ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Το πρόβλημα της ύπαρξης Γνήσιας Ισορροπίας Nash σε Γραφηματικά Παίγνια

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Δασκαλάκης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Καθ. Ε. Ζάχος

Αθήνα, Ιούλιος 2004

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ &
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ &
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Το πρόβλημα της ύπαρξης Γνήσιας Ισορροπίας Nash σε Γραφηματικά Παίγνια

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Κωνσταντίνος Δασκαλάκης

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ
Καθ. Ε. Ζάχος

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την $22^{η}$ Ιουλίου 2004

Ε. Ζάχος	**Τ. Σελλής**	**Φ. Αφράτη**
Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγήτρια
Ε.Μ.Π.	**Ε.Μ.Π.**	**Ε.Μ.Π.**

Αθήνα, Ιούλιος 2004

Κωνσταντίνος Δασκαλάκης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Για την περιγραφή ενός παιγνίου χρειάζεται, γενικά, πληροφορία εκθετική ως προς το πλήθος των παικτών. Έτσι, η χρήση των εργαλείων της θεωρίας παιγνίων για την ανάλυση παιγνίων με μεγάλο αριθμό παικτών, όπως το διαδίκτυο και η αγορά, αντιμετωπίζει το εγγενές πρόβλημα του εκθετικού μεγέθους αναπαράστασης του παιγνίου, πράγμα που κάνει οποιοδήποτε πρόβλημα εξ αρχής υπολογιστικά απρόσιτο. Σε τέτοια παίγνια ακόμα και μέγεθος περιγραφής πολυωνυμικό ως προς το πλήθος των παικτών δεν είναι ικανοποιητικό. Είναι, λοιπόν, ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν υπάρχουν παίγνια με πιο συμπαγή περιγραφή. Παρότι εύλογο το ερώτημα δεν υπάρχει στη βιβλιογραφία ανάλυση τέτοιων παιγνίων.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετώνται περιπτώσεις στις οποίες για την περιγραφή ενός παιγνίου χρειάζεται πληροφορία λογαριθμική ως προς το πλήθος των παικτών. Σε τέτοια παίγνια με διάφορες τοπολογίες γράφου εξαρτήσεων μεταξύ των παικτών, μελετάται η χρονική πολυπλοκότητα του προβλήματος ελέγχου ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash. Μεταξύ άλλων αποδεικνύεται ότι αν ο γράφος εξαρτήσεων ενός τέτοιου παιγνίου είναι αλυσίδα ή δακτύλιος το πρόβλημα ανήκει στην κλάση P, των προβλημάτων που λύνονται σε πολυωνυμικό χρόνο από ντετερμινιστική μηχανή Turing, ενώ αν ο γράφος είναι τετραγωνικό πλέγμα ή τόρος το πρόβλημα είναι $NEXP$-πλήρες, δηλαδή είναι πλήρες στην κλάση προβλημάτων που λύνονται από μη ντετερμινιστικές μηχανές Turing εκθετικού χρόνου. Οι αποδείξεις για το πλέγμα και τον τόρο είναι δύσκολες και τεχνικές, αλλά χρησιμοποιούν ενδιαφέροντα αποδεικτικά τεχνάσματα.

Λέξεις κλειδιά

Στρατηγικά Παίγνια, Γραφηματικά Παίγνια, Συμπαγής Περιγραφή Παιγνίων, NEXP-Completeness

Abstract

The information required to describe a game is generally exponential in the number of players. Thus, the use of game theoretic approaches to analyze games with large number of players, such as the internet and the market, faces the intrinsic problem of the exponential description size, which makes every computation inefficient. In such games, even polynomial in the number of players description size is not satisfying. It is, therefore, very interesting to check whether there exist games with more succinct descriptions.

In this thesis we study games with description size logarithmic in the number of players. For such games of various player-dependency graphs we analyze the complexity of checking whether a pure Nash equilibrium exists. Among other things we prove that if the dependency graph of such games is a chain or a ring then checking the existence of pure Nash equilibrium can be done in polynomial time, but if the dependency graph is a square grid or a square torus then the corresponding problem is NEXP-complete. The later results have difficult proofs, but use interesting proof techniques.

Keywords

Strategic Games, Graphical Games, Succinct Description of a Game, NEXP-Completeness

Περιεχόμενα

Κατάλογος σχημάτων

Ευχαριστίες

Η εργασία αυτή θα είχε άλλο θέμα και άλλη μορφή αν δεν είχε γίνει μία συζήτηση με τον καθηγητή Χρίστο Παπαδημητρίου, που εδώ και πολλά χρόνια θαυμάζω για τη συμβολή του στη θεμελίωση της θεωρητικής πληροφορικής, πάνω στην πρόσφατη εργασία του [PR] η οποία με ενέπνευσε να εστιάσω στο θέμα μου. Η παρότρυνσή του υπήρξε πολύτιμη και οι υποδείξεις του κατά την πορεία της έρευνας πολύ σημαντικές για μένα.

Θέλω, επίσης, θερμά να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Στάθη Ζάχο που υπήρξε για μένα ο άνθρωπος που μου ενέπνευσε τον έρωτα για τη θεωρητική πληροφορική και στάθηκε δίπλα μου με αγάπη και κατανόηση και την πολύτιμη εμπειρία του όλα τα χρόνια της φοιτητικής μου ζωής και κατά την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Ευχαριστώ τον καθηγητή μου Τίμο Σελλή που εκτιμώ βαθιά και αποτελεί για μένα πρότυπο επιστήμονα αν και βρίσκεται σε άλλη επιστημονική περιοχή. Ήταν για μένα πάντα εκεί γεμάτος προθυμία και ζεστασιά όποτε χρειάστηκα την βοήθειά του.

Ευχαριστώ, ακόμα, τον καθηγητή μου Γιώργο Παπακωνσταντίνου ο οποίος με το συγκινητικό του ενδιαφέρον και την εμπιστοσύνη που μου έδειξε υπήρξε πολύτιμος αρωγός σε μια περίοδο κρίσιμων επιλογών και αποφάσεων.

Τέλος, ευχαριστώ τα παιδιά του εργαστηρίου λογικής και επιστήμης υπολογιστών και κυρίως τον διδάκτορα Άρη Παγουρτζή για το ευχάριστο κλίμα συνεργασίας και τη δημιουργική υποστήριξή τους και όσους βρίσκονται στο οικογενειακό και φιλικό μου περιβάλλον και με στηρίζουν με την αγάπη και την εμπιστοσύνη τους όλα αυτά τα χρόνια.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η θεωρία παιγνίων και η έννοια της ισορροπίας Nash έχουν, εκτός από την οικονομική επιστήμη, σημαντικές εφαρμογές σε πολλά άλλα επιστημονικά πεδία. Τα τελευταία χρόνια πολλά προβλήματα της πληροφορικής, με κυριότερο αυτό της μελέτης των δικτύων, έχουν αρχίσει να εξετάζονται υπό το πρίσμα της θεωρίας παιγνίων. Γι'αυτό το λόγο, κεντρικά προβλήματα της θεωρίας παιγνίων, όπως ο έλεγχος ύπαρξης ισορροπίας Nash και ο υπολογισμός ισορροπιών Nash, έχουν προσελκύσει έντονα το ενδιαφέρον της θεωρητικής πληροφορικής.

Στην κατεύθυνση αυτή, η περισσότερη έρευνα έχει γίνει πάνω σε υπολογιστικά προβλήματα που αφορούν μικτές ισορροπίες Nash, σε παίγνια με μικτές στρατηγικές στα οποία οι παίκτες δεν επιλέγουν μία στρατηγική από ένα σύνολο στρατηγικών που διαθέτουν, αλλά παίζουν σύμφωνα με μια πιθανοτική κατανομή πάνω στο σύνολο στρατηγικών τους. Από το διάσημο θεώρημα του Nash [Nas51] γνωρίζουμε ότι κάθε παίγνιο έχει μικτή ισορροπία Nash, ωστόσο παραμένει ανοικτό το πρόβλημα αν μια τέτοια ισορροπία μπορεί να υπολογιστεί σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό που γνωρίζουμε για το πρόβλημα υπολογισμού ισορροπίας Nash είναι ότι ανήκει στην κλάση $PPAD$[1] [Pap94] όπως και το πρόβλημα της εύρεσης σταθερών σημείων Brouwer, αλλά σε αντίθεση με το τελευταίο δεν γνωρίζουμε αν είναι πλήρες στην κλάση αυτή.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με γνήσιες ισορροπίες Nash και πιο συγκεκριμένα με το υπολογιστικό πρόβλημα του ελέγχου ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash. Σημειώνουμε ότι η ύπαρξη γνήσιας ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο δεν είναι εξασφαλισμένη, αν και υπάρχουν κλάσεις παιγνίων που έχουν πάντα γνήσια ισορροπία Nash [Ros73, MS93, FKK+02].

[1]**P**olynomial **P**arity **A**rgument **D**irected version

Στο κεφάλαιο 2 ορίζουμε τυπικά τις έννοιες του στρατηγικού παιγνίου, του γραφηματικού παιγνίου και της ισορροπίας Nash και στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος ελέγχου ύπαρξης ισορροπίας Nash στη γενική περίπτωση.

Το κεφάλαιο 4 που αποτελεί και το σημαντικότερο τμήμα της εργασίας αφιερώνεται στο πρόβλημα ελέγχου ύπαρξης ισορροπίας Nash σε παίγνια με συμπαγή περιγραφή. Το κίνητρο πίσω από τη μελέτη του κεφαλαίου αυτού είναι η παρατήρηση ότι γενικά για να ορίσουμε ένα παίγνιο πρέπει να δώσουμε πληροφορία εκθετική ως προς το πλήθος των παικτών. Αν, όμως, μας ενδιαφέρει η μελέτη παιγνίων με πολλούς παίκτες, όπως το διαδίκτυο και η αγορά, η εκθετική πληροφορία περιγραφής του παιγνίου είναι απαγορευτική αν το παίγνιο πρόκειται να δοθεί ως είσοδος σε κάποιον αλγόριθμο που θέλει να ελέγξει π.χ. την ύπαρξη ισορροπίας Nash. Σε τέτοια παίγνια ακόμα και μέγεθος περιγραφής πολυωνυμικό ως προς το πλήθος των παικτών δεν είναι ικανοποιητικό. Επομένως, είναι εύλογο το ερώτημα αν υπάρχουν παίγνια των οποίων το μέγεθος αναπαράστασης είναι λιγότερο από πολυωνυμικό ως προς το πλήθος των παικτών. Παρότι εύλογο το ερώτημα δεν συναντούμε τέτοια μελέτη στη βιβλιογραφία. Στο κεφάλαιο 4 δίνουμε μια ικανή συνθήκη ώστε το μέγεθος περιγραφής του παιγνίου να είναι λογαριθμικό ως προς το πλήθος των παικτών και ακολούθως ορίζουμε διάφορα παίγνια με την ιδιότητα αυτή. Στη συνέχεια, μελετάται η χρονική πολυπλοκότητα του προβλήματος ελέγχου ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash στα παίγνια αυτά.

Κεφάλαιο 2

Παίγνια και Ισορροπίες

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε μερικές βασικές έννοιες της μη συνεργατικής θεωρίας παιγνίων (non cooperative game theory). Θα δώσουμε έμφαση στις έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενα κεφάλαια.

2.1 Παίγνια

Σε ένα στρατηγικό παίγνιο έχουμε n παίκτες, καθένας από τους οποίους μπορεί να διαλέξει από ένα διαφορετικό σύνολο στρατηγικών που αντιστοιχεί στον εν λόγω παίκτη. Ανάλογα με τις στρατηγικές που διαλέγουν οι παίκτες του παιγνίου καθορίζεται για καθέναν από αυτούς το όφελος του (payoff). Τυπικά ένα στρατηγικό παίγνιο ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.1. Ένα **στρατηγικό παίγνιο (strategic game)** ορίζεται από:

- ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο N (το σύνολο των **παικτών**)
- για κάθε παίκτη $i \in N$:
  - ένα μη κενό σύνολο S_i (το σύνολο των **στρατηγικών** του παίκτη i)
  - μία συνάρτηση $u_i : \prod_{i \in N} S_i \rightarrow \Re$ (η συνάρτηση που εκφράζει το **όφελος(payoff)** του παίκτη i)

Αν επιπλέον για κάθε παίκτη $i \in N$ το σύνολο S_i είναι πεπερασμένο, το στρατηγικό παίγνιο ονομάζεται **πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο**.

Ένα στοιχείο $s \in \prod_{i \in N} S_i$ ονομάζεται **στρατηγικό προφίλ**. Αν s είναι ένα στρατηγικό προφίλ, τότε με $s_i \in S_i$ συμβολίζουμε τη στρατηγική του παίκτη i στο εν λόγω στατηγικό προφίλ, ενώ με $s_{-i} \in \prod_{j \in N \setminus \{i\}} S_j$ συμβολίζουμε τις στρατηγικές όλων των παικτών εκτός του i πάλι στο εν λόγω στρατηγικό προφίλ.

Ένα πεπερασμένο στρατηγικό παίγνιο δύο παικτών μπορεί να περιγραφεί συνοπτικά με έναν δισδιάστατο πίνακα. Πιο συγκεκριμένα, αν υποθέσουμε ότι $S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \ldots, s_{1m}\}$ και $S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \ldots, s_{2k}\}$, τότε για να περιγράψουμε το παίγνιο αρκεί να δώσουμε έναν $m \times k$ πίνακα $G = [g_{ij}]$, όπου $g_{ij} = (u_1(s_{1i}, s_{2j}), u_2(s_{1i}, s_{2j})), \forall i \in \{1, 2, \ldots, m\}, \forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Οι γραμμές του πίνακα αντιστοιχούν στις στρατηγικές του παίκτη 1 και οι στήλες στις στρατηγικές του παίκτη 2, ενώ κάθε στοιχείο του πίνακα δίνει το όφελος κάθε παίκτη αν ο παίκτης 1 επιλέξει τη στρατηγική που αντιστοιχεί στη γραμμή του εν λόγω στοιχείου και ο παίκτης 2 επιλέξει τη στρατηγική που αντιστοιχεί στη στήλη του εν λόγω στοιχείου.

Παράδειγμα 2.2 (BoS: Bach or Stravinsky ή Battle of Sexes).

Ένα ζευγάρι θέλει να πάει σε κάποιο κονσέρτο μουσικής και θέλει να διαλέξει μεταξύ Bach και Stravinsky. Ο άντρας προτιμά τον Bach, ενώ η γυναίκα τον Stravinsky, ωστόσο αυτό που τους ενδιαφέρει κυρίως είναι να πάνε στο κονσέρτο μαζί. Αν δεν συμφωνήσουν σε κάποιον από τους δύο συνθέτες, δεν θα πάνε στο κονσέρτο.

Βλέποντας τις επιλογές τους ως στρατηγικές έχουμε το παίγνιο που φαίνεται στο σχήμα 2.1, όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στις στρατηγικές του άντρα και οι στήλες στις στρατηγικές της γυναίκας. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, αν ο άντρας και η γυναίκα δεν συμφωνήσουν, τότε θα έχουν μηδενικό όφελος αφού δεν θα πάνε στο κονσέρτο. Αν και οι δυο επιλέξουν Bach, τότε και οι δύο θα έχουν όφελος, αλλά ο άντρας θα έχει μεγαλύτερο απ' ότι η γυναίκα. Αντιστρόφως, αν και οι δύο επιλέξουν Stravinsky, τότε πάλι και οι δύο θα έχουν όφελος αλλά ο άντρας θα έχει μικρότερο απ'ότι η γυναίκα.

$$D = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B & S \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ S \end{array} & \begin{bmatrix} (2,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,2) \end{bmatrix} \end{array}$$

Σχήμα 2.1: Bach or Stravinsky

Ορίζουμε, τώρα, την έννοια του γραφηματικού παιγνίου. Τα γραφηματικά παίγνια είναι το αντικείμενο μελέτης της παρούσας διπλωματικής.

Ορισμός 2.3. Ένα **γραφηματικό παίγνιο (graphical game)** ορίζεται από:

- Ένα κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ (οι κόμβοι του οποίου παριστάνουν τους **παίκτες** του παιγνίου και οι ακμές του τις **κατευθυνόμενες εξαρτήσεις** μεταξύ των παικτών)

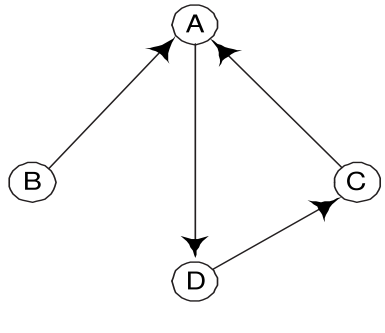
- Για κάθε κόμβο $v \in V(G)$ του γραφήματος:
  - ένα μη κενό σύνολο S_v (το σύνολο των **στρατηγικών** του παίκτη v)
  - μία συνάρτηση $u_v : S_v \times (\prod_{i \in N(v)} S_i) \to \Re$, όπου το σύνολο $N(v) = \{t \in V(G) | (t,v) \in E(G)\}$ είναι το σύνολο των γειτόνων του κόμβου v από τους οποίους **"εξαρτάται"** (η συνάρτηση u_v εκφράζει το **όφελος(payoff)** του παίκτη v)

Όπως και στην περίπτωση των στρατηγικών παιγνίων έτσι και εδώ, αν επιπλέον για κάθε παίκτη $v \in V(G)$ το σύνολο S_v είναι πεπερασμένο, το γραφηματικό παίγνιο ονομάζεται **πεπερασμένο γραφηματικό παίγνιο**.

Σημειώνουμε ότι στη βιβλιογραφία τα γραφηματικά παίγνια ορίζονται πάνω σε μη κατευθυνόμενους γράφους. Θα δούμε τέτοια παίγνια αργότερα. Ο ορισμός που δώσαμε είναι, ωστόσο, γενικότερος και εκφράζει περιπτώσεις παιγνίων στα οποία οι εξαρτήσεις μεταξύ των παικτών δεν είναι απαραίτητα συμμετρικές.

Ένα παράδειγμα γραφηματικού παιγνίου είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 2.4. Στο σχήμα 2.2 δίνεται ο γράφος εξαρτήσεων μεταξύ των παικτών A, B, C και D ενός γραφηματικού παιγνίου. Το όφελος του παίκτη A είναι συνάρτηση της στρατηγικής του και της στρατηγικής των παικτών B και C. Το όφελος του παίκτη C είναι συνάρτηση της στρατηγικής του και της στρατηγικής του παίκτη D, ενώ το όφελος του παίκτη D είναι συνάρτηση της στρατηγικής του και της στρατηγικής του παίκτη A. Αντίθετα με τους παίκτες A, C και D, το όφελος του παίκτη B εξαρτάται μόνο από τη στρατηγική του ιδίου και δεν επηρεάζεται καθόλου από τις επιλογές των άλλων.



Σχήμα 2.2: Ο γράφος εξαρτήσεων μεταξύ των παικτών ενός γραφηματικού παιγνίου

Είναι φανερό ότι ένα στρατηγικό παίγνιο μπορεί να περιγραφεί ως ένα γραφηματικό παίγνιο στο οποίο ο γράφος εξαρτήσεων μεταξύ των παικτών είναι ο πλήρης κατευθυνόμενος γράφος (κλίκα). Αντίστροφα, με κατάλληλους ορισμούς των συνόλων N και $S_i, \forall i \in N$, και των συναρτήσεων $u_i, \forall i \in N$, ενός στρατηγικού παιγνίου μπορούμε να περιγράψουμε οποιοδήποτε γραφηματικό παίγνιο. Δηλαδή, η κλάση των γραφηματικών παιγνίων ταυτίζεται με την κλάση των στρατηγικών παιγνίων.

Ειδική περίπτωση παιγνίων είναι τα παίγνια συμφόρησης που έχουν πολλές εφαρμογές στην ανάλυση δικτύων.

Ορισμός 2.5. Ένα **παίγνιο συμφόρησης (congestion game)** ορίζεται από:

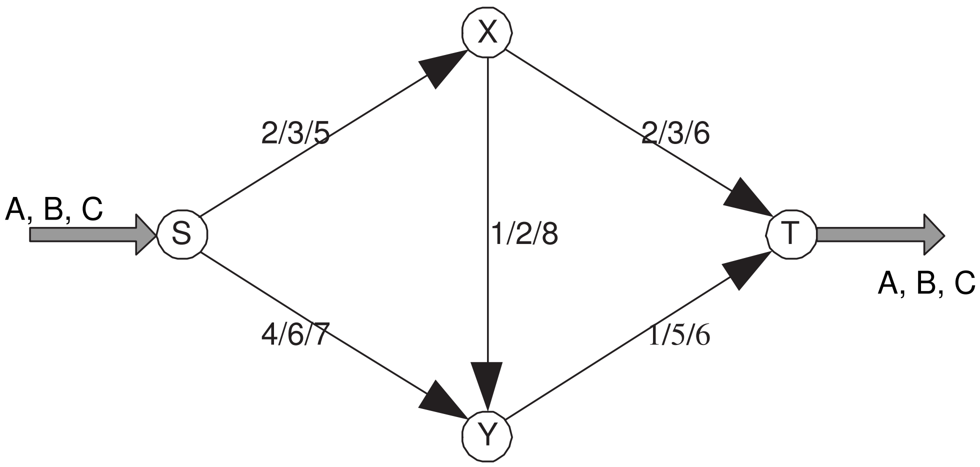
- Δύο μη κενά πεπερασμένα σύνολα N και E (το σύνολο των **παικτών** και το σύνολο των **αγαθών** αντίστοιχα)
- Για κάθε $i \in N$ ένα σύνολο $S_i \subseteq 2^E$ (το σύνολο των **στρατηγικών** του παίκτη i που είναι μία συλλογή από υποσύνολα του E)
- Για κάθε $e \in E$ μία συνάρτηση $d_e : \{1, 2, ..., |N|\} \to \Re$ (που εκφράζει το **κόστος του αγαθού** e συναρτήσει του πλήθους των παικτών που επιλέγουν στρατηγική που το περιέχει)

Για κάθε στρατηγικό προφίλ $s \in \prod_{i \in N} S_i$ το **όφελος(payoff)** $u_i(s)$ του παίκτη $i \in N$ ορίζεται έμμεσα ως το αντίθετο του αθροίσματος του κόστους των αγαθών $e \in s_i$. Τυπικότερα, για κάθε στρατηγικό προφίλ $s \in \prod_{i \in N} S_i$ έστω η συνάρτηση $f_s(e) = |\{i \in N : e \in s_i\}|$, $\forall e \in E$. Τότε το όφελος του παίκτη $i \in N$ είναι $u_i(s) = -\sum_{e \in s_i} d_e(f_s(e))$.

Ένα παράδειγμα παιγνίου συμφόρησης είναι το ακόλουθο:

Παράδειγμα 2.6. Στο σχήμα 2.3, καθένας από τους παίκτες A, B και C επιλέγει ένα μονοπάτι από τον κόμβο S στον κόμβο T προκειμένου να περάσει από αυτό μία μονάδα ροής. Πάνω σε κάθε ακμή αναγράφεται η καθυστέρηση που αυτή εισάγει συναρτήσει του πλήθους παικτών που την χρησιμοποιούν. Έτσι, αν για παράδειγμα ο παίκτης A επιλέξει το μονοπάτι $SXYT$, ο B το μονοπάτι SXT και ο C το μονοπάτι SYT, τότε θα έχουν καθυστέρηση (αρνητικό όφελος) 9, 5, 9 αντίστοιχα. Δηλαδή ο πιο ωφελημένος θα είναι ο παίκτης B.

Δε θα αναφερθούμε εκτενέστερα στα παίγνια συμφόρησης στην εργασία αυτή.



Σχήμα 2.3: Ένα παίγνιο συμφόρησης στα δίκτυα

2.2 Μέγεθος αναπαράστασης παιγνίων

Στην ενότητα αυτή θα διερευνήσουμε το μέγεθος πληροφορίας που απαιτείται για να περιγράψουμε ένα στρατηγικό και ένα γραφηματικό παίγνιο. Ας θυμηθούμε τον ορισμό 2.1. Για να ορίσουμε το στρατηγικό παίγνιο $G = < N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} >$ θα πρέπει να δώσουμε:

- το πλήθος των παικτών $\rightarrow$ πληροφορία: $\log |N|$
- για κάθε παίκτη $i \in N$:
  - το πλήθος των στρατηγικών του $\rightarrow$ πληροφορία: $\log |S_i|$
  - τη συνάρτηση οφέλους του
    $\rightarrow$ πληροφορία: $\left(\prod_{j \in N} |S_j|\right) \cdot (1 + \log(\max |u_i|))$

Δηλαδή χρειάζεται να δώσουμε συνολική πληροφορία ίση με:

$$\log |N| + \sum_{i \in N} \left(\log |S_i| + \left(\prod_{j \in N} |S_j| \right) \cdot (1 + \log(\max |u_i|)) \right)$$

Η παραπάνω πληροφορία είναι προφανώς εκθετική ως προς το πλήθος των παικτών του παιγνίου.

Ας δούμε, τώρα, πόση πληροφορία χρειάζεται για να ορίσουμε ένα γραφηματικό παίγνιο $< G(V, E), \{S_v\}_{v \in V(G)}, \{u_v\}_{v \in V(G)} >$. Πρέπει να ορίσουμε:

- τον γράφο του παιγνίου $\rightarrow$ πληροφορία: $poly(|V(G)|)$

- για κάθε παίκτη $v \in V(G)$:
  - το πλήθος των στρατηγικών του $\rightarrow$ πληροφορία: $\log|S_v|$
  - τη συνάρτηση οφέλους του
    $\rightarrow$ πληροφορία: $\left(|S_v| \cdot \prod_{j\in N(v)} |S_j|\right) \cdot (1+\log(\max|u_v|))$

Δηλαδή χρειάζεται να δώσουμε συνολική πληροφορία ίση με:

$$poly(|V(G)|) + \sum_{v\in V(G)} \left(\log|S_v| + \left(|S_v| \cdot \prod_{j\in N(v)} |S_j| \right) \cdot (1+\log(\max|u_v|)) \right)$$

Στη γενική περίπτωση η παραπάνω πληροφορία είναι εκθετική ως προς το πλήθος των παικτών. Όμως, αν επιβάλουμε περιορισμούς στο γράφο του παιγνίου, για παράδειγμα αν απαιτήσουμε ο εσωβαθμός κάθε κόμβου στο γράφημα να είναι φραγμένος, η πληροφορία γίνεται πολυωνυμική ως προς το πλήθος των παικτών.

Εκτενέστερη ανάλυση για το μέγεθος της πληροφορίας που απαιτείται για να περιγράψουμε ένα γραφηματικό παίγνιο θα γίνει στο κεφάλαιο 4.

2.3 Ισορροπία Nash

Παρακάτω θα ορίσουμε την έννοια της ισορροπίας Nash η οποία έχει κεντρικό ρόλο στην παρούσα διπλωματική εργασία. Η ισορροπία Nash προσπαθεί να μοντελοποιήσει την ισορροπία ενός παιγνίου στο οποίο οι παίκτες δεν συνεργάζονται μεταξύ τους και στο οποίο κάθε παίκτης δρα ορθολογικά (rationally) και έχει πλήρη γνώση των στρατηγικών των υπόλοιπων παικτών. Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι ένα τέτοιο παίγνιο ισορροπεί όταν κανείς παίκτης δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από τη στρατηγική του. Τυπικότερα η ισορροπία Nash ορίζεται ως ακολούθως.

Ορισμός 2.7. Έστω ένα στρατηγικό παίγνιο $G =< N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} >$. Ένα στρατηγικό προφίλ $s \in \prod_{i\in N} S_i$ ονομάζεται **γνήσια ισορροπία Nash** ή απλά **ισορροπία Nash** του παιγνίου G αν για κάθε παίκτη $i \in N$ ισχύει:

$$u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(x; s_{-i}), \forall x \in S_i$$

Παράδειγμα 2.8. Στο παίγνιο BoS του παραδείγματος 2.2, εύκολα βλέπει κανείς ότι υπάρχουν δύο ισορροπίες Nash, τα στρατηγικά προφίλ (Bach,Bach) και (Stravinsky,Stravinsky). Ας επαληθεύσουμε ότι το ζεύγος (Bach,Bach) αποτελεί ισορροπία Nash. Από τον πίνακα του παιγνίου (σχήμα 2.1) παρατηρούμε ότι αν και οι δύο παίκτες επιλέξουν Bach ο άντρας έχει όφελος 2 και η γυναίκα όφελος 1. Επιπλέον, κανείς από τους δύο παίκτες δεν έχει κίνητρο να αποκλίνει από τη στρατηγική Bach, διότι το όφελός του θα μειωθεί στην τιμή 0 αν ο άλλος παίκτης εμμείνει στη στρατηγική Bach.

Ορίζουμε, τώρα, τη συνάρτηση βέλτιστων αποκρίσεων ενός παίκτη και μέσω αυτής θα δώσουμε έναν εναλλακτικό ορισμό της ισορροπίας Nash που πολλές φορές είναι χρήσιμος.

Ορισμός 2.9. Έστω ένα στρατηγικό παίγνιο $G =< N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} >$. Ορίζουμε ως **συνάρτηση βέλτιστων αποκρίσεων του παίκτη** $i \in N$ τη συνάρτηση $BestResponse_i : \prod_{j\in N\setminus\{i\}} S_j \to S_i$ η οποία για κάθε $s_{-i} \in \prod_{j\in N\setminus\{i\}} S_j$ έχει τιμή:

$$BestResponse(s_{-i}) = \{s_i \in S_i | u_i(s_i; s_{-i}) \geq u_i(x; s_{-i}), \forall x \in S_i\}$$

Είναι φανερό ότι ένα στρατηγικό προφίλ $s \in \prod_{i\in N} S_i$ είναι γνήσια ισορροπία Nash του παιγνίου $G =< N, \{S_i\}_{i\in N}, \{u_i\}_{i\in N} >$ αν για κάθε παίκτη $i \in N$ ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_i(s_{-i})$$

Ένα εύλογο ερώτημα είναι αν κάθε παίγνιο έχει ισορροπία Nash. Από το παράδειγμα 2.10 προκύπτει ότι αυτό δεν ισχύει.

