηρείται ότι το μέτρο μεγιστοποιείται κοντά στο μέσο του στρώματος Γής – Ιονόσφαιρας, ενώ ουσιαστικά μηδενίζεται κοντά στις διαχωριστικές επιφάνειες των συνόρων $z=0$ και $z=H$.



Διάγραμμα 4.10 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με το ύψος z για διάφορες αποστάσεις ρ , $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz.

Η γωνία της συνιστώσας E_{x_0} σε συνάρτηση με την απόσταση ρ παρουσιάζεται στο παρακάτω διάγραμμα για διάφορα ύψη z και για γωνία $\varphi = 45^\circ$. Παρατηρείται ότι κοντά στα σύνορα ($z=0 \text{ km}$, $z=60 \text{ km}$) της περιοχής του Αέρα η γωνία αυξάνεται γραμμικά, ενώ στα ενδιάμεσα ύψη παρουσιάζει μια πολύ μικρότερη άυξηση παραμένοντας ουσιαστικά σταθερή στις -90° .

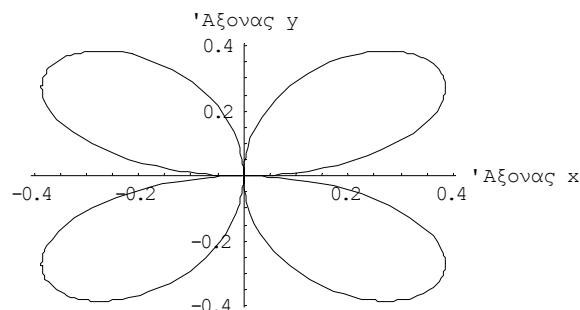


Διάγραμμα 4.11 : Μεταβολή του ορίσματος της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=1 \text{ KHz}$.

Το μέτρο $|E_{x_0}|$ παρουσιάζει εξάρτηση ως προς την γωνία φ της μορφής :

$$|E_{x_0}| \sim |\cos\varphi \cdot \sin\varphi| = |\sin(2\varphi) / 2|.$$

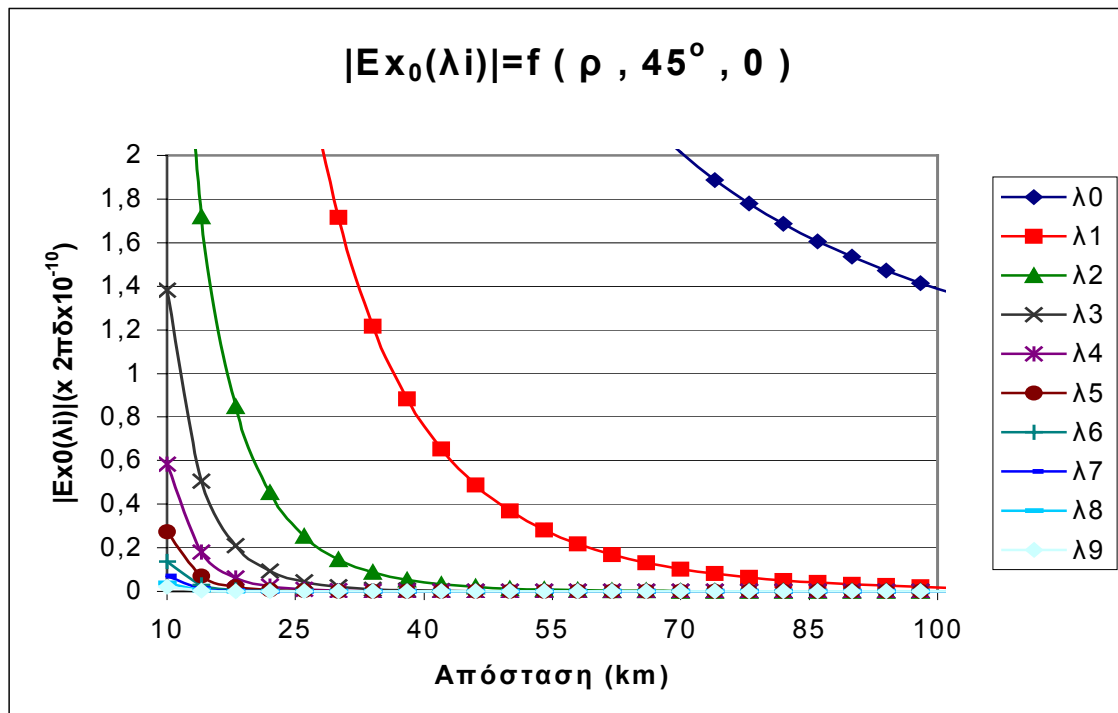
Συνεπώς, το διάγραμμα ακτινοβολίας για την εφαπτομενική συνιστώσα E_{x_0} παρουσιάζει την εξής μορφή σε πολικό διάγραμμα :



Διάγραμμα 4.12 : Κανονικοποιημένο πολικό διάγραμμα του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την γωνία φ από τον κάθετο άξονα x .

Το μέτρο $|E_{x_0}|$ λαμβάνει μέγιστες τιμές στις γωνίες $\varphi = 45^\circ, 135^\circ, 215^\circ, 335^\circ$. Στην κάθετη και παράλληλη διεύθυνση $\varphi = 0^\circ, \varphi = 90^\circ$ το πεδίο E_{x_0} μηδενίζεται .

Στην συνέχεια σχεδιάζεται η συμβολή κάθε ρυθμού στο συνιστάμενο πεδίο ως προς την οριζόντια απόσταση ρ από την πηγή πάνω στην επιφάνεια της Γής και για γωνία παρατήρησης $\varphi = 45^\circ$ όπου το μέτρο $|E_{x_0}|$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή. Μελετώντας το διάγραμμα παρατηρούμε ότι οι καμπύλες έχουν μορφή ανάλογη εκείνης που παρατηρήθηκε και στην εγκάρσια συνιστώσα E_{z_0} .



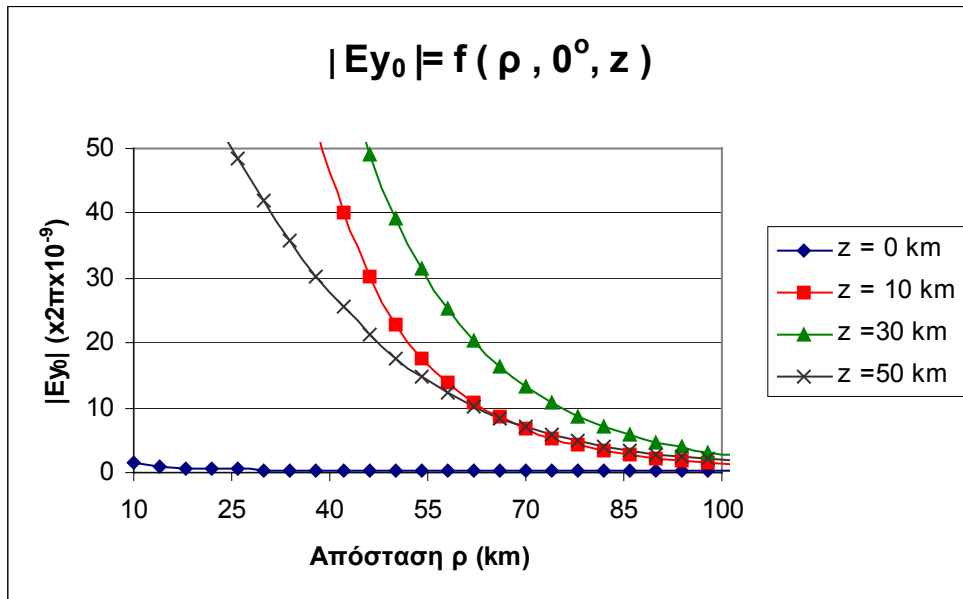
Διάγραμμα 4.13 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας $E_{x_0}(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km, $\varphi=45^\circ$, για $f=1$ KHz.

Ανάλογη συμπεριφορά χαρακτηρίζει και την άλλη εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου E_{y_0} (σχ.3.58).

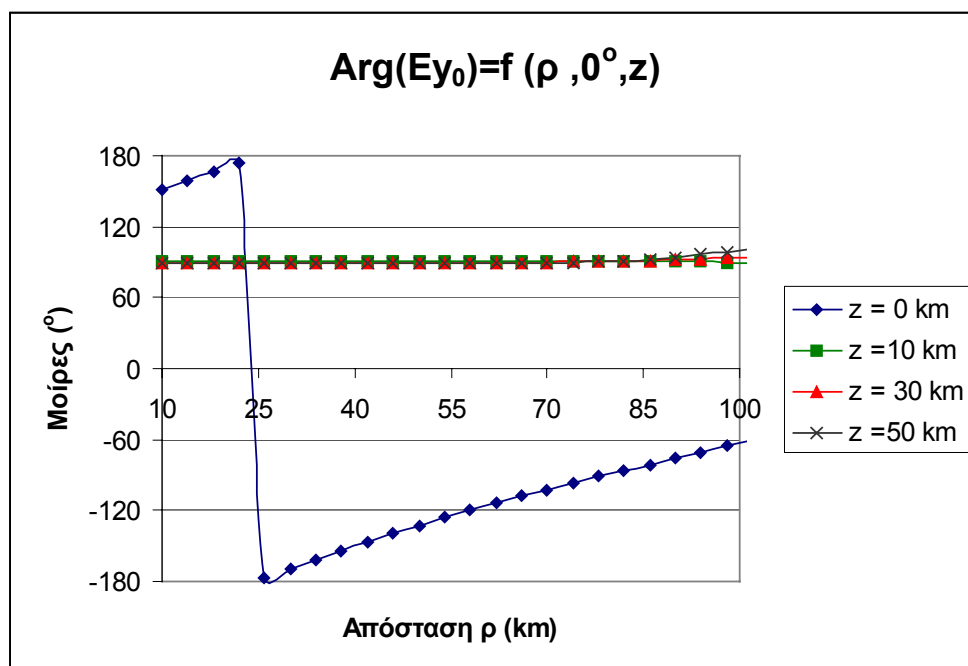
$$E_{y_0}(\rho, \phi, z) = j\omega \cdot \left(\frac{\partial M_{x_0}}{\partial z} - \frac{\partial M_{z_0}}{\partial x} \right) = -2\pi\delta\omega \sum_n [g_{x_0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial G_{x_0}}{\partial z} - g_{z_0}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial G_{z_0}}{\partial x}]$$

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις του μέτρου $|E_{y_0}|$ και της γωνίας $\text{Arg}(E_{y_0})$ της συνιστώσας E_{y_0} ως προς την απόσταση ρ και για διάφορα ύψη πάνω από την

επιφάνεια της Γής .Είναι φανερή η ομοιότητα των διαγραμμάτων της συνιστώσας E_{y0} με τα αντίστοιχα διαγράμματα της συνιστώσας E_{x0} .



