



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

## Μοντελοποίηση της διαδικασίας συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Λάμπρος Ε. Βοριαδάκης

**Επιβλέποντες:**

Γιώργος Κονταξής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Mathias Meusburger  
Διδάκτωρ Ηλ/γος Μηχ/κος  
& Μηχ/κος Η.Υ. TU Graz

Αθήνα, Νοέμβριος 2003





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

## Μοντελοποίηση της διαδικασίας συμπαγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Λάμπρος Ε. Βοριαδάκης

**Επιβλέποντες:**

Γιώργος Κονταξής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Mathias Meusburger  
Διδάκτωρ Ηλ/γος Μηχ/κος  
& Μηχ/κος Η.Υ. TU Graz

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τη 10η Νοεμβρίου 2003

-----  
Κ. Βουρνάς  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

-----  
Σ. Καβατζά  
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

-----  
Γ. Κονταξής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2003

.....

Λάμπρος Ε. Βοριαδάκης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Λάμπρος Ε. Βοριαδάκης, 2003

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

*Εσαι οικογένειά μου*



# Περιεχόμενα

Περίληψη .....	10
Εισαγωγή .....	13
Συμβατικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας .....	20
<b>2.1. Γενικά.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2. Τύποι θερμικών βιομηχανιών παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας .....</b>	<b>21</b>
<b>2.3 Μέτρα επιδόσεων.....</b>	<b>22</b>
<b>2.4 Θερμοδυναμική ανάλυση θερμικών σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας</b>	<b>23</b>
2.4.1 Ατμοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.....	23
2.4.2 Αεριοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.....	40
2.4.3 Μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας συνδυασμένου κύκλου .....	52
<b>Σταθμοί συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας .....</b>	<b>54</b>
<b>3.1. Γενικά.....</b>	<b>54</b>
<b>3.2 Τύποι σταθμών συμπαραγωγής .....</b>	<b>56</b>
<b>3.3. Μέτρα επιδόσεων.....</b>	<b>57</b>
<b>3.4. Θερμοδυναμική ανάλυση σταθμών συμπαραγωγής.....</b>	<b>60</b>
3.4.1 Συστήματα συμπαραγωγής κύκλου κορυφής .....	61
3.4.2 Συστήματα συμπαραγωγής κύκλου βάσης.....	71
<b>3.5. Επιδόσεις σταθμών συνδυασμένης παραγωγής.....</b>	<b>72</b>
<b>Συνθετικά στοιχεία συστημάτων συμπαραγωγής.....</b>	<b>76</b>
<b>4.1 Γενικά.....</b>	<b>76</b>
<b>4.2 Σχήματα συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο .....</b>	<b>77</b>
4.2.1 Ατμοπαραγωγός .....	77
4.2.2 Ατμοστρόβιλος.....	78
<b>4.3 Αεριοστροβιλικά συστήματα συμπαραγωγής .....</b>	<b>82</b>
4.3.1 Αεριοστρόβιλος.....	82
<b>4.4 Άλλα στοιχεία συστημάτων συμπαραγωγής.....</b>	<b>84</b>
4.4.1 Ατμοπαραγωγός ανάκτησης θερμότητας (HRSG) .....	84

4.4.2 Βαλβίδα ελάττωσης πίεσης .....	85
<b>Ένταξη μονάδων – Οικονομική κατανομή .....</b>	<b>86</b>
<b>5.1 Γενικά .....</b>	<b>86</b>
<b>5.2 Μελέτη του προβλήματος ένταξης μονάδων .....</b>	<b>87</b>
5.2.1 Χρονική περίοδος βελτιστοποίησης – Κατεύθυνση βελτιστοποίησης .....	87
5.2.2 Κόστη .....	88
5.2.3 Περιορισμοί .....	89
<b>5.3 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ένταξης μονάδων .....</b>	<b>93</b>
<b>5.4 Σχόλια πάνω στη φύση του προβλήματος ένταξης μονάδων .....</b>	<b>101</b>
<b>Μέθοδοι βελτιστοποίησης .....</b>	<b>102</b>
<b>6.1 Γενικά .....</b>	<b>102</b>
<b>6.2 Αναγνώριση του τύπου του προβλήματος ένταξης μονάδων .....</b>	<b>104</b>
<b>6.3 Χρήσιμα στοιχεία από το πεδίο της συνδυαστικής βελτιστοποίησης .....</b>	<b>107</b>
6.3.1 Χρονική πολυπλοκότητα .....	107
6.3.2 Κυρτότητα .....	109
<b>6.4 Αξιολόγηση των μεθόδων βελτιστοποίησης .....</b>	<b>110</b>
<b>6.5 Γραμμική προσέγγιση .....</b>	<b>114</b>
<b>6.6 Κατά διαστήματα γραμμικοποίηση .....</b>	<b>115</b>
<b>Μικτός ακέραιος προγραμματισμός .....</b>	<b>118</b>
<b>7.1 Εισαγωγή .....</b>	<b>118</b>
<b>7.2 Η μέθοδος Branch-and-Bound .....</b>	<b>119</b>
<b>7.3 Στρατηγικές διακλάδωσης και διαιρέσης .....</b>	<b>125</b>
7.3.1 Επιλογή μεταβλητής διακλάδωσης .....	125
7.3.2 Διάρθρωση προβλήματος .....	127
7.3.3 Επιλογή κόμβου .....	128
<b>7.4 Σύγχρονες τεχνικές για την βελτίωση της απόδοσης του αλγορίθμου branch-and-bound .....</b>	<b>131</b>
7.4.1 Προεπεξεργασία και διερεύνηση .....	131
7.4.2 Μέθοδοι επιφανειακών τομών (Cutting Planes) .....	137
7.4.3 Σταθεροποίηση μειωμένου κόστους .....	142



7.4.4 Στοχαστικές διαδικασίες.....	142
7.4.5 Επίλυση προχωρημένης βάσης .....	144
<b>7.5 Εφαρμογή στο πρόβλημα ένταξης μονάδων .....</b>	<b>144</b>
<b>Κατασκευή μοντέλου βελτιστοποίησης .....</b>	<b>146</b>
<b>8.1 Γενικά.....</b>	<b>146</b>
<b>8.2 Η έννοια του μαθηματικού μοντέλου .....</b>	<b>147</b>
<b>8.3 Γλώσσα μοντελοποίησης, βελτιστοποιητής και διεπαφή προγραμματισμού. ....</b>	<b>151</b>
Το Σύστημα Αλγεβρικής Μοντελοποίησης GAMS .....	151
Βελτιστοποιητής μικτών ακεραίων – CPLEX .....	152
Σύστημα προγραμματισμού παραγωγής με περιορισμένους πόρους - PROPHET.....	152
<b>8.4 Περιγραφή του έργου .....</b>	<b>153</b>
<b>8.5 Διατύπωση του προβλήματος .....</b>	<b>157</b>
<b>8.6 Ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου .....</b>	<b>159</b>
<b>8.7 Δοκιμή του μοντέλου μικτού ακέραίου προγραμματισμού .....</b>	<b>169</b>
Αξιολόγηση αποτελεσμάτων.....	171
<b>Σύνοψη .....</b>	<b>175</b>
<b>Παράρτημα Α.....</b>	<b>177</b>
<b>Παράρτημα Β .....</b>	<b>182</b>
<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>188</b>

## Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας μελέτης αποτελεί η μοντελοποίηση των συστημάτων συμπαραγωγής με σκοπό την εφαρμογή μεθόδων για τη βελτιστοποίηση της παραγωγής. Η συνδυασμένη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας, μια αποδεδειγμένα αποτελεσματική τεχνική για τη βελτίωση της χρησιμοποίησης της πρωτογενούς ενέργειας σε σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, επιδεικνύει ιδιαίτερη δυσκολία όταν αντιμετωπίζεται σε πρόβλημα προγραμματισμού παραγωγής με περιορισμένους πόρους για τον καθορισμό των δεσμευμένων μονάδων και της κατανομής τους. Η παραγωγή δυο προϊόντων, τα οποία στις περισσότερες περιπτώσεις δρουν ως συμπληρωματικά, και οι κατασκευαστικές ιδιαιτερότητες των συνθετικών στοιχείων που απαρτίζουν ένα σύστημα συμπαραγωγής είναι μερικοί από τους λόγους που εξηγούν την πολυπλοκότητα του προβλήματος.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος προγραμματισμού της παραγωγής μονάδων συμπαραγωγής αναζητήθηκαν μέθοδοι και τεχνικές από τον χώρο της συνδυαστικής βελτιστοποίησης οι οποίες μπορούν να εξασφαλίσουν βέλτιστα αποτελέσματα σε λογικό χρόνο. Η μαθηματική μοντελοποίηση των διατάξεων συμπαραγωγής που πραγματοποιήθηκε στην παρούσα μελέτη, αποσκοπεί στη συστηματική αντιμετώπιση των προβλημάτων του συγκεκριμένου τύπου έτσι ώστε να μπορούν να επιλυθούν σε βραχύ ή μακρό χρονικό ορίζοντα και σε περιβάλλον μεταβαλλόμενων ζητήσεων, τιμών και λοιπών παραγόντων που επηρεάζουν τον προγραμματισμό της παραγωγής. Η ανάπτυξη των μοντέλων βελτιστοποίησης βασίστηκε στη θερμοδυναμική ανάλυση των συστημάτων συμπαραγωγής, τη μελέτη του προβλήματος ένταξης μονάδων για τον προγραμματισμό παραγωγής με περιορισμένους πόρους και τη μελέτη των πλέον καταλλήλων μεθόδων βελτιστοποίησης.

## Λέξεις κλειδιά

Συμπαραγωγή, προγραμματισμός παραγωγής, ένταξη μονάδων, οικονομική κατανομή, μικτός αέριος προγραμματισμός, κατά διαστήματα γραμμικοποίηση, branch-and-bound, branch-and-cut, μαθηματική μοντελοποίηση, GAMS.

## **Abstract**

In this thesis statement the modeling of cogeneration systems for the purpose of optimizing production was studied. Combined heat and power production, a proven efficient technique for improving the utilization of primal energy in power plants, demonstrates extended difficulties when dealt as a unit commitment and economic dispatch problem. The generation of two products, that in most cases act as complementary and the constructive behavior of cogeneration components are some of the reasons.

It was proven that the specific optimization problem in its full version is better dealt with mixed integer programming methods, which guarantee optimality of the results and - with the contribution of contemporary techniques - assuring that convergence is achieved in reasonable time.

Model development was based on the results provided by the thermodynamic analysis of cogeneration schemes, the study of the unit commitment problem for limited resource planning in combined heat and power plants and the study of mixed integer programming optimization techniques.

## **Keywords**

Cogeneration, limited resource planning, unit commitment, economic dispatch, mixed integer programming, piecewise linearization, branch-and-bound, branch-and-cut, mathematical modelling, GAMS.

## **Ευχαριστίες**

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Dr. Mathias Meusburger για την πολύτιμη καθοδήγηση και βοήθεια του κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κύριο Γιώργο Κονταξή και τους κύριους Klaus Heide, Karl Hofmann και Herbert Nussbaumer για την υποστήριξη τους, χωρίς την οποία η παρούσα διπλωματική εργασία δεν θα είχε πραγματοποιηθεί.

Λ.Β.

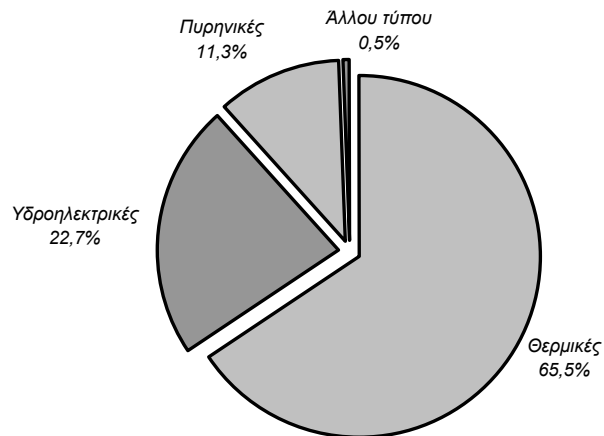
# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Παρατηρώντας την εξέλιξη στη βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από τα 1890 – τη δεκαετία που οι πρώτες εγκαταστάσεις παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας έκαναν την εμφάνισή τους – μέχρι σήμερα, ο πρωταγωνιστικός ρόλος των θερμικών μονάδων παραγωγής είναι περισσότερο από προφανής. Οι θερμικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, σύμφωνα με στατιστικές μελέτες, εκπονημένες από διεθνείς οργανισμούς όπως ο Παγκόσμιος Οργανισμός Ενέργειας (IEA), κρατούσαν και συνεχίζουν να κρατούν το μεγαλύτερο τμήμα στον τομέα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας για όλα αυτά τα χρόνια. Το 1999 οι θερμικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας αποτελούσαν το 66,7% της εγκατεστημένης ισχύος ανά τον κόσμο και το 62,8% της παγκόσμιας παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Αντιπροσωπευτική περίπτωση αποτελεί και η ελληνική βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, όπου οι θερμικές βιομηχανίες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας κατέχουν την μερίδα του λέοντος. Το 1999 οι θερμικές μονάδες αποτελούσαν σχεδόν το 73% της συνολικής εγκατεστημένης ισχύος ενώ παρήγαγαν περισσότερο από 89% της συνολικά παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας στην Ελλάδα.

Πολυάριθμες μελέτες έχουν εκπονηθεί τα τελευταία χρόνια, προβλέποντας ότι η αγορά ενέργειας πρόκειται να υποστεί απότομες και καθολικές αλλαγές, περισσότερο σχετιζόμενες με την αντίληψη ενός ελλείμματος στα αποθέματα καυσίμων ανά τον κόσμο και με τη σχετικά πρόσφατα εμφανιζόμενη ευαισθητοποίηση σε περιβαλλοντικά θέματα.

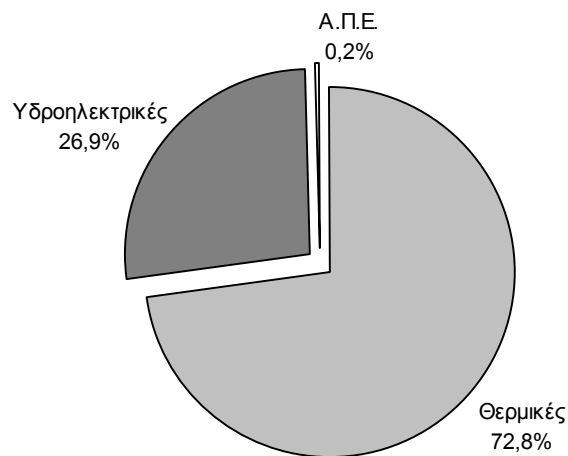
### Παγκόσμια Εγκατεστημένη Ισχύς (1998)



Σχήμα 1.1 – Παγκόσμια εγκατεστημένη ισχύς

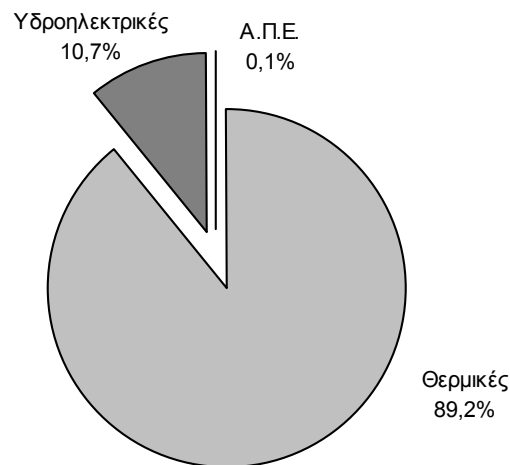
Πηγή: Energy Information Administration

### Εγκατεστημένη Ισχύς στην Ελλάδα (1999)



Σχήμα 1.2 – Εγκατεστημένη Ισχύς στην Ελλάδα

Πηγή: ΔΕΗ - ΡΑΕ

**Παραγωγή Ηλεκτρικής Ενέργειας στην Ελλάδα (1999)****Σχήμα 1.3** – Παραγωγή Ηλ. Ενέργειας στην Ελλάδα

Πηγή: ΔΕΗ - ΡΑΕ

Οι προβλέψεις αυτές περιλάμβαναν μια υπέρμετρη μείωση στη χρήση καυσίμων υλών για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και στροφή σε εναλλακτικές και λιγότερο επικίνδυνες πηγές ενέργειας. Πρόσφατες μελέτες αποδεικνύουν ότι, μολονότι υπάρχει μια κίνηση προς την εφαρμογή μεθόδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας βασισμένες σε ανανεώσιμες και λιγότερο ρυπογόνες πηγές ενέργειας, οι μελλοντική εικόνα στον τομέα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας δεν θα παρουσιάζει μεγάλες διαφορές από αυτή του παρόντος. Σύμφωνα με αυτές τις στατιστικές μελέτες πρόβλεψης, οι θερμικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας θα εξακολουθήσουν να κατέχουν τον πρωταγωνιστικό ρόλο.

Μερικοί από τους λόγους στους οποίους βασίζεται αυτό το συμπέρασμα είναι:

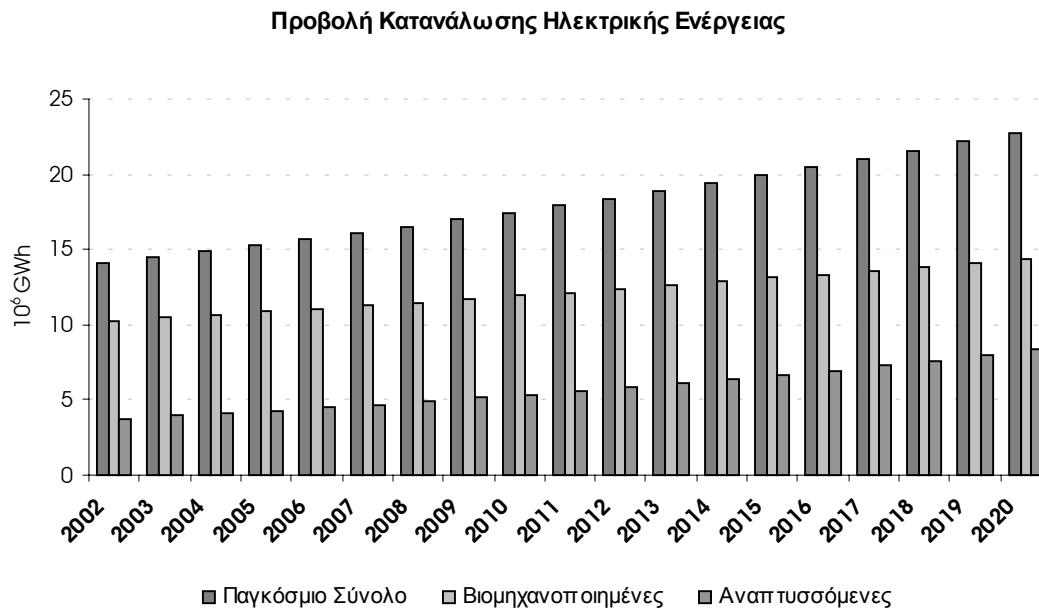
- η διάφευση της γενικής ιδέας για την εμφάνιση ενός ελλείμματος στα παγκόσμια αποθέματα πετρελαίου, κυρίως μετά την ανακάλυψη νέων αποθεμάτων καυσίμων και νέων τρόπων προσέγγισης τους
- η διείσδυση του φυσικού αερίου στο μίγμα καυσίμων για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, το οποίο είναι λιγότερο ρυπογόνο σε σύγκριση με τις καύσιμες ύλες που αποτελούσαν το μίγμα καυσίμων τα προηγούμενα χρόνια

- η εισαγωγή νέων, καθαρότερων μεθόδων καύσης για τις συμβατικές καύσιμες ύλες (π.χ. coal gasification, fluidized bed coal combustion) και συστημάτων καύσης φυσικού αερίου υψηλής απόδοσης
- η αναμενόμενη αύξηση στην κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας (σχεδόν +70% μέχρι το 2020), εντοπισμένη κυρίως στις αναπτυσσόμενες χώρες (βλέπε σχήμα 1.4), γεγονός που οδηγεί στην αναπόφευκτη χρήση μεθόδων παραγωγής βασισμένων σε καύσιμες ύλες, για την κάλυψη της εκτεταμένης ζήτησης.

Συνεπώς, ο ρόλος των συστημάτων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας βασισμένων σε θερμικές διεργασίες δεν μπορεί σε καμία περίπτωση να υποτιμηθεί, ούτε ακόμα και σε είκοσι χρόνια από τώρα. Εν τούτοις, αυτό δε σημαίνει ότι τα θερμικά συστήματα παραγωγής θα διατηρηθούν στην παρούσα μορφή τους. Πέρα από την προαναφερθείσα συνεχή τεχνολογική πρόοδο και τις αλλαγές στη σύσταση του μίγματος καυσίμων για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, που πρόκειται να αλλάξουν τα δεδομένα στα συστήματα παραγωγής με καύσιμες ύλες, ένας ακόμη παράγοντας που αναμένεται να επηρεάσει σε μεγάλο ποσοστό την βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι η μεταρρύθμιση της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

Η απελευθέρωση αγοράς, η νεότερη τάση στις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας σε πολυάριθμες βιομηχανοποιημένες και αναπτυσσόμενες χώρες, έχει δημιουργήσει ένα λίαν ανταγωνιστικό περιβάλλον προκαλώντας τους ανεξάρτητους παραγωγούς ηλεκτρικής ενέργειας να στραφούν σε πιο αξιόπιστους, αποδοτικούς και αποτελεσματικούς από άποψης κόστους τρόπους παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, υπακούοντας ταυτόχρονα στις εκάστοτε νομοθεσίες, τις σχετιζόμενες με τα περιβαλλοντικά ζητήματα.



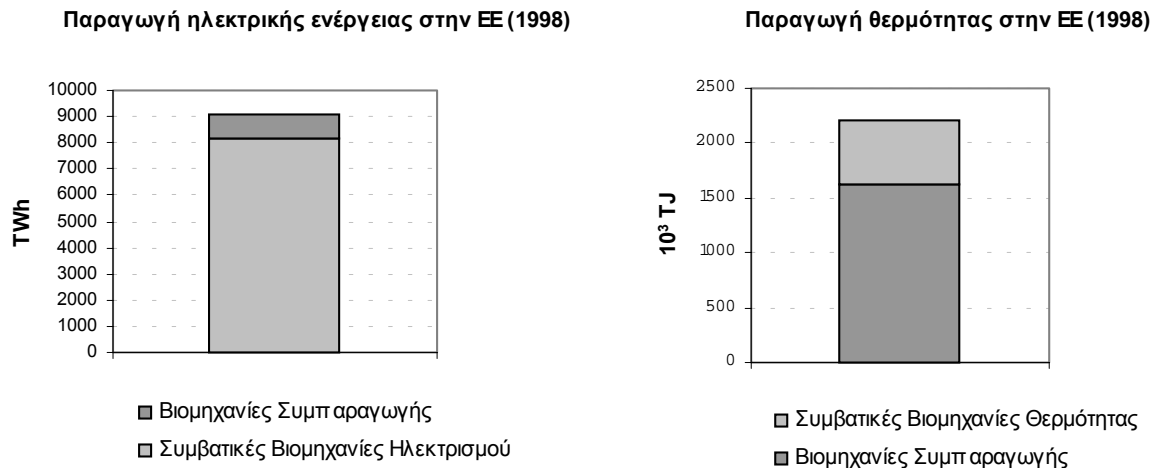


**Σχήμα 1.4** – Κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας – Προβολή στο 2020

**Πηγή:** Energy Information Administration, IEO2002

Η συμπαραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας (cogeneration ή combined heat and power production – CHP), η τεχνική που μελετάται στην παρούσα εργασία, είναι μία από τις πιο συμφέρουσες λύσεις για την αποτελεσματικότερη χρησιμοποίηση της πρωτογενούς ενέργειας σε θερμικές βιομηχανίες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Πρωτοεμφανιζόμενη στις αρχές του προηγούμενου αιώνα, η συνδυασμένη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας χαρακτηρίζεται ως η πλέον αποτελεσματική τεχνική για την εξοικονόμηση ενέργειας και την προστασία του περιβάλλοντος. Σήμερα υπάρχει μία σειρά μεθόδων συμπαραγωγής εφαρμόσιμων σε θερμικές βιομηχανίες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, που προσφέρεται για αποτελεσματική κάλυψη της ενεργειακής ζήτησης σε διάφορους τομείς της οικονομίας.

Το ζήτημα της αποτελεσματικότητας από άποψης κόστους και της αξιοπιστίας του συστήματος παραγωγής εντοπίζεται μόνο τμηματικά στην επιλογή του τύπου του συστήματος παραγωγής που πρόκειται να υλοποιηθεί. Ανεξαρτήτως του πόσο αποδοτική είναι μία μέθοδος παραγωγής ή συμπαραγωγής, ανεπιτυχής διαχείριση του συστήματος παραγωγής μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικές ζημιές και σε ορισμένες περιπτώσεις στην αδυναμία κάλυψης των ενεργειακών αναγκών.



**Σχήμα 1.5** – Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας & θερμότητας στην ΕΕ

**Πηγή:** Energy Information Administration

Η πιθανότητα λαθεμένης διαχείρισης σε μια μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, μεγαλώνει αναλογικά με το μέγεθος και την πολυπλοκότητα του συστήματος παραγωγής. Για το σκοπό της απόδοσης μίας πιο οργανωμένης και ακριβούς μορφής στο πρόβλημα του προγραμματισμού της παραγωγής, ο ορισμός του προβλήματος ένταξης και οικονομικής κατανομής μονάδων (unit commitment and economic dispatch problem) έχει διατυπωθεί εδώ και αρκετά χρόνια. Η επίλυση του προβλήματος ένταξης και οικονομικής κατανομής μονάδων έγκειται στην εύρεση του βέλτιστου λειτουργικού σχήματος για ένα συγκεκριμένο σύστημα παραγωγής, έτσι ώστε να επιτυγχάνεται ασφαλής κάλυψη της ζήτησης και να εξασφαλίζεται το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος.

Η εύρεση της λύσης στο πρόβλημα ένταξης και οικονομικής κατανομής μονάδων δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Ειδικά στην περίπτωση της συνδυασμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας, η διαδικασία εντοπισμού του βέλτιστου γίνεται ακόμη δυσκολότερη, δεδομένου ότι το πρόβλημα στη συγκεκριμένη μορφή ασχολείται με δύο διαφορετικά προϊόντα, της ίδιας σπουδαιότητας, τα οποία τις περισσότερες φορές δρουν ως συμπληρωματικά. Πέραν αυτού, τα σχήματα συμπαγωγής είναι εκ φύσεως πιο περίπλοκα από τα συμβατικά σχήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

Μέχρι σήμερα έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος βελτιστοποίησης. Μία βασική διαφοροποίηση μεταξύ των μεθόδων αυτών είναι ο χώρος προέλευσης τους, είτε ντετερμινιστικές ή στοχαστικές. Στην παρούσα εργασία μελετάται η εφαρμογή μίας ντετερμινιστικής μεθόδου για την επίλυση του προβλήματος ένταξης και οικονομικής κατανομής των μονάδων για συστήματα συμπαραγωγής, αξιολογούμενη ως μια πιο υποσχόμενη προσέγγιση. Η μέθοδος βελτιστοποίησης εφαρμόζεται αφού προηγηθεί η έκφραση του προβλήματος στην κατάλληλη μαθηματική μορφή, μία διαδικασία που ονομάζεται μοντελοποίηση. Είναι επόμενο η διαδικασία της μοντελοποίησης να βασίζεται σε εκτενή μελέτη των ιδιοτήτων του συστήματος καθώς και των διεργασιών που εκτελούνται σε αυτό, που ισοδυναμεί σε μία εμπειριστατωμένη θερμοδυναμική και λειτουργική ανάλυση του συστήματος συμπαραγωγής.

Στα δύο επόμενα κεφάλαια γίνεται η μελέτη των συμβατικών συστημάτων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και των συστημάτων συνδυασμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας.

## Κεφάλαιο 2

### Συμβατικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας

#### 2.1. Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό μελετώνται τα θερμικά συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, έτσι ώστε να γίνει ευκολότερη η μετάβαση στα συστήματα συμπαραγωγής που αποτελούν επέκταση των συμβατικών συστημάτων και ενσωματώνουν διεργασίες παρόμοιες με αυτές των κλασικών θερμικών μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Η αρχή λειτουργίας των θερμικών μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι η μετατροπή της θερμότητας που απελευθερώνεται κατά την καύση πρώτων υλών σε ηλεκτρική ενέργεια. Τα ενδιάμεσα στάδια που συνιστούν τη διαδικασία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας περιλαμβάνουν την καύση των πρώτων υλών, τη μετατροπή της θερμικής ενέργειας σε μηχανικό έργο και τελικά τη μετατροπή αυτού σε ηλεκτρική ενέργεια. Είναι προφανές ότι κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας χάνονται μεγάλα ποσά ενέργειας – μόνο μια περιορισμένη ποσότητα της τροφοδοτούμενης ενέργειας είναι εκμεταλλεύσιμη σε κάθε στάδιο.

## 2.2. Τύποι θερμικών βιομηχανιών παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

Ανάλογα με τον τρόπο που η θερμογόνος ενέργεια της καύσιμης ύλης μετατρέπεται σε μηχανικό έργο, τα θερμικά συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες: τα συστήματα ατμοστροβίλου και τα συστήματα αεριοστροβίλου. Στα πρώτα, για τον σκοπό της μεταφοράς της ενέργειας μέσα από τα ενδιάμεσα στάδια της παραγωγικής διαδικασίας, χρησιμοποιείται ένα φυσικό μέσο. Στις περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιείται νερό, αλλά η χρήση άλλων ουσιών (π.χ. αμμωνία) είναι δυνατή.

Κάθε στάδιο της διεργασίας πραγματοποιείται σε διαφορετικό στοιχείο του σχήματος παραγωγής. Το μέσο, περνώντας μέσα από κάθε επιμέρους στοιχείο, υπόκειται σε μία αλλαγή φάσης και κατάστασης. Μηχανικό έργο παράγεται όταν το μέσο, υπό μορφή ατμού, προσκρούει στα πτερύγια του στροβίλου προκαλώντας την περιστροφή του άξονα του. Τα ατμοστροβιλικά συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας βασίζονται στον θερμοδυναμικό κύκλο Rankine. Εκτενής ανάλυση του συγκεκριμένου κύκλου θα γίνει σε επόμενη ενότητα του παρόντος κεφαλαίου. Στα αεριοστροβιλικά συστήματα αντίστοιχα, τα παραγόμενα αέρια από την καύση του μίγματος αέρα-καυσίμου, χρησιμοποιούνται για την περιστροφή του άξονα του στροβίλου. Οι αεριοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας λειτουργούν βάσει του κύκλου Brayton-Joule ο οποίος περιγράφεται επίσης σε επόμενη ενότητα.

Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο και πολύ πιο αποδοτικό σχήμα για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας είναι το σύστημα συνδυασμένου κύκλου. Σε μονάδες αυτού του τύπου εφαρμόζεται ο συνδυασμός αεριοστροβιλικών και ατμοστροβιλικών μονάδων – τα παραγόμενα καυσαέρια από το σύστημα αεριοστροβίλου, αφού αποχωρήσουν από τον στρόβιλο, χρησιμοποιούνται για την θέρμανση του μέσου κυκλοφορίας του ατμοστροβιλικού συστήματος.

## 2.3 Μέτρα επιδόσεων

### **Βαθμός θερμικής απόδοσης – $\eta_{eff}$**

Στην συμβατική βιομηχανία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, η κλασική προσέγγιση για τον καθορισμό της επίδοσης ενός συστήματος είναι ο βαθμός θερμικής απόδοσης, ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$\eta_{eff} = \frac{W_{net}}{Q_{input}}$$

όπου  $W_{net}$  είναι το καθαρό παραγόμενο έργο που αντιστοιχεί στην παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια και  $Q_{input}$  η παρεχόμενη ενέργεια από την καύση των πρώτων υλών.

### **Διαθεσιμότητα**

Η διαθεσιμότητα (availability - A) χρησιμοποιείται ως ένας τρόπος περιγραφής του βαθμού στον οποίο ένα σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι χρησιμοποιήσιμο και σε κατάσταση που επιτρέπει την ένταξη του στην αρχή μίας εργασίας, όταν η εργασία καλείται σε ακαθόριστο χρόνο. Μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως ο λόγος του χρόνου στον οποίο η μονάδα παραγωγής είναι χρησιμοποιήσιμη μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (MTBM), προς τη διάρκεια του χρονικού διαστήματος (MTBM + MDT):

$$A = \frac{MTBM}{MTBM + MDT}$$

όπου

MTBM: Mean time between maintenance – Μέσος χρόνος μεταξύ συντηρήσεων

MDT: Mean down time – Μέσος χρόνος μη λειτουργίας

### **Αξιοπιστία**

Η αξιοπιστία (reliability - R) σχετίζεται με την πιθανότητα ένα σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας να είναι ικανό να λειτουργήσει κάτω από δεδομένες συνθήκες και για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

$$R = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-\frac{t}{\theta}}$$

όπου

t : χρόνος λειτουργίας

λ: ρυθμός εμφάνισης βλαβών

θ: μέσος χρόνος μεταξύ βλαβών

Η διαθεσιμότητα και η αξιοπιστία είναι στενά συνδεδεμένες έννοιες, αφού η αξιοπιστία ορίζει τον χρόνο που μία μονάδα παραγωγής είναι χρησιμοποιήσιμη (MTBM).

## **2.4 Θερμοδυναμική ανάλυση θερμικών σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας**

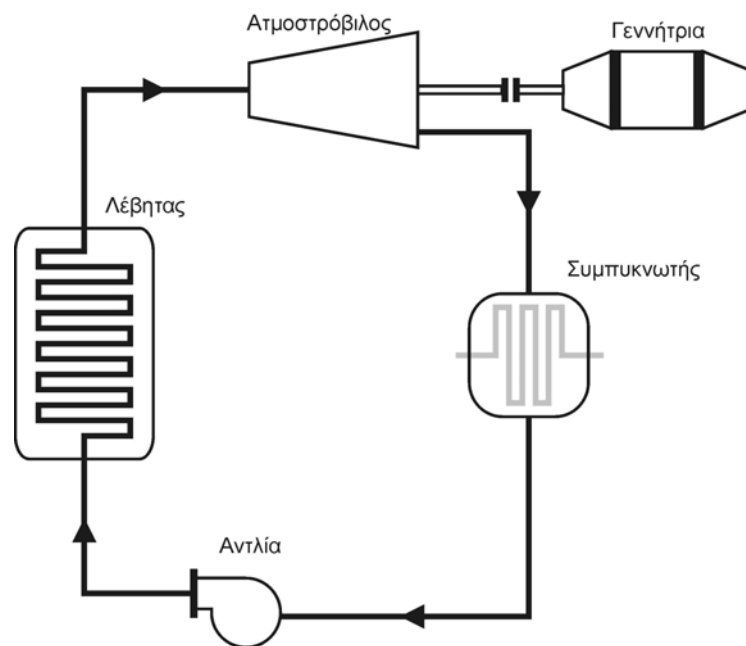
Στις επόμενες παραγράφους πραγματοποιείται μία σύντομη ανάλυση των διεργασιών που λαμβάνουν χώρα σε θερμικά συστήματα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Μια ανασκόπηση των σημαντικότερων για την παρούσα εργασία στοιχείων από το πεδίο της θερμοδυναμικής γίνεται στο Παράρτημα Α.

### **2.4.1 Ατμοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας**

Στις ατμοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, το μέσο για τη μεταφορά ενέργειας εντός του παραγωγικού συστήματος είναι το νερό ενώ σε κάποιες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται οργανικές ουσίες. Μία τυπική διάταξη ατμοστροβιλικού συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Τα κυριότερα συνθετικά στοιχεία που απαρτίζουν τα ατμοστροβιλικά συστήματα είναι ο ατμοπαραγωγός, ο ατμοστρόβιλος, ο συμπυκνωτής και η αντλία τροφοδοσίας. Εκτενέστερη παρουσίαση του κάθε στοιχείου, καθώς και των διεργασιών που επιτελούνται στο εσωτερικό του, γίνεται στην ενότητα 2.4.1.1.

Τα ατμοστροβιλικά συστήματα αναφέρονται ως συστήματα κλειστού κύκλου. Ο όρος «κλειστός κύκλος» σχετίζεται με το γεγονός ότι η ουσία που χρησιμοποιείται για τη μεταφορά θερμότητας κατά τη λειτουργία του συστήματος, υπόκειται σε

μία κυκλική διεργασία. Γενικά οι διεργασίες που πραγματοποιούνται στις μονάδες παραγωγής με ατμοστρόβιλο είναι μη-αντιστρέψιμες και μη-σταθερής ροής διεργασίες. Ασχέτως αυτού, για το σκοπό της εξαγωγής εφαρμόσιμων εξισώσεων από τη θερμοδυναμική μελέτη, τις περισσότερες φορές οι διεργασίες αυτές αντιμετωπίζονται ως αντιστρέψιμες και σταθερής ροής, ενώ οι αποκλίσεις που οφείλονται σε αυτή τη θεώρηση λαμβάνονται υπόψη σε επόμενο στάδιο.



Σχήμα 2.1 – Ατμοστροβιλικό σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας

#### 2.4.1.1 Περιγραφή – ανάλυση συνθετικών στοιχείων

##### **Ατμοπαραγωγός (λέβητας)**

Η ενοποίηση του θαλάμου καύσης με το λέβητα αντιμετωπίζεται συνήθως ως ένα ενιαίο στοιχείο – ο ατμοπαραγωγός. Στο εσωτερικό του ατμοπαραγωγού η χημική ενέργεια του καυσίμου μετατρέπεται σε θερμότητα η οποία στη συνέχεια απορροφάται από το μέσο κυκλοφορίας (νερό). Πιο συγκεκριμένα η πρώτη ύλη καίγεται στον θάλαμο καύσης και η θερμότητα που απελευθερώνεται μεταφέρεται στο λέβητα. Καθώς το περιεχόμενο νερό απορροφά την παραγόμενη θερμότητα, η θερμοκρασία του αυξάνεται και μετατρέπεται σε υγρό



ατμό. Περαιτέρω θέρμανση οδηγεί στη δημιουργία ξηρού ατμού και υπερθερμασμένου ατμού.

Η διεργασία που πραγματοποιείται στον ατμοπαραγωγό είναι ισοβαρής θέρμανση. Επομένως, σύμφωνα με τα όσα ισχύουν για τις ισοβαρείς μεταβολές η μεταφερόμενη ενέργεια υπολογίζεται ως ακολούθως:

#### Παραγόμενο έργο κατά τη θέρμανση

Το έργο είναι:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 dw = - \int_1^2 V dp$$

Αλλά επειδή η διεργασία είναι ισοβαρής, ακολουθεί:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 V dp = V(P_1 - P_2) = 0$$

#### Προσφερόμενη στο σύστημα θερμότητα

Επειδή η κινητική και δυναμική ενέργεια παραμένουν αμετάβλητες κατά τη θέρμανση, η εξίσωση ροής ενέργειας δίνει:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1$$

Δηλαδή η προσφερόμενη στο μέσο θερμότητα στον ατμοπαραγωγό προκαλεί αύξηση της ενθαλπίας του.

#### **Ατμοστρόβιλος**

Η μετατροπή της ενέργειας του ατμού σε μηχανικό έργο λαμβάνει χώρα εντός του ατμοστρόβιλου. Η δομή του επιτρέπει την εκμετάλλευση της μεταβολής της ορμής του ατμού έτσι ώστε να επιτευχθεί η περιστροφική κίνηση του άξονα του στρόβιλου. Αυτό εξασφαλίζεται με τη χρησιμοποίηση κοίλων πτερυγίων προσκολλημένων στον άξονα, πάνω στα οποία ο ατμός ασκεί δύναμη λόγω της αλλαγής κατεύθυνσης. Η αυξημένη ταχύτητα του ατμού επιτυγχάνεται με τη

χρήση ενός ακροφυσίου μέσα από το οποίο περνά ο τροφοδοτούμενος ατμός πριν εισαχθεί στο θάλαμο αποσυμπίεσης του στροβίλου.

Υποθέτοντας μηδενικές απώλειες θερμότητας λόγω μόνωσης, η διεργασία που πραγματοποιείται στον ατμοστρόβιλο θεωρείται ως αδιαβατική διαστολή. Σύμφωνα με τα όσα ισχύουν για τις αδιαβατικές μεταβολές, το παραγόμενο έργο και η ανταλλαγή θερμότητας υπολογίζονται ως ακολούθως:

#### Θερμότητα που αφαιρείται από το σύστημα

Η μόνωση του στροβίλου εξασφαλίζει τη μηδενική εκροή θερμότητας στο περιβάλλον:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0$$

#### Παραγόμενο έργο στον στρόβιλο

Αν η αλλαγή στην κινητική και δυναμική ενέργεια του ατμού θεωρηθούν αμελητέες, τότε η εξίσωση ενέργειας δίδει:

$$W_{1 \rightarrow 2} = H_1 - H_2$$

Συνεπώς, το παραγόμενο από το σύστημα έργο αντιστοιχεί στην πτώση της ενθαλπίας του μέσου.

Σημείωση: Κατά τη διέλευση από το ακροφύσιο του στροβίλου, η ταχύτητα του ατμού αυξάνεται σε βάρος της πίεσης του. Εφόσον το ακροφύσιο δεν παρέχει μηχανικό έργο, η εξίσωση ενέργειας δίδει:

$$\Delta KE = H_1 - H_1',$$

δηλαδή η αύξηση της ταχύτητας του ατμού οδηγεί σε πτώση της ενθαλπίας του.

#### **Αντλία τροφοδοσίας**

Η υψηλή πίεση του μέσου επιτυγχάνεται με τη χρήση της αντλίας τροφοδοσίας. Ένας περιορισμός που εισάγεται με τη χρησιμοποίηση αντλίας είναι ότι το μέσο κυκλοφορίας πρέπει να είναι σε υγρή κατάσταση ώστε να μπορεί συμπιεστεί στην πίεση λειτουργίας του λέβητα. Η κατασκευή μίας βιομηχανικής αντλίας που

Θα μπορούσε να χειρίζεται ουσίες σε δύο φάσεις (υγρό και ατμός) είναι περίπλοκη και ασύμφορη οικονομικά.

Θεωρώντας μηδαμινές απώλειες θερμότητας η διαδικασία που λαμβάνει χώρα εντός της αντλίας τροφοδοσίας είναι αδιαβατική συμπίεση. Συνεπώς όπως και στην περίπτωση του στροβίλου η μεταφερόμενη στο σύστημα ενέργεια υπολογίζεται ως εξής:

#### Θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα

Η μόνωση της αντλίας εξασφαλίζει τη μηδενική εκροή θερμότητας στο περιβάλλον:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0$$

#### Απορροφούμενο έργο από το σύστημα

Αν η κινητική και δυναμική ενέργεια του υγρού εντός της αντλίας θεωρηθούν σταθερές, η εξίσωση ενέργειας δίδει:

$$W_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1$$

Συνεπώς, το έργο που απορροφάται από το σύστημα αντιστοιχεί στην αύξηση της ενθαλπίας του μέσου.

### **Συμπυκνωτής**

Ο συμπυκνωτής αποτελεί το θερμό-απορροφητικό στοιχείο του συστήματος εντός του οποίου ο εξερχόμενος από τον στρόβιλο ατμός συμπυκνώνεται προτού επανεισαχθεί στο σύστημα τροφοδοσίας του λέβητα. Η έκλυση θερμότητας επιτυγχάνεται με τη χρήση ψυκτικού υγρού (νερό). Ο συμπυκνωτής είναι απαραίτητος για την εξασφάλιση του μέσου σε μία φάση (υγρό). Εκτός αυτού, χαμηλώνοντας τη θερμοκρασία του ατμού (μέχρι συμπύκνωσης) είναι χρήσιμο για την διατήρηση μίας υψηλής διαφοράς πίεσης μεταξύ της εισόδου και της εξόδου του στροβίλου (μεγαλύτερο έργο).

Η διεργασία που πραγματοποιείται εντός του συμπυκνωτή είναι ισοβαρής ψύξη. Σύμφωνα με τα όσα έχουν αναφερθεί έως τώρα για τις ισοβαρείς μεταβολές σε συστήματα σταθερής ροής ισχύουν τα εξής:

#### Παραγόμενο έργο κατά την ψύξη

Το έργο κατά την ισοβαρή μεταβολή είναι:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 V dp = V(P_1 - P_2) = 0$$

#### Εξαγόμενη από το σύστημα θερμότητα

Επειδή καμία μεταβολή στην κινητική και δυναμική ενέργεια του ατμού δεν λαμβάνει χώρα κατά την συμπύκνωση, η εξίσωση ενέργειας δίνει:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = H_1 - H_2$$

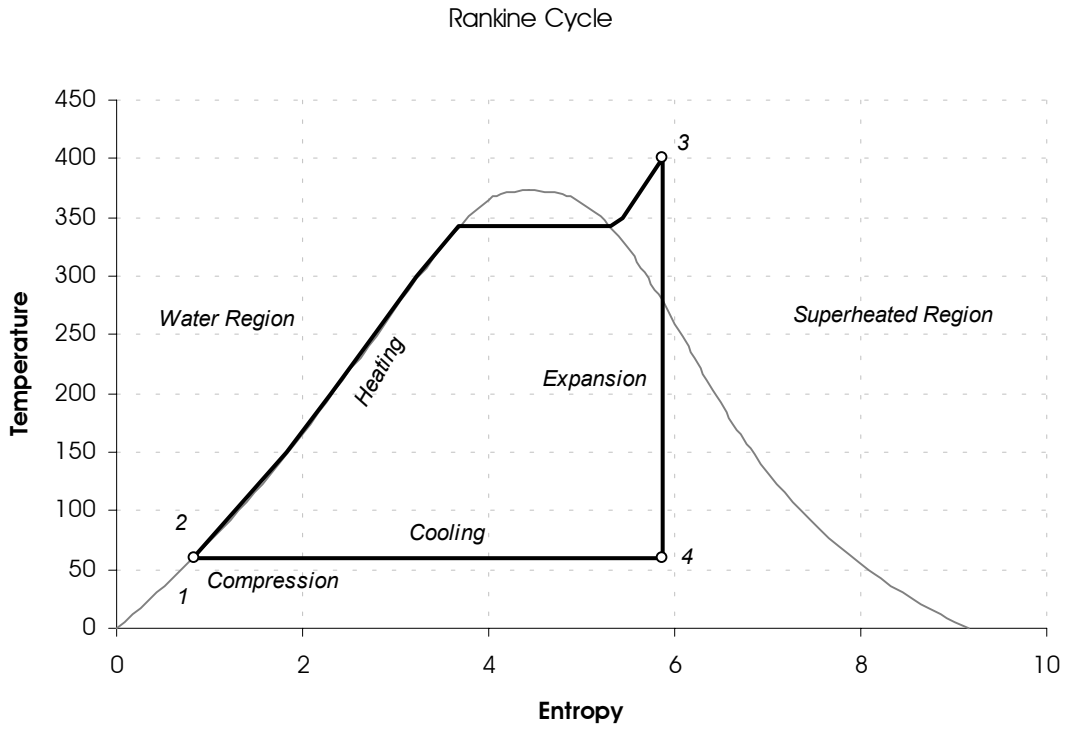
Συνεπώς η θερμότητα που αφαιρείται από το μέσο εντός του συμπυκνωτή προκαλεί μείωση της ενθαλπίας του.

### **2.4.1.2 Ανάλυση θερμοδυναμικού κύκλου**

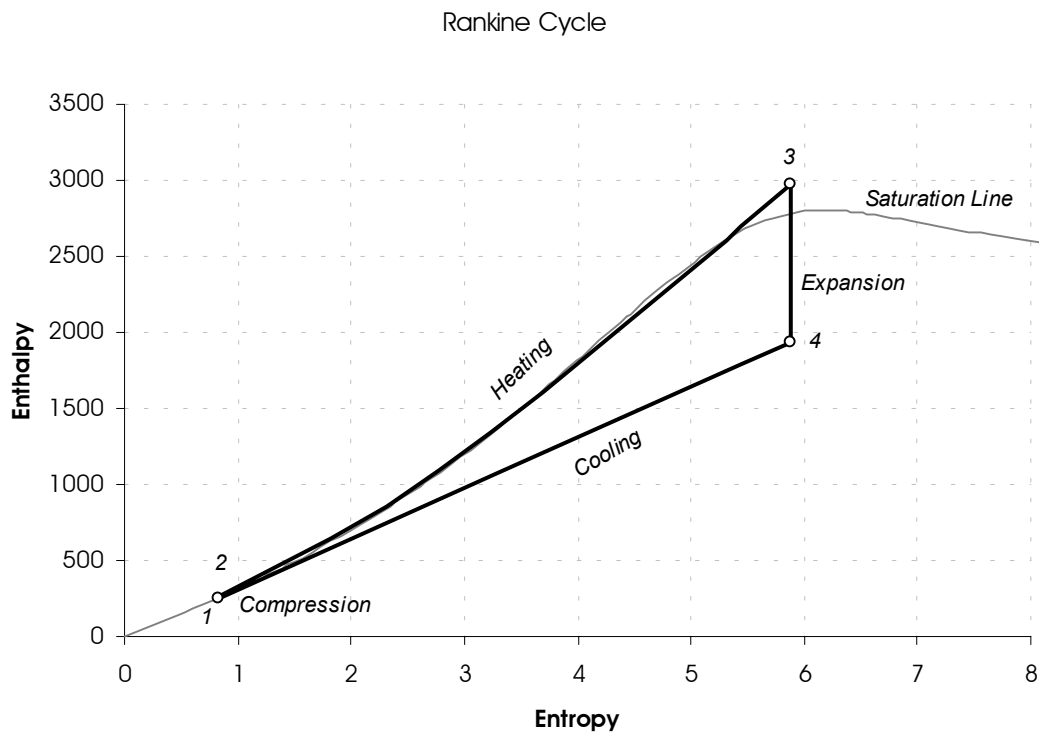
Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα οι ατμοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας λειτουργούν βάσει του κύκλου Rankine. Στην πράξη χρησιμοποιούνται τροποποιήσεις του κύκλου Rankine, στην προσπάθεια να επιτευχθούν καλύτερες επιδόσεις. Ασχέτως αυτού, μία προκαταρκτική μελέτη του κλασσικού κύκλου Rankine θα φανεί χρήσιμη για την εξαγωγή ορισμένων γενικών συμπερασμάτων. Στη συνέχεια παρουσιάζονται πιο σύνθετες εκδοχές του κύκλου αυτού.

#### **Απλός κύκλος Rankine**

Ο κύκλος Rankine αποτελείται από τις τέσσερις βασικές θερμοδυναμικές διεργασίες που διεξάγονται στα τέσσερα διαφορετικά συνθετικά στοιχεία του συστήματος που περιγράφηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Στα επόμενα σχήματα φαίνεται ο κύκλος Rankine για ένα ατμοστροβιλικό σύστημα.



Σχήμα 2.2 – Διάγραμμα θερμοκρασίας - εντροπίας



Σχήμα 2.3 – Διάγραμμα ενθαλπίας - εντροπίας (Mollier)

Λεπτομερώς, οι μεταβολές που λαμβάνουν χώρα είναι:

---

Μεταβολή 1 – 2

Αντλία τροφοδοσίας

Το νερό συμπιέζεται αδιαβατικά από την πίεση λειτουργίας του συμπυκνωτή έως την επιθυμητή πίεση λειτουργίας του στροβίλου. Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, υποθέτοντας ότι η αντλία είναι επαρκώς μονωμένη, η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί αδιαβατική. Κατά τη διάρκεια της συγκεκριμένης διαδικασίας πραγματοποιείται μία μικρή αύξηση της ενθαλπίας του μέσου. Η αύξηση αυτή λόγω της τάξης μεγέθους των λοιπών μεταβολών δεν είναι εμφανής στο διάγραμμα Mollier του σχήματος 2.3 και γι' αυτό τα σημεία 1 και 2 φαίνεται να συμπίπτουν.

Καταναλισκόμενο έργο:  $W_{input} = W_{1-2} = h_2 - h_1$

---

Μεταβολή 2 – 3

Ατμοπαραγωγός

Το νερό τροφοδοσίας εισέρχεται στον λέβητα σε υγρή μορφή. Κατά το πρώτο στάδιο της διεργασίας, προσφέρεται θερμότητα στο σύστημα υπό σταθερή πίεση. Η παρεχόμενη θερμότητα οδηγεί στη θέρμανση του νερού μέχρις ότου φθάσει σε κατάσταση κορεσμένου υγρού. Από το σημείο αυτό και μέχρι το νερό να φθάσει σε κατάσταση ξηρού ατμού η θερμοκρασία και πίεση παραμένουν σταθερές και όλη η παρεχόμενη στο σύστημα θερμότητα προκαλεί την αύξηση της ενθαλπίας του μέσου. Περαιτέρω θέρμανση έχει ως αποτέλεσμα την δημιουργία υπερθερμασμένου ατμού, μία διαδικασία στην οποία τόσο η ενθαλπία όσο και η θερμοκρασία του νερού αυξάνονται. Γενικά, εντός του ατμοπαραγωγού το μέσο υπόκειται σε μία αύξηση της ολικής ενέργειας του, έτσι ώστε να είναι δυνατή η παραγωγή έργου στο επόμενο συνθετικό στοιχείο του συστήματος.

Απορροφούμενη θερμότητα:  $Q_{input} = Q_{2-3} = h_3 - h_2$

### Ατμοστρόβιλος

Ο υπερθερμασμένος ατμός εισέρχεται στο στρόβιλο μέσω του ακροφυσίου επιτάχυνσης, έτσι ώστε να αυξηθεί η ορμή και συνεπώς η δύναμη που ασκείται στα πτερύγια του στροβίλου. Ως συνέπεια της επιτάχυνσης παρατηρείται μία πτώση της ενθαλπίας του ατμού. Υποθέτοντας μηδαμινές απώλειες θερμότητας, η διεργασία που πραγματοποιείται στο στρόβιλο είναι ισεντροπική διαστολή κατά την οποία παράγεται έργο (περιστροφή άξονα). Το παραγόμενο έργο αντιστοιχεί στην μείωση της ενέργειας του μέσου (πτώση ενθαλπίας λόγω επιτάχυνσης και διαστολής), η οποία εξέρχεται του στροβίλου υπό μορφή ξηρού ατμού.

Παραγόμενο έργο:  $W_{\text{output}} = W_{3-4} = h_3 - h_4$

### Συμπυκνωτής

Στο τελευταίο στάδιο του κύκλου Rankine, ο ατμός αφού εξέλθει από το στρόβιλο ψύχεται και συμπυκνώνεται εντός του συμπυκνωτή. Κατά τη διαδικασία της συμπύκνωσης, που πραγματοποιείται υπό σταθερή πίεση και θερμοκρασία, αποβάλλεται θερμότητα από τον ατμό όταν έρθει σε επαφή με το ψυκτικό μέσο. Το μέσο εξέρχεται από το συμπυκνωτή σε υγρή μορφή και οδηγείται στην αντλία τροφοδοσίας για επαναχρησιμοποίηση.

Αποβαλλόμενη θερμότητα:  $Q_{\text{output}} = Q_{4-1} = h_4 - h_1$

### 2.4.1.3 Απόδοση ατμοστροβλικών μονάδων

Βάσει των προηγούμενων υπολογισμών είναι δυνατή η εξακρίβωση της απόδοσης του κύκλου Rankine. Οι παρακάτω υπολογισμοί γίνονται για μονάδα μάζας του μέσου (νερό).

Το καθαρά παραγόμενο έργο είναι αυτό που παράγεται στο στρόβιλο ελαττωμένο κατά το καταναλισκόμενο στην αντλία τροφοδοσίας έργο. Συνεπώς:

$$W_{\text{net}} = W_{3-4} - W_{1-2} = h_1 - h_2 + h_3 - h_4$$

Η συνολική ποσότητα θερμότητας που προσφέρεται στο σύστημα είναι ίση με τη θερμότητα που απορροφάται από το μέσο στο λέβητα, δηλαδή:

$$Q_{\text{input}} = Q_{2-3} = h_3 - h_2$$

Επομένως ο συντελεστής θερμικής απόδοσης του κύκλου Rankine είναι:

$$(\eta_{\text{eff}})_{\text{Rankine}} = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{input}}} = \frac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4}{h_3 - h_2} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2}$$

Από την παραπάνω σχέση γίνεται εμφανές ότι για την επίτευξη όσο το δυνατόν μεγαλύτερου βαθμού απόδοσης πρέπει αφενός η προσφερόμενη θερμότητα στο νερό εντός του λέβητα να είναι η μεγαλύτερη δυνατή και αφετέρου η θερμότητα που εκλύεται στο περιβάλλον κατά τη διέλευση του μέσου από το συμπυκνωτή να ελαχιστοποιείται. Το τελευταίο ισοδυναμεί φυσικά με τη καλύτερη δυνατή χρησιμοποίηση της ενέργειας του ατμού από τον ατμοστρόβιλο - όσο χαμηλότερη η ενθαλπία του ατμού στην είσοδο του συμπυκνωτή τόσο μεγαλύτερη η εκμετάλλευση της ενέργειας του ατμού για την παραγωγή ωφέλιμου μηχανικού έργου.

