



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλυση Σπειροειδούς Κωνικής Κεραίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Θρουμουλόπουλος

Επιβλέπων: Νικόλαος Κ. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2004



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Ανάλυση Σπειροειδούς Κωνικής Κεραίας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Θρουμουλόπουλος

Επιβλέπων: Νικόλαος Κ. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 21 Οκτωβρίου 2004.

.....
Ν. Ουζούνογλου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Δ. Κακλαμάνη
Επ. Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Νικήτα
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2004.

.....
Νικόλαος Θρουμουλόπουλος
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright© Νικόλαος Γ. Θρουμουλόπουλος, 2004.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στη Διπλωματική Εργασία αυτή πραγματοποιείται η Ηλεκτρομαγνητική Ανάλυση της κωνικής σπειροειδούς κεραίας, δηλαδή ο προσδιορισμός της ρευματικής κατανομής της διάταξης αυτής όταν τροφοδοτηθεί με κάποια τάση. Αρχικά εξετάζεται η γεωμετρία της κεραίας και παρουσιάζονται οι εξισώσεις των διανυσμάτων που χρησιμοποιούνται στην ανάλυσή της. Στη συνέχεια εφαρμόζεται για τη συγκεκριμένη διάταξη η εξίσωση που συνδέει την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου με το διανυσματικό δυναμικό, καταλήγοντας στην εξίσωση του Pocklington. Ακολούθως, εφαρμόζεται η μέθοδος των τμημάτων, δηλαδή ο κατακερματισμός της διάταξης σε πεπερασμένο αριθμό τμημάτων, ψεωρώντας ότι το κάθε ένα από αυτά διαφρέεται από σταθερό ρεύμα (παλαικές συναρτήσεις βάσης). Η τελική εξίσωση που προκύπτει επιλύεται αριθμητικά με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB και υπολογίζεται η ρευματική κατανομή της κεραίας.

Λέξεις-κλειδιά

ευρείας ζώνης, ανεξάρτησία από τη συχνότητα, κωνική σπειροειδής κεραία, ηλεκτρομαγνητική ανάλυση, ρευματική κατανομή, ολοκληρωτικές εξισώσεις, ολοκληροδιαφορική εξίσωση του Pocklington, μέθοδος των τμημάτων

Abstract

This diploma thesis deals with the Electromagnetic Analysis of the Conical Spiral Antenna, namely the technique of finding the current distribution on conducting wires. At first, the geometry of the specific antenna and the equations of the vectors that are used in the sequence of the analysis are presented. The EM problem of the current distribution is solved with the use of the equation for the electric field expressed through the vector potential \mathbf{A} (magnetic vector potential). Once the Pocklington's integrodifferential equation is derived, the equivalent filamentary line-source current of the antenna, and thus current density on it, can be determined. For this purpose the moment method solution is used with piecewise constant subdomain current functions. In other words, the unknown current function is expanded as a linear combination of N terms. By applying the boundary conditions on the surface of the antenna at N different points (point-matching technique) we proceed to the numerical evaluation of the current distribution with the use of program MATLAB.

Keywords

broadband, frequency independent, conical spiral antenna, electromagnetic analysis, current distribution, integral equations, Pocklington's integrodifferential equation, moment method

Εισαγωγή

Η θεωρητική θεμελίωση της ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας έγινε από τον J. Maxwell, ο οποίος ενοποίησε τη θεωρία του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού μέσω των ομωνύμων αλασσικών εξισώσεων, προβλέποντας την ηλεκτρομαγνητική φύση του φωτός καθώς και το ότι το φως και τα ηλεκτρομαγνητικά χύματα διαδίδονται με κυματικές διαταραχές της ίδιας ταχύτητας. G. Marconi υλοποίησε για πρώτη φορά το 1897 ένα σύστημα ασύρματης μετάδοσης (τηλέγραφος) βασιζόμενος στη θεωρία που είχε διατυπώσει αρκετά χρόνια πριν ο Maxwell. Οι πρώτες αποστολές τηλεγραφικών μηνυμάτων σε μεγάλες αποστάσεις πραγματοποιήθηκαν από τον Marconi στις αρχές του εικοστού αιώνα, ενώ η ασύρματη μετάδοση φωνής σε μεγάλες αποστάσεις συνδυάστηκε με την εφεύρεση των ενισχυτικών λυχνιών και των ταλαντωτών κατά τη δεκαετία 1905–1915.

Από την εποχή του Marconi μέχρι το 1940 η τεχνολογία των κεραιών επικεντρώθηκε στην κατηγορία των κεραιών σύρματος και σε συχνότητες μέχρι UHF (Ultra High Frequencies). Από το 1940 άρχισε η χρησιμοποίηση και άλλων τύπων κεραιών, όπως ανοικτών κυματοδηγών, χοανοκεραιών, κεραιών με ανακλαστήρα κλπ. Οι πολυάριθμες εφαρμογές της θεωρίας του ηλεκτρομαγνητισμού στην τεχνολογία καθώς και η συνεχώς αυξανόμενη χρησιμοποίηση συστημάτων ευρείας ζώνης κατέστησαν αναγκαία την εξερεύνηση και αξιοποίηση του μεγαλύτερου μέρους του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος και τη σχεδίαση κεραιών ευρείας ζώνης. Μέχρι το 1950 οι κεραίες που εμφάνιζαν χαρακτηριστικά ευρείας ζώνης στην αντίσταση και το διάγραμμα ακτινοβολίας τους είχαν εύρος ζώνης όχι μεγαλύτερο από 2:1. Το 1950 πραγματοποιήθηκε μία αλματώδης πρόοδος στην εξέλιξη των κεραιών με αποτέλεσμα την επέκταση του φάσματος των κεραιών ευρείας ζώνης σε 40:1 ή και περισσότερο. Οι κεραίες που σχεδιάστηκαν κατά την περίοδο αυτή αναφέρονται ως *ανεξάρτητες από τη συχνότητα* (*frequency independent*) και έχουν γεωμετρίες που περιγράφονται με γωνίες. Οι ανεξάρτητες από τη συχνότητα κεραίες χρησιμοποιούνται κατεξοχήν στη ζώνη συχνοτήτων 10–10,000 MHz σε ποικίλλες εφαρμογές όπως η τηλεόραση, η επικοινωνία σημείου με σημείο, πηγές για ανακλαστήρες και φακούς και άλλες.

Η πληθώρα των δυνατοτήτων των ανεξάρτητων από τη συχνότητα κεραιών

έδωσαν το έναυσμα για την προσπάθεια ανάλυσης της κωνικής σπειροειδούς κεραίας, που αποτελεί μια διάταξη που συνδυάζει τα χαρακτηριστικά δύο πολύ γνωστών κεραιών ευρείας ζώνης της δικωνικής κεραίας και της ελικοειδούς. Η δικωνική κεραία αποτελεί μία απλή κατασκευή που χρησιμοποιείται κατεξοχήν για εφαρμογές ευρείας ζώνης. Η ελικοειδής κεραία εμφανίζει τόσο ευρείας ζώνης χαρακτηριστικά καθώς και κυκλική πόλωση που είναι επιθυμητή για αρκετές εφαρμογές. Η σύνθεση των δύο αυτών διατάξεων είναι η κωνική ελικοειδής κεραία που εμφανίζει βελτιωμένα χαρακτηριστικά σε σχέση και με τις δύο διατάξεις. Στόχος της παρούσας εργασίας ήταν ο προσδιορισμός της ρευματικής κατανομής της κωνικής σπειροειδούς κεραίας, μέσω της μεθόδου των ολοκληρωτικών εξισώσεων.

Η εργασία είναι οργανωμένη σε τρία κεφάλαια. Η παρουσίαση είναι κατά το δυνατόν αυτόνομη, αφού παρουσιάζονται όλα τα στοιχεία θεωρίας που χρησιμοποιούνται. Για την αριθμητική επεξεργασία των δεδομένων χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα MATLAB. Τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν παρατίθενται στο Παράρτημα.

Στο **Κεφάλαιο 1** αναλύεται η γεωμετρία της διάταξης και παρουσιάζονται οι παραμετρικές και διανυσματικές - παραμετρικές εξισώσεις αυτής. Προσδιορίζεται, επίσης, η μαθηματική έκφραση του εφαπτόμενου στην έλικα διανύσματος

Στο **Κεφάλαιο 2** παρουσιάζεται αρχικά η ολοκληροδιαφορική εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση της κεραίας. Εφαρμόζεται στην εξίσωση η μέθοδος των τμημάτων (*Moment Method or Method of Moments*) με παλικές συναρτήσεις βάσης και εξάγεται η αναλυτική έκφραση της ολοκληρωτικής εξίσωσης του Pocklington.

Στο **Κεφάλαιο 3** γίνεται η αριθμητική επεξεργασία της εξίσωσης του Pocklington με τη βοήθεια του προγράμματος MATLAB και παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ρευματικής κατανομής.

Αφιερώνεται στην οικογένειά μου και τους φίλους μου

Περιεχόμενα

1 Η Γεωμετρία της Διάταξης	13
1.1 Παραμετρικές Εξισώσεις της Κωνικής Σπείρας	13
1.2 Διανυσματική-Παραμετρική Εξίσωση της Κωνικής Σπείρας	15
2 Θεωρητική Ανάλυση του Προβλήματος	17
2.1 Εξισώσεις Maxwell και Συναρτήσεις Δυναμικού	17
2.2 Η Ολοκληρωτική Εξίσωση του Pocklington	22
2.3 Η Μέθοδος των Τμημάτων	33
2.3.1 Συναρτήσεις Βάσης	34
2.3.2 Εφαρμογή της Μεθόδου	39
2.4 Υπολογισμός των Ολοκληρωμάτων	48
2.4.1 Απομακρυσμένα Τμήματα	48
2.4.2 Τιδιο Τμήμα	50
3 Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος	56
A' Αντίσταση Z_{mk}	62
A'.1 $ \phi_m - \phi'_k > 0$	62
A'.2 $ \phi_m - \phi'_k = 0$	67
B' Matlab	76
B'.1 impedance 1	77
B'.2 impedance 2	81
B'.3 creatematrix	88
B'.4 findcurrent	88

Κατάλογος Σχημάτων

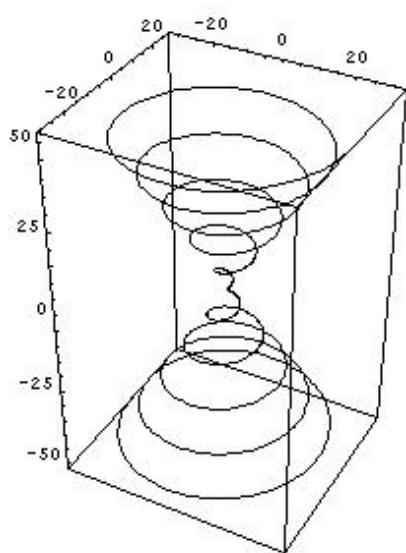
1.1	Η Γεωμετρία της Διάταξης	13
1.2	Ο εφαπτόμενος στη διάταξη κώνος	14
2.1	Προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό χύμα σε αγώγιμο σύρμα	23
2.2	Το ισοδύναμο ρεύμα κατά μήκος της σπείρας	26
2.3	Τμηματικά σταθερή συνάρτηση	35
2.4	Τμηματικά γραφική συνάρτηση	36
2.5	Τμηματικά ημιτονοειδής συνάρτηση	37
2.6	Συνάρτηση συντμημένου συνημιτόνου	38
3.1	Ρευματική Κατανομή για $K = 20$ τμήματα	58
3.2	Ρευματική Κατανομή για $K = 50$ τμήματα	59
3.3	Ρευματική Κατανομή για $K = 100$ τμήματα	60
3.4	Ρευματική Κατανομή για $K = 200$ τμήματα	61

Κεφάλαιο 1

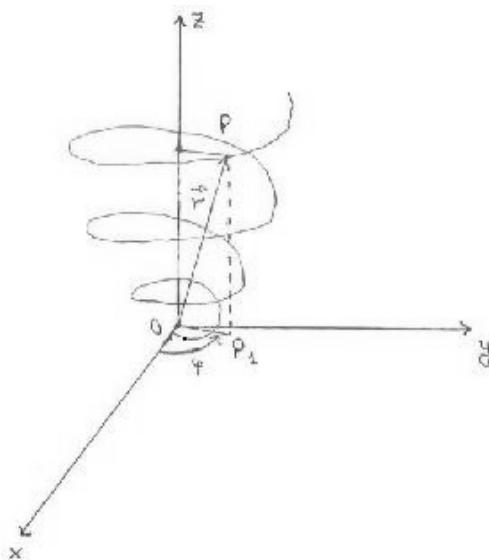
Η Γεωμετρία της Διάταξης

1.1 Παραμετρικές Εξισώσεις της Κωνικής Σπείρας

Η διάταξη που θα αναλυθεί στην παρούσα Εργασία είναι η κωνική σπείρα που φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Η Κωνικής Σπειροειδής Κεραία



Η Κωνική Σπείρα

Σχήμα 1.1: Η Γεωμετρία της Διάταξης

Οι παραμετρικές εξισώσεις της κωνικής σπείρας που θα αναλύσουμε είναι οι εξής:

$$x(\phi) = \alpha \phi \cos \phi$$

$$y(\phi) = \alpha \phi \sin \phi \quad (1.1)$$

$$z(\phi) = \frac{h}{2\pi} \phi$$

Είναι σαφές ότι οι εξισώσεις αυτές για $\phi \in \mathbb{R}$ συνιστούν μία κωνική σπείρα με άπειρες διαστάσεις η οποία δεν είναι δυνατό να μελετηθεί. Για το λόγο αυτό θα θεωρήσουμε ότι η γωνία ϕ μεταβάλλεται κατά $-2\pi N < \phi < 2\pi N$, όπου N ο αριθμός των σπειρών της έλικας.

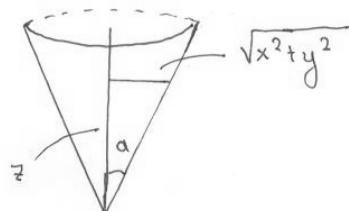
Αν απαλείψουμε την παράμετρο ϕ από τις εξισώσεις (1.1) προκύπτει η σχέση:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2\pi\alpha}{h} z \right)^2 \quad (1.2)$$

Είναι, δηλαδή, τα σημεία της έλικας τα σημεία ενός “κύκλου” του οποίου η ακτίνα αυξάνεται ανάλογα με τη γωνία ϕ και το επίπεδό του μετακινείται κατά τον ίδιο τρόπο κατά μήκος του z άξονα. Όταν ένα σημείο P κινείται πάνω στην καμπύλη, η προβολή του P_1 στο επίπεδο $x0y$ διαγράφει την έλικα $x^2 + y^2 = (a\phi)^2$. Εποι η καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως η τροχιά ενός σημείου που κινείται σε επίπεδη έλικα με κέντρο στον zz' άξονα, ενώ ταυτόχρονα το επίπεδο της έλικας μετατοπίζεται έτσι ώστε να παραμένει παράλληλο προς το επίπεδο $x0y$.

