



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Η χρήση συναρτήσεων βάσης ολικού πεδίου (entire-domain) σε ολοκληρωτικές εξισώσεις για γραμμικές κεραίες τύπου Hallén και Pocklington

Ασημίνα Π. Μιχαλοπούλου

Επιβλέπων : Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2006



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

Η χρήση συναρτήσεων βάσης ολικού πεδίου (entire-domain) σε ολοκληρωτικές εξισώσεις για γραμμικές κεραίες τύπου Hallén και Pocklington

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ασημίνα Π. Μιχαλοπούλου

Επιβλέπων : Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή τη 16^η Μαρτίου 2006:

.....
Γ. Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π

.....
Ι. Τσαλαμέγκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Ι. Ρουμελιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Μάρτιος 2006

.....
Ασημίνα Π. Μιχαλοπούλου
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ασημίνα Π. Μιχαλοπούλου, 2006
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τη συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τη συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Αφιερώνεται
στην οικογένειά μου
και στους δασκάλους μου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η γραμμική κεραία που τροφοδοτείται στο κέντρο της είναι ένας πολύ βασικός τύπος κεραίας εκπομπής. Πρόκειται για ένα ευθύ, αγωγίμο, λεπτό καλώδιο με το σημείο τροφοδοσίας ακριβώς στο κέντρο του. Αυτός ο τύπος κεραίας έχει μελετηθεί διεξοδικά από θεωρητική, αριθμητική και πειραματική άποψη, για πάρα πολλά χρόνια. Η βασική άγνωστη ποσότητα είναι το ρεύμα κατά μήκος της κεραίας, που ικανοποιεί μια μονοδιάστατη ολοκληρωτική εξίσωση. Ο τύπος αυτός της κεραίας μελετάται συχνά με αριθμητικές μεθόδους και ιδίως με μεθόδους ροπών (Moment Methods), εφαρμοσμένες σε ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallén και Pocklington. Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να πάρουν δύο μορφές ανάλογα με τον πυρήνα που επιλέγεται. Οι δύο πυρήνες αναφέρονται συνήθως ως ο ακριβής και ο προσεγγιστικός πυρήνας. Δύο από τις πιο διαδεδομένες μοντελοποιήσεις για την τροφοδοσία της κεραίας, είναι το delta function generator (DFG) και το frill generator (FG). Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιείται ο λεγόμενος προσεγγιστικός πυρήνας, πράγμα που είναι συνηθέστατο στην πράξη. Με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα οι προαναφερθείσες ολοκληρωτικές εξισώσεις δεν έχουν λύση. Υπάρχουν δύο κατηγορίες συναρτήσεων βάσης (basis functions): οι subsectional (υποπεδίου) και οι entire-domain (ολικού πεδίου). Οι δυσκολίες που συναντώνται στη περίπτωση των subsectional basis functions περιγράφονται με λεπτομέρεια σε αρκετές πρόσφατες εργασίες - [3, 4, 6, 8]. Στις εργασίες αυτές αποδεικνύεται ότι και για το DFG αλλά και για το FG, η βασική συνέπεια της μη-επιλυσιμότητας είναι η εμφάνιση γρήγορων ταλαντώσεων κοντά στα άκρα της κεραίας. Στην περίπτωση του DFG, υπάρχουν ταλαντώσεις και κοντά στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας. Η έλλειψη ταλαντώσεων στην περίπτωση της μοντελοποίησης FG εξηγείται από την αναλυτική μελέτη της κεραίας απείρου μήκους. Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι μια παρόμοια μελέτη για την περίπτωση των entire-domain basis functions με χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα. Η ιδιότητα της μη-επιλυσιμότητας δεν αναφέρεται στα περισσότερα σύγχρονα εγχειρίδια. Στην παρούσα εργασία πρώτα παρουσιάζουμε αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο εξάγουμε τις εξισώσεις Hallén και Pocklington με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε προσεκτικά τις αριθμητικές μεθόδους στις προαναφερθείσες εξισώσεις κι ακολούθως εξετάζεται η συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων που προέκυψαν με αυτό τον τρόπο. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται είναι η μέθοδος Galerkin και η μέθοδος point-matching, με συνημιτονικές συναρτήσεις ολικού πεδίου. Δείχνουμε ότι και σε αυτή την περίπτωση έχουμε επίσης ταλαντώσεις. Συζητάμε τις ομοιότητες και τις διαφορές μεταξύ της μοντελοποίησης DFG και FG, καθώς και μεταξύ των subdomain και entire-domain συναρτήσεων βάσης. Αναφερόμαστε επίσης στη σημασία της παραμέτρου h/a (όπου h είναι το μισό μήκος της κεραίας και a είναι η ακτίνα της κεραίας). Εξηγούμε ότι (όπως και στην περίπτωση των subdomain συναρτήσεων βάσης), οι προαναφερθείσες ταλαντώσεις δεν οφείλονται σε λάθη roundoff. Δείχνουμε ότι οι συνέπειες του roundoff μπορούν να γίνουν σοβαρές. Η διαφοροποίηση είναι σημαντική διότι η επίδραση του roundoff μπορεί να αποφευχθεί από πιο ισχυρούς υπολογιστές, αλλά όχι και οι ταλαντώσεις που προαναφέραμε. Επιπλέον, μελετάται η αγωγιμότητα εισόδου και οι συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορούμε να πάρουμε αποδεκτές τιμές της, με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα.

Λέξεις Κλειδιά

Μέθοδος Galerkin, μέθοδος point-matching, μέθοδος ροπών, ολοκληρωτικές εξισώσεις συναρτήσεων βάσης entire domain, προσεγγιστικός πυρήνας

ABSTRACT

The finite linear antenna, center-driven by a generator, constitute a typical type of scatterer. It's a straight conducting thin wire with the driving point located at its centre. This antenna type has been extendedly studied for many years by experimental, numerical and analytical viewpoint. The unknown quantity is the current along the antenna's length, which satisfies a one-dimensional integral equation. This antenna type is commonly studied through numerical methods and especially moment methods applied in Hallén and Pocklington type integral equations. Those equations take two forms depending on the choice of kernel. The two kernels are usually referred to as the exact and the approximate or reduced kernel. There are, also, two generator types commonly used: the delta function generator (DFG) and the frill generator (FG).

Let us assume that the so-called approximate kernel is used, something that is really common. When using the approximate kernel, the integral equations have no solution. There are two categories of basis functions: the subsectional and the entire-domain basis functions. The difficulties met in the case of the subsectional basis functions are described in detail in several recent papers - [3, 4, 6, 8]. For both the DFG and the FG, the main consequence of nonsolvability is the appearance of rapid oscillations near the ends of the antenna. For the DFG case, but not for the FG case, there are also oscillations near the driving point. The lack of oscillations in the FG case is explained by studying the antenna of infinite length analytically.

The scope of this thesis is a similar study when entire-domain basis functions are used, both for the DFG and FG cases. This property is not mentioned in most recent textbooks. In the present work we initially present analytically the way the equations derive from the Maxwell's equations. Afterwards we carefully apply the numerical methods in Hallén and Pocklington type integral equations and the behavior of the numerical solution thus obtained is investigated. The methods we apply are the Galerkin method and the point-matching method, when entire domain basis functions are used. We show that, once again, oscillations do occur. We discuss similarities and differences between the DFG and the FG, and between entire-domain and subdomain basis functions. We also discuss the significance of the parameter h/a (where h is the antenna half-length and a is the antenna radius). We explain that (just as in the case of subdomain basis functions), the aforementioned oscillations are not due to roundoff errors. We then show that the effects of roundoff, which are separate, can also be severe. The distinction is important because effects due to roundoff can be avoided by more powerful computers, but not the aforementioned oscillations. Moreover, the driving-point impedance is studied and the circumstances under which we could take acceptable values, with the approximate kernel, are examined.

Key Words

Galerkin's method, point-matching, Moment Methods, integral equation methods, entire domain basis function, approximate kernel

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ	13
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 ^ο	17
1.1 Εισαγωγή.....	17
1.2 Πραγματικές κεραίες και το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου.....	20
1.3 Εξισώσεις Maxwell	22
1.4 Η συνάρτηση Green και οι συνθήκες εκπομπής	28
1.5 Ολοκληρωτικές εξισώσεις	30
1.5.1 Ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Pocklington.....	30
1.5.1.1 Γεννήτρια δέλτα-συνάρτησης ή delta function generator	40
1.5.1.2 Γεννήτρια magnetic-frill.....	42
1.5.2 Ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallén	48
1.5.2.1 Γεννήτρια δ-συνάρτησης.....	49
1.5.2.2 Γεννήτρια magnetic frill.....	51
1.6 Προσεγγιστικές ολοκληρωτικές εξισώσεις.....	56
1.7 Μη επιλυσιμότητα με τον προσεγγιστικό πυρήνα	58
1.7.1 Μοντελοποίηση delta function	58
1.7.2 Μοντελοποίηση magnetic frill.....	59
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 ^ο	61
2.1 Εισαγωγή.....	61
2.2 Αριθμητικές μέθοδοι - Μέθοδοι ροπών.....	62
2.2.1 Επιλογή συναρτήσεων βάσης.....	64
2.2.1.1 Subdomain basis functions	64
2.2.1.2 Συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου (entire domain basis functions)	68
2.2.2 Επιλογή του αριθμού των συναρτήσεων βάσης N	71
2.2.3 Επιλογή συναρτήσεων δοκιμής	71
2.2.3.1 Μέθοδος Galerkin	72
2.2.3.2 Τεχνική σημειακής ισότητας (point - matching technique or collocation technique)	73
2.3 Παρατηρήσεις.....	74
2.4 Επίλυση ολοκληρωτικών και ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους	75
2.4.1 Απλή λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης	75
2.4.2 Λύση ολοκληρωτικής εξίσωσης-Αριθμητικός υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα	78
2.4.3 Επίλυση ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης	79
2.4.4 Επίλυση ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης	80
2.5 Συμπεράσματα για τη μέθοδο Galerkin στην ακριβή και στην προσεγγιστική εξίσωση του Hallén (Pocklington) με subdomain basis functions.....	83
2.5.1 Delta function generator.....	83
2.5.2 Magnetic frill generator.....	87
2.6 Θεωρία Αριθμητικών σφαλμάτων υπολογιστή - Roundoff.....	91
2.7 Condition- Ευστάθεια συστήματος	92
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 ^ο	97
3.1 Μέθοδος Galerkin για την εξίσωση Hallén	99
3.1.1 Εισαγωγή.....	99
3.1.2 Delta function generator.....	99
3.1.2.1 Εφαρμογή της μεθόδου Galerkin.....	99

3.1.2.2 Η συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων και η σχέση της με το condition number του πίνακα A	103
3.1.2.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων για entire domain basis functions και subdomain basis functions	106
3.1.3 Magnetic frill generator.....	106
3.1.3.1 Εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με entire-domain basis functions....	106
3.1.3.2 Η συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων και η σχέση της με το condition number του πίνακα A	109
3.1.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων για entire domain basis functions και subdomain basis functions	111
3.1.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων για delta function generator και frill generator	112
3.2 Μέθοδος Galerkin για την εξίσωση Pocklington	113
3.2.1 Η συμπεριφορά της αριθμητική λύσης και η σχέση της με το condition number του πίνακα	117
3.3 Μέθοδος point-matching για την εξίσωση του Hallén	119
3.3.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων – Μελλοντική έρευνα.....	123
3.4 MATLAB	127
3.5 Εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου-Παρατηρήσεις	129
3.5.1 Σύνθετος τύπος τραπεζίου.....	129
3.6 Αγωγιμότητα εισόδου	131
3.6.1 Μελέτη για την άπειρη κεραία	131
3.6.2 Μέθοδος Galerkin για τη εξίσωση του Hallén με entire-domain basis functions.....	133
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α – Κώδικας MATLAB	138
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - Απειρισμός του ακριβούς πυρήνα-Εναλλαγή διαφορικού τελεστή και ολοκλήρωσης	156
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ - Πληρότητα των $f_n(z)$ για άρτιες συναρτήσεις	158
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ – Γραφικές Παραστάσεις- Σχόλια	160
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε - Χρήσιμες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα του Dirac	196
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	198

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1: Ένας απλός τύπος πραγματικής κεραίας.....	20
Σχήμα 2: Δύο ακόμα «πραγματικές» κεραίες, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δισύρματη γραμμική μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω από αγώγιμο επίπεδο.....	21
Σχήμα 3: Σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) , σημείο πηγής (a, ϕ', z') , και απόσταση R μεταξύ τους.....	32
Σχήμα 4: Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, η απόσταση R δίνεται από τη σχέση (8). Εδώ δείχνουμε προβολή στο επίπεδο $z=0$. Η προβολή του R είναι $2a \left \sin \left(\frac{\phi'}{2} \right) \right $, με μέγιστη τιμή $2a$ και ελάχιστη τιμή 0	33
Σχήμα 5: Ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει πάνω σε αγώγιμο σωλήνα.....	33
Σχήμα 7: Κυλινδρικό δίπολο και μοντελοποίηση τροφοδοσίας <i>delta gap</i> και <i>magnetic frill</i>	40
Σχήμα 6: Το σωληνοειδές δίπολο. Η γεννήτρια δ -συνάρτησης διατηρεί δυναμικό V στο απειροστά μικρό διάκενο που βρίσκεται στο $z = 0$	41
Σχήμα 8: Γεωμετρία του <i>magnetic frill</i>	46
Σχήμα 9: Το ισοδύναμο ρεύμα του διπόλου.....	56
Σχήμα 10: Στο πάνω σχήμα (α), δείχνουμε τις παλμικές συναρτήσεις $g_n(x)$. Στο κάτω σχήμα (β), δείχνουμε μια υπέρθεση $J_n(x')$ παλμικών συναρτήσεων. Έχει κλιμακωτή μορφή.....	65
Σχήμα 11: Οι λεγόμενες τριγωνικές συναρτήσεις.....	66
Σχήμα 12: <i>Piecewise sinusoids subdomain functions</i>	67
Σχήμα 13: <i>Truncated cosines subdomain functions</i>	68
Σχήμα 14: Οι τρεις πρώτες συνημιτονικές συναρτήσεις $g_1(x), g_2(x), g_3(x)$ της σχέσης . Όλες είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα $x = \pm \frac{L}{2}$	69
Σχήμα 15: Οι τρεις πρώτες συνημιτονικές συναρτήσεις $g_0(x), g_1(x), g_2(x)$ της σχέσης (2.19) . Όλες είναι άρτιες.....	70
Σχήμα 16: Ο <i>condition number</i> του πίνακα A για $h/a = 25$ (μπλε και πράσινη γραμμή) και $h/a = 50$ (κόκκινη γραμμή).....	105
Σχήμα 17: Ο <i>condition number</i> του πίνακα A για $h/a = 25$ της εξίσωσης του Hallén (πράσινη γραμμή) και της εξίσωσης του Rocklington (μπλε γραμμή).....	118

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η διπλωματική αυτή εργασία έρχεται να ολοκληρώσει τον κύκλο των επί πέντε ετών προσπαθειών μου στα πλαίσια της ακαδημαϊκής μου φοίτησης στη σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών. Αποτελεί επιστέγασμα των όσων έχω κατακτήσει τόσα χρόνια στο χώρο της εκπαίδευσης, με συνδυασμό της δικής μου προσπάθειας και της αρωγής των καθηγητών μου. Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί καρπό έντονου προβληματισμού, δημιουργικής και συστηματικής σκέψης, αναζήτησης και συνεργασίας. Ελπίζουμε ότι θα δώσει έναυσμα και θα αποτελέσει χρήσιμο εργαλείο για περαιτέρω επιστημονική αναζήτηση.

Το θέμα της εργασίας είναι μια ολοκληρωμένη μελέτη πάνω στη συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων, που προκύπτουν από την εφαρμογή μεθόδων ροπών στις εξισώσεις που περιγράφουν τη ρευματική κατανομή πάνω σε μια γραμμική κεραία. Το κοινό γνώρισμα των μεθόδων αυτών είναι η χρήση *entire-domain* συναρτήσεων βάσης για δύο μοντέλα τροφοδοσίας, *delta function generator* και *frill generator*. Κατά τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας συναντήσαμε πολλές δυσκολίες και προέκυψαν πολλές καθυστερήσεις, όμως, κάθε φορά συνεχίζαμε, με βάση κάποιες αρχές, οι οποίες συνοψίζονται στα λόγια του A. C. Doyle: «Είναι πρωτεύων λάθος να θεωρητικολογούμε χωρίς να έχουμε όλες τις αποδείξεις. Προκαταλαμβάνει την απόφαση». Προσπαθήσαμε να μην εμπιστευτούμε τα αποτελέσματα ενός αριθμητικού υπολογισμού, εκτός κι αν είχαν επικυρωθεί, τουλάχιστον εν μέρει, γεγονός το οποίο πολλές φορές μας οδηγούσε πιο πίσω για να βεβαιωθούμε για τα αποτελέσματα. Ο έλεγχος της εγκυρότητας των αποτελεσμάτων πραγματοποιήθηκε με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά που εξήγαγαν προηγούμενοι ερευνητές ή με παρόμοια αποτελέσματα που προέκυψαν χρησιμοποιώντας διαφορετική προσέγγιση, η οποία μπορεί να ήταν είτε αναλυτική είτε αριθμητική.

Καταφέραμε να ολοκληρώσουμε την εργασία και να εξάγουμε τα συμπεράσματα ξεπερνώντας πολλά εμπόδια, που οφείλονταν στην πολύπλοκη φύση του συγκεκριμένου προβλήματος. Σε αυτή την προσπάθεια καταλυτική ήταν η συμβολή του καθηγητή μου κ. Γεωργίου Φικιώρη, τον οποίο ευχαριστώ θερμά για την επικοινωνιακή μας συνεργασία, τις πολύτιμες γνώσεις και τη βοήθεια που μου προσέφερε, δείχνοντας μου το σωστό δρόμο, όταν παρέκκλινα και θέτοντας μου τα σωστά ερωτήματα, όταν υπήρχε στασιμότητα. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη στήριξη που μου προσέφερε, βοηθώντας με να φτάσω σε αυτό το σημείο και όλους όσους συνέβαλλαν στην πραγματοποίηση αυτής της εργασίας.

Ασημίνα Π. Μιχαλοπούλου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι επιστήμονες και οι μηχανικοί χρησιμοποιούν αρκετές τεχνικές για την επίλυση προβλημάτων. Οι τεχνικές αυτές σε γενικές γραμμές μπορούν να ταξινομηθούν σε πειραματικές, αναλυτικές ή αριθμητικές. Τα πειράματα είναι ακριβά, καταναλώνουν πολύ χρόνο και συνήθως δεν επιτρέπουν μεγάλη ελαστικότητα στη μεταβολή των παραμέτρων. Ακόμα και οι αριθμητικές μέθοδοι όμως, απαιτούν μια αναλυτική απλοποίηση μέχρι το σημείο που θα είναι εύκολη η εφαρμογή τους. Οι ακόλουθες αριθμητικές μέθοδοι είναι ανάμεσα στις πιο διαδεδομένες στον ηλεκτρομαγνητισμό:

- 1) Μέθοδος της πεπερασμένης διαφοράς
- 2) Μέθοδος ροπών
- 3) Μέθοδος πεπερασμένου στοιχείου
- 4) Μοντελοποίηση γραμμής μεταφοράς
- 5) Μέθοδος Monte Carlo

Η εφαρμογή των μεθόδων αυτών βέβαια δεν περιορίζεται στον ηλεκτρομαγνητισμό. Κάποιες από τις αριθμητικές μεθόδους συνδέονται μεταξύ τους και σε γενικές γραμμές όλες δίνουν προσεγγιστικές λύσεις ικανοποιητικής ακρίβειας. Η ανάγκη για αριθμητικές λύσεις στον ηλεκτρομαγνητισμό έχει εκφραστεί με πολύ ωραίο τρόπο μέσα από τα λόγια των Paris και Hurd: «Τα περισσότερα από τα προβλήματα που μπορούσαν να επιλυθούν αναλυτικά, έχουν επιλυθεί». Μέχρι το 1940, τα περισσότερα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα είχαν λυθεί με τις κλασσικές μεθόδους του χωρισμού των μεταβλητών και της λύσης ολοκληρωτικής εξίσωσης. Παρόλη την προσπάθεια και την εμπειρία που απαιτούνταν για την εφαρμογή αυτών των μεθόδων, μόνο μια μικρή γκάμα πρακτικών προβλημάτων μπορούσαν να ερευνηθούν εξαιτίας των πολύπλοκων γεωμετριών που καθόριζαν το εκάστοτε πρόβλημα.

Αριθμητικές λύσεις ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων άρχισαν να εφαρμόζονται στα μέσα της δεκαετίας του '60, εξαιτίας της διαθεσιμότητας σύγχρονων ψηφιακών υπολογιστών υψηλής ταχύτητας. Από τότε σημαντική προσπάθεια έχει καταβληθεί για την επίλυση πολύπλοκων προβλημάτων σχετικών με τον ηλεκτρομαγνητισμό για τα οποία οι αναλυτικές λύσεις σε κλειστή μορφή είτε είναι δυσεπίλυτες είτε δεν υπάρχουν.

Στην εργασία αυτή θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ροπών στην ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén και την ολοκληρωδιαφορική του Pocklington, για την εύρεση της ρευματικής κατανομής μιας γραμμικής κεραίας που τροφοδοτείται στο κέντρο της, είτε με delta function generator είτε με frill generator. Πιο συγκεκριμένα, στις δύο εξισώσεις θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Galerkin με συναρτήσεις βάσης entire-domain. Για κάθε εξίσωση υπάρχουν δύο πυρήνες, ο ακριβής και ο προσεγγιστικός. Όπως θα δούμε στο 2^ο Κεφάλαιο, οι προαναφερθείσες εξισώσεις δεν έχουν λύση όταν χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός πυρήνας. Αυτή η ασυνήθιστη κατάσταση προκαλεί τα ακόλουθα ερωτήματα : (α) Τι παρατηρεί κάποιος όταν εφαρμόζει μια αριθμητική μέθοδο στις εξισώσεις αυτές που δεν έχουν λύση και (β) κατά πόσο τα συμπεράσματα που προκύπτουν είναι ανεξάρτητα από τη μέθοδο που ακολουθήθηκε. Σκοπός μας είναι να δώσουμε απάντηση σε αυτά τα ερωτήματα, με την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin. Για να ολοκληρώσουμε όμως τη μελέτη, συσχετίζουμε τα συμπεράσματα μας με αυτά που προέκυψαν από την εφαρμογή της ίδιας μεθόδου με subdomain συναρτήσεις βάσης, διαπιστώνουμε ποια συμπεράσματα είναι ανεξάρτητα της επιλογής συναρτήσεων βάσης και αποκτούμε έτσι μια πιο σφαιρική εικόνα για τη συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης των προσεγγιστικών εξισώσεων του Hallén και του Pocklington.

Στη συνέχεια θέλοντας να προεκτείνουμε τα συμπεράσματα μας, επιχειρούμε να εφαρμόσουμε στις ίδιες εξισώσεις τη μέθοδο point-matching με entire-domain basis functions.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο

1.1 Εισαγωγή

Η κεραία αποτελεί διάταξη που επιτυγχάνει τη σύζευξη του συστήματος ασύρματης μετάδοσης και του μέσου διάδοσης. Επομένως κατά τη σχεδίαση του συστήματος πρέπει να λαμβάνονται υπόψη τόσο τα χαρακτηριστικά των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων, τα οποία εκπέμπονται ή λαμβάνονται από το μέσο διάδοσης, όσο και τα χαρακτηριστικά που εμφανίζει η κεραία ως στοιχείο του τηλεπικοινωνιακού συστήματος. Η κεραία συνδέεται προς τον πομπό ή το δέκτη μέσω γραμμής μεταφοράς, η οποία μπορεί να είναι ομοαξονικό καλώδιο, κυματοδηγός, μικροταινιακή γραμμή ή ταινιογραμμή. Είναι επιθυμητή η επίτευξη της μέγιστης δυνατής μεταφοράς ισχύος μεταξύ της γραμμής μεταφοράς και της κεραίας, χωρίς παραμόρφωση.

Μία κεραία μπορεί να περιγραφεί μέσω της ισοδύναμης αντίστασης εισόδου της. Αυτή ορίζεται ως η μιγαδική αντίσταση που εμφανίζει στους ακροδέκτες της ή ισοδύναμα, ως το πηλίκο της τάσης προς το ρεύμα που εμφανίζονται στο σημείο τροφοδότησης της. Η αντίσταση εισόδου διαθέτει πραγματικό και φανταστικό μέρος:

$$Z_{\alpha} = R_{\alpha} + jX_{\alpha} \quad (1.1)$$

Το πραγματικό μέρος αποτελείται από την αντίσταση ακτινοβολίας R_r μέσω της οποίας υπολογίζεται η ισχύς που ακτινοβολεί η κεραία, και την αντίσταση απωλειών R_L μέσω της οποίας υπολογίζονται οι διάφορες απώλειες της κεραίας.

Η αντίσταση εισόδου περιλαμβάνει δύο όρους, την ίδια αντίσταση της κεραίας και την αμοιβαία αντίσταση της κεραίας ως προς το περιβάλλον. Η ίδια αντίσταση της κεραίας μπορεί να μετρηθεί στο σημείο τροφοδότησης της όταν αυτή λειτουργεί σε ελεύθερο χώρο, δηλαδή μακριά από άλλες κεραίες ή σκεδαστές που σκεδάζουν ή ανακλούν το μεταδιδόμενο σήμα. Η αμοιβαία αντίσταση της κεραίας περιγράφει την επίδραση της σύζευξης της υπό μέτρηση κεραίας με κάθε άλλη πηγή ή σκεδαστή στον περιβάλλοντα χώρο. Στην ιδανική περίπτωση που η κεραία λειτουργεί σε ελεύθερο χώρο, απουσία παρεμβαλλόντων στοιχείων ή αντικειμένων, η αντίσταση εισόδου ταυτίζεται με την ίδια αντίσταση της κεραίας.

Η αντίσταση εισόδου μιας κεραίας εξαρτάται από πολλούς παράγοντες συμπεριλαμβανομένων της συχνότητας λειτουργίας της, της γεωμετρίας της και της εγγύτητας των γύρω αντικειμένων. Εξαιτίας των πολύπλοκων γεωμετριών, μόνο ένας περιορισμένος αριθμός κεραίων έχουν διερευνηθεί αναλυτικά. Για πολλές άλλες η αντίσταση εισόδου έχει βρεθεί πειραματικά.

Η αντίσταση μιας κεραίας σε κάποιο σημείο ορίζεται ως ο λόγος του ηλεκτρικού προς το μαγνητικό πεδίο σ' αυτό το σημείο. Εναλλακτικά, σε ένα ζεύγος ακροδεκτών ορίζεται ως ο λόγος της τάσης προς το ρεύμα κατά μήκος των ακροδεκτών. Υπάρχουν πολλές μέθοδοι που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουμε την αντίσταση μιας κεραίας. Σε γενικές γραμμές μπορούν να ταξινομηθούν σε τρεις κατηγορίες: 1) η

μέθοδος των οριακών συνθηκών, 2) η μέθοδος της γραμμής μεταφοράς, και 3) η μέθοδος του διανύσματος Poynting.

Η πρώτη κατηγορία είναι η πιο βασική και αντιμετωπίζει την κεραία σαν ένα πρόβλημα οριακών συνθηκών. Η λύση προκύπτει εφαρμόζοντας τις οριακές συνθήκες (συνήθως το εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται στην αγωγίμη επιφάνεια). Η ρευματική κατανομή και τελικά η αντίσταση εισόδου (λόγος της εφαρμοσμένης ηλεκτρεγερτικής δύναμης προς το ρεύμα), προκύπτουν ως λύση του προβλήματος. Το κύριο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι έχει περιορισμένες εφαρμογές. Μπορεί να εφαρμοστεί και να λυθεί ακριβώς, σε απλοποιημένα μόνο γεωμετρικά σχήματα.

Η μέθοδος της γραμμής μεταφοράς, αντιμετωπίζει την κεραία σα μια γραμμή μεταφοράς, και είναι πιο χρήσιμη για τη διπολική κεραία. Αν για τη λύση της χρησιμοποιεί οριακές συνθήκες εφαπτομενικού ηλεκτρικού πεδίου, αυτή η τεχνική μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στην προηγούμενη κατηγορία.

Η βασική προσέγγιση στη μέθοδο του διανύσματος Poynting είναι να ολοκληρώσουμε το διάνυσμα Poynting (πυκνότητα ισχύος) σε μια κλειστή επιφάνεια. Η επιφάνεια που επιλέγεται συνήθως είναι είτε μια σφαίρα πολύ μεγάλης ακτίνας r ($r \geq 2D^2/\lambda$ όπου D είναι η μεγαλύτερη διάσταση της κεραίας) είτε μια επιφάνεια που συμπίπτει με την επιφάνεια της κεραίας. Η μέθοδος της κλειστής επιφάνειας μεγάλης σφαίρας οδηγεί σε υπολογισμούς μόνο του πραγματικού μέρους της αντίστασης εισόδου (αντίσταση ακτινοβολίας). Η μέθοδος που χρησιμοποιεί την επιφάνεια της κεραίας είναι η μέθοδος της επαγόμενης ηλεκτρεγερτικής δύναμης (induced emf).