Διάγραμμα 4.14 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{y0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=0^\circ$, για $f=1$ KHz.

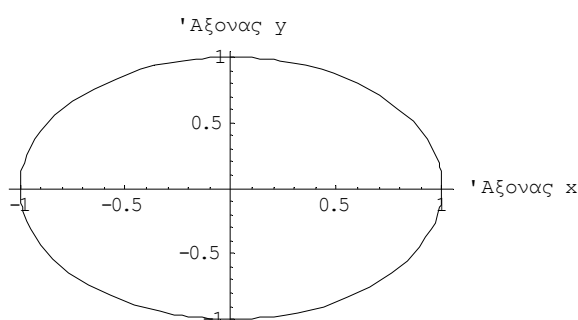


Διάγραμμα 4.15 : Μεταβολή του ορίσματος της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=0^\circ$, για $f=1$ KHz.

Παρατηρείται ότι η γωνία αυξάνεται η γωνία αυξάνεται γραμμικά , ενώ στα ενδιάμεσα ύψη παραμένει ουσιαστικά σταθερή στις 90° .

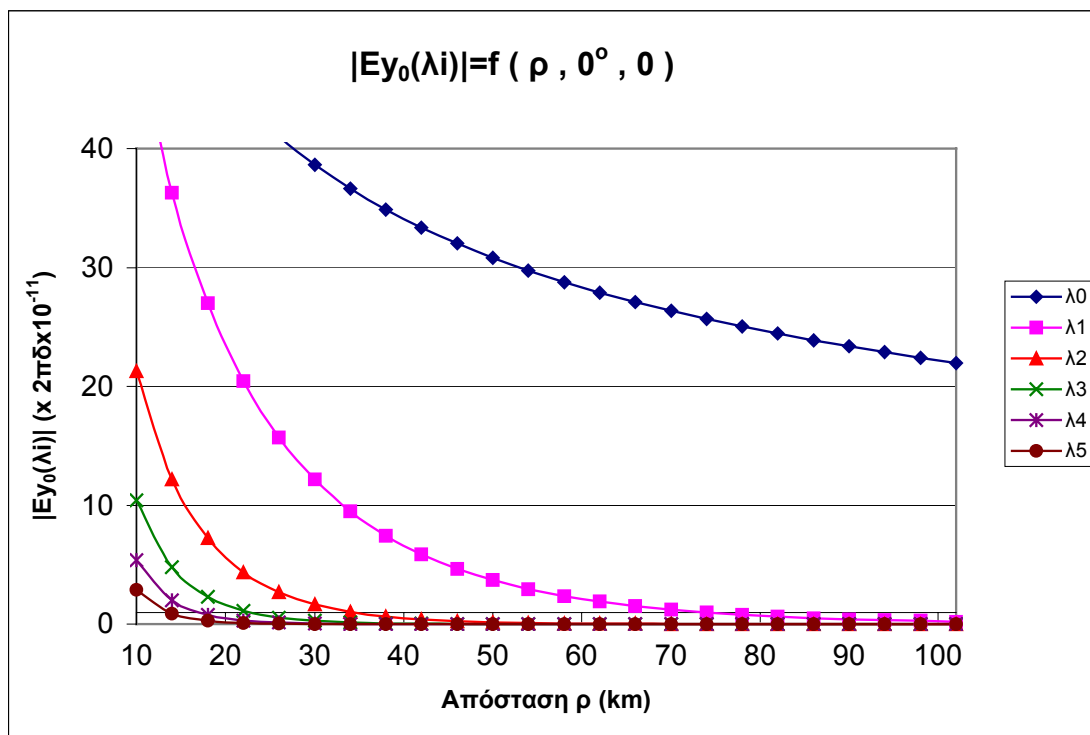
Το διάγραμμα ακτινοβολίας της συνιστώσας αυτής παρουσιάζει την μορφή έλλειψης ενώ λαμβάνει μέγιστες τιμές πάνω στους άξονες x και y .Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στον παράγοντα που εμφανίζεται στην αναλυτική έκφραση της συνάρτησης :

$$H_0^{(1)}(\lambda_n \rho) - \cos(2\phi) \cdot H_2^{(1)}(\lambda_n \rho)$$



Διάγραμμα 4.16 : Κανονικοποιημένο πολικό διάγραμμα του μέτρου της εφφαπτομενικής συνιστώσας E_{y0} σε σχέση με την γωνία ϕ από τον κάθετο άξονα x .

Στην συνέχεια σχεδιάζεται η συμβολή κάθε ρυθμού στο συνιστάμενο πεδίο ως προς την οριζόντια απόσταση από την πηγή πάνω στην επιφάνεια της Γής και για γωνία παρατήρησης $\phi = 0^\circ$ όπου το μέτρο $|\mathbf{E}_{y0}|$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή.Μελετώντας το διάγραμμα παρατηρείται ότι οι καμπύλες έχουν μορφή ανάλογη εκείνης που παρατηρήθηκε και στις υπόλοιπες συνιστώσες E_{z0} και E_{x0} .

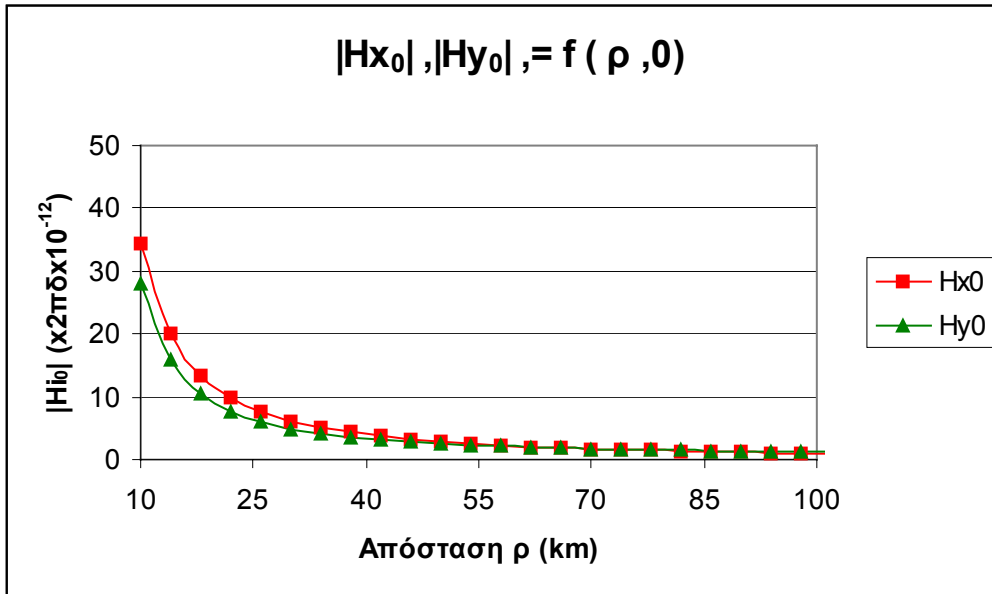


Διάγραμμα 4.17 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας $E_{y0}(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$ km, $\varphi=0^\circ$, για $f=1$ KHz.

Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου \mathbf{H}_0 παρουσιάζουν ανάλογη συμπεριφορά με τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου για αυτό και παρουσιάζονται συνοπτικά .

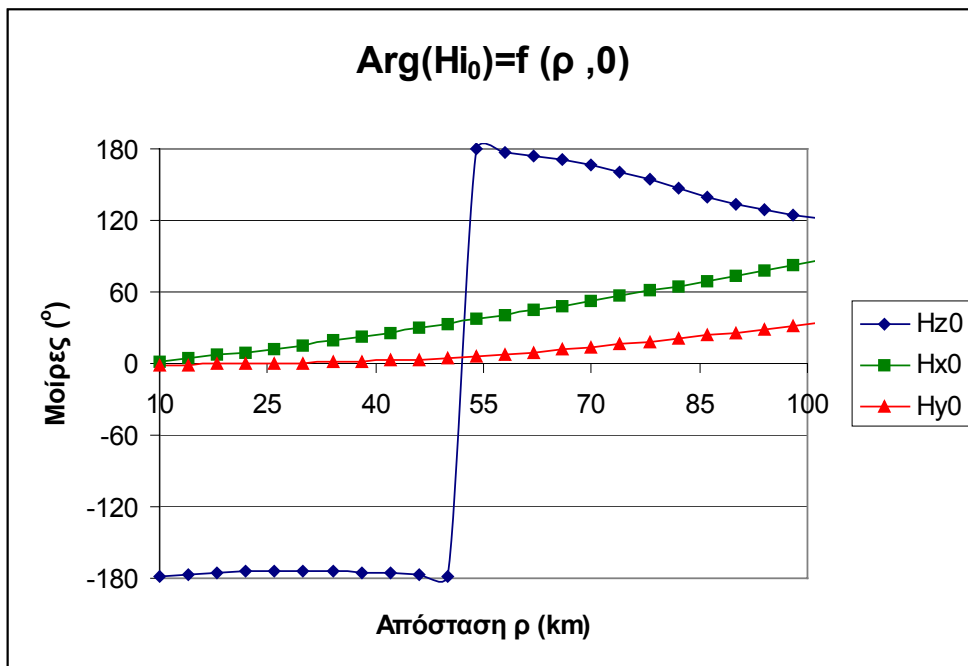
Στο παρακάτω διάγραμμα φαίνεται η μεταβολή του μέτρου της κάθε συνιστώσας σε συνάρτηση της απόστασης ρ πάνω στην επιφάνεια της γής και στην γωνία φ μέγιστοποίησης του μέτρου κάθε συνιστώσας ($\varphi=90^\circ$ για H_{z0} , $\varphi=0^\circ$ για H_{x0} , και $\varphi=45^\circ$ για H_{y0}).

Σημειώνεται ότι το μέτρο της εγκάρσιας συνιστώσας \mathbf{H}_{z0} λαμβάνει πολύ μικρές τιμές της τάξης 10^{-25} , οπότε δεν σχεδιάζεται καθόλου στο διαγράμμα που ακολουθεί. Η συμπεριφορά της συνιστώσας βέβαια είναι της ίδιας μορφής .



