ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΣΑΤΦ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνα Ε. Δρακωνάκη

Επιβλέπων : Κώστας Βουρνάς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2003

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΔΥΟ ΣΑΤΦ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνα Ε. Δρακωνάκη

Επιβλέπων : Κώστας Βουρνάς
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την ..... Οκτωβρίου 2003.

.....	.....	.....
Κ. Βουρνας	Ν. Μαράτος	Ν. Χατζηαργυρίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Οκτώβριος 2003

……

Κωνσταντίνα Ε. Δρακωνάκη

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστων Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνα Ε. Δρακωνάκη, 2003

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ'ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Προπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Κώστα Βουρνά, καθηγητή της σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την εξαιρετική συνεργασία και τις ιδιαίτερα χρήσιμες συμβουλές και παρατηρήσεις του.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μιχάλη Καρυστιανό, υποψήφιο διδάκτορα της σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την πολύτιμη βοήθεια και συμπαράσταση του κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Νικόλαο Μαράτο και Νικόλαο Χατζηαργυρίου, καθηγητές της σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, που μου έκαναν την τιμή να είναι μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής μου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ 5

ABSTRACT 6

1. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ 7

1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ – ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ ΤΑΣΕΩΣ 7

1.2 ΜΕΓΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΙΣΧΥΣ 8
1.2.1 Θεώρημα Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος 8
1.2.2 Επίδραση της αντιστάθμισης στη μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ 11

1.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΑΣΗΣ ΥΠΟ ΦΟΡΤΙΟ (ΣΑΤΦ) 13
1.3.1 Γενικά 13
1.3.2 Μοντέλα ΣΑΤΦ 14
1.3.3 Επίδραση των ΣΑΤΦ φορτίου και δικτύου 16
1.3.4 Σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ 19

1.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 21
1.4.1 Επισκόπηση της Βιβλιογραφίας 21
1.4.2 Σκοπός – Δομή της Εργασίας 22

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ 25

2.1 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 25
2.1.1 Ύπαρξη και Μονοσήμαντο λύσεων – Κατάρρευση 25
2.1.2 Σημεία Ισορροπίας – Ευστάθεια 26
2.1.3 Ιδιοτιμές – Ιδιοδιανύσματα 28

2.2 ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ 29
2.2.1 Γενικά 29
2.2.2 Περιοχή έλξης ευσταθών σημείων ισορροπίας 31
2.2.3 Περιοδικές λύσεις – Οριακοί κύκλοι 32

2.3 ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ 34
2.3.1 Γενικά 34
2.3.2 Διακλάδωση σαγματικού κόμβου (Saddle Node Bifurcation) 34
2.3.3 Διακλάδωση Hopf 36
2.3.4 Διακλάδωση Ομοκλινούς βρόχου 37

2.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ 38
2.4.1 Συστήματα διαφορικών - αλγεβρικών εξισώσεων 38
2.4.2 Χωρισμός σε χρονικές κλίμακες 40

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΣΑΤΦ ΕΝ ΣΕΙΡΑ 44

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 44

3.2 ΜΕΓΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΙΣΧΥΣ 46
3.2.1 Βραχυπρόθεσμο Όριο Μεταφοράς 47
3.2.2 Μέγιστη Μεταφερόμενη Ισχύς για μεταβολή μόνο του r_2 48
3.2.3 Μέγιστη Μεταφερόμενη Ισχύς για μεταβολή μόνο του r_1 50

3.3 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 52
3.3.1 Υπολογισμός Υψηλής και Μέσης Τάσης 52
3.3.2 Προσδιορισμός των Σημείων Ισορροπίας 53
3.3.3 Γραμμικοποίηση, Ευαισθησίες 54
3.3.4 Επίδραση της ορίζουσας και του ίχνους του πίνακα κατάστασης στην ευστάθεια του συστήματος 59
3.3.5 Συνθήκη Εμφάνισης Ταλαντώσεων 62

4. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ 64

4.1 ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ 64
4.1.1 Γενικά 64
4.1.2 Τροχιές και Καμπύλες Ισορροπίας 66
4.1.3 Διακλάδωση Σαγματικού Κόμβου (ΔΣΚ) 67

4.2 ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ HOPF ΚΑΙ ΟΜΟΚΛΙΝΗΣ ΒΡΟΧΟΣ 69
4.2.1 Διακλάδωση Hopf 69
4.2.2 Διαγράμματα Τόπου Ριζών 70
4.2.3 Ομοκλινής Βρόχος – Ασταθής Οριακός Κύκλος 72

4.3 ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΛΞΗΣ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ 74
4.3.1 Γενικά 74
4.3.2 Ευσταθείς Πολλαπλότητες Ασταθούς Σημείου Ισορροπίας 75
4.3.3 Ασταθής οριακός Κύκλος 78

5. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ 86

5.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ 86
5.1.1 Γενικά 86
5.1.2 Περίπτωση με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ) 86
5.1.3 Περίπτωση με γρήγορο το δεύτερο ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ) 89

5.2 ΟΡΙΑΚΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ 91
5.2.1 Περίπτωση με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ) 91
5.2.2 Περίπτωση με γρήγορο το δεύτερο ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ) 93

5.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΑ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΩΝ 96
5.3.1 Γενικά 96
5.3.2 Κλίσεις των εξισώσεων ισορροπίας του γραμμικού συστήματος 96

5.4 ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ 103
5.4.1 Γενικά 103
5.4.2 Μονότονη Συμπεριφορά 103
5.4.3 Ευσταθής ταλαντωτική συμπεριφορά 106
5.4.4 Εμφάνιση Ασταθών Ταλαντώσεων 108

6. ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ 110

6.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ 110

6.2 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ 111

6.3 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ 115

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ 120

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 125

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 126

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η ανάλυση της ευστάθειας ενός απλού συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ). Το συγκεκριμένο σύστημα που εξετάσαμε αποτελείται από μια ισοδύναμη πηγή τάσης, η οποία τροφοδοτεί φορτίο σταθερής αγωγιμότητας μέσω γραμμής μεταφοράς και δύο μετασχηματιστών συνδεδεμένων εν σειρά και εξοπλισμένων με Συστήματα Αλλαγής Τάσεως υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ). Το σύστημα που μελετήσαμε είναι μη γραμμικό, οπότε η ανάλυση που πραγματοποιήθηκε βασίστηκε στη θεωρία των μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων.

Σημαντικό μέρος πληροφορίας για την ευστάθεια ενός ΣΗΕ προέρχεται από τον εντοπισμό των διακλαδώσεων που αυτό συναντά καθώς μεταβάλλονται οι παράμετροι του. Στο συγκεκριμένο σύστημα εντοπίστηκε διακλάδωση σαγματικού κόμβου για κάποια τιμή φόρτισης, στην οποία πραγματοποιείται μηδενισμός της ορίζουσας του πίνακα κατάστασης του συστήματος. Επίσης βρέθηκε ότι για μικρότερες φορτίσεις στο σύστημα εμφανίζονται διακλαδώσεις Hopf και ομοκλινούς βρόχου, με αποτέλεσμα να φράσσεται η περιοχή ευσταθούς λειτουργίας από αυτές. Η αστάθεια όταν το σύστημα συναντά διακλαδώσεις Hopf και ομοκλινούς βρόχου, χαρακτηρίζεται από ταλαντώσεις αυξανόμενου πλάτους, ενώ αντίθετα η αστάθεια έπειτα από τη διακλάδωση σαγματικού κόμβου είναι μονότονη.

Επιπρόσθετα, έγινε ανάλυση των ιδιαζουσών διαταραχών στο σύστημα όταν το ένα ΣΑΤΦ λειτουργεί πολύ πιο γρήγορα σε σχέση με το άλλο. Επίσης μελετήθηκαν οι γεωμετρικές ιδιότητες ταλάντωσης και ευστάθειας του συστήματος με τη βοήθεια των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα, βρέθηκε ότι όταν οι δύο κλίσεις αυτές είναι ομόσημες το σύστημα παρουσιάζει διακλαδώσεις Hopf και ομοκλινούς βρόχου, άρα και αστάθεια. Όσο πιο γρήγορο είναι το ΣΑΤΦ φορτίου (ΥΤ/ΜΤ) σε σχέση με το ΣΑΤΦ δικτύου (ΥΥΤ/ΥΤ), τόσο περισσότερο πλησιάζει το σύστημα σε αστάθεια. Επίσης στη διακλάδωση σαγματικού κόμβου οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Τέλος, παρουσιάζονται οι εξισώσεις που ορίζουν το διακριτό μοντέλο ΣΑΤΦ, και αναλύεται η ευστάθεια του με τη βοήθεια της μελέτης διάφορων περιπτώσεων και προσομοίωσης στο σύστημα που μελετάμε. Συμπεραίνεται ότι οι ικανές συνθήκες ευστάθειας στο διακριτό σύστημα συμπίπτουν με εκείνες που προκύπτουν για το συνεχές από την εφαρμογή του θεωρήματος του Gershgorin. Ακόμη αναλύεται με τη βοήθεια της προσομοίωσης η σχέση μεταξύ της γεωμετρίας των καμπυλών τόσο του γραμμικού όσο και του μη γραμμικού συστήματος και της ευστάθειας του διακριτού συστήματος.

Λέξεις κλειδιά: Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας, Ευστάθεια Τάσης, Συστήματα Αλλαγής Τάσης υπό Φορτίο, Θεωρία Διακλαδώσεων, Ανάλυση Ιδιαζουσών Διαταραχών, Διακριτά Συστήματα.

ABSTRACT

The subject of this diploma thesis is voltage stability analysis of a simple power system. In particular, the power system that is examined in this project consists of an equivalent voltage source that feeds an impedance load, through a transmission line and two transformers connected in series and equipped with under Load Tap Changing systems (LTC). This system is a nonlinear one, therefore its analysis is based on the nonlinear differential system theory.

Important information about the stability of a power system derives from the localization of bifurcations that the system may experience. In this particular system we have detected on a certain load, a saddle-node bifurcation, where the necessary condition for the singularity of the state Jacobian holds. Furthermore, for smaller loads we have located Hopf bifurcations and homoclinic loop bifurcations. As a result, in these points the stable region of the system is bounded by those bifurcations. Voltage instability phenomena caused by the appearance of Hopf or homoclinic loop bifurcations, are characterized by growing oscillations, whereas instability after a saddle-node bifurcation is monotonous.

Moreover, based on the singular perturbation analysis, we studied the response of the system when the two LTCs operate in different time scales (i.e. one LTC is much faster than the other). In addition we examined the oscillation and stability geometrical properties of the system, by observing the inclination of the equilibrium curves. More specifically, it has been found that when these two inclinations are of the same moment, the system experiences Hopf and homoclinic loop bifurcations, and thus it becomes unstable. The faster the LTC at the generation side is, in relation with the LTC that feeds the distribution system, the more unstable the system is. In addition, when the saddle-node is encountered, the inclinations of the equilibrium curves become simultaneously zero.

Finally, we presented the equations that determine the discrete LTC's model and we analyzed its stability by studying certain cases and simulations of the system response. We concluded that the sufficient conditions for stability in the case of the discrete models, coincides with the sufficient conditions for stability as far as the continuous model is concerned, which derive from the Gershgorin's theorem. Also, through simulation we proved the connection between the geometrical properties of the equilibrium curves, both for the linearized and the nonlinear system, and the stability of the discrete system.

Key-words: Power System, Voltage Stability, Under Load Tap Changer Systems, Bifurcation Theory, Singular Perturbation Analysis, Discrete systems.

1. ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΤΑΣΕΩΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

1.1 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ - ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ ΤΑΣΕΩΣ

Η διαρκής αύξηση των ενεργειακών αναγκών και η συνακόλουθη αύξηση των ηλεκτρικών φορτίων έχει σαν αποτέλεσμα την εντατικοποίηση των μελετών που αφορούν στην ανάπτυξη και βελτίωση της απόδοσης των ηλεκτρικών δικτύων. Καθώς η κατασκευή νέων γραμμών μεταφοράς (Γ.Μ.), κέντρων υπερήψηλης τάσης (Κ.Υ.Τ.) και υποσταθμών (Υ/Σ) υπόκειται σε περιορισμούς, λόγω τεχνικών, περιβαλλοντικών, γεωγραφικών και οικονομικών παραγόντων, έχει ανακύψει η ανάγκη για την εντατικότερη εκμετάλλευση και καλύτερη αξιοποίηση των ήδη διαθεσίμων συστημάτων μεταφοράς, με συνέπεια τα ηλεκτρικά δίκτυα να λειτουργούν ολοένα και πλησιέστερα στα όρια ασφαλούς λειτουργίας.

Το μέγιστο όριο μεταφοράς ισχύος σε ένα σύστημα παραγωγής-μεταφοράς είναι το σημείο Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος, το οποίο ορίζεται στη θεωρία των κυκλωμάτων. Όταν τα φορτία προσπαθούν να απορροφήσουν ισχύ πέρα από το σημείο αυτό τότε υπάρχει σημαντική πιθανότητα εμφάνισης αστάθειας τάσης. Το πιο συνηθισμένο μέτρο για την αύξηση της ικανότητας μεταφοράς του δικτύου είναι η έγχυση αεργού ισχύος στο σύστημα μέσω της εγκατάστασης χωρητικής αντιστάθμισης, η οποία εν γένει επεκτείνει τα περιθώρια μεταφοράς ισχύος. Ένας βασικός μηχανισμός που συμβάλλει στη διαδικασία ανάκτησης φορτίου, είναι η λειτουργία των Συστημάτων Αλλαγής Τάσεως υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ), τα οποία έχουν ως στόχο την επαναφορά της τάσης στους ελεγχόμενους ζυγούς φορτίου, επαναφέροντας με αυτόν τον τρόπο και το εξαρτώμενο από την τάση φορτίο. Παρ'όλα αυτά όταν ένα σύστημα λειτουργεί στα ήδη επιτεταμένα όρια φορτίσεως του, τότε σε περίπτωση έκτακτων συνθηκών έχει αυξημένες πιθανότητες να οδηγηθεί σε αστάθεια ή ακόμα να καταρρεύσει.

Για τους παραπάνω λόγους έχει αναπτυχθεί ένα σημαντικό κομμάτι βιβλιογραφίας γύρω από τη μελέτη φαινομένων αστάθειας στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας λαμβάνοντας υπ' όψιν τη δυναμική φύση του κάθε στοιχείου, καθώς παλαιότερες αναλύσεις με στατικά μοντέλα δεν ήταν επαρκείς για την πλήρη εξήγηση και κατανόηση των μηχανισμών αστάθειας.

Προτού προχωρήσουμε στην ανάπτυξη των μηχανισμών αστάθειας σε ένα δίκτυο, κρίνεται σκόπιμο να δοθούν οι ορισμοί της ευστάθειας και της αστάθειας τάσεως όπως και της κατάρρευσης.

Σύμφωνα με το [2], ο ορισμός της ευστάθειας τάσεως σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας είναι ο εξής:

> «Ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας που βρίσκεται σε μια ορισμένη κατάσταση καλείται ευσταθές ως προς την τάση, όταν έπειτα από μια διαταραχή οι τάσεις στην πλευρά των φορτίων πλησιάζουν τις τάσεις ισορροπίας πριν τη διαταραχή »

Επίσης στην [10] δίνεται ο ακόλουθος ορισμός για την αστάθεια τάσης:

> «Η αστάθεια τάσης προκαλείται από την απόπειρα των φορτίων να αποκαταστήσουν την απορροφούμενη ισχύ του πέρα από τις δυνατότητες του συνδυασμένου συστήματος παραγωγής και μεταφοράς »

Όταν σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας παρατηρηθεί αστάθειας τάσης τότε ο μηχανισμός ο οποίος κινεί την αστάθεια είτε θα εξαντλήσει τα περιθώρια μεταβολής του (π.χ. τα όρια ρύθμισης του ΣΑΤΦ), οπότε το σύστημα θα ισορροπήσει σε χαμηλά ως απαράδεκτα επίπεδα τάσης, είτε λόγω της επιτάχυνσης του φαινομένου που οδηγεί στην απότομη βύθιση των τάσεων στην περιοχή εμφάνισης του προβλήματος θα οδηγηθούμε σε κατάρρευση της τάσης, με συνέπεια τη μερική ή ολική σβέση του συστήματος.

Κοντά στο σημείο κατάρρευσης, η χρονική απόκριση των τάσεων στην περιοχή εμφάνισης του προβλήματος γίνεται πολύ γρήγορη για να καταλήξει σε μια κατακόρυφη πτώση τη χρονική στιγμή της κατάρρευσης. Δηλαδή, στο σημείο της κατάρρευσης έχουμε μια ασυνέχεια στη λειτουργία του συστήματος. Η ασυνέχεια αυτή οφείλεται στη συνεχή συμπεριφορά του συστήματος και όχι σε εξωτερικά από το σύστημα συμβάντα (βραχυκύκλωμα, άνοιγμα γραμμής κλπ.). Γενικεύοντας την έννοια της κατάρρευσης μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό [10]:

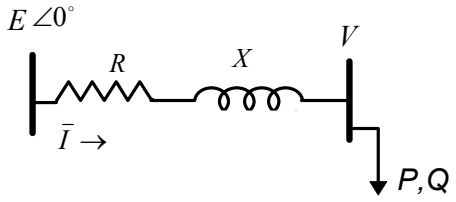
> «Γενικά με τον όρο κατάρρευση εννοούμε μια απότομη καταστροφική μετάβαση (πρακτικά ακαριαία) της κατάστασης ενός συστήματος».

1.2 ΜΕΓΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΙΣΧΥΣ

1.2.1 Θεώρημα Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος

Στην ενότητα αυτή διατυπώνεται και αποδεικνύεται το θεώρημα Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος, το οποίο, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 1.1, παίζει κρίσιμο ρόλο στην κατανόηση των φαινομένων αστάθειας τάσης.

Ας θεωρήσουμε το σύστημα των δύο ζυγών του Σχήματος 1.2.1. Το σύστημα αποτελείται από έναν ζυγό φορτίου ο οποίος τροφοδοτείται από έναν άπειρο ζυγό διαμέσου μιας γραμμής μεταφοράς με σύνθετη αντίσταση $Z = R + jX$.



Σχήμα 1.2.1: *Σύστημα άπειρου ζυγού - απομονωμένου φορτίου*

Θεωρούμε ότι το φορτίο συμπεριφέρεται ως σύνθετη αντίσταση και ότι μεταβάλλεται με σταθερό συντελεστή ισχύος ($\cos\varphi = \sigma\tau\alpha\theta.$). Η σύνθετη αντίσταση του φορτίου δίνεται από τη σχέση:

$$Z_l = R_l + jX_l = R_l\left(1 + j\tan\varphi\right)$$

Το ρεύμα $\bar{I}$, που διέρχεται από τη γραμμή μεταφοράς, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{I} = \frac{\overline{E}}{\left(R + R_l\right) + j\left(X + R_l \tan\varphi\right)}$$

Η αποδιδόμενη ενεργός ισχύς στο φορτίο δίνεται από:

$$P = R_l I^2 = \frac{R_l E^2}{\left(R + R_l\right)^2 + \left(X + R_l \tan\varphi\right)^2} \tag{1.1}$$

ενώ η συνθήκη ακροτάτου της (1.1) είναι:

$$\frac{\partial P}{\partial R_l} = 0$$

Από την παραπάνω συνθήκη και μετά από υπολογισμούς έχουμε:

$$R^2_{l\max P} = \frac{\left(R^2 + X^2\right)}{\left(1 + \tan^2\varphi\right)} \tag{1.2}$$

Η παραπάνω σχέση είναι ισοδύναμη με:

$$\left|Z_{l\max P}\right| = \left|Z\right| \tag{1.3}$$

Η δεύτερη παράγωγος της (1.1) δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial R_l^2} = -2R_l\left(1 + \tan^2\varphi\right)$$

η οποία είναι πάντα αρνητική, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η (1.1) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο μηδενισμού της παραγώγου της, δηλαδή όταν ισχύει η σχέση (1.3). Με άλλα λόγια:

> «Για σταθερό συντελεστή ισχύος, η ισχύς του φορτίου μεγιστοποιείται όταν η σύνθετη αντίσταση του φορτίου γίνει ίση με τη σύνθετη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς.»

Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί το θεώρημα Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος (με σταθερό συντελεστή ισχύος) που διέρχεται από μία γραμμή μεταφοράς [3].

Με αντικατάσταση της (1.2) στην (1.1) προκύπτει ότι η Μέγιστη Μεταφερόμενη Ισχύς δίνεται από την σχέση :

$$P_{\max} = \frac{1}{2}\frac{E^2\cos\phi}{\sqrt{R^2 + X^2} + R\cos\phi + X\sin\phi} \tag{1.4}$$

Ενώ η τάση $V_{\max P}$ στο ζυγό φορτίου δίνεται από τη σχέση :

$$V_{\max P} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{E}{\sqrt{1 + \dfrac{R\cos\phi + X\sin\phi}{\sqrt{R^2 + X^2}}}} \tag{1.5}$$

Στο Σχήμα 1.2.2 παριστάνεται η ενεργός ισχύς που αποδίδεται στο φορτίο συναρτήσει της ωμικής αντίστασης του φορτίου R_l.

Από τις σχέσεις (1.4) και (1.5) παρατηρούμε ότι η μέγιστη αποδιδόμενη ισχύς στο φορτίο εξαρτάται μόνο από τις παραμέτρους του δικτύου (*R, X*) και όχι

από τη χαρακτηριστική του φορτίου (την εξάρτηση δηλαδή του φορτίου από την τάση).

Σημειώνεται ότι για αγωγιμότητα φορτίου μικρότερη από $1/R_{\max P}$ η αύξηση της αγωγιμότητας συνεπάγεται αύξηση ισχύος, ενώ για αγωγιμότητα μεγαλύτερη από $1/R_{\max P}$ ισχύει το αντίστροφο.

Γραμμή χωρίς απώλειες

Στην ειδική περίπτωση που η γραμμή μεταφοράς έχει αμελητέες ωμικές απώλειες $R = 0$, οι σχέσεις (1.4) και (1.5) παίρνουν την απλούστερη μορφή :

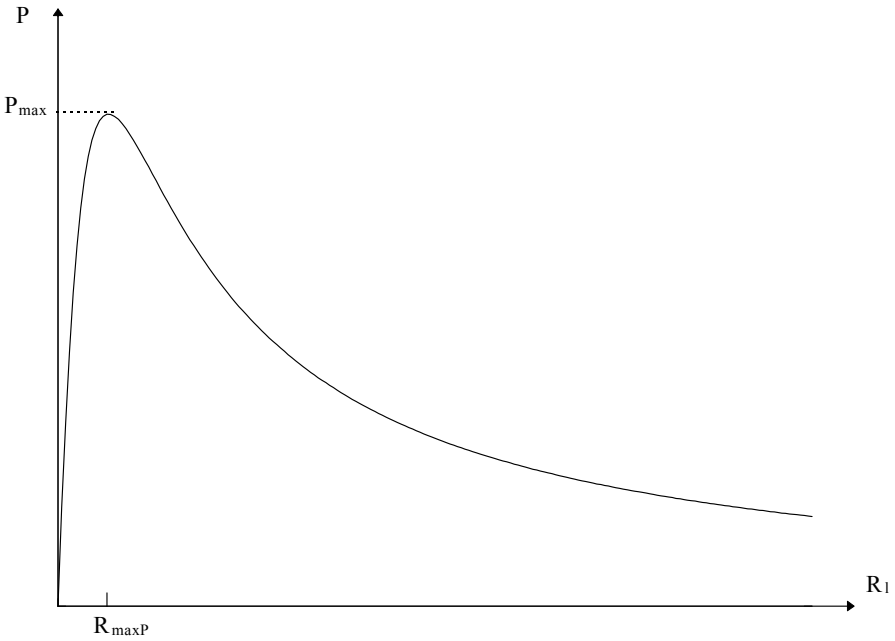
$$P_{\max} = \frac{E^2 \cos\phi}{2X\left(1+\sin\phi\right)} \tag{1.6}$$

$$V_{\max P} = \frac{E/\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sin\phi}} \tag{1.7}$$

Στην ακόμα πιο ειδική περίπτωση του καθαρά ωμικού φορτίου (cosφ=1) θα ισχύει ότι:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{2X}$$

$$V_{\max P} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$



Σχήμα 1.2.2: *Ενεργός ισχύς P συναρτήσει της αντίστασης R_l του φορτίου*

1.2.2 Επίδραση της αντιστάθμισης στη μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ

Γενικά με τον όρο αντιστάθμιση σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ) εννοούμε την έγχυση άεργου ισχύος σε ένα δίκτυο με σκοπό την βελτίωση της κατάστασης λειτουργίας του. Συγκεκριμένα η αντιστάθμιση συντελεί στην διατήρηση των τάσεων κοντά στις ονομαστικές τους τιμές, στην ελάττωση των ρευμάτων γραμμής (και κατά συνέπεια των απωλειών του δικτύου) και τέλος στη βελτίωση της ευστάθειας του δικτύου [4].

Τις περισσότερες φορές η αντιστάθμιση επιτυγχάνεται με την εισαγωγή πυκνωτών λόγω της επαγωγικής φύσης τόσο του δικτύου μεταφοράς όσο και (τις περισσότερες φορές) του φορτίου.

Η αντιστάθμιση διακρίνεται σε αντιστάθμιση φορτίου (όταν η διαχείριση της άεργου ισχύος αποσκοπεί στη βελτίωση των χαρακτηριστικών της παρεχόμενης ισχύος σε ένα απομονωμένο φορτίο ή σε μία ομάδα φορτίων) και σε αντιστάθμιση του δικτύου μεταφοράς (όταν αποσκοπεί στον περιορισμό των απωλειών και τη βελτίωση της ευστάθειας κατά την μεταφορά της ηλεκτρικής ενέργειας).

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η αντιστάθμιση έχει τους εξής σκοπούς :

·Τη διόρθωση του συντελεστή ισχύος ενός φορτίου, διότι χαμηλός συντελεστής ισχύος σημαίνει αύξηση του μέτρου του ρεύματος του φορτίου, οπότε απαιτεί μεγαλύτερη διατομή καλωδίων και ονομαστικών τιμών διακοπτών και άλλων μέσων προστασίας, ενώ αυξάνει τις απώλειες του δικτύου μεταφοράς.

· Τη ρύθμιση του μέτρου τάσεως.Το μέτρο της τάσεως έχει μεγάλη σημασία ειδικά για φορτία με μεταβαλλόμενη ζήτηση άεργου ισχύος (π.χ. επαγωγικοί κινητήρες). Η μεταβολή στη ζήτηση άεργου ισχύος μπορεί να προκαλέσει σοβαρή μεταβολή του μέτρου της τάσεως στο ζυγό φορτίου, σε περίπτωση που ένας καταναλωτής με μεγάλη ζήτηση άεργου ισχύος συνδεθεί ξαφνικά σε αυτόν. Δημιουργούνται έτσι σοβαρά προβλήματα τάσεως και στους υπόλοιπους καταναλωτές που είναι συνδεδεμένοι με το ζυγό αυτό.

Η χωρητική αντιστάθμιση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

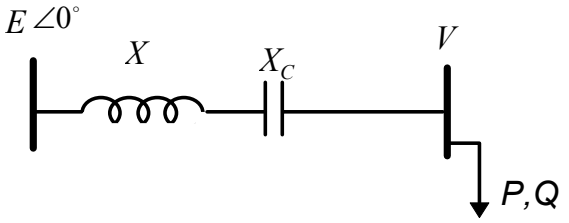
·Χωρητική αντιστάθμιση σειράς

·Εγκάρσια χωρητική αντιστάθμιση

των οποίων η επίδραση στη μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ περιγράφεται στη συνέχεια.

Χωρητική αντιστάθμιση σειράς

Η χωρητική αντιστάθμιση σειράς μειώνει την επαγωγική αντίδραση των γραμμών μεταφοράς, όπως φαίνεται και από το απλό ισοδύναμο κύκλωμα του Σχήματος 1.2.3.



Σχήμα 1.2.3*: Χωρητική αντιστάθμιση σειράς*

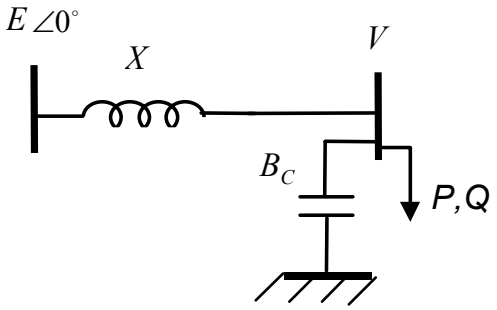
Η επαγωγική αντίδραση της γραμμής μεταφοράς είναι:

$$X_{net} = X - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} < X$$

Δηλαδή η επαγωγική αντίδραση της γραμμής μεταφοράς, με χωρητική αντιστάθμιση σειράς, ελαττώνεται. Αντικαθιστώντας την τιμή της επαγωγικής αντίδρασης X με την X_{net} στη σχέση (1.4) είναι προφανές ότι η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς αυξάνεται, ενώ η τάση όταν έχουμε Μ.Μ.Ι. παραμένει αμετάβλητη.

Εγκάρσια Χωρητική Αντιστάθμιση

Η σύνδεση εγκάρσιων πυκνωτών ή πηνίων είναι η πλέον συνηθισμένη μορφή αντιστάθμισης. Για να διευκολύνουμε την ανάλυση και την εξαγωγή ποιοτικών συμπερασμάτων θα θεωρήσουμε στην περίπτωση αυτή μια γραμμή χωρίς ωμικές απώλειες ($R = 0$ στο Σχήμα 1.2.1) και θα προσθέσουμε ένα εγκάρσιο πυκνωτή B_C στο φορτίο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.2.4.



Σχήμα 1.2.4: *Εγκάρσια χωρητική αντιστάθμιση*

Για να εφαρμόσουμε τους τύπους (1.6) και (1.7) στην περίπτωση αυτή προχωράμε στον υπολογισμό του ισοδυνάμου Thevenin του δικτύου μεταφοράς μαζί με τον πυκνωτή. Η ισοδύναμη τάση και αντίδραση είναι:

$$\overline{E}_{th} = \frac{1}{1 - B_C X}\overline{E} \qquad (1.8)$$

$$X_{th} = \frac{X}{1 - B_C X} \tag{1.9}$$

Αντικαθιστώντας όμως στον τύπο (1.6) προκύπτει ότι αυξάνει η μέγιστη ισχύς που μπορεί να μεταφερθεί.

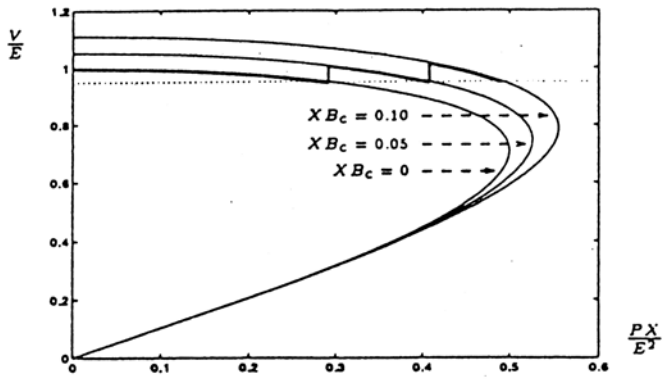
$$P_{\max} = \frac{1}{1 - B_C X} \frac{E^2 \cos\phi}{2X(1 + \sin\phi)} \tag{1.10}$$

Ενώ η τιμή της τάσεως φορτίου στην οποία έχουμε εμφάνιση της μέγιστης ισχύος, αυξάνει επίσης:

$$V_{P\max} = \frac{1}{1 - B_C X} \frac{E/\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sin\phi}} \tag{1.11}$$

Στο Σχήμα 1.2.5 φαίνεται ότι όσο αυξάνει η ισχύς του φορτίου, τόσο περισσότερη εγκάρσια χωρητική αντιστάθμιση είναι αναγκαία για να διατηρηθεί η τάση στα όρια που προσδιορίζουν οι διακεκομμένες γραμμές (μεταξύ 0.95 και 1.05 *αμ* στο συγκεκριμένο παράδειγμα).

Η καμπύλη *PV* που προκύπτει από την κατά στάθμες ενεργοποίηση των πυκνωτών, υποδηλώνεται από την έντονη γραμμή. Η ενεργοποίηση αυτή μπορεί να γίνει είτε από την παρέμβαση κάποιου χειριστή είτε από την αυτόματη ενεργοποίηση μιας διάταξης μηχανικά ή ηλεκτρονικά (μέσω thyristor) ελεγχόμενης. Τέλος η καμπύλη αυτή φανερώνει ένα άλλο ζήτημα κρίσιμης σημασίας για την ευστάθεια τάσεως: Όσο η ζήτηση φορτίου αυξάνεται σε περιοχές με έλλειμμα άεργου ισχύος, τόσο μεγαλύτερα ποσά άεργου ισχύος αντισταθμίσεως είναι αναγκαία. Με αυτό τον τρόπο όμως τα σημεία λειτουργίας του συστήματος σταδιακά προσεγγίζουν τα όρια της μεταφερόμενης ισχύος και έτσι σε οποιαδήποτε ανωμαλία το σύστημα είναι ιδιαίτερα ευάλωτο σε ότι αφορά τη ευστάθεια τάσεως.



Σχήμα 1.2.5*: Καμπύλες PV για διάφορα επίπεδα εγκάρσιας χωρητικής αντιστάθμισης*

1.3 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΛΛΑΓΗΣ ΤΑΣΗΣ ΥΠΟ ΦΟΡΤΙΟ (ΣΑΤΦ)

1.3.1 Γενικά

Ένας βασικός μηχανισμός αποκατάστασης φορτίου είναι ο μηχανισμός αυτόματης ρύθμισης τάσεως μέσω διατάξεων μεταβλητής λήψης, στους

μετασχηματιστές διανομής των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας. Η διάταξη αυτή ελέγχει την τάση στην πλευρά της διανομής (Μέση Τάση) αλλάζοντας το λόγο μετασχηματισμού r. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μεταβλητή λήψη γίνεται στην πλευρά της υψηλής τάσης (ΥΤ). Αυτό συμβαίνει τόσο γιατί το ρεύμα σε αυτή την πλευρά είναι μικρότερο διευκολύνοντας την μετατροπή, όσο και γιατί υπάρχουν περισσότερες σπείρες στην πλευρά υψηλής τάσης οπότε η ρύθμιση είναι πιο ακριβής. Εξαιρέσεις αυτού του κανόνα βρίσκονται ιδιαίτερα στην περίπτωση των αυτομετασχηματιστών [4].

Το σφάλμα τάσης μπορεί να αντισταθμιστεί με μια μέτρηση του ρεύματος, οπότε η τάση αναφοράς αυξάνεται για υψηλά επίπεδα φόρτισης. Αυτή η αποκατάσταση είναι γνωστή ως αντιστάθμιση πτώσης τάσης στη γραμμή [5]. Αυτό είναι το ίδιο με το να ρυθμίζαμε την τάση αρκετά μακριά από το δευτερεύον του μετασχηματιστή.

Τα Συστήματα Αλλαγής Τάσης υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ) είναι αργοί μηχανισμοί με διακριτή συμπεριφορά που αλλάζουν την λήψη κατά ένα βήμα κάθε φορά, όταν το σφάλμα τάσης παραμένει εκτός της νεκρής ζώνης (deadband) για περισσότερο χρόνο από μια συγκεκριμένη τιμή χρονικής καθυστέρησης. Ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για το μηχανισμό αλλαγής λήψης για να ολοκληρώσει ένα βήμα είναι συνήθως περίπου 5 δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε την χρονική καθυστέρηση ως T_D.Οι χρονικές καθυστερήσεις μπορεί να είναι σταθερές ή μεταβλητές. Στην τελευταία περίπτωση χρησιμοποιείται χαρακτηριστική αντιθέτου χρόνου. Το νόημα της χαρακτηριστικής αντιθέτου χρόνου είναι ότι η χρονική καθυστέρηση γίνεται πιο μικρή για μεγάλα σφάλματα τάσεως.

Ένας σημαντικός περιορισμός στη λειτουργία του ΣΑΤΦ είναι ότι τα περιθώρια μεταβολής της λήψης του μετασχηματιστή περιορίζεται από ένα κάτω $r^{\min}$ και ένα άνω όριο $r^{\max}$.

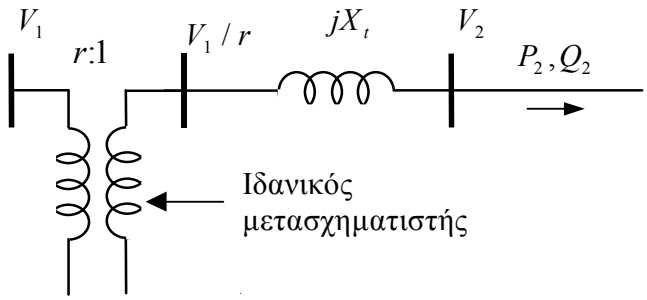
$$r^{\min} \le r \le r^{\max}$$

Τυπικές τιμές του κάτω ορίου είναι 0.85 έως 0.90 *αμ* και του άνω ορίου 1.10 έως 1.15 *αμ*. Το μέγεθος κάθε βήματος της αλλαγής λήψης είναι συνήθως στην περιοχή 0.5% έως 1.5%. Είναι προφανές ότι η νεκρή ζώνη πρέπει να είναι μεγαλύτερη από αυτό το βήμα. Συνήθως η νεκρή ζώνη πρέπει να είναι διπλάσια του βήματος αλλαγής λήψης.

1.3.2 Μοντέλα ΣΑΤΦ

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε δύο μοντέλα ΣΑΤΦ, δηλαδή το διακριτό μοντέλο και το συνεχές μοντέλο.

Χάριν απλότητας για την περιγραφή των δύο μοντέλων θεωρούμε μετασχηματιστή στον οποίο αμελείται η αντίσταση και η αντίδραση μαγνητίσεως και ο οποίος συνδέεται εν σειρά με μια σταθερή αντίδραση X_t στο άκρο του. Φυσικά πιο λεπτομερή μοντέλα που περιλαμβάνουν αντίσταση και μαγνητική αντίδραση χρησιμοποιούνται στη διαδικασίες προσομοίωσης και πιθανά επηρεάζουν την μεταβολή της λήψης στον μετασχηματιστή. Το ισοδύναμο κύκλωμα ενός μετασχηματιστή με λόγο μετασχηματισμού *r* εφοδιασμένου με ΣΑΤΦ φαίνεται στο Σχήμα 1.3.1.



Σχήμα 1.3.1: *Ισοδύναμο κύκλωμα Μ/Σ εξοπλισμένου με ΣΑΤΦ*

Διακριτό Μοντέλο

Το διακριτό μοντέλο βασίζεται στη διαπίστωση ότι όταν ενεργοποιείται το ΣΑΤΦ ο λόγος μετασχηματισμού θα αυξηθεί ή θα μειωθεί κατά ένα βήμα ακαριαία. Συμβολίζουμε τη μεταβολή στο λόγο μετασχηματισμού ενός βήματος με *Δr*. Το ΣΑΤΦ μπορεί να λειτουργεί σε διακριτές χρονικές στιγμές που συμβολίζονται με t_k όπου $k = 0,1...$ και δίνονται από τον αναδρομικό τύπο:

$$t_{k+1} = t_k + T_D \tag{1.12}$$

όπου T_D η χρονική καθυστέρηση για τη λειτουργία του ΣΑΤΦ.

Η χρονική καθυστέρηση T_D μπορεί να είναι διαφορετική για το πρώτο από ότι για τα επόμενα βήματα ρύθμισης. Για την πρώτη αλλαγή λήψης του μετασχηματιστή, η χρονική καθυστέρηση T_D που μεσολαβεί είναι ίση με :

$$T_D = T_{DO} + T_{D1} \tag{1.13}$$

όπου T_{DO} η αρχική χρονική καθυστέρηση και T_{D1} η χρονική καθυστέρηση που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων του ΣΑΤΦ.

Η χρονική καθυστέρηση T_D μπορεί να είναι σταθερή (ανεξάρτητη του σφάλματος της τάσης) ή να είναι αντιστρόφως ανάλογη του σφάλματος της τάσης, δηλαδή :

$$T_D = \frac{T_{D0}}{V_{err}/d} \tag{1.14}$$

όπου *d* η ανοχή τάσεων, που είναι ίση με το μισό της νεκρής ζώνης.

Η λογική με την οποία αλλάζει η λήψη τη χρονική στιγμή t_k είναι η παρακάτω:

$$r_{k+1} = \begin{cases} r_k + \Delta r & \alpha\nu \quad V_2 > V_2^0 + d \quad \kappa\alpha\iota \quad r_k < r^{\max} \\ r_k - \Delta r & \alpha\nu \quad V_2 < V_2^0 - d \quad \kappa\alpha\iota \quad r_k > r^{\min} \\ r_k & \alpha\lambda\lambda\omicron\upsilon \end{cases} \tag{1.15}$$

όπου $r^{\max}$ και $r^{\min}$ είναι το άνω και το κάτω όριο της λήψης του μετασχηματιστή, και V_2 είναι η ελεγχόμενη τάση, ενώ V_2^0, η τάση αναφοράς

Το ΣΑΤΦ ενεργοποιείται ($k = 0$) σε κάθε χρονική στιγμή t_0 που το σφάλμα τάσης αυξάνεται πέρα από τα όρια της νεκρής ζώνης

$$k = 0 \quad \text{αν} \quad \left|V_2\left(t_0^+\right) - V_2^0\right| > d + \varepsilon \ \text{και} \quad \left|V_2\left(t_0^-\right) - V_2^0\right| \le d + \varepsilon$$

όπου το ε είναι ένας παράγοντας υστέρησης. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον παράγοντα η νεκρή ζώνη είναι μεγαλύτερη για την πρώτη αλλαγή λήψης, έτσι το ΣΑΤΦ γίνεται πιο «απρόθυμο» να αρχίσει τις συχνές αλλαγές λήψης.

Συνεχές Μοντέλο

Το συνεχές μοντέλο περιγραφής του ΣΑΤΦ βασίζεται στην παραδοχή μιας συνεχούς αλλαγής λήψης του λόγου μετασχηματισμού $r(t)$ που μπορεί να πάρει όλες τις πραγματικές τιμές μεταξύ $r^{\min}$ και $r^{\max}$. Συνήθως η επίδραση της νεκρής ζώνης αμελείται στο συνεχές μοντέλο. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει το συνεχές μοντέλο ΣΑΤΦ είναι :

$$\mathrm{T}_c \dot{r} = V_2 - V_2^0 \qquad r^{\min} \le r \le r^{\max} \tag{1.16}$$

Το συνεχές μοντέλο είναι λιγότερο ακριβές από το διακριτό, αλλά είναι μια χρήσιμη προσέγγιση, ειδικά για μελέτες ευστάθειας.

Το μοντέλο που περιγράφεται από τη σχέση (1.16) είναι μια συνεχής προσέγγιση ενός διακριτού μοντέλου ΣΑΤΦ. Η σταθερά χρόνου T_c της διαφορικής δίνεται ως:

$$\mathrm{T}_c = \frac{\mathrm{T}_D d}{\Delta r} \tag{1.17}$$

όπου T_D η χρονική καθυστέρηση του ΣΑΤΦ, d το ήμισυ της νεκρής ζώνης και Δr η μοναδιαία μεταβολή του λόγου μετασχηματισμού.

1.3.3 Επίδραση των ΣΑΤΦ φορτίου και δικτύου

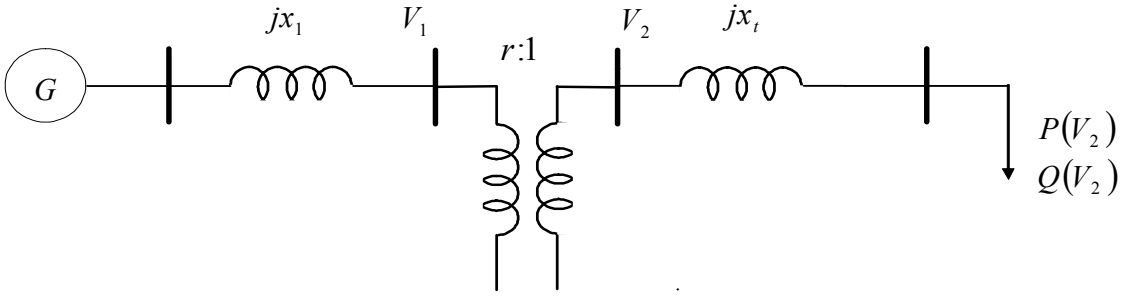
Τα περισσότερα σύγχρονα συστήματα μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας χωρίζονται σε διαφορετικά επίπεδα τάσεων, για παράδειγμα την υπερύψηλη τάση (Υ.Υ.Τ.: π.χ. 400kV), την υψηλή τάση (Υ.Τ.: π.χ. 150, 66 kV) και τη μέση τάση (Μ.Τ.: π.χ. 20, 15 kV). Είναι επίσης σύνηθες οι μετασχηματιστές που συνδέουν τα διάφορα επίπεδα τάσεων να είναι εξοπλισμένοι με συστήματα αλλαγής τάσεως υπό φορτίο (ΣΑΤΦ).

Υπάρχουν δύο ειδών Συστημάτων Αλλαγής Τάσεως υπό Φορτίο. Στο ένα είδος ανήκουν τα ΣΑΤΦ που καλούνται ΣΑΤΦ φορτίου, τα οποία αποκαθιστούν την τάση διανομής, άρα και το φορτίο, και αποτελούν κινητήριο μηχανισμό της αστάθειας τάσης. Στο δεύτερο είδος ανήκουν τα ΣΑΤΦ που βρίσκονται στο επίπεδο της μεταφοράς ισχύος (παραδείγματος χάριν μεταξύ υπερύψηλης (ΥΥΤ) και υψηλής

(ΥΤ) τάσης) τα οποία μειώνουν την ηλεκτρική απόσταση μεταξύ των γεννητριών και των φορτίων, και ονομάζονται ΣΑΤΦ δικτύου.

Παρακάτω αναλύεται η επίδραση των ΣΑΤΦ αυτών στα χαρακτηριστικά του δικτύου.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε το απλό κύκλωμα του Σχήματος 1.3.2. Η αντίδραση x_1 στην πλευρά του πρωτεύοντος μπορεί να παριστάνει είτε την ισοδύναμη αντίδραση του συστήματος μεταφοράς είτε την εσωτερική αντίδραση της γεννήτριας. Όμοια, η αντίδραση x_2 παριστάνει την αντίδραση της γραμμής μεταφοράς θεωρώντας ότι ο μετασχηματιστής είναι ιδανικός και ενσωματώνοντας την αντίδραση σκεδάσεως του με το x_2. Σε κανονικές συνθήκες λειτουργίας, ο λόγος μετασχηματισμού του ΣΑΤΦ, r, μειώνεται (ή αντίθετα αυξάνεται) όταν σημειωθεί μια αύξηση (ή αντίστοιχα μείωση) στην τάση του δευτερεύοντος του μετασχηματιστή $V_2 = \frac{V_1}{r}$, ώστε να την επαναφέρει στην επιθυμητή τιμή V_2^o.



Σχήμα 1.3.2: *Ισοδύναμο κύκλωμα που δείχνει την επίδραση των ΣΑΤΦ*

Το ισοδύναμο Thevenin του κυκλώματος του Σχήματος 1.3.2 έχει την εξής ηλεκτρεργετική δύναμη (ΗΕΔ) και αντίδραση, ανηγμένες στην πλευρά του φορτίου :

$$E_{TH} = \frac{E}{r} \tag{1.18}$$

$$x_{TH} = \frac{x_1}{r^2} + x_2 \tag{1.19}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στις (1.6) και (1.7), οι οποίες δίνουν τη μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ και την αντίστοιχη τάση σε γραμμή χωρίς απώλειες, προκύπτει η Μ.Μ.Ι. σε ένα σύστημα που λειτουργεί με ΣΑΤΦ:

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos\phi}{(1+\sin\phi)} \cdot \frac{E^2}{r^2 \cdot x_2 + x_1} \tag{1.20}$$

$$V_{\max P} = \frac{E/\sqrt{2}}{r \cdot \sqrt{1+\sin\phi}} \tag{1.21}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.20) και (1.21) με εκείνες χωρίς μετασχηματιστή (δηλαδή τις αντίστοιχες με μοναδιαίο λόγο μετασχηματισμού *r=1*), συμπεραίνουμε ότι μειώνοντας το *r* ώστε να αυξήσουμε τη τάση δευτερεύοντος V_2, η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς αυξάνεται δηλαδή περισσότερη ισχύς μπορεί να αποδοθεί στο φορτίο. Ακόμη, όσο μεγαλύτερος είναι ο λόγος x_2/x_1, τόσο μεγαλύτερη είναι η επίδραση της μεταβολής του λόγου μετασχηματισμού στη μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ. Επίσης η μείωση του *r* είναι ισοδύναμη με τη μείωση της σύνθετης αντίστασης μεταξύ πηγής και φορτίου.

Η φαινόμενη ισχύς που αποδίδεται στο ευαίσθητο ως προς την τάση φορτίο είναι :

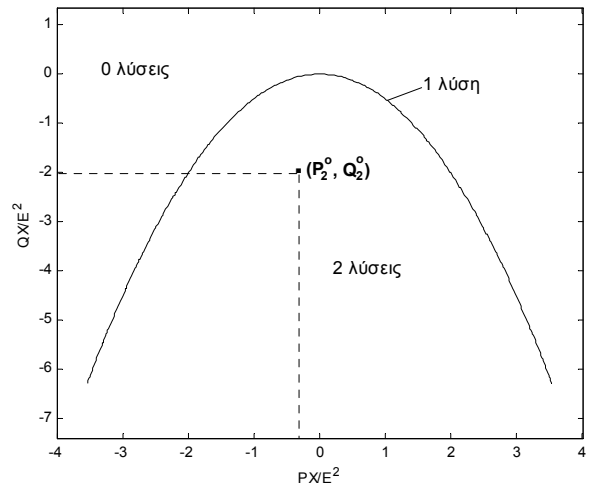
$$S_2(V_2) = P_2(V_2) + jQ_2(V_2) \tag{1.22}$$

Όταν τα ΣΑΤΦ επαναφέρουν την τάση V_2 στην επιθυμητή τιμή V_2^o, επαναφέρουν και τη φαινόμενη ισχύ, δηλαδή :

$$P(V_2^o) = P_2^o$$

$$Q(V_2^o) = Q_2^o$$

Η ίδια ισχύς (1.22) θα περνάει και από την πλευρά του πρωτεύοντος του μετασχηματιστή, εφ' όσον όμως το σημείο (P_2^o, Q_2^o) βρίσκεται εντός της περιοχής που ορίζει η καμπύλη (P,Q) του Σχήματος 1.3.3, η οποία ορίζεται από τα σημεία μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος για τις διάφορες τιμές του συντελεστή ισχύος $\cos\phi$ [4]. Η περιοχή αυτή επεκτείνεται όταν μειώνεται ο λόγος μετασχηματισμού *r* αφού τότε αυξάνει η Μ.Μ.Ι..



Σχήμα 1.3.3: *Περιοχή ύπαρξης λύσης για τη ροή φορτίου*

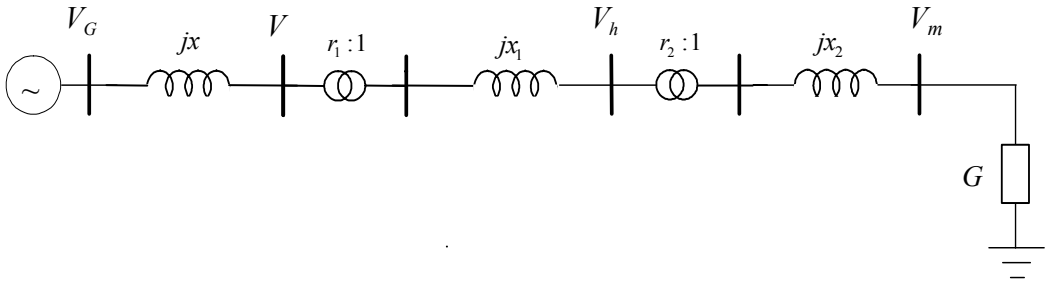
Επομένως, η λειτουργία των ΣΑΤΦ δικτύου σε ένα σύστημα μεταφοράς με διάφορα επίπεδα τάσης έχει ως αποτέλεσμα το 'σπάσιμο' της ηλεκτρικής απόστασης

μεταξύ της πηγής και του φορτίου. Όταν ένα σύστημα έχει περισσότερα από δύο επίπεδα τάσεων τότε χρησιμόποιούνται αντίστοιχα επίπεδα ΣΑΤΦ εν σειρά. Τα ΣΑΤΦ αυτά προσφέουν τη δυνατότητα σε ένα σύστημα με διάφορα επίπεδα τάσεως μεταξύ τροφοδοσίας και φορτίου να λειτουργεί έτσι ώστε να μεταφέρεται η ισχύς στα φορτία.

Η δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ των ΣΑΤΦ των διάφορων επιπέδων, και πιο συγκεκριμένα δύο ΣΑΤΦ εν σειρά, μελετάται στην απόμενη παράγραφο, ενώ σενάρια αστάθειας σε ένα σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ, η δυναμική συμπεριφορά του οποίου αποτελεί αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας, φαίνονται στο Κεφάλαιο 5.

1.3.4 Σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ

Σ' αυτό το σημείο θα μιλήσουμε για την αλληλεπίδραση μεταξύ διαφόρων επιπέδων μετασχηματιστών εξοπλισμένων με ΣΑΤΦ θεωρώντας διακριτά μοντέλα ΣΑΤΦ. Μια τυπική περίπτωση αλληλεπίδρασης μεταξύ μετασχηματιστών υπερυψηλής-υψηλής τάσης (ΥΥΤ/ΥΤ) τάσης και υψηλής – μέσης τάσης (ΥΤ/ΜΤ) εμφανίζεται στα παρακάτω ακτινικό σύστημα.



Σχήμα 1.3.4: *Σύστημα δύο Μ/Σ εν σειρά εξοπλισμένων με ΣΑΤΦ*

Όταν ο λόγος r_1 μειώνεται τότε και οι δύο ελεγχόμενες τάσεις V_h, V_m αυξάνονται ενώ όταν ο λόγος r_2 μειώνεται, προκειμένου να αυξήσει την τάση V_m η V_h μειώνεται.

Λόγω των παραπάνω η συνήθης τακτική που ακολουθείται στο σχεδιασμό Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας είναι η απόκριση του μετασχηματιστή στο υπερυψηλό – υψηλό (ΥΥΤ/ΥΤ) επίπεδο τάσης να είναι πιο γρήγορη απ' το μετασχηματιστή στο επίπεδο υψηλής – μέσης (ΥΤ/ΜΤ) τάσης. Οι διεθνείς χρόνοι καθυστέρησης πρώτου βήματος για το Μ/Σ στο υψηλό – μέσο (ΥΤ/ΜΤ) επίπεδο τάσης είναι περίπου 20-40 δευτερόλεπτα μεγαλύτεροι απ' αυτούς των Μ/Σ υπερυψηλής – υψηλής (ΥΥΤ/ΥΤ) τάσης. Το ίδιο ισχύει και για περισσότερα των δύο επιπέδων Μ/Σ, όσο πλησιάζουμε προς το φορτίο τόσο περισσότερο πρέπει να καθυστερεί η ενεργοποίηση τους. Αυτό γίνεται ώστε να μη δημιουργούνται ταλαντώσεις μεταξύ των δύο ΣΑΤΦ, αλλά και για να εκμεταλλευόμαστε με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τα πλεονεκτήματα των ΣΑΤΦ δικτύου (ΥΥΤ/ΥΤ) που αναφέρθηκαν στην παρ. §1.3.3.

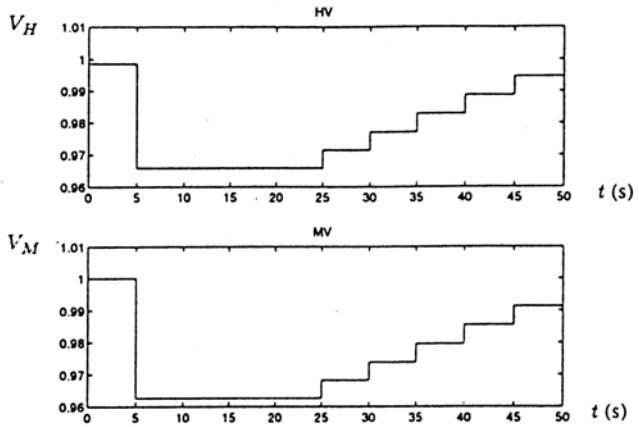
Στη συνέχεια δίνονται παραδείγματα απόκρισης του συστήματος του Σχήματος 1.3.4 για διάφορες τιμές των χρονικών καθυστερήσεων των ΣΑΤΦ [4].

Στο Σχήμα 1.3.5 [4] φαίνεται η απόκριση των τάσεων για μία αύξηση της αγωγιμότητας του φορτίου κατά 20%. Οι αρχικές χρονικές καθυστερήσεις T_{D0} και οι χρονικές καθυστερήσεις μεταξύ δύο διαδοχικών βημάτων των ΣΑΤΦ φαίνονται στο Πίνακα 1.

Πίνακας 1: *Χρονικές καθυστερησεις ΣΑΤΦ (α' περίπτωση)*

	T_{D0}	T_{D1}
ΣΑΤΦ 1	20	5
ΣΑΤΦ 2	50	10

Όπως φαίνεται από το Σχήμα 1.3.5 το ΣΑΤΦ του μετασχηματιστή υπερυψηλής – υψηλής τάσης (ΥΥΤ/ΥΤ) προλαβαίνει να αποκαταστήσει την τάση V_h (μέσα σε πέντε βήματα) πριν ακόμα προλάβει να ενεργοποιηθεί το ΣΑΤΦ του μετασχηματιστή υψηλής-μέσης τάσης (ΥΤ/ΜΤ).



