ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# Σχεδιασμός Μηχανισμών: Δημοπρασίες και Δίκτυα

Κωνσταντίνος Μπιμπίκης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Καθ. Σ. Ζάχος

ΑΘΗΝΑ 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

# Σχεδιασμός Μηχανισμών: Δημοπρασίες και Δίκτυα

Κωνσταντίνος Μπιμπίκης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Καθ. Σ. Ζάχος

ΑΘΗΝΑ 2003

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την $16^{\eta}$ Ιουλίου 2003

| | | |
|---|---|---|
| **Σ. Ζάχος** | **Τ. Σελλής** | **Φ. Αφράτη** |
| **Καθηγητής** | **Καθηγητής** | **Καθηγήτρια** |
| **ΕΜΠ** | **ΕΜΠ** | **ΕΜΠ** |

**Κωνσταντίνος Μπιμπίκης**

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός
και Μηχανικός Υπολογιστών ΕΜΠ

# Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα της Θεωρητικής Πληροφορικής έχει στραφεί σε ένα νέο και ενδιαφέρον πεδίο κάτω από το γενικό τίτλο: εφαρμογή της Θεωρίας Παιγνίων στην Πληροφορική. Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στο λεγόμενο *Σχεδιασμό Μηχανισμών* ή *Θεωρία Υλοποίησης*, που χρησιμοποιώντας την Θεωρία Παιγνίων ως εργαλείο προσπαθεί να επιλύσει προβλήματα, που εμφανίζονται σε κατανεμημένα περιβάλλοντα ανεξάρτητων χρηστών.

Συγκεκριμένα, μελετούμε το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής αντικειμένων σε χρήστες με τη μέθοδο της δημοπρασίας. Κάθε χρήστης επιθυμεί να αποκτήσει ένα υποσύνολο των αντικειμένων προς δημοπράτηση, πληρώνοντας όμως, ως ένα ποσό για αυτά. Ζητούμενο είναι να βρεθεί ένας αλγόριθμος, που ονομάζουμε *μηχανισμό* στην περίπτωση αυτή, με τον οποίο να επιτυγχάνουμε μία λύση, που να ικανοποιεί ορισμένες επιθυμητές ιδιότητες. Το πρόβλημα αυτό είναι NP-complete και παρουσιάζουμε διάφορους τρόπους να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία.

Ακόμη, ασχολούμαστε με το πρόβλημα του καταμερισμού του κόστους σε multicast μεταδόσεις. Ένας κεντρικός κόμβος ενός δικτύου παρέχει περιεχόμενο στους χρήστες-πελάτες της υπηρεσίας, οι οποίοι βρίσκονται τοποθετημένοι στα φύλλα ενός δέντρου με ρίζα τον κεντρικό, αυτό, κόμβο. Το ζητούμενο είναι να καταμεριστεί κατάλληλα το κόστος της μετάδοσης στους χρήστες. Παρουσιάζουμε δύο τεχνικές επίλυσης, καθένας από τους οποίους ικανοποιεί διαφορετικές ιδιότητες.

**Abstract**

During the last few years research in Theoretical Computer Science has focused on a new and exciting field under the general title: applications of Game Theory in Computer Science. This diploma thesis provides an overview on the so-called Mechanism Design or Implementation Theory, which uses Game Theory as a tool to solve problems of selfish agents in decentralized environments.

Specifically, we investigate the problem of finding the best allocation of given resources to selfish agents using auctions. Each agent wants to obtain a subset of the resources, for which it is willing to spend up to an amount of monetary units. The problem is NP-complete and we present a number of ways to overcome this difficulty.

Moreover, we present the problem of sharing the cost of multicast transmissions. The root of a given tree network provides content to the agents-clients, that are located on the leaves of the previous tree. It is required to find a way to share the cost of each transmission, which satisfies specific properties.

# Περιεχόμενα

# Κατάλογος σχημάτων

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Γενικά

Η μεγαλύτερη ανακάλυψη στο χώρο της Πληροφορικής τα τελευταία χρόνια είναι, αναμφισβήτητα, το Internet. Η εμφάνισή του άνοιξε νέους επιστημονικούς ορίζοντες, που σχετίζονται τόσο με τη δομή και αρχιτεκτονική του, όσο και με τους τρόπους χρήσης του. Έτσι, δόθηκε ώθηση στο χώρο του hardware με την ανάδυση της ανάγκης ταχύτερων και πιο αποτελεσματικών συστημάτων, αναπτύχθηκαν νέες γλώσσες προγραμματισμού (Java) και έγινε μεγάλη έρευνα στο χώρο της κρυπτογραφίας.

Παράλληλα, όμως ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του Internet είναι και το ότι δρα ως ο επικοινωνιακός δίαυλος μεταξύ οντοτήτων με διαφορετικές ικανότητες και συμφέροντα. Αυτή ακριβώς η ανομοιογένεια μαζί με την αποκεντρωμένη (decentralized) φύση του, οδήγησε τη Θεωρητική Πληροφορική να αναζητήσει τις απαντήσεις σε θεμελιώδη ερωτήματα που προέκυψαν, σε έννοιες παρμένες από τη Θεωρία Παιγνίων και γενικότερα από τα Οικονομικά.

Ως πριν λίγα χρόνια η Θεωρία Παιγνίων ήταν ένα εργαλείο που χρησιμοποιούνταν μόνο από τους οικονομολόγους για τη μελέτη και την εύρεση σημείων ισορροπίας σε ανοικτές αγορές, αγορές δηλαδή που δεν ελέγχονταν από μία κεντρική μονάδα. Οι οικονομολόγοι επικέντρωναν την έρευνα τους στο να ελέγξουν την ιδιοτελή συμπεριφορά των συμμετεχόντων χρησιμοποιώντας κατάλληλα κίνητρα π.χ. οικονομικά ανταλλάγματα. Από την άλλη, όμως αδιαφορούσαν για την υπολογιστική αποδοτικότητα των αποτελεσμάτων και μεθόδων τους.

Από την άλλη, ως τώρα η έρευνα της Θεωρητικής Πληροφορικής αναφερόταν σε αλγόριθμους και πρωτόκολλα, για τα οποία ο σχεδιαστής του αλγορίθμου υπέθετε ότι οι συμμετέχοντες θα ενεργούν, όπως σχεδιάζονται να κάνουν - ακολουθώντας το πρωτόκολλο, δηλαδή - εκτός φυσικά από τα ελαττωματικά μηχανήματα. Αυτή όμως η υπόθεση δεν θα πρέπει να θεωρείται δεδομένη σε ένα κατανεμημένο περιβάλλον, που αποτελείται από τελείως αυτόνομα μέρη, όπως είναι το Internet. Στην περίπτωση αυτή είναι, πλέον, χρέος του σχεδιαστή να κατανοήσει το γεγονός του ότι οι συμμετέχοντες θα κινηθούν με τέτοιο τρόπο, που ικανοποιεί τα συμφέροντα τους και αν αυτό τους εξυπηρετεί δεν θα ακολουθήσουν τις επιταγές του αλγορίθμου.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, τα παραπάνω μπορούμε να πούμε ότι η εμφάνιση του Internet και η καθιέρωση του ως ένα από τα κυρίαρχα μέσα επικοινωνίας και συναλλαγών, "πάντρεψε" τις παιγνιοθεωρητικές ιδέες, που είναι ιδιαίτερα διαδεδομένες στο χώρο της Οικονομικής Επιστήμης, με την υπολογιστική πολυπλοκότητα, βασικό αντικείμενο έρευνας της βιβλιογραφίας της Θεωρητικής Πληροφορικής. Έτσι, λοιπόν γεννήθηκε το πεδίο του Αλγοριθμικού Σχεδιασμού Μηχανισμών (Alorithmic Mechanism Design), που συμπληρώνει τη μελέτη του δημοφιλούς στους κύκλους των Οικονομολόγων Σχεδιασμού Μηχανισμών (Mechanism Design) ή αλλιώς της Θεωρίας Υλοποίησης (Implementation Theory).

## 1.2 Σχετική Εργασία

Τα προβλήματα που μελετάμε στην παρούσα διπλωματική εργασία βρίσκονται στην τομή των Μαθηματικών (Θεωρία Παιγνίων), των Οικονομικών (Μικροοικονομία) και της Θεωρητικής Πληροφορικής (Τεχνητή Νοημοσύνη, Δίκτυα Υπολογιστών).

Οι ερευνητές που εργάζονται στα παραπάνω πεδία ακολούθησαν διάφορες κατευθύνσεις παράγοντας σημαντικά αποτελέσματα και εγείροντας, παράλληλα, νέα ενδιαφέροντα ερωτήματα. Για παράδειγμα, οι Κουτσουπιάς και Παπαδημητρίου [KP99] πρώτοι έθεσαν το ερώτημα της αξιολόγησης των αποτελεσμάτων της ιδιοτελούς συμπεριφοράς των παικτών σε ένα σύστημα συγκρίνοντας τα με την "κοινωνικά καλύτερη έξοδο" (social optimum), που μπορεί να προκύψει με την επιβολή μίας κεντρικής διοίκησης. Σε συνέχεια της παραπάνω ιδέας οι Roughgarden και Tardos [RT00], προσπάθησαν να φράξουν το λόγο του χειρότερου σημείου ισορροπίας σε ένα σύστημα προς το κοινωνικά καλύτερο αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας το μοντέλο της κυκλοφορίας σε δρόμους.

Κάποιοι άλλοι, χρησιμοποίησαν την έννοια και τις μεθόδους των δημοπρασιών για να λύσουν προβλήματα σχετικά με τη μεταφορά πληροφορίας σε δίκτυα επικοινωνιών, παράγοντας ενδιαφέροντες αλγόριθμους, π.χ. [Ber92].

Οι ιδέες, όμως, που αποτελούν το βασικό συστατικό της παρούσας εργασίας για πρώτη φορά παρουσιάστηκαν στις δημοσιεύσεις των Nisan και Ronen [NR99] και Nisan [Nis99]. Σε αυτές γίνεται μία πρώτη προσπάθεια να συνδυαστούν οι, σχετικές με τα Οικονομικά, έννοιες της θεωρίας Σχεδιασμού Μηχανισμών (φιλαλήθεια-truthfulness) με τις παραδοσιακές τάσεις στη μελέτη αλγορίθμων, όπως την μελέτη της πολυπλοκότητας και την εφαρμογή τεχνικών προσεγγισιμότητας των βέλτιστων λύσεων, όταν απαιτούνται χρονοβόροι υπολογισμοί για την εύρεσή τους.

Στην κατεύθυνση αυτή, αρχικά, σημαντική εργασία έχει γίνει στο πεδίο της κατανεμημένης τεχνητής νοημοσύνης (Distributed AI), στο πλαίσιο της οποίας ερευνητές εισήγαγαν και εκτίμησαν τη συνεργασία και τον ανταγωνισμό μεταξύ ανεξάρτητων υπολογιστικών μονάδων δίνοντας μεγάλη σημασία στο κίνητρο της ικανοποίησης των προσωπικών τους συμφερόντων. Για παράδειγμα, σημαντικό αποτέλεσμα στο χώρο αυτό είναι οι λεγόμενες Walrasian δημοπρασίες, οι οποίες προσομοιώνοντας τις ανοικτές καπιταλιστικές αγορές, προσπαθούν να λύσουν αποδοτικά αλγοριθμικά προβλήματα.

## 1.3 Σχεδιάγραμμα της διπλωματικής εργασίας

Στην παρούσα διπλωματική εργασία προσπαθούμε να μελετήσουμε το πεδίο του Σχεδιασμού Μηχανισμών. Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο κάνουμε μία απαραίτητη θεωρητική εισαγωγή στο κεφάλαιο 2, στην οποία παρουσιάζουμε τα σημαντικότερα αποτελέσματα στο χώρο και παραθέτουμε έναν αριθμό χρήσιμων ορισμών. Συγκεκριμένα, το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε τρία εδάφια. Στο πρώτο εισάγουμε ορισμένα στοιχεία από τη Θεωρία Παιγνίων, τα οποία θα χρειαστούν στη συνέχεια. Έπειτα, προχωρούμε ορίζοντας το πρόβλημα του Σχεδιασμού Μηχανισμών και τις ιδιότητες, που μία ικανοποιητική λύση πρέπει να διαθέτει. Ακόμη, αποδεικνύουμε τη μη ύπαρξη "καλής" λύσης (σύμφωνα με κάποια κριτήρια) στο γενικό περιβάλλον του προβλήματος και προχωρούμε μελετώντας μία ενδιαφέρουσα απλοποίηση του.

Στο τρίτο κεφάλαιο επικεντρωνόμαστε στο πρόβλημα των *Συνδυαστικών Δημοπρασιών (Combinatorial Auctions).* Κάνουμε στην αρχή μία σύντομη ιστορική εισαγωγή και παραθέτουμε τον τυπικό ορισμό του. Διερευνούμε τα αίτια της δυσκολίας υλοποίησης αποδοτικών μηχανισμών-λύσεων και μελετούμε τη χρήση εναλλακτικών μεθόδων επίλυσης, όπως τη προσεγγισιμότητα (approximabilty) ή τον περιορισμό των οντοτήτων, που συμμετέχουν.

Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο ασχολούμαστε με τον λεγόμενο *Κατανεμημένο Αλγοριθμικό Σχεδιασμό Μηχανισμών (ΚΑΣΜ).* Παρουσιάζουμε, αρχικά, δύο χαρακτηριστικά προβλήματα του, το πρόβλημα του καταμερισμού του κόστους multicast μεταδόσεων και της interdomain δρομολόγησης. Έπειτα, δίνουμε ορισμένες πιθανές μελλοντικές εφαρμογές και αναζητούμε ένα γενικό πλαίσιο ορισμού των σχετικών εννοιών με τον ΚΑΣΜ.

# Κεφάλαιο 2

# Κλασική Θεωρία Σχεδιασμού Μηχανισμών

Βασικό μαθηματικό εργαλείο, το οποίο χρησιμοποιεί και παράλληλα επεκτείνει ο Σχεδιασμός Μηχανισμών, είναι η Θεωρία Παιγνίων. Η τελευταία εξετάζει προβλήματα, στα οποία συμμετέχουν $n$ ανεξάρτητες οντότητες, που κινούνται από προσωπικά συμφέροντα για την εξασφάλιση ενός κοινού αγαθού και προσπαθεί να κατανοήσει και να εκτιμήσει τα αποτελέσματα της ιδιοτελούς συμπεριφοράς των συμμετεχόντων. Κεντρικό σημείο της θεωρίας είναι η αναζήτηση σημείων ισορροπίας, που ορίζονται ως η επιλογή των κινήσεων από τους παίκτες, η οποία είναι τέτοια που κανένας τους δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει από αυτή.

Για να γίνει η παραπάνω ιδέα περισσότερο κατανοητή μπορεί να φανταστεί κανείς την καθημερινή περιπέτεια στους δρόμους για να πάει στη δουλειά του. Οι δρόμοι είναι το κοινό μέσο που πρέπει να μοιραστούν οι παίκτες του παιχνιδιού ενώ το μέγεθος, που θέλουν να βελτιστοποιήσουν είναι ο χρόνος, ώσπου να φτάσουν στον προορισμό τους. Κάθε οδηγός έχει βρει μία πορεία, η οποία κατά τη γνώμη του βολεύει περισσότερο (δημιουργεί τη μικρότερη καθυστέρηση). Η πορεία αυτή αποτελεί τη στρατηγική που ακολουθεί ο συγκεκριμένος οδηγός-παίκτης στο σημείο ισορροπίας του συστήματος.

Ο Σχεδιασμός Μηχανισμών, επεκτείνοντας τη Θεωρία Παιγνίων, προσπαθεί να προσεγγίσει το πρόβλημα από μία διαφορετική οπτική γωνία: έχοντας ως δεδομένα τους στόχους του συστήματος (εκφρασμένους με τη μορφή συναρτήσεων κοινωνικού καλού) ζητείται να κατασκευαστούν διαδικασίες υλοποίησής του, οι οποίες να εκμεταλλεύονται την ιδιοτελή συμπεριφορά των συμμετεχόντων προς όφελος του συστήματος. Αν φέρουμε στο μυαλό μας ξανά το παράδειγμα των δρόμων, το πρόβλημα από την οπτική του Σχεδιασμού Μηχανισμών μετατρέπεται στο να βρεθεί πώς πρέπει να κατασκευαστούν οι δρόμοι (προσθήκη φαναριών, μονοδρομήσεις κτλ.) ώστε η ιδιοτελής συμπεριφορά των οδηγών να οδηγεί στην ελάχιστη δυνατή μέση ή συνολική καθυστέρηση των αυτοκινήτων, που αποτελεί και τη συνάρτηση κοινωνικού καλού του συστήματος.

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μία σύντομη εισαγωγή στην κλασική θεωρία σχεδιασμού μηχανισμών, η οποία βασίζεται κυρίως σε παιγνιοθεωρητικά εργαλεία. Θα παρουσιάσουμε σημαντικά θετικά και αρνητικά αποτελέσματα, τα οποία οριοθετούν, κατά κάποιο τρόπο, το χώρο στον οποίο μπορεί να κινηθεί η μελλοντική έρευνα. Συγκεκριμένα στο πρώτο τμήμα 2.1 θα παρουσιάσουμε μερικά βασικά στοιχεία της Θεωρίας Παιγνίων, τα οποία αποτελούν απαραίτητη γνώση για την κατανόηση της υπόλοιπης ύλης. Στο επόμενο τμήμα θα ορίσουμε τυπικά το πρόβλημα, θα περιγράψουμε τη λεγόμενη Αρχή της Αποκάλυψης (Revelation Principle) και θα διατυπώσουμε το θεώρημα των Gibbard και Satterwaite, που είναι το σημαντικότερο σχετικό αρνητικό αποτέλεσμα. Στο τμήμα 2.3 θα παρουσιάσουμε τους μηχανισμούς Vickrey-Clarke-Groves.

## 2.1 Θεωρία Παιγνίων

### 2.1.1 Γενικά

Η Θεωρία Παιγνίων ασχολείται, όπως προαναφέραμε, με την μελέτη προβλημάτων, στα οποία συμμετέχουν άτομα με διαφορετικές ιδιότητες, αλλά κοινό σκοπό: να μεγιστοποιήσει ο καθένας την ωφέλειά του, που εκφράζεται συνήθως με τη μορφή μίας συνάρτησης.

Πιο συγκεκριμένα, χαρακτηριστικό κάθε ατόμου είναι ο *τύπος του*, ο οποίος είναι μία ένδειξη της προτίμησης του για καθένα από τα πιθανά αποτελέσματα του προβλήματος. Έτσι, έστω $t_i \in T_i$ χαρακτηρίζει τον τύπο του συμμετέχοντα $i$, από ένα σύνολο πιθανών $T_i$. Η ακριβής προτίμηση του παίκτη για καθένα πιθανό αποτέλεσμα $o$ από ένα σύνολο $O$, δίνεται συνήθως από τη *συνάρτηση χρησιμότητας* $u_i(o, t_i)$.

Ο παίκτης, έχοντας ως δεδομένα, την παρούσα κατάσταση του "κόσμου του" και την συνάρτηση χρησιμότητας του, καλείται να αποφασίσει τις μελλοντικές επιλογές του. Η έννοια αυτή της επιλογής ονομάζεται *στρατηγική*. Υπάρχουν δύο βασικά είδη στρατηγικών: οι *γνήσιες (pure)* και οι *μεικτές (mixed)*. Ενώ, λοιπόν, όταν ο παίκτης ακολουθεί μία γνήσια στρατηγική, επιλέγει ακριβώς μία επόμενη κίνηση για το παιχνίδι, όταν υιοθετεί μεικτή στρατηγική ορίζει μία κατανομή πιθανοτήτων στο σύνολο των επιτρεπτών επόμενων κινήσεων.

Η βασική αρχή της *Λογικής ή Ιδιοτέλειας*, που χαρακτηρίζει τους παίκτες, επιτάσσει να επιλέγουν κάθε φορά την κίνηση εκείνη, που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη χρησιμότητά τους.[1]

### 2.1.2 Μοντέλα Λύσης

Υπάρχουν, γενικά, τρία μοντέλα σύμφωνα με τα οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα ενός τέτοιου παιχνιδιού, λαμβάνοντας υπόψη τις προτιμήσεις των παικτών, τα επιτρεπτά αποτελέσματα και τη δομή του. Παρακάτω θα τα παρουσιάσουμε επιγραμματικά.

Το γνωστότερο και πιο συνηθισμένο στην Θεωρία Παιγνίων τέτοιο μοντέλο είναι το λεγόμενο *Σημείο Ισορροπίας Nash (Nash Equilibrium)*. Σύμφωνα με αυτό, στην κατάσταση ισορροπίας κάθε παίκτης θα επιλέξει την κίνηση εκείνη, που μεγιστοποιεί τη χρησιμότητα του, έχοντας, όμως, υπόψη του, ότι και οι υπόλοιποι παίκτες θα πράξουν ακριβώς το ίδιο. Η ωφέλεια, που αποκομίζει ένας παίκτης από το Nash Equilibrium εξαρτάται κατά ένα μεγάλο μέρος από τη γνώση των στρατηγικών, που θα ακολουθήσουν οι υπόλοιποι παίκτες. Αυτό όμως είναι κάτι που δύσκολα επιτυγχάνεται σε ρεαλιστικά προβλήματα, περιορίζοντας αρκετά την χρησιμότητα του μοντέλου στο Σχεδιασμό Μηχανισμών.

Ένα δεύτερο, και συγχρόνως ισχυρότερο, μοντέλο λύσης είναι αυτό των *κυρίαρχων στρατηγικών (dominant strategies)*. Σύμφωνα με αυτό, κάθε παίκτης έχει στη διάθεσή του μία στρατηγική, η οποία μεγιστοποιεί τη χρησιμότητά του ανεξάρτητα των στρατηγικών που ακολουθούν οι υπόλοιποι παίκτες. Το μοντέλο αυτό των κυρίαρχων στρατηγικών είναι προτιμότερο, ειδικά στο πλαίσιο της Θεωρίας Σχεδιασμού Μηχανισμών, γιατί δεν κάνει υποθέσεις για την ποσότητα της πληροφορίας, που κατέχουν οι παίκτες.

Τέλος, ένα τρίτο μοντέλο, που χρησιμοποιείται είναι αυτό του *Bayesian-Nash σημείου ισορροπίας (Bayesian-Nash Equilibrium)*. Ο παίκτης έχει κάποιες εκτιμήσεις για τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι υπόλοιποι και επιλέγει την κίνηση εκείνη, που μεγιστοποιεί το αναμενόμενο κέρδος του. Οι διαφορές του μοντέλου αυτού με τα προηγούμενα συνοψίζονται στις ακόλουθες προτάσεις:

- Το μοντέλο των κυρίαρχων στρατηγικών απαιτεί την ύπαρξη μίας ή περισσότερων κινήσεων, οι οποίες αποδίδουν στον παίκτη το μέγιστο κέρδος του, ανεξάρτητα του τι θα επιλέξουν οι άλλοι. Σε παιχνίδια, που έχουν Bayesian-Nash σημεία ισορροπίας οι παίκτες δεν έχουν τέτοιες στρατηγικές, αλλά διαθέτουν ένα μη κενό υποσύνολο κινήσεων, που τους αποφέρουν το μέγιστο *αναμενόμενο* κέρδος, σύμφωνα με τις εκτιμήσεις, που έχουν κάνει για τις επιλογές των υπόλοιπων παικτών. Προφανώς,

[1] Η λέξη "αναμενόμενη" αναφέρεται στην περίπτωση, που το σημείο ισορροπίας έχει και μεικτές στρατηγικές.

αν οι εκτιμήσεις δεν είναι έγκυρες, μπορεί να επιλέξουν μία κίνηση, ενώ υπάρχει άλλη, που μπορεί να τους οδηγήσει σε μεγαλύτερο κέρδος.

- Από την άλλη, η διαφορά με το μοντέλο του Nash σημείου ισορροπίας είναι ότι ο παίκτης δεν έχει πλήρη γνώση των κινήσεων των άλλων παικτών, αλλά μπορεί να κάνει μόνο υποθέσεις για αυτές.

Συνοψίζοντας, λοιπόν, τα παραπάνω, το Bayesian-Nash σημείο ισορροπίας έχει μικρότερη ισχύ από αυτό των κυρίαρχων στρατηγικών, και απαιτεί μερική, μόνο, γνώση του περιβάλλοντος, στο οποίο παίζεται το παιχνίδι.

## 2.2 Ορισμοί και Ιδιότητες

### 2.2.1 Ορισμός του προβλήματος

Όπως είπαμε και παραπάνω, σκοπός του σχεδιαστή μηχανισμών είναι να διαμορφώσει με τέτοιο τρόπο τους κανόνες της διαδικασίας, έτσι ώστε η ιδιοτελής συμπεριφορά των παικτών να καταλήγει στο καλύτερο συνολικά αποτέλεσμα. Η τελευταία, αυτή έννοια, του καλύτερου αποτελέσματος για ένα σύστημα παικτών, ορίζεται από τη *συνάρτηση κοινωνικής επιλογής (social function)* $f$, η οποία αντιστοιχίζει σε κάθε διάνυσμα των τύπων τους ένα αποτέλεσμα $o$ από το σύνολο των διαθέσιμων $O$.

Ας ορίσουμε πιο τυπικά το πρόβλημα του Σχεδιασμού Μηχανισμών. Καταρχήν, θεωρούμε το σύνολο $I$ των παικτών. Οι παίκτες αυτοί καλούνται να επιλέξουν ένα αποτέλεσμα $o$ από ένα σύνολο πιθανών $O$. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, κάθε παίκτης έχει ένα τύπο $t_i$, που εκφράζει την προτίμηση πάνω στο σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων. Σκοπός του είναι να μεγιστοποιήσει την συνάρτηση χρησιμότητάς του, $u_i(o, t_i)$. Με βάση αυτά τα στοιχεία, προκύπτει για κάθε παίκτη μία σχέση διάταξης πάνω στο σύνολο $O$, την οποία συμβολίζουμε με $\succeq_i (t_i)$.

Μία επιπλέον δυσκολία στο παραπάνω πρόβλημα προκύπτει από το γεγονός ότι ο τύπος κάθε παίκτη $i$, επομένως και η σχέση διάταξης πάνω στο σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων είναι ιδιωτική γνώση του. Υπάρχει, λοιπόν, περίπτωση η ιδιοτελής συμπεριφορά του να τον οδηγήσει σε ανακοίνωση ψευδούς τύπου, αν αυτό είναι για το συμφέρον του. Έχοντας αυτά υπόψη του ο σχεδιαστής προσπαθεί να δώσει ως λύση για το πρόβλημα ένα μηχανισμό, ο οποίος να υλοποιεί την συνάρτηση κοινωνικής επιλογής, δηλαδή το αποτέλεσμα, που επιλέγει ο μηχανισμός για διάνυσμα τύπων $t$ να είναι ίδιο με το $f(t)$. Για την πιο τυπική θεμελίωση του προβλήματος ακολουθούν οι παρακάτω ορισμοί:

**Ορισμός 2.1.** Συνάρτηση κοινωνικής επιλογής (social choice function) είναι μία συνάρτηση $f : T_1 \times \ldots \times T_{|I|} \to O$, η οποία δέχεται ως όρισμα ένα διάνυσμα των τύπων των παικτών, $(t_1, \ldots, t_{|I|})$ και δίνει ως έξοδο μία επιλογή $f(t_1, \ldots, t_{|I|}) \in O$.

**Ορισμός 2.2.** Ένας μηχανισμός $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}, g(.))$ παρέχει ένα σύνολο στρατηγικών $S_i$ σε κάθε παίκτη $i$ και μία *συνάρτηση επιλογής αποτελέσματος* $g(.)$ με βάση το διάνυσμα των στρατηγικών, που οι παίκτες επέλεξαν.

**Ορισμός 2.3.** Ο μηχανισμός $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}, g(.))$ υλοποιεί την συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ αν ο κανόνας εξόδου $g(.)$ με όρισμα το διάνυσμα των στρατηγικών των παικτών στο σημείο ισορροπίας του παιγνιδιού που ορίζεται από τον $M$ δίνει ως έξοδο το αποτέλεσμα εκείνο, που δίνει ως έξοδο η συνάρτηση f με όρισμα το διάνυσμα των τύπων των παικτών. Δηλαδή:

$$g(s_1^*(t_1)), \ldots, g(s_{|I|}^*(t_{|I|})) = f(t_1, \ldots, t_{|I|})$$

για όλα τα διανύσματα $(t_1, \ldots, t_{|I|}) \in T_1 \times \ldots \times T_{|I|}$

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στον παραπάνω ορισμό δεν προσδιορίσαμε ακριβώς τον όρο "σημείο ισορροπίας". Όπως είπαμε και στο προηγούμενο εδάφιο υπάρχουν περισσότερα από ένα μοντέλα σημείων ισορροπίας (Nash, Bayesian-Nash, κυρίαρχες στρατηγικές), κανένα από τα οποία δεν θεωρείται πιο κατάλληλο από τα υπόλοιπα. Έτσι, είναι χρέος της θεωρίας του Σχεδιασμού Μηχανισμών να εξετάσει το πρόβλημα υιοθετώντας διαφορετικά μοντέλα. Εμείς, παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε τις κυρίαρχες στρατηγικές ως έννοια του σημείου ισορροπίας.

Πριν όμως προχωρήσουμε στο παρακάτω εδάφιο θα αναφέρουμε δύο ορισμούς, που θα μας φανούν ιδιαίτερα χρήσιμοι:

**Ορισμός 2.4.** *Μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης* (direct revelation) είναι εκείνος ο μηχανισμός για τον οποίο ισχύει ότι το σύνολο των δυνατών στρατηγικών $S_i$ του παίκτη $i$ ταυτίζεται με το σύνολο των τύπων του $T_i$, δηλαδή ο παίκτης αποκαλύπτει άμεσα τον τύπο του.

**Ορισμός 2.5.** Ο μηχανισμός $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}, g(.))$ είναι *φιλαλήθης (truthful)* αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

- Ο μηχανισμός είναι άμεσης αποκάλυψης

- Το να πει κανείς την αλήθεια για τον τύπο του $(s_i = t_i)$ είναι η στρατηγική του σημείου ισορροπίας του παιχνιδιού, που ορίζεται από τον μηχανισμό και την έννοια του σημείου ισορροπίας, που υιοθετήσαμε (στην περίπτωσή μας των κυρίαρχων στρατηγικών).

### 2.2.2 Υλοποίηση με κυρίαρχες στρατηγικές

Πριν προχωρήσουμε, καλό είναι να θυμηθούμε ότι ο παίκτης $i$ έχει στη διάθεση του μία ή περισσότερες κυρίαρχες στρατηγικές (dominant strategies) σε ένα παιχνίδι $G$, αν οι στρατηγικές αυτές μεγιστοποιούν την χρησιμότητα του ανεξάρτητα των κινήσεων των υπόλοιπων παικτών. Επίσης, στη συνέχεια θα γράφουμε $t_{-i}$ αντί για $(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_{|I|})$ και όμοια $s_{-i}$ αντί για $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_{|I|})$ ενώ $t = (t_i, t_{-i})$ και $s = (s_i, s_{-i})$. Έχοντας αυτά υπόψη μας φτάνουμε στους παρακάτω ορισμούς (2.6, 2.7) για τους μηχανισμούς που υλοποιούνται με κυρίαρχες στρατηγικές:

**Ορισμός 2.6.** Το διάνυσμα των στρατηγικών $s^*(.) = (s_1^*(.), \ldots, s_{|I|}^*(.))$ είναι ένα σημείο ισορροπίας κυρίαρχων στρατηγικών του μηχανισμού $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}, g(.))$ αν για όλα τα $i$ και $t_i \in T_i$ ισχύει:

$$u_i(g(s_i^*, s_{-i})) \geq u_i(g(s_i^{'}, s_{-i}))$$

για όλα τα $s_i^{'} \in S_i$ και $s_{-i} \in S_{-i}$

**Ορισμός 2.7.** Ο μηχανισμός $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}(.), g(.))$ υλοποιεί την συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ με κυρίαρχες στρατηγικές αν υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας του $M$ με κυρίαρχες στρατηγικές $s^*(.) = (s_1^*(.), \ldots, s_{|I|}^*)$, για το οποίο να ισχύει ότι $g(s^*(t)) = f(t)$ για όλα τα $t \in T$

Οι μηχανισμοί, που υλοποιούνται με κυρίαρχες στρατηγικές είναι ιδιαίτερα σημαντικοί, γιατί, όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο, που αφορά την πολυπλοκότητα τους, μηδενίζουν, ουσιαστικά τους υπολογισμούς του παίκτη $i$, ο οποίος παίζει πάντοτε μία από τις κυρίαρχες στρατηγικές,που έχει στη διάθεσή του, χωρίς να χρειαστεί να ασχοληθεί με τους υπόλοιπους παίκτες. Έτσι, ακόμη, και αν έχει κάνει λάθος στην εκτίμηση της κατανομής πιθανοτήτων πάνω στο σύνολο των πιθανών στρατηγικών των άλλων παικτών, αυτό δεν επηρεάζει καθόλου την χρησιμότητα του.

Το πρόβλημα του αν μία συνάρτηση κοινωνικής επιλογής είναι υλοποιήσιμη με κυρίαρχες στρατηγικές ή όχι είναι αρκετά δύσκολο, αν σκεφτεί κανείς ότι πρέπει να εξεταστούν όλοι οι πιθανοί μηχανισμοί. Όμως, στην περίπτωση των κυρίαρχων στρατηγικών τα πράγματα απλοποιούνται αρκετά λόγω της ακόλουθης *Αρχής της Αποκάλυψης*, η οποία περιορίζει σημαντικά το σύνολο των μηχανισμών, που πρέπει να εξετάσουμε. Πριν, όμως, παρουσιάσουμε την Αρχή της Αποκάλυψης ορίζουμε την έννοια της φιλαληθούς υλοποίησης με κυρίαρχες στρατηγικές.

**Ορισμός 2.8.** Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ *υλοποιείται φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές* αν η στρατηγική $s_i^*(t_i) = t_i$, $\forall t_i \in T_i$ και $\forall i$

είναι ένα σημείο ισορροπίας με κυρίαρχες στρατηγικές του μηχανισμού άμεσης αποκάλυψης (direct revelation mechanism) $M = (t_1, \ldots, t_{|I|}, f(.))$. Αυτό μεταφράζεται ως εξής:

$$u_i(f(t_i, t_{-i}), t_i) \geq u_i(f(t_i^{'}, t_{-i}), t_i)$$

για όλα τα $t_i^{'} \in T_i$ και $t_{-i} \in T_{-i}$

**Θεώρημα 2.9 (Αρχή της Αποκάλυψης για Κυρίαρχες Στρατηγικές (Revelation Principle)).** *Αν υπάρχει μηχανισμός $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}, g(.))$ που υλοποιεί τη συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ με κυρίαρχες στρατηγικές , τότε υπάρχει και φιλαλήθης υλοποίησή της $f(.)$ με κυρίαρχες στρατηγικές.*

*Απόδειξη.* Έστω ο μηχανισμός $M = (S_1, \ldots, S_{|I|}, g(.))$ υλοποιεί τη συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ με κυρίαρχες στρατηγικές. Αυτό σημαίνει από τους ορισμούς 2.6 και 2.7 ότι υπάρχει διάνυσμα στρατηγικών $s^*(.) = (s_1^*(.), \ldots, s_{|I|}^*(.)$, για το οποίο $g(s^*(t)) = f(t)$ για όλα τα $t \in T$ και

$$u_i((g(s_i^*(t_i), s_{-i})), t_i) \geq u_i((g(s_i^{'}, s_{-i})), t_i) \tag{2.1}$$

για όλα τα $s_i^{'} \in S_i$ και $s_{-i} \in S_{-i}$. Από τη σχέση (2.1) προκύπτει η παρακάτω σχέση (2.2) αν στη θέση της εναλλακτικής στρατηγικής $s_i^{'}$ θεωρήσουμε την ανακοίνωση πληροφορίας διαφορετικής του τύπου $t_i$ (π.χ. έμμεσος μηχανισμός με αποκάλυψη μερικής πληροφορίας):

$$u_i((g(s_i^*(t_i), s_{-i})), t_i) \geq u_i((g(s_i^{'}(t_i^{'}), s_{-i})), t_i) \tag{2.2}$$

για όλα τα $t_i^{'} \in T_i$ και $t_{-i} \in T_i$. Όμως αφού $g(s^*(t)) = f(t)$ για όλα τα πιθανά $t \in T$ αυτό σημαίνει ότι, για όλα τα $i$ και $t_i$ θα ισχύει,

$$u_i(f(t_i, t_{-i}), t_i) \geq u_i(f(t_i^{'}, t_{-i}), t_i)$$

Αυτή, όμως η συνθήκη εξασφαλίζει ότι η $f(.)$ είναι φιλαληθώς υλοποιήσιμη με κυρίαρχες στρατηγικές. □

Πρακτικά, η απόδειξη της παραπάνω πρότασης ισοδυναμεί με προσομοίωση ενός οποιουδήποτε (έμμεσου) μηχανισμού με κυρίαρχες στρατηγικές από ένα άμεσο. Αν για παράδειγμα σε ένα έμμεσο μηχανισμό ο παίκτης $i$ με τύπο $t_i$ βρίσκει ότι η κυρίαρχη στρατηγική του είναι η $s_i^*(t_i) \neq t_i$ (δηλαδή το να μην ανακοινώσει τον τύπο του) τότε μπορούμε να πάρουμε ένα ισοδύναμο άμεσο μηχανισμό προσθέτοντας ένα μεσάζοντα μεταξύ των παικτών και του αρχικού μηχανισμού, ο οποίος λειτουργεί ως εξής: ζητάει από τους παίκτες να ανακοινώσουν τον τύπο τους και μετά επιλέγει την κίνηση $s_i^*(t_i)$. Προφανώς, στον μηχανισμό αυτό η βέλτιστη στρατηγική του παίκτη είναι το να πει την αλήθεια.