Στη θεωρία των κεντρικά τροφοδοτούμενων γραμμικών κεραιών, είναι συνηθέστατο να δεχόμαστε την ημιτονική κατανομή ρεύματος

$$I(z) = \frac{I(0)}{\sin(k_0 L/2)} \sin \left[k_0 \left(\frac{L}{2} - |z| \right) \right] \quad (1.2)$$

όπου z η απόσταση από το κέντρο της κεραίας, $I(z)$ (σε amperes) το ρεύμα κατά μήκος της (οπότε $I(0)$ είναι το ρεύμα στο κέντρο της), L το μήκος της κεραίας και $k_0 = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi/\lambda$ ο κυματαριθμός του μέσου που την περιβάλλει. Μπορούμε, για παράδειγμα, να υποθέσουμε καταρχήν άγνωστο το $I(0)$ και να το προσδιορίσουμε στη συνέχεια με τη «μέθοδο επαγόμενης ηλεκτρεγερτικής δύναμης» [9, §5.2]. (Για την ακρίβεια, βρίσκουμε την αντίσταση εισόδου $I(0)/V$, όπου V η τροφοδοτούσα τάση).

Με την προσεγγιστική αυτή μέθοδο, βρίσκουμε άριστα αποτελέσματα για κεραίες μήκους $L = \lambda/2$, αλλά όχι και για κεραίες μήκους $L = \lambda$. Για πολύ λεπτές κεραίες η ρευματική κατανομή υποτίθεται ότι είναι της μορφής (1.2). Για πεπερασμένης διαμέτρου κεραίες (συνήθως για διάμετρο $d > 0.05\lambda$), η ημιτονοειδής ρευματική κατανομή είναι αντιπροσωπευτική αλλά όχι ακριβής.

Ένας πιο ακριβής και πιο επιστημονικός τρόπος για την εύρεση του $I(z)$ και κατ' επέκταση της αντίστασης εισόδου, είναι η χρήση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Συγκεκριμένα, εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell και τις κατάλληλες οριακές συνθήκες, καταλήγουμε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις για το $I(z)$. Για την ακρίβεια, θα

καταλήξουμε σε δύο εναλλακτικές εξισώσεις, την ολοκληρωτική του Hallén και την ολοκληρωτικο-διαφορική του Rocklington. Είναι σύνηθες, όμως, να χρησιμοποιούμε τον όρο «ολοκληρωτική εξίσωση» ακόμα και για ολοκληρωτικο-διαφορικές εξισώσεις. Η βασική διαφορά από τη μέθοδο της επαγόμενης ηλεκτρεγερτικής δύναμης είναι ότι η ρευματική κατανομή επί της γραμμικής κεραίας υπολογίζεται κατά την εφαρμογή της μεθόδου. Η αντίσταση εισόδου εξαρτάται από την τροφοδότηση της κεραίας. Η διέγερση της κεραίας δεχόμαστε ότι γίνεται μέσω πηγής τάσης.

Οι ολοκληρωτικές αυτές εξισώσεις συνήθως λύνονται αριθμητικά με μεθόδους ροπών (moment methods), τις οποίες παρουσιάζουμε στο 2^ο Κεφάλαιο. Οι μέθοδοι ροπών είναι γενικότερα χρήσιμες στον Ηλεκτρομαγνητισμό—αποτελούν ένα σημαντικό κεφάλαιο του λεγόμενου Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού (Computational Electromagnetics). Από την άλλη μεριά, οι παρούσες ολοκληρωτικές εξισώσεις παρουσιάζουν ορισμένες ιδιαίτερες—και συχνά παραγνωρισμένες—δυσκολίες.

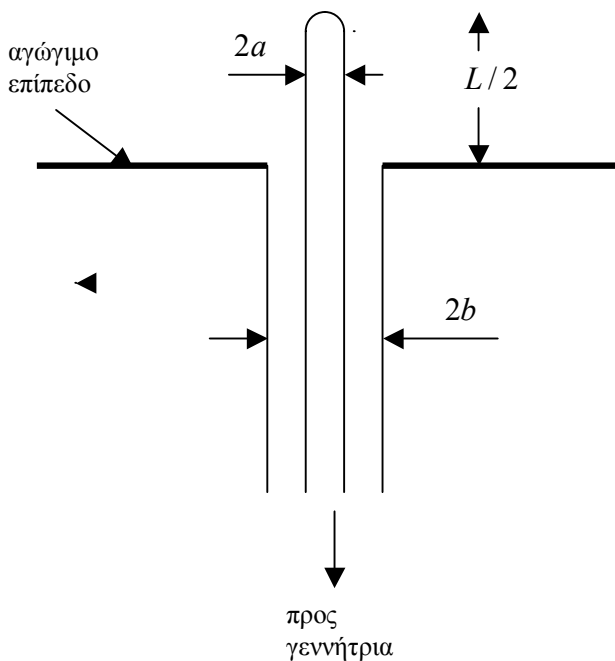
Ο περιορισμός αυτής της μεθόδου είναι συνήθως η ταχύτητα και η αποθηκευτική χωρητικότητα του υπολογιστή, καθώς απαιτεί πολλούς υπολογισμούς. Επιπλέον η χρήση της περιορίζεται σε κλασσικές γεωμετρίες.

1.2 Πραγματικές κεραιές και το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου

Μία «πραγματική» κεραιά εικονίζεται στο Σχήμα 1. Ο εξωτερικός αγωγός, διαμέτρου $2b$, ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς καταλήγει σε αγωγίμο επίπεδο (ground plane), ενώ ο εσωτερικός αγωγός, διαμέτρου $2a$, εξέρχεται και σχηματίζει την μονοπολική κεραιά μήκους $L/2$. Η κεραιά μας είναι λεπτή με την έννοια ότι:

$$a \ll L, \quad k_0 a \ll 1$$

Με τη θεωρία ειδώλων (τουλάχιστον για μικρά $b-a$), η όλη διάταξη είναι ισοδύναμη με μια διπολική, κεντρικά τροφοδοτούμενη, γραμμική κεραιά μήκους L και διαμέτρου $2a$. Αν θεωρήσουμε ότι το αγωγίμο επίπεδο βρίσκεται στο επίπεδο $z=0$, τότε το ακτινοβολούμενο πεδίο στο χώρο $z>0$ ισοδυναμεί με το πεδίο ενός διπόλου μήκους L , ενώ στο χώρο $z<0$ το πεδίο είναι μηδενικό. Η συγκεκριμένη κεραιά του σχήματος έχει σφαιρικό καπάκι, αλλά συναντά κανείς και κεραιές με επίπεδο καπάκι, ή και χωρίς καπάκι.

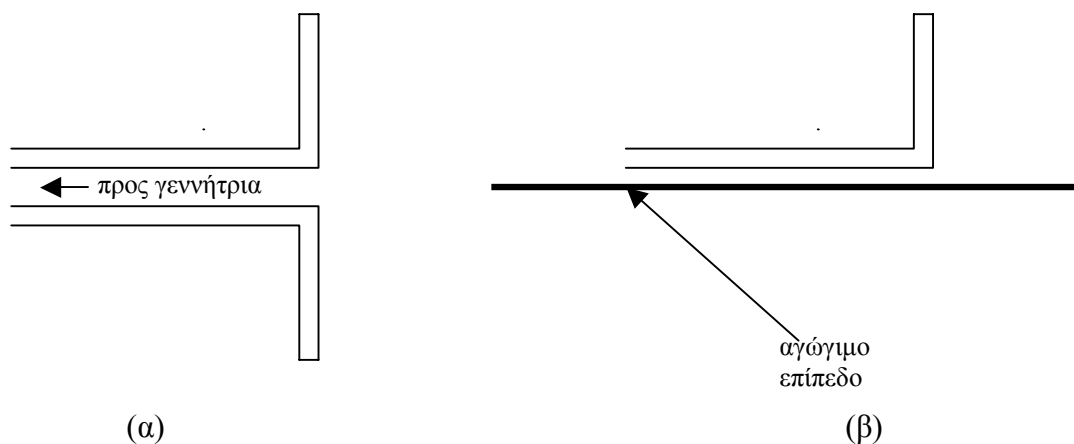


Σχήμα 1: Ένας απλός τύπος πραγματικής κεραιάς

Η διάταξη του Σχήματος 1 είναι από τις πιο απλές που βρίσκουμε στην πράξη. Ακόμα και για τη διάταξη αυτή, όμως, η κατάστρωση και επίλυση των εξισώσεων Maxwell δεν είναι εύκολη υπόθεση. Επιπλέον, στο Σχήμα 1 η κεραιά και η τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς αποτελούν ένα σύνθετο σύστημα, ενώ συνήθως σκεφτόμαστε δύο ανεξάρτητα συστήματα. Με άλλα λόγια, συνήθως αγνοούμε την αλληλεπίδραση της κεραιάς με την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς. (Αυτή η απλοποίηση καθίσταται

απαραίτητη στην περίπτωση στοιχειοκεραίων πολλών στοιχείων όπου είναι πρακτικά αδύνατον να ληφθούν υπόψη όλες οι αλληλεπιδράσεις.)

Για τους πιο πάνω λόγους, θα εισάγουμε και θα μελετήσουμε ένα απλούστερο θεωρητικό μοντέλο, το λεγόμενο «σωληνοειδές δίπολο». Το σωληνοειδές δίπολο χρησιμεύει για την μοντελοποίηση όχι μόνον της κεραίας του Σχήματος 1, αλλά και άλλων πραγματικών κεραίων, όπως π. χ. της διπολικής κεραίας του Σχήματος 2(α) που τροφοδοτείται από δισύρματη γραμμή μεταφοράς, καθώς και της ισοδύναμης διάταξης του Σχήματος 2(β) πάνω από αγωγίμο επίπεδο.



Σχήμα 2: Δύο ακόμα «πραγματικές» κεραίες, (α) η διπολική κεραία τροφοδοτούμενη από δισύρματη γραμμή μεταφοράς και (β) η ισοδύναμη διάταξη πάνω από αγωγίμο επίπεδο.

Το σωληνοειδές δίπολο είναι ένας τέλει αγωγίμος μεταλλικός σωλήνας με απείρως λεπτά τοιχώματα. Ένα ερώτημα που γεννιέται είναι γιατί να χρησιμοποιήσουμε το σωληνοειδές δίπολο ως μοντέλο για το πρόβλημα που θέλουμε να λύσουμε, κι όχι κάποιο άλλο μοντέλο που είναι πιο κοντά στις πραγματικές κεραίες. Η απάντηση είναι ότι οι ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι ακριβείς για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Αυτό είναι το πλεονέκτημα του σωληνοειδούς διπόλου και είναι, καθαρά, θεωρητικής φύσεως. Για άλλα μοντέλα, ή για «πραγματικές» κεραίες, οι ολοκληρωτικές μας εξισώσεις θα είναι προσεγγιστικές. Δηλαδή, για λεπτές κεραίες, η ύπαρξη ή μη καπακιών, η ακριβής φύση της τροφοδοσίας κτλ. είναι, τελικά, λεπτομέρειες που δεν παίζουν ιδιαίτερο ρόλο και είναι γενικά σωστό να θεωρούμε την κεραία ξεχωριστά από την τροφοδοτούσα γραμμή μεταφοράς. Εδώ ακριβώς οφείλεται η επιτυχία του απλοποιημένου μοντέλου.

1.3 Εξισώσεις Maxwell

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη της αριθμητικής μεθόδου στις εξισώσεις του Hallén και του Rocklington, θα δούμε πώς εξάγονται οι εξισώσεις αυτές με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell. Συγχρόνως θα υπενθυμίσουμε κάποιους από τους νόμους που διέπουν τα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα.

Για την ακρίβεια θα θεωρήσουμε ότι η κεραία βρίσκεται στο κενό έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$B = \mu_0 H \quad \text{και} \quad D = \epsilon_0 E \quad (1.3)$$

Η ταχύτητα του φωτός και η κυματική αντίσταση του κενού χώρου δίνονται από τις σχέσεις:

$$c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2} \quad \zeta_0 = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \quad (1.4)$$

Όταν μιλάμε για ομογενή ισότροπο χώρο που χαρακτηρίζεται από τις σταθερές μ και ϵ (μαγνητική και ηλεκτρική διαπερατότητα) τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το μ_0 με το μ και το ϵ_0 με το ϵ . Βέβαια και τα μεγέθη c και ζ_0 θα πρέπει να υπολογιστούν ξανά χρησιμοποιώντας τα μ και ϵ . Θα χρησιμοποιήσουμε τα διανυσματικά μεγέθη B και H για να γράψουμε τις εξισώσεις του Maxwell (στη γενική τους μορφή για χρονομεταβλητά πεδία, στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο τα \vec{J} και ρ):

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \quad (1.8)$$

Τα μεγέθη \vec{J} και ρ αποτελούν την πυκνότητα ρεύματος και την κατανομή φορτίου αντίστοιχα. Οι ποσότητες αυτές που εμφανίζονται στις σχέσεις (1.5) και (1.8) ικανοποιούν την παρακάτω εξίσωση η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση της συνέχειας και αποδεικνύεται με τη βοήθεια των εξισώσεων (1.5) και (1.8) του Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.9)$$

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις του Maxwell καθώς και η εξίσωση της συνέχειας αποτελούν τις δυναμικές εξισώσεις για τον υπολογισμό των \vec{B} και \vec{E} , όταν δίνεται η πυκνότητα ρεύματος \vec{J} . Από τις σχέσεις (1.7) - (1.9) αποδεικνύονται εύκολα οι παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot B) = 0 \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot E - \rho) = 0 \quad (1.11)$$

Στις παραπάνω σχέσεις έχουμε υποθέσει ότι η σειρά της διαφορίσης μπορεί να εναλλαγεί. Δε θα ασχοληθούμε με τέτοιας φύσεως μαθηματικά προβλήματα σε αυτό το κεφάλαιο. Οι σχέσεις (1.5) και (1.6) αποτελούν οριακές συνθήκες με την έννοια των αρχικών συνθηκών. Αν ισχύουν σε κάποια σε κάποια συγκεκριμένη χρονική, ισχύουν για κάθε χρονική στιγμή. Λόγω της (1.6), η μαγνητική επαγωγή μπορεί να γραφεί ως περιστροφή ενός διανυσματικού δυναμικού, καθώς για οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση ισχύει $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$. Εισάγουμε το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό A :

$$B = \nabla \times A \quad (1.12)$$

Με τη βοήθεια της (1.7) μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.13)$$

Οπότε μπορούμε να εισάγουμε το βαθμωτό δυναμικό Φ , (καθώς για οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση ισχύει $\nabla \times (\nabla \cdot \Phi) = 0$, άρα θα ισχύει και $\nabla \times (-\nabla \cdot \Phi) = 0$, που ικανοποιεί τη σχέση:

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} - \nabla \Phi \quad (1.14)$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις των \vec{B} και \vec{E} όπως εμφανίζονται στις σχέσεις (1.12) και (1.14) αντίστοιχα στις σχέσεις (1.5) και (1.8) προκύπτουν οι ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 J + \nabla X \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \frac{\partial X}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\text{όπου} \quad X = \frac{1}{c^2} \nabla A + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.16)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Helmholtz στη διανυσματική ανάλυση, ένα διάνυσμα \vec{F} είναι μοναδικά ορισμένο αν και μόνο αν έχουν καθοριστεί η περιστροφή ($\nabla \times \vec{F}$) και η απόκλιση του ($\nabla \cdot \vec{F}$). Στην εξίσωση (1.12) έχουμε καθορίσει μόνο το στροβιλισμό του \vec{A} . Μπορούμε όμως να επιλέξουμε την απόκλιση του \vec{A} , έτσι ώστε οι διαφορικές εξισώσεις (1.15) να έχουν την απλούστερη δυνατή μορφή. Παρατηρώντας προσεκτικά

τα αριστερά μέλη των εξισώσεων (1.15) είναι βολικό για ένα ικανοποιητικό αριθμό περιπτώσεων να επιλέξουμε:

$$X = 0 \Rightarrow \nabla \cdot A = -c^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.17)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γνωστή ως συνθήκη του Lorentz. Με τη βοήθεια της (1.17), οι σχέσεις (1.15) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\mu_0 J \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Με την ανωτέρω επιλογή των συναρτήσεων δυναμικού, κάθε μία από τις διαφορικές εξισώσεις που ικανοποιούν τα δυναμικά, ικανοποιεί την αντίστοιχη κυματική εξίσωση. Από αυτές προκύπτει ότι το διανυσματικό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών ρεύματος, ενώ το βαθμωτό δυναμικό εξαρτάται από την κατανομή των πηγών φορτίου. Ασφαλώς οι δύο αυτές κατανομές συνδέονται μέσω της εξίσωσης της συνέχειας, γεγονός άλλωστε που επιβεβαιώνει την αλληλεξάρτηση των \vec{A} και Φ μέσω της συνθήκης του Lorentz. Οι εξισώσεις αυτές έχουν ως λύσεις κυματικές συναρτήσεις. Ενδεικτικά και κυρίως για λόγους φυσικής ερμηνείας εξετάζεται η απλή περίπτωση χώρου χωρίς πηγές. Τότε η (1.18) γράφεται:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.19)$$

Αντίστοιχη είναι και η διανυσματική διαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από το διανυσματικό δυναμικό:

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (1.20)$$

Η πλέον απλή περίπτωση για τη λύση της (1.19) προκύπτει όταν το βαθμωτό δυναμικό είναι συνάρτηση μιας μόνο χωρικής μεταβλητής, δηλαδή $\Phi = \Phi(z, t)$. Στην περίπτωση αυτή η γενική λύση της (1.19) είναι της μορφής

$$\Phi(z, t) = f(t - z/c) + g(t + z/c) \quad (1.21)$$

όπου f και g αυθαίρετες διπλά διαφορίσιμες συναρτήσεις. Η συνάρτηση $f(t - z/c)$ είναι κυματική συνάρτηση που παριστάνει κύμα που οδεύει κατά τη θετική φορά του άξονα των z , ενώ η $g(t + z/c)$ παριστάνει κύμα που οδεύει κατά την αρνητική φορά του άξονα z . Οι γενικές λύσεις των (1.19) και (1.20) προκύπτουν υπό τη μορφή των χωρικών ολοκληρωμάτων σε αναλογία προς τις αντίστοιχες λύσεις της εξίσωσης Poisson που προκύπτει από (1.18) στη στατική περίπτωση ($\partial/\partial t = 0$).

Το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\Phi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{R} \rho(x', y', z', t - R/c) dV' \quad (1.22)$$

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{1}{R} \rho(x', y', z', t - R/c) dV' \quad (1.23)$$

$$\text{όπου } R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Είναι σημαντικό να καταλάβει κανείς ότι οι (1.18) είναι δυναμικές εξισώσεις για το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό, ενώ η (1.15) είναι μια οριακή συνθήκη. Όσο και αν φαίνεται ότι έχουμε τρεις εξισώσεις για τις ποσότητες \vec{A} και Φ (τις σχέσεις (1.17)-(1.18)), στην πραγματικότητα η μια από αυτές είναι οριακή συνθήκη. Πιο συγκεκριμένα, για διάφορους λόγους, όπως το αναλλοίωτο των μετασχηματισμών Lorentz, είναι βολικό να χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (1.18) σαν τις δυναμικές εξισώσεις, και σα συνέπεια των εξισώσεων αυτών να δεχτούμε ότι το X ικανοποιεί, με τη βοήθεια της εξίσωσης της συνέχειας, την παρακάτω ομογενή εξίσωση:

$$\nabla^2 X - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = -\mu_0 \left(\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.24)$$

Έτσι η (1.17) ισχύει κάθε φορά αρκεί να έχουμε σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή την οριακή συνθήκη:

$$X = \frac{\partial X}{\partial t} = 0 \quad (1.25)$$

Το γεγονός ότι υπάρχουν δύο οριακές συνθήκες εδώ αντί για μια που υπάρχει στην (1.5) οφείλεται στο γεγονός ότι στην (1.18) έχουμε δεύτερη χρονική παράγωγο ενώ η (1.17) περιέχει πρώτη χρονική παράγωγο.

Παρά το γεγονός ότι οι εξισώσεις του Maxwell παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από τους μετασχηματισμούς του Lorentz αυτή η ιδιότητά τους στις περισσότερες περιπτώσεις δεν έχει καμιά σημασία σε προβλήματα μηχανικών. Αντίθετα το αναλλοίωτο κάτω από μετασχηματισμούς χρόνου συχνά συναντάται. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι θεμιτό τις περισσότερες φορές να χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός Fourier ως προς το χρόνο, έτσι ώστε να αντικαθίσταται η ανεξάρτητη μεταβλητή του χρόνου με την παράμετρο ω δηλαδή την κυκλική συχνότητα. Πιο συγκεκριμένα ας θέσουμε:

$$E(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.26)$$

$$\Phi(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(r, \omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

Το $E(r, t)$ είναι πραγματική συνάρτηση που σημαίνει ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$E(r, t) - E^*(r, t) = 0 \quad (1.27)$$

$$\text{οπότε} \int_{-\infty}^{+\infty} [E(r, \omega) - E^*(r, \omega)] e^{-i\omega t} d\omega = 0 \quad (1.28)$$

Από τη σχέση (1.28) κι αν αναλογιστεί κανείς ότι η μηδενική συνάρτηση είναι η μοναδική με μηδενικό μετασχηματισμό Fourier προκύπτει εύλογα η παρακάτω σχέση:

$$E(r, \omega) = E^*(r, -\omega) \quad (1.29)$$

Αύτη η συμμετρία ισχύει και για τα υπόλοιπα μεγέθη που έχουν εμφανιστεί παραπάνω όπως τα \vec{A} , \vec{B} , Φ , \vec{J} , ρ κτλ. Επίσης συνηθίζεται λόγω αυτής της συμμετρίας να θεωρούμε μόνο θετικές τιμές του ω .

Οι θεμελιώδεις εξισώσεις του Maxwell που χαρακτηρίζουν το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στην περίπτωση ημιτονοειδούς χρονικής μεταβολής πηγών και πεδίων, με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Fourier λαμβάνουν τη μορφή:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.30)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (1.32)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (1.33)$$

Η υπόθεση αυτή, δηλαδή της ημιτονοειδούς εξάρτησης από το χρόνο γίνεται για να ελαχιστοποιήσουμε τη χρονική εξάρτηση από τις εξισώσεις του Maxwell, συνεπώς να ελαττώσουμε τη χωρο-χρονική εξάρτηση σε χωρική εξάρτηση μόνο. Ομοίως η εξίσωση της συνέχειας γράφεται ως εξής:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -j\omega \rho \quad (1.34)$$

Το διανυσματικό και το βαθμωτό δυναμικό δίνονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (1.35)$$

$$\vec{E} = -\nabla \phi - j\omega \vec{A} \quad (1.36)$$

Υποθέτοντας ότι εξακολουθούμε να δεχόμαστε τη συνθήκη του Lorentz οι εξισώσεις (1.17) και (1.18) με την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (1.37)$$

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.38)$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega\mu\epsilon\phi \quad (1.39)$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι χρησιμοποιούμε σ' αυτό το κεφάλαιο το $e^{i\omega t}$ αντί για το $e^{-i\omega t}$.

Από την (1.36) προκύπτει ότι η έκφραση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου συναρτήσεται μόνο του διανυσματικού δυναμικού δίνεται από τη σχέση:

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\left(\frac{\omega}{k^2}\right)\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (1.40)$$

Οι γενικές λύσεις των κυματικών εξισώσεων που προκύπτουν από τις παραπάνω εξισώσεις για το βαθμωτό δυναμικό και το διανυσματικό δυναμικό στην περίπτωση ημιτονοειδούς μεταβολής ως προς το χρόνο μεταπίπτουν στις

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \rho(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (1.41)$$

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \vec{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dV' \quad (1.42)$$

1.4 Η συνάρτηση Green και οι συνθήκες εκπομπής

Η σχέση μεταξύ των χρονικά εξαρτημένων μεγεθών E , B , A , Φ με τις αντίστοιχες χρονικά ανεξάρτητες ποσότητες που προκύπτουν από την εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier, δεν είναι τόσο προφανής όσο φαίνεται. Ο λόγος είναι ο ακόλουθος. Οι κυματικές εξισώσεις (1.18) για τις χρονικά εξαρτημένες ποσότητες, είναι υπερβολικές, με συνέπεια να έχουν μοναδικές λύσεις για δεδομένες αρχικές συνθήκες. Αντίθετα, οι αντίστοιχες εξισώσεις για τις χρονικά ανεξάρτητες ποσότητες, είναι ελλειπτικές διαφορικές εξισώσεις κι έτσι χρειάζονται κάποιες οριακές συνθήκες για να μας δώσουν μοναδικές λύσεις. Αυτές οι επιπρόσθετες οριακές συνθήκες που απαιτούνται, είναι οι συνθήκες εκπομπής του Sommerfield.

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε τη συνάρτηση του Green. Η συνάρτηση Green παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη λύση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων. Η συνάρτηση αυτή, είναι μια λύση στην περίπτωση σημειακής πηγής (γραμμικής πηγής σε δισδιάστατα προβλήματα). Ειδικότερα, αν η εξίσωση του προβλήματος είναι:

$$L(f(r)) = -g(r)$$

όπου $f(r)$, η άγνωστη συνάρτηση, L γραμμικός τελεστής και $g(r)$ η κατανομή της πηγής. Τότε η συνάρτηση Green είναι η λύση της:

$$L(G(r, r')) = -\delta(r - r') \quad (1.43)$$

όπου $\delta(r - r')$ είναι η δ -συνάρτηση Dirac.

Αν η συνάρτηση του Green ικανοποιεί τις ίδιες οριακές συνθήκες με την $f(r)$, η συνάρτηση $f(r)$ μπορεί να εκφραστεί, χρησιμοποιώντας την G :

$$f(r) = \int_V g(r')G(r, r')dv'$$

Η συνάρτηση του Green στον ελεύθερο χώρο, χωρίς όρια που ικανοποιεί την εξίσωση (1.43), εξαρτάται μόνο από τις συνθήκες εκπομπής. Η συνάρτηση του Green για την τρισδιάστατη βαθμωτή εξίσωση του Helmholtz, ικανοποιεί:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r - r') \quad (1.44)$$

Από τη στιγμή που η συνάρτηση του Green οφείλεται σε σημειακή πηγή, η G είναι σφαιρικά συμμετρική ως προς τη θέση της σημειακής πηγής r' . Επομένως, αν η αρχή του συστήματος συντεταγμένων τοποθετηθεί στο r' , τότε η G είναι συνάρτηση μόνο του r και η (1.44) γίνεται:

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(r) \quad (1.45)$$

Από τη στιγμή, που η $\delta(r)$ είναι 0, εκτός από την αρχή των αξόνων, οι λύσεις της (1.45) είναι:

$$G = \frac{C e^{\pm jkr}}{r}$$

όπου C είναι μία σταθερά. Δεδομένης της χρονικής μεταβολής, μόνο η δεύτερη από τις δύο λύσεις είναι ένα κύμα που απομακρύνεται από την πηγή. Η σταθερά C υπολογίζεται από τη σχέση (1.45) και την εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss, $C = 1/4\pi$, οπότε:

$$G = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

Συνεπώς, αν r είναι η απόσταση από την αρχή των συντεταγμένων, η λύση γίνεται:

$$G = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (1.46)$$

από όπου φαίνεται ότι η G είναι συμμετρική.

Αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Gauss, στη δισδιάστατη περίπτωση, όπως κάναμε και για το τρισδιάστατο πρόβλημα, προκύπτει ότι η σταθερά $C = 1/4j$. Η λύση G προκύπτει:

$$G = \frac{1}{4j} H_o^{(2)}(k|\rho - \rho'|)$$

Πιο πάνω, είδαμε ότι απαλείψαμε τον όρο $\frac{C e^{jkr}}{r}$ από τη λύση της G. Να πούμε ότι ο πιο απλός τρόπος να γίνει αυτό είναι να προσθέσουμε τον απλό κανόνα: όλοι οι όροι που είναι ανάλογοι με τις πηγές J, ρ και συμπεριφέρονται σαν το $\frac{C e^{jkr}}{r}$, όταν το $r \rightarrow \infty$, πρέπει να απαλείφονται. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να εφαρμόσουμε τη συνθήκη εκπομπής του Sommerfield:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial Q}{\partial r} - ikQ \right) = 0$$

για οποιαδήποτε καθορισμένη κατεύθυνση. Στην παραπάνω σχέση το Q είναι μια βαθμωτή φυσική ποσότητα ή μια οποιαδήποτε ορθογώνια συνιστώσα μιας διανυσματικής φυσικής ποσότητας.

1.5 Ολοκληρωτικές εξισώσεις

Ολοκληρωτική εξίσωση είναι κάθε εξίσωση που περιλαμβάνει κάποια άγνωστη συνάρτηση Φ κάτω από το ολοκλήρωμα. Απλές μορφές ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι οι μετασχηματισμοί Fourier, Laplace και Hankel.

Οι γραμμικές ολοκληρωτικές εξισώσεις, που μελετώνται πιο συχνά χωρίζονται σε δύο κατηγορίες που έχουν πάρει το όνομά τους από τους Fredholm και Volterra. Η μία κατηγορία, την οποία και θα παρουσιάσουμε εδώ, είναι οι εξισώσεις Fredholm πρώτου δευτέρου και τρίτου είδους:

$$f(x) = \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt \quad (1.47)$$

$$f(x) = \Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt \quad (1.48)$$

$$f(x) = a(x)\Phi(x) - \lambda \int_a^b K(x,t)\Phi(t)dt \quad (1.49)$$

όπου λ είναι βαθμωτή ή μιγαδική παράμετρος. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $K(x,t)$ καθώς και τα όρια a, b είναι γνωστά, ενώ η $\Phi(x)$ είναι άγνωστη. Η συνάρτηση $K(x,t)$ είναι γνωστή ως ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

Γενικά υπάρχουν πολλές μορφές ολοκληρωτικών εξισώσεων. Δύο από τις πιο δημοφιλείς ολοκληρωτικές εξισώσεις είναι η ολοκληρωτική εξίσωση ηλεκτρικού πεδίου (electric-field integral equation EFIE) και η ολοκληρωτική εξίσωση μαγνητικού πεδίου (magnetic-field integral equation MFIE). Η EFIE εφαρμόζει τις οριακές συνθήκες στο εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο, ενώ η MFIE τις εφαρμόζει στην εφαπτομενική συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου. Η EFIE έχει ισχύ και για κλειστές και για ανοιχτές επιφάνειες, ενώ η MFIE ισχύει μόνο για κλειστές επιφάνειες. Για προβλήματα εκπομπής, μια δημοφιλής EFIE είναι η ολοκληρωτική εξίσωση Pocklington. Μια εξίσωση που εφαρμόζει τις οριακές συνθήκες στο εφαπτομενικό διανυσματικό δυναμικό είναι η εξίσωση του Hallén.

