



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΒΑΣΕΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Μελέτη Μοντέλων Σχέσεων Κατεύθυνσης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Σάρκας

Επιβλέπων: Τιμολέων Σελλής
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2004



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΒΑΣΕΩΝ ΓΝΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

Μελέτη Μοντέλων Σχέσεων Κατεύθυνσης

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Νικόλαος Σάρκας

Επιβλέπων: Τιμολέων Σελλής
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή.

.....
T. Σελλής
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
I. Βασιλείου
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Α-Γ. Σταφυλοπάτης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2004.

.....
Σάρκας Νικόλαος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

© (2004) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

Περίληψη

Την τελευταία δεκαετία υπάρχει αυξανόμενο ενδιαφέρον για την ανάπτυξη συστημάτων που αποθηκεύουν και διαχειρίζονται χωρική πληροφορία. Η εργασία αυτή ασχολείται με τη μοντελοποίηση σχέσεων κατεύθυνσης μεταξύ χωρικών οντοτήτων. Επιπρόσθετα, μελετάμε προβλήματα που άπτονται της αποδοτικής αποτίμησης ερωτήσεων, οι οποίες εκφράζονται χρησιμοποιώντας σχέσεις κατεύθυνσης.

Αρχικά εξετάζουμε το μοντέλο των Goyal και Egenhofer. Το μοντέλο περιγράφει σχέσεις κατεύθυνσης μεταξύ δύο περιοχών, πάνω στο καρτεσιανό επίπεδο. Παρουσιάζουμε από τη σχετική βιβλιογραφία τρεις αλγόριθμους για τον υπολογισμό των σχέσεων στο παραπάνω μοντέλο. Υλοποιούμε τους αλγόριθμους αυτούς και μετράμε πειραματικά την απόδοσή τους. Η ανάπτυξη αποδοτικών αλγορίθμων, οι οποίοι εξάγουν τη ζητούμενη σχέση κατεύθυνσης από τις πολυγωνικές αναπαραστάσεις των περιοχών, συμβάλει καθοριστικά στην αποδοτική αποτίμηση ερωτήσεων που χρησιμοποιούν σχέσεις κατεύθυνσης.

Στη συνέχεια εξετάζουμε το μοντέλο των Billen και Clementini. Το μοντέλο περιγράφει σχέσεις κατεύθυνσης μεταξύ τριών περιοχών. Παρουσιάζουμε δύο αλγορίθμους που αναπτύξαμε για τον υπολογισμό των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο αυτό, καθώς και τις προτάσεις μας για την υλοποίησή τους.

Τέλος, λαμβάνοντας υπόψη μας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των παραπάνω μοντέλων, ορίζουμε αυστηρά μία νέα οικογένεια μοντέλων σχέσεων κατεύθυνσης. Τα μοντέλα που προτείνουμε, αποτελούν μία απλοποιημένη εκδοχή του μοντέλου των Goyal και Egenhofer. Χωρίς να χάνουμε σε εκφραστικότητα, καταφέρνουμε να μειώσουμε σημαντικά των αριθμό των σχέσεων του μοντέλου. Η παραπάνω μελέτη συμπληρώνεται με την επίλυση του προβλήματος της σύνθετης δύο σχέσεων κατεύθυνσης. Το πρόβλημα της σύνθεσης δύο σχέσεων σχετίζεται άμεσα με την αποδοτική αποτίμηση ερωτήσεων σε περιβάλλοντα βάσεων δεδομένων.

Abstract

Nowadays, there exists an increasing interest for the deployment of systems that are able to store and manipulate spatial information. In this thesis we deal with the modeling of direction relations between spatial entities. Furthermore, we study issues concerning the efficient evaluation of spatial queries using such relations.

We start by studying Goyal and Egenhofer's model. This model describes direction relations between two regions using cartesian coordinates. We present three algorithms from the relevant literature, that compute the direction relations for the model. We implement the algorithms and experimentally measure their performance. The development of efficient algorithms, that extract the direction relation from two region's polygonal representations, is crucial to the efficient evaluation of queries that use such relations.

Then we study Billen and Clementini's model. This model describes the direction relations between three regions. We present two algorithms we developed for computing the direction relations of the model, as well as our suggestions for their implementation.

Finally, considering the advantages and the disadvantages of the models we mentioned above, we strictly define a new family of direction relations models. The models we propose are a simplified version of Goyal and Egenhofer's model. Without sacrificing expressiveness, we manage to drastically reduce the number of the model's direction relations. We complement our study by solving the problem of composing to direction relations. This problem is directly related to the efficient evaluation queries in a database environment.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Σπύρο Σκιαδόπουλο, τους φίλους και την οικογένειά μου. Επίσης, τους καθηγητές Τίμο Σελλή, Γιάννη Βασιλείου και Ανδρέα-Γιώργο Σταφυλοπάτη. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στη μαμά μου η οποία καθ' όλη τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας εργασίας, μου έστιβε πορτοκαλάδες για να παίρνω τη βιταμίνα μου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	1
1.1	Συνεισφορά εργασίας	3
1.2	Οργάνωση τόμου	4
2	Θεωρητικό Υπόβαθρο και Σχετικές Εργασίες	5
2.1	Θεωρητικό υπόβαθρο	6
2.2	Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός	8
2.2.1	Τοπολογικές σχέσεις	10
2.2.2	Σχέσεις κατεύθυνσης	10
2.2.3	Σχέσεις απόστασης	14
2.3	Τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης	15
2.4	Σύνοψη	18
3	Απόδοση Αλγορίθμων Υπολογισμού Σχέσεων Κατεύθυνσης στο [29, 30]	19
3.1	Το μοντέλο των Goyal και Egenhofer [29, 30]	20
3.2	Ο αλγόριθμος των Skiadopoulos et al [62]	23
3.3	Σύγκριση των αλγορίθμων	29
3.4	Σύνοψη	34
4	Υπολογισμός Σχέσεων Κατεύθυνσης στο Μοντέλο [8]	37
4.1	Το μοντέλο των Billen και Clementini [8]	38
4.2	Υπολογισμός των σχέσεων κατεύθυνσης	41
4.2.1	Υπολογισμός των πέντε χωρίων	41
4.2.2	Προσδιορισμός των χωρίων στα οποία βρίσκεται η πρωτεύουσα περιοχή .	45
4.3	Τλοποίηση των αλγορίθμων	51
4.3.1	Κυρτό κέλυφος	52
4.3.2	Κοινές εφαπτομένες πολυγώνων	53
4.3.3	Ψαλδισμός πολυγώνων	55
4.3.4	Τομή κυρτών πολυγώνων	57
4.3.5	Σημείο μέσα σε πολύγωνο	60
4.3.6	Υπολογισμός ακραίων κορυφών κυρτού πολυγώνου	62
4.3.7	Τλοποίηση του αλγορίθμου BC-DR-C2	63

4.4 Σύνοψη	64
5 Μια Οικογένεια Μοντέλων για Πληροφορία Κατεύθυνσης	65
5.1 Περιγραφή μοντέλου	66
5.2 Επεκτείνοντας το μοντέλο σε μία οικογένεια μοντέλων	68
5.3 Ορίζοντας τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης	68
5.4 Σύνοψη	75
6 Σύνθεση Σχέσεων Κατεύθυνσης	77
6.1 Βασικοί ορισμοί και έννοιες	78
6.2 Σύνθεση βασικών σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου	79
6.3 Σύνθεση βασικής σχέσης ενός χωρίου με βασική σχέση πολλών χωρίων	81
6.4 Σύνοψη	85
7 Σύνοψη	89
7.1 Μελλοντικές κατευθύνσεις	89
Α' Βασικές Σχέσεις Κατεύθυνσης	91
Βιβλιογραφία	93

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Παραπλανητική σχέση κατεύθυνσης σε μοντέλο που προσεγγίζει τις περιοχές με σημεία.	2
2.1	Περιοχές.	6
2.2	Περιοχές που δεν ανήκουν στο REG και στο REG^*	6
2.3	Προβολή περιοχής πάνω σε διάνυσμα κατεύθυνσης και ελάχιστο περικλείον πλαίσιο περιοχής.	7
2.4	Περιοχές και τα χυρτά τους κελύφη.	8
2.5	Αναπαράσταση περιοχών με πολύγωνα.	8
2.6	Οι σχέσεις RCC-8.	10
2.7	Μοντέλα βασισμένα σε κώνους.	12
2.8	Μοντέλο βασισμένα σε προβολές.	12
2.9	Ελάχιστα περικλείοντα πλαίσια με βάση διαφορετικά πλαίσια αναφοράς.	13
2.10	Οι σχέσεις μεταξύ χρονικών διαστημάτων.	13
2.11	Το μοντέλο των Mukerjee και Joe.	14
2.12	Παράδειγμα σχέσεων στο μοντέλο του Papadias.	15
2.13	Μοντέλα αναπαράστασης πληροφορίας θέσης.	16
2.14	Τα μοντέλα των Abdelmotti και Goyal-Egenhofer.	17
2.15	Το μοντέλο των Billen-Clementini.	18
3.1	Περιοχές αναφοράς και σχέσεις κατεύθυνσης.	20
3.2	Σχέσεις πολλών χωρίων.	22
3.3	Ψαλιδισμός πολυγώνων.	24
3.4	Ευθείες που δεν διασχίζουν την ακμή AB	25
3.5	Εμβαδόν ανάμεσα σε μία ακμή και μία ευθεία.	25
3.6	Χρησιμοποιώντας την έκφραση E_l για τον υπολογισμό του εμβαδού πολυγώνου.	27
3.7	Υπολογισμός των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά.	28
3.8	Ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR%.	30
3.9	Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 3 ακμές.	31
3.10	Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 3 ακμές.	32
3.11	Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 4 ακμές.	32
3.12	Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 4 ακμές.	33

3.13 Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 5 ακμές.	33
3.14 Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 5 ακμές.	34
3.15 Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 10 ακμές.	34
3.16 Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 10 ακμές.	35
 4.1 Διαμέριση του επιπέδου σε πέντε χωρία.	38
4.2 Περιοχές αναφοράς και σχέσεις κατεύθυνσης.	39
4.3 Σχέσεις πολλών χωρίων.	40
4.4 Κοινές εφαπτομένες ανάμεσα σε περιοχές και πολύγωνα.	42
4.5 Κοινές εφαπτομένες και κυρτά πολύγωνα.	44
4.6 Ο αλγόριθμος Partition.	44
4.7 Πρωτεύουσα περιοχή στον κώνο $Cone^-(b, c)$ και πιθανές σχέσεις κατεύθυνσης.	45
4.8 Τα σύνορα των τεσσάρων κώνων.	46
4.9 Ο αλγόριθμος BC-DR-C1.	47
4.10 Το σχήμα του Παραδείγματος 4.3.	48
4.11 Ο αλγόριθμος BC-DR-C2.	50
4.12 Το σχήμα του Παραδείγματος 4.4.	51
4.13 Λειτουργία του αλγορίθμου Andrew's Monotone Chain.	53
4.14 Εφαπτομένες από σημείο προς κυρτό πολύγωνο.	54
4.15 Μετατροπή του αλγορίθμου αναζήτησης ακραίας κορυφής σε αναζήτησης εφαπτομένων.	55
4.16 Ο αλγόριθμος των Greiner-Hormann.	56
4.17 Οριακές περιπτώσεις σημείων τομής.	57
4.18 Μετατόπιση σημείου.	58
4.19 Γέφυρες σε τεμνόμενα και μη τεμνόμενα κυρά πολύγωνα.	59
4.20 Γέφυρες σε τεμνόμενα και μη τεμνόμενα κυρά πολύγωνα.	59
4.21 Προσεγγιστική εύρεση των γεφυρών.	60
4.22 Αριθμός διελεύσεων και αριθμός περιελίξεων.	61
4.23 Σημείο μέσα σε κυρτό πολύγωνο.	62
4.24 Κανόνες διαίρεσης της αλυσίδας των κορυφών.	63
 5.1 Προβλήματα με τις προσεγγίσεις με βάση σημεία και ελάχιστα περικλείοντα πλαίσια.	65
5.2 Περιοχές αναφοράς και σχέσεις κατεύθυνσης.	67
5.3 Δύο μοντέλα της οικογένειας, με την ίδια περιοχή αναφοράς.	68
5.4 Κατασκευή του ελαχίστου περικλείοντος οκτάγωνου μίας περιοχής.	70
5.5 Ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μίας περιοχής.	71
5.6 Ελάχιστα περικλείοντα οκτάγωνα περιοχών του REG^* .	71
5.7 Εκφυλισμένα ελάχιστα περικλείοντα οκτάγωνα.	72
5.8 Απόδειξη της Πρότασης 5.1.	73
5.9 Σχέσεις και μεταβλητές τμημάτων.	74
5.10 Σχέσεις $a : So : Es$ b και $a \{ So, Es \} b$	75

6.1	Επιπλέον συμβολισμοί των χωρίων <i>No</i> , <i>We</i> , <i>So</i> και <i>Es</i>	79
6.2	Σύνθεση σχέσεων ενός χωρίου.	80
6.3	Απόδειξη του Λήμματος 6.2.	82
6.4	Απόδειξη του Λήμματος 6.3.	83
6.5	Απόδειξη του Λήμματος 6.4.	84
6.6	Απόδειξη του Λήμματος 6.5.	85
6.7	Ο αλγόριθμος COMPOSE	87

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το γενικότερο αντικείμενο της εργασίας είναι ο *Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός* (Qualitative Spatial Reasoning). Σχοπός του είναι η προσέγγιση της ανθρώπινης γνώσης και συλλογιστικής σχετικά με το χώρο, χρησιμοποιώντας συμβολικές και όχι αριθμητικές μεθόδους. Οι εφαρμογές του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού είναι πολλές, για αυτό και έχει γίνει αντικείμενο έρευνας από πολλές και συχνά ετερόκλητες επιστημονικές περιοχές. Η εργασία και η παρουσίαση αυτή επικεντρώνεται στις εφαρμογές του στα Γεωγραφικά Πληροφορικά Συστήματα και τις Χωρικές Βάσεις Δεδομένων. Η δυνατότητα που μας παρέχει ο Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός να περιγράψουμε αφαιρετικά σχέσεις μεταξύ χωρικών οντοτήτων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα συστήματα αυτά για τη διατύπωση ενδιαφέρουσων ερωτήσεων.

Οι περισσότεροι ερευνητές έχουν ασχοληθεί με τρεις κλάσεις πληροφορίας μεταξύ χωρικών αντικειμένων: τοπολογική (topological), κατεύθυνσης (directional) και απόστασης (distance). Οι τοπολογικές σχέσεις περιγράφουν πως σχετίζονται τα όρια, τα εσωτερικά και τα εξωτερικά μέρη δύο χωρικών αντικειμένων. Για παράδειγμα, αν τα *a* και *b* αναπαριστούν χωρικά αντικείμενα, τότε το «*a* περικλείει το *b*» είναι μία τοπολογική σχέση. Οι σχέσεις κατεύθυνσης περιγράφουν πως το αντικείμενα είναι τοποθετημένα το ένα σε σχέση με το άλλο. Για παράδειγμα, το «*a* κείται νότια του *b*» είναι σχέση κατεύθυνσης. Τέλος, οι σχέσεις απόστασης περιγράφουν την απόσταση των αντικειμένων. Για παράδειγμα, το «*a* είναι κοντά στο *b*» είναι σχέση απόστασης.

Στην εργασία αυτή ασχολούμαστε αποκλειστικά με τις σχέσεις κατεύθυνσης στις δύο διατάσεις, ανάμεσα σε περιοχές του επιπέδου. Η χρήση τους στις Χωρικές Βάσεις Δεδομένων μας επιτρέπει να διατυπώνουμε ερωτήσεις που αφορούν τον σχετικό προσανατολισμό χωρικών οντοτήτων, χρησιμοποιώντας περιγραφές που προσεγγίζουν τον ανθρώπινο τρόπο σκέψης και ομιλίας και όχι αριθμητικές συνθήκες. Μερικές ερωτήσεις που μπορούμε να διατυπώσουμε είναι «Ποιες είναι οι χώρες της Νοτίου Αμερικής που βρίσκονται βόρεια της Βραζιλίας;» ή «Ποια είναι τα κτίρια στην περιοχή της Νέας Ιωνίας που βρίσκονται ανάμεσα στον Πυροβεστικό Σταθμό και το Νοσοκομείο;».

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε συχνά τον όρο *μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης*, εννοώντας αφενός μεν μία συγκεκριμένη ομάδα σχέσεων κατεύθυνσης και αφετέρου δε τους ορισμούς τους. Ένα μοντέλο σχέσεων κατεύθυνσης δεν πρέπει απλά να μας παρέχει ένα χρήσιμο σύνολο

σχέσεων κατεύθυνσης, αλλά πρέπει και ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται να ανταποκρίνεται όσο το δυνατόν καλύτερα γίνεται στην πραγματικότητα. Για παράδειγμα μπορούμε να φανταστούμε αρκετά μοντέλα που μας παρέχουν τις σχέσεις κατεύθυνσης «βόρεια», «νότια», «δυτικά» και «ανατολικά». Το ζητούμενο όμως είναι εάν κατά την εφαρμογή τους σε πραγματικά αντικείμενα περιγράφουν την πραγματικότητα όπως την αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος ή όχι.

Τα περισσότερα μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης προσεγγίζουν μία χωρική περιοχή με ένα αντιπροσωπευτικό της σημείο (συνήθως το κέντρο βάρους) ή με ένα αντιπροσωπευτικό της πλαίσιο (συνήθως το ελάχιστο οριακό πλαίσιο). Οι προσεγγίσεις αυτές είναι γενικά πολύ αδρές. Κατά συνέπεια, οι σχέσεις κατεύθυνσης που εκφράζονται έχοντας ως βάση τις προσεγγίσεις αυτές, μπορεί να είναι παραπλανητικές και αντιφατικές. Για παράδειγμα, με βάση ένα μοντέλο που προσεγγίζει τις περιοχές με το κέντρο βάρους τους, η Ισπανία είναι βορειοδυτικά της Πορτογαλίας (Σχήμα 1.1). Όμως η σχέση βορειοδυτικά δεν ταιριάζει απόλυτα στη σχέση κατεύθυνσης που χαρακτηρίζει την Ισπανία με την Πορτογαλία.



Σχήμα 1.1: Παραπλανητική σχέση κατεύθυνσης σε μοντέλο που προσεγγίζει τις περιοχές με σημεία.

Η σύγχρονη τάση είναι τα μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης να χρησιμοποιούν προσεγγίσεις μόνο των περιοχών αναφοράς¹, ενώ χρησιμοποιείται το ακριβές σχήμα της πρωτεύουσας περιοχής. Ο χώρος γύρω από την περιοχή αναφοράς χωρίζεται σε περιοχές και σημειώνονται οι περιοχές που καταλαμβάνει η πρωτεύουσα περιοχή. Αυτό δίνει τη σχέση κατεύθυνσης της πρωτεύουσας περιοχής με την περιοχή αναφοράς. Τα μοντέλα με τα οποία θα ασχοληθούμε στην παρούσα διπλωματική εργασία ακολουθούν αυτή τη λογική.

Η ερευνητική προσπάθεια που επενδύεται στον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό και τις σχέσεις κατεύθυνσης, αφορά συχνά τη βελτίωση των υπαρχόντων μοντέλων και τη δημιουργία νέων, αλλά δεν εξαντλείται εκεί. Όπως έχουμε πει, οι σχέσεις κατεύθυνσης έχουν βρει σημαντικές εφαρμογές στις Χωρικές Βάσεις Δεδομένων. Τα συστήματα αυτά προορίζονται για απαιτητικές εφαρμογές και απαιτείται να αποκρίνονται ταχύτατα στις ερωτήσεις που τους θέτονται. Υπάρχουν πολλά ενδιαφέροντα προβλήματα που σχετίζονται με τα μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης, τα οποία παρουσιάζουν σημαντικό πρακτικό ενδιαφέρον και είναι τα ακόλουθα:

- **Υπολογισμός των σχέσεων κατεύθυνσης:** Αν και έχουμε πει πως στον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό η πληροφορία αναπαριστάται με συμβολικό τρόπο, για να εξάγουμε

¹ Αν ισχύει $a \ R \ b$, όπου R σχέση κατεύθυνσης, τότε η a είναι η πρωτεύουσα περιοχή και η b η περιοχή αναφοράς

την πληροφορία αυτή από τα αποθηκευμένα χωρικά δεδομένα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε αριθμητικές τεχνικές και μεθόδους της Υπολογιστικής Γεωμετρίας.

- **Έλεγχος συνέπειας:** Ένα σύνολο από σχέσεις C ανάμεσα στις μεταβλητές \bar{x} αν και μόνο εάν υπάρχει μία ανάθεση στις μεταβλητές \bar{x} που ικανοποιεί όλες τις σχέσεις του συνόλου C .
- **Σύνθεση:** Δοσμένων των μεταβλητών a, b και c τέτοιων ώστε $a \ R_1 \ b$ και $b \ R_2 \ c$, η σύνθεση υπολογίζει την σχέση μεταξύ των a και c .

Η ανάγκη ύπαρξης αποδοτικών αλγορίθμων υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης είναι προφανής. Μία ερώτηση σε μία βάση χωρικών δεδομένων μπορεί να απαιτεί τον υπολογισμό πολλών σχέσεων κατεύθυνσης, ένας αριθμός ο οποίος αυξάνει καθώς μεγαλώνει και το μέγεθος της βάσης. Το γεγονός αυτό έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη εξειδικευμένων αλγορίθμων για τον κατά τον δυνατό γρηγορότερο υπολογισμό των σχέσεων του κάθε μοντέλου.

Ο έλεγχος συνέπειας και η σύνθεση σχέσεων αποτελούν δύο προβλήματα που συσχετίζονται μεταξύ τους και βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στην αποδοτική αποτίμηση ερωτήσεων που χρησιμοποιούν σχέσεις κατεύθυνσης. Χρησιμοποιούνται στην προεπεξεργασία των ερωτήσεων για να εντοπίσουν ασυνέπειες στις ερωτήσεις και να μειώσουν το χώρο αναζήτησης, αυξάνοντας την ταχύτητα απόκρισης του συστήματος.

Έχοντας παρουσιάσει τις γενικές κατεύθυνσεις που ακολουθεί η έρευνα γύρω από τον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό και τις σχέσεις κατεύθυνσης, μπορούμε να κάνουμε μία σύντομη καταγραφή της συνεισφοράς της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

1.1 Συνεισφορά εργασίας

Οι κύριες συνεισφορές της εργασίας είναι οι ακόλουθες.

1. Συγχρίνουμε την απόδοση τριών αλγόριθμου για τον υπολογισμό των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer [29, 30]. Τυλοποιήσαμε τον νέο αλγόριθμο των Skiadopoulos et al [62] και τους ευρέως χρησιμοποιούμενους αλγορίθμους των Sutherland και Hodgman [68] και των Barksy και Liang [44] και συγχρίναμε την απόδοσή τους σε συνθετικά δεδομένα. Παρουσιάζουμε τα αποτελέσματά μας με τη μορφή γραφικών παραστάσεων και πινάκων.
2. Παρουσιάζουμε δύο αλγορίθμους για τον υπολογισμό των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Billen και Clementini [8]. Δίνουμε τις εκτιμήσεις μας για την πολυπλοκότητα των αλγορίθμων, ενώ συνοδεύουμε την παρουσίασή μας με μία μελέτη των αριθμητικών τεχνικών της Υπολογιστικής Γεωμετρίας που χρησιμοποιήσαμε για την υλοποίησή τους. Με αυτό τον τρόπο δίνουμε μία σημαντική πηγή πληροφοριών για όποιον θελήσει να μελετήσει την υλοποίηση των αλγορίθμων ή να τους υλοποιήσει εκ νέου.

3. Περιγράφουμε και στη συνέχεια ορίζουμε αυστηρά μία νέα οικογένεια μοντέλων σχέσεων κατεύθυνσης. Η προσέγγισή μας είναι απλή, αλλά παρέχει μία ικανοποιητική περιγραφή της πραγματικότητας. Η περιοχή αναφοράς προσεγγίζεται με το ελάχιστο ορθογώνιο που την περικλείει και το επίπεδο γύρω του χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα που αντιστοιχούν στις σχέσεις κατεύθυνσης «βόρεια», «νότια», «δυτικά» και «ανατολικά».
4. Χρησιμοποιώντας τους αυστηρούς ορισμούς που δώσαμε για την νέα οικογένεια μοντέλων, μελετάμε τη σύνθεση δύο σχέσεων κατεύθυνσης. Ξεκινάμε από τη σύνθεση των απλούστερων σχέσεων κατεύθυνσης και προοδευτικά υπολογίζουμε τη σύνθεση για πολυπλοκότερες σχέσεις.

1.2 Οργάνωση τόμου

Η παρούσα εργασία δομείται ως εξής:

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά όλους τους βασικούς μαθηματικούς ορισμούς και συμβάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια της εργασίας. Επίσης κάνουμε μία σύντομη αναφορά στις σχετικές με τον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό εργασίες και τις εφαρμογές που έχει βρει σε πληθώρα επιστημονικών περιοχών. Τέλος, παρουσιάζουμε τα τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια της εργασίας, χωρίς να καταφύγουμε σε αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς.

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του πειράματος που πραγματοποιήσαμε για την μέτρηση της επίδοσης αλγορίθμων υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer. Στο κεφάλαιο αυτό παραθέτουμε και τον αυστηρό ορισμό του μοντέλου, καθώς και την αναλυτική περιγραφή του αλγορίθμου των Skiadopoulos et al. Η παρουσίαση των αποτελεσμάτων γίνεται με τη βοήθεια γραφικών παραστάσεων και πινάκων.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε τους δύο αλγόριθμους που αναπτύξαμε για τον υπολογισμό σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Billen και Clementini. Στο κεφάλαιο παραθέτουμε επίσης τον αυστηρό ορισμό του μοντέλου, αλλά και μία παρουσίαση των τεχνικών της Υπολογιστικής Γεωμετρίας που χρησιμοποιήσαμε κατά την υλοποίηση των αλγορίθμων, καθώς και τους λόγους που μας οδήγησαν στην επιλογή τους.

Στο Κεφάλαιο 5 παραθέτουμε την περιγραφή ενός νέου μοντέλου σχέσεων κατεύθυνσης, επεκτείνοντας το μοντέλο σε μία οικογένεια μοντέλων την οποία και στη συνέχεια ορίζουμε αυστηρά.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε το πρόβλημα της σύνθεσης δύο σχέσεων κατεύθυνσης στην οικογένεια μοντέλων που παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 5. Ξεκινάμε από τη σύνθεση των απλούστερων σχέσεων κατεύθυνσης και προοδευτικά υπολογίζουμε τη σύνθεση για πολυπλοκότερες σχέσεις.

Στο Κεφάλαιο 7, τέλος, παρουσιάζονται τα συμπεράσματά μας καθώς και κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα.

Κεφάλαιο 2

Θεωρητικό Υπόβαθρο και Σχετικές Εργασίες

Αυτό το κεφάλαιο αποσκοπεί στο να εξοικειώσει τον αναγνώστη, από τη μία με βασικές μαθηματικές έννοιες και συμβάσεις που χρειάζονται για την κατανόηση της εργασίας, και από την άλλη με την ευρύτερη επιστημονική περιοχή του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού, στο αντικείμενο του οποίου εντάσσεται και η παρούσα διπλωματική εργασία.

Αναλυτικότερα, η συνεισφορά αυτού του κεφαλαίου είναι η εξής:

- Παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά όλους τους βασικούς μαθηματικούς ορισμούς και συμβάσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια της εργασίας. Περισσότερο εξειδικευμένοι ορισμοί θα διατυπώνονται όταν απαιτείται κατά την παρουσίαση του αντίστοιχου θέματος, ώστε να μην υποχρεώνεται ο αναγνώστης σε συνεχείς αναφορές σε αυτό το κεφάλαιο.
- Κάνουμε μία σύντομη αναφορά στο αντικείμενο του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού και στις εφαρμογές που έχει βρει σε πληθώρα επιστημονικών περιοχών. Επιπλέον, παρουσιάζουμε μία ανασκόπηση των σημαντικότερων εργασιών που έχουν γίνει στο αντικείμενό του, δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στις προσπάθειες μοντελοποίησης σχέσεων κατεύθυνσης, οι οποίες αποτελούν και τον πυρήνα της παρούσας εργασίας. Η ανασκόπησή μας δεν είναι σε καμία περίπτωση πλήρης, για αυτό και έχουμε προσπαθήσει να παραθέσουμε αρκετές βιβλιογραφικές αναφορές για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη.
- Παρουσιάζουμε τα τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια της εργασίας. Χωρίς να καταφύγουμε σε αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς, κάτι που γίνεται στα κατάλληλα κεφάλαια, περιγράφουμε τα τρία μοντέλα για να δώσουμε μία πρώτη εικόνα τους στον αναγνώστη. Συμπληρώνουμε την παρουσίασή μας με αναφορές στις εργασίες που έχουν πάνω στα μοντέλα αυτά.

Η δομή του κεφαλαίου είναι η εξής: Στην Ενότητα 2.1, παρουσιάζουμε το απαραίτητο θεωρητικό υπόβαθρο, στην Ενότητα 2.2 κάνουμε μία σύντομη αναφορά στον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό και στις σχετικές με αυτόν εργασίες και στην Ενότητα 2.3 παρουσιάζουμε συνοπτικά με

τα τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης με τα οποία ωστά ασχοληθούμε στη συνέχεια της εργασίας. Τέλος, στην Ενότητα 2.4 παρουσιάζουμε τα συμπεράσματά μας.

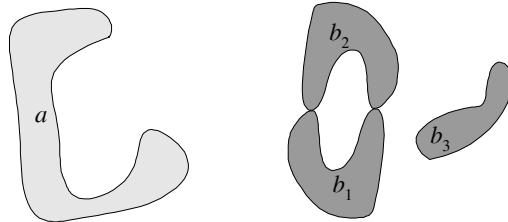
2.1 Θεωρητικό υπόβαθρο

Θεωρούμε τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^2 . Ορίζουμε τις περιοχές ως μη κενά σύνολα σημείων του χώρου \mathbb{R}^2 .

Μία περιοχή a είναι **συνεκτική** (connected), εάν για κάθε ζεύγος σημείων υπάρχει μία γραμμή, όχι απαραίτητα ευθεία, η οποία τα ενώνει και όλα τα σημεία της ανήκουν στην περιοχή a . Η ιδιότητα αυτή δεν επιτρέπει σε μία περιοχή να αποτελείται από ξεχωριστά τμήματα.

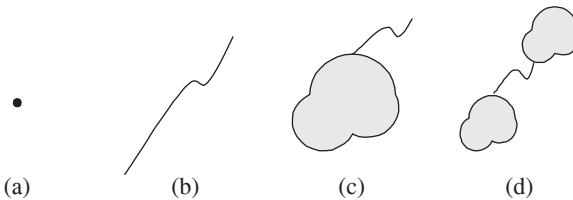
Οι περιοχές που ωστά απασχολήσουν ανήκουν σε δύο κατηγορίες:

- Περιοχές ομοιομορφικές του μοναδιαίου χλειστού δίσκου. Το σύνολο αυτών των περιοχών ωστά παριστάνεται με το σύμβολο REG . Οι περιοχές του REG είναι χλειστές, συνεκτικές και έχουν συνεκτικά σύνορα.
- Περιοχές που σχηματίζονται από πεπερασμένες ενώσεις περιοχών του REG . Το σύνολο των περιοχών αυτών ωστά παριστάνεται με το σύμβολο REG^* . Οι περιοχές αυτές μπορεί να είναι μη συνεκτικές και να περιέχουν οπές.



Σχήμα 2.1: Περιοχές.

Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζονται οι περιοχές a , b_1 , b_2 , b_3 οι οποίες ανήκουν στο REG (και στο REG^*) και η περιοχή $b = b_1 \cup b_2 \cup b_3$ η οποία ανήκει στο REG^* . Στο Σχήμα 2.2 παρουσιάζονται περιοχές που δεν είναι ούτε στο REG ούτε στο REG^* . Σημεία (Σχήμα 2.2a), γραμμές (Σχήμα 2.2b) και περιοχές από τις οποίες απορρέουν γραμμές (Σχήμα 2.2c-d) δεν είναι ομοιομορφικές με μοναδιαίους δίσκους. Οι περιοχές στο Σχήμα 2.2 είναι φυσικά στο \mathbb{R}^2 .

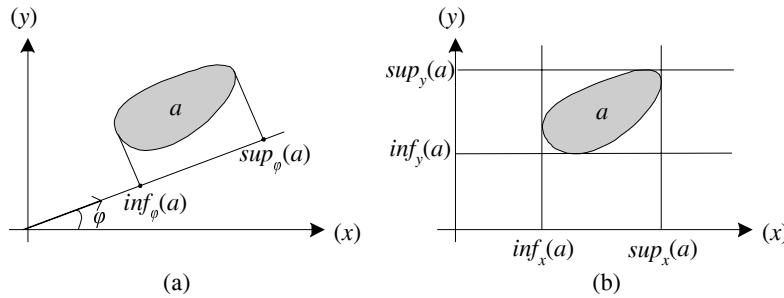


Σχήμα 2.2: Περιοχές που δεν ανήκουν στο REG και στο REG^* .

Έστω ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης $\vec{d} = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ που σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα x . Έστω ακόμα μία περιοχή a . Η προβολή της περιοχής πάνω στο διάνυσμα \vec{d} είναι το σύνολο των εσωτερικών γινομένων όλων των διανυσμάτων θέσης $\vec{r} = (x, y)$ των σημείων της περιοχής με το διάνυσμα κατεύθυνσης, δηλαδή $\vec{r} \cdot \vec{d} = \cos(\phi)x + \sin(\phi)y$ και την συμβολίζουμε με $\Pi_\phi(a)$. Η προβολή μίας μη συνεκτικής περιοχής πάνω σε ένα μοναδιαίο διάνυσμα κατεύθυνσης είναι, στη γενική περίπτωση, ένα σύνολο αριθμών. Αν όμως η περιοχή είναι συνεκτική τότε η προβολή είναι ένα διάστημα.

Ένα πραγματικός αριθμός $m \in \mathbb{R}$, είναι το κάτω όριο ενός συνόλου πραγματικών αριθμών I ανν $m \leq x$ για όλα τα $x \in I$. Αν κάποιο κάτω όριο του I είναι μεγαλύτερο από όλα τα άλλα κάτω όρια του I , τότε καλείται μέγιστο κάτω όριο (infimum) και συμβολίζεται με $\inf(I)$. Όμοια ορίζουμε το ελάχιστο πάνω όριο (supremum) που συμβολίζεται με $\sup(I)$ [47]. Το μέγιστο κάτω όριο και το ελάχιστο πάνω όριο ενός συνόλου πραγματικών αριθμών καλούνται συχνά ως όρια.

Συμβολίζουμε το infimum της προβολής της περιοχής a στο διάνυσμα κατεύθυνσης γωνίας ϕ (δηλαδή το $\inf(\Pi_\phi(a))$) με $\inf_\phi(a)$. Αντίστοιχα, το supremum της ίδιας προβολής συμβολίζεται με $\sup_\phi(a)$ (Σχήμα 2.3a). Ιδιαίτερη χρησιμότητα έχουν τα όρια των προβολών μίας περιοχής κατά τις διευθύνσεις των αξόνων x και y , δηλαδή τα όρια των συνόλων $\Pi_{0^\circ}(a)$ και $\Pi_{90^\circ}(a)$ αντίστοιχα. Έτσι συμβολίζουμε με $\inf_x(a)$ και $\sup_x(a)$ το κάτω και άνω όριο της προβολής της περιοχής a πάνω στον άξονα x και με $\inf_y(a)$ και $\sup_y(a)$ τα αντίστοιχα όρια για τον άξονα y .



Σχήμα 2.3: Προβολή περιοχής a σε διάνυσμα κατεύθυνσης και ελάχιστο περικλείον πλαίσιο περιοχής.

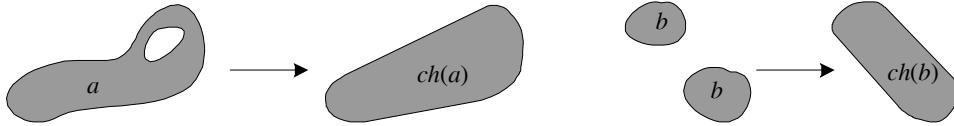
Το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο (minimum bounding box) της περιοχής a συμβολίζεται ως $mbb(a)$ και είναι το ορθογώνιο που σχηματίζεται από τις γραμμές $x = \inf_x(a)$, $x = \sup_x(a)$, $y = \inf_y(a)$ και $y = \sup_y(a)$ (Σχήμα 2.3b).

Μία περιοχή a είναι κυρτή (convex), εάν για κάθε ζεύγος σημείων υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα, το οποίο τα ενώνει και όλα τα σημεία του ανήκουν στην περιοχή a . Μία κυρτή περιοχή δεν έχει κοιλότητες και οπές.

Ονομάζουμε κυρτό κέλυφος (convex hull) μίας περιοχής a και συμβολίζουμε με $ch(a)$ την ελάχιστη κυρτή περιοχή που περικλείει την a . Στο Σχήμα 2.4 παρουσιάζονται οι περιοχές a και b και τα κυρτά τους κελύφη.

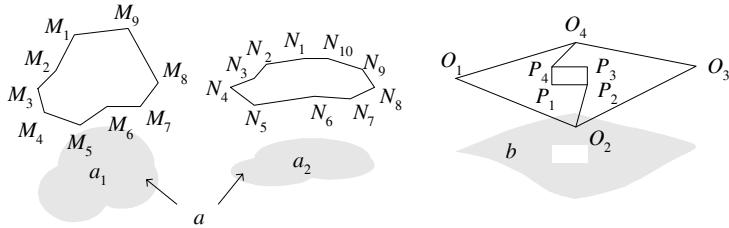
Γενικά το κυρτό κέλυφος μίας περιοχής είναι μία ομαλοποιημένη προσέγγιση της, χωρίς κοιλότητες και οπές. Διαισθητικά, θα ήταν το «σχήμα» που θα έπαιρνε ένα σφιχτό λάστιχο εάν

το εφαρμόζαμε γύρω από μία περιοχή. Συγκρίνοντας το κυρτό χέλυφος με το ελάχιστο περικλείσιο πλαίσιο, μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε πως αποτελεί μία καλύτερη προσέγγιση μίας περιοχής, καθώς διατηρεί πολύ περισσότερα χαρακτηριστικά της.



Σχήμα 2.4: Περιοχές και τα κυρτά τους κελύφη.

Συνήθως, στα Γεωγραφικά Πληροφορικά Συστήματα και στις Χωρικές Βάσεις Δεδομένων, οι συνδεδεμένες περιοχές του συνόλου REG παριστάνονται χρησιμοποιώντας ένα απλό πολύγωνο, ενώ οι σύνθετες περιοχές του REG^* παριστάνονται χρησιμοποιώντας σύνολα από πολύγωνα. Στη συνέχεια θα απαριθμούμε τις ακμές των πολυγώνων χρησιμοποιώντας φορά διαγραφής αντίθετη τη φοράς των δεικτών του ρολογιού. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.5 η περιοχή $a_1 \in REG$ παριστάνεται με το πολύγωνο $(M_1 M_2 \cdots M_9)$ και η περιοχή $a = a_1 \cup a_2 \in REG^*$ με τα πολύγωνα $(M_1 M_2 \cdots M_9)$ και $(N_1 N_2 \cdots N_{10})$. Χρησιμοποιώντας σύνολα πολυγώνων μπορούμε να παραστήσουμε και περιοχές με οπές. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.5 η περιοχή $b \in REG^*$ παριστάνεται με τα πολύγωνα $(O_1 O_2 P_2 P_1 P_4 O_4)$ και $(O_4 P_4 P_3 P_2 O_2 O_3)$.



Σχήμα 2.5: Αναπαράσταση περιοχών με πολύγωνα.

Έστω δύο τυχαίες περιοχές a και b και έστω ότι η a σχετίζεται με την b με μία δυαδική σχέση κατεύθυνσης, για παράδειγμα «η a είναι βόρεια της b ». Η περιοχή a ονομάζεται πρωτεύουσα περιοχή αφού η σχέση ορίζεται για αυτή και η b ονομάζεται περιοχή αναφοράς επειδή η σχέση ορίζεται ως προς αυτή.

Ομοίως και για τις τριαδικές σχέσεις κατεύθυνσης. Έστω δύο τυχαίες περιοχές a , b και c και έστω ότι η a σχετίζεται με τις b και c με μία τριαδική σχέση κατεύθυνσης, για παράδειγμα «η a είναι ανάμεσα στις b και c ». Η περιοχή a ονομάζεται πρωτεύουσα περιοχή και οι b και c ονομάζονται περιοχές αναφοράς.

2.2 Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός

Γενικά, ο Περιγραφικός Λογισμός (Qualitative Reasoning) είναι μία προσπάθεια προσέγγισης της ανθρώπινης γνώσης και συλλογιστικής σχετικά με τον κόσμο, χρησιμοποιώντας συμβολικές

και όχι αριθμητικές μεθόδους. Οι δύο βασικές συνιστώσες της ανθρώπινης αντίληψης του κόσμου είναι ο χρόνος και ο χώρος.

Με τη διάσταση του χρόνου έχουν ασχοληθεί πολλοί ερευνητές. Η ερευνητική προσπάθεια επικεντρώθηκε κυρίως στην αναπαράσταση του χρόνου και των γεγονότων μέσα σε αυτόν, είτε ως χρονικά σημεία [73, 74], είτε ως χρονικά διαστήματα [4]. Κάθε μία από τις δύο αναπαραστάσεις συνοδεύεται και από διαφορετικούς μηχανισμούς εξαγωγής συμπερασμάτων. Οι έρευνες γύρω από το χρόνο έχουν βρει σημαντικές εφαρμογές στις Χωρικές Βάσεις Δεδομένων [43, 39].

Ο Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός (Qualitative Spatial Reasoning) ασχολείται με την αναπαράσταση και μοντελοποίηση της ανθρώπινης αντίληψης του χώρου. Το αντικείμενο του είναι ευρύ και οι εφαρμογές του πολλές, για αυτό αποτελεί και αντικείμενο έρευνας για πολλές επιστημονικές περιοχές, όπως της Τεχνητής Νοημοσύνης, των Γεωγραφικών Πληροφοριακών Συστημάτων, των Βάσεων Δεδομένων, της Όρασης Υπολογιστών, της Ρομποτικής, αλλά και πολλών ακόμα. Στη συνέχεια παραθέτουμε μερικές χαρακτηριστικές εφαρμογές του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού στις παραπάνω γνωστικές περιοχές.

Για παράδειγμα, αν και τα Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα (GIS) έχουν βρει πολλές εφαρμογές και διατηρούν τεράστιες ποσότητες αριθμητικών δεδομένων, πάσχουν στον τομέα της διεπαφής ανθρώπου-μηχανής. Οι τρέχουσες ερευνητικές προσπάθειες στον τομέα των GIS επικεντρώνονται στο να παρέχουν στους χρήστες τη δυνατότητα να πραγματοποιούν ερωτήσεις με περιγραφικό και όχι ποσοτικό τρόπο [18, 20]. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται κατά κόρο τεχνικές του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού.

Στη Ρομποτική αν και η πλοιογγήση μίας μηχανής απαιτεί σε χαμηλό επίπεδο τη διατύπωση συγκεκριμένων εντολών με αριθμητικά δεδομένα, είναι πολύ συχνά χρήσιμη η κατάστρωση ενός πλάνου κίνησης σε υψηλό επίπεδο, όπου χρησιμοποιούνται περιγραφικές τεχνικές από τον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό [69].

Ο Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός έχει χρησιμοποιηθεί και στην Όραση Υπολογιστών για την ερμηνεία οπτικής πληροφορίας. Αν και η εξαγωγή της πληροφορίας σχετικά με τη θέση και τη μορφή των αντικειμένων σε μία εικόνα, αποτελεί αντικείμενο αποκλειστικά της Όρασης Υπολογιστών και της Επεξεργασίας Εικόνας, η ερμηνεία της εικόνας ή η ταυτοποίηση αντικειμένων χρησιμοποιεί τεχνικές του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού [22].

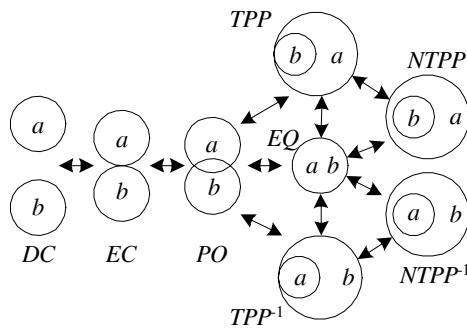
Συνοπτικά αναφέρουμε πως ο Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός έχει ακόμα χρησιμοποιηθεί σε προβλήματα επεξεργασίας φυσικής γλώσσας [6], παίγνια αποφάσεων, συστήματα CAD, αλλά και στο σχεδιασμό και τη διατύπωση γλωσσών διεπαφής χρήστη (visual languages) [28, 35].

Υπάρχουν πολλές όψεις του χώρου στις οποίες μπορούμε να επικεντρωθούμε. Πρέπει να κάνουμε παραδοχές όχι μόνο για το πως θα παραστήσουμε το χώρο και τις οντότητες μέσα σε αυτόν, δηλαδή ποια οντολογία θα χρησιμοποιήσουμε, αλλά και πως θα περιγράψουμε τη σχέση μεταξύ δύο οντοτήτων. Για παράδειγμα, ανάλογα με την εφαρμογή, μπορούμε να θεωρήσουμε την τοπολογική σχέση δύο οντοτήτων, τη μεταξύ τους σχέση απόστασης ή τον σχετικό τους προσανατολισμό. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις παραπάνω σχέσεις. Για μία πληρέστερη παρουσίαση του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού, ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να απευθυνθεί στα βιβλία των Hernandez [37] και Renz [60] και τα άρθρα των Cohn και Hazarika [15, 14].