Παράδειγμα 2.10 (Matching Euros). Δύο παίκτες Α και Β παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Καθένας επιλέγει κορώνα ή γράμματα και στη συνέχεια αποκαλύπτουν ταυτόχρονα ο ένας στον άλλο την επιλογή τους. Αν οι επιλογές διαφέρουν τότε ο παίκτης Α δίνει ένα ευρώ στον παίκτη Β, διαφορετικά ο παίκτης Β δίνει ένα ευρώ στον παίκτη Α. Ο πίνακας του παιγνίου φαίνεται στο σχήμα 2.4. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι το παίγνιο Matching Euros δεν έχει ισορροπία Nash.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} K & \Gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} K \\ \Gamma \end{array} & \left[\begin{array}{cc} (1,-1) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) \end{array}\right] \end{array}$$

Σχήμα 2.4: Ο πίνακας του παιγνίου Matching Euros

Στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε μια ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο.

Θεώρημα 2.11. [RO94] Ένα στρατηγικό παίγνιο $G =< N, \{S_i\}_{i \in N}, \{u_i\}_{i \in N} >$ έχει **γνήσια ισορροπία Nash** εάν για κάθε παίκτη $i \in N$:

- το σύνολο S_i είναι συμπαγές και κυρτό υποσύνολο ενός ευκλείδειου χώρου
- η συνάρτηση u_i είναι συνεχής
- για κάθε στρατηγικό προφίλ $s \in \prod_{i \in N} S_i$ το σύνολο $B_i(s_{-i})$ είναι κυρτό

2.4 Παράδοξα

Η ισορροπία Nash συλλαμβάνει την έννοια της ισορροπίας ενός μη συνεργατικού παιγνίου, ωστόσο δεν δίνει εγγυήσεις για το όφελος των παικτών στο σημείο της ισορροπίας. Αυτό μπορεί να θεωρηθεί λογικό αφού διαισθητικά δεν μπορεί όλοι οι παίκτες να είναι ευχαριστημένοι από την εξέλιξη ενός παιγνίου. Αυτό που μπορεί να ερμηνευτεί ως παράδοξο είναι ότι σε κάποια παίγνια υπάρχουν στρατηγικά προφίλ που δεν είναι ισορροπίες Nash και στα οποία όλοι οι παίκτες έχουν όφελος μεγαλύτερο από το όφελος που έχουν σε οποιαδήποτε ισορροπία Nash του παιγνίου. Στα παίγνια αυτά συνήθως συμφέρει τους παίκτες να συνεργαστούν μεταξύ τους. Δίνουμε δύο παραδείγματα τέτοιων παιγνίων.

2.4.1 Δίλημμα του φυλακισμένου

Ένας αστυνόμος έχει συλλάβει δύο υπόπτους που ξέρει ότι είναι ένοχοι για μια ληστεία, αλλά δεν έχει αρκετά ενοχοποιητικά στοιχεία εναντίον τους. Αν είχε, θα τους φυλάκιζε και τους δύο για 3 χρόνια, ενώ χωρίς στοιχεία μπορεί να τους φυλακίσει μόνο για 1. Για να τους αναγκάσει να ομολογήσουν, τους βάζει σε χωριστά ανακριτικά δωμάτια και λέει στον καθένα ότι, αν συνεργαστεί και ομολογήσει τη συμμετοχή του στη ληστεία, θα τον αφήσει ελεύθερο και θα χρησιμοποιήσει την κατάθεσή του για να ενοχοποιήσει τον άλλο, ο οποίος σ'αυτή την περίπτωση θα λάβει ποινή φυλάκισης 4 χρόνων. Ωστόσο, αν και οι δύο ύποπτοι συνεργαστούν και ομολογήσουν, τότε θα βρεθούν τα ενοχοποιητικά στοιχεία εναντίον τους και θα φυλακιστούν και οι δύο για 3 χρόνια. Ο πίνακας του παιγνίου φαίνεται στο σχήμα 2.5. Με "Σ" παριστάνουμε τη στρατηγική *συνεργασία* και με "ΜΣ" παριστάνουμε τη στρατηγική *μη συνεργασία*. Το όφελος κάθε παίκτη για ένα στρατηγικό προφίλ είναι ίσο με το αντίθετο της ποινής που θα λάβει σε χρόνια αυξημένο κατά 4.

$$\begin{array}{ccc} & M\Sigma & \Sigma \\ \begin{array}{c} M\Sigma \\ \Sigma \end{array} & \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} (3,3) & (0,4) \\ (4,0) & (1,1) \end{bmatrix}} \end{array}$$

Σχήμα 2.5: Το δίλημμα του φυλακισμένου

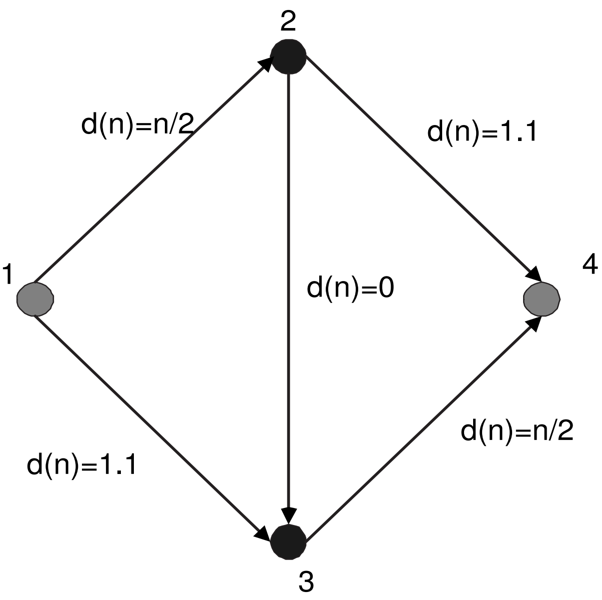
Από τον πίνακα του παιγνίου προκύπτει ότι η μοναδική ισορροπία Nash είναι το στρατηγικό προφίλ (Σ,Σ), στο οποίο και οι δύο ύποπτοι συνεργάζονται και λαμβάνουν ποινή φυλάκισης 3 χρόνων. Παρατηρούμε, όμως, ότι αν κανείς από τους δύο δεν συνεργαζόταν και οι δυο παίκτες θα λάμβαναν ποινή φυλάκισης ενός χρόνου. Δηλαδή, στο στρατηγικό προφίλ (ΜΣ,ΜΣ) και οι δυο παίκτες έχουν όφελος μεγαλύτερο από το όφελός τους στην ισορροπία Nash του παιγνίου.

2.4.2 Παράδοξο του Braess

Θεωρούμε το δίκτυο του σχήματος 2.6 και δύο παίκτες A, B οι οποίοι θέλουν να μετακινηθούν από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4. Σε κάθε ακμή του δικτύου καταγράφεται η καθυστέρηση σε ώρες που χρειάζεται ένας παίκτης για να τη διασχίσει συναρτήσει του πλήθους παικτών που επιλέγουν να τη διασχίσουν. Το σύνολο στρατηγικών είναι το $\{124, 1234, 134\}$ και περιέχει τα διαφορετικά μονοπάτια από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4.

Το στρατηγικό προφίλ $(1234, 1234)$ αποτελεί ισορροπία Nash. Πράγματι, επειδή και δύο παίκτες επιλέγουν τις ακμές 12 και 34 αυτές θα έχουν καθυστέρηση 1 η καθεμιά, οπότε κάθε παίκτης θα συναντά συνολική καθυστέρηση 2 στην μετακίνηση του από τον κόμβο 1 στον κόμβο 4. Επιπλέον, κανένας παίκτης δεν έχει κίνητρο μονομερώς να αποκλίνει από τη στρατηγική του αφού όποιο μονοπάτι και να επιλέξει δεν θα έχει καθυστέρηση μικρότερη από 2.

Επίσης, το στρατηγικό προφίλ $(124, 134)$ δεν αποτελεί ισορροπία Nash. Πράγματι, στην περίπτωση αυτή κάθε παίκτης συναντά συνολική καθυστέρηση 1.6, αλλά έχει κίνητρο να αποκλίνει μονομερώς από τη στρατηγική του και να επιλέξει τη στρατηγική 1234 η οποία θα του δώσει καθυστέρηση 1.5. Δηλαδή, το στρατηγικό προφίλ $(124, 134)$ δεν είναι ισορροπία Nash αλλά παρόλα αυτά δίνει σε κάθε παίκτη καθυστέρηση μικρότερη από την καθυστέρησή του στην ισορροπία Nash.



Σχήμα 2.6: Παράδοξο του Braess

Κεφάλαιο 3

Ύπαρξη Γνήσιας Ισορροπίας Nash σε Γραφηματικά Παίγνια

Σε ένα πεπερασμένο παίγνιο η ύπαρξη γνήσιας ισορροπίας Nash δεν είναι εξασφαλισμένη. Ένα εύλογο υπολογιστικό πρόβλημα είναι, λοιπόν, ο έλεγχος ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash σε ένα παίγνιο. Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την πολυπλοκότητα του προβλήματος στην κατηγορία των γραφηματικών παιγνίων.

3.1 Ύπαρξη γνήσιας ισορροπίας Nash σε DAGs

Όταν ο κατευθυνόμενος γράφος εξαρτήσεων ενός παιγνίου είναι ακυκλικός θα υπάρχει πάντα γνήσια ισορροπία Nash στο παίγνιο. Αυτό αποδεικνύουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1. Ένα παίγνιο του οποίου ο κατευθυνόμενος γράφος εξαρτήσεων είναι ακυκλικός (DAG) έχει πάντα γνήσια ισορροπία Nash.

Απόδειξη. (Η απόδειξη είναι κατασκευαστική)
Έστω ένα παίγνιο του οποίου ο κατευθυνόμενος γράφος εξαρτήσεων $G = (V, E)$ είναι ακυκλικός (DAG). Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων κόμβων $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$V_0 = \{v \in V | \neg\exists t \in V : (t, v) \in E\}$$
$$V_i = \{v \in V | ((t, v) \in E) \Rightarrow (t \in \bigcup_{k<i} V_k)\}, \forall i > 0$$

Για την ακολουθία $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

1. $V_i \subseteq V_{i+1} \subseteq V, \forall i \in \mathbb{N}$
2. $V_i \neq \emptyset, \forall i \in \mathbb{N}$
3. $\exists k \in \mathbb{N} : (V_k = V) \wedge (V_i \subset V_{i+1}, \forall i < k) \wedge (V_i = V_{i+1}, \forall i \geq k)$

Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής. Επιπλέον, εφόσον ο γράφος G είναι ακυκλικός ισχύει $V_0 \neq \emptyset$ αφού υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος με εσωβαθμό μηδέν. Αφού $V_0 \neq \emptyset$ και $V_i \subseteq V_{i+1}, \forall i \in N$ ισχύει και η δεύτερη ιδιότητα.
Τώρα, αν $V = V_0$ ισχύει η τρίτη ιδιότητα για $k = 0$. Διαφορετικά, δηλαδή αν $V - V_0 \neq \emptyset$, θεωρούμε το γράφημα $G[V - V_0]$ (το παραγόμενο υπογράφημα του γράφου G από το σύνολο κόμβων $V - V_0$). Το γράφημα $G[V - V_0]$ θα είναι προφανώς ακυκλικό (ως υπογράφημα του ακυκλικού γραφήματος G) συνεπώς θα έχει τουλάχιστον έναν κόμβο με εσωβαθμό 0. Επομένως, θα ισχύει $V_0 \subset V_1$, δηλαδή το V_1 θα είναι γνήσιο υπερσύνολο του συνόλου V_0. Γενικά, αν για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $V_k \neq V$, τότε αν θεωρήσουμε το γράφημα $G[V - V_k]$ αυτό θα είναι μη κενό και ακυκλικό, οπότε θα έχει τουλάχιστον έναν κόμβο με εσωβαθμό 0, ήτοι $V_{k+1} \supset V_k$. Από τα παραπάνω και το γεγονός ότι το σύνολο V είναι πεπερασμένο προκύπτει ότι και η τρίτη ιδιότητα ισχύει.

Δεδομένης της ακολουθίας $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ θα κατασκευάσουμε μια ισορροπία Nash για το παίγνιο. Έστω, κατά τα γνωστά, ότι, για κάθε παίκτη-κόμβο $v \in V$, είναι S_v το σύνολο των στρατηγικών του, $N(v) = \{t \in V | (t, v) \in E\}$ οι παίκτες από τους οποίους εξαρτάται και $u_v : S_v \times \Pi_{t \in N(v)} S_t \rightarrow \Re$ η συνάρτηση οφέλους του. Έστω, επίσης, ότι για $k = k_G \in \mathbb{N}$ ικανοποιείται η ιδιότητα 3 για την ακολουθία $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$. Η κατασκευή της ισορροπίας Nash γίνεται από τον αλγόριθμο 1.
Από τον ορισμό της ακολουθίας $\{V_i, i \in \mathbb{N}\}$ και τις ιδιότητες που ικανοποιεί είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι η κατασκευή είναι εφικτή, ότι στο τέλος του αλγορίθμου θα έχουν απονεμηθεί στρατηγικές σε όλους τους παίκτες και ότι η απονομή στρατηγικών θα αντιστοιχεί σε ισορροπία Nash. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

3.2 Η πολυπλοκότητα του προβλήματος στη γενική περίπτωση

Στη γενική περίπτωση ο έλεγχος ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash σε γραφηματικά παίγνια είναι NP-complete πρόβλημα. Αυτό αποδεικνύουμε στο θεώρημα 3.2.

Αλγόριθμος 1: Κατασκευή γνήσιας ισορροπίας Nash σε DAG

begin
  for *each player* $v \in V_0$ **do**
    δώσε στον παίκτη v οποιαδήποτε στρατηγική από το σύνολο S_v;
  endfor
  for $i = 1$ *to* k_G **do**
    for *each player* $v \in V_i \setminus V_{i-1}$ **do**
      • βρες το σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων του παίκτη v που αντιστοιχεί στις στρατηγικές των παικτών από τους οποίους εξαρτάται $N(v) \subseteq V_{i-1}$;
      • δώσε στον παίκτη v οποιαδήποτε στρατηγική από το σύνολο αυτό;
    endfor
  endfor
end

Θεώρημα 3.2. [GGS03] Το πρόβλημα ελέγχου ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash σε γραφηματικά παίγνια είναι NP-complete. Αυτό ισχύει ακόμα και αν ο γράφος εξαρτήσεων του παιγνίου είναι μη κατευθυνόμενος, κάθε παίκτης-κόμβος έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 3 και κάθε παίκτης-κόμβος έχει σύνολο στρατηγικών με 3 στοιχεία.

Απόδειξη.

Το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP. Πράγματι, υπάρχει ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος πολυωνυμικού χρόνου που λύνει το πρόβλημα. Ο αλγόριθμος αυτός σε $|V|$ το πλήθος μη ντετερμινιστικά βήματα δίνει τυχαία στρατηγικές στους παίκτες του παιγνίου και, στη συνέχεια, σε $|V|$ το πλήθος ντετερμινιστικά βήματα ελέγχει αν η στρατηγική που έδωσε σε κάθε παίκτη ανήκει στο σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων που αντιστοιχεί στις στρατηγικές των παικτών από τους οποίους εξαρτάται ο εν λόγω παίκτης. Κάθε τυχαία επιλογή και κάθε έλεγχος γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος αναπαράστασης του παιγνίου, επομένως ο αλγόριθμος εκτελείται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα είναι NP-hard ανάγοντας σ'αυτό την ειδική περίπτωση του προβλήματος SAT στην οποία κάθε clause έχει το πολύ 3 literals και κάθε μεταβλητή εμφανίζεται σε τρία το πολύ clauses. Η ειδική αυτή περίπτωση του SAT είναι NP-complete [GJ79]. Έστω, λοιπόν, $I = (C, V)$ ένα στιγμιότυπο του προβλήματος αυτού, όπου $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ ένα σύνολο μεταβλητών και $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ ένα σύνολο από clauses πάνω στις μεταβλητές του συνόλου V. Με αφετηρία το στιγμιότυπο I κατασκευάζουμε ένα γραφηματικό παίγνιο G με μη κατευθυνόμενο γράφο εξαρτήσεων τέτοιο ώστε:

- οι παίκτες διαμερίζονται σε δύο σύνολα, $P_V = V$ και $P_C = C$, που αντιστοιχούν στις μεταβλητές του συνόλου V και στα clauses του συνόλου C αντίστοιχα
- στο γράφημα του παιγνίου:
  - κάθε παίκτης $c \in P_C$ έχει γείτονες τους παίκτες που αντιστοιχούν στις μεταβλητές που εμφανίζονται στο clause c
  - κάθε παίκτης $v \in P_V$ έχει γείτονες τους παίκτες που αντιστοιχούν στα clauses στα οποία εμφανίζεται η μεταβλητή v
- όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών $S = \{t, f, u\}$, όπου τα t και f μπορούν να ερμηνεύονται ως απονομές αληθοτιμών στις μεταβλητές και τα clauses
- κάθε παίκτης $c \in P_C$ έχει συνάρτηση οφέλους $u_c : S^{|Neigh(c)|+1} \to \Re$ η οποία έχει:
  - την τιμή 3 αν (i) ο παίκτης c έχει τη στρατηγική t και οι γείτονές του έχουν στρατηγικές από το σύνολο $\{t, f\}$ που κάνουν το clause c αληθές
  - την τιμή 2 αν (ii) ο παίκτης c έχει τη στρατηγική u και οι γείτονές του έχουν στρατηγικές από το σύνολο $\{t, f\}$ που κάνουν το clause c ψευδές ή (iii) ο παίκτης c έχει τη στρατηγική f και υπάρχει παίκτης $v \in Neigh(c)$ που έχει τη στρατηγική u
  - την τιμή 1 σε όλες τις άλλες περιπτώσεις (iv)
- κάθε παίκτης $v \in P_V$ έχει συνάρτηση οφέλους $u_v : S^{|Neigh(v)|+1} \to \Re$ η οποία έχει:
  - την τιμή 3 αν (v) ο παίκτης v και οι γείτονές του έχουν στρατηγικές από το σύνολο $\{t, f\}$
  - την τιμή 2 αν (vi) ο παίκτης v έχει τη στρατηγική u και υπάρχει παίκτης $c \in Neigh(v)$ που έχει τη στρατηγική u
  - την τιμή 1 σε όλες τις άλλες περιπτώσεις (vii)

Η κατασκευή του παιγνίου G γίνεται, προφανώς, σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το $|I|$.

Έστω, τώρα, $\Phi = c_1 \wedge c_2 \wedge \ldots \wedge c_m$. Θα δείξουμε ότι:

η Φ είναι ικανοποιήσιμη $\Leftrightarrow \exists$ γνήσια ισορροπία Nash sto παίγνιο G

($\Rightarrow$) Έστω ότι η Φ είναι ικανοποιήσιμη και ας επιλέξουμε μία απονομή αληθοτιμών στις μεταβλητές του συνόλου V η οποία ικανοποιεί την Φ. Θεωρούμε το στρατηγικό προφίλ x στο οποίο κάθε παίκτης του συνόλου P_V έχει στρατηγική σύμφωνα με την απονομή αληθοτιμών που επιλέξαμε και κάθε παίκτης του συνόλου P_C έχει τη στρατηγική t. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι, σύμφωνα με τους κανόνες (i) και (v), στο στρατηγικό προφίλ x όλοι οι παίκτες θα έχουν όφελος 3. Όμως, 3 είναι και το μέγιστο όφελος που μπορεί να έχει ένας παίκτης. Επομένως, το στρατηγικό προφίλ x αποτελεί μια γνήσια ισορροπία Nash για το παίγνιο G.
($\Leftarrow$) Θα δείξουμε ότι κάθε γνήσια ισορροπία Nash αντιστοιχεί σε μια απονομή αληθοτιμών στις μεταβλητές του συνόλου V η οποία ικανοποιεί την έκφραση Φ. Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για τα στρατηγικά προφίλ του παιγνίου G.

- P_1: Ένα στρατηγικό προφίλ x στο οποίο ένας παίκτης $v \in P_V$ έχει τη στρατηγική u δεν μπορεί να είναι ισορροπία Nash. Πράγματι, αν υποθέσουμε ισορροπία Nash στην περίπτωση αυτή, κάθε παίκτης $c \in Neigh(v)$ πρέπει να έχει τη στρατηγική f, διαφορετικά σύμφωνα με τον κανόνα (iii) θα μπορούσε μονομερώς να βελτιώσει το όφελός του. Συνεπώς, ο παίκτης v θα έχει όφελος 1 (vii) και μπορεί μονομερώς να αυξήσει το όφελός του σε 3 επιλέγοντας κάποια στρατηγική από το σύνολο $\{t, f\}$. Αντίφαση.

- P_2: Ένα στρατηγικό προφίλ x στο οποίο ένας παίκτης $c \in P_C$ έχει τη στρατηγική u δεν μπορεί να είναι ισορροπία Nash. Πράγματι, ας υποθέσουμε ισορροπία Nash σ'αυτή την περίπτωση. Τότε, από (vi), κάθε παίκτης $v \in Neigh(c)$ πρέπει να έχει στρατηγική u διότι διαφορετικά θα μπορούσε μονομερώς να βελτιώσει το όφελός του. Αυτό, όμως, είναι άτοπο βάσει της ιδιότητας P_1.

- P_3: Ένα στρατηγικό προφίλ x στο οποίο όλοι οι παίκτες έχουν στρατηγική από το σύνολο $\{t, f\}$ και η αντίστοιχη απονομή αληθοτιμών στις μεταβλητές του V δεν ικανοποιεί κάποιο clause $c \in C$ δεν μπορεί να είναι ισορροπία Nash. Πράγματι ας υποθέσουμε ισορροπία Nash σ'αυτή την περίπτωση. Από (ii), ο παίκτης c θα έπρεπε να έχει τη στρατηγική u και αυτό αντίκειται στην ιδιότητα P_2.

- P_4: Ένα στρατηγικό προφίλ x στο οποίο όλοι οι παίκτες έχουν στρατηγική από το σύνολο $\{t, f\}$ και στο οποίο υπάρχει κάποιος παίκτης

$c \in P_C$ με στρατηγική f δεν μπορεί να είναι ισορροπία Nash. Πράγματι, ας υποθέσουμε ισορροπία Nash σ'αυτή την περίπτωση. Αν το clause c ικανοποιείται από την απονομή αληθοτιμών στις μεταβλητές που αντιστοιχεί στο στρατηγικό προφίλ x, τότε ο παίκτης c έχει όφελος 1 (iv), ενώ θα μπορούσε να το αυξήσει σε 3 επιλέγοντας τη στρατηγική t (i). Ομοίως, αν το clause c δεν ικανοποιείται, τότε ο παίκτης έχει όφελος 1 (iv) το οποίο θα μπορούσε να αυξηθεί σε 2 αν ο παίκτης έπαιζε u (ii). Αυτό είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ισορροπία Nash.

Συνδυάζοντας τις ιδιότητες P_1, P_2, P_3 και P_4 προκύπτει ότι τα μόνα στρατηγικά προφίλ που είναι γνήσιες ισορροπίες Nash είναι εκείνα τα οποία αντιστοιχούν σε απονομές αληθοτιμών στις μεταβλητές οι οποίες ικανοποιούν την έκφραση Φ και στα οποία κάθε παίκτης του συνόλου P_C έχει τη στρατηγική t. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των απονομών αληθοτιμών που ικανοποιούν την Φ και των γνήσιων ισορροπιών Nash στο παίγνιο G.

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται παρατηρώντας ότι, στο παίγνιο G που ορίσαμε, κάθε παίκτης-κόμβος έχει σύνολο στρατηγικών με τρία στοιχεία και έχει το πολύ τρεις γείτονες στο γράφημα του παιγνίου. □

Πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα για την πολυπλοκότητα του προβλήματος ελέγχου ύπαρξης γνήσιας ισορροπίας Nash σε γραφηματικά παίγνια δίνονται στο [GGS03]. Στην ίδια εργασία προτείνονται περιορισμοί στο γράφημα του παιγνίου οι οποίοι μειώνουν την πολυπλοκότητα του προβλήματος. Δεν θα αναφερθούμε εκτενέστερα στα αποτελέσματα αυτά.

Κεφάλαιο 4

Ύπαρξη Ισορροπίας Nash σε Παίγνια με συμπαγή περιγραφή

Το κεφάλαιο αυτό είναι το σημαντικότερο κεφάλαιο της εργασίας και περιέχει ερευνητικά αποτελέσματα για μια κατηγορία παιγνίων που έχουν μεγάλο ενδιαφέρον, αλλά δεν έχουν αναλυθεί στη βιβλιογραφία. Διερευνάται, αρχικά, ποιες κατηγορίες παιγνίων επιδέχονται συμπαγή ως προς το πλήθος των παικτών περιγραφή, δηλαδή περιγράφονται με λογαριθμική πληροφορία ως προς το πλήθος των παικτών τους[1]. Στη συνέχεια, ορίζονται τέτοια παίγνια για διάφορες τοπολογίες γράφων εξαρτήσεων μεταξύ των παικτών και αναλύεται η πολυπλοκότητα του προβλήματος ελέγχου ύπαρξης ισορροπίας Nash σ'αυτά. Αποδεικνύονται θετικά και αρνητικά αποτελέσματα. Οι αποδείξεις των ενοτήτων 4.7 και 4.8 είναι δύσκολες και τεχνικές, αλλά παρουσιάζουν μεγάλο ενδιαφέρον ως τεχνικές απόδειξης.

4.1 Παίγνια πολλών παικτών με μικρό μέγεθος αναπαράστασης

Στην ενότητα 2.2 είδαμε ότι, στη γενική περίπτωση, για τον ορισμό ενός γραφηματικού παιγνίου χρειάζεται πληροφορία πολυωνυμική ως προς το πλήθος των στρατηγικών και εκθετική ως προς το πλήθος των παικτών. Αν ο μέγιστος εσωβαθμός στον γράφο εξαρτήσεων είναι $O(1)$, τότε χρειάζεται πληροφορία πολυωνυμική τόσο ως προς το πλήθος των στρατηγικών, όσο και ως προς το πλήθος των παικτών. Ωστόσο, γενικά μας ενδιαφέρουν παίγνια με

[1] η λογαριθμική πληροφορία ως προς το πλήθος των παικτών είναι το καλύτερο που μπορούμε να κάνουμε αφού αν μη τι άλλο πρέπει να ορίσουμε πόσους παίκτες έχει το παίγνιο

μεγάλο αριθμό παικτών όπως είναι η αγορά, το διαδίκτυο κλπ. Σε τέτοια παίγνια ακόμα και η πολυωνυμική εξάρτηση του μεγέθους αναπαράστασης του παιγνίου από το πλήθος των παικτών δεν είναι ικανοποιητική. Είναι, λοιπόν, ενδιαφέρον να διερευνηθεί αν υπάρχουν παίγνια με πιο συμπαγή περιγραφή.

Προς την κατεύθυνση αυτή, σημειώνουμε ότι, γενικά, και μόνο για να περιγράψουμε έναν γράφο με n κόμβους-παίκτες χρειαζόμαστε πληροφορία μεγέθους $poly(n)$. Συνεπώς, για να πετύχουμε τον στόχο μας ο γράφος του παιγνίου πρέπει να έχει κάποια κανονικότητα που να επιτρέπει την περιγραφή του με πληροφορία λιγότερη από $poly(n)$. Παραδείγματα τέτοιων γράφων, που για να περιγραφούν χρειάζονται λογαριθμική πληροφορία ως προς το πλήθος των κόμβων τους, είναι ο δακτύλιος n-κόμβων, η αλυσίδα n-κόμβων, το πλέγμα $n \times n$-κόμβων και άλλα που θα δούμε στη συνέχεια. Οι παραπάνω γράφοι περιγράφονται δίνοντας μόνο το n οπότε απαιτούν μονάχα $\log n$ bits για την περιγραφή τους.

Ο φραγμένος εσωβαθμός και η δυνατότητα περιγραφής του γράφου με λογαριθμική πληροφορία ως προς το πλήθος των παικτών δεν αρκούν, όμως, για να επιτύχουμε πιο συμπαγή αναπαράσταση του παιγνίου. Αν οι παίκτες είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, δηλαδή αν καθένας έχει το δικό του σύνολο στρατηγικών και τη δική του συνάρτηση οφέλους, τότε το μέγεθος αναπαράστασης του παιγνίου παραμένει $poly(n)$. Το ίδιο συμβαίνει ακόμα και αν όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών αλλά διαφορετικές συναρτήσεις οφέλους ακόμα και αν η συνάρτηση οφέλους κάθε παίκτη είναι συμμετρική ως προς του γείτονες του εν λόγω παίκτη στο γράφο του παιγνίου.

Παρακάτω δίνουμε μια ικανή συνθήκη για να είναι το μέγεθος αναπαράστασης του παιγνίου λογαριθμικό ως προς το πλήθος των παικτών:

Παρατήρηση 4.1. Έστω ένα γραφηματικό παίγνιο. Αν

- ο γράφος $G(V, E)$ του παιγνίου μπορεί να οριστεί δίνοντας πληροφορία μεγέθους $O(\log(|V|))$
- ο μέγιστος εσωβαθμός στον G είναι $O(1)$
- υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$, όπου $m = O(1)$, των παικτών V του παιγνίου σε ξένα μεταξύ τους σύνολα έτσι ώστε παίκτες που ανήκουν στο ίδιο σύνολο V_i να έχουν την ίδια συνάρτηση οφέλους και η συνάρτηση αυτή να είναι συμμετρική ως προς γείτονες που ανήκουν στα ίδια σύνολα της διαμέρισης

τότε το γραφηματικό παίγνιο μπορεί να οριστεί με πληροφορία που είναι λογαριθμική ως προς το $|V|$ και πολυωνυμική ως προς το πλήθος των στρατηγικών όλων των παικτών.

Σημειώνουμε ότι για να ισχύει το συμπέρασμα της παρατήρησης θα πρέπει η διαμέριση των παικτών σε υποσύνολα να ορίζεται με πληροφορία λογαριθμική ως προς το $|V|$ (βλ. επόμενη ενότητα για παραδείγματα παιγνίων στα οποία αυτό είναι εφικτό).

Κλείνουμε την ενότητα με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.2. Ένα γραφηματικό παίγνιο το οποίο μπορεί να οριστεί με πληροφορία μεγέθους λογαριθμικού ως προς το πλήθος των παικτών και πολυωνυμικού ως προς το πλήθος των στρατηγικών όλων των παικτών ονομάζεται **συμπαγώς αναπαραστήσιμο γραφηματικό παίγνιο**.

