ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Σύνταξη και Σημασιολογία Προγραμμάτων Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ Γ. ΒΕΝΕΤΗ

Επιβλέπων: Στέφανος Κόλλιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΕΙΚΟΝΩΝ, ΒΙΝΤΕΟ ΚΑΙ ΠΟΛΥΜΕΣΩΝ
Αθήνα, Οκτώβριος 2005

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνων, Βίντεο και Πολυμέσων

Σύνταξη και Σημασιολογία Προγραμμάτων Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

Διπλωματική Εργασία

του

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΥ Γ. ΒΕΝΕΤΗ

Επιβλέπων: Στέφανος Κόλλιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 14^{η} Οκτωβρίου 2005.

(Υπογραφή)	*(Υπογραφή)*	*(Υπογραφή)*
....	....	....
Στέφανος Κόλλιας	Γεώργιος-Ανδρέας Σταφυλοπάτης	Παναγιώτης Τσανάκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2005

(Υπογραφή)

....

Αναστασιος Βενετης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών
Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η μελέτη της Σύνταξης και της Σημασιολογίας των Προγραμμάτων Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής. Τα Προγράμματα Περιγραφικής Λογικής αποτελούν μια αντιστοίχιση της γλώσσας οντολογιών OWL-DL της Περιγραφικής Λογικής και των κανόνων def-Horn. Η αντιστοίχιση αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία μιας γλώσσας, της DLP, η οποία συνδυάζει τις εκφραστικές οντολογίες με τους κανόνες, οι οποίοι παρέχουν ιδιαίτερα αποδοτικούς μηχανισμούς εξαγωγής συμπερασμάτων. Τα Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής τώρα, συν τοις άλλοις παρέχουν τη δυνατότητα αναπαράστασης της εγγενούς αβεβαιότητας και ασάφειας των πληροφοριών με αποτέλεσμα η γλώσσα f-DLP να είναι ιδιαίτερα εκφραστική.

Abstract

This diploma thesis attempts to study the Syntax and Semantics of Fuzzy Description Logic Programs. Description Logic Programs are a mapping of the ontology language OWL-DL of Description Logics and def-Horn rules. This mapping is of great avail because the outcome is a language, DLP, in which the expressivw ontologies are combined with rules, that provide effective reasoning procedures. Fuzzy Description Logic Programs also provide the ability to represent the inherent vagueness and ambiguity of information which results in a very expressive language, the f-DLP.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Πρόλογος

Η εργασία αυτή αποτελεί την διπλωματική εργασία του φοιτητή Βενέτη Αναστάσιου για την απόκτηση του διπλώματος του Ηλεκτρολόγου Μηχανικού και Μηχανικού Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Αντικείμενο της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της Σύνταξης και Σημασιολογίας των Προγραμμάτων Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής. Για τον σκοπό αυτό γίνεται μια παρουσίαση της Περιγραφικής Λογικής, του Λογικού Προγραμματισμού και της Ασαφούς Συνολοθεωρίας και Λογικής. Τέλος γίνεται μελέτη για το ποιο τμήμα της γλώσσας οντολογιών OWL είναι συμβατό με τους κανόνες def-Horn. Πιο συγκεκριμένα:

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται μια εισαγωγή στην περιγραφική λογική ως μια τυπική γλώσσα για την Αναπαράσταση Γνώσης και την εξαγωγή συμπερασμάτων. Παρουσιάζεται η σύνταξη και η σημασιολογία της καλύπτοντας τους κύριους κατασκευαστές που χρησιμοποιούνται σε συστήματα ή που παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία και τον τρόπο που αυτοί χρησιμοποιούνται για να παραχθούν Βάσεις Γνώσης. Τέλος ορίζονται τα τυπικά προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων, δείχνεται πώς αυτά αλληλοσυσχετίζονται και περιγράφονται διάφοροι τρόποι για την αντιμετώπιση τους.

Στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μια εισαγωγή στον Λογικό Προγραμματισμό ως μια μέθοδος αναπαράστασης δηλωτικής γνώσης. Ειδικότερα γίνεται αναφορά σε λογικά προγράμματα που περιέχουν τον κλασσικό τελεστή άρνησης καθώς και τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία (negation as failure).

Συνεχίζοντας στο Κεφάλαιο 3 γίνεται αναφορά στις κυριότερες αρχές της Ασαφούς Συνολοθεωρίας και της Ασαφούς Λογικής. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές ιδιότητες της Ασαφούς Θεωρίας Συνόλων. Στη συνέχεια περιγράφονται οι τρείς βασικοί τελεστές πράξεων της Ασαφούς Λογικής. Επίσης, γίνεται αναφορά στις Ασαφείς Σχέσεις και τέλος το κεφάλαιο κλείνει με μια παρουσίαση των προσεγγιστικών κανόνων που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή συμπερασμάτων.

Τέλος στο Κεφάλαιο 4 γίνεται μια παρουσίαση της γλώσσας OWL και των κανόνων def-Horn. Στη συνέχεια γίνεται ο έλεγχος αντιστοιχίας με βάση την Ασαφή μοντελοθεωρητική σημασιολογία.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς ευχαριστίες μου στον κ. Στέφανο Κόλλια, καθηγητή του Τομέα Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για την ανάθεση της διπλωματικής εργασίας.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Δρα Γιώργο Στάμου, Ερευνητή Γ΄ του Ερευνητικού Πανεπιστημιακού Ινστιτούτου συστημάτων επικοινωνιών και Υπολογιστών του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για το άριστο κλίμα συνεργασίας καθ΄ όλη τη διάρκεια της συγγραφής της εργασίας αυτής.

Ευχαριστώ επίσης θερμά τον Γιώργο Στοΐλο, υποψήφιο διδάκτορα του Εργαστηρίου ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας, Βίντεο και Πολυμέσων, για την αμέριστη συμπαράσταση του και την προθυμία του να βοηθήσει για την επίλυση οποιουδήποτε προβλήματος που ανέκυπτε.

Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους υποψήφιους διδάκτορες και το προσωπικό του Εργαστηρίου Ψηφιακής Επεξεργασίας Εικόνας, Βίντεο και Πολυμέσων για το ευχάριστο κλίμα και την διάθεση συνεργασίας τους.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου που αποτελεί τον κύριο αρωγό των προσπαθειών μου.

Κεφάλαιο 1

Περιγραφική Λογική

Το κεφάλαιο αυτό παρέχει μια εισαγωγή στην Περιγραφική Λογική ως μια τυπική γλώσσα για την αναπαράσταση γνώσης και για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Με τον όρο γνώση εννοείται ένα σύνολο από δομημένες πληροφορίες οργανωμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να παραχθούν νέες πληροφορίες και συμπεράσματα. Αρχικά δίνεται μια περίληψη των γενεσιουργών ιδεών της Περιγραφικής Λογικής. Στη συνέχεια παρουσιάζονται η σύνταξη και η σημασιολογία της (syntax and semantics), καλύπτοντας τους κύριους κατασκευαστές που χρησιμοποιούνται σε συστήματα ή που παρουσιάζονται στην βιβλιογραφία και τον τρόπο που αυτοί χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθούν βάσεις γνώσης. Τέλος, ορίζονται τα τυπικά προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων (inference problems), δείχνεται το πώς αυτά αλληλοσυσχετίζονται και περιγράφονται διάφοροι τρόποι για την αντιμετώπιση αυτών. Μια πιο λεπτομερής και περιεκτική ανάλυση της Περιγραφικής Λογικής γίνεται στο βιβλίο των Franz Baader, Deborah L. McGuinnes, Daniele Nardi και Peter F. Patel-Schneider [1].

1.1 Εισαγωγή

Η Περιγραφική Λογική, ή Description Logics (DL) όπως αναφέρεται στην διεθνή βιβλιογραφία, είναι το πιο πρόσφατο όνομα για μια οικογένεια τυπικών γλωσσών Αναπαράστασης Γνώσης (Knowledge Representation (KR)) οι οποίες αναπαριστούν την διαθέσιμη γνώση του πεδίου μιας εφαρμογής, του “*κόσμου*” της (world). Αυτό γίνεται ορίζοντας αρχικά την ορολογία (ονοματολογία) του πεδίου (terminology). Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την ορολογία αυτή ορίζονται οι ιδιότητες των αντικειμένων και των ατόμων που υπάρχουν στο πεδίο αυτό, περιγραφή του “κόσμου” (world description). Όπως δηλώνει και το όνομα Περιγραφική *Λογική*, ένα από τα κύρια γνωρίσματα των γλωσσών αυτών είναι ότι είναι εφοδιασμένες με μια τυπική, βασισμένη στη Λογική *σημασιολογία*. Ένα άλλο βασικό χαρακτηριστικό είναι η έμφαση που δίνεται στη *συλλογιστική* (reasoning) σαν μια κύρια λειτουργία: ο μηχανισμός συλλογιστικής δίνει τη δυνατότητα εξαγωγής υπονοούμενης αναπαριστώμενης γνώσης από τη γνώση που περιέχεται ρητά στη βάση γνώσης. Η Περιγραφική Λογική υποστηρίζει κάποια πρότυπα συλλογιστικής που συναντώνται σε πολλές εφαρμογές συστημάτων επεξεργασίας γνώσης, και τα οποία χρησιμοποιούνται επίσης από τους ανθρώπους για να αντιληφθούν και να δομήσουν τον κόσμο: κατηγοριοποίηση εννοιών και ατόμων (classification of concepts and individuals). Η κατηγοριοποίηση των εννοιών καθορίζει σχέσεις υποσυνόλων/υπερσυνόλων, που στην Περιγραφική Λογική καλούνται *σχέσεις υπαγωγής* (subsumption relations) μεταξύ εννοιών μιας δοσμένης ορολογίας, και συνεπώς δίνουν τη δυνατότητα δημιουργίας μιας ορολογίας στη μορφή μιας υπαγόμενης ιεραρχίας. Η ιεραρχία αυτή παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τον τρόπο που συνδέονται διάφορες έννοιες και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επιτάχυνση άλλων υπηρεσιών εξαγωγής συμπερασμάτων. Η κατηγοριοποίηση ατόμων, ή αντικειμένων, καθορίζει εάν ένα συγκεκριμένο άτομο είναι πάντα στιγμιότυπο μιας συγκεκριμένης έννοιας. Με αυτό τον τρόπο παρέχονται χρήσιμες πληροφορίες για τις ιδιότητες ενός ατόμου.

Η Περιγραφική Λογική είναι μια οικογένεια γλωσσών Αναπαράστασης Γνώσης. Ένα σύστημα Αναπαράστασης Γνώσης πρέπει πάντα να απαντά στις επερωτήσεις ενός χρήστη μέσα σε ένα λογικό χρονικό διάστημα, συνεπώς οι διαδικασίες συλλογιστικής για τις οποίες ενδιαφέρονται οι ερευνητές της Περιγραφικής Λογικής είναι οι *διαδικασίες απόφασης* (decision procedures). Αυτό σημαίνει ότι οι διαδικασίες αυτές πρέπει να είναι πεπερασμένες, τόσο για θετικά όσο και για αρνητικά αποτελέσματα. Βέβαια το γεγονός ότι η απάντηση δίνεται σε πεπερασμένο χρόνο δεν συνεπάγεται ότι ο χρόνος αυτός θα είναι μικρός. Το γεγονός αυτό ανάγει την διερεύνηση της υπολογιστικής πολυπλοκότητας μιας γλώσσας Περιγραφικής Λογικής, που περιλαμβάνει αποφάνσιμα προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων, σε ένα πολύ σημαντικό θέμα. Η αποφανσιμότητα και η πολυπλοκότητα των προβλημάτων εξαγωγής συμπερασμάτων εξαρτάται από την εκφραστικότητα της κάθε γλώσσας. Από τη μια, πολύ εκφραστικές γλώσσες είναι πιθανό να παρουσιάζουν προβλήματα συλλογιστικής υψηλής πολυπλοκότητας, ή ακόμα μπορεί να είναι μη-αποφάνσιμα. Από την άλλη, ιδιαίτερα ασθενείς γλώσσες, με επαρκείς όμως διαδικασίες συλλογιστικής, είναι πιθανό να μη μπορούν να περιγράψουν με επαρκή εκφραστικότητα τις θεμελιώδεις έννοιες μιας εφαρμογής. Η διερεύνηση της ισορροπίας μεταξύ της εκφραστικότητας και της πολυπλοκότητας των προβλημάτων συλλογιστικής μιας γλώσσας αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα αντικείμενα μελέτης στην Περιγραφική Λογική.

Η Περιγραφική Λογική αποτελεί απόγονο των λεγόμενων Δικτύων Δομημένης Κληρονομικότητας [5, 4], τα οποία εισήχθησαν για να ξεπεραστούν τα διάφορα προβλήματα που είχαν προκύψει από τα πρώτα σημασιολογικά δίκτυα [37, 22]. Οι ακόλουθες τρεις ιδέες, που προτάθηκαν στα δίκτυα δομημένης κληρονομικότητας έχουν συμβάλει στην μετέπειτα ανάπτυξη της Περιγραφικής Λογικής:

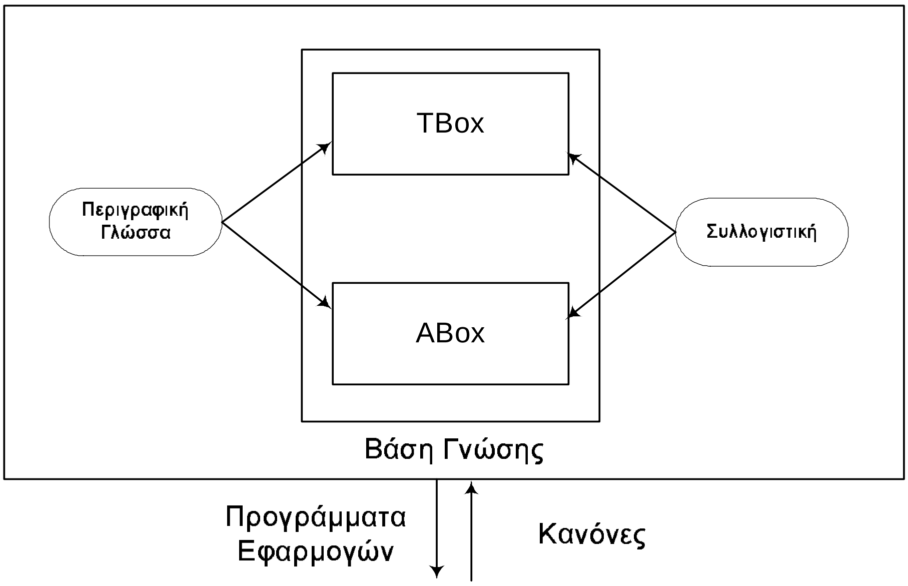
- Τα βασικά δομικά συστατικά είναι ατομικές έννοιες (μοναδιαία κατηγορήματα), ατομικοί κανόνες (δυαδικά κατηγορήματα) και άτομα (σταθερές).
- Η εκφραστική δύναμη της γλώσσας περιορίζεται στο γεγονός ότι χρησιμοποιεί ένα ιδιαίτερα μικρό σύνολο από κατασκευαστές για τη δημιουργία σύνθετων εννοιών και κανόνων.
- Υπονοούμενη γνώση σχετική με έννοιες και άτομα μπορεί να εξαχθεί αυτόματα με τη βοήθεια των διαδικασιών συλλογιστικής. Συγκεκριμένα, οι σχέσεις υπαγωγής μεταξύ εννοιών και οι σχέσεις στιγμιοτύπου μεταξύ ατόμων και εννοιών συνεπάγονται από τον ορισμό των εννοιών και τις ιδιότητες των ατόμων.

Οι γλώσσες που χρησιμοποιήθηκαν στην πρώιμη Περιγραφική Λογική ήταν ιδιαίτερα εκφραστικές, κάτι το οποίο οδήγησε στην μη-αποφανσιμότητα του προβλήματος υπαγωγής [44, 34]. Τα πρώτα αποτελέσματα χειρότερης περίπτωσης [23, 32] έδειξαν ότι το πρόβλημα της υπαγωγής είναι δυσεπίλυτο ακόμα και για γλώσσες που δεν είναι καθόλου εκφραστικές. Παρόλα αυτά η δυσεπιλυσιμότητα της συλλογιστικής, υπό την έννοια του μη-πολυωνυμικού χρόνου στην χειρότερη περίπτωση, δεν αποτρέπει μια γλώσσα Περιγραφικής Λογικής από το να είναι χρήσιμη, εφόσον οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται όταν υλοποιείται ένα σύστημα βασισμένο σε αυτή τη γλώσσα είναι εξεζητημένες. Βέβαια όταν υλοποιείται ένα σύστημα Περιγραφικής Λογικής η αποδοτική υλοποίηση των κύριων αλγορίθμων συλλογιστικής δεν είναι το μοναδικό επίμαχο ζήτημα. Πρέπει από τη μια να βελτιστοποιούνται και οι παραγόμενες υπηρεσίες [2] αλλά και να παρέχεται ένα ικανοποιητικό περιβάλλον αλληλεπίδρασης για το χρήστη με την εφαρμογή. Τα περισσότερα συστήματα Περιγραφικής Λογικής παρέχουν τη δυνατότητα γλώσσας κανόνων για να αναπαραστήσουν γνώση, κάτι το οποίο αποτελεί ένα πολύ μικρό αλλά ιδιαίτερα αποδοτικό μηχανισμό προγραμματισμού εφαρμογών.

1.2 Ορισμός της βασικής τυπικής αναπαράστασης

Ένα σύστημα Αναπαράστασης Γνώσης που στηρίζεται στη Περιγραφική Λογική παρέχει δυνατότητες δημιουργίας βάσεων γνώσης, δυνατότητες συλλογιστικής σχετικά με το περιεχόμενο τους, καθώς και δυνατότητες χειρισμού αυτών. Το Σχήμα 1.1 παρουσιάζει την αρχιτεκτονική ενός τέτοιου συστήματος.

Μια βάση γνώσης αποτελείται από δύο συστατικά, το *TBox (Terminology Box)* και το *ABox (Assertion Box)*. Το TBox αποτελεί την ορολογία (ονοματολογία), δηλαδή το λεξιλόγιο του πεδίου μιας εφαρμογής, ενώ το ABox αποτελεί το σώμα ισχυρισμών, δηλαδή τις δηλώσεις σχετικά με άτομα τα οποία έχουν οριστεί στο TBox.



Σχήμα 1.1: Αρχιτεκτονική ενός συστήματος Αναπαράστασης Γνώσης που στηρίζεται στη Περιγραφική Λογική

Το λεξιλόγιο αποτελείται από έννοιες (concepts), που δηλώνουν σύνολα από άτομα (individuals), και από ρόλους (roles), που δηλώνουν δυαδικές σχέσεις μεταξύ των ατόμων. Επιπρόσθετα με τις ατομικές έννοιες και τους ρόλους όλα τα συστήματα Περιγραφικής Λογικής επιτρέπουν στους χρήστες τη δημιουργία σύνθετων περιγραφών εννοιών και ρόλων. Το TBox μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ανατεθούν ονόματα στις σύνθετες περιγραφές. Η γλώσσα με την οποία μπορούν να δημιουργηθούν οι περιγραφές αυτές είναι χαρακτηριστική για κάθε σύστημα Περιγραφικής Λογικής, και διαφορετικά συστήματα διαχωρίζονται από τις περιγραφικές τους γλώσσες. Η περιγραφική γλώσσα έχει μοντελοθεωρητική σημασιολογία. Για το λόγο αυτό οι δηλώσεις στο TBox και στο ABox μπορούν να αναγνωριστούν με τύπους σε Λογική Πρώτης Τάξης (First Order Logic), και σε μερικές περιπτώσεις με διάφορες επεκτάσεις αυτής.

Ένα σύστημα Περιγραφικής Λογικής όχι μόνο αποθηκεύει ορολογίες και δηλώσεις, αλλά επίσης παρέχει υπηρεσίες συλλογιστικής σχετικά με αυτές. Ενδεικτικές εργασίες συλλογιστικής είναι ο καθορισμός του εάν μια περιγραφή είναι *ικανοποιήσιμη*, ή εάν μια περιγραφή είναι πιο γενική από κάποια άλλη, εάν δηλαδή η πρώτη *υπάγει* την δεύτερη. Σημαντικά προβλήματα που παρουσιάζονται στα ABox είναι να ανακαλυφθεί εάν το σύνολο των δηλώσεων είναι *συνεπές*, εάν δηλαδή έχει ένα τουλάχιστον μοντέλο, και εάν οι δηλώσεις στο ABox συνεπάγονται ότι ένα συγκεκριμένο άτομο είναι *στιγμιότυπο* μιας συγκεκριμένης έννοιας. Με τον έλεγχο ικανοποιησιμότητας ελέγχονται οι περιγραφές, ενώ με τον έλεγχο συνέπειας ελέγχονται τα σύνολα των δηλώσεων για να αποφανθεί εάν μια βάση γνώσης έχει νόημα. Με τους ελέγχους υπαγωγής μπορούν να οργανωθούν οι έννοιες μιας ορολογίας σε μια ιεραρχία ανάλογα με τη γενικότητα τους. Μια περιγραφή έννοιας μπορεί να εννοηθεί ως μια επερώτηση, που περιγράφει ένα σύνολο αντικειμένων για τα οποία υπάρχει κάποιο ενδιαφέρον. Για το λόγο αυτό με τους ελέγχους στιγμιοτύπου μπορούν να ανακτηθούν τα άτομα που ικανοποιούν την επερώτηση.

Σε κάθε εφαρμογή, ένα σύστημα Αναπαράστασης Γνώσης είναι ενσωματωμένο σε ένα μεγαλύτερο περιβάλλον. Άλλα συστατικά της εφαρμογής αλληλεπιδρούν με το σύστημα Αναπαράστασης Γνώσης κάνοντας επερωτήσεις και τροποποιώντας τη βάση γνώσης, προσθέτοντας και ανακτώντας δηλαδή, έννοιες, ρόλους και δηλώσεις. Ένας έμπιστος μηχανισμός για την εισαγωγή δηλώσεων είναι οι κανόνες (rules). Οι κανόνες είναι μια επέκταση του πυρήνα της λογικής τυπικής αναπαράστασης, που μπορεί να ερμηνευθεί με βάση τη *Λογική*. Παρόλα αυτά, πολλά συστήματα εκτός από την παροχή μιας διασύνδεσης για τον προγραμματισμό των εφαρμογών που αποτελείται από συναρτήσεις με καλά ορισμένη λογική σημασιολογία, παρέχουν ένα παράθυρο ασφαλείας με το οποίο οι εφαρμογές μπορούν να επέμβουν στην βάση γνώσης με αυθαίρετους τρόπους.

1.2.1 Περιγραφικές Γλώσσες

Οι *ατομικές έννοιες* και οι *ατομικοί ρόλοι* αποτελούν στοιχειώδεις περιγραφές. Πιο περίπλοκες περιγραφές μπορούν να προκύψουν από αυτές με τη χρήση των *κατασκευαστών εννοιών (concept constructors)*. Στην αφηρημένη σύνταξη, χρησιμοποιούνται τα γράμματα A και B για ατομικές έννοιες, το γράμμα R για ατομικούς ρόλους και τα γράμματα C και D για περιγραφές εννοιών. Οι διάφορες γλώσσες διαχωρίζονται από τους διαφορετικούς κατασκευαστές που παρέχουν. Η βασική γλώσσα που χρησιμοποιείται είναι η $\mathcal{AL}$ (= Attributive Language), δηλαδή προσδιοριστική γλώσσα. Όλες οι υπόλοιπες γλώσσες της οικογένειας $\mathcal{AL}$ προκύπτουν ως επέκταση της.

Η βασική περιγραφική γλώσσα $\mathcal{AL}$

Η περιγραφή των εννοιών στην $\mathcal{AL}$ σχηματίζονται με βάση τον ακόλουθο κανόνα σύνταξης:

$$\begin{array}{lcll} C, D & \longrightarrow & A \mid & \text{(ατομική έννοια)} \\ & & \top \mid & \text{(καθολική έννοια)} \\ & & \bot \mid & \text{(κενή έννοια)} \\ & & \neg A \mid & \text{(ατομική άρνηση)} \\ & & C \sqcap D \mid & \text{(τομή)} \\ & & \forall R.C \mid & \text{(περιορισμός τιμής)} \\ & & \exists R.\top \mid & \text{(περιορισμένη υπαρξιακή ποσοτικοποίηση)} \end{array}$$

Αξίζει να παρατηρηθεί ότι στην $\mathcal{AL}$ η άρνηση μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ατομικές έννοιες και μόνο η καθολική έννοια επιτρέπεται στο πεδίο του υπαρξιακού ποσοδείκτη ενός ρόλου. Για ιστορικούς λόγους, η γλώσσα που προκύπτει από την $\mathcal{AL}$ εάν αφαιρεθεί η άρνηση στα άτομα ονομάζεται FL^- και η γλώσσα που προκύπτει από τη FL^- εάν αφαιρεθεί ο περιορισμένος υπαρξιακός ποσοδείκτης ονομάζεται FL_0.

Η εκφραστική ικανότητα της $\mathcal{AL}$ θα δειχθεί μέσω ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 1. *Εστω, ότι οι **Άνθρωπος** και **Θηλυκό** είναι ατομικές έννοιες. Τότε οι **Άνθρωπος** $\sqcap$ **Θηλυκό** και **Άνθρωπος** $\sqcap \neg$**Θηλυκό** είναι έννοιες της γλώσσας $\mathcal{AL}$ που περιγράφουν διαισθητικά τους ανθρώπους που είναι γυναίκες και αυτούς που δεν είναι γυναίκες. Προσθέτοντας, εάν η **έχειΠαιδί** είναι ένας ατομικός ρόλος, μπορούν να σχηματιστούν οι έννοιες **Άνθρωπος**$\sqcap\exists$**έχειΠαιδί**.$\top$ και **Άνθρωπος**$\sqcap\forall$**έχειΠαιδί.Θηλυκό** που δηλώνουν τους ανθρώπους αυτούς που έχουν ένα παιδί, και τους ανθρώπους εκείνους που όλα τους τα παιδιά είναι γένους θυληκού. Επίσης, χρησιμοποιώντας την έννοια του κενού συνόλου μπορούν να περιγραφούν οι άνθρωποι εκείνοι που δεν έχουν παιδιά σχηματίζοντας την έννοια **Άνθρωπος** $\sqcap\forall$**έχειΠαιδί**.$\bot$.*

Για να μπορέσει να οριστεί η τυπική σημασιολογία των εννοιών που παρουσιάζονται στη γλώσσα $\mathcal{AL}$, θεωρούνται οι *ερμηνείες* (interpretations) $\mathcal{I}$ οι οποίες προκύπτουν από ένα μη-κενό σύνολο αντικειμένων $\Delta^{\mathcal{I}}$ (πεδίο ορισμού της ερμηνείας) και μια συνάρτηση ερμηνείας η οποία αναθέτει σε κάθε ατομική έννοια A ένα σύνολο $A^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}}$ και σε κάθε ατομικό ρόλο R μια δυαδική σχέση $R^{\mathcal{I}} \subseteq \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}}$. Η συνάρτηση ερμηνείας επεκτείνεται στις περιγραφές των εννοιών με τους ακόλουθους επαγωγικούς ορισμούς:

$$\begin{aligned}
\top^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \\
\bot^{\mathcal{I}} &= \emptyset \\
(\neg A)^{\mathcal{I}} &= \Delta^{\mathcal{I}} \setminus A^{\mathcal{I}} \\
(C \sqcap D)^{\mathcal{I}} &= C^{\mathcal{I}} \cap D^{\mathcal{I}} \\
(\forall R.C)^{\mathcal{I}} &= \{\alpha \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \forall b.(\alpha, b) \in R^{\mathcal{I}} \to b \in C^{\mathcal{I}}\} \\
(\exists R.\top)^{\mathcal{I}} &= \{\alpha \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(\alpha, b) \in R^{\mathcal{I}}\}
\end{aligned}$$

Δύο έννοιες C, D είναι ίσες, $C \equiv D$, εάν $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ για όλες τις ερμηνείες $\mathcal{I}$. Για παράδειγμα, πηγαίνοντας πίσω στον ορισμό της σημασιολογίας των εννοιών στο Παράδειγμα 1, μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι οι έννοιες $\forall$έχειΠαιδί.Θηλυκό $\sqcap$ $\forall$έχειΠαιδί.Μαθητή και $\forall$έχειΠαιδί.(Θηλυκό$\sqcap$Μαθητή) είναι ισοδύναμες.

Η οικογένεια των γλωσσών $\mathcal{AL}$

Εάν στην $\mathcal{AL}$ προστεθούν περισσότεροι κατασκευαστές εννοιών μπορούν να δημιουργηθούν πιο εκφραστικές γλώσσες. Η *ένωση* των εννοιών, που δηλώνεται με το γράμμα $\mathcal{U}$, γράφεται ως $C \sqcup D$ και ερμηνεύεται ως

$$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}} = C^{\mathcal{I}} \cup D^{\mathcal{I}}.$$

Σε αντιστοιχία με το Παράδειγμα 1 η έκφραση $\textsf{Άνθρωπος}\sqcap(\textsf{Γυναίκα}\sqcup\textsf{Άντρας})$ εκφράζει τους ανθρώπους εκείνους που είναι ή γυναίκες ή άντρες.

Η πλήρης υπαρξιακή ποσοτικοποίηση, που δηλώνεται με το γράμμα $\mathcal{E}$, γράφεται $\exists R.C$, και ερμηνεύεται ως

$$(\exists R.C)^{\mathcal{I}} = \{\alpha \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid \exists b.(\alpha, b) \in R^{\mathcal{I}} \wedge b \in C^{\mathcal{I}})\}$$

Για παράδειγμα η έκφραση $\exists\textsf{έχειΠαιδί.Θηλυκό}$ εκφράζει ότι υπάρχει κάποια έννοια η οποία έχει ένα παιδί το οποίο είναι γένους θηλυκού. Αξίζει να σημειωθεί ότι η έκφραση $\exists R.C$ διαφέρει από την $\exists R.\top$ στο ότι στην εμβέλεια του υπαρξιακού ποσοδείκτη επιτρέπονται αυθαίρετες έννοιες.

Οι *Αριθμητικοί Περιορισμοί*, που δηλώνονται με το γράμμα $\mathcal{N}$, γράφονται $\geqslant nR$ (το-λιγότερο) και $\leqslant nR$ (το-μέγιστο), όπου το n διακυμαίνεται στους μη-αρνητικούς ακέραιους. Οι αριθμητικοί περιορισμοί ερμηνεύονται ως εξής

$$(\geqslant nR)^{\mathcal{I}} = \left\{\alpha \in \Delta^{\mathcal{I}} \,\middle|\, |\{b \mid (\alpha, b) \in R^{\mathcal{I}}\}| \geq n\right\},$$

και

$$(\leqslant nR)^{\mathcal{I}} = \left\{\alpha \in \Delta^{\mathcal{I}} \,\middle|\, |\{b \mid (\alpha, b) \in R^{\mathcal{I}}\}| \leq n\right\}$$

αντίστοιχα, όπου με το "$|\cdot|$" δηλώνεται η βαθμωτή-πληθικότητα ενός συνόλου. Η έκφραση $\leqslant 3\textsf{έχειΠαιδί}$, για παράδειγμα δηλώνει την έννοια εκείνη που έχει το πολύ τρία παιδιά.Από μια σημασιολογική σκοπιά η κωδικοποίηση των αριθμών σε αριθμητικούς περιορισμούς είναι επουσιώδης. Παρόλα αυτά, για την ανάλυση της πολυπλοκότητας των συμπερασμάτων που προκύπτουν από τη διαδικασία της συλλογιστικής έχει σημασία εάν ένας αριθμός n αναπαρίσταται στο δυαδικό (δεκαδικό) σύστημα ή εάν αναπαρίσταται από μια συμβολοακολουθία μήκους n, εφόσον το δυαδικό (δεκαδικό) σύστημα δίνει την δυνατότητα για μια πιο συμπαγή αναπαράσταση.

Η *άρνηση* σε αυθαίρετες έννοιες, δηλώνεται με το γράμμα $\mathcal{C}$ (complement), γράφεται $\neg C$, και ερμηνεύεται ως

$$(\neg C)^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{I}} \setminus C^{\mathcal{I}}$$

Για παράδειγμα η έκφραση $\neg\textsf{Θηλυκό}$ δηλώνει τις έννοιες εκείνες που δεν είναι θηλυκού γένους.

Ένα πιο σύνθετο παράδειγμα που χρησιμοποιεί τους κατασκευαστές αυτούς και εκφράζει τα άτομα εκείνα που έχουν είτε το πολύ ένα παιδί ή το ελάχιστο τρία παιδία ένα εκ των οποίων είναι θηλυκό είναι η έκφραση

$$\textsf{Άτομο} \sqcap (\leqslant 1\textsf{έχειΠαιδί} \sqcup (\geqslant 3\textsf{έχειΠαιδί} \sqcap \exists\textsf{έχειΠαιδί.Θηλυκό})).$$

Επεκτείνοντας την $\mathcal{AL}$ με κάποιο υποσύνολο από τους παραπάνω κατασκευαστές παράγεται μια συγκεκριμένη γλώσσα $\mathcal{AL}$. Κάθε τέτοια γλώσσα ονοματίζεται σύμφωνα με μια συμβολοακολουθία της μορφής

$$\mathcal{AL}[\mathcal{U}][\mathcal{E}][\mathcal{N}][\mathcal{C}],$$

όπου κάθε γράμμα στο όνομα συμβολίζει την παρουσία του αντίστοιχου κατασκευαστή. Για παράδειγμα η γλώσσα $\mathcal{ALEN}$ είναι η επέκταση της $\mathcal{AL}$ που περιλαμβάνει τον πλήρη υπαρξιακό ποσοδείκτη και αριθμητικούς περιορισμούς.

Από τη σημασιολογική σκοπιά όλες αυτές οι γλώσσες δεν είναι ευδιάκριτες μεταξύ τους. Και τούτο γιατί η σημασιολογία επιβάλλει τις ισοδυναμίες $C \sqcup D \equiv \neg(\neg C \sqcap \neg D)$ και $\exists R.C \equiv \neg\forall R.\neg C$ με αποτέλεσμα η ένωση και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης να μπορούν να εκφραστούν με τη χρήση άρνησης. Αντίστροφα, ο συνδυασμός της ένωσης και του πλήρη υπαρξιακού ποσοδείκτη δίνει τη δυνατότητα έκφρασης της άρνησης εννοιών. Για αυτό το λόγο, θεωρείται ότι η ένωση και ο πλήρης υπαρξιακός ποσοδείκτης είναι διαθέσιμοι σε κάθε γλώσσα που περιλαμβάνει άρνηση και αντίστροφα. Από τα παραπάνω συνεπάγεται ότι όλες οι γλώσσες $\mathcal{AL}$ μπορούν να γραφούν χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα $\mathcal{U}, \mathcal{E}, \mathcal{N}$. Οι οχτώ γλώσσες που προκύπτουν με τον τρόπο αυτό είναι ανά δύο μη-ισοδύναμες.