Η διάταξη καλείται κωνική σπείρα γιατί η έλικα εφάπτεται σε έναν κώνο. Αυτό αποδεικνύεται αν υπολογίσουμε την εφαπτομένη της γωνίας α για ένα τυχαίο σημείο πάνω στην έλικα (*Σχήμα 1.2*). Είναι:

$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\alpha \phi}{\frac{h}{2\pi} \phi} = \frac{2\pi\alpha}{h} = \sigma \tau \alpha \theta \epsilon \rho \alpha$$



Σχήμα 1.2: Ο εφαπτόμενος στη διάταξη κώνος

1.2 Διανυσματική-Παραμετρική Εξίσωση της Κωνικής Σπείρας

Το διάνυσμα ύθεσης μιας καμπύλης δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{r} = x(\phi) \cdot \hat{x} + y(\phi) \cdot \hat{y} + z(\phi) \cdot \hat{z} \quad (1.3)$$

Έτσι, λοιπόν, η διανυσματική παραμετρική εξίσωση της κωνικής σπείρας με τη βοήθεια της σχέσης (1.1) είναι η ακόλουθη:

$$\vec{r} = \hat{x} \cdot \alpha \phi \cos \phi + \hat{y} \cdot \alpha \phi \sin(\phi) + \hat{z} \cdot \frac{h}{2\pi} \phi \quad (1.4)$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε την εξίσωση του εφαπτόμενου στην καμπύλη μοναδιαίου διανύσματος. Το διάνυσμα αυτό δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{s}(\phi) = \frac{\frac{d\vec{r}}{d\phi}}{\left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right|} \quad (1.5)$$

- Η παράγωγος της συνάρτησης $\vec{r}(\phi)$ είναι:

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \hat{x} \cdot \frac{dx(\phi)}{d\phi} + \hat{y} \cdot \frac{dy(\phi)}{d\phi} + \hat{z} \cdot \frac{dz(\phi)}{d\phi}$$

Και με τη βοήθεια της (1.1):

$$\frac{d\vec{r}}{d\phi} = \hat{x} \cdot (\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi) + \hat{y} \cdot (\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi) + \hat{z} \cdot \frac{h}{2\pi} \quad (1.6)$$

- Μέσω της προηγούμενης εξίσωσης (1.6):

$$\left| \frac{d\vec{r}}{d\phi} \right| = \sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \phi^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} \quad (1.7)$$

Επομένως:

$$\hat{s}(\phi) = \frac{\hat{x} \cdot (\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi) + \hat{y} \cdot (\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi) + \hat{z} \cdot \frac{h}{2\pi}}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \phi^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2}} \quad (1.8)$$

Ακολουθεί ένας πίνακας με τις τιμές των παραμετρικών εξισώσεων της έλικας καθώς και των παραγώγων αυτών για διάφορές τιμές της γωνίας ϕ (Δίνονται οι τιμές των $x(\phi)$, $y(\phi)$, $z(\phi)$ και $\dot{x}(\phi)$, $\dot{y}(\phi)$, $\dot{z}(\phi)$, μέσω των οποίων υπολογίζονται τα διανύσματα \vec{r} και \hat{s}):

ϕ	x	y	z	\dot{x}	\dot{y}	\dot{z}
-2π	$-2\pi\alpha$	0	$-h$	α	$-2\pi\alpha$	$\frac{h}{2\pi}$
$-\frac{3\pi}{2}$	0	$-\frac{3\pi\alpha}{2}$	$-\frac{3h}{4}$	$\frac{3\pi\alpha}{2}$	α	$\frac{h}{2\pi}$
$-\pi$	$\alpha\pi$	0	$-\frac{h}{2}$	$-\alpha$	$\alpha\pi$	$\frac{h}{2\pi}$
$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\alpha\pi}{2}$	$-\frac{h}{4}$	$-\frac{\alpha\pi}{2}$	$-\alpha\pi$	$\frac{h}{2\pi}$
0	0	0	0	α	0	$\frac{h}{2\pi}$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\alpha\pi}{2}$	$\frac{h}{4}$	$-\frac{\alpha\pi}{2}$	α	$\frac{h}{2\pi}$
π	$-\alpha\pi$	0	$\frac{h}{2}$	$-\alpha$	$-\alpha\pi$	$\frac{h}{2\pi}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$\frac{-3\alpha\pi}{2}$	$\frac{3h}{4}$	$\frac{3\alpha\pi}{2}$	$-\alpha$	$\frac{h}{2\pi}$
2π	$2\alpha\pi$	0	h	α	$2\alpha\pi$	$\frac{h}{2\pi}$

Κεφάλαιο 2

Θεωρητική Ανάλυση του Προβλήματος

2.1 Εξισώσεις Maxwell και Συναρτήσεις Δυναμικού

Η θεωρία των κεραιών στηρίζεται στις ακλασσικές εξισώσεις του Maxwell, οι οποίες είναι:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

Τα ηλεκτρομαγνητικά μεγέθη που συνδέονται μέσω των ανωτέρω εξισώσεων είναι διανυσματικές ή βαθμωτές συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου. Η ανάλυση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που εκπέμπονται ή λαμβάνονται από έναν ακτινοβολητή, διευκολύνεται με την εισαγωγή συναρτήσεων που είναι γνωστές ως συναρτήσεις δυναμικού. Πράγματι, η εξίσωση (2.2) επιτρέπει την

έκφραση της μαγνητικής επαγωγής \vec{B} , ως περιστροφή μιας βοηθητικής διανυσματικής συνάρτησης \vec{A} , η οποία καλείται διανυσματικό δυναμικό, δηλαδή:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.6)$$

Επιπλέον, λόγω της (2.6), η σχέση (2.3) γράφεται:

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.7)$$

Συνεπώς, επειδή η διανυσματική συνάρτηση $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ έχει μηδενική περιστροφή για κάθε σημείο του χώρου, μπορεί να εκφρασθεί ως κλίση μιας βοηθητικής βαθμωτής συνάρτησης ϕ που ονομάζεται βαθμωτό δυναμικό. Με βάση την παρατήρηση αυτή, η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου \vec{E} εκφράζεται με τη βοήθεια των συναρτήσεων δυναμικού ως εξής:

$$\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.8)$$

Σε ομογενή και ισοτροπικό χώρο ισχύει:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.9)$$

και

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.10)$$

όπου ϵ και μ η διηλεκτρική σταθερά και η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου. Επιστρέφοντας στις εξισώσεις Maxwell και λαμβάνοντας υπόψη τις εξισώσεις (2.6) και (2.8) προκύπτουν οι σχέσεις που συνδέουν τις δύο συναρτήσεις δυναμικού, δηλαδή:

$$\nabla^2 \phi + \nabla \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \mu \vec{J} + \mu \epsilon \left[-\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \quad (2.12)$$

\vec{H} (2.12) ισοδυναμεί με τη σχέση:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} - \mu \epsilon \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \quad (2.13)$$

Το ζεύγος διαφορικών εξισώσεων (2.11) και (2.13) που εμπλέκει και τις δύο συναρτήσεις δυναμικού \vec{A} και ϕ μπορεί να αποσυμπλεχθεί, ώστε να προκύψουν

δύο ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις για κάθε μία από τις \vec{A} και ϕ . Αυτό είναι δυνατό με βάση το ότι η απόκλιση του προσδιοριστέου διανυσματικού δυναμικού μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να απλοποιηθούν οι (2.11) και (2.13). Η επιλογή, που οδηγεί σε σημαντική απλοποίηση, είναι η γνωστή συνθήκη Lorentz:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.14)$$

με βάση την οποία οι (2.11) και (2.13) μετατρέπονται ως εξής:

$$\nabla^2 \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (2.15)$$

και

$$\nabla^2 \vec{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J} \quad (2.16)$$

Συνεπώς, με την ανωτέρω επιλογή των συναρτήσεων δυναμικού, κάθε μία από τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν τα δυναμικά ικανοποιεί την αντίστοιχη κυματική εξίσωση. Από αυτές προκύπτει ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος, ενώ το βαθμωτό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή από την κατανομή των πηγών φορτίου. Ασφαλώς, οι δύο αυτές κατανομές συνδέονται μέσω της σχέσης (2.5) γεγονός, άλλωστε, που επιβεβαιώνει την αλληλεξάρτηση των \vec{A} και ϕ μέσω της συνθήκης Lorentz.

Οι εξισώσεις (2.15) και (2.16) έχουν ως λύσεις κυματικές συναρτήσεις. Ενδεικτικά και κυρίως για λόγους φυσικής ερμηνείας, εξετάζεται η απλή περίπτωση χώρου χωρίς πηγές. Τότε, η (2.15) γράφεται:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0 \quad (2.17)$$

όπου

$$c = \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (2.18)$$

η ταχύτητα του φωτός στο μέσο διάδοσης. Η αντίστοιχη διανυσματική διαφορική εξίσωση ικανοποιείται από το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} . Η πλέον απλή περίπτωση για τη λύση της (2.17) προκύπτει όταν το βαθμωτό δυναμικό ϕ είναι συνάρτηση μιας μόνο χωρικής μεταβλητής, δηλαδή $\phi = \phi(z, t)$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της (2.17) είναι της μορφής:

$$\phi(z, t) = f(t - \frac{z}{c}) + g(t + \frac{z}{c}) \quad (2.19)$$

όπου f και g αυθαίρετες διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f(t - \frac{z}{c})$ είναι κυματική συνάρτηση που παριστάνει κύμα που οδεύει κατά τη θετική φορά

του άξονα των z , ενώ η $g(t + \frac{z}{c})$ παριστάνει κύμα που οδεύει κατά την αρνητική φορά του άξονα z . Αποδεικνύεται ότι και οι εξισώσεις (2.15) έως (2.17) επιδέχονται λύσεις κατά περίπτωση βαθμωτές ή διανυσματικές συναρτήσεις που είναι κυματικής μορφής. Επομένως, οι εξισώσεις Maxwell προβλέπουν την μετάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με ταχύτητα αυτήν του φωτός στο μέσο διάδοσης. Οι γενικές λύσεις των εξισώσεων (2.15) και (2.16) προκύπτουν υπό τη μορφή χωρικών ολοκληρωμάτων σε αναλογία προς τις αντίστοιχες λύσεις της εξισώσης Poisson που προκύπτει από τις (2.15) και (2.16) στη στατική περίπτωση ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$). Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \frac{1}{R} \rho(x', y', z', t - \frac{R}{c}) dV' \quad (2.20)$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{R} \rho(x', y', z', t - \frac{R}{c}) dV' \quad (2.21)$$

όπου

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (2.22)$$

η απόσταση μεταξύ του σημείου $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, όπου υπολογίζεται το δυναμικό, και του σημείου $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ που καθορίζει τη θέση του στοιχειώδους όγκου $dV' = dx'dy'dz'$ ο οποίος συνεισφέρει το στοιχειώδες φορτίο ή ρεύμα.

Τα χωρικά ολοκληρώματα (2.20) και (2.21) εκτείνονται στο συνολικό χώρο V , όπου είναι κατανεμημένες οι πηγές. Πρέπει να τονισθεί ότι ισχύει η αρχή της υπέρθεσης, σύμφωνα με την οποία είναι δυνατός ο υπολογισμός των μερικών δυναμικών που οφείλονται σε μέρος των πηγών, λαμβάνοντας υπόψη κατά την ολοκλήρωση των (2.20) και (2.21) μόνο τις πηγές αυτές. Τέλος, αποδεικνύεται ότι εφόσον οι πυκνότητες ρ και \vec{J} ικανοποιούν τη συνθήκη συνέχειας του φορτίου (2.5) και οι συναρτήσεις δυναμικού ϕ και \vec{A} ικανοποιούν τη συνθήκη Lorentz (2.14).

Παρά το γεγονός ότι μέχρι το σημείο αυτό η χρονική εξάρτηση των διαφόρων μεγεθών είναι αυθαίρετη, στη συνέχεια η ανάλυση ότι περιορισθεί στην περίπτωση πηγών και πεδίων που μεταβάλλονται ημιτονοειδώς με το χρόνο. Ο περιορισμός αυτός διευκολύνει ιδιαίτερα την ανάλυση των διαφόρων ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων με την εισαγωγή φασιθετών, δηλαδή σημειακών συναρτήσεων που είναι ανεξάρτητες του χρόνου. Η σχέση που υιοθετείται για τη σύνδεση του φασιθέτη H ενός μεγέθους (που συμβολίζεται με κεφαλαίο χαρακτήρα) και της αντίστοιχης στιγμιαίας τιμής $h(t)$ (που υιοθετείται με τον αντίστοιχο μικρό χαρακτήρα όταν χρειάζεται ο υπολογισμός της) είναι:

$$h(x, y, z, t) = \operatorname{Re}\{H(x, y, z)e^{j\omega t}\} \quad (2.23)$$

όπου $\omega = 2\pi f$ η κυκλική συχνότητα του ημιτονοειδούς μεγέθους.

Ο περιορισμός στην περίπτωση πηγών και πεδίων ημιτονοειδούς μεταβολής ως προς το χρόνο οφείλεται σε δύο λόγους. Αφενός, στη σημαντική απλοποίηση του προβλήματος, το οποίο στη γενική περίπτωση είναι εξαιρετικά δύσκολο να αντιμετωπισθεί και, αφετέρου, στο γεγονός ότι τα σήματα τα οποία εκπέμπουν ή λαμβάνουν οι κεραίες είναι ζωνοπερατά, με σχετικά μικρό εύρος ζώνης περί τη φέρουσα συχνότητα. Επομένως, η ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά μιας κεραίας μπορεί να προσεγγισθεί σε όλο το εύρος συχνοτήτων λειτουργίας από τη συμπεριφορά της φέρουσας συχνότητας. Οι υψηλιώδεις εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην περίπτωση ημιτονοειδούς μεταβολής πηγών και πεδίων λαμβάνουν τη μορφή:

Εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.25)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (2.26)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \rho \quad (2.28)$$

Συναρτήσεις Δυναμικού

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.29)$$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\Sigma} \quad (2.30)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.31)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - j\omega \vec{A} \quad (2.32)$$

Συνθήκη Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\varepsilon\phi \quad (2.33)$$

Στις προηγούμενες σχέσεις k είναι ο κυματικός αριθμός στο μέσο διάδοσης με

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c} \quad (2.34)$$

Από την (2.32), προκύπτει η έκφραση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσει μόνο του διανυσματικού δυναμικού από τη σχέση:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\left(\frac{\omega}{k^2}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (2.35)$$

Τέλος, οι γενικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων στην περίπτωση ημιτονοειδούς μεταβολής ως προς το χρόνο μεταπίπτουν στις:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint_V \rho(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (2.36)$$

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (2.37)$$

2.2 Η Ολοκληρωτική Εξίσωση του Pocklington

Ας υποθέσουμε ότι ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα προσπίπτει στην επιφάνεια ενός αγώγιμου σύρματος, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.1(α), και ονομάζεται προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$. Όταν το αγώγιμο σύρμα πρόκειται για μια κεραία, το προσπίπτον πεδίο δημιουργείται από την τροφοδοσία της κεραίας. Ένα μέρος του προσπίπτοντος κύματος όταν προσπέσει στην επιφάνεια του σύρματος επάγει σε αυτή μία πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J}_s (A/m). Η επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J}_s δημιουργεί και επανεκπέμπει ένα ηλεκτρικό πεδίο που αναφέρεται ως ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$. Επομένως, σε κάθε σημείο του χώρου το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο $\mathbf{E}^t(\mathbf{r})$ είναι το άθροισμα του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου πεδίου, δηλαδή:

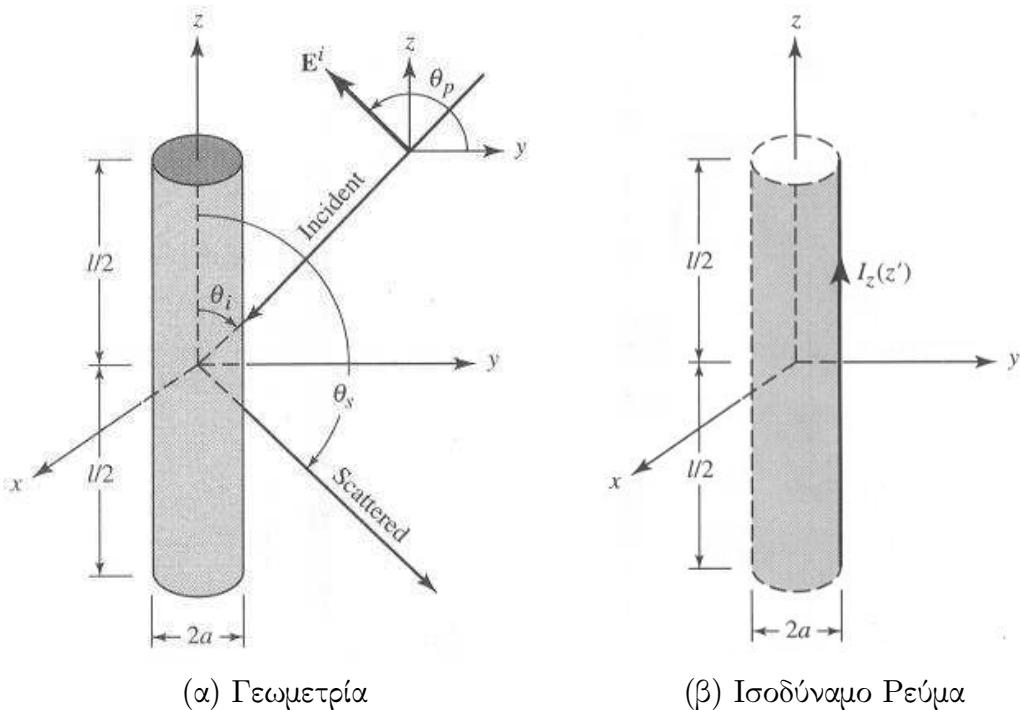
$$\mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \quad (2.38)$$

όπου

$$\mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \text{συνολικό ηλεκτρικό πεδίο}$$

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \text{προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο}$$

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \text{ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο}$$



Σχήμα 2.1: Προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό κύμα σε αγώγιμο σύρμα

Όταν το σημείο παρατήρησης μετακινηθεί στην επιφάνεια του σύρματος ($r = r_s$) και το σύρμα είναι πλήρως αγώγιμο, το συνολικό εφαπτόμενο ηλεκτρικό πεδίο εξαφανίζεται. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το ηλεκτρικό πεδίο που εκπέμπεται από το δίπολο έχει μία ακτινική συνιστώσα (E_r) και μία εφαπτομενική συνιστώσα (E_z). Οι συνιστώσες αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$$E_\rho = E_y = j \frac{\eta I_0}{4\pi y} \left[\left(z - \frac{l}{2} \right) \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \left(z + \frac{l}{2} \right) \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2z \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \frac{e^{-jkr}}{r} \right] \quad (2.39)$$

$$E_z = -j \frac{\eta I_0}{4\pi} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} - 2 \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \frac{e^{-jkr}}{r} \right] \quad (2.40)$$

από όπου γίνεται σαφές ότι στην επιφάνεια του σύρματος η εφαπτομενική συνιστώσα γίνεται

$$E_z^t(r = r_s) = E_z^i(r = r_s) + E_z^s(r = r_s) = 0 \quad (2.41)$$

ή

$$E_z^s(r = r_s) = -E_z^i(r = r_s) \quad (2.42)$$

Γενικά το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος \mathbf{J}_s δίνεται από τη σχέση (2.35):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= -j\omega \mathbf{A} - j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= -j \frac{1}{\omega\mu\varepsilon} [k^2 \mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})] \end{aligned} \quad (2.43)$$

Θα εφαρμόσουμε τη σχέση αυτή (2.43) για την περίπτωση της κωνικής σπείρας που εξετάζουμε. Το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} δίνεται από τη σχέση (2.37). Επειδή η πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_s είναι γραμμική για την αναλυόμενη διάταξη το τριπλό ολοκλήρωμα γίνεται επιφανειακό και η ολοκλήρωση πραγματοποιείται πάνω στην επιφάνεια της κωνικής σπείρας. Έτσι η (2.37) μεταπίπτει στην:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J}_s(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dS' \quad (2.44)$$

Θα θεωρήσουμε ότι η σπείρα έχει κυκλική διατομή, επομένως μπορούμε να αναλύσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της σχέσης (2.44) σε μία ολοκλήρωση κατά μήκος της σπείρας, δηλαδή παράλληλα στο εφαπτόμενο στη σπείρα μοναδιαίο διάνυσμα που δίνεται από τη σχέση (1.8) και σε μια ολοκλήρωση κατά μήκος της κυκλικής διατομής της έλικας:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s'=-L}^L \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \vec{J}_s \frac{e^{-jkR}}{R} \rho d\varphi' ds' \quad (2.45)$$

όπου

- s' το εφαπτόμενο διάνυσμα στη σπείρα
- φ' η γωνία που συνιστά την κυκλική διατομή της σπείρας (είναι διαφορετική από τη γωνία ϕ των κυλινδρικών συνταταγμένων)
- ρ η ακτίνα της κυκλικής διατομής της σπείρας

Επειδή θεωρούμε ότι η διατομή της σπείρας είναι πολύ μικρή η πυκνότητα ρεύματος J_s δεν εξαρτάται από τη γωνία φ και μπορούμε να γράψουμε:

$$2\pi\rho \cdot \vec{J}_s(\phi') = I(\phi') \cdot \hat{s}(\phi') \Rightarrow \vec{J}_s(\phi') = \frac{1}{2\pi\rho} \cdot I(\phi') \cdot \hat{s}(\phi') \quad (2.46)$$

όπου ϕ' η αζιμούθια γωνία των κυλινδρικών συνταταγμένων.