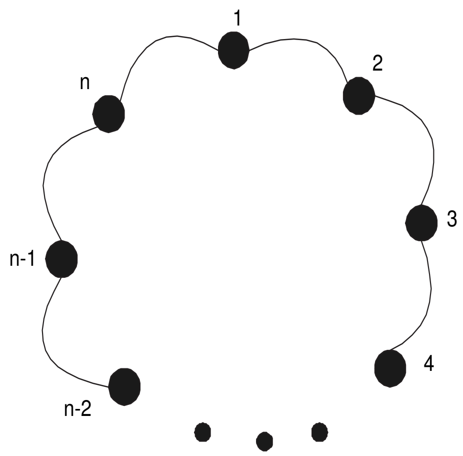
4.2 Προβλήματα απόφασης που εξετάζουν ύπαρξη ισορροπίας Nash

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε προβλήματα απόφασης που εξετάζουν την ύπαρξη ισορροπίας Nash σε συμπαγώς αναπαραστήσιμα γραφηματικά παίγνια. Πριν, όμως, ορίσουμε τυπικά τα προβλήματα με τα οποία θα ασχοληθούμε θα εξετάσουμε την πληροφορία που χρειάζεται ως είσοδος σε ένα πρόβλημα απόφασης το οποίο ελέγχει ύπαρξη ισορροπίας Nash.

Ας ορίσουμε, λοιπόν, ένα συμπαγώς αναπαραστήσιμο γραφηματικό παίγνιο του οποίου ο γράφος είναι ο δακτύλιος C_n (σχήμα 4.1). Θεωρούμε ότι όλοι οι παίκτες του παιγνίου είναι ίδιοι, δηλαδή έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ και την ίδια συνάρτηση οφέλους $u : S \times S^2 \to \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες.

Παρατηρούμε ότι το παίγνιο που ορίσαμε ικανοποιεί τις συνθήκες της παρατήρησης 4.1. Πράγματι για να ορίσουμε τον γράφο του παιγνίου αρκεί να δώσουμε το n πράγμα το οποίο γίνεται δίνοντας πληροφορία μεγέθους $\log n$ bits. Επιπλέον, ο εσωβαθμός κάθε κόμβου στο γράφο του παιγνίου είναι ίσος με 2 και ανεξάρτητος του n. Τέλος, όλοι οι παίκτες έχουν την ίδια συνάρτηση οφέλους η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες τους.

Ας δούμε πόση πληροφορία χρειάζεται για να ορίσουμε το παραπάνω παίγνιο. Για να προσδιορίσουμε το n χρειάζεται να δώσουμε $\log n$ bits. Τώρα, για τον ορισμό της συνάρτησης $u : S \times S^2 \to \Re$ χρειάζεται πληροφορία $k^3 \cdot (1 + \log |u_{max}|)$, αφού για κάθε στοιχείο του συνόλου $S \times S^2$ ($|S \times S^2| = |S| \cdot |S^2| = k^3$) πρέπει να δώσουμε την τιμή της συνάρτησης. Ο ορισμός, όμως, της συνάρτησης u με τον παραπάνω τρόπο είναι σπάταλος υπό την έννοια ότι δεν εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι η συνάρτηση είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες. Αντί να δώσουμε την τιμή της συνάρτησης για



Σχήμα 4.1: Ο δακτύλιος C_n

κάθε επιλογή του παίκτη, για κάθε επιλογή του ενός γείτονα και για κάθε επιλογή του άλλου γείτονα (πράγμα το οποίο απαιτεί να δώσουμε k^3 τιμές), αρκεί να δώσουμε την τιμή της συνάρτησης για κάθε επιλογή του παίκτη και για κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος επιλογών των γειτόνων, δηλαδή για κάθε επιλογή του παίκτη και για κάθε συνδυασμό με επανάληψη των $|S|$ στρατηγικών ανά δύο. Αν συμβολίσουμε τους συνδυασμούς με επανάληψη l_1 στοιχείων ανά l_2 με το σύμβολο $\begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \binom{l_1 + l_2 - 1}{l_2}$, τότε για να ορίσουμε τη συνάρτηση u χρειάζεται να δώσουμε πληροφορία μεγέθους $\begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \cdot k \cdot (1 + \log |u_{max}|)$. Συνεπώς για τον ορισμό του παιγνίου χρειάζεται συνολικά πληροφορία μεγέθους

$$\log n + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \cdot k \cdot (1 + \log |u_{max}|)$$

που είναι πολυωνυμική ως προς το πλήθος των στρατηγικών και λογαριθμική ως προς το πλήθος των παικτών.

Ωστόσο, ο επακριβής ορισμός της συνάρτησης u περιέχει πλεονάζουσα πληροφορία αν το υπολογιστικό πρόβλημα είναι ο έλεγχος ύπαρξης ισορροπίας Nash ή η εύρεση ισορροπίας Nash. Πράγματι, είναι περιττό να γνωρίζουμε την τιμή οφέλους που έχει ένας παίκτης συναρτήσει της στρατηγικής που αυτός επέλεξε και των στρατηγικών που επέλεξαν οι γείτονες του. Αυτό που ενδιαφέρει και μόνο είναι να γνωρίζουμε ποιες στρατηγικές του παίκτη μεγιστοποιούν το όφελός του δεδομένων των στρατηγικών που έχουν επιλέξει οι δύο γείτονές του. Συνεπώς, αντί να δώσουμε την συνάρτηση u μπορούμε να δώσουμε μία συνάρτηση $f : \begin{bmatrix} S \\ 2 \end{bmatrix} \to \{0,1\}^k \setminus \{0\}^k$ η οποία σε κάθε μη διατεταγμένο ζεύγος στρατηγικών από το σύνολο S αντιστοιχεί έναν μη μηδενικό αριθμό με k bits για τον οποίο ισχύει:

$$\forall i, l, m \in \{1, 2, \ldots, k\} : f(\{s_l, s_m\})|_i = 1 \Leftrightarrow s_i \in BestResponse_u(\{s_l, s_m\})$$

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι αρκεί να δοθεί η συνάρτηση f όταν πρόκειται για προβλήματα απόφασης που ελέγχουν ύπαρξη ισορροπίας Nash. Στην περίπτωση αυτή για την περιγραφή του παιγνίου χρειάζεται συνολικά πληροφορία μεγέθους:

$$\log n + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \cdot k$$

Σημείωση 4.3. Αν S είναι ένα σύνολο και $n \leq |S|$ ένας φυσικός αριθμός, θα συμβολίζουμε με $\begin{bmatrix} S \\ n \end{bmatrix}$ το σύνολο όλων των μη διατεταγμένων n-άδων με επαναλήψεις (ή αλλιώς n-συνόλων με επαναλήψεις) από στοιχεία του συνόλου S. Ελλείψει άλλου συμβολισμού, μία τέτοια μη διατεταγμένη n-άδα που περιέχει τα στοιχεία $e_1, e_2, \ldots, e_n$ θα συμβολίζεται ως $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ παρότι επιτρέπονται οι επαναλήψεις στοιχείων. Δεν θα πρέπει να γίνεται σύγχυση μεταξύ συνόλων και συνόλων με επαναλήψεις.

Σημείωση 4.4. Όταν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο S^n είναι συμμετρική ως προς τα ορίσματά της, θα χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τους συμβολισμούς $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ και $f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$ για να δηλώσουμε την τιμή της συνάρτησης με ορίσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$.

4.3 Τυπικός ορισμός προβλημάτων ελέγχου ύπαρξης ισορροπίας Nash

Μετά τη συζήτηση που προηγήθηκε ας ορίσουμε τυπικά τα προβλήματα απόφασης με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια του κεφαλαίου. Θα ορίσουμε τα προβλήματα δίνοντας ως είσοδο την ελάχιστη δυνατή πληροφορία.

Ας αρχίσουμε με τον τυπικό ορισμό του προβλήματος απόφασης σε **δακτύλιο**. Το γράφημα του παιγνίου φαίνεται στο σχήμα 4.1 και όλοι οι παίκτες είναι ίδιοι.

Ορισμός 4.5. Ορίζουμε ως EQINRING το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης:

- **είσοδος**:
  - n (μέγεθος του δακτυλίου)

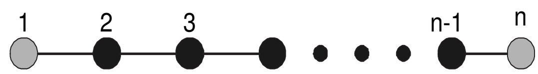
  - k (πλήθος στρατηγικών)
  - $f : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ 2 \end{bmatrix} \to \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$

- **ερώτηση**: Αν θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι του δακτυλίου C_n είναι παίκτες ενός γραφηματικού παιγνίου οι οποίοι:
  - έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών S με $|S| = k$ (έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$)
  - έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση οφέλους $u : S \times S^2 \to \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_u(s_j, s_m) \Leftrightarrow f(\{j, m\})|_i = 1$$

  τότε υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό;

Παρακάτω διατυπώνεται το πρόβλημα σε **αλυσίδα**. Το γράφημα του παιγνίου φαίνεται στο σχήμα 4.2 και υπάρχουν δύο είδη παικτών, οι ενδιάμεσοι και οι ακριανοί.



Σχήμα 4.2: Η αλυσίδα μήκους n. Υπάρχουν δύο κατηγορίες παικτών, οι ενδιάμεσοι και οι ακριανοί.

Ορισμός 4.6. Ορίζουμε ως EQINCHAIN το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης:

- **είσοδος**:
  - n (μήκος αλυσίδας)
  - k (πλήθος στρατηγικών)
  - $f_1 : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ 2 \end{bmatrix} \to \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$
  - $f_2 : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$

- **ερώτηση**: Αν θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι της αλυσίδας μήκους n είναι παίκτες ενός γραφηματικού παιγνίου για τους οποίους ισχύει ότι:
  - έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών S με $|S| = k$ (έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$)

– οι παίκτες που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους κόμβους έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση οφέλους $u_1 : S \times S^2 \to \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

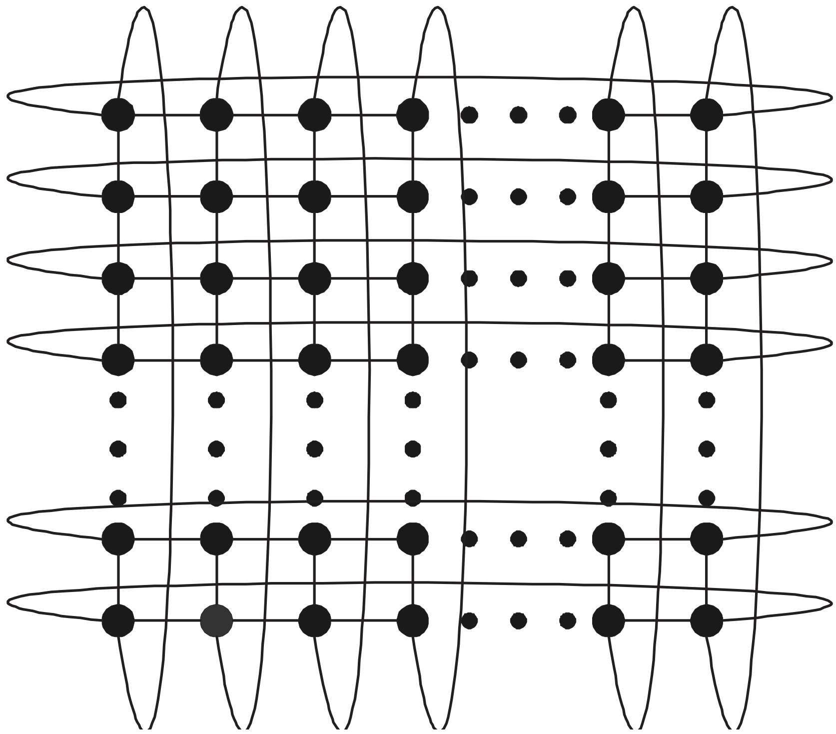
$$s_i \in BestResponse_{u_1}(s_j, s_m) \Leftrightarrow f_1(\{j, m\})|_i = 1$$

– οι παίκτες που αντιστοιχούν στους ακριανούς κόμβους της αλυσίδας έχουν συνάρτηση οφέλους $u_2 : S \times S \to \Re$ για την οποία ισχύει ότι:

$$s_i \in BestResponse_{u_2}(s_j) \Leftrightarrow f_2(j)|_i = 1$$

τότε υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό;

Συνεχίζουμε με τη διατύπωση του προβλήματος σε **τετραγωνικό τόρο**. Το γράφημα του παιγνίου φαίνεται στο σχήμα 4.3. Όλοι οι παίκτες έναι ίδιοι.



Σχήμα 4.3: Ο τετραγωνικός τόρος

Ορισμός 4.7. Ορίζουμε ως EQINSQUARETORUS το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης:

- **είσοδος**:
  - n (πλευρά[2] του τετραγωνικού τόρου)
  - k (πλήθος στρατηγικών)
  - $f : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ 4 \end{bmatrix} \to \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$
- **ερώτηση**: Αν θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι του $n \times n$ τόρου είναι παίκτες ενός γραφηματικού παιγνίου για τους οποίους ισχύει ότι:
  - έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών S με $|S| = k$ (έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$)
  - έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση οφέλους $u : S \times S^4 \to \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

  $$s_i \in BestResponse_u(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, s_{k_4}) \Leftrightarrow f(\{k_1, k_2, k_3, k_4\})|_i = 1$$

  τότε υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό;

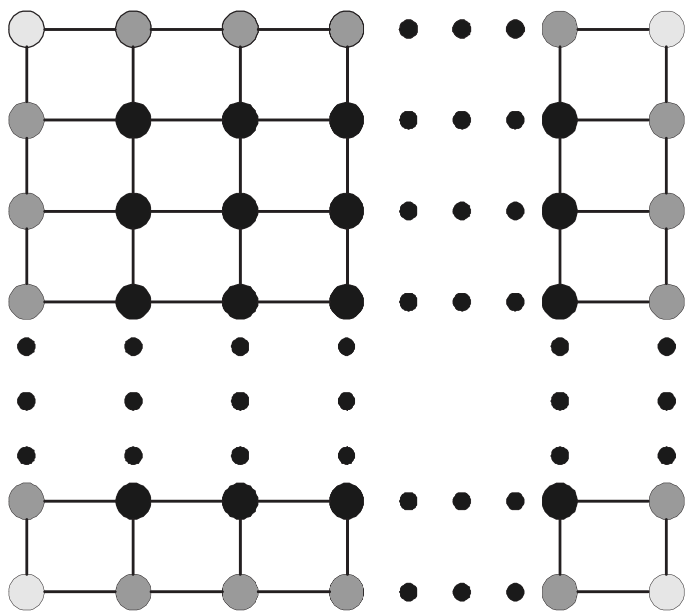
Τέλος, διατυπώνουμε το πρόβλημα σε **τετραγωνικό πλέγμα**. Το γράφημα του παιγνίου φαίνεται στο σχήμα 4.4 και υπάρχουν τρία είδη παικτών, οι ενδιάμεσοι, οι πλευρικοί και οι γωνιακοί.

Ορισμός 4.8. Ορίζουμε ως EQINSQUAREGRID το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης:

- **είσοδος**:
  - n (πλευρά[3] του τετραγωνικού πλέγματος)
  - k (πλήθος στρατηγικών)
  - $f_1 : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ 4 \end{bmatrix} \to \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$
  - $f_2 : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ 3 \end{bmatrix} \to \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$

[2] Ορίζουμε ως **πλευρά του τετραγωνικού τόρου** το πλήθος κόμβων σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του τόρου.

[3] Ορίζουμε ως **πλευρά του τετραγωνικού πλέγματος** το πλήθος κόμβων σε κάθε γραμμή και σε κάθε στήλη του πλέγματος.



Σχήμα 4.4: Το τετραγωνικό πλέγμα. Υπάρχουν τρεις κατηγορίες παικτών, οι πλευρικοί, οι γωνιακοί και οι ενδιάμεσοι.

– $f_3 : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \{0, 1\}^k \setminus \{0\}^k$

- **ερώτηση**: Αν θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι του $n \times n$ πλέγματος είναι παίκτες ενός γραφηματικού παιγνίου για τους οποίους ισχύει ότι:
  – έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών S με $|S| = k$ (έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$)
  – οι παίκτες που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους κόμβους (που έχουν τέσσερις γείτονες) έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση οφέλους $u_1 : S \times S^4 \rightarrow \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

$$s_i \in BestResponse_{u_1}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, s_{k_4}) \Leftrightarrow f_1(\{k_1, k_2, k_3, k_4\})|_i = 1$$

  – οι παίκτες που αντιστοιχούν στους πλευρικούς κόμβους του πλέγματος (που έχουν τρεις γείτονες) έχουν συνάρτηση οφέλους $u_2 : S \times S^3 \rightarrow \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

$$s_i \in BestResponse_{u_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}) \Leftrightarrow f_2(\{k_1, k_2, k_3\})|_i = 1$$

– οι παίκτες που αντιστοιχούν στους πλευρικούς κόμβους του πλέγματος (που έχουν δύο γείτονες) έχουν συνάρτηση οφέλους $u_3 : S \times S^2 \rightarrow \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

$$s_i \in BestResponse_{u_3}(s_{k_1}, s_{k_2}) \Leftrightarrow f_3(\{k_1, k_2\})|_i = 1$$

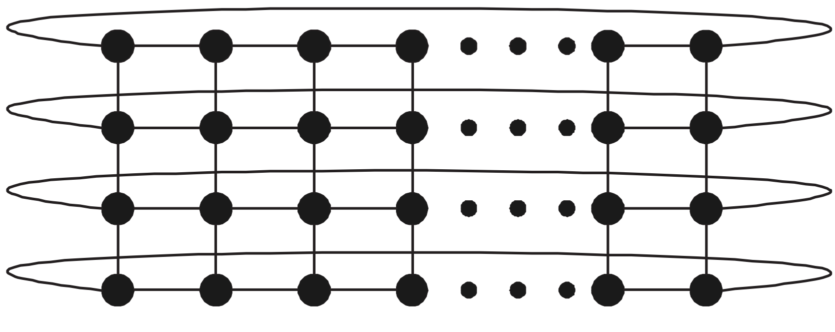
τότε υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό;

4.4 Άλλα ενδιαφέροντα προβλήματα απόφασης

Στην ενότητα αυτή θα ορίσουμε μερικά ακόμα ενδιαφέροντα προβλήματα απόφασης. Θα ορίσουμε με τυπικό τρόπο μόνο τα δύο πρώτα. Τα υπόλοιπα θα περιγραφούν πιο αφαιρετικά.

Αρχίζουμε με δύο γενικεύσεις του προβλήματος EQINRING, τα EQINSTRIPRING(m) και EQINGRAPHRING(m).

Στο πρόβλημα EQINSTRIPRING(m) ο γράφος του παιγνίου είναι μια κυκλική ταινία με συγκεκριμένο (fixed) πάχος ίσο με m και μήκος n που δίνεται ως είσοδος στο πρόβλημα. Στο σχήμα 4.5 δίνεται ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINSTRIPRING(4).



Σχήμα 4.5: Ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINSTRIPRING(4). Το μήκος n της ταινίας δίνεται ως είσοδος.

Ορισμός 4.9. Ορίζουμε ως EQINSTRIPRING(m) το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης:

- **είσοδος**:
  - n (μήκος κλειστής ταινίας)

– k (πλήθος στρατηγικών)
– $f_1 : \begin{bmatrix} \{1,2,\ldots,k\} \\ 4 \end{bmatrix} \to \{0,1\}^k \setminus \{0\}^k$
– $f_2 : \begin{bmatrix} \{1,2,\ldots,k\} \\ 3 \end{bmatrix} \to \{0,1\}^k \setminus \{0\}^k$

- **ερώτηση**: Αν θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι της $n \times m$ κλειστής ταινίας είναι παίκτες ενός γραφηματικού παιγνίου για τους οποίους ισχύει ότι:
  – έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών S με $|S| = k$ (έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$)
  – οι παίκτες που αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους κόμβους (που έχουν τέσσερις γείτονες) έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση οφέλους $u_1 : S \times S^4 \to \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

$$s_i \in BestResponse_{u_1}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, s_{k_4}) \Leftrightarrow f_1(\{k_1, k_2, k_3, k_4\})|_i = 1$$

  – οι παίκτες που αντιστοιχούν στους πλευρικούς κόμβους (που έχουν τρεις γείτονες) έχουν συνάρτηση οφέλους $u_2 : S \times S^3 \to \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

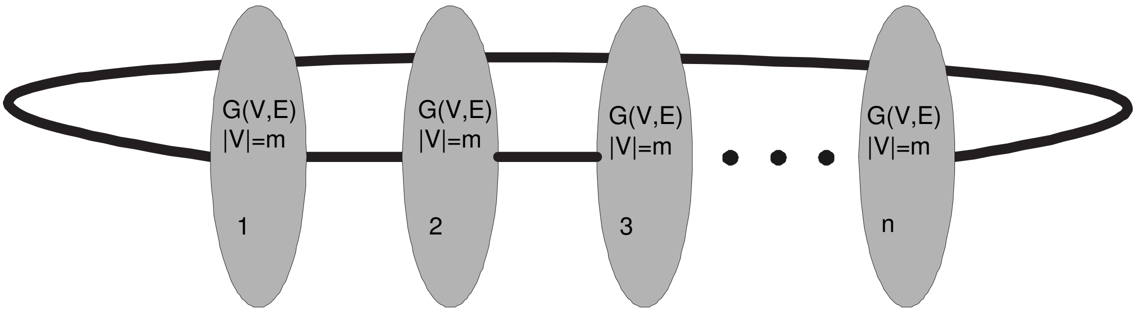
$$s_i \in BestResponse_{u_2}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}) \Leftrightarrow f_2(\{k_1, k_2, k_3\})|_i = 1$$

  τότε υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό;

Στο πρόβλημα EQINGRAPHRING(m), που ορίζεται και αυτό για συγκεκριμένο (fixed) m, δίνεται ως είσοδος το n και ένας γράφος G μεγέθους m. Ο γράφος του παιγνίου αποτελείται από n επαναλήψεις του γραφήματος G που σχηματίζουν μια αλυσίδα, όπως φαίνεται στο σχήμα 4.6. Οι συνδέσεις μεταξύ αντιγράφων που φαίνονται στο σχήμα έχουν την έννοια ότι κάθε κόμβος ενός αντιγράφου του γραφήματος G συνδέεται εκτός από τους γείτονές του στο γράφημα G με τον αντίστοιχο κόμβο του προηγούμενου και του επόμενου αντιγράφου. Προς διευκόλυνσή μας ας ονομάσουμε το γράφημα που προκύπτει G^n.

Ορισμός 4.10. Ορίζουμε ως EQINGRAPHRING(m) το ακόλουθο πρόβλημα απόφασης:

- **είσοδος**:



Σχήμα 4.6: Ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINGRAPHRING(m). Το γράφημα $G(V,E)$, με $|V| = m$, καθώς και το πλήθος n των αντιγράφων του G που θα τοποθετηθούν στη σειρά δίνονται ως είσοδος.

- $G(V,E)$, $|V| = m$ (γράφημα μεγέθους m)
- n (πλήθος αντιγράφων)
- k (πλήθος στρατηγικών)
- $\forall v \in V(G)$ μία συνάρτηση $f_v : \begin{bmatrix} \{1, 2, \ldots, k\} \\ deg(v) + 2 \end{bmatrix} \rightarrow \{0,1\}^k \setminus \{0\}^k$

• **ερώτηση**: Αν θεωρήσουμε ότι οι κόμβοι του γραφήματος G^n είναι παίκτες ενός γραφηματικού παιγνίου για τους οποίους ισχύει ότι:

  - έχουν όλοι το ίδιο σύνολο στρατηγικών S με $|S| = k$ (έστω $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$)
  - για κάθε $v \in V(G)$, οι παίκτες που αντιστοιχούν στον παίκτη v σε κάθε αντίγραφο έχουν όλοι την ίδια συνάρτηση οφέλους $u_v : S \times S^{deg(v)+2} \rightarrow \Re$ η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει ότι:

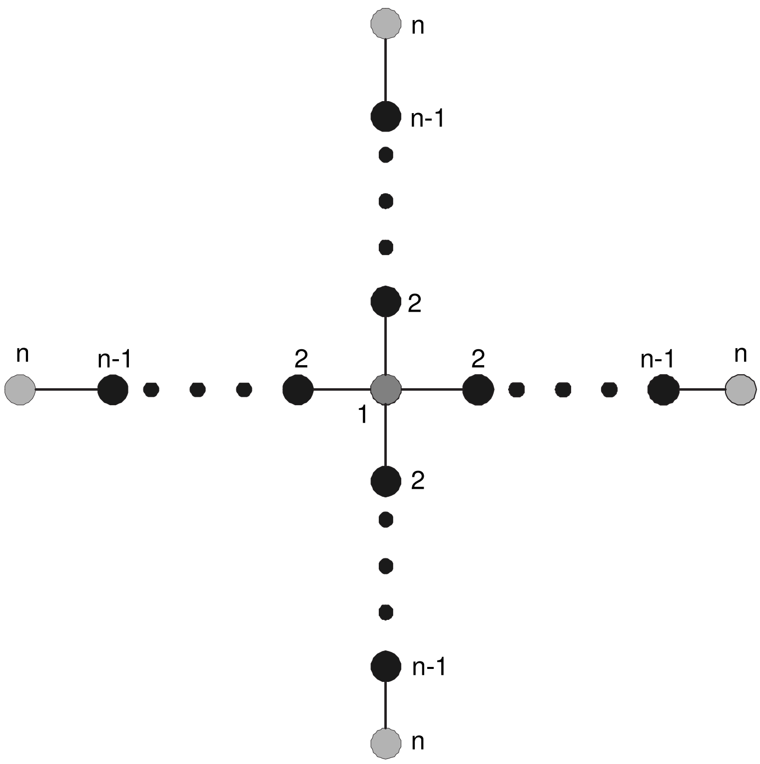
$$s_i \in BestResponse_{u_v}(s_{k_1}, \ldots, s_{k_{deg(v)+2}}) \Leftrightarrow f_v(\{k_1, \ldots, k_{deg(v)+2}\})|_i = 1$$

  τότε υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο αυτό;

Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να ορίσουμε τα προβλήματα τα EQINSTRIPCHAIN(m) και EQINGRAPHCHAIN(m) που αποτελούν τις αντίστοιχες γενικεύσεις του προβλήματος EQINCHAIN. Οι τυπικοί ορισμοί θα παραληφθούν.

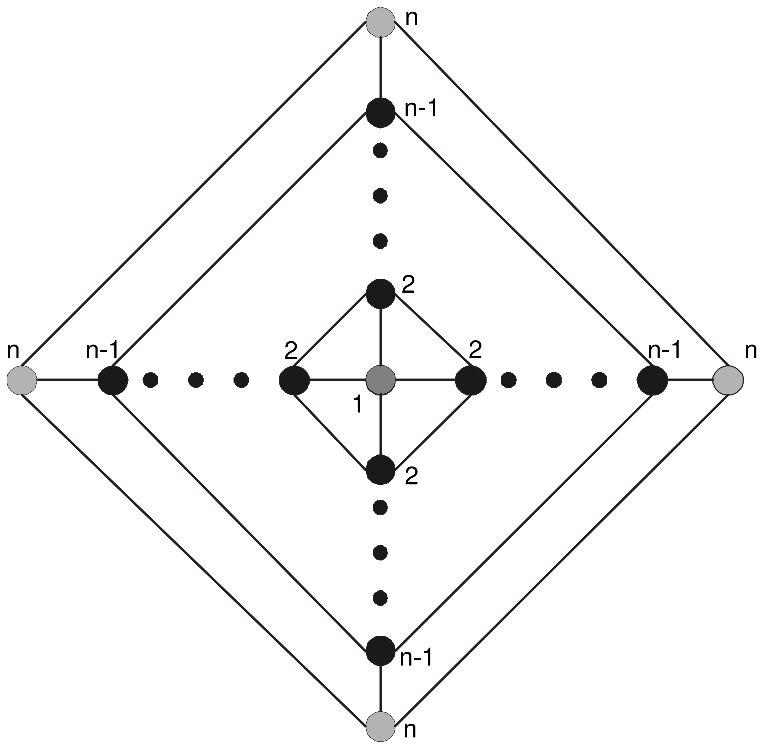
Κλείνουμε την ενότητα ορίζοντας τα προβλήματα EQINSPIDER(m) και EQINNEST(m).

Στο πρόβλημα EQINSPIDER(m) ο γράφος του παιγνίου είναι ένα γενικευμένο αστέρι που σχηματίζεται αν ταυτίσουμε τον αρχικό κόμβο m-το πλήθος αλυσίδων μήκους n, όπου το n είναι είσοδος στο πρόβλημα. Στο σχήμα 4.7 δίνεται ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINSPIDER(4). Στο πρόβλημα EQINSPIDER(m), υπάρχουν τρεις κατηγορίες παικτών, ο κεντρικός, οι ακραίοι και οι ενδιάμεσοι. Θα παραλείψουμε τον τυπικό ορισμό του προβλήματος, διότι είναι προφανής.



Σχήμα 4.7: Ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINSPIDER(4). Υπάρχουν τρεις κατηγορίες παικτών που παριστάνονται με διαφορετικά χρώματα.

Στο πρόβλημα EQINNEST(m) ο γράφος του παιγνίου μοιάζει με το γράφο του προηγούμενου προβλήματος με τη διαφορά ότι οι αντίστοιχοι κόμβοι "γειτονικών" αλυσίδων συνδέονται μεταξύ τους. Στο σχήμα 4.8 δίνεται ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINNEST(4). Όπως και στο πρόβλημα EQINSPIDER(m), έτσι και στο πρόβλημα EQINNEST(m), υπάρχουν τρεις κατηγορίες παικτών, ο κεντρικός, οι ακραίοι και οι ενδιάμεσοι.Θα παραλείψουμε τον τυπικό ορισμό του προβλήματος, διότι είναι προφανής.



Σχήμα 4.8: Ο γράφος του παιγνίου στο πρόβλημα EQINNEST(4). Υπάρχουν τρεις κατηγορίες παικτών που παριστάνονται με διαφορετικά χρώματα.