Οι περιγραφικές γλώσσες ως τμήμα της κατηγορηματικής λογικής

Η σημασιολογία των εννοιών αναγνωρίζει τις περιγραφικές γλώσσες ως τμήματα της *Κατηγορηματικής Λογικής Πρώτης Τάξης*. Εφόσον μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ αναθέτει αντίστοιχα σε κάθε ατομική έννοια και σε κάθε ρόλο μια μοναδιαία και δυαδική σχέση στο $\Delta^{\mathcal{I}}$, οι ατομικές έννοιες και ρόλοι ως μπορούν να θεωρηθούν ως μοναδιαία και δυαδικά κατηγορήματα. Με αυτό τον τρόπο κάθε έννοια C μπορεί να μεταφραστεί αποδοτικά σε ένα τύπο κατηγορηματικής λογικής $\phi_C(x)$ με μια ελεύθερη μεταβλητή x έτσι ώστε για κάθε ερμηνεία $\mathcal{I}$ το σύνολο των στοιχείων του $\Delta^{\mathcal{I}}$ που ικανοποιούν την $\phi_C(x)$ να είναι ακριβώς το $C^{\mathcal{I}}$. Μια ατομική έννοια A μεταφράζεται σε ένα τύπο $A(x)$. Οι κατασκευαστές τομής, ένωσης, και άρνησης μεταφράζονται στη λογική τομή, ένωση και άρνηση, αντίστοιχα. Εάν η έννοια C έχει ήδη μεταφραστεί στον τύπο $\phi_C(x)$ και το R είναι ένας ατομικός ρόλος τότε ο περιορισμός τιμής και ο υπαρξιακός ποσοδείκτης αντιστοιχούν στον τύπο

$$\begin{aligned} \phi_{\exists R.C}(y) &= \exists x.R(y,x) \land \phi_C(x) \\ \phi_{\forall R.C}(y) &= \forall x.R(y,x) \rightarrow \phi_C(x), \end{aligned}$$

όπου το y είναι μια καινούρια μεταβλητή. Οι αριθμητικοί περιορισμοί εκφράζονται μέσω του παρακάτω τύπου

$$\phi_{\geqslant nR}(x) = \exists y_1, \ldots, y_n.R(x,y_1) \land \ldots \land R(x,y_n) \land \bigwedge_{i<j} y_i \neq y_j$$

$$\phi_{\leqslant(nR)}(x) = \forall (y_1, \ldots, y_n).R(x,y_1) \land \ldots \land R(x,y_n) \rightarrow \bigvee_{i<j} y_i = y_j.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το κατηγόρημα της ισότητας " = " είναι αναγκαίο για να εκφραστούν οι αριθμητικοί περιορισμοί, ενώ οι έννοιες που δεν περιέχουν αριθμητικούς περιορισμούς μπορούν να εκφραστούν σε τύπους χωρίς το κατηγόρημα της ισότητας.

Θα μπορούσε να ειπωθεί ότι εφόσον οι έννοιες μπορούν να μεταφραστούν στην κατηγορηματική λογική η ειδική σύνταξη δεν είναι απαραίτητη. Παρόλα αυτά, και με βάση τα παραπάνω και πιο συγκεκριμένα για τους αριθμητικούς περιορισμούς, είναι προφανές ότι η σύνταξη της περιγραφικής λογικής που δεν περιέχει μεταβλητές είναι πιο περιεκτική.

1.2.2 Ορολογίες (TBox)

Στην Περιγραφική Λογική ο όρος *ορολογία* ή TBox χρησιμοποιείται για να δηλώσει μια (ιεραρχική) δομή η οποία έχει ως στόχο την παροχή μιας αναπαράστασης του πεδίου ενδιαφέροντος. Στο σημείο αυτό θα γίνει αναφορά στα αξιώματα που αφορούν τις ορολογίες. Τα αξιώματα αυτά δίνουν πληροφορίες για το πώς οι έννοιες και οι ρόλοι σχετίζονται μεταξύ τους. Στην συνέχεια θα παρουσιαστούν οι *ορισμοί* ως αξιώματα και θα αναγνωρισθούν οι *ορολογίες* ως σύνολα ορισμών με βάση τα οποία θα μπορούν να εισαχθούν οι ατομικές έννοιες ως συντομογραφίες ή *ονόματα* για πιο περίπλοκες έννοιες. Εάν οι ορισμοί σε μια ορολογία περιέχουν κύκλους, ίσως είναι απαραίτητη η χρήση των *fixpoint semantics* ώστε να αποσαφηνιστούν.

Αξιώματα ορολογιών

Στην πιο γενική περίπτωση τα αξιώματα ορολογιών έχουν την μορφή

$$C \sqsubseteq D \quad (R \sqsubseteq S) \quad \text{ή} \quad C \equiv D \quad (R \equiv S),$$

όπου τα C, D είναι έννοιες και τα R, S είναι ρόλοι. Τα αξιώματα του πρώτου τύπου ονομάζονται *υπαγωγές* (inclusions), ενώ τα αξιώματα του δεύτερου τύπου ονομάζονται *ισότητες* (equalities). Στη συνέχεια θα γίνει αναφορά μόνο σε αξιώματα που περιλαμβάνουν έννοιες.

Για την ερμηνεία της σημασιολογίας των αξιωμάτων ισχύουν τα εξής: Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την επαγωγή $C \sqsubseteq D$ εάν $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ και την ισότητα $C \equiv D$ εάν $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$. Εάν το $\mathcal{T}$ είναι ένα σύνολο αξιωμάτων (ορολογία), τότε η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί το $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί κάθε στοιχείο του $\mathcal{T}$. Εάν η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί ένα αξίωμα (ή ισοδύναμα ένα σύνολο αξιωμάτων), τότε αποτελεί μοντέλο του αξιώματος (ή ισοδύναμα του συνόλου αξιωμάτων). Δύο αξιώματα ή δύο σύνολα από αξιώματα είναι ισοδύναμα εάν έχουν τα ίδια μοντέλα.

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Μητέρα} &\equiv \mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}\\
\mathsf{Άντρας} &\equiv \mathsf{Άτομο} \sqcap \neg\mathsf{Γυναίκα}\\
\mathsf{Μητέρα} &\equiv \mathsf{Γυναίκα} \sqcap \exists\mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}\\
\mathsf{Πατέρας} &\equiv \mathsf{Άντρας} \sqcap \exists\mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}\\
\mathsf{Γονιός} &\equiv \mathsf{Πατέρας} \sqcup \mathsf{Μητέρα}\\
\mathsf{Γιαγιά} &\equiv \mathsf{Μητέρα} \sqcap \exists\mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Γονιός}\\
\mathsf{ΜητέραΜεΠολλάΠαιδιά} &\equiv \mathsf{Μητέρα} \sqcap \geqslant 3\mathsf{έχειΠαιδί}\\
\mathsf{ΜητέραΧωρίςΚόρη} &\equiv \mathsf{Μητέρα} \sqcap \forall\mathsf{έχειΠαιδί}.\neg\mathsf{Γυναίκα}\\
\mathsf{ΓυναίκαΣύζυγος} &\equiv \mathsf{Γυναίκα} \sqcap \exists\mathsf{έχειΣύζυγο}.\mathsf{Άντρας}
\end{aligned}
$$

Σχήμα 1.2: Μια ορολογία (*TBox*) με έννοιες σχειτικές με σχέσεις σε μια οικογένεια

Ορισμοί

Μια ισότητα της οποίας το αριστερό μέλος είναι μια ατομική έννοια είναι ένας *ορισμός*. Οι ορισμοί χρησιμοποιούνται για την εισαγωγή *συμβολικών ονομάτων* για πιο σύνθετες περιγραφές. Για παράδειγμα το αξίωμα

$$\mathsf{Μητέρα} \equiv \mathsf{Γυναίκα} \sqcap \exists\mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}$$

συσχετίζει με την περιγραφή στο δεξί μέλος το όνομα Μητέρα. Τα συμβολικά ονόματα χρησιμοποιούνται ως συντμήσεις σε άλλες περιγραφές. Εάν για παράδειγμα οριστεί ανάλογα με την έννοια Μητέρα η έννοια Πατέρας θα είναι δυνατόν να οριστεί η έννοια Γονιός ως εξής

$$\mathsf{Γονιός} \equiv \mathsf{Μητέρα} \sqcup \mathsf{Πατέρας}.$$

Ένα σύνολο από ορισμούς πρέπει να είναι σαφές. Ένα σύνολο από ορισμούς $\mathcal{T}$ ονομάζεται *ορολογία* ή αλλιώς TBox εάν κανένα συμβολικό όνομα δεν ορίζεται περισσότερες από μια φορές, εάν δηλαδή για κάθε ατομική έννοια A υπάρχει το πολύ ένα αξίωμα στο $\mathcal{T}$ το οποίο έχει ως αριστερό μέλος το A. Το Σχήμα 1.2 δείχνει μια τέτοια ορολογία με έννοιες σχετικές με σχέσεις σε μια οικογένεια.

Έστω ότι $\mathcal{T}$ είναι μια ορολογία. Οι ατομικές έννοιες που ορίζονται στην $\mathcal{T}$ διαιρώνται σε δύο σύνολα, τα *σύμβολα ονομάτων* (name symbols) $\mathcal{N}_{\mathcal{T}}$ που συναντώνται στην αριστερή πλευρά των αξιωμάτων και τα *βασικά σύμβολα* (basic symbols) $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}$ που συναντώνται μόνο στη δεξιά πλευρά των αξιωμάτων. Τα σύμβολα ονομάτων ονομάζονται συχνά και *ορισμένες* έννοιες (defined concepts) ενώ τα βασικά σύμβολα *στοιχειώδεις* έννοιες (primitive concepts)[1].

[1]Στη διεθνή βιβλιογραφία πολλές φορές ο όρος "στοιχειώδεις έννοιες" χρησιμοποιείται για να υποδηλώσει ατομικές έννοιες ή το αριστερό μέρος μιας υπαγωγής εννοιών.

Μια *βασική ερμηνεία* (base interpretation) για την $\mathcal{T}$ είναι μια ερμηνεία η οποία ερμηνεύει μόνο τα βασικά σύμβολα. Έστω $\mathcal{J}$ μια τέτοια ερμηνεία. Μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ που ερμηνεύει και τα σύμβολα ονομάτων είναι μια επέκταση του $\mathcal{J}$ εάν έχει το ίδιο πεδίο ερμηνείας με το $\mathcal{J}$, εάν δηλαδή $\Delta^{\mathcal{I}} = \Delta^{\mathcal{J}}$, και εάν έχει τα ίδια σύμβολα βάσης με το $\mathcal{J}$. Η $\mathcal{T}$ είναι *καλά ορισμένη* (definitorial) εάν κάθε βασική ερμηνεία έχει ακριβώς μια επέκταση που είναι μοντέλο της $\mathcal{T}$. Με άλλα λόγια, εάν είναι γνωστό τι αντιπροσωπεύουν τα βασικά σύμβολα και η $\mathcal{T}$ είναι καλά ορισμένη τότε το νόημα των βασικών συμβόλων ορίζεται επακριβώς. Είναι προφανές ότι εάν μια ορολογία είναι καλά ορισμένη τότε κάθε ισοδύναμη με αυτή ορολογία είναι επίσης καλά ορισμένη.

Το ερώτημα εάν μια ορολογία είναι καλά ορισμένη ή όχι ανάγεται στην ερώτηση εάν οι ορισμοί της περιέχουν ή όχι κύκλους (cyclic). Για παράδειγμα, η ορολογία που αποτελείται από τον παρακάτω απλό ορισμό

$$\mathsf{Άνθρωπος} \equiv \mathsf{Ζώο} \sqcap \forall \mathsf{έχειΓονιό}.\mathsf{Άνθρωπος} \tag{1.1}$$

περιέχει κύκλο. Εν γένει οι κύκλοι σε μια ορολογία ορίζονται ως ακολούθως. Έστω ότι A, B είναι ατομικές έννοιες που συναντώνται στην $\mathcal{T}$. Το A *χρησιμοποιεί ευθέως* (directly uses) το B στην $\mathcal{T}$ εάν το B εμφανίζεται μόνο στη δεξιά πλευρά του ορισμού του A. Έτσι η $\mathcal{T}$ περιέχει *κύκλο* εάν και μόνο εάν υπάρχει έστω και μια ατομική έννοια στην $\mathcal{T}$ η οποία χρησιμοποιεί τον εαυτό της. Όταν η $\mathcal{T}$ δεν περιέχει κύκλο καλείται *ακυκλική* (acyclic).

Εάν μια ορολογία είναι κυκλική τότε δεν είναι απαραίτητο να υπάρχουν μοναδικές επεκτάσεις αυτής. Θεωρώντας σαν παράδειγμα την ορολογία που περιέχει το Αξίωμα 1.1 εύκολα γίνεται αντιληπτό ότι η έννοια **Άνθρωπος** είναι ένα σύμβολο ονόματος ενώ η έννοια **Ζώο** και η σχέση **έχειΓονιό** είναι βασικά σύμβολα. Για μια ερμηνεία που η σχέση **έχειΓονιό** σχετίζει κάθε ζώο με τους προγόνους του, υπάρχουν πολλές διαφορετικές επεκτάσεις που μπορούν να ερμηνεύσουν την έννοια **Άνθρωπος** έτσι ώστε να ικανοποιείται το αξίωμα. Συν τοις άλλοις η έννοια **Άνθρωπος** μπορεί να ερμηνευτεί ως το σύνολο από όλα τα ζώα, όπως κάποια είδη, ή ως κάθε άλλο σύνολο από ζώα που έχει την ιδιότητα για κάθε ζώο να περιέχει και τους προγόνους του.

Αντίθετα εάν μια ορολογία $\mathcal{T}$ είναι ακυκλική, τότε είναι καλά ορισμένη. Και τούτο επειδή οι ορισμοί της ορολογίας $\mathcal{T}$ μπορούν να επεκταθούν μέσω μιας επαναληπτικής διαδικασίας αντικαθιστώντας κάθε όνομα που συναντάται στο δεξί μέλος του ορισμού με τις έννοιες τις οποίες αντιπροσωπεύει. Εφόσον δεν υπάρχει κύκλος στο σύνολο των ορισμών η παραπάνω επαναληπτική διαδικασία είναι πεπερασμένη χρονικά. Έτσι προκύπτει μια καινούρια ορολογία $\mathcal{T}'$ που αποτελείται μόνο από ορισμούς της μορφής $A \equiv C'$, όπου το C' περιέχει μόνο βασικά σύμβολα και όχι σύμβολα ονομάτων. Η καινούρια ορολογία $\mathcal{T}'$ καλείται επέκταση της $\mathcal{T}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επέκταση μπορεί να είναι εκθετικού χώρου σε σχέση με την αρχική ορολογία [33]. Η ορολογία που

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Γυναίκα} &\equiv \mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}\\
\mathsf{Άντρας} &\equiv \mathsf{Άτομο} \sqcap \neg(\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό})\\
\mathsf{Μητέρα} &\equiv (\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}\\
\mathsf{Πατέρας} &\equiv (\mathsf{Άτομο} \sqcap (\neg \mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό})) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}\\
\mathsf{Γονιός} &\equiv ((\mathsf{Άτομο} \sqcap (\neg \mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό})) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο})\\
&\quad \sqcup((\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο})\\
\mathsf{Γιαγιά} &\equiv ((\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο})\\
&\quad \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.(((\mathsf{Άτομο} \sqcap \neg(\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}))\\
&\quad \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο})\\
&\quad \sqcup((\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό})\\
&\quad \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}))\\
\mathsf{ΜητέραΜεΠολλάΠαιδιά} &\equiv ((\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο}) \sqcap \geqslant 3 \mathsf{έχειΠαιδί}\\
\mathsf{ΜητέραΧωρίςΚόρη} &\equiv ((\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}) \sqcap \exists \mathsf{έχειΠαιδί}.\mathsf{Άτομο})\\
&\quad \sqcap \forall \mathsf{έχειΠαιδί}.(\neg(\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}))\\
\mathsf{ΓυναίκαΣύζυγος} &\equiv (\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό})\\
&\quad \sqcap \exists \mathsf{έχειΣύζυγο}.(\mathsf{Άτομο} \sqcap \neg(\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}))
\end{aligned}
$$

Σχήμα 1.3: Η επέκταση της ορολογίας ($TBox$) του Σχήματος 1.2

ορίζεται στο Σχήμα 1.2 είναι ακυκλική και γι' αυτό μπορεί να επεκταθεί. Η επέκταση της φαίνεται παραπάνω στο Σχήμα 1.3

Πρόταση 1.1. *Έστω $\mathcal{T}$ μια ακυκλική ορολογία και $\mathcal{T}'$ η επέκταση της. Τότε για τις $\mathcal{T}$ και $\mathcal{T}'$ ισχύει ότι*

(i) έχουν ίδια βασικά σύμβολα και τα ίδια σύμβολα ονομάτων

(ii) είναι ισοδύναμες

(iii) είναι καλά ορισμένες

Απόδειξη. Έστω μια ορολογία $\mathcal{T}_1$. Έστω ότι οι $A \equiv C$ και $B \equiv D$ είναι ορισμοί στην $\mathcal{T}_1$ και στον ορισμό της C περιέχεται η B. Έστω ότι η C' είναι η έννοια που προκύπτει από τη C εάν αντικατασταθεί σε αυτή η B με την D, και έστω $\mathcal{T}_2$ η ορολογία που προκύπτει από την $\mathcal{T}_1$ με την αντικατάσταση του ορισμού $A \equiv C$ με τον ορισμό $A \equiv C'$. Τότε και οι δύο ορολογίες έχουν τα ίδια βασικά σύμβολα και τα ίδια σύμβολα ονομάτων. Επιπλέον, εφόσον η $\mathcal{T}_2$ έχει προκύψει από την $\mathcal{T}_1$ με την αντικατάσταση ισοδύναμων εννοιών και οι δύο ορολογίες έχουν τα ίδια μοντέλα. Έτσι, αφού η $\mathcal{T}'$ προκύπτει από την $\mathcal{T}$ με μια ακολουθία βημάτων ίδια με παραπάνω αποδεικνύεται η ισχύς των (i) και (ii).

Έστω ότι η $\mathcal{J}$ είναι μια ερμηνεία των βασικών συμβόλων. Εάν $A \equiv C'$ είναι ο ορισμός της A στην $\mathcal{T}'$ τότε η $\mathcal{J}$ επεκτείνεται σε μια ερμηνεία $\mathcal{I}$, που καλύπτει επίσης και τα σύμβολα ονομάτων, θέτοντας $A^{\mathcal{I}} = C'^{\mathcal{J}}$. Είναι ξεκάθαρο ότι η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της ορολογίας $\mathcal{T}'$ και επίσης αποτελεί τη μοναδική επέκταση της $\mathcal{J}$ που είναι μοντέλο της $\mathcal{T}'$. Αυτό σημαίνει ότι η $\mathcal{T}'$ είναι καλά ορισμένη. Τέλος και η $\mathcal{T}$ είναι καλά ορισμένη, εφόσον είναι ισοδύναμη με την $\mathcal{T}'$. □

Είναι χαρακτηριστικό για τις ακυκλικές ορολογίες, έτσι ώστε να γίνουν πιο ακριβείς, να ορίζονται με μοναδικό τρόπο τα συμβολα ονομάτων με βάση τα βασικά σύμβολα.

Βεβαίως, υπάρχουν και ορολογίες *με* κύκλους που είναι καλά ορισμένες. Έστω για παράδειγμα η ορολογία που ορίζεται από το παρακάτω αξίωμα

$$A \equiv \forall R.B \sqcup \exists R.(A \sqcap \neg A) \tag{1.2}$$

που περιέχει κύκλο. Παρόλα αυτά, εφόσον η $\exists R.(A \sqcap \neg A)$ είναι ισοδύναμη με την κενή έννοια, το Αξίωμα 1.2 είναι ισοδύναμο με το παρακάτω ακυκλικό

$$A \equiv \forall R.B \tag{1.3}$$

Το παράδειγμα αυτό είναι ενδεικτικό για την γενική περίπτωση.

Θεώρημα 1. *Κάθε καλά ορισμένη ορολογία της γλώσσας $\mathcal{ALC}$ είναι ισοδύναμη με μια ακυκλική ορολογία.*

1.2.3 Περιγραφές Κόσμων

Εκτός από την ορολογία, ή αλλιώς *TBox*, μια βάση γνώσης αποτελείται και από την *περιγραφή του κόσμου*, ή αλλιώς *ABox*.

Αναθέσεις ατόμων (Assertions)

Στην περιγραφή ενός κόσμου, γίνεται η περιγραφή μιας συγκεκριμένης κατάστασης συσχετίσεων ενός πεδίου εφαρμογής όσον αφορά τις έννοιες και τους ρόλους. Κάποιες από τις έννοιες και τους ρόλους μπορεί να έχουν οριστεί ως ονόματα στην ορολογία (*TBox*). Στο *ABox* γίνεται η εισαγωγή ατόμων, δίνοντας τους ονόματα, και η ανάθεση ιδιοτήτων στα άτομα αυτά. Ως ονόματα ατόμων χρησιμοποιούνται τα a, b, c. Υπάρχουν δύο είδη αναθέσεων στο *ABox*. Για να γίνουν οι αναθέσεις αυτές χρησιμοποιούνται έννοιες C και ρόλοι R και έχουν την μορφή:

$$C(\alpha) \qquad\qquad R(b, c)$$

Με τις αναθέσεις του πρώτου τύπου, που ονομάζονται *αναθέσεις εννοιών* (concept assertions), δηλώνεται ότι το άτομο α ανήκει στην ερμηνεία της έννοιας C. Με τις αναθέσεις του δεύτερου τύπου, που ονομάζονται *αναθέσεις ρόλων* (role assertions), δηλώνεται ότι το άτομο c "γεμίζει" (fills) το άτομο b για το ρόλο R. Για παράδειγμα, εάν ΠΕΤΡΟΣ, ΠΑΥΛΟΣ και ΜΑΡΙΑ είναι ονόματα ατόμων, τότε η έκφραση Πατέρας(ΠΕΤΡΟΣ) σημαίνει ότι ο Πέτρος είναι πατέρας, ενώ η έκφραση έχειΠαιδί(ΜΑΡΙΑ,ΠΑΥΛΟΣ) σημαίνει ότι ο Παύλος είναι παιδί της Μαρίας. Ένα $ABox$, που δηλώνεται και $\mathcal{A}$, είναι ένα πεπερασμένο σύνολο τέτοιων αναθέσεων. Το Σχήμα 1.4 δείχνει ένα παράδειγμα ενός $ABox$.

Ένα $ABox$, από μια απλουστευμένη άποψη, αποτελεί μια περίπτωση σχεσιακής βάσης που περιέχει μόνο ατομικές ή δυαδικές σχέσεις. Παρόλα αυτά, σε αντίθεση με την σημασιολογία "κλειστού κόσμου" (closed world semantics) των κλασσικών βάσεων δεδομένων, η σημασιολογία του $ABox$ είναι μια σημασιολογία "ανοιχτού κόσμου" (open world semantics), εφόσον τα συστήματα αναπαράστασης γνώσης βρίσκουν εφαρμογή σε καταστάσεις όπου δεν μπορεί να προκύψει εάν η γνώση που περιέχεται στη βάση γνώσης είναι πλήρης. Επιπλέον, το $TBox$ ορίζει σημασιολογικές σχέσεις μεταξύ των εννοιών και των ρόλων του $ABox$ κάτι που δεν συναντάται στη σημασιολογία των σχεσιακών βάσεων δεδομένων.

Η σημασιολογία στα $ABox$ δίνεται με την επέκταση των ερμηνειών σε ονόματα ατόμων. Μια ερμηνεία $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$ απεικονίζει όχι μόνο ατομικές έννοιες και ρόλους σε σύνολα και σχέσεις, αλλά επιπρόσθετα απεικονίζει κάθε όνομα ατόμου α σε ένα στοιχείο $\alpha^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$. Για τη συνέχεια υποτίθεται ότι διαφορετικά ονόματα ατόμων δηλώνουν διαφορετικά αντικείμενα. Για αυτό το λόγο, η απεικόνιση σέβεται την *αρχή μοναδικής ονοματολογίας* (unique name assumption UNA), δηλαδή, εάν τα α, b είναι διαφορετικά ονόματα, τότε $\alpha^{\mathcal{I}} \neq b^{\mathcal{I}}$. Η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί την ανάθεση $C(\alpha)$ εάν $\alpha^{\mathcal{I}} \in C^{\mathcal{I}}$, και ικανοποιεί την ανάθεση ρόλου $R(\alpha, b)$ εάν $(\alpha^{\mathcal{I}}, b^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}$. Μια ερμηνεία ικανοποιεί ένα $ABox$ $\mathcal{A}$ εάν ικανοποιεί κάθε ανάθεση στο $\mathcal{A}$. Στην περίπτωση αυτή η $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της ανάθεσης α ή του $ABox$. Τέλος, η ερμηνεία $\mathcal{I}$ ικανοποιεί μια ανάθεση α ή ένα $ABox$ $\mathcal{A}$ *με βάση* ένα $TBox$ $\mathcal{T}$ εάν η ερμηνεία $\mathcal{I}$ εκτός από μοντέλο της α ή του $ABox$ είναι και μοντέλο του $TBox$. Για αυτό το λόγο, ένα μοντέλο των $\mathcal{A}$ και $\mathcal{T}$ είναι μια αφηρημένη έννοια από ένα συμπαγή κόσμο όπου οι έννοιες ερμηνεύονται

ΜητέραΧωρίςΚόρη(ΜΑΡΙΑ)	Πατέρας(ΠΕΤΡΟΣ)
έχειΠαιδί(ΜΑΡΙΑ,ΠΕΤΡΟΣ)	έχειΠαιδί(ΠΕΤΡΟΣ,ΧΑΡΗΣ)
έχειΠαιδί(ΜΑΡΙΑ,ΠΑΥΛΟΣ)	

Σχήμα 1.4: Περιγραφή ενός κόσμου ($ABox$)

ως υποσύνολα του πεδίου ορισμού, όπως επιβάλλεται από την ορολογία ($TBox$), και που η συμμετοχή των ατόμων στις έννοιες και στις συσχετίσεις μεταξύ τους, όσον αφορά τους ρόλους, συμβαδίζουν με τις αναθέσεις του $ABox$.

Ονομαστικές έννοιες στην περιγραφική γλώσσα

Μερικές φορές είναι βολικό να επιτρέπονται *ονομαστικές έννοιες* (nominals) όχι μόνο στο $ABox$ αλλά και στην περιγραφική γλώσσα. Κάποιοι κατασκευαστές εννοιών που περιέχουν άτομα υπάρχουν σε συστήματα και έχουν μελετηθεί στην βιβλιογραφία. Ο πιο σημαντικός είναι ο κατασκευαστής της "σχέσης σύνδεσης" (one-of) που γράφεται

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$$

όπου τα $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι ονόματα ατόμων. Όπως είναι αναμενόμενο ένα τέτοιο σύνολο ερμηνεύεται ως εξής

$$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}^{\mathcal{I}} \quad = \quad \{\alpha_1^{\mathcal{I}}, \ldots, \alpha_n^{\mathcal{I}}\} \tag{1.4}$$

Με τη χρήση συνόλων στην περιγραφική γλώσσα μπορεί για παράδειγμα να οριστεί η έννοια των μόνιμων μελών των Ηνωμένων Εθνών ως {ΚΙΝΑ,ΓΑΛΛΙΑ,ΡΩΣΙΑ,ΗΝΩΜΕΝΟ ΒΑΣΙΛΕΙΟ,ΑΜΕΡΙΚΗ}.

Σε μια γλώσσα που περιέχει τον κατασκευαστή ένωσης "$\sqcup$", ένας κατασκευαστής $\{\alpha\}$, για σύνολα που αποτελούνται από ένα μόνο άτομο, προσθέτει ικανοποιητική εκφραστικότητα για την περιγραφή τυχαίων πεπερασμένων συνόλων εφόσον, σύμφωνα με τη σημασιολογία του κατασκευαστή "σχέσης σύνδεσης" στην Εξίσωση 1.4, οι έννοιες $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και $\{\alpha_1\}\sqcup, \ldots, \sqcup\{\alpha_n\}$ είναι ισοδύναμες.

Ένας άλλος κατασκευαστής που αφορά ονόματα ατόμων είναι ο κατασκευαστής "γεμίζει" (fills)

$$R : \alpha,$$

για ένα ρόλο R. Η σημασιολογία αυτού του κατασκευαστή ορίζεται ως εξής:

$$(R : \alpha)^{\mathcal{I}} = \{d \in \Delta^{\mathcal{I}} \mid (d, \alpha^{\mathcal{I}}) \in R^{\mathcal{I}}\}, \tag{1.5}$$

δηλαδή, η $(R : \alpha)$ αντιπροσωπεύει το σύνολο εκείνων των αντικειμένων που χρησιμοποιούν το άτομο α για να "γεμίζει" τον ρόλο R. Σε μια περιγραφική γλώσσα που δομείται από σύνολα που περιέχουν ένα μόνο στοιχείο και από τον υπαρξιακό ποσοδείκτη, ο κατασκευαστής "γεμίζει" δεν προσθέτει κάτι το νέο, μιας και η Εξίσωση 1.5 υποδηλώνει ότι οι εκφράσεις $R : \alpha$ και $\exists R.\{\alpha\}$ είναι ισοδύναμες.

Αξίζει τέλος να σημειωθεί πως ο κατασκευαστής "γεμίζει" δίνει την δυνατότητα έκφρασης αναθέσεων ρόλων μέσω των αναθέσεων εννοιών και τούτο γιατί μια ερμηνεία ικανοποιεί τη $R(\alpha, b)$ εάν και μόνο εάν ικανοποιεί την $(\exists R.\{b\})(\alpha)$.

1.2.4 Εξαγωγή Συμπερασμάτων

Ένα σύστημα αναπαράστασης γνώσης που στηρίζεται στην Περιγραφική Λογική είναι ικανό να εκτελέσει συγκεκριμένα είδη συλλογιστικής. Ο σκοπός ενός συστήματος αναπαράστασης γνώσης ξεπερνά κατά πολύ την απλή αποθήκευση ορισμών εννοιών και τις αναθέσεις. Μια βάση γνώσης, που αποτελείται από την ορολογία (*TBox*) και το *ABox*, περιέχει σημασιολογία που την κάνει ισοδύναμη με ένα σύνολο αξιωμάτων της κατηγορηματικής λογικής πρώτης τάξης. Για αυτό το λόγο, όπως κάθε σύνολο από αξιώματα, περιέχει υπονοούμενη γνώση που μπορεί να γίνει σαφής μέσω της *διαδικασίας εξαγωγής συμπερασμάτων*. Για παράδειγμα από την ορολογία του Σχήματος 1.2 και το *ABox* του Σχήματος 1.4 μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι η Μαρία είναι Γιαγιά, παρόλο που αυτή η πληροφορία δεν δηλώνεται ρητά με μια ανάθεση. Τα διάφορα είδη συλλογιστικής που μπορούν να πραγματοποιηθούν σε ένα σύστημα Περιγραφικής Λογικής ορίζονται ως διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων με βάση τη λογική. Στη συνέχεια θα μελετηθούν οι διαδικασίες αυτές πρώτα όσον αφορά τις έννοιες, στη συνέχεια για τις ορολογίες (*TBox*) και τα *ABox* και τέλος για τα *TBox* και τα *ABox* μαζί. Το συμπέρασμα που θα προκύψει είναι πως τελικά υπάρχει ένα κύριο πρόβλημα εξαγωγής συμπερασμάτων, το οποίο είναι ο έλεγχος συνέπειας για το *ABox*, στο οποίο ανάγονται όλα τα υπόλοιπα.

Εργασίες συλλογιστικής για τις έννοιες

Όταν ένας μηχανικός γνώσης μοντελοποιεί ένα πεδίο, αυτό που κάνει είναι να κατασκευάσει μια ορολογία, έστω $\mathcal{T}$, ορίζοντας καινούριες έννοιες, πιθανότατα στηριζόμενος σε έννοιες οι οποίες έχουν οριστεί πρωτύτερα. Κατά την διαδικασία αυτή, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να μπορεί να ξέρει εάν μια νέα έννοια έχει οριστεί με τρόπο που να βγάζει νόημα ή εάν είναι αντιφατική. Με βάση την *Λογική*, μια έννοια *έχει νόημα* εάν υπάρχει κάποια ερμηνεία που ικανοποιεί τα αξιώματα που ορίζονται στην $\mathcal{T}$, εάν δηλαδή αποτελεί μοντέλο της $\mathcal{T}$, έτσι ώστε η έννοια να δηλώνει ένα μη-κενό σύνολο σε αυτή την ερμηνεία. Μια έννοια που έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται *ικανοποιήσιμη* με βάση την $\mathcal{T}$ και *μη-ικανοποιήσιμη* διαφορετικά.

Ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας (satisfiability check) των εννοιών αποτελεί θεμελιώδη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων. Όπως θα φανεί και στη συνέχεια, ένας μεγάλος αριθμός από άλλες διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα ικανοποιησιμότητας ή μη-ικανοποιησιμότητας. Για να ελεγχθεί εάν ένα μοντέλο είναι σωστό, ή για να γίνει βελτιστοποίηση επερωτήσεων που έχουν την μορφή εννοιών, είναι απαραίτητο να είναι γνωστό εάν κάποια έννοια είναι πιο γενική από κάποια άλλη. Αυτό αποτελεί το *πρόβλημα υπαγωγής* (subsumption problem). Μια έννοια C *υπάγεται* σε μια έννοια D εάν σε κάθε *μοντέλο της* $\mathcal{T}$ *το σύνολο που προκύ-*

πτει από την C είναι υποσύνολο του συνόλου που προκύπτει από την D. Οι αλγόριθμοι που πραγματοποιούν έλεγχο υπαγωγής χρησιμοποιούνται επίσης για να ταξινομήσουν τις έννοιες μιας ορολογίας σύμφωνα με την γενικότητα τους. Άλλες χρήσιμες σχέσεις μεταξύ εννοιών είναι η σχέση *ισοδυναμίας* (equivalence) και η σχέση *ξένων εννοιών* (disjointness).

Οι ιδιότητες αυτές ορίζονται τυπικά παρακάτω. Έστω ότι η $\mathcal{T}$ είναι μια ορολογία.

Ικανοποιησιμότητα: Μια έννοια C είναι *ικανοποιήσιμη* με βάση την $\mathcal{T}$ εάν υπάρχει ένα μοντέλο $\mathcal{I}$ της $\mathcal{T}$ τέτοιο ώστε το σύνολο $C^{\mathcal{I}}$ να είναι μη-κενό. Στην περίπτωση αυτή η ερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι μοντέλο της C

Υπαγωγή: Μια έννοια C *υπάγεται* σε μια έννοια D με βάση την $\mathcal{T}$ εάν $C^{\mathcal{I}} \subseteq D^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της $\mathcal{T}$. Στην περίπτωση αυτή γράφεται $C \sqsubseteq_{T} D$ ή $T \models C \sqsubseteq D$.

Ισοδυναμία: Δύο έννοιες C και D είναι *ισοδύναμες* με βάση την $\mathcal{T}$ εάν $C^{\mathcal{I}} = D^{\mathcal{I}}$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της T. Στην περίπτωση αυτή γράφεται $C \equiv_{T} D$ ή $T \models C \equiv D$.

Ξένες Έννοιες: Δύο έννοιες C και D είναι ξένες μεταξύ τους με βάση την $\mathcal{T}$ εάν $C^{I} \cap D^{\mathcal{I}} = \emptyset$ για κάθε μοντέλο $\mathcal{I}$ της $\mathcal{T}$.

Εάν η ορολογία $\mathcal{T}$ είναι ανεξάρτητη από τα συμφραζόμενα, πολλές φορές η συνθήκη "με βάση την $\mathcal{T}$" παραλείπεται. Η συνθήκη αυτή παραλείπεται και στην ειδική περίπτωση όπου η ορολογία ($TBox$) είναι κενή. Τότε $\models C \sqsubseteq D$ εάν η έννοια C υπάγεται στην έννοια D, και $\models C \equiv D$ εάν οι C και D είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 2. *Με βάση την ορολογία του Σχήματος 1.2 η έννοια* **Άτομο** *υπάγεται στην έννοια* **Γυναίκα**, *οι έννοιες* **Γυναίκα** *και* **Άντρας** *υπάγονται στην έννοια* **Μητέρα** *και η έννοια* **Μητέρα** *υπάγεται στην έννοια* **Γιαγιά**. *Επιπλέον, οι έννοιες* **Άντρας** *και* **Γυναίκα** *είναι ξένες μεταξύ τους, κάτι το οποίο ισχύει και για τις έννοιες* **Πατέρας** *και* **Μητέρα**. *Οι σχέσεις υπαγωγής προκύπτουν από τους ορισμούς εξαιτίας της σημασιολογίας των "$\sqcap$" και "$\sqcup$". Το γεγονός ότι η έννοια* **Άντρας** *είναι ξένη με την έννοια* **Γυναίκα** *προκύπτει από το ότι η* **Άντρας** *υπάγεται στην άρνηση της* **Γυναίκα**.