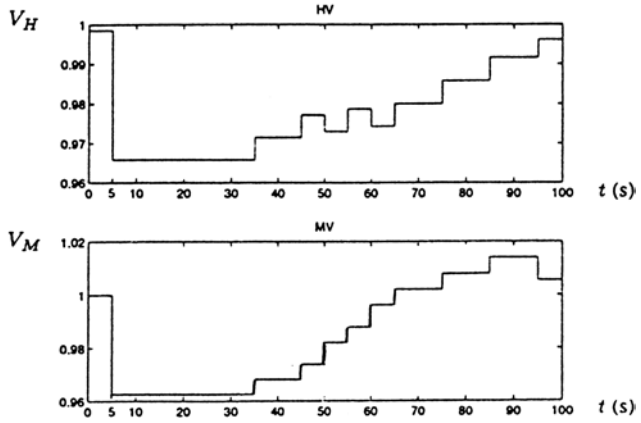
Σχήμα 1.3.5 : Απόκριση τάσεων του συστήματος με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ

Στο Σχήμα 1.3.6 [4] φαίνεται η απόκριση των τάσεων V_h και V_m για την ίδια αύξηση της αγωγιμότητας G του φορτίου.

Οι χρονικές καθυστερήσεις T_{D0} και T_{D1} φαίνονται στον Πίνακα 2.

Πίνακας 2: *Χρονικές καθυστερησεις ΣΑΤΦ (β' περίπτωση)*

	T_{D0}	T_{D1}
ΣΑΤΦ 1	30	10
ΣΑΤΦ 2	45	10



Σχήμα 1.3.6: *Απόκριση τάσεων του συστήματος με αργό το πρώτο ΣΑΤΦ*

Στην περίπτωση του Σχήματος 1.3.6 το ΣΑΤΦ του μετασχηματιστή υπερυψηλής-υψηλής τάσης (ΥΥΤ/ΥΤ) δεν προλαβαίνει να αποκαταστήσει την τάση V_h πριν την ενεργοποίηση του ΣΑΤΦ υψηλής-μέσης τάσης (ΥΤ/ΜΤ). Αυτό έχει ως συνέπεια να δημιουργούνται ταλαντώσεις μεταξύ των δύο ΣΑΤΦ (βλ. Σχήμα 1.3.6).

1.4 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1.4.1 Επισκόπηση της Βιβλιογραφίας

Το πρόβλημα της αστάθειας τάσεως είναι αρκετά σύνθετο και καλύπτει ένα μεγάλο εύρος φυσικών φαινομένων. Τα τελευταία χρόνια πολλοί ερευνητές και μηχανικοί των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας έχουν ασχοληθεί με τη μελέτη των φαινομένων αστάθειας τάσεως. Αξιόλογη έρευνα έχει διεξαχθεί τόσο στην κατεύθυνση ανάλυσης και ερμηνείας, όσο και στην ανάπτυξη λογισμικών εργαλείων για τη μελέτη και τη λήψη μέτρων αντιμετώπισης των φαινομένων αυτών. Σημαντικό κομμάτι της βιβλιογραφίας για τα φαινόμενα αστάθειας και κατάρρευσης τάσεως είναι αφιερωμένο στην ανάλυση των φαινομένων αυτών. Και αυτό είναι φυσικό, αφού η καλύτερη κατανόηση των μηχανισμών αστάθειας οδηγεί σε πιο αποτελεσματικά και με χαμηλότερο κόστος μέτρα για την αντιμετώπισή τους.

Οι πρώτες αναφορές στην έννοια της κατάρρευσης τάσης στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας έγιναν στα βιβλία [12,13]. Πολύ γρήγορα όμως διαπιστώθηκε ότι η διατήρηση των τάσεων σε ικανοποιητικά επίπεδα δεν εγγυάται την ευστάθεια τάσης ενός συστήματος [2] και η εμφάνιση των προβλημάτων αστάθειας τάσεως άρχισε να συνδέεται με τη μη γραμμικότητα των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας (η οποία γίνεται πιο έντονη όσο αυξάνει η πολυπλοκότητα των συστημάτων αυτών). Αυτό οδήγησε στην αναζήτηση νέων θεωρητικών προσεγγίσεων του προβλήματος με τη βοήθεια της θεωρίας των μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων και της θεωρίας των διακλαδώσεων, των οποίων οι βασικές αρχές αναλύονται στα βιβλία [14,15].

Οι κυριότερες διακλαδώσεις είναι η διακλάδωση σαγματικού κόμβου, η διακλάδωση Hopf και η διακλάδωση λόγω αλγεβρικής ιδιομορφίας. Επίσης στα βιβλία [18,19] αναλύεται η θεωρία των ιδιάζουσων διαταραχών βάσει της οποίας εξηγείται η δυναμική συμπεριφορά συστημάτων που αναπτύσσονται σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες. Εκτενής παρουσίαση της θεωρίας των διακλαδώσεων όπως και της ανάλυσης των ιδιάζουσων διαταραχών γίνεται στο Κεφάλαιο 2.

Τρεις κύριοι μηχανισμοί αστάθειας τάσης είναι τα ΣΑΤΦ, τα δυναμικά φορτία και τα Συστήματα Προστασίας Υπερδιεγέρσεως των γεννητριών [2,4]. Πιο λεπτομερείς περιγραφές του μηχανισμού των Συστημάτων Αλλαγής Τάσης υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ) βρίσκονται στις εργασίες [3,5,6]. Στην εργασία [9] αναλύεται η ευστάθεια των διακριτών μοντέλων ΣΑΤΦ, ενώ στην διατριβή [7] αναλύεται η εμφάνιση ταλλαντώσεων λόγω της διακριτής φύσης των ΣΑΤΦ και της αλληλεπίδρασης μεταξύ τους.

Στην εργασία [22] μελετάται Σύστημα Ηλεκτρικής Ενέργειας το οποίο περιλαμβάνει δύο μετασχηματιστές εν σειρά εξοπλισμένους με ΣΑΤΦ. Στην εργασία αυτή θεωρείται συνεχές μοντέλο ΣΑΤΦ. Ειδικότερα μελετάται, κατ'αρχήν για ένα μετασχηματιστή με ΣΑΤΦ η εξάρτηση της τάσης του ρυθμιζόμενου ζυγού από το λόγο μετασχηματισμού. Κατασκευάζονται καμπύλες τάσης(ρυθμιζόμενου ζυγού)-λόγου μετασχηματισμού και μελετάται η εξάρτηση των καμπυλών αυτών από τις παραμέτρους του συστήματος. Στην συνέχεια μελετάται το σύστημα με δύο μετασχηματιστές εν σειρά εξοπλισμένους με ΣΑΤΦ. Υπολογίζονται τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (για διάφορες τιμές των παραμέτρων) και εξετάζεται η ευστάθειά τους. Εξετάζεται επίσης η επίδραση των χρονικών σταθερών των δύο ΣΑΤΦ στην εμφάνιση των ταλαντώσεων. Διαπιστώνεται ότι όταν οι χρονικές σταθερές είναι της ίδιας τάξης μεγέθους τότε η απόκριση του συστήματος εμφανίζει ταλαντώσεις, ενώ για διαφορετικής τάξης μεγέθους χρονικές σταθερές, δηλαδή για ένα αργό και ένα γρήγορο ΣΑΤΦ το σύστημα παρουσιάζει μονότονη συμπεριφορά.

Τέλος, στην εργασία [1] αναλύεται πάλι το σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ και εξετάζεται με τη βοήθεια της θεωρίας των διακλαδώσεων η συμπεριφορά του για διάφορες τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών των ΣΑΤΦ, καθώς και η ευστάθεια των σημείων ισορροπίας του συστήματος.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία βασιζόμενοι στα συμπεράσματα της [1] γίνεται περαιτέρω ανάλυση του ίδιου συστήματος με δύο ΣΑΤΦ εν σειρά. Πιο αναλυτικά η δομή της εργασίας φαίνεται στην επόμενη παράγραφο.

1.4.2 Σκοπός – Δομή της Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από έξι κεφάλαια. Γενικό αντικείμενο μελέτης είναι η ανάλυση της Ευστάθειας ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας (ΣΗΕ) το οποίο περιλαμβάνει δύο μετασχηματιστές εν σειρά εξοπλισμένους με Συστημάτα Αλλαγής Τάσης υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ), οι οποίοι τροφοδοτούν ωμικό φορτίο. Στη συνέχεια περιγράφονται τα επτά κεφάλαια της διπλωματικής εργασίας.

Στο πρώτο Κεφάλαιο γίνεται αναφορά στον ορισμό της ευστάθειας τάσης στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας (ΣΗΕ) και δίνεται μια γενική περιγραφή των Συστημάτων Αλλαγής Τάσης υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ). Ειδικότερα διατυπώνεται και

αποδεικνύεται το Θεώρημα Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος, και αναλύεται η επίδραση της χωρητικής αντιστάθμισης στην ικανότητα μεταφοράς του δικτύου. Στην συνέχεια παρουσιάζονται δύο μοντέλα ΣΑΤΦ, το συνεχές (το οποίο χρησιμοποιείται στο μεγαλύτερο μέρος της παρούσας διπλωματικής εργασίας) και το διακριτό (το οποίο θα αναλυθεί πληρέστερα στο Κεφάλαιο 5). Επίσης γίνεται αναφορά στην επίδραση της λειτουργίας των ΣΑΤΦ σε συστήματα με πολλαπλά επίπεδα τάσης και τέλος δίνονται παραδείγματα της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο ΣΑΤΦ σε ένα σύστημα με δύο επίπεδα τάσης.

Στο δεύτερο Κεφάλαιο περιγράφονται οι βασικότερες μαθηματικές θεωρίες στις οποίες βασίζεται η ανάλυση των ΣΗΕ, τα οποία περιγράφονται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Πιο συγκεκριμένα περιγράφονται το Θεώρημα Ύπαρξης και Μοναδικότητας των λύσεων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων, τα σημεία ισορροπίας και η σύνδεσή τους με την ευστάθεια ενός συστήματος, οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα, οι πολλαπλότητες των σημείων ισορροπίας, καθώς και οι περιοδικές λύσεις, απομονωμένες ή μη, συστημάτων μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Στην συνέχεια γίνεται αναφορά στην θεωρία των διακλαδώσεων και περιγράφονται με αναλυτικό τρόπο η διακλάδωση σαγματικού κόμβου, η υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf και η διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου. Επίσης παρατίθεται η ανάλυση των ιδιάζουσων διαταραχών η οποία εφαρμόζεται σε συστήματα η δυναμική συμπεριφορά των οποίων αναπτύσσεται σε διάφορες χρονικές κλίμακες.

Στο τρίτο Κεφάλαιο γίνεται η εξαγωγή των σχέσεων που εκφράζουν το σύστημα που εξετάζουμε, το οποίο περιλαμβάνει δύο μετασχηματιστές εν σειρά εξοπλισμένους με ΣΑΤΦ. Αρχικά γίνεται μία περιγραφή του συστήματος και υπολογίζονται οι συνθήκες που αντιστοιχούν στη μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ για τρείς διαφορετικές περιπτώσεις. Στην συνέχεια εξάγονται οι σχέσεις που δίνουν τις τάσεις στα δευτερεύοντα των μετασχηματιστών, προσδιορίζονται τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και γίνεται η γραμμικοποίηση του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα μελετώνται οι ιδιότητες του πίνακα κατάστασης, η επίδραση της ορίζουσας και του ίχνους του πίνακα κατάστασης στην ευστάθεια του συστήματος και τέλος εξετάζεται η ύπαρξη συνθηκών κάτω από τις οποίες το σύστημα θα παρουσιάσει αστάθεια υπό τη μορφή ταλαντώσεων.

Στο τέταρτο Κεφάλαιο μελετάται η περιοχή έλξης του ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα αρχικά κατασκευάζεται το διάγραμμα των καμπυλών ισορροπίας και περιγράφονται οι πέντε περιοχές που εμφανίζονται σε αυτό όπως και η μεταβολή των λόγων μετασχηματισμού των δύο ΣΑΤΦ όταν το σύστημα βρεθεί σε κάθε μία από τις περιοχές αυτές. Ακόμη αναλύονται οι συνθήκες για την εμφάνιση διακλαδώσεως σαγματικού κόμβου, Hopf, ασταθούς οριακού κύκλου και ομοκλινούς βρόχου. Για το σκοπό αυτό κατασκευάζονται οι γεωμετρικοί τόποι των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του συστήματος. Έπειτα μελετάται η Περιοχή Έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας του συστήματος για διαφορες τιμές των παραμέτρων, δηλαδή της αγωγιμότητας φορτίου G και των χρονικών σταθερών των δύο ΣΑΤΦ, T_1, T_2.

Στο πέμπτο Κεφάλαιο μελετώνται οι οριακές περιπτώσεις που το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο αργό από το άλλο. Ειδικότερα αναλύεται με τη βοήθεια των ιδιάζουσων διαταραχών η συμπεριφορά του συστήματος και στη συνέχεια

υπολογίζονται και κατασκευάζονται τα δεξιά ιδιοδιανύσματα των σημείων ισορροπίας και στις δύο οριακές περιπτώσεις. Έπειτα εξετάζεται η μεταβολή των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας, η οποία εξαρτάται μόνο από τα στοιχεί του πίνακα ευαισθησίας του συστήματος. Τέλος, κατασκευάζονται τα διαγράμματα καμπυλών ισορροπίας για διάφορες τιμές του G και αναλύονται οι γεωμετρικές ιδιότητες του συστήματος με τη βοήθεια της σχετικής κλίσης των δύο καμπυλών ισορροπίας.

Στο έκτο Κεφάλαιο εφαρμόζεται στο σύστημα που μελετάμε το διακριτό μοντέλο ΣΑΤΦ. Πιο συγκεκριμένα διατυπώνονται οι σχέσεις που ορίζουν τα μεγέθη του συστήματος με βάση το μοντέλο αυτό, αναλύεται η ευστάθεια του και τέλος γίνεται προσομοίωση της συμπεριφοράς του συστήματος για διάφορες τιμές της αγωγιμότητας.

Στο έβδομο Κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα και οι προοπτικές που προκύπτουν από την ανάλυση που γίνεται στη παρούσα διπλωματική εργασία.

2. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται συνοπτικά οι βασικότερες μαθηματικές έννοιες που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση της ευστάθειας συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας τα οποία περιγράφονται από μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Επίσης γίνεται αναφορά στην θεωρία των διακλαδώσεων γενικά, με έναν συνοπτικό τρόπο και πιο αναλυτικά στα είδη των διακλαδώσεων που θα συναντήσουμε στην πορεία της παρούσας διπλωματικής εργασίας, όπως και στη θεωρία των ιδιάζουσων διαταραχών όπου γίνεται ο χωρισμός των μεταβλητών κατάστασης σε χρονικές κλίμακες. Τα θέματα αυτά αναλύονται λεπτομερώς στα βιβλία [14,15].

2.1 ΠΟΙΟΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

2.1.1 Ύπαρξη και μονοσήμαντο λύσεων - Κατάρρευση

Η δυναμική συμπεριφορά των Συστημάτων Ηλεκτρικής Ενέργειας αναλύεται χρησιμοποιώντας ένα σύνολο μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες υπόκεινται σε αλγεβρικούς περιορισμούς.

Ας υποθέσουμε ότι η δυναμική συμπεριφορά ενός συστήματος περιγράφεται από τις ακόλουθες *n* μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις:

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

Οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες κάτω από τις οποίες για μία αρχική συνθήκη x_o για t=0 υπάρχει λύση του μη γραμμικού συστήματος (2.1) περιγράφονται από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων [14]. Ας υποθέσουμε ότι οι $f(x)$ είναι ορισμένες στο πεδίο U το οποίο είναι υποσύνολο του χώρου R^n.

1.Αν η f είναι συνεχής στο U, τότε υπάρχει λύση $x(t)$ για όλες τις αρχικές συνθήκες x_o στο U. Κάθε λύση ορίζεται σε ένα μέγιστο διάστημα ύπαρξης I_{xo} , το οποίο εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες:

$$I_{xo}: \qquad \alpha_{xo} < t < \beta_{xo} \tag{2.2}$$

Οι τιμές α_{xo}, β_{xo} που ορίζουν τα άνω και κάτω όρια του διαστήματος ύπαρξης της λύσης μπορεί να τείνουν και οι δύο στο άπειρο, οπότε η λύση υπάρχει για όλα τα $t \in R$.

2.Όταν η f είναι k φορές παραγωγίσιμη ($k \geq 1$) στο x_o, τότε η λύση $x(t)$ με αρχικές συνθήκες x_o είναι μοναδική και έχει επίσης *k* συνεχείς παραγώγους. Επομένως, μία ικανή συνθήκη για το μονοσήμαντο της λύσης είναι η f να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη.

3.Όταν το μέγιστο διάστημα ύπαρξης είναι πεπερασμένο, τότε τα οριακά σημεία των λύσεων της $x(t)$ για $t \to \beta_{xo}^{-}$ ή για $t \to \alpha_{xo}^{+}$ είτε ανήκουν στο σύνορο (boundary) του *U*, όταν το σύνολο *U* φράσσεται, είτε είναι άπειρα όταν το *U* δεν είναι φραγμένο.

Μία λύση $x(t)$ της (2.1) για αρχικές συνθήκες x_o ονομάζεται τροχιά. Η θετική τροχιά αντιστοιχεί σε $t > 0$ και η αρνητική τροχιά σε $t < 0$ [4].

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για την κατάρρευση ενός συστήματος που περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής (2.1). Ένα σύστημα που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση (2.1) λέμε ότι καταρρέει τη χρονική στιγμή $t = \beta_{x_0}$ όταν η λύση $x(t)$ για αρχικές συνθήκες x_0 έχει πεπερασμένο άνω όριο του διαστήματος ύπαρξης $\beta_{x_0} < \infty$.

Για ένα φυσικό σύστημα, το φαινόμενο της κατάρρευσης μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί μια διακριτή μετάβαση τη χρονική στιγμή $t = \beta_{x_0}$, σε μιαν άλλη κατάσταση η οποία περιγράφεται από ένα διαφορετικό σύνολο διαφορικών εξισώσεων από το (2.1). Η διακριτή αυτή μετάβαση είναι αποτέλεσμα της συνεχούς δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος, σε αντίθεση με άλλα συμβάντα που προκαλούνται εξωτερικά στο σύστημα, όπως π.χ. το άνοιγμα μίας γραμμής, βραχυκυκλώματα κτλ.[10].

2.1.2 Σημεία ισορροπίας - Ευστάθεια

Τα σημεία ισορροπίας $\bar{x}$ ενός συστήματος που περιγράφεται από *n* διαφορικές εξισώσεις της μορφής (2.1) δίνονται από τις λύσεις του συστήματος των αλγεβρικών εξισώσεων:

$$0 = f(x) \tag{2.3}$$

Ενα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ είναι ευσταθές κατά Liapunov αν για κάθε περιοχή *V* του $\bar{x}$ υπάρχει περιοχή V_1 του $\bar{x}$ τέτοια ώστε για όλα τα $x_o \in V_1$ η λύση της $x(t)$ του συστήματος (2.1) υπάρχει και βρίσκεται στην περιοχή *V* για όλα τα $t > 0$.

Επίσης ένα σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές όταν όλες οι τροχιές του συστήματος με αρχική συνθήκη $x_o \in V_1$ τείνουν στο $\bar{x}$ καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο ($t \to \infty$). Τέλος ένα σημείο ισορροπίας καλείται ασταθές όταν δεν είναι ευσταθές.

Ο παραπάνω ορισμός ευστάθειας αναφέρεται σε ένα σημείο ισορροπίας και επομένως η ευστάθεια, όπως ορίζεται παραπάνω, συνιστά τοπική ιδιότητα του σημείου ισορροπίας. Αν ενδιαφερόμαστε για τη συνολική συμπεριφορά του συστήματος τότε το ερώτημα που πρέπει να απαντηθεί είναι αν οι τροχιές του συστήματος (για διάφορες αρχικές συνθήκες) συγκλίνουν ή αποκλίνουν από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Η μέγιστη περιοχή *A,* όπου όλες οι τροχιές του συστήματος με αρχικές συνθήκες $x_o \in A$ τείνουν τελικά σε ένα ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ καλείται περιοχή έλξης του $\bar{x}$.

Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\dot{x} = Ax \tag{2.4}$$

Η ευστάθεια του συστήματος (2.4) καθορίζεται ως γνωστόν από τις ιδιοτιμές του πίνακα A. Εάν όλες οι ιδιοτιμές έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη τότε το σημείο ισορροπίας $\bar{x} = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές και η περιοχή έλξης του είναι όλος ο χώρος των καταστάσεων. Εάν έστω και μία ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος τότε το σύστημα είναι ασταθές. Όταν ο Ιακωβιανός πίνακας του συστήματος δεν έχει καμία ιδιοτιμή με μηδενικό πραγματικό μέρος, τότε το σημείο ισορροπίας $\bar{x} = 0$ λέγεται υπερβολικό.

Σε αντίθεση με τα γραμμικά συστήματα, στα μη γραμμικά το πλήθος των σημείων ισορροπίας ποικίλλει και η περιοχή έλξης τους μπορεί να είναι περιορισμένη, επομένως η ύπαρξη ενός ευσταθούς Σ.Ι. δεν μπορεί να εγγυηθεί την ευστάθεια του συστήματος. Επίσης σε ένα μη γραμμικό σύστημα της μορφής του (2.1) η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας μπορεί να προσδιοριστεί εξετάζοντας την ευστάθεια του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$, που δίνεται από τις επόμενες εξισώσεις :

$$\Delta\dot{x} = A\Delta x \tag{2.4α}$$

όπου ο πίνακας A είναι ο Ιακωβιανός πίνακας κατάστασης και ορίζεται ως:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}$$

Είδη σημείων ισορροπίας

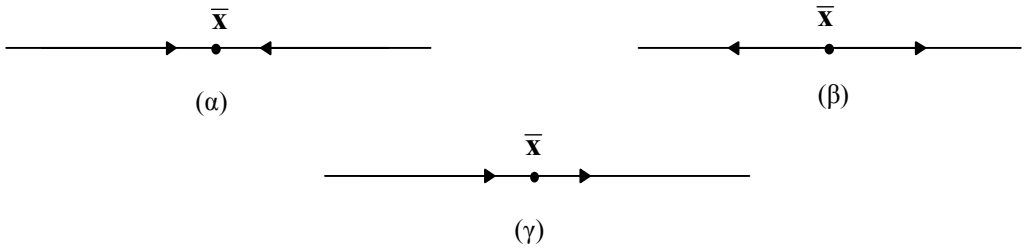
Τα ασυμπτωτικά ευσταθή σημεία ισορροπίας ενός μη γραμμικού συστήματος των οποίων οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές πραγματικές, ονομάζονται ευσταθείς κόμβοι (stable nodes). Τα ασταθή σημεία ισορροπίας τα οποία έχουν όλες τις ιδιοτιμές τους θετικές πραγματικές ονομάζονται πηγές ή ασταθείς κόμβοι (sources ή unstable nodes). Στην περίπτωση που τα ασταθή σημεία ισορροπίας έχουν μερικές ιδιοτιμές θετικές και άλλες αρνητικές, τότε ονομάζονται σαγματικά σημεία (saddles). Τα σημεία ισορροπίας με μιγαδικές ιδιοτιμές ονομάζονται συνήθως εστίες, και χαρακτηρίζονται ευσταθείς ή ασταθείς αντίστοιχα ανάλογα με το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών τους.

Η γραμμικοποίηση δεν παρέχει καμμία πληροφορία για την ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας όταν ο αντίστοιχος Ιακωβιανός πίνακας έχει μία ή περισσότερες ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος. Σε αυτήν την περίπτωση η ευστάθεια προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ευστάθειας. Αν για όλες τις περιοχές κοντά στο σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ υπάρχουν αρχικές συνθήκες για τις οποίες οι τροχιές του συστήματος δεν είναι φραγμένες, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

Ένα συγκεκριμένο είδος μη υπερβολικού σημείου ισορροπίας είναι ο σαγματικός κόμβος (saddle node). Η χαρακτηριστική ιδιότητα ενός σαγματικού κόμβου είναι ότι υπάρχει κατεύθυνση στο χώρο των καταστάσεων, τέτοια ώστε οι τροχιές με αρχικές συνθήκες από τη μια πλευρά του σημείου ισορροπίας να συγκλίνουν σε αυτόν, ενώ από την άλλη μεριά να αποκλίνουν. Ένα άλλο είδος μη υπερβολικού σημείου ισορροπίας είναι το κέντρο (center). Το κέντρο είναι ένα

σημείο ισορροπίας του οποίου το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα χαρακτηρίζεται από ένα ζευγάρι συζυγών μιγαδικών ιδιοτιμών με μηδενικό πραγματικό μέρος, ενώ όλες οι τροχιές σε μια περιοχή γύρω από αυτό είναι περιοδικές.

Για ένα σύστημα πρώτης τάξης, τα τρία είδη σημείων ισορροπίας φαίνονται στο Σχήμα 2.1.1, για το χώρο των καταστάσεων που είναι ευθεία γραμμή [15].



Σχήμα 2.1.1: *α) Ευσταθής κόμβος, β) Ασταθής κόμβος, γ) Σαγματικός κόμβος*

2.1.3 Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Είναι γνωστό πως η απόκριση του γραμμικού συστήματος (2.4) για κάθε αρχική συνθήκη x_o μπορεί να γραφεί συναρτήσει του δεξιού (v) και του αριστερού (w) ιδιοδιανύσματος του πίνακα κατάστασης A. Τα ιδιοδιανύσματα ικανοποιούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned} Av_i &= \lambda_i v_i \qquad i = 1,...,n \\ w_i^T A &= \lambda_i w_i^T \qquad i = 1,...,n \end{aligned} \tag{2.5}$$

Για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές. Στην περίπτωση αυτή τα αριστερά και τα δεξιά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια μεταξύ τους:

$$w_i^T v_j = 0 \qquad i \neq j \tag{2.6}$$

Η απόκριση του γραμμικού συστήματος για αρχική συνθήκη x_o δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v_i w_i^T x_o \tag{2.7}$$

Θεωρώντας τώρα μια αρχική συνθήκη x_o που βρίσκεται πάνω στην ευθεία που ορίζει ένα (δεξιό) ιδιοδιάνυσμα v_i:

$$x_o = \alpha v_i \tag{2.8}$$

Αντικαθιστώντας την (2.8) στην (2.7) και κάνοντας χρήση της (2.6) έχουμε:

$$x(t) = e^{\lambda_i t} w_i^T v_i x_o = b v_i \tag{2.9}$$

Η σχέση (2.9) υποδηλώνει το αναλλοίωτο (invariance) ενός ιδιοδιανύσματος. Η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος, με αρχικές συνθήκες πάνω σε ένα ιδιοδιάνυσμα, παραμένει πάντα πάνω στο ιδιοδιάνυσμα. Ακόμη από την (2.9) φαίνεται ότι αν η ιδιοτιμή λ_i έχει αρνητικό πραγματικό μέρος τότε η τροχιά $x(t)$ τείνει στο σημείο ισορροπίας για $t \to \infty$.

Οι διανυσματικοί χώροι οι οποίοι παράγονται από έναν αριθμό ιδιοδιανυσμάτων έχουν την ίδια ιδιότητα, είναι δηλαδή αναλλοίωτοι. Ας θεωρήσουμε ένα αρχικό σημείο x_o το οποίο βρίσκεται στο επίπεδο που ορίζεται από δύο ιδιοδιανύσματα v_i, v_j:

$$x_o = av_i + bv_j \tag{2.10}$$

Η απόκριση του γραμμικού συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = \left(ae^{\lambda_i t} w_i^T v_i\right)v_i + \left(be^{\lambda_j t} w_j^T v_j\right)v_j = cv_i + dv_j \tag{2.11}$$

Από τη (2.11) φαίνεται ότι η απόκριση του συστήματος βρίσκεται πάντα πάνω στο επίπεδο που ορίζεται από τα v_i, v_j.

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω μπορούμε να ορίσουμε τρεις διανυσματικούς υπόχωρους που έχουν ιδιαίτερη σημασία. Ο διανυσματικός υπόχωρος που ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη ονομάζεται ευσταθής διανυσματικός υπόχωρος (stable eigenspace) του γραμμικού συστήματος. Αντίστοιχα ο διανυσματικός υπόχωρος που ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος αποτελούν τον *κεντρικό* διανυσματικό υπόχωρο (center eigenspace). Τέλος ο διανυσματικός υπόχωρος που ορίζεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές με θετικά πραγματικά μέρη ονομάζεται *ασταθής* διανυσματικός υπόχωρος (unstable eigenspace) του γραμμικού συστήματος[15].

2.2 ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

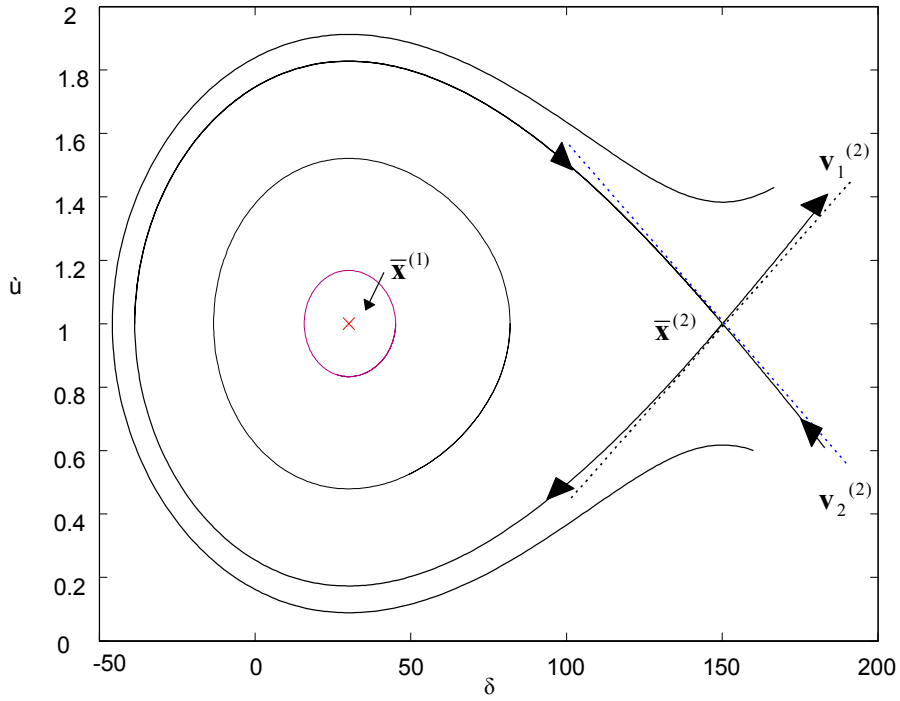
2.2.1 Γενικά

Με τον όρο πολλαπλότητα (manifold) εννοούμε μια καμπύλη γραμμή, επιφάνεια ή υπερεπιφάνεια χωρίς ιδιόμορφα σημεία. Μία αναλλοίωτη πολλαπλότητα (invariant manifold) ενός συστήματος (2.1) είναι ένας υπόχωρος του χώρου των καταστάσεων, τέτοιος ώστε κάθε τροχιά του συστήματος η οποία ξεκινάει από αυτόν, να παραμένει σε αυτόν συνέχεια.

Ο ευσταθής, ασταθής και κεντρικός διανυσματικός υπόχωρος του γραμμικοποιημένου συστήματος γύρω από ένα σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ αντιστοιχεί σε μία ευσταθή, ασταθή και κεντρική πολλαπλότητα του μη γραμμικού συστήματος. Ομοίως με τον ευσταθή διανυσματικό υπόχωρο, όλες οι τροχιές οι οποίες ξεκινούν από μια ευσταθή πολλαπλότητα, παραμένουν σ' αυτήν συνεχώς και τείνουν στο σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ για $t \to \infty$. Αντίστοιχα, ασταθής πολλαπλότητα ενός σημείου ισορροπίας $\bar{x}$ είναι εκείνος ο υπόχωρος των καταστάσεων στον οποίο όλες οι τροχιές προέρχονται από το $\bar{x}$ για $t \to -\infty$. Κοντά στο σημείο ισορροπίας οι τοπικά

ευσταθείς, ασταθείς και κεντρικές πολλαπλότητες είναι εφαπτόμενες στους αντίστοιχους διανυσματικούς υπόχωρους του γραμμικοποιημένου συστήματος. Αν το σημείο ισορροπίας $\bar{x}$ είναι υπερβολικό, τότε η διάσταση της ασταθούς πολλαπλότητας είναι ίση με τον τύπο του $\bar{x}$, όπου τύπος του $\bar{x}$ ονομάζεται ο αριθμός των ιδιοτιμών του με θετικό πραγματικό μέρος. Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες είναι πάντα μοναδικές, αλλά η κεντρική πολλαπλότητα δεν είναι πάντα.

Στο Σχήμα 2.2.1 απεικονίζονται οι τροχιές ενός συστήματος στο χώρο των καταστάσεωνγια διάφορες αρχικές συνθήκες. Ένα τέτοιο σύνολο τροχιών ονομάζεται πορτραίτο των φάσεων του συστήματος [14]. Από το Σχήμα 2.2.1 παρατηρούμε ότι όλες οι τροχιές κοντά στο *κέντρο* είναι περιοδικές ταλαντώσεις σταθερού πλάτους. Από τον ορισμό της ευστάθειας μπορούμε να συνάγουμε ότι το ένα σημείο ισορροπίας ($\bar{x}^{(1)}$) είναι ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.



Σχήμα 2.2.1*: Πορτραίτο των φάσεων του συστήματος Γεννήτριας - Απείρου ζυγού χωρίς απόσβεση* [14]

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό του συστήματος του Σχήματος 2.2.1 είναι ότι ο ένας κλάδος της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας συμπίπτει με τον ένα κλάδο της ασταθούς πολλαπλότητας του ίδιου σημείου ισορροπίας, σχηματίζοντας τον λεγόμενο ομοκλινή βρόχο (homoclinic loop), ο οποίος περιβάλλει το ευσταθές σημείο ισορροπίας.

2.2.2 Περιοχή έλξης ευσταθών σημείων ισορροπίας

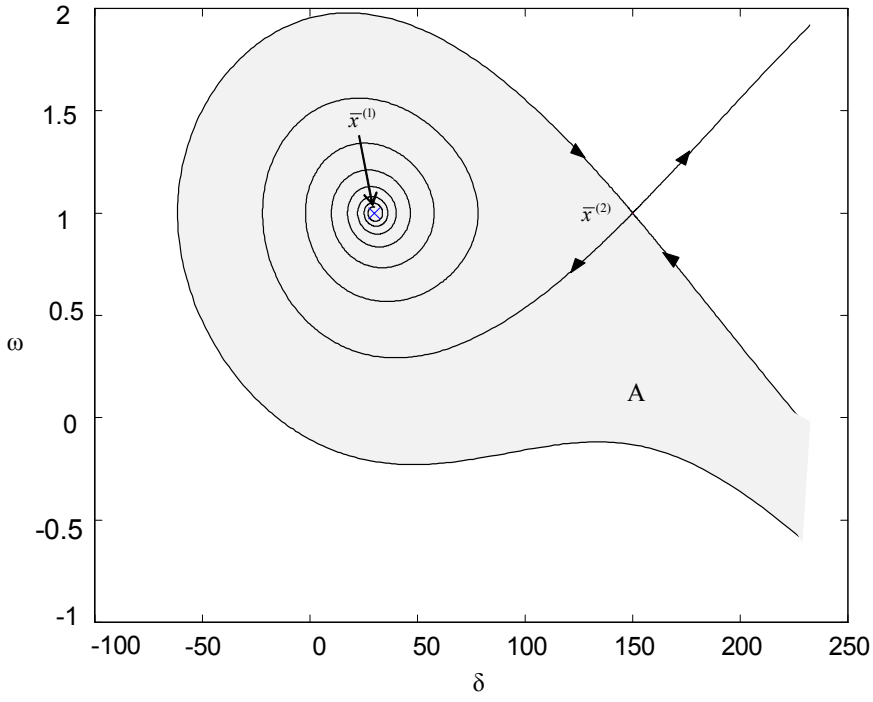
Η περιοχή έλξης ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας ορίζεται ως η μεγαλύτερη περιοχή Α ($\bar{x}$) για την οποία ισχύει ότι:

$$x_o \in A(\bar{x}) \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = \bar{x}$$

Άμεση συνέπεια του παραπάνω ορισμού είναι ότι αν ένα σημείο ανήκει στην περιοχή έλξης Α, τότε και η αρνητική τροχιά του, ανήκει στην Α.

Η περιοχή έλξης ενός σημείου ισορροπίας δεν είναι απαραίτητα φραγμένη. Για παράδειγμα, η περιοχή έλξης ενός ευσταθούς σημείου ισορροπίας σε ένα γραμμικό σύστημα είναι όλος ο χώρος των καταστάσεων. Στις περιπτώσεις που η περιοχή έλξης φράσσεται τότε το σύνορό της αποτελείται από τμήματα της ευσταθούς πολλαπλότητας των ασταθών σημείων ισορροπίας και των ασταθών οριακών κύκλων.

Αν θεωρήσουμε τώρα το σύστημα του Σχήματος 2.2.1 λαμβάνοντας υπόψη και την απόσβεση του συστήματος, τότε προκύπτει το πορτραίτο φάσεων του Σχήματος 2.2.2.



Σχήμα 2.2.2: *Πορτραίτο των φάσεων του συστήματος γεννήτριας - απείρου ζυγού με απόσβεση*

Οι ευσταθείς και ασταθείς πολλαπλότητες του ασταθούς σημείου ισορροπίας φαίνονται στο Σχήμα. 2.2.2. Ο ομοκλινής βρόχος που εμφανίζεται στο αντίστοιχο σύστημα χωρίς απόσβεση (Σχήμα 2.2.1) έχει ανοίξει τώρα. Ο ένας κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας συνιστά σπειροειδή τροχιά η οποία καταλήγει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Η περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας $x^{(1)}$ προσδιορίζεται και από τους δύο κλάδους της ευσταθούς πολλαπλότητας του $x^{(2)}$ (περιοχή Α στο Σχήμα 2.2.2). Στην περίπτωση αυτή η περιοχή έλξης δεν είναι φραγμένη από παντού. Μέσα στην περιοχή έλξης

όλες οι τροχιές εκτελούν σπειροειδή τροχιά και καταλήγουν στο ευσταθές σημείο ισορροπίας.

2.2.3 Περιοδικές λύσεις - Οριακοί κύκλοι

Μία περιοδική λύση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων της μορφής (2.1) είναι μια συνάρτηση $x(t)$ για την οποία ισχύει:

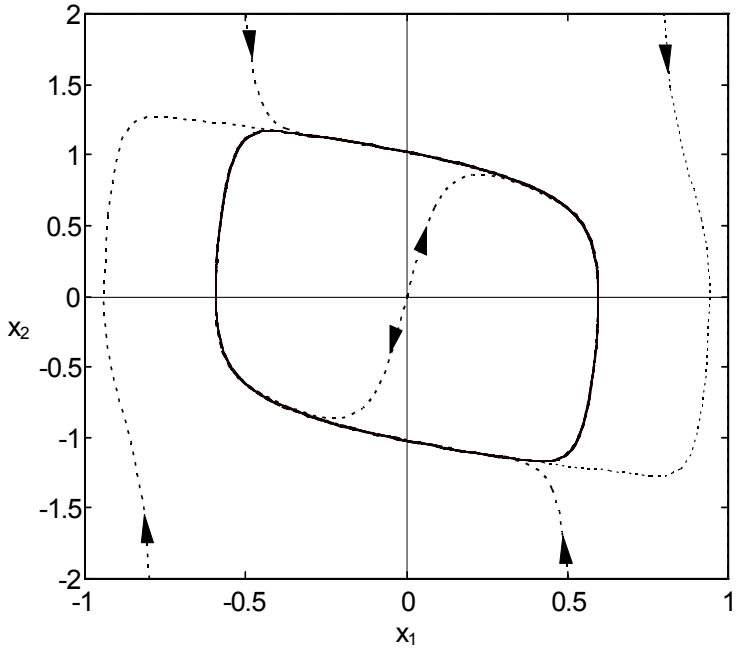
$$x(t+T) = x(t) \qquad \forall \quad t \tag{2.12}$$

Η περίοδος της περιοδικής λύσης είναι η μικρότερη τιμή του T για την οποία ισχύει η (2.12). Μια περιοδική λύση ενός συστήματος n-διαφορικών εξισώσεων σχηματίζει μια κλειστή καμπύλη στο n-διάστατο χώρο των καταστάσεων.

Οριακός κύκλος είναι μια απομονωμένη περιοδική λύση του συστήματος (2.1). Σημειωτέον ότι οι περιοδικές λύσεις του συστήματος γεννήτριας χωρίς απόσβεση - απείρου ζυγού (Σχήμα 2.2.2) οι οποίες περιβάλλουν το σημείο ισορροπίας δεν είναι οριακοί κύκλοι επειδή δεν είναι απομονωμένες (υπάρχει άπειρος αριθμός περιοδικών λύσεων κοντά σε κάθε μια από αυτές τις λύσεις).

Ένας οριακός κύκλος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής όταν όλες οι τροχιές που ξεκινούν από σημεία κοντά στον οριακό κύκλο πλησιάζουν σε αυτόν για $t \to +\infty$, ενώ ασταθής είναι ένας οριακός κύκλος όταν όλες οι τροχιές που ξεκινούν από σημεία κοντά σ' αυτόν απομακρύνονται από αυτόν για $t \to +\infty$.

Στο Σχήμα 2.2.3 φαίνεται το πορτραίτο των φάσεων ενός συστήματος με ευσταθή οριακό κύκλο. Όλες οι τροχιές, που ξεκινούν γύρω από το ασταθές σημείο ισορροπίας στην αρχή των αξόνων, καταλήγουν σε μια περιοδική ταλάντωση. Η περιοδική αυτή ταλάντωση στο χώρο των καταστάσεων (Σχήμα 2.2.3) φαίνεται σαν μια κλειστή καμπύλη (οριακός κύκλος). Ο οριακός κύκλος είναι ασυμπτωτικά ευσταθής, αφού όλες οι τροχιές (και αυτές που ξεκινούν μέσα και αυτές που ξεκινούν έξω από αυτόν) καταλήγουν στον οριακό κύκλο.

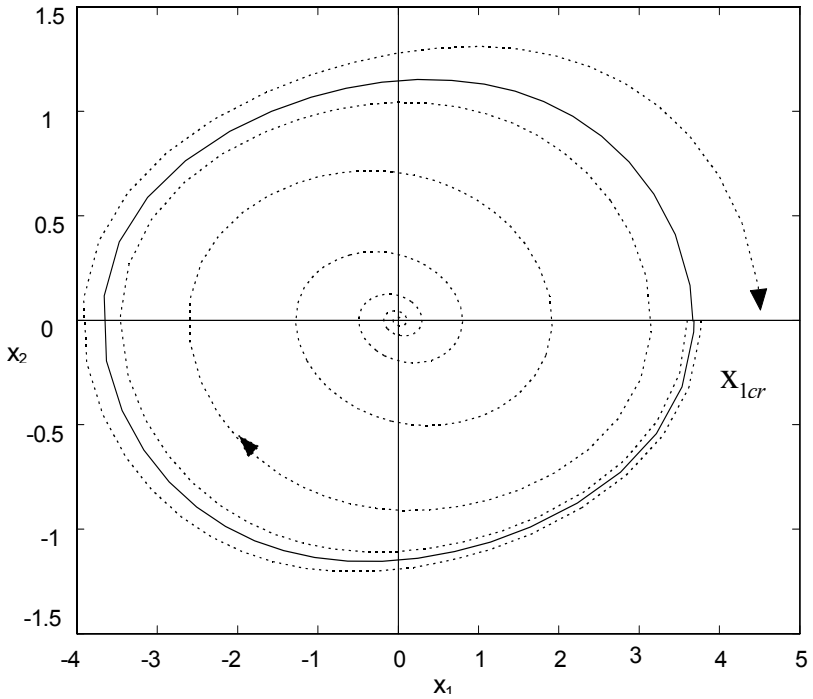


Σχήμα 2.2.3: *Ευσταθής οριακός κύκλος. Παράδειγμα ταλαντωτή Van der Pol*

Στο Σχήμα 2.2.4 φαίνεται το πορτραίτο των φάσεων ενός συστήματος με ασταθή οριακό κύκλο. Όλες οι τροχιές, που ξεκινούν από αρχικές συνθήκες πάνω στο θετικό ημιάξονα και ως ένα κρίσιμο σημείο x_{1cr}, εκτελούν αποσβυνόμενες ταλαντώσεις και καταλήγουν στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Αντίθετα, οι τροχιές που ξεκινούν πέρα από το κρίσιμο σημείο αποκλίνουν. Η τροχιά που ξεκινάει ακριβώς από το κρίσιμο σημείο x_{1cr} αποτελεί τον οριακό κύκλο. Στο Σχήμα 2.2.4 φαίνεται ο ασταθής οριακός κύκλος συστήματος μαζί με δύο τροχιές, από τις οποίες η μία συγκλίνει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας και η άλλη αποκλίνει και απειρίζεται. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ασταθής οριακός κύκλος αποτελεί το σύνορο της περιοχής έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας.

Όμοια με τα σημεία ισορροπίας, οι οριακοί κύκλοι έχουν αναλλοίωτες πολλαπλότητες. Η ευσταθής πολλαπλότητα ενός οριακού κύκλου είναι η μεγαλύτερη περιοχή του χώρου των καταστάσεων, όπου όλες οι τροχιές που ξεκινούν από την περιοχή αυτή πλησιάζουν τον οριακό κύκλο για $t \to +\infty$. Η ασταθής πολλαπλότητα ενός οριακού κύκλου είναι η μεγαλύτερη περιοχή του χώρου των καταστάσεων όπου όλες οι αρνητικές τροχιές των σημείων της προέρχονται από τον οριακό κύκλο για $t \to -\infty$. Στο παραπάνω παράδειγμα η ευσταθής πολλαπλότητα του ασταθούς οριακού κύκλου είναι ο ίδιος ο οριακός κύκλος, αφού κάθε τροχιά η οποία ξεκινάει από τον οριακό κύκλο παραμένει σε αυτόν συνέχεια ($t \to +\infty$). Ενώ η ασταθής πολλαπλότητα του οριακού κύκλου είναι όλος ο υπόλοιπος χώρος των καταστάσεων.

Εν γένει η ευσταθής πολλαπλότητα ενός ασταθούς οριακού κύκλου έχει διάσταση *n-1*.



Σχήμα 2.2.4: *Ασταθής οριακός κύκλος.*

2.3 ΘΕΩΡΙΑ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΕΩΝ

2.3.1 Γενικά

Ας θεωρήσουμε μια οικογένεια διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\dot{x} = f(x,\mu) \tag{2.13}$$

όπου x είναι ένα $n \times 1$ διάνυσμα των μεταβλητών κατάστασης και μ είναι ένα $k \times 1$ διάνυσμα των παραμέτρων του συστήματος.

Τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (2.13), για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων μ, δίνονται από τις λύσεις των εξισώσεων :

$$f(\bar{x},\mu) = 0 \tag{2.13α}$$

Η θεωρία διακλαδώσεων εξετάζει πότε ένα μη γραμμικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από διαφορικές εξισώσεις ή από σύστημα διαφορικών και αλγεβρικών εξισώσεων αλλάζει ριζικά τη συμπεριφορά του για σχετικά μικρή μεταβολή των παραμέτρων του [16,17].

Με τον όρο διακλάδωση (bifurcation) εννοούμε όλα τα σημεία του χώρου των παραμέτρων στα οποία αλλάζει η ποιοτική δομή ενός δυναμικού συστήματος για μικρές μεταβολές των παραμέτρων του.

Τις διακλαδώσεις τις κατατάσσουμε σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με την περιοχή στην οποία αλλάζει η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος:

- Στις τοπικές διακλαδώσεις (Local Bifurcations), όταν αλλάζει η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος σε μικρή περιοχή γύρω από σημεία ισορροπίας.
- Στις υπερτοπικές-ολικές διακλαδώσεις (Global Bifurcations), όταν αλλάζει συνολικά η ποιοτική συμπεριφορά του συστήματος [3].

Διακλάδωση παρουσιάζεται όταν αλλάζει για μικρή μεταβολή του μ ένα από τα παρακάτω ποιοτικά χαρακτηριστικά του συστήματος [15]:

1. Αριθμός σημείων ισορροπίας.
2. Αριθμός οριακών κύκλων.
3. Ευστάθεια σημείων ισορροπίας και οριακών κύκλων.
4. Περίοδος περιοδικών λύσεων.

Στις επόμενες παραγράφους γίνεται εκτενέστερη αναφορά σε τρία διαφορετικά είδη διακλαδώσεων.

2.3.2 Διακλάδωση σαγματικού κόμβου (Saddle Node Bifurcation)

Η διακλάδωση σαγματικού κόμβου παρουσιάζεται όταν εξαφανίζεται (ή δημιουργείται) ένα ζευγάρι σημείων ισορροπίας ως συνέπεια μιας μικρής μεταβολής των παραμέτρων του συστήματος. Η διακλάδωση αυτή είναι η πιο συχνή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας και παρουσιάζεται συνήθως με την εξαφάνιση ενός ευσταθούς και ενός ασταθούς σημείου ισορροπίας. Η διακλάδωση σαγματικού

κόμβου είναι ένα καθαρά μη γραμμικό φαινόμενο και δεν συναντάται σε γραμμικά συστήματα.

Παρόλο που η διακλάδωση σαγματικού κόμβου είναι ένα καθαρά μη γραμμικό φαινόμενο, εντούτοις μπορεί εύκολα να προσδιοριστεί από την πληροφορία του αντίστοιχου γραμμικοποιημένου συστήματος, αφού μια αναγκαία συνθήκη εμφάνισης της διακλάδωσης αυτής είναι ο πίνακας κατάστασης A του συστήματος (2.4α) να έχει μηδενική ορίζουσα και κατά συνέπεια μια (τουλάχιστον) μηδενική ιδιοτιμή:

$$\det(A) = 0 \tag{2.14}$$

Πριν τη διακλάδωση σαγματικού κόμβου το σύστημα έχει δύο σημεία ισορροπίας, ένα με θετική πραγματική ιδιοτιμή και ένα με αρνητική πραγματική ιδιοτιμή, που τη στιγμή της διακλάδωσης γίνονται ταυτόχρονα μηδέν. Μετά τη διακλάδωση το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας.

Γενικά, οι συνθήκες που χαρακτηρίζουν μια διακλάδωση σαγματικού κόμβου είναι:

- Η σύμπτωση δύο σημείων ισορροπίας.
- Ο απειρισμός των ευαισθησιών ως προς μια (τουλάχιστον) παράμετρο του συστήματος.
- Ο μηδενισμός μιας ιδιοτιμής του πίνακα κατάστασης A του συστήματος (2.4α).

Ας θεωρήσουμε πάλι το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2.13). Τα σημεία στον (n+k)-διάστασης χώρο των μεταβλητών κατάστασης και παραμέτρων, τα οποία εκπληρούν τις αναγκαίες συνθήκες για μια διακλάδωση σαγματικού κόμβου ορίζονται από την (2.14) και την εξίσωση ισορροπίας:

$$0 = f(x,\mu) \tag{2.15}$$

Γεωμετρικά, σε ένα σημείο όπου παρουσιάζεται διακλάδωση σαγματικού κόμβου, η πολλαπλότητα των σημείων ισορροπίας του συστήματος διπλώνει ως προς το χώρο των παραμέτρων.

Η προβολή των σημείων διακλάδωσης σαγματικού κόμβου στο χώρο των παραμέτρων συνιστά μια επιφάνεια διάστασης (k-1) η οποία ονομάζεται επιφάνεια διακλαδώσεων και ορίζει το όριο της περιοχής λειτουργίας (feasibility region) του συστήματος στο χώρο των παραμέτρων. Με άλλα λόγια ορίζει την περιοχή όπου το σύστημα έχει σημεία ισορροπίας.

Όπως έχει ήδη τονιστεί, στη διακλάδωση σαγματικού κόμβου μια ιδιοτιμή του πίνακα A του συστήματος (2.4α) γίνεται μηδενική. Αν υποθέσουμε ότι στο σημείο της διακλάδωσης δεν υπάρχουν άλλες ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος, τότε η κεντρική πολλαπλότητα (center manifold) του σαγματικού κόμβου είναι μία καμπύλη στο χώρο των καταστάσεων εφαπτόμενη στο δεξιό ιδιοδιάνυσμα της μηδενικής ιδιοτιμής.

Η σχετική συνεισφορά των μεταβλητών κατάστασης στην αστάθεια που σχετίζεται με τη διέλευσή του από μια διακλάδωση σαγματικού κόμβου μπορεί να προσδιοριστεί από την πληροφορία του δεξιού ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή. Η πληροφορία αυτή (του δεξιού ιδιοδιανύσματος) έχει σημαντική

εφαρμογή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας, στον προσδιορισμό της περιοχής εκείνης που γίνεται αισθητή η αστάθεια τάσεως. Το αριστερό ιδιοδιάνυσμα στη μηδενική ιδιοτιμή δίνει πληροφορία για πιθανούς διορθωτικούς ελέγχους ή αλλαγές παραμέτρων του συστήματος ώστε να αποφευχθεί το σημείο διακλάδωσης.

2.3.3 Διακλάδωση Hopf

Ενώ η διακλάδωση σαγματικού κόμβου συνοδεύεται από τροχιές που είναι απεριοδικές, η διακλάδωση Hopf προκαλεί ταλαντούμενη αστάθεια του συστήματος και εμφανίζεται όταν ένα ζευγάρι μιγαδικών ιδιοτιμών του γραμμικοποιημένου συστήματος διασχίζει το φανταστικό άξονα (δηλαδή μηδενίζεται και αμέσως μετά αλλάζει πρόσημο, το πραγματικό μέρος ενός ζευγαριού μιγαδικών ιδιοτιμών).

Κατά τη διακλάδωση Hopf ένα σημείο ισορροπίας από ευσταθές γίνεται ασταθές μέσω της αλληλεπίδρασής του με έναν οριακό κύκλο. Υπάρχουν δύο τύποι διακλάδωσης Hopf, ανάλογα με την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας του οριακού κύκλου.

Υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf (Supercritical Hopf Bifurcation):

Στην διακλάδωση αυτή ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές (παρουσιάζοντας ταλαντώσεις αυξανομένου πλάτους), ενώ ταυτόχρονα ένας ευσταθής οριακός κύκλος δημιουργείται. Μετά τη διακλάδωση, το σύστημα για αρχικές τιμές κοντά στο σημείο ισορροπίας εκτελεί ταλαντώσεις, που έλκονται από τον ευσταθή οριακό κύκλο και ο οριακός κύκλος μεγαλώνει σε πλάτος.

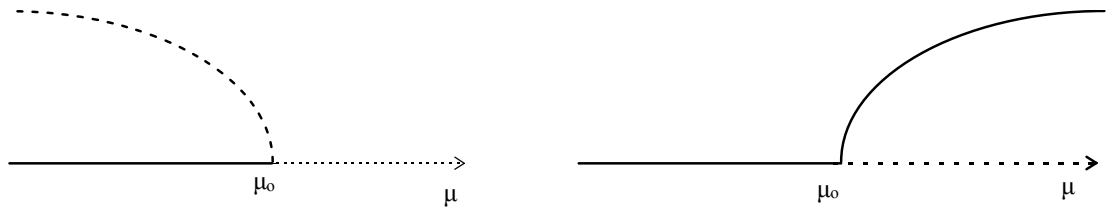
Υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf (Subcritical Hopf Bifurcation):

Πριν τη διακλάδωση αυτή, υπάρχει ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας το οποίο περιβάλλεται από έναν ασταθή οριακό κύκλο, ο οποίος συρρικνώνεται με την αύξηση της παραμέτρου. Στο σημείο της διακλάδωσης το σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές και ο οριακός κύκλος συγχωνεύεται με το σημείο ισορροπίας και εξαφανίζεται. Μετά τη διακλάδωση το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές παρουσιάζοντας ταλαντώσεις αυξανομένου πλάτους.

Η αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη διακλάδωσης Hopf είναι η ύπαρξη σημείου ισορροπίας που έχει ιδιοτιμές με μηδενικό πραγματικό μέρος και οι οποίες αλλάζουν πρόσημο μετά το σημείο διακλάδωσης. Τα σημεία ισορροπίας όπου το πραγματικό μέρος δύο συζυγών ιδιοτιμών μηδενίζεται αλλά κατόπιν δεν αλλάζει πρόσημο, δεν αποτελούν διακλαδώσεις Hopf.

Σε αντίθεση με τη διακλάδωση σαγματικού κόμβου όπου έχουμε μηδενισμό της ορίζουσας του πίνακα κατάστασης και το σημείο διακλάδωσης υπολογίζεται σχετικά εύκολα, η διακλάδωση Hopf είναι πιο δύσκολο να προσδιοριστεί γιατί απαιτείται ο υπολογισμός όλων των ιδιοτιμών του συστήματος.

Στο Σχήμα 2.3.1 παριστάνονται γραφικά οι δύο τύποι διακλάδωσης Hopf:



(α) Υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf *(β) Υπερκρίσιμη διακλάδωση Hopf*

Σχήμα 2.3.1: *Διακλαδώσεις Hopf*

Η ευθεία γραμμή αντιστοιχεί σε σημεία ισορροπίας, ενώ η καμπύλη γραμμή παριστάνει το πλάτος των οριακών κύκλων. Οι συνεχείς γραμμές παριστάνουν ευσταθή σημεία ισορροπίας ή ευσταθείς οριακούς κύκλους, ενώ οι διακεκομμένες γραμμές παριστάνουν ασταθή σημεία ισορροπίας ή ασταθείς οριακούς κύκλους.