Η σημασία της παραπάνω πρότασης είναι το ότι μας επιτρέπει χωρίς βλάβη της γενικότητας να περιοριζόμαστε σε μηχανισμούς, που υλοποιούνται φιλαληθώς, αφού εξασφαλίζεται ότι οποιοσδήποτε έμμεσος μηχανισμός δεν μπορεί να επιτύχει τίποτα καλύτερο. Αυτό, όμως, δεν σημαίνει σε καμία περίπτωση ότι πρέπει να ξεφορτωθούμε τους έμμεσους μηχανισμούς. Ενώ, η Αρχή της Αποκάλυψης, είναι ένα ισχυρό θεωρητικό εργαλείο, παρόλα αυτά, οι άμεσοι μηχανισμοί είναι δύσκολο να υλοποιηθούν υπολογιστικά, αφού απαιτούν την αποκάλυψη από κάθε παίκτη των προτιμήσεων του πάνω στο σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων, κάτι που ορισμένες φορές οδηγεί σε μη πρακτικές λύσεις.

### 2.2.3 Το Θεώρημα των Gibbard-Satterhwaite

Η Αρχή της Αποκάλυψης βοήθησε σημαντικά στη θεωρητική θεμελίωση του Σχεδιασμού Μηχανισμών και οδήγησε στην διατύπωση και απόδειξη σημαντικών θεωρημάτων. Ένα από αυτά είναι και το αρνητικό αποτέλεσμα που δημοσίευσαν ανεξάρτητα οι Gibbard και Satterhwaite.

Για να μπορέσουμε να διατυπώσουμε το θεώρημα πρέπει πρώτα να ορίσουμε μερικές απαραίτητες έννοιες:

**Ορισμός 2.10.** Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ λέγεται *δικτατορική* αν υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης (δικτάτορας) $i$, τέτοιος ώστε για κάθε διάνυσμα τύπων $t = (t_1, \ldots, t_{|I|}) \in T$ να ισχύει,

$$f(t) \in \{o \in O : u_i(o, t_i) \geq u_i(o', t_i)\}, \text{για όλα τα } o' \in O.$$

Με απλά λόγια υπάρχει παίκτης, ο οποίος λαμβάνει πάντοτε από τη συνάρτηση $f(.)$ το πλέον επιθυμητό αποτέλεσμα για αυτόν.

**Ορισμός 2.11.** Ένας παίκτης έχει *γενικές προτιμήσεις* σε ένα σύνολο πιθανών αποτελεσμάτων $O$, όταν για κάθε δύο πιθανά αποτελέσματα του $O$, μπορεί να προτιμήσει το ένα έναντι του άλλου, δηλαδή δεν υπάρχουν αποτελέσματα, για τα οποία να είναι αδιάφορος. Ακόμη η συνάρτηση, που εκφράζει τις προτιμήσεις του είναι μεταβατική, δηλαδή αν $o_1 \succ o_2$ και $o_2 \succ o_3$ τότε $o_1 \succ o_3$. Το σύνολο των γενικών προτιμήσεων ενός παίκτη συμβολίζεται με P.

**Ορισμός 2.12.** Τα *lower contour* σύνολα ορίζονται ως εξής:

$$L_i(o, t_i) = \{z \in O : u_i(o, t_i) \geq u_i(z, t_i)\}$$

Δηλαδή, τα σύνολα αυτά λαμβάνουν ως όρισμα ένα από τα πιθανά αποτελέσματα $o \in O$ και τον τύπο του παίκτη $i$ και επιστρέφουν τα αποτελέσματα, εκείνα, τα οποία αποδίδουν μικρότερη χρησιμότητα στον παίκτη από το $o$.

**Ορισμός 2.13.** Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ είναι *μονότονη* αν για κάθε $t$, για το οποίο υπάρχει $t^{'}$ τέτοιο, ώστε $L_i(f(t),t_i) \subset L_i(f(t),t_i^{'}) \forall i$ τότε $f(t^{'}) = f(t)$. Πιο απλά έστω ότι το διάνυσμα των τύπων των παικτών αλλάζει από $(t_1,\ldots,t_{|I|})$ και γίνεται $(t_1^{'},\ldots,t_{|I|}^{'})$. Αν η κοινωνική επιλογή για διάνυσμα τύπων $t=(t_i,t_{-i})$ είναι ίση με $o = f(t)$ και δεν υπάρχει εναλλακτικό αποτέλεσμα, από το οποίο το $o$ είναι χειρότερο για το νέο διάνυσμα τύπων $t^{'}$ (αυτό υποδηλώνεται από τη σχέση της υπόθεσης), τότε το $o$ είναι η κοινωνική επιλογή και για την νέα κατάσταση.

**Ορισμός 2.14.** Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ είναι *Pareto βέλτιστη* αν για κάθε $o^{'} \neq f(t)$ και για όλα τα πιθανά διανύσματα τύπων $t = (t_1,t_2,\ldots,t_{|I|})$ ισχύει,

$$u_i(o^{'},t_i) > u_i(o,t_i) \Rightarrow \exists j \in \mathcal{I} : u_j(o^{'},t_j) < u_j(o,t_j)$$

Πρακτικά, μία συνάρτηση είναι Pareto βέλτιστη αν δεν υπάρχει περίπτωση ένας παίκτης να γίνει περισσότερο ικανοποιημένος αλλάζοντας το αποτέλεσμα της συνάρτησης, χωρίς κάποιος άλλος να γίνει λιγότερο χαρούμενος.

**Θεώρημα 2.15 (Το αρνητικό αποτέλεσμα των Gibbard-Satterthwaite).** *Έστω ότι το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων $O$ είναι πεπερασμένο και οι παίκτες έχουν γενικές προτιμήσεις πάνω σε αυτό, δηλαδή η συνάρτηση, που εκφράζει τις προτιμήσεις τους ανήκει στο σύνολο $P$. Έστω, ακόμη, ότι υπάρχουν, τουλάχιστον, δύο παίκτες και τρία πιθανά αποτελέσματα, τότε μία συνάρτηση κοινωνικής επιλογής μπορεί να υλοποιηθεί φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές από ένα μηχανισμό αν και μόνο αν είναι δικτατορική.*

*Απόδειξη.* Ας αποδείξουμε πρώτα τη μία κατεύθυνση, δηλαδή ότι κάθε δικτατορική συνάρτηση κοινωνικής επιλογής μπορεί να υλοποιηθεί φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές. Έστω, ότι ο παίκτης $i$ έχει τύπο $t_i$. Τότε, αν είναι ο δικτάτορας, η συνάρτηση $f(.)$ δίνει ως έξοδο αποτέλεσμα $o$ τέτοιο ώστε:

$$f(t) \in \{o \in O : u_i(o,t_i) \geq u_i(o^{'},t_i)\} \text{ για όλα τα } o^{'} \in O$$

επομένως αν ανακοινώσει ψευδώς τον τύπο του, λέγοντας $t_i^{'}$ θα φτάσει σε μικρότερη χρησιμότητα. Αν δεν είναι ο δικτάτορας, τότε το αποτέλεσμα που θα δώσει η συνάρτηση δεν εξαρτάται από αυτόν, οπότε ότι και να δηλώσει η χρησιμότητα του θα είναι η ίδια. Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι το να πει ο παίκτης την αλήθεια είναι κυρίαρχη στρατηγική, αφού επιτυγχάνει τη βέλτιστη τιμή χρησιμότητας για τον παίκτη.

Η δεύτερη κατεύθυνση είναι πιο δύσκολο να αποδειχθεί. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη θα πρέπει πρώτα να δείξουμε την ισχύ τεσσάρων λημμάτων, που βρίσκονται παρακάτω.

**Λήμμα 2.16.** *Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ υλοποιείται φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές αν και μόνο αν για κάθε $i$, $t_{-i} \in T_{-i}$ και για όλα τα ζευγάρια τύπων για τον παίκτη $i$, $t_i^{'}$ και $t_i^{''} \in T_i$ έχουμε:*

$$f(t_i^{''}, t_{-i}) \in L_i((f(t_i^{'}, t_{-i}), t_i^{'})) \text{ και } f(t_i^{'}, t_{-i}) \in L_i((f(t_i^{''}, t_{-i}), t_i^{''}))$$

*Απόδειξη.* Η ιδέα της πρότασης είναι, απλώς, ότι αλλαγή στον τύπο του παίκτη από $t_i^{'}$ σε $t_i^{''}$ πρέπει να ισοδυναμεί με αντιστροφή της σχέσης διάταξης μεταξύ των αποτελεσμάτων $f(t_i^{'}, t_{-i})$ και $f(t_i^{''}, t_{-i})$ για τον παίκτη $i$. Δηλαδή, πρέπει αν ο τύπος του παίκτη είναι ίσος με $t_i^{'}$, να προτιμάει το αποτέλεσμα $f(t_i^{'}, t_{-i})$ από το $f(t_i^{''}, t_{-i})$ ενώ αν ο τύπος του είναι $t_i^{''}$, να ισχύει το αντίθετο. □

**Λήμμα 2.17.** *Αν οι παίκτες έχουν γενικές προτιμήσεις και η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ είναι φιλαληθώς υλοποιήσιμη με κυρίαρχες στρατηγικές, τότε η $f(.)$ είναι μονότονη.*

*Απόδειξη.* Έστω δύο διανύσματα τύπων $t$ και $t^{'}$ τέτοια ώστε:

$$L_i(f(t), t_i) \subset L_i(f(t), t_i^{'}), \forall i \tag{2.3}$$

. Για να είναι η $f(.)$ μονότονη πρέπει $f(t) = f(t^{'})$, σύμφωνα με τον ορισμό 2.13 της μονοτονικότητας. Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι έχουμε το εξής διάνυσμα τύπων: $t^{''} = (t_1^{'}, t_2, \ldots, t_{|I|})$. Για αυτό έχουμε $f(t^{''}) \in L_1(f(t), t_1)$ (αφού το να πει ο 1 την αλήθεια είναι η βέλτιστη στρατηγική του, όπως έχουμε υποθέσει) επομένως και $f(t^{''}) \in L_1(f(t), t_1^{'})$ από τη σχέση (2.3). Αλλά από το λήμμα 2.16 έχουμε ότι $f(t) \in L_1(f(t_{''}), t_1^{'})$. Δηλαδή ισχύει:

$$u_1(f(t), t_1^{'}) \geq u_1(f(t^{''}), t_1^{'})$$

$$u_1(f(t^{''}), t_1^{'}) \geq u_1(f(t), t_1^{'})$$

Επομένως, αφού υποθέσαμε ότι η διάταξη των προτιμήσεων κάθε παίκτη είναι γνήσια (δεν υπάρχει αδιαφορία) $f(t) = f(t^{''})$. Όμοια προχωράμε, θεωρώντας το διάνυσμα $t = (t_1^{'}, t_2^{'}, \ldots, , t_{|I|})$ και φτάνουμε στο ζητούμενο μετά από $|I|$ επαναλήψεις της διαδικασίας. Τελικά η $f(.)$ είναι μονότονη. □

**Λήμμα 2.18.** *Αν οι παίκτες έχουν γενικές προτιμήσεις, η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$ είναι μονότονη, και $f(T) = O$, δηλαδή το πεδίο τιμών της $f(.)$ είναι ακριβώς το σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων $O$, τότε η $f(.)$ είναι Pareto βέλτιστη.*

*Απόδειξη.* Για να αποδείξουμε το λήμμα, θα εργαστούμε με απαγωγή στο άτοπο. Έστω, ότι για κάποιο διάνυσμα τύπων $t \in T$ και για ένα αποτέλεσμα $y \in O$, ισχύει

$$u_i(y, t_i) > u_i(f(t), t_i), \text{ για όλα τα } i \tag{2.4}$$

[τότε η $f(.)$ εξ ορισμού δεν είναι Pareto βέλτιστη]. Εφόσον έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει πλήρης αντιστοίχηση στο πεδίο τιμών της $f(.)$ και στο σύνολο των αποτελεσμάτων $O$, τότε υπάρχει $t^{'} \in T$, τέτοιο ώστε $f(t^{'}) = y$. Επιλέγω τώρα ένα τρίτο διάνυσμα $t^{''} \in T$, τέτοιο ώστε

$$u_i(y, t_i^{''}) > u_i(f(t), t_i^{''}) > u_i(z, t_i^{''}) \text{ για όλα τα } z \neq f(t), y \tag{2.5}$$

[οι παίκτες έχουν γενικές προτιμήσεις, επομένως αυτή η ανισότητα μπορεί να ισχύει]. Εφόσον όμως $L_i(y, t_i^{'}) \subset L_i(y, t_i^{''})$ από την (2.5), σύμφωνα με την μονοτονία της, είναι $f(t^{''}) = y$. Όμοια από την (2.4) έχω $L_i(f(t), t_i) \subset L_i(f(t), t_i^{''})$, οπότε προκύπτει από την μονοτονικότητα, πάλι, $f(t^{''}) = f(t)$. Όμως στο σημείο αυτό έχω άτοπο, αφού $y \neq f(t)$. Επομένως η $f(.)$ πρέπει να είναι Pareto βέλτιστη. □

**Λήμμα 2.19.** *Μία συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(.)$, η οποία είναι μονότονη και Pareto βέλτιστη είναι και δικτατορική.*

*Απόδειξη.* Το λήμμα αυτό είναι απόρροια του θεωρήματος του Arrow, που είναι κεντρικό αποτέλεσμα στην Θεωρία Κοινωνικής Επιλογής. Για την απόδειξη του λήμματος αυτού, μπορεί κανείς να ανατρέξει στο [MCWG95, κεφάλαιο 21]. □

□

Παρότι το θεώρημα περιορίζει σημαντικά το εύρος των πιθανών μηχανισμών, που μπορούμε να κατασκευάσουμε, δεν ισχύει αν χαλαρώσουμε λίγο τις προϋποθέσεις του. Για να κάνουμε κάτι τέτοιο, μπορούμε είτε να θέσουμε περιορισμούς στις προτιμήσεις των παικτών - π.χ. να θεωρήσουμε ότι είναι *ημιγραμμικής (quasi-linear)* μορφής, παραβιάζοντας την προϋπόθεση των γενικών προτιμήσεων των παικτών είτε να θεωρήσουμε λιγότερο ισχυρή έννοια του σημείου ισορροπίας, δηλαδή να εγκαταλείψουμε κατά μέρος την υλοποίηση με κυρίαρχες στρατηγικές και να εφαρμόσουμε π.χ. Baysian-Nash σημεία ισορροπίας. Στο επόμενο εδάφιο θα ακολουθήσουμε την πρώτη προσέγγιση και θα περιοριστούμε σε ημιγραμμικά (quasi-linear) περιβάλλοντα, για τα οποία έχει βρεθεί και μία πολύ χρήσιμη και ενδιαφέρουσα οικογένεια μηχανισμών.

## 2.3 Ημιγραμμικά (Quasi-Linear) Περιβάλλοντα

Το αρνητικό αποτέλεσμα των Gibbard-Satterhwaite οδήγησε τους ερευνητές να χαλαρώσουν τις προϋποθέσεις του, με σκοπό να κατασκευάσουν μηχανισμούς με επιθυμητές ιδιότητες (π.χ. όχι δικτατορικές). Μία σχετική επιτυχία επιτεύχθηκε περιορίζοντας τις προτιμήσεις των παικτών, ώστε αυτές να είναι ημιγραμμικές (quasi-linear). Ας δούμε, όμως, πιο συγκεκριμένα πώς ορίζεται το ηνιγραμμικό (quasi-linear) περιβάλλον προτιμήσεων.

**Ορισμός 2.20.** Σε ένα ηνιγραμμικό (quasi-linear) περιβάλλον τα εναλλακτικά αποτελέσματα του μηχανισμού έχουν την μορφή διανύσματος:

$$o = (k, p_1(.), p_2(.), \ldots, p_{|I|}(.))$$

όπου $k \in K$ και $K$ το σύνολο των κοινωνικών επιλογών και $p_i \in \Re$, μεταφορά απαριθμίσιμης ποσότητας (π.χ χρήματα) στον παίκτη $i$. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον η συνάρτηση χρησιμότητας του παίκτη παίρνει τη μορφή:

$$u_i(o, t_i) = v_i(k, t_i) + p_i$$

Ορίζοντας το περιβάλλον των χρηστών σύμφωνα με τον ορισμό 2.20, πρέπει να δώσουμε και ένα πιο κατάλληλο ορισμό για την έννοια του μηχανισμού.

**Ορισμός 2.21.** Ένας ημιγραμμικός (quasi-linear) μηχανισμός:

$$M(S_1, \ldots, S_n, k(.), p_1(.), p_2(.), , p_{|I|}(.))$$

παρέχει:

- Ένα σύνολο στρατηγικών $S_i$ για κάθε παίκτη
- Ένα αλγόριθμο $k(.)$ επιλογής αποτελέσματος $k \in K$ με βάση το διάνυσμα των στρατηγικών, που οι παίκτες ανακοίνωσαν.
- Ένα αλγόριθμο καθορισμού πληρωμών για κάθε παίκτη με βάση το διάνυσμα των στρατηγικών τους.

Ο ιδανικός μηχανισμός συγκεντρώνει ένα αριθμό ιδιοτήτων, τις οποίες και θα ορίσουμε παρακάτω μέσω της συνάρτησης κοινωνικής επιλογής.

- Αποδοτικότητα: Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής $f(t) = (k(t), p(t))$ είναι αποδοτική αν για κάθε διάνυσμα τύπων $t$ έχω:

  $$\sum v_i(k(t), t_i) \geq \sum v_i(k', t_i)$$

  Ουσιαστικά, η συνάρτηση επιλογής $f(.)$ είναι τέτοια, που επιλέγει το αποτέλεσμα $k \in K$, που μεγιστοποιεί το άθροισμα των ωφελειών των παικτών.

- Η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής επιτυγχάνει ισορροπία στον προϋπολογισμό (budget-balanced) αν $\sum p_i(t) = 0$. Δεν εισάγονται, δηλαδή, εισοδήματα στο σύστημα. Υπάρχει και η έννοια της ασθενούς ισορροπίας, που ικανοποιείται αν το άθροισμα των πληρωμών είναι μη αρνητικό

Στο επόμενο εδάφιο θα παρουσιάσουμε το πιο σημαντικό θετικό αποτέλεσμα στο Σχεδιασμό Μηχανισμών σε ημιγραμμικά (quasi-linear) περιβάλλοντα.

### 2.3.1 Μηχανισμοί Vickrey-Clarkes-Groves

Η πιο δημοφιλής οικογένεια μηχανισμών είναι, αναμφισβήτητα, οι γενικευμένοι μηχανισμοί Vickrey-Clarkes-Groves. Οι μηχανισμοί προήλθαν από το συνδυασμό των τριών δημοσιεύσεων [Vic61], [Cla71], [Gro73] και χρησιμοποιούνται σε περιπτώσεις που οι παίκτες έχουν ημιγραμμικές (quasi-linear) προτιμήσεις. Παρακάτω ορίζουμε τυπικά την οικογένεια, αυτή, των μηχανισμών και παρουσιάζουμε μερικές ιδιότητές τους.

**Ορισμός 2.22 (VCG μηχανισμοί).** Ο μηχανισμός M(k,p), όπου $k(.)$ ο αλγόριθμος επιλογής αποτελέσματος και $p(.)$ η συνάρτηση πληρωμών ανήκει στην οικογένεια των VCG μηχανισμών αν:

- Ο αλγόριθμος $k(.)$ είναι τέτοιος, ώστε η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής να είναι αποδοτική, δηλαδή να ισχύει:

  $$\sum v_i(k(t), t_i) \geq \sum v_i(k^{'}, t_i)$$

  όπου θεωρούμε ότι οι παίκτες ανακοίνωσαν το πραγματικό διάνυσμα των τύπων τους $t$.[2]

- Οι πληρωμές γίνονται σύμφωνα με την παρακάτω φόρμουλα:

  $$p_i(w) = \sum_{i \neq j} v_j(k(w)) + h_i(w_{-i})$$

Παρατηρήσεις στον ορισμό

- Με $w_{-i}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα των τιμών που ανακοίνωσαν όλοι οι παίκτες εκτός του $i$.
- Με $h_i(w_{-i})$ συμβολίζουμε μία τυχαία συνάρτηση του διανύσματος $w_{-i}$

Οι βασικότερες ιδιότητες των μηχανισμών, που μόλις περιγράψαμε, συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 2.23 ([Gro73]).** *Οι VCG μηχανισμοί είναι τέτοιοι ώστε, η συνάρτηση κοινωνικής επιλογής τους να υλοποιείται φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές για παίκτες με ημιγραμμικές (quasi-linear) προτιμήσεις. Επιπλέον, οι μηχανισμοί είναι αποδοτικοί.*

[2] Θα αποδείξουμε ότι το να λένε οι παίκτες την αλήθεια είναι κυρίαρχη στρατηγική

*Απόδειξη.* Όπως είδαμε στον ορισμό των μηχανισμών VCG, ο αλγόριθμος της κοινωνικής επιλογής $k(.)$ είναι τέτοιος, ώστε ως αποτέλεσμα να δίνει την βέλτιστη κατανομή των αγαθών του συνόλου $K$ στους παίκτες, σύμφωνα με το διάνυσμα των τύπων $w$ που ανακοινώθηκαν. Επομένως, δείχνοντας ότι ο μηχανισμός είναι φιλαλήθης, δηλαδή ότι το διάνυσμα τύπων, που ανακοινώθηκε είναι το ίδιο με το πραγματικό, αποδεικνύουμε ταυτόχρονα και ότι είναι αποδοτικός.

Αρκεί, λοιπόν, να ασχοληθούμε μόνο με το αν ο μηχανισμός είναι φιλαλήθης ή όχι. Για να αποδείξουμε την ιδιότητα αυτή, χρησιμοποιούμε την μέθοδο της απαγωγής στο άτοπο. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι το να πει κανείς την αλήθεια δεν είναι κυρίαρχη στρατηγική για όλους τους παίκτες. Δηλαδή, υπάρχει παίκτης $i$, και $t_i, t_i^{'}, t_{-i}$, τέτοια ώστε:

$$v_i(k(t_i^{'}), t_i) + p_i(t_i^{'}, t_{-i}) > v_i(k(t_i), t_i) + p_i(t_i, t_{-i})$$

Όμως τότε έχουμε ότι από τον αλγόριθμο των πληρωμών για $p_i(t_i^{'})$ και $p_i(t_i)$, θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η τυχαία συνάρτηση $h(w_{-i}) = 0$ προκύπτει:

$$\sum v_i(k(t^{'}, t_{-i}), t_i) \geq \sum v_i(k(t, t_{-i}), t_i)$$

που έρχεται σε αντίθεση με το ότι ο αλγόριθμος $k(.)$ είναι αποδοτικός. □

Μία ειδική περίπτωση των VCG μηχανισμών, που παρουσιάζει ενδιαφέρον από μόνη της, είναι ο λεγόμενος Pivotal ή Clarke μηχανισμός, τον οποίο διατύπωσε ο Clarke ανεξάρτητα το 1971. Σύμφωνα με τον Pivotal μηχανισμό η συνάρτηση h είναι τέτοια, ώστε να εκφράζει το άθροισμα των χρησιμοτήτων των παικτών θεωρώντας το πρόβλημα στο οποίο ο i δεν συμμετέχει. Δηλαδή στον Pivotal μηχανισμό έχω: $h(w_{-i}) = -\sum_{j \neq i} v_j(k_{-i}(t_{-i}), t_j)$ Να αναφέρουμε, στο σημείο αυτό, ότι χαρακτηριστικό παράδειγμα Pivotal μηχανισμού είναι η δημοπρασία δεύτερης-τιμής για το πρόβλημα της κατανομής ενός αδιαίρετου αντικειμένου, την οποία θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Αποδείξαμε παραπάνω ότι οι VCG μηχανισμοί υλοποιούνται φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές και είναι αποδοτικοί. Οι Green και Laffont (1979) απέδειξαν επιπλέον ότι είναι και οι μοναδικοί, που έχουν αυτές τις ιδιότητες, θέτοντας έναν αριθμό περιορισμών. Η απόδειξη του θεωρήματος ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας. Οι ενδιαφερόμενοι μπορούν να συμβουλευτούν το [MCWG95].

Εκτός όμως, από την αποδοτικότητα, μία ιδιότητα, η οποία είναι επιθυμητή σε ένα μηχανισμό είναι και ο ισοσκελισμένος προϋπολογισμός (budget balance). Δηλαδή οι πληρωμές να είναι τέτοιες, ώστε:

$$\sum_i p_i(t) = 0 \text{ για όλα τα } t \in T$$

Οι Hurwicz, Green και Laffont απέδειξαν το παρακάτω αρνητικό αποτέλεσμα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

**Θεώρημα 2.24 (Αρνητικό αποτέλεσμα των Hurwicz, Green και Laffont).** *Είναι αδύνατο να σχεδιαστεί ένας αποδοτικός, ισοσκελισμένου προϋπολογισμού μηχανισμός, που να υλοποιείται φιλαληθώς με κυρίαρχες στρατηγικές σε μία απλή οικονομία ανταλλαγών, για παίκτες με ημιγραμμικές (quasi-linear) προτιμήσεις.*

Μάλιστα, οι Myerson και Satterhwaite γενίκευσαν το παραπάνω αποτέλεσμα και στην περίπτωση πιο αδύναμων εννοιών για το σημείο ισορροπίας, και συγκεκριμένα για Bayesian-Nash υλοποιήσεις.

Παρόλη την ισχύ των παραπάνω θεωρημάτων, σπάνια ενδιαφερόμαστε για την ισχυρή εκδοχή του ισοσκελισμένου προϋπολογισμού. Έτσι, έχουν υλοποιηθεί VCG μηχανισμοί που επιτυγχάνουν αποδοτικότητα και μη αρνητικό προϋπολογισμό (ο μηχανισμός δεν χάνει) για ένα αριθμό ενδιαφερόντων προβλημάτων.

# Κεφάλαιο 3

# Δημοπρασίες

Το πρόβλημα που έδωσε την μεγαλύτερη ώθηση στο χώρο του Σχεδιασμού Μηχανισμών ήταν αυτό της μελέτης και υλοποίησης οικονομικά αποδοτικών και λειτουργικών δημοπρασιών. Αργότερα, τα αποτελέσματα που προέκυψαν από την παραπάνω προσπάθεια εφαρμόστηκαν και σε πλήθος άλλα προβλήματα, συμπεριλαμβανομένων και ορισμένων κλασικών για την κοινότητα της Θεωρητικής Πληροφορικής.

Το κεφάλαιο αυτό έχει την ακόλουθη δομή: αρχικά στο εδάφιο 3.1 θα παρουσιάσουμε μία από τις πιο γνωστές και δύσκολες στο σχεδιασμό τους δημοπρασίες, που έγιναν ποτέ, την δημοπρασία για το ραδιοφωνικό φάσμα, η οποία διοργανώθηκε από την κυβερνητική υπηρεσία FCC στις ΗΠΑ στις αρχές της δεκαετίας του 1990. Το εδάφιο 3.2 αποτελεί μία σύντομη εισαγωγή στην οικονομική θεωρία των δημοπρασιών, στην οποία προσπαθούμε να κάνουμε μία επισκόπηση στις ιδέες και τα μοντέλα, που αναπτύχθηκαν από οικονομολόγους, για την κατανόηση και επίλυση του προβλήματος. Τέλος, στο 3.3 παρουσιάζουμε μία προσέγγιση στο πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών (combinatorial auctions), που σχετίζεται περισσότερο με θέματα που εξετάζουν οι ερευνητές της Θεωρητικής Πληροφορικής, όπως π.χ. την πολυπλοκότητα των μηχανισμών.

## 3.1 Η δημοπρασία της FCC για το ραδιοφωνικό φάσμα

Η δημοπρασία για το ραδιοφωνικό φάσμα της Αμερικής είχε ως αντικείμενο πώλησης διαθέσιμα μήκη κύματος, τα οποία παλαιότερα χρησιμοποιούνταν από τον Αμερικάνικο Στρατό και αναμενόταν να αξιοποιηθούν για την επέκταση της χρήσης νέων εφευρέσεων κάτω από το γενικό τίτλο Προσωπικές Επικοινωνιακές Υπηρεσίες, ανάμεσα στις οποίες συγκαταλέγονται κινητά τηλέφωνα, φορητές συσκευές FAX και ασύρματα δίκτυα υπολογιστών.

Αανάμεσα στους συμμετέχοντες ήταν οι μεγαλύτερες τηλεπικοινωνιακές εταιρείες των ΗΠΑ, και συγκεκριμένα εταιρείες τηλεφωνικών κλήσεων μεγάλης απόστασης (long distance), κινητών τηλεφώνων και καλωδιακής τηλεόρασης, οι οποίες εκτός από τα τεράστια ποσά, που θα ξόδευαν για την απόκτηση των αδειών θα έπρεπε να επενδύσουν μεγάλα κεφάλαια σε νέες τεχνολογίες με αβέβαιο κέρδος.

Η σημασία της απόκτησης των προς διάθεση αδειών, όπως επίσης και τα τεράστια ποσά που αυτές κόστιζαν, έκανε όλους τους συμμετέχοντες και τη διοργανώτρια αρχή να καταφύγουν σε αναγνωρισμένους οικονομολόγους, οι οποίοι κατά το μεγαλύτερο ποσοστό προέρχονταν από τα διασημότερα ακαδημαϊκά ιδρύματα (Stanford, Harvard, Columbia). Η ανάμειξη αυτή των οικονομολόγων, θεωρητικών στην πλειοψηφία, είχε ως αποτέλεσμα την εμφάνιση νέων ιδεών στην Θεωρία Παιγνίων.

Ως τότε, οι άδειες δίνονταν έπειτα από μία γραφειοκρατική διαδικασία. Κάθε υποψήφιος αγοραστής περνούσε από μία επιτροπή, η οποία αξιολογούσε την προσφορά του και αποφάσιζε για την απονομή ή όχι της άδειας. Η μέθοδος αυτή αποδείχτηκε πολύ αργή και μη αποδοτική, αφού μόνο ένα μικρό τμήμα των αδειών βρήκε αγοραστή. Μία άλλη μέθοδος, που εφαρμόστηκε ήταν αυτή της χρήσης λοταρίας. Έτσι, οι άδειες μοιράζονταν γρήγορα αλλά ένας μεγάλος αριθμός αγοραστών αποφάσισε να συμμετέχει, στηρίζοντας τις πιθανότητες του για την απόκτηση της άδειας στην τύχη. Τελικά, και αυτή η διαδικασία εγκαταλείφθηκε λόγω του εξαιρετικά μειωμένου κέρδους.

Τελικά, στις αρχές του 1993 αποφασίστηκε να γίνει δημοπρασία για τις άδειες που είχαν απομείνει, συνολικά 2500. Στόχος της κυβέρνησης ήταν η αποτελεσματική διάθεση των αδειών χωρίς όμως να δημιουργηθούν μονοπώλια. Επίσης, έπρεπε να ευνοηθούν κατά ένα ποσοστό και οι μικρές τοπικές εταιρείες, αυτές που διευθύνονταν από γυναίκες ή από άτομα από μειονότητες. Ως τελευταίος στόχος ήταν και το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος, αφότου όμως εκπληρώνονταν οι παραπάνω προϋποθέσεις.

Οι θεωρητικοί, που ανέλαβαν να σχεδιάσουν το μηχανισμό της δημοπρασίας έπρεπε να αντιμετωπίσουν ένα σύνολο ερωτημάτων: η δημοπρασία θα ήταν ανοικτή ή θα γίνονταν με σφραγισμένες προσφορές; Πώς θα ήταν δυνατό να δοθεί προτεραιότητα στις ευαίσθητες κατηγορίες συμμετεχόντων, που η κυβέρνηση καθόρισε, χωρίς όμως αυτό να γίνει παραμερίζοντας τελείως τους υπόλοιπους; Έπρεπε να χρησιμοποιηθούν τιμές εκκίνησης και αν ναι ποιες θα ήταν αυτές; Ένα, τελευταίο, σημαντικό ερώτημα, που έπρεπε να απαντηθεί ήταν αν θα επιτρέπονταν η ανακοίνωση προσφορών για σύνολα αδειών σε αντιδιαστολή με μεμονωμένες άδειες. Κάτι τέτοιο θα ήταν ιδιαίτερα χρήσιμο, αφού η δημοπρασία γινόταν ανεξάρτητα σε κάθε πολιτεία και κάποια εταιρεία θα ήθελε την απόκτηση του ίδιου μήκους κύματος σε δύο πολιτείες για διάφορους λόγους. Φανταστείτε ένα ραδιοφωνικό σταθμό: είναι πολύ προτιμότερο ο σταθμός να έχει την ίδια συχνότητα ανεξάρτητα από την πολιτεία, στην οποία βρίσκεται ο ακροατής. Για αυτό το λόγο ενώ η προσφορά της εταιρείας για τη συχνότητα $X$ στις πολιτεία $A$ και $B$ ξεχωριστά θα ήταν π.χ. 1\$, θα αποτιμούσε την απόκτηση του $X$ και στις δύο πολιτείες $A, B$ μαζί με π.χ. 20\$.

Όλα αυτές οι παράμετροι και ταυτόχρονα η πίεση για το σχεδιασμό ενός επιτυχούς μηχανισμού, έπειτα από προηγούμενες αποτυχίες σε αντίστοιχες δημοπρασίες στη Νέα Ζηλανδία και Αυστραλία έκαναν το έργο των Θεωρητικών πολύ δύσκολο. Αν και μόνο ένα τμήμα του έργου τους εφαρμόστηκε από την κυβέρνηση, παρόλα αυτά η Θεωρία Παιγνίων απέκτησε νέες ιδέες και μεθόδους.

## 3.2 Εισαγωγή στην Οικονομική Θεωρία Δημοπρασιών

### 3.2.1 Τι είναι η δημοπρασία;

Ένας τυπικός ορισμός για την έννοια της δημοπρασίας είναι ο παρακάτω: δημοπρασία είναι μία ειδικής μορφής αγορά (market institution) με σαφώς ορισμένο σύνολο κανόνων, που καθορίζουν τον τρόπο διανομής των αγαθών του πωλητή στους αγοραστές καθώς και το ποσό, που θα είναι υποχρεωμένοι οι τελευταίοι να πληρώσουν.

Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι έχουμε ένα αντικείμενο, το οποίο θέλουμε να διαθέσουμε σε κάποια από τις $|I|$ ανεξάρτητες οντότητες του συνόλου $I$ των παικτών, που θέλουν να το αποκτήσουν. Καθεμιά από τις οντότητες αυτές $i$ έχει μία ιδιωτική τιμή (τύπος) $t_i$, που εκφράζει την επιθυμία του $i$ να αγοράσει το προϊόν. Με βάση τον τύπο, καθορίζεται και η *ωφέλεια* $v_i(t_i, o)$, που αποκομίζει ο παίκτης από το αποτέλεσμα της δημοπρασίας $o$. Το σύνολο των στρατηγικών, που είναι διαθέσιμες στον παίκτη, είναι γενικά το σύνολο $\Re^+$, και στην περίπτωση αυτή εκφράζουν τις προσφορές, που κάνουν οι παίκτες για την απόκτηση του αντικειμένου. Τέλος με $p_i$ εκφράζουμε το ποσό που καλείται να πληρώσει ο παίκτης στον δημοπράτη. Το ποσό αυτό είναι 0 αν ο παίκτης δεν λάβει το αντικείμενο ενώ αλλιώς είναι το πολύ ίσο με $b_i$, όπου $b_i$, η προσφορά, που ο παίκτης ανακοινώνει για το αντικείμενο, η οποία μπορεί γενικά να είναι διαφορετική της πραγματικής του αξιολόγησης $v_i$. Υποθέτουμε, ακόμη, ότι η τιμή αυτή $v_i$, είναι γνωστή μόνο στον $i$. Σκοπός μας είναι να σχεδιάσουμε έτσι τη δημοπρασία, η οποία θα ικανοποιεί τον παρακάτω όρο: θα δίνει το προϊόν στην οντότητα με τη μεγαλύτερη τιμή ωφέλειας $v_i$. Επιπλέον, μας απασχολεί και η, όσο το δυνατό, μεγιστοποίηση του κέρδους που αποκομίζει ο δημοπράτης.

Η δημοπρασία είναι ένας εναλλακτικός τρόπος αγοραπωλησίας προϊόντων και χρησιμοποιείται, κυρίως, σε περιπτώσεις, που η τιμή δεν είναι δυνατό να καθοριστεί πλήρως, οπότε και οι συνήθεις τρόποι, π.χ. ορισμένη τιμή (fixed price) αποτυγχάνουν, όπως για παράδειγμα για έργα τέχνης, αντίκες και δικαιώματα εκμετάλλευσης ορυκτών πόρων. Ακόμη, παρότι στη βιβλιογραφία, συνήθως, παρουσιάζεται μόνο η περίπτωση του μονοπωλίου, δηλαδή ενός και μόνο πωλητή, και αγοραστών (στην οποία και εμείς θα περιοριστούμε), όμοια μπορεί να εξεταστεί και το αντίστροφο, του ενός δηλαδή αγοραστή, που μπορεί να επιλέξει μεταξύ ενός αριθμού προσφορών από πωλητές. Ενδιαφέρουσες παραλλαγές του γενικού μοντέλου είναι για παράδειγμα η δημοπρασία, στην οποία έχουμε πολλούς πωλητές και αγοραστές, όπως π.χ. χρηματιστήριο (διπλές δημοπρασίες) ή οι δημοπρασίες, στις οποίες ο πωλητής διαθέτει περισσότερα από ένα ίδια ή διαφορετικά αντικείμενα προς πώληση.

### 3.2.2 Τύποι δημοπρασιών

Η, πλέον, γνωστή λύση στο παραπάνω πρόβλημα είναι η λεγόμενη *Αγγλική Δημοπρασία*. Σε αυτή, ο δημοπράτης, αρχίζει από μία χαμηλή τιμή, την οποία συνεχώς αυξάνει κατά μία προκαθορισμένη (μικρή) ποσότητα. Οι συμμετέχοντες, συνεχίζουν να παίρνουν μέρος στη διαδικασία, έως ότου, η τρέχουσα τιμή ξεπεράσει την ωφέλεια τους $v_i$. Το προϊόν απονέμεται, τελικά, στον $i$ με τη μεγαλύτερη τιμή $v_i$, ο οποίος καλείται να πληρώσει το ποσό, στο οποίο σταμάτησε η διαδικασία.

