

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών  
Υπολογιστών

Διπλωματική Εργασία

Επανακανονικοποίηση στη  
θεωρία  $\phi^4$

Γιώργος Σοφιανάτος - 03098079

Επιβλέπων: Νίκος Τράκας  
Αναπληρωτής Καθηγητής  
Τομέας Φυσικής ΣΕΜΦΕ



# Περιεχόμενα

0.1	Εισαγωγή . . . . .	4
0.2	Abstract . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Μη σχετικιστική κβαντομηχανική</b>	<b>7</b>
1.1	Η εξίσωση Schrödinger . . . . .	7
1.2	Η μέθοδος των διαταραχών στην εξίσωση Schrödinger . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Σχετικιστική κβαντομηχανική</b>	<b>15</b>
2.1	Σωματίδια χωρίς spin . . . . .	15
2.1.1	Η εξίσωση Klein-Gordon . . . . .	15
2.1.2	Η μέθοδος των διαταραχών στην εξίσωση Klein-Gordon . . . . .	18
2.2	Σωματίδια με spin . . . . .	23
2.2.1	Η εξίσωση Dirac . . . . .	23
2.2.2	Η μέθοδος των διαταραχών στην εξίσωση Dirac . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Εφαρμογή της επανακανονικοποίησης στη θεωρία <math>\phi^4</math></b>	<b>31</b>
3.1	Εισαγωγή στην επανακανονικοποίηση . . . . .	31
3.2	Επανακανονικοποίηση της θεωρίας $\phi^4$ . . . . .	35

## 0.1 Εισαγωγή

Αντικείμενο της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η διαδικασία της επανακανονικοποίησης μίας κβαντικής θεωρίας. Είναι κοινά αποδεκτό στη μοντέρνα φυσική ότι κάθε κβαντική θεωρία πρέπει να είναι επανακανονικοποιήσιμη. Στην εργασία αυτή εξετάζεται η επανακανονικοποίηση μίας μη ρεαλιστικής θεωρίας, ενός απλοποιημένου δηλαδή μοντέλου που δεν ισχύει στη Φύση. Σκοπός είναι η εξοικείωση με τις μεθόδους και τις μαθηματικές τεχνικές αυτής της διαδικασίας που εφαρμόζεται σε όλες τις σύγχρονες θεωρίες.

Στα πλαίσια της εργασίας, αρχικά παρουσιάζονται κάποια θεμελιώδη αποτελέσματα της μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής (Κεφάλαιο 1) που χρησιμοποιούνται και γενικεύονται στα επόμενα κεφάλαια. Στη συνέχεια (Κεφάλαιο 2) αναπτύσσεται η σχετικιστική θεωρία σωματιδίων που δεν έχουν spin και που είναι απαραίτητη για τη μελέτη του θεωρητικού μοντέλου στο οποίο θα εφαρμόσουμε την επανακανονικοποίηση. Για λόγους πληρότητας, στο ίδιο κεφάλαιο παρουσιάζεται και η πλήρης σχετικιστική θεωρία που περιγράφει σωματίδια με spin αν και αυτή δεν είναι αναγκαία για την περίπτωση του μοντέλου που θα εξετάσουμε. Στη συνέχεια της εργασίας (Κεφάλαιο 3) γίνεται μία εισαγωγή στην έννοια της επανακανονικοποίησης και παρουσιάζεται αναλυτικά η εφαρμογή της στη θεωρία  $\phi^4$ .

Η εργασία εκπονήθηκε στο μεγαλύτερο της μέρος κατά το εαρινό εξάμηνο του ακαδημαϊκού έτους 2002-2003 με επιβλέποντα τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Νίκο Τράκα. Θα ήθελα από εδώ να τον ευχαριστήσω θερμά για την καθοδήγηση και τις παρατηρήσεις του κατά τη διάρκεια της ενασχόλησης μου με αυτό το άγνωστο για μένα θέμα. Επίσης για την προθυμία του να βοηθήσει σε κάθε είδους πρόβλημα που προέκυπτε στην πορεία και για τις συζητήσεις μας για όλα τα θέματα, ακόμη και εκτός του αντικειμένου της εργασίας. Του είμαι ευγνώμων για τη βοήθειά του καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου και πιστεύω πως τιμάει το ρόλο του διδάσκοντα.

Η εργασία αυτή αφιερώνεται σε όλους αυτούς που προσπαθούν να κατακτήσουν την ελευθερία. Στους επιστήμονες και τους μουσικούς που είναι για μένα πηγή έμπνευσης.

Γιώργος Σοφιανάτος  
Ιούλιος 2003

*“no money in our jackets and our jeans are torn,  
your hands are cold but your lips are warm” - Dire Straits*

## 0.2 Abstract

The diploma thesis deals with the procedure of the renormalization of a quantum theory. It is widely accepted in modern physics that every quantum theory has to be renormalizable. We consider the renormalization of an unrealistic theory, a simplified model which does not correspond to Nature. Our aim is to use and understand the methods and the mathematical techniques of this procedure which is applied to all modern theories.

In the beginning some of the fundamental results of non-relativistic quantum mechanics are presented (Chapter 1) and are used and generalized in the next chapters. In Chapter 2 the relativistic theory of spinless particles is developed as it is necessary for the study of the theoretical model which we will renormalize. For completeness reasons we present in the same chapter the full relativistic theory which describes particles with spin, although it will not be needed for the case of the model we will examine. Finally (Chapter 3), we make an introduction to the concept of renormalization avoiding the mathematical details and then we present the detailed calculations of its application to the  $\phi^4$  theory.



# Κεφάλαιο 1

## Μη σχετικιστική κβαντομηχανική

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζονται μερικά βασικά στοιχεία της μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής. Μελετάμε δηλαδή σωματίδια με ταχύτητα  $v \ll c$  ( $c$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό) και χωρίς spin. Φυσικά, κάποια φαινόμενα του spin μπορούν να εισαχθούν στο πλαίσιο της μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής, αλλά για την πλήρη μελέτη τους απαιτείται μία σχετικιστική θεωρία. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου αποτελούν τη βάση πάνω στην οποία στηρίζονται τα επόμενα κεφάλαια, τα οποία αναφέρονται στην σχετικιστική περίπτωση.

### 1.1 Η εξίσωση Schrödinger

Η θεμελιώδης εξίσωση της μη σχετικιστικής κβαντομηχανικής είναι η εξίσωση του Schrödinger, η οποία για ένα ελεύθερο σωματίδιο γράφεται

$$-\frac{1}{2m}\nabla^2\Psi(\mathbf{x},t) = i\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\mathbf{x},t) \quad (1.1)$$

όπου έχουμε θέσει  $\hbar \equiv 1$ .

Η εξίσωση (1.1) προκύπτει από τη μη σχετικιστική σχέση ορμής-ενέργειας της κλασικής φυσικής για ελεύθερα σωματίδια,  $E = p^2/2m$ , κάνοντας τις αντικαταστάσεις

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\nabla \quad (1.2)$$

Στις αντικαταστάσεις (1.2) τη θέση των φυσικών μεγεθών  $E$  και  $\mathbf{p}$  παίρνουν οι αντίστοιχοι ερμιτιανοί τελεστές οι οποίοι δρουν στην κυματοσυνάρτηση  $\Psi(\mathbf{x},t)$  του σωματιδίου.

Για ένα σωματίδιο που η δυναμική του ενέργεια δίνεται από τη συνάρτηση  $V(\mathbf{x}, t)$  η εξίσωση του Schrödinger γράφεται

$$\left[ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}, t) \right] \Psi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.3)$$

Στην περίπτωση που  $V(\mathbf{x}, t) = 0$  (ελεύθερο σωματίδιο) ή  $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$  (η δυναμική ενέργεια ανεξάρτητη από το χρόνο) η εξίσωση (1.3) έχει λύσεις της μορφής

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}) e^{-iEt} \quad (1.4)$$

όπου  $E$  η ενέργεια του σωματιδίου.

Οι λύσεις (1.4) είναι ιδιοκαταστάσεις του τελεστή της ενέργειας, περιγράφουν δηλαδή καταστάσεις με καθορισμένη ενέργεια (στάσιμες καταστάσεις). Η συνάρτηση  $\psi(\mathbf{x})$  ικανοποιεί την χρονοανεξάρτητη εξίσωση

$$\left[ -\frac{1}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right] \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

ή σε πιο συνοπτική μορφή

$$H\psi = E\psi \quad (1.6)$$

όπου  $H$  ο τελεστής της Χαμιλτονιανής του συστήματος.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για το σωματίδιο ορίζεται ως  $\rho(\mathbf{x}, t) \equiv \Psi(\mathbf{x}, t) \Psi^*(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$  και η πυκνότητα του ρεύματος πιθανότητας είναι

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{2im} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μεταξύ τους μέσω της εξίσωσης συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (1.7)$$

## 1.2 Η μέθοδος των διαταραχών στην εξίσωση Schrödinger

Θεωρούμε την εξίσωση (1.6) με  $H = H_0$  τη Χαμιλτονιανή του ελεύθερου σωματιδίου

$$H_0\psi = E\psi \quad (1.8)$$

Η εξίσωση είναι ουσιαστικά ένα πρόβλημα ιδιοτιμών και έστω ότι  $\{\phi_n(\mathbf{x})\}$  είναι το πλήρες σύνολο των κανονικοποιημένων ιδιοσυναρτήσεων με αντίστοιχες ιδιοτιμές  $E_n$ . Θα είναι δηλαδή

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n \quad (1.9)$$



με

$$\int_V \phi_n^* \phi_m d^3x = \delta_{nm} \quad (1.10)$$

Στη σχέση (1.10) έχουμε θεωρήσει κανονικοποίηση σε έναν όγκο  $V$  και την κυματοσυνάρτηση περιοδική στον υπόλοιπο χώρο. Αυτός είναι και ο λόγος που στο δεύτερο μέλος αντί για μία  $\delta$ -συνάρτηση εμφανίζεται ένα  $\delta$  του Kronecker. Έστω τώρα ότι το σωματίδιο δεν είναι ελεύθερο αλλά έχει δυναμική ενέργεια  $V(\mathbf{x}, t)$ . Τότε κατά τα γνωστά θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση

$$[H_0 + V(\mathbf{x}, t)] \Psi(\mathbf{x}, t) = i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \quad (1.11)$$

η οποία ουσιαστικά ταυτίζεται με την (1.3).

Έχουμε δει ότι το σύνολο  $\{\phi_n(\mathbf{x})\}$  των ιδιοσυναρτήσεων της (1.8) είναι πλήρες. Επομένως κάθε συνάρτηση, άρα και οι λύσεις  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  της (1.11), μπορούν να γραφτούν στη μορφή

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n A_n \phi_n(\mathbf{x}) \quad (1.12)$$

Οι συντελεστές  $A_n$  δίνονται από τη σχέση

$$A_n = \int_V \phi_n^*(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}, t) d^3x \quad (1.13)$$

και προφανώς είναι συναρτήσεις του χρόνου, δηλαδή

$$A_n = A_n(t) \equiv a_n(t) e^{-iE_n t} \quad (1.14)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.14) η εξίσωση (1.12) γράφεται

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \quad (1.15)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.11) το  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  με το δεύτερο μέλος της (1.15) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.9) έχουμε

$$\begin{aligned} & \sum_n a_n(t) e^{-iE_n t} E_n \phi_n(\mathbf{x}) + \sum_n V(\mathbf{x}, t) a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} = \\ & = i \sum_n \frac{da_n}{dt}(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} + \sum_n a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) E_n e^{-iE_n t} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow i \sum_n \frac{da_n}{dt}(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} = \sum_n V(\mathbf{x}, t) a_n(t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της (1.16) με  $\phi_f^*(\mathbf{x})$ , ολοκληρώνοντας στον όγκο  $V$  και χρησιμοποιώντας τη σχέση ορθογωνιότητας (1.10) παίρνουμε τις παρακάτω συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις για τους συντελεστές

$$\frac{da_f}{dt}(t) = -i \sum_n a_n(t) \int_V \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \phi_n(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_n)t} d^3x \quad (1.17)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι το δυναμικό δρα για  $-T/2 \leq t \leq T/2$ , δηλαδή  $V(\mathbf{x}, t) = 0$  για  $|t| > T/2$ . Ακόμη, εξετάζουμε την περίπτωση που το σωματίδιο πριν την επίδραση του δυναμικού βρίσκεται σε μία ιδιοκατάσταση, έστω  $i$ , της ελεύθερης Χαμιλτονιανής  $H_0$ . Τότε θα έχουμε

$$a_i(-T/2) = 1 \quad , \quad a_n(-T/2) = 0 \quad , \quad n \neq i \quad (1.18)$$

Επομένως για  $t = -T/2$  η σχέση (1.17) παίρνει τώρα την απλούστερη μορφή

$$\frac{da_f}{dt}(-T/2) = -i \int_V \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, -T/2) \phi_i(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_i)t} d^3x \quad (1.19)$$

Θεωρούμε τώρα ότι το δυναμικό που δρα στο σωματίδιο για  $-T/2 \leq t \leq T/2$  είναι μία διαταραχή, είναι δηλαδή αρκετά μικρό έτσι ώστε να μην αλλάζει σημαντικά τις τιμές των συντελεστών  $a_n$  σε σχέση με τις αρχικές τιμές τους στη χρονική στιγμή  $t = -T/2$  όπως αυτές δίνονται από τις εξισώσεις (1.18). Αυτό σημαίνει ότι και η σχέση (1.19) ισχύει με καλή προσέγγιση για κάθε  $t$ , επομένως μπορούμε να την ολοκληρώσουμε και να πάρουμε την παρακάτω έκφραση

$$a_f(t) = -i \int_{-T/2}^t dt' \int_V d^3x \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t') \phi_i(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_i)t'} \quad (1.20)$$

Επειδή ενδιαφερόμαστε για τις τιμές των συντελεστών μετά το πέρας της επίδρασης του δυναμικού, θέτουμε  $t = T/2$  στην εξίσωση (1.20) και βρίσκουμε ότι

$$a_f(T/2) \equiv T_{fi} = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3x \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}, t) \phi_i(\mathbf{x}) e^{i(E_f - E_i)t} \quad (1.21)$$

Η έκφραση (1.21) αποτελεί την προσέγγιση σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών για τους συντελεστές  $a_f$ .