Στο Σχήμα 2.3.1α (υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf) το πλάτος του ευσταθούς οριακού κύκλου μειώνεται όσο η παράμετρος μ του συστήματος πλησιάζει την τιμή διακλάδωσης μ_o. Στο σημείο διακλάδωσης ο οριακός κύκλος εξαφανίζεται και το σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές. Η περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας (πριν τη διακλάδωση Hopf) φράσσεται από την ευσταθή πολλαπλότητα του ασταθούς οριακού κύκλου. Οι τροχιές μετά το σημείο διακλάδωσης είναι μη φραγμένες ταλαντώσεις αυξανομένου πλάτους. Αυτό στη βιβλιογραφία λέγεται "*σφοδρή απώλεια της ευστάθειας*" (hard loss of stability).

Στο Σχήμα 2.3.1β (υπερκρίσιμη Hopf διακλάδωση) πριν το σημείο διακλάδωσης δεν υπάρχει οριακός κύκλος ο οποίος να φράσσει την περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας. Ο οριακός κύκλος δημιουργείται στο σημείο διακλάδωσης και είναι ευσταθής. Μετά το σημείο διακλάδωσης οι τροχιές που ξεκινούν από το ασταθές σημείο ισορροπίας έλκονται από τον ευσταθή οριακό κύκλο (οι ασταθείς ταλαντώσεις στην περίπτωση αυτή φράσσονται από τον οριακό κύκλο). Στη βιβλιογραφία αυτό λέγεται "ήπια απώλεια της ευστάθειας" (Soft loss of stability).

2.3.4 Διακλάδωση Ομοκλινούς βρόχου

Κατά τη διακλάδωση αυτή ταυτίζεται ο ένας κλάδος της ευσταθούς πολλαπλότητας με έναν κλάδο της ασταθούς του ίδιου ασταθούς σημείου ισορροπίας. Με αυτή την ταύτιση δημιουργείται μία απομονωμένη κλειστή καμπύλη η οποία περνάει από το ασταθές σημείο ισορροπίας. Η καμπύλη αυτή καλείται ομοκλινής βρόχος. Μετά τη διακλάδωση αυτή γεννιέται ένας ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος φράσσει την περιοχή έλξης, που πριν έφραζαν οι πολλαπλότητες του ασταθούς σημείου ισορροπίας. Ο οριακός κύκλος στη συνέχεια με την αύξηση της παραμέτρου, συρρικνώνεται και πλησιάζει το ευσταθές σημείο ισορροπίας. Η συρρίκνωση του οριακού κύκλου θα φτάσει σε τέτοιο σημείο ώστε να ταυτιστεί με το ευσταθές σημείο ισορροπίας το οποίο περιέβαλε. Η ταύτιση του οριακού κύκλου με το ευσταθές σημείο ισορροπίας γεννάει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας. Έχουμε δηλαδή υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf.

Ανακεφαλαιώνοντας μπορούμε να πούμε ότι η ύπαρξη της διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου, σηματοδοτεί ότι για περαιτέρω αύξηση της παραμέτρου θα

παρουσιαστεί διακλάδωση Hopf, αφού αποτελεί ένα αίτιο γέννησης οριακού κύκλου, ο οποίος αλληλεπιδρώντας με το ευσταθές σημείο που περιβάλλει θα παράγει ασταθές σημείο ισορροπίας.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι οι ιδιοτιμές των σημείων ισορροπίας δεν μας δίνουν καμία πληροφορία για την ύπαρξη διακλάδωσης ομοκλινούς βρόχου. Αυτό οφείλεται στο ότι η διακλάδωση αυτή ανήκει στην κατηγορία των υπερτοπικών-ολικών διακλαδώσεων (Global Bifurcations). Την ύπαρξή της μπορούμε να την υποψιαστούμε είτε από την ύπαρξη υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf (γνωρίζουμε ότι πριν από αυτήν πιθανά να υπάρχει μία διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου) είτε φτιάχνοντας τα πορτραίτα των φάσεων του συστήματος, για διάφορες τιμές της συγκεκριμένης παραμέτρου.

Ο υπολογισμός μίας συνθήκης που να προσδιορίζει την ακριβή τιμή της παραμέτρου για την οποία εμφανίζεται διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου είναι αντικείμενο μελέτης του θεωρήματος του Melnikov [14]. Η θεωρία αυτή βέβαια απαιτεί ως προϋπόθεση να βρίσκεται το σύστημα σε Χαμιλτονιανή μορφή. Άλλοι τρόποι προσέγγισης του ίδιου προβλήματος δεν είναι ευρέως γνωστοί και αποτελούν αντικείμενο έρευνας.

2.4 ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

2.4.1 Συστήματα διαφορικών – αλγεβρικών εξισώσεων

Ένα σύστημα διαφορικών – αλγεβρικών εξισώσεων (D-A system) περιγράφεται από ένα σύνολο *n* διαφορικών και *m* αλγεβρικών εξισώσεων :

$$\dot{x} = f(x, y, p) \tag{2.16α}$$

$$0 = g(x, y, p) \tag{2.16β}$$

όπου x είναι το διάνυσμα των *n* μεταβλητών κατάστασης, y το διάνυσμα των *m* αλγεβρικών μεταβλητών και p οι *k* παράμετροι του συστήματος.

Τα συστήματα αυτής της μορφής αναλύονται με τη βοήθεια του θεωρήματος της πεπλεγμένης συνάρτησης (Implicit Function Theorem) [14]. Ας θεωρήσουμε ένα σημείο x, y, p στο οποίο η ορίζουσα του αλγεβρικού Ιακωβιανού πίνακα $g_y(x, y, p) = \partial g / \partial y$ είναι διάφορη του μηδενός. Τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μια τοπικά μοναδική και συνεχής συνάρτηση F της μορφής :

$$\dot{x} = F(x, p) \tag{2.17}$$

στην οποία έχουν εξαλειφθεί οι αλγεβρικές μεταβλητές. Εφ'όσον η F ορίζεται σε όλα τα σημεία όπου η ορίζουσα $\det g_y$ δεν είναι μηδενική, τότε γνωρίζουμε από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας ότι υπάρχει μια μοναδική λύση του διαφορικού-αλγεβρικού συστήματος (2.16) για όλα αυτά τα σημεία. Συμβολίζουμε ως U_p το πεδίο ορισμού της F στο χώρο των καταστάσεων για μια δοσμένη τιμή

της παραμέτρου p. Επομένως ο χώρος U_p φράσσεται από τα σημεία που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\det g_y = 0 \tag{2.18}$$

Για μια συγκεκριμένη τιμή των παραμέτρων, p, τα σημεία ισορροπίας του συστήματος (2.16) αποτελούν λύσεις του επόμενου συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων :

$$0 = f(x, y, p) \tag{2.19α}$$

$$0 = g(x, y, p) \tag{2.19β}$$

Η ευστάθεια των παραπάνω σημείων ισορροπίας μπορεί να προσδιοριστεί από τη γραμμικοποιήση του συστήματος (2.16) γύρω από αυτά, δηλαδή:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

όπου $J = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$ είναι ο πλήρης Ιακωβιανός πίνακας κατάστασης του διαφορικού-αλγεβρικού συστήματος.

Εφ'όσον η ορίζουσα $\det g_y$ δεν είναι μηδενική, η εξίσωση (2.20) γίνεται:

$$\Delta\dot{x} = \left[f_x - f_y g_y^{-1} g_x \right] \Delta x = A \Delta x \tag{2.21}$$

όπου ο πίνακας κατάστασης A δίνεται ως το συμπλήρωμα του Schur [24] του πίνακα g_y και ονομάζεται ελαττωμένος Ιακωβιανός πίνακας του διαφορικού-αλγεβρικού συστήματος.

Από την σχέση (2.21) προκύπτει ότι η ευστάθεια ενός σημείου ισορροπίας του διαφορικού-αλγεβρικού συστήματος για μια συγκεκριμένη τιμή του p εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης A. Καθώς το p αλλάζει, στο σύστημα μπορεί να παρουσιαστούν διακλαδώσεις. Αξιοσημείωτη είναι η περίπτωση της διακλάδωσης σαγματικού κόμβου για την οποία η ορίζουσα του πίνακα κατάστασης A μηδενίζεται. Σύμφωνα όμως με τη σχέση του Schur για τις ορίζουσες :

$$\det J = \det g_y \det[f_x - f_y g_y^{-1} g_x] = \det g_y \det A \tag{2.22}$$

παρατηρούμε ότι οι οριζουσες των πινάκων *A, J* μηδενίζονται ταυτόχρονα , οπότε μια αναγκαία συνθήκη για τη διακλάδωση σαγματικού κόμβου είναι η μη αντιστρεψιμότητα του πλήρους Ιακωβιανού πίνακα *J*.

2.4.2 Χωρισμός σε χρονικές κλίμακες

Η δυναμική συμπεριφορά πολλών συστημάτων αναπτύσσεται σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, κάποιες από τις οποίες είναι βραχυπρόθεσμες ενώ άλλες μακροπρόθεσμες. Για την ανάλυση αυτών των συστημάτων γίνεται η παραδοχή ότι στα γρήγορα συστήματα οι μακροπρόθεσμες μεταβλητές είναι περίπου σταθερές κατά τη διάρκεια γρήγορων μεταβολών, ενώ στα αργά συστήματα οι βραχυπρόθεσμες μεταβατικές μεταβλητές δεν μεταβάλλονται κατά τις αργές αλλαγές.

Για την ανάλυση των συστημάτων αυτών χρησιμοποιούνται μοντέλα μειωμένης τάξεως για κάθε χρονική κλίμακα. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται διαχωρισμός σε χρονικές κλίμακες και βασίζεται στην ανάλυση των ιδιάζουσων διαταραχών[18,19].

Ένα σύστημα με ιδιάζουσα διαταραχή χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι η τάξη του συστήματος αλλάζει για μια μικρή μεταβολή μιας παραμέτρου. Αυτό συμβαίνει όταν τουλάχιστον μία παράγωγος είναι πολλαπλασιασμένη με μια πολύ μικρή παράμετρο ε, δηλαδή περιγράφεται γενικά από συστήματα της μορφής:

$$\dot{x} = f(x, y, \varepsilon) \tag{2.23α}$$

$$\varepsilon\dot{y} = g(x, y, \varepsilon) \tag{2.23β}$$

όπου x, y είναι $n \times 1$ και $m \times 1$ διανύσματα αντίστοιχα.

Ο χωρισμός σε χρονικές κλίμακες συνίσταται στην ανάλυση δύο υποσυστημάτων, τα οποία περιγράφουν την μακροπρόθεσμη και βραχυπρόθεσμη δυναμική του συστήματος (2.23). Συμβολίζουμε με x_s, y_s τις αργές και x_f, y_f τις ταχείες συνιστώσες των μεταβλητων κατάστασης x, y έτσι ώστε :

$$x = x_s + x_f \tag{2.24α}$$

$$y = y_s + y_f \tag{2.24β}$$

Η οιονεί στατική προσέγγιση (quasi-steady-state (QSS)) του συστήματος προκύπτει από τις σχέσεις (2.23) με την παραδοχή ότι $\varepsilon = 0$:

$$\dot{x}_s = f(x_s, y_s) \tag{2.25α}$$

$$0 = g(x_s, y_s) \tag{2.25β}$$

Όπως παρατηρούμε το οιονεί στατικό υποσύστημα είναι ένα διαφορικό-αλγεβρικό σύστημα και για το λόγο αυτό μπορεί να αναλυθεί με βάση τη θεωρία της παραγράφου (2.4.1). Άρα η ευστάθεια του χαρακτηρίζεται από την κατάσταση του ελαττωμένου Ιακωβιανού πίνακα *A*, του οποίου η ιδιομορφία, όπως έχει αναφερθεί συμπίπτει με την ιδιομορφία του πλήρους Ιακωβιανού πίνακα *J*.

Αργό υποσύστημα

Εισάγοντας την έννοια της αργής πολλαπλότητας, είναι δυνατόν να αναλύσουμε ακριβέστερα την δυναμική του αργού υποσυστήματος (2.25). Στην παρ. §2.2.1 είδαμε ότι στα γραμμικοποιημένα συστήματα τα ιδιοδιανύσματα αντικαθίστανται από τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες. Με τον ίδιο τρόπο στο σύστημα που μελετάμε το αργό ιδιοδιάνυσμα αντικαθίσταται από την αργή πολλαπλότητα. Σε ένα σύστημα με n αργές μεταβλητές x_s, οι αργές πολλαπλότητες είναι διαστάσεως n, και ορίζονται από τις m ακόλουθες εξισώσεις :

$$y_s = h(x_s) \tag{2.26}$$

Οι συναρτήσεις h πρέπει να ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες:

$$\varepsilon h_x f(x_s, h) = g(x_s, h) \tag{2.27}$$

όπου h_x είναι ο Ιακωβιανός πίνακας του h ως προς το x, και x_s, y_s οι λύσεις του αρχικού συστήματος (2.23).

Για $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε ότι :

$$g(x_s, h_o) = 0 \tag{2.28}$$

Αυτό σημαίνει ότι όταν το $\varepsilon \to 0$ η αργή πολλαπλότητα δίνεται από την οιονεί στατική προσέγγισή της (2.25β).

Στο Σχήμα 2.4.1α φαίνονται τα ιδιοδιανύσματα του συστήματος [4] :

$$\dot{x} = y \tag{2.29α}$$

$$\varepsilon \cdot \dot{y} = -x - 1.1 \cdot y \tag{2.29β}$$

το οποίο είναι ιδιάζουσας μορφής. Το σύστημα για πολύ μικρό ε έχει δύο πολύ μικρές κατά απόλυτη τιμή αρνητικές ιδιοτιμές για τις οποίες ισχύει ότι :

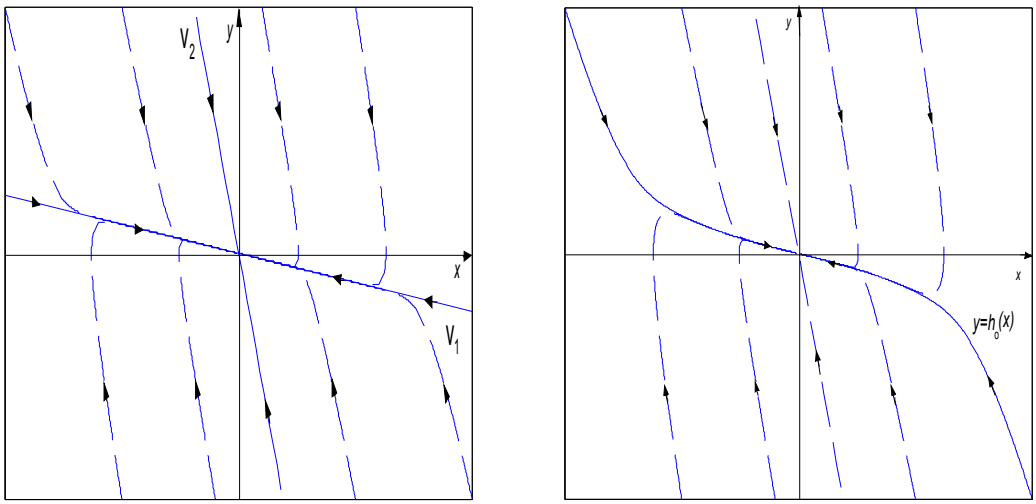
$$\lambda_2 << \lambda_1 < 0$$

Η πολύ μικρή ιδιοτιμή (λ_1) αντιστοιχεί στην αργή δυναμική του συστήματος ενώ η μεγαλύτερη ιδιοτιμή (λ_2) στη γρήγορη. Όταν το σύστημα βρεθεί πάνω στο αργό ιδιοδιάνυσμα (δηλαδή αυτό που αντιστοιχεί στην αργή ιδιοτιμή) v_1 τότε παραμένει πάνω σε αυτό. Επίσης όταν το σύστημα έχει αρχικές συνθήκες έξω από το αργό ιδιοδιάνυσμα, τότε ακολουθώντας την τροχιά του γρήγορου ιδιοδιανύσματος (v_2) θα συγκλίνει τελικά στο v_1, όπως φαίνεται από τα βέλη του Σχήματος 2.4.1α.

Ακόμη στο Σχήμα 2.4.1β φαίνονται οι τροχιές του μη γραμμικού συστήματος των εξισώσεων (2.29α) και (2.29β), για διάφορες αρχικές συνθήκες, όπως και η κατά προσέγγιση αργή πολλαπλότητα που αντιστοιχεί σε $\varepsilon=0$ και η οποία έχει υπολογιστεί ότι δίνεται από τη σχέση :

$$h_o(x_s) = -(x_s + x_s^3)/1.1$$

Όπως φαίνεται το σύστημα με αρχικές συνθήκες επί της αργής πολλαπλότητας, παραμένει πάντα πάνω σε αυτήν.



α **β**

Σχήμα 2.4.1: *Αργά και γρήγορα ιδιοδιανύσματα και αργή πολλαπλότητα*

Γρήγορο Υποσύστημα

Έχοντας υπολογίσει την αργή πολλαπλότητα $h(x_s)$ η μακροπρόθεσμη δυναμική του συστήματος δίνεται από το μειωμένης τάξεως αργό υποσύστημα :

$$\dot{x}_s = f(x_s, h(x_s)) \tag{2.30}$$

ενώ οι αργές συνιστώσες της μεταβλητής y δίνονται από την σχέση (2.26).

Για να προσεγγίσουμε το γρήγορο υποσύστημα θεωρούμε ότι το x είναι κατά βάση αργό, δηλαδή ισχύει ότι $x \cong x_s$. Οπότε οι μεταβλητές κατάστασης αυτού του συστήματος θα είναι οι γρήγορες συνιστώσες y_f, οι οποίες καλούνται μεταβλητές εκτός της πολλαπλότητας (off-manifold) :

$$y_f = y - y_s = y - h(x_s) \tag{2.31}$$

Από τις σχέσεις (2.31) και (2.23β) δίνεται κατά προσέγγιση το γρήγορο υποσύστημα :

$$\varepsilon \dot{y}_f = \varepsilon \dot{y} - \varepsilon \dot{y}_s \cong g(x_s, y_f + h(x_s)) \tag{2.32}$$

Γραμμικοποιώντας την (2.32) σε ένα σημείο $(x_s h(x_s))$, παίρνουμε ότι :

$$\varepsilon \Delta \dot{y}_f = g_y \Delta y_f \tag{2.33}$$

άρα η ευστάθεια του γρήγορου συστήματος εκτός της πολλαπλότητας καθορίζεται από τον Ιακωβιανό πίνακα g_y.

Με την βοήθεια της ασυμπτωτικής ανάλυσης έχει αποδειχθεί ότι το αργό υποσύστημα που προκύπτει από την οιονεί στατική μέθοδο προσεγγίζει τα αργά δυναμικά φαινόμενα του πλήρους συστήματος (εκτός από την αρχική γρήγορη

μεταβατική τους απόκριση) με ένα σφάλμα της τάξεως ε, όταν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

1.Οι αλγεβρικές εξισώσεις (2.19α,β) δεν έχουν ιδιόμορφα σημεία. Αυτό σημαίνει ότι ο $(m)x(m)$ Ιακωβιανός πίνακας καταστάσεως των γρήγορων μεταβατικών φαινομένων είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $\det g_y \neq 0$ και έχει αρνητικές ιδιοτιμές. Σε αντίθετη περίπτωση το αλγεβρικό σύστημα (2.19α,β) δεν μπορεί να επιλυθεί ως προς τις μεταβλητές x και y.

2.Ο πίνακας g_y έχει όλες τις τιμές του με αρνητικά πραγματικά μέρη, δηλαδή το γρήγορο υποσύστημα είναι ευσταθές.

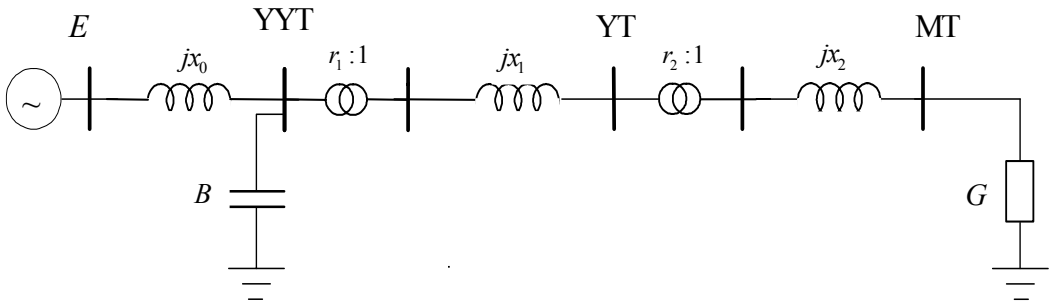
3.Το σύστημα μετά από κάθε απότομη διαταραχή παραμένει στην περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας των βραχυπρόθεσμων δυναμικών φαινομένων.

Όταν κάποια από τις παραπάνω συνθήκες παραβιάζεται, ο διαχωρισμός των χρονικών κλιμάκων και η προσέγγιση με το αργό υποσύστημα δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν.

3. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΣΑΤΦ ΕΝ ΣΕΙΡΑ

3.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Το σύστημα που θα αναλύσουμε στην παρούσα διπλωματική εργασία φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1.



Σχήμα 3.1.1: *Σύστημα δύο επιπέδων ΣΑΤΦ με χωρητική αντιστάθμιση*

Στο σύστημα που εξετάζουμε ο άπειρος ζυγός παριστάνεται από μια ισοδύναμη γεννήτρια τάσης Ε, η οποία τροφοδοτεί ωμικό φορτίο σταθερής αγωγιμότητας, G, μέσω γραμμής μεταφοράς και δύο μετασχηματιστών συνδεδεμένων σε σειρά. Οι δύο μετασχηματιστές είναι εξοπλισμένοι με Συστήματα Αλλαγής Τάσεως υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ), και όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1.1 παριστάνονται ως δύο Μ/Σ σε σειρά με αντίδραση σκεδάσεως. Ο πρώτος μετασχηματιστής που βρίσκεται στην πλευρά της τροφοδοσίας, υποβιβάζει την υπερύψηλη τάση (YYT) σε υψηλή (YT), ενώ ο δεύτερος μετατρέπει την υψηλή τάση (YT) σε μέση (MT). Χάριν απλότητας η αντίδραση του μετασχηματιστή ανυψώσεως τάσης της γεννήτριας έχει ενσωματωθεί στην αντίδραση της γραμμής μεταφοράς και συμβολίζεται ως x_0. Ακόμη, οι αντιδράσεις x_1, x_2, όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.3.1, θεωρούμε ότι συμπεριλαμβάνουν τόσο τις αντιδράσεις του πρώτου(YYT/YT) και δεύτερου(YT/MT) μετασχηματιστή αντίστοιχα, όσο και την αντίδραση της γραμμής. Τέλος, η αγωγιμότητα του πυκνωτή B, συμβολίζει είτε την εγκάρσια χωρητική αντιστάθμιση στην έξοδο της γεννήτριας, είτε την χωρητική αντίδραση της γραμμής.

Οι εξισώσεις που χαρακτηρίζουν τα ΣΑΤΦ, χρησιμοποιώντας το προσεγγιστικό μοντέλο συνεχούς χρόνου, το οποίο αναλύθηκε στην παρ. §1.3.2, είναι :

$$T_1 \cdot \dot{r}_1 = (V_h - V_h^{\,o}) \tag{3.1}$$

για το ΣΑΤΦ υποβιβασμού της υπερύψηλης τάσης σε υψηλή, και

$$T_2 \cdot \dot{r}_2 = (V_m - V_m^{\,o}) \tag{3.2}$$

για το ΣΑΤΦ υποβιβασμού της υψηλής τάσης σε μέση,

όπου T_1 , T_2 ,οι χρονικές σταθερές των δύο ΣΑΤΦ σε *sec*,

V_h , V_m ,οι τάσεις στους ζυγούς υψηλής και μέσης τάσης αντίστοιχα σε *αμ*

και $V_h^{\,o}$, $V_m^{\,o}$, οι τάσεις αναφοράς , δηλαδή οι επιθυμητές τάσεις στους ζυγούς υψηλής και μέσης τάσης αντίστοιχα, μετρημένες και αυτές σε *αμ*.

Όπως έχει αναφερθεί και στην εισαγωγή (§1.3.2), το παραπάνω μοντέλο δεν λαμβάνει υπ'όψιν το διάστημα ανοχής της τάσης (νεκρή ζώνη), με αποτέλεσμα τα δύο ΣΑΤΦ να σταματούν τη λειτουργία τους μόνο όταν οι τάσεις στα δευτερεύοντα τους γίνουν ακριβώς ίσες με τις ονομαστικές και όχι όταν αυτές βρίσκονται μέσα σε δεδομένα επιτρεπτά όρια. Επίσης δε συμπεριλαμβάνει το σταθερό διακριτό βήμα αλλαγής των λόγων μετασχηματισμού των ΣΑΤΦ. Επομένως σύμφωνα με το μοντέλο αυτό τα ΣΑΤΦ ενεργοποιούνται όταν υπάρχει απόκλιση των τάσεων V_h, V_m από τις επιθυμητές. Δηλαδή όταν ισχύει ότι:

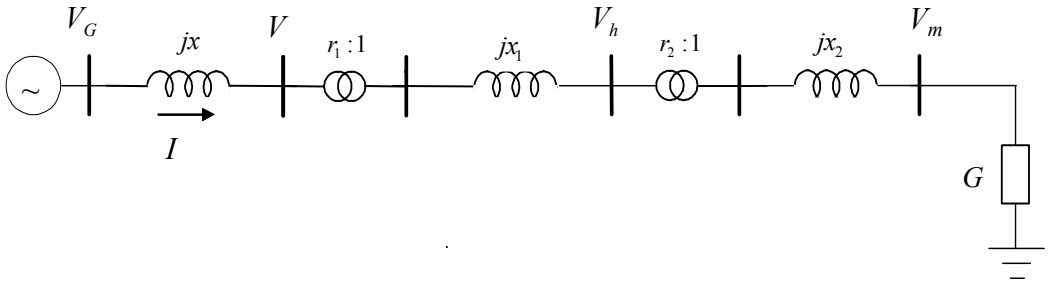
$$V_h - V_h^{\,o} \neq 0$$

για το πρώτο ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ), και

$$V_m - V_m^{\,o} \neq 0$$

για το δεύτερο (ΥΤ/ΜΤ), οπότε και μεταβάλλουν τις τάσεις V_h, V_m, αυξάνοντας ή μειώνοντας τις, όταν το σφάλμα είναι αρνητικό ή θετικό αντίστοιχα, μέχρις ότου να επανέλθουν στις ονομαστικές τους τιμές.

Το σύστημα του Σχήματος 3.1.1 έπειτα από την εφαρμογή του θεωρήματος Thevenin απλοποιείται στο σύστημα του Σχήματος 3.1.2 :



Σχήμα 3.1.2 : *Απλοποιημένο Σύστημα*

όπου V_G, η τάση Thevenin, V , η υπερύψηλη τάση, V_h, η υψηλή τάση και V_m η μέση τάση.

Για το σύστημα του Σχήματος 3.1.2 ισχύουν οι σχέσεις :

$$x = a \cdot x_o \quad , \quad a = \frac{1}{1 - B \cdot x_o} \quad \text{και} \quad V_G = a \cdot \overline{E}$$

Η ολική σύνθετη αντίδραση του συστήματος είναι:

$$Z_{o\lambda} = \mathrm{Z}_L + Z = \frac{r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2}}{G} + j \cdot (x + r_1^{\,2} \cdot x_1 + r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2} \cdot x_2) \tag{3.3}$$

ενώ το ρεύμα $\bar{I}$, που διαρρέει το δίκτυο, δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{I} = \frac{\overline{V}_G}{Z_{o\lambda}} = \frac{\overline{V}_G}{\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{G} + j \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)} \tag{3.4}$$

και η αποδιδόμενη ενεργός ισχύς στο φορτίο είναι:

$$P = R_{o\lambda} \cdot I^2 = \mathrm{Re}\{Z_{o\lambda}\} \cdot I^2 = \frac{r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2}}{G} \cdot \frac{V_G^2}{(\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{G})^2 + (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2} \tag{3.5}$$

Στον Πίνακα 3.1 φαίνονται οι παράμετροι του συστήματος του Σχήματος. 3.1.2 καθώς και οι τιμές τους.

Πίνακας 3.1: *Παράμετροι του συστήματος*

x_0	x_1	x_2	B	E
0.1	*0.2*	*0.15*	*3.333*	*1.03607*

Οι τιμές των παραμέτρων του Πίνακα 3.1 δίνονται στο ανά μονάδα σύστημα. Η τιμή του παράγοντα αντιστάθμισης a υπολογίζεται με βάση τις τιμές του Πίνακα 3.1 ίση με :

$$a = \frac{1}{1 - BX_0} = 1.5$$

Επίσης η τάση *Thevenin* V_G και η αντίδραση *Thevenin* x έχουν τις εξής τιμές:

$$V_G = aE = 1.554105\alpha\mu$$

$$x = ax_0 = 0.15\alpha\mu$$

Η αγωγιμότητα του φορτίου G και ο λόγος των χρονικών σταθερών T_1, T_2 των ΣΑΤΦ ($\gamma = T_1/T_2$) αποτελούν τις παραμέτρους του συστήματος.

3.2 ΜΕΓΙΣΤΗ ΜΕΤΑΦΕΡΟΜΕΝΗ ΙΣΧΥΣ

Σύμφωνα με το θεώρημα Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος το οποίο αναλύθηκε στην ενότητα 1.2, ισχύει ότι:

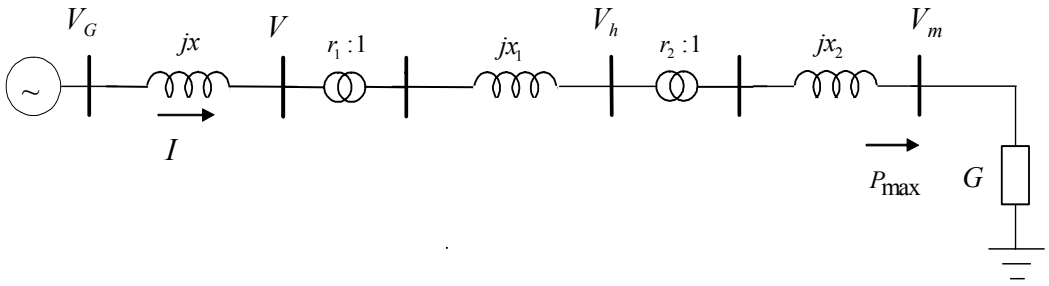
«Για σταθερό συντελεστή ισχύος, η ισχύς του φορτίου μεγιστοποιείται όταν η σύνθετη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς γίνει ίση με τη σύνθετη αντίσταση της γραμμής μεταφοράς.»

Στις επόμενες παραγράφους (§3.2.1 – §3.2.3), εξετάζουμε τη συνθήκη για μέγιστη ισχύ με τη βοήθεια του θεωρήματος αυτού για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις.

3.2.1 Βραχυπρόθεσμο Όριο Μεταφοράς

Το φορτίο του συστήματος, *G*, μεταβάλλεται ενώ οι λόγοι μετασχηματισμού των δύο ΣΑΤΦ, r_1, r_2, παραμένουν σταθεροί.

Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος εφαρμόζεται στο ζυγό δευτερεύοντος του δεύτερου ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ), δηλαδή στο ζυγό μέσης τάσης V_m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.1:



Σχήμα 3.2.1 :*Μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς στο ζυγό μέσης τάσης*

Η σύνθετη αντίδραση της γραμμής μέχρι το ζυγό μέσης τάσεως V_m, είναι:

$$Z = j \cdot (x + r_1^{\,2} \cdot x_1 + r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2} \cdot x_2) \tag{3.6}$$

ενώ η σύνθετη αντίδραση του φορτίου είναι:

$$Z_L = \frac{r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2}}{G} + j \cdot 0 \tag{3.7}$$

Εφ'όσον το φορτίο *G* είναι καθαρά ωμικό, συνεπάγεται ότι ο συντελεστής ισχύος είναι σταθερός και ίσος με τη μονάδα, όποτε το θεώρημα μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος μπορεί να εφαρμοστεί στο προηγούμενο σύστημα.

Σύμφωνα με το θεώρημα της μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος, έχουμε μέγιστη ισχύ όταν ισχύει η σχέση :

$$|Z_L| = |Z| \tag{3.8}$$

δηλαδή όταν:

$$R^2 = \left(\frac{r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2}}{G^*}\right)^2 = (x + r_1^{\,2} \cdot x_1 + r_1^{\,2} \cdot r_2^{\,2} \cdot x_2)^2 = X^2$$

Επομένως η αγωγιμότητα φορτίου για την οποία η ισχύς στο ζυγό μέσης τάσης μεγιστοποιείται, δίνεται από τη σχέση :

$$G = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{(x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)} = G^* \tag{3.9}$$

Το όριο $G=G^*(r_1,r_2)$ είναι το βραχυπρόθεσμο όριο μεταφοράς ισχύος, δηλαδή αντιστοιχεί στη μέγιστη ισχύ για γρήγορη μεταβολή της αγωγιμότητας φορτίου G και για σταθερά r_1, r_2.

Ακόμη από τις σχέσεις (3.9) και (3.5) προκύπτει ότι η μέγιστη ισχύς του συστήματος για την περίπτωση που εξετάζουμε (G:μεταβαλλόμενο και r_1, r_2: σταθερά) είναι:

$$P_{\max} = \frac{V_G^2}{2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)} \tag{3.10}$$

Πράγματι το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε από το μηδενισμό της παραγώγου της ισχύος P ως προς το φορτίο G, όπως είδαμε και στην παρ. §1.2.1.

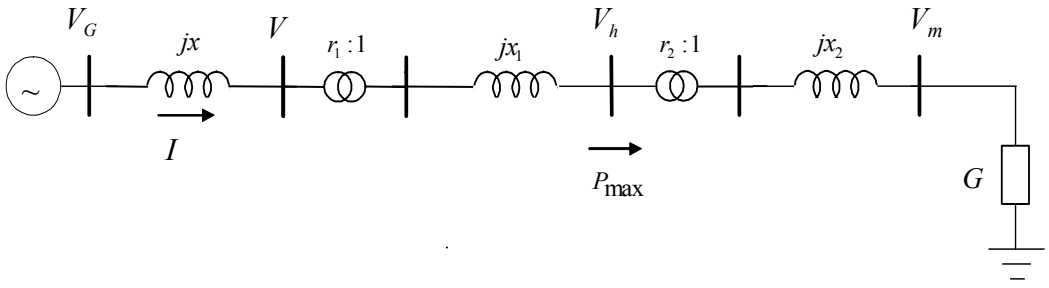
Η τάση στο ζυγό φορτίου σε συνθήκες μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος δίνεται από τη σχέση (1.7) για μοναδιαίο συντελεστή ισχύος ($cos\varphi$=1), και είναι:

$$V_{m_{P_{\max}}} = \frac{V_G}{\sqrt{2}}$$

3.2.2 Μέγιστη Μεταφερόμενη Ισχύς για μεταβολή του r_2

Το φορτίο G, που τροφοδοτείται από το σύστημα, παραμένει σταθερό, όπως και ο λόγος μετασχηματισμού του πρώτου ΣΑΤΦ , r_1, ενώ ο αντίστοιχος λόγος για το δεύτερο ΣΑΤΦ, r_2, μεταβάλλεται.

Στην περίπτωση αυτή, ο ζυγός στον οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος είναι το δευτερεύον του πρώτου ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ), δηλαδή ο ζυγός υψηλής τάσης V_h, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.2 :



Σχήμα 3.2.2: *Μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς στο ζυγό υψηλής τάσης*

Η σύνθετη αντίδραση της γραμμής μέχρι το ζυγό τάσεως V_h, είναι:

$$Z = j \cdot (x_1 + \frac{x}{r_1^2}) \tag{3.11}$$

ενώ η σύνθετή αντίδραση του φορτίου είναι:

$$Z_L = \frac{r_2^{\ 2}}{G} + j \cdot r_2^2 \cdot x_2 \tag{3.12}$$

Από τη σχέση (3.12) προκύπτει ότι ο συντελεστής ισχύος του φορτίου είναι:

$$\cos\phi = \frac{\mathrm{Re}\{Z_L\}}{|Z_L|} = \frac{1}{\sqrt{1 + G^2 \cdot x_2^2}} \tag{3.13}$$

δηλαδή είναι σταθερός αφού δεν μεταβάλλεται κανένα από τα $G,\ x_2$. Όποτε το θεώρημα μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος μπορεί να εφαρμοστεί στον ζυγό υψηλής τάσης V_h.

Σύμφωνα με το θεώρημα στο ζυγό τάσεως V_h έχουμε μέγιστη ισχύ όταν ισχύει η σχέση (3.8), δηλαδή όταν :

$$(x_1 + \frac{x}{r_1^2})^2 = (\frac{r_2^2}{G})^2 + (r_2^2 \cdot x_2)^2$$

Επομένως ο λόγος μετασχηματισμού του δεύτερου ΣΑΤΦ που υποβιβάζει την υψηλή τάση σε μέση, r_2, για τον οποίο η ισχύς στο ζυγό μέσης τάσης μεγιστοποιείται δίνεται από τη σχέση :

$$r_2 = \frac{\sqrt{G \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1) \cdot \sqrt{1 + G \cdot x_2^2}}}{r_1} = r_2^* \tag{3.14}$$

και η αντίστοιχη αγωγιμότητα φορτίου θα δίνεται από τη σχέση :

$$G^* = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[(x + r_1^2 \cdot x_1)^2 - r_1^4 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.15}$$

Το όριο $r_2 = r_2^*(r_1, G)$ είναι το μακροπρόθεσμο όριο μεταφοράς ισχύος για το ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ, δηλαδή αντιστοιχεί στη μέγιστη ισχύ για μεταβολή μόνο του λόγου μετασχηματισμού r_2, και για σταθερά r_1, G.

Ακόμη από τις σχέσεις (3.14) και (3.5) προκύπτει ότι η μέγιστη ισχύς του συστήματος για την περίπτωση που εξετάζουμε (r_2 :μεταβαλλόμενο και G, r_1: σταθερά) είναι:

$$P_{\max} = \frac{V_G^2}{2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1)} \cdot [\frac{x + r_1^2 \cdot x_1 - r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2}{x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2}]^{\frac{1}{2}} \tag{3.16}$$

Πράγματι το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε από το μηδενισμό της παραγώγου της ισχύος P, ως προς το λόγο μετασχηματισμού του δεύτερου ΣΑΤΦ, r_2.

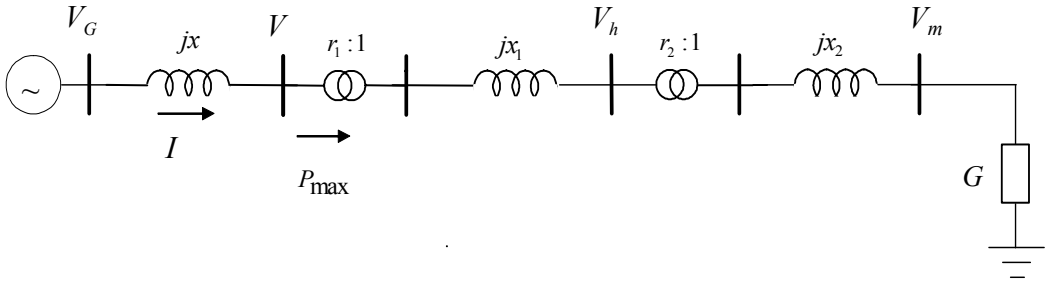
Η τάση στο ζυγό φορτίου σε συνθήκες μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος δίνεται από τη σχέση (1.7) για τον συντελεστή ισχύος της σχέσης (3.13) :

$$V_{h_{P_{\max}}} = \frac{V_G / \sqrt{2}}{\sqrt{1 + (G \cdot x_2 / \sqrt{1 + G^2 \cdot x_2^2})}} \tag{3.17}$$

3.2.3 Μέγιστη Μεταφερόμενη Ισχύς για μεταβολή του r_1

Το φορτίο G, που τροφοδοτείται από το σύστημα, παραμένει σταθερό, όπως και ο λόγος μετασχηματισμού του δεύτερου ΣΑΤΦ, r_2, ενώ ο αντίστοιχος λόγος για το πρώτο ΣΑΤΦ, r_1, μεταβάλλεται.

Στην περίπτωση αυτή, ο ζυγός στον οποίο εφαρμόζεται το θεώρημα μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος είναι το πρωτεύον του πρώτου ΣΑΤΦ, δηλαδή ο ζυγός υπερύψηλης τάσης V, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2.3.



Σχήμα 3.2.3: *Μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς στο ζυγό υπερύψηλης τάσης*

Η σύνθετη αντίδραση της γραμμής μέχρι το ζυγό τάσεως V, είναι:

$$Z = j \cdot x \tag{3.18}$$

ενώ η σύνθετη αντίδραση του φορτίου είναι:

$$Z_L = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{G} + j \cdot (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2) \tag{3.19}$$

Από την σχέση (3.19) προκύπτει ότι ο συντελεστής ισχύος του φορτίου είναι:

$$\cos\phi = \frac{\mathrm{Re}\{Z_L\}}{|Z_L|} = \frac{r_2^2}{\sqrt{r_2^4 + G^2 \cdot (x_1 + r_2^2 \cdot x_2)^2}} \tag{3.20}$$

δηλαδή είναι σταθερός αφού δεν μεταβάλλεται κανένα από τα G, r_2, x_2. Όποτε το θεώρημα μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος μπορεί να εφαρμοστεί στον ζυγό τάσης V.

Σύμφωνα με το θεώρημα, στο ζυγό τάσεως V έχουμε μέγιστη ισχύ όταν ισχύει η σχέση (3.8), δηλαδή όταν :

$$x^2 = (\frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{G})^2 + (r_1^2 \cdot x_1 + r_2^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2$$

Επομένως ο λόγος μετασχηματισμού του πρώτου ΣΑΤΦ που υποβιβάζει την υπερύψηλη τάση σε υψηλή, r_1, για τον οποίο η ισχύς στο ζυγό τάσης V μεγιστοποιείται δίνεται από τη σχέση :

$$r_1 = \frac{\sqrt{x \cdot G}}{\sqrt[4]{r_2^4 + G^2 \cdot (x_1 + r_2^2 \cdot x_2)^2}} = r_1^* \tag{3.21}$$

και η αντίστοιχη αγωγιμότητα φορτίου θα δίνεται από τη σχέση :

$$G^* = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.22}$$

Το όριο $r_1 = r_1^*(r_2, G)$ είναι το μακροπρόθεσμο όριο μεταφοράς ισχύος για το ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ, δηλαδή αντιστοιχεί στη μέγιστη ισχύ για γρήγορη μεταβολή του λόγου μετασχηματισμού r_1, και για σταθερά r_2, G.

Ακόμη από τις σχέσεις (3.21) και (3.5) προκύπτει ότι η μέγιστη ισχύς του συστήματος για την περίπτωση που εξετάζουμε (r_1:μεταβαλλόμενο και G, r_2: σταθερά) είναι:

$$P_{\max} = \frac{V_G^2}{2 \cdot x} \cdot [\frac{x - r_1^2 \cdot x_1 - r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2}{x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2}]^{\frac{1}{2}} \tag{3.23}$$

Πράγματι το ίδιο αποτέλεσμα θα προέκυπτε από το μηδενισμό της παραγώγου της ισχύος P ως προς το λόγο μετασχηματισμού του πρώτου ΣΑΤΦ, r_1 .

Η τάση στο ζυγό φορτίου σε συνθήκες μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος δίνεται από τη σχέση (1.7) για τον συντελεστή ισχύος της σχέσης (3.20) :

$$V_{P_{\max}} = \frac{V_G / \sqrt{2}}{\sqrt{1 + (G \cdot (x_1 + r_2^2 \cdot x_2) / \sqrt{r_2^4 + G^2 \cdot (x_1 + r_2^2 \cdot x_2)^2})}} \tag{3.24}$$

Στον Πίνακα 3.2 φαίνονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της ανάλυσης για μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ για τις τρεις περιπτώσεις.

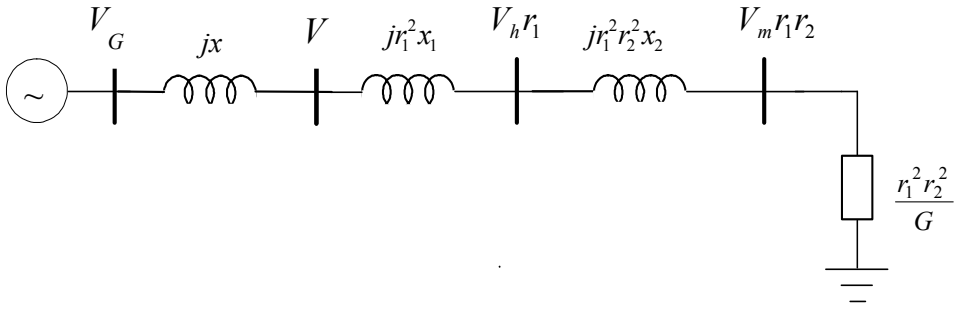
Πίνακας 3.2: Συνθήκες για Μέγιστη Μεταφερόμενη Ισχύ

	Συνθήκη Μ.Μ.Ι	**Ισχύς**
Βραχυπρόθεσμο όριο για G μεταβαλλόμενο και r_1, r_2 σταθερά	$G^* = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{(x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)}$	$P_{\max} = \frac{V_G^2}{2(x + r_1^2 x_1 + r_1^2 r_2^2 x_2)}$
Μακροπρόθεσμο όριο για μεταβολή μόνο του r_2 (ΥΤ/ΜΤ) και G, r_1 σταθερά	$r_2^* = \frac{\sqrt{G(x + r_1^2 x_1)\sqrt{1 + Gx_2^2}}}{r_1}$	$P_{\max} = \frac{V_G^2}{2(x + r_1^2 x_1)} \cdot [\frac{x + r_1^2 x_1 - r_1^2 r_2^2 x_2}{x + r_1^2 x_1 + r_1^2 r_2^2 x_2}]^{\frac{1}{2}}$
Μακροπρόθεσμο όριο για μεταβολή μόνο του r_1 (ΥΥΤ/ΥΤ) και G , r_2 σταθερά	$r_1^* = \frac{\sqrt{xG}}{\sqrt[4]{r_2^4 + G^2 (x_1 + r_2^2 x_2)^2}}$	$P_{\max} = \frac{V_G^2}{2x} \cdot [\frac{x - r_1^2 x_1 - r_1^2 r_2^2 x_2}{x + r_1^2 x_1 + r_1^2 r_2^2 x_2}]^{\frac{1}{2}}$

3.3 ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

3.3.1 Υπολογισμός υψηλής και μέσης τάσης

Το κύκλωμα που εξετάζουμε, όταν όλα τα στοιχεία έχουν αναχθεί στην πλευρά του ζυγού υπερύψηλης τάσης V , είναι όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.3.1 :



Σχήμα 3.3.1: *Ισοδύναμο σύστημα ανηγμένο στην πλευρά της ΥΥΤ*

Σύμφωνα με το κύκλωμα του Σχήματος 3.3.1, ισχύει η επόμενη σχέση για την υψηλή τάση $\overline{V}_h$:

$$r_1 \cdot \overline{V}_h = \overline{V}_G - j \cdot \overline{I} \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1) \qquad (3.25)$$

όπου το ρεύμα $\overline{I}$ δίνεται από τη σχέση (3.4).

Επομένως η σχέση (3.25) παίρνει την εξής μορφή:

$$\overline{V}_h = \frac{(r_1 \cdot r_2^2 + j \cdot G \cdot r_1 \cdot r_2^2 \cdot x_2) \cdot \overline{V}_G}{r_1^2 \cdot r_2^2 + j \cdot G \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)} \tag{3.26}$$

Ομοίως για την μέση τάση $\overline{V}_m$ προκύπτει ότι:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \overline{V}_m = \overline{V}_G - j \cdot \bar{I} \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2) \tag{3.27}$$

και έπειτα από αντικατάσταση της σχέσης (3.4) στην σχέση (3.27) καταλήγουμε στην επόμενη σχέση για την V_m:

$$\overline{V}_m = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot \overline{V}_G}{r_1^2 \cdot r_2^2 + j \cdot G \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)} \tag{3.28}$$

Τα μέτρα των τάσεων V_h και V_m θα δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$V_h^2 = \frac{(r_1^2 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2)}{r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2} \cdot V_G^2 \tag{3.29}$$

και $$V_m^2 = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2} \cdot V_G^2 \tag{3.30}$$

ή πιο απλά $$V_h^2 = g(r_1, r_2) \cdot V_G^2 \tag{3.31α}$$

και $$V_m^2 = h\ (r_1, r_2) \cdot V_G^2 \tag{3.31β}$$

3.3.2 Προσδιορισμός των σημείων ισορροπίας

Η δυναμική συμπεριφορά των ΣΑΤΦ περιγράφεται από το σύστημα των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που δίνονται από τις σχέσεις (3.1) και (3.2), ενώ οι τάσεις V_h και V_m δίνονται από τις σχέσεις (3.29) και (3.30), δηλαδή:

$$T_1 \cdot \dot{r}_1 = [V_G \cdot \sqrt{g(r_1, r_2, G)} - V_h^o\ ] \tag{3.32α}$$

$$T_2 \cdot \dot{r}_2 = [V_G \cdot \sqrt{h(r_1, r_2, G)} - V_m^o\ ] \tag{3.32β}$$

Με βάση το σύστημα αυτό ο υπολογισμός των σημείων ισορροπίας προκύπτει από τη λύση των επόμενων αλγεβρικών εξισώσεων:

$$0 = (V_h - V_h^{\ o}) \tag{3.33}$$

$$0 = (V_m - V_m^{\ o}) \tag{3.34}$$

Δηλαδή από τις εξισώσεις : $$V_h^{\ o} = V_G \cdot \sqrt{g(r_1, r_2, G)} \tag{3.35}$$

$$V_m^{\ o} = V_G \cdot \sqrt{h(r_1, r_2, G)} \tag{3.36}$$

Οι εξισώσεις(3.35) και (3.36) αποτελούν τις συνθήκες ισορροπίας του συστήματος που θα αναλυθούν διεξοδικά στο Κεφάλαιο 5.

Επίσης για να υπολογίσουμε τις τιμές ισορροπίας των λόγων μετασχηματισμού r_1 , r_2 , αντικαθιστούμε στο παραπάνω σύστημα τις εκφράσεις των τάσεων V_h, V_m όπως δόθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο από τις σχέσεις (3.29) και (3.30), και έπειτα από πράξεις, προκύπτει ότι:

$$r_2^e = \frac{V_h^o}{V_m^o} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+G^2 \cdot x_2^2}} \tag{3.37}$$

ενώ οι τιμές ισορροπίας του r_1^e δίνονται από τις ρίζες της επόμενης διτετράγωνης εξίσωσης:

$$r_1^4 \cdot \left[V_m^{0^2} \cdot r_2^2 + \frac{V_m^{0^2} \cdot G^2 \cdot x_1^2}{r_2^2} + V_m^{0^2} \cdot G^2 \cdot x_2^2 \cdot r_2^2 + 2 \cdot V_m^{0^2} \cdot G^2 \cdot x_1 \cdot x_2\right] +$$

$$r_1^2 \cdot \left[-V_G^2 + \frac{2 \cdot V_m^0 \cdot G^2 \cdot x \cdot x_1}{r_2^2} + 2 \cdot V_m^{0^2} \cdot G^2 \cdot x \cdot x_2\right] +$$

$$\frac{V_m^{0^2} \cdot G^2 \cdot x^2}{r_2^2} = 0 \tag{3.38}$$

Από την ανάλυση της προηγούμενης εξίσωσης στην διπλωματική εργασία [1] γνωρίζουμε ότι για τις διάφορες τιμές της διακρίνουσας η παραπάνω εξίσωση έχει το πολύ δύο θετικές ρίζες. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι το σύστημα έχει το πολύ δύο σημεία ισορροπίας (r_1^e , r_2^e), ένα ευσταθές και ένα ασταθές, με κοινό r_2^e. Δηλαδή τα σημεία αυτά βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη ως προς τον άξονα των r_1^e.

3.3.3 Γραμμικοποίηση, Ευαισθησίες

Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (3.1) και (3.2) είναι μη γραμμικό. Οπότε για να μελετήσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας αυτού του συστήματος, εξετάζουμε το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από ένα σημείο ισορροπίας.

Επομένως θεωρώντας το σύστημα που μελετάμε ότι έχει τη μορφή:

$$\dot{r} = f(x)$$

με το $r = \left[r_1 \quad r_2\right]^{\mathrm{T}}$ να είναι το 2×1 διάνυσμα κατάστασης και οι συναρτήσεις f_1, f_2 δύο μη γραμμικές εξισώσεις των r_1 , r_2 , το αντίστοιχο γραμμικοποιημένο σύστημα θα είναι το επόμενο :

$$\Delta\dot{r} = S \cdot \Delta r$$

όπου ο πίνακας S ονομάζεται Ιακωβιανός πίνακας κατάστασης, και δίνεται από τη σχέση $S = \partial f / \partial r$.

