



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Αγωγιμότητα εισόδου άπειρης διπολικής κεραίας με διαφορετικά μοντέλα
τροφοδοσίας και διαφορετικούς πυρήνες ολοκλήρωσης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Α. Βαλαγιαννόπουλος

Επιβλέπων: Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2004



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Αγωγιμότητα εισόδου άπειρης διπολικής κεραίας με διαφορετικά μοντέλα
τροφοδοσίας και διαφορετικούς πυρήνες ολοκλήρωσης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Α. Βαλαγιαννόπουλος

Επιβλέπων: Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 15^η Ιουλίου 2004.

.....
Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

.....
Νικόλαος Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Τσαλαμέγκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2004

.....
Κωνσταντίνος Α. Βαλαγιαννόπουλος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνος Α. Βαλαγιαννόπουλος, 2004

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Είναι αποδεκτό ότι ίσως το κρισιμότερο μέγεθος που χαρακτηρίζει τη λειτουργία μιας κεραίας είναι η αγωγιμότητα (ή εναλλακτικά η αντίσταση) εισόδου της. Για παράδειγμα σε ένα πολύπλοκο μικροκυματικό κύκλωμα η κεραία και ο χώρος στον οποίο εκπέμπει μπορούν να αντικατασταθούν από μία σύνθετη αγωγιμότητα κάνοντας την ανάλυση ευκολότερη. Η διπολική κυλινδρική κεραία πεπερασμένου μήκους είναι ίσως το απλούστερο μοντέλο ακτινοβολούσας διάταξης και μπορούν από αυτό να εξαχθούν συμπεράσματα για πιο σύνθετες κεραίες. Επειδή η μελέτη του δίπολου άπειρου μήκους μπορεί να βοηθήσει στην έρευνα για το πεπερασμένο, στην παρούσα εργασία ασχολούμαστε με την αγωγιμότητα εισόδου της άπειρης διπολικής κυλινδρικής κεραίας.

Η διαδικασία λαμβάνει χώρα για διαφορετικά μοντέλα τροφοδοσίας (delta – function και frill) και για διαφορετικούς πυρήνες (ακριβής και προσεγγιστικός που αντιστοιχεί στη λεγόμενη “προσέγγιση λεπτού σύρματος”) στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallen. Εφαρμόζεται ο τελεστής Fourier στις παραπάνω εξισώσεις και εξάγονται οι τελικοί τύποι της αγωγιμότητας εισόδου μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Οι τύποι αυτοί που είναι αθροίσματα ολοκληρωμάτων προγραμματίζονται για να υπολογιστούν μέσω του πακέτου MatLab ενώ γίνεται έλεγχος κατά πόσον το συγκεκριμένο πακέτο πληροί τις θεωρητικές παραδοχές που έχουν γίνει προκειμένου να εξαχθούν οι τύποι.

Ένα μεγάλο μέρος της παρούσας εργασίας ασχολείται με πρωτότυπη θεωρητική μελέτη μικρής παρουσίας στη διεθνή βιβλιογραφία. Πιο συγκεκριμένα μελετάται ένα άλλο μοντέλο τροφοδοσίας που προκύπτει από μια οριακή κατάσταση του frill generator. Επίσης εξάγεται μία συνθήκη ισοδυναμίας των δύο μοντέλων ενώ από τα διαγράμματα που προκύπτουν από την επαναληπτική εκτέλεση των παραπάνω προγραμμάτων βγαίνουν χρήσιμα συμπεράσματα. Αυτά αφορούν τόσο την επαλήθευση των θεωρητικών αποτελεσμάτων όσο και τις διαφορές μεταξύ των εναλλακτικών προσεγγίσεων του ίδιου μεγέθους κάτι ιδιαίτερα σημαντικό για τον ερευνητή που επιθυμεί μία ποσοτική προσέγγιση.

Λέξεις Κλειδιά

Άπειρη Διπολική Κεραία, Εξίσωση Hallen, Delta Function Generator, Frill Generator, Ακριβής Πυρήνας, Προσέγγιση Λεπτού Σύρματος, Πραγματικό και Φανταστικό Μέρος Αγωγιμότητας Εισόδου.

Abstract

It is accepted that perhaps the most critical parameter which describes the function of an antenna is its input admittance (or alternatively its input resistance). For example in a complex microwave circuit the antenna and the area in which radiates can be replaced from a single admittance making in this way the analysis easier. The dipole cylindrical antenna of finite length is perhaps the simplest model of radiating device and from its study useful conclusions for more complex devices can derive. Because of the fact that the study of infinite dipole can help the research for the finite one, in this thesis we are getting involved in the input admittance of the infinite cylindrical antenna.

The procedure is held for different feed models (delta – function and frill) and for different kernels (exact and approximate which represents the “thin – wire approximation”) in Hallen type integral equations. These equations are Fourier transformed of input admittances derive through the inverse Fourier transform. The formulas which are sums of integrals are computed through the computing program MatLab. In addition we test if the posed theoretical conditions continue to be valid by using the aforementioned program.

A significant part of the thesis pertains to theoretical study of the problem with poor or no presence in international references. Specifically another feed model is studied which derives from a limiting case of the frill generator. Moreover an equivalence condition between the two feed models is extracted. Finally the diagrams which are constructed by the iterative evaluation of the formulas above help us to reach conclusions. These ones concern not only the verification of theoretical results but also the differences between the alternative versions of the same quantity something very important for the researcher who desires a quantitative approach.

Key Words

Infinite Dipole Antenna, Hallen Equation, Delta Function Generator, Frill Generator, Exact Kernel, Thin – Wire Approximation, Input Admittance, Input Conductance, Input Susceptance.

| | |
|------------|-------------------|
| (0) | Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ |
|------------|-------------------|

Θα περιγραφούν οι στόχοι και τα περιεχόμενα στοιχεία των ενοτήτων που ακολουθούν:

Τα προβλήματα

Στο τμήμα αυτό της εργασίας γίνεται μία σύντομη παρουσίαση της τοπολογίας των προβλημάτων και του συστήματος συντεταγμένων που θα χρησιμοποιηθεί που θα είναι το κυλινδρικό. Επίσης ορίζονται γίνεται μία πρώτη αναφορά στα δύο είδη των διεγέρσεων που είναι το τύπου delta – function και το τύπου frill. Ακόμα διασαφηνίζεται ότι θα ενδιαφερθούμε αποκλειστικά για τις παράλληλες στον άξονα z ηλεκτρικές συνιστώσες των πεδίων καθώς η συνοριακή συνθήκη του Maxwell που τις αφορά είναι απλούστερη και η ϕ – συνιστώσα των ηλεκτρικών πεδίων είναι μηδενική. Από την γεωμετρία της διάταξης και τις ιδιότητες της διέγερσης καταλήγουμε στο ότι όλα τα συμμετέχοντα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη θα είναι ανεξάρτητα από την αζιμουθιακή μεταβλητή ϕ και θα εξαρτώνται με άρτιο τρόπο από την z . Γίνεται και η διαπίστωση ότι το επιφανειακό ρεύμα της κεραίας έχει μόνο τη z συνιστώσα μη μηδενική.

Στη συνέχεια γίνεται μία επεξεργασία των εξισώσεων Maxwell με χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-j \cdot \omega \cdot t)$ που δεν είναι συνηθισμένη εισάγοντας την έννοια του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού και εξάγεται η εξίσωση που συνδέει το ηλεκτρικό πεδίο (z – συνιστώσα) με τη συνάρτηση του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού το οποίο με τη σειρά του προκύπτει από τη λύση της απλοποιημένης από την συνθήκη Lorentz κυματική εξίσωση. Το τελευταίο βήμα αυτής της ενότητας είναι να εξαχθεί το ολικό πεδίο σαν συνάρτηση των όρων του delta – function generator χρησιμοποιώντας τη βηματική μεταβολή του ηλεκτρικού βαθμωτού δυναμικού ενώ παραθέτεται σαν έτοιμη η αντίστοιχη ποσότητα για το frill generator. Η σχετική ανάλυση γίνεται στο παράρτημα (Α).

Οι εξισώσεις Hallen

Στην εν λόγω ενότητα προκειμένου να απλοποιηθεί ο τύπος του ολοκληρώματος ακτινοβολίας στην οποία συμμετέχει η άγνωστη συνάρτηση του ρεύματος που διαρρέει την κεραία εξάγεται ο τύπος της απόστασης μεταξύ δύο τυχαίων σημείων στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων. Μετά από τη διαπίστωση

ότι παρόλο που φαίνεται εξάρτηση από τη μεταβλητή φ δεν υπάρχει τέτοια ορίζονται οι δύο πυρήνες της ολοκληρωτικής εξίσωσης του ρεύματος. Αφενός ο ακριβής που ορίζεται μέσω ολοκληρώματος και αφετέρου ο προσεγγιστικός που αντιστοιχεί στην λεγόμενη “thin – wire approximation”. Στη συνέχεια στοιχειοθετούνται οι ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις τύπου Rocklinton ενώ ορίζονται οι βασικοί συμβολισμοί για τα ρεύματα. Επόμενο βήμα είναι να μετατραπούν οι ολοκληρωτικοδιαφορικές αυτές εξισώσεις σε ολοκληρωτικές και κάτι τέτοιο εξαιτίας της αναγκαιότητας της μη εναλλαγής των τελεστών όπως αποδεικνύεται στο παράρτημα (B) μόνο με έναν τρόπο γίνεται. Αυτός είναι το να επιλυθούν οι αντίστοιχες διαφορικές εξισώσεις. Η επίλυση της διαφορικής που αντιστοιχεί στην τροφοδοσία τύπου delta – function γίνεται απαιτώντας το διανυσματικό δυναμικό να είναι συνεχής συνάρτηση. Όσον αφορά την διαφορική του frill generator η επίλυσή της γίνεται με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier που σκιαγραφείται στο παράρτημα (Γ) .

Οι γενικές λύσεις των διαφορικών περιέχουν μόνο μία προσδιοριστέα σταθερά εξαιτίας της αρτιότητας ως προς z της άγνωστης συνάρτησης του ρεύματος. Αυτή προσδιορίζεται από την απαίτηση το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό (μόνο η z – συνιστώσα του είναι μη μηδενική) να αποτελείται μόνο από απομακρύνοντα κύματα από το σημείο τροφοδοσίας στο $z = 0$ που να οδεύουν κατά την κατάλληλη φορά του άξονα z καθώς $z \rightarrow \pm\infty$. Εφόσον οι διαφορικές έχουν επιλυθεί οι εξισώσεις τύπου Hallen έχουν εξαχθεί. Τέλος στη συγκεκριμένη ενότητα γίνεται και μία απόδειξη της φυσικής απαίτησης ότι αν το υλικό διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει απώλειες το φανταστικό μέρος του κυματικού αριθμού δεν μπορεί παρά να είναι θετικό.

Τα ολοκληρώματα αγωγιμοτήτων

Εφόσον οι εξισώσεις Hallen είναι ολοκληρωτικές και τα ολοκληρώματά τους έχουν άπειρα άκρα ενώ οι ολοκληρωτέες τους έχουν συνελκτική μορφή μπορούμε να δράσουμε με τον τελεστή Fourier στις συγκεκριμένες εξισώσεις. Σε αυτή την ενότητα εξάγονται οι μετασχηματισμοί Fourier των πυρήνων με τη βοήθεια ενός μαθηματικού τυπολογίου και οι τελικοί τύποι υφίστανται αναλυτική επέκταση σε όλο το μιγαδικό επίπεδο όπου είναι ομαλοί. Η ίδια διαδικασία λαμβάνει χώρα και όσον αφορά τους μετασχηματισμούς Fourier των δευτέρων μελών όπου θα πρέπει να

ισχύει $\text{Im}[k] > 0$ κάτι που αποτελεί φυσική απαίτηση αλλά ορίζεται και για $\text{Im}[k] \rightarrow 0$ μέσω αναλυτικής επέκτασης. Στη συνέχεια έχουμε δράση του τελεστή Fourier στις εξισώσεις και επιλύουμε ως προς το μετασχηματισμό των ρευμάτων. Γίνεται η αντίστροφη ολοκλήρωση και περιοριζόμαστε στην αγωγιμότητα εισόδου που μας αφορά ($z = 0$).

Ο δρόμος της ολοκλήρωσης είναι αρχικά πραγματικός όμως αν παραμείνει τέτοιος θα έχουμε αποκλίνοντα ολοκληρώματα καθώς στο σημείο $\zeta = k$ (όπου ζ η δυαδική μεταβλητή του μήκους) έχουμε μη ολοκληρώσιμο απειρισμό. Γι' αυτό το λόγο τροποποιούμε το δρόμο ολοκλήρωσης στηριζόμενοι στο ασθενές θεώρημα του Cauchy και την αναλυτικότητα των ολοκληρωτέων. Εξαιτίας του ότι το κάτω και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου είναι απαλλαγμένο από κλαδικές τομές επιλέγουμε την από κάτω παράκαμψη του ανώμαλου σημείου $\zeta = k$. Έτσι ο λόγος της απόκλισης εξαιτίας του $\zeta = k$ αίρεται. Όσον αφορά το άπειρο άκρο εξάγονται ασυμπτωτικές εκφράσεις και αποφασίζεται ποιες είναι οι συγκλίνουσες ποσότητες. Επειδή τα ολοκληρώματα είναι μιγαδικά υπάρχει περίπτωση να αποκλίνει μόνο το ένα από τα δύο μέρη τους στις αποκλίνουσες περιπτώσεις. Γι' αυτό το λόγο εξετάζεται η σύγκλιση ξεχωριστά του πραγματικού και του φανταστικού μέρους των ολοκληρωμάτων της αγωγιμότητας εισόδου. Η συγκεκριμένη διαδικασία λαμβάνει χώρα για όλους τους συνδυασμούς μοντέλου τροφοδοσίας και πυρήνα ολοκλήρωσης.

Οι υπολογισμοί

Στη συγκεκριμένη ενότητα εξασφαλίζεται ότι η υπολογιστική υλοποίηση (που γίνεται με τη βοήθεια του υπολογιστικού πακέτου MatLab) γίνεται με τον πλέον αποδοτικό τρόπο και ακολουθώντας τις θεωρητικές παραδοχές που έχουν γίνει. Πρώτα επιλέγεται το σχήμα της από κάτω παράκαμψης ως τετραγωνικό και εξάγονται οι τελικοί τύποι που αποτελούνται από άθροισμα πέντε ολοκληρωμάτων. Στη συνέχεια γίνεται η διαδικασία της αδιαστατοποίησης και πλέον όλα τα μεγέθη μήκους εμφανίζονται διαιρούμενα με το μήκος κύματος και όλα τα μεγέθη αντιστρόφου μήκους εμφανίζονται πολλαπλασιαζόμενα με το μήκος κύματος. Επίσης γίνεται συζήτηση για την αναγκαιότητα αντικατάστασης του άνω (άπειρου) άκρου του πέμπτου ολοκληρώματος του παραπάνω αθροίσματος με έναν επαρκώς μεγάλο θετικό αριθμό προκειμένου να γίνει αποτελεσματικά ο υπολογισμός. Στη συνέχεια γίνεται έλεγχος των ολοκληρωτέων συναρτήσεων προκειμένου να διαπιστωθεί αν

αυτές είναι συνεχείς στο δρόμο ολοκλήρωσης ή ισοδύναμα ότι το κάτω και δεξί τεταρτημόριό τους είναι απαλλαγμένο από κλαδικές τομές σύμφωνα με το υπολογιστικό πρόγραμμα. Επίσης δεδομένης της πλειοτιμότητας των ολοκληρωτέων γίνεται έλεγχος του φύλλου Riemann πάνω στο οποίο γίνεται η ολοκλήρωση ως προς το αν είναι το αντίστοιχο που προβλέπει η θεωρητική μελέτη. Τέλος γίνεται προσπάθεια τα ολοκληρώματα με άπειρο άκρο που δεν συγκλίνουν εκθετικά να μετατραπούν σε ισοδύναμα που έχουν αυτή την ιδιότητα.

Τα συμπεράσματα

Στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται αποτελέσματα και συμπεράσματα που έχουν μικρή ή και καμία αναφορά στην διεθνή βιβλιογραφία και αφορούν το θέμα που πραγματευόμαστε. Πρώτα γίνεται μία μελέτη της κατάστασης για την οποία η εξωτερική ακτίνα της ομοαξονικής γραμμής τροφοδοσίας frill generator τείνει να ταυτιστεί με την εσωτερική. Μία τέτοια κατάσταση θα ήταν αναμενόμενο να ταυτίζεται με το μοντέλο τροφοδοσίας delta – function generator. Αυτό δεν συμβαίνει αλλά προκύπτει μία άλλη ενδιαφέρουσα ταυτοτική ισότητα μεταξύ frill προσεγγιστικού πυρήνα και delta ακριβούς. Επίσης μελετάται πλήρως η κατάσταση “μικρού frill” όπως την ονομάζουμε και αποτελεί μία εναλλακτική επιλογή τροφοδοσίας πέραν από τις δύο αρχικές. Επίσης αποδεικνύεται αναλυτικά η συνθήκη ισοδυναμίας των δύο μοντέλων ενώ γίνονται κάποιες παρατηρήσεις μέσω διαγραμμάτων. Παρατηρούνται γενικά μεγαλύτερες διαφορές στο φανταστικό μέρος παρά στο πραγματικό ενώ τόσο η συνθήκη ισοδυναμίας όσο και τα πορίσματα της κατάστασης μικρού frill επαληθεύονται. Επίσης επισυνάπτονται πίνακες τιμών (όσον αφορά την τροφοδοσία τύπου frill) καθώς από τα δισδιάστατα διαγράμματα δεν μπορεί να εξαχθεί εύκολα ποσοτικό συμπέρασμα. Τέλος γίνεται αναφορά στην πεπερασμένη κεραία και υποστηρίζεται ότι δεν μπορεί να γίνει άμεση συσχέτιση με την άπειρη κεραία εξαιτίας της πολυπλοκότητας του προβλήματος που σκιαγραφείται στο παράρτημα (E).

Τα παραρτήματα

Το πρώτο παράρτημα αναφέρεται στην εξαγωγή του τύπου του πεδίου για το frill generator. Εξάγεται η συνάρτηση του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού, στη συνέχεια το ηλεκτρικό πεδίο, ακολούθως το μαγνητικό ρεύμα και το διανυσματικό

ηλεκτρικό δυναμικό. Από εκεί προκύπτει άμεσα το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο από το οποίο μας ενδιαφέρει η εκδοχή του κοντά στον άξονα των z . Γίνεται χρήση τεχνικών που αναφέρονται στην παραπομπή [8]. Το δεύτερο παράρτημα αποδεικνύει την αναγκαιότητα μη εναλλαγής του ολοκληρωτικού με τον διαφορικό τελεστή στην περίπτωση της εξίσωσης Pocklington καθώς όταν χρησιμοποιείται ο ακριβής πυρήνας έχουμε πρόβλημα απόκλισης. Στο τρίτο παράρτημα αναλύεται η μέθοδος εύρεσης μερικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης για την περίπτωση του frill generator με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier. Στο τέταρτο παράρτημα παρατίθενται οι κώδικες σε περιβάλλον προγραμματισμού MatLab των βασικών προγραμμάτων της υπολογιστικής υλοποίησης. Τέλος στο πέμπτο παράρτημα επιλύεται σύντομα το πρόβλημα της πεπερασμένης κεραίας με τη βοήθεια της αριθμητικής μεθόδου των ροπών και παρουσιάζονται τα προβλήματα και η πολυπλοκότητά του.

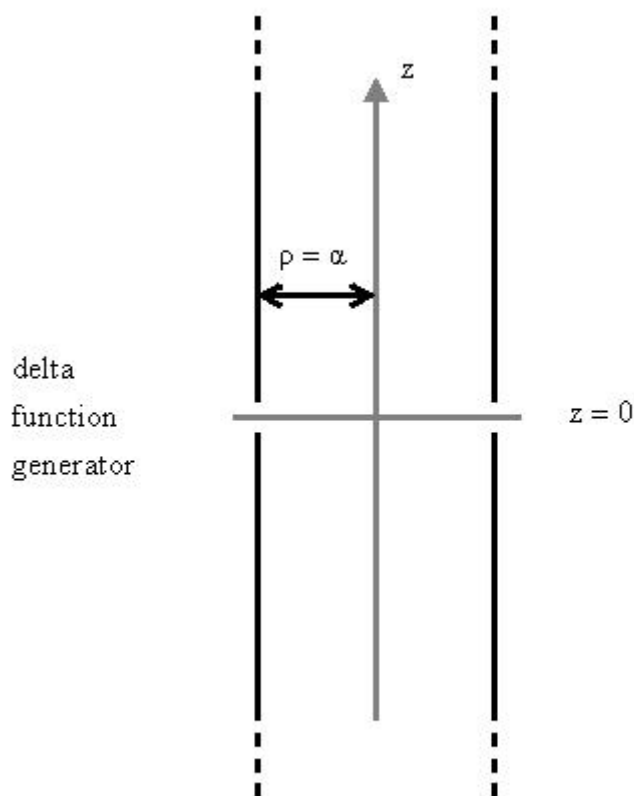
(1) ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**Γενική τοπολογία**

Τα προβλήματα που θα μελετηθούν αφορούν τη διπολική κυλινδρική κεραία άπειρου μήκους. Πρόκειται για έναν τέλεια αγωγίμο μεταλλικό σωλήνα με άπειρο μήκος και με απείρως λεπτά τοιχώματα ενώ όλος ο υπόλοιπος χώρος είναι κενός με χαρακτηριστικά (ϵ_0, μ_0) . Γίνεται αποκλειστικά χρήση των κυλινδρικών συντεταγμένων $(\rho, \varphi, z, \bar{\rho}, \bar{\varphi}, \bar{z})$ και η αρχή τους είναι τοποθετημένη στο επίπεδο μέσου του διπόλου (όσο κάτι τέτοιο μπορεί να οριστεί στην κεραία άπειρου μήκους) ενώ ο άξονας z του χρησιμοποιούμενου συστήματος συντεταγμένων ταυτίζεται με τον άξονα του κυλίνδρου που έχει ακτίνα $\rho = a$. Εξαιτίας της συγκεκριμένης τοποθέτησης του συστήματος συντεταγμένων η διάταξη χαρακτηρίζεται από αξιμουθιακή συμμετρία αλλά και από συμμετρία αρτιότητας ως προς τον άξονα των z . Δηλαδή τα σημεία με αντίθετες συντεταγμένες z και ίδιες τις συντεταγμένες (ρ, φ) δέχονται την ίδια επίδραση ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Προκειμένου να αρχίσει να ακτινοβολεί η συγκεκριμένη κεραία (όπως και κάθε άλλη) πρέπει να τροφοδοτηθεί μέσω κάποιας πηγής. Οι διεγέρσεις που μελετάμε στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι δύο τύπων: τύπου delta – function και τύπου frill οι οποίες και σχολιάζονται παρακάτω.

Διέγερση τύπου delta – function

Η γεννήτρια τύπου delta function προκειμένου να λειτουργήσει απαιτεί την ύπαρξη απειροστά μικρού διακένου στο μέσον του σωλήνα του κεντρικά τροφοδοτούμενου διπόλου. Με αυτό τον τρόπο ο μεταλλικός κύλινδρος υφίσταται σε δύο απομονωμένα μεταξύ τους (επίσης κυλινδρικά) τμήματα τα οποία ως τέλεια αγωγίμα σώματα διατηρούν σταθερή την τιμή του ηλεκτρικού δυναμικού παντού πάνω τους. Η γεννήτρια τύπου delta function εκείνο που κάνει είναι να κρατά σταθερή τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των δύο σωμάτων κάτι που παραπέμπει σε βηματική συνάρτηση. Επομένως το ηλεκτρικό πεδίο που είναι ανάλογο της παραγώγου του ηλεκτροστατικού δυναμικού θα έχει μορφή συνάρτησης δέλτα του Dirac κάτι που εξηγεί την ονομασία της γεννήτριας. Το σημαντικό στοιχείο είναι ότι το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο τροφοδοσίας είναι αξιμουθιακά συμμετρικό (ανεξάρτητο της μεταβλητής φ) και άρτιο ως προς z . Επίσης η συνιστώσα του

διεγείροντος ηλεκτρικού πεδίου που μας ενδιαφέρει για την περίπτωση τροφοδοσίας delta – function είναι η παράλληλη στον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων. Μία εικόνα της τοπολογίας του προβλήματος με την διέγερση τύπου delta – function φαίνεται στο σχήμα (1.1) που ακολουθεί.

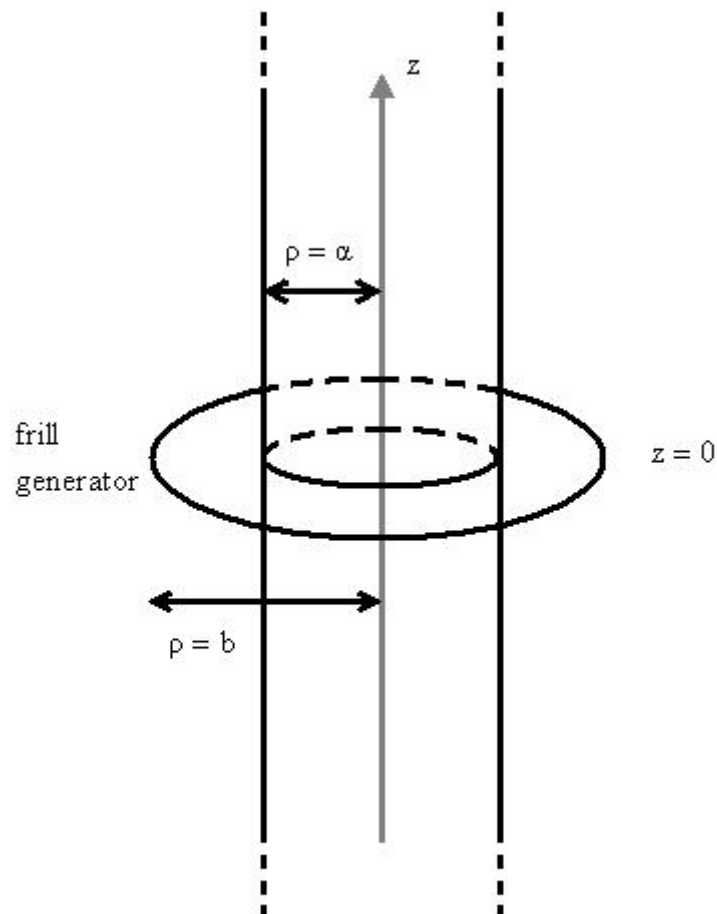


Σχήμα (1.1)

Διέγερση τύπου frill

Η τροφοδοσία τύπου frill αντιστοιχεί στο ηλεκτρικό πεδίο που προκαλείται πάνω στον άξονα του κυλίνδρου από αζιμουθιακό μαγνητικό ρεύμα που εκτείνεται στο χώρο της ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς που τροφοδοτεί την κεραία. Η εσωτερική ακτίνα της γραμμής είναι αυτή του κυλίνδρου του διπόλου $\rho = a$ και η εξωτερική $\rho = b > a$. Στη συγκεκριμένη τροφοδοσία δεν υπάρχει απειροστά μικρό διάκενο που να χωρίζει την κεραία σε δύο τμήματα. Το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο τροφοδοσίας είναι επίσης ανεξάρτητο της αζιμουθιακής γωνίας ϕ ενώ εξαρτάται με άρτιο τρόπο από τη μεταβλητή z . Και στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνιστώσα που μας αφορά είναι η z . Πρέπει να σημειωθεί ότι το εκάστοτε τροφοδοτούν ηλεκτρικό πεδίο αναγκάζει τον σκεδαστή (στη συγκεκριμένη

περίπτωση την άπειρη κεραία) να δημιουργήσει ένα δευτερογενές πεδίο ακτινοβολίας που αθροιζόμενο με το διεγείρον θα ικανοποιήσει τις συνοριακές συνθήκες του Maxwell πάνω του. Πηγή του δευτερογενούς αυτού πεδίου ακτινοβολίας είναι το επιφανειακό ρεύμα που θα αναγκαστεί να ρεύσει στον κύλινδρο. Μία εικόνα της τοπολογίας του προβλήματος με την διέγερση τύπου frill φαίνεται στο σχήμα (1.2) που ακολουθεί.



Σχήμα (1.2)

Μεγέθη και εξαρτήσεις

Όλα τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη που συμμετέχουν στα υπό μελέτη προβλήματα είναι μιγαδικοί φασιθέτες (καθώς οι διεγέρσεις και οι αποκρίσεις είναι αρμονικές) που αντιστοιχούν σε χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-j \cdot \omega \cdot t)$ όπου ω η κυκλική συχνότητα της αρμονικής διέγερσης και απόκρισης. Όπως έχει τονιστεί τόσο η διάταξη όσο και οι διεγέρσεις των προβλημάτων είναι αξιμουθιακά

ανεξάρτητες και επιδεικνύουν αρτιότητα ως προς τη μεταβλητή z . Αυτό συνεπάγεται ότι το σύνολο των ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών που συμμετέχουν στο πρόβλημα θα διακρίνονται από αυτές τις δύο ιδιότητες. Η χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει την κεραία θα συμβολιστεί ως: $\vec{J}(\rho, \varphi, z)$. Αυτό το ρεύμα θα έχει μη μηδενική μόνο τη συνιστώσα την παράλληλη στον άξονα των z . Πράγματι δεν υπάρχει λόγος να ρέει αζιμουθιακό επιφανειακό ρεύμα καθώς η διέγερση είναι ίδια για όλες τις ακτινικές διευθύνσεις. Αν συμβολίσουμε με $J_s(z)$ την αντίστοιχη συνιστώσα του επιφανειακού ρεύματος και λάβουμε υπόψη την αζιμουθιακή ανεξαρτησία προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\vec{J}(\rho, \varphi, z) = \vec{J}(\rho, z) = \hat{z} \cdot J_s(z) \cdot \delta(\rho - a) \quad (1.1)$$

με τη συνάρτηση $J_s(z)$ να είναι άρτια ως προς z .

Το ηλεκτρικό πεδίο που προκύπτει ως αποτέλεσμα της παραπάνω ρευματικής κατανομής δηλαδή μία άλλη εκδοχή του ολικού πεδίου θα συμβολίζεται ως $\vec{E}(\rho, \varphi, z)$ του οποίου δεν γνωρίζουμε ποιες συνιστώσες είναι μηδενικές οπότε θα είναι:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = \vec{E}(\rho, z) = \hat{\rho} \cdot E_\rho(\rho, z) + \hat{\varphi} \cdot E_\varphi(\rho, z) + \hat{z} \cdot E_z(\rho, z) \quad (1.2)$$

με τις επιμέρους συναρτήσεις να είναι άρτιες ως προς z . Η ανάλυσή μας θα αφορά τις επιφανειακές στην επιφάνεια $\rho = a$ ηλεκτρικές συνιστώσες (δηλαδή την $E_\varphi(\rho, z)$ και την $E_z(\rho, z)$). Αυτό διότι η συνοριακή συνθήκη του Maxwell για τις επιφανειακές συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου είναι απλούστερη. Επειδή δεν έχουμε αζιμουθιακό επιφανειακό ηλεκτρικό ρεύμα (και δεδομένου του άπειρου της διάταξης) η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου αζιμουθιακής φοράς θα είναι μηδενική και κατά συνέπεια από αυτό το σημείο θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την συνιστώσα κατά z : $E_z(\rho, z)$ του ηλεκτρικού πεδίου. Επίσης το αντίστοιχο μαγνητικό πεδίο συμβολίζεται ως: $\vec{H}(\rho, \varphi, z) = \vec{H}(\rho, z)$. Ακόμα το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό του ολικού πεδίου συμβολίζεται με $\Phi(\rho, \varphi, z) = \Phi(\rho, z)$ και το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό που έχει μόνο την κατά z συνιστώσα του μη μηδενική καθώς έχει πάντοτε ίδια φορά με αυτή της ρευματικής ηλεκτρικής πηγής (απουσία μαγνητικών πηγών) με:

$$\vec{A}(\rho, \varphi, z) = \vec{A}(\rho, z) = \hat{z} \cdot A_z(\rho, z) \quad (1.3)$$

Επίσης τα ηλεκτρικά πεδία που αντιστοιχούν στα μοντέλα τροφοδοσίας τύπου delta – function και τύπου frill θα συμβολίζονται ως: $\vec{E}_{\text{dlt}}(\rho, \varphi, z)$ (ολικό) και $\vec{E}_{\text{frl}}(\rho, \varphi, z)$

(διεγείρον) αντίστοιχα ενώ εμείς θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με την συνιστώσα τους κατά z .

Εξισώσεις Maxwell

Θα καταλήξουμε σε

κάποιες χρήσιμες σχέσεις ξεκινώντας από τους νόμους του Maxwell έχοντας πάντα υπόψη μας ότι η χρονική εξάρτηση είναι της μορφής $\exp(-j \cdot \omega \cdot t)$. Στον κενό χώρο με χαρακτηριστικά (ϵ_0, μ_0) και απουσία μαγνητικών πηγών ρεύματος ο νόμος του Ampere γράφεται:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} - j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \quad (1.4)$$

και ο νόμος του Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (1.5)$$

με τον διανυσματικό διαφορικό τελεστή ∇ να εκφράζεται στο σύστημα συντεταγμένων εκείνο που εκφράζονται οι διανυσματικές συναρτήσεις των πεδίων. Επίσης μπορεί κατά τα γνωστά να οριστεί το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό:

$$\nabla \times \vec{A} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (1.6)$$

Υπενθυμίζεται ότι η συνάρτηση του διανυσματικού δυναμικού δεν έχει οριστεί πλήρως καθώς για κάτι τέτοιο απαιτείται εκτός από την περιστροφή και η απόκλιση της $\nabla \cdot \vec{A}$. Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις μπορεί να γίνει η παρακάτω πράξη:

$$(1.6) \stackrel{(1.5)}{\Rightarrow} \nabla \times \vec{A} = \mu_0 \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot \mu_0} \cdot \nabla \times \vec{E} \Rightarrow \nabla \times (\vec{E} - j \cdot \omega \cdot \vec{A}) = 0$$

Η διανυσματική συνάρτηση $(\vec{E} - j \cdot \omega \cdot \vec{A})$ που έχει μηδενική περιστροφή θα εκφραστεί σαν απόκλιση της συνάρτησης του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού Φ , άρα:

$$\vec{E} = -\nabla\Phi + j \cdot \omega \cdot \vec{A} \quad (1.7)$$

Προκειμένου να αποφασιστεί με ποιο τρόπο θα οριστεί πλήρως η απόκλιση της συνάρτησης του διανυσματικού δυναμικού εκτελούμε την πράξη:

$$\begin{aligned}
(1.6) \stackrel{(1.4)}{\Rightarrow} \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times \vec{A} \right) &= \vec{J} - \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \stackrel{(1.7)}{\Rightarrow} \\
\frac{1}{\mu_0} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \vec{J} - \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot (-\nabla \Phi - \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \vec{A}) \Rightarrow \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) &= \mu_0 \cdot \vec{J} + \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\nabla \Phi + \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \vec{A}) \Rightarrow \\
\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} &= \mu_0 \cdot \vec{J} + \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot (\nabla \Phi + \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \vec{A}) \Rightarrow \\
\nabla (\nabla \cdot \vec{A} - \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \Phi) - \nabla^2 \vec{A} &= -\omega^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \vec{A} + \mu_0 \cdot \vec{J}
\end{aligned}$$

Μία επιλογή που θα διευκόλυνε τις πράξεις θα ήταν η:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \Phi \quad (1.8)$$

γνωστή και ως συνθήκη Lorentz. Κατά συνέπεια μπορεί να εκφραστεί το ηλεκτρικό πεδίο σαν αποκλειστική συνάρτηση του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού:

$$(1.7) \stackrel{(1.8)}{\Rightarrow} \vec{E} = -\frac{1}{\mathbf{j} \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) + \mathbf{j} \cdot \omega \cdot \vec{A} \quad (1.9)$$

Με τη συγκεκριμένη επιλογή της απόκλισης του διανυσματικού δυναμικού η παραπάνω κυματική εξίσωση θα έπαιρνε την μορφή:

$$\nabla^2 \vec{A} - \omega^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \vec{A} = -\mu_0 \cdot \vec{J} \quad (1.10)$$

Η λύση της (1.10) είναι γνωστό ότι δίνεται από το παρακάτω ολοκλήρωμα ακτινοβολίας:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_V \frac{\exp(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})}{R} \cdot dV' \quad (1.11)$$

όπου R είναι η απόσταση του τυχαίου σημείου παρατήρησης από το τυχαίο σημείο της πηγής και η ολοκλήρωση γίνεται σε όλο τον όγκο V της πηγής ενώ:

$$\mathbf{k} = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \quad (1.12)$$

είναι ο κυματικός αριθμός στο κενό χωρίς απώλειες.

Όταν εξετάζουμε την περίπτωση μας (οπότε και το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό είναι φοράς z) καθώς ο διαφορικός διανυσματικός τελεστής σε κυλινδρικές

συντεταγμένες έχει τη μορφή $\nabla^* = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot *_{\rho}) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial *_{\phi}}{\partial \phi} + \frac{\partial *_{z}}{\partial z}$ η (1.9) θα δώσει

(αν περιοριστούμε στην συνιστώσα z του ηλεκτρικού πεδίου που μας ενδιαφέρει):

$$\begin{aligned}
(1.9) \stackrel{(1.2)}{\Rightarrow} E_z(\rho, z) &= -\frac{1}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 A_z(\rho, z)}{\partial z^2} + j \cdot \omega \cdot \vec{A}(\rho, z) \cdot \vec{z} \stackrel{(1.3)}{\Rightarrow} \\
E_z(\rho, z) &= -\frac{1}{j \cdot \omega \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{\partial^2 A_z(\rho, z)}{\partial z^2} + j \cdot \omega \cdot A_z(\rho, z) \stackrel{(1.12)}{\Rightarrow} \\
E_z(\rho, z) &= \frac{j \cdot \omega}{k^2} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z(\rho, z) \tag{1.13}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση θα εξισωθεί στη συνέχεια με την αντίστοιχη έκφραση του πεδίου σαν συνάρτηση των παραμέτρων τροφοδοσίας.

Πεδία τροφοδοσίας

Για την περίπτωση της τροφοδοσίας τύπου delta – function και περιοριζόμενο στην επιφάνεια της κυλινδρικής κεραίας $\rho = a$ η συνάρτηση του δυναμικού είναι:

$$\Phi(a, z) = \begin{cases} \rho + V, & z > 0 \\ \rho & , z < 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

όπου ρ τυχαία πραγματική σταθερά. Θα γίνει προσπάθεια να εφαρμοστεί το παραπάνω δεδομένο στην σχέση (1.7). Εφόσον ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά της z συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου στην επιφάνεια $\rho = a$

μπορούμε να κρατήσουμε από τον διαφορικό τελεστή $\nabla^* = \hat{\rho} \cdot \frac{\partial^*}{\partial \rho} + \hat{\phi} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^*}{\partial \phi} + \hat{z} \cdot \frac{\partial^*}{\partial z}$

μόνο το τμήμα που παράγει διανυσματική συνιστώσα κατά z . Αυτό κατά τα γνωστά είναι η παράγωγος ως προς z που δεν έχει σχέση με τη συντεταγμένη ρ η οποία έχει πάρει ήδη την τιμή $\rho = a$. Δηλαδή καταλήγουμε στη σχέση:

$$E_z(a, z) = -\frac{\partial \Phi(a, z)}{\partial z} + j \cdot \omega \cdot A_z(a, z) \tag{1.15}$$

Ο πρώτος όρος της (1.7): $-\frac{\partial \Phi(a, z)}{\partial z}$ δίνει έναν όρο ανάλογο της συνάρτησης δέλτα

του Dirac στο $z = 0$ καθώς η συνάρτηση του δυναμικού είναι βηματικής μορφής. Ο δεύτερος όρος $j \cdot \omega \cdot A_z(a, z)$ είναι ανάλογος του δυναμικού και είναι σίγουρα ομαλότερος της συνάρτησης Dirac (συνεχής) κάτι που εξάγεται από τη σχέση (1.8).

Πράγματι η χωρική παράγωγος του δυναμικού είναι βηματικής μορφής άρα το ίδιο είναι συνεχής συνάρτηση. Αν αναλογιστούμε ακόμα ότι $\vec{E}_{\text{dir}}(a, z) \cdot \vec{z} = 0$ για $z \neq 0$ ως εφαπτομενική συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου (θυμίζουμε πως πρόκειται για έκφραση

του ολικού πεδίου) σε τέλειο αγωγό μόνο ο όρος της συνάρτησης Dirac θα αντιπροσωπεύει το ολικό ηλεκτρικό πεδίο ως εξής:

$$E_{z,dlt}(\alpha, z) = -V \cdot \delta(z) \quad (1.16)$$

σχέση που δικαιολογεί την ονομασία “γεννήτρια τύπου delta – function”.

Μία ανάλογη διαδικασία για την τροφοδοσία τύπου frill γίνεται στο παράρτημα (A). Στο σημείο αυτό παραθέτουμε το αποτέλεσμα:

$$E_{z,frl}(\alpha, z) = -\frac{V}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left(\frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} - \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + b^2})}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right) \quad (1.17)$$

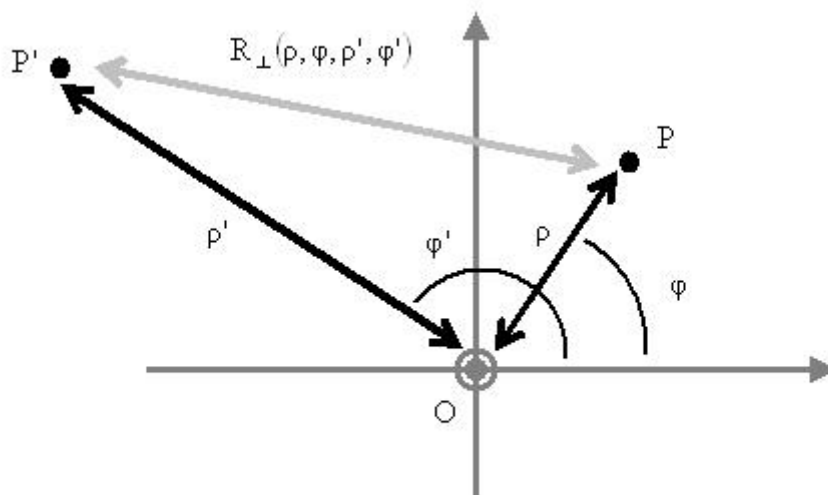
Το συγκεκριμένο πεδίο δεν είναι το ολικό όπως το $E_{z,dlt}(\alpha, z)$ αλλά αυτό που διεγείρει την διάταξη προκειμένου να παραχθεί το πεδίο ακτινοβολίας της κεραίας. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι και τα δύο ολικά πεδία τροφοδοσίας δεν εξαρτώνται από την αζιμουθιακή μεταβλητή φ αλλά και είναι άρτιες συναρτήσεις της μεταβλητής z όπως είχε προβλεφθεί από τις συμμετρίες της διέγερσης και της διάταξης.

| | |
|------------|----------------------------|
| (2) | ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HALLEN |
|------------|----------------------------|

Ολοκλήρωμα ακτινοβολίας

Προκειμένου να εξάγουμε μία ολοκληρωτική εξίσωση με άγνωστη συνάρτηση αυτή του ρεύματος στην επιφάνεια του διπόλου, είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό από την εξίσωση του ολοκληρώματος ακτινοβολίας (1.11). Από το μέγεθος αυτό θα εξαχθεί μία μορφή για το διεγείρον ηλεκτρικό πεδίο που θα περιέχει το επιφανειακό ρεύμα. Για να υπολογιστεί όμως το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα θα πρέπει να γνωρίζουμε την απόσταση των τυχαίων σημείων παρατήρησης $P(\rho, \varphi, z)$ και πηγής $P'(\rho', \varphi', z')$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Θα είναι χρήσιμο να υπολογιστεί η προβολή αυτής της απόστασης στο πολικό επίπεδο. Πράγματι με αναφορά στο σχήμα <2.1> που ακολουθεί εφαρμόζουμε το νόμο του συνημιτόνου στο τρίγωνο με κορυφές την αρχή των αξόνων O και τις πολικές προβολές των σημείων P και P' . Τότε για την πολική απόσταση των δύο σημείων R_{\perp} θα είναι:

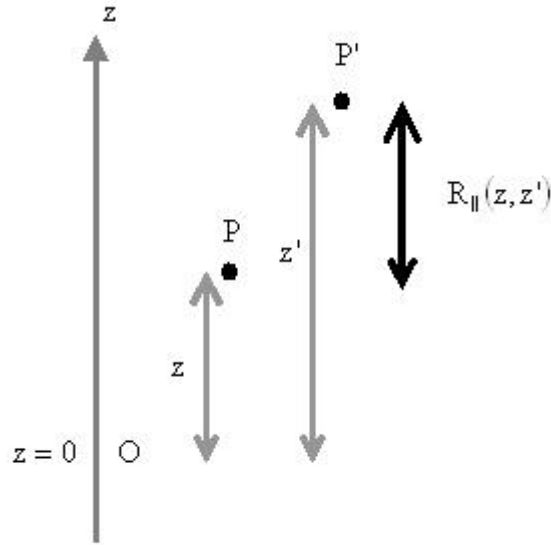
$$R_{\perp}(\rho, \varphi, \rho', \varphi') = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')} \quad (2.1)$$



Σχήμα <2.1>

Με αναφορά στο σχήμα <2.2> που ακολουθεί η παράλληλη στον άξονα z απόσταση θα είναι προφανώς:

$$R_{\parallel}(z, z') = z - z' \quad (2.2)$$



Σχήμα (2.2)

Δεδομένου ότι η απόσταση που ζητάμε είναι η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου με πλευρές τις R_{\perp} και R_{\parallel} θα ισχύει:

$$R(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = \sqrt{R_{\perp}^2(\rho, \varphi, \rho', \varphi') + R_{\parallel}^2(z, z')} \stackrel{(2.1)}{\Rightarrow} \stackrel{(2.2)}{\Rightarrow}$$

$$R(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2} \quad (2.3)$$

Επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της ακτινοβολίας ολοκληρώνοντας παντού στο χώρο:

$$(1.11) \stackrel{(1.1)}{\Rightarrow} \stackrel{(2.3)}{\Rightarrow} \bar{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{+\infty} \bar{z} \cdot J_s(z') \cdot \delta(\rho' - \alpha) \cdot \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} \cdot \rho' \cdot d\rho' \cdot d\varphi' \cdot dz'$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι ο στοιχειώδης όγκος του χώρου σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι ο ίδιος σε πολικές πολλαπλασιασμένος επί το στοιχειώδες μήκος κατά z . Αν χρησιμοποιηθεί η γνωστή ιδιότητα δειγματοληψίας της δέλτα συνάρτησης θα προκύψει δεδομένου ότι $\alpha \in (0, +\infty)$:

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} J_s(z') \cdot \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} \cdot \alpha \cdot d\varphi' \cdot dz' \Rightarrow$$

$$A_z(\rho, \varphi, z) = \frac{\mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} J_s(z') \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2}} \cdot \alpha \cdot d\varphi' \cdot dz' \quad (2.4)$$

Όπως είναι γνωστό η συνάρτηση του επιφανειακού ρεύματος $J_s(z')$ έχει μονάδες $\left(\frac{A}{m}\right)$. Προκειμένου να εισάγουμε την πραγματική συνάρτηση του ρεύματος στους

υπολογισμούς ορίζουμε το αντίστοιχο ρεύμα $I(z)$ σε μονάδες (A):

$$J_s(z) = \frac{I(z)}{2 \cdot \pi \cdot \alpha} \quad (2.5)$$

και οι πράξεις συνεχίζονται έχοντας υπόψη ότι άγνωστη συνάρτηση είναι η $I(z)$. Δεδομένης της αρτιότητας του συνημιτόνου:

$$(2.4) \stackrel{(2.5)}{\Rightarrow} A_z(\rho, \varphi, z) = \mu_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + (z - z')^2}} \cdot d\varphi' \cdot dz' \quad (2.6)$$

Προξενεί ίσως κατάπληξη το γεγονός ότι η συνάρτηση του διανυσματικού δυναμικού φαίνεται να εξαρτάται από την αζιμουθιακή μεταβλητή φ παρόλη την συμμετρία της διάταξης και της διέγερσης. Αυτό είναι ένα λανθασμένο συμπέρασμα καθώς η ολοκλήρωση ως προς την αζιμουθιακή μεταβλητή μπορεί να γίνει σε οποιοδήποτε διάστημα εύρους $2 \cdot \pi$ άρα και στο $(-\pi - \varphi, \pi - \varphi)$ χωρίς αλλαγή αποτελέσματος. Τότε θα ήταν:

$$A_z(\rho, z) = \mu_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi - \varphi}^{\pi - \varphi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi' - \varphi) + (z - z')^2}} \cdot d(\varphi' - \varphi) \cdot dz' \Rightarrow$$

$$A_z(\rho, z) = \mu_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi') + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{\rho^2 + \alpha^2 + 2 \cdot \rho \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi') + (z - z')^2}} \cdot d\varphi' \cdot dz \quad (2.7)$$

Παραπάνω έγινε η αλλαγή της μεταβλητής $\varphi' \rightarrow (\varphi' - \varphi)$. Πράγματι δεν παρατηρούμε καμία εξάρτηση από την αζιμουθιακή μεταβλητή φ . Επίσης επαληθεύεται η εκτίμηση ότι το δυναμικό έχει μόνο την κατά z συνιστώσα του μη μηδενική ενώ η

αρτιότητα ως προς z δεν μπορεί να επαληθευτεί καθώς η συνάρτηση $I(z)$ είναι άγνωστη.