Η εξίσωση (1.21) μπορεί να γραφεί και ως

$$T_{fi} = -i \int_{-T/2}^{T/2} dt \int_V d^3x [\phi_f(\mathbf{x}) e^{-iE_f t}]^* V(\mathbf{x}, t) [\phi_i(\mathbf{x}) e^{-iE_i t}]$$

και χρησιμοποιώντας τις κυματοσυναρτήσεις  $\Phi_n(\mathbf{x}, t)$  των στασίμων καταστάσεων, όπου ως γνωστόν  $\Phi_n(\mathbf{x}, t) = \phi_n(\mathbf{x}) e^{-iE_n t}$ , έχουμε ότι

$$T_{fi} = -i \int_T dt \int_V d^3x \Phi_f^*(\mathbf{x}, t) V(\mathbf{x}, t) \Phi_i(\mathbf{x}, t) \quad (1.22)$$

Αν το σύστημά μας είχε διακριτό φάσμα (δηλαδή δέσμιες καταστάσεις), τότε η ποσότητα  $|T_{fi}|^2$  θα ήταν ίση με την πιθανότητα μετάβασης του συστήματος από την αρχική ιδιοκατάσταση  $i$  σε μία οποιαδήποτε τελική ιδιοκατάσταση  $f$ , λόγω του δυναμικού της διαταραχής.

Το ελεύθερο σωματίδιο όμως που μελετάμε έχει συνεχές φάσμα (αφού προφανώς δεν μπορεί να είναι δέσμιο) και συνεπώς δεν έχει νόημα η πιθανότητα αυτό να βρίσκεται σε μία συγκεκριμένη κατάσταση (είναι πάντα μηδέν). Φυσικά εμείς με την κανονικοποίηση που έχουμε κάνει σε έναν πεπερασμένο όγκο  $V$  έχουμε διακριτοποιήσει κατά κάποιο τρόπο το φάσμα αλλά αυτό είναι ένα μαθηματικό τέχνασμα και η ποσότητα  $|T_{fi}|^2$  εξακολουθεί να μην έχει φυσικό νόημα, λόγω της αυθαιρεσίας στην εκλογή του όγκου  $V$ .

Το αντίστοιχο μέγεθος στην περίπτωση μας πρέπει να αναφέρεται σε μία περιοχή τελικών καταστάσεων (λόγω του συνεχούς χαρακτήρα του φάσματος) και όχι σε μία μεμονωμένη τελική κατάσταση. Θα περιμέναμε λοιπόν ότι η ποσότητα

$$\int_{n_1}^{n_2} |T_{fi}|^2 dn$$

όπου  $n$  είναι ένας (συνεχής) δείκτης των καταστάσεων, μας δίνει την πιθανότητα μετάβασης του σωματιδίου από την αρχική κατάσταση  $i$  στην περιοχή τελικών καταστάσεων μεταξύ  $n_1$  και  $n_2$ . Αυτή η ποσότητα μπορεί να γραφτεί και ως

$$\int_{E_1}^{E_2} |T_{fi}|^2 \rho(E_f) dE_f$$

όπου  $\rho(E_f)$  είναι η πυκνότητα των τελικών καταστάσεων, δηλαδή

$$\rho(E_f) = \frac{dN}{dE_f}$$

με  $N$  τον συνολικό αριθμό καταστάσεων.

Στην πραγματικότητα όμως ούτε και αυτό το μέγεθος είναι κατάλληλο γιατί όπως αποδεικνύεται στη βιβλιογραφία (δες [1] ή [3]), είναι ανάλογο του χρόνου. Συνεπώς αυτό που πρέπει να ολοκληρώσουμε ως προς ένα σύνολο τελικών καταστάσεων είναι η ποσότητα

$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} \quad (1.23)$$

και έτσι βρίσκουμε το ρυθμό μετάβασης  $W_{fi}$ , ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$W_{fi} = \int_{E_f} W \rho(E_f) dE_f \quad (1.24)$$

Ξαναγυρνάμε τώρα στην εξίσωση (1.21) και θεωρούμε ότι  $T \rightarrow \infty$  καθώς και ότι η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας  $V(\mathbf{x}, t)$  δεν εξαρτάται από το χρόνο, είναι δηλαδή  $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$ . Έχουμε λοιπόν ότι

$$T_{fi} = -i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(E_f - E_i)t} dt \int_V \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) d^3x$$

και θέτοντας  $V_{fi} \equiv \int_V \phi_f^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) d^3x$  παίρνουμε ότι

$$T_{fi} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) \quad (1.25)$$

Η  $\delta$ -συνάρτηση εδώ ουσιαστικά εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας μεταξύ της αρχικής και της τελικής κατάστασης. Αυτό είναι κάτι που το περιμέναμε αφού η διαταραχή είναι τώρα σταθερή στο χρόνο, δηλαδή με μηδενική συχνότητα, άρα και τα κβάντα ενέργειας που μπορεί να ανταλλάξει με το σύστημα θα έχουν μηδενική ενέργεια.

Αντικαθιστώντας το  $T_{fi}$  από την εξίσωση (1.25) στην (1.23) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta^2(E_f - E_i) = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t} dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} 2\pi \frac{|V_{fi}|^2}{T} \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} dt \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow W = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \end{aligned} \quad (1.26)$$

ενώ για το ρυθμό μετάβασης  $W_{fi}$  βρίσκουμε από την (1.24) ότι

$$\begin{aligned} W_{fi} &= 2\pi \int_{E_f} \rho(E_f) |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) dE_f \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow W_{fi} = 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i) \end{aligned} \quad (1.27)$$

Η σχέση (1.27) είναι γνωστή και ως κανόνας του Fermi.

Όπως είπαμε η σχέση (1.25) μας δίνει την προσέγγιση του  $T_{fi}$  σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών για την ειδική περίπτωση που  $T \rightarrow \infty$  και  $V(\mathbf{x}, t) = V(\mathbf{x})$ . Για να υπολογίσουμε τώρα το  $T_{fi}$  σε προσέγγιση δεύτερης τάξης για

την ίδια περίπτωση, αντικαθιστούμε τα  $a_n(t)$  από τη σχέση (1.20) στο δεύτερο μέλος της εξίσωσης (1.17) και έτσι παίρνουμε μία νέα (βελτιωμένη) εξίσωση στη θέση της (1.17). Από τη σχέση αυτή βρίσκουμε (δες [3]) ότι η προσέγγιση σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών για το  $T_{fi}$  ισούται με

$$T_{fi} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i) - 2\pi i \sum_{n \neq i} \frac{V_{fn} V_{ni}}{E_i - E_n} \delta(E_f - E_i) \quad (1.28)$$

Ο κανόνας του Fermi σε προσέγγιση δεύτερης τάξης παραμένει ο ίδιος μόνο που τώρα στη θέση του  $V_{fi}$  πρέπει να βάλουμε την ποσότητα

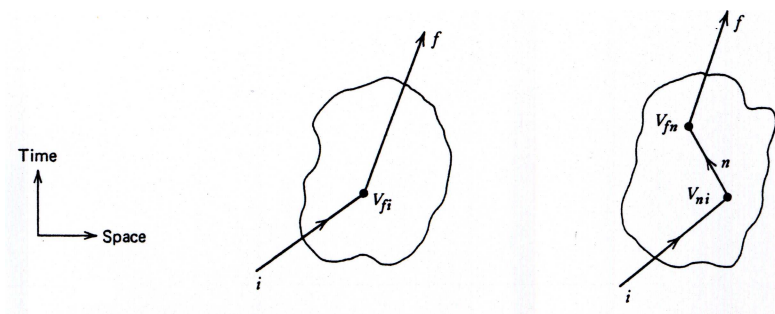
$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} \quad (1.29)$$

Ο ίδιος τύπος σε προσέγγιση τρίτης τάξης προκύπτει αν στη θέση του  $V_{fi}$  βάλουμε την ποσότητα

$$V_{fi} + \sum_{n \neq i} V_{fn} \frac{1}{E_i - E_n} V_{ni} + \sum_{n \neq i, m \neq n} V_{fn} \frac{1}{E_m - E_n} V_{nm} \frac{1}{E_i - E_m} V_{mi} \quad (1.30)$$

Οι παραπάνω σχέσεις φαίνονται πιο παραστατικά με τη βοήθεια των διαγραμμάτων Feynman του σχήματος (1.1).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι ο πρώτος όρος στις σχέσεις (1.29) και (1.30), δηλαδή η προσέγγιση πρώτης τάξης της θεωρίας διαταραχών, αντιστοιχεί στη σκέδαση από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $f$ , και σε αυτή αντιστοιχεί ο παράγοντας  $V_{fi}$ . Ο δεύτερος όρος των σχέσεων (1.29) και (1.30) αντιστοιχεί στη σκέδαση από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $f$  μέσω όλων των δυνατών καταστάσεων  $n$ . Σε κάθε κόμβο αντιστοιχούν και εδώ οι αντίστοιχοι παράγοντες



Σχήμα 1.1: Διαγράμματα Feynman για τη σκέδαση σωματιδίου από δυναμικό σε πρώτη και σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών

$V_{fn}, V_{ni}$  αλλά και μεταξύ των κόμβων αντιστοιχεί ο παράγοντας  $1/(E_i - E_n)$  που ονομάζεται διαδότης. Είναι εύκολο να φανταστούμε ότι ο τρίτος όρος της σχέσης (1.30) θα αντιστοιχεί σε ένα διάγραμμα Feynman με τρεις ενδιάμεσους κόμβους (και αντίστοιχους παράγοντες  $V_{fn}, V_{nm}$  και  $V_{mi}$ ) και δύο διαδότες που συνδέουν τους κόμβους, με αντίστοιχους παράγοντες  $1/(E_m - E_n)$  και  $1/(E_i - E_m)$ .

## Κεφάλαιο 2

# Σχετικιστική κβαντομηχανική

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία της σχετικιστικής κβαντομηχανικής. Αρχικά μελετάμε σωματίδια χωρίς spin, σωματίδια δηλαδή που ικανοποιούν την εξίσωση Klein-Gordon. Έτσι βρίσκουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα της θεωρίας διαταραχών του πρώτου κεφαλαίου για την σχετικιστική αυτή περίπτωση. Φυσικά σωματίδια χωρίς spin δεν απαντώνται στη Φύση, αλλά η μελέτη μας αυτή είναι χρήσιμη για το θεωρητικό κατασκευάσμα που θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 3 (το οποίο επίσης δεν απαντάται στη φύση). Ακόμη, έχει τον παιδαγωγικό χαρακτήρα να μας εισάγει στην πλήρη σχετικιστική περιγραφή της εξίσωσης Dirac. Στη συνέχεια εξετάζουμε την εξίσωση Dirac που περιγράφει σωματίδια με spin και τα αποτελέσματα της θεωρίας διαταραχών γενικεύονται τώρα ώστε να συμπεριλάβουν και τα φαινόμενα του spin.

### 2.1 Σωματίδια χωρίς spin

Στην ενότητα αυτή μελετάμε κυρίως την εξίσωση Klein-Gordon σαν μία γενίκευση της εξίσωσης Schrödinger του πρώτου κεφαλαίου για σχετικιστικά σωματίδια. Σχολιάζουμε κάποια από τα προβλήματα που εμφανίζονται αλλά και τα νέα στοιχεία που αναδύονται από την ερμηνεία αυτών των προβλημάτων. Ακόμη, εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας διαταραχών του πρώτου κεφαλαίου θεωρώντας ότι το δυναμικό της διαταραχής προέρχεται από την κίνηση ενός άλλου σωματιδίου, μελετάμε δηλαδή τη σκέδαση δύο σωματιδίων.

#### 2.1.1 Η εξίσωση Klein-Gordon

Όπως είπαμε στο πρώτο κεφάλαιο η εξίσωση του Schrödinger προκύπτει αντικαθιστώντας στη μη σχετικιστική σχέση ορμής-ενέργειας του ελεύθερου σω-

ματιδίου  $E = p^2/2m$  τα φυσικά μεγέθη με τους αντίστοιχους ερμιτιανούς τελεστές. Ακολουθώντας την ίδια λογική, για να βρούμε μία σχετικιστική εξίσωση της κβαντικής μηχανικής αναζητούμε μία σχετικιστική εξίσωση της κλασικής μηχανικής στην οποία να αντικαταστήσουμε τα φυσικά μεγέθη με τους αντίστοιχους τελεστές. Ως γνωστόν, η σχετικιστική σχέση ορμής-ενέργειας για το ελεύθερο σωματίδιο είναι

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad (2.1)$$

όπου για την ταχύτητα του φωτός στο κενό  $c$ , έχουμε θέσει ότι  $c \equiv 1$ . Κάνοντας και στην εξίσωση αυτή τις αντικαταστάσεις (1.2) παίρνουμε την εξίσωση

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) = -\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) + m^2 \phi(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

όπου  $\phi(\mathbf{x}, t)$  η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου.