Στη συνέχεια θα εξάγουμε και θα εφαρμόσουμε τις δύο τρισδιάστατες ολοκληρωτικές εξισώσεις, που αναφέρονται ως ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén και ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση του Pocklington.

1.5.1 Ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Pocklington

Για να βρούμε την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην επιφάνεια του σωληνοειδούς διπόλου χρησιμοποιούμε δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος που θα παρουσιασθεί σε αυτή την ενότητα είναι να υπερθέσουμε τις συνεισφορές όλων των σημείων που βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια του σωληνοειδούς. Το διπλό ολοκλήρωμα που προκύπτει είναι το αριστερό μέλος της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Ο δεύτερος τρόπος προκύπτει από την οριακή συνθήκη για τη z - συνιστώσα του

ηλεκτρικού πεδίου ανάλογα με το μοντέλο τροφοδοσίας που χρησιμοποιούμε και θα παρουσιασθεί στις επόμενες δύο ενότητες για δύο διαφορετικά μοντέλα τροφοδοσίας και είναι το δεξί μέλος της εξίσωσης.

Εκφράζουμε το $E_z(a, z)$ (δηλαδή τη z -συνιστώσα του \vec{E} πάνω στην επιφάνεια της κεραίας) ως συνάρτηση του $I(z)$. Ως συνήθως, βρίσκουμε τέτοιες εκφράσεις χρησιμοποιώντας το διανυσματικό δυναμικό \vec{A} . Θα χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό τις σχέσεις (1.13) και (1.15).

Εξαιτίας του ηλεκτρικού πεδίου, αναπτύσσεται ένα ολικό επιφανειακό ρεύμα K του οποίου η ϕ -συνιστώσα είναι μηδέν λόγω συμμετρίας. Η z -συνιστώσα K_z είναι το άθροισμα ενός επιφανειακού ρεύματος $K_{z,\text{out}}(z)$ στο εξωτερικό μέρος του σωλήνα, αλλά και ενός ρεύματος $K_{z,\text{in}}(z)$ στο εσωτερικό του. Το ολικό ρεύμα ορίζεται ως

$$I(z) = 2\pi a [K_{z,\text{out}}(z) + K_{z,\text{in}}(z)], \quad -L/2 < z < L/2 \quad (1.50)$$

Λόγω συμμετρίας, η $I(z)$ είναι άρτια συνάρτηση. Επειδή τα επιφανειακά ρεύματα είναι γενικά συνεχή, στο άκρο $z = L/2$ του σωληνοειδούς διπόλου θα έχουμε $K_{z,\text{out}}(L/2) = -K_{z,\text{in}}(L/2)$, οπότε

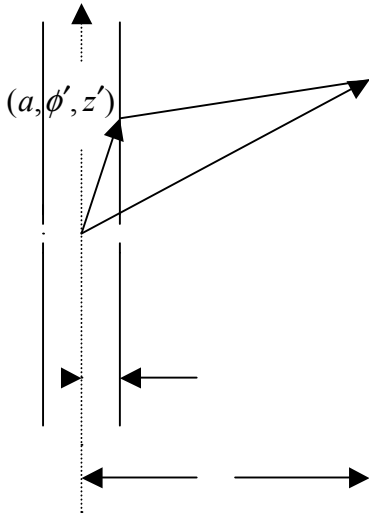
$$I(\pm L/2) = 0 \quad (1.51)$$

δηλαδή το ρεύμα $I(z)$ μηδενίζεται στα άκρα του σωλήνα. Σε ό,τι ακολουθεί, θέλουμε να προσδιορίσουμε το $I(z)$ μέσω των εξισώσεων Maxwell και των οριακών συνθηκών.

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες ρ, ϕ, z όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3. Επειδή το ρεύμα έχει μόνο z -συνιστώσα, το \vec{A} θα έχει και αυτό μόνο z -συνιστώσα. Αυτό φαίνεται από την (1.42). Λόγω συμμετρίας, το \vec{A} θα είναι ανεξάρτητο του ϕ . Έτσι, οι γενικές σχέσεις (1.40) και (1.42) γράφονται

$$\begin{aligned} E_z(\rho, z) &= -\frac{j\omega}{k_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) A_z(\rho, z) \\ &= -\frac{j\omega}{k_0^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{I(z')}{2\pi a} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} a d\phi' dz' \end{aligned} \quad (1.52)$$

όπου η (1.50) χρησιμοποιήθηκε για το ολικό επιφανειακό ρεύμα $K_{z,\text{out}}(z') + K_{z,\text{in}}(z') = \frac{I(z')}{2\pi a}$. Η (1.52) δίνει την z -συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου σε οποιοδήποτε σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) . Το R είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από το σημείο πηγής (πάνω στην κεραία, με κυλινδρικές συντεταγμένες (a, ϕ', z')), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.



Σχήμα 3: Σημείο παρατήρησης (ρ, ϕ, z) , σημείο πηγής (a, ϕ', z') , και απόσταση R μεταξύ τους.

Ενώ το ϕ εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (1.52), αυτό είναι τελικά ανεξάρτητο του ϕ και μπορούμε να θέσουμε $\phi = 0$. Ειδικεύουμε τώρα την (1.52) για σημεία παρατήρησης $(\rho, 0, z) = (a, 0, z)$ πάνω στην επιφάνεια της κεραίας (βλ. Σχήμα 4). Συνεπώς το σημείο παρατήρησης έχει συντεταγμένες $(a, 0, z)$ ενώ το σημείο πηγής (a, ϕ', z') .

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = \sqrt{(a-a \cos \phi')^2 + a^2 \sin^2 \phi' + (z-z')^2} \Rightarrow$$

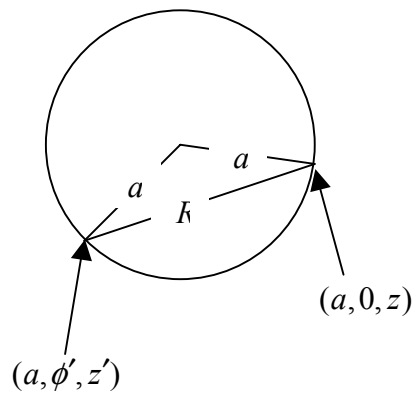
$$R = \sqrt{a^2 \left[(1 - \cos \phi')^2 + \sin^2 \phi' \right] + (z-z')^2} = \sqrt{2a^2(1 - \cos \phi') + (z-z')^2}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{1 - \cos \phi}{2}$$

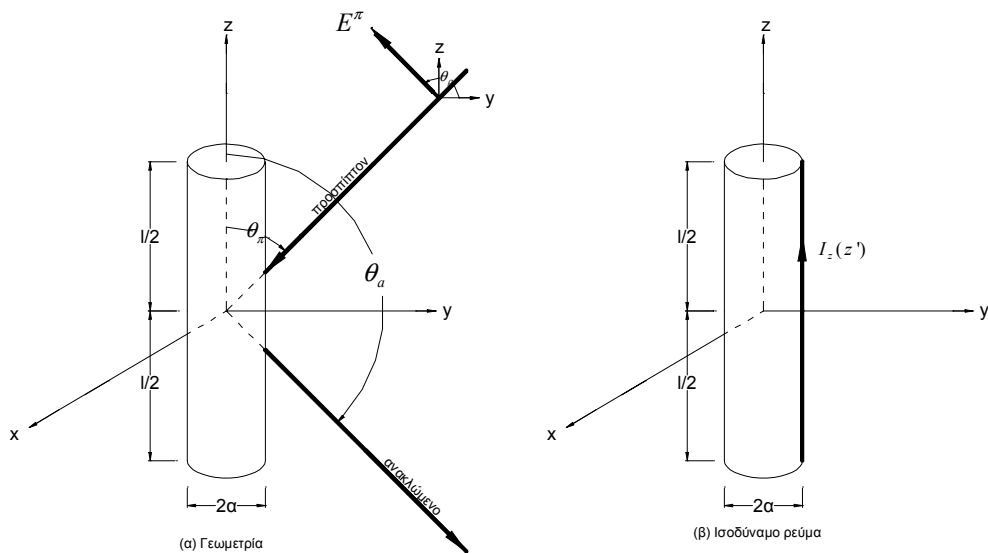
βρίσκουμε ότι η απόσταση R των $(a, 0, z)$ και (a, ϕ', z') δίνεται από τη σχέση

$$R = \sqrt{(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2 \left(\frac{\phi'}{2} \right)} \quad (1.53)$$



Σχήμα 4: Για σημεία παρατήρησης πάνω στην επιφάνεια της κεραίας, η απόσταση R δίνεται από τη σχέση (8). Εδώ δείχνουμε προβολή στο επίπεδο $z=0$. Η προβολή του R είναι $2a \left| \sin \left(\frac{\phi'}{2} \right) \right|$, με μέγιστη τιμή $2a$ και ελάχιστη τιμή 0 .

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα διαφορετικό τρόπο, για να καταλήξουμε στην ίδια σχέση για την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου.



Σχήμα 5: Ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει πάνω σε αγώγιμο σωλήνα

Για να εξάγουμε την ολοκληρωτική εξίσωση του Pocklington, θα αναφερθούμε στο σχήμα 5. Παρόλο που η διαδικασία είναι γενική μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε όταν ο αγωγός είναι ανακλαστήρας, είτε κεραία. Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο κύμα προσπίπτει στην επιφάνεια ενός αγωγού, όπως φαίνεται στο σχήμα 5, και αναφέρεται ως το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο $E^\pi(\rho)$. Όταν ο αγωγός είναι κεραία, το προσπίπτον κύμα παράγεται από την πηγή τροφοδοσίας στο διάκενο, όπως φαίνεται στο σχήμα 7. Ένα μέρος του προσπίπτοντος κύματος επάγει στην επιφάνεια του αγωγού μια επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος J_s (amperes ανά m^2). Η επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος J_s επανακτινοβολεί και παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο που αναφέρεται ως το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο $E^a(\rho)$. Συνεπώς, σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου το ολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι το άθροισμα του προσπίπτοντος και του ανακλώμενου πεδίου, ή:

$$E^o(\rho) = E^\pi(\rho) + E^a(\rho) \quad (1.54)$$

όπου

$E^o(\rho)$ = ολικό ηλεκτρικό πεδίο

$E^\pi(\rho)$ = προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο

$E^a(\rho)$ = ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο

Όταν το σημείο παρατήρησης μετακινηθεί στην επιφάνεια του διπόλου ($\rho = a$) και το δίπολο είναι τέλειος αγωγός, το ολικό εφαπτομενικό ηλεκτρικό πεδίο μηδενίζεται. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες, το ηλεκτρικό πεδίο που ακτινοβολείται από το δίπολο έχει ακτινική συνιστώσα (E_ρ) και εφαπτομενική συνιστώσα (E_z). Έτσι στην επιφάνεια του αγωγού η εφαπτομενική συνιστώσα της (1.54) γίνεται

$$E_z^o(\rho = a) = E_z^\pi(\rho = a) + E_z^a(\rho = a) = 0$$

ή

$$E_z^a(\rho = a) = -E_z^\pi(\rho = a) \quad (1.55)$$

Γενικά, το ανακλώμενο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την επαγόμενη πυκνότητα ρεύματος J_s δίνεται από τη σχέση (1.40), ή:

$$E^a(\rho) = -j\omega A - j\frac{\omega}{k^2}\nabla(\nabla \cdot A) = -\frac{j\omega}{k^2}\left[k^2 A + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\right] \quad (1.56)$$

Όμως για παρατηρήσεις στην επιφάνεια του διπόλου, μόνο η z-συνιστώσα της (1.56) χρειάζεται, και μπορούμε να γράψουμε

$$E_z^a(\rho) = -\frac{j\omega}{k^2}\left[k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right] \quad (1.57)$$

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες το ηλεκτρικό πεδίο που ακτινοβολείται από τον αγωγό έχει μόνο ακτινική και αξονική συνιστώσα, όπως είπαμε και προηγουμένως (E_ρ και E_z). Αυτό φαίνεται κι από τις εξισώσεις (1.12) και (1.8) όπου:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} = -\hat{a}_\phi \frac{1}{\mu} \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \quad (1.58)$$

και

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (1.59)$$

δηλαδή το \vec{E} θα έχει τη μορφή:

$$\vec{E} = \hat{a}_\rho \vec{E}_\rho + \hat{a}_z \vec{E}_z = -\hat{a}_\rho \frac{1}{j\omega\epsilon\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho H_\phi) + \hat{a}_z \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_\phi}{\partial z} \quad (1.60)$$

Γενικά, το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_s μπορεί να υπολογιστεί συναρτήσει του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} ξεκινώντας από την curl εξίσωση Maxwell και τη σχέση (1.12):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \Rightarrow \\ \nabla \times \vec{E} &= -j\omega(\nabla \times \vec{A}) \Rightarrow \\ \nabla \times [\vec{E} + j\omega\vec{A}] &= 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

Από τη διανυσματική ταυτότητα $\nabla \times (-\nabla\Phi) = 0$, όπου Φ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που αναπαριστά ένα τυχαίο ηλεκτρικό βαθμωτό δυναμικό σε συνάρτηση θέσης, παίρνουμε με αντικατάσταση στην (1.61):

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla\Phi \quad (1.62)$$

Παίρνοντας το στροβιλισμό της εξίσωσης (1.58) και χρησιμοποιώντας τη διανυσματική ταυτότητα $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ παίρνουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mu\vec{H}) &= \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \Rightarrow \\ \mu(\nabla \times \vec{H}) &= \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Όμως εξισώνοντας με τη εξίσωση του Maxwell $\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\epsilon\vec{E}$ έχουμε:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu\vec{J} + j\omega\mu\epsilon\vec{E} \quad (1.64)$$

Με αντικατάσταση της (1.62) στην παραπάνω σχέση:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\Phi) \quad (1.65)$$

όπου $k^2 = \omega^2 \mu\epsilon$. Για διάφορους λόγους, αλλά κυρίως για απλοποίηση της (1.65), όπως έχουμε ξαναδεί, κάνουμε χρήση της συνθήκης του Lorentz σύμφωνα με την οποία απαιτούμε:

$$\nabla \cdot \vec{A} + j\omega\mu\epsilon\Phi = 0 \quad (1.66)$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε την απόκλιση του διανυσματικού δυναμικού \vec{A} , η οποία είναι ανεξάρτητη από το στροβιλισμό του \vec{A} ως εξής:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{A} &= -j\omega\mu\epsilon\Phi \Rightarrow \\ \Phi &= -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla \cdot \vec{A} \end{aligned} \quad (1.67)$$

Με εφαρμογή της συνθήκης του Lorentz η (1.65) γίνεται:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (1.68)$$

Λόγω της (1.62) και της (1.67), βρίσκουμε τελικά το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την πυκνότητα ρεύματος \vec{J}_s :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \Rightarrow \\ \vec{E} &= -j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left[k^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \right] \end{aligned} \quad (1.69)$$

Εφόσον μας ενδιαφέρει μόνο η επιφάνεια του αγωγού, μόνο η z-συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου της (1.69) είναι χρήσιμη. Δηλαδή η (1.69) γίνεται:

$$E_z = -j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left[k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \quad (1.70)$$

Απομένει λοιπόν για τον υπολογισμό του $E^a(\rho)$, να εκφράσουμε το διανυσματικό δυναμικό A_z , το οποίο θα βρούμε από τη λύση της εξίσωσης (1.68), κι αφού η πυκνότητα ρεύματος έχει κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z, η (1.68) γράφεται:

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z \quad (1.71)$$

Θεωρούμε ότι η πηγή βρίσκεται στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Μία λύση για την παραπάνω εξίσωση (μορφή εξίσωσης Poisson), που ικανοποιεί τη συνθήκη εκπομπής, μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή:

$$A = J * G \quad (1.75)$$

όπου J η ρευματική πυκνότητα και G η συνάρτηση του Green, που έχει τη μορφή:

$$G = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

και ο αστερίσκος συμβολίζει την πράξη της συνέλιξης. Επομένως, θα έχουμε τη γενική λύση:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{J_z e^{-jkr}}{r} dV, \quad (1.77)$$

ή διανυσματικά γράφουμε:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \frac{e^{-jkr}}{r} dV, \quad (1.78)$$

Στο πρόβλημα που μελετάμε, το οποίο περιγράφεται από τη γεωμετρία του σχήματος 5, η πυκνότητα ρεύματος είναι επιφανειακή. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, η (1.78) γίνεται:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S J_z \frac{e^{-jkR}}{R} ds' = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\pi}^{\pi} J_z \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' dz' \quad (1.79)$$

Αν το δίπολο είναι πολύ λεπτό, η ρευματική πυκνότητα J_z δεν είναι μια συνάρτηση της αζιμουθιακής γωνίας ϕ , και μπορεί να γραφεί ως:

$$2\pi a J_z = I_z(z') \Rightarrow J_z = \frac{1}{2\pi a} I_z(z') \quad (1.80)$$

όπου το $I_z(z')$ υποτίθεται ότι είναι το ισοδύναμο γραμμικό ρεύμα που βρίσκεται σε ακτινική απόσταση $\rho=a$ από τον z -άξονα όπως φαίνεται στο Σχήμα 9(α). Έτσι η (1.79) γίνεται:

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2\pi a} \int_{-\pi}^{\pi} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' \right] dz' \quad (1.81)$$

Το R είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από το σημείο πηγής (πάνω στην κεραία, με κυλινδρικές συντεταγμένες (a, ϕ', z')), όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \quad (1.82)$$

Για κυλινδρικές συντεταγμένες ισχύει $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$, $z = z$ και συνεπώς η (1.82) γίνεται:

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{(\rho \cos \phi - a \cos \phi')^2 + (\rho \sin \phi - a \sin \phi')^2 + (z - z')^2} \\
&= \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}
\end{aligned} \tag{1.83}$$

όπου ρ είναι η ακτινική απόσταση από το σημείο παρατήρησης και a η ακτίνα του διπόλου.

Ενώ το ϕ εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (1.81), αυτό είναι τελικά ανεξάρτητο του ϕ και μπορούμε να θέσουμε $\phi = 0$. Ειδικεύουμε τώρα την (1.81) για σημεία παρατήρησης $(\rho, 0, z) = (a, 0, z)$ πάνω στην επιφάνεια της κεραίας (βλ. Σχήμα 4). Συνεπώς το σημείο παρατήρησης έχει συντεταγμένες $(a, 0, z)$ ενώ το σημείο πηγής (a, ϕ', z') .

$$\begin{aligned}
R &= \sqrt{(a - a \cos \phi')^2 + (a \sin \phi')^2 + (z - z')^2} \\
&= \sqrt{a^2 \left[(1 - \cos \phi')^2 + \sin^2(\phi') \right] + (z - z')^2} \\
&= \sqrt{2a^2 (1 - \cos \phi') + (z - z')^2}
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{1 - \cos \phi}{2}$$

βρίσκουμε ότι η απόσταση R των $(a, 0, z)$ και (a, ϕ', z') δίνεται από τη σχέση:

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + 4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right)} \tag{1.84}$$

Η (1.81) γίνεται:

$$A_z(\rho = a) = \mu \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR}}{R} d\phi' \right) dz' = \mu \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K(z, z') dz' \tag{1.85}$$

όπου

$$K(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \quad (1.86)$$

Συνεπώς για σημεία παρατήρησης στην επιφάνεια του διπόλου, η z-συνιστώσα του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E_z^a(\rho = a) = -\frac{j}{\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K(z, z') dz' \quad (1.87)$$

η οποία χρησιμοποιώντας την (1.55) γίνεται:

$$-\frac{j}{\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K(z, z') dz' = -E_z^{\pi}(\rho = a)$$

ή

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K(z, z') dz' = -j\omega\epsilon E_z^{\pi}(\rho = a) \quad (1.88)$$

όπου η $K(z, z')$ δίνεται από την (1.86) .

Η εξίσωση (1.88) αναφέρεται ως ολοκληρωτική εξίσωση Pocklington και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση του γραμμικού ρεύματος του διπόλου και συνεπώς της ρευματικής πυκνότητας, γνωρίζοντας το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του διπόλου.

Αν υποθέσουμε ότι το δίπολο είναι πολύ λεπτό ($a \ll \lambda$) έτσι ώστε η (1.86) όπως θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο να μεταπίπτει στην:

$$K(z, z') = K(R) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} \quad (1.89)$$

στην (1.88) μπορεί να γίνει εναλλαγή της ολοκλήρωσης με τη διαφόριση:

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \left[\left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) K(z, z') \right] dz' = -j\omega\epsilon E_z^{\pi}(\rho = a)$$

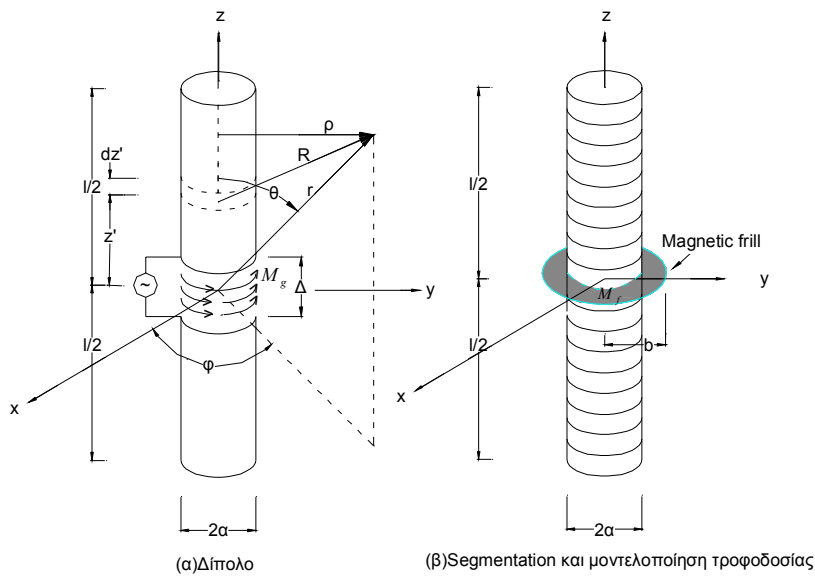
η οποία μπορεί να εκφραστεί σε μια πιο βολική μορφή όπως θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο:

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} \left[(1 + jkR)(2R^2 - 3a^2) + (kaR)^2 \right] dz' = -j\omega\epsilon E_z^{\pi}(\rho = a) \quad (1.90)$$

όπου οι παρατηρήσεις γίνονται κατά μήκος του z-άξονα του διπόλου ($\rho=0$):

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (1.91)$$

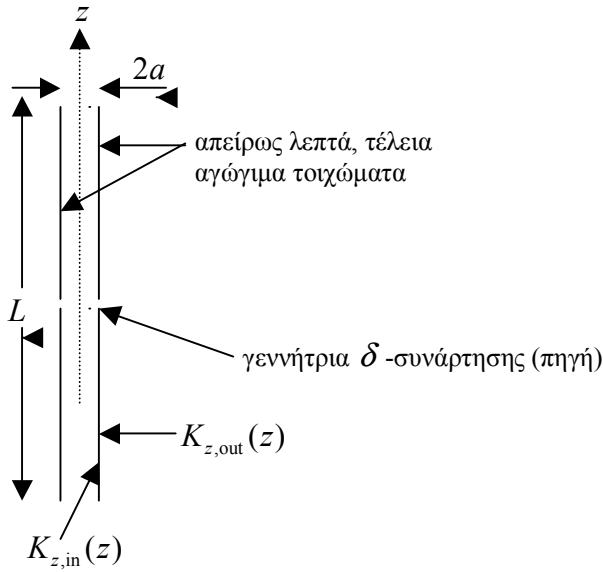
Ας υποθέσουμε ότι το δίπολο μας τροφοδοτείται συμμετρικά από πηγή τάσης. Για να βρούμε την εξίσωση Rocklington πρέπει να γνωρίζουμε πώς να εκφράσουμε τη z-συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου $E_z(a,z)$. Θα παρουσιάσουμε δύο μεθόδους που χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν τη διέγερση της κεραίας κι αναπαριστούν το $E_z(a,z)$ σε όλα τα σημεία της επιφάνειας του διπόλου: Η μία αναφέρεται ως διέγερση delta-gap ή γεννήτρια delta-function και η άλλη ως το ισοδύναμο ρεύμα magnetic frill ή γεννήτρια magnetic-frill. Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι δύο αυτές μέθοδοι και προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση Rocklington.



Σχήμα 7: Κυλινδρικό δίπολο και μοντελοποίηση τροφοδοσίας delta gap και magnetic frill

1.5.1.1 Γεννήτρια δέλτα-συνάρτησης ή delta function generator

Η μοντελοποίηση πηγής delta-gap είναι η απλούστερη και η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη από τις δύο, αλλά είναι κι η λιγότερο ακριβής, ειδικά όσον αφορά τις αντιστάσεις εισόδου. Χρησιμοποιώντας το διάκενο δέλτα υποθέτουμε ότι η διέγερση τάσης στους ακροδέκτες τροφοδοσίας είναι σταθερής τιμής V και 0 οπουδήποτε αλλού.



Σχήμα 6: Το σωληνοειδές δίπολο. Η γεννήτρια δ -συνάρτησης διατηρεί δυναμικό V στο απειροστά μικρό διάκενο που βρίσκεται στο $z = 0$.

Το σωληνοειδές δίπολο φαίνεται στο Σχήμα 6. Στο κέντρο $z = 0$ του σωλήνα, υπάρχει ένα απειροστά μικρό διάκενο (infinitesimal gap) στο οποίο βρίσκεται η λεγόμενη γεννήτρια δ -συνάρτησης (delta-function generator). Αυτή διατηρεί ένα δυναμικό V στο διάκενο, έτσι ώστε το βαθμωτό ηλεκτρικό δυναμικό $\Phi(\rho, z)$ να ικανοποιεί τη σχέση:

$$\Phi(a, 0^+) - \Phi(a, 0^-) = V \quad (1.92)$$

Η z -συνιστώσα E_z^π του διανύσματος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, η οποία μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση του A_z , πρέπει να είναι 0 σε όλα τα σημεία της επιφάνειας της κεραίας εκτός του διακένου. Στο διάκενο τροφοδοσίας, η E_z^π πρέπει να είναι ίση σε πλάτος και αντίθετη σε κατεύθυνση από τη z -συνιστώσα του ανακλώμενου ηλεκτρικού πεδίου E_z^a . Εξ ορισμού:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\delta}^{\delta} E_z^\pi dz \quad (1.93)$$

Συνεπώς

$$E_z^\pi = V \delta(z) \quad (1.94)$$

όπου $\delta(z)$ η δ-συνάρτηση του Dirac. Η (1.94) προκύπτει από την (1.92) και την (1.36) με γνωστές ιδιότητες της συνάρτησης $\delta(z)$ του Dirac. Υπενθυμίζουμε μερικές τέτοιες ιδιότητες στο Παράρτημα Ε.

Εισάγοντας την (1.94) στην (1.88) βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} K_{\text{ex}}(z-z') I(z') dz' = \frac{jVk}{\zeta_0} \delta(z), \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (1.95)$$

όπου:

$$K_{\text{ex}}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{z^2+4a^2\sin^2(\phi'/2)}}}{\sqrt{z^2+4a^2\sin^2(\phi'/2)}} d\phi' \quad (1.96)$$

Η (1.95) είναι γνωστή ως η ολοκληρωτική (για την ακρίβεια, ολοκληρωτικο-διαφορική) εξίσωση του Pocklington με άγνωστο το ρεύμα $I(z')$. Το $K_{\text{ex}}(z-z')$ είναι ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης, ο οποίος εξαρτάται από τα z και z' μόνο μέσω της διαφοράς $z-z'$ (όχι από τα z και z' ξεχωριστά). Τέτοιου είδους πυρήνες ονομάζονται *πυρήνες διαφοράς* (difference kernels). Και τα δύο μέλη της (1.95) εκφράζουν (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά) την εφαπτομενική συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στην κεραία. Κατά την εξαγωγή της (1.95) δεν έγινε καμία προσέγγιση και επομένως η (1.95) είναι *ακριβής* για το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου. Με την εξαίρεση της κεραίας απείρου μήκους, όπου $L = \infty$, η (1.95) δεν μπορεί να λυθεί σε κλειστή μορφή [23].

1.5.1.2 Γεννήτρια magnetic-frill

Για να χρησιμοποιήσουμε αυτό το μοντέλο, το διάκενο τροφοδοσίας αντικαθίσταται από μαγνητική πυκνότητα ρεύματος κυκλικής διεύθυνσης που υπάρχει πάνω σε ένα δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα a , που συνήθως επιλέγεται να είναι η ακτίνα του διπόλου, και εξωτερική ακτίνα b . Καθώς το δίπολο συνήθως τροφοδοτείται από γραμμές μεταφοράς, η εξωτερική ακτίνα b του δακτυλίου της γεννήτριας βρίσκεται χρησιμοποιώντας την έκφραση για την χαρακτηριστική αντίσταση της γραμμής μεταφοράς.