Στο επόμενο σχήμα φαίνεται μία μεγέθυνση ενός τμήματος της έλικας. Προφανώς υπάρχει καμπυλότητα η οποία δε φαίνεται στο σχήμα. Ως $I(\phi')$ θεωρούμε την ισοδύναμη ένταση ρεύματος που βρίσκεται σε απόσταση ρ από τον άξονα της σπείρας.

Η εξίσωση (2.45) μέσω της (2.46) γίνεται:

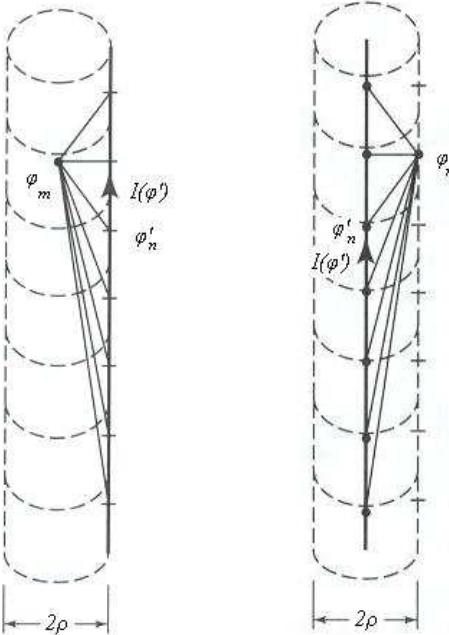
$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{s'=-L}^L \hat{s}(\phi') I(\phi') \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' \right] ds' \quad (2.47)$$

Αν υποθέσουμε ότι η διατομή της σπείρας είναι πολύ μικρή ($\alpha \ll \lambda$) τότε ισχύει:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\varphi' = \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (2.48)$$

οπότε η (2.47) γίνεται:

$$\vec{A} = \mu \int_{s'=-L}^L \hat{s}(\phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} ds' \quad (2.49)$$



(α) Στην επιφάνεια (β) Κατά τον άξονα

Σχήμα 2.2: Το ισοδύναμο ρεύμα κατά μήκος της σπείρας

Για οποιοδήποτε από τα μοντέλα του σχήματος 2.2 η απόσταση R ενός σημείου στην επιφάνεια ή στον άξονα της σπείρας, στο οποίο αντιστοιχεί γωνία ϕ και του σημείου στον άξονα ή στην επιφάνεια της σπείρας αντίστοιχα (ανάλογα με το μοντέλο), στο οποίο αντιστοιχεί γωνία ϕ' είναι:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (2.50)$$

και μέσω της (1.3):

$$\begin{aligned} R &= \left| (x(\phi) - x(\phi')) \cdot \hat{x} + (y(\phi) - y(\phi')) \cdot \hat{y} + (z(\phi) - z(\phi')) \cdot \hat{z} \right| \\ &= \sqrt{(x(\phi) - x(\phi'))^2 + (y(\phi) - y(\phi'))^2 + (z(\phi) - z(\phi'))^2} \end{aligned}$$

Από την (1.1):

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\alpha\phi \cos \phi - \alpha\phi' \cos \phi')^2 + (\alpha\phi \sin \phi - \alpha\phi' \sin \phi')^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\phi - \frac{h}{2\pi}\phi'\right)^2 + \alpha_e^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cos(\phi - \phi')) + \frac{h^2}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2} \end{aligned} \quad (2.51)$$

,όπου $\alpha_e \cong \sqrt{2}r$ (από τη Θεωρία Κεραιών).

Επίσης:

$$ds' = |d\vec{r}'| = \left| \frac{d\vec{r}'}{d\phi'} \right| \cdot |d\phi'| \quad (2.52)$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (1.7) η (2.52) γίνεται:

$$ds' = \sqrt{\alpha^2 \left(1 + \phi'^2 \right) + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} \cdot d\phi' \quad (2.53)$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (1.8) και (2.53) στην (2.49) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \mu \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \left(\frac{\hat{x} \cdot (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') + \hat{y} \cdot (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') + \hat{z} \cdot \frac{h}{2\pi}}{\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2 \phi'^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2}} \right. \\ &\quad \cdot I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \sqrt{\alpha^2 \left(1 + \phi'^2 \right) + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2} d\phi' \\ &= \mu \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \left(\left(\hat{x} \cdot (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') + \hat{y} \cdot (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') + \hat{z} \cdot \frac{h}{2\pi} \right) \right. \\ &\quad \cdot I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \left. \right) d\phi' \\ &= \mu \cdot \left(\hat{x} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \right. \\ &\quad + \hat{y} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \\ &\quad \left. + \hat{z} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Επιστρέφουμε στη σχέση (2.43). Η σχέση αυτή λαμβάνοντας υπόψη ότι

$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}\vec{E}(r) &= -j\frac{\omega^2\mu\varepsilon}{\omega\mu\varepsilon} [\vec{A} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})] \\ &= -j\omega \left(\vec{A} + \frac{1}{k^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right)\end{aligned}\quad (2.55)$$

Πολλαπλασιάζουμε τη σχέση (2.55) με το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα

$$\hat{s} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \cdot \hat{z}}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}$$

για να προκύψει το εφαπτόμενο στη σπείρα πεδίο.

Έχουμε:

$$\hat{s} \cdot \vec{E}(r) = -j\omega \left[\hat{s} \cdot \vec{A} + \frac{1}{k^2} \cdot \hat{s} \cdot \left(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \right) \right] \quad (2.56)$$

Θα υπολογίσουμε το εσωτερικό γινόμενο $\hat{s} \cdot \vec{A}$. Με τη βοήθεια της σχέσης (2.54):

$$\begin{aligned}\hat{s} \cdot \vec{A} &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \cdot \hat{z}}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} \cdot \mu \cdot \left(\hat{x} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \right. \\ &\quad + \hat{y} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \\ &\quad \left. + \hat{z} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \\ &= \mu \cdot \left(\frac{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \right. \\ &\quad + \frac{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \\ &\quad \left. + \frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right)\end{aligned}\quad (2.57)$$

Ο τελεστής ∇ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial x} \cdot \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \hat{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \hat{x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \hat{y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \hat{z} \\ &= \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \phi}} \cdot \hat{x} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{\frac{\partial y}{\partial \phi}} \cdot \hat{y} + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial \phi}} \cdot \hat{z}\end{aligned}\quad (2.58)$$

και μέσω της σχέσης (1.1):

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{z} \quad (2.59)$$

οπότε με τη βοήθεια της σχέσης (2.54):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \mu \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{z} \right) \cdot \\ &\quad \left(\hat{x} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \right. \\ &\quad + \hat{y} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' + \\ &\quad \left. + \hat{z} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \\ &= \mu \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \right. \\ &\quad + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \\ &\quad \left. + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \right)\end{aligned}\quad (2.60)$$

Από τις (2.59) και (2.60) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{z} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \right) \\
 &\quad (2.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{s} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) &= \frac{\frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \cdot \hat{z}}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}} \cdot \\
 &\quad \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{z} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \right) \\
 &\quad (2.62)
 \end{aligned}$$

με τη βοήθεια της σχέσης (1.1) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\hat{s} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})) &= \mu \cdot \frac{((\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi) \cdot \hat{x} + (\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi) \cdot \hat{y} + (\frac{h}{2\pi}) \cdot \hat{z})}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{x} + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{y} + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \cdot \hat{z} \right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \\
&\quad + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \Bigg) \\
&= \mu \cdot \frac{\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial \phi}}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \\
&\quad + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \Bigg) \\
&= \mu \cdot \frac{3}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}} \\
&\quad \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \right. \\
&\quad + \frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) + \\
&\quad + \frac{1}{\frac{h}{2\pi}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \frac{h}{2\pi} I(\phi') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) \Bigg)
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Αντικαθιστούμε τις σχέσεις (2.57) και (2.63) στην εξίσωση (2.56) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{s} \cdot \vec{E}(r) = & -j\omega\mu \left[\underbrace{\frac{\alpha \cos \phi - \alpha\phi \sin \phi}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}}}_{u_1(\phi)} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}(\alpha \cos \phi' - \alpha\phi' \sin \phi')}_{O_1(\phi, \phi')} I(\phi') d\phi' + \right. \\
 & + \underbrace{\frac{\alpha \sin \phi + \alpha\phi \cos \phi}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}}}_{u_2(\phi)} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}(\alpha \sin \phi' + \alpha\phi' \cos \phi')}_{O_2(\phi, \phi')} I(\phi') d\phi' + \\
 & + \underbrace{\frac{\frac{h}{2\pi}}{\sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}}}_{u_3(\phi)} \cdot \int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \frac{h}{2\pi}}_{O_3(\phi, \phi')} I(\phi') d\phi' + \\
 & + \underbrace{\frac{w(\phi)}{3}}_{k^2 \sqrt{\alpha^2(1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}} \cdot \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\underbrace{\frac{1}{\alpha \cos \phi - \alpha\phi \sin \phi}}_{v_1(\phi)} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}(\alpha \cos \phi' - \alpha\phi' \sin \phi')}_{O_1(\phi, \phi')} I(\phi') d\phi' \right) + \right. \right. \\
 & + \underbrace{\frac{1}{\alpha \sin \phi + \alpha\phi \cos \phi}}_{v_2(\phi)} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}(\alpha \sin \phi' + \alpha\phi' \cos \phi')}_{O_2(\phi, \phi')} I(\phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + \underbrace{\frac{1}{\frac{h}{2\pi}}} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{\phi'=-2\pi N}^{2\pi N} \underbrace{\frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \frac{h}{2\pi}}_{O_3(\phi, \phi')} I(\phi') d\phi' \right) \right) \right] \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση (2.64) καλείται ολοκληροδιαφορική εξίσωση του Pocklington και θα χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό της ρευματικής κατανομής κατά μήκος της κωνικής σπείρας. Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των τυμημάτων η οποία αναλύεται στη συνέχεια.

2.3 Η Μέθοδος των Τμημάτων

Η εξίσωση (2.64) έχει τη μορφή:

$$F(g) = h \quad (2.65)$$

όπου F είναι ένας γνωστός γραμμικός τελεστής, h μια γνωστή συνάρτηση και g η άγνωστη συνάρτηση. Για την εξίσωση (2.64) ο F είναι ένας ολοκληροδιαφορικός τελεστής, h είναι το εφαπτόμενο ηλεκτρικό πεδίο στη σπείρα και g η άγνωστη ρευματική κατανομή. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε τη συνάρτηση g , δεδομένου ότι οι F και h είναι γνωστοί.

Παρότι το αντίστροφο πρόβλημα είναι πολύ συχνά μη επιλύσιμο σε κλειστή μορφή, η γραμμικότητα του τελεστή F καθιστά δυνατή την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Μια τεχνική, γνωστή ως *Μέθοδος των Τμημάτων* απαιτεί την ανάλυση της άγνωστης συνάρτησης σε γραμμικό συνδυασμό N όρων. Δηλαδή:

$$g(z') \simeq a_1 g_1(z') + a_2 g_2(z') + \dots + a_N g_N(z') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(z') \quad (2.66)$$

Οι όροι a_n είναι άγνωστες σταθερές και οι $g_n(z')$ είναι γνωστές συναρτήσεις που καλούνται **συναρτήσεις βάσης**. Το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $g_n(z')$ είναι το ίδιο με αυτό της συνάρτησης $g(z')$. Αντικαθιστώντας τη σχέση (2.66) στην (2.65) και λαμβάνοντας υπόψη τη γραμμικότητα του τελεστή F η (2.65) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^N a_n F(g_n) = h \quad (2.67)$$

Οι συναρτήσεις βάσης $g_n(z')$ επιλέγονται έτσι ώστε κάθε όρος $F(g_n)$ στην (2.67) να μπορεί να υπολογιστεί εύκολα και κατά προτίμηση σε κλειστή μορφή. Το μόνο που απομένει είναι ο προσδιορισμός των αγνώστων σταθερών a_n .

Η ανάπτυξη της (2.67) οδηγεί σε μια εξίσωση με N αγνώστους. Η εξίσωση αυτή δεν είναι αρκετή για τον προσδιορισμό των N αγνώστων σταθερών a_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Για να υπολογιστούν οι N άγνωστες σταθερές απαιτούνται N γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί υπολογίζοντας την (2.67) σε N διαφορετικά σημεία (π.χ. εφαρμόζοντας συνοριακές συνθήκες). Αυτό αναφέρεται ως *point-matching*. με τον τρόπο αυτό η (2.67) λαμβάνει τη μορφή:

$$\sum_{n=1}^N I_n F(g_n) = h_m, \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.68)$$

Σε μορφή πινάκων η (2.68) γράφεται:

$$[Z_{mn}] [I_n] = [V_m] \quad (2.69)$$

όπου

$$Z_{mn} = F(g_n) \quad (2.70\alpha')$$

$$I_n = a_n \quad (2.70\beta')$$

$$V_m = h_m \quad (2.70\gamma')$$

Οι άγνωστες σταθερές a_n μπορούν να υπολογιστούν επιλύοντας την (2.69) χρησιμοποιώντας τεχνικές αντιστροφής πινάκων, δηλαδή

$$[I_n] = [Z_{mn}]^{-1} [V_m] \quad (2.71)$$

2.3.1 Συναρτήσεις Βάσης

Ένα πολυ σημαντικό θέμα στην αριθμητική επίλυση ενός προβλήματος είναι η επιλογή των συναρτήσεων βάσης. Γενικά, επιλέγονται ως συναρτήσεις βάσης συναρτήσεις που αναπαριστούν και περιγράφουν με ακρίβεια την άγνωστη συνάρτηση, ενώ ταυτόχρονα να ελαχιστοποιούν το υπολογιστικό κόστος που απαιτείται για τον προσδιορισμό της.

Θεωρητικά, υπάρχουν πολλές συναρτήσεις βάσης. Παρόλα αυτά, μόνο κάποιες συγκεκριμένες χρησιμοποιούνται στην πράξη. Οι συναρτήσεις βάσης διαχρίνονται σε δύο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις συναρτήσεις μερικού πεδίου ορισμού, που είναι μη μηδενικές μόνο σε ένα μέρος του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $g(x')$ (το πεδίο ορισμού της $g(x')$ είναι η επιφάνεια της διάταξης). Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις συναρτήσεις ολικού πεδίου ορισμού, που ορίζονται σε όλο το πεδίο ορισμού της άγνωστης συνάρτησης. Η ανάλυση με τη βοήθεια συναρτήσων βάσης ολικού πεδίου ορισμού είναι ανάλογη με τη γνωστή ανάλυση Fourier.

A. Συναρτήσεις Μερικού Πεδίου Ορισμού

Οι συναρτήσεις μερικού πεδίου ορισμού είναι οι πιο συνηθισμένες από τις δύο κατηγορίες συναρτήσεων βάσης. Σε αντίθεση με τις συναρτήσεις ολικού πεδίου ορισμού, μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς να απαιτείται γνώση της φύσης της συνάρτησης που περιγράφουν.

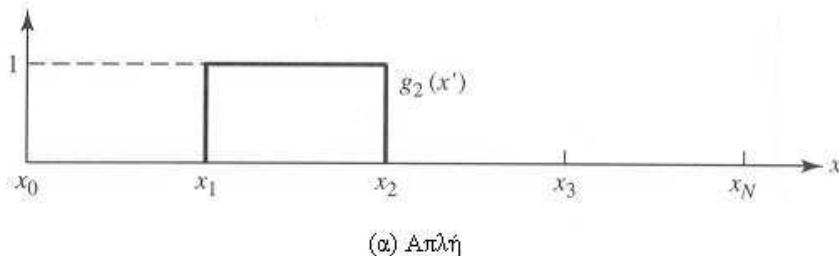
Η προσέγγιση μερικού πεδίου ορισμού περιλαμβάνει κατάτμηση της διάταξης σε N μη επικαλυπτόμενα τμήματα, όπως φαίνεται στον άξονα x του σχήματος

2.3(α). Στο συγκεκριμένο σχήμα τα τμήματα απεικονίζονται ίδιου μήκους, χωρίς αυτό να είναι απαραίτητο γενικά. Οι συναρτήσεις βάσης προσδιορίζονται σε συνδυασμό με τα όρια ενός ή και περισσοτέρων τμημάτων.