Η εξίσωση (2.2) είναι γνωστή ως εξίσωση Klein-Gordon. Αναζητώντας μία εξίσωση συνέχειας που να προκύπτει τώρα από την (2.2), βρίσκουμε ότι οι αντίστοιχες εκφράσεις για την πυκνότητα πιθανότητας και για την πυκνότητα ρεύματος πιθανότητας πρέπει να οριστούν ως εξής

$$\rho = i \left( \phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t} \right) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{j} = -i (\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \quad (2.4)$$

και φυσικά συδέονται μεταξύ τους με τη σχέση (1.7).

Ήδη μπορούμε να δούμε τα προβλήματα που έχει ο ορισμός (2.3), αφού η πυκνότητα πιθανότητας  $\rho$  δεν είναι τώρα θετικά ορισμένη, δηλαδή δεν ισχύει εν γένει ότι  $\rho \geq 0$ , και συνεπώς η ποσότητα αυτή δεν μπορεί να αντιπροσωπεύει μία πυκνότητα πιθανότητας.

Μία λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να πολλαπλασιάσουμε τα δεύτερα μέλη των σχέσεων (2.3) και (2.4) με  $-e$ , όπου  $e$  το στοιχειώδες φορτίο, και να θεωρήσουμε τώρα τα μεγέθη  $\rho$  και  $\mathbf{j}$  σαν πυκνότητα φορτίου και πυκνότητα (ηλεκτρικού) ρεύματος αντίστοιχα.

Ένα άλλο πρόβλημα της εξίσωσης Klein-Gordon είναι η ύπαρξη αρνητικών ενεργειών, η οποία προκύπτει κατ' ευθείαν από τη σχετικιστική σχέση (2.1). Πράγματι, λύνοντας στη σχέση αυτή ως προς  $E$  βρίσκουμε ότι

$$E = \pm \sqrt{p^2 + m^2} \quad (2.5)$$

Οι αρνητικές αυτές λύσεις μπορούν να απορριφθούν στην κλασική μηχανική αλλά όχι και στην κβαντομηχανική όπου επιτρέπονται άλματα μεταξύ των ενεργειακών σταθμών. Επιπλέον χρειαζόμαστε ένα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων για την περιγραφή του φυσικού συστήματος, κάτι που επιτυγχάνεται μόνο αν



λάβουμε υπ'οψη όλες τις λύσεις της εξίσωσης Klein-Gordon, συμπεριλαμβανομένων και αυτών με αρνητική ενέργεια. Η ερμηνεία των κυματοσυναρτήσεων με αρνητική ενέργεια είναι ότι αυτές αντιστοιχούν σε αντισωματίδια (δηλαδή σωματίδια με αντίθετο φορτίο) με θετική ενέργεια ή αλλιώς σε σωματίδια με αρνητική ενέργεια που όμως κινούνται ανάποδα στο χρόνο. Αυτό φαίνεται και από τη χρονική εξάρτηση της κυματοσυνάρτησης για την οποία ισχύει ότι

$$e^{-iEt} = e^{-i(-E)(-t)}$$

που σημαίνει ότι η περιγραφή ενός αντισωματιδίου με  $E > 0$  είναι ισοδύναμη με την περιγραφή ενός σωματιδίου με  $E < 0$  που κινείται αντίθετα στο χρόνο και το αντίστροφο. Συνεπώς μπορούμε να ασχολούμαστε μόνο με τις κυματοσυναρτήσεις των σωματιδίων τα οποία όμως έχουν τώρα τη δυνατότητα να κινούνται αντίθετα στο χρόνο ώστε να συμπεριλαμβάνουν και τα αντισωματίδια.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να εισάγουμε την έννοια των τετραδιανυσμάτων και να δούμε πως απλοποιείται η γραφή των σχετικιστικών εξισώσεων. Ένα τετραδιάνυσμα ορίζεται ως ένα διάνυσμα με τέσσερις συνιστώσες, έστω

$$a^\mu \equiv (a^0, a^1, a^2, a^3) \equiv (a^0, \mathbf{a}) \quad (2.6)$$

με την ιδιότητα οι συνιστώσες του  $a^0, a^1, a^2$  και  $a^3$  να υπακούουν στους μετασχηματισμούς Lorentz όπως τα  $t, x, y$  και  $z$  αντίστοιχα. Παραδείγματα τετραδιανυσμάτων είναι τα

$$\begin{aligned} x^\mu &\equiv (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x}) \\ p^\mu &\equiv (p^0, p^1, p^2, p^3) \equiv (E, \mathbf{p}) \\ j^\mu &\equiv (j^0, j^1, j^2, j^3) \equiv (\rho, \mathbf{j}) \\ A^\mu &\equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (\phi, \mathbf{A}) \\ \partial^\mu &\equiv (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) \equiv (\partial/\partial t, -\nabla) \end{aligned}$$

όπου  $t$  ο χρόνος,  $\mathbf{x}$  το διάνυσμα της θέσης,  $E$  η ενέργεια,  $\mathbf{p}$  το διάνυσμα της ορμής,  $\rho$  η πυκνότητα φορτίου,  $\mathbf{j}$  η πυκνότητα του ρεύματος,  $\phi$  το βαθμωτό δυναμικό και  $\mathbf{A}$  το διανυσματικό δυναμικό.

Ορίζουμε τώρα το εσωτερικό γινόμενο δύο τετραδιανυσμάτων  $a$  και  $b$  ως εξής

$$a \cdot b \equiv a^0 b^0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.7)$$

Αν ορίσουμε το τετραδιάνυσμα  $a_\mu$  ως εξής

$$a_\mu \equiv (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) \equiv (a^0, -\mathbf{a}) \quad (2.8)$$

τότε το εσωτερικό γινόμενο των τετραδιανυσμάτων  $a$  και  $b$  γράφεται πιο συνοπτικά ως

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \quad (2.9)$$

όπου για το  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$  ισχύει ότι

$$g_{00} = 1 \quad , \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \quad , \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad , \quad \mu \neq \nu$$

Μία σημαντική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου τετραδιανυσμάτων είναι ότι παραμένει αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, ότι η τιμή του δηλαδή είναι η ίδια σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Αυτή η ιδιότητα μας κάνει να επιδιώκουμε να γράφουμε πάντα τους φυσικούς νόμους σε μορφή εσωτερικού γινομένου τετραδιανυσμάτων ή ισοδύναμα οι πάνω δείκτες να εξισορροπούνται με τους κάτω σε κάθε μέλος της εξίσωσης. Αν κάποιος δείκτης (πάνω ή κάτω) δεν εξισορροπείται με τον ίδιο δείκτη (κάτω η πάνω) στο ίδιο μέλος της εξίσωσης, τότε ο δείκτης αυτός θα πρέπει να εμφανίζεται στην ίδια θέση (πάνω ή κάτω) στο άλλο μέλος της εξίσωσης.

Με τη βοήθεια του συμβολισμού των τετραδιανυσμάτων η εξίσωση (2.2) (Klein-Gordon) γράφεται

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = 0 \quad (2.10)$$

ενώ οι σχέσεις (2.3) και (2.4) ενοποιούνται στην

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = i (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) \quad (2.11)$$

Η εξίσωση συνέχειας (1.7) γράφεται πιο συνοπτικά ως

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Η μέθοδος των διαταραχών στην εξίσωση Klein-Gordon

Όπως είπαμε στην προηγούμενη ενότητα ένα ελεύθερο σωματίδιο, έστω ένα ηλεκτρόνιο, χωρίς spin θα ικανοποιεί την εξίσωση (2.10). Για να βρούμε την εξίσωση κίνησης όταν ένα ηλεκτρόνιο βρίσκεται υπό την επίδραση ενός ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού  $A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$  πρέπει στην κλασική ηλεκτροδυναμική να κάνουμε την αντικατάσταση

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$$

όπου  $e$  το στοιχειώδες φορτίο. Η αντίστοιχη αντικατάσταση στην κβαντομηχανική είναι προφανώς

$$i\partial^\mu \rightarrow i\partial^\mu + eA^\mu$$

οπότε η εξίσωση (2.10) γράφεται

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi = -V\phi \quad (2.13)$$

όπου  $V$  είναι η (ηλεκτρομαγνητική) διαταραχή και ισούται με

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) - e^2 A^2 \quad (2.14)$$

Στην σχέση (2.14) μπορούμε να παραλείψουμε τον όρο με συντελεστή το  $e^2$  και να εργαστούμε μόνο με τους δύο πρώτους όρους, δηλαδή σε προσέγγιση πρώτης τάξης ως προς  $e$ . Αυτή η προσέγγιση είναι δικαιολογημένη λόγω της μικρής τιμής (ως προς τη μονάδα) της σταθεράς λεπτής υφής  $\alpha$  που μας δίνει ένα μέτρο της ισχύος της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης. Πράγματι, σε φυσικές μονάδες είναι

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137} \ll 1$$

Υπενθυμίζουμε τη σχέση (1.22) του πρώτου κεφαλαίου που μας δίνει τώρα το πλάτος της σκέδασης του ηλεκτρονίου από την αρχική κατάσταση  $\phi_i$  στην τελική κατάσταση  $\phi_f$ , λόγω του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού  $A^\mu$ , σε προσέγγιση πρώτης τάξης της θεωρίας διαταραχών. Αυτή γράφεται ως

$$T_{fi} = -i \int \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) d^4x \quad (2.15)$$

όπου  $x \equiv (t, \mathbf{x})$ .

Αντικαθιστώντας το δυναμικό της διαταραχής από τη σχέση (2.14), έχοντας παραλείψει τον τελευταίο όρο, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int \phi_f^* (-ie) (A^\mu \partial_\mu + \partial_\mu A^\mu) \phi_i d^4x = \\ &= -e \int \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i d^4x - e \int \phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4x = \\ &= -e \int \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i d^4x - e \oint \phi_f^* A^\mu \phi_i dx_\mu + e \int (\partial_\mu \phi_f^*) A^\mu \phi_i d^4x \end{aligned}$$

Στην τελευταία έκφραση το επιφανειακό ολοκλήρωμα του δεύτερου όρου ισούται με μηδέν γιατί θεωρούμε ότι για  $|t|, |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  το ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό  $A^\mu \rightarrow 0$ .

Έτσι λοιπόν έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -e \int \phi_f^* A^\mu \partial_\mu \phi_i d^4x + e \int (\partial_\mu \phi_f^*) A^\mu \phi_i d^4x = \\ &= -i \int (-ie) (\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i) A^\mu d^4x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (2.16)$$

όπου

$$j_\mu^{fi} = -ie (\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - \phi_i \partial_\mu \phi_f^*) \quad (2.17)$$

Συγκρίνοντας τη σχέση (2.17) με τη σχέση (2.11), βλέπουμε ότι το  $j_\mu^{fi}$  μπορεί να θεωρηθεί σαν το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα που συνδέεται με τη μετάβαση του ηλεκτρονίου από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $f$ .

Οι κυματοσυναρτήσεις  $\phi_i$  και  $\phi_f$  είναι ιδιοσυναρτήσεις της Χαμιλτονιανής του ελεύθερου ηλεκτρονίου, επομένως θα έχουν τη μορφή

$$\phi_i(x) = N_i e^{-ip_i \cdot x} \quad , \quad \phi_f(x) = N_f e^{-ip_f \cdot x} \quad (2.18)$$

όπου οι συντελεστές  $N_i$  και  $N_f$  είναι σταθερές κανονικοποίησης και τα  $p_i$  και  $p_f$  είναι η αρχική και η τελική τετραορμή αντίστοιχα. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (2.18) στην εξίσωση (2.17), βρίσκουμε ότι

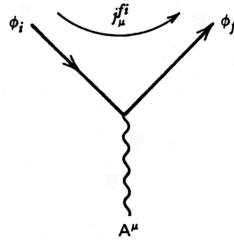
$$\begin{aligned} j_\mu^{fi} &= -ie [N_f e^{ip_f \cdot x} (-ip_i)_\mu N_i e^{-ip_i \cdot x} - N_i e^{-ip_i \cdot x} N_f i p_{f\mu} e^{ip_f \cdot x}] \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow j_\mu^{fi} = -e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Η σκέδαση του ηλεκτρονίου από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $f$  λόγω του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού  $A^\mu$  φαίνεται παραστατικά στο διάγραμμα Feynman του σχήματος (2.1), όπου έχει σχεδιαστεί και το ρεύμα  $j_\mu^{fi}$ .