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\ln(b/a)}{2\pi}$$

Θεωρούμε την ομοαξονική οπή που τερματίζεται σε άπειρα αγωγίμο επίπεδο ως ένα δακτύλιο μαγνητικού ρεύματος (frill of magnetic current), δηλαδή ως το μοντέλο του frill generator (σχήμα 7(β)) – [2]. Η θεώρηση αυτή αποτελεί συνδυασμό της αρχής της ισοδυναμίας των πεδίων και της θεωρίας ειδώλων – [1] – μ' αυτό τον τρόπο προέκυψε άλλωστε το μοντέλο του σχήματος 7(β). Σύμφωνα με την αρχή της ισοδυναμίας, εφόσον ο δακτύλιος μαγνητικού ρεύματος δημιουργεί παρόμοιο πεδίο με αυτό της ομοαξονικής οπής, μπορεί να την αντικαταστήσει σχηματικά. Σύμφωνα με τη θεωρία ειδώλων, το άπειρα αγωγίμο επίπεδο μπορεί να αντικατασταθεί από την προέκταση της

κυλινδρικής επιφάνειας και προς τις δύο κατευθύνσεις του επιπέδου που ορίζει ο δακτύλιος μαγνητικού ρεύματος κατά ίσα μήκη. Έτσι προκύπτει το μοντέλο του σχήματος 7(β).

Η έννοια της ισοδύναμης πυκνότητας \vec{M} του μαγνητικού ρεύματος (ως πηγή) δε διαφέρει από την έννοια της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος \vec{J} , αν εξαιρέσει κανείς ότι η πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος δεν αποτελεί φυσικό μέγεθος αλλά μια ισοδύναμη ποσότητα η οποία προέκυψε από την αρχή της ισοδυναμίας και διευκολύνει αρκετά τη διεξαγωγή των μαθηματικών υπολογισμών. Αν εισάγουμε την πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος \vec{M} και την πυκνότητα μαγνητικού φορτίου ρ_m στις εξισώσεις του Maxwell, προκύπτουν οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -j\omega\mu H - M \\ \nabla \times H &= j\omega\varepsilon E + J \\ \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \nabla \cdot H &= \frac{\rho_m}{\mu}\end{aligned}\tag{1.97}$$

Η λύση των εξισώσεων (1.97) είναι η υπέρθεση δύο λύσεων, της λύσης που προκύπτει αν θεωρήσουμε μόνο τα J, ρ και της λύσης που προκύπτει αν θεωρήσουμε μόνο τα M, ρ_m . Την πρώτη λύση τη μελετήσαμε στις παραγράφους 1.3 και 1.4. Στην περίπτωση που τα J, ρ απουσιάζουν, οι εξισώσεις του Maxwell μεταπίπτουν στις:

$$\begin{aligned}\nabla \times E &= -j\omega\mu H - M \\ \nabla \times H &= j\omega\varepsilon E \\ \nabla \cdot E &= 0 \\ \nabla \cdot H &= \frac{\rho_m}{\mu}\end{aligned}\tag{1.98}$$

Τα πεδία λοιπόν που δημιουργούνται από ισοδύναμο αρμονικό μαγνητικό ρεύμα σε μια ομογενή περιοχή από την οποία απουσιάζουν οι ηλεκτρικές πηγές ($\vec{J} = 0$ αλλά $\vec{M} \neq 0$), θα πρέπει να ικανοποιούν τη συνθήκη $\nabla \cdot \vec{D} = 0$. Συνεπώς η διηλεκτρική μετατόπιση μπορεί να γραφεί ως περιστροφή ενός διανυσματικού (ηλεκτρικού) δυναμικού \vec{F} που οφείλεται στην πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος \vec{M} , δηλαδή $\vec{D} = \nabla \times \vec{F}$ (για οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση είναι $(\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F})) = 0$).

Από τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να εκφράσουμε τη συνιστώσα \vec{E}_F του ηλεκτρικού πεδίου που οφείλεται στο διανυσματικό δυναμικό \vec{F} με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell ως εξής:

$$\vec{E}_F = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{F}\tag{1.99}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (1.98) του Maxwell, παίρνουμε τη συνιστώσα \vec{H}_F του μαγνητικού πεδίου:

$$-\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \bar{F} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \bar{H}_F \Leftrightarrow \quad (1.100)$$

$$\nabla \times (\bar{H}_F + j\omega\bar{F}) = 0$$

Από τη διανυσματική ταυτότητα $\nabla \times (\nabla \cdot \Phi) = 0$, όπου Φ ένα τυχαίο βαθμωτό δυναμικό που είναι μια συνάρτηση θέσης, το άθροισμα $\bar{H}_F + j\omega\bar{F}$ μπορεί να γραφεί ως η κλίση ενός βαθμωτού (μαγνητικού) δυναμικού Φ ή ισοδύναμα του $-\Phi$:

$$\begin{aligned} \bar{H}_F + j\omega\bar{F} &= -\nabla\Phi \Leftrightarrow \\ \bar{H}_F &= -\nabla\Phi - j\omega\bar{F} \end{aligned} \quad (1.101)$$

Για την πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος έχουμε την εξίσωση του Maxwell:

$$\nabla \times \bar{E}_F = -\bar{M} - j\omega\mu\bar{H}_F \quad (1.102)$$

από την οποία είναι φανερό ότι αναζητούμε το curl του \bar{E}_F . Δηλαδή στην εξίσωση (1.99) αρκεί να πάρουμε το curl και των δύο μελών κι έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{E}_F &= -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \nabla \times \bar{F} = \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} [\nabla \cdot \nabla \cdot \bar{F} - \nabla^2 \bar{F}] \end{aligned} \quad (1.103)$$

που προέκυψε από τη γνωστή ταυτότητα $\nabla \times (\nabla \times \bar{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}$. Με αντικατάσταση των εξισώσεων (1.101) και (1.103) στην (1.102), έχουμε τελικά:

$$\nabla^2 \bar{F} + k^2 \bar{F} = -\varepsilon \bar{M} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \bar{F}) + \nabla (j\omega\mu\varepsilon\Phi) \quad (1.104)$$

όπου $k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$. Επιλέγοντας για διευκόλυνση $\nabla \cdot \bar{F} = -j\omega\mu\varepsilon\Phi$, η (1.104) απλοποιείται και παίρνει τη μορφή της ανομοιογενούς εξίσωσης του Helmholtz:

$$\nabla^2 \bar{F} + k^2 \bar{F} = -\varepsilon \bar{M} \quad (1.105)$$

η οποία λύνεται όπως η εξίσωση (1.71), με τη μόνη διαφορά ότι το διανυσματικό δυναμικό \bar{F} , όπως και η πυκνότητα \bar{M} του μαγνητικού ρεύματος, έχει μόνο φ-συνιστώσα. Χρησιμοποιώντας σφαιρικές συντεταγμένες, έχουμε την εξής λύση για την ανομοιογενή κυματική εξίσωση (1.105):

$$\bar{F} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iiint_V \bar{M} \frac{e^{-jkR}}{R} dV \quad (1.106)$$

όπου R είναι η απόσταση του σημείου παρατήρησης από την πηγή. Από τις εξισώσεις του Maxwell και τις σχέσεις (1.99), (1.101) και (1.69) βρίσκουμε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που προκύπτει από τα διανυσματικά δυναμικά \vec{F} και \vec{A} αντίστοιχα:

$$\vec{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (1.107)$$

$$(1.69) \Rightarrow \vec{E}_A = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left[k^2 \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) \right] \quad (1.108)$$

$$(1.99) \Rightarrow \vec{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} \quad (1.109)$$

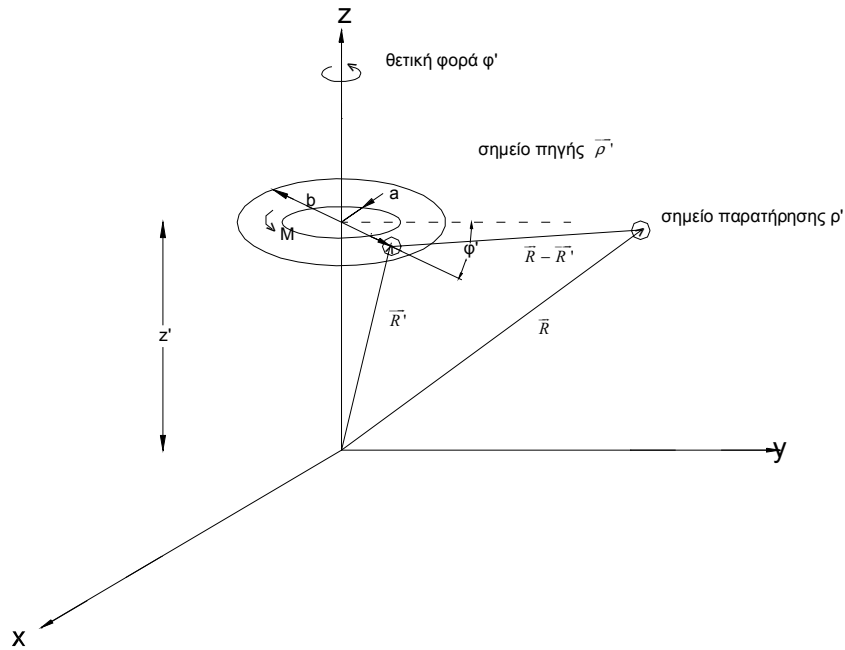
$$(1.101) \Rightarrow \vec{H}_F = -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left[k^2 \vec{F} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) \right] \quad (1.110)$$

Από τη στιγμή που έχουμε βρει τους τύπους για τα διανυσματικά δυναμικά \vec{F} και \vec{A} (εξισώσεις (1.78) και (1.106)) και με τη βοήθεια των εξισώσεων (1.107) - (1.110), μπορούμε να βρούμε το συνολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ως επαλληλία των αντίστοιχων ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων που δημιουργούνται από τα \vec{F} και \vec{A} , δηλαδή:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_A + \vec{E}_F \\ &= -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left[k^2 \vec{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{A}) \right] \vec{E}_F - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \vec{F} \end{aligned} \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_A + \vec{H}_F \\ &= -j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \left[k^2 \vec{F} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \vec{F}) \right] + \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \end{aligned} \quad (1.112)$$

Από τη στιγμή που θεωρούμε ότι υπάρχουν μόνο μαγνητικά ρεύματα, παίρνουμε εξ ορισμού $\vec{A} \equiv 0$. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις του Maxwell που έχουμε επισημάνει σ' αυτό το κεφάλαιο, τα \vec{E}, \vec{H} υπολογίζονται ανάλογα με τα δεδομένα και τις συνθήκες του προβλήματος (εγγύς ή μακρινό πεδίο κ.τ.λ.). Στο σχήμα 8 παρουσιάζεται η ακριβής γεωμετρία του magnetic frill, όπως θα χρησιμεύσει για τις μαθηματικές πράξεις:



Σχήμα 8: Γεωμετρία του magnetic frill

Η γεωμετρία του προβλήματος απεικονίζεται στο σχήμα 8, όπου ο δακτύλιος έχει εσωτερική ακτίνα a και εξωτερική b , ενώ είναι τοποθετημένος εγκάρσια στον άξονα z , με το κέντρο του να βρίσκεται στο $z=z'$. Για το δακτύλιο αυτό, και θεωρώντας τον ως τμήμα της ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς που τροφοδοτεί την κεραία, θεωρούμε ότι το πεδίο στο χώρο μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής επιφάνειας είναι TEM ρυθμός $-[1,2]$ - άρα και η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο αυτό θα δίνεται από την εξίσωση:

$$E_{\rho} = \frac{V}{2\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad \left(\frac{V}{m}\right) \quad (1.113)$$

όπου V είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής ακτίνας του δακτυλίου και φυσικά $a \leq \rho \leq b$. Συνεπώς η αντίστοιχη κατανομή του μαγνητικού ρεύματος, η οποία όπως προαναφέρθηκε θα δίνεται από τη θεωρία ειδώλων, θα είναι:

$$M_{\phi} = \frac{-V}{\rho \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \quad (1.114)$$

Με τη βοήθεια της εξίσωσης (1.106) βρίσκουμε μια σχέση που εκφράζει το μαγνητικό διανυσματικό δυναμικό της γεωμετρίας του σχήματος 8 και η οποία είναι:

$$\vec{F}(\vec{\rho}) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} \iint_{\substack{\text{frill} \\ \text{surface}}} \vec{M}(\vec{\rho}') \frac{e^{-jk|\vec{R}-\vec{R}'|}}{|\vec{R}-\vec{R}'|} dS \quad (1.115)$$

όπου S το εμβαδόν του δακτυλίου.

Λόγω των απαιτήσεων του συγκεκριμένου προβλήματος, δε θα επεκταθούμε στην αναζήτηση των εξισώσεων για το εγγύς και μακράν πεδίο που δημιουργεί το magnetic frill, αλλά θα αναζητήσουμε μόνο το πεδίο κατά μήκος του z - άξονα ($\rho=0$), θεωρώντας τη γραμμική κεραία που τροφοδοτείται από το magnetic frill κατά μήκος του z - άξονα. Πάνω στον z - άξονα λοιπόν παρουσιάζεται συμμετρία ως προς τη φ-συνιστώσα, η οποία υποδεικνύει ότι θα πρέπει εξ ορισμού να θεωρήσουμε μηδενικό το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του z - άξονα, δηλαδή $E_\rho(0, z) \equiv 0$. Επίσης για σημεία παρατήρησης πάνω στον άξονα z ($\rho=0$) ισχύει η σχέση:

$$R' = \sqrt{(z-z')^2 + \rho'^2} \quad (1.116)$$

οπότε και το μαγνητικό δυναμικό στον z - άξονα θα δίνεται σύμφωνα με τη σχέση (1.115) από την εξίσωση:

$$F_\phi(0, z) = -\frac{\epsilon_o}{4\pi} \frac{V}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_a^b \frac{e^{-jkR'}}{R'} \left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos\phi d\phi \right] d\rho \equiv 0 \quad (1.117)$$

Από την εξίσωση (1.112) και με την αρχική προϋπόθεση ότι $\vec{A} \equiv 0$ βρίσκουμε για το μαγνητικό πεδίο ότι ισχύει $\vec{H}_\phi(0, z) \equiv 0$. Από την εξίσωση (1.111) και θεωρώντας κυλινδρικές συντεταγμένες, βρίσκουμε για το ηλεκτρικό πεδίο:

$$\begin{aligned} E_z(0, z) &= -\frac{1}{\epsilon_o \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) \\ &= -\frac{F_\phi}{\epsilon_o \rho} - \frac{1}{\epsilon_o} \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} \\ &= -\frac{2}{\epsilon_o} \frac{\partial F_\phi}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} \end{aligned} \quad (1.118)$$

όπου χρησιμοποιείται ο κανόνας του l'Hospital για τον υπολογισμό του όρου που παρουσιάζει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$. Με αντικατάσταση της εξίσωσης (1.117) στην (1.118) και αλλάζοντας τη σειρά διαφορίσης και ολοκλήρωσης, βγάζοντας έξω τους σταθερούς όρους, παίρνουμε την τελική μορφή της εξίσωσης για το ηλεκτρικό πεδίο του magnetic frill:

$$E_z(0, z) = \frac{1}{\pi \ln(b/a)} \int_a^b \int_0^\pi \cos \varphi \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{e^{jkR'}}{R'} \right) \right] d\varphi d\rho$$

$$= \frac{V}{2 \ln(b/a)} \left\{ \frac{\exp \left[-jk\sqrt{(z-z')^2 + a^2} \right]}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} - \frac{\exp \left[-jk\sqrt{(z-z')^2 + b^2} \right]}{\sqrt{(z-z')^2 + b^2}} \right\} \quad (1.119)$$

Η εξίσωση (1.119) είναι αποτέλεσμα πολύ αυστηρών υπολογισμών, στους οποίους δεν έχει γίνει καμία προσέγγιση- [8]. Γι' αυτόν το λόγο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακριβώς για την εξαγωγή αποτελεσμάτων που θα παρουσιάζουν πολύ μεγάλη ακρίβεια, με τη βοήθεια αριθμητικών μεθόδων. Από τις προηγούμενες σχέσεις, μπορούμε τώρα να γράψουμε την ολοκληρωμένη εξίσωση για το ρεύμα κεραίας μήκους L , τροφοδοτούμενης από frill generator:

Εισάγοντας την (1.119) στην (1.88) βρίσκουμε:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z-z') I(z') dz' = g(z), \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (1.122)$$

όπου

$$g(z) = \frac{ikV}{2\zeta_0 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right] \quad (1.123)$$

και

$$K_{ex}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi'/2)}}}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi'/2)}} d\phi'$$

1.5.2 Ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallén

Στην ενότητα αυτή, θα βρούμε μια εναλλακτική εξίσωση χωρίς το διαφορικό τελεστή

$\mathcal{F} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2$. Δείχνουμε στο Παράρτημα Β ότι δεν είναι επιτρεπτό να περάσουμε τον

τελεστή αυτό μέσα στο ολοκλήρωμα στην (1.88), (η δυσκολία αυτή οφείλεται στον λογαριθμικό απειρισμό του πυρήνα στο $z=0$), οπότε θα εργασθούμε αλλιώς. Η (1.95)

μπορεί να ειπωθεί σαν διαφορική εξίσωση για την ποσότητα $\int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z-z') I(z') dz'$. Η

ποσότητα αυτή είναι—εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά—το διανυσματικό δυναμικό $A_z(a, z)$ και είναι άρτια συνάρτηση του z . Η λύση της εξίσωσης είναι η λύση της ομογενούς συν μια μερική λύση.

1.5.2.1 Γεννήτρια δ-συνάρτησης

Ας επαναλάβουμε την εξίσωση (1.57):

$$E_z^a(\rho) = -\frac{j\omega}{k^2} \left[k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right] \quad (1.124)$$

Έτσι, η z -συνιστώσα του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου $E_z^a(\rho = a, z)$ πάνω στον τέλεια αγωγίμο σωλήνα θα είναι παντού μηδέν εκτός από το $z = 0$, όπου θα απειρίζεται, σύμφωνα με τη σχέση που προκύπτει από τις (1.55) και (1.94):

$$E_z^a(a, z) = -V \delta(z), \quad -L/2 < z < L/2 \quad (1.125)$$

Εξισώνοντας τις (1.124) και (1.125) προκύπτει η διαφορική εξίσωση για το διανυσματικό δυναμικό A_z κατά μήκος της κεραίας:

$$-\frac{j\omega}{k^2} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z = -V \delta(z) \Rightarrow \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z = -\frac{jk^2 V}{\omega} \delta(z) \quad (1.126)$$

Η λύση της εξίσωσης για $V = 0$ (ομογενής εξίσωση) είναι:

$$A_z' = C_1 \cos kz + C_2 \sin kz \quad (1.127)$$

Καθώς το ρεύμα και το A_z είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα z , πρέπει $C_2 = 0$, για να έχουμε άρτια λύση. Για να βρούμε μία μερική λύση της εξίσωσης (1.126), πρώτα παρατηρούμε ότι για $z > 0$ και $z < 0$, η λύση πρέπει να είναι της μορφής που φαίνεται από την (1.127). Κάνοντας χρήση της εξίσωσης Lorentz για τα δυναμικά (1.39) που μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\Phi(z) = \frac{j\omega}{k^2} \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

η εξίσωση (1.92) γίνεται

$$V = \frac{j\omega}{k^2} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_{-z}}{\partial z} \right) \quad (1.128)$$

Συνεπώς, μια μερική λύση της (1.126) μπορεί να βρεθεί απ' ευθείας από τη διαφορική εξίσωση με χρήση μετασχηματισμού Fourier και είναι- [16]:

$$A_z' = \frac{k}{j\omega} \frac{V}{2} \sin k|z| \quad (1.129)$$

Η λύση της εξίσωσης (1.126) επομένως είναι:

$$A_z = C \cos kz + \frac{kV}{2j\omega} \sin k|z| \quad (1.130)$$

Εξισώνοντας την (1.130) με την (1.85) προκύπτει:

$$A_z(\rho = a) = \mu \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K(z, z') dz' = C \cos kz - j \frac{kV}{2\omega} \sin k|z| \Rightarrow$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K_{ex}(z, z') dz' = C \cos kz - j \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{V}{2} \sin k|z| \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K_{ex}(z, z') dz' = C \cos kz - j \frac{V}{2\zeta_0} \sin k|z|, -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}} \quad (1.131)$$

όπου $\zeta_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$ είναι η γνωστή μας κυματική αντίσταση του μέσου που περιβάλλει την κεραία.

Η (1.131) είναι ισοδύναμη με την (1.95) και είναι γνωστή ως η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén. Τα δύο μέλη της (1.131) εκφράζουν (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά) το διανυσματικό δυναμικό πάνω στην κεραία. Η σταθερά C βρίσκεται από τη συνθήκη (1.51).

Ας εξηγήσουμε το τελευταίο αυτό σημείο, δίνοντας μια σχέση για τη σταθερά C : Εάν $I^{(1)}(z)$, $I^{(2)}(z)$ ικανοποιούν τις δύο Fredholm-τύπου ολοκληρωτικές εξισώσεις:

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z - z') I^{(1)}(z') dz' = \frac{jV}{2\zeta_0} \sin k|z|, \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (1.132)$$

και

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z - z') I^{(2)}(z') dz' = \cos kz, \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (1.133)$$

αντίστοιχα, τότε η λύση της (1.131) που ικανοποιεί την (1.51) δίνεται από

$$I(z) = I^{(1)}(z) + CI^{(2)}(z) \quad \text{όπου} \quad C = -\frac{I^{(1)}(h)}{I^{(2)}(h)} \quad (1.134)$$

Πράγματι, λοιπόν, η σταθερά C μπορεί να βρεθεί από τη συνθήκη (1.51).

1.5.2.2 Γεννήτρια magnetic frill

Η εξίσωση (1.122) είναι ολοκληροδιαφορική εξίσωση Poisson, η οποία λόγω της μορφής της, δεν είναι δυνατόν να επιλυθεί άμεσα με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων, όπως γινόταν με την ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén. Σκοπός μας λοιπόν σ' αυτή την παράγραφο είναι ο μετασχηματισμός της εξίσωσης (1.122), που είναι άλλωστε της μορφής $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)f(z) = g(z)$, έτσι ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε σ' αυτήν την αριθμητική μέθοδο Galerkin. Θα βρούμε πρώτα μία λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης, με χρήση του μετασχηματισμού Fourier (ΜΦ). Συμβολίζουμε με $F(\zeta)$ το ΜΦ της $f(z)$, οπότε:

$$F(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot e^{-j\zeta z} dz \quad (1.135)$$

και με τη σχέση αντιστροφής παίρνουμε:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cdot e^{j\zeta z} d\zeta \quad (1.136)$$

Με παρόμοιο τρόπο συμβολίζουμε ως $G(\zeta)$, το ΜΦ της συνάρτησης $g(z)$. Παίρνοντας τώρα το ΜΦ της διαφορικής εξίσωσης $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)f(z) = g(z)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι ο ΜΦ της $f''(z)$ είναι $-\zeta^2 F(\zeta)$, έχουμε:

$$(k^2 - \zeta^2)F(\zeta) = G(\zeta) \quad (1.137)$$

οπότε η (1.136) μπορεί να γραφεί:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\zeta) \cdot e^{j\zeta z}}{(k^2 - \zeta^2)} d\zeta \quad (1.138)$$

Το τελευταίο όμως αυτό ολοκλήρωμα αποκλίνει, λόγω των πόλων, στα $\zeta = \pm k$. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρώτο εμπόδιο, θεωρούμε αρχικά ότι $\text{Im}\{k\} > 0$. Για την εξίσωση του Poisson, αυτό σημαίνει ότι αρχικά θεωρούμε πως το μέσο που περιβάλλει την κεραία έχει απώλειες. Κάνοντας αυτή την παραδοχή, η εξίσωση (1.138) έχει νόημα. Αν τώρα πάρουμε το όριο $\text{Im}\{k\} \rightarrow 0$ έχουμε αντί της (1.138) την εξής σχέση:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_c \frac{G(\zeta) \cdot e^{j\zeta z}}{(k^2 - \zeta^2)} d\zeta \quad (1.139)$$

Για να απλοποιήσουμε τη λύση μας, εισάγουμε στην εξίσωση (1.139) την αντίστροφη έκφραση (όπως στην (1.136)):

$$G(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-j\zeta t} dt \quad (1.140)$$

και αλλάζουμε της σειρά ολοκλήρωσης ώστε:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\zeta t} dt \right] \cdot \frac{e^{j\zeta z}}{k^2 - \zeta^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot \left[\int_C \frac{e^{j\zeta(z-t)}}{k^2 - \zeta^2} d\zeta \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot I(k, z-t) dt \end{aligned} \quad (1.141)$$

όπου με $I(k, x)$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I(k, x) = \int_C \frac{e^{j\zeta x}}{k^2 - \zeta^2} d\zeta \quad (1.142)$$

όπου $k > 0$ και x πραγματικό. Στην εξίσωση (1.142) ο δρόμος ολοκλήρωσης C είναι αυτός που παριστάνεται στο σχήμα. Υπολογίζουμε το $I(k, x)$ χρησιμοποιώντας περιγραμμική ολοκλήρωση, ξεχωριστά για τις δύο περιπτώσεις όπου $x > 0$ και $x < 0$. Έτσι, αν $x > 0$, κλείνουμε το δρόμο ολοκλήρωσης στο άνω ημιεπίπεδο. Με παρόμοιο τρόπο, αν $x < 0$, κλείνουμε το δρόμο ολοκλήρωσης στο κάτω ημιεπίπεδο. Σχηματικά παριστάνονται στο σχήμα. Για $x > 0$ έχουμε λοιπόν:

$$\begin{aligned} I(k, x) &= \oint_{C1} \frac{e^{j\zeta x}}{k^2 - \zeta^2} d\zeta \\ &= j2\pi \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{j\zeta x}}{-(\zeta - k)(\zeta + k)}; \zeta = k \right\} \\ &= -\frac{j\pi}{k} e^{jkx} \end{aligned} \quad (1.143)$$

όπου με $\operatorname{Res}\{a(\zeta); \zeta = k\}$ συμβολίζουμε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης $a(\zeta)$ στο σημείο $\zeta = k$. Για $x < 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
I(k, x) &= \oint_{C_2} \frac{e^{j\zeta x}}{k^2 - \zeta^2} d\zeta \\
&= j2\pi \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{j\zeta x}}{-(\zeta - k)(\zeta + k)}; \zeta = -k \right\} \\
&= -\frac{j\pi}{k} e^{-jkx}
\end{aligned} \tag{1.144}$$

Μαζί, οι εξισώσεις (1.143) και (1.144) μπορούν να γραφούν:

$$I(k, x) = -\frac{j\pi}{k} e^{jk|x|} \tag{1.145}$$

με $x \gg 0$. Η αντικατάσταση της (1.145) στην εξίσωση (1.141) δίνει:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{jk|z-t|} dt \\
&= -\frac{j}{2k} \int_{-\infty}^z g(t) \cdot e^{jk(z-t)} dt - \frac{j}{2k} \int_z^{\infty} g(t) \cdot e^{jk(t-z)} dt
\end{aligned} \tag{1.146}$$

Η εξίσωση (1.146), λοιπόν, μας δίνει μία λύση της αρχικής εξίσωσης $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)f(z) = g(z)$. Μπορούμε, όμως, να βρούμε και μια άλλη λύση, που να έχει πιο κομψή μορφή και η οποία είναι καταλληλότερη για αριθμητική ολοκλήρωση. Αυτό γίνεται ως εξής: Παρατηρούμε ότι τα ολοκληρώματα $-\frac{j}{2k} \int_{-\infty}^z g(t) \cdot e^{jk(z-t)} dt$ και $-\frac{j}{2k} \int_z^{\infty} g(t) \cdot e^{jk(t-z)} dt$ έχουν τη μορφή:

$$(\text{σταθερά}) \times e^{\pm jkz}$$

και επομένως ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)f(z) = 0$$

Μια ακόμα λύση $f_1(z)$ της εξίσωσης $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)f(z) = g(z)$ προκύπτει αν αφαιρέσουμε τα ολοκληρώματα αυτά από την $f(z)$ που βρήκαμε με τη σχέση (1.146):

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{j}{2k} \int_0^z g(t) \cdot e^{jk(z-t)} dt + \frac{j}{2k} \int_0^z g(t) \cdot e^{jk(t-z)} dt \\
&= \frac{1}{k} \int_0^z g(t) \cdot \sin[k(z-t)] dt
\end{aligned}
\tag{1.147}$$

Η πλήρης λύση της εξίσωσης (1.147) μπορεί λοιπόν να γραφεί ως:

$$f(z) = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + \frac{1}{k} \int_0^z g(t) \sin[k(z-t)] dt
\tag{1.148}$$

Όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες μιγαδικές σταθερές. Από την εξίσωση (1.147) φαίνεται ότι η $f(z)$ είναι άρτια (δηλαδή $f_1(z) = f_1(-z)$) μόνο αν και η $g(z)$ είναι άρτια. Άρα για άρτια $g(z)$, η πλήρης άρτια λύση της εξίσωσης $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) f(z) = g(z)$ θα δίνεται από τη σχέση (1.148) όταν $C_2 = 0$.