Ακριβής και προσεγγιστικός πυρήνας

Εφόσον στη σχέση (1.13) ο διαφορικός τελεστής δεν αφορά την μεταβλητή ρ μπορούμε χωρίς σφάλμα να γράψουμε:

$$E_z(\alpha, z) = \frac{j \cdot \omega}{k^2} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) A_z(\alpha, z) \quad (2.8)$$

Είναι προφανές ότι χρειάζεται να εξαχθεί το δυναμικό για $\rho = \alpha$:

(2.7) \Rightarrow

$$A_z(\alpha, z) = \mu_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\varphi') + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\varphi') + (z - z')^2}} \cdot d\varphi' \cdot dz' \Rightarrow$$

$$A_z(\alpha, z) = \mu_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + (z - z')^2}\right)}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + (z - z')^2}} \cdot d\varphi' \cdot dz' \quad (2.9)$$

Σε αυτό το σημείο μπορεί να οριστεί η συνάρτηση:

$$K_{ex}(z, \alpha) = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}\right)}{\sqrt{z^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} \cdot d\varphi' \quad (2.10)$$

Εξαιτίας του ότι αποτελεί τον πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης (με πρώτο όρισμα τη διαφορά $z - z'$) και καθώς δεν έχει γίνει καμία προσέγγιση για την εξαγωγή της θα ονομαστεί ακριβής πυρήνας και θα μεταχειρίζεται με το συγκεκριμένο όνομα από το σημείο αυτό.

Ο ακριβής πυρήνας ορίζεται μέσω ολοκληρώματος και άρα η πολυπλοκότητα υπολογισμού του είναι μεγάλη. Θα ήταν επιθυμητό κάνοντας κάποια προσέγγιση να καταλήξουμε σε μία απλούστερη συνάρτηση που θα μπορούσε να αντικαταστήσει τον ακριβή πυρήνα. Στη σχέση (2.10) η πολική απόσταση $R_{\perp}(\alpha, \varphi') = 2 \cdot \alpha \cdot \left| \sin\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \right|$

μεταβάλλεται καθώς ολοκληρώνουμε, με μέγιστη τιμή $\max_{\varphi' \in (-\pi, \pi)} \left\{ 2 \cdot \alpha \cdot \left| \sin\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \right| \right\} = 2 \cdot \alpha$

και ελάχιστη τιμή $\min_{\varphi' \in (-\pi, \pi)} \left\{ 2 \cdot \alpha \cdot \left| \sin\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \right| \right\} = 0$. Η εν λόγω προσέγγιση είναι

$2 \cdot \alpha \cdot \left| \sin\left(\frac{\varphi'}{2}\right) \right| \cong \alpha$ και αντιστοιχεί στην περίπτωση όλες οι αποστάσεις πηγής –

σημείου στο πολικό επίπεδο πάνω στη γραμμή $\rho = \alpha$ να εκλαμβάνονται ίσες με την ακτίνα. Δηλαδή κάθε σημείο που ευρίσκεται στον κύλινδρο με ακτίνα $\rho = \alpha$ παίρνεται να απέχει από την πηγή σταθερή απόσταση ίση με α . Κάτι τέτοιο είναι δυνατό μόνο αν η πηγή ρεύματος είναι νηματοειδής και όχι επιφανειακή, η κεραία δηλαδή να είναι ένα λεπτό σύρμα απείρου μήκους ταυτιζόμενο με τον άξονα z του συστήματος συντεταγμένων. Μια τέτοια προσέγγιση λέγεται “thin – wire approximation” και είναι λογική μόνο σε κεραίες με ηλεκτρικά μικρές ακτίνες. Σε αυτή την περίπτωση ο καλούμενος προσεγγιστικός πυρήνας ορίζεται σαν:

$$K_{\text{ap}}(z, \alpha) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \quad (2.11)$$

Με το σύμβολο $K(z, \alpha)$ θα συμβολίζουμε οποιονδήποτε από τους δύο πυρήνες. Έτσι μπορεί να γραφεί η εξίσωση του διανυσματικού δυναμικού σε συμπυκνωμένη μορφή:

$$A_z(\alpha, z) = \mu_0 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' \quad (2.12)$$

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι ο ακριβής πυρήνας απειρίζεται για $z = 0$. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για τον προσεγγιστικό πυρήνα ο οποίος όμως παρουσιάζει μέγιστο εκεί (το πραγματικό του μέρος) και το μέγιστο αυτό γίνεται οξύτερο για λεπτότερες κεραίες.

Εξισώσεις Pocklington

Έχουν γίνει όλες οι απαραίτητες εκείνες διαδικασίες ώστε να εξαχθεί η μορφή της z συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου σαν συνάρτηση του ρεύματος που διαρρέει το δίπολο. Εύκολα έχουμε:

$$\begin{aligned} (1.13) \stackrel{(2.12)}{\Rightarrow} E_z(\alpha, z) &= \mu_0 \cdot \frac{j \cdot \omega}{k^2} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' \stackrel{(1.12)}{\Rightarrow} \\ E_z(\alpha, z) &= \mu_0 \cdot \frac{j \cdot \omega}{\omega^2 \cdot \epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' \Rightarrow \\ E_z(\alpha, z) &= \frac{j}{\omega \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' \end{aligned} \quad (2.13)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να εξισώσουμε την παραπάνω έκφραση της z συνιστώσας του ολικού ηλεκτρικού πεδίου με τις αντίστοιχες εκφράσεις που περιέχουν μεγέθη των πηγών τροφοδοσίας. Πριν γίνει αυτό μπορούμε να παρατηρήσουμε πως:

$$(1.17) \stackrel{(2.11)}{\Rightarrow} E_{z, \text{fil}}(\alpha, z) = -\frac{V \cdot 2 \cdot \pi}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot (K_{\text{ap}}(z, \alpha) - K_{\text{ap}}(z, b)) \quad (2.14)$$

Έτσι μπορεί να γίνει η εξίσωση των δύο εκφράσεων. Για την περίπτωση τροφοδοσίας του delta – function generator είναι:

$$(2.13) \stackrel{(1.16)}{\Rightarrow} \frac{j}{\omega \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dl}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = -V \cdot \delta(z) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dl}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = -\frac{1}{j} \cdot V \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \delta(z) \stackrel{(1.12)}{\Rightarrow}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dl}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = \frac{j \cdot k \cdot V}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \quad (2.15)$$

όπου $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του κενού ως μέσου διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μετρούμενη σε (Ω). Η συγκεκριμένη εξίσωση ουσιαστικά είναι διπλή καθώς περιέχει τόσο την εκδοχή με τον ακριβή όσο και με τον προσεγγιστικό πυρήνα.

Για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου frill θα έχουμε όμοια:

$$(2.13) \stackrel{(2.14)}{\Rightarrow} \frac{j}{\omega \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{fil}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = -\frac{V \cdot 2 \cdot \pi}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot (K_{\text{ap}}(z, \alpha) - K_{\text{ap}}(z, b)) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{fil}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = -\frac{1}{j} \cdot V \cdot \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}} \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot (K_{\text{ap}}(z, \alpha) - K_{\text{ap}}(z, b)) \stackrel{(1.12)}{\Rightarrow}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{fil}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = \frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot (K_{\text{ap}}(z, \alpha) - K_{\text{ap}}(z, b)) \quad (2.16)$$

Και πάλι υπάρχουν οι δύο συστατικές εξισώσεις ανάλογα με τον χρησιμοποιούμενο πυρήνα ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με την περίπτωση του delta – function generator στην παραπάνω εξίσωση δεν τοποθετείται στο δεύτερο μέλος το

ολικό ηλεκτρικό πεδίο (z συνιστώσα) αλλά η αντίστοιχη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου τροφοδοσίας. Δηλαδή ενώ το πρώτο μέλος αφορά την z συνιστώσα του συνολικού ηλεκτρικού πεδίου που πρέπει να είναι μηδενική στην επιφάνεια του τέλειου αγωγού $\rho = a$, για το δεύτερο δεν ισχύει αυτό. Παρόλα αυτά η συγκεκριμένη εξίσωση και με τον τρόπο που εξάχθηκε παρατίθεται σε πλήθος δημοσιεύσεων μεταξύ των οποίων και η παραπομπή [4] (σχέση (2), σελίδα 1848). Πάντως εξαιτίας της μη ύπαρξης διακένου στην περίπτωση τροφοδοσίας τύπου frill θα έπρεπε το δεύτερο μέλος της (2.16) να είναι ταυτοτικά μηδενικό για κάθε $z \in \mathbb{R}$ καθώς αναφέρεται στην τέλεια αγωγή επιφάνεια $\rho = a$, κάτι που ενδεχομένως να μην κατέληγε σε σωστή λύση. Οι παραπάνω εξισώσεις στις οποίες κατέληξε η συλλογιστική μας πορεία ονομάζονται ολοκληρωτικοδιαφορικές εξισώσεις Rocklington. Σημειώνουμε ότι ο συμβολισμός της συνάρτησης του ρεύματος $I(z)$ μπορεί να συμβολίζει κάθε μία από τις αντίστοιχες ποσότητες με διαφορετικές τροφοδοσίες $I_{\text{dl}}(z)$ και $I_{\text{fr}}(z)$.

Μετατροπή εξισώσεων

Παρατηρούμε ότι οι τέσσερις βασικές εξισώσεις των σχέσεων (2.15), (2.16) είναι ολοκληρωτικοδιαφορικές και εξαιτίας της πολυπλοκότητάς τους θα ήταν καλό αν μπορούσαν να μετατραπούν σε ολοκληρωτικές. Κάτι τέτοιο φαινομενικά θα μπορούσε να γίνει με εναλλαγή του τελεστή $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)$ με τον τελεστή ολοκλήρωσης. Αυτή όμως η διαδικασία δεν είναι εφικτή στην περίπτωση του ακριβούς πυρήνα και κάτι τέτοιο δείχνεται στο παράρτημα (B). Για αυτό το λόγο είναι αναγκαίο να ακολουθηθεί η εξής στρατηγική: να αποπειραθούμε να επιλύσουμε τις μη ομογενείς διαφορικές εξισώσεις θεωρώντας τα ολοκληρώματα στα οποία εφαρμόζεται ο τελεστής $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)$ άγνωστες συναρτήσεις. Αυτές οι συναρτήσεις θα είναι:

$$F_{\text{dl}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dl}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' \quad (2.17)$$

$$F_{\text{fr}}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{fr}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' \quad (2.18)$$

Το σύμβολο $F(z)$ θα μπορεί να συμβολίζει οποιαδήποτε από τις δύο άγνωστες συναρτήσεις $F_{\text{dlt}}(z)$ και $F_{\text{fl}}(z)$. Επίσης μπορεί να παρατηρηθεί η σχέση που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια:

$$(2.12) \stackrel{(2.17)}{\underset{(2.18)}{\Rightarrow}} A_z(\alpha, z) = \mu_0 \cdot F(z) \quad (2.19)$$

Για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου delta – function θα πρέπει να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(2.15) \stackrel{(2.17)}{\Rightarrow} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_{\text{dlt}}(z) = \frac{j \cdot k \cdot V}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \quad (2.20)$$

Δεδομένου ότι $\delta(z) = 0$ για $z \neq 0$, δεξιά και αριστερά του $z = 0$ η ζητούμενη συνάρτηση θα έχει γνωστή μορφή καθώς είναι λύση τετριμμένης διαφορικής εξίσωσης (που έχει αρμονικές λύσεις). Άρα μπορεί να γραφεί:

$$F_{\text{dlt}}(z) = \begin{cases} C_1 \cdot \cos(k \cdot z) + C_2 \cdot \sin(k \cdot z) , z > 0 \\ C_3 \cdot \cos(k \cdot z) + C_4 \cdot \sin(k \cdot z) , z < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

όπου C_1, C_2, C_3, C_4 μιγαδικές σταθερές. Από την διαφορική (2.20) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι δεδομένης της όξυνσης των ασυνεχειών που επιτυγχάνεται μέσω της διαφόρισης η δεύτερη παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης $F_{\text{dlt}}(z)$ θα είναι ανάλογη της δέλτα συνάρτησης στο $z = 0$ με συντελεστή αναλογίας $\frac{j \cdot V \cdot k}{\zeta_0}$, η

πρώτη ανάλογη της βηματικής συνάρτησης με τον ίδιο συντελεστή αναλογίας στο $z = 0$, ενώ η ίδια η συνάρτηση θα είναι παντού συνεχής. Από την σχέση (2.19) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι συναρτήσεις $F(z)$ είναι άρτιες ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή z αλλά και συνεχείς όπως η συνάρτηση της z συνιστώσας του διανυσματικού δυναμικού. Υπενθυμίζεται ότι η συνέχεια του δυναμικού ως προς z υπαγορεύεται από τη σχέση (1.8) και δεδομένης της βηματικής ως προς z συμπεριφοράς του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού. Η απαίτηση της συνέχειας της άγνωστης συνάρτησης $F_{\text{dlt}}(z)$ έχει ως συνέπεια:

$$F_{\text{dlt}}(0^+) = F_{\text{dlt}}(0^-) \Rightarrow C_1 = C_3 = C_{\text{dlt}} \quad (2.22)$$

όπου C_{dlt} μιγαδική σταθερά. Επομένως θα είναι:

$$(2.21) \stackrel{(2.22)}{\Rightarrow} F_{\text{dlt}}(z) = \begin{cases} C_{\text{dlt}} \cdot \cos(k \cdot z) + C_2 \cdot \sin(k \cdot z) , z > 0 \\ C_{\text{dlt}} \cdot \cos(k \cdot z) + C_4 \cdot \sin(k \cdot z) , z < 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Η απαίτηση της αρτιότητας ως προς z της συνάρτησης έχει ως συνέπεια παίρνοντας αυθαίρετα $z > 0$:

$$F_{\text{dlt}}(z) = F_{\text{dlt}}(-z) \stackrel{(2.27)}{\Rightarrow} C_{\text{dlt}} \cdot \cos(k \cdot z) + C_2 \cdot \sin(k \cdot z) = C_{\text{dlt}} \cdot \cos(k \cdot z) - C_4 \cdot \sin(k \cdot z) \Rightarrow$$

$$C_2 = -C_4 = E \quad (2.24)$$

όπου E μιγαδική σταθερά. Η απαίτηση της βηματικής μορφής της παραγώγου της συνάρτησης:

$$\frac{\partial F_{\text{dlt}}(z)}{\partial z} = \begin{cases} k \cdot C_{\text{dlt}} \cdot \sin(k \cdot z) + k \cdot E \cdot \cos(k \cdot z) , z > 0 \\ k \cdot C_{\text{dlt}} \cdot \sin(k \cdot z) - k \cdot E \cdot \cos(k \cdot z) , z < 0 \end{cases} \quad (2.25)$$

με συντελεστή $\frac{j \cdot V \cdot k}{\zeta_0}$ θα έχει ως συνέπεια:

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{\partial F_{\text{dlt}}(z)}{\partial z} - \lim_{z \rightarrow 0^-} \frac{\partial F_{\text{dlt}}(z)}{\partial z} = \frac{j \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \stackrel{(2.29)}{\Rightarrow} k \cdot E + k \cdot E = \frac{j \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \Rightarrow E = \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \quad (2.26)$$

Συνδυάζοντας τις απαιτήσεις για τις σταθερές θα προκύψει:

$$(2.23) \stackrel{(2.24)}{\Rightarrow} \stackrel{(2.26)}{F_{\text{dlt}}(z)} = C_{\text{dlt}} \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) \quad (2.27)$$

και έχουμε το τελικό αποτέλεσμα, δηλαδή μία ολοκληρωτική εξίσωση:

$$(2.27) \stackrel{(2.17)^{+\infty}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dlt}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) + C_{\text{dlt}} \cdot \cos(k \cdot z) \quad (2.28)$$

Αυτή η εξίσωση ονομάζεται ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallen.

Για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου frill θα πρέπει να επιλυθεί η εξής διαφορική εξίσωση:

$$(2.16) \stackrel{(2.18)}{\Rightarrow} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_{\text{frl}}(z) = g(z) \quad (2.29)$$

όπου η συνάρτηση δευτέρου μέλους $g(z)$:

$$g(z) = \frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot (K_{\text{ap}}(z, \alpha) - K_{\text{ap}}(z, b)) \quad (2.30)$$

Η γενική λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης (2.29) δεδομένου μάλιστα ότι η συνάρτηση $F_{\text{frl}}(z)$ είναι άρτια γεγονός που προκύπτει άμεσα από την (2.19) θα ισούται προφανώς με το αντίστοιχο τμήμα της εξίσωσης για τροφοδοσία τύπου delta – function. Πράγματι η τροφοδοσία αφορά αποκλειστικά το δεύτερο μέλος της σχετικής διαφορικής εξίσωσης και άρα ο ένας όρος της τελικής λύσης θα είναι και

πάλι ο $C_{\text{fhl}} \cdot \cos(k \cdot z)$ όπου C_{fhl} αυθαίρετη μιγαδική σταθερά. Όσον αφορά την μερική λύση της διαφορικής, αυτή με γνώμονα τις θεμελιακές γνώσεις για την επίλυση μη ομογενών γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ανεξάρτητα από την μορφή του δευτέρου μέλους θα είναι η:

$$F_{\text{p,fhl}}(z) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \quad (2.31)$$

Η εύρεση της παραπάνω μερικής λύσης έγινε με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier και παρατίθεται στο παράρτημα (Γ). Ακολουθεί μία σύντομη απόδειξη για το γεγονός ότι όντως η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι λύση της πλήρους διαφορικής εξίσωσης:

Η πρώτη παράγωγος σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες παραγωγισής ολοκληρωμάτων θα είναι η:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z} &= \frac{1}{k} \cdot g(z) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) + \int_0^z g(t) \cdot \cos(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow \\ \frac{\partial F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z} &= \int_0^z g(t) \cdot \cos(k \cdot (z - t)) \cdot dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

Η δεύτερη παράγωγος υπολογίζεται με παρόμοιο τρόπο:

$$\begin{aligned} (2.35) \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z^2} &= \int_0^z g(t) \cdot \cos(k \cdot (z - t)) \cdot dt = g(z) \cdot \cos(k \cdot (z - t)) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z^2} &= g(z) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \end{aligned} \quad (2.33)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην πλήρη διαφορική εξίσωση θα έχουμε:

$$\begin{aligned} (2.36) \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot F_{\text{p,fhl}}(z) &= g(z) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt + k^2 \cdot \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot F_{\text{p,fhl}}(z) &= g(z) - k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt + k \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow \\ \frac{\partial^2 F_{\text{p,fhl}}(z)}{\partial z^2} + k^2 \cdot F_{\text{p,fhl}}(z) &= g(z) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F_{\text{p,fhl}}(z)$ επαληθεύει την διαφορική εξίσωση (2.29) και κατά συνέπεια όντως αποτελεί μερική λύση της διαφορικής. Λαμβάνοντας υπόψη

ότι η γενική λύση είναι η $C_{\text{frl}} \cdot \cos(k \cdot z)$ όπου C_{frl} αυθαίρετη μιγαδική σταθερά, μπορεί να γραφεί ότι:

$$F_{\text{frl}}(z) = C_{\text{frl}} \cdot \cos(k \cdot z) + F_{\text{p,frl}}(z) \stackrel{(2.31)}{\Rightarrow}$$

$$F_{\text{frl}}(z) = C_{\text{frl}} \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \quad (2.34)$$

Επομένως μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση τύπου Hallen για την τροφοδοσία με frill generator:

$$(2.18) \stackrel{(2.34)}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{frl}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = C_{\text{frl}} \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \quad (2.35)$$

Προσδιορισμός σταθεράς

Και οι δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallen (ακριβέστερα τέσσερις αν συνυπολογιστεί και η δυνατότητα επιλογής πυρήνα ολοκλήρωσης) περιέχουν στο δεύτερο μέλος τους μία αυθαίρετη μιγαδική σταθερά. Από τη σχέση (2.19) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα δεύτερα (και τα πρώτα) μέλη των εξισώσεων τύπου Hallen είναι ανάλογα της z συνιστώσας του διανυσματικού δυναμικού. Όπως γνωρίζουμε το μέγεθος του διανυσματικού μαγνητικού δυναμικού εκφράζει τα αποτελέσματα των πηγών των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων. Ως εκ τούτου είναι φυσιολογικό στην περίπτωση μας να αποτελείται από όρους οδεύοντων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που απομακρύνονται από το σημείο τροφοδοσίας καθώς βαδίζουμε προς το $z \rightarrow +\infty$ ή το $z \rightarrow -\infty$. Δηλαδή δεν μπορούμε να υποχρεώσουμε καθόλο τον άξονα των z να υπάρχουν απομακρύνοντα κύματα από το σημείο τροφοδοσίας καθώς το φαινόμενο είναι αρκετά πολύπλοκο. Απλά καθώς βρισκόμαστε πολύ μακριά από το σημείο τροφοδοσίας και με δεδομένο το άπειρο μήκος της κεραίας είναι πολύ λογικό να υπάρχουν αποκλειστικά κύματα που απομακρύνονται από το σημείο τροφοδοσίας αφού δεν υπάρχει αιτία που να δημιουργεί τέτοια προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να γίνει μία παρατήρηση όσον αφορά τον κυματικό αριθμό k και την μορφή των οδεύοντων κυμάτων σε συνδυασμό με την επιλογή της χρονικής εξάρτησης. Η όλη ανάλυσή μας αφορά πραγματικό και θετικό κυματικό αριθμό δεδομένου ότι μελετάμε ακτινοβολία σε κενό χώρο χωρίς απώλειες. Εάν υποθέσουμε ότι το μονωτικό υλικό διάδοσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας είναι ελαφρώς ατελές τότε το πρόσημο του φανταστικού του μέρους

είναι καθορισμένο από την επιλογή που έχει γίνει για τη χρονική εξάρτηση των μεγεθών η οποία είναι η $\exp(-j \cdot \omega \cdot t)$. Θεωρούμε ένα κύμα το οποίο οδεύει προς τα θετικά του άξονα z και άρα (με την παραπάνω επιλογή χρονικής εξάρτησης) θα έχει τη μορφή: $\exp(j \cdot k \cdot z)$. Πράγματι θα έχουμε:

$$\exp(j \cdot k \cdot z) = \exp(j \cdot (\operatorname{Re}[k] + j \cdot \operatorname{Im}[k]) \cdot z) = \exp(j \cdot \operatorname{Re}[k] \cdot z) \cdot \exp(-\operatorname{Im}[k] \cdot z)$$

Επειδή δεν νοείται το κύμα να οδεύει με συνεχώς αυξανόμενο πλάτος σε υλικό με απώλειες θα πρέπει αναγκαστικά $\operatorname{Im}[k] > 0$. Επίσης υπενθυμίζεται ότι σε κάθε περίπτωση είναι $\operatorname{Re}[k] > 0$. Απόδειξη ίσως χρειάζεται το γεγονός ότι το κύμα $\exp(j \cdot k \cdot z)$ με τη χρονική εξάρτηση $\exp(-j \cdot \omega \cdot t)$ υποδηλώνει μετάδοση προς τα θετικά του άξονα z . Η αντίστοιχη χρονοσυνάρτηση είναι: $\operatorname{Re}[\exp(j \cdot k \cdot z) \cdot \exp(-j \cdot \omega \cdot t)] = \cos(k \cdot z - \omega \cdot t)$. Είναι προφανές ότι η φάση του κύματος αυξάνει καθώς οδεύουμε προς τα θετικά z .

Τώρα που γνωρίζουμε την μορφή των απομακρυνόμενων από την πηγή πεδίων και για την περίπτωση τροφοδοσίας μέσω delta – function generator το θα απαιτήσουμε όταν βρισκόμαστε πολύ μακριά από το σημείο τροφοδοσίας στα θετικά z (εξετάζουμε την περίπτωση $z \rightarrow +\infty$) να μην συμμετέχουν σε αυτό όροι που να αντιστοιχούν σε κύματα οδεύοντα προς το σημείο τροφοδοσίας. Αναπτύσσουμε το δεύτερο μέλος:

$$\begin{aligned} (2.31) \Rightarrow F_{\text{dlt}}(z) &= C_{\text{dlt}} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z) + \exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} + \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z) - \exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j} \Rightarrow \\ F_{\text{dlt}}(z) &= C_{\text{dlt}} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2} + C_{\text{dlt}} \cdot \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2} - \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} \Rightarrow \\ F_{\text{dlt}}(z) &= \left(C_{\text{dlt}} + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \right) \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2} + \left(C_{\text{dlt}} - \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \right) \cdot \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} \quad (2.36) \end{aligned}$$

Επειδή έχουμε επιλέξει χρονική εξάρτηση της μορφής $\operatorname{Re}[\exp(-j \cdot \omega \cdot t)]$ τα κύματα που οδεύουν προς το σημείο τροφοδοσίας είναι της μορφής $\exp(-j \cdot k \cdot z)$ Κατά συνέπεια απαιτείται ο μηδενισμός του συντελεστή του αντίστοιχου όρου δηλαδή:

$$(2.36) \Rightarrow C_{\text{dlt}} - \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} = 0 \Rightarrow C_{\text{dlt}} = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \quad (2.37)$$

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε κι αν εφαρμόσουμε την αντίστοιχη απαίτηση για την περίπτωση $z \rightarrow -\infty$ καθώς η συνάρτηση $F_{\text{dlt}}(z)$ είναι άρτια. Κατά συνέπεια η

ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallen για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου delta function θα έχει την ακόλουθη μορφή από αυτό το σημείο και στο εξής:

$$\begin{aligned}
 (2.28) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dlt}}(z') \cdot K(z-z', \alpha) \cdot dz' &= \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \cos(k \cdot z) \Rightarrow \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dlt}}(z') \cdot K(z-z', \alpha) \cdot dz' &= \frac{j \cdot V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \cos(k \cdot |z|) \Rightarrow \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dlt}}(z') \cdot K(z-z', \alpha) \cdot dz' &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |z|) \quad (2.38)
 \end{aligned}$$

Για την περίπτωση τροφοδοσίας μέσω frill generator θα πρέπει να επαναληφθεί η ίδια διαδικασία. Το δεύτερο μέλος αυτή τη φορά γράφεται:

$$\begin{aligned}
 (2.34) \Rightarrow F_{\text{frl}}(z) &= C_{\text{frl}} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z) + \exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} + \\
 &+ \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot (z-t)) - \exp(-j \cdot k \cdot (z-t))}{2 \cdot j} \cdot dt \Rightarrow \\
 F_{\text{frl}}(z) &= C_{\text{frl}} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z) + \exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} + \\
 &+ \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt - \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \Rightarrow \\
 F_{\text{frl}}(z) &= \left(C_{\text{frl}} + \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt \right) \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2} + \\
 &+ \left(C_{\text{frl}} - \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \right) \cdot \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

Θα πρέπει καθώς $z \rightarrow +\infty$ ή $z \rightarrow -\infty$ ο πολλαπλασιαστής του κύματος που κατευθύνεται προς το σημείο τροφοδοσίας να μηδενίζεται. Δηλαδή για $z \rightarrow +\infty$:

$$(2.39) \Rightarrow C_{\text{frl}} - \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt = 0 \Rightarrow C_{\text{frl}} = \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \quad (2.40)$$

Και για την περίπτωση $z \rightarrow -\infty$ θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα καθώς θα πρέπει αυτή τη φορά να μηδενιστεί ο πολλαπλασιαστής του $\exp(j \cdot k \cdot z)$ που αντιπροσωπεύει κύμα κατευθυνόμενο προς τα θετικά z (αλλά βρισκόμαστε στα αρνητικά και άρα το κύμα οδεύει προς το σημείο τροφοδοσίας):

$$(2.39) \Rightarrow C_{\text{frl}} + \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^{-\infty} g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt = 0 \Rightarrow C_{\text{frl}} = -\frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^{-\infty} g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt \Rightarrow$$

$$C_{\text{frl}} = \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(-t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt$$

Επειδή όμως η συνάρτηση $g(t)$ είναι άρτια (κάτι που φαίνεται από τη σχέση ορισμού της (2.30)) έχουμε ταυτόσημο αποτέλεσμα.

Θα πρέπει να βρούμε τη μορφή του δευτέρου μέλους μετά από το παραπάνω αποτέλεσμα:

$$(2.34) \Rightarrow F_{\text{frl}}(z) = \frac{1}{j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \cdot \cos(k \cdot z) + \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$F_{\text{frl}}(z) = \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt + \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt +$$

$$+ \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$F_{\text{frl}}(z) = \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^0 g(-t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt + \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt +$$

$$+ \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$F_{\text{frl}}(z) = \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^z g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt + \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_z^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt +$$

$$+ \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt + \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_z^0 g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt +$$

$$+ \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \quad (2.41)$$

Όμως έχουμε την παρακάτω σειρά πράξεων:

$$\frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt = \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot (\exp(j \cdot k \cdot (z - t)) - \exp(j \cdot k \cdot (-z + t))) \cdot dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt = -\frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_z^0 g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt -$$

$$-\frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \quad (2.42)$$

Κατά συνέπεια το δεύτερο μέλος της εξίσωσης του Hallen για την περίπτωση του frill generator παίρνει πιο απλή μορφή:

$$(2.41) \Rightarrow F_{\text{frl}}(z) =$$

$$\frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^z g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt + \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_z^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \quad (2.43)$$

Η ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallen για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου frill θα έχει την ακόλουθη μορφή από αυτό το σημείο και στο εξής:

$$(2.35) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{frl}}(z') \cdot K(z - z', \alpha) \cdot dz' = \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^z g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt + \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_z^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \quad (2.44)$$

Επειδή υπάρχει και η δυνατότητα χρησιμοποίησης διαφορετικού είδους πυρήνα (ακριβής ή προσεγγιστικός) οι εξισώσεις (2.38) και (2.44) είναι κατ' ουσίαν διπλές, οπότε μπορούν να γραφούν οι εξισώσεις τύπου Hallen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dlt,ex}}(z') \cdot K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = F_{\text{dlt}}(z) \quad (2.45)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{dlt,ap}}(z') \cdot K_{\text{ap}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = F_{\text{dlt}}(z) \quad (2.46)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{frl,ex}}(z') \cdot K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = F_{\text{frl}}(z) \quad (2.47)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\text{frl,ap}}(z') \cdot K_{\text{ap}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = F_{\text{frl}}(z) \quad (2.48)$$

Οι επιμέρους ρευματικές συναρτήσεις $I_{\text{dlt,ex}}(z)$, $I_{\text{dlt,ap}}(z)$ μπορούν να συμβολίζονται με $I_{\text{dlt}}(z)$ και οι συναρτήσεις $I_{\text{frl,ex}}(z)$, $I_{\text{frl,ap}}(z)$ που αναφέρονται στην τροφοδοσία με frill generator θα μπορούν να έχουν συμπυκνωμένο συμβολισμό την $I_{\text{frl}}(z)$. Επίσης η συνάρτηση $F_{\text{frl}}(z)$ δίνεται από τον τύπο (2.43) και η συνάρτηση $F_{\text{dlt}}(z)$ από τον ακόλουθο τύπο:

$$(2.17) \Rightarrow F_{\text{dlt}}(z) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |z|) \quad (2.49)$$

(3) ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΩΝ**Μετασχηματισμοί πυρήνων**

Παρατηρούμε ότι τα πρώτα μέλη των εξισώσεων (2.45) έως (2.48) έχουν μορφή συνελκτικού ολοκληρώματος. Ως γνωστόν στόχος μας είναι να προσδιορίσουμε τη μορφή των αγνώστων συναρτήσεων του ρεύματος $I_{\text{fil}}(z)$ και $I_{\text{dit}}(z)$ (ή σωστότερα τις τιμές τους στο $z = 0$ καθώς ενδιαφερόμαστε κυρίως για την αγωγιμότητα εισόδου). Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να γίνει αν δρούσαμε με τον τελεστή Fourier $F\{*\}$ στις συγκεκριμένες σχέσεις. Ο μετασχηματισμός Fourier μιας μετασχηματίσιμης συνάρτησης $f(z)$ θα συμβολίζεται $\bar{f}(\zeta) = F\{f(z)\}$ και θα δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{f}(\zeta) = F\{f(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \quad (3.1)$$

Κατά τα γνωστά θα υπάρχει και η αντίστροφη σχέση:

$$f(z) = F^{-1}\{\bar{f}(\zeta)\} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\zeta) \cdot \exp(-j \cdot \zeta \cdot z) \cdot d\zeta \quad (3.2)$$

Στην προσπάθειά μας να δράσουμε με το τελεστή Fourier στις ολοκληρωτικές εξισώσεις θα χρειαστούμε τους μετασχηματισμούς Fourier του ακριβούς και του προσεγγιστικού πυρήνα. Για τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier του προσεγγιστικού πυρήνα έχουμε τη διαδικασία:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\text{ap}}(z, \alpha) \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \Rightarrow \\ \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \Rightarrow \\ \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz + \\ &+ j \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \sin(\zeta \cdot z) \cdot dz \end{aligned} \quad (3.3)$$

Επίσης ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \sin(\zeta \cdot z) \cdot dz = 0 \quad (3.4)$$

καθώς έχουμε περίπτωση ολοκληρώματος άρτιας συνάρτησης (άρτια επί περιττή) σε συμμετρικό περί το μηδέν πραγματικό διάστημα. Για τον ίδιο λόγο θα είναι:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz = 0 \quad (3.5)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι μεν προφανής όμως στην πραγματικότητα καθορίζει και το φύλλο Riemann πάνω στο οποίο πρέπει να γίνει η ολοκλήρωση Fourier. Με άλλα λόγια παρακάτω θα αποδειχθεί ότι η συνάρτηση του Fourier του προσεγγιστικού πυρήνα είναι πλειότιμη και ο παραπάνω περιορισμός καθορίζει το φύλλο πλειοτιμότητας στο οποίο θα πρέπει να ευρίσκεται το μονοπάτι της αντίστροφης ολοκλήρωσης. Το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα θα συναντηθεί στις παρακάτω πράξεις:

$$\begin{aligned} (3.3) \Rightarrow \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz \Rightarrow \\ \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos(k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz \Rightarrow \\ \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\cos(k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα εφόσον είναι άρτιας συνάρτησης σε συμμετρικό και πραγματικό περί το μηδέν διάστημα θα ισούται με:

$$(3.6) \Rightarrow \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz \quad (3.7)$$

Από τη σχέση ET I 26(30) σελίδας 472 της παραπομπής [1] προκύπτει ότι:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(k \cdot \sqrt{\alpha^2 + z^2})}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \cdot N_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & 0 < \zeta < k \\ K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}), & \zeta > k \end{cases} \quad (3.8)$$

για $k > 0$ που ισχύει φυσικά στη δική μας περίπτωση δεδομένου πως το υλικό διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι τέλει μονωτικό (κενός χώρος) και $\zeta \in \mathbb{R}$. Το θετικό του κυματικού αριθμού καταδεικνύεται από τη σχέση (1.12). Όσον αφορά τους συμβολισμούς αυτής της παραπομπής είναι:

$$N_0(z) = j \cdot H_0^{(1)}(z) \quad (3.9)$$

για κάθε μιγαδικό z όπου οι συναρτήσεις ορίζονται ομαλά. Θυμίζουμε ότι η συνάρτηση $H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + j \cdot Y_0(z)$ είναι η Hankel πρώτου είδους μηδενικής τάξης

με $z \in \mathbb{C}$ όπου $J_0(z), Y_0(z)$ οι σχετικές συναρτήσεις Bessel μηδενικής τάξης.

Όπως διακρίνουμε από τον τύπο ορισμού της η συνάρτηση $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$ είναι άρτια και κατά συνέπεια μπορεί να οριστεί και στον αρνητικό πραγματικό ημιάξονα:

$$(3.7) \begin{matrix} \xrightarrow{(3.8)^{+\infty}} \\ \xrightarrow{(3.9)} \end{matrix} \int_0^{\infty} \frac{\cos(k \cdot \sqrt{\alpha^2 + z^2})}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz = \begin{cases} \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}), & |\zeta| < k \\ K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}), & |\zeta| > k \end{cases} \quad (3.10)$$

Παρατηρούμε πως ο παραπάνω τύπος ισχύει αποκλειστικά για $k > 0$ και $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{k\}$, θα θέλαμε όμως να έχουμε μία έκφραση για τη συγκεκριμένη συνάρτηση για κάθε μιγαδικό $k, \zeta \in \mathbb{C}$ όπου έχει ομαλή συμπεριφορά. Δεδομένου πως οι συναρτήσεις που αποτελούν την $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$ δέχονται και μιγαδικά ορίσματα θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης ως προς k και ως προς ζ προκειμένου να φτάσουμε στην γενική συνάρτηση. Σαν πρώτο βήμα όμως θα ακολουθηθεί το εξής: από την παραπομπή [2] (σχέση 9.6.4, σελίδα 375) ισχύει ότι:

$$K_0(z) = \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot H_0^{(1)}(j \cdot z) \quad (3.11)$$

για κάθε $z \in \mathbb{C}$ όπου οι συναρτήσεις είναι αναλυτικές. Άρα οι δύο τύποι της συνάρτησης εντός και εκτός του διαστήματος $(-k, k)$ είναι ταυτόσημοι για όλο το μιγαδικό επίπεδο. Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω συνάρτηση διπλού τύπου ισοδύναμα σαν απλού:

$$(3.10) \Rightarrow \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) = \frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \quad (3.12)$$

όπου η μεταβλητή ζ είναι ακόμα πραγματική και διάφορη των $\zeta = \pm k$ όπου υπάρχει απειρισμός. Σύμφωνα με το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης υπάρχει μοναδική συνάρτηση $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$ ορισμένη στο μιγαδικό επίπεδο του ζ εκτός των σημείων απειρισμού $\zeta = \pm k$ που δίνει τις ίδιες τιμές στον πραγματικό άξονα με την παραπάνω ορισμένη συνάρτηση. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier του προσεγγιστικού πυρήνα $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) = \frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})$ για κάθε $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{\pm k\}$ καθώς η συνάρτηση $H_0^{(1)}(z)$ δέχεται και μιγαδικό όρισμα. Στα σημεία $\zeta = \pm k$ η συγκεκριμένη συνάρτηση θα παρουσιάζει ανωμαλία απειρισμού.

Ένας ανάλογος συλλογισμός μπορεί να γίνει και για την παράμετρο $k > 0$. Πράγματι η συγκεκριμένη συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση του κυματικού αριθμού. Ξανά μέσω του θεωρήματος της αναλυτικής επέκτασης μπορούμε να την ορίσουμε και για μιγαδικά $k \in \mathbb{C} \setminus \{\pm \zeta\}$ (έστω κι αν μόνο το πρώτο τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου περιέχει εφικτές τιμές για τον κυματικό αριθμό ακόμα κι αν αυτός γίνει μιγαδικός δηλαδή το υλικό στο οποίο μεταδίδεται ακτινοβολία υποθεθεί ότι παρουσιάζει απώλειες). Επομένως έχουμε ορίσει τον μετασχηματισμό Fourier του προσεγγιστικού πυρήνα ολοκλήρωσης σε όλο το μιγαδικό επίπεδο και για όλους δυνατούς μιγαδικούς κυματικούς αριθμούς με εξαίρεση την περίπτωση όπου $\zeta = \pm k \Leftrightarrow k = \pm \zeta$ οπότε και υπάρχει απειρισμός. Συνεπώς η σχέση (3.12) ορίζεται για όλα τα μιγαδικά ζ και k όπου αυτή επιδεικνύει ομαλή συμπεριφορά (εκτός σημείων ανωμαλιών και τυχόν κλαδικών τομών).