Το αντίθετο της παραπάνω μεθόδου είναι η *Ολλανδική Δημοπρασία*. Ο δημοπράτης θέτει μία μεγάλη αρχική τιμή για το προϊόν (πρακτικά άπειρη) και όσο δεν έχει βρεθεί αγοραστής μειώνει την τιμή αυτή. Η Ολλανδική Δημοπρασία χρησιμοποιείται στην πώληση λουλουδιών στην Ολλανδία και ψαριών στο Ισραήλ.

Επιπλέον, αρκετά συχνή είναι και η χρήση των επονομαζόμενων δημοπρασιών *σφραγισμένων προσφορών (sealed bid auctions)*. Χαρακτηριστικό αυτού του είδους, είναι ότι οι συμμετέχοντες κάνουν μία μόνο προσφορά για το αντικείμενο και ο δημοπράτης, αργότερα αποφασίζει σε ποιον θα δοθεί και σε ποια τιμή. Έχουν επικρατήσει δύο διαφορετικά είδη: της *πρώτης τιμής* και της *δεύτερης τιμής ή δημοπρασία Vickrey*, προς τιμή του William Vickrey (νόμπελ Οικονομικών), που πρώτος τη διατύπωσε. Με το πρώτο είδος, οι πιθανοί αγοραστές δίνουν μία προσφορά στον δημοπράτη και αυτός απονέμει το προϊόν στο άτομο, που έκανε τη μεγαλύτερη προσφορά με τιμή πώλησης ίση με την προσφορά του. Αντίθετα, αν χρησιμοποιείται το δεύτερο είδος, ο αλγόριθμος διανομής δεν αλλάζει, ο αγοραστής είναι, όμως, υποχρεωμένος να καταβάλλει ποσό ίσο με τη δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά.

Εκτός από τους τέσσερις παραπάνω τύπους δημοπρασιών, υπάρχουν και πολυάριθμες παραλλαγές τους. Για παράδειγμα, υπάρχει δυνατότητα χρήσης ελάχιστης τιμής, την οποία αν δεν ξεπεράσουν οι αγοραστές η διαδικασία ακυρώνεται, καθένας που συμμετέχει υποχρεώνεται να πληρώσει ένα αντίτιμο εισόδου ή ο δημοπράτης διατηρεί δικαιώματα εκμετάλλευσης στο προϊόν, που εκφράζονται με τη μορφή ενός ποσοστού επί των κερδών του αγοραστή, όπως π.χ. γίνεται με την εξόρυξη πετρελαίου (royalties).

Στο σημείο αυτό προκύπτει εύλογα το ακόλουθο ερώτημα: πώς κάποιος μπορεί να επιλέξει να χρησιμοποιήσει κάποιον από τους παραπάνω τρόπους δημοπρασιών λαμβάνοντας υπόψη του τις ιδιαίτερες συνθήκες του περιβάλλοντος, μέσα στο οποίο θα τον χρησιμοποιήσει. Πριν όμως απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, θα εξετάσουμε την *αβεβαιότητα*, η οποία είναι και ο βασικός λόγος της δυσκολίας υλοποίησης αποδοτικών μηχανισμών δημοπρασιών.

### 3.2.3 Αβεβαιότητα

Κύρια αιτία της δυσκολίας επίλυσης του προβλήματος της δημοπρασίας είναι η ασυμμετρία στην γνώση, η οποία χαρακτηρίζει τα μέρη, που συμμετέχουν. Η ασυμμετρία άλλοτε προκύπτει λόγω των διαφορετικών προτιμήσεων που έχουν οι συμμετέχοντες, οι οποίες είναι πρακτικά μη παρατηρήσιμες, αλλά άλλοτε εκφράζει την αδυναμία ή το μεγάλο κόστος, που προϋποθέτει η απαραίτητη μελέτη για την αποσαφήνισή τους (π.χ. το κόστος των μελετών για την αποτίμηση της αξίας ενός κοιτάσματος πετρελαίου).

Έτσι, οι αγοραστές, γνωρίζουν τη προσωπική ιδιωτική τους εκτίμηση για την τιμή του προϊόντος ενώ ο πωλητής έχει, πιθανά, ορισμένα στοιχεία για την αξία του προϊόντος του, αλλά μπορεί να κάνει μόνο προβλέψεις για τις ιδιωτικές τιμές των αγοραστών. Αν κάποιος εξωτερικός παράγοντας αφαιρούσε την ασυμμετρία αυτή, τότε η λύση θα ήταν πολύ απλή: απλώς ο πωλητής θα έθετε μία τελική καθορισμένη τιμή για το αντικείμενο (λίγο μικρότερη από τη μέγιστη ωφέλεια των παικτών) και θα ανακοίνωνε ότι οι αγοραστές μπορούσαν απλώς να αρνηθούν ή να δεχτούν να πληρώσουν την τιμή αυτή.

Οι διαφορές, που παρατηρούνται, στις εκτιμήσεις των αγοραστών για την τιμή του αντικειμένου, μπορούν να προέρχονται από δύο τελείως διαφορετικούς λόγους. Η γνώση σε ποια από τις δύο κατηγορίες ανήκει ο καθένας, που συμμετέχει, είναι χρήσιμη για τον καθορισμό των στρατηγικών των συμβαλλόμενων μερών.

Στο ένα άκρο, υποθέτουμε ότι όλοι οι αγοραστές γνωρίζουν επακριβώς, το μέγιστο ποσό, που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν, για να αποκτήσουν οι ίδιοι το αντικείμενο, αλλά δεν έχουν κανένα στοιχείο για τις εκτιμήσεις των άλλων, παρά μόνο τη κατανομή πιθανοτήτων, από την οποία προέρχεται η ωφέλειά τους. Οι εκτιμήσεις των συμμετεχόντων είναι στατιστικά ανεξάρτητες μεταξύ τους και το μοντέλο ονομάζεται *μοντέλο-ανεξάρτητων-ιδιωτικών* *τιμών*. Οι διαφορές, αυτές, προέρχονται ακριβώς από το διαφορετικό γούστο, που διαθέτει ο κάθε αγοραστής και το μοντέλο, υλοποιείται στην περίπτωση δημοπρασίας π.χ. κάποιου πίνακα ζωγραφικής, στην οποία συμμετέχουν μόνο ιδιώτες συλλέκτες και όχι έμποροι έργων τέχνης, που ενδιαφέρονται να τον μεταπωλήσουν.

Στο άλλο άκρο, υποθέτουμε ότι, ενώ το αντικείμενο που πωλείται, έχει συγκεκριμένη (άγνωστη) τιμή, οι αγοραστές έχοντας πρόσβαση σε διαφορετικές μη πλήρεις πηγές πληροφόρησης, κάνουν διαφορετική προσφορά για την απόκτησή του. Τέτοια είναι η περίπτωση δημοπρασιών έργων τέχνης, στις οποίες συμμετέχουν μόνο μεταπωλητές, οι οποίοι εκτιμούν την τιμή του αντικειμένου στην αγορά ή η προσφορά για την απόκτηση δικαιωμάτων εξόρυξης και εκμετάλλευσης πετρελαίου. Το κοίτασμα θα αποφέρει στον κάτοχο του ένα συγκεκριμένο ποσό από την εκμετάλλευση του. Το ποσό αυτό είναι άγνωστο και οι παίκτες βασίζουν την τελική τους προσφορά σε εκτιμήσεις για αυτό. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται *μοντέλο-κοινής-τιμής*.

Ενδιαφέρον, έχει η μελέτη της περίπτωσης, στην οποία ένας εξωτερικός παράγοντας (π.χ. deus ex machina) πληροφορεί έναν αγοραστή για την προσφορά, που πρόκειται να καταθέσει κάποιος άλλος. Τότε, αν το μοντέλο-κοινής-τιμής περιγράφει το περιβάλλον, η περαιτέρω γνώση αυτή προσφέρει χρήσιμη πληροφορία στον κάτοχο της, ο οποίος πιθανότατα θα αλλάξει την προσωπική του εκτίμηση, αφού μία τέτοια πληροφορία, ίσως τον βοηθήσει να κάνει μία καλύτερη πρόβλεψη για την άγνωστη τιμή του προϊόντος. Από την άλλη, στην περίπτωση που ακολουθείται το "μοντέλο ανεξάρτητων-ιδιωτικών τιμών", τότε η επιπλέον αυτή γνώση δεν θα προκαλέσει καμιά αλλαγή στην στρατηγική του παίκτη που θα την αποκτήσει, εκτός ίσως αν αυτό τον βοηθά στο να αποκτήσει το αντικείμενο με ευνοϊκότερους όρους. Βέβαια, στη γενική περίπτωση οι συμμετέχοντες σε μία δημοπρασία μπορεί να ανήκουν και στις δύο κατηγορίες κάνοντας έτσι τη διαδικασία πιο πολύπλοκη.

### 3.2.4 Αναζήτηση του βέλτιστου μηχανισμού δημοπρασιών

Έχοντας ολοκληρώσει την αναφορά στο κύριο αίτιο της δυσκολίας της επίλυσης των προβλημάτων που μελετούμε, την αβεβαιότητα, επανερχόμαστε στο ερώτημα του βέλτιστου μηχανισμού δημοπρασιών. Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι ότι εξαρτάται από το περιβάλλον (συμπεριφορά στο ρίσκο των συμμετεχόντων κτλ.), στο οποίο καλείται να υλοποιηθεί η διαδικασία.

Για να μπορέσουμε, λοιπόν, να αξιολογήσουμε τις διάφορες τεχνικές δημοπρασιών πρέπει πρώτα από όλα να έχουμε πλήρως κατανοήσει το περιβάλλον, μέσα στο οποίο καλούμαστε να κινηθούμε. Το πιο απλό τέτοιο περιβάλλον είναι αυτό, το οποίο έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Οι αγοραστές είναι ουδέτεροι ως προς το ρίσκο.
- Το περιβάλλον περιγράφεται από το μοντέλο των ανεξάρτητων-ιδιωτικών-τιμών.
- Οι αγοραστές είναι συμμετρικοί, δηλαδή αν οποιοιδήποτε αγοραστές κάνουν την ίδια προσφορά για το αντικείμενο, το αποτέλεσμα της δημοπρασίας θα είναι το ίδιο και για τους δύο. Σε αντιδιαστολή είναι οι αντισυμμετρικοί αγοραστές, π.χ. όταν μία κυβέρνηση προκηρύσσει διαγωνισμό για ένα δημόσιο έργο και πριμοδοτεί τις εγχώριες επιχειρήσεις.
- Η πληρωμή προς τον πωλητή είναι συνάρτηση μόνο των προσφορών - δεν υπάρχει δηλαδή χρήση δικαιωμάτων του αγοραστή στο προϊόν (royalties).

Μία πρώτη παρατήρηση, που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι ανεξάρτητα από τις συνιστώσες του περιβάλλοντος μας, η Ολλανδική Δημοπρασία και η πρώτης-τιμής δημοπρασία έχουν ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό συμβαίνει γιατί ο παίκτης πρέπει να διαμορφώσει τη στρατηγική του μη γνωρίζοντας τις αντίστοιχες στρατηγικές των άλλων παικτών και, τελικά, υποχρεώνεται να πληρώσει ποσό ίσο με την προσφορά του, εφόσον κερδίσει το αντικείμενο.

Ακόμη, ισοδύναμες είναι και η Αγγλική με τη Vickrey Δημοπρασία. Στην Αγγλική Δημοπρασία οι τιμές ανεβαίνουν συνεχώς. Σε κάποια χρονική στιγμή θα μείνουν δύο μόνο διεκδικητές του αντικειμένου. Όταν ο ένας σταματήσει, αυτός που μένει παίρνει το αντικείμενο, πληρώνοντας ποσό ελάχιστα μεγαλύτερο της ωφέλειας του δεύτερου παίκτη. Όμοια, στη Vickrey Δημοπρασία, ο νικητής παίρνει το αντικείμενο, πληρώνοντας την προσφορά του δεύτερου.

Στο μοντέλο, που περιγράψαμε παραπάνω, αποδεικνύεται και ένα ενδιαφέρον, όσο και απρόσμενο αποτέλεσμα, που συνδέει τους τέσσερις τύπους δημοπρασιών:

**Θεώρημα 3.1 (Θεώρημα Ισοδυναμίας Κέρδους).** *Καθεμιά από τις τεσσάρων ειδών δημοπρασίες αποδίδει στον δημοπράτη το ίδιο κέρδος κατά μέσο όρο.*

Αρχικά, το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να φαίνεται λανθασμένο: θα περίμενε κανείς, ίσως, ότι για παράδειγμα η πρώτης-τιμής δημοπρασία θα ήταν καλύτερη για τον πωλητή. Παρόλα αυτά, όμως, η γνώση της ακριβούς διαδικασίας δημοπρασίας από τους αγοραστές, τους κάνει να ακολουθούν διαφορετική στρατηγική όταν κάνουν τις προσφορές τους ανάλογα με το ποια είναι αυτή η διαδικασία: συγκεκριμένα στις δημοπρασίες δεύτερης-τιμής προσφέρουν περισσότερα από ότι σε αυτές της πρώτης-τιμής. Η απόδειξη του θεωρήματος, η οποία βασίζεται σε θεωρήματα της στατιστικής, ξεφεύγει από τους σκοπούς της εργασίας.

Προφανώς, σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να θεωρήσουμε ότι το παραπάνω θεώρημα υπονοεί ότι σε κάθε περίπτωση το κέρδος από τις τέσσερις δημοπρασίες θα είναι το ίδιο. Κάτι τέτοιο πολύ σπάνια συμβαίνει, και η διαφορά στα κέρδη που δίνουν από τη μία, η αγγλική και η πρώτης-τιμής δημοπρασία και από την άλλη, η ολλανδική και η δεύτερης-τιμής εξαρτάται από την κατανομή των εκτιμήσεων των παικτών και από τον αριθμό τους.

Ακόμη, αξίζει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση της αγγλικής και της δεύτερης-τιμής (Vickrey) δημοπρασίας, οι παίκτες έχουν στη διάθεση τους μία κυρίαρχη στρατηγική, μία στρατηγική, δηλαδή, που τους εξασφαλίζει το μέγιστο τους αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από τι εκτιμήσεις έχουν οι υπόλοιποι. Η στρατηγική αυτή είναι στην αγγλική δημοπρασία να μείνει ο παίκτης στη διαδικασία, έως ότου η τιμή της ξεπεράσει την δική του τιμή ωφέλειας ενώ στη Vickrey δημοπρασία να προσφέρει ποσό ίσο με τη εκτίμηση, που έχει για την αξία του αντικειμένου. Ενώ ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής, ο δεύτερος χρειάζεται μία περαιτέρω εξήγηση. Έστω, λοιπόν, ότι το άτομο $i$ έχει μέγιστη τιμή ωφέλειας για το αντικείμενο ίση με $v_i$ και προσφέρει μεγαλύτερο ποσό $v_i+\alpha$ (όπου $\alpha > 0$). Τότε, υπάρχει περίπτωση άλλος παίκτης να προσφέρει ποσό $v_i+\beta$ με $v_i < v_i+\beta < v_i+\alpha$ και έτσι ο παίκτης $i$ να κερδίσει το αντικείμενο, να αναγκαστεί όμως να πληρώσει ποσό ίσο με τη δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά, δηλαδή $v_i + \beta$, κάτι που χειροτερεύει τη θέση του, δίνοντας του αρνητικό κέρδος $v_i - (v_i + \beta) = -\beta$, ενώ αν ήταν φιλαλήθης (truthful) και δήλωνε την πραγματική του τιμή, δηλαδή $v_i$ θα είχε μηδενικό κέρδος, το οποίο όμως είναι μεγαλύτερο από το αρνητικό $-\beta$. Από την άλλη, το να κάνει προσφορά μικρότερη από την πραγματική του τιμή δεν του εξασφαλίζει τίποτα, παρά μόνο αυξάνει το ρίσκο να χάσει το αντικείμενο, μειώνοντας έτσι το κέρδος του. Αυτό, ισχύει, γιατί αν είναι αυτός με τη μεγαλύτερη προσφορά τότε, ανεξάρτητα του τι θα προσφέρει θα πληρώσει ποσό ίσο με τη δεύτερη προσφορά. Από αυτή την εξήγηση γίνεται προφανής και η ισοδυναμία των δύο αυτών μεθόδων δημοπρασίας, αφού τελικά νικητής είναι ο παίκτης με τη μεγαλύτερη εκτίμηση και πληρώνει ποσό ίσο με τη δεύτερη μεγαλύτερη προσφορά (με απόκλιση μίας μικρής σταθεράς στην Αγγλική Δημοπρασία).

Από την άλλη, τέτοια κυρίαρχη στρατηγική δεν υπάρχει στην ολλανδική και πρώτης-τιμής δημοπρασία. Αντί για αυτό, διαθέτουν μίας ασθενέστερης μορφής σημείο ισορροπίας, το Nash σημείο ισορροπίας, για το οποίο μιλήσαμε στην εισαγωγή. Η επιτυχής στρατηγική για ένα παίκτη, η οποία θα τον οδηγήσει σε μία κατάσταση, από την οποία δεν έχει λόγο να παρεκκλίνει, υπολογίζεται λαμβάνοντας υπόψη την πεποίθηση, που έχει ο παίκτης, για τις κινήσεις, που αναμένεται να ακολουθήσουν οι υπόλοιποι παίκτες. Γενικά, πάντως, ο υπολογισμός του σημείου ισορροπίας σε μία τέτοια κατάσταση είναι ένα αρκετά δύσκολο υπολογιστικό πρόβλημα και προϋποθέτει ότι ο παίκτης διαθέτει γνώση για τις στρατηγικές, που πρόκειται να ακολουθήσουν οι υπόλοιποι παίκτες.

## 3.3 Συνδυαστικές Δημοπρασίες

Όπως τονίσαμε στο κεφάλαιο 2, η, βασισμένη στην κλασική Θεωρία Μηχανισμών, έρευνα δεν παίρνει καθόλου υπόψη της θέματα σχετικά με την υπολογιστική πολυπλοκότητα. Θεωρείται, λοιπόν, δεδομένο, ότι οι παίκτες έχουν τη δυνατότητα να εκφράζουν πλήρως τις προτιμήσεις τους πάνω στο σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων, και, από την άλλη, ότι ο μηχανισμός μπορεί να υπολογίζει το βέλτιστο αποτέλεσμα και τις πληρωμές προς τους παίκτες.

Αργότερα, όμως, οι παραπάνω αγορακεντρικές (market-based) τεχνικές υιοθετήθηκαν και για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Αυτό, γέννησε πλήθος άλλων ερωτημάτων σχετικά με τους υπάρχοντες μηχανισμούς, οι οποίοι αν και θεωρητικά πλήρεις είναι πρακτικά μη υλοποιήσιμοι.

Στο παρόν εδάφιο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μία εικόνα των κατευθύνσεων, που έχουν ακολουθηθεί για την εισαγωγή της έννοιας της υπολογιστικής αποδοτικότητας σε τέτοια προβλήματα, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στις συνδυαστικές δημοπρασίες (combinatorial auctions), τις οποίες θα ορίσουμε τυπικά παρακάτω. Στο επόμενο κεφάλαιο θα απομακρυνθούμε από το χώρο των Οικονομικών και θα εξετάσουμε ορισμένες προτάσεις χρήσης ανάλογων ιδεών σε προβλήματα, που σχετίζονται με τη Θεωρία Δικτύων και το Internet.

### 3.3.1 Τυπικός Ορισμός

Αν και τελικά στη δημοπρασία της FCC για το ραδιοφωνικό φάσμα της Αμερικής, η χρήση προσφορών σε υποσύνολα των αδειών δεν επιτράπηκε, παρόλα αυτά, η μελέτη, που έγινε υπήρξε η αφετηρία μίας προσπάθειας με ιδιαίτερα ενδιαφέροντα αποτελέσματα, που έφερε την Πληροφορική πιο κοντά στις ιδέες από τα Οικονομικά. Στο εδάφιο αυτό θα ορίσουμε τυπικά το πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών, πάνω στο οποίο θα στηριχθεί η παρουσίαση που θα ακολουθήσει.

Στο πρόβλημα αυτό υπάρχει ένα σύνολο αντικειμένων $G$, που πρέπει να κατανεμηθούν στο σύνολο των παικτών $I$. Καθένας από τους παίκτες έχει κάποια ωφέλεια από την απόκτηση υποσυνόλων των αντικειμένων, η οποία εκφράζεται από τη συνάρτηση $v_i(S)$ με όρισμα $S \subset G$. Οι παίκτες δηλώνουν τιμές $b_i(S)$ στον μηχανισμό, που εκφράζουν το μέγιστο ποσό που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν για την απόκτηση του $S \subset G$. Αφού ολοκληρωθεί η φάση ανακοίνωσης των τιμών από τους παίκτες, ο μηχανισμός καλείται να αποφασίσει πώς θα κατανεμηθούν τα αντικείμενα (ποιος θα πάρει τι) και σε ποια τιμή. Μαθηματικά το πρόβλημα μπορεί να γραφεί με τη μορφή ακέραιου προγραμματισμού ως εξής:

**Ορισμός 3.2 (Το πρόβλημα των Συνδυαστικών Δημοπρασιών (Combinatorial Auctions)).**

$$max \sum_{S \subseteq G} b(S) x_S$$

$$s.t. \sum_{S \ni i} x_S \leq 1 \quad \forall i \in G$$

$$x_S = 0, 1 \quad \forall S \subseteq G$$

όπου $b(S) = max_{j \in I} b_j(S)$ και η μεταβλητή $x_S$ είναι δυαδική και εκφράζει αν το υποσύνολο $S$ του συνόλου των αντικειμένων $G$ δόθηκε σε κάποιον από τους συμμετέχοντες. Έτσι, ο πρώτος περιορισμός εξασφαλίζει ότι κάθε αντικείμενο θα δοθεί το πολύ σε ένα παίκτη.

Έχοντας ορίσει τυπικά τις συνδυαστικές δημοπρασίες, μπορούμε να σχολιάσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά γνωρίσματά τους. Πρώτα από όλα, μπορεί εύκολα να παρατηρήσει κανείς ότι η τιμή της προσφοράς για ένα συγκεκριμένο υποσύνολο $S \subset G$ είναι δυνατό να διαφέρει (να είναι μικρότερη ή και μεγαλύτερη) από το άθροισμα των προσφορών για τα υποσύνολα $S_1$ και $S_2$ με $S_1 \cup S_2 = S$. Για παράδειγμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι γίνεται μία δημοπρασία, στην οποία πωλείται ένα ζευγάρι παπούτσια. Οι περισσότεροι, τουλάχιστον, συμμετέχοντες θα ανακοινώσουν προσφορά για ολόκληρο το ζευγάρι, που θα είναι αρκετά μεγαλύτερη από το άθροισμα των προσφορών, που μπορεί να κάνουν για το δεξί και το αριστερό παπούτσι ξεχωριστά. Η κατάσταση αυτή λέγεται *συμπληρωματικότητα (complementarity)* και η συνάρτηση προσφοράς του παίκτη $i$, που ικανοποιεί τη σχέση της, δηλαδή $b_i(A) + b_i(B) < b_i(A \cup B)$ λέγεται *υπερ-προσθετική (super-additive)*. Από την άλλη, αν φανταστούμε ότι γίνεται μία δημοπρασία για δύο εισιτήρια μίας συναυλίας και ο παίκτης $i$ ενδιαφέρει μόνο για το ένα, προφανώς αν κάνει προσφορά και για τα δύο εισιτήρια, αυτή θα είναι μικρότερη του διπλάσιου της προσφοράς για το ένα εισιτήριο. Ή αν ο $i$ ενδιαφέρεται να αγοράσει πλυντήριο και προτιμά είτε την $A$ είτε την $B$ μάρκα, η προσφορά του και για τα δύο πλυντήρια θα είναι μικρότερη του αθροίσματος των προσφορών, που θα κάνει για το καθένα ξεχωριστά. Το φαινόμενο αυτό, που είναι το αντίθετο του προηγούμενου λέγεται *αναπληρωματικότητα (substitutability)*, αφού τα αντικείμενα είναι υποκατάστατα το ένα του άλλου. Η συνάρτηση προσφοράς του παίκτη $i$, στην περίπτωση αυτή είναι τέτοια ώστε να ικανοποιείται η σχέση: $b_i(A) + b_i(B) > b_i(A \cup B)$ και λέγεται ότι είναι *υπο-προσθετική (sub-additive)*.[1] Αν σε μία συνδυαστική δημοπρασία,

[1] Ο ορισμός 3.2 έχει εφαρμογή σε προβλήματα συνδυαστικών δημοπρασιών, στα οποία η συνάρτηση προσφοράς είναι αποκλειστικά και μόνο υπερ-προσθετική. Αυτό γιατί αν ήταν υπο-προσθετική θα υπήρχε πρόβλημα αν ένας παίκτης $j$ έκανε προσφορά για δύο υποσύνολα $A$,$B$ ξεχωριστά για το καθένα αλλά και για την ένωσή τους $A \cup B$ και ο αλγόριθμος απένειμε

οι παίκτες ήταν τέτοιοι ώστε οι συναρτήσεις προσφορών τους ικανοποιούσαν την σχέση $b_i(A) + b_i(B) = b_i(A \cup B) \quad \forall\ A, B \subset G$ και $\forall i$, (δεν ήταν, δηλαδή, ούτε υπερ- ούτε υπό-προσθετικές) και ο παίκτης έδινε προσφορές για κάθε δυνατό υποσύνολο, τότε το πρόβλημα θα μπορούσε να λυθεί με διαδοχικές απλές δημοπρασίες (π.χ. τύπου Vickrey) στα αντικείμενα. Η δυσκολία δημιουργείται όταν στο πρόβλημα εισάγονται και τα φαινόμενα, που εξετάσαμε παραπάνω της αναπληρωματικότητας και της συμπληρωματικότητας. Για παράδειγμα, αν εφαρμόζαμε διαδοχικές δημοπρασίες για ένα ζευγάρι παπουτσιών, οι παίκτες δεν θα πρόσφεραν πολλά για την απόκτηση του δεξιού παπουτσιού, που θεωρούμε ότι δημοπρατείται πρώτο, επειδή φοβούνται ότι θα χάσουν το αριστερό και θα μείνουν μόνο με το ένα. Από την άλλη, ο νικητής της δημοπρασίας για το ένα παπούτσι θα έπαιρνε το άλλο με μία πολύ μικρή τιμή, αφού κανένας δεν θα ενδιαφερόταν πια για αυτό. Η κατάσταση γίνεται ακόμη πιο πολύπλοκη, όταν παίκτες με διαφορετικής μορφής συναρτήσεις προσφοράς συμμετέχουν στην ίδια διαδικασία. Για παράδειγμα, αν κάποιος ενδιαφέρεται μόνο για το ένα μόνο παπούτσι (γιατί π.χ. έχει χάσει το αντίστοιχο του δικού του ζευγαριού !?) θα μπερδέψει περισσότερο τα πράγματα.

Στο σημείο αυτό, πρέπει να σημειώσουμε ότι το πρόβλημα, που θα μελετήσουμε είναι μία απλοποίηση του γενικότερου, αφού θεωρούμε ότι οι προσφορές των παικτών έχουν την μορφή $2^G \rightarrow \Re^+$. Με αυτό τον περιορισμό δεν μπορούμε να εκφράσουμε προσφορές της μορφής: "Θέλω να αγοράσω το αντικείμενο πληρώνοντας μέχρι 100\$, αλλά αν δεν το αποκτήσω εγώ θα ήθελα να το πάρει ο $X$ και όχι ο ανταγωνιστής μου ο $Y$" (externalities).

### 3.3.2 Προβλήματα

Η εφαρμογή των τεχνικών, που περιγράψαμε παραπάνω σε δύσκολα προβλήματα, οδηγεί σε μηχανισμούς, οι οποίοι είναι υπολογιστικά ανέφικτοι. Είναι, λοιπόν, χρήσιμο να δούμε συνολικά τα τμήματα ενός μηχανισμού, τα οποία είναι ευαίσθητα, όσο αφορά την υπολογιστική τους πολυπλοκότητα. Για να το κάνουμε αυτό θα εξετάσουμε τον μηχανισμό από δύο διαφορετικές πλευρές: αυτή του αποκεντρωμένου παίκτη και αυτή του δομής του μηχανισμού (της οντότητας, δηλαδή, που υπολογίζει τις πληρωμές και την έξοδο του προβλήματος).

Όσο αφορά, λοιπόν, τον παίκτη, μας ενδιαφέρουν τα εξής δύο σημεία:

- Πολυπλοκότητα εκτιμήσεων: Πόσο δύσκολο είναι (πόσος υπολογιστικός χρόνος χρειάζεται) ώστε ο παίκτης να μπορέσει να εκφράσει σαφώς την

και τα δύο σε αυτόν: τότε θα υπολόγιζε κέρδος $b^j(A)+b^j(B)$ αντί για το μικρότερο $b^j(A \cup B)$. Το πρόβλημα αυτό λύνεται με μία μικρή τροποποίηση του ορισμού, που δίνει πρόβλημα της ίδιας μορφής.

εκτίμησή του στο σύνολο των πιθανών αποτελεσμάτων;

- Πολυπλοκότητα επιλογής στρατηγικής: Είναι απαραίτητο ο παίκτης να μοντελοποιήσει και να επεξεργαστεί τη συμπεριφορά των υπόλοιπων παικτών για να επιλέξει τη βέλτιστη, για αυτόν, στρατηγική, και αν ναι πόσο δύσκολο είναι αυτό;

Από την άλλη, από την μεριά της δομής του μηχανισμού μας ενδιαφέρουν τα παρακάτω θέματα:

- Αν θεωρήσουμε ότι ο μηχανισμός αποκτά την πληροφορία που χρειάζεται από τους παίκτες, ποια είναι η πολυπλοκότητα του αλγόριθμου, που αποφασίζει την έξοδο του (κατανομή αγαθών και πληρωμές); Στην περίπτωση των συνδυαστικών δημοπρασιών το πρόβλημα βέλτιστης κατανομής είναι NP-complete, αφού εύκολα μπορεί να μετασχηματίσουμε σε αυτό ένα πολύ γνωστό και ιδιαίτερα μελετημένο NP-complete πρόβλημα, το λεγόμενο Set Packing.

- Επικοινωνιακή πολυπλοκότητα: πόση ανταλλαγή πληροφορίας είναι απαραίτητη για να μπορέσει ο μηχανισμός να υπολογίσει τα ζητούμενα;

Η μόνη οικογένεια μηχανισμών, που έχουμε συναντήσει ως τώρα είναι οι VCG μηχανισμοί. Στην περίπτωση των συνδυαστικών δημοπρασιών υπάρχει ένας μηχανισμός της οικογένειας αυτής, ο οποίος λύνει το πρόβλημα βέλτιστα σε εκθετικό, όμως, χρόνο και λέγεται *γενικευμένη Vickrey δημοπρασία*. Συγκεκριμένα, η γενικευμένη Vickrey δημοπρασία επιλέγει την κατανομή των υποσυνόλων αντικειμένων στους παίκτες, που μεγιστοποιεί το άθροισμα των ωφελειών των παικτών. Δηλαδή:

$$\max \sum_{i=1}^{|I|} v_i(x^*(t), t_i)$$

όπου $x^*(t)$ ο αλγόριθμος κατανομής των αντικειμένων στους παίκτες, όταν αυτοί ανακοινώσουν διάνυσμα τύπων ίσο με $t$. Για να εξασφαλίζει ο μηχανισμός ότι οι παίκτες θα ανακοινώσουν πράγματι τον αληθινό τους τύπο, πρέπει να υπάρχουν κατάλληλες πληρωμές από τον μηχανισμό. Η γενικευμένη Vickrey δημοπρασία ακολουθεί τον αλγόριθμο πληρωμών των Pivotal ή Clarke μηχανισμών, δηλαδή θα ισχύει:

$$p_i(x^*) = - \sum_{i=1, i\neq j}^{n} v_i(x^*, t_i) + \sum_{i=1, i\neq j}^{n} v_i(x^*(t_{-j}), t_i)$$

δηλαδή, το ποσό που πρέπει να πληρώσει ο παίκτης $j$ στον μηχανισμό για τα αντικείμενα, που του αντιστοιχούν από την βέλτιστη κατανομή $x^*$ είναι ίσο με τη διαφορά του αθροίσματος των ωφελειών των παικτών εκτός του $j$, όταν ο $j$ όμως θεωρούμε ότι συμμετέχει στη διαδικασία από το άθροισμα των ωφελειών των υπόλοιπων παικτών για τη βέλτιστη κατανομή των αντικειμένων, όταν ο $j$ δεν συμμετέχει καθόλου στο παιχνίδι. Ουσιαστικά, δηλαδή, για κάθε παίκτη λύνουμε το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής των αντικειμένων, το οποίο έχουμε πει ότι είναι NP-complete, δύο φορές, μία στην οποία ο $j$ συμμετέχει και μία χωρίς αυτόν.

Το άλλο μειονέκτημα της γενικευμένης Vickrey δημοπρασίας είναι ότι απαιτεί από τον παίκτη την ανακοίνωση μίας προσφοράς για όλα τα δυνατά υποσύνολα αντικειμένων του $G$, αφού είναι ένας μηχανισμός άμεσης αποκάλυψης (direct revelation mechanism). Αυτό, δημιουργεί πρόσθετες δυσκολίες, αν αναλογιστεί κανείς τα ακόλουθα δύο σημεία, τα οποία θα δούμε πιο αναλυτικά παρακάτω:

- Το να εκφράσει ο παίκτης προσφορές για $2^G$ υποσύνολα αντικειμένων είναι ιδιαίτερα χρονοβόρο. Φανταστείτε ότι ο παίκτης συμμετέχει σε μία on-line δημοπρασία ενός συνόλου $G$ αντικειμένων σε κάποια ειδική ιστοσελίδα, π.χ. το e-Bay. Τότε, αν κάθε προσφορά εκφράζεται με ένα μήνυμα από τον παίκτη στον εξυπηρετητή του e-Bay, θα δημιουργηθεί εκθετικά μεγάλη κίνηση από τον ένα παίκτη σε σχέση με τον αριθμό των αντικειμένων προς δημοπρασία.

- Επιπλέον, το να εκφράσει κανείς μία συγκεκριμένη προσφορά για κάθε υποσύνολο αντικειμένων είναι ένα δύσκολο πρόβλημα, που συνήθως οι παίκτες δεν είναι δυνατό να λύσουν. Κάθε παίκτης, συνήθως, μπορεί εύκολα να φράξει το ποσό που είναι διατεθειμένος να δώσει για ένα συγκεκριμένο υποσύνολο προϊόντων μεταξύ ενός άνω και ενός κάτω ορίου, τα οποία όμως μπορεί να απέχουν πολύ μεταξύ τους, λόγω αμφιβολιών του παίκτη ή ελλιπούς πληροφόρησης.

Βέβαια, οι VCG μηχανισμοί προσφέρουν και ένα βασικό πλεονέκτημα στους παίκτες, αφού όπως έχουμε δει το να πει κανείς την αλήθεια είναι κυρίαρχη στρατηγική (dominant strategy). Επομένως, οι παίκτες επιλέγουν εύκολα την προσφορά τους, χωρίς να χρειαστεί να μοντελοποιήσουν τους υπόλοιπους παίκτες και να πιθανολογήσουν για τις κινήσεις, που οι τελευταίοι θα ακολουθήσουν.

Γενικά, οι προσπάθειες, που γίνονται για να αρθούν οι παραπάνω δυσκολίες, μπορούν να ταξινομηθούν στις παρακάτω κατηγορίες:

- Χρήση μεθόδων προσέγγισης της βέλτιστης λύσης. Αντί, λοιπόν, ο μηχανισμός, να υπολογίζει το βέλτιστο αποτέλεσμα σύμφωνα με τις εκτιμήσεις των παικτών, χρησιμοποιεί προσεγγιστικούς αλγόριθμους. Αυτό, όμως, έχει ως συνέπεια, να υπάρχει κίνδυνος να αρθούν οι παιγνιοθεωρητικές ιδιότητες των μηχανισμών.

- Χρήση κατανεμημένων υπολογισμών. Το μοντέλο των μηχανισμών, όπως το περιγράψαμε παραπάνω, περιέχει μία κεντρική δομή, που λαμβάνει πληροφορία από τους παίκτες και υπολογίζει την έξοδο. Ενδιαφέρον θα είχε, η υιοθέτηση λιγότερο κεντρικών μοντέλων. Θα εξετάσουμε περαιτέρω την κατεύθυνση αυτή στο επόμενο κεφάλαιο.

- Περιορισμός σε ειδικές περιπτώσεις. Ακόμη, και αν το πρόβλημα του υπολογισμού της εξόδου του μηχανισμού είναι NP-hard, υπάρχει περίπτωση να έχει εύκολα στιγμιότυπα, τα οποία μπορούμε να εκμεταλλευθούμε κατάλληλα.

- Κατασκευή γλωσσών για τις προτιμήσεις των παικτών. Για να μειώσουμε την πολυπλοκότητα της έκφρασης των προτιμήσεων των παικτών, μπορούμε να εισάγουμε γλώσσες που περιορίζουν την μεταδιδόμενη πληροφορία στο ελάχιστο δυνατό ή/και εισάγουν προσεγγίσεις.

- Δυναμικοί μηχανισμοί. Αντί, οι μηχανισμοί να είναι ενός μόνο γύρου, θα μπορούσαμε να υλοποιήσουμε μηχανισμούς με πολλαπλούς γύρους, ώστε σε κάθε γύρο οι χρήστες να παρέχουν μέρος μόνο της πληροφορίας τους.

Στα επόμενα εδάφια θα μελετήσουμε ορισμένες ενδιαφέρουσες λύσεις, που προτάθηκαν σε απλοποιήσεις του γενικού προβλήματος, οι οποίες όμως μπορεί να αποτελέσουν την αφετηρία για πιο γενικές μεθόδους.

### 3.3.3 Χρήση της έννοιας της προσεγγισιμότητας

Μία φυσική επιλογή για την υπέρβαση της δυσκολίας στην επίλυση του NP-complete προβλήματος υπολογισμού της εξόδου του μηχανισμού είναι η χρήση προσεγγιστικών αλγορίθμων. Οι προσεγγιστικοί, αυτοί, αλγόριθμοι προκύπτουν από την χαλάρωση του προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού και την μετατροπή του σε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν γρήγοροι αλγόριθμοι, οι οποίοι λύνουν τέτοια προβλήματα, όπως π.χ. η μέθοδος Simplex.