2.2.1 Τοπολογικές σχέσεις

Οι τοπολογικές σχέσεις (topological relations) αφορούν σχέσεις γειτνίασης μεταξύ χωρικών οντοτήτων και αποτελούν ίσως την πιο βασική κατηγορία χωρικής πληροφορίας. Αν και η τοπολογία έχει μελετηθεί εκτενώς από τους μαθηματικούς, η υπάρχουσα θεωρία δεν έχει κριθεί κατάλληλη για την χρήση της στον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό. Οι δύο γνωστότερες κατηγορίες τοπολογικών σχέσεων είναι τα μοντέλα RCC (Region Connection Calculus) και τα μοντέλα n -τομών.

Τα μοντέλα RCC βασίζονται στην ιδέα δύο περιοχές a και b να είναι συνδεδεμένες (connected), δηλαδή τα κελύφη τους (closures) να μοιράζονται ένα κοινό σημείο, γεγονός που συμβολίζουμε με $C(a, b)$. Σύμφωνα με αυτό τον ορισμό καταργείται η διάκριση μεταξύ μίας περιοχής, του εσωτερικού της και του συνόρου της. Με βάση το κατηγόρημα $C(a, b)$ ορίζονται οι πολυπλοκότερες τοπολογικές σχέσεις. Το γνωστότερο μοντέλο αυτής της κατηγορίας είναι οι σχέσεις RCC-8 των Randel, Cui και Cohn [59], οι οποίες παρουσιάζονται στο Σχήμα 2.6.



Σχήμα 2.6: Οι σχέσεις RCC-8.

Η προσέγγιση των n -τομών, αντίθετα με τα μοντέλα RCC, κάνει διάκριση μεταξύ του συνόρου και του εσωτερικού μίας περιοχής. Το γνωστότερο μοντέλο αυτής της κατηγορίας είναι οι 9-τομές του Egenhofer [16, 19]. Σύμφωνα με αυτό, σε κάθε περιοχή ή αντιστοιχίανται τρία σύνολα σημείων: το εσωτερικό της a , το σύνορό της a και το συμπλήρωμά της a^- . Με αυτό τον τρόπο η τοπολογική σχέση μεταξύ δύο περιοχών a και b δίνεται από έναν 3×3 , του οποίου τα στοιχεία παίρνουν είτε την τιμή κενό (\emptyset) είτε μη-κενό ($\neg\emptyset$) και είναι ο:

$$\mathfrak{I}_9(a, b) = \begin{pmatrix} a \cap b & a \cap \partial b & a \cap b^- \\ \partial a \cap b & \partial a \cap \partial b & \partial a \cap b^- \\ a^- \cap b & a^- \cap \partial b & a^- \cap b^- \end{pmatrix}$$

2.2.2 Σχέσεις κατεύθυνσης

Οι σχέσεις κατεύθυνσης (direction relations) περιγράφουν τη σχετική θέση δύο αντικειμένων. Για παράδειγμα αν τα a και b παριστάνουν χωρικά αντικείμενα, εκφράσεις όπως «το a βρίσκεται βόρεια του b » ή «το a βρίσκεται πίσω από το b » αποτελούν σχέσεις κατεύθυνσης.

Στη βιβλιογραφία έχουν προταθεί πολλά μοντέλα αναπαράστασης πληροφορίας κατεύθυνσης [27, 21, 54, 2, 45, 30]. Στα πιο πολλά από αυτά, οι σχέσεις κατεύθυνσης ορίζονται ως δυαδικές σχέσεις.

Οι σχέσεις κατεύθυνσης μπορούν να εκφραστούν με βάση ένα από τρία πλαίσια αναφοράς [37].

- Το φυσικό (intrinsic) πλαίσιο αναφοράς ορίζεται σύμφωνα με τα φυσικά χαρακτηριστικά των αντικειμένων. Οι κατεύθυνσεις (όπως μπροστά, πίσω, νότια, ανατολικά κ.τ.λ.) καθορίζονται με βάση τα χαρακτηριστικά των αντικειμενών. Για παράδειγμα το εμπρόσθιο μέρος ενός κτιρίου καθορίζεται από την κεντρική είσοδο του και το εμπρόσθιο μέρος ενός κινούμενου αντικειμένου καθορίζεται από την κατεύθυνση κίνησης του.
- Το ξένο (deictic) πλαίσιο αναφοράς ορίζεται σύμφωνα με ένα εξωτερικό παρατηρητή. Οι κατεύθυνσεις καθορίζονται με βάση τα χαρακτηριστικά του παρατηρητή.
- Το εξωτερικό (extrinsic) πλαίσιο αναφοράς ορίζεται σύμφωνα με βάση τους πόλους της Γης και το πρώτο μεσημβρινό του Greenwich. Στο \mathbb{R}^2 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και το Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

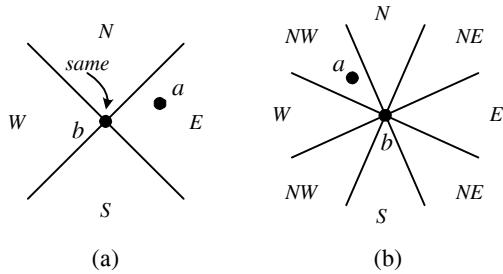
Στην πλειονότητά τους τα μοντέλα κατεύθυνσης χρησιμοποιούν το εξωτερικό πλαίσιο αναφοράς [25, 45, 10, 56, 54, 2, 30], υπάρχουν όμως και μοντέλα που χρησιμοποιούν το ξένο και το φυσικό πλαίσιο αναφοράς [51, 1, 27, 8].

Τα περισσότερα μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης προσεγγίζουν μια χωρική περιοχή με ένα αντιπροσωπευτικό της σημείο (τις περισσότερες φορές το κέντρο βάρους) ή με ένα αντιπροσωπευτικό της πλαίσιο (τις περισσότερες φορές το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο).

Τα μοντέλα που βασίζονται σε προσεγγίσεις με αντιπροσωπευτικά σημεία χωρίζουν το χώρο γύρω από το αντιπροσωπευτικό σημείο της περιοχής σε αμοιβαίως αποκλειόμενα χωρία (Σχήματα 2.7 και 2.8). Το χωρίο όπου κείται το αντιπροσωπευτικό σημείο του πρωτεύοντος αντικειμένου, χαρακτηρίζει τη σχέση κατεύθυνσης του με το αντικείμενο αναφοράς. Βασικά, υπάρχουν δύο είδη μοντέλων που βασίζονται σε προσεγγίσεις με σημεία: τα κωνικά και τα προβολικά.

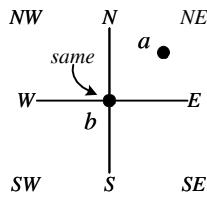
Τα κωνικά μοντέλα χωρίζουν το χώρο γύρω από το αντικείμενο αναφοράς χρησιμοποιώντας κώνους [1, 25]. Πιο συγκεκριμένα, το κωνικό μοντέλο με τέσσερις κατεύθυνσεις διακρίνει τις σχέσεις κατεύθυνσης Βόρεια, Νότια, Ανατολικά, Δυτικά και το σημείο αναφοράς b , που συμβολίζονται με N , W , S , E και *same* αντίστοιχα (Σχήμα 2.7a). Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.7a είναι a E b . Το κωνικό μοντέλο με οκτώ κατεύθυνσεις προσθέτει ακόμα τις σχέσεις κατεύθυνσης Βορειοανατολικά, Βορειοδυτικά, Νοτιοδυτικά και Νοτιοανατολικά, που συμβολίζονται με NE , NW , SW και SE αντίστοιχα (Σχήμα 2.7b). Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.7b είναι a NW b .

Τα προβολικά μοντέλα χωρίζουν το χώρο γύρω από το αντικείμενο αναφοράς χρησιμοποιώντας τις προβολές του αντιπροσωπευτικού σημείου στους άξονες των x και y [25, 45]. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.8 έχουμε τέσσερα αμοιβαίως αποκλειόμενα χωρία διάστασης 2 (κατεύθυνσεις NE , NW , SW και SE), τέσσερις ημι-άξονες (κατεύθυνσεις N , W , S και E) και ένα σημείο



Σχήμα 2.7: Μοντέλα βασισμένα σε κώνους.

(κατεύθυνση *same*). Για τα σημεία στο Σχήμα 2.8 είναι $a \text{ NE } b$ όπου a είναι το πρωτεύον αντικείμενο και b είναι το αντικείμενο αναφοράς.



Σχήμα 2.8: Μοντέλο βασισμένα σε προβολές.

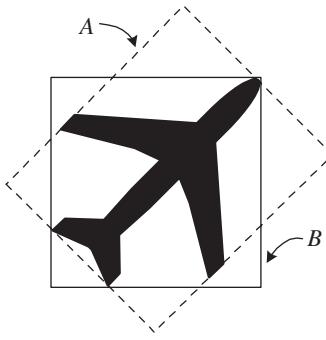
Ο Ligozat [45] ορίζει ένα λογισμό με το παραπάνω σύνολο των 9 σχέσεων κατεύθυνσης. Ο λογισμός αυτός χρησιμοποιεί μια άλγεβρα με $512 (2^9)$ σχέσεις. Ο έλεγχος της συνέπειας ενός συνόλου από περιορισμούς που εμπλέκουν τις παραπάνω σχέσεις είναι NP-complete. Επιπρόσθετα ο Ligozat αποδεικνύει ότι υπάρχει ένα μέγιστο υποσύνολο της παραπάνω άλγεβρας για το οποίο ο έλεγχος συνέπειας μπορεί να γίνει αποδοτικά, δηλαδή σε πολυωνυμικό χρόνο.

Τα περισσότερα μοντέλα που προσεγγίζουν τα χωρικά αντικείμενα με πλαίσια, χρησιμοποιούν το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο ως μέθοδο προσέγγισης. Το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο ενός χωρικού αντικειμένου a είναι το μικρότερο ορθογώνιο (με πλευρές παράλληλες ή κάθετες στους άξονες) που καλύπτει πλήρως το αντικείμενο a . Συνεπώς, ανάλογα με το πλαίσιο αναφοράς, το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο ενός αντικειμένου μπορεί να αλλάζει. Για παράδειγμα, το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο του αεροπλάνου στο Σχήμα 2.9 με βάση το φυσικό πλαίσιο αναφοράς είναι το ορθογώνιο A ενώ με βάση το εξωτερικό πλαίσιο αναφοράς είναι το ορθογώνιο B . Επίσης, τα περισσότερα από τα μοντέλα αυτά είναι γενικεύσεις σε δύο διαστάσεις (\mathbb{R}^2) των 13 σχέσεων του Allen μεταξύ χρονικών διαστημάτων [4] στο \mathbb{R} (βλέπε Σχήμα 2.10).

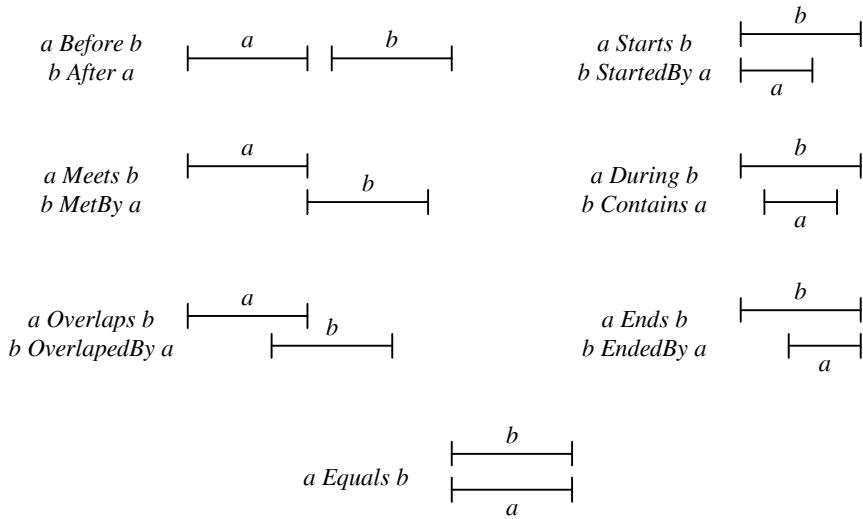
Οι Mukerjee και Joe [51] παρουσίασαν ένα χωρικό μοντέλο βασισμένο στις σχέσεις του Allen. Οι σχέσεις σε αυτό το μοντέλο δεν εκφράζονται σε βάση με κάποιο απόλυτο σύστημα συντεταγμένων αλλά με βάση το φυσικό εμπρόσθιο μέρος των αντικειμένων.

Για να καθοριστεί η χωρική σχέση μεταξύ δύο αντικειμένων a και b , χρειάζεται να εκφράσουμε την σχετική κατεύθυνση και την σχετική θέση των αντικειμένων a και b .

Για να καθορίσουμε τη σχετική κατεύθυνση μεταξύ δύο αντικειμένων πρέπει να αποδώσουμε



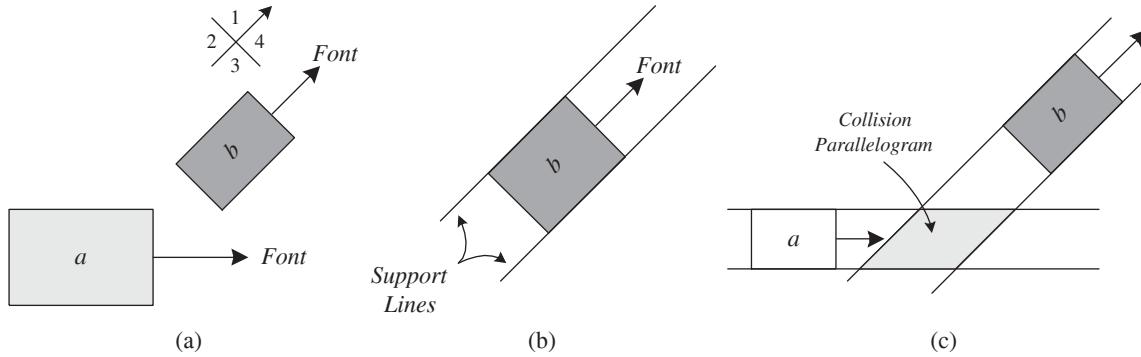
Σχήμα 2.9: Ελάχιστα περικλείοντα πλαισια με βάση διαφορετικά πλαισια αναφοράς.



Σχήμα 2.10: Οι σχέσεις μεταξύ χρονικών διαστημάτων.

στο καθένα μία κατεύθυνση προς την οποία «βλέπει» το «μπροστινό» του μέρος. Η κατεύθυνση αυτή ονομάζεται *front*. Με βάση αυτή καθορίζουμε τις άλλες τρεις ορθογώνιες κατεύθυνσεις *back*, *left* και *right*. Οι τέσσερις αυτές κατεύθυνσεις χωρίζουν το επίπεδο γύρω από το αντικείμενο σε τέσσερα τεταρτημόρια. Η σχετική κατεύθυνση του αντικειμένου *a* σε σχέση με το αντικείμενο *b*, την οποία συμβολίζουμε με $dir(a/b)$, προκύπτει από το τεταρτημόριο του αντικειμένου *b* το οποίο δείχνει η κατεύθυνση *front* του αντικειμένου *a*. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.11a, είναι $dir(a/b) = 4$. Η σχέση *dir* είναι αντιστρέψιμη, δηλαδή δοσμένης της $dir(a/b)$, η $dir(b/a)$ είναι μονοσήμαντα ορισμένη. Άρα, για να εκφράσουμε τη σχετική κατεύθυνση των αντικειμένων *a* και *b* πρέπει να προσδιορίσουμε μόνο την $dir(a/b)$.

Για να καθορίζουμε τη σχετική θέση, προσεγγίζουμε τα αντικείμενα με το ελάχιστο περικλείον πλαισιο τους που έχει πλευρές παράλληλες ή κάθετες στο εμπρόσθιο μέρος του αντικειμένου (Σχήμα 2.11b). Οι γραμμές του ελάχιστου περικλείοντος πλαισίου που είναι κάθετες στο εμπρό-



Σχήμα 2.11: Το μοντέλο των Mukerjee και Joe.

στιο μέρος του αντικειμένου καλούνται γραμμές υποστήριξης (support lines) (Σχήμα 2.11b). Οι γραμμές υποστήριξης των αντικειμένων a και b , όταν τέμνονται, σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο που ονομάζεται παραλληλόγραμμο σύγκρουσης (collision parallelogram) (Σχήμα 2.11c) των a και b . Η σχετική θέση του αντικειμένου a σε σχέση με το αντικείμενο b , $pos(a/b)$, ορίζεται ως η σχέση του Allen μεταξύ του a και του παραλληλόγραμμου σύγκρουσης των a και b . Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.11c είναι $pos(a/b) = \text{before}$. Όμοια, μπορούμε να ορίσουμε τη σχετική θέση του αντικειμένου b σε σχέση με το αντικείμενο a , $pos(b/a)$. Δοσμένης της σχέσης $pos(a/b)$ δεν μπορούμε να καθορίσουμε μονοσήμαντα τη σχέση $pos(b/a)$, κατά συνέπεια για να καθορίσουμε πλήρως τη σχετική θέση των αντικειμένων a και b χρειαζόμαστε και τις δύο εκφράσεις $pos(a/b)$ και $pos(b/a)$.

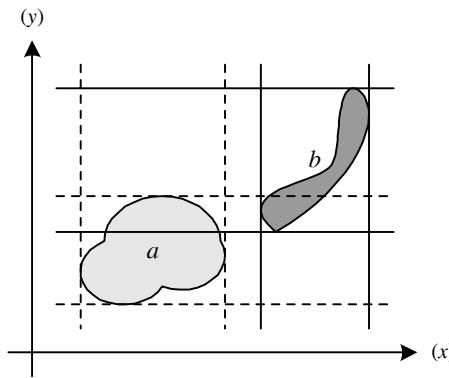
Συνοψίζοντας, στο [51], η χωρική διάταξη των αντικειμένων a και b στο Σχήμα 2.11c εκφράζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$dir(a/b) = 4, \quad pos(a/b) = before \quad \text{and} \quad pos(b/a) = after.$$

Ο Papadias [54] αναπαριστά κάθε χωρικό αντικείμενο με δύο σημεία στο \mathbb{R}^2 που αντιστοιχούν στην κάτω αριστερά και στην πάνω δεξιά γωνία του ελαχίστου περικλείοντος πλαισίου του αντικειμένου. Οι σχέσεις κατεύθυνσης και τοπολογίας ορίζονται με βάση αυτά τα πλαίσια. Οι σχέσεις αυτές περιγράφονται εφαρμόζοντας τις σχέσεις του Allen στις προβολές των αντικειμενών στους άξονες των x και y . Πιο συγκεκριμένα, δοσμένων δύο αντικειμένων a και b η σχέση μεταξύ των a και b είναι ένα ζεύγος (R_1, R_2) , όπου R_1 (αντίστοιχα R_2) είναι η σχέση του Allen μεταξύ των προβολών του αντικειμένου a και b στο άξονα των x (αντίστοιχα στον άξονα των y). Για παράδειγμα, ή σχέση μεταξύ των αντικειμένων a και b στο Σχήμα 2.12 είναι (*before, overlaps*).

2.2.3 Σχέσεις απόστασης

Όταν ανταλλάσσουμε πληροφορία σχετικά με αποστάσεις, συνήθως χρησιμοποιούμε περιγραφές όπως «το Α είναι κοντά στο Β», συγκριτικές περιγραφές όπως «το Α είναι πιο κοντά στο Β από το Γ», αλλά και αριθμητικές σχέσεις όπως «το Α απέχει ένα μέτρο από το Β». Όπως



Σχήμα 2.12: Παράδειγμα σχέσεων στο μοντέλο του Papadias.

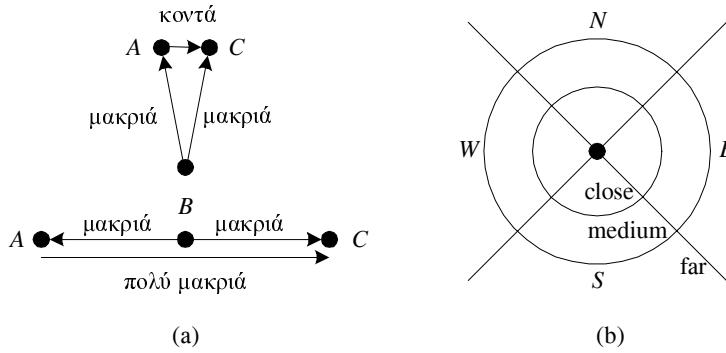
φανερώνουν τα παραπάνω παραδείγματα, μπορούμε να διακρίνουμε σχέσεις απόλυτης απόστασης (δηλαδή ανάμεσα σε δύο αντικείμενα), που μπορεί να είναι ποσοτικές ή περιγραφικές και σχέσεις σχετικής απόστασης (δηλαδή σύγκριση της απόστασης δύο αντικειμένων ως προς ένα τρίτο) που είναι καθαρά περιγραφικές.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα μοντέλα περιγραφικών σχέσεων απόλυτης απόστασης αναπαριστούν τις περιοχές με σημεία. Ο χώρος γύρω από το σημείο χωρίζεται σε τομείς που αντιστοιχούν σε σχέσεις απόστασης όπως «κοντά», «μακριά», «πολύ μακριά», ανάλογα με το επίπεδο της αφίβεια που επιθυμούμε. Οι σχετικές σχέσεις απόστασης αποκτούνται συγκρίνοντας την απόσταση δύο αντικειμένων προς ένα αντικείμενο αναφοράς και αποτελούν τριαδικές σχέσεις όπως «πιο κοντά από», «εξίσου μακριά με» και «πιο μακριά από».

Οι περιγραφικές σχέσεις απόστασης παρουσιάζουν προβλήματα κατά τον συνδυασμό τους για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Για παράδειγμα εάν ένα σημείο B βρίσκεται μακριά από ένα σημείο A και ένα σημείο C βρίσκεται μακριά από το B , τότε το C μπορεί να βρίσκεται πολύ μακριά από το A , αν τα A , B και C είναι ευθυγραμμισμένα ή το C να βρίσκεται πολύ κοντά στο A , εάν η γωνία μεταξύ των ευθυγραμμων τμημάτων είναι AB και BC είναι μικρή (Σχήμα 2.13a). Για αυτό το λόγο οι σχέσεις απόστασης συνήθως συνδυάζονται με σχέσεις κατεύθυνσης. Ο συνδυασμός που προκύπτει αποκαλείται πληροφορία θέσης. Δύο χαρακτηριστικές προσπάθειες δημιουργίας ενός μοντέλου πληροφορίας θέσης είναι αυτή των Clementini et al [13] που συνδύασαν ένα κωνικό μοντέλο σχέσεων κατεύθυνσης με απόλυτες σχέσεις κατεύθυνσης (Σχήμα 2.13b) και των Isli και Moratz [38] που έκανε κάτι αντίστοιχο χρησιμοποιώντας ένα προβολικό μοντέλο σχέσεων κατεύθυνσης.

2.3 Τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε συνοπτικά και χωρίς να επεκταθούμε σε αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς, τα τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης με τα οποία θα ασχοληθούμε εκτεταμένα στη συνέχεια της εργασίας. Και τα τρία μοντέλα διαφέρουν σε σχέση με όσα



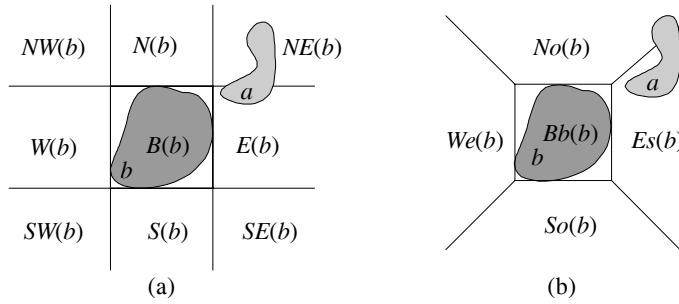
Σχήμα 2.13: Μοντέλα αναπαράστασης πληροφορίας θέσης.

παρουσιάζουμε στην Ενότητα 2.2.2 στο ότι προσεγγίζουν μόνο τις περιοχές αναφοράς ενώ χρησιμοποιούν το ακριβές σχήμα της πρωτεύουσας περιοχής, παρέχοντας έτσι διαισθητικά καλύτερες περιγραφές της πραγματικότητας σε σχέση με μοντέλα που προσεγγίζουν όλες τις περιοχές με σημεία ή πλαίσια.

Οι Goyal και Egenhofer [29, 30] προσεγγίζουν την περιοχή αναφοράς με το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της, δηλαδή το ελάχιστο ορθογώνιο πλαίσιο που περικλείει την περιοχή. Προεκτείνοντας τις πλευρές του ελαχίστου περικλείοντος πλαισίου σε ευθείες, το επίπεδο διαμερίζεται σε εννέα τμήματα (Σχήμα 2.14a). Τα οκτώ περιφερειακά τμήματα αντιστοιχούν στις σχέσεις κατεύθυνσης βόρεια (N), βορειοδυτικά (NW), βορειοανατολικά (NE), δυτικά (W), ανατολικά (E), νότια (S), νοτιοδυτικά (SW) και νοτιοανατολικά (SE). Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στη σχέση ελάχιστο περικλείον πλαίσιο (B). Τα τμήματα στα οποία βρίσκεται η πρωτεύουσα περιοχή μας παρέχουν και τη συνολική σχέση κατεύθυνσης. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.14a η περιοχή μας παρέχουν και τη συνολική σχέση κατεύθυνσης. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.14a η περιοχή μας παρέχεται μερικώς βορειοανατολικά και μερικώς ανατολικά της b και συμβολίζουμε a NE:E b.

Το μοντέλο των Goyal και Egenhofer έχει κινήσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών και πολλά σημαντικά θέματα γύρω από αυτό έχουν αντιμετωπιστεί. Οι Goyal και Egenhofer παρουσιάζουν το μοντέλο τους στα [29, 30] και το επεκτείνουν στο [31]. Οι Skiadopoulos et al παρουσιάζουν έναν αποδοτικό αλγόριθμο υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης, ενώ οι Skiadopoulos και Koubarakis έχουν μελετήσει τη σύνθεση δύο σχέσεων κατεύθυνσης [64], έχουν διατυπώσει έναν αλγόριθμο ελέγχου συνέπειας ενός συνόλου σχέσεων κατεύθυνσης [65], καθώς και ένα αλγόριθμο υπολογισμού των αντίστροφων σχέσεων κατεύθυνσης [63].

Η Abdelmoty [2, 3] είχε προτείνει πριν τους Goyal και Egenhofer μία διαισθητικά απλοποιημένη εκδοχή του προηγούμενου μοντέλου. Και πάλι η περιοχή αναφοράς προσεγγίζεται από το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της. Το επίπεδο γύρω από το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο χωρίζεται σε τέσσερα τμήματα από τέσσερις ημιευθείες που ξεκινούν από τις γωνίες του πλαισίου και εκτείνονται προς το άπειρο, διαμερίζοντας συνολικά το επίπεδο σε πέντε τμήματα (Σχήμα 2.14b). Τα τέσσερα περιφερειακά τμήματα αντιστοιχούν στις σχέσεις κατεύθυνσης βόρεια (No), νότια (So), δυτικά (We) και ανατολικά (Es). Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στη σχέση ελάχιστο περικλείον πλαίσιο (Bb). Τα τμήματα στα οποία βρίσκεται η πρωτεύουσα περιοχή μας παρέχουν



Σχήμα 2.14: Τα μοντέλα των Abdelmoty και Goyal-Egenhofer.

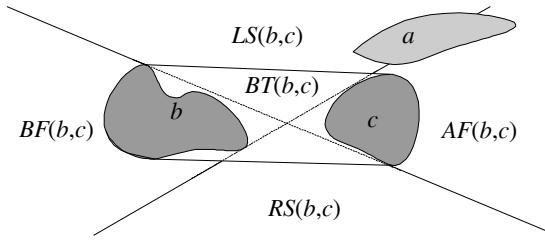
και τη συνολική σχέση κατεύθυνσης. Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.14b η περιοχή a βρίσκεται μερικώς βόρεια και μερικώς ανατολικά της b και συμβολίζουμε a $No:Es$ b .

Αν και το μοντέλο που περιγράψαμε έχει προταθεί εδώ και πολλά χρόνια, δεν έχει τύχει ιδιαίτερης προσοχής. Μάλιστα η Abdelmoty, αν και προτείνει το χωρισμό του επιπέδου, από μία περιοχή αναφοράς, στα πέντε τμήματα που περιγράψαμε παραπάνω, χρησιμοποιεί πολύπλοκες τοπολογικές σχέσεις μεταξύ των τμημάτων και των συνόρων τους για να υπολογίσει τη σχέση κατεύθυνσης μεταξύ δύο περιοχών. Εμείς στο Κεφάλαιο 5 ορίζουμε το μοντέλο με απλό, αλλά αυστηρό τρόπο και στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε το πρόβλημα της σύνθεσης δύο σχέσεων κατεύθυνσης.

Το μοντέλο των Billen και Clementini [8] διαφέρει από τα προηγούμενα σε δύο σημεία: οι περιοχές αναφοράς είναι δύο και το πλαίσιο αναφοράς δεν είναι εξωτερικό, αλλά φυσικό. Όπως και στα προηγούμενα μοντέλα, το επίπεδο διαμερίζεται σε τμήματα και εκείνα στα οποία βρίσκεται η πρωτεύουσα περιοχή μας παρέχουν τη σχέση κατεύθυνσης.

Οι δύο περιοχές αναφοράς χωρίζουν το επίπεδο σε πέντε τμήματα. Το κεντρικό τμήμα αποτελείται από το κυρτό κέλυφος της ένωσης των δύο περιοχών αναφοράς, ενώ το επίπεδο έξω από αυτό χωρίζεται σε τέσσερα ακόμα τμήματα από τις κοινές εσωτερικές εφαπτομένες των περιοχών αναφοράς (Σχήμα 2.15). Οι δύο περιοχές αναφοράς αποτελούν ένα διατεταγμένο ζεύγος, δηλαδή μία περιοχή θεωρείται πρώτη και μία δεύτερη. Έτσι το επίπεδο χωρίζεται σε τμήματα ως εξής: Τα τέσσερα περιφερειακά τμήματα αντιστοιχούν στις σχέσεις αριστερά (LS , αριστερά των δύο περιοχών αναφοράς καθώς κινούμαστε από την πρώτη στη δεύτερη), δεξιά (RS , δεξιά των δύο περιοχών αναφοράς καθώς κινούμαστε από την πρώτη στη δεύτερη), πριν (BF , πριν την πρώτη περιοχή αναφοράς) και μετά (AF , μετά τη δεύτερη περιοχή αναφοράς). Το κυρτό κέλυφος αντιστοιχεί στη σχέση ανάμεσα (BT). Για παράδειγμα στο Σχήμα 2.15b η περιοχή a βρίσκεται μερικώς πριν και μερικώς αριστερά των b και c συμβολίζουμε a $LS:BT$ b .

Οι Billen και Clementini παρουσίασαν το μοντέλο τους την ίδια χρονιά που έγινε και η συγγραφή της παρούσας διπλωματικής εργασίας (2004), ως εκ τούτου δεν έχει επενδυθεί ακόμα σημαντική ερευνητική προσπάθεια στην ανάπτυξη και τη μελέτη του μοντέλου. Οι Billen και Clementini παρουσιάζουν και ορίζουν το μοντέλο τους στο [8] και το χρησιμοποιούν για να δημιουργήσουν νέες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ περιοχών στο [9]. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, στο Κεφάλαιο 4, παρουσιάζονται δύο αλγόριθμοι υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης



Σχήμα 2.15: Το μοντέλο των Billen-Clementini.

στο μοντέλο.

2.4 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες και ορισμούς που θα χρειαστούμε στη συνέχεια της εργασίας και κάναμε μία αναφορά στο ευρύτερο γνωστικό αντικείμενο του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού, στο οποίο εντάσσεται και η παρούσα διπλωματική εργασία. Κάναμε επίσης μία ανασκόπηση εργασιών που έχουν γίνει στον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στις εργασίες που αφορούν τις Σχέσεις Κατεύθυνσης. Τέλος, παρουσιάσαμε συνοπτικά τα τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια της εργασίας.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με ένα διαφορετικό πρόβλημα για κάθε ένα από τα τρία μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης που περιγράψαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Στο επόμενο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα ενός πειράματος που πραγματοποιήσαμε για να συγχρίνουμε την απόδοση διαφόρων αλγορίθμων υπολογισμού σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer.

Κεφάλαιο 3

Μέτρηση Απόδοσης Αλγορίθμων Υπολογισμού των Σχέσεων Κατεύθυνσης στο Μοντέλο των Goyal και Egenhofer

Το πρώτο θέμα με το οποίο θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία, είναι η διεξαγωγή ενός πειράματος με σκοπό τη μέτρηση της απόδοσης αλγορίθμων υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer.

Όπως επισημάναμε στην Ενότητα 2.2, ο Περιγραφικός Χωρικός Λογισμός έχει βρει εφαρμογές μεταξύ άλλων και στα Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα (GIS) και τις Χωρικές βάσεις δεδομένων. Και από τα δύο συστήματα απαιτείται να παρέχουν ταχύτατα απαντήσεις σε πολύπλοκες ερωτήσεις που αφορούν χωρικά δεδομένα. Επομένως η έρευνα στον Περιγραφικό Χωρικό Λογισμό δεν προσανατολίζεται μονάχα στη δημιουργία κατάλληλων τελεστών για χρήση σε αυτές τις ερωτήσεις, αλλά και στη δημιουργία αποδοτικών αλγορίθμων για τη γρήγορη αποτίμηση των ερωτήσεων που χρησιμοποιούν αυτούς τους τελεστές.

Η συνεισφορά του κεφαλαίου συνοψίζεται στα ακόλουθα:

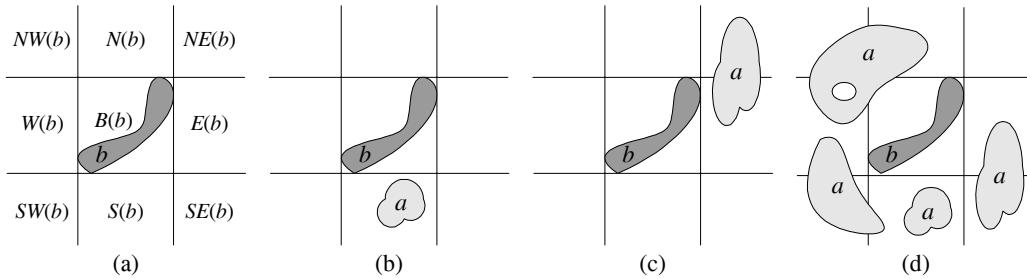
- Ορίζουμε αυστηρά τις σχέσεις που μπορούν να εκφραστούν στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer [29, 30]. Η προσέγγιση μας είναι αυστηρή και συμπληρώνει αυτή των Goyal και Egenhofer.
- Παρουσιάζουμε έναν νέο αλγόριθμο που δημιούργησαν οι Skiadopoulos et al [62] για τον υπολογισμό των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης του μοντέλου και επισημαίνουμε τα σημεία στα οποία υπερτερεί των υπαρχόντων τεχνικών. Η παρουσίασή μας είναι με λίγες αλλαγές η παρουσίαση των Skiadopoulos et al στην αντίστοιχη εργασία τους.
- Παρουσιάζουμε τον τρόπο με τον οποίο εκτελέσαμε ένα πείραμα για να συγχρίνουμε την επίδοση του νέου αλγορίθμου με των υπαρχόντων, καθώς και τα αποτελέσματα του πειρά-

ματος με τη μορφή γραφικών παραστάσεων και πινάκων.

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στην Ενότητα 3.1 ορίζουμε αυστηρά το μοντέλο των Goyal και Egenhofer, στην Ενότητα 3.2 παρουσιάζουμε το νέο υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης των Skiadopoulos et al και στην Ενότητα 3.3 τα χαρακτηριστικά και τα αποτελέσματα του πειράματος που διενεργήσαμε. Τέλος στην Ενότητα 3.4 παρουσιάζουμε τα συμπεράσματά μας.

3.1 Το μοντέλο των Goyal και Egenhofer [29, 30]

Έστω δύο τυχαίες περιοχές a και b στο σύνολο REG^* , οι οποίες σχετίζονται με μία σχέση κατεύθυνσης. Θεωρούμε ότι η a είναι η πρωτεύουσα περιοχή και η b η περιοχή αναφοράς. Οι άξονες που σχηματίζουν το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής αναφοράς b χωρίζουν το \mathbb{R}^2 σε εννιά τμήματα, τα οποία ονομάζουμε *χωρία* (tiles) (Σχήμα 3.1a). Τα οκτώ περιφερειακά τμήματα αντιστοιχούν στις οκτώ σχέσεις κατεύθυνσης *νότια*, *νοτιοδυτικά*, *δυτικά*, *βορειοδυτικά*, *βόρεια*, *βορειοανατολικά*, *ανατολικά* και *νοτιοανατολικά*. Τα τμήματα αυτά αντίστοιχα τα συμβολίζουμε με $S(b)$, $SW(b)$, $W(b)$, $NW(b)$, $N(b)$, $NE(b)$, $E(b)$ και $SE(b)$. Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στο ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής b και συμβολίζεται με $B(b)$. Από τον ορισμό τους, θεωρούμε ότι κάθε τμήμα περιέχει και τα τμήματα των αξόνων που το σχηματίζουν.



Σχήμα 3.1: Περιοχές αναφοράς και σχέσεις κατεύθυνσης.

Στην περίπτωση που η πρωτεύουσα περιοχή a περιέχεται εξολοκλήρου στο τμήμα $S(b)$ μιας περιοχής αναφοράς b (Σχήμα 3.1b), τότε λέμε ότι η a είναι *νότια* της b και συμβολίζουμε $a \text{ } S \text{ } b$. Όμοια ορίζουμε τις σχέσεις *νοτιοδυτικά* (SW), *δυτικά* (W), *βορειοδυτικά* (NW), *βόρεια* (N), *βορειοδυτικά* (NE), *ανατολικά* (E), *νοτιοανατολικά* (SE) και ελάχιστο περικλείον πλαίσιο (B).

Αν η πρωτεύουσα περιοχή a περιέχεται μερικώς στο τμήμα $NE(b)$ και μερικώς στο τμήμα $E(b)$ της b (Σχήμα 3.1c), λέμε ότι η a βρίσκεται μερικώς βορειοανατολικά και μερικώς ανατολικά της b και συμβολίζουμε με $a \text{ } NE:E \text{ } b$.

Ορισμός 3.1 Μία βασική σχέση κατεύθυνσης (cardinal direction relation) είναι μία έκφραση της μορφής $R_1 \dots R_k$ όπου

- (i) $1 \leq k \leq 9$,
- (ii) $R_1, \dots, R_k \in \{B, S, SW, W, NW, N, NE, E, SE\}$ και
- (iii) $R_i \neq R_j$ για κάθε i, j τέτοια ώστε $1 \leq i, j \leq k$ και $i \neq j$.

Μία βασική σχέση κατεύθυνσης $R_1:\dots:R_k$ καλείται ενός χωρίου εάν $k = 1$, διαφορετικά καλείται πολλών χωρίων.

Παράδειγμα 3.1 Οι παρακάτω είναι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης

$$S, NE:E \text{ και } B:S:SW:W:NW:N:E:SE$$

Περιοχές σε αυτές τις σχέσεις παρουσιάζονται στα Σχήματα 3.1b, 3.1c και 3.1d αντίστοιχα.

Για να μην υπάρξει οποιαδήποτε σύγχυση, τα στοιχεία μιας σχέσης κατεύθυνση θα σημειώνονται με την ακόλουθη σειρά: $B, S, SW, W, NW, N, NE, E, SE$. Κατά συνέπεια, θα γράφουμε $B:S:W$ αντί $W:B:S$ ή $S:B:W$. Ας σημειωθεί ότι τα στοιχεία μιας σχέσης καλούνται συχνά ως χωρία. Για παράδειγμα τα B, S και W θα αναφέρονται ως χωρία της σχέσης $B:S:W$. Χωρία έχουμε αποκαλέσει και τα τμήματα του επιπέδου στα οποία χωρίζεται από μία περιοχή αναφοράς. Στη συνέχεια θα είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα σε τι από τα δύο αναφερόμαστε όταν χρησιμοποιούμε τον όρο.

Μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου $B, S, SW, W, NW, N, NE, E$ και SE του μοντέλου ως εξής:

Ορισμός 3.2 Έστω a και b δύο περιοχές του REG^* . Οι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου ορίζονται ως εξής:

- | | | |
|----------|--------------|--|
| $a B b$ | avν | $\inf_x(b) \leq \inf_x(a), \sup_x(a) \leq \sup_x(b), \inf_y(b) \leq \inf_y(a) \text{ και}$
$\sup_y(a) \leq \sup_y(b)$. |
| $a S b$ | avν | $\sup_y(a) \leq \inf_y(b), \inf_x(b) \leq \inf_x(a) \text{ και } \sup_x(a) \leq \sup_x(b)$. |
| $a SW b$ | avν | $\sup_x(a) \leq \inf_x(b) \text{ και } \sup_y(a) \leq \inf_y(b)$. |
| $a W b$ | avν | $\sup_x(a) \leq \inf_x(b), \inf_y(b) \leq \inf_y(a) \text{ και } \sup_y(a) \leq \sup_y(b)$. |
| $a NW b$ | avν | $\sup_x(a) \leq \inf_x(b) \text{ και } \sup_y(b) \leq \inf_y(a)$. |
| $a N b$ | avν | $\sup_y(b) \leq \inf_y(a), \inf_x(b) \leq \inf_x(a) \text{ και } \sup_x(a) \leq \sup_x(b)$. |
| $a NE b$ | avν | $\sup_x(b) \leq \inf_x(a) \text{ και } \sup_y(b) \leq \inf_y(a)$. |
| $a E b$ | avν | $\sup_x(b) \leq \inf_x(a), \inf_y(b) \leq \inf_y(a) \text{ και } \sup_y(a) \leq \sup_y(b)$. |
| $a SE b$ | avν | $\sup_x(b) \leq \inf_x(a) \text{ και } \sup_y(a) \leq \inf_y(b)$. |

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να ορίσουμε και οποιαδήποτε σχέση πολλών χωρίων.

Ορισμός 3.3 Έστω a και b δύο περιοχές του REG^* . Οι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης πολλών χωρίων ορίζονται ως εξής:

- | | | |
|--------------------------------------|--------------|---|
| $a R_1:\dots:R_k b, 2 \leq k \leq 9$ | avν | υπάρχουν περιοχές $a_1, \dots, a_k \in REG^*$ ώστε
$a_1 R_1 b, \dots, a_k R_k b$ και $a = a_1 \cup \dots \cup a_k$. |
|--------------------------------------|--------------|---|

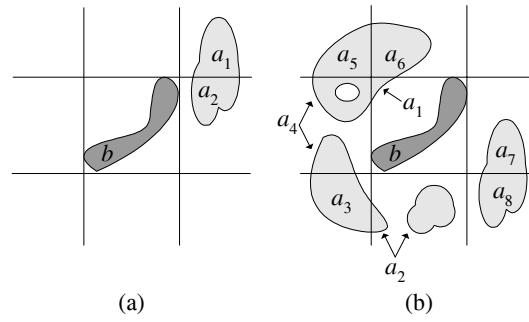
Στον Ορισμό 3.3, για κάθε i, j τέτοια ώστε $1 \leq i, j \leq k$ και $i \neq j$, οι περιοχές a_i και a_j έχουν ξένα εσωτερικά αλλά μπορεί να έχουν κοινά σημεία στα σύνορά τους.

Παράδειγμα 3.2 Οι παρακάτω είναι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης πολλών χωρίων:

$$NE:E \text{ και } B:S:SW:W:NW:N:E:SE.$$

Στο Σχήμα 3.2 έχουμε:

- $a NE:E b$ διότι υπάρχουν περιοχές a_1 και a_2 του REG^* τέτοιες ώστε $a = a_1 \cup a_2$, $a_1 NE b$ και $a_2 E b$ (Σχήμα 3.2a) και
- $a B:S:SW:W:NW:N:E:SE b$ διότι υπάρχουν περιοχές a_1, \dots, a_8 του REG^* τέτοιες ώστε $a = a_1 \cup \dots \cup a_8$, $a_1 B b$, $a_2 S b$, $a_3 SW b$, $a_4 W b$, $a_5 NW b$, $a_6 N b$, $a_7 SE b$ και $a_8 E b$ (Σχήμα 3.2b).



Σχήμα 3.2: Σχέσεις πολλών χωρίων.

Το σύνολο των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης για περιοχές στο REG^* περιέχει 511 σχέσεις. Το σύνολο αυτό το συμβολίζεται με \mathcal{D}^* . Οι σχέσεις στο σύνολο \mathcal{D}^* είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες. Τα στοιχεία του \mathcal{D}^* μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση πλήρως ορισμένης πληροφορίας για σχέσεις κατεύθυνσης, π.χ., $a NE:E b$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του \mathcal{D}^* σαν βάση, μπορούμε να ορίσουμε το δυναμοσύνολο $2^{\mathcal{D}^*}$, το οποίο περιέχει 2^{511} σχέσεις. Τα στοιχεία του $2^{\mathcal{D}^*}$ καλούνται διαζευκτικές βασικές σχέσεις κατεύθυνσης, με τις οποίες εκτός από πλήρως ορισμένη πληροφορία, μπορούμε να αναπαραστήσουμε και μη-πλήρως ορισμένη πληροφορία. Για παράδειγμα, η σχέση $a \{N, W\} b$ δηλώνει ότι η περιοχή a βρίσκεται είτε βόρεια, είτε δυτικά της περιοχής b .