Όσον αφορά τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Fourier του ακριβούς πυρήνα θα έχουμε την ακόλουθη σειρά πράξεων:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\text{ex}}(z, \alpha) \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \stackrel{(2.10)}{\Rightarrow} \\ \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}\right)}{\sqrt{z^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} \cdot d\varphi' \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \Rightarrow \\ \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) &= \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}\right)}{\sqrt{z^2 + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \cdot d\varphi' \quad (3.13) \end{aligned}$$

Από την διαδικασία του προσεγγιστικού πυρήνα έχουμε το συμπέρασμα:

$$\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{\alpha^2 + z^2}\right)}{\sqrt{\alpha^2 + z^2}} \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz \quad (3.14)$$

και άρα θα είναι:

$$(3.14) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz =$$

$$= \bar{K}_{\text{ap}} \left(\zeta, 2 \cdot \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{\varphi'}{2} \right) \right| \right) \quad (3.15)$$

Αν επιλέξουμε την ισοδύναμη έκφραση της $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$ με την συνάρτηση Hankel πρώτης τάξης ο μετασχηματισμός Fourier του ακριβούς πυρήνα απλοποιείται σημαντικά:

$$(3.13) \Rightarrow \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)} \left(2 \cdot \alpha \cdot \left| \sin \left(\frac{\varphi'}{2} \right) \right| \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \right) \cdot d\varphi' \Rightarrow$$

$$\bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\pi} j \cdot H_0^{(1)} \left(2 \cdot \alpha \cdot \sin \left(\frac{\varphi'}{2} \right) \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \right) \cdot d\varphi' \quad (3.16)$$

Κατά την παραπάνω πράξη λήφθηκε υπόψη ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια ως προς φ' και η ολοκλήρωση γίνεται σε συμμετρικό περί το μηδέν πραγματικό διάστημα. Αν επιπλέον γίνει η αλλαγή μεταβλητής $\theta = \frac{\varphi'}{2}$ θα έχουμε ότι $d\varphi' = 2 \cdot d\theta$

και τα όρια ολοκλήρωσης θα είναι από $\theta = 0$ έως $\theta = \frac{\pi}{2}$. Κατά συνέπεια:

$$(3.16) \Rightarrow \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} j \cdot H_0^{(1)} \left(2 \cdot \alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot \sin(\theta) \right) \cdot d\theta \quad (3.17)$$

Από τον τύπο ET II 360(16) της σελίδας 738 της παραπομπής [1] έχουμε θέτοντας την παράμετρο $n = 0$ ότι:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} N_0(2 \cdot \alpha \cdot \sin(\theta)) \cdot d\theta = \frac{\pi}{2} \cdot J_0(\alpha) \cdot N_0(\alpha) \quad (3.18)$$

Επομένως μπορεί εύκολα να εξαχθεί το συμπέρασμα:

$$(3.17) \stackrel{(3.9)}{\Rightarrow} \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \Rightarrow$$

$$\bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) = \frac{j}{4} \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \quad (3.19)$$

Ακολουθώντας την συλλογιστική του προσεγγιστικού πυρήνα μπορούμε και πάλι να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης και να καταλήξουμε πως η συγκεκριμένη συνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier μπορεί να οριστεί και εκτός της πραγματικής γραμμής σε όλα τα μιγαδικά σημεία $\zeta \in \mathbb{C}$ για τα οποία είναι αναλυτική. Επίσης μπορεί να υπάρξει ορισμός της παραπάνω και για όλους τους εφικτούς μιγαδικούς κυματικούς αριθμούς. Επομένως η (3.19) ορίζει την συνάρτηση

του μετασχηματισμού Fourier για όλα τα μιγαδικά ζ και k που αυτή έχει ομαλή συμπεριφορά.

Μετασχηματισμοί δευτέρων μελών

Προκειμένου να μετασχηματιστούν κατά Fourier οι ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallen (2.45) έως (2.48) θα πρέπει να γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων των δευτέρων μελών $F_{\text{dlt}}(z)$ και $F_{\text{fll}}(z)$. Για την περίπτωση τροφοδοσίας με delta – function generator έχουμε:

$$(2.49) \Rightarrow \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |z|) \cdot \exp(j \cdot z \cdot \zeta) \cdot dz \Rightarrow$$

$$\bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \exp(j \cdot z \cdot (\zeta + k)) \cdot dz + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \int_{-\infty}^0 \exp(j \cdot z \cdot (\zeta - k)) \cdot dz \Rightarrow$$

$$\bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \left[\frac{\exp(j \cdot z \cdot (\zeta + k))}{j \cdot (\zeta + k)} \right]_0^{+\infty} + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \left[\frac{\exp(j \cdot z \cdot (\zeta - k))}{j \cdot (\zeta - k)} \right]_{-\infty}^0 \quad (3.20)$$

Επειδή είναι $z \in \mathbb{R}$ αλλά και σε πρώτη φάση $\zeta \in \mathbb{R}$ είναι προφανές ότι αν συνεχισθεί η υπόθεση για πραγματικό κυματικό αριθμό η συνάρτηση $\bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta)$ δεν συγκλίνει και οδηγεί σε απροσδιοριστίες. Θα πρέπει συνεπώς να υποθέσουμε ότι $k \in \mathbb{C}$ με $k = \text{Re}[k] + j \cdot \text{Im}[k]$ και φυσικά $\text{Re}[k] > 0$. Το πρόσημο για το φανταστικό μέρος του κυματικού αριθμού θα εξαχθεί από την απαίτηση να συγκλίνει η συνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier. Θα εξετασθούν πρώτα τα παραπάνω όρια στο άπειρο:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta - k) \cdot z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta - \text{Re}[k] - j \cdot \text{Im}[k]) \cdot z) \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta - k) \cdot z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} (\exp(j \cdot (\zeta - \text{Re}[k]) \cdot z) \cdot \exp(-\text{Im}[k] \cdot z)) \quad (3.21)$$

Είναι προφανές ότι για να παραμείνει η παραπάνω ποσότητα πεπερασμένη θα πρέπει να ισχύει: $\text{Im}[k] > 0$. Δεδομένου αυτού είναι:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta - k) \cdot z) = 0 \quad (3.22)$$

αφού $\left| \lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta - \text{Re}[k]) \cdot z) \right| = \lim_{z \rightarrow -\infty} |\exp(j \cdot (\zeta - \text{Re}[k]) \cdot z)| = 1$ (μιγαδικός με φραγμένο μέτρο) λαμβάνοντας υπόψη ότι $\zeta \in \mathbb{R}$ και $\text{Re}[k] \in \mathbb{R}$. Για το δεύτερο όριο έχουμε:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta + k) \cdot z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta + \text{Re}[k] + j \cdot \text{Im}[k]) \cdot z) \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \exp(j \cdot (\zeta + k) \cdot z) = \lim_{z \rightarrow -\infty} (\exp(j \cdot (\zeta + \operatorname{Re}[k]) \cdot z) \cdot \exp(-\operatorname{Im}[k] \cdot z)) = 0 \quad (3.23)$$

καθώς $\operatorname{Im}[k] > 0$. Σε αυτό το σημείο πρέπει να θυμίσουμε ότι δεδομένης της χρονικής εξάρτησης των μεγεθών που έχει επιλεγεί το πρόσημο του φανταστικού μέρους του κυματικού αριθμού (αν υπάρχει) πρέπει να είναι οπωσδήποτε θετικό. Άρα η συγκεκριμένη φυσική αναγκαιότητα συμπίπτει με την παραπάνω συνθήκη σύγκλισης. Με αυτή την προϋπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned} (3.20) \stackrel{(3.22)}{\Rightarrow} \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot j \cdot (\zeta + k)} \cdot (0 - 1) + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot j \cdot (\zeta - k)} \cdot (1 - 0) \Rightarrow \\ \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) &= -\frac{V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot j \cdot (\zeta + k)} + \frac{V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot j \cdot (\zeta - k)} \Rightarrow \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \left(\frac{1}{j \cdot (\zeta - k)} - \frac{1}{j \cdot (\zeta + k)} \right) \Rightarrow \\ \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{j \cdot (\zeta + k) - j \cdot (\zeta - k)}{j \cdot (\zeta - k) \cdot j \cdot (\zeta + k)} \Rightarrow \\ \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{2 \cdot j \cdot k}{k^2 - \zeta^2} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει εξαχθεί με τη συνθήκη $\operatorname{Im}[k] > 0$. Μπορεί όμως να παρατηρηθεί ότι ορίζεται και για αμιγώς πραγματικό κυματικό αριθμό. Επομένως από το θεώρημα της αναλυτικής επέκτασης εξάγεται ότι υπάρχει μοναδική συνάρτηση που μπορεί να αντιστοιχηθεί στον τύπο $\bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta)$ όταν $k \in \mathbb{R}$. Άρα για τα σημεία που η συνάρτηση είναι ομαλή ($k \neq \pm \zeta$), αυτή εκφράζεται μέσω του παραπάνω τύπου. Μία ανάλογη διαδικασία θα πρέπει να γίνει και για αναλυτική επέκταση στο πεδίο του ζ προκειμένου να ορίζεται και για μιγαδικά ζ μέσω του ίδιου τύπου. Καταλήγουμε ότι για $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{\pm k\}$ ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δευτέρου μέλους για το delta – function generator δίνεται από τον τύπο (3.24).

Όσον αφορά το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $F_{\text{frl}}(z)$ του frill generator θα ακολουθηθεί μία διαφορετική στρατηγική. Πράγματι αν θυμηθούμε την μορφή της αντίστοιχης εξίσωσης τύπου Rocklington:

$$(2.16) \stackrel{(2.18)}{\Rightarrow} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) F_{\text{frl}}(z) = \frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot (K_{\text{ap}}(z, a) - K_{\text{ap}}(z, b)) \quad (3.25)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα για τον μετασχηματισμό Fourier της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου. Για τη συνάρτηση δευτέρου μέλους της περίπτωσης τροφοδοσίας με frill generator:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 F_{\text{fl}}(z)}{\partial z^2} \cdot \exp(j \cdot \zeta \cdot z) \cdot dz = (j \cdot \zeta)^2 \cdot \bar{F}_{\text{fl}}(\zeta) \quad (3.26)$$

Αν επιδράσουμε με τον τελεστή Fourier στην παραπάνω εξίσωση (3.25) θα έχουμε δεδομένης της γραμμικότητας του συγκεκριμένου τελεστή:

$$(3.25) \Rightarrow -\zeta^2 \cdot \bar{F}_{\text{fl}}(\zeta) + k^2 \cdot \bar{F}_{\text{fl}}(\zeta) = \frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot (\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a) - \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, b)) \Rightarrow$$

$$\bar{F}_{\text{fl}}(\zeta) = \frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a) - \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, b)}{k^2 - \zeta^2} \quad (3.27)$$

Εξαγωγή ολοκληρωμάτων

Τώρα μπορεί να εφαρμοστεί ο τελεστής Fourier στις σχέσεις (2.45) έως (2.48) και να λάβει χώρα η μέθοδος που περιγράφηκε. Αρκεί να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier της συνέλιξης που ισούται με το γινόμενο των επιμέρους μετασχηματισμών. Για την περίπτωση τροφοδοσίας με delta – function generator και τη χρήση ακριβούς πυρήνα θα είναι:

$$(2.45) \Rightarrow \bar{I}_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, a) = \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) \Rightarrow \bar{I}_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{\bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta)}{\bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, a)} \xrightarrow{(3.19)} \xrightarrow{(3.24)}$$

$$\bar{I}_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{\frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{2 \cdot j \cdot k}{k^2 - \zeta^2}}{\frac{j}{4} \cdot J_0\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \Rightarrow$$

$$\bar{I}_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{4 \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \cdot \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \quad (3.28)$$

Για την περίπτωση τροφοδοσίας με delta – function generator και τη χρήση προσεγγιστικού πυρήνα θα είναι:

$$(2.46) \Rightarrow \bar{I}_{\text{dlt,ap}}(\zeta) \cdot \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a) = \bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta) \Rightarrow \bar{I}_{\text{dlt,ap}}(\zeta) = \frac{\bar{F}_{\text{dlt}}(\zeta)}{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, a)} \xrightarrow{(3.12)} \xrightarrow{(3.24)}$$

$$\bar{I}_{\text{dlt,ap}}(\zeta) = \frac{\frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \frac{2 \cdot j \cdot k}{k^2 - \zeta^2}}{\frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \Rightarrow \bar{I}_{\text{dlt,ap}}(\zeta) = \frac{4 \cdot V \cdot k}{\zeta_0} \cdot \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \quad (3.29)$$

Για την περίπτωση τροφοδοσίας με frill generator και τη χρήση ακριβούς πυρήνα θα είναι:

$$\begin{aligned}
(2.47) \Rightarrow \bar{I}_{\text{frl,ex}}(\zeta) \cdot \bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha) &= \bar{F}_{\text{frl}}(\zeta) \Rightarrow \bar{I}_{\text{frl,ex}}(\zeta) = \frac{\bar{F}_{\text{frl}}(\zeta)}{\bar{K}_{\text{ex}}(\zeta, \alpha)} \stackrel{(3.19)}{\Rightarrow} \\
&\frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) - \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, b)}{k^2 - \zeta^2} \\
\bar{I}_{\text{frl,ex}}(\zeta) &= \frac{j \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{4} \Rightarrow \\
\bar{I}_{\text{frl,ex}}(\zeta) &= \frac{k \cdot V \cdot 8 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) - \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, b)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \stackrel{(3.12)}{\Rightarrow} \\
\bar{I}_{\text{frl,ex}}(\zeta) &= \frac{k \cdot V \cdot 8 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - \frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \Rightarrow \\
\bar{I}_{\text{frl,ex}}(\zeta) &= \frac{k \cdot V \cdot j \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Για την περίπτωση τροφοδοσίας με frill generator και τη χρήση προσεγγιστικού πυρήνα θα είναι:

$$\begin{aligned}
(2.48) \Rightarrow \bar{I}_{\text{frl,ap}}(\zeta) \cdot \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) &= \bar{F}_{\text{frl}}(\zeta) \Rightarrow \bar{I}_{\text{frl,ap}}(\zeta) = \frac{\bar{F}_{\text{frl}}(\zeta)}{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)} \stackrel{(3.12)}{\Rightarrow} \\
&\frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) - \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, b)}{k^2 - \zeta^2} \\
\bar{I}_{\text{frl,ap}}(\zeta) &= \frac{j \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{4} \Rightarrow \\
\bar{I}_{\text{frl,ap}}(\zeta) &= \frac{k \cdot V \cdot 8 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha) - \bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, b)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \stackrel{(3.12)}{\Rightarrow} \\
\bar{I}_{\text{frl,ap}}(\zeta) &= \frac{k \cdot V \cdot 8 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{\frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - \frac{j}{4} \cdot H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \Rightarrow \\
\bar{I}_{\text{frl,ap}}(\zeta) &= \frac{k \cdot V \cdot j \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο θα ακολουθήσει μία αντίστροφη ολοκλήρωση Fourier για κάθε μία από τις τέσσερις παραπάνω περιπτώσεις. Συμβολίζουμε με $\bar{I}(\zeta)$ καθεμιά από τις συναρτήσεις $\bar{I}_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$, $\bar{I}_{\text{dlt,ap}}(\zeta)$, $\bar{I}_{\text{frit,ex}}(\zeta)$ και $\bar{I}_{\text{frit,ap}}(\zeta)$. Φαινομενικά όλες οι συναρτήσεις $\bar{I}(\zeta)$ και είναι άρτιες. Αυτό δεν είναι απολύτως αληθές καθώς περιέχουν την στοιχειώδη συνάρτηση:

$$\gamma(\zeta) = \sqrt{k^2 - \zeta^2} \quad (3.32)$$

Όπως είναι γνωστό η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι δίτιμη (έχει δηλαδή δύο φύλλα Riemann με τιμές η μία αντίθετη της άλλης). Έχει δύο κλαδικά σημεία $\zeta = \pm k$ και μπορεί να είναι άρτια συνάρτηση αν γίνει σωστή επιλογή της κλαδικής της τομής. Συγκεκριμένα αν η κλαδική τομή συνδέει τα δύο σημεία μέσω του άπειρου με δρόμο συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων (δηλαδή ουσιαστικά να υπάρχουν δύο κλαδικές τομές που να ενώνονται μέσω του άπειρου σημείου) τότε όντως η συνάρτηση $\gamma(\zeta)$ είναι άρτια και στα δύο της φύλλα Riemann. Με αυτή την προϋπόθεση οι συναρτήσεις $\bar{F}(\zeta)$ είναι άρτιες και αν μπορούμε να συμπτύξουμε τις τέσσερις σχέσεις αντίστροφης ολοκλήρωσης Fourier σε μία θα έχουμε:

$$(3.2) \Rightarrow I(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}(\zeta) \cdot \exp(-j \cdot \zeta \cdot z) \cdot d\zeta \Rightarrow I(0) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}(\zeta) \cdot d\zeta \Rightarrow$$

$$I(0) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \bar{I}(\zeta) \cdot d\zeta \quad (3.33)$$

Μας ενδιαφέρει η τιμή του ρεύματος στο σημείο τροφοδοσίας $z = 0$ καθώς το μέγεθος που ενδιαφέρει να υπολογιστεί και να σχολιαστεί είναι η αγωγιμότητα εισόδου. Στο ερώτημα γιατί η ανάλυσή μας από το σημείο αυτό και στο εξής θα περιοριστεί στο συγκεκριμένο μέγεθος απαντούμε πως είναι το σημαντικότερο μέγεθος που χαρακτηρίζει τη λειτουργία μιας κεραίας. Από αυτό μπορεί να εξαχθεί η ισχύς που καταναλώνεται, αυτή που ακτινοβολείται στο μακρινό πεδίο της κεραίας ή το ποσοστό της ισχύος που εγκλωβίζεται ταλαντούμενο στο κοντινό πεδίο της. Επίσης έστω ότι αναλύεται ένα πολύπλοκο μικροκυματικό κύκλωμα που συμμετέχουν κεραίες. Τότε θα πρέπει να συμπεριληφθεί η αλληλεπίδραση των κεραιών με τον χώρο που αυτές ακτινοβολούν τα ηλεκτρομαγνητικά τους κύματα. Αντί αυτού μπορούμε να αντικαταστήσουμε την κεραία που ακτινοβολεί αλλά και το χώρο που μεταδίδεται η ακτινοβολία με μία σύνθετη αντίσταση η οποία κάνει το πρόβλημα ευκολότερα διαχειρίσιμο. Η αγωγιμότητα εισόδου είναι:

$$Y = \frac{I(0)}{V} \quad (3.34)$$

Έχοντας υπόψη της παραπάνω σχέσεις μπορούμε να εξάγουμε τα ολοκληρώματα Fourier για τις τέσσερις κρίσιμες ποσότητες αγωγιμοτήτων εισόδου: $Y_{\text{dlt,ex}}$, $Y_{\text{dlt,ap}}$, $Y_{\text{frl,ex}}$ και $Y_{\text{frl,ap}}$.

$$(3.34) \stackrel{(3.33)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.28)}{Y_{\text{dlt,ex}}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \cdot d\zeta \quad (3.35)$$

$$(3.34) \stackrel{(3.33)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.29)}{Y_{\text{dlt,ap}}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \cdot d\zeta \quad (3.36)$$

$$(3.34) \stackrel{(3.33)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.30)}{Y_{\text{frl,ex}}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \cdot d\zeta \quad (3.37)$$

$$(3.34) \stackrel{(3.33)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.31)}{Y_{\text{frl,ap}}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \cdot d\zeta \quad (3.38)$$

Στο συγκεκριμένο σημείο είναι αναγκαίο να εξεταστεί η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων των σχέσεων (3.35) έως (3.38) προκειμένου να αποφασιστεί ποιες ποσότητες από αυτές είναι υπολογίσιμες και ποιες όχι. Και στα τέσσερα ολοκληρώματα ο δρόμος ολοκλήρωσης είναι αμιγώς πραγματικός.

Μελέτη ολοκληρωτέων

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων είναι αναγκαία η μελέτη των σχετικών ολοκληρωτέων συναρτήσεων. Θα πρέπει να γνωρίζουμε σε ποια σημεία η εκάστοτε ολοκληρωτέα απειρίζεται όπως και εάν είναι πλειότιμη που ευρίσκονται τα κλαδικά σημεία της και οι κλαδικές τομές. Σε πρώτη φάση ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \quad (3.39)$$

$$h_{\text{dlt,ap}}(\zeta) = \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \quad (3.40)$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) = j \cdot \frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \quad (3.41)$$

$$h_{\text{fit,ap}}(\zeta) = j \cdot \frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(\beta \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \quad (3.42)$$

Είναι οι ολοκληρωτές συναρτήσεις των παραπάνω ολοκληρωμάτων (3.35) έως (3.38) έχοντας αγνοήσει κάποια πραγματική θετική πολλαπλασιαστική σταθερά.

Σε αυτό το σημείο αναζητούμε στοιχεία του συνόλου των πεπερασμένων μιγαδικών αριθμών (όχι το άπειρο σημείο) για τα οποία οι ολοκληρωτές απειρίζονται. Σαν δεδομένα έχουμε τα όρια:

$$\lim_{z \rightarrow 0} H_0^{(1)}(z) = \infty \quad (3.43)$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} J_0(z) = 1 \quad (3.44)$$

Επίσης είναι γνωστή η ασυμπτωτική έκφραση της συνάρτησης Hankel μηδενικής τάξης και πρώτου είδους για μικρά ορίσματα (συνδυασμός σχέσης 9.6.8 σελίδας 375 της παραπομπής [2] και (3.11)):

$$H_0^{(1)}(z) \sim \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(z) \quad , z \rightarrow 0 \quad (3.45)$$

Επομένως μπορεί εύκολα να εξαχθεί το όριο:

$$(3.45) \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} (z^2 \cdot H_0^{(1)}(z)) = 0 \quad (3.46)$$

Όπως γίνεται κάποια από τα μοναδικά πεπερασμένα σημεία που είναι υποψήφια σημεία απειρισμού των παραπάνω ολοκληρωτέων είναι εκείνα που μηδενίζουν τα ορίσματα των ειδικών συναρτήσεων που αυτές περιέχουν. Δηλαδή το ζεύγος σημείων $\zeta = \pm k$:

$$(3.39) \stackrel{(3.44)}{\Rightarrow} \lim_{(3.46) \zeta \rightarrow \pm k} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \infty \quad (3.47)$$

$$(3.40) \stackrel{(3.46)}{\Rightarrow} \lim_{\zeta \rightarrow \pm k} h_{\text{dlt,ap}}(\zeta) = \infty \quad (3.48)$$

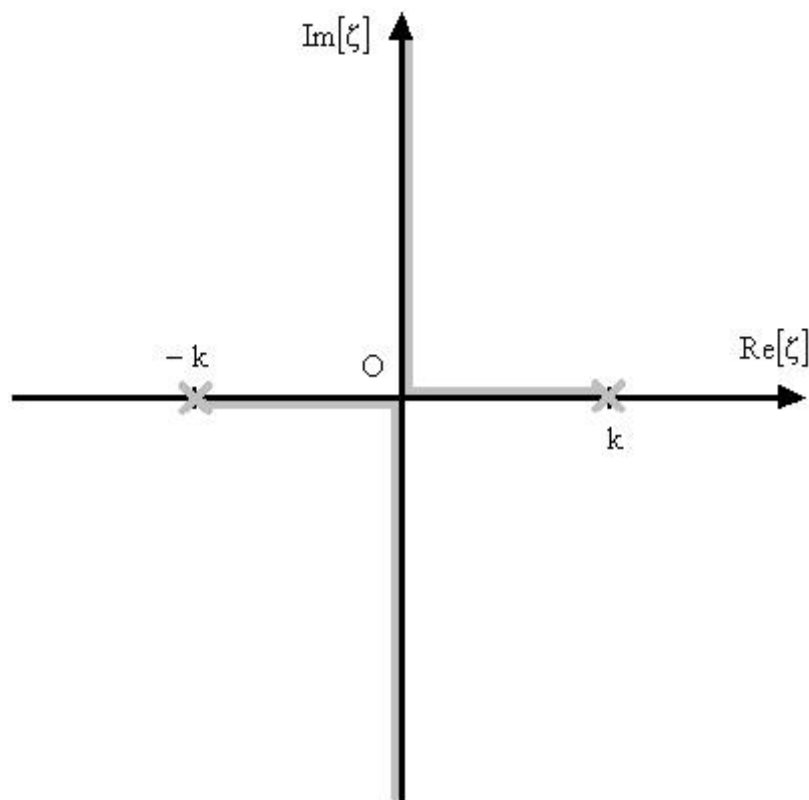
$$(3.41) \stackrel{(3.43)(3.44)}{\Rightarrow} \lim_{(3.46) \zeta \rightarrow \pm k} h_{\text{fit,ex}}(\zeta) = \infty \quad (3.49)$$

$$(3.42) \stackrel{(3.43)}{\Rightarrow} \lim_{(3.46) \zeta \rightarrow \pm k} h_{\text{fit,ap}}(\zeta) = \infty \quad (3.50)$$

Παρατηρούμε πως ένα σημείο απειρισμού από τα δύο ευρίσκεται πάνω στον δρόμο ολοκλήρωσης. Πρόκειται για το σημείο $\zeta = k$ και κατά συνέπεια θα πρέπει να επισημανθεί κατά πόσο η συγκεκριμένη ανωμαλία είναι ολοκληρώσιμη ή όχι. Υποψήφια σημεία απειρισμού είναι επίσης εκείνα που μηδενίζουν τον παρονομαστή

των εκάστοτε ολοκληρωτέων συναρτήσεων. Δεδομένου πως η συνάρτηση Hankel δεν μηδενίζει ποτέ ταυτόχρονα το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος αναγκαίο είναι να διερευνηθεί η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους στον παρονομαστή των σχέσεων (3.39) και (3.41). Είναι γνωστό ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση για φανταστικό όρισμα (που είναι η αντίστοιχη Neumann πρώτου είδους) είναι μη μηδενική άρα το όρισμα της συνάρτησης μπορεί να την απειρίσει για $\zeta \in (0, k)$ όπου είναι πραγματικό και θετικό. Το μέγιστο όρισμά της είναι για $\zeta = 0$ δηλαδή το $\alpha \cdot k$. Το ελάχιστο θετικό όρισμα που απειρίζει την συνάρτηση $J_0(z)$ όπως προκύπτει από πίνακες είναι περίπου ίσο με 2.4. Άρα θα πρέπει προκειμένου να υπάρχει πρόβλημα μηδενισμού παρονομαστή να ισχύει: $\alpha \cdot k > 2.4$ κάτι που δεν είναι δυνατόν καθώς μιλάμε για λεπτές κεραίες.

Όσον αφορά τον έλεγχο πλειοτιμότητας των ολοκληρωτέων συναρτήσεων, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι περιέχουν την στοιχειώδη συνάρτηση $\gamma(\zeta)$ που δίνεται από τη σχέση (3.32). Επομένως υπάρχει μία πηγή πλειοτιμότητας και τα σημεία $\zeta = \pm k$ είναι κλαδικά σημεία. Επίσης εξαιτίας της πλειοτιμότητας του λογαρίθμου και της ασυμπτωτικής σχέσης (3.45) και η δεύτερη πηγή πλειοτιμότητας καταδεικνύει ως κλαδικά σημεία τα $\zeta = \pm k$. Σημειωτέον ότι οι συγκεκριμένες παρατηρήσεις ισχύουν και για τις τέσσερις ολοκληρωτέες συναρτήσεις καθώς περιέχουν την συνάρτηση Hankel στην οποία αναφέρεται η σχέση (3.45). Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι το σύνολο αυτών έχει μία κλαδική τομή που ενώνει τα δύο κλαδικά σημεία μέσω του απείρου. Μία τέτοια συζήτηση γίνεται στις σελίδες 316–318 της παραπομπής [6]. Πιο συγκεκριμένα το ένα τμήμα της κλαδικής τομής ξεκινά από το κλαδικό σημείο $\zeta = k$ και εκτείνεται εξολοκλήρου στο άνω και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου ζ . Το άλλο τμήμα της κλαδικής τομής ξεκινά από το κλαδικό σημείο $\zeta = -k$ και εκτείνεται εξολοκλήρου στο κάτω και αριστερό τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου ζ . Συμπερασματικά αναφέρουμε ότι και οι τέσσερις ολοκληρωτέες συναρτήσεις έχουν κλαδικό σημείο και σημείο απειρισμού ταυτόχρονα το $\zeta = k$ το οποίο ανήκει στο μονοπάτι της ολοκλήρωσης. Μία επιλογή κλαδικής τομής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (3.1):



Σχήμα (3.1)

Έλεγχος delta/exact

Προκειμένου να εξετάσουμε αν συγκλίνει ή όχι το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.35) θα πρέπει να εξάγουμε ασυμπτωτικές εκφράσεις τόσο για την περιοχή απειρισμού της ολοκληρωτέας (όπως προκύπτει από την σχέση (3.47)) όσο και για την περιοχή του $\zeta \rightarrow +\infty$. Αυτό διότι το ένα άκρο του ολοκληρώματος είναι το άπειρο και δεν γνωρίζουμε αν η ολοκληρωτέα πηγαίνει με επαρκώς μεγάλη ταχύτητα στο μηδέν. Για την περιοχή του $\zeta = k$ έχουμε:

$$(3.39) \stackrel{(3.44)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.45)}{h_{\text{dlt,ex}}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k - \zeta) \cdot (k + \zeta) \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{(k - \zeta) \cdot (k + \zeta)})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k - \zeta) \cdot 2 \cdot k \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot \sqrt{k - \zeta}})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot 2 \cdot k \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \left(\ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k}) + \frac{1}{2} \cdot \ln(k-\zeta) \right)}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot 2 \cdot k \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \left(\ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k}) + \frac{1}{2} \cdot \ln(k-\zeta) \right)}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot \ln(k-\zeta)}, \zeta \rightarrow k \quad (3.51)$$

Κατά την παραπάνω σειρά πράξεων χρησιμοποιήθηκαν οι ασυμπτωτικές σχέσεις:

$$(k^2 - \zeta^2) \rightarrow (k - \zeta) \cdot 2 \cdot k, \zeta \rightarrow k \quad (3.52)$$

που ισχύει καθώς η ποσότητα συνολικά τείνει στο μηδέν και:

$$\ln(k - \zeta) + s \rightarrow \ln(k - \zeta), \zeta \rightarrow k \quad (3.53)$$

που ισχύει καθώς η συνολική ποσότητα τείνει στο άπειρο σημείο για οποιονδήποτε τυχαίο μιγαδικό αριθμό s . Μία παράγουσα της συνάρτησης της σχέσης (3.51)

συμβολίζεται με $H_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta)$ και είναι:

$$H_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta) = -\ln(\ln(k - \zeta)) \quad (3.54)$$

Αν υπολογίσουμε την διαφορά των τιμών της για σημεία πολύ κοντά στο $\zeta = k$ θα διαπιστώσουμε ότι είναι απροσδιόριστη καθώς:

$$\lim_{\zeta \rightarrow k^+} H_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta) = \infty \quad (3.55)$$

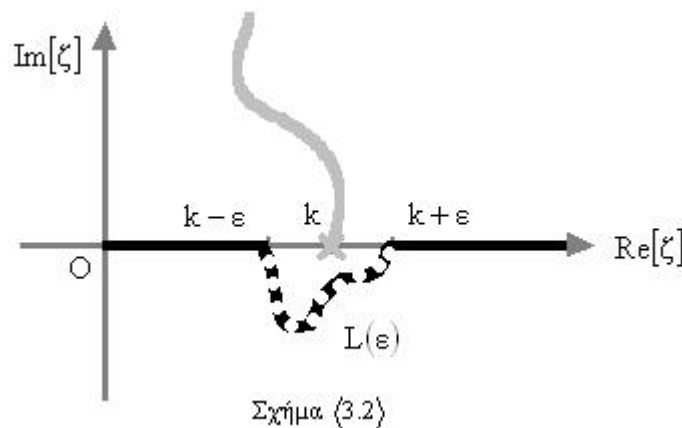
$$\lim_{\zeta \rightarrow k^-} H_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta) = \infty \quad (3.56)$$

Επομένως η ανωμαλία της $h_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$ στο $\zeta = k$ είναι μη ολοκληρώσιμη. Αυτό το γεγονός δεν θα μας αναγκάσει να παραιτηθούμε από την προσπάθεια υπολογισμού του εν λόγω ολοκληρώματος.

Παράγουμε την ακόλουθη συλλογιστική. Εάν το σημείο $\zeta = k$ δεν βρισκόταν πάνω στο δρόμο ολοκλήρωσης (που όπως συνηθίζεται στα ολοκληρώματα Fourier επιλέχθηκε να είναι ο πραγματικός θετικός ημιάξονας αρχικά) τότε προφανώς δεν υπάρχει κανένα θέμα απειρισμού της συνάρτησης. Για να απομακρυνθεί το σημείο $\zeta = k$ από τον πραγματικό άξονα θα πρέπει $\text{Im}[k] \neq 0$ κάτι που μπορεί να γίνει μόνο αν υποθεθεί ότι το υλικό μέσο διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει απώλειες. Μάλιστα κάτι τέτοιο θα συνεπάγεται $\text{Im}[k] > 0$ (και όχι $\text{Im}[k] < 0$ το οποίο όπως έχει αποδειχθεί είναι αδύνατο) που συνδέεται με την επιλογή χρονικής εξάρτησης των ηλεκτρομαγνητικών μεγεθών που έχει γίνει. Ας θεωρηθεί τώρα ότι το

υλικό έχει ολοένα και πιο μικρές απώλειες οπότε $\text{Im}[k] \rightarrow 0^+$. Σε αυτή την περίπτωση το ολοκλήρωμα (στη συγκεκριμένη περιοχή) συγκλίνει καθώς το σημείο $\zeta = k$ δεν ανήκει (εξαιτίας του ορισμού του ορίου) στον πραγματικό δρόμο ολοκλήρωσης. Θα μπορούσε επομένως να γίνει ο υπολογισμός του ολοκληρώματος γι' αυτή την κατάσταση. Δηλαδή μετατρέψαμε ένα δεδομένα αποκλίνον ολοκλήρωμα σε μία ισοδύναμη (και όχι βέβαια ίση) συγκλίνουσα μορφή. Αντιστοιχίσαμε σε ένα αποκλίνον μέγεθος μία πεπερασμένη τιμή. Μάλιστα μπορεί να αποφευχθεί η δυσκολία του ορίου αν λάβουμε υπόψη το θεώρημα του Cauchy.

Σύμφωνα με αυτό ο δρόμος ολοκλήρωσης μπορεί να τροποποιηθεί χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος αν αυτή η τροποποίηση γίνει εντός του χώρου αναλυτικότητας της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Πράγματι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι αναλυτική στο κάτω και δεξί τεταρτημόριο και άρα ο δρόμος ολοκλήρωσης θα μπορούσε να τροποποιηθεί μέσω αυτού. Δηλαδή αν από το σημείο $\zeta = k - \varepsilon$ έως το $\zeta = k + \varepsilon$ (όπου $0 < \varepsilon < k$) ακολουθηθεί ένα μονοπάτι ολοκλήρωσης με σχήμα τυχαίας απλής γραμμής $L(\varepsilon)$ που θα εκτείνεται εξολοκλήρου στο κάτω και δεξί τεταρτημόριο τότε η τιμή του ολοκληρώματος θα είναι η ίδια. Δηλαδή η τροποποίηση που μπορεί να γίνει φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (3.2).



Με άλλα λόγια θα ισχύει η ισότητα:

$$Y_{\text{dlt,ex}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta \right).$$

Επομένως στο πρόβλημα του σημείου $\zeta = k$ δόθηκε λύση με την από κάτω παράκαμψη. Το άλλο ερωτηματικό για τη σύγκλιση ή όχι του ολοκληρώματος αφορά το άπειρο άνω άκρο αυτού. Θα πρέπει κατά συνέπεια να εξαχθεί ασυμπτωτική

προσέγγιση της συνάρτησης $h_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$ για μεγάλες τιμές της μεταβλητής ζ έχοντας υπόψη ότι ($\nu = 0$ στις σχέσεις 9.6.3 και 9.6.4 σελίδας 375 της παραπομπής [2]):

$$K_0(z) = \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot H_0^{(1)}(j \cdot z) \quad (3.57)$$

$$J_0(j \cdot z) = I_0(z) \quad (3.58)$$

για κάθε επιτρεπτό μιγαδικό αριθμό z . Σε αυτό το σημείο προχωρούμε στην εξαγωγή της ασυμπτωτικής έκφρασης:

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{-\zeta^2 \cdot J_0(\alpha \cdot j \cdot \zeta) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot j \cdot \zeta)} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \begin{matrix} \xrightarrow{(3.57)} \\ \xrightarrow{(3.58)} \end{matrix}$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{-\zeta^2 \cdot I_0(\alpha \cdot \zeta) \cdot \frac{2}{j \cdot \pi} \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{\zeta^2 \cdot I_0(\alpha \cdot \zeta) \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \quad (3.59)$$

Αν ληφθεί υπόψη η ασυμπτωτική έκφραση ($\nu = 0$ στη σχέση 9.7.5 σελίδας 378 της παραπομπής [2]):

$$I_0(z) \cdot K_0(z) \sim \frac{1}{2 \cdot z} \quad , z \rightarrow \infty \quad (3.60)$$

Τότε θα προκύψει:

$$(3.59) \xrightarrow{(3.60)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{\zeta^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{\zeta} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \quad (3.61)$$

Προφανώς η παράγουσα $H_{\text{dlt,ex}}^{(\infty)}(\zeta)$ για τη συγκεκριμένη συνάρτηση είναι η:

$$H_{\text{dlt,ex}}^{(\infty)}(\zeta) = \ln(\zeta) \quad (3.62)$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} H_{\text{dlt,ex}}^{(\infty)}(\zeta) = \infty \quad (3.63)$$

Μπορεί εύκολα να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι το ολοκλήρωμα αποκλίνει με αιτία την μη συγκλίνουσα συμπεριφορά της ολοκληρωτέας για $\zeta \rightarrow +\infty$. Μάλιστα στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν μπορεί να τροποποιηθεί ο δρόμος ολοκλήρωσης ώστε να καταλήξουμε σε συγκλίνον αποτέλεσμα καθώς πρόκειται για άπειρο άκρο. Άλλωστε δεδομένου ότι:

$$\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = 0 \quad (3.64)$$

οποιαδήποτε τροποποίηση πεπερασμένου μήκους της διαδρομής στην περιοχή όπου $\zeta \rightarrow +\infty$ θα έχει μηδενική συνεισφορά στο τελικό αποτέλεσμα. Επίσης αποκλίσεις που οφείλονται σε αυτόν τον τύπο ανωμαλίας της ολοκληρωτέας συνάρτησης (άπειρο άκρο) δεν μπορούν να αρθούν με την τροποποίηση του δρόμου.

Όμως το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα είναι μιγαδικό και άρα στην περίπτωση που μόνο ένα από τα δύο μέρη του (πραγματικό, φανταστικό) αποκλίνει και πάλι αυτό χαρακτηρίζεται ως αποκλίνον. Γι' αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να χωρίσουμε την ολοκληρωτέα σε πραγματικό και φανταστικό μέρος και να τα εξετάσουμε ξεχωριστά μήπως και κάποιο από τα δύο ολοκληρώματα είναι συγκλίνον στο άπειρο. Για να γίνει αυτό είναι αναγκαία η ταυτοτική ισότητα για κάθε επιτρεπτό μιγαδικό αριθμό z ($v = 0$ στη σχέση 9.6.5 της σελίδας 375 της παραπομπής [2]):

$$Y_0(j \cdot z) = j \cdot I_0(z) - \frac{2}{\pi} \cdot K_0(z) \quad (3.65)$$

Πιο συγκεκριμένα για $0 < \zeta < (k - \varepsilon)$ θα έχουμε:

(3.39) \Rightarrow

$$\begin{aligned} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) &= \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot \left(J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + j \cdot Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \Rightarrow \\ h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) &= \frac{J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - j \cdot Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \Rightarrow \\ h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) &= \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} - \\ &- j \cdot \frac{Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Θυμίζουμε ότι οι συναρτήσεις $Y_0(z)$ και $J_0(z)$ για πραγματικά ορίσματα $z \in \mathbb{R}$ επιστρέφουν πραγματικές τιμές. Άρα ο παραπάνω διαχωρισμός είναι διαχωρισμός πραγματικού και φανταστικού μέρους για $0 < \zeta < (k - \varepsilon)$. Για $(k + \varepsilon) < \zeta < +\infty$ θα είναι:

$$\begin{aligned} (3.39) \Rightarrow h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) &= \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \Rightarrow \\ h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) &= \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \left(J_0(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + j \cdot Y_0(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \right)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \left(I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + j \cdot \left(j \cdot I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - \frac{2}{\pi} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \right) \right)} \Rightarrow \quad (3.58)$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = -\frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{j \cdot \pi}{(k^2 - \zeta^2) \cdot I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot 2 \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}$$

Επειδή και οι συναρτήσεις $I_0(z)$ και $K_0(z)$ για πραγματικά ορίσματα $z \in \mathbb{R}$ επιστρέφουν πραγματικές τιμές παρατηρούμε ότι για μεγάλα ορίσματα η συνάρτηση είναι αμιγώς φανταστική. Άρα ο λόγος απόκλισης του συνολικού ολοκληρώματος εκλείπει για το πραγματικό του μέρος. Για να βρούμε λοιπόν την τελική έκφραση για το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου (αν τελικά είναι συγκλίνουσα) θα πρέπει να εξεταστούν τα δύο πλέον ολοκληρώματα που το συνιστούν (το πραγματικό από το $\zeta = 0$ έως το $\zeta = k - \varepsilon$ και το ολοκλήρωμα της από κάτω παράκαμψης $L(\varepsilon)$).

Πρέπει να παρατηρηθεί ότι το ολοκλήρωμα $\int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta$ είναι μηδενικό καθώς

$\varepsilon \rightarrow 0$, όπου $L(\varepsilon)$ είναι η τυχαίου σχήματος απλή γραμμή που ξεκινά από το πραγματικό σημείο $\zeta = k - \varepsilon$, φτάνει στο πραγματικό σημείο $\zeta = k + \varepsilon$ και εκτείνεται αποκλειστικά στο κάτω και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου του ζ .

Πράγματι αν επιλεγεί για γραμμή ένα ημικύκλιο με ακτίνα ε (απλούστερη δυνατή επιλογή ανεξάρτητη του τελικού αποτελέσματος) και κέντρο το σημείο $\zeta = k$ τότε ο δρόμος θα είναι:

$$L(\varepsilon): \zeta(\varphi, \varepsilon) = k + \varepsilon \cdot \exp(j \cdot \varphi) \quad , \quad \pi \rightarrow \varphi \rightarrow 2 \cdot \pi \quad (3.67)$$

Αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το σχετικό ολοκλήρωμα:

$$\int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta) \cdot d\zeta \Rightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} h_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta(\varphi, \varepsilon)) \cdot \frac{\partial \zeta(\varphi, \varepsilon)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \Rightarrow \quad (3.51)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{-\varepsilon \cdot \exp(j \cdot \varphi) \cdot \ln(-\varepsilon \cdot \exp(j \cdot \varphi))} \cdot \varepsilon \cdot j \cdot \exp(j \cdot \varphi) \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{-\ln(-\varepsilon) - j \cdot \varphi} \cdot j \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d(-\ln(-\varepsilon) - j \cdot \varphi)}{-\ln(-\varepsilon) - j \cdot \varphi} \Rightarrow \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(-\ln(-\varepsilon) - j \cdot \varphi)]_{\pi}^{2\pi} \Rightarrow \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{-\ln(-\varepsilon) - j \cdot 2 \cdot \pi}{-\ln(-\varepsilon) - j \cdot \pi} \right) \stackrel{(3.53)}{\Rightarrow} \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{-\ln(-\varepsilon)}{-\ln(-\varepsilon)} \right) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta = -\ln(1) \Rightarrow \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta &= 0 \tag{3.68}
\end{aligned}$$

Κατά την παραπάνω διαδικασία χρησιμοποιήθηκε το όριο του λογαρίθμου για μικρά ορίσματα που είναι άπειρο, δηλαδή η σχέση (3.53) και το γεγονός ότι το πηλίκο δύο ποσοτήτων που πηγαίνουν στο άπειρο με τον ίδιο τρόπο (ταχύτητα) είναι σταθερός μιγαδικός αριθμός. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το είδος της παράκαμψης $L(\varepsilon)$ κάτι που οφείλεται στο θεώρημα του Cauchy και στην αναλυτικότητα της συνάρτησης. Αν συμβολίσουμε με $G_{\text{dlt,ex}} = \text{Re}[Y_{\text{dlt,ex}}]$ το πραγματικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας τότε αυτό θα δίνεται από το ακόλουθο ολοκλήρωμα:

$$(3.35) \stackrel{(3.39)(3.66)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.68)}{\Rightarrow} G_{\text{dlt,ex}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{k-\varepsilon} \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \cdot d\zeta \tag{3.69}$$

Θα πρέπει και το συγκεκριμένο ολοκλήρωμα να ελεγχθεί κατά πόσον συγκλίνει. Πιο συγκεκριμένα θα αναζητηθεί ασυμπτωτική έκφραση στην περιοχή ενδεχόμενου απειρισμού (ο οποίος ενδέχεται με τη σειρά του να είναι μη ολοκληρώσιμος) $\zeta = k$ της ολοκληρωτέας συνάρτησης:

$$w_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \tag{3.70}$$

Από τη σχέση 9.1.8 της σελίδας 360 της παραπομπής [2] έχουμε την ασυμπτωτική έκφραση:

$$Y_0(z) \sim \frac{2}{\pi} \cdot \ln(z) , z \rightarrow 0 \tag{3.71}$$

Με βάση αυτή έχουμε:

$$(3.70) \stackrel{(3.44)}{\Rightarrow} w_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{2 \cdot k \cdot (k - \zeta) \cdot \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \ln^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right)}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$w_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{2 \cdot k \cdot (k - \zeta) \cdot \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \left(\ln(\alpha \cdot 2 \cdot k) + \frac{1}{2} \cdot \ln(k - \zeta)\right)^2\right)}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$w_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k - \zeta) \cdot \left(1 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \ln^2(k - \zeta)\right)}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$w_{\text{dlt,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k - \zeta) \cdot \ln^2(k - \zeta)}, \zeta \rightarrow k \quad (3.72)$$

Κατά την παραπάνω σειρά πράξεων χρησιμοποιήθηκε η ασυμπτωτική σχέση:

$$\ln^2(k - \zeta) + \ln(k - \zeta) + s \rightarrow \ln^2(k - \zeta), \zeta \rightarrow k \quad (3.73)$$

που ισχύει καθώς η συνολική ποσότητα τείνει στο άπειρο σημείο για οποιονδήποτε τυχαίο μιγαδικό αριθμό s ενώ η ταχύτητα απειρισμού του τετραγώνου του λογαρίθμου είναι μεγαλύτερη του λογαρίθμου ενώσω τα ορίσματα τείνουν στο μηδέν. Η παράγουσα της συνάρτησης $w_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$ είναι η:

$$W_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta) = -\frac{1}{\ln(k - \zeta)} \quad (3.74)$$

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι πεπερασμένη στην περιοχή του $\zeta = k$. Πράγματι:

$$\lim_{\zeta \rightarrow k} W_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta) = 0 \quad (3.75)$$

Κατά συνέπεια θα μπορούμε να καταλήξουμε στον τελικό συγκλίνοντα τύπο για το πραγματικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου μιας διπολικής κεραίας (με τροφοδοσία τύπου delta – function και με χρήση ακριβούς πυρήνα).

$$(3.69) \Rightarrow G_{\text{dlt,ex}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^k \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})\right)} \cdot d\zeta \quad (3.76)$$

Εάν μάλιστα γίνει η αλλαγή της μεταβλητής:

$$\zeta = k \cdot \sqrt{1 - t^2} \Rightarrow \zeta^2 = k^2 - k^2 \cdot t^2 \Rightarrow k^2 - \zeta^2 = k^2 \cdot t^2 \Rightarrow \sqrt{k^2 - \zeta^2} = k \cdot t \quad (3.77)$$

εφόσον $t > 0$ κάτι που εξάγεται από τα νέα άκρα ολοκλήρωσης που είναι: $t = 1$ και $t = 0$. Αν εξαχθεί και το διαφορικό:

$$d\zeta = -k \cdot \frac{2 \cdot t \cdot dt}{2 \cdot \sqrt{1 - t^2}} \Rightarrow d\zeta = -k \cdot \frac{t \cdot dt}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (3.78)$$

Μπορούμε να φτάσουμε στον τελικό τύπο:

$$(3.76) \stackrel{(3.77)}{\Rightarrow} G_{\text{dt,ex}} = -\frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_1^0 \frac{k \cdot t}{k^2 \cdot t^2 \cdot (J_0^2(\alpha \cdot k \cdot t) + Y_0^2(\alpha \cdot k \cdot t)) \cdot \sqrt{1-t^2}} \cdot dt \Rightarrow$$

$$G_{\text{dt,ex}} = \frac{4}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot (J_0^2(\alpha \cdot k \cdot t) + Y_0^2(\alpha \cdot k \cdot t))} \cdot dt \quad (3.79)$$

Η παραπάνω διαδικασία ελέγχου σύγκλισης των ολοκληρωμάτων θα πρέπει να επαναληφθεί για τον καθένα από τους τρεις εναπομείναντες συνδυασμούς διέγερσης και πυρήνα ολοκλήρωσης. Επειδή όμως υπάρχουν πολλά κοινά στοιχεία με την παραπάνω ανάλυση η διαδικασία θα γίνει συνοπτικά.