Μπορούμε να επαληθεύσουμε τον τελευταίο συλλογισμό μας για την εξαγωγή της σχέσης (1.147) ως εξής: γράφουμε τη σχέση (1.147), όπως παρακάτω:

$$f_1(z) = \frac{1}{k} \sin(kz) \int_0^z g(t) \cdot \cos(kt) dt - \frac{1}{k} \cos(kz) \int_0^z g(t) \cdot \sin(kt) dt
\tag{1.149}$$

και χρησιμοποιώντας τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} \int_0^z a(t) dt &= a(z) \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^z a(t) dt &= a'(z)
\end{aligned}$$

εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι για την εξίσωση $\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) f(z) = g(z)$ ισχύει:

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= -k \sin(kz) \int_0^z \cos(kt) \cdot g(t) dt + 2 \cos(kz) \cos(kz) g(z) + \\
&+ \frac{1}{k} \sin(kz) [-k \sin(kz) g(z) + \cos(kz) g'(z)] + k \cos(kz) \int_0^z \sin(kt) \cdot g(t) dt + \\
&+ 2 \sin(kz) \sin(kz) g(z) - \frac{1}{k} \cos(kz) [k \cos(kz) g(z) + \sin(kz) g'(z)] \\
&= -k^2 f_1(z) + g(z)
\end{aligned}$$

οπότε πράγματι ισχύει $f_1''(z) + k^2 f_1(z) = g(z)$.

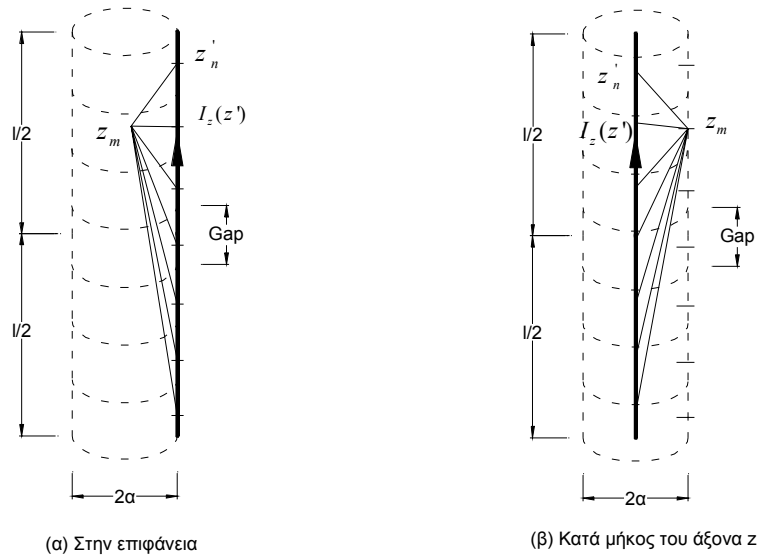
Συνεπώς, στην περίπτωση που το μοντέλο τροφοδοσίας είναι η γεννήτρια magnetic frill, τελικά προκύπτει ότι:

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z-z')I(z')dz' = C \cos kz + \frac{1}{k} \int_0^z g(t) \sin k(z-t)dt, \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (1.150)$$

Η (1.150) είναι ισοδύναμη με την (1.122) και είναι γνωστή ως η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén [8]. Τα δύο μέλη της (1.150) εκφράζουν (εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά) το διανυσματικό δυναμικό πάνω στην κεραία. Η σταθερά C βρίσκεται από τη συνθήκη (1.51). Η $g(t)$ δίνεται από τη σχέση (1.123) και ο πυρήνας $K_{ex}(z-z', \alpha)$ από τη σχέση (1.96).

1.6 Προσεγγιστικές ολοκληρωτικές εξισώσεις

Ένα πρόβλημα με τις εξισώσεις τύπου Pocklington (1.88) για τα διάφορα μοντέλα τροφοδοσίας και τις εξισώσεις τύπου Hallén, (1.131), (1.150) είναι η πολυπλοκότητα του λεγόμενου «ακριβή πυρήνα» (exact kernel) $K_{ex}(z)$: Αυτός δίνεται από το ολοκλήρωμα της σχέσης (1.96). Στο εδάφιο αυτό βρίσκουμε, με μια κατάλληλη προσέγγιση, έναν απλούστερο πυρήνα που χρησιμοποιείται συχνά: Στη σχέση (1.96), η απόσταση $2a|\sin(\phi'/2)|$ μεταβάλλεται καθώς ολοκληρώνουμε, με μέγιστη τιμή $\max_{\phi'}\{2a|\sin(\phi'/2)|\} = 2a$ και ελάχιστη τιμή $\min_{\phi'}\{2a|\sin(\phi'/2)|\} = 0$ (βλ. Σχήμα 4). Η εν λόγω προσέγγιση είναι $2a|\sin(\phi'/2)| \cong a$, δηλαδή προσεγγίζουμε όλες τις δυνατές αποστάσεις με την ακτίνα a .



Σχήμα 9: Το ισοδύναμο ρεύμα του διπόλου

Συνεπώς, με αυτή την προσέγγιση το ισοδύναμο ρεύμα γραμμικής κατανομής υποτίθεται ότι βρίσκεται κατά μήκος του κεντρικού άξονα του διπόλου και τα σημεία παρατήρησης επιλέγονται στην επιφάνεια του διπόλου ή ανάλογα, το ρεύμα τοποθετείται στην επιφάνεια του διπόλου και τα σημεία παρατήρησης στον άξονα του διπόλου. Και οι δύο θεωρήσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να βρούμε το $I_z(z')$. Η ολοκλήρωση στην (1.96) γίνεται αμέσως και έτσι παίρνουμε το λεγόμενο «προσεγγιστικό πυρήνα» (approximate or reduced kernel)

$$K_{ap}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}}, \quad |z| < L \quad (1.151)$$

Η προσέγγιση μας είναι λογική επειδή η κεραία είναι λεπτή. Η (1.88) / (1.131), (1.150) με το $K_{ap}(z)$ στη θέση του $K_{ex}(z)$ ονομάζεται προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση (approximate integral equation) τύπου Pocklington / Hallén. Η απλοποίηση είναι προφανώς σημαντική και ο $K_{ap}(z)$ χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη.

Έχει σημασία να καταλάβουμε τη φυσική έννοια της προσέγγισής μας: Το αριστερό μέλος της (1.88) / (1.131), (1.150) εκφράζει το E_z / A_z στην κυλινδρική επιφάνεια $\rho = a$. Με τον ακριβή πυρήνα, αυτό το E_z / A_z οφείλεται σε επιφανειακή κατανομή ρεύματος (πηγή) στην ίδια αυτή επιφάνεια $\rho = a$. Αλλά με τον προσεγγιστικό πυρήνα, η πηγή είναι μια γραμμική κατανομή ρεύματος, στον άξονα $\rho = 0$. Με την προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση, λοιπόν, ζητάμε μια γραμμική κατανομή ρεύματος, το E_z / A_z της οποίας, σε απόσταση a , συμπεριφέρεται όπως υπαγορεύει το δεξί μέλος της (1.88) / (1.131), (1.150).

Σημειώνουμε τέλος ότι—σε αντίθεση με τον ακριβή πυρήνα—ο προσεγγιστικός πυρήνας δεν απειρίζεται για $z = 0$. Εδώ δεν συντρέχουν οι λόγοι του Παραρτήματος Β και στη βιβλιογραφία βρίσκουμε πολλές φορές το διαφορικό τελεστή \hat{T} μέσα στο ολοκλήρωμα της (1.95) [1]. Βέβαια το $K_{ap}(z)$ (ακριβέστερα: το πραγματικό του μέρος) έχει μέγιστο για $z = 0$ και το μέγιστο αυτό γίνεται οξύτερο για λεπτότερες κεραίες.

1.7 Μη επιλυσιμότητα με τον προσεγγιστικό πυρήνα

1.7.1 Μοντελοποίηση delta function

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση που μας δίνει το ρεύμα πάνω σε μια γραμμική κεραία τροφοδοτούμενη από delta-function generator με τη μορφή της σχέσης (1.131). Γνωρίζουμε ότι με τη χρήση του ακριβούς πυρήνα η εξίσωση αυτή έχει λύση. Θα δείξουμε ότι με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα η εξίσωση αυτή δεν έχει ακριβή λύση, δηλαδή δεν υπάρχει συνάρτηση $I(z)$ που να την ικανοποιεί. Οι μορφές των δύο πυρήνων φαίνονται παρακάτω:

$$K(z) = \begin{cases} K_{\text{ex}}(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+4a^2}\sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{z^2+4a^2}\sin^2\frac{\theta}{2}} d\vartheta, & |z| < L \\ K_{\text{ap}}(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{jk\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}}, & |z| < L \end{cases} \quad (1.152)$$

Η μαθηματική εξήγηση δεν είναι δύσκολη. Ας υποθέσουμε ότι χρησιμοποιήσουμε τον προσεγγιστικό πυρήνα και ότι κάποια συνάρτηση $I(z)$ ικανοποιεί την (1.131). Τότε το αριστερό μέλος της εξίσωσης είναι διαφορίσιμο για $z=0$. Από την άλλη μεριά, λόγω της απόλυτης τιμής $|z|$, το δεξί μέλος της δεν είναι διαφορίσιμο στο $z=0$. Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο που δείχνει ότι με τον προσεγγιστικό πυρήνα, η εξίσωση του Hallén δεν έχει λύση. Επειδή οι εξισώσεις (1.131) και (1.95) είναι ισοδύναμες, ούτε και η εξίσωση του Rockington έχει λύση με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Τονίζουμε ότι όλα αυτά δεν ισχύουν για τον ακριβή πυρήνα. Δηλαδή με τον ακριβή πυρήνα το αριστερό μέλος της δεν είναι πάντα διαφορίσιμη συνάρτηση του z . Άλλωστε επειδή η «ακριβής ολοκληρωτική εξίσωση» περιγράφει, ακριβώς, το σωληνοειδές δίπολο του Σχήματος 8, είναι λογικό να αναμένουμε την ύπαρξη λύσης.

Η μη επιλυσιμότητα με τον προσεγγιστικό πυρήνα έχει και φυσική εξήγηση: Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενο παράγραφο, με την προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση, ζητάμε μια αξονική (στον άξονα z) κατανομή ρεύματος, το ηλεκτρικό πεδίο της οποίας, σε απόσταση a , συμπεριφέρεται ως δ-συνάρτηση. Είναι όμως γνωστό ότι μακριά από τη ρευματική κατανομή (πηγή), το πεδίο συμπεριφέρεται ομαλά. Επομένως, δεν μπορεί να συμπεριφερθεί με τον απότομο τρόπο που υπαγορεύει η δέλτα συνάρτηση.

Η μη επιλυσιμότητα παρουσιάζεται στα περισσότερα είδη κεραιών σύρματος, που αναλύονται με τον προσεγγιστικό πυρήνα, κι ήταν γνωστή τουλάχιστον από το 1952 [24], αλλά δεν αναφέρεται στα περισσότερα σύγχρονα βιβλία κεραιών. Για τις αριθμητικές λύσεις είναι φανερό ότι δεν πρέπει να αναμένει κανείς «καταστάλαγμα». Αντιθέτως, είναι λογικό να περιμένει κανείς προβλήματα για μεγάλα N .

1.7.2 Μοντελοποίηση magnetic frill

Ας θεωρήσουμε την εξίσωση που μας δίνει το ρεύμα πάνω σε μια γραμμική κεραία τροφοδοτούμενη από frill generator με τη μορφή της σχέσης (1.150). Όπως έχει προαναφερθεί, αν χρησιμοποιηθεί ο ακριβής πυρήνας η εξίσωση έχει λύση. Ενδιαφέρον όμως έχει να δούμε αν συμβαίνει το ίδιο και με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα - [4]. Οι μορφές των δύο πυρήνων δίνονται από την (1.152) .

Για να απαντήσουμε στο παραπάνω ερώτημα, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα - [12], που έχει να κάνει με αναλυτικές συναρτήσεις, οι οποίες παριστάνονται από ολοκληρώματα. Έστω συνάρτηση $f(z,t)$, η οποία ακολουθεί τις ακόλουθες συνθήκες όταν το t κινείται σε ένα μονοπάτι ολοκλήρωσης (a,b) και το z είναι ένα τυχαίο σημείο μιας περιοχής S :

- i. Η f και η $\frac{\partial f}{\partial z}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του t .
- ii. Η f είναι αναλυτική συνάρτηση του z .
- iii. Η συνέχεια $\frac{\partial f}{\partial z}$ της ως συνάρτηση του z είναι ομοιόμορφη ως προς τη μεταβλητή t .

Με αυτές τις συνθήκες η $\int_a^b f(t,z)dt$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση του z με μοναδική παράγωγο τη συνάρτηση $\int_a^b \frac{\partial f(t,z)}{\partial z} dt$.

Όπως παρατηρούμε από την εξίσωση (1.122) για frill generator το δεξί μέλος έχει πόλους τις ρίζες των παρονομαστών δηλαδή $z = \pm ia$ και $z = \pm ib$. Με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα το αριστερό μέλος της σχέσης αυτής, και με δεδομένο ότι η συνάρτηση $I(z)$ είναι ως φυσική ποσότητα αναλυτική συνάρτηση, παρατηρούμε ότι είναι μια αναλυτική συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής z με την πιθανή εξαίρεση δύο γραμμικών τμημάτων, τα οποία δίνονται από την εξίσωση $z = z' \pm ia$. Το καθένα από τα δύο αυτά γραμμικά τμήματα έχει μήκος $2h$ και είναι παράλληλο στον πραγματικό άξονα. Επειδή όμως το δεξί μέλος έχει πόλους και στα σημεία $z = \pm ib$, με συνέπεια να μην είναι αναλυτική σε αυτά τα σημεία, κι επειδή τα σημεία αυτά δε βρίσκονται πάνω στα προαναφερθέντα γραμμικά τμήματα προκύπτει μια ασυμφωνία, η οποία πιστοποιεί το γεγονός ότι η εξίσωση του Pocklington και κατά συνέπεια η εξίσωση του Hallén δεν έχει λύση.

Με ένα εναλλακτικό τρόπο μπορεί κανείς να εξηγήσει την ιδιότητα της εξίσωσης να μην έχει λύση. Εξαιτίας του γεγονότος, ότι το αριστερό μέλος της εξίσωσης του Hallén είναι ο συγκερασμός της συνάρτησης του ρεύματος και του πυρήνα, ο οποίος έχει τη μορφή της εξίσωσης , το μέλος αυτό συμπεριφέρεται για μεγάλες θετικές τιμές του z όπως η συνάρτηση $\exp(z)/z$. Με αναλυτική συνέχεια, θα πρέπει και το δεξί μέλος να συμπεριφέρεται με την ίδια μορφή. Για να συμβεί αυτό η τιμή της σταθεράς C θα πρέπει να είναι $C = (ik)^{-1} \int_0^{\infty} g(t)e^{ikt} dt$ και αυτή είναι περίπου η τιμή της για το

πρόβλημα της κεραίας απείρου μήκους. Όπως έχει αποδειχθεί στο [8-eq. B3] το δεξί μέλος της εξίσωσης δεν μπορεί να συμπεριφερθεί σύμφωνα με τη συνάρτηση $\exp(z)/z$, αλλά συμπεριφέρεται σύμφωνα με τη σχέση $\frac{V}{2\zeta_0} e^{ik|z|}$ οπότε εύλογα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η εξίσωση δεν έχει λύση.

Με τον προσεγγιστικό πυρήνα το αριστερό μέλος, εκτός από μια πολλαπλασιαστική σταθερά, αποτελεί τη z -συνιστώσα της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, πάνω στην κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από τις εξισώσεις $\rho = a$ και $|z| < h$. Η πηγή που παράγει αυτό το πεδίο είναι μια γραμμική κατανομή ρεύματος $I(z)$, τοποθετημένη πάνω στον άξονα των z μεταξύ h και $-h$. Η μη επιλυσιμότητα της εξίσωσης δηλώνει ότι δεν υπάρχει γραμμική πηγή $I(z)$ που να παράγει ένα πεδίο ίσο με τη συγκεκριμένη έκφραση της $g(z)$ που παρουσιάστηκε παραπάνω. Το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι σε καμία περίπτωση μη αναμενόμενο, αφού πάνω σε μια επιφάνεια παρατήρησης κυλινδρική, μια γραμμική πηγή δεν μπορεί να προκαλέσει ένα αυθαίρετο πεδίο. Για να πιστοποιήσουμε την παραπάνω παρατήρηση, θα συζητήσουμε με συντομία ορισμένες ομοιότητες με το κλασικό πρόβλημα σύνθεσης (synthesis problem SP) – [26], όπου παρατηρεί κανείς μια γραμμική πηγή να παράγει ένα συγκεκριμένο και προδιαγεγραμμένο πεδίο εκπομπής. Το πρόβλημα της σύνθεσης περιγράφεται από μια ολοκληρωτική εξίσωση αλλά η επιφάνεια παρατήρησης είναι σφαιρική στο άπειρο κι όχι κυλινδρική σε πεπερασμένη απόσταση. Προκειμένου να έχουμε ένα επιλύσιμο πρόβλημα σύνθεσης, δεν πρέπει να καθορίζει κανείς αυθαίρετα το πεδίο εκπομπής. Έτσι, λοιπόν, η ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματος σύνθεσης είναι πολύ πιθανό να μην έχει λύση.

Στη βιβλιογραφία μπορεί κανείς να βρει αρκετές ολοκληρωτικές εξισώσεις, που χρησιμοποιούν προσεγγιστικό πυρήνα. Με όσα έχουμε αναφέρει ως τώρα, μάλλον, είναι σαφές ότι οι περισσότερες δεν έχουν λύση. Ωστόσο, οι ολοκληρωτικές εξισώσεις, που περιγράφουν ένα δίπολο απείρου μήκους, που τροφοδοτείται από frill generator αποτελούν εξαίρεση – [8].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΞΙΣΩΣΗ ΠΟΥ ΠΕΡΙΓΡΑΦΕΙ ΜΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΚΕΡΑΙΑ

2.1 Εισαγωγή

Ο πιο απλός τύπος γραμμικής κεραίας ή σκεδαστή είναι το ευθύ κυλινδρικό δίπολο μήκους $2h$ και ακτίνας a . Η ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την κατανομή ρεύματος πάνω στο δίπολο, συνήθως, αναφέρεται ως εξίσωση του Hallén. Προεκτάσεις της εξίσωσης αυτής ή της αντίστοιχης ολοκληροδιαφορικής του Rocklington εμφανίζονται σε δομές της καθημερινής εφαρμογής όπως κυρτές γραμμικές κεραίες και συστοιχίες από γραμμικές κεραίες. Τέτοιες εξισώσεις συνήθως επιλύονται με τη χρήση της μεθόδου των ροπών, που παρουσιάστηκε στο 2^ο Κεφάλαιο. Ωστόσο είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε διεξοδικά τις δυσκολίες που σχετίζονται με την εφαρμογή τέτοιων αριθμητικών μεθόδων στις προαναφερθείσες εξισώσεις, για τα διάφορα μοντέλα τροφοδοσίας. Η τυφλή εφαρμογή των μεθόδων αυτών δίνει πολλές φορές θετικά αποτελέσματα, όμως, η βαθιά κατανόηση των δυσκολιών αυτών μας ξεκαθαρίζει το αν μπορούμε να εμπιστευτούμε ή όχι τα αποτελέσματα αυτά. Πιο συγκεκριμένα, είναι αρκετά σημαντικό να ξέρουμε τα σφάλματα, που ενδεχομένως να παρουσιάζονται καθώς και τις πηγές των σφαλμάτων αυτών.

Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή της μεθόδου των ροπών με entire domain basis functions στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallén και Rocklington, στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τη μέθοδο των ροπών. Στη συνέχεια θα την εφαρμόσουμε σε μερικές απλές μορφές ολοκληρωτικών εξισώσεων με subdomain basis functions. Κατόπιν, θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου με subdomain basis functions στις εξισώσεις του Hallén και του Rocklington και παρουσιάζονται πιο αναλυτικά σε πρόσφατες εργασίες [3,8].

2.2 Αριθμητικές μέθοδοι - Μέθοδοι ροπών

Με την εξίσωση (1.131) του Hallén και ιδίως τις (1.132)-(1.134), έχουμε αναγάγει το πρόβλημά μας στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων τύπου Fredholm:

$$\int_{-L/2}^{L/2} K(z, z')J(z')dz' = f(z), \quad -L/2 < z < L/2 \quad (2.7)$$

με πυρήνα $K(z, z')$, άγνωστο $J(z')$ ($|z'| < L/2$), και γνωστό $f(z)$. Τέτοιου είδους εξίσωση παίρνουμε και με την εναλλαγή \hat{T} και ολοκληρώματος στην *προσεγγιστική* εξίσωση του Rocklington. Στο εδάφιο αυτό, λοιπόν, περιγράφουμε αριθμητικές μεθόδους για την επίλυση τέτοιων εξισώσεων. Με ορισμένες τροποποιήσεις, τέτοιες μέθοδοι μπορούν να εφαρμοσθούν ακόμα και στην ολοκληρωτικο-διαφορική εξίσωση (1.95).

Θα περιγράψουμε μια οικογένεια μεθόδων που οι ηλεκτρολόγοι μηχανικοί ονομάζουν Μεθόδους Ροπών (Moment Methods—MoM). Οι μέθοδοι αυτές αποτελούν σημαντικό εργαλείο του Υπολογιστικού Ηλεκτρομαγνητισμού και, ειδικότερα, της σύγχρονης Θεωρίας Κεραιών. Η μέθοδος οφείλει την ονομασία της στη διαδικασία της δημιουργίας ροπών με τον πολλαπλασιασμό με συναρτήσεις βάρους και ολοκλήρωση, και έχει προέλθει από τη ρώσικη βιβλιογραφία. Στη Δύση, η πρώτη χρήση της ονομασίας αυτής αποδίδεται στον Harrington. Η μέθοδος έχει τρία βήματα:

MoM, Βήμα 1: Αναπτύσσουμε τον άγνωστο $J(z')$ σε *πεπερασμένο* άθροισμα N συναρτήσεων βάσης (basis functions) $g_1(z'), g_2(z'), \dots, g_N(z')$ με *άγνωστους* συντελεστές

J_n :

$$J(z') \cong \sum_{n=1}^N J_n g_n(z') = J_1 g_1(z') + J_2 g_2(z') + \dots + J_N g_N(z') \quad (2.8)$$

Οι συναρτήσεις βάσης είναι γνωστές. Στην (2.8) γράφουμε \cong και όχι $=$ διότι η λύση $J_n(z')$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης γενικά δεν μπορεί να γραφεί ακριβώς σαν υπέρθεση πεπερασμένου αριθμού συναρτήσεων βάσης.

MoM, Βήμα 2: Αντικαθιστούμε την προσέγγιση (2.2) στην ολοκληρωτική εξίσωση (2.1). Παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^N J_n \int_{-L/2}^{L/2} K(z, z')g_n(z')dz' \cong f(z), \quad -L/2 < z < L/2 \quad (2.9)$$

στην οποία γράψαμε \cong διότι, γενικά, δεν υπάρχουν αριθμοί J_n που να ικανοποιούν την (2.3) για όλα τα z με $|z| < L/2$.

Οι συναρτήσεις βάσης επιλέγονται έτσι ώστε κάθε ολοκλήρωμα $\int_{-L/2}^{L/2} K(z, z') u_n(z') dz'$ στην (2.9) να μπορεί να υπολογιστεί βολικά, σε κλειστή μορφή ή τουλάχιστον αριθμητικά. Το μόνο που μένει είναι να βρούμε τους άγνωστους όρους J_n .

ΜοΜ, Βήμα 3: Η ανάπτυξη της $J(z')$ οδηγεί σε μια εξίσωση με N αγνώστους. Αυτό από μόνο του δεν αρκεί για να καθορίσουμε τους N αγνώστους όρους J_n . Για την εξαγωγή των N σταθερών όρων, είναι απαραίτητο να έχουμε N γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις. Για το λόγο αυτό παίρνουμε το εσωτερικό γινόμενο της (2.9), με N άλλες συναρτήσεις δοκιμής (testing functions) $w_1(z), w_2(z), \dots, w_N(z)$. Με άλλα λόγια, πολλαπλασιάζουμε την με $w_l^*(z)$, όπου το $*$ δηλώνει συζυγή, και ολοκληρώνουμε από $z = -L/2$ έως $z = L/2$. Παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^N J_n \int_{-L/2}^{L/2} w_l^*(z) \left[\int_{-L/2}^{L/2} K(z, z') g_n(z') dz' \right] dz = \int_{-L/2}^{L/2} w_l^*(z) f(z) dz, \quad l=1, 2, \dots, N \quad (2.10)$$

που γράφονται και ως

$$\sum_{n=1}^N A_{ln} J_n = B_l, \quad l=1, \dots, N \quad (2.11)$$

όπου

$$A_{ln} = \int_{-L/2}^{L/2} w_l^*(z) \left[\int_{-L/2}^{L/2} K(z, z') g_n(z') dz' \right] dz, \quad 1 \leq l, n \leq N \quad (2.12)$$

και

$$B_l = \int_{-L/2}^{L/2} w_l^*(z) f(z) dz, \quad l=1, \dots, N \quad (2.13)$$

Οι συναρτήσεις δοκιμής είναι και αυτές γνωστές. Οι εξισώσεις είναι σύστημα γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους τα J_n .

Το πρόβλημα λοιπόν έχει αναχθεί στη επίλυση του $N \times N$ συστήματος, όπου οι μιγαδικοί αριθμοί A_{ln} και B_l βρίσκονται από τα ολοκληρώματα στις (2.12) και (2.13). Στα περισσότερα πρακτικά προβλήματα, οι ολοκληρώσεις δεν μπορούν να γίνουν σε κλειστή μορφή και γίνονται αριθμητικά. Προγράμματα όπως το MATLAB και το MATHEMATICA διαθέτουν έτοιμες ρουτίνες επίλυσης συστημάτων γραμμικών εξισώσεων, καθώς και αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Οι MoM είναι οικογένεια μεθόδων διότι υπάρχουν πολλές επιλογές των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής. Οι επιτυχημένες επιλογές απαιτούν γνώση των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών κάθε προβλήματος. Πολλές φορές βοηθούν και γενικότερες μαθηματικές αρχές .

2.2.1 Επιλογή συναρτήσεων βάσης

Ένα πολύ σημαντικό βήμα σε κάθε αριθμητική μέθοδο είναι η επιλογή των συναρτήσεων βάσης. Γενικά, κάποιος επιλέγει ως συναρτήσεις βάσης το σύνολο που έχει την ικανότητα να αναπαριστά με ακρίβεια και να μοιάζει με την άγνωστη συνάρτηση, ενώ ελαχιστοποιεί τον υπολογιστικό φόρτο που απαιτείται. Δεν πρέπει να επιλέγουμε συναρτήσεις βάσης με πιο ομαλές ιδιότητες από την άγνωστη συνάρτηση που αναπαριστάται.

Οι συναρτήσεις βάσης, που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη του ρεύματος μπορούν να επηρεάσουν πάρα πολύ την αποδοτικότητα και την ακρίβεια της λύσης. Κάποιοι παράγοντες που συνδέονται με τις συναρτήσεις βάσης είναι: 1) ο αριθμός N των άγνωστων συντελεστών I_n που απαιτούνται για την απόκτηση λύσης με την επιθυμητή αριθμητική ακρίβεια 2) ο υπολογιστικός φόρτος που χρειάζεται για τον υπολογισμό των συντελεστών του πίνακα αγωγιμοτήτων 3) Ο αριθμός των πεδιακών τιμών, που απαιτούνται, για να ικανοποιούνται οι οριακές συνθήκες με επιθυμητή ακρίβεια και 4) ο τύπος της ολοκληρωτικής εξίσωσης που χρησιμοποιείται.

Θεωρητικά, υπάρχουν πολλά πιθανά σύνολα συναρτήσεων βάσης. Παρόλα αυτά μόνο ένα περιορισμένος αριθμός χρησιμοποιείται στην πράξη. Αυτά τα σύνολα μπορούν να χωριστούν σε δύο γενικές κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τις subdomain basis functions (συναρτήσεις υποπεδίου) , που είναι μη μηδενικές μόνο σε ένα μέρος του πεδίου της συνάρτησης $g(x')$. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει τις entire domain basis functions (συναρτήσεις ολικού πεδίου), που είναι μη μηδενικές σε όλο το πεδίο της άγνωστης συνάρτησης. Η ανάπτυξη σε συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου είναι ανάλογη με την πολύ γνωστή μέθοδο ανάπτυξης σε σειρές Fourier.

2.2.1.1 Subdomain basis functions

Από τους δύο τύπους συναρτήσεων βάσης, οι συναρτήσεις υποπεδίου είναι οι πιο συνηθισμένες. Σε αντίθεση με τις συναρτήσεις ολικού πεδίου, αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς πρότερη γνώση της φύσης της συνάρτησης, που πρέπει να αναπαραστήσουν.