Εφαρμόζοντας τη γραμμικοποιήση στο σύστημα (3.1-3.2) προκύπτει ότι :

$$\Delta \dot{r}_1 = T_1^{-1}(\Delta V_h - \Delta V_h^o)$$

$$\Delta \dot{r}_2 = T_2^{-1}(\Delta V_m - \Delta V_m^o)$$

και επειδή $\Delta V_h^o = \Delta V_m^o = 0$, θα ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{r}_1 \\ \Delta \dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_h \\ \Delta V_m \end{bmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_h \\ \Delta V_m \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

ή

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{r}_1 \\ \Delta \dot{r}_2 \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} \tag{3.40}$$

όπου

$$S = T^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{3.40α}$$

και A ο πίνακας ευαισθησίας με:

$$A_{11} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_h^o} \cdot \frac{\partial g}{\partial r_1},\ A_{12} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_h^o} \cdot \frac{\partial g}{\partial r_2},\ A_{21} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_m^o} \cdot \frac{\partial h}{\partial r_1} \text{ και } A_{22} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_m^o} \cdot \frac{\partial h}{\partial r_2}$$

όπου σύμφωνα με την παρ. §3.3.1 οι εξισώσεις $h(r_1, r_2)$, $g(r_1, r_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$h\ (r_1, r_2) = \frac{(r_1^2 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot r_1^2 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2)}{r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2} \tag{3.41}$$

και

$$g(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2} \tag{3.42}$$

οπότε παραγωγίζοντας τις (3.41) και (3.42) παίρνουμε τις εξισώσεις που εκφράζουν τα στοιχεία του πίνακα ευαισθησιών A :

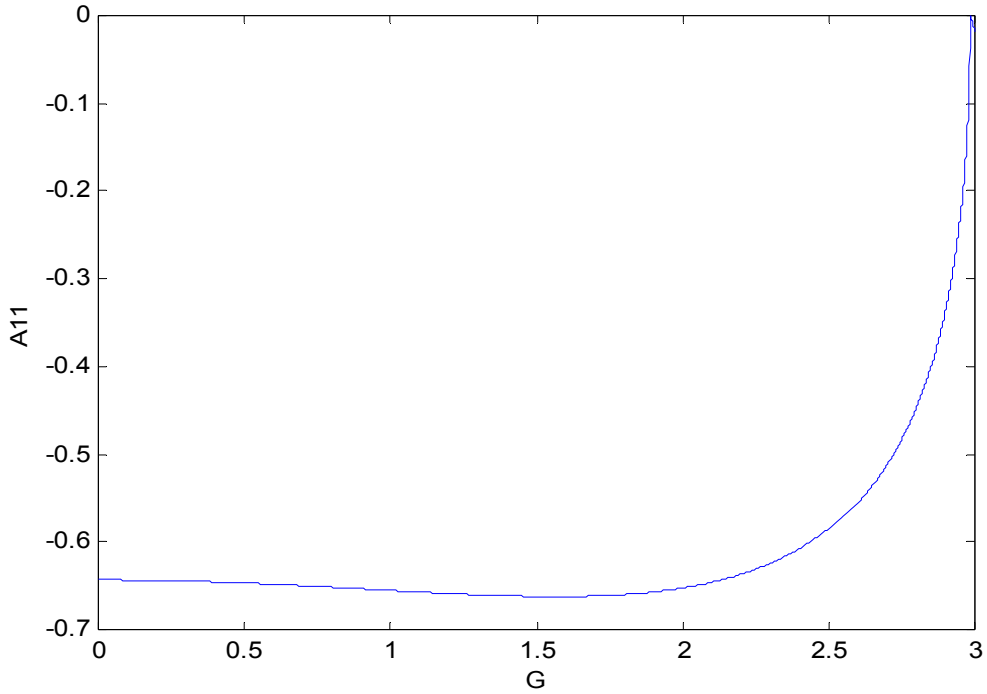
$$A_{11} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_h^o} \cdot 2 \cdot r_1 \cdot r_2^4 \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2) \cdot \frac{G^2 \cdot [x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2] - r_1^4 \cdot r_2^4}{[r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^2} \tag{3.43}$$

$$A_{22} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_m^o} \cdot 2 \cdot r_1^2 \cdot r_2 \cdot \frac{G^2 \cdot [(x + r_1^2 \cdot x_1)^2 - (r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2] - r_1^4 \cdot r_2^4}{[r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^2} \tag{3.44}$$

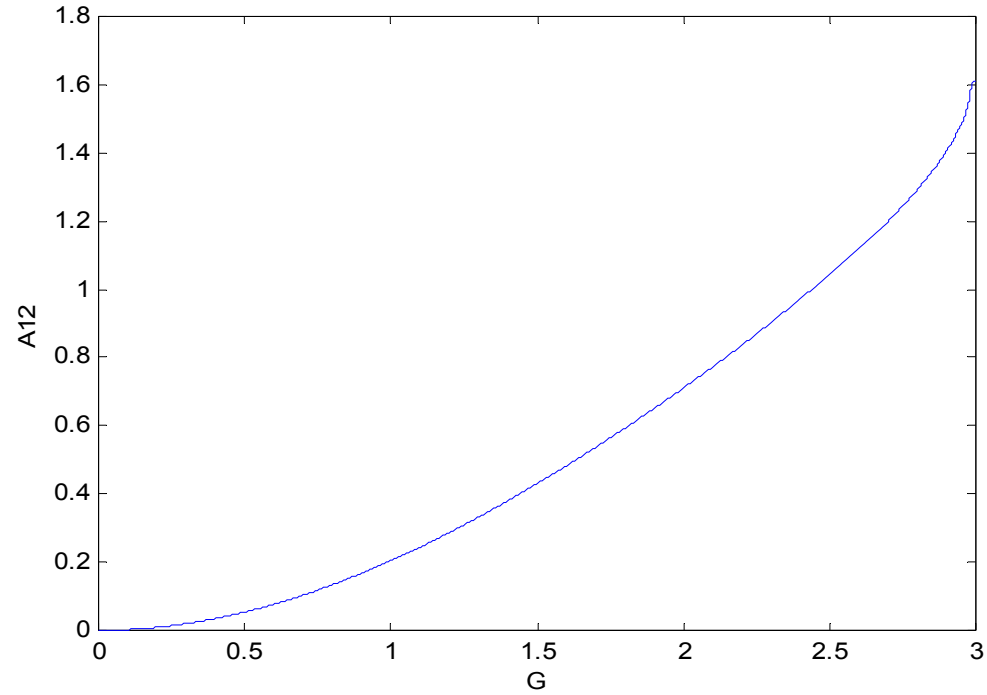
$$A_{21} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_m^o} \cdot 2 \cdot r_1 \cdot r_2^2 \cdot \frac{G^2 \cdot [x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2] - r_1^4 \cdot r_2^4}{[r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^2} \tag{3.45}$$

$$A_{12} = \frac{V_G^2}{2 \cdot V_h^o} \cdot 4 \cdot r_1^2 \cdot r_2^3 \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2) \cdot \frac{G^2 \cdot [(x + r_1^2 \cdot x_1) \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)}{[r_1^4 \cdot r_2^4 + G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^2} \tag{3.46}$$

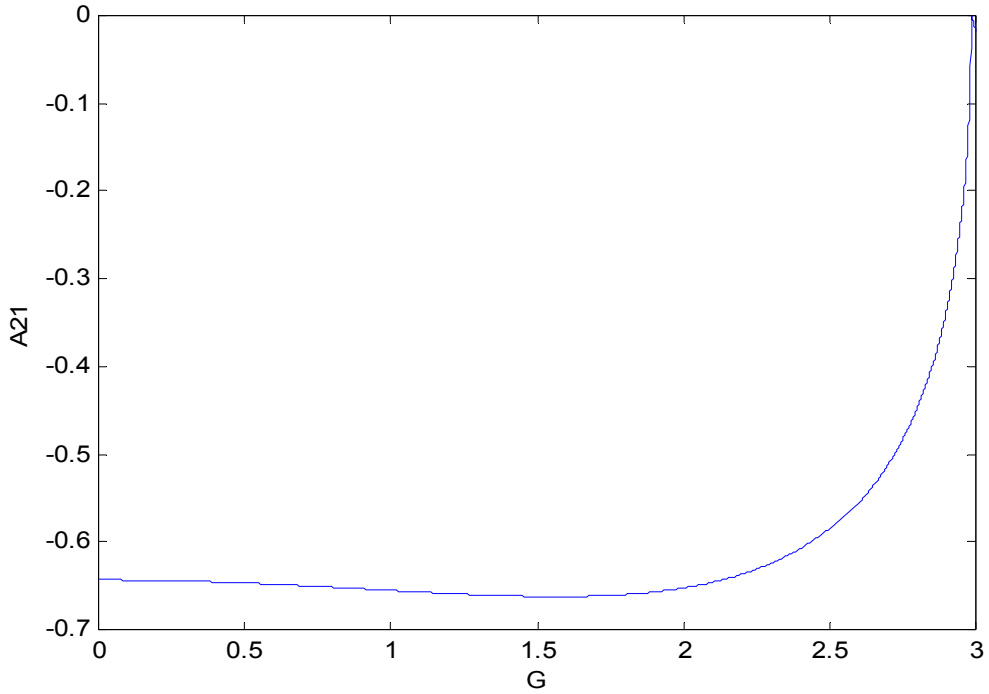
Οι γραφικές παραστάσεις των στοιχείων του πίνακα κατάστασης συναρτήσει της αγωγιμότητας φορτίου, G, για τις τιμές του Πίνακα 3.1 φαίνονται παρακάτω :



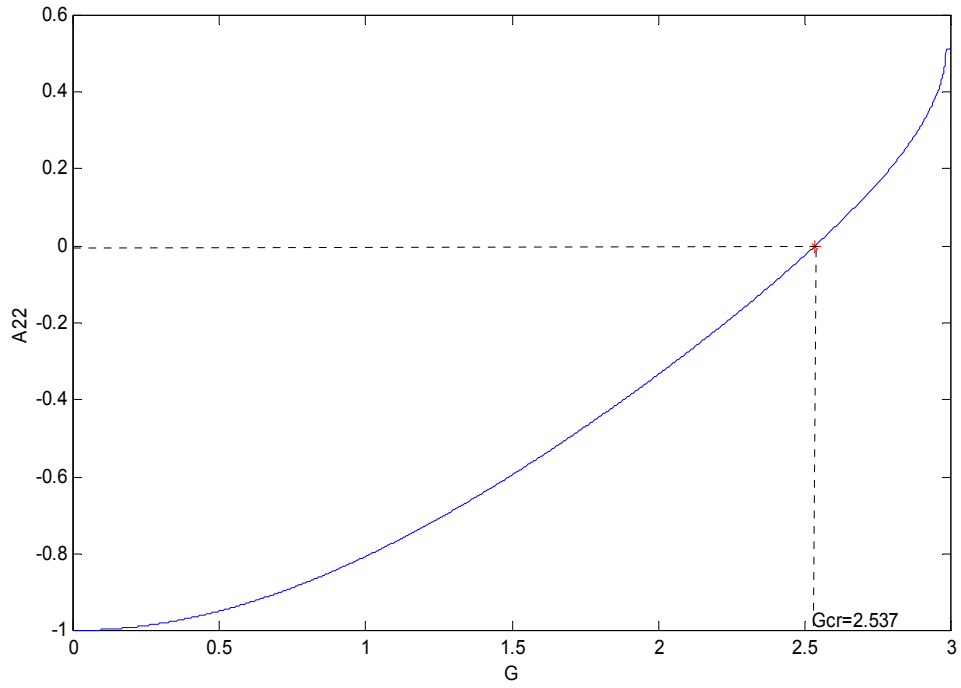
Σχήμα 3.3.2: *Μεταβολή του A_{11} συναρτήσει της αγωγιμότητας G του φορτίου*



Σχήμα 3.3.3: *Μεταβολή του A_{12} συναρτήσει της αγωγιμότητας G του φορτίου*



Σχήμα 3.3.4: *Μεταβολή του A_{21} συναρτήσει της αγωγιμότητας G του φορτίου*



Σχήμα 3.3.5: *Μεταβολή του A_{22} συναρτήσει της αγωγιμότητας G του φορτίου*

Παρατηρούμε από τις σχέσεις (3.43) και (3.45) ότι η έκφραση της μεταβλητής A_{11}, είναι ανάλογη της αντίστοιχης έκφρασης για το στοιχείο A_{21} του πίνακα ευαισθησιών του γραμμικοποιημένου συστήματος. Πιο συγκεκριμένα προκύπτει ότι:

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{V_m^o}{V_h^o} \cdot r_2^2 \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2)$$

Επειδή όμως ισχύει ότι στα σημεία ισορροπίας η τιμή του r_2 δίνεται από τη σχέση (3.37), προκύπτει ότι :

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{V_m^o}{V_h^o} \cdot (\frac{V_h^o}{V_m^o})^2 \cdot \frac{1}{1 + G^2 \cdot x_2^2} \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2)$$

δηλαδή ότι ο λόγος των A_{11} και A_{21} είναι ίσος με τον λόγο των επιθυμητών τάσεων:

$$\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{V_m^o}{V_h^o} \tag{3.47}$$

Στην ειδική περίπτωση που οι τάσεις αναφοράς του συστήματος, δηλαδή οι επιθυμητές τάσεις, είναι ίσες κατά μέτρο, οπότε $V_h^o = V_m^o$, παρατηρούμε πως τα στοιχεία της πρώτης στήλης του πίνακα κατάστασης A είναι ίσα:

$$A_{11} = A_{21} \tag{3.48}$$

δηλαδή μια μεταβολή του r_1 θα προκαλέσει την ίδια (ή ανάλογη όταν $V_h^o \neq V_m^o$) μεταβολή στις τάσεις V_h και V_m.

Επίσης, από τις εκφράσεις των στοιχείων του πίνακα A, προκύπτει ότι τα στοιχεία αυτά μηδενίζονται για τις ακόλουθες τιμές της αγωγιμότητας φορτίου G :

- A_{11} : $A_{11} = 0$ όταν $\quad G^*_{A_{11}=0} = \dfrac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$ (3.49)

- A_{12} : Το A_{12} δεν μηδενίζεται για καμία τιμή της αγωγιμότητας φορτίου G, και είναι πάντα θετικό. Δηλαδή πάντα η αύξηση του r_2 , προκαλεί την αύξηση της τάσης V_h

- A_{21} : Προφανώς το A_{21} μηδενίζεται για την τιμή της αγωγιμότητας φορτίου G για την οποία μηδενίζεται και το A_{11} . Δηλαδή

  όταν $\quad G^*_{A_{11}=0} = G^*_{A_{21}=0} = \dfrac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$ (3.50)

- A_{22} : $A_{22} = 0$ όταν $\quad G^*_{A_{22}=0} = \dfrac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[(x + r_1^2 \cdot x_1)^2 - r_1^4 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2]^{\frac{1}{2}}}$ (3.51)

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (3.22) και (3.15) με τις (3.49) και (3.51) αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι οι τιμές της αγωγιμότητας φορτίου G, για τις οποίες

μηδενίζονται τα στοιχεία του πίνακα κατάστασης, A_{11}, A_{22}, είναι ίδιες με αυτές για τις οποίες μεγιστοποιείται η μεταφερόμενη ισχύς στις περιπτώσεις που μεταβάλλονται είτε μόνο ο λόγος μετασχηματισμού του πρώτου ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ), r_1, είτε μόνο ο λόγος μετασχηματισμού του δεύτερου ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ), r_2, αντίστοιχα.

Αυτό σημαίνει ότι όταν λειτουργεί μόνο ο πρώτος μετασχηματιστής ως ΣΑΤΦ τότε η συνθήκη για μέγιστη μεταφερόμενη ισχύ είναι:

$$G^* = G^*_{A_{11}=0} = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.52}$$

κάτι που είναι αναμενόμενο εφόσον στην περίπτωση αυτή ο πίνακας κατάστασης του συστήματος έχει ένα μόνο στοιχείο, το A_{11}/T_1 οπότε η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς στο σύστημα θα παρατηρείται στο μηδενισμό της ορίζουσας του πίνακα κατάστασης $D_A = A_{11}/\mathrm{T}_1$, δηλαδή στην τιμή εκείνη της αγωγιμότητας για την οποία μηδενίζεται το A_{11}.

Αντίστοιχα όταν λειτουργεί μόνο ο δεύτερος μετασχηματιστής ως ΣΑΤΦ, τότε ο πίνακας κατάστασης έχει μόνο ένα στοιχείο, το A_{22}/T_2 και άρα η μέγιστη μεταφερόμενη ισχύς παρατηρείται στο μηδενισμό του A_{22}. Δηλαδή όταν:

$$G^* = G^*_{A_{22}=0} = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[(x + r_1^2 \cdot x_1)^2 - r_1^4 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.53}$$

3.3.4 Επίδραση της ορίζουσας και του ίχνους του πίνακα κατάστασης στην ευστάθεια του συστήματος

Η ορίζουσα του πίνακα A, δίνεται από τη σχέση :

$$D_A = A_{11} \cdot A_{22} - A_{21} \cdot A_{12} \tag{3.54}$$

Η γραφική παράσταση της ορίζουσας του πίνακα ευαισθησιών A, D_A για τις τιμές των στοιχείων σύμφωνα με τον Πίνακα 3.1φαίνεται στο Σχήμα 3.3.6.

Σύμφωνα με τη σχέση (3.47), θα ισχύει ότι:

$$D_A = A_{11} \cdot (A_{22} - \frac{V_h^o}{V_m^o} \cdot A_{12}) \tag{3.55}$$

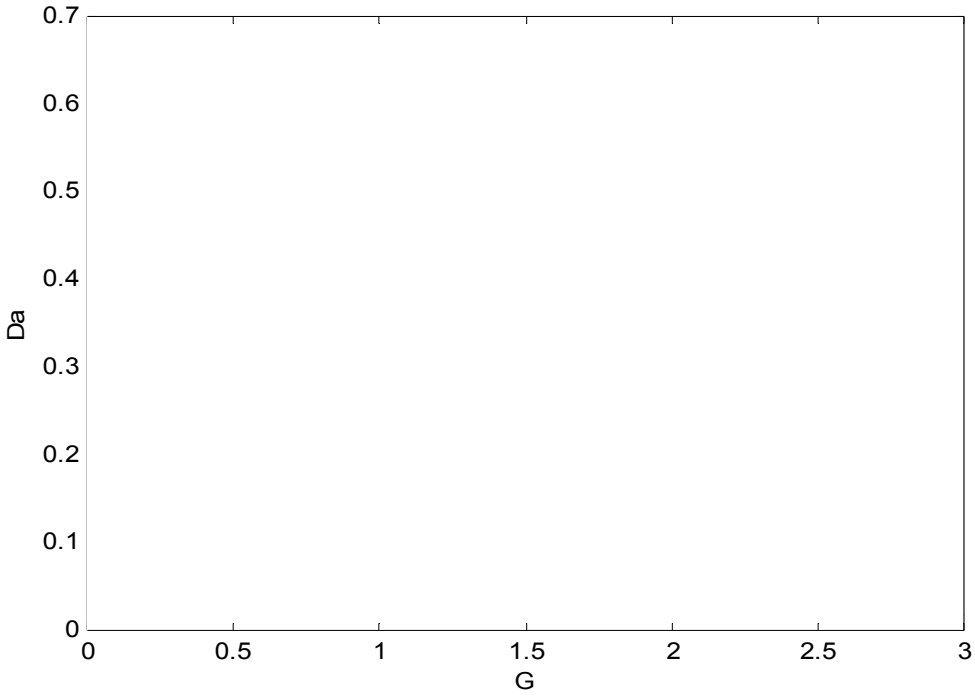
ή ακόμα ότι :

$$D_A = A_{11} \cdot (A_{22} - A_{12}) \tag{3.56}$$

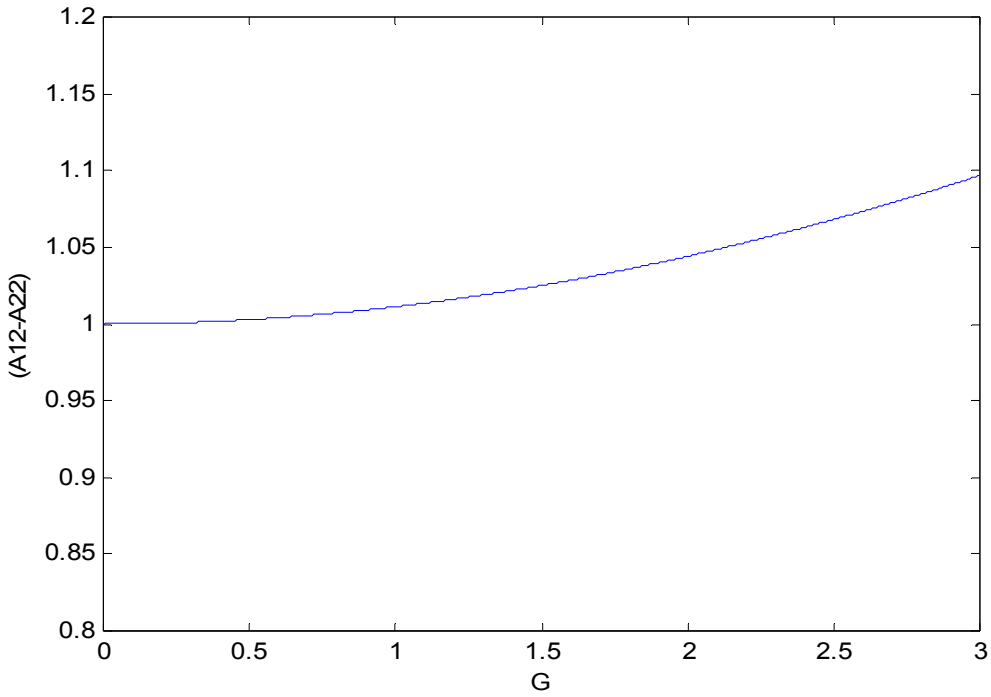
στην περίπτωση που οι τάσεις αναφοράς είναι ίσες.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι στην περίπτωση που οι τάσεις αναφοράς είναι ίσες ($V_h^o = V_m^o$), οπότε ισχύει η σχέση (3.56), τότε η ορίζουσα D_A

θα μηδενίζεται όταν θα μηδενίζεται και το στοιχείο A_{11}, αφού η διαφορά $(A_{12} - A_{22})$ (για τις παραμέτρους του Πίνακα 3.1) είναι πάντα θετική, όπως φαίνεται και στο διάγραμμα του Σχήματος 3.3.7.



Σχήμα 3.3.6: *Μεταβολή του D_A συναρτήσει της αγωγιμότητας G του φορτίου*



Σχήμα 3.3.7: *Μεταβολή του $(A_{12} - A_{22})$ συναρτήσει της αγωγιμότητας G του φορτίου*

Δηλαδή η ορίζουσα D_A του πίνακα A μηδενίζεται όταν η αγωγιμότητα φορτίου είναι ίση με :

$$G^*_{D_a=0} = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{3.57}$$

και επομένως θα συμπίπτει με την συνθήκη Μέγιστης Μεταφερόμενης Ισχύος όταν το G και το r_2 είναι σταθερά ενώ το r_1 μεταβλητό (μακροπρόθεσμο όριο μεταφοράς ισχύος για το ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ).

Αυτή η διαπίστωση είναι ιδιαίτερα σημαντική, εφ'όσον η τιμή, και κυρίως το πρόσημο, της ορίζουσας του πίνακα A, D_A, παίζει σημαντικό ρόλο στην ευστάθεια του συστήματος, όπως προκύπτει από τη μελέτη της χαρακτηριστικής εξίσωσης του γραμμικοποιημένου συστήματος (3.40), η οποία είναι:

$$\lambda^2 - (\frac{A_{22}}{T_2} + \frac{A_{11}}{T_1}) \cdot \lambda + \frac{D_A}{T_1 \cdot T_2} = 0 \tag{3.58}$$

Όπως γνωρίζουμε, το πρόσημο του σταθερού όρου του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, που σ' αυτή την περίπτωση είναι το $(D_A/(\mathrm{T}_1 \cdot \mathrm{T}_2))$, καθορίζει κατά ένα μέρος το είδος της ευστάθειας του συστήματος.

Πιο συγκεκριμένα, όταν σε ένα χαρακτηριστικό πολυώνυμο της μορφής: $\lambda^2 - b \cdot \lambda + c = 0$, ισχύει ότι $c < 0$ και άρα το γινόμενο των ριζών είναι αρνητικό οπότε οι ιδιοτιμές ετερόσημες, τότε το σύστημα παρουσιάζει μονότονη αστάθεια, ενώ όταν $c > 0$ και άρα οι δύο ιδιοτιμές είναι ομόσημες (δηλαδή είτε και οι δύο θετικές είτε και οι δύο αρνητικές), τότε το σύστημα μπορεί είτε να παρουσιάζει αστάθεια υπό τη μορφή ταλαντώσεων, στην περίπτωση των δύο θετικών ιδιοτιμών, είτε να είναι ευσταθές, στην αντίθετη περίπτωση, ανάλογα με την τιμή του συντελεστή του πρώτου όρου b, που στο πρόβλημα που εξετάζουμε είναι $b = (\frac{A_{22}}{T_2} + \frac{A_{11}}{T_1})$.

Όπως αποδείχτηκε προηγουμένως το D_A μηδενίζεται όταν το G πάρει την τιμή που δίνεται από τη σχέση (3.57).

Μέχρι αυτή την τιμή το D_A είναι θετικό, όπως φαίνεται και στη γραφική παράσταση του Σχήματος 3.3.6, αφού το A_{11} είναι αρνητικό όπως και η διαφορά $(A_{22} - A_{12})$ μέχρι την τιμή αυτή της αγωγιμότητας .

Επομένως αφού και οι παράμετροι T_1, T_2 του συστήματος που συμβολίζουν τις χρονικές σταθερές των δύο ΣΑΤΦ, είναι πάντα θετικές, προκύπτει ότι ο όρος $c = D_A/(\mathrm{T}_1 \cdot \mathrm{T}_2)$ του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι μεγαλύτερος του μηδενός μέχρι την τιμή της αγωγιμότητας φορτίου $G^*_{D_A=0}$, ενώ πέρα από αυτή την τιμή το c γίνεται αρνητικό, και άρα το σύστημα γίνεται ασταθές.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η συμπεριφορά του συστήματος όταν η αγωγιμότητα είναι μικρότερη από την τιμή $G^*_{D_A=0}$, εξαρτάται από το πρόσημο του συντελεστή του χαρακτηριστικού πολυωνύμου b, που ονομάζεται ίχνος του πίνακα κατάστασης S και συμβολίζεται ως trS.

Μάλιστα όταν το ίχνος του S, trS, είναι θετικό, τότε το σύστημα μπορεί να παρουσιάσει αστάθεια υπό μορφή ταλαντώσεων, λόγω της πιθανής ύπαρξης δύο θετικών ιδιοτιμών (ή δύο συζυγών μιγαδικών με θετικά πραγματικά μέρη), ενώ στην αντίθετη περίπτωση που είναι αρνητικό, το σύστημα είναι ευσταθές, αφού και οι δύο ιδιοτιμές είναι αρνητικές.

3.3.5 Συνθήκη Εμφάνισης Ταλαντώσεων

Σύμφωνα με τα προηγούμενα για να μελετήσουμε την ικανότητα του συστήματος να παρουσιάζει ευστάθεια ή αστάθεια, θα πρέπει να μελετήσουμε το πρόσημο του ίχνους του πίνακα κατάστασης trS. Δηλαδή να ερευνήσουμε για ποιες τιμές της αγωγιμότητας φορτίου G μηδενίζεται και αλλάζει πρόσημο η παράσταση $(\frac{A_{22}}{T_2}+\frac{A_{11}}{T_1})$.

Από τις γραφικές παραστάσεις των A_{11}, A_{22}, παρατηρούμε ότι αρχικά και τα δύο στοιχεία είναι αρνητικά μέχρι το μηδενισμό τους στις τιμές της αγωγιμότητας, όπως δίνονται από τις σχέσεις (3.49) και (3.51) αντίστοιχα. Οπότε το trS είναι αρνητικό μέχρι τις τιμές αυτές της αγωγιμότητας, και μπορεί να μηδενιστεί και άρα να αλλάξει πρόσημο εφ'όσον μηδενιστεί ένα από τα A_{11}, A_{22}. Δηλαδή όταν το ένα γίνει θετικό ενώ το άλλο παραμείνει αρνητικό.

Με βάση τα παραπάνω για να ελέγξουμε αν το σύστημα έχει την ικανότητα ή όχι να παραμένει ευσταθές μέχρι την τιμή $G^*_{D_A=0}$ της αγωγιμότητας όπου το σύστημα καταρρέει λόγω του μηδενισμού της ορίζουσας D_A, για οποιονδήποτε συνδυασμό τιμών των χρονικών σταθερών T_1, T_2, αρκεί να ερευνήσουμε αν το A_{22} μηδενίζεται για τιμή της αγωγιμότητας μικρότερη από την $G^*_{D_A=0}$, στην οποία μηδενίζεται και το A_{11}, όπως έχουμε εξηγήσει.

Επομένως για να εμφανίζεται αστάθεια υπό τη μορφή ταλαντώσεων θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$G^*_{A22=0} < G^*_{A11=0}$$

$$\text{ή} \quad \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[(x+r_1^2 \cdot x_1)^2 - r_1^4 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2]^{\frac{1}{2}}} < \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{ή} \quad x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2 < (x + r_1^2 \cdot x_1)^2 - (r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2$$

ή

$$x^2 - r_1^4 \cdot x_1^2 - r_1^4 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2 - 2 \cdot r_1^4 \cdot r_2^2 \cdot x_1 \cdot x_2 < x^2 + r_1^4 \cdot x_1^2 - r_1^4 \cdot r_2^4 \cdot x_2^2 + 2 \cdot r_1^2 \cdot x \cdot x_1$$

$$\text{ή} \quad 0 < 2 \cdot r_1^4 \cdot x_1^2 + 2 \cdot r_1^4 \cdot r_2^2 \cdot x_1 \cdot x_2 + r_1^2 \cdot x \cdot x_1$$

$$\text{ή} \quad 0 < 2 \cdot r_1^2 \cdot (r_1^2 \cdot x_1^2 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_1 \cdot x_2 + x \cdot x_1)$$

το οποίο ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές των στοιχείων r_1, r_2, x, x_1, x_2, αφού αυτές είναι πάντα θετικές.

Άρα εξάγεται το συμπέρασμα ότι υπάρχουν ζεύγη τιμών των T_1, T_2 ή διαφορετικά τιμές του λόγου $\gamma = T_1/T_2$, οι οποίες μηδενίζουν το ίχνος του πίνακα κατάστασης S, trS, με αποτέλεσμα το σύστημα να μεταπίπτει από την ευστάθεια στην αστάθεια υπό τη μορφή ταλαντώσεων όταν η αγωγιμότητα φορτίου είναι μεταξύ των τιμών $G^*_{A22=0}$ και $G^*_{A11=0} = G^*_{DA=0}$.

4. ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ

4.1 ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΙ ΣΗΜΕΙΑ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

4.1.1 Γενικά

Οι καμπύλες ισορροπίας των r_1 και r_2 προκύπτουν από το μηδενισμό του δεξιού μέρους των διαφορικών εξισώσεων (3.1) και (3.2) που χαρακτηρίζουν τη λειτουργία των δύο ΣΑΤΦ, δηλαδή από την επίλυση των αλγεβρικών εξισώσεων (3.33) και (3.34).

Πιο συγκεκριμένα, οι εξισώσεις ισορροπίας του συστήματος είναι οι:

$$V_h{}^o = \sqrt{g(r_1, r_2, G)} \tag{4.1}$$

για το ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ, και

$$V_m{}^o = \sqrt{h(r_1, r_2, G)} \tag{4.2}$$

για το ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ.

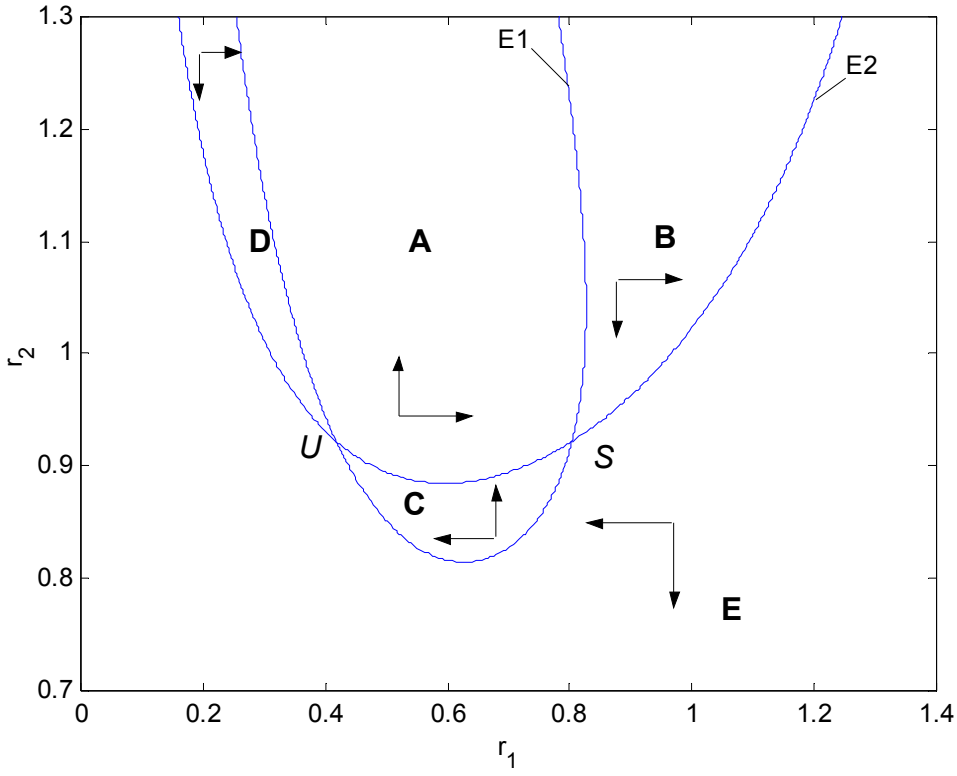
Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις τις εκφράσεις των μέτρων των τάσεων V_h και V_m, όπως δίνονται από τις σχέσεις (3.29) και (3.30) αντίστοιχα, και θεωρώντας ότι οι τάσεις αναφοράς είναι ίσες με τη μονάδα, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση $V_h^o = V_m^o = 1$, προκύπτουν οι επόμενες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} & r_1^4 \cdot (r_2^4 \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2) + G^2 \cdot x_1 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 \cdot r_2^2)) \; + \\ & r_1^2 \cdot (2 \cdot G^2 \cdot x \cdot (x_1 + r_2^2 \cdot x_2) - r_2^4 \cdot V_G^2 \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2)) \; + \\ & G^2 \cdot x^2 \; = \; 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} & r_2^4 \cdot (r_1^4 \cdot (1 + G^2 \cdot x_2^2)) \; + \\ & r_2^2 \cdot (2 \cdot G^2 \cdot x_2 \cdot r_1^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1) - r_1^2 \cdot V_G^2) \; + \\ & (G^2 \cdot (x + r_1^2 \cdot x_1)^2) \; = \; 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Με βάση τις αλγεβρικές εξισώσεις (4.3) και (4.4) κατασκευάζεται το Σχήμα 4.1.1, που αποτελεί το διάγραμμα ισορροπίας του συστήματος στο χώρο των καταστάσεων. Το συγκεκριμένο διάγραμμα σχεδιάστηκε για αγωγιμότητα φορτίου ίση με *G=2.8 αμ*, μοναδιαίες επιθυμητές τάσεις και τιμές των παραμέτρων του συστήματος όπως δίνονται στον Πίνακα 3.1. Η καμπύλη Ε1 αποτελείται από τα σημεία ισορροπίας που είναι λύσεις της (4.3), ενώ η Ε2 από τα σημεία ισορροπίας που είναι λύσεις της εξίσωσης (4.4). Τα σημεία τομής των δύο καμπυλών, που συμβολίζονται στο Σχήμα 4.1.1 ως *S* και *U*, είναι τα σημεία που ικανοποιούν και τις δύο προηγούμενες εξισώσεις, δηλαδή είναι τα σημεία ισορροπίας του συστήματος

(3.1-3.2). Όπως αναλύθηκε στην παρ. §3.3.2 τα σημεία ισορροπίας δίνονται από τις εξισώσεις (3.37) και (3.38).



Σχήμα 4.1.1 : *Περιοχές διαγράμματος ισορροπίας*

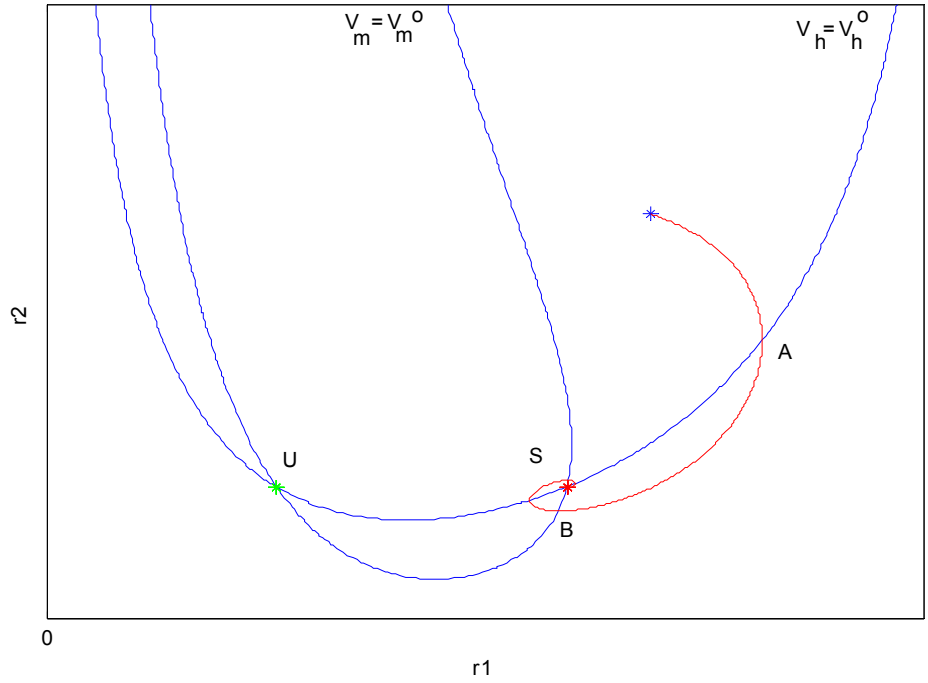
Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.1, στα διαγράμματα ισορροπίας διακρίνονται πέντε περιοχές :

- Περιοχή A :Σ' αυτήν την περιοχή ισχύει ότι $V_m > V_m^o(=1)$ και $V_h > V_h^o(=1)$ άρα και τα δύο ΣΑΤΦ όταν βρεθούν στην περιοχή αυτή πρέπει να κινηθούν, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.1) και (3.2), προς την κατεύθυνση αύξησης και των δύο λόγων μετασχηματισμού r_1 , r_2 , όπως δείχνουν τα βέλη του Σχήματος 4.1.1.
- Περιοχή B,D:Και στις δύο αυτές περιοχές ισχύει ότι $V_m < V_m^o(=1)$ και $V_h > V_h^o(=1)$, που σημαίνει ότι το πρώτο ΣΑΤΦ πρέπει να αυξήσει το λόγο μετασχηματισμού του, r_1 , ενώ το δεύτερο ΣΑΤΦ να μειώσει το r_2 , όπως φαίνεται και από τα βέλη του Σχήματος 4.1.1, πάντα σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.1)-(3.2)
- Περιοχή C :Σ' αυτήν την περιοχή ισχύει ότι $V_m > V_m^o(=1)$ και $V_h < V_h^o(=1)$, άρα το πρώτο ΣΑΤΦ πρέπει να μειώσει το λόγο μετασχηματισμού του, r_1 , ενώ το δεύτερο να αυξήσει το r_2 .

- Περιοχή Ε :Σ' αυτήν την περιοχή ισχύει ότι $V_m < V_m^o(=1)$ και $V_h < V_h^o(=1)$, οπότε και τα δύο ΣΑΤΦ πρέπει να μειώσουν τους λόγους μετασχηματισμού τους r_1 , r_2 .

4.1.2 Τροχιές και Καμπύλες Ισορροπίας

Οι κινήσεις που πραγματοποιεί το σύστημα για διάφορες αρχικές συνθήκες (r_1^o , r_2^o) και διάφορες τιμές των χρονικών σταθερών T_1, T_2, ώστε να μεταβάλλει τους λόγους μετασχηματισμού των ΣΑΤΦ, r_1, r_2, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.1) και (3.2), αποτελούν τις τροχιές του συστήματος. Στο Σχήμα 4.1.2 φαίνεται μια τροχιά καθώς και οι καμπύλες ισορροπίας του συστήματος που μελετάμε για τυχαίες αρχικές συνθήκες και τιμές των T_1, T_2. Όπως παρατηρούμε η τροχιά που εκτελεί το σύστημα κόβει, (π.χ. στο σημείο Α), την καμπύλη του πρώτου ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ) που δίνεται από τη σχέση $V_h = V_h^{\ o}$, πάντα κατακόρυφα, ενώ την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ), $V_m = V_m^{\ o}$, (π.χ. στο σημείο Β), πάντα οριζόντια.



Σχήμα 4.1.2:*Τομή των καμπυλών ισορροπίας με τις τροχιές*

Η παραπάνω παρατήρηση ισχύει γενικά για όλες τις τροχιές και τιμές των παραμέτρων του συστήματος και εξηγείται από το γεγονός ότι οι τροχιές που εκτελεί το σύστημα προκύπτουν από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων (3.1) και (3.2). Επομένως όταν το σύστημα βρίσκεται κοντά στην καμπύλη ισορροπίας του ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ, τότε η διαφορά $(V_h - V_h^{\ o})$ είναι πολύ μικρή, και συνεπώς το $\dot{r}_1$ επίσης πολύ μικρό. Άρα στην περίπτωση αυτή η μεταβολή του λόγου

μετασχηματισμού του πρώτου ΣΑΤΦ, τη στιγμή που διασχίζει η τροχιά την καμπύλη ισορροπίας $V_h = V_h^o$, είναι μηδενική, δηλαδή το r_1 τοπικά σταθερό. Κατά συνέπεια στο σημείο αυτό λειτουργεί ουσιαστικά μόνο το δεύτερο ΣΑΤΦ, με αποτέλεσμα το σύστημα να κινείται αποκλειστικά κατακόρυφα, είτε προς την αύξηση του r_2, είτε προς τη μείωση του.

Αντίστοιχα, όταν το σύστημα βρίσκεται κοντά στην καμπύλη ισορροπίας του ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ, τότε λόγω του ότι η διαφορά $(V_m - V_m^o)$ είναι πολύ μικρή, πρέπει να είναι και η μεταβολή του r_2 ελάχιστη, άρα και ο λόγος μετασχηματισμού του δεύτερου ΣΑΤΦ τοπικά σταθερός. Οπότε στην περίπτωση αυτή το σύστημα κινείται οριζόντια λόγω της μείωσης ή αύξησης του λόγου μετασχηματισμού του πρώτου ΣΑΤΦ, r_1, το οποίο λειτουργεί σχεδόν αποκλειστικά τη χρονική στιγμή αυτή.

4.1.3 Διακλάδωση Σαγματικού Κόμβου (ΔΣΚ)

Γενικά, η διακλάδωση σαγματικού κόμβου παρουσιάζεται σε ένα σύστημα όταν εξαφανίζεται (ή δημιουργείται) ένα ζευγάρι σημείων ισορροπίας, έπειτα από μια μικρή μεταβολή των παραμέτρων του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, η διακλάδωση σαγματικού κόμβου εμφανίζεται όταν λόγω μιας αλλαγής στην τιμή μιας παραμέτρου, η ορίζουσα του πίνακα κατάστασης μηδενίζεται, με αποτέλεσμα το σύστημα να έχει τουλάχιστον μία μηδενική ιδιοτιμή. Επίσης για περαιτέρω μεταβολή της παραμέτρου αυτής, το σύστημα δε θα έχει σημεία ισορροπίας.

Επιστρέφοντας τώρα στη γραμμικοποίηση του συστήματος που μελετάμε η οποία εκφράζεται από το σύστημα των εξισώσεων (3.40), παρατηρούμε ότι, όπως αναλύθηκε στην παρ. §3.3.4, η ορίζουσα του πίνακα κατάστασης, D_A, μηδενίζεται όταν η αγωγιμότητα φορτίου πάρει την τιμή :

$$G^*_{D_a=0} = \frac{r_1^2 \cdot r_2^2}{[x^2 - (r_1^2 \cdot x_1 + r_1^2 \cdot r_2^2 \cdot x_2)^2]^{\frac{1}{2}}} \tag{4.5}$$

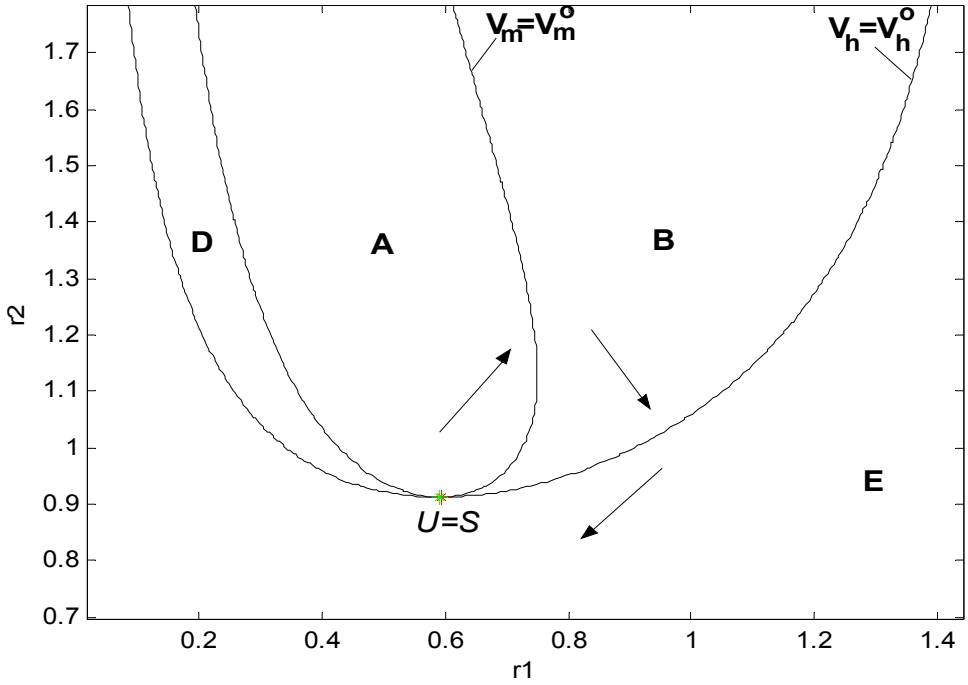
Μάλιστα όταν οι παράμετροι του συστήματος έχουν τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 3.1, τότε η τιμή αυτή της αγωγιμότητας φορτίου υπολογίζεται ότι είναι ίση με *G=2.9837 αμ*.

Επομένως συμπεραίνουμε ότι το σύστημα εμφανίζει διακλάδωση σαγματικού κόμβου όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή που δίνεται από τη σχέση (4.5), ενώ για μεγαλύτερες τιμές του *G* το σύστημα δεν θα έχει σημεία ισορροπίας, άρα θα εμφανίζει πάντα αστάθεια.

Στο Σχήμα 4.1.3 φαίνεται το διάγραμμα των καμπυλών ισορροπίας για την τιμή της αγωγιμότητας κατά την οποία εμφανίζεται διακλάδωση σαγματικού κόμβου για τις τιμές των στοιχείων του Πίνακα 3.1, δηλαδή για αγωγιμότητα ίση με *G=2.9837 αμ*. Όπως φαίνεται, το σύστημα έχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας (σημείο διακλάδωσης σαγματικού κόμβου), λόγω της συγχώνευσης των σημείων *S* και *U* που εμφανίζονται στο διάγραμμα ισορροπίας για μικρότερη τιμή της αγωγιμότητας ($G = 2.8$ *αμ*) του Σχήματος 4.1.1. Το σημείο αυτό έχει τις εξής ιδιοτιμές:

$$\lambda_1=0 \quad \text{και} \quad \lambda_2=(A_{22}/T_2)=(0.5106/T_2)$$

δηλαδή έχει μια μηδενική και μία θετική ιδιοτιμή για οποιαδήποτε τιμή του λόγου των χρονικών σταθερών T_1 και T_2. Αυτό σημαίνει πως για τις δεδομένες αριθμητικές τιμές στο σημείο διακλάδωσης σαγματικού κόμβου το σύστημα είναι ήδη ασταθές (για όλες τις τιμές των T_1 και T_2) άρα έχει υποστεί προηγουμένως, δηλαδή για μικρότερη τιμή της αγωγιμότητας, διακλάδωση Hopf (§2.3.3) και αστάθεια μέσω ταλαντώσεων.



Σχήμα 4.1.3: *Καμπύλες Ισορροπίας στο ΔΣΚ*

Επίσης, παρατηρούμε πως η περιοχή C των διαγραμμάτων ισορροπίας εκφυλίζεται σε σημείο κατά την εμφάνιση της διακλάδωσης σαγματικού κόμβου. Με βάση την παρατήρηση αυτή και την μελέτη του τρόπου που θα κινηθεί το σύστημα ξεκινώντας από την περιοχή A, μπορεί να εξηγηθεί με διαφορετικό τρόπο η αστάθεια του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα το σύστημα έχοντας αρχικές συνθήκες στη περιοχή A των διαγραμμάτων ισορροπίας, θα κινηθεί όπως δείχνει το βέλος στο Σχήμα 4.1.3 προς την περιοχή B, έπειτα θα εισέλθει στην περιοχή E, όπου λόγω του ότι δεν υπάρχει η περιοχή C όπως στο διάγραμμα του Σχήματος 4.1.1, ώστε μέσω αυτής το σύστημα να κινηθεί προς τα αριστερά και πάνω είτε για να καταλήξει στο S, είτε για να επανέλθει στην περιοχή A και να εκτελέσει ταλαντώσεις ώστε να φτάσει τελικά στο S, το σύστημα πάντα καταρρέει, δηλαδή κινείται όπως δείχνει το βέλος στην περιοχή E, προς μια κατεύθυνση όπου δεν υπάρχουν σημεία ισορροπίας. Στην περίπτωση αυτή το σημείο ισορροπίας μπορεί να προσεγγιστεί μόνο από την περιοχή D, λόγω του ενός κλάδου της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας, *U*, που όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο βρίσκεται πάντα ανάμεσα στις καμπύλες ισορροπίας των δύο ΣΑΤΦ στην περιοχή D.

4.2 ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗ HOPF ΚΑΙ ΟΜΟΚΛΙΝΗΣ ΒΡΟΧΟΣ

4.2.1 Διακλάδωση Hopf

Η διακλάδωση Hopf (ΔΗ) προκαλεί την εμφάνιση ασταθών ταλαντώσεων στο σύστημα και πραγματοποιείται όταν ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας γίνει ασταθές μέσω της αλληλεπίδρασης του με έναν οριακό κύκλο. Από πλευράς του γραμμικού συστήματος (3.40) η διακλάδωση Hopf εμφανίζεται όταν το ίχνος του πίνακα κατάστασης, trS , γίνει θετικό, ενώ η ορίζουσα D_A είναι επίσης θετική. Στην περίπτωση αυτή ένα ζεύγος συζυγών μιγαδικών διασχίζει των άξονα των φανταστικών αριθμών και περνά στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επίσης όπως έχει αναφερθεί στην εισαγωγή (§2.3.3), υπάρχουν δύο είδη διακλαδώσεων Hopf, η υπερκρίσιμη και η υποκρίσιμη. Στην υπερκρίσιμη ΔΗ ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας γίνεται ασταθές, ενώ ταυτόχρονα δημιουργείται ένας ευσταθής οριακός κύκλος. Αντίθετα, στην υποκρίσιμη ΔΗ πραγματοποιείται η συγχώνευση ενός ασταθούς οριακού κύκλου με ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας, με αποτέλεσμα αυτό να γίνει ασταθές.

Για το σύστημα (3.1-3.2) που μελετάμε και για αγωγιμότητα φορτίου $G = 2.8$ *αμ*, εμφανίζεται Υποκρίσιμη Διακλάδωση Hopf, όπως έχει παρουσιαστεί στη εργασία [1], για χρονικές σταθερές $T_1=106.385$ *sec* και $T_2=50$ *sec* ($\gamma_H(2.8)=2.1277$). Για τις τιμές αυτές των παραμέτρων το σημείο ισορροπίας S έχει τις ακόλουθες ιδιοτιμές : $\lambda_1=0.0000+0.0096j$ και $\lambda_2=0.0000-0.0096j$. Συνεπώς το σημείο ισορροπίας S γίνεται ασταθές για μεγαλύτερες τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών, γ, με αποτέλεσμα το σύστημα για αρχικές συνθήκες κοντά στο S να παρουσιάζει ασταθείς ταλαντώσεις αυξανόμενου πλάτους.

Γενικά, η αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση διακλάδωσης Hopf είναι η ύπαρξη ενός ζεύγους μιγαδικών ιδιοτιμών, το πραγματικό μέρος των οποίων κατά τη διακλάδωση Hopf μηδενίζεται και έπειτα αλλάζει πρόσημο. Άρα για να εξετάσουμε τη συνθήκη ύπαρξης διακλάδωσης Hopf στο σύστημα που μελετάμε θα πρέπει να ελέγξουμε τις ιδιοτιμές της χαρακτηριστικής εξίσωσης που δίνεται από τη σχέση (3.58) για το ευσταθές σημείο ισορροπίας, δηλαδή τις ρίζες της εξίσωσης :

$$\lambda^2 - (\frac{A_{22}}{T_2} + \frac{A_{11}}{T_1}) \cdot \lambda + \frac{D_A}{T_1 \cdot T_2} = 0 \qquad (4.6)$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση (4.6) όταν το σημείο ισορροπίας S έχει μιγαδικές ιδιοτιμές, τότε το πραγματικό μέρος αυτών των ιδιοτιμών είναι :

$$\mathrm{Re}\{\lambda\} = trS/2 \qquad (4.7)$$

επομένως για να παρουσιάσει το σύστημα διακλάδωση Hopf θα πρέπει για μια μικρή μεταβολή μιας παραμέτρου του συστήματος (π.χ. της χρονικής σταθεράς T_1) το ίχνος του πίνακα κατάστασης trS να μηδενίζεται και έπειτα να αλλάζει πρόσημο.

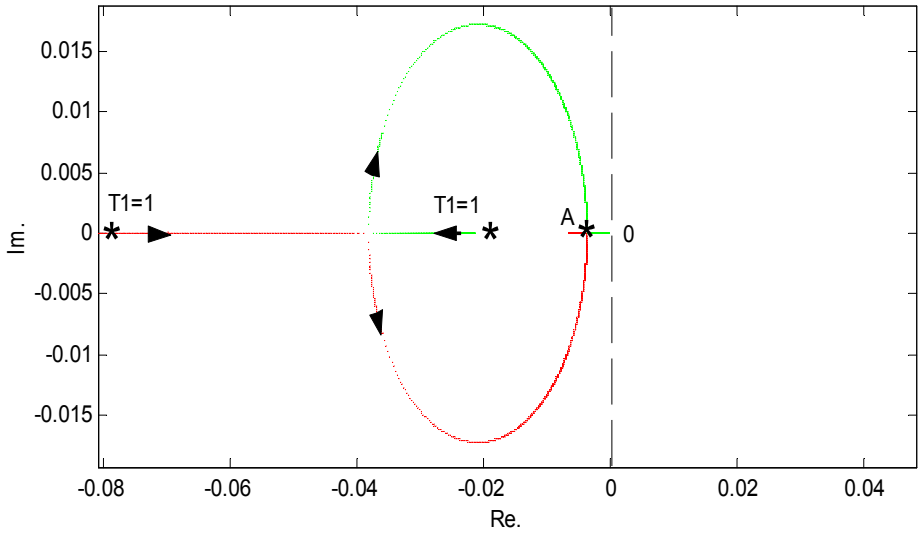
Στο Κεφάλαιο 3 (§3.3.5) είχε αποδειχτεί ότι όταν τα στοιχεία του συστήματος έχουν τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 3.1, το ίχνος του πίνακα κατάστασης trS, μπορεί να μηδενιστεί και να πάρει θετικές τιμές μόνο για τιμές αγωγιμότητας φορτίου μεγαλύτερες από $G=2.537$ *αμ*, τιμή για την οποία μηδενίζεται το στοιχείο του πίνακα κατάστασης A_{22}, ενώ για μικρότερες τιμές είναι πάντα

αρνητικό. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η εμφάνιση διακλάδωσης Hopf για την περιοχή τιμών αγωγιμότητας *0<G<2.537 αμ*. Για μεγαλύτερες όμως τιμές του *G,* το *trS* μπορεί να μηδενιστεί για ορισμένους λόγους των χρονικών σταθερών, $\gamma = T_1/T_2$. Πιο συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι το T_2 είναι σταθερό, υπάρχουν τιμές του T_1 για τις οποίες το *trS*, άρα και το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του συστήματος, μηδενίζεται ενώ για περαιτέρω αύξηση της χρονικής σταθεράς T_1 ο αρνητικός όρος του ίχνους ($A_{11}/T_1<0$) μειώνεται με αποτέλεσμα το *trS* να αλλάξει πρόσημο και να γίνεται θετικό. Δηλαδή για αγωγιμότητες με τιμή μεγαλύτερη από *G=2.537 αμ* μπορεί να εμφανιστεί διακλάδωση Hopf στο σύστημα, για κάποια τιμή της παραμέτρου του συστήματος T_1 (εφ'όσον η χρονική σταθερά T_2 παραμένει σταθερή).

4.2.2 Διαγράμματα Τόπου Ριζών

Τα συμπεράσματα της παρ. §4.2.1 γίνονται πιο σαφή αν μελετήσουμε τον γεωμετρικό τόπο των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης (4.6). Στα Σχήματα 4.2.1, 4.2.2 και 4.2.3 κατασκευάζονται οι παραπάνω τόποι για τις τιμές αγωγιμότητας φορτίου *G=2 αμ, G=2.537 αμ* και *G=2.8 αμ* αντίστοιχα.

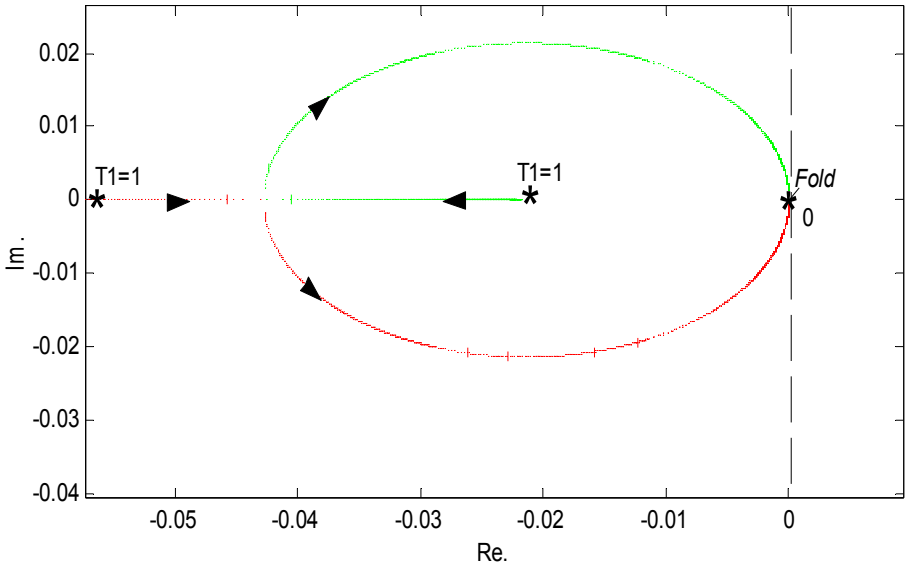
Στο Σχήμα 4.2.1 φαίνεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών του σημείου ισορροπίας *S* για *G=2 αμ* και T_2*=50 sec* ενώ η τιμή του T_1 μεταβάλλεται από *1* έως *10.000 sec*. Πιο συγκεκριμένα αρχικά, για μικρές τιμές του T_1 οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αρνητικές (η μία αυξάνει ενώ η άλλη μειώνεται όπως δείχνουν τα βέλη του Σχήματος). Καθώς αυξάνεται το T_1 οι ιδιοτιμές γίνονται μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος μέχρις ότου γίνουν και πάλι πραγματικές για ακόμη μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου T_1. Εφ' όσον ο γεωμετρικός τόπος των ριζών βρίσκεται για όλες τις τιμές του T_1 στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο, συμπεραίνεται ότι για αυτήν την τιμή της αγωγιμότητας δεν εμφανίζεται διακλάδωση Hopf. Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε εξετάζοντας τους γεωμετρικούς τόπους των ιδιοτιμών του σημείου ισορροπίας *S* για όλες τις τιμές της αγωγιμότητας στην περιοχή *0<G<2.537 αμ* αφού ποιοτικά έχουν ίδια μορφή με αυτόν του Σχήματος 4.2.1.



Σχήμα 4.2.1: *Γεωμετρικός τόπος των ριζών για G=2 αμ*

Επίσης, παρατηρώντας το Σχήμα 4.2.1 βλέπουμε ότι οι πραγματικές ιδιοτιμές του συστήματος για τις μεγάλες τιμές του T_1 (δηλαδή όταν οι ιδιοτιμές ξαναγίνονται πραγματικές στο σημείο Α του Σχήματος 4.2.1 είναι πάντα αρνητικές, ενώ η μία από αυτές για πολύ μεγάλο T_1 (πρακτικά άπειρο) πλησιάζει το μηδέν, χωρίς όμως να το φτάνει οπότε δεν έχουμε διακλάδωση σαγματικού κόμβου. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας S του συστήματος (3.1-3.2) είναι ευσταθές για τιμές αγωγιμότητας στην περιοχή $0<G<2.537$ *αμ*, για οποιαδήποτε τιμή του λόγου γ, και γίνεται σαγματικό μόνο όταν ο λόγος αυτός απειριστεί.