Παραδοσιακά, ο κύριος μηχανισμός συλλογιστικής που παρεχόταν από τα συστήματα Περιγραφικής Λογικής ήλεγχε την υπαγωγή εννοιών. Κάτι τέτοιο είναι επαρκές για την υλοποίηση και των άλλων διαδικασιών εξαγωγής συμπερασμάτων, όπως θα φανεί και παρακάτω.

Πρόταση 1.2 (Αναγωγή στην Υπαγωγή). *Για τις έννοιες C, D ισχύουν*

(i) *η C είναι* μη-ικανοποιήσιμη $\Leftrightarrow$ *η C υπάγεται στην $\bot$,*

(ii) *οι C και D είναι* ισοδύναμες $\Leftrightarrow$ *η C υπάγεται στην D και η D υπάγεται στην C,*

(iii) οι C και D είναι ξένες $\Leftrightarrow$ η $C \sqcap D$ υπάγεται στην $\top$.

Τα παραπάνω ισχύουν και με βάση το TBox.

Όλες οι περιγραφικές γλώσσες που υλοποιούνται σε πραγματικά συστήματα Περιγραφικής Λογικής παρέχουν τον τελεστή τομής " $\sqcap$ " και σχεδόν όλες περιέχουν μια μη-ικανοποιήσιμη έννοια. Για αυτό το λόγο, τα περισσότερα συστήματα Περιγραφικής Λογικής που μπορούν να ελέγξουν την υπαγωγή μπορούν να ελέγξουν και τις υπόλοιπες διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων, που δηλώνονται παραπάνω.

Εάν, επιπρόσθετα με την τομή, ένα σύστημα επιτρέπει την δημιουργία της άρνησης μιας έννοιας, τότε είναι δυνατόν να αναχθούν τα προβλήματα υπαγωγής, ισοδυναμίας και ξένων εννοιών στο πρόβλημα ικανοποιησιμότητας. Για μια πιο λεπτομερή και εκτενή ανάλυση ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [47].

Πρόταση 1.3 (Αναγωγή στην μη-Ικανοποιησιμότητα)**.** *Για τις έννοιες C, D ισχύουν*

(i) η C υπάγεται *στην $D \Leftrightarrow$ η $C \sqcap \neg D$ είναι μη-ικανοποιήσιμη,*

(ii) οι C και D είναι ισοδύναμες *$\Leftrightarrow$ η $(C \sqcap \neg D)$ και η $(D \sqcap \neg C)$ είναι μη-ικανοποιήσιμες,*

(iii) οι C και D είναι ξένες *μεταξύ τους $\Leftrightarrow$ η $C \sqcap D$ είναι μη-ικανοποιήσιμη.*

Τα παραπάνω ισχύουν και με βάση το TBox.

Η αναγωγή της υπαγωγής μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή εφόσον από την κλασσική θεωρία συνόλων ισχύει ότι για τα σύνολα M, N ισχύει $M \subseteq N$ εάν και μόνο εάν $M \setminus N = \emptyset$. Η αναγωγή της ισοδυναμίας είναι ορθή επειδή τα C και D είναι ισοδύναμα εάν και μόνο εάν η C υπάγεται στη D και η D υπάγεται στη C. Τέλος, η αναγωγή της σχέσης ξένων εννοιών είναι απλά μια επαναδιατύπωση του ορισμού.

Λόγω της παραπάνω πρότασης, και για να μπορέσουν να δημιουργηθούν διαδικασίες απόφασης για κάθε ένα από τα τέσσερα προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων, είναι σκόπιμη η δημιουργία αλγορίθμων που αποφαίνονται για την ικανοποιησιμότητα των εννοιών, δεδομένου ότι η γλώσσα για την οποία μπορεί να γνωματευθεί η ικανοποιησιμότητα υποστηρίζει τον τελεστή ένωσης καθώς και την άρνηση αυθαίρετων εννοιών. Η τάση αυτή, να αποτελεί ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας κύρια διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων, είχε ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη ενός νέου είδους αλγορίθμων συλλογιστικής στην Περιγραφική Λογική, που αποτελούν εξειδίκευση των αλγορίθμων tableaux [45].

Σε μια γλώσσα $\mathcal{AL}$ που δεν υποστηρίζει πλήρη άρνηση, η υπαγωγή και η ισοδυναμία δεν μπορούν να αναχθούν στη μη-ικανοποιησιμότητα έτσι όπως δείχνει η Πρόταση 1.3. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τα προβλήματα αυτά να έχουν διαφορετική πολυπλοκότητα. Όπως φαίνεται και από την Πρόταση 1.2, από την όψη της πολυπλοκότητας της χειρότερης περίπτωσης, η υπαγωγή είναι η γενικότερη διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων για κάθε γλώσσα $\mathcal{AL}$. Η παρακάτω πρόταση δείχνει ότι η μη-ικανοποιησιμότητα είναι μια ειδική περίπτωση για κάθε ένα από τα προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων.

Πρόταση 1.4 (Ανάγωντας την μη-Ικανοποιησιμότητα). *Έστω μια έννοια C. Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) *η C είναι μη-ικανοποιήσιμη,*

(ii) *η C υπάγεται στην $\perp$,*

(iii) *η C και η $\perp$ είναι ισοδύναμες,*

(iv) *η C και η $\top$ είναι ξένες μεταξύ τους.*

Τα παραπάνω ισχύουν και με βάση το $TBox$.

Από τις Προτάσεις 1.2 και 1.4 φαίνεται ότι για να προκύψουν κατώτερα και ανώτερα όρια πολυπλοκότητας για τις διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων, στις γλώσσες $\mathcal{AL}$, είναι αρκετό προκύψουν κατώτερα όρια για την μη-ικανοποιησιμότητα και ανώτερα όρια για την υπαγωγή. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε γλώσσα $\mathcal{AL}$, ένα ανώτερο όριο για την πολυπλοκότητα του προβλήματος υπαγωγής είναι ένα ανώτερο όριο και για την πολυπλοκότητα των προβλημάτων μη-ικανοποιησιμότητας, ισοδυναμίας και του προβλήματος ξένων εννοιών. Επιπλέον, ένα κατώτερο όριο πολυπλοκότητας του προβλήματος μη-ικανοποιησιμότητας είναι ένα κατώτερο όριο και για την πολυπλοκότητα των προβλημάτων υπαγωγής, ισοδυναμίας και του προβλήματος ξένων εννοιών.

Εξαλείφοντας το $TBox$

Στις διάφορες εφαρμογές, οι έννοιες συνήθως περιέχονται στο περιβάλλον ενός $TBox$. Παρόλα αυτά, για την ανάπτυξη διαδικασιών είναι εννοιολογικά πιο εύκολο να αφαιρεθούν από το $TBox$, ή να υποτεθεί ότι το $TBox$ είναι άδειο.

Εάν η ορολογία ($TBox$) $\mathcal{T}$ είναι μη-κυκλική είναι εφικτό τα προβλήματα που προκύπτουν με βάση τη $\mathcal{T}$ να αναχθούν σε προβλήματα με βάση το κενό $TBox$. Όπως έχει ειπωθεί και στην Πρόταση 1.1, η $\mathcal{T}$ είναι ισοδύναμη με την επέκταση της $\mathcal{T}'$. Για κάθε έννοια C ορίζεται *η επέκταση της με βάση την $\mathcal{T}$* ως η έννοια C' που προκύπτει από τη C αντικαθιστώντας κάθε σύμβολο ονόματος A στη C με την έννοια D, όπου $A \equiv D$ είναι ο ορισμός της A στην $\mathcal{T}'$.

Για παράδειγμα, η επέκταση της φράσης

$$\mathsf{Γυναίκα} \sqcap \mathsf{Άντρας}$$

με βάση την ορολογία του Σχήματος 1.2, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την επέκταση της στο Σχήμα 1.3 και αντικαθιστώντας τις έννοιες $\mathsf{Γυναίκα}$ και $\mathsf{Άντρας}$ με το δεξί μέλος των ορισμών τους από αυτή την επέκταση είναι η έννοια

$$\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό} \sqcap \mathsf{Άτομο} \sqcap \neg(\mathsf{Άτομο} \sqcap \mathsf{Θηλυκό}).$$

Εφόσον η επέκταση C' προκύπτει από την C αντικαθιστώντας τα ονόματα με περιγραφές με τέτοιο τρόπο ώστε και οι δύο να μπορούν να ερμηνευθούν με τον ίδιο τρόπο από ένα μοντέλο της $\mathcal{T}$, προκύπτει ότι

- $C \equiv_{\mathcal{T}} C'$.

Για το λόγο αυτό η C είναι ικανοποιήσιμη με βάση την $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν η C' είναι ικανοποιήσιμη με βάση την $\mathcal{T}$. Παρόλα αυτά, η C' δεν περιέχει ονόματα που έχουν οριστεί και γι΄ αυτό είναι ικανοποιήσιμη με βάση την $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν είναι ικανοποιήσιμη. Άρα

- η C είναι ικανοποιήσιμη με βάση την $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν είναι ικανοποιήσιμη.

Εάν η D είναι μια άλλη έννοια τότε ισχύει και $D \equiv_{\mathcal{T}} D'$. Συνεπώς, ισχύει $C \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D$ εάν και μόνο εάν $C' \sqsubseteq_{\mathcal{T}} D'$, και $C \equiv_{\mathcal{T}} D$ εάν και μόνο εάν $C' \equiv_{\mathcal{T}} D'$. Και πάλι, εφόσον οι έννοιες C' και D' περιέχουν μόνο βασικά σύμβολα ισχύει

- $\mathcal{T} \models C \sqsubseteq D$ εάν και μόνο εάν $\mathcal{T} \models C' \sqsubseteq D'$,
- $\mathcal{T} \models C \equiv D$ εάν και μόνο εάν $\mathcal{T} \models C' \equiv D'$.

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να δειχθεί ότι

- οι C και D είναι ξένες μεταξύ τους με βάση την $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν οι C' και D' είναι ξένες μεταξύ τους.

Συνοψίζοντας, γίνεται αντιληπτό ότι η επέκταση των εννοιών με βάση κάποια ορολογία ($TBox$) έχει ως αποτέλεσμα το $TBox$ να μην χρειάζεται πλέον. Η επέκταση αυτή μπορεί να είναι υπολογιστικά δαπανηρή, εφόσον στην χειρότερη περίπτωση το μέγεθος της $\mathcal{T}'$ είναι εκθετικό σε σχέση με το μέγεθος της $\mathcal{T}$, και για το λόγο αυτό η C' μπορεί να έχει πιο μεγάλο μέγεθος από την C κατά ένα παράγοντα εκθετικό ως προς το μέγεθος της $\mathcal{T}$.

Διαδικασίες συλλογιστικής για τα $ABox$

Μετά τη δημιουργία της ορολογίας και αφού έχει γίνει έλεγχος, με την χρήση των διαδικασιών συλλογιστικής του συγκεκριμένου συστήματος Περιγραφικής Λογικής, ότι οι έννοιες είναι ικανοποιήσιμες και ότι οι σχέσεις υπαγωγής που είναι δυνατό να προκύψουν είναι ορθές, το $ABox$ μπορεί να γεμίσει με αναθέσεις που αφορούν τα άτομα. Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω ένα $ABox$ περιλαμβάνει δύο είδη αναθέσεων, τις αναθέσεις εννοιών που έχουν την μορφή $C(\alpha)$ και τις αναθέσεις ρόλων που έχουν τη μορφή $R(\alpha, b)$. Βέβαια η αναπαράσταση αυτής της γνώσης πρέπει να είναι συνεπής για να μη δημιουργούνται αντιφάσεις και να μην προκύπτουν αυθαίρετα συμπεράσματα. Υπεύθυνο για αυτό τον έλεγχο είναι το σύστημα Περιγραφικής Λογικής που συνδυάζοντας τις αναθέσεις και τα αξιώματα που δηλώνονται στην ορολογία πρέπει να είναι σε θέση να αποφανθεί εάν οι δηλώσεις αυτές είναι συνεπείς.

Ένα $ABox$ $\mathcal{A}$ λέγεται ότι είναι *συνεπές με βάση μια ορολογία* $\mathcal{T}$, εάν υπάρχει μια ερμηνεία που να είναι μοντέλο και του $\mathcal{A}$ και της $\mathcal{T}$. Λέγεται ότι το $\mathcal{A}$ είναι *συνεπές* εάν είναι συνεπές με βάση την άδεια ορολογία (το άδειο $TBox$).

Για παράδειγμα το σύνολο των αναθέσεων {**Μητέρα**(ΜΑΡΙΑ), **Πατέρας**(ΜΑΡΙΑ)} είναι συνεπές (με βάση το άδειο $TBox$), επειδή χωρίς κάποιους επιπλέον περιορισμούς στην ερμηνεία των **Μητέρα** και **Πατέρας**, οι δύο έννοιες μπορούν να ερμηνευτούν με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν ένα κοινό στοιχείο. Από την άλλη όμως, οι αναθέσεις αυτές δεν είναι συνεπείς με βάση το $TBox$ του Σχήματος 1.2 μιας και σε κάθε μοντέλο του οι έννοιες **Μητέρα** και **Πατέρας** είναι ξένες μεταξύ τους.

Παρόμοια με τις έννοιες, ο έλεγχος συνέπειας ενός $ABox$ με βάση μια μη-κυκλική ορολογία μπορεί να αναχθεί στον έλεγχο ενός εκτεταμένου $ABox$. Η επέκταση του $\mathcal{A}$ με βάση την $\mathcal{T}$ ορίζεται ως το $ABox$ $\mathcal{A}'$ που προκύπτει από το $\mathcal{A}$ με την αντικατάσταση κάθε ανάθεσης έννοιας $C(\alpha)$ στο $\mathcal{A}$ με την ανάθεση $C'(\alpha)$, όπου C' είναι η επέκταση της C με βάση την $\mathcal{T}$. Σε κάθε μοντέλο της $\mathcal{T}$, μια έννοια C και η επέκταση της C' ερμηνεύονται με τον ίδιο τρόπο. Για το λόγο αυτό, το $\mathcal{A}'$ είναι συνεπές με βάση την $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν είναι συνεπές και το $\mathcal{A}$. Επειδή όμως, το $\mathcal{A}'$ δεν περιέχει σύμβολα ονομάτων που ορίζονται στην $\mathcal{T}$, είναι συνεπές με βάση την $\mathcal{T}$ εάν είναι συνεπές. Άρα:

- Το $\mathcal{A}$ είναι συνεπές με βάση την ορολογία $\mathcal{T}$ εάν και μόνο εάν η επέκταση $\mathcal{A}'$ είναι συνεπής.

Στη συνέχεια οι διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων που θα παρουσιαστούν ορίζονται και με βάση μια ορολογία αλλά και με βάση μόνο ένα $ABox$. Για το λόγο αυτό θα δωθούν ορισμοί μόνο με τα $ABox$. Με βάση ένα $ABox$ $\mathcal{A}$, μπορούν να τεθούν επερωτήσεις όσον αφορά τις σχέσεις μεταξύ εννοιών, ρόλων και ατόμων. Η πρωταρχική διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων στα $ABox$ που περιέχει τέτοιες επερωτήσεις βασίζεται στον *έλεγχο στιγμιοτύπου*, ή στον έλεγχο εάν μια ανάθεση συνεπάγεται από ένα $ABox$. Μια ανάθεση α *συνεπάγεται* από το $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \alpha$, εάν κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί το $\mathcal{A}$ ικανοποιεί ταυτόχρονα και την α. Εάν η α είναι μια ανάθεση ρόλου, ο έλεγχος στιγμιοτύπου είναι απλός, εφόσον η περιγραφική γλώσσα δεν περιέχει κατασκευαστές για τη δημιουργία πιο σύνθετων ρόλων. Εάν η α είναι της μορφής

$C(\alpha)$, μπορεί να γίνει αναγωγή του ελέγχου στιγμιοτύπου στον έλεγχο συνέπειας για τα *ABox* εφόσον ισχύει:

- $\mathcal{A} \models C(\alpha)$ εάν και μόνο εάν η $\mathcal{A} \cup \{\neg C(\alpha)\}$ είναι μη-συνεπής.

Επίσης,και η συλλογιστική που αφορά έννοιες μπορεί να αναχθεί στον έλεγχο συνέπειας. Ισχύει

- η C είναι ικανοποιήσιμη εάν και μόνο εάν η $\{C(\alpha)\}$ είναι συνεπής,

όπου α είναι ένα αυθαίρετο όνομα ατόμου. Αντίθετα, έχει δειχθεί [43] ότι η συνέπεια ενός *ABox* μπορεί να αναχθεί στην ικανοποιησιμότητα εννοιών σε γλώσσες που περιέχουν τους κατασκευαστές "ένα από" και "γεμίζει". Εάν οι κατασκευαστές αυτοί δεν υπάρχουν ο έλεγχος στιγμιοτύπου μπορεί να αποδειχθεί πιο δύσκολος από τα προβλήματα ικανοποιησιμότας και υπαγωγής [8].

Στις διάφορες εφαρμογές, συνήθως απαιτούνται πιο πολύπλοκες διαδικασίες εξαγωγής συμπερασμάτων από τον έλεγχο συνέπειας και στιγμιοτύπου. Θεωρώντας μια βάση γνώσης σαν ένα μέσο αποθήκευσης πληροφοριών για κάποια άτομα, μια χρήσιμη λειτουργία μπορεί να είναι η ανεύρεση των ατόμων που είναι στιγμιότυπα μιας έννοιας C. Κάτι τέτοιο αποτελεί το *πρόβλημα ανάκτησης* (retrieval problem). Το πρόβλημα ανάκτησης, δεδομένου ενός *ABox* $\mathcal{A}$ και μιας έννοιας C, είναι η ανεύρεση όλων των ατόμων α έτσι ώστε $\mathcal{A} \models C(\alpha)$. Ένας μη-αποδοτικός αλγόριθμος για την λύση του παραπάνω προβλήματος είναι ο έλεγχος εάν κάθε ατόμο, που περιέχεται στο *ABox*, είναι στιγμιότυπο της έννοιας C.

Το δυαδικό ανάλογο της ανάκτησης είναι το *πρόβλημα αντίληψης* το οποίο ορίζεται ως εξής: δεδομένου ενός ατόμου α και ενός συνόλου από έννοιες, ζητούνται *οι πιο συγκεκριμένες έννοιες* για τις οποίες $\mathcal{A} \models C(\alpha)$. Με τον όρο συγκεκριμένες έννοιες εννοούνται οι έννοιες εκείνες που είναι ελάχιστες με βάση την ταξινόμηση του τελεστή υπαγωγής $\sqsubseteq$. Εφαρμογή του προβλήματος αυτού μπορεί να συναντηθεί σε συστήματα παραγωγής φυσικής γλώσσας εάν οι όροι είναι τοποθετημένοι σε ένα ευρετήριο με βάση τις έννοιες και εάν αναζητηθεί ένας όρος για ένα αντικείμενο που προκύπτει σε μια ομιλία.

Σημασιολογία ανοικτού και κλειστού κόσμου

Οι βάσεις γνώσης της Περιγραφικής Λογικής παρουσιάζουν ομοιότητες με τις βάσεις δεδομένων. Η διαγραμματική παράσταση μια βάσης συγκρίνεται με την ορολογία (*TBox*), και το στιγμιότυπο με τα πραγματικά δεδομένα συγκρίνεται με το *ABox*. Παρόλα αυτά, η σημασιολογία του *ABox* διαφέρει από τα συνηθισμένα στιγμιότυπα των βάσεων δεδομένων. Ενώ ένα στιγμιότυπο μιας βάσης δεδομένων αναπαριστά ακριβώς μια ερμηνεία, ένα *ABox* αναπαριστά πολλές διαφορετικές ερμηνείες, πολλά διαφορετικά

έχειΠαιδί(ΙΟΚΑΣΤΗ, ΟΙΔΙΠΟΥΣ)	έχειΠαιδί(ΙΟΚΑΣΤΗ, ΠΟΛΥΝΙΚΗΣ)
έχειΠαιδί(ΟΙΔΙΠΟΥΣ, ΠΟΛΥΝΙΚΗΣ)	έχειΠαδί(ΠΟΛΥΝΙΚΗΣ, ΘΥΣΑΝΔΡΟΣ)
Πατροκτόνος(ΟΙΔΙΠΟΥΣ)	¬Πατροκτόνος(ΘΥΣΑΝΔΡΟΣ)

Σχήμα 1.5: Το *ABox* του Οιδίποδα $\mathcal{A}_{oe}$

μοντέλα. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η απουσία γνώσης σε ένα στιγμιότυπο μιας βάσης δεδομένων να ερμηνεύεται ως αρνητική γνώση, ενώ η απουσία γνώσης σε ένα *ABox* να υποδηλώνει απλά την έλλειψη γνώσης.

Έστω, για παράδειγμα, ότι η μοναδική ανάθεση που έχει γίνει για την έννοια Πέτρος είναι έχειΠαιδί(ΠΕΤΡΟΣ,ΧΑΡΗΣ). Τότε, σε μια βάση δεδομένων η ανάθεση αυτή δηλώνει ότι ο Πέτρος έχει μόνο ένα παιδί, τον Χάρης, ενώ σε ένα *ABox* η ανάθεση αυτή δηλώνει ότι ο Χάρης είναι παιδί του Πέτρος. Όμως το *ABox* έχει πολλά μοντέλα, κάτι το οποίο σημαίνει ότι σε κάποια από αυτά ο Χάρης είναι το μοναδικό παιδί του Πέτρος ενώ σε άλλα μπορεί να έχει αδέρφια. Από τα παραπάνω φαίνεται ότι ενώ στις βάσεις δεδομένων οι πληροφορίες που δηλώνονται είναι πλήρεις, δεν ισχύει το ίδιο και για τα *ABox*. Έτσι η σημασιολογία του *ABox* χαρακτηρίζεται σημασιολογία "ανοικτού κόσμου", ενώ η παραδοσιακή σημασιολογία των βάσεων δεδομένων χαρακτηρίζεται σημασιολογία "κλειστού κόσμου".

Η άποψη αυτή παίζει σημαντικό ρόλο στην απάντηση επερωτήσεων. Στην ουσία, μια επερώτηση είναι η περιγραφή μιας κλάσεως αντικειμένων. Στην Περιγραφική Λογική οι επερωτήσεις είναι περιγραφές εννοιών. Με βάση τα παραπάνω, μια βάση δεδομένων είναι μια λίστα μιας πεπερασμένης ερμηνείας. Μια πεπερασμένη ερμηνεία, έστω $\mathcal{I}$, μπορεί να γραφεί ως ένα σύνολο από αναθέσεις της μορφής $A(\alpha)$ και $R(\alpha, b)$, όπου A είναι μια ατομική έννοια και R ένας ατομικός ρόλος. Ένα τέτοιο σύνολο είναι συντακτικά ίδιο με ένα *ABox*, αλλά δεν είναι *ABox* επειδή υπάρχει διαφορά στην σημασιολογία. Η απάντηση σε μια επερώτηση, που εκφράζεται από μια σύνθετη έννοια C, πάνω σε μια βάση δεδομένων ισοδυναμεί με τον υπολογισμό της C^I. Με βάση τη *Λογική* αυτό σημαίνει ότι η αποτίμηση επερωτήσεων σε μια βάση δεδομένων δεν είναι λογική συλλογιστική, αλλά αποτίμηση ενός τύπου σε ένα σταθερό πεπερασμένο μοντέλο.

Εφόσον ένα *ABox* εκφράζει ένα πολύ μεγάλο αριθμό από ερμηνείες, μοντέλα, η απάντηση των επερωτήσεων είναι πιο σύνθετη. Για να γίνει αντιληπτή η διαφορά μεταξύ της σημασιολογίας μιας βάσης δεδομένων με ένα μοντέλο, και της σημασιολογίας "ανοικτού κόσμου" παρατίθεται ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 3. *Το παράδειγμα στηρίζεται στην ιστορία του Οιδίποδα. Συνοπτικά, η ιστορία αφηγείται πώς ο Οιδίποδας σκότωσε τον πατέρα του, παντρεύτηκε τη μητέρα του, και έκανε μαζί της ένα παιδί, τον Πολυνίκη. Στη συνέχεια και ο Πολυνίκης έκανε* *παιδιά, ένα από τα οποία είναι και ο Θύσανδρος.*

Το ABox του Σχήματος 1.5 αναπαριστά κάποια θεμελιώδη στοιχεία σχετικά με αυτά τα γεγονότα. Έστω τώρα ότι γίνεται η επερώτηση εάν η Ιοκάστη έχει παιδί που είναι πατροκτόνος και που το παιδί του δεν είναι πατροκτόνος. Η επερώτηση αυτή εκφράζεται με την παρακάτω συνεπαγωγή

$$\mathcal{A}_{oe} \models (\exists \textsf{έχειΠαιδί}.(\textbf{Πατροκτόνος} \sqcap \exists \textsf{έχειΠαιδί}.\neg\textbf{Πατροκτόνος}))(\textsf{ΙΟΚΑΣΤΗ})?$$

Εάν τα παραπάνω συνέβαιναν σε μια βάση δεδομένων τότε η διαδικασία συλλογιστικής θα ήταν η εξής. Από το ABox δηλώνεται ότι η Ιοκάστη έχει δύο παιδιά. Το ένα από αυτά, ο Οιδίπους, είναι πατροκτόνος. Αυτός έχει ένα παιδί, τον Πολυνίκη. Όμως, στο ABox δεν δηλώνεται ότι ο Πολυνίκης δεν *είναι πατροκτόνος, οπότε ο Οιδίπους δεν είναι το παιδί που ζητείται. Το άλλο παιδί της Ιοκάστης είναι ο Πολυνίκης. Όμως και πάλι στο ABox δεν δηλώνεται ότι ο Πολυνίκης είναι πατροκτόνος, οπότε ούτε αυτός είναι το παιδί που ζητείται. Άρα γίνεται αντιληπτό ότι η ανάθεση που αφορά την Ιοκάστη δεν συνεπάγεται από το ABox.*

Η συλλογιστική που ακολουθείται στην Περιγραφική Λογική όμως είναι διαφορετική. Εδώ ισχύει η σημασιολογία "ανοικτού κόσμου". Επειδή δεν δηλώνεται εάν ο Πολυνίκης είναι πατροκτόνος ή όχι μπορεί να υποτεθεί ορθά είτε ότι είναι πατροκτόνος είτε ότι δεν είναι. Στο ένα μοντέλο, στο οποίο θεωρείται ότι ο Πολυνίκης είναι πατροκτόνος ισχύουν τα εξής: Ο Πολυνίκης είναι παιδί της Ιοκάστης και είναι πατροκτόνος. Ο Πολυνίκης τώρα έχει ένα παιδί τον Θύσανδρο που δεν είναι πατροκτόνος. Στο άλλο μοντέλο, στο οποίο ο Πολυνίκης δεν είναι πατροκτόνος ισχύουν τα εξής: Ο Οιδίπους είναι παιδί της Ιοκάστης και είναι πατροκτόνος. Ο Οιδίπους τώρα έχει ένα παιδί τον Πολυνίκη που δεν είναι πατροκτόνος. Από τα παραπάνω γίνεται εμφανές ότι σε όλα τα μοντέλα η Ιοκάστη έχει ένα παιδί που είναι πατροκτόνος και που αυτό το παιδί έχει ένα παιδί που δεν είναι πατροκτόνος (παρόλο που αυτό δεν είναι πάντα το ίδιο παιδί). Αυτό σημαίνει ότι η ανάθεση $\mathcal{A}_{oe} \models (\exists \textsf{έχειΠαιδί}.(\textbf{Πατροκτόνος} \sqcap \exists \textsf{έχειΠαιδί}.\neg\textbf{Πατροκτόνος}))(\textsf{ΙΟΚΑΣΤΗ})$ *συνεπάγεται όντως από το* $\mathcal{A}_{oe}$.

Όπως φαίνεται από το παραπάνω παράδειγμα, η συλλογιστική "ανοικτού κόσμου" ίσως απαιτεί να γίνει εξέταση περιπτώσεων. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο τα προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων στην Περιγραφική Λογική είναι συνήθως πιο περίπλοκα από την απάντηση επερωτήσεων στις βάσεις δεδομένων.

1.3 Αλγόριθμοι Συλλογιστικής

Όπως ειπώθηκε και στην παράγραφο 1.2.4 όλα τα προβλήματα εξαγωγής συμπερασμάτων μπορούν να αναχθούν στο πρόβλημα συνέπειας των *ABox*, εφόσον η Περιγραφική Γλώσσα επιτρέπει τους τελεστές τομής και άρνησης. Παρόλα αυτά, στις παλιότερες περιγραφικές γλώσσες, αλλά και σε κάποια σύγχρονα συστήματα, δεν επιτρέπεται ο τελεστής της άρνησης. Για τα συστήματα αυτά, η υπαγωγή των εννοιών μπορεί να υπολογιστεί με τους λεγόμενους *δομημένους αλγόριθμους υπαγωγής*, δηλαδή αλγόριθμους που συγκρίνουν την συντακτική δομή της περιγραφής των εννοιών. Ενώ οι αλγόριθμοι αυτοί είναι ιδιαίτερα αποδοτικοί, είναι πλήρεις μόνο για απλές περιγραφικές γλώσσες με μικρή εκφραστικότητα. Οι δομημένοι αλγόριθμοι υπαγωγής, όμως, δεν μπορούν να χειριστούν συστήματα Περιγραφικής Λογικής που περιέχουν (πλήρη) άρνηση και ένωση. Για τις γλώσσες αυτές χρησιμοποιούνται οι λεγόμενοι *αλγόριθμοι tableaux*. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει αναλυτικές πληροφορίες και παραδείγματα στα [45, 17, 16, 7, 3].

Κεφάλαιο 2

Λογικός Προγραμματισμός

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια αναφορά στον Λογικό Προγραμματισμό ως μια μέθοδος αναπαράστασης δηλωτικής γνώσης. Ειδικότερα θα γίνει αναφορά σε λογικά προγράμματα που περιέχουν τον κλασσικό τελεστή άρνησης [11] καθώς και τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία (negation as failure) [6]. Ο Λογικός Προγραμματισμός προτάθηκε από το McCarthy το 1959 [28], μελετήθηκε από το Minker το 1988 [31] καθιερώθηκε όμως από τους Kowalski και Colmeraurer.

2.1 Εισαγωγή

Η Λογική αποτελεί ένα τρόπο για την αποσαφήνιση και την τυποποίηση της διαδικασίας της ανθρώπινης σκέψης και παρέχει μια σημαντική και εύχρηστη μεθοδολογία για την αναπαράσταση γνώσης και την επίλυση προβλημάτων. Η ανάγκη χρήσης μιας αυστηρά ορισμένης γλώσσας, με τη μαθηματική έννοια, προήλθε από την ακαταλληλότητα της φυσικής γλώσσας να χρησιμοποιηθεί σε υπολογιστικά συστήματα. Αντίθετα η Λογική προσφέρει μια σαφή, ακριβή και απλή στη σύνταξη γλώσσα, δίνοντας ταυτόχρονα τη δυνατότητα παραγωγής νέας γνώσης από την ήδη υπάρχουσα. Πολύ καλή εισαγωγή στην Μαθηματική Λογική αποτελούν τα [39, 29].

2.1.1 Προτασιακή Λογική

Η πιο απλή μορφή Λογικής είναι η *προτασιακή λογική* (propositional logic). Σε αυτή κάθε γεγονός του κόσμου που περιγράφεται αναπαρίσταται με μια λογική πρόταση, η οποία χαρακτηρίζεται είτε ως αληθής (true), είτε ώς ψευδής (false). Μπορεί δηλαδή, να έχει δύο λογικές τιμές. Οι λογικές προτάσεις ονομάζονται άτομα. Τα άτομα αυτά μπορούν να συνδυαστούν με τη χρήση των λογικών συμβόλων (connectives) που φαίνονται στον Πίνακα 2.1. Οι σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν με τη χρήση των συμβόλων αυτών ονομάζονται ορθά-δομημένοι τύποι (well-formed formulae).

Σύμβολο	**Ονομασία / Επεξήγηση**
$\wedge$	σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ")
$\vee$	διάζευξη (λογικό "Η")
$\neg$	άρνηση
$\leftarrow$	συνεπαγωγή ("ΕΑΝ")
$\leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία ("ΕΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΕΑΝ")

Πίνακας 2.1: Λογικά Σύμβολα Προτασιακής Λογικής

Η προτασιακή λογική είναι ιδιαίτερα απλή. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με το ότι μπορεί να καταλήξει πάντα σε συμπέρασμα την κάνουν ιδιαίτερα χρήσιμη σε εφαρμογές αναπαράστασης γνώσης. Όμως, παρουσιάζει ένα σημαντικό μειονέκτημα. Η έλλειψη γενικότητας οδηγεί σε ογκώδεις αναπαραστάσεις γνώσης, καθώς κάθε γεγονός πρέπει να αναπαρίσταται με μια ξεχωριστή λογική πρόταση. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται από την κατηγορηματική λογική ή λογική πρώτης τάξης.

Η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων της προτασιακής λογικής στηρίζεται στο γεγονός ότι κάθε ορθά δομημένος τύπος μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής. Για αυτό το λόγο η εξαγωγή συμπερασμάτων γίνεται μέσω πινάκων αλήθειας και μέσω της διαδικασίας της απόδειξης. Η διαδικασία της απόδειξης στηρίζεται σε διάφορους κανόνες της προτασιακής λογικής ο σημαντικότερος από τους οποίους είναι ο κανόνας "*τρόπος του θέτειν*" (modus ponens). Σύμφωνα με αυτόν, εάν είναι γνωστή η ορθότητα των προτάσεων P και $Q \leftarrow P$ μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα ότι η Q είναι αληθής. Δηλαδή,

$$P \wedge (Q \leftarrow P) \models Q$$

όπου το σύμβολο $\models$ δηλώνει ότι το Q προκύπτει λογικά από τον τύπο του αριστερού μέλους.

2.1.2 Κατηγορηματική Λογική

Η *κατηγορηματική λογική* (predicate logic) ή *λογική πρώτης τάξης* επεκτείνει την προτασιακή λογική εισάγοντας μεταβλητές, κατηγορήματα και ποσοδείκτες. Ένα γεγονός αναπαριστάται με ένα ατομικό τύπο της μορφής $P(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, όπου το P ονομάζεται *κατηγόρημα* (predicate) και τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *ορίσματα* (arguments). Επίσης υπάρχουν και *συναρτησιακοί όροι* (functional terms) που έχουν την μορφή $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ όπου το f είναι το συναρτησιακό σύμβολο και τα $t_1, t_2, \ldots, t_n$ τα ορίσματα. Στην κατηγορηματική λογική οι σύνθετες προτάσεις προκύπτουν με τη χρήση των συμβόλων που φαίνονται στον Πίνακα 2.2

Η ύπαρξη ποσοδεικτών και μεταβλητών αυξάνει σημαντικά την εκφραστική ικανότη-

Σύμβολο	**Ονομασία / Επεξήγηση**
$\wedge$	σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ")
$\vee$	διάζευξη (λογικό "Η")
$\neg$	άρνηση
$\leftarrow$	συνεπαγωγή ("ΕΑΝ")
$\leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία ("ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ")
$\forall$	καθολικός ποσοδείκτης ($\forall x$ σημαίνει για κάθε x)
$\exists$	υπαρξιακός ποσοδείκτης ($\exists x$ σημαίνει υπάρχει x)

Πίνακας 2.2: Λογικά Σύμβολα Κατηγορηματικής Λογικής

τα της κατηγορηματικής λογικής με αποτέλεσμα η κατηγορηματική λογική να πλησιάζει κατά πολύ την φυσική γλώσσα και να μπορεί να συλλάβει τη γενικότητα που εμφανίζεται στις πραγματικές εφαρμογές.