### **Απόδοση στον πραγματικό κύκλο Rankine**

Ο κύκλος Rankine που παρουσιάστηκε μέχρι το σημείο αυτό αποτελεί ιδεατή περίπτωση. Στην πραγματικότητα η απόδοση στον εν λόγω θερμοδυναμικό κύκλο είναι κατά τι μικρότερη από αυτή που υπολογίστηκε νωρίτερα. Αυτή η διαφορά στην απόδοση οφείλεται κυρίως στους παρακάτω λόγους:



α. Απώλειες θερμότητας λόγω ανεπαρκούς μόνωσης. Ως αποτέλεσμα, πρόσθετη θερμότητα θα πρέπει να προσφερθεί στο μέσο εντός του λέβητα, για να επιτευχθεί το ίδιο με την ιδανική λειτουργία παραγόμενο έργο. Αυτό οδηγεί σε αυξημένη κατανάλωση καυσίμου και συνεπώς σε μειωμένη απόδοση.

β. Απώλειες πίεσης στο λέβητα και το συμπυκνωτή εξαιτίας τριβών του υγρού. Στις περισσότερες των περιπτώσεων αυτό μπορεί να προληφθεί αυξάνοντας την πίεση λειτουργίας κατά ένα ποσό ίσο με τις απώλειες. Το πρόσθετο μηχανικό έργο που απαιτείται γι' αυτή τη λειτουργία οδηγεί σε μειωμένη απόδοση.

Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, οι διεργασίες που λαμβάνουν χώρα στα ατμοστροβιλικά συστήματα είναι εν γένει μη αντιστρέψιμες. Αυτό σημαίνει ότι η υπόθεση για την ισεντροπική συμπεριφορά του στροβίλου και της αντλίας είναι ουσιαστικά αβάσιμη. Στην αντλία τροφοδοσίας επί παραδείγματι, για να επιτευχθεί το επιθυμητό επίπεδο πίεσης το καταναλισκόμενο έργο είναι μεγαλύτερο από το θεωρητικά προβλεπόμενο.

### **Τεχνικές βελτίωσης απόδοσης**

Στην προσπάθεια να επιτευχθεί η καλύτερη δυνατή απόδοση για μία ατμοστροβιλική μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, μία ή περισσότερες από τις παρακάτω τεχνικές είναι διαθέσιμες:

#### **α. Αύξηση της θερμοκρασίας λειτουργίας του λέβητα**

Ο κύκλος που μελετήθηκε στην προηγούμενη ενότητα είναι αυτού του τύπου. Η αύξηση της θερμοκρασίας του λέβητα οδηγεί στη δημιουργία υπερθερμασμένου ατμού, ιδιαίτερα αποτελεσματικού στην παραγωγή μηχανικού έργου. Το πρόσθετο μηχανικό έργο που λαμβάνεται από την εφαρμογή αυτής της τεχνικής φαίνεται στο σχήμα 2.4, όπου ο κύκλος Rankine με χρήση υπερθερμασμένου ατμού συγκρίνεται με τον απλό κύκλο Rankine.

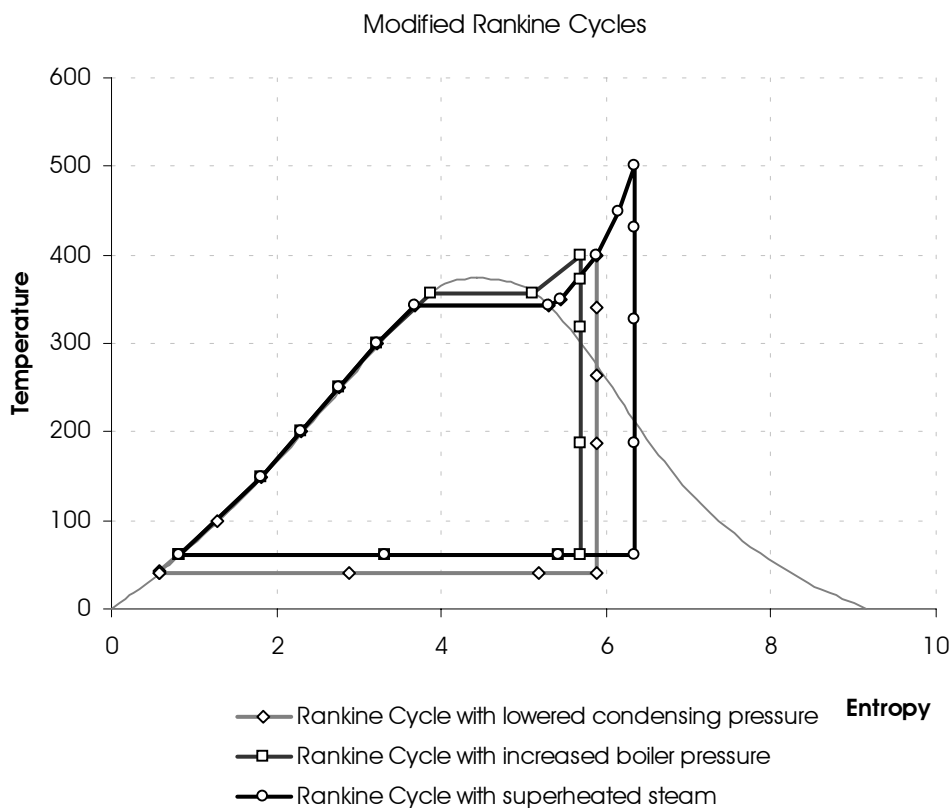
Το κύριο πλεονέκτημα της υπερθέρμανσης του ατμού είναι ότι δεν προσθέτει αυξημένο κόστος, δεδομένου ότι η απόδοση ενός ατμοπαραγωγού που λειτουργεί σε πλήρες φορτίο είναι σχετικά υψηλή για υψηλές θερμοκρασίες λειτουργίας. Ένα άλλο πλεονέκτημα της χρήσης υπερθερμασμένου ατμού είναι η αποφυγή της ενδεχόμενης διάβρωσης στο εσωτερικό του στροβίλου, ως συνέπεια της μειωμένης υγρασίας του ατμού. Σε μοντέρνα ατμοστροβιλικά συστήματα η μέγιστη θερμοκρασία λειτουργίας είναι οι 620 °C λόγω υλικών περιορισμών (π.χ. πτερύγια στροβίλου).

### **β. Αύξηση της πίεσης λειτουργίας του λέβητα**

Το αποτέλεσμα της αύξησης της πίεσης του λέβητα μπορεί να φανεί στο σχήμα 2.4. Μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι το κέρδος στο παραγόμενο έργο περιορίζεται από το πρόσθετο μηχανικό έργο που απαιτείται για την λειτουργία της αντλίας τροφοδοσίας. Στις περισσότερες περιπτώσεις η αποζημίωση από το αυξημένο παραγόμενο έργο υποδεικνύει την αποτελεσματικότητα της τεχνικής. Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η δημιουργία υγρού ατμού εντός του στροβίλου, γεγονός που μπορεί να οδηγήσει στη διάβρωση του. Αυτό μπορεί να αποφευχθεί εύκολα με τη χρησιμοποίηση υπερθερμασμένου ατμού, όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Η μέγιστη πίεση λειτουργίας στις σύγχρονες ατμοστροβιλικές βιομηχανίες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι τα 300 bar.

### **γ. Μείωση της πίεσης λειτουργίας του συμπυκνωτή**

Σε αυτήν την περίπτωση το επιπλέον έργο που παρέχεται από το στρόβιλο είναι πιο προφανές, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.4. Η ελάττωση της πίεσης του συμπυκνωτή οδηγεί σε χαμηλότερες θερμοκρασίες αποβολής θερμότητας από τον κορεσμένο ατμό. Ο περιορισμός στην απόδοση του συστήματος προέρχεται αυτή τη φορά από την επιπρόσθετη θερμότητα που απαιτείται στον λέβητα με συνέπεια το συνολικό κέρδος από την εφαρμογή της τεχνικής αυτής να είναι περιορισμένο. Οποιαδήποτε ρύθμιση πραγματοποιηθεί στην πίεση λειτουργίας του συμπυκνωτή, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι αυτή δεν πρέπει να είναι χαμηλότερη της πίεσης κορεσμού του νερού που αντιστοιχεί στην θερμοκρασία του χρησιμοποιούμενου ψυκτικού μέσου.



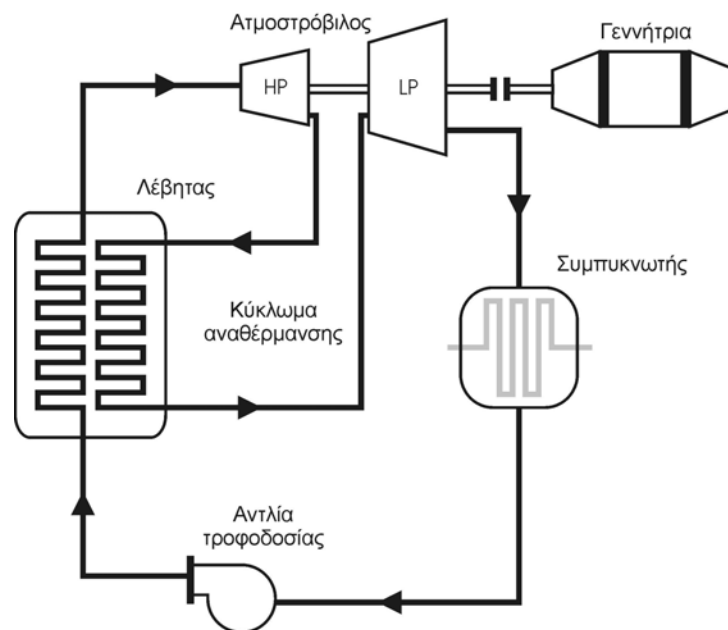
Σχήμα 2.4 – Διάγραμμα ενθαλπίας - εντροπίας των τροποποιημένων κύκλων Rankine

#### 2.4.1.4 Θερμοδυναμικοί κύκλοι σύγχρονων ατμοστροβιλικών μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας

Το κύριο μειονέκτημα των βιομηχανιών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με ατμοστρόβιλο είναι η σχετικά μικρή απόδοση τους. Το ποσό της θερμότητας που απελευθερώνεται κατά την καύση και το οποίο χρησιμοποιείται τελικά για παραγωγή μηχανικού έργου είναι στην καλύτερη περίπτωση περιορισμένο στο 40 τοις εκατό του συνόλου. Για αυτόν το λόγο έχουν βρεθεί σύγχρονα σχήματα λειτουργίας που μπορούν να εγguηθούν βελτιωμένη απόδοση. Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται σχήματα λειτουργίας για ατμοηλεκτρικές μονάδες, των οποίων η αποτελεσματικότητα είναι αποδεδειγμένη.

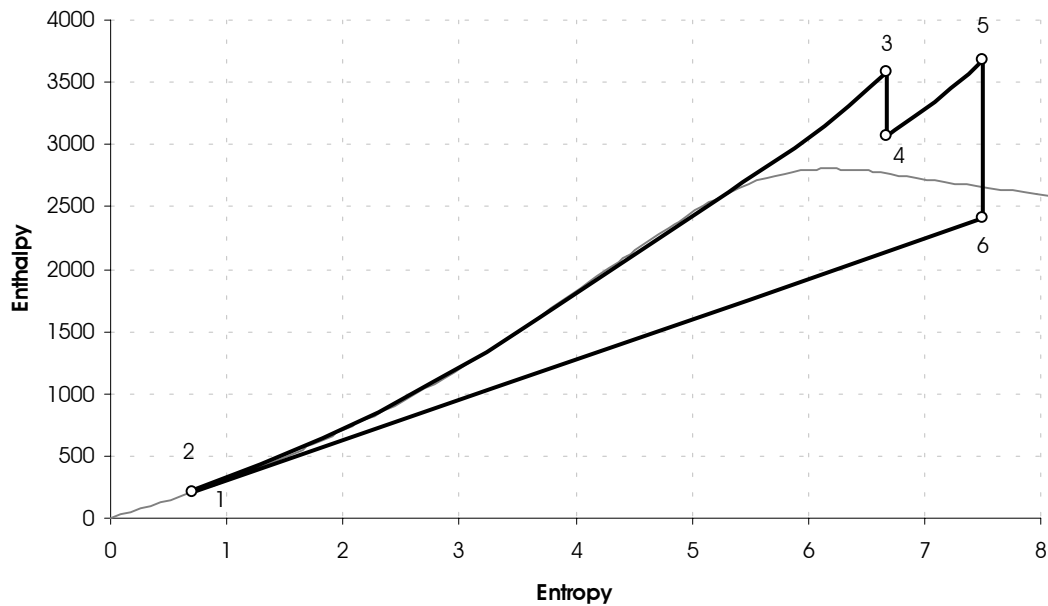
### Κύκλος Rankine με αναθέρμανση

Το σχήμα αναθέρμανσης για ένα ατμοστροβιλικό σύστημα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας παρουσιάζεται στο σχήμα 2.5. Η βασική διαφορά από το συμβατικό σύστημα είναι η χρήση στροβίλου δύο σταδίων σε συνδυασμό με το κύκλωμα ανατροφοδότησης ατμού στον λέβητα. Ο ατμός αφού διασταλεί στο στάδιο υψηλής πίεσης του ατμοστροβίλου κατευθύνεται στον λέβητα για αναθέρμανση. Αναχωρώντας από το λέβητα και αφού έχει μετατεθεί σε υψηλότερο επίπεδο ενθαλπίας, ο ατμός οδηγείται στο δεύτερο – χαμηλής πίεσης – στάδιο του στροβίλου για την αποπεράτωση της διαστολής έως την πίεση του συμπυκνωτή. Τελικά ο ατμός αφού συμπυκνωθεί ανατροφοδοτείται στον ατμοπαραγωγό για περαιτέρω χρήση. Ο θερμοδυναμικός κύκλος πάνω στον οποίο το συγκεκριμένο σύστημα λειτουργεί φαίνεται στο σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.5 – Ατμοστροβιλικό σύστημα με αναθέρμανση

Reheat-Rankine Cycle



Σχήμα 2.6 – Διάγραμμα Mollier κύκλου Rankine με αναθέρμανση

Η απόδοση του κύκλου Rankine με αναθέρμανση μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με τη βοήθεια του διαγράμματος Mollier. Το καθαρά παραγόμενο έργο είναι το παραγόμενο έργο στον δισταδιακό στρόβιλο μειωμένο κατά το καταναλισκόμενο έργο στην αντλία τροφοδοσίας. Επομένως:

$$W_{\text{net}} = W_{3-4} + W_{5-6} - W_{1-2} = h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + h_5 - h_6$$

Η ολική απορροφόμενη θερμότητα ισούται με τη θερμότητα που παρέχεται στο μέσο κατά τη θέρμανση και αναθέρμανση στον λέβητα:

$$Q_{\text{input}} = Q_{2-3} = h_3 - h_2 + h_5 - h_4$$

Συνεπώς ο συντελεστής θερμικής απόδοσης του κύκλου Rankine με αναθέρμανση είναι:

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{input}}} = \frac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + h_5 - h_6}{h_3 - h_2 + h_5 - h_4} = 1 - \frac{h_6 - h_1}{h_3 - h_2 + h_5 - h_4}$$

Το όφελος από τη χρήση της συγκεκριμένης διάταξης για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας με χρήση ατμού είναι:

#### **α. Βελτιωμένες επιδόσεις**

Όπως φαίνεται και στο διάγραμμα Mollier για τον κύκλο αναθέρμανσης, το παραγόμενο στον αμοστρόβιλο έργο είναι αυξημένο. Για την αύξηση αυτή ένα επιπλέον ποσό θερμότητας απαιτείται αλλά, όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, ο αμοσπαραγωγός παρουσιάζει αρκετά υψηλή απόδοση όταν λειτουργεί στην ονομαστική θερμοκρασία και υπό πλήρες φορτίο και κατά συνέπεια το πρόσθετο κόστος καυσίμου αντισταθμίζεται με το παραπάνω.

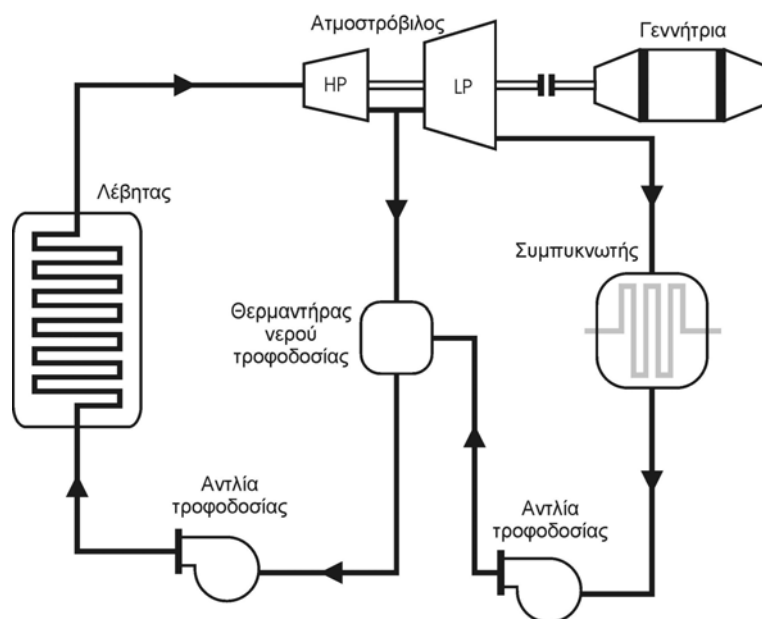
#### **β. Αποφυγή διάβρωσης**

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα, το κύριο μειονέκτημα της αυξημένης πίεσης λειτουργίας του λέβητα, χαρακτηριστικού όλων των σύγχρονων αμοστροβλικών συστημάτων, είναι ότι ο ατμός κατά τη διαστολή στον αμοστρόβιλο φθάνει στην υγρή κατάσταση. Σε αυτήν την περίπτωση τα ταχύτατα κινούμενα σταγονίδια νερού πέφτοντας στα πτερύγια του στροβίλου μπορούν να προκαλέσουν εκτεταμένη διάβρωση. Στο σύστημα με αναθέρμανση αυτό αποφεύγεται, αφού ο ατμός κατά την αναθέρμανση μετατρέπεται σε υπερθερμασμένο ατμό προτού συμπληρωθεί η διαδικασία διαστολής του έως την πίεση του συμπυκνωτή.

#### **Κύκλος Rankine με αναγέννηση**

Μια άλλη επιλογή στο σχεδιασμό ενός αμοστροβλικού συστήματος είναι το σύστημα του κύκλου Rankine με αναγέννηση. Ο όρος «αναγέννηση» έγκειται στην εξαγωγή ατμού για τον σκοπό της θέρμανσης του νερού τροφοδοσίας προτού εισέλθει στον αμοσπαραγωγό. Αυτός είναι ένας αποδεδειγμένα αποτελεσματικός τρόπος για να αποφευχθεί η χρήση μεγάλων ποσοτήτων θερμότητας για να ανεβεί η θερμοκρασία του νερού τροφοδοσίας. Ειδικά στην περίπτωση μεγάλης διαφοράς πίεσης μεταξύ εισόδου και εξόδου της αντλίας τροφοδοσίας, όπου κατά τη συμπίεση πραγματοποιείται και ψύξη του νερού, η τεχνική της αναγέννησης είναι ουσιώδης.

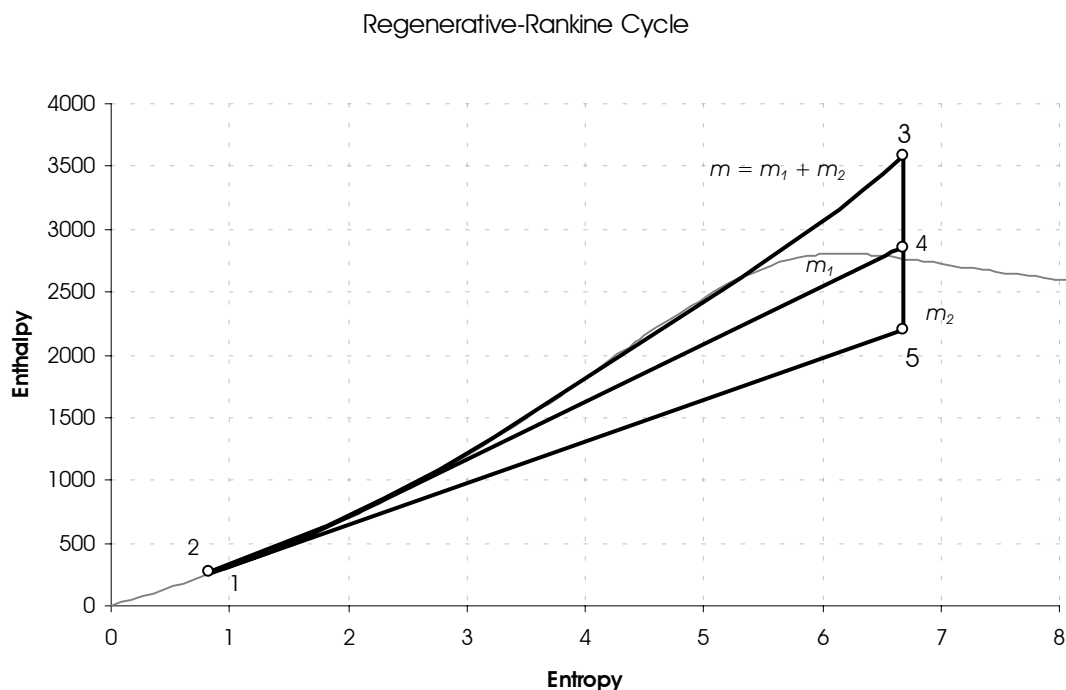
Η θέρμανση του μέσου λαμβάνει χώρα σε ένα συγκεκριμένο συνθετικό στοιχείο – τον θερμαντήρα νερού τροφοδοσίας. Υπάρχουν δύο τύποι θερμαντήρων νερού τροφοδοσίας. Στο θερμαντήρα ανοικτού τύπου ένα μικρό μέρος ατμού αναμειγνύεται με το νερό τροφοδοσίας που βρίσκεται σε υγρή μορφή, έτσι ώστε να ανεβάσει τη θερμοκρασία του. Στον θερμαντήρα κλειστού τύπου δεν γίνεται ανάμιξη, αλλά η θέρμανση επιτυγχάνεται φέρνοντας σε επαφή τον εξαγόμενο ατμό με το κρύο νερό τροφοδοσίας – συνήθως ο ατμός υγροποιείται στην επιφάνεια των σωλήνων που διατρέχει το νερό τροφοδοσίας.



**Σχήμα 2.7** – Σύστημα ατμοστρόβιλου με αναγέννηση

Στην πρώτη διάταξη (Σχήμα 2.7), ένα τμήμα του ατμού που εγκαταλείπει το πρώτο στάδιο (υψηλής πίεσης) του ατμοστρόβιλου οδηγείται σε ένα θερμαντήρα νερού τροφοδοσίας. Εκεί αναμειγνύεται με το νερό που πρόκειται να επιστραφεί στο λέβητα και ανεβάζει τη θερμοκρασία του. Πριν την ανάμιξη, το νερό τροφοδοσίας πρέπει να συμπιεστεί στα επίπεδα πίεσης του εξαγόμενου ατμού. Μετά την ανάμιξη το θερμό πια νερό συμπιέζεται στην επιθυμητή πίεση του λέβητα. Χρησιμοποιώντας ένα θερμαντήρα νερού τροφοδοσίας κλειστού τύπου, η χρήση δύο αντλιών είναι επίσης απαραίτητη. Μετά τη συμπύκνωση που υπόκειται ο ατμός στο θερμαντήρα πρέπει να συμπιεστεί στα επίπεδα πίεσης του λέβητα. Το νερό τροφοδοσίας συμπιέζεται επίσης στα ίδια επίπεδα.

Ο κύκλος Rankine με αναγέννηση παρουσιάζεται στο σχήμα 2.8. Στο διάγραμμα φαίνεται ο διαχωρισμός του μέσου σε δύο τμήματα  $m_1$  και  $m_2$ . Το πρώτο στάδιο της εκτόνωσης πραγματοποιείται με τη συνολική ποσότητα του μέσου ( $m=m_1+m_2$ ) και κατά συνέπεια το παραγόμενο έργο είναι μεγαλύτερο σε σχέση με το έργο που παράγεται στο δεύτερο στάδιο του ατμοστροβίλου κατά την εκτόνωση του τμήματος μάζας  $m_2$ . Εντούτοις, αυτή η ελάττωση του παραγόμενου μηχανικού έργου αντισταθμίζεται από τη μείωση της απαιτούμενης ενέργειας για τη θέρμανση του νερού στον ατμοπαραγωγό.



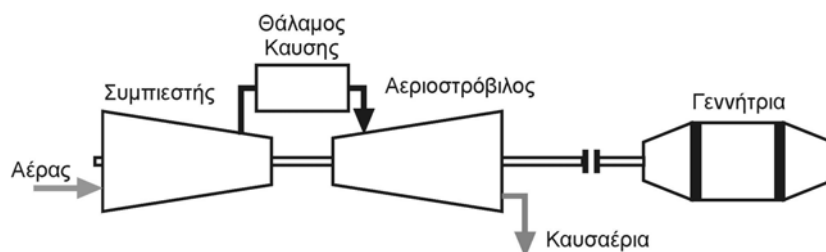
**Σχήμα 2.8** – Διάγραμμα Mollier του κύκλου Rankine με αναγέννηση

#### 2.4.2 Αεριοστροβιλικές μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας

Η ιδέα της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με τη χρήση αεριοστροβίλων δεν διαφέρει πολύ από αυτή των ατμοστροβιλικών μονάδων. Η ηλεκτροπαραγωγή βασίζεται και σε αυτήν την περίπτωση στη μετατροπή της ενέργειας του καυσίμου σε μηχανικό έργο. Εντούτοις, η κυριότερη απόκλιση από την αρχή λειτουργίας των ατμοστροβιλικών συστημάτων είναι ότι η ουσία που χρησιμοποιείται ως μέσο μεταφοράς της ενέργειας εντός του συστήματος δεν



είναι το νερό αλλά ο αέρας. Μία τυπική διάταξη ατμοστροβιλικού συστήματος φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Τα κυριότερα συνθετικά στοιχεία που απαρτίζουν τα αεριοστροβιλικά συστήματα είναι ο συμπιεστής, ο θάλαμος καύσης, ο αεριοστρόβιλος και μία συσκευή που εισάγεται για θεωρητικούς κυρίως λόγους – ο θάλαμος ψύξης. Εκτενέστερη παρουσίαση του κάθε στοιχείου, καθώς και των διεργασιών που επιτελούνται στο εσωτερικό του, γίνεται στην ενότητα που ακολουθεί.



**Σχήμα 2.9** – Αεριοστροβιλικό σύστημα

Οι αεριοστροβιλικοί σταθμοί παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι γενικά μονάδες ανοικτού κύκλου. Είναι χρήσιμο ωστόσο να υποτεθεί μια κυκλική λειτουργία έτσι ώστε να δικαιολογηθεί ο όρος “κύκλος” που χρησιμοποιείται κατά τη θερμοδυναμική ανάλυση.

#### **2.4.2.1 Περιγραφή – ανάλυση συνθετικών στοιχείων**

##### **Συμπιεστής**

Το στοιχείο αυτό έχει την ευθύνη να παρέχει αέρα σε υψηλή πίεση που απαιτείται για τη λειτουργία του αεριοστρόβιλου. Στις περισσότερες διατάξεις, ο άξονας του συμπιεστή είναι συνδεδεμένος με τον άξονα του αεριοστρόβιλου, έτσι ώστε να ληφθεί το απαιτούμενο για τη συμπίεση μηχανικό έργο.

Όπως και στην ιδανική περίπτωση της αντλίας τροφοδοσίας στους ατμοστροβιλικούς σταθμούς, μπορεί να υποτεθεί ότι ο συμπιεστής λειτουργεί αδιαβατικά, δηλαδή δεν πραγματοποιείται ανταλλαγή θερμότητας μεταξύ του αεριοστρόβιλου και του περιβάλλοντος.

### Θερμότητα που προσφέρεται στο σύστημα

Η μεταφερόμενη στο μέσο (αέρας) θερμότητα είναι:

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0$$

### Καταναλισκόμενο έργο

Αν οι μεταβολή στην δυναμική και κινητική ενέργεια είναι αμελητέες, τότε η ενεργειακή εξίσωση δίνει:

$$W_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά τη συμπίεση ο αέρας υπόκειται σε αύξηση της εσωτερικής του ενέργειας, από ένα χαμηλό επίπεδο ενθαλπίας σε ένα υψηλό με κατανάλωση εξωτερικού μηχανικού έργου.

### **Θάλαμος καύσης**

Αν γινόταν τροφοδοσία του συμπιεσμένου αέρα κατευθείαν στον αεριοστρόβιλο για εκτόνωση το κέρδος θα ήταν μηδενικό, αφού το μηχανικό έργο που θα παραγόταν θα επαρκούσε μόνο για την οδήγηση του συμπιεστή. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιείται ένα ενδιάμεσο συνθετικό στοιχείο, ο θάλαμος καύσης. Εντός του θαλάμου καύσης, ο αέρας αναμιγνύεται με καύσιμο και υπό τις κατάλληλες προϋποθέσεις λαμβάνει χώρα η καύση. Ο αέρας που εγκαταλείπει το θάλαμο καύσης, σε αέρια πια μορφή, περιέχει μεγάλα ποσά ενέργειας και είναι ικανός να παράγει μηχανικό έργο.

Η διεργασία που λαμβάνει χώρα εντός του θαλάμου καύσης μπορεί να υποθέσει κανείς ότι είναι αυστηρά ισοβαρής. Σε αυτήν την περίπτωση το παραγόμενο έργο και η απορροφούμενη θερμότητα είναι:

### Παραγόμενο έργο

$$W_{1 \rightarrow 2} = 0$$

### Απορροφούμενη θερμότητα

$$Q_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1$$

που είναι ίση με την αύξηση της εσωτερικής ενέργειας του μέσου.

### **Αεριοστρόβιλος**

Η λειτουργία του αεριοστροβίλου είναι παρόμοια με αυτή του ατμοστροβίλου. Καθώς το αέριο εκτονώνεται, η δύναμη που ασκείται στα πτερύγια του στροβίλου προκαλούν την περιστροφή του άξονα του. Επαρκής μόνωση του στροβίλου μπορεί να εξασφαλίσει μια ισεντροπική συμπεριφορά του αεριοστροβίλου. Στην συγκεκριμένη διεργασία δεν λαμβάνει χώρα προσθήκη ή αφαίρεση θερμότητας από το μέσο. Δηλαδή:

#### Εκλυόμενη θερμότητα

$$Q_{1 \rightarrow 2} = 0$$

Επίσης, αν οι μεταβολές στην κινητική και δυναμική ενέργεια είναι αμελητέες, τότε από την αντίστοιχη εξίσωση της ροής ενέργειας λαμβάνουμε για το παραγόμενο έργο:

#### Παραγόμενο έργο

$$W_{1 \rightarrow 2} = H_1 - H_2$$

Δηλαδή το παραγόμενο έργο αντιστοιχεί σε πτώση της εσωτερικής ενέργειας του αερίου.

### **Θάλαμος ψύξης**

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα σε αυτήν την ενότητα, ο αεριοστροβιλικός κύκλος είναι ένας ανοικτός κύκλος. Αυτό σημαίνει ότι τα αέρια μετά την καύση και την εκτόνωση στον στρόβιλο εγκαταλείπουν το σύστημα μέσω καπνοδόχου. Ωστόσο, για τη μελέτη των διεργασιών και για την αξιολόγηση των επιδόσεων των αεριοστροβιλικών συστημάτων συχνά χρησιμοποιείται ένα κλειστό μοντέλο. Για το λόγο αυτό, ένα πρόσθετο συνθετικό στοιχείο εισάγεται – ο θάλαμος ψύξης. Εντός του θαλάμου ψύξης τα αέρια αποβάλουν θερμότητα η οποία μεταφέρεται στο περιβάλλον μέσω ενός ψυκτικού υγρού και θεωρητικά ο ψυγμένος αέρας τροφοδοτείται πίσω στον συμπιεστή. Η διεργασία μπορεί να θεωρηθεί ισοβαρής, που σημαίνει ότι η αποβαλλόμενη θερμότητα και το παραγόμενο έργο είναι:

### Εκλυόμενη θερμότητα

$$Q_{1 \rightarrow 2} = H_1 - H_2$$

### Παραγόμενο έργο

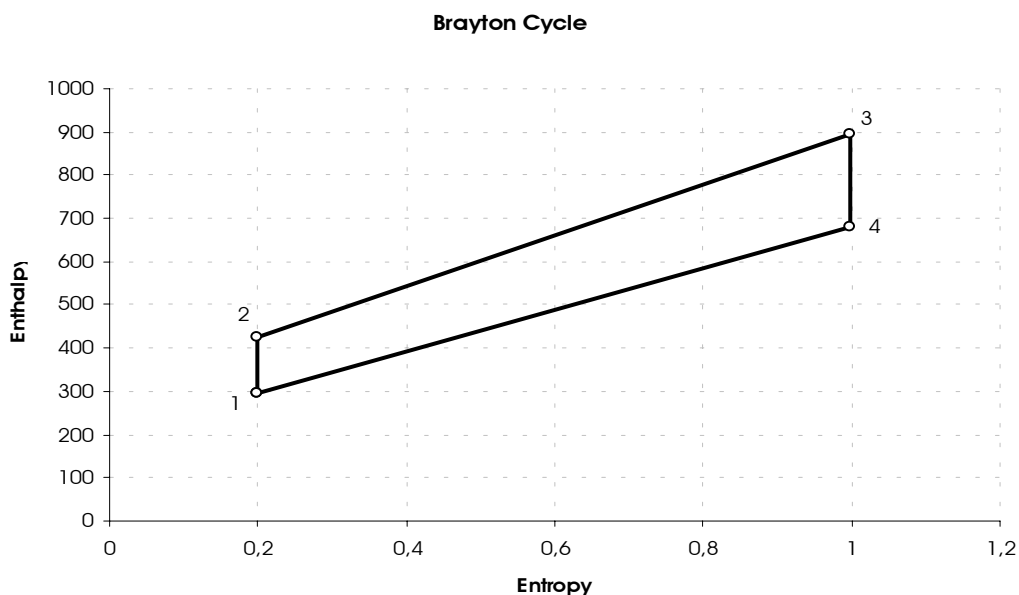
$$W_{1 \rightarrow 2} = 0$$

#### 2.4.2.2 Ανάλυση θερμοδυναμικού κύκλου

Οι αεριοστροβιλικές μονάδες λειτουργούν βάσει του κύκλου Brayton ή Joule. Από την περιγραφή των συνθετικών στοιχείων που προηγήθηκε μπορεί κανείς εύκολα να παρατηρήσει ότι ο κύκλος αναμένεται να είναι παρόμοιος με τον κύκλο Rankine. Όπως και στα ατμοστροβιλικά συστήματα, οι διαδικασίες λειτουργίας που εφαρμόζονται είναι βασισμένες σε τροποποιημένες μορφές του κύκλου Brayton και όχι στον κύκλο Brayton στην αυθεντική του μορφή. Εντούτοις, η μελέτη του απλού κύκλου Brayton είναι επίσης σημαντική, καθώς παρέχει τη βάση για τη μελέτη των πιο σύνθετων διατάξεων που θα ακολουθήσουν.

#### **Απλός κύκλος Brayton**

Ο κύκλος Brayton αποτελείται από τις τέσσερις διεργασίες που εξετάστηκαν και στην περίπτωση του κύκλου Rankine: ισεντροπική συμπίεση, ισοβαρής θέρμανση, ισεντροπική εκτόνωση και ισοβαρής ψύξη. Ο ιδανικός κύκλος Brayton φαίνεται στο σχήμα 2.10.



**Σχήμα 2.10** – Διάγραμμα Mollier του κύκλου Brayton-Joule

Πιο λεπτομερώς, οι διεργασίες που λαμβάνουν χώρα είναι οι εξής:

Μεταβολή 1 – 2

---

Συμπιεστής

Ο αέρας συμπιέζεται αδιαβατικά από τη χαμηλή πίεση εξόδου του θαλάμου ψύξης στην επιθυμητή πίεση εισαγωγής στον αεριοστρόβιλο. Κατά τη διάρκεια αυτής της διεργασίας λαμβάνει χώρα μια αύξηση της θερμοκρασίας και της ενθαλπίας του αέρα.

Καταναλισκόμενο έργο:  $W_{input} = W_{1-2} = h_2 - h_1$

Μεταβολή 2 – 3

---

Θάλαμος καύσης

Ο πεπιεσμένος αέρας θερμαίνεται μέσω του ψεκασμού με καύσιμα και την πρόκληση ανάφλεξης. Αφού η διεργασία είναι ισοβαρής η θερμότητα που απορροφάται από τον αέρα προκαλεί μια αύξηση της ενθαλπίας και θερμοκρασίας του.

Απορροφούμενη θερμότητα:  $Q_{input} = Q_{2-3} = h_3 - h_2$

Μεταβολή 3 – 4

---

Αεριοστρόβιλος

Τα υψηλής πίεσης αέρια, καθώς εισέρχονται στον αεριοστρόβιλο, προκαλούν την περιστροφή του άξονα, ασκώντας δυνάμεις στα πτερύγια του στρόβιλου. Αν οι απώλειες θερμότητας είναι αμελητέες, η καταναλισκόμενη ενέργεια του αερίου ισοδυναμεί με το έργο που παράγεται στον στρόβιλο.

Παραγόμενο έργο:  $W_{output} = W_{3-4} = h_3 - h_4$

## Θάλαμος ψύξης

Θεωρητικά, τα εξερχόμενα από το στρόβιλο αέρια οδηγούνται σε μία συσκευή ψύξης όπου αποβάλλεται θερμότητα υπό σταθερή πίεση προτού τροφοδοτηθούν στον συμπιεστή. Η αποβαλλόμενη θερμότητα αντιστοιχεί στην μείωση της ενθαλπίας του μέσου.

Εκλυόμενη θερμότητα:  $Q_{\text{output}} = Q_{4-1} = h_4 - h_1$

### 2.4.2.3 Απόδοση αεριοστροβιλικών μονάδων παραγωγής

Βάσει των υπολογισμών της προηγούμενης ενότητας είναι δυνατή η εύρεση της απόδοσης του κύκλου Brayton. Οι υπολογισμοί που ακολουθούν γίνονται για μονάδα μάζας του μέσου (αέρα).

Το καθαρό έργο είναι το έργο που παράγεται στο στρόβιλο μειωμένο κατά το έργο που καταναλίσκεται στο συμπιεστή. Συνεπώς:

$$W_{\text{net}} = W_{3-4} - W_{1-2} = h_1 - h_2 + h_3 - h_4$$

Η συνολική προσφερόμενη θερμότητα στο σύστημα ισούται με τη θερμότητα που απορροφάται από το μέσο στο θάλαμο καύσης. Δηλαδή:

$$Q_{\text{input}} = Q_{2-3} = h_3 - h_2$$

Κατά συνέπεια, ο θερμοκός συντελεστής απόδοσης του ιδανικού κύκλου Brayton είναι:

$$\eta_{\text{eff}} = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{input}}} = \frac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4}{h_3 - h_2} = 1 - \frac{h_4 - h_1}{h_3 - h_2}$$

Ειδικά για τον αεριοστροβιλικό κύκλο, είναι σύνηθες να εκφράζεται η απόδοση του κύκλου υπό μορφή του λόγου συμπίεσης του συμπιεστή  $r = p_2/p_1$ :

Το καταναλισκόμενο στο συμπιεστή μηχανικό έργο είναι:

$$W_c = W_{1-2} = h_2 - h_1 = c_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Αντίστοιχα, στο στρόβιλο έχουμε:

$$W_t = W_{3-4} = h_3 - h_4 = c_p \cdot (T_3 - T_4)$$

Συνεπώς το καθαρό έργο είναι:

$$W_{net} = W_t - W_c = c_p \cdot (T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$$

Η συνολικά προσφερόμενη θερμότητα είναι:

$$Q_{input} = Q_{2-3} = h_3 - h_2 = c_p \cdot (T_3 - T_2)$$

Συνεπώς ο βαθμός απόδοσης στον κύκλο Brayton λαμβάνει τη μορφή:

$$(\eta_{eff})_{Brayton} = \frac{W_{net}}{Q_{input}} = \frac{T_1 - T_2 + T_3 - T_4}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

Η εξίσωση των ιδανικών αερίων για την αδιαβατική μεταβολή στο στρόβιλο και το συμπιεστή δίνει:

$$T_2 = T_1 \cdot (p_2 / p_1)^{(\gamma-1)/\gamma} \text{ και } T_4 = T_3 / (p_2 / p_1)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

αφού  $p_4 / p_3 = p_2 / p_1$ .

Συνεπώς η απόδοση μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\eta_{eff} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma}$$

Είναι προφανές ότι για υψηλότερες τιμές του λόγου συμπίεσης, η απόδοση του κύκλου Brayton βελτιώνεται.

Η προηγούμενη ανάλυση μπορεί να εφαρμοστεί και στην ανοικτού τύπου διάταξη των αεριοστροβιλικών συστημάτων. Η διαφορά έγκειται στην αναίρεση της κυκλικής λειτουργίας. Στην πραγματικότητα τα καυσαέρια απελευθερώνονται στην ατμόσφαιρα αντί να επιστρέφονται στο συμπιεστή, που είναι σε κάθε περίπτωση υποχρεωτικό λόγω της χαμηλής συγκέντρωσης των αερίων αυτών σε οξυγόνο. Ωστόσο, η διαφορά αυτή δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της ανάλυσης του κλειστού κύκλου και κατά συνέπεια οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για την πραγματική περίπτωση.

### **Απόδοση στον πραγματικό θερμοδυναμικό κύκλο**

Ο κύκλος Brayton που παρουσιάστηκε μέχρι τώρα είναι μια ιδανική περίπτωση. Στον πραγματικό θερμοδυναμικό κύκλο, βάσει του οποίου λειτουργούν οι αεριοστροβιλικές μονάδες, λαμβάνουν χώρα απώλειες θερμότητας και πίεσης. Εκτός αυτού, οι διεργασίες σε κάθε συνθετικό στοιχείο της διάταξης ξεχωριστά δεν είναι αντιστρέψιμες όπως υποτέθηκε μέχρι τώρα. Αυτό έχει ως συνέπεια, η απόδοση ενός αεριοστροβιλικού συστήματος που λειτουργεί στον πραγματικό κύκλο Brayton να είναι αρκετά χαμηλότερη σε σχέση με την αναμενόμενη από την προηγούμενη ανάλυση. Η απόδοση ενός τυπικού αεριοστροβιλικού σταθμού παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας δεν ξεπερνά το 35%. Αυτό οφείλεται κυρίως στα μεγάλα ποσά ενέργειας που απαιτούνται για τη λειτουργία του συμπιεστή.

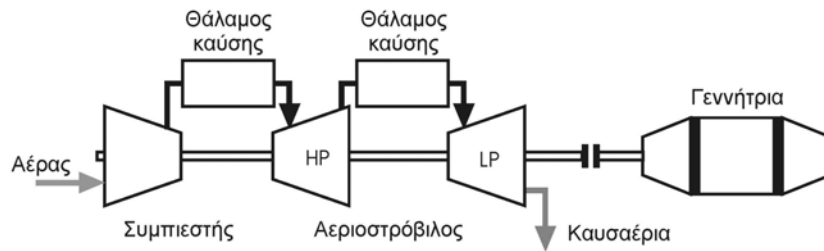
#### **2.4.2.4 Θερμοδυναμικοί κύκλοι σύγχρονων αεριοστροβιλικών μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας**

Οι ίδιες τεχνικές που εφαρμόζονται στα ατμοστροβιλικά συστήματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στα αεριοστροβιλικά συστήματα, στην προσπάθεια να βελτιωθεί ο βαθμός απόδοσης τους. Σε αυτήν την παράγραφο μελετώνται τα σχήματα αναθέρμανσης και αναγέννησης για το συγκεκριμένο τύπο συστήματος, ενώ παρουσιάζεται και ένα πρόσθετο σχήμα λειτουργίας εφαρμόσιμο μόνο σε αεριοστροβιλικά συστήματα.

#### **Κύκλος Brayton με αναθέρμανση**

Το αεριοστροβιλικό σύστημα με αναθέρμανση παρουσιάζεται στο σχήμα 2.11. Και εδώ χρησιμοποιείται στρόβιλος δύο σταδίων συνδυασμένος με ένα θάλαμο αναθέρμανσης. Ο θάλαμος αναθέρμανσης μπορεί να είναι ένας θάλαμος καύσης όπου το εναπομένον οξυγόνο στα αέρια που εξέρχονται από το πρώτο στάδιο του στροβίλου προκαλεί την καύση πρόσθετου καυσίμου ή μπορεί να είναι ένας θερμαντήρας στον οποίο εξωτερική ανάφλεξη παρέχει την απαραίτητη θερμότητα για την αύξηση της θερμοκρασίας του μέσου.





**Σχήμα 2.11** – Αεριοστροβιλικό σύστημα με αναθέρμανση

Εργαζόμενοι στην ιδανική εκδοχή του κύκλου Brayton, όπου αμελούνται τυχόν απώλειες θερμοκρασίας και πίεσης και επιπλέον οι διεργασίες εκλαμβάνονται ως αντιστρέψιμες, το πρόσθετο έργο που παράγεται στο στρόβιλο είναι:

$$W = W_{3-4} + W_{5-6} - W_{3-4^*} = h_{4^*} - h_4 + h_5 - h_6$$

Εναλλακτικά, το έργο μπορεί να εκφραστεί ως:

$$W = c_p(T_{4^*} - T_4 + T_5 - T_6)$$

Για τις αδιαβατικές μεταβολές 3 – 4 και 3 – 4\* ισχύει:

$$\frac{T_{4^*}}{T_4} = \left( \frac{p_{4^*}}{p_4} \right)^{(k-1)/k}$$

Στο σημείο αυτό, σημαντική για την απόδοση της αεριοστροβιλικής μονάδας είναι η κατάλληλη επιλογή της ενδιάμεσης πίεσης  $p_4$ , έτσι ώστε να επιτευχθεί το μέγιστο πρόσθετο παραγόμενο έργο. Έχει αποδειχτεί ότι στην περίπτωση που οι συντελεστές απόδοσης των δύο σταδίων του στρόβιλου είναι ίσοι καθώς και οι θερμοκρασίες εισόδου αυτών, η ρύθμιση της ενδιάμεσης πίεσης σε μία τιμή που να εξασφαλίζει ισότητα των λόγων διαστολής στα δύο στάδια ( $p_4/p_3 = p_6/p_5$ ), μεγιστοποιεί το παραγόμενο έργο.

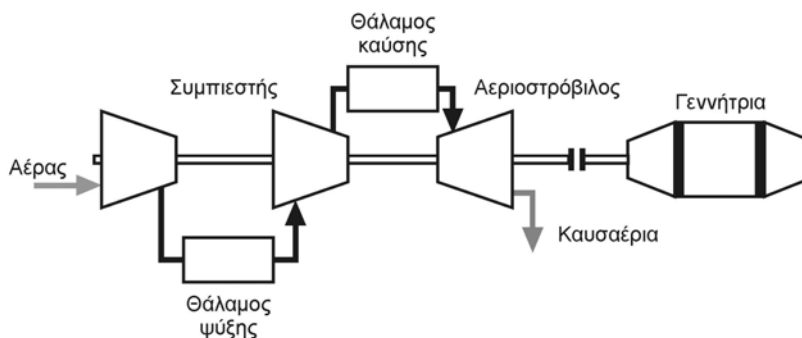
Το συνολικό αποτέλεσμα της εφαρμογής της τεχνικής της αναθέρμανσης σε αεριοστροβιλικά συστήματα, είναι αφενός η αύξηση του παραγόμενου έργου αλλά η σχετική μείωση της απόδοσης του κύκλου. Αυτό οφείλεται στα μεγάλα ποσά θερμότητας που απαιτούνται στον θάλαμο αναθέρμανσης.

Ο συντελεστής απόδοσης για τον κύκλο Brayton με αναθέρμανση είναι:

$$(\eta_{\text{eff}})_{\text{Brayton}}^{\text{Reheat}} = \frac{W_{\text{net}}}{Q_{\text{input}}} = \frac{h_1 - h_2 + h_3 - h_4 + h_5 - h_6}{h_3 - h_2 + h_5 - h_4} = 1 - \frac{h_6 - h_1}{h_3 - h_2 + h_5 - h_4}$$

### Κύκλος Brayton με ενδιάμεση ψύξη

Ένας πρόσθετος σχεδιασμός για αεριοστροβιλικά συστήματα είναι το αντικείμενο αυτής της παραγράφου. Η έννοια της ενδιάμεσης ψύξης αφορά τη διαίρεση της διαδικασίας συμπίεσης σε δύο βαθμίδες, μεταξύ των οποίων ο αέρας διέρχεται μέσω μιας συσκευής απαγωγής θερμότητας, που δεν είναι τίποτε άλλο από έναν εναλλάκτη θερμότητας. Η ιδέα στην οποία βασίζεται αυτή η υλοποίηση είναι ότι μέσω της ενδιάμεσης αφαίρεσης θερμότητας κατά τη συμπίεση του αέρα, το έργο που απαιτείται για τη συμπίεση μειώνεται δραστικά. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι με την ψύξη ενός αερίου πραγματοποιείται μείωση του ειδικού του όγκου και κατά συνέπεια του έργου που απαιτείται για τη συμπίεση του.

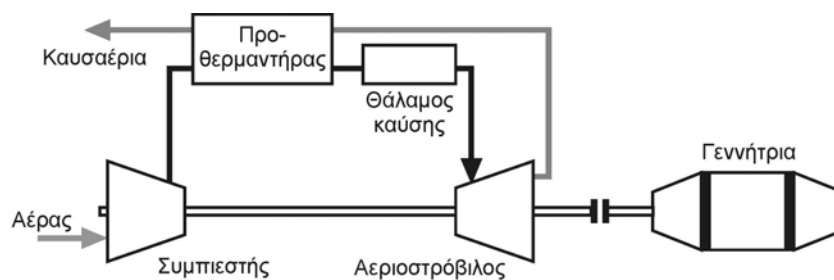


Σχήμα 2.12 – Αεριοστροβιλικό σύστημα με ενδιάμεση ψύξη

Όμοια με την τεχνική της αναθέρμανσης, με την ενδιάμεση ψύξη το καθαρά παραγόμενο έργο παρουσιάζεται αυξημένο, αυτή τη φορά λόγω της μείωσης του καταναλισκόμενου έργου στον συμπιεστή. Παρόλα αυτά, και σε αυτήν την περίπτωση η απόδοση του κύκλου είναι μειωμένη, λόγω της επιπλέον θερμότητας που απαιτείται για να ανεβάσει τη θερμοκρασία και την εσωτερική ενέργεια του ψυχρού αέρα, προτού εκτονωθεί στο στρόβιλο.

### Κύκλος Brayton με αναγέννηση

Η μέθοδος της αναγέννησης μπορεί να εφαρμοστεί στα αεριοστροβιλικά συστήματα υπό τη μορφή της χρησιμοποίησης της θερμότητας των καυσαερίων που εξέρχονται από το στρόβιλο για τη θέρμανση του αέρα προτού εισέλθει στο θάλαμο καύσης. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός εναλλάκτη θερμότητας, εντός του οποίου τα εξερχόμενα από το στρόβιλο καυσαέρια θερμαίνουν (χωρίς ανάμιξη) τον εξαγόμενο εκ του συμπιεστή αέρα.



Σχήμα 2.12 – Αεριοστροβιλικό σύστημα με αναγέννηση

Η επίδραση της αναγέννησης στις επιδόσεις εκτιμάται με τη χρήση του βαθμού αποτελεσματικότητας του εναλλάκτη ή βαθμού αποτελεσματικότητας αναγέννησης όπως συνήθως αναφέρεται. Η αποτελεσματικότητα αναγέννησης ορίζεται ως ο λόγος της πραγματικά μεταφερόμενης θερμότητας από τα καυσαέρια στον συμπιεσμένο αέρα προς το αντίστοιχο μέγιστο ποσό μεταφερόμενης θερμότητας.

$$\eta_{\text{regenerator}} = \frac{Q_{\text{actual}}}{Q_{\text{maximum}}}$$

### Συνδυασμός ενδιάμεσης ψύξης, αναθέρμανσης και αναγέννησης

Λόγω της ανεπιθύμητης επίδρασης στην απόδοση του συστήματος, οι τεχνικές της ενδιάμεσης ψύξης και της αναθέρμανσης δεν εφαρμόζονται ποτέ από μόνες τους ή σε συνδυασμό μεταξύ τους. Ένα ευρέως εφαρμοζόμενο σχήμα λειτουργίας είναι ο συνδυασμός των τριών παραπάνω μεθόδων, δηλαδή ενδιάμεση ψύξη, αναθέρμανση και αναγέννηση.

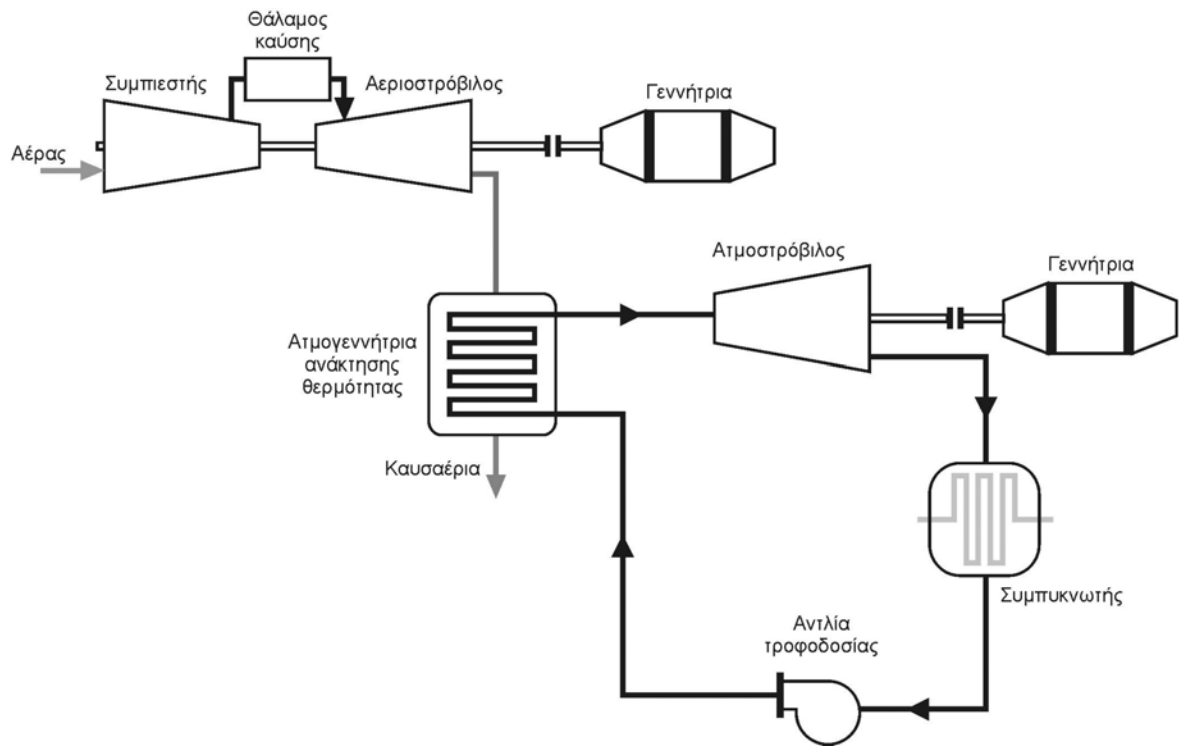
Σε αυτό το σχήμα λειτουργίας η αυξημένη θερμοκρασία εξαγωγής του στροβίλου που εξασφαλίζεται από την αναθέρμανση καθώς και η χαμηλή θερμοκρασία εξόδου του συμπιεστή λόγω της ενδιάμεσης ψύξης, αφήνουν μεγάλο περιθώριο για τη μεταφορά θερμότητας μέσω αναγέννησης. Αυτό έχει την επιπλέον ευνοϊκή επίδραση της μείωσης της θερμοκρασίας των εκλυόμενων στην ατμόσφαιρα αερίων. Συμπερασματικά, ο συνδυασμός των παραπάνω τεχνικών έχει το συνολικό αποτέλεσμα της ανύψωσης της θερμοκρασίας της παροχής θερμότητας και της μείωσης της μέσης θερμοκρασίας αποβολής θερμότητας, που είναι η βάση για την αποδοτική λειτουργία της μονάδας παραγωγής.