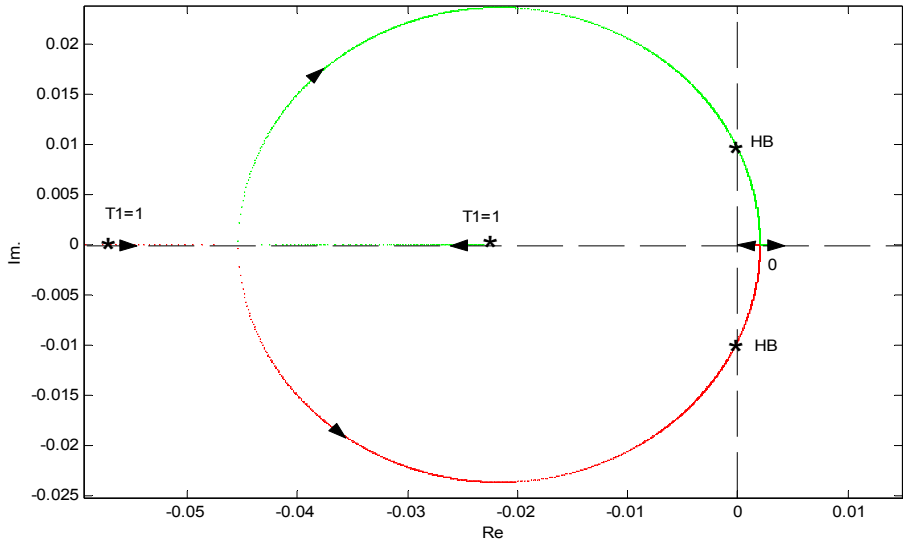
Στο Σχήμα 4.2.2 φαίνεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών του σημείου ισορροπίας S για $G=2.537$ *αμ* και $T_2=50$ *sec* ενώ η τιμή του T_1 μεταβάλλεται από *1* έως 1*5.000 sec*. Πιο συγκεκριμένα αρχικά, για μικρές τιμές του T_1 οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αρνητικές. Καθώς αυξάνεται το T_1 οι ιδιοτιμές γίνονται μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος μέχρις ότου γίνουν και πάλι πραγματικές για ακόμη μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου T_1. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο για όλες τις τιμές του T_1, ενώ καθώς η παράμετρος T_1 τείνει στο άπειρο στο σύστημα εμφανίζεται δίπλωση (fold) [23] αφού τότε οι ιδιοτιμές της χαρακτηριστικής εξίσωσης μηδενίζονται ταυτόχρονα. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών του Σχήματος 4.2.2 αποτελεί οριακή περίπτωση εφ'όσον για μεγαλύτερες τιμές της αγωγιμότητας θα εμφανίζεται διακλάδωση Hopf καθώς και αστάθεια με ταλαντώσεις αφού από αυτήν την τιμή και μετά ο τόπος των ριζών θα έχει ποιοτικά την μορφή του Σχήματος 4.2.3.



Σχήμα 4.2.2: *Γεωμετρικός τόπος των ριζών για G=2.537 αμ*

Στο Σχήμα 4.2.3 φαίνεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος των ιδιοτιμών του σημείου ισορροπίας S για $G=2.8$ *αμ* και $T_2=50$ *sec* ενώ η τιμή του T_1 μεταβάλλεται από *1* έως *3.000 sec*. Πιο συγκεκριμένα αρχικά, για μικρές τιμές του T_1 οι ιδιοτιμές είναι πραγματικές και αρνητικές. Καθώς αυξάνεται το T_1 οι ιδιοτιμές γίνονται συζυγείς μιγαδικές με αρνητικό πραγματικό μέρος μέχρις ότου διασχίσουν τον άξονα των φανταστικών και συνεχίσουν να είναι μιγαδικές αλλά σ'αυτήν την περίπτωση με θετικό πραγματικό μέρος. Για ακόμα μεγαλύτερες τιμές της

παραμέτρου T_1 οι ιδιοτιμές γίνονται και πάλι πραγματικές και θετικές, ενώ όταν το T_1 τείνει στο άπειρο οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι πραγματικές και η μία ιδιοτιμή τείνει στο μηδέν. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών για $G=2.8$ *αμ,* βρίσκεται για κάποιες τιμές της παραμέτρου T_1 και στο δεξί μιγαδικό επίπεδο, με αποτέλεσμα να εμφανίζεται τόσο διακλάδωση Hopf άρα και αστάθεια αφού το σημείο ισορροπίας S έχει τουλάχιστον μία θετική ιδιοτιμή (ή μιγαδικές ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος) για αρκετές τιμές του T_1. Επίσης όπως αναφέρθηκε προηγουμένως ο γεωμετρικός των ριζών έχει ποιοτικά τη μορφή του Σχήματος 4.2.3 και για άλλες τιμές της αγωγιμότητας στην περιοχή $2.537<G<2.9837$ *αμ*. Δηλαδή για αυτές τις τιμές του G εμφανίζεται διακλάδωση Hopf, πριν τη διακλάδωση σαγματικού κόμβου.



Σχήμα 4.2.3: *Γεωμετρικός τόπος των ριζών για G=2.8 αμ*

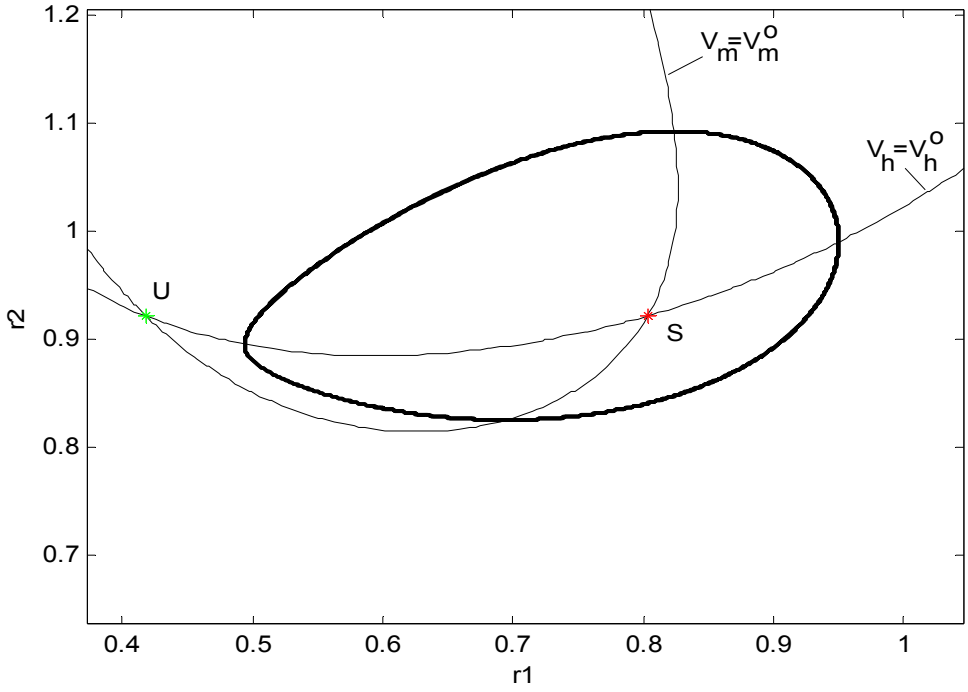
4.2.3 Ομοκλινής Βρόχος – Ασταθής Οριακός Κύκλος

Οριακός κύκλος ενός συστήματος n διαφορικών εξισώσεων είναι μια απομονωμένη κλειστή τροχιά στο n-διάστατο χώρο των καταστάσεων. Ο οριακός κύκλος είναι ασταθής όταν όλες οι τροχιές με αρχικές συνθήκες κοντά σε αυτόν, απομακρύνονται από αυτόν καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο.

Οι ασταθείς οριακοί κύκλοι έχουν όπως και τα σημεία ισορροπίας αναλλοίωτες πολλαπλότητες, όπως έχει αναφερθεί στην παρ. §2.2.3. Μάλιστα στο χώρο των δύο διαστάσεων, η ευσταθής πολλαπλότητα του ασταθούς οριακού κύκλου, δηλαδή το σύνολο των σημείων από τα οποία αν ξεκινήσει το σύστημα τότε θα καταλήγει πάντα στον οριακό κύκλο είναι ο ίδιος ο οριακός κύκλος, και κατά συνέπεια η ασταθής πολλαπλότητα του ασταθούς οριακού κύκλου είναι ο υπόλοιπος δισδιάστατος χώρος των καταστάσεων.

Στην εργασία [1] έχει μελετηθεί αναλυτικά η δημιουργία ενός ασταθούς οριακού κύκλου στο σύστημα των εξισώσεων (3.1) και (3.2). Πιο συγκεκριμένα στο Σχήμα 4.2.4 παρουσιάζεται ένας οριακός κύκλος για τιμή αγωγιμότητας φορτίου ίση με $G=2.8$ *αμ* και χρονικές σταθερές $T_1=71sec$ και $T_2=50$ *sec* $(\gamma=1.42)$. Όπως έχει

αναλυθεί στην [1], η περαιτέρω αύξηση της παραμέτρου του συστήματος T_1 θα έχει ως συνέπεια τη συνεχή συρρίκνωση του ασταθούς οριακού κύκλου, μέχρις ότου το T_1 πάρει την τιμή $T_1=106.385\ sec\ (\gamma_H(2.8)=2.1277)$, όπου ο οριακός κύκλος ταυτίζεται με το ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*, δηλαδή εμφανίζεται η υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf, που αναφέραμε στην παρ. §4.3.1 .



Σχήμα 4.2.4: *Ασταθής οριακός Κύκλος*

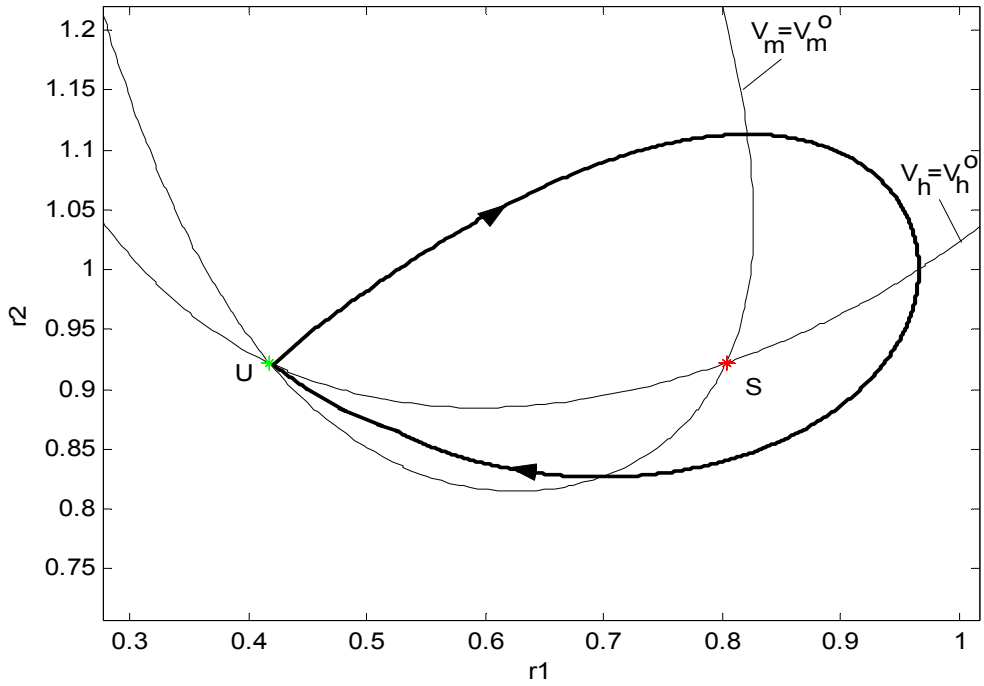
Από τα προηγούμενα γίνεται σαφές ότι πριν την εμφάνιση διακλάδωσης Hopf στο σύστημα υπάρχει οριακός κύκλος για μικρότερες τιμές της παραμέτρου T_1. Επομένως πρόκειται για υποκρίσιμη διακλάδωση Hopf. Επομένως, με βάση τα συμπεράσματα της παρ. §4.2.2 μπορούμε να πούμε ότι το σύστημα που μελετάμε μπορεί να παρουσιάζει ασταθή οριακό κύκλο όταν η αγωγιμότητα του φορτίου βρίσκεται στην περιοχή των τιμών $2.537<G<2.9837\ \alpha\mu$.

Η διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου [4] εμφανίζεται σε ένα σύστημα όταν για κάποια τιμή μιας παραμέτρου ο ένας κλάδος της ευσταθούς και ο ένας κλάδος της ασταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας ταυτιστούν. Αποτέλεσμα της ταύτισης αυτής είναι η δημιουργία μιας κλειστής καμπύλης που ξεκινάει και καταλήγει στο ασταθές σημείο ισορροπίας ενώ περικλείει το ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου ανήκει στην κατηγορία των υπερτοπικών διακλαδώσεων, συνεπώς οι ιδιοτιμές των σημείων ισορροπίας δε δίνουν καμία πληροφορία για την ύπαρξη ή μη της διακλάδωσης ομοκλινούς βρόχου. Επομένως η εύρεση μιας συνθήκης που θα εξασφάλιζε την ύπαρξη της και θα προσδιόριζε την τιμή της παραμέτρου για την οποία εμφανίζεται μπορεί να πραγματοποιηθεί είτε με τη μελέτη του θεωρήματος του Melnikov [14], είτε πειραματικά.

Πάντως, εφ'όσον η ύπαρξη υποκρίσιμης διακλάδωσης Hopf προϋποθέτει την εμφάνιση προηγουμένως ενός ασταθούς οριακού κύκλου μέσω παραδείγματος χάριν μιας διακλάδωσης ομοκλινούς βρόχου, μπορούμε να υποθέσουμε την ύπαρξη της αν ικανοποιείται η συνθήκη εμφάνισης διακλάδωσης Hopf. Οπότε σύμφωνα με τα συμπεράσματα της παρ. §4.2.2 μπορούμε να πούμε ότι διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου μπορεί να παρουσιαστεί στο σύστημα (3.1-3.2) που μελετάμε εφ' όσον η αγωγιμότητα του φορτίου βρίσκεται στην περιοχή των τιμών $2.537<G<2.9837$ *αμ*.

Στο Σχήμα 4.2.5 παρουσιάζεται η περίπτωση δημιουργίας ομοκλινούς βρόχου για τιμή αγωγιμότητας φορτίου ίση με $G=2.8$ *αμ* και χρονικές σταθερές $T_1=64.4$*sec* και $T_2=50$ *sec* ($\gamma_{OB}(2.8)=1.288$), η οποία έχει αναλυθεί στην εργασία [1].



Σχήμα 4.2.5: *Διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου*

4.3 ΠΕΡΙΟΧΗ ΕΛΞΗΣ ΕΥΣΤΑΘΟΥΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

4.3.1 Γενικά

Η περιοχή έλξης ενός ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας ορίζεται ως η μεγαλύτερη περιοχή στην οποία αν βρεθεί το σύστημα θα συγκλίνει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας. Στο σύστημα που μελετάμε ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας είναι το σημείο *S* των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας για τις περισσότερες τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών, γ, στην περιοχή τιμών αγωγιμότητας $0<G<2.9837$ *αμ*.

Στα μη γραμμικά συστήματα η περιοχή έλξης των ευσταθών σημείων ισορροπίας δεν είναι ολόκληρος ο χώρος των καταστάσεων, δηλαδή η περιοχή έλξης μπορεί να είναι φραγμένη. Γενικά η περιοχή έλξης σε ένα σύστημα με δύο μεταβλητές κατάστασης, φράσσεται είτε από τους δύο κλάδους της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας (που συμβολίζεται στα διαγράμματα καμπυλών ισορροπίας του συστήματος (3.1-3.2) ως *U*), είτε από την ευσταθή πολλαπλότητα του ασταθούς οριακού κύκλου (η οποία στις δύο διαστάσεις ταυτίζεται με τον ίδιο τον οριακό κύκλο) εφ'όσον αυτός υπάρχει.

Στην ενότητα 4.2 αναλύθηκε η συνθήκη για την οποία το σύστημα (3.1-3.2) παρουσιάζει διακλάδωση Hopf. Η ίδια συνθήκη ισχύει και για την εμφάνιση ομοκλινούς βρόχου ή ασταθούς οριακού κύκλου, ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου T_1. Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν όταν τα στοιχεία του συστήματος έχουν τιμές όπως δίνονται στον Πίνακα 3.1, ήταν ότι για τις τιμές της αγωγιμότητας φορτίου $0<G<2.537$ *αμ*, στο σύστημα δεν παρουσιάζεται διακλάδωση Hopf και το σημείο ισορροπίας *S* είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (αφού έχει αρνητικές ιδιοτιμές ή μιγαδικές ιδιοτιμές με αρνητικά πραγματικά μέρη) για όλες τις τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών *γ*. Για την περιοχή των τιμών αγωγιμότητας $2.537<G<2.9837$ *αμ*, το σύστημα εμφανίζει διακλάδωση Hopf, άρα και ομοκλινή βρόχο ή ασταθή οριακό κύκλο, και το σημείο ισορροπίας *S* έχει και θετικές ιδιοτιμές όπως και μιγαδικές ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος, οπότε μπορεί να γίνει ασταθές για κάποιες τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών των ΣΑΤΦ, *γ*.

Με βάση τα συμπεράσματα αυτά αναλύεται στις επόμενες παραγράφους η περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας *S* για τις διάφορες τιμές της αγωγιμότητας *G*.

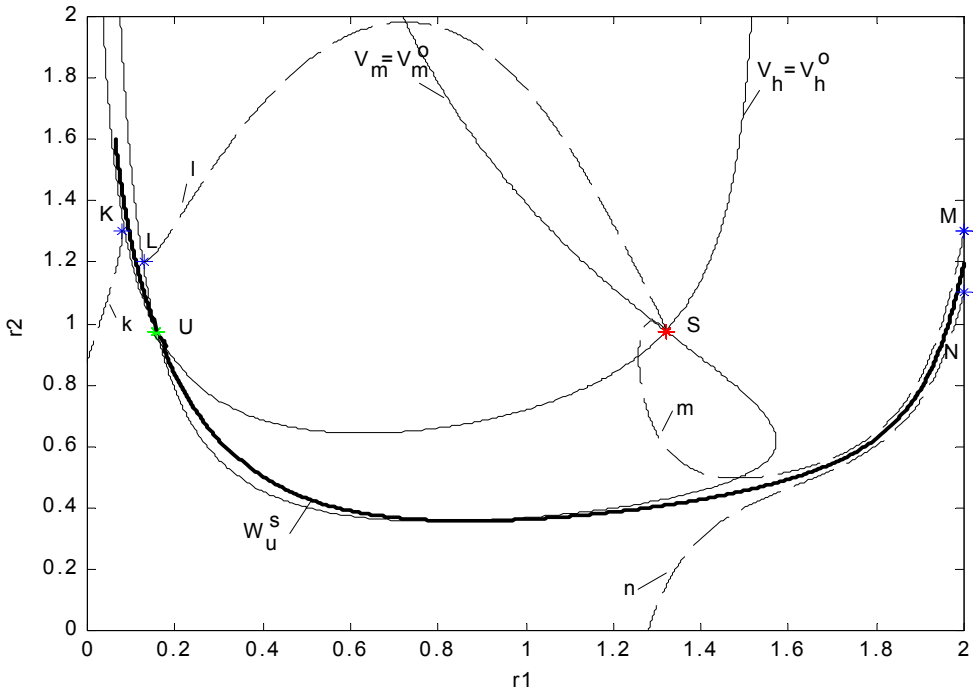
4.3.2 Ευσταθείς πολλαπλότητες ασταθούς σημείου ισορροπίας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, στην περιοχή τιμών $0<G<2.537$ *αμ* της αγωγιμότητας φορτίου, δεν εμφανίζονται ασταθείς οριακοί κύκλοι, οπότε η περιοχή έλξης του ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας, *S,* φράσσεται για όλες τις τιμές του λόγου *γ* από τους δύο κλάδους της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας, *U*. Γενικά το μέγεθος της περιοχής έλξης επηρεάζεται από τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος, οι οποίες είναι η τιμή της αγωγιμότητας φορτίου *G* και οι χρονικές σταθερές των δύο ΣΑΤΦ, T_1, T_2. Για το λόγο αυτό είναι σημαντικό να μελετηθεί η περιοχή έλξης του *S* για διάφορες τιμές του *G* και του λόγου *γ*, αφού ουσιαστικά οι σχετικές τιμές, δηλαδή ο λόγος των χρονικών σταθερών T_1, T_2, επηρεάζει την περιοχή έλξης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, στην ανάλυση που ακολουθεί έχει θεωρηθεί ότι η χρονική σταθερά του δεύτερου ΣΑΤΦ, παραμένει σταθερή και ίση με $T_2=50$ *sec*, ενώ του πρώτου μεταβλητή, και εξετάζονται οι ευσταθείς πολλαπλότητες του ασταθούς σημείου ισορροπίας για δύο διαφορετικές τιμές του *G* πάντα στην περιοχή τιμών $0<G<2.537$ *αμ*.

Στο Σχήμα 4.3.1 έχει κατασκευαστεί το πορτραίτο φάσεων του συστήματος που μελετάμε για τιμή αγωγιμότητας ίση με $G=1.5$ *αμ* και χρονική σταθερά του πρώτου ΣΑΤΦ, $T_1=218$ *sec* ($\gamma=4.36$). Αναλυτικότερα, στο Σχήμα φαίνονται οι καμπύλες ισορροπίας του συστήματος, τα σημεία ισορροπίας *S* και *U*, οι δύο κλάδοι

της ευσταθούς πολλαπλότητας του U με έντονες μαύρες γραμμές (W_u^s), και τέλος με διακεκομμένες γραμμές οι τροχιές k, l, n, m, που θα διαγράψει το σύστημα όταν έχει αρχικές συνθήκες πολύ κοντά στους κλάδους της ευσταθούς πολλαπλότητας του U (οι αρχικές συνθήκες για τις τροχιές k, l, m, n σημειώνονται με τα σημεία K, L, M, N, αντίστοιχα).

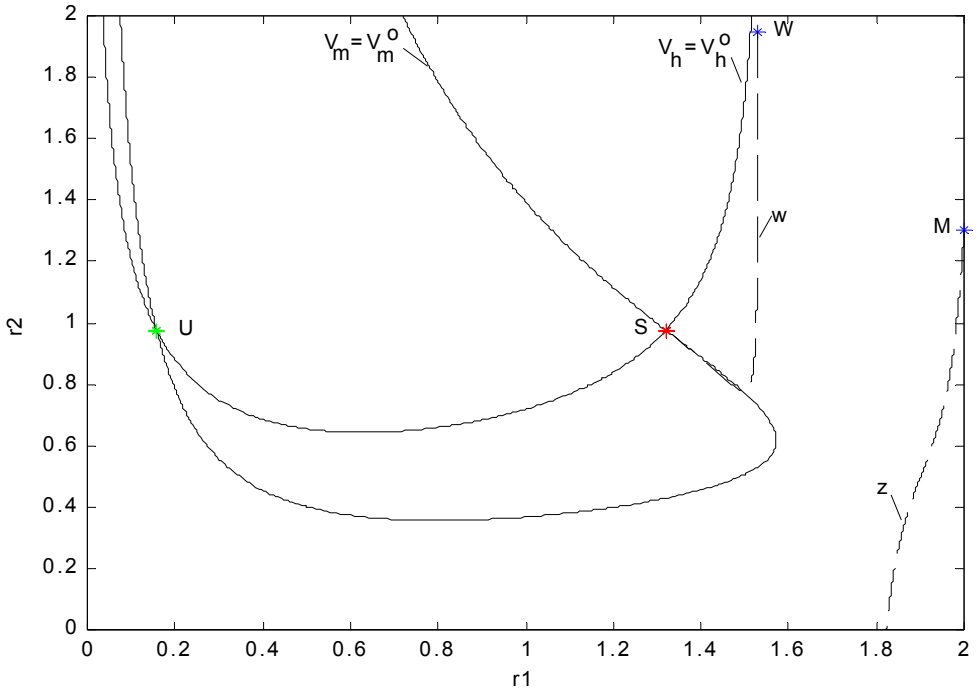


Σχήμα 4.3.1 : *Ευσταθής πολλαπλότητα του U για G=1.5 αμ και T_1=218 sec*

Παρατηρούμε ότι ενώ η τιμή της χρονικής σταθεράς T_1 είναι υψηλή, η περιοχή έλξης που βρίσκεται άνω των κλάδων της πολλαπλότητας W_u^s, είναι ευρεία και περιλαμβάνει ολόκληρες τις περιοχές A, B, των καμπυλών ισορροπίας που είχαμε δει στο Σχήμα 4.1.1, όπως και σημαντικό μέρος των περιοχών D, C και της E. Αυτό σημαίνει πως το σύστημα είναι ευσταθές και μάλιστα μονότονα ευσταθές όπως φαίνεται από τις τροχιές m, l, του Σχήματος 4.3.1, για ένα μεγάλο εύρος αρχικών συνθηκών .

Επίσης στο Σχήμα 4.3.2 φαίνονται ακόμη δύο τροχιές του συστήματος για τιμή αγωγιμότητας *G=1.5 αμ* αλλά για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου T_1. Πιο συγκεκριμένα έχει σχεδιαστεί η τροχιά z, η οποία έχει ίδιες αρχικές συνθήκες με την τροχιά m του Σχήματος 4.3.1, αλλά σ' αυτήν την περίπτωση η χρονική σταθερά του πρώτου ΣΑΤΦ έχει μεγαλύτερη τιμή, T_1*=300 sec (γ=6)*. Όπως φαίνεται σε αντίθεση με την τροχιά m, η τροχιά z είναι ασταθής, δηλαδή βρίσκεται έξω από την περιοχή έλξης του S ή διαφορετικά κάτω από την ευσταθή πολλαπλότητα του U, οπότε συμπεραίνουμε ότι καθώς αυξάνει η τιμή της παραμέτρου T_1, η περιοχή έλξης του S συρρικνώνεται λόγω της μετακίνησης της πολλαπλότητας W_u^s προς τα πάνω και αριστερά. Παρ' όλα αυτά, αν παρατηρήσουμε την τροχιά w του Σχήματος 4.3.2, η οποία έχει αρχικές συνθήκες (σημείο W) πολύ κοντά στα όρια της περιοχής B των

καμπυλών ισορροπίας και χρονική σταθερά $T_1=2000$ *sec* (δηλαδή πρακτικά άπειρη τιμή), ή διαφορετικά $\gamma=40$, θα συμπεράνουμε ότι η περιοχή Β θα βρίσκεται πάντα εντός της περιοχής έλξης του *S* για *G=1.5 αμ* όσο κι αν αυξηθεί η τιμή του λόγου γ των χρονικών σταθερών. Η παρατήρηση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική και θα εξηγηθεί αναλυτικότερα στο κεφάλαιο 5.

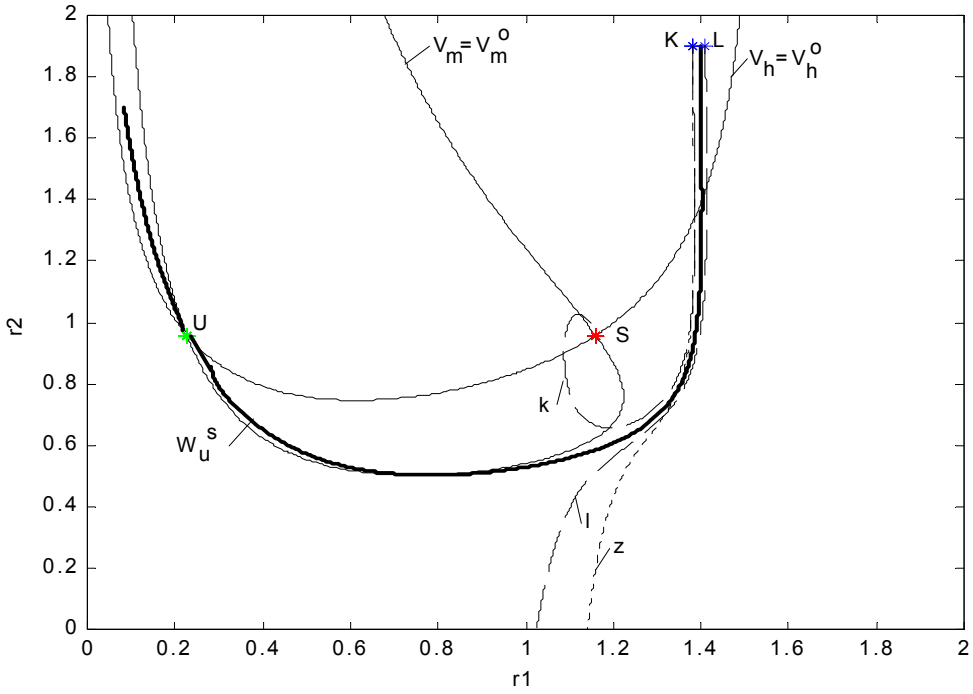


Σχήμα 4.3.2 : *Τροχιές για μεγάλες τιμές της παραμέτρου T_1 και G=1.5 αμ*

Στο Σχήμα 4.3.3 έχει κατασκευαστεί το πορτραίτο φάσεων του συστήματος που μελετάμε για τιμή αγωγιμότητας ίση με *G=2 αμ* και χρονική σταθερά του πρώτου ΣΑΤΦ, $T_1=450$ *sec* ($\gamma=9$). Αναλυτικότερα, στο Σχήμα φαίνονται οι καμπύλες ισορροπίας του συστήματος, τα σημεία ισορροπίας *S* και *U*, οι δύο κλάδοι της ευσταθούς πολλαπλότητας του *U* με έντονες μαύρες γραμμές (W_u^s), και τέλος με διακεκομμένες γραμμές οι τροχιές k, l, που θα διαγράψει το σύστημα όταν έχει αρχικές συνθήκες πολύ κοντά στους κλάδους της πολλαπλότητας W_u^s (οι αρχικές συνθήκες για τις τροχιές k, l σημειώνονται με τα σημεία K, L αντίστοιχα). Επίσης διαγράφεται και η τροχιά z η οποία έχει αρχικές συνθήκες στο σημείο K, αλλά η τιμή της παραμέτρου σ' αυτήν την περίπτωση είναι $T_1=650$ *sec* ($\gamma=13$).

Παρατηρούμε ότι για την μεγαλύτερη τιμή αγωγιμότητας φορτίου, *G=2 αμ*, η περιοχή έλξης έχει συρρικνωθεί σημαντικά με αποτέλεσμα να περιλαμβάνει πολύ μικρότερο μέρος της περιοχής Ε των διαγραμμάτων ισορροπίας και επίσης να χωρίζει την περιοχή Β σε δύο μέρη σχεδόν κατακόρυφα, ένα εντός της περιοχής έλξης και ένα εκτός. Επίσης από το γεγονός ότι η τροχιά z, με σημαντικά μεγαλύτερη τιμή της παραμέτρου T_1, είναι ασταθής και άρα βρίσκεται κάτω από την ευσταθή πολλαπλότητα του ασταθούς σημείου ισορροπίας στην οποία η τιμή της

παραμέτρου είναι T_1=*650 sec*, συμπεραίνουμε ότι καθώς αυξάνεται το T_1 η περιοχή έλξης συρρικνώνεται ακόμα περισσότερο.



Σχήμα 4.3.3 : *Ευσταθής πολλαπλότητα του U για G=2 αμ και T_1=450 sec*

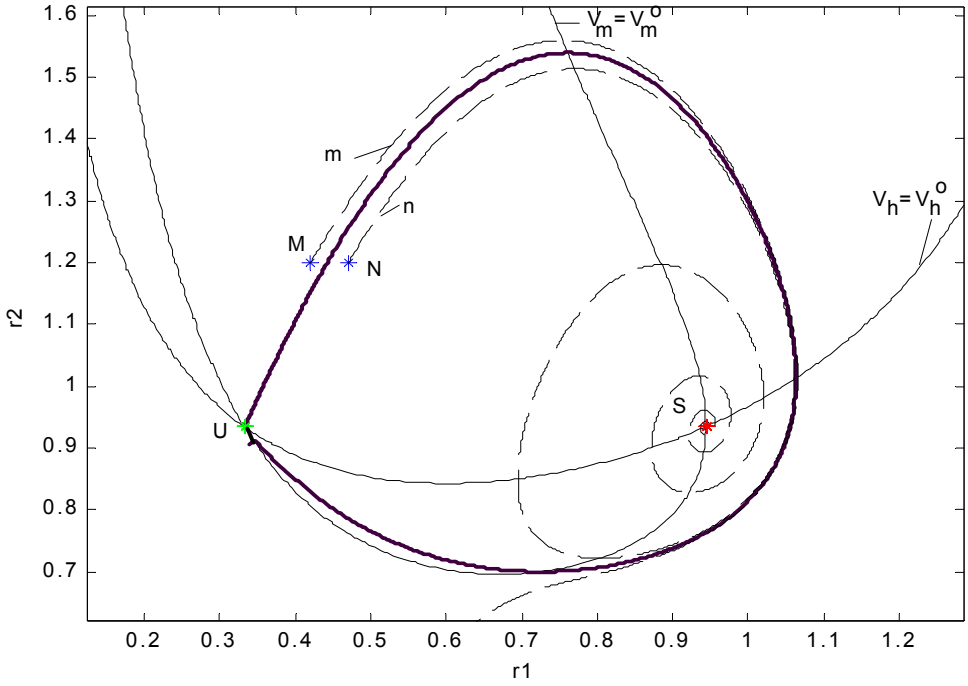
4.3.3 Ασταθής οριακός Κύκλος

Ας θεωρήσουμε πάλι ότι το σύστημα έχει δύο παραμέτρους, την αγωγιμότητα φορτίου *G* και το λόγο των χρονικών σταθερών *γ* (την τιμή του οποίου μεταβάλλουμε αλλάζοντας μόνο την τιμή της χρονικής σταθεράς του πρώτου ΣΑΤΦ T_1 και κρατώντας σταθερή αυτήν του δεύτερου ΣΑΤΦ ίση με T_2=*50sec*). Με βάση τις παραδοχές αυτές, υπάρχουν κάποιες τιμές του *G*, που όταν τα στοιχεία του συστήματος έχουν τις τιμές του Πίνακα 3.1 είναι όλη η περιοχή *2.537<G<2.9837 αμ*, οι οποίες επιτρέπουν για κάποια τιμή του λόγου *γ*, έστω $\gamma_H(G)$, την εμφάνιση διακλάδωσης Hopf. Επειδή όμως όπως είδαμε στην παρ. §4.2.3 η διακλάδωση είναι υποκρίσιμη, πριν από τη ΔΗ για κάποια τιμή του λόγου *γ*, έστω $\gamma_{OB}(G)$ μικρότερη της $\gamma_H(G)$, εμφανίζεται διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου στο σύστημα. Ακόμη για τις τιμές του λόγου *γ* μεταξύ των $\gamma_H(G) < \gamma < \gamma_{OB}(G)$ υπάρχει ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος φράσσει την περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας S.

Στη συνέχεια εξετάζεται η εμφάνιση ασταθών οριακών κύκλων και ομοκλινών βρόχων, για την περιοχή τιμών *2.537<G<2.9837 αμ* της αγωγιμότητας φορτίου.

Στο Σχήμα 4.3.4 έχει κατασκευαστεί το πορτραίτο των φάσεων του συστήματος για την τιμή της αγωγιμότητας *G=2.537 αμ*, η οποία και αποτελεί την οριακή περίπτωση εμφάνισης διακλάδωσης ομοκλινούς βρόχου, για χρονική

σταθερά T_1=*244.8449614 sec*, άρα $\gamma_{OB}(2.537)$ =*4.897*. Όπως φαίνεται και στο Σχήμα το πορτραίτο των φάσεων για τις παραμέτρους *G=2.537 αμ* και T_1=*244.8449614 sec* αποτελεί τον ομοκλινή βρόχο του συστήματος, ο οποίος προκύπτει από την ταύτιση του ενός κλάδου της ασταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας με τον ένα κλάδο της ευσταθούς. Επίσης έχουν σχεδιαστεί οι τροχιές m, n, με αρχικές συνθήκες που σημειώνονται ως M, N αντίστοιχα. Οι δύο τροχιές αυτές ξεκινούν πολύ κοντά από τον ομοκλινή βρόχο, η m έξω από αυτόν και η n μέσα σ' αυτόν. Όπως αναμενόταν η τροχιά m αποκλίνει ενώ η n συγκλίνει, αφού στη φάση αυτή η περιοχή έλξης του ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας *S* οριοθετείται από τον ομοκλινή βρόχο.

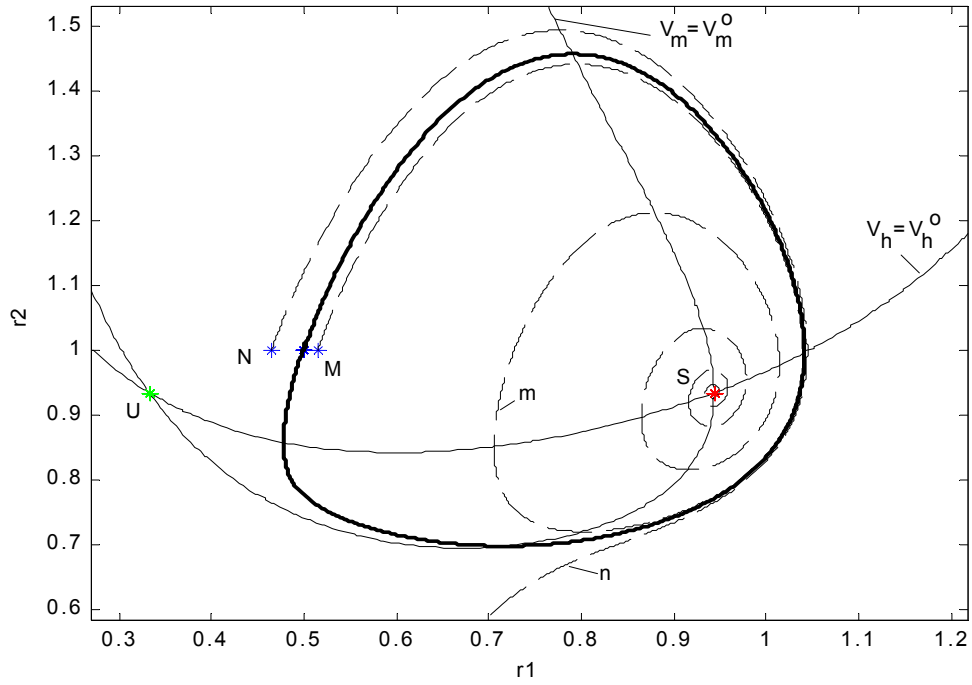


Σχήμα 4.3.4 : *Ομοκλινής Βρόχος για G=2.537 αμ*

Στο Σχήμα 4.3.5 κατασκευάζεται το πορτραίτο των φάσεων πάλι για τιμή αγωγιμότητας *G=2.537 αμ* αλλά για διαφορετική τιμή της παραμέτρου T_1, T_1=*300.9343 sec (γ=6.02)*. Στο πορτραίτο αυτό φαίνεται με έντονη γραμμή ο οριακός κύκλος που εμφανίζεται στο σύστημα καθώς και δύο τροχιές n, m που έχοντας και οι δύο αρχικές συνθήκες κοντά στον ασταθή οριακό κύκλο η μία συγκλίνει και η άλλη αποκλίνει.

Οπότε για την τιμή της χρονικής σταθεράς του πρώτου ΣΑΤΦ, T_1=*300.9343sec,* η περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας, *S*, φράσσεται από έναν ασταθή οριακό κύκλο και όπως παρατηρούμε είναι αρκετά πιο συρρικνωμένη σε σχέση με το πορτραίτο του Σχήματος 4.3.4. Γενικά, καθώς η τιμή της παραμέτρου *γ* αυξάνεται, ο ασταθής οριακός κύκλος θα συρρικνώνεται έως ότου ταυτιστεί με το σημείο ισορροπίας *S* (διακλάδωση δίπλωσης) όταν ο λόγος των χρονικών σταθερών πάρει την τιμή $\gamma_{Fold}(2.537)$, που όπως εξηγήσαμε με τη

βοήθεια του τόπου ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στην παρ. §4.2.2 είναι πρακτικά άπειρη.



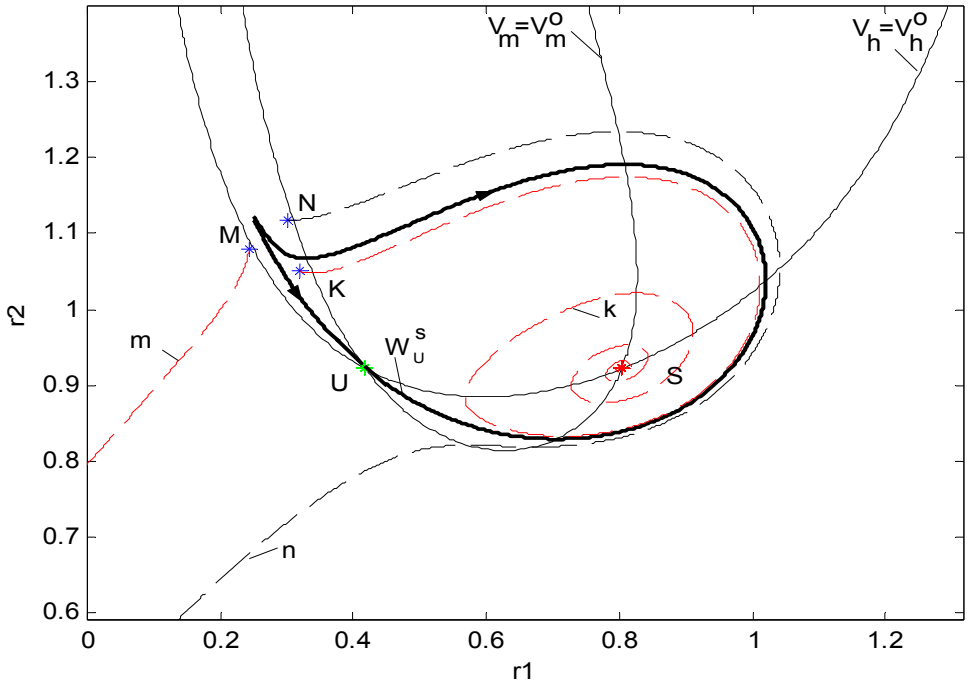
Σχήμα 4.3.5 : *Ασταθής Οριακός Κύκλος για G=2.537 αμ και T_1=300.9343 sec*

Για ακόμα μεγαλύτερη τιμή της αγωγιμότητας φορτίου, *G=2.8 αμ*, τα πορτραίτα των φάσεων για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου T_1 και ενώ το T_2 παραμένει σταθερό, έχουν αναλυθεί διεξοδικά στην εργασία [1]. Παρακάτω έχουν κατασκευαστεί άλλα πορτραίτα φάσεων για την ίδια τιμή της αγωγιμότητας (*G=2.8 αμ*), όπου σχεδιάζονται τροχιές για διάφορες τιμές του *γ* ώστε να σχολιαστεί τόσο η περιοχή έλξης όσο και η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας *S*.

Πιο αναλυτικά, στο Σχήμα 4.3.6 φαίνονται για ίσες χρονικές σταθερές, συγκεκριμένα για $T_1=T_2=50$ *sec,* δηλαδή για *γ=1*, και *G=2.8 αμ,* τρεις τροχιές του συστήματος (3.1-3.2), m, k, n, οι οποίες έχουν αρχικές συνθήκες κοντά στο ασταθές σημείο ισορροπίας *U*. Ακόμη στο ίδιο σχήμα με συνεχείς γραμμές έχουν σχεδιαστεί οι δύο κλάδοι της ευσταθούς πολλαπλότητας του *U*.

Η τροχιά m του Σχήματος 4.3.6, ξεκινώντας έξω και αριστερά από τον χώρο που οριοθετούν οι δύο κλάδοι της ευσταθούς πολλαπλότητας του *U,* αποκλίνει από το ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*, χωρίς το σύστημα να εκτελέσει ταλαντώσεις. Αντίθετα η τροχιά k που ξεκινά κοντά στις αρχικές συνθήκες της m αλλά μέσα στην περιοχή που περικλείει η ευσταθής πολλαπλότητα του *U* (W_u^s), δηλαδή από το σημείο K, συγκλίνει με ταλαντώσεις στο σημείο ισορροπίας *S*. Τέλος η τροχιά n με αρχικές συνθήκες στο σημείο N, το οποίο βρίσκεται δεξιά της περιοχής που σχηματίζει η W_u^s , αποκλίνει αφού όμως πραγματοποιήσει μια ταλάντωση γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας. Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι οι κλάδοι της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας, *U*, ορίζουν την περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας, *S*, όταν ο λόγος *γ* έχει μοναδιαία

τιμή. Επομένως η τιμή αυτή πρέπει να είναι μικρότερη από εκείνη που αντιστοιχεί στη διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου. Πράγματι όπως έχει βρεθεί στην [1] η τιμή $\gamma_{OB}(2.8)$ του λόγου των χρονικών σταθερών είναι λίγο μεγαλύτερη από τη μονάδα και ίση με : $\gamma_{OB}(2.8)=1.288$.



Σχήμα 4.3.6 : *Τροχιές με αρχικές συνθήκες κοντά στο ασταθές Σ.Ι.*

Στο Σχήμα 4.3.7 κατασκευάζονται το ευσταθές και το ασταθές ιδιοδιάνυσμα του ασταθούς σημείου ισορροπίας U που συμβολίζονται ως u_s και u_u. Ακόμη σχεδιάζονται δύο τροχιές, οι m και n, οι οποίες ξεκινούν πολύ κοντά στο ασταθές σημείο ισορροπίας U, η πρώτη δεξιά από το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s και η δεύτερη από αριστερά.

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του ασταθούς σημείου ισορροπίας προσδιορίζονται με την ανάλυση που ακολουθεί. Όταν η αγωγιμότητα φορτίου είναι ίση με $G = 2.8$ *αμ* το ασταθές σημείο ισορροπίας, U, είναι το :

$$(r_1^e = 0.4180 \ , \ r_2^e = 0.9220)$$

Ακόμη τα στοιχεία του πίνακα κατάστασης έχουν τις εξής τιμές:

$$A_{11} = 0.8581 = A_{21} \ , \ A_{12} = 1.8170 \ , \ A_{22} = 0.7324 \ \text{και} \ D_A = -0.9307$$

Από τα παραπάνω προκύπτουν οι παρακάτω ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης για το ασταθές σημείο ισορροπίας U:

$$\lambda_1 = 0.0409 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -0.0091 \ , \text{για} \ T_1 = T_2 = 50\,\text{sec} \, .$$

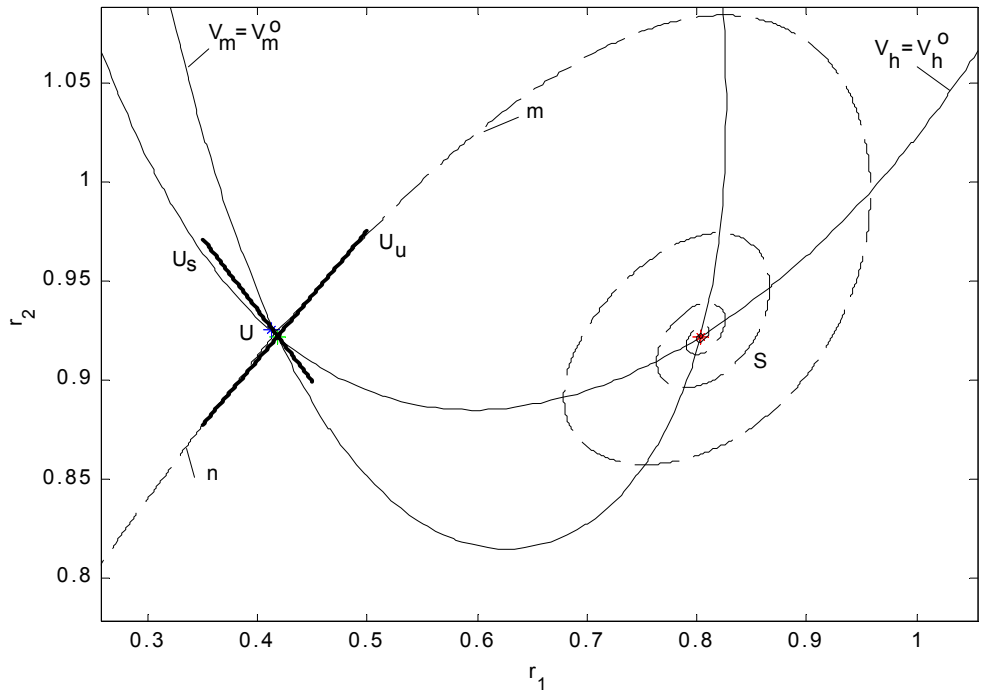
Οπότε το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα του ασταθούς σημείου ισορροπίας που δίνεται από την αρνητική ιδιοτιμή $\lambda_2 = -0.0091$ είναι το :

$$u_s = \begin{bmatrix} -1.384 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ενώ το ασταθές ιδιοδιάνυσμα του ασταθούς σημείου ισορροπίας που δίνεται από την θετική ιδιοτιμή $\lambda_1 = 0.0409$ είναι το :

$$u_u = \begin{bmatrix} 1.531 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.3.7 η τροχιά n αποκλίνει, ενώ η m συγκλίνει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας, *S*, εκτελώντας ταλαντώσεις. Η παρατήρηση αυτή ισχύει γενικά σε μια μικρή περιοχή γύρω από το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s του ασταθούς σημείου ισορροπίας, *U*. Δηλαδή ισχύει γενικά ότι για αρχικές συνθήκες κοντά στο *U*, οι τροχιές που ξεκινούν αριστερά από το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s θα αποκλίνουν, ενώ εκείνες που ξεκινούν δεξιά από το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s θα συγκλίνουν στο ευσταθές σημείου ισορροπίας, *S*. Οπότε το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα του ασταθούς σημείου ισορροπίας, u_s, που όπως γνωρίζουμε είναι εφαπτόμενο στην ευσταθή πολλαπλότητα του ασταθούς σημείου ισορροπίας στο σημείο *U*, οριοθετεί την περιοχή έλξης του *S*, σε μια μικρή περιοχή γύρω από το *U*.



Σχήμα 4.3.7 : *Δεξιά ιδιοδιανύσματα ασταθούς σημείου ισορροπίας (γ=1)*

Στο Σχήμα 4.3.8 φαίνονται δύο τροχιές του συστήματος (3.1-3.2) οι οποίες έχουν ίδιες αρχικές συνθήκες κοντά στο σημείο ισορροπίας S, αλλά διαφορετικές τιμές για την χρονική σταθερά του πρώτου ΣΑΤΦ, T_1.

Πιο συγκεκριμένα, η συνεχής τροχιά του Σχήματος 4.3.8 η οποία είναι ευσταθής, έχει τιμές για τις χρονικές σταθερές των ΣΑΤΦ, $T_1 = 90\,\text{sec}, T_2 = 50\,\text{sec}$, *(γ=1.8)*, ενώ η διακεκομμένη τροχιά που είναι ασταθής έχει την ίδια τιμή για τη σταθερά T_2, δηλαδή $T_2 = 50\,\text{sec}$, ενώ μεγαλύτερη για την T_1 , $T_1 = 120\,\text{sec}$ *(γ=2.4)*.

Για αγωγιμότητα φορτίου ίση με $G = 2.8$ *αμ* το ευσταθές σημείο ισορροπίας, S είναι το :

$$(r_1^e = 0.8036\ ,\ r_2^e = 0.9220)$$

Ακόμη τα στοιχεία του πίνακα κατάστασης για αυτές τις τιμές ισορροπίας των r_1^e και r_2^e, υπολογίζεται ότι είναι ίσα με:

$$A_{11} = -0.4464 = A_{21}\ , A_{12} = 1.2944\ ,\ A_{22} = 0.2098 \text{ και } D_A = 0.4841$$

Οπότε η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος για το ευσταθές σημείο ισορροπίας είναι:

$$\lambda^2 - (\frac{-0.4464}{T_1} + \frac{0.2098}{T_2}) \cdot \lambda + \frac{0.4841}{T_1 \cdot T_2} = 0$$

Για $T_1 = 90\,\text{sec}, T_2 = 50\,\text{sec}$ (τιμές των παραμέτρων για τη συνεχή τροχιά), οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από την παραπάνω εξίσωση είναι:

$$\lambda_1 = -0.00038 + j \cdot 0.02073 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = -0.00038 - j \cdot 0.02073$$

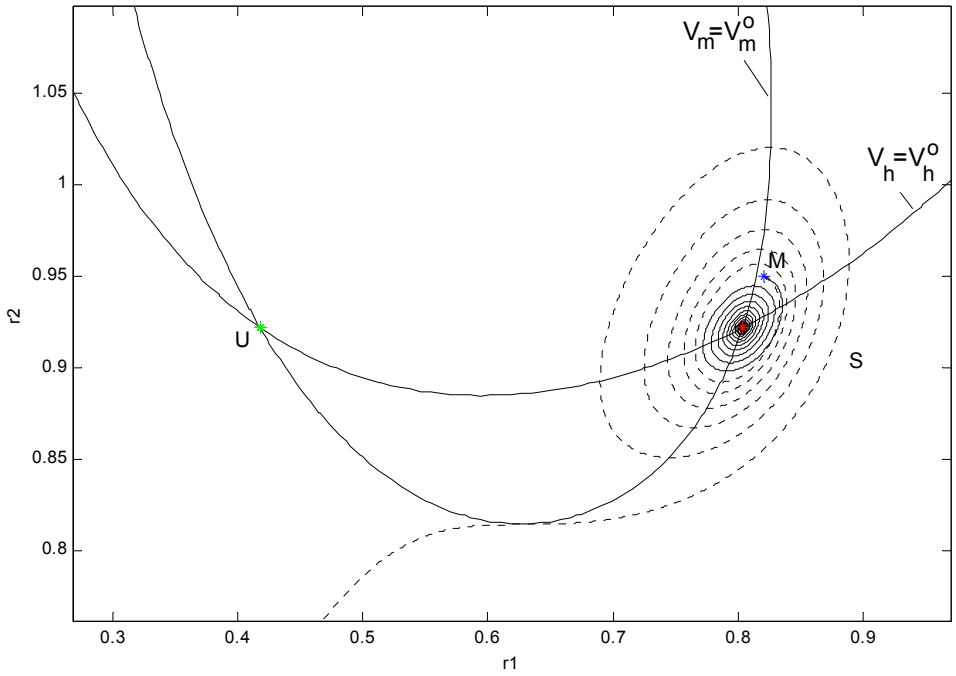
Επειδή οι ιδιοτιμές αυτές έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη, το σημείο ισορροπίας S είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για $T_1 = 90\,\text{sec}, T_2 = 50\,\text{sec}$.

Για $T_1 = 120\,\text{sec}, T_2 = 50\,\text{sec}$ (τιμές των παραμέτρων για τη διακεκομμένη τροχιά) οι ιδιοτιμές που προκύπτουν από την προηγούμενη χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda_1 = 0.00024 + j \cdot 0.01800 \quad \text{και} \quad \lambda_2 = 0.00024 - j \cdot 0.01800$$

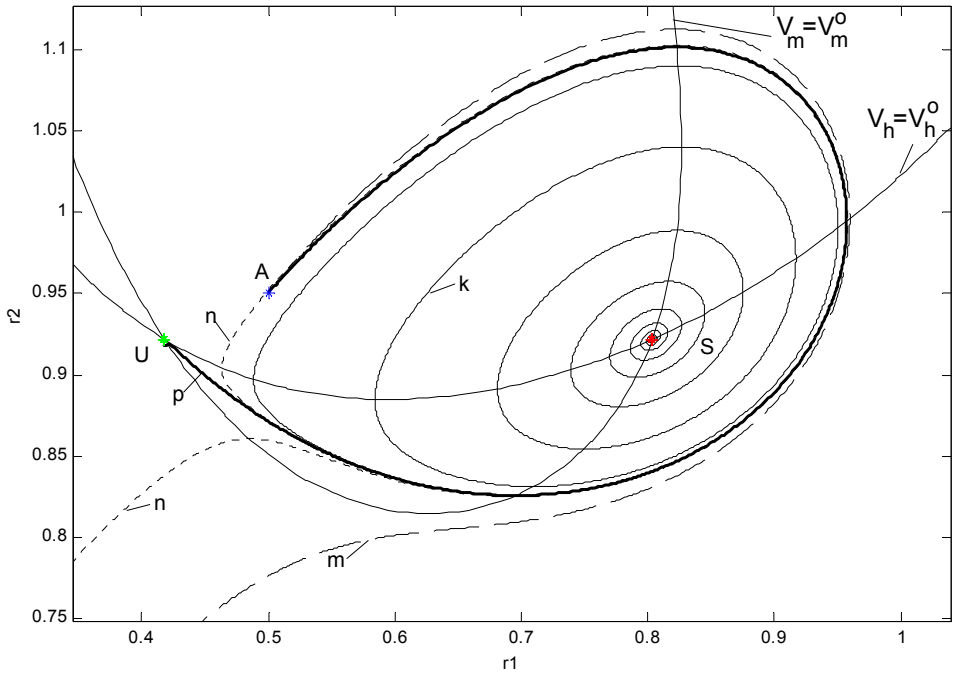
Επειδή οι ιδιοτιμές αυτές έχουν θετικά πραγματικά μέρη, το σημείο ισορροπίας S είναι ασταθές για $T_1 = 120\,\text{sec}, T_2 = 50\,\text{sec}$. Επομένως βρισκόμαστε στην περιοχή μετά τη διακλάδωση Hopf, δηλαδή μετά την εξαφάνιση του ασταθούς οριακού κύκλου. Πράγματι όπως αναφέραμε στην παρ. §4.2.1 η τιμή του λόγου *γ* για την οποία εμφανίζεται διακλάδωση Hopf όταν η αγωγιμότητα έχει τιμή $G = 2.8$ *αμ* είναι ίση με $\gamma_H(2.8) = 2.1277$, που είναι πράγματι μικρότερη από εκείνη που αντιστοιχεί στη διακεκομένη τροχιά (*γ=2.4)*.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας *S* επηρρεάζεται από τις τιμές των χρονικών σταθερών T_1, T_2 ή καλύτερα από το λόγο τους $\gamma = T_1/T_2$, κάτι που είχαμε παρατηρήσει και από τη εξέταση της υπάρξεως διακλάδωσης Hopf, καθώς και τη μελέτη του γεωμετρικού τόπου των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης για αγωγιμότητες στην περιοχή τιμών$2.537 < G < 2.9837$ *αμ*.