Κάτι που πρέπει να τονιστεί είναι το γεγονός ότι η επιλογή να αναζητηθούν οι μορφές της αγωγιμότητας εισόδου και όχι της αντίστασης εισόδου αποδείχθηκε σοφή σε αυτή την περίπτωση. Πράγματι ακόμα κι αν το πραγματικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι πεπερασμένο και το άλλο είναι άπειρο, τότε ο συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός είναι το άπειρο σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Ο αντίστροφός του θα είναι ανεξάρτητα του πραγματικού μέρους του παρονομαστή μηδενικός. Δηλαδή έχουμε την περίπτωση όπου δεν είναι ισοδύναμος ο υπολογισμός ενός μεγέθους και του αντιστρόφου του καθώς κατά τη μετατροπή χάνεται πληροφορία που δεν είναι δυνατόν να ανακτηθεί. Δηλαδή αν θεωρήσουμε την σύνθετη αντίσταση $Z = R + j \cdot X$ και την σύνθετη αγωγιμότητα $Y = G + j \cdot B$ θα ισχύει δεδομένης της ισότητας $Z = \frac{1}{Y}$

$$\text{ότι: } R + j \cdot X = \frac{1}{G + j \cdot B} \Rightarrow R + j \cdot X = \frac{G - j \cdot B}{G^2 + B^2} \Rightarrow R + j \cdot X = \frac{G}{G^2 + B^2} - j \cdot \frac{B}{G^2 + B^2}.$$

$$\text{Οπότε } R = \frac{G}{G^2 + B^2} \text{ και } X = -\frac{B}{G^2 + B^2}. \text{ Πράγματι αν } B \rightarrow \pm\infty \text{ τότε } R, X \rightarrow 0$$

αδιαφορώντας για την ενδεχόμενη πεπερασμένη τιμή του πραγματικού μέρους. Κατά συνέπεια αν ο αρχικός στόχος ήταν ο υπολογισμός της αντίστασης εισόδου δε θα είχε εξαχθεί κανένα μετρήσιμο αποτέλεσμα και πιθανόν να είχε εγκαταλειφθεί η αντίστοιχη διαδικασία σε αντίθεση με τώρα που υπάρχει το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου. Στο ερώτημα τι το χρειαζόμαστε τη στιγμή που δεν γνωρίζουμε το φανταστικό απαντάμε πως δεν είναι το μέτρο της αγωγιμότητας εισόδου ενός στοιχείου που μας αφορά αλλά το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος. Και μόνο το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου μιας διάταξης μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για την κατανάλωση ισχύος αυτής.

Έλεγχος delta/approximate

Όπως προκύπτει από την (3.48) η συνάρτηση $h_{dlt,ap}(\zeta)$ έχει πρόβλημα απειρισμού στο $\zeta = k$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση μοιάζει με την $h_{dlt,ex}(\zeta)$ με τη διαφορά ότι απουσιάζει η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους από τον παρονομαστή. Για $\zeta = k$ όμως το όρισμα της τελευταίας μηδενίζεται και από τη σχέση (3.44) προκύπτει ότι το όριό της για μικρά ορίσματα είναι μοναδιαίο. Άρα η ασυμπτωτική προσέγγιση της συνάρτησης $h_{dlt,ap}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ θα είναι ίδια με αυτή της $h_{dlt,ex}(\zeta)$.

Οπότε:

$$(3.51) \Rightarrow h_{dlt,ap}(\zeta) \sim \frac{1}{(k - \zeta) \cdot \ln(k - \zeta)}, \zeta \rightarrow k \quad (3.80)$$

Επομένως ο συλλογισμός της παράκαμψης της ανωμαλίας μέσω της τροποποίησης του δρόμου ολοκλήρωσης ισχύει και στη συγκεκριμένη περίπτωση. Και πάλι δηλαδή θα έχουμε:

$$(3.36) \Rightarrow Y_{dlt,ap} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} h_{dlt,ap}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{L(\varepsilon)} h_{dlt,ap}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} h_{dlt,ap}(\zeta) \cdot d\zeta \right) \quad (3.81)$$

όπου $L(\varepsilon)$ είναι η τυχάου σχήματος απλή γραμμή που ξεκινά από το πραγματικό σημείο $\zeta = k - \varepsilon$, φτάνει στο πραγματικό σημείο $\zeta = k + \varepsilon$ και εκτείνεται αποκλειστικά στο κάτω και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου του ζ . Όσον αφορά την περιοχή του απείρου $\zeta \rightarrow +\infty$:

$$h_{dlt,ap}(\zeta) \sim \frac{1}{-\zeta^2 \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot j \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \quad (3.57)$$

$$h_{dlt,ap}(\zeta) \sim \frac{1}{-\zeta^2 \cdot \frac{2}{j \cdot \pi} \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow \quad (3.82)$$

Από τη σχέση 9.7.2 της σελίδας 378 της παραπομπής [2] προκύπτει η ασυμπτωτική σχέση:

$$K_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot z}} \cdot \exp(-z), z \rightarrow \infty \quad (3.83)$$

Κατά συνέπεια μπορεί να εξαχθεί η προσέγγιση της $h_{dlt,ap}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow +\infty$:

$$(3.82) \Rightarrow h_{dlt,ap}(\zeta) \sim \frac{1}{\zeta^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{dlt,ap}}(\zeta) \sim \frac{\exp(\alpha \cdot \zeta)}{\zeta \cdot \sqrt{\zeta}}, \zeta \rightarrow +\infty \quad (3.84)$$

Προφανώς το ολοκλήρωμα της παραπάνω συνάρτησης αποκλίνει στο άπειρο καθώς για μεγάλα ορίσματα αυξάνει μονότονα και απεριόριστα (το ίδιο και για οποιαδήποτε διαδρομή στο μιγαδικό επίπεδο που τερματίζεται στο άπειρο σημείο). Άρα εφόσον εκ νέου τροποποίηση του δρόμου ολοκλήρωσης δεν θα δώσει αποτέλεσμα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το συγκεκριμένο μιγαδικό ολοκλήρωμα αποκλίνει. Και πάλι όμως δεν γνωρίζουμε αν κάποιο από τα μέρη του είναι πεπερασμένο. Επειδή η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους είναι πραγματική είτε με πραγματικό είτε με φανταστικό όρισμα ο διαχωρισμός σε μέρη μπορεί να γίνει όπως στην πιο πάνω περίπτωση με τη διαφορά ότι ο παράγοντας $J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})$ θα εκλείπει από τον παρονομαστή. Πράγματι για $0 < \zeta < (k - \varepsilon)$ θα έχουμε:

$$(3.66) \Rightarrow h_{\text{dlt,ex}}(\zeta) = \frac{J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot (J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} - j \cdot \frac{Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot (J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} \quad (3.85)$$

Αντίστοιχα για $\zeta > k + \varepsilon$ θα ισχύει:

$$h_{\text{dlt,ap}}(\zeta) = \frac{j \cdot \pi}{(k^2 - \zeta^2) \cdot 2 \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \quad (3.86)$$

Και πάλι εξαιτίας του ότι η συνάρτηση $K_0(z)$ είναι πραγματική για $z > 0$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πραγματικό μέρος της σχέσης (3.81) περιέχει μόνο τα δύο πρώτα ολοκληρώματα. Δηλαδή είναι:

$$\text{Im} \left[\int_{k+\varepsilon}^{+\infty} h_{\text{dlt,ap}}(\zeta) \cdot d\zeta \right] = 0 \quad (3.87)$$

Μάλιστα επειδή για $\zeta \rightarrow k$ η συνάρτηση $h_{\text{dlt,ap}}(\zeta)$ έχει την ίδια ασυμπτωτική προσέγγιση με την $h_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$ όπως φαίνεται από την (3.80) θα ισχύει και:

$$(3.68) \Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{dlt,ap}}(\zeta) \cdot d\zeta = 0 \quad (3.88)$$

Άρα εφόσον ο δρόμος ολοκλήρωσης στο πρώτο ολοκλήρωμα είναι αμιγώς πραγματικός μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα για το ζητούμενο μέγεθος

$$G_{\text{dlt,ap}} = \text{Re}[Y_{\text{dlt,ap}}]:$$

$$(3.81) \stackrel{(3.88)}{\Rightarrow} G_{\text{dlt,ap}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{k-\varepsilon} \text{Re}[h_{\text{dlt,ap}}(\zeta)] \cdot d\zeta \Rightarrow$$

$$G_{\text{dlt,ap}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^k \frac{J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot (J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} \cdot d\zeta \quad (3.89)$$

Αν κάνουμε την γνωστή αλλαγή μεταβλητής $\zeta = k \cdot \sqrt{1-t^2}$ θα έχουμε:

$$(3.89) \stackrel{(3.77)}{\Rightarrow} G_{\text{dlt,ap}} = -\frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_1^0 \frac{J_0(\alpha \cdot k \cdot t)}{k^2 \cdot t^2 \cdot (J_0^2(\alpha \cdot k \cdot t) + Y_0^2(\alpha \cdot k \cdot t))} \cdot k \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \cdot dt \Rightarrow$$

$$G_{\text{dlt,ap}} = \frac{4}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^1 \frac{J_0(\alpha \cdot k \cdot t)}{t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot (J_0^2(\alpha \cdot k \cdot t) + Y_0^2(\alpha \cdot k \cdot t))} \cdot dt \quad (3.90)$$

Έλεγχος frill/exact

Στην περίπτωση της τροφοδοσίας τύπου frill με τη χρήση ακριβούς πυρήνα ολοκλήρωσης από τη σχέση (3.49) φαίνεται ότι για $\zeta = k$ και πάλι έχουμε απειρισμό και άρα μία απόπειρα εύρεσης ασυμπτωτικής προσέγγισης της συνάρτησης $h_{\text{frl,ex}}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ πρέπει να διεξαχθεί. Πράγματι:

$$(3.41) \stackrel{(3.45)}{\Rightarrow} h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{\frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow \quad (3.44)$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{\ln\left(\frac{\alpha}{b}\right)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot 1 \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot (k+\zeta) \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{(k-\zeta) \cdot (k+\zeta)})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow \quad (3.52)$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot 2 \cdot k \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot \sqrt{k-\zeta}})}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot 2 \cdot k \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \left(\ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k}) + \frac{1}{2} \cdot \ln(k-\zeta) \right)}, \zeta \rightarrow k \Rightarrow \quad (3.53)$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k-\zeta) \cdot \ln(k-\zeta)}, \zeta \rightarrow k \quad (3.91)$$

Επομένως πάλι έχουμε μη ολοκληρώσιμη ανωμαλία στο $\zeta = k$ και κατά συνέπεια γίνεται η παράκαμψη της ανωμαλίας μέσω της τροποποίησης του δρόμου ολοκλήρωσης. Οπότε ξανά θα ισχύει:

$$(3.37) \Rightarrow Y_{\text{frl,ex}}^{(3.40)} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \cdot d\zeta \right) \quad (3.92)$$

όπου $L(\varepsilon)$ είναι η τυχαίου σχήματος απλή γραμμή που ξεκινά από το πραγματικό σημείο $\zeta = k - \varepsilon$, φτάνει στο πραγματικό σημείο $\zeta = k + \varepsilon$ και εκτείνεται αποκλειστικά στο κάτω και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου του ζ . Εφόσον η συγκεκριμένη δυσκολία παρακάμφθηκε στρέφουμε το ενδιαφέρον μας στην περιοχή του απείρου. Κάτι τέτοιο απαιτεί να εξαχθεί η αντίστοιχη ασυμπτωτική προσέγγιση για να αποφασιστεί η σύγκλιση ή όχι. Κατά τα γνωστά διαπιστώνουμε:

$$(3.41) \Rightarrow h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim -\frac{H_0^{(1)}(a \cdot j \cdot \zeta) - H_0^{(1)}(b \cdot j \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot J_0(a \cdot j \cdot \zeta) \cdot H_0^{(1)}(a \cdot j \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow \quad (3.57)$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim -\frac{\frac{j \cdot \pi}{2} \cdot K_0(a \cdot \zeta) - \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot K_0(b \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot J_0(a \cdot j \cdot \zeta) \cdot \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot K_0(a \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim -\frac{K_0(a \cdot \zeta) - K_0(b \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot I_0(a \cdot \zeta) \cdot K_0(a \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \xRightarrow{(3.83)} \xRightarrow{(3.60)}$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot a \cdot \zeta}} \cdot \exp(-a \cdot \zeta) - \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot b \cdot \zeta}} \cdot \exp(-b \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot a \cdot \zeta}}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim -\frac{\exp(-a \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot \frac{1}{\zeta}}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow h_{\text{frl,ex}}(\zeta) \sim \frac{\exp(-a \cdot \zeta)}{\zeta}, \zeta \rightarrow +\infty \quad (3.93)$$

Δεδομένου πως $a > 0$ ως μήκος η συνάρτηση $h_{\text{frl,ex}}(\zeta)$ τείνει στο μηδέν καθώς $\zeta \rightarrow +\infty$ με εκθετική ταχύτητα. Άρα το αντίστοιχο ολοκλήρωμα δεν έχει πρόβλημα απόκλισης. Κατά συνέπεια αν συμβολίσουμε $Y_{\text{frl,ex}} = G_{\text{frl,ex}} + j \cdot B_{\text{frl,ex}}$ καταλήγουμε στον τύπο:

$$(3.92) \Rightarrow Y_{\text{frl,ex}}^{(3.41)} = G_{\text{frl,ex}} + j \cdot B_{\text{frl,ex}} =$$

$$= \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \left(\int_0^{k-\varepsilon} + \int_{L(\varepsilon)} + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) - H_0^{(1)}\left(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \cdot d\zeta \quad (3.94)$$

Έλεγχος frill/approximate

Για την περίπτωση χρήσης προσεγγιστικού πυρήνα τα πράγματα διαφέρουν ελάχιστα από την παραπάνω ανάλυση. Πράγματι απουσιάζει μόνο ο ομαλός (και μη μηδενικός για τις ηλεκτρικά μικρές ακτίνες κεραιών που μελετάμε) παράγοντας $J_0\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)$ από τον παρονομαστή. Για αυτό το λόγο μπορούμε να καταλήξουμε στην ίδια ασυμπτωτική προσέγγιση για $\zeta \rightarrow k$ καθώς ισχύει η σχέση (3.44)

$$(3.91) \Rightarrow h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim \frac{1}{(k - \zeta) \cdot \ln(k - \zeta)}, \zeta \rightarrow k \quad (3.95)$$

Παρόμοια με τις άλλες τρεις περιπτώσεις είναι αναγκαία η παράκαμψη της πιο πάνω μη ολοκληρώσιμης ασυνέχειας με το γνωστό τρόπο. Άρα και πάλι θα είναι:

$$(3.38) \stackrel{(3.40)}{\Rightarrow} Y_{\text{frl,ap}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{L(\varepsilon)} h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \cdot d\zeta + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \cdot d\zeta \right) \quad (3.96)$$

Δε μένει παρά να εξάγουμε την ασυμπτωτική έκφραση της ολοκληρωτέας στο θετικό άπειρο. Κατά τα γνωστά:

$$(3.42) \Rightarrow h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim -\frac{H_0^{(1)}(\alpha \cdot j \cdot \zeta) - H_0^{(1)}(b \cdot j \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot j \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \stackrel{(3.57)}{\Rightarrow}$$

$$h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim -\frac{\frac{j \cdot \pi}{2} \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta) - \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot K_0(b \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim -\frac{K_0(\alpha \cdot \zeta) - K_0(b \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \stackrel{(3.83)}{\Rightarrow}$$

$$h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim -\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta) - \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot b \cdot \zeta}} \cdot \exp(-b \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim -\frac{\exp(-\alpha \cdot \zeta)}{\zeta^2 \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow h_{\text{frl,ap}}(\zeta) \sim \frac{1}{\zeta^2}, \zeta \rightarrow +\infty \quad (3.97)$$

Δεδομένου πως μία παράγουσα της ασυμπτωτικής προσέγγισης της συνάρτησης $h_{\text{frl,ap}}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow +\infty$ είναι η:

$$H_{\text{frl,ap}}^{(\infty)}(\zeta) = -\frac{1}{\zeta} \quad (3.98)$$

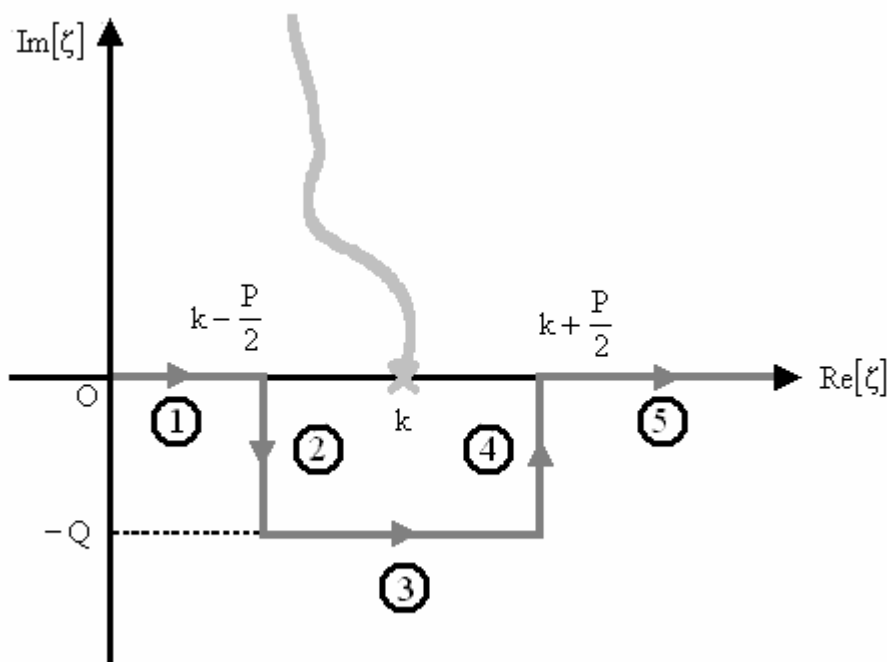
η οποία είναι πεπερασμένη για $\zeta \rightarrow +\infty$ και άρα το ολοκλήρωμα δεν παρουσιάζει πρόβλημα απόκλισης στο άπειρο. Κατά συνέπεια αν συμβολίσουμε $Y_{\text{frl,ap}} = G_{\text{frl,ap}} + j \cdot B_{\text{frl,ap}}$ καταλήγουμε στον τύπο:

$$\begin{aligned} (3.96) \stackrel{(3.42)}{\Rightarrow} Y_{\text{frl,ap}} &= G_{\text{frl,ap}} + j \cdot B_{\text{frl,ap}} = \\ &= \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} + \int_{L(\varepsilon)} + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right) - H_0^{(1)}\left(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \cdot d\zeta \end{aligned} \quad (3.99)$$

Δηλαδή μόλις εξάχθηκαν οι τέσσερις τύποι πάνω στους οποίους θα στηριχθεί η διαδικασία έρευνας και αναζήτησης των ιδιοτήτων της αγωγιμότητας εισόδου της άπειρης κεραίας με διάφορα μοντέλα τροφοδοσίας και πυρήνες ολοκλήρωσης.

(4) ΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ**Επιλογή παράκαμψης**

Είναι αναγκαίο να επιλεγεί το σχήμα της από κάτω παράκαμψης $L(\varepsilon)$ της μη ολοκληρώσιμης ανωμαλίας στο $\zeta = k$ προκειμένου να υλοποιηθούν οι σχετικοί υπολογισμοί. Η παραπάνω αναγκαιότητα ισχύει μόνο στον υπολογισμό της αγωγιμότητας εισόδου χρησιμοποιώντας τροφοδοσία τύπου frill καθώς μόνο τότε χρειάζεται το ολοκλήρωμα μέσω του δρόμου $L(\varepsilon)$. Επιλογή μας είναι η παράκαμψη να έχει σχήμα ορθογωνικό με μήκος P και ύψος Q , οπότε θα είναι $\varepsilon = \frac{P}{2}$. Φυσικά το σχήμα της γραμμής δεν παίζει κανένα απολύτως ρόλο κάτι που εξηγείται από το θεώρημα του Cauchy και την αναλυτικότητα της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Δηλαδή ο δρόμος ολοκλήρωσης θα είναι όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα <4.1>.



Σχήμα <4.1>

Παρατηρούμε ότι η διαδρομή αποτελείται από πέντε ευθύγραμμα τμήματα τα τρία από τα οποία συνιστούν την τετραγωνική από κάτω παράκαμψη. Υφίσταται αρίθμηση για τα τμήματα ολοκλήρωσης η οποία θα διατηρηθεί και για τα αντίστοιχα ολοκληρώματα. Επίσης εμφανίζεται και μία τυχαία επιλογή του σχήματος της κλαδικής τομής του κλαδικού σημείου $\zeta = k$ η οποία κείται αποκλειστικά στο άνω

και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου ζ . Οι εξισώσεις των δρόμων που απεικονίζονται στο παραπάνω σχήμα είναι οι ακόλουθες:

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(t) &= t, & S_1 &= 0 \rightarrow t \rightarrow k - \frac{P}{2} = B_1 \\ \zeta_2(t) &= j \cdot t + k - \frac{P}{2}, & S_2 &= 0 \rightarrow t \rightarrow -Q = B_2 \\ \zeta_3(t) &= t - j \cdot Q, & S_3 &= k - \frac{P}{2} \rightarrow t \rightarrow k + \frac{P}{2} = B_3 \\ \zeta_4(t) &= j \cdot t + k + \frac{P}{2}, & S_4 &= -Q \rightarrow t \rightarrow 0 = B_4 \\ \zeta_5(t) &= t & S_5 &= k + \frac{P}{2} \rightarrow t \rightarrow +\infty = B_5 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

όπου S_n , $n=1, \dots, 5$ είναι τα κάτω άκρα ολοκλήρωσης και B_n , $n=1, \dots, 5$ τα άνω άκρα ολοκλήρωσης. Οι παράγωγοι των παραπάνω συναρτήσεων δίνονται προφανώς από τους τύπους:

$$(4.1) \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{d\zeta_1(t)}{dt} &= \frac{d\zeta_3(t)}{dt} = \frac{d\zeta_5(t)}{dt} = 1 \\ \frac{d\zeta_2(t)}{dt} &= \frac{d\zeta_4(t)}{dt} = j \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Παρατηρούμε ότι είναι σταθερές ποσότητες ανεξάρτητες της μεταβλητής ολοκλήρωσης t αλλά και αδιάστατες. Άρα θα μπορούμε να γράψουμε:

$$(3.94) \Rightarrow G_{\text{fit,ex}} + j \cdot B_{\text{fit,ex}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \sum_{n=1}^5 \int_{S_n}^{B_n} \frac{H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right) - H_0^{(1)}\left(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right)}{(k^2 - \zeta_n^2(t)) \cdot J_0\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right)} \cdot dt \quad (4.3)$$

αλλά και για το αντίστοιχο μέγεθος του προσεγγιστικού πυρήνα:

$$(3.99) \Rightarrow G_{\text{fit,ap}} + j \cdot B_{\text{fit,ap}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \sum_{n=1}^5 \int_{S_n}^{B_n} \frac{H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right) - H_0^{(1)}\left(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right)}{(k^2 - \zeta_n^2(t)) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right)} \cdot dt \quad (4.4)$$

Φυσικά προκειμένου να κρατήσουμε την ανάλυσή μας στο δεξί και κάτω τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου της μεταβλητής ζ πρέπει να είναι: $0 < P < k$ και $Q > 0$.

Αδιαστατοποίηση

Προκειμένου να υπολογιστούν οι τελικοί τύποι είναι αναγκαίο να μην εξαρτώνται φαινομενικά από τη συχνότητα λειτουργίας και τροφοδοσίας. Δηλαδή θα ήταν κομψότερο να συμμετέχουν στις διάφορες εξισώσεις μόνο τα ηλεκτρικά μήκη του προβλήματος και να μην υπάρχει εξάρτηση από το μήκος κύματος λ . Ας έχουμε υπόψη μας ότι:

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \quad (4.5)$$

Επίσης δεν ξεχνούμε ότι η χαρακτηριστική αντίσταση του κενού σαν μέσο διάδοσης έχει τιμή σε (Ω):

$$\zeta_0 = 120 \cdot \pi \ \Omega \quad (4.6)$$

Τότε πράγματι:

$$(3.79) \xrightarrow{(4.5)} \xrightarrow{(4.6)} G_{\text{dlt,ex}} = \frac{4}{\pi \cdot 120 \cdot \pi} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \left(J_0^2\left(\alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot t\right) + Y_0^2\left(\alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot t\right) \right)} \cdot dt \ S \Rightarrow$$

$$G_{\text{dlt,ex}} = \frac{1}{30 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^1 \frac{1}{t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \left(J_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right) + Y_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right) \right)} \cdot dt \ S \quad (4.7)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι όλη η εντός του ολοκληρώματος ποσότητα είναι αδιάστατη και όντως οι μονάδες προέρχονται από την χαρακτηριστική αντίσταση του κενού. Μία ανάλογη διαδικασία μπορεί να γίνει και για το ολοκλήρωμα του πραγματικού μέρους της αγωγιμότητας εισόδου στην περίπτωση διέγερσης τύπου delta – function και χρήσης προσεγγιστικού πυρήνα:

$$(3.90) \xrightarrow{(4.5)} \xrightarrow{(4.6)} G_{\text{dlt,ap}} = \frac{4}{\pi \cdot 120 \cdot \pi} \cdot \int_0^1 \frac{J_0\left(\alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot t\right)}{t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \left(J_0^2\left(\alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot t\right) + Y_0^2\left(\alpha \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot t\right) \right)} \cdot dt \ S \Rightarrow$$

$$G_{\text{dlt,ap}} = \frac{1}{30 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^1 \frac{J_0\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right)}{t \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot \left(J_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right) + Y_0^2\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot 2 \cdot \pi \cdot t\right) \right)} \cdot dt \ S \quad (4.8)$$

Τα πράγματα για τις περιπτώσεις του frill generator είναι περισσότερο πολύπλοκα. Στις περιπτώσεις αυτές η μεταβλητή ολοκλήρωσης t έχει μονάδες αντιστρόφου μήκους και δεν είναι αδιάστατη (η ολοκλήρωση γίνεται στο μιγαδικό επίπεδο ζ του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier από τη μεταβλητή μήκους z).

Δηλαδή τα άκρα ολοκλήρωσης S_n και B_n με $n=1,\dots,5$ έχουν διαστάσεις αντιστρόφου μήκους. Μπορούμε να γράψουμε (οι παράγωγοι εξέρχονται των ολοκληρωμάτων ως σταθερές και αδιάστατες ποσότητες):

$$(4.3) \Rightarrow G_{\text{frl,ex}} + j \cdot B_{\text{frl,ex}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot j}{120 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \int_{S_n}^{B_n} \frac{H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right) - H_0^{(1)}\left(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right)}{(k^2 - \zeta_n^2(t)) \cdot J_0\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta_n^2(t)}\right)} \cdot dt \quad S \Rightarrow$$

$$G_{\text{frl,ex}} + j \cdot B_{\text{frl,ex}} = \frac{j \cdot \lambda^2}{30 \cdot \lambda \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \int_{S_n}^{B_n} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \lambda^2 \cdot \zeta_n^2(t)}\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \lambda^2 \cdot \zeta_n^2(t)}\right)}{\left((2 \cdot \pi)^2 - \lambda^2 \cdot \zeta_n^2(t)\right) \cdot J_0\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \lambda^2 \cdot \zeta_n^2(t)}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \lambda^2 \cdot \zeta_n^2(t)}\right)} \cdot dt \quad S \quad (4.9)$$

Αν καταχρηστικά επαναορίσουμε τις εξισώσεις των πέντε διαδρομών στο μιγαδικό επίπεδο δηλαδή αδιαστατοποιήσουμε τους σταθερούς προσθετικούς όρους αλλά όχι τη μεταβλητή t):

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1(t) &= t \\ \zeta_2(t) &= j \cdot t + 2 \cdot \pi - \frac{P \cdot \lambda}{2} \\ \zeta_3(t) &= t - j \cdot Q \cdot \lambda \\ \zeta_4(t) &= j \cdot t + 2 \cdot \pi + \frac{P \cdot \lambda}{2} \\ \zeta_5(t) &= t \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Τότε ισχύει ότι:

$$\lambda \cdot \zeta_n(t) = \zeta_n(\lambda \cdot t), \quad n = 1, \dots, 5 \quad (4.11)$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$(4.9) \Rightarrow G_{\text{frl,ex}} + j \cdot B_{\text{frl,ex}} = \frac{j}{30 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \int_{S_n}^{B_n} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(\lambda \cdot t)}\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(\lambda \cdot t)}\right)}{\left((2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(\lambda \cdot t)\right) \cdot J_0\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(\lambda \cdot t)}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(\lambda \cdot t)}\right)} \cdot d(\lambda \cdot t) \quad S \Rightarrow$$

$$G_{frl,ex} + j \cdot B_{frl,ex} = \frac{j}{30 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \int_{S_n \cdot \lambda}^{B_n \cdot \lambda} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right)}{\left((2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)\right) \cdot J_0\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right)} \cdot du \quad S \quad (4.12)$$

όπου οι συναρτήσεις $\zeta_n(u)$, $n = 1, \dots, 5$ θα εξάγονται από τις σχέσεις (4.10) και οι παράγωγοι από τις απλές σχέσεις (4.2). Παρατηρούμε ότι όλα τα μεγέθη μήκους (a, b) είναι διαιρεμένα με το μήκος κύματος και όλα τα μεγέθη αντιστρόφου μήκους είναι πολλαπλασιασμένα με το μήκος κύματος $(S_n, B_n, n = 1, \dots, 5)$. Επομένως υπάρχει μία πλήρης αδιαστατοποίηση και καμία ευθεία εξάρτηση από τη συχνότητα τροφοδοσίας. Με μία εντελώς όμοια διαδικασία εξάγουμε και τον αντίστοιχο τελικό τύπο χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα ολοκλήρωσης. Πράγματι αν αφαιρεθεί ο παράγοντας της συνάρτησης Bessel από τον παρονομαστή θα έχουμε:

$$G_{frl,ap} + j \cdot B_{frl,ap} = \frac{j}{30 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \int_{S_n \cdot \lambda}^{B_n \cdot \lambda} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right) - H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right)}{\left((2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right)} \cdot du \quad S \quad (4.13)$$

Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς το άνω άκρο του πέμπτου ολοκληρώματος από τα αθροίσματα στην περίπτωση frill είναι το θετικό άπειρο. Τα συνηθισμένα υπολογιστικά πακέτα (όπως το Matlab που εμείς χρησιμοποιούμε) μπορούν να δώσουν απάντηση σε ολοκληρώματα με άπειρο άκρο μόνο σε κάποιες απλές περιπτώσεις όπου η ολοκλήρωση γίνεται αναλυτικά. Κάτι τέτοιο δεν μπορεί να εφαρμοστεί στη δικιά μας περίπτωση όπου οι ολοκληρωτές είναι αρκετά πολύπλοκες και απαιτείται αριθμητική ολοκλήρωση. Κατά συνέπεια πρέπει το συγκεκριμένο άπειρο άκρο να αντικατασταθεί από έναν πεπερασμένο μεγάλο θετικό αριθμό M . Τόσο μεγάλο που το ολοκλήρωμα των παραπάνω συναρτήσεων από $u = M$ έως $u = +\infty$ να είναι αμελητέο μπροστά στην τιμή του ολοκληρώματος με άκρα $u = 2 \cdot \pi + \frac{Q \cdot \lambda}{2}$ και $u = M$. Αυτό το ζήτημα αλλά και κάποια άλλα ανάλογης φύσης θα συζητηθούν στην ενότητα της υλοποίησης των προγραμμάτων.

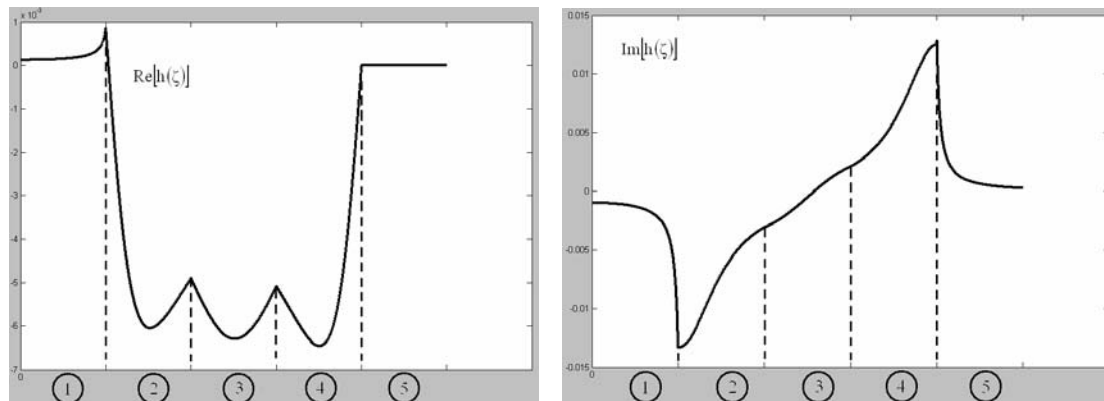
Εκτίμηση συναρτήσεων

Όπως έχει διαπιστωθεί στη μελέτη των ολοκληρωτέων (που γίνεται κατά κύριο λόγο στην παραπομπή [6]) οι συγκεκριμένες συναρτήσεις είναι πλειότιμες. Πιο συγκεκριμένα υπάρχει στη συγκεκριμένη παραπομπή απόδειξη ότι οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις $h_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$, $h_{\text{dlt,ap}}(\zeta)$, $h_{\text{frit,ex}}(\zeta)$ και $h_{\text{frit,ap}}(\zeta)$ είναι άπειρες φορές πλειότιμες, έχουν δύο κλαδικά σημεία τα $\zeta = \pm k$ και μία κλαδική τομή που τα ενώνει μέσω του απείρου σημείου. Μάλιστα η συγκεκριμένη γραμμή εκτείνεται στο πάνω και δεξιό και στο κάτω και αριστερό τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου ζ . Όπως φαίνεται από τις εξισώσεις των συναρτήσεων (3.39) έως (3.42) οι ολοκληρωτέες συναρτήσεις περιέχουν όλες την ποσότητα $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$ (δηλαδή την συνάρτηση Hankel όπως φαίνεται από την (3.12)) στην οποία οφείλεται η πλειότιμη συμπεριφορά τους. Κατά συνέπεια οποιαδήποτε ανάλυση σχετικά με την πλειοτιμότητα των ολοκληρωτέων συναρτήσεων θα αναχθεί σε διερεύνηση της λιγότερο πολύπλοκης συνάρτησης $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$. Επειδή λοιπόν αποστολή μας είναι να υπολογίσουμε κάποια ολοκληρώματα πλειότιμων συναρτήσεων είναι αναγκαίο να προσδιοριστεί το φύλλο Riemann πάνω στο οποίο λαμβάνουν χώρα οι ολοκληρώσεις. Σε προηγούμενη αναφορά έχει ξεκαθαριστεί ότι το φύλλο Riemann που επιλέγεται καθορίζεται από την ισότητα
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{\sin(k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} \cdot \cos(\zeta \cdot z) \cdot dz = 0$$
 της σχέσης (3.5).

Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι το φύλλο Riemann ολοκλήρωσης είναι το ίδιο και στους υπολογισμούς που γίνονται από τη γνωστή πλατφόρμα MatLab είναι αναγκαίο να αναπαρασταθεί η συγκεκριμένη ποσότητα σαν τμήμα της συνάρτησης $\bar{K}_{\text{ap}}(\zeta, \alpha)$ και να εξαχθεί μηδενική. Πράγματι κάτι τέτοιο έγινε και το φύλλο Riemann που γίνεται η ολοκλήρωση υπολογιστικά είναι το ίδιο με εκείνο που προβλέφθηκε στην θεωρητική ανάλυση.

Ένα θέμα ανάλογης υφής είναι αν οι κλαδικές τομές των ολοκληρωτέων συναρτήσεων έχουν την ίδια τοποθέτηση όπως και στην περίπτωση της θεωρητικής μελέτης της παραπομπής [6]. Δηλαδή αν ευρίσκονται στο άνω και δεξί και στο κάτω και αριστερό τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου ζ . Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε αν η ολοκληρωτέα στο δρόμο ολοκλήρωσης είναι συνεχής κάτι

που έχει επαληθευτεί και γίνει για μία πλειάδα διαφορετικών παραμέτρων και για ένα συνδυασμό τους φαίνεται στο παρακάτω σχήμα <4.2>.



Σχήμα <4.2>

Πράγματι φαίνεται η συνέχεια στα σημεία συνένωσης των πέντε διαδρομών τόσο για το πραγματικό (αριστερά) όσο και για το φανταστικό μέρος (δεξιά). Τέλος η συνάρτηση $\gamma(\zeta) = \sqrt{k^2 - \zeta^2}$ της σχέσης (3.32) από το χρησιμοποιούμενο υπολογιστικό πακέτο θεωρείται άρτια (έχει επιλέξει κατάλληλα τις κλαδικές τομές) και άρα οι πράξεις των ολοκληρωμάτων που έγιναν βασισμένες σε αυτή την ιδιότητα της συγκεκριμένης συνάρτησης είναι συμβατές με την υπολογιστική υλοποίηση.

Υλοποίηση προγραμμάτων

Τα προγράμματα που κατασκευάστηκαν προκειμένου να υλοποιήσουν τους υπολογισμούς των αγωγιμοτήτων εισόδου έχουν ως εξής. Κατ' αρχήν υλοποιήθηκε πρόγραμμα που υπολογίζει τη συνάρτηση Hankel πρώτου είδους καθώς δεν παρέχεται η συγκεκριμένη σαν δεδομένη από το υπολογιστικό πακέτο που χρησιμοποιείται. Σαν είσοδο δέχεται την τάξη της συνάρτησης και το όρισμά της και επιστρέφει την τιμή της. Επίσης κατασκευάστηκε πρόγραμμα που υπολογίζει τις τιμές των συναρτήσεων του πυρήνα ολοκλήρωσης. Δέχεται σαν εισόδους το όρισμά της, την μεταβλητή ηλεκτρικού μήκους και το είδος του πυρήνα επιστρέφοντας την σχετική τιμή εξόδου. Επίσης ένα βασικό πρόγραμμα είναι εκείνο των ολοκληρωτέων συναρτήσεων. Επιστρέφει την τιμή των συναρτήσεων που μέσω της κατάλληλης ολοκλήρωσής τους θα εξαγάουν το μέγεθος της αγωγιμότητας εισόδου. Σαν εισόδους δέχεται τη μεταβλητή ολοκλήρωσης, την εσωτερική και την εξωτερική ηλεκτρική ακτίνα, το είδος της τροφοδοσίας, το είδος του χρησιμοποιούμενου πυρήνα, το αδιάστατο μήκος και πλάτος της ορθογωνικής παράκαμψης και τον αύξοντα αριθμό

του ολοκληρώματος που αντιστοιχεί στη σχετική διαδρομή (τα τρία τελευταία ορίσματα αφορούν αποκλειστικά την τροφοδοσία τύπου frill). Επιστρέφεται η τιμή εξόδου της εκάστοτε ολοκληρωτέας συνάρτησης. Ακόμα υπάρχει το πρόγραμμα της ολοκλήρωσης που ολοκληρώνει τις ολοκληρωτέες συναρτήσεις με κατάλληλα άκρα χρησιμοποιώντας κάποια αποτελεσματική προσαρμοστική μέθοδο. Αν χρειάζεται ο υπολογισμός περισσότερων του ενός ολοκληρωμάτων (περίπτωση frill generator) γίνεται η σχετική άθροιση. Ένα ιδιαίτερα σημαντικό πρόγραμμα είναι αυτό που αποφασίζει τον κατάλληλο θετικό πραγματικό που θα αντικαταστήσει το άπειρο στο άνω άκρο του πέμπτου ολοκληρώματος του αθροίσματος όταν έχουμε τροφοδοσία τύπου frill. Όπως προαναφέρθηκε αυτή η διαδικασία είναι απαραίτητη προκειμένου να γίνει η αριθμητική ολοκλήρωση με οποιαδήποτε μέθοδο. Το συγκεκριμένο πρόγραμμα εκτελεί επαναληπτικά την εν λόγω ολοκλήρωση με συνεχώς αυξανόμενο άνω άκρο. Όταν η σχετική διαφορά του πραγματικού και του φανταστικού μέρους δύο διαδοχικών αποτελεσμάτων πέσει κάτω από έναν μικρό αριθμό οι επαναλήψεις σταματούν και το αποτέλεσμα είναι το τελευταίο που υπολογίστηκε. Τέλος υπάρχει το πρόγραμμα υπολογισμού της αγωγιμότητας που χρησιμοποιεί το παραπάνω πρόγραμμα εύρεσης άνω άκρου και υπολογίζει την τελική τιμή. Ακολουθούν κάποιες μετατροπές στους τύπους που έγιναν στα προγράμματα (οι κώδικες των οποίων παρατίθενται στο παράρτημα (Δ)).

Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα στην περίπτωση χρήσης frill generator και ακριβούς πυρήνα όπως προκύπτει και από τη σχέση (3.93) συγκλίνει εκθετικά στο άπειρο. Άρα ο υπολογισμός του πέμπτου ολοκληρώματος του σχετικού αθροίσματος θα είναι ταχύς. Αυτό δεν συμβαίνει στην περίπτωση χρήσης προσεγγιστικού πυρήνα όπως φαίνεται από την σχέση (3.97) και γι' αυτό μία σημαντική παρέμβαση έλαβε χώρα. Αν επικεντρωθούμε σε μια προηγούμενη σχέση, την (3.38) θα (πριν ληφθεί υπόψη η αρτιότητα της ολοκληρωτέας και το συμμετρικό πραγματικό διάστημα ολοκλήρωσης):

$$Y_{\text{frl,ap}} = \frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) - H_0^{(1)}(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \cdot d\zeta \quad (4.14)$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να τροποποιηθεί ως εξής:

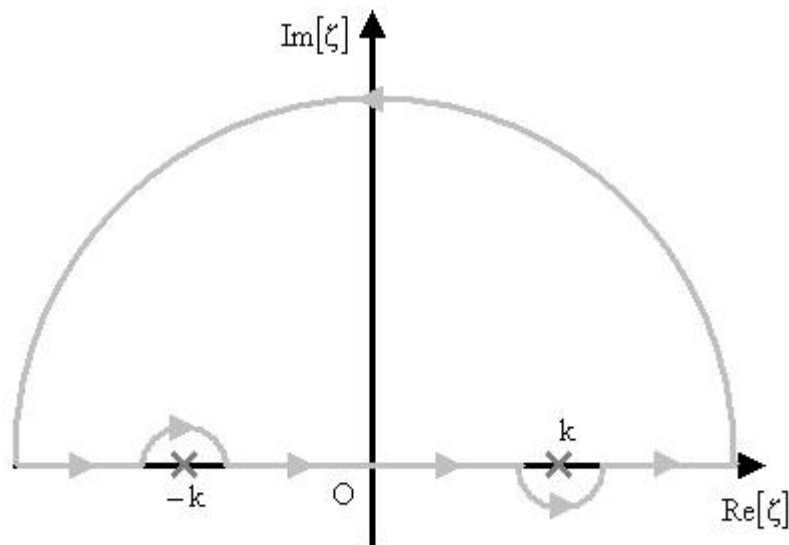
$$(4.14) \Rightarrow Y_{\text{frl,ap}} = \frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta -$$

$$- \frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H_0^{(1)}\left(b \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)}{(k^2 - \zeta^2) \cdot H_0^{(1)}\left(a \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}\right)} \cdot d\zeta \quad (4.15)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά χρησιμοποιώντας περιγραμμική ολοκλήρωση και τη θεωρία των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Αν αναλογιστούμε ότι με $k \in \mathbb{R}$ δεν μπορεί να οριστεί θα πρέπει να γίνει η γνωστή υπόθεση για $\text{Im}[k] > 0$ και $\text{Im}[k] \rightarrow 0$ με αποτέλεσμα να γίνει παράκαμψη του $\zeta = -k$ από πάνω και του $\zeta = k$ από κάτω. Επίσης έχουμε σαν δεδομένο ότι:

$$\frac{1}{k^2 - \zeta^2} \rightarrow 0, \zeta \rightarrow \infty \quad (4.16)$$

Ο δρόμος ολοκλήρωσης μπορεί να κλείσει με ένα άπειρο ημικύκλιο (έστω από πάνω) καθώς η συνεισφορά του ολοκληρώματος της συνάρτησης σε αυτό το δρόμο είναι μηδενική. Έτσι ο δρόμος θα έχει το πιο κάτω σχήμα <4.3>:



Σχήμα <4.3>

Κατά συνέπεια από το λήμμα του Jordan θα είναι:

$$\frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta = \frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \text{Res}\left[\frac{1}{k^2 - \zeta^2}, \zeta = k\right] \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta &= \frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \text{Res}\left[-\frac{1}{(\zeta - k) \cdot (\zeta + k)}, \zeta = k\right] \Rightarrow \\
\frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta &= \frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \left(-\frac{1}{2 \cdot k}\right) \Rightarrow \\
\frac{k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta &= \frac{\pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \tag{4.17}
\end{aligned}$$

Με αυτή την τροποποίηση μπορούμε να φτάσουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned}
(4.15) \stackrel{(4.17)}{\underset{(4.13)}{\Rightarrow}} \mathbf{G}_{\text{frl,ap}} + j \cdot \mathbf{B}_{\text{frl,ap}} &= \frac{\pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} - \frac{j}{30 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \sum_{n=1}^5 \frac{d\zeta_n(t)}{dt} \cdot \\
&\int_{\text{Sn} \cdot \lambda}^{\text{Bn} \cdot \lambda} \frac{H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right)}{\left((2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - \zeta_n^2(u)}\right)} \cdot du \quad \mathbf{S} \tag{4.18}
\end{aligned}$$

Όλη η παραπάνω διαδικασία έγινε διότι το τελευταίο (και πλέον δύσκολο υπολογίσιμο) ολοκλήρωμα που έχει άνω άκρο στο άπειρο σε αυτή την περίπτωση συγκλίνει εκθετικά. Πράγματι:

$$\begin{aligned}
\frac{H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - u^2}\right)}{\left((2 \cdot \pi)^2 - u^2\right) \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - u^2}\right)} &\sim -\frac{H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot j \cdot u\right)}{u^2 \cdot H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot j \cdot u\right)}, u \rightarrow +\infty \stackrel{(3.83)}{\underset{(3.57)}{\Rightarrow}} \\
\frac{H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - u^2}\right)}{H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - u^2}\right)} &\sim \frac{\frac{\exp\left(-\frac{b}{\lambda} \cdot u\right)}{\sqrt{\frac{b}{\lambda} \cdot u}}}{u^2 \frac{\exp\left(-\frac{\alpha}{\lambda} \cdot u\right)}{\sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot u}}}, u \rightarrow +\infty \Rightarrow \\
\frac{H_0^{(1)}\left(\frac{b}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - u^2}\right)}{H_0^{(1)}\left(\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \sqrt{(2 \cdot \pi)^2 - u^2}\right)} &\sim \frac{\exp\left(-\frac{b - \alpha}{\lambda} \cdot u\right)}{u^2}, u \rightarrow +\infty \tag{4.19}
\end{aligned}$$

Δεδομένου πως $b > \alpha$ έχουμε εκθετική σύγκλιση στο άπειρο. Με αυτό τον τρόπο χρειάζεται λιγότερος υπολογιστικός φόρτος προκειμένου να ευρεθεί ο μεγάλος

θετικός και πραγματικός αριθμός που θα αντικαταστήσει το άπειρο άκρο έχοντας δεδομένη ανοχή στα σφάλματα. Πράγματι εφόσον υπάρχει εκθετική σύγκλιση ο αριθμός που θα απαιτηθεί θα είναι μικρότερος σε σύγκριση με ισοδύναμη περίπτωση βραδύτερης σύγκλισης ολοκληρώματος.

(5) ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μικρό frill

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση που θα μελετηθεί εκτενώς στο συγκεκριμένο τμήμα είναι η κατάσταση που ως μοντέλο τροφοδοσίας επιλέγεται το frill generator ενώ η εξωτερική ακτίνα της ομοαξονικής γραμμής που τροφοδοτεί την κεραία τείνει να ταυτιστεί με την εσωτερική. Για αυτήν την οριακή περίπτωση η οποία θα καλείται από το σημείο αυτό περίπτωση “μικρού frill” θα εξάγουμε νέους αναλυτικούς τύπους οι οποίοι και θα μελετηθούν. Θυμίζουμε μία εναλλακτική μορφή των τύπων της αγωγιμότητας εισόδου για την περίπτωση του frill generator:

$$(3.37) \stackrel{(3.11)}{\Rightarrow} Y_{\text{frl,ex}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.1)$$

$$(3.38) \stackrel{(3.11)}{\Rightarrow} Y_{\text{frl,ap}} = \frac{2 \cdot k \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{(k^2 - \zeta^2) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.2)$$

Δεδομένου πως από τον ορισμό της παραγώγου έχουμε:

$$\lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{b - \alpha} = \left. \frac{\partial K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\partial b} \right|_{b=\alpha} \Rightarrow$$

$$\lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{b - \alpha} = -K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2} \quad (5.3)$$

Και αφού μπορεί εύκολα να επαληθευτεί ο ακόλουθος τύπος:

$$\lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)}{b - \alpha} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{b} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)}{b - \alpha} = \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{1}{b} \Rightarrow \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)}{b - \alpha} = \frac{1}{\alpha} \quad (5.4)$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στο όριο:

$$\lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} =$$

$$\lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{b - \alpha} \cdot \frac{b - \alpha}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} = \\
& \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{b - \alpha} \cdot \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{b - \alpha}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \stackrel{(5.3)}{\Rightarrow} \stackrel{(5.4)}{\Rightarrow} \\
& \lim_{b \rightarrow \alpha} \frac{K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - K_0(b \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} = \alpha \cdot K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2} \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Επομένως οι κεντρικοί τύποι επαναπροσδιορίζονται στην οριακή αυτή περίπτωση:

$$\begin{aligned}
(5.1) \stackrel{(5.5)}{\Rightarrow} Y_{\text{smfrl,ex}} &= \frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}}{(k^2 - \zeta^2) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \Rightarrow \\
Y_{\text{smfrl,ex}} &= -\frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5.2) \stackrel{(5.5)}{\Rightarrow} Y_{\text{smfrl,ap}} &= \frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}}{(k^2 - \zeta^2) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \Rightarrow \\
Y_{\text{smfrl,ap}} &= -\frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι πλέον δεν υπάρχει εξάρτηση από την παράμετρο b καθώς μελετούμε την οριακή κατάσταση στην οποία τείνει να συμπέσει με την παράμετρο α . Το γεγονός ότι η συγκεκριμένη κατάσταση αποτελεί ειδική περίπτωση της τροφοδοσίας με frill generator δεν σημαίνει ότι η συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων είναι ίδια με την γενική περίπτωση καθώς πρόκειται για μια οριακή κατάσταση. Θα μελετήσουμε τα ολοκληρώματα των (5.6) και (5.7) κανονικά αδιαφορώντας για την έως τώρα ανάλυση. Σε κάθε περίπτωση αν υπάρχουν κοινά σημεία με την διερεύνηση της γενικής περίπτωσης δεν θα επαναληφθούν. Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι ξεκάθαρο πως οι πιθανές πηγές απόκλισης των δύο ολοκληρωμάτων είναι και πάλι η συμπεριφορά των συναρτήσεων τους στις περιοχές $\zeta \rightarrow k$ και $\zeta \rightarrow +\infty$. Πράγματι έχει επισημανθεί ότι ο παράγοντας $J_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})$ δεν μπορεί να μηδενιστεί για τις περιπτώσεις λεπτών κεραιών που μελετώνται στην παρούσα ανάλυση. Για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει $\alpha \cdot k > 2.4$ συνθήκη που δεν συνάδει με την θεμελιώδη υπόθεση των λεπτών κεραιών. Για την γειτονιά $\zeta \rightarrow k$ δεδομένης της σχέσης (3.44)

που καταδεικνύει την ομαλή συμπεριφορά της $J_0(z)$ για μικρό όρισμα οι ασυμπτωτικές εκφράσεις και των δύο ολοκληρωτέων θα ταυτίζονται. Αν ληφθεί υπ' όψη η ασυμπτωτική προσέγγιση της σελίδας 375 της σχέσης 9.6.9 της παραπομπής [2] για $\nu = 1$ θα ισχύει:

$$K_1(z) \sim \frac{1}{z}, z \rightarrow 0 \quad (5.8)$$

Επίσης αν οριστεί η αντίστοιχη ολοκληρωτέα συνάρτηση (για τον προσεγγιστικό πυρήνα χωρίς να κάνει διαφορά αν πρόκειται για τον ακριβή):

$$h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) = -\frac{j \cdot K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \quad (5.9)$$

Μπορούμε να καταλήξουμε στην ποθητή ασυμπτωτική μορφή

$$(5.9) \xrightarrow[(3.52)]{(3.11)} h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) \sim \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k})}{\sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k})}, \zeta \rightarrow k \xrightarrow[(5.8)]{(3.45)}$$

$$h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) \sim \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k}} \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k}), \zeta \rightarrow k \xrightarrow{(3.53)}$$

$$h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) \sim \frac{1}{(\zeta - k) \cdot \ln(\zeta - k)}, \zeta \rightarrow k \quad (5.10)$$

Όπως έχει διαπιστωθεί η συγκεκριμένη μορφή είναι μη ολοκληρώσιμη στην περιοχή $\zeta \rightarrow k$ με αποτέλεσμα και τα δύο ολοκληρώματα αγωγιμοτήτων να μη συγκλίνουν με πραγματικό δρόμο ολοκλήρωσης. Γι' αυτό το λόγο θα ακολουθηθεί η γνωστή στρατηγική της από κάτω παράκαμψης. Πράγματι και οι συγκεκριμένες ολοκληρωτέες συναρτήσεις έχουν κλαδικό σημείο το $\zeta = k$ και η κλαδική τομή αυτού κείται στο πάνω και δεξί τεταρτημόριο του μιγαδικού επιπέδου. Έτσι αν $L(\varepsilon)$ συμβολιστεί ένας οποιοδήποτε σχήματος απλός δρόμος που ξεκινά από το $\zeta = k - \varepsilon$ και καταλήγει στο $\zeta = k + \varepsilon$ με $0 < \varepsilon < k$ μένοντας συνεχώς κάτω από τον άξονα των πραγματικών αριθμών θα έχουμε:

$$(5.6) \Rightarrow Y_{\text{smfrl,ex}} = -\frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} + \int_{L(\varepsilon)} + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.11)$$

$$(5.7) \Rightarrow Y_{\text{smfrl,ap}} = -\frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \left(\int_0^{k-\varepsilon} + \int_{L(\varepsilon)} + \int_{k+\varepsilon}^{+\infty} \right) \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.12)$$

Κατά τα γνωστά παρά το γεγονός ότι η μη ολοκληρώσιμη ανωμαλία στο $\zeta = k$ ξεπεράστηκε μένει να εξεταστεί η συμπεριφορά των ολοκληρωτέων στην περιοχή του θετικού απείρου. Πρέπει να γνωρίζουμε την ασυμπτωτική έκφραση της παραπομπής [2] (σχέση 9.7.2 σελίδα 378 για $\nu = 1$):

$$K_1(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot z}} \cdot \exp(-z) \quad , z \rightarrow +\infty \quad (5.13)$$

Ξεκινώντας από την ολοκληρωτέα συνάρτηση με χρήση ακριβούς πυρήνα που ορίζεται ως εξής:

$$h_{\text{smfrl,ex}}(\zeta) = -\frac{j \cdot K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \quad (5.14)$$

έχουμε:

$$h_{\text{smfrl,ex}}(\zeta) \sim \frac{K_1(\alpha \cdot \zeta)}{j \cdot \zeta \cdot J_0(\alpha \cdot j \cdot \zeta) \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \xRightarrow{(3.58)}$$

$$h_{\text{smfrl,ex}}(\zeta) \sim \frac{K_1(\alpha \cdot \zeta)}{\zeta \cdot I_0(\alpha \cdot \zeta) \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \xRightarrow{(3.60)} h_{\text{smfrl,ex}}(\zeta) \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta)}{\zeta \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \xRightarrow{(5.13)}$$

$$h_{\text{smfrl,ex}}(\zeta) \sim \frac{\exp(-\alpha \cdot \zeta)}{\sqrt{\zeta}} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \quad (5.14)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει εκθετική σύγκλιση με αποτέλεσμα η ανάλυσή μας να τερματιστεί. Προκειμένου να υπολογιστεί η αγωγιμότητα εισόδου στη συγκεκριμένη περίπτωση θα πρέπει να γίνει η σχετική αδιαστατοποίηση και να προσδιοριστεί το σχήμα της από κάτω παράκαμψης. Η διαδικασία είναι πανομοιότυπη με εκείνη που αφορούσε την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου frill ενώ όλοι οι έλεγχοι συμβατότητας θεωρίας – υπολογιστικού πακέτου έχουν ελεγχθεί όπως στην πιο πάνω περίπτωση. Όσον αφορά την ολοκληρωτέα συνάρτηση με χρήση προσεγγιστικού πυρήνα θα έχουμε:

$$h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) \sim \frac{K_1(\alpha \cdot \zeta)}{\zeta \cdot K_0(\alpha \cdot \zeta)} \quad , \zeta \rightarrow +\infty \xRightarrow{(3.83)} \xRightarrow{(5.13)}$$

$$h_{\text{smfil,ap}}(\zeta) \sim \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta)}{\zeta \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2 \cdot \alpha \cdot \zeta}} \cdot \exp(-\alpha \cdot \zeta)}, \zeta \rightarrow +\infty \Rightarrow$$

$$h_{\text{smfil,ap}}(\zeta) \sim \frac{1}{\zeta}, \zeta \rightarrow +\infty \quad (5.15)$$

Είναι προφανές ότι για την περίπτωση μικρού fill και με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου ορίζεται μέσω ενός αποκλίνοντος ολοκληρώματος. Και σε αυτή την περίπτωση παράγουμε τη γνωστή σκέψη: εφόσον η σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου είναι μιγαδικός αριθμός ο οποίος προκύπτει άπειρος ενδέχεται ένα από τα δύο μέρη του να είναι πεπερασμένος. Γι' αυτό το λόγο καθίσταται αναγκαίος ο διαχωρισμός της σε πραγματικό και φανταστικό μέρος και ο έλεγχος των δύο ξεχωριστά. Θα πρέπει να γνωρίζουμε την ισότητα ($\nu = 1$ στη σχέση 9.6.4 της σελίδας 375 της παραπομπής [2]):

$$K_1(z) = -\frac{\pi}{2} \cdot H_1^{(1)}(j \cdot z) \quad (5.16)$$

για κάθε επιτρεπτό μιγαδικό z .

Κατά τα γνωστά θα πάρουμε δύο περιπτώσεις για το εύρος της μεταβλητής ζ . Έτσι για $0 < \zeta < (k - \varepsilon)$ η ολοκληρωτέα θα είναι:

$$h_{\text{smfil,ap}}(\zeta) =$$

$$= -j \cdot \frac{J_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot (J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} +$$

$$+ \frac{-Y_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot (J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} \quad (5.17)$$

Ομοίως για $(k + \varepsilon) < \zeta < +\infty$ κάνουμε τον ίδιο διαχωρισμό αφού έχουμε υπόψη την ταυτοτική ισότητα για όσα μιγαδικά z είναι επιτρεπτά ($\nu = 1$ στη σχέση 9.6.3 της σελίδας 375 της παραπομπής [2]):

$$J_1(j \cdot z) = j \cdot I_0(z) \quad (5.18)$$

αλλά και την ισότητα ($\nu = 1$ στη σχέση 9.6.5 της σελίδας 375 της παραπομπής [2]):

$$Y_1(j \cdot z) = -I_1(z) + \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot K_1(z) \quad (5.19)$$

Ο διαχωρισμός γίνεται:

$$\begin{aligned}
(5.11) \stackrel{(5.15)}{\Rightarrow} \stackrel{(3.11)}{h_{\text{smfrl,ap}}}(\zeta) &= \frac{j \cdot \frac{\pi}{2} \cdot H_1^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot H_0^{(1)}(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})} \Rightarrow \\
h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) &= \frac{J_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + j \cdot Y_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot (J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + j \cdot Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} \stackrel{(3.58)}{\Rightarrow} \\
h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) &= \frac{j \cdot I_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + j \cdot Y_1(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot (I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + j \cdot Y_0(j \cdot \alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}))} \stackrel{(3.65)}{\Rightarrow} \\
h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) &= \\
&= \frac{j \cdot I_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + j \cdot \left(-I_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \right)}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot \left(I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) + j \cdot \left(j \cdot I_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) - \frac{2}{\pi} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \right) \right)} \Rightarrow \\
h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) &= \frac{-\frac{2}{\pi} \cdot K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{-\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \Rightarrow h_{\text{smfrl,ap}}(\zeta) = -\frac{K_1(\alpha \cdot j \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2}) \cdot j}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}
\end{aligned}$$

Δεδομένου πως οι συναρτήσεις $K_0(z)$, $K_1(z)$, $Y_0(z)$, $J_0(z)$, $Y_1(z)$, $J_1(z)$ είναι πραγματικές για πραγματικά ορίσματα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι για $\zeta > k + \varepsilon$ η συνάρτηση είναι φανταστική με αποτέλεσμα η απόκλιση στο άπειρο να αφορά το φανταστικό μέρος. Για τον ίδιο λόγο οι παραπάνω διαχωρισμοί είναι διαχωρισμοί πραγματικού και φανταστικού μέρους. Για το πραγματικό μέρος που θα συμβολίζουμε $G_{\text{smfrl,ap}}$ θα είναι αν επιλεγεί $\varepsilon \rightarrow 0$ προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις δύο παραπάνω περιπτώσεις για τη μεταβλητή ζ :

$$\begin{aligned}
G_{\text{smfrl,ap}} &= \\
&= \frac{2 \cdot k \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{k-\varepsilon} \frac{-Y_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot (J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}))} \cdot d\zeta \Rightarrow \\
G_{\text{smfrl,ap}} &= -\frac{2 \cdot k \cdot j \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta \quad (5.20)
\end{aligned}$$

Η επιλογή της μικρής ακτίνας έγινε προκειμένου να εκτιμηθεί η τιμή του δεύτερου ολοκληρώματος με τις οριακές εκφράσεις της ολοκληρωτέας για $\zeta \rightarrow k$. Πράγματι αν επιλεγεί ημικυκλική παράκαμψη απειροστής ακτίνας θα έχουμε: $\zeta(t) = k + \varepsilon \cdot \exp(j \cdot t)$ με $\pi \rightarrow t \rightarrow 2 \cdot \pi$:

$$\begin{aligned}
(5.19) & \stackrel{(5.12)(3.52)}{\Rightarrow} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} \cdot d\zeta = \\
& = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{1}{\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k}} \cdot d\zeta \stackrel{(3.45)}{\Rightarrow} \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{(\zeta - k) \cdot \frac{j \cdot \pi}{2} \cdot \frac{2 \cdot j}{\pi} \cdot \ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k} \cdot \sqrt{\zeta - k})} \Rightarrow \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{d\zeta}{(\zeta - k) \cdot \left(\ln(\alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k}) + \frac{1}{2} \cdot \ln(\zeta - k) \right)} \stackrel{(3.53)}{\Rightarrow} \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{j \cdot \varepsilon \cdot \exp(j \cdot t) \cdot dt}{\varepsilon \cdot \exp(j \cdot t) \cdot \ln(\varepsilon \cdot \exp(j \cdot t))} \Rightarrow \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{j \cdot dt}{\ln(\varepsilon) + j \cdot t} \Rightarrow \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{d(\ln(\varepsilon) + j \cdot t)}{\ln(\varepsilon) + j \cdot t} \Rightarrow \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\ln(\ln(\varepsilon) + j \cdot t)]_{\pi}^{2\pi} \Rightarrow \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\ln(\varepsilon) + j \cdot \pi}{\ln(\varepsilon) + j \cdot 2 \cdot \pi} \right) \stackrel{(3.53)}{\Rightarrow} \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon)} \right) \Rightarrow \\
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{L(\varepsilon)} \frac{K_1(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})}{\sqrt{\zeta^2 - k^2} \cdot K_0(\alpha \cdot \sqrt{\zeta^2 - k^2})} = \ln(1) = 0 \tag{5.21}
\end{aligned}$$

Επομένως αβίαστα προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
(5.17) & \stackrel{(5.21)}{\Rightarrow} G_{\text{smfrl,ap}} = \frac{2 \cdot k \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \\
& \int_0^k \frac{-Y_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \cdot J_1(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2})}{\sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \cdot d\zeta \tag{5.22}
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση 9.1.16 της παραπομπής [2] της σελίδας 360 για $\nu = 0$ μπορούμε να εξάγουμε την ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων Bessel και Neumann:

$$J_1(z) \cdot Y_0(z) - J_0(z) \cdot Y_1(z) = \frac{2}{\pi \cdot z} \quad (5.23)$$

Επομένως η σχέση (5.22) μπορεί να απλοποιηθεί:

$$(5.22) \stackrel{(5.23)}{\Rightarrow} G_{\text{smfrl,ap}} = \frac{2 \cdot k \cdot \alpha}{\zeta_0} \cdot \int_0^k \frac{1}{\pi \cdot \alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2} \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \cdot d\zeta \Rightarrow$$

$$G_{\text{smfrl,ap}} = \frac{4 \cdot k}{\pi \cdot \zeta_0} \cdot \int_0^k \frac{1}{(k^2 - \zeta^2) \cdot \left(J_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(\alpha \cdot \sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right)} \cdot d\zeta \quad (5.24)$$

Η παραπάνω εξίσωση καταλήγει στο εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

$$(5.24) \stackrel{(3.27)}{\Rightarrow} G_{\text{smfrl,ap}} = G_{\text{dlt,ex}} \quad (5.25)$$

Δηλαδή το πραγματικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου είναι το ίδιο είτε με μοντέλο τροφοδοσίας τύπου delta και χρήση του ακριβούς πυρήνα είτε με τύπου μικρού frill και προσεγγιστικό πυρήνα. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα έχει προκύψει από αναλυτικές πράξεις και δεν μπορεί να χαρακτηριστεί αναμενόμενο. Αυτό διότι εξάγονται ταυτόσημα αποτελέσματα για διαφορετικό μοντέλο τροφοδοσίας και διαφορετικό πυρήνα ολοκλήρωσης.

Πρέπει να σημειωθεί ότι μία διαισθητική απάντηση στην ερώτηση για τη συνθήκη ισοδυναμίας των δύο μοντέλων τροφοδοσίας (delta και frill) θα μπορούσε να είναι η συνθήκη για το μικρό frill. Πράγματι θα ήταν λογικό η κατάσταση της τροφοδοσίας της κεραίας μέσω delta – function generator να επιτυγχανόταν όταν τα δύο στελέχη της ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς ταυτίζονταν. Τότε ίσως να δημιουργούνταν οι συνθήκες ώστε να υπάρχει τροφοδοσία τύπου delta – function. Η παραπάνω σκέψη όμως αποδεικνύεται εκ των πραγμάτων λανθασμένη. Δηλαδή αν υπήρχε η ισοδυναμία των δύο μοντέλων μέσω της συνθήκης μικρού frill τότε θα έπρεπε μεταξύ άλλων να είναι:

$$G_{\text{smfrl,ap}} = G_{\text{dlt,ap}} \quad (5.26)$$

Κατά συνέπεια θα ίσχυε:

$$(5.26) \stackrel{(5.25)}{\Rightarrow} G_{\text{dlt,ap}} = G_{\text{dlt,ex}} \quad (5.27)$$

κάτι που είναι άτοπο από τους τύπους ορισμού των αντίστοιχων μεγεθών και από τις αριθμητικές δοκιμές.

Συνθήκη ισοδυναμίας

Μία πραγματική συνθήκη ισοδυναμίας των δύο μοντέλων θα αναζητηθεί στην συγκεκριμένη ενότητα. Στόχος μας είναι με τη συνθήκη της ισοδυναμίας να ταυτίζονται οι εξισώσεις τύπου Hallen που διέπουν τα φαινόμενα. Μάλιστα εφόσον τα πρώτα μέλη ταυτίζονται η όλη προσπάθεια αφορά τα δεύτερα. Θυμίζουμε τις σχετικές εξισώσεις των δευτέρων μελών:

$$F_{\text{fr}}(z) = \frac{\exp(j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^z g(t) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt + \frac{\exp(-j \cdot k \cdot z)}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \int_z^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \quad (5.28)$$

$$F_{\text{dir}}(z) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |z|) \quad (5.29)$$

όπου:

$$g(z) = \frac{j \cdot k \cdot V \cdot 2 \cdot \pi}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left(\frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + a^2})}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + b^2})}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right) \quad (5.30)$$

Θα εκφράσουμε πρώτα το δεύτερο μέλος του μοντέλου frill σαν γνωστές συναρτήσεις. Σε αυτό θα βοηθήσει η απλοποίηση ολοκληρωμάτων της μορφής

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot (\sqrt{t^2 + \xi^2} \pm t))}{\sqrt{t^2 + \xi^2}} \cdot dt \quad (5.31)$$

Αν θέσουμε $\sqrt{t^2 + \xi^2} \pm t = u$ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} t^2 + \xi^2 &= (u \mp t)^2 \Rightarrow t^2 + \xi^2 = u^2 + t^2 \mp 2 \cdot u \cdot t \Rightarrow \\ \xi^2 &= u^2 \mp 2 \cdot u \cdot t \Rightarrow \pm 2 \cdot u \cdot t = u^2 - \xi^2 \Rightarrow \\ t &= \pm \frac{u^2 - \xi^2}{2 \cdot u} \end{aligned} \quad (5.32)$$

και κατά συνέπεια:

$$\begin{aligned} \sqrt{t^2 + \xi^2} &= u \mp t \Rightarrow \sqrt{t^2 + \xi^2} = u - \frac{u^2 - \xi^2}{2 \cdot u} \Rightarrow \\ \sqrt{t^2 + \xi^2} &= \frac{2 \cdot u^2 - u^2 + \xi^2}{2 \cdot u} \Rightarrow \sqrt{t^2 + \xi^2} = \frac{u^2 + \xi^2}{2 \cdot u} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Επίσης θα είναι:

$$(5.32) \Rightarrow du = \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 + \xi^2}} \pm 1 \right] \cdot dt \Rightarrow du = \left[\frac{t \pm \sqrt{t^2 + \xi^2}}{\sqrt{t^2 + \xi^2}} \right] \cdot dt \Rightarrow du = \left[\frac{\pm u}{\frac{u^2 + \xi^2}{2 \cdot u}} \right] \cdot dt \Rightarrow$$

$$du = \left[\frac{\pm 2 \cdot u^2}{u^2 + \xi^2} \right] \cdot dt \Rightarrow dt = \pm \frac{u^2 + \xi^2}{2 \cdot u^2} \cdot du \quad (5.34)$$

Τέλος έχουμε για τα άκρα:

$$t = z_1 \Rightarrow u = \sqrt{z_1^2 + \xi^2} \pm z_1 = u_1 \quad (5.35)$$

και

$$t = z_2 \Rightarrow u = \sqrt{z_2^2 + \xi^2} \pm z_2 = u_2 \quad (5.36)$$

Έτσι το ολοκλήρωμα θα γράφεται:

$$(5.32) \xrightarrow[(5.35)(5.36)]{(5.33)(5.34)} \int_{z_1}^{z_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot (\sqrt{t^2 + \xi^2} \pm t))}{\sqrt{t^2 + \xi^2}} \cdot dt = \pm \int_{u_1}^{u_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot u)}{\frac{u^2 + \xi^2}{2 \cdot u}} \cdot \frac{u^2 + \xi^2}{2 \cdot u^2} \cdot du \Rightarrow$$

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot (\sqrt{t^2 + \xi^2} \pm t))}{\sqrt{t^2 + \xi^2}} \cdot dt = \pm \int_{u_1}^{u_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot u)}{u} \cdot du \quad (5.37)$$

με τη διαφορά σε σχέση με πριν ότι το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot u)}{u} \cdot du$ είναι

η γνωστή συνάρτηση εκθετικού ολοκληρώματος $E_1(j \cdot \zeta \cdot u)$. Οπότε θα ισχύει ότι η αρχική ποσότητα θα ισούται με:

$$(5.37) \Rightarrow \int_{z_1}^{z_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot (\sqrt{t^2 + \xi^2} \pm t))}{\sqrt{t^2 + \xi^2}} \cdot dt = \pm E_1(j \cdot \zeta \cdot (\sqrt{z_2^2 + \xi^2} \pm z_2)) \mp E_1(j \cdot \zeta \cdot (\sqrt{z_1^2 + \xi^2} \pm z_1)) \quad (5.38)$$

με $z_1, z_2, \xi \in \mathbb{R}$ ενώ $\xi \neq 0$

Κατά συνέπεια έχουμε για το δεύτερο μέλος του frill μοντέλου:

$$F_{\text{frl}}(z) = \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{t^2 + a^2})}{\sqrt{t^2 + a^2}} \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt - \int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{t^2 + b^2})}{\sqrt{t^2 + b^2}} \cdot \exp(-j \cdot k \cdot t) \cdot dt \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\int_z^{+\infty} \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{t^2 + a^2})}{\sqrt{t^2 + a^2}} \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt - \int_z^{+\infty} \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{t^2 + b^2})}{\sqrt{t^2 + b^2}} \cdot \exp(j \cdot k \cdot t) \cdot dt \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
F_{\text{fil}}(z) = & \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} - t))}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} \cdot dt - \right. \\
& \left. - \int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + b^2} - t))}{\sqrt{t^2 + b^2}} \cdot dt \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) + \\
& + \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\int_z^{+\infty} \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} + t))}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} \cdot dt - \right. \\
& \left. - \int_z^{+\infty} \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + b^2} + t))}{\sqrt{t^2 + b^2}} \cdot dt \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \quad (5.39)
\end{aligned}$$

Τα τέσσερα παραπάνω ολοκληρώματα θα υπολογιστούν ξεχωριστά έχοντας υπόψη τα όρια της συνάρτησης του εκθετικού ολοκληρώματος:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E_1(j \cdot x) = j \cdot \pi \quad (5.40)$$

και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E_1(j \cdot x) = -j \cdot \pi \quad (5.41)$$

Για το πρώτο:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} - t))}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} \cdot dt &= -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) + \lim_{t \rightarrow -\infty} [E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} - t))] \Rightarrow \\
\int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} - t))}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} \cdot dt &= -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) + \lim_{t \rightarrow -\infty} [E_1(j \cdot t)] \stackrel{(5.41)}{\Rightarrow} \\
\int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} - t))}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} \cdot dt &= -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) - j \cdot \pi \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Για το δεύτερο όμοια έχουμε:

$$\int_{-\infty}^z \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + b^2} - t))}{\sqrt{t^2 + b^2}} \cdot dt = -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} - z)) - j \cdot \pi \quad (5.43)$$

Για το τρίτο σε αντιστοιχία:

$$\int_z^{+\infty} \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + \alpha^2} + t))}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} \cdot dt = j \cdot \pi - E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)) \quad (5.44)$$

Τέλος για το τέταρτο εντελώς αντίστοιχα:

$$\int_z^{+\infty} \frac{\exp(j \cdot k \cdot (\sqrt{t^2 + b^2} + t))}{\sqrt{t^2 + b^2}} \cdot dt = j \cdot \pi - E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} + z)) \quad (5.45)$$

Επομένως το δεύτερο μέλος θα ισούται:

$$(5.39) \stackrel{(5.42)(5.43)}{\Rightarrow} \stackrel{(5.44)(5.45)}{\Rightarrow}$$

$$F_{\text{fil}}(z) = \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\begin{array}{l} -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) - \\ -j \cdot \pi + E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} - z)) + j \cdot \pi \end{array} \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\begin{array}{l} j \cdot \pi - E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)) - \\ -j \cdot \pi + E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} + z)) \end{array} \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow$$

$$F_{\text{fil}}(z) = \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\begin{array}{l} E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} - z)) - \\ -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) \end{array} \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) +$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot j \cdot k} \cdot \frac{j \cdot k \cdot V}{2 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\begin{array}{l} E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} + z)) - \\ -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)) \end{array} \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow$$

$$F_{\text{fil}}(z) = \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\begin{array}{l} E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} - z)) - \\ -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) \end{array} \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) +$$

$$+ \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\begin{array}{l} E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + b^2} + z)) - \\ -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)) \end{array} \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \quad (5.46)$$

Αν θεωρήσουμε:

$$\frac{b}{\alpha} = \mu \Rightarrow b = \mu \cdot \alpha \quad (5.47)$$

Τότε το δεύτερο μέλος θα είναι:

$$(5.46) \stackrel{(5.47)}{\Rightarrow} F_{\text{fil}}(z) = \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \left[\begin{array}{l} E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z)) - \\ -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)) \end{array} \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) +$$

$$+ \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \left[\begin{array}{l} E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z)) - \\ -E_1(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)) \end{array} \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \quad (5.48)$$

Σε αυτό το σημείο δοκιμάζουμε τη συνθήκη: $\left\{ \alpha \rightarrow 0 \text{ με } \frac{b}{a} = \mu \text{ σταθερό} \right\}$ κάτι που δευτερευόντως συνεπάγεται ότι και $b = (\mu \cdot \alpha) \rightarrow 0$. Τότε θα τροποποιηθούν τα ορίσματα των συναρτήσεων των εκθετικών ολοκληρωμάτων:

Για $z > 0$ είναι:

$$\begin{aligned} \sqrt{z^2 + \alpha^2} - z, \alpha \rightarrow 0 &= z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2} - z, \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \sqrt{z^2 + \alpha^2} - z, \alpha \rightarrow 0 &= z \cdot \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2} - 1 \right), \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \sqrt{z^2 + \alpha^2} - z, \alpha \rightarrow 0 &= z \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2 - 1 \right), \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \sqrt{z^2 + \alpha^2} - z, \alpha \rightarrow 0 &= \frac{z}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2, \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \sqrt{z^2 + \alpha^2} - z, \alpha \rightarrow 0 &= \frac{\alpha^2}{2 \cdot z}, \alpha \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.49)$$

με την παραπάνω ποσότητα να είναι μικρή καθώς $\alpha \rightarrow 0$. Εντελώς όμοια έχουμε:

$$\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z \cong \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z} \quad (5.50)$$

ποσότητα επίσης πολύ μικρή. Όμως θα πρέπει να σημειωθεί πως ενώ δεν είναι εσφαλμένο να θεωρηθεί $\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z \cong \sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z$ (για όχι πολύ μικρά z , που δεν ενδιαφέρουν) δεν δικαιούμαστε να θέσουμε: $\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z \cong \sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z \Rightarrow$

$$\frac{\alpha^2}{2 \cdot z} \cong \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z} \text{ διότι και οι δύο ποσότητες τείνουν στο μηδέν.}$$

Αντίστοιχα για $z < 0$ είναι:

$$\begin{aligned} \sqrt{z^2 + \alpha^2} + z, \alpha \rightarrow 0 &= -z \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2 - 1 \right), \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \sqrt{z^2 + \alpha^2} + z, \alpha \rightarrow 0 &= -\frac{z}{2} \cdot \left(\frac{\alpha}{z}\right)^2, \alpha \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \sqrt{z^2 + \alpha^2} + z, \alpha \rightarrow 0 &= -\frac{\alpha^2}{2 \cdot z}, \alpha \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (5.51)$$

και με τον ίδιο τρόπο:

$$\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z \cong -\frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z}, \alpha \rightarrow 0 \quad (5.52)$$

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να παραθέσουμε την ανάπτυξη σε σειρά της συνάρτησης του εκθετικού ολοκληρώματος όπως υπάρχει στην παραπομπή [2] σχέση 5.1.10 σελίδα 229 :

$$E_1(x) = \gamma + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n \cdot n!}, \quad x \in \mathbb{C} \quad (5.53)$$

Όπως μπορεί να γίνει αντιληπτό για $|x| \rightarrow 0$ θα είναι:

$$(5.53) \Rightarrow E_1(x) \cong \gamma + \ln(x), \quad x \rightarrow 0 \Rightarrow E_1(j \cdot x) = \gamma + \ln(j \cdot x), \quad x \rightarrow 0$$

$$E_1(j \cdot x) = \gamma + j \cdot \frac{\pi}{2} + \ln(x), \quad x \rightarrow 0 \quad (5.54)$$

Επομένως αν επεκτείνουμε τη σταθερά γ (συγχώνευση σταθερών αδιαφορώντας για το τι αντιπροσωπεύει) έχουμε:

$$E_1(j \cdot x) = \gamma + \ln(x), \quad x > 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (5.55)$$

Αν σε αυτό το σημείο επιστρέψουμε στο δεύτερο μέλος του μοντέλου τροφοδοσίας Frill Generator θα είναι για $z > 0$:

$$\begin{aligned} k \cdot \left(\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z \right) &\cong k \cdot \left(\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z \right) \Rightarrow \\ E_1 \left(k \cdot \left(\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z \right) \right) &\cong E_1 \left(k \cdot \left(\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z \right) \right) \end{aligned} \quad (5.56)$$

Επίσης είναι προφανές ότι θα ισχύουν οι ακόλουθες προσεγγίσεις:

$$\begin{aligned} E_1 \left(j \cdot k \cdot \left(\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z \right) \right) &\cong E_1 \left(j \cdot k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z} \right) \Rightarrow \\ E_1 \left(j \cdot k \cdot \left(\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z \right) \right) &\cong \gamma + \ln \left(k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z} \right) \end{aligned} \quad (5.57)$$

$$\begin{aligned} E_1 \left(j \cdot k \cdot \left(\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z \right) \right) &\cong E_1 \left(j \cdot k \cdot \frac{\alpha^2}{2 \cdot z} \right) \Rightarrow \\ E_1 \left(j \cdot k \cdot \left(\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z \right) \right) &\cong \gamma + \ln \left(k \cdot \frac{\alpha^2}{2 \cdot z} \right) \end{aligned} \quad (5.58)$$

Επομένως το δεύτερο μέλος για $z > 0$ γίνεται:

$$\begin{aligned} (5.48) \stackrel{(5.56)(5.57)}{\Rightarrow} \stackrel{(5.58)}{F_{\text{eqfrl}}(z)} &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln \mu} \cdot \left[\gamma + \ln \left(k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z} \right) - \gamma - \ln \left(k \cdot \frac{\alpha^2}{2 \cdot z} \right) \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\ F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \ln \left(k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2 \cdot 2 \cdot z}{2 \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot k} \right) \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \ln(\mu^2) \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot 2 \cdot \ln(\mu) \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Με μία εντελώς όμοια διαδικασία έχουμε για $z < 0$:

$$\begin{aligned}
k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z) &\cong k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z) \Rightarrow \\
E_1\left(k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z)\right) &\cong E_1\left(k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)\right) \tag{5.60}
\end{aligned}$$

$$E_1\left(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z)\right) \cong E_1\left(-j \cdot k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z}\right) \cong \gamma + \ln\left(-k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z}\right) \tag{5.61}$$

$$E_1\left(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)\right) \cong E_1\left(-j \cdot k \cdot \frac{\alpha^2}{2 \cdot z}\right) \cong \gamma + \ln\left(-k \cdot \frac{\alpha^2}{2 \cdot z}\right) \tag{5.62}$$

Επομένως το δεύτερο μέλος για $z < 0$ γίνεται:

$$\begin{aligned}
(5.48) &\stackrel{(5.60)(5.61)}{\Rightarrow} \stackrel{(5.62)}{\Rightarrow} \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \left[E_1\left(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} - z)\right) - E_1\left(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} - z)\right) \right] \cdot \exp(j \cdot k \cdot z) + \\
&+ \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \left[E_1\left(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + (\mu \cdot \alpha)^2} + z)\right) - E_1\left(j \cdot k \cdot (\sqrt{z^2 + \alpha^2} + z)\right) \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \left[\gamma + \ln\left(-k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2}{2 \cdot z}\right) - \gamma - \ln\left(-k \cdot \frac{\alpha^2}{2 \cdot z}\right) \right] \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \ln\left(k \cdot \frac{\mu^2 \cdot \alpha^2 \cdot 2 \cdot z}{2 \cdot z \cdot \alpha^2 \cdot k}\right) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot \ln(\mu^2) \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow \\
F_{\text{eqfrl}}(z) &= \frac{V}{4 \cdot \zeta_0 \cdot \ln(\mu)} \cdot 2 \cdot \ln \mu \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \Rightarrow F_{\text{eqfrl}}(z) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(-j \cdot k \cdot z) \tag{5.63}
\end{aligned}$$

Και κατά συνέπεια θα έχουμε σε συμπυκνωμένη μορφή:

$$(5.59), (5.63) \Rightarrow F_{\text{eqfrl}}(z) = \frac{V}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |z|) \stackrel{(2.49)}{\Rightarrow} F_{\text{eqfrl}}(z) = F_{\text{dt}}(z) \tag{5.64}$$

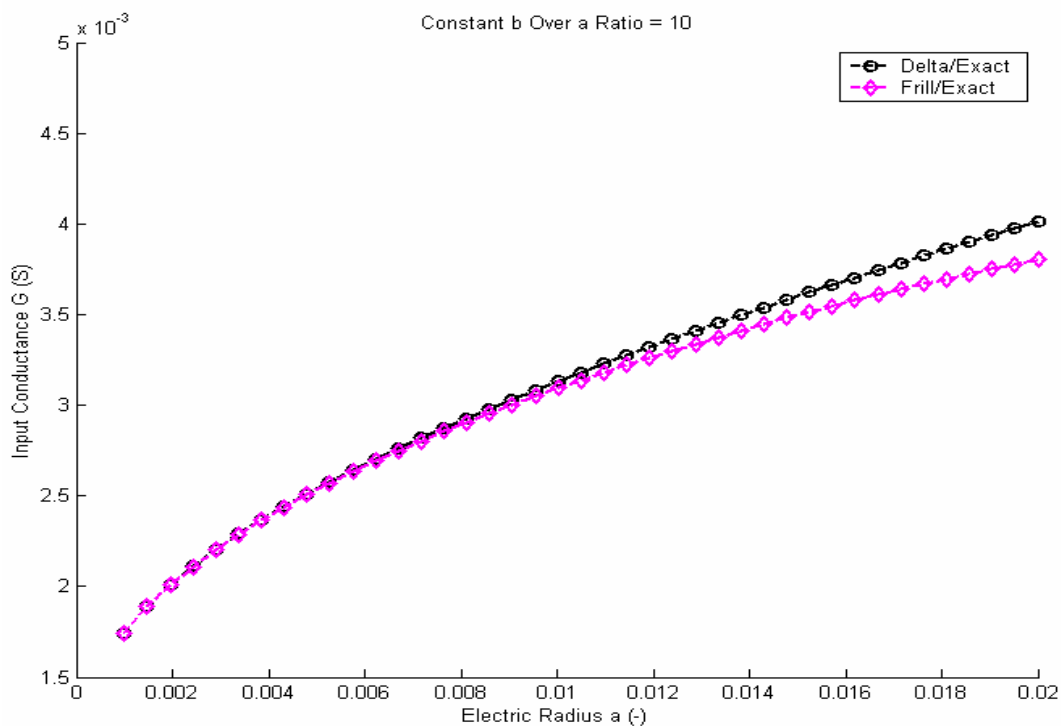
Επομένως όντως η συνθήκη $\left\{ \alpha \rightarrow 0 \text{ με } \frac{b}{\alpha} = \mu \text{ σταθερό} \right\}$ είναι συνθήκη ισοδυναμίας

των δύο μοντέλων delta και frill.