#### **2.4.3 Μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας συνδυασμένου κύκλου**

Ένα από τα ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με αεροστρόβιλο είναι η απελευθέρωση των υψηλής θερμοκρασίας καυσαερίων στην ατμόσφαιρα, αφήνοντας με αυτόν τον τρόπο μεγάλα ποσά ενέργειας να χαθούν και δημιουργώντας περιβαλλοντικό κίνδυνο στην περιοχή της εγκατάστασης. Μία εναλλακτική της αναγέννησης προσέγγιση, για την εκμετάλλευση των υψηλής θερμοκρασίας καυσαερίων που παράγονται από το αεριοστροβιλικό σύστημα, είναι η δημιουργία ενός κατώτερου κύκλου με σκοπό τη μετατροπή της - διαφορετικά χαμένης - ενέργειας σε πρόσθετο έργο.

Στην πράξη ο κατώτερος κύκλος είναι συνήθως ένας κύκλος Rankine που χρησιμοποιεί την αποβαλλόμενη από τον ανώτερο κύκλο (Brayton) θερμότητα ως πηγή ενέργειας. Είναι ευνόητο ότι, εφόσον το αμοστροβιλικό σύστημα δεν επηρεάζει τη λειτουργία του αεριοστροβίλου, ο συνδυασμένος κύκλος θα παράγει επιπλέον ενέργεια και θα εμφανίζει αρκετά υψηλότερο βαθμό απόδοσης.

Ακόμα και στην περίπτωση που απαιτείται πρόσθετη θερμότητα για την αποτελεσματική λειτουργία του κύκλου Rankine, η συνολική απόδοση θα είναι αυξημένη αν το επιπλέον παραγόμενο έργο είναι αρκετά μεγάλο και η απαιτούμενη πρόσθετη θερμότητα είναι συγκριτικά μικρή. Μία υλοποίηση συστήματος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας συνδυασμένου κύκλου φαίνεται στο σχήμα 2.13.



Σχήμα 2.13 – Σύστημα συνδυασμένου κύκλου

## Κεφάλαιο 3

### Σταθμοί συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας

#### 3.1. Γενικά

Το κύριο μειονέκτημα της συμβατικής παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι η σχετικά χαμηλή απόδοση. Στους συμβατικούς σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μόνο το 45% της περιεχόμενης στις καύσιμες ύλες ενέργειας μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια, ενώ το υπόλοιπο αποβάλλεται στην ατμόσφαιρα ως μη εκμεταλλεύσιμη θερμότητα. Ακόμα και οι πιο προηγμένες τεχνικές, όπως η λειτουργία συνδυασμένου κύκλου, δεν μπορούν να εξασφαλίσουν απόδοση μεγαλύτερη του 55%.

Δεδομένης μιας συγκεκριμένης ζήτησης ενέργειας, υπό μορφή θερμότητας, η χαμηλή απόδοση ενός θερμικού σταθμού παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να βελτιωθεί σε μεγάλο βαθμό με την εφαρμογή της συνδυασμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας. Η συμπαραγωγή μπορεί να οδηγήσει σε αποδόσεις μεγαλύτερες από 90%, προσφέροντας εξοικονόμηση ενέργειας της τάξης του 15 - 45%, συγκριτικά με την ξεχωριστή παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας από συμβατικούς σταθμούς.

Η θερμότητα που παράγεται με τη συμπαραγωγή μπορεί να διανεμηθεί μέσω διαφόρων μέσων, συμπεριλαμβανομένων του θερμού νερού (π.χ. για τηλεθέρμανση), ατμού ή θερμού αέρα (π.χ. για βιομηχανική ή εμπορική χρήση).

Πέραν της τηλεθέρμανσης, χρησιμοποιώντας τον κατάλληλο σχεδιασμό του σταθμού συμπαραγωγής, είναι δυνατή η παροχή ψύξης για παρόμοιες εφαρμογές.

Το υψηλό κόστος εγκατάστασης αποδοτικών συστημάτων διανομής της θερμότητας επιβάλλει την τοποθέτηση των σταθμών συμπαραγωγής κοντά στην κατανάλωση. Για το λόγο αυτό η εγκατάσταση μικρών - αποκεντρωμένων μονάδων συμπαραγωγής είναι η πλέον εφαρμοσμένη. Ένα πρόσθετο πλεονέκτημα αυτής της στρατηγικής είναι η μείωση των απωλειών λόγω διανομής της ηλεκτρικής ενέργειας, δεδομένου ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας είναι περιορισμένη στην τοποθεσία που είναι εγκατεστημένος ο σταθμός συμπαραγωγής.

Τα πιο σημαντικά πλεονεκτήματα της εφαρμογής συνδυασμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας, είναι:

- Αυξημένη απόδοση στη μετατροπή και χρήση ενέργειας.
- Μειωμένη εκπομπή ρύπων στο περιβάλλον.
- Σημαντική μείωση δαπανών, που εξασφαλίζει μεγάλη ανταγωνιστικότητα στην αγορά ενέργειας και συνεπώς πρόσθετα οφέλη στους καταναλωτές ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας σε όλους τους τομείς (εμπορικός, βιομηχανικός, οικιακός).
- Δίνει περιθώριο για μετακίνηση προς την κατεύθυνση της αποκεντρωμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, όπου οι σταθμοί σχεδιάζονται για την ικανοποίηση των αναγκών των τοπικών καταναλωτών, προσφέροντας υψηλή απόδοση, αποφεύγοντας τις απώλειες διανομής και αυξάνοντας την ευελιξία στη χρησιμοποίηση των συστημάτων παραγωγής. Επιπλέον, η αποκεντρωμένη μορφή παραγωγής που ενισχύεται με την εφαρμογή της συμπαραγωγής, παρέχει αυξημένη ασφάλεια στην παροχή των ζητούμενων προϊόντων, μειώνοντας τον κίνδυνο για μη ικανοποίηση των αναγκών των καταναλωτών σε ηλεκτρική ενέργεια ή/και θερμότητα.
- Η μείωση των απαιτήσεων σε καύσιμα μειώνει και την εξάρτηση από την εισαγωγή πρώτων υλών από χώρες του εξωτερικού.

- Σε ορισμένες περιπτώσεις, όταν είναι διαθέσιμες πρώτες ύλες όπως η βιομάζα και παραπροϊόντα βιομηχανικών και γεωργικών διεργασιών, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως καύσιμα για συστήματα συμπαραγωγής, αυξάνοντας με τον τρόπο αυτό την αποτελεσματικότητα από άποψης κόστους και προσφέροντας λύση στη διαχείριση των αποβλήτων.

### **3.2 Τύποι σταθμών συμπαραγωγής**

Επειδή η παραγωγή και των δύο προϊόντων (ηλεκτρική ενέργεια και θερμότητα) είναι βασισμένη στην ίδια πρωτεύουσα πηγή ενέργειας και δεδομένης της στενής σχέσης μεταξύ των δύο παραγωγικών διαδικασιών, τις περισσότερες φορές δίδεται ιδιαίτερο βάρος σε ένα από τα δύο προϊόντα. Ανάλογα με το προϊόν, με του οποίου τη ζήτηση ταυτίζεται η παραγωγή του σταθμού, χρησιμοποιείται μία από τις ακόλουθες στρατηγικές λειτουργίας:

#### ***Λειτουργία προσανατολισμένη στην παραγωγή θερμότητας***

Στην προσανατολισμένη στην παραγωγή θερμότητας λειτουργία του σταθμού συμπαραγωγής, η παραγωγή ταυτίζεται με τη ζήτηση θερμότητας. Υπό αυτές τις συνθήκες λειτουργίας, το ενδεχόμενο πλεόνασμα σε ηλεκτρική ισχύ πωλείται στο ηλεκτρικό δίκτυο, ενώ σε περίπτωση ανεπάρκειας, ηλεκτρική ενέργεια αγοράζεται από άλλον παραγωγό/ προμηθευτή.

#### ***Λειτουργία προσανατολισμένη στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας***

Σε αυτήν τη στρατηγική λειτουργίας, δίδεται προτεραιότητα στη ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας, ρυθμίζοντας την παραγωγή ανάλογα με τις απαιτήσεις σε ηλεκτρική ισχύ. Υπό αυτές τις συνθήκες, η ενδεχόμενη περίσσεια θερμότητας δύναται να αποθηκευτεί σε εφεδρικούς λέβητες για αργότερη χρήση ή να απελευθερωθεί στο περιβάλλον, ενώ σε περίπτωση ανεπαρκούς παραγωγής θερμότητας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα ανεξάρτητο σύστημα παραγωγής θερμότητας. Προφανώς στην περίπτωση αυτή τα πλεονεκτήματα της συμπαραγωγής εν μέρει υποβαθμίζονται, λόγω της μείωσης της απόδοσης.

Και στις δύο μεθόδους λειτουργίας ένα επιπλέον κριτήριο μπορεί να εφαρμοστεί, αυτό του ελάχιστου λειτουργικού κόστους. Όταν η λειτουργία του σταθμού



επικεντρώνεται στην ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής τότε μπορεί να επιλεγεί η λειτουργία κάλυψης του φορτίου βάσης και η ενδεχόμενη υπερπαραγωγή ή η ανεπαρκής παραγωγή μπορεί να αντιμετωπιστεί όπως συζητήθηκε νωρίτερα – είτε κάνοντας χρήση του ηλεκτρικού δικτύου και του δικτύου θέρμανσης ή χρησιμοποιώντας συστήματα παραγωγής θερμότητας ειδικά εγκατεστημένα για την κάλυψη αιχμών στη ζήτηση. Μια άλλη επιλογή είναι η χρησιμοποίηση του σταθμού συμπαραγωγής μόνο για κάλυψη των αιχμών του φορτίου.

Στις περισσότερες εφαρμογές συμπαραγωγής δίδεται προτεραιότητα στην κάλυψη του φορτίου θερμότητας και η ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής λαμβάνεται υπόψη κατά τη βελτιστοποίηση της παραγωγικής διαδικασίας του σταθμού.

### 3.3. Μέτρα επιδόσεων

Τα πλεονεκτήματα της συμπαραγωγής μπορούν να αποδειχθούν με τη χρήση ορισμένων κριτηρίων εκτίμησης των επιδόσεων του συστήματος παραγωγής, εκ των οποίων τα πιο σημαντικά παρουσιάζονται σε αυτήν την ενότητα. Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό, πάνω στο οποίο βασίζεται ο σχεδιασμός ενός συστήματος συμπαραγωγής, και το οποίο λαμβάνουν υπόψη τα παρακάτω κριτήρια απόδοσης, είναι ότι η θερμότητα αποτελεί βασικό προϊόν και όχι παραπροϊόν της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

#### Ηλεκτρικός βαθμός απόδοσης

Η απόδοση του συστήματος, όσον αφορά την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, εκφράζεται με το συντελεστή ηλεκτρικής απόδοσης που ορίζεται ως ο λόγος της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας προς τη θερμότητα του καταναλισκόμενου καυσίμου, δη:

$$\eta_{el} = \frac{W_E}{Q_F} ,$$

όπου:

$W_E$ : η παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια

$Q_F$ : η ενέργεια καύσιμης ύλης

### **Θερμικός βαθμός απόδοσης**

Στις μονάδες παραγωγής θερμότητας ή συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας, ο θερμικός βαθμός απόδοσης χρησιμοποιείται για την εκτίμηση της απόδοσης του συστήματος κατά την παραγωγή θερμότητας. Ορίζεται ως ο λόγος της ωφέλιμης θερμότητας προς την ενέργεια της καύσιμης ύλης:

$$\eta_{th} = \frac{Q_H}{Q_F},$$

όπου  $Q_H$  η ωφέλιμη θερμότητα

### **Συντελεστής χρησιμοποίησης ενέργειας**

Μέχρι τώρα, ως κύριο κριτήριο της επίδοσης ενός συστήματος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, χρησιμοποιούταν ο βαθμός απόδοσης ( $\eta_{eff}$ ) που δεν είναι άλλος από τον ηλεκτρικό βαθμό απόδοσης ( $\eta_{el}$ ) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Για να συμπεριληφθεί η παραγωγή ωφέλιμης θερμότητας ένα παρόμοιο μέτρο χρησιμοποιείται: ο συντελεστής χρησιμοποίησης ενέργειας (Energy Utilization Factor – EUF) ή συνολικός βαθμός απόδοσης, που ορίζεται ως εξής:

$$EUF = \frac{W_E + Q_H}{Q_F}$$

### **Συντελεστής χρησιμοποίησης ενέργειας με βάρη**

Μία άλλη προσέγγιση είναι ο συντελεστής χρησιμοποίησης ενέργειας με βάρη (Value Weighted Energy Utilization Factor – EUFVW) στον οποίο χρησιμοποιούνται ειδικά βάρη για να συνυπολογιστεί η σημασία που δίνεται σε κάθε προϊόν. Το προϊόν που θεωρείται ως σημαντικότερο πολλαπλασιάζεται με το μεγαλύτερο παράγοντα.

$$(EUF)_{VW} = \frac{f_E \cdot W_E + f_H \cdot Q_H}{Q_F},$$

όπου  $f_E + f_H = 1$

### **Λόγος θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια**

Ο λόγος θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια (Heat to power ratio – HPR) δηλώνει την αναλογία μεταξύ των δύο προϊόντων ενός σταθμού συμπαραγωγής. Ο HPR ορίζεται ως εξής:

$$HPR = \frac{Q_H}{W_E}$$

Σε πολλές περιπτώσεις χρησιμοποιείται και ο λόγος ηλεκτρικής ενέργειας προς θερμότητα (PHR) που είναι:

$$PHR = \frac{1}{HPR} = \frac{W_E}{Q_H}$$

### **Βαθμός εξοικονόμησης ενέργειας καυσίμου**

Η επίδοση ενός σταθμού συμπαραγωγής μπορεί να μετρηθεί και μέσω της σύγκρισης της κατανάλωσης καύσιμης ενέργειας για συγκεκριμένα επίπεδα παραγωγής, με την ενέργεια καυσίμου που απαιτείται για την επίτευξη των ίδιων επιπέδων παραγωγής σε ξεχωριστές συμβατικές εγκαταστάσεις. Ο βαθμός εξοικονόμησης ενέργειας καυσίμου (Fuel Energy Savings Ratio – FESR) ορίζεται ως:

$$FESR = \frac{(Q_F)_{CPP} + (Q_F)_{HB} - (Q_F)_{CHP}}{(Q_F)_{CPP} + (Q_F)_{HB}} = 1 - \frac{(Q_F)_{CHP}}{(Q_F)_{CPP} + (Q_F)_{HB}}$$

όπου:

$(Q_F)_{CHP}$ : απαιτούμενη ενέργεια καυσίμου σε σταθμό συμπαραγωγής

$(Q_F)_{CPP}$ : απαιτούμενη ενέργεια καυσίμου σε συμβατικό σταθμό ηλεκτροπαραγωγής

$(Q_F)_{HB}$ : απαιτούμενη ενέργεια καυσίμου σε συμβατικό σταθμό παραγωγής θερμότητας

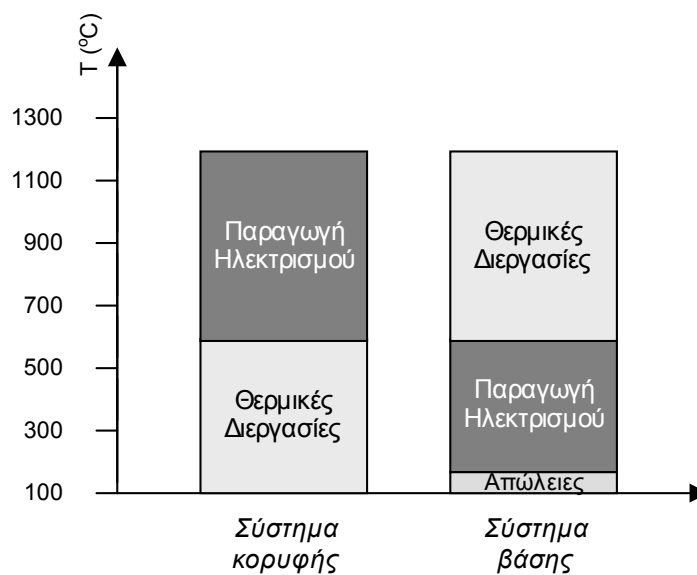
### **Ποιότητα παραγόμενης θερμότητας**

Ένας συμπληρωματικός δείκτης της επίδοσης ενός συστήματος που παράγει θερμότητα, είναι η ποιότητα της παραγόμενης θερμικής ενέργειας, που

καθορίζεται από τη θερμοκρασία και πίεση του μέσου που μεταφέρει την εν λόγω θερμότητα. Η ζητούμενη ποιότητα της θερμότητας καθορίζει, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, τον τύπο του συστήματος συμπαραγωγής που θα υλοποιηθεί.

### 3.4. Θερμοδυναμική ανάλυση σταθμών συμπαραγωγής

Η συμπαραγωγή μπορεί να εφαρμοστεί σε θερμικούς σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με διάφορους τρόπους. Ανάλογα με το σχέδιο λειτουργίας, σχήματα συνδυασμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας μπορούν να βασιστούν σε αμοστροβιλικά, αεριοστροβιλικά, συνδυασμένου κύκλου συστήματα καθώς και σε συστήματα παλινδρομικών μηχανών εσωτερικής καύσης. Τα τελευταία δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας μελέτης και γι' αυτό αναφορά γίνεται μόνο σε αυτό το κεφάλαιο για λόγους πληρότητας και σύγκρισης των επιδόσεων μεταξύ συστημάτων.



Σχήμα 3.1 – Συστήματα συμπαραγωγής

Τα συστήματα συμπαραγωγής, βάσει της διαδοχής στη χρήση της πρωτεύουσας ενέργειας, διακρίνονται σε συστήματα κορυφής και συστήματα βάσης. Στα πρώτα, ένα υψηλής θερμοκρασίας μέσο χρησιμοποιείται για να οδηγήσει μία μηχανή για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ η χαμηλής θερμοκρασίας θερμότητα χρησιμοποιείται για θερμικές διεργασίες στην βιομηχανία ή για τηλεθέρμανση. Στα συστήματα κύκλου βάσης, η υψηλής

Θερμοκρασίας θερμότητα παράγεται πρώτα για βιομηχανικές διεργασίες και τα καυσαέρια χρησιμοποιούνται ή άμεσα για να οδηγήσουν έναν αεριοστρόβιλο (αν η πίεση τους είναι επαρκής) ή έμμεσα για την παραγωγή ατμού σε λέβητα ανάκτησης θερμότητας για την κίνηση ατμοστροβίλου.

Σε πολλές περιπτώσεις, η επιλογή του τύπου του συστήματος συμπαραγωγής γίνεται βάσει της απαιτούμενης ποιότητας της θερμικής ενέργειας. Αν η εφαρμογή σχετίζεται με ζήτηση θερμότητας για βιομηχανικές διεργασίες που απαιτούν υψηλή θερμοκρασία (π.χ. της τάξης των 1300 °C) τότε επιλέγεται ο τύπος βάσης. Αν αντίθετα η ζητούμενη ποιότητα είναι χαμηλότερη (π.χ. 120 °C) τότε ένα σύστημα συμπαραγωγής τύπου κορυφής αποτελεί την καταλληλότερη επιλογή.

### **3.4.1 Συστήματα συμπαραγωγής κύκλου κορυφής**

Τα συστήματα συμπαραγωγής κύκλου κορυφής αποτελούν την πλειοψηφία των εγκατεστημένων σταθμών συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας. Η διαδεδομένη χρήση των συστημάτων αυτών οφείλεται στους υψηλούς βαθμούς απόδοσης που επιτυγχάνουν αλλά και στο γεγονός ότι μέχρι σήμερα μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις οι απαιτήσεις για παραγωγή θερμότητας υψηλής ποιότητας αποτέλεσαν βάση για την επένδυση σε έναν σταθμό συμπαραγωγής κύκλου βάσης.

#### **3.4.1.1 Συμπαραγωγή σε ατμοστροβιλικούς σταθμούς**

Οι ατμοστροβιλικές μονάδες συμπαραγωγής αποτελούν το μεγαλύτερο τμήμα του εγκατεστημένου δυναμικού για συνδυασμένη παραγωγή θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας. Το ατμοστροβιλικό σύστημα συμπαραγωγής λειτουργεί βάσει του κύκλου Rankine, είτε στην κλασική του μορφή ή στις βελτιωμένες εκδόσεις του για μεγαλύτερη απόδοση (αναθέρμανση, αναγέννηση).

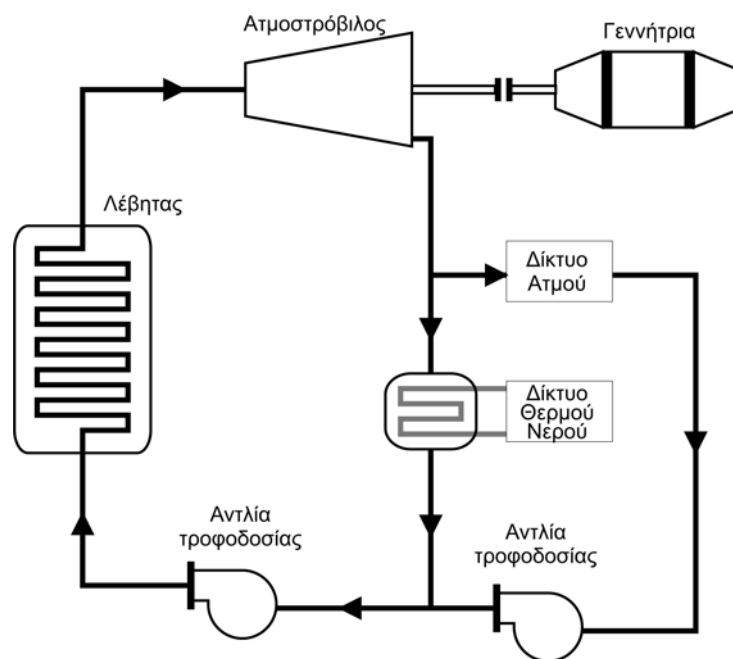
Οι ατμοστροβιλικοί σταθμοί συμπαραγωγής έχουν υψηλή αξιοπιστία (μέχρι 95%), υψηλή διαθεσιμότητα (μεταξύ 90 και 95%) και μεγάλη διάρκεια ζωής (25 - 35 χρόνια). Ένα μειονέκτημα είναι η διάρκεια εγκατάστασης, που μπορεί να φτάσει τα τρία χρόνια για μεγάλα συστήματα. Επιπροσθέτως, οι εφαρμογές τους είναι κυρίως προσανατολισμένες στην κάλυψη των αναγκών σε θερμότητα, αφού η

εγκατεστημένη ισχύς τους είναι σαφώς μικρότερη της δυναμικότητας για παραγωγή θερμότητας.

Τα σχήματα συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο διαιρούνται σε δύο τύπους, οι οποίοι παρουσιάζονται στη συνέχεια.

### Σύστημα με ατμοστρόβιλο αντίθλιψης

Η απλούστερη διάταξη στους ατμοστροβιλικούς σταθμούς συμπαραγωγής είναι το σύστημα με στρόβιλο αντίθλιψης. Ο ατμός που χρησιμοποιείται για τηλεθέρμανση ή για βιομηχανικές και εμπορικές διεργασίες λαμβάνεται από την έξοδο του ατμοστρόβιλου, υπό πίεση που προσδιορίζεται από το φορτίο θέρμανσης, που αναφέρεται και ως πίεση αντίθλιψης. Η πίεση αυτή είναι συνήθως ίση ή υψηλότερη της ατμοσφαιρικής.



Σχήμα 3.2 – Σύστημα συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο αντίθλιψης

Εν συντομία, η διαδικασία λειτουργίας είναι η εξής: ο ατμός που παράγεται στο λέβητα υπό σταθερή πίεση, εκτονώνεται αδιαβατικά στο στρόβιλο παράγοντας μηχανικό έργο. Κατά την έξοδο του από το στρόβιλο, ο ατμός οδηγείται στο σύστημα παροχής θερμότητας όπου αποβάλλει θερμότητα και συμπυκνώνεται – μία μεταβολή που θεωρείται ισοβαρής. Στη συνέχεια, το συμπύκνωμα τροφοδοτείται στην αντλία όπου συμπιέζεται στα επίπεδα πίεσης του λέβητα για να συμπληρώσει τον κύκλο. Σε πολλές περιπτώσεις, μέρος του ατμού που

προορίζεται για θερμικές διεργασίες καταναλώνεται, οπότε εφαρμόζεται συμπλήρωση του επεξεργασμένου νερού, που χρησιμοποιείται ως εργαζόμενο μέσο. Αν η ωφέλιμη θερμότητα μεταφέρεται στον καταναλωτή υπό μορφή θερμού νερού τότε χρησιμοποιείται εναλλάκτης θερμότητας, όμοιος με αυτόν που χρησιμοποιείται στην κλειστού τύπου αναγέννηση (βλέπε παράγραφο 2.4.1.4.).

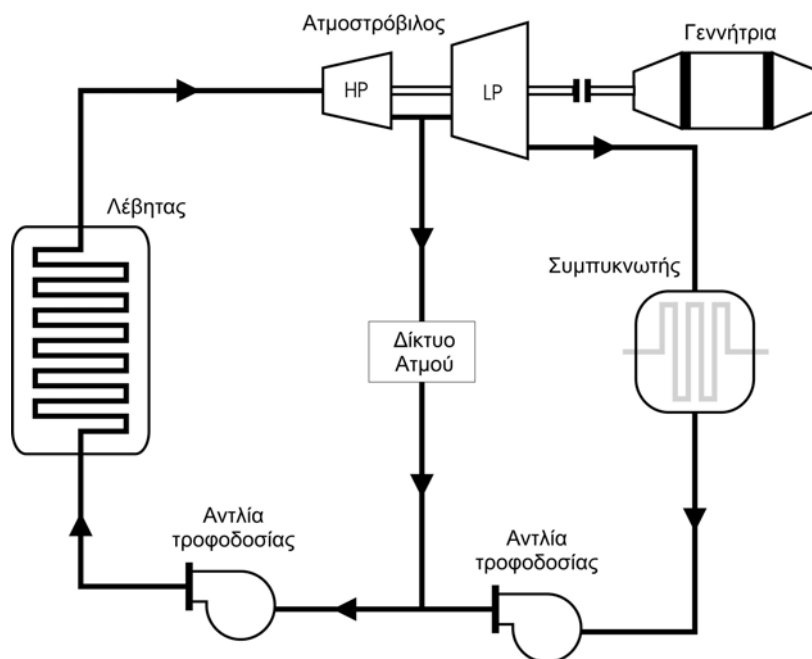
Είναι προφανές ότι, αφού η ροή του ατμού καθορίζεται από το θερμικό φορτίο, η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας που σχετίζεται με τον ατμοστρόβιλο είναι εξαρτημένη συνεχώς από τη ζήτηση θερμότητας. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο τα συστήματα ατμοστροβίλου αντίθλιψης εφαρμόζονται κυρίως σε περιπτώσεις σχετικά σταθερής ζήτησης. Στο ενδεχόμενο που το θερμικό φορτίο παρουσιάζει διακυμάνσεις, η χρήση του συστήματος ατμοστροβίλου αντίθλιψης υποδηλώνει λειτουργία προσανατολισμένη στην κάλυψη της ζήτησης σε θερμότητα – η παραγωγή ταυτίζεται με το θερμικό φορτίο και για την ενδεχόμενη ανεπάρκεια/περίσσεια ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιείται το δίκτυο ηλεκτρικής ενέργειας.

Το πλεονέκτημα του συστήματος ατμοστροβίλου αντίθλιψης είναι η υψηλή του απόδοση. Εφόσον δεν αποβάλλεται θερμότητα στο περιβάλλον, ο βαθμός χρησιμοποίησης ενέργειας εμφανίζεται πολύ υψηλός, φθάνοντας την τιμή του 85% στην περίπτωση που γίνεται πλήρης εκμετάλλευση της θερμότητας του ατμού από τον καταναλωτή. Επιπλέον, το κόστος εγκατάστασης του συγκεκριμένου συστήματος είναι χαμηλότερο από αυτό του ατμοστροβίλου απομάστευσης (βλ. παρακάτω), λόγω του μειωμένου αριθμού βοηθητικών εξαρτημάτων.

### **Σύστημα με ατμοστρόβιλο απομάστευσης**

Ένα εναλλακτικό σχήμα συμπαραγωγής σε ατμοστροβιλικούς σταθμούς είναι το σύστημα απομάστευσης ατμού. Σε αυτή τη διάταξη, ατμός εξάγεται από μία ενδιάμεση βαθμίδα του στροβίλου, με σκοπό τη χρήση του για παροχή θερμότητας για τηλεθέρμανση ή βιομηχανική χρήση. Η πίεση του εξαγόμενου ατμού εξαρτάται από τον βαθμό εκτόνωσης του ατμού εντός του στροβίλου, πριν την απομάστευση.

Η διαδικασία εν συντομία έχει ως εξής: κατόπιν της εκτόνωσης στην υψηλής πίεσης βαθμίδα του στροβίλου, ένα κλάσμα του ατμού τροφοδοτείται στο σύστημα παροχής θερμότητας (εναλλάκτης), ενώ ο υπόλοιπος ατμός οδηγείται στη βαθμίδα χαμηλής πίεσης για εκτόνωση μέχρι την πίεση του συμπυκνωτή. Μετά τη συμπύκνωση, που λαμβάνει χώρα τόσο στον συμπυκνωτή όσο και στο σύστημα θέρμανσης, το νερό συμπιέζεται στην πίεση του λέβητα με τη χρήση αντλιών. Και εδώ, στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιείται εναλλάκτης πραγματοποιείται συμπλήρωση του καταναλισκόμενου στο σύστημα παροχής θέρμανσης νερού.



**Σχήμα 3.3** – Σύστημα συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο απομάστευσης

Το κύριο πλεονέκτημα αυτού του σχήματος συμπαραγωγής είναι η ευελιξία που παρέχεται για τη ρύθμιση της παραγωγής σύμφωνα με τις απαιτήσεις του φορτίου. Η ροή του απομαστευμένου ατμού μπορεί να ρυθμιστεί με τη χρήση βαλβίδων και συνεπώς η ζήτηση σε θερμότητα μπορεί να καλυφθεί με μικρότερη παρεμβολή στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα δεύτερο πλεονέκτημα σε σχέση με το αντίστοιχο σχήμα του ατμοστροβίλου αντίθλιψης, είναι η αυξημένη ηλεκτρική απόδοση.

Εντούτοις, συγκρίνοντας με το σχήμα συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο αντίθλιψης, η συνολική απόδοση του συστήματος ατμοστροβίλου

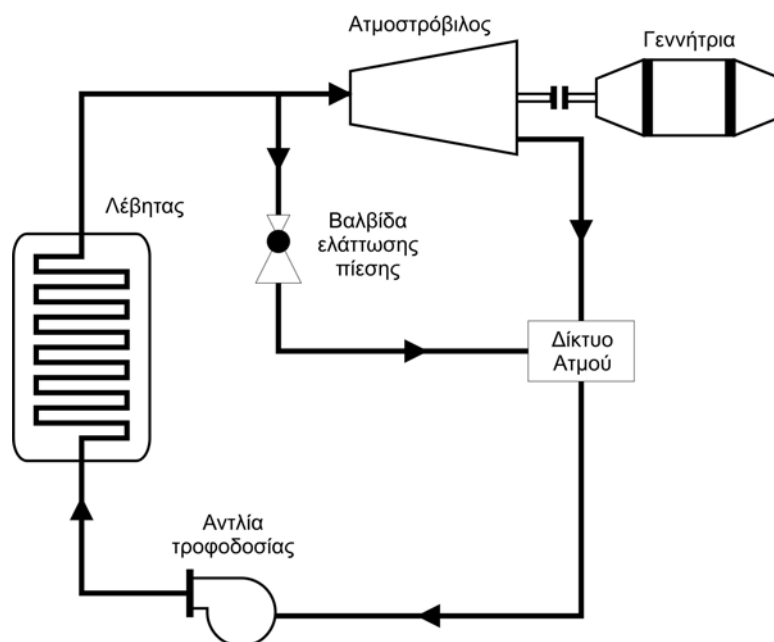


απομάστευση είναι χαμηλότερη ως συνέπεια της αποβολής θερμότητας στο συμπυκνωτή.

### Σύστημα με βαλβίδες ελάττωσης

Ένα στοιχείο που εμφανίζεται στις περισσότερες εφαρμογές της βασισμένης σε ατμό συμπαραγωγής θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας, είναι οι βαλβίδες ελάττωσης πίεσης. Μέσω αυτών των συσκευών παρέχεται η δυνατότητα εξαγωγής ατμού από διαφορετικά σημεία του συστήματος συμπαραγωγής, όταν ο ατμοστρόβιλος δεν είναι διαθέσιμος για να εξασφαλίσει την πλήρη κάλυψη του θερμικού φορτίου.

Ένας δεύτερος λόγος για την εγκατάσταση βαλβίδων ελάττωσης σε ένα σταθμό συμπαραγωγής είναι η ελαχιστοποίηση της παρεμβολής της παραγωγής θερμότητας στη διαδικασία παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Επίσης, είναι δυνατή η ταυτόχρονη λειτουργία του ατμοστροβίλου και των βαλβίδων ελάττωσης, περίπτωση κατά την οποία πρέπει να γίνεται διάκριση μεταξύ του ατμού που διέρχεται του στροβίλου και του ατμού που εξάγεται από τις βαλβίδες ελάττωσης πίεσης. Η εγκατάσταση βαλβίδων ελάττωσης είναι συνήθης πρακτική κατά τον σχεδιασμό ενός σταθμού συμπαραγωγής με ατμό.



Σχήμα 3.4 – Σύστημα με βαλβίδα ελάττωσης πίεσης

### **3.4.1.2 Συμπαραγωγή σε αεριοστροβιλικούς σταθμούς**

Τα πλεονεκτήματα των αεριοστροβίλων έχουν οδηγήσει στην ευρεία εφαρμογή τους στα νεότερα συστήματα συμπαραγωγής μέσης έως υψηλής ισχύος. Η λειτουργία τους βασίζεται στον κύκλο Brayton, ο οποίος μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε στην αυθεντική του μορφή ή με τις τροποποιήσεις που αποσκοπούν στη βελτίωση των επιδόσεων του συστήματος παραγωγής, όπως αυτές αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Η ηλεκτρική τους ισχύς κυμαίνεται μεταξύ λίγων εκατοντάδων kW μέχρι ορισμένων δεκάδων MW. Η αξιοπιστία και διαθεσιμότητα δεν διαφέρει από αυτή των ατμοστροβιλικών μονάδων συμπαραγωγής, ενώ έχουν τα πρόσθετα πλεονεκτήματα της μικρής διάρκειας εγκατάστασης και του μικρού κόστους επένδυσης.

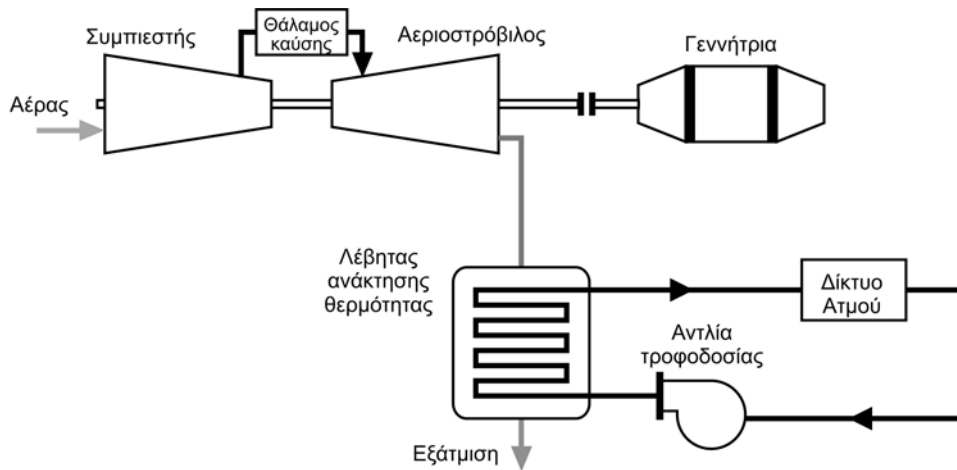
Στη συνέχεια παρουσιάζονται δύο ευρέως εφαρμοζόμενα σχήματα συμπαραγωγής με αεριοστρόβιλο.

#### **Σύστημα αεριοστρόβιλου με ανάκτηση θερμότητας**

Στη διάταξη αυτή, τα καυσαέρια που εξέρχονται από τον αεριοστρόβιλο χρησιμοποιούνται για την παραγωγή θερμότητας. Η θερμική ενέργεια των καυσαερίων λαμβάνεται μέσω του ατμοπαραγωγού ανάκτησης θερμότητας (heat recovery steam generator - HRSG), ένα σύστημα ατμοποίησης που χρησιμοποιείται για αυτόν ακριβώς το σκοπό. Ο απλούστερος τύπος λέβητα ανάκτησης θερμότητας είναι ένας εναλλάκτης θερμότητας, μέσω του οποίου τα καυσαέρια διέρχονται και μεταφέρουν θερμότητα στο νερό τροφοδοσίας για τη δημιουργία ατμού. Άλλοι τύποι λέβητα ανάκτησης θερμότητας διαθέτουν ικανότητα συμπληρωματικής ανάφλεξης έτσι ώστε να καλυφθεί τυχόν αυξημένη ζήτηση σε θερμότητα.

Όπως υποδεικνύεται στο σχήμα 3.5, το σύστημα συμπαραγωγής με αεριοστρόβιλο είναι ανοικτού τύπου. Τα υψηλής θερμότητας και πίεσης αέρια εισέρχονται στον αεριοστρόβιλο και κατά την εκτόνωση τους παράγουν μηχανικό έργο, ικανό να οδηγήσει το συμπιεστή και να παραχθεί η απαιτούμενη ηλεκτρική ενέργεια. Τα εξερχόμενα από το στρόβιλο καυσαέρια, ιδιαίτερα μεγάλης θερμοκρασίας, οδηγούνται στον ατμοπαραγωγό ανάκτησης

θερμότητας, όπου μεταβιβάζουν τη θερμότητα τους στο περιεχόμενο στο λέβητα νερό, και τελικά απελευθερώνονται στην ατμόσφαιρα.



**Σχήμα 3.5** – Αεριοστροβιλικό σύστημα συμπαραγωγής

Τα εκλυόμενα καυσαέρια εμπεριέχουν σημαντικά ποσά θερμότητας, μη διαθέσιμης όμως για θέρμανση νερού. Ο περιορισμός στην χρήση της θερμότητας αυτής σχετίζεται περισσότερο με την ελάχιστη διαφορά θερμοκρασίας που απαιτείται για τη μεταφορά θερμότητας, από τα καυσαέρια στο υπό θέρμανση νερό. Εντούτοις, με τη χρήση ενός εναλλάκτη θερμότητας η – διαφορετικά χαμένη θερμότητα των καυσαερίων – μπορεί να εκμεταλλευθεί για τη θέρμανση του νερού τροφοδοσίας προτού αυτό εισέλθει στον ατμοπαραγωγό (αναγέννηση), αυξάνοντας με αυτόν τον τρόπο την απόδοση του συστήματος. Παρόλα αυτά, η ψύξη των καυσαερίων σε χαμηλές θερμοκρασίες αποφεύγεται για λόγους αποφυγής διάβρωσης (υπό χαμηλές θερμοκρασίες λαμβάνει χώρα η συμπύκνωση οξέων) και σωστής διασποράς στην ατμόσφαιρα.

### **Αεριοστροβιλικό σύστημα συμπαραγωγής με έγχυση ατμού**

Μία διασκευή του αεριοστροβιλικού συστήματος συμπαραγωγής με λέβητα ανάκτησης θερμότητας είναι το σύστημα με έγχυση ατμού. Στο συγκεκριμένο σχήμα συμπαραγωγής, προσφέρεται η δυνατότητα ψεκασμού στον αεριοστρόβιλο με ατμό από το λέβητα ανάκτησης θερμότητας, έτσι ώστε να επιτευχθούν βελτιωμένες επιδόσεις και να υπάρχει δυνατότητα καλύτερου ελέγχου της παραγωγής. Το σύστημα αποτελείται από έναν αεριοστρόβιλο

ικανό να δεχθεί έγχυση μεγάλων ποσοτήτων υπερθερμασμένου ατμού και ένα σύστημα ατμοποίησης με λέβητα ανάκτησης θερμότητας, που μπορεί να παράγει κορεσμένο και υπερθερμασμένο ατμό.

Η έγχυση υπερθερμασμένου ατμού στο θάλαμο εκτόνωσης του στροβίλου προκαλεί αύξηση της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας (μέχρι και 15%), λόγω της αυξημένης ογκομετρικής ροής μέσω του στροβίλου. Ο λόγος του παραγόμενου υπερθερμασμένου ατμού προς τον κορεσμένο ατμό μπορεί να ρυθμιστεί με τη χρήση βαλβίδων ελέγχου μεταξύ του σταδίου υπερθέρμανσης του ατμοπαραγωγού και της εξόδου προς το σύστημα παροχής θερμότητας. Η λειτουργία αυτή παρέχει ευχέρεια στη ρύθμιση του λόγου θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια και επομένως δίνει τη δυνατότητα για ευελιξία στην κάλυψη του φορτίου, σε καταστάσεις που αυτό παρουσιάζει διακυμάνσεις. Επιπλέον, η τεχνική της έγχυσης ατμού συμβάλλει στη μείωση των παραγόμενων οξειδίων του αζώτου, λόγω της μείωσης της θερμοκρασίας της φλόγας. Ωστόσο, η ποσότητα του ψεκαζόμενου ατμού δεν μπορεί να ξεπεράσει κάποιο όριο γιατί είναι πιθανό να προκαλέσει αστάθεια της φλόγας και κατά συνέπεια ατελείς καύσεις. Ένα μειονέκτημα του συγκεκριμένου συστήματος είναι η πρόσθετη επεξεργασία του νερού τροφοδοσίας του συστήματος παραγωγής, αφού ο ψεκασμός με χαμηλής ποιότητας ατμό εντός του στροβίλου μπορεί να μειώσει τη διάρκεια ζωής του. Γι' αυτό το λόγο, η τεχνική αυτή εφαρμόζεται συνήθως σε μεγαλύτερα συστήματα.

### **3.4.1.3 Συστήματα συμπαραγωγής συνδυασμένου κύκλου**

Η συμπαραγωγή μπορεί να εφαρμοστεί και σε συστήματα συνδυασμένου κύκλου. Το πιο διαδεδομένο σύστημα συνδυασμένου κύκλου για τη συμπαραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας είναι το σύστημα κύκλου Brayton – Rankine, ο συνδυασμός ενός υψηλής θερμοκρασίας ανώτερου κύκλου Brayton και ενός χαμηλής θερμοκρασίας κατώτερου κύκλου Rankine. Η εφαρμογή του συγκεκριμένου σχήματος συμπαραγωγής αφορά συνήθως μια παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας υψηλότερης των 3 MW.

Τα συστήματα συμπαραγωγής συνδυασμένου κύκλου παρέχουν ένα σχετικά χαμηλό λόγο θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια (HPR) γεγονός που τα κατατάσσει στα συστήματα που προσανατολίζονται στην κάλυψη του

ηλεκτρικού φορτίου. Η αξιοπιστία των σταθμών συμπαραγωγής αυτού του τύπου κυμαίνεται μεταξύ 80 και 85%, η διαθεσιμότητα τους είναι αρκετά υψηλή (77 - 85%), ενώ η διάρκεια ζωής τους δεν ξεπερνά τα 25 χρόνια.

### **Σύστημα συμπαραγωγής συνδυασμένου κύκλου Brayton - Rankine**

Στη διάταξη αυτή, η θερμότητα που απελευθερώνεται στον ανώτερο κύκλο (Brayton), χρησιμοποιείται για την παραγωγή ατμού που χρησιμοποιείται στον κατώτερο κύκλο (Rankine). Ο σχεδιασμός του κάθε υποσυστήματος μπορεί να βασιστεί στα όσα έχουν αναφερθεί έως τώρα για τα σχήματα συμπαραγωγής. Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η υλοποίηση ενός συστήματος συμπαραγωγής συνδυασμένου κύκλου, στο οποίο χρησιμοποιείται ατμοστρόβιλος αντίθλιψης. Ο κατώτερος κύκλος ωστόσο, μπορεί να υλοποιηθεί και με ατμοστρόβιλο απομάστευσης.

### **Σχήμα 3.6 – Σύστημα συμπαραγωγής συνδυασμένου κύκλου**

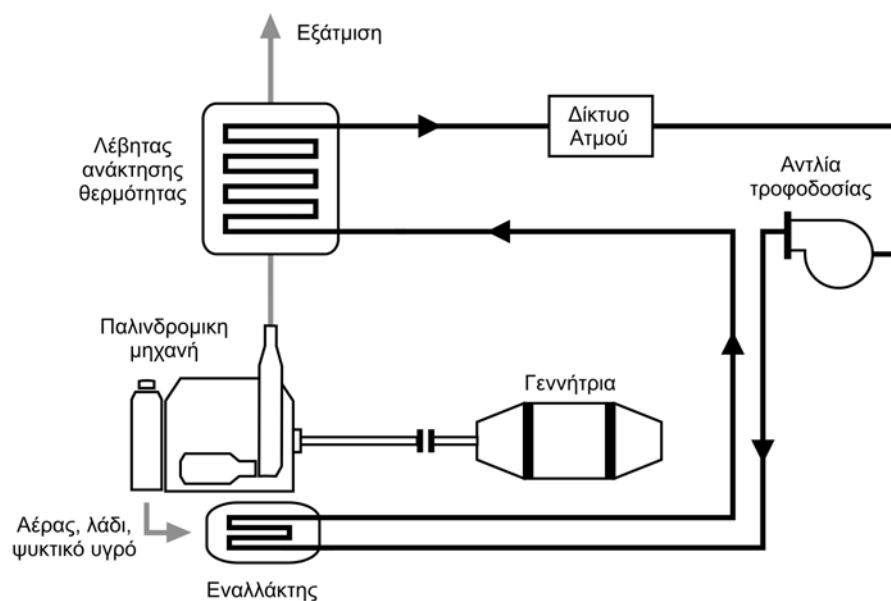
Η διαδικασία λειτουργίας είναι παρόμοια και στις δύο διατάξεις (στρόβιλος αντίθλιψης - στρόβιλος απομάστευσης): τα υψηλής θερμότητας καυσαέρια που εξέρχονται του αεριοστροβίλου προωθούνται στον ατμοπαραγωγό ανάκτησης θερμότητας για την παραγωγή ατμού για τον ατμοστρόβιλο. Η θερμότητα που προορίζεται για βιομηχανικές διεργασίες ή τηλεθέρμανση λαμβάνεται είτε από

την έξοδο του ατμοστροβίλου (αντίθλιψης) ή από μία ενδιάμεση βαθμίδα του ατμοστροβίλου (απομάστευσης).

### 3.4.1.4 Συστήματα συμπαραγωγής με παλινδρομική μηχανή

Τα συστήματα συμπαραγωγής που βασίζονται στις παλινδρομικές μηχανές χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές που ζητείται υψηλή ηλεκτρική απόδοση και υψηλός λόγος ηλεκτρικής ενέργειας προς θερμότητα, ενώ οι απαιτήσεις για την ποιότητα της παραγόμενης θερμότητας δεν είναι ιδιαίτερα μεγάλες.

Η παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια των συστημάτων συμπαραγωγής με μηχανές εσωτερικής καύσης κυμαίνεται από 50 kW έως 10 MW για μηχανές φυσικού αερίου και 50 kW έως 50 MW για μηχανές diesel. Είναι συστήματα με υψηλή διαθεσιμότητα (80-90%), χαμηλό κόστος αρχικής επένδυσης αλλά σχετικά υψηλό κόστος συντήρησης.



Σχήμα 3.7 – Σύστημα συμπαραγωγής παλινδρομικής μηχανής

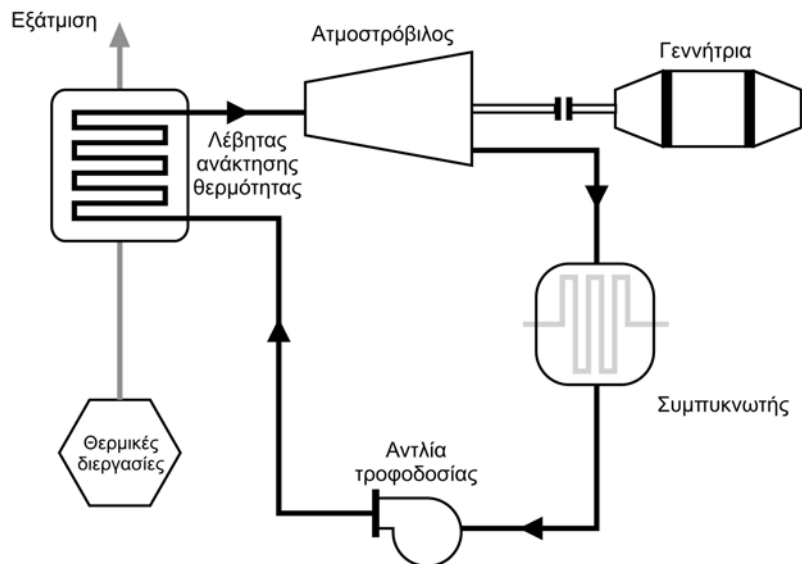
Όπως φαίνεται και στο σχήμα 3.7, η παραγωγή θερμότητας βασίζεται στην εκμετάλλευση της θερμότητας των καυσαερίων που εκλύονται κατά την εσωτερική καύση στη μηχανή, με χρήση ενός συστήματος ατμοποίησης με ανάκτηση θερμότητας. Η θερμότητα του νερού ψύξης, του λαδιού και του αέρα μπορεί να εκμεταλλευτεί επίσης για προθέρμανση του υγρού μέσου που

χρησιμοποιείται στο σύστημα παραγωγής ατμού. Με τον τρόπο αυτό ο συνολικός βαθμός απόδοσης βελτιώνεται σημαντικά. Εντούτοις, όπως αναφέρθηκε νωρίτερα, επειδή η ποιότητα της παρεχόμενης θερμότητας στο σύστημα είναι χαμηλή (σχετικά χαμηλή θερμοκρασία και πίεση), σε περιπτώσεις που οι απαιτήσεις για την παραγόμενη θερμότητα είναι υψηλές εφαρμόζεται συμπληρωματική καύση στο λέβητα ανάκτησης θερμότητας, δεδομένης μιας συγκέντρωσης οξυγόνου στα καυσαέρια της τάξης του 15%.

### **3.4.2 Συστήματα συμπαραγωγής κύκλου βάσης**

Στα συστήματα συμπαραγωγής τύπου βάσης, η θερμότητα χαμηλής θερμοκρασίας που είναι διαθέσιμη στα καυσαέρια που παράγονται από βιομηχανικές θερμικές διεργασίες, χρησιμοποιείται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Σε εφαρμογές αυτού του τύπου, λόγω της χαμηλής θερμοκρασίας (μεταξύ 80 και 300°C) της παρεχόμενης θερμότητας για ηλεκτροπαραγωγή, που είναι σχετικά χαμηλή για αμοστροβιλικά συστήματα, χρησιμοποιείται διαφορετικό μέσο για τη μεταφορά θερμότητας ρντός του συστήματος από το απιονισμένο νερό. Στις περισσότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούνται οργανικά υγρά (τολουένιο, ισοπεντάνιο, ισοοκτάνιο ή αμμωνία) αναμιγμένα με νερό, λόγω της χαμηλής θερμοκρασίας εξάτμισης που παρουσιάζουν. Γι' αυτόν το λόγο, η κυκλική διαδικασία παραγωγής αυτού του τύπου αναφέρεται και ως οργανικός κύκλος Rankine (organic Rankine cycle - ORC). Ο ίδιος κύκλος εφαρμόζεται και σε συστήματα που χρησιμοποιούν βιομάζα ως καύσιμη ύλη, στα οποία οι θερμοκρασίες που αναπτύσσονται κατά την καύση είναι σχετικά χαμηλές.

Η διαδικασία λειτουργίας σε αυτούς τους σταθμούς συμπαραγωγής είναι εν συντομία η εξής: η θερμότητα των αερίων που παράγονται από τη θερμική διεργασία ανακτάται σε ένα σύστημα αμμοποίησης, θερμαίνοντας το εργαζόμενο μέσο του αμοστροβιλικού συστήματος. Ο παραγόμενος ατμός εκτονώνεται στο στρόβιλο παραδίδοντας μηχανικό έργο για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Εν συνεχεία, η συμπύκνωση του ατμού λαμβάνει χώρα στο συμπυκνωτή και το υγρό συμπιέζεται, κλείνοντας έτσι τον κύκλο.



Σχήμα 3.8 – Σύστημα οργανικού κύκλου Rankine

Η ηλεκτρική απόδοση αυτών των μονάδων συμπαραγωγής είναι αρκετά χαμηλή (10-30%) αλλά σημαντικό είναι το γεγονός ότι η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας πραγματοποιείται χωρίς έξοδα για καύσιμες ύλες.

### 3.5. Επιδόσεις σταθμών συνδυασμένης παραγωγής

Στην παρούσα ενότητα γίνεται μια ανασκόπηση των εφαρμογών, επιδόσεων, πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων, για όλα τα προαναφερθέντα σχήματα συμπαραγωγής. Οι χαρακτηριστικές επιδόσεις για κάθε σχήμα συμπαραγωγής καταγράφονται στον πίνακα 3.1. Μια σύγκριση των πλεονεκτημάτων – μειονεκτημάτων μεταξύ ατμοστροβικών και αεριοστροβικών συστημάτων παρουσιάζεται στον πίνακα 3.2.

#### **Απόδοση και λόγος θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια στους ατμοστροβικούς σταθμούς συμπαραγωγής**

Ο συνολικός βαθμός απόδοσης είναι αρκετά υψηλός (70-85%) και μειώνεται ελαφρά κατά τη λειτουργία με μερικό φορτίο. Εντούτοις, η ηλεκτρική απόδοση είναι χαμηλή (7-20%), γεγονός που συντελεί στην εμφάνιση υψηλών τιμών του λόγου θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια (3:1 έως 10:1). Γενικά, όσο υψηλότερη η θερμοκρασία του ατμού που απαιτείται για βιομηχανικές διεργασίες, τόσο χαμηλότερη η ηλεκτρική απόδοση. Η ηλεκτρική απόδοση



μπορεί να βελτιωθεί κατά ένα μεγάλο ποσοστό, με την αύξηση της πίεσης και της θερμοκρασίας του ατμού στην είσοδο του ατμοστροβίλου.

Στα συστήματα ατμοστροβίλου αντίθλιψης, όταν η θερμική ενέργεια του ατμού χρησιμοποιείται εξολοκλήρου και το συμπύκνωμα επιστρέφει στο σύστημα παραγωγής χωρίς επιπρόσθετη ψύξη και αποβολή θερμότητας στο περιβάλλον, η χρησιμοποίηση της ενέργειας μπορεί να φτάσει το 85%. Επειδή η παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια είναι ανάλογη της ροής του ατμού προς τις θερμικές διεργασίες, ο λόγος θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια παραμένει σχεδόν σταθερός κατά τις διακυμάνσεις του φορτίου. Στις μονάδες συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο απομάστευσης αντίστοιχα η έκλυση θερμότητας στην ατμόσφαιρα μέσω του συμπυκνωτή έχει ως αποτέλεσμα χαμηλότερο βαθμό χρησιμοποίησης της πρωτεύουσας ενέργειας. Το κύριο πλεονέκτημα αυτών των συστημάτων είναι η παρεχόμενη δυνατότητα ανεξάρτητης ρύθμισης της παραγωγής θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας, εντός κάποιων ορίων, με συνέπεια τη δυνατότητα μεταβολής του λόγου θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια.