Σχήμα 4.3.8 : *Ευστάθεια του σημείου ισορροπίας S*

Στο Σχήμα 4.3.9 φαίνονται τέσσερις τροχιές που ξεκινούν από τις ίδιες αρχικές συνθήκες στο σημείο Α ($r_1 = 0.50$, $r_2 = 0.95$), αλλά έχουν διαφορετικές τιμές για τη χρονική σταθερά T_1.



Σχήμα 4.3.9 : *Περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας S ($\gamma_{OB}<\gamma<\gamma_H$)*

Πιο συγκεκριμένα η συνεχής τροχιά k με $T_1 = 68\,\text{sec}$ *(γ=1.36)*, είναι ευσταθής και καταλήγει με ταλαντώσεις στο σημείο ισορροπίας *S*. Η διακεκομμένη τροχιά n, παρ'όλο που έχει τιμή για τη χρονική σταθερά T_1 λίγο μεγαλύτερη σε σχέση με την τροχιά k, $T_1 = 68.05\,\text{sec}$ *(γ=1.361)*, αφού πρώτα εκτελέσει μια πλήρη περιστροφή γύρω από το *S*, στο τέλος αποκλίνει από το ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*. Η συνεχής, έντονη τροχιά p με τιμή για την T_1 λίγο μεγαλύτερη, $T_1 = 68.0566751998901369\,\text{sec}$ *(γ=1.361134)*, καταλήγει στο ασταθές σημείο ισορροπίας, *U*. Τέλος, η διακεκομμένη τροχιά m με τιμή για το T_1 ακόμα μεγαλύτερη, $T_1 = 75\,\text{sec}$ *(γ=1.5)*, είναι μονότονα ασταθής.

Η τροχιά που καταλήγει στο ασταθές σημείο ισορροπίας είναι ο κλάδος της ευσταθούς πολλαπλότητας του U, για τις τιμές των χρονικών σταθερών: $T_1 = 68.0566751998901369\,\text{sec}$ και $T_2 = 50\,\text{sec}$.

Ακόμη παρατηρούμε πως η τροχιά n ταλαντώνεται αρχικά γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας, πριν αποκλίνει. Αυτό σημαίνει ότι για $T_1 = 68.05\,\text{sec}$ και $T_2 = 50\,\text{sec}$ ο ασταθής οριακός κύκλος περνάει από ένα σημείο, πολύ κοντά και δεξιότερα από το σημείο Α, απ' όπου ξεκινούν οι τροχιές του Σχήματος 4.3.9. Δηλαδή η ευσταθής πολλαπλότητα του ασταθούς σημείου ισορροπίας, U, δεν είναι στην περίπτωση αυτή το όριο της περιοχής έλξης διότι υπάρχει ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος φράσσει την περιοχή έλξης.

Για $T_1 = 68\,\text{sec}$ και $T_2 = 50\,\text{sec}$, χρονικές σταθερές για τις οποίες το σύστημα εκτελεί την τροχιά k, ο οριακός κύκλος περνά από σημείο αριστερότερα του Α. Επομένως το σημείο Α, γι' αυτές τις χρονικές σταθερές, βρίσκεται εντός του οριακού κύκλου, που φράζει την περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας, *S*, και για το λόγο αυτό η τροχιά k είναι ευσταθής και συγκλίνει στο *S*.

Γενικά με την αύξηση του λόγου των χρονικών σταθερών, ο οριακός κύκλος συρρικνώνεται όπως και η περιοχή έλξης του S. Το παραπάνω γίνεται εμφανές στο προηγούμενο Σχήμα, όπου για μια πολύ μικρή αύξηση του λόγου $\gamma = T_1/T_2$, το σημείο Α βρίσκεται εκτός της περιοχής έλξης.

5. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

5.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΔΙΑΖΟΥΣΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

5.1.1 Γενικά

Στην ενότητα αυτή μελετάται η συμπεριφορά του συστήματος στις οριακές περιπτώσεις που το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο γρήγορο από το άλλο, χρησιμοποιώντας τη θεωρία των ιδιάζουσων διαταραχών.

Γενικά η ανάλυση των ιδιάζουσων διαταραχών συνίσταται στον χωρισμό των μεταβλητών κατάστασης του συστήματος σε χρονικές κλίμακες, δηλαδή στην παραδοχή ότι οι μεταβλητές έχουν αργές και γρήγορες συνιστώσες. Σ' αυτήν τη βάση, μελετάται τόσο η γρήγορη όσο και η αργή δυναμική συμπεριφορά του συστήματος. Μάλιστα στην θεωρία των ιδιάζουσων διαταραχών εισάγεται η έννοια της αργής πολλαπλότητας, στην οποία εκτυλίσσεται η αργή δυναμική του συστήματος.

Το γραμμικοποιημένο σύστημα που εξετάζουμε δίνεται από τις σχέσεις:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{r}_1 \\ \Delta\dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

ή διαφορετικά από τη σχέση :

$$\begin{bmatrix} T_1 \cdot \Delta\dot{r}_1 \\ T_2 \cdot \Delta\dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Στη συνέχεια αναλύονται ξεχωριστά δύο οριακές περιπτώσεις όπου το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο γρήγορο από το άλλο, για το σύστημα (5.2).

5.1.2 Περίπτωση με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ)

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι το πρώτο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο γρήγορο από το δεύτερο ($T_1 << T_2$), δηλαδή ότι η χρονική σταθερά του δεύτερου ΣΑΤΦ τείνει στο άπειρο ($T_2 \to \infty$). Οπότε αν θεωρήσουμε το λόγο των χρονικών σταθερών :

$$\varepsilon_1 = \frac{T_1}{T_2} \tag{5.3}$$

τότε παρατηρούμε ότι ο λόγος αυτός ε_1 είναι ένας πολύ μικρός αριθμός που τείνει στο μηδέν ($\varepsilon_1 \to 0$). Ακόμη στην περίπτωση αυτή, αφού ισχύει ότι $T_1=\varepsilon_1 T_2$, το σύστημα (5.2) μπορεί να γραφτεί στην μορφή :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \cdot T_2 \cdot \Delta\dot{r}_1 \\ T_2 \cdot \Delta\dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

Παρακάτω περιγράφεται η διαδικασία με την οποία το σύστημα (5.4) αναλύεται και εξετάζεται η συμπεριφορά του με βάση τις αργές και γρήγορες δυναμικές.

Αλλαγή χρονικής κλίμακας

Θεωρώντας την χρονική μεταβλητή τ για την οποία ισχύει ότι:

$$\tau = t/T_2 \tag{5.5}$$

μπορούμε να αλλάξουμε την χρονική κλίμακα του συστήματος (5.4) ως εξής :

$$\frac{dr_2}{d\tau} = \frac{dr_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \Delta\dot{r}_2 \cdot T_2$$

και

$$\frac{dr_1}{d\tau} = \frac{dr_1}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \Delta\dot{r}_1 \cdot T_2$$

οπότε το σύστημα μετά την αλλαγή της χρονικής κλίμακας θα έχει τη μορφή :

$$\begin{bmatrix} dr_2/d\tau \\ \varepsilon_1 \cdot dr_1/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_2 \\ \Delta r_1 \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

Όπως παρατηρούμε το σύστημα όπως δίνεται στη σχέση (5.6) έχει την τυπική μορφή για την ανάλυση ιδιάζουσας διαταραχής, όπως είχε εξηγηθεί στην ενότητα 2.4 και είχε δοθεί από τη σχέση (2.23 a-b). Επομένως μπορούμε να το αναλύσουμε με τη βοήθεια της θεωρίας των ιδιάζουσων διαταραχών.

Ο χρονικός διαχωρισμός του συστήματος προκύπτει από τη θεώρηση δύο υποσυστημάτων του (5.6), τέτοια ώστε το ένα να περιγράφει την αργή δυναμική του συστήματος, ενώ το άλλο τη γρήγορη. Για το λόγο αυτό γίνεται η παραδοχή ότι οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος, Δr_1 και Δr_2, αποτελούνται από τις αργές συνιστώσες Δr_{1s} και Δr_{2s} και τις γρήγορες Δr_{1f} και Δr_{2f}, έτσι ώστε να ισχύει ότι :

$$\Delta r_2 = \Delta r_{2s} + \Delta r_{2f} \quad \text{και} \quad \Delta r_1 = \Delta r_{1s} + \Delta r_{1f}$$

Θεωρώντας μόνο το αργό υποσύστημα του (5.6) και ότι $\varepsilon_1 \to 0$ προκύπτει ότι η οιονεί στατική προσέγγιση του αργού υποσυστήματος (QSS: quasi-steady state) είναι :

$$\begin{bmatrix} dr_{2s}/d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{21} \\ A_{12} & A_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_{2s} \\ \Delta r_{1s} \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

Όπως φαίνεται στο σύστημα (5.7) η Δr_{2s} είναι η μεταβλητή κατάστασης και η Δr_{1s} η αλγεβρική μεταβλητή, οπότε το οιονεί στατικό υποσύστημα έχει τη μορφή ενός διαφορικού-αλγεβρικού συστήματος και η ευστάθεια του στην περίπτωση που μελετάμε μπορεί να εξεταστεί από τη μελέτη του ελαττωμένου πίνακα κατάστασης της παρ. §2.4.1.

Πιο συγκεκριμένα, δίνεται ότι από το σύστημα (5.7) αν απαλοιφεί η αλγεβρική μεταβλητή Δr_{1s} τότε για την Δr_{2s} θα ισχύει ότι :

$$dr_{2s}/d\tau = \left[A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right] \cdot \Delta r_{2s} \tag{5.8}$$

όπου ο πίνακας $\left[A_{22} - A_{21} \cdot A_{11}^{-1} \cdot A_{12}\right]$ ονομάζεται ελαττωμένος Ιακωβιανός πίνακας *A΄*.

Ακόμη αφού έχουμε αποδείξει ότι στο σύστημα που μελετάμε για το σημείο ισορροπίας *S*, όταν οι τάσεις αναφοράς είναι ίσες, ισχύει ότι $A_{11}=A_{21}$ τότε η εξίσωση (5.8) μετατρέπεται στην :

$$dr_{2s}/d\tau = \left[A_{22} - A_{12}\right] \cdot \Delta r_{2s} \tag{5.9}$$

οπότε η ευστάθεια του σημείου *S* εξαρτάται από τον ελαττωμένο πίνακα κατάστασης $A' = \left[A_{22} - A_{12}\right]$. Δηλαδή θα πρέπει να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα αυτού ώστε να βγάλουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια του συστήματος. Ο πίνακας *A΄* έχει μόνο ένα στοιχείο, άρα και μία μόνο ιδιοτιμή την $\lambda = A_{22} - A_{12}$, και για να είναι το *S* ευσταθές θα πρέπει να ισχύει ότι $\lambda = A_{22} - A_{12} < 0$. Πράγματι στην παρ. §3.3.4 αποδείχτηκε ότι η παραπάνω ανισότητα ισχύει για όλες τις αγωγιμότητες στην περιοχή τιμών $0<G<2.9837$ *αμ*. Δηλαδή το σύστημα στην οριακή περίπτωση αυτή είναι ευσταθές για την ίδια περιοχή τιμών αγωγιμότητας όπως και στις μη οριακές περιπτώσεις. Με βάση τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η οριακή περίπτωση με γρήγορο το ΣΑΤΦ που υποβιβάζει την ΥΥΤ σε ΥΤ δεν δυσχεραίνει την ευστάθεια του συστήματος. Επομένως σε ένα σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ ισχύει ότι το ΣΑΤΦ στην πλευρά της τροφοδοσίας μπορεί να έχει πιο μικρή χρονική σταθερά χωρίς αυτό να επηρεάζει την ευστάθεια του συστήματος. Επίσης λόγω του ότι η ορίζουσα του ελαττωμένου πίνακα κατάστασης, *detA΄*, δε μηδενίζεται για καμία τιμή της αγωγιμότητας προκύπτει ότι δεν ικανοποιείται η συνθήκη εμφάνισης διακλάδωσης σαγματικού κόμβου σε αυτή την οριακή περίπτωση.

Αργή πολλαπλότητα

Η αργή πολλαπλότητα που παριστάνει την αργή δυναμική του γραμμικοποιημένου συστήματος της μορφής (5.6) δίνεται από τις επόμενες σχέσεις:

$$\Delta r_{1s} = h_o(\Delta r_{2s})$$

και

$$0 = A_{12} \cdot \Delta r_{2s} + A_{11} \cdot h_o$$

από τις οποίες προκύπτει ότι η αργή πολλαπλότητα είναι μια ευθεία που δίνεται από τη σχέση :

$$h_o = -\frac{A_{12}}{A_{11}} \cdot \Delta r_{2s} \tag{5.10}$$

Η αργή πολλαπλότητα της σχέσης (5.10) εκφράζει την αργή δυναμική του συστήματος, δηλαδή τη μεταβολή μόνο της αργής συνιστώσας Δr_{2s}. Επομένως όταν το σύστημα βρίσκεται πάνω σε αυτή τότε λειτουργεί μόνο το αργό ΣΑΤΦ, δηλαδή το ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ. Αντίθετα έξω από την αργή πολλαπλότητα, το σύστημα κινείται με βάση τις γρήγορες δυναμικές, δηλαδή έχουμε μεταβολή μόνο της γρήγορης συνιστώσας Δr_{1f}, οπότε το σύστημα κινείται αποκλειστικά με οριζόντια διεύθυνση.

5.1.3 Περίπτωση με γρήγορο το δεύτερο ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ)

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι το δεύτερο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο γρήγορο από το πρώτο ($T_2 << T_1$), δηλαδή ότι η χρονική σταθερά του πρώτου ΣΑΤΦ τείνει στο άπειρο ($T_1 \to \infty$). Οπότε αν θεωρήσουμε τον λόγο των χρονικών σταθερών :

$$\varepsilon_2 = \frac{T_2}{T_1} \tag{5.11}$$

τότε παρατηρούμε ότι ο λόγος αυτός, ε_2, είναι ένας πολύ μικρός αριθμός που τείνει στο μηδέν ($\varepsilon_2 \to 0$). Ακόμη στην περίπτωση αυτή, αφού ισχύει ότι $T_2=\varepsilon_2 T_1$, το σύστημα (5.2) μπορεί να γραφτεί στην μορφή :

$$\begin{bmatrix} T_1 \cdot \Delta\dot{r}_1 \\ \varepsilon_2 \cdot T_1 \cdot \Delta\dot{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} \tag{5.12}$$

Αλλαγή χρονικής κλίμακας

Θεωρώντας την χρονική μεταβλητή τ για την οποία ισχύει ότι:

$$\tau = t/T_1 \tag{5.13}$$

τότε μπορούμε να αλλάξουμε την χρονική κλίμακα του συστήματος (5.12) ως εξής :

$$\frac{dr_1}{d\tau} = \frac{dr_1}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \Delta\dot{r}_1 \cdot T_1$$

και

$$\frac{dr_2}{d\tau} = \frac{dr_2}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \Delta\dot{r}_2 \cdot T_1$$

οπότε το σύστημα (5.12) μετά την αλλαγή της χρονικής κλίμακας θα έχει την εξής μορφή :

$$\begin{bmatrix} dr_1/d\tau \\ \varepsilon_2 \cdot dr_2/d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Ο χρονικός διαχωρισμός προκύπτει από τη παραδοχή δύο υποσυστημάτων του (5.14) τα οποία είναι τέτοια ώστε το ένα να περιγράφει την αργή δυναμική του συστήματος, ενώ το άλλο τη γρήγορη. Για το λόγο αυτό δεχόμαστε ότι οι μεταβλητές κατάστασης του συστήματος, Δr_1 και Δr_2, αποτελούνται από τις αργές συνιστώσες Δr_{1s} και Δr_{2s} και τις γρήγορες Δr_{1f} και Δr_{2f}, έτσι ώστε να ισχύει ότι :

$$\Delta r_2 = \Delta r_{2s} + \Delta r_{2f} \quad \text{και} \quad \Delta r_1 = \Delta r_{1s} + \Delta r_{1f}$$

Θεωρώντας μόνο το αργό υποσύστημα του (5.14) και ότι $\varepsilon_2 \to 0$ προκύπτει ότι η οιονεί στατική προσέγγιση του αργού υποσυστήματος (QSS: quasi-steady state) είναι :

$$\begin{bmatrix} dr_{1s}/d\tau \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_{1s} \\ \Delta r_{2s} \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

Όπως φαίνεται στο σύστημα (5.15) η Δr_{1s} είναι η μεταβλητή κατάστασης και η Δr_{2s} η αλγεβρική μεταβλητή, οπότε το οιονεί στατικό υποσύστημα έχει τη μορφή

ενός διαφορικού-αλγεβρικού συστήματος και η ευστάθεια του στην περίπτωση που μελετάμε μπορεί να εξεταστεί από τη μελέτη του ελαττωμένου πίνακα κατάστασης.

Πιο συγκεκριμένα, δίνεται ότι από το σύστημα (5.15) αν απαλοιφεί η αλγεβρική μεταβλητή Δr_{2s} τότε για την Δr_{1s} θα ισχύει ότι :

$$dr_{1s}/d\tau = \left[A_{11} - A_{12}\cdot A_{22}^{-1}\cdot A_{21}\right]\cdot \Delta r_{1s} \qquad (5.16)$$

όπου ο πίνακας $\left[A_{11} - A_{12}\cdot A_{22}^{-1}\cdot A_{21}\right]$ είναι ο ελαττωμένος Ιακωβιανός πίνακας.

Ακόμη αφού έχουμε βρει ότι στο σύστημα που μελετάμε για το σημείο ισορροπίας *S*, όταν οι τάσεις αναφοράς είναι ίσες, ισχύει ότι $A_{11}=A_{21}$ τότε η εξίσωση (5.16) γίνεται :

$$dr_{1s}/d\tau = A_{11}\cdot\left[1 - A_{12}/A_{22}\right]\cdot \Delta r_{1s} \qquad (5.17)$$

οπότε η ευστάθεια του σημείου *S* εξαρτάται από τον ελαττωμένο πίνακα κατάστασης $A' = A_{11}\cdot\left[1 - A_{12}/A_{22}\right]$. Δηλαδή θα πρέπει να εξετάσουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα αυτού. Ο πίνακας *A΄* έχει μόνο ένα στοιχείο, άρα και μία μόνο ιδιοτιμή την $\lambda = A_{11}\cdot(1 - A_{12}/A_{22})$, και για να είναι το *S* ευσταθές θα πρέπει να ισχύει ότι $\lambda = A_{11}\cdot(1 - A_{12}/A_{22}) < 0$. Στην παρ. §3.3.4 αποδείχτηκε ότι το A_{11} είναι αρνητικό για όλες τις αγωγιμότητες στην περιοχή τιμών $0<G<2.9837$ *αμ*, ενώ η παράσταση $(1 - A_{12}/A_{22})$ είναι θετική μέχρι την τιμή $G=2.537$ *αμ*. Δηλαδή η ιδιοτιμή του ελαττωμένου πίνακα είναι αρνητική και άρα το σημείο ισορροπίας *S* ευσταθές, μέχρι την τιμή αγωγιμότητας $G=2.537$ *αμ*, η οποία είναι μικρότερη τιμή σε σχέση με την αντίστοιχη στην οριακή περίπτωση όπου ισχύει ότι $T_1 << T_2$. Με βάση τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι η οριακή περίπτωση με γρήγορο το ΣΑΤΦ που υποβιβάζει την υψηλή τάση σε μέση δυσχεραίνει την ευστάθεια του συστήματος. Επομένως σε ένα σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ ισχύει ότι το ΣΑΤΦ στην πλευρά του φορτίου είναι προτιμότερο να έχει μεγαλύτερη χρονική σταθερά ώστε να εξασφαλίζεται η ευστάθεια του συστήματος σε οριακές περιπτώσεις για ακόμη μεγαλύτερες αγωγιμότητες φορτίου.

Αργή πολλαπλότητα

Η αργή πολλαπλότητα που παριστάνει την αργή δυναμική του γραμμικοποιημένου συστήματος της μορφής (5.14) δίνεται από τις επόμενες σχέσεις:

$$\Delta r_{2s} = h_o(\Delta r_{1s})$$

και

$$0 = A_{21}\cdot\Delta r_{1s} + A_{22}\cdot h_o$$

από τις οποίες προκύπτει ότι η αργή πολλαπλότητα είναι μια ευθεία που δίνεται από τη σχέση :

$$h_o = -\frac{A_{11}}{A_{22}}\cdot\Delta r_{1s} \qquad (5.18)$$

αφού ισχύει ότι $A_{11}=A_{21}$.

Η αργή πολλαπλότητα της σχέσης (5.18) εκφράζει την αργή δυναμική του συστήματος, δηλαδή τη μεταβολή μόνο της αργής συνιστώσας Δr_{1s}. Επομένως όταν το σύστημα βρίσκεται πάνω σε αυτή τότε λειτουργεί μόνο το αργό ΣΑΤΦ, δηλαδή

το ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ. Αντίθετα έξω από την αργή πολλαπλότητα, το σύστημα κινείται με βάση τις γρήγορες δυναμικές, δηλαδή έχουμε μεταβολή μόνο της γρήγορης συνιστώσας Δr_2, οπότε το σύστημα κινείται αποκλειστικά με κατακόρυφη διεύθυνση.

5.2 ΟΡΙΑΚΑ ΙΔΙΟΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή κατασκευάζονται τα δεξιά ιδιοδιανύσματα των σημείων ισορροπίας του συστήματος των εξισώσεων (3.1) και (3.2) για τις οριακές περιπτώσεις που το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο γρήγορο σε σχέση με το άλλο, δηλαδή στις περιπτώσεις που ισχύει ότι είτε $T_1 << T_2$, είτε $T_2 << T_1$.

Στην παρ. §2.1.3 αναφερθήκαμε στην εξίσωση που εκφράζει τα δεξιά ιδιοδιανύσματα των σημείων ισορροπίας ενός συστήματος σε σχέση με μια ιδιοτιμή του πίνακα κατάστασης του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα το δεξιό ιδιοδιάνυσμα, u, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ του πίνακα κατάστασης S, δίνεται από τη σχέση :

$$S \cdot u = \lambda \cdot u \tag{5.19}$$

Στο σύστημα που μελετάμε ο πίνακας κατάστασης δίνεται από τη σχέση

$$S = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

όπου τα στοιχεία A_{11}, A_{12},, A_{21}, A_{22} δίνονται από τις σχέσεις (3.43), (3.44), (3.45) και (3.46) αντίστοιχα και εκφράζουν την ευαισθησία της τάσης ως προς τους λόγους μετασχηματισμού r_1, r_2. Επίσης οι ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης S δίνονται από τις ρίζες της σχέσης (3.58) που αποτελεί τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος, δηλαδή από τη σχέση :

$$\lambda^2 - (\frac{A_{22}}{T_2} + \frac{A_{11}}{T_1}) \cdot \lambda + \frac{D_A}{T_1 \cdot T_2} = 0 \tag{5.21}$$

Επομένως χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.19) έως (5.21) στις δύο οριακές περιπτώσεις βρίσκουμε τα οριακά ιδιοδιανύσματα του συστήματος όταν η μία από τις δύο χρονικές μεταβλητές τείνει στο άπειρο, δηλαδή όταν μόνο ένα ΣΑΤΦ λειτουργεί σε πεπερασμένο χρόνο.

5.2.1 Περίπτωση με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ (ΥΥΤ/ΥΤ)

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $T_1 << T_2$ και επομένως η χρονική σταθερά T_2 τείνει στο άπειρο, με αποτέλεσμα η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος (σχέση (5.21)) να παίρνει την εξής μορφή:

$$\lambda^2 - \frac{A_{11}}{T_1} \cdot \lambda = 0 \tag{5.22}$$

Κατά συνέπεια το σύστημα σε αυτήν την περίπτωση έχει τις εξής ιδιοτιμές :

$$\lambda_{1_{T_2\to\infty}} = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_{2_{T_2\to\infty}} = A_{11}/T_1$$

Για τη μηδενική ιδιοτιμή προκύπτει με τη βοήθεια των εξισώσεων (5.19) και (5.20) ότι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα είναι:

$$u_{O_{T_1<<T_2}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{A_{12}}{A_{11}} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

και για τα δύο σημεία ισορροπίας S και U. Το ιδιοδιάνυσμα αυτό το οποίο αντιστοιχεί στη μηδενική ιδιοτιμή ονομάζεται κεντρικό ιδιοδιάνυσμα, όπως έχει αναφερθεί στην παρ. §2.1.2.

Όπως παρατηρούμε, η σχέση (5.23) που δίνει το κεντρικό ιδιοδιάνυσμα στην περίπτωση που ισχύει ότι $T_1 << T_2$, είναι ταυτόσημη της σχέσης (5.10) που ορίζει την αργή πολλαπλότητα του συστήματος για την ίδια οριακή περίπτωση. Επομένως το κεντρικό ιδιοδιάνυσμα εκφράζει την αργή δυναμική του συστήματος, και αυτό σημαίνει ότι πάνω σε αυτό λειτουργεί μόνο το αργό ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ), άρα όταν το σύστημα βρίσκεται πάνω στο κεντρικό ιδιοδιάνυσμα $u_{O_{T_1<<T_2}}$, μεταβάλλεται μόνο το r_2.

Στα Σχήματα 5.2.1 και 5.2.2 σχεδιάζονται τα οριακά ιδιοδιανύσματα και στα δύο σημεία ισορροπίας S και U, για δύο διαφορετικές τιμές της αγωγιμότητας, *G=1.5 αμ* και *G=2.8 αμ* αντίστοιχα και για τιμές στοιχείων όπως δίνονται στον Πίνακα 3.1. Ο λόγος για την επιλογή αυτή των τιμών του *G* είναι ότι για την πρώτη τιμή (*G=1.5 αμ*) όπως αποδείχτηκε στο κεφάλαιο 4, δεν υπάρχει τιμή του λόγου *γ* για την οποία να εμφανίζεται διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου, άρα και αστάθεια, όσον αφορά το σημείο ισορροπίας S. Αντίθετα για τη δεύτερη τιμή (*G=2.8 αμ*) υπάρχει τιμή του *γ* για ομοκλινή βρόχο ($\gamma_{OB}(2.8)=1.288$).

Παρατηρώντας τα Σχήματα 5.2.1 και 5.2.2 βλέπουμε ότι τα κεντρικά ιδιοδιανύσματα $u_{O_{T_1<<T_2}}$, τόσο στο S όσο και στο U, είναι εφαπτόμενα στην καμπύλη ισορροπίας του γρήγορου ΣΑΤΦ, δηλαδή στην καμπύλη $V_h = V_h^o$. Αυτό σημαίνει πως η κεντρική πολλαπλότητα που είναι εφαπτόμενη στο κεντρικό ιδιοδιάνυσμα αντιστοιχεί στην καμπύλη ισορροπίας του γρήγορου υποσυστήματος.

Για τη δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda_{2_{T_2\to\infty}} = A_{11}/T_1$ προκύπτει ότι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα είναι το :

$$u_{u_{T_1<<T_2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ για το } U \qquad \text{και } u_{s_{T_1<<T_2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ για το } S \tag{5.24}$$

δηλαδή είναι μια οριζόντια ευθεία, πάνω στην οποία ο λόγος μετασχηματισμού του αργου ΣΑΤΦ, r_2, παραμένει σταθερός. Επομένως τα ιδιοδιανύσματα $u_{u_{T_1<<T_2}}$ και $u_{s_{T_1<<T_2}}$ εκφράζουν τη γρήγορη δυναμική του συστήματος, δηλαδή τη μεταβολή μόνο του r_1 στην περίπτωση που μελετάμε, και για το λόγο αυτό καλούνται γρήγορα ιδιοδιανύσματα.

5.2.2 Περίπτωση με γρήγορο το δεύτερο ΣΑΤΦ (ΥΤ/ΜΤ)

Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $T_2 << T_1$ και επομένως η χρονική σταθερά T_1 τείνει στο άπειρο, με αποτέλεσμα η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος (σχέση (5.21)) να παίρνει την εξής μορφή:

$$\lambda^2 - \frac{A_{22}}{T_2} \cdot \lambda = 0 \tag{5.25}$$

Κατά συνέπεια το σύστημα σε αυτήν την περίπτωση έχει τις εξής ιδιοτιμές :

$$\lambda_{1_{T_1 \to \infty}} = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_{2_{T_1 \to \infty}} = A_{22}/T_2$$

Για τη μηδενική ιδιοτιμή προκύπτει με τη βοήθεια των εξισώσεων (5.19) και (5.20) ότι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα είναι:

$$u_{o_{T_2 << T_1}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{A_{22}}{A_{11}} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

και για τα δύο σημεία ισορροπίας. Το ιδιοδιάνυσμα αυτό είναι το κεντρικό ιδιοδιάνυσμα στην οριακή περίπτωση που το δεύτερο ΣΑΤΦ είναι πιο γρήγορο. Όπως και στην παρ. §5.2.1, το κεντρικό ιδιοδιάνυσμα και σε αυτήν την περίπτωση ταυτίζεται με την αργή πολλαπλότητα της σχέσης (5.18). Επομένως εκφράζει την αργή δυναμική του συστήματος όταν ισχύει ότι $T_2 << T_1$. Επίσης, είναι εφαπτόμενο στην καμπύλη ισορροπίας του γρήγορου ΣΑΤΦ, που τώρα είναι η $V_m = V_m^o$, άρα και σε αυτήν την περίπτωση η κεντρική πολλαπλότητα αντιστοιχεί στην καμπύλη ισορροπίας του γρήγορου υποσυστήματος (ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ).

Για τη δεύτερη ιδιοτιμή $\lambda_{2_{T_1 \to \infty}} = A_{22}/T_2$ προκύπτει ότι το δεξιό ιδιοδιάνυσμα είναι το :

$$u_{u_{T_2 << T_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{για το } U \qquad \text{και} \qquad u_{s_{T_2 << T_1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{για το } S \tag{5.27}$$

δηλαδή είναι μια κατακόρυφη ευθεία, πάνω στη οποία δε μεταβάλλεται η αργή συνιστώσα r_1, και για το λόγο αυτό ονομάζεται γρήγορο ιδιοδιάνυσμα.

Η φορά του συστήματος πάνω στα κεντρικά αλλά και στα γρήγορα ιδιοδιανύσματα καθορίζεται σύμφωνα με τα βέλη του Σχήματος 4.1.1, και προκύπτει ότι είναι όπως φαίνεται στα Σχήματα 5.2.1 και 5.2.2.

Στο Σχήμα 5.2.1, το οποίο είναι κατασκευασμένο για *G=1.5 αμ*, παρατηρούμε ότι η κεντρική πολλαπλότητα όπως και το γρήγορο ιδιοδιάνυσμα γύρω από το σημείο ισορροπίας S είναι ευσταθείς και στις δύο περιπτώσεις, δηλαδή και όταν το πρώτο ΣΑΤΦ είναι πιο γρήγορο και όταν είναι πιο αργό. Αντίθετα από το Σχήμα 5.2.2, το οποίο έχει κατασκευαστεί για *G=2.8 αμ*, παρατηρούμε ότι ενώ στην περίπτωση που το ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ είναι πιο γρήγορο, το κεντρικό και γρήγορο ιδιοδιάνυσμα συνιστούν ευσταθείς ιδιόχωρους, στην περίπτωση που το ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ είναι πιο γρήγορο, και τα δύο ιδιαδιανύσματα είναι ασταθή, επομένως και το σημείο ισορροπίας S είναι επίσης ασταθές. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις

συμφωνούν με το συμπέρασμα της ενότητας 5.1, δηλαδή ότι η ύπαρξη ενός γρήγορου ΣΑΤΦ στην πλευρά της τροφοδοσίας σε ένα σύστημα με δύο επίπεδα ΣΑΤΦ, δεν δυσχεραίνει την ευστάθεια του συστήματος. Αντίθετα η ύπαρξη ενός πιο γρήγορου ΣΑΤΦ στην πλευρά φορτίου οδηγεί το σύστημα σε αστάθεια για περισσότερες τιμές της αγωγιμότητας φορτίου, *G*.

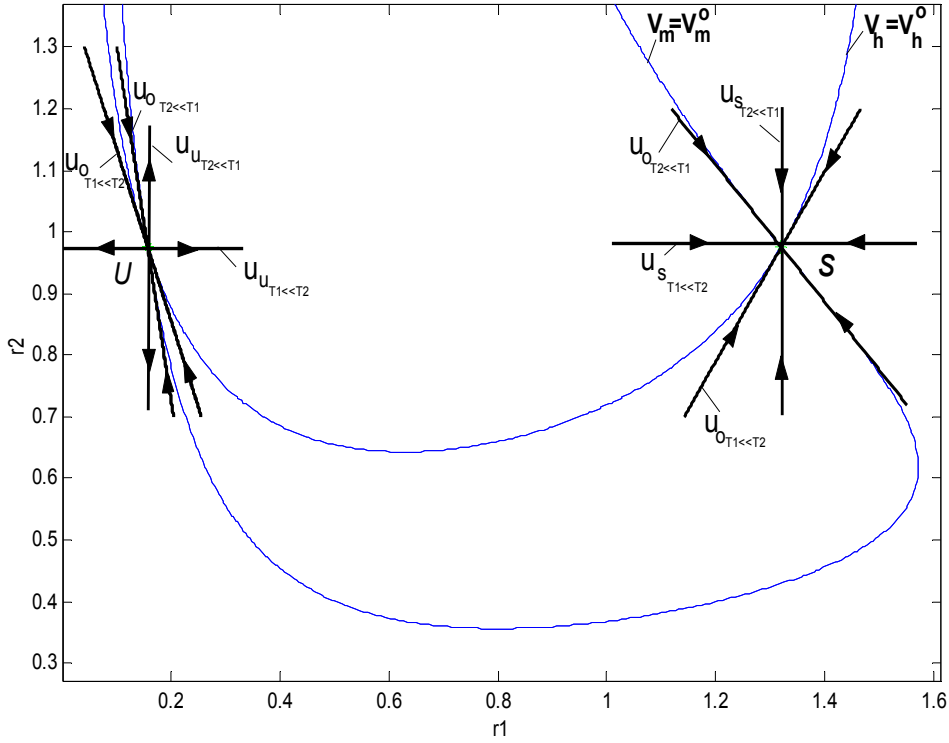
Για το ασταθές σημείο ισορροπίας, U, ισχύει και στις δύο οριακές περιπτώσεις και για τις δύο τιμές της αγωγιμότητας, ότι είναι ένα σαγματικό σημείο ισορροπίας(saddle). Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι τα κεντρικά ιδιοδιανύσματα στο U είναι ευσταθή ενώ τα γρήγορα ασταθή.

Γενικά όσον αφορά στο ασταθές σημείο ισορροπίας, U, από την εργασία [1] γνωρίζουμε ότι είναι σαγματικό σημείο ισορροπίας, δηλαδή έχει μια θετική και μία αρνητική ιδιοτιμή, για όλες τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος *G, γ*. Οι περιπτώσεις με γρήγορο το ένα ΣΑΤΦ αποτελούν την οριακή περίπτωση στην οποία η αρνητική ιδιοτιμή του ασταθούς σημείου ισορροπίας, U, γίνεται μηδέν.

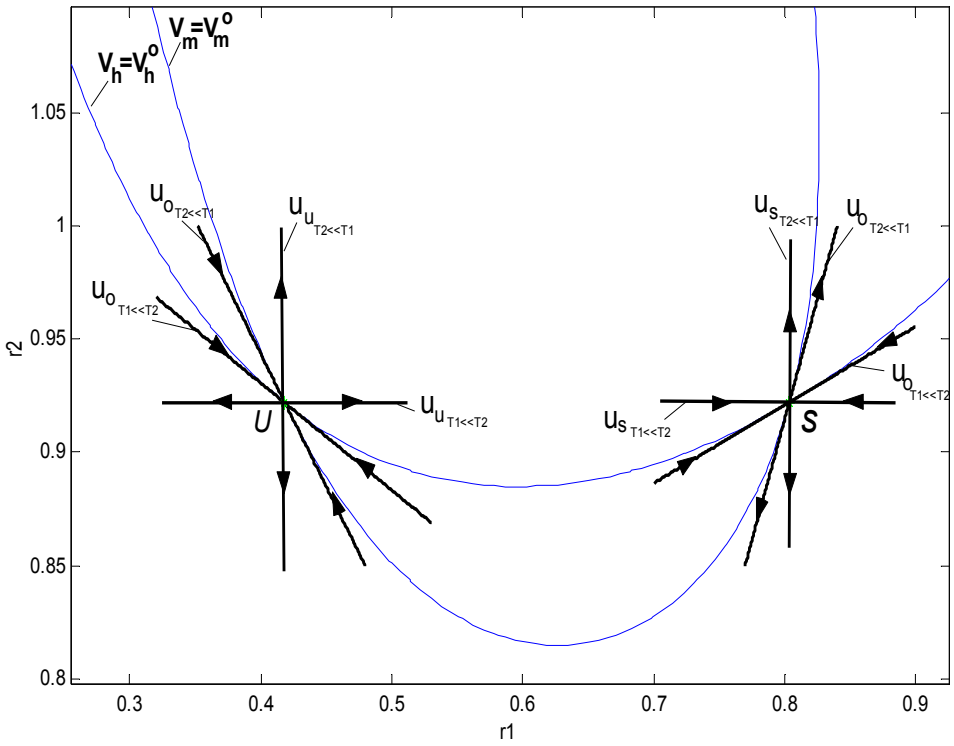
Όπως είχαμε δείξει στην παρ. §4.3.3, το ιδιοδιάνυσμα του ασταθούς σημείου ισορροπίας U, που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή είναι ευσταθές. Επίσης αυτό το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα είχε σχεδιαστεί στο Σχήμα 4.3.7 για τιμές των παραμέτρων *G=2.8 αμ* και *γ=1* και είχε συμβολιστεί ως u_s. Επομένως τα κεντρικά ιδιοδιανύσματα $u_{o_{T_1<<T_2}}$ και $u_{o_{T_2<<T_1}}$ είναι οι οριακές περιπτώσεις του ευσταθούς ιδιοδιανύσματος u_s, και ισχύει ότι καθώς αυξάνεται ο λόγος των χρονικών σταθερών $\gamma = T_1/T_2$, το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s που αντιστοιχεί στην αρνητική ιδιοτιμή περιστρέφεται γύρω από το σημείο ισορροπίας U με ωρολογιακή φορά, έτσι ώστε στην οριακή περίπτωση που $T_2 << T_1$ και άρα $\gamma \to \infty$, οπότε η ιδιοτιμή μηδενίζεται, να καλειται κεντρικό ιδιοδιάνυσμα και να εφάπτεται στην καμπύλη $V_m = V_m{}^o$. Αντίθετα καθώς μειώνεται ο λόγος των χρονικών σταθερών $\gamma = T_1/T_2$, το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s περιστρέφεται γύρω από το σημείο ισορροπίας του συστήματος με ανθωρολογιακή φορά, έτσι ώστε στην οριακή περίπτωση που $T_1 << T_2$ και άρα $\gamma \to 0$, να εφάπτεται στην καμπύλη $V_h = V_h{}^o$.

Ακόμη, εφ'όσον γνωρίζουμε ότι το ευσταθές ιδιοδιάνυσμα u_s είναι εφαπτόμενο στον ένα κλάδο της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας, U, συμπεραίνουμε ότι η ευσταθής πολλαπλότητα του U βρίσκεται για όλες τις τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών, *γ*, ανάμεσα στις δύο καμπύλες ισορροπίας δηλαδή στην περιοχή D των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας. Επίσης εφ'όσον ο λόγος *γ* είναι μικρότερος από την τιμή που αντιστοιχεί στην διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου ($\gamma_{OB}(G)$) (αν αυτή υπάρχει), ο κλάδος αυτός οριοθετεί την περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας, S.

Όσον αφορά στο σημείο ισορροπίας S, σημειώνεται ότι όταν οι χρονικές σταθερές T_2, T_1 γίνουν συγκρίσιμες δεν υπάρχει πλέον διαχωρισμός χρονικών κλιμάκων, και για το λόγο αυτό τα ιδιοδιανύσματα u_s και u_o που φαίνονται στα Σχήματα 5.2.1 και 5.2.2 γύρω από το S, τείνουν να ταυτιστούν και οι ιδιοτιμές του συστήματος γίνονται μιγαδικές.



Σχήμα 5.2.1 : *Οριακά Δεξιά Ιδιοδιανύσματα των Σημείων Ισορροπίας (G=1.5 αμ)*



Σχήμα 5.2.2 : *Οριακά Δεξιά Ιδιοδιανύσματα των Σημείων Ισορροπίας (G=2.8 αμ)*

5.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΙΝΑΚΑ ΕΥΑΙΣΘΗΣΙΩΝ

5.3.1 Γενικά

Οι εξισώσεις ισορροπίας για το γραμμικοποιημένο σύστημα (3.40) δίνονται από τη σχέση :

$$S \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} = 0$$

ή διαφορετικά

$$\begin{bmatrix} T_1^{-1} & 0 \\ 0 & T_2^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{11} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta r_1 \\ \Delta r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5.28)$$

Από τη σχέση (5.28) προκύπτει ότι :

$$A_{11} \cdot \Delta r_1 + A_{12} \cdot \Delta r_2 = 0 \qquad (5.29\alpha)$$

$$A_{21} \cdot \Delta r_1 + A_{22} \cdot \Delta r_2 = 0 \qquad (5.29\beta)$$

Οι σχέσεις (5.29α) και (5.29β) αποτελούν τις εξισώσεις ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος και στα δύο σημεία ισορροπίας S και U. Όπως φαίνεται δίνονται από τις ίδιες σχέσεις με αυτές των κεντρικών ιδιοδιανυσμάτων, επομένως είναι εφαπτόμενες στις καμπύλες ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος. Ακόμη παρατηρούμε πως οι εξισώσεις αυτές εξαρτώνται μόνο από τον πίνακα ευαισθησιών *A*.

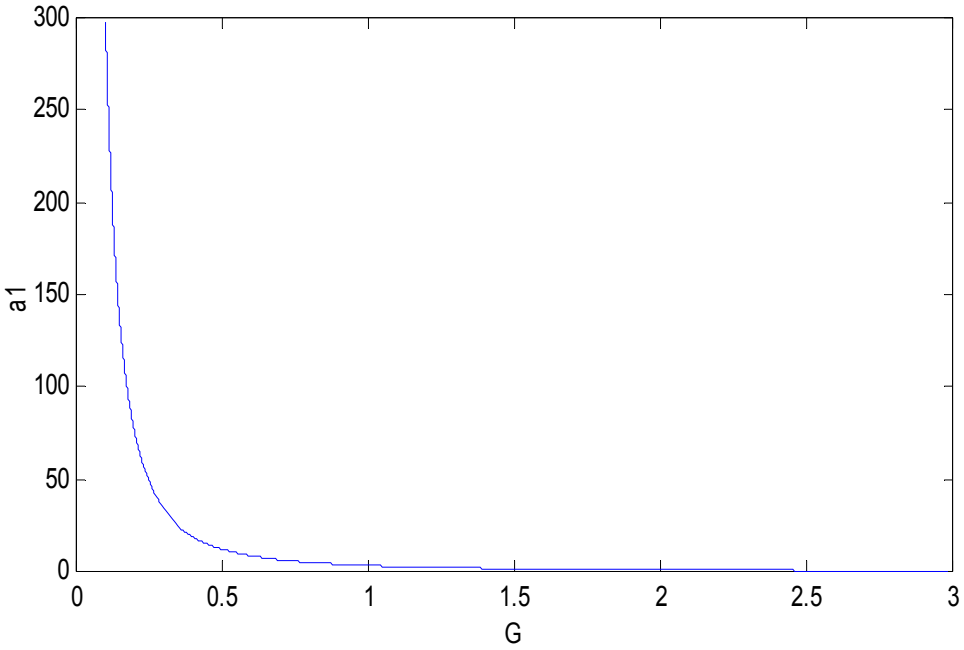
Στη συνέχεια μελετάται η σχετική μεταβολή των κλίσεων αυτών με την αγωγιμότητα *G* γύρω από το σημείο ισορροπίας S.

5.3.2 Κλίσεις των εξισώσεων ισορροπίας του γραμμικού συστήματος

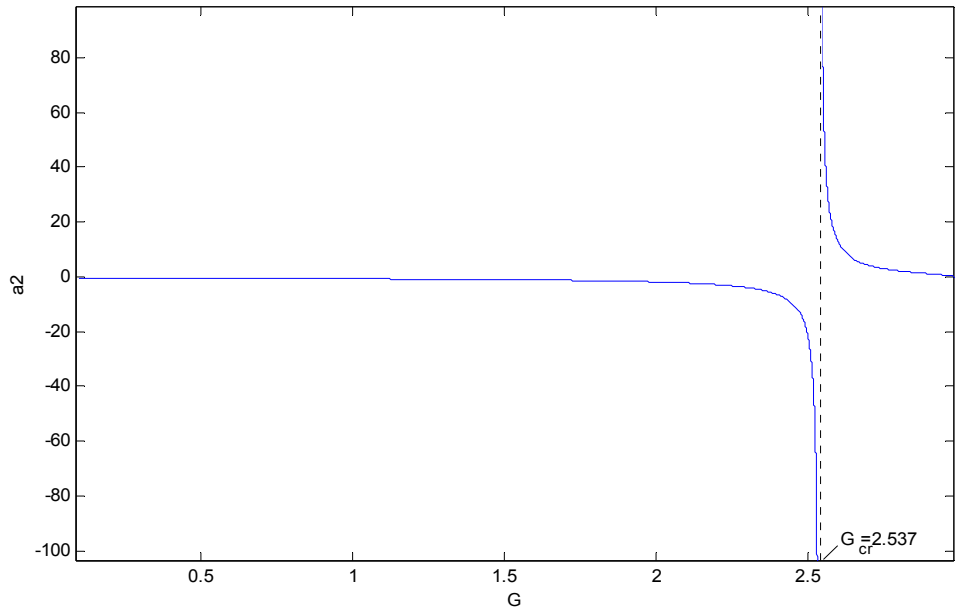
Η πρώτη εξίσωση ισορροπίας του γραμμικοποημένου συστήματος (5.28) είναι μια ευθεία που περνάει από το σημείο ισορροπίας του συστήματος, *S*, και έχει κλίση $a_1 = -A_{11}/A_{12}$. Από το κεφάλαιο 3 γνωρίζουμε ότι το στοιχειό A_{11} του πίνακα ευαισθησιών, όσον αφορά στο S και για τις τιμές του Πίνακα 3.1, είναι αρνητικό για όλες τις τιμές της αγωγιμότητας φορτίου στο διάστημα $0<G<2.9837$ *αμ*, ενώ το A_{12} είναι πάντα θετικό. Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι η κλίση της πρώτης εξίσωσης ισορροπίας (σχέση (5.29α)) είναι πάντα θετική και μάλιστα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3.1, μειώνεται με την αύξηση της αγωγιμότητας μέχρις ότου γίνει μηδενική για *G=2.9837 αμ*. Δηλαδή η ευθεία κινείται ωρολογιακά ξεκινώντας από την κατακόρυφη θέση για πολύ μικρό *G* και καταλήγει στην οριζόντια θέση όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή *G=2.9837 αμ*, όπου όπως έχει αναφερθεί εμφανίζεται διακλάδωση σαγματικού κόμβου.

Η δεύτερη εξίσωση ισορροπίας του γραμμικοποημένου συστήματος (5.28) είναι μια ευθεία που περνάει από το σημείο ισορροπίας του συστήματος, *S*, και έχει κλίση $a_2 = -A_{11}/A_{22}$. Από το κεφάλαιο 3 γνωρίζουμε ότι το στοιχειό A_{11} του πίνακα κατάστασης, όσον αφορά στο S και για τις τιμές του Πίνακα 3.1, είναι αρνητικό για όλες τις τιμές της αγωγιμότητας φορτίου στο διάστημα $0<G<2.9837$ *αμ*, ενώ το A_{22} είναι αρνητικό μέχρι να μηδενιστεί για αγωγιμότητα φορτίου *G=2.537 αμ*. Με βάση

τα παραπάνω και παρατηρώντας το Σχήμα 5.3.2, προκύπτει ότι η κλίση της δεύτερης εξίσωσης ισορροπίας, α_2 είναι αρχικά αρνητική και κατά απόλυτη τιμή αυξάνεται. Όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή *G=2.537 αμ* τότε η κλίση της δεύτερης εξίσωσης απειρίζεται (δηλαδή η ευθεία ισορροπίας είναι κατακόρυφη για αυτήν την τιμή αγωγιμότητας). Για περαιτέρω αύξηση του *G*, η κλίση α_2 γίνεται θετική και αρχίζει να μειώνεται με την αύξηση της αγωγιμότητας μέχρις ότου γίνει μηδενική για *G=2.9837 αμ*. Δηλαδή η ευθεία κινείται ωρολογιακά ξεκινώντας από αρνητική κλίση για πολύ μικρό *G*, γίνεται κατακόρυφη για *G=2.537 αμ* και καταλήγει στην οριζόντια θέση όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή *G=2.9837 αμ*.



Σχήμα 5.3.1 : *Μεταβολή της κλισης α_1 συναρτήσει της αγωγιμότητας φορτίου G*



Σχήμα 5.3.2 :*Μεταβολή της κλισης α_2 συναρτήσει της αγωγιμότητας φορτίου G*

Συγκρίνοντας τις δύο εξισώσεις ισορροπίας παρατηρούμε ότι ταυτίζονται μόνο όταν βρεθούν και οι δύο σε οριζόντια θέση για $G=2.9837$ *αμ* αφού αν εξισώσουμε τις κλίσεις α_1 και α_2 προκύπτει ότι :

$$a_1 = \frac{A_{11}}{A_{12}} = -\frac{A_{11}}{A_{22}} = a_2 \quad \text{ή} \quad A_{11}(A_{12}-A_{22})=0$$

το οποίο σύμφωνα με την παρ. §3.3.4 ισχύει μόνο όταν μηδενιστεί το A_{11} για $G=2.9837$ *αμ* (για τις τιμές του Πίνακα 3.1).

Ακόμη παρατηρούμε ότι για την τιμή αγωγιμότητας $G=1.66413297$ *αμ*, όπου ισχύει ότι $|A_{22}| = A_{12}$, οι κλίσεις των δύο εξισώσεων ισορροπίας γίνονται ίσες και αντίθετες. Για μικρότερες τιμές της αγωγιμότητας η κλίση α_2 είναι αρνητική αλλά κατά απόλυτη τιμή μικρότερη σε σχέση με την κλίση α_1. Για τιμές αγωγιμότητας μεγαλύτερες του $G=1.66413297$ *αμ* η α_2 είναι και πάλι αρνητική αλλά τώρα κατά απόλυτη τιμή είναι μεγαλύτερη. Αυτό ισχύει μέχρι η αγωγιμότητα να πάρει τη τιμή $G=2.537$ *αμ*, αφού για μεγαλύτερες τιμές του G οι κλίσεις γίνονται ομόσημες.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η τιμή $G=1.66413297$ *αμ* στην οποία οι κλίσεις των εφαπτόμενων των καμπυλών ισορροπίας γίνονται ίσες και αντίθετες, συμπίπτει με το όριο μονότονης συμπεριφοράς όπως έχει αναλυθεί στην εργασία [1]. Επίσης η τιμή αγωγιμότητας $G=2.537$ *αμ* στην οποία αλλάζει πρόσημο η κλίση της εξίσωσης ισορροπίας για το δεύτερο ΣΑΤΦ, α_2, συμπίπτει με το όριο της ευσταθούς συμπεριφοράς του συστήματος όπως αναλύθηκε τόσο στην εργασία [1], όσο και στις ενότητες 4.2 και 4.3 βάση των συνθηκών για διακλάδωση Hopf και ομοκλινή βρόχο, στην παρούσα διπλωματική εργασία. Τέλος, η τιμή $G=2.9837$ *αμ* στην οποία μηδενίζονται ταυτόχρονα οι κλίσεις των εφαπτόμενων των καμπυλών ισορροπίας συμπίπτει με τη συνθήκη εμφάνισης διακλάδωσης σαγματικού κόμβου. Τα παραπάνω αριθμητικά δεδομένα ισχύουν για τις τιμές του Πίνακα 3.1.

Συμπερασματικά, συνδυάζοντας τις προηγούμενες παρατηρήσεις πάνω στις κλίσεις των εφαπτόμενων των καμπυλών ισορροπίας με τα αποτελέσματα της εργασίας [1] γύρω από το είδος της ευστάθειας ή αστάθειας του συστήματος που μελετάμε καθώς και τα αποτελέσματα των ενοτήτων 4.3 και 4.4, θα λέγαμε ότι :

· Για αγωγιμότητες στην περιοχή τιμών $0<G<1.66413297$ *αμ*, όπου οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας έχουν αντίθετο πρόσημο και κατά απόλυτη τιμή η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη του δεύτερου ΣΑΤΦ (δηλαδή εκείνη με την αρνητική κλίση) είναι μικρότερη, το σύστημα είναι μονότονα ευσταθές ενώ δεν ικανοποιείται για καμία τιμή του λόγου γ η συνθήκη για διακλάδωση Hopf ή ομοκλινή βρόχο. Επομένως το σημείο ισορροπίας S είναι ευσταθές για όλους τους λόγους γ.

· Για αγωγιμότητα ίση με $G=1.66413297$ *αμ*, όπου οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας γίνονται ίσες και αντίθετες, το σύστημα αρχίζει να εμφανίζει ευσταθείς ταλαντώσεις .

· Για αγωγιμότητες στην περιοχή τιμών $1.66413297 <G<2.537$ *αμ*, όπου οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας συνεχίζουν να έχουν αντίθετο πρόσημο αλλά κατά απόλυτη τιμή η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη του δεύτερου ΣΑΤΦ (δηλαδή εκείνη που είναι αρνητική) είναι τώρα μεγαλύτερη, το σύστημα είναι ευσταθές μονότονα ή με ταλαντώσεις ανάλογα με το λόγο των χρονικών σταθερών,

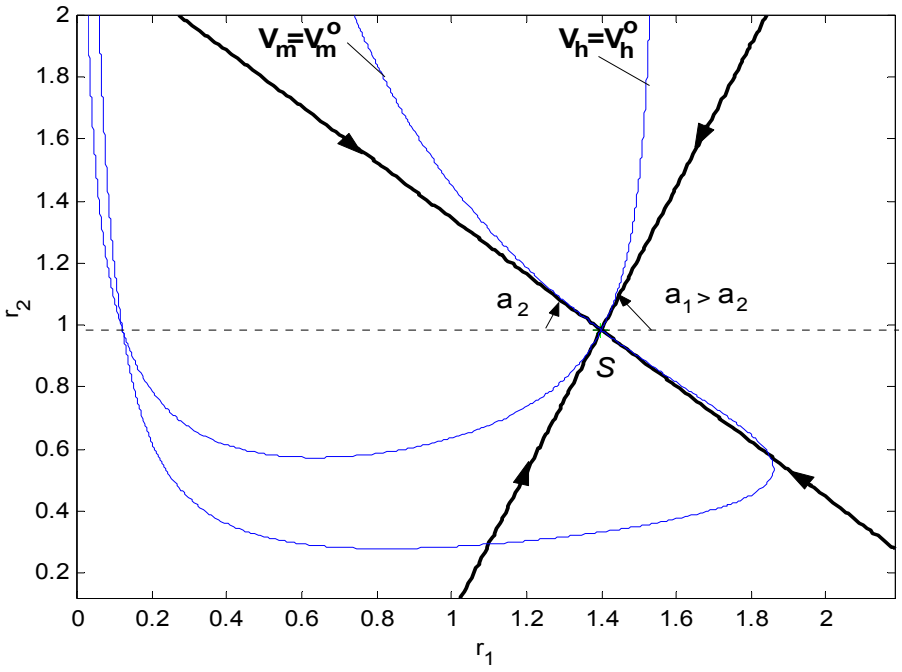
γ. Ακόμη λόγω του ότι δεν υπάρχουν τιμές $\gamma_H(G)$ ή $\gamma_{OB}(G)$ στις οποίες εμφανίζεται διακλάδωση Hopf ή ομοκλινής βρόχος αντίστοιχα, το σημείο ισορροπίας S συνεχίζει να είναι ευσταθές, αλλά η περιοχή έλξης του είναι αρκετά συρρικνωμένη.