Για να κάνουμε κάτι τέτοιο αρκεί να άρουμε τη δεύτερη προϋπόθεση, ότι δηλαδή το $x_S$ είναι δυαδική μεταβλητή, και να της επιτρέψουμε να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο κλειστό διάστημα [0,1]. Ουσιαστικά, είναι σαν να πουλάμε τα αντικείμενα κατά ποσοστά στους συμμετέχοντες (π.χ. με μετοχές). Ακριβώς, εκεί εντοπίζεται και η δυσκολία των συνδυαστικών δημοπρασιών: τα αντικείμενα, που συμμετέχουν είναι αδιαίρετα και πρέπει να πωληθούν σαν τέτοια. Το πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, που προκύπτει είναι το παρακάτω:

$$max \sum_{S \subseteq G} b(S) x_S$$

$$s.t. \sum_{S \ni i} x_S \leq 1 \quad \forall i \in I$$

$$x_S \in [0,1] \quad \forall S \subseteq G$$

Κάνοντας τη χαλάρωση αυτή, λύνουμε το πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού και παίρνουμε μία κατανομή των αντικειμένων στους συμμετέχοντες. Υπάρχουν, στιγμιότυπα του αρχικού προβλήματος, των οποίων η γραμμική χαλάρωση δίνει ακέραιες λύσεις. Τέτοιου είδους στιγμιότυπα θα δούμε στο επόμενο εδάφιο. Αν από την άλλη, η λύση που θα προκύψει, δεν είναι ακέραια πρέπει κάπως να την χειριστούμε. Έχουν προταθεί δύο διαφορετικές τεχνικές, για τις οποίες δεν θα παραθέσουμε τεχνικές λεπτομέρειες:

- Χρήση μίας γρήγορης ευριστικής συνάρτησης, η οποία όμως δεν δίνει πάντοτε τη βέλτιστη κατανομή.
- Χρήση της τεχνικής branch and bound, που επιτυγχάνει πάντοτε τη βέλτιστη λύση, αλλά δεν είναι σίγουρο ότι θα τρέξει σε πολυωνυμικό χρόνο.

Το μειονέκτημα της χρήσης, όμως, προσεγγιστικών αλγορίθμων είναι ο κίνδυνος αλλοίωσης της επιθυμητής ιδιότητας της φιλαλήθειας. Σε τέτοια περίπτωση οι παίκτες, ίσως, προσπαθήσουν να εκμεταλλευθούν τις ατέλειες αυτές προς όφελός τους, δημιουργώντας επιπρόσθετα προβλήματα. Έτσι, η χαλάρωση της ιδιότητας της φιλαλήθειας αφαιρεί από τους παίκτες την κυρίαρχη τους στρατηγική, αυξάνοντας την πολυπλοκότητα του προβλήματος επιλογής της στρατηγικής τους. Επιπρόσθετα, μπορεί οι νέες τους στρατηγικές να οδηγήσουν σε αυστηρά χειρότερο σημείο ισορροπίας.

Στην κατεύθυνση αυτή διατυπώθηκαν τόσο αρνητικά όσο και θετικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα οι Nisan και Ronen στη δημοσίευση [NR00] απέδειξαν μία σειρά αρνητικών αποτελεσμάτων σε σχέση με τη χρήση προσεγγιστικών αλγορίθμων. Για να παρουσιάσουμε τα αποτελέσματά τους χρειάζεται πρώτα να ορίσουμε τις παρακάτω έννοιες:

**Ορισμός 3.3 (VCG-βασισμένος μηχανισμός).** Ένας μηχανισμός, με τα παρακάτω ορίσματα:

$$M(S_1, \ldots, S_n, k(.), p_1(.), p_2(.), \ldots, p_{|I|}(.))$$

λέγεται *VCG-βασισμένος* αν οι πληρωμές υπολογίζονται σύμφωνα με την παρακάτω φόρμουλα:

$$p_i(w) = \sum_{i \neq j} u_j(k(w)) + h_i(w_{-i})$$

όπου w το διάνυσμα των τύπων, που ανακοινώνουν οι παίκτες.

Στο σημείο αυτό πρέπει να παρατηρήσουμε ότι οι VCG μηχανισμοί είναι υποσύνολο των VCG-βασισμένων. Η διαφορά στους δύο ορισμούς είναι ότι οι VCG μηχανισμοί έχουν αλγόριθμο υπολογισμού της εξόδου $k(.)$, που είναι βέλτιστος, δηλαδή μεγιστοποιεί το άθροισμα των ωφελειών των παικτών.

**Ορισμός 3.4 (Λογικός Μηχανισμός).** Ένας μηχανισμός, που ορίζεται από τη σχέση:

$$M(S_1, \ldots, S_n, k(.), p_1(.), p_2(.), \ldots, p_{|I|}(.))$$

λέγεται *λογικός* αν όποτε υπάρχει αντικείμενο $j$ και ένας παίκτης $i$, τέτοια ώστε να ισχύουν οι επόμενες δύο σχέσεις:

- Για κάθε σύνολο αντικειμένων, αν $j \notin S$ τότε $u_i(S \cup j) > u_i(S)$
- Για κάθε συμμετέχων $l \neq i$, $u_l(S \cup j) = u_l(S)$

τότε το αντικείμενο $j$ δίνεται στον $i$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει, ότι αν κάποιος συμμετέχων επιθυμεί ένα αντικείμενο και οι υπόλοιποι όχι, τότε το παίρνει.

Με βάση τις παραπάνω έννοιες μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο παραθέτουμε χωρίς απόδειξη:

**Θεώρημα 3.5 ([NR00]).** *Κάθε μη βέλτιστος (ο αλγόριθμος $k(.)$ του μηχανισμού είναι μη βέλτιστος) VCG-βασισμένος μηχανισμός για το πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών, που είναι και φιλαλήθης, δεν είναι λογικός.*

Με λίγα λόγια, το παραπάνω θεώρημα κάνει σαφές ότι οι VCG μηχανισμοί δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν, όταν το πρόβλημα που συνοδεύει τον υπολογισμό της εξόδου είναι NP-complete, όπως στις συνδυαστικές δημοπρασίες, αφού η χρήση προσεγγιστικού αλγορίθμου στη θέση του βέλτιστου έχει ως αποτέλεσμα την απώλεια της φιλαλήθειας.

### 3.3.4 Προσκολλημένοι Παίκτες (Single Minded Bidders)

Το αρνητικό αποτέλεσμα των Nisan και Ronen, έστρεψε τους ερευνητές στην αναζήτηση μηχανισμών, οι οποίοι δεν ανήκουν στην οικογένεια των VCG και προσεγγίζουν ικανοποιητικά τη βέλτιστη λύση και παραμένουν, ταυτόχρονα, φιλαλήθεις. Το πιο ενδιαφέρον αποτέλεσμα αυτής της προσπάθειας αφορά μία απλοποίηση του προβλήματος, που υποθέτει ότι οι παίκτες, που συμμετέχουν στη διαδικασία είναι μίας συγκεκριμένης μορφής: είναι προσκολλημένοι σε ένα και μοναδικό υποσύνολο αντικειμένων (single minded). Πιο τυπικά η συνάρτηση προσφοράς ενός τέτοιου παίκτη έχει την ακόλουθη μορφή:

$$b_i(S) = c \quad \forall S \supseteq S', \quad c \text{ σταθερά} \in \Re^+ \text{ και } S' \subseteq G$$

$$b_i(S) = 0 \quad \text{αλλιώς}$$

Αυτό, σημαίνει ότι ο παίκτης προσφέρει για κάθε υποσύνολο αντικειμένων, που περιέχει το επιθυμητό για αυτόν $S'$, την ίδια τιμή $c$ ανεξάρτητα του αριθμού των επιπλέον αντικειμένων, που έχει. Σε κάθε άλλη περίπτωση, κάνει μηδενική προσφορά. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, που κάνει απόλυτα κατανοητό τον ορισμό των προσκολλημένων παικτών είναι το παρακάτω: έστω, ότι η κυβέρνηση στην προσπάθεια της να συγκεντρώσει πόρους για την προστασία του περιβάλλοντος, οργανώνει δημοπρασία με συμμετέχοντες χημικές βιομηχανίες, που με τα απόβλητά τους μολύνουν την ατμόσφαιρα. Τα προϊόντα προς πώληση είναι άδειες εκπομπής βλαβερών ουσιών και η κυβέρνηση, απαιτεί από κάθε εργοστάσιο να αγοράσει τις άδειες εκπομπής για τις ουσίες, που αυτό παράγει, για να συνεχίσει τη λειτουργία του, αλλιώς αυτό κλείνει. Προφανώς, κάθε βιομηχανία ενδιαφέρεται μόνο για τις άδειες των ουσιών, που παράγει. Η προσφορά, που τελικά, θα κάνει θα είναι μία συνάρτηση του κέρδους, που η συνέχιση της λειτουργίας του εργοστασίου θα του αποφέρει. Επομένως, η συνάρτηση προσφοράς κάθε βιομηχανίας θα έχει τη μορφή των προσκολλημένων παικτών, που ορίσαμε παραπάνω, όπου $S'$, το υποσύνολο των αδειών, που ενδιαφέρουν τη βιομηχανία.

### Επίλυση του προβλήματος

Θα περίμενε κανείς ότι το πρόβλημα, όπως το ορίσαμε παραπάνω, θα είχε υπολογιστικά αποδοτική λύση. Παρόλα αυτά, όπως αποδεικνύεται στο θεώρημα 3.6, ακόμη και αν οι παίκτες είναι όλοι προσκολλημένοι σε συγκεκριμένο υποσύνολο του συνόλου των αντικειμένων ο καθένας, το πρόβλημα παραμένει NP-hard ως προς το άθροισμα $k + n$, όπου $k$ ο αριθμός των αντικειμένων και $n$ των παικτών.

**Θεώρημα 3.6.** *Έστω συνδυαστική δημοπρασία, στην οποία συμμετέχουν μόνο προσκολλημένοι παίκτες. Το πρόβλημα εύρεσης της βέλτιστης κατανομής, δηλαδή αυτής που μεγιστοποιεί, το άθροισμα των προσφορών, που έχουν γίνει αποδεκτές:*

$$\max \sum_{i \in OPT} b_i(S)$$

*όπου ο παίκτης $i$ ανήκει στο σύνολο των νικητών-παικτών και $b_i(S)$ η προσφορά του, είναι NP-hard ως προς την είσοδο $k+n$, με $k$ τον αριθμό των αντικειμένων και $n$ των παικτών. Επιπλέον, δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος, που να εξασφαλίζει ότι η έξοδός του θα είναι το πολύ $k^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ φορές την τιμή της βέλτιστης κατανομής, εκτός και αν οι κλάσεις NP και ZPP είναι ίσες.*[2]

*Απόδειξη.* Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε μία αναγωγή του Karp από το πρόβλημα της κλίκας σε μία εκδοχή του Set Packing με βάρη. Σε αυτή την αναγωγή, το $k$, ο αριθμός των αντικειμένων, δηλαδή, είναι της τάξης του $n^2$, όπου $n$ οι παίκτες. Με βάση αυτή την αναγωγή, θεωρούμε ένα γράφο, στον οποίο τα αγαθά είναι οι ακμές και προσφορές οι κόμβοι. Κάθε κόμβος αιτείται την απόκτηση των ακμών, που είναι γειτονικές του για τιμή ίση με 1. Η βέλτιστη κατανομή είναι, προφανώς το μέγιστο ανεξάρτητο σύνολο κόμβων του γράφου (maximal independent vertex set), δηλαδή το σύνολο κόμβων εκείνο, οι οποίοι δεν συνδέονται με ακμή μεταξύ τους (επομένως και οι προσφορές, που ανακοινώνουν έχουν κενή τομή), αλλά επιπλέον, το άθροισμα των ακμών, με τις οποίες συνδέεται ο καθένας είναι μέγιστο. Το πρόβλημα, όμως αυτό, με τα συγκεκριμένα βάρη, είναι αντίστοιχο του προβλήματος της μέγιστης κλίκας (clique), στον συμπληρωματικό γράφο του αρχικού. Η εύρεση της κλίκας αποδεικνύεται ότι είναι NP-hard και μάλιστα δεν μπορεί να προσεγγιστεί με παράγοντα καλύτερο του $|V|^{1-\epsilon}$ εκτός και αν NP=ZPP ([Has96]), όπου $|V|$, το πλήθος των κόμβων του γράφου. Αφού, $|V| = n$ και $k = n^2$ δεν υπάρχει προσεγγιστικός αλγόριθμος με προσέγγιση καλύτερη του $k^{\frac{1}{2}-\epsilon}$. □

Όπως, είδαμε και παραπάνω, αν χρησιμοποιήσουμε μηχανισμό της οικογένειας VCG, ο οποίος, όμως, δεν έχει βέλτιστο αλγόριθμο κατανομής των αγαθών στους παίκτες, τότε χάνουμε τη φιλαλήθεια του μηχανισμού. Για αυτό το λόγο, είναι λογικό να προσπαθήσουμε να βρούμε ένα μηχανισμό, ο οποίος να μην ανήκει στους VCG και να επιτυγχάνει μία ικανοποιητική προσέγγιση της βέλτιστης λύσης. Οι Lehmann, O'Callaghan και Shoham στη δημοσίευσή [LOS99] προτείνουν ένα τέτοιο μηχανισμό στην απλοποιημένη εκδοχή των συνδυαστικών δημοπρασιών, στην οποία θεωρούμε ότι όλοι οι παίκτες είναι προσκολλημένοι. Ο μηχανισμός τους ακολουθεί την φιλοσοφία των άπληστων αλγορίθμων (greedy algorithms) και γενικά έχει δύο φάσεις, τις εξής:

[2] NP είναι η κλάση των συνόλων, για τα οποία το αν ένα στοιχείο είναι μέλος τους ή όχι αποφασίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο με μη ντετερμινιστικούς αλγορίθμους ενώ η υποκλάση ZPP του NP περιλαμβάνει τα σύνολα εκείνα $L$, για τα οποία υπάρχει μία σταθερά $c$ και μία πιθανοτική μηχανή Turing $M$, η οποία για είσοδο $x$ τρέχει σε αναμενόμενο χρόνο $O(|x|^c)$ και δίνει έξοδο 1, αν και μόνο αν $x \in L$. Το πρόβλημα του αν ZP=NPP είναι ανοικτό και συνδέεται άμεσα με τη θεμελιώδη ερώτηση στο χώρο της πολυπλοκότητας, του αν P=NP.

- Στην πρώτη φάση οι προσφορές των παικτών ταξινομούνται με κάποιο *κατάλληλο κριτήριο*. Το κριτήριο, αυτό, που είναι και ο καθοριστικός παράγοντας της αποδοτικότητας του μηχανισμού, είναι μία συνάρτηση της προσφοράς του κάθε παίκτη, δηλαδή αν $c_i(b)$ είναι το κριτήριο, τότε θα ισχύει ότι: $c(b_i) : b_i(S) \to \Re^+$. Το βήμα αυτό παίρνει χρόνο $O(n \cdot \log n)$, όπου $n$ οι παίκτες που συμμετέχουν στο παιχνίδι, όσο, δηλαδή, ένας βέλτιστος αλγόριθμος ταξινόμησης.

- Αφού ολοκληρωθεί η ταξινόμηση με φθίνουσα σειρά των προσφορών με βάση το επιλεγμένο κριτήριο, ο αλγόριθμος απονέμει υποσύνολα στους παίκτες ως εξής: εξετάζει σειριακά τη λίστα και αποδέχεται τις προσφορές για υποσύνολα αντικειμένων, των οποίων η τομή με αυτές, που έχουν ήδη γίνει αποδεκτές είναι κενή. Αν εμφανιστεί μία προσφορά για σύνολο, του οποίου η τομή με κάποιο, για το οποίο ο μηχανισμός έχει αποδεχτεί προσφορά, δεν είναι κενή, τότε η προσφορά αυτή απορρίπτεται.

Προφανώς, ένας τέτοιος αλγόριθμος είναι πολυωνυμικού χρόνου. Τι γίνεται, όμως, με την αποδοτικότητά του; Αυτή, εξαρτάται από το κριτήριο ταξινόμησης, που θα χρησιμοποιήσουμε. Για να βρούμε το κατάλληλο κριτήριο θέτουμε τις εξής προϋποθέσεις: είναι λογικό, όταν το υποσύνολο, για το οποίο γίνεται η προσφορά γίνει μικρότερο, δηλαδή από $S$ σε $S'$ με $S' \subset S$, ενώ η προσφορά παραμένει η ίδια, η τιμή της συνάρτησης του κριτηρίου να μεγαλώνει. Όμοια, πρέπει να μεγαλώνει αν για το ίδιο υποσύνολο $S$ η προσφορά μεγαλώνει από $v$ σε $v'$.

Υπάρχουν αρκετές συναρτήσεις, που ικανοποιούν τους περιορισμούς, που θέσαμε παραπάνω. Η πιο λογική από αυτές, αν δεν ξέρουμε τίποτα παραπάνω για τις παραμέτρους του προβλήματος είναι η μέση αξία των προϊόντων της προσφοράς, που ορίζεται ως το πηλίκο της προσφοράς για το υποσύνολο $S$ προς τον αριθμό των αντικειμένων του $S$, δηλαδή $c(S,p) = \frac{p}{|S|}$. Βέβαια, παρόλο που η συνάρτηση αυτή είναι ιδιαίτερα λογική προσέγγιση, όλες οι συναρτήσεις της μορφής $\frac{p}{|S|^l}$ με $l \geq 0$ ικανοποιούν τη μόνη προϋπόθεση, που θέσαμε. Από ανάλυση αποδεικνύεται ότι το καλύτερο αποτέλεσμα, δηλαδή η καλύτερη προσέγγιση, επιτυγχάνεται για $l = \frac{1}{2}$, η οποία σύμφωνα με το θεώρημα 3.7, που ακολουθεί είναι της τάξης του $\sqrt{k}$, ενώ αντίθετα αν η συνάρτηση είναι η $\frac{p}{|S|}$, τότε η προσέγγιση μπορεί να φράσσεται μόνο από το $k$ (δες τα παραδείγματα που ακολουθούν).

**Θεώρημα 3.7.** *Ο άπληστος αλγόριθμος με κριτήριο ταξινόμησης, που βασίζεται στη συνάρτηση $\frac{p}{|S|^{\frac{1}{2}}}$ πετυχαίνει προσέγγιση της βέλτιστης λύσης με παράγοντα $\sqrt{k}$*

*Απόδειξη.* Έστω ότι έχω $n$ παίκτες, οι οποίοι εκφράζουν προσφορές της μορφής $(S_i, p_i)$ για $i = 1, \ldots, n$. Ορίζουμε το κριτήριό μας με τη συνάρτηση $c(b_i(S)) = \frac{p_i}{\sqrt{|S_i|}} = r_i$. Έστω ότι με $OPT$ συμβολίζουμε τη βέλτιστη λύση, της οποίας η αξία εκφράζεται από τη σχέση $A = \sum_{i \in OPT} p_i$. Έστω, τώρα ότι με $GR$ συμβολίζουμε την λύση, που επιτυγχάνει ο άπληστος αλγόριθμος, που παρουσιάσαμε. Η αξία της λύσης αυτής εκφράζεται από τη σχέση $B = \sum_{i \in GR} p_i$. Ζητούμενο της απόδειξης είναι η ισχύ της παρακάτω σχέσης:

$$A \leq B \cdot \sqrt{k}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα δύο σύνολα λύσεων, δηλαδή το OPT και το GR δεν έχουν καμία κοινή προσφορά. Αν υπάρχουν προσφορές, που γίνονται αποδεκτές και από τους δύο αλγορίθμους, μπορούμε να θεωρήσουμε το πρόβλημα, στο οποίο τα προϊόντα, που αναφέρονται οι προσφορές αυτές δεν υπάρχουν, μετατρέποντας έτσι το αρχικό πρόβλημα σε ένα άλλο με λιγότερα αντικείμενα. Ας θεωρήσουμε το $B$. Από πράξεις προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$B = \sum_{i \in GR} p_i \geq \sqrt{\sum_{i \in GR} p_i^2} = \sqrt{\sum_{i \in GR} r_i^2 \cdot w_i}.$$

Έστω τώρα το $A$. Όμοια έχουμε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz:

$$A = \sum_{i \in OPT} r_i \cdot \sqrt{w_i} \leq \sqrt{\sum_{i \in OPT} r_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i \in OPT} w_i}$$

Το άθροισμα $\sum_{i \in OPT} w_i$ είναι ίσο με τον αριθμό των αντικειμένων, που πωλήθηκαν στους παίκτες με το βέλτιστο αλγόριθμο. Το άθροισμα, όμως, αυτό, προφανώς φράσσεται άνω από το συνολικό αριθμό των διαθέσιμων αντικειμένων, δηλαδή από το $k$. Επομένως, προκύπτει ότι ισχύει η σχέση:

$$A \leq \sqrt{\sum_{i \in OPT} r_i^2} \cdot \sqrt{k}$$

Για να αποδείξουμε τη ζητούμενη σχέση αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει το παρακάτω:

$$\sum_{i \in OPT} r_i^2 \leq \sum_{i \in GR} r_i^2 \cdot w_i.$$

Έχουμε, όμως, υποθέσει ότι τα δύο σύνολα λύσεων GR και OPT δεν έχουν καμία κοινή προσφορά. Επομένως, όταν εμφανίζεται μία προσφορά του συνόλου OPT στην ταξινομημένη λίστα του άπληστου, θα υπήρχε κάποια άλλη προσφορά με καλύτερο λόγο $r$, πιο μπροστά στη λίστα, η οποία θα ανήκει στο σύνολο GR και με την οποία η προσφορά του OPT έχει μη κενή τομή. Αν, δηλαδή, θεωρήσουμε ότι $i$ είναι η προσφορά του OPT και $j$ του GR και έστω $S_i, S_j$ τα αντίστοιχα σύνολα, θα ισχύει $S_i \cap S_j \neq \oslash$ και $r_i \leq r_j$. Το πολύ $w_j$ προσφορές του OPT μπορούν να έχουν κοινό στοιχείο με την προσφορά $j$ του GR, αφού η τελευταία περιέχει $w_j$ στοιχεία, επομένως αν $OPT_j$ είναι το σύνολο των προσφορών του OPT, που έχουν μη κενή τομή με την προσφορά $j$ του GR, τότε θα ισχύει:

$$\sum_{i \in OPT_j} r_i^2 \leq r_j^2 w_j.$$

Με άθροιση για όλα τις προσφορές του OPT προκύπτει το ζητούμενο. □

Για να κατανοήσουμε, όμως, πλήρως, τον άπληστο αλγόριθμο κατανομής των αγαθών καθώς και το γεγονός του ότι είναι μη αποδοτικός ακολουθούν δύο παραδείγματα, στα οποία, όμως θεωρούμε για λόγους ευκολίας στην παρουσίαση ότι η συνάρτηση του κριτηρίου έχει τη μορφή: $c(S,p) = \frac{p}{|S|}$. Σε μία τέτοια περίπτωση περιμένουμε ο λόγος προσέγγισης να μην υπερβαίνει τον αριθμό των αντικειμένων $k$.

**Παράδειγμα 3.8.** Έστω, ότι γίνεται δημοπρασία για δύο αντικείμενα, τα $a$ και $b$. Υπάρχουν τρεις παίκτες, που συμμετέχουν στη διαδικασία, οι Α,Β και Γ και ανακοινώνουν τις εξής προσφορές: $A : (\{a\}, 10)$, $B : (\{a,b\}, 19)$, $\mathit{\Gamma} : (\{b\}, 8)$. Η βέλτιστη κατανομή είναι προφανώς να πάρει ο Β και τα δύο αντικείμενα, πληρώνοντας 19 ενώ οι άλλοι να μην πάρουν (και να μην πληρώσουν) τίποτα. Ο προσεγγιστικός άπληστος αλγόριθμος θα λειτουργούσε ως εξής: καταρχήν, υπολογίζει το κριτήριο ταξινόμησης για κάθε προσφορά:

$$A : \frac{10}{1} = 10$$

$$B : \frac{19}{2} = 9.5$$

$$\mathit{\Gamma} : \frac{8}{1} = 8$$

Έπειτα, ταξινομούμε τη λίστα και προκύπτει η σειρά Α,Β,Γ. Αποδεχόμαστε, σύμφωνα με τον αλγόριθμο την προσφορά Α, απορρίπτουμε τη δεύτερη Β, γιατί $A \cap B \neq \oslash$ και δεχόμαστε και την τρίτη. Έτσι, η τελική κατανομή δίνει το αντικείμενο $a$ στον Α, το $b$ στον Γ και ο Β δεν παίρνει τίποτα. Αυτή η κατανομή, είναι προφανώς χειρότερη από την βέλτιστη, αφού αποδίδει κέρδος 18 στον μηχανισμό ενώ η βέλτιστη 19. Η απόκλιση της άπληστης κατανομής από τη βέλτιστη φράσσεται από τον αριθμό των αντικειμένων, όταν χρησιμοποιούμε το κριτήριο $\frac{p}{|S|}$ και αυτό το όριο είναι ακριβές (tight), όπως αποδεικνύεται από το ακόλουθο παράδειγμα.

**Παράδειγμα 3.9.** Έστω γίνεται δημοπρασία για $k$ αντικείμενα, τα $s_1, \ldots, s_k$ Υπάρχουν $k+1$ παίκτες, που συμμετέχουν στη διαδικασία, οι $i_1, i_2, \ldots, i_{k+1}$ και ανακοινώνουν τις παρακάτω προσφορές:

$$i_1 : (\{s_1\}, 10), i_2 : (\{s_2\}, \epsilon), \ldots, i_k : (\{s_k\}, \epsilon), i_{k+1} : (\{s_1, \ldots, s_k\}, 10 \cdot k - \epsilon)$$

όπου $\varepsilon \to 0$.

Η βέλτιστη κατανομή είναι να δοθούν όλα τα αντικείμενα στον παίκτη $i_{k+1}$ και να πληρώσει αυτός $10 \cdot k - \epsilon$ ενώ ο άπληστος αλγόριθμος θα αποδεχόταν τις προσφορές των $k$ πρώτων παικτών, αφού $c_{i_1} = 10 > c_{i_{k+1}} = 10 - \frac{\epsilon}{k}$ και θα κέρδιζε $10 + (k-1) \cdot \epsilon \simeq 10$ ενώ ο βέλτιστος δίνει $10 \cdot k - \epsilon \simeq 10 \cdot k$, δηλαδή $k$ περίπου φορές περισσότερα.

### Αλγόριθμος Πληρωμών

Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος, που παρουσιάσαμε, υποθέτει ότι οι παίκτες ανακοινώνουν τις πραγματικές τους τιμές. Κάτι τέτοιο, όμως, προϋποθέτει ότι ο μηχανισμός διαθέτει ένα αλγόριθμο πληρωμών, που αποζημιώνει κατάλληλα τους παίκτες, ώστε να πουν την αλήθεια. Σύμφωνα με το αρνητικό αποτέλεσμα των Nisan και Ronen, αν ο βέλτιστος αλγόριθμος του μηχανισμού αντικατασταθεί με κάποιο προσεγγιστικό, τότε οι VCG πληρωμές δεν εξασφαλίζουν τη φιλαλήθεια του μηχανισμού. Ας δούμε, όμως, την αποτυχία του συνδυασμού VCG πληρωμών και προσεγγιστικού αλγορίθμου στο ακόλουθο παράδειγμα:

**Παράδειγμα 3.10.** Ας εφαρμόσουμε το αλγόριθμο των πληρωμών VCG στο παράδειγμα 3.8. Ο παίκτης Α, για παράδειγμα, θα πληρώσει τα παρακάτω:

$$p_A = -\sum_{i \neq A} v_i(w) + \sum_{i \neq A} v_i(w_{-A}) = -(0+8) + (19+0) = 11$$

όπου $v_i$ η ωφέλεια του παίκτη $i$ με $i = B, \Gamma$. Το πρώτο άθροισμα αφορά τη δημοπρασία, στην οποία συμμετέχει η προσφορά του παίκτη Α ενώ για το δεύτερο άθροισμα υποθέτουμε ότι η προσφορά του Α δεν συμμετέχει. Από τη σχέση VCG προκύπτει ότι ο παίκτης Α, θα πρέπει να πληρώσει 11 για να πάρει το αντικείμενο, για το οποίο έκανε προσφορά. Όμως, η ωφέλεια του να λάβει, τελικά, τα αντικείμενα για τα οποία έκανε προσφορά είναι $10 < 11$ και το τελικό του κέρδος από τη διαδικασία είναι 10-11=-1. Αν από την άλλη ανακοίνωνε ψευδώς αντί για 10 μία τιμή ίση με 0, τότε δεν θα λάμβανε κανένα αντικείμενο και το κέρδος του θα ήταν 0. Επομένως, το να πει κανείς την αλήθεια δεν είναι η βέλτιστη στρατηγική, αν χρησιμοποιούνται οι VCG πληρωμές.

Ζητούμενο, λοιπόν, είναι να βρούμε ένα αλγόριθμο πληρωμών, ο οποίος σε συνδυασμό με τον προσεγγιστικό αλγόριθμο κατανομής των αγαθών να παράγει ένα φιλαλήθη μηχανισμό. Παρακάτω, ορίζουμε ένα αλγόριθμο πληρωμών, ο οποίος ακολουθεί την φιλοσοφία της Vickrey δημοπρασίας.

**Ορισμός 3.11.** Έστω L η ταξινομημένη λίστα, σύμφωνα με το άπληστο κριτήριο, που χρησιμοποιούμε. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο κατανομής των αγαθών, για όλες τις προσφορές της L, που αποδεχόμαστε απορρίπτουμε τις επόμενες στη διάταξη, που έχουν μη κενή τομή με αυτές. Για κάθε, λοιπόν, προσφορά $j$, που αποδεχόμαστε ορίζουμε ως $n(j)$ την προσφορά εκείνη, που ενώ απορρίπτεται λόγω της ύπαρξης της $j$ θα γινόταν αποδεκτή αν η τελευταία δεν υπήρχε. Τότε ο αλγόριθμος πληρωμών είναι ως εξής:

- Ο παίκτης, που έκανε την προσφορά $j$ πληρώνει 0 για τα αντικείμενα, που του αποδόθηκαν, αν δεν υπάρχει $n(j)$, όπως το ορίσαμε παραπάνω.
- Αν υπάρχει $n(j)$, τότε ο παίκτης πληρώνει $p_j = |S| \cdot c(n(j))$, όπου $S$ το σύνολο των αντικειμένων, τα οποία δόθηκαν στον $j$ και $c(n(j))$, η τιμή της συνάρτησης του κριτηρίου για τον παίκτη, που έκανε την προσφορά $n(j)$.

Ο αλγόριθμος αυτός, είναι φιλαλήθης, όπως εύκολα αποδεικνύεται (θα παραλείψουμε την απόδειξη). Ας δούμε παρακάτω την εφαρμογή του:

**Παράδειγμα 3.12.** Όπως, έχουμε δει στο παράδειγμα 3.8 οι προσφορές των παικτών Α και Γ γίνονται αποδεκτές από τον μηχανισμό ενώ η Β όχι. Επομένως, ο Β δεν πληρώνει τίποτα. Η πληρωμή του παίκτη Α υπολογίζεται ως εξής: η συνάρτηση $n(.)$ με όρισμα την προσφορά του παίκτη Α, επιστρέφει την προσφορά του Β, αφού είναι μετά από του Α στην ταξινομημένη λίστα και έχει μη κενή τομή με αυτή. Ο Α, λοιπόν, πρέπει να πληρώσει ποσό ίσο με: $p_A = 1 \cdot c(B) = 1 \cdot 9.5 = 9.5$. Για τον παίκτη Γ, δεν υπάρχει άλλη προσφορά μετά τη δική του στη λίστα, επομένως και αυτός δεν πληρώνει τίποτα. Τελικά, τα αντικείμενα κατανέμονται ως εξής: το $a$ στον Α και το $b$ στον Β, ενώ πληρώνει μόνο ο Α, ποσό ίσο με 9.5. Αν χρησιμοποιούσαμε τη γενικευμένη Vickrey δημοπρασία, οι προσφορές των Α, Γ θα απορρίπτονταν, τα αντικείμενα θα δίνονταν στον Β, ο οποίος θα πλήρωνε, σύμφωνα με τις VCG πληρωμές $-(0+0)+(10+8)=18$.

Παρακάτω δίνουμε ένα ακόμη παράδειγμα εφαρμογής του αλγορίθμου πληρωμών, στο οποίο το κέρδος του μηχανισμού είναι μηδενικό.

**Παράδειγμα 3.13.** Έστω, ότι οι τρεις παίκτες του 3.8 ανακοινώνουν τις εξής προσφορές: $A : (\{a\}, 20)$, $B : (\{b\}, 15)$, $\Gamma : (\{a, b\}, 25)$. Ο άπληστος αλγόριθμος, στην περίπτωση αυτή θα επιτύχει τη βέλτιστη κατανομή, δηλαδή τα αντικείμενα $a$ και $b$ στους Α και Β αντίστοιχα. Κατά τον υπολογισμό των πληρωμών συμβαίνει το εξής: από τον ορισμό, το $n(j)$, είναι αυτή η προσφορά, η οποία θα γινόταν αποδεκτή αν δεν υπήρχε η $j$, ενώ με τη συμμετοχή της $j$ απορρίπτεται. Όμως, αν δεν υπήρχε η προσφορά του Α, τότε πάλι του Γ θα απορριπτόταν, αφού έχει μη κενή τομή με την Β. Όμοια, αν η Β δεν συμμετείχε, η αποδοχή της Α δεν θα επέτρεπε στη Γ να γίνει αποδεκτή. Τελικά, προκύπτει ότι οι παίκτες Α και Β δεν θα να πληρώσουν τίποτα για να αποκτήσουν τα αντικείμενα των προσφορών τους.

### Γενικευμένοι παίκτες

Η υπόθεση, που κάναμε, ότι οι παίκτες είναι προσκολλημένοι σε ένα σύνολο (single-minded) αποτελεί μεγάλη απλοποίηση στο πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών, η οποία σπάνια συναντάται σε ρεαλιστικά περιβάλλοντα. Η ερώτηση του αν είναι εφικτό να επεκτείνουμε τα μοντέλα, που παρουσιάσαμε σε δημοπρασίες, στις οποίες συμμετέχουν λιγότερο περιορισμένοι χρήστες προκύπτει εύλογα. Κάποιος θα μπορούσε να κάνει την εξής λογική παρατήρηση: ένας παίκτης, που δεν είναι προσκολλημένος σε ένα σύνολο, μπορεί να μοντελοποιηθεί από ένα μικρό σύνολο προσκολλημένων παικτών, οι οποίοι να ενδιαφέρονται μόνο για το σύνολο, που θα τους ανατεθεί. Δηλαδή, οι παίκτες αυτοί δρουν αυτόνομα και τα αντικείμενα, που τελικά αποκτούν οι γενικευμένοι παίκτες είναι η ένωση των αντικειμένων, που αποδίδονται στα "προσκολλημένα παιδιά τους". Το ίδιο γίνεται και με τις πληρωμές, που καλούνται να δώσουν στο μηχανισμό. Μία τέτοια προσέγγιση, όμως, μπορεί να μην επιτυγχάνει φιλαλήθεις υλοποιήσεις, επειδή, ίσως, είναι στο συμφέρον των παικτών να ανακοινώσουν ψευδή στοιχεία σε κάποιες από τις προσφορές τους, ώστε να κερδίσουν στις υπόλοιπες.

Γενικότερα, είναι ένα ιδιαίτερα, ενδιαφέρον ανοικτό ερώτημα τι είδους μηχανισμοί θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν σε δημοπρασίες, στις οποίες οι γενικευμένοι παίκτες αντικαθιστούνται από ένα αριθμό προσκολλημένων. Μία ιδέα είναι κάθε προσκολλημένος παίκτης να αντιμετωπίζεται ως ανεξάρτητη μονάδα από τον μηχανισμό. Μία βελτίωση, ίσως, θα ήταν να δινόταν στο μηχανισμό η πληροφορία, ποιοι προσκολλημένοι παίκτες ανήκουν σε ποιον γενικευμένο, ώστε για παράδειγμα, ο υπολογισμός των πληρωμών του $i$ να γίνεται μόνο με βάση τις προσφορές των υπόλοιπων παικτών, κάτι που, σίγουρα, είναι ένα βήμα προς την κατεύθυνση της φιλαλήθειας. Πάντως, αποδεικνύεται το παρακάτω αρνητικό αποτέλεσμα: αν ο μηχανισμός διαθέτει άπληστο προσεγγιστικό αλγόριθμο για την κατανομή των αγαθών στους συμμετέχοντες σε μία δημοπρασία με γενικευμένους παίκτες, τότε ανεξάρτητα του αλγορίθμου πληρωμών, που θα χρησιμοποιηθεί, ο μηχανισμός δεν είναι φιλαλήθης. Αντί για τυπική απόδειξη θα δείξουμε το αποτέλεσμα με τη βοήθεια ενός παραδείγματος:

**Παράδειγμα 3.14.** Γίνεται δημοπρασία για δύο αντικείμενα, τα $a$ και $b$ με συμμετέχοντες δύο παίκτες, ένας από τους οποίους είναι προσκολλημένος, ενώ ο άλλος γενικευμένος. Ο προσκολλημένος παίκτης Α κάνει την ακόλουθη προσφορά: $(\{a\}, 12)$ ενώ ο γενικευμένος Β, την: $(\{a\}, 10), (\{b\}, 10), (\{a, b\}, 30)$. Ας υποθέσουμε ότι ο Β είναι φιλαλήθης. Τότε, σύμφωνα με τον άπληστο αλγόριθμο, αποδεκτή γίνεται μόνο η προσφορά $(\{a, b\}, 30)$. Ας θεωρήσουμε ότι ο μηχανισμός γνωρίζει ποιος παίκτης έκανε ποια προσφορά και εξαιρεί τις άλλες προσφορές του Β, από τον υπολογισμό του ποσού, που πρέπει ο τελευταίος να πληρώσει. Τότε, από τον αλγόριθμο προκύπτει ότι ο Β θα πληρώσει 24 και θα έχει έτσι ωφέλεια ίση με 30-24=6. Αν, τώρα, υποθέσουμε ότι ο Β δεν είναι κατά ανάγκη φιλαλήθης, τότε προκύπτει ότι το να ανακοινώσει ψευδείς προσφορές είναι καλύτερο για αυτόν. Έτσι, αν ανακοινώσει την εξής προσφορά: $(\{a\}, 10), (\{b\}, 10), (\{a, b\}, 23)$ και ο Α παραμείνει φιλαλήθης[3], τότε ο αλγόριθμος δίνει το $a$ στον Α και το $b$ στον Β. Σύμφωνα με το σχήμα πληρωμών, ο Α καλείται να πληρώσει 11.5 ενώ ο Β 0, πετυχαίνοντας έτσι ωφέλεια ίση με 10, η οποία είναι μεγαλύτερη της ωφέλειας όταν είναι ειλικρινής.