**Πίνακας 3.1 – Επιδόσεις συστημάτων συμπαραγωγής**

Τύπος συστήματος συμπαραγωγής	Ηλ. Ισχύς	HPR	$\eta_{el}$	ΕUF
Ατμοστρόβιλος αντίθλιψης	0.5 – 500 MW	3:1 – 10:1	7 – 20%	70 – 85%
Ατμοστρόβιλος απομάστευσης	1 – 100 MW	3:1 – 8:1	10 – 20%	70 – 80%
Αεριοστρόβιλος με ανάκτηση θερμότητας	0.25 – 50 MW	1.5:1 – 5:1	25 – 42%	65 – 92%
Αεριοστρόβιλος με έγχυση ατμού	0.5 – 50 MW	1.5:1 – 5:1	30 – 45%	65 – 90%
Συνδυασμένος κύκλος	3 – 300 MW	1:1 – 3:1	35 – 55%	73 – 90%
Οργανικός κύκλος Rankine	~ 0.5 MW	–	5 – 20%	70 – 85%

### **Απόδοση και λόγος θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια στους αεριοστροβιλικούς σταθμούς συμπαραγωγής**

Η ονομαστική ηλεκτρική απόδοση των μικρής έως μεσαίας ισχύος αεριοστροβιλικών συστημάτων συνήθως λαμβάνει τιμές μεταξύ 25 και 35%. Πρόσφατα κατασκευασμένα μεγαλύτερα συστήματα εμφανίζουν ηλεκτρική απόδοση της τάξης του 40 με 42%, που επιτυγχάνεται με την παραγωγή καυσαερίων εξαιρετικά υψηλής θερμοκρασίας. Υψηλότεροι βαθμοί ηλεκτρικής απόδοσης μπορούν να επιτευχθούν με την εφαρμογή της τεχνικής της έγχυσης ατμού. Ο συντελεστής χρησιμοποίησης ενέργειας κυμαίνεται μεταξύ 60 και 80%. Ο λόγος θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια διαβαθμίζεται μεταξύ 1,5:1 και 5:1.

### **Απόδοση συστημάτων κύκλου βάσης (ORC)**

Η ηλεκτρική απόδοση των συστημάτων αυτών λαμβάνει τιμές μεταξύ 5-15%. Η τιμή αυτή είναι φυσικά χαμηλή, αλλά το σημαντικό είναι ότι η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας βασίζεται στην χρησιμοποίηση θερμότητας, που διαφορετικά θα εκλυόταν στο περιβάλλον.

**Πίνακας 3.2 – Συγκριτικός πίνακας μεταξύ ατμοστροβιλικών και αεριοστροβιλικών συστημάτων συμπαραγωγής**

	<b>Πλεονεκτήματα</b>	<b>Μειονεκτήματα</b>
<b>Ατμοστροβιλικά συστήματα συμπαραγωγής</b>	<p><b>Υψηλός</b> βαθμός χρησιμοποίησης ενέργειας</p> <p><b>Υψηλή</b> αξιοπιστία που επιτρέπει την λειτουργία μεγάλης διάρκειας χωρίς ιδιαίτερη παρακολούθηση</p> <p><b>Χαμηλό</b> κόστος λειτουργίας</p> <p><b>Δυνατότητα</b> χρησιμοποίησης διαφόρων τύπων καυσίμου</p> <p><b>Δυνατότητα</b> εύκολης ρύθμισης του λόγου θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια</p> <p><b>Μεγάλο</b> φάσμα μεγεθών</p> <p><b>Μεγάλος</b> χρόνος ζωής</p>	<p><b>Υψηλές</b> τιμές του λόγου θερμότητας προς ηλεκτρική ενέργεια</p> <p><b>Υψηλό</b> κόστος εκκίνησης</p> <p><b>Αργή</b> εκκίνηση</p> <p><b>Παρατεταμένη</b> διάρκεια κατασκευής σταθμού</p> <p><b>Υψηλό</b> κόστος επένδυσης ανά kW</p>
<b>Αεριοστροβιλικά συστήματα συμπαραγωγής</b>	<p><b>Υψηλή</b> αξιοπιστία που επιτρέπει την λειτουργία μεγάλης διάρκειας χωρίς ιδιαίτερη παρακολούθηση</p> <p><b>Υψηλή</b> ποιότητα θερμότητας</p> <p><b>Σταθερή</b> και υψηλή ταχύτητα περιστροφής που επιτρέπει τον ακριβή έλεγχο συχνότητας της ηλεκτρικής εξόδου</p> <p><b>Υψηλές</b> τιμές του λόγου ηλεκτρικής ενέργειας προς θερμότητα</p> <p><b>Δεν</b> απαιτείται νερό ψύξης</p> <p><b>Γρήγορη</b> εκκίνηση</p> <p><b>Χαμηλό</b> κόστος εκκίνησης</p> <p><b>Σχετικά</b> χαμηλό κόστος επένδυσης ανά kW</p> <p><b>Ευρύ</b> φάσμα καυσίμων υλών (diesel, LPG, naρhtha, παράγωγα αποβλήτων)</p> <p><b>Δυνατότητα</b> χρήσης πολλαπλών καυσίμων</p> <p><b>Χαμηλή</b> εκπομπή ρύπων</p>	<p><b>Υψηλό</b> κόστος λειτουργίας</p> <p><b>Περιορισμένο</b> φάσμα μεγεθών</p> <p><b>Απαιτηση</b> παροχής υψηλής πίεσης αερίου στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ως καύσιμη ύλη</p> <p><b>Υψηλά</b> επίπεδα θορύβου υψηλής συχνότητας</p> <p><b>Χαμηλή</b> απόδοση κατά τη λειτουργία με μικρό φορτίο</p> <p><b>Μείωση</b> της παραγωγής κατά την άνοδο της θερμοκρασίας περιβάλλοντος λόγω θερμικών περιορισμών του υλικού</p> <p><b>Ενδεχόμενη</b> μεγάλη χρονική διάρκεια συντήρησης/επισκευής</p>

## Κεφάλαιο 4

### Συνθετικά στοιχεία συστημάτων συμπαραγωγής

#### 4.1 Γενικά

Η μελέτη των εξισώσεων που διέπουν τη λειτουργία των συνθετικών στοιχείων των σταθμών συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας αποτελεί το πρώτο βασικό βήμα για την ανάπτυξη των ζητούμενων μοντέλων βελτιστοποίησης. Λόγω της μεγάλης σημασίας που έχει η διαδικασία εξαγωγής των χρήσιμων για τη μοντελοποίηση εξισώσεων θεωρήθηκε χρήσιμο η ανάλυση αυτή να αποτελέσει ξεχωριστό κεφάλαιο.

Ένα ζήτημα που πρέπει να διευκρινιστεί είναι ο τρόπος με τον οποίο ο διαχειριστής ενός συστήματος συμπαραγωγής δύναται να ρυθμίσει την παραγωγή των δύο προϊόντων. Όπως προέκυψε και από τη μελέτη των συμβατικών θερμικών σταθμών και των σταθμών συμπαραγωγής, η παραγωγή είναι άμεσα συνδεδεμένη με δύο μεγέθη. Αφενός τη μεταβολή της ενθαλπίας του μέσου κατά την παραγωγή του ωφέλιμου μηχανικού έργου ή την παραγωγή ωφέλιμης θερμότητας και αφετέρου τη ροή του μέσου μέσα από κάθε συνθετικό στοιχείο του εκάστοτε συστήματος. Επειδή τα επίπεδα ενθαλπίας του μέσου σε κάθε σημείο της παραγωγικής διαδικασίας λαμβάνονται υπόψη κατά το σχεδιασμό του συστήματος και κατόπιν παραμένουν σταθερά, προκύπτει ότι ο μόνος τρόπος ρύθμισης της παραγωγής είναι η ρύθμιση της ροής του μέσου (νερό, αέρας, κ.α.) εντός του συστήματος συμπαραγωγής. Μεγαλύτερη ροή ατμού εντός του αμοστροβίλου για παράδειγμα ισοδυναμεί με μεγαλύτερο παραγόμενο μηχανικό έργο. Εντούτοις, λόγω της ευκολίας που παρέχει η χρήση των ενεργειακών μεγεθών (π.χ. είναι ευκολότερη η αντιστοίχιση της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με την εισαγόμενη στο στρόβιλο θερμότητα) και δεδομένου

ότι τα επίπεδα ενθαλπίας παραμένουν σταθερά, κατά τη φάση της ανάπτυξης των μοντέλων βελτιστοποίησης προτιμάται η χρήση των  $\dot{Q}$  και  $\dot{W}$  αντί του  $\dot{m}$  ως μεταβλητή ελέγχου.

## 4.2 Σχήματα συμπαραγωγής με ατμοστρόβιλο

### 4.2.1 Ατμοπαραγωγός

Στον ατμοπαραγωγό, η χημική ενέργεια του καυσίμου μετατρέπεται σε θερμότητα και απορροφάται από το μέσο. Αν  $\dot{m}_F$  είναι η ροή του καυσίμου (kg/s) που καταναλίσκεται στο θάλαμο καύσης, τότε η απελευθερωμένη κατά την καύση θερμότητα μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\dot{Q}_F = (CVF) \cdot \dot{m}_F \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.1}$$

όπου (CVF) είναι η θερμιδική τιμή της καύσιμης ύλης (Calorific Value of Fuel) (kJ/kg), που εξαρτάται από τον τύπο του καυσίμου.

Αντίστοιχα, αν  $\dot{m}_S$  (kg/s) είναι η ροή της εργαζόμενης ουσίας (ατμού) εντός του συστήματος, τότε η μεταφερόμενη στο μέσο θερμότητα είναι:

$$\dot{Q} = \Delta H \cdot \dot{m}_S \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.2}$$

όπου  $\Delta H$  είναι η μεταβολή (αύξηση) της ενθαλπίας του μέσου (kJ/kg).

Η απόδοση  $\eta_{\text{eff}}$  του συστήματος ατμοποίησης ορίζεται ως ο λόγος της θερμότητας εξόδου προς την παρεχόμενη θερμότητα, και συνεπώς η παραγόμενη στο λέβητα θερμότητα δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

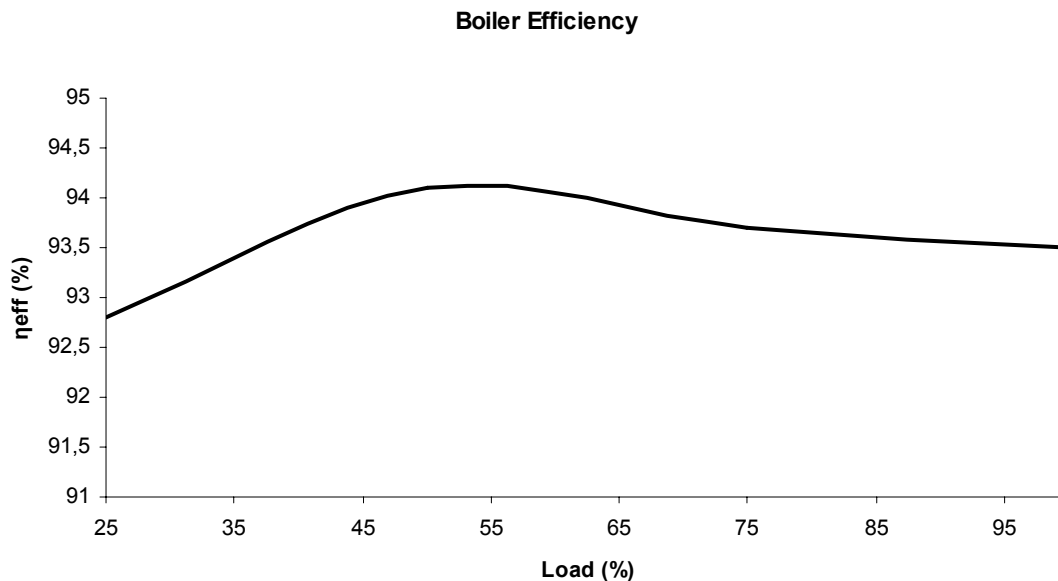
$$\dot{Q} = \eta_{\text{eff}} \cdot \dot{Q}_F \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.3}$$

όπου  $\dot{Q}$  είναι η παραγωγή θερμότητας,  $\dot{Q}_F$  η ισοδύναμη θερμότητα του παρεχόμενου καυσίμου και  $\eta_{\text{eff}}$  ο συντελεστής απόδοσης του ατμοπαραγωγού.

Σύμφωνα με τις εξισώσεις 4.1 και 4.3, μία άλλη έκφραση για την παραγόμενη στο σύστημα ατμοποίησης θερμότητα θα ήταν:

$$\dot{Q} = \eta_{\text{eff}} \cdot (\text{CVF}) \cdot \dot{m}_F \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.4}$$

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα η απόδοση του ατμοπαραγωγού δεν είναι σταθερή αλλά εξαρτάται από το φορτίο του λέβητα, δηλαδή  $\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q})$ . Η μη-γραμμική εξάρτηση του συντελεστή απόδοσης του λέβητα από το φορτίο φαίνεται στο σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1 – Απόδοση λέβητα

Κατά συνέπεια, η πραγματική έκφραση του της παραγόμενης θερμότητας είναι:

$$\dot{Q} = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q}) \cdot \dot{Q}_F \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.5}$$

#### 4.2.2 Ατμοστρόβιλος

Στον ατμοστρόβιλο, η ενέργεια που περιέχεται στο μέσο (ατμός) μετατρέπεται σε μηχανικό έργο και στη συνέχεια σε ηλεκτρική ενέργεια. Μέσω της εκτόνωσης, το παραγόμενο έργο από τον ατμό αντιστοιχεί στην πτώση της ενθαλπίας του, συνεπώς:

$$\dot{W} = \Delta H \cdot \dot{m}_S \text{ (kW)} \quad \text{Εξ. 4.6}$$

όπου  $\dot{W} = P_M$  (kW) είναι η παραγόμενη μηχανική ισχύς στο στρόβιλο,  $\Delta H$  (kJ/kg) η μεταβολή της ενθαλπίας του ατμού και η ροή του ατμού (kg/s).

Παρόλα αυτά, μόνο ένα μέρος της περιεχόμενης στον ατμό ενέργειας μετατρέπεται σε ηλεκτρική ενέργεια. Αν  $\dot{Q}$  (kJ/s) είναι η εισερχόμενη στο στρόβιλο ενέργεια, τότε η **ισοδύναμη** ηλεκτρική ισχύς  $P_0$  (kW) είναι:

$$P_0 = \eta_{\text{eff}} \cdot \dot{Q} \text{ (kW)} \quad \text{Εξ. 4.7}$$

όπου  $\eta_{\text{eff}}$  είναι ο συντελεστής απόδοσης του στροβίλου, που στην προκειμένη περίπτωση αποτελείται από τη μηχανική απόδοση του στροβίλου και την ηλεκτρική απόδοση της γεννήτριας:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{mec}}(\dot{Q}) \cdot \eta_{\text{el}} \quad \text{Εξ. 4.8}$$

Όπως φαίνεται και στην προηγούμενη εξίσωση, η μηχανική απόδοση του στροβίλου εξαρτάται από το φορτίο, και συνεπώς μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση της εισερχόμενης θερμότητας. Λαμβάνοντας υπόψη και την απόδοση της γεννήτριας, ο συνολικός βαθμός απόδοσης του αμοστροβίλου παίρνει τη μορφή:

$$\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{mec}}(\dot{Q}) \cdot \eta_{\text{el}} = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q}) \quad \text{Εξ. 4.9}$$

Συμπερασματικά, η ισοδύναμη ηλεκτρική ισχύς στον αμοστροβίλο είναι:

$$P_0 = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q}) \cdot \dot{Q} \text{ (kW)} \quad \text{Εξ. 4.10}$$

Οι εκφράσεις της πραγματικής ηλεκτρικής ενέργειας, όπως και της παραγόμενης ωφέλιμης θερμότητας διαφοροποιείται σύμφωνα με τον τύπο του αμοστροβιλικού συστήματος.

#### 4.2.2.1 Αμοστροβίλος απομάστευσης

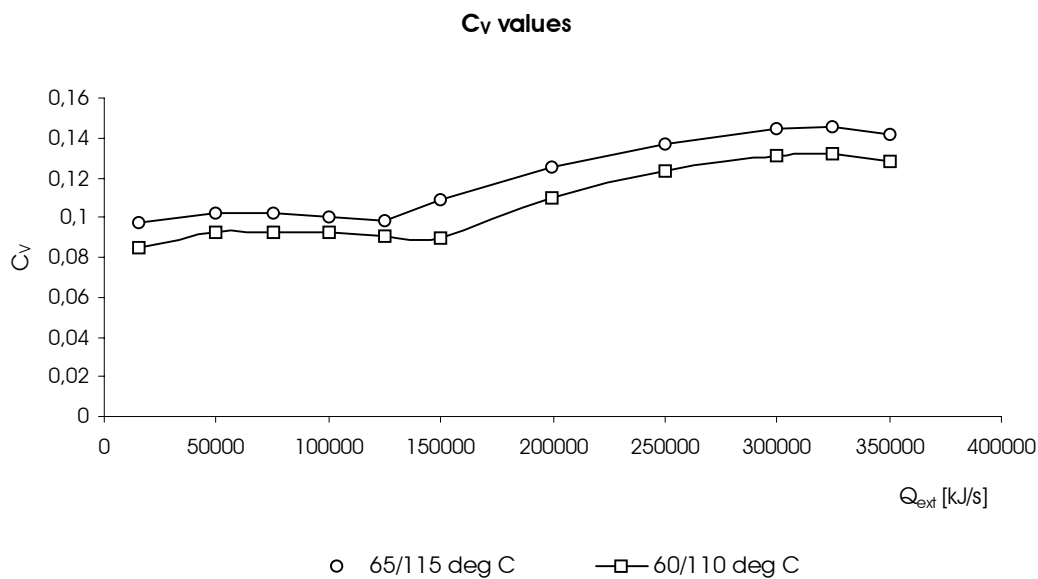
Σε εφαρμογές που σχετίζονται με τη συνδυασμένη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας σε αμοστροβιλικά συστήματα, η σχέση μεταξύ ηλεκτρικής ενέργειας και του εξαγόμενου ατμού από ένα στρόβιλο απομάστευσης, εκφράζεται μέσω της τιμής  $C_v$  του στροβίλου. Συγκεκριμένα, η

τιμή  $C_V$  εκφράζει την ελάττωση της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας που προκαλείται από την εξαγωγή ατμού για παροχή θερμότητας, δηλαδή:

$$C_V = \frac{\Delta P_{EL}}{Q_H} \quad \text{Εξ. 4.11}$$

όπου  $\Delta P_{EL}$  (kW) είναι η πτώση στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας ως συνέπεια της απομάστευσης ατμού για παραγωγή ωφέλιμης θερμότητας  $\dot{Q}_H$  (kJ/s).

Ως αποτέλεσμα της επίδρασης της εξέργειας του ατμού (της εκμεταλλεύσιμης ενέργειας του ατμού) στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, η τιμή  $C_V$  εξαρτάται από τη θερμοκρασία του ατμού στο σημείο εξαγωγής του. Στο σχήμα 4.2 παρουσιάζεται η τιμή  $C_V$  για δύο διαφορετικούς λόγους θερμοκρασίας εξόδου/εισόδου στο σύστημα παροχής θερμότητας.



**Σχήμα 4.2** – Σταθερά  $C_V$

Παρατηρώντας το διάγραμμα γίνεται προφανές ότι η πτώση στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας εξαιτίας της εξαγωγής ατμού από το στρόβιλο για ένα συγκεκριμένο ποσό παραγόμενης θερμότητας, εμφανίζεται μεγαλύτερη στην περίπτωση που ο ατμός εξάγεται υπό υψηλότερη θερμοκρασία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η διαθέσιμη ενέργεια για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας σε αυτή την κατάσταση υψηλότερης ενθαλπίας είναι μεγαλύτερη, και κατά συνέπεια η ίδια ποσότητα ατμού, αν δεν είχε εξαχθεί, θα ήταν ικανή για παραγωγή



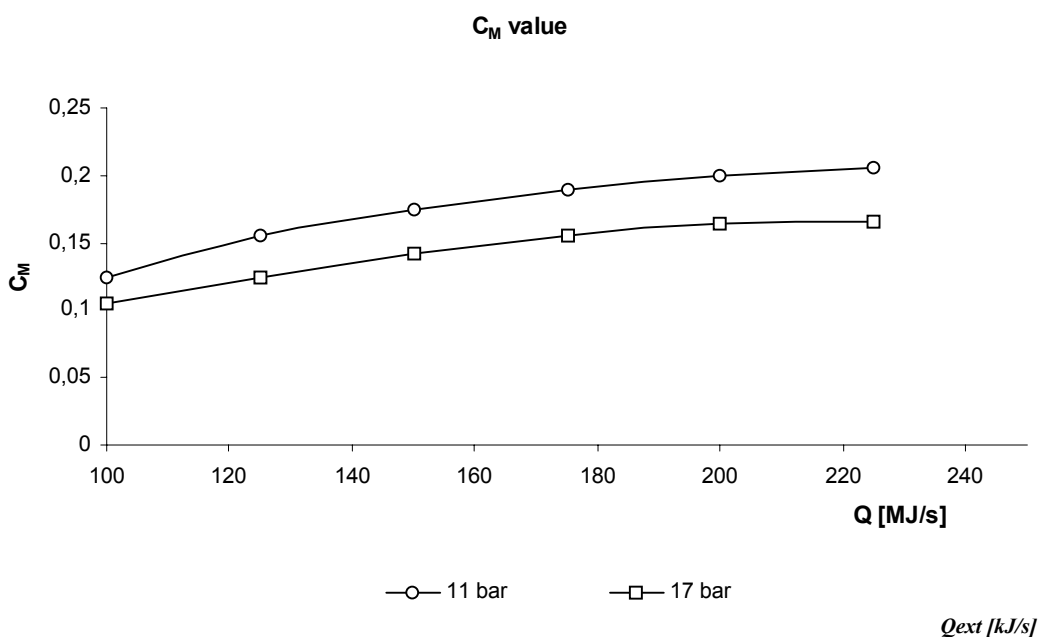
υψηλότερων επιπέδων ισχύος. Συνεπώς, η πραγματική παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας δίδεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$P = P_0 - c_v \cdot \dot{Q}_H \text{ (kW)} \quad \text{Εξ. 4.12}$$

όπου  $Q_H = Q_{ext}$  είναι η θερμότητα που περιέχεται στον εξαγόμενο ατμό (kJ).

#### 4.2.2.2 Ατμοστρόβιλος αντίθλιψης

Παρόμοια, στο στρόβιλο αντίθλιψης η σταθερά  $C_M$  χρησιμοποιείται για τη σύνδεση της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας με την παραγωγή θερμότητας του ατμοστροβίλου. Η τιμή  $C_M$  αντιπροσωπεύει την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας που αντιστοιχεί στην ποσότητα ατμού που λαμβάνεται από την έξοδο του στροβίλου για παροχή θερμότητας.



Σχήμα 4.3 – Σταθερά  $C_M$

Το παραγόμενο μηχανικό έργο εξαρτάται από την πίεση λειτουργίας του στροβίλου. Προφανώς, για υψηλότερες τιμές πίεσης το μηχανικό έργο και κατά συνέπεια η ηλεκτρική ενέργεια είναι αυξημένη. Λόγω του ότι στο σύστημα ατμοστροβίλου αντίθλιψης η πίεση ρυθμίζεται από το θερμικό φορτίο, η τιμή  $C_M$  εξαρτάται από την πίεση του ατμού που χρησιμοποιείται για τις θερμικές διεργασίες. Στο σχήμα 4.3 αναπαρίστανται η σταθερά  $C_M$  για δύο τυπικές τιμές πίεσης του δικτύου.

Κατά συνέπεια, η παραγωγή ηλεκτρική ηλεκτρικής ενέργειας στον ατμοστρόβιλο αντίθλιψης είναι:

$$P = P_0 = c_M \cdot \dot{Q}_H \text{ (kW)} \quad \text{Εξ. 4.13}$$

όπου  $\dot{Q}_H$  είναι παραγόμενη ωφέλιμη θερμότητα (kJ/s).

## 4.3 Αεριοστροβιλικά συστήματα συμπαραγωγής

### 4.3.1 Αεριοστρόβιλος

Το σύστημα αεριοστρόβιλου θα μελετηθεί ως ένα ενιαίο στοιχείο, αποτελούμενο από το συμπιεστή, το θάλαμο καύσης και το στρόβιλο.

Η ενέργεια που παρέχεται στο σύστημα εκφράζεται μέσω της εισερχόμενης θερμότητας, ως αποτέλεσμα της καύσης των πρώτων υλών εντός του θαλάμου καύσης του στρόβιλου. Η εισερχόμενη θερμότητα  $\dot{Q}_F$  στον αεριοστρόβιλο είναι:

$$\dot{Q}_F = (CVF) \cdot \dot{m}_F \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.14}$$

όπου (CVF) (kJ/kg) είναι η θερμιδική τιμή του καυσίμου και  $\dot{m}_F$  (kg/s) η κατανάλωση του καυσίμου.

Λαμβάνοντας υπόψη ενδεχόμενες απώλειες, η εξερχόμενη από το θάλαμο καύσης θερμότητα είναι:

$$\dot{Q} = \eta_C \cdot \dot{Q}_F \text{ (kJ/s)} \quad \text{Εξ. 4.15}$$

όπου  $\dot{Q}$  είναι η εισερχόμενη θερμότητα στο στρόβιλο και  $\eta_C$  είναι ο συντελεστής απόδοσης του θαλάμου καύσης.

Στις δύο δυνατές διατάξεις αεριοστρόβιλου (ενός/δύο αξόνων), ο συμπιεστής οδηγείται είτε από το στρόβιλο που είναι συζευγμένος με την γεννήτρια ή από ένα ξεχωριστό στρόβιλο υψηλής πίεσης που χρησιμοποιείται ειδικά για αυτόν το σκοπό. Παρόλα αυτά, στην κανονική λειτουργία ο λόγος συμπίεσης παραμένει σταθερός και συνεπώς η ηλεκτρική ενέργεια που καταναλίσκεται για την

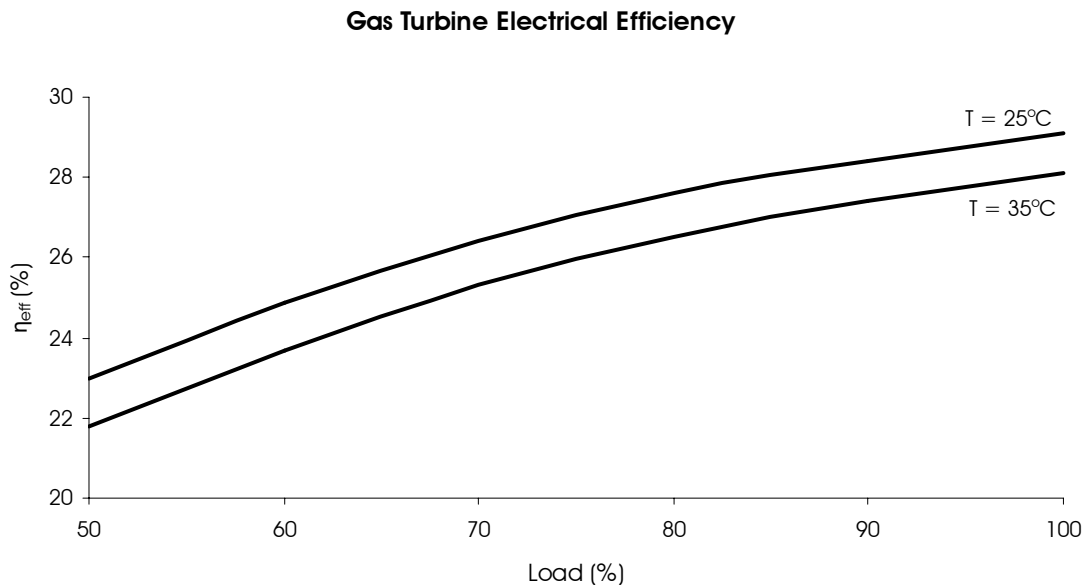
οδήγηση του συμπιεστή είναι σταθερή. Επομένως, κατά τον υπολογισμό της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας, η κατανάλωση του συμπιεστή δύναται να ληφθεί υπόψη εκ των προτέρων και να μην παρουσιάζεται στις εξισώσεις ροής της ενέργειας.

Η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$P_0 = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q}) \cdot \dot{Q} \quad (\text{kW}) \quad \text{Εξ. 4.16}$$

όπου  $\eta_{\text{eff}} = \eta_{\text{mec}}(\dot{Q}) \cdot \eta_{\text{el}} = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q})$  είναι η απόδοση του στροβίλου.

Η απόδοση του στροβίλου, όπως συναντήθηκε και στα ατμοστροβιλικά συστήματα, είναι συνάρτηση της ροής θερμότητας. Επίσης, υπάρχει μία εξάρτηση στην θερμοκρασία εισόδου στο στρόβιλο. Το σχήμα 4.4 είναι μία γραφική παράσταση της απόδοσης του αεριοστροβίλου, ως συνάρτηση του φορτίου, για διαφορετικές θερμοκρασίες εισόδου.



**Σχήμα 4.4** – Απόδοση αεριοστροβίλου

Η αποβαλλόμενη θερμότητα, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για άλλες διεργασίες, είναι:

$$\dot{Q}_H = \dot{Q} - P \quad (\text{kJ/s}) \quad \text{Εξ. 4.17}$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν υπάρχει εξάρτηση της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από την παραγωγή θερμότητας, λόγω της εκμετάλλευσης της διαφεύγουσας θερμότητας γι' αυτό το σκοπό. Η θεώρηση αυτή μπορεί να επιτραπεί εφόσον ο εξοπλισμός που χρησιμοποιείται για την χρησιμοποίηση των ποσοτήτων θερμότητας που περιέχονται στα καυσαέρια, δεν επηρεάζει την ομαλή λειτουργία του αεριοστροβίλου.

## 4.4 Άλλα στοιχεία συστημάτων συμπαραγωγής

### 4.4.1 Ατμοπαραγωγός ανάκτησης θερμότητας (HRSG)

Ο ατμοπαραγωγός ανάκτησης θερμότητας εκμεταλλεύεται τη θερμότητα των καυσαερίων για την παραγωγή ατμού. Ο παραγόμενος ατμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ατμοστροβιλικά συστήματα ή για παροχή ωφέλιμης θερμότητας.

Ο ατμοπαραγωγός ανάκτησης θερμότητας λειτουργεί σαν εναλλάκτης θερμότητας, μέσω του οποίου διέρχονται τα καυσαέρια που αποβάλλονται από τον ανώτερο κύκλο και θερμαίνουν το εργαζόμενο μέσο του κατώτερου κύκλου ή νερού για παραγωγή θερμότητας. Προφανώς, δεν είναι δυνατή η πλήρης εκμετάλλευση της θερμότητας των καυσαερίων για τους λόγους που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 3 (ελάχιστη θερμοκρασιακή διαφορά μεταξύ ουσιών, αποφυγή διάβρωσης, διασπορά καυσαερίων).

Η πραγματική παραγωγή ωφέλιμης θερμότητας στο λέβητα ανάκτησης θερμότητας δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\dot{Q}_H = \eta_{\text{eff}} \cdot \dot{Q} \quad (\text{kJ/s}) \quad \text{Εξ. 4.18}$$

όπου  $\dot{Q}$  είναι η εκπεμπόμενη από τα καυσαέρια θερμότητα και  $\eta_{\text{eff}}$  είναι η απόδοση του ατμοπαραγωγού ανάκτησης θερμότητας.

Η απόδοση του ατμοπαραγωγού ανάκτησης θερμότητας εξαρτάται κυρίως από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά του λέβητα (ενεργός επιφάνεια) και τις ιδιότητες του υγρού. Υπάρχει επίσης μία σχέση μεταξύ της απόδοσης και της ροής θερμότητας, αλλά τις περισσότερες περιπτώσεις η επίδραση είναι πολύ

μικρή και μπορεί να αγνοηθεί. Κατά συνέπεια, στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, η απόδοση του συγκεκριμένου στοιχείου θεωρείται σταθερή.

#### 4.4.2 Βαλβίδα ελάττωσης πίεσης

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα στο κεφάλαιο 3, οι βαλβίδες ελάττωσης πίεσης χρησιμοποιούνται για παροχή θερμότητας στην περίπτωση που ο ατμοστρόβιλος δεν είναι διαθέσιμος ή για κάλυψη αιχμών στη ζήτηση ωφέλιμης θερμότητας, αντλώντας ατμό από διαφορετικά σημεία του συστήματος συμπαραγωγής. Λόγω των απωλειών τριβής, οι βαλβίδες ελάττωσης έχουν περιορισμένες δυνατότητες μεταφοράς θερμότητας, γεγονός που εκφράζεται με το συντελεστή απόδοσης, που είναι εξαρτημένος από τη ροή θερμότητας μέσω της βαλβίδας.

Συνεπώς, η ροή θερμότητας  $\dot{Q}_H$  (kJ/s) στην έξοδο της βαλβίδας ελάττωσης είναι:

$$\dot{Q}_H = \eta_{\text{eff}}(\dot{Q}) \cdot \dot{Q} \quad \text{Εξ. 4.19}$$

όπου  $\dot{Q}$  (kJ/s) είναι η εισερχόμενη στη βαλβίδα θερμότητα και  $\eta_{\text{eff}}$  ο συντελεστής απόδοσης της βαλβίδας ελάττωσης πίεσης.

## Κεφάλαιο 5

### Ένταξη μονάδων – Οικονομική κατανομή

#### 5.1 Γενικά

Η ιδέα της βελτιστοποίησης στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας εκφράζεται μέσω του προβλήματος ένταξης και οικονομικής κατανομής μονάδων. Σε απλή μορφή μπορεί να οριστεί ως το πρόβλημα της εύρεσης του συνδυασμού των παραγωγικών μονάδων, οι οποίες λειτουργώντας για ένα συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα θα εξασφάλιζαν την πλήρη κάλυψη της ζήτησης και την ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας. Το πρόβλημα ένταξης μονάδων και οικονομικής κατανομής χωρίζεται ουσιαστικά σε δύο προβλήματα. Το πρώτο ασχολείται με τον προσδιορισμό του συνδυασμού των μονάδων που θα λειτουργούν στη συγκεκριμένη χρονική περίοδο ώστε να εξασφαλίζεται βέλτιστη λειτουργία του σταθμού και το δεύτερο ασχολείται με την εύρεση της βέλτιστης κατανομής των μονάδων του σχήματος παραγωγής, όπως αυτό δίνεται από τη λύση του πρώτου προβλήματος. Ο συνδυασμός των δύο αυτών προβλημάτων αναφέρεται συνήθως ως «πρόβλημα ένταξης μονάδων»<sup>1</sup>.

Τα περισσότερα από τα προβλήματα ένταξης μονάδων που έχουν αντιμετωπιστεί μέχρι σήμερα σχετίζονταν με ένα και μοναδικό προϊόν – την ηλεκτρική ισχύ. Στην παρούσα μελέτη, το πρόβλημα ένταξης μονάδων μελετάται από την άποψη της συμπαραγωγής, που όπως είναι αναμενόμενο, αποτελεί μία πιο πολύπλοκη περίπτωση. Η πρόσθετη πολυπλοκότητα στο πρόβλημα ένταξης

---

<sup>1</sup> Για λόγους ευκολίας, αυτός ο όρος προτιμάται και χρησιμοποιείται μέχρι το πέρας του παρόντος εγγράφου.

μονάδων δεν έγκειται μόνο στην προσθήκη ενός περιορισμού – αυτού της πλήρους κάλυψης της ζήτησης σε θερμότητα – αλλά και στο γεγονός ότι στις περισσότερες των περιπτώσεων όπως αποδείχθηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια, η θερμότητα και η ηλεκτρική ενέργεια συμπεριφέρονται σαν συμπληρωματικά προϊόντα.

Ένας ορισμός του προβλήματος ένταξης μονάδων, για ένα αυτόνομο σύστημα συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας θα μπορούσε να είναι:

*Στο πεδίο της συνδυασμένης παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας, η επίλυση του προβλήματος ένταξης μονάδων για ένα δεδομένο σύστημα συμπαραγωγής, μεταφράζεται στον προσδιορισμό των μονάδων που πρέπει να είναι σε λειτουργία και το επίπεδο παραγωγής αυτών, που εξασφαλίζει ελάχιστο κόστος λειτουργίας<sup>2</sup> και πλήρη κάλυψη κάθε ζήτησης.*

## **5.2 Μελέτη του προβλήματος ένταξης μονάδων**

Σε αυτήν την ενότητα το πρόβλημα ένταξης μονάδων αποσυντίθεται και οι επιμέρους συνιστώσες παρουσιάζονται χωριστά, μία διαδικασία ουσιαστικής για την κατανόηση της φύσης του προβλήματος και για την εύρεση ενός τρόπου επίλυσης.

### **5.2.1 Χρονική περίοδος βελτιστοποίησης – Κατεύθυνση βελτιστοποίησης**

Το πρόβλημα ένταξης μονάδων μπορεί να επιλυθεί για μία βραχυπρόθεσμη ή μία μακροπρόθεσμη χρονική περίοδο. Και στις δύο περιπτώσεις, ο χρόνος διαιρείται σε μικρά διαστήματα, συνήθους διάρκειας 15 λεπτών, κατά τη διάρκεια των οποίων οι παράμετροι του προβλήματος, όπως οι ζητήσεις, μπορούν να θεωρηθούν σταθερές. Η κατεύθυνση της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους που σχετίζεται με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας. Εναλλακτικά, μπορεί να θεωρηθεί ως η μεγιστοποίηση του κέρδους από την πώληση ωφέλιμης θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας. Σε

<sup>2</sup> Πρέπει να σημειωθεί ότι ο όρος «κόστος λειτουργίας» χρησιμοποιείται υπό την ευρεία έννοια και συμπεριλαμβάνει κάθε κόστος που συνδέεται με τη διαδικασία λήψης ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας από μία παραγωγική μονάδα (π.χ. κόστη εκκίνησης/τερματισμού, συντήρησης, κτλ.)

ορισμένες διατυπώσεις του προβλήματος, όπως αυτή που χρησιμοποιείται σε αυτή την εργασία, το κέρδος από την πώληση των δύο προϊόντων μπορεί να ληφθεί υπόψη ως αρνητικό κόστος, κατά τον υπολογισμό του κόστους λειτουργίας.

## **5.2.2 Κόστη**

### **Κόστος λειτουργίας**

Δεδομένου ενός συστήματος συμπαραγωγής, αποτελούμενου από ξεχωριστές μονάδες, το κόστος λειτουργίας είναι το συνολικό κόστος για τη λειτουργία κάθε στοιχείου έτσι ώστε να επιτευχθούν τα ζητούμενα επίπεδα παραγωγής σε θερμότητα και ηλεκτρική ενέργεια.

### **Συνεχή κόστη**

Το συνεχές κόστος λειτουργίας σχετίζεται στις περισσότερες των περιπτώσεων με την κατανάλωση πρωτογενούς ενέργειας του σταθμού συμπαραγωγής, που ισοδυναμεί με την ποσότητα καυσίμου που καταναλίσκεται στους θαλάμους καύσης όλων των στοιχείων του συστήματος που τους διαθέτουν (ατμοπαραγωγός, αεριοστρόβιλος, κτλ.). Το κόστος καυσίμου υπολογίζεται ως το γινόμενο της κατανάλωσης καυσίμου επί την τιμή, η οποία διαφοροποιείται ανάλογα με τον τύπο του καυσίμου και σε ορισμένες περιπτώσεις με το συμβόλαιο που έχει γίνει με τον προμηθευτή.

Πέραν του κόστους καυσίμου, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις πρέπει να συνυπολογιστούν πρόσθετα κόστη, όπως αυτό του επεξεργασμένου νερού που χρησιμοποιείται στα συστήματα με ατμό, το οποίο καταναλώνεται στην περίπτωση του της έγχυσης νερού σε αεριοστρόβιλο. Το κόστος αυτό δεν μπορεί να αγνοηθεί, καθότι τα έξοδα απόσταξης είναι σχετικά υψηλά. Τα κόστη συντήρησης συμπεριλαμβάνονται επίσης στο κόστος λειτουργίας του σταθμού. Επιπροσθέτως, το κόστος μηδενικού φορτίου λαμβάνεται υπόψη συχνά στο πρόβλημα βελτιστοποίησης, ως το κόστος για τη συντήρηση του εξοπλισμού που συνθέτει το σύστημα συμπαραγωγής, ανεξαιρέτως αν οι μονάδες παράγουν ή όχι.



### **Μεταβατικά κόστη**

Τα μεταβατικά κόστη συμπεριλαμβάνουν τα κόστη εκκίνησης και τερματισμού καθώς και το κόστος αλλαγής της φόρτισης μίας μονάδας. Το κόστος εκκίνησης είναι το κόστος που σχετίζεται με τη διαδικασία εκκίνησης μιας παραγωγικής μονάδας, μέχρι αυτή να φτάσει στο ελάχιστο επίπεδο παραγωγής. Αυτό το κόστος μπορεί σε ορισμένες περιπτώσεις να θεωρηθεί σταθερό, αλλά ειδικά για μονάδες που διαθέτουν ικανότητα ανάφλεξης, υπάρχει μία στενή σχέση με τη θερμοκρασία εκκίνησης. Αντίθετα, το κόστος τερματισμού, που σχετίζεται με τη διαδικασία τερματισμού της λειτουργίας μίας παραγωγικής μονάδας, μπορεί να υποτεθεί πάντα σταθερό. Επιπλέον, το κόστος αλλαγής φόρτισης αφορά το κόστος για τις αυξομειώσεις του επιπέδου παραγωγής κάθε μονάδας.

### **Φόροι και πρόστιμα**

Τα κόστη που συνδέονται με τη φορολόγηση της ενέργειας και τα πρόστιμα που σχετίζονται με αυξημένη εκπομπή ρύπων, μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε αντιστοιχία με τα επίπεδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας.

### **Συμβόλαια ηλεκτρικής ενέργειας**

Τα συμβόλαια ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιούνται στην περίπτωση ανεπάρκειας στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας του σταθμού συμπαραγωγής, που συμβαίνει συνήθως όταν η λειτουργία του είναι προσανατολισμένη στην κάλυψη του θερμικού φορτίου. Οι τιμές του συμβολαίου για την αγορά ενέργειας από ανεξάρτητο παραγωγό μπορεί να είναι σταθερές ή να κυμαίνονται ανάλογα με την ώρα που γίνεται η αγορά.

## **5.2.3 Περιορισμοί**

### **Περιορισμοί ζήτησης**

Οι ζήτηση σε ηλεκτρική ισχύ και θερμότητα μπορεί να καλυφθεί με ιδιοπαραγωγή ή με τη χρήση συμβολαίου με ανεξάρτητο παραγωγό. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, στις περισσότερες περιπτώσεις οι σταθμοί συμπαραγωγής λειτουργούν ταυτισμένοι με το θερμικό φορτίο, γεγονός που οφείλεται στον αποκεντρωμένο χαρακτήρα των συστημάτων διανομής θερμότητας. Κατά συνέπεια, τις περισσότερες φορές η ζήτηση σε θερμότητα

καλύπτεται πλήρως από την παραγωγή του σταθμού, ενώ η ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας ικανοποιείται κατά ένα μέρος με τη συμβολή ανεξάρτητων παραγωγών ηλεκτρικής ενέργειας.

Το ηλεκτρικό και το θερμικό φορτίο αποτελούν τα μοναδικά στοχαστικά στοιχεία του προβλήματος ένταξης μονάδων. Η ισχυρή εξάρτησή τους από τις μετεωρολογικές, εποχιακές και οικονομικές συνθήκες, όπως επίσης και από τυχαία γεγονότα, μπορεί να οδηγήσει σε μη αναμενόμενες αλλαγές στις παραμέτρους του προβλήματος. Εφόσον η βελτιστοποίηση εφαρμόζεται σε βραχυπρόθεσμη βάση, πολλές φορές την ημέρα και με τη εφαρμογή μοντέρνων τεχνικών πρόγνωσης του φορτίου, το πρόβλημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί αποτελεσματικά. Σύγχρονες μέθοδοι πρόγνωσης του φορτίου περιλαμβάνουν αυτό-παλινδρομικά μοντέλα, νευρωνικά δίκτυα και ασαφή λογική, η ανάλυση των οποίων ξεπερνά τα όρια της παρούσας μελέτης.

### **Περιορισμοί εφεδρείας**

Για λόγους αξιοπιστίας του δικτύου διανομής θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας, ο σταθμός συμπαραγωγής πρέπει να παρέχει και ορισμένες εφεδρείες. Οι εφεδρείες αυτές χρησιμοποιούνται για έλεγχο της συχνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος και για αποτελεσματική κάλυψη του φορτίου σε περιπτώσεις διακυμάνσεων της ζήτησης, απώλειες παραγωγικών μονάδων ή γραμμών μεταφοράς κτλ. Οι εφεδρείες μπορούν να διαχωριστούν στους ακόλουθους τύπους:

#### *Θετική και αρνητική στρεφόμενη εφεδρεία*

Η θετική στρεφόμενη εφεδρεία ορίζεται ως η αποθεματική παραγωγική δυνατότητα μονάδων που λειτουργούν υπό μερικό φορτίο και συγχρονισμένων με το σύστημα, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε περίπτωση μη αναμενόμενης αύξησης της ζήτησης ή όταν ορισμένες παραγωγικές μονάδες μεταπίπτουν σε κατάσταση αδράνειας για συντήρηση, επισκευή ή ανεφοδιασμό. Η αρνητική στρεφόμενη εφεδρεία από την άλλη μεριά, αντιστοιχεί στην παραγωγική δυνατότητα που μπορεί να αποκοπεί γρήγορα σε περίπτωση μη αναμενόμενης χαμηλότερης ζήτησης. Οι συνήθεις απαιτήσεις για τις στρεφόμενες εφεδρείες είναι ένας χρόνος απόκρισης το πολύ 15 λεπτών και μία διάρκεια λειτουργίας των 2 ωρών. Σε πολλές περιπτώσεις, η τιμολόγηση των αποθεμάτων

Θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας είναι διαφορετική από αυτή της κανονικής λειτουργίας.

#### *Εφεδρεία ρυθμού ανάληψης και απόρριψης φορτίου*

Η αστάθεια του φορτίου, κυρίως κατά την κλιμάκωση τις πρωινές και βραδινές ώρες, επιβάλλει τη χρήση ενός μέτρου ασφαλείας για την αξιοπιστία του συστήματος διανομής ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή εφεδρειών ρυθμού ανάληψης και απόρριψης φορτίου που ορίζονται ως το ποσό κατά το οποίο η παραγωγή μπορεί να αυξηθεί ή μειωθεί σε ένα σχετικά μικρό χρονικό διάστημα (MW/min), συγκρινόμενο με την μέγιστη κλιμάκωση στην παραγωγή μίας μονάδας. Και εδώ, η τιμολόγηση της ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να διαφοροποιηθεί, έτσι ώστε να συμπεριληφθεί η ευελιξία που παρέχεται από αυτές τις εφεδρείες.

#### **Περιορισμοί λειτουργίας**

Πέρα από τις απαιτήσεις που ορίζονται από το διαχειριστή για την εξασφάλιση της αξιοπιστίας και ευελιξίας του συστήματος, πρόσθετοι περιορισμοί λαμβάνουν μέρος στη διαμόρφωση του προβλήματος ένταξης μονάδων, οι οποίοι σχετίζονται με τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά των στοιχείων που συνθέτουν το σύστημα συμπαραγωγής, τη διατήρηση της λειτουργικότητας του σταθμού και τη διαφύλαξη και αποπληρωμή της επένδυσης. Αυτοί οι περιορισμοί συμπεριλαμβάνουν:

#### *Μέγιστο και ελάχιστο επίπεδο παραγωγής*

Οι παραγωγικές μονάδες, εκτός αν βρίσκονται σε κατάσταση εκκίνησης ή τερματισμού, λειτουργούν μεταξύ ενός ελάχιστου και ενός μέγιστου επιπέδου παραγωγής. Το ελάχιστο επίπεδο παραγωγής είναι το επίπεδο παραγωγής το οποίο κάθε μονάδα πρέπει να φτάσει προτού να είναι σε θέση να ενσωματωθεί στην παραγωγή, ενώ το μέγιστο επίπεδο παραγωγής σχετίζεται με τη μέγιστη φόρτιση την οποία κάθε μονάδα μπορεί να ανεχθεί με ασφάλεια. Επιπροσθέτως μπορεί να οριστεί και η μέγιστη αλλαγή της φόρτισης μίας μονάδας εντός μίας χρονικής περιόδου.

#### *Μέγιστος και ελάχιστος χρόνος λειτουργίας*

Κάθε παραγωγική μονάδα δεν μπορεί να λειτουργεί για μια περίοδο μεγαλύτερη από τον μέγιστο χρόνο λειτουργίας ή μικρότερη του ελάχιστου χρόνου λειτουργίας. Ο μέγιστος χρόνος λειτουργίας ορίζεται ως η μεγαλύτερη χρονική περίοδος κατά την οποία μία μονάδα μπορεί να λειτουργεί συνεχώς χωρίς να διακινδυνεύεται η λειτουργικότητά της ή ο χρόνος ζωής της. Ο περιορισμός του ελάχιστου χρόνου λειτουργίας συνδέεται περισσότερο με το κόστος των επανειλημμένων εκκινήσεων και τερματισμών, καθώς και με την αποπληρωμή της επένδυσης όταν αγοράσθηκε μία παραγωγική μονάδα.

#### *Μέγιστος αριθμός εκκινήσεων*

Η εκκίνηση και ο τερματισμός μίας μονάδας, πέραν του ότι αποτελούν μία πολυέξοδη διαδικασία, μπορούν να οδηγήσουν και στην καταπόνηση και διάβρωση των στοιχείων που αποτελούν το σχήμα συμπαραγωγής. Γι' αυτόν το λόγο, ορίζεται ένας μέγιστος αριθμός εκκινήσεων εντός μίας προκαθορισμένης χρονικής περιόδου.

#### **Περιορισμοί μεταφοράς ενέργειας**

Για απομακρυσμένες μονάδες, επιπλέον περιορισμοί πρέπει να ληφθούν υπόψη, αυτοί που σχετίζονται με τη χωρητικότητα των γραμμών μεταφοράς

### 5.3 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος ένταξης μονάδων

Στον μαθηματικό προγραμματισμό, ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, όπως το πρόβλημα ένταξης μονάδων, μπορεί να οριστεί ως εξής:

#### Πρόβλημα βελτιστοποίησης

Μεταβλητές απόφασης:	$x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$
Αντικειμενική συνάρτηση:	$\min Z = f(x_i)$
Περιορισμοί άνω ορίου:	$g_j(x_i) \leq U_j, j = 1, 2, \dots, m$
Περιορισμοί κάτω ορίου:	$h_j(x_i) \geq L_j, j = 1, 2, \dots, k$
Περιορισμοί ισότητας:	$w_j(x_i) = E_j, j = 1, 2, \dots, l$

Από τα προαναφερθέντα στοιχεία του προβλήματος ένταξης μονάδων η ομοιότητα στη δομή είναι προφανής. Συγκεκριμένα:

- Οι μεταβλητές απόφασης αντιπροσωπεύονται από την παραγωγή θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας κάθε παραγωγικής μονάδας
- Η αντικειμενική συνάρτηση που ελαχιστοποιείται είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας ελαττωμένο από το κέρδος που αποκομίζεται από την πώληση των δύο προϊόντων
- Οι περιορισμοί ισότητας, άνω και κάτω ορίου αντιπροσωπεύονται από τους περιορισμούς ζήτησης, εφεδρειών και λειτουργίας

Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζεται μία λεπτομερής διατύπωση του προβλήματος ένταξης μονάδων. Πριν από την παρουσίαση των μαθηματικών εξισώσεων γίνεται μία αναφορά στα στοιχεία του προβλήματος.

## Ορισμός προβλήματος ένταξης μονάδων

### Σύνολα

$t$  : χρονικά διαστήματα

$i$  : παραγωγικές μονάδες

### Μεταβλητές

$P_i(t)$  : παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια της μονάδας  $i$  στο χρονικό διάστημα  $t$

$Q_i(t)$  : παραγόμενη θερμότητα της μονάδας  $i$  στο χρονικό διάστημα  $t$

$P_c(t)$  : αγορασμένη ηλεκτρική ενέργεια στο χρονικό διάστημα  $t$

$u_i(t)$  : κατάσταση on/off της μονάδας  $i$  στο χρονικό διάστημα  $t$

$on_i(t)$  : εκκίνηση της μονάδας  $i$  στο χρονικό διάστημα  $t$

$off_i(t)$  : τερματισμός της μονάδας  $i$  στο χρονικό διάστημα  $t$

### Παράμετροι

$P_D(t)$  : ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας στο χρονικό διάστημα  $t$

$Q_D(t)$  : ζήτηση θερμότητας στο χρονικό διάστημα  $t$

$P_{up}(t)$  : θετική στρεφόμενη εφεδρεία του συστήματος στο χρονικό διάστημα  $t$

$P_{down}(t)$  : αρνητική στρεφόμενη εφεδρεία του συστήματος στο χρονικό διάστημα  $t$

$dP_{up,Res}(t)$  : εφεδρεία ρυθμού ανάληψης φορτίου του συστήματος στο χρονικό διάστημα  $t$

$dP_{down,Res}(t)$  : εφεδρεία ρυθμού απόρριψης φορτίου του συστήματος στο χρονικό διάστημα  $t$

**Βαθμωτές  
παράμετροι**

$F_{P,i}$  : ειδική κατανάλωση καυσίμου της μονάδας  $i$  που σχετίζεται με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

$F_{Q,i}$  : ειδική κατανάλωση καυσίμου της μονάδας  $i$  που σχετίζεται με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

$C_{P,i}$  : κόστη λειτουργίας και συντήρησης της μονάδας  $i$  που σχετίζονται με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

$C_{Q,i}$  : κόστη λειτουργίας και συντήρησης της μονάδας  $i$  που σχετίζονται με την παραγωγή θερμότητας

$C_i^0$  : κόστος μηδενικού φορτίου της μονάδας  $i$

$C_i^{on}$  : κόστος εκκίνησης της μονάδας  $i$

$C_i^{off}$  : κόστος τερματισμού της μονάδας  $i$

$C_i^{dLoad}$  : κόστος αλλαγής φόρτισης της μονάδας  $i$

$C_{T,P}$  : ενεργειακός φόρος σχετιζόμενος με την παραγωγή ηλ. ηλεκτρικής ενέργειας

$C_{T,Q}$  : ενεργειακός φόρος σχετιζόμενος με την παραγωγή θερμότητας

$C_{E,P}$  : πρόστιμα σχετιζόμενα με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

$C_{E,Q}$  : πρόστιμα σχετιζόμενα με την παραγωγή θερμότητας

$P_i^{min}$  : ελάχιστη παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια στη μονάδα  $i$

$P_i^{max}$  : μέγιστη παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια στη μονάδα  $i$

$\dot{Q}_i^{min}$  : ελάχιστη παραγόμενη θερμότητα στη μονάδα  $i$

$\dot{Q}_i^{max}$  : ελάχιστη παραγόμενη θερμότητα στη μονάδα  $i$

**Βαθμωτές  
παράμετροι**

$\Delta P_i^{\max}$  : μέγιστη αλλαγή φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας της μονάδας  $i$

$\Delta Q_i^{\max}$  : μέγιστη αλλαγή φορτίου θερμότητας της μονάδας  $i$

$dP_i^{\text{up}}$  : μέγιστος ρυθμός ανάληψης φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας της μονάδας  $i$

$dP_i^{\text{down}}$  : μέγιστος ρυθμός απόρριψης φορτίου ηλεκτρικής ενέργειας της μονάδας  $i$

$P_{\text{trans,max}}$  : μέγιστη μεταφερόμενη ηλεκτρική ενέργεια

$T_i^{\min}$  : ελάχιστος χρόνος λειτουργίας της μονάδας  $i$

$T_i^{\max}$  : μέγιστος χρόνος λειτουργίας της μονάδας  $i$

$N_i^{\max}$  : μέγιστος αριθμός εκκινήσεων της μονάδας  $i$

$p_p$  : τιμή ηλεκτρικής ενέργειας

$h_p$  : τιμή ωφέλιμης θερμότητας

$c_p$  : τιμή συμβολαίου ηλεκτρικής ενέργειας

$f_p$  : τιμή καυσίμου



## Ορισμός προβλήματος ένταξης μονάδων

### Μεταβλητές απόφασης

Οι μεταβλητές απόφασης στο πρόβλημα ένταξης μονάδων είναι η παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια  $P_i(t)$  και η παραγόμενη θερμότητα  $\dot{Q}_i(t)$  για κάθε μία από τις  $i$  παραγωγικές μονάδες

### Αντικειμενική συνάρτηση

Ο σκοπός της βελτιστοποίησης είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας. Το κέρδος που αποκομίζεται από την πώληση ωφέλιμης θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας συνυπολογίζεται ως αρνητικό κόστος.

$$\text{minimize } Z = \{Z_{\text{operating}} + Z_{\text{contract}} + Z_{\text{tax-penalty}} - Z_{\text{profit}}\} \quad \text{Εξ. 5.1}$$

#### ► Κόστος λειτουργίας:

$$Z_{\text{operating}} = Z_{\text{continuous}} + Z_{\text{transitional}} \quad \text{Εξ. 5.2}$$

- Συνεχή κόστη (κόστος καυσίμου, κόστη λειτουργίας και συντήρησης μονάδων, κόστος μηδενικού φορτίου):

$$Z_{\text{continuous}} = \sum_t \sum_i (F_{P,i} \cdot fp + C_{P,i}) \cdot P_i(t) + (F_{Q,i} \cdot fp + C_{Q,i}) \cdot \dot{Q}_i(t) + C_i^0(t) \quad \text{Εξ. 5.3}$$

- Μεταβατικά κόστη (κόστη εκκίνησης/τερματισμού, κόστος αλλαγής φόρτισης):

$$Z_{\text{transitional}} = \sum_t \sum_i C_i^{\text{on}} \cdot \text{on}_i(t) + C_i^{\text{off}} \cdot \text{off}_i(t) + C_i^{\text{dLoad}} \cdot (\Delta P_i(t) + \Delta \dot{Q}_i(t)) \quad \text{Εξ. 5.4}$$

- Φορολόγηση για την κατανάλωση ενέργειας και πρόστιμα για υπερβολική εκπομπή ρύπων:

$$Z_{\text{tax-penalty}} = \sum_t \sum_i (C_{E,P} + C_{T,P}) \cdot P_i(t) + (C_{E,Q} + C_{T,Q}) \cdot \dot{Q}_i(t) \quad \text{Εξ. 5.5}$$

- Κόστος συμβολαίου ενέργειας:

$$Z_{\text{contract}} = \sum_t c_p \cdot P_C(t) \quad \text{Εξ. 5.6}$$

- Κέρδος:

$$Z_{\text{profit}} = \sum_t \sum_i r_p \cdot P_i(t) + h_p \cdot \dot{Q}_i(t) \quad \text{Εξ. 5.7}$$

### Περιορισμοί

Οι περιορισμοί των μεταβλητών απόφασης επιβάλλονται από τις απαιτήσεις για πλήρη κάλυψη των ζητήσεων σε ηλεκτρική ενέργεια και θερμότητα, για αποθεματική υποστήριξη και για ορθολογική διαχείριση των συνθετικών στοιχείων του συστήματος συμπαραγωγής.

- Ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας:

$$\sum_i (P_i(t)) + P_C(t) = P_D(t) \quad \text{Εξ. 5.8}$$

- Ζήτηση ωφέλιμης θερμότητας:

$$\sum_i \dot{Q}_i(t) = \dot{Q}_D(t) \quad \text{Εξ. 5.9}$$

► Εφεδρείες:

- Θετική στρεφόμενη εφεδρεία:

$$\sum_i \min(\Delta P_i^{\max}, P_i^{\max} - P_i(t)) \geq P_{up}(t) \quad \text{Εξ. 5.10}$$

$$\sum_i \min(\Delta \dot{Q}_i^{\max}, \dot{Q}_i^{\max} - \dot{Q}_i(t)) \geq \dot{Q}_{up}(t) \quad \text{Εξ. 5.11}$$

- Αρνητική στρεφόμενη εφεδρεία:

$$\sum_i \min(\Delta P_i^{\max}, P_i(t) - P_i^{\min}) \geq P_{down}(t) \quad \text{Εξ. 5.12}$$

$$\sum_i \min(\Delta \dot{Q}_i^{\max}, \dot{Q}_i(t) - \dot{Q}_i^{\min}) \geq \dot{Q}_{down}(t) \quad \text{Εξ. 5.13}$$

- Εφεδρεία ρυθμού ανάληψης φορτίου:

$$\sum_i \left( dP_i^{up} - \frac{P_i(t+1) - P_i(t)}{\Delta t} \right) = dP_{up,Res}(t) \quad \text{Εξ. 5.14}$$

- Εφεδρεία ρυθμού απόρριψης φορτίου:

$$\sum_i \left( dP_i^{down} - \frac{P_i(t) - P_i(t+1)}{\Delta t} \right) = dP_{down,Res}(t) \quad \text{Εξ. 5.15}$$

► Περιορισμοί λειτουργίας:

- Περιορισμοί παραγωγής:

$$P_i^{\min} \leq P_i(t) \leq P_i^{\max} \quad \text{Εξ. 5.16}$$

$$\dot{Q}_i^{\min} \leq \dot{Q}_i(t) \leq \dot{Q}_i^{\max} \quad \text{Εξ. 5.17}$$

$$\Delta P_i(t) = |P_i(t+1) - P_i(t)| \leq \Delta P_i^{\max} \quad \text{Εξ. 5.18}$$

$$\Delta \dot{Q}_i(t) = |\dot{Q}_i(t+1) - \dot{Q}_i(t)| \leq \Delta \dot{Q}_i^{\max} \quad \text{Εξ. 5.19}$$

- ▶ Περιορισμοί χρόνου λειτουργίας:

$$T_i^{\min} \leq \sum_{\dagger} u_i(t) \leq T_i^{\max} \quad \text{Εξ. 5.20}$$

- ▶ Περιορισμοί εκκίνησης:

$$\sum_{\dagger} o n_i(t) \leq N_i^{\max} \quad \text{Εξ. 5.21}$$

- ▶ Περιορισμοί μεταφοράς:

$$P_i(t) \leq P_{\text{trans,max}} \quad \text{Εξ. 5.22}$$

## 5.4 Σχόλια πάνω στη φύση του προβλήματος ένταξης μονάδων

Εξετάζοντας τις εξισώσεις που σχηματίζουν το πρόβλημα ένταξης μονάδων γίνεται προφανές ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα εκτεταμένου μεγέθους και μεγάλης πολυπλοκότητας. Ο αριθμός των μεταβλητών που περιλαμβάνονται στο πρόβλημα αυξάνεται με τον αριθμό των μονάδων που απαρτίζουν το σύστημα συμπαραγωγής καθώς και με το εύρος του χρονικού ορίζοντα εντός του οποίου ζητείται να βρεθεί ο βέλτιστος προγραμματισμός των μονάδων. Επιπλέον, όπως αποδείχθηκε στην ανάλυση που διεξήχθη στο κεφάλαιο 4, η υπολογιστική πολυπλοκότητα του προβλήματος μεγαθύνεται από τη μη γραμμικότητα που χαρακτηρίζει τις πραγματοποιούμενες εντός του συστήματος διεργασίες.

Στο επόμενο κεφάλαιο γίνεται μία προσπάθεια προσδιορισμού της αποτελεσματικότερης μεθόδου επίλυσης του προβλήματος ένταξης μονάδων, λαμβάνοντας υπόψη την υπολογιστική πολυπλοκότητα που είναι παρούσα στο συγκεκριμένο πρόβλημα αλλά και τη μοναδικότητα ενός προβλήματος προγραμματισμού πόρων που ασχολείται με τη συνδυασμένη παραγωγή θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας, από την άποψη της ακρίβειας και της αξιοπιστίας.

## Κεφάλαιο 6

### Μέθοδοι βελτιστοποίησης

#### 6.1 Γενικά

Τα τελευταία 25 χρόνια έχει πραγματοποιηθεί εντατική έρευνα για την ανάπτυξη μεθόδων επίλυσης του προβλήματος ένταξης μονάδων σε σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Μέχρι τώρα έχουν προταθεί διάφορες μέθοδοι για την αντιμετώπιση των αρνητικών χαρακτηριστικών του συγκεκριμένου προβλήματος. Αυτές οι μέθοδοι μπορούν να κατανεμηθούν σε τρεις κύριες κατηγορίες: στοχαστικές διαδικασίες, δυναμικός προγραμματισμός, και μέθοδοι βασισμένες στη χαλάρωση των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Από τους τρεις τύπους μεθόδων επίλυσης, ο πιο υποσχόμενος είναι ο τελευταίος, που αφορά την κατάτμηση του προβλήματος εφαρμόζοντας χαλάρωση των περιορισμών. Παρόλα αυτά, η αποτελεσματικότητα της μεθόδου αυτής περιορίζεται πάντα από τις υπολογιστικές δυνατότητες και την ικανότητα αποθήκευσης των εκάστοτε χρησιμοποιούμενων υπολογιστικών συστημάτων, ένα μειονέκτημα όμως που χαρακτηρίζει όλες τις προαναφερθείσες κατηγορίες μεθόδων επίλυσης.

Για τον σκοπό του προσδιορισμού της καταλληλότερης τεχνικής για την επίλυση του προβλήματος ένταξης μονάδων, ένα θέμα μεγάλης σημασίας πρέπει να ξεκαθαριστεί, αυτό της ισορροπίας μεταξύ βέλτιστου και εφικτού. Ο σκοπός της εφαρμογής τεχνικών βελτιστοποίησης σε ένα πρόβλημα προγραμματισμού πόρων είναι ο προσδιορισμός του βέλτιστου σημείου λειτουργίας, που είναι μία συγκεκριμένη λύση από ένα σύνολο εφικτών λύσεων η οποία προκαλεί την

ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης. Συνεπώς, η πιο αποδοτική μέθοδος για ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι αυτή που παρέχει τη βέλτιστη λύση ή τουλάχιστον την κοντινότερη στο βέλτιστο λύση.

Εντούτοις, ένα σημαντικό ερώτημα δημιουργείται, αυτό του τι θα πρέπει να συμβεί αν μία μέθοδος ικανή να βρει τη βέλτιστη λύση στο πρόβλημα, απαιτεί υπερβολικά μεγάλο χρόνο για να τη βρει, όταν την ίδια στιγμή υπάρχει ανάγκη για γρήγορα αποτελέσματα. Σε τέτοιες περιπτώσεις αυτό που πρέπει πάντα να λαμβάνεται υπόψη είναι ότι το πρόβλημα ένταξης μονάδων ασχολείται με προϊόντα, των οποίων η ζήτηση θα πρέπει να καλυφθεί με κάθε τρόπο. Στον βραχυπρόθεσμο προγραμματισμό ενός σταθμού συμπαραγωγής το βέλτιστο είναι σίγουρα επιθυμητό, αλλά όταν ο χρόνος που δίνεται είναι μικρότερος από αυτόν που απαιτείται για την εύρεση του, μία προσέγγιση της βέλτιστης λύσης είναι επαρκής – η εύρεση μίας προσεγγιστικής λύσης είναι καλύτερη από την αποτυχία εύρεσης μίας λύσης στα δεδομένα χρονικά όρια.

Συνεπώς, ο προσδιορισμός μίας αποτελεσματικής μεθόδου για την επίλυση του προβλήματος ένταξης μονάδων, στηρίζεται στην εύρεση μίας μεθόδου που παρέχει τη δυνατότητα εύρεσης του βέλτιστου αλλά μπορεί να εξασφαλίσει εφικτές λύσεις όταν ο δοσμένος χρόνος είναι περιορισμένος. Στις επόμενες ενότητες γίνεται μία αξιολόγηση των μεθόδων που μπορούν να εφαρμοστούν στο πρόβλημα ένταξης μονάδων, προτού παρουσιαστεί η μέθοδος που τελικά επελέγη.

## 6.2 Αναγνώριση του τύπου του προβλήματος ένταξης μονάδων

Όπως φάνηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, το πρόβλημα ένταξης μονάδων έχει την κλασική μορφή προβλήματος βελτιστοποίησης, που είναι η ακόλουθη:

Μεταβλητές απόφασης:	$x_i \in \mathcal{R}^n, i = 1, 2, \dots, n$
Αντικειμενική συνάρτηση:	$\min Z = f(x_i)$
Περιορισμοί:	$L_j \leq g_j(x_i) \leq U_j, j = 1, 2, \dots, m$

Προβλήματα αυτού του τύπου μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες, ανάλογα με τον τύπο των συναρτήσεων που εμπλέκονται σε αυτά:

### **Γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης**

Προβλήματα που περιέχουν μόνο γραμμικές συναρτήσεις ανήκουν σε αυτήν την κατηγορία. Αυτή η κατηγορία των προβλημάτων αντιμετωπίζεται με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού (ΓΠ). Περισσότερες λεπτομέρειες για τις εφαρμόσιμες μεθόδους φαίνονται στον πίνακα 6.1.

### **Μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης**

Αυτή η κατηγορία περιλαμβάνει προβλήματα που περιέχουν μία τουλάχιστο μη-γραμμική συνάρτηση. Μη-γραμμικές συναρτήσεις μπορεί να είναι παρούσες στην αντικειμενική συνάρτηση ή/και στους περιορισμούς. Επιπλέον οι μη-γραμμικές συναρτήσεις μπορεί να είναι ομαλές ή μη ομαλές, ανάλογα με το αν υπάρχει η πρώτη παράγωγος τους. Μέθοδοι επίλυσης για προβλήματα αυτού του τύπου ανήκουν στο πεδίο του μη-γραμμικού προγραμματισμού (ΜΓΠ).



Πίνακας 6.1 – Μέθοδοι βελτιστοποίησης

	Τύπος προβλήματος		Επιλύεται με
Γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης	Η αντικειμενική συνάρτηση και οι περιορισμοί περιέχουν γραμμικές συναρτήσεις		Γραμμικό προγραμματισμό
	επιπλέον	όλες οι μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες τιμές	Ακέραιο προγραμματισμό
		ορισμένες μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες τιμές	Μικτό ακέραιο προγραμματισμό
		ορισμένες μεταβλητές λαμβάνουν δυαδικές τιμές	0 – 1 Μικτό ακέραιο προγραμματισμό
Μη-γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης	Η αντικειμενική συνάρτηση ή/και οι περιορισμοί περιέχουν μη-γραμμικές συναρτήσεις		Μη-γραμμικό προγραμματισμό
	επιπλέον	όλες οι μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες τιμές	Ακέραιο μη-γραμμικό προγραμματισμό
		ορισμένες μεταβλητές λαμβάνουν ακέραιες τιμές	Μικτό ακέραιο μη-γραμμικό προγραμματισμό

Με τη μελέτη των εξισώσεων που απαρτίζουν το πρόβλημα ένταξης μονάδων σε σταθμούς συμπαραγωγής (Εξ. 5.1 – 5.22) και λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη δυαδικών μεταβλητών κατάστασης, δίνεται η εντύπωση ενός προβλήματος του τύπου 0 - 1 ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Η αντικειμενική συνάρτηση αποτελείται από αθροίσματα (πάνω στο χρόνο και τον αριθμό των μονάδων) συνεχών και δυαδικών μεταβλητών, πολλαπλασιασμένων με τους αντίστοιχους παράγοντες κόστους. Η ίδια γραμμική μορφή φαίνεται να χαρακτηρίζει και τις εκφράσεις των περιορισμών.

Για παράδειγμα η αντικειμενική συνάρτηση έχει τη μορφή:

$$Z = \sum_t \sum_i (\text{cost factor})_i \cdot x_i(t)_{\text{continuous}} + (\text{cost factor})_i \cdot y_i(t)_{\text{binary}}$$

Εντούτοις, λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της ανάλυσης των συνθετικών στοιχείων που απαρτίζουν το σύστημα συμπαραγωγής, είναι προφανές ότι πολλές από τις εξισώσεις του προβλήματος ένταξης μονάδων είναι μη-γραμμικές, συμπεριλαμβανομένης της αντικειμενικής συνάρτησης. Πιο λεπτομερώς, μη-γραμμικότητα συναντήθηκε:

- στις εξισώσεις μετατροπής (ή μεταφοράς) θερμότητας σχεδόν όλων των συνθετικών στοιχείων του συστήματος συμπαραγωγής, ως συνέπεια της μη-γραμμικής εξάρτησης της απόδοσης από το φορτίο, και
- στις εκφράσεις της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας για τους ατμοστρόβιλους, που σχετίζεται με τη στενή μη-γραμμική σχέση μεταξύ παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας και εξαγωγής/παραγωγής ατμού.

Για παράδειγμα, ορίζοντας το κόστος καυσίμου που συνδέεται με την παραγωγή σε έναν ατμοπαραγωγό, λαμβάνεται η παρακάτω σχέση:

$$Z_{\text{fuel}} = \sum_{\dagger} \left( \frac{FP}{(CVF)} \cdot \frac{\dot{Q}(t)}{\eta_{\text{boiler}}(\dot{Q}(t))} \right), \text{ όπου}$$

$\dot{Q}(t)$ : παραγωγή θερμότητας (ατμού)

$\eta_{\text{boiler}}(\dot{Q}(t))$ : συντελεστής απόδοσης του ατμοπαραγωγού

FP: τιμή καυσίμου

CVF: Θερμιδική τιμή καυσίμου

Συνεπώς, το πρόβλημα της ένταξης μονάδων για σταθμούς συμπαραγωγής αποτελεί μη-γραμμικό πρόβλημα, το οποίο στην παρούσα μορφή μπορεί να επιλυθεί με μεθόδους μικτού ακέραιου μη-γραμμικού προγραμματισμού. Όπως θα φανεί στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου, οι τεχνικές επίλυσης με μικτό ακέραιο μη-γραμμικό προγραμματισμό συνδέεται με πολλά προβλήματα, εκ των οποίων το πιο σημαντικό είναι η δυσκολία στον προσδιορισμό του βέλτιστου.

## 6.3 Χρήσιμα στοιχεία από το πεδίο της συνδυαστικής βελτιστοποίησης

Σε αυτήν την ενότητα γίνεται μία αναφορά σε ορισμένες έννοιες της συνδυαστικής βελτιστοποίησης. Οι έννοιες αυτές θα χρησιμοποιηθούν επανειλημμένα στις επόμενες παραγράφους, στην προσπάθεια να περιγραφούν τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα των διαφόρων τεχνικών βελτιστοποίησης.

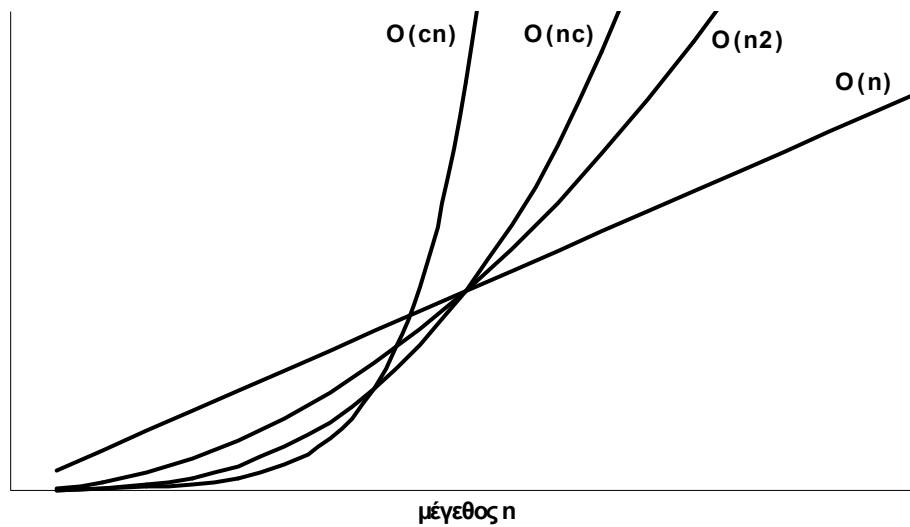
### 6.3.1 Χρονική πολυπλοκότητα

Στη συνδυαστική βελτιστοποίηση, ο όρος χρονική πολυπλοκότητα χρησιμοποιείται για να εκφράσει τη δυσκολία επίλυσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης και σχετίζεται με το χρόνο που απαιτείται για να βρεθεί μία βέλτιστη λύση. Στις περισσότερες περιπτώσεις προβλημάτων ο χρόνος επίλυσης μεγαλώνει με το μέγεθος του προβλήματος. Ανάλογα με τον τρόπο που ο χρόνος μεγαλώνει, τα προβλήματα διακρίνονται στους ακόλουθους τύπους:

Τάξη	Πολυπλοκότητα
Σταθερή	$O(1)$
Λογαριθμική	$O(\log(n))$
Πολυ-λογαριθμική	$O((\log(n))^c)$
Γραμμική	$O(n)$
Τετραγωνική	$O(n^2)$
Πολυωνυμική	$O(n^c)$
Εκθετική	$O(c^n)$

Για παράδειγμα, αν ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση ενός προβλήματος είναι μία γραμμική συνάρτηση του μεγέθους του προβλήματος  $T(n) = m \cdot n + b$ , όπου  $n$  είναι το μέγεθος και  $m, b$  είναι σταθερές, τότε το πρόβλημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως πρόβλημα γραμμικής πολυπλοκότητας,  $T(n) = O(n)$ .

## Υπολογιστικός χρόνος συναρτήσει μεγέθους



Σχήμα 6.1 – Χρονική πολυπλοκότητα

Στην συνδυαστική βελτιστοποίηση δίδεται ιδιαίτερο βάρος σε δύο κλάσεις προβλημάτων, τα P-προβλήματα (πολυωνυμικού χρόνου - polynomial time) και τα NP-προβλήματα (μη ντετερμινιστικού πολυωνυμικού χρόνου - non-deterministic polynomial time):

- **P-προβλήματα.** Ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης ανήκει στην τάξη P (πολυωνυμικού χρόνου) αν ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση του με μία θεωρητική ντετερμινιστική υπολογιστική μηχανή, φράσσεται από μία πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους του προβλήματος.
- **NP-προβλήματα.** Προβλήματα που ανήκουν στην κλάση NP (μη ντετερμινιστικού πολυωνυμικού χρόνου) έχουν χρόνο επίλυσης φραγμένο από πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους του προβλήματος, όταν επιλύονται σε θεωρητική μη-ντετερμινιστική μηχανή. Με άλλα λόγια ο χρόνος υπολογισμού φράσσεται από πολυωνυμική συνάρτηση, με την προϋπόθεση ότι κάποιες πληροφορίες για τη λύση έχουν δοθεί.

Η σχέση μεταξύ των τάξεων P και NP είναι θέμα εντατικής έρευνας μέχρι σήμερα. Γενικά, ένα συμπέρασμα που έχει εξαχθεί μέχρι τώρα είναι ότι κάθε πρόβλημα που ανήκει στην κλάση P ανήκει και στην κλάση NP ( $P \subseteq NP$ ).

Υπάρχουν όμως δύο τύποι προβλημάτων που πιστεύεται ότι απαιτούν χρόνο μεγαλύτερο από πολυωνυμικό για να λυθούν. Αυτά είναι τα NP-hard προβλήματα και τα NP-complete προβλήματα:

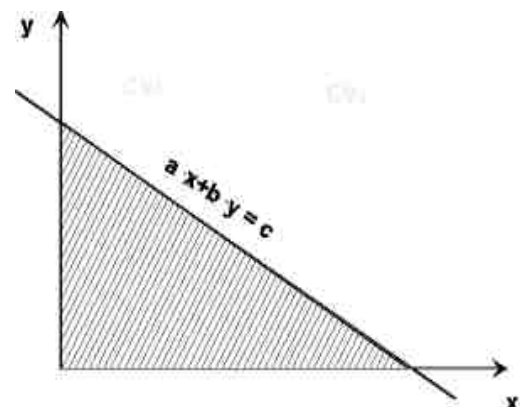
- *NP-hard* προβλήματα. Ένα πρόβλημα χαρακτηρίζεται ως NP-hard αν ένας αλγόριθμος επίλυσης του μπορεί να μεταφραστεί σε έναν αλγόριθμο κατάλληλο για την επίλυση οποιουδήποτε άλλου NP-προβλήματος. Συνεπώς, ο όρος NP-hard μπορεί να ερμηνευθεί ως «τουλάχιστον τόσο δύσκολο όσο κάθε άλλο NP-πρόβλημα»
- *NP-complete* προβλήματα. Η ομάδα αυτών των προβλημάτων περιλαμβάνει προβλήματα που είναι NP και NP-hard.

### 6.3.2 Κυρτότητα

Στο πεδίο της συνδυαστικής βελτιστοποίησης, η έννοια της κυρτότητας είναι άκρως σημαντική, καθώς δηλώνει την ικανότητα προσδιορισμού της βέλτιστης λύσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης. Κυρτό είναι το πρόβλημα του οποίου το σύνολο των εφικτών λύσεων – γνωστό και ως περιοχή εφικτότητας – είναι κυρτό. Οι όροι περιοχή εφικτότητας και κυρτό σύνολο εξηγούνται πιο λεπτομερώς παρακάτω:

#### Περιοχή εφικτότητας

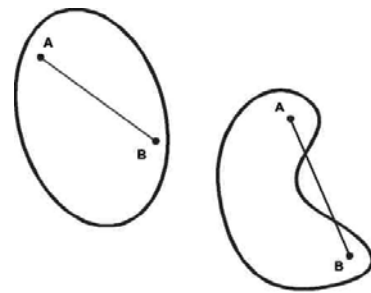
Περιοχή εφικτότητας ή σύνολο εφικτών λύσεων ενός προβλήματος βελτιστοποίησης είναι το σύνολο των λύσεων που δεν παραβαίνουν τους περιορισμούς του προβλήματος. Η βέλτιστη λύση μπορεί να βρεθεί μόνο σε αυτήν την περιοχή. Για παράδειγμα, σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με τρεις περιορισμούς του τύπου  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  και  $a \cdot x + b \cdot y \leq c$ , η περιοχή εφικτότητας είναι αυτή που παρουσιάζεται στο διπλανό σχήμα.



Σχήμα 6.2 – Περιοχή εφικτότητας

### Κυρτή περιοχή

Στον Ευκλείδειο χώρο, μία περιοχή  $S$  καλείται κυρτή, όταν το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο σημεία του  $S$ , αποτελείται μόνο από σημεία που ανήκουν στο  $S$ . Μία αναπαράσταση ενός κυρτού και ενός μη-κυρτού συνόλου παρουσιάζεται στο σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3 – Κυρτό και μη-κυρτό σύνολο

Ο λόγος για τον οποίο η κυρτότητα της περιοχής εφικτότητας είναι επιθυμητό χαρακτηριστικό στα προβλήματα βελτιστοποίησης είναι γιατί περιορίζει τη λύση στο γενικό βέλτιστο. Σε μη-κυρτά προβλήματα, το σύνολο των εφικτών λύσεων μπορεί να περιέχει τοπικά βέλτιστα, ήτοι λύσεις που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) την αντικειμενική συνάρτηση σε ένα τμήμα της περιοχής εφικτότητας, αλλά χωρίς να αποτελούν απαραίτητα το γενικό βέλτιστο του προβλήματος.

### 6.4 Αξιολόγηση των μεθόδων βελτιστοποίησης

Όπως αναφέρθηκε νωρίτερα σε αυτό το κεφάλαιο, το πρόβλημα της ένταξης μονάδων σε σταθμούς συμπαραγωγής στην αυθεντική του μορφή, μπορεί να λυθεί με μεθόδους μικτού ακέραιου μη-γραμμικού προγραμματισμού. Μία εναλλακτική οδός είναι η εφαρμογή τεχνικών προσέγγισης και η αντιμετώπιση του προβλήματος με μεθόδους μικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού. Σε αυτήν την ενότητα γίνεται μία αξιολόγηση των γραμμικών και μη-γραμμικών προβλημάτων, παρουσιάζοντας τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του κάθε τύπου, στην προσπάθεια να διακριθεί η πιο κατάλληλη μέθοδος, λαμβάνοντας υπόψη ό,τι αναφέρθηκε στην αρχή του κεφαλαίου για την ισορροπία μεταξύ βέλτιστου και εφικτού.

Επειδή η μη-γραμμική βελτιστοποίηση συναντήθηκε αρχικά στο πρόβλημα ένταξης μονάδων, αυτή η κατηγορία προβλημάτων θα μελετηθεί πρώτη:

#### Μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης

Τα μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης αποτελούν τα πιο συχνά απαντώμενα αλλά και τα πιο δύσκολα στην επίλυση προβλήματα στη

συνδυαστική βελτιστοποίηση. Οι αλγόριθμοι επίλυσης για προβλήματα μικτού ακέραιου μη-γραμμικού προγραμματισμού διακρίνονται σε ντετερμινιστικούς και μη-ντετερμινιστικούς (στοχαστικούς). Ανεξάρτητα από το ποιος από τους δύο τύπους μεθόδων επίλυσης εφαρμόζεται, τα μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης παρουσιάζουν διάφορες δυσκολίες, σχετιζόμενες με τη χρονική πολυπλοκότητα και την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Τα κυριότερα μειονεκτήματα της αντιμετώπισης του προβλήματος ένταξης μονάδων ως μη-γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι:

- *Αυξημένη πολυπλοκότητα*

Τα περισσότερα από τα μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης κατατάσσονται στα NP-hard προβλήματα, ήτοι στη χειρότερη περίπτωση ο χρόνος που απαιτείται για την επίλυση τους δεν φράσσεται από πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους τους.

- *Μη κυρτές περιοχές εφικτότητας*

Η κυρτότητα της περιοχής εφικτότητας του προβλήματος δεν εξασφαλίζεται πάντα. Αν η περιοχή εφικτότητας δεν είναι κυρτή, τότε μπορεί να παρουσιάζει τοπικά βέλτιστα, ήτοι λύσεις που ελαχιστοποιούν (ή μεγιστοποιούν) την αντικειμενική συνάρτηση σε ένα τμήμα της περιοχής αλλά όχι γενικά.

- *Πολλαπλές περιοχές εφικτότητας*

Τοπικά βέλτιστα μπορούν να προκύψουν όχι μόνο στην περίπτωση της μη-κυρτότητας αλλά και στην περίπτωση πολλαπλών περιοχών εφικτότητας, μια συνήθης περίπτωση στα μη-γραμμικά προβλήματα.

Σύγχρονες τεχνικές επίλυσης μη-γραμμικών προβλημάτων έχουν επιτύχει τη μείωση της επίδρασης των παραπάνω χαρακτηριστικών, όπως για παράδειγμα οι διαδικασίες που διαθέτουν μηχανισμούς απομάκρυνσης από τα τοπικά βέλτιστα για την αναζήτηση του γενικού βέλτιστου, ένα χαρακτηριστικό που είναι διαθέσιμο και στους ντετερμινιστικούς επαναληπτικούς αλγόριθμους, όπου ο χρήστης μπορεί να ορίσει διαφορετικές αρχικές τιμές έτσι ώστε να ελέγξει αν ο αλγόριθμος συγκλίνει στην ίδια λύση. Εντούτοις, η έλλειψη ακρίβειας και η

πολυπλοκότητα των μη-γραμμικών προβλημάτων αντιμετωπίζεται ακόμη σε μεγάλο βαθμό.

### **Γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης**

Τα ευνοϊκά χαρακτηριστικά του γραμμικού προγραμματισμού (ΓΠ) έχουν οδηγήσει στην ευρεία εφαρμογή του σε πολυάριθμα προβλήματα βελτιστοποίησης. Παρόλο που τα προβλήματα που συναντώνται στην συνδυαστική βελτιστοποίηση είναι σπανίως αυθεντικά γραμμικά προβλήματα, ο γραμμικός προγραμματισμός αποτελεί την προτιμώμενη μέθοδο επίλυσης σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις, εφόσον είναι δυνατόν να γίνουν κάποιες παραδοχές ώστε το πρόβλημα να θεωρηθεί γραμμικό. Όσον αφορά τα ίδια ζητήματα, αυτά της δυνατότητας εύρεσης του βέλτιστου και της χρονικής πολυπλοκότητας, τα γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης υπερέχουν των μη-γραμμικών για τους παρακάτω λόγους:

- *Περιορισμένη πολυπλοκότητα*

Έχει αποδειχτεί ότι τα γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης είναι P-προβλήματα, που σημαίνει ότι υπάρχουν ντετερμινιστικοί αλγόριθμοι που μπορούν να λύσουν τα προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού σε χρόνο φραγμένο από πολυωνυμική συνάρτηση του μεγέθους τους. Στις περισσότερες των περιπτώσεων η λύση σε ένα γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης μπορεί να δοθεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό βημάτων.

- *Κυρτότητα*

Η περιοχή εφικτότητας των γραμμικών προβλημάτων βελτιστοποίησης είναι πάντα κυρτή. Συνεπώς, από τη στιγμή που μία λύση υποδειχθεί ως βέλτιστη, δεν υπάρχει αβεβαιότητα στο ότι η συγκεκριμένη λύση αποτελεί το γενικό βέλτιστο του προβλήματος. Επιπλέον, αν δεν υπάρχει εφικτή λύση, αυτό μπορεί να αναγνωριστεί αρκετά νωρίς, αποφεύγοντας με αυτόν τον τρόπο άσκοπους και χρονοβόρους υπολογισμούς.

- *Ακρίβεια*

Εκτός της περίπτωσης που εξαντληθούν τα δεδομένα χρονικά όρια επίλυσης, η λύση που θα βρεθεί θα είναι η βέλτιστη. Αλλιώς, αν η διαδικασία επίλυσης σταματήσει σε νωρίτερο στάδιο λόγω χρονικών



περιορισμών, η προσεγγιστική λύση που θα βρεθεί θα είναι πολύ κοντά στο βέλτιστο.

Συνεπώς, επιστρέφοντας στο πρόβλημα ένταξης μονάδων, δύο επιλογές δίνονται. Η μία επιλογή είναι να εφαρμοστούν μη-γραμμικές τεχνικές βελτιστοποίησης και η δεύτερη είναι να εφαρμοστούν γραμμικές μέθοδοι βελτιστοποίησης, αφού προηγηθεί η μετατροπή του προβλήματος σε γραμμικό με τη χρήση προσεγγιστικών μεθόδων. Στην πρώτη περίπτωση η κατάλληλη μέθοδος είναι ο μικτός ακέραιος μη-γραμμικός προγραμματισμός, αφού στο πρόβλημα εμπλέκονται πολλές δυαδικές μεταβλητές. Η δεύτερη επιλογή αφορά τη χρήση μικτού ακέραίου προγραμματισμού, αφού προηγηθεί η προσέγγιση όλων των μη-γραμμικών συναρτήσεων του προβλήματος με τεχνικές γραμμικοποίησης.

Ο μικτός ακέραιος προγραμματισμός έχει το πλεονέκτημα ότι διατηρεί κάποια από τα επιθυμητά χαρακτηριστικά του γραμμικού προγραμματισμού, κυρίως όσον αφορά τη δυνατότητα εύρεσης του βέλτιστου. Όσον αφορά τη χρονική πολυπλοκότητα, οι επιδόσεις του μικτού ακέραίου προγραμματισμού δεν είναι πολύ διαφορετικές από αυτές του μικτού ακεραίου μη-γραμμικού προγραμματισμού.

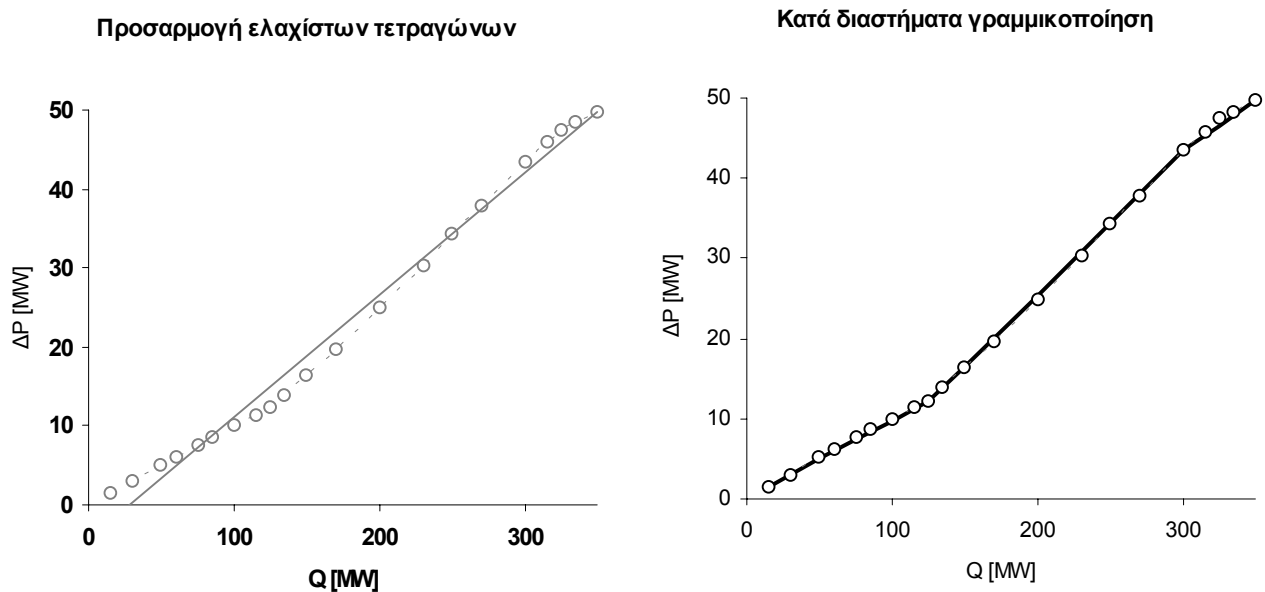
Συγκρίνοντας τις δυνατότητες των δύο μεθόδων γίνεται προφανές ότι ο μικτός ακέραιος προγραμματισμός αποτελεί την καταλληλότερη επιλογή για την επίλυση του προβλήματος ένταξης μονάδων σε σταθμούς συμπαραγωγής, αφού παρέχει καλύτερα θεμέλια για την εύρεση του βέλτιστου σχήματος παραγωγής και μία χρονική πολυπλοκότητα συγκρίσιμη με αυτή μιας μεθόδου μικτού ακέραίου μη-γραμμικού προγραμματισμού. Επίσης, όπως θα φανεί στο επόμενο κεφάλαιο, σύγχρονες τεχνικές μερικές από τις οποίες χρησιμοποιούνται και στον μη-γραμμικό προγραμματισμό, μπορούν να εφαρμοστούν επιπροσθέτως για τη βελτίωση των επιδόσεων του μικτού ακέραίου προγραμματισμού.

## 6.5 Γραμμική προσέγγιση

Η αποτελεσματικότητα της μεταχείρισης του προβλήματος ένταξης μονάδων ως ένα πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού έγκειται στην εξασφάλιση μίας επιτυχούς προσέγγισης των μη-γραμμικών στοιχείων. Αν η προσέγγιση είναι ανεπαρκής τότε τα πλεονεκτήματα της χρήσης γραμμικών μεθόδων για τη λήψη καλύτερων αποτελεσμάτων εν μέρει υποβαθμίζονται. Προηγούμενες εφαρμογές του προβλήματος ένταξης μονάδων για σταθμούς παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με γραμμικές μεθόδους βελτιστοποίησης, χρησιμοποιούσαν ευθεία γραμμικοποίηση των μη-γραμμικών συναρτήσεων, κυρίως τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Στις υλοποιήσεις αυτές, παρόλο που η διαδικασία επίλυσης έφτανε γρήγορα στη βέλτιστη λύση, τα αποτελέσματα στερούνταν ακρίβειας αφού η προσεγγιστική έκφραση του προβλήματος απέιχε πολύ από την πραγματική.

Στην παρούσα μελέτη, παρουσιάζεται και εφαρμόζεται η μέθοδος της γραμμικοποίησης κατά διαστήματα, ως μία πιο ακριβής μέθοδος προσέγγισης. Όταν εκτελείται η γραμμικοποίηση κατά διαστήματα, οι μη-γραμμικές συναρτήσεις που είναι παρούσες στο πρόβλημα ένταξης μονάδων, διαιρούνται σε τμήματα που μπορούν να προσεγγιστούν αποτελεσματικά με ευθύγραμμα τμήματα. Μία σύγκριση μεταξύ της προσέγγισης που λαμβάνεται με την προσαρμογή των ελαχίστων τετραγώνων και αυτής που παρέχεται από τη μέθοδο της κατά διαστήματα γραμμικοποίησης, μπορεί να γίνει παρατηρώντας το σχήμα 6.4.

Η μη-γραμμική καμπύλη που παρουσιάζεται στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η μείωση της παραγόμενης ηλεκτρικής ενέργειας σε έναν ατμοστρόβιλο απομάστευσης, ως συνάρτηση της εξαγόμενης θερμότητας (υπό τη μορφή ατμού). Είναι προφανές ότι εν αντιθέσει με την προσαρμογή ελαχίστων τετραγώνων, το σφάλμα που προκύπτει από την γραμμικοποίηση κατά διαστήματα είναι σχεδόν μηδενικό, εφόσον βέβαια ο αριθμός των τμημάτων είναι αρκετός ώστε να επιτραπεί η ακριβής προσέγγιση της καμπύλης.



Σχήμα 6.4 – Τεχνικές προσεγγιστικής γραμμικοποίησης

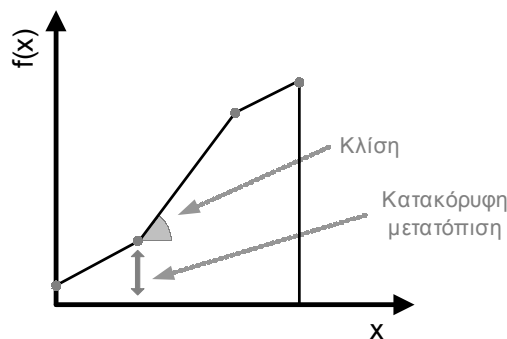
Ωστόσο, η κατά διαστήματα γραμμικοποίηση όλων των μη-γραμμικών συναρτήσεων που εμφανίζονται στην έκφραση του προβλήματος, έχει το μειονέκτημα της επιβάρυνσης του προβλήματος με πρόσθετες μεταβλητές. Για κάθε ευθύγραμμο τμήμα πρέπει να εισαχθεί μία δυαδική μεταβλητή έτσι ώστε να είναι δυνατή η χρήση της σωστής γραμμικής εξίσωσης σε κάθε περίπτωση. Η μέθοδος περιγράφεται με περισσότερες λεπτομέρειες στην επόμενη ενότητα.

## 6.6 Κατά διαστήματα γραμμικοποίησηση

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, εφαρμόζοντας ευθεία γραμμικοποίηση στις συναρτήσεις που εμπλέκονται σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με σκοπό τη χρήση μεθόδων γραμμικού προγραμματισμού, παρέχει συνήθως ανακριβή αποτελέσματα εξαιτίας των μεγάλων προσεγγίσεων που γίνονται. Αντιθέτως, η εφαρμογή της κατά διαστήματα γραμμικοποίησης των συναρτήσεων έχει αποδειχθεί ως ένας πιο αποτελεσματικός τρόπος αντιμετώπισης της μη-γραμμικότητας αφού τα σφάλματα που προκαλούνται από την προσέγγιση είναι ελάχιστα και κατά συνέπεια τα αποτελέσματα που παρέχονται από τις γραμμικές μεθόδους βελτιστοποίησης είναι πολύ ακριβή.

Δεδομένης μίας μη-γραμμικής συνάρτησης  $f(x)$ , η κατά διαστήματα γραμμικοποίηση εφαρμόζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

1. Η καμπύλη που αντιπροσωπεύει τη μη-γραμμική συνάρτηση διαιρείται σε  $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) τμήματα, ικανά να αντικατασταθούν από ευθύγραμμα τμήματα. Είναι προφανές ότι καθώς ο αριθμός των τμημάτων μεγαλώνει, η ακρίβεια της προσέγγισης αυξάνεται.
2. Για καθένα από τα ευθύγραμμα τμήματα υπολογίζεται η εξίσωση ευθείας. Αυτό έγκειται στην εύρεση της κλίσης της ευθείας που ενώνει τα άκρα του τμήματος και την κατακόρυφη μετατόπιση του, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6.5.



**Σχήμα 6.5** – Κατά διαστήματα γραμμικοποίηση

Συνεπώς, κάθε ευθύγραμμο τμήμα  $i$  που συνδέει τα σημεία  $(x_{i,\min}, y_{i,\min})$  και  $(x_{i,\max}, y_{i,\max})$  αναπαρίσταται από μία εξίσωση της μορφής  $y_i = m_i x_i + b_i$ , όπου η κλίση ( $m_i$ ) και η κατακόρυφη μετατόπιση ( $b_i$ ) υπολογίζονται ως εξής:

$$m_i = \frac{y_{i,\max} - y_{i,\min}}{x_{i,\max} - x_{i,\min}} \quad \text{και} \quad b_i = y_{i,\min} - m_i \cdot x_{i,\min}$$

Η πρόσθετη πολυπλοκότητα με την οποία επιβαρύνεται το πρόβλημα από την εφαρμογή της κατά διαστήματα γραμμικοποίησης μιας μη-γραμμικής καμπύλης είναι ότι η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει τη συγκεκριμένη καμπύλη περιγράφεται στο εξής από ένα σύνολο εξισώσεων, ο αριθμός των οποίων αντιστοιχεί στον αριθμό των τμημάτων που δημιουργούνται. Μόνο μία από αυτές τις εξισώσεις πρέπει να είναι ενεργή κάθε φορά, αυτή που αντιστοιχεί στην τιμή της μεταβλητής απόφασης, της οποίας η συνάρτηση υπέστη γραμμικοποίηση. Αυτό αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή δυαδικών μεταβλητών  $r_i$ , μία για κάθε ευθύγραμμο τμήμα. Οι μεταβλητές αυτές λαμβάνουν την τιμή  $r_i = 1$

μόνο αν η μεταβλητή απόφασης βρίσκεται στο αντίστοιχο διάστημα τιμών. Κατά συνέπεια η εξίσωση που περιγράφει την γραμμικοποιημένη συνάρτηση παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$y = \sum_i m_i \cdot x_i + b_i \cdot r_i$$

με τους επιπλέον περιορισμούς :

$$\sum_i r_i \leq 1$$

$$x_i \leq x_{i,\max} \cdot r_i$$

$$x_i \geq x_{i,\min} \cdot r_i$$

Ο πρώτος από αυτούς τους περιορισμούς υποχρεώνει τις δυαδικές μεταβλητές να λαμβάνουν την τιμή 1 μόνο μία κάθε φορά. Οι τελευταίοι δύο περιορισμοί αναγκάζουν τη μεταβλητή κατάστασης  $x_i$  να λαμβάνει μη μηδενικές τιμές μόνο όταν η μεταβλητή απόφασης βρίσκεται στο αντίστοιχο διάστημα τιμών.

## Κεφάλαιο 7

### Μικτός ακέραιος προγραμματισμός

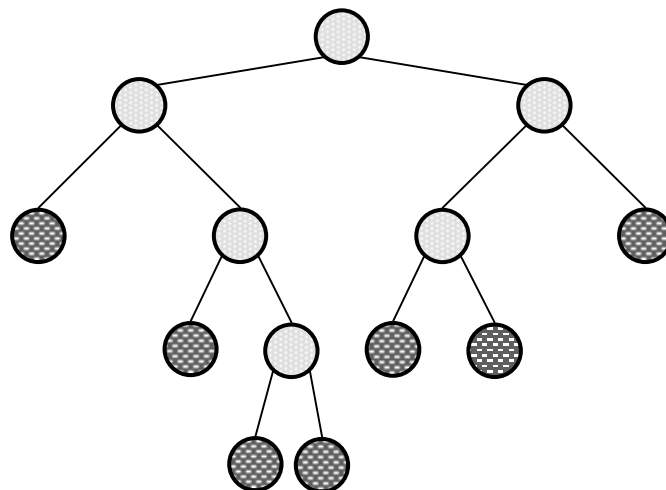
#### 7.1 Εισαγωγή

Παρατηρώντας τις εξελίξεις στο πεδίο της βελτιστοποίησης στον προγραμματισμό περιορισμένων πόρων μέσα στα τελευταία 20 χρόνια, δεν πρέπει να εκπλήσσεται κανείς από την επιλογή του μικτού ακέραιου προγραμματισμού (ΜΑΠ) ως μέθοδο επίλυσης αυτής της μεγάλης και αρκετά πολύπλοκης έκδοσης του προβλήματος ένταξης μονάδων. Τα τελευταία πέντε χρόνια τα περισσότερα εμπορικά προγράμματα επίλυσης που έχουν αναπτυχθεί για εφαρμογές σαν αυτή, χρησιμοποιούν μικτό ακέραιο προγραμματισμό επιτυγχάνοντας πολύ καλές επιδόσεις. Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο λόγος για τη μετακίνηση προς το μικτό ακέραιο προγραμματισμό είναι η ικανότητα λήψης βέλτιστων λύσεων, ενώ η ενδεχόμενη απώλεια εφικτότητας αντιμετωπίζεται από βοηθητικές διαδικασίες που προέρχονται κυρίως από το πεδίο των στοχαστικών μεθόδων βελτιστοποίησης. Ο βασικός αλγόριθμος, που μπορεί να βρεθεί σχεδόν σε κάθε εμπορικό πρόγραμμα επίλυσης, είναι ο γραμμικός αλγόριθμος Branch-and-Bound. Αυτός ο αλγόριθμος, που παρουσιάζεται διεξοδικά στις επόμενες παραγράφους, είναι βασισμένος στη φιλοσοφία διαίρεσης του αρχικού προβλήματος σε υπο-προβλήματα, πάνω στα οποία εφαρμόζονται τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού, μέχρι να εντοπιστεί το γενικό βέλτιστο.

Στην επόμενη ενότητα η μέθοδος Branch-and-Bound παρουσιάζεται. Οι ακόλουθες ενότητες αφιερώνονται στη μελέτη των πρόσφατων επεκτάσεων στις μεθόδους μικτού ακεραίου προγραμματισμού, που αναλαμβάνουν το καθήκον της βελτίωσης των επιδόσεων του βασικού αλγόριθμου.

## 7.2 Η μέθοδος Branch-and-Bound

Η χρήση του όρου «branch-and-bound» (επέκταση και οριοθέτηση) έγκειται στο γεγονός ότι αυτή η μέθοδος βασίζεται στην ιδέα της επαναληπτικής διαίρεσης του συνόλου των εφικτών λύσεων του αρχικού προβλήματος μικτών ακεραίων δημιουργώντας υπο-προβλήματα τα οποία στη συνέχεια επιλύονται για να ληφθεί ένα όριο στην αντικειμενική συνάρτηση του υπο-προβλήματος. Τα υπο-προβλήματα δημιουργούνται περιορίζοντας τις τιμές που λαμβάνουν οι μεταβλητές που πρέπει να είναι ακέραιες. Για τις δυαδικές μεταβλητές υπάρχουν μόνο δύο δυνατοί περιορισμοί: ανάθεση της μεταβλητής στην τιμή 0 ή στην τιμή 1. Γενικότερα, για μία μεταβλητή με κατώτερο όριο  $l$  και ανώτερο όριο  $u$  το αρχικό πρόβλημα διαιρείται σε δύο προβλήματα στα οποία η εν λόγω μεταβλητή έχει πεδίο τιμών το  $[l, q]$  και  $[q+1, u]$  αντίστοιχα, όπου  $q$  είναι ο πλησιέστερος στην εκάστοτε λύση ακέραιος.



Σχήμα 7.1 – Δέντρο αναζήτησης branch-and-bound

Ο αλγόριθμος branch-and-bound μπορεί να θεωρηθεί σαν μία διαδικασία αναζήτησης σε δέντρο, στο οποίο το πρόβλημα στη ρίζα είναι το αρχικό

πρόβλημα ΜΑΠ και οι κόμβοι-παιδιά αντιπροσωπεύουν τα υπο-προβλήματα ΜΑΠ που προκύπτουν από τη διαίρεση του προβλήματος.

Για το σκοπό της μελέτης του αλγόριθμου branch-and-bound με περισσότερη λεπτομέρεια, η ακόλουθη έκφραση ενός προβλήματος μικτών ακεραίων θα χρησιμοποιηθεί:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{min} & c^T \cdot x \\
 \mathbf{με} & A \cdot x \leq b \\
 & x \geq 0 \\
 & x_i \text{ ακέραιοι}, i = 1, 2, \dots, p \\
 \\
 \mathbf{όπου} & x, c: \text{διανύσματα μεγέθους } n \\
 & A: n \times m \text{ πίνακας} \\
 & b: \text{διάνυσμα μεγέθους } m
 \end{array}$$

Έστω  $S$  το σύνολο των εφικτών λύσεων του συγκεκριμένου προβλήματος, δηλαδή:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^+, x_i \in \mathbb{Z}^+ : A \cdot x \leq b\}$$

Σύμφωνα με τον ορισμό της μεθόδου branch-and-bound, το σύνολο  $S$  διαιρείται σε υποσύνολα  $S_j$ , καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύει ένα υπο-πρόβλημα του αρχικού προβλήματος ΜΑΠ. Κάθε υπο-πρόβλημα επιλύεται παρέχοντας μία συγκεκριμένη τιμή για την αντικειμενική συνάρτηση. Αφού ο στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης, όταν η αντικειμενική τιμή ενός υπο-προβλήματος βρεθεί μεγαλύτερη από το ανώτερο όριο του αρχικού προβλήματος, η διαδικασία επίλυσης δεν θα συνεχιστεί προς την κατεύθυνση του συγκεκριμένου υπο-προβλήματος. Η περαιτέρω αναζήτηση λύσεων προς τη



συγκεκριμένη κατεύθυνση θα μπορούσε να αποδώσει μόνο χειρότερα αποτελέσματα, δηλαδή μεγαλύτερες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης.

Στο σημείο αυτό, η σπουδαιότητα της γρήγορης εύρεσης ενός άνω ορίου είναι προφανής. Αν δεν βρεθεί ένα άνω όριο σε πεπερασμένο χρόνο, ο αλγόριθμος branch-and-bound δεν είναι ικανός να «κλαδέψει» κόμβους, να εξαιρέσει δηλαδή την αναζήτηση σε κλάδους του δέντρου. Τα άνω όρια λαμβάνονται μέσω της εύρεσης εφικτών ακέραιων λύσεων. Συνήθως αυτό πραγματοποιείται με τη χρήση στοχαστικών μεθόδων ή με διαδικασίες προ-επίλυσης.

Μία άλλη θεμελιώδης έννοια για τη μέθοδο branch-and-bound είναι αυτή της χαλάρωσης του προβλήματος. Ένας τρόπος χαλάρωσης του δεδομένου προβλήματος ΜΑΠ θα μπορούσε να είναι:

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T \cdot x \\ \text{με} \quad & A \cdot x \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Σε αυτήν τη «χαλαρωμένη» έκφραση του προβλήματος ΜΑΠ, ο περιορισμός ακεραιότητας έχει αναιρεθεί και συνεπώς το προκύπτον πρόβλημα μπορεί να λυθεί με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού. Αφού λυθεί το πρόβλημα που προκύπτει από τη χαλάρωση, λαμβάνει χώρα η διαίρεση του προβλήματος επιβάλλοντας πρόσθετους περιορισμούς στις μεταβλητές που θα πρέπει να είναι ακέραιες στο αρχικό πρόβλημα.

Οι υλοποιήσεις του αλγόριθμου branch-and-bound διαφοροποιούνται ανάλογα με:

- τη μέθοδο χαλάρωσης του προβλήματος ΜΑΠ
- τη στρατηγική διαίρεσης του προβλήματος
- την επιλογή της μεταβλητής διακλάδωσης, βάσει της οποίας θα γίνει η διαίρεση του προβλήματος.

Ο πιο συνήθης συνδυασμός είναι η χρήση χαλάρωσης γραμμικού προγραμματισμού (ΓΠ) μαζί με διχοτόμηση της μεταβλητής διακλάδωσης, που

θα είναι η περισσότερο (ή λιγότερο) πλησιέστερη σε ακέραιο αριθμό. Η στρατηγική αυτή επιδεικνύεται στο παρακάτω παράδειγμα, για να φανεί η λειτουργία του αλγόριθμου branch-and-bound, αλλά όλες οι δυνατές στρατηγικές αναφέρονται στην επόμενη ενότητα.

### Παράδειγμα της μεθόδου *branch-and-bound*

$$\begin{array}{ll}
 \text{minimize} & Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 \\
 \text{με} & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + a_{13} \cdot x_3 \leq b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + a_{23} \cdot x_3 \leq b_2 \\
 & a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + a_{33} \cdot x_3 \leq b_3 \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & \text{integer } x_2, x_3 \geq 0
 \end{array}$$

#### **Βήμα 1:** Χαλάρωση γραμμικού προγραμματισμού

Ο περιορισμός ακεραιότητας για τις μεταβλητές  $x_2$  και  $x_3$  αναιρείται και το προκύπτον πρόβλημα επιλύεται με γραμμικές μεθόδους, έτσι ώστε να ληφθεί ένα άνω όριο. Αν η χαλαρωμένη μορφή του προβλήματος δώσει λύση με ακέραιες τιμές για τις μεταβλητές  $x_2$  and  $x_3$ , τότε τα επόμενα βήματα παραλείπονται και ο αλγόριθμος τερματίζεται.