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (2.16) για το πλάτος σκέδασης  $T_{fi}$  του ηλεκτρονίου από ένα ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό  $A^\mu$  μπορούμε να υπολογίσουμε το πλάτος σκέδασης για τη σκέδαση του ηλεκτρονίου από ένα άλλο σωματίδιο, έστω ένα μίονιο. Στην περίπτωση αυτή το μίονιο είναι η πηγή του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού  $A^\mu$ . Θα ισχύει λοιπόν ότι

$$\square^2 A^\mu = j_{(2)}^\mu \quad (2.20)$$

όπου  $\square^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu$  είναι ο τελεστής D' Alembert και ο δείκτης (2) στο  $j_{(2)}^\mu$  αναφέρεται στο μίονιο. Κατ' αναλογία με την περίπτωση του ηλεκτρονίου που



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα Feynman για τη σκέδαση ηλεκτρονίου από ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών

εξετάσαμε προηγουμένως (σχέση (2.19) ), θα ισχύει ότι

$$j_{(2)}^\mu = -eN_i^{(2)}N_f^{(2)} \left( p_i^{(2)} + p_f^{(2)} \right)^\mu e^{i p_f^{(2)} - p_i^{(2)} \cdot x} \quad (2.21)$$

Ισχύει τώρα ότι

$$\square^2 e^{ip \cdot x} = -p^2 e^{ip \cdot x}$$

άρα η λύση της εξίσωσης (2.20) είναι εύκολο να δούμε ότι είναι η

$$A^\mu = -\frac{1}{\left( p_f^{(2)} - p_i^{(2)} \right)^2} j_{(2)}^\mu \quad (2.22)$$

Θέτοντας  $q \equiv p_f^{(2)} - p_i^{(2)}$  η εξίσωση (2.22) γράφεται πιο απλά

$$A^\mu = -\frac{1}{q^2} j_{(2)}^\mu \quad (2.23)$$

Αντικαθιστώντας το  $A^\mu$  από την εξίσωση (2.23) στη (2.16) παίρνουμε την παρακάτω σχέση για το πλάτος σκέδασης ηλεκτρονίου-μιονίου σε προσέγγιση πρώτης τάξης της θεωρίας διαταραχών

$$\begin{aligned} T_{fi} &= -i \int j_\mu^{(1)} \left( -\frac{1}{q^2} \right) j_{(2)}^\mu d^4x = \\ &= iN_i^{(1)}N_i^{(2)}N_f^{(1)}N_f^{(2)}e^2\frac{1}{q^2} \left( p_i^{(1)} + p_f^{(1)} \right)_\mu \left( p_i^{(2)} + p_f^{(2)} \right)^\mu \times \\ &\times \int e^{i p_f^{(1)} - p_i^{(1)} + p_f^{(2)} - p_i^{(2)} \cdot x} d^4x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T_{fi} = iN_i^{(1)}N_i^{(2)}N_f^{(1)}N_f^{(2)}e^2\frac{1}{q^2} \left( p_i^{(1)} + p_f^{(1)} \right)_\mu \left( p_i^{(2)} + p_f^{(2)} \right)^\mu \times \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left( p_f^{(2)} + p_f^{(1)} - p_i^{(2)} - p_i^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

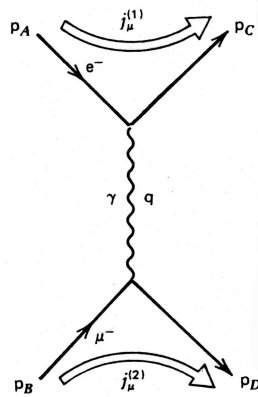
Θέτοντας  $N_A \equiv N_i^{(1)}, N_B \equiv N_i^{(2)}, N_C \equiv N_f^{(1)}, N_D \equiv N_f^{(2)}, p_A \equiv p_i^{(1)}, p_B \equiv p_i^{(2)}, p_C \equiv p_f^{(1)}$  και  $p_D \equiv p_f^{(2)}$ , η σχέση (2.24) γράφεται

$$T_{fi} = -iN_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)} (p_D + p_C - p_B - p_A) \mathcal{M} \quad (2.25)$$

με

$$-i\mathcal{M} = (ie(p_A + p_C)^\mu) \left( -i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) (ie(p_B + p_D)^\nu) \quad (2.26)$$

Η ποσότητα  $\mathcal{M}$  ονομάζεται αναλόιωτο πλάτος και είναι το χαρακτηριστικό μέγεθος του προβλήματος, δηλαδή όλα τα μετρήσιμα φυσικά μεγέθη εκφράζονται

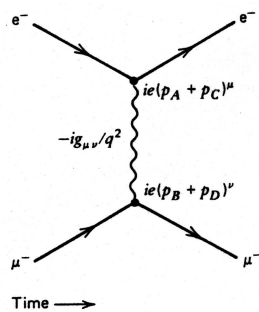


Σχήμα 2.2: Διάγραμμα Feynman για τη σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών

συναρτήσει του  $M$ , το οποίο περιέχει όλες τις πληροφορίες για τη φυσική της σκέδασης που εξετάζουμε. Στην εξίσωση (2.25) η  $\delta$ -συνάρτηση εκφράζει τη διατήρηση της τετραορμής, δηλαδή της ενέργειας και της ορμής, πριν και μετά την αλληλεπίδραση των σωματιδίων.

Οι τελευταίες σχέσεις φαίνεται πιο παραστατικά στα διαγράμματα Feynman στα σχήματα (2.2) και (2.3).

Στο πρώτο διάγραμμα σημειώνονται οι ορμές του ηλεκτρονίου, του μιονίου και του φωτονίου καθώς και τα ηλεκτρομαγνητικά ρεύματα  $j_\mu^{(1)}$  και  $j_\mu^{(2)}$  των δύο σωματιδίων. Στο δεύτερο διάγραμμα βλέπουμε τους παράγοντες που συνδέονται με κάθε κόμβο ή γραμμή. Έτσι παρατηρούμε ότι στον κόμβο της αλ-



Σχήμα 2.3: Διάγραμμα Feynman για τη σκέδαση ηλεκτρονίου-μιονίου σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών

ληλεπίδρασης ηλεκτρονίου-φωτονίου αντιστοιχεί ο παράγοντας  $ie(p_A + p_C)^\mu$  ενώ στον κόμβο αλληλεπίδρασης μιονίου-φωτονίου αντιστοιχεί ο παράγοντας  $ie(p_B + p_D)^\nu$ . Τέλος, στο φωτόνιο αντιστοιχεί ο διαδότης  $-ig_{\mu\nu}/q^2$ .

## 2.2 Σωματίδια με spin

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε τη σχετικιστική κβαντομηχανική στην πλήρη της περιγραφή, μέσω δηλαδή της εξίσωσης Dirac. Θα εξάγουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας διαταραχών της προηγούμενης ενότητας συμπεριλαμβανοντας όμως εκτός από την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση, και τα φαινόμενα του spin. Για πρώτη φορά θα ασχοληθούμε δηλαδή με μία ρεαλιστική σκέδαση σωματιδίου, αφού όπως έχουμε ήδη πει δεν υπάρχουν στη Φύση σωματίδια χωρίς spin. Σημειώνουμε τέλος ότι η ενότητα αυτή παρατίθεται για χάρη της πληρότητας της θεωρίας, αφού για το μοντέλο που θα εξετάσουμε στο Κεφάλαιο 3 είναι αρκετή η θεωρία των σωματιδίων χωρίς spin.

### 2.2.1 Η εξίσωση Dirac

Όπως είδαμε στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου η εξίσωση Klein-Gordon παρουσιάζει κάποια προβλήματα όπως αρνητική πυκνότητα πιθανότητας και λύσεις με αρνητική ενέργεια, από τα οποία για να απαλλαγούμε αναγκαστήκαμε να τα ερμηνεύσουμε ως πυκνότητα φορτίου και ύπαρξη αντισωματιδίων αντίστοιχα. Η πηγή των παραπάνω προβλημάτων ήταν το γεγονός ότι η σχετικιστική σχέση (2.1) είναι τετραγωνική ως προς την ενέργεια και κατά συνέπεια όταν αντικαταστήσουμε τα φυσικά μεγέθη με τους αντίστοιχους ερμιτιανούς τελεστές, αυτή θα περιέχει μία δεύτερη παράγωγο ως προς το χρόνο. Ένα άλλο μειονέκτημα της εξίσωσης Klein-Gordon είναι ότι δεν προβλέπει καθόλου την ενδογενή στροφορμή, δηλαδή το spin των σωματιδίων, που έχει παρατηρηθεί πειραματικά.

Ο Dirac αναζητώντας μία εναλλακτική σχετικιστική εξίσωση που να είναι γραμμική ως προς την ενέργεια (άρα και ως προς την ορμή και τη μάζα) έγραψε τη Χαμιλτονιανή του ελεύθερου σωματιδίου ως εξής

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m \quad (2.27)$$

όπου τα  $\boldsymbol{\alpha}$  και  $\beta$  είναι συντελεστές προς προσδιορισμό. Η αντίστοιχη κβαντική εξίσωση κίνησης προφανώς γράφεται

$$H\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m)\psi \quad (2.28)$$

όπου  $\psi$  είναι η κυματοσυνάρτηση του σωματιδίου. Θα πρέπει φυσικά να ισχύει ότι

$$H^2 = p^2 + m^2 \quad (2.29)$$

για να ισχύει η βασική εξίσωση (2.1). Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}
H^2 = p^2 + m^2 &\Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m \right) \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m \right) = \sum_{i=1}^3 p_i^2 + m^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[ \sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 p_i^2 + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=j+1}^3 (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) p_i p_j + \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2 \right] = \\
&= \sum_{i=1}^3 p_i^2 + m^2 \tag{2.30}
\end{aligned}$$

όπου έχουμε θεωρήσει τη γενική περίπτωση όπου  $\alpha_i \alpha_j \neq \alpha_j \alpha_i$  με  $i \neq j$  και  $\alpha_i \beta \neq \beta \alpha_i$  εν γένει, δηλαδή οι συντελεστές  $\alpha_i, i = 1, 2, 3$  και  $\beta$  δεν μετατίθενται μεταξύ τους. Εξισώνοντας τους συντελεστές των γραμμικά ανεξάρτητων ποσοτήτων στα δύο μέλη της σχέσης (2.30) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\alpha_i^2 &= \beta^2 = 1 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \\
\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad i \neq j \\
\alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι εξισώσεις (2.31) δεν μπορούν να ικανοποιούνται αν τα  $\alpha_i$  και  $\beta$  είναι αριθμοί. Έτσι αναζητούμε λύσεις όπου τα  $\alpha_i$  και  $\beta$  είναι  $n \times n$  πίνακες. Οι πίνακες με τη μικρότερη διάσταση που ικανοποιούν τις εξισώσεις (2.31) είναι  $4 \times 4$  και υπάρχουν άπειρες λύσεις  $(\alpha, \beta)$ . Μία από αυτές είναι η παρακάτω

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

όπου  $\sigma$  είναι οι πίνακες του Pauli, δηλαδή

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Αφού οι συντελεστές  $\alpha$  και  $\beta$  είναι τώρα  $4 \times 4$  πίνακες, το ίδιο θα είναι και η Χαμιλτονιανή στην εξίσωση (2.27). Επομένως η κυματοσυνάρτηση  $\psi$  πάνω στην οποία δρα ο τελεστής της Χαμιλτονιανής στην εξίσωση (2.28) θα είναι τώρα ένα διάνυσμα-στήλη τεσσάρων στοιχείων.

Έχουμε πει ότι η εξίσωση Dirac είναι μία σχετικιστική εξίσωση, επομένως επιθυμούμε να τη γράψουμε συναρτήσει εσωτερικών γινομένων τετραδιανυσμάτων, όπως ακριβώς κάναμε και με τις σχετικιστικές εξισώσεις της προηγούμενης



ενότητας. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.28) στη θέση της ενέργειας και της ορμής τους αντίστοιχους ερμιτιανούς τελεστές (σχέσεις (1.2)) έχουμε ότι

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + m\beta\psi \quad (2.34)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (2.34) με  $\beta$  από αριστερά παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} &= -i\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi + m\beta^2\psi \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla}\psi - m\psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Θέτοντας  $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\boldsymbol{\alpha})$  η εξίσωση (2.35) γράφεται ως εξής

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \quad (2.36)$$

Οι πίνακες  $\gamma^\mu$  ονομάζονται πίνακες γάμμα του Dirac. Εδώ δεν έχουμε φυσικά δικαιολογήσει γιατί οι πίνακες-συνιστώσες  $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$  και  $\gamma^3$  έχουν τις ιδιότητες ενός τετραδιάνυσματος αλλά αυτό θα φανεί λίγο παρακάτω. Με τη βοήθεια των πινάκων του Dirac οι σχέσεις (2.31) συνοψίζονται στην

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.37)$$

Ισχύει ακόμα ότι

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \quad (2.38)$$

όπου με  $(\gamma^\mu)^\dagger$  συμβολίζουμε τον ερμιτιανό συζυγή (ή αναστροφοσυζυγή) πίνακα του  $\gamma^\mu$ .

Αναζητούμε τώρα ένα τετραδιάνυσμα  $j^\mu$  το οποίο θα ερμηνεύσουμε ως πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος και για το οποίο να προκύπτει από την εξίσωση Dirac ότι ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας (2.12). Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε (δες [3]) ότι το τετραδιάνυσμα

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.39)$$

όπου  $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ , έχει τις παραπάνω ιδιότητες. Από τη σχέση (2.39) μπορούμε κατ' ευθείαν να δούμε ότι το  $j^\mu$  είναι ανάλογο του  $\gamma^\mu$ , επομένως το  $\gamma^\mu$  μπορεί να θεωρηθεί και αυτό σαν τετραδιάνυσμα.