Ο βασικός μηχανισμός εξαγωγής συμπερασμάτων στην κατηγορηματική λογική είναι η απόδειξη. Η ύπαρξη μεταβλητών κάνει απαραίτητη την εισαγωγή των διαδικασιών της *αντικατάστασης* (substitution) και της *ενοποίησης* (unification). Η πρώτη αφορά στην αντικατάσταση των μεταβλητών μιας πρότασης από κάποιους όρους και παριστάνεται $\{x_i/t_i\}$, όπου x_i είναι η μεταβλητή που θα αντικατασταθεί και t_i ο όρος. Η ενοποίηση είναι η διαδικασία κατά την οποία δύο προτάσεις γίνονται όμοιες με τη χρήση αντικαταστάσεων. Οι διαδικασίες αντικατάστασης και ενοποίησης χρησιμοποιούνται στον βασικότερο μηχανισμό εξαγωγής συμπερασμάτων που είναι η "αρχή της ανάλυσης". Σύμφωνα με αυτή, από δύο προτάσεις της μορφής $(P \vee Q)$ και $(R \vee \neg Q)$ εξάγεται το $P \vee R$. Δηλαδή,

$$(P \vee Q) \wedge (R \vee \neg Q) \models P \vee R.$$

Η σημαντικότητα της αρχής της ανάλυσης εντοπίζεται στο γεγονός ότι είναι ο μοναδικός κανόνας που απαιτείται σε μια αποδεικτική διαδικασία για να εξάγει όλα τα σωστά συμπεράσματα. Για να μπορέσει όμως να εφαρμοστεί πρέπει όλες οι προτάσεις να είναι εκφρασμένες σε σύζευξη διαζεύξεων. Μια ειδική περίπτωση προτάσεων διαζευκτικής λογικής είναι οι προτάσεις *Horn*. Στις προτάσεις Horn, επιτρέπεται μόνο ένας ατομικός τύπος στο συμπέρασμα και δεν επιτρέπεται η εμφάνιση αρνήσεων ατομικών τύπων. Είναι δηλαδή, της μορφής:

$$R \leftarrow Q_1, Q_2, \ldots, Q_n.$$

Οι προτάσεις Horn αποτελούν την πλέον χρησιμοποιούμενη μορφή αναπαράστασης γνώσης και χρησιμοποιούνται ευρέως στον Λογικό Προγραμματισμό.

2.2 Λογικά Προγράμματα

Η χρήση Λογικών Προγραμμάτων για την αναπαράσταση δηλωτικής γνώσης προτάθηκε από τον McCarthy [28] λίγα χρόνια πριν από την δημιουργία της πρώτης σχεσιακής Βάσης Δεδομένων. Ένα λογικό πρόγραμμα αποτελείται από κανόνες. Ένας κανόνας έχει δύο τμήματα: *την Κεφαλή* (Head) ή συμπέρασμα και *το Σώμα* (Body) ή προϋποθέσεις, που διαχωρίζονται με το σύμβολο ← ("εάν").

$$\textit{Κεφαλή} \leftarrow \textit{Σώμα}.$$

Ένα σύνολο από κανόνες ονομάζεται Λογικό Πρόγραμμα. Ένα λογικό πρόγραμμα μπορεί να θεωρηθεί ως ένας προσδιορισμός για τη δημιουργία θεωριών γύρω από ένα κόσμο, ενώ οι κανόνες μπορούν να θεωρηθούν ως οι περιορισμοί που πρέπει να ικανοποιούν οι θεωρίες αυτές.

Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα λογικού προγραμματισμού εμπνευσμένο από τη Βασιλική οικογένεια της Αγγλίας. Η σύνταξη της κεφαλής και του σώματος ενός κανόνα καθώς και η σημασιολογία των προγραμμάτων θα οριστούν παρακάτω.

Ο ορισμός του κατηγορήματος Μητέρα αποτελείται από τους ακόλουθους κανόνες:

$$\begin{array}{l}
\mathsf{Μητέρα(ΕΛΙΣΑΒΕΤ,ΚΑΡΟΛΟΣ)},\\
\mathsf{Μητέρα(ΝΤΑΪΑΝΑ,ΓΟΥΙΛΙΑΜ)},\\
\mathsf{Μητέρα(ΝΤΑΪΑΝΑ,ΧΑΡΥ)},\\
\neg\mathsf{Μητέρα}(x,y) \leftarrow \mathit{not}\ \mathsf{Μητέρα}(x,y).
\end{array} \tag{2.1}$$

Οι τρεις πρώτοι κανόνες έχουν ιδιαίτερα απλή δομή: Το σώμα τους είναι άδειο και η κεφαλή αποτελείται από μια ατομική πρόταση. Η κεφαλή του τελευταίου κανόνα είναι ένα άτομο σε άρνηση, και το σώμα του είναι μια έκφραση που περιέχει τον τελεστή *not*, ο οποίος ονομάζεται τελεστής "άρνηση σαν αποτυχία" (negation as failure). Ο κανόνας αυτός δηλώνει ότι, για κάθε άτομο x και y μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα $\neg\mathsf{Μητέρα}(x,y)$ εάν σε όλη την έκταση του προγράμματος *δεν* δίνεται κάποια πληροφορία ότι ισχύει $\mathsf{Μητέρα}(x,y)$. Ο κανόνας αυτός εκφράζει την "υπόθεση κλειστού κόσμου" [38] για το κατηγόρημα Μητέρα. Η ύπαρξη αυτού του κανόνα μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι $\neg\mathsf{Μητέρα(ΝΤΑΪΑΝΑ,ΝΤΑΪΑΝΑ)}$.

Ο τελεστής άρνηση σαν αποτυχία κάνει τα προγράμματα "μη-μονότονα". Αυτό σημαίνει ότι η προσθήκη ενός κανόνα σε ένα λογικό πρόγραμμα μπορεί να έχει ως αποτέλεσμα κάποια από τα συμπεράσματα που έχουν εξαχθεί νωρίτερα να μην ισχύουν. Κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με την κλασσική λογική. Η κλασσική λογική είναι μονότονη, υπό την έννοια ότι η προσθήκη ενός αξιώματος σε μια θεωρία πρώτης τάξης δίνει μόνο τη δυνατότητα εξαγωγής νέων συμπερασμάτων και δεν έχει τη δυνατότητα να αναιρέσει κανένα ήδη υπάρχον. Έστω, για παράδειγμα, το Πρόγραμμα 2.1, που δεν περιέχει όμως τον κανόνα Μητέρα(ΝΤΑΪΑΝΑ,ΧΑΡΥ). Εξαιτίας της υπόθεσης κλειστού κόσμου, από το πρόγραμμα που προκύπτει με την παραπάνω αφαίρεση, εξάγεται το συμπέρασμα ¬Μητέρα(ΝΤΑΪΑΝΑ,ΧΑΡΥ). Εάν τώρα προστεθεί πάλι ο κανόνας Μητέρα(ΝΤΑΪΑΝΑ,ΧΑΡΥ), το παραπάνω συμπέρασμα θα πρέπει να αναιρεθεί. Το ίδιο συμβαίνει και στις σχεσιακές βάσεις δεδομένων. Η προσθήκη μιας γραμμής σε ένα πίνακα μιας βάσης δεδομένων μπορεί να αναιρέσει ένα αρνητικό συμπέρασμα που έχει εξαχθεί.

2.2.1 Βασικά Προγράμματα

Βασικά Προγράμματα (Basic Programs) ονομάζονται τα προγράμματα εκείνα τα οποία δεν περιέχουν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία (negation as failure). Παρόλο που τα προγράμματα αυτά έχουν περιορισμένες εκφραστικές ικανότητες, και συνεπώς δεν χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές αναπαράστασης γνώσης, η μελέτη τους είναι ιδιαίτερα χρήσιμη επειδή, αποτελούν βάση για άλλες μορφές αναπαράστασης.

Σύνταξη

Έστω ένα μη-κενό σύνολο $\mathbf{A}$ αποτελούμενο από σύμβολα, τα οποία ονομάζονται *άτομα*. Η επιλογή του συνόλου $\mathbf{A}$ καθορίζει το σύνολο των ατόμων που θα χρησιμοποιηθούν και συνεπώς και τη γλώσσα των προγραμμάτων. Τα άτομα ονομάζονται διαφορετικά και θετικά λεκτικά. Αρνητικά λεκτικά λέγονται τα άτομα στα οποία εφαρμόζεται ο κλασσικός τελεστής της άρνησης $\neg$. Το σύνολο των λεκτικών, θετικών είτε αρνητικών, συμβολίζεται $Lit_{\mathbf{A}}$, ή πιο απλά Lit. Για κάθε άτομο A τα λεκτικά A και $\neg A$ καλούνται συμπληρωματικά (complementary). Όταν ένα σύνολο από λεκτικά A περιέχει ένα συμπληρωματικό ζεύγος τότε το σύνολο αυτό είναι *μη-συνεπές*, ενώ όταν δεν περιέχει είναι *συνεπές*.

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω ένας *βασικός κανόνας* είναι ένα διατεταγμένο ζεύγος *Κεφαλή* $\leftarrow$ *Σώμα*, που η *Κεφαλή* είναι ένα λεκτικό και το *Σώμα* είναι πεπερασμένο σύνολο από λεκτικά. Ένας βασικός κανόνας με κεφαλή το L_0 και σώμα το σύνολο $L_1, \ldots, L_k$ γράφεται

$$L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_k. \tag{2.2}$$

Στην περίπτωση που το σώμα αποτελείται από το κενό σύνολο τότε το σύμβολο $\leftarrow$ μπορεί να παραληφθεί.

Ένα *βασικό πρόγραμμα* είναι ένα σύνολο από βασικούς κανόνες.

Παράδειγμα 4. *Έστω, το σύνολο ατόμων* A $\{p, q, r, s\}$. *Οι κανόνες*

$$\begin{aligned} & p, \\ & \neg q, \\ & r \leftarrow p, q, \\ & \neg r \leftarrow p, \neg q, \\ & s \leftarrow r, \\ & s \leftarrow p, s, \\ & \neg s \leftarrow p, \neg q, \neg r \end{aligned} \tag{2.3}$$

αποτελούν ένα βασικό πρόγραμμα.

Γενικά κάθε άτομο που ανήκει στο σύνολο Lit χρησιμοποιείται μέσα στο πρόγραμμα τουλάχιστον μια φορά. Για το λόγο αυτό το σύνολο Lit δεν είναι απαραίτητο να δηλώνεται ρητά. Μπορεί να προκύψει με απλή παρατήρηση του προγράμματος.

Στις διάφορες εφαρμογές το σύνολο **A** είναι το σύνολο των ατομικών προτάσεων. Τα σύνολα κανόνων, σε τέτοιες γλώσσες, αναπαριστώνται από διαγραμματικές παραστάσεις (schemata) που χρησιμοποιούν μετα-μεταβλητές (meta-variables) για πλήρως αποτιμημένους όρους (ground terms). Τέτοιοι κανόνες θα παρουσιαστούν στην συνέχεια του κεφαλαίου.

Η Σχέση Συμπεράσματος

Στην κλασσική Λογική τα "συμπεράσματα" (concequences) ενός συνόλου προτάσεων Γ ορίζονται συνήθως, ως οι προτάσεις που μπορούν να προκύψουν από το σύνολο Γ και από κάποια "αξιώματα της λογικής" με τη χρήση κάποιων "συμπερασματικών κανόνων". Δηλαδή, το σύνολο των συμπερασμάτων του Γ είναι το μικρότερο σύνολο προτάσεων που περιέχει το Γ μαζί με τα λογικά αξιώματα και είναι κλειστό υπό τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων.

Ένας άλλος, πιο απλός ορισμός του τελεστή συμπεράσματος δίνεται παρακάτω. Τα συμπεράσματα ενός προγράμματος είναι λεκτικά. Τα λεκτικά αυτά προκύπτουν από ένα σύνολο λεκτικών, με χρήση λογικών διαδικασιών μόνο όταν *ανήκουν* στο σύνολο αυτό, εκτός από την περίπτωση που το πρόγραμμα είναι μη-συνεπές όποτε και προκύπτουν όλα τα λεκτικά. Άρα, εάν το Γ είναι ένα συνεπές σύνολο από λεκτικά και μια τέτοια σταθερά L είναι συμπέρασμα του Γ τότε ισχύει $L \in \Gamma$.

Όταν ένα πρόγραμμα αποτελείται από *κανόνες* και όχι μεμονωμένα λεκτικά, αντί να απαιτείται το σύνολο των συμπερασμάτων να αποτελείται από όλους του κανόνες, απαιτείται να είναι "κλειστό" υπό αυτούς. Για να γίνει κάτι τέτοιο πιο κατανοητό δίνονται οι παρακάτω ορισμοί.

Έστω X ένα σύνολο από λεκτικά. Το σύνολο X είναι κλειστό με βάση τη *λογική* εάν είναι συνεπές ή ισούται με το Lit. Λέγεται ότι το σύνολο X είναι κλειστό υπό ένα πρόγραμμα Π εάν, για κάθε κανόνα *Κεφαλή* ← *Σώμα* που ανήκει στο Π, ισχύει *Κεφαλή* ∈ X όταν *Σώμα* ⊆ X. Με $Cn(\Pi)$ συμβολίζεται το μικρότερο σύνολο από λεκτικά που είναι κλειστό και με βάση τη *λογική* αλλά και με βάση το πρόγραμμα Π. Τα στοιχεία του $Cn(\Pi)$ ονομάζονται *συμπεράσματα* του Π.

Πρόταση 2.5. *Για κάθε βασικό πρόγραμμα* Π,

- *εάν το* Π *είναι συνεπές τότε το σύνολο* $Cn(\Pi)$ *είναι το μικρότερο σύνολο από λεκτικά που είναι κλειστό υπό το* Π
- *εάν το* Π *είναι μη-συνεπές τότε ισχύει* $Cn(\Pi) = Lit$

Ένα βασικό πρόγραμμα Π είναι συνεπές όταν το σύνολο $Cn(\Pi)$ είναι συνεπές, και μη-συνεπές διαφορετικά.

Παράδειγμα 5. *Έστω, ότι ζητείται το σύνολο* $Cn(\Pi)$ *του προγράμματος 2.3. Το πρόγραμμα αυτό περιλαμβάνει δύο κανόνες που έχουν κενό σώμα. Συνεπώς η κεφαλή τους*

$$p, \neg q \tag{2.4}$$

ανήκει σε κάθε σύνολο από λεκτικά που είναι κλειστό υπό το πρόγραμμα 2.3. Επιπλέον, το πρόγραμμα περιλαμβάνει ένα κανόνα που έχει ως σώμα το $p, \neg q$ *συνεπώς η κεφαλή του κανόνα αυτού*

$$\neg r \tag{2.5}$$

ανήκει επίσης σε κάθε σύνολο από λεκτικά που είναι κλειστό υπό το πρόγραμμα 2.3. Στη συνέχεια αναζητείται ένας κανόνας που να περιέχει κάποια από τα παραπάνω λεκτικά. Τέτοιος κανόνας υπάρχει συνεπώς η κεφαλή του

$$\neg s \tag{2.6}$$

ανήκει επίσης σε κάθε σύνολο από λεκτικά που είναι κλειστό υπό το πρόγραμμα 2.3. Με τον τρόπο αυτό έχει δημιουργηθεί ένα σύνολο από λεκτικά που είναι κλειστά με βάση τη Λογική αλλά και κλειστά υπό το πρόγραμμα 2.3.

Τα προγράμματα που μελετώνται στη φάση αυτή δεν περιέχουν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία και συνεπώς είναι μονότονα. Για το λόγο αυτό ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:

Πρόταση 2.6. *Για κάθε ζεύγος βασικών προγραμμάτων* Π_1 *και* Π_2, *εάν ισχύει* $\Pi_1 \subseteq \Pi_2$ *τότε* $Cn(\Pi_1) \subseteq Cn(\Pi_2)$.

Πρόταση 2.7. *Κάθε συμπέρασμα ενός προγράμματος* Π *αποτελεί και συμπέρασμα ενός υποσυνόλου του* Π.

Έστω ένα βασικό πρόγραμμα Π και ένα σύνολο από λεκτικά X. Το σύνολο X *υποστηρίζεται* από το πρόγραμμα Π εάν, για κάθε λεκτικό $L \in X$, υπάρχει κανόνας $Κεφαλή \leftarrow Σώμα$ στο Π τέτοιος ώστε $Κεφαλή = L$ και $Σώμα \subseteq X$. Ένας κανόνας που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες λέγεται ότι "υποστηρίζει" (supports) την παρουσία του L στο X.

Με βάση αυτό τον ορισμό προκύπτει η παρακάτω πρόταση

Πρόταση 2.8. *Για κάθε συνεπές πρόγραμμα* Π, *το* $Cn(\Pi)$ *υποστηρίζεται από το* Π.

Συμπέρασμα 2.1. *Εάν ένα βασικό πρόγραμμα* Π *είναι συνεπές τότε κάθε συμπέρασμα του* Π *είναι ένα λεκτικό που υπάρχει στην κεφαλή κάποιου κανόνα του προγράμματος.*

Υπάρχει μια συντακτική ικανή συνθήκη για την ισχύ της συνέπειας ενός προγράμματος. Ένα πρόγραμμα λέγεται ότι είναι *συνεπές με βάση την κεφαλή* του εάν το σύνολο των λεκτικών όλων των κεφαλών των κανόνων είναι συνεπές.

Πρόταση 2.9. *Κάθε βασικό πρόγραμμα που είναι συνεπές με βάση την κεφαλή του είναι συνεπές.*

Όσον αφορά στη σχέση συνέπειας κεφαλής και συνέπειας προγράμματος, η παραπάνω πρόταση δηλώνει ότι ισχύει το ευθύ και όχι το αντίστροφο. Δηλαδή εάν ένα πρόγραμμα είναι συνεπές με βάση την κεφαλή του θα είναι συνεπές, αλλά ένα συνεπές πρόγραμμα δεν συνεπάγεται ότι είναι και συνεπές με βάση την κεφαλή του.

Ανάλυση Από Κάτω Προς τα Πάνω

Η εύρεση των συμπερασμάτων του Προγράμματος 2.3 αποτελεί παράδειγμα της διαδικασίας *ανάλυσης από κάτω προς τα πάνω* (bottom-up evaluation) που μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε βασικό πρόγραμμα. Για την περιγραφή της διαδικασίας αυτής ορίζεται, για κάθε βασικό πρόγραμμα Π, η συνάρτηση T_Π [9] που έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών σύνολα λεκτικών, $T_\Pi : X \times X$. Ισχύει ότι το $T_\Pi X$ είναι το σύνολο

$$T_\Pi X = \{Κεφαλή : Κεφαλή \leftarrow Σώμα \in \Pi, Σώμα \subseteq X\}$$

εάν το σύνολο X είναι συνεπές, αλλιώς ισούται με Lit. Το $T_\Pi X$ είναι δηλαδή το σύνολο εκείνο από λεκτικά που είναι κλειστά με βάση τη *λογική* και με βάση ένα πρόγραμμα Π. Η συνάρτηση T_Π, συνεπώς, παίρνει σαν όρισμα ένα σύνολο από λεκτικά που αποτελούν μια ερμηνεία του κόσμου και παράγει ένα μοντέλο με βάση την ερμηνεία αυτή.

Είναι προφανές ότι η T_Π είναι μονότονη. Η ανάλυση για την συνάρτηση αυτή παρακάτω χρησιμοποιεί ορολογία και πορίσματα από την θεωρία μονότονων συναρτήσεων που παρουσιάζεται στο Παράρτημα.

Πρόταση 2.10. *Για κάθε βασικό πρόγραμμα* Π *και κάθε σύνολο από λεκτικά* X, *το* X *είναι pre-fixpoint της* T_Π *εάν και μόνο εάν το* X *είναι κλειστό λογικά αλλά και κλειστό υπό το πρόγραμμα* Π.

Με χρήση της Πρότασης 1.25 προκύπτει το παρακάτω συμπέρασμα.

Συμπέρασμα 2.2. *Το* $Cn(\Pi)$ *είναι το ελάχιστο fixpoint της* T_Π.

Για να γίνει πιο κατανοητό το παραπάνω παρατίθεται ένα Παράδειγμα.

Παράδειγμα 6. *Έστω το Πρόγραμμα 2.3. Εάν* $X_1 = \{p, \neg q, s\}$ *τότε εφαρμόζοντας στο σύνολο αυτό τη συνάρτηση* T_Π *θα προκύψει* $T_\Pi X_1 = \{p, \neg q, \neg s, \neg r\}$. *Εάν* $X_2 = \{p, \neg q, \neg s, \neg r\}$ *τότε* $T_\Pi X_2 = \{p, \neg q, \neg s, \neg r\}$.

Το σύνολο X_2 αποτελεί *fixpoint* και μάλιστα *ελάχιστο* για τη συνάρτηση T_Π, εφόσον είναι το ελάχιστο σύνολο λεκτικών το οποίο δεν μεταβάλει η συνάρτηση T_Π ($T_\Pi X_2 = X_2$). Το σύνολο αυτό ορίζει και το *ελάχιστο μοντέλο* (minimal model) για το Πρόγραμμα 2.3.

Σύμφωνα με την Πρόταση 1.25, η ένωση των συνόλων που προκύπτουν από την επανάληψη της T_Π στο άδειο σύνολο είναι ένα υποσύνολο του ελαχίστου fixpoint της T_Π. Για τη συγκεκριμένη αυτή συνάρτηση, η ένωση είναι ίση με αυτό το fixpoint:

Πρόταση 2.11. *Για κάθε βασικό πρόγραμμα* Π,

$$Cn(\Pi) = \bigcup_{n \geq 0} T_\Pi^n \emptyset$$

Εάν για παράδειγμα το Π είναι το πρόγραμμα 2.3 τότε

$$\begin{aligned}
&T_\Pi^0 \emptyset = \emptyset \\
&T_\Pi^1 \emptyset = \{p, \neg q\} \\
&T_\Pi^2 \emptyset = \{p, \neg q, \neg r\} \\
&T_\Pi^3 \emptyset = \{p, \neg q, \neg r, \neg s\}
\end{aligned}$$

Το τελευταίο σύνολο είναι ένα fixpoint της T_Π, έτσι ώστε, για κάθε $n > 3$, ισχύει $T_\Pi^n = T_\Pi^3$. Σύμφωνα λοιπόν, με την παραπάνω πρόταση ισχύει

$$Cn(\Pi) = \{p, \neg q, \neg r, \neg s\}.$$

Εάν το Π είναι πεπερασμένο είναι πιθανό κανένα από τα σύνολα T_Π^n να μην αποτελεί fixpoint του T_Π. Αν ισχύει κάτι τέτοιο κάθε επόμενος όρος της ακολουθίας προσθέτει νέα συμπεράσματα.

Διαίρεση Προγραμμάτων

Σε πολλές εφαρμογές ο υπολογισμός του συνόλου συμπερασμάτων μπορεί να αποδειχθεί μια ιδιαίτερα επίπονη διαδικασία. Για το λόγο αυτό σε πολύπλοκες εφαρμογές ενδείκνυται η διαίρεση του προγράμματος σε υποπρογράμματα. Η ανάλυση που ακολουθεί στηρίζεται στο [26].

Λέγεται ότι ένα σύνολο U από λεκτικά *διαιρεί ένα βασικό πρόγραμμα* Π εάν, για κάθε κανόνα της μορφής *Κεφαλή* ← *Σώμα* που ανήκει στο Π, ισχύει *Σώμα* ⊆ U όταν *Κεφαλή* ∈ U. Εάν το σύνολο U *διαιρεί το πρόγραμμα* Π τότε το σύνολο των κανόνων του Π οι κεφαλές των οποίων ανήκουν στο U καλούνται *βάση* του προγράμματος Π (σε σχέση με το U), και συμβολίζεται $b_U(\Pi)$.

Παράδειγμα 7. *Το σύνολο $p, q, \neg q, r$ διαιρεί το πρόγραμμα 2.3 και η βάση του προγράμματος αποτελείται από τους παρακάτω τρείς κανόνες*

$$\begin{aligned} &p, \\ &\neg q, \\ &r \leftarrow p, q. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Για την εύρεση του συνόλου των συμπερασμάτων ενός προγράμματος Π όταν αυτό διαιρείται από ένα σύνολο U ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

(1) Υπολογίζεται το σύνολο των συμπερασμάτων C για το βασικό σύνολο του προγράμματος Π, $b_U(\Pi)$.

(2) Το σύνολο C χρησιμοποιείται για την εξάλειψη των στοιχείων του U από τους κανόνες που έχουν απομείνει.

   (i) Εάν $L \in C$ τότε η L είναι "τετριμένη" και μπορεί να αφαιρεθεί από το σώμα των κανόνων που έχουν απομείνει.

   (ii) Εάν $L \in U \setminus C$ τότε κάθε κανόνας που περιέχει το λεκτικό L στο σώμα του δεν παρέχει κάποια χρήσιμη πληροφορία και γι' αυτό μπορεί να διαγραφεί.

(3) Στη συνέχεια γίνεται η εύρεση του συνόλου συμπερασμάτων του προγράμματος που έχει απομείνει. Το σύνολο αυτό τελικά συγχωνεύεται με το σύνολο C και έτσι προκύπτει το σύνολο συμπερασμάτων του προγράμματος Π.

Παράδειγμα 8. *Με βάση το Παράδειγμα 7, ισχύει $C = p, \neg q$ και $U \setminus C = q, r$. Το συμπλήρωμα της βάσης του προγράμματος 2.7 είναι το σύνολο των κανόνων*

$$\begin{aligned} &\neg r \leftarrow p, \neg q, \\ &s \leftarrow r, \\ &s \leftarrow p, s, \\ &\neg s \leftarrow p, \neg q, \neg r. \end{aligned}$$

Ακολουθώντας τα παραπάνω βήματα ο κανόνας $s \leftarrow r$ αφαιρείται από το πρόγραμμα, εφόσον $r \in U \setminus C$ και τα λεκτικά p και $\neg q$ αφαιρούνται από το σώμα των κανόνων, εφόσον και οι δύο ανήκουν στο C. Έτσι προκύπτει το πρόγραμμα

$$\begin{aligned}&\neg r,\\ &s \leftarrow s,\\ &\neg s \leftarrow \neg r.\end{aligned}$$

Το σύνολο των συμπερασμάτων του προγράμματος αυτού είναι το $\neg r, \neg s$. Έτσι, σχηματίζοντας την ένωση $C \cup \neg r, \neg s$ προκύπτει το σύνολο $p, \neg q \neg r, \neg s$ που είναι το σύνολο συμπερασμάτων του προγράμματος 2.3, όπως έχει προκύψει και παραπάνω.

Γενικά, η διαδικασία εξάλειψης μπορεί να περιγραφεί από την παρακάτω σημειολογία. Για κάθε βασικό πρόγραμμα Π, κάθε σύνολο U από λεκτικά και κάθε υποσύνολο C του U, το πρόγραμμα $e_U(\Pi, C)$ είναι το πρόγραμμα που προκύπτει από το Π εάν

- διαγραφεί κάθε κανόνας *Κεφαλή* $\leftarrow$ *Σώμα* τέτοιος ώστε *Σώμα* $\cap (U \setminus C) \neq \emptyset$ και
- αντικατασταθεί κάθε εναπομείναν κανόνας *Κεφαλή* $\leftarrow$ *Σώμα* με τον κανόνα *Κεφαλή* $\leftarrow$ (*Σώμα* $\setminus U$).

Σχετικά με την ορθότητα της μεθόδου διαίρεσης προγραμμάτων παρατίθεται η παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 2.12. *Έστω U ένα σύνολο από λεκτικά που διαιρεί ένα βασικό πρόγραμμα Π, και έστω $C = Cn(b_U(\Pi))$. Εάν το σύνολο $C \cup Cn(e_U(\Pi \setminus b_U, C))$ είναι συνεπές τότε αυτό είναι ίσο με το $Cn(\Pi)$, αλλιώς το Π είναι μη-συνεπές.*

2.2.2 Άρνηση σαν Αποτυχία

Στο σημείο αυτό θα γίνει αναφορά στον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως με τη χρήση του τελεστή εκφράζεται η κλειστότητα του περιγραφόμενου κόσμου καθώς και η μη-μονοτονία του εκάστοτε προγράμματος.

Σύνολα Απαντήσεων

Σε αντιστοιχία με τους βασικούς κανόνες ένας κανόνας ορίζεται ως το διατεταγμένο ζεύγος *Κεφαλή* $\leftarrow$ *Σώμα*, όπου η *Κεφαλή* είναι ένα λεκτικό και το *Σώμα* ένα πεπερασμένο σύνολο από λεκτικά. Η διαφορά που παρουσιάζουν τα προγράμματα που εμφανίζουν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία είναι ότι σε αυτά το *Σώμα* πιθανότατα αποτελείται και από λεκτικά στα οποία εφαρμόζεται ο τελεστής *not*.

Για κάθε σύνολο X από λεκτικά, ορίζεται το σύνολο $\{not\ L : L \in X\}$ ως $not(X)$. Έτσι κάθε κανόνας μπορεί να αναπαρασταθεί ως *Κεφαλή* $\leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$, για ένα πεπερασμένο σύνολο από λεκτικά Pos, Neg. Ο κανόνας με κεφαλή την L_0 και σώμα το σύνολο $\{L_1, \ldots, L_m, not\ L_{m+1}, \ldots, not\ L_n\}$ μπορεί να γραφεί

$$L_0 \leftarrow L_1, \ldots, L_m, not\ L_{m+1}, \ldots, not\ L_n. \tag{2.8}$$

Ένα πρόγραμμα είναι ένα σύνολο από κανόνες. Έστω για παράδειγμα το πρόγραμμα

$$\begin{aligned} &p, \\ &q \leftarrow p, not\ r, \\ &q \leftarrow r, not\ p, \\ &r \leftarrow p, not\ s. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Το πρόγραμμα αυτό δεν περιέχει τον τελεστή της κλασσικής άρνησης $\neg$. Η ερμηνεία των κανόνων του προγράμματος αυτού είναι η εξής:

- ο πρώτος κανόνας δηλώνει προφανώς την ισχύ του p,
- ο δεύτερος κανόνας δηλώνει ότι το λεκτικό q ισχύει μόνο αν ισχύουν ταυτόχρονα το p και δεν μας δίνεται κάποια πληροφορία ότι ισχύει το r,
- αντίστοιχα ισχύουν και για τους δύο επόμενους κανόνες.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον και στα προγράμματα που χρησιμοποιούν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία εμφανίζεται στην εύρεση του συνόλου συμπερασμάτων $Cn(\Pi)$. Για να γίνει εύκολα αντιληπτή η διαδικασία αυτή παρατίθεται ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 9. *Έστω, το πρόγραμμα*

$$\begin{aligned} &p \leftarrow \text{not}\ q, \\ &q \leftarrow \text{not}\ p, \\ &r \leftarrow p, \\ &r \leftarrow q. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Για το πρόγραμμα αυτό μπορούν να γίνουν δύο εικασίες για το τι μπορεί να προκύψει από την χρήση των παραπάνω κανόνων. Σύμφωνα με την πρώτη είναι δυνατόν να ικανοποιηθούν μόνο τα λεκτικά p και r και όχι το q. Έτσι το πρόγραμμα 2.10 ισοδυναμεί με το

$$\begin{aligned} &p, \\ &r \leftarrow p, \\ &r \leftarrow q. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Αυτό είναι ένα βασικό πρόγραμμα και είναι εύκολο να προκύψει ότι όντως το σύνολο συμπερασμάτων του είναι το σύνολο $\{p, r\}$. Σύμφωνα με την δεύτερη εικασία μπορούν *να ικανοποιηθούν μόνο τα λεκτικά q και r και όχι το p. Σε αυτή την περίπτωση το πρόγραμμα 2.10 έχει το ίδιο νόημα με το*

$$\begin{aligned} &q, \\ &r \leftarrow p, \\ &r \leftarrow q. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Το σύνολο συμπερασμάτων του βασικού αυτού του προγράμμτος είναι όντως το $Cn_2(\Pi) = \{q, r\}$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η άρνηση σαν αποτυχία μετατρέπει τους κανόνες ενός προγράμματος σε μη-ντετερμινιστικούς. Και τούτο γιατί είναι δυνατόν να υπάρχουν περισσότερες από μια σωστές διαδικασίες για την εύρεση ενός συνόλου συμπερασμάτων. Κάθε διαδικασία δίνει και διαφορετικό σύνολο λεκτικών $Cn(\Pi)$. Το σύνολο όλων των συνόλων συμπερασμάτων ονομάζεται "σύνολο απαντήσεων" (answer set) του προγράμματος Π. Ως *συμπέρασμα* τώρα ενός προγράμματος ορίζεται *ένα λεκτικό που είναι σίγουρο ότι θα παραχθεί ανεξάρτητα από τη διαδικασία εύρεσης που θα χρησιμοποιηθεί.* Είναι δηλαδή, το λεκτικό εκείνο που συμμετέχει σε όλα τα σύνολα συμπερασμάτων, σε όλα τα σύνολα απαντήσεων. Με βάση, λοιπόν, το παραπάνω πρόγραμμα, που έχει ως σύνολα συμπερασμάτων τα $Cn_1(\Pi) = \{p, r\}$ και $Cn_2(\Pi) = \{q, r\}$, προκύπτει ότι το μοναδικό συμπέρασμα είναι το λεκτικό r.

Για να δοθεί ένας πιο τυπικός ορισμός του "συνόλου απαντήσεων" [25] είναι απαραίτητο να περιγραφεί τυπικά και η διαδικασία μετατροπής ενός τυχαίου προγράμματος σε βασικό [11].

Έστω ένα πρόγραμμα Π και ένα σύνολο από λεκτικά X. Η αναγωγή του Π σε σχέση με το X είναι το βασικό πρόγραμμα που προκύπτει από το Π

- διαγράφοντας κάθε κανόνα $Κεφαλή \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$ τέτοιο ώστε $Neg \cap X \neq \emptyset$, και

- αντικαθιστώντας κάθε εναπομείναν κανόνα $Κεφαλή \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$ με $Κεφαλή \leftarrow Pos$.

Το βασικό αυτό πρόγραμμα συμβολίζεται Π^X. Λέγεται ότι ένα σύνολο X είναι ένα σύνολο απαντήσεων για ένα πρόγραμμα Π εάν ισχύει $Cn(\Pi^X) = X$, εάν δηλαδή, το σύνολο συμπερασμάτων του βασικού προγράμματος που προκύπτει από ένα πρόγραμμα Π με την βοήθεια ενός συνόλου λεκτικών είναι αυτό το ίδιο το σύνολο λεκτικών.

Ένα *συμπέρασμα*, τώρα, ενός προγράμματος είναι ένα λεκτικό που ανήκει σε όλα τα σύνολα απαντήσεων του προγράμματος. Διαφορετικά, τα συμπεράσματα ενός προγράμματος μπορούν να χαρακτηριστούν ως οι λεκτικά που ανήκουν σε όλα τα συνεπή σύνολα απαντήσεων.

Στα προγράμματα με άρνηση σαν αποτυχία, ο τελεστής συμπεράσματος είναι μη-μονότονος. Για παράδειγμα, το σύνολο συμπερασμάτων του $\{p \leftarrow not\ q\}$ είναι το $\{p\}$. Εάν όμως προστεθεί στο πρόγραμμα ο κανόνας q, τότε το σύνολο των συμπερασμάτων είναι το σύνολο $\{q\}$.

Πρόταση 2.13. *Εάν X και Y είναι σύνολα απαντήσεων για ένα πρόγραμμα Π και ισχύει $X \subseteq Y$ τότε $X = Y$.*

Συμπέρασμα 2.3. *Κάθε πρόγραμμα Π ικανοποιεί ακριβώς μια από τις παρακάτω υποθέσεις*

- *το Π δεν έχει σύνολο απαντήσεων,*
- *το μοναδικό σύνολο απαντήσεων του Π είναι το Lit,*
- *το Π έχει σύνολο απαντήσεων, και όλα τα σύνολα απαντήσεων του είναι συνεπή.*

Η συνέπεια ενός προγράμματος ορίζεται με τον ίδιο τρόπο που έχει οριστεί παραπάνω: Ένα πρόγραμμα είναι συνεπές εάν το σύνολο των συμπερασμάτων του είναι συνεπές, και μη-συνεπές διαφορετικά. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις του παραπάνω συμπεράσματος το Π είναι μη-συνεπές και $Cn(\Pi)$, ενώ στην τρίτη περίπτωση το Π είναι συνεπές.