#### **Βήμα 2:** Επιλογή μεταβλητής διακλάδωσης

Αν δεν προκύψει ακέραια εφικτή λύση, γίνεται διακλάδωση βάσει μίας εκ των δύο ακέραιων μεταβλητών  $x_2, x_3$ . Αν η διακλάδωση βασιστεί στην περισσότερο ανέφικτη ακέραια μεταβλητή, τότε επιλέγεται η μεταβλητή που έχει τη μεγαλύτερη διαφορά από τον πλησιέστερο ακέραιο. Έστω ότι από τη λύση του προβλήματος ΓΠ προκύπτει αυτή η μεταβλητή είναι η  $x_2$ .

#### **Βήμα 3:** Διάρθρωση προβλήματος

Το πρόβλημα διαιρείται σε δύο υπο-προβλήματα, καθένα με ένα επιπρόσθετο περιορισμό για τη μεταβλητή  $x_2$ . Η στρατηγική διάρθρωσης στην περίπτωση αυτή είναι η διχοτόμηση μεταβλητής, στην οποία η μεταβλητή  $x_2$  αναγκάζεται να λάβει

τιμές είτε μεγαλύτερες από την «οροφή» ή μικρότερες από το «πάτωμα» της τρέχουσας κλασματικής τιμής:

$$\text{Υπο-πρόβλημα I: } x_2 \leq \lfloor \tilde{x}_2 \rfloor$$

$$\text{Υπο-πρόβλημα II: } x_2 \geq \lceil \tilde{x}_2 \rceil$$

όπου  $\tilde{x}_2$  είναι η τρέχουσα κλασματική τιμή της μεταβλητής  $x_2$  και  $\lfloor \cdot \rfloor$ ,  $\lceil \cdot \rceil$  οι τιμές πατώματος και οροφής αντίστοιχα.

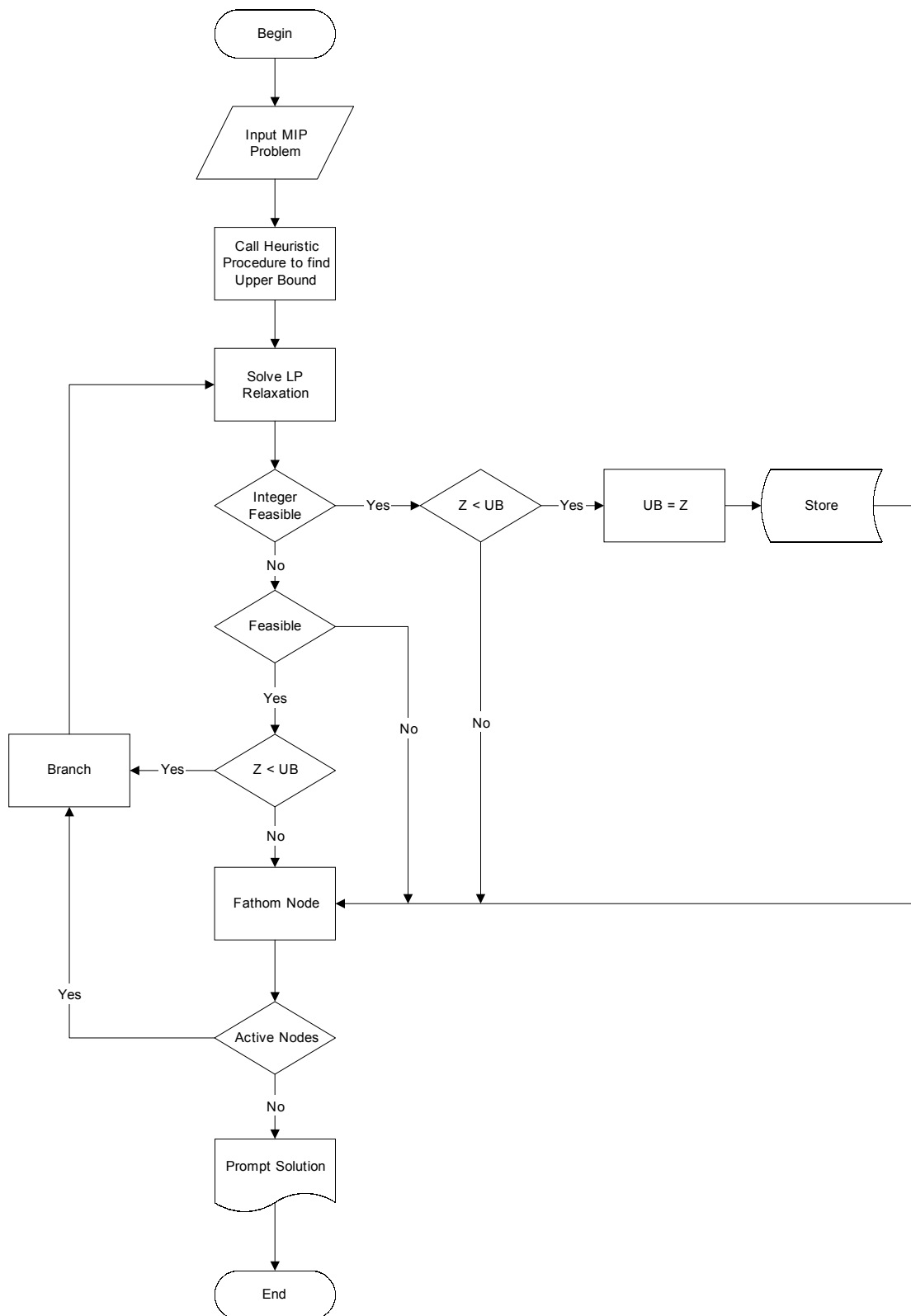
**Βήμα 4:** Επίλυση υπο-προβλημάτων με ΓΠ

Κάθε υπο-πρόβλημα επιλύεται με μεθόδους γραμμικού προγραμματισμού (simplex, dual simplex, κτλ.) παρέχοντας ένα όριο της αντικειμενικής συνάρτησης. Ανάλογα με το αποτέλεσμα, οι δυνατές ενέργειες είναι:

- Ο αλγόριθμος ΓΠ υποδεικνύει ότι το υπο-πρόβλημα είναι μη εφικτό και συνεπώς η αναζήτηση για λύσεις προς τη συγκεκριμένη κατεύθυνση σταματά σε αυτόν τον κόμβο. Ο κόμβος που αντιπροσωπεύει το συγκεκριμένο υπο-πρόβλημα λέγεται ότι έχει ερευνηθεί εις βάθος (fathomed).
- Η προκύπτουσα τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μεγαλύτερη από το ανώτερο όριο του αρχικού προβλήματος ΜΑΠ ( $Z > UB$ ). Η αναζήτηση στο σύνολο των εφικτών λύσεων του συγκεκριμένου υπο-προβλήματος τερματίζεται, αφού καμία από τις λύσεις που θα μπορούσαν να βρεθούν δεν αποτελούσε τη βέλτιστη λύση. Ο κόμβος που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο υπο-πρόβλημα λέγεται ότι έχει «κλαδευτεί».
- Η προκύπτουσα αντικειμενική τιμή είναι μικρότερη από το εκάστοτε άνω όριο και οι μεταβλητές  $x_2$  και  $x_3$  λαμβάνουν ακέραιες τιμές. Στην περίπτωση αυτή ο κόμβος που αντιπροσωπεύει το συγκεκριμένο υπο-πρόβλημα λέγεται ότι έχει ερευνηθεί εις βάθος και αν δεν προκύψει καμία καλύτερη λύση από την αναζήτηση στο υπόλοιπο δέντρο, αυτή η λύση θα αναγνωρισθεί ως βέλτιστη λύση.

Η αναζήτηση συνεχίζεται στο υπόλοιπο του δέντρου, εφόσον υπάρχουν ανεξερεύνητοι κόμβοι.

Ένα διάγραμμα ροής της μεθόδου branch-and-bound φαίνεται στο σχήμα 7.2.



Σχήμα 7.2 – Διάγραμμα ροής αλγόριθμου branch-and-bound

### 7.3 Στρατηγικές διακλάδωσης και διαίρεσης

Η απόδοση του αλγόριθμου branch-and-bound μπορεί να επηρεαστεί από τις στρατηγικές που χρησιμοποιούνται για την επιλογή της μεταβλητής διακλάδωσης, για τη διαίρεση του προβλήματος και για την επιλογή του υπο-προβλήματος που θα επιλυθεί πρώτο. Παρακάτω, οι κυριότερες από τις προσεγγίσεις αυτές παρουσιάζονται και αξιολογούνται.

#### 7.3.1 Επιλογή μεταβλητής διακλάδωσης

Πριν τη διαδικασία διαίρεσης του προβλήματος πρέπει να επιλεγεί η μεταβλητή διακλάδωσης βάσει της οποίας θα δημιουργηθούν οι κόμβοι παιδιά. Είναι σαφές ότι η επιλογή της μεταβλητής διακλάδωσης επηρεάζει το χρόνο επίλυσης του αλγόριθμου.

##### **Περισσότερο (λιγότερο) εφικτή ακέραια μεταβλητή**

Σε αυτήν την προσέγγιση, η ακέραια μεταβλητή της οποίας η προκύπτουσα κλασματική τιμή είναι κοντύτερα (μακρύτερα) σε (από) ακέραιο, επιλέγεται ως μεταβλητή διακλάδωσης. Αυτή είναι η πιο συνήθης στρατηγική για την επιλογή μεταβλητών διακλάδωσης.

##### **Ποινές Driebeck - Tomlin**

Οι ποινές δίνουν ένα κάτω όριο στην υποβάθμιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης λόγω της διακλάδωσης σε κάθε κατεύθυνση (δηλ. για κάθε πιθανή μεταβλητή). Οι ποινές είναι τα κόστη των δυϊκών ρινοί που χρειάζεται για να αφαιρεθεί η δεκαδική μεταβλητή από τη βάση. Αν απαιτούνται πολλά ρινοί για την αποκατάσταση της εφικτότητας στο αρχικό πρόβλημα, αυτές οι ποινές δεν παρέχουν σημαντικές πληροφορίες. Η άνω ποινή, κατά την υποχρεωτική μετατόπιση της κ-οστής βασικής μεταβλητής προς τα πάνω είναι:

$$u_k = \min_{j: a_{kj} < 0} \frac{(1 - f_k) \bar{c}_j}{-a_{kj}}$$

όπου  $f_k$  είναι το δεκαδικό μέρος της μεταβλητής  $x_k$ ,  $\bar{c}_j$  είναι το μειωμένο κόστος της μεταβλητής  $x_j$ , και  $a_{kj}$  είναι οι μετασχηματισμένες σταθερές της κ-οστής σειράς του πίνακα που προκύπτει από τη λύση του χαλαρωμένου προβλήματος

ΓΠ. Η ποινή για την υποχρεωτική μετατόπιση της  $k$ -οστής βασικής μεταβλητής προς τα κάτω είναι:

$$d_k = \min_{j: a_{kj} > 0} \frac{f_k \cdot \bar{c}_j}{a_{kj}}$$

Όταν οι ποινές έχουν υπολογιστεί, μία ποικιλία κανόνων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επιλογή της μεταβλητής διακλάδωσης (π.χ.  $\max (u_k; d_k)$ ,  $\min (u_k; d_k)$ ). Μία ποινή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον αποκλεισμό ενός κλάδου του δέντρου αν η αντικειμενική τιμή ΓΠ του κόμβου γονέα μείον την ποινή είναι χειρότερη από την εκάστοτε ακέραια λύση. Η μέθοδος των ποινών Driebeck - Tomlin γενικά αποφεύγεται διότι το κόστος σε υπολογιστικό χρόνο είναι πολλές φορές μεγαλύτερο από το όφελος που λαμβάνεται.

### Εκτίμηση ψευδο-κόστους

Τα ψευδο-κόστη παρέχουν έναν τρόπο να εκτιμηθεί η υποβάθμιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, αναγκάζοντας μία κλασματική μεταβλητή να πάρει τιμή ακεραίου. Αντίθετα με την προηγούμενη στρατηγική, η χρήση ψευδο-κοστών αποσκοπεί στην απεικόνιση του συνολικού κόστους και όχι μόνο του κόστους του πρώτου ρινοφ. Όταν μία μεταβλητή  $x_k$  σηματοδοτείται ως υποψήφια μεταβλητή διακλάδωσης, τα ψευδο-κόστη υπολογίζονται ως:

$$U_k = \frac{\bar{z}_k - z_k^u}{1 - f_k} \text{ και } D_k = \frac{\bar{z}_k - z_k^d}{f_k}$$

όπου  $f_k$  είναι το δεκαδικό μέρος της μεταβλητής  $x_k$ ,  $\bar{z}_k$  είναι η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του κόμβου γονέα,  $z_k^u$  είναι η αντικειμενική τιμή που προκύπτει από την μετατόπιση προς τα άνω και  $z_k^d$  είναι αντικειμενική τιμή κατά τη μετατόπιση προς τα κάτω (αν το πρόβλημα ΓΠ δεν έχει εφικτές λύσεις, το συνδεδεμένο με το συγκεκριμένο υπο-πρόβλημα κόστος δεν υπολογίζεται).

Αν μία μεταβλητή έχει χρησιμοποιηθεί επανειλημμένα για διακλάδωση, ένας μέσος όρος μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Ως μεταβλητή διακλάδωσης επιλέγεται αυτή που προκαλεί τη μεγαλύτερη υποβάθμιση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης, η οποία υποβάθμιση υπολογίζεται ως  $D_k f_k + U_k (1 - f_k)$ . Τα ψευδο-

κόστη δεν θεωρούνται κατάλληλα για προβλήματα που εμπλέκουν ένα μεγάλο αριθμό ακέραιων μεταβλητών.

### **Ψευδοτιμές**

Παρόμοια με τα ψευδο-κόστη, οι ψευδο-τιμές εκτιμούν το συνολικό κόστος στην αντικειμενική συνάρτηση από την αναγκαστική μετατόπιση μίας μεταβλητής από την κλασματική τιμή που προέκυψε από τη λύση του προβλήματος ΓΠ σε ακέραια τιμή. Άνω και κάτω ψευδο-τιμές για κάθε περιορισμό και ψευδο-τιμές για κάθε ακέραια μεταβλητή καθορίζονται από το χρήστη ή τους ανατίθενται αρχικές τιμές. Ο εκφυλισμός της αντικειμενικής συνάρτησης που προκύπτει από την ώθηση προς τα πάνω ή προς τα κάτω μίας ακέραιης μεταβλητής  $x_k$  σε ακέραια τιμή μπορεί να υπολογιστεί. Η επιλογή της μεταβλητής διακλάδωσης γίνεται με κριτήρια παρόμοια με αυτά των ψευδο-κοστών και των ποινών.

### **Ισχυρή διακλάδωση**

Η ισχυρή διακλάδωση, που εφαρμόζεται σε προβλήματα 0/1 μικτού ακεραίου προγραμματισμού εντός του αλγορίθμου branch-and-cut, εργάζεται ως εξής:

Έστω  $x_j$  οι μη-ακέραιες δυαδικές τιμές στο χαλαρωμένο πρόβλημα ΓΠ που βρίσκονται πιο κοντά στην τιμή 0.5. Για κάθε μία από τις μεταβλητές αυτές εκτελείται ένας αριθμός επαναλήψεων της δυικής μεθόδου Simplex, θέτοντας αρχικά  $x_j = 0$  και στη συνέχεια  $x_j = 1$ . Αν  $L_j$  και  $U_j$  είναι οι αντίστοιχες τιμές της αντικειμενικής συνάρτησης, τότε η μεταβλητή διακλάδωσης επιλέγεται βάσει του καλύτερα σταθμισμένου αθροίσματος αυτών των αντικειμενικών τιμών  $(L_j + U_j)$ .

### **7.3.2 Διάρθρωση προβλήματος**

Όταν εφαρμόζεται χαλάρωση γραμμικού προγραμματισμού, η διαίρεση του προβλήματος γίνεται μέσω της προσθήκης γραμμικών περιορισμών. Τυπικά, δύο νέοι κόμβοι δημιουργούνται σε κάθε διαίρεση. Έστω  $x_0$  μία βέλτιστη λύση στο χαλαρωμένο πρόβλημα ενός κόμβου του δέντρου branch-and-bound. Συνήθεις τακτικές διαίρεσης περιλαμβάνουν:

#### **Διχοτόμηση μεταβλητής**

Αν η  $x_{j_0}$  είναι κλασματική, τότε δημιουργούνται δύο κόμβοι, ο ένας με το απλό όριο  $x_j \leq \lfloor x_{j_0} \rfloor$  και ο άλλος με το όριο  $x_j \geq \lceil x_{j_0} \rceil$  όπου  $\lfloor x_{j_0} \rfloor$  και  $\lceil x_{j_0} \rceil$  είναι οι τιμές

πατώματος και οροφής αντίστοιχα. Ειδικότερα, αν η  $x_j$  είναι περιορισμένη στο να λαμβάνει δυαδικές τιμές, τότε η διακλάδωση έγκειται στον καθορισμό  $x_j=0$  και  $x_j=1$ , αντίστοιχα. Ένα πλεονέκτημα των απλών ορίων είναι διατηρούν το μέγεθος της βάσης μεταξύ των κόμβων του δέντρου branch-and-bound, αφού η μέθοδος Simplex μπορεί να χειριστεί άνω και κάτω όρια χωρίς την υποχρεωτική μεγέθυνση των διαστάσεων της βάσης.

### **Διχοτόμηση γενικευμένου άνω ορίου (GUB Dichotomy)**

Αν ο παρακάτω περιορισμός είναι παρών στο αρχικό πρόγραμμα μικτών ακεραίων,

$$\sum_{j \in Q} x_j = 1$$

και οι μεταβλητές  $x_{0i}$ ,  $i \in Q$  είναι κλασματικές, κάποιος μπορεί να διαιρέσει το  $Q=Q_1 \cup Q_2$  κατά τέτοιο τρόπο, ώστε:

$$\sum_{j \in Q_1} x_{j0} \equiv \sum_{j \in Q_2} x_{j0}$$

Τότε τα δύο κλαδιά μπορούν να σχηματιστούν θέτοντας:

$$\sum_{j \in Q_1} x_j = 0 \text{ και } \sum_{j \in Q_2} x_j = 0$$

αντίστοιχα.

### **7.3.3 Επιλογή κόμβου**

Δεδομένης μίας λίστας ενεργών προβλημάτων, κάποιος πρέπει να αποφασίσει ποιο υπο-πρόβλημα πρέπει να επιλεγεί για συνέχιση της εξερεύνησης. Η επιλογή αυτή θα επηρεάσει και τη δυνατότητα βελτίωσης της εκάστοτε βέλτιστης λύσης ΓΠ, την πιθανότητα τερματισμού της εξερεύνησης σε έναν κόμβο και το συνολικό αριθμό προβλημάτων που πρέπει να λυθούν μέχρι να βρεθεί το βέλτιστο. Παρακάτω παρουσιάζονται οι πλέον εφαρμοζόμενες προσεγγίσεις:



**Αναζήτηση σε βάθος με οπισθοχώρηση**

Επιλογή ενός παιδιού του προηγούμενου κόμβου ως επόμενο κόμβο. Αν ο κόμβος αποκοπεί επιλέγεται το άλλο παιδί. Αν και αυτός ο κόμβος «κλαδευτεί», τότε επιλέγεται ο πιο πρόσφατα δημιουργημένος ανεξερεύνητος κόμβος, ο οποίος θα είναι το άλλο παιδί του τελευταίου επιτυχημένου κόμβου.

**Καλύτερο όριο**

Μεταξύ όλων των ανεξερεύνητων κόμβων, επιλέγεται αυτός που έχει την καλύτερη αντικειμενική τιμή. Στην περίπτωση της ελαχιστοποίησης, επιλέγεται ο κόμβος με τη μικρότερη αντικειμενική τιμή. Η λογική είναι ότι, αφού οι κόμβοι μπορούν να «κλαδευτούν» μόνο όταν η αντικειμενική τιμή είναι μεγαλύτερη της εκάστοτε βέλτιστης αντικειμενικής τιμής, ο κόμβος με τη μικρότερη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης του προβλήματος ΓΠ δεν μπορεί να κλαδευτεί. Αυτό ισχύει επειδή η καλύτερη αντικειμενική τιμή που αντιστοιχεί σε ακέραια λύση δεν μπορεί να είναι μικρότερη από αυτή την ελάχιστη τιμή.

**Άθροισμα ακέραιων ανεφικτοτήτων**

Το άθροισμα των ανεφικτοτήτων σε έναν κόμβο υπολογίζεται ως εξής:

$$S = \sum_j \min(f_j, 1 - f_j)$$

Επιλέγεται ο κόμβος που έχει είτε το μεγαλύτερο ή το μικρότερο άθροισμα ακέραιων ανεφικτοτήτων.

**Καλύτερη εκτίμηση με χρήση ψευδο-κοστών**

Η τεχνική αυτή πρώτο-χρησιμοποιήθηκε μαζί με τη τεχνική των ψευδο-κοστών για την επιλογή της μεταβλητής διακλάδωσης. Τα ξεχωριστά ψευδο-κόστη μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση της αντικειμενικής τιμής με ακέραιες τιμές μεταβλητών, που μπορεί να προκύψει από τον κόμβο k:

$$\varepsilon_{k=} z_k - \sum_i \min[D_i f_i, U_i (1 - f_i)]$$

όπου  $z_k$  είναι η τιμή του χαλαρωμένου προβλήματος ΓΠ στον κόμβο k. Ο κόμβος με την καλύτερη εκτίμηση επιλέγεται ως ο επόμενος κόμβος προς εξερεύνηση.

**Καλύτερη εκτίμηση με χρήση ψευδο-τιμών**

Οι ψευδο-τιμές μπορούν επίσης να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση μίας εκτίμησης της προκύπτουσας από έναν κόμβο αντικειμενικής τιμής με ακέραιες τιμές μεταβλητών, οπότε ο κόμβος με την καλύτερη εκτίμηση επιλέγεται ως επόμενος κόμβος.

**Καλύτερη προβολή**

Μεταξύ όλων των ανεξερεύνητων κόμβων, γίνεται επιλογή αυτού που έχει την καλύτερη προβολή. Η προβολή είναι μία εκτίμηση της τιμής της αντικειμενικής συνάρτησης που σχετίζεται με μία ακέραιη λύση που προκύπτει από την εξερεύνηση του υπο-δέντρου που ξεκινά από τον εν λόγω κόμβο.

Ο υπολογισμός της προβολής λαμβάνει υπόψη την εκάστοτε τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης και ένα μέτρο της ακέραιης ανεφικτότητας. Πιο συγκεκριμένα, η προβολή  $p_k$  που σχετίζεται με τον κόμβο  $k$  ορίζεται ως:

$$p_k = z_k - \frac{s_k(\bar{z}_0 - z_{ip})}{s_0}$$

όπου  $\bar{z}_0$  είναι η αντικειμενική τιμή του προβλήματος ΓΠ στην ρίζα του δέντρου και  $s_k$  είναι το άθροισμα των ακέραιων ανεφικτοτήτων στον κόμβο  $k$ . Η προβολή είναι η στάθμιση μεταξύ της αντικειμενικής συνάρτησης και του αθροίσματος των ανεφικτοτήτων.

Ο συντελεστής βαρύτητας  $(\bar{z}_0 - z_{ip}) = s_0$  αντιστοιχεί στην κλίση της γραμμής που συνδέει τον κόμβο 0 και τον κόμβο που παρέχει την βέλτιστη ακέραιη λύση. Μπορεί να θεωρηθεί ως το κόστος της απομάκρυνσης μίας μονάδας ανεφικτότητας. Αν  $n_k$  είναι ο αριθμός των ακέραιων ανεφικτοτήτων στον κόμβο  $k$ , μία πιο γενική εξίσωση προβολής είναι η:

$$p_k = \bar{z}_k - \frac{w_k(\bar{z}_0 - z_{ip})}{w_0}$$

όπου  $\mu \in [0, 1]$  και  $w_k = \mu n_k + (1-\mu)s_k$ .

## **7.4 Σύγχρονες τεχνικές για την βελτίωση της απόδοσης του αλγορίθμου branch-and-bound**

Στην προσπάθεια να εξασφαλιστούν υψηλές επιδόσεις κατά την επίλυση προβλημάτων μικτού ακεραίου προγραμματισμού, σύγχρονα προγράμματα επίλυσης παρέχουν ειδικές διαδικασίες που αποσκοπούν στην ελαχιστοποίηση του υπολογιστικού χρόνου και στην απλοποίηση της διαδικασίας επίλυσης. Καθώς το μέγεθος και η πολυπλοκότητα των προβλημάτων βελτιστοποίησης αυξάνεται, αυτά τα χαρακτηριστικά γίνονται ολοένα και πιο απαραίτητα, όχι μόνο για τη βελτίωση της απόδοσης αλλά και για την εξασφάλιση ότι τα προβλήματα θα φτάσουν σε μία λύση. Οι διαδικασίες αυτές, οι οποίες περιγράφονται στις επόμενες παραγράφους προσεγγίζουν το στόχο υπό διαφορετικές γωνίες. Κάποιες στοχεύουν στη βελτίωση της αναπαράστασης του προβλήματος ενώ άλλες χρησιμοποιούν μεθόδους από το πεδίο της στοχαστικής βελτιστοποίησης.

### **7.4.1 Προεπεξεργασία και διερεύνηση**

Οι τεχνικές της προεπεξεργασίας και της διερεύνησης τροποποιούν την αναπαράσταση ενός προβλήματος μικτού ακεραίου προγραμματισμού επεμβαίνοντας στην περιοχή εφικτότητας και τους περιορισμούς, αφήνοντας άθικτο το σύνολο των εφικτών λύσεων του αρχικού προβλήματος. Με τον τρόπο αυτό είναι δυνατή η μείωση της διαφοράς μεταξύ των λύσεων του χαλαρωμένου προβλήματος ΓΠ και των ακεραίων λύσεων, μια λειτουργία απαραίτητη για τον αλγόριθμο branch-and-bound.

#### **7.4.1.1 Βασικές τεχνικές προεπεξεργασίας και διερεύνησης**

Αυτές οι βασικές τεχνικές αποσκοπούν στην βελτίωση της αναπαράστασης ενός προβλήματος ΜΑΠ, αναλύοντας με τη σειρά κάθε ανισότητα του συστήματος ανισοτήτων που ορίζουν την περιοχή εφικτότητας, προσπαθώντας να διαπιστώσουν αν μία ανισότητα ωθεί την περιοχή εφικτότητας να είναι άδεια, αν μία ανισότητα είναι περιττή, αν μία ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη βελτίωση των ορίων των μεταβλητών, αν η ανισότητα μπορεί να ενισχυθεί τροποποιώντας τους συντελεστές της ή να χρησιμοποιηθεί για την ανάθεση σταθερών τιμών στις δυαδικές μεταβλητές.

Μέχρι το τέλος της παρούσας ενότητας, θα χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος τύπος περιορισμού για προβλήματα ΜΑΠ:

$$\sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \leq b$$

όπου  $B = B^- \cup B^+$  είναι το σύνολο των δυαδικών μεταβλητών,  $C = C^- \cup C^+$  είναι το σύνολο των πραγματικών και ακεραίων μεταβλητών, και  $a_j > 0$ ,  $j \in B$  και  $g_j > 0$ ,  $j \in C$ . Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν γίνεται διάκριση μεταξύ πραγματικών και ακεραίων μεταβλητών. Επιπροσθέτως, θεωρείται ότι τα άνω και κάτω όρια των ακεραίων και πραγματικών μεταβλητών παριστάνονται με  $l_j$  και  $u_j$ .

Προτού εφαρμοστούν οι τεχνικές προεπεξεργασίας και διερεύνησης, το πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού ανακατασκευάζεται σε μία πιο συγκεντρωμένη μορφή όπου:

- αφαιρούνται όλες οι κενές (μηδενικές) γραμμές και στήλες
- αφαιρούνται οι γραμμές που είναι ανάλογες με μία άλλη γραμμή, συμπεριλαμβανομένων και ζευγών γραμμών των οποίων η υποστήριξη της μίας είναι υποσύνολο της υποστήριξης της άλλης.

### **Βασικές τεχνικές προεπεξεργασίας**

#### Αναγνώριση ανεφικτότητας

Έστω ότι οι περιορισμοί δίνονται στην ακόλουθη μορφή:

$$\sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \leq b$$

Χρησιμοποιώντας τα όρια της κάθε μεταβλητής είναι δυνατός ο υπολογισμός της ελάχιστης τιμής της LHS (Left Hand Side - Αριστερής Πλευράς) του περιορισμού.

Π.χ.

$$(LHS)_{\min} = \min \left\{ \sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \right\}$$

Αντικαθιστώντας τις δυαδικές, πραγματικές και ακέραιες μεταβλητές με τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους, ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται στην έκφραση του περιορισμού, λαμβάνεται:

$$(LHS)_{\min} = -\sum_{j \in B^-} a_j + \sum_{j \in C^+} g_j l_j - \sum_{j \in C^-} g_j u_j$$

Οι αντικαταστάσεις που έλαβαν χώρα είναι:

Δυαδικές μεταβλητές με θετικό πρόσημο:  $x_j = 0, j \in B^+$

Δυαδικές μεταβλητές με αρνητικό πρόσημο:  $x_j = 1, j \in B^-$

Πραγματικές και ακέραιες μεταβλητές με θετικό πρόσημο:  $y_j = l_j, j \in B^+$

Πραγματικές και ακέραιες μεταβλητές με αρνητικό πρόσημο:  $y_j = u_j, j \in B^-$

Αν αποδειχθεί ότι  $(LHS)_{\min} > RHS$  (Right Hand Side – Δεξιά πλευρά), η ανεφικτότητα του προβλήματος είναι προφανής.

#### Αναγνώριση περίσσειας

Ωθώντας τις μεταβλητές στα όρια τους είναι δυνατό να υπολογιστεί η μέγιστη τιμή της τιμής της LHS του περιορισμού:

Π.χ.

$$(LHS)_{\max} = \max \left\{ \sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \right\}$$

Αντικαθιστώντας τις δυαδικές, πραγματικές και ακέραιες μεταβλητές με τις μέγιστες και ελάχιστες τιμές τους, ανάλογα με το πρόσημο με το οποίο εμφανίζονται στον περιορισμό, λαμβάνεται:

$$(LHS)_{\max} = \sum_{j \in B^+} a_j + \sum_{j \in C^+} g_j u_j - \sum_{j \in C^-} g_j l_j$$

Οι αντικαταστάσεις που πραγματοποιήθηκαν είναι:

Δυαδικές μεταβλητές με θετικό πρόσημο:  $x_j = 1, j \in B^+$

Δυαδικές μεταβλητές με αρνητικό πρόσημο:  $x_j = 0, j \in B^-$

Πραγματικές και ακέραιες μεταβλητές με θετικό πρόσημο:  $y_j = u_j, j \in B^+$

Πραγματικές και ακέραιες μεταβλητές με αρνητικό πρόσημο:  $y_j = l_j, j \in B^-$

Αν βρεθεί ότι  $(LHS)_{\max} < RHS$ , γίνεται προφανές ότι ο εν λόγω περιορισμός είναι περιττός, δηλαδή δεν προσφέρει καμία δέσμευση στις μεταβλητές του προβλήματος.

### Αναγνώριση περιθωρίου βελτίωσης ορίων

Αφού αποδειχτεί ότι ο δοσμένος περιορισμός είναι έγκυρος (εφικτότητα), μπορεί να βρεθεί αν τα όρια μίας μεταβλητής (ακέραιας ή συνεχούς) μπορούν να βελτιωθούν (χαμηλότερα άνω όρια και υψηλότερα κάτω όρια), δίνοντας έτσι ένα πιο στενό πεδίο τιμών για κάθε μεταβλητή και κατά συνέπεια αποφεύγοντας ανώφελους υπολογισμούς.

Για παράδειγμα, για μία μεταβλητή που εμφανίζεται στον περιορισμό με θετικό πρόσημο, το άνω όριο αυτής μπορεί να βελτιωθεί αν:

$$-\sum_{j \in B^-} a_j + \sum_{j \in C^+ \setminus \{k\}} g_j l_j + g_k u_k - \sum_{j \in C^-} g_j u_j > b$$

δηλαδή αν κατά τον υπολογισμό του LHS έχοντας αντικαταστήσει τη συγκεκριμένη μεταβλητή με το ανώτατο όριο της, παραβιάζεται ο περιορισμός ( $LHS > RHS$ ).

Παρομοίως, για μία μεταβλητή που εμφανίζεται με αρνητικό πρόσημο στον περιορισμό, η συνθήκη που υπαγορεύει την βελτίωση του κάτω ορίου είναι:

$$-\sum_{j \in B^-} a_j + \sum_{j \in C^+} g_j l_j - \sum_{j \in C^- \setminus \{k\}} g_j u_j - g_j l_j > b$$

### **Βασικές τεχνικές διερεύνησης**

Οι τεχνικές διερεύνησης έγκεινται στην αναζήτηση λογικών συνδέσεων μεταξύ μεταβλητών, ήτοι θέτοντας μία δυαδική μεταβλητή σε ένα από τα όρια της (0 ή 1) και διερευνώντας τις λογικές συνέπειες. Αυτό ουσιαστικά γίνεται με την προσθήκη του περιορισμού  $x_k = 0$  ή  $x_k = 1$  στο σύνολο των περιορισμών του προβλήματος ΜΑΠ και εφαρμόζοντας τις βασικές τεχνικές προεπεξεργασίας. Οι ενέργειες που μπορούν να εκτελεστούν είναι οι ακόλουθες.

Σταθεροποίηση μεταβλητών

Έστω ότι ο δοσμένος περιορισμός είναι της μορφής:

$$\sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \leq b$$

Αν κατά την προσθήκη του περιορισμού  $x_k = 1$  ο παραπάνω περιορισμός παραβιαστεί για το ελάχιστο δυνατό LHS, τότε η μεταβλητή  $x_k$  μπορεί να σταθεροποιηθεί στην τιμή  $x_k = 1$ . Συνεπώς, μία δυαδική μεταβλητή  $x_k$ , που εμφανίζεται στον περιορισμό με θετικό πρόσημο, μπορεί να σταθεροποιηθεί στο 0 αν:

$$a_k - \sum_{j \in B^-} a_j + \sum_{j \in C^+} g_j |j| - \sum_{j \in C^-} g_j u_j > b$$

Ομοίως, μία δυαδική μεταβλητή  $x_k$  μπορεί να σταθεροποιηθεί στην τιμή  $x_k = 1$  αν:

$$- \sum_{j \in B^+ \setminus \{k\}} a_j + \sum_{j \in C^+} g_j |j| - \sum_{j \in C^-} g_j u_j > b$$

Βελτίωση συντελεστών

Η ιδέα της περίσσειας μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να αναγνωριστεί ένα πιθανό περιθώριο βελτίωσης των συντελεστών που εμφανίζονται σε έναν περιορισμό. Για παράδειγμα ο συντελεστής  $a_k$  της δυαδικής μεταβλητής  $x_k$  ( $k \in C^+$ ) μπορεί να μειωθεί αν η μέγιστη LHS, υπολογισμένη χρησιμοποιώντας την ελάχιστη τιμή για την  $x_k$  ( $x_k = 0$ ), είναι μικρότερη της RHS. Αυτό υπαγορεύει επίσης ότι η τιμή του RHS μπορεί να μειωθεί.

$$\sum_{j \in B^+ \setminus \{k\}} a_j + \sum_{j \in C^+} g_j u_j - \sum_{j \in C^-} g_j |j| < b$$

Το περιθώριο μεγέθυνσης των συντελεστών μπορεί να γίνει αντιληπτό με την ίδια τεχνική.

Προφανώς, όλες οι παραπάνω δοκιμές μπορούν να εκτελεστούν σε σταθερό χρόνο, αφού προηγηθεί ο υπολογισμός των  $(LHS)_{\min}$  and  $(LHS)_{\max}$ . Κατά συνέπεια, η εφαρμογή των βασικών τεχνικών προεπεξεργασίας και διερεύνησης σε όλες τις ανισότητες του συστήματος απαιτεί χρόνο  $O(n)$ , όπου  $n$  είναι ο συνολικός αριθμός των μη μηδενικών στοιχείων του συστήματος.

### 7.4.1.2 Προχωρημένες τεχνικές προεπεξεργασίας και διερεύνησης

#### Λογικές επαγωγές

Οι βασικές τεχνικές προεπεξεργασίας και διερεύνησης μπορούν να συνδυαστούν, έτσι ώστε να εξαχθούν λογικές συνδέσεις μεταξύ μεταβλητών, αναφερόμενες ως λογικές επαγωγές.

- Λογικές επαγωγές μεταξύ δυαδικών και συνεχών μεταβλητών

Ακολουθώντας την ίδια στρατηγική όπως για την αναγνώριση ανεφικτότητας ή περισσειας, ήτοι υπολογίζοντας τις ελάχιστες και μέγιστες LHS και συγκρίνοντας με την RHS του περιορισμού, μπορεί να αναγνωριστεί η ενδεχόμενη βελτίωση των συνεχών μεταβλητών διερευνώντας σε διάφορες δυαδικές μεταβλητές.

Για παράδειγμα αν:

$$(LHS)_2 < RHS < (LHS)_1 ,$$

όπου

$$(LHS)_1 = \min \left\{ \sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+ / \{m\}} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \right\} + g_m y_m$$

και

$$(LHS)_2 = \max \left\{ \sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^- / \{m\}} g_j y_j \right\} - g_m y_m$$

διερευνώντας πάνω στη μεταβλητή  $x_k$  ( $x_k = 1$ ), τότε το ανώτατο όριο και το κατώτατο όριο της  $y_m$  μπορούν να βελτιωθούν.

Στην περίπτωση που η διαδικασία διερεύνησης καταλήξει στη σταθεροποίηση της μεταβλητής  $y_m$ , τότε έχει προκύψει η λογική επαγωγή  $x_k = 1 \Rightarrow y_m = y_{\text{fixed}}$ .

- Λογικές επαγωγές μεταξύ δυαδικών μεταβλητών



Ομοίως, ελέγχοντας για ανεφικτότητα ή περίσσεια ενός περιορισμού ενόσω διερευνώνται δύο δυαδικές μεταβλητές, μπορούν να προκύψουν λογικές επαγωγές μεταξύ των δύο αυτών μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν με η ανάθεση  $x_k = x_m = 1$  οδηγήσει σε

$$(\text{LHS})_i = \min \left\{ \sum_{j \in B^+} a_j x_j - \sum_{j \in B^-} a_j x_j + \sum_{j \in C^+} g_j y_j - \sum_{j \in C^-} g_j y_j \right\} > \text{RHS} \quad (\text{ανεφικτότητα})$$

τότε διαμορφώνονται οι ακόλουθες λογικές επαγωγές:

$$x_k = 1 \Rightarrow x_m = 0$$

$$x_m = 1 \Rightarrow x_k = 0$$

Με παρόμοιο τρόπο, οι ακόλουθες λογικές επαγωγές μπορούν να αναγνωριστούν:

$$x_k = 0 \Rightarrow x_m = 0$$

$$x_m = 0 \Rightarrow x_k = 0$$

$$x_k = 0 \Rightarrow x_m = 1$$

$$x_m = 0 \Rightarrow x_k = 1$$

$$x_k = 1 \Rightarrow x_m = 1$$

$$x_m = 1 \Rightarrow x_k = 1$$

Οι λογικές επαγωγές που προκύπτουν από τον συνδυασμό των τεχνικών προεπεξεργασίας και διερεύνησης, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το σκανδαλισμό άλλων λογικών επαγωγών, μία τεχνική που εμπλουτισμένη διερεύνηση. Από τον συνδυασμό λογικών επαγωγών μπορούν να προκύψουν ανισότητες μεταξύ δυαδικών μεταβλητών (clique inequalities) ή μεταξύ δυαδικών και συνεχών μεταβλητών (implication inequalities).

#### 7.4.2 Μέθοδοι επιφανειακών τομών (Cutting Planes)

Οι μέθοδοι επιφανειακών τομών επικεντρώνονται στην βελτίωση της χαλαρωμένης εκδοχής του προβλήματος, ώστε να προσεγγίσει όσο το δυνατόν περισσότερο το πρόβλημα μικτού ακέραιου προγραμματισμού. Η χρήση επιφανειακών τομών παράλληλα με τον αλγόριθμο branch-and-bound έχει γίνει

τόσο ευρεία, που στις περισσότερες των περιπτώσεων χρησιμοποιείται ο όρος «branch-and-cut». Η βελτίωση που επιφέρεται στο χαλαρωμένο πρόβλημα ΓΠ έγκειται στην κατασκευή και προσθήκη περιορισμών που μειώνουν το μέγεθος της περιοχής εφικτότητας του προβλήματος ΓΠ, αφήνοντας όμως το σύνολο των εφικτών λύσεων του αυθεντικού προβλήματος ΜΑΠ άθικτο. Αυτοί οι περιορισμοί ονομάζονται επιφανειακές τομές. Ο αλγόριθμος branch-and-cut αναζητά για έναν περιορισμό, ο οποίος να παραβιάζεται από την εκάστοτε μη-ακέραιας μορφής λύση του προβλήματος ΓΠ, αλλά δεν παραβιάζεται από τη βέλτιστη ακέραιας μορφής λύση του αυθεντικού προβλήματος. Όταν ο παραπάνω περιορισμός προστεθεί στο πρόβλημα ΓΠ, η προκειμένη λύση καθίσταται άκυρη και επομένως ο αλγόριθμος θα παράγει μια νέα λύση (βέλτιστη στο ΓΠ) που προφανώς θα προσφέρει και ένα καλύτερο κατώτατο όριο.

Οι επιφανειακές τομές προστίθενται με επαναληπτικό τρόπο μέχρις ότου βρεθεί μία λύση ακέραιας μορφής ή μέχρι το σημείο που η εύρεση της επόμενης επιφανειακής τομής αποβεί αδύνατη ή χρονοβόρα. Αντίθετα με την branch-and-cut, η μέθοδος cut-and-branch προσθέτει επιφανειακές τομές μόνο στη ρίζα του δέντρου αναζήτησης. Συνήθως, σε εφαρμογές αυτής της μεθόδου χρειάζεται ιδιαίτερα μεγάλη προσπάθεια για την παραγωγή επιφανειακών τομών, απαιτώντας πολύ περισσότερο χρόνο σε σχέση με την επίλυση του προβλήματος ΓΠ στη ρίζα του δέντρου. Το πλεονέκτημα όμως είναι ότι οι επιφανειακές τομές που παράγονται είναι έγκυρες για όλο το δέντρο αναζήτησης. Η μέθοδος cut-and-branch είναι μία εξαιρετική μέθοδος για πολλά γενικά προβλήματα ακέραιου προγραμματισμού, αλλά υστερεί της ισχύος του αλγόριθμου branch-and-cut για μερικά δύσκολα προβλήματα.

Παρακάτω περιγράφεται ο αλγόριθμος branch-and-cut και παρουσιάζονται οι πλέον σημαντικές μέθοδοι κατασκευής επιφανειακών τομών.

## Μέθοδος *branch-and-cut*

### Βήμα 1

Επίλυση του χαλαρωμένου προβλήματος ΓΠ.

### Βήμα 2

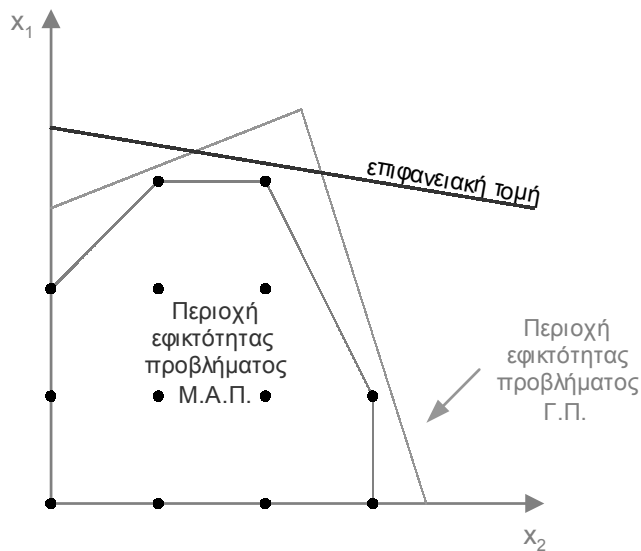
Αν η λύση του προβλήματος ΓΠ είναι εφικτή λύση του προβλήματος ΜΑΠ τότε γίνεται τερματισμός με βέλτιστα αποτελέσματα.

### Βήμα 3

Αλλιώς, είτε πραγματοποιείται διακλάδωση ή αναζητούνται μία ή περισσότερες επιφανειακές τομές που αποκόπτουν τη βέλτιστη λύση που προέκυψε από το χαλαρωμένο πρόβλημα ΓΠ, από το κυρτό σύνολο των εφικτών ακέραιων σημείων, προσθέτοντας ένα υποσύνολο περιορισμών στο πρόβλημα ΓΠ.

### Βήμα 4

Επιστροφή στο πρώτο βήμα.



Σχήμα 7.3 – Μία επιφανειακή τομή

### Συνήθεις μέθοδοι κατασκευής επιφανειακών τομών

Οι πιο γενικές και εύκολες στην υλοποίηση τους επιφανειακές τομές είναι οι τομές μικτών ακεραίων Gomory, που συνδυάζουν δύο ευνοϊκά χαρακτηριστικά: στρογγυλοποίηση και διάζευξη. Μέσω της διάζευξης, οι τομές Gomory διατηρούν κάτι από την αποτελεσματικότητα της διακλάδωσης (branching) χωρίς όμως να επιβαρύνουν το δέντρο αναζήτησης με πρόσθετους κόμβους. Οι τομές μικτών ακεραίων Gomory λαμβάνονται συνδυάζοντας τις ανισότητες του χαλαρωμένου προβλήματος ΓΠ, με πρόσθετη απαίτηση κάποιες από τις μεταβλητές που εμπλέκονται στις εν λόγω ανισότητες να είναι ακέραιες.

Ένας άλλος ευρέως διαδεδομένος τύπος επιφανειακών τομών είναι οι τομές τύπου knapsack. Η ιδέα είναι η εύρεση ισχυρών επιφανειακών τομών από το πρόβλημα του γυλιού (knapsack) και η προσθήκη τους στο χαλαρωμένο πρόβλημα ΓΠ ως επιφανειακές τομές.

Οι ανισότητες επικάλυψης (cover cuts) λαμβάνονται από τους περιορισμούς που εμπλέκουν μόνο δυαδικές μεταβλητές με μη μοναδιαίους συντελεστές. Για έναν περιορισμό τύπου knapsack μία τομή επικάλυψης αποτελείται από ένα υποσύνολο των μεταβλητών που εμπλέκονται στον περιορισμό, τέτοιο ώστε αν όλες οι μεταβλητές λάμβαναν την τιμή 1 ο περιορισμός θα παραβιαζόταν, αλλά αν μία από τις μεταβλητές αυτές αποκλειόταν ο περιορισμός θα παρέμενε έγκυρος.

Οι τομές GUB (Generalized Upper Bound – Γενικευμένου Ανωτάτου Ορίου) αποτελούν επέκταση των τομών knapsack και εκμεταλλεύονται την ύπαρξη περιορισμών γενικευμένου ανωτάτου ορίου ( $\sum_{j \in C} x_j \leq 1$ ). Αν οι μεταβλητές που εμπλέκονται σε έναν περιορισμό GUB είναι επίσης μέλη ενός περιορισμού τύπου knapsack, τότε η επιφανειακή τομή μπορεί να επιλεγθεί λαμβάνοντας υπόψη ότι μόνο μία εκ των μεταβλητών αυτών μπορεί να λαμβάνει την τιμή 1 σε μία λύση. Στην περίπτωση αυτή η επιφανειακή τομή GUB είναι πιο ισχυρή από τις κοινές τομές.

Οι ανισότητες «κλικας» κατασκευάζονται πριν από την εκκίνηση της βελτιστοποίησης παρατηρώντας τις σχέσεις μεταξύ δυαδικών μεταβλητών. Οι σχέσεις αυτές παρέχονται από τους περιορισμούς που εμπεριέχουν μόνο δυαδικές μεταβλητές του αρχικού προβλήματος ΜΑΠ.

Τέλος, μία μέθοδος που μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε προβλήματα 0/1 ΜΑΠ είναι η κατασκευή και τομών lift & project (ανύψωση και προβολή). Η συλλογιστική αυτής της μεθόδου είναι η κατασκευή επιφανειακών τομών για ένα πρόβλημα ΜΑΠ μεγαλύτερων διαστάσεων από το δοσμένο και η προβολή τους στον αρχικό χώρο, που έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία πιο συμπαγών εκφράσεων. Λόγω της επιβάρυνσης σε υπολογιστικό χρόνο, η κατασκευή επιφανειακών τομών αυτού του τύπου περιορίζεται στον κόμβο-ρίζα του δέντρου αναζήτησης. Εντούτοις, οι τομές αυτές μπορεί να αποδειχθούν πολύ αποτελεσματικές.

Οι παραπάνω μέθοδοι κατασκευής επιφανειακών τομών δεν είναι συνήθως αρκετά ισχυρές για την επίλυση ενός προβλήματος ΜΑΠ από μόνες τους, και για το λόγο αυτό είναι πιο αποτελεσματικές όταν εφαρμόζονται σε αλγόριθμους branch-and-cut για ΜΑΠ. Η υπολογιστική δαπάνη για την αναζήτηση επιφανειακών τομών μπορεί να αποδειχθεί απαγορευτική. Συνεπώς, είναι σύνηθες να αναζητούνται επιφανειακές τομές μόνο σε ορισμένους κόμβους του δέντρου. Μία εναλλακτική προσέγγιση αφορά την αναζήτηση επιφανειακών τομών σε κάθε κόμβο του δέντρου αλλά έως ένα συγκεκριμένο βάθος. Σε μερικές υλοποιήσεις εφαρμόζεται ένας συγκεκριμένος αριθμός αναζητήσεων επιφανειακών τομών σε έναν κόμβο, με ίσως περισσότερες αναζητήσεις στον κόμβο-ρίζα και λιγότερες σε χαμηλότερους κόμβους του δέντρου.

### **Ανύψωση επιφανειακών τομών**

Μία επιφανειακή τομή που προστίθεται σε έναν κόμβο του δέντρου branch-and-bound μπορεί κάλλιστα να είναι άκυρη για ένα άλλο υπο-πρόβλημα. Φυσικά, δεν είναι απαραίτητο να προστεθεί η ίδια επιφανειακή τομή σε άλλον κόμβο και στην προκειμένη περίπτωση η τομή ονομάζεται τοπική επιφανειακή τομή. Η εν λόγω τομή θα επηρεάζει μόνο το συγκεκριμένο υπο-πρόβλημα και τους «απογόνους» αυτού. Το μειονέκτημα μίας προσέγγισης σαν αυτή είναι η ενδεχόμενη αυξημένη απαίτηση μνήμης για την αποθήκευση των διαφορετικών εκδοχών του προβλήματος για κάθε κόμβο του δέντρου. Για το σκοπό της εύρεσης μίας επιφανειακής τομής που να είναι έγκυρη για όλο το δέντρο, είναι απαραίτητο να ανυψωθεί. Η ανύψωση μίας επιφανειακής τομής έγκειται στη διαμόρφωση του περιορισμού που εκφράζει την τομή, έτσι ώστε να είναι έγκυρος για όλους τους κόμβους του δέντρου αναζήτησης.

### 7.4.3 Σταθεροποίηση μειωμένου κόστους

Το μέγεθος του δέντρου branch-and-bound μπορεί να μειωθεί σημαντικά εφαρμόζοντας σταθεροποίηση μειωμένου κόστους (reduced cost fixing) στον κόμβο-ρίζα, ως αποτέλεσμα της σταθεροποίησης και κατά συνέπεια της αφαίρεσης από τη διαδικασία επίλυσης, ορισμένων μη-βασικών μεταβλητών. Οι μεταβλητές αυτές θα λαμβάνουν εγγυημένα τις σταθερές αυτές τιμές σε μία βέλτιστη λύση στο πρόβλημα ΜΑΠ, αν τα μειωμένα κόστη τους είναι αρκετά μεγάλα. Στην σταθεροποίηση μειωμένου κόστους, μία μη-βασική μεταβλητή  $x_k$  ( $l_k \leq x_k \leq u_k$ ) μπορεί να σταθεροποιηθεί στο ανώτατο ή κατώτατο όριο της αν:

$$z_{LP} - z_{IP} \leq -c_k \Rightarrow x_k = l_k$$

$$z_{LP} - z_{IP} \leq c_k \Rightarrow x_k = u_k$$

όπου  $z_{LP}$  είναι η αντικειμενική τιμή που αντιστοιχεί στη βέλτιστη λύση του χαλαρωμένου προβλήματος ΓΠ,  $z_{IP}$  είναι η αντικειμενική τιμή που αντιστοιχεί σε μία εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος ΜΑΠ και  $c_k$  είναι το μειωμένο κόστος της μη-βασικής μεταβλητής  $x_k$ .

### 7.4.4 Στοχαστικές διαδικασίες

Παρότι οι στοχαστικές μέθοδοι (heuristics) έχουν ευρύτερη εφαρμογή σε μη-γραμμικά προβλήματα, η ευεργετική επίδραση τους στην ταχεία εύρεση ακέραια εφικτών λύσεων είχε ως αποτέλεσμα τη χρήση τους παράλληλα με το βασικό αλγόριθμο ΜΑΠ, branch-and-bound. Η δυνατότητα εύρεσης εφικτών ακέραιων λύσεων γρήγορα είναι σημαντικό θέμα, αφού αυτές οι λύσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ανώτατα όρια στη μέθοδο branch-and-bound, μειώνοντας με αυτόν τον τρόπο το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης. Έμμεσα, η χρήση των ακέραια εφικτών λύσεων που προκύπτουν από στοχαστικές διαδικασίες στη σταθεροποίηση μειωμένου κόστους μπορεί να οδηγήσει σε πρόσθετη μείωση του δέντρου branch-and-bound.

Εν συντομία, οι κύριοι τύποι στοχαστικών διαδικασιών που εφαρμόζονται παράλληλα με τον αλγόριθμο branch-and-bound είναι:

**Άπληστοι αλγόριθμοι**, που εργάζονται επιλέγοντας διαδοχικά μεταβλητές βάσει της καλύτερης βελτίωσης στην αντικειμενική τιμή.

**Τοπική αναζήτηση**, που επικεντρώνεται στην αναζήτηση σε μία «γειτονιά» μίας δοσμένης αθέραια εφικτής λύσης για μία εφικτή λύση με καλύτερη αντικειμενική τιμή.

**Τυχαία απαρίθμηση**, στην οποία η αναζήτηση εκτελείται με τυχαίο τρόπο. Στους γενετικούς αλγόριθμους, ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα μεθόδου τυχαίας απαρίθμησης, η τυχειότητα μοντελοποιείται βάσει μηχανισμών που συναντώνται στη βιολογία.

**Αλγόριθμοι ΓΠ εναλλαγής βασικού – δυϊκού**, που βασίζονται στην αλληλεπίδραση μεταξύ βασικών και δυϊκών λύσεων (η λύση του δυϊκού ενός χαλαρωμένου προβλήματος ΓΠ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον εντοπισμό της λύσης στο αρχικό χαλαρωμένο πρόβλημα ΓΠ).

Όπως αναφέρθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ένα από τα πιο ανεπιθύμητα χαρακτηριστικά των στοχαστικών μεθόδων είναι η ενδεχόμενη παγίδευση του αλγόριθμου σε τοπικό βέλτιστο. Προεκτάσεις των παραπάνω μεθόδων, αναφερόμενες ως μέθοδοι meta-heuristics, κατέχουν μηχανισμούς απομάκρυνσης από τα τοπικά βέλτιστα για την αναζήτηση του συνολικού βέλτιστου, μία διαδικασία της οποίας η αποτελεσματικότητα είναι πάλι περιορισμένη. Παραδείγματα τέτοιων μεθόδων είναι οι γενετικοί αλγόριθμοι και η προσομοιωμένη ενδυνάμωση (simulated annealing). Μία άλλη κατηγορία στοχαστικών μεθόδων είναι οι διαδικασίες primal-heuristics. Αλγόριθμοι αυτού του τύπου επικεντρώνονται στην αναζήτηση ενός πιθανού βέλτιστου με διαδοχική σταθεροποίηση και στρογγυλοποίηση μεταβλητών, μεταξύ λύσεων που, αν και μη-αθέραια εφικτές, έχουν μία σχετικά καλή αντικειμενική τιμή.