### 3.3.5 Επιτυγχάνοντας φιλαλήθεια

Ανακεφαλαιώνοντας τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι η δυσκολία της εφαρμογής προσεγγιστικών αλγορίθμων στην περίπτωση υλοποίησης μηχανισμών για συνδυαστικές δημοπρασίες (combinatorial auctions) είναι ότι η χρήση μη βέλτιστων αλγορίθμων κατανομής των αντικειμένων μπορεί να οδηγήσει σε μη φιλαλήθεις λύσεις. Στο σημείο, όμως, αυτό είναι χρήσιμο να διερευνήσουμε την έννοια της φιλαλήθειας, διατυπώνοντας ένα αριθμό ιδιοτήτων, που πρέπει να πληρεί κάθε φιλαλήθης μηχανισμός για προσκολλημένους παίκτες, ανεξάρτητα του αν χρησιμοποιεί προσεγγιστικό αλγόριθμο ή όχι. Αν και είναι επαρκείς για να εξασφαλίσουν τη φιλαλήθεια του μηχανισμού, παρόλα αυτά δεν έχει αποδειχτεί ότι είναι και αναγκαίες. Οι δύο πρώτες ιδιότητες αφορούν τον αλγόριθμο κατανομής ενώ οι άλλες δύο τον αντίστοιχο των πληρωμών.

- Ακρίβεια: Κάθε προσκολλημένος παίκτης παίρνει από το μηχανισμό είτε ολόκληρο το σύνολο, για το οποίο ενδιαφέρεται είτε τίποτα. Η ιδιότητα αυτή προκύπτει άμεσα από τον ορισμό αυτού του είδους των παικτών.

- Μονοτονικότητα: Η ιδιότητα αυτή συνοψίζεται στα εξής:

  - Αν η προσφορά $(S, p)$ του παίκτη $i$ για το σύνολο $S$ γίνεται αποδεκτή από το μηχανισμό, τότε όμοια πρέπει να γίνει αποδεκτή και

[3]Αποδεικνύεται, εύκολα ότι η κυρίαρχη προσφορά για ένα προσκολλημένο παίκτη είναι να πει την αλήθεια, ακόμη και αν στη δημοπρασία συμμετέχουν γενικευμένοι παίκτες

η προσφορά $(S^{'}, p)$, όπου $S^{'} \subset S$. Η πρόταση αυτή είναι πολύ λογική, αφού η δεύτερη προσφορά δίνει το ίδιο αντίτιμο για λιγότερα αντικείμενα.

  – Όμοια, με παραπάνω αν η προσφορά $(S, p)$ του παίκτη $i$ δεν γίνει δεκτή, δεν πρέπει να γίνει δεκτή η προσφορά $(S^{'}, p^{'})$ με $S^{'} \supseteq S$ και $p \geq p^{'}$

- Εθελοντική συμμετοχή: Αν ο παίκτης δεν λάβει ολόκληρο το σύνολο, που επιθυμεί τότε ο μηχανισμός δεν πρέπει να τον υποχρεώνει να πληρώσει τίποτα.

- Ύπαρξη κρίσιμου σημείου: Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή, το ποσό $v$, που καλείται να πληρώσει ο παίκτης $i$ με προσφορά $(S, v^{'})$ είναι τέτοιο ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω δύο σχέσεις:

$$\forall v^{'} < v \Rightarrow g_j = \oslash \text{ και } p_j = 0$$

$$\forall v^{'} > v \Rightarrow g_j = S \text{ και } p_j = v$$

  όπου $g_j$ το σύνολο των αντικειμένων, που δίνονται στον παίκτη $j$ και $p_j$ το ποσό, που πληρώνει. Ουσιαστικά, δηλαδή, υπάρχει μία συγκεκριμένη κρίσιμη τιμή προσφοράς κάτω από την οποία ο παίκτης δεν παίρνει τα αντικείμενα, που επιθυμεί, ενώ πάνω από αυτή τα παίρνει πληρώνοντας ποσό ακριβώς ίσο με την κρίσιμη τιμή. Επίσης, έμμεσα υποδηλώνει η ιδιότητα αυτή ότι το ποσό, που θα πληρώσει ο παίκτης δεν εξαρτάται από την προσφορά, που θα κάνει, αλλά από το τι θα ανακοινώσουν οι υπόλοιποι παίκτες.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι κάθε μηχανισμός, που ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες είναι φιλαλήθης ανεξάρτητα του αν είναι αποδοτικός ή όχι.

### Εφικτή φιλαλήθεια (feasible truthfulness)

Η έννοια της φιλαλήθειας είναι, γενικά, ένας αρκετά περιοριστικός παράγοντας για την υλοποίηση ενός αποδοτικού ή προσεγγιστικά αποδοτικού μηχανισμού για προβλήματα, που είναι γενικά NP-complete. Μία ιδέα που έχει προταθεί για να "χαλαρώσει" ο περιορισμός αυτός είναι η λεγόμενη *εφικτή φιλαλήθεια*. Η κλασική Θεωρία Παιγνίων θεωρεί ότι ο κάθε παίκτης μπορεί να υπολογίζει πάντοτε την καλύτερη στρατηγική για αυτόν ανεξάρτητα του υπολογιστικού κόστους, που αυτό έχει. Η υπόθεση αυτή δεν μπορεί να θεωρηθεί έγκυρη σε περιβάλλοντα, όπως αυτά των συνδυαστικών δημοπρασιών. Αντίθετα, θεωρούμε ότι κάθε παίκτης διαθέτει κάποια (μερική) γνώση για τις στρατηγικές που θα ακολουθήσουν οι υπόλοιποι παίκτες, με τη βοήθεια της οποίας επιλέγει την κίνηση του, που του εξασφαλίζει το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια, αν και μπορεί να υπάρχουν στρατηγικές, που οδηγούν τον παίκτη σε καλύτερη λύση, παρόλα αυτά ο παίκτης δεν γνωρίζει κάτι τέτοιο, λόγω περιορισμένης γνώσης. Πιο τυπικά μπορούμε να εισάγουμε την έννοια της εφικτής φιλαλήθειας με τους παρακάτω ορισμούς:

**Ορισμός 3.15.** *Γνώση* ενός παίκτη $i$ λέμε μία μερική συνάρτηση $b^i : S^{-i} \to S^i$. Πρακτικά, η έννοια της συνάρτησης $b^i(s_{-i})$ είναι ότι επιστρέφει την κίνηση, που προτιμά ο παίκτης αν το διάνυσμα των στρατηγικών των υπόλοιπων είναι $s_{-i}$.

**Ορισμός 3.16.** Μία κίνηση $s_i \in S_i$, όπου $S_i$ το σύνολο των στρατηγικών του παίκτη $i$, είναι *εφικτή βέλτιστη απάντηση*(feasible best response) στο διάνυσμα $s_{-i}$, των κινήσεων των άλλων παικτών, αν $u_i(b(s_{-i}), s_{-i}) \geq u_i(s_i^{'}, s_{-i})$ ή αν το $s_{-i}$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της $b^i(.)$.

Το νόημα του ορισμού είναι ότι ο παίκτης διαλέγει τη στρατηγική εκείνη, που η μερική γνώση του, του επιτρέπει να θεωρεί καλύτερη.

Στο ίδιο πνεύμα ορίζουμε και την *εφικτή κυρίαρχη στρατηγική*, η οποία είναι η στρατηγική εκείνη, η οποία εξασφαλίζει στον παίκτη, σύμφωνα με την περιορισμένη γνώση του, το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, ανεξάρτητα από τι στρατηγικές θα ακολουθήσουν οι υπόλοιποι.

Οι παραπάνω έννοιες προσφέρουν την αφετηρία για ένα νέο τρόπο ορισμό μηχανισμών, τους λεγόμενους *εφικτούς φιλαλήθεις μηχανισμούς (feasible truthful mechanisms)*. Σύμφωνα με τους μηχανισμούς αυτούς, μπορεί να υπάρχουν μη φιλαλήθεις στρατηγικές για τον παίκτη $i$, που παράγουν καλύτερα αποτελέσματα για αυτόν, αλλά ο υπολογισμός τους είναι αδύνατος. Γενικά, λοιπόν, μία αρκετά υποσχόμενη ιδέα, η οποία θυμίζει ανάλογες τεχνικές που χρησιμοποιούνται σε κρυπτογραφικά προβλήματα, είναι να σχεδιάζονται οι μηχανισμοί, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εξαπάτηση τους, η οποία ταυτίζεται στην περίπτωση αυτή με την απόκρυψη του πραγματικού τύπου του παίκτη, μόνο αν οι παίκτες μπορούν να λύσουν ένα NP-hard πρόβλημα.

Για να γίνουν πλήρως κατανοητά τα παραπάνω, ας εφαρμόσουμε τις ιδέες αυτές στην περίπτωση του προβλήματος των συνδυαστικών δημοπρασιών με γενικευμένους παίκτες. Μία ενδιαφέρουσα επέκταση, των αλγορίθμων για προσκολλημένους παίκτες, είναι, όπως είπαμε, το να θεωρήσουμε ότι κάθε παίκτης διαιρείται σε ένα πεπερασμένο αριθμό προσκολλημένων πρακτόρων (single minded agents), οι οποίοι δρουν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο. Είδαμε ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, είναι στο συμφέρον του γενικευμένου παίκτης, κάποιος από τους πράκτορες του να μην είναι φιλαλήθης. Αυτό, όμως, προκύπτει μόνο στην περίπτωση, που υπάρχουν κατάλληλες προσφορές από τους άλλους παίκτες. Αν, όμως, θεωρήσουμε ότι η υπολογιστική δύναμη των παικτών είναι περιορισμένη, δηλαδή οι παίκτες είναι κατά μία έννοια *μυωπικοί* (δεν μπορούν να αξιολογήσουν τις προσφορές των άλλων παικτών), τότε, ίσως, επιτυγχάνεται μυωπική φιλαλήθεια, η οποία είναι μία μορφή εφικτής φιλαλήθειας με τη χρήση προσκολλημένων πρακτόρων.

### 3.3.6 Περιορίζοντας το σύνολο των προβλημάτων

Μία ακόμη ιδέα για να ξεπεραστεί η δυσκολία του προβλήματος των συνδυαστικών δημοπρασιών είναι να περιορίσουμε κατάλληλα τους παίκτες, ώστε οι στρατηγικές τους να καταλήγουν πάντοτε σε εύκολα στιγμιότυπα του NP-hard προβλήματος του μηχανισμού. Αντίθετα, με τη χρήση προσεγγιστικών αλγορίθμων η ιδέα αυτή δεν χαίρει ιδιαίτερης προσοχής ως τώρα, για αυτό και η σχετική βιβλιογραφία είναι αρκετά περιορισμένη.

Όπως είναι γνωστό, από τη θεωρία της Πολυπλοκότητας, δεν είναι όλα τα στιγμιότυπα των NP-hard προβλημάτων το ίδιο δύσκολα. Μάλιστα, συνήθως, τα περισσότερα από τα στιγμιότυπα είναι επιλύσιμα σε πολυωνυμικό χρόνο. Έτσι, λοιπόν, για το πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών (combinatorial auctions), μπορούμε να θέσουμε τέτοιους περιορισμούς στα σύνολα αντικειμένων, στα οποία οι παίκτες ανακοινώνουν τιμές, ώστε το πρόβλημα που τελικά προκύπτει να είναι ένα από τα εύκολα στιγμιότυπα του NP-hard γενικού προβλήματος.

Ένα στιγμιότυπο των συνδυαστικών δημοπρασιών (combinatorial auctions) επιλύεται εύκολα, αν η χαλάρωση προβλήματος ακέραιου προγραμματισμού σε γραμμικό δίνει ακέραιες λύσεις. Κάτι τέτοιο συμβαίνει σε αρκετές περιπτώσεις, μερικές από τις οποίες μάλιστα αντιστοιχούν και σε ενδιαφέροντα ρεαλιστικά προβλήματα. Παρακάτω θα δούμε ορισμένα από αυτά τα στιγμιότυπα.

- Γραμμικά Διατεταγμένες Προσφορές

  Ορίζουμε, λοιπόν, το παρακάτω πρόβλημα: το σύνολο των αντικειμένων διατάσσεται γραμμικά, δηλαδή $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ και οι παίκτες μπορούν να κάνουν προσφορές μόνο για υποσύνολα με συνεχόμενα στοιχεία. Όπως αποδεικνύεται στο [RPH98], η χαλάρωση του γραμμικού προγραμματισμού σε τέτοιου είδους δημοπρασίες δίνει ακέραιες λύσεις, δηλαδή λύνει το πρόβλημα ακριβώς. Ας δούμε, αρχικά την απόδειξη για το αποτέλεσμα αυτό και στη συνέχεια μία σημαντική πρακτική εφαρμογή τέτοιων πλειστηριασμών.

  *Απόδειξη.* Ζητούμενο, λοιπόν, είναι να αποδείξουμε ότι η κλασματική λύση, που δίνεται από το χαλαρωμένο πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, τελικά είναι ακέραιη. Για να το κάνουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε τη μαθηματική επαγωγή στον αριθμό των αντικειμένων $m$. Για

$m = 1$ το ζητούμενο, προφανώς, ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για λιγότερα από $m$ αντικείμενα. Για κάθε $j = 1, \ldots, m-1$, ορίζουμε ως $u_j$ το άθροισμα των ωφελειών των παικτών για τη βέλτιστη κατανομή των αντικειμένων, που ανήκουν στο σύνολο $\{g_1, \ldots, gj\}$. Έστω, τώρα, η βέλτιστη κατανομή και των $m$ αντικειμένων. Τα σύνολα, που περιέχουν το αντικείμενο $m$, και συμμετέχουν στη βέλτιστη αυτή κατανομή μπορεί να είναι το πολύ $m$ (ανάλογα με την αφετηρία-πρώτο στοιχείο του συνόλου) και έστω $f_j$, το ποσοστό με το οποίο συμμετέχουν τα σύνολα αυτά στη βέλτιστη κατανομή (που μπορεί να μην είναι ακέραια). Αν θεωρήσω ότι η τιμή της προσφοράς για το σύνολο $\{g_j, \ldots, g_m\}$ είναι $p_j$, τότε προφανώς η τιμή της βέλτιστης κατανομής φράσσεται από την σχέση $\sum_{j=1}^{m} f_j \times (p_j + u_{j-1})$. Επιλέγω ως $j$ το $j^*$ που μεγιστοποιεί την ποσότητα $p_j + u_j - 1$. Προφανώς, τότε $\sum_{j=1}^{m} f_j \times (p_j + u_{j-1}) \leq p_{j^*} + u_{j^*-1}$. Όμως η κατανομή, που επιτυγχάνει τιμή $p_{j^*} + u_{j^*-1}$, εκτός του ότι είναι βέλτιστη, είναι και ακέραια, αφού αρκεί να αποδεχτούμε την προσφορά $p_{j^*}$ για το σύνολο $\{g_{j^*}, ..., g_m\}$ και να πάρουμε την βέλτιστη κατανομή για τα πρώτα $j^* - 1$ αντικείμενα, η οποία έχουμε υποθέσει ότι είναι ακέραια από το βήμα της επαγωγής ($j^* < m$). □

Τέτοιου είδους προβλήματα, δηλαδή με προσφορές για συνεχόμενα αντικείμενα, είναι μεγάλης πρακτικής σημασίας. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη δημοπρασία για μία σειρά οικοπέδων, τα οποία βρίσκονται κατά μήκος της ακτής. Προφανώς, συμφέρει τους συμμετέχοντες να ανακοινώσουν τις προσφορές τους για συνεχόμενα κομμάτια γης, ώστε να τα ενώσουν, δημιουργώντας μεγαλύτερα οικόπεδα.

- Δημοπρασίες ενός αντικειμένου: κάθε συμμετέχων, μπορεί να κερδίσει ένα, το πολύ, αντικείμενο, δηλαδή ανακοινώνει ένα οποιονδήποτε αριθμό προσφορών της μορφής $\{j, p_j\}$, όπου $j$ το αντικείμενο που τον ενδιαφέρει και $p_j$ η αξιολόγησή του.

- Δημοπρασίες για αντικείμενα με συμμετρική και φθίνουσα αξιολόγηση (downward sloping symmetric bids): ο συμμετέχων θεωρεί τα αντικείμενα ταυτόσημα και έχει μία σειρά αξιολογήσεων $p_1 \leq p_2 \leq ... \leq p_m$, όπου η τιμή $p_j$ δηλώνει την ωφέλεια για την απόκτηση του j-οστού αντικειμένου.

Ιδεατά, ο περιορισμός των χρηστών σε ένα μόνο υποσύνολο των δυνατών στρατηγικών τους, συμβαίνει χωρίς καμία επίπτωση στις επιθυμητές ιδιότητες του μηχανισμού, δηλαδή τη φιλαλήθεια και αποδοτικότητα. Παρόλα αυτά, μπορεί οι χρήστες να προσπαθήσουν να αλλάξουν τις τιμές, που ανακοινώνουν, ώστε να επωφεληθούν. Επιπλέον, είναι πιθανό το σύνολο των αντικειμένων, που ενδιαφέρει ένα χρήστη να μην ανήκει στην ομάδα των συνόλων, για τα οποία μπορεί να εκφράσει την επιθυμία του. Σε τέτοια περίπτωση θα αναγκαστεί να ανακοινώσει μία προσεγγιστική τιμή, βασισμένη στις πραγματικές του εκτιμήσεις.

Η, ως σήμερα, έρευνα σε αυτή την κατεύθυνση δεν εξετάζει την επίδραση του περιορισμού των δυνατοτήτων ανακοίνωσης τιμών των χρηστών στις παιγνιοθεωρητικές ιδιότητες των μηχανισμών, αλλά περιορίζεται μόνο στην πολυπλοκότητα τους. Ένα ενδιαφέρον ανοικτό ερώτημα παραμένει ακόμη η ενοποίηση των θεωρήσεων αυτών.

### 3.3.7 Πολυπλοκότητα αξιολόγησης των αντικειμένων από τους παίκτες

Αφού ολοκληρώσαμε την αναφορά μας στις προσπάθειες, που έχουν γίνει για να ξεπεραστεί η δυσκολία στην επίλυση του συνήθως NP-hard προβλήματος υπολογισμού της εξόδου του μηχανισμού, θα προχωρήσουμε εξετάζοντας τις δυσκολίες που εισάγει στον αποκεντρωμένο χρήστη η περιορισμένη υπολογιστική του δύναμη.

Ως τώρα έχουμε παρουσιάσει μόνο τους VCG μηχανισμούς, οι οποίοι είναι άμεσης αποκάλυψης (direct revelation), απαιτούν δηλαδή από τους χρήστες να ανακοινώσουν στον μηχανισμό το σύνολο των προτιμήσεών τους. Αν λάβουμε υπόψη μας το πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών, καταλαβαίνει κανείς τις δυσκολίες που εμφανίζονται για τον παίκτη, Πρώτα από όλα, ο υπολογισμός της προτίμησης του για ένα συγκεκριμένο σύνολο αντικειμένων μπορεί να είναι ένα δύσκολο πρόβλημα (από άποψη υπολογιστικού χρόνου πάντα). Επιπλέον, ο παίκτης πρέπει να εκφράσει την προτίμηση του για ένα εκθετικό ($2^{|G|}$ , όπου $G$ το σύνολο των αντικειμένων) αριθμό δυνατών υποσυνόλων.

Ως τώρα, έχουν χρησιμοποιηθεί δύο προσεγγίσεις για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα, που περιγράφονται παραπάνω. Η πρώτη αφορά την ανάπτυξη κατάλληλων γλωσσών υψηλού επιπέδου, με τις οποίες ο παίκτης μπορεί να ανακοινώσει τις προτιμήσεις του, διατηρώντας έτσι τον χαρακτήρα της άμεσης αποκάλυψης του μηχανισμού. Η δεύτερη ασχολείται με την ανάπτυξη δυναμικών μηχανισμών, οι οποίοι χρησιμοποιώντας μερική πληροφορία και πολλαπλούς γύρους (iterative) υπολογίζουν την βέλτιστη κατανομή και τις πληρωμές των παικτών. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ορισμένα στοιχεία και για τις δύο αυτές μεθόδους.

#### Επιλογή Γλώσσας Προσφορών (Bidding Language)

Όπως αναφέραμε στο πρόβλημα των συνδυαστικών δημοπρασιών (combinatorial auctions) κάθε παίκτης πρέπει να έχει τη δυνατότητα να ανακοινώνει την προσφορά του για κάθε υποσύνολο αντικειμένων. Αφού υπάρχει εκθετικός αριθμός δυνατών υποσυνόλων, πρέπει ο μηχανισμός να αποφασίσει πώς οι παίκτες θα μπορούν να ανακοινώνουν τις προσφορές τους και για ποια τέτοια υποσύνολα. Ζητούμενο από την διαδικασία είναι να είναι απλή και αποδοτική, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα η προφανής λύση του να εκφράζουν οι παίκτες την προτίμησή τους για κάθε δυνατό υποσύνολο να κρίνεται μη αποδεκτή.

Τα βασικά κριτήρια για την επιλογή μίας γλώσσας προσφορών είναι η εκφραστικότητα και η απλότητά της. Συγκεκριμένα, όταν λέμε ότι μία γλώσσα πρέπει να είναι εκφραστική σημαίνει ότι πρέπει να δίνει τη δυνατότητα στους χρήστες να ανακοινώνουν τις προσφορές τους, τουλάχιστον, για το μεγαλύτερο τμήμα των δυνατών υποσυνόλων και, μάλιστα, όσο πιο δημοφιλές είναι ένα υποσύνολο τόσο πιο εύκολη να είναι η χρησιμοποιούμενη έκφραση. Από την άλλη, η γλώσσα πρέπει να είναι αρκετά απλή, ώστε η όλη διαδικασία να παραμένει αποδοτική. Η απλότητα, στην περίπτωση αυτή, έχει διπλή σημασία: αυτή, της υπολογιστικής απλότητας και αυτή της απλότητας για τον άνθρωπο, δηλαδή η έκφραση πρέπει να γίνεται γρήγορα κατανοητή από τους ανθρώπους.

Οι δύο παραπάνω έννοιες είναι αντικρουόμενες. Όσο πιο εκφραστική γίνεται μία γλώσσα, τόσο λιγότερο απλή είναι. Ζητούμενο, προφανώς, είναι να επιτύχουμε μία καλή ισορροπία ανάμεσα στις δύο αυτές ιδιότητες. Παρακάτω, θα εξετάσουμε έναν αριθμό γλωσσών, που προτάθηκαν συγκρίνοντας τις με βάση την εκφραστικότητα και την απλότητα τους. Για τη σύντομη, αυτή, μελέτη θα στηριχθούμε, κυρίως, στη δημοσίευση του Nisan [Nis00].

Για να γίνουν κατανοητά τα όσα θα ακολουθήσουν, θυμίζουμε ότι η συνάρτηση αξιολόγησης του παίκτη $i$ είναι υπερ-προσθετική (super-additive) όταν $b^j(A) + b^j(B) \leq b^j(A \cup B)$ και υπό-προσθετική (sub-additive) όταν $b^j(A) + b^j(B) \geq b^j(A \cup B)$.

Δίνουμε, επίσης, ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα συναρτήσεων αξιολόγησης των αντικειμένων από τους παίκτες, οι οποίες θα θέλαμε να μπορούν να εκφραστούν από την γλώσσα, που χρησιμοποιούμε:

- Προσθετική αξιολόγηση (additive valuation): ο παίκτης αξιολογεί κάθε υποσύνολο $k$ αντικειμένων με μία τιμή ίση με $k$, δηλαδή $u(S) = |S|$. Τα αντικείμενα αντιμετωπίζονται, δηλαδή, με τον ίδιο τρόπο. Το μόνο, που καθορίζει την τελική προσφορά είναι το πλήθος τους.

- Αξιολόγηση μοναδικού αντικειμένου (single item valuation): Ο παίκτης θέλει μόνο ένα αντικείμενο, αλλά οποιοδήποτε από τα διαθέσιμα. Έτσι, έχει συνάρτηση αξιολόγησης που ικανοποιεί το παρακάτω: $u(S) = 1$ για κάθε δυνατό σύνολο $S \subset G$. Ουσιαστικά, δηλαδή κάθε αντικείμενο είναι τέλειο υποκατάστατο κάθε άλλου.

- Αξιολόγηση K-προϋπολογισμού: Ο παίκτης αξιολογεί κάθε υποσύνολο αντικειμένων $S$ με $min(|S|, K)$. Μπορεί κανείς να δει την αξιολόγηση Κ-προϋπολογισμού σαν ειδική περίπτωση της φθίνουσας συνάρτησης αξιολόγησης (downward sloping function), που αναφέραμε σε προηγούμενο εδάφιο.

- Αξιολόγηση πλειοψηφίας: Ο παίκτης αξιολογεί με 1 κάθε υποσύνολο με πληθικότητα μεγαλύτερη ή ίση του μισού του συνόλου των αντικειμένων και με 0 κάθε σύνολο μικρότερης πληθικότητας.

- Μονοχρωματική αξιολόγηση: Το σύνολο $G$ των $m$ προς διάθεση αντικειμένων χωρίζεται σε δύο υποσύνολα μεγέθους $\frac{m}{2}$ το καθένα ταυτόσημων αντικειμένων (για λόγους απλότητας τα χαρακτηρίζουμε ως σύνολα κόκκινων και μπλε σφαιρών). Ο παίκτης επιθυμεί να αποκτήσει σφαίρες του ίδιου χρώματος προσφέροντας 1 για καθεμία. Επομένως ο παίκτης αξιολογεί ένα σύνολο με $k$ κόκκινες και $l$ μπλε σφαίρες με $max(k, l)$.

  Οι τέσσερις πρώτες συναρτήσεις είναι συμμετρικές (αντιμετωπίζουν κάθε αντικείμενο με τον ίδιο τρόπο) ενώ η τελευταία είναι αντισυμμετρική (χειρίζεται με διαφορετικό τρόπο τις κόκκινες και μπλε σφαίρες)

Στο παρακάτω τμήμα παρουσιάζουμε ορισμένες από τις γλώσσες, που έχουν διατυπωθεί, μελετώντας παράλληλα την εκφραστικότητα και την απλότητά τους.

### Βασικές Γλώσσες Προσφορών

- Γλώσσα ατομικών Προσφορών (Atomic Bids)

  Ο παίκτης κάνει προσφορά της μορφής $(S, p)$, μόνο για ένα υποσύνολο αντικειμένων S, αδιαφορώντας για τα υπόλοιπα, δηλαδή $u(T) = p$, αν $S \subset T$ και $u(T) = 0$ αλλιώς. Η γλώσσα, αυτή είναι η πιο απλή, από αυτές που θα παρουσιάσουμε, έχει όμως και πολύ περιορισμένη χρησιμότητα.

- OR-γλώσσα

  Ο κάθε παίκτης μπορεί να ανακοινώσει έναν οποιοδήποτε αριθμό από ατομικές προσφορές $(S_i, p_i)$ για τα ξένα μεταξύ τους σύνολα $S_i$ . Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο παίκτης θέλει να αποκτήσει οποιονδήποτε αριθμό από τα σύνολα αντικειμένων, για τα οποία έκανε προσφορά, πληρώνοντας το πολύ $p_i$ για το σύνολο $S_i$.

  Η OR-γλώσσα δεν μπορεί να εκφράσει όλες τις δυνατές προτιμήσεις. Συγκεκριμένα, δεν μπορεί να εκφράσει υπο-προσθετικές προσφορές. Για παράδειγμα, ας εφαρμόσουμε τη γλώσσα για την περίπτωση, που η συνάρτηση αξιολόγησης του παίκτη είναι μοναδικού αντικειμένου[4]. Για να κάνουμε την άσκηση πιο απλή περιοριζόμαστε σε δύο αντικείμενα $A$,$B$ μόνο. Έτσι, η έκφραση στην OR-γλώσσα του παίκτη θα ήταν της παρακάτω μορφής: $(\{A\}, 1)$ OR $(\{B\}, 1)$. Το προφανές μειονέκτημα της έκφρασης είναι ότι δεν περιέχει τη συνθήκη, ότι ο παίκτης θέλει να αγοράσει ένα μόνο από τα αντικείμενα, αφού σύμφωνα με τον ορισμό της γλώσσας ο παίκτης έμμεσα ανακοινώνει και την προσφορά $(\{A \cup B\}, 2)$.

- XOR-γλώσσα

  Όπως και με την OR-γλώσσα ο παίκτης μπορεί να εκφράσει την προτίμησή του πάνω σε όλα τα δυνατά υποσύνολα ανακοινώνοντας έναν αριθμό από ατομικές προσφορές $(S_i, p_i)$. Ο παίκτης, όμως αντίθετα από ότι ισχύει με την OR-γλώσσα, θέλει να αποκτήσει μόνο ένα από αυτά τα σύνολα $S_i$, για τα οποία δηλώνει την προτίμησή του. Είναι προφανές, ότι ο παίκτης μπορεί με αυτόν τον τρόπο να εκφράσει τις προτιμήσεις πάνω σε κάθε υποσύνολο, που επιθυμεί να αποκτήσει (στη χειρότερη περίπτωση ανακοινώνει μία ατομική προσφορά για κάθε δυνατό υποσύνολο - εκθετικός αριθμός υποσυνόλων). Αν και η XOR γλώσσα είναι εκφραστικά πλήρης το μειονέκτημα της είναι, ακριβώς, το ότι μπορεί να χρειαστεί εκθετικού μεγέθους μηνύματα προσφορών, αν ως μέγεθος ορίσουμε το πλήθος των ατομικών προσφορών της έκφρασης. Για παράδειγμα, η προσθετική αξιολόγηση (additive valuation) για $m$ αντικείμενα, ενώ χρειάζεται μέγεθος $m$ με την OR-γλώσσα χρησιμοποιώντας την παρακάτω έκφραση: $(\{a_1\}, 1)$ OR $(\{a_2\}, 1)$ OR ... OR $(\{a_m\}, 1)$, με την XOR γλώσσα είναι αναγκαία η χρήση ατομικών προσφορών, για όλα τα δυνατά υποσύνολα, δηλαδή παράγεται μήνυμα μεγέθους $2^m$.

- OR-of-XOR's

  Οι παραπάνω προτεινόμενες λύσεις, ενώ επιτυγχάνουν ένα ικανοποιητικό βαθμό απλότητας και σαφήνειας, παρόλα αυτά δεν είναι ταυτόχρονα εκφραστικές (OR-γλώσσα) και αποδοτικές (XOR-γλώσσα). Μία, προφανής, επέκταση είναι η χρήση υβριδικών μεθόδων, όπως η OR-of-XOR's γλώσσα. Μία έκφραση της γλώσσας αυτής έχει την εξής μορφή:

  $$c_1 \quad OR \quad c_2 \quad OR \quad \ldots \quad OR \quad c_n$$

  όπου όμως κάθε $c_i$ έχει τη μορφή:

  $$(S_1, p_1) \quad XOR \quad (S_2, p_2) \quad XOR \quad \ldots \quad XOR \quad (S_m, p_m)$$

[4]Η αξιολόγηση μοναδικού αντικειμένου είναι υπο-προσθετική, αφού ενώ για $v(S_1) = 1$ και $v(S_2) = 1$ ισχύει και $v(S_1 \cup S_2) = 1 < v(S_1) + v(S_2)$

Σύμφωνα με τον ορισμό της OR- και της XOR-γλώσσας ο παίκτης είναι πρόθυμος να αποκτήσει έναν οποιονδήποτε αριθμό των αντικειμένων των XOR-προσφορών, παίρνοντας, όμως, το πολύ ένα αντικείμενο από την καθεμιά. Η γλώσσα αυτή είναι περισσότερο εκφραστική από την OR-γλώσσα, και μάλιστα είναι εκφραστικά πλήρης σαν γενίκευση περίπτωση της XOR γλώσσας, αφού κάθε XOR πρόταση μπορεί να παρασταθεί στην OR-of-XOR's γλώσσα, όπου η OR πρόταση αποτελείται μόνο από μία XOR προσφορά. Η δύναμη της φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα:

**Πρόταση 3.17.** *Η γλώσσα OR-of-XOR's μπορεί να εκφράσει κάθε συμμετρική φθίνουσα συνάρτηση αξιολόγησης (downward sloping valuation function) σε $m$ αντικείμενα με $m^2$ ατομικές προσφορές.*[5]

*Απόδειξη.* Απλά, κατασκευάζουμε μία OR-of-XOR's έκφραση ως εξής:

$$c_1 \quad OR \quad c_2 \quad OR \quad \ldots \quad OR \quad c_m$$

όπου

$$c_j = (s_1, p_j) \quad XOR \quad (s_2, p_j) \quad XOR \quad \ldots \quad XOR \quad (s_m, p_j)$$

και $s_1, s_2, ..., s_m$ τα αντικείμενα προς διάθεση και $p_j$ η j-οστή υψηλότερη τιμή. Ουσιαστικά, λοιπόν, για κάθε τιμή της φθίνουσας ακολουθίας, φτιάχνουμε μία XOR πρόταση με $m$ ατομικές προσφορές, μία για κάθε αντικείμενο, στην τιμή αυτή. Το μήκος της τελικής έκφρασης είναι $m^2$. □

Παρόλα αυτά, δεν είναι πάντοτε αποδοτική, όπως φαίνεται από το παρακάτω αντιπαράδειγμα:

**Θεώρημα 3.18.** *Η μονοχρωματική αξιολόγηση απαιτεί έκφραση μεγέθους τουλάχιστον $2 \cdot 2^{\frac{m}{2}}$ στην OR-of-XOR's γλώσσα προσφορών.*

*Απόδειξη.* Έστω έκφραση σε OR-of-XOR's γλώσσα, η οποία ισοδυναμεί με παράσταση της μονοχρωματικής αξιολόγησης στο σύνολο των αντικειμένων. Η έκφραση αυτή θα αποτελείται από ατομικές προσφορές της μορφής $(S, p)$, όπου $S$ υποσύνολο, του οποίου όλα τα μέλη έχουν το ίδιο χρώμα, γιατί αν υποθέσουμε ότι στο $S$ ανήκει και ένας αριθμός $k < \frac{|S|}{2}$ σφαιρών του άλλου χρώματος, η αφαίρεση τους δεν επηρεάζει

[5]Η συμμετρική φθίνουσα συνάρτηση αξιολόγησης δεν μπορεί να εκφραστεί στην OR-γλώσσα, ενώ χρειάζεται εκθετικό μήκος στην XOR γλώσσα.

την τιμή $p$ της αξιολόγησης. Επομένως, από τον ορισμό της μονοχρωματικής αξιολόγησης η τιμή $p$ είναι ίση με τον αριθμό των σφαιρών στο $S$, δηλαδή $p = |S|$.

Ακόμη, είναι εύκολο να δει κανείς, ότι η έκφραση θα αποτελείται τελικά από μία και μόνο XOR πρόταση. Έστω, ότι υπήρχαν δύο XOR προτάσεις, που συνδέονταν με ένα OR μεταξύ τους και δύο προσφορές για π.χ. μπλε αντικείμενα. Τότε, μία προσφορά για αντικείμενα του άλλου χρώματος π.χ. κόκκινου θα ήταν οπωσδήποτε στην ίδια XOR πρόταση με μία για μπλε αντικείμενα. Όμως, τότε ο μηχανισμός μπορεί να επιλέξει ατομικές προσφορές διαφορετικών χρωμάτων, κάτι που οδηγεί στο ακόλουθο πρόβλημα: αν διάλεγε την προσφορά για κόκκινα αντικείμενα $(S, p)$, από την XOR πρόταση 1 και την προσφορά για μπλε αντικείμενα $(S^{'}, p^{'})$, από την XOR πρόταση 2, τότε η συνολική του αξιολόγηση για το σύνολο $S \cup S^{'}$ θα ήταν $|S| + |S^{'}|$ και όχι $min(|S|, |S^{'}|)$, όπως πρέπει από τον ορισμό.

Επομένως, η έκφραση αποτελείται από μία XOR πρόταση, στην οποία πρέπει να δίνεται η δυνατότητα στον παίκτη να εκφράζει την προτίμησή για κάθε δυνατό υποσύνολο αντικειμένων. Υπάρχουν $2^{\frac{m}{2}}$ δυνατά υποσύνολα για κάθε χρώμα, άρα μία τέτοια πρόταση στην χειρότερη περίπτωση θα έχει εκθετικό μήκος, $2 \cdot 2^{\frac{m}{2}}$. □

- XOR-of-OR's γλώσσα

  Όμοια, μπορούμε να ορίσουμε την XOR-of-OR's γλώσσα, της οποίας η έννοια είναι ότι ο παίκτης ανακοινώνει έναν αριθμό από OR bids, από τις οποίες είναι πρόθυμος να αποδεχτεί μία. Μία έκφραση της γλώσσας αυτής έχει την εξής μορφή:

$$c_1 \quad XOR \quad c_2 \quad XOR \quad \ldots \quad XOR c_n$$

  όπου όμως κάθε $c_i$ έχει τη μορφή:

$$(S_1, p_1) \quad OR \quad (S_2, p_2) \quad OR \quad \ldots \quad OR \quad (S_m, p_m)$$

  Η XOR-of-OR's γλώσσα είναι σε ορισμένες περιπτώσεις πιο αποδοτική, από την OR-of-XOR's, που περιγράψαμε προηγουμένως. Για παράδειγμα, μπορεί να εκφράσει τη μονοχρωματική αξιολόγηση με έκφραση μεγέθους $m$ ως εξής:

$$c_1 \quad XOR \quad c_2$$

  όπου

$$c_1 = (s_1, 1) \quad OR \quad (s_2, 1) \quad OR \quad \ldots (s_{\frac{m}{2}}, 1)$$

και

$$c_2 = (s_{\frac{m}{2}+1}, 1) \quad OR \quad (s_{\frac{m}{2}+2}, 1) \quad OR \quad \ldots (s_m, 1))$$

θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι τα αντικείμενα $s_1, \ldots, s_{\frac{m}{2}}$ είναι του ίδιου χρώματος και τα $s_{\frac{m}{2}+1}, \ldots, s_m$ του άλλου.