4.5 Χρονική Πολυπλοκότητα των EQINRING και EQINCHAIN

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι τα προβλήματα EQINRING και EQINCHAIN ανήκουν στην κλάση P των προβλημάτων που μπορούν να υπολογιστούν με ντετερμινιστικό αλγόριθμο σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το μέγεθος της εισόδου.

Θεώρημα 4.11. $EQINRING \in P$

Απόδειξη.
Έστω ένα στιγμιότυπο του προβλήματος EQINRING, που βάσει του ορισμού 4.5 αποτελείται από το n, το k και τη συνάρτηση f. Έστω ότι το σύνολο στρατηγικών του παιγνίου είναι το $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ και έστω u η συνάρτηση οφέλους όλων των παικτών η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες

και για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_u(s_j, s_m) \Leftrightarrow f(\{j,m\})|_i = 1$$

Κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα $T(V,E)$ ως εξής:

$$V = \{(x,y,z), x,y,z \in S | y \in BestResponse_u(x,z)\}$$

$$E = \{(v_1,v_2), v_1,v_2 \in V | v_{1y} = v_{2x} \wedge v_{1z} = v_{2y}\}$$

Προφανώς, η κατασκευή του γραφήματος T γίνεται σε χρόνο $poly(k)$ και το πλήθος των κορυφών του γραφήματος είναι $O(k^3)$, αφού $|S| = k$. Επομένως και ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος T έχει διάσταση $O(k^3)$.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύει το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.12. (Υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο) $\Leftrightarrow$ (Υπάρχει κλειστός δρόμος μήκους n στο γράφημα T)

Απόδειξη.
($\Rightarrow$) Έστω ότι υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο. Εξ ορισμού της ισορροπίας Nash, θα υπάρχει ένα n-διάστατο διάνυσμα $< \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n >$ στρατηγικών από το σύνολο S τέτοιο ώστε:

$$\sigma_i \in BestResponse_u(\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}), \forall i \in \{2,3,\ldots,n-1\}$$

$$\sigma_1 \in BestResponse_u(\sigma_n, \sigma_2)$$

$$\sigma_n \in BestResponse_u(\sigma_{n-1}, \sigma_1)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις και τον ορισμό του γραφήματος T προκύπτει ότι:

$$t_1 = (\sigma_n, \sigma_1, \sigma_2) \in V$$

$$t_i = (\sigma_{i-1}, \sigma_i, \sigma_{i+1}) \in V, \forall i \in \{2,3,\ldots,n-1\}$$

$$t_n = (\sigma_{n-1}, \sigma_n, \sigma_1) \in V$$

και επιπλέον ότι:

$$(t_i, t_{i+1}) \in E, \forall i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$$

$$(t_n, t_1) \in E$$

(σημειωτέον ότι κάποια από τα $t_i, i \in \{1,2,\ldots,n\}$ μπορεί να ταυτίζονται)

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η ακολουθία κόμβων $t_1, t_2, \ldots, t_n, t_1$ είναι ένας κλειστός δρόμος μήκους n στο γράφημα T.

($\Leftarrow$)Έστω ότι υπάρχει κλειστός δρόμος $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ μήκους n στο γράφημα T. Αφού $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ θα ισχύει:

$$v_{iy} \in BestResponse_u(v_{ix}, v_{iz}), \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

Επιπλέον, αφού η ακολουθία κόμβων $v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$ είναι κλειστός δρόμος στο γράφημα T θα ισχύει:

$$\begin{aligned} (v_i, v_{i+1}) \in E &\Rightarrow v_{iy} = v_{(i+1)x} \wedge v_{iz} = v_{(i+1)y}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \\ (v_n, v_1) \in E &\Rightarrow v_{ny} = v_{1x} \wedge v_{nz} = v_{1y} \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι η απονομή των στρατηγικών του διανύσματος $< v_{1y}, v_{2y}, \ldots, v_{ny} >$ στους παίκτες του δακτυλίου C_n αποτελεί ισορροπία Nash. □

Από το λήμμα που προηγήθηκε προκύπτει ότι για να ελέγξουμε αν υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο, αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχει κλειστός δρόμος μήκους n στο γράφημα T. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει ως ακολούθως. Θεωρούμε τον πίνακα γειτνίασης του γραφήματος T, έστω $\mathbf{A}$, και τον υψώνουμε στην n-οστή δύναμη. Για τον πίνακα $\mathbf{A}^n$ ισχύει ότι

$$\begin{gathered} \text{υπάρχει κλειστός δρόμος μήκους } n \text{ στο γράφημα } T \\ \Leftrightarrow \text{υπάρχει άσσος στη διαγώνιο του } \mathbf{A}^n \end{gathered}$$

συνεπώς αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχουν άσσοι στη διαγώνιο του πίνακα $\mathbf{A}^n$.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει όπως σημειώσαμε παραπάνω διάσταση $O(k^3)$. Για να υψώσουμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ στη n-οστή δύναμη χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο επαναλαμβανόμενου τετραγωνισμού (repeated squaring) ο οποίος βρίσκει τον πίνακα $\mathbf{A}^n$ κάνοντας $O(\log n)$ πολλαπλασιασμούς πινάκων. Συνεπώς, δεδομένου ότι η διάσταση του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι $O(k^3)$, η χρονική πολυπλοκότητα για την εύρεση του $\mathbf{A}^n$ είναι $poly(k) \cdot O(\log n)$.

Εφόσον, η κατασκευή του γραφήματος T μπορεί να γίνει σε χρόνο $poly(k)$ και η εύρεση της n-οστής δύναμης του πίνακα γειτνίασης σε χρόνο $poly(k) \cdot O(\log n)$, μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο σε χρόνο

$$poly(k) \cdot O(\log n)$$

δηλαδή σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου.

□

Ας εξετάσουμε τώρα τη χρονική πολυπλοκότητα του προβλήματος EQIN-CHAIN.

Θεώρημα 4.13. $EQINCHAIN \in P$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 4.11 και δεν θα παρουσιαστεί αναλυτικά. Θα δοθεί έμφαση στα σημεία στα οποία οι δύο αποδείξεις διαφοροποιούνται.

Έστω, λοιπόν, ένα στιγμιότυπο του προβλήματος EQINCHAIN, που βάσει του ορισμού 4.6 αποτελείται από το n, το k και τις συναρτήσεις f_1 και f_2. Έστω ότι το σύνολο στρατηγικών του παιγνίου είναι το $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ και έστω u_1 η συνάρτηση οφέλους των ενδιάμεσων παικτών η οποία είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_{u_1}(s_j, s_m) \Leftrightarrow f_1(\{j, m\})|_i = 1$$

και u_2 η συνάρτηση οφέλους των ακριανών παικτών για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_{u_2}(s_j) \Leftrightarrow f_2(j)|_i = 1$$

Κατασκευάζουμε το κατευθυνόμενο γράφημα $T(V, E)$ με:

- σύνολο κορυφών:

$$\begin{aligned} V &= V_1 \cup V_2 \cup V_3 \\ \text{όπου: } V_1 &= \{(x, y), x, y \in S | x \in BestResponse_{u_2}(y)\} \\ V_2 &= \{(x, y, z), x, y, z \in S | y \in BestResponse_{u_1}(x, z)\} \\ V_3 &= \{(x, y), x, y \in S | y \in BestResponse_{u_2}(x)\} \end{aligned}$$

- και σύνολο ακμών:

$$\begin{aligned} E &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \\ \text{όπου: } E_1 &= \{(v_1, v_2), v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 | v_{1x} = v_{2x} \wedge v_{1y} = v_{2y}\} \\ E_2 &= \{(v_1, v_2), v_1, v_2 \in V_2 | v_{1y} = v_{2x} \wedge v_{1z} = v_{2y}\} \\ E_3 &= \{(v_1, v_2), v_1 \in V_2, v_2 \in V_3 | v_{1y} = v_{2x} \wedge v_{1z} = v_{2y}\} \end{aligned}$$

Προφανώς, η κατασκευή του γραφήματος T γίνεται σε χρόνο $poly(k)$ και το πλήθος των κορυφών του γραφήματος είναι $O(k^3)$, αφού $|S| = k$. Επομένως και ο πίνακας γειτνίασης του γραφήματος T έχει διάσταση $O(k^3)$.

Ισχύει το ακόλουθο λήμμα το οποίο είναι αντίστοιχο με το λήμμα 4.12 και γι' αυτό η απόδειξή του θα παραληφθεί:

Λήμμα 4.14. (Υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο) $\Leftrightarrow$ (Υπάρχει δρόμος μήκους n στο γράφημα T από κορυφή του συνόλου V_1 σε κορυφή του συνόλου V_3)

Επομένως, αρκεί να ελέγξουμε αν υπάρχει δρόμος μήκους n στο γράφημα T από κορυφή του συνόλου V_1 σε κορυφή του συνόλου V_3. Ο έλεγχος αυτός μπορεί να γίνει ως ακολούθως. Θεωρούμε τον πίνακα γειτνίασης του γραφήματος T, έστω $\mathbf{A}$, και τον υψώνουμε στην n-οστή δύναμη. Για τον πίνακα $\mathbf{A}^n$ ισχύει ότι:
(υπάρχει δρόμος μήκους n στο γράφημα T από κορυφή του συνόλου V_1 σε κορυφή του συνόλου V_3)
$\Leftrightarrow$(ο πίνακας $\mathbf{A}^n$ έχει άσσο στην τομή μιας γραμμής που αντιστοιχεί σε κορυφή του συνόλου V_1 και μιας στήλης που αντιστοιχεί σε κορυφή του συνόλου V_3)
Συνεπώς, αν εχουμε τον πίνακα $\mathbf{A}^n$ μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε αν υπάρχει δρόμος από κορυφή του συνόλου V_1 σε κορυφή του συνόλου V_3.

Ο πίνακας $\mathbf{A}$ έχει όπως σημειώσαμε παραπάνω διάσταση $O(k^3)$. Για να υψώσουμε τον πίνακα $\mathbf{A}$ στη n-οστή δύναμη χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο επαναλαμβανόμενου τετραγωνισμού (repeated squaring) ο οποίος βρίσκει τον πίνακα $\mathbf{A}^n$ κάνοντας $O(\log n)$ πολλαπλασιασμούς πινάκων. Συνεπώς, δεδομένου ότι η διάσταση του πίνακα $\mathbf{A}$ είναι $O(k^3)$, η χρονική πολυπλοκότητα για την εύρεση του $\mathbf{A}^n$ είναι $poly(k) \cdot O(\log n)$.

Εφόσον, η κατασκευή του γραφήματος T μπορεί να γίνει σε χρόνο $poly(k)$ και η εύρεση της n-οστής δύναμης του πίνακα γειτνίασης σε χρόνο $poly(k) \cdot O(\log n)$, μπορούμε να ελέγξουμε αν υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο σε χρόνο

$$poly(k) \cdot O(\log n)$$

δηλαδή σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου.

□

4.6 Άλλα προβλήματα στο P

Για την πολυπλοκότητα των προβλημάτων που ορίστηκαν στην ενότητα 4.4 ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.15. Για συγκεκριμένο m τα προβλήματα EQINSTRIPRING(m), EQINGRAPHRING(m), EQINSTRIPCHAIN(m), EQINGRAPHCHAIN(m), EQINSPIDER(m) και EQINNEST(m) ανήκουν στο P.

Απόδειξη. Χρησιμοποιείται η ίδια τεχνική με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη των θεωρημάτων 4.11 και 4.13. Οι αποδείξεις διαφοροποιούνται στο $T(V, E)$ που επιλέγεται κάθε φορά. Σημειώνουμε ότι ο προτεινόμενος από τις αποδείξεις αλγόριθμος επίλυσης των προβλημάτων είναι εκθετικός ως προς το m. □

4.7 Χρονική Πολυπλοκότητα του EQINSQUARETORUS

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ότι και το πρόβλημα EQINSQUARE-TORUS είναι $NEXP$-πλήρες. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα:

- θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα είναι $NEXP$-hard ανάγοντας σ' αυτό ένα $NEXP$-hard πρόβλημα
- θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση $NEXP$, δηλαδή ότι λύνεται από μία μη ντετερμινιστική μηχανή Turing εκθετικού χρόνου

Στην πρόταση που ακολουθεί ορίζουμε μία γλώσσα και αποδεικνύουμε ότι είναι $NEXP$-πλήρης.

Πρόταση 4.16. Η γλώσσα:

$L_1 = \{(M, n), M \in NTM, n \in \mathbb{N} |$η M με κενή είσοδο σταματά σε n βήματα$\}$

όπου NTM είναι το σύνολο των μη ντετερμινιστικών μηχανών Turing είναι $NEXP$-πλήρης.

Απόδειξη.

Προφανώς, $L_1 \in NEXP$. Πράγματι, μπορούμε να κατασκευάσουμε μία μη ντετερμινιστική μηχανή Turing M_1 η οποία για κάθε ζεύγος (M, n), όπου $M \in NTM$ και $n \in \mathbb{N}$, προσομοιώνει βήμα-βήμα την εκτέλεση της μηχανής M με κενή είσοδο για ακριβώς n βήματα της μηχανής M. Αν στο n-οστό βήμα η M βρίσκεται στην κατάσταση h (halting state), τότε η M_1 μεταβαίνει στην κατάσταση "yes" και σταματά, διαφορετικά στην κατάσταση "abort" και σταματά. Δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τη μηχανή M_1 ώστε να αποφασίζει αν $(M, n) \in L_1$ σε χρόνο εκθετικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, $||M|| + \log n$. Έστω ότι οι μηχανές M που δίνονται στην είσοδο έχουν μία ταινία, ενώ η μηχανή M_1 έχει τέσσερις ταινίες:

- στην πρώτη υπάρχει η περιγραφή της μηχανής M που δίνεται ως είσοδος
- στην δεύτερη ο αριθμός βημάτων προσομοίωσης που υπολείπονται, αρχικά n
- στην τρίτη η κατάσταση στην οποία βρίσκεται η υπό προσομοίωση μηχανή M σε κάθε βήμα, αρχικά q_0 (έστω q_0 η αρχική κατάσταση της μηχανής M)

- η τέταρτη ταινία είναι αρχικά κενή και σ' αυτήν γράφεται ό,τι θα έγραφε η μηχανή M σε κάθε της βήμα.

Η μηχανή M_1 λειτουργεί ως ακολούθως. Σε κάθε κύκλο εκτέλεσης διαβάζει από την τρίτη ταινία την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η υπό προσομοίωση μηχανή M και από την τέταρτη ταινία το σύμβολο στο οποίο βρίσκεται η κεφαλή. Με βάση την κατάσταση και το σύμβολο βρίσκει στην πρώτη ταινία την μετάβαση που θα πραγματοποιούσε η μηχανή M και γράφει στην τρίτη ταινία την κατάσταση στην οποία μεταβαίνει η μηχανή, ενώ στην τέταρτη ταινία γράφει το καινούριο σύμβολο στη θέση της κεφαλής και κατόπιν κινεί την κεφαλή αριστερά ή δεξιά αν χρειάζεται ανάλογα με τη συνάρτηση μετάβασης της μηχανής M. Αν, επειδή η M είναι μη ντετερμινιστική μηχανή, υπάρχουν πολλές μεταβάσεις για την ίδια κατάσταση και σύμβολο, τότε επιλέγεται τυχαία μία από αυτές. Μετά την πραγματοποίηση της μετάβασης, μειώνεται η τιμή του μετρητή της δεύτερης ταινίας κατά ένα. Αν μετά τη μείωση ο μετρητής είναι διάφορος του μηδενός η M_1 συνεχίζει με τον επόμενο κύκλο. Διαφορετικά, ελέγχει την κατάσταση στην τρίτη ταινία και αν αυτή είναι η κατάσταση h (halting state) τότε η μηχανή M_1 μεταβαίνει στην κατάσταση "yes" και σταματά, διαφορετικά μεταβαίνει στην κατάσταση "abort" και σταματά. Είναι φανερό ότι κάθε κύκλος εκτέλεσης της μηχανής M_1 γίνεται σε $O(||M||)$ βήματα. Επιπλέον, αφού γίνονται ακριβώς n κύκλοι, ο χρόνος που χρειάζεται η μηχανή M_1 για να αποφασίσει αν $(M, n) \in L_1$ είναι $O(n \cdot ||M||)$, δηλαδή εκθετικός χρόνος ως προς το μέγεθος της εισόδου (εκθετικός ως προς το $\log n$).

Αρκεί, τώρα, να δείξουμε ότι η γλώσσα L_1 είναι και $NEXP$-hard. Έστω, λοιπόν, μία τυχαία γλώσσα $L_2 \in NEXP$. Αφού $L_2 \in NEXP$, θα υπάρχει μία μη ντετερμινιστική μηχανή Turing εκθετικού χρόνου M_2 η οποία για κάθε είσοδο x αποφασίζει αν $x \in L_2$ σε χρόνο $2^{p(|x|)}$, όπου $p(\cdot)$ ένα πολυώνυμο. Θα δείξουμε ότι κάθε x απεικονίζεται σε πολυωνυμικό χρόνο σε ένα ζεύγος $(M(x), n(x))$, όπου $M(x) \in NTM$ και $n(x) \in \mathbb{N}$, έτσι ώστε:

$$x \in L_2 \Leftrightarrow (M(x), n(x)) \in L_1$$

Έστω $M_2 =< K, \Sigma, \delta, q_0 >$, όπου K το σύνολο των καταστάσεων της μηχανής, Σ το αλφάβητο, δ η συνάρτηση μετάβασης και $q_0 \in K$ η αρχική κατάσταση, και $x =< i_1, i_2, \dots, i_{|x|} >$ η είσοδος στη μηχανή M_2. Η μηχανή $M(x)$ ορίζεται ως εξής $M(x) =< K_x, \Sigma, \delta_x, q_{0_x} >$ όπου:

- $K_x = K \cup K_{new}$, όπου το σύνολο K_{new}, με $K_{new} \cap K = \emptyset$, περιέχει $|x| + 3$ καινούριες καταστάσεις έστω:

$$K_{new} = \{q_{0_x}, \mathrm{new}_1, \mathrm{new}_2, \dots, \mathrm{new}_{|x|}, \mathrm{back}, \mathrm{loopy}\}$$

- $\delta_x : K_x \times \Sigma \to 2^{K_x \times \Sigma \times \{\to, \leftarrow, -\}}$ είναι η συνάρτηση μετάβασης της μηχανής $M(x)$ για την οποία ισχύει:

$$\begin{aligned}
\delta_x(q_{0_x}, \rhd) &= \{(\text{new}_1, \rhd, \to)\} \\
\delta_x(\text{new}_k, \sqcup) &= \{(\text{new}_{k+1}, i_k, \to), \forall k \in \{1, 2, \ldots, |x| - 1\}\} \\
\delta_x(\text{new}_{|x|}, \sqcup) &= \{(\text{back}, i_{|x|}, \leftarrow)\} \\
\delta_x(\text{back}, i_k) &= \{(\text{back}, i_k, \leftarrow)\}, \forall k \in \{1, 2, \ldots, |x| - 1\} \\
\delta_x(\text{back}, \rhd) &= \{(q_0, \rhd, \text{-})\} \\
\delta_x(\text{loopy}, \sigma) &= \{(\text{loopy}, \sigma, \text{-})\}, \forall \sigma \in \Sigma \\
\delta_x(q, \alpha) &= \delta(q, \alpha)|_{\text{"}no\text{"} \leftarrow \text{loopy}}, \forall q \in K, \alpha \in \Sigma
\end{aligned}$$

όπου με τον συμβολισμό $\delta(q, \alpha)|_{\text{"}no\text{"} \leftarrow \text{loopy}}$ εννοούμε ότι όλες οι τριάδες του συνόλου $\delta(q, \alpha)$ που στο πρώτο τους πεδίο έχουν "no" αντικαθίστανται από τις ίδιες τριάδες με πρώτο πεδίο loopy.

Από τον ορισμό της μηχανής $M(x)$ προκύπτει ότι:

$$x \in L_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow M_2(x) = \text{"}yes\text{"} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{η } M(x) \text{ σταματά με κενή είσοδο σε } 2 \cdot |x| + 1 + 2^{p(|x|)} \text{ βήματα} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (M(x), n(x) = 2 \cdot |x| + 1 + 2^{p(|x|)}) \in L_1$$

και επειδή η κατασκευή του ζεύγους (M(x),n(x)) γίνεται προφανώς σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το $|x|$, προκύπτει ότι κάθε γλώσσα $L_2 \in NEXP$ ανάγεται πολυωνυμικά στη γλώσσα L_1. Συνεπώς, η L_1 είναι $NEXP$-hard.

Αφού η L_1 είναι $NEXP$-hard και $L_1 \in NEXP$ προκύπτει ότι η L_1 είναι $NEXP$-πλήρης. □

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι και η γλώσσα $L_2 = \{(M, 5 \cdot m), M \in NTM, m \in \mathbb{N} | \text{η } M \text{ με κενή είσοδο σταματά σε } 5 \cdot m - 2 \text{ βήματα}\}$ είναι $NEXP$-πλήρης. Θα ανάγουμε τη γλώσσα L_2 στο EQINSQUARETORUS για να αποδείξουμε ότι το τελευταίο είναι $NEXP$-hard.

Θεώρημα 4.17. Το πρόβλημα EQINSQUARETORUS είναι $NEXP$-hard.

Απόδειξη.
Θα ανάγουμε στο EQINSQUARETORUS τη γλώσσα $L_2 = \{(M, 5 \cdot m), M \in NTM, m \in \mathbb{N} | \text{η } M \text{ με κενή είσοδο σταματά σε } 5 \cdot m - 2 \text{ βήματα}\}$. Για να το πετύχουμε αυτό, θα πρέπει, για κάθε $x = (M, 5 \cdot m)$, σε πολυωνυμικό χρόνο

να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο (n_x, k_x, f_x) του EQINSQUARETORUS έτσι ώστε να ισχύει η ισοδυναμία:

$$x = (M, 5 \cdot m) \in L_2 \Leftrightarrow (n_x, k_x, f_x) \in \text{EQINSQUARETORUS} \tag{4.1}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στο γραφηματικό παίγνιο που αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο (n_x, k_x, f_x) του προβλήματος EQINSQUARETORUS όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών $S_x = \{s_1, s_2, \ldots, s_{k_x}\}$ και την ίδια συνάρτηση οφέλους $u_x : S_x \times {S_x}^4 \to \Re$ που είναι συμμετρική ως προς τους γείτονες και για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_{u_x}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, s_{k_4}) \Leftrightarrow f(\{k_1, k_2, k_3, k_4\})|_i = 1$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι μια περιγραφή της $BestResponse$ συνάρτησης που αντιστοιχεί στη συνάρτηση οφέλους u_x.

Στη συνέχεια της απόδειξης, με αφετηρία ένα ζεύγος $x = (M, 5 \cdot m)$, θα υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο την πλευρά n_x του τετραγωνικού τόρου, το σύνολο στρατηγικών S_x και τη συνάρτηση $BestResponse_{u_x}$ (για συντομία παρακάτω BR_{u_x}) έτσι ώστε:

$$(M, 5 \cdot m) \in L_2 \Leftrightarrow \exists \text{ ισορροπία Nash στο τορο-παίγνιο } (n_x, S_x, BR_{u_x}) \tag{4.2}$$

Επειδή, δε, από κάθε τριάδα (n_x, S_x, BR_{u_x}) μπορούμε, και μάλιστα σε πολυωνυμικό χρόνο, να υπολογίσουμε την αντίστοιχη τριάδα (n_x, k_x, f_x) που αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος EQINSQUARETORUS, η σχέση 4.2 συνεπάγεται τη σχέση 4.1 και η εύρεση της τριάδας (n_x, k_x, f_x) θα γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ας κατασκευάσουμε, λοιπόν, την τριάδα (n_x, S_x, BR_{u_x}). Έστω, $x = (M, 5 \cdot m)$, όπου $M \in NTM, m \in \mathbb{N}$, και $M =< K, \Sigma, \delta, q_0 >$, όπου K το σύνολο καταστάσεων, Σ το αλφάβητο, $\delta : K \times \Sigma \to 2^{K \times \Sigma \times \{\to, \leftarrow, -\}}$ η συνάρτηση μετάβασης και $q_0 \in K$ η αρχική κατάσταση της μηχανής M. Προς διευκόλυνσή μας στην απόδειξη ας απαιτήσουμε η συνάρτηση μετάβασης δ να ικανοποιεί τη σχέση $(q, \alpha, -) \in \delta(q, \alpha), \forall q \in K, \alpha \in \Sigma$ πράγμα το οποίο δεν αυξάνει, ούτε μειώνει τις υπολογιστικές δυνατότητες της μηχανής. Επίσης, ας θεωρήσουμε ότι η ταινία της μηχανής M έχει πάντα στο αριστερό άκρο τα ειδικά σύμβολα $\rhd\rhd'$, ότι κατά την έναρξη του υπολογισμού η κεφαλή της μηχανής βρίσκεται στο κελί που περιέχει το σύμβολο $\rhd'$ και ότι η συνάρτηση μετάβασης είναι τέτοια ώστε η κεφαλή να μην κινείται ποτέ αριστερά από το σύμβολο $\rhd'$ και τα σύμβολα $\rhd$ και $\rhd'$ να υπάρχουν μόνο στο αριστερό άκρο της ταινίας.

Πλευρά του τετραγωνικού τόρου n_x

Ως πλευρά του τετραγωνικού τόρου επιλέγουμε $n_x = 5 \cdot m + 1$.

Σύνολο Στρατηγικών S_x

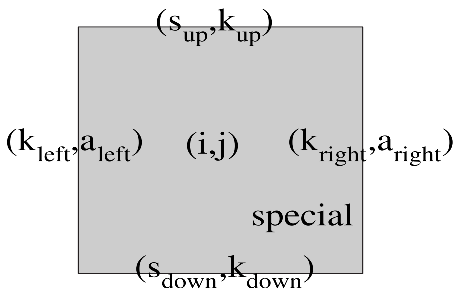
Κάθε στρατηγική, εκτός από κάποιες ειδικές στρατηγικές που θα αναφέρουμε παρακάτω, θα είναι μια 11-άδα της μορφής:

$$s = (i, j, s_{down}, k_{down}, s_{up}, k_{up}, a_{left}, k_{left}, a_{right}, k_{right}, special)$$

όπου:

- $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \cup \{\epsilon\}$
- $s_{up}, s_{down} \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $k_{up}, k_{down}, k_{left}, k_{right} \in K \cup \{\epsilon\}$
- $a_{right}, a_{left} \in \{\rightarrow, \leftarrow, \epsilon\}$
- $special \in \{B_{\triangleright}, B_{\sqcup}, BB, \epsilon\}$

Στη συνέχεια, όταν θέλουμε να αναφερθούμε σε κάποιο πεδίο μιας στρατηγικής s θα γράφουμε $s|_i, s|_j, s|_{s_{down}}$ κοκ. Σχηματικά, η στρατηγική s μπορεί να παρασταθεί σαν ένα πλακάκι (tile) όπως στο σχήμα 4.9. Η σχηματική αντίληψη των στρατηγικών βοηθάει στη διαισθητική κατανόηση της απόδειξης που ακολουθεί.



Σχήμα 4.9: Μία γνήσια στρατηγική

Ως σύνολο στρατηγικών επιλέγουμε το σύνολο $S_x = S_1 \cup S_2 \cup SPECIAL$ όπου:

- Το σύνολο S_1 περιέχει:
  - $\forall \alpha \in \Sigma, \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:

$$(i, j, \alpha, \epsilon, \alpha, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$

- $\forall q, p \in K, \forall \alpha, b \in \Sigma$ τέτοια ώστε $(p, b, -) \in \delta(q, \alpha)$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:

$$(i, j, \alpha, q, b, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$

- $\forall q, p \in K, \forall \alpha, b \in \Sigma$ τέτοια ώστε $(p, b, \rightarrow) \in \delta(q, \alpha)$, $\forall \gamma \in \Sigma$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τις στρατηγικές:

$$(i, j, \alpha, q, b, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \rightarrow, p, \epsilon)$$

$$\text{και } (i, j, \gamma, \epsilon, \gamma, p, \rightarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$

- $\forall q, p \in K, \forall \alpha, b \in \Sigma$ τέτοια ώστε $(p, b, \leftarrow) \in \delta(q, \alpha)$, $\forall \gamma \in \Sigma$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τις στρατηγικές:

$$(i, j, \alpha, q, b, \epsilon, \leftarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$

$$\text{και } (i, j, \gamma, \epsilon, \gamma, p, \epsilon, \epsilon, \leftarrow, p, \epsilon)$$

- $\forall \alpha \in \Sigma$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τις στρατηγικές:

$$(i, j, \alpha, h, \alpha, h, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$

όπου h η halting state της μηχανής M

- τη στρατηγική $(1, 0, \triangleright', \epsilon, \triangleright', q_0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$

• Το σύνολο S_2 περιέχει:

- $\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:

$$(i, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup}) \text{ (συντομογραφία } s_{\sqcup}^{i})$$

- $\forall j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:

$$(\epsilon, j, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright}) \text{ (συντομογραφία } s_{\triangleright}^{j})$$

- τη στρατηγική $(\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$ (συντομογραφία s_{BB})

• Το σύνολο $SPECIAL$ περιέχει τρεις ειδικές στρατηγικές, τις K_1, K_2 και K_3.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύνολο S_x περιέχει $O(||M||)$ πλήθος στρατηγικών, όπου $||M||$ το μέγεθος αναπαράστασης της μηχανής M.

Συνάρτηση Βέλτιστων Αποκρίσεων BR_{u_x}

Για να ορίσουμε τη συνολοσυνάρτηση βέλτιστων αποκρίσεων BR_{u_x} θα πρέπει να προσδιορίσουμε ένα υποσύνολο του συνόλου S_x για κάθε συνδυασμό με επανάληψη 4 στοιχείων από το σύνολο S_x. Επειδή, όμως, το σύνολο S_x περιέχει μεγάλο αριθμό από στρατηγικές, κάτι τέτοιο θα ήταν επίπονο. Θα προτιμήσουμε, λοιπόν, να ορίσουμε τη συνάρτηση BR_{u_x} πιο αφαιρετικά, δίνοντας κάποιους κανόνες τους οποίους υπακούει.