Στις περισσότερες υλοποιήσεις, εφαρμόζεται ένας συνδυασμός των παραπάνω μεθόδων έτσι ώστε να ληφθούν τα καλύτερα δυνατά αποτελέσματα. Εντούτοις, η αποτελεσματικότητα μίας στοχαστικής μεθόδου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό στην δομή του προβλήματος και συνεπώς δεν υπάρχει ένας συνδυασμός των παραπάνω διαδικασιών που να εφαρμόζεται με επιτυχία σε όλες τις περιπτώσεις.

#### 7.4.5 Επίλυση προχωρημένης βάσης

Όταν εφαρμόζεται η γραμμική χαλάρωση εντός του αλγορίθμου branch-and-bound, είναι σύνηθες να χρησιμοποιείται ένας αλγόριθμος βασισμένος στη μέθοδο Simplex για την επίλυση κάθε υπο-προβλήματος, χρησιμοποιώντας έναν δυϊκό Simplex αλγόριθμο για την επανα-βελτιστοποίηση από τη βέλτιστη βάση του κόμβου-γονέα. Η τεχνική αυτή έχει αποδειχθεί ότι μειώνει τον αριθμό των επαναλήψεων του αλγορίθμου Simplex για την επίλυση του κόμβου-παιδί μέχρι βέλτιστου, και κατά συνέπεια επιταχύνει τη συνολική υπολογιστική διαδικασία.

#### 7.5 Εφαρμογή στο πρόβλημα ένταξης μονάδων

Η αποτελεσματικότητα των μεθόδων μικτού ακέραιου προγραμματισμού στο πρόβλημα ένταξης μονάδων έχει αποδειχθεί με το παραπάνω. Ο αλγόριθμος branch-and-bound ή branch-and-cut για την ακρίβεια, ενοποιημένος με τις ειδικές διαδικασίες που περιγράφηκαν στις προηγούμενες ενότητες έχει αποδειχθεί ότι ικανοποιεί τα κριτήρια του βέλτιστου και του εφικτού σε πολυάριθμες εφαρμογές. Παρόλα αυτά, οι επιδόσεις της μεθόδου επίλυσης μπορεί να εμφανίζει αποκλίσεις, ανάλογα με το συνδυασμό των διαδικασιών που εφαρμόζονται κάθε φορά. Είναι δυνατό, μία διαδικασία να απαιτεί εξαιρετικά μεγάλο χρόνο χωρίς τελικά να παρέχει χρήσιμα αποτελέσματα, επιβαρύνοντας τη διαδικασία επίλυσης. Δυστυχώς, αφού κάθε πρόβλημα χαρακτηρίζεται από μία μοναδικότητα, βασισμένη στη δομή του, το μέγεθος του ή ακόμα και στα εισαγόμενα δεδομένα, δεν υπάρχει κάποιος ακριβής κανόνας επιλογής των καταλληλότερων συμπληρωματικών διαδικασιών. Το χαρακτηριστικό της μοναδικότητας αντιμετωπίζεται σχεδόν σε όλους τους τύπους προβλημάτων βελτιστοποίησης.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί σε βιβλιογραφία σχετική με το αντικείμενο της βελτιστοποίησης, η συνήθης μέθοδος προσδιορισμού της αποτελεσματικότητας ενός συνδυασμού από τις παραπάνω μεθόδους είναι η δοκιμή του σε μία βιβλιοθήκη προβλημάτων βελτιστοποίησης ΜΑΠ (MILIB) που έχει δημιουργηθεί για ερευνητικούς και εκπαιδευτικούς σκοπούς, και αναγνώρισης των τύπων των προβλημάτων που μπορεί να εφαρμοστεί με επιτυχία. Κατά συνέπεια, μία παρόμοια τακτική πρέπει να χρησιμοποιηθεί και για το πρόβλημα ένταξης μονάδων: για κάθε υλοποίηση πρέπει να εκτελεστούν δοκιμές με διαφορετικούς



συνδυασμούς μεθόδων επίλυσης μέχρι να εντοπιστεί ο πλέον αποτελεσματικός, λαμβάνοντας υπόψη ότι η δομή και το μέγεθος κάθε υλοποίησης παρουσιάζει κάποια σχετική σταθερότητα. Αυτό μπορεί να ισχύσει και για τα εισαγόμενα δεδομένα του προβλήματος ένταξης μονάδων, καθότι έχει δειχθεί ότι τα δεδομένα που σχετίζονται με τη ζήτηση και την παραγωγή ενέργειας παρουσιάζουν κάποια επαναληψιμότητα.

## Κεφάλαιο 8

### Κατασκευή μοντέλου βελτιστοποίησης

#### 8.1 Γενικά

Για την επίλυση ενός προβλήματος προγραμματισμού παραγωγής με περιορισμένους πόρους ακολουθείται συνήθως η εξής διαδικασία: ανάλυση του σχήματος παραγωγής, διατύπωση και ορισμός του προβλήματος βελτιστοποίησης, επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επίλυσης, και τέλος ανάπτυξη και δοκιμή ενός μαθηματικού μοντέλου βελτιστοποίησης. Μέχρι αυτό το σημείο και για τον τύπο προβλήματος βελτιστοποίησης που μελετάται στην παρούσα εργασία, έχουν καλυφθεί τα τρία πρώτα στάδια: η θερμοδυναμική ανάλυση των θερμικών μονάδων συμπαραγωγής, ο ορισμός του προβλήματος ένταξης μονάδων και η επιλογή της μεθόδου επίλυσης του μικτού ακέραιου προγραμματισμού, που εφαρμόζεται σε μη γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης κατόπιν της εφαρμογής μεθόδων γραμμικοποίησης. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετηθεί η διαδικασία κατασκευής ενός μαθηματικού μοντέλου για τον προγραμματισμό παραγωγής με περιορισμένους πόρους σε σταθμούς συμπαραγωγής και η αξιολόγηση των διαφόρων τεχνικών βελτιστοποίησης.

## 8.2 Η έννοια του μαθηματικού μοντέλου

Μαθηματικό μοντέλο ονομάζεται η μαθηματική περιγραφή ενός ή περισσότερων αντικειμένων που έχει κατασκευαστεί με σκοπό να παρουσιάζει τα χαρακτηριστικά και τις λειτουργίες των αντικειμένων αυτών. Ο όρος 'μαθηματικό' έγκειται στη χρησιμοποίηση μαθηματικών συμβολισμών και εκφράσεων για την αναπαράσταση των εσωτερικών σχέσεων που εμφανίζονται στο αντικείμενο που περιγράφεται από το μοντέλο. Μπορεί κανείς να αναφέρει διάφορους λόγους για τους οποίους η κατασκευή ενός μοντέλου μπορεί να αποδειχθεί συμφέρουσα:

- ▶ Η μοντελοποίηση δίνει τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων με τρόπο συστηματικό και με λιγότερους πρακτικούς περιορισμούς όσον αφορά την πολυπλοκότητα και το μέγεθος του προβλήματος.
- ▶ Κατά τη διαδικασία της ανάπτυξης ενός μοντέλου μπορούν να αποκαλυφθούν ιδιότητες και εσωτερικές σχέσεις που δεν ήταν γνωστές εξ αρχής. Επίσης, κατά την ανάλυση του προβλήματος που μοντελοποιείται ενδέχεται να φανερωθούν χαρακτηριστικά που καθιστούν μια μέθοδο επίλυσης πιο ευνοϊκή από τις άλλες.
- ▶ Με τη μοντελοποίηση παρέχεται η δυνατότητα πειραματισμού, πράγμα που τις περισσότερες φορές είναι παρακινδυνευμένο ή και απαγορευτικό για το ίδιο το αντικείμενο που μοντελοποιείται. Χαρακτηριστικό παράδειγμα θα μπορούσε να αποτελέσει και το θέμα αυτής της εργασίας' είναι προφανές ότι η παραγωγική διαδικασία σε ένα σταθμό παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας δεν επιδέχεται αυθόρμητες και ακανόνιστες αλλαγές στην κατά την αναζήτηση της καλύτερης δυνατής σύνθεσης του σχήματος παραγωγής, καθότι αυτό μπορεί να προκαλέσει την αστοχία του σταθμού και ίσως και του ευρύτερου δικτύου.
- ▶ Δεν υπάρχει ένας αυστηρός κανόνας για την κατασκευή ενός μοντέλου. Κάθε μοντέλο μπορεί να ενσωματώσει περισσότερες ή λιγότερες εσωτερικές σχέσεις και χαρακτηριστικά του αντικειμένου. Επίσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι

αναπαράστασης μίας εσωτερικής σχέσης, κάποιιο πιο ακριβείς και κάποιιο άλλοιο πιο προσεγγιστικοί. Είναι στην κρίση αυτού που κατασκευάζει το μοντέλο το ποια χαρακτηριστικά και σχέσεις θα ενσωματώσει και με ποιο τρόπο' αρκεί να έχει γνώση της βαρύτητας που δίνει στα αποτελέσματα που θα παρέχει το μοντέλο όταν δοκιμαστεί.

Η δυνατότητα του πειραματισμού που αναφέρθηκε παραπάνω βασίζεται στο γεγονός ότι οι εσωτερικές σχέσεις που ενσωματώνονται στο μαθηματικό μοντέλο είναι σε μεγάλο βαθμό ανεξάρτητες από τα δεδομένα χρησιμοποιούνται. Ένα μαθηματικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές και με διαφορετικά δεδομένα εισόδου, π.χ. κόστη, ζητήσεις, τεχνικές παραμέτρους, κ.ο.κ.

Σχετικά με την καταλληλότητα των μαθηματικών μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων όπως αυτό του προγραμματισμού της παραγωγής πρέπει να διευκρινιστούν δύο θέματα. Το ένα αφορά την αποτελεσματικότητα στην αναπαράσταση ενός φυσικού προβλήματος με μαθηματικό τρόπο. Είναι σαφές ότι υπάρχουν προβλήματα που δύσκολα μπορούν να περιγραφούν με μαθηματικά μοντέλα' προβλήματα αυτού του τύπου ενσωματώνουν έννοιες που μπορούν να χαρακτηριστούν μάλλον υποκειμενικές και που δύσκολα μπορεί να δεχθεί κανείς ότι μια μαθηματική εξίσωση μπορεί να τις περιγράψει. Στην πλειοψηφία τους όμως οι εφαρμογές των μαθηματικών μοντέλων σε καθημερινά απαντώμενα προβλήματα είναι περισσότερο από επιτυχείς. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί και το πρόβλημα που αντιμετωπίζεται στην παρούσα εργασία, όπου η καταλληλότητα ενός μαθηματικού μοντέλου είναι αυταπόδεικτη' όλες οι διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε ένα σύστημα συμπαραγωγής βασίζονται σε θεμελιώδεις νόμους της φυσικής, των οποίων η μαθηματική έκφραση είναι αδιαμφισβήτητη και εκτός αυτού, όλα τα συνθετικά στοιχεία που απαρτίζουν τις διατάξεις συμπαραγωγής έχουν κατασκευαστεί βάσει μαθηματικών σχέσεων και υπολογισμών.

Ένα άλλο θέμα που χρίζει συζήτησης είναι αυτό της ακρίβειας των αποτελεσμάτων. Αυτό το θέμα αγγίζει τόσο την εσωτερική δομή του μαθηματικού μοντέλου όσο και την αληθοφάνεια των δεδομένων του κάθε προβλήματος. Όσον αφορά το δεύτερο είναι προφανές ότι για να

περιμένει κανείς αξιόπιστα αποτελέσματα πρέπει να παρέχει όσο το δυνατόν ακριβέστερα δεδομένα. Επίσης είναι σαφές ότι όσο πιο ακριβές και αντιπροσωπευτικό του αντικειμένου είναι το μαθηματικό μοντέλο, τόσο περισσότερο μπορεί κανείς να βασιστεί στα αποτελέσματα που θα παράγει. Από την άλλη, η κατασκευή ενός μοντέλου που χαρακτηρίζεται από τη μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια στην αναπαράσταση του αντικειμένου, είναι κάποιες φορές παρακινδυνευμένη καθότι κατά τη δοκιμή του το μοντέλο μπορεί να αποδειχθεί πολύ “βαρύ” και να χρειαστούν μέρες ή μήνες μέχρι να φτάσει σε σημείο να παράγει αποτελέσματα. Είναι πάντα θέμα του τι ζητείται κάθε φορά: όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστα αποτελέσματα ανεξαιρέτως του πόσος χρόνος θα απαιτηθεί για να παραχθούν ή αρκούντως προσεγγιστικά αποτελέσματα σε εύλογο χρόνο; Αυτό που μπορεί κανείς να πει με βεβαιότητα, είναι ότι με τη χρήση μαθηματικών μοντέλων και εφόσον τηρηθούν αυστηρές απαιτήσεις όσον αφορά την περιγραφή του προβλήματος και την αξιοπιστία των δεδομένων, τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από την επίλυση του προβλήματος θα είναι αξιόπιστα.

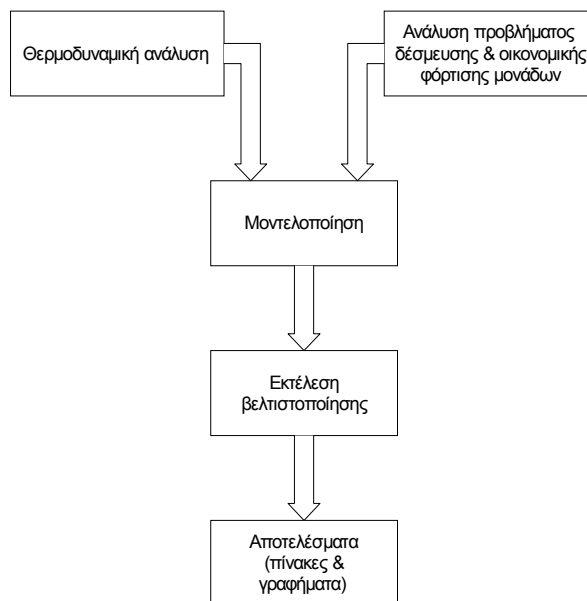
Η μαθηματική μοντελοποίηση είναι στενά συνδεδεμένη με την έννοια της βελτιστοποίησης' όλα τα προβλήματα που δύνανται να περιγραφούν με μαθηματικά μοντέλα αποσκοπούν στην ελαχιστοποίηση ή μεγιστοποίηση ενός ή περισσότερων μεγεθών. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι συνήθως προφανές αλλά υπάρχουν και περιπτώσεις όπου απαιτείται διεξοδική ανάλυση του προβλήματος μέχρι να αναγνωρισθεί ο σκοπός της βελτιστοποίησης.

Η διαδικασία που ακολουθείται για την επίλυση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης, όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγική ενότητα του παρόντος κεφαλαίου, περιλαμβάνει τα εξής στάδια:

1. Αναγνώριση του προβλήματος. Στο στάδιο αυτό εντοπίζονται οι μεταβλητές του προβλήματος, τα μεγέθη που πρέπει να ελαχιστοποιηθούν (ή μεγιστοποιηθούν) και οι περιορισμοί που ενσωματώνονται στο πρόβλημα.

2. Ανάλυση του προβλήματος για την αναγνώριση των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ των μεγεθών που εμπλέκονται στο πρόβλημα.
3. Επιλογή της κατάλληλης μεθόδου βελτιστοποίησης για την επίλυση του προβλήματος. Επίσης ενδέχεται να απαιτηθεί η αναζήτηση τεχνικών τροποποίησης του προβλήματος για την εφαρμογή της μεθόδου βελτιστοποίησης που τελικά επελέγη.
4. Η κατασκευή του μαθηματικού μοντέλου με βάση τα αποτελέσματα των προηγούμενων τριών σταδίων και η δοκιμή του με πραγματικά ή πρότυπα δεδομένα.

Τα τρία πρώτα στάδια της διαδικασίας μοντελοποίησης για το πρόβλημα βελτιστοποίησης που πραγματεύεται η παρούσα εργασία έχουν καλυφθεί στα προηγούμενα κεφάλαια. Το τέταρτο και τελευταίο στάδιο παρουσιάζεται σε αυτό το κεφάλαιο. Για λόγους πληρότητας όμως και για το σκοπό της παρουσίασης της συνολικής διαδικασίας κατασκευής ενός μαθηματικού μοντέλου, σε όσα σημεία θεωρείται χρήσιμο γίνεται η σχετική αναδρομή.



**Σχήμα 8.1** – Διαδικασία επίλυσης του προβλήματος προγραμματισμού παραγωγής με περιορισμένους πόρους

Μία σύντομη περιγραφή του συστήματος μοντελοποίησης, του προγράμματος επίλυσης και της διεπαφής προγραμματισμού πόρων που χρησιμοποιείται για την υλοποίηση του πρότυπου έργου γίνεται στην ενότητα που ακολουθεί.

### **8.3 Γλώσσα μοντελοποίησης, βελτιστοποιητής και διεπαφή προγραμματισμού.**

#### **Το Σύστημα Αλγεβρικής Μοντελοποίησης GAMS**

Το σύστημα γενικής αλγεβρικής μοντελοποίησης (General Algebraic Modeling System - GAMS), είναι μία υψηλού επιπέδου γλώσσα μοντελοποίησης, ειδικά σχεδιασμένη για την ανάπτυξη μαθηματικών μοντέλων για γραμμικά και μη-γραμμικά προβλήματα βελτιστοποίησης καθώς και για προβλήματα βελτιστοποίησης μικτών ακεραίων. Αντίθετα με παλαιότερα συστήματα μοντελοποίησης, το GAMS επιτρέπει στον προγραμματιστή να επικεντρώσει την προσοχή του στο ίδιο το μοντέλο χωρίς να ασχοληθεί με την προετοιμασία των δεδομένων του προβλήματος ή το μετασχηματισμό τους στη μορφή που απαιτείται για να αναγνωρισθούν από τα προγράμματα επίλυσης μαθηματικού προγραμματισμού.

Ο σχεδιασμός του GAMS έχει ενσωματώσει στοιχεία από τη θεωρία σχεσιακών βάσεων δεδομένων και το μαθηματικό προγραμματισμό. Η θεωρία των σχεσιακών βάσεων δεδομένων παρέχει ένα δομημένο πλαίσιο εργασίας για την ανάπτυξη δυνατοτήτων οργάνωσης των δεδομένων και της μορφοποίησης αυτών. Ο μαθηματικός προγραμματισμός συνεισφέρει στην περιγραφή των προβλημάτων βελτιστοποίησης ενώ ταυτόχρονα παρέχει μία ποικιλία μεθόδων για την επίλυση τους.

Η απεικόνιση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης στο GAMS είναι ανεξάρτητη της μεθόδου επίλυσης ή των αρχικών δεδομένων του προβλήματος - εάν τροποποιηθεί η μέθοδος επίλυσης ή γίνει μετασχηματισμός των εισαγόμενων δεδομένων, η έκφραση του προβλήματος θα παραμείνει ως έχει. Επιπλέον, τα μαθηματικά μοντέλα που κατασκευάζονται στο GAMS χαρακτηρίζονται από το μικρό τους μέγεθος και την περιεκτικότητά τους, διατηρώντας εντούτοις την απλότητα των συνηθισμένων γλωσσών προγραμματισμού. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια κώδικας GAMS ενός μοντέλου βελτιστοποίησης αποτελεί ταυτόχρονα και την τεκμηρίωση του μοντέλου.

## **Βελτιστοποιητής μικτών ακεραίων – CPLEX**

Ο βελτιστοποιητής μαθηματικού προγραμματισμού είναι το πρόγραμμα που αναλαμβάνει την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης. Ο βελτιστοποιητής μπορεί να χρησιμοποιήσει τα δεδομένα του προβλήματος μόνο όταν αυτά είναι σε συγκεκριμένη μορφή, συνεπώς είναι ευθύνη του συστήματος μοντελοποίησης να εφαρμόσει τους απαραίτητους μετασχηματισμούς και να προετοιμάσει το πρόβλημα για επίλυση. Ο βελτιστοποιητής που επελέγη για την επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης της συγκεκριμένης μελέτης είναι ο CPLEX 7.0, ένα εμπορικό πρόγραμμα επίλυσης που έχει σχεδιαστεί για την αντιμετώπιση μεγάλων και πολύπλοκων προβλημάτων.

Ο βελτιστοποιητής μικτών ακεραίων εφαρμόζει τον αλγόριθμο branch-and-bound για τη γρήγορη εύρεση λύσεων σε πολύπλοκα προβλήματα μικτών ακεραίων. Τομές, στοχαστικοί αλγόριθμοι, προεπεξεργασία & διερεύνηση σε συνδυασμό με στρατηγικές για τη διακλάδωση και την επιλογή κόμβων και μεταβλητών, είναι μερικές από τις τεχνικές που μπορούν να εφαρμοστούν για να ενισχύσουν τη διαδικασία επίλυσης.

Το πρόγραμμα επίλυσης CPLEX επιδεικνύει αξιοσημείωτη προσαρμοστικότητα στις ανάγκες του προβλήματος βελτιστοποίησης, εφαρμόζοντας τις παραπάνω τεχνικές ανάλογα με την αποτελεσματικότητα τους στον τύπο του εκάστοτε προβλήματος. Εντούτοις, οι στρατηγικές και τεχνικές που εφαρμόζονται μπορούν να οριστούν εκ των προτέρων, στην περίπτωση που η δομή του προβλήματος είναι γνωστή και για την επίλυση του οποίου απαιτούνται συγκεκριμένες γνωστές τεχνικές.

## **Σύστημα προγραμματισμού παραγωγής με περιορισμένους πόρους - PROPHET**

Η υλοποίηση του έργου βελτιστοποίησης της διαδικασίας συμπαραγωγής σε ηλεκτροπαραγωγές μονάδες έγινε στο σύστημα προγραμματισμού πόρων PROPHET RPS (Resource Planning System). Το πρόγραμμα PROPHET είναι ειδικά σχεδιασμένο για την αντιμετώπιση προβλημάτων βελτιστοποίησης της παραγωγής με περιορισμούς πόρων σε απελευθερωμένες αγορές, παρέχοντας λύσεις που εξασφαλίζουν ελαχιστοποίηση του κόστους παραγωγής ενώ



παράλληλα εγγυώνται την πλήρη κάλυψη της ζήτησης και τη συμμόρφωση με τις απαιτήσεις της αγοράς.

Το PROPHEΤ βασίζεται σε μία βάση δεδομένων Oracle, αλληλεπιδρώντας με άλλα συστήματα εξάγοντας και εισάγοντας δεδομένα. Κατά την εκτέλεση σε πραγματικό χρόνο, ενοποιημένο με συστήματα ελέγχου διεργασιών, το PROPHEΤ μπορεί να επιλύει πολυάριθμα προβλήματα βελτιστοποίησης καθημερινά, παρέχοντας κάθε φορά το βέλτιστο πρόγραμμα παραγωγής. Πέραν της αυτόματης εισαγωγής δεδομένων, αλλαγές στις παραμέτρους του προβλήματος μπορούν να γίνουν ανά πάσα στιγμή και με μεγάλη ευκολία.

Η μαθηματική μοντελοποίηση έγινε στο πρόγραμμα PROPHEΤ GTE (Graphical Topology Editor) μία διεπαφή που επιτρέπει τη δημιουργία μαθηματικών μοντέλων με αφαιρετικό τρόπο. Κάθε συνθετικό στοιχείο του συστήματος παραγωγής μοντελοποιείται σε GAMS και στη συνέχεια συνδέεται με τη διάταξη παραγωγής. Ένα από τα μεγαλύτερα πλεονεκτήματα του PROPHEΤ GTE είναι το γεγονός ότι τα μοντέλα που αναπτύσσονται μπορούν να τροποποιηθούν και επεκταθούν εύκολα και με την ελάχιστη μεσολάβηση του προγραμματιστή, δεδομένης της ικανότητας αντιγραφής συνθετικών στοιχείων του συστήματος παραγωγής.

## 8.4 Περιγραφή του έργου

Για τον σκοπό της παρούσας διπλωματικής εργασίας κατασκευάστηκε ένα πρότυπο μοντέλο βελτιστοποίησης για μία μονάδα συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας που λειτουργεί προσανατολισμένη στην κάλυψη της ζήτησης σε θερμότητα - ήτοι η παραγωγή ρυθμίζεται στο επίπεδο πλήρους κάλυψης της απαίτησης σε θερμότητα. Η θερμότητα παρέχεται στον καταναλωτή υπό μορφή ατμού σε τρία επίπεδα πίεσης, που λαμβάνονται από διαφορετικά στάδια της διαδικασίας παραγωγής. Το ηλεκτρικό φορτίο καλύπτεται από την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας του σταθμού, ενώ σε περίπτωση ελλείμματος αγοράζεται ηλεκτρική ενέργεια από ανεξάρτητο ηλεκτροπαραγωγό.

Ο σταθμός συμπαραγωγής αποτελείται από τις εξής μονάδες:

- 2 ατμοπαραγωγοί με δυνατότητα αναθέρμανσης
- 1 ατμοστρόβιλο απομάστευσης
- 3 ατμοστρόβιλους συμπύκνωσης
- 1 ατμοστρόβιλο αντίθλιψης δύο σταδίων
- 5 σταθμούς ελάττωσης πίεσης

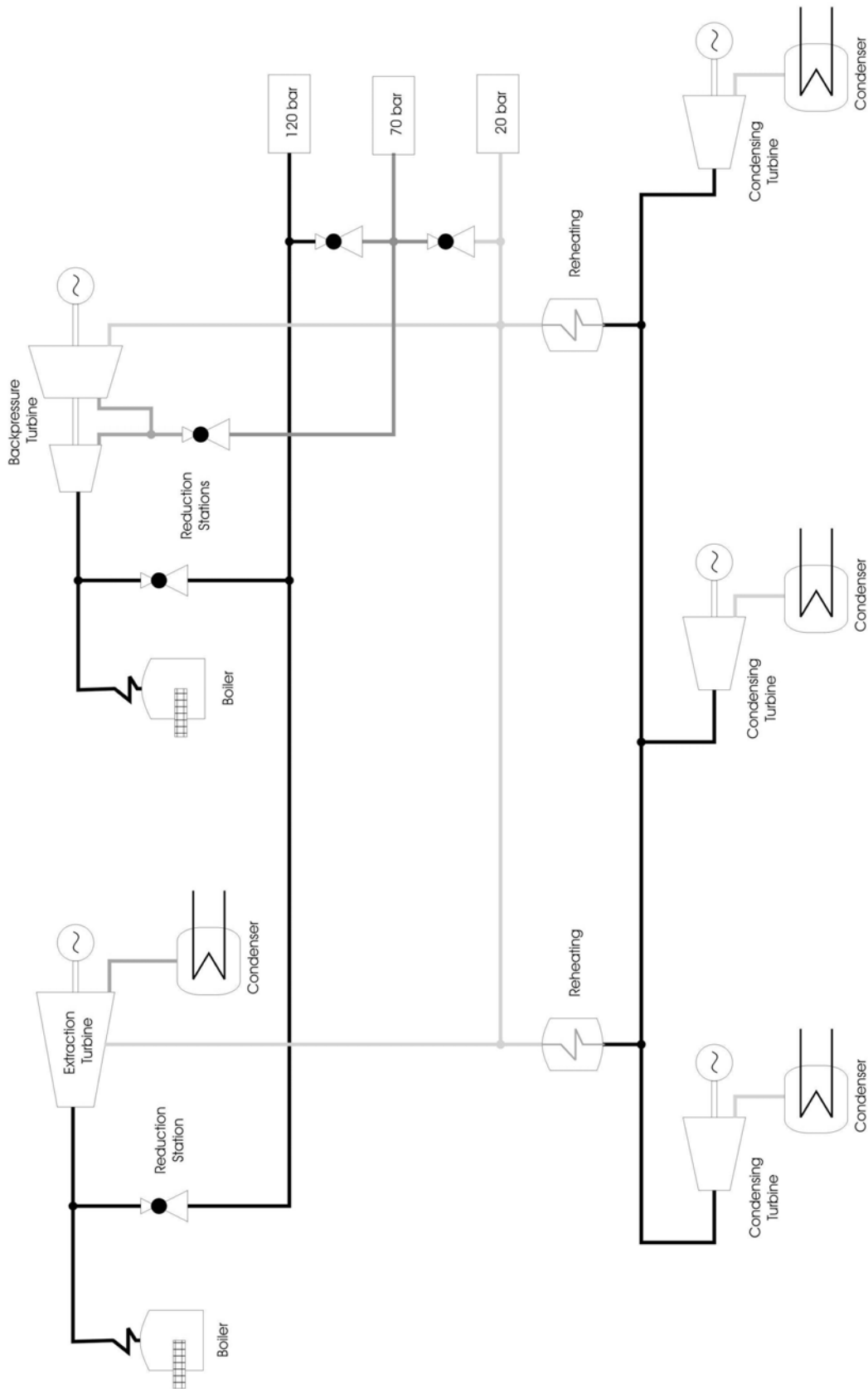
Μία απεικόνιση του σταθμού συμπαραγωγής φαίνεται στο Σχήμα 8.2.

Η διαδικασία λειτουργίας μπορεί να διαιρεθεί σε τέσσερα στάδια: Στο πρώτο στάδιο παράγεται ατμός στους δύο λέβητες και παρέχεται στους ατμοστρόβιλους απομάστευσης και αντίθλιψης. Από το αρχικό αυτό στάδιο, με χρήση των δύο πρώτων σταθμών ελάττωσης πίεσης μπορεί να εξαχθεί από το σύστημα ατμός υψηλής ενθαλπίας για να παράσχει θερμότητα στο θερμικό φορτίο υψηλής πίεσης. Στο δεύτερο στάδιο, ένα κλάσμα του ατμού που εξέρχεται από το υψηλής πίεσης μέρος του ατμοστροβίλου αντίθλιψης είναι διαθέσιμο για την παροχή θερμότητας στο θερμικό φορτίο με χρήση ενός σταθμού ελάττωσης πίεσης. Στο τρίτο στάδιο, ο ατμός που συλλέγεται από τον ατμοστρόβιλο απομάστευσης μαζί με αυτόν από τον στρόβιλο αντίθλιψης, οδηγείται πίσω στο λέβητα για αναθέρμανση. Ο ατμός σε αυτό το στάδιο είναι επίσης διαθέσιμος στο θερμικό φορτίο χαμηλής πίεσης με απευθείας σύνδεση. Στο τελευταίο στάδιο, ο αναθερμασμένος ατμός οδηγείται σε μία συστοιχία στροβίλων συμπύκνωσης όπου εκτονώνεται μέχρι να συμπυκνωθεί. Επιπρόσθετα, ένα σύνολο από σταθμούς ελάττωσης πίεσης επιτρέπει τη διασύνδεση μεταξύ των τριών συστημάτων παροχής θερμότητας σε διαφορετικές πιέσεις.

Η ευελιξία του παραπάνω σχήματος συμπαραγωγής είναι προφανής' η παρεμβολή της παραγωγής θερμότητας στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας μπορεί να ελαχιστοποιηθεί με κατάλληλη χρήση των σταθμών ελάττωσης και της βαλβίδας εξαγωγής ατμού του ατμοστροβίλου απομάστευσης. Με δεδομένο τον προσανατολισμό της λειτουργίας του σταθμού προς την κάλυψη του θερμικού φορτίου, μπορεί να ειπωθεί ότι στα τρία πρώτα δίνεται ιδιαίτερο βάρος στην

παραγωγή θερμότητας ενώ η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας υλοποιείται κυρίως στο τελευταίο στάδιο.

Ο πρότυπος σταθμός συμπαραγωγής που παρουσιάζεται στην ενότητα αυτή και για τον οποίο θα κατασκευαστεί το μαθηματικό μοντέλο, λειτουργεί σε μία τροποποιημένη μορφή του κύκλου Rankine, όπου πραγματοποιείται αναθέρμανση και εξαγωγή θερμότητας, όμοια με αυτή που παρουσιάστηκε στο σχήμα 2.8. του δεύτερου κεφαλαίου. Απώλειες και μη-αντιστρεψιμότητες μπορούν να ληφθούν υπόψη μέσω των τεχνικών προδιαγραφών των μονάδων που απαρτίζουν τη διάταξη συμπαραγωγής.



Σχήμα 8.2 – Σύστημα συμπαραγωγής

## 8.5 Διατύπωση του προβλήματος

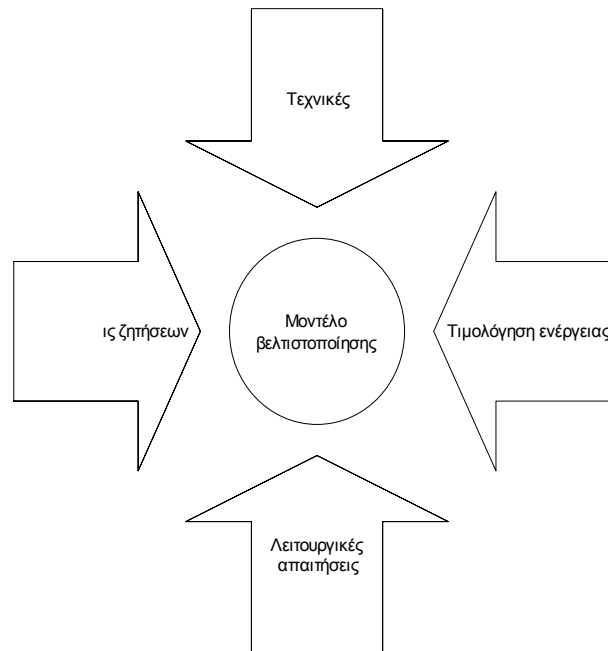
Πριν το στάδιο της ανάπτυξης των μοντέλων βελτιστοποίησης πρέπει να προηγηθεί η αναγνώριση και διατύπωση του προβλήματος. Το πρόβλημα, από την άποψη του διαχειριστή του σταθμού συμπαραγωγής μπορεί να εκφραστεί ως εξής: “Για ένα δεδομένο χρονικό ορίζοντα, ζητείται το βέλτιστο σχήμα παραγωγής, ήτοι το σύνολο των μονάδων που πρέπει να δεσμευτούν και τα επίπεδα παραγωγής τους κάθε στιγμή, που εξασφαλίζει την ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας και τη μεγιστοποίηση του κέρδους, λαμβάνοντας υπόψη την προστασία της επένδυσης και την πλήρη κάλυψη της ζήτησης σε ηλεκτρική ενέργεια και θερμότητα”.

Η δυσκολία στην αναζήτηση λύσης στο εν λόγω πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι προφανής, μεγεθύνεται δε από την ευελιξία που χαρακτηρίζει τη συγκεκριμένη διάταξη. Η δυνατότητα της ρύθμισης του εξαγόμενου από το κάθε στάδιο της παραγωγικής διαδικασίας ατμού (μέσω της βαλβίδας απομάστευσης του ατμοστροβίλου και των σταθμών ελάττωσης) προσφέρει πολλές εναλλακτικές στην παραγωγή θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας. Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη τα πρόσθετα στοιχεία του προβλήματος ένταξης μονάδων (κόστη εκκίνησης & τερματισμού, εφεδρείες, κτλ.) και το γεγονός ότι ο προγραμματισμός αφορά συνήθως μία αρκετά μεγάλη χρονική περίοδο, η χρήση μιας αποτελεσματικής και συμπαγούς μεθόδου επίλυσης γίνεται πιο επιτακτική.

Είναι φανερό ότι το εν λόγω πρόβλημα, όπως διατυπώθηκε νωρίτερα, έχει τη μορφή που συναντήθηκε στο κεφάλαιο 6' σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης που αντιπροσωπεύει τα κόστη (το κέρδος λαμβάνεται υπόψη ως αρνητικό κόστος) διατηρώντας την εγκυρότητα ενός συνόλου περιορισμών, σχετικών με τις απαιτήσεις λειτουργίας και τις υποχρεώσεις προς τον καταναλωτή.

Οι εξισώσεις που διαμορφώνουν το πρόβλημα ένταξης μονάδων δεν διαφέρουν από αυτές που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 5 (Εξ. 5.1 έως 5.22). Όλες οι παράμετροι και σταθερές που εμπλέκονται στη μαθηματική διατύπωση του συγκεκριμένου προβλήματος ένταξης μονάδων και συνδέονται με τα τεχνικά

χαρακτηριστικά του εξοπλισμού, την προβλεπόμενη ζήτηση, την ενεργειακή λογιστική και τα συμβόλαια πώλησης ηλεκτρικής ενέργειας, θεωρούνται δεδομένα από τη διαχείριση της μονάδας συμπαραγωγής. Τα στοιχεία αυτά αντιπροσωπεύουν τα δεδομένα εισόδου του προβλήματος βελτιστοποίησης.



**Σχήμα 8.3** – Είσοδοι προβλήματος βελτιστοποίησης

Όπως αποδείχθηκε νωρίτερα στα κεφάλαια 4 και 6, οι συναρτήσεις που εμπλέκονται στο πρόβλημα ένταξης μονάδων είναι κατά πλειοψηφία μη-γραμμικές. Αποδείχθηκε επίσης ότι ο καλύτερος τρόπος αντιμετώπισης προβλημάτων αυτού του τύπου δεν είναι η εφαρμογή μεθόδων μη-γραμμικού προγραμματισμού (ΜΓΠ) αλλά η μετατροπή της αρχικής έκφρασης του προβλήματος σε μία μορφή που να περιέχει μόνο γραμμικές συναρτήσεις, εφαρμόζοντας κατά διαστήματα γραμμικοποίηση. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι γραμμικού προγραμματισμού μικτών ακεραίων, οι οποίες όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο είναι αποτελεσματικότερες και πιο αξιόπιστες από τις μεθόδους μη-γραμμικού προγραμματισμού μικτών ακεραίων. Φυσικά η επιλογή αυτή επιβαρύνει με πρόσθετη δυσκολία τη διαδικασία μοντελοποίησης, αλλά αυτό είναι κάτι το ανεκτό δεδομένης της ζήτησης γρήγορων και σωστών αποτελεσμάτων. Εκτός αυτού, τα μοντέλα βελτιστοποίησης κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο που να επιτρέπει μελλοντικές τροποποιήσεις και επεκτάσεις με εύκολο τρόπο, όπως

επιδεικνύεται στο παράδειγμα που παρουσιάζεται στο τέλος του παρόντος κεφαλαίου.

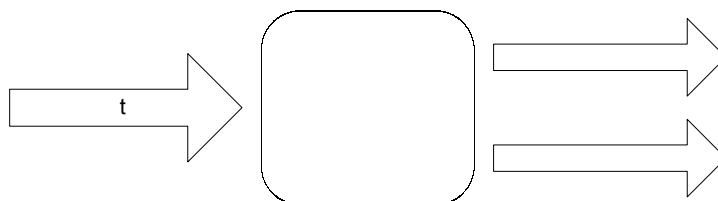
## 8.6 Ανάπτυξη του μαθηματικού μοντέλου

Η μοντελοποίηση της διάταξης συμπαραγωγής θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας βασίζεται στη θερμοδυναμική ανάλυση που εκτελέστηκε στο κεφάλαιο 4 και τις εξισώσεις του προβλήματος ένταξης μονάδων που εξήχθησαν στο κεφάλαιο 5. Η διαδικασία κατασκευής των μοντέλων παρουσιάζεται λεπτομερώς για μία εκ των μονάδων που αποτελούν το σχήμα συμπαραγωγής, τον ατμοστρόβιλο απομάστευσης, που αποτελεί τη δυσκολότερη περίπτωση μοντέλου. Η μοντελοποίηση των υπολοίπων συνθετικών στοιχείων βασίζεται στην ίδια λογική.

Ένα σημείο που χρίζει ιδιαίτερης προσοχής είναι το γεγονός ότι δεδομένης της χρήσης προγραμματισμού μικτών ακεραίων, οι μη-γραμμικές συναρτήσεις (πέραν αυτών που γραμμικοποιούνται) πρέπει να εκφραστούν με την κατάλληλη μορφή. Αυτό ισχύει για συναρτήσεις του τύπου  $\text{abs}()$  και  $\text{min}()$  που εμφανίζονται στις εξισώσεις του προβλήματος ένταξης μονάδων.

### **Εξισώσεις εισόδου - εξόδου**

Από μηχανικής απόψεως ο ατμοστρόβιλος απομάστευσης μπορεί να θεωρηθεί ως μονάδα μίας εισόδου, την ενέργεια του εισαγόμενου ατμού, και δύο εξόδων, την ηλεκτρική ενέργεια και την θερμική ενέργεια του εξαγόμενου ατμού.



**Σχήμα 8.4** – Είσοδοι & έξοδοι στροβίλου απομάστευσης

Όπως αποδείχθηκε στο κεφάλαιο 4 η ηλεκτρική ενέργεια που παράγεται σε ένα στρόβιλο απομάστευσης είναι:

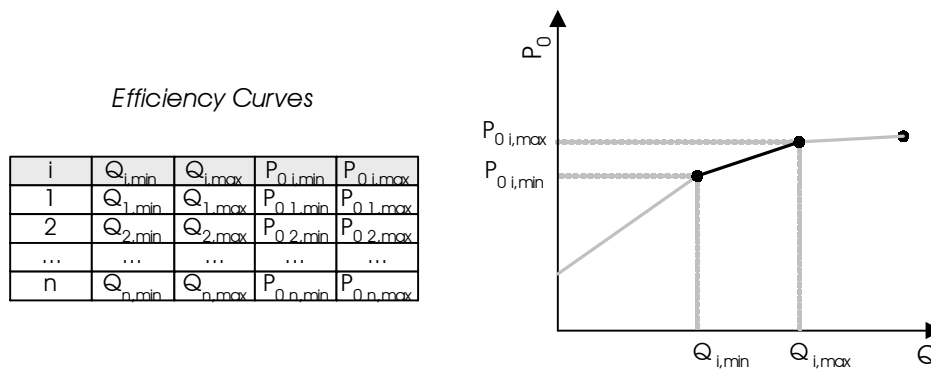
$$P(t) = P_0(t) - c_v \cdot \dot{Q}_{ext}(t)$$

όπου  $P_0$  είναι η ισοδύναμη ηλεκτρική ενέργεια που έχει βρεθεί ότι είναι

$$P_0(t) = \eta_{eff}(\dot{Q}(t)) \cdot \dot{Q}(t)$$

και  $c_v$  είναι η τιμή CV του στρόβιλου, που συνδέει την ηλεκτρική ισχύ με την εξαγόμενη θερμότητα.

Όπως φαίνεται στην προηγούμενη εξίσωση, η ισοδύναμη παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια δίνεται υπό τη μορφή μη-γραμμικής συνάρτησης της θερμότητας εισόδου. Σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζεται κατά διαστήματα γραμμικοποίηση, όπως έχει περιγραφεί στην ενότητα 6.6. Οι γραμμικοποιημένες συναρτήσεις δίνονται συνήθως υπό μορφή πίνακα, όπως αυτός που φαίνεται παρακάτω.



**Σχήμα 8.5** – Γραμμικοποιημένη καμπύλη απόδοσης

Στην προκειμένη περίπτωση, η ισοδύναμη ισχύς  $P_0$  και η εισαγόμενη θερμότητα  $\dot{Q}$  μπορούν να υπολογιστούν ως ακολούθως:

$$P_0(t) = \sum_i m_i \cdot \dot{Q}_i(t) + b_i \cdot r_i(t)$$

και

$$\dot{Q}(t) = \sum_i \dot{Q}_i(t)$$



όπου

$$m_i = \frac{P_{0i,max} - P_{0i,min}}{\dot{Q}_{i,max} - \dot{Q}_{i,min}} \quad \text{και} \quad b_i = P_{0i,min} - m_i \cdot \dot{Q}_{i,min}$$

με τους πρόσθετους περιορισμούς:

$$\sum_i r_i(t) \leq 1$$

$$\dot{Q}_i(t) \leq \dot{Q}_{i,max} \cdot r_i(t)$$

$$\dot{Q}_i(t) \geq \dot{Q}_{i,min} \cdot r_i(t)$$

### Περιορισμοί διάρκειας λειτουργίας

Ο στρόβιλος απομάστευσης έχει περιορισμένο χρόνο λειτουργίας, ο οποίος εξαρτάται όχι μόνο από τους κατασκευαστικούς περιορισμούς αλλά και από άλλες υποχρεωτικές διαδικασίες του σταθμού συμπαραγωγής (π.χ. έργα συντήρησης και ανακαίνισης). Για να συμπεριληφθεί το χαρακτηριστικό αυτό στο πρόβλημα βελτιστοποίησης παρέχεται συνήθως ένας πίνακας κατάστασης της μονάδας (Σχήμα 8.6), ο οποίος υποδεικνύει την κατάσταση του στροβίλου απομάστευσης.

t	status(t)
00:00	0
00:30	0
01:00	1
01:30	1
02:00	1
...	...

Σχήμα 8.6 – Πίνακας κατάστασης

Η τιμή της παραμέτρου κατάστασης της μονάδας χρησιμοποιείται ως άνω όριο για τη δυαδική μεταβλητή κατάστασης της μονάδας,  $u(t)$  επιτρέποντας τον τερματισμό της λειτουργίας του στροβίλου σε περίπτωση που η συμβολή του στην κάλυψη του φορτίου κριθεί μη απαραίτητη από τη λύση του προβλήματος ένταξης μονάδων. Συνεπώς:

$$u(t) \leq \text{status}(t)$$

Ένας πρόσθετος τρόπος να ελεγχθεί ο ολικός χρόνος λειτουργίας της μονάδας είναι η εισαγωγή των παρακάτω δύο περιορισμών, όπου  $T_{max}$  και  $T_{min}$  είναι ο

μέγιστος και ελάχιστος χρόνος λειτουργίας, όπως ορίζεται από τις προδιαγραφές της μονάδας:

$$\sum_t u(t) \leq T_{\max} \quad \text{και} \quad \sum_t u(t) \geq T_{\min}$$

### Περιορισμοί εκκίνησης/τερματισμού

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι μαθηματικής διατύπωσης της διαδικασίας εκκίνησης και τερματισμού σε ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης. Αυτός που υιοθετήθηκε στην παρούσα εργασία αφορά δύο πρόσθετες δυαδικές μεταβλητές κατάστασης  $on(t)$  (startup),  $off(t)$  (shutdown), οι οποίες μαζί με τις αρχικές μεταβλητές κατάστασης ικανοποιούν την ακόλουθη συνθήκη συμπληρωματικότητας:

$$u(t) + on(t) + off(t) \leq 1$$

Αυτό σημαίνει ότι ο στρόβιλος μπορεί να βρίσκεται είτε σε κατάσταση εκκίνησης/τερματισμού ή σε κατάσταση λειτουργίας/μη-λειτουργίας.

Έτσι ώστε να επιτευχθεί κλείδωμα στην κατάσταση εκκίνησης ή τερματισμού για το προκαθορισμένο από τον κατασκευαστή χρονικό διάστημα, οι ακόλουθοι περιορισμοί πρέπει να προστεθούν στο πρόβλημα:

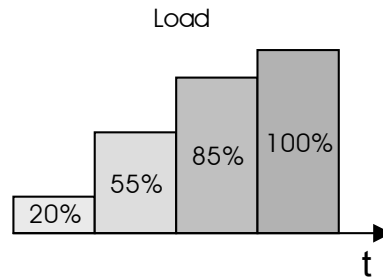
$$\sum_{\substack{\tau \geq t - T_{up} \\ \tau \leq t - 1}} on(\tau) \geq (u(t) - u(t - 1)) \cdot T_{up} \quad (\text{εκκίνηση})$$

$$\sum_{\substack{\tau \geq t \\ \tau \leq t + T_{down}}} off(\tau) \geq (u(t - 1) - u(t)) \cdot T_{down} \quad (\text{τερματισμός})$$

όπου  $T_{up}$  και  $T_{down}$  είναι διάρκειες εκκίνησης και τερματισμού αντίστοιχα.

Η παραπάνω θεώρηση συνεπάγεται και το ότι η μονάδα δεν μπορεί να ενταχθεί στο σχήμα παραγωγής ενώ βρίσκεται σε διαδικασία εκκίνησης ή τερματισμού. Αν απαιτείται η μονάδα να είναι παραγωγική ακόμα και κατά την εκκίνηση, τότε πρέπει να παρασχεθεί ένας πίνακας κλιμάκωσης του φορτίου, που θα δηλώνει το επίπεδο παραγωγής για κάθε ενδιάμεσο στάδιο της εκκίνησης.

t	load
$T_{up}/4$	20%
$T_{up}/2$	55%
$3T_{up}/4$	85%
$T_{up}$	100%



Σχήμα 8.7 – Παράδειγμα κλιμάκωσης του φορτίου κατά την εκκίνηση

Σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις που σχετίζονται με την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα.

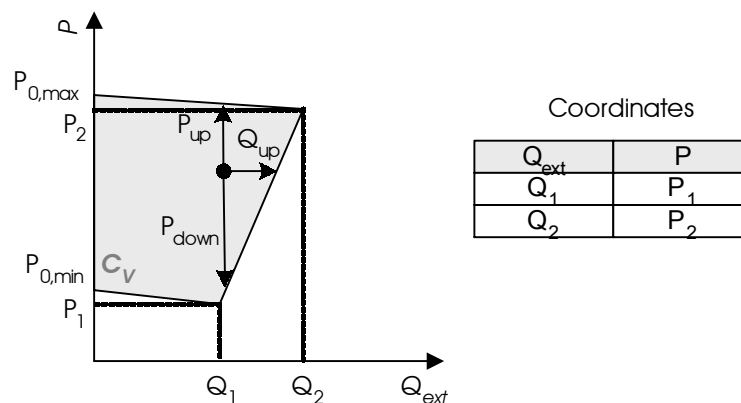
### Περιορισμοί εύρους παραγωγής

Μαζί με την υποχρεωτική κατάσταση του ατμοστροβίλου απομάστευσης, το ελάχιστο και μέγιστο επίπεδο παραγωγής δίνεται, το οποίο στις περισσότερες περιπτώσεις εκφράζεται σε όρους παραγόμενης ισοδύναμης ηλεκτρικής ενέργειας. Συνεπώς, για την μεταβλητή ισοδύναμη ισχύος, ισχύουν:

$$P_0(t) \geq u(t) \cdot P_{0,min}$$

$$P_0(t) \leq u(t) \cdot P_{0,max}$$

Ένας πρακτικός τρόπος σύνδεσης της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας με τη σταθερά CV φαίνεται στο Σχήμα 8.8. Σε αυτήν τη γραφική παράσταση, τα όρια μεταξύ των οποίων μπορεί να λαμβάνει τιμές η παραγόμενη ηλεκτρική ενέργεια όταν εξαγεται θερμότητα με τη μορφή ατμού, είναι προφανή.



Σχήμα 8.8 – Περιοχή παραγωγής θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας

Από το διάγραμμα αυτό, οι ανισότητες που ορίζουν την περιοχή παραγωγής μπορούν να ληφθούν εύκολα:

$$P(t) \leq u(t) \cdot P_{0,\max}$$

$$P(t) \geq u(t) \cdot P_1$$

$$Q_{\text{ext}}(t) \leq u(t) \cdot Q_2$$

και

$$P(t) \leq u(t) \cdot P_{0,\max} - \frac{P_{0,\max} - P_2}{\dot{Q}_2} \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t) \quad (\text{άνω οριογραμμή})$$

$$P(t) \geq u(t) \cdot P_{0,\min} - \frac{P_{0,\min} - P_1}{\dot{Q}_1} \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t)$$

(κάτω οριογραμμή)

$$P(t) \geq \frac{P_2 - P_1}{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1} \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t) + u(t) \cdot \frac{P_1 \dot{Q}_2 - P_2 \dot{Q}_1}{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1}$$

### Περιορισμοί εφεδρείας

Οι στρεφόμενες εφεδρείες και τα αποθέματα θερμότητας μπορούν να υπολογιστούν εύκολα χρησιμοποιώντας το διάγραμμα της περιοχής παραγωγής του σχήματος 8.8:

*Θετική και αρνητική στρεφόμενη εφεδρεία*

Ορίζοντας το άνω όριο της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας  $P_{hi}$  ως:

$$P_{hi}(t) \leq P_{0,\max} - \frac{P_{0,\max} - P_2}{\dot{Q}_2} \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t)$$

η θετική στρεφόμενη εφεδρεία μπορεί να υπολογιστεί ως:

$$P_{up}(t) = u(t) \cdot P_{hi}(t) - P(t)$$

Εάν επιπλέον έχει οριστεί η μέγιστη διακύμανση φορτίου  $\Delta P_{\max}$ , τότε οι εξισώσεις που παρέχουν τη θετική στρεφόμενη εφεδρεία γίνονται:

$$P_{up}(t) \leq u(t) \cdot P_{hi}(t) - P(t) \quad \text{και} \quad P_{up}(t) \leq \Delta P_{\max}$$

Ομοίως, αν  $P_{lo}$  είναι η κατώτατη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

$$P_{lo}(t) \geq P_{0,\min} - \frac{P_{0,\min} - P_1}{\dot{Q}_1} \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t)$$

και

$$P_{lo}(t) \geq \frac{P_2 - P_1}{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1} \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t) + \frac{P_1 \dot{Q}_2 - P_2 \dot{Q}_1}{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1}$$

τότε την αρνητική στρεφόμενη εφεδρεία μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$$P_{\text{down}}(t) = P(t) - u(t) \cdot P_{lo}(t)$$

ή

$$P_{\text{down}}(t) \leq P(t) - u(t) \cdot P_{lo}(t) \quad \text{και} \quad P_{\text{down}}(t) \leq \Delta P_{\max}$$

*Θετική θερμική εφεδρεία*

Αν  $Q_{hi}$  είναι η ανώτατη παραγωγή θερμότητας, οριζόμενη ως:

$$\dot{Q}_{hi}(t) \leq \frac{\dot{Q}_2 - \dot{Q}_1}{P_2 - P_1} \cdot P(t) + \frac{P_2 \dot{Q}_1 - P_1 \dot{Q}_2}{P_2 - P_1}$$

τότε η θετική θερμική εφεδρεία μπορεί να καθοριστεί ως:

$$\dot{Q}_{up}(t) = u(t) \cdot \dot{Q}_{hi}(t) - \dot{Q}_{\text{ext}}(t)$$

Εάν επιπλέον έχει οριστεί η μέγιστη διακύμανση θερμικού φορτίου  $\Delta Q_{\max}$ , τότε η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται σε:

$$\dot{Q}_{up}(t) \leq u(t) \cdot \dot{Q}_{hi}(t) - \dot{Q}_{\text{ext}}(t) \quad \text{και} \quad \dot{Q}_{up}(t) \leq \Delta \dot{Q}_{\max}$$

### **Περιορισμοί εφεδρείας ρυθμού ανάληψης και απόρριψης φορτίου**

Δεδομένης του μέγιστου ρυθμού ανάληψης  $dP_{up}$  και του μέγιστου ρυθμού απόρριψης  $dP_{down}$  της μονάδας, οι εφεδρείες ρυθμού ανάληψης και απόρριψης φορτίου μπορούν να υπολογιστούν ως ακολούθως:

$$dP_{up,Res}(t) \leq dP_{up} - \frac{P_0(t+1) - P_0(t)}{dT} \quad \text{και} \quad dP_{up,Res}(t) \leq dP_{up}$$

$$dP_{\text{down,Res}}(t) \leq dP_{\text{down}} + \frac{P_0(t+1) - P_0(t)}{dT} \quad \text{και} \quad dP_{\text{down,Res}}(t) \leq dP_{\text{down}}$$

### Περιορισμοί διακύμανσης φορτίου

Απότομες και έντονες αλλαγές στην παραγωγή μίας μονάδας μπορούν να διακινδυνεύσουν τη λειτουργικότητα της και να μειώσουν τη διάρκεια ζωής της. Κατά συνέπεια, συνήθως ορίζεται η μέγιστη διακύμανση στην παραγωγή θερμότητας και ηλεκτρικής ενέργειας.

$$\Delta P(t) \leq \Delta P_{\text{max}} ,$$

όπου

$$\Delta P(t) \geq P(t-1) - P(t) ,$$

$$\Delta P(t) \geq P(t) - P(t-1) ,$$

και

$$\Delta \dot{Q}_{\text{ext}}(t) \leq \Delta \dot{Q}_{\text{max}} ,$$

όπου

$$\Delta \dot{Q}_{\text{ext}}(t) \geq \dot{Q}_{\text{ext}}(t-1) - \dot{Q}_{\text{ext}}(t) ,$$

$$\Delta \dot{Q}_{\text{ext}}(t) \geq \dot{Q}_{\text{ext}}(t) - \dot{Q}_{\text{ext}}(t-1) .$$

### Εξισώσεις κόστους

Τα κόστη που συνδέονται με τη λειτουργία του στροβίλου απομάστευσης περιορίζονται στα κόστη λειτουργίας και συντήρησης που αντιστοιχούν στην παραγωγή κάθε προϊόντος, τα κόστη εκκίνησης και τερματισμού και το κόστος διακύμανσης φορτίου. Τα κόστη καυσίμων και φορολογίας συνήθως περιλαμβάνονται στο μοντέλο του ατμοπαραγωγού (λέβητας), που είναι άλλωστε η μονάδα που συνδέεται με την κατανάλωση καυσίμου. Συνεπώς, διαχωρίζοντας τα κόστη σε συνεχή και μεταβατικά, η εξίσωση συνολικού κόστους για τον στρόβιλο απομάστευσης είναι:

$$Z = \sum_t Z_{\text{cont}}(t) + Z_{\text{trans}}(t)$$

όπου

$$z_{\text{cont}}(t) = C_P \cdot P(t) + C_Q \cdot \dot{Q}_{\text{ext}}(t)$$

$$z_{\text{trans}}(t) = C_{\text{on}} \cdot \text{on}(t) + C_{\text{off}} \cdot \text{off}(t) + C_{\text{dLoad}} \cdot (\Delta P(t) + \Delta \dot{Q}_{\text{ext}}(t))$$

και

$\text{on}(t)$ ,  $\text{off}(t)$  : μεταβλητές εκκίνησης και τερματισμού,

$C_P$ : κόστος λειτουργίας και συντήρησης που συνδέεται στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας,

$C_Q$ : κόστος λειτουργίας και συντήρησης που συνδέεται στην παραγωγή θερμότητας,

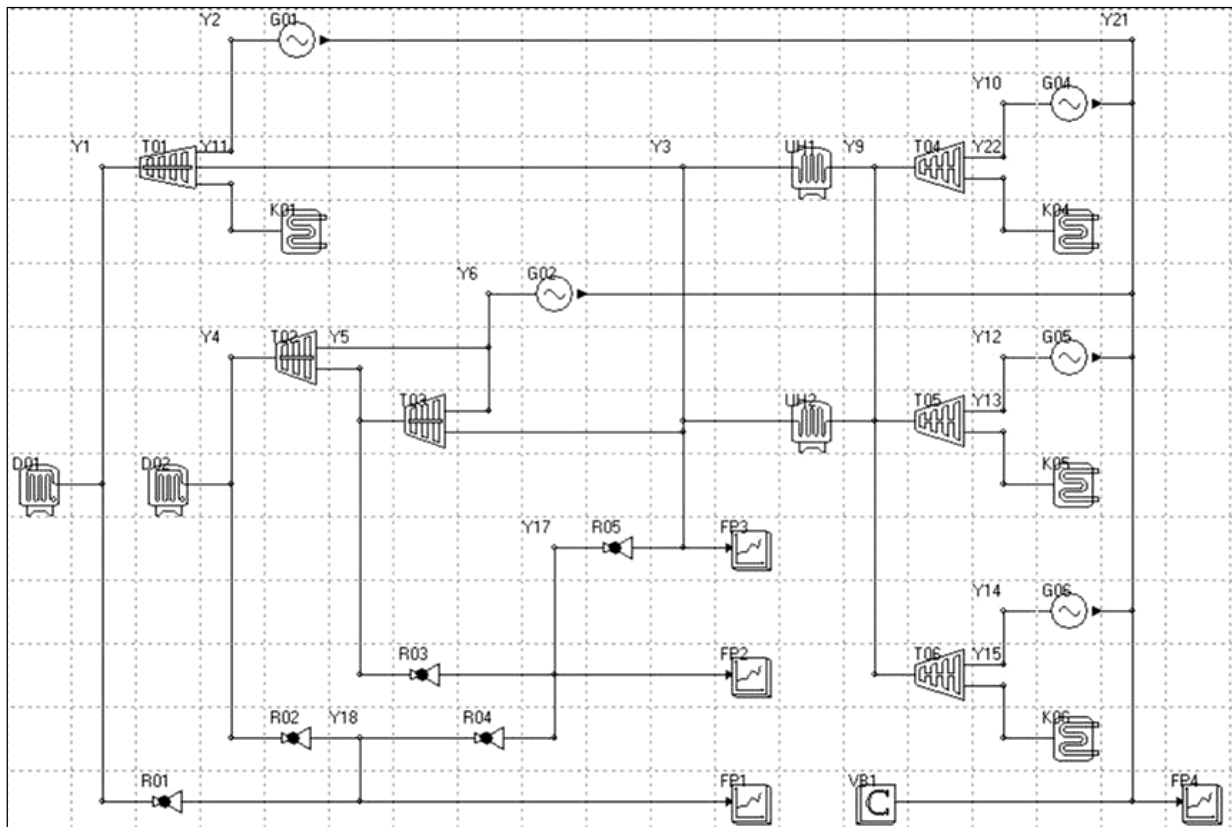
$C_{\text{on}}$  : κόστος εκκίνησης,

$C_{\text{off}}$  : κόστος τερματισμού,

$C_{\text{dLoad}}$  : κόστος διακύμανσης φορτίου.