Οι Goyal και Egenhofer χρησιμοποιούν πίνακες σχέσεων κατεύθυνσης (direction relation matrices) για να παραστήσουν τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης. Δοθείσας μίας βασικής σχέσης κατεύθυνσης $R = R_1 \dots : R_k$, ο πίνακας σχέσης κατεύθυνσης που αντιστοιχεί στην R είναι ένας 3×3 πίνακας που ορίζεται ως εξής:

$$R = \begin{bmatrix} P_{NW} & P_N & P_{NE} \\ P_W & P_B & P_E \\ P_{SW} & P_S & P_{SE} \end{bmatrix} \quad \text{όπου} \quad P_{dir} = \begin{cases} \square & \text{if } dir \notin \{R_1, \dots, R_k\} \\ \blacksquare & \text{if } dir \in \{R_1, \dots, R_k\} \end{cases}.$$

Για παράδειγμα, οι πίνακες σχέσεων κατεύθυνσης που αντιστοιχούν στις σχέσεις S , $NE:E$ και $B:S:SW:W:NW:N:E:SE$ του Παραδείγματος 3.2 είναι:

$$S = \begin{bmatrix} \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \blacksquare \square \end{bmatrix}, \quad NE:E = \begin{bmatrix} \square \blacksquare \blacksquare \\ \square \square \square \\ \square \square \square \\ \square \square \square \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B:S:SW:W:NW:N:E:SE = \begin{bmatrix} \blacksquare \blacksquare \square \\ \blacksquare \blacksquare \square \\ \blacksquare \blacksquare \square \\ \blacksquare \blacksquare \square \end{bmatrix}.$$

Το μοντέλο μας παρέχει επιπρόσθετα τη δυνατότητα να καταγράψουμε το ποσοστό της πρωτεύουσας περιοχής σε κάθε χωρίο. Αυτές οι σχέσεις καλούνται βασικές σχέσεις κατεύθυνσης με ποσοστά (cardinal direction relations with percentages) και παριστάνονται με τους πίνακες σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά (cardinal direction matrices with percentages). Έστω a και b δύο περιοχές του συνόλου REG^* . Οι πίνακες σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά ορίζονται ως εξής:

$$a \cdot \frac{100\%}{area(a)} \cdot \begin{bmatrix} area(NW(b) \cap a) & area(N(b) \cap a) & area(NE(b) \cap a) \\ area(W(b) \cap a) & area(B(b) \cap a) & area(E(b) \cap a) \\ area(SW(b) \cap a) & area(S(b) \cap a) & area(SE(b) \cap a) \end{bmatrix} b$$

όπου με $area(r)$ συμβολίζουμε το εμβαδόν της περιοχής r .

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.2a η περιοχή a βρίσκεται 50% βορειοανατολικά και 50% ανατολικά τη περιοχής b .

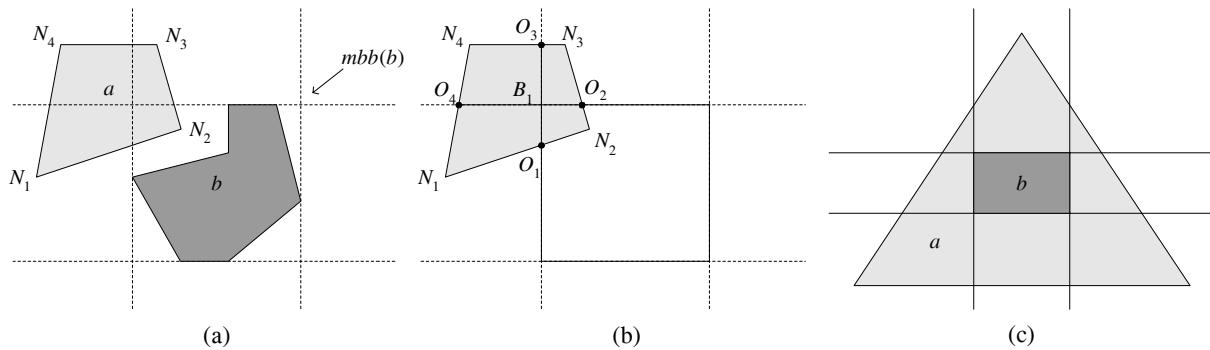
$$a \begin{bmatrix} 0\% & 0\% & 50\% \\ 0\% & 0\% & 50\% \\ 0\% & 0\% & 0\% \end{bmatrix} b$$

3.2 Ο αλγόριθμος των Skiadopoulos et al [62]

Έστω μία πρωτεύουσα περιοχή a και μία περιοχή αναφοράς b . Σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3, για να υπολογίζουμε τη βασική σχέση κατεύθυνσης μεταξύ των περιοχών a και b πρέπει να διαιρέσουμε την πρωτεύουσα περιοχή σε τμήματα ώστε κάθε τμήμα να ανήκει σε ένα μονάχα χωρίο της b . Επιπλέον για να υπολογίζουμε τη βασική σχέση κατεύθυνσης με ποσοστά πρέπει να μετρήσουμε το εμβαδόν κάθε τμήματος. Η εύρεση του τμήματος ενός πολυγώνου που βρίσκεται μέσα σε ένα φραγμένο ορθογώνιο πλαίσιο είναι ένα καλά μελετημένο πρόβλημα της Υπολογιστικής Γεωμετρίας και καλείται ψαλιδισμός πολυγώνων (polygon clipping). Ένας τέτοιος αλγόριθμος ψαλιδισμού μπορεί να επεκταθεί ώστε να χειρίζεται και μη-φραγμένα ορθογώνια πλαίσια, όπως τα χωρία της περιοχής αναφοράς. Εφόσον αυτοί οι αλγόριθμοι είναι είναι πολύ αποτελεσματικοί, με γραμμική πολυπλοκότητα σε σχέση με τον αριθμό των ακμών του πολυγώνου, θα ήταν λογικό να τους χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης. Ωστόσο αυτή η προσέγγιση παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα.

Ας θεωρήσουμε τις περιοχές a και b του Σχήματος 3.3. Η περιοχή a σχηματίζεται από ένα τετράπλευρο. Για να παράγουν την επιθυμητή διαμέριση, οι αλγόριθμοι ψαλιδισμού εισάγουν

νέες ακμές. Μετά την εφαρμογή τους (Σχήμα 3.3b), η περιοχή a αποτελείται από τέσσερα τετράπλευρα, δηλαδή από 16 ακμές. Η χειρότερη δυνατή περίπτωση, η οποία παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.3c, αρχίζει με 3 ακμές (ένα τρίγωνο) και καταλήγει με 35 ακμές (2 τρίγωνα, 6 τετράπλευρα και ένα πεντάγωνο). Οι νέες αυτές ακμές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης και στη συνέχεια αγνοούνται. Επομένως, είναι σημαντικό να ελαχιστοποιήσουμε τον αριθμό τους. Επιπλέον, οι ακμές της πρωτεύουσας περιοχής πρέπει να διαβαστούν εννέα φορές, εφόσον ο αλγόριθμος ψαλιδισμού πρέπει να εφαρμοστεί μία φορά για κάθε χωρίο της περιοχής b . Σε πραγματικές GIS εφαρμογές ο μέσος αριθμός ακμών ανά περιοχή είναι υψηλός. Επομένως κάθε διάβασμα των ακμών μπορεί να είναι αρκετά χρονοβόρο. Επιπλέον αρκετοί αλγόριθμοι ψαλιδισμού απαιτούν πολύπλοκες και χρονοβόρες πράξεις κινητής υποδιαστολής.



Σχήμα 3.3: Ψαλιδισμός πολυγώνων.

Οι Skiadopoulos et al προτείνουν μία άλλη προσέγγιση για τον υπολογισμό τόσο των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης, όσο και των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά. Οι αλγόριθμοι είναι προσαρμοσμένοι στο συγκεκριμένο πρόβλημα και αποφεύγουν τα μειονεκτήματα των αλγορίθμων ψαλιδισμού. Η πρότασή τους δεν τεμαχίζει τα πολύγωνα, αλλά διαιρεί ορισμένες από τις ακμές τους. Όμως ο αριθμός των νέων ακμών που εισάγονται είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο των αλγορίθμων ψαλιδισμού. Επιπλέον, η πολυπλοκότητα των αλγορίθμων είναι όχι μόνο γραμμική σε σχέση με τον αριθμό των ακμών των πολυγώνων, αλλά απαιτεί ένα μόνο σάρωμα τους. Τέλος, οι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν απλές αριθμητικές λειτουργίες και συγκρίσεις και όχι πολύπλοκες και χρονοβόρες πράξεις.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε και θα μελετήσουμε τον αλγόριθμο για τον υπολογισμό σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά, ο οποίος παρουσιάζει μεγαλύτερο ενδιαφέρον σε σχέση με τον αντίστοιχο για τις απλές σχέσεις. Οι εμπνευστές του, ονομάζουν τον αλγόριθμο COMPUTE-CDR% και στη συνέχεια, με αυτό το όνομα θα αναφερόμαστε σε αυτόν.

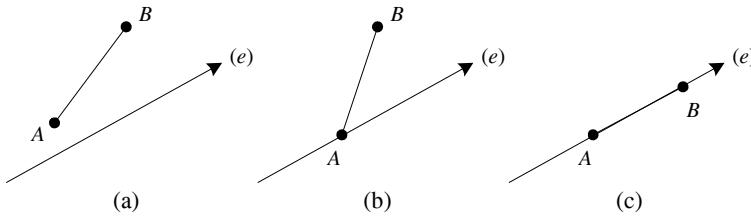
Για να υπολογίσουμε τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης με ποσοστά, πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν της πρωτεύουσας περιοχής που βρίσκεται σε κάθε χωρίο της περιοχής αναφοράς. Όπως έχουμε πει, μία απλοϊκή προσέγγιση στο πρόβλημα θα ήταν να τεμαχίσουμε τα πολύγωνα της πρωτεύουσας περιοχής, ώστε κάθε τμήμα να βρίσκεται ακριβώς σε ένα χωρίο και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το εμβαδόν των τμημάτων σε κάθε χωρίο. Αντίθετα ο αλγόριθμος COMPUTE-

CDR% υπολογίζει μονάχα το εμβαδόν ανάμεσα στις ακμές των πολυγώνων της πρωτεύουσας περιοχής και μίας κατάλληλης ευθείας αναφοράς, χωρίς να τεμαχίζουμε τα πολύγωνα.

Θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο για τον υπολογισμό του εμβαδού μεταξύ μίας ευθείας και μίας ακμής. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να επεκτείνουμε τη μέθοδο ώστε να υπολογίζουμε και το εμβαδόν ενός πολυγώνου. Πρώτα όμως χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.4 Έστω AB μία ακμή και e μία ευθεία. Λέμε ότι e δεν διασχίζει την AB εάν και μόνο εάν ένα από τα παρακάτω ισχύει: (a) οι AB και e δεν τέμνονται, (b) οι AB και e τέμνονται μόνο στο σημείο A ή στο σημείο B , ή (c) η AB βρίσκεται πάνω στην e .

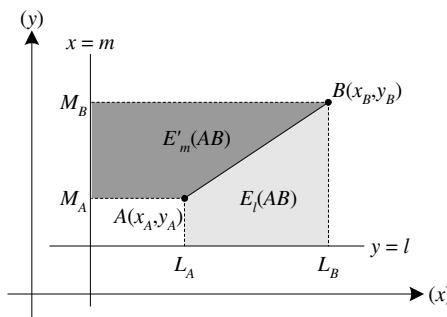
Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.4 οι ευθείες e δεν διασχίζουν την ακμή AB . Ας δούμε τώρα πως υπολογίζουμε το εμβαδόν ανάμεσα σε μία ακμή και μία ευθεία.



Σχήμα 3.4: Ευθείες που δεν διασχίζουν την ακμή AB .

Ορισμός 3.5 Έστω $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$ δύο σημεία που σχηματίζουν την ακμή AB , $y = l$ και $x = m$ δύο ευθείες που δεν διασχίζουν το AB . Έστω, επίσης, L_A και L_B (αντίστοιχα M_A και M_B) οι προβολές των σημείων A, B στην ευθεία $y = l$ (αντίστοιχα $x = m$) – δείτε επίσης το Σχήμα 3.5. Ορίζουμε τις εκφράσεις $E_l(AB)$ και $E'_m(AB)$ ως εξής:

$$E_l(AB) = \frac{(x_A - x_B)(y_A + y_B - 2l)}{2} \quad \text{and} \quad E'_m(AB) = \frac{(y_A - y_B)(x_A + x_B - 2m)}{2}.$$



Σχήμα 3.5: Εμβαδόν ανάμεσα σε μία ακμή και μία ευθεία.

Οι εκφράσεις $E_l(AB)$ και $E'_m(AB)$ μπορεί να είναι θετικές ή αρνητικές, ανάλογα με την κατεύθυνση του διανύσματος \overrightarrow{AB} . Εύκολα επαληθεύουμε πως ισχύει $E_l(AB) = -E_l(BA)$ και

$E'_m(AB) = -E'_m(BA)$. Η απόλυτη τιμή της $E_l(AB)$ ισούται με το εμβαδόν της περιοχής ανάμεσα στην ακμή AB και την ευθεία $y = l$, δηλαδή με το εμβαδόν του πολυγώνου $(ALALBB)$. Με άλλα λόγια, ισχύει η παρακάτω εξίσωση.

$$\text{area}((ALALBB)) = E_l(AB) = \frac{(x_A - x_B)(y_A + y_B - 2l)}{2}$$

Συμμετρικά, το εμβαδόν ανάμεσα στην ακμή AB και την ευθεία $y = l$, δηλαδή το εμβαδόν του πολυγώνου (ABM_BMA) , ισούται με την απόλυτη τιμή της $E'_m(AB)$.

$$\text{area}(ABM_BMA) = E'_m(AB) = \frac{(y_A - y_B)(x_A + x_B - 2l)}{2}$$

Οι εκφράσεις E_l και E'_m μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε το εμβαδόν πολυγώνων. Έστω ένα πολύγωνο $p = (N_1 \dots N_k)$ και $y = l$, $x = m$ δύο ευθείες που δεν διασχίζουν καμία ακμή του p . Το εμβαδόν του πολυγώνου p , το οποίο συμβολίζουμε με $\text{area}(p)$, υπολογίζεται ως εξής:

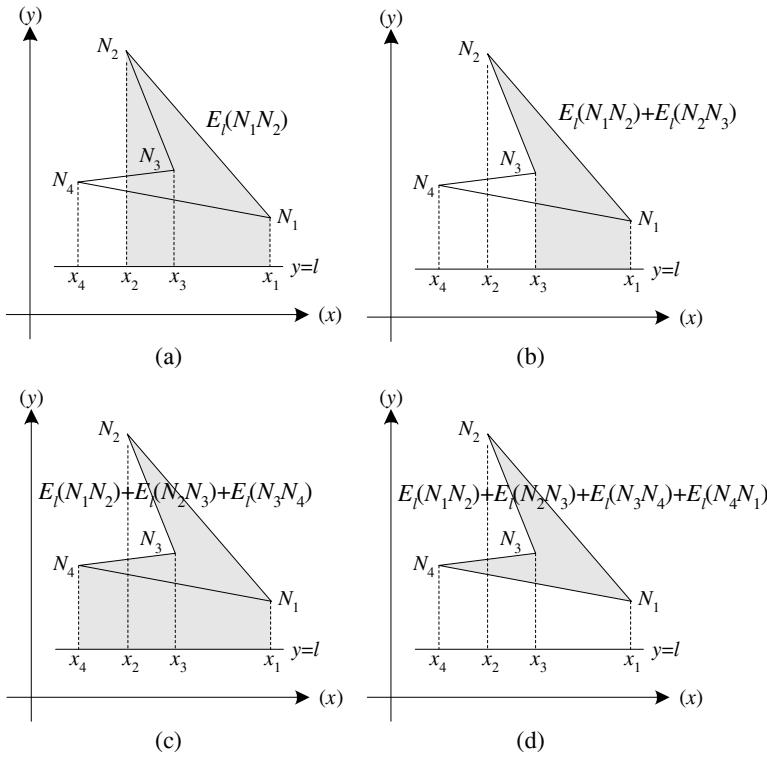
$$\text{area}(p) = |E_l(N_1N_2) + \dots + E_l(N_kN_1)| = |E'_m(N_1N_2) + \dots + E'_m(N_kN_1)|.$$

Οι αλγόριθμοι της Υπολογιστικής Γεωμετρίας υπολογίζουν το εμβαδόν ενός πολυγώνου p χρησιμοποιώντας μία αντίστοιχη μέθοδο που βασίζεται σε ένα σημείο αναφοράς, αντί μίας γραμμής [52, 58]. Αυτή η μέθοδος δεν είναι κατάλληλη για την περίπτωσή μας καθώς απαιτεί τον τεμαχισμό της πρωτεύουσας περιοχής χρησιμοποιώντας αλγορίθμους ψαλιδισμού. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία μέθοδο που χρησιμοποιεί τις εκφράσεις E_l και E'_m και δεν απαιτεί ψαλιδισμό πολυγώνων.

Παράδειγμα 3.3 Θεωρούμε το πολύγωνο $p = (N_1N_2N_3N_4)$ και την ευθεία $y = l$ που παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.6d. Το εμβαδόν του πολυγώνου μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τον τύπο $\text{area}(p) = |E_l(N_1N_2) + E_l(N_2N_3) + E_l(N_3N_4) + E_l(N_4N_1)|$. Όλες οι ενδιάμεσες εκφράσεις $E_l(N_1N_2)$, $E_l(N_1N_2) + E_l(N_2N_3)$, $E_l(N_1N_2) + E_l(N_2N_3) + E_l(N_3N_4)$, $E_l(N_1N_2) + E_l(N_2N_3) + E_l(N_3N_4) + E_l(N_4N_1)$ παρουσιάζονται σαν γκρι περιοχές στα Σχήματα 3.6a-d αντίστοιχα.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις E_l και E'_m για να υπολογίσουμε το ποσοστό της πρωτεύουσας περιοχής που βρίσκεται μέσα σε κάθε χωρίο της περιοχής αναφοράς.

Πρώτα όμως πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις ευθείες που σχηματίζουν το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής αναφοράς b , ώστε να διαιρέσουμε τις ακμές της πρωτεύουσας περιοχής a και να δημιουργήσουμε νέες ακμές, ώστε (a) η περιοχή a να μην αλλάξει και (b) κάθε νέα ακμή να βρίσκεται ακριβώς σε ένα χωρίο. Για να το καταφέρουμε, για κάθε ακμή AB της περιοχής a υπολογίζουμε το σύνολο των σημείων τομής I της AB με της ευθείες που σχηματίζουν το $m_{bb}(b)$. Χρησιμοποιώντας τα σημεία του I διαιρούμε κάθε ακμή AB σε μία σειρά από ευθύγραμμα τμήματα AO_1, \dots, O_kB . Κάθε ευθύγραμμο τμήμα βρίσκεται σε ένα χωρίο του b και η ένωσή τους



Σχήμα 3.6: Χρησιμοποιώντας την έκφραση E_l για τον υπολογισμό του εμβαδού πολυγώνου.

είναι η ακμή AB . Επομένως μπορούμε με ασφάλεια να αντικαταστήσουμε την ακμή AB με τις AO_1, \dots, O_kB χωρίς να επηρεάσουμε την περιοχή a .

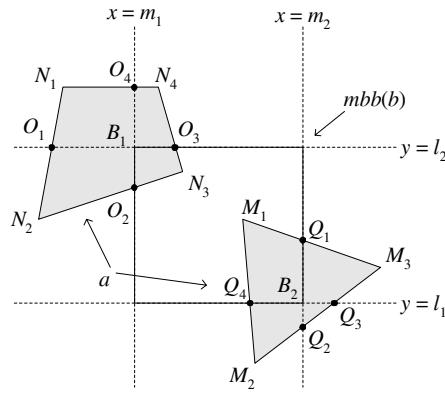
Έστω η περιοχή a του Σχήματος 3.7. Η a αποτελείται από τα πολύγωνα $M_1M_2M_3$ και $N_1N_2N_3N_4$. Έστω $x = m_1$, $x = m_2$, $y = l_1$, $y = l_2$ οι ευθείες που σχηματίζουν το $mbb(b)$. Αυτές οι ακμές διαιρούν τις ακμές των πολυγώνων καθώς φαίνεται στο Σχήμα 3.7.

Ας υπολογίσουμε το εμβαδόν της περιοχής a που βρίσκεται στο χωρίο $NW(b)$, δηλαδή $area(NW(b) \cap a)$. Παρατηρούμε πως $area(NW(b) \cap a) = area((N_1O_1B_1O_4))$. Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του πολυγώνου $(N_1O_1B_1O_4)$ μας βολεύει να χρησιμοποιήσουμε ως ευθεία αναφοράς την $x = m_1$. Με αυτό τον τρόπο δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τις ακμές O_1B_1 και B_1O_4 , διότι ισχύει $E'_{m_1}(O_1B_1) = 0$ και $E'_{m_1}(B_1O_4) = 0$ και επομένως το εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί με τον επόμενο τύπο:

$$area(NW(b) \cap a) = area((N_1O_1B_1O_4)) = |E'_{m_1}(N_1O_1) + E'_{m_1}(O_4N_1)|$$

Με άλλα λόγια, για να υπολογίσουμε το εμβαδόν της περιοχής a που βρίσκεται στο χωρίο $NW(b)$ (δηλαδή την έκφραση $area(NW(b) \cap a)$), υπολογίζουμε το εμβαδόν μεταξύ της δυτικής ευθείας του $mbb(b)$ ($x = m_1$) και κάθε ακμής της a που βρίσκεται στο $NW(b)$, δηλαδή ισχύει:

$$area(NW(b) \cap a) = \left| \sum_{AB \in NW(b)} E'_{m_1}(AB) \right|.$$



Σχήμα 3.7: Υπολογισμός των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά.

Όμοιώς υπολογίζουμε το εμβαδόν της a που βρίσκεται στα χωρία $W(b)$ και $SW(b)$:

$$\text{area}(W(b) \cap a) = \left| \sum_{AB \in W(b)} E'_{m_1}(AB) \right|, \quad \text{area}(SW(b) \cap a) = \left| \sum_{AB \in SW(b)} E'_{m_1}(AB) \right|$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.7 έχουμε $\text{area}(W(b) \cap a) = |E'_{m_1}(O_1N_2) + E'_{m_1}(N_2O_2)|$ και $\text{area}(SW(b) \cap a) = 0$

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν στα χωρία $NE(b)$, $E(b)$, $SE(b)$, $S(b)$ και $N(b)$, χρειάζεται να αλλάξουμε την ευθεία αναφοράς που χρησιμοποιούμε. Στις πρώτες τρεις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε την ανατολική ευθεία του $mb(b)$ ($x = m_2$ στο Σχήμα 3.7), στην τέταρτη περίπτωση χρησιμοποιούμε τη νότια ευθεία του $mb(b)$ ($y = l_1$) και στην τελευταία περίπτωση τη βόρεια ευθεία του $mb(b)$ ($y = l_2$). Σε όλες τις περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τις ακμές του a που βρίσκονται στο χωρίο του b που μας ενδιαφέρει. Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{area}(T(b) \cap a) &= \left| \sum_{AB \in T(b)} E'_{m_2}(AB) \right| \quad \text{αν } T \in \{NE, E, SE\} \\ \text{area}(S(b) \cap a) &= \left| \sum_{AB \in S(b)} E_{l_1}(AB) \right| \\ \text{area}(N(b) \cap a) &= \left| \sum_{AB \in N(b)} E_{l_2}(AB) \right| \end{aligned} .$$

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.7 έχουμε $\text{area}(N(b) \cap a) = |E_{l_2}(O_3N_4) + E_{l_2}(N_4O_4)|$ και $\text{area}(E(b) \cap a) = |E'_{m_2}(Q_3M_3) + E'_{m_2}(M_3Q_1)|$.

Ας θεωρήσουμε το εμβαδόν της περιοχής a που βρίσκεται στο χωρίο $B(b)$. Καμία από τις ευθείες του $mb(b)$ μπορεί να μας βοηθήσει να υπολογίσουμε το $\text{area}(B(b) \cap a)$ χωρίς να τεμαχίσουμε τα πολύγωνα της a . Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.7 χρησιμοποιούμε την ευθεία $y = l_1$ και έχουμε:

$$\text{area}(B(b) \cap a) = |E_{l_1}(Q_1M_1) + E_{l_1}(M_1Q_4) + E_{l_1}(O_2N_3) + E_{l_1}(N_3O_3) + E_{l_1}(O_3B_1) + E_{l_1}(B_1O_2)|.$$

Η ακμή O_3B_1 δεν είναι ακμή κανενός από τα πολύγωνα της περιοχής a . Για να χειριστούμε τέτοιες περιπτώσεις, εφαρμόζουμε την ακόλουθη μέθοδο. Χρησιμοποιούμε την νότια ευθεία του $mb(b)$ ($y = l_1$) για ευθεία αναφοράς και υπολογίζουμε το εμβαδόν μεταξύ της $y = l_1$ και όλων

των ακμών που βρίσκονται είτε στο $N(b)$, είτε στο $B(b)$. Αυτό θα συμβολίζεται με $\text{area}((B + N)(b) \cap a)$ και ισούται με $\text{area}(N(b) \cap a) + \text{area}(B(b) \cap a)$. Έχοντας προηγουμένως υπολογίσει το εμβαδόν $\text{area}(N(b) \cap a)$, πρέπει απλά να το αφαιρέσουμε από το $\text{area}((B + N)(b) \cap a)$ για να υπολογίσουμε το $\text{area}(B(b) \cap a)$. Για παράδειγμα στο Σχήμα 3.7 έχουμε:

$$\begin{aligned}\text{area}((B + N)(b) \cap a) &= | \sum_{AB \in B(b) \cup N(b)} E_{l_1}(AB) | = \\ &| E_{l_1}(O_2N_3) + E_{l_1}(N_3O_4) + E_{l_1}(O_3N_4) + E_{l_1}(N_4O_4) + E_{l_1}(Q_1M_1) + E_{l_1}(M_1Q_4) | = \\ &\text{area}((O_2N_3O_3N_4O_4) + (Q_1M_1Q_4B_2))\end{aligned}$$

και

$$\text{area}(N(b) \cap a) = | \sum_{AB \in N(b)} E_{l_2}(AB) | = | E_{l_2}(O_3N_4) + E_{l_2}(N_4O_4) | = \text{area}((O_2N_3O_3N_4O_4)).$$

Η παραπάνω μέθοδος συνοψίζεται στον Αλγόριθμο COMPUTE-CDR% που παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.8. Το παρακάτω θεώρημα που διατυπώθηκε στο [62] αποδεικνύει την ορθότητα του αλγορίθμου και υπολογίζει την πολυπλοκότητά του.

Θεώρημα 3.1 Ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% είναι ορθός, δηλαδή υπολογίζει τη βασική σχέση κατεύθυνσης μεταξύ δύο περιοχών a και b του REG^* που παριστάνονται χρησιμοποιώντας δύο σύνολα πολυγώνων, S_a και S_b αντίστοιχα. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(k_a + k_b)$, όπου k_a (k_b) είναι ο συνολικός αριθμός των ακμών όλων των πολυγώνων στο S_a (S_b).

3.3 Σύγχριση των αλγορίθμων

Η παρουσίαση του αλγορίθμου COMPUTE-CDR% που προηγήθηκε μας παρέχει αρκετές ενδείξεις υπέρ της χρήσης του έναντι των κλασσικών αλγορίθμων ψαλιδισμού. Όμως μία σύγχριση της επίδοσης των αλγορίθμων είναι επιβεβλημένη για να αποδειχθεί στην πράξη και ποια είναι η ταχύτερη μέθοδος, αλλά και να μετρηθεί η διαφορά στην επίδοση.

Ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% συγχρίνεται με δύο δημοφιλείς αλγορίθμους ψαλιδισμού, τον αλγόριθμο των Sutherland και Hodgman [68] και τον αλγόριθμο των Barsky και Liang [44]. Όπως αναφέραμε και στην Ενότητα 3.2, ο υπολογισμός των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης με ποσοστά με τη χρήση αλγορίθμων ψαλιδισμού, απαιτεί την εφαρμογή ενός τέτοιου αλγορίθμου στα πολύγωνα της πρωτεύουσας περιοχής, για κάθε ορθογώνιο χωρίο του επιπέδου. Επειδή τα οκτώ περιφερειακά χωρία δεν είναι φραγμένα, κάτι που αλγόριθμοι απαιτούν, τα προσεγγίζουμε με φραγμένα ορθογώνια τοποθετώντας τις αντίστοιχες πλευρές αρκετά μακριά ώστε να μην τέμνονται με κανένα πολύγωνο της πρωτεύουσας περιοχής.

Οι αλγόριθμοι ψαλιδισμού έχουν τροποποιηθεί, ώστε να υπολογίζουν το εμβαδόν του πολυγώνου που βρίσκεται κάθε φορά στο ορθογώνιο πλαίσιο, χωρίς να χρειάζεται πρώτα να το αποθηκεύουν. Καθώς παράγονται τα σημεία στην έξοδο των αλγορίθμων, χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του εμβαδού. Αυτή η δυνατότητα παρέχεται από τους αλγόριθμους υπολογισμού

Αλγόριθμος Compute-CDR%

Είσοδος: Δύο σύνολα πολυγώνων S_a και S_b που παριστάνουν δύο περιοχές του REG^* , a και b αντίστοιχα.

Έξοδος: Η βασική σχέση κατεύθυνσης με ποσοστά R , ώστε να ισχύει $a \rightarrow b$.

Μέθοδος:

Χρησιμοποίησε το S_b για να υπολογίσεις το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο του b , $mbb(b)$.

Διαίρεσε όλες τις ακμές στο S_a ώστε κάθε νέα ακμή να βρίσκεται ακριβώς σε ένα χωρίο του b .

Έστω $y = l_1$, $y = l_2$, $x = m_1$ και $x = m_2$, όπου $l_1 < l_2$ και $m_1 < m_2$ οι ευθείες που σχηματίζουν το $mbb(b)$.

$a_{B+N} = as = asw = aw = anw = aN = aNE = aE = aSE = 0$

Για κάθε ακμή AB του S_a

Έστω t το χωρίο της b στο οποίο βρίσκεται η ακμή AB .

Στην Περίπτωση Που t

$$NW, W, SW: \quad a_t = a_t + E'_{m_1}(AB) \quad // \text{Οι εκφράσεις } E' \text{ και } E \text{ ορίζονται στον Ορισμό 3.5}$$

$$NE, E, SE: \quad a_t = a_t + E'_{m_1}(AB)$$

$$S: \quad a_t = a_t + E_{l_1}(AB)$$

$$N: \quad a_t = a_t + E_{l_2}(AB)$$

Τέλος Στην Περίπτωση Που

Αν ($t = N$) ή ($t = B$) Τότε $a_{B+N} = a_{B+N} + E_{l_1}(AB)$

Τέλος Για

$$a_B = |a_{B+N}| - |a_N|$$

$$totalArea = |a_B| + |as| + |asw| + |aw| + |anw| + |aN| + |aNE| + |aE| + |aSE|$$

$$\text{Επέστρεψε } \frac{100\%}{totalArea} \cdot \begin{bmatrix} |a_{NW}| & |a_N| & |a_{NE}| \\ |as| & |a_B| & |a_E| \\ |asw| & |a_S| & |a_{SE}| \end{bmatrix}$$

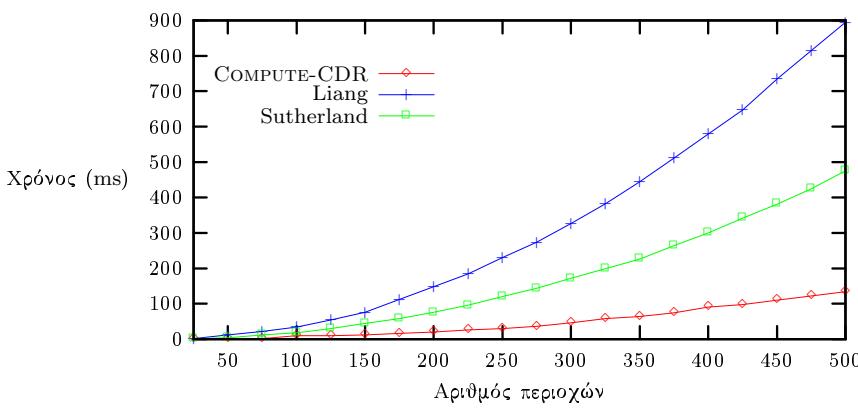
Σχήμα 3.8: Ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% .

εμβαδού πολυγώνου με σημείο αναφοράς [52, 58]. Με εξαίρεση αυτή την λεπτομέρεια, που επιταχύνει κατά τα άλλα τη λειτουργία των αλγορίθμων, έχουμε υλοποιήσει τους δύο αλγόριθμους όπως προτείνουν οι συγγραφείς τους στις αντίστοιχες εργασίες τους.

Με αντίστοιχο τρόπο έχει τροποποιηθεί και ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR%. Τα εμβαδά υπολογίζονται καθώς γίνεται η διαίρεση των ακμών, χωρίς να αποθηκεύεται ενδιάμεσα το διαιρεμένο πολύγωνο. Αυτό το καταφέραμε συνδυάζοντας σε ένα μοναδικό βρόχο, το βρόχο της διαίρεσης των ακμών των πολυγώνων της πρωτεύουσας περιοχής και του βρόχου υπολογισμού του εμβαδού ανά χωρίο (Σχήμα 3.8). Κάνοντας αυτές τις δύο αλλαγές στους αλγορίθμους αφενός μεν τους επιταχύναμε σημαντικά, αφετέρου δε βγάλαμε εκτός πειράματος λειτουργίες συσχετισμένες αποκλειστικά με το λειτουργικό σύστημα, όπως η δέσμευση και η απελευθέρωση μνήμης.

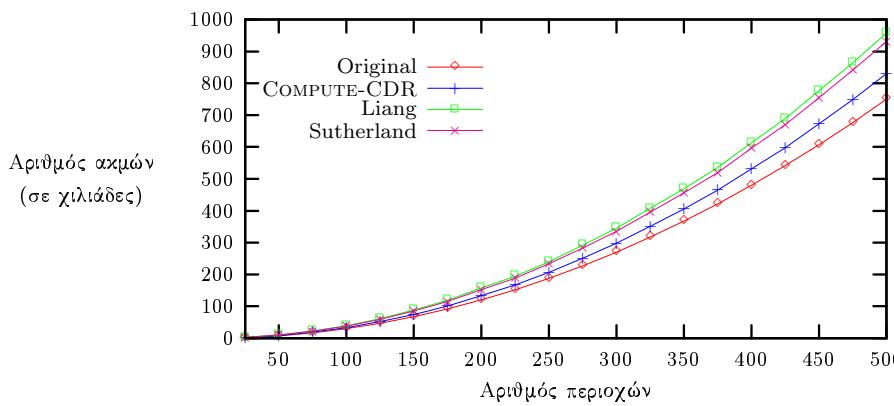
Οι τρεις αλγόριθμοι υλοποιήθηκαν στη γλώσσα προγραμματισμού C. Για τα αριθμητικά δεδομένα χρησιμοποιήθηκε αριθμητική κινητής υποδιαστολής διπλής ακρίβειας. Ο πηγαίος κώδικας μεταφράστηκε με τον compiler GCC 3.3.1 χρησιμοποιώντας την επιλογή για βελτιστοποίηση του παραγόμενου κώδικα σε επίπεδο 3 (-O3). Όλα τα πειράματα έτρεξαν σε περιβάλλον Windows XP πάνω από το Cygwin Unix Emulation Layer 1.5.10. Ο υπολογιστής ήταν ένας AMD Sempron 2400+ με 512MB μνήμη.

Τα δεδομένα του πειράματος ήταν συνθετικά και αποτελούνταν από πολύγωνα με 3, 4, 5 και 10 κορυφές, σε ομάδες των 25 έως 500 πολυγώνων, με βήματα των 25 πολυγώνων. Για κάθε ομάδα υπολογίστηκε η βασική σχέση κατεύθυνσης για κάθε δυνατό ζεύγος πολυγώνων, οπότε για ένα σύνολο με n πολύγωνα, ο κάθε αλγόριθμος εφαρμόστηκε n^2 φορές. Μετρήθηκε ο συνολικός χρόνος που χρειάστηκε ο κάθε αλγόριθμος για κάθε σύνολο πολυγώνων, αλλά και ο συνολικός αριθμός ακμών που εισήγαγε. Όπως έχουμε πει και ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% και οι αλγόριθμοι φαλιδισμού εισάγουν νέες ακμές στα πολύγωνα κατά τη λειτουργία τους. Στα Σχήματα 3.9 και 3.10 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της δοκιμής για πολύγωνα με 3 ακμές, στα Σχήματα 3.11 και 3.12 για πολύγωνα με 4 ακμές, στα Σχήματα 3.13 και 3.14 για πολύγωνα με 5 ακμές και τέλος στα Σχήματα 3.15 και 3.16 για πολύγωνα με 10 ακμές.

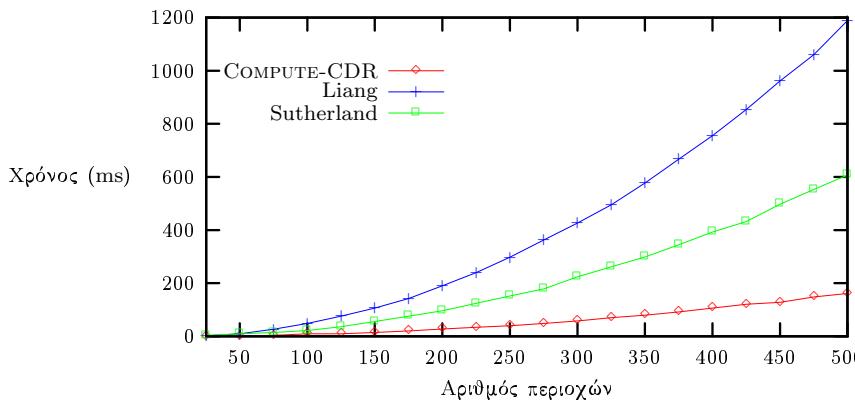


Σχήμα 3.9: Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 3 ακμές.

Παράλληλα με τις γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουμε και μερικά συγκεντρωτικά αποτελέσματα για τους αλγορίθμους. Για πολύγωνα με 3 ακμές, ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% εισάγει



Σχήμα 3.10: Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 3 ακμές.



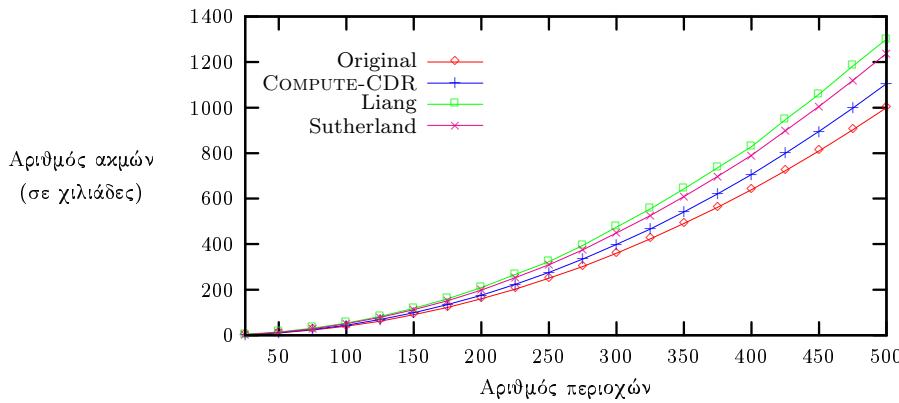
Σχήμα 3.11: Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 4 ακμές.

κατά μέσο όρο 11% επιπλέον ακμές, ο αλγόριθμος των Liang και Barsky 31% περισσότερες ακμές και των Sutherland και Hodgman 27% περισσότερες ακμές. Επίσης ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% είναι κατά μέσο όρο 6.8 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Liang και Barsky και 3.6 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Sutherland και Hodgman.

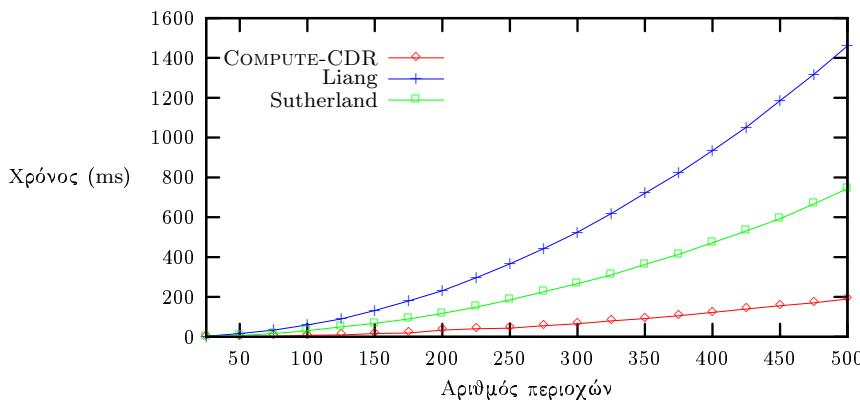
Για πολύγωνα με 4 ακμές, ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% εισάγει κατά μέσο όρο 10% επιπλέον ακμές, ο αλγόριθμος των Liang και Barsky 32% περισσότερες ακμές και των Sutherland-Hodgman 25% περισσότερες ακμές. Επίσης ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% είναι κατά μέσο όρο 7.3 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Liang και Barsky και 3.7 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Sutherland και Hodgman.

Για πολύγωνα με 5 ακμές, ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% εισάγει κατά μέσο όρο 10% επιπλέον ακμές, ο αλγόριθμος των Liang και Barsky 35% περισσότερες ακμές και των Sutherland-Hodgman 25% περισσότερες ακμές. Επίσης ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% είναι κατά μέσο όρο 7.9 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Liang και Barsky και 4.0 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Sutherland και Hodgman.

Για πολύγωνα με 10 ακμές, ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% εισάγει κατά μέσο όρο 10% επιπλέον ακμές, ο αλγόριθμος των Liang και Barsky 43% περισσότερες ακμές και των Sutherland-



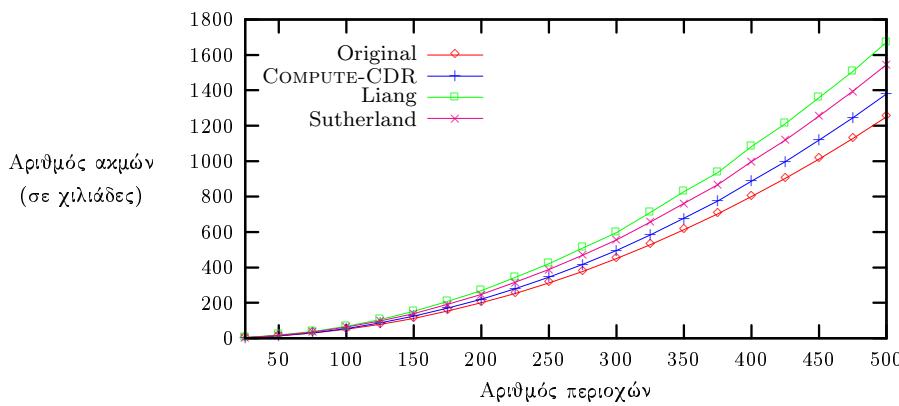
Σχήμα 3.12: Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 4 ακμές.



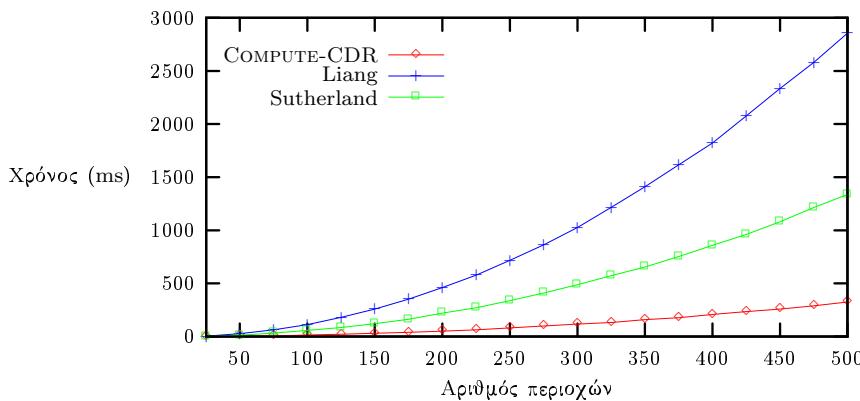
Σχήμα 3.13: Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 5 ακμές.

Hodgman 24% περισσότερες ακμές. Επίσης ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% είναι κατά μέσο όρο 8.9 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Liang και Barsky και 4.2 φορές ταχύτερος από τον αλγόριθμο των Sutherland και Hodgman. Τα παραπάνω συνοψίζονται στους Πίνακες 3.1 και 3.2.

Παρατηρούμε πως ο αλγόριθμος COMPUTE-CDR% όχι μόνο εισάγει πολύ λιγότερες νέες ακμές από τους αλγόριθμους ψαλιδισμού, αλλά είναι και κατά πολύ ταχύτερος. Θα μπορούσαμε να επιταχύνουμε τους αλγορίθμους ψαλιδισμού ως εξής: Αντί να τους εφαρμόζουμε και για τα εννέα χωρία του επιπέδου, θα μπορούσαμε να τους εφαρμόζαμε μόνο σε οκτώ από αυτά, ενώ το εμβαδόν της πρωτεύουσας περιοχής που βρίσκεται στο ένατο χωρίο θα υπολογιζόταν αφαιρώντας από το συνολικό εμβαδόν της πρωτεύουσας περιοχής τα εμβαδά στα υπόλοιπα οκτώ χωρία. Αυτή η τροποποίηση θα επιτάχυνε τους αλγορίθμους κατά 1/9 ή 11% περίπου. Πράγματι πειράματα που κάναμε και με αυτή την τροποποίηση δείχνουν μία τέτοια επιτάχυνση, αλλά σε καμία περίπτωση δεν πλησιάζουν την ταχύτητα του αλγορίθμου COMPUTE-CDR%.