Διάγραμμα 4.18 : Μεταβολή του μέτρου των εφαπτομενικών συνιστωσών H_{x0} και H_{y0} σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z = 0 \text{ km}$, για $f = 1 \text{ KHz}$.

Ακολουθεί η μεταβολή του ορίσματος των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου σε συνάρτηση της απόστασης ρ . Αξίζει να σημειωθεί η ελάττωση του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας H_{z0} με την αύξηση της απόστασης .



Διάγραμμα 4.19 : Μεταβολή του ορίσματος των συνιστωσών του μαγνητικού πεδίου H_{z0} , H_{x0} και H_{y0} σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z = 0 \text{ km}$, για $f = 1 \text{ KHz}$.

Για τον υπολογισμό της εγκάρσιας συνιστώσας \mathbf{Ez}_2 του ηλεκτρικού πεδίου μέσα στην Λιθόσφαιρα (περιοχή 2) ακολουθείται αντίστοιχη διαδικασία .Αφού επιβεβαιωθεί και αριθμητικά η αμελητέα επίδραση των βροχοτομών B_1 και B_3 στον υπολογισμό του μαγνητικού δυναμικού Mx_2 , υπολογίζεται η συνιστώσα Ez_2 με την βοήθεια του αθροίσματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων για τουλάχιστον 10 ρυθμούς :

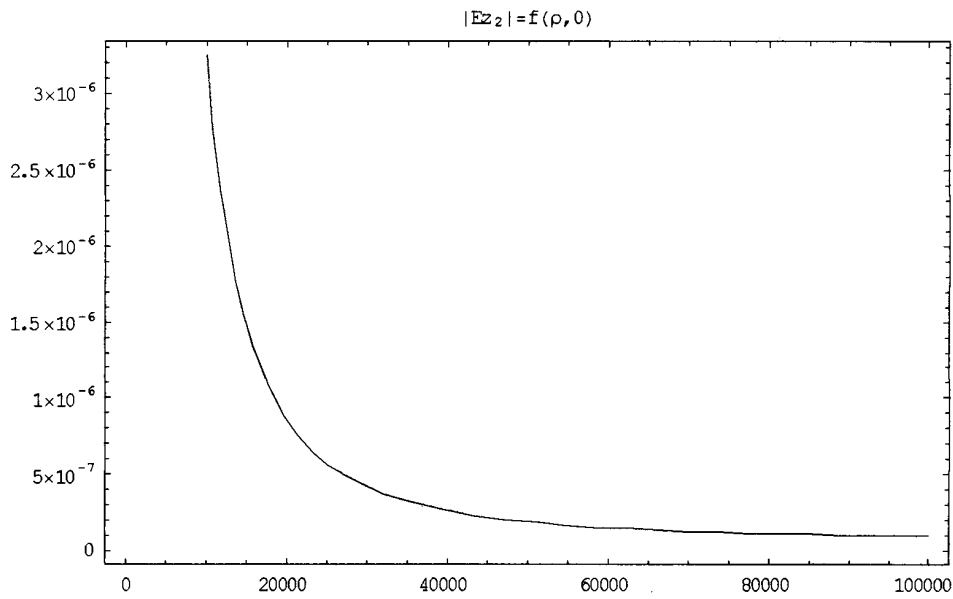
Συνιστώσα Mx_2 :

$$\begin{aligned}
 Mx_2(\rho, \phi, z) &= j \cdot 2\pi\delta \cdot \sum_n g_{x_2}(\lambda_n) \cdot G_{x_2}(\rho, \phi, z, \lambda_n) \\
 G_{x_2}(\rho, \phi, z, \lambda_n) &= f_{x_2}(\rho, \phi, \lambda_n) \cdot F_{x_2}(z, \lambda_n) \\
 g_{x_2}(\lambda_n) &= \frac{\lambda_n}{\varepsilon_2 \mu_{0\lambda_n}} \cdot \frac{R(\lambda_n)}{S'(\lambda_n)}, \quad f_{x_2}(\rho, \phi, \lambda_n) = H_0^{(1)}(\lambda_n \rho), \\
 F_{x_2}(z, \lambda_n) &= \{\cosh(\mu_{2\lambda_n} z) + \Omega_{\lambda_n} \cdot \sinh(\mu_{2\lambda_n} z)\}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

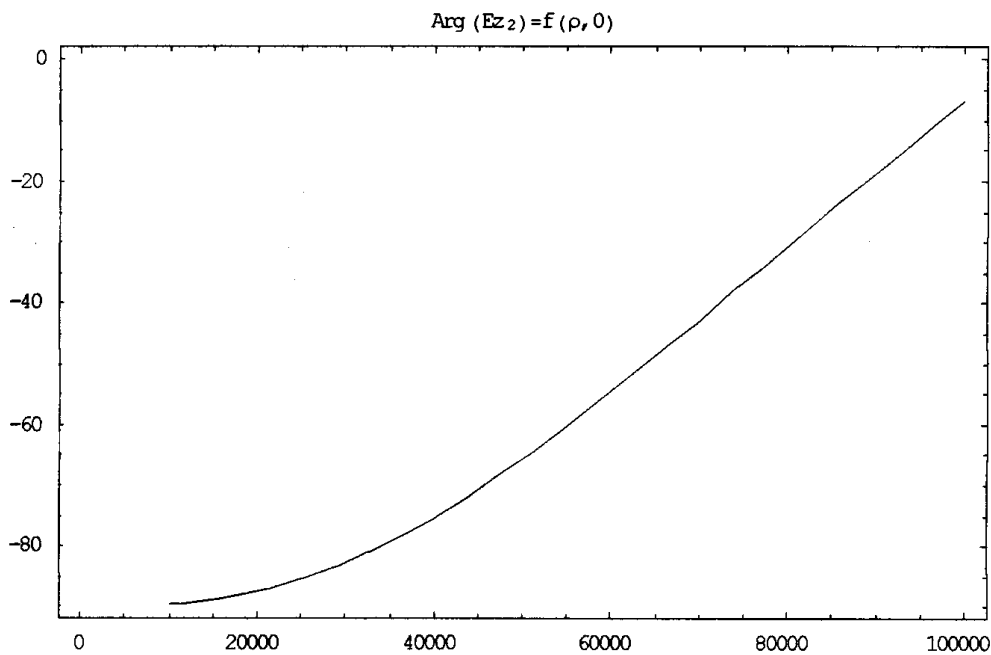
Συνεπώς η συνιστώσα Ez_2 είναι :

$$Ez_2(\rho, \phi, z) = -j\omega \cdot \frac{\partial Mx_2}{\partial y} = 2\pi\delta\omega \sum_n g_{x_2}(\lambda_n) \cdot \frac{\partial G_{x_2}}{\partial y} \tag{4.9}$$

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζουν το μέτρο και το όρισμα της \mathbf{Ez}_2 σε συνάρτηση με την οριζόντια απόσταση ρ από την βροχοκεραία .Λόγω του μικρού πάχους L ($L = 1 \text{ km}$) του στρώματος της Λιθόσφαιρας η τιμή του μέτρου και της γωνίας δεν μεταβάλλονται αισθητά κατά την διάσταση αυτή .



Διάγραμμα 4.20 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_2 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz.

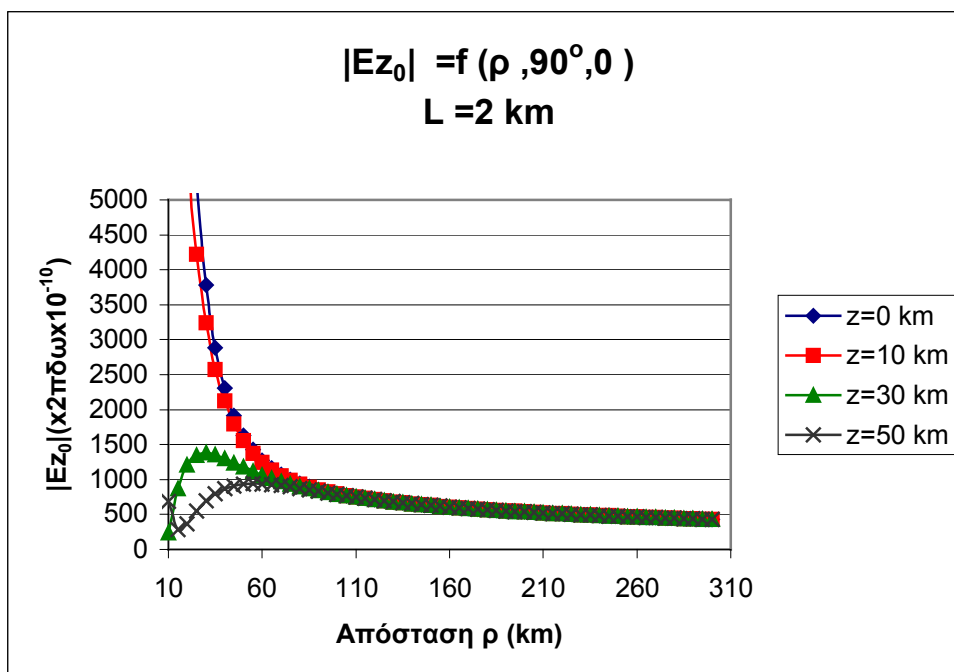


Διάγραμμα 4.21 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_2 σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1$ KHz.

Παρατηρείται ότι οι καμπύλες έχουν την ίδια μορφή με τις αντίστοιχες του εγκάρσιου πεδίου Ez_0 στον αέρα .Σημειώνεται ελάττωση του μέτρου ανάλογη του όρου $\sim \rho^{-1/2}$ και σχεδόν γραμμική αύξηση της ορίσματος .