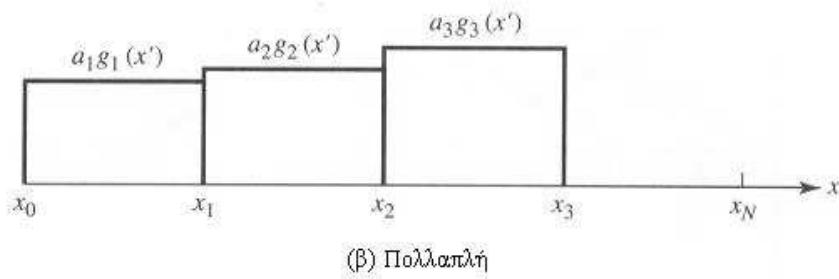
Ίσως η πιο γνωστή από τις συναρτήσεις βάσης αυτής της κατηγορίας είναι η τμηματικά σταύροςή ή “παλμική” συνάρτηση, που φαίνεται στο σχήμα 2.3(α). Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως εξής:

Τμηματικά Σταύρος

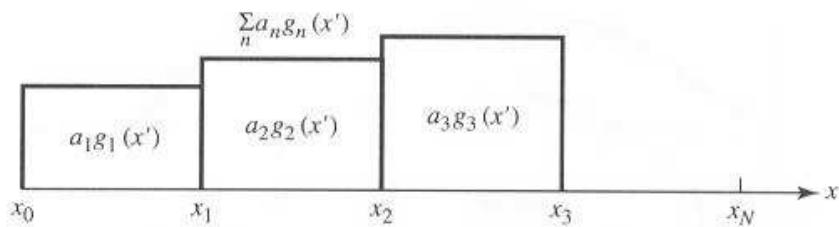
$$g_n(x') = \begin{cases} 1 & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.72)$$



(α) Απλή



(β) Πολλαπλή



(γ) Αναπαράσταση της Συνάρτησης

Σχήμα 2.3: Τμηματικά σταύρος συνάρτηση

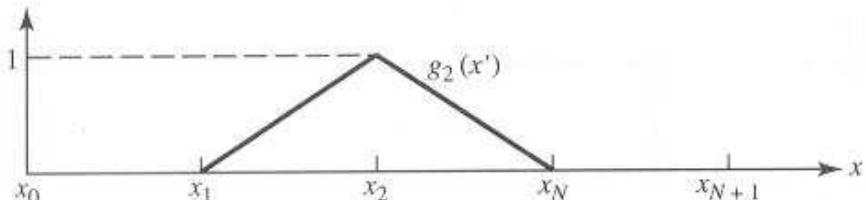
Αφού προσδιοριστούν τα συσχετιζόμενα γινόμενα η συνάρτηση παράγει

βαθμωτές αναπαραστάσεις της άγνωστης συνάρτησης, όμοιες με αυτές των σχημάτων 2.3(β) και 2.3(γ).

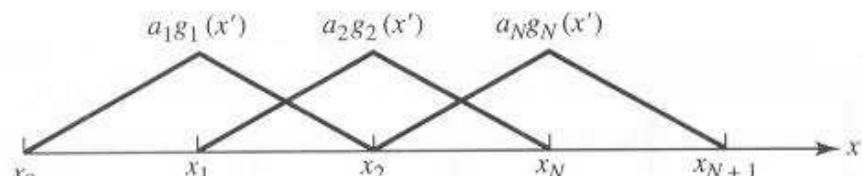
Μια άλλη γνωστή συνάρτηση βάσης είναι η τυμηματικά γραμμική, ή "τριγωνική", που φαίνεται στο σχήμα 2.4(α). Ορίζεται ως:

Τυμηματικά Γραμμική

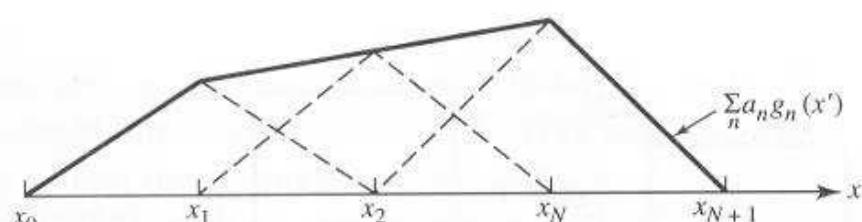
$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{x' - x'_{n-1}}{x'_n - x'_{n-1}} & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{x'_{n+1} - x'}{x'_{n+1} - x'_n} & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.73)$$



(α) Απλή



(β) Πολλαπλή

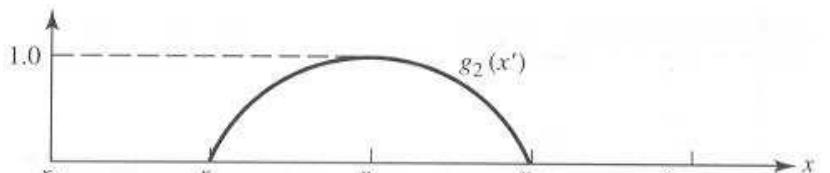


(γ) Αναπαράσταση της Συνάρτησης

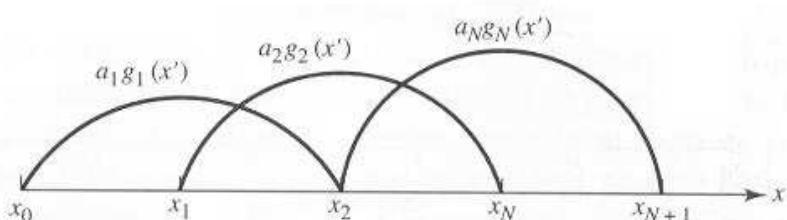
Σχήμα 2.4: Τυμηματικά γραμμική συνάρτηση

Η συνάρτηση φαίνεται να καλύπτει δύο τυμήματα και να επικαλύπτει γειτονικές συναρτήσεις [Σχήμα 2.4(β)]. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχήμα 2.4(γ)

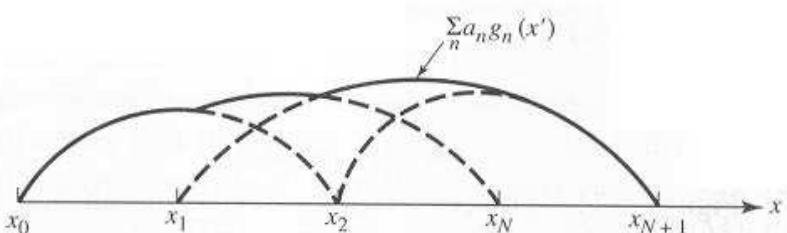
και είναι πιο ομαλό σε σύγχριση με την “παλμική” συνάρτηση, με περισσότερο όμως υπολογιστικό κόστος.



(a) Απλή



(β) Πολλαπλή



(γ) Αναπαράσταση της Συνάρτησης

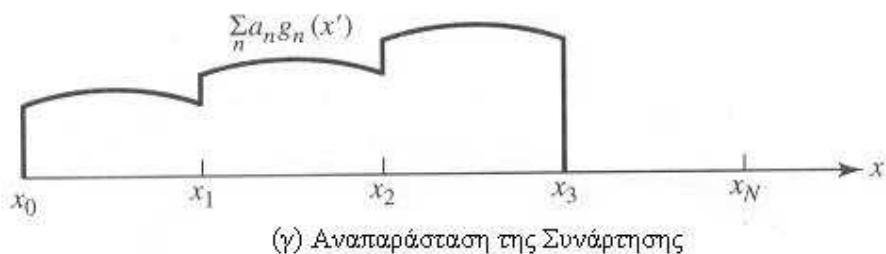
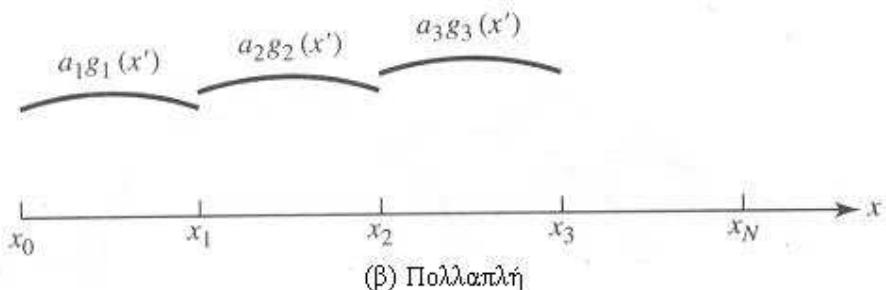
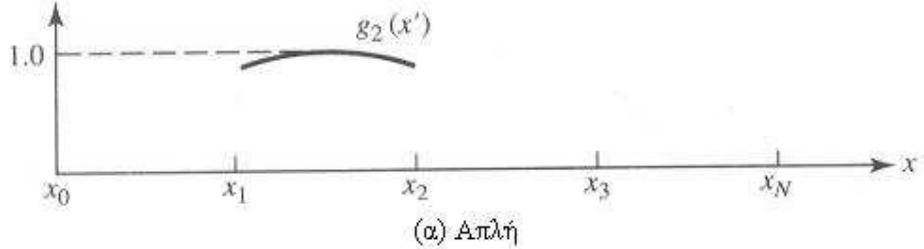
Σχήμα 2.5: Τμηματικά ημιτονοειδής συνάρτηση

Αύξηση της πολυπλοκότητας των συναρτήσεων μερικού πεδίου ορισμού περισσότερο από την “τριγωνική” συνάρτηση δε συνεπάγεται απαραίτητα και πιθανή βελτίωση της ακρίβειας της αναπαράστασης. Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις όπου πιο εξειδικευμένες συναρτήσεις είναι χρήσιμες για άλλους λόγους. Παραδείγματος χάρη, υπάρχουν ολοκληρωτικοί τελεστές που υπολογίζονται χωρίς αριθμητική ολοκλήρωση όταν οι ολοκληρωτέες ποσότητες πολλαπλασιαστούν με $\sin kx'$ ή $\cos kx'$, όπου x' είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης. Στις περιπτώσεις αυτές υπάρχουν σημαντικά πλεονεκτήματα σε υπολογιστικό χρόνο και σε σφάλματα αν χρησιμοποιηθούν συναρτήσεις βάσης όπως η τμηματικά ημιτονοειδής συνάρτηση του σχήματος 2.5 ή η συνάρτηση συντμημένου

συνημιτόνου του σχήματος 2.6. Οι συναρτήσεις αυτές ορίζονται ως:

Τμηματικά Ημιτονοειδής

$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{\sin [k(x' - x'_{n-1})]}{\sin [k(x'_n - x'_{n-1})]} & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{\sin [k(x'_{n+1} - x')]}{\sin [k(x'_{n+1} - x'_n)]} & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.74)$$



Σχήμα 2.6: Συνάρτηση συντμημένου συνημιτόνου

Συντμημένου Συνημιτόνου

$$g_n(x') = \begin{cases} \cos \left[k \left(x' - \frac{x'_n - x'_{n-1}}{2} \right) \right] & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.75)$$

B. Συναρτήσεις Ολικού Πεδίου Ορισμού

Οι συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου ορισμού, όπως γίνεται κατανοητό και από το όνομά τους, ορίζονται και είναι μη μηδενικές σε ολόκληρο το μήκος της διάταξης που αναλύεται. Εποι, στην περίπτωση αυτή δε συμβαίνει κατάτυπηση της διάταξης κατά τη χρήση τους.

Μία συνάρτηση βάσης ολικού πεδίου ορισμού είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση, δηλαδή:

Ολικού Πεδίου Ορισμού

$$g_n(x') = \cos \left[\frac{(2n-1)\pi x'}{l} \right] \quad -\frac{l}{2} \leq x' \leq \frac{l}{2} \quad (2.76)$$

Να σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση βάσης είναι πολύ χρήσιμη στην μοντελοποίηση της ρευματικής κατανομής σε ένα δίπολο το οποίο είναι γνωστό ότι έχει ημιτονοειδή ρευματική κατανομή. Το κύριο πλεονέκτημα των συναρτήσεων βάσης ολικού πεδίου ορισμού εντοπίζεται σε προβλήματα όπου η άγνωστη συνάρτηση υποτίθεται εκ των προτέρων ότι ακολουθεί μία γνωστή κατανομή. Τέτοιες συναρτήσεις ολικού πεδίου ορισμού μπορούν να δώσουν μία αποδεκτή αναπαράσταση της άγνωστης συνάρτησης, ενώ χρησιμοποιούν πολύ λιγότερους όρους στην ανάπτυξη της (2.66) από αυτούς που θα απαιτούνταν για συναρτήσεις μερικού πεδίου ορισμού. Η αναπαράσταση μιας συνάρτησης με μια ημιτονοειδή ή συνημιτονοειδή συνάρτηση βάσης ολικού πεδίου ορισμού είναι όμοια με την ανάπτυξη σε σειρά Fourier.

Συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου ορισμού, όπως η (2.76) μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Tschebyscheff, Maclaurin, Legendre και Hermite ή άλλες βολικές συναρτήσεις.

2.3.2 Εφαρμογή της Μεθόδου

Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των τμημάτων, που αναπτύχθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, για τη διάταξη της κωνική σπείρας που θέλουμε να αναλύσουμε. Θα χρησιμοποιήσουμε την τμηματικά σταθερή ή “παλμική” συνάρτηση βάσης μερικού πεδίου ορισμού, δηλαδή:

$$g_k(\phi') = \begin{cases} 0 & \phi' < (k-1)\Delta \\ 1 & (k-1)\Delta \leq \phi' \leq k\Delta \\ 0 & k\Delta < \phi' \end{cases} \quad (2.77)$$

όπου

$$\Delta = \frac{2\pi N}{K}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε το άγνωστο ρεύμα $I(\phi')$ ως εξής:

$$I(\phi') = \sum_{k=1}^K a_k \cdot g_k(\phi') \quad (2.78)$$

Η εξίσωση (2.64) θεωρώντας $\mu = \mu_0$ για ελεύθερο χώρο γράφεται:

$$\begin{aligned} \hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r) &= -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi) \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_1(\phi, \phi') I(\phi') d\phi' + \right. \\ &\quad + u_2(\phi) \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_2(\phi, \phi') I(\phi') d\phi' \\ &\quad + u_3(\phi) \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_3(\phi, \phi') I(\phi') d\phi' + \\ &\quad + w(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_1(\phi, \phi') I(\phi') d\phi' \right) + \right. \\ &\quad + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_2(\phi, \phi') I(\phi') d\phi' \right) + \\ &\quad \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_3(\phi, \phi') I(\phi') d\phi' \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

Από τις (2.78) και (2.79) προκύπτει:

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r) = & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi) \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_1(\phi, \phi') \sum_{k=1}^K a_k g_k(\phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi) \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_2(\phi, \phi') \sum_{k=1}^K a_k g_k(\phi') d\phi' + u_3(\phi) \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_3(\phi, \phi') \sum_{k=1}^K a_k g_k(\phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_1(\phi, \phi') \sum_{k=1}^K a_k g_k(\phi') d\phi' \right) \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_2(\phi, \phi') \sum_{k=1}^K a_k g_k(\phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_3(\phi, \phi') \sum_{k=1}^K a_k g_k(\phi') d\phi' \right) \right) \right] \\
 & \quad (2.80)
 \end{aligned}$$

και αλλάζοντας τη σειρά άθροισης και ολοκλήρωσης:

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r) = & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi) \sum_{k=1}^K a_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_1(\phi, \phi') g_k(\phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi) \sum_{k=1}^K a_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_2(\phi, \phi') g_k(\phi') d\phi' + u_3(\phi) \sum_{k=1}^K a_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_3(\phi, \phi') g_k(\phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sum_{k=1}^K a_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_1(\phi, \phi') g_k(\phi') d\phi' \right) \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sum_{k=1}^K a_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_2(\phi, \phi') g_k(\phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sum_{k=1}^K a_k \int_{-2\pi N}^{2\pi N} O_3(\phi, \phi') g_k(\phi') d\phi' \right) \right) \right] \\
 & \quad (2.81)
 \end{aligned}$$

Αν αναπτύξουμε τη σχέση (2.81) και με τη βοήθεια της (2.77) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r) = & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m)a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi_m)a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m)a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
 & + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \Big) \Big|_{\phi=\phi_m} \Big] - \\
 & - \dots - \\
 & - j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m)a_{-2} \int_{-2\Delta}^{-\Delta} O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi_m)a_{-2} \int_{-2\Delta}^{-\Delta} O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m)a_{-2} \int_{-2\Delta}^{-\Delta} O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-2} \int_{-2\Delta}^{-\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-2} \int_{-2\Delta}^{-\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
 & + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-2} \int_{-2\Delta}^{-\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \Big) \Big|_{\phi=\phi_m} \Big] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m) a_{-1} \int_{-\Delta}^0 O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi_m) a_{-1} \int_{-\Delta}^0 O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m) a_{-1} \int_{-\Delta}^0 O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-1} \int_{-\Delta}^0 O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-1} \int_{-\Delta}^0 O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-1} \int_{-\Delta}^0 O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \Big|_{\phi=\phi_m} \right] - \\
 & - j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m) a_1 \int_0^\Delta O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi_m) a_1 \int_0^\Delta O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m) a_1 \int_0^\Delta O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_1 \int_0^\Delta O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_1 \int_0^\Delta O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_1 \int_0^\Delta O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \Big|_{\phi=\phi_m} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m)a_2 \int_{\Delta}^{2\Delta} O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\
& + u_2(\phi_m)a_2 \int_{\Delta}^{2\Delta} O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m)a_2 \int_{\Delta}^{2\Delta} O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\
& + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_2 \int_{\Delta}^{2\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) + \\
& + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_2 \int_{\Delta}^{2\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
& \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_2 \int_{\Delta}^{2\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \Big|_{\phi=\phi_m} - \\
& - \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad - \\
& - j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m)a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\
& + u_2(\phi_m)a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m)a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\
& + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) + \\
& + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
& \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \Big|_{\phi=\phi_m} \quad (2.82)
\end{aligned}$$