Σχήμα 3.14: Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 5 ακμές.

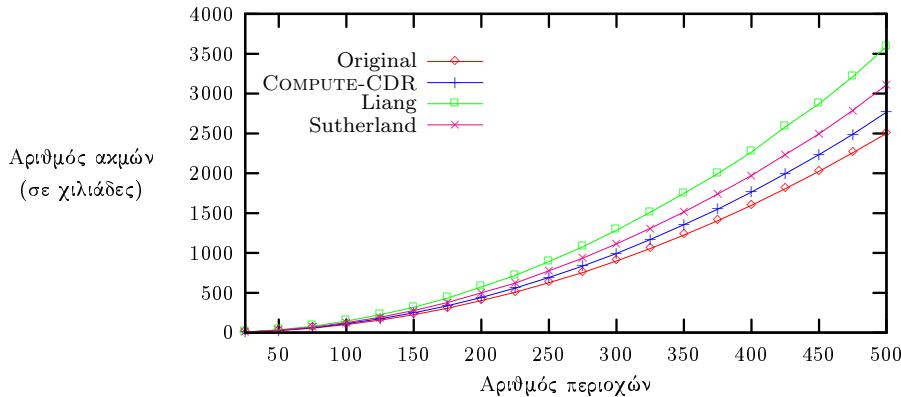


Σχήμα 3.15: Χρόνος εκτέλεσης για πολύγωνα με 10 ακμές.

3.4 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα αποτελέσματα του πειράματος που πραγματοποιήσαμε, για να συγκρίνουμε την απόδοση ενός νέου αλγορίθμου υπολογισμού σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer, με τους ήδη υπάρχοντες. Τα αποτελέσματα έδειξαν πως ο νέος αλγόριθμος των Skiadopoulos et al είναι πολλές φορές ταχύτερος από τους αλγορίθμους φαλιδισμού που χρησιμοποιούνται για τον ίδιο σκοπό.

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε και πάλι με το πρόβλημα του αποδοτικού υπολογισμού σχέσεων κατεύθυνσης. Το μοντέλο με το οποίο θα ασχοληθούμε δημιουργήθηκε από τους Billen και Clementini και παρουσιάζουμε δύο αλγορίθμους που δημιουργήσαμε για τον υπολογισμό των σχέσεων κατεύθυνσης.



Σχήμα 3.16: Συνολικός αριθμός ακμών για πολύγωνα με 10 ακμές.

Ακμές Πολυγώνων	Επιπλέον Ακμές		
	COMPUTE-CDR%	Sutherland	Liang
3	11%	27%	31%
4	10%	25%	32%
5	10%	25%	35%
10	10%	24%	43%

Πίνακας 3.1: Συγκεντρωτικός πίνακας απόδοσης αλγορίθμων.

Ακμές Πολυγώνων	Κανονικοποιημένος Χρόνος		
	COMPUTE-CDR%	Sutherland	Liang
3	1.0	3.6	6.8
4	1.0	3.7	7.3
5	1.0	4.0	7.9
10	1.0	4.2	8.9

Πίνακας 3.2: Συγκεντρωτικός πίνακας απόδοσης αλγορίθμων.

Κεφάλαιο 4

Τυπολογισμός Σχέσεων Κατεύθυνσης στο Μοντέλο των Billen και Clementini

Στο Κεφάλαιο 3 συγκρίναμε τρεις αλγόριθμους υπολογισμού των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer. Κάναμε επίσης μία αναφορά στη χρησιμότητα αυτών των αλγορίθμων, καθώς τα μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης βρίσκουν πρακτικές εφαρμογές, ειδικά στα Γεωγραφικά Πληροφοριακά Συστήματα (GIS) και τις Χωρικές Βάσεις Δεδομένων.

Το μοντέλο των Billen και Clementini είναι αρκετά πιο σύνθετο από αυτό των Goyal και Egenhofer. Επιπλέον, οι εμπνευστές του το προορίζουν χυρίως για τη διατύπωση σύνθετων κατηγορημάτων στα οποία οι σχέσεις κατεύθυνσης του μοντέλου θα χρησιμοποιούνται ως απλοί όροι [9]. Ως εκ τούτου, η δημιουργία αποδοτικών αλγορίθμων υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης είναι ένα καθοριστικό βήμα προς την επιτυχία και την ευρεία υιοθέτηση του μοντέλου.

Η συνεισφορά του κεφαλαίου συνοψίζεται στα ακόλουθα:

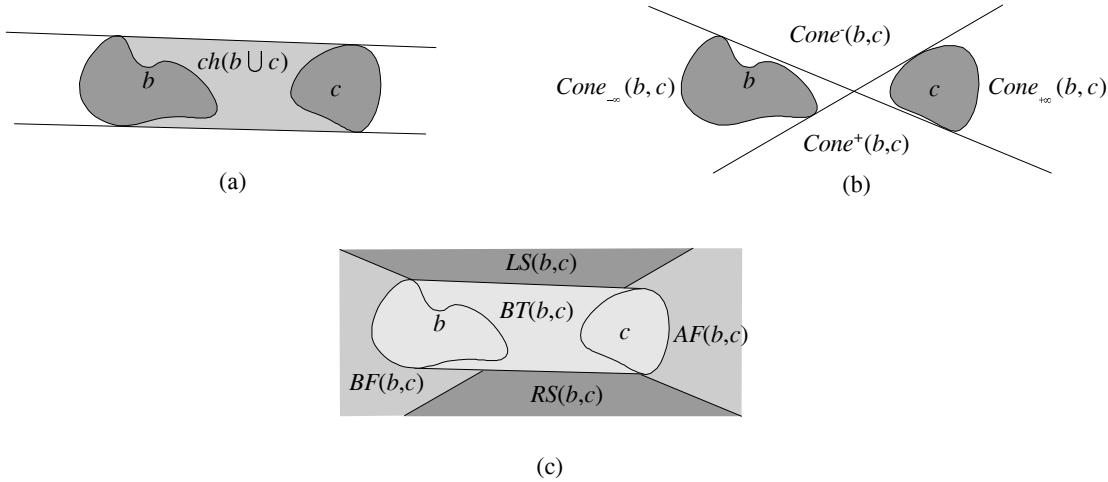
- Ορίζουμε αυστηρά τις σχέσεις που μπορούν να εκφραστούν στο μοντέλο των Billen και Clementini [8]. Η προσέγγιση μας είναι αυστηρή και συμπληρώνει αυτή των Billen και Clementini.
- Διατυπώνουμε δύο αλγόριθμους υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης, περιγράφουμε αναλυτικά τον τρόπο λειτουργίας τους και εκτιμούμε την πολυπλοκότητά τους.
- Παρουσιάζουμε όλους τους αλγόριθμους της Υπολογιστικής Γεωμετρίας που χρησιμοποιήσαμε για την υλοποίηση σε υπολογιστή των παραπάνω αλγορίθμων και συζητούμε τους λόγους που μας οδήγησαν στην επιλογή των συγκεκριμένων έναντι κάποιων άλλων.

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στην Ενότητα 4.1 ορίζουμε αυστηρά το μοντέλο των Billen και Clementini, στην Ενότητα 4.2 παρουσιάζουμε τους αλγόριθμους υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης και στην Ενότητα 4.3 λεπτομέρειες που αφορούν την υλοποίηση των αλγορίθμων. Τέλος στην Ενότητα 4.4 παρουσιάζουμε τα συμπεράσματά μας.

4.1 Το μοντέλο των Billen και Clementini [8]

Έστω τρεις τυχαίες περιοχές a , b και c του συνόλου REG^* , οι οποίες σχετίζονται με μία σχέση κατεύθυνσης. Θεωρούμε ότι η a είναι η πρωτεύουσα περιοχή και οι b και c οι περιοχές αναφοράς.

Θεωρούμε το κυρτό κέλυφος της ένωσης των δύο περιοχών αναφοράς, $ch(b \cup c)$. Το επίπεδο χωρίζεται σε δύο τμήματα, το τμήμα εντός του κελύφους και το τμήμα εκτός του κελύφους (Σχήμα 4.1a). Επιπλέον έστω ότι τα κυρτά κελύφη των δύο περιοχών αναφοράς δεν τέμνονται, δηλαδή $ch(b) \cap ch(c) = \emptyset$. Τότε μπορούμε να φέρουμε τις δύο κοινές εσωτερικές εφαπτομένες ανάμεσα στις περιοχές b και c . Οι εφαπτομένες αυτές τέμνονται εντός της περιοχής $ch(b \cup c)$ και διαιρούν το επίπεδο σε τέσσερις κώνους. Θεωρούμε μία προσανατολισμένη ευθεία από την περιοχή b στην περιοχή c και καλούμε $Cone_{-\infty}(b, c)$ τον κώνο που περιέχει την περιοχή b , $Cone_{+\infty}(b, c)$ τον κώνο που περιέχει την περιοχή c , $Cone^+(b, c)$ τον κώνο που βρίσκεται στα δεξιά της προσανατολισμένης ευθείας και $Cone^-(b, c)$ τον κώνο που βρίσκεται αριστερά της (Σχήμα 4.1b).

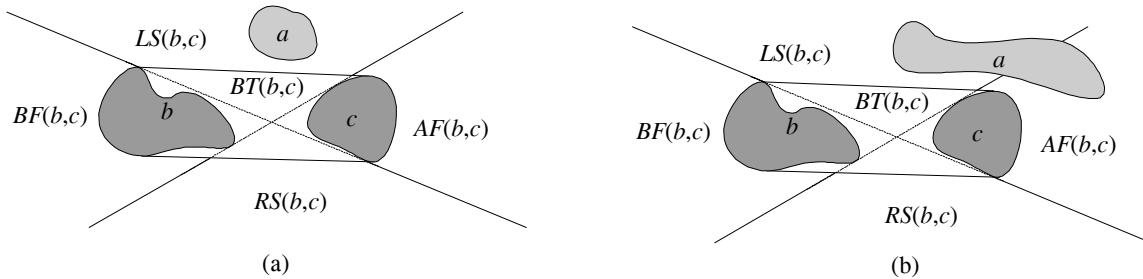


Σχήμα 4.1: Διαμέριση του επιπέδου σε πέντε χωρία.

Με αυτό τον τρόπο έχουμε διαμερίσει το επίπεδο σε πέντε τμήματα, τα οποία ονομάζουμε χωρία (tiles) (Σχήμα 4.1c). Τα τέσσερα περιφερειακά τμήματα, αντιστοιχούν στις σχέσεις αριστερά, πριν, δεξιά, μετά. Τα χωρία αυτά τα συμβολίζουμε με $LS(b, c)$, $BF(b, c)$, $RS(b, c)$ και $AF(b, c)$. Το κεντρικό τμήμα, δηλαδή το κυρτό κέλυφος της ένωσης των περιοχών αναφοράς b και c , αντιστοιχεί στη σχέση ανάμεσα και συμβολίζεται με $BT(b, c)$.

Στην περίπτωση που η πρωτεύουσα περιοχή a περιέχεται εξολοκλήρου στο τμήμα $LS(b, c)$ δύο περιοχών αναφοράς b και c (Σχήμα 4.2a), τότε λέμε ότι η a είναι αριστερά των b και c και συμβολίζουμε με a $LS(b, c)$. Όμοια ορίζουμε τις σχέσεις πριν (BF), δεξιά (RS), μετά (AF) και ανάμεσα (BT).

Αν η πρωτεύουσα περιοχή a περιέχεται μερικώς στο τμήμα $AF(b, c)$ και μερικώς στο τμήμα $LS(b, c)$ (Σχήμα 4.2b), λέμε ότι η a βρίσκεται μερικώς αριστερά και μερικώς μετά τις b και c .



Σχήμα 4.2: Περιοχές αναφοράς και σχέσεις κατεύθυνσης.

Ορισμός 4.1 Μία σχέση κατεύθυνσης (direction relation) είναι μία έκφραση της μορφής $R_1 \cdots : R_k$ όπου

- (i) $1 \leq k \leq 5$,
 - (ii) $R_1, \dots, R_k \in \{LS, BF, RS, AF, BT\}$ και
 - (iii) $R_i \neq R_j$ για κάθε $i, j \in \{1, \dots, k\}$ και $i \neq j$.

Μία βασική σχέση κατεύθυνσης $R_1 \cdots R_k$ καλείται ενός χωρίου ϵ αν $k = 1$, διαφορετικά καλείται πολλών χωρίων.

Παράδειγμα 4.1 Οι παρακάτω είναι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης

LS kai LS:AF

Περιοχές σε αυτές τις σχέσεις παρουσιάζονται στα Σχήματα 4.2a και 4.2b αντίστοιχα.

Για να μην υπάρξει οποιαδήποτε σύγχυση, τα στοιχεία μιας σχέσης κατεύθυνση θα σημειώνονται με την ακόλουθη σειρά: LS , BF , RS , AF , BT . Κατά συνέπεια, θα γράφουμε $LS:RS:AF$ αντί $LS:AF:RS$ ή $AF:RS:LS$. Ας σημειωθεί ότι τα στοιχεία μιας σχέσης καλούνται συχνά ως χωρία. Για παράδειγμα τα LS , RS και AF θα αναφέρονται χωρία της σχέσης $LS:RS:AF$. Χωρία έχουμε αποκαλέσει και τα τμήματα του επιπέδου στα οποία χωρίζεται από τις περιοχές αναφοράς. Στη συνέχεια θα είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα σε τι από τα δύο αναφερόμαστε όταν χρησιμοποιούμε τον όρο.

Μπορούμε να ορίσουμε αυστηρά τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου LS , BF , RS , AF και BT του μοντέλου ως εξής:

Ορισμός 4.2 Εστω a, b και c τρεις περιοχές του REG^* με $ch(b) \cap ch(c) = \emptyset$. Οι σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου ορίζονται ως εξής:

<i>a LS</i>	(b, c)	arr	$a \subset \text{Cone}^-(b, c) - ch(b \cup c).$
<i>a BF</i>	(b, c)	arr	$a \subset \text{Cone}_{-\infty}(b, c) - ch(b \cup c).$
<i>a RS</i>	(b, c)	arr	$a \subset \text{Cone}^+(b, c) - ch(b \cup c).$
<i>a AF</i>	(b, c)	arr	$a \subset \text{Cone}_{+\infty}(b, c) - ch(b \cup c).$
<i>a BT</i>	(b, c)	arr	$a \subseteq ch(b \cup c).$

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να ορίσουμε και οποιαδήποτε σχέση πολλών χωρίων.

Ορισμός 4.3 Έστω a και b δύο περιοχές του REG^* με $ch(b) \cap ch(c) = \emptyset$. Οι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης πολλών χωρίων ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} a & R_1 \cdots R_k b, \quad 2 \leq k \leq 5 \text{ ανν υπάρχουν περιοχές } a_1, \dots, a_k \in REG^* \text{ ώστε} \\ & a_1 R_1 (b, c), \dots, a_k R_k (b, c) \text{ και } a = a_1 \cup \cdots \cup a_k. \end{aligned}$$

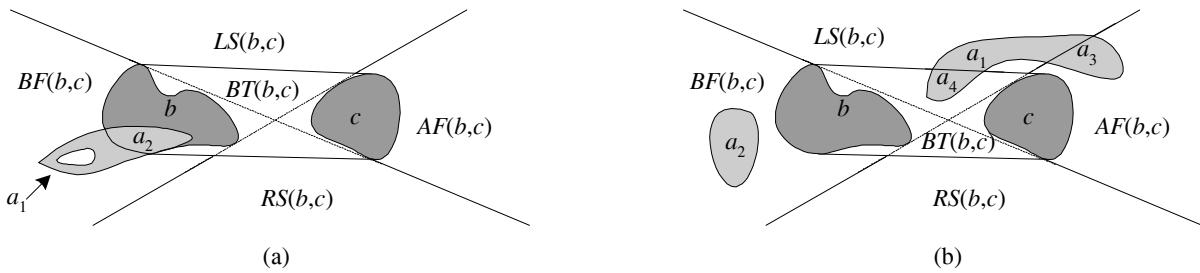
Στον Ορισμό 4.3, για κάθε i, j τέτοια ώστε $1 \leq i, j \leq k$ και $i \neq j$, οι περιοχές a_i και a_j έχουν ξένα εσωτερικά αλλά μπορεί να έχουν κοινά σημεία στα σύνορά τους.

Παράδειγμα 4.2 Οι παρακάτω είναι σχέσεις κατεύθυνσης πολλών χωρίων:

$$BF:BT \text{ και } LS:BF:AF:BT$$

Στο Σχήμα 4.3 έχουμε:

- $a BF:BT (b, c)$ διότι υπάρχουν περιοχές a_1 και a_2 του REG^* τέτοιες ώστε $a = a_1 \cup a_2$, $a_1 LS (b, c)$ και $a_2 BT (b, c)$ (Σχήμα 4.3a) και
- $a LS:BF:AF:BT (b, c)$ διότι υπάρχουν περιοχές a_1, \dots, a_4 του REG^* τέτοιες ώστε $a = a_1 \cup \cdots \cup a_4$, $a_1 LS (b, c)$, $a_2 BF (b, c)$, $a_3 AF (b, c)$ και $a_4 BT (b, c)$ (Σχήμα 4.3b).



Σχήμα 4.3: Σχέσεις πολλών χωρίων.

Το σύνολο των σχέσεων κατεύθυνσης για περιοχές στο REG^* περιέχει 31 σχέσεις. Το σύνολο αυτό το συμβολίζεται με T^* . Οι σχέσεις στο σύνολο T^* είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες. Τα στοιχεία του T^* μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση πλήρως ορισμένης πληροφορίας για σχέσεις κατεύθυνσης, π.χ., $a LS:BF (b, c)$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του T^* σαν βάση, μπορούμε να ορίσουμε το δυναμοσύνολο 2^{T^*} , το οποίο περιέχει 2^{31} σχέσεις. Τα στοιχεία του 2^{T^*} καλούνται διαζευκτικές σχέσεις κατεύθυνσης, με τις οποίες εκτός από πλήρως ορισμένη πληροφορία, μπορούμε να αναπαραστήσουμε και μη-πλήρως ορισμένη πληροφορία. Για παράδειγμα, η σχέση $a \{LS, BF\} (b, c)$ δηλώνει ότι η περιοχή a βρίσκεται είτε αριστερά, είτε πριν τις περιοχές b και c .

4.2 Υπολογισμός των σχέσεων κατεύθυνσης

Έστω μία πρωτεύουσα περιοχή a και δύο περιοχές αναφοράς b και c . Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3, για να βρούμε τη σχέση κατεύθυνσης μεταξύ των τριών περιοχών, πρέπει να διαιρέσουμε την πρωτεύουσα περιοχή σε τμήματα ώστε κάθε τμήμα να ανήκει σε ένα μόνο χωρίο των b και c . Η ακριβής γνώση των τμημάτων αυτών δεν μας είναι απαραίτητη, μας αρκεί να γνωρίζουμε με ποια χωρία έχει κοινά σημεία η πρωτεύουσα περιοχή. Φαίνεται λοιπόν πως ένας αλγόριθμος που θα υπολογίζει τη σχέση κατεύθυνσης μεταξύ τριών περιοχών θα αποτελείται από δύο μέρη:

- Το χωρισμό του επιπέδου στα πέντε χωρία και
- Τον προσδιορισμό των χωρίων στα οποία ανήκουν τα τμήματα της πρωτεύουσας περιοχής.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τα δύο αυτά τμήματα των αλγορίθμων ξεχωριστά. Αρχικά θα δούμε το χωρισμό του επιπέδου στα πέντε χωρία, μία λειτουργία που είναι κοινή και στους δύο αλγόριθμους, στην Ενότητα 4.2.1 και έπειτα στην Ενότητα 4.2.2 τους δύο αλγόριθμους που προσδιορίζουν τη σχέση κατεύθυνσης.

4.2.1 Υπολογισμός των πέντε χωρίων

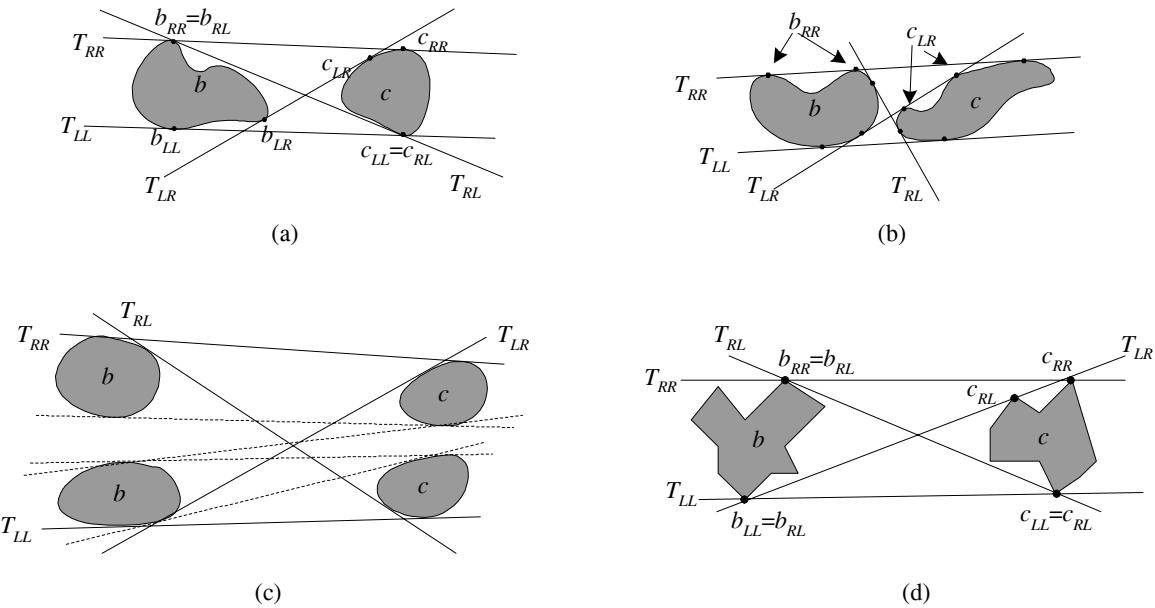
Ο χωρισμός του επιπέδου στα πέντε χωρία γίνεται χρησιμοποιώντας το κυρτό κέλυφος της ένωσης των δύο περιοχών αναφοράς b και c και τις κοινές εσωτερικές εφαπτομένες τους. Μάλιστα, δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε μία αναπαράσταση με πολύγωνα και των πέντε χωρίων. Εξάλλου κάτι τέτοιο θα ήταν δύσκολο καθώς τα τέσσερα περιφερειακά χωρία $LS(b, c)$, $BF(b, c)$, $RS(b, c)$ και $AF(b, c)$ δεν είναι φραγμένα, αλλά εκτείνονται προς το άπειρο. Η γνώση του κυρτού κελύφους και των δύο κοινών εσωτερικών εφαπτομένων, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, μας αρκεί.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να μιλήσουμε για τις κοινές εφαπτομένες μεταξύ δύο περιοχών του \mathbb{R}^2 και στη συνέχεια θα επεκταθούμε και στα πολύγωνα. Έστω δύο συνεκτικές περιοχές b και c . Μία κοινή εφαπτομένη είναι μία ευθεία που εφάπτεται και στις δύο περιοχές. Ως εκ τούτου μεταξύ δύο συνδεδεμένων περιοχών υπάρχουν τέσσερις κοινές εφαπτομένες (Σχήμα 4.4a). Θεωρώντας τις τέσσερις ευθείες προσανατολισμένες από την περιοχή b στη c , τότε η κάθε περιοχή θα βρίσκεται εξολοκλήρου είτε δεξιά είτε αριστερά μίας κοινής εφαπτομένης. Για παράδειγμα, συμβολίζουμε με $T_{LR}(b, c)$ την εφαπτομένη που έχει την περιοχή b στα αριστερά της ($L = Left$) και την περιοχή c στα δεξιά της ($R = Right$). Επομένως έχουμε δύο κοινές εξωτερικές εφαπτομένες, τις $T_{RR}(b, c)$ και $T_{LL}(b, c)$ και δύο κοινές εσωτερικές εφαπτομένες, τις $T_{LR}(b, c)$ και $T_{RL}(b, c)$. Στη συνέχεια επειδή θα ονομάζουμε τις περιοχές αναφοράς πάντα b και c , θα συμβολίζουμε τις κοινές εφαπτομένες απλά με T_{LR} , T_{RL} , T_{LL} και T_{RR} .

Μία κοινή εφαπτομένη προσδιορίζεται πλήρως από ένα σημείο επαφής στην περιοχή b και ένα στην περιοχή c . Μία κοινή εφαπτομένη μπορεί να έχει περισσότερα του ενός σημεία με το σύνορο μίας περιοχής (Σχήμα 4.4b), αλλά ένα από αυτά μας αρκεί. Ένα σημείο επαφής στην περιοχή b με την εφαπτομένη T_{RR} θα συμβολίζεται με b_{RR} . Ομοίως συμβολίζουμε τα σημεία b_{LL} , b_{LR} , b_{RL} και b_{RR} , c_{LL} , c_{LR} , c_{RL} (Σχήμα 4.4a). Εάν οι περιοχές b και c δεν είναι συνδεδεμένες,

τότε οι κοινές εφαπτομένες μπορεί να είναι παραπάνω από τέσσερις (Σχήμα 4.4c). Σε αυτή την περίπτωση, εμείς θα θεωρούμε κοινές εφαπτομένες εκείνες τις τέσσερις εφαπτομένες, ώστε όλα τα σημεία, από όλα τα τμήματα των περιοχών b και c , να βρίσκονται είτε δεξιά είτε αριστερά της κοινής εφαπτομένης.

Όσα είπαμε παραπάνω για τις κοινές εφαπτομένες δύο περιοχών ισχύουν και για τις αναπαραστάσεις τους με πολύγωνα (Σχήμα 4.4d). Ένα σημείο επαφής θα είναι οπωσδήποτε κορυφή ενός πολυγώνου, ενώ μία εφαπτομένη μπορεί να διέρχεται από παραπάνω από μία κορυφές.



Σχήμα 4.4: Κοινές εφαπτομένες ανάμεσα σε περιοχές και πολύγωνα.

Μέχρι τώρα συμβολίζουμε τις περιοχές αναφοράς με b και c . Θα συμβολίζουμε με S_b και S_c τα σύνολα των πολυγώνων που αναπαριστούν τις δύο περιοχές και με n_b και n_c τον αριθμό των κορυφών των πολυγώνων στα σύνολα S_b και S_c αντίστοιχα.

Ο υπολογισμός του κυρτού κελύφους ενός συνόλου σημείων είναι ένα καλά μελετημένο πρόβλημα της Υπολογιστικής Γεωμετρίας. Μπορούμε να υπολογίσουμε το κυρτό κέλυφος της ένωσης των δύο περιοχών, παρέχοντας ως είσοδο σε ένα κατάλληλο αλγόριθμο το σύνολο των κορυφών των πολυγώνων που τις αποτελούν. Η πολυπλοκότητα αυτής της κατηγορίας αλγορίθμων είναι $\mathcal{O}(n \log n)$, όπου n ο αριθμός των σημείων στην είσοδο, αν και υπάρχουν βέλτιστοι αλγόριθμοι με πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n \log k)$, όπου k ο αριθμός των κορυφών στην έξοδο του αλγορίθμου (Ενότητα 4.3.1). Επομένως το κόστος για να υπολογίσουμε το κυρτό κέλυφος $ch(b \cup c)$ είναι $\mathcal{O}((n_b + n_c) \log(n_b + n_c))$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημάνουμε πως υπάρχουν εξειδικευμένοι αλγόριθμοι, που υπολογίζουν το κυρτό κέλυφος ενός απλού πολυγώνου και όχι ενός συνόλου σημείων όπως οι γενικοί αλγόριθμοι. Το κέρδος από αυτή την εξειδικευση είναι η επιτάχυνση των αλγορίθμων, οι οποίοι μπορούν να υπολογίσουν το κυρτό κέλυφος ενός απλού πολυγώνου σε χρόνο $\mathcal{O}(n)$

(Ενότητα 4.3.1).

Ο υπολογισμός των κοινών εφαπτομένων ανάμεσα σε δύο τυχαία πολύγωνα ή σύνολα πολυγώνων b και c είναι απλή αλλά χρονοβόρα διαδικασία. Πρέπει να ελεγχθούν όλα τα ζεύγη σημείων, ένα από το b και ένα από το c , $n_b n_c$ στο σύνολο, για το εάν αποτελούν σημεία από τα οποία διέρχεται κοινή εφαπτομένη, εάν δηλαδή όλες οι υπόλοιπες κορυφές του κάθε πολυγώνου βρίσκονται από την ίδια πλευρά της ευθείας. Το συνολικό κόστος είναι $\mathcal{O}(n_b n_c(n_b + n_c))$.

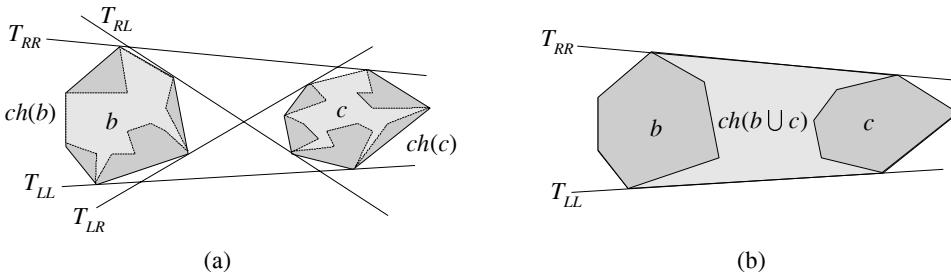
Κάνοντας μερικές απλές παρατηρήσεις μπορούμε να μειώσουμε δραματικά το κόστος των δύο παραπάνω βημάτων. Καταρχάς το μοντέλο επιβάλλει πως για τις περιοχές αναφοράς b και c πρέπει να ισχύει $ch(b) \cap ch(c) = \emptyset$. Πριν κάνουμε οτιδήποτε άλλο πρέπει να υπολογίσουμε τα κυρτά κελύφη των δύο περιοχών και στη συνέχεια να ελέγξουμε εάν αυτά τέμνονται.

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει, ο υπολογισμός των $ch(b)$ και $ch(c)$ έχει κόστος $\mathcal{O}(n_b \log n_b)$ και $\mathcal{O}(n_c \log n_c)$ αντίστοιχα. Στην ειδική περίπτωση όπου οι περιοχές b και c ανήκουν στο σύνολο REG , μπορούν να αναπαρασταθούν με ένα απλό πολύγωνο και επομένως μπορούμε να υπολογίσουμε τα κυρτά τους κελύφη με κόστος $\mathcal{O}(n_b)$ και $\mathcal{O}(n_c)$. Στη συνέχεια όμως θα εξακολουθήσουμε να θεωρούμε πως οι περιοχές ανήκουν γενικά στο σύνολο REG^* , εκτός και εάν μπορεί να προκύψει όφελος θεωρώντας ότι ανήκουν στο REG , οπότε και όμως το επισημαίνουμε.

Στη συνέχεια ο υπολογισμός κατά πόσο τα δύο κυρτά πολύγωνα τέμνονται έχει κόστος $\mathcal{O}(n_b + n_c)$ (Ενότητα 4.3.4). Εάν τέμνονται ο αλγόριθμος σταματά καθώς το επίπεδο δεν μπορεί να διαμεριστεί στα πέντε χωρία. Μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα δύο κυρτά κελύφη που έχουμε ήδη υπολογίσει για να επιταχύνουμε και τον υπολογισμό του κυρτού κελύφους $ch(b \cup c)$ αλλά και των κοινών εσωτερικών εφαπτομένων.

Δύο περιοχές έχουν τις ίδιες κοινές εφαπτομένες με τα κυρτά τους κελύφη. Αυτό μπορούμε να το δούμε διαισθητικά στο Σχήμα 4.5a. Γενικά, η απουσία κοιλοτήτων και η κανονικότητα των κυρτών πολυγώνων επιτρέπει την ανάπτυξη αλγορίθμων, ειδικά για κυρτά πολύγωνα, που είναι κατά πολύ ταχύτεροι από τους αντίστοιχους αλγόριθμους που χειρίζονται τυχαία πολύγωνα. Και στην περίπτωση των κοινών εφαπτομένων, ο υπολογισμός επιταχύνεται σημαντικά και μπορεί να επιτευχθεί σε χρόνο $\mathcal{O}(\log n_1 \log n_2)$ (Ενότητα 4.3.2). Στην περίπτωσή μας η πολυπλοκότητα για τον υπολογισμό των κοινών εσωτερικών εφαπτομένων είναι $\mathcal{O}(\log n_{ch(b)} \log n_{ch(c)})$. Από την Υπολογιστική Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το κυρτό κέλυφος ενός πολυγώνου είναι ένα πολύγωνο με λιγότερες κορυφές από το αρχικό. Αυτό δεν είναι δύσκολο να το φανταστούμε καθώς το κυρτό κέλυφος αποτελεί μία «εξομαλυμένη» εκδοχή της αρχικής περιοχής και επομένως μπορεί να αναπαρασταθεί με λιγότερες κορυφές. Επομένως, δεδομένου ότι $n_{ch(b)} \leq n_b$ και $n_{ch(c)} \leq n_c$ έχουμε πολυπλοκότητα τάξεως $\mathcal{O}(\log n_b \log n_c)$.

Με το ίδιο κόστος μπορούμε να υπολογίσουμε και τις κοινές εξωτερικές εφαπτομένες, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να αποφύγουμε να υπολογίσουμε το $ch(b \cup c)$ από την αρχή. Η ιδέα προέρχεται από τον αλγόριθμο υπολογισμού κυρτού κελύφους των Preparata και Hong [57]. Το κυρτό κέλυφος δύο κυρτών περιοχών αποτελείται από την από την ένωση των δύο περιοχών και του τμήματος ανάμεσα σε αυτές και τις κοινές εξωτερικές εφαπτομένες του. Ένα παράδειγμα με πολύγωνα φαίνεται στο Σχήμα 4.5b. Ο υπολογισμός αυτός έχει γραμμική πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n_b + n_c)$.



Σχήμα 4.5: Κοινές εφαπτομένες και χυρτά πολύγωνα.

Συνοψίζοντας τα παραπάνω βήματα, διατυπώνουμε τον αλγόριθμο *Partition* ο οποίος δέχεται ως είσοδο δύο περιοχές αναφοράς και εφόσον τα χυρτά τους κελύφη δεν τέμνονται, μας παρέχει το χυρτό κέλυφος της ένωσης των περιοχών αναφοράς και τις δύο κοινές εσωτερικές εφαπτομένες.

Αλγόριθμος Partition

Είσοδος: Δύο σύνολα πολυγώνων S_b και S_c που παριστάνουν τις δύο περιοχές αναφοράς στο REG^* , b και c αντίστοιχα.

Έξοδος: Ένα πολύγωνο $chbc$ που αναπαριστά το χυρτό κέλυφος της ένωσης των S_b και S_c και οι κοινές εσωτερικές εφαπτομένες τους T_{LR} και T_{RL} .

Μέθοδος:

$chb := \text{ConvexHull}(S_b);$

$chc := \text{ConvexHull}(S_c);$

Αγ Intersect(chb, chc) = TRUE Σταμάτα;

$(T_{RR}, T_{LL}, T_{RL}, T_{LR}) := \text{CommonTangents}(chb, chc);$

$chbc := \text{CreateConvexHull}(chb, chc, T_{RR}, T_{LL});$

Επέστρεψε (chbc, T_{RL}, T_{LR});

Σχήμα 4.6: Ο αλγόριθμος Partition.

Παρατήρηση 4.1 Η πολυπλοκότητα των επιμέρους βημάτων και η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Partition παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.1. Συμβολίζουμε με n_b και n_c τον αριθμό των κορυφών στην αναπαράσταση με πολύγωνα S_b και S_c των δύο περιοχών αναφοράς b και c .

Λειτουργία	Κόστος REG	Κόστος REG^*
Υπολογισμός χυρτού κελύφους περιοχής αναφοράς b	$\mathcal{O}(n_b)$	$\mathcal{O}(n_b \log n_b)$
Υπολογισμός χυρτού κελύφους περιοχής αναφοράς c	$\mathcal{O}(n_c)$	$\mathcal{O}(n_c \log n_c)$
Έλεγχος εάν τέμνονται τα $ch(b)$ και $ch(c)$	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$
Υπολογισμός κοινών εφαπτομένων $ch(b)$ και $ch(c)$	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$
Συνολικά	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_b \log n_b + n_c \log n_c)$

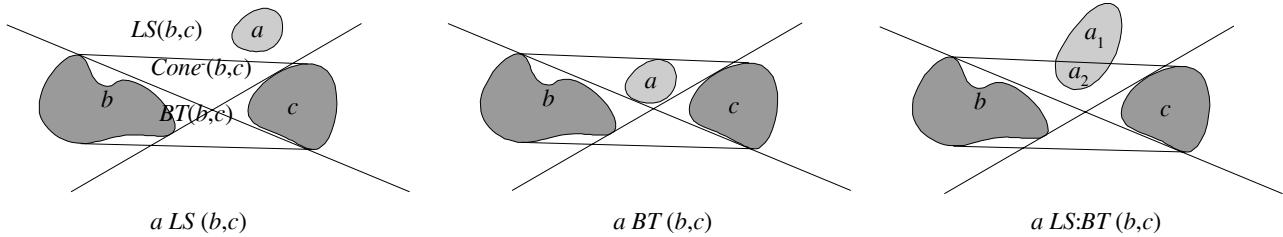
Πίνακας 4.1: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου Partition.

4.2.2 Προσδιορισμός των χωρίων στα οποία βρίσκεται η πρωτεύουσα περιοχή

Έχοντας διαμερίσει το επίπεδο στα πέντε χωρία, απομένει να υπολογίσουμε τη σχέση κατεύθυνσης μεταξύ της πρωτεύουσας περιοχής και των περιοχών αναφοράς. Όπως έχουμε πει, το πρόβλημα ανάγεται στον προσδιορισμό των χωρίων στα οποία υπάρχουν τμήματα της περιοχής αναφοράς.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε δύο αλγόριθμους που προσδιορίζουν τη σχέση κατεύθυνσης μεταξύ τριών περιοχών. Ο πρώτος, που παρουσιάζεται στη συνέχεια, έχει υλοποιηθεί σε υπολογιστή και είναι καλά μελετημένος. Δεύτερος αναπτύχθηκε κατά τη διάρκεια της συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας, και λόγω χρονικών περιορισμών δεν έχει υλοποιηθεί σε υπολογιστή, ενώ στην Ενότητα 4.3 δεν παρουσιάζονται οι αλγόριθμοι τις Υπολογιστικής Γεωμετρίας που χρησιμοποιήθηκαν στην υλοποίηση, όπως συμβαίνει με τον πρώτο αλγόριθμο, αλλά οι προτάσεις μας για την σωστή επιλογή κατάλληλων αλγορίθμων (Ενότητα 4.3.7).

Έστω τρεις περιοχές του REG^* , η πρωτεύουσα περιοχή a και οι περιοχές αναφοράς b και c . Συμβολίζουμε με S_a , S_b , S_c τα σύνολα των πολυγώνων που τις αναπαριστούν και με n_a , n_b , n_c τον αριθμό των κορυφών των πολυγώνων στα σύνολα S_a , S_b , S_c αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος Partition μας παρέχει το κυρτό κέλυφος της ένωσης των περιοχών αναφοράς b και c , $ch(b \cup c)$ και τις κοινές εσωτερικές εφαπτομένες τους T_{LR} και T_{RL} . Όπως έχουμε πει και στην Ενότητα 4.1, οι δύο κοινές εσωτερικές εφαπτομένες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερις κώνους, $Cone_{-\infty}(b, c)$, $Cone_{+\infty}(b, c)$, $Cone^+(b, c)$ και $Cone^-(b, c)$ (Σχήμα 4.1b). Ας θεωρήσουμε ότι η πρωτεύουσα περιοχή a βρίσκεται αποκλειστικά σε ένα μόνο κώνο, έστω τον $Cone^-(b, c)$. Τότε όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7 η σχέση κατεύθυνσης μεταξύ των τριών περιοχών μπορεί να είναι είτε $a LS(b, c)$, είτε $a BT(b, c)$, είτε $a LS:BT(b, c)$.



Σχήμα 4.7: Πρωτεύουσα περιοχή στον κώνο $Cone^-(b, c)$ και πιθανές σχέσεις κατεύθυνσης.

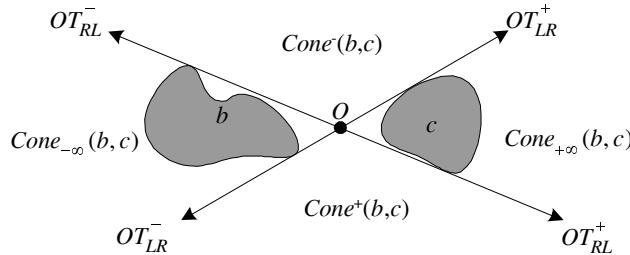
Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε πως εάν αποκλείσουμε το ενδεχόμενο, κάποιο τμήμα της πρωτεύουσας περιοχής να βρίσκεται εντός του κυρτού κελύφους $ch(b \cup c)$, τότε η σχέση μεταξύ των περιοχών είναι $a LS(b, c)$. Γενικεύοντας, μπορούμε να πούμε πως εάν η περιοχή a βρίσκεται εκτός του $ch(b \cup c)$, τότε γνωρίζοντας σε ποιο κώνο βρίσκεται μπορούμε να προσδιορίσουμε και τη σχέση κατεύθυνσης. Εάν τμήματα της περιοχής a βρίσκονται σε παραπάνω από ένα κώνο, τότε η σχέση κατεύθυνσης αποτελείται και από τα αντίστοιχα χωρία.

Με την παραπάνω παρατήρηση καταφέραμε να απλοποιήσουμε σημαντικά τους υπολογισμούς μας καθώς είναι πολύ πιο απλό να προσδιορίσουμε εάν κάποιο τμήμα της πρωτεύουσας περιοχής a βρίσκεται μέσα σε ένα κώνο, παρά μέσα σε ένα από τα πολύπλοκα χωρία $LS(b, c)$, $BF(b, c)$,

$RS(b, c)$ και $AF(b, c)$. Για να εκμεταλλευτούμε όμως αυτή την παρατήρηση, πρέπει να διαιρέσουμε την περιοχή αναφοράς σε δύο τμήματα: το τμήμα που βρίσκεται εντός του κελύφους $ch(b \cup c)$, το οποίο συμβολίζουμε με a_{in} , και το τμήμα εκτός, το οποίο συμβολίζουμε με a_{out} . Μάλιστα δεν μας ενδιαφέρει ποια ακριβώς είναι η περιοχή a_{in} , απλά ότι $a_{in} \neq \emptyset$, οπότε και συμπεραίνουμε ότι στη σχέση κατεύθυνσης υπάρχει το χωρίο BT .

Μας ενδιαφέρει ωστόσο η ακριβής μορφή της περιοχής a_{out} . Για να την υπολογίσουμε πρέπει να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμο φαλιδισμού (clipping algorithm). Αυτοί οι αλγόριθμοι «φαλιδίζουν» ένα πολύγωνο γύρω από ένα πολύγωνο αναφοράς και έχουν γενικά πολυπλοκότητα ανάλογη του γινομένου των κορυφών των δύο πολυγώνων (Ενότητα 4.3.3). Οπότε το βήμα της διαίρεσης έχει πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n_a(n_b + n_c))$, αφού έχουμε επισημάνει πως το κυρτό κέλυφος $ch(b \cup c)$ μπορεί να έχει μέχρι $n_b + n_c$ κορυφές και πρέπει να εφαρμοστεί σε κάθε πολύγωνο της περιοχής a , τα οποία έχουν συνολικά n_a κορυφές.

Μένει να προσδιορίσουμε σε ποιους από τους τέσσερις κώνους βρίσκεται το τμήμα της πρωτεύουσας περιοχής a_{out} . Αυτό μπορούμε να το καταφέρουμε με ένα μόνο πέρασμα των ακμών των πολυγώνων. Οι τέσσερις κώνοι συνορεύουν και οι εφαπτομένες T_{LR} και T_{RL} είναι τα σύνορά τους. Έστω O το σημείο τομής των T_{LR} και T_{RL} . Τότε θα συμβολίζουμε με OT_{LR}^+ το τμήμα τις ευθείες T_{LR} από το σημείο O προς την περιοχή c , ενώ με OT_{LR}^- το τμήμα από το σημείο O προς την περιοχή b . Ομοίως συμβολίζουμε τα τμήματα OT_{RL}^+ και OT_{RL}^- . Το τμήμα OT_{LR}^+ αποτελεί σύνορο μεταξύ των κώνων $Cone^-(b, c)$ και $Cone_{+\infty}(b, c)$ και ούτω καθεξής για τα υπόλοιπα τμήματα. Όλα τα τμήματα και οι τέσσερις κώνοι φαίνονται στο Σχήμα 4.8.



Σχήμα 4.8: Τα σύνορα των τεσσάρων κώνων.