Ο ορισμός της κλειστότητας ενός προγράμματος επεκτείνεται και για προγράμματα που μπορεί να περιέχουν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία. Ένα σύνολο X από λεκτικά είναι κλειστό υπό ένα πρόγραμμα Π εάν, για κάθε κανόνα της μορφής $Κεφαλή \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$, που ανήκει στο Π, ισχύει $Κεφαλή \in X$ όταν $Pos \subseteq X$ και $Neg \cap X = \emptyset$

Πρόταση 2.14. *Κάθε σύνολο απαντήσεων ενός προγράμματος Π είναι κλειστό υπό το πρόγραμμα αυτό.*

Παρόλα αυτά, το σύνολο των συμπερασμάτων ενός προγράμματος δεν είναι απαραίτητα κλειστό υπό το πρόγραμμα Π, όπως φαίνεται άλλωστε και από το πρόγραμμα 2.10 που ισχύει ότι το σύνολο συμπερασμάτων $\{r\}$ δεν είναι κλειστό υπό το Π.

Έστω ένα πρόγραμμα Π και ένα σύνολο από λεκτικά X. Το X *υποστηρίζεται* από το Π εάν, για κάθε λεκτικό $L \in X$ υπάρχει κανόνας $Κεφαλή \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$ στο Π τέτοιος ώστε

$$Κεφαλή = L,\ Pos \subseteq X,\ Neg \cap X = \emptyset.$$

Σε πλήρη αντιστοιχία με την Πρόταση 2.8 προκύπτει η παρακάτω γενίκευση για προγράμματα που μπορεί να περιέχουν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία.

Πρόταση 2.15. *Κάθε συνεπές σύνολο απαντήσεων ενός προγράμματος* Π *υποστηρίζεται από το πρόγραμμα αυτό.*

Συμπέρασμα 2.4. *Σε αντιστοιχία με τα βασικά προγράμματα προκύπτει ότι*

- *κάθε στοιχείο ενός συνεπούς συνόλου απαντήσεων ενός προγράμματος* Π *είναι και στοιχείο της κεφαλής κάποιου κανόνα του προγράμματος,*
- *εάν ένα πρόγραμμα είναι συνεπές, τότε κάθε συμπέρασμα του είναι και στοιχείο της κεφαλής κάποιου κανόνα του προγράμματος.*

Στα βασικά προγράμματα, ένα πρόγραμμα Π είναι συνεπές με βάση την κεφαλή του εάν το σύνολο των λεκτικών του που συμμετέχουν στην κεφαλή των κανόνων του είναι συνεπές. Σε αντιστοιχία με αυτό τον ορισμό, για αυθαίρετα προγράμματα ισχύει

Πρόταση 2.16. *Εάν ένα πρόγραμμα είναι συνεπές με βάση την κεφαλή του τότε κάθε σύνολο απαντήσεων του είναι συνεπές.*

Ορθά-Θεμελιωμένα Συμπεράσματα

Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 2.2.1 το σύνολο των συμπερασμάτων ενός βασικού προγράμματος Π είναι το ελάχιστο fixpoint μιας συγκεκριμένης μονότονης συνάρτησης, της T_Π, και το σύνολο αυτό μπορεί να προσεγγισθεί από κάτω προς τα πάνω επαναλαμβάνοντας την συνάρτηση στο άδειο σύνολο. Μια παρόμοια διαδικασία μπορεί να οριστεί και για τα προγράμματα που περιέχουν τον τελεστή άρνηση σαν αποτυχία. Παρόλα αυτά, η μονότονη συνάρτηση που λαμβάνει μέρος ορίζεται με ένα πιο περίπλοκο τρόπο απ΄ ότι η T_Π. Επιπλέον, το ελάχιστο fixpoint της συνάρτησης αυτής είναι μερικές φορές υποσύνολο του συνόλου των συμπερασμάτων, έτσι ώστε κάποια συμπεράσματα να είναι αδύνατο να προκύψουν με την επανάληψη της, ακόμα και για ένα πεπερασμένο πρόγραμμα.

Για κάθε πρόγραμμα Π, η συνάρτηση $\gamma_\Pi X$ που έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών σύνολα από λεκτικά ορίζεται από την εξίσωση

$$\gamma_\Pi X = Cn(\Pi^X).$$

Είναι προφανές ότι τα σύνολα απαντήσεων του Π μπορούν να χαρακτηριστούν ως fixpoints της γ_Π.

Πρόταση 2.17. *Για κάθε πρόγραμμα* Π, *η συνάρτηση* γ_Π *είναι μη-μονότονη.*

Με βάση την παραπάνω πρόταση και όσα λέγονται στο Παράρτημα, προκύπτει ότι η συνάρτηση γ_Π^2 είναι μονότονη και ότι το ελάχιστο και το μέγιστο της fixpoint φράζουν τα fixpoints της γ_Π από κάτω και από πάνω. Τα λεκτικά που ανήκουν στο ελάχιστο fixpoint της γ_Π^2 λέγεται ότι είναι ορθά-θεμελιωμένα (well-founded) σε σχέση με το Π. Τα λεκτικά που δεν ανήκουν στο μέγιστο fixpoint της γ_Π^2 είναι μη-θεμελιωμένα (unfounded) σε σχέση με το Π. Συνεπώς κάθε πρόγραμμα διαιρεί το σύνολο των λεκτικών σε τρία σύνολα: τα ορθά-θεμελιωμένα, τα μη-θεμελιωμένα και τα υπόλοιπα.

Σύμφωνα λοιπόν με το δεύτερο μέρος της Πρότασης 1.27 προκύπτει

Πρόταση 2.18. *Κάθε σύνολο απαντήσεων ενός προγράμματος* Π

- *περιλαμβάνει όλα τα λεκτικά που είναι ορθά-θεμελιωμένα σε σχέση με το πρόγραμμα* Π, *και*
- *δεν περιλαμβάνει λεκτικά που είναι μη-θεμελιωμένα σε σχέση με το* Π.

Συμπέρασμα 2.5. *Για κάθε πρόγραμμα* Π *και κάθε λεκτικό* L *ισχύει ότι*

- *εάν το* L *είναι ορθά-θεμελιωμένο σε σχέση με το* Π *τότε το* L *είναι συμπέρασμα του* Π
- *εάν το* Π *είναι συνεπές και το* L *είναι μη-θεμελιωμένο σε σχέση με το* Π *τότε το* L *δεν είναι συμπέρασμα του* Π.

Συνδυάζοντας το Συμπέρασμα 1.6 με τα παραπάνω προκύπτει

Πρόταση 2.19. *Εάν κάθε λεκτικό είτε είναι ορθά-θεμελιωμένο είτε είναι μη-θεμελιωμένο σε σχέση με το* Π *τότε το σύνολο των ορθά-θεμελιωμένων λεκτικών είναι το μοναδικό σύνολο απαντήσεων του* Π.

Εάν το Π είναι πεπερασμένο τότε τα λεκτικά που είναι ορθά-θεμελιωμένα με βάση το Π μπορούν να βρεθούν επαναλαμβάνοντας την συνάρτηση γ_Π στο άδειο σύνολο ή στο σύνολο όλων των λεκτικών. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του προγράμματος 2.10 ισχύει,

$$\begin{aligned} \gamma_\Pi^0\emptyset &= \emptyset, \\ \gamma_\Pi^1\emptyset &= \{p, q, r\}, \\ \gamma_\Pi^2\emptyset &= \emptyset, \end{aligned}$$

έτσι ώστε το $\emptyset$ να είναι το ελάχιστο fixpoint της γ_Π^2 και το $\{p, q, r\}$ το μέγιστο της. Αξίζει να σημειωθεί ότι το σύνολο των ορθά-θεμελιωμένων λεκτικών είναι κενό, έτσι ώστε το p, που δεν είναι ορθά-θεμελιωμένο, να είναι συνέπεια του προγράμματος. Τα μόνα μη-θεμελιωμένα λεκτικά είναι οι $\neg p, \neg q, \neg r$.

Τα παραπάνω συμπεράσματα παρουσιάζονται πιο αναλυτικά στο [36].

Διαίρεση Προγραμμάτων που περιέχουν τον τελεστή Άρνηση σαν Αποτυχία

Η διαδικασία διαίρεσης βασικών προγραμμάτων που περιγράφηκε στην Παράγραφο 2.2.1 αποτελεί ειδική περίπτωση της διαδικασίας διαίρεσης αυθαίρετων προγραμμάτων που περιγράφεται στην συνέχεια. Ένα σύνολο από λεκτικά U *διαιρεί* ένα πρόγραμμα Π εάν, για κάθε κανόνα $K\epsilon\varphi\alpha\lambda\acute{\eta} \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$ του Π ισχύει $Pos \cup Neg \subseteq U$ όταν ισχύει $K\epsilon\varphi\alpha\lambda\acute{\eta} \in U$. Εάν το σύνολο U διαιρεί το Π τότε το σύνολο των κανόνων του Π που η κεφαλή τους ανήκει στο U αποτελεί τη *βάση* του Π, και δηλώνεται $b_U(\Pi)$. Η ανάλυση που ακολουθεί στηρίζεται στο [26].

Για κάθε πρόγραμμα Π, κάθε σύνολο U και κάθε υποσύνολο C του U, το $e_U(\Pi, C)$ είναι το πρόγραμμα που προκύπτει από το Π

- διαγράφοντας κάθε κανόνα $K\epsilon\varphi\alpha\lambda\acute{\eta} \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$ τέτοιο ώστε $Pos \cap (U \setminus C) \neq \emptyset$ ή $Neg \cap C \neq \emptyset$,
- αντικαθιστώντας κάθε εναπομείναν κανόνα $K\epsilon\varphi\alpha\lambda\acute{\eta} \leftarrow Pos \cup not\ (Neg)$ με $K\epsilon\varphi\alpha\lambda\acute{\eta} \leftarrow (Pos \setminus U) \cup not\ (Neg \setminus U)$.

Πρόταση 2.20. *Έστω U ένα σύνολο από λεκτικά που διαιρεί ένα πρόγραμμα Π. Ένα συνεπές σύνολο από λεκτικά αποτελεί σύνολο απαντήσεων για το Π εάν και μόνο εάν μπορεί να αναπαρασταθεί στην μορφή $C_1 \cup C_2$, όπου C_1 είναι ένα σύνολο απαντήσεων για το $b_U(\Pi)$ και C_2 είναι ένα σύνολο απαντήσεων για το $e_U(\Pi \setminus b_U(\Pi), C_1)$.*

Με βάση την παραπάνω πρόταση προκύπτει η παρακάτω μέθοδος για την εύρεση του συνεπούς συνόλου απαντήσεων ενός προγράμματος Π που διαιρείται από κάποιο σύνολο λεκτικών U. Αρχικά το πρόγραμμα Π μετασχηματίζεται στο βασικό ισοδύναμο του $b_U(\Pi)$. Στη συνέχεια βρίσκονται όλα τα σύνολα απαντήσεων του $b_U(\Pi)$. Για κάθε ένα από τα σύνολο αυτά, έστω C_1, υπολογίζεται το πρόγραμμα $e_U(\Pi \setminus b_U(\Pi), C_1)$ και βρίσκονται όλα τα σύνολα απαντήσεων του. Για κάθε ένα από αυτά τα σύνολα, έστω C_2 σχηματίζεται η ένωση $C_1 \cup C_2$. Οι συνεπείς ενώσεις που προκύπτουν με αυτό τον τρόπο αποτελούν το συνεπές σύνολο απαντήσεων του προγράμματος Π. Η τομή όλων αυτών των συνεπών ενώσεων είναι το $Cn(\Pi)$.

Παράδειγμα 10. *Έστω, το πρόγραμμα 2.9. Έστω επίσης, $U = \{p, s\}$. Τότε το βασικό πρόγραμμα $b_U(\Pi)$ αποτελείται μόνο από τον κανόνα p και το μοναδικό σύνολο απαντήσεων C_1 για το πρόγραμμα αυτό είναι το $\{p\}$. Επιπλέον το $\Pi \setminus b_U(\Pi)$ είναι το*

$$
\begin{aligned}
q &\leftarrow p, \text{not } r,\\
q &\leftarrow r, \text{not } p,\\
r &\leftarrow p, \text{not } s,
\end{aligned}
$$

και το $e_U(\Pi \setminus b_U(\Pi), C_1)$ είναι το

$$q \leftarrow \text{not } r,$$
$$r.$$

Για το πρόγραμμα αυτό το μοναδικό σύνολο απαντήσεων είναι το $C_2 = \{r\}$. Συνεπώς το $C_1 \cup C_2 = \{p, r\}$ είναι το μοναδικό συνεπές σύνολο απαντήσεων για το πρόγραμμα 2.9.

2.2.3 Σχηματικά Προγράμματα

Για να μπορέσει ο Λογικός Προγραμματισμός να μετατραπεί σε ένα χρήσιμο υπολογιστικό εργαλείο αλλά και σε ένα εργαλείο Αναπαράστασης Γνώσης είναι απαραίτητο να προστεθούν μεταβλητές στη γλώσσα των προγραμμάτων που έχουν περιγραφεί μέχρι τώρα. Για το λόγο αυτό σε αυτή την παράγραφο θα γίνει μια αναφορά στη σύνταξη και τη σημασιολογία προγραμμάτων με μεταβλητές.

Σύνταξη και Σημασιολογία

Έστω μια γλώσσα πρώτης-τάξης **L**, που περιέχει τουλάχιστον μια σταθερά αντικειμένου και μια σταθερά κατηγορήματος. Οι λεκτικές σταθερές στην γλώσσα αυτή θα ονομάζονται *σχηματικές* (schematic literals). Οι ορισμοί των *σχηματικών στοιχείων κανόνων* (schematic rule element), των *σχηματικών κανόνων* (schematic rule) και του *σχηματικού προγράμματος* (schematic program) είναι παρόμοιοι με αυτούς που έχουν δοθεί παραπάνω με τη μόνη διαφορά ότι στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούνται σχηματικά λεκτικά.

Για κάθε σχηματικό κανόνα R, το σύνολο $Ground(R)$ αποτελεί το σύνολο όλων των πλήρως αποτιμώμενων στιγμιότυπων του R. Για κάθε σχηματικό κανονικό πρόγραμμα Π ισχύει,

$$Ground(\Pi) = \bigcup_{R \in \Pi} Ground(R)$$

Είναι προφανές ότι τα $Ground(R)$ και $Ground(\Pi)$ είναι προγράμματα, εφόσον το σύνολο των ατόμων που χρησιμοποιούνται είναι το σύνολο όλων των σταθερών **L**.

Ένα σύνολο απαντήσεων για ένα σχηματικό πρόγραμμα Π είναι ένα σύνολο απαντήσεων για το $Ground(\Pi)$. Τα συμπεράσματα και η συνέπεια ενός σχηματικού προγράμματος ορίζονται με τον ίδιο τρόπο που ορίστηκαν για τα βασικά προγράμματα. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα συμπεράσματα ενός σχηματικού προγράμματος είναι πλήρως αποτιμώμενα λεκτικά από το **L**.

Κεφάλαιο 3

Ασαφής Συνολοθεωρία και Ασαφής Λογική

Τις τελευταίες δεκαετίες η *Ασαφής Συνολοθεωρία* (Fuzzy Set Theory) και η *Ασαφής Λογική* (Fuzzy Logic) χρησιμοποιούνται όλο και περισσότερο για να συλλάβουν την αβεβαιότητα και την ασάφεια που υπάρχει στις διάφορες εφαρμογές του πραγματικού κόσμου. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός οι πληροφορίες περιέχουν έμφυτα ασάφεια και αβεβαιότητα, όπως η έννοια ενός "ψηλού" ατόμου. Για το λόγο αυτό στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αναφορά στις κυριότερες αρχές της Ασαφούς Συνολοθεωρίας και της Ασαφούς Λογικής. Αρχικά γίνεται μια εισαγωγή στις βασικές ιδιότητες της Ασαφούς Θεωρίας Συνόλων. Στη συνέχεια περιγράφονται οι τρείς βασικοί τελεστές πράξεων της Ασαφούς Λογικής. Επίσης, γίνεται αναφορά στις Ασαφείς Σχέσεις και τέλος το κεφάλαιο κλείνει με μια παρουσίαση των προσεγγιστικών κανόνων που χρησιμοποιούνται για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Μια πιο λεπτομερής και περιεκτική ανάλυση της Ασαφούς Συνολοθεωρίας και της Ασαφούς Λογικής γίνεται στο βιβλίο των George Klir και Bo Yuan [12].

3.1 Βασικές ιδιότητες Ασαφών Συνόλων

Η *Ασαφής Θεωρία Συνόλων* και η *Ασαφής Λογική* στηρίζεται στην ιδέα των ασαφών συνόλων. Ενώ στην κλασσική θεωρία συνόλων ένα στοιχείο είτε ανήκει είτε όχι σε ένα σύνολο, στην ασαφή συνολοθεωρία ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο με συγκεκριμένο *βαθμό* (degree). Πιο τυπικά, έστω ένα σύνολο X που αποτελεί το οικουμενικό πεδίο. Έστω, ότι το σύνολο αυτό αποτελείται από m στοιχεία, δηλαδή $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Ένα υποσύνολο της κλασσικής θεωρίας συνόλων A του X είναι μια συλλογή από στοιχεία του X που μπορούν να οριστούν με την βοήθεια μιας *χαρακτηριστικής συνάρτησης* $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ που δηλώνει ποιά στοιχεία του X

ανήκουν στο A και ποιά όχι. Έτσι, το σύνολο A ορίζεται ως εξής:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{εάν } x \in A \\ 0 & \text{εάν } x \notin A \end{cases}$$

Από την άλλη, στην ασαφή συνολοθεωρία, ένα ασαφές υποσύνολο A του X ορίζεται από μια *συνάρτηση συμμετοχής* (membership function) $\mu_A : X \to [0,1]$, ή πιο απλά $A : X \to [0,1]$. Η συνάρτηση αυτή αναθέτει σε κάθε $x \in X$ μια τιμή ανάμεσα στο 0 και το 1 που δηλώνει τον βαθμό που το στοιχείο αυτό ανήκει στο σύνολο A.

Μια από τις πιο σημαντικές έννοιες στην ασαφή συνολοθεωρία είναι η έννοια της α-κοπής (α-cut) και της παραλλαγής της, ισχυρής α-κοπής (strong α-cut). Δεδομένου ενός ασαφούς συνόλου A που ορίζεται στο X και ενός αριθμού $\alpha \in [0,1]$, η α-κοπή, ${}^{\alpha}A$, και η ισχυρή α-κοπή, ${}^{\alpha+}A$, ορίζονται ως τα κλασσικά σύνολα

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}A &= \{x \mid A(x) \geq \alpha\} && (3.1) \\ {}^{\alpha+}A &= \{x \mid A(x) > \alpha\} && (3.2) \end{aligned}$$

Δηλαδή η α-κοπή (ισχυρή α-κοπή) ενός ασαφούς συνόλου είναι το κλασσικό εκείνο σύνολο ${}^{\alpha}A$ (${}^{\alpha+}A$) που περιέχει όλα τα στοιχεία του X που η συνάρτηση συμμετοχής τους στο σύνολο A είναι μεγαλύτερη ή ίση (μόνο μεγαλύτερη) από την καθορισμένη τιμή α.

Μια σημαντική ιδιότητα τόσο της α-κοπής όσο και της ισχυρής α-κοπής, που προκύπτει άμεσα από τον ορισμό τους είναι ότι η διάταξη των τιμών της μεταβλητής α στο πεδίο $[0,1]$ είναι αντιστρόφως ανάλογη του μεγέθους των συνόλων α-κοπής και ισχυρής α-κοπής. Δηλαδή, για κάθε ασαφές σύνολο A και για κάθε ζεύγος $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $\alpha_1 < \alpha_2$ ισχύει

$${}^{\alpha_1}A \supseteq {}^{\alpha_2}A \qquad \text{και} \qquad {}^{\alpha_1+}A \supseteq {}^{\alpha_2+}A. \tag{3.3}$$

Με την βοήθεια της *ισχυρής* α-κοπής ενός συνόλου A για $\alpha = 0$ μπορεί να οριστεί το *στήριγμα* (support) ενός ασαφούς συνόλου A σε σχέση με το οικουμενικό σύνολο X. Το *στήριγμα* του A σε σχέση με το X είναι το κλασσικό σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία του X που έχουν μη-μηδενική συνάρτηση συμμετοχής στο A.

Το *ύψος* (height), $h(A)$, ενος ασαφούς συνόλου A είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης συμμετοχής που προκύπτει από κάθε στοιχείο στο σύνολο. Δηλαδή

$$h(A) = \sup_{x \in X} A(x) \tag{3.4}$$

Ένα ασαφές σύνολο ονομάζεται *κανονικό* (normal) όταν ισχύει $h(A) = 1$ και *υποκανονικό* (subnormal) όταν $h(A) < 1$. Το ύψος του A μπορεί να αντιμετωπιστεί και ως το supremum της α για το οποίο ${}^{\alpha}A \neq \emptyset$

Οι τρείς βασικοί τελεστές πράξεων των κλασσικών συνόλων - το συμπλήρωμα (complement), η τομή (intersection) και η ένωση (union) - επεκτείνονται για τις ανάγκες των ασαφών συνόλων με περισσότερους από έναν τρόπους. Παρόλα αυτά, ιδιαίτερα χρήσιμη είναι μια συγκεκριμένη γενίκευση τους που έχει ως αποτέλεσμα τους τελεστές που ονομάζονται *θεμελιώδεις τελεστές ασαφούς συνολοθεωρίας*. Το *θεμελιώδες συμπλήρωμα*, $\overline{A}$, ενός συνόλου A σε σχέση με το οικουμενικό σύνολο X ορίζεται για κάθε $x \in X$ από την εξίσωση

$$\overline{A}(x) = 1 - A(x). \tag{3.5}$$

Τα στοιχεία του X για τα οποία ισχύει $A(x) = \overline{A}(x)$ ονομάζονται *στοιχεία ισοδυναμίας* (equilibrium points).

Έστω, ότι δίνονται δύο ασαφή σύνολα A και B. Η *θεμελιώδης τομή*, $A \cap B$ και η *θεμελιώδης ένωση*, $A \cup B$, ορίζονται για όλα τα $x \in X$ από τις εξισώσεις

$$(A \cap B)(x) = min[A(x), B(x)], \tag{3.6}$$
$$(A \cup B)(x) = max[A(x), B(x)], \tag{3.7}$$

όπου οι τελεστές min και max δηλώνουν το ελάχιστο και το μέγιστο αντίστοιχα.

Για κάθε ασαφές σύνολο A, συνεχίζοντας, που ορίζεται σε ένα οικουμενικό σύνολο X, ορίζεται η βαθμωτή-πληθικότητα (cardinality) του, $|A|$, με βάση τον τύπο

$$|A| = \sum_{x \in X} A(x). \tag{3.8}$$

Τέλος, για να κλείσει αυτή η σύντομη εισαγωγή, θα παρουσιαστεί μια ειδική σημειολογία που χρησιμοποιείται ευρέως στη βιβλιογραφία για την αναπαράσταση ασαφών συνόλων που το στήριγμα τους είναι πεπερασμένο. Έστω, ότι δίνεται ένα ασαφές σύνολο A που ορίζεται σε σχέση με ένα πεπερασμένο οικουμενικό σύνολο X. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n$ τα στοιχεία του στηρίγματος ^{0+}A του A και έστω α_i ο βαθμός συμμετοχής του στοιχείου x_i στο A για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Τότε το σύνολο A γράφεται ως εξής

$$A = \alpha_1/x_1 + \alpha_2/x_2 + \ldots + \alpha_n/x_n, \tag{3.9}$$

όπου η κάθετος χρησιμοποιείται για να ενώσει τα στοιχεία του στηρίγματος με τους βαθμούς συμμετοχής τους στο A, και το σύμβολο της πρόσθεσης δηλώνει ότι τα ζευγάρια α_i/x_i συνθέτουν όλα μαζί το σύνολο A. Η εξίσωση 3.9 μπορεί να γραφεί ισοδύναμα

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i/x_i \qquad \text{ή} \qquad A = \sum_{i=1}^{\infty} a_i/x_i$$

Παρόμοια όταν το X είναι ένα διάστημα πραγματικών αριθμών, το ασαφές σύνολο γράφεται στην μορφή

$$A = \int_X A(x)/x.$$

3.2 Πράξεις στα Ασαφή Σύνολα

Όπως αναφέρθηκε και στην Παράγραφο 3.1 στην ασαφή συνολοθεωρία οι θεμελιώδεις τελεστές του συμπληρώματος, της τομής και της ένωσης που χρησιμοποιούνται ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \overline{A}(x) &= 1 - A(x), \\ (A \cap B)(x) &= min[A(x), B(x)], \\ (A \cup B)(x) &= max[A(x), B(x)], \end{aligned}$$

για κάθε $x \in X$.

Οι τελεστές αυτοί δρουν με τον ίδιο τρόπο που δρουν οι αντίστοιχοι τελεστές στην κλασσική θεωρία συνόλων, με την μόνη διαφορά ότι στην κλασσική θεωρία ο βαθμός συμμετοχής περιορίζεται στο σύνολο $\{0, 1\}$. Δεν είναι όμως μοναδικοί. Για κάθε ένα από τους τρείς αυτούς τελεστές, υπάρχει μια ευρεία κλάση από συναρτήσεις που θεωρούνται ασαφείς γενικεύσεις των τελεστών των κλασσικών συνόλων. Οι συναρτήσεις που θεωρούνται ασαφείς τομές και ασαφείς ενώσεις στη βιβλιογραφία αναφέρονται συνήθως ως t-norms και t-conorms, αντίστοιχα.

3.2.1 Ασαφή Συμπληρώματα

Έστω, το ασαφές σύνολο A που ορίζεται σε σχέση με το οικουμενικό σύνολο X. Εξ' ορισμού το $A(x)$ δηλώνει τον βαθμό συμμετοχής της μεταβλητής x στο σύνολο A. Με cA θα δηλώνεται το *ασαφές συμπλήρωμα* του A που είναι τύπου c. Έτσι, με την έννοια $cA(x)$ δηλώνεται όχι μόνο ο βαθμός με τον οποίο η μεταβλητή x συμμετέχει στο cA, αλλά και ο βαθμός με τον οποίο η μεταβλητή x δεν ανήκει στο A.

Το συμπλήρωμα cA ορίζεται από την συνάρτηση

$$c : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

η οποία αναθέτει μια τιμή $c(A(x))$ σε κάθε βαθμό συμμετοχής $A(x)$ οποιουδήποτε συνόλου A. Η τιμή $c(A(x))$ ερμηνεύεται ως η τιμή $cA(x)$, δηλαδή

$$c(A(x)) = cA(x)$$

για κάθε $x \in X$. Άρα δεδομένου ενός συνόλου A το συμπλήρωμα του cA προκύπτει εάν εφαρμοστεί η συνάρτηση $c(x)$ στις τιμές $A(x)$ για όλα τα $x \in X$.

Από τον παραπάνω ορισμό είναι εμφανές ότι η συνάρτηση c είναι ανεξάρτητη από τα στοιχεία του συνόλου στο οποίο εφαρμόζεται, αλλά εξαρτάται μόνο από τις τιμές των βαθμών συμμετοχής τους. Η συνάρτηση c για να μπορεί να θεωρείται ασαφής συνάρτηση συμπληρώματος, να μπορεί να παράγει δηλαδή σύνολα που είναι συνεπή με την ασαφή θεωρία συνόλων, θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από κάποιες ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές παρουσιάζονται στη συνέχεια σε μορφή Αξιωμάτων.

Για να μπορέσει η συνάρτηση c να παράγει ασαφή συμπληρώματα πρέπει να ικανοποιεί τουλάχιστον τα δύο παρακάτω Αξιώματα που ονομάζονται *αξιωματικός σκελετός για το ασαφές συμπλήρωμα*

Αξίωμα 1 (Οριακές Συνθήκες). $c(0) = 1$ *και* $c(1) = 0$.

Αξίωμα 2 (Μονοτονία). *Για κάθε* $\alpha, b \in [0, 1]$, *εάν ισχύει* $\alpha \leq b$, *τότε* $c(\alpha) \geq c(b)$.

Σύμφωνα με το Αξίωμα 1, η συνάρτηση c απαιτείται να παράγει ορθά συμπληρώματα και για κλασσικά σύνολα ενώ σύμφωνα με το Αξίωμα 2 η συνάρτηση αυτή πρέπει να είναι φθίνουσα.

Στη βιβλιογραφία η συνάρτηση ασαφούς συμπληρώματος παρουσιάζει άλλες δύο επιθυμητές ιδιότητες. Αυτές ορίζονται με τα παρακάτω Αξιώματα:

Αξίωμα 3 (Συνέχεια). *Η συνάρτηση* c *είναι συνεχής*

Αξίωμα 4 (Εναγωγή). *Για τη συνάρτηση* c *ισχύει* $c(c(\alpha)) = \alpha$ *για κάθε* $\alpha \in [0, 1]$

Σύμφωνα με την παρακάτω Πρόταση τα τέσσερα αυτά Αξιώματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

Πρόταση 3.21. *Έστω μια συνάρτηση* $c : [0, 1] \to [0, 1]$ *που ικανοποιεί τα Αξιώματα 2 και 4. Τότε, η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί επίσης και τα Αξιώματα 1 και 3. Επιπλέον, η* c *είναι αμφιμονοσήμαντη.*

Δύο ιδιαίτερα γνωστές κλάσεις συναρτήσεων συμπληρώματος είναι η κλάση *Sugeno* [49] που ορίζεται από τη συνάρτηση

$$c_\lambda(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{1 + \lambda\alpha}, \tag{3.10}$$

για $\lambda \in (-1, \infty)$ και η κλάση *Yager* [51] που ορίζεται από τη συνάρτηση

$$c_w(\alpha) = (1 - \alpha^w)^{1/w} \tag{3.11}$$

για $w \in (0, \infty)$. Και για τις δύο αυτές κλάσεις μεταβάλλοντας τις παραμέτρους λ και w αντίστοιχα προκύπτουν διαφορετικές συναρτήσεις συμπληρώματος.

Για όλες τις κλάσεις συμπληρώματος μια σημαντική ιδιότητα είναι αυτή του *σημείου ισοδυναμίας*. Το σημείο αυτό ορίζεται ως η τιμή α για την οποία ισχύει $c(\alpha) = \alpha$. Με άλλα λόγια, το σημείο ισοδυναμίας μιας συνάρτησης συμπληρώματος c είναι ο βαθμός συμμετοχής του A που ισοδυναμεί με τον βαθμό συμμετοχής του συμπληρώματος cA. Για παράδειγμα, το σημείο ισοδυναμίας του κλασσικού ασαφούς συμπληρώματος που δίνεται από την Εξίσωση 3.5 είναι ίσο με 0.5, που αποτελεί τη λύση της εξίσωσης $1 - \alpha = \alpha$.

Στη συνέχεια δίνονται δύο Θεωρήματα με βάση τα οποία μπορούν να κατασκευαστούν ασαφείς συναρτήσεις συμπληρώματος που είναι συνεπείς με την ασαφή θεωρία συνόλων.

Θεώρημα 2 (Πρώτο Θεώρημα Χαρακτηρισμού των Ασαφών Συμπληρωμάτων). *Έστω c μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το* $[0,1]$ *και πεδίο τιμών το* $[0,1]$. *Τότε η c είναι ένα ασαφές συμπλήρωμα εάν και μόνο εάν υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε η g να είναι γνησίως αύξουσα, να ισχύει* $g(0)=0$, *και τέλος*

$$c(\alpha)=g^{-1}(g(1)-g(\alpha)) \tag{3.12}$$

για κάθε $\alpha\in[0,1]$.

Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(0)=0$ μπορεί να γίνει γεννήτρια ασαφούς συνάρτησης συμπληρώματος σύμφωνα με την εξίσωση 3.12.

Θεώρημα 3 (Δεύτερο Θεώρημα Χαρακτηρισμού των Ασαφών Συμπληρωμάτων). *Έστω c μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το* $[0,1]$ *και πεδίο τιμών το* $[0,1]$. *Τότε η c είναι ένα ασαφές συμπλήρωμα εάν και μόνο εάν υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *τέτοια ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα, να ισχύει* $f(1)=0$, *και τέλος*

$$c(\alpha)=f^{-1}(f(0)-f(\alpha)) \tag{3.13}$$

για κάθε $\alpha\in[0,1]$.

Άρα ασαφής συνάρτηση συμπληρώματος μπορεί να προκύψει και με την χρήση γνησίως φθίνουσας συνάρτησης σύμφωνα με την εξίσωση 3.13 εφόσον ισχύει $f(1)=0$.

Αναφορά στις γνησίως αύξουσες και γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις γίνεται στο Παράρτημα Β΄.

3.2.2 Ασαφείς Τομές: t-norms

Η τομή δύο συνόλων A και B ορίζεται γενικά ως ένας δυαδικός τελεστής που ορίζεται στο μοναδιαίο διάστημα, δηλαδή μια συνάρτηση της μορφής:

$$t:[0,1]\times[0,1]\to[0,1].$$

Για κάθε στοιχείο x του οικουμενικού συνόλου, η συνάρτηση αυτή δέχεται ως ορίσματα ένα ζεύγος αποτελούμενο από τους βαθμούς συμμετοχής των στοιχείων στο σύνολο A και στο σύνολο B, και δίνει ως αποτέλεσμα το βαθμό συμμετοχής του στοιχείου αυτού στην τομή των συνόλων A και B. Δηλαδή,

$$(A\cap B)(x)=t[A(x),B(x)] \tag{3.14}$$

για όλα τα $x\in X$.

Δεδομένης μιας ασαφούς συνάρτησης τομής t, ή t-norm διαφορετικά, και δύο ασαφών συνόλων A και B, θα πρέπει να εφαρμοστεί η 3.14 σε κάθε στοιχείο $x\in X$

για να μπορέσει να καθοριστεί η τομή των A και B με βάση τη συνάρτηση t. Παρόλα αυτά, η συνάρτηση t είναι ανεξάρτητη από τα στοιχεία x και εξαρτάται μόνο από τις τιμές $A(x)$ και $B(x)$.

Για να μπορέσει μια συνάρτηση t να ικανοποιήσει την ασαφή τομή θα πρέπει να έχει κάποιες ιδιότητες, οι οποίες θα διασφαλίζουν ότι τα ασαφή σύνολα που παράγονται από την t είναι αποδεκτές ασαφείς τομές για οποιοδήποτε ζευγάρι ασαφών συνόλων. Έτσι λοιπόν, μια ασαφής συνάρτηση τομής ή t-norm t ικανοποιεί τουλάχιστον τα παρακάτω Αξιώματα για κάθε $\alpha, b, d \in [0, 1]$:

Αξίωμα 5 (Οριακή Συνθήκη)**.** $t(\alpha, 1) = \alpha.$

Αξίωμα 6 (Μονοτονία)**.** *εάν* $b \leq d$ *τότε* $t(\alpha, b) \leq t(\alpha, d).$

Αξίωμα 7 (Αντιμεταθετική)**.** $t(\alpha, b) = t(b, \alpha).$

Αξίωμα 8 (Προσεταιριστική)**.** $t(\alpha, t(b, d)) = t(t(\alpha, b), d).$

Το σύνολο των Αξιωμάτων αυτών καλείται *αξιωματικός σκελετός για ασαφείς τομές/t-norms* [30].

Από τα παραπάνω Αξιώματα τα τρία πρώτα διασφαλίζουν ότι η ασαφής τομή που ορίζεται από την 3.14 μετασχηματίζεται στην κλασσική τομή, εφόσον τα σύνολα A και B ορίζονται με βάση την κλασσική συνολοθεωρία. Οι σχέσεις $t(0, 1) = 0$ και $t(1, 1) = 1$ προκύπτουν απ' ευθείας από την οριακή συνθήκη, η σχέση $t(1, 0) = 0$ προκύπτει από την αντιμεταθετική ιδιότητα, ενώ η σχέση $t(0, 0) = 0$ προκύπτει από την ιδιότητα της μονοτονίας.