Οπότε θα εφαρμόσουμε τη σχέση (2.82) για όλα τα τμήματα για να έχουμε τόσες γραμμικώς ανεξάρτητες εξισώσεις όσες οι άγνωστες σταθερές a_k , δηλαδή $2K$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
 \hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r) = & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_{-K})a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_1(\phi_{-K}, \phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi_{-K})a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_2(\phi_{-K}, \phi') d\phi' + u_3(\phi_{-K})a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_3(\phi_{-K}, \phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi_{-K}) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \right|_{\phi=\phi_{-K}} - \\
 & - \dots - \\
 & - j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_{-K})a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_1(\phi_{-K}, \phi') d\phi' + \right. \\
 & + u_2(\phi_{-K})a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_2(\phi_{-K}, \phi') d\phi' + u_3(\phi_{-K})a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_3(\phi_{-K}, \phi') d\phi' + \\
 & + w(\phi_{-K}) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\
 & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
 & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial\phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \right] \Big|_{\phi=\phi_{-K}} \\
 & \quad \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r) = & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_K) a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_1(\phi_K, \phi') d\phi' + \right. \\
& + u_2(\phi_K) a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_2(\phi_K, \phi') d\phi' + u_3(\phi_K) a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_3(\phi_K, \phi') d\phi' + \\
& + w(\phi_K) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\
& + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
& \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_{-K} \int_{-K\Delta}^{-(K-1)\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \right|_{\phi=\phi_K} - \\
& - \dots - \\
& - j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_K) a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_1(\phi_K, \phi') d\phi' + \right. \\
& + u_2(\phi_K) a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_2(\phi_K, \phi') d\phi' + u_3(\phi_K) a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_3(\phi_K, \phi') d\phi' + \\
& + w(\phi_K) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\
& + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\
& \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a_K \int_{(K-1)\Delta}^{K\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \right] \Big|_{\phi=\phi_K}
\end{aligned}$$

Και σε μορφή πινάκων:

$$[E_m] = [Z_{mk}] \cdot [I_k] \quad (2.83)$$

όπου:

$$\begin{aligned} Z_{mk} = & -j\omega\mu_0 \left[u_1(\phi_m) \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} O_1(\phi_m, \phi') d\phi' + \right. \\ & + u_2(\phi_m) \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} O_2(\phi_m, \phi') d\phi' + u_3(\phi_m) \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} O_3(\phi_m, \phi') d\phi' + \\ & + w(\phi_m) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(v_1(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} O_1(\phi, \phi') d\phi' \right) + \right. \\ & + v_2(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} O_2(\phi, \phi') d\phi' \right) + \\ & \left. \left. + v_3(\phi) \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} O_3(\phi, \phi') d\phi' \right) \right) \right] \Big|_{\phi=\phi_m} \end{aligned} \quad (2.84)$$

και:

$$[I_k] = [a_k] \quad (2.85)$$

$$[E_m] = [\hat{s}(\phi) \cdot \vec{E}(r)] \quad (2.86)$$

Οπότε οι άγνωστες σταθερές $[a_k]$ προκύπτουν ως εξής:

$$[I_k] = [a_k] = [Z_{mn}]^{-1} \cdot [E_m] \quad (2.87)$$

2.4 Υπολογισμός των Ολοκληρωμάτων

Τα ολοκληρώματα που υπεισέρχονται στον υπολογισμό της άγνωστης ρευματικής κατανομής είναι τα εξής:

$$I_1(\phi) = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2}}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cdot \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2}} \cdot (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') d\phi' \quad (2.88)$$

$$I_2(\phi) = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2}}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cdot \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2}} \cdot (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') d\phi' \quad (2.89)$$

$$I_3(\phi) = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2}}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cdot \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2}} \cdot \frac{h}{2\pi} d\phi' \quad (2.90)$$

Θα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων. Η πρώτη περίπτωση είναι όταν τα τμήματα στα οποία ανήκουν τα ϕ και ϕ' είναι απομακρυσμένα μεταξύ τους, ενώ η δεύτερη αφορά τα ίδια τμήματα.

2.4.1 Απομακρυσμένα Τμήματα

Στην περίπτωση αυτή ισχύει $|\phi_m - \phi'_k| \gg 0$ ή διαφορετικά $|m - k| \gg 0$. Πρακτικά αυτό θα θεωρήσουμε ότι συμβαίνει όταν $|\phi_m - \phi'_k| > 0$. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι μεταβλητή ολοκληρωσης ϕ'_k βρίσκεται στο κέντρο του τμήματος που ολοκληρώνεται, δηλαδή:

$$\phi'_k = \frac{k\Delta + (k-1)\Delta}{2} = \Delta(k - \frac{1}{2}) = \phi'_{k_0} \quad (2.91)$$

Οπότε τα ολοκληρώματα (2.88), (2.89) και (2.90) γίνονται:

$$\begin{aligned}
 I_1(\phi) &= \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cdot\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2} \\
 &\quad \cdot (\alpha \cos \phi'_{k_0} - \alpha \phi'_{k_0} \sin \phi'_{k_0}) d\phi' = \\
 &= \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cdot\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2} \\
 &\quad \cdot (\alpha \cos \phi'_{k_0} - \alpha \phi'_{k_0} \sin \phi'_{k_0}) \cdot \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} d\phi' = \\
 &= \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cdot\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2} \\
 &\quad \cdot (\alpha \cos \phi'_{k_0} - \alpha \phi'_{k_0} \sin \phi'_{k_0}) \cdot \Delta
 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Αντίστοιχα τα άλλα ολοκληρώματα:

$$\begin{aligned}
 I_2(\phi) &= \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cdot\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2} \\
 &\quad \cdot (\alpha \sin \phi'_{k_0} + \alpha \phi'_{k_0} \cos \phi'_{k_0}) \cdot \Delta
 \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(\phi) &= \frac{e^{-jk_0\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2}}{4\pi\sqrt{\alpha^2(\phi^2 + \phi'_{k_0})^2 - 2\phi\phi'_{k_0}\cdot\cos(\phi - \phi'_{k_0})} + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi'_{k_0})^2 + \alpha_e^2} \\
 &\quad \cdot \frac{h}{2\pi} \cdot \Delta
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Έχοντας υπολογίσει τα ολοκληρώματα μπορούμε να βρούμε την αναλυτική έκφραση της αντίστασης Z_{mk} από τη σχέση (2.84). Η σχέση αυτή δίδεται στο Παράρτημα A'.1.

2.4.2 Ίδιο Τμήμα

Όταν τα ϕ_m και ϕ'_k βρίσκονται στο ίδιο τμήμα, δηλαδή $|\phi_m - \phi'_k| = 0$, τότε εργαζόμαστε ως εξής. Αν αναπτύξουμε τη συνάρτηση $f(x) = \cos(x)$ σε σειρά Maclaurin παίρνουμε:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} \quad (2.95)$$

Οπότε:

$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad (2.96)$$

Επομένως:

$$\cos(\phi - \phi') \cong 1 - \frac{(\phi - \phi')^2}{2} \quad (2.97)$$

Και:

$$\begin{aligned} & \alpha^2(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cdot \cos(\phi - \phi')) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2 \cong \\ & \cong \alpha^2 \left(\phi^2 + \phi'^2 - 2\phi\phi' \cdot \left(1 - \frac{(\phi - \phi')^2}{2} \right) \right) + \frac{h}{2\pi}(\phi - \phi')^2 + \alpha_e^2 = \quad (2.98) \\ & = (\phi - \phi')^2 \cdot \left(\alpha^2(1 + \phi\phi') + \frac{h}{2\pi} \right) + \alpha_e^2 \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$\frac{e^{-jk_0R(\phi,\phi')}}{4\pi R(\phi,\phi')}$$

που υπεισέρχεται στα ολοκληρώματα, μέσω της (2.51) και της (2.98) γινεται:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-jk_0\sqrt{(\phi-\phi')^2 \cdot (\alpha^2(1+\phi\phi') + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}}}{4\pi\sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2(1 + \phi\phi') + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}} = \\ & = \frac{\cos\left(k_0\sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2(1 + \phi\phi') + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}\right)}{4\pi\sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2(1 + \phi\phi') + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}} - \\ & - j\frac{\sin\left(k_0\sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2(1 + \phi\phi') + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}\right)}{4\pi\sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2(1 + \phi\phi') + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}} \quad (2.99) \end{aligned}$$

Για το γινόμενο $\phi\phi'$ θεωρούμε ότι η μεταβολή του ϕ' επηρεάζει ελάχιστα οπότε αντικαθιστούμε στο γινόμενο αυτό το ϕ' με $\bar{\phi}_k = (k - \frac{1}{2})\Delta$ και η (2.99) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \left(k_0 \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2 (1 + \phi \bar{\phi}_k) + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2 (1 + \phi \bar{\phi}_k) + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}} - \\ & - j \frac{\sin \left(k_0 \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2 (1 + \phi \bar{\phi}_k) + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot (\alpha^2 (1 + \phi \bar{\phi}_k) + \frac{h}{2\pi}) + \alpha_e^2}} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Θέτουμε:

$$q = \alpha^2 (1 + \phi \bar{\phi}_k) + \frac{h}{2\pi} \quad (2.101)$$

και έχουμε:

$$\frac{\cos \left(k_0 \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right) - j \sin \left(k_0 \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{(\phi - \phi')^2 \cdot q + \alpha_e^2}} = G(\phi, \phi') \quad (2.102)$$

Τα ολοκληρώματα γράφονται ως εξής:

$$I_1(\phi) = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} G(\phi, \phi') (\alpha \cos \phi' - \alpha \phi' \sin \phi') d\phi' \quad (2.103)$$

$$I_2(\phi) = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} G(\phi, \phi') (\alpha \sin \phi' + \alpha \phi' \cos \phi') d\phi' \quad (2.104)$$

$$I_3(\phi) = \int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta} G(\phi, \phi') \frac{h}{2\pi} d\phi' \quad (2.105)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μεταβολή του ϕ' επηρεάζει κυρίως τη συνάρτηση $G(\phi, \phi')$, ενώ για τα υπόλοιπα μέρη των ολοκληρωμάτων θα ισχύει $\phi' = \bar{\phi}_k = (k - \frac{1}{2})\Delta$ οπότε η βασική ολοκληρωτέα ποσότητα είναι η $G(\phi, \phi')$ που δίνεται από τη σχέση (2.102). Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της $G(\phi, \phi')$.

Κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} x = \phi' - (k - \frac{1}{2})\Delta &\Rightarrow \phi' = x + (k - \frac{1}{2})\Delta \\ \text{'Οταν} \quad \phi' &\rightarrow (k - 1)\Delta \Rightarrow x \rightarrow -\frac{\Delta}{2} \\ \phi' &\rightarrow k\Delta \Rightarrow x \rightarrow \frac{\Delta}{2} \\ dx &= d\phi' \end{aligned} \tag{2.106}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} I = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} &\left(\frac{\cos \left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} - \right. \\ &\left. - j \frac{\sin \left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} \right) dx \end{aligned} \tag{2.107}$$

Από τα αναπτύγματα Maclaurin των συναρτήσεων $\cos(x)$ και $\sin(x)$ ισχύει:

$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{και} \quad \sin(x) \cong x - \frac{x^3}{3!}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} I = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} &\left(\frac{1 - \frac{\left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)^2}{2}}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} - \right. \\ &\left. - j \frac{\left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right) - \frac{\left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)^3}{6}}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} \right) dx \end{aligned} \tag{2.108}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα "σπάει" σε τέσσερα ολοκληρώματα.

1.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} dx &= \\ = - \frac{\log \left(2\sqrt{q} \left(-x - \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta + \phi \right) + 2\sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{q}} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} dx = \\
 &= \frac{1}{4\pi\sqrt{q}} \left(\log \left[2 \left(\sqrt{q}\Delta - k\sqrt{q}\Delta + \sqrt{a_e^2 + q \left(-\frac{\Delta}{2} + \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta - \phi \right)^2} + \sqrt{q}\phi \right) \right] - \right. \\
 & \quad \left. - \log \left[2 \left(-k\sqrt{q}\Delta + \sqrt{q}\phi + \sqrt{a_e^2 + q \left(-\frac{\Delta}{2} - \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta + \phi \right)^2} \right) \right] \right)
 \end{aligned}$$

2. Είναι:

$$\begin{aligned}
 & - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)^2}{8\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} dx = \\
 & - \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{k_0^2}{8\pi} \sqrt{\left(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta \right)^2 \cdot q + \alpha_e^2} dx = \\
 & = - \frac{1}{16\pi\sqrt{q}} (k_0^2 (\log(2(\sqrt{q}\Delta - k\sqrt{q}\Delta + \\
 & + \sqrt{\alpha_e^2 + q(\frac{-\Delta}{2} + (-\frac{1}{2} + k)\Delta - \phi)^2} + \sqrt{q}\phi))\alpha_e^2 - \\
 & - \log(2(-(k\sqrt{q}\Delta) + \sqrt{q}\phi + \sqrt{\alpha_e^2 + q(-(k\Delta) + \phi)^2}))\alpha_e^2 + \\
 & + \sqrt{q}\Delta\sqrt{\alpha_e^2 + q(\frac{-\Delta}{2} + (-\frac{1}{2} + k)\Delta - \phi)^2} - \\
 & - k\sqrt{q}\Delta\sqrt{\alpha_e^2 + q(\frac{-\Delta}{2} + (-\frac{1}{2} + k)\Delta - \phi)^2} + \\
 & + \sqrt{q}\sqrt{\alpha_e^2 + q(\frac{-\Delta}{2} + (-\frac{1}{2} + k)\Delta - \phi)^2}\phi + \\
 & + k\sqrt{q}\Delta\sqrt{\alpha_e^2 + q(-(k\Delta) + \phi)^2} - \sqrt{q}\phi\sqrt{\alpha_e^2 + q(-(k\Delta) + \phi)^2})
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
& -j \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)}{4\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} dx = \\
& = -j \frac{k_0}{4\pi} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} dx = -j \frac{k_0}{4\pi} \Delta
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
& j \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{\left(k_0 \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2} \right)^3}{24\pi \sqrt{(\phi - x - (k - \frac{1}{2})\Delta)^2 \cdot q + \alpha_e^2}} dx = \\
& = \frac{jk_0^3}{24\pi} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\left(\phi - x - \left(k - \frac{1}{2} \right) \Delta \right)^2 q + \alpha_e^2 \right) dx = \\
& = \frac{jk_0^3}{24\pi} \left(\frac{q\Delta^3}{3} - kq\Delta^3 + k^2 q\Delta^3 + \Delta\alpha_e^2 + q\Delta^2\phi - 2kq\Delta^2\phi + q\Delta\phi^2 \right)
\end{aligned}$$

Οπότε συνολικά:

$$\begin{aligned}
I = & \frac{1}{144\pi\sqrt{q}} (36(-\log(2(-(k\sqrt{q}\Delta) + \sqrt{q}\phi + \sqrt{q(-(k\Delta) + \phi)^2 + \alpha_e^2}))) + \\
& + \log(2(\sqrt{q}(\Delta - k\Delta + \phi) + \sqrt{q(\Delta - k\Delta + \phi)^2 + \alpha_e^2}))) - 36j\sqrt{q}\Delta k_0 + \\
& + 2j\sqrt{q}\Delta k_0^3 (q((1 - 3k + 3k^2)\Delta^2 + (3 - 6k)\Delta\phi + 3\phi^2) + 3\alpha_e^2) + \\
& + 9k_0^2 ((\log(2(-(k\sqrt{q}\Delta) + \sqrt{q}\phi + \sqrt{q(-(k\Delta) + \phi)^2 + \alpha_e^2}))) - \\
& - \log(2(\sqrt{q}(\Delta - k\Delta + \phi) + \sqrt{q(\Delta - k\Delta + \phi)^2 + \alpha_e^2})))\alpha_e^2 + \\
& + \sqrt{q}(\phi\sqrt{q(-(k\Delta) + \phi)^2 + \alpha_e^2} - \Delta\sqrt{q(\Delta - k\Delta + \phi)^2 + \alpha_e^2} - \\
& - \phi\sqrt{q(\Delta - k\Delta + \phi)^2 + \alpha_e^2} + \\
& + k\Delta(-\sqrt{q(-(k\Delta) + \phi)^2 + \alpha_e^2} + \sqrt{q(\Delta - k\Delta + \phi)^2 + \alpha_e^2})))
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Έχουμε ουσιαστικά υπολογίσει τα ολοκληρώματα των σχέσεων (2.103), (2.104) και (2.105) οπότε από τη σχέση (2.84) βρίσκουμε την έκφραση για την αντίσταση Z_{mk} και στην περίπτωση αυτή. Η σχέση αυτή δίνεται στο Παράρτημα A'.2

Στο επόμενο Κεφάλαιο ακολουθεί η αριθμητική επίλυση του προβλήματος με τη βοήθεια του προγράμματος Matlab.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Επίλυση του Προβλήματος