Για κάθε πολύγωνο της αναπαράστασης της περιοχής a_{out} εφαρμόζουμε την εξής μέθοδο: Ελέγχουμε κάθε ακμή του πολυγώνου για τομή με τις ευθείες T_{LR} και T_{RL} . Το σημείο τομής με την ευθεία T_{LR} , εφόσον υπάρχει, θα βρίσκεται σε ένα από τα τμήματα OT_{LR}^+ , OT_{LR}^- . Εφόσον όμως το πολύγωνο τέμνεται με το σύνορο δύο κώνων, τμήματά του θα βρίσκονται και στους δύο. Ανάλογα με το τμήμα στο οποίο βρίσκεται το σημείο τομής, προσδιορίζουμε τους κώνους στους οποίους βρίσκεται το πολύγωνο και από αυτούς τα χωρία στη σχέση κατεύθυνσης. Ομοίως λειτουργούμε και για ενδεχόμενο σημείο τομής με την ευθεία T_{RL} . Η μέθοδος που περιγράψαμε έχει γραμμική πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n_a)$, εφόσον ο αριθμός των κορυφών της περιοχής a_{out} είναι ανάλογος των κορυφών της περιοχής a πριν τον φαλιδισμό.

Εάν καμία ακμή δεν τέμνεται με τις T_{LR} και T_{RL} , τότε το πολύγωνο βρίσκεται αποκλειστικά σε ένα μόνο κώνο τον οποίο μπορούμε να προσδιορίσουμε εύκολα ελέγχοντας τη θέση ενός μόνο

σημείου του πολυγώνου. Μπορούμε να βρούμε σε ποιο κώνο βρίσκεται ένα σημείο, ελέγχοντας εάν βρίσκεται δεξιά ή αριστερά των ευθειών T_{LR} και T_{RL} . Υπενθυμίζουμε πως οι δύο ευθείες είναι προσανατολισμένες από την περιοχή αναφοράς b προς την περιοχή αναφοράς c . Για παράδειγμα όλα τα σημεία του κώνου $Cone^-(b, c)$ και μόνο αυτά, βρίσκονται αριστερά των T_{LR} και T_{RL} (Σχήμα 4.1b). Ομοίως μπορούμε να βρούμε και τις σχέσει ανάμεσα στα σημεία των υπόλοιπων κώνων και των ευθειών T_{LR} και T_{RL} .

Ονομάζουμε τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε BC-DR-C1 (Billen-Clementini Direction Relation Computation) και τον καταγράφουμε στο Σχήμα 4.9. Στο Παράδειγμα 4.3 παρουσιάζουμε μία εφαρμογή του αλγορίθμου.

Αλγόριθμος BC-DR-C1

Εισοδος: Τρία σύνολα πολυγώνων S_a, S_b και S_c που αναπαριστούν την πρωτεύουσα περιοχή a και τις περιοχές αναφοράς b και c .

Έξοδος: Η σχέση κατεύθυνσης DR μεταξύ των περιοχών a, b, c .

Μέθοδος:

$DR := \emptyset;$

$(chbc, T_{LR}, T_{RL}) := \text{Partition}(S_b, S_c);$

Για κάθε πολύγωνο p στο σύνολο S_a

$(p_{out}, p_{in}) := \text{Clip}(p, chbc);$

Αν $p_{in} \neq \emptyset$ $DR := \text{Union}(DR, BT);$

$\text{IntersectionFound} := \text{FALSE};$

Για κάθε ακμή e του πολυγώνου p_{out}

$I_1 := \text{Intersect}(e, T_{LR});$

$I_2 := \text{Intersect}(e, T_{RL});$

Στην Περίπτωση που I_1 ή I_2 στο τμήμα

$OT_{LR}^+ : DR := \text{Union}(DR, LS, AF); \text{IntersectionFound} := \text{TRUE};$

$OT_{LR}^- : DR := \text{Union}(DR, RS, BF); \text{IntersectionFound} := \text{TRUE};$

$OT_{RL}^+ : DR := \text{Union}(DR, RS, AF); \text{IntersectionFound} := \text{TRUE};$

$OT_{RL}^- : DR := \text{Union}(DR, LS, BF); \text{IntersectionFound} := \text{TRUE};$

Τέλος Στην Περίπτωση που

Τέλος Για

Αν $\text{IntersectionFound} = \text{FALSE}$

Έστω ένα σημείο x του πολυγώνου p_{out} ;

Στην Περίπτωση που x

Αριστερά της T_{LR} και Αριστερά της T_{RL} : $DR := \text{Union}(DR, LS);$

Αριστερά της T_{LR} και Δεξιά της T_{RL} : $DR := \text{Union}(DR, BF);$

Δεξιά της T_{LR} και Αριστερά της T_{RL} : $DR := \text{Union}(DR, AF);$

Δεξιά της T_{LR} και Δεξιά της T_{RL} : $DR := \text{Union}(DR, RS);$

Τέλος Στην Περίπτωση που

Τέλος Αν

Τέλος Για

Επέστρεψε $DR;$

Σχήμα 4.9: Ο αλγόριθμος BC-DR-C1.

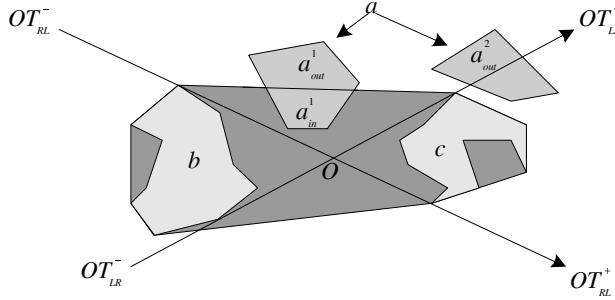
Παρατήρηση 4.2 Η πολυπλοκότητα των επιμέρους βημάτων και η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου BC-DR-C1 παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.2. Συμβολίζουμε με n_a , n_b και n_c τον

αριθμό των κορυφών στην αναπαράσταση με πολύγωνα S_a, S_b και S_c των περιοχών a, b και c .

Λειτουργία	Κόστος REG	Κόστος REG^*
Εφαρμογή αλγορίθμου Partition	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_b \log n_b + n_c \log n_c)$
Ψαλιδισμός της a γύρω από το $ch(b \cup c)$ και εύρεση της περιοχής a_{out}	$\mathcal{O}(n_a(n_b + n_c))$	$\mathcal{O}(n_a(n_b + n_c))$
Εύρεση σημείων τομής της a_{out} με τις κοινές εσωτερικές εφαπτομένες των b και c	$\mathcal{O}(n_a)$	$\mathcal{O}(n_a)$
Συνολικά	$\mathcal{O}(n_a(n_b + n_c))$	$\mathcal{O}(n_a(n_b + n_c))$

Πίνακας 4.2: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου BC-DR-C1.

Παράδειγμα 4.3 Ας θεωρήσουμε τις περιοχές του Σχήματος 4.10. Η περιοχή a αποτελείται από δύο πολύγωνα a^1 και a^2 . Ξεκινάμε με το πολύγωνο a^1 , το οποίο διαιρείται στα πολύγωνα a_{out}^1 και a_{in}^1 . Εφόσον το πολύγωνο a_{in}^1 υπάρχει, στη σχέση κατεύθυνσης θα συμπεριλαμβάνεται το χωρίο BT . Εφόσον καμία ακμή του πολυγώνου a_{out}^1 δεν τέμνεται με τις ευθείες T_{LR} και TRL , πρέπει να εντοπίσουμε σε ποιόν κάνο ανήκει. Εξετάζουμε ένα σημείο του (π.χ. μία κορυφή του) και διαπιστώνουμε ότι βρίσκεται αριστερά της ευθείας T_{LR} και αριστερά της TRL (υπενθυμίζουμε πως οι δύο ευθείες είναι προσανατολισμένες από την περιοχή b προς τη c). Επομένως στη σχέση θα συμπεριλαμβάνεται και το χωρίο LS . Το πολύγωνο a^2 διαιρείται στα a_{out}^2 και a_{in}^2 . Το πολύγωνο a_{in}^2 δεν υπάρχει ενώ $a_{out}^2 = a^2$. Το πολύγωνο a_{out}^2 τέμνεται με την ευθεία T_{LR} σε δύο σημεία, τα οποία βρίσκονται πάνω στο τμήμα OT_{LR}^+ . Επομένως τα χωρία LS και AF θα συμπεριλαμβάνονται στη σχέση κατεύθυνσης. Τελικά a $LS:AF:BT$ (b, c).



Σχήμα 4.10: Το σχήμα του Παραδείγματος 4.3.

Μπορούμε να επιταχύνουμε σημαντικά τον υπολογισμό των σχέσεων κατεύθυνσης διαιρώντας το πρόβλημά μας σε τέσσερα απλούστερα. Αναφέρουμε και πάλι τους συμβολισμούς που χρησιμοποιούμε.

Έστω τρεις περιοχές του REG^* , η πρωτεύουσα περιοχή a και οι περιοχές αναφοράς b και c . Συμβολίζουμε με S_a, S_b, S_c τα σύνολα των πολυγώνων που τις αναπαριστούν και με n_a, n_b, n_c τον αριθμό των κορυφών των πολυγώνων στα σύνολα S_a, S_b, S_c αντίστοιχα. Ο αλγόριθμος

Partition μας παρέχει το χυρτό κέλυφος της ένωσης των περιοχών αναφοράς b και c , $ch(b \cup c)$ και τις κοινές εσωτερικές εφαπτομένες τους T_{LR} και T_{RL} .

Όπως έχουμε πει και στην Ενότητα 4.1, οι δύο κοινές εσωτερικές εφαπτομένες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερις κώνους, $Cone_{-\infty}(b, c)$, $Cone_{+\infty}(b, c)$, $Cone^+(b, c)$ και $Cone^-(b, c)$ (Σχήμα 4.1b). Μπορούμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα σε κάθε κώνο ξεχωριστά. Διαιρούμε τις περιοχές a και $ch(b \cup c)$ σε τέσσερα τμήματα, ώστε κάθε τμήμα να βρίσκεται αποκλειστικά σε ένα μόνο κώνο. Συμβολίζουμε με a^- και $chbc^-$ τα τμήματα που βρίσκονται στον κώνο $Cone^-(b, c)$, a^+ , $chbc^+$ στον $Cone^+(b, c)$, $a_{-\infty}$, $chbc_{-\infty}$ στον $Cone_{-\infty}(b, c)$ και $a_{+\infty}$, $chbc_{+\infty}$ στον $Cone_{+\infty}(b, c)$. Η λειτουργία της διαίρεσης έχει γραμμική πολυπλοκότητα, $\mathcal{O}(n_a)$ για την περιοχή a και $\mathcal{O}(n_b + n_c)$ για το χυρτό κέλυφος (Ενότητα 4.3.7).

Κατά την παρουσίαση του αλγόριθμου BC-DR-C1 κάναμε την εξής παρατήρηση. Ας θεωρήσουμε ότι η πρωτεύουσα περιοχή a βρίσκεται αποκλειστικά σε ένα μόνο κώνο, έστω τον $Cone^-(b, c)$. Τότε, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7, η σχέση κατεύθυνσης μεταξύ των τριών περιοχών μπορεί να είναι είτε a LS (b, c), είτε a BT (b, c), είτε a $LS:BT$ (b, c). Επομένως κάθε ένα από τα τμήματα στα οποία διαιρέσαμε την a συνεισφέρει στη διαμόρφωση της σχέσης κατεύθυνσης με το χωρίο BT ή με το χωρίο το οποίο αντιστοιχεί ο κώνος στον οποίο βρίσκεται (στο παράδειγμά μας LS).

Για κάθε κώνο κάνουμε τα εξής. Εάν στον κώνο δεν υπάρχει τμήμα της περιοχής a , συνεχίζουμε στον επόμενο, καθώς από αυτόν δεν θα υπάρξει συνεισφορά στη διαμόρφωση της σχέσης κατεύθυνσης. Έστω τώρα ότι υπάρχει τμήμα της a σε κάποιο κώνο. Ας υποθέσουμε ότι ο κώνος αυτός είναι ο $Cone^-(b, c)$ και αντίστοιχα ενεργούμε και στους υπόλοιπους κώνους. Εάν τα σύνορα των περιοχών a^- και $chbc^-$ τέμνονται, τότε τμήμα της περιοχής a^- θα βρίσκεται εντός του χωρίου $BT(b, c)$ και τμήμα στο χωρίο $LS(b, c)$, οπότε και η σχέση κατεύθυνσης θα περιλαμβάνει τα χωρία BT και LS . Εάν τα σύνορα δεν τέμνονται, τότε είτε η περιοχή a^- βρίσκεται εντός της περιοχής $chbc^-$, οπότε και μέσα στο χωρίο $BT(b, c)$ και η συνεισφορά στη σχέση κατεύθυνσης είναι το χωρίο BT , είτε εκτός οπότε βρίσκεται στο χωρίο $LS(b, c)$ και συνεισφορά στη σχέση κατεύθυνσης είναι το χωρίο LS . Αυτή η λειτουργία επαναλαμβάνεται με παρόμοιο τρόπο σε όλους του κώνους για τους οποίους υπάρχει τμήμα της περιοχής a .

Ο έλεγχος κατά πόσο δύο απλά πολύγωνα τέμνονται απαιτεί $\mathcal{O}(n)$ βήματα, όπου n ο συνολικός αριθμός ακμών και των δύο πολυγώνων (Ενότητα 4.3.7). Μπορούμε να θεωρήσουμε τη χειρότερη περίπτωση ως εξής: Η περιοχή a να αποτελείται από ένα πολύγωνο το οποίο βρίσκεται σε ένα μόνο κώνο. Σε αυτό τον κώνο το τμήμα του χυρτού κελύφους να περιέχει περίπου τον ίδιο αριθμό ακμών με το αρχικό κέλυφος, δηλαδή $n_b + n_c$. Επομένως συνολικά έχουμε $n_a + n_b + n_c$ ακμές και πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$.

Εφόσον δύο πολύγωνα δεν τέμνονται, τότε ή θα έχουν ξένα εσωτερικά ή το ένα θα βρίσκεται μέσα στο άλλο. Οπότε, με την προϋπόθεση ότι δεν τέμνονται, μπορούμε να δούμε εάν ένα πολύγωνο βρίσκεται μέσα σε ένα άλλο, ελέγχοντας απλά κατά πόσο ένα σημείο του βρίσκεται μέσα στο άλλο πολύγωνο. Ο έλεγχος αυτός έχει γραμμική πολυπλοκότητα σε σχέση με τον αριθμό των κορυφών του πολυγώνου (Ενότητα 4.3.5). Μάλιστα, εάν το πολύγωνο είναι χυρτό η πολυπλοκότητα γίνεται λογαριθμική. Στην περίπτωσή μας τα τμήματα του χυρτού κελύφους είναι

επίσης κυρτά πολύγωνα, οπότε ο έλεγχος κατά πόσο ένα πολύγωνο βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τμήματος του κυρτού κελύφους είναι από τα λιγότερα δαπανηρά τμήματα του αλγορίθμου.

Ονομάζουμε τον αλγόριθμο που παρουσιάσαμε BC-DR-C2 (Billen-Clementini Direction Relation Computation) και τον καταγράφουμε στο Σχήμα 4.11. Στο Παράδειγμα 4.4 παρουσιάζουμε μία εφαρμογή του αλγορίθμου.

Αλγόριθμος BC-DR-C2

Είσοδος: Τρία σύνολα πολυγώνων S_a, S_b και S_c που αναπαριστούν την πρωτεύουσα περιοχή a και τις περιοχές αναφοράς b και c .

Έξοδος: Η σχέση κατεύθυνσης DR μεταξύ των περιοχών a, b, c .

Μέθοδος:

$DR := \emptyset;$

$(chbc, T_{LR}, T_{RL}) := \text{Partition}(S_b, S_c);$

$(S_{a-}, S_{a+}, S_{a-\infty}, S_{a+\infty}) := \text{Divide}(S_a, T_{LR}, T_{RL});$

$(chbc^-, chbc^+, chbc_{-\infty}, chbc_{+\infty}) := \text{Divide}(chbc, T_{LR}, T_{RL});$

Για κάθε πολύγωνο p του συνόλου S_a

Αν $\text{Intersect}(p, chbc^-)$ $DR := \text{Union}(DR, LS, BT);$

Αλλιώς Αν (p Inside $chbc^-$) $DR := \text{Union}(DR, BT);$

Αλλιώς $DR := \text{Union}(DR, LS);$

Τέλος Για

Για κάθε πολύγωνο p του συνόλου S_{a+}

Αν $\text{Intersect}(p, chbc^+)$ $DR := \text{Union}(DR, RS, BT);$

Αλλιώς Αν (p Inside $chbc^+$) $DR := \text{Union}(DR, BT);$

Αλλιώς $DR := \text{Union}(DR, RS);$

Τέλος Για

Για κάθε πολύγωνο p του συνόλου $S_{a-\infty}$

Αν $\text{Intersect}(p, chbc_{-\infty})$ $DR := \text{Union}(DR, BF, BT);$

Αλλιώς Αν (p Inside $chbc_{-\infty}$) $DR := \text{Union}(DR, BT);$

Αλλιώς $DR := \text{Union}(DR, BF);$

Τέλος Για

Για κάθε πολύγωνο p του συνόλου $S_{a+\infty}$

Αν $\text{Intersect}(p, chbc_{+\infty})$ $DR := \text{Union}(DR, AF, BT);$

Αλλιώς Αν (p Inside $chbc_{+\infty}$) $DR := \text{Union}(DR, BT);$

Αλλιώς $DR := \text{Union}(DR, AF);$

Τέλος Για

Επέστρεψε $DR;$

Σχήμα 4.11: Ο αλγόριθμος BC-DR-C2.

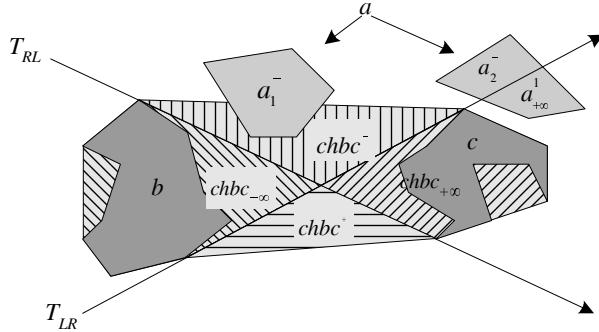
Παρατήρηση 4.3 Η πολυπλοκότητα των επιμέρους βημάτων και η συνολική πολυπλοκότητα του αλγορίθμου BC-DR-C2 παρουσιάζεται στον Πίνακα 4.3. Συμβολίζουμε με n_a , n_b και n_c τον αριθμό των κορυφών στην αναπαράσταση με πολύγωνα S_a , S_b και S_c των περιοχών a , b και c .

Παράδειγμα 4.4 Ας θεωρήσουμε τις περιοχές του Σχήματος 4.12. Το κυρτό κέλυφος διαιρείται από τις κοινές εσωτερικές εφαπτομένες των περιοχών b και c στα πολύγωνα $chbc^-$, $chbc^+$, $chbc_{-\infty}$, $chbc_{+\infty}$ ενώ η περιοχή a , που αποτελείται από δύο πολύγωνα a_1 , a_2 , διαιρείται σε δύο σύνολα

Λειτουργία	Κόστος REG	Κόστος REG*
Εφαρμογή αλγορίθμου Partition	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_b \log n_b + n_c \log n_c)$
Χωρισμός της a σε τέσσερα τμήματα a^- , a^+ , $a_{-\infty}$ και $a_{+\infty}$	$\mathcal{O}(n_a)$	$\mathcal{O}(n_a)$
Χωρισμός της $ch(b \cup c)$ σε τέσσερα τμήματα $ch(b \cup c)^-$, $ch(b \cup c)^+$, $ch(b \cup c)_{-\infty}$ και $ch(b \cup c)_{+\infty}$	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_b + n_c)$
'Ελεγχος εάν τέμνονται τα a^- και $ch(b \cup c)^-$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$
'Ελεγχος εάν η a^- περικλείεται από την $ch(b \cup c)^-$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$
'Ελεγχος εάν τέμνονται οι a^+ και $ch(b \cup c)^+$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$
'Ελεγχος εάν η a^+ περικλείεται από την $ch(b \cup c)^+$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$
'Ελεγχος εάν τέμνονται οι $a_{-\infty}$ και $ch(b \cup c)_{-\infty}$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$
'Ελεγχος εάν η $a_{-\infty}$ περικλείεται από την $ch(b \cup c)_{-\infty}$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$
'Ελεγχος εάν τέμνονται οι $a_{+\infty}$ και $ch(b \cup c)_{+\infty}$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$
'Ελεγχος εάν η $a_{+\infty}$ περικλείεται από την $ch(b \cup c)_{+\infty}$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$	$\mathcal{O}(\log(n_b + n_c))$
Συνολικά	$\mathcal{O}(n_a + n_b + n_c)$	$\mathcal{O}(n_a + n_b \log n_b + n_c \log n_c)$

Πίνακας 4.3: Πολυπλοκότητα του αλγορίθμου BC-DR-C2.

πολυγώνων $S_{a^-} = \{a_1^-, a_2^-\}$ και $S_{a_{+\infty}} = \{a_{+\infty}^2\}$. Τα σύνολα S_{a^+} και $S_{a_{-\infty}}$ είναι κενά. Αρχίζουμε με το σύνολο S_{a^-} και το πολύγωνο a_1^- , το οποίο τέμνεται με το πολύγωνο $chbc^-$. Οπότε στη σχέση κατεύθυνσης συμπεριλαμβάνονται τα χωρία LS και BT . Το πολύγωνο a_2^- δεν τέμνεται με το πολύγωνο $chbc^-$ και βρίσκεται εκτός του, οπότε στη σχέση κατεύθυνσης συμπεριλαμβάνεται το χωρίο LS (το οποίο έχει ήδη προστεθεί). Το πολύγωνο $a_{+\infty}^2$ δεν τέμνεται με το πολύγωνο $chbc_{+\infty}$ και βρίσκεται εκτός του, οπότε στη σχέση κατεύθυνσης συμπεριλαμβάνεται το χωρίο AF . Τελικά ο αλγόριθμος υπολογίζει a $LS:AF:BT$ (b, c).



Σχήμα 4.12: Το σχήμα του Παραδείγματος 4.4.

4.3 Υλοποίηση των αλγορίθμων

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε όσους αλγόριθμους της Υπολογιστικής Γεωμετρίας χρησιμοποιήσαμε στην υλοποίηση του αλγορίθμου BC-DR-C1 (Σχήμα 4.9) και συζητάμε τους λόγους που μας οδήγησαν στην επιλογή τους. Όσον αφορά τον αλγόριθμο BC-DR-C2, όπως

έχουμε πει, δεν παρουσιάζουμε τους αλγορίθμους της Υπολογιστικής Γεωμετρίας που χρησιμοποιήσαμε, καθώς ο αλγόριθμος δεν υλοποιήθηκε, αλλά τις προτάσεις μας για τη σωστή επιλογή τους.

4.3.1 Κυρτό κέλυφος

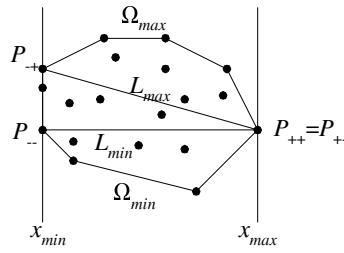
Ο υπολογισμός του κυρτού κελύφους ενός συνόλου σημείων είναι το πρώτο πρόβλημα που μελετήθηκε στην Υπολογιστική Γεωμετρία. Ως εκ τούτου υπάρχει διαθέσιμη μία σημαντική ποικιλία αλγορίθμων που επιλύουν το πρόβλημα τόσο στην γενική, όσο και σε ειδικές περιπτώσεις, σε δύο ή περισσότερες διαστάσεις.

Για τη γενική περίπτωση στις δύο διαστάσεις, όπου η είσοδος είναι ένα σύνολο σημείων, έχει αποδειχτεί πως το κάτω φράγμα της πολυπλοκότητας είναι $\Omega(n \log h)$, όπου n είναι ο αριθμός των σημείων στην είσοδο και h ο αριθμός των κορυφών του κυρτού κελύφους στην έξοδο του αλγορίθμου [52]. Ένας βέλτιστος αλγόριθμος έχει βρεθεί από τους Kirkpatrick και Seidel [40], αλλά όλοι οι εύκολα κατανοητοί και υλοποιήσιμοι αλγόριθμοι έχουν πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n \log n)$. Μερικοί τέτοιοι αλγόριθμοι είναι ο Graham's Scan [32], ο Andrew's Monotone Chain [5], ο «διαιρεί και βασίλευε» αλγόριθμος των Preparata και Hong [57] και άλλοι. Να σημειώσουμε πως στην περίπτωση που αναζητούμε το κυρτό κέλυφος ενός απλού πολυγώνου υπάρχουν βέλτιστοι $\mathcal{O}(n)$ αλγόριθμοι, με γνωστότερο αυτόν του Melkman [49]. Ένας τέτοιος αλγόριθμος δεν είναι κατάλληλος στην περίπτωσή μας, καθώς οι περιοχές των οποίων το κυρτό κέλυφος επιθυμούμε να υπολογίσουμε, μπορεί να αποτελούνται από πολλά πολύγωνα, τα οποία αναγκαστικά αντικεντρώπιζουμε σαν σύνολο σημείων. Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε είναι ο Andrew's Monotone Chain. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος επιλέχθηκε διότι είναι αρκετά απλός στην λειτουργία του, αλλά και στην υλοποίησή του.

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου είναι η ταξινόμηση του συνόλου των σημείων S κατά αύξουσα τιμή της συντεταγμένης x και εφόσον κάποια σημεία έχουν ίδια τιμή στην x συντεταγμένη, κατά αύξουσα τιμή της συντεταγμένης y . Έστω x_{min} και x_{max} η μικρότερη και μεγαλύτερη τιμή της x συντεταγμένης των σημείων. Τότε εύκολα στην διατεταγμένη λίστα των σημείων μπορούμε να εντοπίσουμε τέσσερα σημεία με τις εξής ιδιότητες: Το σημείο P_{--} , με $P_{--}.x = x_{min}$ και την μικρότερη y συντεταγμένη από όσα σημεία έχουν τη συντεταγμένη $x = x_{min}$. Αντίστοιχα το σημείο P_{+-} , με $P_{+-}.x = x_{min}$ και την μεγαλύτερη y συντεταγμένη. Να σημειώσουμε πως μπορεί να ισχύει $P_{--} = P_{+-}$. Ομοίως ορίζουμε τα σημεία P_{+-} και P_{++} , με τη συντεταγμένη $x = x_{max}$. Έστω L_{min} το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων P_{--} και P_{+-} και L_{max} το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων P_{+-} και P_{++} .

Ο αλγόριθμος κατασκευάζει αρχικά την κάτω κυρτή αλυσίδα κορυφών Ω_{min} χρησιμοποιώντας τα σημεία που βρίσκονται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα L_{min} και στη συνέχεια την άνω κυρτή αλυσίδα κορυφών Ω_{max} , χρησιμοποιώντας αντίστοιχα τα σημεία που βρίσκονται πάνω από το L_{max} . Το κυρτό κέλυφος προκύπτει από την ένωση των αλυσίδων Ω_{min} και Ω_{max} (Σχήμα 4.13).

Η κατασκευή της κάθε αλυσίδας γίνεται με τη χρήση στοίβας. Για παράδειγμα για την κάτω αλυσίδα ξεκινώντας από το σημείο P_{--} , επεξεργαζόμαστε με τη σειρά τους τα διατεταγμένα σημεία του συνόλου κορυφών S . Το επόμενο σημείο στη λίστα συγχρίνεται με τα δύο κορ-



Σχήμα 4.13: Λειτουργία του αλγορίθμου Andrew's Monotone Chain.

φαία σημεία της στοίβας. Εάν βρίσκεται αριστερά τους, προχωρούμε στο επόμενο σημείο. Εάν βρίσκεται δεξιά τους, το σημείο αποτελεί νέο μέλος της αλυσίδας, ενώ ένα τουλάχιστον από τα προηγούμενα σημεία της αλυσίδας, που βρίσκονται στην κορυφή της στοίβας πρέπει να αφαιρεθούν. Αφαιρούμε ένα-ένα σημείο από την κορυφή της στοίβας μέχρι το προς εισαγωγή σημείο να βρίσκεται αριστερά των δύο κορυφαίων της στοίβας. Με αντίστοιχο τρόπο κατασκευάζουμε και την κάτω αλυσίδα.

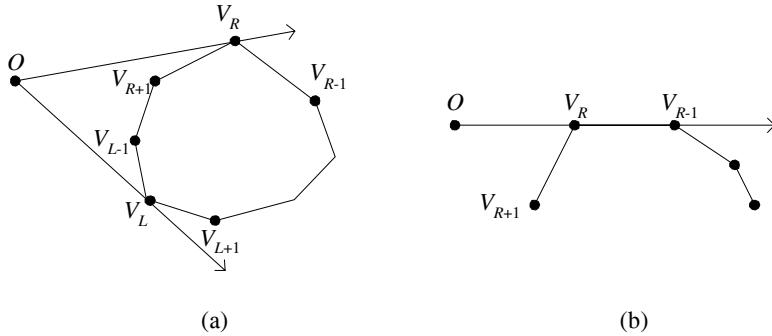
4.3.2 Κοινές εφαπτομένες πολυγώνων

Ο υπολογισμός των κοινών εφαπτομένων ενός ζεύγους τυχαίων πολυγώνων είναι απλή αλλά ακριβή υπόθεση. Ωστόσο όταν τα πολύγωνα είναι κυρτά, η επιτάχυνση, ακόμα και με χρήση «αργών» αλγορίθμων, είναι τέτοια ώστε ακόμα και για μικρά πολύγωνα να συμφέρει η εύρεση του κυρτού τους κελύφους πρώτα και έπειτα η εφαρμογή ενός κατάλληλου αλγορίθμου, από τον απευθείας υπολογισμό των εφαπτομένων.

Για τυχαία πολύγωνα ο υπολογισμός των κοινών εφαπτομένων είναι μονόδρομος: παίρνοντας ένα σημείο από κάθε πολύγωνο, ελέγχουμε όλα τα δυνατά ζεύγη σημείων, για το εάν γίνεται να διέρχεται από αυτά η εφαπτομένη που μας ενδιαφέρει. Η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(nm(n+m))$. Ωστόσο, όπως έχουμε αναφέρει, για κυρτά πολύγωνα υπάρχουν μερικοί γρήγοροι αλγόριθμοι. Ο πρώτος τέτοιος αλγόριθμος επινοήθηκε από τους Preparata και Hong [57] σαν μέρος ενός αλγόριθμου υπολογισμού κυρτού κελύφους που ανέπτυξαν. Ωστόσο απαιτεί την γνώση μίας ευθείας που διαχωρίζει τα δύο πολύγωνα, η εύρεση της οποίας είναι πρόβλημα γραμμικής πολυπλοκότητας. Έναν εξαιρετικά γρήγορο και έξυπνο αλγόριθμο επινόησαν οι Kirkpatrick και Snoeyink [42] πολυπλοκότητας $\mathcal{O}(\log(m+n))$, που ωστόσο υπολογίζει μόνο τις εξωτερικές εφαπτομένες. Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε πραγματοποιεί εμφωλευμένη δυαδική αναζήτηση στα πολύγωνα, δεν απαιτεί διαχωριστική ευθεία ανάμεσά τους, υπολογίζει εσωτερικές και εξωτερικές εφαπτομένες και έχει πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(\log(n) \log(m))$.

Ας δούμε αρχικά πως εντοπίζουμε τις εφαπτομένες από ένα σημείο προς ένα κυρτό πολύγωνο. Μία εφαπτομένη από ένα σημείο προς ένα οποιοδήποτε πολύγωνο είναι μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο και ακουμπά στο σύνορο του πολυγώνου, χωρίς όμως να το διαπερνά. Το πολύγωνο βρίσκεται εξ ολοκλήρου στη μία πλευρά του επιπέδου όπως το χωρίζει η ευθεία. Επειδή μπορεί να βρίσκεται σε μία από τις δύο πλευρές, έχουμε δύο εφαπτομένες από σημείο προς πολύγωνο. Θα ονομάζουμε την εφαπτομένη αριστερή όταν το πολύγωνο θα βρίσκεται αριστερά της ευθείας,

έχοντας κατεύθυνση από το σημείο προς το πολύγωνο, και δεξιά όταν βρίσκεται δεξιά. Όταν το πολύγωνο είναι κυρτό, μία κορυφή του είναι σημείο επαφής όταν οι δύο γειτονικές της κορυφές βρίσκονται από την ίδια πλευρά της ευθείας από το εξωτερικό σημείο προς αυτή. Στο Σχήμα 4.14a φαίνεται η ιδιότητα των σημείων επαφής ενός κυρτού πολυγώνου, ενώ στο Σχήμα 4.14b μία οριακή περίπτωση η οποία πρέπει να λαμβάνεται υπόψη και να αντιμετωπίζεται κατάλληλα.

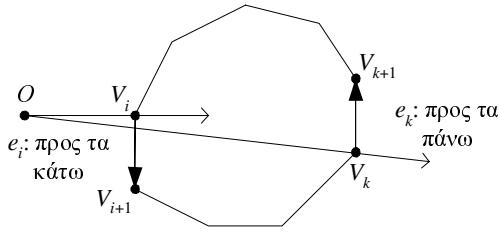


Σχήμα 4.14: Εφαπτομένες από σημείο προς κυρτό πολύγωνο.

Βάση του αλγορίθμου μας είναι ο αλγόριθμος δυαδικής αναζήτησης εφαπτομένης από σημείο προς κυρτό πολύγωνο. Αυτός με τη σειρά του είναι μία τροποποιημένη εκδοχή του αλγορίθμου του O'Rourke [52] για τον εντοπισμό των ακραίων κορυφών ενός κυρτού πολυγώνου. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος περιγράφεται αναλυτικά στην Ενότητα 4.3.6, παραθέτουμε ωστόσο και εδώ λίγα λόγια για τη λειτουργία του: Με τον αλγόριθμο αυτό αναζητούμε το σημείο με την μεγαλύτερη (ή μικρότερη) γυραία συντεταγμένη σε μία αλυσίδα διαδοχικών κορυφών ενός κυρτού πολυγώνου. Ελέγχοντας την κατεύθυνση (προς τα «πάνω» ή προς τα «κάτω») προς την οποία κινούνται η αρχική και η μεσαία κορυφή της αλυσίδας, ο O'Rourke έχει διατυπώσει έξι κανόνες που καθορίζουν σε ποιο μισό της αλυσίδας πρέπει να συνεχίσουμε την αναζήτηση. Ο αλγόριθμος πραγματοποιεί δηλαδή δυαδική αναζήτηση πάνω στις κορυφές του πολυγώνου, για αυτό και η πολυπλοκότητά του είναι $\mathcal{O}(\log n)$.

Πραγματοποιώντας μία μικρή αλλαγή μπορούμε να τροποποιήσουμε τον αλγόριθμο ώστε αντί για ακραίες κορυφές να εντοπίζει με την ίδια τεχνική εφαπτομένες από σημείο προς πολύγωνο. Απλά χρειάζεται να αλλάξουμε τον ορισμό της «ακραίας» κορυφής και της κίνησης μίας κορυφής προς τα «πάνω» ή προς τα «κάτω». Ενώ στην κλασική εκδοχή του αλγορίθμου υπάρχει μία απόλυτη διεύθυνση, αυτή του άξονα y , εδώ όλες οι κατευθύνσεις είναι σχετικές ως προς το εξωτερικό σημείο. Η «ακραία» κορυφή που αναζητούμε δεν είναι αυτή με τη μικρότερη ή μεγαλύτερη τιμή της συντεταγμένης y , αλλά εκείνη της οποίας οι γειτονικές κορυφές βρίσκονται στην ίδια πλευρά της ευθείας από το σημείο προς αυτή. Αντίστοιχα μία κορυφή κινείται προς τα πάνω (αντίστοιχα προς τα κάτω) όχι όταν η επόμενη της έχει μεγαλύτερη γυραία συντεταγμένη από αυτήν, αλλά όταν η επόμενη της βρίσκεται αριστερά (αντίστοιχα δεξιά) της ευθείας από το εξωτερικό σημείο προς αυτή (Σχήμα 4.15).

Έχοντας σχεδιάσει τον αλγόριθμο που πραγματοποιεί δυαδική αναζήτηση ανάμεσα στις κο-



Σχήμα 4.15: Μετατροπή του αλγορίθμου αναζήτησης ακραίας κορυφής σε αναζήτησης εφαπτομένων.

ρυφές του πολυγώνου για την εύρεση εφαπτομένης από σημείο προς το πολύγωνο, μένει να συγχρονίσουμε δύο τέτοιες αναζητήσεις ώστε να προχωρούν ταυτόχρονα πάνω στα δύο πολύγωνα των οποίων επιθυμούμε να εντοπίσουμε τις κοινές εφαπτομένες. Η λύση δεν είναι προφανής και είναι η εμφώλευση δύο τέτοιων αναζητήσεων. Ξεκινώντας από την μεσαία κορυφή, της αλυσιδας κορυφών, του ενός πολυγώνου, βρίσκουμε την κορυφή της εφαπτομένης στο άλλο πολύγωνο. Από την κορυφή που υπολογίσαμε, εφαρμόζουμε τους κανόνες για να μειώσουμε την αλυσιδα στο πρώτο πολύγωνο και επαναλαμβάνουμε μέχρι οι δύο κορυφές που θα εντοπίσουμε να σχηματίζουν την κοινή εφαπτομένη που αναζητούμε. Για μία μαθηματική απόδειξη της ορθότητας αυτής της διαδικασίας ο αναγνώστης παραπέμπεται στην εργασία των Kirkpatrick και Snoeyink [41].

4.3.3 Ψαλιδισμός πολυγώνων

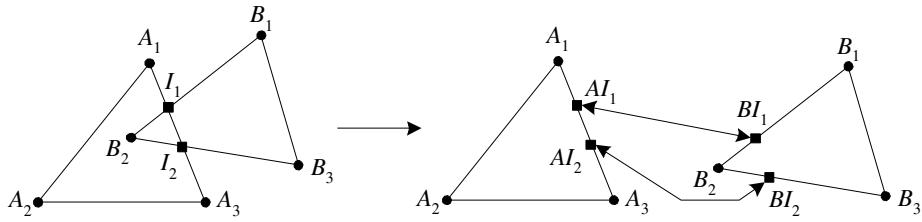
Λόγω της σημασίας του ψαλιδισμού πολυγώνων στις μοντέρνες εφαρμογές γραφικών, έχει αναπτυχθεί για αυτό το σκοπό μία σημαντική ποικιλία αλγορίθμων. Ωστόσο οι περισσότεροι από αυτούς επιλύουν το πρόβλημα για συγκεκριμένες κατηγορίες πολυγώνων ή επειδή προορίζονται για εφαρμογές απεικόνισης κάνουν παραδοχές που δεν μπορούν να γίνουν σε ένα γενικό πρόβλημα.

Ιδιαίτερα γνωστός είναι ο αλγόριθμος των Sutherland και Hodgman [68], ο οποίος ψαλιδίζει ένα οποιοδήποτε πολύγωνο χρησιμοποιώντας ένα κυρτό πολύγωνο αναφοράς. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος εκ πρώτης όψεως φαίνεται ιδιαίτερος για την περίπτωσή μας, ωστόσο μπορεί να υπολογίσει μόνο την τομή των δύο πολυγώνων και όχι τη διαφορά που μας ενδιαφέρει. Μερικοί γενικοί αλγόριθμοι οφείλονται στους Weiler και Atherton [75], στον Vatti [72] και στους Greiner και Hormann [33]. Ενδεικτικά αναφέρουμε πως ιδιαίτερα δημοφιλής εφαρμογή είναι ο ψαλιδισμός πολυγώνων χρησιμοποιώντας ένα ορθογώνιο ως πολύγωνο αναφοράς. Σημαντικότερος εκπρόσωπος αυτής της κατηγορίας αλγορίθμων είναι ο αλγόριθμος των Liang και Barsky [44].

Ο αλγόριθμος που υλοποιήθηκε είναι αυτός των Greiner και Hormann. Ανήκει στην κατηγορία των γενικών αλγορίθμων ψαλιδισμού, είναι όμως σημαντικά απλούστερος και, όπως ισχυρίζονται και οι δημιουργοί του, ταχύτερος από τους υπόλοιπους της κατηγορίας. Η λειτουργία του χωρίζεται σε τρεις φάσεις τις οποίες θα παρουσιάσουμε περιληπτικά.

Σε πρώτη φάση ο αλγόριθμος εντοπίζει όλα τα σημεία τομής των δύο πολυγώνων. Αυτό το βήμα καθορίζει και την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου. Εφόσον ελέγχονται όλα τα ζεύγη

ακμών των δύο πολυγώνων, η πολυπλοκότητα είναι τετραγωνική $\mathcal{O}(mn)$. Κάθε σημείο τομής που εντοπίζεται εισάγεται στη λίστα κορυφών και των δύο πολυγώνων, στην κατάλληλη θέση, ανάμεσα στις κορυφές των ακμών που τέμνονται. Οι δύο νέες κορυφές, αν και ανήκουν σε διαφορετικά πολύγωνα, «συνδέονται» μεταξύ τους. Με τον όρο σύνδεση εννοούμε την εξασφάλιση ενός τρόπου να γνωρίζουμε τη θέση που καταλαμβάνει το σημείο τομής στις λίστες κορυφών των δύο πολυγώνων. Για παράδειγμα, οι συγγραφείς του αλγορίθμου προτείνουν την αναπαράσταση των πολυγώνων σαν διπλά συνδεδεμένες λίστες κορυφών. Κάθε κόμβος-κορυφή περιέχει και ένα δείκτη προς έναν άλλο κόμβο-κορυφή, για την εξασφάλιση της σύνδεσης (Σχήμα 4.16).



Σχήμα 4.16: Ο αλγόριθμος των Greiner-Hormann.

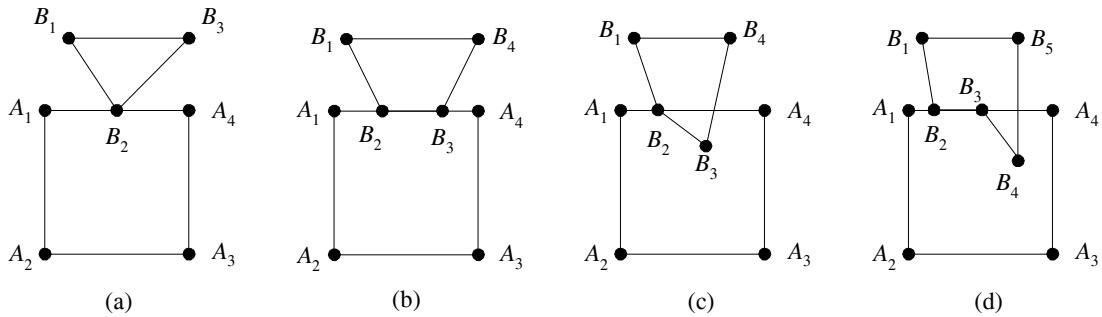
Στο επόμενο βήμα ο αλγόριθμος κατηγοριοποιεί τα σημεία τομής των πολυγώνων ως «σημεία εξόδου» ή «σημεία εξόδου». Διαγράφοντας το σύνορο κάθε πολυγώνου, μία τεμνόμενη ακμή του θα εισέρχεται στο άλλο πολύγωνο ή θα εξέρχεται και αναλόγως χαρακτηρίζεται και το αντίστοιχο σημείο τομής. Η διαδικασία πραγματοποιείται ξεχωριστά και για τα δύο πολύγωνα και πραγματοποιείται ως εξής: Ελέγχεται κατά πόσο η αρχική κορυφή του πολυγώνου βρίσκεται εντός ή εκτός του άλλου πολυγώνου. Εάν βρίσκεται εντός, το πρώτο σημείο τομής που συναντάμε διαγράφοντας της λίστα κορυφών του πολυγώνου είναι σημείο εξόδου, το επόμενο σημείο εξόδου κοκ. Αναλόγως χαρακτηρίζουμε τα σημεία τομής εάν το αρχικό σημείο βρίσκεται εκτός του άλλου πολυγώνου. Ο έλεγχος εάν ένα σημείο βρίσκεται εντός ενός πολυγώνου δεν είναι αυτονόητη διαδικασία. Μάλιστα υπάρχουν αρκετοί αλγόριθμοι που πραγματοποιούν αυτό τον έλεγχο. Αυτός που χρησιμοποιήθηκε περιγράφεται στην Ενότητα 4.3.5.

Τα δύο πρώτα βήματα του αλγορίθμου είναι προπαρασκευαστικά, ενώ ο ψαλιδισμός πραγματοποιείται στην τρίτη και τελευταία φάση του αλγορίθμου. Η διαδικασία διαφοροποιείται ελαφρά ανάλογα με το τμήμα του υποκείμενου πολυγώνου που θέλουμε να διατηρήσουμε. Στην περίπτωσή μας, όπου θέλουμε τη διαφορά του υποκείμενου πολυγώνου με το πολύγωνο αναφοράς προχωρούμε ως εξής: Βρίσκουμε το πρώτο σημείο τομής «εξόδου» στη λίστα κορυφών του υποκείμενου πολυγώνου και τη διασχίζουμε, προσθέτοντας όσα σημεία συναντάμε στο νέο πολύγωνο-αποτέλεσμα, μέχρι να συναντήσουμε ένα σημείο τομής «εισόδου». Ακολουθούμε το «σύνδεσμο» αυτού του σημείου προς το πολύγωνο αναφοράς και διασχίζουμε την αλυσίδα του με αντίστροφη φορά, προσθέτοντας τις κορυφές στο νέο πολύγωνο, μέχρι το επόμενο σημείο τομής. Ακολουθούμε το σύνδεσμο προς το υποκείμενο πολύγωνο και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να συναντήσουμε το σημείο από όπου ξεκινήσαμε τη διαδικασία, οπότε κλείνουμε το πολύγωνο-αποτέλεσμα. Το αποτέλεσμα μπορεί να αποτελείται από πολλά πολύγωνα, οπότε

επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να επεξεργαστούμε όλα τα σημεία τομής στην αλυσίδα του υποκείμενου πολυγώνου.