Διαγράμματα

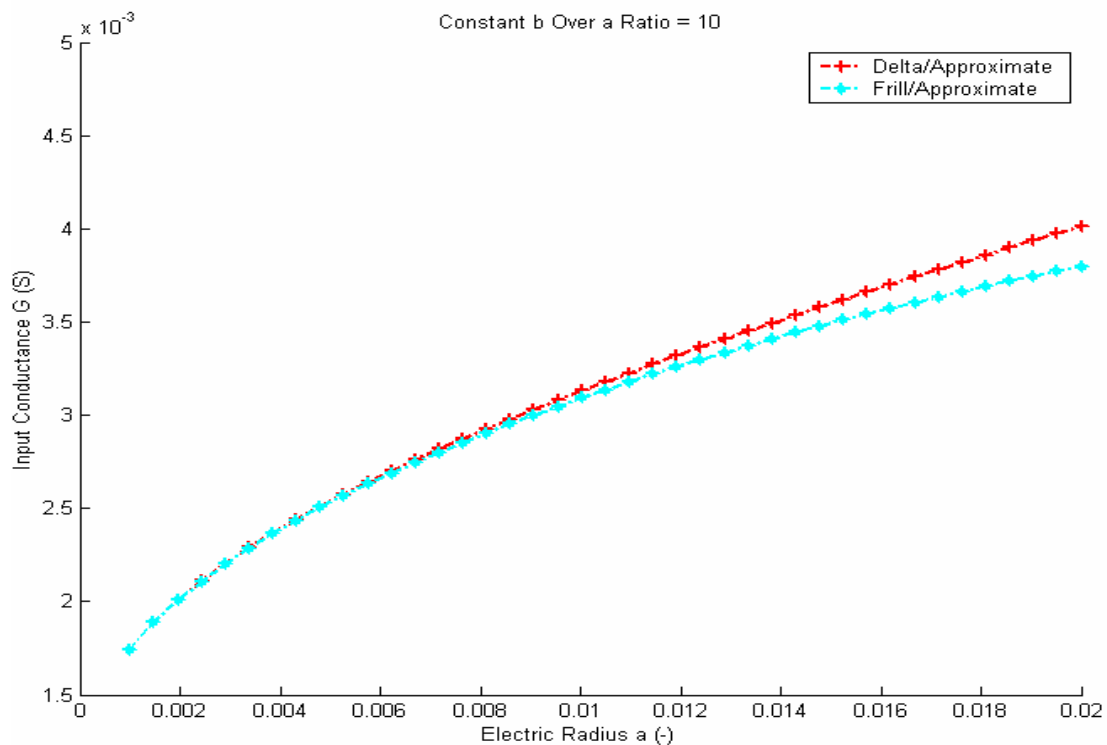
Από τα τρία είδη προτεινόμενων μοντέλων που έχουμε καταλήξει: delta, frill και μικρό frill (το οποίο δεν προϋπήρχε) και από τα δύο είδη χρησιμοποιούμενων πυρήνων: ακριβής και προσεγγιστικός έχουν εξαχθεί τελικοί τύποι εννέα μεγεθών σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου της διπολικής (χρησιμοποιώντας διαχωρισμό πραγματικού και φανταστικού μέρους). Πιο συγκεκριμένα το πραγματικό μέρος σε οποιοδήποτε συνδυασμό τροφοδοσίας και πυρήνα είναι συγκλίνον ενώ το φανταστικό μόνο στην περίπτωση τροφοδοσίας τύπου frill και στο συνδυασμό μικρού frill και ακριβούς πυρήνα δίνεται από συγκλίνοντα ολοκληρώματα. Από αυτά τα εννέα μεγέθη εκείνα που σχετίζονται με τύπο τροφοδοσίας frill εξαρτώνται τόσο από την εσωτερική ακτίνα a του κυλίνδρου της κεραίας όσο και από την εξωτερική ακτίνα b της ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς. Τα υπόλοιπα μεγέθη εξαρτώνται μόνο από την εσωτερική ακτίνα a . Είναι λοιπόν αναγκαίο να υπολογίσουμε τα προς μελέτη μεγέθη για διάφορες εσωτερικές και εξωτερικές ακτίνες και να τα αναπαραστήσουμε γραφικά.

Όσον αφορά την ισοδυναμία των δύο μοντέλων (frill και delta) η οποία υφίσταται όταν $\left\{ a \rightarrow 0 \text{ με } \frac{b}{a} = \mu \text{ σταθερό} \right\}$ έχουμε αρχικά τα δύο διαγράμματα στα σχήματα (5.1) και (5.2):



Σχήμα (5.1)

Στο παραπάνω σχήμα (5.1) αναπαριστάται το πραγματικό μέρος της αντίστασης εισόδου σαν συνάρτηση της εσωτερικής ηλεκτρικής ακτίνας της κεραίας χρησιμοποιώντας συνδυασμούς τροφοδοσίας πυρήνα delta / ακριβής και frill / ακριβής. Σε όλες τις επαναλήψεις (σημεία των γραφικών παραστάσεων για συνεχώς αυξανόμενη ακτίνα a) ο λόγος $\frac{b}{a}$ παραμένει σταθερός και ίσος με 10. Το μεγάλο μέγεθος του λόγου ίσως να παραξενεύει και να μην είναι συνηθισμένο όμως χρησιμοποιήθηκε έτσι για να φανεί η διαφορά των δύο καμπυλών. Σε κάθε περίπτωση έχει εξεταστεί ότι για όλες τις χρησιμοποιούμενες τιμές της ακτίνας για τον δεδομένο λόγο δεν επιτρέπεται να κυματοδηγηθεί στην ομοαξονική γραμμή μεταφοράς άλλος ρυθμός από τον βασικό TEM (απαραίτητη προϋπόθεση για την λειτουργία frill generator). Μπορεί να παρατηρηθεί ότι καθώς η εσωτερική ακτίνα μειώνεται η διαφορά μεταξύ των δύο μεγεθών γίνεται μικρότερη και αυτή κάτι που εξηγείται με τη συνθήκη ισοδυναμίας. Το σχήμα (5.2) έχει ως εξής:

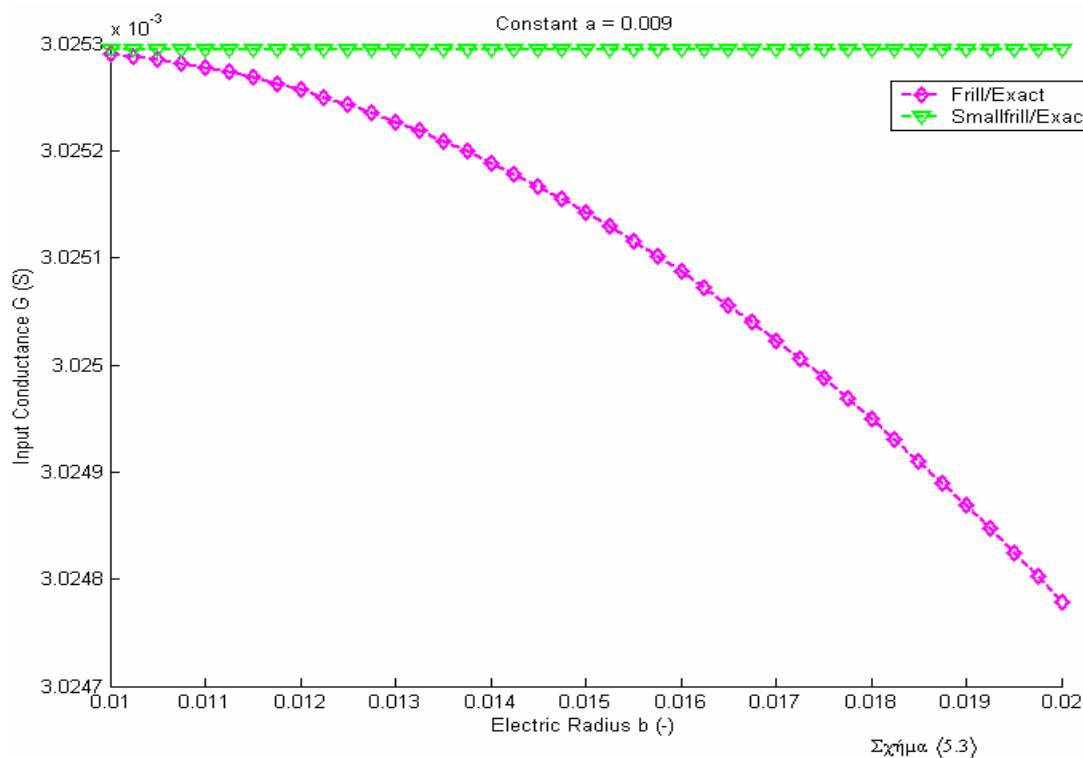


Σχήμα (5.2)

Πρόκειται για το αντίστοιχο με το σχήμα (5.1) με τη διαφορά ότι χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός πυρήνας ολοκλήρωσης. Τα δύο διαγράμματα μοιάζουν και αυτό καταδεικνύει ότι η υιοθέτηση διαφορετικών μοντέλων τροφοδοσίας και διαφορετικών

πυρήνων όσον αφορά το πραγματικό μέρος δεν οδηγεί σε μεγάλες διαφορές (για τις σχετικά λεπτές κεραίες που μελετάμε). Και στο παραπάνω διάγραμμα επαληθεύεται η συνθήκη της ισοδυναμίας. Μπορούν να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις και για τα δύο διαγράμματα όπως το γεγονός ότι για όλες τις εσωτερικές ηλεκτρικές ακτίνες όταν χρησιμοποιείται delta – function generator η τιμή της αγωγιμότητας εισόδου είναι μεγαλύτερη από την περίπτωση χρήσης του frill generator. Τέλος μία χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι οι συναρτήσεις του πραγματικού μέρους της αγωγιμότητας είναι αύξουσες με την εσωτερική ακτίνα του κυλίνδρου της κεραίας.

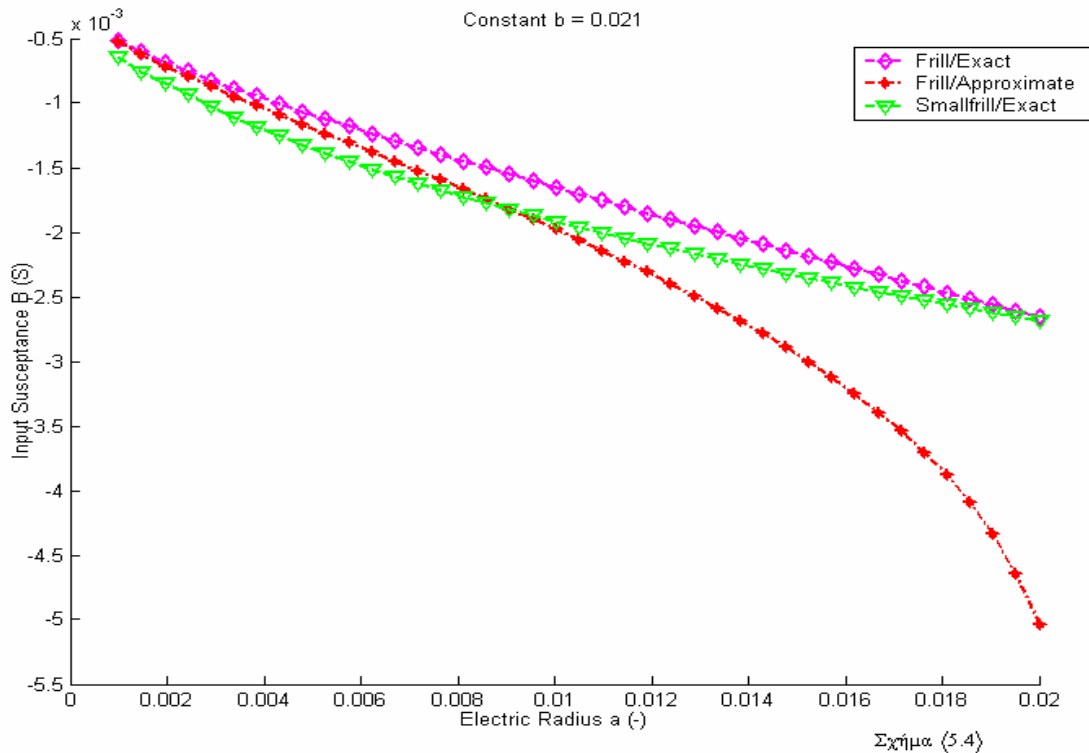
Μία άλλη ιδιότητα που θα έπρεπε να καταδειχθεί μέσω διαγραμμάτων είναι η τροφοδοσία τύπου μικρού frill και κατά πόσον συσχετίζεται με την τύπου frill. Τα σχετικά σχήματα είναι τα <5.3> και <5.4> που ακολουθούν.



Σχήμα <5.3>

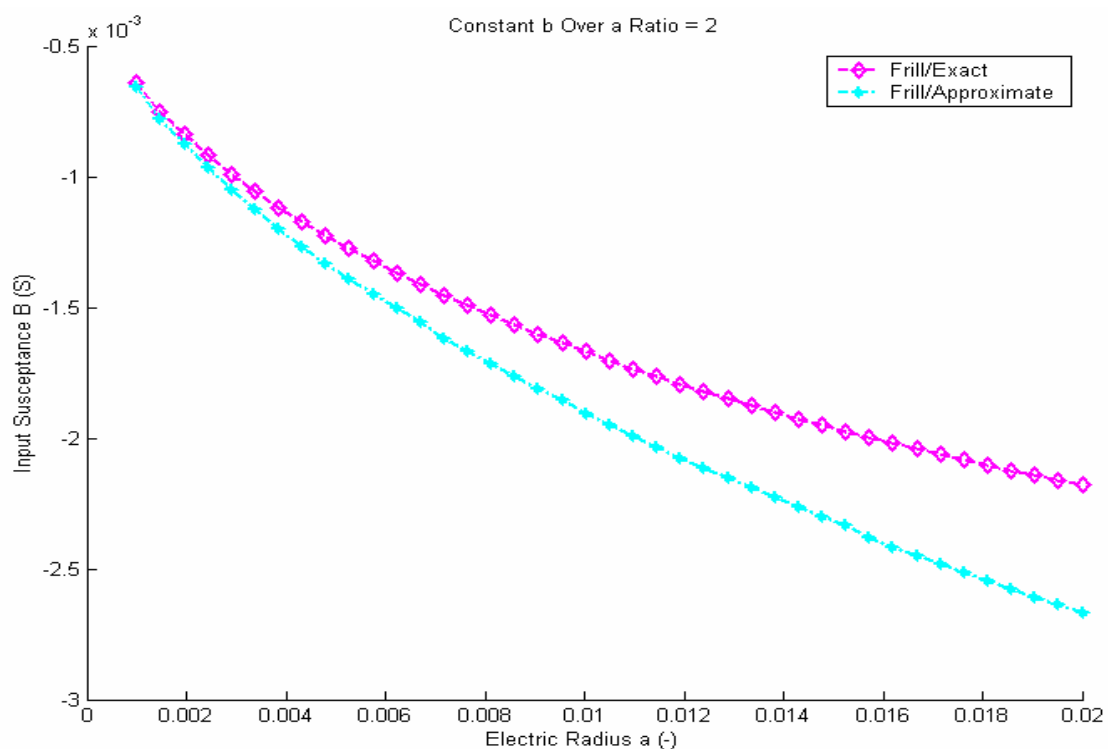
Το παραπάνω σχήμα <5.3> δείχνει πώς για σταθερή εσωτερική ηλεκτρική ακτίνα και μεταβλητή εξωτερική μεταβάλλεται το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας για την περίπτωση τύπου frill. Παρατηρούμε ότι εφόσον η ακτίνα a είναι σταθερή η τιμή του μεγέθους για την περίπτωση τροφοδοσίας τύπου μικρού frill είναι επίσης σταθερή. Επίσης για κάθε εξωτερική ακτίνα το μέγεθος τροφοδοσίας τύπου frill είναι μικρότερο από το αντίστοιχο τύπου μικρού frill ενώ καθώς η εξωτερική ακτίνα πλησιάζει την εσωτερική, τα δύο μεγέθη ταυτίζονται κάτι που αποτελεί τον ορισμό της τροφοδοσίας τύπου μικρού frill. Το αντίστοιχο διάγραμμα με χρήση του

προσεγγιστικού πυρήνα είναι όμοιο με το παραπάνω εξαιτίας των μικρών διαφορών που υπάρχουν στο πραγματικό μέρος. Το παρακάτω σχήμα (5.4) αφορά τις ίδιες καταστάσεις αλλά για το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου:



Αυτή τη φορά η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η εσωτερική ακτίνα a ενώ σταθερή και ίση με 0.021 παραμένει η εξωτερική ηλεκτρική ακτίνα (μόνο για το μέγεθος που αφορά την τροφοδοσία τύπου frill καθώς για το μικρό frill δεν υπάρχει εξάρτηση από το b). Παρατηρούμε ότι καθώς το a τείνει να συμπίσει με το b συμβαίνουν δύο γεγονότα άξια παρατήρησης. Αφενός η καμπύλη frill / ακριβούς πυρήνα συμπίπτει με την καμπύλη μικρό frill / ακριβής πυρήνας κάτι που αναμενόταν από τον λειτουργία της τροφοδοσίας τύπου μικρού frill. Αφετέρου η καμπύλη frill / προσεγγιστικού πυρήνα τείνει προς το αρνητικό άπειρο. Αυτή η τάση μπορεί να δικαιολογηθεί καθώς για την τροφοδοσία τύπου μικρού frill και με χρήση προσεγγιστικού πυρήνα το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου αποκλίνει (απειρίζεται με απροσδιόριστο τρόπο). Κατά συνέπεια δικαιολογημένα η καμπύλη του frill όταν πλησιάζει την περιοχή του μικρού frill αποκλίνει. Επίσης πάντοτε το μέγεθος της κατάστασης μικρού frill και ακριβούς πυρήνα είναι μικρότερο από το αντίστοιχο μέγεθος με τροφοδοσία τύπου frill. Τέλος πρέπει να τονιστεί ότι οι συναρτήσεις του φανταστικού μέρους είναι φθίνουσες συναρτήσεις της εσωτερικής ακτίνας.

Μία επιπρόσθετη παρατήρηση που αφορά τη συνθήκη ισοδυναμίας και πιο συγκεκριμένα το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου. Όπως γνωρίζουμε το συγκεκριμένο μέγεθος για την τροφοδοσία τύπου delta είναι αποκλίνον (ανεξαρτήτως χρησιμοποιούμενου πυρήνα). Αν γίνει μία γραφική παράσταση για το φανταστικό μέρος στις καταστάσεις frill με ακριβή και προσεγγιστικό πυρήνα τότε αναμένουμε όταν τηρείται η συνθήκη $\left\{ a \rightarrow 0 \text{ με } \frac{b}{a} = \mu \text{ σταθερό} \right\}$ να υπάρχει απειρισμός του σχετικού μεγέθους. Πράγματι στο σχήμα <5.5> που ακολουθεί φαίνεται η εν λόγω τάση:

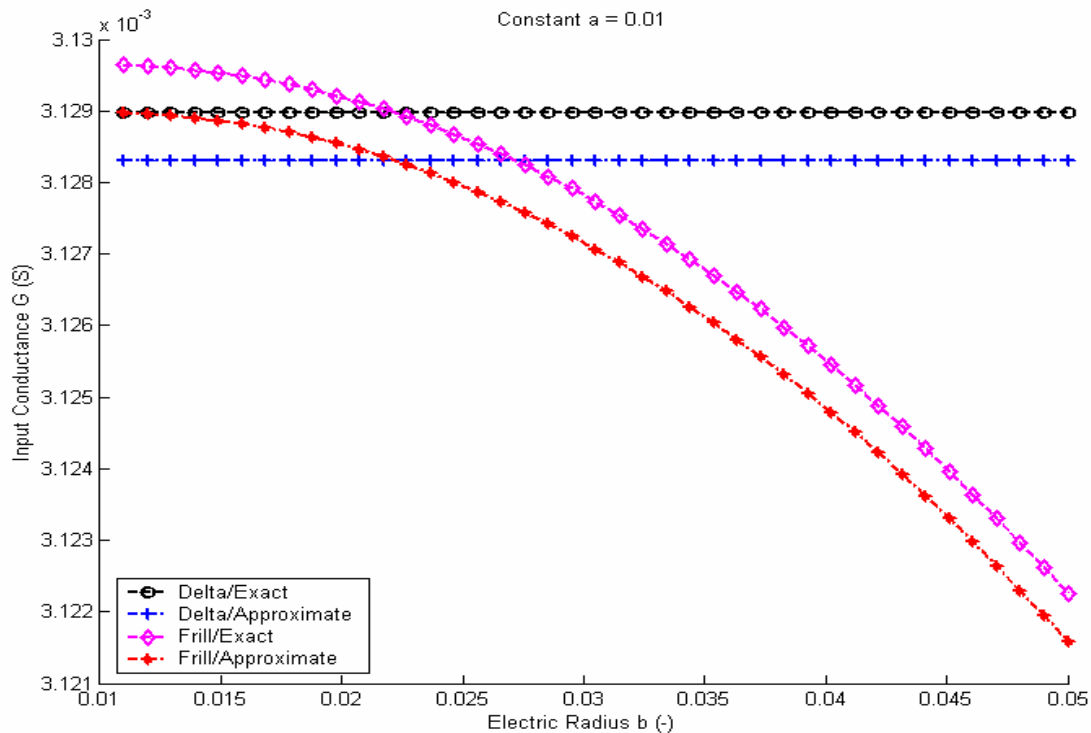


Σχήμα <5.5>

Πρέπει να σημειωθεί ότι ο λόγος $\frac{b}{a}$ είναι σταθερός και ίσος με 2. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το μέγεθος με τον προσεγγιστικό πυρήνα είναι πάντοτε μικρότερο από το αντίστοιχο με τον ακριβή πυρήνα.

Μία ιδιαίτερα σημαντική παράμετρος όσον αφορά την σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου της διπολικής κεραίας είναι οι διαφορές που έχουν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος αν υπολογιστούν με τις διάφορες προτεινόμενες μεθόδους επιλογής μοντέλου τροφοδοσίας και πυρήνα ολοκλήρωσης. Πράγματι αν κάποιος ενδιαφέρεται για την εύρεση της αγωγιμότητας εισόδου μιας άπειρης διπολικής κεραίας είναι χρήσιμο να γνωρίζει ποιο είναι το εύρος σφάλματος που θα κάνει κατά

τον υπολογισμό της χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε συνδυασμό επιλογών. Για παράδειγμα από το πιο κάτω σχήμα μπορούμε να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις διαφορές στις τιμές του πραγματικού μέρους της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου:

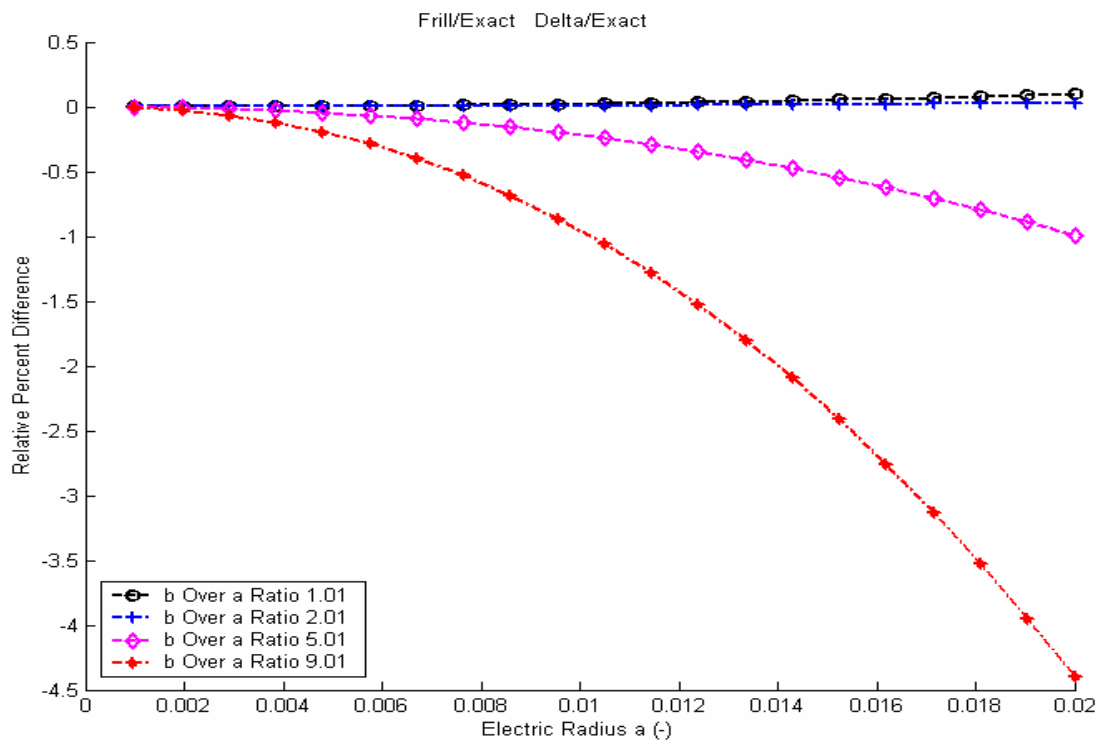


Σχήμα (5.6)

Μπορούμε να παρατηρήσουμε εκ νέου την ταύτιση του frill μοντέλου με το μικρό frill όταν τηρούνται οι προϋποθέσεις ορισμού του τελευταίου ενώ καθώς το b πλησιάζει στην ακτίνα a η διαφορά μεταξύ του frill με τον προσεγγιστικό πυρήνα και του αντίστοιχου με τον ακριβή μειώνεται. Παρατηρούμε επίσης την σταθερή διαφορά μεταξύ των δύο εκδοχών του πραγματικού μέρους (μεγαλύτερη αυτή με τον ακριβή πυρήνα). Τέλος οι εκδοχές των frill είναι μέχρι ένα συγκεκριμένο b (καθώς αυτό μειώνεται) μικρότερες από τις αντίστροφες εκδοχές της τροφοδοσίας delta και μετά τις ξεπερνάνε.

Όσον αφορά τις διαφορές θα ήταν χρήσιμο να ξέραμε πώς αυτές μεταβάλλονται καθώς είναι μεταβλητές και οι δύο παράμετροι που εμείς εξετάζουμε δηλαδή οι (a, b) ή εναλλακτικά οι $\left(a, \frac{b}{a}\right)$. Στο σχήμα (5.7) που ακολουθεί μπορούμε να παρατηρήσουμε την σχετική επί τοις εκατό διαφορά του πραγματικού μέρους μεταξύ των επιλογών frill / ακριβούς πυρήνα και frill / προσεγγιστικού πυρήνα. Μία καινοτομία του διαγράμματος είναι ότι η διαφορά αλλάζει πρόσημο

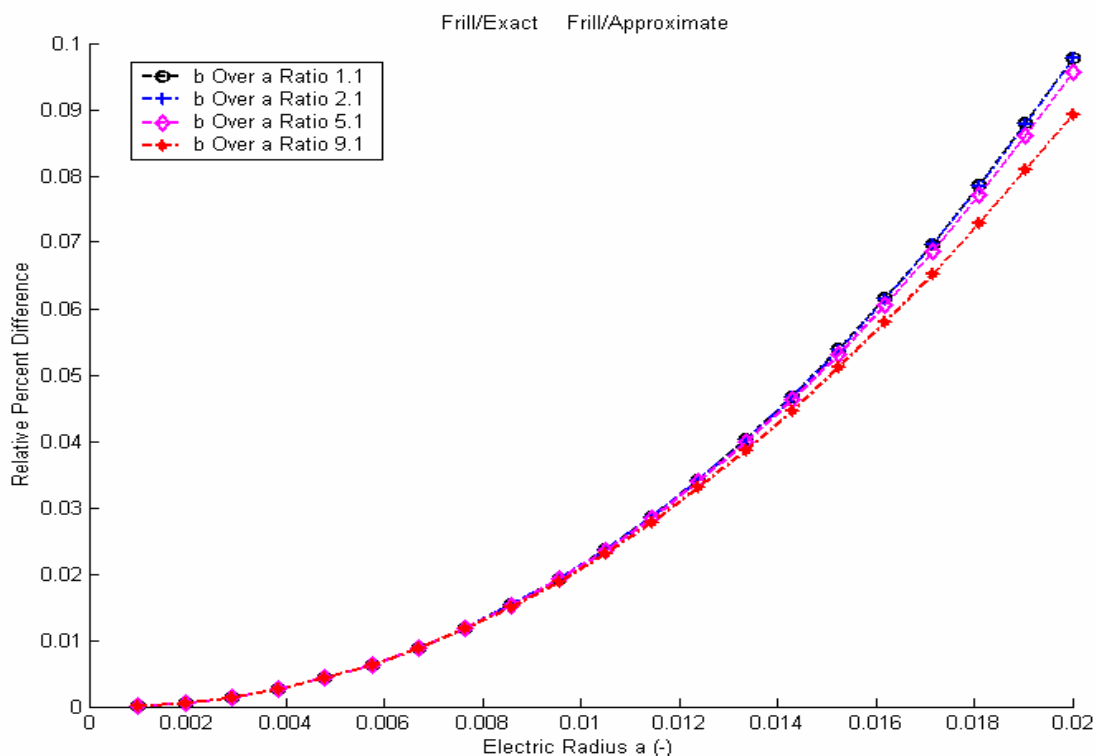
καθώς μεταβάλλεται ο λόγος των ακτινών. Αυτό σημαίνει πως θα υπάρχει κάποια συγκεκριμένη τιμή του λόγου για την οποία η διαφορά να γίνεται ταυτοτικά μηδενική (δεδομένης της συνέχειας των συναρτήσεων). Μία δεύτερη παρατήρηση που μπορεί να γίνει είναι ότι για οποιοδήποτε δεδομένο λόγο ακτινών όταν η εσωτερική ακτίνα τείνει στο μηδέν οι διαφορές μηδενίζονται. Αυτή η παρατήρηση είναι γενικότερη και έτσι εξηγείται ότι η απαίτηση για a να τείνει στο μηδέν εμπεριέχεται στη συνθήκη ισοδυναμίας. Τέλος μετά από τον κρίσιμο λόγο $\frac{b}{a}$ όπου υπάρχει ταυτοτικός μηδενισμός του σφάλματος η διαφορά αυξάνει με τον συγκεκριμένο λόγο και φτάνει για $\frac{b}{a} = 9.01$ το 4.5%. Το διάγραμμα ακολουθεί:



Σχήμα (5.7)

Σπεύδουμε να σημειώσουμε ότι η μέγιστη διαφορά δεν αυξάνεται γραμμικά με τον λόγο αλλά ταχύτερα. Γι' αυτήν την αιτία όταν ο λόγος κυμαίνεται σε συνηθισμένες τιμές περί το 5 η διαφορά ακόμα και για τις παχύτερες κεραίες (ηλεκτρική ακτίνα $a = 0.02$) δεν ξεπερνά το 1%. Κατά συνέπεια το συμπέρασμα στο οποίο καταλήγουμε είναι ότι η διαφορά στο πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου είναι μικρή. Αυτό ισχύει για κάθε συνδυασμό μοντέλου τροφοδοσίας και πυρήνα ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα το αντίστοιχο με το (5.7) διάγραμμα με τον προσεγγιστικό πυρήνα είναι σχεδόν όμοιο. Θα έχει όμως ενδιαφέρον να δούμε τις

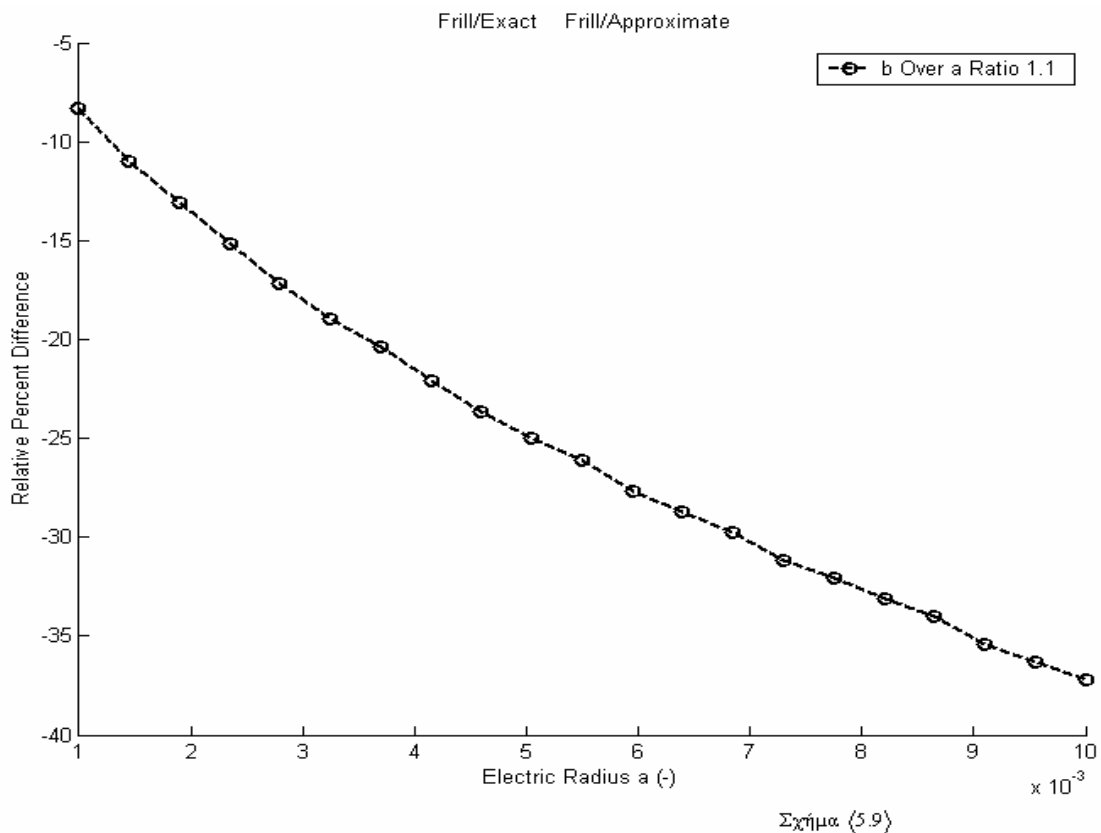
διαφορές στο ίδιο μέγεθος για διαφορετικούς πυρήνες προκειμένου να παρατηρήσουμε τις μικρές μεταβολές. Πράγματι στο σχήμα <5.8> που ακολουθεί βλέπουμε διαφορές τις τάξεως του 0.1% και μάλιστα πολύ μικρή εξάρτηση από το λόγο $\frac{b}{a}$ (που έχει αντίστροφη επίδραση στην διαφορά).



Σχήμα <5.8>

Αν μία ανάλογη διαδικασία γίνει και για το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου θα διαπιστώσουμε ότι η διαφορά είναι πολύ μεγαλύτερη και κατά συνέπεια η αβεβαιότητα υπολογισμού της είναι εξαιρετικά μεγάλη. Πράγματι στο σχήμα <5.9> που ακολουθεί μπορούμε να παρατηρήσουμε διαφορές έως και 35%. Αυτή η μεγάλη διαφοροποίηση πρέπει να μας κάνει ιδιαίτερα προσεκτικούς στην επιλογή της εκδοχής (μοντέλο τροφοδοσίας και πυρήνας ολοκλήρωσης). Ωστόσο υπάρχει η ομοιότητα της φθίνουσας πορείας των διαφορών καθώς η ακτίνα του κυλίνδρου τείνει να μηδενιστεί. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται η διαφορά μόνο για $\frac{b}{a} = 1.1$ το οποίο είναι αντιπροσωπευτικό ως προς το σφάλμα σε κάθε περίπτωση. Και στο φανταστικό μέρος η διαφορά μικραίνει καθώς ο λόγος εξωτερικής προς εσωτερική ακτίνα μεγαλώνει. Το συγκεκριμένο γεγονός ενδεχομένως να μπορεί να εξηγηθεί ως εξής: στο μοναδικό σημείο που διαφέρουν οι

δύο εκδοχές είναι ότι η μία (approximate) χρησιμοποιεί την “thin – wire approximation ενώ η άλλη (exact) όχι. Πράγματι όσο το b απομακρύνεται από το a η εξωτερική ακτίνα της ομοαξονικής γραμμής μεγαλώνει και “βλέπει” την παραμένουσα σταθερή εσωτερική της σαν λεπτότερη. Κατά συνέπεια είτε ένας πολύ μικρός σε σύγκριση με το frill generator κύλινδρος (προσέγγιση exact) είτε ένα λεπτό σύρμα (προσέγγιση approximate) θα δώσουν παρεμφερή αποτελέσματα. Αντίθετα όταν η εξωτερική ακτίνα βρίσκεται κοντά στην εσωτερική οποιαδήποτε μεταβολή στο πάχος της κεραία γίνεται άμεσα “αντιληπτή” από το μηχανισμό τροφοδοσίας κάτι που αντικατοπτρίζεται στα αποτελέσματα. Ωστόσο παρόλο που για περισσότερο συνηθισμένους (μεγαλύτερους) λόγους $\frac{b}{a}$ τα μέγιστα σφάλματα είναι μικρότερα του 35%, αυτά παραμένουν σημαντικά της τάξης του 20%. Αυτό θα πρέπει να κάνει πολύ προσεκτικό τον ερευνητή που θέλει να μετρήσει την σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας με την ελάχιστη αβεβαιότητα καθώς αυτή θα εξαρτάται από το είδος της ομοαξονικής γραμμής με την οποία η κεραία τροφοδοτείται. Το συγκεκριμένο διάγραμμα ακολουθεί:



Επειδή από τα δισδιάστατα διαγράμματα για τον τύπο τροφοδοσίας frill δεν μπορούν να εξαχθούν συνολικές μετρήσεις (οι παράμετροι που μεταβάλλονται είναι δύο: a

και b) παρά μόνο συγκεκριμένες διαπιστώσεις και παρατηρήσεις θα είναι καλό για την ποσοτική διερεύνηση των μεγεθών να επισυνάψουμε και κάποιους πίνακες. Για το πραγματικό μέρος με χρήση του ακριβούς πυρήνα προκύπτει ο πίνακας (η αγωγιμότητα σε Siemens):

| α/λ b/α | 1 (small) | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.0010 | 0.00174314 | 0.00174314 | 0.00174313 | 0.00174312 | 0.00174311 |
| 0.0050 | 0.00253957 | 0.00253949 | 0.00253925 | 0.00253883 | 0.00253825 |
| 0.0075 | 0.00285704 | 0.00285683 | 0.00285616 | 0.00285504 | 0.00285344 |
| 0.0100 | 0.00312933 | 0.00312888 | 0.00312751 | 0.00312520 | 0.00312194 |
| 0.0200 | 0.00401892 | 0.00401628 | 0.00400825 | 0.00399473 | 0.00397570 |

Η πρώτη στήλη αφορά την περίπτωση μικρού frill. Για το φανταστικό μέρος με χρήση του ακριβούς πυρήνα έχουμε τον πίνακα:

| α/λ b/α | 1 (small) | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.0010 | -0.00066883 | -0.00064393 | -0.00062706 | -0.00061450 | -0.00060420 |
| 0.0050 | -0.00137658 | -0.00125103 | -0.00117118 | -0.00110917 | -0.00105773 |
| 0.0075 | -0.00167307 | -0.00148500 | -0.00136545 | -0.00127392 | -0.00119616 |
| 0.0100 | -0.00192504 | -0.00167385 | -0.00151395 | -0.00138937 | -0.00128750 |
| 0.0200 | -0.00268936 | -0.00218581 | -0.00186143 | -0.00161077 | -0.00139701 |

Για το πραγματικό μέρος με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

| α/λ b/α | 1 (small) | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 0.0010 | 0.00174314 | 0.00174314 | 0.00174313 | 0.00174312 | 0.00174311 |
| 0.0050 | 0.00253945 | 0.00253937 | 0.00253913 | 0.00253872 | 0.00253813 |
| 0.0075 | 0.00285672 | 0.00285650 | 0.00285584 | 0.00285471 | 0.00285312 |
| 0.0100 | 0.00312866 | 0.00312821 | 0.00312685 | 0.00312454 | 0.00312127 |
| 0.0200 | 0.00401499 | 0.00401235 | 0.00400435 | 0.00399087 | 0.00397189 |

Τέλος για το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα έχουμε τον πίνακα:

| α/λ b/ α | 1 (small) | 2 | 3 | 4 | 5 |
|------------------------------|-----------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0.0010 | undefined | -0.00065811 | -0.00063447 | -0.00062002 | -0.00060875 |
| 0.0050 | undefined | -0.00134881 | -0.00122410 | -0.00114806 | -0.00108230 |
| 0.0075 | undefined | -0.00164291 | -0.00145692 | -0.00132970 | -0.00124036 |
| 0.0100 | undefined | -0.00189649 | -0.00164689 | -0.00147791 | -0.00135627 |
| 0.0200 | undefined | -0.00265079 | -0.00214557 | -0.00182037 | -0.00155006 |

Είναι γνωστό ότι η αντίστοιχη περίπτωση για τροφοδοσία μικρού frill δίνει αποκλίνοντα αποτελέσματα.

Επίλογος

Η παρούσα εργασία μελετά την διπολική κυλινδρική κεραία απείρου μήκους και πιο συγκεκριμένα επικεντρώνεται στην σύνθετη αγωγιμότητα εισόδου της και στις ιδιότητες που αυτό το μέγεθος επιδεικνύει σαν συνάρτηση των λοιπών παραμέτρων του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα εξετάζει τις μεταβολές που μπορεί να διαπιστώσει ο επιστήμονας στο κρίσιμο αυτό μέγεθος όταν η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα της ομοαξονικής γραμμής τροφοδοσίας αλλάζουν. Ωστόσο ο σκοπός της συγκεκριμένης εργασίας αρχικά ήταν να γίνει η ίδια διαδικασία για την πεπερασμένου μήκους διπολική κεραία. Το πρόβλημα της πεπερασμένης κεραίας είναι από τη φύση του δυσκολότερο από αυτό της άπειρης (άλλωστε αυτό μπορεί να διαπιστωθεί και από μία πλειάδα ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων στα οποία οι λύσεις των απείρων γεωμετριών προκύπτουν από τα όρια των συνθετότερων πεπερασμένων γεωμετριών για άπειρο μήκος). Επίσης πέραν της εγγενούς δυσκολίας του το πρόβλημα της πεπερασμένης κεραίας δεν έχει αναλυτική λύση και χρειάζεται η αριθμητική μέθοδος των ροπών προκειμένου να επιλυθεί. Βασισμένη σε αυτό η αρχική μας σκέψη είχε ως εξής: μελετώντας την άπειρη κεραία θα μπορούσαμε να εξάγουμε ένα άνω φράγμα μεταβολής στα κρίσιμα μεγέθη του πραγματικού και φανταστικού μέρους για την πεπερασμένη κεραία μιας και στην τελευταία υπήρχαν δύο επιπλέον λόγοι επιπρόσθετης αβεβαιότητας. Παρόλα αυτά η μελέτη των αντίστοιχων περιπτώσεων για την πεπερασμένη κεραία δεν επέφερε τα αναμενόμενα αποτελέσματα ούτε επιβεβαίωσε τις σκέψεις μας. Όπως εξάγεται από το παράρτημα (E) το πρόβλημα της πεπερασμένης κεραίας είναι αρκετά πολυπλοκότερο και δεν

υπακούει εύκολα σε γραμμικές σκέψεις όπως η παραπάνω. Σε κάθε περίπτωση πάντως η παρούσα έρευνα δεν είναι μηδενικής πρακτικής χρησιμότητας. Σε πολλές δημοσιευμένες εργασίες μεταξύ των οποίων και η παραπομπή [8] αναφέρεται ότι η άπειρη κεραία μπορεί να αποτελέσει εφιαλτήρα μελέτης του σύνθετου προβλήματος της πεπερασμένης κεραίας.

(A) ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Εξαγωγή ηλεκτρικού πεδίου frill generator

Θεωρούμε μία ομοαξονική γραμμή μεταφοράς με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b κυλινδρικού σχήματος που εντός της υπάρχει κενός χώρος (ϵ_0, μ_0) . Στην παρούσα ανάλυση γίνεται μία προσπάθεια να διερευνήσουμε τον TEM ρυθμό που κυματοδηγείται σε αυτήν, αλλά και να εξετάσουμε την χρήση μιας τέτοιας διάταξης για την τροφοδοσία κυλινδρικών διπόλων. Χρησιμοποιούνται κυλινδρικές συντεταγμένες $(\rho, \varphi, z, \hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται κατά τον άξονα z . Οι δύο σπλισμοί της γραμμής θεωρούμε ότι είναι τέλεια αγωγάι. Υποθέτουμε χρονική εξάρτηση της μορφής $\exp(-j \cdot \omega \cdot t)$ όπου ω η κυκλική συχνότητα λειτουργίας – τροφοδοσίας. Τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη που συμμετέχουν στο πρόβλημα είναι μιγαδικοί φασιθέτες. Θεωρούμε ότι η εξίσωση του ηλεκτρικού πεδίου έχει τη μορφή:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = (\hat{\rho} \cdot e_\rho(\rho, \varphi) + \hat{\varphi} \cdot e_\varphi(\rho, \varphi)) \cdot \exp(\gamma \cdot z) \quad (A.1)$$

Και του μαγνητικού:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z) = (\hat{\rho} \cdot h_\rho(\rho, \varphi) + \hat{\varphi} \cdot h_\varphi(\rho, \varphi)) \cdot \exp(\gamma \cdot z) \quad (A.2)$$

Όπου γ αναμένουμε να είναι φανταστικός αριθμός καθώς η μετάδοση γίνεται σε κενό μέσο χωρίς απώλειες. Θυμίζουμε ότι εξαιτίας της υπόθεσης για TEM κυματοδηγήση οι παράλληλες στον άξονα z συνιστώσες είναι μηδενικές. Επίσης μπορεί να παρατηρηθεί ότι η εξάρτηση από τη μεταβλητή z είναι κοινή για τα όλες τις συνιστώσες μιας και τα κύματα οδεύουν κατά μήκος του άξονα z . Δηλαδή ορίζουμε και τις πολικές συνιστώσες των πεδίων οι οποίες δεν έχουν εξάρτηση από τη μεταβλητή z όπως οι ολικές. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να αντιμετωπιστούν και όλα τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη που συμμετέχουν στο πρόβλημα όπως το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = f(\rho, \varphi) \cdot \exp(\gamma \cdot z) \quad (A.3)$$

Σημειωτέον ότι οι πολικές συνιστώσες έχουν τις ίδιες διαστάσεις με τις ολικές και κατά συνέπεια ο παράγοντας $\exp(\gamma \cdot z)$ λογίζεται σαν αδιάστατος.