Οι εξισώσεις που διαμορφώθηκαν στην παραπάνω ανάλυση απαρτίζουν τη μαθηματική αναπαράσταση του μοντέλου του ατμοστρόβιλου απομάστευσης. Το αντίστοιχο τμήμα κώδικα GAMS για το συγκεκριμένο συνθετικό στοιχείο παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β. Πρέπει να σημειωθεί ότι ο συγκεκριμένος κώδικας δεν αποτελεί ανεξάρτητο πρόβλημα βελτιστοποίησης αλλά τμήμα του μοντέλου που αντιστοιχεί στη συνολική διάταξη συμπαραγωγής. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης διαμορφώνεται κατά την ενοποίηση του κώδικα όλων των μαθηματικών μοντέλων των συνθετικών στοιχείων που απαρτίζουν τη διάταξη συμπαραγωγής.

Το πρότυπο σύστημα συμπαραγωγής, του οποίου το μαθηματικό μοντέλο κατασκευάστηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας, φαίνεται στο σχήμα 8.9. Το σχήμα αυτό είναι μια γραφική αναπαράσταση του συνολικού μοντέλου βελτιστοποίησης όπως αυτό προέκυψε κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης.

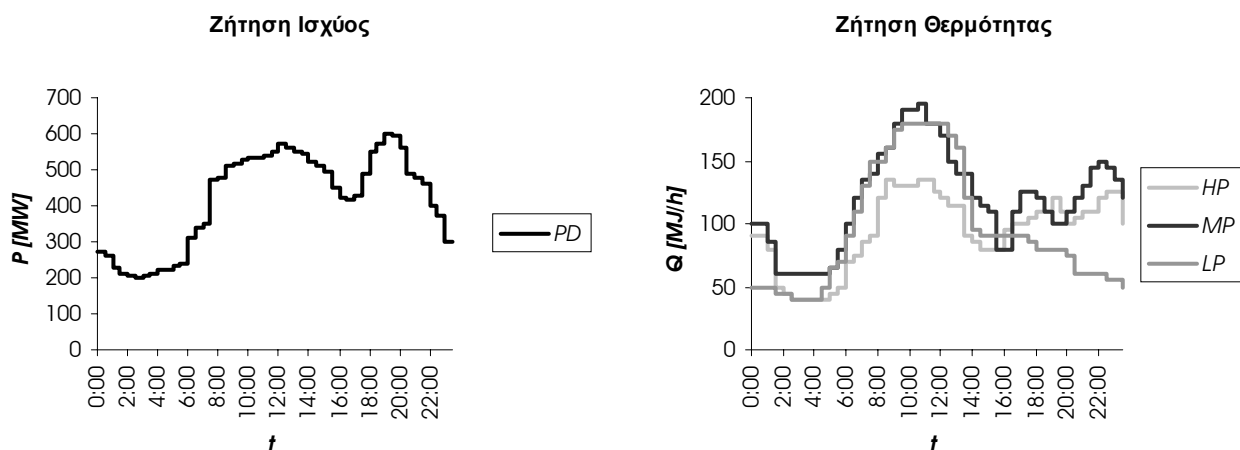


Σχήμα 8.9 – Διάταξη προγραμματισμού παραγωγής με περιορισμένους πόρους



## 8.7 Δοκιμή του μοντέλου μικτού ακέραιου προγραμματισμού

Μετά την κατασκευή των μοντέλων και την ενοποίηση τους σε ένα ενιαίο πρόβλημα βελτιστοποίησης, παράγεται ο κώδικας μοντελοποίησης του συνολικού προβλήματος ένταξης μονάδων. Για το σκοπό της αξιολόγησης των διαφόρων τεχνικών βελτιστοποίησης που βασίζονται στον μικτό ακέραιο προγραμματισμό, πραγματοποιήθηκε ένας ικανός αριθμός εκτελέσεων\* χρησιμοποιώντας πρότυπα δεδομένα ως παραμέτρους εισόδου, συμπεριλαμβανομένων των προβλέψεων ζήτησης, των τιμών αγοράς καυσίμων και πώλησης ενέργειας καθώς και των τεχνικών χαρακτηριστικών των μονάδων παραγωγής.



Σχήμα 8.10 – Πρότυπα δεδομένα προβλέψεων ζήτησης

Στην πρώτη εκτέλεση, το πρόγραμμα βελτιστοποίησης CPLEX εκτελέστηκε με τις προεπιλεγμένες ρυθμίσεις, όσον αφορά τη διαδικασία επίλυσης. Ο βελτιστοποιητής CPLEX διαθέτει έναν εσωτερικό μηχανισμό αναζήτησης του αποτελεσματικότερου συνδυασμού τεχνικών επίλυσης, ενεργοποιώντας και απενεργοποιώντας κάθε τεχνική ανάλογα με την αποτελεσματικότητά της.

\* Όλες οι δοκιμές εκτελέστηκαν σε ηλεκτρονικό υπολογιστή με επεξεργαστή Pentium 4, 1.8 GHz με 256MB πραγματική μνήμη.

Στις υπόλοιπες εκτελέσεις χρησιμοποιήθηκαν διαφορετικές ρυθμίσεις του προγράμματος, έτσι ώστε να δοκιμαστεί η αποτελεσματικότητα των τεχνικών ελάττωσης και εφαρμογής επιφανειακών τομών ξεχωριστά. Η σύγκριση μεταξύ των διαφόρων μεθόδων σχετίζεται με το χρόνο που απαιτείται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης (εφόσον αυτή υπάρχει) και το μέγεθος του δέντρου branch-and-bound που δημιουργείται. Τα αποτελέσματα αναγράφονται στον επόμενο πίνακα.

**Πίνακας 8.1 – Επιδόσεις αλγορίθμων**

	Method	Result	Time	Tree Size
Branch and Bound	Pure branch-and-bound	—	≥ 3600 sec	> 50000 nodes
	Preprocessing and Probing	Optimal	< 150 sec	7351 nodes
	Depth First Node Selection (CPLEX default)	Optimal	< 150 sec	7351 nodes
	Best Bound Node Selection	Optimal	< 100 sec	3537 nodes
	Best Estimate Node Selection	Optimal	< 130 sec	4787 nodes
	Branch and Cut	Clique Inequalities	Optimal	< 70 sec
Cover Inequalities		Optimal	< 70 sec	2256 nodes
Flow Cover Inequalities at root node only		Optimal	< 55 sec	1111 nodes
Flow Cover Inequalities throughout tree		Optimal	< 50 sec	914 nodes
Implied Bounds at root node only		Optimal	< 80 sec	2135 nodes
Implied Bounds throughout tree		Optimal	< 80 sec	2473 nodes
GUB Cover Inequalities		Optimal	< 60 sec	1563 nodes
Mixed Integer Rounding Cuts		Optimal	< 50 sec	447 nodes
Gomory Fractional Cuts		Optimal	< 50 sec	891 nodes
CPLEX Defaults		Optimal	< 80 sec	1100 nodes
Best Performance	Optimal	< 45 sec	378 nodes	

## Αξιολόγηση αποτελεσμάτων

Εκτελώντας το πρόγραμμα βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας αποκλειστικά τη μέθοδο branch-and-bound, ο αλγόριθμος δεν προσέγγισε τη βέλτιστη λύση σε λογικό χρόνο. Εντούτοις, η καλύτερη εφικτή ακέραια λύση που δόθηκε από τον αλγόριθμο είχε μία απόκλιση από το βέλτιστο της τάξης του 0,25%. Το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης ξεπέρασε τους 50000 κόμβους. Η επίδοση αυτή ήταν ωστόσο αναμενόμενη, δεδομένων των όσων αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 6, σχετικά με τις τεχνικές βελτιστοποίησης. Παρότι ο αλγόριθμος branch-and-bound είναι ικανός να παρέχει τη βέλτιστη λύση με μεγάλη ακρίβεια, είναι δυνατό να απαιτηθεί υπερβολικά μεγάλος χρόνος για να προσεγγιστεί η λύση αυτή. Αυτός είναι εξάλλου και ο λόγος που προχωρημένες τεχνικές, όπως αυτές που αναγράφονται στον παραπάνω πίνακα, εφαρμόζονται συνήθως μαζί με την μέθοδο branch-and-bound.

Εφαρμόζοντας τεχνικές ελάττωσης μεγέθους στο συγκεκριμένο πρόβλημα η βελτίωση ήταν προφανής. Το πρόβλημα επιλύθηκε σε λιγότερο από 2,5 min και το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης περιορίστηκε στους 7350 κόμβους περίπου. Η βελτίωση αυτή μπορεί να δικαιολογηθεί εξετάζοντας το μέγεθος του προβλήματος (σε μορφή πίνακα) πριν και μετά την εφαρμογή των τεχνικών προεπεξεργασίας:

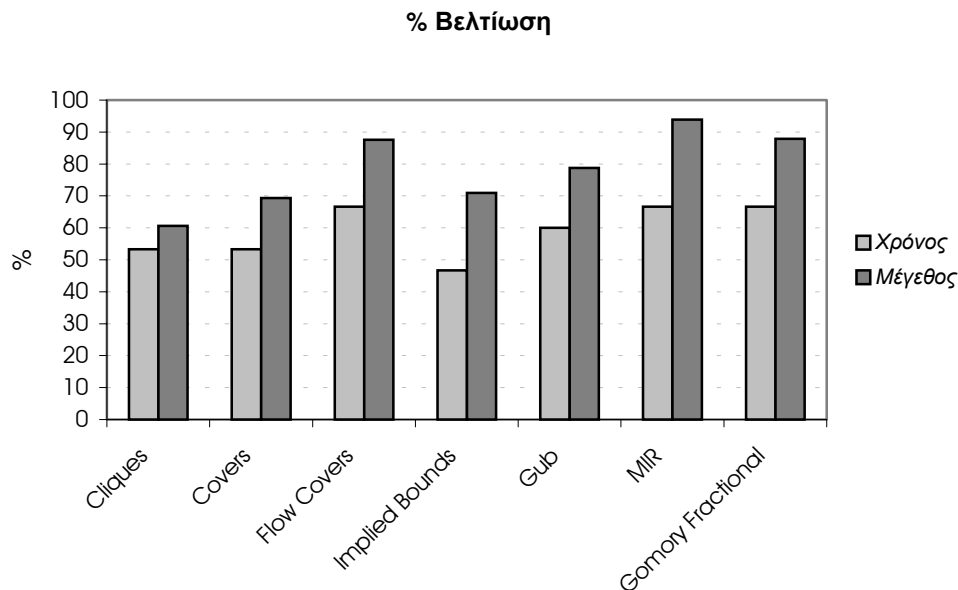
Μέγεθος αρχικού προβλήματος	Μέγεθος μειωμένου προβλήματος
12296 γραμμές	5917 γραμμές
10770 στήλες	4793 στήλες
42042 μη-μηδενικά	21199 μη-μηδενικά

Επίσης, κατά την εφαρμογή των τεχνικών προεπεξεργασίας βελτιώθηκαν οι τιμές 384 σταθερών, συμπιέστηκαν 817 όρια και 32 μεταβλητές έλαβαν σταθερή τιμή. Η συνολική διαδικασία προεπεξεργασίας και διερεύνησης δεν πήρε περισσότερο από 4 sec.

Για το σκοπό της δοκιμής του πώς επηρεάζονται οι επιδόσεις του αλγορίθμου branch-and-bound από τις μεθόδους επιλογής κόμβων, η στρατηγική επιλογής κόμβου τροποποιήθηκε και το μειωμένο σε μέγεθος πρόβλημα επιλύθηκε τρεις

φορές. Η αποτελεσματικότερη στρατηγική αποδείχθηκε ότι είναι η επιλογή κόμβου με το καλύτερο όριο, στην οποία ως επόμενος κόμβος αναζήτησης επιλέγεται αυτός με την καλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση του ισοδύναμου προβλήματος ΓΠ. Η βέλτιστη λύση βρέθηκε εντός 1,5 min και το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης μειώθηκε σε λιγότερο του μισού. Η στρατηγική καλύτερης εκτίμησης βρέθηκε επίσης πιο αποτελεσματική από την προεπιλεγμένη στρατηγική της αναζήτησης σε βάθος του κλαδιού, μειώνοντας το μέγεθος του δέντρου σε 4787 κόμβους και το χρόνο επίλυσης σε λιγότερο από 130 sec. Ωστόσο, όπως αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 7 για τις στρατηγικές μικτού αέριου προγραμματισμού, δεν μπορεί να εγυηθεί κανείς ότι μια αποδεδειγμένα αποτελεσματική στρατηγική σε έναν τύπο προβλήματος θα έχει τα ίδια ευεργετικά αποτελέσματα σε άλλους τύπους προβλημάτων. Για τις υπόλοιπες στρατηγικές της μεθόδου branch-and-bound, ο βελτιστοποιητής διαθέτει την ικανότητα να μεταβαίνει από στρατηγική σε στρατηγική ανάλογα με την αποτελεσματικότητά τους. Κατά συνέπεια οι καλύτερες δυνατές επιδόσεις επιτυγχάνονται εκτελώντας το πρόγραμμα βελτιστοποίησης με τις προεπιλεγμένες αλγοριθμικές ρυθμίσεις.

Οι δοκιμές που αναγράφονται στον πίνακα 8.1 δείχνουν την αποτελεσματικότητα των διαφόρων τεχνικών δημιουργίας τομών στον αλγόριθμο branch-and-bound. Πραγματοποιήθηκε ένας αριθμός εκτελέσεων βελτιστοποίησης του προβλήματος Μ.Α.Π. χρησιμοποιώντας τις πιο αποτελεσματικές στρατηγικές διακλάδωσης και εφαρμόζοντας κάθε τεχνική δημιουργίας επιφανειακών τομών από μόνη της. Η βελτίωση στις επιδόσεις της μεθόδου βελτιστοποίησης με την εισαγωγή των επιφανειακών τομών είναι περισσότερο από εμφανής. Στις περισσότερες περιπτώσεις ο χρόνος επίλυσης μειώθηκε στο μισό και το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης μειώθηκε περισσότερο από δέκα φορές σε σχέση με το αρχικό μέγεθος. Την πιο ευεργετική επίδραση είχε η δημιουργία επιφανειακών τομών στρογγυλοποίησης μικτών ακεραίων (MIR cuts) που μείωσαν το μέγεθος του δέντρου από 7351 σε 447 κόμβους και το χρόνο επίλυσης από 150 sec περίπου σε λιγότερο από 50 sec. Ικανοποιητικές επιδόσεις παρατηρήθηκαν και με την εφαρμογή κλασματικών τομών Gomory και τομών επικάλυψης (flow cover cuts). Η επίδραση των διαφορετικών τεχνικών δημιουργίας επιφανειακών τομών στην επίλυση του προβλήματος φαίνονται στο επόμενο σχήμα.



**Σχήμα 8.11** – Βελτίωση της απόδοσης με την εισαγωγή επιφανειακών τομών

Η καλύτερη απόδοση του αλγορίθμου επίλυσης παρατηρήθηκε όταν εφαρμόστηκαν επιφανειακές τομές στρογγυλοποίησης μικτών ακεραίων σε όλο το δέντρο αναζήτησης και τομές τύπου clique, GUB, flow covers, implied bounds, covers εφαρμόστηκαν μόνο στον αρχικό κόμβο. Η χρονική διάρκεια επίλυσης και το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης που επιτεύχθηκαν με την εφαρμογή των αποτελεσματικότερων μεθόδων και τεχνικών αναγράφονται στο τέλος του πίνακα 8.1.

Όπως και με τις αλγοριθμικές ρυθμίσεις, ο βελτιστοποιητής έχει τη δυνατότητα εφαρμογής επιφανειακών τομών καθ' όλη τη διάρκεια της διαδικασίας επίλυσης βάσει της επίδρασης τους, αφού όπως αναφέρθηκε και στο κεφάλαιο 7, είναι πιθανό η εφαρμογή ενός συγκεκριμένου τύπου τομής στο πρόβλημα να αποδειχθεί εξαιρετικά χρονοβόρα.

Η απόδοση της μεθόδου βελτιστοποίησης χρησιμοποιώντας τις προεπιλεγμένες ρυθμίσεις του προγράμματος βελτιστοποίησης CPLEX που φαίνεται στο τέλος του πίνακα 8.1 φαίνεται περισσότερο από αποδεκτή. Το γεγονός ότι ο χρόνος που απαιτείται για την εύρεση της βέλτιστης λύσης και το μέγεθος του δέντρου αναζήτησης αυξάνονται σε σχέση με προηγούμενες δοκιμές οφείλεται στην επιβάρυνση που προκαλεί η παροδική εφαρμογή μη αποτελεσματικών επιφανειακών τομών από το πρόγραμμα βελτιστοποίησης.

Για να επαληθευτεί η αποτελεσματικότητα των επιφανειακών τομών του τύπου MIR και Gomory στο συγκεκριμένο τύπο προβλήματος βελτιστοποίησης και να αποδειχθεί ότι η επίδοση τους δεν ήταν συμπτωματική, εκτελέστηκαν δοκιμές με διαφορετικές τιμές παραμέτρων και αρχικών δεδομένων (π.χ. ζητήσεις). Τα αποτελέσματα απέδειξαν ότι οι επιφανειακές τομές αυτές είχαν και πάλι την ίδια ευνοϊκή επίδραση στην απόδοση του αλγορίθμου βελτιστοποίησης.

Αυτό που μπορεί να διερωτηθεί κανείς παρατηρώντας τα αποτελέσματα των δοκιμών είναι το αν οι τεχνικές που χρησιμοποιήθηκαν θα επηρέαζαν με τον ίδιο ευνοϊκό τρόπο τη διαδικασία της επίλυσης. Το μαθηματικό μοντέλο δοκιμάστηκε περισσότερες από δυο φορές με διαφορετικά δεδομένα εισόδου και εφαρμόζοντας τις ίδιες τεχνικές για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου βελτιστοποίησης. Αυτό που παρατηρήθηκε είναι ότι κάποιες τεχνικές είχαν πάντα την ευνοϊκότερη επίδραση στα αποτελέσματα (εύρεση βέλτιστου, χρόνος επίλυσης, μέγεθος δέντρου αναζήτησης) και συνεπώς η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα θα είναι θετική. Εντούτοις, κανείς δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι οι συγκεκριμένες τεχνικές θα έχουν τα ίδια ευνοϊκά αποτελέσματα για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς δεδομένων εισόδου. Στις περισσότερες εφαρμογές προγραμματισμού παραγωγής τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται για τις δοκιμές αντλούνται από το ιστορικό της μονάδας παραγωγής και μπορούν να θεωρηθούν αρκετά αξιόπιστα – μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις τα δεδομένα αλλάζουν δραστικά σε σχέση με τα δεδομένα που πάρθηκαν από πριν από ένα εύλογο χρονικό διάστημα. Παρόλα αυτά, σε ένα τέτοιο ενδεχόμενο μη-αναμενόμενης και δραματικής διαφοροποίησης των δεδομένων του προβλήματος, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης και οι συγκεκριμένες τεχνικές δεν μπορούν να εγγυηθούν την ίδια ακριβώς αποτελεσματικότητα.

## Σύνοψη

Αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας ήταν η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων για την επίλυση του προβλήματος του προγραμματισμού της παραγωγής σε σταθμούς συμπαραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και θερμότητας. Κατά τη διεξαγωγή της εργασίας μελετήθηκαν τα χαρακτηριστικά των μονάδων που απαρτίζουν τα συστήματα συμπαραγωγής καθώς και οι διεργασίες που πραγματοποιούνται στις διατάξεις συμπαραγωγής με σκοπό τον καθορισμό των εσωτερικών σχέσεων μεταξύ των μεγεθών που εμπλέκονται στην παραγωγική διαδικασία, στοιχεία απαραίτητα για την κατασκευή των μαθηματικών μοντέλων. Η έκφραση και ανάλυση του προβλήματος ένταξης και οικονομικής κατανομής των μονάδων σε σταθμούς συμπαραγωγής παρείχε τα επιπλέον στοιχεία που απαιτούνταν για τη μαθηματική περιγραφή του προβλήματος προγραμματισμού της παραγωγής.

Η επιλογή της μεθόδου επίλυσης του προβλήματος βελτιστοποίησης που προέκυψε προηγήθηκε της κατασκευής του μοντέλου, καθότι μπορεί να επηρέαζε την μαθηματική έκφραση του. Η σκέψη αυτή αποδείχθηκε σωστή, γιατί όπως προέκυψε από την ανάλυση του προβλήματος κρίθηκε αναγκαίο να εφαρμοστούν προσεγγιστικές μέθοδοι υψηλής ακρίβειας για την έκφραση ορισμένων εκ των συναρτήσεων που εμπλέκονταν στο πρόβλημα, έτσι ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή μικτού ακέραιου προγραμματισμού. Ο μικτός ακέραιος προγραμματισμός επελέγη ως η καταλληλότερη μέθοδος επίλυσης για το συγκεκριμένο πρόβλημα, καθότι μπορεί να εγγυηθεί βέλτιστα αποτελέσματα και - με τη συμβολή μοντέρνων τεχνικών - να εξασφαλίσει γρήγορη σύγκλιση. Η τεχνική προσέγγισης που εφαρμόστηκε ήταν η 'κατά διαστήματα γραμμικοποίηση' και αφορούσε την προσέγγιση μη-γραμμικών συναρτήσεων με ισοδύναμες - κατά διαστήματα γραμμικές - συναρτήσεις.

Η κατασκευή των μαθηματικών μοντέλων έγινε με χρήση του συστήματος μοντελοποίησης GAMS και σύμφωνα με τα παραπάνω βασίστηκε στα αποτελέσματα της θερμοδυναμικής ανάλυσης των συστημάτων

συμπαραγωγής, στη διατύπωση και ανάλυση του προβλήματος ένταξης μονάδων και στις τεχνικές προσέγγισης που αποφασίστηκε να εφαρμοστούν. Η επίλυση του προβλήματος με την μέθοδο του μικτού ακέραιου προγραμματισμού ανατέθηκε στο πρόγραμμα βελτιστοποίησης CPLEX το οποίο ρυθμίστηκε κατάλληλα ώστε να γίνεται εφαρμογή των σύγχρονων τεχνικών για τη βελτίωση της αποτελεσματικότητας της μεθόδου. Δοκιμές διεξήχθησαν με διαφορετικά δεδομένα για το πρόβλημα και εφαρμόζοντας όλες τις παρεχόμενες τεχνικές και τα αποτελέσματα που προέκυψαν βοήθησαν στην αξιολόγηση της μεθόδου και των διαφόρων τεχνικών που εφαρμόστηκαν.



#### A.1 Θερμοδυναμικά συστήματα και μεγέθη

##### A.1.1 Θερμοδυναμικό σύστημα

Ως θερμοδυναμικό ορίζεται μία περιοχή ή χώρος όπου πραγματοποιούνται κάποιες θερμοδυναμικές διεργασίες. Τα θερμοδυναμικά συστήματα μπορούν να καταταχθούν στις ακόλουθες κατηγορίες:

- Κλειστό σύστημα: Σύστημα σταθερή μάζας και ταυτότητας του οποίου τα όρια καθορίζονται από το χώρο που καταλαμβάνει η ουσία που περιέχεται σ' αυτό.
- Ανοικτό σύστημα: Σε αυτό το σύστημα η μάζα της ουσίας που περιέχει μπορεί να είναι μεταβλητή, με την έννοια ότι μπορεί να διασχίσει τα όρια του συστήματος.
- Απομονωμένο σύστημα: Είναι το σύστημα που δεν έχει καμία αλληλεπίδραση με το περιβάλλον του. Μεταφορά μάζας, θερμότητας ή έργου δεν είναι δυνατή σ' αυτόν τον τύπο συστήματος.

##### A.1.2 Ενέργεια

Ενέργεια ενός συστήματος ορίζεται η δυνατότητα του να παράγει έργο. Η ενέργεια που κατέχει ένα σύστημα μπορεί να διακριθεί σε:

- Αποθηκευμένη ενέργεια: Η ενέργεια που εσωκλείεται σε ένα σύστημα εντός των ορίων του. Η εσωτερική, δυναμική και κινητική ενέργεια είναι αυτού του τύπου.
- Μεταφερόμενη ενέργεια: Είναι η ενέργεια που κατέχει το σύστημα, η οποία δύναται να διασχίσει τα όρια του. Η θερμότητα, το έργο και η ηλεκτρική ενέργεια είναι αυτού του τύπου.

Η ενέργεια παριστάνεται με το σύμβολο  $E$  και εκφράζεται σε Joules (J).

### **A.1.3 Θερμότητα**

Η θερμότητα ορίζεται ως η ενέργεια που μεταφέρεται, χωρίς τη μεταφορά μάζας, δια μέσου των ορίων ενός συστήματος εξαιτίας της διαφοράς θερμοκρασίας μεταξύ του συστήματος και του περιβάλλοντος.

Η θερμότητα παριστάνεται με το σύμβολο  $Q$  και εκφράζεται σε Joules (J).

Τα ακόλουθα ισχύουν για τη θερμότητα:

- Η θερμότητα είναι μια μορφή μεταφερόμενης ενέργειας που μπορεί να αναγνωριστεί μόνο όταν διασχίζει τα όρια ενός συστήματος.
- Η θερμότητα μεταφέρεται δια μέσου των ορίων ενός συστήματος με υψηλότερη θερμοκρασία σε ένα σύστημα με χαμηλότερη θερμοκρασία, ως συνέπεια της διαφοράς θερμοκρασίας.
- Η θερμότητα θεωρείται θετική όταν ρέει προς ένα σύστημα και αρνητική όταν εκρέει από ένα σύστημα.

### **A.1.4 Έργο**

Στη θερμοδυναμική φυσική, το έργο ορίζεται ως η ενέργεια που μεταφέρεται δια μέσου των ορίων ενός συστήματος εξαιτίας της διαφοράς σε μία βασική ιδιότητα, εκτός της θερμοκρασίας.

Το έργο παριστάνεται με το σύμβολο  $W$  και εκφράζεται σε Newton-meters (N-m) ή Joules (J).

Τα ακόλουθα ισχύουν για το έργο:

- Στην πράξη, η βασική ιδιότητα του συστήματος που προκαλεί την παραγωγή έργου είναι η πίεση.
- Το έργο θεωρείται θετικό όταν παράγεται από ένα σύστημα και αρνητικό όταν εφαρμόζεται σε ένα σύστημα.

## **A.2 Οι νόμοι της Θερμοδυναμικής**

Οι περιορισμοί στην αλληλεπίδραση μεταξύ ενός θερμοδυναμικού συστήματος και του περιβάλλοντος του, δίδονται από τους ακόλουθους θεμελιώδεις νόμους:

### **A.2.1 Πρώτος νόμος της Θερμοδυναμικής**

“Η ενέργεια δεν μπορεί ούτε να δημιουργηθεί ούτε να καταστραφεί, παρά μόνο να μετασχηματιστεί από μία μορφή σε μία άλλη”

Σύμφωνα με τον νόμο αυτό, όταν ένα σύστημα υπόκειται μία θερμοδυναμική διεργασία μεταφέρεται θερμότητα και έργο. Η καθαρή ενέργεια που μεταφέρεται

αποθηκεύεται εντός του συστήματος και καλείται ολική ενέργεια του συστήματος.

Συνεπώς,

$$\delta Q - \delta W = dE,$$

όπου

$\delta Q$ : μεταφερόμενη θερμότητα από/προς το σύστημα κατά τη διάρκεια της διεργασίας

$\delta W$ : έργο που παράγει/απορροφά το σύστημα κατά τη διάρκεια της διεργασίας

$dE$ : μεταβολή της ολικής ενέργειας του συστήματος.

### A.2.2 Δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής

"Δεν είναι δυνατή η κατασκευή μηχανής που λειτουργεί βάσει κυκλικής διεργασίας με σκοπό τη μετατροπή της ενέργειας που διατίθεται υπό τη μορφή θερμότητας σε ένα ισοδύναμο ποσό μηχανικού έργου".

Ο νόμος αυτό εισάγει τον περιορισμό της απόδοσης σε κάθε σύστημα που πραγματεύεται τη μετατροπή θερμότητας σε έργο (και αντίστροφα).

Συνεπώς σε ένα σύστημα που απορροφά ένα συνολικό ποσό θερμότητας  $Q_{total}$ , παράγοντας έργο  $W_{max}$ , ισχύει:

$$\eta_{max} = \frac{W_{max}}{Q_{total}} < 1,$$

όπου  $\eta_{max}$  είναι η μέγιστη θερμική απόδοση.

### A.2.3 Θερμοδυναμικές ιδιότητες αερίων

Φυσικές ιδιότητες

- Πίεση που ασκείται από την ουσία: P
- Όγκος που καταλαμβάνεται από την ουσία: V
- Θερμοκρασία ουσίας: T

Πρόσθετες ιδιότητες

- Ενθαλπία: Είναι το σύνολο της εσωτερικής ενέργειας της ουσίας αυξημένο κατά το γινόμενο της πίεσης επί τον όγκο:

$$H = U + P \cdot V$$

- Συντελεστής ξηρότητας ή ποιότητα ατμού: Είναι το πηλίκο της μάζας του ξηρού ατμού προς τη μάζα της ίδιας ποσότητας υγρού ατμού.

$$\chi = \frac{m_d}{m_w} = \frac{m_d}{m_d + m_s}$$

### A.3 Θερμοδυναμικές διεργασίες

Κατά τη διάρκεια αλλαγής της κατάστασης ενός θερμοδυναμικού συστήματος, από μία κατάσταση ισορροπίας σε μία άλλη, η αλληλουχία των διαδοχικών καταστάσεων ονομάζεται θερμοδυναμική διεργασία.

#### A.3.1 Κυκλική μεταβολή

Κυκλική μεταβολή ή θερμοδυναμικός κύκλος είναι η διεργασία που πραγματοποιείται σε ένα σύστημα με τέτοιο τρόπο, ώστε η τελική του κατάσταση να είναι ταυτόσημη με την αρχική.

#### A.3.2 Αντιστρέψιμες και μη-αντιστρέψιμες μεταβολή

Αντιστρέψιμη καλείται μια μεταβολή κατά την οποία κάθε διαδοχικό στάδιο από το οποίο το σύστημα περνά είναι μία κατάσταση ισορροπίας. Κάθε μεταβολή που λαμβάνει χώρα αρκετά αργά, έτσι ώστε οι αποκλίσεις των ιδιοτήτων του συστήματος σε κάθε ενδιάμεση κατάσταση να είναι απειροελάχιστες, μπορεί να θεωρηθεί αντιστρέψιμη.

Αν η μεταβολή λαμβάνει χώρα με τέτοιο τρόπο ώστε οι ενδιάμεσες καταστάσεις του συστήματος να μην είναι καταστάσεις ισορροπίας, τότε η μεταβολή θεωρείται μη-αντιστρέψιμη.

#### A.3.3 Βασικές θερμοδυναμικές μεταβολές

**Ισόθερμη μεταβολή:** Η μεταβολή κατά την οποία η ουσία διατηρεί σταθερή θερμοκρασία

**Ισοβαρής μεταβολή:** Η μεταβολή κατά την η πίεση της ουσίας παραμένει σταθερή.

**Ισόχωρη μεταβολή:** Η μεταβολή κατά την ο όγκος της ουσίας παραμένει σταθερή.

**Αδιαβατική ή ισεντροπική μεταβολή:** Η μεταβολή κατά την οποία η ουσία δεν απορροφά ούτε αποβάλλει θερμότητα από ή στο περιβάλλον.

### A.3.4 Διεργασίες σταθερής και μεταβαλλόμενης μάζας.

Οι διεργασίες που λαμβάνουν χώρα σε κλειστά συστήματα, συστήματα δηλαδή που δεν επιτρέπουν την μεταφορά μάζας δια μέσου των ορίων τους, θεωρούνται ως διεργασίες σταθερής μάζας.

Όταν μία διαδικασία λαμβάνει χώρα σε ένα σύστημα που επιτρέπει τη μεταφορά μάζας διαμέσου των ορίων του, ονομάζεται διεργασία μεταβαλλόμενης μάζας. Οι διεργασίες μεταβαλλόμενης μάζας μπορούν να διακριθούν σε διεργασίες σταθερής και μεταβαλλόμενης ροής.

Σε διεργασίες σταθερής ροής ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

- ο ρυθμός ροής της μάζας στην είσοδο και την έξοδο είναι ο ίδιος
- οι ρυθμοί μεταφοράς θερμότητας και παραγωγής έργου είναι σταθεροί
- η κατάσταση της ουσίας του συστήματος παραμένει πάντα η ίδια
- δεν υπάρχει μεταβολή στη χημική σύνθεση του συστήματος.

Αν κάποιος από τις παραπάνω συνθήκες δεν ικανοποιείται, τότε η διεργασία θεωρείται ως μη μεταβλητής ροής.

### A.3.5 Έργο στις διεργασίες σταθερής μάζας & στις διεργασίες σταθερής ροής

#### Έργο στις διεργασίες σταθερής μάζας

Δεδομένου ενός κλειστού θερμοδυναμικού συστήματος, το έργο που παράγεται ή καταναλίσκεται από την ουσία του συστήματος κατά τη διάρκεια μίας αντιστρέψιμης μεταβολής σταθερής μάζας 1 – 2 είναι:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 dw = \int_1^2 Pdv$$

#### Έργο στις διεργασίες σταθερής ροής

Δεδομένου ενός ανοικτού θερμοδυναμικού συστήματος και υποθέτοντας ότι κατά τη διάρκεια μία διεργασίες σταθερής ροής οι αλλαγές στην κινητική και δυναμική ενέργεια της ουσίας είναι αμελητέες, το έργο που παράγεται ή καταναλίσκεται από την ουσία του συστήματος κατά τη διάρκεια αυτής της μεταβολής 1 – 2 είναι:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 dw = - \int_1^2 Vdp$$

## Παράρτημα Β

### Κώδικας μοντελοποίησης GAMS

Στις επόμενες σελίδες παρουσιάζεται ο κώδικας μοντελοποίησης του ατμοστροβίλου απομάστευσης που βάσει των υπολογισμών του κεφαλαίου 8. Το συγκεκριμένο απόσπασμα κώδικα GAMS δεν είναι ανεξάρτητο πρόβλημα βελτιστοποίησης, αλλά μέρος του κώδικα για το συνολικό πρόβλημα βελτιστοποίησης του ενδεικτικού σχήματος συμπαραγωγής που παρουσιάστηκε στο κεφάλαιο 8. Αυτό το απόσπασμα κώδικα, ελαφρώς τροποποιημένο, θα εμφανιστεί στον πλήρη κώδικα του προβλήματος προγραμματισμού παραγωγής, τόσες φορές όσες εμφανίζεται ο ατμοστρόβιλος απομάστευσης στη διάταξη συμπαραγωγής.

\* P R O C E S S      E X T R A C T I O N      T U R B I N E

```

set t /1*10/ time;

set i      states of state variable /0*2/;
set j      state variables          /P/;
set f      nonlinear function involving state variable /1*3/;
set c      piece-wise linear curves /c1*c2/;
set s_typ  curve selection set     /curve/;
set s_pow  power production parameter names
/Pomin,Pomax,Qinmin,Qinmax,dPup,dPdown/;
set s_inp  inputparameter names /status,Qmin,Qmax/;
set s_out  output parameter names /P,Qext,Pup,Pdown/;
set s_lin  linear function parameter names /slope,shift,bmin,bmax/;
set s_cv   cv-value set           /P1,P2,Q1,Q2,cv/;
set s_xny  coordinates set        /xmin,xmax,ymin,ymax/;
set s      startup factors set     /1*10/;

alias(t,tt);

scalar sc_ln large number;
sc_ln = 1e+10;

scalar sc_cpp Power Production Cost;
scalar sc_cex Heat Production Cost;
scalar sc_cdq Load Variation Cost;
scalar sc_sta Startup Cost;
scalar sc_sto Shutdown Cost;
scalar sc_Tup Startup time;
scalar sc_Tdo Shutdown time;
scalar sc_cou counter;

sc_cou = 1;

table t_inp(t,s_inp) Input Table
                status Qmin Qmax
                1  0    0    0;

table t_elt(c,i,s_pow) Efficiency Linearisation Table
                Pomin Pomax Qinmin Qinmax dPup
                c1.1  0    0    0    0    0;

table t_cvv(c,s_cv) CV-values table
                P1 P2 Q1 Q2 cv
                c1 0  0  0  0  0;

table t_sel(t,s_typ) Curve Selection
                curve
                1  0;

parameter p_sel(t,j) curve selection;
p_sel(t,'P') = t_sel(t,'Curve');

```

```

parameter p_hlp1(i,c,s_xny) help parameter 1;
p_hlp1(i,c,s_xny) = 0;

parameter p_hlp2(i,c) help parameter 2;
p_hlp2(i,c) = 0;

parameter p_par(i,j,f,c,s_lin) linearization parameters;
p_hlp1(i,c,'xmin')= t_elt(c,i,'Po_min');
p_hlp1(i,c,'xmax')= t_elt(c,i,'Po_max');
p_hlp1(i,c,'ymin')= t_elt(c,i,'Qin_min');
p_hlp1(i,c,'ymax')= t_elt(c,i,'Qin_max');
p_hlp2(i,c)= (p_hlp1(i,c,'ymax') - p_hlp1(i,c,'ymin')) / (p_hlp1(i,c,'xmax') -
p_hlp1(i,c,'xmin'));
p_par(i,'P','1',c,'slope') = p_hlp2(i,c);
p_par(i,'P','1',c,'shift') = p_hlp1(i,c,'ymax') - p_hlp2(i,c) *
p_hlp1(i,c,'xmax');
p_par(i,'P','1',c,'bmin') = p_hlp1(i,c,'xmin');
p_par(i,'P','1',c,'bmax') = p_hlp1(i,c,'xmax');

p_hlp1(i,c,'xmin')= t_elt(c,i,'Po_min');
p_hlp1(i,c,'xmax')= t_elt(c,i,'Po_max');
p_hlp1(i,c,'ymin')= t_elt(c,i,'dPup');
p_hlp1(i,c,'ymax')= t_elt(c,i,'dPup');
p_hlp2(i,c)= (p_hlp1(i,c,'ymax') - p_hlp1(i,c,'ymin')) / (p_hlp1(i,c,'xmax') -
p_hlp1(i,c,'xmin'));
p_par(i,'P','2',c,'slope') = p_hlp2(i,c);
p_par(i,'P','2',c,'shift') = p_hlp1(i,c,'ymax') - p_hlp2(i,c) *
p_hlp1(i,c,'xmax');
p_par(i,'P','2',c,'bmin') = p_hlp1(i,c,'xmin');
p_par(i,'P','2',c,'bmax') = p_hlp1(i,c,'xmax');

p_hlp1(i,c,'xmin')= t_elt(c,i,'Po_min');
p_hlp1(i,c,'xmax')= t_elt(c,i,'Po_max');
p_hlp1(i,c,'ymin')= t_elt(c,i,'dPdown');
p_hlp1(i,c,'ymax')= t_elt(c,i,'dPdown');
p_hlp2(i,c)= (p_hlp1(i,c,'ymax') - p_hlp1(i,c,'ymin')) / (p_hlp1(i,c,'xmax') -
p_hlp1(i,c,'xmin'));
p_par(i,'P','3',c,'slope') = p_hlp2(i,c);
p_par(i,'P','3',c,'shift') = p_hlp1(i,c,'ymax') - p_hlp2(i,c) *
p_hlp1(i,c,'xmax');
p_par(i,'P','3',c,'bmin') = p_hlp1(i,c,'xmin');
p_par(i,'P','3',c,'bmax') = p_hlp1(i,c,'xmax');

parameter p_fac(s) startup factors;

for (sc_cou = 1 to sc_Tup,
    p_fac(s)$(ord(s) eq sc_cou) = (2*sc_cou-1)/(2*sc_Tup);
);

binary variable b(i,j,t) binary state variable;
binary variable start(t,s) startup binary variable;

binary variable on(t) Turbine Status;
binary variable startup(t) Startup of Turbine;
binary variable stop(t) Shutdown of Turbine;

positive variable x(i,j,t) state variable;
positive variable y(j,f,t) output variable;
positive variable Po(t) Equivalent Power Production;

```



```

positive variable P(t)      Power Production;
positive variable Qext(t)   Extracted Heat;
positive variable Qin(t)    Heat Input;
positive variable Pup(t)    Positive spinning reserve;
positive variable Pdown(t)  Negative spinning reserve;
positive variable UBP(t)    Upper border-line power;
positive variable LBP(t)    Lower border-line power;
positive variable dPup(t)   Positive max ramp rate reserve;
positive variable dPdo(t)   Negative max ramp rate reserve;
positive variable dEL(t)    Electricity Load Variation;
positive variable dHL(t)    Heat Load Variation;
positive variable cCon(t)   Continuous costs;
positive variable cTra(t)   Transitional costs;

free variable z Cost;

on.up(t) = t_inp(t, 'status');
start.up(t,s) = t_inp(t, 'status');

equation          e_com(t,s) on - start - stop complementarity;
equation          e_sta(t)   startup restriction;
equation          e_sto(t)   shutdown restriction;
equation          e_stg(t,s) startup stages;
equation          e_dis(t)   startup display;

equation          e_out(j,f,t) output equation;
equation          e_nor(j,t)  normalisation of binary variable;
equation          e_max(i,j,f,t) maximum bound of state variable;
equation          e_min(i,j,f,t) minimum bound of state variable;

equation          e_qinmin(t) minimum heat unput;
equation          e_qinmax(t) maximum heat input;
equation          e_extmax(t) maximum extraction;
equation          e_promin(t) minimum power;
equation          e_promax(t) maximum power;

equation          e_pro(t)   equivalent power production;
equation          e_epp(t)   equivalent power;
equation          e_pow(t)   power production;
equation          e_ran(t)   production range;
equation          e_noq(t)   no extraction status;

equation          e_psr(t)   positive spinning reserve;
equation          e_nsr(t)   negative spinning reserve;
equation          e_ubl(t)   upper border line power;
equation          e_lb1(t)   lower border-line power;
equation          e_lb2(t)   lower border-line power;
equation          e_dPu1(t)  positive max ramp rate reserve;
equation          e_dPu2(t)  positive max ramp rate reserve;
equation          e_dPd1(t)  negative max ramp rate reserve;
equation          e_dPd2(t)  negative max ramp rate reserve;
equation          e_dp1(t)   electricity load variation;
equation          e_dp2(t)   electricity load variation;
equation          e_dq1(t)   heat load variation;
equation          e_dq2(t)   heat load variation;

equation          e_ccon(t)  continuous costs calculation;
equation          e_ctra(t)  transitional costs calculation;
equation          e_cos      total cost calculation;

```

```

e_com(t,s)$(ord(s) le sc_Tup) .. on(t) + start(t,s) + stop(t) =1= 1;
e_stg(t,s)$(ord(s) le sc_Tup) .. start(t,s) =e= start(t+1,s+1);
e_sta(t) .. sum(tt$((ord(tt) ge (ord(t) - sc_Tup)) and (ord(tt) le (ord(t) - 1))), sum(s$(ord(s) le sc_Tup), start(tt,s))) =g= (on(t) - on(t-1)) * sc_Tup;

e_sto(t) .. sum(tt$((ord(tt) ge ord(t)) and (ord(tt) lt (ord(t) + sc_Tdo))), stop(tt)) =g= sc_Tdo * (on(t-1) - on(t));

e_dis(t) .. startup(t) =e= sum(s$(ord(s) le sc_Tup), start(t,s));

e_out(j,f,t) .. y(j,f,t) =e= sum(i, sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,j)), p_par(i,j,f,c,'slope')) * x(i,j,t) + sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,j)), p_par(i,j,f,c,'shift')) * b(i,j,t));

e_nor(j,t) .. sum(i, b(i,j,t)) =1= 1;
e_max(i,j,f,t) .. x(i,j,t) =1= b(i,j,t) * sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,j)), p_par(i,j,f,c,'bmax'));

e_min(i,j,f,t) .. x(i,j,t) =g= b(i,j,t) * sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,j)), p_par(i,j,f,c,'bmin'));

e_qinmin(t) .. Qin(t) =g= on(t)* t_inp(t,'Qmin');

e_qinmax(t) .. Qin(t) =1= on(t)* t_inp(t,'Qmax') + sum(s$(ord(s) le sc_Tup), p_fac(s)* start(t,s)) * t_inp(t,'Qmin');

e_extmax(t) .. Qext(t) =1= on(t)* sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), t_cvv(c,'Q2')) + sum(s$(ord(s) le sc_Tup), p_fac(s)*start(t,s))* sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), t_cvv(c,'Q1'));

e_promin(t) .. P(t) =g= on(t)* sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), p_par('0','P','1',c,'bmin'));

e_promax(t) .. P(t) =1= on(t)* sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), p_par('2','P','1',c,'bmax')) + sum(s$(ord(s) le sc_Tup), p_fac(s)*start(t,s)) * sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), p_par('2','P','1',c,'bmin'));

e_pro(t) .. Qin(t) =e= y('P','1',t);
e_epp(t) .. Po(t) =e= sum(i, x(i,'P',t));
e_pow(t) .. P(t) =e= Po(t) - sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), t_cvv(c,'cv')) * Qext(t);

e_ran(t) .. P(t) =g= sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), t_cvv(c,'P1') + (t_cvv(c,'P2') - t_cvv(c,'P1')) * (Qext(t) - t_cvv(c,'Q1')) / (t_cvv(c,'Q2') - t_cvv(c,'Q1')));

e_noq(t) .. Qext(t) =1= (1 - b('0','P',t))* sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), t_cvv(c,'Q2'));

e_psr(t) .. Pup(t) =e= UBP(t) - P(t);
e_nsr(t) .. Pdown(t) =e= P(t) - LBP(t);
e_ubl(t) .. UBP(t) =1= sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')), on(t)* p_par('2','P','1',c,'bmax') + sum(s$(ord(s) le sc_Tup), p_fac(s)*start(t,s)) * p_par('2','P','1',c,'bmin') + Qext(t) * (t_cvv(c,'P2') - p_par('2','P','1',c,'bmax')) / t_cvv(c,'Q2'));

```

```

e_lb1(t) .. LBP(t) =g= sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')),on(t)* t_cvv(c,'P1') + (
t_cvv(c,'P2') - t_cvv(c,'P1') ) * ( Qext(t) - on(t)* t_cvv(c,'Q1') ) /
(t_cvv(c,'Q2') - t_cvv(c,'Q1') ));

e_lb2(t) .. LBP(t) =g= sum(c$(ord(c) eq p_sel(t,'P')),on(t)*
p_par('1','P','1',c,'bmin') + Qext(t) * (t_cvv(c,'P1') -
p_par('1','P','1',c,'bmin')) / t_cvv(c,'Q1'));

e_dPu1(t) .. dPup(t) =g= (y('P','2',t) - Po(t+1)+Po(t))$(ord(t) lt (card(tt)-1));
e_dPu2(t) .. dPup(t) =g= (Po(t+1) - y('P','2',t) - Po(t))$(ord(t) lt (card(tt)-
1));
e_dPd1(t) .. dPdo(t) =g= (y('P','3',t) + Po(t+1)-Po(t))$(ord(t) lt (card(tt)-1));
e_dPd2(t).. dPdo(t) =g= (Po(t) - y('P','3',t) - Po(t+1))$(ord(t) lt (card(tt)-
1));

e_dp1(t) .. dEL(t) =g= P(t-1) - P(t);
e_dp2(t) .. dEL(t) =g= P(t) - P(t-1);
e_dq1(t) .. dHL(t) =g= Qext(t-1) - Qext(t);
e_dq2(t) .. dHL(t) =g= Qext(t) - Qext(t-1);
e_ccon(t) .. cCon(t) =e= sc_cpp * P(t) + sc_cex * Qext(t);

e_ctra(t) .. cTra(t) =e= sum(s$(ord(s) le sc_Tup),start(t,s)) * sc_sta + stop(t)
* sc_sto + sc_cdq * (dEL(t) + dHL(t));

e_cos .. z =e= sum(t, cCon(t) + cTra(t) + 0.0001*(LBP(t) - UBP(t)));

display Qin.l;
display Po.l;
display P.l;
display Qext.l;
display Pup.l;
display Pdown.l;
display dPup.l;
display dPdo.l;
display cVar.l;
display cSta.l;
display on.l;
display startup.l;
display stop.l;

```

## Βιβλιογραφία

- Ausiello G. : Complexity and approximation: combinatorial optimization problems and their approximability properties, Springer , Berlin 1999
- Beasley J. E. : Advances in linear and integer programming, Clarendon Press, Oxford 1996
- Bertsimas D., Tsitsiklis J. : Introduction to linear optimization, Athena Scientific 1997
- Bixby R.E., Fenelon M., Gu Z., Rothberg E., Wunderling R.: MIP: Theory and practice – Closing the gap, 2000
- Boyce, Meherwan P. : Gasturbinen Handbuch, Springer Verlag, Berlin 1999
- Chattopadhyay Debabrata: Application of general algebraic modeling system to power system optimization, IEEE Transactions, New Delhi 1999
- Κονταξής Γ., Παπαδιάς Β.: Ηλεκτρική Οικονομία, ΕΜ Πολυτεχνείο 1998
- Dietzel, Fritz : Dampfturbinen : Berechnung, Konstruktion, Teillast- und Betriebsverhalten, Kondensation, Carl Hanser Verlag, München 1980
- Dorn J., Girsch M., Skele G., Slany W.: Comparison of iterative improvement techniques for schedule optimization, TU Vienna 2000
- Dotzauer Erik, Holström Kenneth: Optimal scheduling of cogeneration plants, Mälardalen University, Västerås 1997
- Educogen: A guide to cogeneration, Brussels 2001
- Energy Information Administration: International Energy Outlook 2002
- Ferrari-Trecate G., Gallestey E., Letizia P., Spedicato M., Morari M., Antoine M. : Modeling and control of cogeneration power plants: A hybrid system approach, Zurich 2002
- Frangopoulos C., Karydogiannis E., Karalis I. : Cogeneration of Heat and Power, Hellenic Productivity Center, Athens 1994
- Gu Z., Nemhauser G.L., Savelsbergh M.W.P.: Lifted flow cover inequalities for mixed 0-1 integer programs, Atlanta 1998
- Horlock, J. H. : Cogeneration - Combined heat and power (CHP) : Thermodynamics and economics, Pergamon Press, Oxford 1987
- Illerhaus S. W., Verstege J. F.: Optimal operation of industrial CHP-based power systems in liberalized energy markets, University of Wuppertal, Germany 1999

Jünger Michael, Reinelt Gerhard, Thienel Stefan: Practical problem solving with cutting plane algorithms in combinatorial optimization, Heidelberg 1994

Khurmi, R. S. - J.K Gupta : A textbook of thermal engineering, S. Chad & Co. Ltd, New Delhi 1997

Linderoth J.T., Savelsbergh M.W.P.: A computational study of search strategies for mixed integer programming, Georgia Institute of Technology, Atlanta 1997

Logan Earl: Handbook of turbomachinery, Dekker , New York 1995

Marchand Hugues, Martin Alexander, Weismantel Robert, Wolsey Laurence: Cutting planes in integer and mixed integer programming, October 1999

Marecki J.: Combined heat and power generating systems, Peter Peregrinus Ltd, London 1988

Mitchell John E.: Branch-and-cut algorithms for combinatorial optimization problems, New York 1999

Mitchell John E.: Branch-and-cut algorithms for integer programming, New York 1998

Rothwangl H.P. : Optimizing constrained control using mixed integer programming, TU Vienna 2001

Savelsbergh M.W.P. : Preprocessing and Probing Techniques for Mixed Integer Programming Problems, Atlanta 2002

Zemansky, Mark W. : Heat and thermodynamics - Mark W. Zemansky, Richard H. Dittman, McGraw-Hill , New York 1989

Τα θερμοδυναμικά διαγράμματα Mollier δημιουργήθηκαν με το TPX – Thermodynamic Properties for Excel, που αναπτύχθηκε από το Τεχνολογικό Ινστιτούτο της California.