Για παράδειγμα στο Σχήμα 4.16 προκειμένου να φαλιδίσουμε το πολύγωνο $B = (B_1 B_2 B_3)$ γύρω από το $A = (A_1 A_2 A_3)$ θα ακολουθούσαμε την εξής πορεία: Το πρώτο σημείο εξόδου του πολυγώνου B είναι το BI_2 το οποίο προσθέτουμε στη λίστα κορυφών του φαλιδισμένου πολυγώνου. Κινούμενοι πάνω στο πολύγωνο B , προσθέτουμε επίσης τις κορυφές B_3 , B_1 και το σημείο εισόδου BI_1 . Από εκεί μεταφερόμαστε στο πολύγωνο A και το σημείο τομής AI_1 και ακολουθώντας αντίστροφη πορεία φτάνουμε αμέσως στο σημείο τομής AI_2 . Μεταφερόμενοι στο πολύγωνο B διαπιστώνουμε ότι φτάσαμε και πάλι στο σημείο από όπου ξεκινήσαμε, οπότε έχουμε βρει το φαλιδισμένο πολύγωνο $(BI_2 B_3 B_1 BI_1)$.

Ένα σημαντικό κομμάτι του αλγορίθμου μας, αλλά και κάθε αλγορίθμου φαλιδισμού, είναι η διαχείριση των οριακών περιπτώσεων κατά τον υπολογισμό των σημείων τομής των δύο πολυγώνων. Οριακές περιπτώσεις εμφανίζονται όταν το σημείο τομής δύο ευθύγραμμων τμημάτων είναι και άκρο κάποιου τμήματος ή όταν τα δύο ευθύγραμμα τμήματα αλληλοκαλύπτονται. Τότε δυσκολευόμαστε να κατατάξουμε αυτές τα συμβάντα ως τομή ή όχι. Για παράδειγμα θεωρούμε τα τέσσερα ζεύγη πολυγώνων A και B στο Σχήμα 4.17. Στο Σχήμα 4.17a η κορυφή B_2 δεν αποτελεί σημείο τομής, όπως δεν αποτελούν σημεία τομής οι B_2 και B_3 στο Σχήμα 4.17b. Αντίθετα στο Σχήμα 4.17c η κορυφή B_2 αποτελεί και σημείο τομής, ενώ σημείο τομής πρέπει να θεωρηθεί και μία από τις κορυφές B_2 και B_3 στο Σχήμα 4.17d.

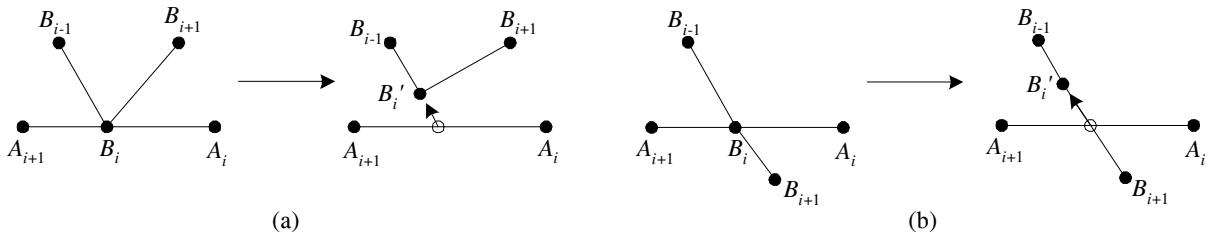


Σχήμα 4.17: Οριακές περιπτώσεις σημείων τομής.

Ένας δημοφιλής τρόπος για να αντιμετωπιστούν αυτές οι περιπτώσεις είναι με μετατόπιση σημείου (point perturbation). Ένα σημείο μετατοπίζεται ελαφρώς ώστε να μπορεί μεν να αποφασιστεί εάν υπάρχει τομή ή όχι, αλλά η μεταβολή να είναι κάτω από την ακρίβεια του προβλήματος και η μετατόπιση αυτή να μην είναι «օρατή» στο αποτέλεσμα. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι η χρήση αυτής της μεθόδου στα γραφικά, όπου εφόσον η μετατόπιση δεν ξεπερνά το ένα εικονοστοιχείο (pixel) δεν γίνεται ορατή στην οθόνη του υπολογιστή (Σχήμα 4.18).

4.3.4 Τομή κυρτών πολυγώνων

Αν και οι αλγόριθμοι φαλιδισμού, που περιγράφουμε αναλυτικότερα στην Ενότητα 4.3.3, μπορούν να μας υπολογίσουν την τομή δύο πολυγώνων, κυρτών ή μη, πολύ συχνά μας αρκεί



Σχήμα 4.18: Μετατόπιση σημείου.

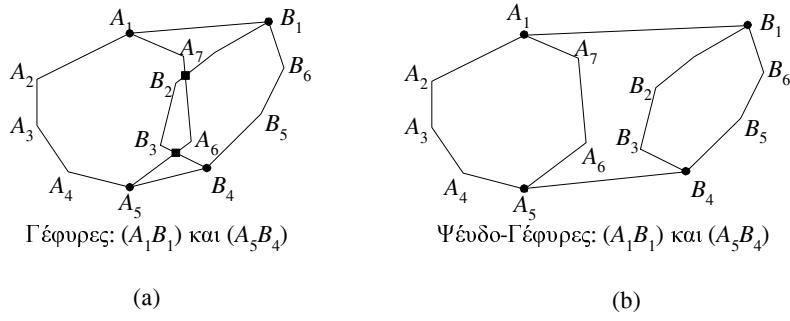
να γνωρίζουμε κατά πόσο δύο πολύγωνα τέμνονται ή όχι και όχι ποιο πολύγωνο αποτελεί την τομή τους. Για αυτό τον σκοπό έχουν αναπτυχθεί αρκετοί αλγόριθμοι που διαφέρουν αρκετά και ως προς την τεχνική που χρησιμοποιούν, αλλά και στο πώς αποκρίνονται σε ορισμένες μη τετριμένες περιπτώσεις, όπως για παράδειγμα εάν τα πολύγωνα εφάπτονται.

Ιδανικός, εκ πρώτης όψεως, μοιάζει για την περίπτωσή μας ο αλγόριθμος των Chazelle και Dobkin [12], ο οποίος σε χρόνο $\mathcal{O}(\log(m+n))$ αποφαίνεται εάν δύο κυρτά πολύγωνα τέμνονται ή όχι. Ωστόσο οι συγγραφείς του αλγορίθμου ορίζουν ως τομή πολυγώνων την επαφή των εσωτερικών τους και όχι των συνόρων τους. Αυτό στο πρόβλημά μας είναι καθοριστικό, αφού ακόμα και ένα κοινό σημείο να υπάρχει ανάμεσα στα σύνορα των κυρτών κελυφών των περιοχών αναφοράς, δεν μπορούμε να φέρουμε κοινές εσωτερικές εφαπτομένες. Οι συγγραφείς μάλιστα αποδεικνύουν ότι απαιτείται γραμμικός χρόνος για να γίνει έλεγχος και στα σύνορα των πολυγώνων.

Αναγκαστικά καταφένγουμε σε άλλους αλγορίθμους γραμμικής $\mathcal{O}(m+n)$ πολυπλοκότητας, που μπορούν να υπολογίσουν όλα τα σημεία τομής των πολυγώνων, ακόμα και να κατασκευάσουν την τομή των πολυγώνων. Γνωστότερος όλων είναι ο αλγόριθμος του O'Rourke [52, 53] αλλά απορρίφθηκε διότι είναι μεν απλός στη σύλληψη, είναι όμως πολύ δύσκολος στην υλοποίηση τόσο στην γενική περίπτωση όσο και στις πολλές οριακές περιπτώσεις που μπορούν να προκύψουν και αντιμετωπίζονται ξεχωριστά. Επιπλέον πρέπει να αντιμετωπίζει ξεχωριστά το ενδεχόμενο δύο πολύγωνα να μην τέμνονται, αλλά να περικλείονται εξ ολοκλήρου το ένα μέσα στο άλλο.

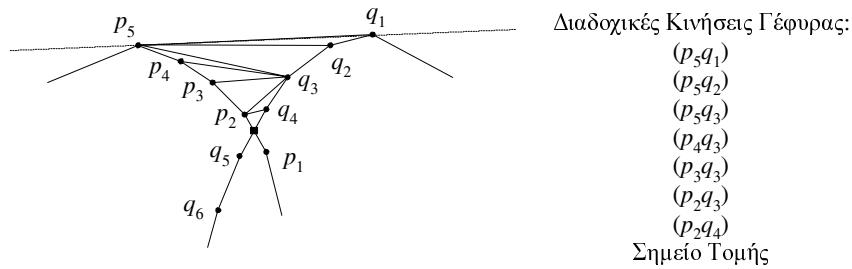
Ο αλγόριθμος που επιλέχθηκε είναι του Toussaint [71], ωστόσο τροποποιήθηκε για να αποφύγουμε την απαιτητική συγγραφή κώδικα και να εκμεταλλευτούμε όσο το δυνατόν περισσότερο από τον ήδη υπάρχοντα γίνεται. Κεντρικό ρόλο στον αλγόριθμο κατέχει η έννοια της γέφυρας. Έστω δύο κυρτά πολύγωνα που τέμνονται και το κυρτό κέλυφος της ένωσης τους. Για κάθε σημείο τομής τους υπάρχει μία κλειστή περιοχή η οποία ανήκει μεν στο εσωτερικό του κυρτού κελύφους της ένωσής τους, αλλά δεν ανήκει στην απλή ένωσή τους. Μία μόνο από τις πλευρές αυτών των περιοχών ανήκει στο κυρτό κέλυφος της ένωσης και αυτήν ονομάζουμε γέφυρα (Σχήμα 4.19a).

Όπως αποδεικνύεται κάθε γέφυρα αντιστοιχεί και σε ένα σημείο τομής, οπότε εντοπίζοντας όλες τις γέφυρες δύο τεμνόμενων πολυγώνων μπορεί να εντοπίσει κανείς και όλα τα σημεία τομής τους. Ο τρόπος με τον οποίο ξεκινώντας από τη γέφυρα βρίσκουμε το αντίστοιχο σημείο τομής δεν είναι προφανής. Ο Toussaint χρησιμοποιεί ιδέες και τεχνικές που δανείστηκε από προβλήματα τριγωνοποίησης ώστε σε γραμμικό χρόνο να εντοπίσει τις ακμές των δύο πολυγώνων



Σχήμα 4.19: Γέφυρες σε τεμνόμενα και μη τεμνόμενα κυρά πολύγωνα.

που τέμνονται και από αυτές το σημείο τομής. Η ιδέα είναι να μετακινούνται διαδοχικά τα άκρα της γέφυρας προς το σημείο τομής, μέχρι να βρεθούν οι τεμνόμενες ακμές (Σχήμα 4.20). Η ακριβής τεχνική περιγράφεται στο [71].



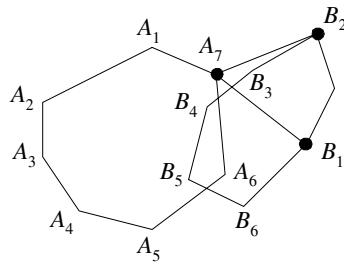
Σχήμα 4.20: Γέφυρες σε τεμνόμενα και μη τεμνόμενα κυρά πολύγωνα.

Εάν τα δύο πολύγωνα δεν τέμνονται και δεν βρίσκονται το ένα μέσα στο άλλο, υπάρχουν δύο ψευδό-γέφυρες (Σχήμα 4.19b). Εάν προσπαθήσουμε να εντοπίσουμε με την παραπάνω τεχνική ένα ανύπαρκτο σημείο τομής, κάποιο από τα άκρα της γέφυρας καθώς μετακινείται θα διασχίσει όλο το πολύγωνο και θα επιστρέψει στην αρχή. Εντοπίζοντας αυτό το γεγονός μπορούμε να αποφανθούμε ότι τα πολύγωνα δεν τέμνονται.

Ο αλγόριθμος για να εντοπίσει τις γέφυρες χρησιμοποιεί την τεχνική των περιστρεφόμενων διαβητών (rotating calipers) [70]. Η τεχνική αυτή αν και είναι απλή στη σύλληψή της, εντοπίζει όλες τις γέφυρες και μπορεί να αποφανθεί εάν ένα πολύγωνο βρίσκεται εντός του άλλου, δεν προτιμήθηκε διότι χρησιμοποιεί γωνίες κάνοντας δύσκολη την υλοποίησή της. Στην περίπτωσή μας όπου δεν μας ενδιαφέρει να βρούμε όλα τα σημεία τομής αλλά μόνο ένα, εφόσον αυτό υπάρχει, αρκεί να εντοπίσουμε μία μόνο γέφυρα. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε την τεχνική που χρησιμοποιούν οι Chazelle και Dobkin [12] στον αλγόριθμο τους που αναφέραμε παραπάνω.

Ξεκινάμε από ένα τυχαίο σημείο του ενός πολυγώνου και ελέγχουμε εάν βρίσκεται εντός του άλλου. Για κυρτά πολύγωνα αυτή η λειτουργία έχει πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(\log n)$ και ο αλγόριθμος που χρησιμοποιείται για αυτό το σκοπό μελετάται στην Ενότητα 4.3.5. Εάν το σημείο βρίσκεται πράγματι εντός του άλλου πολυγώνου, προφανώς αυτά τέμνονται ή το ένα περικλείει το άλλο. Εάν

δεν συμβαίνει αυτό βρίσκουμε μία εφαπτομένη, όπως έχουμε περιγράψει στην Ενότητα 4.3.2, από το σημείο προς το άλλο πολύγωνο. Ελέγχουμε εάν το σημείο επαφής βρίσκεται μέσα στο πρώτο πολύγωνο και εάν αυτό συμβαίνει τα συμπεράσματα είναι ίδια με προηγουμένως. Διαφορετικά υπολογίζουμε την κατάλληλη εφαπτομένη από το σημείο αυτό προς το αρχικό πολύγωνο. Το σημείο αυτό με το σημείο επαφής στο αρχικό πολύγωνο δεν αποτελούν ακριβώς γέφυρα όπως την είχαμε προηγουμένως περιγράψει, αλλά μία καλή προσέγγισή της. Για παράδειγμα στο Σχήμα 4.21 ξεκινούμε από την κορυφή B_1 και υπολογίζουμε την πρώτη «εφαπτομένη» (B_1A_7) και στη συνέχεια η «εφαπτομένη» (B_2A_7) αποτελεί την προσέγγιση της γέφυρας που ζητάμε.



Σχήμα 4.21: Προσεγγιστική εύρεση των γεφυρών.

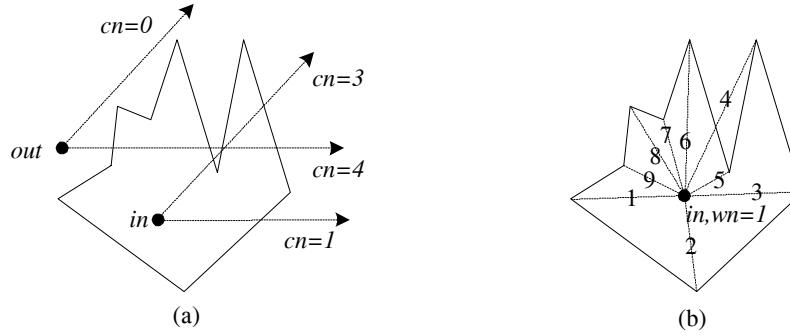
4.3.5 Σημείο μέσα σε πολύγωνο

Έχοντας ασχοληθεί μέχρι τώρα με μερικά πολύπλοκα προβλήματα της υπολογιστικής γεωμετρίας, δε θα περίμενε κανείς κάτι τόσο φαινομενικά απλό, όσο η απάντηση στο ερώτημα εάν ένα σημείο βρίσκεται εντός ενός πολυγώνου, να είναι αντικείμενο εκτεταμένης μελέτης. Και όμως είναι ένα ερώτημα που εμφανίζεται συχνά, ειδικά στα πλαίσια άλλων, συνθετότερων αλγορίθμων και θα επιθυμούσαμε να απαντάται γρήγορα.

Αν και οι αλγόριθμοι αυτής της κατηγορίας είναι εύκολα υλοποιήσιμοι και συνήθως δεν αποτελούνται παρά από λίγες γραμμές κώδικα, έχουν ένα σημαντικό θεωρητικό υπόβαθρο. Εντάσσονται σε δύο κύριες κατηγορίες, ανάλογα με την ιδέα στην οποία βασίζονται: σε αυτούς που χρησιμοποιούν τη μέθοδο αριθμού διελεύσεων (crossing number) και σε αυτούς που χρησιμοποιούν τη μέθοδο αριθμού περιελίξεων (winding number) [52].

Η μέθοδος αριθμού διελεύσεων μετρά πόσες φορές διαπερνά το σύνορο του πολυγώνου μία ημιευθεία από το σημείο που ελέγχουμε προς το άπειρο, με οποιαδήποτε διεύθυνση. Όταν το πολύγωνο είναι απλό, εάν ο αριθμός είναι περιττός, τότε το σημείο βρίσκεται εντός του πολυγώνου, αλλιώς εάν είναι ζυγός εκτός (Σχήμα 4.22a). Η μέθοδος αριθμού περιελίξεων μετρά πόσες φορές το σύνορο του πολυγώνου περιελίσσεται γύρω από το σημείο. Εάν είναι μηδέν το σημείο βρίσκεται εκτός του πολυγώνου, αλλιώς εντός (Σχήμα 4.22b). Ο αριθμός των περιελίξεων μπορεί να είναι παραπάνω από μονάδα, εάν το πολύγωνο δεν είναι απλό, περιέχει δηλαδή τεμνόμενες ακμές. Οι αλγόριθμοι και των δύο κατηγοριών έχουν πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(n)$ για τυχαία πολύγωνα, αν και οι επιδόσεις τους μπορεί να διαφέρουν σημαντικά από υλοποίηση σε υλοποίηση. Όπως συνήθως συμβαίνει στην υπολογιστική γεωμετρία, για ειδικές κατηγορίες πολυγώνων, όπως τα κυρτά, οι

αλγόριθμοι τροποποιούνται ανάλογα και επιταχύνονται σημαντικά, με πολυπλοκότητα $\mathcal{O}(\log n)$.



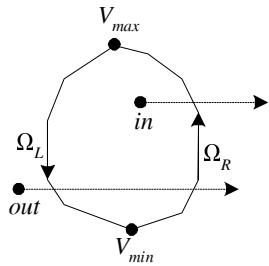
Σχήμα 4.22: Αριθμός διελεύσεων και αριθμός περιελίξεων.

Για να γίνει χρήση σε άλλα, πολυπλοκότερα, προβλήματα (Ενότητες 4.3.3 και 4.3.4), υλοποιήθηκαν δύο αλγόριθμοι, για κυρτά και για τυχαία πολύγωνα. Αρχίζουμε με τον αλγόριθμο για τυχαία πολύγωνα και μετά βλέπουμε πως μπορεί να τροποποιηθεί για κυρτά.

Οι αλγόριθμοι αριθμού διελεύσεων θεωρούνται γενικά πολύ ταχύτεροι από τους αντίστοιχους που χρησιμοποιούν τη μέθοδο αριθμού περιελίξεων, ο Haines [36] μάλιστα υποστηρίζει πως είναι περίπου είκοσι φορές ταχύτεροι. Μερικές υλοποιήσεις αλγορίθμων αριθμού διελεύσεων έχουν δώσει οι Haines [36], O'Rourke [52] και Franklin [26]. Ωστόσο ο αλγόριθμος που διαλέξαμε, επινοήθηκε από τον Sunday [66] και χρησιμοποιεί τη μέθοδο του αριθμού περιελίξεων. Εφαρμόζοντας μαθηματικούς μετασχηματισμούς απλοποίησε σημαντικά το μέτρημα του αριθμού των περιελίξεων και δίνει μία υλοποίηση του αλγορίθμου του, που αποτελείται από δέκα γραμμές κώδικα, δεν χρειάζεται να αντιμετωπίζει ξεχωριστά τυχόν οριακές περιπτώσεις και είναι ταχύτερος από τους αλγόριθμους αριθμού διελεύσεων που αναφέραμε παραπάνω. Δε θα επεκταθούμε στην παρουσίαση και την απόδειξη της ορθότητας του αλγορίθμου, διότι ξεφεύγει από τους σκοπούς αυτής της παρουσίασης.

Στην περίπτωση που το πολύγωνο είναι κυρτό, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τη μονοτονία που παρουσιάζει κατά τη διεύθυνση του άξονα y . Χρησιμοποιώντας κατάλληλο αλγόριθμο, τον οποίο μελετάμε στην Ενότητα 4.3.6, εντοπίζουμε τις δύο κορυφές με τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη y συντεταγμένη, τις οποίες συμβολίζουμε με V_{max} και V_{min} αντίστοιχα. Παρατηρώντας το Σχήμα 4.23 βλέπουμε πως οι δύο αυτές κορυφές χωρίζουν το πολύγωνο σε δύο αλυσίδες κορυφών τις οποίες συμβολίζουμε με Ω_R και Ω_L . Για να είναι ένα σημείο μέσα στο κυρτό πολύγωνο πρέπει καταρχάς η y συντεταγμένη του να είναι ανάμεσα στις αντίστοιχες των V_{max} και V_{min} . Εφόσον αυτό συμβαίνει ελέγχουμε κατά πόσο μία οριζόντια ημιευθεία από το σημείο τέμνει τις αλυσίδες Ω_R και Ω_L . Εάν τέμνει μόνο μία από τις αλυσίδες το σημείο βρίσκεται εντός του πολυγώνου, διαφορετικά εκτός. (Σχήμα 4.23).

Για να δούμε κατά πόσο η ημιευθεία τέμνει και τις δύο αλυσίδες δεν είναι ανάγκη να ελέγξουμε όλες τις ακμές της αλυσίδας, αλλά μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι οι ακμές είναι διατεταγμένες, θεωρώντας φορά διαγραφής αντίστροφη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού,



Σχήμα 4.23: Σημείο μέσα σε κυρτό πολύγωνο.

κατά αύξουσα τιμή της συντεταγμένης y για την αλυσίδα Ω_R και φθίνουσα για την Ω_L . Ως εκ τούτου μπορούμε να πραγματοποιήσουμε δυαδική αναζήτηση για να εντοπίσουμε εκείνη την ακμή κάθε αλυσίδας που βρίσκεται στο ίδιο «ύψος» με το σημείο και για αυτήν μόνο να ελέγχουμε κατά πόσο τέμνεται από μία ημιευθεία που ξεκινά από αυτό. Τόσο το βήμα της δυαδικής αναζήτησης όσο και ο εντοπισμός των κορυφών V_{max} και V_{min} έχει λογαριθμική πολυπλοκότητα και επομένως συνολικά η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $\mathcal{O}(\log n)$.

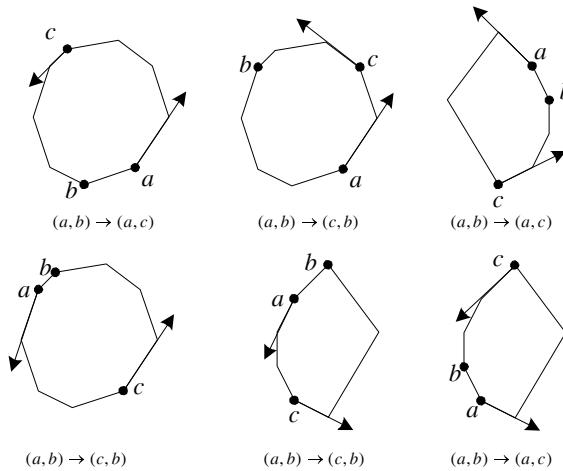
4.3.6 Υπολογισμός ακραίων κορυφών κυρτού πολυγώνου

Πολύ συχνά παρουσιάζεται η ανάγκη να υπολογίσουμε το οριακό σημείο ενός κυρτού πολυγώνου προς μία συγκεκριμένη κατεύθυνση. Αυτή η εφαρμογή παρουσιάστηκε ήδη κατά τον υπολογισμό των κοινών εφαπτομένων δύο κυρτών πολυγώνων (Ενότητα 4.3.2) και κατά τον έλεγχο ύπαρξης σημείου μέσα σε κυρτό πολύγωνο (Ενότητα 4.3.5). Μπορούμε να σκεφτούμε αρκετές ακόμα εφαρμογές όπως τον υπολογισμό του ελαχίστου περικλείοντος πλαισίου κυρτού πολυγώνου ή τον έλεγχο κατά πόσο ένα κυρτό πολύγωνο τέμνεται με μία ευθεία.

Αν και αυτός ο υπολογισμός μπορεί να γίνει με ένα απλό σάρωμα όλων των κορυφών του πολυγώνου σε γραμμικό χρόνο $\mathcal{O}(n)$, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις ιδιότητες της κυρτότητας και να πραγματοποιήσουμε δυαδική αναζήτηση της ζητούμενης κορυφής σε λογαριθμικό χρόνο $\mathcal{O}(\log n)$. Ο αλγόριθμος που πραγματοποιεί αυτή την εργασία οφείλεται στον O'Rourke [52].

Έστω ότι αναζητούμε το σημείο με τη μεγαλύτερη y συντεταγμένη. Ο αλγόριθμος ξεκινά με ολόκληρη την αλυσίδα κορυφών του πολυγώνου και σε κάθε βήμα του τη μειώνει στο μισό της, μέχρι να καταλήξει στο ζητούμενο σημείο. Έστω a, b οι κορυφές που βρίσκονται στα άκρα της αλυσίδας και c η μεσαία κορυφή της. Εξετάζοντας κατά πόσο οι ακμές $(a, a+1)$ και $(c, c+1)$ κινούνται προς τα πάνω ή προς τα κάτω (εάν π.χ. η κορυφή $a+1$ έχει μεγαλύτερη y συντεταγμένη από την a , η ακμή κινείται προς τα πάνω) και ποια από τις δύο κορυφές a και c έχει μεγαλύτερη y συντεταγμένη, μπορούμε να αποφανθούμε σε ποιο μισό της αλυσίδας πρέπει να συνεχίσουμε την αναζήτηση. Οι έξι κανόνες παρουσιάζονται στο Σχήμα 4.24.

Ο αλγόριθμος μπορεί να γενικευτεί και να βρίσκει τη μέγιστη κορυφή προς οποιαδήποτε κατεύθυνση προβάλλοντας τις κορυφές του πολυγώνου πάνω στο διάνυσμα κατεύθυνσης.



Σχήμα 4.24: Κανόνες διαιρέσης της αλυσίδας των κορυφών.

4.3.7 Υλοποίηση του αλγορίθμου BC-DR-C2

Όπως επισημάνθηκε κατά την παρουσίαση του αλγορίθμου BC-DR-C2 στην Ενότητα 4.2, χρειαζόμαστε δύο αλγορίθμους από την Υπολογιστική Γεωμετρία για την υλοποίησή του: έναν αλγόριθμο που να μας διαιρεί την πρωτεύουσα περιοχή σε τέσσερα μέρη και έναν αλγόριθμο που να εντοπίζει κατά πόσο τα σύνορα δύο πολυγώνων τέμνονται. Αντί να μελετήσουμε τις δυνατότητες που μας παρέχονται για τη λύση των δύο αυτών προβλημάτων σε ξεχωριστές ενότητες, τις μελετάμε μαζί διότι καθώς θα φανεί στη συνέχεια, οι επιλογές που θα κάνουμε κατά τη διαιρέση της πρωτεύουσας περιοχής επηρεάζουν την επιλογή του αλγορίθμου που εντοπίζει το μή πολυγώνων.

Καταρχάς, πολύ καλή επιλογή για τη διαιρέση της περιοχής αναφοράς στα τέσσερα τμήματα μοιάζει ο αλγόριθμος ψαλιδισμού των Sutherland και Hodgman [68]. Μάλιστα είναι τέτοια η δομή του προβλήματος και τέτοια η δομή του αλγορίθμου, ώστε η διαιρέση μπορεί να γίνει με ένα μόνο σάρωμα των κορυφών των πολυγώνων της περιοχής αναφοράς. Ωστόσο ο συγκεκριμένος αλγόριθμος παρουσιάζει το ελάττωμά ότι τα πολύγωνα που προκύπτουν από τον ψαλιδισμό δεν είναι πάντα απλά. Συγκεκριμένα στην περίπτωση που το προϊόν του ψαλιδισμού ενός πολυγώνου θα έπρεπε να είναι δύο ή περισσότερα ανεξάρτητα πολύγωνα, ο αλγόριθμος παράγει ένα μόνο πολύγωνο: τα επιμέρους πολύγωνα είναι ενωμένα με ακμές που βρίσκονται πάνω στα σύνορα της περιοχής αναφοράς του αλγορίθμου.

Μία άλλη επιλογή είναι να χρησιμοποιήσουμε έναν άλλο αλγόριθμο ψαλιδισμού που παράγει απλά πολύγωνα. Ο αλγόριθμος των Greiner και Hormann [33] που περιγράφουμε και στην Ενότητα 4.3.3. Με ελάχιστες αλλαγές μπορεί να χειριστεί μη-φραγμένες περιοχές αναφοράς, όπως τους κώνους στην περίπτωσή μας και πιστεύουμε πως με μερικές ακόμα τροποποιήσεις μπορεί να παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα με λιγότερα από τέσσερα περάσματα των ακμών της περιοχής αναφοράς. Όπως και να έχει, η πολυπλοκότητα παραμένει γραμμική. Για να ελέγξουμε στη συνέχεια κατά πόσο δύο απλά πολύγωνα τέμνονται σε γραμμικό χρόνο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε

μία επέκταση του αλγορίθμου τριγωνοποίησης του Chazelle [11].

Μία άλλη δυνατότητα, που πιθανώς κάνει ποιο εύκολο το χωρισμό της περιοχής αναφοράς στα τέσσερα τμήματα, είναι η διαίρεση να μην παράγει απλά πολύγωνα, αλλά σύνολα ακμών. Τότε θεωρώντας και τα αντίστοιχα τμήματα του συνεκτικού κελύφους ως σύνολα ακμών, μπορούμε να εφαρμόσουμε έναν αλγόριθμος ανίχνευσης τομής «κόκκινου-μπλε» (red-blue intersection report algorithm). Ένας τέτοιος αλγόριθμος μπορεί να ανιχνεύσει σε γραμμικό χρόνο τυχόν τομή των ακμών της «κόκκινης» ομάδας με ακμές της «μπλε» ομάδας. Απαραίτητη προϋπόθεση για να λειτουργεί ένας τέτοιος αλγόριθμος σε γραμμικό χρόνο είναι οι ακμές της ίδιας ομάδας να μην τέμνονται (Finke και Hinrichs [23]).

Προτείνουμε σε οποιονδήποτε προσπαθήσει να υλοποιήσει τον αλγόριθμο BC-DR-C2 να μελετήσει τα άρθρα πάνω στην τομή γεωμετρικών αντικειμένων των Mount [50] και Suri [67], καθώς το βήμα του ελέγχου της τομής δύο πολυγώνων είναι και εκείνο που επηρεάζει την πολυπλοκότητα του αλγορίθμου.

4.4 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο προτείναμε δύο αλγόριθμους υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Billen και Clementini και δώσαμε την εκτίμηση της πολυπλοκότητά τους. Επίσης παρουσιάσαμε όσους αλγόριθμους της υπολογιστικής γεωμετρίας χρησιμοποιήσαμε στην υλοποίησή τους.

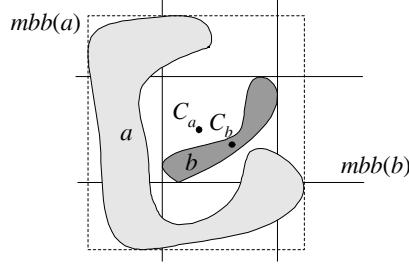
Στη συνέχεια θα ορίσουμε αυστηρά μία νέα οικογένεια μοντέλων βασικών σχέσεων κατεύθυνσης (Κεφάλαιο 5) και ξεφεύγοντας από το πρόβλημα του υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης, με το οποίο ασχοληθήκαμε για τα μοντέλα των Goyal-Egenhofer (Κεφάλαιο 3) και Billen-Clementini (παρών Κεφάλαιο 4), θα μελετήσουμε το πρόβλημα της σύνθεσης δύο σχέσεων κατεύθυνσης (Κεφάλαιο 6).

Κεφάλαιο 5

Μια Οικογένεια Μοντέλων για Πληροφορία Κατεύθυνσης

Στην Ενότητα 2.2.2 παρουσιάσαμε αρκετά μοντέλα για την αναπαράσταση σχέσεων κατεύθυνσης. Όπως είδαμε, τα περισσότερα από αυτά προσεγγίζουν μια χωρική περιοχή με ένα αντιπροσωπευτικό της σημείο (τις περισσότερες φορές το κέντρο βάρους) ή με ένα αντιπροσωπευτικό της πλαίσιο (τις περισσότερες φορές το ελάχιστο οριακό πλαίσιο).

Σε κάποιες περιπτώσεις, οι προσεγγίσεις αυτές είναι πολύ αδρές. Κατά συνέπεια, οι σχέσεις κατεύθυνσης που εκφράζονται έχοντας ως βάση τις προσεγγίσεις αυτές, μπορεί να είναι παραπλανητικές και αντιφατικές. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 5.1 η σχέση μεταξύ των περιοχών a και b δεν μπορεί να περιγραφεί από τη σχέση μεταξύ των κέντρων βάρους C_a και C_b ούτε από τη σχέση μεταξύ των ελαχίστων οριακών πλαισίων.



Σχήμα 5.1: Προβλήματα με τις προσεγγίσεις με βάση σημεία και ελάχιστα περικλείοντα πλαίσια.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση, υπάρχει η τάση τα σύγχρονα μοντέλα σχέσεων κατεύθυνσης να προσεγγίζουν μόνο την περιοχή αναφοράς και να χρησιμοποιούν το ακριβές σχήμα της πρωτεύουσας περιοχής. Το μοντέλα των Goyal και Egenhofer [29, 30] (Ενότητα 3.1) και των Billen και Clementini [8] (Ενότητα 4.1), τα οποία περιγράφουμε συνοπτικά και στην Ενότητα 2.3, ακολουθούν αυτή τη λογική.

Η οικογένεια των μοντέλων που παρουσιάζουμε σε αυτό το κεφάλαιο, αποτελεί μία απλοποιημένη εκδοχή του μοντέλου των Goyal και Egenhofer. Περιγραφικά, η περιοχή αναφοράς προσεγγίζεται με το ελάχιστο περικλείον πλαισίο της και ο χώρος γύρω από αυτή χωρίζεται σε

τέσσερα τμήματα (εννέα στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer). Σημειώνοντας τα τμήματα τα οποία καταλαμβάνει η πρωτεύουσα περιοχή λαμβάνουμε τη σχέση κατεύθυνσης.

Η συνεισφορά του κεφαλαίου συνοψίζεται στα ακόλουθα:

- Περιγράφουμε ένα μοντέλο της οικογένειας και βλέπουμε πως μεταβάλλοντας ελαφρά τα χαρακτηριστικά του μπορούμε να δημιουργήσουμε ολόκληρη την οικογένεια. Ο ορισμός και κατά συνέπεια η αντιμετώπιση προβλημάτων σχετικών με τα μοντέλα μπορεί να γίνει με ενιαίο τρόπο.
- Ορίζουμε αυστηρά τις σχέσεις κατεύθυνσης για περιοχές του συνόλου REG^* . Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω αυστηρούς ορισμούς διατυπώνονται πολλά και ενδιαφέροντα προβλήματα, όπως η συνέπεια ενός συνόλου από περιορισμούς κατεύθυνσης και η σύνθεση σχέσεων κατεύθυνσης. Με το θεωρητικό υπόβαθρο μπορούν να αναπτυχθούν αλγόριθμοι για την επίλυση των προβλημάτων αυτών και να αποδειχθούν μαθηματικά ότι είναι σωστοί.
- Ορίζουμε το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μίας περιοχής και βλέπουμε πως μπορεί, σε πολλές περιπτώσεις, να αντικαταστήσει τόσο την πρωτεύουσα περιοχή, όσο και την περιοχή αναφοράς, χωρίς απώλεια πληροφορίας. Το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο αποτελεί την απαραίτητη υποδομή για τη διατύπωση αποδοτικών αλγορίθμων σε προβλήματα όπως του ελέγχου συνέπειας ενός συνόλου σχέσεων κατεύθυνσης.

Το κεφάλαιο δομείται ως εξής: Στην Ενότητα 5.1 περιγράφουμε, αποφεύγοντας όπου μπορούμε τους αυστηρούς ορισμούς, ένα μοντέλο της οικογένειας. Στην Ενότητα 5.2 βλέπουμε πως από το μοντέλο αυτό μπορεί να προκύψει μία οικογένεια μοντέλων την οποία μπορούμε να αντιμετωπίσουμε με ενιαίο τρόπο. Στην Ενότητα 5.3 ορίζουμε αυστηρά τις σχέσεις κατεύθυνσης για περιοχές του συνόλου REG^* , καθώς και το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μίας περιοχής. Τέλος, στην Ενότητα 5.4 παρουσιάζουμε τα συμπεράσματά μας.

5.1 Περιγραφή μοντέλου

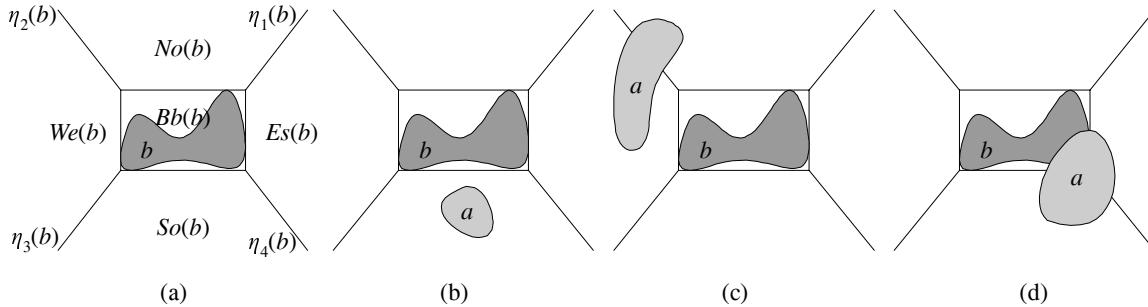
Έστω δύο τυχαίες περιοχές a και b στο σύνολο REG^* , οι οποίες σχετίζονται με μία σχέση κατεύθυνσης. Θεωρούμε ότι η a είναι η πρωτεύουσα περιοχή και η b η περιοχή αναφοράς.

Θεωρούμε το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής αναφοράς b . Από τις τέσσερις γωνίες του πλαισίου φέρνουμε τέσσερις ημιευθείες. Ονομάζουμε την ημιευθεία που αναχωρεί από την άνω δεξιά κορυφή του $mbb(b)$, $\eta_1(b)$, αυτή που αναχωρεί από την άνω αριστερή $\eta_2(b)$, από την κάτω αριστερή $\eta_3(b)$ και από την κάτω δεξιά $\eta_4(b)$.

Γενικά, σε μία οποιαδήποτε ημιευθεία αντιστοιχεί μία πλήρης ευθεία, με κατεύθυνση αυτή της ημιευθείας, η οποία τέμνει τον άξονα x . Ονομάζουμε την γωνιά μεταξύ του άξονα x και της ευθείας αυτής γωνία αναχώρησης της αντίστοιχης ημιευθείας. Η γωνιά αναχώρησης μπορεί να πάρει τιμές στο διάστημα $[0^\circ, 360^\circ]$.

Η γωνιά αναχώρησης των τεσσάρων ημιευθειών $\eta_1(b)$, $\eta_2(b)$, $\eta_3(b)$ και $\eta_4(b)$ είναι 45° , 135° , 225° και 315° αντίστοιχα. Το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής αναφοράς b , σε συνδυασμό με τις ημιευθείες χωρίζουν το επίπεδο σε πέντε τμήματα ή *χωρία* (tiles) (Σχήμα 5.2a). Τα

τέσσερα περιφερειακά τμήματα αντιστοιχούν στις σχέσεις βόρεια, δυτικά, νότια και ανατολικά. Τα τμήματα αυτά τα συμβολίζουμε με $No(b)$, $We(b)$, $So(b)$ και $Es(b)$ αντίστοιχα. Το κεντρικό τμήμα αντιστοιχεί στο ελάχιστο πλαίσιο της περιοχής b και συμβολίζεται με $Bb(b)$.



Σχήμα 5.2: Περιοχές αναφοράς και σχέσεις κατεύθυνσης.

Στην περίπτωση που η πρωτεύουσα περιοχή περιέχεται εξολοκλήρου στο χωρίο $So(b)$ μίας περιοχής αναφοράς b (Σχήμα 5.2a), τότε λέμε ότι η a είναι νότια της b και συμβολίζουμε με $a:So(b)$. Όμοια ορίζουμε τις σχέσεις βόρεια (No), δυτικά (We), ανατολικά (Es) και ελάχιστο περικλείον πλαίσιο (Bb). Αν η πρωτεύουσα περιοχή περιέχεται μερικώς στο χωρίο $No(b)$ και μερικώς στο χωρίο $We(b)$ της b (Σχήμα 5.2b), λέμε ότι η a βρίσκεται μερικώς βόρεια και μερικώς δυτικά της b και συμβολίζουμε με $a:No:We(b)$.

Ο γενικός ορισμός μία σχέσης κατεύθυνσης είναι ως εξής:

Ορισμός 5.1 Μια βασική σχέση κατεύθυνσης (cardinal direction relation) είναι μία έκφραση της μορφής $R_1:\dots:R_k$ όπου

- (i) $1 \leq k \leq 5$,
- (ii) $R_1, \dots, R_k \in \{No, We, So, Es, Bb\}$ και
- (iii) $R_i \neq R_j$ για κάθε i, j τέτοια ώστε $1 \leq i, j \leq k$.

Μία βασική σχέση κατεύθυνσης $R_1:\dots:R_k$ καλείται ενός χωρίου (single-tile) εάν $k = 1$, αλλιώς καλείται πολλών χωρίων (multi-tile).

Παράδειγμα 5.1 Οι παρακάτω είναι βασικές σχέσεις κατεύθυνσης:

$$So, \ No:We \text{ and } So:Es:Bb.$$

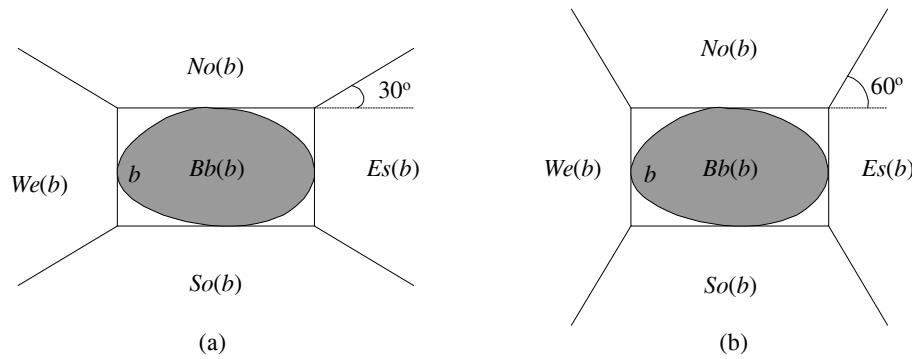
Περιοχές σε αυτές τις σχέσεις παρουσιάζονται στα Σχήματα 5.2b, 5.2c και 5.2d αντίστοιχα.

Για να μην υπάρξει σύγχυση, τα στοιχεία μιας σχέσης κατεύθυνσης θα σημειώνονται με την ακόλουθη σειρά: No , We , So , Es , Bb . Κατά συνέπεια, θα γράφουμε $No:We:Bb$ αντί $We:Bb:No$ ή $No:Bb:We$. Ας σημειωθεί ότι στοιχεία μιας σχέσης καλούνται συχνά ως χωρία. Για παράδειγμα τα Bb , So και We θα αναφέρονται ως χωρία της σχέσης $We:So:Bb$. Χωρία έχουμε αποκαλέσει και τα τμήματα του επιπέδου στα οποία χωρίζεται από μία περιοχή αναφοράς. Στη συνέχεια θα είναι ξεκάθαρο από τα συμφραζόμενα σε τι από τα δύο αναφερόμαστε όταν χρησιμοποιούμε τον όρο.

5.2 Επεκτείνοντας το μοντέλο σε μία οικογένεια μοντέλων

Το κύριο χαρακτηριστικό του μοντέλου είναι οι τέσσερις ημιευθείες που πηγάζουν από τις κορυφές του ελάχιστου περικλείοντος πλαισίου της περιοχής αναφοράς. Στην παραπάνω περιγραφή θεωρήσαμε πως αυτές αναχωρούν με μία ορισμένη γωνία η ίδια όπως έτσι ώστε να παράγουν ένα συμμετρικό χωρισμό του επιπέδου σε τμήματα.

Θα μπορούσαμε όμως να φανταστούμε και μία άλλη ακολουθία γωνιών αναχώρησης οι οποίες παράγουν μία εξίσου συμμετρική διαμέριση του επιπέδου. Για παράδειγμα, οι γωνίες αναχώρησης των τεσσάρων ημιευθειών $\eta_1(b)$, $\eta_2(b)$, $\eta_3(b)$ και $\eta_4(b)$ της περιοχής αναφοράς b θα μπορούσαν να είναι 30° , 150° , 210° και 330° (**Σχήμα 5.3a**) ή 60° , 120° , 240° και 300° (**Σχήμα 5.3b**).