Είπαμε προηγουμένως ότι η κυματοσυνάρτηση στην εξίσωση του Dirac είναι ένα διάνυσμα-στήλη με τέσσερις συνιστώσες. Από αυτές οι δύο αντιστοιχούν σε κυματοσυναρτήσεις με θετική ενέργεια (που περιγράφουν σωματίδια) και οι άλλες δύο σε κυματοσυναρτήσεις με αρνητική ενέργεια (που περιγράφουν αντισωματίδια). Βλέπουμε λοιπόν ότι σε κάθε ενέργεια, θετική ή αρνητική,

αντιστοιχούν δύο ιδιοσυναρτήσεις. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένας ακόμη βαθμός ελευθερίας που μπορεί να παίρνει δύο διακριτές τιμές και που προκαλεί αυτόν τον διπλό εκφυλισμό. Ο βαθμός αυτός ελευθερίας είναι η ενδογενής στροφορμή ή spin των σωματιδίων. Αυτό μπορούμε να το δούμε και από το γεγονός ότι η Χαμιλιτονιακή του Dirac (εξίσωση (2.27)) δεν μετατίθεται με τον τελεστή  $\mathbf{L}$  της στροφορμής, δηλαδή  $[H, \mathbf{L}] \neq 0$ .

Αντίθετα μετατίθεται με τον τελεστή

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma} \quad , \quad \boldsymbol{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

δηλαδή  $[H, \mathbf{J}] = 0$ . Συνεπώς το μέγεθος που είναι τώρα διατηρήσιμο δεν είναι η τροχιακή στροφορμή του σωματιδίου αλλά η ολική στροφορμή, δηλαδή το διανυσματικό άθροισμα της τροχιακής στροφορμής και της ενδογενούς στροφορμής ή spin του σωματιδίου.

Οι λύσεις της εξίσωσης του Dirac για ένα ελεύθερο σωματίδιο είναι της μορφής

$$\psi = u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x} \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.36) το  $\psi$  με το δεύτερο μέλος της σχέσης (2.40) βρίσκουμε ότι η  $u(\mathbf{p})$  ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(\mathbf{p}) = 0 \quad (2.41)$$

ή ισοδύναμα

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) u = E u \quad (2.42)$$

Θέτοντας  $u \equiv \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$  η εξίσωση (2.42) γράφεται

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} &= E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_B = (E - m) u_A \\ (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}) u_A = (E + m) u_B \end{cases} & \end{aligned} \quad (2.43)$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι οι συναρτήσεις

$$u_A^{(s)} = \chi^{(s)} \quad , \quad u_B^{(s)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \quad (2.44)$$

όπου  $s = 1, 2$  και  $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  αποτελούν λύσεις των εξισώσεων (2.43) με  $E > 0$ .

Επομένως θα είναι

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad , \quad E > 0 \quad (2.45)$$

όπου  $N$  είναι μία σταθερά κανονικοποίησης.  
Όμοια, για τις λύσεις με  $E < 0$  βρίσκουμε ότι

$$u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\mathbf{p}}{|E|+m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0 \quad (2.46)$$

Ισχύει τέλος η σχέση ορθογωνιότητας

$$(u^{(r)})^\dagger u^{(s)} = 0, \quad r \neq s \quad (2.47)$$

### 2.2.2 Η μέθοδος των διαταραχών στην εξίσωση Dirac

Είμαστε τώρα έτοιμοι να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα της θεωρίας διαταραχών στην εξίσωση Dirac. Θεωρούμε αρχικά ένα ελεύθερο σωματίδιο, έστω ένα ηλεκτρόνιο. Η εξίσωση που διέπει το σύστημα είναι η εξίσωση Dirac του ελεύθερου σωματιδίου (σχέση (2.36)). Θεωρώντας και πάλι λύσεις επιπέδων κυμάτων της μορφής  $\psi = u(\mathbf{p}) e^{-ip \cdot x}$ , έχουμε δει ότι η συνάρτηση  $u(\mathbf{p})$  πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (2.41)

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) u(\mathbf{p}) = 0$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με  $e^{-ip \cdot x}$  έχουμε

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) \psi = 0 \quad (2.48)$$

Θεωρούμε τώρα ότι το ηλεκτρόνιο δεν είναι ελεύθερο, αλλά κινείται υπό την επίδραση ενός ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού  $A^\mu$ , το οποίο αποτελεί τη διαταραχή. Η νέα εξίσωση κίνησης προκύπτει εάν στην εξίσωση (2.48) κάνουμε την αντικατάσταση

$$p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$$

όπως στην προηγούμενη ενότητα. Παίρνουμε έτσι την εξίσωση

$$(\gamma_\mu p^\mu - m) \psi = -e\gamma_\mu A^\mu \psi \quad (2.49)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (2.49) με  $\gamma^0$  από αριστερά έχουμε

$$\begin{aligned} & \left[ (\gamma^0)^2 p^0 + \gamma^0 \gamma^1 p^1 + \gamma^0 \gamma^2 p^2 + \gamma^0 \gamma^3 p^3 - m \right] \psi = -e\gamma^0 \gamma_\mu A^\mu \psi \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow [E + \gamma^0 \gamma^1 p_x + \gamma^0 \gamma^2 p_y + \gamma^0 \gamma^3 p_z - m] \psi = V\psi \end{aligned} \quad (2.50)$$

όπου  $V = -e\gamma^0 \gamma_\mu A^\mu$  και χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $(\gamma^0)^2 = \beta^2 = 1$ . Ο σκοπός του πολλαπλασιασμού της εξίσωσης (2.49) με  $\gamma^0$  ήταν να τη φέρουμε στη μορφή  $(E + \dots) \psi = V\psi$  (σχέση (2.50)) όπως ακριβώς και στην εξίσωση

Schrödinger (σχέση (1.5)) και να αναδείξουμε έτσι τον όρο της δυναμικής ενέργειας της διαταραχής.

Θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ το αποτέλεσμα του πρώτου κεφαλαίου για το πλάτος της σκέδασης του ηλεκτρονίου από την κατάσταση  $\psi_i$  στην κατάσταση  $\psi_f$  λόγω του ηλεκτρομαγνητικού δυναμικού  $A^\mu$  σε προσέγγιση πρώτης τάξης της θεωρίας διαταραχών (σχέση (2.15)). Φυσικά τώρα η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι ένα διάνυσμα-στήλη οπότε στη θέση του μιγαδικού συζυγούς θα βάλουμε το ερμιτιανό συζυγές, δηλαδή

$$T_{fi} = -i \int \psi_f^\dagger(x) V(x) \psi_i(x) d^4x \quad (2.51)$$

Αντικαθιστώντας τη συνάρτηση  $V(x)$  στη σχέση (2.51) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} T_{fi} &= ie \int \psi_f^\dagger \gamma^0 \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x = ie \int \bar{\psi}_f \gamma_\mu A^\mu \psi_i d^4x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T_{fi} = -i \int j_\mu^{fi} A^\mu d^4x \end{aligned} \quad (2.52)$$

όπου

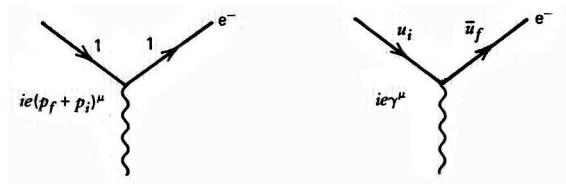
$$j_\mu^{fi} = -e \bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i = -e \bar{u}_f \gamma_\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (2.53)$$

είναι και πάλι το ηλεκτρομαγνητικό ρεύμα που συνδέεται με τη μετάβαση του ηλεκτρονίου από την κατάσταση  $i$  στην κατάσταση  $f$ . Θυμίζουμε ότι το αντίστοιχο ρεύμα για σωματίδια χωρίς spin είναι

$$j_\mu^{fi} = -e (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i) \cdot x} \quad (2.54)$$

Η σχέση (2.54) προκύπτει από τη (2.19) θέτοντας  $N_i = N_f = 1$ .

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (2.53) και (2.54) κατασκευάζουμε τα διαγράμματα Feynman του σχήματος (2.4) για τις δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 2.4: Διάγραμματα Feynman για τη σκέδαση από ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών α) ηλεκτρονίου χωρίς spin β) ηλεκτρονίου με spin 1/2

Από το σχήμα (2.4) βλέπουμε ότι για την περίπτωση της σκέδασης ηλεκτρονίου χωρίς spin, στον κόμβο αντιστοιχεί ο παράγοντας  $ie(p_f + p_i)^\mu$  ενώ στις γραμμές η μονάδα. Για την (ρεαλιστική) περίπτωση της σκέδασης ηλεκτρονίου με spin 1/2, στον κόμβο αντιστοιχεί ο παράγοντας-πίνακας  $ie\gamma^\mu$ , στη γραμμή εισόδου στην αλληλεπίδραση αντιστοιχεί το διάνυσμα-στήλη  $u_i$  της αρχικής κατάστασης  $i$  και στη γραμμή εξόδου από την αλληλεπίδραση αντιστοιχεί το διάνυσμα-γραμμή  $\bar{u}_f$  της τελικής κατάστασης  $f$ .



## Κεφάλαιο 3

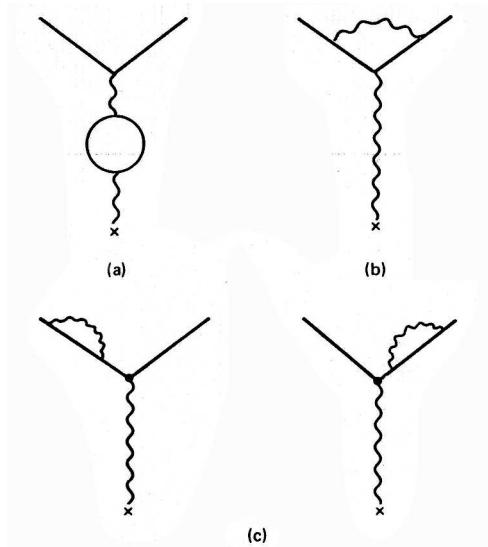
# Εφαρμογή της επανακανονικοποίησης στη θεωρία $\phi^4$

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τη διαδικασία της επανακανονικοποίησης (renormalization) μίας θεωρίας και την εφαρμογή της σε μία θεωρία της επιλογής μας, τη θεωρία  $\phi^4$ . Αρχικά εξηγούμε την αναγκαιότητα της διαδικασίας αυτής για τις κβαντικές θεωρίες και τις γενικές αρχές της χωρίς να μπαίνουμε σε πολλές μαθηματικές λεπτομέρειες. Στη συνέχεια επανακανονικοποιούμε αναλυτικά τη θεωρία  $\phi^4$  χρησιμοποιώντας κάποια από τα αποτελέσματα της σχετικιστικής κβαντομηχανικής σωματιδίων χωρίς spin που εξάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

### 3.1 Εισαγωγή στην επανακανονικοποίηση

Στη μέχρι τώρα μελέτη μας των κβαντικών φαινομένων (σκέδαση σωματιδίου από ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό, σκέδαση δύο σωματιδίων) έχουμε εξετάσει τα φυσικά μεγέθη με τη βοήθεια της θεωρίας διαταραχών και στην παραστατική απεικόνιση αυτών των αποτελεσμάτων βοήθησε σημαντικά η έννοια των διαγραμμάτων Feynman. Η ανάλυσή μας περιορίστηκε φυσικά (στις σχετικιστικές περιπτώσεις, όπου τα διαγράμματα αυτά έχουν πλήρη έννοια) στην προσέγγιση σε πρώτη τάξη της θεωρίας διαταραχών και τα αντίστοιχα διαγράμματα Feynman είχαν την απλή μορφή των σχημάτων (2.1) ως (2.4).

Τα αποτελέσματα όμως αυτά είναι ικανοποιητικής ακρίβειας μόνο σε φαινόμενα χαμηλών ενεργειών (σκέδαση Coulomb) όπου οι υπόλοιποι όροι της θεωρίας διαταραχών μπορούν να αμεληθούν. Εάν επιθυμούμε να υπολογίσουμε τα ίδια φυσικά μεγέθη με καλύτερη ακρίβεια ή σε προβλήματα υψηλών ενεργειών θα



Σχήμα 3.1: Διάγραμματα Feynman για τη σκέδαση σωματιδίου από ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών

πρέπει να συμπεριλάβουμε και κάποιους από τους επόμενους όρους της θεωρίας διαταραχών και συνεπώς θα πρέπει να συνυπολογίσουμε και κάποια επιπλέον διαγράμματα Feynman. Για παράδειγμα, για να μελετήσουμε τη σκέδαση σωματιδίου από ηλεκτρομαγνητικό δυναμικό σε προσέγγιση δεύτερης τάξης της θεωρίας διαταραχών θα πρέπει εκτός από το σχήμα (2.1) ή (2.4) να λάβουμε υπ' όψη μας και τα διαγράμματα Feynman του σχήματος (3.1). Αυτά απεικονίζουν πιθανές φυσικές διαδικασίες που η συνεισφορά τους γίνεται σημαντική μόνο στις μεγάλες ενέργειες και παρατηρούμε ότι όλα περιέχουν δύο κόμβους, δηλαδή ένα βρόχο (loop). Συνεπώς συνεισφέρουν στο τελικό αποτέλεσμα κατά μία ποσότητα ανάλογη του  $\alpha^2$  (όπου  $\alpha$  η σταθερά λεπτής υφής) σε αντίθεση με το διάγραμμα Feynman πρώτης τάξης που έχει ένα κόμβο και κανένα βρόχο και συνεπώς συνεισφέρει κατά μία ποσότητα ανάλογη του  $\alpha$ .