Όμως παρόλα αυτά δεν είναι πάντοτε αποδοτικότερη ή έστω το ίδιο αποδοτική με την προηγούμενη γλώσσα όπως αποδεικνύεται στο επόμενο θεώρημα, του οποίου την απόδειξη αφήνουμε στον αναγνώστη.

**Θεώρημα 3.19.** *Έστω $K = \frac{\sqrt{m}}{2}$. Τότε η αξιολόγηση K-προϋπολογισμού απαιτεί έκφραση μεγέθους τουλάχιστον $2^{m^{\frac{1}{4}}}$, στην XOR-of-OR's γλώσσα.*

Οι δύο υβριδικές μέθοδοι, που περιγράψαμε τελευταία, επιτυγχάνουν καλύτερα αποτελέσματα, από τις βασικές γλώσσες από τις οποίες προέρχονται. Παρόλα αυτά, δεν είναι η λύση του προβλήματος, αφού υπάρχουν προβλήματα, στα οποία παράγουν μηνύματα εκθετικού μεγέθους. Μάλιστα, είναι αδύνατο, να πει κανείς ποια από τις δύο είναι πιο χρήσιμη, αφού υπάρχουν συναρτήσεις αξιολόγησης, για τις οποίες η μία υπερτερεί της άλλης και το αντίστροφο. Τέλος, με την ίδια λογική μπορούμε να γενικεύσουμε και τις υβριδικές αυτές γλώσσες στην OR/XOR φόρμουλα, σύμφωνα με την οποία χρησιμοποιείται ένας οποιοσδήποτε συνδυασμός OR και XOR εκφράσεων. Ακόμη, και αυτή η γενίκευση δεν είναι πάντοτε αποδοτική.

- OR-γλώσσα με αντικείμενα-φαντάσματα ή OR* γλώσσα

  Η γλώσσα αυτή επιτρέπει τη χρήση ψεύτικων αντικειμένων, με τη βοήθεια των οποίων επιτυγχάνουμε μεγαλύτερη εκφραστικότητα και αποδοτικότητα. Κάθε παίκτης μπορεί να ανακοινώσει έναν αριθμό ατομικών προσφορών $(S_i, p_i)$, όπου, όμως $S_i \subset G \cup G_p$, όπου $G_p$, το σύνολο των αντικειμένων-φαντασμάτων, το οποίο είναι ξένο με το σύνολο των πραγματικών αντικειμένων $G$. Τα αντικείμενα αυτά δεν έχουν καμία πραγματική υπόσταση.

  Η ιδέα πίσω από την προσθήκη αυτή των αντικειμένων-φαντασμάτων είναι ότι μία XOR προσφορά, π.χ. η $(S_1, p_1) \quad XOR \quad (S_2, p_2)$ μπορεί να γραφεί ως OR προσφορά με τη βοήθεια ενός αντικειμένου-φαντάσματος $g$ ως εξής:

  $$(S_1 \cup g, p_1) \quad OR \quad (S_2 \cup g, p_2)$$

  Ο μηχανισμός απονέμει στον παίκτη οποιονδήποτε αριθμό ξένων μεταξύ τους συνόλων, αν χρησιμοποιείται OR αναπαράσταση, κάτι που στην περίπτωση μας σημαίνει είτε το $S_1 \cup \{g\}$ είτε το $S_2 \cup \{g\}$, αλλά όχι και τα δύο μαζί, αφού $S_1 \cup \{g\} \cap S_2 \cup \{g\} \neq 0$, προσομοιώνοντας ουσιαστικά μία XOR προσφορά.

Η OR γλώσσα με αντικείμενα-φαντάσματα $OR^*$ είναι η πιο αποδοτική ως τώρα, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 3.20.** *Κάθε έκφραση σε OR/XOR φόρμουλα (επομένως και σε OR-of-XOR's και XOR-of-OR's) μήκους $s$ μπορεί να γραφεί στην $OR^*$ με μηνύματα μήκους, επίσης $s$, με την προσθήκη το πολύ $s^2$ phantom αντικειμένων.*

*Απόδειξη.* Η απόδειξη θα στηριχθεί στα παρακάτω λήμματα:

**Λήμμα 3.21.** *Κάθε αξιολόγηση στην γλώσσα OR-of-XOR's με μήκος έκφρασης ίσο με $s$, μπορεί να αναπαρασταθεί στην $OR^*$ με μήκος πάλι $s$, προσθέτοντας το πολύ $\frac{s}{2}$ αντικείμενα-φαντάσματα.*

*Απόδειξη.* Για κάθε XOR πρόταση με παραπάνω από μία ατομικές προσφορές πρέπει να προσθέσουμε στην έκφραση της $OR^*$ γλώσσας ένα αντικείμενοφάντασμα, αποτρέποντας έτσι την ταυτόχρονη απονομή των συνόλων των ατομικών προσφορών σε κάποιον από τους παίκτες. Επομένως, στην χειρότερη περίπτωση θα έχουμε $\frac{s}{2}$ αντικείμενα-φαντάσματα στην έκφραση της $OR^*$ γλώσσας □

**Λήμμα 3.22.** *Κάθε αξιολόγηση στην γλώσσα XOR-of-OR's με μήκος έκφρασης ίσο με $s$, μπορεί να αναπαρασταθεί στην $OR^*$ με μήκος πάλι $s$, προσθέτοντας το πολύ $\frac{s\cdot(s-1)}{2}$. αντικείμενα-φαντάσματα.*

*Απόδειξη.* Για κάθε ζευγάρι ατομικών προσφορών $(S,p)$ και $(T,q)$, που ανήκουν σε διαφορετικές OR-προσφορές εισάγουμε ένα αντικείμενο-φάντασμα $x_{ST}$. Οπότε το πολύ να εισάγουμε με αυτό τον τρόπο $\frac{s\cdot(s-1)}{2}$ νέα αντικείμενα. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε το θεώρημα χρησιμοποιώντας επαγωγή. Για να κατασκευάσουμε την τελική έκφραση χρησιμοποιούμε τις μεθόδους των λημμάτων. Με αυτό τον τρόπο, μπορεί να φτάσουμε σε μεγάλο αριθμό αντικειμένων-φαντασμάτων, αλλά σε έκφραση ίδιου μήκους με την αρχική. Έπειτα, μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των αντικειμένων, κρατώντας μόνο τα απαραίτητα. Για κάθε ζευγάρι προσφορών, που δεν μπορούν να διατυπωθούν μαζί πρέπει να εισάγουμε ένα τέτοιο αντικείμενο. Αυτό καταλήγει σε αντικατάσταση των αντικειμένων με το πολύ $\binom{s}{2}$. Επομένως, το ζητούμενο ισχύει. □

Επομένως, είναι τουλάχιστον όσο δυνατή, όσο και όλες οι προηγούμενες, κάτι που μεταφράζεται στο ότι είναι γνησίως πιο δυνατή από τις XOR-of-OR's και OR-of-XOR's, αφού υπάρχουν εκφράσεις, που απαιτούν εκθετικό μέγεθος μηνυμάτων με την XOR-of-OR's γλώσσα αλλά πολυωνυμικό με την OR-of-XOR's. Είναι άγνωστο αν είναι και γνησίως ισχυρότερη της γενικευμένης OR/XOR φόρμουλας. Παρόλα αυτά, έχει και η $OR^*$ περιορισμούς:

**Θεώρημα 3.23.** *Η αξιολόγηση πλειοψηφίας απαιτεί έκφραση μεγέθους, τουλάχιστον* $\binom{m}{\frac{m}{2}}$*, στην* $OR^*$ *γλώσσα.*

*Απόδειξη.* Από τον ορισμό της αξιολόγησης πλειοψηφίας κάθε υποσύνολο $S$ με $|S \cap G| < \frac{m}{2}$ (τα πραγματικά αντικείμενα) πρέπει να έχει τιμή προσφοράς 0, ενώ κάθε άλλο με $|S \cap G| \geq \frac{m}{2}$ έχει τιμή 1. Όμως, ο παίκτης δεν μπορεί να δηλώσει την τιμή υποσυνόλων $S$ με $|S \cap G| = \frac{m}{2}$ ίση με 1 συνδυάζοντας OR προσφορές για μικρότερα σύνολα (καθένα από τα οποία θα έχει τιμή 0), επομένως θα πρέπει να υπάρχει ατομική προσφορά για κάθε τέτοια υποσύνολο. Η έκφραση, λοιπόν, θα έχει μέγεθος τουλάχιστον $\binom{m}{\frac{m}{2}}$. $\square$

# Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογές σε προβλήματα δικτύων

Όπως τονίσαμε στην εισαγωγή της παρούσας εργασίας, η στροφή του ενδιαφέροντος της κοινότητας της Θεωρητικής Πληροφορικής στη Θεωρία Παιγνίων και στο Σχεδιασμό Μηχανισμών, οφείλεται κατά ένα μεγάλο ποσοστό στην εδραίωση του Internet και στην εμφάνιση νέων προβλημάτων από αυτό. Στο κεφάλαιο αυτό, λοιπόν, θα ξεφύγουμε από τα παραδοσιακά προβλήματα, που μελετούνται στα πλαίσια του Σχεδιασμού Μηχανισμών (π.χ. δημοπρασίες) και θα εφαρμόσουμε μεθόδους που περιγράψαμε παραπάνω σε δικτυακά περιβάλλοντα. Τα προβλήματα αυτά, ανήκουν στην κατηγορία του Κατανεμημένου Αλγοριθμικού Σχεδιασμού Μηχανισμών (ΚΑΣΜ), που αποτελεί μία από τις πιο υποσχόμενες περιοχές έρευνας για τα επόμενα χρόνια.

Το κεφάλαιο 4 έχει την ακόλουθη δομή: αρχικά, στο εδάφιο 4.1 θα δούμε τις δύο πιο επιτυχημένες εφαρμογές του ΚΑΣΜ σε ρεαλιστικά προβλήματα. Στο επόμενο εδάφιο θα εξετάσουμε άλλες εφαρμογές, στις οποίες θα μπορούσαν να επεκταθούν τα θεωρητικά αποτελέσματα του ΚΑΣΜ. Στα δύο τελευταία εδάφια θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα του ΚΑΣΜ ανεξάρτητα των εφαρμογών με σκοπό να θεμελιώσουμε ακριβώς τις σχετικές με αυτό έννοιες. Γενικά, το κεφάλαιο αυτό θα στηριχθεί στις δημοσιεύσεις [AFK$^+$01], [FPSS02], [FS02] και [FPS01].

## 4.1 Αποτελέσματα του ΚΑΣΜ

Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της χρήσης του ΚΑΣΜ σε δύο ενδιαφέροντα προβλήματα, αυτό του καταμερισμού του κόστους multicast μεταδόσεων και αυτό της interdomain δρομολόγησης.

### 4.1.1 Καταμερισμός του κόστους σε multicast μεταδόσεις

Μία εταιρεία διανομής ζωντανού ραδιοτηλεοπτικού υλικού (π.χ. ποδοσφαιρικοί αγώνες, μουσικές συναυλίες) χρησιμοποιεί το Internet για τη μεταφορά των αντίστοιχων αρχείων στους προσωπικούς υπολογιστές των πελατών της, οι οποίοι βρίσκονται διασκορπισμένοι σε όλο τον κόσμο. Ο κεντρικός κόμβος της εταιρείας συνδέεται με τους κόμβους των πελατών της. Κάθε τέτοια σύνδεση έχει ένα συγκεκριμένο κόστος, το οποίο εξαρτάται από διάφορες παραμέτρους, όπως π.χ. την γεωγραφική απόσταση του χρήστη από την έδρα της εταιρείας. Για παράδειγμα αν η τελευταία εδρεύει στην Γερμανία, η μεταφορά του υλικού στο εσωτερικό της χώρας είναι αρκετά πιο φθηνή από ότι στην Ελλάδα.

Η παραδοσιακή μορφή δρομολόγησης στο Internet είναι η λεγόμενη *unicast δρομολόγηση*, κατά την οποία κάθε πακέτο στέλνεται από τη πηγή σε κάθε ένα παραλήπτη ξεχωριστά. Αυτό έχει το μειονέκτημα, ότι πολλά ίδια πακέτα κινούνται στο δίκτυο κοντά στον κόμβο προέλευσης, δημιουργώντας κυκλοφοριακή συμφόρηση. Το πρόβλημα γίνεται ακόμη μεγαλύτερο, όσο αυξάνεται το μέγεθος των πακέτων προς μετάδοση, π.χ. ταινίες video.

Μία εναλλακτική μέθοδος μετάδοσης ίδιων πακέτων σε πολλούς χρήστες είναι η λεγόμενη *multicast δρομολόγηση*. Σύμφωνα με αυτή, ο μηχανισμός δημιουργεί ένα κατευθυνόμενο δέντρο, που ενώνει κάθε παραλήπτη με την πηγή μέσω των άλλων παραληπτών και καθένας δρα παράλληλα ως αποδέκτης και ως δρομολογητής μεταδίδοντας το πακέτο στα παιδιά του. Το πρόβλημα προκύπτει από το ότι πρέπει να βρεθεί ένας κατάλληλος αλγόριθμος κατανομής του κόστους, που αποφασίζει ποιοι από τους χρήστες θα λάβουν την πληροφορία και σε ποια τιμή. Ένας τέτοιου είδους μηχανισμός ονομάζεται *μηχανισμός καταμερισμού κόστους (cost sharing mechanism)*. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι θα χρησιμοποιήσουμε ένα απλουστευμένο μοντέλο. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι το multicast δέντρο για κάθε υποσύνολο $R$ του συνόλου των χρηστών $P$ είναι δεδομένο. Αυτό, μπορεί να υλοποιηθεί εύκολα αν διατηρούμε για κάθε χρήστη ένα καθορισμένο σύνολο μονοπατιών από την πηγή. Έτσι, το σύστημα κερδίζει σε σταθερότητα και ευκολία υλοποίησης, μπορεί όμως να χάνει σε αποδοτικότητα, αφού αγνοεί ποιοι άλλοι χρήστες συμμετέχουν, κάτι που πιθανότατα θα οδηγούσε σε καλύτερες λύσεις. Η κατεύθυνση, αυτή, όμως, προτιμάται και από τα πρώτα πρωτόκολλα, που προτάθηκαν για το πρόβλημα.

Ας ορίσουμε όμως πιο τυπικά το πρόβλημα. Θεωρούμε ένα σύνολο χρηστών $P$, το οποίο αντιπροσωπεύει τους πελάτες της εταιρείας. Αυτοί συνδέονται μεταξύ τους με ένα σύνολο συνδέσμων δύο κατευθύνσεων (bi-directional links), το οποίο ονομάζουμε $L$, δημιουργώντας ένα δέντρο με ρίζα τον κεντρικό κόμβο της εταιρείας, που υποθέτουμε ότι διαθέτει την προς μετάδοση πληροφορία. Η χρήση κάθε συνδέσμου $e \in L$ έχει κάποιο κόστος που συμβολίζουμε με $l_e$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι κάθε χρήστης έχει χρησιμότητα $u_i$ να λάβει την πληροφορία, η οποία όμως είναι ιδιωτική και άγνωστη στον μηχανισμό. Σκοπός μας είναι να να σχεδιάσουμε μία διαδικασία, η οποία ως είσοδο να λαμβάνει μία συνάρτηση των χρησιμοτήτων των παικτών και να δίνει ως έξοδο ένα υποσύνολο τους $R$, που θα λάβει την πληροφορία (το σύνολο των νικητών) και πόσο θα πληρώσει ο καθένας. Τέλος, ορίζουμε ως $w_i = u_i \cdot \sigma_i - x_i$ την ωφέλεια κάθε παίκτη, όπου $x_i$ το ποσό που πληρώνει και $\sigma_i$ μία δυαδική μεταβλητή ($\sigma_i = 0, 1$), που δηλώνει αν ο χρήστης συμμετέχει ή όχι στο υποσύνολο των νικητών $R \subseteq P$. Επιπρόσθετα θα θέλαμε ο μηχανισμός να ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- φιλαλήθεια (Truthfulness): Σύμφωνα με το πνεύμα της εργασίας, οι χρήστες ανακοινώνουν εκείνη την τιμή στον μηχανισμό, που μεγιστοποιεί την ωφέλεια τους, η οποία τιμή δεν είναι απαραίτητα ίδια με την πραγματική. Σκοπός του μηχανισμού είναι να κινητοποιήσει τους παίκτες με διάφορα ανταλλάγματα να πουν την αλήθεια.
- Έλλειψη θετικών Συνεισφορών (No Positive Transfers): $x_i \geq 0$. Αυτό σημαίνει ότι ο μηχανισμός δεν πληρώνει κανένα από τους συμμετέχοντες να λάβουν την πληροφορία.
- Εθελοντική Συμμετοχή: $w_i \geq 0$. Οι χρήστες είναι ελεύθεροι να μη λάβουν την πληροφορία και να μη χρεωθούν, αν αυτό τους συμφέρει.
- Κυριαρχία των πελατών (Consumer Sovereignty): Για κάθε χρήστη $i$, $\sigma(u|^i u_i) = 1$ για αρκετά μεγάλο ποσό $u_i$. Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι αν ένας χρήστης είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένα ποσό μεγαλύτερο από κάποιο όριο, που καθορίζεται από το δίκτυο, τότε ο μηχανισμός δεν μπορεί παρά να στείλει την πληροφορία στον πελάτη.
- Αποδοτικότητα: $\sum_{i \in R} w_i \geq \sum_{i \in R'} w_i$, $\forall R' \subseteq P$. Αυτό ισοδυναμεί με την μεγιστοποίηση της ολικής ωφέλειας του δικτύου για το επιλεγμένο σύνολο νικητών. Προφανώς, η ιδιότητα αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, επειδή το αποτέλεσμα που εξασφαλίζεται αν πληρείται, είναι το πλέον επιθυμητό από τους πελάτες.
- Ισοσκελισμένος Προϋπολογισμός (Budget Balance): Έστω $c(R)$, το κόστος του υποδέντρου των νικητών $R \subseteq P$. Τότε η ιδιότητα αυτή ορίζεται από τη σχέση: $\sum_{i \in R} x_i = c(R)$. Ουσιαστικά δηλαδή, οι πληρωμές των παικτών πρέπει να καλύπτουν ακριβώς το κόστος στης μετάδοσης. Η αιτιολόγηση για την αναγκαιότητα της ιδιότητας αυτής είναι ότι η εταιρεία που παρέχει την υπηρεσία πρέπει (α) να καλύπτει τα έξοδά της (β) να νικήσει τον ανταγωνισμό παρέχοντας την υπηρεσία στο χαμηλότερο κόστος για τους χρήστες, ουσιαστικά, δηλαδή, με μηδενικό κέρδος.

Σύμφωνα με τα αρνητικά αποτελέσματα, που παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 2, δεν υπάρχει μηχανισμός, που επιτυγχάνει να συνδυάσει το σύνολο των παραπάνω ιδιοτήτων. Συγκεκριμένα, δεν υπάρχει φιλαλήθης μηχανισμός, που να είναι ταυτόχρονα αποδοτικός και με ισοσκελισμένο προϋπολογισμό, όπως αποδεικνύει το θεώρημα των Hurwicz, Green και Laffont. Οι Moulin και Shenker ([MS97]), εξετάζουν μία γενίκευση του προβλήματος θεωρώντας ως μόνους περιορισμούς τα παρακάτω:

- Η συνάρτηση κόστους είναι *υπο-προτυπώδης (submodular)*, αν $\forall S \subseteq S'$ με $i \notin S'$ τότε,

  $$c(S \cup \{i\}) - c(S) \geq c(S' \cup \{i\}) - c(S').$$

  Δηλαδή όσο περισσότεροι ανήκουν στο σύνολο των πελατών, τόσο λιγότερο κοστίζει η εξυπηρέτηση ενός ακόμη.

- Η συνάρτηση κατανομής του κόστους $x(i, S)$ είναι *διαμονοτονική (cross-monotonic)*, δηλαδή,

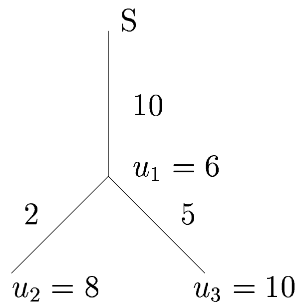
  $$x(i, S) \geq x(i, S')$$

  για κάθε $S \subseteq S'$
  Ουσιαστικά, δηλαδή, όσο περισσότεροι είναι οι νικητές, τόσο μικρότερο είναι το αντίτιμο, που πρέπει να πληρώσουν.

Σε αυτό το μοντέλο φτάνουν στο συμπέρασμα ότι οι μόνοι μηχανισμοί, που είναι φιλαλήθεις και υπολογιστικά υλοποιήσιμοι είναι *ο Μηχανισμός Οριακού Κόστους (ΜΟΚ) (Marginal Cost Mechanism)* και *η τιμή του Shapley*, για τους οποίους θα μιλήσουμε παρακάτω.

### 4.1.2 Ο Μηχανισμός Οριακού Κόστους

Η εκτέλεση του Μηχανισμού Οριακού Κόστους αποτελείται από δύο διακριτές φάσεις. Κατά την πρώτη φάση απαιτείται από κάθε κόμβο του δικτύου διανομής η αποστολή μίας τιμής, που εκφράζει την συνολική ωφέλεια του υποδέντρου, του οποίου ο κόμβος αυτός είναι ρίζα. Η αποστολή αυτή αρχίζει από τα φύλλα του δέντρου προς τα πάνω. Πιο συγκεκριμένα κάθε κόμβος $a$ στέλνει την τιμή $\min(\sum_{i \in R_a} w_i, 0)$, όπου $R_a$ το υποδέντρο με ρίζα τον κόμβο $a$ στον πατέρα του. Η πρώτη, αυτή, φάση συνεχίζεται ως ότου φτάσει η τελική τιμή φτάσει στην ρίζα του δέντρου, δηλαδή στον κεντρικό κόμβο της εταιρείας. Αν η τιμή αυτή είναι θετική, σημαίνει ότι η επιθυμία των χρηστών, που ανήκουν στο δέντρο, η οποία εκφράζεται μέσω της χρησιμότητάς τους $u_i$, είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να καλύψει το κόστος εκπομπής της πληροφορίας σε αυτούς. Αν πάλι είναι μηδενική, κανένας από τους χρήστες δεν λαμβάνει την πληροφορία,




Σχήμα 4.1: Παράδειγμα Εφαρμογής του ΜΟΚ

αφού δεν επιθυμούν αρκετά την εκπομπή. Η διαδικασία αυτή είναι αναδρομική, δηλαδή όποτε εμφανίζεται μηδενική τιμή ωφέλειας σε κάποιο κόμβο, τότε αυτός αυτόματα αποκλείει το υποδέντρο, του οποίου είναι ρίζα και στέλνει τιμή 0 στον πατέρα του.

Κατά τη δεύτερη φάση πραγματοποιούνται οι πληρωμές των χρηστών-νικητών στον μηχανισμό. Αυτές ακολουθούν το VCG σχήμα και εκφράζονται με την ακόλουθη φόρμουλα:

$$x_i = \sigma_i(u)u_i - (\sum_{i \in R^*} u_i - c(R^*)) + (\sum_{j \in R^*, j \neq i} u_j - c(R^* - i))$$

όπου $R^* \subseteq P$ το υποσύνολο χρηστών, που λαμβάνει την πληροφορία. Το δεύτερο άθροισμα εκφράζει την αποδοτικότερη λύση (τη λύση, δηλαδή με το μέγιστο άθροισμα ωφελειών των χρηστών) υποθέτοντας ότι ο παίκτης $i$, του οποίου την πληρωμή υπολογίζουμε, δεν συμμετέχει στο δέντρο διανομής.

Ουσιαστικά, λοιπόν, ο μηχανισμός επιβραβεύει τον χρήστη για την ειλικρίνεια του επιστρέφοντάς του ποσό ίσο με το κέρδος, που αποκόμισε ο μηχανισμός λόγω της συμμετοχής του. Αυτός, ακριβώς, ο αλγόριθμος πληρωμών κάνει τον μηχανισμό φιλαλήθη, αφού ο χρήστης χάνει ανακοινώνοντας τιμή διαφορετική της πραγματικής του (θεώρημα Groves). Επιπλέον, ο ΜΟΚ πληρεί και όλες τις υπόλοιπες επιθυμητές ιδιότητες, εκτός του ισοσκελισμένου προϋπολογισμού, κάτι που είναι χαρακτηριστικό της VCG οικογένειας μηχανισμών.

Για να γίνουν όλα τα παραπάνω περισσότερο κατανοητά ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα χρήσης του αλγορίθμου (σχήμα 4.1).

Σύμφωνα με την φόρμουλα των VCG πληρωμών, το ποσό που αντιστοιχεί σε κάθε παίκτη είναι ίσο με:

- $x_1 = u_1 - [(u_1 + u_2 + u_3) - (c_1 + c_2 + c_3)] + [(u_2 + u_3) - (c_2 + c_3)] = 6 - [(6 + 8 + 10) - (10 + 2 + 5)] + [(8 + 10) - (10 + 2 + 5)] = 0$

- $x_2 = u_2 - [(u_1 + u_2 + u_3) - (c_1 + c_2 + c_3)] + [(u_1 + u_3) - (c_1 + c_3)] = 8 - [(6 + 8 + 10) - (10 + 2 + 5)] + [(6 + 10) - (10 + 5)] = 2$
- $x_3 = u_3 - [(u_1 + u_2 + u_3) - (c_1 + c_2 + c_3)] + [(u_1 + u_2) - (c_1 + c_2)] = 10 - [(6 + 8 + 10) - (10 + 2 + 5)] + [(6 + 8) - (10 + 2)] = 5$

Το βασικό μειονέκτημα του ΜΟΚ, όπως επισημάναμε και παραπάνω είναι ότι τελικά, για να εξασφαλίσει ο μηχανισμός ότι οι παίκτες θα ανακοινώσουν τις πραγματικές τους τιμές, τους πληρώνει, με αποτέλεσμα το κόστος της διαδικασίας να υπερβαίνει πάντοτε τις πληρωμές από τους παίκτες. Αυτό είναι εμφανές στο προηγούμενο παράδειγμα, σύμφωνα με το οποίο ενώ το τελικό δέντρο διανομής είχε κόστος 17, οι παίκτες πλήρωσαν μόνο 7, δημιουργώντας ζημιά 10 χρηματικών μονάδων για τον μηχανισμό. Μάλιστα, είναι χαρακτηριστικό ότι όσο περισσότερο οι παίκτες θέλουν να λάβουν το υλικό (δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το άθροισμα $\sum_{i \in R} w_i$ τόσο μεγαλύτερη είναι και η ζημιά του μηχανισμού - αυτό προκύπτει ως συνέπεια της φόρμουλας πληρωμών).

Για αυτό το λόγο, αξίζει να σημειώσουμε ότι ο ΜΟΚ έχει πρακτική εφαρμογή μόνο στην περίπτωση, που η υπερκάλυψη του κόστους δεν είναι βασική προϋπόθεση για τη λύση του προβλήματος. Ο ΜΟΚ, όπως προαναφέραμε δεν ικανοποιεί την ιδιότητα του ισοσκελισμένου προϋπολογισμού (budget balance), κάτι που σημαίνει ότι καμία κερδοσκοπική εταιρεία δεν θα είχε ενδιαφέρον στο να υλοποιήσει την υπηρεσία. Αντίθετα, θα μπορούσε να έχει εφαρμογή σε περιπτώσεις που το κόστος καλυπτόταν από άλλους πόρους (π.χ. αναγκαστική φορολογία) και κριτήριο για την επιτυχία του μηχανισμού ήταν η μεγιστοποίηση της ωφέλειας των χρηστών.

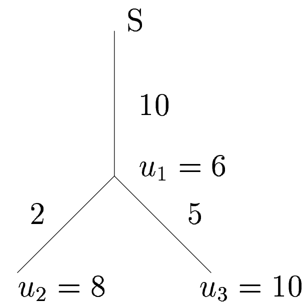
### 4.1.3 Ο Μηχανισμός της Shapley τιμής

Ο μηχανισμός που στηρίζεται στη Shapley τιμή, πρακτικά, ικανοποιεί την παρακάτω λογική απαίτηση: το κόστος κάθε συνδέσμου, που συμμετέχει στο τελικό υποδέντρο διανομής καλύπτεται από τους κόμβους, οι οποίοι τον χρησιμοποιούν. Πιο συγκεκριμένα ο μηχανισμός λειτουργεί επαναληπτικά ως εξής: γίνεται μία διάσχιση του δέντρου από κάτω προς τα πάνω, κατά την οποία κάθε κόμβος $a$ καταμετρά τον αριθμό των κόμβων, που συμμετέχουν στο υποδέντρο με ρίζα τον ίδιο. Αφότου η φάση αυτή ολοκληρωθεί, αρχίζει η φάση του υπολογισμού των πληρωμών. Κατά τη διάρκεια της, γίνεται μία διάσχιση του δέντρου με αντίθετη φορά (δηλαδή από πάνω προς τα κάτω). Κάθε κόμβος στέλνει στα παιδιά του μία τιμή $md$, η οποία αρχικοποιείται από τη ρίζα ως ίση με το 0. Αφού ο κόμβος $a$ λάβει την md από τον πατέρα του, υπολογίζει και στέλνει στα παιδιά του, την έκφραση $md' = md + (c(l_e)/p_a)$, όπου $c(l_e)$ το κόστος της ακμής $e$, που συνδέει τον κόμβο $a$ με τον πατέρα του και $p_a$ ο αριθμός των κόμβων του υποδέντρου με ρίζα τον $a$, που υπολογίστηκε στην προηγούμενη φάση. Αυτή η τιμή $md^{'}$ που λαμβάνει ο κάθε κόμβος, εκφράζει το ποσό, που καλείται να πληρώσει, για να λάβει την πληροφορία.

Η δυσκολία του μηχανισμού, όμως, προκύπτει από το ότι ως απαίτηση του, είναι η εθελοντική συμμετοχή των χρηστών. Υπάρχει, δηλαδή, περίπτωση, στην διαδικασία, που περιγράψαμε το ποσό που πρέπει να πληρώσει ο παίκτης $i$ να υπερβαίνει τη χρησιμότητά του ($md^{'} > u_i$), οπότε σύμφωνα με την εθελοντική συμμετοχή να έχει το δικαίωμα να μη λάβει την πληροφορία και να μη πληρώσει τίποτα. Για αυτό είναι απαραίτητο, ο παραπάνω μηχανισμός να είναι επαναληπτικός, ως εξής: μόλις, υπολογιστεί, το κόστος συμμετοχής του παίκτη στη διανομή της πληροφορίας, να μπορεί αυτός να αποκλειστεί (αν το ποσό που του αναλογεί είναι μεγαλύτερο από την χρησιμότητα του). Έτσι, η διαδικασία επαναλαμβάνεται ως ότου είτε δεν μείνει κανένας παίκτης στο δέντρο διανομής (οπότε η μετάδοση δεν πραγματοποιείται) ή βρεθεί κατανομή του κόστους σε ένα υποσύνολο $R$ των κόμβων, τέτοιο ώστε για κάθε $i \in R$ $u_i \geq md$.

Είναι εύκολο να δείξουμε ότι ο μηχανισμός της Shapley τιμής είναι φιλαλήθης. Πράγματι, η διαδικασία είναι παρόμοια με την Αγγλική δημοπρασία. Οι παίκτες παραμένουν ενεργοί, όσο η τιμή που καλούνται να πληρώσουν είναι μικρότερη της χρησιμότητάς τους, μεγιστοποιώντας έτσι την ωφέλειά τους. Επιπλέον, ικανοποιεί τις ιδιότητες της Έλλειψης Θετικών Συνεισφορών (No Positive Transfers), της Κυριαρχίας του Πελάτη (Consumer Sovereignty), Εθελοντικής Συμμετοχής και είναι εξ ορισμού ισοσκελισμένου προϋπολογισμού, αφού οι πληρωμές, ορίζονται έτσι ώστε να καλύπτουν το κόστος της μετάδοσης. Ακόμη, έχει μία ισχυρότερη μορφή φιλαλήθειας, την ομαδική φιλαλήθεια (group strategyproof-truthful), που σημαίνει ότι δεν υπάρχει ομάδα χρηστών, που μπορούν με συνεργασία να επιτύχουν κάτι καλύτερο από το να δρα κάθε χρήστης ανεξάρτητα.

Επιπρόσθετα, δεν απαιτεί από τους χρήστες πλήρη αποκάλυψη των εκτιμήσεων τους για την αξία του ραδιοτηλεοπτικού υλικού, παρά μόνο τους ζητάει να αρνηθούν ή να δεχτούν μία συγκεκριμένη προσφορά κάθε φορά. Αυτό αποτελεί βασικό πλεονέκτημα του αλγορίθμου, αν φανταστούμε χρήστες με δυσκολίες στο να επιλύσουν το τοπικό πρόβλημα εκτίμησης της αξίας του αγαθού (local valuation problem). Τέτοιοι χρήστες μοντελοποιούνται μαθηματικά ως εξής: η εκτίμησή τους κατανέμεται ομοιόμορφα ανάμεσα σε δύο όρια, $\bar{u}$ και $\underline{u}$. Όσο, η τιμή ανεβαίνει ο χρήστης εξακολουθεί να συμμετέχει καθώς η τελευταία βρίσκεται ανάμεσα στα όριά του. Στο μοντέλο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει και ένας *ειδικός* (expert), ο οποίος βελτιώνει την εκτίμησή μας, μειώνοντας το κενό $\bar{u} - \underline{u}$ για κάποιο αντίτιμο. Ανάλογα με την πορεία της τιμής, ο χρήστης μπορεί να αποφασίσει ότι είναι στο συμφέρον του να συμβουλευτεί τον ειδικό. Το πλεονέκτημα αυτό γίνεται περισσότερο σαφές, αν συγκρίνουμε τον αλγόριθμο της Shapley τιμής με τον ΜΟΚ, στον οποίο απαιτείται ακριβής επίλυση του προβλήματος εκτίμησης του προϊόντος από το πρώτο βήμα.




Σχήμα 4.2: Παράδειγμα Εφαρμογής της Shapley τιμής

Παρόλα αυτά, όπως άλλωστε περιμένουμε από τα παραπάνω, ο μηχανισμός δεν είναι αποδοτικός, δηλαδή υπάρχουν στιγμιότυπα του προβλήματος, στα οποία η έξοδος, που ο μηχανισμός δίνει δεν είναι η καλύτερη δυνατή. Ας δούμε, όμως, τη λειτουργία του αλγορίθμου στα παρακάτω παραδείγματα:

**Παράδειγμα 4.1.** *Υπολογισμός των πληρωμών*
Στην πρώτη φάση οι κόμβοι μετράνε τον αριθμό των κόμβων του υποδέντρου με ρίζα τους ίδιους. Επομένως έχουμε:

$$p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 1$$

Στη δεύτερη φάση υπολογίζονται οι πληρωμές. Αρχικά η ρίζα (κόμβος $S$) στέλνει στο παιδί της τιμή $md_0 = 0$. Έπειτα, έχουμε διαδοχικά:

- $md_1 = md_0 + \frac{c(l_1)}{p_1} = 0 + \frac{10}{3} < 6$
- $md_2 = md_1 + \frac{c(l_2)}{p_2} = \frac{10}{3} + \frac{2}{1} < 8$
- $md_3 = md_1 + \frac{c(l_3)}{p_3} = \frac{10}{3} + \frac{5}{1} < 10$

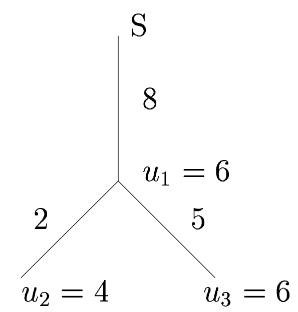
Αφού λοιπόν, οι τιμές $md_i$ ικανοποιούν τη σχέση $md_i \leq u_i$ για $i = 0, 1, 2$ ο αλγόριθμος τερματίζει στο σημείο αυτό. Η έξοδος του είναι καλύτερη για το σχεδιαστή του μηχανισμού, από αυτή του ίδιου παραδείγματος, όταν χρησιμοποιήθηκε ο ΜΟΚ.

Παρόλα αυτά σε περιπτώσεις, όπως η επόμενη φαίνεται το γεγονός ότι η Shapley τιμή μπορεί να οδηγήσει σε μη αποδοτική λύση :

**Παράδειγμα 4.2.** *Υπολογισμός των πληρωμών (Σχήμα 4.3)*
Στο παράδειγμα αυτό έχουμε πάλι:

$$p_1 = 3, p_2 = 1, p_3 = 1$$

Για τις πληρωμές τώρα έχουμε:




Σχήμα 4.3: Παράδειγμα Εφαρμογής της Shapley τιμής

- Βήμα 1

$$md_1 = md_0 + \frac{c(l_1)}{p_1} = 0 + \frac{8}{3} < 6$$
$$md_2 = md_1 + \frac{c(l_2)}{p_2} = \frac{8}{3} + \frac{2}{1} > 4$$
$$md_3 = md_1 + \frac{c(l_3)}{p_3} = \frac{8}{3} + \frac{5}{1} > 6$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι 2 και 3 δεν μπορούν να αντεπεξέλθουν στις πληρωμές και επομένως φεύγουν από το παιχνίδι. Επομένως, συνεχίζουμε στο βήμα 2 με νέο $p_1 = 1$

- Βήμα 2

$$md_1 = md_0 + \frac{c(l_1)}{p_1} = 0 + \frac{8}{1} < 8$$

Επομένως ούτε και ο 1 θα πάρει το υλικό. Τελικά, λοιπόν κανένας από τους πελάτες δεν θα πάρει το υλικό ενώ συνολικά η επιθυμία τους να το λάβουν υπερβαίνει το κόστος εκπομπής, αφού ισχύει $u_1 + u_2 + u_3 = 6 + 6 + 4 = 16 > 15 = 8 + 5 + 2 = c_{l_1} + c_{l_2} + c_{l_3}$. Αντίθετα, αν χρησιμοποιούνταν ο αλγόριθμος ΜΟΚ η εταιρεία θα μετέδιδε το υλικό σε όλους τους χρήστες.