Σχήμα 5.3: Δύο μοντέλα της οικογένειας, με την ίδια περιοχή αναφοράς.

Το μοτίβο που ακολουθείται στις παραπάνω ακολουθίες γωνιών είναι ϕ , $180^\circ - \phi$, $180^\circ + \phi$ και $360^\circ - \phi$, ενώ η γωνία ϕ μπορεί να παίρνει τιμές στο ανοικτό διάστημα $(0^\circ, 90^\circ)$. Τα άκρα του διαστήματος παράγουν εκφυλισμένα και όχι ιδιαίτερα χρήσιμα μοντέλα τα οποία, όπως θα φανεί και στη συνέχεια, δεν μπορούν να αντιμετωπιστούν με τον ίδιο γενικό τρόπο με τα υπόλοιπα.

Η γωνίας αναχώρησης της ημιευθείας $\eta_1(b)$ θα ονομάζεται και **χαρακτηριστική γωνία** του μοντέλου και θα συμβολίζεται με ϕ , αφού η τιμή της θα ξεχωρίζει το ένα μοντέλο της οικογένειας από τα υπόλοιπα. Όπως βλέπουμε όμως, ούτε η γενική περιγραφή των τμημάτων στα οποία χωρίζεται το επίπεδο από την περιοχή αναφοράς, ούτε ο Ορισμός 5.1 επηρεάζονται από την τιμή της γωνίας ϕ . Στη συνέχεια όλη η ανάλυση που θα ακολουθήσει και όλα τα συμπεράσματα που θα παραχθούν θα ισχύουν για όλη την οικογένεια των μοντέλων. Όπου είναι απαραίτητο η τιμή της χαρακτηριστικής γωνίας ϕ θα εμφανίζεται ως παράμετρος.

5.3 Ορίζοντας τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε αυστηρά τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης της οικογένειας των μοντέλων. Θα αρχίσουμε με τις απλούστερες σχέσεις ενός χωρίου και στη συνέχεια θα επεκτείνουμε τους ορισμούς μας και στις σχέσεις πολλών χωρίων.

Ορισμός 5.2 Έστω δύο περιοχές $a, b \in REG^*$ και βασική σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου $R = \{No, We, So, Es, Bb\}$. Τότε:

$$a R b \Leftrightarrow a \subseteq R(b)$$

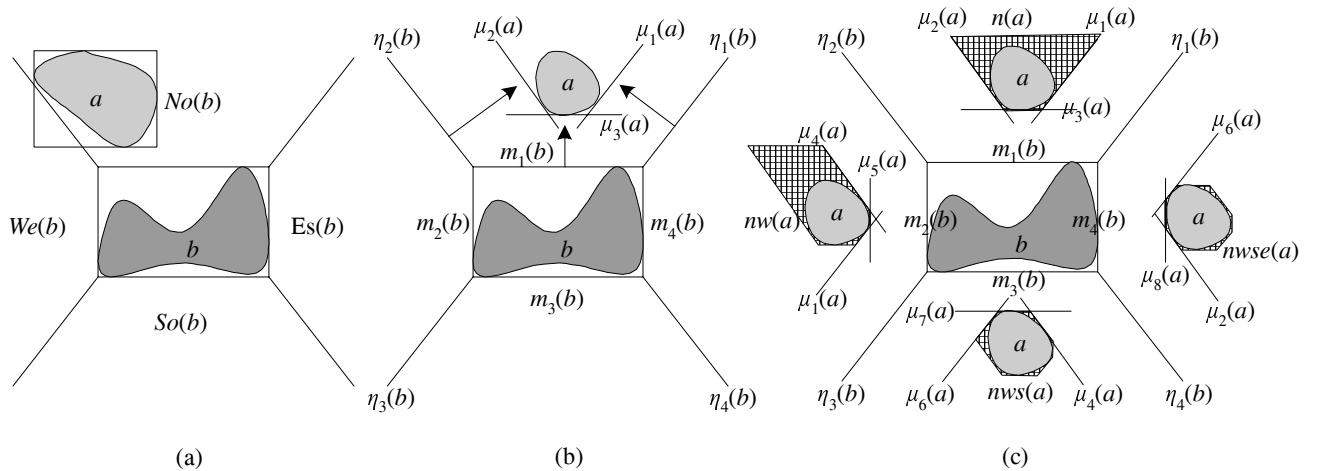
Ο παραπάνω ορισμός διατυπώνει μαθηματικά ότι περιγράφουμε στην Ενότητα 5.1. Θα θέλαμε όμως να υπολογίσουμε πιο χρήσιμες συνθήκες που πρέπει να ισχύουν μεταξύ των δύο περιοχών, ώστε να συνδέονται με μία σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου. Οι Skiadopoulos και Koubarakis [63, 64] και οι Goyal και Egenhofer [30] για το μοντέλο που περιγράφουμε και στην Ενότητα 3.1, έδειξαν πως δύο περιοχές συνδέονται με μία σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου αν και μόνο εάν τα ελάχιστα περικλείοντα πλαίσια τους συνδέονται με την ίδια σχέση κατεύθυνσης, δηλαδή εάν a και b περιοχές και R σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου, τότε $a R b \Leftrightarrow mbb(a) R mbb(b)$. Αυτή η διαπίστωση απλοποίησε σημαντικά την ανάλυση και διατύπωσαν τις συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ώστε δύο περιοχές να συνδέονται με μία σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου, ως ανισοτικές σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων των κορυφών των ελαχίστων περικλείοντων πλαισίων τους.

Στην οικογένεια μοντέλων που μελετάμε, δούθείσας μίας περιοχής αναφοράς, το πρώτο μας βήμα στην διαμέριση του επιπέδου στα πέντε χωρία, είναι ο προσδιορισμός του ελαχίστου περικλείοντος πλαισίου της και με βάση αυτό φέρνουμε τις ημιευθείας που παράγουν την τελική διαμέριση του χώρου. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε πως δύο περιοχές με το ίδιο ελάχιστο περικλείον πλαισίο θα χώριζαν το επίπεδο στα ίδια πέντε τμήματα, δηλαδή έστω a, b, c περιοχές και R σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου, τότε εάν $mbb(b) = mbb(c)$ θα ισχύει $a R b \Leftrightarrow a R c$. Στην παραπάνω σχέση διαλέγοντας $c = mbb(b)$ παίρνουμε $a R b \Leftrightarrow a R mbb(b)$.

Η παραπάνω σχέση μας υπαγορεύει να εξετάσουμε εάν ισχύει και στο μοντέλο μας η σχέση $a R b \Leftrightarrow mbb(a) R mbb(b)$. Δυστυχώς όμως, μπορούμε με ένα παράδειγμα να δείξουμε πως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Στο Σχήμα 5.4a, ενώ μεταξύ της πρωτεύουσας περιοχής a και της περιοχής αναφοράς b ισχύει η σχέση κατεύθυνσης $a No b$, για το ελάχιστο περικλείον πλαισίο της a ισχύει $mbb(a) No:We b$.

Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα του Σχήματος 5.4b. Η πρωτεύουσα περιοχή a βρίσκεται βόρεια της περιοχής αναφοράς b . Η περιοχή a μπορεί να πλησιάσει την ημιευθεία $\eta_1(b)$, αλλά πρέπει πάντα να βρίσκεται αριστερά της, διαφορετικά θα βρεθεί στο χωρίο $Es(b)$. Μπορούμε να οριοθετήσουμε την περιοχή a , σε σχέση με την ημιευθεία $\eta_1(b)$, φέρνοντας την εφαπτομένη της a που είναι παράλληλη προς την $\eta_1(b)$ και πλησιέστερα προς αυτήν, την οποία και συμβολίζουμε $\mu_1(a)$. Όταν η $\mu_1(a)$ βρίσκεται αριστερά της $\eta_1(b)$ και η περιοχή a θα βρίσκεται αριστερά της $\eta_1(b)$ και αντίστροφα.

Με την ίδια λογική φέρνουμε την εφαπτομένη $\mu_2(a)$ παράλληλα στην ημιευθεία $\eta_2(b)$ και την $\mu_3(a)$ παράλληλα στην πλευρά $m_1(b)$ του $mbb(b)$. Όταν η $\mu_2(a)$ βρίσκεται δεξιά της $\eta_2(b)$ και η περιοχή a θα βρίσκεται δεξιά της και όταν η $\mu_3(a)$ βρίσκεται πάνω από την $m_1(b)$ και η περιοχή a θα βρίσκεται πάνω από την m_1 , ώστε η περιοχή a να βρίσκεται βόρεια της b . Διαπιστώνουμε δηλαδή πως για να προσδιορίσουμε κατά πόσο μία περιοχή a βρίσκεται βόρεια μίας περιοχής αναφοράς b , μας αρκεί η γνώση όχι ολόκληρης της περιοχής a , αλλά τριών ευθεών που προκύπτουν από αυτή. Επιπλέον οι τρεις αυτές ευθείες οριοθετούν μία μη-φραγμένη περιοχή που καλύπτει την a ,



Σχήμα 5.4: Κατασκευή του ελαχίστου περικλείοντος οκταγώνου μίας περιοχής.

την οποία ονομάζουμε $n(a)$, και φαίνεται στο Σχήμα 5.4c όπου παρουσιάζεται γραμμοσκιασμένη. Από τα όσα έχουμε συζητήσει συμπεραίνουμε πως $n(a) \text{ No } b \Leftrightarrow a \text{ No } b$.

Τοποθετούμε την περιοχή a δυτικά της b και επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία. Φέρνουμε την εφαπτομένη $\mu_4(a)$ παράλληλη στην ημιευθεία $\eta_2(b)$ και την $\mu_5(a)$ παράλληλα στην $m_2(b)$. Η εφαπτομένη που χρειαζόμαστε παράλληλα στην $\eta_3(b)$ είναι η $\mu_1(a)$ την οποία έχουμε ήδη φέρει. Αυτό συμβαίνει διότι οι ημιευθείες $\eta_1(b)$ και $\eta_3(b)$ είναι παράλληλες, όπως και οι $\eta_2(b)$ και $\eta_4(b)$. Ομοίως με πριν οι τρεις αυτές ευθείες οριοθετούν μία περιοχή που καλύπτει την a , η οποία βρίσκεται δυτικά της b αν και μόνο αν και η a βρίσκεται δυτικά της b . Η τομή της περιοχής αυτής με την $n(a)$ συμβολίζεται με $nw(a)$ και παρουσιάζεται γραμμοσκιασμένη στο Σχήμα 5.4c. Πάλι συμπεραίνουμε πως $nw(a) \text{ No } b \Leftrightarrow a \text{ No } b$ και $nw(a) \text{ We } b \Leftrightarrow a \text{ We } b$.

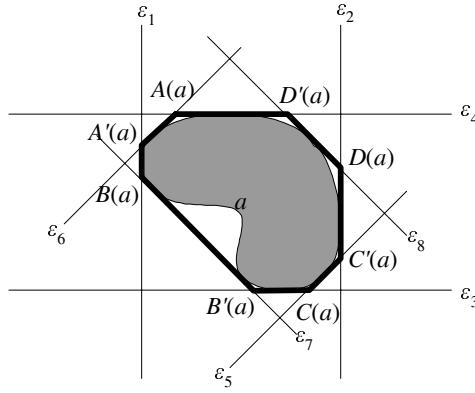
Τοποθετώντας την περιοχή a διαδοχικά και στα υπόλοιπα τμήματα του επιπέδου, ώστε να ισχύουν και οι υπόλοιπες τρεις σχέσεις κατεύθυνσης, βλέπουμε πως αντί της περιοχής a μας αρκεί η γνώση οκτώ εφαπτομένων της, τέσσερις παράλληλες προς τις ημιευθείες $\eta_1(b)$, $\eta_2(b)$, $\eta_3(b)$, $\eta_4(b)$ και τέσσερις παράλληλες προς τις πλευρές $m_1(b)$, $m_2(b)$, $m_3(b)$, $m_4(b)$ του $mbb(b)$. Οι οκτώ αυτές ευθείες σχηματίζουν ένα οκτάγωνο το οποίο περικλείει την περιοχή a και έχει την ίδια σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου με μία δοθείσα περιοχή αναφοράς, με την πρωτεύουσα περιοχή από την οποία προέκυψε.

Ορισμός 5.3 Ορίζουμε ως ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο (*minimum bounding octagon*) μίας περιοχής $a \in REG^*$ και σε μοντέλο χαρακτηριστικής γωνίας ϕ και συμβολίζουμε ως $tbo_\phi(a)$, το πολύγωνο που δημιουργείται από τα σημεία τομής των ευθειών:

- ε_1 και ε_2 παράλληλων στον άξονα y και εφαπτόμενων στην περιοχή a ώστε όλα τα σημεία της να βρίσκονται στο χώρο ανάμεσα τους.
- ε_3 και ε_4 παράλληλων στον άξονα x και εφαπτόμενων στην περιοχή a ώστε όλα τα σημεία της να βρίσκονται στο χώρο ανάμεσα τους.

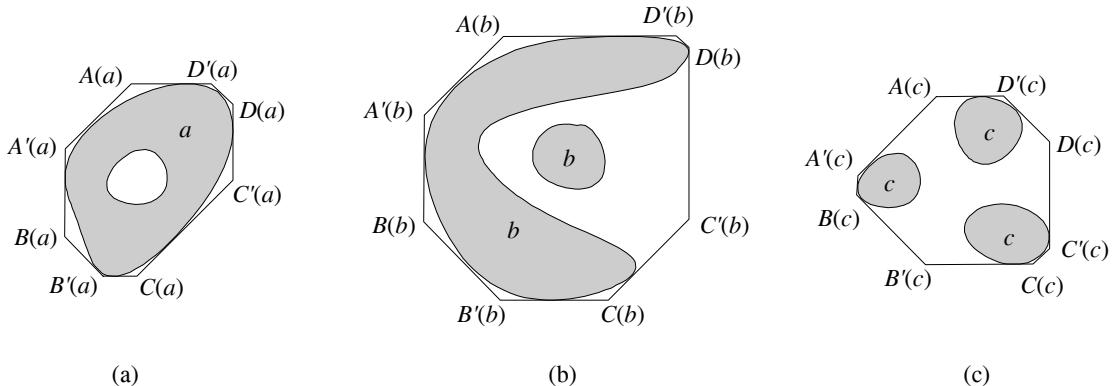
- ε_5 και ε_6 που σχηματίζουν γωνία ϕ με τον άξονα x και εφαπτόμενων στην περιοχή a ώστε όλα τα σημεία της να βρίσκονται στο χώρο ανάμεσα τους.
- ε_7 και ε_8 που σχηματίζουν γωνία $180^\circ - \phi$ με τον άξονα x και εφαπτόμενων στην περιοχή a ώστε όλα τα σημεία της να βρίσκονται στο χώρο ανάμεσα τους.

Συμβολίζουμε με $x|y$ το σημείο τομής των ευθειών x και y . Τότε, τα σημεία που αποτελούν το πολύγωνο είναι με αριστερόστροφη διάταξη $A(a) = \varepsilon_4|\varepsilon_6$, $A'(a) = \varepsilon_1|\varepsilon_6$, $B(a) = \varepsilon_1|\varepsilon_7$, $B'(a) = \varepsilon_3|\varepsilon_7$, $C(a) = \varepsilon_3|\varepsilon_5$, $C'(a) = \varepsilon_2|\varepsilon_5$, $D(a) = \varepsilon_2|\varepsilon_8$ και $D'(a) = \varepsilon_4|\varepsilon_8$ ($\Sigma\chi\eta\mu\alpha$ 5.5).



$\Sigma\chi\eta\mu\alpha$ 5.5: Ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μίας περιοχής.

Στο $\Sigma\chi\eta\mu\alpha$ 5.6 παρουσιάζονται μερικές περιοχές του συνόλου REG^* και τα ελάχιστα περικλείοντα οκτάγωνα τους.

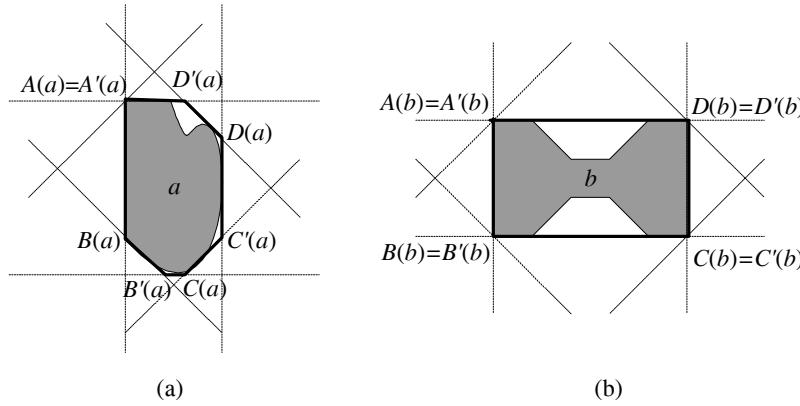


$\Sigma\chi\eta\mu\alpha$ 5.6: Ελάχιστα περικλείοντα οκτάγωνα περιοχών του REG^* .

Παρατήρηση 5.1 Έστω a και b περιοχές του REG^* και R σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου. Τότε $a R b \Leftrightarrow mbo_\phi(a) R b$.

Η παραπάνω παρατήρηση είναι συνέπεια του τρόπου κατασκευής του ελάχιστου περικλείοντος οκταγώνου.

Πρέπει να επισημάνουμε πως στον Ορισμό 5.3 χαρακτηρίσαμε το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο ως πολύγωνο. Αν και τα σημεία τομής μεταξύ των ευθειών που σχηματίζουν το πολύγωνο είναι όντως οκτώ, μπορεί δύο από αυτά να ταυτίζονται. Τα σημεία που μπορεί να ταυτίζονται είναι αυτά με τα μη τονισμένα σύμβολα, με τα αντίστοιχα τονισμένα. Έτσι στην ακραία περίπτωση το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μπορεί να αποτελείται και από τέσσερα σημεία (Σχήμα 5.7). Ωστόσο ανεξάρτητα από το πόσες τελικά είναι οι πλευρές του θα θεωρούμε στη συνέχεια ότι αποτελείται από τα οκτώ σημεία του ορισμού.



Σχήμα 5.7: Εκφυλισμένα ελάχιστα περικλείοντα οκτάγωνα.

Αν και το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο μίας περιοχής αποτελείται από τέσσερα σημεία, η γνώση μονάχα ενός κατάλληλου ζευγαριού από αυτά αρκεί για να το καθορίσουμε πλήρως. Χρειάζεται να γνωρίζουμε είτε τις άνω δεξιά και κάτω αριστερά κορυφές είτε τις άνω αριστερά και κάτω δεξιά. Ομοίως και στο ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο δεν είναι απαραίτητη η γνώση και των οκτώ κορυφών, αλλά μονάχα τέσσερις αρκούν για να το καθορίσουμε πλήρως. Αυτό συμβαίνει διότι τα τονισμένα σημεία εξαρτώνται από τα μη τονισμένα. Οι μεταξύ τους σχέσεις είναι:

$$\begin{aligned} A'_x &= B_x & A'_y &= A_y - \tan(\phi)(A_x - B_x) \\ B'_x &= B_x + \frac{1}{\tan(\phi)}(B_y - C_y) & B'_y &= C_y \\ C'_x &= D_x & C'_y &= C_y + \tan(\phi)(D_x - C_x) \\ D'_x &= D_x - \frac{1}{\tan(\phi)}(A_y - D_y) & D'_y &= A_y \end{aligned}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προκύπτουν εύκολα εφαρμόζοντας τον ορισμό της εφαπτομένης στα τρίγωνα που σχηματίζουν τα τονισμένα σημεία με τα αντίστοιχα μη τονισμένα και το πλησιέστερο σε αυτά σημείο τομής των κάθετων στους άξονες ευθειών (Σχήμα 5.5).

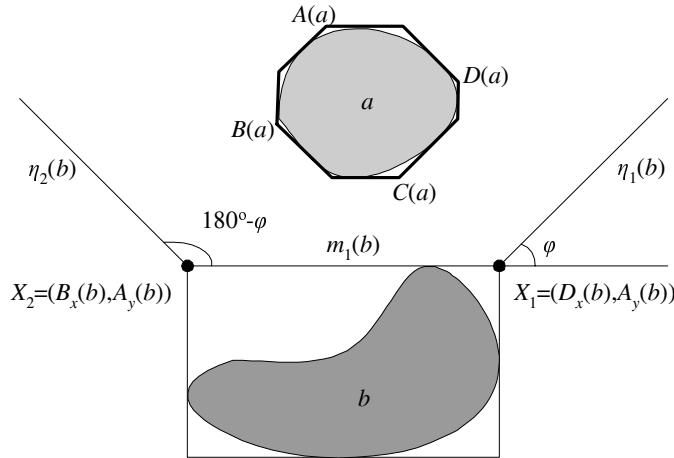
Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.1 Εστω δύο περιοχές $a, b \in REG^*$, $A(a), B(a), C(a), D(a)$ και $A(b), B(b), C(b), D(b)$ τα σημεία των $mbo_\phi(a)$ και $mbo_\phi(b)$ αντίστοιχα και ϕ η χαρακτηριστική γωνία του μοντέλου. Τότε:

<i>a No b</i>	<i>avv</i>	$\tan(\phi)B_x(a) + B_y(a) \geq \tan(\phi)B_x(b) + A_y(b),$ $\tan(\phi)C_x(a) - C_y(a) \leq \tan(\phi)D_x(b) - A_y(b) \text{ και } C_y(a) \geq A_y(b)$
<i>a We b</i>	<i>avv</i>	$\tan(\phi)D_x(a) + D_y(a) \leq \tan(\phi)B_x(b) + A_y(b),$ $\tan(\phi)C_x(a) - C_y(a) \leq \tan(\phi)B_x(b) - C_y(b) \text{ και } D_x(a) \leq B_x(b)$
<i>a So b</i>	<i>avv</i>	$\tan(\phi)A_x(a) - A_y(a) \geq \tan(\phi)B_x(b) - C_y(b),$ $\tan(\phi)D_x(a) + D_y(a) \leq \tan(\phi)D_x(b) + C_y(b) \text{ και } A_y(a) \leq C_y(b)$
<i>a Es b</i>	<i>avv</i>	$\tan(\phi)A_x(a) - A_y(a) \geq \tan(\phi)D_x(b) - A_y(b),$ $\tan(\phi)B_x(a) + B_y(a) \geq \tan(\phi)D_x(b) + C_y(b) \text{ και } B_x(a) \geq D_x(b)$
<i>a Bb b</i>	<i>avv</i>	$C_y(a) \geq C_y(b), A_y(a) \leq A_y(b), B_x(a) \geq B_x(b) \text{ και } D_x(a) \leq D_x(b)$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες ώστε *a No b*. Οι υπόλοιπες αποδείξεις γίνονται με παρόμοιο τρόπο.

Όπως μπορεί να φανεί εύκολα και από στο Σχήμα 5.5, από το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μίας περιοχής μπορούμε να προσδιορίσουμε το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της. Στο Σχήμα 5.8 φαίνεται το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής b , οι συντεταγμένες και τα ονόματα των κορυφών του. Από τις κορυφές X_1 και X_2 φέρνουμε τις ημιευθείες $\eta_1(b)$ και $\eta_2(b)$, οι οποίες σε συνδυασμό με την άνω πλευρά του $mbb(b)$ οριοθετούν το χωρίο $No(b)$.



Σχήμα 5.8: Απόδειξη της Πρότασης 5.1.

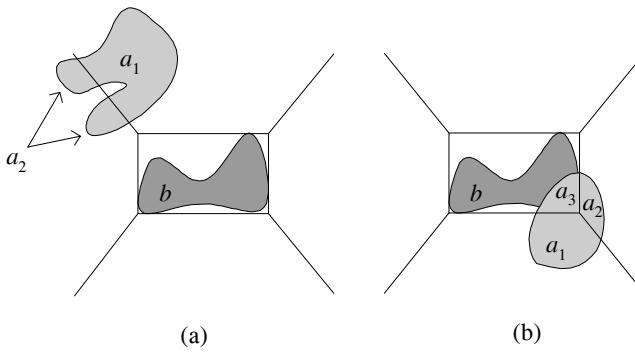
Η πλήρης ευθεία της ημιευθείας $\eta_1(b)$ σχηματίζει γωνία ϕ με τον άξονα x και διέρχεται από το σημείο $X_1 = (D_x(b), A_y(b))$ και επομένως η εξίσωσή της είναι $\eta_1 : y = \tan(\phi)x + (A_y(b) - \tan(\phi)D_x(b))$. Η πλήρης ευθεία της ημιευθείας $\eta_2(b)$ σχηματίζει γωνία $180^\circ - \phi$ με τον άξονα x και διέρχεται από το σημείο $X_2 = (B_x(b), A_y(b))$ και επομένως η εξίσωσή της είναι $\eta_2 : y = -\tan(\phi)x + (A_y(b) + \tan(\phi)B_x(b))$. Η αντίστοιχη της $m_1(b)$ ευθεία είναι προφανώς η $m_1 : y = A_y(b)$.

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε την εξής σύμβαση: μία ευθεία, που δεν είναι κάθετη στον άξονα x , χωρίζει το επίπεδο σε δύο ημιεπίπεδα. Το «άνω» αποτελείται από εκείνα τα σημεία που έχουν μεγαλύτερη y συντεταγμένη από το αντίστοιχο σημείο της ευθείας με το οποίο έχουν ίδια x συντεταγμένη και αντίστοιχα το «κάτω» με τα σημεία που έχουν μικρότερη y συντεταγμένη από το αντίστοιχο σημείο της ευθείας με το οποίο έχουν ίδια x συντεταγμένη.

Έστω a *No b*. Επομένως από την Παρατήρηση 5.1 συμπεραίνουμε πως και το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο της περιοχής a θα βρίσκεται βόρεια της b . Τότε όπως φαίνεται και στο Σχήμα 5.8, δύλες οι κορυφές του $mbo_{\phi}(a)$ βρίσκονται άνω των $\eta_1(b)$, $\eta_2(b)$ και $m_1(b)$, οπότε παράγονται $4 \cdot 3 = 12$ συνθήκες. Ωστόσο μόνο 3 είναι ανεξάρτητες μεταξύ και αφορούν τα σημεία που βρίσκονται πλησιέστερα στις τρεις ευθείες:

- (i) To $C(a)$ βρίσκεται πάνω από την $m_1(b)$, δηλαδή $C_y(a) \geq A_y(b)$.
- (ii) To $C(a)$ βρίσκεται πάνω από την $\eta_1(b)$, δηλαδή $C_y(a) \geq \tan(\phi)C_x(a) + (A_y(b) - \tan(\phi)B_x(b))$.
- (iii) To $B(a)$ βρίσκεται πάνω από την $\eta_2(b)$, δηλαδή $B_y(a) \geq -\tan(\phi)B_x(a) + (A_y(b) + \tan(\phi)B_x(b))$.

Ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία αποδεικνύουμε ότι και όταν ισχύουν οι συνθήκες που αναφέρονται στην Πρόταση 5.1, ισχύει και a *No b*. ■



Σχήμα 5.9: Σχέσεις και μεταβλητές τμημάτων.

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 5.1 των σχέσεων ενός χωρίου, μπορούμε να ορίσουμε και οποιαδήποτε σχέση πολλών χωρίων. Για παράδειγμα η σχέση *No:We* (Σχήμα 5.9a) και η σχέση *So:Es:Bb* (Σχήμα 5.9b) ορίζονται ως εξής:

a No:We b ανν υπάρχουν περιοχές a_1 και a_2 στο REG^* τέτοιες ώστε $a = a_1 \cup a_2$, a_1 *No b* και a_2 *We b*.

a So:Es:Bb b ανν υπάρχουν περιοχές a_1 , a_2 και a_3 στο REG^* τέτοιες ώστε $a = a_1 \cup a_2 \cup a_3$, a_1 *So b*, a_2 *Es b* και a_3 *Bb b*.

Γενικά, οποιαδήποτε σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων ορίζεται ως εξής:

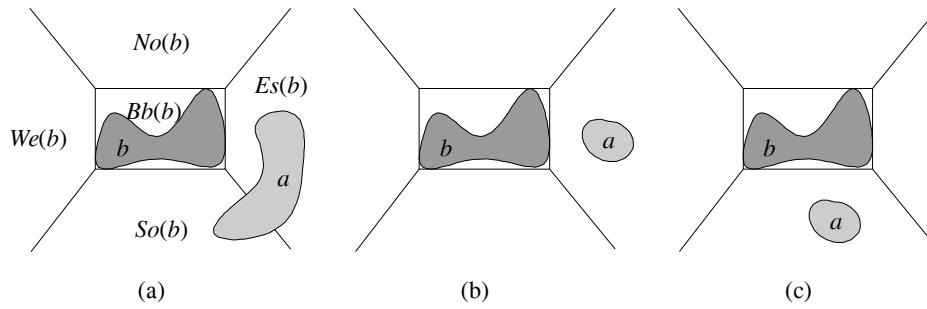
Ορισμός 5.4 Έστω $R_1:\dots:R_k$, $2 \leq k \leq 5$ βασική σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων. Τότε

a R₁:⋯:R_k b αν και μόνο αν υπάρχουν περιοχές $a_1, \dots, a_k \in REG^*$ τέτοιες ώστε
 $a = a_1 \cup \dots \cup a_k$, $a_1 R_1 b, \dots, a_k R_k b$.

Στον Ορισμό 5.4, για κάθε i, j τέτοια ώστε $1 \leq i, j \leq k$ και $i \neq j$, οι περιοχές a_i και a_j έχουν ξένα εσωτερικά αλλά μπορεί να έχουν κοινά σημεία στα σύνορά τους.

Το σύνολο των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης (basic cardinal direction relations) περιέχει 31 σχέσεις. Το σύνολο αυτό το συμβολίζεται με \mathcal{B}^* . Οι σχέσεις στο σύνολο \mathcal{B}^* είναι αμοιβαίως αποκλειόμενες. Τα στοιχεία του \mathcal{B}^* μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την αναπαράσταση πλήρως ορισμένης πληροφορίας για κατευθυντήριες σχέσεις, π.χ., $a \text{ No:Es } b$. Η απαρίθμηση και η γραφική αναπαράσταση των σχέσεων βρίσκεται στο Παράρτημα A'.

Χρησιμοποιώντας τις 31 βασικές σχέσεις του συνόλου \mathcal{B}^* , μπορούμε να ορίσουμε το δυναμοσύνολο $2^{\mathcal{B}^*}$ του, το οποίο περιέχει 2^{31} σχέσεις, με τις οποίες εκτός από πλήρως ορισμένη πληροφορία, μπορούμε να αναπαραστήσουμε και μη-πλήρως ορισμένη πληροφορία. Για παράδειγμα, η σχέση $a \{No, We\} b$ δηλώνει ότι η περιοχή a βρίσκεται είτε βόρεια, είτε δυτικά της περιοχής b .



Σχήμα 5.10: Σχέσεις $a \text{ So:Es } b$ και $a \{So, Es\} b$

Πρέπει εδώ να τονίσουμε τη διαφορά μεταξύ της βασικής σχέσης κατεύθυνσης $a \text{ So:Es } b$ και της διαζευκτικής σχέσης κατεύθυνσης $a \{So, Es\} b$. Η πρώτη δηλώνει ότι η περιοχή a βρίσκεται μερικώς στο $So(b)$ και μερικώς στο $Es(b)$ χωρί της περιοχής b (πλήρως ορισμένη πληροφορία). Από την άλλη, η σχέση $a \{So, Es\} b$ δηλώνει ότι η περιοχή a βρίσκεται εξολοκλήρου είτε στο $So(b)$ είτε στο $Es(b)$ χωρί της περιοχής b (μη-πλήρως ορισμένη πληροφορία). Για παράδειγμα μόνο οι περιοχές στο Σχήμα 5.10a ικανοποιούν τη σχέση $a \text{ So:Es } b$. Η σχέση $a \{So, Es\} b$ ικανοποιείται είτε από τις περιοχές στο Σχήμα 5.10b και είτε από τις περιοχές στο Σχήμα 5.10c αλλά δεν ικανοποιείται από τις περιοχές στο Σχήμα 5.10a.

5.4 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίσαμε αυστηρά μία νέα οικογένεια μοντέλων για την αναπαράσταση πληροφορίας κατεύθυνσης, ανάμεσα σε δύο περιοχές του REG^* . Επίσης, ορίσαμε το ελάχιστο περικλείον οκτάγωνο μίας περιοχής, μία εξαιρετικά χρήσιμη προσέγγιση των περιοχών στην οικογένεια μοντέλων που περιγράψαμε.

Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω αυστηρούς ορισμούς μπορούμε να διατυπώσουμε πολλά και ενδιαφέροντα προβλήματα του Περιγραφικού Χωρικού λογισμού. Ένα από τα πιο βασικά προβλήματα του Περιγραφικού Χωρικού Λογισμού είναι το πρόβλημα της σύνθεσης δύο σχέσεων κατεύθυνσης. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε αυτό το πρόβλημα και θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματά μας.

Κεφάλαιο 6

Σύνθεση Σχέσεων Κατεύθυνσης

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της σύνθεσης των σχέσεων κατεύθυνσης στα μοντέλα που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 5. Η πράξη της σύνθεσης για χωρικές σχέσεις έχει μελετηθεί εκτενώς [17, 24, 27, 34, 54, 61]. Η σύνθεση χρησιμοποιείται ευρέως

- ως μηχανισμός για την εξαγωγή νέων χωρικών σχέσεων από υπάρχουσες σχέσεις,
- για τον έλεγχο της συνέπειας ενός δοσμένου συνόλου από χωρικές σχέσεις [45, 61] και
- για την προεπεξεργασία χωρικών ερωτήσεων έτσι ώστε να μην αποτιμούμε ασυνεπείς ερωτήσεις και να μειώνεται ο χώρος αναζήτησης [55].

Η συνεισφορά του κεφαλαίου συνοψίζεται στα εξής:

- Χρησιμοποιούμε τους αυστηρούς ορισμούς του Κεφαλαίου 5 για να μελετήσουμε το πρόβλημα της σύνθεσης. Υπολογίζουμε αρχικά τη σύνθεση δύο σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου και στη συνέχεια τη σύνθεση μίας σχέσης ενός χωρίου με μία σχέση πολλών χωρίων.
- Παρουσιάζουμε συγκεντρωτικά τα αποτελέσματά μας με τη μορφή ενός αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος, χωρίς να κάνει αναφορές σε πίνακες σύνθεσης, υπολογίζει τη σύνθεση μίας σχέσης ενός χωρίου με μία άλλη σχέση κατεύθυνσης, ενός ή πολλών χωρίων.

Το κεφάλαιο αυτό δομείται ως εξής: Στην Ενότητα 6.1 παρουσιάζουμε τον ορισμό της σύνθεσης και εισάγουμε μερικούς νέους συμβολισμούς που θα μας επιτρέψουν να διατυπώσουμε με κομψό τρόπο τα αποτελέσματά μας. Στην Ενότητα 6.2 υπολογίζουμε τη σύνθεση δύο σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου και στην Ενότητα 6.3 τη σύνθεση μίας σχέσης ενός χωρίου με μία σχέση ενός χωρίου. Στην Ενότητα 6.3 παρουσιάζουμε επίσης και τον αλγόριθμο COMPOSE , ο οποίος συγκεντρώνει τα αποτελέσματά μας και υπολογίζει τη σύνθεση μίας σχέσης κατεύθυνσης ενός χωρίου με μία οποιαδήποτε σχέση κατεύθυνσης, ενός ή πολλών χωρίων. Τέλος, στην Ενότητα 6.4 παρουσιάζουμε τα συμπεράσματά μας.

6.1 Βασικοί ορισμοί και έννοιες

Υπάρχουν δύο ορισμοί της σύνθεσης και ο καθένας υπαγορεύει ένα διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος. Ο επόμενος είναι ο συνήθης ορισμός της σύνθεσης δύο δυαδικών σχέσεων που συναντούμε στη συνολοθεωρία [48].

Ορισμός 6.1 Έστω R_1 και R_2 δύο σχέσεις κατεύθυνσης. Η υπαρξιακή σύνθεση (*existential composition*) των σχέσεων R_1 και R_2 , την οποία συμβολίζουμε με $R_1; R_2$, είναι μία άλλη σχέση κατεύθυνσης του συνόλου \mathcal{B}^* που ικανοποιεί την εξής συνθήκη. Για τυχαίες περιοχές a και c , η σχέση $a; R_1; R_2 c$ ισχύει εάν και μόνο εάν υπάρχει μία περιοχή b τέτοια ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $a; R_1 b$ και $b; R_2 c$.

Ο δεύτερος ορισμός είναι ο εξής [7, 46]:

Ορισμός 6.2 Έστω R_1 και R_2 δύο σχέσεις κατεύθυνσης. Η βασισμένη στη συνέπεια σύνθεση (*consistency-based composition*) των σχέσεων R_1 και R_2 , την οποία συμβολίζουμε με $R_1 \circ R_2$, είναι μία άλλη σχέση κατεύθυνσης του συνόλου \mathcal{B}^* που ικανοποιεί την εξής συνθήκη. Η $R_1 \circ R_2$ περιέχει όλες τις σχέσεις $Q \in \mathcal{B}^*$ ώστε να υπάρχουν περιοχές $a, b, c \in REG^*$ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις $a; R_1 b, b; R_2 c$ και $a; Q c$.

Ο Ορισμός 6.2 είναι πιο αδύναμος του Ορισμού 6.1. Παρατηρούμε πως ισχύει $R_1; R_2 \subseteq R_1 \circ R_2$. Ωστόσο σε αυτή την ενότητα όμως μελετηθεί η πράξη της βασισμένης στη συνέπεια σύνθεσης την οποία από εδώ και πέρα όμως αποκαλούμε απλά σύνθεση.

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα της σύνθεσης βήμα-βήμα. Επομένως για αρχή όμως θα εξετάσουμε την περίπτωση της σύνθεσης δύο βασικών σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου. Πρώτα όμως θα εισάγουμε μερικά νέα σύμβολα, που θα μας επιτρέψουν να παραστήσουμε πολύπλοκες διαζευκτικές σχέσεις του δυναμοσυνόλου \mathcal{B}^* .

Έστω R_1, \dots, R_k σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου. Συμβολίζουμε με $\delta(R_1, \dots, R_k)$ τις διαζευκτικές σχέσεις του \mathcal{B}^* που μπορούν να κατασκευαστούν συνδυάζοντας τις σχέσεις ενός χωρίου R_1, \dots, R_k . Για παράδειγμα το σύμβολο $\delta(No, We, Bb)$ αναπαριστά τη σχέση:

$$\{No, We, Bb, No:We, No:Bb, We:Bb, No:We:Bb\}$$

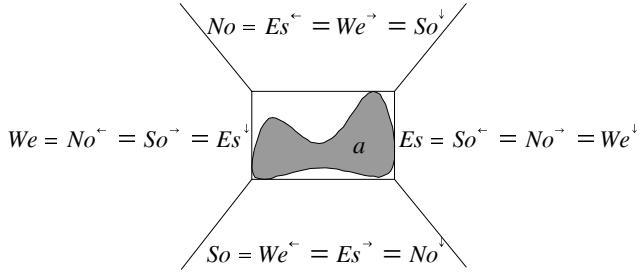
Επίσης, ορίζουμε:

$$\begin{aligned} \delta(\delta(R_{11}, \dots, R_{1k_1}), \delta(R_{21}, \dots, R_{2k_2}), \dots, \delta(R_{m1}, \dots, R_{mk_m})) = \\ \delta(R_{11}, \dots, R_{1k_1}, R_{21}, \dots, R_{2k_2}, R_{m1}, \dots, R_{mk_m}) \end{aligned}$$

Με U_{dir} όμως συμβολίζουμε την καθολική σχέση κατεύθυνσης $\delta(No, We, So, Es, Bb)$.

Έστω R μία από τις βασικές σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου No, We, So και Es . Οι τέσσερις αυτές σχέσεις βρίσκονται περιφερειακά της σχέσης Bb . Συμβολίζουμε με R^\leftarrow τη σχέση που συναντάμε στο επίπεδο, ξεκινώντας από την R και κινούμενοι με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού. Έχουμε δηλαδή $No^\leftarrow = We, We^\leftarrow = So, So^\leftarrow = Es$ και $Es^\leftarrow = No$.

Αντίστοιχα με R^\rightarrow συμβολίζουμε τη σχέση που συναντάμε χινούμενοι με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, δηλαδή $No^\rightarrow = Es$, $We^\rightarrow = No$, $So^\rightarrow = We$ και $Es^\rightarrow = So$. Τέλος με R^\downarrow συμβολίζουμε τη σχέση που βρίσκεται «αντιδιαμετρικά» της R , δηλαδή $No^\downarrow = So$, $We^\downarrow = Es$, $So^\downarrow = No$ και $Es^\downarrow = We$. Συνοψίζουμε τα παραπάνω στο Σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Επιπλέον συμβολισμοί των χωρίων No , We , So και Es .

6.2 Σύνθεση βασικών σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου

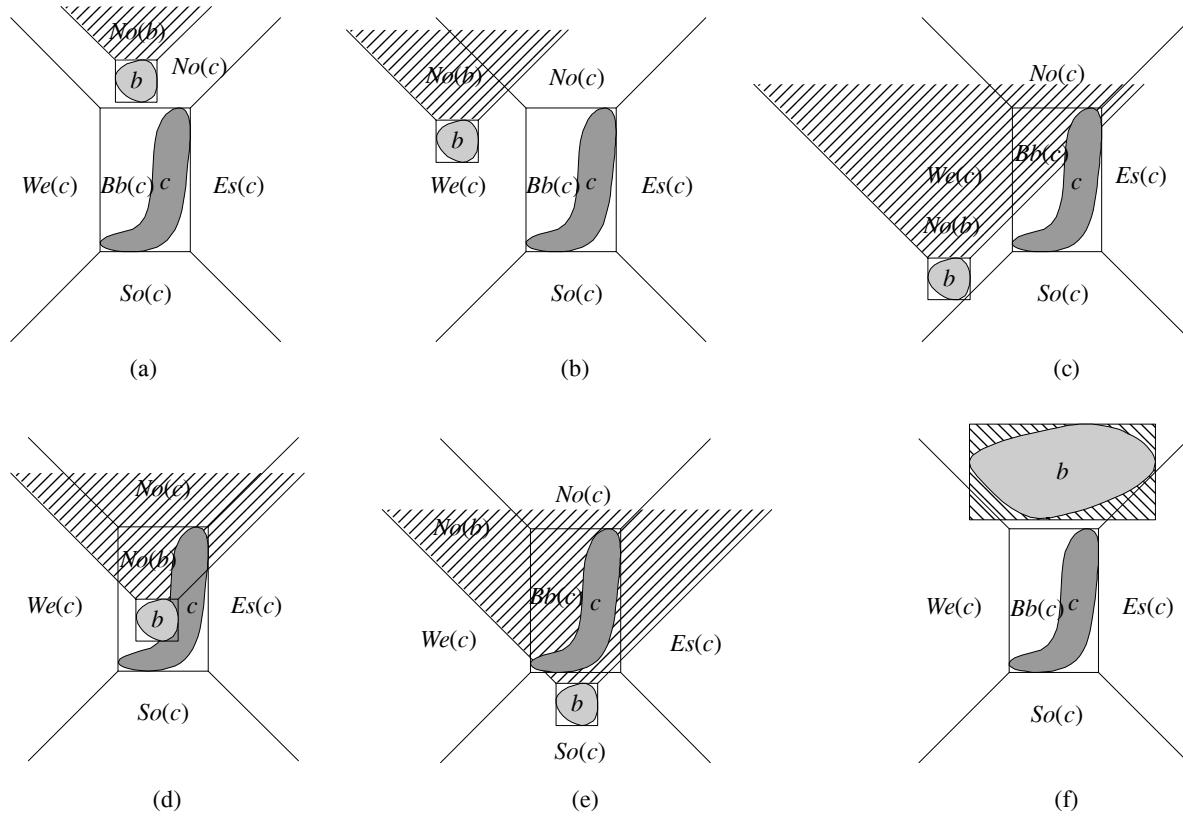
Λήμμα 6.1 Έστω R_1 και R_2 δύο σχέσεις κατεύθυνσης ενός χωρίου. Η σύνθεση $R_1 \circ R_2$ των δύο σχέσεων δίνεται από τον Πίνακα 6.1.

$R_1 \setminus R_2$	No	So	We	Es	Bb
No	No	U_{dir}	$\delta(No, We, Es, Bb)$	$\delta(No, We, Es, Bb)$	$\delta(No, We, Es, Bb)$
So	U_{dir}	So	$\delta(We, So, Es, Bb)$	$\delta(We, So, Es, Bb)$	$\delta(We, So, Es, Bb)$
We	$\delta(No, We, So, Bb)$	$\delta(No, We, So, Bb)$	We	U_{dir}	$\delta(No, We, So, Bb)$
Es	$\delta(No, So, Es, Bb)$	$\delta(No, So, Es, Bb)$	U_{dir}	Es	$\delta(No, So, Es, Bb)$
Bb	$\delta(No, We, Es)$	$\delta(We, So, Es)$	$\delta(No, We, So)$	$\delta(No, So, Es)$	Bb

Πίνακας 6.1: Η σύνθεση $R_1 \circ R_2$ των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου R_1 και R_2 .