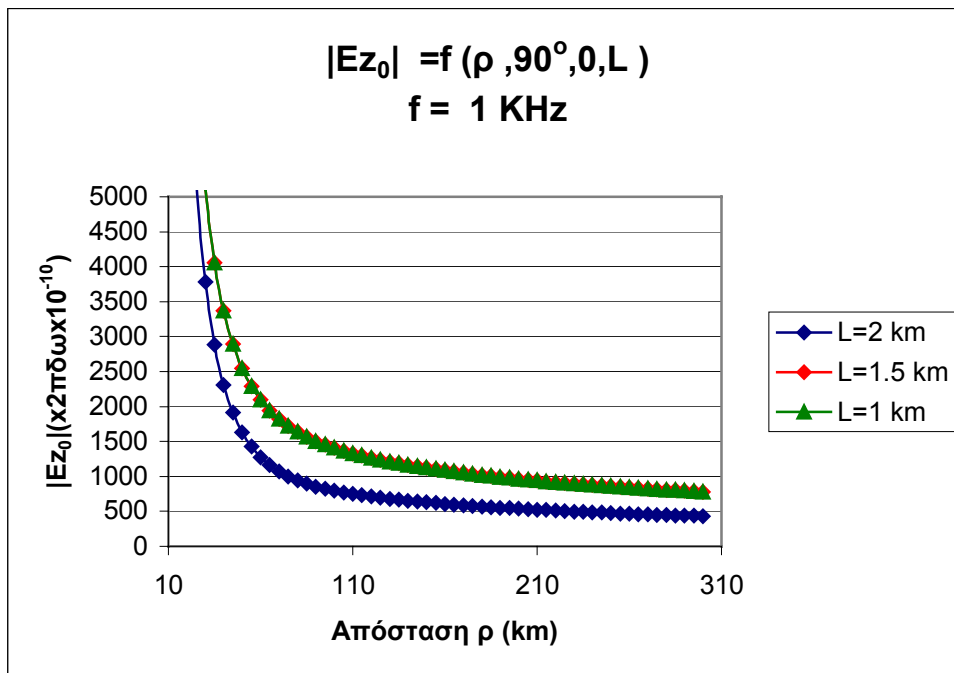
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η μελέτη της επίδρασης στα κυματοδηγούμενα πεδία της μεταβολής του ύψους H της Ιονόσφαιρας, που συντελείται με την μετάβαση από την μέρα στην νύχτα. Όπως έχει προαναφερθεί, η απόσταση Γής – Ιονόσφαιρας μεταβάλλεται από τα 60 km στα 100 km καθώς η γή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα της. Η μεταβολή του ύψους H ουσιαστικά επηρεάζει τον αριθμό $M=N+1$ των κυματοδηγούμενων ρυθμών και μεταβάλλει τις θέσεις των πόλων στο μιγαδικό επίπεδο. Για την συχνότητα των ενός χιλιοκυκλου $f = 1\text{KHz}$ για το μέγιστο ύψος $H_{max} = 100\text{ km}$, η μέγιστη τάξη N των κυματοδηγούμενων ρυθμών δεν μεταβάλλεται καθώς $N_{max} = k_0 H_{max} / \pi = 0.66 < 1$. Οπότε, εξακολουθεί να κυματοδηγείται ένας μόνο ρυθμός για $n=0$.

Μεταβάλλοντας το πάχος L της περιοχής 2 – Λιθόσφαιρα στα $L = 2\text{ km}$, υπολογίζεται ξανά το μέτρο της εγκάρσιας συνιστώσας $|E_z|$ σε συνάρτηση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z πάνω από την επιφάνεια της γης. Παρατηρούμε ότι η μορφή των καμπυλών παραμένει η ίδια, και η τιμή του μέτρου $|E_z|$ δεν διαφέρει σημαντικά συγκριτικά με την περίπτωση $L = 1\text{ km}$.



Διάγραμμα 4.23 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας E_z σε σχέση με την απόσταση ρ για πάχος $L=2\text{ km}$ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=1\text{ KHz}$.

Για να φανεί καλύτερα ότι δεν επηρεάζει σημαντικά η μεταβολή του πάχους L , σχεδιάζεται η τιμή του μέτρου $|Ez_0|$ σε ένα διάγραμμα για τρία διαφορετική πάχη $L = 1\text{ km}, 1.5\text{ km}, 2\text{ km}$ σε συνάρτηση με την απόσταση ρ ($z=0\text{ km}, \varphi=90^\circ$).



Διάγραμμα 4.24 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορες τιμές του πάχους L , $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=1\text{ KHz}$.

Το γεγονός αυτό οφείλεται στην μικρή επίδραση που έχει ο παράγοντας L στον προσδιορισμό της θέσεως των πόλων l_n πάνω στο μιγαδικό επίπεδο. Όπως φαίνεται και από τις σχέσεις (3.21) και (3.22), το πάχος L εμπλέκεται στο καθορισμό της παραμέτρου Ω μέσω του όρου $\tanh(\mu_2 L)$. Κατά συνέπεια μικρές μεταβολές της τιμής του δεν επηρεάζουν σημαντικά τον όρο Ω και ακολούθως την θέση των πόλων l_n .

4.4 Μελέτη για συχνότητα 6 KHz

4.4.1 Τα αρχικά μεγέθη, οι ρίζες και οι βροχοτομές

Τα σχετικά μεγέθη προκύπτουν :

$$\begin{aligned}
 f = 6\text{ KHz} &\Rightarrow k_0 = \omega / c = 4\pi \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \\
 \epsilon_1 &= 1 + j \cdot 10^4 / 6, \quad \epsilon_2 = 4 + j \cdot 3 \cdot 10^4, \quad \epsilon_3 = 2 + j \cdot 3 \cdot 10^3 \quad (4.10) \\
 H &= 60000\text{ m}, \quad L = 1000\text{ m}
 \end{aligned}$$

Για τις αριθμητικές τιμές συχνότητας f και ύψους H , αναμένεται ότι από τους παραγόμενους ρυθμούς κυματοδηγούμενοι είναι εκείνοι που έχουν τάξη n :

$$n < \frac{k_0 H}{\pi} \xrightarrow[H=6 \cdot 10^4]{k_0=4\pi \cdot 10^{-5}} n < 2.4$$

Συνεπώς στην περίπτωση αυτή, οι ρυθμοί που κυματοδηγούνται είναι τρεις: μηδενικής πρώτης και δεύτερης τάξης ($n=0, 1, 2$ αντίστοιχα). Άρα προκύπτει πολυρρυθμική διάδοση.

Ακολουθούν οι τιμές z_n των ριζών μέχρι $n = 17$ και οι αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές λ_n και λ_n' .

n	z_n	λ_n	λ_n'
0	$0.000125736 + j \cdot 7.4518 \times 10^{-8}$	$0.000125812 + j \cdot 8.8579 \times 10^{-8}$	$0.000125812 + j \cdot 8.8579 \times 10^{-8}$
1	$0.000114395 + j \cdot 1.6104 \times 10^{-7}$	$0.000114593 + j \cdot 1.9452 \times 10^{-7}$	$0.000114811 + j \cdot 3.1259 \times 10^{-7}$
2	$0.000069726 + j \cdot 2.6290 \times 10^{-7}$	$0.000070050 + j \cdot 3.1821 \times 10^{-7}$	$0.000040406 + j \cdot 5.0973 \times 10^{-7}$
3	$4.78911 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000093772$	$2.37613 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000093813$	$3.83643 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000093547$
4	$2.68175 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000167284$	$1.33235 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000167307$	$2.14700 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000167158$
5	$1.95354 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000229473$	$9.71335 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000229490$	$1.56459 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000229382$
6	$1.55673 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000287775$	$7.74566 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000287790$	$1.24743 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000287703$
7	$1.30077 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000344173$	$6.47652 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000344185$	$1.04294 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000344112$
8	$1.11991 \times 10^{-7} + j \cdot 0.000399472$	$5.58001 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000399483$	$8.98523 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000399420$
9	$9.84476 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000454075$	$4.90904 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000454085$	$7.90451 \times 10^{-8} + j \cdot 0.00045403$
10	$8.78871 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000508206$	$4.38617 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000508215$	$7.06242 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000508166$
11	$7.94013 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000562002$	$3.96633 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000562010$	$6.38630 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000561966$
12	$7.24215 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000615550$	$3.62130 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000615557$	$5.83068 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000615517$
13	$6.65724 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000668910$	$3.33243 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000668917$	$5.36531 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000668880$
14	$6.15950 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000722124$	$3.08687 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000722130$	$4.97009 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000722096$
15	$5.73048 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000775221$	$2.87544 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000775227$	$4.62965 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000775195$
16	$5.35663 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000828224$	$2.69143 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000828230$	$4.33335 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000828200$
17	$5.02779 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000881151$	$2.52977 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000881156$	$4.07305 \times 10^{-8} + j \cdot 0.000881128$

Πίνακας 4.2: Οι πόλοι του μαγνητικού δυναμικού για $f=6$ KHz.

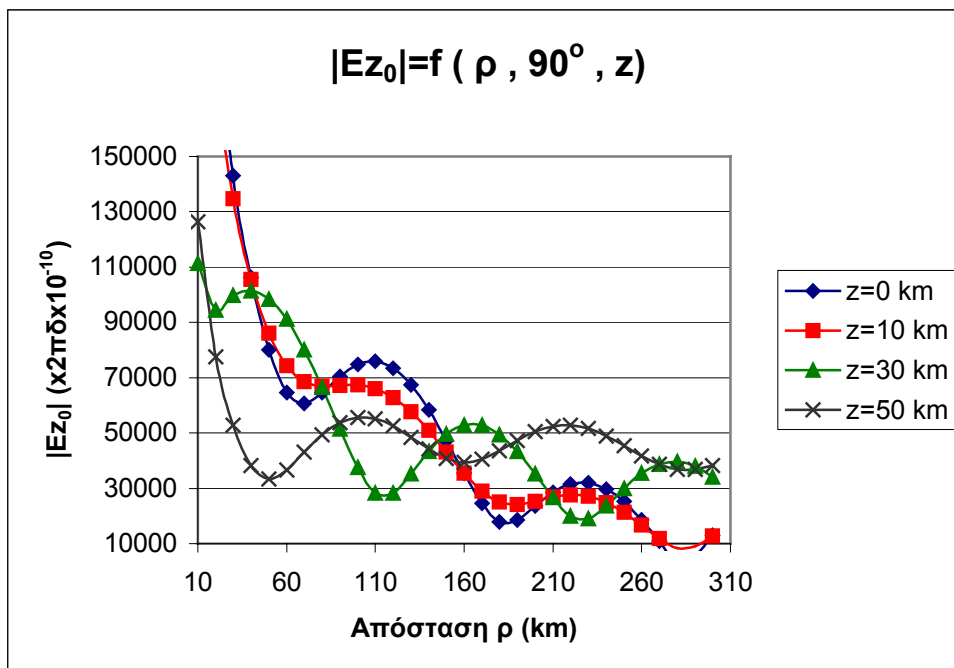
Σε αντιστοιχία με την ανάλυση για την συχνότητα του 1 KHz , υπολογίζεται αριθμητικά η συμβολή των βροχοτομών \mathbf{B}_1 και \mathbf{B}_3 στο παραγόμενο μαγνητικό δυναμικό και επιβεβαιώνεται η αμελητέα τιμή τους .