Με τη βοήθεια του προγράμματος Matlab πραγματοποιήθηκε η αριθμητική επεξεργασία των αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 2. Οι παράμετροι που μπορούν να ρυθμιστούν στο πρόγραμμα είναι η συχνότητα λειτουργίας της κεραίας, η σταθερά α της σχέσης (1.1), το ύψος h της κεραίας, η διατομή r καθώς και ο αριθμός των σπειρών N . Πρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές των παραμέτρων που θα υποδειχθεί στην είσοδο του προγράμματος. Πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned} \text{μήκος κύματος} &\gg \text{μήκος τμήματος} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{c}{f} &\gg \int_{-2\pi N}^{2\pi N} |r'(\phi)| d\phi \Rightarrow \\ \frac{c}{f} &\gg \int_{-2\pi N}^{2\pi N} \sqrt{\left((\alpha \cos \phi - \alpha \phi \sin \phi)^2 + (\alpha \sin \phi + \alpha \phi \cos \phi)^2 + \left(\frac{h}{2\pi} \right)^2 \right)} d\phi \end{aligned} \tag{3.1}$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης (3.1) είναι ίσο με:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi^2\alpha\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}} \cdot &(8h^2N\pi^2\alpha + 32N\pi^4\alpha^3 + 128N^3\pi^6\alpha^3 - \\ &- h^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(-4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2})) - \\ &- 4\pi^2\alpha^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(-4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2})) + \\ &+ h^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2})) + \\ &+ 4\pi^2\alpha^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}))) \end{aligned}$$

$\Delta\eta\lambda\delta\eta$:

$$\frac{c}{f} \gg \frac{1}{8\pi^2\alpha\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}} \cdot (8h^2N\pi^2\alpha + 32N\pi^4\alpha^3 + 128N^3\pi^6\alpha^3 - h^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(-4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2})) - 4\pi^2\alpha^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(-4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2})) + h^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2})) + 4\pi^2\alpha^2\sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}\log(2(4N\pi^2\alpha + \sqrt{h^2+4\pi^2(1+4N^2\pi^2)\alpha^2}))) \quad (3.2)$$

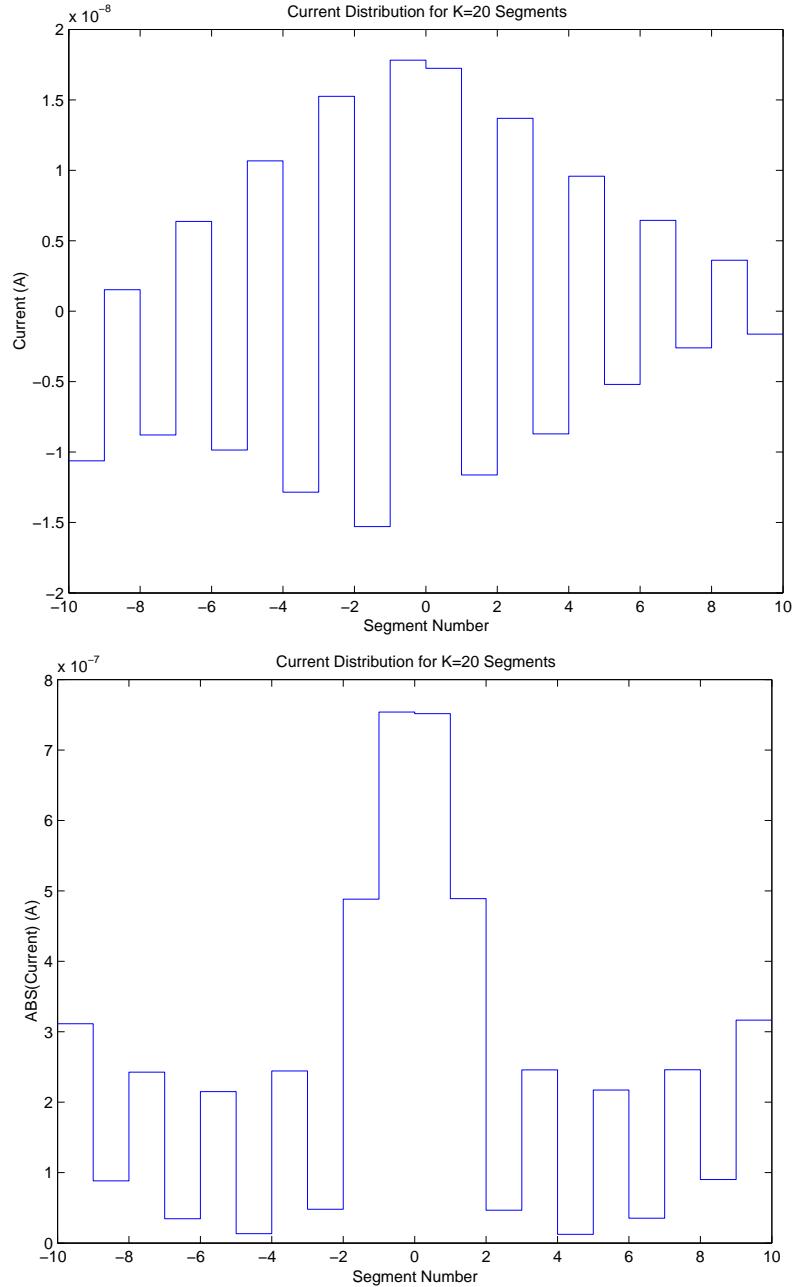
Ρυθμίσαμε τις παραμέτρους στις εξής τιμές

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.002 \\ h &= 0.02m \\ r &= 0.001m \\ N &= 5 \end{aligned}$$

Με τις παραμέτρους αυτές το δεξί μέλος της εξίσωσης (3.2), δηλαδή το μήκος της κωνικής σπείρας, παίρνει την τιμή $2.00027m$. Αν ρυθμίσουμε τη συχνότητα στα $30MHz$ το μήκος κύματος είναι ίσο με $10m$. Για να ισχύει η σχέση (3.2) όμως πρέπει να καταχερματίσουμε τη διάταξη σε τουλάχιστον 100 τμήματα για να μπορούμε να πούμε ότι $10m \gg (2.00027m)/100 = 0.0200027$.

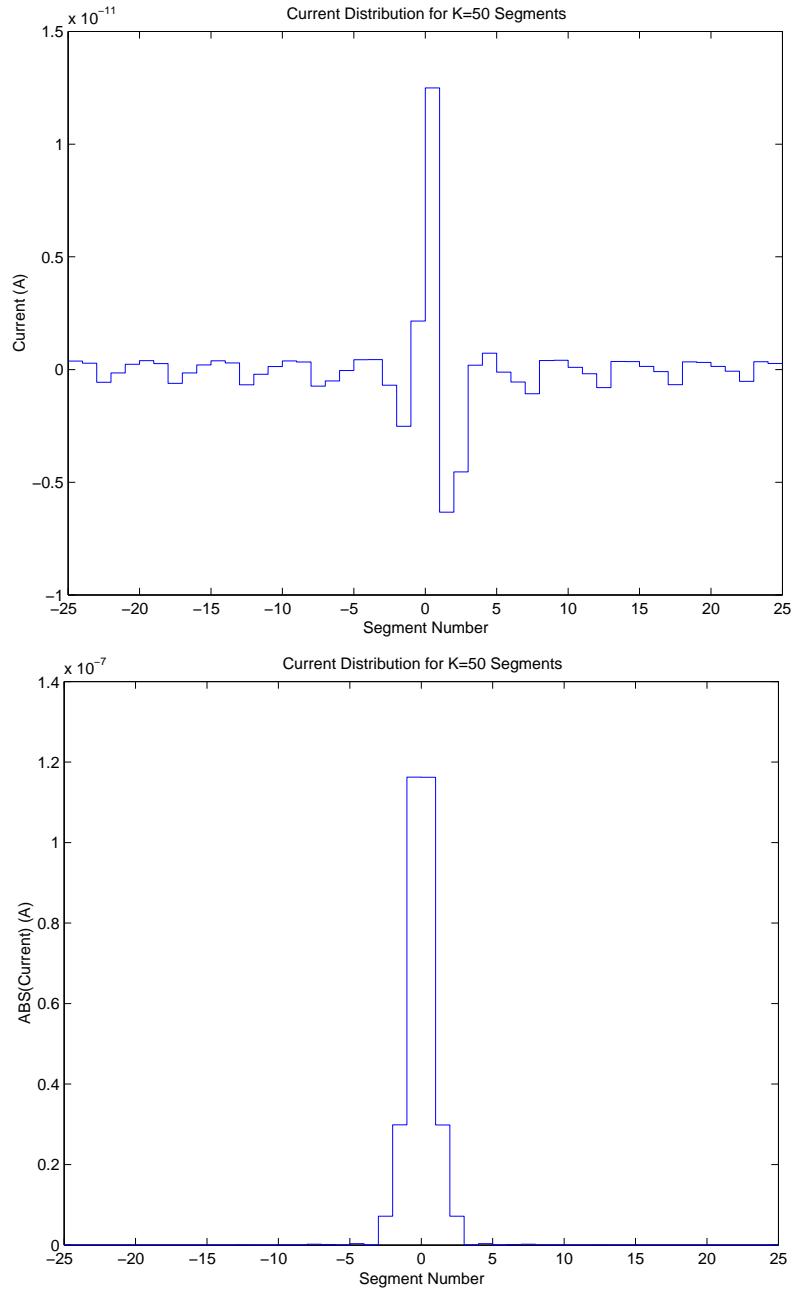
Τρέξαμε το πρόγραμμα για διάφορα K , όπου K ο αριθμός των τμημάτων στα οποία καταχερματίζουμε την κεραία κατά τη μέθοδο των τμημάτων. Στα διαγράμματα έχει υπολογιστεί τόσο η κατανομή του ρεύματος στα διάφορα τμήματα όσο και η απόλυτη τιμή του ρεύματος. Ως αρνητικά θεωρούμε τα τμήματα που βρίσκονται στο είδωλο της κωνικής σπείρας το οποίο επίσης συμμετέχει στη διαμόρφωση της ρευματικής κατανομής. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα ακόλουθα:

1. Για $K = 20$ τμήματα:



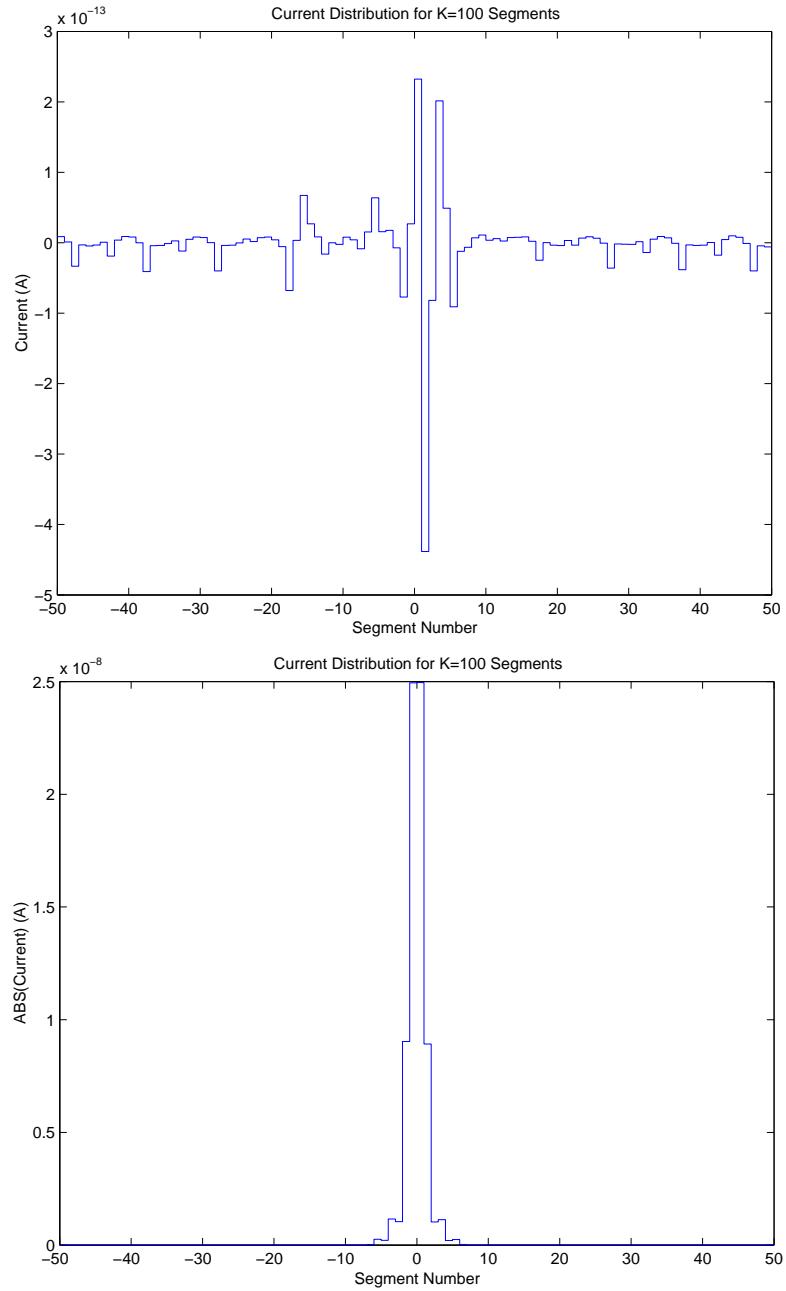
Σχήμα 3.1: Ρευματική Κατανομή για $K = 20$ τμήματα

2. Για $K = 50$ τμήματα:



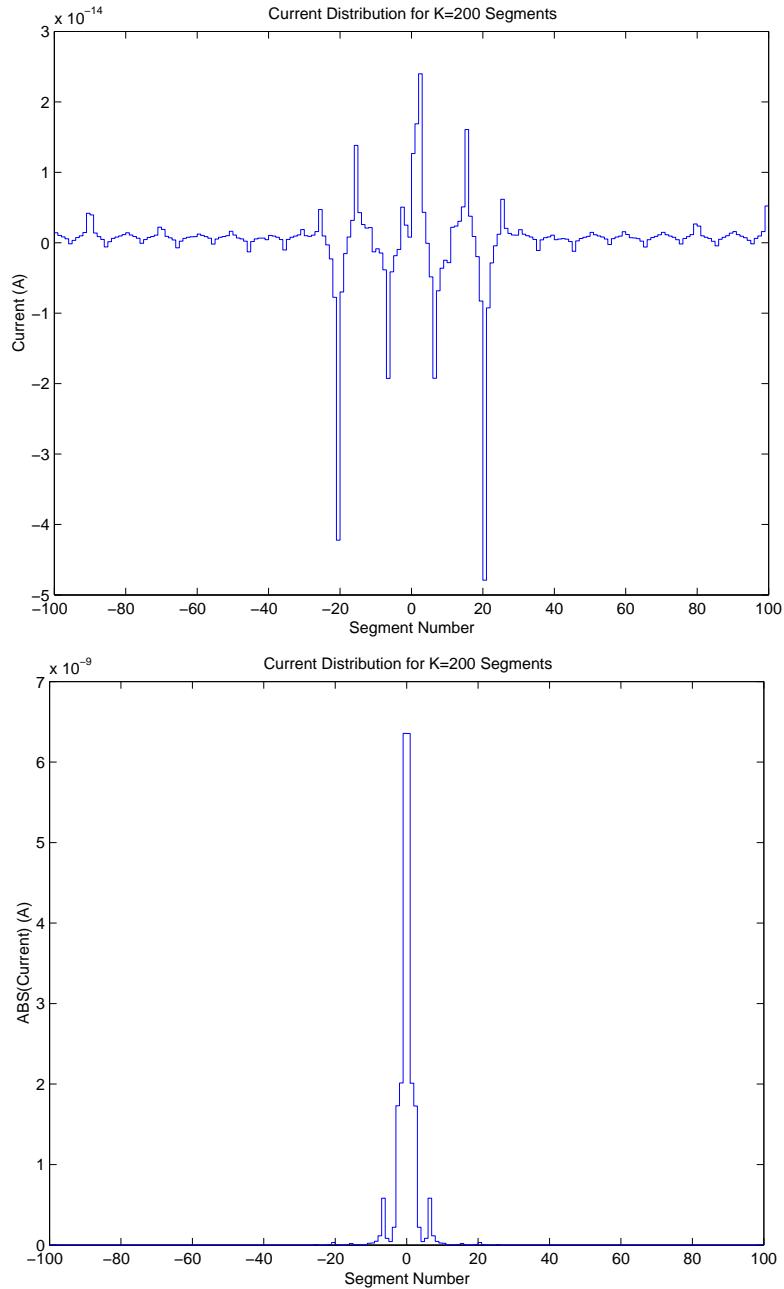
Σχήμα 3.2: Ρευματική Κατανομή για $K = 50$ τμήματα

3. Για $K = 100$ τμήματα:



Σχήμα 3.3: Ρευματική Κατανομή για $K = 100$ τμήματα

4. Για $K = 200$ τμήματα:



$\Sigma\chi\nu\alpha$ 3.4: Ρευματική Κατανομή για $K = 200$ τμήματα

Παράρτημα Α'