$\forall w, y, z, t \in S_x$:

1. αν $K_1 \in \{w, y, z, t\}$ τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{K_2\}$
2. αν $w = y = z = t = K_2$ τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{K_3\}$
3. αν
   - $w = (0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y = (4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $z = (\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
   - $t = (\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$

   τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)\}$
4. αν
   - $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
   - $y = (1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $z = (0, 0, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
   - $t = (0, 4, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$

   τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})\}$
5. αν
   - $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
   - $y = (3, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $z = (4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
   - $t = (4, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

   τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})\}$
6. αν για κάποιο $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- $w = ((l-1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\sqcup)$
- $y = ((l+1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\sqcup)$
- $z|_i = l \wedge z|_j = 0$
- $t = (l, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\sqcup)\}$

7. αν

- $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
- $y = (\epsilon, 1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)$
- $z = (0, 0, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- $t = (4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$

τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)\}$

8. αν

- $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
- $y = (\epsilon, 3, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)$
- $z = (0, 4, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- $t = (4, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)\}$

9. αν για κάποιο $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- $w = (\epsilon, (l-1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)$
- $y = (\epsilon, (l+1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)$
- $z = (0, l, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- $t|_i = 4 \wedge t|_j = l$

τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(\epsilon, l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)\}$

10. αν

- $w = (0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\sqcup)$
- $y = (\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_\triangleright)$
- $z = (0, 1, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- $t|_i = 1 \wedge t|_j = 0$

τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(0,0,\rhd,\epsilon,\rhd,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}$

11. αν

    - $w = (1,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,B_{\sqcup})$
    - $y = (0,0,\rhd,\epsilon,\rhd,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)$
    - $z|_i = 1 \wedge z|_j = 1$
    - $t|_i = 2 \wedge t|_j = 0$

    τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(1,0,\rhd',\epsilon,\rhd',q_0,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}$

12. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$

    - $w = (l,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,B_{\sqcup})$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = 1$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = 0 \wedge z|_{s_{up}} \neq \rhd$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge z|_j = 0$

    τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(l,0,\sqcup,\epsilon,\sqcup,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}$

13. αν

    - $w = (4,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,B_{\sqcup})$
    - $y = (\epsilon,0,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,B_{\rhd})$
    - $z = (3,0,\sqcup,\epsilon,\sqcup,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)$
    - $t = (4,1,\sqcup,\epsilon,\sqcup,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)$

    τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(4,0,\sqcup,\epsilon,\sqcup,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}$

14. αν

    - $w = (4,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,B_{\sqcup})$
    - $y = (\epsilon,4,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,B_{\rhd})$
    - $z|_i = 4 \wedge z|_j = 3 \wedge z|_{k_{up}} \in \{\epsilon,h\}$
    - $t = (3,4,\sigma,\kappa,\sigma,\kappa,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon,h\}$

    τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(4,4,z|_{s_{up}},z|_{k_{up}},z|_{s_{up}},z|_{k_{up}},\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}$

15. αν για κάποιο $r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποια $\alpha,b \in \Sigma$ και για κάποια $q,p \in K$:

    - $w|_i = 4 \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$

- $y|_i = 4 \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = p$
- $z|_i = 3 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
- $t = (\epsilon, r, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$

τότε:

$$BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(4, r, \alpha, q, b, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, b, -) \in \delta(q, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

16. αν για κάποιο $r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποιο $\alpha \in \Sigma$ και για κάποιο $p \in K$:

- $w|_i = 4 \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
- $y|_i = 4 \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = p$
- $z|_i = 3 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \rightarrow \wedge z|_{k_{right}} = p$
- $t = (\epsilon, r, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$

τότε:

$$BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(4, r, \alpha, \epsilon, \alpha, p, \rightarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, z|_{s_{up}}, \rightarrow) \in \delta(z|_{k_{down}}, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

17. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$

- $w = (l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
- $y|_i = l \wedge y|_j = 3 \wedge y|_{k_{up}} \in \{h, \epsilon\}$
- $z = ((l-1) \mod 5, 4, \sigma_1, \kappa_1, \sigma_1, \kappa_1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma_1 \in \Sigma$ και $\kappa_1 \in \{\epsilon, h\}$
- $t = ((l+1) \mod 5, 4, \sigma_2, \kappa_2, \sigma_2, \kappa_2, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma_2 \in \Sigma$ και $\kappa_2 \in \{\epsilon, h\}$

τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(l, 4, y|_{s_{up}}, y|_{k_{up}}, y|_{s_{up}}, y|_{k_{up}}, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

18. αν

- $w = (0, 3, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- $y = (0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
- $z = (\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
- $t|_i = 1 \wedge t|_j = 4$

τότε $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{(0, 4, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

19. αν για κάποιο $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
    - $w = (0, (l-1) \mod 5, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
    - $y = (0, (l+1) \mod 5, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
    - $z = (\epsilon, l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})$
    - $t|_i = 1 \wedge t|_j = l$

    τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(0, l, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

20. αν για κάποιο $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
    - $w = (l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
    - $y|_i = (l-1) \mod 5 \wedge y|_j = 4$
    - $z|_i = (l+1) \mod 5 \wedge z|_j = 4$
    - $t|_i = l \wedge t|_j = 3$

    τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, 4, t|_{s_{up}}, t|_{k_{up}}, t|_{s_{up}}, t|_{k_{up}}, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

21. αν για κάποια $l, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και για κάποιο $\alpha \in \Sigma$:
    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = \epsilon$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

    τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, r, \alpha, \epsilon, \alpha, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

22. αν για κάποια $l, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $q, p \in K$:
    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = p$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

    τότε:

    $$BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \begin{cases} \{(l, r, \alpha, q, b, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, b, -) \in \delta(q, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

23. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποιο $\alpha \in \Sigma$ και για κάποιο $p \in K$:

    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = p$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \rightarrow \wedge z|_{k_{right}} = p$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

    τότε:

    $$BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,\epsilon,\alpha,p,\rightarrow,p,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}, & \text{αν } (p, z|_{s_{up}}, \rightarrow) \in \delta(z|_{k_{down}}, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

24. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποιο $\alpha \in \Sigma$ και για κάποιο $p \in K$:

    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = p$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \leftarrow \wedge t|_{k_{left}} = p$

    τότε:

    $$BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,\epsilon,\alpha,p,\epsilon,\epsilon,\leftarrow,p,\epsilon)\}, & \text{αν } (p, t|_{s_{up}}, \leftarrow) \in \delta(t|_{k_{down}}, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

25. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $p, q \in K$:

    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = \epsilon$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \rightarrow \wedge t|_{k_{left}} = p$

    τότε:

    $$BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,q,b,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\rightarrow,p,\epsilon)\}, & \text{αν } (p, b, \rightarrow) \in \delta(q, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

26. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $p, q \in K$:

- $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
- $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = \epsilon$
- $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \leftarrow \wedge z|_{k_{right}} = p$
- $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

τότε:

$$BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,q,b,\epsilon,\leftarrow,p,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}, & \text{αν } (p,b,\leftarrow) \in \delta(q,\alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

27. σε όλες τις άλλες περιπτώσεις $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{K_1\}$

Είναι φανερό ότι η συνολοσυνάρτηση BR_{u_x} μπορεί να οριστεί σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το $|S_x|$. Πράγματι, για κάθε συνδυασμό με επανάληψη 4 στοιχείων από το σύνολο S_x αρκεί να ελέγξει κανείς σε ποιον από τους παραπάνω κανόνες εμπίπτει για να βρει την τιμή της BR_{u_x}. Επομένως, ο ορισμός της συνάρτησης μπορεί να γίνει σε χρόνο:

$$O\left(\left[\begin{matrix}|S_x|\\4\end{matrix}\right]\right) = O(|S_x|^4) = O(||M||^4)$$

δηλαδή σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος αναπαράστασης της μηχανής M.

Απόδειξη ισοδυναμίας 4.2

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία 4.2:

$$(M, 5\cdot m) \in L_2 \Leftrightarrow \exists \text{ ισορροπία Nash στο τορο-παίγνιο } (n_x, S_x, BR_{u_x})$$

όπου τα n_x, S_x και BR_{u_x} είναι αυτά που ορίστηκαν παραπάνω.

Απόδειξη

Πριν αρχίσει η απόδειξη, ας ορίσουμε αυθαίρετα μία φορά για όλες τις στήλες του τόρου και μία φορά για όλες τις γραμμές του τόρου, ώστε να έχουν νόημα οι έννοιες "δεξιός γείτονας", "αριστερός γείτονας", "πάνω γείτονας" και "κάτω γείτονας". Επίσης δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.18. Ορίζουμε ως **διατεταγμένη τετράδα στρατηγικών των γειτόνων** ενός παίκτη την τετράδα στρατηγικών που στο πρώτο πεδίο έχει τη στρατηγική του αριστερού γείτονα, στο δεύτερο πεδίο τη στρατηγική του δεξιού γείτονα, στο τρίτο πεδίο τη στρατηγική του πάνω και στο τελευταίο πεδίο τη στρατηγική του κάτω γείτονα.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η μηχανή M με κενή είσοδο σταματά σε $5 \cdot m - 2$ βήματα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ισορροπία Nash στο τορο-παίγνιο (n_x, S_x, BR_{u_x}). Πιο συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε μία ισορροπία Nash βασιζόμενοι στον υπολογισμό της μηχανής M.

Πράγματι, ας επιλέξουμε τυχαία μια γραμμή και μία στήλη του τόρου. Στον παίκτη που αντιστοιχεί στην τομή της γραμμής και της στήλης (θα τον αποκαλούμε στη συνέχεια "γωνιακό παίκτη") δίνουμε τη στρατηγική s_{BB}. Ο παίκτης που είναι ακριβώς δεξιά του γωνιακού στη γραμμή που επιλέξαμε θα πάρει τη στρατηγική $s^0_{\sqcup}$, ενώ ο παίκτης που είναι ακριβώς αριστερά του γωνιακού θα πάρει τη στρατηγική $s^4_{\sqcup}$. Στους υπόλοιπους παίκτες της γραμμής θα δώσουμε στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}, i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, έτσι ώστε αν ένας παίκτης έχει τη στρατηγική $s^i_{\sqcup}$ τότε ο παίκτης που είναι δεξιά του θα έχει $s^{(i+1) \mod 5}_{\sqcup}$ και ο παίκτης που είναι αριστερά του θα έχει $s^{((i-1) \mod 5}_{\sqcup}$. Αντίστοιχα, οι παίκτες της στήλης θα λάβουν στρατηγικές της μορφής $s^j_{\rhd}, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Εφόσον ο τόρος έχει πλευρά $n_x = 5 \cdot m + 1$, η γραμμή και η στήλη που επιλέξαμε περικλείουν ένα $(5 \cdot m) \times (5 \cdot m)$ τετράγωνο παικτών. Όλοι οι παίκτες αυτοί θα λάβουν στρατηγικές από το σύνολο S_1 σε αντίθεση με τους παίκτες της γραμμής και της στήλης που πήραν στρατηγικές από το σύνολο S_2. Προς διευκόλυνσή μας, ονομάζουμε "παίκτη $(0, 0)$" τον ενδιάμεσο παίκτη που έχει γείτονες τους πλευρικούς παίκτες με στρατηγικές $s^0_{\sqcup}$ και $s^0_{\rhd}$ και αντιστοιχίζουμε κατά τον προφανή τρόπο ένα ζεύγος (x, y), όπου $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$ σε κάθε ενδιάμεσο παίκτη. Κάνουμε, τώρα, και τις ακόλουθες αναθέσεις στρατηγικών:

- κάθε παίκτης $(0, j), j \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$ της πρώτης στήλης θα λάβει τη στρατηγική $(0, j \mod 5, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- ο παίκτης $(1, 0)$ θα λάβει τη στρατηγική $(1, 0, \rhd', \epsilon, \rhd', q_0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- κάθε παίκτης $(i, 0), i \in \{2, 3, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$ θα λάβει τη στρατηγική $(i \mod 5, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$

Αν παραθέσουμε τα πεδία s_{up} των στρατηγικών των παικτών $(i, 0), i \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$ της πρώτης γραμμής έχουμε την ακολουθία συμβόλων $\rhd \rhd' \sqcup \sqcup \ldots \sqcup$ που ταυτίζεται με την ακολουθία συμβόλων στην ταινία της μηχανής M όταν αρχίζει ο υπολογισμός. Επιπλέον το πεδίο k_{up} των στρατηγικών όλων των παικτών της πρώτης γραμμής είναι ϵ εκτός από τον παίκτη (1,0) του οποίου το πεδίο k_{up} έχει την τιμή q_0. Ας προσδώσουμε στο γεγονός αυτό τη σημασιολογία ότι η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q_0 και ότι η κεφαλή της δείχνει στο σύμβολο $\rhd'$ (που είναι η τιμή του πεδίου s_{up} της στρατηγικής του παίκτη (1,0)).

Μένει να δώσουμε στρατηγικές και στους υπόλοιπους παίκτες (x, y), όπου $x, y \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η μηχανή M σταματά σε $5 \cdot m - 2$ βήματα. Επομένως, σε έναν $(5 \cdot m) \times (5 \cdot m - 1)$ πίνακα $A = [a_{ij}], i \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 1\}, j \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 2\}$ μπορούμε να γράψουμε τον υπολογισμό της μηχανής ως ακολούθως:

- κάθε στοιχείο του πίνακα θα έχει ως τιμή ένα ζεύγος $(s, k), s \in \Sigma, k \in K \cup \{\epsilon\}$
- η i-οστή γραμμή του πίνακα A αντιστοιχεί στη διαμόρφωση[4] (configuration) της μηχανής μετά το πέρας του i-οστού βήματος του υπολογισμού
- το πρώτο πεδίο της τιμής του στοιχείου a_{ij} αντιστοιχεί στο σύμβολο που περιέχει το j-οστό (από το αριστερό άκρο) κελί της ταινίας μετά το i-οστό βήμα του υπολογισμού
- σε κάθε γραμμή του πίνακα όλα τα στοιχεία εκτός από ακριβώς ένα έχουν το δεύτερο πεδίο ίσο με ϵ
- αν το στοιχείο a_{ij_0} έχει το δεύτερο πεδίο του ίσο με $q_0 \neq \epsilon$, αυτό σημαίνει ότι η κεφαλή της μηχανής μετά το πέρας του i-οστού βήματος δείχνει στο j_0-οστό κελί από το αριστερό άκρο της ταινίας και η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q_0

Σημειώνουμε ότι η τιμή του στοιχείου a_{i0} του πίνακα ταυτίζεται με το ζεύγος των τιμών των πεδίων s_{up}, k_{up} στην στρατηγική που έχουμε ήδη αναθέσει στον παίκτη $(i, 0)$ για κάθε $i \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$. Επίσης, σημειώνουμε ότι, επειδή, όπως είπαμε, η κεφαλή της μηχανής δεν πηγαίνει ποτέ αριστερά από το σύμβολο $\rhd'$, κάθε στοιχείο της 0-οστής στήλης του πίνακα θα έχει τιμή $(\rhd, \epsilon)$.

Ας αναθέσουμε τώρα στρατηγικές στους παίκτες (x, y), $x, y \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$. Η ανάθεση γίνεται σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες:

- Αναθέτουμε στον παίκτη (x, y) τη στρατηγική $s_{(x,y)} \in S_1$ για την οποία ισχύουν:
  - $s_{(x,y)}|_i = (x \mod 5)$ και $s_{(x,y)}|_j = (y \mod 5)$
  - $s_{(x,y)}|_{special} = \epsilon$
  - $s_{(x,y)}|_{s_{down}} = a_{x(y-1)}|_s$ και $s_{(x,y)}|_{k_{down}} = a_{x(y-1)}|_k$
  - $s_{(x,y)}|_{s_{up}} = a_{xy}|_s$ και $s_{(x,y)}|_{k_{up}} = a_{xy}|_k$
  - $s_{(x,y)}|_{a_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{left}} = s_{(x,y)}|_{a_{right}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}} = \epsilon$

[4]Με τον όρο **διαμόρφωση (configuration)** της μηχανής M εννοούμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή και την ακολουθία συμβόλων στην ταινία της μηχανής

- Αν η κεφαλή της μηχανής M μετακινείται δεξιά στο i-οστό βήμα από το κελί j στο κελί $j+1$, όπου $j \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot m - 2\}$ τότε τροποποιούμε τα ακόλουθα πεδία των στρατηγικών των παικτών (i, j) και $(i, j+1)$:
  - $s_{(i,j)}|_{a_{right}} = \rightarrow$ και $s_{(i,j)}|_{k_{right}} = s_{(i,j+1)}|_{k_{up}}$
  - $s_{(i,j+1)}|_{a_{left}} = \rightarrow$ και $s_{(i,j+1)}|_{k_{left}} = s_{(i,j+1)}|_{k_{up}}$
- Αν η κεφαλή της μηχανής M μετακινείται αριστερά στο i-οστό βήμα από το κελί j στο κελί $j-1$, όπου $j \in \{2, 3, \ldots, 5 \cdot m - 2\}$ τότε τροποποιούμε τα ακόλουθα πεδία των στρατηγικών των παικτών (i, j) και $(i, j-1)$:
  - $s_{(i,j)}|_{a_{left}} = \leftarrow$ και $s_{(i,j)}|_{k_{left}} = s_{(i,j-1)}|_{k_{up}}$
  - $s_{(i,j-1)}|_{a_{right}} = \leftarrow$ και $s_{(i,j-1)}|_{k_{right}} = s_{(i,j-1)}|_{k_{up}}$

Απομένει να αναθέσουμε στρατηγικές στους παίκτες (x, y), όπου $x \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$, $y = 5 \cdot m - 1$. Καθένας από αυτούς θα πάρει τη στρατηγική $s_{xy} \in S_1$ για την οποία ισχύει:

- $s_{(x,y)}|_i = (x \mod 5)$ και $s_{(x,y)}|_j = (y \mod 5)$
- $s_{(x,y)}|_{special} = \epsilon$
- $s_{(x,y)}|_{a_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{left}} = s_{(x,y)}|_{a_{right}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}} = \epsilon$
- $s_{(x,y)}|_{s_{up}} = s_{(x,y)}|_{s_{down}} = s_{(x,5 \cdot m-2)}|_{s_{up}}$
- $s_{(x,y)}|_{k_{up}} = s_{(x,y)}|_{k_{down}} = s_{(x,5 \cdot m-2)}|_{k_{up}}$
  (σημειώνουμε ότι θα ισχύει: $s_{(x,y)}|_{k_{up}} = s_{(x,y)}|_{k_{down}} \in \{h, \epsilon\}$)

Έχουμε πλέον αναθέσει στρατηγικές σε όλους τους παίκτες του τόρου. Δεν είναι δύσκολο να αποδειχτεί ότι η απονομή στρατηγικών που περιγράψαμε αποτελεί ισορροπία Nash. Πράγματι, αν επανεξετάσουμε τις στρατηγικές που αναθέσαμε θα δούμε ότι η στρατηγική κάθε παίκτη ανήκει στο σύνολο των βέλτιστων αποκρίσεων των στρατηγικών των γειτόνων του.

($\Leftarrow$) Έστω ότι για κάποιο $x = (M, 5 \cdot m)$, όπου $M \in NTM, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει ισορροπία Nash στο τορο-παίγνιο (n_x, S_x, BR_{u_x}). Θα αποδείξουμε ότι $x \in L_2$. Αποδεικνύουμε πρώτα τα παρακάτω λήμματα:

Λήμμα 4.19. Στην ισορροπία Nash κανείς παίκτης δεν έχει στρατηγική από το σύνολο *SPECIAL*.

Απόδειξη. Έστω ότι στην ισορροπία Nash κάποιος παίκτης p έχει τη στρατηγική K_1. Από τον πρώτο κανόνα που υπακούει η συνάρτηση BR_{u_x} προκύπτει ότι όλοι οι γείτονες του εν λόγω παίκτη θα πρέπει να έχουν τη στρατηγική K_2. Όμως, από τον δεύτερο κανόνα προκύπτει ότι $BR_{u_x}(\{K_2, K_2, K_2, K_2\}) = \{K_3\}$, δηλαδή η στρατηγική K_1 του παίκτη p δεν ανήκει στο σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων που αντιστοιχεί στις στρατηγικές των γειτόνων του. Αυτό, όμως, είναι άτοπο από τον ορισμό της ισορροπίας Nash. Επομένως, σε μια ισορροπία Nash κανείς παίκτης δεν θα έχει τη στρατηγική K_1.

Εφόσον στην ισορροπία Nash κανείς παίκτης δεν θα έχει τη στρατηγική K_1, κανένας παίκτης δεν μπορεί να έχει τις στρατηγικές K_2 και K_3. Αυτό προκύπτει από τους κανόνες τους οποίους υπακούει η συνάρτηση BR_{u_x} από τους οποίους:

- $K_2 \in BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) \Rightarrow K_1 \in \{w, y, z, t\}$
- $K_3 \in BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) \Rightarrow w = y = z = t = K_2$

$\square$

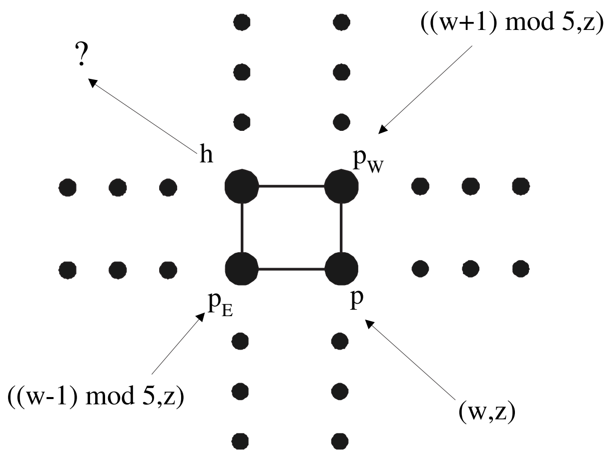
Λήμμα 4.20. Δεν υπάρχει ισορροπία Nash στην οποία όλοι οι παίκτες έχουν στρατηγικές μόνο από το σύνολο S_1.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει ισορροπία Nash στην οποία όλοι οι παίκτες έχουν στρατηγικές μόνο από το σύνολο S_1. Από τους κανόνες τους οποίους υπακούει η συνάρτηση BR_{u_x} και από το λήμμα 4.19 προκύπτει ότι αν ένας παίκτης p έχει λάβει τη στρατηγική s_p για την οποία ισχύει ότι $s_p|_i = w$ και $s_p|_j = z$, όπου $w, z \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, τότε οι γείτονες του παίκτη p έστω p_E, p_W, p_S, p_N θα έχουν λάβει στρατηγικές για τις οποίες ισχύει:

- $s_{p_E}|_i = (w - 1) \mod 5 \wedge s_{p_E}|_j = z$
- $s_{p_W}|_i = (w + 1) \mod 5 \wedge s_{p_E}|_j = z$
- $s_{p_S}|_i = w \wedge s_{p_S}|_j = (z - 1) \mod 5$
- $s_{p_N}|_i = w \wedge s_{p_N}|_j = (z + 1) \mod 5$

Οι παίκτες p_E, p και p_W πρέπει να βρίσκονται σε ευθεία γραμμή πάνω στον τόρο. Πράγματι έστω ότι οι παίκτες p_E, p και p_W σχηματίζουν γωνία όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

Τότε οι παίκτες p_E και p_W θα έχουν εκτός από τον p άλλον έναν κοινό γείτονα, έστω h. Επειδή υποθέσαμε ότι όλοι οι παίκτες του τόρου έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1, οι γείτονες του παίκτη p_w θα έχουν στρατηγικές με ζεύγος πεδίων i, j:



Σχήμα 4.10: Αδύνατη τοπολογία

- (w, z) (είναι ο παίκτης p)
- $((w+2) \mod 5, z)$ (έστω ο παίκτης p_{WW})
- $((w+1) \mod 5, (z+1) \mod 5)$ (έστω ο παίκτης p_{WN})
- $((w+1) \mod 5, (z-1) \mod 5)$ (έστω ο παίκτης p_{WS})

Για τους ίδιους λόγους οι γείτονες του παίκτη p_E θα έχουν στρατηγικές με ζεύγος πεδίων i, j:

- $((w-2) \mod 5, z)$ (έστω ο παίκτης p_{EE})
- (w, z) (είναι ο παίκτης p)
- $((w-1) \mod 5, (z+1) \mod 5)$ (έστω ο παίκτης p_{EN})
- $((w-1) \mod 5, (z-1) \mod 5)$ (έστω ο παίκτης p_{ES})

Επειδή, όμως, $w \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ προκύπτει ότι εκτός από το ζεύγος (w, z) που εμφανίζεται στους γείτονες και των δύο παικτών δεν υπάρχει κάποιο άλλο κοινό ζεύγος. Αυτό είναι άτοπο γιατί οι παίκτες p_E και p_W έχουν δύο κοινούς γείτονες τον p και τον h. Επομένως, οι παίκτες p_E, p και p_W πρέπει να βρίσκονται σε ευθεία γραμμή πάνω στον τόρο.

Με παρόμοια επιχειρήματα προκύπτει ότι όλοι οι παίκτες p_{EE}, p_E, p, p_W, p_{WW} θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και, μάλιστα, θα αποτελούν τμήμα ενός δακτυλίου παικτών οι οποίοι βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και οι οποίοι θα έχουν στρατηγικές με ίδια τιμή στο πεδίο j. Επιπλέον, αν η στρατηγική ενός παίκτη του δακτυλίου έχει στο πεδίο i την τιμή $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τότε η στρατηγική του ενός γείτονά του στον δακτύλιο θα έχει στο πεδίο i την τιμή $(l-1) \mod 5$ και η στρατηγική του άλλου γείτονα την τιμή $(l+1) \mod 5$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των παικτών στο δακτύλιο πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 5 πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού οι παίκτες του δακτυλίου είναι στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και το μέγεθος του τόρου είναι $n_x = 5 \cdot m + 1$. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι στην ισορροπία Nash όλοι οι παίκτες έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1. Επομένως, στην ισορροπία Nash δεν θα έχουν όλοι στρατηγικές από το σύνολο S_1. □

Λήμμα 4.21. Στην ισορροπία Nash θα υπάρχει σίγουρα ένας παίκτης με στρατηγική s_{BB}.

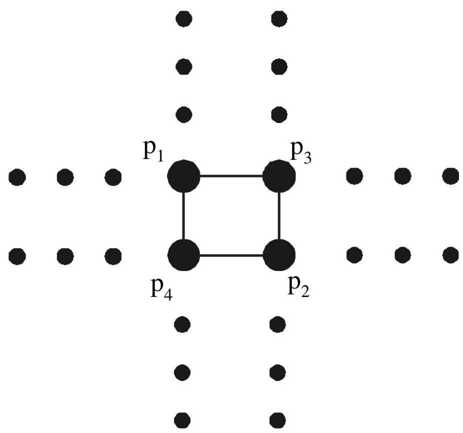
Απόδειξη. Από τα λήμματα 4.19 και 4.20 προκύπτει ότι στην ισορροπία Nash υπάρχει ένα μη κενό σύνολο παικτών Π με στρατηγικές από το σύνολο S_2, αλλά ας υποθέσουμε ότι κανείς παίκτης του συνόλου Π δεν έχει τη στρατηγική s_{BB}. Έστω, τώρα, ένας παίκτης $p \in \Pi$. Από την υπόθεση, η στρατηγική του θα είναι είτε της μορφής $s^i_{\sqcup}$, $i \in \{0,1,2,3,4\}$, είτε της μορφής $s^j_{\triangleright}$, $j \in \{0,1,2,3,4\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης έχει τη στρατηγική $s^l_{\sqcup}$ για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$. Από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και βάσει της υπόθεσης ότι κανείς παίκτης δεν έχει την στρατηγική s_{BB} προκύπτει ότι οι τέσσερις γείτονες p_E, p_W, p_S, p_N του παίκτη p θα έχουν στρατηγικές για τις οποίες ισχύει:

- $s_{p_N}, s_{p_S} \in S_1$
- $s_{p_E} = s^{(l-1) \mod 5}_{\sqcup}$
- $s_{p_W} = s^{(l+1) \mod 5}_{\sqcup}$

Με παρόμοια επιχειρήματα όπως αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στην απόδειξη του προηγουμένου λήμματος προκύπτει ότι οι παίκτες p_E, p, p_W βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και, μάλιστα, αποτελούν τμήμα ενός δακτυλίου παικτών οι οποίοι βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και οι οποίοι θα έχουν στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}$, $i \in \{0,1,2,3,4\}$. Επιπλέον, αν η στρατηγική ενός παίκτη του δακτυλίου έχει στο πρώτο πεδίο την τιμή $l \in \{0,1,2,3,4\}$ τότε η στρατηγική του ενός γείτονά του στον δακτύλιο θα έχει στο πρώτο πεδίο την τιμή $(l-1) \mod 5$ και η στρατηγική του άλλου γείτονα την τιμή $(l+1) \mod 5$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός των παικτών στο δακτύλιο πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 5 πράγμα το οποίο είναι άτοπο αφού οι παίκτες του δακτυλίου είναι στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και το μέγεθος του τόρου είναι $n_x = 5 \cdot m + 1$. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι στην ισορροπία Nash κανείς παίκτης του συνόλου Π δεν έχει τη στρατηγική s_{BB} . Επομένως, στην ισορροπία Nash θα υπάρχει τουλάχιστον ένας παίκτης με στρατηγική s_{BB}. □

Λήμμα 4.22. Αν δύο παίκτες βρίσκονται διαγώνια ο ένας προς τον άλλον, τότε, στην ισορροπία Nash, δεν μπορούν και οι δύο να έχουν τη στρατηγική s_{BB}.