$$\int_{\mathbf{B}_1} f_1(\lambda) d\lambda = \int_{\mathbf{B}_3} f_3(\lambda) d\lambda \approx 0$$

4.4.2 Υπολογισμός των πεδίων

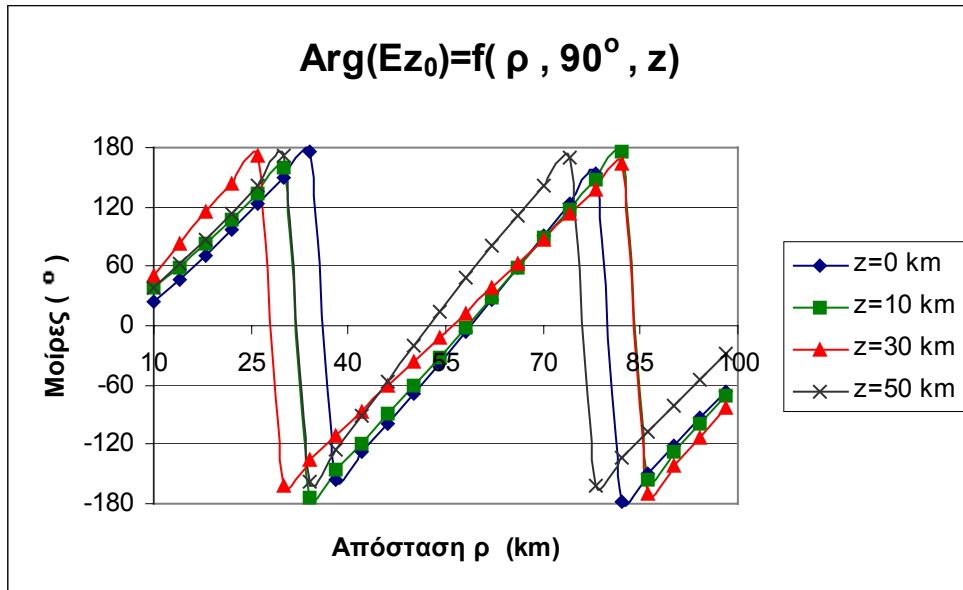
Συνεπώς , είναι δυνατός ο υπολογισμός των πεδιακών συνιστωσών με την βοήθεια των αναλυτικών σχέσεων (3.58 –3.60).

Το μέγεθος που ενδιαφέρει κυρίως είναι η εγκάρσια συνιστώσα \mathbf{Ez}_0 . Αρχικά παρουσιάζεται η μεταβολή του μέτρου και του ορίσματος της \mathbf{Ez}_0 σε συνάρτηση με την απόσταση ρ από την βροχοκεραία για διάφορα ύψη $z = \{0, 10, 30, 50\} \text{ km}$ πάνω από την επιφάνεια της γής .Η γωνία φ λαμβάνεται ίση με 90° (στον y άξονα) έτσι ώστε να λαμβάνονται οι μέγιστες τιμές σε κάθε υψόμετρο .



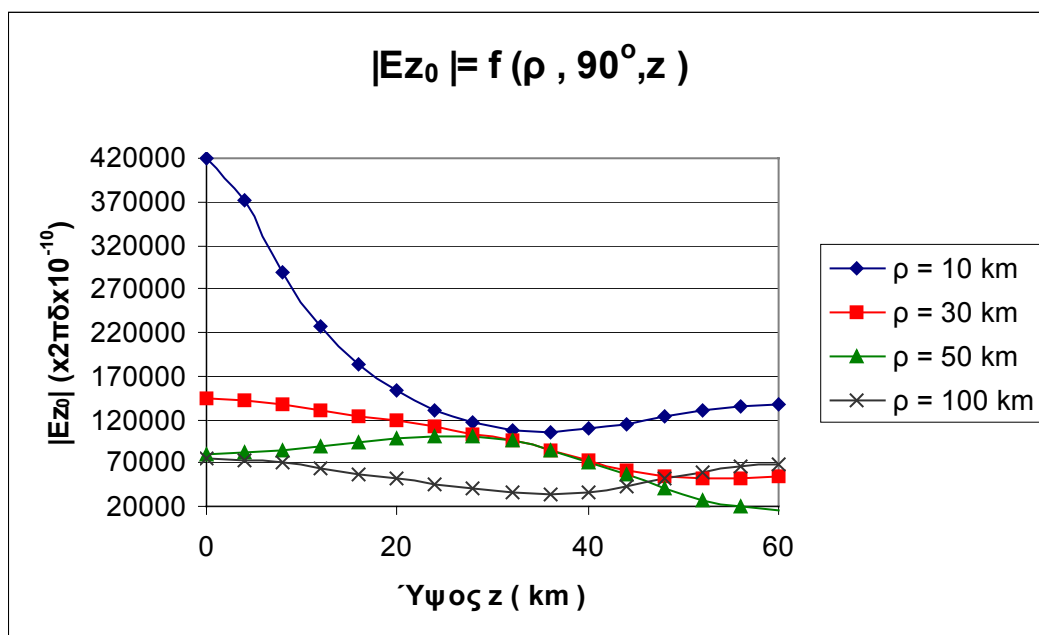
Διάγραμμα 4.25 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=6\text{ KHz}$.

Λόγω της πολυρρυθμικής διάδοσης ,το συνιστάμενο εγκάρσιο πεδίο παρουσιάζει φθίνουσες ταλαντώσεις .Οι ταλαντώσεις οφείλονται στην άθροιση κυρίως των 3 κυματοδηγούμενων ρυθμών ,των οποίων η τιμή του μέτρου είναι σημαντική αλλά διαθέτουν διαφορετικές φάσεις σε κάθε σημείο του χώρου .Έτσι σε μερικές αποστάσεις προκύπτει θετική συμβολή ενώ σε άλλα αρνητική δημιουργώντας έτσι αντίστοιχα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα .Το όρισμα $\text{Arg}(Ez_0)$ αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με την μεταβολή της απόστασης ρ .



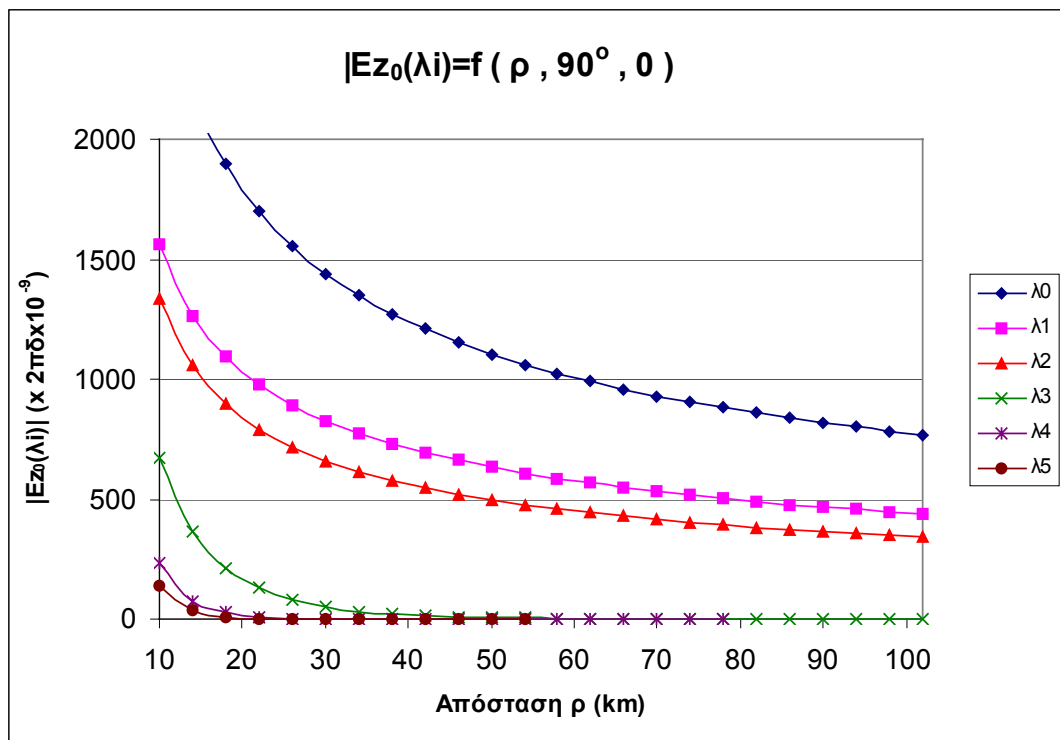
Διάγραμμα 4.26 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz .

Επίσης , λόγω της κυματοδηγησης πολλαπλών ρυθμών , η μεταβολή του μέτρου $|Ez_0|$ σε συνάρτηση με το ύψος z από την επιφάνεια της γής (για διάφορες οριζόντιες αποστάσεις ρ) παρουσιάζει επίσης ταλαντώσεις .



Διάγραμμα 4.27 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 σε σχέση με το ύψος z για διάφορες αποστάσεις ρ , $\varphi=90^\circ$.

Σχεδιάζοντας την μεταβολή της τιμής του μέτρου $|Ez_0(\lambda_i)|$ του κάθε ρυθμού σε σχέση με την απόσταση ρ , είναι φανερή η ύπαρξη των τριών κυματοδηγούμενων ρυθμών καθώς για μεγάλες αποστάσεις $\rho \gg$,είναι οι μόνοι με σημαντική συνεισφορά στο παραγόμενο εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο .Παρατηρείται επίσης ,ότι όσο αυξάνεται τάξη n των κυματοδηγούμενων ρυθμών , το μέτρο των ρυθμών λαμβάνει μικρότερες τιμές.