· Για αγωγιμότητα ίση με *G=2.537 αμ*, όπου η κλίση της εφαπτόμενης στην καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ γίνεται κατακόρυφη, έχουμε την εμφάνιση αστάθειας. Επίσης από αυτήν την τιμή αγωγιμότητας και μετά ικανοποιούνται οι συνθήκες εμφάνισης διακλάδωσης Hopf, και επομένως ομοκλινούς βρόχου ή ασταθούς οριακού κύκλου, δηλαδή υπάρχουν τιμές του λόγου γ στις οποίες πραγματοποιείται ΔΗ ή ομοκλινής βρόχος ($\gamma_H(G)$ ή $\gamma_{OB}(G)$ αντίστοιχα).

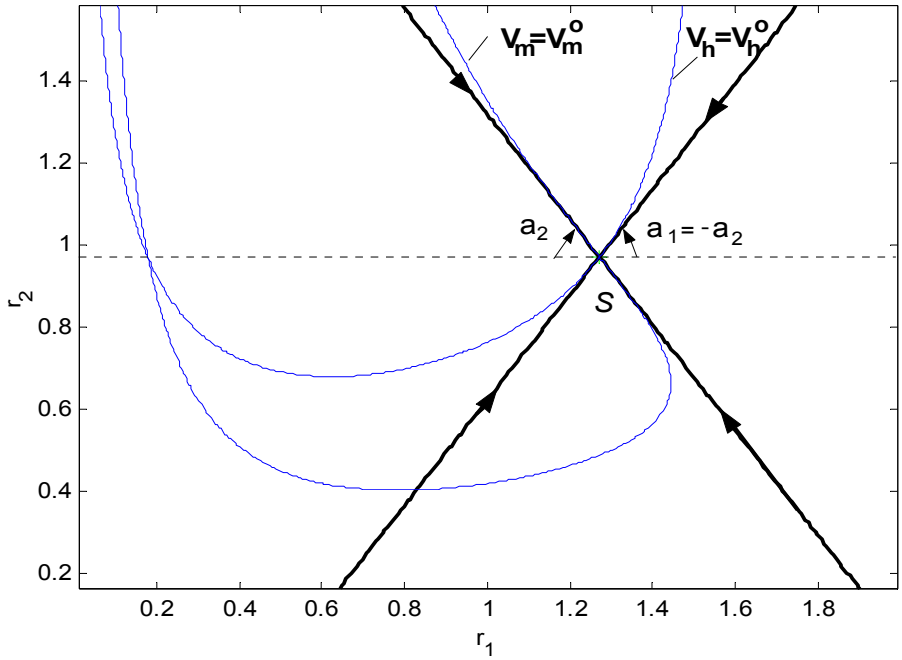
· Για αγωγιμότητες στην περιοχή τιμών *2.537 <G<2.9837 αμ*, όπου οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας είναι πλέον ομόσημες, το σύστημα εμφανίζει αστάθεια για διάφορες τιμές του λόγου των χρονικών σταθερών γ, και λόγω της ύπαρξης τιμών $\gamma_H(G)$ και $\gamma_{OB}(G)$, το σημείο ισορροπίας S δεν είναι πάντα ευσταθές.

· Για αγωγιμότητα ίση με *G=2.9837 αμ*, όπου η ορίζουσα του πίνακα ευαισθησιών, D_A, μηδενίζεται και οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας ταυτίζονται στην οριζόντια θέση, το σύστημα εμφανίζει διακλάδωση σαγματικού κόμβου και για μεγαλύτερες τιμές της αγωγιμότητας δεν έχει σημεία ισορροπίας.

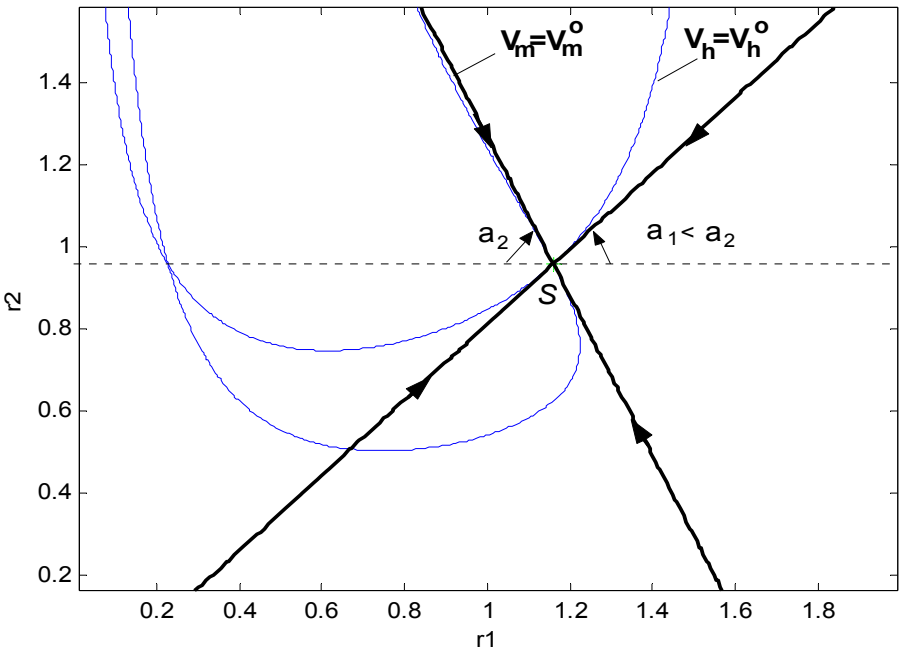
Στα Σχήματα 5.3.3 έως 5.3.8 παρουσιάζονται οι εξισώσεις ισορροπίας τόσο του γραμμικού (έντονες γραμμές) όσο και του μη γραμμικού συστήματος για τιμές αγωγιμότητας που αντιστοιχούν στις περιοχές τιμών που αναφέραμε παραπάνω. Πιο συγκεκριμένα έχουν κατασκευαστεί τα διαγράμματα ισορροπίας για τις ακόλουθες τιμές αγωγιμότητας : *G=1.2 αμ*, *G=1.66413297 αμ*, *G=2αμ*, *G=2.537 αμ*, *G=2.8 αμ* και *G=2.9837 αμ*.



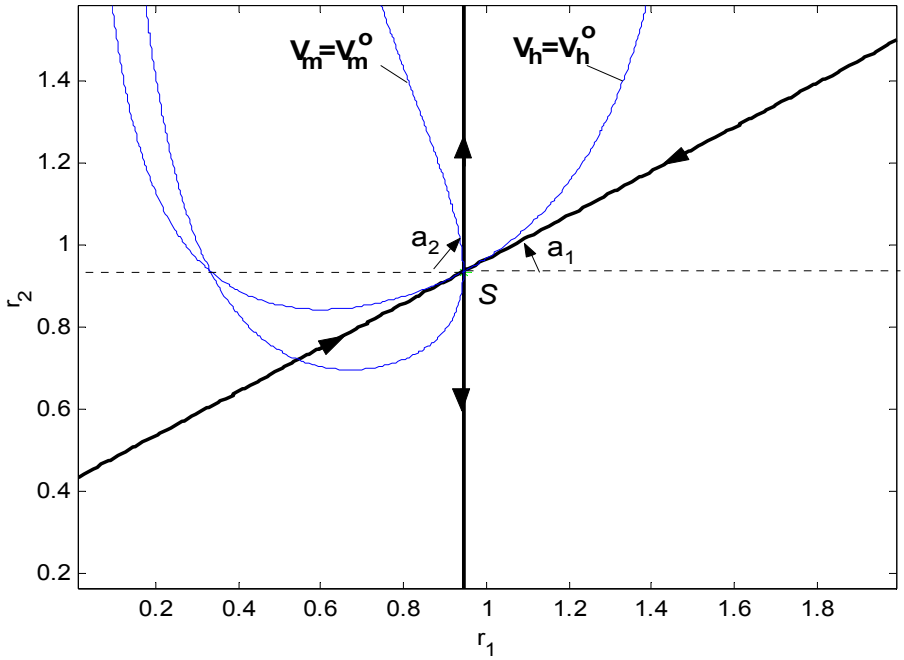
Σχήμα 5.3.3 : *Εξισώσεις Ισορροπίας με Αντίθετες Κλίσεις ($a_1>a_2$)*



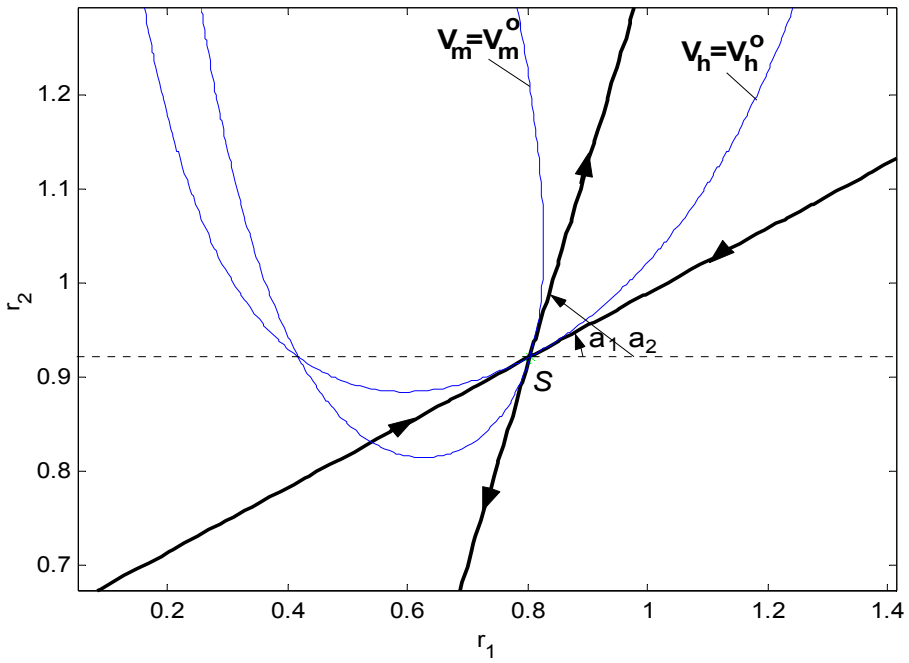
Σχήμα 5.3.4 : *Εξισώσεις Ισορροπίας με Ίσες και Αντίθετες Κλίσεις*



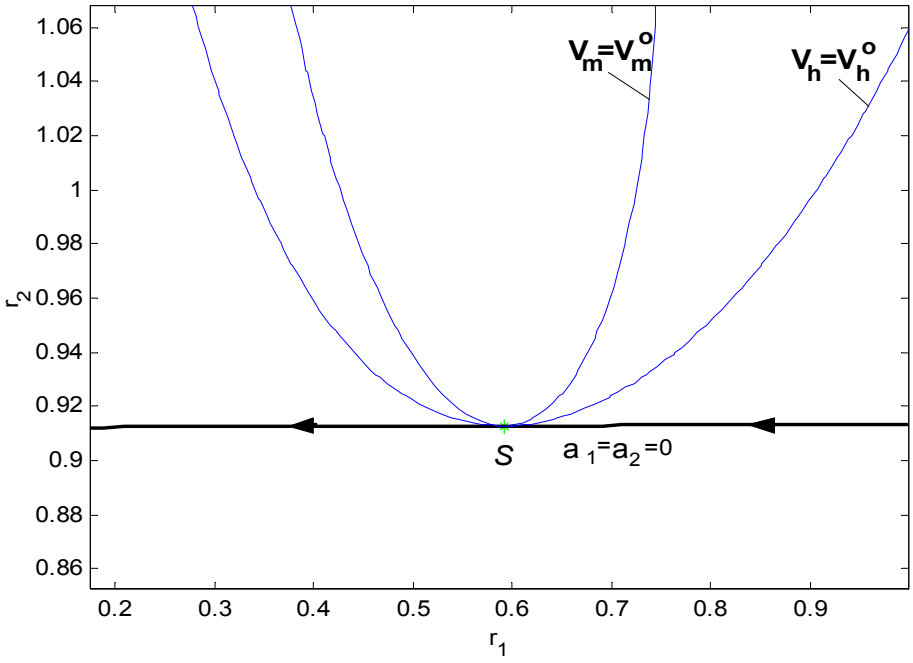
Σχήμα 5.3.5 : *Εξισώσεις Ισορροπίας με Αντίθετες Κλίσεις ($a_1<a_2$)*



Σχήμα 5.3.6 : *Εξισώσεις Ισορροπίας όταν η Κλίση της εφαπτόμενης για το δευτερο ΣΑΤΦ απειρίζεται($a_2 \to \infty$)*



Σχήμα 5.3.7 : *Εξισώσεις Ισορροπίας με Ομόσημες Κλίσεις*



Σχήμα 5.3.8 : *Εξισώσεις Ισορροπίας με Μηδενικές Κλίσεις (ΔΣΚ)*

Παρατηρούμε σε όλα τα Σχήματα (5.3.3-5.3.8) ότι στην εξίσωση ισορροπίας με τη θετική κλίση a_1, που συμπίπτει με το κεντρικό ιδιοδιάνυσμα στην περίπτωση με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ, $u_{o_{T_1<<T_2}}$, λόγω του σταθερού προσήμου του a_1 η φορά του συστήματος πάνω σε αυτή είναι πάντα σταθερή προς το σημείο ισορροπίας *S*. Επομένως συμπεραίνουμε ότι το κεντρικό ιδιοδιάνυσμα $u_{o_{T_1<<T_2}}$ είναι πάντα ευσταθές όπως και το σημείο ισορροπίας *S* για την περίπτωση με γρήγορο το πρώτο ΣΑΤΦ για όλες τις αγωγιμότητες μέχρι τη διακλάδωση σαγματικού κόμβου. Αντίθετα για την εξίσωση ισορροπίας με κλίση a_2 λόγω του ότι μεταβάλλεται το πρόσημο της, η φορά του συστήματος δεν είναι πάντα προς το σημείο ισορροπίας *S*. Πιο συγκεκριμένα όταν η κλίση a_2 γίνει θετική (Σχήματα 5.3.6-5.3.8) η φορά του συστήματος πάνω σε αυτήν άρα και στο κεντρικό ιδιοδιάνυσμα $u_{o_{T_2<<T_1}}$ αλλάζει (αποκλίνει από το *S*) με αποτέλεσμα το $u_{o_{T_2<<T_1}}$ να είναι ασταθές. Με βάση τα συμπεράσματα αυτά εξηγείται η παρατήρηση της παρ. §5.2.2 που είχε εξαχθεί παρατηρώντας τα Σχήματα 5.2.1 και 5.2.2.

Τα συμπεράσματα που εξήχθησαν σε αυτή την ενότητα παρατηρώντας τη σύμπτωση των συνθηκών για την αλλαγή της συμπεριφοράς του συστήματος σε διάφορες τιμές της αγωγιμότητας και τη μεταβολή των σχετικών κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας, εξηγούνται πληρέστερα στην επόμενη ενότητα, όπου περιγράφεται η συμπεριφορά του συστήματος βάση των διαγραμμάτων ισορροπίας και των κινήσεων των ΣΑΤΦ, όπως φαίνονται στο Σχήμα 4.1.1.

5.4 ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΟΝΤΑ ΣΤΟ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΣΗΜΕΙΟ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ

5.4.1 Γενικά

Στις επόμενες ενότητες εξετάζεται η συμπεριφορά του συστήματος (3.1-3.2) για τις διάφορες τιμές της αγωγιμότητας φορτίου G, με τη βοήθεια των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας. Στην ανάλυση που παρουσιάζεται, θεωρείται ότι οι αρχικές συνθήκες του συστήματος βρίσκονται σχετικά κοντά στο σημείο ισορροπίας S, και πιο συγκεκριμένα στην περιοχή Β των καμπυλών ισορροπίας, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1.1. Ο λόγος για την επιλογή αυτή είναι ότι η περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας S για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων του συστήματος (αγωγιμότητα G και λόγος των χρονικών σταθερών γ), όπως δείξαμε στην ενότητα 4.3, δεν είναι ολόκληρος ο χώρος των καταστάσεων και ακόμη μεταβάλλεται σε μέγεθος και μορφή. Επομένως, είναι σημαντικό να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος σε μια περιοχή στην οποία υπάρχουν τόσο τιμές παραμέτρων οι οποίες οδηγούν σε ευστάθεια (μονότονη ή ταλαντούμενη), όσο και τιμές που οδηγούν σε αστάθεια (πάλι μονότονη ή ταλαντούμενη). Από την μελέτη της περιοχής έλξης του συστήματος (3.1-3.2), δείξαμε ότι η περιοχή των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας, Β, ικανοποιεί τις προηγούμενες απαιτήσεις, καθώς για κάποιες μεταβολές των παραμέτρων του συστήματος βρίσκεται εντός ή εκτός της περιοχής έλξης.

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις κατασκευάζουμε και μελετάμε τη συμπεριφορά του συστήματος στα διαγράμματα καμπυλών ισορροπίας για τις ίδιες περιοχές τιμών με την ενότητα 5.3.

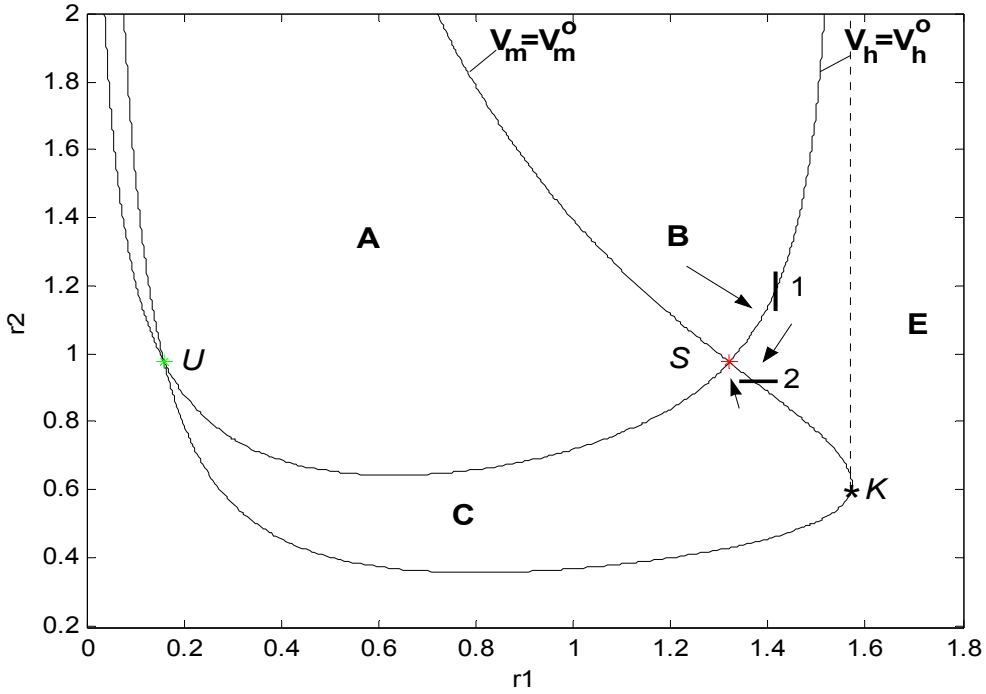
5.4.2 Μονότονη Συμπεριφορά

Σύμφωνα με την [1] όταν τα στοιχεία του συστήματος έχουν τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 3.1 και η αγωγιμότητα του φορτίου βρίσκεται στην περιοχή τιμών $0<G<1.66413297$ *αμ*, τότε η συμπεριφορά του συστήματος είναι ευσταθής και μονότονη, δηλαδή δεν εμφανίζεται υπερακόντιση για αρχικές συνθήκες κοντά στο S, για όλες τις τιμές των T_1 ,T_2.

Στο Σχήμα 5.4.1 φαίνονται οι καμπύλες ισορροπίας των δύο ΣΑΤΦ για τιμή της αγωγιμότητας ίση με $G = 1.5$ *αμ*. Με 1 και 2 έχουν συμβολιστεί οι κινήσεις που θα εκτελέσουν τα ΣΑΤΦ καθώς διασχίζουν τις καμπύλες ισορροπίας $V_h = V_h^o$ και $V_m = V_m^o$ αντίστοιχα.

Όταν οι αρχικές συνθήκες του συστήματος βρίσκονται στην περιοχή Β του διαγράμματος ισορροπίας, τότε το σύστημα κινείται με κλίση προς τα δεξιά και κάτω όπως δείχνει το βέλος στο Σχήμα 5.4.1, κόβοντας την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ κατακόρυφα (κίνηση 1), και μπαίνει στην περιοχή Ε. Στην περιοχή αυτή των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας το σύστημα κινείται προς τα κάτω και αριστερά, όπως δείχνει το βέλος, με αποτέλεσμα να καταλήξει είτε στο ευσταθές σημείο ισορροπίας S, είτε να κινηθεί προς την περιοχή C. Στη δεύτερη περίπτωση το σύστημα κόβει οριζόντια την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, όπως δείχνει η κίνηση 2 του Σχήματος 5.4.1, και κινείται ανοδικά με αποτέλεσμα να

καταλήξει στο σημείο ισορροπίας *S* χωρίς να εισέλθει στην Περιοχή Α και χωρίς να κάνει ταλαντώσεις .



Σχήμα 5.4.1 : *Καμπύλες ισορροπίας για μονότονη συμπεριφορά*

Στην οριακή περίπτωση που το πρώτο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο αργό από το δεύτερο, δηλαδή ισχύει ότι $T_2 << T_1$ και ο λόγος γ τείνει στο άπειρο, τότε το σύστημα έχοντας αρχικές συνθήκες στην περιοχή Β, κινείται κατακόρυφα (αφού λειτουργεί ουσιαστικά μόνο το δεύτερο ΣΑΤΦ), εισέρχεται στην περιοχή Ε και συνεχίζει να κινείται κατακόρυφα μέχρι να φτάσει την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ ($V_m = V_m{}^o$) όπου ακολουθεί την τροχιά αυτής της καμπύλης μέχρι το ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*. Σ' αυτήν την περίπτωση όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.1, το σύστημα κινούμενο κατακόρυφα ξεκινώντας μέσα από την περιοχή Β, θα συναντήσει σε κάθε περίπτωση την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, και γι' αυτόν το λόγο αποκλείεται το σενάριο της αστάθειας για αυτή την τιμή της αγωγιμότητας. Ακόμη παρατηρούμε ότι τα παραπάνω θα συμβαίνουν μόνο όταν η εφαπτόμενη της καμπύλης ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ στο σημείο Κ, που όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.1 είναι το δεξιότερο σημείο της καμπύλης $V_m = V_m{}^o$, δεν τέμνει σε κανένα σημείο την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ και άρα αφήνει στο αριστερό μέρος της ολόκληρη την περιοχή Β.

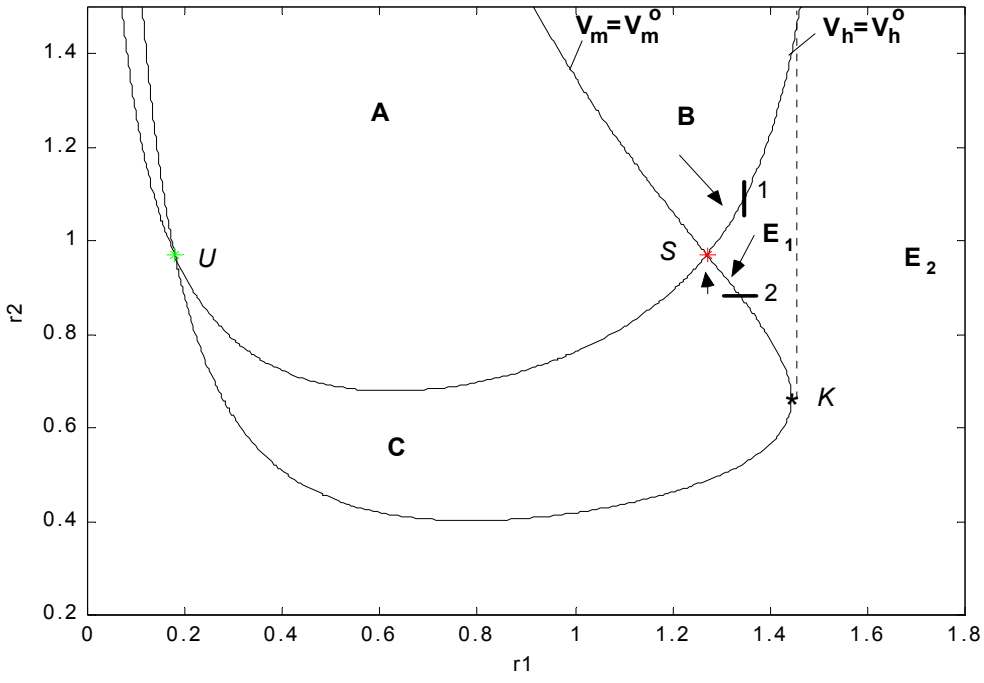
Επίσης, παρατηρώντας το Σχήμα 5.4.2 όπου έχουν κατασκευαστεί οι καμπύλες ισορροπίας για το όριο της μονότονης συμπεριφοράς σύμφωνα με την [1], δηλαδή για αγωγιμότητα φορτίου ίση με $G = 1.66413297$ *αμ*, παρατηρούμε ότι η προϋπόθεση η εφαπτόμενη στο σημείο Κ να μην τέμνει την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ, οριακά ικανοποιείται.

Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.2, η εφαπτόμενη στο σημείο Κ της $V_m = V_m^{\,o}$, είναι ασύμπτωτη της καμπύλης ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ, $V_h = V_h^{\,o}$**,** με αποτέλεσμα να χωρίζει την περιοχή Ε των διαγραμμάτων ισορροπίας κατακόρυφα σε δύο περιοχές E_1 και E_2.

Με βάση τα παραπάνω θα μπορούσε να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι για να είναι ευσταθές το σύστημα που μελετάμε όταν ξεκινήσει από την περιοχή Β, θα πρέπει η εφαπτόμενη της καμπύλης ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, $V_m = V_m^{\,o}$, στο σημείο S να έχει αρνητική κλίση ή διαφορετικά θα πρέπει οι εφαπτόμενες των δύο καμπυλών στο S να έχουν αντίρροπες κλίσεις και μάλιστα η αρνητική κλίση της $V_m = V_m^{\,o}$ να είναι μικρότερη.

Συμπερασματικά, θα λέγαμε ότι το σύστημα παρουσιάζει ευσταθή μονότονη συμπεριφορά για αρχικές συνθήκες σε όλη την περιοχή Β των διαγραμμάτων ισορροπίας, μόνο όταν οι εφαπτόμενες των καμπυλών ισορροπίας των δύο ΣΑΤΦ στο ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*, έχουν αντίρροπες κλίσεις και η κλίση της καμπύλης του δεύτερου ΣΑΤΦ είναι αριθμητικά πιο μικρή. Για τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 3.1 η συνθήκη αυτή ισχύει όταν η αγωγιμότητα φορτίου βρίσκεται μεταξύ των τιμών $0 \le G \le 1.66413297$ *αμ*.

Πράγματι όπως αποδείχτηκε στην ενότητα 5.3 οι εφαπτόμενες των καμπυλών ισορροπίας στο ευσταθές σημείο ισορροπίας για τιμές αγωγιμότητας στην περιοχή $0 \le G \le 1.66413297$ *αμ*, όχι μόνο έχουν αντίρροπες κλίσεις, άλλα και κατά απόλυτη τιμή η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ είναι πάντα μικρότερη σε σχέση με την αντίστοιχη κλίση για το πρώτο ΣΑΤΦ, μέχρι τη στιγμή που γίνονται ίσες και αντίθετες για $G = 1.66413297$ *αμ*.



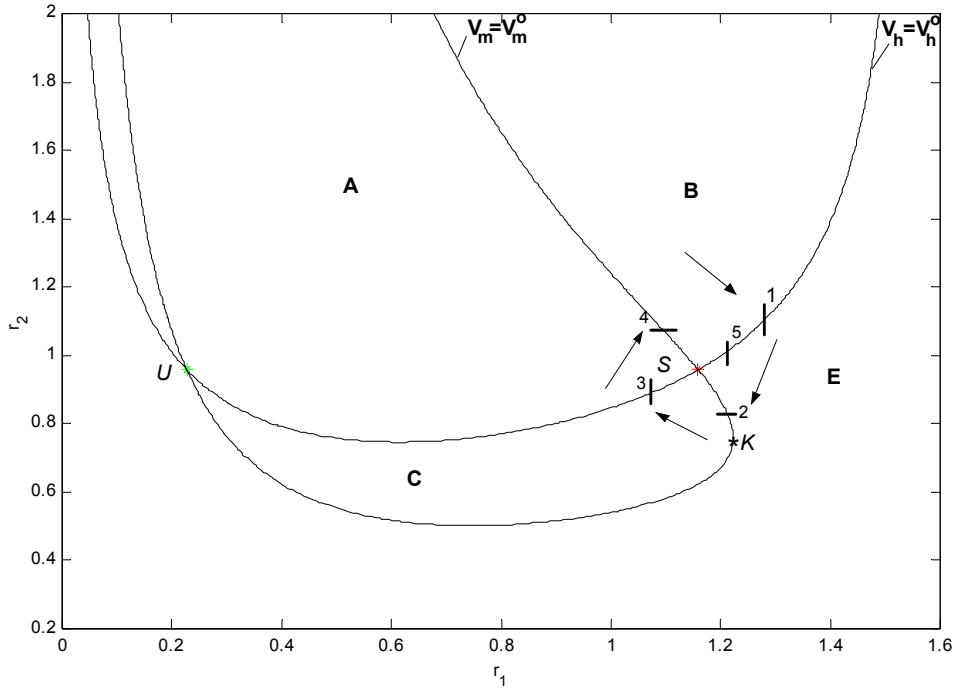
Σχήμα 5.4.2 : *Καμπύλες ισορροπίας για το όριο μονότονης συμπεριφοράς*

5.4.3 Ευσταθής ταλαντωτική συμπεριφορά

Σύμφωνα με την [1] όταν το σύστημα έχει τις τιμές των στοιχείων που δίνονται στον Πίνακα 3.1 και η αγωγιμότητα του βρίσκεται στην περιοχή τιμών *1.66413297 <G<2.537 αμ*, τότε η συμπεριφορά του μπορεί να είναι είτε μονότονα ευσταθής είτε ευσταθής με ταλαντώσεις, για όλες τις τιμές των T_1 ,T_2.

Στο Σχήμα 5.4.3 φαίνονται οι καμπύλες ισορροπίας των δύο ΣΑΤΦ για τιμή της αγωγιμότητας ίση με $G = 2$ *αμ*. Με 1, 2, 3, 4, 5 έχουν συμβολιστεί οι κινήσεις που θα εκτελέσουν τα ΣΑΤΦ καθώς διασχίζουν τις καμπύλες ισορροπίας $V_h = V_h^o$ και $V_m = V_m^o$ εναλλάξ.

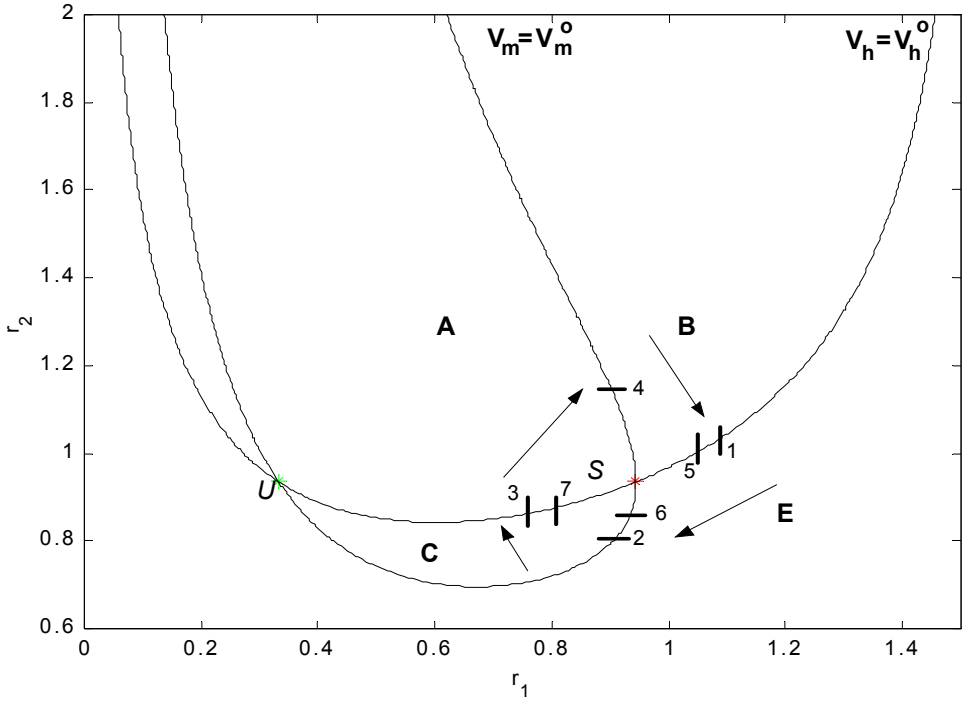
Μια τυπική συμπεριφορά του συστήματος για αυτήν την τιμή της αγωγιμότητας περιγράφεται παρακάτω. Όταν οι αρχικές συνθήκες του συστήματος βρίσκονται στην περιοχή Β του διαγράμματος ισορροπίας, τότε το σύστημα κινείται με κλίση προς τα δεξιά και κάτω όπως δείχνει το βέλος στο Σχήμα 5.4.3, κόβοντας την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ κατακόρυφα (κίνηση 1), και μπαίνει στην περιοχή Ε. Στην περιοχή αυτή των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας το σύστημα κινείται προς τα κάτω και αριστερά, όπως δείχνει το βέλος, και κόβοντας οριζόντια την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, μπαίνει στην περιοχή C (κίνηση 2). Στη συνέχεια κινείται ανοδικά και προς τα αριστερά με τέτοια κλίση ώστε να εισέλθει στην περιοχή Α, όπως δείχνει η κίνηση 3 του Σχήματος 5.4.3, και να κινηθεί ανοδικά και προς τα δεξιά με αποτέλεσμα να ξαναπεράσει από την περιοχή Β (κίνηση 4). Επομένως το σύστημα θα επαναλάβει την προηγούμενη διαδικασία (κινήσεις 5...), αυτή τη φορά όμως με ταλάντωση μικρότερου πλάτους, ώστε να καταλήξει στο σημείο ισορροπίας S εκτελώντας συνεχώς ταλαντώσεις μειούμενου πλάτους .



Σχήμα 5.4.3 :*Ευσταθής ταλαντωτική συμπεριφορά*

Στην οριακή περίπτωση που το πρώτο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο αργό από το δεύτερο, δηλαδή ισχύει ότι $T_2 << T_1$ και ο λόγος γ τείνει στο άπειρο, τότε το σύστημα έχοντας αρχικές συνθήκες στην περιοχή Β θα κινηθεί κατακόρυφα και θα εισέλθει στην περιοχή Ε όπου θα συνεχίσει να κινείται κατακόρυφα. Όμως όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.3 υπάρχει περίπτωση το σύστημα κινούμενο κατακόρυφα να μη διασχίσει την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ ($V_m = V_m^{\,o}$) με αποτέλεσμα να συνεχίσει την πορεία του και να μη μπορέσει να συγκλίνει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν αρχικές συνθήκες στην περιοχή Β, κυρίως όσο πλησιάζουμε κοντά στην καμπύλη $V_h = V_h^{\,o}$, για τις οποίες αν βρισκόμαστε σε οριακές καταστάσεις όπου το δεύτερο ΣΑΤΦ είναι αρκετά πιο γρήγορο από το πρώτο, δηλαδή ισχύει ότι $T_2 << T_1$, το σύστημα να καταλήγει σε αστάθεια. Παρ' όλα αυτά υπάρχουν σημεία στην περιοχή Β κοντά στο σημείο ισορροπίας S, τέτοια ώστε ακόμη και όταν ισχύει ότι $T_2 << T_1$, οι τροχιές που ξεκινούν από εκείνα, να καταλήγουν στο ευσταθές σημείο ισορροπίας *S*.

Παρατηρώντας το Σχήμα 5.4.4, το οποίο έχει κατασκευαστεί για την κρίσιμη τιμή της αγωγιμότητας φορτίου $G = 2.537$ *αμ* βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή το σύστημα μπορεί οριακά μόνο να είναι ευσταθές αν ξεκινήσει από την περιοχή Β και κινούμενο κατακόρυφα.



Σχήμα 5.4.4 : *Καμπύλες ισορροπίας για οριακή ευστάθεια*

Επίσης, όπως αποδείχτηκε στην ενότητα 5.3 οι εφαπτόμενες των καμπυλών ισορροπίας στο S, για αγωγιμότητες φορτίου στο διάστημα τιμών $1.66413297 < G < 2.537$ *αμ* είναι αντίρροπες (όπως και στην προηγούμενη παράγραφο), αλλά σε αντίθεση με πριν η εφαπτόμενη στην καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, έχει τώρα κλίση μεγαλύτερη. Ακόμα αποδεικνύεται ότι όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή $G = 2.537$ *αμ* η εφαπτόμενη στην καμπύλη $V_m = V_m{}^o$, γίνεται κατακόρυφη, κάτι που φαίνεται καθαρά και στο Σχήμα 5.4.4.

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι το σύστημα παρουσιάζει ευσταθή μονότονη ή ταλαντούμενη συμπεριφορά για ορισμένες μόνο αρχικές συνθήκες στην περιοχή Β των διαγραμμάτων ισορροπίας, όταν οι εφαπτόμενες των καμπυλών ισορροπίας των δύο ΣΑΤΦ στο ευσταθές σημείο ισορροπίας S, έχουν αντίρροπες κλίσεις και κατά απόλυτη τιμή η κλίση της καμπύλης $V_m = V_m{}^o$ είναι μεγαλύτερη. Για τις τιμές που δίνονται στον Πίνακα 3.1 η συνθήκη αυτή ισχύει όταν η αγωγιμότητα φορτίου βρίσκεται μεταξύ των τιμών $1.66413297 \le G \le 2.537$ *αμ*.

5.4.4 Εμφάνιση Ασταθών Ταλαντώσεων

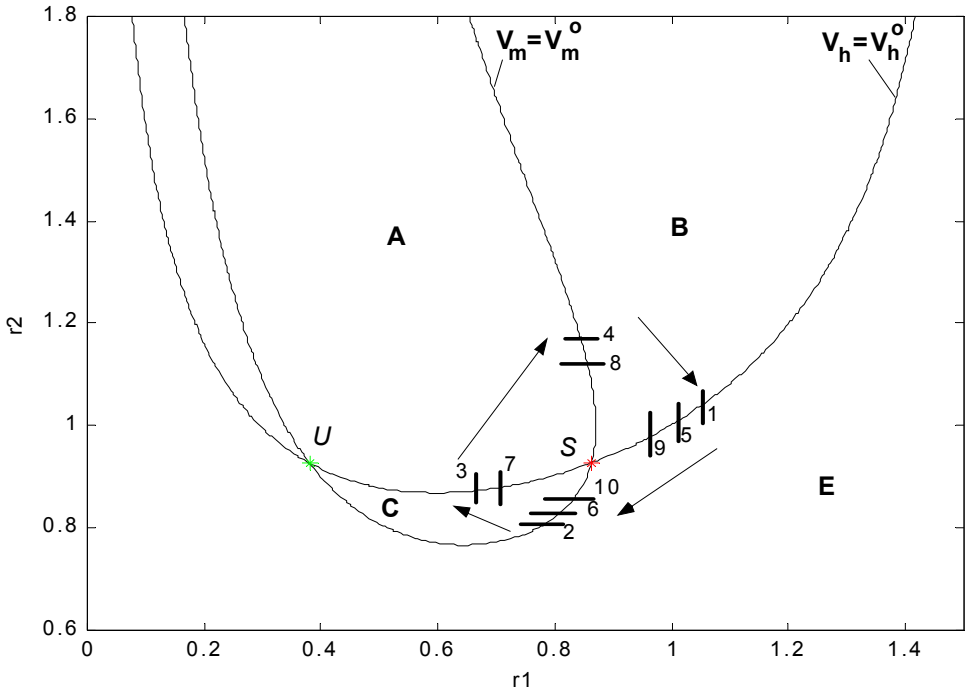
Σύμφωνα με την [1] όταν το σύστημα έχει τις τιμές των στοιχείων που δίνονται στον Πίνακα 3.1 και η αγωγιμότητα του βρίσκεται στην περιοχή τιμών *2.537<G<2.9837 αμ*, τότε η συμπεριφορά του μπορεί να είναι είτε ευσταθής μονότονα ή με ταλαντώσεις είτε ασταθής με ταλαντώσεις, για τις διάφορες τιμές των T_1 ,T_2.

Στην περιοχή αυτή των τιμών της αγωγιμότητας φορτίου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.4.5 που αποτελεί το διάγραμμα ισορροπίας για $G = 2.7$ *αμ*, οι καμπύλες ισορροπίας γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας είναι πλέον ομόρροπες.

Πράγματι όπως αποδείχτηκε στην ενότητα 5.3 οι εφαπτόμενες των καμπυλών ισορροπίας στο S, έχουν κλίσεις ομόσημες για αυτό το διάστημα τιμών αγωγιμότητας φορτίου.

Η παραπάνω παρατήρηση εξηγεί το λόγο για τον οποίο αν πάρουμε σε οποιαδήποτε σημείο της περιοχής Β αρχικές συνθήκες για το σύστημα, τότε στην περίπτωση που το δεύτερο ΣΑΤΦ είναι αρκετά πιο γρήγορο από το πρώτο, $T_2 << T_1$, τότε το σύστημα πάντα θα καταλήγει σε αστάθεια, εφ'όσον το σύστημα κινούμενο κατακόρυφα δε τέμνει την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ ($V_m = V_m{}^o$), σε κανένα της σημείο. Αυτό σημαίνει ότι η περιοχή έλξης του ευσταθούς σημείου ισορροπίας, *S*, μπορεί για κάποιο λόγο των χρονικών σταθερών T_2, T_1 να είναι πολύ μικρή και το σύστημα ασταθές, κάτι που είχαμε εξηγήσει και με την εμφάνιση ασταθών οριακών κύκλων και διακλαδώσεων Hopf γι' αυτές τις τιμές αγωγιμότητας.

Βέβαια αν δεν ισχύει η προηγούμενη οριακή περίπτωση, δηλαδή δεν είναι αρκετά πιο γρήγορο το δεύτερο ΣΑΤΦ, τότε το σύστημα ξεκινώντας από την περιοχή Β και κινούμενο όπως δείχνουν τα βέλη στο προηγούμενο Σχήμα, μπορεί να καταλήξει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας, S, είτε μονότονα είτε με ταλαντώσεις ανάλογα με το λόγο $\gamma = T_1 / T_2$.



Σχήμα 5.4.5 :*Καμπύλες ισορροπίας κατά την εμφάνιση Ασταθών Ταλαντώσεων*

6. ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ

6.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάστηκε η συμπεριφορά του συστήματος του Σχήματος 3.1.1 που αποτελείται από ΣΑΤΦ δύο επιπέδων, χρησιμοποιώντας το συνεχές μοντέλο που εκφράζεται από τις εξισώσεις (3.1) και (3.2). Στο κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε τις συνθήκες ευστάθειας του ίδιου συστήματος, αλλά αυτήν τη φορά με τη βοήθεια του διακριτού μοντέλου, του οποίου τα γενικά χαρακτηριστικά παρατέθηκαν στην παρ. §1.3.2.

Στα διακριτά συστήματα τα ΣΑΤΦ ενεργοποιούνται μόνο όταν η διαφορά των τάσεων των ελεγχόμενων ζυγών από τις τάσεις αναφοράς, $\Delta V=V-V^o$, ξεπεράσει τα επιτρεπόμενα όρια $\pm d$, δηλαδή μόνο όταν ισχύει ότι $|\Delta V| > d$. Για το λόγο αυτό ορίζεται η συνάρτηση ελέγχου των ΣΑΤΦ, $f(\Delta V)$, δηλαδή:

$$f(\Delta V) = \begin{cases} 1, & \Delta V > d \\ 0, & |\Delta V| \le d \\ 1, & \Delta V < -d \end{cases} \tag{6.1}$$

Επομένως το σύστημα εξισώσεων διακριτού χρόνου που εκφράζει την αλλαγή της θέσεως των ΣΑΤΦ στο *(k+1)-οστό* βήμα έχει την εξής μορφή :

$$r(k+1) = r(k) - f(\Delta V) \cdot r_{step} \tag{6.2}$$

όπου $r(k)$, το 2×1 διάνυσμα που δίνει τις θέσεις των ΣΑΤΦ στο *k-οστό* βήμα

$f(\Delta V)$, η συνάρτηση ελέγχου

και r_{step}, ο διαγώνιος πίνακας 2×2 που δίνει το βήμα αλλαγής του λόγου μετασχηματισμού για κάθε ΣΑΤΦ. Βέβαια αν και τα δύο ΣΑΤΦ έχουν ίσα βήματα αλλαγής των λόγων μετασχηματισμού τότε ο πίνακας r_{step} είναι απλώς ένας αριθμός.

Η εξίσωση (6.2) δίνει την θέση των λόγων μετασχηματισμού των ΣΑΤΦ στο *k-οστό* βήμα συναρτήσει του λόγου του αμέσως προηγούμενου βήματος. Παρατηρούμε πως αν η μεταβολή των ελεγχόμενων τάσεων, $\Delta V=V-V^o$, δεν ξεπεράσει τα επιτρεπόμενα όρια $\pm d$, τότε τα ΣΑΤΦ δεν ενεργοποιούνται αφού η συνάρτηση *f(ΔV)* είναι σε αυτήν την περίπτωση μηδενική.

Αν θεωρήσουμε ότι το βήμα αλλαγής των λόγων μετασχηματισμού, r_{step}, είναι ίδιο και για τα δύο ΣΑΤΦ και μάλιστα πολύ μικρό, τότε μπορούμε να προσεγγίσουμε τη διαφορά των τάσεων στους ελεγχόμενους ζυγούς του συστήματος που μελετάμε (τάσεις V_h και V_m), για το *(k+1)-οστό* βήμα με το εξής σύστημα διακριτού χρόνου :

$$\begin{bmatrix}\Delta V_h(k+1)\\ \Delta V_m(k+1)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\Delta V_h(k)\\ \Delta V_m(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}f(\Delta V_h)\\ f(\Delta V_m)\end{bmatrix}\cdot r_{step}=A\cdot\begin{bmatrix}f(\Delta V_h)\\ f(\Delta V_m)\end{bmatrix}\cdot r_{step} \quad (6.3)$$

όπου ο πίνακας A είναι ο πίνακας ευαισθησιών που είχε οριστεί στο κεφάλαιο 3 από τις σχέσεις (3.43) έως (3.46).

Από τη σχέση (6.3) βλέπουμε ότι η απόκλιση των τάσεων V_h (υψηλή τάση) και V_m (μέση τάση) στο *(k+1)-οστό* βήμα δίνεται ως συνάρτηση των τάσεων του αμέσως προηγούμενου βήματος.

6.2 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ

Αντικείμενο μελέτης αποτελεί η εύρεση συνθηκών για τις οποίες οι ελεγχόμενες τάσεις θα επανέλθουν στις ονομαστικές τιμές τους έπειτα από μια διαταραχή, ή ακριβώς το αντίθετο δηλαδή η εύρεση συνθηκών για τις οποίες θα παρατηρηθεί αστάθεια. Για το λόγο αυτό ορίζεται ένα σύνολο V_a, το οποίο περιλαμβάνει τις συνθήκες ισορροπίας. Πιο συγκεκριμένα το σύνολο αυτό είναι το εξής :

$$V_a=\left\{\Delta V_i:\left|\Delta V_i\right|\le d, i=h,m\right\}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αν όλο το σύνολο των ελεγχόμενων τάσεων ανήκει στο σύνολο V_a, τότε και τα δύο ΣΑΤΦ είναι σε ισορροπία, ενώ αν τουλάχιστον μία διαφορά τάσης δεν ανήκει στο V_a, τότε τουλάχιστον το ένα ΣΑΤΦ λειτουργεί.

Εξετάζοντας τις εξισώσεις διακριτού χρόνου (6.3) και λαμβάνοντας υπ'όψιν ότι οι τιμές του $f(\Delta V_i)$ είναι αποκλειστικά 1 ή 0 ή -1, παρατηρούμε ότι αν τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα ευαισθησιών A είναι αρνητικά και ισχύουν οι εξής ανισότητες:

$$A_{11}+\left|A_{12}\right|\le 0$$

και

$$A_{22}+\left|A_{21}\right|\le 0$$

δηλαδή τα στοιχεία της διαγωνίου κυριαρχούν επί των μη διαγώνιων στοιχείων, τότε όποια και να είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος, η απόκλιση των τάσεων κατά απόλυτη τιμή θα μικρύνει. Επομένως οι ελεγχόμενες τάσεις θα συγκλίνουν τελικά στο σύνολο V_a [9].

Τα προηγούμενα γίνονται πιο σαφή στη συνέχεια όπου εξετάζεται η εξίσωση (6.3) για διάφορες αρχικές συνθήκες.

Έστω ότι στο *k-οστό* βήμα υπάρχει απόκλιση της υψηλής τάσης V_h από την επιθυμητή και ότι η απόκλιση αυτή είναι θετική, δηλαδή ισχύει ότι $\Delta V_h(k)>d$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ελέγχου του πρώτου ΣΑΤΦ θα έχει τιμή 1, δηλαδή $f(\Delta V_h)=1$. Για να έχουμε σύγκλιση της τάσης V_h στο σύνολο V_a θα πρέπει

στο επόμενο βήμα, η απόκλιση της τάσης να μειωθεί, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\Delta V_h(k+1) - \Delta V_h(k) < 0 \tag{6.4}$$

Από τη σχέση (6.3) παίρνουμε ότι :

$$\Delta V_h(k+1) - \Delta V_h(k) = (A_{11} \cdot f(\Delta V_h) + A_{12} \cdot f(\Delta V_m)) \cdot r_{step} \tag{6.5}$$

Η σχέση (6.5) στην περίπτωση που η μέση τάση βρίσκεται μέσα στα επιτρεπτά όρια, δηλαδή $f(\Delta V_m) = 0$, μπορεί να έχει αρνητικό το δεύτερο μέλος της, εφ'όσον το r_{step} είναι πάντα θετικό, μόνο αν το στοιχείο του πίνακα ευαισθησιών A_{11} είναι αρνητικό. Επομένως για να ισχύει η ανισότητα (6.4) σε οποιαδήποτε κατάσταση και αν βρίσκεται το ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ θα πρέπει το A_{11} να είναι αρνητικό. Στη συνέχεια, αν η τάση V_m είναι μεγαλύτερη από την επιθυμητή και άρα ισχύει ότι $f(\Delta V_m) = 1$, για να είναι αρνητικό το δεύτερο μέλος της (6.5) θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$A_{11} + A_{12} \le 0 \tag{6.6}$$

Ακόμη στην περίπτωση που η τάση V_m είναι μικρότερη από την επιθυμητή και άρα ισχύει ότι $f(\Delta V_m) = -1$, για να είναι αρνητικό το δεύτερο μέλος της (6.5) θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$A_{11} - A_{12} \le 0 \tag{6.7}$$

Για να ισχύουν και οι δύο ανισότητες (6.6) και (6.7) ταυτόχρονα όταν το A_{11} είναι αρνητικό, αρκεί το A_{11} κατά απόλυτη τιμή να είναι μεγαλύτερο από το A_{12}, δηλαδή να ισχύει η ανισότητα:

$$A_{11} + |A_{12}| \le 0 \tag{6.8}$$

Έστω τώρα ότι στο *k-οστό* βήμα υπάρχει απόκλιση της υψηλής τάσης V_h από την επιθυμητή και ότι η απόκλιση αυτή είναι αρνητική, δηλαδή ισχύει ότι $\Delta V_h(k) < -d$. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση ελέγχου του πρώτου ΣΑΤΦ θα έχει τιμή -1, δηλαδή $f(\Delta V_h) = -1$. Για να έχουμε σύγκλιση της τάσης V_h στο σύνολο V_a θα πρέπει στο επόμενο βήμα η απόκλιση της τάσης να αυξηθεί (ή διαφορετικά να μειωθεί κατά μέτρο), δηλαδή θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\Delta V_h(k+1) - \Delta V_h(k) > 0 \tag{6.9}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτήν της προηγούμενης περίπτωσης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να ισχύει η ανισότητα (6.9) πρέπει το το A_{11} να είναι αρνητικό και κατά απόλυτη τιμή να είναι μεγαλύτερο από το A_{12}. Δηλαδή και σ' αυτήν την περίπτωση ισχύουν οι ίδιες συνθήκες σύγκλισης.

Με τον ίδιο τρόπο εξετάζουμε και την απόκλιση της μέσης τάσης V_m και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει σύγκλιση όταν το στοιχείο του πίνακα ευαισθησιών A_{22} είναι αρνητικό και κατά απόλυτη τιμή να είναι μεγαλύτερο από το A_{21}, δηλαδή όταν :

$$A_{22} + |A_{21}| \le 0 \tag{6.10}$$

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι για ένα σύστημα που εκφράζεται από εξισώσεις διακριτού χρόνου, ικανή συνθήκη ευστάθειας είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα κατάστασης να είναι αρνητικά, ενώ κατά απόλυτη πρέπει να είναι μεγαλύτερα από το άθροισμα των απόλυτων τιμών όλων των στοιχείων της γραμμής στην οποίας ανήκουν. Δηλαδή θα πρέπει να ισχύει η επόμενη σχέση για όλες τις γραμμές του πίνακα κατάστασης *A(n×n)*:

$$A_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} |A_{ij}| < 0 \tag{6.11}$$

η οποία στο συγκεκριμένο σύστημα που μελετάμε (σχέση (6.3)), μετατρέπεται στις (6.8) και (6.10).[9]

Θεώρημα Gershgorin

Το θεώρημα του Gershgorin είναι ιδιαίτερα χρήσιμο γιατί προσφέρει όρια στην εμβέλεια των ιδιοτιμών του πίνακα κατάστασης *S,* στα συστήματα που εκφράζονται με εξισώσεις συνεχούς χρόνου [8].

Πιο συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι για το δεξί ιδιοδιάνυσμα, *u*, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή *λ* του πίνακα *S*, ισχύει η επόμενη εξίσωση :

$$S \cdot u = \lambda \cdot u \tag{6.12}$$

Αν κανονικοποιήσουμε το ιδιοδιάνυσμα *u* ώστε το μεγαλύτερο κατά απόλυτη τιμή στοιχείο του, έστω το u_i, να είναι ίσο με τη μονάδα, τότε αναλύοντας την διανυσματική εξίσωση (6.12) στην γραμμή *i* , προκύπτει ότι:

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij} \cdot u_j = \lambda \cdot u_i \tag{6.13}$$

ή αφαιρώντας από το άθροισμα τον όρο που αντιστοιχεί στο διαγώνιο στοιχείο s_{ii} η εξίσωση (6.13) γίνεται :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} s_{ij} \cdot u_j + s_{ii} \cdot u_i = \lambda \cdot u_i$$

δηλαδή

$$(\lambda - s_{ii}) \cdot u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} s_{ij} \cdot u_j \tag{6.14}$$

και εφ'όσον στο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα ισχύει ότι $|u_j| \le 1 \quad \forall j$ συνεπάγεται ότι :

$$|\lambda - s_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |s_{ij}| \tag{6.15}$$

Η ανισότητα (6.15) δείχνει ότι η ιδιοτιμή *λ* πρέπει να βρίσκεται μέσα στο δίσκο που ορίζεται από έναν κύκλο με κέντρο το σημείο (s_{ii} *,0)* και ακτίνα το άθροισμα των απόλυτων τιμών των υπόλοιπων στοιχείων της *i* γραμμής του πίνακα κατάστασης *S*. Επομένως μια ικανή συνθήκη ώστε όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα κατάστασης να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη είναι το κέντρο του παραπάνω

δίσκου να βρίσκεται στον αρνητικό ημιάξονα και η ακτίνα του να μην υπερβαίνει την απόλυτη τιμή του s_{ii}. Δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις:

$$s_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \left| s_{ij} \right| < 0 \tag{6.16}$$

και

$$s_{ii} < 0 \tag{6.17}$$

Τα παραπάνω μπορούν να προκύψουν και για τις στήλες του πίνακα κατάστασης αν χρησιμοποιούσαμε το αριστερό ιδιοδιάνυσμα.

Επειδή γενικά δεν γνωρίζουμε ποιο είναι το κατά απόλυτη τιμή μέγιστο στοιχείο του ιδιοδιανύσματος, μια ικανή συνθήκη ώστε όλες οι ιδιοτιμές να έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος θα ήταν να ισχύουν οι ανισότητες (6.16) και (6.17) για όλα τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα. Δηλαδή για να έχουν όλες οι ιδιοτιμές αρνητικό πραγματικό μέρος αρκεί η τομή των δίσκων της μορφής (6.16) είτε για τις γραμμές είτε για τις στήλες του πίνακα για όλα τα διαγώνια στοιχεία να βρίσκεται στο αριστερό μιγαδικό επίπεδο.

Στο γραμμικοποιημένο σύστημα που μελετάμε, εφαρμόζουμε το θεώρημα του Gershgorin για τις γραμμές του πίνακα κατάστασης S που δίνεται από τη σχέση (3.40α), οπότε προκύπτει ότι για να έχουν όλες οι ιδιοτιμές αρνητικό πραγματικό μέρος θα πρέπει να ισχύουν οι επόμενες ανισότητες :

$$T_1^{-1} \cdot (A_{11} + \left| A_{12} \right|) \leq 0 \tag{6.18}$$

και

$$T_2^{-1} \cdot (A_{22} + \left| A_{21} \right|) \leq 0 \tag{6.19}$$

Παρατηρώντας τις σχέσεις (6.18) και (6.19), οι οποίες είναι ικανές συνθήκες ευστάθειας για το συνεχές σύστημα, αξίζει να σημειώσουμε πως όποιες και αν είναι οι τιμές των χρονικών σταθερών T_1 και T_2, οι παραπάνω ανισότητες είναι ταυτόσημες με τις (6.8) και (6.10) που αποτελούν επίσης ικανές συνθήκες ευστάθειας αλλά για το διακριτό σύστημα.