Απόδειξη. Έστω ότι δύο παίκτες p_1 και p_2 που βρίσκονται διαγώνια ο ένας προς τον άλλον, όπως στο σχήμα 4.11, έχουν στην ισορροπία Nash και οι δύο τη στρατηγική s_{BB}. Αφού ο παίκτης p_1 έχει τη στρατηγική s_{BB}, από τις



Σχήμα 4.11: Οι παίκτες p_1 και p_2 δεν μπορούν και οι δύο να έχουν τη στρατηγική s_{BB} στην ισορροπία Nash

ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και το λήμμα 4.19, θα πρέπει οι γείτονές του να έχουν τις στρατηγικές $s^0_{\sqcup}$, $s^4_{\sqcup}$, $s^0_{\triangleright}$, $s^4_{\triangleright}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι ο παίκτης p_3 έχει τη στρατηγική $s^0_{\sqcup}$. Αυτό είναι άτοπο διότι:

$$\forall z, t \in S_x : s^0_{\sqcup} \notin BR_{u_x}(\{s_{BB}, s_{BB}, z, t\})$$

□

Λήμμα 4.23. Έστω ισορροπία Nash στον τόρο και έστω ότι K το πλήθος παίκτες έχουν τη στρατηγική s_{BB}. Τότε υπάρχει ένας διαιρέτης d του K, ένα σύνολο γραμμών του τόρου L, με $|L| = d$, και ένα σύνολο στηλών του τόρου C, με $|C| = K/d$, τέτοια ώστε:

1. μόνο οι παίκτες που βρίσκονται σε τομή κάποιας γραμμής του συνόλου L και κάποιας στήλης του συνόλου C (K συνολικά παίκτες) έχουν τη στρατηγική s_{BB}

2. $\forall l_1, l_2 \in L$: η απόσταση των γραμμών l_1 και l_2 είναι πολλαπλάσιο του 5

3. $\forall c_1, c_2 \in C$: η απόσταση των στηλών c_1 και c_2 είναι πολλαπλάσιο του 5

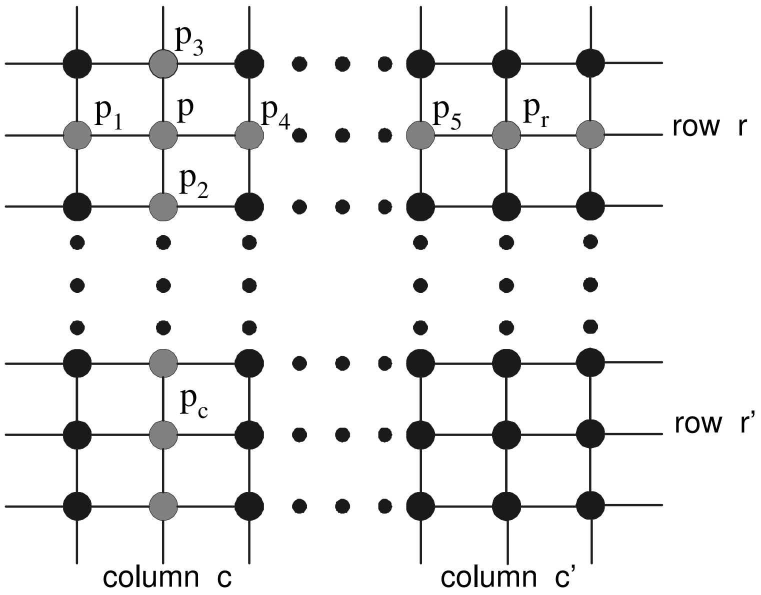
4. οι παίκτες των γραμμών και των στηλών των συνόλων L και C που δεν βρίσκονται στην τομή κάποιας γραμμής και στήλης έχουν στρατηγικές από το σύνολο $S_2 \backslash \{s_{BB}\}$ και μάλιστα για τους παίκτες αυτούς συμβαίνει ένα από τα ακόλουθα:

   - είτε οι παίκτες των γραμμών έχουν όλοι στρατηγικές της μορφής $s_{\sqcup}^{i}$, $i \in \{0,1,2,3,4\}$, και οι παίκτες των στηλών έχουν όλοι στρατηγικές της μορφής $s_{\triangleright}^{j}$, $j \in \{0,1,2,3,4\}$
   - είτε αντίστροφα

5. όλοι οι υπόλοιποι παίκτες του τόρου έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1

Απόδειξη. Έστω ισορροπία Nash στον τόρο, L το σύνολο γραμμών του τόρου που περιέχουν έναν τουλάχιστον παίκτη με στρατηγική s_{BB} και C το σύνολο στηλών του τόρου που περιέχουν έναν τουλάχιστον παίκτη με στρατηγική s_{BB}. Θα δείξουμε ότι όλοι οι παίκτες που βρίσκονται σε τομή γραμμής από το σύνολο L και στήλης από το σύνολο C πρέπει να έχουν τη στρατηγική s_{BB}. Έστω, p ένας παίκτης ο οποίος βρίσκεται στην τομή μιας γραμμής $r \in L$ και μιας στήλης $c \in C$ και ο οποίος δεν έχει τη στρατηγική s_{BB}. Έστω, επίσης, p_r ο κοντινότερος σ'αυτόν παίκτης της γραμμής r ο οποίος έχει τη στρατηγική s_{BB} και p_c ο κοντινότερος σ'αυτόν παίκτης της στήλης c ο οποίος έχει τη στρατηγική s_{BB}. Από το λήμμα 4.22 προκύπτει ότι δεν μπορεί ταυτόχρονα και ο p_r και ο p_c να είναι γείτονες του παίκτη p. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης p_r απέχει απόσταση τουλάχιστον 2 από τον παίκτη p, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι και οι δύο γείτονες του p στη γραμμή r έχουν στρατηγικές διαφορετικές από s_{BB}. Η σχετική θέση των παικτών φαίνεται στο σχήμα 4.12, όπου με γκρι χρώμα παριστάνουμε τους παίκτες της γραμμής r και της στήλης c.

Ο παίκτης p_r έχει τη στρατηγική s_{BB} οπότε, από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και το λήμμα 4.19, θα πρέπει οι γείτονές του να έχουν τις στρατηγικές $s_{\sqcup}^{0}$, $s_{\sqcup}^{4}$, $s_{\triangleright}^{0}$, $s_{\triangleright}^{4}$. Επιπλέον, πάλι από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και το λήμμα 4.19, οι παίκτες με στρατηγικές $s_{\sqcup}^{0}$, $s_{\sqcup}^{4}$ θα πρέπει να βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο. Ομοίως στην ίδια ευθεία θα βρίσκονται και οι παίκτες με στρατηγικές $s_{\triangleright}^{0}$, $s_{\triangleright}^{4}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι εκατέρωθεν του παίκτη p στη γραμμή r βρίσκονται οι παίκτες με στρατηγικές $s_{\sqcup}^{0}$, $s_{\sqcup}^{4}$. Από την υπόθεση, όλοι οι παίκτες της γραμμής r, από τον παίκτη p_1



Σχήμα 4.12: Η σχετική θέση των παικτών p_r, p_c, p

έως τον παίκτη p_5 έχουν στρατηγικές διαφορετικές από s_{BB}. Με παρόμοια επιχειρήματα όπως στην απόδειξη του λήμματος 4.21, όλοι οι παίκτες από τον p_5 έως τον p_1 θα έχουν στρατηγικές της μορφής $s^i_\sqcup, i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και οι δύο από τους τέσσερις γείτονες του καθενός θα έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1. Επομένως, και ο παίκτης p θα έχει στρατηγική της μορφής $s^i_\sqcup$, θα έχει δύο γείτονες, τους p_1 και p_4 που θα έχουν στρατηγική της ίδιας μορφής και δύο γείτονες τους p_2 και p_3 με στρατηγικές από το σύνολο S_1. Αυτό, όμως, είναι άτοπο διότι:

- αν μεν ο παίκτης p_c ταυτίζεται με τον παίκτη p_2, $s_{BB} \notin S_1$
- διαφορετικά, με παρόμοια επιχειρήματα όπως προηγουμένως οι παίκτες της στήλης c μεταξύ των παικτών p_c και p θα πρέπει να έχουν στρατηγικές από το $S_2 \setminus \{s_{BB}\}$ (είτε της μορφής $s^i_\sqcup$, είτε της μορφής $s^j_\triangleright$) αλλά $S_2 \cap S_1 = \emptyset$.

Αφού καταλήξαμε σε άτοπο, τα σύνολα L και C που επιλέξαμε πρέπει να ικανοποιούν την ιδιότητα 1.

Οι ιδιότητες 2, 3 και 4 προκύπτουν εύκολα από τα παρακάτω, τα οποία θα πρέπει να είναι προφανή από την ανάλυση που προηγήθηκε:

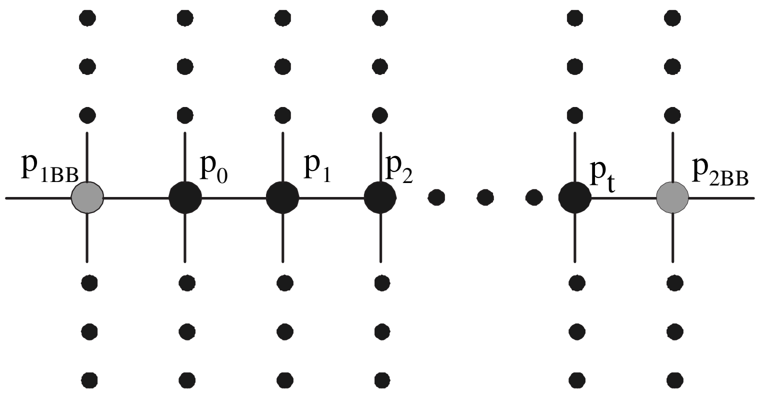
- Κάθε παίκτης p που βρίσκεται στην τομή κάποιας γραμμής του συνόλου L και κάποιας στήλης του συνόλου C θα έχει στρατηγική s_{BB}. Ο p θα έχει δύο γείτονες με στρατηγικές $s_{\sqcup}^{0}$ και $s_{\sqcup}^{4}$ οι οποίοι θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και δύο γείτονες με στρατηγικές $s_{\triangleright}^{0}$ και $s_{\triangleright}^{4}$ οι οποίοι επίσης θα βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο.

- Κάθε γείτονας του παίκτη p είναι το ένα άκρο μιας αλυσίδας παικτών οι οποίοι βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και οι οποίοι έχουν στρατηγικές της ίδιας μορφής με τον εν λόγω γείτονα. Το άλλο άκρο της αλυσίδας θα είναι γείτονας κάποιου άλλου παίκτη με στρατηγική s_{BB} (αυτός ο παίκτης μπορεί να είναι και ο παίκτης p και το άλλο άκρο της αλυσίδας να είναι ο άλλος γείτονας του που έχει στρατηγική ίδιας μορφής με τον εν λόγω γείτονα).

- Το μήκος κάθε τέτοιας αλυσίδας θα είναι πολλαπλάσιο του 5. Αυτό προκύπτει από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x}. Για παράδειγμα, έστω ότι στο σχήμα 4.13 φαίνεται μια τέτοια αλυσίδα μεταξύ των παικτών p_{1BB} και p_{2BB} οι οποίοι έχουν στρατηγική s_{BB}. Έστω, επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο παίκτης p_0 έχει στρατηγική $s_{\sqcup}^{4}$. Από τις ιδιότητες της BR_{u_x} ο παίκτης p_1 θα πρέπει υποχρεωτικά να έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{3}$, ο παίκτης p_2 τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{2}$ και, γενικά, αν ένας παίκτης έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{l}$, για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$, ο παίκτης που είναι δεξιά του θα πρέπει να έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{(l-1) \mod 5}$. Αυτό εξαναγκάζει τον παίκτη p_t να έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{0}$. Πράγματι από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} προκύπτει:
$$s_{\sqcup}^{l} \in BR_{u_x}(\{s_{\sqcup}^{(l+1) \mod 5}, s_{BB}, w, z\}) \Rightarrow l = 0$$
Αφού η αλυσίδα αρχίζει από παίκτη με στρατηγική $s_{\sqcup}^{4}$ και καταλήγει σε παίκτη με στρατηγική $s_{\sqcup}^{0}$ και το πεδίο i των στρατηγικών φθίνει κατά $1 \mod 5$ από παίκτη σε παίκτη είναι φανερό ότι η αλυσίδα περιέχει αριθμό παικτών πολλαπλάσιο του 5, ήτοι $t \equiv 0 (\mod 5)$.

Η ιδιότητα 5 αποδεικνύεται εύκολα με παρόμοια επιχειρήματα όπως το λήμμα 4.21. Πράγματι, έστω ένας παίκτης p που δεν ανήκει ούτε σε γραμμή του συνόλου L, ούτε σε στήλη του συνόλου C, ο οποίος έχει στρατηγική $s_p \in S_2 \setminus \{s_{BB}\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{l}$ για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$. Από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και επειδή κανείς γείτονάς του p δεν μπορεί να έχει τη στρατηγική s_{BB} προκύπτει ότι οι τέσσερις γείτονες του, p_E, p_W, p_S, p_N, θα έχουν στρατηγικές για τις οποίες ισχύει:

- $s_{p_N}, s_{p_S} \in S_1$
- $s_{p_E} = s_{\sqcup}^{(l-1) \mod 5}$



Σχήμα 4.13: Αλυσίδα ανάμεσα σε δύο παίκτες που έχουν στρατηγική s_{BB}

- $s_{p_W} = s_{\sqcup}^{(l+1) \mod 5}$

Από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} προκύπτει ότι οι παίκτες p_E, p, p_W βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο. Μάλιστα, εφόσον, εξ υποθέσεως, ούτε στην στήλη του παίκτη p, ούτε στη γραμμή του παίκτη p, δεν υπάρχει παίκτης με στρατηγική s_{BB} οι παίκτες p_E, p, p_W πρέπει να αποτελούν τμήμα μιας αλυσίδας παικτών οι οποίοι βρίσκονται στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και οι οποίοι:

1. θα έχουν στρατηγικές της μορφής $s_{\sqcup}^{i}$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
2. θα έχουν δύο γείτονες με στρατηγικές της ίδιας μορφής
3. θα έχουν δύο γείτονες με στρατηγικές από το σύνολο S_1
4. αν η στρατηγική ενός παίκτη της αλυσίδας έχει στο πρώτο πεδίο την τιμή $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τότε η στρατηγική του ενός γείτονά του στην αλυσίδα θα έχει στο πρώτο πεδίο την τιμή $(l - 1) \mod 5$ και η στρατηγική του άλλου γείτονα την τιμή $(l + 1) \mod 5$

Αυτό όμως είναι άτοπο διότι:

- αν μεν η αλυσίδα κλείνει σχηματίζοντας έναν δακτύλιο παικτών με τις παραπάνω ιδιότητες θα πρέπει ο αριθμός των παικτών στο δακτύλιο να είναι πολλαπλάσιο του 5 πράγμα το οποίο δε γίνεται αφού οι παίκτες του δακτυλίου είναι στην ίδια ευθεία πάνω στον τόρο και η πλευρά του τόρου είναι $n_x = 5 \cdot m + 1$
- αν η αλυσίδα συναντήσει μια γραμμή του συνόλου L ή μία στήλη του συνόλου C θα παραβιαστεί η τρίτη ιδιότητα των παικτών της αλυσίδας

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι κάποιος παίκτης που δεν ανήκει ούτε σε γραμμή του συνόλου L ούτε σε στήλη του συνόλου C έχει στρατηγική από το σύνολο $S_2 \setminus \{s_{BB}\}$. Επομένως, ισχύει και η ιδιότητα 5. $\square$

Έστω ισορροπία Nash στον τόρο και L, C τα σύνολα γραμμών και στηλών του τόρου που ικανοποιούν τις ιδιότητες του λήμματος 4.23. Αν ονομάσουμε Π_{BB} το σύνολο παικτών του τόρου που βρίσκονται σε τομή κάποιας γραμμής από το σύνολο L και κάποιας στήλης από το σύνολο C, τότε, από το προηγούμενο λήμμα, προκύπτει ότι οι παίκτες του συνόλου Π_{BB} και μόνον αυτοί έχουν τη στρατηγική s_{BB}. Επίσης, από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και το λήμμα 4.19, κάθε παίκτης του συνόλου Π_{BB} θα έχει γείτονες με στρατηγικές $s^0_{\sqcup}$, $s^4_{\sqcup}$, $s^0_{\triangleright}$, $s^4_{\triangleright}$. Για τους παίκτες του συνόλου Π_{BB} ισχύει το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.24. Σε μια ισορροπία Nash στον τόρο όλοι οι παίκτες με στρατηγική s_{BB} θα έχουν την ίδια διατεταγμένη τετράδα στρατηγικών των γειτόνων τους.

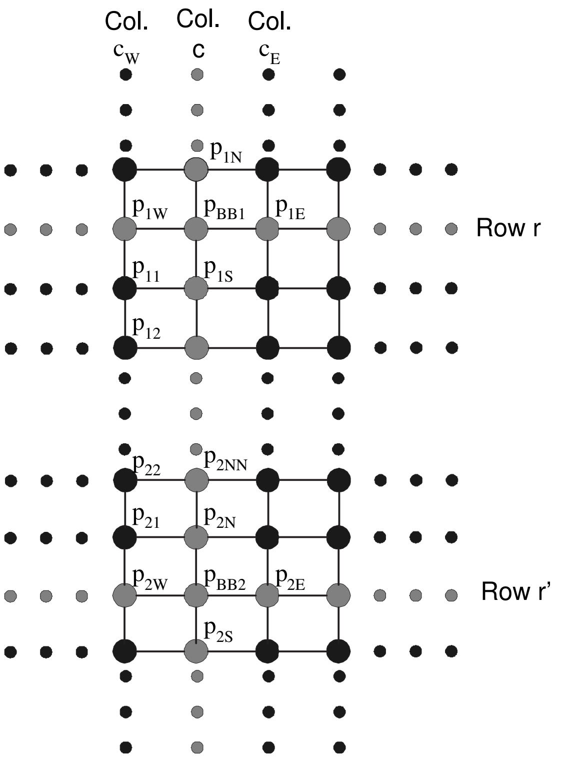
Απόδειξη. Η διατεταγμένη τετράδα στρατηγικών των γειτόνων κάθε παίκτη του συνόλου Π_{BB} θα είναι μια μετάθεση των στρατηγικών $s^0_{\sqcup}$, $s^4_{\sqcup}$, $s^0_{\triangleright}$, $s^4_{\triangleright}$. Από την απόδειξη του λήμματος 4.23 προκύπτει ότι παίκτες του συνόλου Π_{BB} που βρίσκονται στην ίδια γραμμή του συνόλου L ή στην ίδια στήλη του συνόλου C θα έχουν τα δύο εκ των τεσσάρων πεδίων της διατεταγμένης τετράδας στρατηγικών των γειτόνων τους ίδια και πιο συγκεκριμένα:

- δύο παίκτες του συνόλου Π_{BB} που βρίσκονται στην ίδια γραμμή του συνόλου L θα έχουν ίδια τα δύο πρώτα πεδία της διατεταγμένης τετράδας στρατηγικών των γειτόνων τους
- δύο παίκτες του συνόλου Π_{BB} που βρίσκονται στην ίδια στήλη του συνόλου C θα έχουν ίδια τα δύο τελευταία πεδία της διατεταγμένης τετράδας στρατηγικών των γειτόνων τους

Επίσης, από το λήμμα 4.23 προκύπτει ότι οι διατεταγμένες τετράδες στρατηγικών των γειτόνων όλων των παικτών του συνόλου Π_{BB} θα έχουν:

- είτε **όλες** στα δύο πρώτα πεδία μια μετάθεση των στρατηγικών $s^0_{\sqcup}$, $s^4_{\sqcup}$ και στα δύο τελευταία πεδία μια μετάθεση των στρατηγικών $s^0_{\triangleright}$, $s^4_{\triangleright}$
- είτε αντίστροφα

Είναι εύκολο, τώρα, να δει κανείς ότι για να ολοκληρωθεί η απόδειξη αρκεί να αποδείξουμε ότι δύο παίκτες $p_{BB1}, p_{BB2} \in \Pi_{BB}$ που βρίσκονται στην ίδα στήλη του συνόλου C και σε διαφορετικές αλλά "γειτονικές" γραμμές του συνόλου L (γειτονικές με την έννοια ότι μεταξύ τους δεν παρεμβάλλεται άλλη



Σχήμα 4.14: Δύο παίκτες με στρατηγική s_{BB}

γραμμή του συνόλου L) έχουν την ίδια διατεταγμένη τετράδα στρατηγικών των γειτόνων τους. Η σχετική θέση των παικτών φαίνεται στο σχήμα 4.14.

Από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν οι παίκτες p_{BB1}, p_{BB2} θα έχουν ίδια τα δύο τελευταία πεδία των τετράδων τους οπότε αρκεί να αποδειχθεί ότι και τα δύο πρώτα πεδία είναι ίδια. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι το τρίτο πεδίο των τετράδων είναι και στους δύο παίκτες το $s^0_\rhd$ και το τέταρτο πεδίο το $s^4_\rhd$. Αυτό σημαίνει ότι οι παίκτες p_{1N} και p_{2N} θα έχουν στρατηγική $s^0_\rhd$ και οι παίκτες p_{1S} και p_{2S} θα έχουν στρατηγική $s^4_\rhd$.

Ας υποθέσουμε, τώρα, πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το πρώτο πεδίο της τετράδας του παίκτη p_{BB2} έχει τιμή $s^0_\sqcup$ και το δεύτερο $s^4_\sqcup$, ήτοι ότι ο παίκτης p_{2W} έχει στρατηγική $s^0_\sqcup$ και παίκτης p_{2E} στρατηγική $s^4_\sqcup$. Θα αποδείξουμε ότι και ο παίκτης p_{BB1} θα έχει τις ίδιες τιμές στα πρώτα δύο πεδία του. Πράγματι από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x} και από το λήμμα 4.19 ο παίκτης p_{21} θα πρέπει στην ισορροπία Nash να έχει τη στρατηγική $(0, 0, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$ (για συντομία παρακάτω θα παριστάνουμε την 11-άδα

$(i, j, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$ ως $s_{\rhd\rhd}^{(i,j)}$) αφού:

$$\left(\bigcup_{w,t \in S_1} BR_{u_x}(\{s_{\sqcup}^0, s_{\rhd}^0, w, t\})\right) \bigcap S_1 = \{s_{\rhd\rhd}^{(0,0)}\}$$

Ο παίκτης p_{2NN} θα έχει τη στρατηγική $s_{\rhd}^1$ και ο παίκτης p_{22} θα πρέπει να έχει τη στρατηγική $s_{\rhd\rhd}^{(0,1)}$ αφού:

$$\left(\bigcup_{w,t \in S_1} BR_{u_x}(\{s_{\rhd}^1, s_{\rhd\rhd}^{(0,0)}, w, t\})\right) \bigcap S_1 = \{s_{\rhd\rhd}^{(0,1)}\}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα όλοι οι παίκτες στη στήλη c_W από τον p_{22} έως τον p_{12} θα έχουν στρατηγικές της μορφής $(0, i, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και μάλιστα αν η στρατηγική ενός παίκτη έχει στο δεύτερο πεδίο της την τιμή $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, τότε η στρατηγική του παίκτη που βρίσκεται πάνω του θα έχει στο δεύτερο πεδίο την τιμή $(l + 1) \mod 5$ και η στρατηγική του παίκτη που βρίσκεται κάτω του θα έχει στο δεύτερο πεδίο την τιμή $(l - 1) \mod 5$. Έτσι, αφού η απόσταση μεταξύ των παικτών p_{BB1} και p_{BB2} είναι πολλαπλάσιο του 5, ο παίκτης p_{12} θα έχει τη στρατηγική $s_{\rhd\rhd}^{(0,3)}$.

Ο παίκτης p_{11} έχει έναν γείτονα, p_{1S}, με στρατηγική $s_{\rhd}^4$, έναν γείτονα, p_{1W}, με στρατηγική της μορφής $s_{\sqcup}^l$, έναν γείτονα, p_{12} με στρατηγική $s_{\rhd\rhd}^{(0,3)}$ και έναν τέταρτο γείτονα με στρατηγική από το σύνολο S_1. Για την στρατηγική s του παίκτη p_{11} και το l έχουμε, από τις ιδιότητες της συνάρτησης BR_{u_x}, ότι:

$$\left(s \in \left(\bigcup_{t \in S_1} BR_{u_x}(\{s_{\sqcup}^l, s_{\rhd}^4, s_{\rhd\rhd}^{(0,3)}, t\})\right) \bigcap S_1\right) \Rightarrow s = s_{\rhd\rhd}^{(0,4)} \wedge l = 0$$

Αφού $l = 0$ ο παίκτης p_{1W} θα έχει στρατηγική $s_{\sqcup}^0$ οπότε η διατεταγμένη τετράδα στρατηγικών των γειτόνων του παίκτη p_{BB1} θα είναι ίδια με την τετράδα του παίκτη p_{BB2}. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος.

□

Οι γραμμές του συνόλου L και οι στήλες του συνόλου C διαμερίζουν τους παίκτες του τόρου που έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1 σε ορθογωνικές περιοχές παικτών. Κάθε περιοχή ορίζεται από μία ή δύο γειτονικές γραμμές του συνόλου L (γειτονικές με την έννοια ότι δεν παρεμβάλλεται μεταξύ τους άλλη γραμμή του συνόλου L) και μία ή δύο γειτονικές στήλες του συνόλου C (γειτονικές με την έννοια ότι δεν παρεμβάλλεται μεταξύ τους άλλη στήλη του συνόλου C). Πιο συγκεκριμένα:

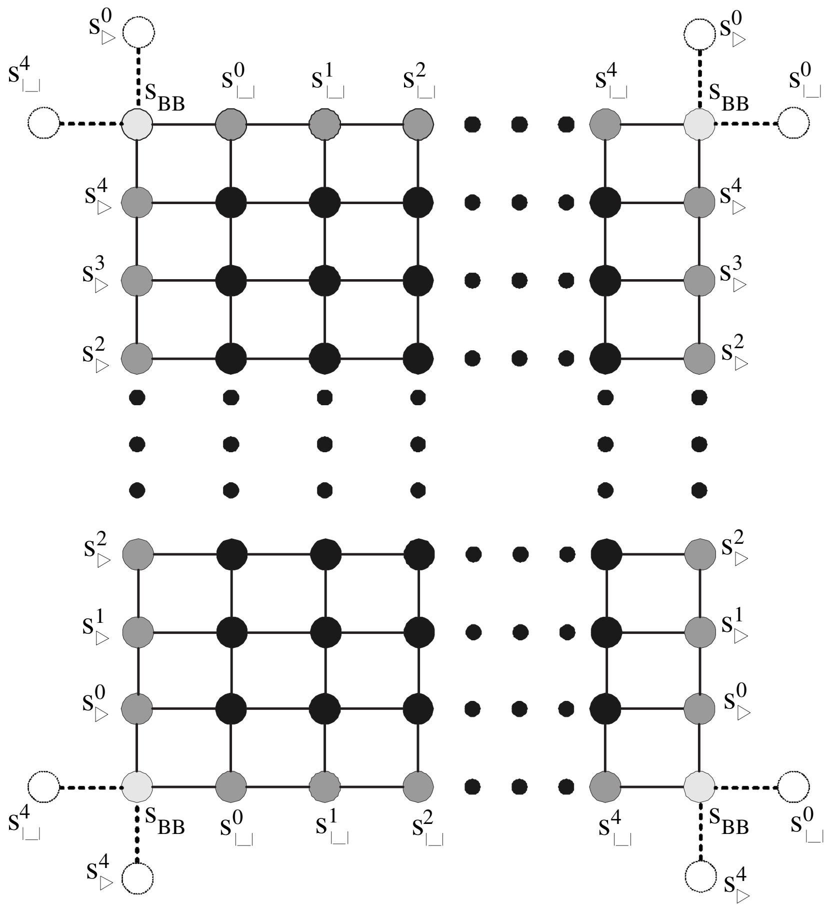
- αν $|L| > 1$ και $|C| > 1$ η περιοχή ορίζεται από δύο γειτονικές γραμμές του συνόλου L και δύο γειτονικές στήλες του συνόλου C
- αν $|L| = 1$ και $|C| > 1$ η περιοχή ορίζεται από τη μοναδική γραμμή του συνόλου L και δύο γειτονικές στήλες του συνόλου C
- αν $|L| > 1$ και $|C| = 1$ η περιοχή ορίζεται από δύο γειτονικές γραμμές του συνόλου L και τη μοναδική στήλη του συνόλου C
- αν $|L| = 1$ και $|C| = 1$ η περιοχή ορίζεται από τη μοναδική γραμμή του συνόλου L και τη μοναδική στήλη του συνόλου C

Από τα λήμματα 4.23 και 4.24 προκύπτει ότι:

1. οι παίκτες κάθε ορθογωνικής περιοχής έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1
2. οι παίκτες που βρίσκονται στο σύνορο που ορίζει μια ορθογωνική περιοχή έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_2 και πιο συγκεκριμένα:
   (α) οι παίκτες στις γωνίες του συνόρου έχουν τη στρατηγική s_{BB} και έχουν τις ίδιες διατεταγμένες τετράδες στρατηγικών των γειτόνων τους
   (β) οι μη-γωνιακοί παίκτες του συνόρου έχουν στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}$ ή $s^j_{\triangleright}$, όπου $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και μάλιστα:
      i. είτε όλοι οι μη γωνιακοί παίκτες στα οριζόντια σύνορα έχουν στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}$ και οι μη γωνιακοί παίκτες στα κάθετα σύνορα στρατηγικές της μορφής $s^j_{\triangleright}$, είτε αντίστροφα
      ii. αν ένας συνοριακός παίκτης βρίσκεται δίπλα σε γωνιακό και έχει τη στρατηγική $s^4_{\triangleright}$, τότε όλοι οι παίκτες της πλευράς του εν λόγω παίκτη θα έχουν στρατηγικές της μορφής $s^j_{\triangleright}$, όπου το πεδίο j θα φθίνει κατά $1 \mod 5$ όσο απομακρυνόμαστε από τον εν λόγω παίκτη
      iii. αν ένας συνοριακός παίκτης βρίσκεται δίπλα σε γωνιακό και έχει τη στρατηγική $s^0_{\triangleright}$, τότε όλοι οι παίκτες της πλευράς του εν λόγω παίκτη θα έχουν στρατηγικές της μορφής $s^j_{\triangleright}$, όπου το πεδίο j θα αυξάνει κατά $1 \mod 5$ όσο απομακρυνόμαστε από τον εν λόγω παίκτη
      iv. αντίστοιχα ισχύουν αν ένας συνοριακός παίκτης βρίσκεται δίπλα σε γωνιακό και έχει τη στρατηγική $s^0_{\sqcup}$ ή $s^4_{\sqcup}$

3. αν ορίσουμε ως **μήκος** της ορθογωνικής περιοχής το ήμισυ του πλήθους των συνοριακών γειτόνων με στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}$ και ως **ύψος** το ήμισυ του πλήθους των συνοριακών γειτόνων με στρατηγικές της μορφής $s^j_{\triangleright}$, ισχύει ότι τόσο το μήκος όσο και το ύψος της τετραγωνικής περιοχής είναι πολλαπλάσια του 5

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι οι παίκτες που βρίσκονται σε παράλληλες πλευρές του συνόρου θα έχουν ίδιες στρατηγικές ένας προς έναν. Το σύνορο όλων των ορθογωνικών περιοχών θα είναι όπως αυτό του σχήματος 4.15 ή κάποια περιστροφή ή αντικατοπτρισμός αυτού.