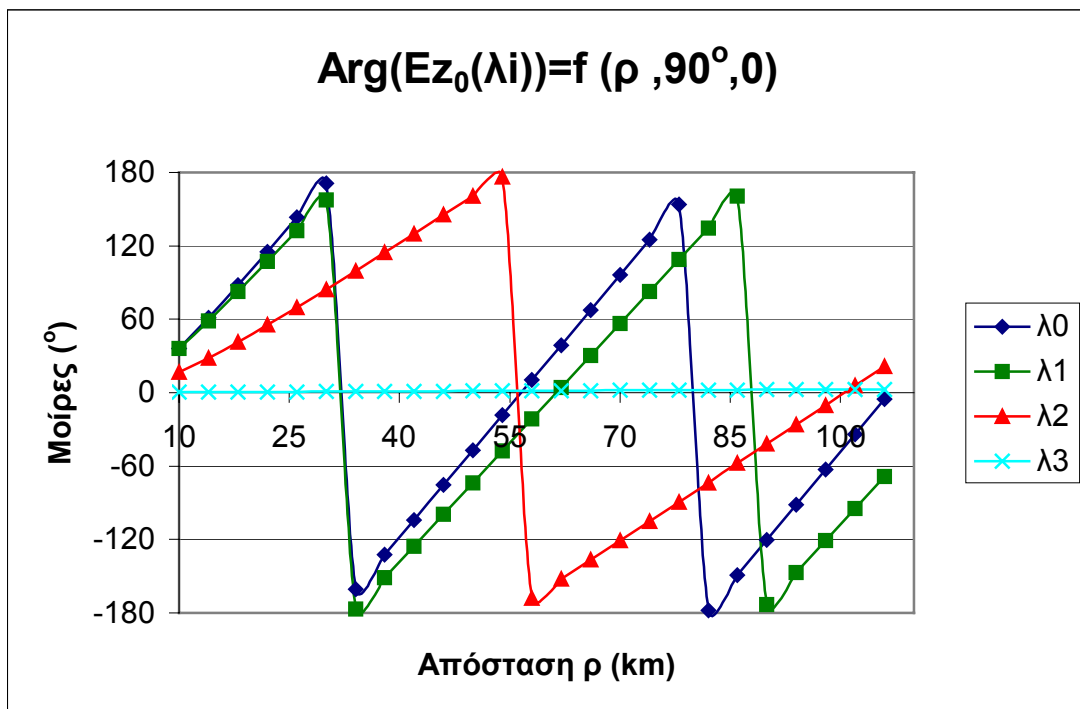


Διάγραμμα 4.28 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας $Ez_0(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0 \text{ km}$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6 \text{ KHz}$

Στο παρακάτω διάγραμμα όπου παρουσιάζονται οι μεταβολές των ορισμάτων των 3 κυματοδηγούμενων ρυθμών και του πρώτου εξασθενούντος σε συνάρτηση με την απόσταση ρ και για ύψος $z=0$, εξηγεί πλήρως την συμπεριφορά του μέτρου της συνιστώσας Ez_0 . Μελετώντας παράλληλα την μεταβολή του μέτρου του συνιστάμενου πεδίου $|Ez_0|$ σε σχέση με την απόσταση ρ , για $z=0$ που φαίνεται παραπάνω , δικαιολογούνται πλήρως οι ταλαντώσεις της τιμής του μέτρου .

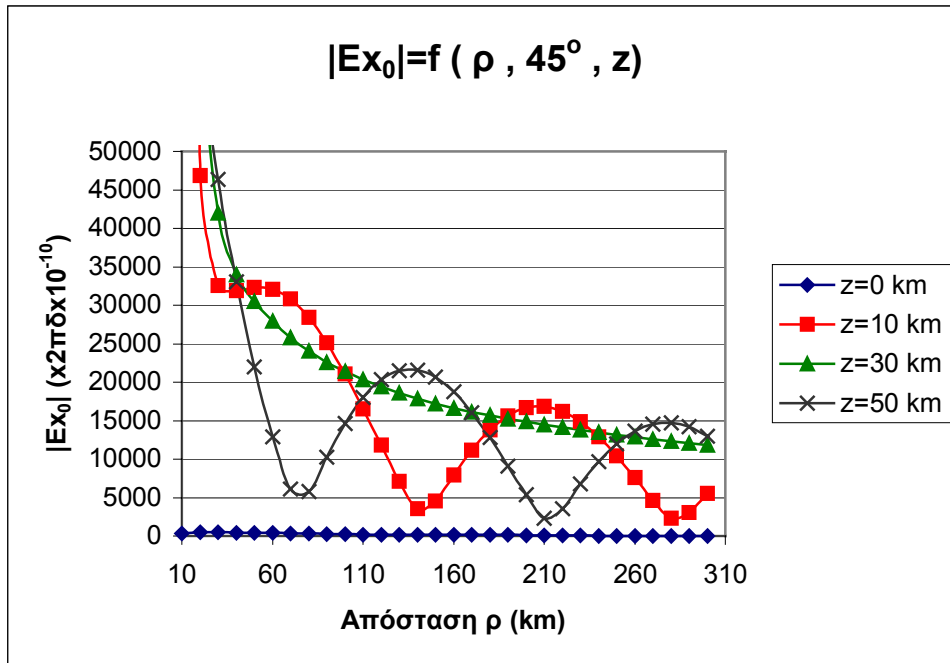
Αναλυτικότερα , παρατηρείται ότι για $\rho < 30 \text{ km}$ τα ορίσματα των κυματοδηγούμενων ρυθμών είναι παραπλήσια δημιουργώντας προσθετική συμβολή .

Για αποστάσεις $40 \text{ km} < \rho < 80 \text{ km}$ οι επιμέρους φάσεις παρουσιάζουν μεγάλες διαφορές, οδηγώντας σε αφαιρετική συμβολή με συνέπεια να παρουσιάζεται ένα τοπικό ελάχιστο κοντά στην απόσταση $\rho=60 \text{ km}$. Αντιθέτως, για $\rho > 100 \text{ km}$, οι φάσεις παρουσιάζουν ξανά μικρή διαφορά, δημιουργώντας ένα τοπικό μέγιστο για $\rho \approx 110 \text{ km}$. Επίσης, παρατηρείται ότι το όρισμα του εξασθενούντος ρυθμού παραμένει ουσιαστικά σταθερό στις 0° , και ουσιαστικά δεν συμβάλλει στην συμπεριφορά του συνιστάμενου πεδίου.

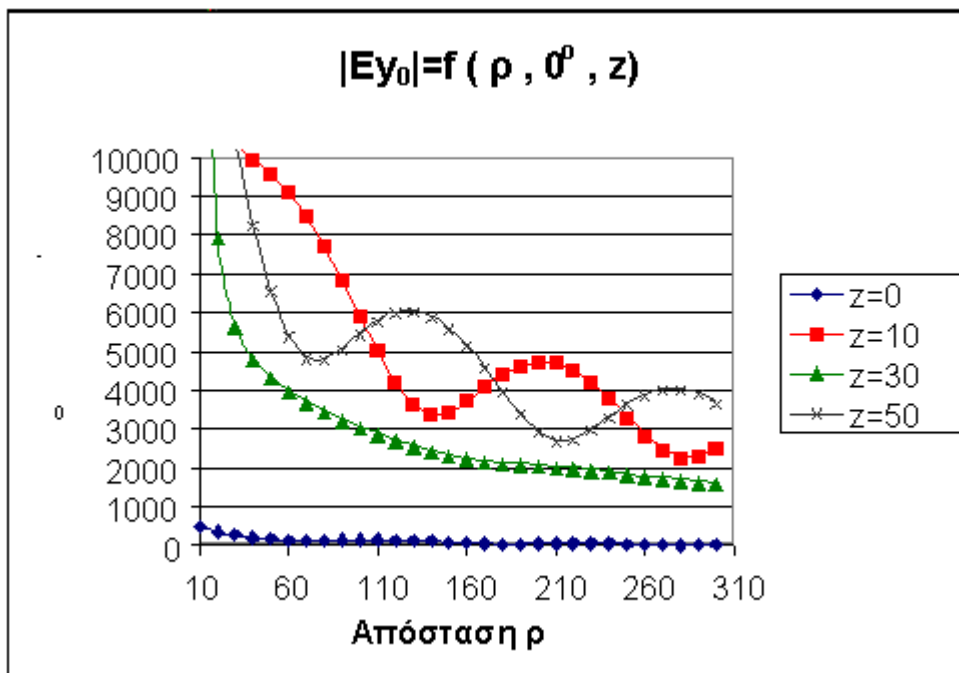


Διάγραμμα 4.29 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας $Ez_0(\lambda_i)$ του κάθε ρυθμού i σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0 \text{ km}$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6 \text{ KHz}$

Ανάλογες ταλαντώσεις παρουσιάζουν και οι εφαπτομενικές συνιστώσες E_{x_0} και E_{y_0} του πεδίου. Από τα διαγράμματα που ακολουθούν, σημειώνεται η πολύ μικρή τιμή των συνιστωσών αυτών κοντά στην επιφάνεια της γής ($z=0$). Η γωνία φ λαμβάνει εκείνες τις τιμές που μεγιστοποιούν το μέτρο των συνιστωσών: $\varphi=45^\circ$ για την συνιστώσα E_{x_0} και $\varphi=0^\circ$ για την E_{y_0} . Παρατηρείται επίσης ότι στο μέσο του στρώματος γής –ιονόσφαιρας παρουσιάζονται σχεδόν μηδενικές ταλαντώσεις. Το γεγονός αυτό οφείλεται ότι στο ύψος αυτό $z=30 \text{ km}$ ο ρυθμός δεύτερης τάξης $n=2$ παρουσιάζει ελάχιστη τιμή.