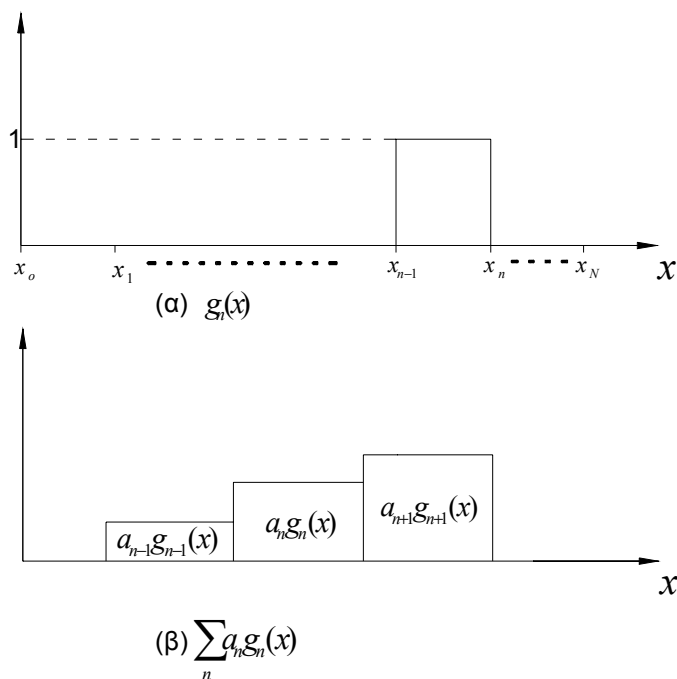
Η προσέγγιση υποπεδίου εμπλέκει την υποδιαίρεση του διπόλου σε N μη επικαλυπτόμενα διαστήματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 8.8(α). Τα segments φαίνονται να είναι συγγραμμικά και ίσου μήκους, παρόλο που καμία τέτοια συνθήκη δεν είναι απαραίτητη. Οι συναρτήσεις βάσης καθορίζονται σε συνδυασμό με τα όρια ενός ή περισσοτέρων segments. Ίσως οι πιο συνηθισμένες από αυτές τις συναρτήσεις βάσης να είναι οι παλμικές συναρτήσεις (pulse functions).

α) Παλμικές συναρτήσεις (pulse functions)

Το πιο απλό παράδειγμα συναρτήσεων βάσης είναι οι παλμικές συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής:

$$g_n(x') = \begin{cases} 1 & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.14)$$

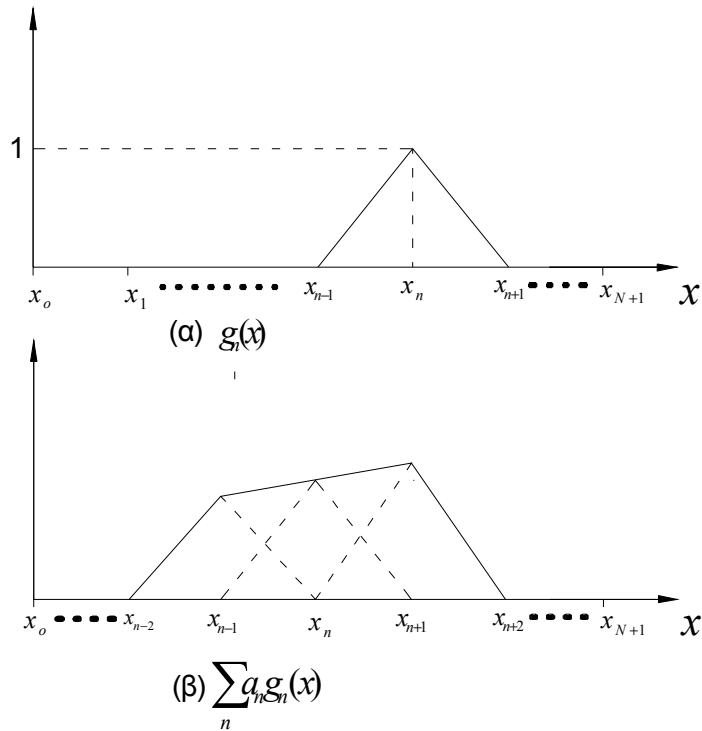
Αυτές εικονίζονται στο Σχήμα 10(α). Στο σχήμα 10(β), δείχνουμε ότι η προσέγγιση $J_n(x') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(x')$, που είναι επαλληλία των $g_n(x')$, έχει γενικά κλιμακωτή μορφή (ακριβέστερα: το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της $J_n(x')$ έχουν κλιμακωτή μορφή—οι συντελεστές a_n είναι μιγαδικοί). Θα δούμε και άλλα παραδείγματα συναρτήσεων βάσης στη συνέχεια.



Σχήμα 10: Στο πάνω σχήμα (α), δείχνουμε τις παλμικές συναρτήσεις $g_n(x)$. Στο κάτω σχήμα (β), δείχνουμε μια υπέρθεση $J_n(x')$ παλμικών συναρτήσεων. Έχει κλιμακωτή μορφή.

β) Τριγωνικές συναρτήσεις (triangular functions)

Οι απλούστερες συναρτήσεις βάσης είναι οι παλμικές συναρτήσεις του Σχήματος 11(α). Άλλες συναρτήσεις βάσης είναι οι τριγωνικές του Σχήματος 12.



Σχήμα 11: Οι λεγόμενες τριγωνικές συναρτήσεις.

Οι συναρτήσεις αυτές περιλαμβάνουν και δύο μισά τρίγωνα στα άκρα του διαστήματος (αλλιώς ο γραμμικός συνδυασμός $J_N(z)$ θα μηδενιζόταν στα άκρα $z = \pm L/2$). Το $J_n(x')$ εδώ έχει τη μορφή τμηματικά γραμμικής συνάρτησης.

Η τριγωνική συνάρτηση ορίζεται ως εξής

$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{x' - x'_{n-1}}{x'_n - x'_{n-1}} & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{x'_{n+1} - x'}{x'_{n+1} - x'_n} & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.15)$$

Η αναπαράσταση που προκύπτει (Σχήμα 11(β)) είναι πιο ομαλή από αυτή που προκύπτει με χρήση των παλμικών συναρτήσεων με το κόστος όμως της αυξημένης υπολογιστικής πολυπλοκότητας.

γ. Piecewise sinusoid function-Truncated cosine function

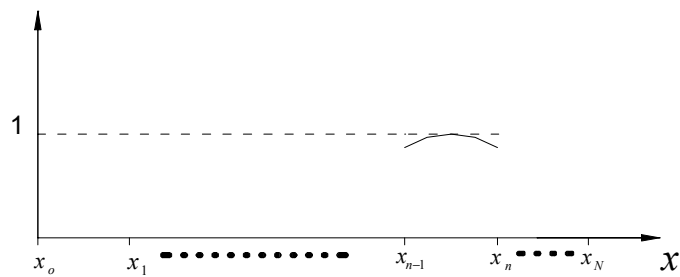
Το να αυξήσουμε την πολυπλοκότητα των subdomain basis functions πέρα από το επίπεδο του «τριγώνου» μπορεί να μη δικαιολογείται από την πιθανή βελτίωση στην ακρίβεια. Παρόλα αυτά υπάρχουν περιπτώσεις όπου πιο εξειδικευμένες συναρτήσεις είναι χρήσιμες για άλλους λόγους. Για παράδειγμα, κάποιοι ολοκληρωτικοί τελεστές μπορούν να εκτιμηθούν χωρίς αριθμητική ολοκλήρωση, όταν η ολοκληρωτέα

συνάρτηση πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση $\sin(kx')$ ή $\cos(kx')$, όπου το x' είναι η μεταβλητή ολοκλήρωσης. Σε τέτοια παραδείγματα, σημαντικά πλεονεκτήματα στον υπολογιστικό χρόνο και στην ανεκτικότητα σε λάθη μπορούμε να αποκτήσουμε χρησιμοποιώντας συναρτήσεις βάσης, όπως τη συνάρτηση piecewise sinusoid, που εικονίζεται στο σχήμα 12 ή την truncated cosine, που εικονίζεται στο σχήμα 13.

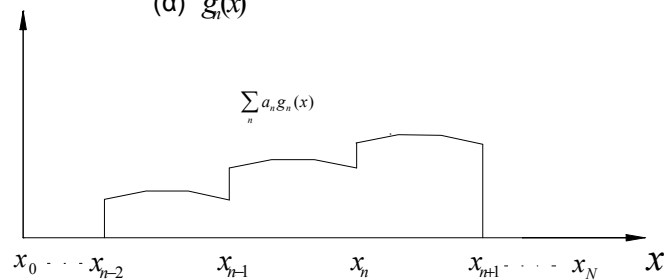
Οι συναρτήσεις Piecewise sinusoids ορίζονται ως εξής:

Piecewise sinusoids

$$g_n(x') = \begin{cases} \frac{\sin[k(x' - x'_{n-1})]}{\sin[k(x'_n - x'_{n-1})]} & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ \frac{\sin[k(x'_{n+1} - x')] }{\sin[k(x'_{n+1} - x'_n)]} & x'_n \leq x' \leq x'_{n+1} \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.16)$$



(α) $g_n(x)$



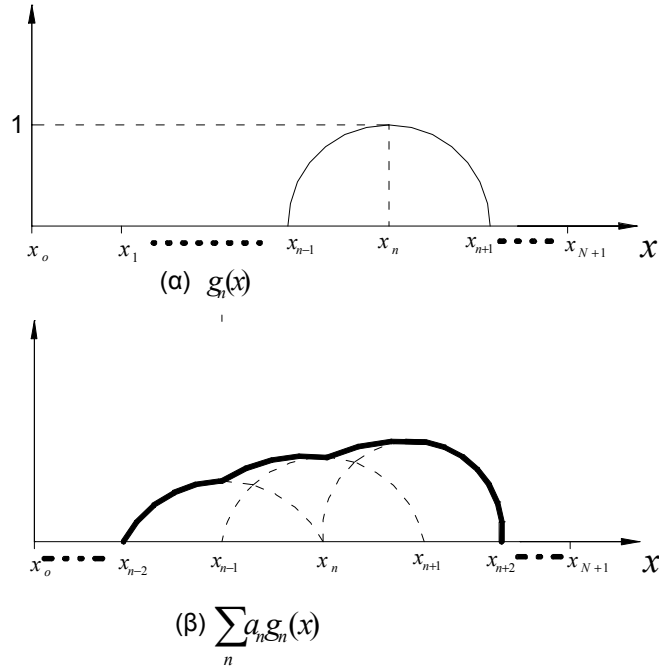
(β) $\sum_n a_n g_n(x)$

Σχήμα 12: Piecewise sinusoids subdomain functions

Ενώ, οι συναρτήσεις Truncated cosines ορίζονται ως εξής:

Truncated cosine

$$g_n(x') = \begin{cases} \cos \left[k \left(x' - \frac{x'_n - x'_{n-1}}{2} \right) \right] & x'_{n-1} \leq x' \leq x'_n \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (2.17)$$



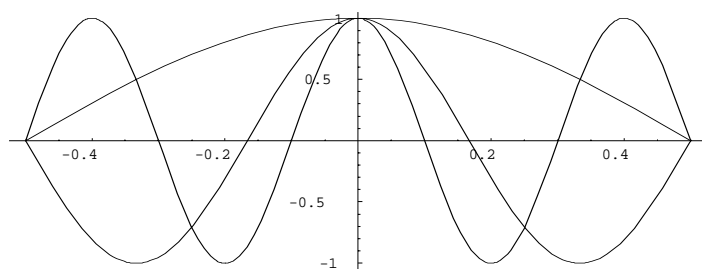
Σχήμα 13: Truncated cosines subdomain functions

2.2.1.2 Συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου (entire domain basis functions)

Οι παλμικές και τριγωνικές συναρτήσεις παλμού είναι μη-μηδενικές μόνο σε ένα τμήμα του διαστήματος $(-L/2, L/2)$. Για το λόγο αυτόν λέγονται συναρτήσεις βάσεις υποπεδίου (subdomain basis functions) και λέμε ότι κάνουμε διακριτοποίηση (discretization) της εξίσωσης. Μπορούμε, όμως, να διαλέξουμε και συναρτήσεις ολικού πεδίου, που είναι μη μηδενικές σε ολόκληρο το διάστημα $(-L/2, L/2)$ (εκτός, ίσως, από μεμονωμένα σημεία του διαστήματος). Για παράδειγμα, οι συνημιτονικές συναρτήσεις:

$$g_n(x') = \cos \left[\frac{(2n-1)\pi x'}{L} \right] \quad -\frac{L}{2} \leq x' \leq \frac{L}{2} \quad (2.18)$$

του Σχήματος 16 είναι κατάλληλες όταν η λύση $J(z)$ είναι άρτια και μηδενίζεται στα



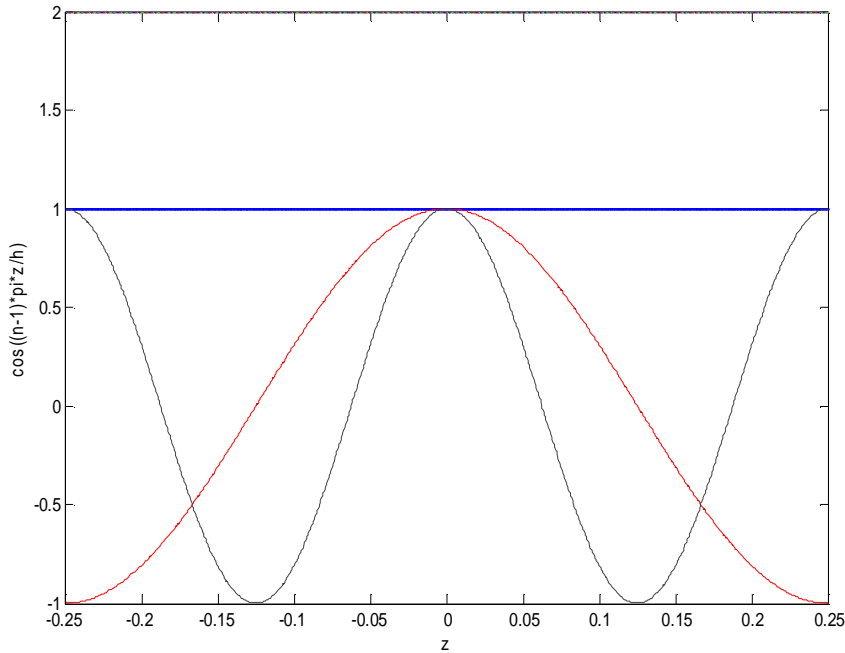
Σχήμα 14: Οι τρεις πρώτες συνημιτονικές συναρτήσεις $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$ της σχέσης . Όλες είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα $x = \pm \frac{L}{2}$.

άκρα $x = \pm \frac{L}{2}$, όπως συμβαίνει για το ρεύμα σε μια κεραία. Το σύνολο αυτό των συναρτήσεων είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τη μοντελοποίηση της ρευματικής κατανομής σε ένα δίπολο, που γνωρίζουμε βασικά ότι έχει ημιτονική κατανομή. Το μεγαλύτερο πλεονέκτημα των entire domain basis functions βρίσκεται στα προβλήματα, όπου η άγνωστη συνάρτηση υποτίθεται από πριν ότι ακολουθεί κάποια γνωστή μορφή. Αυτές οι συναρτήσεις θα εξάγουν μια πιο αποδεκτή αναπαράσταση της άγνωστης συνάρτησης, χρησιμοποιώντας πολύ λιγότερους όρους στην ανάπτυξη της από όσους θα χρειαζόνταν για τις subdomain basis functions. Η αναπαράσταση μιας συνάρτησης με τη χρήση συναρτήσεων ολικού πεδίου είναι παρόμοια με την ανάπτυξη σε σειρές Fourier.

Ως δεύτερο παράδειγμα αναφέρουμε την ανάπτυξη σε σειρά Fourier. Οι όροι που μας αφορούν είναι μόνο τα συνημίτονα καθώς η άγνωστη συνάρτηση που θέλουμε να αναπαραστήσουμε είναι άρτια. Συνεπώς:

$$g_n(x') = \cos\left[\frac{(n-1)\pi x'}{L/2}\right] \quad -\frac{L}{2} \leq x' \leq \frac{L}{2} \quad (2.19)$$

Οι συναρτήσεις φαίνονται στο Σχήμα 15:



Σχήμα 15: Οι τρεις πρώτες συνημιτονικές συναρτήσεις $g_0(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ της σχέσης (2.19). Όλες είναι άρτιες.

Σαν τρίτο παράδειγμα αναφέρουμε τις συναρτήσεις:

$$g_n(x') = \frac{T_{2n}\left(\frac{2x'}{L}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x'}{L}\right)^2}} \quad |z| < \frac{L}{2} \quad (2.20)$$

όπου $T_0(x)$, $T_2(x)$, $T_4(x)$, ... τα γνωστά μας πολυώνυμα Chebyshev. Αυτά είναι κατάλληλα όταν η λύση $J(z)$ είναι άρτια και απειρίζεται στα άκρα $z = \pm L/2$.

Άλλες συναρτήσεις, όπως οι προηγούμενες, μπορούν να δημιουργηθούν χρησιμοποιώντας πολυώνυμα Maclaurin, Legendre και Hermite ή άλλες βολικές συναρτήσεις.

Κλείνοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι συναρτήσεις βάσης υποπεδίου είναι πιο δημοφιλείς, γιατί, προφανώς, είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθούν και σε γενικές γραμμές δίνουν ανάλογη ακρίβεια σε μικρότερους υπολογιστικούς χρόνους. Μια εξήγηση γι' αυτό είναι ότι η αναπαράσταση ολικού πεδίου απαιτεί ολοκλήρωση σε όλη τη δομή της κεραίας για κάθε όρο N της σειράς. Η αναπαράσταση υποπεδίου, από την άλλη, περιλαμβάνει ολοκλήρωση των όρων που χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση του ρεύματος μόνο σε ένα μικρό τμήμα του διπόλου (segment). Επίσης,

οι πιθανότητες να αντιμετωπίσουμε έναν ill-conditioned πίνακα είναι μικρότερες, όταν χρησιμοποιούμε subdomain basis functions.

2.2.2 Επιλογή του αριθμού των συναρτήσεων βάσης N

Μία ακόμα παράμετρος, που πρέπει να επιλεγεί, είναι ο αριθμός N . Γενικά, μεγαλώνοντας το N αυξάνουμε (ή τουλάχιστον ελπίζουμε ότι αυξάνουμε) την ακρίβεια, σε βάρος όμως του υπολογιστικού κόστους. Πολλές φορές—ιδίως σε μεγάλα προβλήματα—το N επιλέγεται εκ των προτέρων με εμπειρικά κριτήρια. Έτσι, για διακριτοποίηση, βρίσκουμε, συχνά, στη βιβλιογραφία κριτήρια, όπως «ο αριθμός σημείων ανά μήκος κύματος». Σε μικρότερα προβλήματα, πολλές φορές, αυξάνουμε το N μέχρι η αριθμητική λύση να «κατασταλάξει» σε κάποια τελική τιμή. Αυτή η τελική τιμή είναι (ή ελπίζουμε να είναι) κοντά στην πραγματική λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.

2.2.3 Επιλογή συναρτήσεων δοκιμής

Το εσωτερικό γινόμενο $\langle w, g \rangle$ που αναφέρθηκε σε προηγούμενη παράγραφο είναι μία βαθμωτή πράξη που πρέπει να ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} \langle w, g \rangle &= \langle g, w \rangle \\ \langle bf + cg, w \rangle &= b\langle f, w \rangle + c\langle g, w \rangle \\ \langle g^*, g \rangle &> 0 \quad \text{if } g \neq 0 \\ \langle g^*, g \rangle &= 0 \quad \text{if } g = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

όπου b και c είναι βαθμωτά μεγέθη και ο αστερίσκος (*) σημαίνει μιγαδικός συζυγής. Ένα τυπικό άλλα όχι μοναδικό εσωτερικό γινόμενο είναι το εξής:

$$\langle w, g \rangle = \iint_S w^* \cdot g ds \tag{2.22}$$

όπου w είναι οι συναρτήσεις δοκιμής και S είναι η επιφάνεια της δομής που αναλύουμε. Οι συναρτήσεις w και g μπορεί να είναι και διανύσματα. Η τεχνική αυτή όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως είναι γνωστή ως *Moment Method* ή *Method of Moments*.

Η μέθοδος αυτή εξαναγκάζει τις οριακές συνθήκες να ικανοποιούνται σε όλη την επιφάνεια που εξετάζουμε. Για να το καταφέρουμε αυτό, ορίζουμε ένα σύνολο από N συναρτήσεις δοκιμής $\{w_l\} = w_1, w_2, \dots, w_N$. Σχηματίζοντας τα εσωτερικά γινόμενα μεταξύ αυτών των συναρτήσεων και ορίζοντας:

$$F(g_n) = \int_{-L/2}^{L/2} K(z, z') g_n(z') dz' \tag{2.23}$$

η (2.9) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^N J_n \langle w_l, F(g_n) \rangle = \langle w_l, h \rangle \quad l=1,2,\dots,N \quad (2.24)$$

Το σύνολο των N εξισώσεων αυτών μπορεί να γραφεί και σε μορφή πίνακα ως εξής:

$$[F_{\text{ln}}][J_n] = [h_l] \quad (2.25)$$

όπου

$$[F_{\text{ln}}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, F(g_1) \rangle & \langle w_1, F(g_2) \rangle & \dots \\ \langle w_2, F(g_1) \rangle & \langle w_2, F(g_2) \rangle & \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

$$[J_n] = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \vdots \\ J_N \end{bmatrix} \quad [h_l] = \begin{bmatrix} \langle w_1, h \rangle \\ \langle w_2, h \rangle \\ \vdots \\ \langle w_N, h \rangle \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας της (2.25) μπορεί να λυθεί ως προς J_n με αντιστροφή ή με κάποια μέθοδο παραγοντοποίησης π.χ. LU παραγοντοποίηση.

$$[J_n] = [F_{\text{ln}}]^{-1} [h_l]$$

Η επιλογή των συναρτήσεων δοκιμής είναι σημαντική καθώς τα στοιχεία $\{w_n\}$ πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα, έτσι ώστε οι N εξισώσεις στην (2.24) να είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επίσης σε γενικές γραμμές θα ήταν καλύτερο να επιλέγουμε συναρτήσεις που ελαχιστοποιούν τους υπολογισμούς για την εύρεση του εσωτερικού γινομένου.

2.2.3.1 Μέθοδος Galerkin

Η συνθήκη για γραμμική ανεξαρτησία μεταξύ των στοιχείων και το πλεονέκτημα της υπολογιστικής απλότητας είναι, επίσης, σημαντικά χαρακτηριστικά των συναρτήσεων βάσης. Εξαιτίας αυτού, συχνά χρησιμοποιούνται παρόμοιοι τύποι συναρτήσεων και για τις συναρτήσεις βάσης και για τις συναρτήσεις δοκιμής. Μια ειδική επιλογή συναρτήσεων είναι οι συναρτήσεις βάσης και δοκιμής να είναι ίδιες, $w_l(z) = g_l(z)$. Η τεχνική αυτή ονομάζεται μέθοδος Galerkin.

2.2.3.2 Τεχνική σημειακής ισότητας (point - matching technique or collocation technique)

Η τεχνική σημειακής ισότητας ή μέθοδος point-matching είναι μία αριθμητική τεχνική που οι λύσεις της ικανοποιούν τις ηλεκτρομαγνητικές οριακές συνθήκες (π.χ. μηδενισμός των εφαπτομενικών ηλεκτρικών πεδίων στην επιφάνεια ενός ηλεκτρικού αγωγού) μόνο σε διακριτά σημεία. Μεταξύ αυτών των σημείων οι οριακές συνθήκες μπορεί να μην ικανοποιούνται.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι στην (2.26) υπάρχουν N^2 όροι που πρέπει να υπολογιστούν. Κάθε όρος συνήθως απαιτεί δύο ή περισσότερες ολοκληρώσεις. Τουλάχιστον μια για τον υπολογισμό του $F(g_n)$ και μια για τα εσωτερικά γινόμενα της (2.22). Όταν αυτές οι ολοκληρώσεις πρέπει να γίνουν αριθμητικά, που είναι και η συνήθης περίπτωση, τεράστιες ποσότητες υπολογιστικού χρόνου θα χρειαστούν. Υπάρχει παρόλα αυτά ένα μοναδικό σύνολο συναρτήσεων δοκιμής που μειώνουν τον αριθμό των απαιτούμενων ολοκληρώσεων. Αυτό είναι το σύνολο των δ-συναρτήσεων δοκιμής του Dirac:

$$[w_l] = [\delta(p - p_l)] = [\delta(p - p_1), \delta(p - p_2), \dots] \quad (2.27)$$

όπου το p_l αναπαριστά ένα σημείο στο οποίο θέλουμε να ικανοποιείται η οριακή συνθήκη.

Χρησιμοποιώντας τις (2.22) και (2.27), η (2.24) γίνεται:

$$\begin{aligned} \langle \delta(p - p_l), h \rangle &= \sum_n J_n \langle \delta(p - p_l), F(g_n) \rangle \Rightarrow \\ \iint_S \delta(p - p_l) h ds &= \sum_n J_n \iint_S \delta(p - p_l) F(g_n) ds \Rightarrow \\ h|_{p=p_l} &= \sum_n J_n F(g_n)|_{p=p_l} \quad l = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.28)$$

Επομένως οι μόνες ολοκληρώσεις που απομένουν είναι αυτές που ορίζονται από το $F(g_n)$. Αυτή η απλοποίηση μπορεί να οδηγήσει σε λύσεις που δε θα ήταν πρακτικές αν χρησιμοποιούνταν άλλες συναρτήσεις δοκιμής.

Μια σημαντική παρατήρηση, όταν χρησιμοποιούμε τη μέθοδο point-matching είναι η τοποθέτηση των σημείων (p_l). Ενώ ισαπέχοντα σημεία, συνήθως, οδηγούν σε καλά αποτελέσματα, πολλά εξαρτώνται από τις συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούνται. Όταν χρησιμοποιούμε συναρτήσεις βάσης υποπεδίου σε συνδυασμό με point-matching, ένα σημείο πρέπει να τοποθετηθεί σε κάθε segment, για να έχουμε γραμμική ανεξαρτησία. Η τοποθέτηση των σημείων στο κέντρο των segments, συνήθως, παράγει τα καλύτερα αποτελέσματα. Είναι σημαντικό, το κάθε σημείο να μη συμπίπτει με την κορυφή του τριγώνου ή μιας παρόμοιας ασυνεχούς συνάρτησης, όπου οι συναρτήσεις βάσης δεν είναι διαφορίσιμες. Αυτό σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να προκαλέσει σφάλματα.

2.3 Παρατηρήσεις

Η λύση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης, που προκύπτει με τη χρήση της μεθόδου των ροπών, περιλαμβάνει πολλούς παράγοντες κατά τη διαδικασία μετατροπής της αρχικής ολοκληρωτικής εξίσωσης σε γραμμικό σύστημα ή σε μορφή πίνακα. Αυτό που είναι βασικό, όποιες κι αν είναι οι συναρτήσεις βάσης και δοκιμής, είναι η ανάπτυξη της ρευματικής κατανομής σε πεπερασμένο άθροισμα N συναρτήσεων βάσης με αγνώστους συντελεστές και ο υπολογισμός των εφαπτομενικών πεδίων σε M σημεία της δομής που μελετούμε, όπου γενικά $M \geq N$. Όταν εφαρμόζεται η μέθοδος point-matching, για παράδειγμα, $N \leq M \leq N+1$. Από την άλλη, η χρήση της μεθόδου Galerkin, όπου έχουμε ολοκλήρωση του εφαπτομενικού πεδίου, είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με τη χρήση πολύ περισσότερων τιμών πεδίου, από αγνώστους, $M \gg N$, με τις N εξισώσεις, τελικά, να προκύπτουν από το άθροισμα (ολοκλήρωση) των πεδιακών τιμών, με κατάλληλο τρόπο. Η πραγματική εφαρμογή της μεθόδου Galerkin μπορεί να επιτευχθεί αν η ολοκλήρωση γίνει έτσι ώστε $M \geq N$.

Ένας επιπλέον παράγοντας, που πρέπει να ληφθεί υπόψη στη λύση ενός ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος, μέσω της μεθόδου των ροπών, είναι το σφάλμα που συνδέεται με το αριθμητικό αποτέλεσμα. Μπορούμε να αναγνωρίσουμε δύο ανεξάρτητα σφάλματα: 1) το σφάλμα μοντελοποίησης που πηγάζει από την προσέγγιση της πραγματικής δομής από μία συνήθως απλοποιημένη δομή για υπολογιστικούς σκοπούς, και 2) ένα σφάλμα αριθμητικού υπολογισμού, που αναπαριστά τη διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων που προέκυψαν από υπολογισμό και την ακριβή λύση για τη δομή που έχει επιλεγεί.

Το σφάλμα μοντελοποίησης, μπορεί να εκτιμηθεί μόνο πειραματικά. Το σφάλμα αριθμητικού υπολογισμού μπορεί να εκτιμηθεί συγκρίνοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα, καθώς το N προοδευτικά αυξάνει, για να πάρουμε το ρυθμό σύγκλισης της αριθμητικής λύσης. Σε γενικές γραμμές, μια συνάρτηση βάσης που μοιάζει με την άγνωστη συνάρτηση που θέλουμε να υπολογίσουμε, ελαχιστοποιεί το σφάλμα για δεδομένο αριθμό N των αγνώστων συντελεστών, ή επιτυγχάνει μια καθορισμένη ακρίβεια για μια ελάχιστη τιμή για το N .