Σχήμα 4.15: Το σύνορο κάθε σχηματιζόμενης ορθογωνικής περιοχής

Κλείνουμε την απόδειξη της ισοδυναμίας 4.2 με το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.25. Έστω ισορροπία Nash στον τόρο και μια από τις ορθογωνικές περιοχές που ορίζονται από τις γραμμές του συνόλου L και τις στήλες του συνόλου C. Ισχύει ότι οι στρατηγικές των παικτών της ορθογωνικής περιοχής αντιστοιχούν μονοσήμαντα σε έναν υπολογισμό της μηχανής M με κενή είσοδο ο οποίος ολοκληρώνεται εντός τόσων βημάτων όσο το ύψος της ορθογωνικής περιοχής μείον 2.

Απόδειξη. Έστω $5 \cdot \mu$ το μήκος και $5 \cdot \upsilon$ το ύψος της ορθογωνικής περιοχής. Ονομάζουμε "παίκτη $(0,0)$" τον παίκτη της ορθογωνικής περιοχής ο οποίος έχει γείτονες τους συνοριακούς παίκτες με στρατηγικές $s^0_{\sqcup}$ και $s^0_{\triangleright}$ και αντιστοιχίζουμε κατά τον προφανή τρόπο ένα ζεύγος (x, y), όπου $x \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}$ και $y \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$, σε κάθε παίκτη της ορθογωνικής περιοχής.

Για τις στρατηγικές των παικτών της ορθογωνικής περιοχής ισχύουν οι ακόλουθες προτάσεις που αποδεικνύονται εύκολα με τεχνικές που έχουμε συναντήσει στις αποδείξεις των λημμάτων που προηγήθηκαν:

1. ο παίκτης $(0,0)$ θα έχει τη στρατηγική $(0, 0, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
2. κάθε παίκτης $(0, l)$, $l \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$, της πρώτης στήλης θα έχει στρατηγική $(0, l \mod 5, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
3. ο παίκτης $(1,0)$ θα έχει τη στρατηγική $(1, 0, \triangleright', \epsilon, \triangleright', q_0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
4. κάθε παίκτης $(l, 0)$, $l \in \{2, 3, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}$, της πρώτης γραμμής θα έχει στρατηγική $(l \mod 5, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
5. κάθε παίκτης $(l, 5 \cdot \upsilon - 1)$, $l \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}$, της τελευταίας γραμμής θα έχει στρατηγική της μορφής $(l, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{h, \epsilon\}$
6. κάθε παίκτης (x, y), $x \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}$ και $y \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$, θα έχει στρατηγική της οποίας το πεδίο i θα έχει τιμή $x \mod 5$ και το πεδίο j θα έχει τιμή $y \mod 5$· αυτή η παρατήρηση είναι πολύ σημαντική γιατί επιτρέπει σε έναν παίκτη να διακρίνει τους γείτονές του ως εξής:
   - ο *αριστερός* γείτονας θα είναι εκείνος που έχει στο πεδίο i την τιμή $(x - 1) \mod 5$ και στο πεδίο j την τιμή $y \mod 5$
   - ο *δεξιός* γείτονας θα είναι εκείνος που έχει στο πεδίο i την τιμή $(x + 1) \mod 5$ και στο πεδίο j την τιμή $y \mod 5$
   - ο *πάνω* γείτονας θα είναι εκείνος που έχει στο πεδίο i την τιμή $x \mod 5$ και στο πεδίο j την τιμή $(y + 1) \mod 5$
   - ο *κάτω* γείτονας θα είναι εκείνος που έχει στο πεδίο i την τιμή $x \mod 5$ και στο πεδίο j την τιμή $(y - 1) \mod 5$

   αν κάποιος παίκτης γειτονεύει με το σύνορο της ορθογωνικής περιοχής δεν θα έχει κάποιους από αυτούς τους γείτονες

7. $\forall x \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}, y \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$:

$$s_{(x,y)}|_{s_{down}} = s_{(x,y-1)}|_{s_{up}} \wedge s_{(x,y)}|_{k_{down}} = s_{(x,y-1)}|_{k_{up}}$$

8. $\forall x \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}, y \in \{1, 2, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$:

- αν $s_{(x,y)}|_{k_{down}} \neq \epsilon$ και $s_{(x,y)}|_{k_{up}} \neq \epsilon$ τότε:

$$s_{(x,y)}|_{k_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}} = s_{(x,y)}|_{a_{left}} = s_{(x,y)}|_{a_{right}} = \epsilon$$

  και:

$$(s_{(x,y)}|_{k_{up}}, s_{(x,y)}|_{s_{up}}, -) \in \delta(s_{(x,y)}|_{k_{down}}, s_{(x,y)}|_{s_{down}}) \text{ ή}$$

$$s_{(x,y)}|_{k_{down}} = s_{(x,y)}|_{k_{up}} = h \wedge s_{(x,y)}|_{s_{down}} = s_{(x,y)}|_{s_{up}}$$

- αν $s_{(x,y)}|_{k_{down}} \neq \epsilon$ και $s_{(x,y)}|_{k_{up}} = \epsilon$ τότε:
  - είτε θα ισχύουν όλες οι παρακάτω σχέσεις:

$$s_{(x,y)}|_{a_{right}} = \rightarrow \wedge s_{(x,y)}|_{k_{right}} \neq \epsilon$$

$$s_{(x,y)}|_{a_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{left}} = \epsilon$$

$$s_{(x+1,y)}|_{a_{left}} = \rightarrow \wedge s_{(x+1,y)}|_{k_{left}} = s_{(x+1,y)}|_{k_{up}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}}$$

$$s_{(x+1,y)}|_{k_{down}} = \epsilon$$

$$s_{(x+1,y)}|_{s_{down}} = s_{(x+1,y)}|_{s_{up}}$$

$$(s_{(x,y)}|_{k_{right}}, s_{(x,y)}|_{s_{up}}, \rightarrow) \in \delta(s_{(x,y)}|_{k_{down}}, s_{(x,y)}|_{s_{down}})$$

  - είτε θα ισχύουν όλες οι παρακάτω σχέσεις:

$$s_{(x,y)}|_{a_{left}} = \leftarrow \wedge s_{(x,y)}|_{k_{left}} \neq \epsilon$$

$$s_{(x,y)}|_{a_{right}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}} = \epsilon$$

$$s_{(x-1,y)}|_{a_{right}} = \leftarrow \wedge s_{(x-1,y)}|_{k_{right}} = s_{(x-1,y)}|_{k_{up}} = s_{(x,y)}|_{k_{left}}$$

$$s_{(x-1,y)}|_{k_{down}} = \epsilon$$

$$s_{(x-1,y)}|_{s_{down}} = s_{(x-1,y)}|_{s_{up}}$$

$$(s_{(x,y)}|_{k_{left}}, s_{(x,y)}|_{s_{up}}, \leftarrow) \in \delta(s_{(x,y)}|_{k_{down}}, s_{(x,y)}|_{s_{down}})$$

- αν $s_{(x,y)}|_{k_{down}} = \epsilon$ και $s_{(x,y)}|_{k_{up}} \neq \epsilon$ τότε:

– είτε θα ισχύουν όλες οι παρακάτω σχέσεις:

$$s_{(x,y)}|_{a_{right}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}} = \epsilon$$

$$s_{(x,y)}|_{a_{left}} = \rightarrow \wedge s_{(x,y)}|_{k_{left}} \neq \epsilon$$

$$s_{(x,y)}|_{s_{down}} = s_{(x,y)}|_{s_{up}}$$

$$s_{(x-1,y)}|_{a_{right}} = \rightarrow \wedge s_{(x-1,y)}|_{k_{right}} = s_{(x,y)}|_{k_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{up}}$$

$$s_{(x-1,y)}|_{k_{up}} = \epsilon$$

$$(s_{(x,y)}|_{k_{left}}, s_{(x-1,y)}|_{s_{up}}, \rightarrow) \in \delta(s_{(x-1,y)}|_{k_{down}}, s_{(x-1,y)}|_{s_{down}})$$

– είτε θα ισχύουν όλες οι παρακάτω σχέσεις:

$$s_{(x,y)}|_{a_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{left}} = \epsilon$$

$$s_{(x,y)}|_{a_{right}} = \leftarrow \wedge s_{(x,y)}|_{k_{right}} \neq \epsilon$$

$$s_{(x,y)}|_{s_{down}} = s_{(x,y)}|_{s_{up}}$$

$$s_{(x+1,y)}|_{a_{left}} = \leftarrow \wedge s_{(x+1,y)}|_{k_{left}} = s_{(x,y)}|_{k_{right}} = s_{(x,y)}|_{k_{up}}$$

$$s_{(x+1,y)}|_{k_{up}} = \epsilon$$

$$(s_{(x,y)}|_{k_{right}}, s_{(x+1,y)}|_{s_{up}}, \leftarrow) \in \delta(s_{(x+1,y)}|_{k_{down}}, s_{(x+1,y)}|_{s_{down}})$$

9. για κάθε $y \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$ υπάρχει **ακριβώς ένα** $x \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}$ τέτοιο ώστε $s_{(x,y)}|_{k_{up}} \neq \epsilon$

Ορίζουμε, τώρα, τον $(5 \cdot \mu) \times (5 \cdot \upsilon)$ πίνακα $A = [a_{ij}], i \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \mu - 1\}, j \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot \upsilon - 1\}$ του οποίου κάθε στοιχείο έχει την τιμή:

$$a_{ij} = (s_{(i,j)}|_{s_{up}}, s_{(i,j)}|_{k_{up}})$$

Ο πίνακας A αντιστοιχεί σε έναν υπολογισμό με κενή είσοδο της μηχανής M ο οποίος ολοκληρώνεται σε $5 \cdot \upsilon - 2$ βήματα ως εξής:

- η i-οστή γραμμή του πίνακα A αντιστοιχεί στη διαμόρφωση[5] (configuration)της μηχανής M μετά το πέρας του i-οστού βήματος του υπολογισμού
- το πρώτο πεδίο της τιμής του στοιχείου a_{ij} αντιστοιχεί στο σύμβολο που περιέχει το j-οστό (από το αριστερό άκρο) κελί της ταινίας της μηχανής μετά το i-οστό βήμα του υπολογισμού

[5] Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο **διαμόρφωση (configuration)** της μηχανής M εννοούμε την κατάσταση στην οποία βρίσκεται η μηχανή και την ακολουθία συμβόλων στην ταινία της μηχανής

- σε κάθε γραμμή του πίνακα όλα τα στοιχεία εκτός από ακριβώς ένα έχουν το δεύτερο πεδίο ίσο με ϵ
- αν το στοιχείο a_{ij_0} έχει το δεύτερο πεδίο του ίσο με $q_0 \neq \epsilon$, η κεφαλή της μηχανής μετά το πέρας του i-οστού βήματος δείχνει στο j_0-οστό κελί από το αριστερό άκρο της ταινίας και η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση q_0

Η αντιστοίχιση είναι σωστή αφού:

- αν παραθέσουμε τα πρώτα πεδία όλων των στοιχείων της γραμμής $j = 0$ του πίνακα θα έχουμε την ακολουθία συμβόλων $\rhd \rhd' \sqcup \sqcup \ldots \sqcup$ που ταυτίζεται με την ακολουθία συμβόλων στην ταινία της μηχανής M στην αρχή του υπολογισμού (κενή είσοδος)
- όλα τα στοιχεία της γραμμής $j = 0$ έχουν το δεύτερο πεδίο τους ίσο με ϵ εκτός από το στοιχείο a_{10} που έχει στο δεύτερο πεδίο την τιμή q_0· βάσει της σημασιολογίας που αποδώσαμε στο γεγονός αυτό, στην αρχή του υπολογισμού η κεφαλή της μηχανής βρίσκεται στο κελί με το σύμβολο $\rhd'$ πράγμα το οποίο πρέπει να ισχύει σε κάθε έγκυρο υπολογισμό της μηχανής M
- από τον ορισμό του πίνακα A και τις ιδιότητες 1-9 που ικανοποιούν οι στρατηγικές των παικτών προκύπτει ότι η μετάβαση από τη διαμόρφωση της μηχανής που εκφράζει μια γραμμή του πίνακα στη διαμόρφωση που εκφράζει η επόμενη γραμμή του πίνακα αντιστοιχεί σε έγκυρη μετάβαση της μηχανής M
- από τις ιδιότητες 5 και 7 προκύπτει ότι μετά το πέρας του $(5 \cdot \upsilon - 2)$-οστού βήματος η μηχανή θα βρίσκεται στην κατάσταση h (halting state)· επομένως ο υπολογισμός της μηχανής ολοκληρώνεται σε $5 \cdot \upsilon - 2$ βήματα το πολύ

□

Στην ισορροπία Nash το ύψος καθεμιάς από τις σχηματιζόμενες ορθογωνικές περιοχές είναι το πολύ $5 \cdot m$ αφού $n_x = 5 \cdot m + 1$. Επομένως, από το λήμμα 4.25, αν υπάρχει ισορροπία Nash στο τορο-παίγνιο (n_x, S_x, BR_{u_x}), τότε θα υπάρχει υπολογισμός με κενή είσοδο της μηχανής M ο οποίος σταματά σε $5 \cdot m - 2$ βήματα το πολύ. Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Αφού το το πρόβλημα EQINSQUARETORUS αποδείχτηκε $NEXP$-hard, για να αποδείξουμε ότι είναι $NEXP$-πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι ανήκει στην κλάση $NEXP$ των προβλημάτων που λύνονται σε εκθετικό χρόνο από έναν μη ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Αυτό αποδεικνύουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.26. EQINSQUARETORUS $\in NEXP$

Απόδειξη.
Έστω $I = (n, k, f)$ ένα στιγμιότυπο του προβλήματος EQINSQUARETORUS. Ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα είναι ο αλγόριθμος EQINSQUARETORUS(n, k, f).

Αλγόριθμος 2: EQINSQUARETORUS(n, k, f)

```
begin
    for i=0 to (n-1) do
        for j=0 to (n-1) do
            επίλεξε τυχαία ένα s_ij ∈ {1, ..., k};
        endfor
    endfor
    for i=0 to (n-1) do
        for j=0 to (n-1) do
            n_W = s_((i-1) mod n)j;
            n_E = s_((i+1) mod n)j;
            n_S = s_i((j-1) mod n);
            n_N = s_i((j+1) mod n);
            whichbit = s_ij;
            if f({n_W, n_E, n_N, n_S})|_whichbit = 0 then
                return "abort";
            endif
        endfor
    endfor
    return "yes";
end
```

Στα πρώτα n^2 μη ντετερμινιστικά βήματα ο αλγόριθμος επιλέγει τυχαία στρατηγικές για τους παίκτες του τόρου και στα υπόλοιπα n^2 ντετερμινιστικά βήματα ελέγχει αν η στρατηγική κάθε παίκτη του τόρου ανήκει στο σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων των στρατηγικών των γειτόνων του. Κάθε μη ντετερμινιστική επιλογή γίνεται σε χρόνο $O(\log k)$, ενώ κάθε έλεγχος σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, $O(|I|)$. Συνεπώς, ο αλγόριθμος χρειάζεται συνολικό χρόνο $O\left(n^2 \cdot |I|\right)$ αφού το μέγεθος του I είναι:

$$|I| = \log n + \log k + \begin{bmatrix} k \\ 4 \end{bmatrix} \cdot k$$

Επομένως, ο χρόνος εκτέλεσης είναι εκθετικός ως προς το $\log n$ άρα το πολύ εκθετικός ως προς το μέγεθος της εισόδου.

Εφόσον υπάρχει μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος εκθετικού χρόνου που λύνει το πρόβλημα EQINSQUARETORUS το πρόβλημα ανήκει στην κλάση $NEXP$. □

Κλείνουμε την ενότητα με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.27. Το πρόβλημα EQINSQUARETORUS ειναι $NEXP$-πλήρες.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα θεωρήματα 4.17 και 4.26 □

4.8 Χρονική Πολυπλοκότητα του EQINSQUAREGRID

Θα αποδείξουμε ότι και το πρόβλημα EQINSQUAREGRID είναι $NEXP$-πλήρες. Και αυτή η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα:

- θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα είναι $NEXP$-hard ανάγοντας σ' αυτό ένα $NEXP$-hard πρόβλημα
- θα αποδείξουμε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση $NEXP$, δηλαδή ότι λύνεται από μία μη ντετερμινιστική μηχανή Turing εκθετικού χρόνου

Στο παρακάτω θεώρημα αποδεικνύουμε ότι το πρόβλημα EQINSQUAREGRID είναι $NEXP$-hard. Η απόδειξη έχει πολλά κοινά στοιχεία με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για το EQINSQUARETORUS.

Θεώρημα 4.28. Το πρόβλημα EQINSQUAREGRID είναι NEXP-hard.

Απόδειξη.
Θα ανάγουμε στο EQINSQUAREGRID τη γλώσσα $L_2 = \{(M, 5{\cdot}m), M \in NTM, m \in \mathbb{N} | \text{η } M \text{ με κενή είσοδο σταματά σε } 5 \cdot m - 2 \text{ βήματα}\}$. Για να το πετύχουμε αυτό, θα πρέπει, για κάθε $x = (M, 5{\cdot}m)$, σε πολυωνυμικό χρόνο να κατασκευάσουμε ένα στιγμιότυπο $(n_x, k_x, f_{1_x}, f_{2_x}, f_{3_x})$ του EQINSQUAREGRID έτσι ώστε να ισχύει η ισοδυναμία:

$$x = (M, 5 \cdot m) \in L_2 \Leftrightarrow (n_x, k_x, f_{1_x}, f_{2_x}, f_{3_x}) \in \text{EQINSQUAREGRID} \quad (4.3)$$

Υπενθυμίζουμε ότι στο γραφηματικό παίγνιο που αντιστοιχεί σε ένα στιγμιότυπο $(n_x, k_x, f_{1_x}, f_{2_x}, f_{3_x})$ του προβλήματος EQINSQUAREGRID υπάρχουν τρεις κατηγορίες παικτών, οι ενδιάμεσοι, οι πλευρικοί και οι γωνιακοί. Όλοι οι παίκτες έχουν το ίδιο σύνολο στρατηγικών $S_x = \{s_1, s_2, \ldots, s_{k_x}\}$, ωστόσο κάθε κατηγορία παικτών έχει διαφορετική συνάρτηση οφέλους. Οι ενδιάμεσοι παίκτες έχουν συνάρτηση οφέλους $u_{1_x} : S_x \times {S_x}^4 \rightarrow \Re$ για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_{u_{1_x}}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}, s_{k_4}) \Leftrightarrow f_1(\{k_1, k_2, k_3, k_4\})|_i = 1$$

οι πλευρικοί παίκτες έχουν συνάρτηση οφέλους $u_{2_x} : S_x \times {S_x}^3 \rightarrow \Re$ για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_{u_{2_x}}(s_{k_1}, s_{k_2}, s_{k_3}) \Leftrightarrow f_2(\{k_1, k_2, k_3\})|_i = 1$$

και οι γωνιακοί παίκτες έχουν συνάρτηση οφέλους $u_{3_x} : S_x \times {S_x}^2 \rightarrow \Re$ για την οποία ισχύει:

$$s_i \in BestResponse_{u_{3_x}}(s_{k_1}, s_{k_2}) \Leftrightarrow f_3(\{k_1, k_2\})|_i = 1$$

Στη συνέχεια της απόδειξης, με αφετηρία ένα ζεύγος $x = (M, 5 \cdot m)$ θα υπολογίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο την πλευρά n_x του τετραγωνικού πλέγματος, το σύνολο στρατηγικών S_x και τις συναρτήσεις $BestResponse_{u_{1x}}$, $BestResponse_{u_{2x}}$, $BestResponse_{u_{3x}}$ (για συντομία παρακάτω $BR_{u_{1x}}$, $BR_{u_{2x}}$, $BR_{u_{3x}}$) έτσι ώστε:

$$(M, 5 \cdot m) \in L_2 \Leftrightarrow \exists \text{ισορροπία Nash στο παίγνιο } (n_x, S_x, BR_{1_x}, BR_{2_x}, BR_{3_x}) \tag{4.4}$$

Επειδή, δε, από κάθε πεντάδα $(n_x, S_x, BR_{1_x}, BR_{2_x}, BR_{3_x})$ μπορούμε, και μάλιστα σε πολυωνυμικό χρόνο, να υπολογίσουμε την αντίστοιχη πεντάδα $(n_x, S_x, f_{1_x}, f_{2_x}, f_{3_x})$ που αποτελεί στιγμιότυπο του προβλήματος EQINSQUAREGRID, η σχέση 4.4 συνεπάγεται τη σχέση 4.3 και η εύρεση της πεντάδας $(n_x, S_x, f_{1_x}, f_{2_x}, f_{3_x})$ θα γίνεται σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ας κατασκευάσουμε, λοιπόν, την πεντάδα $(n_x, S_x, BR_{1_x}, BR_{2_x}, BR_{3_x})$. Έστω, $x = (M, 5 \cdot m)$, όπου $M \in NTM, m \in \mathbb{N}$, και $M =< K, \Sigma, \delta, q_0 >$, όπου K το σύνολο καταστάσεων, Σ το αλφάβητο, $\delta : K \times \Sigma \rightarrow 2^{K \times \Sigma \times \{\rightarrow, \leftarrow, -\}}$ η συνάρτηση μετάβασης και $q_0 \in K$ η αρχική κατάσταση της μηχανής M. Προς διευκόλυνσή ας απαιτήσουμε η συνάρτηση μετάβασης δ να ικανοποιεί τη σχέση $(q, \alpha, -) \in \delta(q, \alpha), \forall q \in K, \alpha \in \Sigma$ πράγμα το οποίο δεν αυξάνει, ούτε μειώνει τις υπολογιστικές δυνατότητες της μηχανής. Επίσης, ας θεωρήσουμε ότι η ταινία της μηχανής M έχει πάντα στο αριστερό άκρο τα ειδικά σύμβολα $\rhd\rhd'$, ότι κατά την έναρξη του υπολογισμού η κεφαλή της μηχανής βρίσκεται στο κελί που περιέχει το σύμβολο $\rhd'$ και ότι η συνάρτηση μετάβασης είναι τέτοια ώστε η κεφαλή να μην κινείται ποτέ αριστερά από το σύμβολο $\rhd'$ και τα σύμβολα $\rhd$ και $\rhd'$ να υπάρχουν μόνο στο αριστερό άκρο της ταινίας. Οι απαιτήσεις αυτές για τη μηχανή M είναι ίδιες με εκείνες στην απόδειξη του θεωρήματος 4.17.

Πλευρά του τετραγωνικού πλέγματος n_x

Ως πλευρά του τετραγωνικού πλέγματος επιλέγουμε $n_x = 5 \cdot m + 1$.

Σύνολο στρατηγικών

Κάθε γνήσια στρατηγική, εκτός από κάποιες ειδικές στρατηγικές θα είναι μια 11-άδα της μορφής:

$$s = (i, j, s_{down}, k_{down}, s_{up}, k_{up}, a_{left}, k_{left}, a_{right}, k_{right}, special)$$

όπου:

- $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, \epsilon\}$

- $s_{up}, s_{down} \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$
- $k_{up}, k_{down}, k_{left}, k_{right} \in K \cup \{\epsilon\}$
- $a_{right}, a_{left} \in \{\rightarrow, \leftarrow, \epsilon\}$
- $special \in \{B_{\triangleright}, B_{\sqcup}, BB, \epsilon\}$

Ως σύνολο στρατηγικών επιλέγουμε το σύνολο $S_x = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup SPECIAL$ όπου:

- Το σύνολο S_1 περιέχει:
  - $\forall \alpha \in \Sigma, \forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:
    $$(i, j, \alpha, \epsilon, \alpha, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$
  - $\forall q, p \in K, \forall \alpha, b \in \Sigma$ τέτοια ώστε $(p, b, -) \in \delta(q, \alpha)$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:
    $$(i, j, \alpha, q, b, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$
  - $\forall q, p \in K, \forall \alpha, b \in \Sigma$ τέτοια ώστε $(p, b, \rightarrow) \in \delta(q, \alpha)$, $\forall \gamma \in \Sigma$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τις στρατηγικές:
    $$(i, j, \alpha, q, b, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \rightarrow, p, \epsilon)$$
    $$\text{και } (i, j, \gamma, \epsilon, \gamma, p, \rightarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$
  - $\forall q, p \in K, \forall \alpha, b \in \Sigma$ τέτοια ώστε $(p, b, \leftarrow) \in \delta(q, \alpha)$, $\forall \gamma \in \Sigma$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τις στρατηγικές:
    $$(i, j, \alpha, q, b, \epsilon, \leftarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$
    $$\text{και } (i, j, \gamma, \epsilon, \gamma, p, \epsilon, \epsilon, \leftarrow, p, \epsilon)$$
  - $\forall \alpha \in \Sigma$ και $\forall i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ τις στρατηγικές:
    $$(i, j, \alpha, h, \alpha, h, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$$
    όπου h η halting state της μηχανής M
  - τη στρατηγική $(1, 0, \triangleright', \epsilon, \triangleright', q_0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
- Το σύνολο S_2 περιέχει:
  - $\forall i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ την στρατηγική:
    $$(i, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup}) \text{ (συντομογραφία } s^i_{\sqcup})$$

– $\forall j \in \{0,1,2,3,4\}$ την στρατηγική:

$$(\epsilon, j, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright}) \text{ (συντομογραφία } s^{j}_{\triangleright})$$

- Το σύνολο S_3 περιέχει μόνο την στρατηγική:

$$(\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB) \text{ (συντομογραφία } s_{BB})$$

- Το σύνολο $SPECIAL$ περιέχει τρεις ειδικές στρατηγικές, τις K_1, K_2 και K_3.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύνολο S_x περιέχει $O(||M||)$ πλήθος στρατηγικών, όπου $||M||$ το μέγεθος αναπαράστασης της μηχανής M.

Συναρτήσεις Βέλτιστων Αποκρίσεων $BR_{u_{1_x}}$,$BR_{u_{2_x}}$,$BR_{u_{3_x}}$

Επειδή το σύνολο S_x περιέχει μεγάλο αριθμό από στρατηγικές, θα προτιμήσουμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις $BR_{u_{1_x}}$,$BR_{u_{2_x}}$,$BR_{u_{3_x}}$ πιο αφαιρετικά, δίνοντας κάποιους κανόνες τους οποίους υπακούουν.