Αν εφαρμοστεί ο νόμος του Faraday $\nabla \times \vec{E}(\rho, \varphi, z) = j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}(\rho, \varphi, z)$ εξάγουμε τρεις αλγεβρικές εξισώσεις μεταξύ των οποίων και η:

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot e_{\varphi}(\rho, \varphi)) - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial e_{\rho}(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Ας θεωρήσουμε το διάνυσμα:

$$\vec{e}(\rho, \varphi) = \hat{\rho} \cdot e_{\rho}(\rho, \varphi) + \hat{\varphi} \cdot e_{\varphi}(\rho, \varphi) \quad (\text{A.5})$$

Είναι διάνυσμα έντασης ηλεκτρικού πεδίου και η (A.4) μπορεί να γραφεί σαν:

$$(\text{A.4}) \stackrel{(\text{A.5})}{\Rightarrow} \nabla \times \vec{e}(\rho, \varphi) = \vec{0} \quad (\text{A.6})$$

Η σχέση (A.6) καταδεικνύει ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι αστρόβιλο επομένως θα γράφεται σαν την αρνητική κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης. Είναι λογικό να πρόκειται για το πολικό τμήμα της συνάρτησης του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού άρα θα ισχύει και η εξίσωση του Laplace γι' αυτή τη συνάρτηση δυναμικού:

$$\nabla^2 f(\rho, \varphi) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Με την ίδια λογική θα υπάρχουν οριακές συνθήκες για τη συνάρτηση $f(\rho, \varphi)$ που θα εξαχθούν από τις ισοδυναμικές επιφάνειες των τέλειων αγωγών. Οπότε θα έχουμε:

$$f(a, \varphi) = V_a \quad (\text{A.8})$$

και

$$f(b, \varphi) = V_b \quad (\text{A.9})$$

Υποθέτουμε ότι:

$$f(\rho, \varphi) = W(\rho) \cdot V(\varphi) \quad (\text{A.10})$$

Αν καταλήξουμε σε λύση που επαληθεύει τόσο την εξίσωση όσο και τις οριακές συνθήκες θα έχουμε καταλήξει στην μοναδική λύση από το θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας.

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση του δυναμικού στο εν λόγω επίπεδο θα είναι περιοδική ως προς φ με περίοδο $2 \cdot \pi$ λόγω των κυλινδρικών συντεταγμένων. Εφόσον ισχύει αυτό θα μπορούμε να αναπτύξουμε την $V(\varphi)$ σε σειρά Fourier οπότε θα είναι:

$$(\text{A.10}) \Rightarrow f(\rho, \varphi) = W(\rho) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} [R_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + T_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \quad (\text{A.11})$$

Όμως αν εφαρμόσουμε μία από τις δύο οριακές συνθήκες θα έχουμε:

$$(\text{A.10}) \stackrel{(\text{A.8})}{\Rightarrow} W(a) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} [R_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + T_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)] = V_a \Rightarrow$$

$$W(a) \cdot \left[R_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [R_n \cdot \cos(n \cdot \varphi) + T_n \cdot \sin(n \cdot \varphi)] \right] = V_a \Rightarrow$$

$$R_n = T_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\text{A.12})$$

Εφόσον οι οριακές συνθήκες ισχύουν για κάθε ρ και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Με αυτό τον τρόπο καταλήξαμε ότι η πολική συνάρτηση του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού θα είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής φ και άρα συμβολίζουμε:

$$f(\rho, \varphi) = f(\rho) \quad (\text{A.13})$$

Από την εξίσωση Laplace σε πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$(\text{A.7}) \Rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial(f(\rho))}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2(f(\rho))}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \cdot \frac{\partial(f(\rho))}{\partial \rho} \right) = 0 \Rightarrow \rho \cdot \frac{\partial(f(\rho))}{\partial \rho} = D \Rightarrow$$

$$f(\rho) = D \cdot \ln(\rho) + G \quad (\text{A.14})$$

Όπου D και G προσδιορίσιμοι μέσω των συνοριακών συνθηκών αριθμοί. Πράγματι από την πρώτη οριακή συνθήκη:

$$(\text{A.14}) \stackrel{(\text{A.8})}{\Rightarrow} D \cdot \ln(\alpha) + G = V_a \Rightarrow G = V_a - D \cdot \ln(\alpha) \quad (\text{A.15})$$

Επίσης από την άλλη:

$$(\text{A.14}) \stackrel{(\text{A.9})}{\Rightarrow} D \cdot \ln(b) + G = V_b \stackrel{(\text{A.15})}{\Rightarrow} D \cdot \ln(b) + V_a - D \cdot \ln(\alpha) = V_b$$

$$\Rightarrow D \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right) = V_b - V_a \Rightarrow D = \frac{V_b - V_a}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \Rightarrow$$

$$D = \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \quad (\text{A.16})$$

Όπου ΔV είναι η διαφορά δυναμικού εξωτερικής και εσωτερικής επιφάνειας.

Αντικαθιστώντας πίσω θα έχουμε:

$$(\text{A.15}) \stackrel{(\text{A.16})}{\Rightarrow} G = V_a - \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \ln(\alpha) \quad (\text{A.17})$$

και άρα η συνάρτηση του βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού προκύπτει ως:

$$(\text{A.14}) \stackrel{(\text{A.16})}{\Rightarrow} f(\rho) = \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \ln(\rho) + V_a - \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \ln(\alpha) \quad (\text{A.18})$$

Δηλαδή καταλήξαμε στη μοναδική λύση.

Επομένως μπορεί να ειπωθεί ότι εξάγαμε τη συνάρτηση του ολικού βαθμωτού ηλεκτρικού δυναμικού. Πράγματι:

$$(A.13) \stackrel{(A.18)}{\Rightarrow} \Phi(\rho, z) = \left(V_a + \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) \right) \cdot \exp(\gamma \cdot z) \quad (A.19)$$

Υπάρχει ανεξαρτησία από την μεταβλητή φ . Εφαρμόζοντας τον τύπο του αστροβίλου:

$$\vec{E}(\rho, z) = -\nabla\Phi(\rho, z) \quad (A.20)$$

έχουμε:

$$(A.20) \Rightarrow \vec{E}(\rho, z) = -\hat{\rho} \cdot \frac{\partial\Phi(\rho, z)}{\partial\rho} - \hat{z} \cdot \frac{\partial\Phi(\rho, z)}{\partial z} \stackrel{(A.19)}{\Rightarrow}$$

$$\vec{E}(\rho, z) = -\hat{\rho} \cdot \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \exp(\gamma \cdot z) - \hat{z} \cdot \gamma \cdot \left(V_a + \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \ln\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) \right) \cdot \exp(\gamma \cdot z) \quad (A.21)$$

Επομένως αν ενδιαφερόμαστε για ένα επίπεδο παράλληλο στο $x - y$ μπορούμε να έχουμε την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου για κάθε σημείο εντός της λωρίδας κενού χώρου με $\rho \in (\alpha, b)$. Στο εξής δε θα περιοριστούμε στην ανάλυση μόνο αυτού του δακτυλίου αλλά την λειτουργία της αντίστοιχης επιφάνειας σαν πηγή (είτε ηλεκτρικών ρευμάτων είτε ισοδύναμα μαγνητικών ρευμάτων) ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Αν εισάγουμε στη συλλογιστική μας τα μαγνητικά επιφανειακά ρεύματα λοιπόν θα έχουμε από τη σχέση ορισμού τους (\hat{z} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια τροφοδοσίας) ότι:

$$\vec{M}(\rho, z) = \vec{E}(\rho, z) \times \hat{z} \stackrel{(A.21)}{\Rightarrow} \vec{M}(\rho) = -\hat{\rho} \cdot \frac{\Delta V}{\rho \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \times \hat{z} \Rightarrow \vec{M}(\rho) = \hat{\varphi} \cdot \frac{\Delta V}{\rho \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \quad (A.22)$$

Εισάγοντας την έννοια του διανυσματικού ηλεκτρικού δυναμικού θα έχουμε (από τον αντίστοιχο τύπο του ολοκληρώματος ακτινοβολίας):

$$\vec{F} = \frac{\epsilon_0}{4 \cdot \pi} \cdot \iint_S \vec{M}' \cdot \frac{\exp(j \cdot k \cdot R')}{R'} \cdot dS' \quad (A.23)$$

Η ολοκλήρωση θα γίνει σε πολικές συντεταγμένες και άρα θα είναι:

$$dS' = \rho' \cdot \cos\varphi' \cdot d\varphi' \cdot d\rho' \quad (A.24)$$

Επίσης θα είναι από παραπάνω:

$$\vec{M}' = \vec{M}(\rho') = \hat{\varphi}' \cdot \frac{\Delta V}{\rho' \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (\text{A.25})$$

καθώς το διάνυσμα $\hat{\varphi}'$ είναι διαφορετικής κατεύθυνσης απ' ότι το $\hat{\varphi}$ στη γενική περίπτωση (δεν είναι όπως σε άλλες περιπτώσεις με το διάνυσμα \hat{z} που βγαίνει εκτός του ολοκληρώματος ως σταθερό). Επίσης R' είναι η απόσταση των σημείων παρατήρησης (ρ, φ, z) και πηγής (ρ', φ', z') . Προκειμένου να εξαχθεί η απόσταση R' αρκούν δύο πυθαγόρεια θεωρήματα στο πολικό και στο κάθετο σε αυτό επίπεδο:

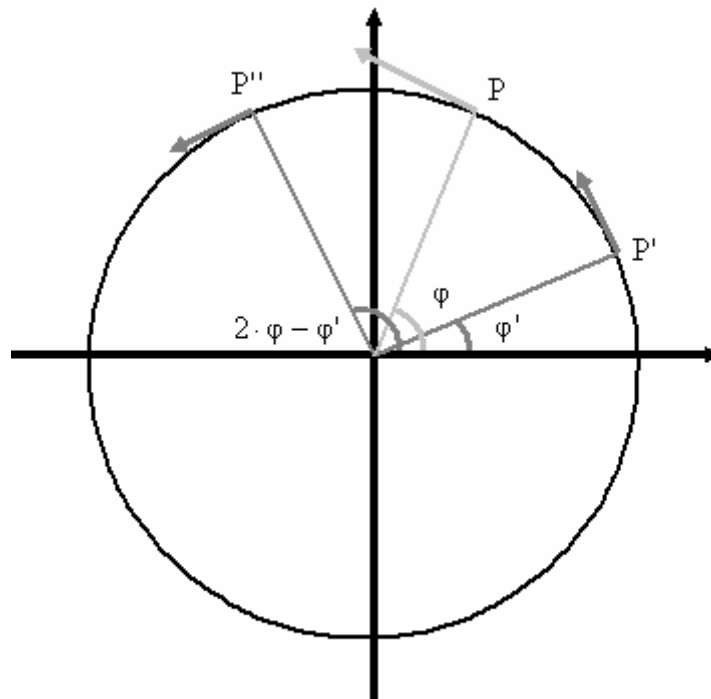
$$R' = R'(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi') = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')} \quad (\text{A.26})$$

Επίσης είναι σαφές ότι: $k = \omega \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}$ καθώς πλέον η συχνότητα λειτουργίας – τροφοδοσίας δεν είναι μηδενική (δεν μελετάμε το πρόβλημα της άπειρης γραμμής μεταφοράς. Κατά συνέπεια προχωρώντας στην ολοκλήρωση έχουμε:

$$\begin{aligned} (\text{A.23}) \quad & \xrightarrow[\text{(A.26)}]{\text{(A.24)(A.25)}} \vec{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{\epsilon_0 \cdot \Delta V}{4 \cdot \pi} \cdot \\ & \int_a^b \int_0^\pi \hat{\varphi}' \cdot \frac{1}{\rho' \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}\right)}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}} \cdot \rho' \cdot 2 \cdot \cos(\varphi - \varphi') \cdot d\varphi' \cdot d\rho' \Rightarrow \\ \vec{F}(\rho, \varphi, z) &= \frac{\epsilon_0}{2 \cdot \pi} \cdot \hat{\varphi}' \cdot \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \\ & \int_a^b \int_0^\pi \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}\right)}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}} \cdot \cos(\varphi - \varphi') \cdot d\varphi' \cdot d\rho' \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

Η ύπαρξη του συνημιτόνου ίσως προκαλεί ερωτηματικά καθώς δεν είναι προφανής η αναγκαιότητά της. Σχετίζεται με την μετατροπή των διανυσμάτων $\hat{\varphi}'$ των σημείων πηγής και του γνωστού $\hat{\varphi}$ του σημείου παρατήρησης αλλά και με τα άκρα ολοκλήρωσης της μεταβλητής φ' . Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε την επίδραση ενός κύκλου της ομοαξονικής λωρίδας της πηγής στο σημείο παρατήρησης. Τότε το μαγνητικό ρεύμα στα σημεία με γωνίες $\varphi - (\varphi - \varphi') = \varphi'$ και $\varphi + (\varphi - \varphi') = 2 \cdot \varphi + \varphi'$ θα ισοδυναμεί με ρεύμα κατά την κατεύθυνση $\hat{\varphi}$ καθώς οι κάθετες ($\hat{\rho}$) συνιστώσες θα αλληλοεξουδετερώνονται. Όσο πιο κοντά στο φ είναι το φ' που λαμβάνουμε υπόψη στον υπολογισμό του ολοκληρώματος τόσο μεγαλύτερη θα είναι η τελική

συνεισφορά ανάλογη του παράγοντα $2 \cdot \cos(\varphi - \varphi')$ όπως αποδεικνύεται από την τριγωνομετρία του παρακάτω σχήματος (Α.1).



Σχήμα (Α.1)

Επειδή μάλιστα παίρνουμε τα σημεία της πηγής ανά ζεύγη ολοκληρώνουμε μόνο στο ημικύκλιο και όχι στον κύκλο.

Συνεπώς γνωρίζουμε χρησιμοποιώντας μόνο μαγνητικά ρεύματα (οπότε το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό είναι μηδενικό) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο ορισμού του:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \nabla \times \vec{F}(\rho, \varphi, z) \quad (\text{A.28})$$

Για λόγους που αφορούν τη χρήση αυτής της διάταξης τροφοδοσίας (άπειρο ή πεπερασμένο κυλινδρικό δίπολο με άξονα ταυτιζόμενο με τον άξονα z του συστήματος κυλινδρικών συντεταγμένων) μας ενδιαφέρει η z συνιστώσα του πεδίου. Κατά συνέπεια δεδομένου ότι το διανυσματικό ηλεκτρικό δυναμικό έχει μόνο φ συνιστώσα θα έχουμε τον τύπο:

$$E_z(\rho, \varphi, z) = \hat{z} \cdot \vec{E}(\rho, \varphi, z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \cdot \hat{\varphi} \cdot \vec{F}(\rho, \varphi, z)) \Rightarrow$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = -\frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \hat{\varphi} \cdot \vec{F}(\rho, \varphi, z) - \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \rho \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\hat{\varphi} \cdot \vec{F}(\rho, \varphi, z)) \Rightarrow$$

$$E_z(\rho, \varphi, z) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z) - \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z)) \quad (\text{A.29})$$

Αν ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά του πεδίου για $\rho \rightarrow 0$ έχουμε ότι:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} [\bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z)] = 0 \quad (\text{A.30})$$

καθώς σε αντίθετη περίπτωση θα είχαμε μη πεπερασμένο πεδίο εκτός της πηγής (ομοαξονικής λωρίδας με εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική ακτίνα b) κάτι που φαίνεται από την (A.29) και δεν είναι λογικό. Άρα θα είναι:

$$\begin{aligned} (\text{A.30}) \Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z) \right] & \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z)) \right] \Rightarrow \\ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z) \right] & = \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z)) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

και έτσι για $\rho \rightarrow 0$ θα έχουμε:

$$(\text{A.29}) \stackrel{(\text{A.31})}{\Rightarrow} E_z(\varphi, z) = -\frac{2}{\varepsilon_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} (\bar{\varphi} \cdot \bar{F}(\rho, \varphi, z)) \Big|_{\rho=0} \quad (\text{A.32})$$

Επιστρέφουμε στην ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} (\text{A.27}) \stackrel{(\text{A.32})}{\Rightarrow} E_z(\varphi, z) & = -\frac{\Delta V}{\pi \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^b \int_0^\pi \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi - \varphi')}} \cdot \cos(\varphi - \varphi') \cdot d\varphi' \cdot d\rho' \right) \Big|_{\rho=0} \Rightarrow \\ E_z(\varphi, z) & = -\frac{\Delta V}{\pi \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \\ & \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_0^b \int_0^\pi \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos(\varphi' - \varphi)}} \cdot \cos(\varphi' - \varphi) \cdot d(\varphi' - \varphi) \cdot d\rho' \right) \Big|_{\rho=0} \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Θα μπορούσαμε να ολοκληρώσουμε από φ έως $\varphi + \pi$ ως προς φ' . Αυτό δείχνει πως η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι ανεξάρτητη της μεταβλητής φ . Κατά συνέπεια μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν ενδιάμεσο τύπο που θα περικλείει όλη την πληροφορία και φαίνεται στην επόμενη σελίδα:

$$(A.33) \Rightarrow E_z(z) = -\frac{\Delta V}{\pi \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\int_a^b \int_0^\pi \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos \varphi'}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos \varphi'}} \cdot \cos \varphi' \cdot d\varphi' \cdot d\rho' \right) \right|_{\rho=0} \quad (A.34)$$

Εάν εναλλάξουμε την σειρά παραγωγίσις και ολοκλήρωσης υπό την προϋπόθεση ότι το σημείο παρατήρησης είναι εκτός της πηγής ώστε να συγκλίνει το ολοκλήρωμα (κάτι που ισχύει) προκύπτει η αναγκαιότητα να γίνει η πράξη του εσωτερικού του ολοκληρώματος. Με τη βοήθεια ενός μαθηματικού πακέτου προκύπτει:

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos \varphi'}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + \rho^2 + (\rho')^2 + 2 \cdot \rho \cdot \rho' \cdot \cos \varphi'}} \right) \right|_{\rho=0} = \\ & = -\frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right) \cdot \rho' \cdot \cos \varphi'}{\left(\sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right)^3} + \frac{j \cdot k \cdot \exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right) \cdot \rho' \cdot \cos \varphi'}{(z-z_0)^2 + (\rho')^2} \quad (A.35) \end{aligned}$$

Είναι γεγονός ότι καταλήγουμε σε ολοκλήρωμα χωριζόμενων μεταβλητών οπότε το ολοκλήρωμα: $\int_0^\pi \cos^2 \varphi' \cdot d\varphi' = \frac{\pi}{2}$ θα υπάρχει σαν πολλαπλασιαστική σταθερά στην παράσταση. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} (A.34) \stackrel{(A.35)}{\Rightarrow} E_z(z) &= -\frac{\Delta V}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[-\int_a^b \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right) \cdot \rho'}{\left(\sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right)^3} \cdot d\rho' + \right. \\ & \left. + j \cdot k \cdot \int_a^b \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right) \cdot \rho'}{(z-z_0)^2 + (\rho')^2} \cdot d\rho' \right] \Rightarrow \\ E_z(z) &= -\frac{\Delta V}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \int_a^b \frac{\partial}{\partial \rho'} \left(\frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}} \right) \cdot d\rho' \Rightarrow \\ E_z(\rho, z) &= -\frac{\Delta V}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + (\rho')^2}} \right]_a^b \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E_z(z) = \frac{\Delta V}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + a^2}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + a^2}} - \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{(z-z_0)^2 + b^2}\right)}{\sqrt{(z-z_0)^2 + b^2}} \right]$$

Θυμίζουμε ότι η παραπάνω έκφραση ισχύει κοντά στο άξονα του κυλίνδρου $\rho \rightarrow 0$. Επίσης αν η πηγή βρίσκεται στο $z_0 = 0$ κάτι που ισχύει στην περίπτωση του frill generator και εάν οριστεί η τάση σαν το αντίθετο της πιο πάνω διαφοράς δυναμικού θα είναι:

$$E_z(z) = -\frac{V}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \left[\frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + a^2}\right)}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + b^2}\right)}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \quad (\text{A.36})$$

(B) ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β**Αναγκαιότητα μη εναλλαγής τελεστών**

Εισάγουμε κάποια στοιχειώδη μεγέθη που ήδη έχουν οριστεί. Ο ακριβής πυρήνας ολοκλήρωσης:

$$K_{\text{ex}}(z, \alpha) = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \quad (\text{B.1})$$

Η ολοκληρωτικοδιαφορική εξίσωση τύπου Rocklington που αυτός συμμετέχει:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = V \cdot f(z) \quad (\text{B.2})$$

και

$$f(z) = \begin{cases} f_{\text{dlt}}(z) = \frac{j \cdot k}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \\ f_{\text{fhl}}(z) = \frac{j \cdot k}{\zeta_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot \ln\left(\frac{b}{\alpha}\right)} \cdot \left[\frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + \alpha^2})}{\sqrt{z^2 + \alpha^2}} - \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + b^2})}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

ανάλογα με τον τύπο τροφοδοσίας που επιλέγεται.

Θα είναι:

$$K_{\text{ex}}(z, \alpha) = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' - \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' + \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \quad (\text{B.4})$$

Υπολογίζουμε την ποσότητα της πρώτης σειράς:

$$\left| \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' - \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \right| =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right) - 1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \right| \leq \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right) - 1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \right| \\
& = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\left(k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right) + j \cdot \sin\left(k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right) - 1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \right| \\
& = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{\left(\cos\left(k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right) - 1\right)^2 + \sin^2\left(k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \\
& = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{2 - 2 \cdot \cos\left(k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \\
& = \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot \sin^2\left(\frac{k}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' \tag{B.5}
\end{aligned}$$

Η συγκεκριμένη ολοκληρωτέα συνάρτηση αν έχει πρόβλημα απειρισμού θα το παρουσιάζει όταν $z = 0$ και $\varphi' = 0$. Παρατηρούμε πως:

$$\lim_{\varphi' \rightarrow 0} \sqrt{\frac{4 \cdot \sin^2\left(\frac{k}{2} \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}\right)}{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right)}} = \lim_{\varphi' \rightarrow 0} \frac{\sin\left(k \cdot \alpha \cdot \sin\left(\frac{\varphi'}{2}\right)\right)}{\alpha \cdot \sin\left(\frac{\varphi'}{2}\right)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(k \cdot \alpha \cdot u)}{\alpha \cdot u} = \frac{k \cdot \alpha}{\alpha} = k$$

Δηλαδή η συγκεκριμένη ολοκληρωτέα είναι πεπερασμένη σε όλο το διάστημα ολοκλήρωσής της και εφόσον αυτό είναι πεπερασμένο πρόκειται για συγκλίνον πεπερασμένο ολοκλήρωμα. Μέσω της ανισότητας συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα

$$\frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp\left(j \cdot k \cdot \sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}\right)}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi' - \frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\varphi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\varphi'$$

είναι ένας πεπερασμένος μιγαδικός αριθμός για οποιαδήποτε $z \in \mathbb{R}$.

Έχει σειρά η ποσότητα της δεύτερης σειράς που λόγω της άρτιας ολοκληρωτέας γίνεται:

$$\frac{1}{8 \cdot \pi^2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\Phi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\Phi' = \frac{1}{4 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2\left(\frac{\Phi'}{2}\right) + z^2}} \cdot d\Phi' \quad (\text{B.6})$$

Παρακάτω θα χρειαστεί το ακόλουθο λήμμα:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-A \cdot \cos^2(u)}} \cdot du &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-A \cdot \sin^2(u)}} \cdot du \xrightarrow{u \rightarrow -u} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-A \cdot \cos^2(u)}} \cdot du &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-A \cdot \sin^2(u)}} \cdot du \Rightarrow \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-A \cdot \cos^2(u)}} \cdot du &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-A \cdot \sin^2(u)}} \cdot du \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής ολοκλήρωσης: $\frac{\Phi'}{2} = u \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} d\Phi' = 2 \cdot du \\ \Phi' = 0 \rightarrow u = 0 \\ \Phi' = \pi \rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}$ και

άρα θα είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(u) + z^2}} \cdot du &= \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot \cos^2(u) + z^2}} \cdot du \Rightarrow \\ \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(u) + z^2}} \cdot du &= \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 + z^2 - 4 \cdot \alpha^2 \cdot \cos^2(u)}} \cdot du \Rightarrow \\ \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(u) + z^2}} \cdot du &= \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 + z^2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4 \cdot \alpha^2}{4 \cdot \alpha^2 + z^2} \cdot \cos^2(u)}} \cdot du \Rightarrow \\ \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(u) + z^2}} \cdot du &= \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 + z^2}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4 \cdot \alpha^2}{4 \cdot \alpha^2 + z^2} \cdot \sin^2(u)}} \cdot du \Rightarrow \\ \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 \cdot \sin^2(u) + z^2}} \cdot du &= \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{4 \cdot \alpha^2 + z^2}} \cdot K\left(\frac{4 \cdot \alpha^2}{4 \cdot \alpha^2 + z^2}\right) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

όπου η συνάρτηση $K(z)$ είναι το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου τύπου.

Είναι γνωστό ότι για μοναδιαίο όρισμα η συγκεκριμένη συνάρτηση απειρίζεται με τρόπο λογαριθμικό. Μάλιστα ισχύει η πιο κάτω ασυμπτωτική έκφραση:

$$K\left(\frac{A}{A+z^2}\right) \sim -\frac{1}{2} \cdot \ln(|z|) \quad , z \rightarrow 0 \quad (\text{B.9})$$

για οποιοδήποτε μιγαδικό A και $z \in \mathbb{R}$. Κατά συνέπεια η παραπάνω ποσότητα συμπεριφέρεται καθώς $z \rightarrow 0$ ως εξής:

$$(\text{B.7}) \Rightarrow K\left(\frac{4 \cdot \alpha^2}{4 \cdot \alpha^2 + z^2}\right) \sim \frac{1}{2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \ln(|z|) = -\frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z|) \quad (\text{B.10})$$

Επομένως καθώς $z \rightarrow 0$ έχουμε την ακόλουθη ασυμπτωτική έκφραση για τον ακριβή πυρήνα:

$$(\text{B.4}) \stackrel{(\text{B.5})}{\Rightarrow} \stackrel{(\text{B.9})}{K_{\text{ex}}(z, \alpha)} \sim -\frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z|) + p \quad , z \rightarrow 0 \quad (\text{B.11})$$

όπου $p \in \mathbb{C}$ σταθερός μιγαδικός πεπερασμένος αριθμός. Επειδή το σημείο $z = 0$ είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο μπορεί ο ακριβής πυρήνας να απειρίζεται μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε αυτή την περίπτωση εναλλάσσοντας τον τελεστή διαφορίσης και ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right) K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' \stackrel{(\text{B.11})}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right) \left(p - \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z|)\right) \cdot dz' \Rightarrow \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right) K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{\partial^2}{\partial z'^2} \left(p - \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z - z'|)\right) \cdot dz' + k^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(p - \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z - z'|)\right) \cdot dz' \Rightarrow \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right) K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{\partial}{\partial z'} \left(-\frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{z - z'}\right) \cdot dz' + k^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(p - \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z - z'|)\right) \cdot dz' \Rightarrow \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right) K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \frac{1}{(z - z')^2} \cdot dz' + k^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(p - \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z - z'|)\right) \cdot dz' \Rightarrow \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2} + k^2\right) K_{\text{ex}}(z - z', \alpha) \cdot dz' = \\ & = \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{(z - z')^2} \cdot dz' + k^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \left(p - \frac{1}{8 \cdot \pi^2 \cdot \alpha} \cdot \ln(|z - z'|)\right) \cdot dz' \quad (\text{B.12}) \end{aligned}$$

Εάν $I(z')$ υποτεθεί συνεχές στο $z' \in (-\infty, +\infty)$ κάτι που είναι λογικό καθώς είναι άρτια συνάρτηση του z' , τότε για κάθε $z \in (-\infty, +\infty)$ (πολύ περισσότερο όταν το παραπάνω ισχύει για $z \rightarrow 0$) το πρώτο ολοκλήρωμα δεν θα συγκλίνει. Πράγματι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} I(z') \cdot \frac{1}{(z-z')^2} \cdot dz' = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z-u) \cdot \frac{1}{u^2} \cdot du. \text{ Το } u=0 \text{ περιλαμβάνεται στο διάστημα}$$

ολοκλήρωσης καθώς $z \rightarrow 0$ ενώ το $I(z \rightarrow 0)$ είναι πεπερασμένο (ανάλογο αγωγιμότητας εισόδου που δεν μπορεί να είναι άπειρη). Άρα στο σημείο ενδεχόμενης

απόκλισης υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_{-z}^z \frac{du}{u^2}$ το οποίο είναι φυσικά αποκλίνον.

Επομένως ενώ η ποσότητα $\int_{-h}^h I(z') \cdot K_{\text{ex}}(z-z', \alpha) \cdot dz'$ είναι μία ομαλή συνάρτηση του

z που παραγωγίζεται εκ των υστέρων η συνάρτηση

$\int_{-h}^h I(z') \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) K_{\text{ex}}(z-z', \alpha) \cdot dz'$ είναι μία συνάρτηση με ανωμαλία (απειρισμό)

στο $z=0$ κάτι που δεν έχει για παράδειγμα η ίση της

$$f_{\text{fil}}(z) = \frac{j \cdot k}{\zeta_0} \cdot \frac{1}{2 \cdot \ln \frac{b}{a}} \cdot \left[\frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + a^2})}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{\exp(j \cdot k \cdot \sqrt{z^2 + b^2})}{\sqrt{z^2 + b^2}} \right] \text{ ή ακόμα και η}$$

$$f_{\text{dit}}(z) = \frac{j \cdot k}{\zeta_0} \cdot \delta(z) \text{ της οποίας η ανωμαλία είναι καθορισμένου ύψους.}$$

Κατά συνέπεια δεν μπορούμε να εναλλάξουμε τους δύο τελεστές. Αντίθετα θα πρέπει να επιλύσουμε πρώτα τη διαφορική. Όλα τα παραπάνω δεν ισχύουν για τον προσεγγιστικό πυρήνα που είναι παντού πεπερασμένος (στο $z=0$ έχει μέγιστο αυξανόμενο με την λεπτότητα της κεραίας).

(Γ) ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Εύρεση μερικής λύσης

Στο συγκεκριμένο παράρτημα θα γίνει απόπειρα επίλυσης της διαφορικής εξίσωσης:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)f(z) = g(z) \quad (\Gamma.1)$$

Η επίλυση αυτής θα γίνει με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier ο οποίος ορίζεται ως εξής:

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cdot \exp(j \cdot z \cdot \zeta) \cdot dz \quad (\Gamma.2)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier:

$$f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\zeta) \cdot \exp(-j \cdot z \cdot \zeta) \cdot dz \quad (\Gamma.3)$$

Συμβολίζουμε με παρόμοιο τρόπο, με $G(\zeta)$ τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $g(z)$. Παίρνουμε το μετασχηματισμό Fourier της διαφορικής μας εξίσωσης λαμβάνοντας υπόψη ότι ο μετασχηματισμός της δεύτερης παραγώγου $\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2}$ είναι $-\zeta^2 \cdot F(\zeta)$ από γνωστή ιδιότητα. Πράγματι:

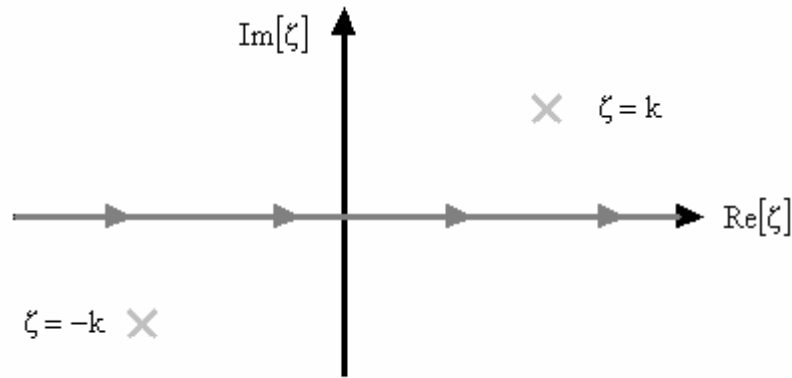
$$(k^2 - \zeta^2) \cdot F(\zeta) = G(\zeta) \quad (\Gamma.4)$$

Κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$(\Gamma.3) \stackrel{(\Gamma.4)}{\Rightarrow} f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{G(\zeta) \cdot \exp(-j \cdot z \cdot \zeta)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta \quad (\Gamma.5)$$

Αλλά το τελευταίο αυτό ολοκλήρωμα αποκλίνει λόγω των πόλων στα $\zeta = \pm k$. Για να ξεπεράσουμε το εμπόδιο αυτό θεωρούμε αρχικά ότι $\text{Im}[k] > 0$. Για την εξίσωση του Rocklington, αυτό σημαίνει ότι το μέσον που περιβάλλει την κεραία έχει απώλειες.

Με αυτή την παραδοχή η εξίσωση (Γ.5) έχει νόημα. Οι θέσεις των πόλων και του δρόμου ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο ζ φαίνονται στο ακόλουθο σχήμα (Γ.1):

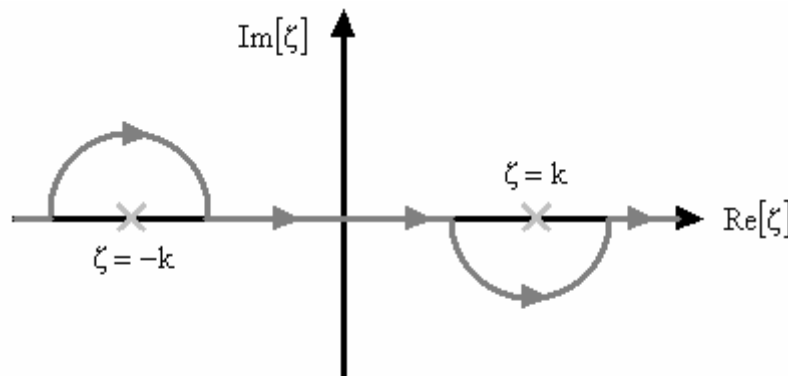


Σχήμα (Γ.1)

Εάν σε αυτό το σημείο εκτιμηθεί το όριο $\text{Im}[k] \rightarrow 0$ θα έχουμε αντί της (Γ.5) τη σχέση:

$$(Γ.5) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_C \frac{G(\zeta) \cdot \exp(-j \cdot z \cdot \zeta)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta \quad (Γ.6)$$

Όπου ο δρόμος ολοκλήρωσης C φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα (Γ.2):



Σχήμα (Γ.2)

Προκειμένου να απλοποιηθεί η λύση εισάγουμε την έκφραση του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης στην εξίσωση (Γ.6) και εναλλάσσουμε την σειρά των ολοκληρώσεων:

$$(Γ.6) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_C \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot t \cdot \zeta) \cdot dt \cdot \exp(-j \cdot z \cdot \zeta)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \int_C \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot (t - z))}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta \cdot dt \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot I(k, t - z) \cdot dt \quad (Γ.7)$$

Όπου με $I(k, x)$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I(k, x) = \int_C \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta \quad (\Gamma.8)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα πρόκειται να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας περιγραμμική ολοκλήρωση ξεχωριστά για τις δύο περιπτώσεις $x > 0$ και $x < 0$. Εάν $x > 0$ ($x < 0$) κλείνουμε το δρόμο ολοκλήρωσης στο άνω (κάτω) ημιεπίπεδο σύμφωνα με το λήμμα του Jordan. Για $x > 0$ θα έχουμε:

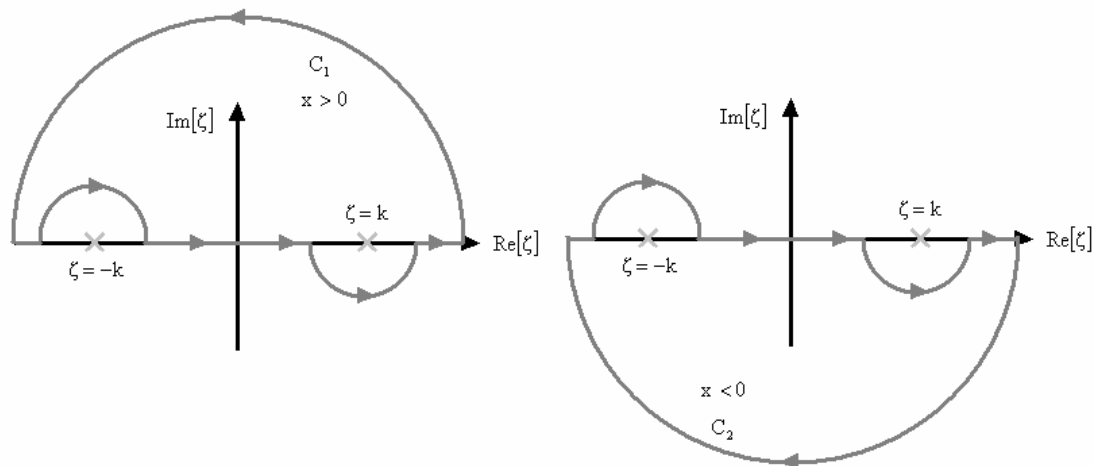
$$I(k, x) = \oint_{C_1} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta = 2 \cdot \pi \cdot j \cdot \text{Res} \left[-\frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{(\zeta - k) \cdot (\zeta + k)}, \zeta = k \right], x > 0 \Rightarrow$$

$$I(k, x) = \oint_{C_1} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta = -\frac{j \cdot \pi}{k} \cdot \exp(j \cdot k \cdot x), x > 0 \quad (\Gamma.9)$$

όπου με $\text{Res}[a(\zeta), \zeta = k]$ συμβολίζουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης $a(\zeta)$ στο σημείο $\zeta = k$ ενώ C_1 είναι ο δρόμος ολοκλήρωσης που φαίνεται στο σχήμα $\langle \Gamma.3 \rangle$. Για $x < 0$ θα έχουμε παρόμοια:

$$I(k, x) = \oint_{C_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta = -2 \cdot \pi \cdot j \cdot \text{Res} \left[-\frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{(\zeta - k) \cdot (\zeta + k)}, \zeta = -k \right], x < 0 \Rightarrow$$

$$I(k, x) = \oint_{C_2} \frac{\exp(j \cdot \zeta \cdot x)}{k^2 - \zeta^2} \cdot d\zeta = -\frac{j \cdot \pi}{k} \cdot \exp(j \cdot k \cdot x), x < 0 \quad (\Gamma.10)$$

Σχήμα $\langle \Gamma.3 \rangle$

Σε μία ενοποιημένη μορφή οι $(\Gamma.9)$ και $(\Gamma.10)$ γράφονται σαν:

$$(\Gamma.9) \Rightarrow I(k, x) = -\frac{j \cdot \pi}{k} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |x|), x \in \mathbb{R} \quad (\Gamma.11)$$

καθώς μπορεί να επεκταθεί και στο $x = 0$ λόγω συνέχειας. Προχωρώντας θα είναι:

$$(Γ.7) \Rightarrow f(z) = -\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \frac{j \cdot \pi}{k} \cdot \exp(j \cdot k \cdot |t - z|) \cdot dt \Rightarrow$$

$$f(z) = -\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt - \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_z^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt \quad (Γ.12)$$

Κατά συνέπεια η (Γ.12) δίνει μία λύση της (Γ.1). Μπορούμε όμως να βρούμε άλλη λύση που έχει πιο κομψή μορφή και είναι καταλληλότερη για αριθμητική ολοκλήρωση. Μπορεί να παρατηρηθεί ότι τα ολοκληρώματα

$$-\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^0 g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt \quad \text{και} \quad -\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt$$

είναι της μορφής $W \cdot \exp(\pm j \cdot k \cdot z)$ και επομένως ικανοποιεί πλήρως την ομογενή εξίσωση:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \left(-\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^0 g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt \right) = 0 \quad (Γ.13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \left(-\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt \right) = 0 \quad (Γ.14)$$

Επομένως μία ακόμα λύση της διαφορικής εξίσωσης $f^*(z)$ προκύπτει από την αφαίρεση των παραπάνω δύο ολοκληρωμάτων από την τελευταία συνάρτηση $f(z)$.

$$f^*(z) = f(z) + \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^0 g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt + \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt \Rightarrow \quad (Γ.12)$$

$$f^*(z) = -\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt - \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_z^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt +$$

$$+ \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_{-\infty}^0 g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt + \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_0^{+\infty} g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$f^*(z) = -\frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (z - t)) \cdot dt + \frac{j}{2 \cdot k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \exp(j \cdot k \cdot (t - z)) \cdot dt \Rightarrow$$

$$f^*(z) = \frac{1}{k} \cdot \int_0^z g(t) \cdot \sin(k \cdot (z - t)) \cdot dt \quad (Γ.15)$$

| | |
|-----|-----------------------|
| (Δ) | ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ |
|-----|-----------------------|

Κώδικες προγραμμάτων matlab άπειρης κεραίαςhankell.m

Η συνάρτηση Hankel πρώτου είδους που δεν υπάρχει ως standard στην υπολογιστική πλατφόρμα του matlab.

```
function [out] = hankell(n, x)
out = besselj(n, x) + i*bessely(n, x);
```

Kernel.m

Η συνάρτηση του μετασχηματισμού Fourier του πυρήνα της ολοκληρωτικής εξίσωσης (ακριβούς ή προσεγγιστικού).

```
function [out] = Kernel(z, a, SortOfKernel)
if strcmp(SortOfKernel, 'approximate')
    out = (i/4)*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2));
elseif strcmp(SortOfKernel, 'exact')
    out = (i/4)*besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2)).*hankell(0,
a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2));
else
    disp('function Kernel: Wrong Input');
end
```

Integrant.m

Οι κάθε φύσης ολοκληρωτέες συναρτήσεις που χρειάζονται προκειμένου από την ολοκλήρωσή τους να προκύψει το ποθητό μέγεθος.

```
function [out] = Integrant(z, a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel,
ByPassHeight, ByPassLength, NumberOfIntegral)
format long g;
switch SortOfGenerator
case 'delta'
    C = 1/(15*pi);
    switch SortOfKernel
    case 'exact'
        switch NumberOfIntegral
```

```

    case 'first'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - z.^2).*besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 -
z.^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'second'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 +
i*z).^2).*besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 +
i*z).^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 + i*z).^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    case 'third'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2).*besselj(0,
a*sqrt((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (z
- ByPassHeight*i).^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'forth'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 +
i*z).^2).*besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 +
i*z).^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 + i*z).^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN INTEGRAL');

end

case 'approximate'

    switch NumberOfIntegral

    case 'first'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - z.^2).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 -
z.^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'second'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 +
i*z).^2).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 + i*z).^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

```

```

    case 'third'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2).*hankell(0,
a*sqrt((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'forth'

        Numerator = 1;

        Denominator = ((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 +
i*z).^2).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 + i*z).^2));

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN INTEGRAL');

end

otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN KERNEL');

end

case 'frill'

    C = i/(30*log(b/a));

    switch SortOfKernel

    case 'exact'

        switch NumberOfIntegral

        case 'first'

            Numerator = Kernel(z, a, 'approximate') - Kernel(z, b,
'approximate');

            Denominator = Kernel(z, a, SortOfKernel).*((2*pi)^2 - z.^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*1;

        case 'second'

            Numerator = Kernel((2*pi - ByPassLength/2 + i*z), a,
'approximate') - Kernel((2*pi - ByPassLength/2 + i*z), b, 'approximate');

            Denominator = Kernel((2*pi - ByPassLength/2 + i*z), a,
SortOfKernel).*((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 + i*z).^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*i;

        case 'third'

            Numerator = Kernel((z - ByPassHeight*i), a, 'approximate') -
Kernel((z - ByPassHeight*i), b, 'approximate');

            Denominator = Kernel((z - ByPassHeight*i), a,
SortOfKernel).*((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*1;

        case 'forth'