2.4 Επίλυση ολοκληρωτικών και ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων με αριθμητικές μεθόδους

Συχνά σε ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα συναντώνται ολοκληρωτικές και ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις κάποιας τάξης με συγκεκριμένες βασικές ιδιότητες, οι οποίες μπορούν να επιλυθούν αποτελεσματικά με τη χρήση απλών αριθμητικών μεθόδων, όπως η μέθοδος των ροπών. Θα αναφέρουμε παρακάτω τα βασικά χαρακτηριστικά αυτών των μεθόδων, καθώς και τις ομοιότητες και διαφορές που παρουσιάζουν. Για την ευκολότερη κατανόηση των αριθμητικών μεθόδων, θα δώσουμε παραδείγματα απλών μονοδιάστατων εξισώσεων, των οποίων οι πυρήνες παρουσιάζουν λογαριθμικές ανωμαλίες. Η επιλογή αυτή δεν περιορίζει την ανάλυση, αλλά δίνεται η δυνατότητα γενίκευσης των αριθμητικών μεθόδων επειδή:

- Πρακτικά σημαντικές ηλεκτρομαγνητικές εξισώσεις μονοδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων έχουν πυρήνα με λογαριθμικές ανωμαλίες και αφού η φύση του πυρήνα υποδεικνύει βασικές ιδιότητες της ολοκληρωτικής εξίσωσης, τα σημαντικά χαρακτηριστικά της απλούστερης εξίσωσης είναι παρόμοια με αυτά των εξισώσεων του ηλεκτρικού πεδίου
- Οι περισσότερες από αυτές τις εξισώσεις έχουν γνωστές ακριβείς λύσεις, γεγονός που δίνει τη δυνατότητα για εξακρίβωση της ακρίβειας των αριθμητικών λύσεων.

Επίσης θα δείξουμε πώς αυτές οι τεχνικές μπορούν να εφαρμοσθούν σε εξισώσεις πραγματικών προβλημάτων .

2.4.1 Απλή λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Ως εισαγωγικό παράδειγμα εφαρμόζουμε μία απλή αλλά αποτελεσματική αριθμητική μέθοδο, τη μέθοδο ροπών με subdomain basis functions, για τη στοιχειώδη ολοκληρωτική εξίσωση:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w I(z') \ln|z-z'| dz' = E(z) \quad (2.30)$$

όπου $I(z')$ είναι η άγνωστη συνάρτηση, $-\frac{1}{2\pi} \ln|z-z'|$ είναι ο πυρήνας και $E(z)$ είναι η διέγερση. Η άγνωστη συνάρτηση, όπως είδαμε και προηγουμένως, προσεγγίζεται από ένα γραμμικό συνδυασμό γνωστών, γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων βάσης στο διάστημα $(-w, w)$, ως εξής:

$$I(z) = \sum_{n=1}^N I_n u_n(z) \quad (2.31)$$

όπου $u(z)$ είναι ορθογώνιοι παλμοί, που ορίζονται από:

$$u_n(z) = \begin{cases} 1, & z_n - \frac{\Delta}{2} < z < z_n + \frac{\Delta}{2} \\ 0, & \text{αλλου} \end{cases} \quad (2.32)$$

Το διάστημα $(-w, w)$ είναι χωρισμένο σε N ίσα τμήματα μήκους $\Delta = \frac{2w}{N}$ με τα κέντρα τους στα σημεία:

$$z_n = -w + \Delta \cdot \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N$$

Λόγω της προσέγγισης αυτής η (2.30) γίνεται:

$$\sum_{n=1}^N I_n Z_n(z) \cong E(z) \quad (2.33)$$

όπου:

$$Z_n(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{z_n - \Delta/2}^{z_n + \Delta/2} \ln|z - z'| dz' \quad (2.34)$$

που μπορεί να ολοκληρωθεί άμεσα. Η εξίσωση εφαρμόζεται ακριβώς σε N σημεία που αποτελούν τα μέσα των τμημάτων αυτών στο διάστημα $(-w, w)$, και παίρνουμε ένα σύστημα N εξισώσεων με N αγνώστους I_n :

$$\sum_{n=1}^N I_n Z_{mn} = E_m \quad (2.35)$$

όπου $m = 1, 2, \dots, N$, $E_m = E(z_m)$ και $Z_{mn} = Z_n(z_m)$ τα οποία υπολογίζουμε. Προκύπτει:

$$Z_{mn} = \frac{\Delta}{2\pi} \left\{ 1 - \ln \Delta - \frac{1}{2} \ln \left| (m-n)^2 - \frac{1}{4} \right| - (m-n) \ln \left(\frac{|m-n+1/2|}{|m-n-1/2|} \right) \right\} \quad (2.36)$$

Η (2.35) σε μορφή πινάκων γίνεται:

$$[Z_{mn}] \cdot [I_n] = [E_m] \quad (2.37)$$

Η λύση της (2.35) ή της (2.37) είναι οι συντελεστές I_n , η γνώση των οποίων μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση $I(z)$ από την εξίσωση (2.31).

Από την (2.36) παρατηρεί κανείς ότι ο πίνακας Z_{mn} εξαρτάται από τη διαφορά $(m-n)$ κι όχι από τα m και n ξεχωριστά, που σημαίνει ότι ο $[Z_{mn}]$ είναι πίνακας τύπου Toeplitz. Από τη στιγμή που ο πίνακας είναι συμμετρικός, ισχύει:

$$Z_{mn} = Z_{m-n} = Z_{n-m} = Z_{|m-n|} = Z_{|n-m|}$$

Από όπου καταλήγουμε στο ότι υπάρχουν μόνο N διακριτά στοιχεία στον πίνακα $[Z_{mn}]$. Όλα τα άλλα στοιχεία μπορούν να βρεθούν από τη γνώση αυτών της πρώτης (ή τελευταίας) γραμμής ή της πρώτης (ή τελευταίας) στήλης. Αυτή η παρατήρηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μείωση του χρόνου και της εργασίας που χρειάζεται για να υπολογιστούν τα στοιχεία του πίνακα. Αν επιλέξουμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, τότε όλες οι άλλες μπορούν να προσδιοριστούν από:

$$Z_{mn} = Z_{1,|m-n|+1}$$

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι αποτελέσματα:

- α) της εξάρτησης του πυρήνα από το $|z-z'|$
- β) της άρτιας φύσης της συνάρτησης βάσης σε σχέση με το κέντρο της
- γ) των παλμών ίσου πλάτους
- δ) της τοποθέτησης των match points στα κέντρα των παλμών

Μία τρίτη ενδιαφέρουσα ιδιότητα του πίνακα είναι ότι είναι ισχυρός πίνακας διαγώνια (diagonally strong). Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο κάθε διαγώνιου στοιχείου είναι μεγαλύτερο από το μέτρο κάθε μη διαγώνιου στοιχείου ($|Z_{nn}| > |Z_{mn}|, m \neq n$). Συνήθως ο υπολογισμός του αντιστρόφου ενός τέτοιου πίνακα ή η επίλυση του σχετικού συστήματος γραμμικών εξισώσεων είναι μια πολύ σταθερή διαδικασία.

Για αυτή την ολοκληρωτική εξίσωση με $w \neq 2$ και για συγκεκριμένες διεγέρσεις, έχουμε τις εξής λύσεις:

i	Διέγερση $E_i(z)$	Άγνωστο $I_i(z)$
0	1	$\frac{2}{w \ln\left(\frac{2}{w}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{w}\right)^2}}$
1	$\frac{z}{w}$	$\frac{2}{w} \cdot \left(\frac{z}{w}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{w}\right)^2}}$
2	$\left(\frac{z}{w}\right)^2$	$\frac{2}{w} \cdot \left[2\left(\frac{z}{w}\right)^2 + \frac{1}{2 \ln\left(\frac{2}{w}\right)} - 1 \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{w}\right)^2}}$

3	$\left(\frac{z}{w}\right)^3$	$\frac{3}{w} \cdot \left[2\left(\frac{z}{w}\right)^3 - \frac{z}{w} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{z}{w}\right)^2}}$
---	------------------------------	--

Πίνακας 1: Λύση Ολοκληρωτικής εξίσωσης (2.30).

2.4.2 Λύση ολοκληρωτικής εξίσωσης-Αριθμητικός υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα

Στην αριθμητική λύση της εξίσωσης (2.30) τα στοιχεία του πίνακα $[Z_{mn}]$ καθορίζονται από την (2.36). Όμως, σε πρακτικές ολοκληρωτικές εξισώσεις, τα ολοκληρώματα που παρουσιάζονται, σπάνια μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης αλλά πρέπει να εφαρμόζονται με εξαιρετική προσοχή, ειδικά όταν ο πυρήνας του ολοκληρώματος παρουσιάζει ανωμαλία. Μία ολοκληρωτική εξίσωση με τέτοιο πυρήνα είναι η:

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-h}^h I(z') K(z-z') dz' = E(z), \quad -h < z < h \quad (2.38)$$

στην οποία ο πυρήνας είναι:

$$K(z-z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{R} d\phi' \quad (2.39)$$

$$\text{με } R = \left[(z-z')^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \right]$$

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση σταθερή $E(z)$, η (2.38) είναι ουσιαστικά η εξίσωση για την πυκνότητα ρεύματος πάνω σε αγωγίμη κεραία μήκους και ακτίνας τροφοδοτούμενης από σταθερό δυναμικό. Οι εξισώσεις (2.30) και (2.38) είναι της ίδιας μορφής αλλά έχουν διαφορετικούς πυρήνες. Έτσι η μόνη διαφορά στη διαδικασία επίλυσης έγκειται στον υπολογισμό των στοιχείων των πινάκων συντελεστών.

Μια διαδικασία για την επίλυση της (2.38) πρέπει να περιλαμβάνει μια μέθοδο για τον αριθμητικό υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος που προκύπτει, κάτι που αν δε γίνει προσεκτικά μπορεί να είναι κοπιαστικό. Η δυσκολία σε αυτή την περίπτωση είναι ότι η αριθμητική ολοκλήρωση του πυρήνα παρουσιάζει ανωμαλία στο $z = z'$, δηλαδή ο πυρήνας συμπεριφέρεται λογαριθμικά:

$$K(z-z') \rightarrow \ln |z-z'| \quad (2.40)$$

όταν $z - z' \rightarrow 0$. Για να ξεπεράσουμε αυτά τα προβλήματα παρατηρούμε ότι:

$$K(z - z') \xrightarrow{\left(\frac{z-z'}{2a}\right) \rightarrow 0} -\frac{1}{\pi a} \ln\left(\frac{|z - z'|}{8a}\right) \quad (2.41)$$

και αντικαθιστούμε τον πυρήνα με:

$$K(z - z') = \left\{ K(z - z') + \frac{1}{\pi a} \ln\left(\frac{|z - z'|}{8a}\right) \right\} - \frac{1}{\pi a} \ln\left(\frac{|z - z'|}{8a}\right) \quad (2.42)$$

που προκύπτει αν προσθαιρέσουμε τον όρο (2.41) στον αρχικό πυρήνα. Είναι εμφανές ότι το δεξί μέλος της (2.42) ισούται με $K(z - z')$ και παρουσιάζει δύο σημαντικές ιδιότητες: α) ο όρος μέσα στις αγκύλες μεταβάλλεται πολύ αργά ώστε να μπορεί να ολοκληρωθεί αριθμητικά με ευκολία.

β) ο όρος εκτός των αγκυλών μπορεί να ολοκληρωθεί αναλυτικά.

Ο υπολογισμός του πρώτου ολοκληρώματος γίνεται με τη βοήθεια του ελλειπτικού ολοκληρώματος. Η περαιτέρω επίλυση της εξίσωσης ακολουθεί τη διαδικασία που δείξαμε προηγουμένως.

2.4.3 Επίλυση ολοκληροδιαφορικής εξίσωση πρώτης τάξης

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζονται τεχνικές για την επίλυση μιας ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης. Έστω η απλή εξίσωση 1^{ης} τάξης:

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dz} \int_{-w}^w I(z') \ln|z - z'| dz' = E(z), \quad z \in (-w, w) \quad (2.43)$$

που έχει συνθήκη:

$$\int_{-w}^w I(z) dz = 0 \quad (2.44)$$

Με ολοκλήρωση ως προς z η σχέση (2.43) μετατρέπεται στην:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w I(z') \ln|z - z'| dz' = J(z) + C, \quad z \in (-w, w) \quad (2.45)$$

όπου C είναι μια άγνωστη σταθερά ολοκλήρωσης και :

$$J(z) = \int_0^z E(z') dz' \quad (2.46)$$

Η εξίσωση (2.43) θυμίζει διαφορική εξίσωση με την απαραίτητη οριακή συνθήκη (2.44), ενώ το ζευγάρι των εξισώσεων (2.45) - (2.44) φαίνεται ως σύστημα εξισώσεων με αγνώστους I και C . Αν εξαιρέσουμε το C , η (2.45) είναι η γνωστή μας εξίσωση (2.30). Βέβαια, η παρουσία του διαφορικού τελεστή στην (2.43) είναι ένα χαρακτηριστικό, που απαιτεί προσεκτική διερεύνηση.

Ο ρόλος της σταθεράς C στην (2.45) μπορεί να διαλευκανθεί με ένα απλό παράδειγμα. Έστω ότι $E(z) = 1$, τότε $J(z) = z$ και το δεξί μέλος της (2.45) γίνεται $C + z$. Από τον πίνακα 1 είναι φανερό ότι $I(z) = CI_0(z) + wI_1(z)$. Για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη (2.44), η σταθερά πρέπει να είναι μηδέν, έτσι η λύση προκύπτει $I(z) = wI_1(z)$.

Η λύση της (2.45) γίνεται με τη μέθοδο των ροπών με παρόμοιο τρόπο όπως η λύση της (2.30), αναπτύσσοντας το άγνωστο σε συναρτήσεις παλμών και ικανοποιώντας την (2.45) στα κέντρα των παλμών αυτών. Παίρνουμε λοιπόν:

$$\sum_{n=1}^N I_n Z_{mn} - C = J(z_m), \quad m = 1, 2, \dots, N \quad (2.47)$$

όπου Z_{mn} είναι τα στοιχεία (2.36). Η οριακή συνθήκη (2.44) γίνεται:

$$\Delta \sum_{n=1}^N I_n = 0 \quad (2.48)$$

Οι εξισώσεις (2.47) και (2.48) μπορούν να γραφούν και σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & \cdots & Z_{1N} & -1 \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & \cdots & Z_{2N} & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & Z_{N3} & \cdots & Z_{NN} & -1 \\ \Delta & \Delta & \Delta & & \Delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_M \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(z_1) \\ J(z_2) \\ \vdots \\ J(z_N) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Όπου ο ρόλος του C ως αγνώστου είναι φανερός και είναι πλέον δυνατή η επίλυση του συστήματος των $N+1$ εξισώσεων.

2.4.4 Επίλυση ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τεχνικές για την επίλυση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης 2^{ης} τάξης:

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dz^2} \int_{-w}^w I(z') \ln|z-z'| dz' = E(z), \quad z \in (-w, w) \quad (2.50)$$

Όπου η άγνωστη συνάρτηση $I(z)$ πρέπει να ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες:

$$I(w) = I(-w) = 0 \quad (2.51)$$

Το ενδιαφέρον μας για την εξίσωση (2.50) πηγάζει από το γεγονός ότι έχει χαρακτηριστικά ανάλογα με αυτά που, συχνά, συναντούμε σε ολοκληρωτικές εξισώσεις στον ηλεκτρομαγνητισμό. Μια εξίσωση, για παράδειγμα, είναι αυτή που μας δίνει το άγνωστο ρεύμα σε μια κεραία μήκους $2w$ διεγερμένης από TE ρυθμό, το οποίο μηδενίζεται στα άκρα της κεραίας. Αυτές τις εξισώσεις τις αντιμετωπίζουμε ως διαφορικές εξισώσεις με άγνωστο το ολοκλήρωμα, οπότε η γενική λύση της εξίσωσης δίνεται από τη σχέση:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w I(z') \ln|z-z'| dz' = A + Bz + \int_{-w}^z E(z')(z-z') dz', \quad z \in (-w, w) \quad (2.52)$$

Αν τα A και B ήταν γνωστά, η (2.52) θα είχε την ίδια μορφή με την εξίσωση (2.30) και έτσι η άγνωστη συνάρτηση $I(z)$ θα μπορούσε να βρεθεί από την ίδια διαδικασία που χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση της (2.30). Αφού τα A, B είναι άγνωστα, η επίλυση του συστήματος θα γίνει με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών. Αυτό θα φανεί στο παρακάτω παράδειγμα, όπου θα θεωρήσουμε ότι $E(z) = a + bz$. Σε αυτή την περίπτωση, η (2.52) γίνεται:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{-w}^w I(z') \ln|z-z'| dz' = A' + B'z + a \frac{z^2}{2} + b \frac{z^3}{6}, \quad z \in (-w, w) \quad (2.53)$$

όπου A' και B' είναι οι νέες σταθερές. Με τη βοήθεια του πίνακα 1, η (2.53) μπορεί να επιλυθεί υπερθέτοντας τις αποκρίσεις που οφείλονται στις ανεξάρτητες διεγέρσεις του δεξιού μέλους της :

$$I(z) = \frac{1}{\sqrt{w^2 - z^2}} (C + Dz + 2az^2 + bz^3) \quad (2.54)$$

Από τη στιγμή που η (2.53) έχει τον ίδιο πυρήνα με τις (2.45) και (2.30) που αναφέραμε σε προηγούμενη παράγραφο, δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι η λύση παρουσιάζει ανωμαλία στο $z = \pm w$. Παρόλα αυτά η οριακή συνθήκη (2.51) απαιτεί ότι η συνάρτηση $I(z)$ μηδενίζεται για $z = \pm w$ και αυτό είναι δυνατό μόνο αν η (2.54) μηδενίζεται σε αυτά τα σημεία. Εφαρμόζοντας αυτή τη συνθήκη προκύπτει η τελική λύση:

$$I(z) = \sqrt{w^2 - z^2}(-2a - zb) \quad (2.55)$$

Όπου είναι εμφανές ότι η συνάρτηση $I(z)$ μηδενίζεται στα σημεία $z = \pm w$.

Βέβαια η εξίσωση αυτή θα μπορούσε να λυθεί και πιο γενικά με την τεχνική που ακολουθήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Τέτοιου είδους εξισώσεις παρουσιάζονται με αρκετές ομοιότητες στον ηλεκτρομαγνητισμό: λογαριθμικά ανώμαλοι πυρήνες, παρόμοιες οριακές συνθήκες, διαφορικοί τελεστές που εφαρμόζονται στα ολοκληρώματα. Η προσεγγιστική μέθοδος μπορεί να γίνει επίσης με τη χρησιμοποίηση διαφορετικών συναρτήσεων βάσης, subdomain η entire domain, αλλά και με τη χρήση testing functions.

2.5 Συμπεράσματα για τη μέθοδο Galerkin στην ακριβή και στην προσεγγιστική εξίσωση του Hallén (Pocklington) με subdomain basis functions

2.5.1 Delta function generator

Γνωρίζουμε ότι η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén για την εύρεση του ρεύματος σε πεπερασμένη γραμμική κεραία, κεντρικά τροφοδοτούμενη από μια γεννήτρια delta-function λαμβάνει δύο μορφές, ανάλογα με την επιλογή του πυρήνα. Οι δύο πυρήνες αναφέρονται συνήθως ως ο ακριβής και ο προσεγγιστικός. Με τον προσεγγιστικό πυρήνα, η εξίσωση δεν έχει λύση, όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin στις δύο μορφές της ολοκληρωτικής εξίσωσης, για παλμικές συναρτήσεις βάσης, και στη συνέχεια θα επιχειρήσουμε να τα συσχετίσουμε με τα δικά μας συμπεράσματα.

Η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén έχει την παρακάτω μορφή:

$$\int_{-h}^h K(z-z')I(z')dz' = \frac{i}{2\zeta_0} V \sin k|z| + C \cos kz, \quad -h < z < h \quad (2.56)$$

Αριθμητικές μέθοδοι, και κυρίως η μέθοδος των ροπών, έχουν συχνά εφαρμοστεί στην (2.56). Στην πραγματικότητα, η απ' ευθείας αριθμητική λύση της (2.56), προτείνεται, συχνά, στα συγγράμματα ως η προτιμώμενη μέθοδος για τον καθορισμό της ρευματικής κατανομής σε μια γραμμική κεραία. Παρόλο που σε πολλές περιπτώσεις, μπορούν να προκύψουν χρήσιμα αποτελέσματα, χωρίς λεπτομερή γνώση των δυσκολιών που σχετίζονται με την εφαρμογή αριθμητικών μεθόδων στην (2.56), το να κατανοήσουμε τις δυσκολίες αυτές είναι σημαντικό.

Ακόμα και η πολύ απλή εξίσωση (2.56) παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες και με τον ακριβή και με τον προσεγγιστικό πυρήνα. Στην τελευταία περίπτωση, οι πιο αξιοσημείωτες δυσκολίες είναι συνέπεια της μη επιλυσιμότητας της εξίσωσης. Οι ερωτήσεις που θα επιχειρήσουμε να απαντήσουμε είναι: 1) Τι θα πάρουμε αν εφαρμόσουμε μια αριθμητική μέθοδο στην (2.56) και 2) Κάτω από ποιες συνθήκες, οι αριθμητικές λύσεις που προκύπτουν για τους δύο πυρήνες είναι ίδιες.

Όπως έχουμε ξαναπεί, από τη στιγμή που η προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση δεν έχει λύση, σε γενικές γραμμές διαφορετικές μέθοδοι δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα. Συνεπώς για την περίπτωση της προσεγγιστικής ολοκληρωτικής εξίσωσης το πρώτο ερώτημα έχει νόημα για μια συγκεκριμένη αριθμητική μέθοδο. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται, όπως είπαμε, είναι η μέθοδος Galerkin με παλμικές συναρτήσεις βάσης. Επιπλέον, για να λάβουμε μια ικανοποιητική απάντηση στο δεύτερο ερώτημα, τα μεγέθη $\text{Re}\{I(z)/V\}$ και $\text{Im}\{I(z)/V\}$ εξετάζονται ξεχωριστά.

Τα κυριότερα αποτελέσματα που θα παρουσιαστούν, έχουν προκύψει από την αναλυτική μελέτη του απλούστερου προβλήματος της άπειρης κεραίας και την εφαρμογή της γνώσης που αποκτήθηκε έτσι, στην περίπτωση της πεπερασμένης κεραίας – [3]. Τα αποτελέσματα αυτά, επιβεβαιώνονται και συμπληρώνονται από

αριθμητικά αποτελέσματα. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι κάποιος μπορεί να καταλάβει με σαφήνεια πώς εξαρτώνται οι αριθμητικές λύσεις από τις παραμέτρους. Στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, αυτή η εξάρτηση δεν είναι καθόλου προφανής. Επιπλέον οι αναλυτικές προβλέψεις δεν ενέχουν λάθη roundoff, στα οποία οι αριθμητικές λύσεις είναι πολύ επιρρεπείς.

Στην περίπτωση της ακριβούς ολοκληρωτικής εξίσωσης για την άπειρη κεραία προκύπτει ότι:

$$I_{ex,n}^{(\infty)} \square \frac{ikV}{\pi\zeta_o} \int_0^\infty \frac{\cos \zeta n z_o}{(k^2 - \zeta^2) K_{ex}(\zeta)} d\zeta \quad (2.57)$$

ενώ στην περίπτωση της προσεγγιστικής εξίσωσης για την άπειρη κεραία :

$$\begin{aligned} I_{ap,n}^{(\infty)} \square & -i \frac{V}{\zeta_o} \frac{\pi^3}{32\sqrt{2}} k z_o \sqrt{\frac{z_o}{a}} (-1)^n \\ & \times \exp\left(\frac{a\pi}{z_o}\right) \frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi z_o}{2a} n\right)} \\ & \times \left[1 - \frac{5}{2\pi} \frac{z_o}{a} + \frac{5}{4} n \left(\frac{z_o}{a}\right)^2 \tanh\left(\frac{\pi z_o}{2a} n\right) \right] \end{aligned} \quad (2.58)$$

Από την (2.58) φαίνεται ότι όταν το πλάτος του παλμού z_o είναι μικρό, η αριθμητική μέθοδος έχει ως αποτέλεσμα ένα μεγάλο, καθαρά φανταστικό, γρήγορα ταλαντούμενο ρεύμα, για σημεία στην κεραία όχι πολύ μακριά από το σημείο τροφοδοσίας. Από την άλλη, με το $n z_o$ σταθερό, μπορεί να αποδειχθεί ότι η αριθμητική μέθοδος οδηγεί σε πεπερασμένο πραγματικό μέρος του ρεύματος. Αυτό το πραγματικό μέρος είναι πολύ κοντά στην αντίστοιχη ποσότητα για την ακριβή ολοκληρωτική εξίσωση και τα δύο μέρη γίνονται ίδια στο όριο $ka \rightarrow 0$.

Ας επιστρέψουμε στην πεπερασμένη κεραία. Υποθέτουμε ότι $z_o/\lambda \ll a/\lambda$ και θα συζητήσουμε τη συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης σε συνάρτηση με τα αναλυτικά αποτελέσματα για την άπειρη κεραία. Για την ακριβή ολοκληρωτική εξίσωση, η αριθμητική λύση αναπαράγει τη λογαριθμική ανωμαλία στο $\text{Im}\{I_{ex}(z)/V\}$, όπως στην περίπτωση της άπειρης κεραίας. Για την προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση, τα μεγέθη $\text{Re}\{I_{ap,n}/V\}$ και $\text{Re}\{I_{ex,n}/V\}$ είναι πολύ κοντά, ενώ, κοντά στο σημείο τροφοδοσίας οι τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ είναι μεγάλες και ταλαντώνονται ταχύτατα. Στην πραγματικότητα, αυτές οι τιμές προσεγγίζονται πάρα πολύ από τις αντίστοιχες τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}^\infty/V\}$ για την περίπτωση της άπειρης κεραίας και την ασυμπτωτική διατύπωση (2.58).

Οι παραπάνω ισχυρισμοί έχουν επιβεβαιωθεί από εκτεταμένους αριθμητικούς υπολογισμούς. Στα σχήματα 1 και 2 - [3] - παρουσιάζονται κάποια χαρακτηριστικά αποτελέσματα, για $N = 200$, $h/\lambda = 0.25$ και $a/\lambda = 0.007022$ έτσι ώστε $a/z_o = 5.6$, που

είναι σχετικά μεγάλο. Στο [3,σχ. 1] φαίνεται το $\text{Re}\{I_n/V\}$, με ευθεία γραμμή για την ακριβή εξίσωση και διακεκομμένη για την προσεγγιστική. Αν εξαιρέσουμε την περιοχή $z = h$ (ή $n = 200$), οι δύο λύσεις μοιάζουν να είναι αρκετά κοντά. Στο [3,σχ. 2] παρουσιάζονται τα φανταστικά μέρη. Στη λύση για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα, είναι φανερή μια συμπεριφορά που μοιάζει με λογαριθμική ανωμαλία. Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, μόνο οι τιμές του $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ μεταξύ 0 και 0.01 φαίνονται. Οι υπόλοιπες τιμές είναι μεγάλες κι εκτός κλίμακας.

Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, ταλαντώσεις παρατηρούνται στις καμπύλες και των δύο σχημάτων [3,σχ. 1-2], κοντά στο άκρο $z = h$. Οι ταλαντώσεις εδώ είναι μικρότερες από αυτές του φανταστικού μέρους κοντά στο 0. Φυσικά, αυτό το φαινόμενο δε συμβαίνει στην περίπτωση της κεντρικά τροφοδοτούμενης άπειρης κεραίας, η οποία δεν έχει άκρα. Παρόμοιες ταλαντώσεις, συμβαίνουν όταν η αριθμητική μέθοδος εφαρμόζεται στην ολοκληρωτική εξίσωση για την πεπερασμένη unloaded receiving antenna. Συνεπώς, το φαινόμενο αυτό δεν μπορεί να αποδοθεί στο delta function generator.

Τώρα θα μελετήσουμε με μεγαλύτερη λεπτομέρεια την ομοιότητα πραγματικών μερών των αγωγιμοτήτων εισόδου, $\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$ και $\text{Re}\{I_{ap,0}/V\}$, υποθέτοντας ότι ο λόγος z_0/λ είναι μικρός και ίδιος για τις δύο περιπτώσεις. Όταν ο λόγος h/λ είναι σταθερός, η διαφορά των δύο πραγματικών μερών, γίνεται μικρότερη, όταν ο λόγος a/λ γίνεται μικρότερος, όπως και στην περίπτωση της άπειρης κεραίας. Όταν ο λόγος a/λ είναι σταθερός, και τα δύο πραγματικά μέρη παρουσιάζουν μεγάλη εξάρτηση από το λόγο h/λ , και το ίδιο κάνει και η διαφορά τους. Αριθμητικοί υπολογισμοί με $h/\lambda \leq 0.5$ δείχνουν ότι, με την εξαίρεση μιας περιοχής κοντά στο σημείο συντονισμού, οι δύο λύσεις έρχονται πιο κοντά όσο ο λόγος h/λ γίνεται μεγαλύτερος. Η αιτία για την οποία συμβαίνει αυτό είναι ότι η διαφορά μεταξύ των δύο πυρήνων γίνεται λιγότερο έντονη όταν το h/λ γίνεται μεγαλύτερο. Στην περιοχή κοντά στο σημείο συντονισμού, η τιμή του h/λ είναι πιο κρίσιμη. Κοντά στο σημείο συντονισμού, ή όταν το h/λ είναι μικρό και το a/λ είναι μεγάλο, η διαφορά μεταξύ των $\text{Re}\{I_{ex,0}/V\}$ και $\text{Re}\{I_{ap,0}/V\}$ μπορεί να είναι σημαντική.

Πρακτικά και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της ρευματικής κατανομής είναι ίσης σημασίας. Μια ερώτηση που προκύπτει μετά την εξέταση της συμπεριφοράς της λύσης για μεγάλο N , είναι ποια είναι η καλύτερη επιλογή του N . Το σύνηθες κριτήριο όταν εφαρμόζουμε αριθμητικές μεθόδους είναι να μεγαλώνουμε το N μέχρι η λύση να συγκλίνει σε μια ικανοποιητική τελική τιμή. Για τον ακριβή πυρήνα, αυτό το κριτήριο είναι χρήσιμο μόνο αν αγνοήσουμε τις τιμές του $\text{Im}\{I_{ex,n}/V\}$ όταν το n είναι πολύ μικρό. Συγκεκριμένα, από τη στιγμή που $\text{Im}\{I_{ex}(0)/V\} = -\infty$, κριτήρια όπως η σύγκλιση της αντίστασης εισόδου δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται για τον ακριβή πυρήνα.