Με βάση τα Αξιώματα 5 και 6 προκύπτει η βασική ιδιότητα των t-norm $t(\alpha, b) \leq \alpha, b$ σύμφωνα με την οποία κάθε όρισμα μιας t-norm είναι μεγαλύτερο ή τουλάχιστον ίσο αυτής.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να περιορίζεται η κλάση των ασαφών τομών και για το λόγο αυτό απαιτείται η συνάρτηση t να ικανοποιεί και τα ακόλουθα Αξιώματα:

Αξίωμα 9 (Συνέχεια)**.** *Η t είναι συνεχής συνάρτηση*

Αξίωμα 10 (Υποταυτοδυναμία)**.** *Ισχύει* $t(\alpha, \alpha) < \alpha$

Αξίωμα 11 (Αυστηρή Μονοτονία)**.** *Εάν ισχύουν* $\alpha_1 < \alpha_2$ *και* $b1 < b_2$ *τότε* $t(\alpha_1, b_1) < t(\alpha_2, b_2)$

Το Αξίωμα συνέχειας αποτρέπει καταστάσεις κατά τις οποίες πολύ μικρές αλλαγές στον βαθμό συμμετοχής είτε του συνόλου A είτε του συνόλου B θα δημιουργούσαν πολύ μεγάλες (ασυνεχείς) αλλαγές στον βαθμό συμμετοχής της τομής $A \cap B$. Το Αξίωμα Υποταυτοδυναμίας αφορά ειδικές περιπτώσεις που ο βαθμός συμμετοχής και των δύο συνόλων, για κάποιο στοιχείο x, είναι ίδιος, έστω α. Στις περιπτώσεις αυτές ο βαθμός συμμετοχής της τομής δεν πρέπει να είναι μεγαλύτερος της τιμής α. Μια συνεχής ασαφής συνάρτηση τομής που ικανοποιεί την ιδιότητα της υποταυτοδυναμίας ονομάζεται *Αρχιμηδιανή t-norm*.

Πρόταση 3.22. *Η θεμελιώδης ασαφής τομή είναι η μοναδική t-norm για την οποία ισχύει το Αξίωμα Υποταυτοδυναμίας.*

Παρακάτω δίνονται παραδείγματα κάποιων t-norms που χρησιμοποιούνται ευρέως ως ασαφής τομές:

Τυπική τομή	$t(\alpha, b) = \min(\alpha, b)$
Αλγεβρικό παράγωγο	$t(\alpha, b) = \alpha b$
Οριοθετημένη διαφορά	$t(\alpha, b) = \max(0, \alpha + b - 1)$
Δραστική τομή	$t(\alpha, b) = \begin{cases} \alpha & \text{εάν } b = 1 \\ b & \text{εάν } \alpha = 1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

για κάθε $\alpha, b \in [0, 1]$.

Στη συνέχεια δίνεται ένα θεώρημα με βάση το οποίο μπορούν να κατασκευαστούν ασαφείς συναρτήσεις τομής που είναι συνεπείς με την ασαφή θεωρία συνόλων.

Θεώρημα 4 (Θεώρημα Χαρακτηρισμού των t-Norms)**.** *Έστω t ένας δυαδικός τελεστής που ορίζεται στο μοναδιαίο διάστημα. Τότε, ο t είναι μια Αρχιμηδιανή t-norm εάν και μόνο εάν υπάρχει μια φθίνουσα γεννήτρια f τέτοια ώστε*

$$t(\alpha, b) = f^{-1}(f(\alpha) + f(b)) \tag{3.15}$$

για κάθε $\alpha, b \in [0, 1]$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα εάν δοθεί φθίνουσα γεννήτρια συνάρτηση f μπορεί να δημιουργηθεί μια συνάρτηση t-norm t σύμφωνα με την 3.15.

3.2.3 Ασαφείς Ενώσεις: t-conorms

Η μελέτη των ασαφών ενώσεων παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με τη μελέτη των ασαφών τομών. Όπως και η ασαφής τομή, η γενική ασαφής ένωση δύο ασαφών συνόλων A και B ορίζεται από μια συνάρτηση

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1].$$

Το όρισμα της συνάρτησης αυτής είναι το ζευγάρι που αποτελείται από τους βαθμούς συμμετοχής κάποιου στοιχείου x στα σύνολα A και B. Δηλαδή,

$$(A \cup B)(x) = u[A(x), B(x)] \tag{3.16}$$

για κάθε $x \in X$.

Μια ασαφής ένωση/t-conorm είναι ένας δυαδικός τελεστής στο μοναδιαίο διάστημα που ικανοποιεί τουλάχιστον τα παρακάτω Αξιώματα:

Αξίωμα 12 (Οριακή Συνθήκη). $u(\alpha, 0) = \alpha$.

Αξίωμα 13 (Μονοτονία). *Εάν* $b \leq d$ *τότε* $u(\alpha, b) \leq u(\alpha, d)$.

Αξίωμα 14 (Αντιμεταθετική). $u(\alpha, b) = u(b, \alpha)$.

Αξίωμα 15 (Προσεταιριστική). $u(\alpha, u(b, d)) = u(u(\alpha, b), d)$.

Με βάση τα Αξιώματα 12 και 13 προκύπτει η βασική ιδιότητα των t-conorm $u(\alpha, b) \geq \alpha, b$ σύμφωνα με την οποία κάθε όρισμα μιας t-conorm είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο αυτής.

Εφόσον τα Αξιώματα αυτά είναι θεμελιώδη για τις ασαφείς ενώσεις ονομάζονται *αξιωματικός σκελετός για τις ασαφείς ενώσεις/t-conorms* [30]. Συγκρίνοντας τα Αξιώματα αυτά με αυτά που ορίστηκαν για τις ασαφείς τομές φαίνεται ότι η μόνη διαφορά τους είναι σχετικά με την Οριακή Συνθήκη. Οι πιο σημαντικές επιπρόσθετες ιδιότητες που πρέπει να έχουν οι ασαφείς ενώσεις εκφράζονται από τα παρακάτω Αξιώματα:

Αξίωμα 16 (Συνέχεια). *Η* u *είναι συνεχής συνάρτηση*

Αξίωμα 17 (Υπερταυτοδυναμία). *Ισχύει* $u(\alpha, \alpha) > \alpha$

Αξίωμα 18 (Αυστηρή Μονοτονία). *Εάν ισχύουν* $\alpha_1 < \alpha_2$ *και* $b1 < b_2$ *τότε* $u(\alpha_1, b_1) < u(\alpha_2, b_2)$

Τα Αξιώματα αυτά είναι ανάλογα με τα Αξιώματα 9 - 11 με τη μόνη διαφορά ότι αντί για την ιδιότητα της υποταυτοδυναμίας εδώ υπάρχει η ιδιότητα της υπερταυτοδυναμίας. Όμοια προκύπτει και η παρακάτω Πρόταση

Πρόταση 3.23. *Η θεμελιώδης ασαφής ένωση είναι η μοναδική t-conorm για την οποία ισχύει το Αξίωμα Υποταυτοδυναμίας.*

Μια συνεχής ασαφής συνάρτηση ένωσης που ικανοποιεί την ιδιότητα της υπερταυτοδυναμίας ονομάζεται *Αρχιμηδιανή t-conorm.*

Παρακάτω δίνονται παραδείγματα κάποιων t-conorms που χρησιμοποιούνται ευρέως ως ασαφής ενώσεις:

Τυπική ένωση	$u(\alpha, b) = \max(\alpha, b)$
Αλγεβρικό άθροισμα	$u(\alpha, b) = \alpha + b - \alpha b$
Οριοθετημένο άθροισμα	$u(\alpha, b) = \min(1, \alpha + b)$
Δραστική ένωση	$u(\alpha, b) = \begin{cases} \alpha & \text{εάν } b = 0 \\ b & \text{εάν } \alpha = 0 \\ 1 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

για κάθε $\alpha, b \in [0, 1]$.

Στη συνέχεια δίνεται ένα θεώρημα με βάση το οποίο μπορούν να κατασκευαστούν ασαφείς συναρτήσεις ένωσης που είναι συνεπείς με την ασαφή θεωρία συνόλων.

Θεώρημα 5 (Θεώρημα Χαρακτηρισμού των t-Conorms). *Έστω u ένας δυαδικός τελεστής που ορίζεται στο μοναδιαίο διάστημα. Τότε, ο u είναι μια Αρχιμηδιανή t-conorm εάν και μόνο εάν υπάρχει μια αύξουσα γεννήτρια g τέτοια ώστε*

$$u(\alpha, b) = g^{-1}(g(\alpha) + g(b)) \tag{3.17}$$

για κάθε $\alpha, b \in [0, 1]$.

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα εάν δοθεί αύξουσα γεννήτρια συνάρτηση g μπορεί να δημιουργηθεί μια συνάρτηση t-conorm u σύμφωνα με την 3.17.

3.3 Ασαφείς Σχέσεις

Οι σχέσεις στην κλασσική συνολοθεωρία αναπαριστούν την ύπαρξη ή την απουσία συσχέτισης, αλληλεπίδρασης και αλληλοσύνδεσης μεταξύ των στοιχείων δύο ή περισσοτέρων συνόλων [40, 41]. Η έννοια αυτή μπορεί να γενικευτεί επιτρέποντας διάφορους βαθμούς συσχέτισης και αλληλεπίδρασης μεταξύ των στοιχείων. Οι βαθμοί συσχέτισης μπορούν να αναπαρασταθούν με βαθμούς συμμετοχής με τον ίδιο τρόπο που οι βαθμοί συμμετοχής αναπαριστούν συμμετοχή στα ασαφή σύνολα. Μια *σχέση* ανάμεσα σε κλασσικά σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ένα υποσύνολο του Καρτεσιανού γινομένου $\times_{i \in \mathbb{N}_n} X_i$. Έτσι,

$$R(X_1, X_2, \ldots, X_n) \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n,$$

ώστε για τις σχέσεις ανάμεσα στα σύνολα $X_1, X_2, \ldots, X_n$, το Καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ να αντιπροσωπεύει το οικουμενικό σύνολο. Επειδή η σχέση είναι ένα σύνολο, οι βασικοί τελεστές όπως του υποσυνόλου, της ένωσης και της τομής καθώς και του συμπληρώματος μπορούν να εφαρμοστούν χωρίς να απαιτείται να γίνει κάποια τροποποίηση.

Κάθε κλασσική σχέση R μπορεί να οριστεί από μια χαρακτηριστική συνάρτηση που θέτει την τιμή 1 σε κάθε πλειάδα του οικουμενικού συνόλου που ανήκει στη σχέση και 0 σε κάθε πλειάδα που δεν ανήκει. Άρα ισχύει

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{εάν και μόνο εάν } \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in X \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Όπως μια χαρακτηριστική συνάρτηση ενός κλασσικού συνόλου μπορεί να γενικευθεί επιτρέποντας βαθμούς συμμετοχής, έτσι και η χαρακτηριστική συνάρτηση μιας κλασσικής σχέσης μπορεί να γενικευθεί επιτρέποντας στις πλειάδες να έχουν βαθμό συμμετοχής σε κάποια σχέση. Για το λόγο αυτό, μια *ασαφής σχέση* είναι ένα ασαφές σύνολο που ορίζεται στο Καρτεσιανό γινόμενο των κλασσικών συνόλων $X_1, X_2, \ldots, X_n$, όπου οι πλειάδες $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ μπορούν να έχουν διάφορους βαθμούς συμμετοχής στη σχέση. Άρα

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1] \text{ για κάθε πλειάδα} \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \in X$$

Ο βαθμός συμμετοχής δηλώνει το μέγεθος της συσχέτισης μεταξύ των στοιχείων της πλειάδας. Μια βολική μέθοδος αναπαράστασης μιας δυαδικής σχέσης $R(X,Y)$ είναι οι *πίνακες συμμετοχής* (membership matrices) $\mathbf{R} = [r_{xy}]$ όπου $r_{xy} = R(x,y)$.

3.3.1 Δυαδικές Ασαφείς Σχέσεις

Οι δυαδικές ασαφείς σχέσεις παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον ανάμεσα στις n-διάστατες ασαφείς σχέσεις εφόσον αποτελούν, κατά κάποιο τρόπο, γενικευμένες μαθηματικές συναρτήσεις. Σε αντίθεση με τις σχέσεις από το σύνολο X στο σύνολο Y, οι δυαδικές σχέσεις $R(X,Y)$ μπορούν να αναθέσουν σε ένα στοιχείο του X δύο ή περισσότερα στοιχεία του Y. Κάποιοι βασικοί τελεστές συναρτήσεων, όπως ο τελεστής αντιστροφής (inverse operator) και ο τελεστής συγκρότησης (composition operator), μπορούν να εφαρμοστούν και σε δυαδικές σχέσεις.

Η αντίστροφη μιας ασαφούς σχέσης $R(X,Y)$, που δηλώνεται $R^{-1}(Y,X)$, είναι μια σχέση στο $Y \times X$ που ορίζεται ώς εξής:

$$R^{-1}(y,x) = R(x,y)$$

για κάθε $x \in X$ και $y \in Y$. Ένας πίνακας συμμετοχής $\mathbf{R}^{-1} = [r_{xy}^{-1}]$ που αναπαριστά τη σχέση $R^{-1}(Y,X)$ είναι η μετάθεση του πίνακα $\mathbf{R}$ για την $R(X,Y)$, που σημαίνει ότι οι γραμμές του $\mathbf{R}^{-1}$ είναι ίσες με τις στήλες του $\mathbf{R}$ και οι στήλες του $\mathbf{R}^{-1}$ ίσες με τις γραμμές του $\mathbf{R}$. Συνεπώς ισχύει και $(\mathbf{R}^{-1})^{-1} = \mathbf{R}$.

Έστω τώρα δύο δυαδικές ασαφείς σχέσεις $P(X,Y)$ και $Q(Y,Z)$ που έχουν ένα κοινό σύνολο Y. Η συνάρτηση της *τυπικής συγκρότησης* αυτών των σχέσεων, που δηλώνεται $P(X,Y) \circ Q(Y,Z)$, παράγει μια δυαδική σχέση $R(X,Z)$ στο $X \times Z$ που ορίζεται ως εξής:

$$R(x,z) = [P \circ Q](x,z) = \max_{y \in Y} \min[P(x,y), Q(y,z)] \tag{3.18}$$

για κάθε $x \in X$ και $z \in Z$. Η συνάρτηση αυτή συγκρότησης που βασίζεται στις τυπικές t-norm και t-conorm αναφέρεται στη βιβλιογραφία και ως *max-min συγκρότηση* (max-min composition). Απ΄ ευθείας από την 3.18 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}[P(X,Y)\circ Q(Y,Z)]^{-1} &= Q^{-1}(Z,Y)\circ P^{-1}(Y,X),\\ [P(X,Y)\circ Q(Y,Z)]\circ R(Z,W) &= P(X,Y)\circ[Q(Y,Z)\circ R(Z,W)].\end{aligned}$$

Δηλαδή, η τυπική συνάρτηση συγκρότησης είναι αντιμεταθετική και η αντίστροφη της είναι ίση με την αντίθετη συγκρότηση των αντίστροφων σχέσεων.

3.3.2 Συγκροτήσεις Ασαφών Σχέσεων Sup-t

Οι sup-t συγκροτήσεις δυαδικών ασαφών σχέσεων, όπου το t αναφέρεται σε μια t-norm, αποτελούν γενίκευση της τυπικής max-min συγκρότησης. Η χρησιμότητα των συγκροτήσεων αυτών είναι μεγάλη ιδιαίτερα σε προσεγγιστικούς κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, όπως αυτοί που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια. Δεδομένης μιας συγκεκριμένης t-norm t και δύο ασαφών σχέσεων $P(X,Y)$ και $Q(Y,Z)$, η sup-t συγκρότηση των P και Q είναι η ασαφής σχέση $P\circ^t Q$ στο $X\times Z$ που ορίζεται ως εξής:

$$[P\circ^t Q](x,z)=\sup_{y\in Y} t[P(x,Y),Q(y,z)] \tag{3.19}$$

για κάθε $x\in X$ και $z\in Z$. Όταν η t επιλέγεται ως ο τελεστής min, τότε η $P\circ^t Q$ γίνεται η τυπική συγκρότηση $P\circ Q$.

3.3.3 Συγκροτήσεις Ασαφών Σχέσεων Inf-ω_t

Δεδομένης μιας συνεχούς t-norm t, έστω

$$\omega_t(\alpha,b)=\sup\{x\in[0,1]\mid t(\alpha,x)\le b\} \tag{3.20}$$

για κάθε $\alpha,b\in[0,1]$. Ο τελεστής αυτός είναι γνωστός ως ω_t. Ενώ η t-norm t μπορεί να ερμηνευθεί ως λογική τομή, ο τελεστής ω_t μπορεί να ερμηνευθεί ως λογικό επαγωγικό συμπέρασμα. Βασικές ιδιότητες του τελεστή ω_t παρουσιάζονται με το παρακάτω Θεώρημα

Θεώρημα 6. *Για κάθε $\alpha,\alpha_j,b,d\in[0,1]$, όπου η j παίρνει τιμές από ένα σύνολο δεικτών J, ο τελεστής ω_t παρουσιάζει τις παρακάτω ιδιότητες*

1) $t(\alpha,b)\le d$ εάν και μόνο εάν $\omega_t(\alpha,d)\ge b$

2) $\omega_t[\omega_t(\alpha,b),b]\ge\alpha$

3) $\omega_t[t(\alpha,b),d]=\omega_t[\alpha,\omega_t(b,d)]$

4) εάν $\alpha\le b$ τότε $\omega_t(\alpha,d)\ge\omega_t(b,d)$ και $\omega_t(d,\alpha)\le\omega_t(d,b)$

5) $t[\omega_t(\alpha,b),\omega_t(b,d)]\le\omega_t(\alpha,d)$

6) $\omega_t[\inf_{j\in J}\alpha_j, b] \geq \sup_{j\in J}\omega_t(\alpha_j, b)$

7) $\omega_t[\sup_{j\in J}\alpha_j, b] = \inf_{j\in J}\omega_t(\alpha_j, b)$

8) $\omega_t[b, \sup_{j\in J}\alpha_j] \geq \sup_{j\in J}\omega_t(b, \alpha_j)$

9) $\omega_t[b, \inf_{j\in J}\alpha_j] = \inf_{j\in J}\omega_t(b, \alpha_j)$

10) $t[\alpha, \omega_t(\alpha, b)] \leq b$.

3.4 Ασαφής Συνεπαγωγή

Ο λογικός τελεστής της συνεπαγωγής (implication) είναι ιδιαίτερα χρήσιμος τόσο στους προσσεγιστικούς κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων όσο και στους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων στην κλασσική λογική [10, 42]. Γενικά, μια ασαφής συνεπαγωγή, $\mathcal{J}$, είναι η συνάρτηση εκείνη που έχει μορφή

$$\mathcal{J} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1],$$

και για όλες τις πιθανές τιμές αληθείας α, b των ασαφών προτάσεων p, q αντίστοιχα ορίζει την τιμή αλήθειας $\mathcal{J}(\alpha, b)$, της πρότασης υπό συνθήκη “Εάν p, τότε q”. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να είναι μια επέκταση της κλασσικής συνεπαγωγής, $p \Rightarrow q$, από το σύνολο $\{0,1\}$ στο σύνολο $[0,1]$.

Στην κλασσική λογική, που ισχύει $\alpha, b \in \{0,1\}$, η $\mathcal{J}$ μπορεί να οριστεί με πολλούς ισοδύναμους τρόπους. Οι τρόποι αυτοί όμως δεν είναι ισοδύναμοι στην ασαφή λογική και αντιστοιχούν σε διαφορετικές κλάσεις συνεπαγωγής. Το γεγονός αυτό κάνει την έννοια της ασαφούς συνεπαγωγής περίπλοκη.

Ένας τρόπος ορισμού της $\mathcal{J}$ στην κλασσική λογική είναι μέσω του λογικού τύπου

$$\mathcal{J}(\alpha, b) = \overline{a} \vee b \tag{3.21}$$

για κάθε $\alpha, b \in \{0,1\}$. Η επέκταση του τύπου αυτού στην ασαφή λογική έχει ως αποτέλεσμα να ερμηνεύεται η διάζευξη και η άρνηση ως ασαφής ένωση (t-conorm) και ασαφές συμπλήρωμα, αντίστοιχα. Η επέκταση αυτή έχει ως αποτέλεσμα η $\mathcal{J}$ να ορίζεται στην ασαφή λογική ως εξής:

$$\mathcal{J}(\alpha, b) = u(c(\alpha), b) \tag{3.22}$$

για κάθε $\alpha, b \in [0,1]$, όπου οι τελεστές c και u δηλώνουν το ασαφές συμπλήρωμα και την ασαφή ένωση, αντίστοιχα.

Ένας άλλος τρόπος ορισμού της $\mathcal{J}$ στην κλασσική συνολοθεωρία είναι μέσω του τύπου

$$\mathcal{J}(\alpha, b) = \max\{x \in \{0,1\} \mid \alpha \wedge x \leq b\} \tag{3.23}$$

για κάθε $\alpha, b \in \{0,1\}$. Ερμηνεύοντας την τομή στον παραπάνω τύπο με την ασαφή τομή (t-norm), η $\mathcal{J}$ στην ασαφή λογική ορίζεται από τον παρακάτω τύπο

$$\mathcal{J}(\alpha,b) = \sup\{x \in [0,1] \mid t(\alpha,x) \leq b\} \tag{3.24}$$

για κάθε $\alpha, b \in [0,1]$, όπου ο τελεστής t δηλώνει μια συνεχή ασαφή τομή.

Όπως αναφέρθηκε, ενώ οι ορισμοί της συνεπαγωγής της κλασσικής θεωρίας συνόλων 3.21 και 3.23 είναι ισοδύναμοι, κάτι τέτοιο δεν ισχύει και για τους ορισμούς της ασαφούς συνολοθεωρίας 3.22 και 3.24. Οι ορισμοί στην ασαφή συνολοθεωρία ορίζουν διαφορετικές κλάσεις ασαφούς συνεπαγωγής. Η κλάση που ορίζεται από την 3.22 ονομάζεται *S-implications*, δηλαδή *S-συνεπαγωγές*, ενώ η κλάση που ορίζεται από την 3.24 ονομάζεται *R-implications*, δηλαδή *R-συνεπαγωγές*.

Ανεξάρτητα όμως από την κλάση που ορίζεται υπάρχουν κάποιες ιδιότητες που ισχύουν για τις ασαφείς συνεπαγωγές. Αυτές θα παρουσιαστούν στην συνέχεια σε μορφή Αξιωμάτων

Αξίωμα 19 (Μονοτονία στο Πρώτο Όρισμα). *Εάν $\alpha \leq b$ τότε $\mathcal{J}(\alpha,x) \geq \mathcal{J}(b,x)$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι η τιμή αληθείας της ασαφούς συνεπαγωγής αυξάνεται καθώς ελαττώνεται η τιμή αληθείας της υπόθεσης.*

Αξίωμα 20 (Μονοτονία στο Δεύτερο Όρισμα). *Εάν $\alpha \leq b$ τότε $\mathcal{J}(x,\alpha) \leq \mathcal{J}(x,b)$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι η τιμή αληθείας της ασαφούς συνεπαγωγής αυξάνεται καθώς αυξάνεται η τιμή αληθείας του συμπεράσματος.*

Αξίωμα 21 (Κυριαρχία Ψευδούς Υπόθεσης). *Ισχύει $\mathcal{J}(0,\alpha) = 1$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι από μια ψευδή υπόθεση μπορεί να προκύψει ένα οποιοδήποτε συμπέρασμα.*

Αξίωμα 22 (Ουδετερότητα Αληθής Υπόθεσης). *Ισχύει $\mathcal{J}(1,\alpha) = b$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι από μια αληθή υπόθεση δεν μπορεί να προκύψει ένα συμπέρασμα.*

Αξίωμα 23 (Ταυτότητα). *Ισχύει $\mathcal{J}(\alpha,\alpha) = 1$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι οι ασαφείς συνεπαγωγές είναι ίσες όποτε και η υπόθεση και το συμπέρασμα είναι ίσες.*

Αξίωμα 24 (Ιδιότητα εναλλαγής). *Ισχύει $\mathcal{J}(\alpha,\mathcal{J}(b,x)) = \mathcal{J}(b,\mathcal{J}(\alpha,x))$. Το Αξίωμα αυτό αποτελεί γενίκευση της ισοδυναμίας των $\alpha \Rightarrow (b \Rightarrow x)$ και $b \Rightarrow (\alpha \Rightarrow x)$.*

Αξίωμα 25 (Οριακή Συνθήκη). *Ισχύει $\mathcal{J}(\alpha,b) = 1$ εάν και μόνο εάν $\alpha \leq b$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι οι ασαφείς συνεπαγωγές είναι αληθείς εάν και μόνο εάν το συμπέρασμα είναι τουλάχιστον το ίδιο αληθές με την υπόθεση.*

Αξίωμα 26 (Αντίθεση). *Ισχύει $\mathcal{J}(\alpha,b) = \mathcal{J}(c(b),c(\alpha))$. Το Αξίωμα αυτό δηλώνει ότι οι ασαφείς συνεπαγωγές είναι το ίδιο αληθείς ή ψευδείς όταν η υπόθεση και το συμπέρασμα αντιστραφούν και εναλλαγούν.*

Αξίωμα 27 (Συνέχεια). *Η $\mathcal{J}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Με το αξίωμα αυτό εξασφαλίζεται ότι μικρές αλλαγές στις τιμές αλήθειας τόσο της υπόθεσης όσο και του συμπεράσματος δεν θα έχουν ως αποτέλεσμα μεγάλες (ασυνεχείς) αλλαγές στις τιμές αλήθειας της ασαφούς συνεπαγωγής.*

Όλα αυτά τα Αξιώματα δεν είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους. Συνδέονται με την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 3.24. *Μια συνάρτηση $\mathcal{J} : [0,1]^2 \to [0,1]$ ικανοποιεί τα Αξιώματα 19 - 27 των ασαφών συνεπαγωγών για μια συγκεκριμένη συνάρτηση συμπληρώματος c εάν και μόνο εάν υπάρχει μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$,*

$$\mathcal{J}(\alpha, b) = f^{-1}(f(1) - f(\alpha) + f(b))$$

για κάθε $\alpha, b \in [0,1]$, και

$$c(\alpha) = f^{-1}(f(1) - f(\alpha))$$

για κάθε $\alpha \in [0,1]$.

Κεφάλαιο 4

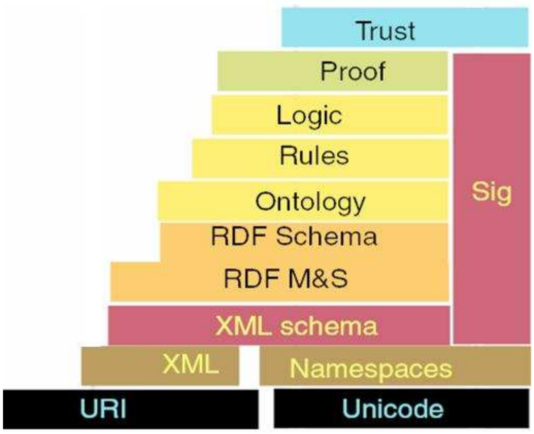
Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

4.1 Ο Σημασιολογικός Ιστός

Το Διαδίκτυο (Web) αποτελεί στις μέρες μας την μεγαλύτερη πηγή πληροφορίας. Καθημερινά τεράστιος όγκος δεδομένων προωθείται και αναζητείται στον Παγκόσμιο Ιστό (WWW) με αποτέλεσμα να έχει δημιουργηθεί ένας απέραντος κόσμος δεδομένων για τους χρήστες του. Όμως, η πληροφορία που μπορεί να επεξεργαστεί ένας υπολογιστής στο σημερινό Διαδίκτυο είναι περιορισμένη. Χαρακτηριστικό είναι ότι υπάρχουν ελάχιστες ιστοσελίδες που περιέχουν κώδικα RDF [21] στις οποίες όμως δεν γίνεται parcing. Για το λόγο αυτό, ο ιδρυτής του Διαδικτύου Tim Berners-Lee πρότεινε την επέκταση του στον Σημασιολογικό Ιστό (Semantic Web) [50].

“The Semantic Web is an extension of the current web in which information is given well-defined meaning, better enabling computers and people to work in cooperation.” – Tim Berners-Lee, James Hendler, Ora Lassila, The Semantic Web, Scientific American, May 2001 – W3C Definition of the Semantic Web.

Ο Σημασιολογικός Ιστός, αποτελεί μια επέκταση του σύγχρονου Διαδικτύου με πρότυπα και τεχνολογίες που βοηθούν τους υπολογιστές να κατανοήσουν την παρεχόμενη πληροφορία από το Διαδίκτυο παρέχοντας πλουσιότερες αναζητήσεις, ολοκλήρωση δεδομένων και αυτοματοποίηση εργασιών. Αυτό γίνεται με τη χρήση μεταδεδομένων, δεδομένων δηλαδή που περιγράφουν τις παρεχόμενες πληροφορίες (δεδομένα για τα δεδομένα) και αποθηκεύονται με μορφές που είναι εύκολα κατανοητές από υπολογιστές. Η πιο διαδεδομένη μορφή μετα-δεδομένων είναι οι οντολογίες. Μια οντολογία είναι ένα λεξιλόγιο που περιγράφει αντικείμενα και τις σχέσεις μεταξύ αυτών, με ένα τυπικό τρόπο, και παρέχει συγκεκριμένη γραμματική για την εξαγωγή εκφράσεων σχετικά με ένα συγκεκριμένο πεδίο ενδιαφέροντος. Οι οντολογίες χρησιμεύουν για τον σαφή ορισμό όρων που χρησιμοποιούνται από κοινού σε διάφορες πηγές του Διαδικ-



Σχήμα 4.1: Ιεραρχικά επίπεδα Σημασιολογικού Ιστού

τύου, με την χρήση της τεχνολογίας Αναπαράστασης Γνώσης για την αυτοματοποίηση διαδικασιών εξαγωγής συμπερασμάτων από τις πηγές αυτές και τέλος με την εφαρμογή συνεργαζόμενων πρακτόρων για την επεξεργασία της παρεχόμενης πληροφορίας. Στο Σημασιολογικό Ιστό, λοιπόν, οι διάφορες πληροφορίες οργανώνονται με ένα τρόπο κατανοητό από τους υπολογιστές δίνοντας τη δυνατότητα αποπεράτωσης πολύπλοκων εργασιών που αναθέτονται όμως με ένα σημασιολογικά ορθό τρόπο.

Ο Σημασιολογικός Ιστός αποτελείται από ιεραρχικά επίπεδα, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.1, με το επίπεδο των Οντολογιών, με την μορφή της γλώσσας OWL (Web Ontology Language) [18, 20] που πρόσφατα έγινε πρότυπο από τη W3C, να είναι αυτή τη στιγμή σε ένα πολύ υψηλό επίπεδο ωριμότητας. Όμως παρά την εκφραστική της δύναμη, σε σχέση με γλώσσες όπως η RDF [21], η OWL έχει κάποιους εκφραστικούς περιορισμούς, όπως η απουσία κανόνων. Οι κανόνες, όπως φαίνεται και από το Σχήμα 4.1 είναι ιδιαίτερα εκφραστικοί και για το λόγο αυτό τοποθετούνται πάνω από την OWL για την δημιουργία μιας ιδιαίτερα εκφραστικής γλώσσας. Η γλώσσα όμως αυτή είναι μη-ικανοποιήσιμη (unsatisfiable) για προγράμματα σημασιολογίας ανοιχτού κόσμου όπως έχει δειχθεί και στο [24]. Για το λόγο αυτό έχει προταθεί μια αντιστοίχιση της Περιγραφικής Λογικής με τους κανόνες Horn, και πιο συγκεκριμένα τους κανόνες def-Horn που δεν περιέχουν το σύμβολο της ισότητας (definite equality-free), η οποία είναι γνωστή ως Προγράμματα Περιγραφικής Λογικής (Description Logic Programs) [13]. Σε αυτή μελετάται ποιο τμήμα της γλώσσας OWL είναι συμβατό με την χρήση κανόνων. Παρόλα αυτά υπάρχουν ακόμα περιπτώσεις όπου τα Προγράμματα Περιγραφικής Λογικής αποτυγχάνουν να αναπαραστήσουν με ακρίβεια πληροφορίες και γνώση[1].

[1] Η γνώση, όπως έχει αναφερθεί και στο Κεφάλαιο 1, είναι ένα σύνολο από δομημένες πληρο-

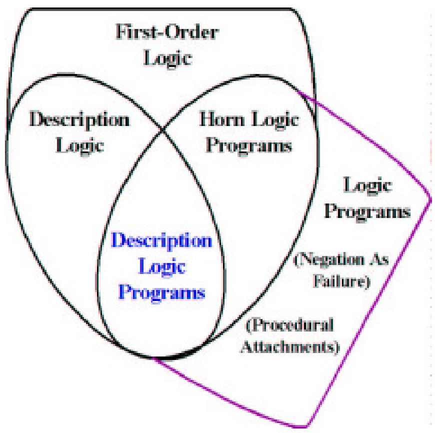
Πρόκειται για τις περιπτώσεις εκείνες στις οποίες γίνεται αναπαράσταση ασαφούς γνώσης. Η ασάφεια αποτελεί εγγενή χαρακτηριστικό της πληροφορίας, όπως οι έννοιες ενός "ψηλού" ατόμου, ενός "χαρούμενου" ατόμου, ενός "γρήγορου" αυτοκινήτου και πολλών άλλων, αλλά και ως χαρακτηριστικό πολλών καθημερινών εφαρμογών όπως η αναγνώριση προτύπων [46], η λήψη αποφάσεων [52] και άλλων. Η χρήση, λοιπόν, ασαφούς πληροφορίας έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία εφαρμογών που θα παράγουν συμπεράσματα πιο κοντά στην πραγματικότητα.

Η ανάγκη για την μελέτη της ασάφειας στον Σημασιολογικό Ιστό έχει υπογραμμιστεί πολλές φορές τα τελευταία χρόνια στη βιβλιογραφία, εφόσον πιστεύεται ότι κάτι τέτοιο θα έχει ως αποτέλεσμα την βελτίωση του Σημασιολογικού Ιστού. Για τον λόγο αυτό στην παρούσα εργασία γίνεται μια επέκταση των Προγραμμάτων Περιγραφικής Λογικής στα Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής. Στην συνέχεια γίνεται μια μικρή εισαγωγή στα Προγράμματα Περιγραφικής Λογικής και γίνεται και η επέκταση τους στα Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής.

4.2 Προγράμματα Περιγραφικής Λογικής

Στο Σχήμα 4.2 παρουσιάζεται διαγραμματικά η εκφραστική επικάλυψη της Λογικής Πρώτης Τάξης και του Λογικού Προγραμματισμού. Η Περιγραφική Λογική και οι κανόνες Horn αποτελούν αυστηρά υποσύνολα της Λογικής Πρώτης Τάξης (First Order Logic). Ο Λογικός Προγραμματισμός (Logic Programming) από την άλλη, τέμ-

φορίες που είναι οργανωμένες με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να παραχθούν νέες πληροφορίες και συμπεράσματα.



Σχήμα 4.2: Εκφραστική επικάλυψη Λογικής Πρώτης Τάξης και Λογικού Προγραμματισμού

νεται με την Λογική Πρώτης Τάξης χωρίς να αποτελεί ούτε υποσύνολο αλλά ούτε και υπερσύνολο αυτής. Τούτο ισχύει εφόσον υπάρχουν διαφορές στις εκφραστικές τους δυνατότητες. Για παράδειγμα, η Λογική Πρώτης Τάξης μπορεί να εκφράσει θετικές ενώσεις κάτι που είναι αδύνατο στον Λογικό Προγραμματισμό, και αντίθετα ο Λογικός Προγραμματισμός χρησιμοποιεί εκφραστικά χαρακτηριστικά, όπως την άρνηση σαν αποτυχία (negation as failure), που δεν μπορούν να εφαρμοστούν στην Λογική Πρώτης Τάξης.