Έχουμε δει ότι στους κόμβους των διαγραμμάτων Feynman έχουμε διατήρηση της τετραορμής, κάτι που φαίνεται και από τη  $\delta$ -συνάρτηση στη σχέση (2.25). Ας δούμε τι επιπτώσεις έχει αυτό το γεγονός στο διάγραμμα (a) του σχήματος (3.1). Έστω ότι  $p$  είναι η τετραορμή του φωτονίου πριν αυτό διασπαστεί σε ένα ηλεκτρόνιο και ένα ποζιτρόνιο σε έναν από τους δύο κόμβους. Μετά τη διάσπαση το ένα σωματίδιο θα έχει τετραορμή έστω  $k$  ενώ το άλλο  $p - k$ , λόγω διατήρησης της τετραορμής στον κόμβο. Φυσικά στον άλλο κόμβο όπου τα δύο σωματίδια εξαυλώνονται και δίνουν ξανά το φωτόνιο οι τετραορμές τους θα συντεθούν και θα ξαναδώσουν την αρχική τετραορμή  $p$  για το φωτόνιο. Α-



νάλογες παρατηρήσεις μπορούμε να κάνουμε και για τα υπόλοιπα διαγράμματα του σχήματος (3.1). Βλέπουμε αμέσως ότι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για την τιμή του  $k$ , επομένως όλες οι τιμές είναι πιθανές και όλες τους θα πρέπει να ληφθούν υπ' όψη. Συνεπώς θα πρέπει να ολοκληρώσουμε τα αποτελέσματά μας ως προς  $k$ , παίρνοντας ολοκληρώματα της μορφής

$$\int f(k) d^4k = \int_{-\infty}^{\infty} f(k^0, k^1, k^2, k^3) dk^0 dk^1 dk^2 dk^3 \quad (3.1)$$

Αν τα διαγράμματα που έπρεπε να υπολογίσουμε ήταν μεγαλύτερης τάξης, έστω με δύο βρόχους, τότε θα είχαμε ολοκληρώματα της μορφής

$$\int \int f(k, \ell) d^4k d^4\ell \quad (3.2)$$

Το πρόβλημα που αναδύεται εδώ είναι ότι τα ολοκληρώματα των σχέσεων (3.1) και (3.2) μπορεί να δώσουν άπειρο αποτέλεσμα. Ένας τρόπος για να ελέγξουμε αν ένα ολοκλήρωμα θα μπορούσε να δώσει άπειρο είναι να συγκρίνουμε το βαθμό του πολυωνύμου (ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης) του αριθμητή συν το βαθμό του διαφορικού, με το βαθμό του πολυωνύμου του παρονομαστή της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Αν ο βαθμός του παρονομαστή είναι μεγαλύτερος από το βαθμό του αριθμητή συν το βαθμό του διαφορικού τότε δεν έχουμε απειρία, αν είναι ίσοι έχουμε λογαριθμική απειρία, αν είναι μικρότερος τότε έχουμε γραμμική απειρία, τετραγωνική απειρία, κλπ. Αυτά φαίνονται καλύτερα στα παρακάτω παραδείγματα ολοκληρωμάτων όπου σημειώνεται και το είδος της απειρίας τους (αν υπάρχει).

$$\int \frac{k^2}{(k^2 + m^2)^3} d^4k \quad \rightarrow \quad \text{λογαριθμική απειρία}$$

$$\int \frac{k^2}{(k^2 + m^2)^4} d^4k \quad \rightarrow \quad \text{καμία απειρία}$$

$$\int \frac{k^2 (k^2 + M^2)}{(k^2 + m^2)^3} d^4k \quad \rightarrow \quad \text{τετραγωνική απειρία}$$

Για να αποφύγουμε τα προβλήματα που προκαλούν αυτές οι απειρίες, προσπαθούμε να τις χύψουμε σε παραμέτρους που δεν είναι μετρήσιμες και οι οποίες ονομάζονται γυμνές παράμετροι (bare parameters). Το όνομα αυτό δικαιολογείται από το γεγονός ότι οι παράμετροι αυτές είναι γυμνές από βρόχους, δηλαδή για τον υπολογισμό τους χρησιμοποιούμε μόνο το διάγραμμα Feynman

μηδενικής τάξης. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε με ένα πείραμα να μετρήσουμε το φορτίο  $-e$  του ηλεκτρονίου. Είναι αδύνατον να μετρήσουμε το γυμνό φορτίο του ηλεκτρονίου αφού δεν μπορούμε να αποκλείσουμε ότι μέσα στη συσκευή μας συμβαίνουν διαδικασίες σαν αυτές του σχήματος (3.1) ή και άλλες, μεγαλύτερης τάξης και με περισσότερους βρόχους. Επομένως, αφού ποτέ δεν μπορούμε να μετρήσουμε το γυμνό φορτίο του ηλεκτρονίου, μπορούμε να υποθέσουμε πως αυτό είναι άπειρο. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των άπειρων γυμνών παραμέτρων και των άπειρων ολοκληρωμάτων με βρόχους διαμορφώνουν το τελικό αποτέλεσμα πεπερασμένο. Έτσι αν και το γυμνό φορτίο του ηλεκτρονίου είναι άπειρο, όταν συνυπολογίσουμε όλα τα διαγράμματα Feynman που και αυτά δίνουν απειρίες, παίρνουμε το γνωστό και πεπερασμένο αποτέλεσμα για το φορτίο του ηλεκτρονίου που μετράμε σε όλα τα πειράματα.

Επιθυμούμε σε κάθε τάξη της προσέγγισης της θεωρίας διαταραχών, δηλαδή για κάθε αριθμό βρόχων των διαγραμμάτων Feynman, όλα τα μετρήσιμα μεγέθη (π.χ. φορτίο, μάζα, κλπ) να είναι πεπερασμένα. Αυτό το πετυχαίνουμε προσθέτοντας στην αρχική Λαγκρανζιανή του συστήματός μας νέους (άπειρους) όρους, κατάλληλα εκλεγμένους ώστε να εξουδετερώνουν τις απειρίες των ολοκληρωμάτων λόγω των βρόχων.

Αν για κάθε τάξη της προσέγγισης της θεωρίας διαταραχών, χρειαζόμαστε πεπερασμένο πλήθος νέων άπειρων όρων για να εξουδετερώσουν τις απειρίες των ολοκληρωμάτων λόγω των βρόχων, τότε η θεωρία μας είναι επανακανονικοποιήσιμη (renormalizable), αλλιώς είναι μη-επανακανονικοποιήσιμη (non-renormalizable). Το πρώτο βήμα είναι να απομονώσουμε το άπειρο κομμάτι του ολοκληρώματος, δηλαδή να χωρίσουμε το άπειρο και το πεπερασμένο μέρος του. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται ομαλοποίηση (regularization), ενώ η διαδικασία της προσθήκης των νέων άπειρων όρων στη Λαγκρανζιανή του συστήματός μας ονομάζεται επανακανονικοποίηση (renormalization).

Η καλύτερη μέθοδος για να ομαλοποιήσουμε ένα ολοκλήρωμα είναι η μέθοδος της διαστατικής ομαλοποίησης (dimensional regularization). Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η ύπαρξη απειρίας σε ένα ολοκλήρωμα εξαρτάται άμεσα από το βαθμό του διαφορικού, και επομένως από τον αριθμό των διαστάσεων του χωροχρόνου. Αυτό μπορούμε να το δούμε και με το παρακάτω παράδειγμα:

$$\text{αν } k = (k^0, k^1, k^2, k^3) \quad \text{τότε} \quad \int \frac{d^4 k}{(k^2 + m^2)^2} \rightarrow \text{λογαριθμική απειρία}$$

$$\text{όμως αν } k = (k^0, k^1) \quad \text{τότε} \quad \int \frac{d^2 k}{(k^2 + m^2)^2} \rightarrow \text{καμία απειρία}$$

Η βασική ιδέα είναι τώρα να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην περιοχή του αριθμού  $n$  των διαστάσεων του χωροχρόνου όπου αυτό είναι πεπερασμένο ( $n < 4$  για το προηγούμενο παράδειγμα) και στη συνέχεια κάνοντας αναλυτική επέκταση του αποτελέσματος να πάρουμε μία γενική έκφραση που θα είναι μία συνάρτηση του  $n$ . Οι απειρίες θα εμφανιστούν έτσι με τη μορφή πόλων για  $n = 4$  και θα διαχωριστούν από το υπόλοιπο πεπερασμένο μέρος του ολοκληρώματος.

### 3.2 Επανακανονικοποίηση της θεωρίας $\phi^4$

Στην ενότητα αυτή θα εφαρμόσουμε τη διαδικασία της επανακανονικοποίησης, τις γενικές αρχές της οποίας περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, στη θεωρία  $\phi^4$ . Λέγοντας θεωρία  $\phi^4$  εννοούμε τη θεωρία στην οποία η Λαγκρανζιανή (ακριβέστερα, η Λαγκρανζιανή πυκνότητα) έχει τη μορφή

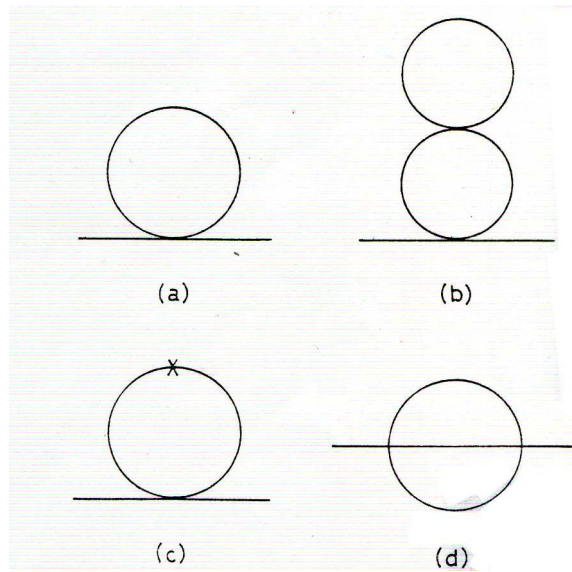
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m_B^2 \phi^2 - g_B \frac{\phi^4}{4!} \quad (3.3)$$

όπου ο δείκτης  $B$  όπου εμφανίζεται, υποδηλώνει ότι αναφερόμαστε σε γυμνές (bare) παραμέτρους.

Αναγνωρίζουμε αμέσως ότι οι δύο πρώτοι όροι στο δεύτερο μέλος της σχέσης (3.3) αποτελούν τη Λαγκρανζιανή πυκνότητα του ελεύθερου σωματιδίου χωρίς spin. Ο τρίτος όρος είναι ο όρος του δυναμικού, ανάλογος της τέταρτης δύναμης του πεδίου, που χαρακτηρίζει τη θεωρία μας. Ο όρος αυτός μπορεί να γραφτεί και ως

$$-\frac{g_B}{4!} \phi\phi^*\phi\phi^* \quad (3.4)$$

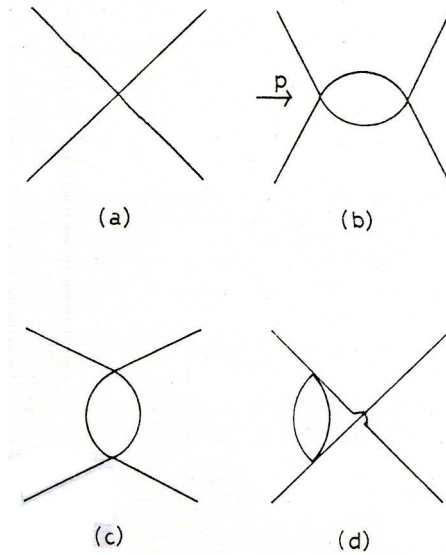
Οι σχέσεις (3.3) και (3.4) περιέχουν πολλές πληροφορίες για τα διαγράμματα Feynman που είναι επιτρεπτά στη συγκεκριμένη θεωρία. Αρχικά βλέπουμε ότι έχουμε ένα μόνο πεδίο (το  $\phi$ ) στη Λαγκρανζιανή, άρα μόνο ένα είδος σωματιδίου στη θεωρία μας, το οποίο θα πρέπει είναι χωρίς spin όπως φαίνεται και πάλι από την εξίσωση (3.3) (γιατί αν εφαρμόσουμε στη συγκεκριμένη Λαγκρανζιανή τις εξισώσεις Euler-Lagrange, θα πάρουμε για εξίσωση κίνησης την εξίσωση Klein-Gordon). Συνεπώς όλες οι αλληλεπιδράσεις θα είναι μεταξύ ίδιων σωματιδίων, και διαγράμματα με αλληλεπιδράσεις σωματιδίων και φωτονίων όπως αυτά που έχουμε δει μέχρι τώρα δεν είναι δυνατόν να υπάρχουν στη θεωρία μας. Η σχέση (3.4) που είναι τέταρτης τάξης ως προς  $\phi$  μας υποδηλώνει ότι σε κάθε κόμβο των διαγραμμάτων Feynman θα πρέπει να καταλήγουν τέσσερις γραμμές ή ισοδύναμα, τέσσερα σωματίδια. Σημειώνουμε εδώ ότι η θεωρία μας έχει ένα μόνο είδος σωματιδίου, που όμως μπορεί να κινείται και πίσω στο χρόνο, αφού πρόκειται για μία σχετικιστική θεωρία. Άρα στα διαγράμματα Feynman μπορούν να συμμετέχουν το σωματίδιο και το αντισωματίδιό του (που αντιστοιχούν στα πεδία  $\phi$  και  $\phi^*$  αντίστοιχα).