Βέβαια, επειδή το θεώρημα του Gershgorin μπορεί να εφαρμοστεί και στις στήλες του πίνακα κατάστασης, θα προέκυπτε ότι για το συνεχές σύστημα μπορούμε να εξασφαλίσουμε ευστάθεια ακόμη και όταν ισχύει ότι:

$$T_1^{-1} \cdot A_{11} + T_2^{-1} \left| A_{21} \right| \leq 0 \tag{6.20}$$

$$T_2^{-1} \cdot A_{22} + T_1^{-1} \left| A_{12} \right| \leq 0 \tag{6.21}$$

Οι ανισότητες (6.20) και (6.21) στην ειδική περίπτωση που ισχύει ότι οι χρονικές σταθερές των ΣΑΤΦ είναι ίσες, μπορούν να μετατραπούν στις:

$$A_{11} + \left| A_{21} \right| \leq 0 \tag{6.22}$$

$$A_{22} + \left| A_{12} \right| \leq 0 \tag{6.23}$$

Η ανισότητα (6.22) ισχύει πάντα ως ισότητα όταν οι τάσεις αναφοράς είναι ίσες, σύμφωνα με την παρ, §3.3.3, ενώ η δεύτερη ανισότητα (6.23) λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι το στοιχείο A_{12} είναι θετικό για όλες τις τιμές της αγωγιμότητας (όταν οι παράμετροι του συστήματος δίνονται από τον Πίνακα 3.1) μετατρέπεται στην:

$$A_{22} + A_{12} \leq 0 \tag{6.24}$$

η οποία ισχύει για τιμές αγωγιμότητες μέχρι την εξίσωση των απόλυτων τιμών των στοιχείων A_{12} και $A_{22,}$ δηλαδή όταν ισχύει ότι $\left| A_{22} \right| = A_{12}$, η οποία όπως αποδείχτηκε

στην παρ. §5.3.2 αποτελεί τη συνθήκη στην οποία οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας γίνονται ίσες και αντίθετες.

Από τα παραπάνω εξάγεται το συμπέρασμα ότι για το συνεχές σύστημα σύμφωνα με το θεώρημα του Gershgorin όταν ισχύουν οι σχέσεις (6.18) και (6.19) για τις γραμμές ή οι σχέσεις (6.22) και (6.23) για τις στήλες του πίνακα κατάστασης τότε οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι αρνητικές και άρα το σύστημα ευσταθές. Η παραπάνω συνθήκη είναι ικανή και όχι αναγκαία συνθήκη ευστάθειας για το συνεχές σύστημα.

6.3 ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑΚΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

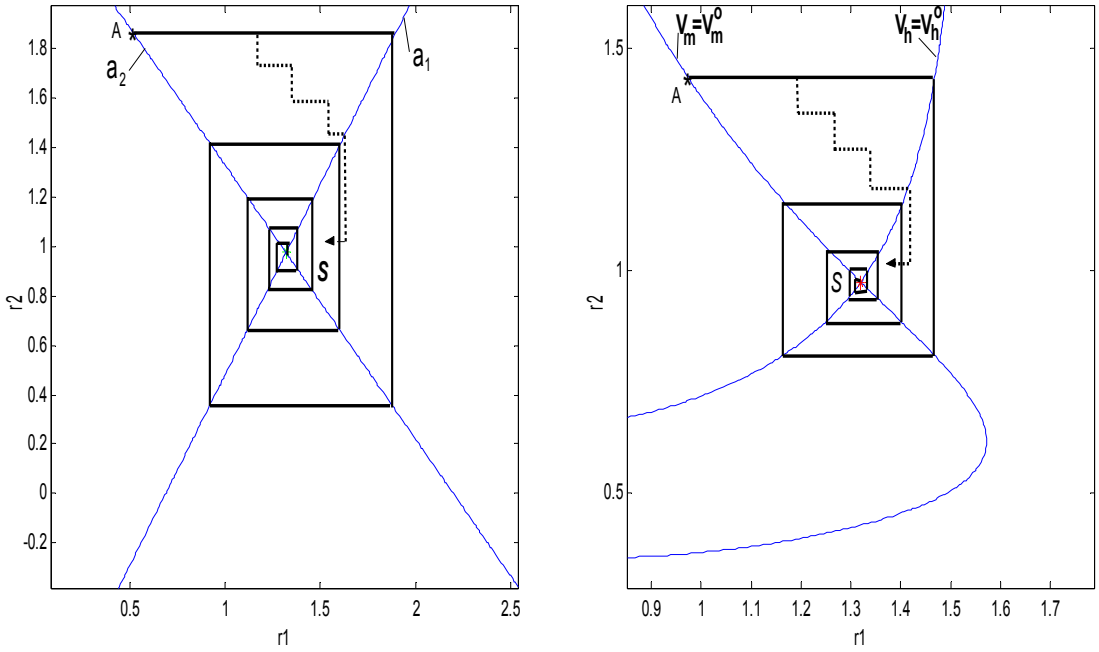
Για την καλύτερη κατανόηση της συμπεριφοράς των διακριτών συστημάτων, παρουσιάζονται στη συνέχεια διάφορες προσομοιώσεις των κινήσεων που θα εκτελέσουν τα ΣΑΤΦ όταν χρησιμοποιούμε το διακριτό μοντέλο (6.3). Στα συγκεκριμένα σχήματα που έχουν κατασκευαστεί θεωρούμε ότι βρισκόμαστε στην ακραία περίπτωση που κάθε φορά λειτουργεί μόνο το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ, δηλαδή πως κάθε ΣΑΤΦ κάνει όσα βήματα χρειάζεται ώστε να φτάσει σε ισορροπία, πριν το άλλο ΣΑΤΦ αρχίσει να λειτουργεί. Επίσης θεωρούμε ότι το επιτρεπόμενο όριο ανοχής της τάσης, $\pm d$, τείνει στο μηδέν. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζεται η συμπεριφορά των ΣΑΤΦ, όταν έχουμε αρχικές συνθήκες πάνω σε μία καμπύλη ισορροπίας και όταν λειτουργεί κάθε φορά μόνο το ένα ΣΑΤΦ, οπότε έχουμε αποκλειστικά μόνο οριζόντια ή κατακόρυφη κίνηση στο χώρο των καταστάσεων.

Αναλυτικότερα στο Σχήμα 6.3.1 φαίνονται οι κινήσεις του συστήματος των ΣΑΤΦ της σχέσης (6.3) για αγωγιμότητα φορτίου $G=1.5\ \alpha\mu$, με έντονες συνεχείς γραμμές. Και στις δύο περιπτώσεις (γραμμικοποιημένο(a) και μη γραμμικό(b)) τα συστήματα ξεκινούν από την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ με αποτέλεσμα να ενεργοποιηθεί μόνο το πρώτο ΣΑΤΦ και το σύστημα να κινηθεί οριζόντια προς την αύξηση του r_1. Όταν το σύστημα συναντήσει την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ θα απενεργοποιηθεί το πρώτο ΣΑΤΦ και θα λειτουργήσει το δεύτερο. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί έτσι ώστε τελικά το σύστημα να συγκλίνει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας S εκτελώντας ταλαντώσεις μειούμενου πλάτους.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για οποιαδήποτε τιμή των χρονικών σταθερών των δύο διακριτών ΣΑΤΦ, η τροχιά στο επίπεδο των καταστάσεων θα βρίσκεται εσωτερικά της συνεχούς τροχιάς του Σχήματος 6.3.1. Για να γίνει αυτή η παρατήρηση πιο κατανοητή στο Σχήμα 6.3.1 έχει κατασκευαστεί μια άλλη τροχιά του συστήματος των δύο ΣΑΤΦ για μια λιγότερο ακραία περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα η διακεκομμένη αυτή τροχιά κατασκευάστηκε θεωρώντας ότι η χρονική καθυστέρηση κάθε ΣΑΤΦ είναι ίση με τρεις περιόδους λειτουργίας των ΣΑΤΦ, και ότι κάθε ΣΑΤΦ ενεργοποιείται αφού το προηγούμενο ΣΑΤΦ εκτελέσει ακριβώς ένα βήμα. Παρατηρούμε από το Σχήμα 6.3.1 ότι η διακεκομμένη τροχιά συγκλίνει γρηγορότερα και βρίσκεται πάντα στο εσωτερικό της συνεχούς τροχιάς, η οποία αποτελεί την πιο ακραία περίπτωση. Επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι για οποιονδήποτε συνδυασμό χρονικών σταθερών το σύστημα ισορροπεί.

Ακόμη, παρατηρούμε πως το σύστημα για αυτή την τιμή αγωγιμότητας συγκλίνει γιατί οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας σε αυτήν την περίπτωση είναι ετερόσημες και μάλιστα κατά απόλυτη τιμή η αρνητική κλίση είναι μικρότερη.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ακόμα και στην ακραία περίπτωση το σύστημα των δύο ΣΑΤΦ έχοντας αγωγιμότητα στη περιοχή τιμών *0<G<1.66413297 αμ*, για τις τιμές του Πίνακα 3.1, είναι πάντα ευσταθές.

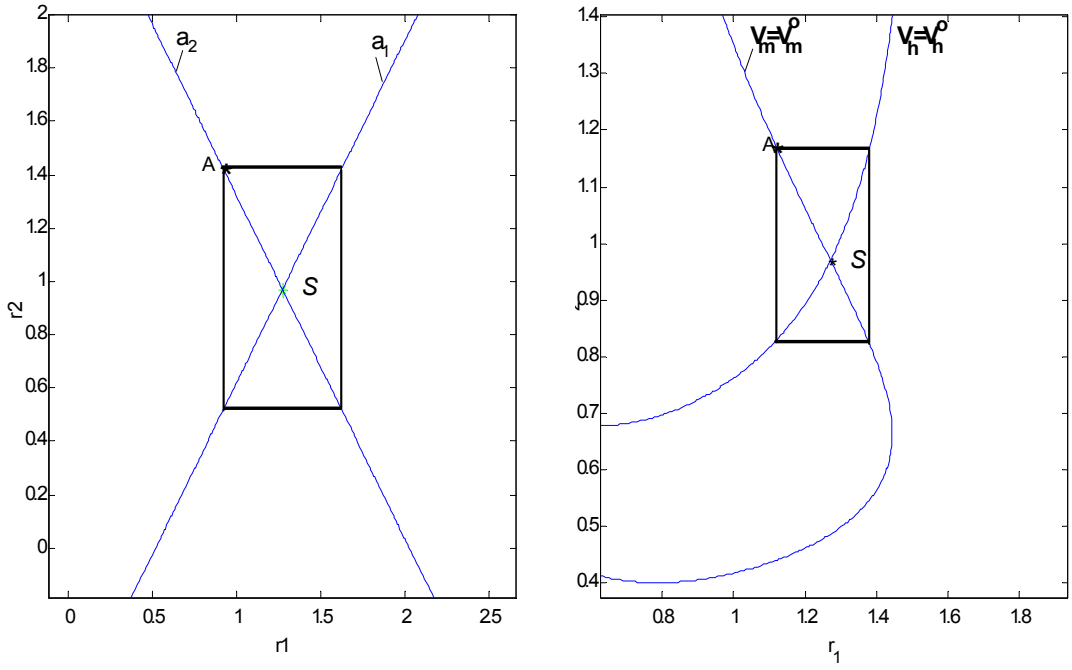


a b

Σχήμα 6.3.1 : *Σύγκλιση του Διακριτού Συστήματος*

Στο Σχήμα 6.3.2 φαίνονται οι κινήσεις του συστήματος των ΣΑΤΦ της σχέσης (6.3) για αγωγιμότητα φορτίου *G=1.66413297 αμ*, στην οποία οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας γίνονται ίσες και αντίθετες. Ας θεωρήσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις (γραμμικοποιημένο(a) και μη γραμμικό(b)) τα συστήματα ξεκινούν από την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ (σημείο Α). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ενεργοποιηθεί μόνο το πρώτο ΣΑΤΦ και το σύστημα να κινηθεί οριζόντια προς την αύξηση του r_1. Όταν το σύστημα συναντήσει την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ θα απενεργοποιηθεί το πρώτο ΣΑΤΦ και θα λειτουργήσει το δεύτερο. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί, αλλά σε αντίθεση με την προηγούμενη περίπτωση μετά από τέσσερα βήματα το σύστημα θα επανέλθει στο σημείο Α.

Επομένως παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση που οι κλίσεις των εξισώσεων ισορροπίας είναι ίσες και αντίθετες, το σύστημα εγκλωβίζεται σε έναν οριακό κύκλο, δηλαδή διαγράφει μια περιοδική τροχιά που δεν του επιτρέπει να συγκλίνει στο ευσταθές σημείο ισορροπίας, *S*. Επειδή αυτή η περίπτωση αυτή είναι ακραία, θα ισχύει γενικά ότι το σύστημα όταν η αγωγιμότητα φορτίου είναι ίση με *G=1.66413297 αμ* θα συγκλίνει.

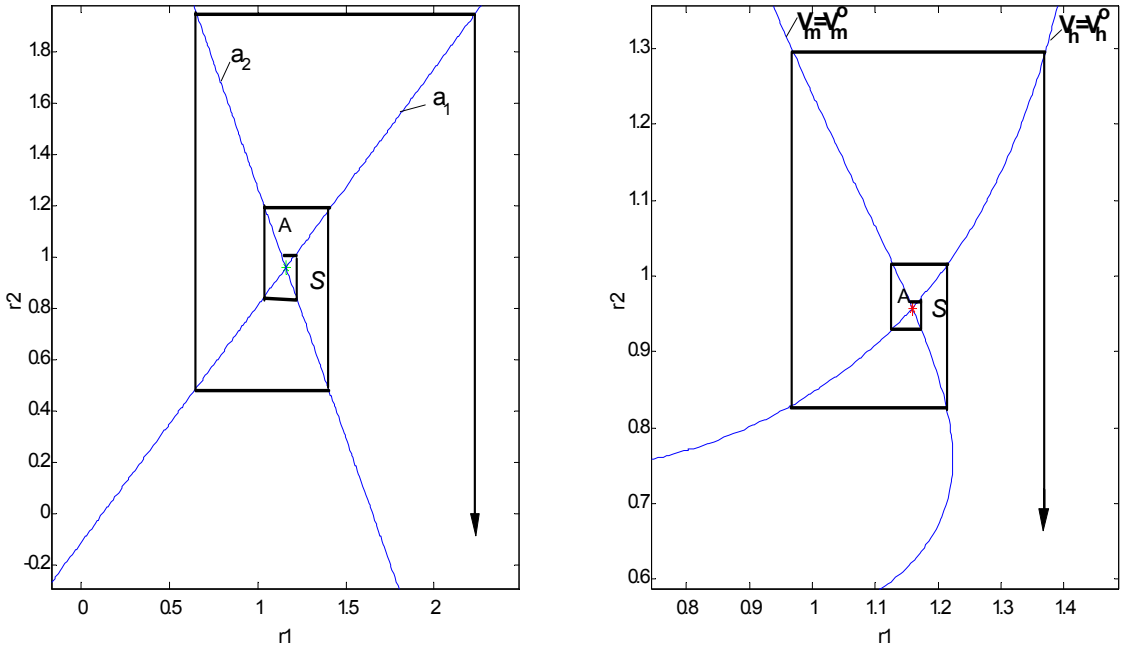


a b

Σχήμα 6.3.2 : *Οριακός Κύκλος στο Διακριτό Σύστημα*

Στο Σχήμα 6.3.3 φαίνονται οι κινήσεις του συστήματος των ΣΑΤΦ της σχέσης (6.3) για αγωγιμότητα φορτίου *G=2 αμ*, στην οποία οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας είναι ετερόσημες αλλά κατά απόλυτη τιμή η αρνητική κλίση του δεύτερου ΣΑΤΦ είναι μεγαλύτερη. Ας θεωρήσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις (γραμμικοποιημένο(a) και μη γραμμικό(b)) τα συστήματα ξεκινούν από την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, από ένα σημείο (Α) που βρίσκεται πολύ κοντά στο σημείο ισορροπίας *S*. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ενεργοποιηθεί μόνο το πρώτο ΣΑΤΦ και το σύστημα να κινηθεί οριζόντια προς την αύξηση του r_1. Όταν το σύστημα συναντήσει την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ θα απενεργοποιηθεί το πρώτο ΣΑΤΦ και θα λειτουργήσει το δεύτερο. Η διαδικασία αυτή θα ακολουθηθεί, αλλά σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα μετά από τέσσερα βήματα όταν συναντήσει για δεύτερη φορά την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ θα την κόψει σε σημείο μακρύτερα από το ευσταθές σημείο ισορροπίας σε σχέση με το σημείο Α. Επομένως το σύστημα εκτελώντας ταλαντώσεις συνεχώς αυξανόμενου πλάτους τελικά θα καταρρεύσει όπως δείχνει το βέλος του Σχήματος 6.3.3.

Φυσικά για ένα δεδομένο συνδυασμό των χρονικών σταθερών των δύο συστημάτων θα μπορούσε η τροχιά του συστήματος να είναι ευσταθής ή σε χειρότερη περίπτωση να κάνει οριακό κύκλο.



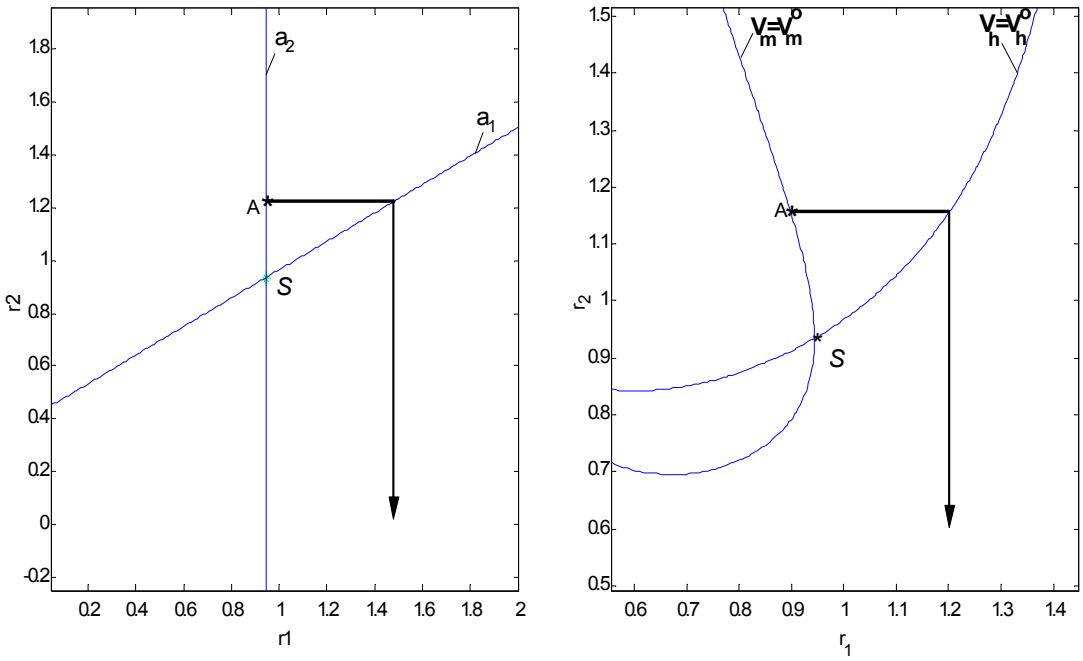
a b

Σχήμα 6.3.3 : *Αστάθεια με Ταλαντώσεις στο Διακριτό Σύστημα*

Στο Σχήμα 6.3.4 φαίνονται οι κινήσεις του συστήματος των ΣΑΤΦ της σχέσης (6.3) για ακόμα μεγαλύτερη αγωγιμότητα φορτίου *G=2.537 αμ*, για την οποία η κλίση της καμπύλης ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ γίνεται κατακόρυφη.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3.4 θεωρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις (γραμμικοποιημένο(a) και μη γραμμικό(b)) τα συστήματα ξεκινούν από την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ, από ένα σημείο (A). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να ενεργοποιηθεί μόνο το πρώτο ΣΑΤΦ και το σύστημα να κινηθεί οριζόντια προς την αύξηση του r_1. Όταν το σύστημα συναντήσει την καμπύλη ισορροπίας του πρώτου ΣΑΤΦ θα απενεργοποιηθεί το πρώτο ΣΑΤΦ ώστε να αρχίσει να λειτουργεί το δεύτερο. Όμως το σύστημα κινούμενο τώρα κατακόρυφα δεν θα συναντήσει την καμπύλη ισορροπίας του δεύτερου ΣΑΤΦ με αποτέλεσμα να συνεχίσει να μειώνει το λόγο μετασχηματισμού του δεύτερου ΣΑΤΦ, r_2, και άρα την τάση ώστε όταν η τάση φτάσει σε απαράδεκτα όρια το σύστημα να καταρρεύσει. Επομένως στην ακραία αυτήν περίπτωση για αγωγιμότητα *G=2.537 αμ*, το σύστημα εμφανίζει μονότονη αστάθεια. Το ίδιο ισχύει και για μεγαλύτερες τιμές αγωγιμότητας φορτίου.

Η αστάθεια στην περίπτωση αυτή οφείλεται στο μηδενισμό του στοιχείου A_{22} του πίνακα ευαισθησιών, με αποτέλεσμα η κίνηση του δεύτερου ΣΑΤΦ να γίνεται ασταθής.



a b

Σχήμα 6.3.4 : *Κατάρρευση στο Διακριτό Σύστημα*

7. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ - ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετήσαμε την ευστάθεια ενός Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας το οποίο περιλαμβάνει δύο μετασχηματιστές συνδεδεμένους εν σειρά και εξοπλισμένους με Συστήματα Αλλαγής Τάσης υπό Φορτίο (ΣΑΤΦ), οι οποίοι τροφοδοτούν φορτίο αγωγιμότητας G. Συνοπτικά, η μεθοδολογία που ακολουθήθηκε είναι η παρακάτω:

1. Αναλυτική έκφραση των μεταβλητών του συστήματος:

- Υπολογίστηκαν τα δύο σημεία ισορροπίας του συστήματος, και αποδείχτηκε ότι το ένα είναι σαγματικό σημείο ισορροπίας (U) ενώ το άλλο είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (S) για τις περισσότερες τιμές των παραμέτρων του συστήματος που είναι η αγωγιμότητα φορτίου, G, και ο λόγος των χρονικών σταθερών, γ.
- Γραμμικοποιήθηκε το σύστημα που εξετάζουμε και ορίστηκαν τόσο ο πίνακας κατάστασης, S, όσο και ο πίνακας ευαισθησιών, A, του οποίου τα στοιχεία εκφράζουν την ευαισθησία των ελεγχόμενων από τα ΣΑΤΦ τάσεων ως προς τις μεταβολές των λόγων μετασχηματισμού.
- Αναλύθηκε η επίδραση της ορίζουσας και του ίχνους του πίνακα κατάστασης στην ευστάθεια του συστήματος

2. Εξαγωγή σχέσεων και συνθηκών που αφορούν:

- Το σημείο εμφάνισης διακλάδωσης σαγματικού κόμβου (όρια μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος του συστήματος).
- Την ύπαρξη τιμών των παραμέτρων του συστήματος, G και γ, ώστε να είναι δυνατή η εμφάνιση διακλάδωσης Hopf, ασταθούς οριακού κύκλου και διακλάδωσης ομοκλινούς βρόχου.

3. Μελέτη της περιοχής έλξης του ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας, S, για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων, G και γ.
4. Κατασκευή των διαγραμμάτων καμπυλών ισορροπίας για το μη γραμμικό σύστημα:

- Εξήγηση των κινήσεων του συστήματος των δύο ΣΑΤΦ στις πέντε περιοχές που εμφανίζονται στα διαγράμματα καμπυλών ισορροπίας.
- Μελέτη των αργών και γρήγορων δυναμικών του συστήματος όταν το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ είναι πολύ πιο γρήγορο σε σχέση με το άλλο.
- Μελέτη της σχετικής μεταβολής των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας με την αγωγιμότητα, G.
- Ανάλυση της συμπεριφοράς του συστήματος με τη βοήθεια των καμπυλών ισορροπίας.

5. Περιγραφή του διακριτού μοντέλου των ΣΑΤΦ:

- Ορισμός των εξισώσεων διακριτού χρόνου που εκφράζουν τη μεταβολή των ελεγχόμενων τάσεων για το σύστημα που μελετάμε.
- Ανάλυση των συνθηκών ευστάθειας στο διακριτό σύστημα.
- Προσομοίωση της συμπεριφοράς του διακριτού συστήματος.

Από την εξέταση των ιδιοτήτων του γραμμικοποιημένου συστήματος προέκυψε ότι η τιμή της αγωγιμότητας στην οποία μηδενίζεται η ορίζουσα του

πίνακα κατάστασης (G^*) συμπίπτει με το μακροπρόθεσμο όριο μεταφοράς ισχύος όταν μεταβάλλεται μόνο ο λόγος μετασχηματισμού του ΣΑΤΦ ΥΥΤ/ΥΤ. Ακόμη το όριο των τιμών της αγωγιμότητας για τις οποίες μπορεί να μηδενιστεί το ίχνος του πίνακα κατάστασης, το οποίο αποτελεί και το όριο ευσταθούς συμπεριφοράς (G_{cr}), συμπίπτει με το μακροπρόθεσμο όριο μεταφοράς ισχύος όταν μεταβάλλεται μόνο ο λόγος μετασχηματισμού του ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ. Επειδή ισχύει ότι το G_{cr} είναι μικρότερο από το G^* προκύπτει ότι το ΣΑΤΦ διανομής (ΥΤ/ΜΤ) φτάνει πρώτο στο όριο μέγιστης μεταφερόμενης ισχύος, και άρα ευστάθειας, όταν λειτουργεί μόνο του. Για μεγαλύτερες τιμές αγωγιμότητας από το G_{cr} η ευστάθεια του συστήματος εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα των δύο ΣΑΤΦ και σε αυτήν την περίπτωση το όριο ευστάθειας είναι η διακλάδωση Hopf, η οποία είναι υποκρίσιμη. Για το ΣΑΤΦ δικτύου (ΥΥΤ/ΥΤ) το όριο ευστάθειας είναι η διακλάδωση σαγματικού κόμβου του συνολικού συστήματος, η οποία εμφανίζεται για τιμή αγωγιμότητας G^*.

Σε επόμενο κεφάλαιο, μελετήθηκε η περιοχή έλξης του ασυμπτωτικά ευσταθούς σημείου ισορροπίας, *S*, με βάση τις συνθήκες εμφάνισης διακλάδωσης Hopf, ομοκλινούς βρόχου ή οριακού κύκλου.

Πιο συγκεκριμένα αποδείχτηκε ότι για τιμές αγωγιμότητας μικρότερες της G_{cr} δεν υπάρχουν τιμές της παραμέτρου γ τέτοιες ώστε να είναι δυνατή η εμφάνιση διακλάδωσης Hopf και άρα ομοκλινούς βρόχου ή οριακού κύκλου. Επομένως για τις τιμές αυτές η περιοχή έλξης είναι ανοικτή και ορίζεται από τους δύο κλάδους της ευσταθούς πολλαπλότητας του ασταθούς σημείου ισορροπίας *U*. Μάλιστα καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου γ η περιοχή έλξης συρρικνώνεται όλο και περισσότερο, αλλά πάντα μένει ανοικτή. Επίσης το σημείο ισορροπίας *S* για αυτές τις τιμές αγωγιμότητας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές για όλες τις τιμές του λόγου γ.

Όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή G_{cr} τότε το σύστημα οριακά μπορεί να εμφανίσει διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου, έστω σε μια τιμή $\gamma_{OB}(G_{cr})$. Ακόμη βρέθηκε ότι στην περίπτωση αυτή για πρακτικά άπειρη τιμή του λόγου γ, δηλαδή όταν η χρονική σταθερά T_1 τείνει στο άπειρο, το σύστημα έχει δύο μηδενικές ιδιοτιμές, λόγω του μηδενισμού του στοιχείου A_{22} του πίνακα ευαισθησιών, οπότε παρουσιάζει διακλάδωση δίπλωσης. Για τιμές της παραμέτρου γ μεγαλύτερες της $\gamma_{OB}(G_{cr})$, η περιοχή έλξης του σημείου ισορροπίας *S* οριοθετείται από έναν ασταθή οριακό κύκλο, ο οποίος συρρικνώνεται καθώς αυξάνεται το γ.

Για τιμές αγωγιμότητας μεγαλύτερες από το G_{cr} υπάρχουν τιμές της παραμέτρου γ στις οποίες εμφανίζεται ομοκλινής βρόχος, $\gamma_{OB}(G)$, και διακλάδωση Hopf, $\gamma_H(G)$. Για τις ενδιάμεσες τιμές του λόγου γ, στο σύστημα εμφανίζεται ασταθής οριακός κύκλος, ο οποίος δημιουργείται από το σπάσιμο του ομοκλινούς βρόχου για τιμή λίγο μεγαλύτερη του $\gamma_{OB}(G)$. Στη συνέχεια ο οριακός κύκλος συρρικνώνεται έως ότου εξαφανιστεί στην τιμή $\gamma_H(G)$, λόγω της συγχώνευσης του με το σημείο ισορροπίας *S*. Η περιοχή έλξης του *S* οριοθετείται για τιμές του λόγου γ μεταξύ $\gamma_{OB}(G) < \gamma < \gamma_H(G)$ από τον ασταθή οριακό κύκλο και το σημείο ισορροπίας *S* είναι ασταθές για τιμές μεγαλύτερες από το $\gamma_H(G)$.

Όταν η αγωγιμότητα πάρει την τιμή G^* τότε το σύστημα εμφανίζει διακλάδωση σαγματικού κόμβου, οπότε τα δύο σημεία ισορροπίας, *U* και *S*,

ταυτίζονται και μπορούν να προσεγγιστούν μόνο μέσω της ευσταθούς πολλαπλότητας τους. Για μεγαλύτερες τιμές της αγωγιμότητας το σύστημα καταρρέει καθώς δεν έχει πια σημεία ισορροπίας.

Στη συνέχεια της διπλωματικής εργασίας, έγινε η ανάλυση του συστήματος με ιδιάζουσα διαταραχή. Αναλυτικότερα εξετάστηκε το σύστημα στις οριακές περιπτώσεις που μόνο το ένα από τα δύο ΣΑΤΦ λειτουργεί σε πεπερασμένο χρόνο. Σε αυτές τις περιπτώσεις η δυναμική συμπεριφορά του συστήματος αναλύεται σε γρήγορες και αργές συνιστώσες. Από την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε βρέθηκε ότι οι αργές δυναμικές του συστήματος εκτυλίσσονται πάνω στα κεντρικά ιδιοδιανύσματα των σημείων ισορροπίας, τα οποία είναι εφαπτόμενα στις καμπύλες ισορροπίας των γρήγορων συστημάτων. Επομένως, σε οριακές περιπτώσεις το σύστημα λειτουργώντας εκτός της καμπύλης ισορροπίας του γρήγορου ΣΑΤΦ, κινείται με βάση μόνο τις γρήγορες δυναμικές και άρα αποκλειστικά οριζόντια ή κατακόρυφα στο χώρο των καταστάσεων. Αντίθετα όταν βρίσκεται πάνω στην καμπύλη ισορροπίας του γρήγορου ΣΑΤΦ, κινείται μεταβάλλοντας μόνο την αργή μεταβλητή, που είναι ο λόγος μετασχηματισμού του αργού ΣΑΤΦ.

Με βάση την παραπάνω ανάλυση, διαπιστώθηκε πως το σημείο ισορροπίας U είναι σαγματικό σημείο ισορροπίας, εφ'όσον τα κεντρικά ιδιοδιανύσματα του είναι ευσταθή ενώ τα γρήγορα ασταθή και στις δύο οριακές περιπτώσεις. Αντίθετα για το σημείο ισορροπίας S παρατηρήθηκε πως στην περίπτωση που το ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ είναι πιο γρήγορο, τότε για κάποιες τιμές της παραμέτρου G τόσο το κεντρικό όσο και το γρήγορο ιδιοδιάνυσμα του γίνονται ασταθή. Η εξήγηση της παραπάνω παρατήρησης δόθηκε στη συνέχεια της εργασίας με τη βοήθεια της μελέτης των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας.

Πιο συγκεκριμένα εξετάστηκε η σχετική μεταβολή των κλίσεων των εξισώσεων ισορροπίας του γραμμικοποιημένου συστήματος, οι οποίες είναι εφαπτόμενες στις καμπύλες ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος. Ειδικότερα αποδείχτηκε πως η συνθήκη εμφάνισης ταλαντώσεων συμπίπτει με τη συνθήκη να είναι οι δύο κλίσεις των εξισώσεων ισορροπίας ίσες και αντίθετες, κάτι που συμβαίνει στο μηδενισμό του αθροίσματος των στοιχείων της δεύτερης στήλης του πίνακα ευαισθησιών A.

Ακόμη βρέθηκε ότι η συνθήκη για εμφάνιση διακλαδώσεως Hopf άρα και αστάθειας συμπίπτει με την αλλαγή προσήμου της κλίσης της καμπύλης ισορροπίας του ΣΑΤΦ ΥΤ/ΜΤ όποτε και οι δύο κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας γίνονται ομόσημες. Τέλος η συνθήκη εμφάνισης διακλάδωσης σαγματικού κόμβου είναι ίδια με εκείνη για τον ταυτόχρονο μηδενισμό των κλίσεων των εξισώσεων ισορροπίας.

Στη συνέχεια κατασκευάστηκαν οι καμπύλες ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος για διάφορες τιμές της παραμέτρου G και με τη βοήθεια των κλίσεων τους εξηγήθηκε η συμπεριφορά του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα βρέθηκε ότι όταν οι κλίσεις των καμπυλών ισορροπίας έχουν αντίθετο πρόσημο τότε η ύπαρξη ενός γρήγορου ΣΑΤΦ στην πλευρά του φορτίου (ΥΤ/ΜΤ) δεν επηρεάζει την ευστάθεια του συστήματος. Αντίθετα όταν οι κλίσεις γίνουν ομόσημες τότε υπάρχει πιθανότητα αστάθειας στο σύστημα ειδικά όσο αυξάνει ο λόγος γ των χρονικών σταθερών, δηλαδή όσο πιο γρήγορο γίνεται το ΣΑΤΦ στην πλευρά του φορτίου σε σχέση με το ΣΑΤΦ δικτύου (ΥΥΤ/ΥΤ).

Στο τελευταίο κεφάλαιο χρησιμοποιήθηκε το διακριτό μοντέλο ΣΑΤΦ. Αναλυτικότερα, ορίστηκαν οι εξισώσεις που το εκφράζουν και αναλύθηκε η ευστάθεια του μελετώντας τη συμπεριφορά του για διάφορες αρχικές συνθήκες. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν συγκρίθηκαν με αυτά του θεωρήματος Gershgorin, που δίνει όρια στις ιδιοτιμές του συνεχούς συστήματος. Από τη σύγκριση αυτή προέκυψε ότι οι ικανές συνθήκες ευστάθειας για το διακριτό σύστημα συμπίπτουν με τις ικανές συνθήκες ευστάθειας στο συνεχές, όπως αυτές προκύπτουν από το θεώρημα Gershgorin. Τέλος με προσομοίωση εξηγήθηκε η συμπεριφορά των δύο ΣΑΤΦ τα οποία παριστάνονται με το διακριτό μοντέλο, στο οποίο θεωρήθηκε ότι η νεκρή ζώνη είναι σχεδόν μηδενική και ότι κάθε ΣΑΤΦ εκτελεί ακριβώς όσα βήματα χρειάζεται μέχρι να ισορροπήσει πριν ενεργοποιηθεί το άλλο ΣΑΤΦ. Με την προσομοίωση καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι το όριο μονότονης συμπεριφοράς για το συνεχές μοντέλο ταυτίζεται με το όριο ευσταθούς συμπεριφοράς στο διακριτό μοντέλο αυτό, και μάλιστα στο όριο αυτό το διακριτό μοντέλο εγκλωβίζεται στην ακραία περίπτωση σε έναν οριακό κύκλο. Για μεγαλύτερες τιμές της αγωγιμότητας μέχρι το G_{cr}, που αποτελεί την ικανή συνθήκη ευσταθούς συμπεριφοράς στα συνεχή συστήματα, το διακριτό μοντέλο εμφανίζει ασταθή ταλαντωτική συμπεριφορά. Μετά το G_{cr}, στο διακριτό μοντέλο μπορεί να έχουμε μονότονη αστάθεια. Τα παραπάνω συμπεράσματα εξηγήθηκαν με τη βοήθεια των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας.

Επεκτείνοντας την ανάλυση της παρούσας διπλωματικής, ανοίγονται οι προοπτικές για εξέταση της συμπεριφοράς του συστήματος, για πιο σύνθετα μοντέλα. Επίσης θα μπορούσε να εξεταστεί η συμπεριφορά του συστήματος αν συμπεριληφθεί στην ανάλυση τα άνω και κάτω όρια των ΣΑΤΦ. Μπορούμε να δούμε πως τα όρια αυτά, επηρεάζουν τη μη γραμμική συμπεριφορά του συστήματος.

Επίσης, ένα θέμα που θα μπορούσε να εξεταστεί, είναι το αν είναι δυνατό να εξαχθεί συνθήκη για τη διακλάδωση ομοκλινούς βρόχου. Όπως έχουμε αναφέρει και στο Κεφάλαιο 5, αυτό είναι αντικείμενο μελέτης του θεωρήματος του Melnikov [4,5]. Η θεωρία αυτή απαιτεί ως προϋπόθεση τη μετατροπή του συστήματος σε Χαμιλτονιανή μορφή. Ανοιχτό μένει βέβαια το ερώτημα, αν είναι δυνατό να έρθει σε αυτή τη μορφή το σύστημα των μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που εξετάσαμε.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Δ. Μακρίδου, *"Ανάλυση Ευστάθειας και Ταλλαντώσεων Δύο Ρυθμιζόμενων Μετασχηματιστών Εν Σειρά",* Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Αθήνα 1999.
2. C. W. Taylor, *"Power System Voltage Stability"*, McGraw-Hill, 1994.
3. P. Kundur, *"Power System Stability and Control"*, McGraw-Hill, 1993.
4. T. Van Cutsem, C. D. Vournas, *"Voltage Stability of Electric Power Systems"*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
5. M.S. Calovic, "*Modeling and Analysis of Under-Load Tap-Changing Transformer Control Systems"*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 103, pp. 1909-1915, 1984.
6. P. W. Sauer and M. A. Pai. *"A Comparison of Discrete vs. Continuous Dynamic Models of Tap-Changing-Under-Load Transformers"*. Bulk Power System Voltage Phenomena III-Voltage Stability and Security, Davos, Switzerland, 1994, pp.643-650.
7. Mats Larson, *"Coordinated Tap Changer Control"*, Master Thesis, Department of Industrial Electrical Engineering and Automation, Lund Institute of Technology, 1997.
8. C. D. Vournas, G. A. Manos, *"Emergency Tap-Blocking to Prevent Voltage Collapse"*, IEEE/PES Porto, Power Tech, September 1999.
9. J. Medanić, M. Ilić-Spong, J. Christensen, *"Discrete Models of Slow Voltage Dynamics for Under Load Tap-Changing Transformer Coordination"*. IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 4, pp 873-882, November 1987.
10. Γ. Α. Μάνος, "*Ανάλυση Φαινομένων Κατάρρευσης Τάσεως σε συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας*", Διδακτορική Διατριβή, ΕΜΠ, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Αθήνα, Απρίλης 1998.
11. C. D. Vournas, T.Van Cutsem, "*Voltage oscillations with cascaded load restoration*", IEEE/KTH Stockholm Power Tech, pp 173-178, June 1995.
12. B. M. Weedy, *"Electric Power Systems"*, John Wiley & Sons., 3rd edition, 1979.
13. V. A. Venikov, *"Transient phenomena in Electric Power Systems"*, Pergamon Press, 1964.
14. J. Hale, H. Kocak *"Dynamics and Bifurcations"*, Springer Verlag, 1992.
15. J. Guckenheimer and P. Holmes, *"Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields"*. Springer Verlag, 1983.
16. L. A. S. Pilotto, M. Szechtman, and A. E. Hammad, *"Transient A.C. Voltage Related Phenomena for HVDC Schemes Connected to Weak A.C. Systems"*. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 7, pp 1396-1404, 1992.

17. M. A. Pai, P. W. Sauer, and B. C. Lesieutre, *"Static and Dynamic Nonlinear Loads and Structural Stability in Power Systems "*, IEEE Proceedings, Vol. 83, pp. 1562-1572, 1995.

18. P. Kokotović, H. K. Khalil, and J. O'Reilly, *"Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design"*. Academic Press, 1986.

19. R. E. O'Malley, *"Introduction to Singular Perturbation"*. Academic Press, 1974.

20. Β. Κ. Παπαδιάς, *"Ανάλυση Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας"*, Τόμοι Ι, ΙΙ, Αθήνα 1985.

21. Π.Ν. Παρασκευόπουλου "*Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο*" Αθήνα 1991.

22. I. A. Hiskens, D. J. Hill, *"Dynamic interaction between tapping transformers"*, PSCC Proceedings, Vol. 2, Avignon, pp. 1027-1034, August 1993.

23. Μ. Καρυστιανός, *"Ανάλυση Διακλαδώσεων σε Σύστημα Κινητήρα Επαγωγής – Ρυθμιζόμενου Μετασχηματιστή"*, Διπλωματική εργασία, ΕΜΠ, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Αθήνα 1999.

24. I. Schur, *"potenzreihen im inner des einheìtskreises"*, J. Reine Angew. Math., Vol. 147, pp.205-232, 1917.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα αυτό παρατίθενται τα προγράμματα σε MatLab που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα διπλωματική εργασία ώστε να κατασκευαστούν τα διάφορα σχήματα που αναλύθηκαν στα κεφάλαια 3 έως 5. Πιο συγκεκριμένα τα προγράμματα που κατασκευάστηκαν είναι τα εξής :

●Με το επόμενο πρόγραμμα κατασκευάστηκαν τα διαγράμματα των μεταβολών των στοιχείων του πίνακα ευαισθησίας *A* για το ευσταθές σημείο ισορροπίας (A_{11}, A_{12},, A_{21} , A_{22} , D_A) ως προς την αγωγιμότητα φορτίου *G* που αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3, όπως και των κλίσεων των εφαπτόμενων των καμπυλών ισορροπίας τα οποία παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 5. Το πρόγραμμα βασίστηκε στις σχέσεις (3.37), (3.38) που δίνουν τις συντεταγμένες των σημείων ισορροπίας και στις (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) και (3.54) που ορίζουν τα στοιχεία όπως και την ορίζουσα του πίνακα *A*. Για την εξαγωγή των διαγραμμάτων μεταβολής των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας ως προς την αγωγιμότητα χρησιμοποιήθηκε η σχέση (5.28).

```
clear

Ορισμός των στοιχείων του συστήματος όπως δίνονται από τον Πίνακα 3.1
X=0.1;X1=0.2; X2=0.15; Vg=1.03607;Vm=1;Vh=1; a1=1.5;Vg=Vg*a1;X=X*a1;
G=0.000001:0.1:2.9837;

Υπολογισμός του ευσταθούς σημείου ισορροπίας
a=(Vm.*r2).^2+((Vm.*G.*X1).^2./r2.^2)+(Vm.*G*X2.*r2).^2+2.*Vm.^2.*G.
^2.*X1.*X2;
b=-Vg.^2+((2*Vm^2.*G.^2.*X1.*X)./r2.^2)+2.*Vm^2.*G.^2.*X.*X2;
c=(Vm.*G.*X./r2).^2; d=b.^2-4.*a.*c; r=(-b+sqrt(d))/2./a;
r1=sqrt(r); r2=Vh./(Vm.*sqrt(1+G.^2.*X2^2));

Υπολογισμος των στοιχείων του πίνακα ευαισθησίας A
D=1+G.^2.*X2^2; B=(2.*r1.*r2.^4.*D);
A=r1.^4.*r2.^4+G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).^2;
C=4.*r1.^3.*r2.^4+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.*X
1+2.*r1.*r2.^2*X2);
E=r1.^2.*r2.^4.*D; dgdr1=(B.*A-E.*C)./A.^2; F=4.*r2.^3.*r1.^2.*D;
H=4.*r1.^4.*r2.^3+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.^2
.*r2.*X2);
dgdr2=(F.*A-H.*E)./A.^2; B1=2.*r1.*r2.^2.*A;
C1=4.*r1.^3.*r2.^4+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.*
X1+2.*r1.*r2.^2.*X2);
D1=r1.^2.*r2.^2.*C1; dhdr1=(B1-D1)./A.^2;
E1=2.*r1.^2.*r2.*(r1.^4.*r2.^4+G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).
^2);
F1=r1.^2.*r2.^2.*(4.*r1.^4.*r2.^3+2.*G.^2.*(X+r1.^2*X1+r1.^2.*r2.^2.
*X2).*2.*r1.^2.*r2.*X2); dhdr2=(E1-F1)./A.^2;

A11=(Vg^2/2/Vh).*dgdr1; A12=(Vg^2/2/Vh).*dgdr2;
A21=(Vg^2/2/Vm).*dhdr1; A22=(Vg^2/2/Vm).*dhdr2;
Da=(A11.*A22)-(A12.*A21);

Κατασκευή των διαγραμμάτων (3.3.2), (3.3.3,), (3.3.4), (3.3.5), (3.3.6) & (3.3.7)
figure(1); plot(G,Da);
figure(2); plot(G,A11);
```

```
figure(3); plot(G,A22);
figure(4); plot(G,A12);
figure(5); plot(G,A21);
figure(6); plot(G,A12-A22);
```

Μεταβολή των κλίσεων των καμπυλών ισορροπίας με το G (σχήματα 5.2.1&5.2.2)

```
α1=-(A11./A12); α2=-(A11./A22);
figure(7); plot(G,α1)
figure(8); plot(G,α2)
```

●Με τα προγράμματα που ακολουθούν έγινε η κατασκευή των διαγραμμάτων του Κεφαλαίου 4, στα οποία φαίνονται οι τροχιές του συστήματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα το πρώτο πρόγραμμα υπολογίζει τα σημεία ισορροπίας του συστήματος και επιλύει το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που εκφράζουν το σύστημα που μελετάμε για τις διάφορες αρχικές συνθήκες και τιμές των παραμέτρων, G, T_1, T_2. Οι διαφορικές εξισώσεις ορίζονται στο δεύτερο πρόγραμμα, το οποίο εισάγεται ως συνάρτηση στο πρώτο.

1ο:

```
clear

global T1 T2 G
```

Ορισμός των στοιχείων του συστήματος όπως δίνονται από τον Πίνακα 3.1

```
X = 0.1; X1 = 0.2; X2 = 0.15; Vg = 1.03607; a1=1.5; Vg=Vg*a1;X=X*a1;
T1 =--; T2 =--; GA =--;
```

Υπολογισμός των δύο σημείων ισορροπίας

```
G=--; Vh=1; Vm=1;
a=(Vm*r2)^2+((Vm*G*X1)^2/r2^2)+(Vm*G*X2*r2)^2+2*Vm^2*G^2*X1*X2;
b=-Vg^2+((2*Vm^2*G^2*X1*X)/r2^2)+2*Vm^2*G^2*X*X2;
c=(Vm*G*X/r2)^2; d=b^2-4*a*c; r=(-b+sqrt(d))/2/a;
rb=(-b-sqrt(d))/2/a; r1b=sqrt(rb)
r1=sqrt(r); r2=(Vh/(Vm*sqrt(1+G^2*X2^2)));
plot(r1,r2,'r*',r1b,r2,'g*')
hold on
```

Ορισμός των αρχικών συνθηκών

```
t0=0; tfinal=--; r10 =--; r20 =--; plot(r10,r20,'b*');
```

Επίλυση των διαφορικών εξισώσεων του συστήματος που ορίζονται στο Πρόγραμμα 2

```
y0=[r10 r20];
options=odeset('AbsTol',1e-14,'RelTol',1e-10);
TSPAN=[t0,tfinal];
[t1,y1]=ode45('taps_k',TSPAN,y0,options);

r1 = y1(:,1); r2 = y1(:,2);

a = GA.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).^2;
Vh = sqrt((r1.^2.*r2.^4.*Vg^2.*(1+GA.^2.*X2^2))./(r1.^4.*r2.^4+a));
Vm = sqrt((r1.^2.*r2.^2.*Vg^2)./(r1.^4.*r2.^4+a));

plot(r1,r2,'r') xlabel('r1') ylabel('r2') hold on
```

2ο:

```
function yprime=taps(t,y)

global T1 T2 G
```

Ορισμός των στοιχείων του συστήματος όπως δίνονται από τον Πίνακα 3.1

```
X =0.1;X1=0.2;X2 =0.15; Vg =1.03607; a1=1.5;Vg=Vg*a1; X=X*a1;
Vh0=1; Vm0=1;

r1 = y(1); r2 = y(2);
a = G^2*(X+r1^2*X1+r1^2*r2^2*X2)^2;
Vh = sqrt((r1^2*r2^4*Vg^2*(1+G^2*X2^2))/(r1^4*r2^4+a));
Vm = sqrt((r1^2*r2^2*Vg^2)/(r1^4*r2^4+a));
```

Ορισμός των διαφορικών εξισώσεων (σχέσεις 3.1 &3.2)

```
yprime(1) = 1/T1*(Vh-Vh0);
yprime(2) = 1/T2*(Vm-Vm0);
yprime=yprime';
```

●Με το επόμενο πρόγραμμα κατασκευάζονται τα διαγράμματα καμπυλών ισορροπίας τα οποία παρατίθενται στο Κεφάλαιο 4. (σχήματα παρ. §4.4 & σχήμα 4.1.1)

```
syms r1 r2
```

Ορισμός των στοιχείων του συστήματος όπως δίνονται από τον Πίνακα 3.1

```
x=0.1;x1=0.2; x2=0.15; Vg=1.03607; Vm=1; Vh=1; a=1.5; x=x*a;Vg=Vg*a;
G=--;
```

Καμπύλη ισορροπίας για το πρώτο ΣΑΤΦ (Vh=1) (σχεση 4.3)

```
F=r1^4*(r2^4*(1+G^2*x2^2)+G^2*x1*(x1+2*x2*r2^2))+r1^2*(2*G^2*x*(x1+r
2^2*x2)-r2^4*Vg^2*(1+G^2*x2^2))+(G*x)^2;
ezplot(F,[0,2,0,2]) hold on
```

Καμπύλη ισορροπίας για το δεύτερο ΣΑΤΦ (Vm=1) (σχεση4.4)

```
H=r2^4*(r1^4*(1+G^2*x2^2))+r2^2*(2*G^2*x2*r1^2*(x+r1^2*x1)-
r1^2*Vg^2)+(G^2*(x+r1^2*x1)^2);
ezplot(H,[0,2,0,2])
```

●Με τη βοήθεια του προγράμματος που ακολουθεί κατασκευάζονται οι γεωμετρικοί τόποι των ιδιοτιμών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου όπως φαίνονται στην παρ. §4.2.2:

```
clear
```

Ορισμός των στοιχείων του συστήματος όπως δίνονται από τον Πίνακα 3.1

```
X=0.1; X1=0.2;X2=0.15;Vg=1.03607;Vm=1; Vh=1; a1=1.5;Vg=Vg*a1;X=X*a1;
G=--;
```

Υπολογισμός των δύο σημείων ισορροπίας

```
a=(Vm.*r2).^2+((Vm.*G.*X1).^2./r2.^2)+(Vm.*G*X2.*r2).^2+2.*Vm.^2.*G.
^2.*X1.*X2;
b=-Vg.^2+((2*Vm^2.*G.^2.*X1.*X)./r2.^2)+2.*Vm^2.*G.^2.*X.*X2;
c=(Vm.*G.*X./r2).^2; d=b.^2-4.*a.*c; r=(-b±sqrt(d))/2./a;
r1=sqrt(r); r2=Vh./(Vm.*sqrt(1+G.^2.*X2^2));
```

Υπολογισμος των στοιχείων του πίνακα ευαισθησίας A

```
D=1+G.^2.*X2^2;B=(2.*r1.*r2.^4.*D);
A=r1.^4.*r2.^4+G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).^2;
C=4.*r1.^3.*r2.^4+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.*X
1+2.*r1.*r2.^2*X2); E=r1.^2.*r2.^4.*D;
dgdr1=(B.*A-E.*C)./A.^2; F=4.*r2.^3.*r1.^2.*D;
H=4.*r1.^4.*r2.^3+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.^2
.*r2.*X2);
dgdr2=(F.*A-H.*E)./A.^2; B1=2.*r1.*r2.^2.*A;
C1=4.*r1.^3.*r2.^4+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.*
X1+2.*r1.*r2.^2.*X2); D1=r1.^2.*r2.^2.*C1; dhdr1=(B1-D1)./A.^2;
E1=2.*r1.^2.*r2.*(r1.^4.*r2.^4+G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).
^2);
F1=r1.^2.*r2.^2.*(4.*r1.^4.*r2.^3+2.*G.^2.*(X+r1.^2*X1+r1.^2.*r2.^2.
*X2).*2.*r1.^2.*r2.*X2); dhdr2=(E1-F1)./A.^2;
A11=(Vg^2/2/Vh).*dgdr1; A12=(Vg^2/2/Vh).*dgdr2;
A21=(Vg^2/2/Vm).*dhdr1; A22=(Vg^2/2/Vm).*dhdr2;
Da=(A11.*A22)-(A12.*A21);

T2=50;
```

Αναπαράσταση του πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοτιμών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της σχέσης (3..) με τη μεταβολή της χρονικής σταθεράς T_1

```
for T1=0.001:0.01:15000;
   clear Or trA
   k=0;
   trA=(A11/T1)+(A22/T2);
   Or=(trA)^2-4*(Da/(T1*T2));
   if Or>0
      k=k+1;
      rel1(k)=(trA+sqrt(Or))/2; iml1(k)=0;
      rel2(k)=(trA-sqrt(Or))/2; iml2(k)=0;
      plot(rel1,iml1,'g') hold on plot(rel2,iml2,'r')
   else
      k=k+1;
      rel1(k)=trA/2; iml1(k)=sqrt(-Or)/2;
      rel2(k)=trA/2; iml2(k)=-sqrt(-Or)/2;
      plot(rel1,iml1,'g') hold on plot(rel2,iml2,'r')
   end
end
```

●Με το ακόλουθο πρόγραμμα κατασκευάστηκαν οι Εξισώσεις Ισορροπίας του Γραμμικού Συστήματος που παρατέθηκαν στο Κεφάλαιο 5:

```
syms r11 r22

X=0.1;X1=0.2;X2=0.15;Vg=1.03607;Vm=1;Vh=1;a1=1.5;Vg=Vg*a1;X=X*a1;
G=--;
```

Υπολολογισμός του ευσταθούς σημείου ισορροπίας

```
a=(Vm.*r2).^2+((Vm.*G.*X1).^2./r2.^2)+(Vm.*G*X2.*r2).^2+2.*Vm.^2.*G.
^2.*X1.*X2;
b=-Vg.^2+((2*Vm^2.*G.^2.*X1.*X)./r2.^2)+2.*Vm^2.*G.^2.*X.*X2;
c=(Vm.*G.*X./r2).^2; d=b.^2-4.*a.*c; r=(-b+sqrt(d))/2./a;
r1=sqrt(r); r2=Vh./(Vm.*sqrt(1+G.^2.*X2^2));
```

Υπολογισμος των στοιχείων του πίνακα ευαισθησίας A

```
D=1+G.^2.*X2^2; B=(2.*r1.*r2.^4.*D);
A=r1.^4.*r2.^4+G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).^2;
C=4.*r1.^3.*r2.^4+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.*X
1+2.*r1.*r2.^2*X2); E=r1.^2.*r2.^4.*D; dgdr1=(B.*A-E.*C)./A.^2;
F=4.*r2.^3.*r1.^2.*D;
H=4.*r1.^4.*r2.^3+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.^2
.*r2.*X2); dgdr2=(F.*A-H.*E)./A.^2; B1=2.*r1.*r2.^2.*A;
C1=4.*r1.^3.*r2.^4+2.*G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).*(2.*r1.*
X1+2.*r1.*r2.^2.*X2); D1=r1.^2.*r2.^2.*C1; dhdr1=(B1-D1)./A.^2;
E1=2.*r1.^2.*r2.*(r1.^4.*r2.^4+G.^2.*(X+r1.^2.*X1+r1.^2.*r2.^2.*X2).
^2);
F1=r1.^2.*r2.^2.*(4.*r1.^4.*r2.^3+2.*G.^2.*(X+r1.^2*X1+r1.^2.*r2.^2.
*X2).*2.*r1.^2.*r2.*X2); dhdr2=(E1-F1)./A.^2;
A11=(Vg^2/2/Vh).*dgdr1; A12=(Vg^2/2/Vh).*dgdr2;
A21=(Vg^2/2/Vm).*dhdr1; A22=(Vg^2/2/Vm).*dhdr2;
```

Εξισώσεις ισορροπίας για τα δύο ΣΑΤΦ (σχεση 5.28)

```
H1=A11*(r11-r1)+A12*(r22-r2); H2=A21*(r11-r1)+A22*(r22-r2);
ezplot(H1,[-2,3,-2,2]) hold on ezplot(H2,[-2,3,-2,2])
```