Τα Προγράμματα Περιγραφικής Λογικής αποτελούν την τομή της Λογικής Πρώτης Τάξης και του Λογικού Προγραμματισμού και πιο συγκεκριμένα την τομή της Περιγραφικής γλώσσας OWL με τους κανόνες Horn. Η γλώσσα OWL αποτελείται από τρεις διαρκώς αναπτυσσόμενες εκφραστικά υπογλώσσες. Αυτές είναι η OWL *Lite*, η OWL *DL* και η OWL *Full*, όπου η OWL *DL* αντιστοιχεί στη DAML+OIL [19]. Η OWL *Lite* και η OWL *DL* είναι ιδιαίτερα εκφραστικές και είναι σχεδόν ισοδύναμες με τις γλώσσες Περιγραφικής Λογικής $\mathcal{SHIF}(\mathbf{D})$ και $\mathcal{SHOIN}(\mathbf{D})$, αντίστοιχα. Για τον λόγο αυτό στην συνέχεια θα χρησιμοποιηθεί η OWL *DL*. Μια οντολογία της OWL *DL* μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια βάση γνώσης Περιγραφικής Λογικής που αποτελείται από ένα σύνολο από *αξιώματα*, που περιλαμβάνουν αξιώματα εννοιών, αξιώματα ρόλων και ατομικά αξιώματα. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [35] για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τα αξιώματα της OWL και τη σημασιολογία τους. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι το τμήμα των κανόνων Horn που θα μελετηθούν ανήκει στους κανόνες def-Horn, που δεν περιέχουν το σύμβολο της ισότητας (definite equality-free), εφόσον ούτε η Περιγραφική Λογική περιέχει τέτοια σύμβολα.

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για να προκύψει αυτή η τομή μεταξύ Περιγραφικής Λογικής και Λογικού Προγραμματισμού ονομάζεται *DLP-fusion* (συγχώνευση των δύο μορφών Αναπαράστασης Γνώσης) [13] και αποτελείται από την αντιστοίχιση προϋποθέσεων και συμπερασμάτων από το κομμάτι της Περιγραφικής Λογικής στο κομμάτι του Λογικού Προγραμματισμού. Η αντιστοίχιση αυτή γίνεται με βάση τον Πίνακα 4.1 που φαίνεται παρακάτω.

Μέσω της αντιστοιχίας αυτής ορίζονται οι οντολογίες Περιγραφικής Λογικής Horn (Description Horn Logic) ως το σύνολο αξιωμάτων της Περιγραφικής Λογικής που έχουν μια από τις ακόλουθες μορφές $C \sqsubseteq D$, $A \equiv B$, $\top \sqsubseteq \forall P.D$, $\top \sqsubseteq \forall P^{-}.D$, $P \sqsubseteq Q$, $P \equiv Q$, $P \equiv Q^{-}$, $P^{+} \sqsubseteq P$, $D \sqsubseteq \forall P.C$, $\exists P.C \sqsubseteq D$, $\alpha : D$ και $\langle \alpha, b\rangle : P$ και μπορούν να αντιστοιχιστούν σε κανόνες def-Horn χωρίς να χάνεται η σημασιολογία τους. Αυτό σημαίνει ότι εάν $\mathcal{K}$ είναι μια οντολογία DHL και $\mathcal{H}$ το σύνολο των κανόνων που προκύπτει από την εφαρμογή της αντιστοιχίας στην $\mathcal{K}$, το σύνολο $\mathcal{H}$ είναι λογικά ισοδύναμο με την $\mathcal{K}$ με βάση την σημασιολογία της Λογικής Πρώτης Τάξης. Δηλαδή το $\mathcal{H}$ έχει το ίδιο σύνολο μοντέλων και συμπερασμάτων με την $\mathcal{K}$.

Για παράδειγμα η έκφραση $C \sqsubseteq \forall P.C$ αντιστοιχεί στη $(D(x) \leftarrow P(x, y)) \leftarrow C(x)$ η

$DescriptionLogic$	$FirstOrderLogic$
$\alpha : C$	$C(\alpha)$
$\langle \alpha, b\rangle : P$	$P(\alpha, b)$
$C \sqsubseteq D$	$\forall x.C(x) \rightarrow D(x)$
$P^{+} \sqsubseteq P$	$\forall x, y, z.(P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow P(x, z)$
$\top \sqsubseteq \leqslant 1P$	$\forall x, y, z.(P(x, y) \wedge P(y, z)) \rightarrow y = z$
$P \equiv Q^{-1}$	$\forall x, y.P(x, y) \iff Q(y, x)$
$C_1 \sqcap \ldots \sqcap C_n$	$C_1(x) \wedge \ldots \wedge C_n(x)$
$C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n$	$C_1(x) \vee \ldots \vee C_n(x)$
$\neg C$	$\neg C(x)$
$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$	$x = \alpha_1 \vee \ldots \vee x = \alpha_n$
$\exists P.C$	$\exists y.(P(x, y) \wedge C(y))$
$\forall P.C$	$\forall y.(P(x, y) \rightarrow C(y))$
$\geqslant nP.C$	$\exists y_1, \ldots, y_n. \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(P(x, y_i) \wedge C(y_i)) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i < n, i < j \leqslant n} y_i \neq y_j$
$\geqslant (n-1)P.C$	$\forall y_1, \ldots, y_n. \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n}(P(x, y_i) \wedge C(y_i)) \rightarrow (\bigvee_{1 \leqslant i < n, i < j \leqslant n} y_i = y_j)$

Πίνακας 4.1: Ισοδυναμία Περιγραφικής Λογικής και Λογικής Πρώτης Τάξης

οποία είναι ισοδύναμη με τη $D(y) \leftarrow C(x) \wedge P(x, y)$. Επίσης, η έκφραση $C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D$ αντιστοιχεί στην έκφραση $D(x) \leftarrow C_1(x) \wedge C_2(x)$.

Ένα Πρόγραμμα Περιγραφικής Λογικής τώρα ορίζεται ως το σύνολο των κανόνων Λογικού Προγραμματισμού που αποτελούν το Λογικό αντίστοιχο ενός συνόλου DHL. Δηλαδή, ένα Πρόγραμμα Περιγραφικής Λογικής αποτελεί το ισοδύναμο τμήμα του Λογικού Προγραμματισμού που μέσω μιας σειράς αντιστοιχιών ισοδυναμεί με το σύνολο DHL που αποτελεί τμήμα της Περιγραφικής Λογικής.

4.3 Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω τις τελευταίες δεκαετίες παρατηρείται μια στροφή του επιστημονικού κόσμου προς την μελέτη της αβεβαιότητας, δηλαδή της έλλειψης ακρίβειας και ασάφειας, στην Αναπαράσταση Γνώσης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι πληροφορίες του πραγματικού κόσμου περιέχουν έμφυτα ασάφεια και αβεβαιότητα. Για το λόγο αυτό θα γίνει μια μελέτη των Προγραμμάτων Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής. Με βάση τον παραπάνω ορισμό των οντολογιών Περιγραφικής Λογικής Horn και τον ορισμό των Προγραμμάτων Περιγραφικής Λογικής έχουμε τους εξής ορισμούς:

Ορισμός 4.1 (Οντολογίες Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής Horn). *Οι οντολογίες*

Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής Horn ορίζονται ως το σύνολο των αξιωμάτων της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής που μπορούν να αντιστοιχιστούν σε ασαφείς κανόνες def-Horn χωρίς να χάνεται η σημασιολογία τους.

Σε πλήρη αντιστοιχία με τις οντολογίες Περιγραφικής Λογικής Horn ο παραπάνω ορισμός υποδηλώνει ότι εάν $\mathcal{K}$ είναι μια οντολογία Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής DHL και $\mathcal{H}$ το σύνολο των Ασαφών κανόνων που προκύπτει από την εφαρμογή της αντιστοιχίας στην $\mathcal{K}$, το σύνολο $\mathcal{H}$ είναι λογικά ισοδύναμο με την $\mathcal{K}$ με βάση την σημασιολογία της Λογικής Πρώτης Τάξης. Δηλαδή το $\mathcal{H}$ έχει το ίδιο σύνολο μοντέλων και συμπερασμάτων με την $\mathcal{K}$.

Ορισμός 4.2 (Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής)**.** *Ένα Πρόγραμμα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής ορίζεται ως το σύνολο των Ασαφών κανόνων Λογικού Προγραμματισμού που αποτελούν το Λογικό αντίστοιχο ενός συνόλου οντολογιών Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής f-DHL.*

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να ερευνηθεί ποια από τα αξιώματα της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής μπορούν να αντιστοιχιστούν σε ασαφείς κανόνες def-Horn χωρίς να υπάρχει απώλεια στην σημασιολογία τους. Η ασαφής σημασιολογία για την οποία θα γίνει ο έλεγχος είναι η μοντελοθεωρητική σημασιολογία model-theoretic semantics. Για το λόγο αυτό γίνεται αρχικά μια παρουσίαση της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής και των ασαφών κανόνων def-Horn και στη συνέχεια γίνεται ο έλεγχος ικανοποιησιμότητας της αντιστοίχισης.

4.3.1 Ασαφής Περιγραφική Λογική

Στην παράγραφο αυτή γίνεται παρουσίαση της ασαφούς επέκτασης της Περιγραφικής Λογικής. Η επέκταση αυτή στηρίζεται στην περιγραφή των Ασαφών Συνόλων και της Ασαφούς Λογικής που έγινε στο Κεφάλαιο 3 αλλά και στα [15, 48, 14].

Η σημασιολογία της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής στηρίζεται στις *ασαφείς ερμηνείες* [14]. Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι ένα ζεύγος $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, όπου το πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$, όπως και στα κλασσικά σύνολα, είναι ένα μη-κενό σύνολο αντικειμένων και $\cdot^{\mathcal{I}}$ μια ασαφής συνάρτηση ερμηνείας, η οποία αντιστοιχίζει

- ένα άτομο o σε ένα αντικείμενο $o^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$
- μια έννοια C σε μια συνάρτηση συμμετοχής $C^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0, 1]$ και
- ένα ρόλο R σε μια συνάρτηση συμμετοχής $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0, 1]$.

Η ασαφής ερμηνεία επεκτείνεται για να δώσει σημασιολογία για τις ασαφείς έννοιες και τους ασαφείς ρόλους που παρουσιάζονται στους Πίνακες 4.2 και 4.3, όπου R είναι

Αυθαίρετη Σύνταξη	Σύνταξη Περιγραφικής Λογικής	Σημασιολογία
Class(A)	A	$A^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$
Class(owl:Thing)	$\top$	$\top^{\mathcal{I}}(a) = 1$
Class(owl:Nothing)	$\bot$	$\bot^{\mathcal{I}}(a) = 0$
intersectionOf($C_1, C_2, \dots$)	$C_1 \sqcap C_2$	$(C \sqcap D)^{\mathcal{I}}(a) = t(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
unionOf($C_1, C_2, \dots$)	$C_1 \sqcup C_2$	$(C \sqcup D)^{\mathcal{I}}(a) = u(C^{\mathcal{I}}(a), D^{\mathcal{I}}(a))$
complementOf(C)	$\neg C$	$(\neg C)^{\mathcal{I}}(a) = c(C^{\mathcal{I}}(a))$
OneOf($o_1, o_2, \dots$)	$\{o_1\} \sqcup \{o_2\}$	$(\{o_1\} \sqcup \{o_2\})^{\mathcal{I}}(a) = 1$ εάν $a \in \{ o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}\}$
		$(\{o_1\} \sqcup \{o_2\})^{\mathcal{I}}(a) = 0$ διαφορετικά
ObjectProperty(R)	R	$R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \to [0,1]$
ObjectProperty(S inverseOf(R))	R^-	$(R^-)^{\mathcal{I}}(a,b) = R^{\mathcal{I}}(b,a)$
restriction(R someValuesFrom(C))	$\exists R.C$	$(\exists R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$
restriction(R allValuesFrom(C))	$\forall R.C$	$(\forall R.C)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$
restriction(R hasValue(o))	$\exists R.\{o\}$	$(\exists (R.\{o\})^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), \{o\}^{\mathcal{I}}(b))$
restriction(R minCardinality(m))	$\geqslant mR$	$(\geqslant mR)^{\mathcal{I}}(a) = \sup_{b_1,\dots,b_n \in \Delta^{\mathcal{I}}} t_{i=1}^{m} R^{\mathcal{I}}(a,b_i)$
restriction(R maxCardinality(m))	$\leqslant mR$	$(\leqslant mR)^{\mathcal{I}}(a) = \inf_{b_1,\dots,b_{n+1} \in \Delta^{\mathcal{I}}} u_{i=1}^{m+1} c(R^{\mathcal{I}}(a,b_i))$

Πίνακας 4.2: Περιγραφές εννοιών και ρόλων της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

ρόλος, A είναι ένα όνομα έννοιας και $C, C_1, \dots, C_n$ είναι περιγραφές εννοιών, $o_1, \dots, o_n$ ονόματα ατόμων, α, $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ είναι αντικείμενα, t είναι μια t-norm για την ασαφή τομή, $\mathcal{J}$ είναι ο τελεστής ασαφούς επαγωγής, u είναι μια t-conorm για την ασαφή ένωση, c είναι ο τελεστής ασαφούς αντιστροφής, sup είναι το supremum, και inf είναι το infimum.[2]

Τα αξιώματα της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής συνοψίζονται στον Πίνακα 4.3, όπου οι βαθμοί m_i και k_i είναι τιμές που ορίζονται στο μοναδιαίο διάστημα και το

[2] Τα παραπάνω έχουν περιγραφεί εκτενώς στο Κεφάλαιο 3.

Αυθαίρετη Σύνταξη	Σύνταξη DL	Σημασιολογία
(Class A partial $C_1 \ \dots \ C_n$)	$A \sqsubseteq C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n$	$A^{\mathcal{I}}(a) \leq t(C_1^{\mathcal{I}}(a), \dots, C_n^{\mathcal{I}}(a))$
(Class A complete $C_1 \ \dots \ C_n$)	$A \equiv C_1 \sqcap \cdots \sqcap C_n$	$A^{\mathcal{I}}(a) = t(C_1^{\mathcal{I}}(a), \dots, C_n^{\mathcal{I}}(a))$
(EnumeratedClass A $o_1 \ \dots \ o_n$)	$A \equiv o_1 \sqcup \ldots \sqcup o_n$	$A^{\mathcal{I}}(a) = 1$ εάν $a \in \{o_1^I, \dots, o_n^I\}$, $A^{\mathcal{I}}(a)$=0 διαφορετικά
(SubClassOf C_1, C_2)	$C_1 \sqsubseteq C_2$	$C_1^{\mathcal{I}}(a) \leq C_2^{\mathcal{I}}(a)$
(EquivalentClasses $C_1 \ \dots \ C_n$)	$C_1 \equiv \cdots \equiv C_n$	$C_1^{\mathcal{I}}(a) = \cdots = C_n^{\mathcal{I}}(a)$
(DisjointClasses $C_1 \ \dots \ C_n$)	$C_i \neq C_j, 1 \leq i < j \leq n$	$t(C_1^{\mathcal{I}}(a), C_j^{\mathcal{I}}(a)) = 0 \ 1 \leq i < j \leq n$
(SubPropertyOf R_1, R_2)	$R_1 \sqsubseteq R_2$	$R_1^{\mathcal{I}}(a,b) \leq R_2^{\mathcal{I}}(a,b)$
(EquivalentProperties $R_1 \ \dots \ R_n$)	$R_1 \equiv \cdots \equiv R_n$	$R_1^{\mathcal{I}}(a,b) = \cdots = R_n^{\mathcal{I}}(a,b)$
ObjectProperty(R super(R_1) ... super(R_n)	$R \sqsubseteq R_i$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq R_i^{\mathcal{I}}(a,b)$
domain(C_1) ... domain(C_k)	$\exists R.\top \sqsubseteq C_i$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(a)$
range(C_1) ... range(C_h)	$\top \sqsubseteq \forall R.C_i$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(b)$
[Symmetric]	$R \equiv R^-$	$R^{\mathcal{I}}(a,b) = R^{\mathcal{I}}(b,a)$
[Functional]	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R$	$\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}} \inf_{b_1,b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} u(c(R^{\mathcal{I}}(a,b_1)), c(R^{\mathcal{I}}(a,b_2))) \geq 1$
[InverseFunctional]	$\top \sqsubseteq \leqslant 1R^-$	$\forall a \in \Delta^{\mathcal{I}} \inf_{b_1,b_2 \in \Delta^{\mathcal{I}}} u(c(R^{\mathcal{I}}(b_1,a)), c(R^{\mathcal{I}}(b_2,a))) \geq 1$
[Transitive])	Trans(R)	$\sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), R^{\mathcal{I}}(b,c)) \leq R^{\mathcal{I}}(a,c)$
Individual(o type(C_1) [$\bowtie$ degree(m_1)] ... type(C_n) [$\bowtie$ degree(m_n)]	$o : C_i \bowtie m_i, 1 \leq i \leq n$	$C_i^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \bowtie m_i, m_i \in [0,1], 1 \leq i \leq n$
value(R_1, o_1) [$\bowtie$ degree(k_1)] ... value(R_ℓ, o_ℓ)) [$\bowtie$ degree(k_ℓ)]	$(o, o_i) : R_i \bowtie k_i, 1 \leq i \leq \ell$	$R_i^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}, o_i^{\mathcal{I}}) \bowtie k_i, k_i \in [0,1], 1 \leq i \leq \ell$
Sameindividual($o_1 \ \dots \ o_n$)	$o_1 = \cdots = o_n$	$o_1^{\mathcal{I}} = \cdots = o_n^{\mathcal{I}}$
DifferentIndividuals($o_1 \ \dots \ o_n$)	$o_i \neq o_j, 1 \leq i < j \leq n$	$o_i^{\mathcal{I}} \neq o_j^{\mathcal{I}}, 1 \leq i < j \leq n$

Πίνακας 4.3: Αξιώματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

σύμβολο $\bowtie$ υποδηλώνει έναν από τους παρακάτω τελεστές $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Η απουσία βαθμού είναι ισοδύναμη με τον βαθμό 1. Από την σημασιολογική σκοπιά, ένα αξίωμα της Περιγραφικής Λογικής της πρώτης στήλης του Πίνακα 4.3, ικανοποιείται από μια ερμηνεία $\mathcal{I}$ εάν και μόνο εάν η αντίστοιχη ισότητα της τρίτης στήλης του ίδιου Πίνακα ικανοποιείται στο $\Delta^{\mathcal{I}}$.

Για παράδειγμα έστω το ασαφές Αξίωμα $\exists R.\top \sqsubseteq C_i$. Σύμφωνα με τον Πίνακα 4.2 ο υπαρξιακός ποσοδείκτης ερμηνεύεται με το `supremum` της τομής των ορισμάτων του. Άρα στη συγκεκριμένη περίπτωση θα ισχύει $(\exists R.\top)^{\mathcal{I}}(\alpha) = \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(\alpha, b), 1)$ και κατ' επέκταση $C_i^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq \sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(\alpha, b), 1)$. Όμως το sup είναι περιττό εφόσον εάν το $C_i^{\mathcal{I}}(\alpha)$ είναι μεγαλύτερο από το sup μιας έκφρασης θα είναι μεγαλύτερο και από την έκφραση αυτή. Άρα $C_i^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq t(R^{\mathcal{I}}(\alpha, b), 1)$ δηλαδή $C_i^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq R^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$ ή $R^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(\alpha)$ όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 4.3.

Επίσης για το ασαφές Αξίωμα $\top \sqsubseteq \forall R.C$ σύμφωνα με τον Πίνακα 4.2 ο καθολικός ποσοδείκτης ερμηνεύεται με το `infimum` της ασαφούς συνεπαγωγής των ορισμάτων του με αποτέλεσμα για το συγκεκριμένο Αξίωμα να ισχύει $1 \leq \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a, b), C^{\mathcal{I}}(b))$. Εφόσον η μονάδα όμως είναι μικρότερη από το inf μιας έκφρασης θα είναι και μικρότερη από την έκφραση αυτή με αποτέλεσμα να προκύπτει $1 \leq \mathcal{J}(R^{\mathcal{I}}(a, b), C^{\mathcal{I}}(b))$ που με βάση μια ιδιότητα των ασαφών συνεπαγωγών που παρουσιάζεται στην Παράγραφο 3.4 μετασχηματίζεται στη $R^{\mathcal{I}}(a, b) \leq C_i^{\mathcal{I}}(b)$ που φαίνεται και στον Πίνακα 4.3.

4.3.2 Ασαφείς κανόνες def-Horn

Έστω, το σύνολο από κατηγορήματα $P, Q, \ldots$, το σύνολο από τελεστές $\leftarrow, \wedge$, το σύνολο από πλειάδες μεταβλητών $x, y, \ldots$ και το σύνολο από σταθερές τιμές αλήθειας $\overline{r}, \overline{z}, \ldots$ που ορίζονται στο μοναδιαίο διάστημα. Ένας κανόνας def-Horn ορίζεται ως η παράσταση

$$K\epsilon\varphi\alpha\lambda\acute{\eta} \leftarrow \Sigma\acute{\omega}\mu\alpha.$$

στην οποία το *Σώμα* αποτελείται από θετικά κατηγορήματα ή από μια σταθερή τιμή αλήθειας, τα οποία συνδέονται μεταξύ τους μόνο με τον τελεστή της τομής $\wedge$, ώστε σε αυτό να μην προκύπτει ο τελεστής της άρνησης, και η *Κεφαλή* αποτελείται από ένα μόνο επίσης θετικό κατηγόρημα ή μια σταθερή τιμή αλήθειας.

Η μορφή δηλαδή των ασαφών κανόνων def-Horn μπορεί να είναι $P(y) \leftarrow Q_1(x_1) \wedge Q_2(x_2) \wedge \ldots \wedge Q_n(x_n)$ ή $P(y) \leftarrow \overline{r}$ ή $\overline{r} \leftarrow Q(x)$.

Η σημασιολογία των ασαφών κανόνων def-Horn στηρίζεται στις ασαφείς ερμηνείες. Μια ασαφής ερμηνεία $\mathcal{I}$ είναι, όπως έχει δειχθεί και παραπάνω, ένα ζεύγος $\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$, όπου το πεδίο ορισμού $\Delta^{\mathcal{I}}$ είναι ένα μη-κενό σύνολο αντικειμένων και $\cdot^{\mathcal{I}}$ μια ασαφής συνάρτηση ερμηνείας, που αντιστοιχίζει

- μια μεταβλητή x σε ένα αντικείμενο $x^{\mathcal{I}} \in \Delta^{\mathcal{I}}$,

- μια σταθερή τιμή αλήθειας $\overline{r}$ σε ένα πραγματικό αριθμό $r \in [0,1]$,

- μια έννοια C (κατηγόρημα με μια μεταβλητή) σε μια συνάρτηση συμμετοχής $C^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \rightarrow [0,1]$ και

- ένα ρόλο R (κατηγόρημα με περισσότερες από μια μεταβλητές) σε μια συνάρτηση συμμετοχής $R^{\mathcal{I}} : \Delta^{\mathcal{I}} \times \Delta^{\mathcal{I}} \rightarrow [0,1]$.

Έτσι ο κανόνας της μορφής $R(\overrightarrow{y}) \leftarrow Q_1(\overrightarrow{x_1}) \wedge Q_2(\overrightarrow{x_2}) \wedge \ldots \wedge Q_n(\overrightarrow{x_n})$ με βάση την μοντελοθεωρητική σημασιολογία, για την οποία έχει γίνει και η ανάλυση της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής, ερμηνεύεται με την ανισότητα

$$R^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{y^{\mathcal{I}}}) \geq t(Q_1^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{x_1^{\mathcal{I}}}), Q_2^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{x_2^{\mathcal{I}}}), \ldots, Q_n^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{x_n^{\mathcal{I}}})), \tag{4.1}$$

ο κανόνας της μορφής $\overline{r} \leftarrow Q_1(\overrightarrow{x_1}) \wedge Q_2(\overrightarrow{x_2}) \wedge \ldots \wedge Q_n(\overrightarrow{x_n})$ ερμηνεύεται με την ανισότητα

$$r \geq t(Q_1^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{x_1^{\mathcal{I}}}), Q_2^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{x_2^{\mathcal{I}}}), \ldots, Q_n^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{x_n^{\mathcal{I}}})), \tag{4.2}$$

και ο κανόνας της μορφής $R(\overrightarrow{y}) \leftarrow \overline{r}$ ερμηνεύεται με την ανισότητα

$$R^{\mathcal{I}}(\overrightarrow{y^{\mathcal{I}}}) \geq r, \tag{4.3}$$

όπου t είναι μια t-norm.

4.4 Αντιστοιχία Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής σε Ασαφείς κανόνες def-Horn

Στην παράγραφο αυτή θα γίνει ο έλεγχος ισοδυναμίας των αξιωμάτων της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής με τους ασαφείς κανόνες def-Horn όσον αφορά την μοντελοθωρητική σημασιολογία. Η σημασιολογία αυτή είναι ίδια με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο για τα αξιώματα της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής.

4.4.1 Αντιστοιχία Δηλώσεων

Οι δηλώσεις στην Περιγραφική Λογική αφορούν τις σχέσεις υπαγωγής και τους ορισμούς, σχετικά με το TBox της βάσης γνώσης, καθώς και τις αναθέσεις, σχετικά με το ABox της βάσης γνώσης. Για τον παρακάτω έλεγχο θα χρησιμοποιηθούν τα σύμβολα C και D για την περιγραφή εννοιών της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής και τα σύμβολα P και Q για την περιγραφή ρόλων. Επίσης όλες οι ερμηνείες αξιωμάτων της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής γίνονται σύμφωνα με τον Πίνακα 4.3 ενώ οι ερμηνείες των ασαφών κανόνων def-Horn σύμφωνα με τις Εξισώσεις 4.1-4.3.

Αρχικά, λοιπόν, θα γίνει έλεγχος για την ισχύ της αντιστοιχίας όσον αφορά τις σχέσεις υπαγωγής. Για το ασαφές αξίωμα $C \sqsubseteq D$, που δηλώνει ότι η έννοια C υπάγεται στη D, η ασαφής ερμηνεία είναι $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι της μορφής $D(x) \leftarrow C(x)$ που έχει και αυτός την ίδια ερμηνεία. Για το ασαφές αξίωμα $Q \sqsubseteq P$, που δηλώνει ότι ο ρόλος Q υπάγεται στον P, η ασαφής ερμηνεία είναι $Q^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq P^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι της μορφής $P(x, y) \leftarrow Q(x, y)$ που και αυτός έχει την ίδια ερμηνεία. Για το ασαφές αξίωμα $\top \sqsubseteq \forall P.C$, που δηλώνει ότι το πεδίο τιμών του ρόλου P είναι η έννοια C, η ασαφής ερμηνεία του είναι $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq C^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι της μορφής $C(y) \leftarrow P(x, y)$ που έχει και αυτός την ερμηνεία $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq C^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Για το ασαφές αξίωμα $\top \sqsubseteq \forall P^{-}.C$, που δηλώνει ότι το πεδίο ορισμού του ρόλου P είναι η έννοια C, η ασαφής ερμηνεία του είναι $P^{\mathcal{I}}(b, \alpha) \leq C^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι της μορφής $C(y) \leftarrow P(x, y)$ που έχει και αυτός την ίδια ερμηνεία. Για το ασαφές αξίωμα μεταβατικότητας $P^{+} \sqsubseteq P$ η ασαφής ερμηνεία του είναι $\sup_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} t(P^{\mathcal{I}}(a, b), P^{\mathcal{I}}(b, c)) \leq P^{\mathcal{I}}(a, c)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι της μορφής $P(x, z) \leftarrow P(x, y) \wedge P(y, z)$. Ο ασαφής αυτός κανόνας ερμηνεύεται ως $t(P^{\mathcal{I}}(a, b), P^{\mathcal{I}}(b, c)) \leq P^{\mathcal{I}}(a, c)$. Οι δύο παραπάνω ερμηνείες είναι ισοδύναμες οπότε και σε αυτή την περίπτωση ισχύει η αντιστοιχία[3].

Συνεχίζοντας γίνεται έλεγχος για τους ασαφείς ορισμούς εννοιών και ρόλων. Το ασαφές αξίωμα $C \equiv D$, που δηλώνει ότι η έννοια C είναι ισοδύναμη με την έννοια D, ερμηνεύεται ως $C^{\mathcal{I}}(\alpha) = D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας αποτελείται από το σύνολο των κανόνων $D(x) \leftarrow C(x)$ και $C(x) \leftarrow D(x)$. Η ερμηνεία τους είναι $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq C^{\mathcal{I}}(\alpha)$ που οδηγεί στη $C^{\mathcal{I}}(\alpha) = D^{\mathcal{I}}(\alpha)$ η οποία είναι ίδια με την ασαφή ερμηνεία του παραπάνω αξιώματος. Με τον ίδιο τρόπο δείχνεται και η ισοδυναμία των ερμηνειών στην περίπτωση ισοδυναμίας σχέσεων. Το ασαφές αξίωμα $P \equiv Q$ ερμηνεύεται ως $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) = Q^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$ και το αντίστοιχο σύνολο ασαφών κανόνων $P(x, y) \leftarrow Q(x, y)$ και $Q(x, y) \leftarrow P(x, y)$ ερμηνεύεται ως $Q^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq P^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$ και $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq Q^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$ που είναι ισοδύναμες με την $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) = Q^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$. Το ασαφές αξίωμα $P \equiv Q^{-1}$, που δηλώνει ότι ο ρόλος P είναι αντίστροφος του ρόλου Q, ερμηνεύεται ως $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) = (Q^{-1})^{\mathcal{I}}(\alpha, b) = Q^{\mathcal{I}}(b, \alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας αποτελείται από το σύνολο των κανόνων $P(x, y) \leftarrow Q(y, x)$ και $Q(y, x) \leftarrow P(x, y)$ ερμηνεύεται ως $Q^{\mathcal{I}}(b, \alpha) \leq P^{\mathcal{I}}(\alpha, b)$ και $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) \leq Q^{\mathcal{I}}(b, \alpha)$ που είναι ισοδύναμες με την $P^{\mathcal{I}}(\alpha, b) = Q^{\mathcal{I}}(b, \alpha)$.

Τέλος για τις ασαφείς σχέσεις αναθέσεων τύπου έννοιας-στιγμιοτύπου και στιγμιοτύπου-ρόλου-στιγμιοτύπου που αντιστοιχούν στα ασαφή αξιώματα $o : C \bowtie m, m \in [0, 1]$ και $(o_1, o_2) : P \bowtie k, k \in [0, 1]$ αντίστοιχα, η ασαφής τους ερμηνεία είναι $C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \bowtie m, m \in [0, 1]$ και $P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \bowtie k, k \in [0, 1]$. Οι ασαφείς κανόνες στους οποίους αντιστοιχούν τα

[3] το sup μπορεί να παραληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας εφόσον για κάθε σχέση της μορφής $x \geq \sup y$ ισχύει ότι $x \geq y$

αξιώματα αυτά είναι $C(x) \leftarrow \overline{r}$ και $P(x,y) \leftarrow \overline{r}$ που ερμηνεύονται ως $C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \geq \overline{r}$ και $P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \geq \overline{r}$ και οι $\overline{r} \leftarrow C(x)$ και $\overline{r} \leftarrow P(x,y)$ που ερμηνεύονται ως $C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \leq \overline{r}$ και $P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \leq \overline{r}$. Συναλήθευση για τα παραπάνω υπάρχει μόνο όταν ο τελεστής $\bowtie$ είναι είτε ο $\leq$ είτε ο $\geq$. Έτσι, όταν $\bowtie = \geq$ συναλήθευση γίνεται για $C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \geq \overline{r}$ και $P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \geq \overline{r}$ ενώ όταν $\bowtie = \leq$ γίνεται για $C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \leq \overline{r}$ και $P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \leq \overline{r}$.

4.4.2 Αντιστοίχιση Κατασκευαστών Εννοιών

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάστηκε πώς τα αξιώματα της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής αντιστοιχίζουν στους ασαφείς κανόνες def-Horn. Όμως, στην Ασαφή Περιγραφική Λογική οι έννοιες που εμφανίζονται σε τέτοια αξιώματα δεν είναι απαραίτητα ατομικές, αλλά μπορεί να είναι σύνθετες εκφράσεις που αποτελούνται από ατομικές έννοιες και ρόλους με την χρήση διαφόρων κατασκευαστών. Έτσι στη συνέχεια θα γίνει η μελέτη της αντιστοίχισης μεταξύ των κατασκευαστών εννοιών της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής με τους ασαφείς κανόνες def-Horn έτσι ώστε να διαπιστωθεί εάν διατηρείται η σημασιολογία τους μετά από την αντιστοίχιση.

Τομή ($\sqcap$)

Μια έννοια της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής μπορεί να σχηματιστεί από την τομή ήδη υπαρχουσών εννοιών ($C \sqcap D$). Αυτό αντιστοιχεί με την τομή ατομικών εννοιών. Εάν, η τομή αυτή βρίσκεται στην αριστερή πλευρά ενός αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D$ τότε η ασαφής ερμηνεία του αξιώματος αυτού είναι $t(C_1^{\mathcal{I}}(\alpha), C_2^{\mathcal{I}}(\alpha)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι της μορφής $D(x) \leftarrow C_1(x) \wedge C_2(x)$ και η ερμηνεία του είναι $t(C_1^{\mathcal{I}}(\alpha), C_2^{\mathcal{I}}(\alpha)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Σε περίπτωση που η έκφραση τομής βρίσκεται στη δεξιά πλευρά ενός αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2$, η ασαφής ερμηνεία θα είναι $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq t(D_1^{\mathcal{I}}(\alpha), D_2^{\mathcal{I}}(\alpha))$. Με βάση μια ιδιότητα της t-norm, $t(\alpha, b) \leq \alpha, b$, που έχει παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3 η ερμηνεία αυτή είναι ισοδύναμη με το σύνολο ερμηνειών $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D_1^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D_2^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας του παραπάνω αξιώματος έχει τη μορφή $D_1(x) \wedge D_2(x) \leftarrow C(x)$ που με τη χρήση των μετασχηματισμών των Lloyd-Topor[27] μετασχηματίζεται στο ζευγάρι κανόνων def-Horn $D_1(x) \leftarrow C(x)$, $D_2(x) \leftarrow C(x)$ οι οποίοι ερμηνεύονται με το ζευγάρι $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D_1^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D_2^{\mathcal{I}}(\alpha)$.

Ένωση ($\sqcup$)

Μια έννοια της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής μπορεί να σχηματιστεί από την ένωση ήδη υπαρχουσών εννοιών ($C \sqcup D$). Αυτό αντιστοιχεί στην ένωση ατομικών εννοιών. Εάν, η ένωση αυτή βρίσκεται στην αριστερή πλευρά ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D$ η ασαφής ερμηνεία της είναι $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq u(C_1^{\mathcal{I}}(\alpha), C_2^{\mathcal{I}}(\alpha))$

που με βάση μια ιδιότητα των t-conorm που έχει παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3 ισοδυναμεί με το σύνολο ερμηνειών $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq C_1^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq C_2^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας def-Horn είναι $D(x) \leftarrow C_1(x) \vee C_2(x)$ που με τη χρήση των μετασχηματισμών των Lloyd-Topor[27] μετασχηματίζεται στο ζευγάρι κανόνων $D(x) \leftarrow C_1(x)$ και $D(x) \leftarrow C_2(x)$. Οι κανόνες αυτοί ερμηνεύονται από το ίδιο σύνολο ερμηνειών $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq C_1^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq C_2^{\mathcal{I}}(\alpha)$.

Όταν η ένωση βρίσκεται στη δεξιά πλευρά ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $D \sqsubseteq C_1 \sqcup C_2$ τότε η ασαφής ερμηνεία είναι $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq u(C_1^{\mathcal{I}}(\alpha), C_2^{\mathcal{I}}(\alpha))$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας είναι $C_1(x) \vee C_2(x) \leftarrow D(x)$ που δεν είναι κανόνας def-Horn. Συνεπώς όταν η ένωση βρίσκεται στην δεξιά πλευρά ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ Περιγραφικής Λογικής και κανόνων def-Horn.