Σχήμα 3.2: Διαγράμματα Feynman για ένα σωματίδιο σε πρώτη και σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών

Συνοψίζοντας τις παραπάνω παρατηρήσεις, κατασκευάζουμε τα διαγράμματα Feynman για ένα σωματίδιο σε πρώτη και σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών, δηλαδή με ένα και με δύο βρόχους αντίστοιχα, από τα οποία υπολογίζουμε την ιδιοενέργεια (self-energy) του σωματιδίου (Σχήμα 3.2).

Ακόμη, μπορούμε να κατασκευάσουμε τα διαγράμματα Feynman για τη συνάρτηση κορυφής (vertex function) σε πρώτη και σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών, δηλαδή με κανένα και με ένα βρόχο αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα (3.3). Σημειώνουμε εδώ ότι παρά το γεγονός ότι τα διαγράμματα των σχημάτων (3.2) και (3.3) αναφέρονται στην ίδια τάξη προσέγγισης της θεωρίας διαταραχών (πρώτη και δεύτερη), εντούτοις δεν περιέχουν τον ίδιο αριθμό βρόχων. Αυτό συμβαίνει γιατί τα μεν διαγράμματα του σχήματος (3.2) αναφέρονται σε ένα σωματίδιο και γι' αυτό έχουν δύο άκρες, ενώ τα διαγράμματα του σχήματος (3.3) αναφέρονται σε δύο σωματίδια και κατά συνέπεια έχουν τέσσερις άκρες. Αυτό που είναι κοινό και στα δύο είδη διαγραμμάτων είναι ο αριθμός των κόμβων (ένας για την πρώτη και δύο για και τη δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών), δηλαδή ο αριθμός των συζεύξεων (couplings) των πεδίων. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι και τα διαγράμματα και στα δύο σχήματα είναι τάξης  $g$  και  $g^2$ , όπου  $g$  είναι η σταθερά που καθορίζει την ισχύ του δυναμικού στη σχέση (3.3), δηλαδή η σταθερά σύζευξης (coupling constant) της δύναμης.



Σχήμα 3.3: Διαγράμματα Feynman για τη συνάρτηση κορυφής σε πρώτη και σε δεύτερη τάξη της θεωρίας διαταραχών

Μπορούμε να γράψουμε ότι (για περισσότερες λεπτομέρειες, δες [6])

$$m_B^2 = m_R^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{m_R^2 b_{\nu}(g_R)}{(n-4)^{\nu}} \quad (3.5)$$

$$g_B = \mu^{4-n} \left[ g_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}(g_R)}{(n-4)^{\nu}} \right] \quad (3.6)$$

$$Z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_{\nu}(g_R)}{(n-4)^{\nu}} \quad (3.7)$$

όπου με το δείκτη  $R$  υποδηλώνουμε τις επανακανονικοποιημένες (renormalized) παραμέτρους και η παράμετρος  $Z$  είναι ουσιαστικά η επανακανονικοποίηση του πεδίου. Στη σχέση (3.6) ο συντελεστής  $\mu^{4-n}$  (όπου το  $\mu$  έχει διαστάσεις μάζας) μπαίνει έτσι ώστε απορροφά τις διαστάσεις του  $g_R$  που προκύπτουν από τις επιπλέον διαστάσεις του χωροχρόνου, έτσι ώστε για κάθε  $n$  το  $g_R$  να είναι αδιάστατο και το  $m_R$  να έχει διαστάσεις μάζας. Φυσικά για  $n = 4$  μπορούμε αμέσως να δούμε ότι ο συντελεστής αυτός δεν παίζει κανένα ρόλο.

Αναπτύσσοντας τις συναρτήσεις  $a_{\nu}(g_R)$ ,  $b_{\nu}(g_R)$  και  $c_{\nu}(g_R)$  σε πολυώνυμα ως

προς  $g_R$  οι σχέσεις (3.5) ως (3.7) μας δίνουν

$$m_B^2 = m_R^2 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{m_R^2 b_{\nu j} g_R^j}{(n-4)^\nu} \quad (3.8)$$

$$g_B = \mu^{4-n} \left[ g_R + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{a_{\nu j} g_R^j}{(n-4)^\nu} \right] \quad (3.9)$$

$$Z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=\nu}^{\infty} \frac{c_{\nu j} g_R^j}{(n-4)^\nu} \quad (3.10)$$

όπου παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα ως προς  $g_R$  είναι πάντα βαθμού  $\geq \nu$ , δηλαδή βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου της τάξης της προσέγγισης της θεωρίας διαταραχών. Αυτό συμβαίνει γιατί όπως είδαμε προηγουμένως υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ της τάξης της προσέγγισης της θεωρίας διαταραχών και του αριθμού των κόμβων, δηλαδή των συζεύξεων, των διαγραμμάτων Feynman. Έτσι σε προσέγγιση για παράδειγμα τέταρτης τάξης της θεωρίας διαταραχών δεν μπορούμε να έχουμε διαγράμματα με λιγότερους από τέσσερις κόμβους, άρα δεν μπορούμε να έχουμε και όρους που είναι λιγότερο από τέταρτης τάξης ως προς  $g_R$ .

Για τους υπολογισμούς μας θεωρούμε ότι η Λαγκρανζιανή του ελεύθερου σωματιδίου είναι

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m_R^2 \phi^2 \quad (3.11)$$

ένω η Λαγκρανζιανή της αλληλεπίδρασης είναι

$$\mathcal{L}_I = -\frac{1}{2} (m_B^2 - m_R^2) \phi^2 - g_B \frac{\phi^4}{4!} \quad (3.12)$$

έτσι ώστε

$$\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{1}{2} m_B^2 \phi^2 - g_B \frac{\phi^4}{4!} = \mathcal{L}$$

Εξετάζουμε αρχικά το διάγραμμα (a) του σχήματος (3.2). Η συνεισφορά του στην ιδιοενέργεια  $\Sigma$  του σωματιδίου θα είναι

$$\Sigma = \frac{1}{2} \frac{i\mu^{4-n} g_R}{(2\pi)^n} \int d^n k \frac{1}{k^2 - m_R^2} \quad (3.13)$$

Ο συντελεστής  $1/2$  προέρχεται από τις δύο δυνατότητες που έχουμε ως προς τις άκρες του διαγράμματος που μπορούμε να ενώσουμε ώστε να σχηματίσουμε το βρόχο, ενώ η ποσότητα  $(2\pi)^n$  στον παρονομαστή προέρχεται από την

ολοκλήρωση σε  $n$  διαστάσεις. Παρατηρούμε ακόμα ότι η συνεισφορά είναι ανάλογη του  $\mu^{4-n}g_R$  γιατί στο διάγραμμα έχουμε ένα κόμβο, δηλαδή μία σύζευξη. Τέλος, η συνάρτηση μέσα στο ολοκλήρωμα δεν είναι τίποτε άλλο από το διαδότη του σωματιδίου του βρόχου, όπου η τετραορμή του  $k$  είναι αυθαίρετη και γι' αυτό ολοκληρώνουμε σε όλες τις δυνατές τιμές. Θυμίζουμε ότι αντίστοιχο αποτέλεσμα είχαμε βρει και στο Κεφάλαιο 2 (σχέση (2.26) ή σχήμα (2.3)) για το διαδότη του φωτονίου, για το οποίο ισχύει φυσικά ότι  $m = 0$ . Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.13) χρησιμοποιούμε τον γενικό τύπο

$$\int d^n p \frac{1}{(m^2 - 2p \cdot k - p^2)^\alpha} = \frac{i\pi^{n/2}}{(m^2 + k^2)^{\alpha-n/2}} \frac{\Gamma(\alpha - n/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (3.14)$$

όπου με  $\Gamma(\cdot)$  συμβολίζουμε τη συνάρτηση γάμμα. Το ολοκλήρωμα στη σχέση (3.13) ταυτίζεται με αυτό της σχέσης (3.14) (με μία διαφορά στο πρόσημο) κάνοντας στο δεύτερο τις αντικαταστάσεις

$$p \rightarrow k \quad , \quad k \rightarrow 0 \quad , \quad m \rightarrow m_R \quad , \quad \alpha \rightarrow 1$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.14) έχουμε λοιπόν ότι

$$\Sigma = \frac{\mu^{4-n}g_R}{2(4\pi)^{n/2}} (m_R^2)^{-1+n/2} \Gamma(1 - n/2) \quad (3.15)$$

Ισχύει ότι

$$\Gamma(1 - n/2) = \frac{\Gamma(2 - n/2)}{1 - n/2} = \frac{2}{n - 4} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(n - 4) \quad (3.16)$$

όπου  $\gamma \simeq 0.577216$  είναι η σταθερά του Euler. Αναπτύσσοντας το δεύτερο μέλος της εξίσωσης (3.15) γύρω από το  $n = 4$  έχουμε ότι

$$\Sigma = \frac{m_R^2 g_R}{16\pi^2 (n - 4)} + g_R \times \text{πεπερασμένο} + \mathcal{O}(g_R^2) \quad (3.17)$$

Έτσι ο αντίστροφος διαδότης θα είναι σε πρώτη τάξη ως προς  $g_R$

$$p^2 - m_R^2 \left( 1 + \frac{b_{11}g_R}{n - 4} \right) - \frac{m_R^2 g_R}{16\pi^2 (n - 4)} + g_R \times \text{πεπερασμένο} \quad (3.18)$$

Συνεπώς σε πρώτη τάξη ως προς  $g_R$  θα έχουμε

$$Z = 1 \quad \text{και} \quad b_{11} = -\frac{1}{16\pi^2}$$

Το γεγονός ότι  $Z = 1$  προκύπτει από το ότι ο παράγοντας  $p^2$  στον αντίστροφο διαδότη δεν τροποποιείται καθόλου στη σχέση (3.18). Αντικαθιστώντας το  $b_{11}$  στην εξίσωση (3.8) παίρνουμε

$$m_B^2 = m_R^2 \left[ 1 - \frac{g_B}{16\pi^2(n-4)} \right] \quad (3.19)$$

Έστω τώρα ότι με  $\mathcal{G}_R$  συμβολίζουμε την επανακανονικοποιημένη συνάρτηση κορυφής στη σκέδαση του σχήματος (3.3). Τότε θα είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_R &= Z^2 \sum (\text{διαγράμματα του σχήματος (3.3)}) + \mathcal{O}(g_R^3) = \\ &= \sum (\text{διαγράμματα του σχήματος (3.3)}) + \mathcal{O}(g_R^3) \end{aligned} \quad (3.20)$$

γιατί  $Z = 1$  όπως είπαμε παραπάνω. Από τα διαγράμματα του σχήματος (3.3) λαμβάνουμε υπ' όψη τα (b), (c) και (d) αφού μόνο αυτά περιέχουν βρόχο. Μάλιστα οι συνεισφορές τους είναι ίσες, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τη συνεισφορά μόνο ενός, έστω του (b). Θα έχουμε

$$\frac{i\mu^{8-2n}g_R^2}{2(2\pi)^n} \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m_R^2) [(p+k)^2 - m_R^2]} \quad (3.21)$$

όπου ο συντελεστής μπροστά από το ολοκλήρωμα ερμηνεύεται με τον ίδιο τρόπο όπως στην εξίσωση (3.13). Εδώ η σταθερά σύζευξης είναι στο τετράγωνο γιατί στο διάγραμμα έχουμε δύο κόμβους. Για να γράψουμε το ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της (3.21) σε αυτή τη μορφή, θεωρούμε ότι η τετραορμή του ενός σωματιδίου είναι  $p$  ενώ όλων των άλλων μηδενική, και ακόμα ότι τα σωματίδια μέσα στο βρόχο έχουν τετραορμές  $-k$  και  $p+k$ . Για να υπολογίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα φέρνοντας το στη μορφή της σχέσης (3.14), πρέπει να καταφύγουμε στη μέθοδο του Feynman για το συνδυασμό των διαδοτών. Αυτή στηρίζεται στο ότι

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(p_1^2 - m_1^2)^\alpha (p_2^2 - m_2^2)^\beta} = \\ &= \int_0^1 dx \frac{x^{1-\alpha} (1-x)^{1-\beta}}{[(p_1^2 - m_1^2)x + (p_2^2 - m_2^2)(1-x)]^{\alpha+\beta}} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.21) προκύπτει από αυτό της σχέσης (3.22) κάνοντας στο δεύτερο τις αντικαταστάσεις

$$p_1 \rightarrow p+k \quad , \quad p_2 \rightarrow k \quad , \quad m_1, m_2 \rightarrow m_R \quad , \quad \alpha, \beta \rightarrow 1$$