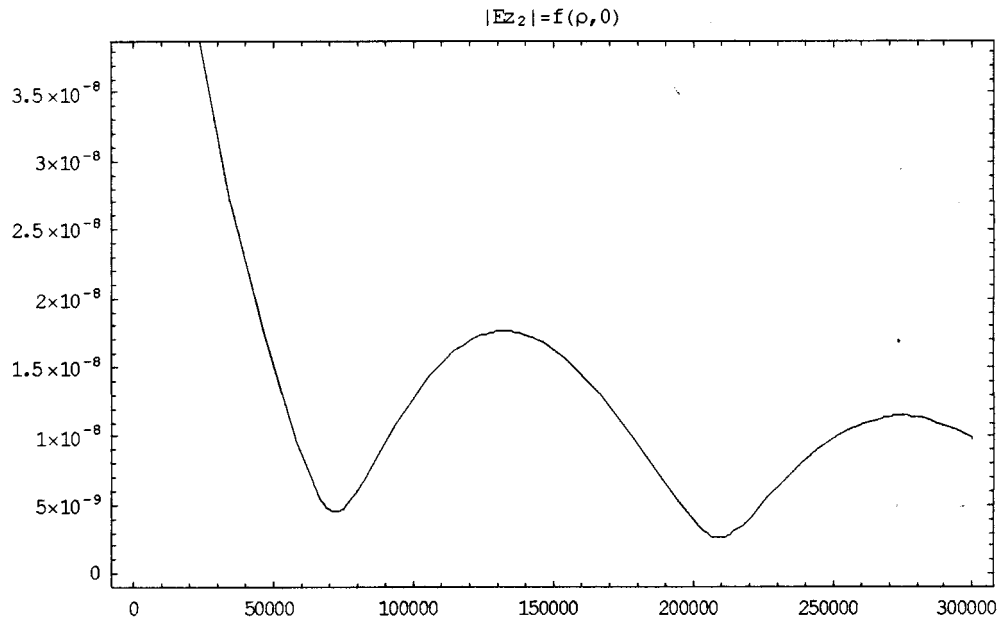


Διάγραμμα 4.30 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{x_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=6$ KHz

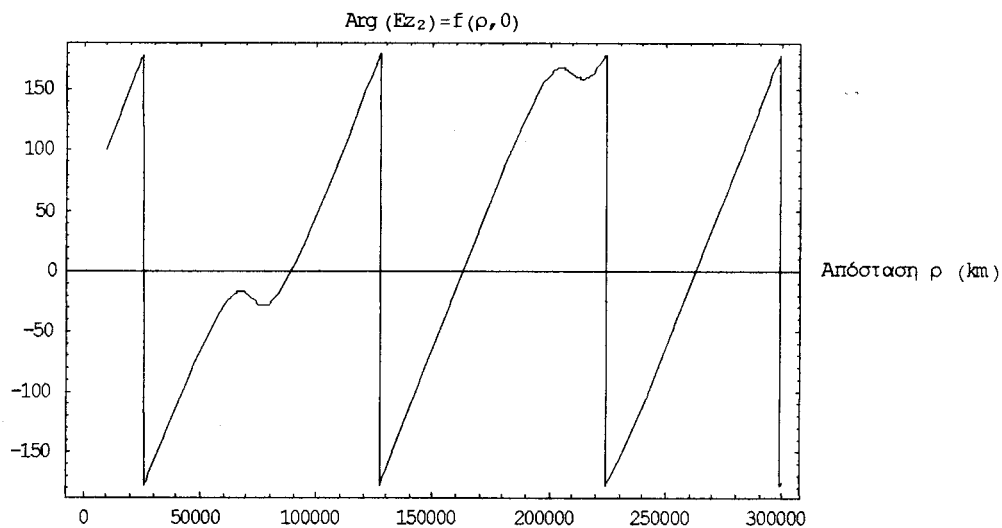


Διάγραμμα 4.31 : Μεταβολή του μέτρου της εφαπτομενικής συνιστώσας E_{y_0} σε σχέση με την απόσταση ρ για διάφορα ύψη z , $\varphi=45^\circ$, για $f=6$ KHz

Ανάλογες φθίνουσες ταλαντώσεις παρουσιάζονται και στο εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο E_z εντός της Λιθόσφαιρας. Παρακάτω σχεδιάζονται το μέτρο και η γωνία της συνιστώσας σε συνάρτηση με την απόσταση ρ κάτω από την επιφάνεια της ($z = 0$).

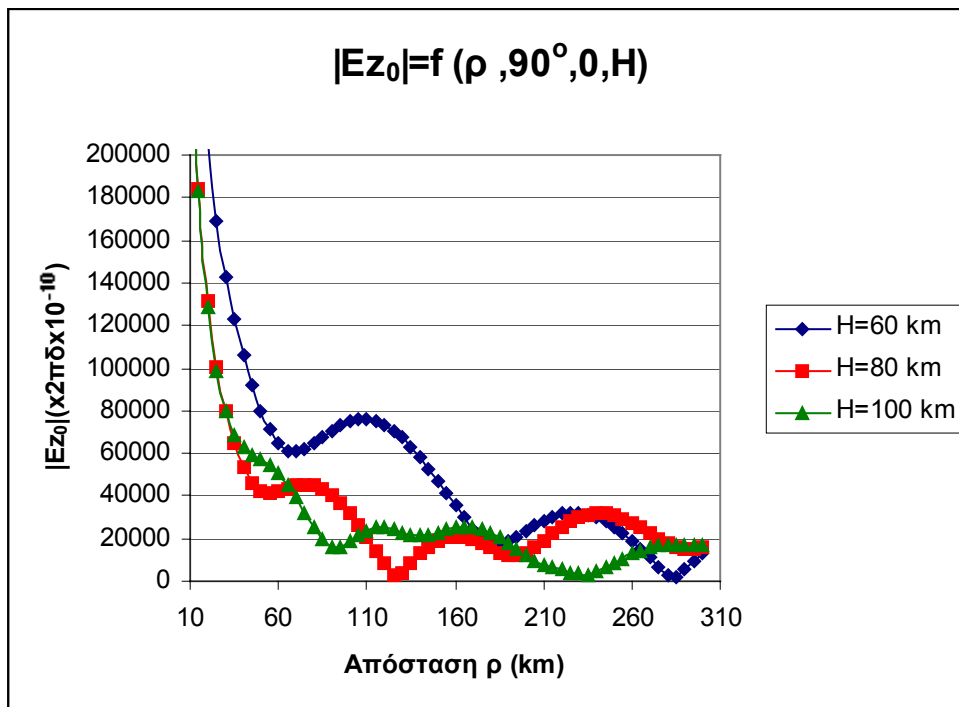


Διάγραμμα 4.32 : Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας E_{z2} σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.



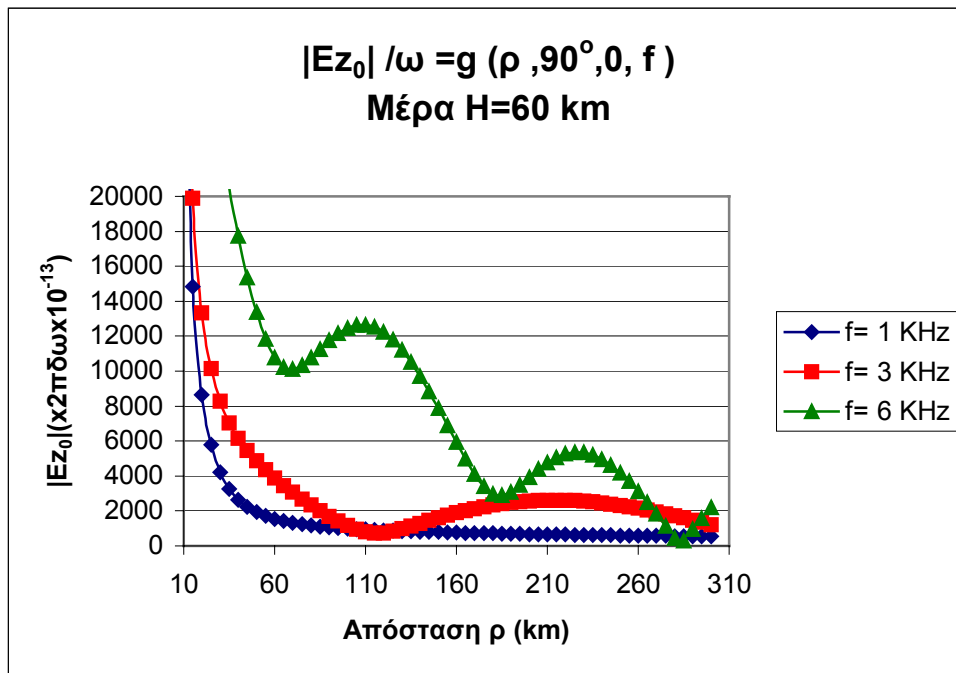
Διάγραμμα 4.33 : Μεταβολή του ορίσματος της εγκάρσιας συνιστώσας E_{z2} σε σχέση με την απόσταση ρ για ύψος $z=0$, $\varphi=90^\circ$, για $f=6$ KHz.

Για την τιμή της συχνότητας **6KHz** , η μεταβολή της απόστασης **H** γής –ιονόσφαιρας , προκαλεί την κυματοδότηση περισσότερων ρυθμών .Αναλυτικότερα , για $H_{max} = 100 \text{ km}$, η μέγιστη τάξη **Nmax** των κυματοδηγούμενων ρυθμών προκύπτει : $N_{max} = k_0 H_{max} / \pi = 4$.Άρα έχουμε συνολικά $M=5$ κυματοδηγούμενους ρυθμούς σε σχέση με τους $M=3$ που είχαν προκύψει για το αρχικό ύψος $H = 60 \text{ km}$.Για να φανεί η επίδραση της αύξησης του ύψους **H** (μετάβαση από μέρα σε νύχτα) σχεδιάζεται το μέτρο $|Ez_0|$ σε συνάρτηση με την απόσταση **ρ** για διαφορετικά ύψη $H : \{H=60\text{km}, H=80 \text{ km}, H=100\text{km}\}$.



Διάγραμμα 4.34: Μεταβολή του μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 ως προς την απόσταση ρ για διάφορες τιμές του ύψους H , $z = 0$, $\varphi = 90^\circ$, για $f = 6 \text{ KHz}$.