Καθολικός Ποσοδείκτης ($\forall$)

Στην Περιγραφική Λογική ο καθολικός ποσοδείκτης χρησιμοποιείται για τη δημιουργία περιορισμών της μορφής $\forall P.C$. Το αντίστοιχο του στη Λογική Πρώτης Τάξης είναι η έκφραση της μορφής $\forall y.P(x,y) \rightarrow C(y)$, που η σημασιολογία της είναι ότι για κάθε y που ισχύει $P(x,y)$ το y αυτό αποτελεί στιγμιότυπο της έννοιας C, όπως έχει αναφερθεί άλλωστε και στο Κεφάλαιο 1. Όταν ο καθολικός ποσοδείκτης εμφανίζεται στο δεξιό μέλος ενός ασαφούς αξιώματος επαγωγής, δηλαδή $D \sqsubseteq \forall P.C$ ερμηνεύεται ως $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(P^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας def-Horn είναι $(C(y) \leftarrow P(x,y)) \leftarrow D(x)$. Η ασαφής ερμηνεία του κανόνα αυτού είναι $(C^{\mathcal{I}}(b) \leftarrow P^{\mathcal{I}}(\alpha,b)) \geq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$ που ερμηνεύεται περαιτέρω ως $(C^{\mathcal{I}}(b) \geq P^{\mathcal{I}}(\alpha,b)) \geq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Άρα $C^{\mathcal{I}}(b) \geq P^{\mathcal{I}}(\alpha,b), D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Από την σχέση αυτή με βάση την $t(\alpha,b) \leq \alpha,b$, που έχει παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3 προκύπτει ότι $t(D^{\mathcal{I}}(\alpha), P^{\mathcal{I}}(\alpha,b)) \leq C^{\mathcal{I}}(b)$. Άρα αρκεί να δειχθεί ότι οι ερμηνείες $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq \mathcal{J}(P^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$[4] και $t(D^{\mathcal{I}}(b), P^{\mathcal{I}}(\alpha,b)) \leq C^{\mathcal{I}}(\alpha)$ είναι ισοδύναμες. Η ισχύς της ισοδυναμίας αυτή έχει παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 3 στο Θεώρημα 6. Ισχύει μόνο για τις R-επαγωγές, ενώ δεν ισχύει για τις S-επαγωγές με αποτέλεσμα για τις δεύτερες να μην υπάρχει ισοδυναμία μεταξύ της σημασιολογίας της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής και των ασαφών κανόνων def-Horn για το παραπάνω αξίωμα.

Όταν ο καθολικός ποσοδείκτης εμφανίζεται στο αριστερό μέλος ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $\forall P.C \sqsubseteq D$ ερμηνεύεται ως εξής $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \geq \inf_{b \in \Delta^{\mathcal{I}}} \mathcal{J}(P^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b))$. Από τη σχέση αυτή δεν είναι δυνατόν να προκύψει κάποιο συμπέρασμα. Ο αντίστοιχος κανόνας είναι της μορφής $D(x) \leftarrow (C(y) \leftarrow P(x,y))$ που δεν είναι κανόνας def-Horn. Άρα όταν ο καθολικός ποσοδείκτης εμφανίζεται στο αριστερό μέλος ενός ασαφούς αξ-

[4] το inf μπορεί να παραληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας εφόσον για κάθε σχέση $x \leq \inf y$ ισχύει ισοδύναμα $x \leq y$.

ιώματος υπαγωγής δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ Περιγραφικής Λογικής και κανόνων def-Horn.

Υπαρξιακός Ποσοδείκτης (∃)

Στην Περιγραφική Λογική ο υπαρξιακός ποσοδείκτης χρησιμοποιείται, όπως και ο καθολικός ποσοδείκτης, για την δημιουργία περιορισμών της μορφής $\exists P.C$. Το αντίστοιχο στη Λογική Πρώτης Τάξης είναι η έκφραση της μορφής $\exists y.P(x,y) \wedge C(y)$, που σημαίνει πώς υπάρχει ένα y για το οποίο ισχύει $P(x,y)$ και ανήκει στην έννοια C. Όταν ο υπαρξιακός ποσοδείκτης εμφανίζεται στην αριστερή πλευρά ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $\exists P.C \sqsubseteq D$, ερμηνεύεται ως $\sup_{b\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$. Ο αντίστοιχος ασαφής κανόνας def-Horn είναι $D(x) \leftarrow P(x,y) \wedge C(x)$. Η ερμηνεία του κανόνα αυτού είναι $t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$ που είναι ισοδύναμη με τη $\sup_{b\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$[5].

Όταν ο υπαρξιακός ποσοδείκτης εμφανίζεται στην δεξιά πλευρά ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής, δηλαδή $D \sqsubseteq \exists P.C$, η ερμηνεία του αξιώματος είναι $\sup_{b\in\Delta^{\mathcal{I}}} t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b)) \geq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$ από την οποία δεν μπορεί να προκύψει κανένα συμπέρασμα. Άρα όταν ο υπαρξιακός ποσοδείκτης εμφανίζεται στη δεξιά πλευρά ενός ασαφούς αξιώματος υπαγωγής δεν υπάρχει αντιστοιχία μεταξύ Περιγραφικής Λογικής και κανόνων def-Horn.

[5] το sup μπορεί να παραληφθεί χωρίς βλάβη της γενικότητας εφόσον για κάθε σχέση της μορφής $x \geq \sup y$ ισχύει ότι $x \geq y$

Αξιώματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής	Ασαφής κανόνες def-Horn	Σημασιολογία
$o : C\bowtie\overline{r}$	$C(x) \leftarrow \overline{r}$ εάν $\bowtie = \geq$	$C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \geq r,\ r \in [0,1]$
	$\overline{r} \leftarrow C(x)$ εάν $\bowtie = \leq$	$C^{\mathcal{I}}(o^{\mathcal{I}}) \leq r,\ r \in [0,1]$
$\langle o_1, o_2\rangle : P\bowtie\overline{r}$	$P(x,y) \leftarrow \overline{r}$ εάν $\bowtie = \geq$	$P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \geq r,\ r \in [0,1]$
	$\overline{r} \leftarrow P(x,y)$ εάν $\bowtie = \leq$	$P^{\mathcal{I}}(o_1^{\mathcal{I}}, o_2^{\mathcal{I}}) \leq r,\ r \in [0,1]$
$C \sqsubseteq D$	$D(x) \leftarrow C(x)$	$C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$
$Q \sqsubseteq P$	$P(x,y) \leftarrow Q(x,y)$	$Q^{\mathcal{I}}(\alpha,b) \leq P^{\mathcal{I}}(\alpha,b)$
$\top \sqsubseteq \forall P.C$	$C(y) \leftarrow P(x,y)$	$P^{\mathcal{I}}(\alpha,b) \leq C^{\mathcal{I}}(b)$
$\top \sqsubseteq \forall P^-.C$	$C(y) \leftarrow P(y,x)$	$P^{\mathcal{I}}(b,\alpha) \leq C^{\mathcal{I}}(b)$
$P^+ \sqsubseteq P$	$P(x,z) \leftarrow P(x,y) \wedge P(y,z)$	$t(P^{\mathcal{I}}(a,b), P^{\mathcal{I}}(b,c)) \leq P^{\mathcal{I}}(a,c)$
$C \equiv D$	$D(x) \leftarrow C(x)$ και $C(x) \leftarrow D(x)$	$C^{\mathcal{I}}(\alpha) = D^{\mathcal{I}}(\alpha)$
$P \equiv Q$	$P(x,y) \leftarrow Q(x,y)$ και $Q(x,y) \leftarrow P(x,y)$	$P^{\mathcal{I}}(\alpha,b) = Q^{\mathcal{I}}(\alpha,b)$
$C_1 \sqcap C_2 \sqsubseteq D$	$D(x) \leftarrow C_1(x) \wedge C_2$	$t(C_1^{\mathcal{I}}(\alpha), C_2^{\mathcal{I}}(\alpha)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$
$C \sqsubseteq D_1 \sqcap D_2$	$D_1(x) \wedge D_2(x) \leftarrow C(x)$	$C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D_1^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $C^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq D_2^{\mathcal{I}}(\alpha)$
$C_1 \sqcup C_2 \sqsubseteq D$	$D(x) \leftarrow C_1(x) \vee C_2(x)$	$D^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq C_1^{\mathcal{I}}(\alpha)$ και $D^{\mathcal{I}}(\alpha) \leq C_2^{\mathcal{I}}(\alpha)$
$D \sqsubseteq \forall P.C$	$C(y) \leftarrow D(x) \wedge P(x,y)$	$t(D^{\mathcal{I}}(b), P^{\mathcal{I}}(\alpha,b)) \leq C^{\mathcal{I}}(\alpha)$ (μόνο για τις R-συνεπαγωγές)
$\exists P.C \sqsubseteq D$	$D(x) \leftarrow P(x,y) \wedge C(x)$	$t(R^{\mathcal{I}}(a,b), C^{\mathcal{I}}(b)) \leq D^{\mathcal{I}}(\alpha)$

Πίνακας 4.4: Περιγραφές εννοιών και ρόλων της Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής

Άρνηση και περιορισμοί Πληθικότητας ($\neg$, $\leqslant$ και $\geqslant$)

Οι κατασκευαστές αυτοί δεν μπορούν, εν γένει, να αντιστοιχιστούν σε κανόνες def-Horn και δει σε ασαφείς κανόνες. Στην περίπτωση του τελεστή άρνησης κάτι τέτοιο είναι προφανές εφόσον είναι γνωστό ότι στους κανόνες def-Horn δεν επιτρέπεται ο τελεστής άρνησης τόσο στην κεφαλή όσο και στο σώμα ενός κανόνα. Επιπλέον, οι τελεστές πληθικότητας αντιστοιχούν σε αναθέσεις ισότητας, που επίσης δεν υποστηρίζονται από το πλαίσιο των κανόνων def-Horn.

Οι παραπάνω αντιστοιχίες παρατίθενται συνοπτικά στον Πίνακα 4.4, όπου P, Q είναι ρόλοι, C, $C_1, \ldots, C_n$, D και $D_1, \ldots, D_n$ είναι περιγραφές εννοιών, o και $o_1, \ldots, o_n$ είναι ονόματα ατόμων, α, $b \in \Delta^{\mathcal{I}}$ είναι αντικείμενα και t είναι μια t-norm για την ασαφή τομή.

4.5 Ορισμός Γλωσσών

Παρατηρώντας τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα πως τα αξιώματα της Περιγραφικής Λογικής $C \sqsubseteq D$, $A \equiv B$, $\top \sqsubseteq \forall P.D$, $\top \sqsubseteq \forall P^{-}.D$, $P \sqsubseteq Q$, $P \equiv Q$, $P \equiv Q^{-}$, $P^{+} \sqsubseteq P$, $D \sqsubseteq \forall P.C$, $\exists P.C \sqsubseteq D$, $\alpha : D$ και $\langle \alpha, b \rangle : P$ μπορούν εν γένει να αντιστοιχιστούν σε ασαφείς κανόνες def-Horn χωρίς να χάνεται η σημασιολογική ισοδυναμία τους. Βέβαια το γεγονός ότι το αξίωμα $D \sqsubseteq \forall P.C$ μπορεί να αντιστοιχιστεί χωρίς απώλεια της σημασιολογίας μόνο όταν χρησιμοποιείται η R-συνεπαγωγή έχει ως αποτέλεσμα να δημιουργούνται δύο γλώσσες, οι ασαφείς $f_R - DHL$ και $f_S - DHL$. Η μεν $f_R - DHL$ περιέχει όλα τα παραπάνω αξιώματα, ενώ η $f_S - DHL$ περιέχει όλα τα παραπάνω αξιώματα εκτός από το $D \sqsubseteq \forall P.C$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα και τη δημιουργία δύο γλωσσών Προγραμμάτων Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής, των $f_R - DLP$ και $f_S - DLP$.

Ορισμός 4.3 ($f_R - DHL$)**.** *Μια οντολογία $f_R - DHL$ είναι το σύνολο των ασαφών αξιωμάτων Περιγραφικής Λογικής Horn που έχουν μια από τις ακόλουθες μορφές $C \sqsubseteq D$, $A \equiv B$, $\top \sqsubseteq \forall P.D$, $\top \sqsubseteq \forall P^{-}.D$, $P \sqsubseteq Q$, $P \equiv Q$, $P \equiv Q^{-}$, $P^{+} \sqsubseteq P$, $D \sqsubseteq \forall P.C$, $\exists P.C \sqsubseteq D$, $\alpha : D$ και $\langle \alpha, b \rangle : P$ και μπορούν να αντιστοιχιστούν σε ασαφείς κανόνες def-Horn χωρίς να χάνεται η σημασιολογική ισοδυναμία τους, όταν για την ερμηνεία τους χρησιμοποιείται η R-συνεπαγωγή, $\mathcal{J}(\alpha, b) = u(c(\alpha), b)$.*

Η αντιστοιχία μεταξύ Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής και Ασαφών Λογικών Προγραμμάτων που προκύπτει με τη χρήση της R-συνεπαγωγής διατηρεί την σημασιολογική ισοδυναμία. Έστω $\mathcal{K}_R$ είναι μια Ασαφής οντολογία $f_R - DHL$ και έστω $\mathcal{H}_R$ το σύνολο των Ασαφών κανόνων που προκύπτει από την εφαρμογή της αντιστοιχίας με χρήση της R-συνεπαγωγής, στην $\mathcal{K}_R$. Το σύνολο $\mathcal{H}_R$ είναι λογικά ισοδύναμο με την $\mathcal{K}_R$ με βάση την σημασιολογία της Λογικής Πρώτης Τάξης. Δηλαδή το $\mathcal{H}_R$ έχει το ίδιο σύνολο μοντέλων και συμπερασμάτων με την $\mathcal{K}_R$.

Ορισμός 4.4 (Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής $f_R - DLP$). *Ένα Πρόγραμμα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής $f_R - DLP$ ορίζεται ως το σύνολο των Ασαφών κανόνων Λογικού Προγραμματισμού που αποτελούν το Λογικό αντίστοιχο ενός Ασαφούς συνόλου $f_R - DHL$.*

Ορισμός 4.5 ($f_S - DHL$). *Μια οντολογία $f_S - DHL$ είναι το σύνολο των ασαφών αξιωμάτων Περιγραφικής Λογικής Horn που έχουν μια από τις ακόλουθες μορφές $C \sqsubseteq D$, $A \equiv B$, $\top \sqsubseteq \forall P.D$, $\top \sqsubseteq \forall P^{-}.D$, $P \sqsubseteq Q$, $P \equiv Q$, $P \equiv Q^{-}$, $P^{+} \sqsubseteq P$, $\exists P.C \sqsubseteq D$, $\alpha : D$ και $\langle \alpha, b \rangle : P$ και μπορούν να αντιστοιχιστούν σε ασαφείς κανόνες def-Horn χωρίς να χάνεται η σημασιολογική ισοδυναμία τους, όταν για την ερμηνεία τους χρησιμοποιείται η S-συνεπαγωγή, $\mathcal{J}(\alpha, b) = \sup\{x \in [0,1] \mid t(\alpha, x) \leq b\}$.*

Η αντιστοιχία μεταξύ Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής και Ασαφών Λογικών Προγραμμάτων που προκύπτει με τη χρήση της S-συνεπαγωγής διατηρεί την σημασιολογική ισοδυναμία. Έστω $\mathcal{K}_S$ είναι μια Ασαφής οντολογία $f_S - DHL$ και έστω $\mathcal{H}_S$ το σύνολο των Ασαφών κανόνων που προκύπτει από την εφαρμογή της αντιστοιχίας με χρήση της S-συνεπαγωγής, στην $\mathcal{K}_S$. Το σύνολο $\mathcal{H}_S$ είναι λογικά ισοδύναμο με την $\mathcal{K}_S$ με βάση την σημασιολογία της Λογικής Πρώτης Τάξης. Δηλαδή το $\mathcal{H}_S$ έχει το ίδιο σύνολο μοντέλων και συμπερασμάτων με την $\mathcal{K}_S$.

Ορισμός 4.6 (Προγράμματα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής $f_S - DLP$). *Ένα Πρόγραμμα Ασαφούς Περιγραφικής Λογικής $f_S - DLP$ ορίζεται ως το σύνολο των Ασαφών κανόνων Λογικού Προγραμματισμού που αποτελούν το Λογικό αντίστοιχο ενός Ασαφούς συνόλου $f_S - DHL$.*

4.6 Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήθηκε πώς μπορεί να αντιστοιχιστούν σημασιολογικά οι ασαφείς κανόνες (def-Horn rules) και οι ασαφείς οντολογίες (Ασαφής Περιγραφική Λογική OWL). Η μελέτη αυτή στηρίζεται στην εργασία των Grosof, Horrocks, Volz και Decker [13] στην οποία γίνεται παρουσίαση δύο μεθόδων Αναπαράστασης Γνώσης, της *Περιγραφικής Λογικής Horn* και των *Προγραμμάτων Περιγραφικής Λογικής* που αποτελούν την εκφραστική τομή των κανόνων και των οντολογιών. Η εργασία αυτή [13] είχε ως αποτέλεσμα οι μηχανισμοί εξαγωγής συμπερασμάτων του Λογικού Προγραμματισμού να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για εξαγωγή συμπερασμάτων με τις οντολογίες που μελετώνται.

Η συνεισφορά της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της σημασιολογικής αντιστοίχισης των ασαφών κανόνων (def-Horn rules) και των ασαφών οντολογιών (Ασαφής Περιγραφική Λογική OWL)με βάση την ασαφή μοντελοθεωρητική σημασιολογία. Κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα σημαντικό μιας και πλέον μπορεί να αναπαρασταθεί και η εγγενής ασάφεια των πληροφοριών.

Η εργασία αυτή αποτελεί ένα πρώτο βήμα για την περαιτέρω ανάπτυξη συστημάτων που παρέχουν διαλειτουργικότητα μεταξύ ασαφών κανόνων και ασαφών οντολογιών και την τοποθέτηση των ασαφών κανόνων "πάνω" από τις ασαφείς οντολογίες στην "στοίβα" του Σημασιολογικού Ιστού.

Μελλοντική εργασία σχετικά με το αντικείμενο αυτό μπορεί να αφορά στην επέκταση της σημασιολογικής τομής και σε ασαφείς κανόνες και ασαφείς οντολογίες που έχουν την ικανότητα να δηλώνουν αλλά και να παράγουν την ισότητα των ατόμων, όπως είναι οι περιορισμοί πληθικότητας (cardinality restrictions) και οι ονομαστικές έννοιες (nominals).

Βιβλιογραφία

[1] F. Baader και W. Nutt. *Basic description logics.* 2003.

[2] Franz Baader, Bernhard Hollunder, Bernhard Nebel, Hans Jürgen Profitlich και Enrico Franconi. An empirical analysis of optimization techniques for terminological representation systems or "making KRIS get a move on". Στο *Principles of Knowledge Representation and Reasoning: Proceedings of the 3rd International Conference*B. Nebel, W. Swartout και C. Rich, επιμελητές, σελίδες 270–281, San Mateo, 1992. Morgan Kaufmann.

[3] Franz Baader και Ulrike Sattler. Expressive number restrictions in description logics. *J. Log. Comput.*, 9(3):319–350, 1999.

[4] Ronald J. Brachman. Structured inheritance networks. *Int. Journal of Man-Machine Studies*, 9(2):127–152, 1977.

[5] Ronald J. Brachman. What's in a concept: Structural foundations for semantic networks. *Int. Journal of Man-Machine Studies*, 9(2):127–152, 1977.

[6] Keith L. Clark. Negation as failure. Στο *Logic and Data Bases*, σελίδες 293–322, 1977.

[7] Francesco M. Donini, Maurizio Lenzerini, Daniele Nardi και Werner Nutt. The complexity of concept languages. *Inf. Comput.*, 134(1):1–58, 1997.

[8] Francesco M. Donini, Maurizio Lenzerini, Daniele Nardi και Andrea Schaerf. Deduction in concept languages: From subsumption to instance checking. *J. Log. Comput.*, 4(4):423–452, 1994.

[9] M. H. Van Emden και R. A. Kowalski. The semantics of predicate logic as a programming language. *J. ACM*, 23(4):733–742, 1976.

[10] B.R. Gaines. Foundations of fuzzy reasoning. *Int. J. Man-Machine Studies*, 8:623–668, 1976.

[11] Michael Gelfond και Vladimir Lifschitz. The stable model semantics for logic programming. Στο *Proceedings of the Fifth International Conference on Logic Programming*Robert A. Kowalski και Kenneth Bowen, επιμελητές, σελίδες 1070–1080, Cambridge, Massachusetts, 1988. The MIT Press.

[12] Bo Yuan George J. Klir. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* Prentice Hall P T R, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1995.

[13] Benjamin N. Grosof, Ian Horrocks, Raphael Volz και Stefan Decker. Description logic programs: combining logic programs with description logic. Στο *WWW '03: Proceedings of the 12th international conference on World Wide Web*, σελίδες 48–57, New York, NY, USA, 2003. ACM Press.

[14] Stoilos G., Stamou G., Tzouvaras V., Pan J. και Horrocks I. The fuzzy description logic f-shin. International Workshop on Uncertainty Reasoning For the Semantic Web (2005). To Appear, 2005.

[15] Stoilos G., Stamou G., Tzouvaras V., Pan J. και Horrocks I. Fuzzy owl: Uncertainty and the semantic web. International Workshop of OWL: Experiences and Directions, Galway, 2005, To Appear, 2005.

[16] Bernhard Hollunder και Franz Baader. Qualifying number restrictions in concept languages. Στο *KR*, σελίδες 335–346, 1991.

[17] Bernhard Hollunder, Werner Nutt και Manfred Schmidt-Schauß. Subsumption algorithms for concept description languages. Στο *ECAI*, σελίδες 348–353, 1990.

[18] I. Horrocks, P. Patel-Schneider και F.van Harmelen. From SHIQ and RDF to OWL: The making of a web ontology language. *Journal of Web Semantics*, 1(1):7–26, 2003.

[19] Ian Horrocks. Daml+oil: A reason-able web ontology language. Στο *EDBT '02: Proceedings of the 8th International Conference on Extending Database Technology*, σελίδες 2–13, London, UK, 2002. Springer-Verlag.

[20] http://www.w3.org/2004/OWL/, χ.χ.

[21] http://www.w3.org/TR/rdf primer/, χ.χ.

[22] F. Lehmann. *Semantic Networks in Artificial Intelligence.* Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 1992.

[23] Hector J. Levesque και Ronald J. Brachman. Expressiveness and tractability in knowledge representation and reasoning. *Computational Intelligence*, 3:78–93, 1987.

[24] Alon Y. Levy και Marie Christine Rousset. CARIN: A representation language combining horn rules and description logics. Στο *European Conference on Artificial Intelligence*, σελίδες 323–327, 1996.

[25] Vladimir Lifschitz και Hudson Turner. Classical negation in logic programs and disjunctive databases. τόμος 9, χ.χ.

[26] Vladimir Lifschitz και Hudson Turner. Splitting a logic program. Στο *International Conference on Logic Programming*, σελίδες 23–37, 1994.

[27] John W. Lloyd. *Foundations of Logic Programming, 2nd Edition.* Springer, 1987.

[28] John McCarthy. Programs with common sense. Στο *Proceedings of the Teddington Conference on the Mechanization of Thought Processes*, σελίδες 75–91, London, 1959. Her Majesty's Stationary Office.

[29] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic.* D. Van Nostrand Company, 1979.

[30] K. Menger. Statistical metrics. *INatural Academic Sciences*, 8:535, 1942.

[31] Jack Minker. Perspectives in deductive databases. *J. Log. Program.*, 5(1):33–60, 1988.

[32] Bernhard Nebel. Computational complexity of terminological reasoning in back. *Artif. Intell.*, 34(3):371–383, 1988.

[33] Bernhard Nebel. Terminological reasoning is inherently intractable. *Artificial Intelligence*, 43:235–249, 1990.

[34] Peter F. Patel-Schneider. Undecidability of subsumption in nikl. *Artif. Intell.*, 39(2):263–272, 1989.

[35] Peter F. Patel-Schneider, Patrick Hayes και Ian Horrocks. OWL Web Ontology Language Semantics and Abstract Syntax. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ., W3C, 2004.

[36] Luis Moniz Pereira, Joaquim Nunes Aparicio και Jose Julio Alferes. Nonmonotonic reasoning with logic programming. *Journal of Logic Programming*, 17:227–263, 1993.

[37] M. R. Quillian. Word concepts: A theory and simulation of some basic capabilities. Στο *Behavioural Science*, σελίδες 12:410–430. 1967.

[38] Raymond Reiter. On closed world data bases. Στο *Logic and Data Bases*, σελίδες 55–76, 1977.

[39] J. A. Robinson. *Logic Form and Function*. University Press, Edinburgh, 1979.

[40] A. Rosenfeld. Fuzzy graphs. Στο *Fuzzy Sets and Their Applications to Congitive and Decision Processes*K. S. Fu K. Tanaka Zadeh, L.A. και M. Shimura, επιμελητές, σελίδες 77–96. Academic Press, New York, 1975.

[41] S.Y.Bang R.T.Yeh. Fuzzy relations, fuzzy graphs and their applications to cluster analysis. Στο *Fuzzy sets and Their Applications*M.Shimula Z L.A. Zadeh, S. Fu, επιμελητής. Academic Press, New York, 1975.

[42] DA RUAN και ETIENNE E. KERRE. Fuzzy implication operators and generalized fuzzy method of cases. fuzzy sets and systems. *Fuzzy Sets and Systems*, 54:23–37, 1993.

[43] Andrea Schaerf. Reasoning with individuals in concept languages. *Data Knowl. Eng.*, 13(2):141–176, 1994.

[44] Manfred Schmidt-Schauß. Subsumption in kl-one is undecidable. Στο *KR*, σελίδες 421–431, 1989.

[45] Manfred Schmidt-Schauß και Gert Smolka. Attributive concept descriptions with complements. *Artif. Intell.*, 48(1):1–26, 1991.

[46] Moti Schneider, Eliahu Shnaider και Abe Kandel. Parallel pattern recognition using fuzzy cooperative expert systems. Στο *SAC '92: Proceedings of the 1992 ACM/SIGAPP Symposium on Applied computing*, σελίδες 377–386, New York, NY, USA, 1992. ACM Press.

[47] Gert Smolka. A feature logic with subsorts. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ. LILOG 33, 1988.

[48] G. Stoilos, G. Stamou, V. Tzouvaras, J.Z. Pan και I. Horrocks. A fuzzy description logic for multimedia knowledge representation. Proc. of the International Workshop on Multimedia and the Semantic Web, 2005.

[49] M. Sugeno. Fuzzy measures and fuzzy integrals – a survey, in. *Fuzzy Automata and Decision Processes*, σελίδες 89–102, 1977.

[50] J. T. Berners-Lee, J. Hendler και O. Lassila. The semantic web. *Scientific American*, May, 2001.

[51] R. Yager. On the measure of fuzziness and negation. part i: Membership in the unit interval. *Int. J. Gen. Syst.*, 5:221–229, 1979.

[52] Hans Zimmermann. *Fuzzy sets, decision making and expert systems.* Kluwer, B.V., Deventer, The Netherlands, The Netherlands, 1986.

Παράρτημα Α′

Μονότονες Συναρτήσεις

Έστω, ένα τυχαίο σύνολο Ω και η συνάρτηση T που έχει σαν πεδίο ορισμού και σαν πεδίο τιμών υποσύνολα του Ω. Ένα υποσύνολο X του Ω είναι ένα pre-fixpoint του T εάν $TX \subseteq X$ ή ένα post-fixpoint εάν $X \subseteq TX$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το σύνολο X είναι ένα fixpoint του T ($TX = X$) εάν και μόνο εάν είναι και pre-fixpoint και post-fixpoint του T.

Η συνάρτηση T λέγεται ότι είναι μονότονη εάν, για όλα τα υποσύνολα X, U του Ω ισχύει $TX \subseteq TY$ όποτε $X \subseteq Y$. Το παρακάτω είναι γνωστό ως το θεώρημα Knaster-Tarski

Πρόταση 1.25. *Κάθε μονότονη συνάρτηση έχει*

- *ένα ελάχιστο fixpoint, που είναι επίσης και το ελάχιστο pre-fixpoint της συνάρτησης, και*

- *ένα μέγιστο post-fixpoint, που είναι επίσης και το μέγιστο post-fixpoint της συνάρτησης.*

Τα fixpoint αυτά μπορούν να προσεγγιστούν επαναλαμβάνοντας συνεχώς την T:

Πρόταση 1.26. *Για κάθε μονότονη συνάρτηση T*

- *η ακολουθία $(T^n\emptyset)_{n\geq 0}$ είναι αύξουσα (δηλαδή κάθε στοιχείο της ακολουθίας είναι υποσύνολο του επομένου), και η ένωση όλων των στοιχείων της αποτελεί ένα υποσύνολο του ελαχίστου fixpoint του T,*

- *η ακολουθία $(T^n\Omega)_{n\geq 0}$ είναι φθίνουσα (δηλαδή κάθε στοιχείο της ακολουθίας είναι υπερσύνολο του επομένου), και η τομή όλων των στοιχείων της αποτελεί ένα υπερσύνολο του μεγίστου fixpoint του T,* Εάν το Ω είναι πεπερασμένο τότε το ελάχιστο και το μέγιστο fixpoint μιας μονότονης συνάρτησης T μπορούν να υπολογιστούν εφαρμόζοντας την T πεπερασμένο αριθμό φορών. Για όλα τα μεγάλα n το σύνολο $T^n\emptyset$ είναι ίσο με το ελάχιστο fixpoint του T και το σύνολο $T^n\Omega$ είναι ίσο με το μέγιστο fixpoint του T.

Μια συνάρτηση T που έχει πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών υποσύνολα του Ω είναι μη-μονότονη εάν, για οποιαδήποτε υποσύνολα του Ω X και Y, ισχύει $TY \subseteq TX$ όταν $X \subseteq Y$. Για κάθε μη-μονότονη συνάρτηση T ισχύει ότι η T^2 είναι μονότονη.

Πρόταση 1.27. *Έστω T μια μη-μονότονη συνάρτηση και έστω X_0 και X_1 το ελάχιστο και το μέγιστο fixpoint της T^2. Τότε*

- $TX_0 = X_1$, $TX_1 = X_0$,
- *για κάθε fixpoint X του T ισχύει $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$.*

Συμπέρασμα 1.6. *Για κάθε μη-μονότονη συνάρτηση T, εάν το σύνολο X είναι το μοναδικό fixpoint της T^2 τότε το X είναι και το μοναδικό fixpoint της T.*

Εάν το σύνολο Ω είναι πεπερασμένο τότε, για κάθε μη-μονότονη συνάρτηση T, το ελάχιστο και το μέγιστο fixpoint της T^2 μπορούν να προκύψουν επαναλαμβάνοντας την T πεπερασμένο αριθμό φορών, ως εξής. Υπολογίζονται αρχικά τα σύνολα $T^n\emptyset(n = 0, 1, \ldots)$ μέχρι να προκύψει μια τιμή για το n τέτοια ώστε να ισχύει $T^n\emptyset = T^{n+2}\emptyset$. Τότε ένα από τα σύνολα $T^n\emptyset$, $T^{n+1}\emptyset$ είναι το ελάχιστο fixpoint και το άλλο είναι το μέγιστο fixpoint της T^2, ανάλογα με το αν το n είναι άρτιο ή περιττό. Διαφορετικά, τα fixpoint αυτά μπορούν να υπολογιστούν επαναλαμβάνοντας την T στο Ω.

Παράρτημα Β΄

Αύξουσες και Φθίνουσες Συναρτήσεις

Μια αύξουσα γεννήτρια συνάρτηση είναι μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση g που έχει πεδίο ορισμού το μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $g(0)=0$. Η ψευδο-αντίστροφη μιας αύξουσας συνάρτησης g, g^{-1}, είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$ και ορίζεται

$$g^{(-1)}(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0) \\ g^{-1}(\alpha) & \text{για } \alpha\in[0,g(1)] \\ 1 & \text{για } \alpha\in(g(1),\infty) \end{cases}$$

όπου g^{-1} είναι η αντίστροφη της g.

Παραδείγματα αύξουσων συναρτήσεων είναι:

$$\begin{aligned} g_1(\alpha) &= \alpha^p \qquad (p>0) \text{ για κάθε } \alpha\in[0,1] \\ g_2(\alpha) &= -\ln(1-\alpha) \qquad \text{για κάθε } \alpha\in[0,1] \text{ με } g_2(1)=\infty. \end{aligned}$$

Οι ψευδο-αντίστροφες συναρτήσεις αυτών είναι, αντίστοιχα

$$g_1^{(-1)}(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0) \\ \alpha^{1/p} & \text{για } \alpha\in[0,1] \\ 1 & \text{για } \alpha\in(1,\infty), \end{cases}$$

$$g_2^{(-1)}(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0) \\ 1-e^{-\alpha} & \text{για } \alpha\in(0,\infty). \end{cases}$$

Για μια αύξουσα γεννήτρια g και την ψευδο-αντίστροφη της $g^{(-1)}$ ισχύει $g^{(-1)}(g(\alpha))=\alpha$ για κάθε $\alpha\in[0,1]$ και

$$g(g^{(-1)})(\alpha)=\begin{cases} 0 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0) \\ \alpha & \text{για } \alpha\in[0,g(1)] \\ g(1) & \text{για } \alpha\in(g(1),\infty). \end{cases}$$

Μια φθίνουσα γεννήτρια συνάρτηση είναι μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση f που έχει πεδίο ορισμού το μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$ και πεδίο τιμών το $\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(1)=0$. Η ψευδο-αντίστροφη μιας φθίνουσας συνάρτησης f, f^{-1}, είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών το μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$ και ορίζεται

$$f^{(-1)}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0)\\ f^{-1}(\alpha) & \text{για } \alpha\in[0,f(0)]\\ 0 & \text{για } \alpha\in(f(0),\infty)\end{cases}$$

όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της f. Παραδείγματα φθίνουσων συναρτήσεων είναι:

$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 1-\alpha^p \qquad (p>0) \text{ για κάθε } \alpha\in[0,1]\\ g_2(\alpha) &= -\ln(\alpha) \qquad \text{για κάθε } \alpha\in[0,1] \text{ με } f_2(0)=\infty. \end{aligned}$$

Οι ψευδο-αντίστροφες συναρτήσεις αυτών είναι, αντίστοιχα

$$f_1^{(-1)}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0)\\ (1-\alpha)^{1/p} & \text{για } \alpha\in[0,1]\\ 0 & \text{για } \alpha\in(1,\infty),\end{cases}$$

$$f_2^{(-1)}(\alpha)=\begin{cases}1 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0)\\ e^{-\alpha} & \text{για } \alpha\in(0,\infty).\end{cases}$$

Για μια φθίνουσα γεννήτρια f και την ψευδο-αντίστροφη της $f^{(-1)}$ ισχύει $f^{(-1)}(f(\alpha))=\alpha$ για κάθε $\alpha\in[0,1]$ και

$$f(f^{(-1)})(\alpha)=\begin{cases}0 & \text{για } \alpha\in(-\infty,0)\\ \alpha & \text{για } \alpha\in[0,f(0)]\\ f(0) & \text{για } \alpha\in(f(0),\infty).\end{cases}$$

Όπως φαίνεται από τις παρακάτω δύο προτάσεις, οι αύξουσες και φθίνουσες γεννήτριες μπορούν να μετατραπούν η μια στην άλλη

Πρόταση 2.28. *Έστω f μια φθίνουσα γεννήτρια. Τότε, κάθε συνάρτηση g που ορίζεται ως*

$$g(\alpha)=f(0)-f(\alpha)$$

για κάθε $\alpha\in[0,1]$ είναι μια αύξουσα γεννήτρια με $g(1)=f(0)$ και η ψευδο-αντίστροφη της $g^{(-1)}$ δίνεται από την

$$g^{(-1)}(\alpha)=f^{(-1)}(f(0)-\alpha)$$

για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.29. *Έστω g μια αύξουσα γεννήτρια. Τότε, κάθε συνάρτηση f που ορίζεται ως*

$$f(\alpha) = g(1) - g(\alpha)$$

για κάθε $\alpha \in [0,1]$ είναι μια φθίνουσα γεννήτρια με $f(0) = g(1)$ και η ψευδο-αντίστροφη της $f^{(-1)}$ δίνεται από την

$$f^{(-1)}(\alpha) = g^{(-1)}(g(1) - \alpha)$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.