Αντίσταση Z_{mk}

A'.1 $|\phi_m - \phi'_k| > 0$

$$\begin{aligned}
Z_{mk} = & \\
& \frac{-ik_0}{e} \frac{\sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2 \left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \phi \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta - \phi \right] \right) + \alpha_e^2}}{h^2 \Delta} + \\
& \frac{16\pi^2 \sqrt{\frac{k^2}{4\pi^2} + \alpha^2 (1+\phi^2)} \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2 \left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \phi \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta - \phi \right] \right) + \alpha_e^2}}{4\pi \sqrt{\frac{k^2}{4\pi^2} + \alpha^2 (1+\phi^2)} \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2 \left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \phi \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta - \phi \right] \right) + \alpha_e^2}} + \\
& \frac{e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2 \left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \phi \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta - \phi \right] \right) + \alpha_e^2}}{\Delta \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \right] + \alpha \sin \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \right] \right) (-\alpha \phi \cos[\phi] + \alpha \sin[\phi])} + \\
& \frac{e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2 \left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \phi \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta - \phi \right] \right) + \alpha_e^2}}{\Delta \left(\alpha \cos \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \right] - \left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \sin \left[\left(-\frac{1}{2}+k \right) \Delta \right] \right) (\alpha \cos[\phi] - \alpha \phi \sin[\phi])} + \\
& \frac{1}{\sqrt{\frac{k^2}{4\pi^2} + \alpha^2 (1+\phi^2)} k_0^2} \\
& \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{h} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{3}{3} e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{h\Delta}} \right)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + \alpha^2 \left(2\phi - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right)^2 \right) \right] / \\
& \left(32\pi^2 \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{2\pi} \right)^{5/2} \right) + \\
& \left(3 \frac{3}{3} e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{h\Delta}} \right. \\
& \left. \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + \alpha^2 \left(2\phi - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right)^2 k_0 \right) \right] / \\
& \left(32\pi^2 \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{2\pi} \right)^2 \right) - \\
& \left(e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{h\Delta}} \right. \\
& \left. \left(\frac{h}{\pi} + \alpha^2 \left(2 + 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 4\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) \right] / \\
& \left(16\pi^2 \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{2\pi} \right)^{3/2} \right) - \\
& \left(e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{h\Delta}} \right. \\
& \left. \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + \alpha^2 \left(2\phi - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right)^2 k_0^2 \right) \right] / \\
& \left(32\pi^2 \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{2\pi} \right)^{3/2} \right) - \\
& \left(\frac{3}{3} e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2}{h\Delta}} \right. \\
& \left. \left(\frac{h}{\pi} + \alpha^2 \left(2 + 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 4\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta\sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) k_0 \right) \right] / \\
& \left(16\pi^2 \left(\frac{h(-(\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2 + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2 \right) \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\alpha \phi \cos[\phi] + \alpha \sin[\phi]} \\
 & \left(\left(3 e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi}{\pi} + \alpha^2 \left(2\phi - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right)^2 \right) / \\
 & \left. \left(16\pi \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + \alpha_e^2 \right)^{5/2} \right) + \\
 & \left. \left(3 ik e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi}{\pi} + \alpha^2 \left(2\phi - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right)^2 k_0 \right) / \\
 & \left. \left(16\pi \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + \alpha_e^2 \right)^2 \right) - \\
 & \left. \left(e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{h}{\pi} + \alpha^2 \left(2 + 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 4\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) \right) / \\
 & \left. \left(8\pi \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + \alpha_e^2 \right)^{3/2} \right) - \\
 & \left. \left(e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi}{\pi} + \alpha^2 \left(2\phi - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right)^2 k_0^2 \right) / \\
 & \left. \left(16\pi \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + \alpha_e^2 \right)^{3/2} \right) - \\
 & \left. \left(ik e^{-ik_0} \sqrt{\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi]) + \alpha_e^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right) \right. \\
 & \left. \left(\frac{h}{\pi} + \alpha^2 \left(2 + 2\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 4\left(-\frac{1}{2}+k\right)\Delta \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) k_0 \right) / \\
 & \left. \left(8\pi \left(\frac{h(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + \alpha^2 \left(\left(-\frac{1}{2}+k \right)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2\left(-\frac{1}{2}+k\right) \Delta \phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + \alpha_e^2 \right) \right) +
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(\alpha \phi \cos[\phi] + \alpha \sin[\phi])^2} \left(\begin{array}{l} \left(2 \alpha \cos[\phi] - \alpha \phi \sin[\phi] \right) \\ \left(- \left[\left(e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi}, o^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi], o_e^2} \Delta \left((-\frac{1}{2}+k) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + o^2 \left(2\phi - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) \right] \right) \right] \right) \\ \left(8\pi \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + o^2 \left((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + o_e^2 \right)^{3/2} \right) - \\ \left(h e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi}, o^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi], o_e^2} \Delta \left((-\frac{1}{2}+k) \alpha \Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] + \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + o^2 \left(2\phi - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) k_0 \right) \right] \right) \\ \left(8\pi \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + o^2 \left((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + o_e^2 \right) \right) - \\ \frac{1}{(\alpha \cos[\phi] - \alpha \phi \sin[\phi])^2} \left(\begin{array}{l} \left(-\alpha \phi \cos[\phi] - 2\alpha \sin[\phi] \right) \\ \left(- \left[\left(e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi}, o^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi], o_e^2} \Delta \left(\alpha \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] - (-\frac{1}{2}+k) \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + o^2 \left(2\phi - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) \right] \right) \right] \right) \\ \left(8\pi \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + o^2 \left((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + o_e^2 \right)^{3/2} \right) - \\ \left(h e^{-ik_0 \sqrt{\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi}, o^2 ((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi], o_e^2} \Delta \left(\alpha \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] - (-\frac{1}{2}+k) \alpha \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta] \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)}{\pi} + o^2 \left(2\phi - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \sin[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) \right) k_0 \right) \right] \right) \\ \left(8\pi \left(\frac{h(-(-\frac{1}{2}+k)\Delta+\phi)^2}{2\pi} + o^2 \left((-\frac{1}{2}+k)^2 \Delta^2 + \phi^2 - 2(-\frac{1}{2}+k)\Delta\phi \cos[(-\frac{1}{2}+k)\Delta-\phi] \right) + o_e^2 \right) \right) - \end{array} \right)$$

A'.2 $|\phi_m - \phi'_k| = 0$

$$\begin{aligned}
& \text{Zmik -} \\
& j_{0k} k_0 * \\
& \left[\left((\alpha * \cos[\phi] - \alpha * \phi * \sin[\phi]) * (\alpha * \cos[(k - \frac{1}{2}) * \Delta] - \alpha * ((k - \frac{1}{2}) * \Delta) * \sin[(k - \frac{1}{2}) * \Delta]) \right) / \left(\sqrt{\alpha^2 * (1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2} \right) + \right. \\
& \quad (\alpha * \sin[\phi] * \alpha * \phi * \cos[\phi]) * (\alpha * \sin[(k - \frac{1}{2}) * \Delta] + \alpha * ((k - \frac{1}{2}) * \Delta) * \cos[(k - \frac{1}{2}) * \Delta]) / \left(\sqrt{\alpha^2 * (1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2} \right) + \\
& \quad \left. (\frac{h}{2\pi})^2 / \left(\sqrt{\alpha^2 * (1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2} \right) \right) * \\
& \left(36 \left[-\text{Log}[2 \left(-k \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) + \phi \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) + \sqrt{(-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} \right)] + \right. \\
& \quad \text{Log}[2 \left((\Delta - k \Delta + \phi) \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) + \sqrt{(\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} \right)] - \\
& \quad 36 j \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) k_0 + 2 j \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) k_0^3 \\
& \quad \left. \left(((1 - 3 k + 3 k^2) \Delta^2 + (3 - 6 k) \Delta \phi + 3 \phi^2) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + 3 \alpha_e^2 \right) + \right. \\
& \quad 9 k_0^2 \left(\text{Log}[2 \left(-k \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) + \phi \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) + \sqrt{(-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} \right)] - \right. \\
& \quad \left. \text{Log}[2 \left((\Delta - k \Delta + \phi) \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) + \sqrt{(\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} \right)] \right] \alpha_e^2 + \\
& \quad \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \left(\phi \sqrt{(-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} - k \Delta \sqrt{(\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} - \phi \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} + k \Delta \left(-\sqrt{(-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} \right) + \right. \\
& \quad \left. \sqrt{(\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \alpha_e^2} \right) \right] \right] \Big/ \left[144 \pi \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right] + \\
& \quad \frac{3}{k_0^2 \sqrt{\alpha^2 * (1 + \phi^2) + (\frac{h}{2\pi})^2}} * \\
& \left[\left(\left(-\left(\alpha \cos\left[-\frac{1}{2} + k\right] \Delta \right) - \left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha \Delta \sin\left[-\frac{1}{2} + k\right] \Delta \right) (-\alpha \phi \cos[\phi] - 2 \alpha \sin[\phi]) \right) / (\alpha \cos[\phi] - \alpha \phi \sin[\phi])^2 + \right. \\
& \quad \left. \left(-\left(\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha \Delta \cos\left[-\frac{1}{2} + k\right] \Delta \right) + \alpha \sin\left[-\frac{1}{2} + k\right] \Delta \right) (2 \alpha \cos[\phi] - \alpha \phi \sin[\phi]) \right) / (\alpha \phi \cos[\phi] + \alpha \sin[\phi])^2 + 0 \right] * \\
& \left(\frac{1}{144 \pi \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{18 j \left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta^2 k_0}{\sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right)} + 2 j \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \left(\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta ((1 - 3 k + 3 k^2) \Delta^2 + (3 - 6 k) \Delta \phi + 3 \phi^2) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. ((3 - 6 k) \Delta + 6 \phi) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) \right) k_0^3 + \right. \\
& \quad \left. \left(j \left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta^2 k_0^2 \left(((1 - 3 k + 3 k^2) \Delta^2 + (3 - 6 k) \Delta \phi + 3 \phi^2) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + 3 \alpha_e^2 \right) \right) / \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi}} + \alpha^2 \left(1 + \left(-\frac{1}{2} + k \right) \Delta \phi \right) \right) + \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((\alpha * \cos[(k - \frac{1}{2}) * \Delta]) - \alpha * ((k - \frac{1}{2}) * \Delta) * \sin[(k - \frac{1}{2}) * \Delta] \right) / (\alpha * \cos[\phi] - \alpha * \phi * \sin[\phi]) + \\
& \left(\alpha * \sin[(k - \frac{1}{2}) * \Delta] + \alpha * ((k - \frac{1}{2}) * \Delta) * \cos[(k - \frac{1}{2}) * \Delta] \right) / (\alpha * \sin[\phi] + \alpha * \phi * \cos[\phi]) + 1 \Big) * \\
& \left(\frac{1}{144 \pi} \right. \\
& \left. \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)}} \right) \left(\frac{9 \sqrt{-\frac{1}{2} + k}^2 \alpha^4 k^3 k_0}{(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))^{3/2}} + 2 \sqrt{k} \Delta \right. \right. \\
& \left. \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} (2 (-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta ((3 - 6k) \Delta + 6\phi) + 6 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))) k_0^3 + \right. \right. \\
& \left. \left((-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta ((-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta ((1 - 3k + 3k^2) \Delta^2 + (3 - 6k) \Delta \phi + 3\phi^2) + ((3 - 6k) \Delta + 6\phi) (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))) k_0^3 \right) / \right. \\
& \left. \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} - ((-\frac{1}{2} + k)^2 \alpha^4 k^2 k_0^2 ((1 - 3k + 3k^2) \Delta^2 + (3 - 6k) \Delta \phi + 3\phi^2) (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) \right) + \right. \\
& \left. \left. 3 \alpha_e^2 \right) / \left(4 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))^{3/2} \right) \right) + 36 \\
& \left(\left(\frac{(-\frac{1}{2} + k) k \alpha^2 \Delta^2}{2 \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)}} + \frac{(-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta \phi}{2 \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)}} + \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} + \right. \right. \\
& \left. \left. ((-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta (-k \Delta + \phi)^2 + 2 (-k \Delta + \phi) (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))) \right) / \right. \\
& \left. \left(2 \sqrt{((-k \Delta + \phi)^2 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) + \alpha_e^2)} \right) \right)^2 / \\
& \left(-k \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} + \phi \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} + \sqrt{((-k \Delta + \phi)^2 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) + \alpha_e^2)} \right)^2 - \\
& \left(\frac{(-\frac{1}{2} + k)^2 k \alpha^4 \Delta^2}{4 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))^{3/2}} - \frac{(-\frac{1}{2} + k)^2 \alpha^4 \Delta^2 \phi}{4 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))^{3/2}} + \frac{(-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta}{\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)}} - \right. \\
& \left. \left(((-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta (-k \Delta + \phi)^2 + 2 (-k \Delta + \phi) (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))) \right)^2 / \right. \\
& \left. \left(4 ((-k \Delta + \phi)^2 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) + \alpha_e^2) \wedge (3/2) + \left(4 (-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta (-k \Delta + \phi) + 2 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) \right) \right) / \right. \\
& \left. \left(2 \sqrt{((-k \Delta + \phi)^2 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) + \alpha_e^2)} \right) / \left(-k \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} + \right. \right. \\
& \left. \left. \phi \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} + \sqrt{((-k \Delta + \phi)^2 (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)) + \alpha_e^2)} \right) - \right. \\
& \left. \left(\frac{(-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta (\Delta - k \Delta + \phi)}{2 \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)}} + \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi)} + \right. \right. \\
& \left. \left. ((-\frac{1}{2} + k) \alpha^2 \Delta (\Delta - k \Delta + \phi)^2 + 2 (\Delta - k \Delta + \phi) (\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + (-\frac{1}{2} + k) \Delta \phi))) \right) / \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{\left(-\frac{1}{2} + k\right)^2 \alpha^4 \Delta^2 (\Delta - k \Delta + \phi)}{4 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)\right)^{3/2}} + \frac{\left(-\frac{1}{2} + k\right) \alpha^2 \Delta}{\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)}} - \right. \\
& \quad \left. \left(\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta (\Delta - k \Delta + \phi)^2 + 2 (\Delta - k \Delta + \phi) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) \right)^{1/2} / \right. \\
& \quad \left. \left(4 (\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)^{(3/2)} + \right. \\
& \quad \left. \left(4 \left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta (\Delta - k \Delta + \phi) + 2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) \right) / \left(2 \sqrt{\left((\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} \right) \right] \\
& \quad \left[\left(\Delta - k \Delta + \phi \right) \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)} + \sqrt{\left((\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} \right] - \\
& \quad \frac{1}{4 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right)^{3/2}} \left(\left(-\frac{1}{2} + k \right)^2 \alpha^4 \Delta^2 \left(\phi \sqrt{\left((-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \Delta \sqrt{\left((\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} - \phi \sqrt{\left((\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} + \right. \\
& \quad \left. \left. \left. k \Delta \left(-\sqrt{\left((-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} + \sqrt{\left((\Delta - k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} \right) \right) \right] - \\
& \quad \frac{1}{\left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right)^{3/2}} \left[\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta \left(-\frac{18 j \left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta^2 k_0}{\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)}} + 2 j \Delta \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta ((1 - 3 k + 3 k^2) \Delta^2 + (3 - 6 k) \Delta \phi + 3 \phi^2) + ((3 - 6 k) \Delta + 6 \phi) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) \right) k_0^3 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(j \left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta^2 k_0^3 \left(((1 - 3 k + 3 k^2) \Delta^2 + (3 - 6 k) \Delta \phi + 3 \phi^2) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + 3 \alpha_e^2 \right) \right) / \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)} + \left(\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta (-k \Delta + \phi)^2 + 2 (-k \Delta + \phi) \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) \right) / \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left(2 \sqrt{\left((-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} \right) / \left(-k \Delta \sqrt{\sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)} + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \phi \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)} + \sqrt{\left((-k \Delta + \phi)^2 \left(\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi) \right) + \alpha_e^2 \right)} \right) + \right. \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \left. \left. \left(\frac{\left(-\frac{1}{2} + k \right) \alpha^2 \Delta (\Delta - k \Delta + \phi)}{2 \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)}} + \sqrt{\frac{h}{2\pi} + \alpha^2 (1 + \left(-\frac{1}{2} + k\right) \Delta \phi)} + \right. \right. \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

Παράρτημα Β'

Matlab

Στην ενότητα αυτή παρατίθενται τα προγράμματα με τα οποία πραγματοποιήθηκε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Στις ενότητες Β'.1 και Β'.2 υπολογίζεται η αντίσταση Z_{mk} για $|m - k| > 1$ και $|m - k| \leq 1$ αντίστοιχα. Στην ενότητα Β'.3 δημιουργείται ο πίνακας $[Z_{mk}]$ και τέλος στην ενότητα Β'.4 υπολογίζεται ο πίνακας των ρευμάτων $[a_k]$ και τυπώνονται τα διαγράμματα.