Για τη συνεισφορά του διαγράμματος (b) του σχήματος (3.3) έχουμε λοιπόν ότι

$$\frac{i\mu^{8-2n}g_R^2}{2(2\pi)^n} \int_0^1 dx \int d^n k \frac{1}{\left[[(p+k)^2 - m_R^2]x + (k^2 - m_R^2)(1-x)\right]^2} \quad (3.23)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι  $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$ . Υπολογίζουμε ξεχωριστά το ολοκλήρωμα ως προς  $d^n k$  της σχέσης (3.23) και έχουμε

$$\begin{aligned} & \int d^n k \frac{1}{\left[[(p+k)^2 - m_R^2]x + (k^2 - m_R^2)(1-x)\right]^2} = \\ & = \int d^n k \frac{1}{\left[p^2x + k^2x + 2p \cdot kx - m_R^2x + k^2 - k^2x - m_R^2 + m_R^2x\right]^2} = \\ & = \int d^n k \frac{1}{\left[p^2x + 2p \cdot kx + k^2 - m_R^2\right]^2} = \int d^n k \frac{1}{\left[m_R^2 - p^2x - 2k \cdot px - k^2\right]^2} \end{aligned}$$

Μπορούμε να δούμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι σαν αυτό της σχέσης (3.14) κάνοντας στο δεύτερο τις αντικαταστάσεις

$$p \rightarrow k \quad , \quad k \rightarrow px \quad , \quad m^2 \rightarrow m_R^2 - p^2x \quad , \quad \alpha \rightarrow 2$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} & \int d^n k \frac{1}{\left[m_R^2 - p^2x - 2k \cdot px - k^2\right]^2} = \frac{i\pi^{n/2}}{\left(m_R^2 - p^2x + p^2x^2\right)^{2-n/2}} \frac{\Gamma(2-n/2)}{\Gamma(2)} = \\ & = \frac{i\pi^{n/2}}{\left[m_R^2 - p^2x(1-x)\right]^{2-n/2}} \Gamma(2-n/2) \end{aligned}$$

Άρα η συνολική συνεισφορά του διαγράμματος είναι

$$\frac{-i\mu^{8-2n}g_R^2}{2(4\pi)^{n/2}} \Gamma(2-n/2) \int_0^1 dx \frac{1}{\left[m_R^2 - p^2x(1-x)\right]^{2-n/2}} \quad (3.24)$$

Αναπτύσσοντας την έκφραση (3.24) γύρω από το  $n = 4$  παίρνουμε

$$\frac{g_R^2}{16\pi^2(n-4)} + g_R^2 \times \text{πεπερασμένο} \quad (3.25)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\Gamma(2 - n/2) = -\frac{2}{n-4} + \mathcal{O}(1)$$

Συνεπώς, συνυπολογίζοντας τις συνεισφορές των διαγραμμάτων (c) και (d) του σχήματος (3.3) που καθεμιά τους είναι ίση με την ποσότητα (3.25), έχουμε ότι σε τάξη  $g_R^2$  είναι

$$\mathcal{G}_R = \frac{g_R^2}{n-4} \left( a_{12} + \frac{3}{16\pi^2} \right) + \text{πεπερασμένο} \quad (3.26)$$

Άρα  $a_{12} = -3/16\pi^2$ . Επομένως

$$g_B = \mu^{4-n} \left( g_R - \frac{3g_R^2}{16\pi^2(n-4)} + \mathcal{O}(g_R^3) \right) \quad (3.27)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ιδιοενέργεια  $\Sigma$  σε τάξη  $g_R^2$  από τα διαγράμματα (b), (c) και (d) του σχήματος (3.2) που όπως μπορούμε να δούμε περιέχουν όλα δύο βρόχους. Πρώτα όμως θα βρούμε τη συνεισφορά του διαγράμματος (a) του σχήματος (3.2) συμπεριλαμβανοντας και τον όρο της σχέσης (3.27) που υπολογίσαμε παραπάνω. Αντικαθιστώντας το  $\mu^{4-n}g_R$  στη σχέση (3.15) με την έκφραση στο δεύτερο μέλος της σχέσης (3.27) έχουμε λοιπόν ότι σε τάξη  $g_R^2$  η συνεισφορά θα είναι

$$\frac{(m_R^2)^{-1+n/2}}{2(4\pi)^{n/2}} \mu^{4-n} \left( g_R - \frac{3g_R^2}{16\pi^2(n-4)} \right) \Gamma(1 - n/2) \quad (3.28)$$

Αναπτύσσοντας την έκφραση (3.28) γύρω από το  $n = 4$  και με τη βοήθεια της σχέσης (3.16) παίρνουμε

$$\frac{m_R^2 g_R}{32\pi^2} \left[ \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n/2-2} \frac{2a_{12}g_R}{(n-4)^2} + \frac{2 + (\gamma - 1)a_{12}g_R}{n-4} + \text{πεπερασμένο} \right] \quad (3.29)$$

όπου  $a_{12} = -3/16\pi^2$  όπως είδαμε παραπάνω. Η συνεισφορά τώρα του διαγράμματος (b) του σχήματος (3.2) εύκολα μπορούμε να δούμε ότι είναι

$$\frac{-\mu^{8-2n} g_R^2}{4(2\pi)^{2n}} \int \int d^n k d^n \ell \frac{1}{(k^2 - m_R^2)^2 (\ell^2 - m_R^2)} \quad (3.30)$$

Η ποσότητα (3.30) γράφεται

$$\frac{-\mu^{8-2n} g_R^2}{4(2\pi)^{2n}} \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m_R^2)^2} \int d^n \ell \frac{1}{(\ell^2 - m_R^2)} \quad (3.31)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα στην έκφραση (3.31) προκύπτει από αυτό της εξίσωσης (3.14) κάνοντας στο δεύτερο τις αντικαταστάσεις

$$p \rightarrow k \quad , \quad k \rightarrow 0 \quad , \quad m \rightarrow m_R \quad , \quad \alpha \rightarrow 2$$

ενώ το δεύτερο ολοκλήρωμα της έκφρασης (3.31) (με μία διαφορά στο πρόσημο) προκύπτει κάνοντας τις αντικαταστάσεις

$$p \rightarrow \ell \quad , \quad k \rightarrow 0 \quad , \quad m \rightarrow m_R \quad , \quad \alpha \rightarrow 1$$

Για την ποσότητα (3.31) παίρνουμε λοιπόν ότι

$$\frac{-\mu^{8-2n} g_R^2}{4(2\pi)^{2n}} \frac{i\pi^{n/2}}{(m_R^2)^{2-n/2}} \Gamma(2-n/2) \frac{i\pi^{n/2}}{(m_R^2)^{1-n/2}} \Gamma(1-n/2)$$

Αναπτύσσοντας κατά τα γνωστά γύρω από το  $n = 4$  έχουμε ότι

$$\frac{m_R^2 g_R^2}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n-4} \frac{1}{(n-4)^2} + \frac{(4\gamma-2)m_R^2 g_R^2}{(32\pi^2)^2 (n-4)} + g_R^2 \times \text{πεπερασμένο}$$

Όμοια, η συνεισφορά του διαγράμματος (c) του σχήματος (3.2) είναι

$$\frac{i\mu^{4-n} g_R b_{11} g_R m_R^2}{2(2\pi)^n (n-4)} \int d^n k \frac{1}{(k^2 - m_R^2)^2} \quad (3.32)$$

που λόγω της εξίσωσης (3.14) γράφεται

$$\frac{i\mu^{4-n} g_R b_{11} g_R m_R^2}{2(2\pi)^n (n-4)} \frac{i\pi^{n/2}}{(m_R^2)^{2-n/2}} \Gamma(2-n/2) \quad (3.33)$$

όπου  $b_{11} = -1/16\pi^2$ . Αναπτύσσοντας και πάλι γύρω από το  $n = 4$  παίρνουμε την έκφραση

$$\frac{g_R^2 m_R^2 b_{11}}{16\pi^2} \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n/2-2} \frac{1}{(n-4)^2} + \frac{\gamma b_{11} g_R^2 m_R^2}{32\pi^2 (n-4)} + g_R^2 \times \text{πεπερασμένο} \quad (3.34)$$

Από το διάγραμμα (d) του σχήματος (3.2) έχουμε την παρακάτω συνεισφορά

$$\frac{-\mu^{8-2n} g_R^2}{6(2\pi)^{2n}} \int \int d^n k d^n \ell \frac{1}{(k^2 - m_R^2) (\ell^2 - m_R^2) [(p+k+\ell)^2 - m_R^2]} \quad (3.35)$$

Στην έκφραση (3.35) τα ολοκληρώματα ως προς  $d^n k$  και ως προς  $d^n \ell$  δεν είναι δυνατόν να υπολογιστούν ξεχωριστά και χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ξανά

τη μέθοδο του Feynman της εξίσωσης (3.22). Στην περίπτωση αυτή τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα και τελικά μετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (για λεπτομέρειες δες [4]) η συνεισφορά του διαγράμματος προκύπτει

$$\frac{-\mu^{8-2n} g_R^2 \pi^n}{6 (2\pi)^{2n}} \Gamma(3-n) \mathcal{G}_R \quad (3.36)$$

όπου

$$\mathcal{G}_R = \frac{-6 (m_R^2)^{n-3}}{n-4} - \frac{p^2}{2} + 3m_R^2 + \mathcal{O}(n-4)$$

και

$$\Gamma(3-n) = \frac{\Gamma(4-n)}{3-n} = \frac{1}{n-4} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(n-4)$$

Άρα αναπτύσσοντας την έκφραση (3.36) γύρω από το  $n = 4$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} & \frac{m_R^2 g_R^2}{(16\pi^2)^2} \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n/2-2} \frac{1}{(n-4)^2} + \\ & + \frac{1}{n-4} \frac{g_R^2}{(16\pi^2)^2} \left[ \frac{p^2}{12} - \frac{m_R^2}{12} + (\gamma-1) m_R^2 \right] + \\ & + g_R^2 \times \text{πεπερασμένο} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Παρατηρούμε εδώ ότι για πρώτη φορά έχουμε έναν άπειρο συντελεστή μπροστά από το  $p^2$ , οπότε τώρα που αυτό τροποποιείται σε τάξη  $g_R^2$ , όπως θα δούμε στη συνέχεια θα τροποποιηθεί και το πεδίο  $Z$ .

Λαμβάνοντας υπ' όψη τις συνεισφορές όλων των διαγραμμάτων του σχήματος (3.2) σε τάξη  $g_R^2$  που υπολογίσαμε μέχρι τώρα βρίσκουμε το παρακάτω αποτέλεσμα για τον αντίστροφο διαδότη

$$\begin{aligned} & p^2 \left[ 1 - \frac{g_R^2}{12 (16\pi^2)^2} \frac{1}{n-4} \right] - \\ & - m_R^2 \left[ 1 + \frac{g_R^2}{n-4} \left( b_{12} - \frac{1}{2 (16\pi^2)^2} \right) + \frac{g_R^2}{(n-4)^2} \left( b_{22} - \frac{2}{(16\pi^2)^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.38)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right)^{n-4} = 1 + (n-4) \ln \left( \frac{m_R^2}{4\pi\mu^2} \right) + \mathcal{O}((n-4)^2)$$

Επομένως

$$Z = 1 + \frac{g_R^2}{12 (16\pi^2)^2 (n-4)}$$

και

$$b_{12} = \frac{5}{12 (16\pi^2)^2} \quad , \quad b_{22} = \frac{2}{(16\pi^2)^2}$$

για να εξουδετερώνονται οι άπειροι όροι.

Συνοψίζοντας τώρα όλα τα αποτελέσματα που εξάγαμε στην παρούσα ενότητα έχουμε για τις γυμνές παραμέτρους της σταθεράς σύζευξης, της μάζας και του πεδίου σε τάξη προσέγγισης ως και  $g_R^2$  (2η τάξη της θεωρίας διαταραχών) ότι

$$g_B = \mu^{4-n} \left[ g_R - \frac{3g_R^2}{16\pi^2} \frac{1}{n-4} + \mathcal{O}(g_R^3) \right] \quad (3.39)$$

$$m_B^2 = m_R^2 \left[ 1 + \frac{1}{n-4} \left( -\frac{g_R}{16\pi^2} + \frac{5g_R^2}{12(16\pi^2)^2} \right) + \frac{2g_R^2}{(16\pi^2)^2} \frac{1}{(n-4)^2} + \mathcal{O}(g_R^3) \right] \quad (3.40)$$

$$Z = \frac{g_R^2}{12 (16\pi^2)^2 (n-4)} + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (3.41)$$



# Βιβλιογραφία

- [1] Σ. Τραχανάς, *Κβαντομηχανική III* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2000)
- [2] Σ. Τραχανάς, *Σχετικιστική Κβαντομηχανική* (Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1999)
- [3] F. Halzen - A.D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (J. Wiley & Sons, 1984)
- [4] J.C. Collins, “Scaling behavior of  $\phi^4$  theory and dimensional regularization”, *Physical Review D*, 10, 1213 (1974)
- [5] Σημειώσεις Ν. Τράκα
- [6] J.C. Collins - A.J. Macfarlane, “New methods for the renormalization group”, *Physical Review D*, 10, 1201 (1974)
- [7] J.D. Bjorken - S.D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw-Hill, 1964)
- [8] G. 't Hooft - M. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields”, *Nuclear Physics*, B44, 189 (1972)
- [9] S. Coleman, “Renormalization and symmetry: a review for non-specialists”, *Proceedings*