### 4.1.4 Interdomain Δρομολόγηση

#### Εισαγωγή

Το Internet αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό αυτόνομων διοικητικά και οικονομικά συστημάτων (ΑΣ). Η δρομολόγηση των πακέτων διακρίνεται σε δύο ξεχωριστά επίπεδα: μεταξύ διαφορετικών ΑΣ (interdomain) και μέσα στο ίδιο ΑΣ (intradomain). Εμείς θα επικεντρωθούμε στη δρομολόγηση μεταξύ διαφορετικών ΑΣ (interdomain), η οποία σήμερα εξυπηρετείται από το πρωτόκολλο

BGP. Το πρόβλημα αυτό έχει απασχολήσει την κοινότητα της Πληροφορικής, οι λύσεις, όμως, που έχουν προταθεί περιορίζονται στην ανάπτυξη πρωτοκόλλων, τα οποία υποθέτουν ότι οι χρήστες είναι *υπάκουοι (obedient)* σε αυτά.

Παρόλα αυτά, όμως, η αποκεντρωμένη φύση του Internet και το γεγονός του ότι τα ΑΣ, όπως αναφέραμε ανήκουν σε ανεξάρτητες οντότητες, κάνουν την παραπάνω υπόθεση να μην είναι και ιδιαίτερα έγκυρη. Η εισαγωγή, λοιπόν, κινήτρων από τη μεριά των χρηστών, μοιάζει μία λογική εξέλιξη. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ότι η δρομολόγηση διερχόμενης κίνησης από ένα ΑΣ κίνησης ,δηλαδή, που δεν πηγάζει ούτε προορίζεται για αυτό έχει κάποιο κόστος, το οποίο προφανώς το ΑΣ θέλει να αποφύγει. Προφανής, στόχος του σχεδιαστή είναι ένας μηχανισμός, ο οποίος να μεγιστοποιεί την ωφέλεια του συστήματος, δρομολογώντας την κίνηση πάνω σε μονοπάτια ελάχιστου κόστους. Για να γίνει κάτι τέτοιο, όμως, πρέπει οι χρήστες να κινητοποιηθούν κατάλληλα, ώστε να συμμετέχουν στη διαδικασία ανακοινώνοντας τα πραγματικά κόστη στο μηχανισμό.

Επιπλέον, ζητούμενο είναι η όλη διαδικασία να είναι αποκεντρωμένη, δηλαδή ο υπολογισμός των πληρωμών και των μονοπατιών να μην απαιτεί ένα κεντρικό κόμβο, που να διαθέτει όλη τη γνώση.

Αν και το παρόν μοντέλο δεν είναι τελείως ρεαλιστικό, αφού για παράδειγμα το κόστος της διερχόμενης κίνησης δεν είναι συνήθως ανάλογο της ίδιας της κίνησης, παρόλα αυτά είναι μία καλή προσέγγιση της πραγματικότητας. Παρακάτω ορίζουμε πιο τυπικά το πρόβλημα.

### Ορισμός του προβλήματος

Έστω δίκτυο, που αποτελείται από ένα σύνολο $N$ κόμβων, που αντιστοιχούν στα αυτόνομα ΑΣ. Το σύνολο $L$ είναι το σύνολο των συνδέσμων δύο κατευθύνσεων, που ενώνουν τα ΑΣ μεταξύ τους και για $i, j \in N$, το $T_{ij}$ είναι η κίνηση σε πακέτα, από τον $i$ προς τον $j$. Ακόμη θεωρούμε ότι με $c_k$ συμβολίζουμε το κόστος για τον κόμβο $k$ της δρομολόγησης διερχόμενης κίνησης.[1] Με $p_k$ συμβολίζουμε την πληρωμή στον κόμβο $k$ για τη δρομολόγηση ενός πακέτου.

Στόχος του προβλήματος είναι η αποστολή κάθε πακέτου πάνω σε μονοπάτι ελάχιστου κόστους. Έξοδος, επομένως, του μηχανισμού είναι δύο συναρτήσεις:

- η $I_k(c; i, j)$, η οποία έχει ως πεδίο τιμών το $\{0, 1\}$ και δηλώνει αν ο κόμβος $k$ θα συμμετέχει ή όχι στο μονοπάτι δρομολόγησης από το $i$

[1] Για λόγους απλότητας υποθέτουμε ότι το κόστος αυτό είναι το ίδιο ανεξάρτητα της πηγής και του προορισμού του πακέτου. Η περίπτωση ασύμμετρου κόστους μπορεί να αντιμετωπιστεί με παρόμοιες μεθόδους

στο $j$ αν το διάνυσμα κόστους, που ανακοίνωσαν οι παίκτες είναι το $c$. Θεωρούμε ότι $I_i(c;i,j) = I_j(c;i,j) = 0$, αφού η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των πληρωμών για διερχόμενη και μόνο κίνηση.

- η $p^k$, που εκφράζει το σύνολο των χρηματικών μονάδων, που δίνονται στον κόμβο $k$, για τις υπηρεσίες του.

Αυτές, οι συναρτήσεις πρέπει να είναι τέτοιες, ώστε να έχουν ως αποτέλεσμα να ελαχιστοποιείται η ποσότητα:

$$V(c) = \sum_{i,j \in N} T_{ij} \sum_{k \in N} I_k(c;i,j) c_k$$

που ισοδυναμεί με την δρομολόγηση σε μονοπάτια ελάχιστου κόστους.

Το πρόβλημα παίρνει, δηλαδή, τη μορφή παιχνιδιού, στο οποίο παίκτες είναι τα ΑΣ, τα οποία μπορεί να δηλώσουν ψευδείς τιμές για το κόστος τους $c_k$, προσπαθώντας να μεγιστοποιήσουν το προσωπικό τους όφελος, που εκφράζεται από τη σχέση:

$$p^k - \sum_{i,j} T_{ij} I_k(c;i,j) c_k$$

### Αλγόριθμος Πληρωμών

Εφόσον, ορίσαμε τυπικά το πρόβλημα μπορούμε να συνεχίσουμε στη μελέτη του αλγόριθμου πληρωμών του μηχανισμού. Στον αλγόριθμο πληρωμών θέτουμε δύο προφανείς περιορισμούς:

- Εξασφάλιση φιλαλήθειας: για προφανείς λόγους θέλουμε η φόρμουλα πληρωμών να είναι τέτοια, ώστε το κάθε ΑΣ να μεγιστοποιεί το κέρδος του, ανακοινώνοντας το πραγματικό του κόστος.

- Έλλειψη Θετικών Συνεισφορών: την ιδιότητα αυτή, την είδαμε και στα πλαίσια του προηγούμενου προβλήματος, του καταμερισμού του κόστους multicast μεταδόσεων. Πρακτικά, η εξασφάλισή της ισοδυναμεί με το μην πληρώνονται τα ΑΣ, που δεν εξυπηρετούν διερχόμενη κίνηση.

Οι δύο παραπάνω ιδιότητες ορίζουν μονοσήμαντα τον μηχανισμό, που πρέπει να χρησιμοποιήσουμε, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 4.3.** *Όταν η δρομολόγηση επιλέγει μονοπάτια ελάχιστου κόστους και πρέπει να ικανοποιούνται οι ιδιότητες που ορίσαμε παραπάνω, τότε υπάρχει* *ένας μόνο μηχανισμός, που μπορεί να εφαρμοστεί, σύμφωνα με τον οποίο οι πληρωμές υπολογίζονται από φόρμουλα της μορφής* $p^k = \sum_{i,j \in N} T_{i,j} \cdot p^k_{i,j}$, *όπου:*

$$p^k_{ij} = c_k I_k(c; i, j) + \left[ \sum_{r \in N} I_r(c|^k \infty; i, j) c_r - \sum_{r \in N} I_r(c; i, j) c_r \right]$$

*όπου με* $I_r(c|^k \infty; i, j)$ *συμβολίζουμε των ελάχιστων μονοπατιών στο δίκτυο, στο οποίο δεν συμμετέχει ο κόμβος* $k$.

*Απόδειξη.* Τα παραπάνω προκύπτουν ως εφαρμογή της VCG φόρμουλας, που εξετάσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο. Μάλιστα, αφού επιθυμούμε οι χρήστες να μην πληρώνονται αν δεν συμμετέχουν στη διαδικασία, ο μηχανισμός είναι της μορφής Clarke. Συγκεκριμένα, η τυχαία συνάρτηση της VCG φόρμουλας $h(c^{-k})$ είναι ίση με τη σχέση $\sum_{r \in N} I_r(c|^k \infty; i, j) c_r$, που ισοδυναμεί με το πρόβλημα εύρεσης των συντομότερων μονοπατιών, όταν ο κόμβος $k$ δεν συμμετέχει στο δίκτυο. Επιπλέον, σύμφωνα με τους Green και Laffont, όπως επίσης είδαμε, ο μηχανισμός αυτός είναι μοναδικός, αφού οι προτιμήσεις των παικτών είναι ημιγραμμικές (quasi-linear). □

### Κατανεμημένος Αλγόριθμος

Η παραπάνω φόρμουλα πληρωμών εξασφαλίζει ότι τα Αυτόνομα Συστήματα ΑΣ θα ανακοινώσουν τις πραγματικές τους τιμές για τα κόστη της διερχόμενης κίνησης. Από εκεί και πέρα, υπάρχει η ανάγκη ενός κατανεμημένου αλγορίθμου, ο οποίος θα είναι υπεύθυνος για τον υπολογισμό των πληρωμών αυτών και των συντομότερων μονοπατιών, χωρίς όμως κανείς από τους κόμβους να αποκτήσει πρόσβαση στο σύνολο της πληροφορίας.

Ο αλγόριθμος, που χρησιμοποιείται σήμερα για τον υπολογισμό των μονοπατιών, εφόσον κάθε κόμβος έχει ανακοινώσει την τιμή για το κόστος του (πρωτόκολλο BGP), ικανοποιεί την προϋπόθεση του να είναι κατανεμημένος. Το πρωτόκολλο δουλεύει ως εξής: κάθε ΑΣ ανακοινώνει στους γείτονές του τον πίνακα δρομολόγησης και την τιμή κόστους του. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται, όσο οι πληροφορίες, που λαμβάνει από τα υπόλοιπα ΑΣ, τον αναγκάζουν να ανανεώσει τα δικά του στοιχεία. Αν $d$ είναι η διάμετρος του δικτύου, δηλαδή ο μεγαλύτερος αριθμός ΑΣ σε ένα μονοπάτι, τότε η διαδικασία συγκλίνει σε $d$ το πολύ βήματα. Μία απλή προέκταση του παραπάνω πρωτοκόλλου, την οποία δεν θα παρουσιάσουμε εδώ, χρησιμοποιείται και για τον υπολογισμό των πληρωμών, ώστε αυτές να γίνονται κατανεμημένα.

### 4.1.5 Εφαρμογή σε Κατανεμημένα Περιβάλλοντα

Έχοντας ολοκληρώσει την παρουσίαση των μηχανισμών, θα ασχοληθούμε στο εδάφιο αυτό με τα προβλήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή τους σε ένα κατανεμημένο περιβάλλον, όπως είναι το Internet. Συγκεκριμένα το θέμα, που θα μας απασχολήσει είναι η *δικτυακή πολυπλοκότητα* των μηχανισμών.

Ο όρος δικτυακή πολυπλοκότητα αναφέρεται κυρίως στο επικοινωνιακό κόστος, που συνεπάγεται η εφαρμογή των μηχανισμών και ορίζεται ως ο αριθμός των μηνυμάτων που ανταλλάσσονται. Στο σημείο αυτό πρέπει βέβαια να ξεκαθαρίσουμε ότι θεωρούμε ότι τα μηνύματα, που ανταλλάσσονται δεν ξεπερνούν ένα συγκεκριμένο όριο. Χαρακτηριστικό παράδειγμα προβλήματος, στο οποίο υπάρχει μεγάλη διαφορά στην επικοινωνιακή απόδοση, ανάλογα με την επιλογή αλγορίθμου είναι αυτό του καταμερισμού του κόστους multicast μεταδόσεων. Είδαμε, παραπάνω, ότι υπάρχουν, γενικά, δύο μηχανισμοί που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν, καθένας από τους οποίους διαθέτει ένα σύνολο επιθυμητών ιδιοτήτων. Είδαμε ότι ο Μηχανισμός Οριακού Κόστους (ΜΟΚ) θέλει το πολύ δύο μηνύματα σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου, αφού ο αλγόριθμος ολοκληρώνεται με δύο διασχίσεις του δέντρου. Από την άλλη, ο Μηχανισμός της Shapley τιμής δημιουργεί κίνηση της τάξης των $\Theta(n \cdot p)$ μηνυμάτων, όπου $n$ το πλήθος των κόμβων που χρησιμοποιούν οι $p$ χρήστες, και, μάλιστα τουλάχιστον $p$ μηνύματα σε κάποιους συνδέσμους που κάνει το σύστημα μη πρακτικό σε ένα δίκτυο περιορισμένου εύρους. Αυτό συμβαίνει στην χειρότερη περίπτωση, στην οποία θεωρούμε ότι σε κάθε γύρο αποχωρεί από τη διαδικασία ένας μόνο χρήστης.

Με δεδομένο την κακή δικτυακή πολυπλοκότητα του μηχανισμού της Shapley τιμής, μπορούμε να εξετάσουμε τρόπους, έτσι ώστε να προσεγγίσουμε τον μηχανισμό, επιτυγχάνοντας μείωση των μηνυμάτων, που πρέπει να μετακινηθούν στο δίκτυο. Όπως είπαμε και στον ορισμό του προβλήματος του καταμερισμού του κόστους multicast μεταδόσεων ζητούμενο είναι η εύρεση δύο συναρτήσεων $(\sigma, x)$, με τις οποίες να υπολογίζεται η έξοδος και οι πληρωμές του μηχανισμού. Αφελώς, θα μπορούσαμε να πούμε ότι ένας προσεγγιστικός μηχανισμός του βέλτιστου $M^* = (\sigma^*, x^*)$ είναι ο $M^{'} = (\sigma^{'}, x^{'})$ με $\sigma^* \approx \sigma^{'}$ και $x^* \approx x^{'}$. Όμως, μία τέτοια προσπάθεια, μπορεί να κατέληγε στην χαλάρωση των παιγνιοθεωρητικών ιδιοτήτων του μηχανισμού (σύμφωνα και με το κεφάλαιο 3) με αποτέλεσμα οι παίκτες να έχουν συμφέρον να μην ανακοινώσουν τις πραγματικές τους προτιμήσεις και να οδηγηθούν σε σημείο ισορροπίας, πολύ διαφορετικό από το βέλτιστο, δηλαδή $(\sigma^*(v), x^*(v))$ να απέχει πολύ από το $(\sigma^{'}(v), x^{'}(v))$, όπου $v$ το διάνυσμα των ψευδών τιμών. Επομένως, ένας πιο κατάλληλος ορισμός για την προσεγγισιμότητα θα έπαιρνε υπόψη τις παιγνιοθεωρητικές ιδιότητες του μηχανισμού και όχι το πόσο καλά η συνάρτηση $\sigma^{'}(.)$ προσεγγίζει την $\sigma^*(.)$ και η $x^{'}(.)$ την $x^*(.)$. Συγκεκριμένα, ο μηχανισμός της

Shapley τιμής διαθέτει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Είναι *ομαδικά-φιλαλήθης* (group-strategyproof), δηλαδή η συνεργασία ενός υποσυνόλου των παικτών δεν τους αποφέρει καλύτερα αποτελέσματα από το να παίζουν ανεξάρτητα.
- Έχει ισοσκελισμένο προϋπολογισμό (budget balance)
- Ανάμεσα στους μηχανισμούς με τις δύο παραπάνω ιδιότητες είναι αυτός, που ελαχιστοποιεί την απώλεια στο κοινωνικό καλό στη χειρότερη περίπτωση (worst-case welfare loss)

Επομένως, ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος για το μηχανισμό της Shapley τιμής, σύμφωνα με τα όσα είπαμε παραπάνω, ικανοποιεί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- Είναι υπολογιστικά εφικτός, δηλαδή τα μηνύματα που πρέπει να μετακινηθούν στο αποκεντρωμένο δίκτυο είναι λιγότερα, από του κανονικού μηχανισμού.
- Είναι *ομαδικά-φιλαλήθης* (group-strategyproof).
- Έχει προσεγγιστικά ισοσκελισμένο προϋπολογισμό (approximately budget balance), δηλαδή υπάρχει σταθερά $b > 1$ τέτοια ώστε:

$$(\frac{1}{b}) \cdot (c(R)) \leq \sum_{i \in R(u)} x_i(u) \leq b \cdot (c(R))$$

- Ελαχιστοποιεί προσεγγιστικά την απώλεια στο κοινωνικό καλό στη χειρότερη περίπτωση (worst-case welfare loss), δηλαδή η απώλεια στο κοινωνικό καλό στη χειρότερη περίπτωση του προσεγγιστικού μηχανισμού φράσσεται όμοια με παραπάνω από μία σταθερά $\gamma > 1$

Παρακάτω, θα παρουσιάσουμε μία πρώτη προσπάθεια εύρεσης τέτοιου μηχανισμού. Το πρόβλημα παραμένει ανοικτό, αφού ο προσεγγιστικός μηχανισμός,που θα δούμε παρακάτω, ικανοποιεί τα κριτήρια, που θέσαμε, μόνο που τα όρια, με τα οποία φράσσονται ο προϋπολογισμός και η απώλεια του κοινωνικού καλού δεν είναι σταθερές, αλλά συναρτήσεις.

### Αλγόριθμος Shapley τιμής με ένα πέρασμα

Το πρόβλημα επικοινωνιακής πολυπλοκότητας, που έχει ο αλγόριθμος της Shapley τιμής, οφείλεται κατά κύριο λόγο στο γεγονός του ότι για να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα, μπορεί να χρειαστούν $O(p)$ διασχίσεις του δέντρου multicast, όπου $p$ ο αριθμός των χρηστών της υπηρεσίας, καθεμία από τις οποίες απαιτεί τη μεταφορά $O(n)$ μηνυμάτων, όπου $n$ οι κόμβοι του δικτύου. Επομένως, μία λογική ιδέα για να αντεπεξέλθουμε σε αυτή τη δυσκολία είναι να μειώσουμε κατά το δυνατό τα αναγκαία περάσματα. Παρουσιάζουμε μία προσέγγιση, η οποία αν και απαιτεί μόνο ένα πέρασμα, παρόλα αυτά το μέγεθος της πληροφορίας, που ανταλλάσσεται είναι πάλι $\Theta(n \cdot p)$ στη χειρότερη περίπτωση. Παρακάτω, όμως θα στηριχθούμε σε αυτόν τον αλγόριθμο, ώστε να επιτύχουμε το σκοπό μας: ένα προσεγγιστικό μηχανισμό, με τις απαιτούμενες παιγνιοθεωρητικές ιδιότητες.

Ας παρουσιάσουμε, λοιπόν, τον αλγόριθμο. Έστω $v$ το διάνυσμα των τύπων, που ανακοινώνουν οι παίκτες. Με βάση αυτό το διάνυσμα ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση:
$n_l(p, v) =$ ο αριθμός των παικτών στο υποδέντρο κάτω από τον σύνδεσμο $l$, οι οποίοι είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν τουλάχιστον $p$ για τους συνδέσμους πάνω από το $l$

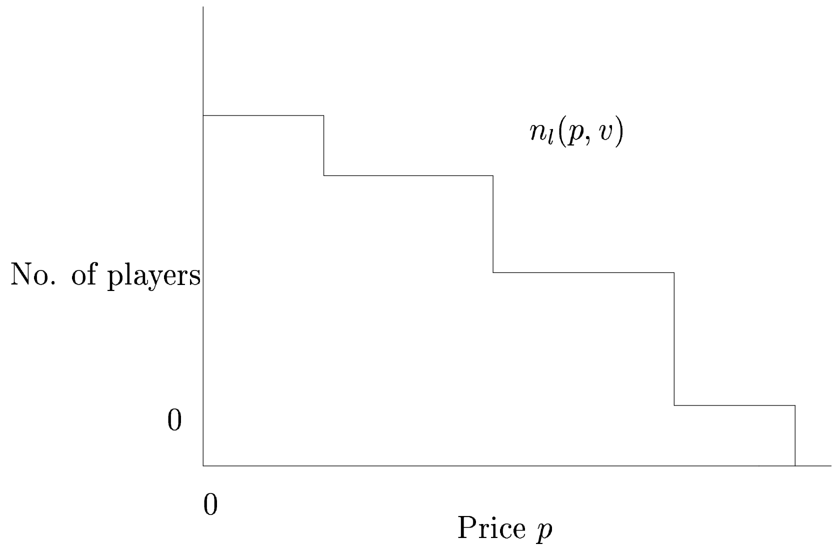
Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης αυτής για όλες τις τιμές του $p$ τοπικά σε κάθε κόμβο. Η συνάρτηση αυτή είναι, προφανώς, φθίνουσα ως προς την παράμετρο $p$, αφού όσο μεγαλώνει η τιμή $p$ μειώνεται ο αριθμός των χρηστών που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν το ποσό αυτό. Γενικά, μία τέτοια συνάρτηση θα μπορούσαμε να την αναπαραστήσουμε με ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών $(p_i, n_i)$, τα οποία αναπαριστούν τα γωνιακά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $n_l(p, v)$ (δες Σχήμα 4.4). Τη μορφή, αυτή αναπαράστασης την ονομάζουμε ζευγών-σημείων και στη χειρότερη περίπτωση θα έχουμε $n$ τέτοια ζεύγη.

Αν και το γενικό μοντέλο του προβλήματος, επιτρέπει στους χρήστες να βρίσκονται σε εσωτερικούς κόμβους του δέντρου, υποθέτουμε για λόγους απλότητας ότι όλοι βρίσκονται σε φύλλα.[2]

Για τον υπολογισμό της ζητούμενης συνάρτησης διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Ο κόμβος $a_l$ είναι φύλλο, δηλαδή είναι κόμβος, στον οποίο βρίσκονται χρήστες. Έστω $p_{al}$ ο αριθμός των παικτών στον κόμβο $a_l$, και ότι δίνω στους παίκτες αριθμούς-ταυτότητες έτσι ώστε $u_1 \geq u_2 \geq \ldots \geq u_{p_{al}}$. Ακόμη, με $c(l)$ συμβολίζουμε το κόστος του συνδέσμου $l$, που ενώνει το φύλλο με τον πατέρα του. Ο υπολογισμός του $n_l(p, v)$ για συγκεκριμένη τιμή $p$ γίνεται εύκολα ως εξής:
    - Βήμα 0: Θέτουμε $k = 0$

[2]Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε υποσύνολο χρηστών που βρίσκεται στον εσωτερικό κόμβο $a$, τοποθετείται σε φύλλο, που συνδέεται με τον $a$ με σύνδεσμο κόστους 0




Σχήμα 4.4: Η αναπαράσταση ζευγών σημείων $n_l(p,v)$

 – Βήμα 1: Αν $p + \frac{c(l)}{p_{al}-k} \leq u_{p_{al}-k}$ τότε σταμάτησε τον υπολογισμό και επέστρεψε τιμή ίση με $n_l(p,v) = p_{al} - k$. Αλλιώς, αύξησε το $k$ κατά 1.

 – Βήμα 2: Αν $k = p_{al} - 1$ επέστρεψε τιμή $n_l(p,v) = 0$. Αλλιώς, πήγαινε ξανά στο βήμα 1.

- Ο κόμβος $a_l$ είναι εσωτερικός. Σε μία τέτοια περίπτωση, πρέπει στον υπολογισμό να συμμετέχουν και οι συναρτήσεις $n_{l_i}(p,v)$, για όλες τις ακμές $l_i$, που συνδέουν τον $a_l$ με τα παιδιά του. Η διαδικασία έχει ως εξής:

 – Βήμα 1: Υπολογίζουμε τη συνάρτηση,

$$m_l(p,v) = \sum_{i=1}^{r} n_{l_i}(p,v)$$

 όπου $r$ είναι ο αριθμός των ακμών, που συνδέουν τον κόμβο $a_l$ με τα παιδιά του. Πρακτικά, η συνάρτηση αυτή εκφράζει τον αριθμό των παικτών κάτω από τον σύνδεσμο $l$, που είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν ποσό $p$, τουλάχιστον, για τους συνδέσμους από την ρίζα ως τον $l$, συμπεριλαμβανομένου και του ίδιου. Αν έχουμε τις συναρτήσεις $n_{l_i}(p,v)$ σε μορφή συνόλου ζευγών σημείων, τότε η συνάρτηση $n_l(p,v)$ υπολογίζεται, απλά, ενώνοντας τα επιμέρους σύνολα, προσθέτοντας, δηλαδή, τους παίκτες.

– Βήμα 2: Επειδή πρέπει να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $n_l(p,v)$, πρέπει να λάβουμε υπόψη μας στην $m_l(p,v)$ το κόστος της ακμής $l$, που είναι ίσο με $c(l)$. Για κάθε τιμή $p$, που ικανοποιεί τη σχέση: $p \cdot m_l(p,v) \geq c(l)$ θα έχουμε:

$$n_l(p - \frac{c(l)}{m_l(p,v)}) \geq m_l(p,v)$$

επειδή τουλάχιστον όσοι ανήκουν στο σύνολο που αντιπροσωπεύεται από την τιμή $m_l(p,v)$, θα ανήκουν και σε αυτό της τιμής $n_l(p - \frac{c(l)}{m_l(p,v)})$. Το " $>$ " αναφέρεται στην πιθανή περίπτωση, κατά την οποία για $q < p$ ισχύει $q - \frac{c(l)}{m_l(q,v)} \geq p - \frac{c(l)}{m_l(p,v)}$ και άρα το μεγαλύτερο σύνολο $m_l(q,v)$ μπορεί να υποστηρίξει την τιμή $p' = p - \frac{c(l)}{m_l(p,v)}$ για τους συνδέσμους πάνω από τον $l$. Επομένως, επειδή μας ενδιαφέρει το κατά το δυνατό μεγαλύτερο υποσύνολο χρηστών, που θα λάβουν την πληροφορία, η σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις είναι η παρακάτω:

$$n_l(p,v) = \max_{\{p' - \frac{c(l)}{m_l(p',v)} \geq p\}} m_l(p',v)$$

Πρακτικά, ο υπολογισμός της συνάρτησης $n_l(p,v)$ γίνεται εύκολα ως εξής: μετασχηματίζουμε τη λίστα των σημείων $(p^{(i)}, m^{(i)})$, που αντιστοιχούν στη συνάρτηση $m_l(.)$ στη λίστα $(p^{(i)} - \frac{c(l)}{m^{(i)}}), m^{(i)})$. Ταξινομούμε τη νέα λίστα και διαγράφουμε κάθε ζεύγος, για το οποίο υπάρχει άλλο με μεγαλύτερη τιμή $m_i$ στην ίδια ή χαμηλότερη τιμή.

Ακολουθώντας τις δύο παραπάνω μεθοδολογίες μπορούμε αναδρομικά να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $n_l(.)$ ως τη ρίζα του δέντρου. Στη ρίζα συνδυάζουμε τις συναρτήσεις, που έχουμε πάρει και υπολογίζουμε την τιμή $m = m_{root}(0,v)$. Προφανώς, το σύνολο των νικητών, που υπολογίζεται με τη Shapley τιμή, του προηγούμενου αλγορίθμου θα έχει ακριβώς $m$ παίκτες.

Στο σημείο αυτό θα δώσουμε μία τεχνική, που βασίζεται στη συνάρτηση $n_l(.)$ για τον υπολογισμό των πληρωμών κάθε παίκτη, έχοντας υποθέσει ότι κάθε κόμβος του δέντρου έχει κρατήσει αποθηκευμένη την αναπαράσταση με ζεύγη τιμών της συνάρτησης αυτής. Διασχίζουμε το δέντρο με φορά από πάνω προς τα κάτω και αντιστοιχούμε την παρακάτω τιμή σε κάθε κόμβο:

$$x_j = x_i + \frac{c(l)}{n_l(x_i,v)},$$

όπου $j = 1, \ldots, k$ τα παιδιά του κόμβου $i$ και $c(l)$ το κόστος του συνδέσμου του $i$ με τα παιδιά του. Η τιμή της ρίζας $x_{root}$, προφανώς αρχικοποιείται στο 0.

Ο μηχανισμός, που ορίσαμε με τη βοήθεια των συναρτήσεων $n_l(.)$ και $m_l(.)$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι ισοσκελισμένου προϋπολογισμού (αφού από τον ορισμό των συναρτήσεων και των πληρωμών εξασφαλίζεται αυτή η συνθήκη) και, επιπλέον, ότι το υποσύνολο των χρηστών που λαμβάνουν την πληροφορία είναι το ίδιο είτε χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος ενός περάσματος, που περιγράψαμε είτε αυτός των πολλών περασμάτων, που βασίζεται στη Shapley τιμή. Ακόμη, οι δύο αυτοί μηχανισμοί έχουν την ίδια συνάρτηση πληρωμών, επομένως η έξοδός τους για την ίδια είσοδο είναι ταυτόσημη.

### Προσεγγιστικός αλγόριθμος

Στο προηγούμενο τμήμα παρουσιάσαμε έναν αλγόριθμο, ο οποίος είναι ισοδύναμος με αυτόν της Shapley τιμής, χρησιμοποιεί μόνο δύο διασχίσεις του δέντρου, ακριβώς όπως ο MOK, αλλά παρόλα αυτά δεν είναι αποδοτικός και εύκολα υλοποιήσιμος σε ένα αποκεντρωμένο περιβάλλον, επειδή απαιτεί την ανταλλαγή μεγάλου μεγέθους πληροφορίας ($|N| \cdot |P|$ bits πληροφορίας στη χειρότερη περίπτωση - πιο συγκεκριμένα η $n_l(.)$ μπορεί να χρειάζεται μέχρι και $|P|$ σημεία αναπαράστασης.) Ο νέος όμως αλγόριθμος μας παρέχει μία μέθοδο προσέγγισης: μέσω της συνάρτησης $n_l(.)$. Εύκολα, μπορεί, να σκεφτεί κανείς ότι αντί να απαιτούμε από κάθε κόμβο την ανταλλαγή μηνυμάτων, στα οποία να μεταφέρεται η γνώση για την ακριβή μορφή της συνάρτησης (που, όπως προαναφέραμε, μπορεί να ισοδυναμεί με αποστολή $|P|$ ζευγών $(p^{(i)}, m^{(i)})$), μπορούμε να επιτύχουμε μία ικανοποιητική προσέγγιση του μηχανισμού, διατηρώντας ακόμη και κάποιες από τις επιθυμητές του ιδιότητες, "ψηφιοποιώντας" τη συνάρτηση, δηλαδή στρογγυλοποιώντας την τιμή της συνάρτησης $n_l(p, v)$ στην κοντινότερη προς τα κάτω δύναμη μίας σταθεράς - παραμέτρου του αλγόριθμου $k$. Έτσι, η γραφική παράσταση της $n_l(.)$ που προκύπτει με την απλοποίηση αυτή έχει το πολύ $r$ αντί για $|P|$ "γωνίες", όπου $r$ ορίζεται από τη σχέση: $k^r \leq |P| \rightarrow r \leq \frac{\log|P|}{\log k}$, δηλαδή η αναπαράσταση $\tilde{n}_l(p, v)$ που θα προκύψει θα έχει $O(\log|P|)$ ζεύγη σημείων, για καθένα από τα οποία θα ισχύει:

$$\tilde{n}_l(p, v) \leq n_l(p, v)$$

Ο υπολογισμός της νέας συνάρτησης για εσωτερικούς κόμβους γίνεται αλλάζοντας λίγο τον αλγόριθμο, που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό της $n_l(.)$:

- Ορίζουμε την $\hat{m}_l(p, v)$ ως εξής: $\hat{m}_l(p, v) = \sum_{l_i} \tilde{n}_l(p, v)$
- Από την $\hat{m}_l(p, v)$ υπολογίζω μία νέα $\hat{n}_l(p, v)$ ακριβώς όπως και στον πρώτο αλγόριθμο:

$$\hat{n}_l(p, v) = \max_{\{p' - \frac{c(l)}{\hat{m}_l(p', v)} \geq p\}} \hat{m}_l(p', v)$$

Έπειτα, προσεγγίζουμε τη συνάρτηση $\hat{n_l}(.)$ με την $\tilde{n_l}(.)$ ως εξής:

$$\tilde{n}_l(p,v) = k^{\lfloor \log_k \hat{n}_l(p,v) \rfloor}$$

Σε κάθε κόμβο του δέντρου διατηρούμε τη συνάρτηση $\hat{n}_l(.)$ η οποία είναι καλύτερη προσέγγιση της $n_l(.)$ από την $\tilde{n}_l(.)$ αλλά στέλνουμε στον κόμβο-πατέρα την $\tilde{n}_l(.)$, της οποίας το μέγεθος δεν καθιστά το επικοινωνιακό κόστος μη αποδεκτό. Στους τοπικούς υπολογισμού των πληρωμών αντικαθιστούμε στη φόρμουλα των πληρωμών, που ορίσαμε για τον αλγόριθμο ενός περάσματος την $n_l(.)$ με την $\hat{n}_l(.)$. Ο μηχανισμός της βηματικής συνάρτησης-ΒΣ (step function), που προκύπτει είναι επικοινωνιακά εφικτός και θα αποδείξουμε παρακάτω ότι είναι και ομαδικά-φιλαλήθης, που είναι μία βασική προϋπόθεση των προσεγγιστικών αλγορίθμων, που μπορεί να βρεθούν. Προφανώς, όμως λόγω της προσέγγισης που κάναμε, αντικαθιστώντας μία ποσότητα $n_l(.)$ με μία μικρότερή της $\tilde{n}_l(.)$, χάνουμε τις ιδιότητες του ισοσκελισμένου προϋπολογισμού (το αποτέλεσμα, που προκύπτει αφήνει κέρδος στο μηχανισμό) και της ελάχιστης απώλειας στο κοινωνικό καλό στη χειρότερη περίπτωση (worst case welfare loss). Πάντως, θα δείξουμε ότι η προσέγγιση, που επιτυγχάνουμε στις παραπάνω ιδιότητες φράσσεται από δεδομένες ποσότητες.

### Ο προσεγγιστικός αλγόριθμος ΒΣ είναι ομαδικά-φιλαλήθης

Βασική προϋπόθεση, που θέσαμε, για την κατασκευή του προσεγγιστικού αλγόριθμου είναι η ομαδική-φιλαλήθεια (group strategyproofness). Όπως είπαμε και σε προηγούμενο τμήμα του κεφαλαίου, η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει ότι σε ένα μηχανισμό, που την πληρεί, δεν υπάρχει υποσύνολο $S$ των παικτών, που μπορούν να κερδίσουν από τον μηχανισμό ανακοινώνοντας ψευδείς τιμές, ακόμη και αν συνεργαστούν. Πιο τυπικά, θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε τον ορισμό της ομαδικής-φιλαλήθειας στις παρακάτω σχέσεις:

$$S = \{i | u_i \neq v_i\}$$

$$\forall i \in S \ w_i(u) \leq w_i(v)$$

$$\exists j \in S \ w_j(u) < w_j(v)$$

όπου $u_i, v_i$ είναι η αληθινή και η ψευδής χρησιμότητα του παίκτη $i$ αντίστοιχα και $w_i$ είναι η ωφέλεια που αποκομίζει από το μηχανισμό. Τότε λέμε ότι το διάνυσμα $v$ είναι μία επιτυχής στρατηγική για την ομάδα $S$.

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο ακολουθώντας την παρακάτω πορεία: Πρώτα θα δείξουμε ότι αν υπάρχει επιτυχής στρατηγική για μία ομάδα παικτών, τότε υπάρχει και επιτυχής στρατηγική, στην οποία, οι παίκτες αυξάνουν την τιμή, που ανακοινώνουν. Έπειτα, θα δείξουμε ότι ένας παίκτης δεν κερδίζει τίποτα αυξάνοντας την τιμή, που ανακοινώνει. Συνδυάζοντας, τα παραπάνω θα πάρουμε και το ζητούμενο, ότι δηλαδή ο μηχανισμός είναι ομαδικά φιλαλήθης (group strategyproof).

**Λήμμα 4.4 (Μονοτονικότητα).** *Έστω $u$ το διάνυσμα των χρησιμοτήτων των παικτών και $v$ το ψευδές διάνυσμα, που προκύπτει αν τουλάχιστον ένα στοιχείο του $u$ αυξηθεί ($v = u|^i v_i$, όπου $v_i > u_i$). Τότε, θα ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:*

- $\forall l, x \ \tilde{n}_l(x, v) \geq \tilde{n}_l(x, u)$
- $\forall j \in P \ x_j(v) \leq x_j(u)$
- $\tilde{R}(v) \supseteq \tilde{R}(u)$

*Απόδειξη.* Ο ορισμός του μηχανισμού προϋποθέτει, ότι, αν $\hat{n}_l(x, v) \geq \hat{n}_l(x, u)$, τότε και $\tilde{n}_l(x, v) \geq \tilde{n}_l(x, u)$. Από το γεγονός αυτό προκύπτει, ότι η πρώτη έκφραση είναι αληθής για τα φύλλα, αφού αν ένας κόμβος αυξήσει την τιμή που ανακοινώνει, αν έπαιρνε το υλικό θα συνεχίζει να το παίρνει, ενώ αν όχι, υπάρχει περίπτωση να περάσει την ελάχιστη απαιτούμενη τιμή συμμετοχής. Με επαγωγή ισχύει όμοια και για τους εσωτερικούς κόμβους. Εφόσον, η αλλαγή του διανύσματος, που ανακοινώνουν οι παίκτες από $u$, που είναι το πραγματικό τους σε $v$ συντελεί στην αύξηση των παικτών, που δηλώνουν διατεθειμένοι να πληρώσουν ποσό $p$ για τους συνδέσμους, πάνω από τον $l$, όπως προκύπτει από την πρώτη ιδιότητα, θα ισχύει και η δεύτερη, αφού το κόστος για τους συνδέσμους πάνω από τον $l$ μοιράζεται εξίσου στους παίκτες, που είναι διατεθειμένοι να συμμετέχουν και αυτοί είναι περισσότεροι στην περίπτωση του ψευδούς διανύσματος $v$. Τέλος, αφού το ποσό που πρέπει να πληρώσει ένας παίκτης μειώνεται ή μένει το πολύ το ίδιο με την ψευδή ανακοίνωση του διανύσματος των ωφελειών, προφανώς ισχύει και η τρίτη ιδιότητα. ☐

**Λήμμα 4.5.** *Έστω $v$ μία στρατηγική (ανακοίνωση του διανύσματος ωφελειών) του υποσυνόλου $S$ των παικτών. Έστω ότι $i \in S$ και $i \notin \tilde{R}(v)$. Έστω $v'$ μία εναλλακτική στρατηγική των παικτών με $v|^i u_i$, δηλαδή η στρατηγική αυτή είναι τέτοια, ώστε ο $i$ να λέει αλήθεια. Τότε, θα ισχύει $x_j(v') \leq x_j(v)$ για κάθε $j \in P$.*

*Απόδειξη.* Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, που πρέπει να αποδείξουμε για αυτό το λήμμα.