```



```

        Numerator = Kernel((2*pi + ByPassLength/2 + i*z), a,
'approximate') - Kernel((2*pi + ByPassLength/2 + i*z), b, 'approximate');

        Denominator = Kernel((2*pi + ByPassLength/2 + i*z), a,
SortOfKernel).*((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 + i*z).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    case 'fifth'

        Numerator = Kernel(z, a, 'approximate') - Kernel(z, b,
'approximate');

        Denominator = Kernel(z, a, SortOfKernel).*((2*pi)^2 - z.^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN INTEGRAL');

end

case 'approximate'

    switch NumberOfIntegral

    case 'first'

        Numerator = Kernel(z, a, 'approximate') - Kernel(z, b,
'approximate');

        Denominator = Kernel(z, a, SortOfKernel).*((2*pi)^2 - z.^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'second'

        Numerator = Kernel((2*pi - ByPassLength/2 + i*z), a,
'approximate') - Kernel((2*pi - ByPassLength/2 + i*z), b, 'approximate');

        Denominator = Kernel((2*pi - ByPassLength/2 + i*z), a,
SortOfKernel).*((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 + i*z).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    case 'third'

        Numerator = Kernel((z - ByPassHeight*i), a, 'approximate') -
Kernel((z - ByPassHeight*i), b, 'approximate');

        Denominator = Kernel((z - ByPassHeight*i), a,
SortOfKernel).*((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'forth'

        Numerator = Kernel((2*pi + ByPassLength/2 + i*z), a,
'approximate') - Kernel((2*pi + ByPassLength/2 + i*z), b, 'approximate');

        Denominator = Kernel((2*pi + ByPassLength/2 + i*z), a,
SortOfKernel).*((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 + i*z).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    case 'fifth'

```

```

        Numerator = Kernel(z, a, 'approximate') - Kernel(z, b,
'approximate');

        Denominator = Kernel(z, a, SortOfKernel).*((2*pi)^2 - z.^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

        otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN INTEGRAL');

    end

    otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN KERNEL');

end

case 'smallfrill'

    C = i*a/30;

    switch SortOfKernel

    case 'exact'

        switch NumberOfIntegral

        case 'first'

            Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2));

            Denominator = besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2)).*hankell(0,
a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2)).*sqrt((2*pi)^2 - z.^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*1;

        case 'second'

            Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2
+ i*z).^2));

            Denominator = besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi -
ByPassLength/2 + i*z).^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi -
ByPassLength/2 + i*z).^2)).*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 +
i*z).^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*i;

        case 'third'

            Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - (z -
ByPassHeight*i).^2));

            Denominator = besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (z -
ByPassHeight*i).^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (z -
ByPassHeight*i).^2)).*sqrt((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*1;

        case 'forth'

            Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2
+ i*z).^2));

            Denominator = besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi +
ByPassLength/2 + i*z).^2)).*hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi +
ByPassLength/2 + i*z).^2)).*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 +
i*z).^2);

            out = C*(Numerator./Denominator)*i;

```

```

    case 'fifth'

        Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2));

        Denominator = besselj(0, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2)).*hankell(0,
a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2)).*sqrt((2*pi)^2 - z.^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN INTEGRAL');

end

case 'approximate'

    switch NumberOfIntegral

    case 'first'

        Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2));

        Denominator = hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - z.^2)).*sqrt((2*pi)^2
- z.^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'second'

        Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2
+ i*z).^2));

        Denominator = hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi -
ByPassLength/2 + i*z).^2)).*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi - ByPassLength/2 +
i*z).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    case 'third'

        Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - (z -
ByPassHeight*i).^2));

        Denominator = hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (z -
ByPassHeight*i).^2)).*sqrt((2*pi)^2 - (z - ByPassHeight*i).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*1;

    case 'forth'

        Numerator = hankell(1, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2
+ i*z).^2));

        Denominator = hankell(0, a*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi +
ByPassLength/2 + i*z).^2)).*sqrt((2*pi)^2 - (2*pi + ByPassLength/2 +
i*z).^2);

        out = C*(Numerator./Denominator)*i;

    otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN INTEGRAL');

end

otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN KERNEL');

end

```

```
otherwise disp('function Integrant: UNKNOWN GENERATOR');
end
```

Integrate.m

Γίνεται η διαδικασία της ολοκλήρωσης.

```
function [out] = Integrate(a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel,
ByPassHeight, ByPassLength, M)

format long g;

switch SortOfGenerator

case 'delta'

    buffer1 = quad(@Integrant, 0, 2*pi-ByPassLength/2, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'first');

    buffer2 = quad(@Integrant, 0, -ByPassHeight, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'second');

    buffer3 = quad(@Integrant, 2*pi-ByPassLength/2, 2*pi+ByPassLength/2, [],
[], a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength,
'third');

    buffer4 = quad(@Integrant, -ByPassHeight, 0, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'forth');

    out = buffer1 + buffer2 + buffer3 + buffer4;

    out = real(out);

case 'frill'

    buffer1 = quad(@Integrant, 0, 2*pi-ByPassLength/2, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'first');

    buffer2 = quad(@Integrant, 0, -ByPassHeight, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'second');

    buffer3 = quad(@Integrant, 2*pi-ByPassLength/2, 2*pi+ByPassLength/2, [],
[], a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength,
'third');

    buffer4 = quad(@Integrant, -ByPassHeight, 0, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'forth');

    buffer5 = quad(@Integrant, 2*pi+ByPassLength/2, M, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'fifth');

    out = buffer1 + buffer2 + buffer3 + buffer4 + buffer5;

    if strcmp(SortOfKernel, 'approximate')

        end

case 'smallfrill'

    switch SortOfKernel

    case 'exact'

        buffer1 = quad(@Integrant, 0, 2*pi-ByPassLength/2, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'first');
```

```

        buffer2 = quad(@Integrand, 0, -ByPassHeight, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'second');

        buffer3 = quad(@Integrand, 2*pi-ByPassLength/2, 2*pi+ByPassLength/2,
[], [], a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength,
'third');

        buffer4 = quad(@Integrand, -ByPassHeight, 0, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'forth');

        buffer5 = quad(@Integrand, 2*pi+ByPassLength/2, M, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'fifth');

        out = buffer1 + buffer2 + buffer3 + buffer4 + buffer5;

    case 'approximate'

        buffer1 = quad(@Integrand, 0, 2*pi-ByPassLength/2, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'first');

        buffer2 = quad(@Integrand, 0, -ByPassHeight, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'second');

        buffer3 = quad(@Integrand, 2*pi-ByPassLength/2, 2*pi+ByPassLength/2,
[], [], a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength,
'third');

        buffer4 = quad(@Integrand, -ByPassHeight, 0, [], [], a, b,
SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength, 'forth');

        out = buffer1 + buffer2 + buffer3 + buffer4;

        out = real(out);

        otherwise disp('function Integrate: UNKNOWN KERNEL');

    end

otherwise disp('function Integrate: UNKNOWN GENERATOR');

end

```

Maximum.m

Επιλέγεται κατάλληλο υποκατάστατο του θετικού άπειρου άκρου του τελευταίου ολοκληρώματος.

```

function [out] = Maximum(a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight,
ByPassLength, p)

star = 1/a;

step = 1/b;

n = 0;

error = 1+i;

y = 100000;

while (abs(real(error)) > p) | (abs(imag(error)) > p)

    x = Integrate(a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight,
ByPassLength, star + n*step);

```

```
n = n + 1;  
error = (y-x)/x;  
y = x;  
out = star + n*step;  
end
```

Input_Admittance.m

Εξάγεται το τελικό μέγεθος της αγωγιμότητας εισόδου.

```
function [out] = Input_Admittance(a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel,  
ByPassHeight, ByPassLength, p)  
  
M = Maximum(a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight, ByPassLength,  
p);  
  
out = Integrate(a, b, SortOfGenerator, SortOfKernel, ByPassHeight,  
ByPassLength, M);
```

(Ε) ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε**Η πεπερασμένη κεραία**

Προκειμένου να εξαχθούν οι εξισώσεις που περιγράφουν τη λειτουργία της πεπερασμένου μήκους διπολικής κεραίας γίνονται τα ίδια βήματα με την άπειρη κεραία και καταλήγουμε στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallen με τη διαφορά ότι τα ολοκληρώματα δεν έχουν άπειρα άκρα αλλά περιορίζονται στο μήκος της κεραίας από $z = h$ έως $z = -h$. Δηλαδή έχουμε τις ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\int_{-h}^h K(z-z', \alpha) \cdot I(z') \cdot dz' = V \cdot f(z) + C \cdot \cos(k \cdot z) \quad (\text{E.1})$$

με $K(z, \alpha)$ συμβολίζουμε τον καθένα από τους δύο δυνατούς πυρήνες και με:

$$f(z) = \begin{cases} f_{\text{dlt}}(z) = \frac{j}{2 \cdot \zeta_0} \cdot \sin(k \cdot |z|) \\ f_{\text{fhl}}(z) = \frac{2 \cdot \pi \cdot j}{\zeta_0 \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \cdot \int_0^z [K_{\text{ap}}(t, a) - K_{\text{ap}}(t, b)] \cdot \sin(k \cdot (z-t)) \cdot dt \end{cases} \quad (\text{E.2})$$

τις μερικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων ανάλογα με το μοντέλο τροφοδοσίας. Σε αυτή την περίπτωση δε θα ακολουθήσουμε την μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier αλλά θα διασπάσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση Hallen σε δύο ολοκληρωτικές εξισώσεις με το επιχείρημα ότι δεν γνωρίζουμε ακόμα την μιγαδική σταθερά C . Πιο συγκεκριμένα η συνάρτηση $I(z)$ δεν μας είναι ακόμα γνωστή προκειμένου να απαιτήσουμε το μηδενισμό της στα άκρα της διπολικής κεραίας. Αυτό θα γίνει αργότερα όταν μία εκτίμηση της συγκεκριμένης συνάρτησης βρεθεί. Επίσης ιδιαίτερη σημασία πρέπει να δοθεί στις διαστάσεις των δύο συστατικών συναρτήσεων της $I(z)$ δεδομένου πως η σταθερά C δεν είναι αδιάστατη.

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$\int_{-h}^h K(z-z', \alpha) \cdot I^{(1)}(z') \cdot dz' = V \cdot f(z) \quad (\text{E.3})$$

την πρώτη ολοκληρωτική εξίσωση και

$$\int_{-h}^h K(z-z', \alpha) \cdot U^{(2)}(z') \cdot dz' = \cos(k \cdot z) \quad (\text{E.4})$$

την δεύτερη ολοκληρωτική εξίσωση. Δηλαδή ισχύει:

$$I(z) = I^{(1)}(z) + C \cdot U^{(2)}(z) \quad (E.5)$$

και μάλιστα αν διαιρέσουμε με την ισοδύναμη τάση τροφοδοσίας V θα έχουμε:

$$Y(z) = \frac{I(z)}{V} = \frac{I^{(1)}(z)}{V} + \frac{C}{V} \cdot U^{(2)}(z) \stackrel{\frac{C}{V} \rightarrow C}{\Rightarrow} Y(z) = Y^{(1)}(z) + C \cdot U^{(2)}(z) \quad (E.6)$$

με τη σταθερά C πλέον να έχει διαστάσεις αγωγιμότητας. Από την πρώτη ολοκληρωτική εξίσωση έχουμε:

$$\int_{-h}^h K(z-z', a) \cdot \frac{I^{(1)}(z')}{V} \cdot dz' = f(z) \Rightarrow \int_{-h}^h K(z-z', a) \cdot Y^{(1)}(z') \cdot dz' = f(z) \quad (E.7)$$

και έτσι ζητούμενο μέγεθός μας δεν είναι η συνάρτηση του νηματοειδούς ρεύματος αλλά αυτή της αγωγιμότητας για την οποία επίσης ισχύει η συνθήκη $Y(h) = Y(-h) = 0$ και από εκεί προσδιορίζεται η νέα σταθερά αγωγιμότητας C . Με αυτό τον τρόπο ανεξαρτητοποιούμε την ανάλυσή μας από το μέγεθος της διέγερσης.

Προκειμένου να επιλυθούν οι συγκεκριμένες ολοκληρωτικές εξισώσεις (η αντιστροφή και η αντίστοιχη αναλυτική λύση μέσω ολοκληρώματος δεν είναι πλέον εφικτή) θα χρειαστεί η αριθμητική μέθοδος των ροπών. Για τις άγνωστες συναρτήσεις $Y^{(1)}(z)$ και $U^{(2)}(z)$ θα χρησιμοποιηθούν σαν συναρτήσεις βάσεις τετραγωνικούς παλμούς μοναδιαίου ύψους και εύρους:

$$z_0 = \frac{2 \cdot h}{2 \cdot N + 1} \quad (E.8)$$

όπου $(2 \cdot N + 1)$ ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν τις άγνωστες συναρτήσεις. Δηλαδή χρησιμοποιούμε συναρτήσεις μη μηδενικές μόνο σε ένα τμήμα του άξονα των z και όχι σε όλο το πεδίο ορισμού της άγνωστης συνάρτησης. Εκφράζουμε κατά τα γνωστά τις ζητούμενες συναρτήσεις σαν γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων βάσεις με προσδιοριστέες πολλαπλασιαστικές μιγαδικές σταθερές:

$$Y^{(1)}(z) = \sum_{n=-N}^N Y_n^{(1)} \cdot u_n(z) \quad (E.9)$$

και

$$U^{(2)}(z) = \sum_{n=-N}^N U_n^{(2)} \cdot u_n(z) \quad (E.10)$$

με

$$u_n(z) = \begin{cases} 1 & , z \in \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot z_0 , \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot z_0 \right] \\ 0 & , \text{αλλού} \end{cases} \quad (\text{E.11})$$

όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Αντικαθιστούμε σε αυτό το σημείο τις παραπάνω συναρτήσεις στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallen. Για την πρώτη ολοκληρωτική εξίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} (\text{E.3}) \Rightarrow \sum_{n=-N}^N Y_n^{(1)} \cdot \int_{-h}^h K(z-z', \alpha) \cdot u_n(z') \cdot dz' = f(z) \Rightarrow \\ \sum_{n=-N}^N Y_n^{(1)} \cdot \int_{\left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot z_0}^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' = f(z) \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Εντελώς όμοια με την δεύτερη ολοκληρωτική καταλήγουμε στην σχέση:

$$(\text{E.4}) \Rightarrow \sum_{n=-N}^N U_n^{(2)} \cdot \int_{\left(n - \frac{1}{2} \right) \cdot z_0}^{\left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' = \cos(k \cdot z) \quad (\text{E.13})$$

Σε αυτό το σημείο θα χρησιμοποιήσουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις προκειμένου να παράγουμε από την κάθε μία $(2 \cdot N + 1)$ διαφορετικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών. Αυτές οι δύο σειρές εξισώσεων θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες σύμφωνα με τη θεωρία της μεθόδου των ροπών και θα έχουν ως αγνώστους τους μιγαδικούς συντελεστές $Y_n^{(1)}$ με $n = -N, \dots, N$ και $U_n^{(2)}$ με $n = -N, \dots, N$. Κατά συνέπεια θα έχουμε δύο γραμμικά συστήματα $(2 \cdot N + 1) \times (2 \cdot N + 1)$ τα οποία εξαιτίας των μη μηδενικών δεύτερων μελών τους θα δώσουν μοναδική λύση για τις παραπάνω προσδιοριστέες μιγαδικές σταθερές και έτσι θα έχουμε εκπληρώσει τον σκοπό μας. Γι' αυτό το λόγο θα πολλαπλασιάσουμε την κάθε μία από τις παραπάνω προκύπτουσες εξισώσεις με τις συζυγείς συναρτήσεις βάσης $u_n^*(z)$ που λόγω του ότι πρόκειται για πραγματικές συναρτήσεις ισούνται με τις ίδιες συναρτήσεις βάσης. Έπειτα θα ολοκληρώσουμε κάθε μία από τις $2 \cdot (2 \cdot N + 1)$ εξισώσεις στο διάστημα ορισμού $z \in (-h, h)$. Η παραπάνω διαδικασία είναι η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου των ροπών χρησιμοποιώντας την μεθοδολογία Galerkin.

Εφαρμόζοντας τις παραπάνω διαδικασίες στην πρώτη ολοκληρωτική εξίσωση έχουμε:

$$(E.12) \Rightarrow \sum_{n=-N}^N Y_n^{(1)} \cdot \int_{\left(\frac{n-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' = f(z) \quad m=-N, \dots, N \Rightarrow$$

$$\int_{-h}^h u_m(z) \cdot \sum_{n=-N}^N Y_n^{(1)} \cdot \int_{\left(\frac{n-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' \cdot dz = \int_{-h}^h u_m(z) \cdot f(z) \cdot dz, \quad m = -N, \dots, N \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-N}^N Y_n^{(1)} \cdot \int_{\left(\frac{m-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)z_0} \int_{\left(\frac{n-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' \cdot dz = \int_{\left(\frac{m-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)z_0} f(z) \cdot dz, \quad m = -N, \dots, N \quad (E.14)$$

Με μία εντελώς ανάλογη διαδικασία για τη δεύτερη ολοκληρωτική εξίσωση καταλήγουμε στις $(2 \cdot N + 1)$ παρακάτω εξισώσεις:

$$(E.13) \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-N}^N U_n^{(2)} \cdot \int_{\left(\frac{m-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)z_0} \int_{\left(\frac{n-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' \cdot dz = \int_{\left(\frac{m-1}{2}\right)z_0}^{\left(\frac{m+1}{2}\right)z_0} \cos(k \cdot z) \cdot dz, \quad m = -N, \dots, N \quad (E.15)$$

Επόμενο βήμα είναι να εξάγουμε τους τύπους εκείνους από τους οποίους προκύπτουν τα στοιχεία του πίνακα και των διανυσμάτων των δύο συστημάτων. Ο πίνακας των δύο συστημάτων είναι κοινός και θα συμβολιστεί με

$$\overline{\overline{M}} = \begin{bmatrix} M_{-N-N} & \cdots & M_{-NN} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{N-N} & \cdots & M_{NN} \end{bmatrix} \quad (E.16)$$

Το διάνυσμα του πρώτου συστήματος θα συμβολιστεί με:

$$\overline{V}_1 = \begin{bmatrix} V_{-N1} \\ \vdots \\ V_{N1} \end{bmatrix} \quad (E.17)$$

ενώ του δεύτερου με:

$$\overline{V}_2 = \begin{bmatrix} V_{-N2} \\ \vdots \\ V_{N2} \end{bmatrix} \quad (E.18)$$

Όσον αφορά τα στοιχεία του πίνακα έχουμε:

$$M_{mn} = \int_{\left(m-\frac{1}{2}\right)z_0}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)z_0} \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)z_0}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)z_0} K(z-z', \alpha) \cdot dz' \cdot dz \quad (E.19)$$

με $m = -N, \dots, N$ και $n = -N, \dots, N$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί (αφού πρώτα μετατραπεί το συγκεκριμένο διπλό ολοκλήρωμα σε απλό) ότι ο πίνακας του συστήματος είναι Toeplitz και συμμετρικός. Το αποτέλεσμα είναι:

$$M_\ell = \int_0^{z_0} (z_0 - z) \cdot [K(z + \ell \cdot z_0) + K(z - \ell \cdot z_0)] \cdot dz \quad (E.20)$$

με $\ell = 0, \dots, 2 \cdot N$. Όσον αφορά για τα στοιχεία των διανυσμάτων έχουμε:

$$V_{m1} = \int_{\left(m-\frac{1}{2}\right)z_0}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)z_0} f(z) \cdot dz \quad (E.21)$$

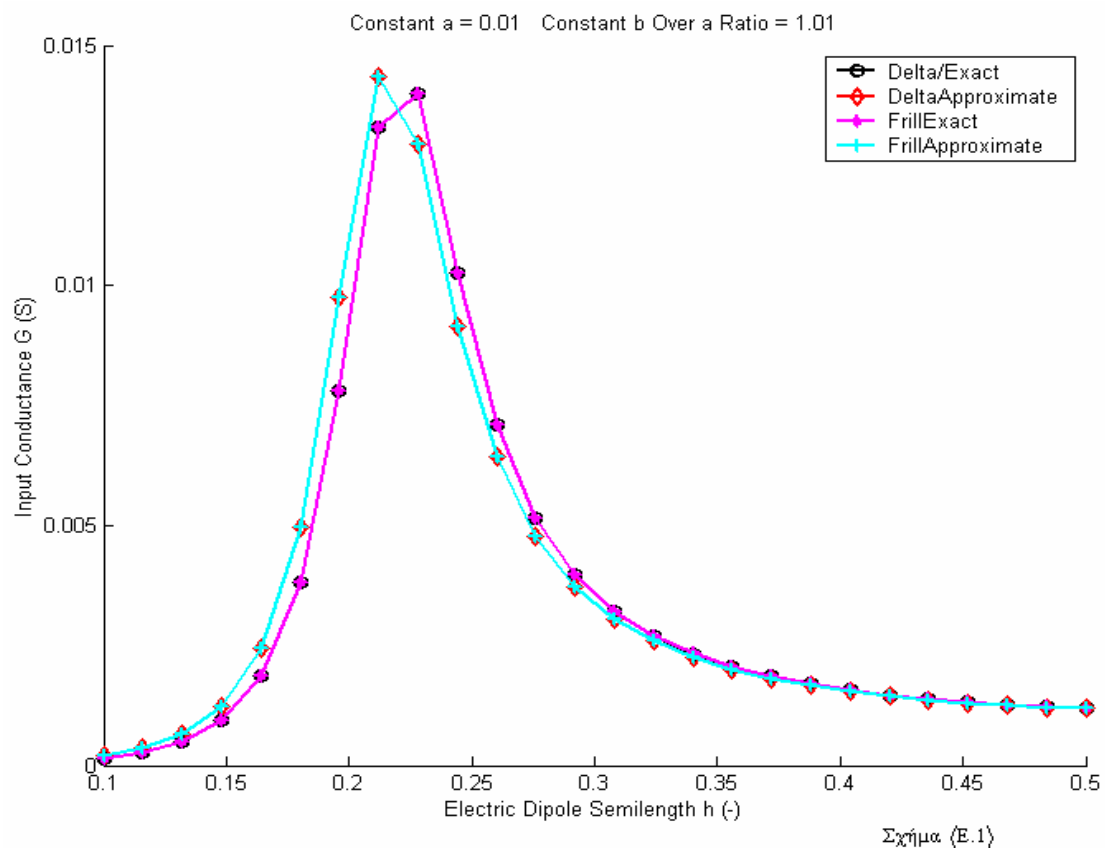
και

$$V_{m2} = \int_{\left(m-\frac{1}{2}\right)z_0}^{\left(m+\frac{1}{2}\right)z_0} \cos(k \cdot z) \cdot dz \quad (E.22)$$

με $m = -N, \dots, N$

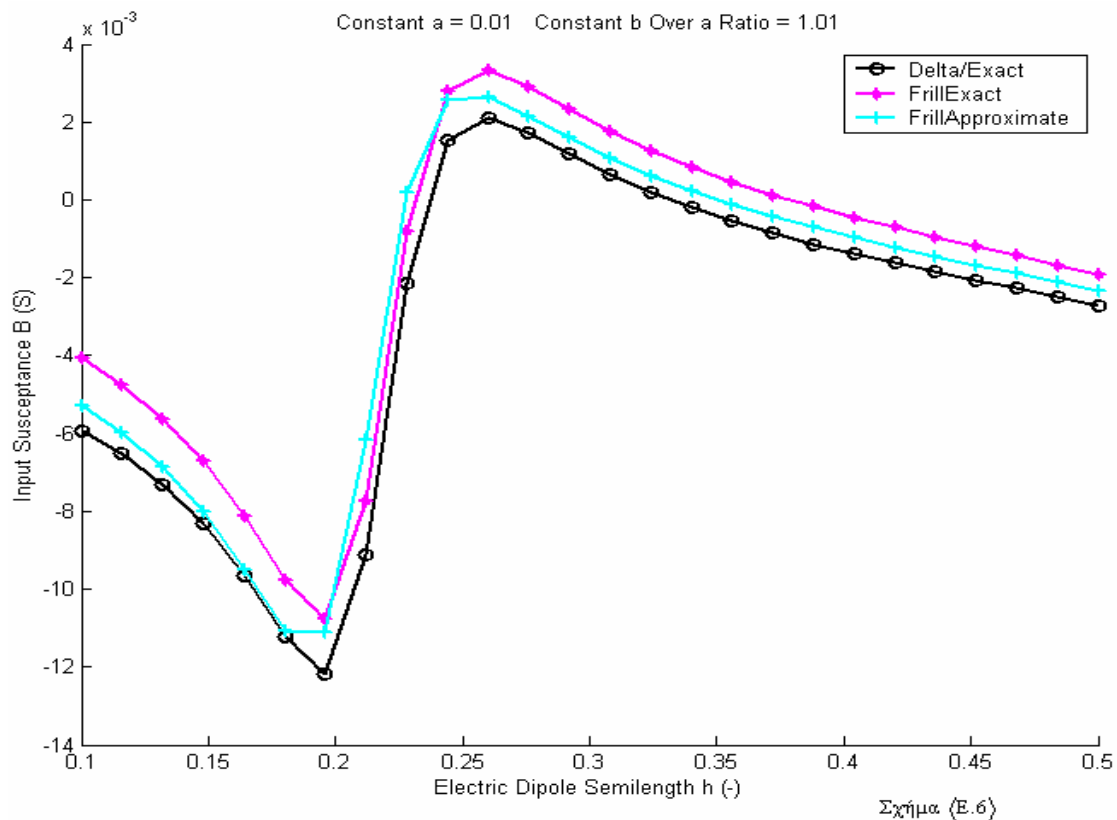
Κατά συνέπεια τα δύο συστήματα μπορούν να επιλυθούν και αν δεν παρουσιάζουν αριθμητικές ανωμαλίες μπορούμε να εξάγουμε την εκτίμηση για την αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας. Αν υποθεθεί ότι θέλουμε να εξετάσουμε τις διαφορές στο πραγματικό και το φανταστικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας (όπως είναι ο στόχος μας) θα πρέπει να ληφθούν υπόψη τρεις ακόμα παράμετροι. Αφενός το κρίσιμο μέγεθος αυτή τη φορά (σε αντίθεση με την άπειρη κεραία) εξαρτάται και από το μήκος της κεραίας οπότε η κατάσταση γίνεται πολυπλοκότερη. Αφετέρου οι ολοκληρωτικές εξισώσεις με τον προσεγγιστικό πυρήνα αποδεικνύεται ότι είναι μη επιλύσιμες με αποτέλεσμα η μέθοδος των ροπών για ένα μεγάλο εύρος του N να επιστρέφει λανθασμένες λύσεις. Μία τέτοια διαπίστωση γίνεται στην παραπομπή [7] και αποτελεί μία κύρια αιτία της πολυπλοκότητας του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα αν ο αριθμός N των βοηθητικών συναρτήσεων βάσης είναι μεγαλύτερος από τη σημαντική παράμετρο $\frac{h}{\alpha}$ τότε εμφανίζονται αφερέγγυα αποτελέσματα στο σημείο λειτουργίας. Κατά συνέπεια δεν είναι δυνατόν να υπάρξει

σύγκλιση του μεγέθους κάτι που μας αναγκάζει να περιοριστούμε σε μία αμφιλεγόμενη τιμή. Αλλά ακόμα κι αν εξετάζουμε επιλύσιμη περίπτωση πολλές φορές το ρεύμα στο σημείο τροφοδοσίας τείνει να απειριστεί με αποτέλεσμα πάλι να μην έχουμε συγκλίνον αποτέλεσμα. Τέλος στις περιπτώσεις που υπάρχει σύγκλιση δεν είμαστε βέβαιοι ότι το αποτέλεσμα αντικατοπτρίζει την πραγματικότητα καθώς δεν παύει να είναι αποκύημα μιας αριθμητικής μεθόδου. Στο παρακάτω σχήμα (Ε.1) (τα αποτελέσματα προέκυψαν με συγκλίνουσα μέθοδο ροπών όπου αυτό ήταν εφικτό) φαίνεται το πραγματικό μέρος της σύνθετης αγωγιμότητας εισόδου για διάφορα μήκη κεραιών και καθορισμένες εσωτερική και εξωτερική ακτίνα.



Παρατηρούμε ότι κάποιες αδιάσειστες αρχές της άπειρης κεραιάς δεν επαληθεύονται. Για παράδειγμα στην άπειρη κεραιά αποδείξαμε ότι οι εκδοχές μικρό frill / προσεγγιστικός πυρήνας και delta / ακριβής είναι ταυτόσημες για το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου. Δεδομένου ότι $\frac{b}{a} = 1.01$ οπότε βρισκόμαστε κοντά στην κατάσταση του μικρού frill δεν υπάρχει καμία ταύτιση των δύο εκδοχών για το σύνολο των μηκών της κεραιάς ή έστω προσέγγιση. Πιο συγκεκριμένα ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες εκδοχών που τα μέλη τους μεταβάλλονται σχεδόν ταυτόσημα.

Γενικά δοκιμάζοντας να επαληθευτούν (και μάλιστα με αυξημένες διαφορές) τα αποτελέσματα και συμπεράσματά μας για την άπειρη κεραία από την πεπερασμένη δεν επιτύχαμε. Κατά συνέπεια μπορούμε να αιτιολογήσουμε αυτή τη συμπεριφορά στην αυξημένη πολυπλοκότητα του προβλήματος της πεπερασμένης κεραίας. Εκτός από την επίδραση του μήκους της κεραίας οι διαφορές δεν είναι της κατεύθυνσης που εμείς περιμέναμε. Πράγματι μπορούμε να δούμε στο σχήμα (Ε.6) (τα αποτελέσματα προέκυψαν με συγκλίνουσα μέθοδο ροπών όπου αυτό ήταν εφικτό) όπου παριστάνεται το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου ότι οι διαφορές μεταβάλλονται σημαντικά μέσω της παραμέτρου h άρα τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν είναι περιορισμένα:



Συμβολισμοί

| | |
|--|---|
| ϵ_0 | :διηλεκτρική σταθερά του κενού |
| μ_0 | :μαγνητική διαπερατότητα του κενού |
| ρ | :ακτινική συνιστώσα κυλινδρικών συντεταγμένων |
| φ | :αζιμουθιακή συνιστώσα κυλινδρικών συντεταγμένων |
| z | :κατηγμένη συνιστώσα κυλινδρικών συντεταγμένων |
| $\hat{\rho}$ | :μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα κυλινδρικών συντεταγμένων |
| $\hat{\varphi}$ | :μοναδιαίο αζιμουθιακό διάνυσμα κυλινδρικών συντεταγμένων |
| \hat{z} | :μοναδιαίο κατηγμένο διάνυσμα κυλινδρικών συντεταγμένων |
| a | :ακτίνα κυλινδρικής κεραίας, εσωτερική ακτίνα ομοαξονικής γραμμής |
| b | :εξωτερική ακτίνα ομοαξονικής γραμμής |
| ω | :κυκλική συχνότητα λειτουργίας – τροφοδοσίας |
| t | :μεταβλητή του χρόνου |
| j | :φανταστική μονάδα |
| $\bar{J}(\rho, \varphi, z)$ | :χωρικό ρεύμα κεραίας |
| $J_s(z)$ | :z – συνιστώσα επιφανειακού ρεύματος κεραίας |
| $\vec{E}(\rho, \varphi, z)$ | :ηλεκτρικό πεδίο |
| $E_\rho(\rho, z)$ | : ρ – συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου |
| $E_\varphi(\rho, z)$ | : φ – συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου |
| $E_z(\rho, z)$ | :z – συνιστώσα ηλεκτρικού πεδίου |
| $\vec{H}(\rho, \varphi, z)$ | :μαγνητικό πεδίο |
| $\Phi(\rho, \varphi, z)$ | :βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό |
| $\vec{A}(\rho, \varphi, z)$ | :διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό |
| $A_z(\rho, z)$ | :z – συνιστώσα μαγνητικού πεδίου |
| $\vec{E}_{\text{dit}}(\rho, \varphi, z)$ | :ηλεκτρικό πεδίο τροφοδοσίας delta – function generator |
| $\vec{E}_{\text{frl}}(\rho, \varphi, z)$ | : ηλεκτρικό πεδίο τροφοδοσίας frill generator |
| k | :κυματικός αριθμός λειτουργίας |
| V | :ισοδύναμη τάση τροφοδοσίας |
| R | : απόσταση του τυχαίου σημείου παρατήρησης από το τυχαίο σημείο της πηγής |

| | |
|---------------------------|--|
| R_{\perp} | :πολική απόσταση του τυχαίου σημείου παρατήρησης από το τυχαίο σημείο της πηγής |
| R_{\parallel} | :παράλληλη απόσταση του τυχαίου σημείου παρατήρησης από το τυχαίο σημείο της πηγής |
| $\delta(z)$ | :συνάρτηση δέλτα του Dirac |
| $I(z)$ | :ισοδύναμο νηματοειδές ρεύμα κεραίας |
| $K_{ap}(z, \alpha)$ | :προσεγγιστικός πυρήνας ολοκλήρωσης |
| $K_{ex}(z, \alpha)$ | :ακριβής πυρήνας ολοκλήρωσης |
| $I_{dlt}(z)$ | : ισοδύναμο νηματοειδές ρεύμα κεραίας με τροφοδοσία delta – function generator |
| $I_{frl}(z)$ | : ισοδύναμο νηματοειδές ρεύμα κεραίας με τροφοδοσία frill generator |
| $F(z)$ | : άγνωστη συνάρτηση διαφορικής |
| $F_{dlt}(z)$ | :άγνωστη συνάρτηση διαφορικής με τροφοδοσία delta – function generator |
| $F_{frl}(z)$ | :άγνωστη συνάρτηση διαφορικής με τροφοδοσία frill generator |
| ζ_0 | :κυματική αντίσταση του κενού |
| $g(t)$ | :δεύτερο μέλος περίπτωσης frill generator |
| $F_{p,frl}(z)$ | :μερική λύση διαφορικής με τροφοδοσία frill generator |
| $F\{ \}$ | :τελεστής Fourier |
| $H_n^{(1)}(z)$ | :συνάρτηση Hankel n – οστής τάξης και πρώτου είδους |
| $J_n(z)$ | :συνάρτηση Bessel n – οστής τάξης |
| $Y_n(z)$ | :συνάρτηση Neumann n – οστής τάξης |
| $\bar{F}_{dlt}(\zeta)$ | :μετασχηματισμός Fourier της $F_{dlt}(z)$ |
| $\bar{F}_{frl}(\zeta)$ | :μετασχηματισμός Fourier της $F_{frl}(z)$ |
| $\bar{K}_{ap}(z, \alpha)$ | : μετασχηματισμός Fourier της $K_{ap}(z, \alpha)$ |
| $\bar{K}_{ex}(z, \alpha)$ | : μετασχηματισμός Fourier της $K_{ex}(z, \alpha)$ |
| $I_{frl,ex}(z)$ | : ρεύμα κεραίας με τροφοδοσία frill generator και ακριβή πυρήνα |
| $I_{frl,ap}(z)$ | : ρεύμα κεραίας με τροφοδοσία frill generator και προσεγγιστικό πυρήνα |

| | |
|--------------------------------|---|
| $I_{dlt,ex}(z)$ | : ρεύμα κεραίας με τροφοδοσία delta – function generator και ακριβή πυρήνα |
| $I_{dlt,ap}(z)$ | : ρεύμα κεραίας με τροφοδοσία frill generator και προσεγγιστικό πυρήνα |
| $\bar{I}_{frl,ex}(\zeta)$ | : μετασχηματισμός Fourier της $I_{frl,ex}(z)$ |
| $\bar{I}_{frl,ap}(\zeta)$ | : μετασχηματισμός Fourier της $I_{frl,ap}(z)$ |
| $\bar{I}_{dlt,ex}(\zeta)$ | : μετασχηματισμός Fourier της $I_{dlt,ex}(z)$ |
| $\bar{I}_{dlt,ap}(\zeta)$ | : μετασχηματισμός Fourier της $I_{dlt,ap}(z)$ |
| $Y_{dlt,ex}$ | : αγωγιμότητα εισόδου κεραίας για τροφοδοσίας τύπου delta – function και ακριβή πυρήνα |
| $Y_{dlt,ap}$ | : αγωγιμότητα εισόδου κεραίας για τροφοδοσίας τύπου delta – function και προσεγγιστικό πυρήνα |
| $Y_{frl,ex}$ | : αγωγιμότητα εισόδου κεραίας για τροφοδοσίας τύπου frill και ακριβή πυρήνα |
| $Y_{frl,ap}$ | : αγωγιμότητα εισόδου κεραίας για τροφοδοσίας τύπου frill και προσεγγιστικό πυρήνα |
| $h_{dlt,ex}(\zeta)$ | : ολοκληρωτέα της περίπτωσης τροφοδοσίας delta και ακριβή πυρήνα |
| $h_{dlt,ap}(\zeta)$ | : ολοκληρωτέα της περίπτωσης τροφοδοσίας delta και προσεγγιστικό πυρήνα |
| $h_{frl,ex}(\zeta)$ | : ολοκληρωτέα της περίπτωσης τροφοδοσίας frill και ακριβή πυρήνα |
| $h_{frl,ap}(\zeta)$ | : ολοκληρωτέα της περίπτωσης τροφοδοσίας frill και προσεγγιστικό πυρήνα |
| $H_{dlt,ex}^{(k)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{dlt,ex}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ |
| $H_{dlt,ex}^{(\infty)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{dlt,ex}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow +\infty$ |
| $H_{dlt,ap}^{(k)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{dlt,ap}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ |
| $H_{dlt,ap}^{(\infty)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{dlt,ap}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow +\infty$ |
| $H_{frl,ex}^{(k)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{frl,ex}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ |
| $H_{frl,ex}^{(\infty)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{frl,ex}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow +\infty$ |

| | |
|---------------------------------------|--|
| $H_{\text{frl,ap}}^{(k)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{\text{frl,ap}}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ |
| $H_{\text{frl,ap}}^{(\infty)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $h_{\text{frl,ap}}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow +\infty$ |
| $G_{\text{dlt,ex}}$ | : πραγματικό μέρος της $Y_{\text{dlt,ex}}$ |
| $G_{\text{dlt,ap}}$ | : πραγματικό μέρος της $Y_{\text{dlt,ap}}$ |
| $G_{\text{frl,ex}}$ | : πραγματικό μέρος της $Y_{\text{frl,ex}}$ |
| $G_{\text{frl,ap}}$ | : πραγματικό μέρος της $Y_{\text{frl,ap}}$ |
| $B_{\text{frl,ex}}$ | : φανταστικό μέρος της $Y_{\text{frl,ex}}$ |
| $B_{\text{frl,ap}}$ | : φανταστικό μέρος της $Y_{\text{frl,ap}}$ |
| $w_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$ | : ολοκληρωτέα πραγματικού μέρους της $Y_{\text{dlt,ex}}$ |
| $W_{\text{dlt,ex}}^{(k)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $w_{\text{dlt,ex}}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ |
| $w_{\text{dlt,ap}}(\zeta)$ | : ολοκληρωτέα πραγματικού μέρους της $Y_{\text{dlt,ap}}$ |
| $W_{\text{dlt,ap}}^{(k)}(\zeta)$ | : παράγουσα της $w_{\text{dlt,ap}}(\zeta)$ για $\zeta \rightarrow k$ |
| $L(\varepsilon)$ | : εξίσωση από κάτω παράκαμψης της $\zeta = k$ |
| $Y_{\text{smfrl,ex}}$ | : αγωγιμότητα εισόδου τροφοδοσίας μικρού frill και ακριβούς πυρήνα |
| $Y_{\text{smfrl,ap}}$ | : αγωγιμότητα εισόδου τροφοδοσίας μικρού frill και προσεγγιστικού |
| πυρήνα | |
| $G_{\text{smfrl,ex}}$ | : πραγματικό μέρος της $Y_{\text{smfrl,ex}}$ |
| $G_{\text{smfrl,ap}}$ | : πραγματικό μέρος της $Y_{\text{smfrl,ap}}$ |
| $B_{\text{smfrl,ex}}$ | : φανταστικό μέρος της $Y_{\text{smfrl,ex}}$ |
| ε | : θετικός αριθμός μικρότερος του k |
| $E_1(z)$ | : εκθετικό ολοκλήρωμα |
| $F_{\text{eqfrl}}(z)$ | : άγνωστη συνάρτηση διαφορικής στην περίπτωση της ισοδυναμίας |

Παραπομπές – Βιβλιογραφία

- [1] : Gradshteyn and Ryzhik's "*Table of Integrals, Series, and Products*"
- [2] : M. Abramowitz and I. Stegun "*Handbook of Mathematical Functions*"
- [3] : G. Fikioris and T. Wu "*On the application of numerical methods to Hallen's equation*" IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol. 49 pp. 383 – 392, Mar. 2001
- [4] : G. Fikioris, J. Lionas and C. Lioutas "*The use of the frill generator in Thin – Wire integral Equations*" IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol. 51 pp. 1847 – 1854, Aug. 2003
- [5] : N. Ουζούνογλου "*Εισαγωγή στα Μικροκύματα*"
- [6] : T. Wu "*Introduction to linear antennas*" in "*Antenna Theory, Part I*" R. Collin and F. Zucker
- [7] : G. Fikioris "*On the solvability and application of numerical methods to Hallen's equation*" MMET 2002 Conference Proceedings
- [8] : L. Tsai "*A numerical solution for the near and far fields of an annular ring of magnetic current*" IEEE Trans. Antennas and Propagat., vol. 20 pp. 569 - 576, Sep. 1972
- [9] : K. Chen and L. Warne "*Uniform formulas for infinite antenna current*" Radio Science, vol. 28 pp. 649 – 661, Sep – Oct 1993
- [10] : I. Τσαλαμέγκας και I. Ρουμελιώτης "*Σημειώσεις ηλεκτρομαγνητικών πεδίων*"
- [11] : I. Φικιώρης "*Εισαγωγή εις την θεωρίαν των κεραιών*"
- [12] : X. Καψάλης και Π. Κωττής "*Κεραίες – Ασύρματες ζεύξεις*"
- [13] : Δ. Κακλαμάνη "*Υπολογιστικές τεχνικές για συστήματα μετάδοσης πληροφορίας*"
- [14] : W. Stutzman and G. Thiele "*Antenna Theory and Design*"

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον λέκτορα κ. Γιώργο Φικιώρη για την άρτια συνεργασία που είχαμε κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Χωρίς την προθυμία του στην απάντηση των αποριών μου η περάτωση της εν λόγω εργασίας θα ήταν αδύνατη. Αισθάνομαι ακόμα την ανάγκη να ευχαριστήσω το σύνολο των καθηγητών της σχολής Ηλ/γων Μηχ. & Μηχ Υπ/στών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου που τα τελευταία πέντε χρόνια συνέβαλαν καθοριστικά στην επιστημονική μου κατάρτιση.

Περιεχόμενα

| | |
|---|----|
| Περίληψη..... | 4 |
| Λέξεις Κλειδιά..... | 4 |
| Abstract..... | 5 |
| KeyWords..... | 5 |
| Η ΕΙΣΑΓΩΓΗ | |
| Τα προβλήματα..... | 6 |
| Οι εξισώσεις Hallen..... | 6 |
| Τα ολοκληρώματα αγωγιμοτήτων..... | 8 |
| Οι υπολογισμοί..... | 8 |
| Τα συμπεράσματα..... | 9 |
| Τα παραρτήματα..... | 9 |
| ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ | |
| Γενική τοπολογία..... | 11 |
| Διέγερση τύπου delta – function..... | 11 |
| Διέγερση τύπου frill..... | 12 |
| Μεγέθη και εξαρτήσεις..... | 13 |
| Εξισώσεις Maxwell..... | 15 |
| Πεδία τροφοδοσίας..... | 17 |
| ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ HALLEN | |
| Ολοκλήρωμα ακτινοβολίας..... | 19 |
| Ακριβής και προσεγγιστικός πυρήνας..... | 22 |
| Εξισώσεις Rocklington..... | 23 |
| Μετατροπή εξισώσεων..... | 25 |
| Προσδιορισμός σταθεράς..... | 29 |
| ΤΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΓΩΓΙΜΟΤΗΤΩΝ | |
| Μετασχηματισμοί πυρήνων..... | 34 |
| Μετασχηματισμοί δευτέρων μελών..... | 39 |
| Εξαγωγή ολοκληρωμάτων..... | 41 |
| Μελέτη ολοκληρωτέων..... | 44 |
| Έλεγχος delta/exact..... | 47 |
| Έλεγχος delta/approximate..... | 56 |
| Έλεγχος frill/exact..... | 58 |
| Έλεγχος frill/approximate..... | 60 |

ΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

| | |
|-----------------------------|----|
| Επιλογή παράκαμψης..... | 62 |
| Αδιαστατοποίηση..... | 63 |
| Εκτίμηση συναρτήσεων..... | 67 |
| Υλοποίηση προγραμμάτων..... | 68 |

ΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

| | |
|--------------------------|----|
| Μικρό frill..... | 73 |
| Συνθήκη ισοδυναμίας..... | 81 |
| Διαγράμματα..... | 88 |
| Επίλογος..... | 98 |

ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

| | |
|--|-----|
| Εξαγωγή ηλεκτρικού πεδίου frill generator..... | 100 |
|--|-----|

ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

| | |
|---|-----|
| Αναγκαιότητα μη εναλλαγής τελεστών..... | 109 |
|---|-----|

ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

| | |
|---------------------------|-----|
| Εύρεση μερικής λύσης..... | 114 |
|---------------------------|-----|

ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

| | |
|--|-----|
| Κώδικες προγραμμάτων matlab άπειρης κεραίας..... | 118 |
|--|-----|

ΤΟ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

| | |
|--------------------------------|-----|
| Η πεπερασμένη κεραία..... | 127 |
| Συμβολισμοί..... | 134 |
| Παραπομπές – Βιβλιογραφία..... | 138 |
| Ευχαριστίες..... | 139 |
| Περιεχόμενα..... | 140 |