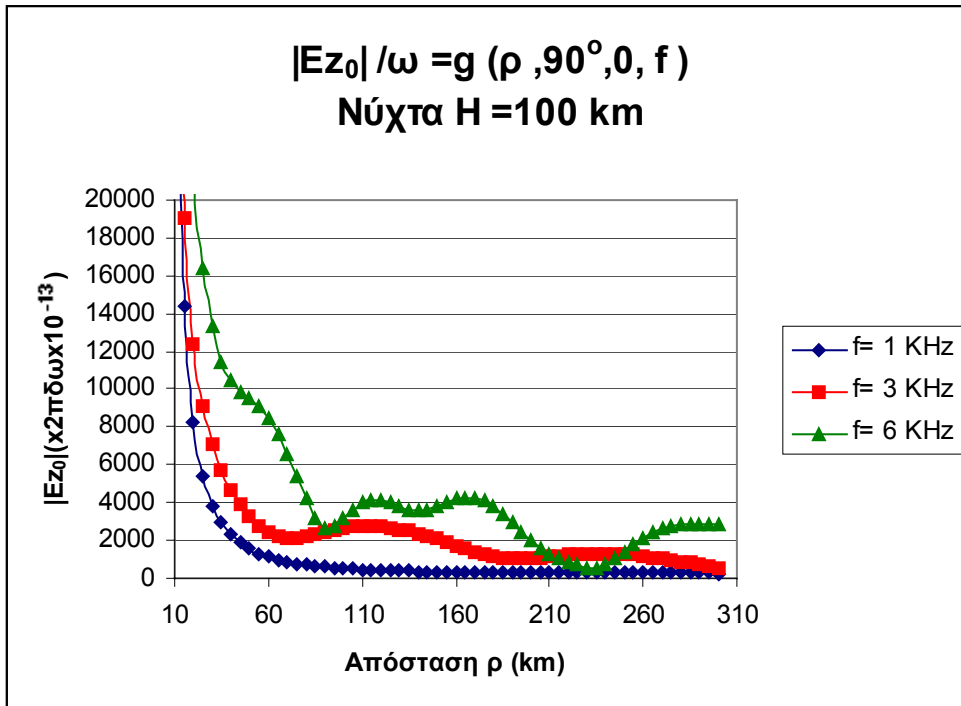
Στην συνέχεια σχεδιάζεται το κανονικοποιημένο μέτρο ως προς την συχνότητα $|Ez_0|/\omega$ της εγκάρσιας συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια της γής ($z=0$) σε συνάρτηση με την απόσταση **ρ** για τρεις διαφορετικές συχνότητες : $f = \{1\text{KHz}, 3\text{KHz}, 6 \text{ KHz}\}$. Επειδή $|Ez_0| \sim \sin\varphi$, όπως έχει προαναφερθεί , επιλέγεται $\varphi = 90^\circ$. Παντού έχει θεωρηθεί $H = 60 \text{ km}$ (μέρα) .



Διάγραμμα 4.35: Μεταβολή του κανονικοποιημένου ως προς την συχνότητα, μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 ως προς την απόσταση ρ για διάφορες τιμές της συχνότητας f , $z = 0$, $\varphi = 90^\circ$, για $H = 60 \text{ km}$.

Μελετώντας το διάγραμμα, παρατηρείται η διαφορά στην τιμή του μέτρου και η ύπαρξη ταλαντώσεων στις υψηλότερες συχνότητες που οφείλεται στην ύπαρξη περισσότερων κυματοδηγούμενων ρυθμών. Για $f = 1 \text{ KHz}$, κυματοδηγείται ένας μόνο ρυθμός ($N_{1\text{KHz}} = 0.66 < 1$), για $f = 3 \text{ KHz}$, κυματοδηγούνται 2 ρυθμοί ($N_{3\text{KHz}} < 2$), για $f = 6 \text{ KHz}$, κυματοδηγούνται 3 ρυθμοί ($N_{6\text{KHz}} = 2.4 < 3$).

Αντίστοιχες καμπύλες προκύπτουν και στην περίπτωση της νύχτας, όταν η απόσταση γής – Ιονόσφαιρας αυξάνεται στα $H = 100 \text{ km}$ περίπου.



Διάγραμμα 4.36: Μεταβολή του κανονικοποιημένου ως προς την συχνότητα, μέτρου της εγκάρσιας συνιστώσας Ez_0 ως προς την απόσταση ρ για διάφορες τιμές της συχνότητας f , $z = 0$, $\varphi = 90^\circ$, για $H = 100$ km.

4.5 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας την ανάλυση που παρουσιάστηκε σε αυτήν μελέτη, συμπεραίνεται ότι ένα πολύπλοκο και δύσκολο ως προς τον χειρισμό του H/M πρόβλημα μπορεί να αναχθεί σε πολύ απλούστερες μορφές με την βοήθεια των κατάλληλων μαθηματικών εργαλείων. Αντίστοιχη μεθοδολογία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε παρόμοια ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα που αναφέρονται στην αλληλεπίδραση Γής – Ιονόσφαιρας-Λιθόσφαιρας και παρουσιάζουν ενδιαφέρον για τις τηλεπικοινωνίες, την γεωφυσική, την γεωλογία. Ενδεικτικά, αναφέρονται η μελέτη του φλοιού της Γής με ηλεκτρομαγνητικές μεθόδους, ο εντοπισμός ορυκτών, η πρόβλεψη σεισμών, η απεικόνιση της λιθόσφαιρας μέσω παρατήρησης της Ιονόσφαιρας, οι υποβρύχιες επικοινωνίες κ.α.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0 \quad , \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{Π.1})$$

Λύσεις της παραπάνω διαφορικής αποτελούν οι συναρτήσεις Bessel $J_{\pm\nu}(z)$ και Neumann $Y_{\pm\nu}(z)$ οι οποίες γράφονται σε μορφή άπειρης σειράς :

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^K}{K!(\nu+K)!} \quad (\text{Π.2})$$

$$Y_\nu(x) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu}}{\pi} \sum_{K=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-K-1)!}{K!} \cdot \left(\frac{x^2}{4}\right)^K + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \cdot J_\nu(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\pi} \sum_{K=0}^{\infty} \{\Psi(K+1) + \Psi(\nu+K+1)\} \cdot \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^K}{K!(\nu+K)!} \quad (\text{Π.3})$$

$$\Psi(1) = -\gamma \quad , \quad \Psi(n) = -\gamma + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{K} \quad (n \geq 2)$$

όπου $\gamma = 0.5772156649$ είναι η σταθερά του Euler.

Οι συναρτήσεις Hankel πρώτου και δεύτερου είδους ορίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(x) &= J_n(x) + j \cdot Y_n(x) \\ H_n^{(2)}(x) &= J_n(x) - j \cdot Y_n(x) \end{aligned} \quad (\text{Π.4})$$

Ισχύουν οι ιδιότητες :

$$\begin{aligned} J_{-\nu}(x) &= (-1)^\nu J_\nu(x) \quad , \quad Y_{-\nu}(x) = (-1)^\nu Y_\nu(x) \\ H_{-\nu}^{(1)}(x) &= e^{j\nu\pi} H_\nu^{(1)}(x) \quad , \quad H_{-\nu}^{(2)}(x) = e^{-j\nu\pi} H_\nu^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (\text{Π.5})$$

Οι συναρτήσεις $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$, καθώς και κάθε γραμμικός συνδιασμός τους, ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\begin{aligned}
 C_{\nu-1}(x) + C_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x} C_\nu(x) \\
 C_{\nu-1}(x) - C_{\nu+1}(x) &= 2C'_\nu(x) \\
 C_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{2} C_\nu(x) &= C'_\nu(x) \\
 -C_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{2} C_\nu(x) &= C'_\nu(x)
 \end{aligned} \tag{Π.6}$$

$$C_\nu(x) = J_\nu(x) \quad \acute{\eta} \quad Y_\nu(x) \quad \acute{\eta} \quad H_\nu^{(1)}(x) \quad \acute{\eta} \quad H_\nu^{(2)}(x)$$

Αν ν ακέραιος αριθμός ισχύουν οι σχέσεις "αναλυτικής συνέχειας" :

$$\begin{aligned}
 J_\nu(ze^{m\pi j}) &= e^{vm\pi j} J_\nu(z) \\
 Y_\nu(ze^{m\pi j}) &= e^{-vm\pi j} Y_\nu(z) + 2j \sin(\nu m\pi) \cot(\nu\pi) J_\nu(z) \\
 \sin(\nu\pi) H_\nu^{(1)}(ze^{m\pi j}) &= -\sin\{(m-1)\nu\pi\} H_\nu^{(1)}(z) - e^{-j\nu\pi} \sin(\nu m\pi) H_\nu^{(2)}(z) \\
 \sin(\nu\pi) H_\nu^{(2)}(ze^{m\pi j}) &= -\sin\{(m+1)\nu\pi\} H_\nu^{(2)}(z) + e^{j\nu\pi} \sin(\nu m\pi) H_\nu^{(1)}(z) \\
 H_\nu^{(1)}(ze^{j\pi}) &= -e^{-j\nu\pi} H_\nu^{(2)}(z) \\
 H_\nu^{(2)}(ze^{-j\pi}) &= -e^{j\nu\pi} H_\nu^{(1)}(z)
 \end{aligned} \tag{Π.7}$$

Για ν πραγματικό ισχύουν οι σχέσεις για τους μιγαδικούς συζυγείς αριθμούς :

$$\begin{aligned}
 J_\nu(\bar{z}) &= \overline{J_\nu(z)} \quad , \quad Y_\nu(\bar{z}) = \overline{Y_\nu(z)} \\
 H_\nu^{(1)}(\bar{z}) &= \overline{H_\nu^{(2)}(z)} \quad , \quad H_\nu^{(2)}(\bar{z}) = \overline{H_\nu^{(1)}(z)}
 \end{aligned} \tag{Π.8}$$

Τέλος ,οι σειρές που δίνουν τις τιμές των συναρτήσεων $J_\nu(x)$ $Y_\nu(x)$, αν και συγκλίνουν για $0 < x < \infty$, χρησιμοποιούνται για υπολογιστικούς σκοπούς μόνο για αρκετά μικρές τιμές του ορίσματος x .Για x πολύ μεγαλύτερο από την τάξη ν , ισχύουν οι ασυμπτωτικές εκφράσεις :

$$\begin{aligned}
J_\nu(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \cos\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad , \quad |\text{Arg}(z)| < \pi \\
Y_\nu(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot \sin\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad , \quad |\text{Arg}(z)| < \pi \\
H_\nu^{(1)}(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{j\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad , \quad -\pi < \text{Arg}(z) < 2\pi \\
H_\nu^{(2)}(z) &\cong \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cdot e^{-j\left(z - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad , \quad -2\pi < \text{Arg}(z) < \pi
\end{aligned} \tag{Π.9}$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Sommerfeld , “Partial Differential Equations of Physics”, Academic Press , New York 1949
2. Ν.Κ Ουζούνογλου , “Τηλεπικοινωνίες Οπτικών Ινών” , , Εκδόσεις Συμεών 1990
3. R.E.Colin , “Antennas and Radiowave Propagation” , , McGraw-Hill International Editions 1985
4. M.Abramowitz and I.A.Stegun , “Handbook of Mathematical Functions” ,Dover 1964
5. T.S.M. Maclean and Z.Wu , “Radiowave Propagation over Ground” , Chapman & Hall ,1993
6. J.R. Wait , “Electromagnetic probing in geophysics” , The Golem Press , 1971
7. Ε.Γ. Γαλανής , “Μιγαδικές Συναρτήσεις και Εφαρμογές” ,Εκδόσεις Συμεών , 1994