- $v_i \leq u_i$. Τότε, από το προηγούμενο λήμμα οι πληρωμές των παικτών θα μειωθούν, δηλαδή η υπόθεση του λήμματος 4.5 ισχύει.

- $v_i \geq u_i$. Επειδή, ο παίκτης $i$ δεν συμμετέχει στο $\tilde{R}(v)$, θα ισχύει ότι $x_i > v_i$. Επομένως, αν ανακοινώσει ακόμη μικρότερη τιμή ωφέλειας, τότε προφανώς το σύνολο αποδεκτών της πληροφορίας δεν θα αλλάξει και οι πληρωμές θα παραμείνουν οι ίδιες για όλους τους παίκτες, κάτι που δεν παραβιάζει το λήμμα.

□

Πρακτικά, το λήμμα αυτό λέει ότι ένας παίκτης, δεν έχει συμφέρον να συμμετέχει σε μία ομάδα $S$, χρηστών που συνεργάζονται κατά του μηχανισμού, αν η στρατηγική ανακοίνωσης τιμών της ομάδας καταλήγει στο να μη λάβει αυτός την πληροφορία. Επομένως, όσοι συμμετέχουν στην ομάδα $S$ των "συνωμοτών" θα ανήκουν και στο σύνολο αυτών που θα πάρουν το υλικό.

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στο τρίτο λήμμα:

**Λήμμα 4.6.** *Έστω μία ομάδα $S$ έχει μία επιτυχή στρατηγική $u$. Τότε, η στρατηγική $v'$ με $v'_i \geq u_i$ είναι, επίσης, επιτυχής.*

Συνεχίζοντας στο ίδιο μοτίβο παρουσιάζουμε (χωρίς απόδειξη - είναι αρκετά απλή) το παρακάτω λήμμα:

**Λήμμα 4.7.** *Έστω διάνυσμα τύπων $v$, τέτοιο ώστε $v = u|v_i$ με $v_i \geq u_i$. Τότε, αν $u_i \geq x_i(u)$, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου, δηλαδή το σύνολο των νικητών και οι πληρωμές προς το μηχανισμό είναι οι ίδιες και για τα δύο διανύσματα.*

Το λήμμα αυτό υποδηλώνει ότι κανένας παίκτης δεν έχει στρατηγικό όφελος να αυξήσει την τιμή, που ανακοινώνει.

Συνδυάζουμε τα παραπάνω λήμματα και καταλήγουμε στο επόμενο θεώρημα:

**Θεώρημα 4.8.** *Ο Μηχανισμός της βηματικής συνάρτησης είναι ομαδικάφιλαλήθης.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλαδή ότι υπάρχει ομάδα $S$, η οποία διαθέτει στρατηγική $v$, που εξασφαλίζει καλύτερα αποτελέσματα για τους συμμετέχοντες. Τότε, από τα λήμματα 4.3 και 4.4 μπορούμε να περιοριστούμε σε ομάδα, της οποίας όλα τα μέλη λαμβάνουν την πληροφορία. Με βάση το λήμμα 4.5 μπορούμε διαδοχικά να αντικαταστήσουμε τις τιμές $v_i$ με τις $u_i$ χωρίς το αποτέλεσμα να αλλάξει. Αυτό, όμως, οδηγεί στο ότι και το διάνυσμα $u$ των πραγματικών τύπων είναι επιτυχής στρατηγική, κάτι που αντιβαίνει στην υπόθεση που κάναμε, ότι δηλαδή ο μηχανισμός δεν είναι ομαδικά φιλαλήθης. □

### Όρια στην απόκλιση του προϋπολογισμού και στην απώλεια του κοινωνικού καλού

Στο τμήμα αυτό εξετάζουμε τη προσέγγιση, που επιτυγχάνει ο αλγόριθμος, που παρουσιάσαμε, στην απόκλιση από τον ισοσκελισμένο προϋπολογισμό (budget balance approximation) και στην απώλεια του κοινωνικού καλού (worst case welfare loss). Για να αποδείξουμε τα ζητούμενα, μετατρέπουμε λίγο τον προσεγγιστικό μηχανισμό της Βηματικής Συνάρτησης, ως εξής: το κόστος κάθε συνδέσμου δεν θεωρείται ίσο με $c(l)$, όπως στον ΒΣ, αλλά ίσο με $\frac{c(l)}{k^{h_l}}$, όπου $h_l$, το ύψος του συνδέσμου $l$ ($h_l = 1$, όταν το ένα άκρο του συνδέσμου είναι φύλλο), ενώ κατά τα άλλα η διαδικασία είναι η ίδια. Ο νέος μηχανισμός λέγεται Κλιμακωτός μηχανισμός Βηματικής Συνάρτησης (ΚΒΣ) και είναι, προφανώς, ομαδικά-φιλαλήθης (group strategyproof), αφού η μόνη αλλαγή, που έγινε, στα κόστη των συνδέσμων, δεν επηρεάζει τη χρησιμότητα των παικτών. Παρακάτω, αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των χρηστών, που θα λάβουν την πληροφορία αν χρησιμοποιηθεί ο μηχανισμός ΚΒΣ είναι υπερσύνολο του αντίστοιχου συνόλου για τον μηχανισμό της Shapley τιμής, δηλαδή ότι ισχύει $R^k(u) \supseteq R(u)$.

**Λήμμα 4.9.** *Έστω $\tilde{n}_l^k(x_l, u)$ η προσέγγιση στη συνάρτηση $n_l(p, u)$, που υπολογίζεται με τον αλγόριθμο ΚΒΣ. Έστω και $n_l(x_l, u)$ και $x_l$ ορίζονται ακριβώς όπως και στον βέλτιστο αλγόριθμο ενός περάσματος. Τότε, θα ισχύει για κάθε ακμή,*

$$\tilde{n}_l^k(x_l, u) \geq \frac{n_l(x_l, u)}{k^{h_l}}$$

*Απόδειξη.* Αποδεικνύουμε το ζητούμενο με επαγωγή. Προφανώς, για $h_l = 1$ ισχύει, αφού λόγω της προσέγγισης που θεωρούμε, δηλαδή ότι η τιμή $\tilde{n}_l^k(.)$) προκύπτει από στρογγυλοποίηση στην κοντινότερη δύναμη του $k$ της πραγματικής $n_l(.)$, θα ισχύει ότι $k \cdot \tilde{n}_l^k(x_l, u) \geq n_l(x_l, u)$. Υποθέτουμε, ότι το ζητούμενο ισχύει για όλους τους συνδέσμους με ύψος μικρότερο του $r$. Θέλουμε να δείξουμε το ζητούμενο για $h_l = r + 1$, για αυτό και παίρνουμε το σύνολο των παιδιών-συνδέσμων του $l$, που είναι το $\{l_1, l_2, \ldots, l_s\}$. Από την υπόθεση της επαγωγής, θα έχουμε ότι $\tilde{n}_{l_i}^k(x_{l_i}, u) \geq \frac{n_{l_i}(x_{l_i}, u)}{k^r}$. Από αυτό προκύπτει ότι:

$$\hat{m}_l^k(x_{l_i}, u) = \sum_{i=1}^{s} \tilde{n}_{l_i}^k(x_{l_i}, u) \geq \sum_{i=1}^{s} \frac{n_{l_i}(x_{l_i}, u)}{k^r} = \frac{n_l(x_l, u)}{k^r}$$

Ορίζουμε την ποσότητα $x^{'}$ ως εξής:

$$x^{'} = x_{l_i} - \frac{c^k(l)}{\hat{m}_l^k(x_{l_i}, u)}$$

όπου $x_{l_i}$ η τιμή, που πρέπει να πληρώσουν οι παίκτες για να καλύψουν το κόστος μετάδοσης με τη χρήση έως και του συνδέσμου $l$. Όμως είδαμε ότι η $x_{l_i}$ ορίζεται ως εξής:

$$x_{l_i} = x_l + \frac{c(l)}{n_l(x_l, u)}$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι $x^{'} \geq x_l$ και επομένως και $\hat{n}_l^k(x_l, u) \geq \hat{n}_l^k(x^{'}, u)$. Όμως πρέπει να λάβουμε υπόψη και το βήμα 2 του αλγορίθμου ΒΣ, δηλαδή ότι:

$$\hat{n}_l(p, v) = \max_{\{p^{'} - \frac{c(l)}{\hat{m}_l(p^{'}, v)} \geq p\}} \hat{m}_l(p^{'}, v)$$

Θέτοντας σε αυτή τη σχέση όπου $p = x^{'}$ και $p^{'} = x_{l_i}$ προκύπτει ότι:

$$\hat{n}_l^k(x^{'}, u) \geq \hat{m}_l^k(x_{l_i}, u)$$

και επειδή $x^{'} \geq x_l$ ισχύει $\hat{n}_l^k(x_l, u) \geq \hat{n}_l^k(x^{'}, u)$. Τέλος, περνάμε στην προσέγγιση $\tilde{n}^k(.)$ και έχουμε:

$$\tilde{n}_l^k(x_l, u) \geq \frac{\hat{n}_l^k(x_l, u)}{k}$$

και:

$$\tilde{n}_l^k(x_l, u) \geq \frac{n_l(x_l, u)}{k^{r+1}}$$

Η απόδειξη με επαγωγή ολοκληρώθηκε. □

**Λήμμα 4.10.**

$$R^k(u) \supseteq R(u)$$

*Απόδειξη.* Από το προηγούμενο λήμμα, προκύπτει ότι η παρακάτω ανίσωση ισχύει:

$$\frac{c^k(l)}{\tilde{n}_l^k(x_l, u)} \leq \frac{c(l)}{n_l(x_l, u)}$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι το κόστος για το σύνδεσμο $l$, που καλείται να πληρώσει κάθε παίκτης που τον χρησιμοποιεί είναι μικρότερο στην περίπτωση του προσεγγιστικού μηχανισμού. Τελικά, αν εφαρμόσουμε την ανίσωση αυτή για κάθε σύνδεσμο προκύπτει ότι $x_l^k \leq x_l \forall l$. Αυτό, προφανώς συνεπάγεται το ζητούμενο. □

Το γεγονός αυτό, δηλαδή, ότι ο προσεγγιστικός αλγόριθμος επιτρέπει σε μεγαλύτερο αριθμό χρηστών να λάβουν την προς πώληση πληροφορία μας βοηθάει να φράξουμε τόσο την απόκλιση από τον ισοσκελισμένο προϋπολογισμό όσο και την απώλεια του κοινωνικού καλού.

- Απόκλιση από τον ισοσκελισμένο προϋπολογισμό (Budget-Balance Approximation): Παρόλο, που ο μηχανισμός της βηματικής συνάρτησης, από τον οποίο προέρχεται ο κλιμακωτός αλγόριθμος βηματικής συνάρτησης (ΚΒΣ), είναι είτε ισοσκελισμένου προϋπολογισμού είτε έχει κέρδος για τον μηχανισμό, ο κλιμακωτός πάντοτε έχει ζημιά, δηλαδή οι πληρωμές των παικτών ποτέ δεν υπερβαίνουν το κόστος της μετάδοσης. Όμως, η ζημιά του ΚΒΣ φράσσεται από μία συνάρτηση της παραμέτρου $k$ και του ύψους του δέντρου $h$ από το θεώρημα, που ακολουθεί:

  **Θεώρημα 4.11.**

  $$\frac{c(R^k(u))}{k^h} \leq \sum_{i \in R^k(u)} x_i^k(u) \leq c(R^k(u))$$

  *όπου $C(T)$ το κόστος μετάδοσης για το δέντρο διανομής $T$.*

  *Απόδειξη.* Ο κλιμακωτός αλγόριθμος της βηματικής συνάρτησης είναι ο ίδιος με τον κανονικό ΒΣ, μόνο που τα κόστη των συνδέσμων του δέντρου διαιρούνται με μία δύναμη της παραμέτρου $k$. Ο ΒΣ, όμως, είπαμε ότι δεν έχει ζημιά, επομένως θα ισχύει: $X \geq C^k(R^k(u))$, όπου $X = \sum_{i \in R^k(u) x_i^k(u)}$ και $C^k(T)$ το κόστος του δέντρου διανομής $T$, με τα κλιμακωτά κόστη των συνδέσμων. Όμως, για κάθε σύνδεσμο $l$ ισχύει: $c(l) \geq \frac{c(l)}{k^h}$, άρα και $C^k(R^k(u)) \geq \frac{C(R^k(u))}{k^h}$. □

- Απώλεια στο κοινωνικό καλό στη χειρότερη περίπτωση (worst case welfare loss): Επιπλέον, μπορούμε να φράξουμε και την απώλεια του κοινωνικού καλού στη χειρότερη περίπτωση. Για να το κάνουμε αυτό σκεφτόμαστε ως εξής: Έστω $T^k(u)$ και $T(u)$ τα δέντρα μετάδοσης, που αντιστοιχούν στα σύνολα αποδεκτών $R^k(u)$ και $R(u)$ αντίστοιχα. Τότε, αφού $T^k(u) \supseteq T(u)$ μπορούμε να γράψουμε: $T^k = T \cup T^1 \cup ... \cup T^r$. Όμοια, θα ισχύει ότι $R^k = R \cup R^1 \cup ... \cup R^r$, όπου $R^i$ ένα υποσύνολο των αποδεκτών του $R^k(u)$, που βρίσκονται σε κόμβους του δέντρου $T^i$. Τότε αποδεικνύεται το παρακάτω θεώρημα:

  **Θεώρημα 4.12.**

  $$NW(R^k(u)) \geq NW(R(u)) - (k^h - 1) \cdot U$$

  *όπου $NW(R^k)$ συμβολίζει το κοινωνικό καλό (δηλαδή τη διαφορά του αθροίσματος των ωφελειών μείον το κόστος για τη μετάδοση) για το σύνολο των αποδεκτών $R^k$.*

*Απόδειξη.* Το κοινωνικό καλό του συνόλου $R^k$ είναι:

$$NW(R^k(u)) = \sum_{i \in R^k(u)} u_i - c(R^k(u)) = NW(R(u)) + \sum_{j=1}^{r} NWR^j$$

Για κάθε υποδέντρο $T_j$ του $T^k$ θα ισχύει:

$$\begin{aligned} U(T_j) = \sum_{i \in T_j} u_i \geq c^k(T_j) &\geq \frac{c(T_j)}{k^h} \\ &\Rightarrow k^h \cdot U \geq c(T_j) \\ &\Rightarrow NWT_j \geq -(k^h - 1)U(T_j) \end{aligned}$$

Επομένως τελικά έχω:

$$\begin{aligned} NW(R^k(u)) &\geq NW(R(u)) - (k^h - 1)\sum_{j=1}^{r} U(T_j) \\ &= NW(R(u)) - (k^h - 1) \sum_{i \in R^k(u)} u_i \\ &= NW(R(u)) - (k^h - 1)U \end{aligned}$$

□

Στο εδάφιο αυτό παρουσιάσαμε μία πρώτη προσπάθεια εφαρμογής της έννοιας της προσεγγισιμότητας σε προβλήματα, στα οποία οι συμμετέχοντες απαιτείται να είναι φιλαλήθεις για τις προτιμήσεις τους πάνω στα πιθανά αποτελέσματα του αλγορίθμου. Πετύχαμε να διατηρήσουμε την ομαδική-φιλαλήθεια (group strategyproofness) και να βελτιώσουμε κατά πολύ την επικοινωνιακή αποδοτικότητα του αρχικού αλγορίθμου. Για να γίνει όμως αυτό αναγκαστήκαμε να θυσιάσουμε άλλες χρήσιμες ιδιότητες, του ισοσκελισμένου προϋπολογισμού (budget balance)και της απώλειας κοινωνικού καλού στη χειρότερη περίπτωση (worst case welfare loss). Παρόλα αυτά, είδαμε ότι μπορούμε να φράξουμε το πόσο χάνουμε σε σχέση με αυτές τις ιδιότητες με συναρτήσεις των παραμέτρων του αλγορίθμου.

## 4.2 Πιθανές μελλοντικές εφαρμογές του ΚΑΣΜ

### 4.2.1 Δικτυακές Κρυφές Μνήμες (Web Caches)

Οι δικτυακές κρυφές μνήμες (web caches) είναι μία επέκταση της έννοιας των κρυφών μνημών, που χρησιμοποιούνται σε υπολογιστικά συστήματα, για να επιταχύνουν την πρόσβαση του επεξεργαστή στα δεδομένα, που χρειάζεται. Στο δίκτυο, χρησιμοποιούνται για την βελτίωση της πρόσβασης σε δικτυακούς τόπους, πετυχαίνοντας ταυτόχρονα δύο σημαντικά αποτελέσματα: να μειώσουν στο ελάχιστο τα σημεία συμφόρησης του δικτύου λόγω μεγάλης επισκεψιμότητας (hot spots) και να μειώσουν, επίσης, το χρόνο πρόσβασης σε ένα κόμβο του δικτύου. Ως τώρα, έχουν προταθεί διάφορα πρωτόκολλα χειρισμού των δικτυακών κρυφών μνημών (web caches), κοινό στοιχείο, των οποίων είναι ότι υποθέτουν ότι οι κρυφές μνήμες (caches), θα ενεργούν πάντοτε σύμφωνα με το πρωτόκολλο. Αυτό, όμως, μπορεί να απέχει από την πραγματικότητα όταν οι τελευταίες ανήκουν σε διαφορετικές οντότητες, οι οποίες δεν μπορούν πάντοτε να συνεργαστούν. Σε τέτοια περίπτωση, εγείρονται σημαντικά θέματα, που έχουν σχέση με τα κίνητρα των εμπλεκομένων οντοτήτων.

Πρώτα από όλα, αν περιοριστούμε σε μία μόνο κρυφή μνήμη (cache), στόχος της είναι να μεγιστοποιηθεί η χρησιμότητα των πελατών της, κάτι που επιτυγχάνεται με το να αποθηκεύει τις σελίδες, που ζητούνται περισσότερο από τους χρήστες. Αυτή τη γνώση, όμως, δεν μπορεί να την αποκτήσει παρά μόνο ρωτώντας τους. Αυτοί, από τη μεριά τους, έχουν λόγο να δώσουν ψευδείς ανακοινώσεις, ώστε η σύσταση της μνήμης να είναι αυτή που τους ταιριάζει περισσότερο. Ζητούμενο, λοιπόν, από τον μηχανισμό, που θα υλοποιηθεί είναι να προσφέρει στους παίκτες εναλλακτικές πληρωμές, ώστε να εξασφαλίσει ότι ανακοινώνουν αληθείς τιμές.

Από την άλλη, ακόμη και αν κινητοποιήσουμε κατάλληλα τους χρήστες, ώστε να λένε πάντοτε την αλήθεια, μένει ένα ακόμη πρόβλημα να λυθεί. Οι μνήμες έχουν κάποιο κόστος για την αποθήκευση πληροφορίας και, προφανώς, επιθυμούν να αποθηκεύουν όσο το δυνατό λιγότερες σελίδες, ώστε να ελαχιστοποιήσουν αυτό το κόστος, στην περίπτωση, που ο μηχανισμός δεν τις αποζημιώνει κατάλληλα. Από την άλλη, αν θεσπιστεί αλγόριθμος πληρωμών, πρέπει να είναι έτσι σχεδιασμένος, ώστε να μην προσφέρει κίνητρα στις μνήμες να μεροληπτούν υπέρ συγκεκριμένων σελίδων, που προσφέρουν μεγαλύτερη ανταμοιβή.

### 4.2.2 Peer-to-Peer (P2P) Ανταλλαγή Αρχείων

Το τελευταίο διάστημα τα συστήματα P2P είναι ιδιαίτερα δημοφιλή και χρησιμοποιούνται για την ανταλλαγή αρχείων μουσικής, video κτλ. Η αρχή έγινε με την επανάσταση του Napster και συνεχίζεται τώρα με τους διαδόχους του, Gnutella, KaZaA κτλ. Ένα P2P σύστημα δουλεύει ως εξής: κάθε χρήστης λειτουργεί, παράλληλα, ως λήπτης και παροχέας περιεχομένου. Εκτός από ένα κεντρικό εξυπηρετητή, που φέρνει σε επαφή τους ενδιαφερόμενους χρήστες μεταξύ τους, το όλο σύστημα είναι αποκεντρωμένο και αυτορυθμιζόμενο.

Το βασικό μειονέκτημα των P2P συστημάτων είναι ο κίνδυνος ανάπτυξης κεντρικών κόμβων, οι οποίοι θα είναι οι μόνοι ικανοί να παρέχουν περιεχόμενο στην πλειοψηφία των χρηστών, οι οποίοι θα είναι απλώς αποδέκτες. Αυτό, όμως, θα μας φέρει πίσω στη συνήθη μορφή της οικονομίας με τους παροχείς περιεχομένου, από τη μία μεριά, και με τους χρήστες που πληρώνουν με χρήματα, από την άλλη. Απαραίτητη είναι η χρήση κατάλληλων κίνητρων, ώστε ο κάθε χρήστης να συμμετέχει. Μία πρώιμη ιδέα είναι η πληρωμή σε κάθε χρήστη που επιτρέπει την πρόσβαση στο περιεχόμενο, που διαθέτει, με κάποια μορφή φανταστικού χρήματος (www.mojonation.net), το οποίο δίνει προτεραιότητα στον κάτοχο του, όταν το σύστημα είναι υπερφορτωμένο. Ενδιαφέρον, θα έχει η αναζήτηση λύσεων, που χρησιμοποιούν αληθινά χρηματικά ανταλλάγματα, τα οποία μάλλον, θα οδηγήσουν σε καλύτερα αποτελέσματα.

### 4.2.3 Κατανομή Υπολογιστικού Φορτίου (Load Balancing) στο Internet

Τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει να γίνεται μία εκτενής προσπάθεια εκμετάλλευσης του άεργου υπολογιστικού χρόνου (idle time) για την επίλυση προβλημάτων της Φυσικής και της Βιολογίας, τα οποία είναι αρκετά πολύπλοκα. Σε έναν ιδανικό (ουτοπικό ?!) κόσμο του μέλλοντος η υπολογιστική ισχύ θα μπορεί να κατανέμεται βέλτιστα σε όλους τους χρήστες σε ένα παγκόσμιο δίκτυο. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει, ακόμη, και με αποθηκευτικούς χώρους ή και φυσικά μέσα, όπως οι εκτυπωτές.

Η λύση ενός τέτοιου προβλήματος και η υλοποίηση ενός αποδοτικού και αποδεκτού από όλους πρωτοκόλλου είναι αρκετά δύσκολη, ακόμη και σε ένα τοπικό δίκτυο λίγων τερματικών. Η επιπλέον δυσκολία που εισάγει η μορφή του Internet είναι το πώς κανείς μπορεί να πείσει ένα χρήστη να "δανείσει" την υπολογιστική του ισχύ σε άλλους. Για αυτό το λόγο υπάρχει η ανάγκη για πρωτόκολλα, τα οποία θα αποζημιώνουν, κατά κάποιο τρόπο τους "γενναιόδωρους" χρήστες.

## 4.3 Ξεκαθαρίζοντας τις έννοιες του ΚΑΣΜ

Στα παραπάνω εδάφια παρουσιάσαμε ορισμένα παραδείγματα του Κατανεμημένου Αλγοριθμικού Σχεδιασμού Μηχανισμών, η μελέτη των οποίων δίνει κάποια βασικά χαρακτηριστικά του. Υπάρχει, όμως, η ανάγκη μίας πιο τυπικής καταγραφής των σχετικών με τον ΚΑΣΜ εννοιών. Κάτι τέτοιο προσπαθούμε να πετύχουμε σε αυτό το εδάφιο, στο οποίο μελετούμε το πρόβλημα συνολικά και όχι μόνο βάση συγκεκριμένων εφαρμογών.

### 4.3.1 Πολυπλοκότητα των ΚΑΣΜ προβλημάτων

Βασικός στόχος της Θεωρητικής Πληροφορικής είναι ο επιτυχής διαχωρισμός εύκολων και δύσκολων προβλημάτων, που ορίζονται σε διάφορα υπολογιστικά μοντέλα. Τα θετικά αποτελέσματα της επιστήμης στον τομέα αυτό συνοψίζονται στην περιγραφή των κλάσεων πολυπλοκότητας, που βασίζονται στη μηχανή Turing και στο διαχωρισμό των προβλημάτων με βάση αυτές σε εύκολα (που ανήκουν στην κλάση P) και δύσκολα (που ανήκουν στην κλάση NP). Όμοια ορίζονται ανάλογες κλάσεις και για το μοντέλο PRAM για παράλληλο προγραμματισμό. Έτσι, για να αποκτήσει και η νεότευκτη θεωρία του ΚΑΣΜ θεωρητικό υπόβαθρο είναι αναγκαίο να οριστούν επακριβώς οι έννοιες του *εύκολου* και *δύσκολου* προβλήματος.

Πρόχειρα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε ως εύκολο ένα πρόβλημα, για το οποίο επιτυγχάνεται ο σχεδιασμός ενός μηχανισμού, που είναι ταυτόχρονα συμβατός με τα κίνητρα των χρηστών (incentive compatible) και υπολογιστικά εφικτός, όπου οι ακριβείς ορισμοί της της συμβατότητας και υπολογιστικής αποδοτικότητας εξαρτώνται από το πρόβλημα που εξετάζουμε. Για παράδειγμα, αν στο πρόβλημα *του καταμερισμού του κόστους με σκοπό τη μεγιστοποίηση του κοινωνικού καλού (welfare-maximizing cost sharing)* η υπολογιστική αποδοτικότητα μετριέται με τον αριθμό των μηνυμάτων που ανταλλάσσονται στο δίκτυο και η συμβατότητα κινήτρων ταυτίζεται με την φιλαλήθεια (truthfulness), τότε είδαμε ότι υπάρχει λύση, που είναι ο Μηχανισμός Οριακού Κόστους. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι το πρόβλημα αυτό είναι εύκολο.

Από την άλλη, ως δύσκολα μπορούμε να ορίσουμε τα προβλήματα, στα οποία μία τουλάχιστον από τις δύο απαιτήσεις δεν ικανοποιείται. Τέτοια προβλήματα είναι αρκετά εύκολο να βρεθούν, αφού όλοι οι μηχανισμοί που χρησιμοποιούνται για NP-hard προβλήματα δεν είναι δυνατό να είναι υπολογιστικά εφικτοί. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον, παρουσιάζει η μελέτη προβλημάτων, για τα οποία οι δύο απαιτήσεις ικανοποιούνται ξεχωριστά αλλά όχι ταυτόχρονα. Ένα τέτοιο πρόβλημα, που ονομάζεται και *κανονικά δύσκολο* (canonically hard) είναι η εύρεση φιλαλήθη μηχανισμού καταμερισμού του κόστους multicast μεταδόσεων με ισοσκελισμένο προϋπολογισμό. Η καλύτερη λύση είναι, όπως είδαμε, ο μηχανισμός, που βασίζεται στην τιμή Shapley, που όμως για να εφαρμοστεί απαιτεί την ανταλλαγή μεγάλου αριθμού μηνυμάτων, αποτυγχάνοντας έτσι να δώσει καλή δικτυακή πολυπλοκότητα.

Ένα βασικό, λοιπόν, ζητούμενο που προκύπτει από τα παραπάνω, είναι ο ορισμός του υπολογιστικού μοντέλου, πάνω στο οποίο θα μπορέσουμε να εκφράσουμε τυπικά την έννοια της *δικτυακής πολυπλοκότητας*. Πηγαίνοντας και λίγο παρακάτω, θα μπορούσαν να οριστούν, επίσης, οι μέθοδοι αναγωγής, ώστε να αποδεικνύεται για ένα πρόβλημα είναι δύσκολο ή εύκολο, ακριβώς όπως γίνεται με τις αναγωγές κατά Cook ή Karp στο μοντέλο της μηχανής

Turing.

Επιπρόσθετα, θα μπορούσαμε να ορίσουμε πιο τυπικά και την έννοια της προσεγγισιμότητας σε τέτοια προβλήματα. Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο πώς η προσεγγισιμότητα μπορεί να εφαρμοστεί για να σχεδιαστούν πιο αποδοτικοί μηχανισμοί και ποιες επιπτώσεις έχει κάτι τέτοιο στις επιθυμητές ιδιότητες των μηχανισμών (φιλαλήθεια κτλ.). Τα ίδια, ακριβώς, ισχύουν και στην περίπτωση του ΚΑΣΜ, μόνο που, ο σχεδιασμός προσεγγιστικών μηχανισμών είναι ακόμη πιο δύσκολος, λόγω της αποκεντρωμένης φύσης τους.

### 4.3.2 Μοντέλα Λύσης

Οι μηχανισμοί, που περιγράψαμε ως τώρα, είχαν την κοινή ιδιότητα ότι παρείχαν στους χρήστες τους ένα σύνολο κυρίαρχων στρατηγικών, μηδενίζοντας έτσι την πολυπλοκότητα της εύρεσης της βέλτιστης στρατηγικής τους. Μία αιτιολογία για τη χρήση κυρίαρχων στρατηγικών είναι ότι στα περισσότερα προβλήματα με αποκεντρωμένους χρήστες, οι τελευταίοι δεν έχουν καμία πληροφορία για τις στρατηγικές των υπόλοιπων παικτών, κάνοντας έτσι πρακτικά αδύνατη την επιλογή βέλτιστης κίνησης.

Παρόλη τη διάδοση των κυρίαρχων στρατηγικών, το μοντέλο αυτό μπορεί να μην είναι το, πλέον, κατάλληλο για τα προβλήματα του ΚΑΣΜ. Για παράδειγμα στο πρόβλημα της interdomain δρομολόγησης κάθε αυτόνομο σύστημα μπορεί να διαθέτει μερική αλλά σημαντική πληροφόρηση για τη δομή και τις στρατηγικές των υπόλοιπων ΑΣ. Ίσως, λοιπόν, κάποιο άλλο μοντέλο λύσης να είναι πιο εφαρμόσιμο, όπως για παράδειγμα αυτό του *επαναλαμβανόμενου παιχνιδιού* (repeated-play). Από την άλλη, στο Internet οι παίκτες δεν γνωρίζουν ακριβώς τη συνάρτηση κέρδους τους (pay-off function), παρά μόνο γνωρίζουν το κέρδος για ένα σύνολο συγκεκριμένων κινήσεων, που έχουν ήδη κάνει. Επιπλέον, οι συναρτήσεις αυτές κέρδους αλλάζουν συνεχώς καθώς αλλάζει η δομή και η κυκλοφορία του δικτύου, στο οποίο συμμετέχουν. Τέλος, η όλη διαδικασία είναι εξαιρετικά ασύγχρονη, καθώς δεν υπάρχει κάποιο ρολόι, που να συγχρονίζει τις κινήσεις των παικτών. Για όλους τους παραπάνω λόγους, ίσως, θα πρέπει να προσαρμοστούν τα ήδη υπάρχοντα ή να αναπτυχθούν νέα μοντέλα λύσης, πιο κατάλληλα για την ειδική φύση των προβλημάτων αυτών.

Ανακεφαλαιώνοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η έλευση του Internet και η καθιέρωσή του ως η κυρίαρχη υπολογιστική πλατφόρμα έχει δημιουργήσει νέες κατευθύνσεις στην έρευνα της Θεωρητικής Πληροφορικής. Η τελευταία στρέφει την προσοχή της περισσότερο σε κατανεμημένα περιβάλλοντα. Μένει όμως να οριστούν πολλές έννοιες, ώστε να μπορούμε να μιλάμε για ένα νέο υπολογιστικό μοντέλο, μετά από αυτό της μηχανής Turing.

# Βιβλιογραφικές Αναφορές


[AFK+01] A. Archer, J. Feigenbaum, A. Krishnamurthy, R. Sami, and S. Shenker. Approximation and collusion in multicast cost sharing. In *ACM Conference on Electronic Commerce*, 2001.

[AT01] Aaron Archer and Eva Tardos. Truthful mechanisms for one-parameter agents. In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 482–491, 2001.

[AT02] Aaron Archer and Eva Tardos. Frugal path mechanisms. In *ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 482–491, 2002.

[Ber92] D. P. Bertsekas. Auction algorithms for network flow problems: A tutorial introduction. *Computational Optimization and Applications*, 1:7–66, 1992.

[Cla71] Edward Clarke. Multipart pricing of public goods. *Public Choice*, 2:19–33, 1971.

[DV00] S. DeVries and R. Vohra. Combinatorial auctions: A survey, 2000.

[FKSS03] J. Feigenbaum, A. Krishnamurthy, R. Sami, and S. Shenker. Hardness results for multicast cost sharing. *to appear in Theoretical Computer Science*, 2003.

[FPS01] Joan Feigenbaum, Christos H. Papadimitriou, and Scott Shenker. Sharing the cost of multicast transmissions. *Journal of Computer and System Sciences*, 63(1):21–41, 2001.

[FPSS02] J. Feigenbaum, C. Papadimitriou, R. Sami, and S. Shenker. A BGP-based mechanism for lowest-cost routing. In *ACM Symposium on Principles of Distributed Computing.*, 2002.

[FS02] Joan Feigenbaum and Scott Shenker. Distributed algorithmic mechanism design: Recent results and future directions.

In *Sixth International Workshop on Discrete Algorithms and Methods for Mobile Computing and Communications*, pages 1–13, 2002.

[Gro73] Theodore Groves. Incentives in teams. *Econometrica*, 41:617–631, 1973.

[Has96] J. Hastad. Clique is hard to approximate within $n_{1-\epsilon}$. In *IEEE Symposium on Foundations Of Computer Science*, pages 129–140, 1996.

[HS01] John Hershberger and Subhash Suri. Vickrey prices and shortest paths: What is an edge worth? In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 252–259, 2001.

[JV01] Kamal Jain and Vijay V. Vazirani. Applications of approximation algorithms to cooperative games. In *ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 364–372, 2001.

[KP99] Elias Koutsoupias and Christos Papadimitriou. Worst-case equilibria. *Lecture Notes in Computer Science*, 1563:404–413, 1999.

[LOS99] Daniel J. Lehmann, Liaden Ita O'Callaghan, and Yoav Shoham. Truth revelation in approximately efficient combinatorial auctions. In *ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 96–102, 1999.

[McM94] John McMillan. Selling spectrum rights. *Journal of Economic Perspectives*, pages 145–162, 1994.

[MCWG95] Mas-Collel, Winston, and Green. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995.

[MM87] Preston McAfee and John McMillan. Auctions and bidding. *Journal of Economic Literature*, 25:699–738, 1987.

[MS97] H. Moulin and S. Shenker. Strategyproof sharing of submodular costs: Budget balance versus efficiency, 1997.

[Nis99] Noam Nisan. Algorithms for selfish agents. *Lecture Notes in Computer Science*, 1563:1–15, 1999.

[Nis00] Noam Nisan. Bidding and allocation in combinatorial auctions. In *ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 1–12, 2000.

[NR99] Noam Nisan and Amir Ronen. Algorithmic mechanism design. In *ACM Symposium on the Theory Of Computing*, pages 129–140, 1999.

[NR00] Noam Nisan and Amir Ronen. Computationally feasible VCG mechanisms. In *ACM Conference on Electronic Commerce*, pages 242–252, 2000.

[Pap01a] Christos Papadimitriou. Algorithmic Aspects of Game Theory. Lecture notes, EECS UC Berkeley, 2001.

[Pap01b] Christos H. Papadimitriou. Algorithms, games, and the Internet. *Lecture Notes in Computer Science*, 2076:1—5, 2001.

[Par01] David Parkes. *Iterative Combinatorial Auctions: Achieving Economic and Computational Efficiency.* PhD thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA, 2001.

[Par02] David Parkes. Computational Mechanism Design. Lecture notes, EECS Harvard University, 2002.

[RO94] Ariel Rubinstein and Martin Osborne. *A course in Game Theory.* The MIT Press, 1994.

[RPH98] M. H. Rothkopf, A. Pekec, and R. M. Harstad. Computationally manageable combinatorial auctions. *Management Science*, 44(8):1131–1147, 1998.

[RT00] Tim Roughgarden and Eva Tardos. How bad is selfish routing? In *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 93–102, 2000.

[San02] Tuomas Sandholm. An algorithm for optimal winner determination in combinatorial auctions. *Artificial Intelligence*, 135(2):1–54, 2002.

[Ten00] Moshe Tennenholtz. Some tractable combinatorial auctions. In *AAAI/IAAI*, pages 98–103, 2000.

[Var95] Hal R. Varian. Economic mechanism design for computerized agents. In *USENIX Workshop on Electronic Commerce*, pages 13–21, 1995.

[Vic61] William Vickrey. Counterspeculation, auctions and competive sealed tenders. *Journal of Finance*, 16:8–37, 1961.

[WWWMM01] M. Wellman, W. Walsh, P. Wurman, and J. MacKie-Mason. Auction protocols for decentralized scheduling. *Games and Economic Behavior*, 35:271–303, 2001.