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2, αναζητούμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{B}^*$, ώστε να υπάρχουν τρεις περιοχές του REG^* ώστε να ισχύει $a \ R_1 \ b$, $b \ R_2 \ c$ και $a \ Q \ c$. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε για να εντοπίσουμε το σύνολο Q είναι η εξής: Θεωρούμε μία τυχαία περιοχή c και μία τυχαία περιοχή b ώστε $b \ R_2 \ c$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 $a \ R_1 \ b \Leftrightarrow a \subset R_1(b)$. Εφόσον η περιοχή a μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μέσα στο χωρίο $R_1(b)$, εάν εντοπίσουμε όλα τα χωρία της περιοχής c που έχουν κοινά σημεία με το χωρίο $R_1(b)$, τότε γνωρίζουμε και σε ποια χωρία της περιοχής c μπορεί να βρίσκεται η περιοχή a . Δηλαδή εάν $R_1(b) \cap Q_1(c) \neq \emptyset, \dots, R_1(b) \cap Q_k(c) \neq \emptyset \Rightarrow Q = \delta(Q_1, \dots, Q_k)$.

Η απόδειξη γίνεται με ανάλυση περιπτώσεων. Έστω ότι $R_1 = No$ και $R_2 = No$. Η περίπτωση αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 6.2a. Η περιοχή b βρίσκεται στο χωρίο $No(c)$. Το χωρίο $No(b)$, μέσα στο οποίο μπορεί να βρίσκεται η περιοχή a , παρουσιάζεται γραμμοσκιασμένο. Οι γημευθείσες που οριοθετούν το χωρίο $No(c)$, είναι παράλληλες με τις αντίστοιχες του χωρίου $No(b)$. Εφόσον είναι παράλληλες, δεν τέμνονται και επομένως σε καμία περίπτωση το χωρίο $No(b)$ δεν



Σχήμα 6.2: Σύνθεση σχέσεων ενός χωρίου.

επεκτείνεται έξω από το $No(c)$. Επομένως το χωρίο $No(b)$ βρίσκεται μέσα στο $No(c)$ και ως εκ τούτου, όπως έχουμε πει, μία περιοχή a ώστε $a \cap No(b) \neq \emptyset$ μπορεί να βρίσκεται μονάχα μέσα στο χωρίο $No(c)$, δηλαδή $a \cap No(c) = \emptyset$ και επομένως $No \circ No = No$. Συμμετρικές είναι οι περιπτώσεις $We \circ We$, $So \circ So$ και $Es \circ Es$.

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση όπου $R_1 = No$ και $R_2 = We$, στα Σχήματα 6.2b και 6.2c. Στην περίπτωση του Σχήματος 6.2b βλέπουμε πως το χωρίο $No(b)$ έχει κοινά σημεία με τα χωρία $No(c)$ και $We(c)$. Θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε πως $No \circ We = \delta(No, We)$. Όμως, για την περιοχή b του Σχήματος 6.2c παρατηρούμε πως το χωρίο $No(b)$ έχει κοινά σημεία με τα χωρία $No(c)$, $We(c)$, $Es(c)$ και $Bb(c)$. Σε αυτή την περίπτωση και σε οποιαδήποτε αντίστοιχη προκύψει στη συνέχεια, πρέπει να θεωρούμε τη «χειρότερη» δυνατή περίπτωση, εκείνη δηλαδή όπου η σύνθεση μας παρέχει τη λιγότερη δυνατή πληροφορία ή αλλιώς το μεγαλύτερο σύνολο $Q = R_1 \circ R_2$. Η περίπτωση αυτή, είναι εκείνη που παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.2c, καθώς και πάλι λόγω της παραλληλίας των ημιευθειών που πηγάζουν από τα ελάχιστα περικλείοντα πλαίσια, δεν μπορούμε ποτέ να έχουμε $No(b) \cap So(c) \neq \emptyset$. Επομένως $No \circ We = \delta(No, We, Es, Bb)$. Συμμετρικές είναι οι περιπτώσεις $No \circ Es$, $We \circ No$ και $We \circ So$, $So \circ We$ και $So \circ Es$, $Es \circ No$ και $Es \circ So$.

Η περίπτωση $R_1 = No$ και $R_2 = Bb$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.2d. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση που εξετάσαμε, το μόνο χωρίο της περιοχής c που δεν γίνεται να βρίσκεται

βόρεια της περιοχής b , είναι το νότιο, δηλαδή $No \circ Bb = \delta(No, We, Es, Bb)$. Συμμετρικές είναι οι περιπτώσεις $We \circ Bb$, $So \circ Bb$ και $Es \circ Bb$.

Στο Σχήμα 6.2e απεικονίζεται η περίπτωση $R_1 = No$ και $R_2 = So$. Όπως βλέπουμε το χωρίο $No(b)$ μπορεί να έχει κοινά σημεία με όλα τα χωρία της περιοχής c . Επομένως $No \circ So = U_{dir}$. Συμμετρικές περιπτώσεις είναι οι $We \circ So$, $So \circ No$ και $Es \circ We$.

Μέχρι τώρα έχουμε καλύψει τις τέσσερις πρώτες γραμμές του Πίνακα 6.1. Για την τελευταία γραμμή θα εξετάσουμε την περίπτωση $R_1 = Bb$ και $R_2 = No$ στο Σχήμα 6.2f και οι υπόλοιπες είναι συμμετρικές. Όπως είχαμε επισημάνει και στην Ενότητα 5.3 και παρουσιάσαμε στο Σχήμα 5.4a, αν και μία περιοχή μπορεί να βρίσκεται εξολοκλήρου σε ένα περιφερειακό τμήμα μίας άλλης, το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της μπορεί να βρίσκεται και στις δύο γειτονικές περιοχές της περιφέρειας. Επομένως στην συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι $Bb \circ No = \delta(No, We, Es)$. ■

Έχοντας καταφέρει να υπολογίσουμε τη σύνθεση δύο σχέσεων ενός χωρίου, προχωρούμε στο επόμενο βήμα, στη σύνθεση μίας σχέσης ενός χωρίου με μία πολλών χωρίων

6.3 Σύνθεση βασικής σχέσης ενός χωρίου με βασική σχέση πολλών χωρίων

Στην απόδειξη του Λήμματος 6.1, για να υπολογίσουμε τη σύνθεση $R_1 \circ R_2$ δύο βασικών σχέσεων κατεύθυνσης ενός χωρίου R_1 , R_2 , κάναμε την εξής παρατήρηση. Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2, αναζητούμε το σύνολο $Q \subseteq \mathcal{B}^*$, ώστε να υπάρχουν τρεις περιοχές του REG^* ώστε να ισχύει $a \ R_1 \ b$, $b \ R_2 \ c$ και $a \ Q \ c$. Για να εντοπίσουμε το σύνολο Q κάνουμε τα παρακάτω: Θεωρούμε μία τυχαία περιοχή c και μία τυχαία περιοχή b ώστε $b \ R_2 \ c$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 5.2 $a \ R_1 \ b \Leftrightarrow a \subset R_1(b)$. Εφόσον η περιοχή a μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε μέσα στο χωρίο $R_1(b)$, εάν υπολογίσουμε όλα τα χωρία της περιοχής c που έχουν κοινά σημεία με το χωρίο $R_1(b)$, τότε γνωρίζουμε και σε ποια χωρία της περιοχής c μπορεί να βρίσκεται η περιοχή a . Δηλαδή $R_1(b) \cap Q_1(c) \neq \emptyset, \dots, R_1(b) \cap Q_k(c) \neq \emptyset \Rightarrow Q = \delta(Q_1, \dots, Q_k)$.

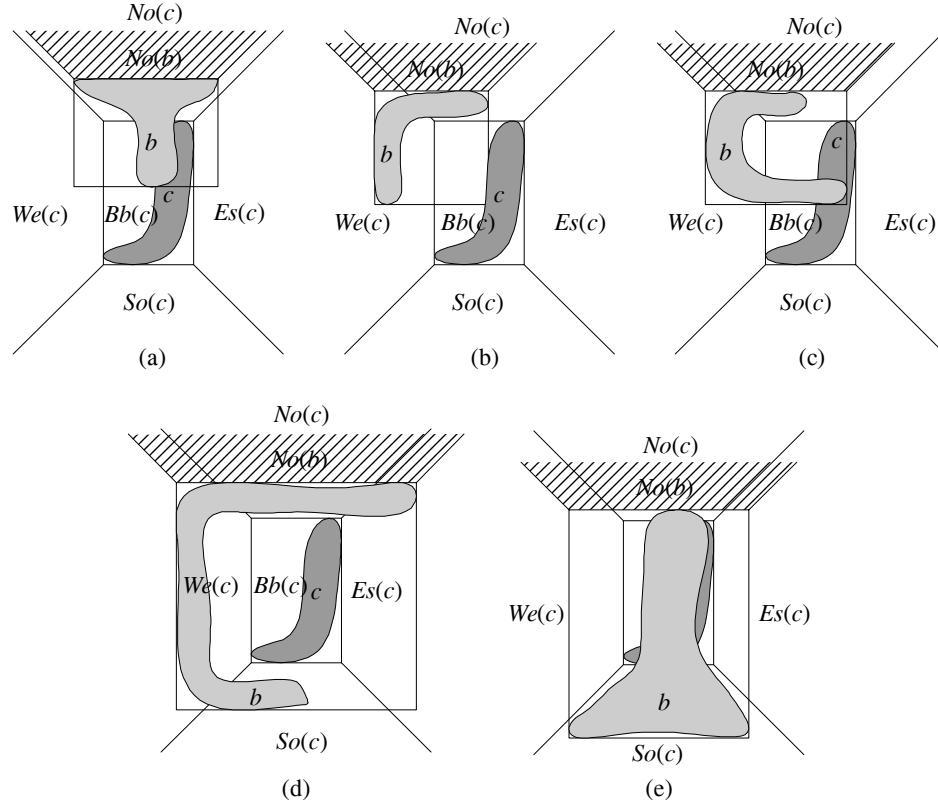
Η παρατήρηση αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και στον υπολογισμό της σύνθεσης μίας βασικής σχέσης κατεύθυνσης ενός χωρίου με μία βασική σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή και τη θέση του χωρίου $R_1(b)$, στην περίπτωση που $R_1 = \{No, We, So, Es\}$, δεν είναι ανάγκη να γνωρίζουμε ολόκληρο το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής b , παρά μονάχα εκείνη την πλευρά του που ορίζει το χωρίο $R_1(b)$. Για παράδειγμα, γνωρίζοντας μονάχα τη βόρεια πλευρά του $m_{bb}(b)$ και εφόσον οι γωνίες αναχώρησης των ημιευθειών που περικλείουν μαζί με την πλευρά το χωρίο $No(b)$ εξαρτώνται από τη χαρακτηριστική γωνία του μοντέλου, μπορούμε να προσδιορίσουμε το χωρίο $No(b)$. Επεκτείνοντας αυτή τη σκέψη μπορούμε να πούμε πως κατά τον υπολογισμό της σύνθεσης μίας σχέσης ενός χωρίου R_1 με μία βασική σχέση R_2 , σημασία έχουν μονάχα οι δυνατές θέσεις της κατάλληλης πλευράς του $m_{bb}(b)$, όπως μπορούν να προκύψουν υπό τον περιορισμό $b \ R_2 \ c$. Επομένως, θα συμβολίζουμε με $acme(R_1, a)$ την πλευρά του ελαχίστου περικλείοντος πλαισίου της περιοχής a που καθορίζει το χωρίο $R_1(a)$, με $R_1 = \{No, We, So, Es\}$.

Μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω για να αποδείξουμε τα εξής λήμματα:

Λήμμα 6.2 Έστω $R_1 = \{No, We, So, Es\}$ βασική σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου και $R_2 = R_{21} \cup \dots \cup R_{2k}$ βασική σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων. Εάν $R_1 \in \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$, τότε:

- (i) $R_1 \circ R_2 = R_1$, εάν $R_2 = R_1:Bb$
- (ii) $R_1 \circ R_2 = \delta(R_1, R_1^\leftarrow)$, εάν $R_2 = \{R_1:R_1^\leftarrow, R_1:R_1^\leftarrow:Bb\}$
- (iii) $R_1 \circ R_2 = \delta(R_1, R_1^\rightarrow)$, εάν $R_2 = \{R_1:R_1^\rightarrow, R_1:R_1^\rightarrow:Bb\}$
- (iv) $R_1 \circ R_2 = \delta(R_1, R_1^\leftarrow, R_1^\rightarrow)$, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με ανάλυση περιπτώσεων. Θεωρούμε ότι $R_1 = No$, ενώ η



Σχήμα 6.3: Απόδειξη του Λήμματος 6.2.

απόδειξη για τις σχέσεις ενός χωρίου We , So και Es γίνεται ανάλογα.

Η περίπτωση (i) απεικονίζεται στο Σχήμα 6.2a. Όπως βλέπουμε το ελάχιστο περικλείον πλαίσιο της περιοχής b , $mbb(b)$, βρίσκεται στα χωρία $No(c)$, $We(c)$, $Es(c)$ και $Bb(c)$ της περιοχής c . Ωστόσο η βόρεια πλευρά του, $acme(No, b)$, μπορεί να βρίσκεται μόνο μέσα στο χωρίο $No(c)$ και επομένως το χωρίο $No(b)$ έχει κοινά σημεία μόνο με το χωρίο $N(c)$. Δηλαδή $No \circ No:Bb = No$.

Η περίπτωση (ii) απεικονίζεται στα Σχήματα 6.2b, για $R_2 = No:We$ και 6.2c, για $R_2 = No:We:Bb$. Στην περίπτωση όπου $R_2 = No:We$, η πλευρά $acme(No, b)$ μπορεί να βρίσκεται μόνο στα χωρία $No(c)$ και $We(c)$ της περιοχής c . Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση όπου

$R_2 = No:We:Bb$. Αυτό συμβαίνει διότι δεδομένου ότι στη σχέση R_2 υπάρχει το χωρίο No , η περιοχή b θα έχει κάποιο τμήμα της στο χωρίο $No(c)$ και επομένως η βόρεια πλευρά του $acme(No, b)$ δεν μπορεί να βρεθεί πιο «νότια» από το χωρίο $No(c)$. Παρατηρούμε πως το χωρίο $No(b)$, που απεικονίζεται γραμμοσκιασμένο, έχει κοινά σημεία μόνο με τα χωρία $No(c)$ και $No(c)$. Επομένως $No \circ \{No:We, No:We:Bb\} = \delta(No, We)$.

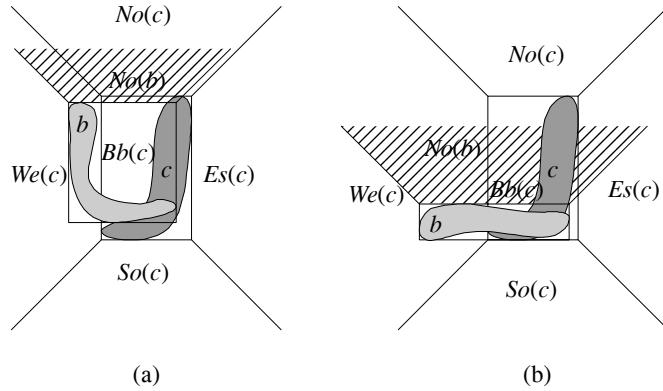
Η περίπτωση (iii) είναι συμμετρική της περίπτωσης (ii).

Για οποιαδήποτε άλλη σχέση R_2 που περιέχει το χωρίο No , η πλευρά $acme(No, b)$ μπορεί να βρίσκεται στα χωρία $No(c)$, $We(c)$ και $Es(c)$ οπότε $No \circ R_2 = \delta(No, We, Es)$. Πρέπει ωστόσο να δείξουμε πως η πλευρά $acme(No, b)$ μπορεί να βρίσκεται και στα τρία χωρία. Δεν είναι δύσκολο να συλλάβουμε μία τέτοια περίπτωση όταν στη σχέση R_2 υπάρχουν τα χωρία We και Es (Σχήμα 6.2d). Δεν είναι όμως προφανές ότι το ίδιο μπορεί να συμβεί και όταν στη σχέση R_2 υπάρχει και το χωρίο So . Αυτή η περίπτωση απεικονίζεται στο Σχήμα 6.2e. ■

Λήμμα 6.3 Έστω $R_1 = \{No, We, So, Es\}$ βασική σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου και $R_2 = R_{21} \dots R_{2k}$ βασική σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων. Εάν $R_1 \notin \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$ και $Bb \in \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$, τότε:

$$R_1 \circ R_2 = \delta(R_1, R_1^-, R_1^+, Bb)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με ανάλυση περιπτώσεων. Θεωρούμε ότι $R_1 = No$, ενώ η



Σχήμα 6.4: Απόδειξη του Λήμματος 6.3.

απόδειξη για τις σχέσεις ενός χωρίου We , So και Es γίνεται ανάλογα.

Υπό τη συνθήκη b $R_2 c$, με την R_2 να περιέχει το χωρίο Bb , μα όχι το χωρίο No , η πλευρά $acme(No, b)$ μπορεί να βρίσκεται οπουδήποτε, αρκεί να είναι πάνω τη νότια πλευρά του $mbb(c)$, την $acme(No, b)$ μπορεί να βρίσκεται στα χωρία $No(c)$, $We(c)$, $Es(c)$ και $Bb(c)$, μα όχι στο χωρίο $So(c)$. Στα Σχήματα 6.4a και 6.4b βλέπουμε δύο διαφορετικές μορφές που μπορεί να έχει η περιοχή b ώστε $b We:Bb c$. Μπορούμε να δούμε πως εφόσον υπάρχει πάντα ένα τμήμα της περιοχής b στο χωρίο $Bb(c)$, η πλευρά $acme(No, b)$ δεν μπορεί να βρεθεί στο χωρίο $No(c)$.

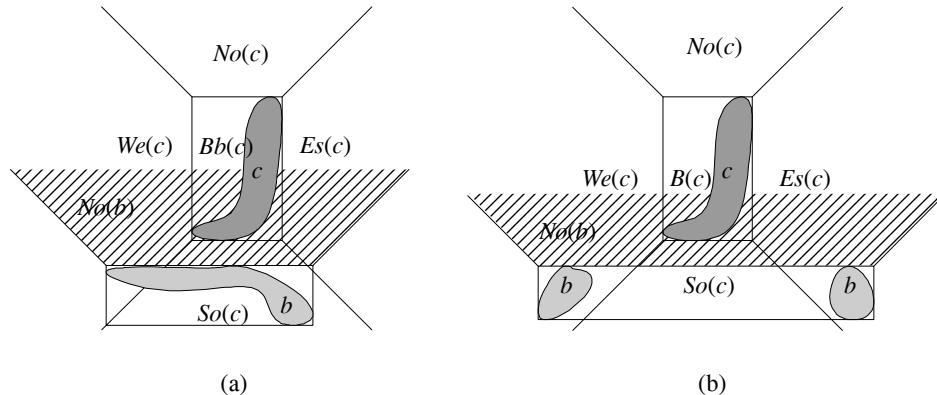
Άμα θεωρήσουμε την περιοχή b να έχει τη μορφή του Σχήματος 6.4a, το χωρίο $No(b)$ έχει κοινά σημεία με τα χωρία $No(c)$ και $We(c)$ και η σύνθεση ισούται με $\delta(No, We)$, ενώ άμα θεωρήσουμε την περιοχή b με τη μορφή του Σχήματος 6.4b την υπολογίζουμε ίση με $\delta(No, We, Es, Bb)$. Αυτή την περίπτωση την έχουμε αντιμετωπίσει και στην απόδειξη του Λήμματος 6.1. Πρέπει να θεωρήσουμε πως η περιοχή b έχει τέτοια μορφή, ώστε η σύνθεση να μας δίνει τη λιγότερη δυνατή πληροφορία ή αλλιώς το μεγαλύτερο σύνολο $R_1 \circ R_2$.

Επομένως υπό τη συνθήκη b $R_2 c$, με την R_2 να περιέχει το χωρίο Bb , μα όχι το χωρίο No , μπορούμε να βρούμε μία περιοχή b , ώστε η πλευρά $acme(No, Bb)$ να βρίσκεται στα χωρία $Bb(c)$ ή $Bb(c)$, $We(c)$ ή $Bb(c)$, $Es(c)$ ή $Bb(c)$, $We(c)$, $Es(c)$. Σε κάθε όμως περίπτωση η σύνθεση, εφόσον υπάρχει ένα τμήμα της πλευράς μέσα στο χωρίο $Bb(c)$ θα ισούται με $No \circ R_2 = \delta(No, We, Es, Bb)$. ■

Λήμμα 6.4 Έστω $R_1 = \{No, We, So, Es\}$ βασική σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου και $R_2 = R_{21} \cup \dots \cup R_{2k}$ βασική σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων. Εάν $R_1 \notin \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$ και $Bb \notin \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$, τότε:

$$R_1 \circ R_2 = U_{dir}$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με ανάλυση περιπτώσεων. Θεωρούμε ότι $R_1 = No$, ενώ η



Σχήμα 6.5: Απόδειξη του Λήμματος 6.4.

απόδειξη για τις σχέσεις ενός χωρίου We , So και Es γίνεται ανάλογα.

Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτή του Λήμματος 6.3. Η R_2 μπορεί να είναι μία από τις σχέσεις του συνόλου $\{We:Es, We:So, So:Es, We:So:Es\}$. Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να σχηματίσουμε μία περιοχή b , ώστε η πλευρά $acme(No, b)$ να βρίσκεται στα χωρία $So(c)$ ή $So(c)$, $We(c)$ ή $So(c)$, $Es(c)$ ή $So(c)$, $We(c)$, $Es(c)$. Σε όλες τις περιπτώσεις όμως εφόσον υπάρχει ένα τμήμα της πλευράς μέσα στο χωρίο $So(c)$, το χωρίο $No(b)$ θα έχει κοινά σημεία με όλα τα χωρία της περιοχής c και η σύνθεση θα ισούται με U_{dir} .

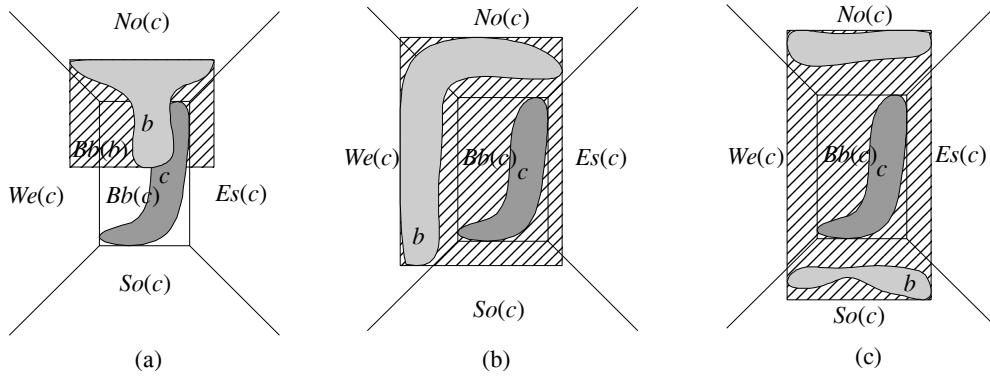
Στην περίπτωση που η σχέση R_2 περιέχει το χωρίο So , είναι εύκολο να φανταστούμε μία μορφή που μπορεί να έχει η περιοχή b , ώστε η πλευρά $acme(No, b)$ να βρίσκεται τουλάχιστον στο χωρίο $So(c)$. Για παράδειγμα στο Σχήμα 6.5a απεικονίζονται οι περιοχές b και c με b $We:So:c$.

Όπως πάντα, το χωρίο $No(b)$ παρουσιάζεται γραμμοσκιασμένο. Δεν είναι τόσο προφανής η περίπτωση $b We:So c$. Η περίπτωση αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 6.5b. ■

Λήμμα 6.5 Έστω Bb η βασική σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου και $R_2 = R_{21} \cdots R_{2k}$ βασική σχέση κατεύθυνσης πολλών χωρίων. Έστω επιπλέον $R_1 = \{No, We, So, Es\}$, τότε:

- (i) $Bb \circ R_2 = \delta(R_1, R_1^-, R_1^+, Bb)$, εάν $R_2 = R_1:Bb$
- (ii) $Bb \circ R_2 = U_{dir}$, σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση.

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται με ανάλυση περιπτώσεων. Θεωρούμε ότι $R_1 = No$, ενώ η



Σχήμα 6.6: Απόδειξη του Λήμματος 6.5.

απόδειξη για τις σχέσεις ενός χωρίου We , So και Es γίνεται ανάλογα.

Η περίπτωση (i), όπου $R_2 = No:Bb$, παρουσιάζεται στο Σχήμα 6.6a. Μπορούμε να δούμε πως το χωρίο $Bb(b)$ μπορεί να έχει κοινά σημεία με όλα τα χωρία της περιοχής c εκτός του $So(c)$. Επομένως $No \circ No:Bb = \delta(No, We, Es, Bb)$.

Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση το χωρίο $Bb(b)$ μπορεί να έχει κοινά σημεία με όλα τα χωρία της περιοχής c . Στο Σχήμα 6.6b παρουσιάζεται το χωρίο $Bb(b)$ γραμμοσκιασμένο, για σχέση $R_2 = No:We$ που αποτελείται από δύο γειτονικά χωρία και στο Σχήμα 6.6c για σχέση $R_2 = No:So$ για δύο «αντιδιαμετρικά» χωρία. Μπορούμε εύκολα να φανταστούμε πως το ίδιο θα συμβαίνει και για σχέσεις R_2 με περισσότερα των δύο χωρίων. ■

Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 και 6.5 μπορούμε να υπολογίσουμε τη σύνθεση μίας σχέσης κατεύθυνσης ενός χωρίου με μία οποιαδήποτε σχέση κατεύθυνσης, ενός ή πολλών χωρίων. Μπορούμε όμως να συνδυάσουμε τα παραπάνω λήμματα και να διατυπώσουμε έναν αλγόριθμο ο οποίος, χωρίς να κάνει αναφορές σε πίνακες σύνθεσης, μας υπολογίζει τη σύνθεση. Ονομάζουμε τον αλγόριθμο αυτό COMPOSE και τον παρουσιάζουμε στο Σχήμα 6.3.

6.4 Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιήσαμε το αυστηρό πλαίσιο εργασίας μας από το Κεφάλαιο 5 για να μελετήσουμε την πράξη της σύνθεσης δύο βασικών σχέσεων κατεύθυνσης. Αρχικά

Θεωρήσαμε την απλούστερη περίπτωση σύνθεσης, ανάμεσα σε δύο σχέσεις ενός χωρίου. Στη συνέχεια μελετήσαμε τη σύνθεση μία σχέσης ενός χωρίου με μία σχέση πολλών χωρίων. Τέλος, παρουσιάσαμε τα αποτελέσματά μας με τη μορφή ενός αλγορίθμου, ο οποίος υπολογίζει τη σύνθεση μίας σχέσης ενός χωρίου, με μία οποιαδήποτε σχέση, ενός ή πολλών χωρίων.

Αλγόριθμος COMPOSE

Εισοδος: Μία σχέση κατεύθυνσης ενός χωρίου R_1 και μία σχέση κατεύθυνσης $R_2 = R_{21} \cdots R_{2k}$, $1 \leq k \leq 5$.

Έξοδος: Η σύνθεση των σχέσεων $R_1 \circ R_2$.

Μέθοδος:

Αν $k = 1$

Αν $R_1 \in \{No, We, So, Es\}$

Στην Περίπτωση Που η σχέση R_2 ισούται με:

R_1 : Επέστρεψε R_1 ;

R_1^\perp : Επέστρεψε U_{dir} ;

Αλλιώς: Επέστρεψε $\delta(R_1, R_1^\leftarrow, R_1^\rightarrow, Bb)$;

Τέλος Στην Περίπτωση Που

Αλλιώς Αν $R_1 = Bb$

Αν $R_2 \in \{No, We, So, Es\}$ Επέστρεψε $\delta(R_2, R_2^\leftarrow, R_2^\rightarrow)$;

Αλλιώς Αν $R_2 = Bb$ Επέστρεψε Bb ;

Τέλος Αν

Τέλος Αν

Αλλιώς Αν $2 \leq k \leq 5$

Αν $R_1 \in \{No, We, So, Es\}$

Αν $R_1 \in \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$

Στην Περίπτωση Που η σχέση R_2 ισούται με:

$\{R_1:Bb\}$: Επέστρεψε R_1 ;

$\{R_1:R_1^\leftarrow, R_1:R_1^\rightarrow:Bb\}$: Επέστρεψε $\delta(R_1, R_1^\leftarrow)$;

$\{R_1:R_1^\rightarrow, R_1:R_1^\leftarrow:Bb\}$: Επέστρεψε $\delta(R_1, R_1^\rightarrow)$;

Αλλιώς: Επέστρεψε $\delta(R_1, R_1^\leftarrow, R_1^\rightarrow)$;

Τέλος Στην Περίπτωση Που

Αλλιώς Αν $Bb \in \{R_{21}, \dots, R_{2k}\}$ Επέστρεψε $\delta(R_1, R_1^\leftarrow, R_1^\rightarrow, Bb)$;

Αλλιώς Επέστρεψε U_{dir} ;

Τέλος Αν

Αλλιώς Αν $R_1 = Bb$

Αν $R_2 = R_{21}:Bb$ Επέστρεψε $\delta(R_{21}, R_{21}^\leftarrow, R_{21}^\rightarrow, Bb)$;

Αλλιώς Επέστρεψε U_{dir} ;

Τέλος Αν

Τέλος Αν

Τέλος Αν

Σχήμα 6.7: Ο αλγόριθμος COMPOSE.

Κεφάλαιο 7

Σύνοψη

Σε αυτό το κεφάλαιο συνοψίζονται οι βασικές συνεισφορές αυτής της εργασίας. Έλλοποιήσαμε τρεις αλγορίθμους υπολογισμού των βασικών σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer και συγχρίναμε τις επιδόσεις τους. Από τα αποτελέσματά μας προέκυψε ότι ο νέος αλγόριθμος των Skiadopoulos et al είναι κατά πολύ ταχύτερος από τις τεχνικές που χρησιμοποιούν αλγορίθμου ψαλιδισμού. Παρουσιάσαμε δύο αλγορίθμους υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Billen και Clementini, δώσαμε τις εκτιμήσεις μας για την πολυπλοκότητά τους και περιγράψαμε πως τους υλοποιήσαμε. Ορίσαμε αυστηρά μία νέα οικογένεια μοντέλων για πληροφορία κατεύθυνσης. Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς αυτούς, μελετήσαμε το πρόβλημα της σύνθεσης δύο σχέσεων κατεύθυνσης και παρουσιάσαμε τα αποτελέσματά μας με τη μορφή λημμάτων και ενός αλγορίθμου.

7.1 Μελλοντικές κατευθύνσεις

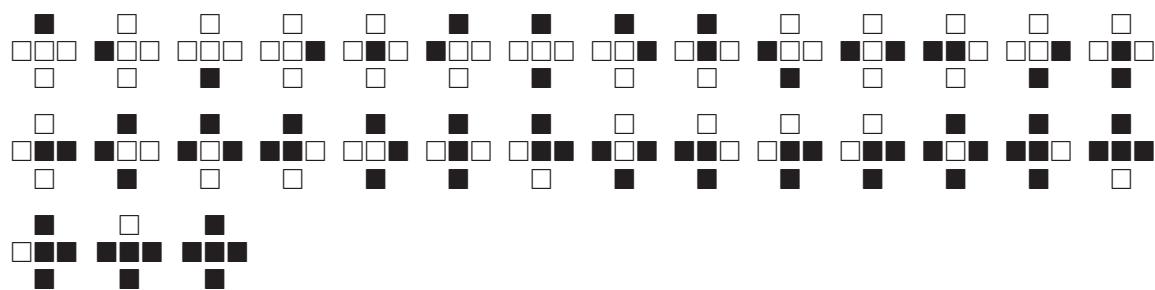
Η έρευνα στα ζητήματα που αναφέραμε μπορεί να συνεχιστεί ποικιλοτρόπως. Μερικά ανοικτά προβλήματα που μπορούν να μας απασχολήσουν στο μέλλον είναι:

- Το πείραμα για τη μέτρηση της επίδοσης των αλγορίθμων υπολογισμού σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Goyal και Egenhofer, έγινε χρησιμοποιώντας συνθετικά δεδομένα. Για να είναι τα αποτελέσματά του πιο αξιόπιστα, πρέπει να επαναληφθεί και με πραγματικά δεδομένα.
- Χρησιμοποιώντας τους αυστηρούς ορισμούς του Κεφαλαίου 5, μπορούμε να διατυπώσουμε και να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του ελέγχου συνέπειας στη νέα οικογένεια μοντέλων που παρουσιάσαμε.
- Αν και σε αυτή την εργασία αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα του υπολογισμού των σχέσεων κατεύθυνσης στο μοντέλο των Billen και Clementini, τα άλλα δύο βασικά προβλήματα, της σύνθεσης και του ελέγχου συνέπειας, παραμένουν άλυτα.

Παράρτημα A'

Βασικές Σχέσεις Κατεύθυνσης

Το σύνολο \mathcal{D}^* περιέχει τις ακόλουθες 31 βασικές σχέσεις κατεύθυνσης.



Βιβλιογραφία

- [1] A.I. Abdelmoty. *Modeling and Reasoning in Spatial Databases: A Deductive Object-Oriented Approach*. Διδακτορική Διατριβή, Department of Computing and Electrical Engineering, Heriot-Watt University, 1995.
- [2] A.I. Abdelmoty και B.A. El-Geresy. An Intersection-Based Formalism for Representing Orientation Relations in a Geographic Database. Στο *Proceedings of 2nd ACM Conference on Advances in GIS Theory*, 1994.
- [3] A.I. Abdelmoty και H. Williams. Approaches to the Representation of Qualitative Spatial Relationships for Geographic Databases. Στο *Proceedings of the Advanced Geographic Data Modeling—International GIS Workshop*, 1994.
- [4] J.F. Allen. Maintaining Knowledge about Temporal Intervals. *Communications of the ACM*, 26(11):832–843, 1983.
- [5] A.M. Andrew. Another Efficient Algorithm for Convex Hulls in Two Dimensions. *Information Processing Letters*, 9(5):216–219, 1979.
- [6] M. Aurnague και L. Vieu. A Three-Level Approach to the Semantics of Space. 1993.
- [7] B. Bennett, A. Isli και A.G. Cohn. When does a Composition Table Provide a Complete and Tractable Proof Procedure for a Relational Constraint Language? Στο *Proceedings of the IJCAI'97 workshop on Spatial and Temporal Reasoning*, 1997.
- [8] R. Billen και E. Clementini. A Model for Ternary Projective Relations Between Regions. Στο *EDBT2004 - 9th International Conference on Extending DataBase Technology*, σελίδες 310–328. Springer-Verlag, χ.χ.
- [9] R. Billen και E. Clementini. Introducing a Reasoning System Based on Ternary Projective Relations. Στο *SDH04 - 11th International Symposium on Spatial Data Handling*. Springer-Verlag, χ.χ.
- [10] S. K. Chang και E. Jungert. *Symbolic Projection for Image Information Retrieval and Spatial Reasoning*. Academic Press, 1996.
- [11] B. Chazelle. Triangulating a Simple Polygon in Linear Time. *Discrete Comput. Geom.*, 6(5):485–524, 1991.

- [12] B. Chazelle και D.P. Dobkin. Intersection of Convex Objects in Two and Three Dimensions. *J. ACM*, 34(1):1–27, 1987.
- [13] E. Clementini, P. Di Felice και D. Hernandez. Qualitative Representation of Positional Information. *Artificial Intelligence*, 95:317–356, 1997.
- [14] A.G. Cohn. The Challenge of Qualitative Spatial Reasoning. *Computing Surveys*, 27:323–326, 1995.
- [15] A.G. Cohn και S.M. Hazarika. Qualitative Spatial Representation and Reasoning: An Overview. *Fundamenta Informaticae*, 46(1-2):1–29, 2001.
- [16] M. Egenhofer και R. Franzosa. Point Set Topological Relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, 5:161–174, 1991.
- [17] M.J. Egenhofer. Reasoning about Binary Topological Relationships. Στο *Proceedings of SSD'91*, σελίδες 143–160, 1991.
- [18] M.J. Egenhofer. Spatial-Query-by-Sketch. Στο *Proceedings of the 1996 IEEE Symposium on Visual Languages*, σελίδα 60. IEEE Computer Society, 1996.
- [19] M.J. Egenhofer και J. Herring. Categorizing Binary Topological Relations Between Regions, Lines, and Points in Geographic Databases. *Τεχνική Αναφορά υπ. αριθμ. 94-1*, 1994.
- [20] M.J. Egenhofer και D. Mark. Naive Geography. 988:1–15, 1995.
- [21] B. Faltings. Qualitative Spatial Reasoning Using Algebraic Topology. Στο *Proceedings of COSIT'95*, τόμος 988 στο *LNCS*, 1995.
- [22] J. Fernyhough, A.G. Cohn και D.C. Hogg. Building Qualitative Event Models Automatically from Visual Input. Στο *Proceedings of the Sixth International Conference on Computer Vision*, σελίδα 350. IEEE Computer Society, 1998.
- [23] U. Finke και K.H. Hinrichs. Overlaying Simply Connected Planar Subdivisions in Linear Time. Στο *Proceedings of the 11th Annual Symposium on Computational Geometry*, σελίδες 119–126. ACM Press, 1995.
- [24] A.U. Frank. Qualitative Spatial Reasoning about Distances and Directions in Geographic Space. *Journal of Visual Languages and Computing*, 3:343–371, 1992.
- [25] A.U. Frank. Qualitative Spatial Reasoning: Cardinal Directions as an Example. *International Journal of GIS*, 10(3):269–290, 1996.
- [26] W.R. Franklin. Point Inclusion in Polygon Test. www.ecse.rpi.edu/Homepages/wrf/, 2000.

- [27] C. Freksa. Using Orientation Information for Qualitative Spatial Reasoning. Στο *Proceedings of COSIT'92*, τόμος 639 στο *LNCS*, σελίδες 162–178, 1992.
- [28] J.M. Gooday και A.G. Cohn. Visual Language Syntax and Semantics: A Spatial Logic approach. Στο *Proc Workshop on Theory of Visual Languages* K Marriott και B Meyer, επιμελητές, Gubbio, Italy, 1996.
- [29] R. Goyal και M.J. Egenhofer. The Direction-Relation Matrix: A Representation for Directions Relations Between Extended Spatial Objects. Στο *the annual assembly and the summer retreat of University Consortium for Geographic Information Systems Science*, 1997.
- [30] R. Goyal και M.J. Egenhofer. Cardinal Directions Between Extended Spatial Objects. *IEEE Transactions on Data and Knowledge Engineering*, (in press), 2000.
- [31] R. Goyal και M.J. Egenhofer. Consistent Queries over Cardinal Directions across Different Levels of Detail. Στο *Proceedings of the 11th International Workshop on Database and Expert Systems Applications*, 2000.
- [32] R. Graham. An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Planar Set. *Information Processing Letters*, 1(4):132–133, 1972.
- [33] G. Greiner και K. Hormann. Efficient Clipping of Arbitrary Polygons. *ACM Trans. Graph.*, 17(2):71–83, 1998.
- [34] M. Grigni, D. Papadias και C. Papadimitriou. Topological Inference. Στο *Proceedings of IJCAI'95*, 1995.
- [35] V. Haarslev. A Fully Formalized Theory for Describing Visual Notations. σελίδες 261–292, 1998.
- [36] E. Haines. *Graphics Gems IV*. Academic Press, 1994.
- [37] D. Hernandez. *Qualitative Representation of Spatial Knowledge*, τόμος 804 στο *LNAI*. Springer, 1994.
- [38] A. Islı και R. Moratz. Qualitative Spatial Representation and Reasoning: Algebraic Models for Relative Position. Τεχνική Αναφορά υπ. αριθμ. FBI-HH-M-284/99, 1999.
- [39] P.C. Kanellakis, G.M. Kuper και P.Z. Revesz. Constraint Query Languages. Στο *Proceedings of the 9th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems*, σελίδες 299–313, 1990.
- [40] D. Kirkpatrick και R. Seidel. The Ultimate Planar Convex Hull Algorithm. *SIAM J. Comput.*, 15(1):287–299, 1986.

- [41] D. Kirkpatrick και J. Snoeyink. Tentative Prune and Search Fixed-Points with Applications to Geometric Computation. 1993.
- [42] D. Kirkpatrick και J. Snoeyink. Computing Common Tangents Without a Separating Line. Στο *Proceedings of the 4th International Workshop on Algorithms and Data Structures*, σελίδες 183–193. Springer-Verlag, 1995.
- [43] M. Koubarakis και S. Skiadopoulos. Querying Temporal and Spatial Constraint Networks in PTIME. *Artificial Intelligence*, 123(1-2):223–263, 2000.
- [44] Y.D. Liang και B.A. Barsky. An Analysis and Algorithm for Polygon Clipping. *Commun. ACM*, 26(11):868–877, 1983.
- [45] G. Ligozat. Reasoning about Cardinal Directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 9:23–44, 1998.
- [46] G. Ligozat. When tables tell it all: Qualitative spatial and temporal reasoning based on linear ordering. Στο *Proceedings of COSIT-01* D.R. Montello, επιμελητής, τόμος 2205 στο *LNCS*, σελίδες 60–75. Springer, 2001.
- [47] S. Lipschutz. *General Topology*. McGraw Hill, 1965.
- [48] S. Lipschutz. *Set Theory and Related Topics*. McGraw Hill, 1998.
- [49] A. Melkman. On-line Construction of the Convex Hull of a Simple Polyline. *Information Processing Letters*, 25(1):11–12, 1987.
- [50] D.M. Mount. Handbook of Discrete and Computational Geometry. σελίδες 615–630, 1997.
- [51] A. Mukerjee και G. Joe. A Qualitative Model for Space. Στο *Proceedings of AAAI'90*, σελίδες 721–727, 1990.
- [52] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C (2nd Edition)*. Cambridge University Press, 1998.
- [53] J. O'Rourke, C.B. Chien, T. Olson και D. Naddor. A New Linear Algorithm for Intersecting Convex Polygons. *Computer Graphics and Image Processing*, 19:384–391, 1982.
- [54] D. Papadias. *Relation-Based Representation of Spatial Knowledge*. Διδακτορική Διατριβή, Dept. of Electrical and Computer Engineering, National Technical University of Athens, 1994.
- [55] D. Papadias, N. Arkoumanis και N. Karacapilidis. On The Retrieval of Similar Configurations. Στο *Proceedings of 8th International Symposium on Spatial Data Handling (SDH)*, 1998.

- [56] D. Papadias και T. Sellis. Spatial Reasoning Using Symbolic Arrays. Στο *Proceedings of the International Conference on GIS – From Space to Territory: Theories and Methods of Spatio-Temporal Reasoning in Geographic Space*, Pisa, Italy, 1992.
- [57] F. Preparata και S. Hong. Convex Hulls of Finite Sets of Points in Two and Three Dimensions. *Commun. ACM*, 20(2):87–93, 1977.
- [58] F. Preparata και M. Shamos. *Computational Geometry: An Introduction*. Springer Verlag, 1985.
- [59] D.A. Randell, Z. Cui και A.G. Cohn. A Spatial Logic Based on Regions and Connection. Στο *Proc. 3rd Int. Conf. on Knowledge Representation and Reasoning*, σελίδες 165–176, San Mateo, 1992. Morgan Kaufmann.
- [60] J. Renz. *Qualitative Spatial Reasoning with Topological Information*. Springer-Verlag, 2002.
- [61] J. Renz και B. Nebel. On the Complexity of Qualitative Spatial Reasoning: A Maximal Tractable Fragment of the Region Connection Calculus. *Artificial Intelligence*, 1-2:95–149, 1999.
- [62] S. Skiadopoulos, C. Giannoukos, P. Vassiliadis, T. Sellis και M. Koubarakis. Computing and Handling Cardinal Direction Information. Στο *Proceedings of the 9th Int'l Conference on Extending Database Technology (EDBT'04)*, τόμος 2992 στο LNCS, σελίδες 329–347. Springer, 2004.
- [63] S. Skiadopoulos και M. Koubarakis. Qualitative Spatial Reasoning with Cardinal Directions. Στο *Proceedings of the 7th International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (CP'02)*, τόμος 2470 στο LNCS, σελίδες 341–355. Springer, 2002.
- [64] S. Skiadopoulos και M. Koubarakis. Composing Cardinal Direction Relations. *Artificial Intelligence*, 152(2):143–171, 2004.
- [65] S. Skiadopoulos και M. Koubarakis. On the Consistency of Cardinal Directions Constraints. *Artificial Intelligence*, 2004.
- [66] D. Sunday. Fast Winding Number Inclusion of a Point in a Polygon. <http://softsurfer.com>, 2004.
- [67] S. Suri. Handbook of Discrete and Computational Geometry. σελίδες 434–435, 1997.
- [68] I. Sutherland και G. Hodgman. Reentrant Polygon Clipping. *Commun. ACM*, 17(1):32–42, 1974.
- [69] A. Tate, J. Hendler και M. Drummond. A Review of AI Planning Techniques. 1990.

- [70] G.T. Toussaint. Solving Geometric Problems with the 'Rotating Calipers'. Στο *IEEE MELECON '83*, 1983.
- [71] G.T. Toussaint. A Simple Linear Algorithm for Intersecting Convex Polygons. *Visual Computer*, 1:118–123, 1985.
- [72] B.R. Vatti. A Generic Solution to Polygon Clipping. *Commun. ACM*, 35(7):56–63, 1992.
- [73] M. Vilain και H. Kautz. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning. Στο *Proceedings of AAAI'86*, σελίδες 377–382, 1986.
- [74] M. Vilain, H. Kautz και P.van Beek. Constraint Propagation Algorithms for Temporal Reasoning: A Revised Report. Στο *Readings in Qualitative Reasoning about Physical Systems*D.S. Weld και J.de Kleer, επιμελητές, σελίδες 373–381. Morgan Kaufmann, 1989.
- [75] K. Weiler και P. Atherton. Hidden Surface Removal Using Polygon Area Sorting. Στο *Proceedings of the 4th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, σελίδες 214–222. ACM Press, 1977.