B'.1 impedance 1

```

function [impedance1] = impedance1(m,k,K)

c=300*10^6;
m0=1.256637061*10^-6;
f=150*10^6;
omega=2*pi*f;
lamda=c/f;
k0=2*pi/lamda;

a=3;
h=2;
r=0.002;
N=3;
D=2*pi*N/K;
ae=r*sqrt(2);
fim=(m-1/2)*D;

impedance1=-i*omega*m0*(((a*cos(fim)-
a*fim*sin(fim))/sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h(2*pi))^2))*exp(-i*k0*sqrt(a^2*(fim^2+((k-
1/2)*D)^2-2*fim*(k-1/2)*D)*cos(fim-(k-1/2)*D))+(h(2*pi))*(fim-(k-
1/2)*D)^2+ae^2))/(4*pi*sqrt(a^2*(fim^2+((k-1/2)*D)^2-2*fim*(k-1/2)*D)*cos(fim-
(k-1/2)*D))+(h(2*pi))*(fim-(k-1/2)*D)^2+ae^2))*((a*cos((k-1/2)*D)-a*(k-
1/2)*D)*sin((k-
1/2)*D))+3/(k0^2*sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h(2*pi))^2)))*((1/(a*cos(fim)-
a*fim*sin(fim)))*((i*exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*(-
1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+ fim^2)))*D*(a*cos((-(
1/2+k)*D)-(-1/2+k)*a*D*sin((-1/2+k)*D))*k0*((h*(-1/2+k)*D+fim))/pi+a^2*(-
2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)+2*fim-2*(-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-
fim)*fim))/(8*pi*(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-
2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+ fim^2))/2)+(1/(4*pi))*exp(-
i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-
1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+ fim^2)))*D*(a*cos((-1/2+k)*D)-(
1/2+k)*a*D*sin((-1/2+k)*D))*((3*((h*(-1/2+k)*D+fim))/pi+a^2*(-2*(-
1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)+2*fim-2*(-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-
fim)*fim))/4*(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-
1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+ fim^2))^(5/2))-(h/pi+a^2*(2.4*(-
1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-fim)+2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim))/2*(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-
1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+ fim^2))^(3/2)))+(D*(a*cos((-1/2+k)*D)-(
1/2+k)*a*D*sin((-1/2+k)*D))*((i*exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-(
1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim)*fim+ fim^2)))*k0*((h*(-1/2+k)*D+fim))/pi+a^2*(-2*(-1/2+k)*D*cos((-(
1/2+k)*D-fim)+2*fim-2*(-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-fim)*fim))^2)/(4*(ae^2+(h*(-(
1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim)*fim+ fim^2))^(3/2))-(exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-(
1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim)*fim+ fim^2)))*k0^2*((h*(-1/2+k)*D+fim))/pi+a^2*(-2*(-1/2+k)*D*cos((-(
1/2+k)*D-fim)+2*fim-2*(-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-fim)*fim))^2)/(4*(ae^2+(h*(-(
1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim)*fim+ fim^2)))-(i*exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-

```


fim)*fim+fim^2))))-(i*exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2)))*k0*(h/pi+a^2*(2*4*(-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-fim)+2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)))/(2*sqrt(ae^2+(h*(-(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))))/(4*pi*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))))+(-(2*a*cos(fim)-a*fim*sin(fim))/((a*fim*cos(fim)+a*sin(fim))^2))*(-(exp(-i*k0*sqrt(h*(-((k-1/2)*D)+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((((k-1/2)*D)^2+fim^2-2*((k-1/2)*D)*fim*cos(((k-1/2)*D)-fim))+ae^2))*D*((((k-1/2)*D)*a*cos((k-1/2)*D)+a*sin((k-1/2)*D)))*((h*(-((k-1/2)*D)+fim))/pi+a^2*(2*fim-2*((k-1/2)*D)*cos(((k-1/2)*D)-fim)-2*((k-1/2)*D)*fim*sin(((k-1/2)*D)-fim)))/(8*pi*((h*(-((k-1/2)*D)+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((((k-1/2)*D)^2+fim^2-2*((k-1/2)*D)*fim*cos(((k-1/2)*D)-fim))+ae^2))))/(i*omega*m0*((((h/(2*pi))/sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h/(2*pi))^2))*exp(-i*k0*sqrt(a^2*(fim^2+((k-1/2)*D)^2-2*fim*(k-1/2)*D*cos(fim-(k-1/2)*D)))+(h/(2*pi))*(fim-(k-1/2)*D)^2+a^2))/((4*pi*sqrt(a^2*(fim^2+((k-1/2)*D)^2-2*fim*(k-1/2)*D*cos(fim-(k-1/2)*D)))+(h/(2*pi)))^2+((3/2)*(i*exp(-i*k0*sqrt(h*(-((k-1/2)*D)+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2)))*h*D*k0*((h*(-(-1/2+k)*D+fim))/pi+a^2*(-2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))))/(16*pi^2*(ae^2+(h*(-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2)^2)+(1/(8*pi^2))*(exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))^(5/2)))-(h/pi+a^2*(2-4*((-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-fim)+2*((-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim)))/(2*(ae^2+(h*(-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))^(3/2)))+(h*D*((i*exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2)))*k0*((h*(-(-1/2+k)*D+fim))/pi+a^2*((-2*((-1/2+k)^2*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))^(3/2)))-(exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))^(3/2)))-(i*exp(-i*k0*sqrt(ae^2+(h*(-(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi))+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2)))*k0*(h/pi+a^2*(2-

```
4*(-1/2+k)*D*sin((-1/2+k)*D-fim)+2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim))/(2*sqrt(ae^2+(h*(-1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-
2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-fim)*fim+fim^2))))/(8*pi^2*sqrt(ae^2+(h*(-
1/2+k)*D+fim)^2)/(2*pi)+a^2*((-1/2+k)^2*D^2-2*(-1/2+k)*D*cos((-1/2+k)*D-
fim)*fim+fim^2))))
```

B'.2 impedance 2

```

function [impedance2] = impedance2(m,k,K)

c=300*10^6;
m0=1.256637061*10^-6;
f=30*10^6;
omega=2*pi*f;
lamda=c/f;
k0=2*pi/lamda;

a=0.002;
h=0.02;
r=0.001;
N=5;
D=2*pi*N/K;
ae=r*sqrt(2);
fim=(m-1/2)*D;

impedance2=-i*omega*m0*((a*cos(fim)-a*fim*sin(fim))*(a*cos((k-1/2)*D))-a*((k-1/2)*D)*sin(((k-1/2)*D))/((sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h/(2*pi))^2))+(a*sin(fim)+a*fim*cos(fim))*(a*sin((k-1/2)*D))+a*((k-1/2)*D)*cos(((k-1/2)*D))/((sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h/(2*pi))^2)+(h/(2*pi))^2)/((sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h/(2*pi))^2))+(36*(-log(2*(-k*D)*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+log(2*((D-k*D*fim)*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))-36*i*D*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*k0+2*i*D*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*k0^3*(((1-3*k+3*k^2)*D^2+3-6*k)*D*fim+3*fim^2)*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)+3*ae^2)+9*k0^2*((log(2*(-k*D)*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi))+fim*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-log(2*((D-k*D*fim)*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))*ae^2+sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*(fim*sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-D*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-fim*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)+k*D*(-sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))*ae^2+sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))*(144*pi*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))+(3/(k0^2*sqrt(a^2*(1+fim^2)+(h/(2*pi))^2)))*(((-(a*cos((-1/2+k)*a*D*sin((-1/2+k)*D)))*(-a*fim*cos(fim)-2*a*sin(fim)))*(a*cos(fim)-a*fim*sin(fim))^2)+(-(144*pi*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))*(18*i*(-1/2+k)*a^2*D^2*k0)*(sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+2*i*D*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*(((-1/2+k)*a^2*D*((1-3*k+3*k^2)*D^2+3-6*k)*D*fim+3*fim^2)+((3-
```


(1/(288*pi*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))^(3/2)))*((-1/2+k)*a^2*D*(36*(-log(2*(-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+fim*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))+log(2*((D-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))-36*i*D*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*k0+2*i*D*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*k0^3*((1-3*k+3*k^2)*D^2+(3-6*k)*D*fim+3*fim^2)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+3*ae^2)+9*k0^2*((log(2*(-k*D*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-log(2*((D-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))*ae^2+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*(fim*sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-D*sqrt((D-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-fim*sqrt((D-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)*k*D*(-sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)+sqrt((D-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))+((a*cos(((k-1/2)*D))-a*((k-1/2)*D)*sin(((k-1/2)*D)))/(a*cos(fim)-a*fim*sin(fim))+a*sin(((k-1/2)*D))+a*((k-1/2)*D)*cos(((k-1/2)*D)))(a*sin(fim)+a*fim*cos(fim))+1)*((1/(144*pi))*(1/(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))*((9*i*(-1/2+k)^2*a^4*D^3*k0)/(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))^(3/2))+2*i*D*(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*(2*(-1/2+k)*a^2*D*((3-6*k)*D+6*fim)+6*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))*k0^3+((-1/2+k)*a^2*D*((-1/2+k)*a^2*D*((-1/2+k)*a^2*D*((1-3*k+3*k^2)*D^2+(3-6*k)*D+6*fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))*k0^3*(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))-(-1/2+k)^2*a^4*D^2*k0^3*((1-3*k+3*k^2)*D^2+(3-6*k)*D*fim+3*fim^2)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+3*ae^2))/(4*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))^(3/2))+36*(((-1/2+k)*k*a^2*D^2)/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))+((-1/2+k)*a^2*D*fim)/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))*2*((-k*D+fim)^2+2*(-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))/2*sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))^2/(-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+fim*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))^2*((-1/2+k)^2*k*a^4*D^3)/(4*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))^(3/2))-((-1/2+k)^2*a^4*D^2*fim)/(4*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))^(3/2))+((-1/2+k)*a^2*D)/(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))-((-1/2+k)*a^2*D*((-k*D+fim)^2+2*(-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))/2*sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))^(3/2))+4*((-1/2+k)*a^2*D*(-k*D+fim)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))/2*sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))(-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+fim*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))/((-1/2+k)*a^2*D*((D-k*D+fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))-((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fim))/((-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))-((-1/2+k)*a^2*D*(D-1/2+k)*D*fim)))

```

k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))^2/((D-
k*D+fm)*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))^2+(-(
-1/2+k)^2*a^4*D^2*(D-k*D+fm))/(4*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))^(3/2))+((-(
-1/2+k)*a^2*D)/(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))-((-1/2+k)*a^2*D*(D-
k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/2/(4*((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)^(3/2))+4*(-
1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))/((D-
k*D+fm)*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))^2*(-
1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+ae^2))))+9*k0^2*(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))*((((
-1/2+k)*a^2*D*(-k*D+fm)^2+2*(-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-
1/2+k)*D*fm)))/(sqrt((-k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2))-((-(
-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-
1/2+k)*D*fm)))/(sqrt((D-k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))+
fm*(-((-1/2+k)*a^2*D*(-k*D+fm)^2+2*(-
k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/2/(4*(((
-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2))-D*(-((-1/2+k)*a^2*D*(D-
k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/2/(4*((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)^(3/2))+4*(-
1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))-fm*(-((-(
-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-
1/2+k)*D*fm)))/2/(4*((D-k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)^(3/2))+4*(-
1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))-fm*(-((-(
-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)^2+2*(-
k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(sqrt((-k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-
1/2+k)*D*fm))+ae^2))^(3/2))+4*(-1/2+k)*a^2*D*(D-
k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/2*sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))+k*D*(((-1/2+k)*a^2*D*(-
k*D+fm)^2+2*(-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/2/(4*(((
-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2))-((-1/2+k)*a^2*D*(D-
k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/2/(4*((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)^(3/2))+4*(-
1/2+k)*a^2*D*(D-k*D+fm)+2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))/(2*sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2))))+1/(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))*((-(
-1/2+k)*a^2*D*((fm*(((-1/2+k)*a^2*D*(-k*D+fm)^2+2*(-
k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))))/(2*sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))))+sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2))+sqrt((-(
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)-(D*(((-1/2+k)*a^2*D*(D-
k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))))/(2*sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)))-(fm*(((-1/2+k)*a^2*D*(D-
k*D+fm)^2+2*(D-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))))/(2*sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2))-sqrt((D-
k*D+fm)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm))+ae^2)+k*D*(((-1/2+k)*a^2*D*(-
k*D+fm)^2+2*(-k*D+fm)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fm)))))/(2*sqrt((-(

```

$k^*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}) + ((-1/2+k)*a^{2*D}*(D - k*D + fim)^{2*} + 2*(D - k*D + fim)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqr((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*})) + ae^{2*}(-(-1/2+k)*k*a^{2*D^2})/(2*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + ((-1/2+k)*a^{2*D*fim})/(2*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ((-1/2+k)*a^{2*D}*(-k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqr((-k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))^{2/(-k*D + fim)}*sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + firm*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + sqrt((-k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + ae^{2*}(((-1/2+k)^2*k*a^{4*D^3})/(4*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))^{(3/2)}) - ((-1/2+k)^2*a^{4*D^2*fim})/(4*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))^{(3/2)}) + ((-1/2+k)*a^{2*D})/((sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) - ((-1/2+k)*a^{2*D}*(-k*D + fim)^{2*} + 2*(-k*D + fim)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)))/2)/(((-1/2+k)*a^{2*D}*(k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))) + ((((-1/2+k)*a^{2*D}*(D - k*D + fim))/(2*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + sqrt((-k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))/((k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + firm*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + sqrt((-k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*})) + ((((-1/2+k)*a^{2*D}*(D - k*D + fim))/(2*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ((-1/2+k)*a^{2*D}*(D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))/((k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}(((-1/2+k)^2*a^{4*D^2*(D - k*D + fim)})/(4*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))^{(3/2)}) + ((-1/2+k)*a^{2*D})/((sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) - ((-1/2+k)*a^{2*D}*(D - k*D + fim)^{2*} + 2*(D - k*D + fim)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)))/2)/((4*(D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*})^{(3/2)}) + (4*(-1/2+k)*a^{2*D}*(D - k*D + fim) + 2*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqr((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))) + (((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + sqrt((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))/((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + sqrt((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}))) - (1/(4*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))^{(3/2)})) * (((-1/2+k)^2*a^{4*D^2*fim})/((sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}) - D*sqr((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*})) - (firm*sqr((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}) + k*D*(-sqrt((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*}) + sqrt((D - k*D + fim)^{2*}(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + ae^{2*})))) - (1/(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))^{(3/2)})) * (((-1/2+k)*a^{2*D}*(-18*i*(-1/2+k)*a^{2*D^2*k0})/((sqrt(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)) + 2*i*D*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim)))*((-1/2+k)*a^{2*D}*((1-3*k+3*k^2)*D^2 + (3-6*k)*D*fim + 3*fim^2) + ((3-6*k)*D+6*fim)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) * k0^3 + (1*(-1/2+k)*a^{2*D^2*k0^3} * (((1-3*k+3*k^2)*D^2 + (3-6*k)*D*fim + 3*fim^2)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) * k0^3 + (1*(-1/2+k)*a^{2*D^2*k0^2} * (((1-3*k+3*k^2)*D^2 + (3-6*k)*D*fim + 3*fim^2)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) * k0^2 + (1*(-1/2+k)*a^{2*D^2*k0} * (((1-3*k+3*k^2)*D^2 + (3-6*k)*D*fim + 3*fim^2)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) * k0 + (1*(-1/2+k)*a^{2*D*fim} * (((1-3*k+3*k^2)*D^2 + (3-6*k)*D*fim + 3*fim^2)*(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) * 36) - ((-1/2+k)*k*a^{2*D^2})/((2*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + ((-1/2+k)*a^{2*D*fim})/((2*sqr(h/(2*pi) + a^{2*}(1+(-1/2+k)*D*fim))) + ((-1/2+k)*a^{2*D*fim})))$

$$\begin{aligned}
& \frac{1/2+k)*D*fim)))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+((-1/2+k)*a^2*D*(-k*D*fim)^2+2*(-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))/(-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+fim*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+(((1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))^2*(D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))))/((D-k*D*fim)*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))))+9*k0^2*(sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*((fim*((1/2+k)*a^2*D^2*(-k*D+fim)^2+2*(-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-D*((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim)^2+2*(D-k*D*fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))/(2*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))-sqrt(D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-(fim*((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim)^2+2*(D-k*D*fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))+(((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim)^2+2*(D-k*D*fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))/((2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+ae^2*((-1/2+k)*k*a^2*D^2)/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))+(((-1/2+k)*a^2*D*fim)/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))/(2*sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))/(-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+fim*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-(((1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+(((-1/2+k)*a^2*D*(D-k*D*fim))/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))/((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))/((D-k*D*fim)*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))+(1/(2*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))*(((-1/2+k)*a^2*D*(fim*sqrt((-k*D+fim)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-D*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-fim*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+k*D*(-sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))+(1/(4*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))^(5/2)))*(3*(-1/2+k)^2*a^4*D^2*(36*(-log(2*(-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))))+fim*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((-k*D+fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))+log(2*((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))-k*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))-$$

```
36*i*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*k0+2*i*D*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*k0^3*((1-3*k+3*k^2)*D^2+(3-6*k)*D*fim+3*fim^2)*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+3*ae^2)+9*k0^2*((log(2*(-k*D*sqrt(h/(2*pi))+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim)))+sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))-log(2*((D-k*D*fim)*sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2))))*ae^2+sqrt(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))*(fim*sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-D*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)-fim*sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)+k*D*(-sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)+k*D*(-sqrt((-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)+sqrt((D-k*D*fim)^2*(h/(2*pi)+a^2*(1+(-1/2+k)*D*fim))+ae^2)))))))))))
```

B'.3 creatematrix

```
function [Z] = creatematrix(K)

    for m = 1:2*K,
        for k = 1:2*K,
            if abs(m-k)>0
                Z(m,k) = impedance1(m-K,k-K,K);
            else
                Z(m,k) = impedance2(m-K,k-K,K);
            end
        end
    end
```

B'.4 findcurrent

```
K=10;

Z=creatematrix(K);
InvZ=inv(Z);
Em=zeros(2*K,1);
Em(K,1)=1;
Em(K+1,1)=1;
ak=InvZ*Em;

for i=1:2*K,
    X((2*i-1),1)=i-(1+K);
    X((2*i),1)=X((2*i-1),1)+0.9999999999999999999999999999999;
    Y((2*i-1),1)=ak(i);
    Y((2*i),1)=ak(i);
end

figure;
plot(X,Y);

figure;
plot(X,abs(Y));
```

Βιβλιογραφία

- [1] Constantine A. Balanis, Antenna Theory (1997)
- [2] Edward M. Purcell, Electricity and Magnetism (1965)
- [3] Χ. Καψάλης και Π. Κωττής, Κεραίες - Ασύρματες Ζεύξεις (2003)
- [4] Ιωάννης Θ. Χαϊνης, Μαθήματα Μαθηματικής Αναλύσεως (1998)
- [5] N. Καδιανάκης και Σ. Καρανάσιος, Γραμμική Άλγεβρα (1998)