Γωνιακοί Παίκτες - Συνάρτηση $BR_{u_{3_x}}$

$\forall w, y \in S_x$:

1. αν $K_1 \in \{w, y\}$ τότε $BR_{u_{3_x}}(\{w, y\}) = \{K_2\}$
2. αν $w = y = K_2$ τότε $BR_{u_{3_x}}(\{w, y\}) = \{K_3\}$
3. αν
   - $w \in \{(0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup}), (4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})\}$
   - $y \in \{(\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright}), (\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})\}$

   τότε $BR_{u_{3_x}}(\{w, y\}) = \{(\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)\}$
4. σε όλες τις άλλες περιπτώσεις $BR_{u_{3_x}}(\{w, y\}) = \{K_1\}$

Πλευρικοί Παίκτες - Συνάρτηση $BR_{u_{2_x}}$

$\forall w, y, z \in S_x$:

1. αν $K_1 \in \{w, y, z\}$ τότε $BR_{u_{2_x}}(\{w, y, z\}) = \{K_2\}$
2. αν $w = y = z = K_2$ τότε $BR_{u_{2_x}}(\{w, y, z\}) = \{K_3\}$

3. αν

   - $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
   - $y = (1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $z \in \{(0, 0, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon), (0, 4, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

   τότε $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{(0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})\}$

4. αν

   - $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
   - $y = (3, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $z = (4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
     ή $z = (4, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

   τότε $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{(4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})\}$

5. αν για κάποιο $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

   - $w = ((l-1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y = ((l+1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $(z|_i = l \wedge z|_j = 0)$
     ή $z = (l, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

   τότε $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{(l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})\}$

6. αν

   - $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
   - $y = (\epsilon, 1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})$
   - $z = (0, 0, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
     ή $z = (4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$

   τότε $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{(\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})\}$

7. αν

   - $w = (\epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, BB)$
   - $y = (\epsilon, 3, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})$
   - $z = (0, 4, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
     ή $z = (4, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

   τότε $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{(\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})\}$

8. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$
   - $w = (\epsilon, (l-1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
   - $y = (\epsilon, (l+1) \mod 5, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
   - $z = (0, l, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
     ή $z|_i = 4 \wedge z|_j = l$

   τότε $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{(\epsilon, l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})\}$
9. σε όλες τις άλλες περιπτώσεις $BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) = \{K_1\}$

Ενδιάμεσοι Παίκτες - Συνάρτηση $BR_{u_{1x}}$

$\forall w, y, z, t \in S_x$:

1. αν
   - $w = (0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y = (\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
   - $z = (0, 1, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
   - $t|_i = 1 \wedge t|_j = 0$

   τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(0, 0, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$
2. αν
   - $w = (1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y = (0, 0, \triangleright, \epsilon, \triangleright, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
   - $z|_i = 1 \wedge z|_j = 1$
   - $t|_i = 2 \wedge t|_j = 0$

   τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(1, 0, \triangleright', \epsilon, \triangleright', q_0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$
3. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$
   - $w = (l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y|_i = l \wedge y|_j = 1$
   - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = 0 \wedge z|_{sup} \neq \triangleright$
   - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge z|_j = 0$

   τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

4. αν
   - $w = (4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y = (\epsilon, 0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
   - $z = (3, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
   - $t = (4, 1, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$

   τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

5. αν
   - $w = (4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y = (\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$
   - $z|_i = 4 \wedge z|_j = 3 \wedge z|_{k_{up}} \in \{\epsilon, h\}$
   - $t = (3, 4, \sigma, \kappa, \sigma, \kappa, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma \in \Sigma$ και $\kappa \in \{\epsilon, h\}$

   τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(4, 4, z|_{s_{up}}, z|_{k_{up}}, z|_{s_{up}}, z|_{k_{up}}, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

6. αν για κάποιο $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $q, p \in K$:
   - $w|_i = 4 \wedge w|_j = (r - 1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
   - $y|_i = 4 \wedge y|_j = (r + 1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = p$
   - $z|_i = 3 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
   - $t = (\epsilon, r, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$

   τότε:

   $$BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \begin{cases} \{(4, r, \alpha, q, b, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, b, -) \in \delta(q, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

7. αν για κάποιο $r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για κάποιο $\alpha \in \Sigma$ και για κάποιο $p \in K$:
   - $w|_i = 4 \wedge w|_j = (r - 1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
   - $y|_i = 4 \wedge y|_j = (r + 1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = p$
   - $z|_i = 3 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \rightarrow \wedge z|_{k_{right}} = p$
   - $t = (\epsilon, r, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\triangleright})$

   τότε:

   $$BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \begin{cases} \{(4, r, \alpha, \epsilon, \alpha, p, \rightarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, z|_{s_{up}}, \rightarrow) \in \delta(z|_{k_{down}}, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

8. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$
   - $w = (l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $y|_i = l \wedge y|_j = 3 \wedge y|_{k_{up}} \in \{h, \epsilon\}$
   - $z = ((l-1) \mod 5, 4, \sigma_1, \kappa_1, \sigma_1, \kappa_1, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma_1 \in \Sigma$ και $\kappa_1 \in \{\epsilon, h\}$
   - $t = ((l+1) \mod 5, 4, \sigma_2, \kappa_2, \sigma_2, \kappa_2, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$, όπου $\sigma_2 \in \Sigma$ και $\kappa_2 \in \{\epsilon, h\}$

   τότε $BR_{u_x}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, 4, y|_{s_{up}}, y|_{k_{up}}, y|_{s_{up}}, y|_{k_{up}}, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$
9. αν
   - $w = (0, 3, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
   - $y = (0, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
   - $z = (\epsilon, 4, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})$
   - $t|_i = 1 \wedge t|_j = 4$

   τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(0, 4, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$
10. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$
    - $w = (0, (l-1) \mod 5, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
    - $y = (0, (l+1) \mod 5, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$
    - $z = (\epsilon, l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\rhd})$
    - $t|_i = 1 \wedge t|_j = l$

    τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(0, l, \rhd, \epsilon, \rhd, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$
11. αν για κάποιο $l \in \{0,1,2,3,4\}$
    - $w = (l, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, B_{\sqcup})$
    - $y|_i = (l-1) \mod 5 \wedge y|_j = 4$
    - $z|_i = (l+1) \mod 5 \wedge z|_j = 4$
    - $t|_i = l \wedge t|_j = 3$

    τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, 4, t|_{s_{up}}, t|_{k_{up}}, t|_{s_{up}}, t|_{k_{up}}, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$
12. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$ και για κάποιο $\alpha \in \Sigma$:
    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$

- $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = \epsilon$
- $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
- $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, r, \alpha, \epsilon, \alpha, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

13. αν για κάποια $l, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και για κάποια $\alpha \in \Sigma$, $q \in K$:

- $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
- $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = q$
- $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
- $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

τότε $BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \{(l, r, \alpha, q, \alpha, q, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$

14. αν για κάποια $l, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $q, p \in K$:

- $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
- $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = p$
- $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
- $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

τότε:

$$BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \begin{cases} \{(l, r, \alpha, q, b, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, b, -) \in \delta(q, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

15. αν για κάποια $l, r \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, για κάποιο $\alpha \in \Sigma$ και για κάποιο $p \in K$:

- $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
- $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = p$
- $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \rightarrow \wedge z|_{k_{right}} = p$
- $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

τότε:

$$BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) = \begin{cases} \{(l, r, \alpha, \epsilon, \alpha, p, \rightarrow, p, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}, & \text{αν } (p, z|_{s_{up}}, \rightarrow) \in \delta(z|_{k_{down}}, \alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

16. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποιο $\alpha \in \Sigma$ και για κάποιο $p \in K$:

    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = \epsilon$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = \alpha \wedge y|_{k_{down}} = p$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} =\leftarrow \wedge t|_{k_{left}} = p$

    τότε:

$$BR_{u_{1x}}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,\epsilon,\alpha,p,\epsilon,\epsilon,\leftarrow,p,\epsilon)\}, & \text{αν } (p,t|_{s_{up}},\leftarrow) \in \delta(t|_{k_{down}},\alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

17. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $p, q \in K$:

    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = \epsilon$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} = \epsilon \wedge z|_{k_{right}} = \epsilon$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} =\rightarrow \wedge t|_{k_{left}} = p$

    τότε:

$$BR_{u_{1x}}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,q,b,\epsilon,\epsilon,\epsilon,\rightarrow,p,\epsilon)\}, & \text{αν } (p,b,\rightarrow) \in \delta(q,\alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

18. αν για κάποια $l, r \in \{0,1,2,3,4\}$, για κάποια $\alpha, b \in \Sigma$ και για κάποια $p, q \in K$:

    - $w|_i = l \wedge w|_j = (r-1) \mod 5 \wedge w|_{s_{up}} = \alpha \wedge w|_{k_{up}} = q$
    - $y|_i = l \wedge y|_j = (r+1) \mod 5 \wedge y|_{s_{down}} = b \wedge y|_{k_{down}} = \epsilon$
    - $z|_i = (l-1) \mod 5 \wedge z|_j = r \wedge z|_{a_{right}} =\leftarrow \wedge z|_{k_{right}} = p$
    - $t|_i = (l+1) \mod 5 \wedge t|_j = r \wedge t|_{a_{left}} = \epsilon \wedge t|_{k_{left}} = \epsilon$

    τότε:

$$BR_{u_{1x}}(\{w,y,z,t\}) = \begin{cases} \{(l,r,\alpha,q,b,\epsilon,\leftarrow,p,\epsilon,\epsilon,\epsilon)\}, & \text{αν } (p,b,\leftarrow) \in \delta(q,\alpha) \\ \{K_1\}, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

19. σε όλες τις άλλες περιπτώσεις $BR_{u_x}(\{w,y,z,t\}) = \{K_1\}$

Είναι φανερό ότι οι συνολοσυναρτήσεις $BR_{u_{1x}}$, $BR_{u_{2x}}$ και $BR_{u_{3x}}$ μπορούν να οριστούν σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το $|S_x|$. Πράγματι, για τον ορισμό της $BR_{u_{1x}}$ αρκεί για κάθε συνδυασμό με επανάληψη 4 στοιχείων από το σύνολο S_x να ελέγξει κανείς σε ποιον από τους παραπάνω κανόνες εμπίπτει για να βρει την τιμή της $BR_{u_{1x}}$. Επομένως, ο ορισμός της συνάρτησης μπορεί να γίνει σε χρόνο:

$$O\left(\left[\begin{matrix}|S_x|\\4\end{matrix}\right]\right) = O(|S_x|^4) = O(||M||^4)$$

δηλαδή σε χρόνο πολυωνυμικό ως προς το μέγεθος αναπαράστασης της μηχανής M. Ομοίως και οι συναρτήσεις $BR_{u_{2x}}$ και $BR_{u_{3x}}$ μπορούν να οριστούν σε πολυωνυμικό χρόνο ως προς το $||M||$.

Απόδειξη ισοδυναμίας 4.4

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η ισοδυναμία 4.4:

$(M, 5\cdot m) \in L_2 \Leftrightarrow \exists$ισορροπία Nash στο παίγνιο $(n_x, S_x, BR_{1_x}, BR_{2_x}, BR_{3_x})$

όπου τα n_x, S_x, $BR_{u_{1x}}$, $BR_{u_{2x}}$ και $BR_{u_{3x}}$ είναι αυτά που ορίστηκαν παραπάνω.

Απόδειξη

Πριν αρχίσει η απόδειξη, ας ορίσουμε αυθαίρετα μία φορά για όλες τις στήλες του πλέγματος και μία φορά για όλες τις γραμμές του πλέγματος, ώστε να έχουν νόημα οι έννοιες "δεξιός γείτονας", "αριστερός γείτονας", "πάνω γείτονας" και "κάτω γείτονας".

($\Rightarrow$) Έστω ότι η μηχανή M με κενή είσοδο σταματά σε $5\cdot m - 2$ βήματα. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο $(n_x, S_x, BR_{1_x}, BR_{2_x}, BR_{3_x})$. Πιο συγκεκριμένα, θα κατασκευάσουμε μία ισορροπία Nash βασιζόμενοι στον υπολογισμό της μηχανής M.

Πρώτα ας δώσουμε στρατηγικές στους παίκτες που βρίσκονται στο σύνορο του τετραγωνικού πλέγματος. Στους γωνιακούς παίκτες του τετραγωνικού πλέγματος δίνουμε τη στρατηγική s_{BB}, ενώ στους πλευρικούς παίκτες στρατηγικές από το σύνολο S_2 ως ακολούθως:

- οι πλευρικοί παίκτες που βρίσκονται στο πάνω και στο κάτω σύνορο του τετραγωνικού πλέγματος παίρνουν στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}$, $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, έτσι ώστε:

  - αν ένας παίκτης έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{i}$ τότε ο παίκτης που είναι δεξιά του θα έχει $s_{\sqcup}^{(i+1) \mod 5}$ και ο παίκτης που είναι αριστερά του θα έχει $s_{\sqcup}^{((i-1) \mod 5}$
  - ο πρώτος από αριστερά παίκτης τόσο του πάνω όσο και του κάτω συνόρου θα έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{0}$
  - ο πρώτος από δεξιά παίκτης τόσο του πάνω όσο και του κάτω συνόρου θα έχει τη στρατηγική $s_{\sqcup}^{4}$

- οι πλευρικοί παίκτες που βρίσκονται στο αριστερό και στο δεξιό σύνορο του τετραγωνικού πλέγματος παίρνουν στρατηγικές της μορφής $s_{\triangleright}^{j}$, $j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, έτσι ώστε:
  - αν ένας παίκτης έχει τη στρατηγική $s_{\triangleright}^{j}$ τότε ο παίκτης που είναι πάνω του θα έχει $s_{\triangleright}^{(j+1) \mod 5}$ και ο παίκτης που είναι κάτω του θα έχει $s_{\triangleright}^{((j-1) \mod 5}$
  - ο πρώτος από κάτω παίκτης τόσο του αριστερού όσο και του δεξιού συνόρου θα έχει τη στρατηγική $s_{\triangleright}^{0}$
  - ο πρώτος από πάνω παίκτης τόσο του αριστερού όσο και του δεξιού συνόρου θα έχει τη στρατηγική $s_{\triangleright}^{4}$

Οι παραπάνω απονομές στρατηγικών είναι εφικτές δεδομένου ότι η πλευρά του τετραγωνικού πλέγματος είναι $n_x = 5 \cdot m + 1$.

Μένει να δώσουμε στρατηγικές στους $(5{\cdot}m)\times(5{\cdot}m)$ το πλήθος ενδιάμεσους παίκτες του πλέγματος. Όλοι αυτοί οι παίκτες θα λάβουν στρατηγικές από το σύνολο S_1. Προς διευκόλυνσή μας, ονομάζουμε "παίκτη $(0, 0)$" τον ενδιάμεσο παίκτη που έχει γείτονες τους πλευρικούς παίκτες με στρατηγικές $s_{\sqcup}^{0}$ και $s_{\triangleright}^{0}$ και αντιστοιχίζουμε κατά τον προφανή τρόπο ένα ζεύγος (x, y), όπου $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 5{\cdot}m{-}1\}$ σε κάθε ενδιάμεσο παίκτη. Η ανάθεση στρατηγικών στους παίκτες (x, y), $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 5{\cdot}m{-}1\}$ γίνεται κατά τον ίδιο ακριβώς τρόπο όπως στην απόδειξη της ίδιας φοράς σχέσης 4.2 και δεν θα επαναληφθεί εδώ.

Μετά την ανάθεση στρατηγικών σε όλους τους παίκτες του τόρου, δεν είναι δύσκολο να αποδειχτεί ότι αυτή αποτελεί ισορροπία Nash. Πράγματι, αν επανεξετάσουμε τις στρατηγικές που αναθέσαμε θα δούμε ότι η στρατηγική κάθε παίκτη ανήκει στο σύνολο των βέλτιστων αποκρίσεων των στρατηγικών των γειτόνων του.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι για κάποιο $x = (M, 5 \cdot m)$, όπου $M \in NTM, m \in \mathbb{N}$, υπάρχει ισορροπία Nash στο παίγνιο $(n_x, S_x, BR_{u_{1x}}, BR_{u_{2x}}, BR_{u_{3x}})$. Θα αποδείξουμε ότι $x \in L_2$. Αποδεικνύουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.29. Στην ισορροπία Nash κανείς παίκτης δεν έχει στρατηγική από το σύνολο $SPECIAL$.

Απόδειξη. Έστω ότι στην ισορροπία Nash κάποιος παίκτης p έχει τη στρατηγική K_1. Από τον πρώτο κανόνα που υπακούει καθεμιά από τις συναρτήσεις $BR_{u_{1_x}}$, $BR_{u_{2_x}}$, $BR_{u_{3_x}}$ προκύπτει ότι όλοι οι γείτονες του εν λόγω παίκτη θα πρέπει να έχουν τη στρατηγική K_2. Όμως, από τον δεύτερο κανόνα που υπακούει καθεμιά από τις $BR_{u_{1_x}}$, $BR_{u_{2_x}}$, $BR_{u_{3_x}}$ προκύπτει ότι το σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων του παίκτη p που αντιστοιχεί στις στρατηγικές των γειτόνων του είναι το μονοσύνολο $\{K_3\}$. Όμως, $K_1 \notin \{K_3\}$, πράγμα που είναι άτοπο από τον ορισμό της ισορροπίας Nash. Επομένως, σε μια ισορροπία Nash κανείς παίκτης δεν θα έχει τη στρατηγική K_1.

Εφόσον στην ισορροπία Nash κανείς παίκτης δεν θα έχει τη στρατηγική K_1, κανένας παίκτης δεν μπορεί να έχει τις στρατηγικές K_2 και K_3. Αυτό προκύπτει από τους κανόνες τους οποίους υπακούουν οι συναρτήσεις $BR_{u_{1_x}}$, $BR_{u_{2_x}}$, $BR_{u_{3_x}}$ από τους οποίους:

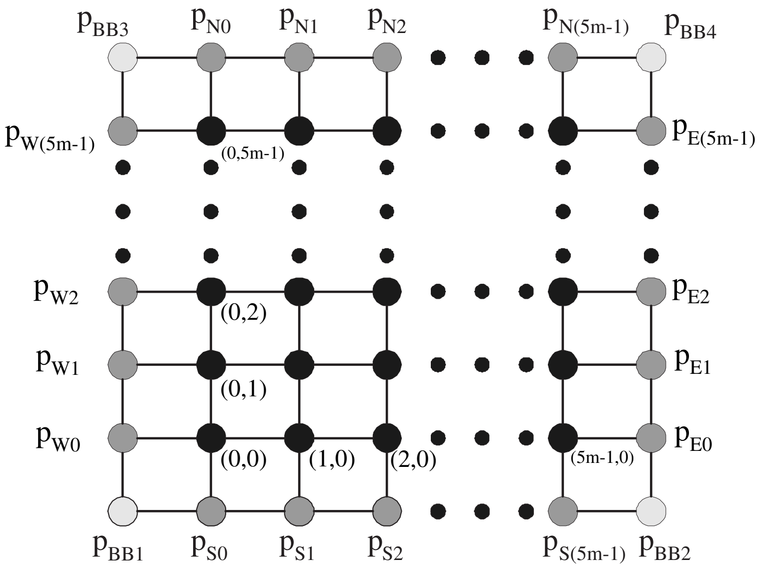
- για τους ενδιάμεσους παίκτες:
  - $K_2 \in BR_{u_{1_x}}(\{w,y,z,t\}) \Rightarrow K_1 \in \{w,y,z,t\}$
  - $K_3 \in BR_{u_{1_x}}(\{w,y,z,t\}) \Rightarrow w = y = z = t = K_2$
- για τους πλευρικούς παίκτες:
  - $K_2 \in BR_{u_{2_x}}(\{w,y,z\}) \Rightarrow K_1 \in \{w,y,z\}$
  - $K_3 \in BR_{u_{2_x}}(\{w,y,z\}) \Rightarrow w = y = z = K_2$
- για τους γωνιακούς παίκτες:
  - $K_2 \in BR_{u_{3_x}}(\{w,y\}) \Rightarrow K_1 \in \{w,y\}$
  - $K_3 \in BR_{u_{3_x}}(\{w,y\}) \Rightarrow w = y = K_2$

□

Ας εξετάσουμε, τώρα, τις στρατηγικές που θα έχουν οι πλευρικοί και οι γωνιακοί παίκτες του παιγνίου στην ισορροπία Nash. Δίνουμε στους παίκτες την ονομασία που φαίνεται στο σχήμα 4.16 και αν ένας παίκτης έχει την ονομασία l αναφερόμαστε στη στρατηγική του εν λόγω παίκτη με το σύμβολο s_l.

Λόγω του λήμματος 4.29, οι παίκτες p_{BB1},p_{BB2},p_{BB3} και p_{BB4} θα έχουν υποχρεωτικά τη στρατηγική s_{BB} αφού:

$$\left(\bigcup_{w,y \in S_x} BR_{u_{3_x}}(\{w,y\}) \right) \setminus SPECIAL = \{s_{BB}\}$$



Σχήμα 4.16: Το τετραγωνικό πλέγμα.

οι πλευρικοί παίκτες θα έχουν στρατηγικές της μορφής $s^i_{\sqcup}$ ή της μορφής $s^j_{\triangleright}$, όπου $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ αφού:

$$\left(\bigcup_{w,y,z \in S_x} BR_{u_{2x}}(\{w, y, z\}) \right) \setminus SPECIAL = \bigcup_{i,j=0}^{4} \{s^i_{\sqcup}, s^j_{\triangleright}\}$$

και οι ενδιάμεσοι παίκτες θα έχουν στρατηγικές από το σύνολο S_1 αφού:

$$\left(\bigcup_{w,y,z,t \in S_x} BR_{u_{1x}}(\{w, y, z, t\}) \right) \setminus (S1 \cup SPECIAL) = \emptyset$$

Επιπλέον, από τον τρίτο κανόνα που υπακούει η συνάρτηση $BR_{u_{3x}}$ προκύπτει ότι $s_{p_{S1}} \in \{s^0_{\triangleright}, s^4_{\triangleright}\}$ και $s_{p_{W1}} \in \{s^0_{\sqcup}, s^4_{\sqcup}\}$ ή αντιστρόφως. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $s_{p_{S0}} = s^4_{\sqcup}$ και $s_{p_{W0}} = s^0_{\triangleright}$. Τότε ο παίκτης p_{W1} θα έχει τη στρατηγική $s^1_{\triangleright}$ αφού:

$$\begin{pmatrix} s^0_{\triangleright} \in \left(BR_{u_{2x}}(\{s_{BB1}, s_{p_{W1}}, s_{(0,0)}\}) \setminus SPECIAL\right) \\ s_{BB1} = s_{BB} \\ s_{p_{W_1}} \in S_2 \\ s_{(0,0)} \in S_1 \end{pmatrix} \Rightarrow s_{p_{W1}} = s^1_{\triangleright}$$

Ο παίκτης p_{W2} θα έχει τη στρατηγική $s^2_{\triangleright}$ αφού:

$$\begin{pmatrix} s^1_{\triangleright} \in \left(BR_{u_{2x}}(\{s_{p_{W0}}, s_{p_{W2}}, s_{(0,1)}\}) \setminus SPECIAL\right) \\ s_{p_{W0}} = s^0_{\triangleright} \\ s_{p_{W_2}} \in S_2 \\ s_{(0,1)} \in S_1 \end{pmatrix} \Rightarrow s_{p_{W2}} = s^2_{\triangleright}$$

Με παρόμοια επιχειρήματα κάθε παίκτης p_{Wr}, $r \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$ θα έχει τη στρατηγική $s^{(r \bmod 5)}_{\triangleright}$.

Ο παίκτης $(0, 0)$ θα έχει τη στρατηγική $(4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$ αφού:

$$\left(\bigcup_{w,y \in S_x} BR_{u_{1x}}(\{w, y, s^0_{\triangleright}, s^4_{\sqcup}\})\right) \setminus SPECIAL = \{(4, 0, \sqcup, \epsilon, \sqcup, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon, \epsilon)\}$$

Ο παίκτης $(0, 1)$ θα έχει στρατηγική για την οποία ισχύει $s_{(0,1)}|_i = 4$ αφού:

$$\begin{pmatrix} s_{(0,1)} \in \left(BR_{u_{1x}}(\{s_{p_{W1}}, s_{(0,2)}, s_{(0,0)}, s_{(1,1)}\}) \cap S_1\right) \\ s_{p_{W_1}} = s^1_{\triangleright} \\ s_{(0,0)}, s_{(0,2)}, s_{(1,1)} \in S_1 \\ s_{(0,0)}|_i = 4 \end{pmatrix} \Rightarrow s_{(0,1)}|_i = 4$$

Με παρόμοια επιχειρήματα κάθε παίκτης $(0, r)$, $r \in \{0, 1, \ldots, 5 \cdot m - 1\}$ θα έχει τη στρατηγική $s_{(0,r)}$ για την οποία ισχύει $s_{(0,r)}|_i = 4$. Επομένως, για τη στρατηγική του παίκτη p_{N0} έχουμε:

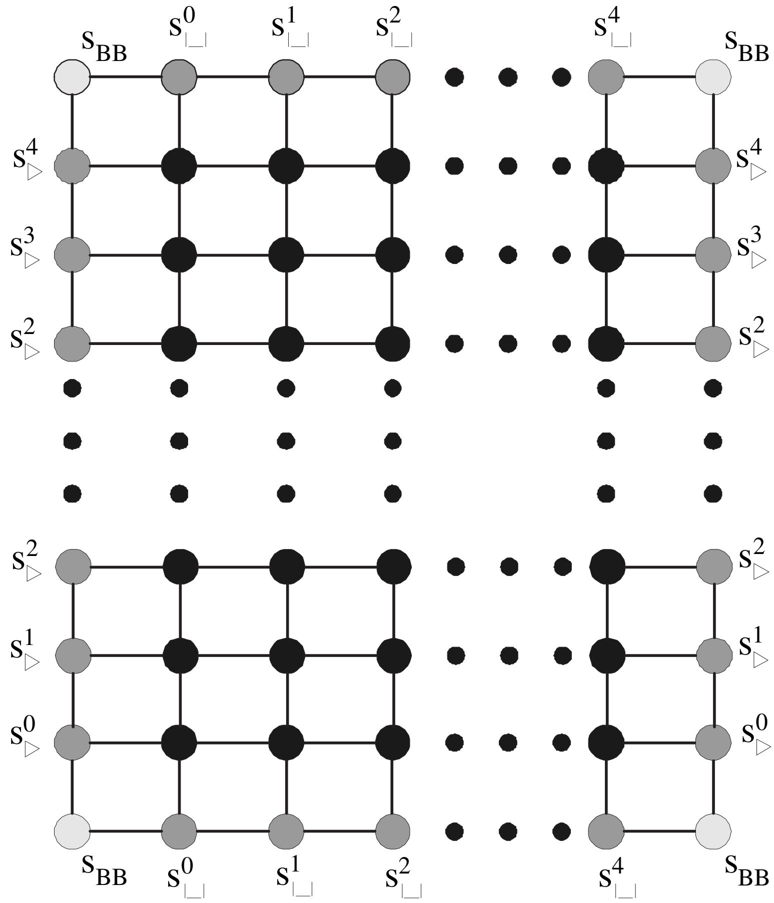
$$\begin{pmatrix} s_{p_{N0}} \in \left(BR_{u_{2x}}(\{s_{BB3}, s_{p_{N1}}, s_{(0,5 \cdot m-1)}\}) \cap S_2\right) \\ s_{BB3} = s_{BB} \\ s_{p_{N1}} \in S_2 \\ s_{(0,5 \cdot m-1)} \in S_1 \\ s_{(0,5 \cdot m-1)}|_i = 4 \end{pmatrix} \Rightarrow s_{p_{N0}} = s^4_{\sqcup}$$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι οι παίκτες p_{N0} και p_{S0} έχουν την ίδια στρατηγική. Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται και ότι οι παίκτες p_{W0} και p_{E0} έχουν την ίδια στρατηγική. Από τα παραπάνω μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισορροπία Nash το σύνορο του τετραγωνικού πλέγματος θα είναι όπως στο σχήμα 4.17 ή κάποια περιστροφή ή αντικατοπτρισμός αυτού.

Κλείνουμε την απόδειξη της ισοδυναμίας 4.2 με το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.30. Έστω ισορροπία Nash στο τετραγωνικό πλέγμα. Ισχύει ότι οι στρατηγικές των ενδιάμεσων παικτών αντιστοιχούν μονοσήμαντα σε έναν υπολογισμό της μηχανής M με κενή είσοδο ο οποίος ολοκληρώνεται εντός $5 \cdot m - 2$ βημάτων.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι εντελώς παρόμοια με την απόδειξη του λήμματος 4.25, γι'αυτό θα παραληφθεί. $\square$



Σχήμα 4.17: Το σύνορο του τετραγωνικού πλέγματος στην ισορροπία Nash

Επομένως, αν υπάρχει ισορροπία Nash στο τετραγωνικό πλέγμα θα υπάρχει υπολογισμός με κενή είσοδο της μηχανής M ο οποίος σταματά σε $5 \cdot m - 2$ βήματα. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Αφού το το πρόβλημα EQINSQUAREGRID αποδείχτηκε $NEXP$-hard, για να αποδείξουμε ότι είναι $NEXP$-πλήρες αρκεί να δείξουμε ότι ανήκει στην κλάση $NEXP$ των προβλημάτων που λύνονται σε εκθετικό χρόνο από έναν μη ντετερμινιστικό αλγόριθμο. Αυτό αποδεικνύουμε στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.31. EQINSQUAREGRID $\in NEXP$

Απόδειξη.
Έστω $I = (n, k, f_1, f_2, f_3)$ ένα στιγμιότυπο του προβλήματος EQINSQUARE-GRID. Ένας μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος που λύνει το πρόβλημα εκτελεί-ται σε $2 \cdot n^2$ βήματα. Τα πρώτα n^2 βήματα είναι μη ντετερμινιστικά και σ'αυτά

ο αλγόριθμος επιλέγει τυχαία στρατηγικές για τους παίκτες του πλέγματος. Τα υπόλοιπα n^2 βήματα είναι ντετερμινιστικά και σ'αυτά ο αλγόριθμος ελέγχει αν η στρατηγική κάθε παίκτη του πλέγματος ανήκει στο σύνολο βέλτιστων αποκρίσεων των στρατηγικών των γειτόνων του. Κάθε μη ντετερμινιστική επιλογή γίνεται σε χρόνο $O(\log k)$, ενώ κάθε έλεγχος σε χρόνο γραμμικό ως προς το μέγεθος της εισόδου, $O(|I|)$. Συνεπώς, ο αλγόριθμος χρειάζεται συνολικό χρόνο $O(n^2 \cdot (|I| + \log k)) = O\left(n^2 \cdot |I|\right)$ αφού το μέγεθος του I είναι:

$$|I| = \log n + \log k + \begin{bmatrix} k \\ 4 \end{bmatrix} \cdot k + \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix} \cdot k + \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix} \cdot k$$

Επομένως, ο χρόνος εκτέλεσης είναι εκθετικός ως προς το $\log n$ άρα το πολύ εκθετικός ως προς το μέγεθος της εισόδου.

Εφόσον υπάρχει μη ντετερμινιστικός αλγόριθμος εκθετικού χρόνου που λύνει το πρόβλημα EQINSQUAREGRID το πρόβλημα ανήκει στην κλάση $NEXP$.

□

Κλείνουμε την ενότητα με το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 4.32. Το πρόβλημα EQINSQUAREGRID ειναι $NEXP$-πλήρες.

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τα θεωρήματα 4.28 και 4.31 □

Βιβλιογραφικές Αναφορές

[FKK$^+$02] Dimitris Fotakis, Spyros Kontogiannis, Elias Koutsoupias, Marios Mavronicolas, and Paul Spirakis. The structure and complexity of nash equilibria for a selfish routing game. In *29-th International Colloquium on Automata,Languages and Programming*, pages 123–134, 2002.

[FPT04] Alex Fabrikant, Christos Papadimitriou, and Kunal Talwar. The complexity of pure nash equilibria. In *Proceedings of the thirty-sixth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 604–612. ACM Press, 2004.

[GGS03] Georg Gottlob, Gianluigi Greco, and Francesco Scarcello. Pure nash equilibria: hard and easy games. In *Proceedings of the 9th conference on Theoretical aspects of rationality and knowledge*, pages 215–230. ACM Press, 2003.

[GJ79] Michael R. Garey and David S. Johnson. *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman and Comp.,NY,USA, 1979.

[LP81] Harry Lewis and Christos H. Papadimitriou. *Elements of the Theory of Computation.* Prentice-Hall, 1981.

[MS93] D. Monderer and L.S. Shapley. Potential games. In *Games and Economic Behavior*, 1993.

[Nas51] J. F. Nash. Non-cooperative games. *Annals of Mathematics*, 54(2):286–295, 1951.

[Pap94] Christos H. Papadimitriou. On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence. In *Journal of Computer and System Sciences*, volume 48, pages 498–532, 1994.

[Pap01] Christos Papadimitriou. Algorithmic Aspects of Game Theory. Lecture notes, EECS UC Berkeley, 2001.

[Pap03] Christos Papadimitriou. Game Theory and the Internet. Lecture notes, EECS UC Berkeley, 2003.

[PR] Christos H. Papadimitriou and Tim Roughgarden. Computing equilibria in multi-player games, submitted for publication.

[RO94] Ariel Rubinstein and Martin Osborne. *A course in Game Theory.* The MIT Press, 1994.

[Ros73] R. Rosenthal. A class of games possessing pure-strategy nash equilibria. In *International Journal of Game Theory,2,*, pages 65–67, 1973.