Για τον προσεγγιστικό πυρήνα, το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Από τη στιγμή που παρουσιάζονται ταλαντώσεις κοντά στο σημείο τροφοδοσίας, όταν $z_0/\lambda \ll a/\lambda$ ή $N \gg h/a$, είναι απαραίτητο να επιλέξουμε πλάτος παλμού

$z_o/\lambda \gtrsim a/\lambda$ ή $N \lesssim h/a$ όταν ζητείται το $\text{Im}\{I(z)/V\}$. Η βέλτιστη λύση για το N πρέπει να είναι αυτή που δίνει τα πλησιέστερα αποτελέσματα σε αυτά που προκύπτουν με τον ακριβή πυρήνα. Καθορισμός της τιμής αυτής από πριν δεν είναι δυνατός. Το κριτήριο της εγγύτητας των λύσεων μπορεί να διαμορφωθεί με διαφορετικούς τρόπους. Για παράδειγμα, οι λύσεις μπορούν να θεωρηθούν κοντά, όταν τα φανταστικά μέρη των αγωγιμοτήτων εισόδου είναι κοντά, ή όταν το $\text{Im}\{I_{ex,n}/V\}$ είναι κοντά στο $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ για $1 \ll n \ll N$.

Κλείνοντας, θα αναφερθούμε στα λάθη roundoff, εστιάζοντας στις ιδιότητες του πίνακα A του προκύπτοντος συστήματος. Ο πίνακας προκύπτει από τη διακριτοποίηση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης Fredholm πρώτου είδους, και τέτοιοι πίνακες είναι τυπικά ill conditioned. Ο συνηθισμένος κανόνας ότι όσο πιο ομαλός είναι ο πυρήνας τόσο πιο ill-conditioned είναι το σύστημα, μπορεί να εφαρμοστεί στην περίπτωση μας: ο $K_{ex}(z)$ παρουσιάζει λογαριθμική ανωμαλία στο $z=0$ για οποιαδήποτε τιμή του ka , και γι' αυτό δεν έχουμε σοβαρό ill conditioning. Με άλλα λόγια, ένας τυπικός σύγχρονος υπολογιστής μπορεί με ευκολία να λύσει τα συστήματα που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου στην εξίσωση (2.56) ακόμα κι αν το N είναι σχετικά μεγάλο.

Στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, η κατάσταση είναι διαφορετική. Ο πυρήνας $K_{ap}(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση του z , αλλά το πραγματικό του μέρος έχει κορυφή στο $z=0$ όταν $ka \ll 1$. Αριθμητικές έρευνες (ειδικότερα, υπολογισμοί του L1 condition number) δείχνουν ότι η παράμετρος a/z_o ή Na/h μπορεί να ληφθεί χοντρικά ως μέτρο του ill conditioning.

Η ανάλυση που προηγήθηκε για τον προσεγγιστικό πυρήνα, δείχνει ότι οι ταλαντώσεις που παρατηρήθηκαν δεν οφείλονται σε λάθη roundoff, και ότι θα συνέβαιναν ακόμα και σε έναν υπολογιστή με άπειρο μήκος λέξης. Επίσης έχει αποδειχθεί [3] ότι τα ίδια αποτελέσματα, με πεπερασμένο N , για το φανταστικό μέρος προκύπτουν και με διαφορετική επιλογή συναρτήσεων βάσης και δοκιμής υποπεδίου.

Για να συνοψίσουμε, για την πεπερασμένη κεραία και τον προσεγγιστικό πυρήνα, κάποια από τα βασικά συμπεράσματα είναι:

- 1) Η αναπόφευκτη εμφάνιση ταλαντώσεων κοντά στο σημείο τροφοδοσίας για το $\text{Im}\{I_n/V\}$ όταν ο αριθμός N των παλμικών συναρτήσεων ικανοποιεί $N \gg h/a$.
- 2) Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και με επεκτάσεις σε άλλες αριθμητικές μεθόδους (άλλη επιλογή συναρτήσεων βάσης /δοκιμής)
- 3) Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε και για την αντίστοιχη εξίσωση του Pocklington

Παρόλο που περιμένουμε κάποια αφύσικη συμπεριφορά, όχι εξαιτίας του σφάλματος roundoff, όταν εφαρμόζουμε μια αριθμητική μέθοδο σε μια ολοκληρωτική εξίσωση χωρίς λύση, είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι σε μεγάλο βαθμό ακριβείας, το πλάτος των προαναφερθέντων ταλαντώσεων αυξάνει εκθετικά με το N . Οι μεγάλες ταλαντώσεις είναι συνέπεια των ιδιοτήτων του προσεγγιστικού πυρήνα και της μορφής του δεξιού μέλους της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Άλλωστε γνωρίζουμε ότι αν μια εξίσωση είναι πολύπλοκη κι ειδικά αν ο πυρήνας είναι peaked, όπως στη συγκεκριμένη

περίπτωση, τότε ο αριθμός των υπολογισμών των ολοκληρωτέων ποσοτήτων αυξάνει σημαντικά κι αν το N γίνει μεγαλύτερο τότε οι ολοκληρωτέοι συντελεστές ταλαντώνονται και γι' αυτό είναι πιο δύσκολο να υπολογιστούν.

Σε εφαρμογές, ποσότητες όπως η αγωγιμότητα εισόδου, που προκύπτουν από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ρεύματος, είναι ποσότητες που μας ενδιαφέρουν. Με τον ακριβή πυρήνα, η κυριότερη δυσκολία στον καθορισμό τέτοιων ποσοτήτων είναι το γεγονός ότι $\text{Im}\{I(0)/V\} = -\infty$, ένα χαρακτηριστικό που τελικά θα εμφανιστεί σε μια απ' ευθείας αριθμητική λύση. Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα, η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη. Το πλάτος του παλμού z_0/λ δε μπορεί να επιλεγεί πάρα πολύ μικρό και σπάνια βρίσκουμε στη βιβλιογραφία z_0/λ πολύ μικρό. Αντιθέτως, κάποιος πρέπει να επιλέξει το z_0/λ σύμφωνα με το κριτήριο $a/\lambda \lesssim z_0/\lambda \ll h/\lambda$, ή να επιλέξει το N σύμφωνα με τη συνθήκη $1 \ll N \lesssim h/a$. Η επιλογή του N είναι προτιμότερο να βασιστεί στη σημαντική παράμετρο h/a παρά στον αριθμό σημείων ανά μήκος κύματος. Όταν το N είναι μέσα στο προαναφερθέν πεδίο, χρήσιμες τιμές μπορούν να ληφθούν σε πολλές περιπτώσεις.

2.5.2 Magnetic frill generator

Η ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén με frill generator έχει την παρακάτω μορφή:

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_{\text{ex}}(z-z')I(z')dz' = C \cos kz + \frac{1}{k} \int_0^z g(t) \sin k(z-t)dt, \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2}$$

Από τη μελέτη της άπειρης κεραίας προκύπτει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης προκύπτει:

$$\begin{aligned} I^{(\infty)}(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{g}(\zeta)e^{-i\zeta z}}{(k^2 - \zeta^2)\bar{K}(\zeta, a)} d\zeta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{g}(\zeta) \cos z\zeta}{(k^2 - \zeta^2)\bar{K}(\zeta, a)} d\zeta \\ &= \frac{2ikV}{\zeta_0 \ln\left(\frac{b}{a}\right)} \int_0^{\infty} \frac{[\bar{K}_{ap}(\zeta, a) - \bar{K}_{ap}(\zeta, b)] \cos z\zeta}{(k^2 - \zeta^2)\bar{K}(\zeta, a)} d\zeta, \quad -\infty < z < \infty \end{aligned} \quad (2.59)$$

Η εξίσωση (2.59) είναι η λύση της προσεγγιστικής εξίσωσης του Hallén - [8]. Μπορεί κανείς να εφαρμόσει το μετασχηματισμό Fourier στην αντίστοιχη εξίσωση του Rocklington και φυσικά να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η (2.59) είναι η λύση και αυτής της εξίσωσης. Η ίδια λύση ισχύει τόσο για τον προσεγγιστικό όσο και για τον ακριβή πυρήνα, όπου βέβαια στη θέση του $\bar{K}(\zeta, a)$, εννοείται ο αντίστοιχος πυρήνας. Μπορεί να αποδειχθεί - [8] - ότι οι λύσεις που προκύπτουν στις περιπτώσεις του ακριβή και του προσεγγιστικού πυρήνα είναι πολύ κοντά η μία στην άλλη και ότι οι δύο ποσότητες γίνονται ίδιες όταν πάρουμε το όριο $ka \rightarrow 0$.

Το αξιοσημείωτο σε αυτή την περίπτωση είναι ότι ακόμα και στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα το ολοκλήρωμα της (2.59) συγκλίνει οπότε η εξίσωση που περιγράφει την κατανομή ρεύματος για το δίπολο απείρου μήκους έχει λύση. Από [8,eq. 18] και γνωρίζοντας την ασυμπτωτική συμπεριφορά το K_o μπορούμε να κάνουμε την παρακάτω προσέγγιση:

$$\bar{K}_{ap}(\zeta, a) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi a \zeta}} e^{-a\zeta}, \text{ καθώς } \zeta \rightarrow +\infty$$

Όταν λοιπόν $K = K_{ap}$ στην (2.59), ο παρονομαστής της υπό ολοκλήρωση ποσότητας είναι εκθετικά πολύ μικρός και το ίδιο ισχύει και για τον αριθμητή. Αλλά αφού $b > a$ ολόκληρη η ποσότητα που βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση $\frac{1}{\zeta^2}$ με συνέπεια το ολοκλήρωμα να συγκλίνει. Αυτό το συμπέρασμα

έρχεται σε αντίθεση με την περίπτωση του delta-function generator, που όπως είδαμε ο παρονομαστής της αντίστοιχης υπό ολοκλήρωσης ποσότητας είναι εκθετικά πολύ μικρός έτσι ώστε ολόκληρη η ποσότητα να είναι εκθετικά πολύ μεγάλη και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα να αποκλίνει. Έτσι, λοιπόν, για την απείρου μήκους κεραία και με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα οι εξισώσεις του Hallén και του Pocklington δεν έχουν λύση για την περίπτωση του delta-function generator, ενώ υπάρχει λύση στην περίπτωση του frill generator και έχει τη μορφή της σχέσης (2.59). Μέχρι τώρα ήταν σχεδόν φανερό ότι οι περισσότερες ολοκληρωτικές εξισώσεις με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα δεν είχαν λύση. Η περίπτωση αυτή δείχνει να αποτελεί εξαίρεση.

Στη συνέχεια θα περάσουμε στο πεπερασμένο δίπολο και θα δούμε τι προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου Galekrin με subdomain συναρτήσεις βάσης, κι ειδικότερα ορθογώνιους παλμούς στη εξίσωση τύπου Hallén (Pocklington). Μετά από μελέτη της συμπεριφοράς των αριθμητικών λύσεων, έχουν προκύψει τα ακόλουθα :

- 1) Αν υποθέσουμε ότι το N κυμαίνεται από πολύ μικρές μέχρι μεγάλες τιμές οι ταλαντώσεις πρωτοπαρουσιάζονται όταν το N γίνεται μεγαλύτερο από τη σημαντική παράμετρο h/a . Γίνονται πιο γρήγορες καθώς το N αυξάνει.
- 2) Για σταθερό h/λ , a/λ και N οι τιμές των ταλαντώσεων αλλάζουν πολύ λίγο αν αλλάξουμε το b/λ . (Το κυριότερο φαινόμενο αν αλλάξουμε το λόγο b/λ είναι μια αλλαγή του φανταστικού μέρους $\text{Im}\{I_{ap,n}/V\}$ κοντά στο $n=0$).

Επιπλέον, οι τιμές των ταλαντώσεων είναι αριθμητικά κοντά στις αντίστοιχες τιμές για την περίπτωση του delta-function generator.

Σε πολλές εφαρμογές, κάποιος μπορεί να ενδιαφέρεται μόνο για την αγωγιμότητα στο σημείο τροφοδοσίας – πραγματικό και φανταστικό μέρος – κι όχι για τη ρευματική κατανομή. Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορεί κανείς να αγνοήσει τις ταλαντώσεις κοντά στα άκρα του διπόλου και να χρησιμοποιήσει τιμές του N μεγαλύτερες του h/a . Αυτή η «ελαστικότητα» (σε σύγκριση με την περίπτωση του delta-function generator όπου η συνθήκη $N \lesssim h/a$ είναι απαραίτητη, όταν ζητείται η αγωγιμότητα εισόδου) και πάλι δε λύνει το πρόβλημα της εύρεσης της βέλτιστης τιμής για το N .

Ταλαντώσεις παρόμοιες με αυτές που παρατηρούνται για τη μέθοδο που παρουσιάσαμε, συμβαίνουν, επίσης, στις εξισώσεις του Hallén και του Pocklington κι όταν άλλες συναρτήσεις βάσης και δοκιμής χρησιμοποιούνται.

Τα βασικότερα συμπεράσματα για ένα δίπολο κεντρικά τροφοδοτούμενο από magnetic frill generator, για τις εξισώσεις του Hallén και του Pocklington με τον προσεγγιστικό πυρήνα είναι τα ακόλουθα:

- Για το δίπολο απείρου μήκους τόσο η προσεγγιστική εξίσωση του Hallén όσο και η προσεγγιστική εξίσωση του Pocklington έχουν λύση (σε αντίθεση με το delta-function generator που όπως είδαμε καμία από τις δύο εξισώσεις δεν έχει λύση).
- Για το δίπολο πεπερασμένου μήκους, σε αντίθεση με την περίπτωση της άπειρης κεραίας, οι εξισώσεις του Hallén και του Pocklington δεν έχουν λύση. Για να το αποδείξουμε αυτό ήταν απαραίτητο να επεκτείνουμε και να τροποποιήσουμε το θεώρημα αναλυτικής συνέχειας το οποίο δεν εφαρμόζεται ευθέως. Εξηγήσαμε το γεγονός ότι από φυσική άποψη δεν υπάρχει λύση.
- Για το δίπολο απείρου μήκους και την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με παλμικές συναρτήσεις βάσης στην εξίσωση του Hallén, αποδεικνύεται αναλυτικά ότι η αριθμητική λύση παρουσιάζει σύγκλιση στην πραγματική λύση στο όριο του μηδενικού παλμού βάσεως (στο delta-function generator η αριθμητική λύση αποκλίνει σε αυτό το όριο, όπως είδαμε πριν, και γρήγορες ταλαντώσεις εμφανίζονται στο σημείο τροφοδοσίας οι οποίες πλησιάζουν αυτές του πεπερασμένου διπόλου).
- Αν εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Galerkin με παλμικές συναρτήσεις βάσης στο πεπερασμένο δίπολο είναι λογικό να περιμένει κανείς, κοντά στο σημείο τροφοδοσίας, οι αριθμητικές λύσεις να προσεγγίζουν τις αντίστοιχες του διπόλου απείρου μήκους. Πιο συγκεκριμένα, δεν πρέπει να περιμένουμε ταλαντώσεις κοντά στο σημείο εφαρμογής της τάσης.
- Αντίθετα, θα περίμενε κανείς οι αριθμητικές λύσεις να εμφανίζουν ταλαντώσεις κοντά στα άκρα του διπόλου, όπως στις περισσότερες περιπτώσεις ολοκληρωτικών εξισώσεων αυτής της μορφής. Η σημαντικότερη παράμετρος φαίνεται να είναι εδώ ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης, διαιρεμένος με τον παράγοντα h/a κι όχι ο αριθμός των σημείων ανά μήκος κύματος όπως θα περίμενε κανείς.
- Τέλος, η προαναφερθείσα παράμετρος φαίνεται να σχετίζεται στενά με το condition number του πίνακα του συστήματος.

Όλα τα αριθμητικά αποτελέσματα που συζητήθηκαν προηγουμένως δεν ενέχουν λάθη roundoff. Οι ταλαντώσεις κοντά στο $z = h$ δεν οφείλονται σε roundoff error. Συνεπώς, οι ταλαντώσεις δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο hardware και λογισμικό και δε μπορούν να αντιμετωπιστούν με πιο ισχυρούς υπολογιστές.

Πιο συγκεκριμένα, οι ταλαντώσεις δεν οφείλονται στο ill conditioning του πίνακα. Παρόλα αυτά, όπως συμβαίνει στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Fredholm πρώτου είδους, το ill conditioning του πίνακα είναι ένα σημαντικό φαινόμενο. Οι τιμές του 1-norm condition number c του πίνακα του προκύπτοντος συστήματος για διάφορες τιμές των N , h/λ , a/λ , είναι πολύ μεγάλες, κάτι που φανερώνει σοβαρό ill-conditioning του πίνακα. Για ικανοποιητικά μεγάλο N , και σε ένα υψηλό βαθμό προσέγγισης, ο c αυξάνει εκθετικά με το μέγεθος του πίνακα N . Για σταθερό N , ο c είναι μια ταχύτατα

αυξανόμενη συνάρτηση του a/h . Επιπλέον για διαφορετικές τιμές του h/λ και a/λ έχουμε τον ίδιο c , από τη στιγμή που το h/a είναι σταθερό. Έτσι, για μια ακόμα φορά το h/a είναι η σημαντική παράμετρος. Με τον ακριβή πυρήνα το ill conditioning είναι πολύ λιγότερο, αυξάνει με μικρότερο ρυθμό με το N και το h/a δεν είναι σημαντική παράμετρος.

2.6 Θεωρία Αριθμητικών σφαλμάτων υπολογιστή - Roundoff

Όταν ένας υπολογιστής επεξεργάζεται αριθμούς και εκτελεί πράξεις μεταξύ τους, οι αριθμοί αυτοί και τα αποτελέσματα προσεγγίζονται με αποκοπή, δηλαδή είτε με κοπή των τελευταίων δεκαδικών είτε με στρογγυλοποίηση. Συγκεκριμένα ο υπολογιστής αποθηκεύει πρώτα τους αριθμούς σε ένα πεπερασμένο αριθμό θέσεων μνήμης. Άρα τους παριστάνει προσεγγιστικά με ένα πεπερασμένο αριθμό ψηφίων και μετά, καθώς εκτελεί τις πράξεις, τα αποτελέσματα πάλι αποθηκεύονται με αποκοπή. Τα σφάλματα αποκοπής (roundoff errors) που προκύπτουν συσσωρεύονται και τα τελικά αποτελέσματα μπορεί να είναι πολύ διαφορετικά από τα ακριβή. Από αυτά δηλαδή, που προκύπτουν, αν χρησιμοποιούσαμε άπειρη ακρίβεια στην παράσταση των αριθμών και στις πράξεις. Το φαινόμενο αυτό εντείνεται, αν λάβουμε υπόψη το τεράστιο πλήθος πράξεων που εκτελεί ένας σύγχρονος υπολογιστής για να λύσει προβλήματα μεγάλης κλίμακας με τις διάφορες αριθμητικές μεθόδους.

Στην αριθμητική κινητής υποδιαστολής, ένας πραγματικός αριθμός a παριστάνεται σε δεκαδική μορφή με:

$$a = \pm(0.d_1d_2\dots) \cdot 10^k$$

όπου d_1, d_2, \dots είναι ακέραιοι αριθμοί, με $0 \leq d_i \leq 9$ για κάθε i , και $d_1 \neq 0$. Ένας υπολογιστής με ακρίβεια s σημαντικών ψηφίων αποθηκεύει τον a με αποκοπή στη μορφή:

$$a \longrightarrow fl(a) = \pm(0.d'_1d'_2\dots d'_s) \cdot 10^k$$

όπου $d'_1 \neq 0$. Ο αριθμός $\pm(0.d'_1d'_2\dots d'_s)$ καλείται δεκαδικό μέρος του a και το k εκθέτης του a , με $-k_1 \leq k \leq k_2$, όπου k_1, k_2 είναι τα όρια που εξαρτώνται από τον υπολογιστή. Τα s δεκαδικά ψηφία $d'_1d'_2\dots d'_s$ καλούνται σημαντικά ψηφία του a .

2.7 Condition- Ευστάθεια συστήματος

Η έννοια του condition είναι σημαντική στα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Αν μικρές αλλαγές των δεδομένων κάποιου προβλήματος οδηγούν πάντα σε σχετικά μικρές αλλαγές στη λύση του προβλήματος, τότε λέμε ότι το πρόβλημα είναι well-conditioned (καλής κατάστασης). Αν μικρές αλλαγές στα δεδομένα κάποιου προβλήματος μπορούν κάποιες φορές να οδηγήσουν σε απαράδεκτα μεγάλες αλλαγές στη λύση του προβλήματος, τότε λέμε ότι το πρόβλημα είναι ill-conditioned (κακής κατάστασης). Ο λόγος για τη μεγάλη σημασία αυτής της έννοιας είναι προφανής: Σε εφαρμοσμένα προβλήματα, τα δεδομένα είναι σχεδόν πάντα ανακριβή, εξαιτίας αριθμητικών σφαλμάτων και σφαλμάτων μοντελοποίησης. Έτσι, είναι ουσιώδες για εμάς να γνωρίζουμε τι επίδραση έχουν στη λύση του προβλήματος αυτές οι ανακρίβειες των δεδομένων.

Θεωρούμε το condition της λύσης x του συστήματος εξισώσεων $Ax = b$, συναρτήσει των δεδομένων b και A . Θέλουμε να δούμε πόσο αλλάζει η λύση x - ας υποθέσουμε από x ως $x + \delta x$ - όταν αλλάζουν τα δεδομένα b και A - ας υποθέσουμε $b + \delta b$ και $A + \delta A$.

Θεώρημα (condition εξισώσεων)

Θεωρούμε το A nonsingular και με $\|\cdot\|$ εννοούμε οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα και την αντίστοιχή της φυσική νόρμα πίνακα. Ας υποθέσουμε ότι το x λύνει το σύστημα $Ax = b$, ενώ το $x + \delta x$ λύνει το σύστημα $(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$ για κάποιες μεταβολές δb και δA , των δεδομένων. Υποθέτουμε ότι η μεταβολή δA είναι αρκετά μικρή έτσι ώστε να ισχύει $a < 1$, όπου $a = \|(\delta A)A^{-1}\|$ ή $a = \|A^{-1}(\delta A)\|$. Τότε η αλλαγή δx στη λύση ικανοποιεί:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M \cdot c(A) \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

όπου $M = 1/(1-a)$ και $c(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ είναι το λεγόμενο condition number (δείκτης κατάστασης) του A .

Απόδειξη

Καθώς $a < 1$, συνεπάγεται ότι ο $A + \delta A$ είναι nonsingular και δίνει ένα όριο στη νόρμα του αντιστρόφου του. Καθώς ο $A + \delta A$ είναι nonsingular, η λύση $x + \delta x$ στο διαταραγμένο πρόβλημα υπάρχει. Στην πραγματικότητα το δx από μόνο του λύνει:

$$(A + \delta A)\delta x = b + \delta b - Ax - \delta Ax = \delta b - \delta Ax$$

έτσι ώστε:

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta Ax)$$

Εφαρμόζοντας το άνω όριο, σε αυτή τη σχέση για το δx παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\|\delta x\| &\leq M \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|\delta b - \delta Ax\| \\ &\leq M \cdot \|A^{-1}\| \cdot (\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|)\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq M \cdot \|A^{-1}\| \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|} + \|\delta A\| \right) \\ &\leq M \cdot \|A^{-1}\| \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|/\|A\|} + \|\delta A\| \right)\end{aligned}$$

καθώς το $b = Ax$ συνεπάγεται ότι $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$. Απλοποιώντας, παίρνουμε:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M \cdot c(A) \cdot \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

όπως απαιτείται για την ολοκλήρωση της απόδειξης.

Για να κατανοήσουμε τι λέει αυτό το θεώρημα σχετικά με το condition, ας υποθέσουμε ότι αποφασίζουμε να μετρήσουμε το μέγεθος των αλλαγών δy στις ποσότητες y εξετάζοντας το $\frac{\|\delta y\|}{\|y\|}$ - κοιτάζοντας το ολικό μέγεθος των αλλαγών, σε σχέση με το

ολικό μέγεθος των αρχικών ποσοτήτων. Μετά το θεώρημα συγκρίνει τις αλλαγές στη λύση x σε σχέση με αυτές των δεδομένων b και A . Αν η αλλαγή δA του A είναι αρκετά μικρή, η σταθερά M στο θεώρημα είναι κοντά στο 1. Σε αυτή την περίπτωση το όριο της αλλαγής $\|\delta x\|/\|x\|$ δε θα είναι πολύ μεγαλύτερο από τις αλλαγές στα δεδομένα αν ο condition number:

$$c(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

δεν είναι πολύ μεγάλο. Αυτό σημαίνει ότι ένα μέτριο condition number εγγυάται ότι οι εξισώσεις είναι well-conditioned: Μικρές αλλαγές στα δεδομένα προκαλούν σχετικά μικρές αλλαγές στη λύση. Αν το $c(A)$ είναι μεγάλο, παρόλα αυτά, οι αλλαγές στο x που προκαλούνται από τις αλλαγές στα δεδομένα μπορεί να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις αλλαγές των δεδομένων (το αν αυτό όντως συμβαίνει εξαρτάται από το συγκεκριμένο b αλλά είναι συνήθως σωστό να θεωρούμε ένα τέτοιο σύστημα ως ill-conditioned).

Το νόημα του condition number $c(A)$ μπορεί να εξεταστεί κι από άλλη οπτική γωνία. Αν ο A είναι nonsingular, γνωρίζουμε ότι κι ο $R + A$ είναι nonsingular για όλα τα

R που ικανοποιούν τη σχέση $\|R\| < 1/\|A^{-1}\|$. Μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την απαίτηση για το R :

$$\|R\|/\|A\| < 1/c(A)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $A + \delta A$ είναι nonsingular αν ισχύει $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} < \frac{1}{c(A)}$. Για να το

θέσουμε διαφορετικά, αν ο $A + \delta A$ είναι singular, τότε $\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \geq \frac{1}{c(A)}$ και συνεπώς

$$c(A) \geq \frac{\|A\|}{\|\delta A\|}.$$

Στην πραγματικότητα, το $c(A)$ - ακριβέστερα ο αντίστροφός του - μετράει πόσο απέχει ο A από τον πλησιέστερο singular πίνακα.

Είναι ατυχές -για πρακτικούς σκοπούς- το γεγονός ότι δεν είναι εύκολο να αναγνωρίσουμε έναν ill-conditioned πίνακα A - δηλαδή πίνακα με μεγάλο condition number- απλά κοιτώντας μόνο τον A . Καλά υπολογιστικά προγράμματα για τη λύση του $Ax = b$, συνήθως παρέχουν στο χρήστη μια εκτίμηση του $c(A)$ από πληροφορίες που συγκεντρώνουν κατά τη διάρκεια του υπολογισμού, αλλά είναι σπάνια πιθανό να υπολογίσουμε το $c(A)$ χωρίς τέτοια υπολογιστική βοήθεια εκτός από απλές περιπτώσεις.

Παράδειγμα

Υποθέτουμε ότι ο πίνακας C είναι πίνακας που αποτελείται από μετρήσεις τριών μεγεθών, όπου C :

$$C = \begin{bmatrix} 1.02 & 2.03 & 4.20 \\ 0.25 & 0.51 & 1.06 \\ 1.74 & 3.46 & 7.17 \end{bmatrix}$$

όπου κάθε μέτρηση μπορεί να ενέχει πειραματικό σφάλμα μεγέθους 0.015. Για να καθορίσουμε την τάξη του C , βρίσκουμε μια μορφή του με απαλοιφή Gauss. Ξεκινώντας από την πρώτη στήλη του πίνακα παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 1.99 & 4.12 \\ 0 & 0.013 & -0.03 \\ 0 & 0.003 & 0.005 \end{bmatrix}$$

Αν δεχτούμε αυτούς τους αριθμούς μπορούμε να συνεχίσουμε για να βρούμε ότι η τάξη του πίνακα είναι 3. Δεδομένου του γεγονότος ότι οι αριθμοί μας περιέχουν πειραματικά λάθη, αυτές οι δύο τελευταίες γραμμές μοιάζουν ύποπτα με 0. Στη πραγματικότητα, ο ελαφρά διαταραγμένος πίνακας:

$$C' = \begin{bmatrix} 1.02 & 2.03 & 4.20 \\ 0.26 & 0.517451\dots & 1.070588\dots \\ 1.74 & 3.462941\dots & 7.164706\dots \end{bmatrix}$$

οδηγεί ακριβώς στον:

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 1.99 & 4.12 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Από τη στιγμή που η μεγαλύτερη αλλαγή σε οποιοδήποτε στοιχείο από τον C στον C' είναι $0.010588\dots < 0.015$, το όριο του πειραματικού σφάλματος, τα δεδομένα στον C' είναι εξίσου καλά με αυτά στον C , του οποίου η τάξη ήταν 3 κι όχι 1. Από την οπτική του condition number, από τη στιγμή που $\|C\|_\infty = 12.37$ ενώ ο C' είναι singular και $\|C - C'\|_\infty = 0.028\dots$ γνωρίζουμε ότι το condition number $c(C)$ για τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι το λιγότερο $12.37/0.028 \geq 441$. Στην πραγματικότητα, μεταβάλλοντας παρόμοια με πριν μόνο την τρίτη γραμμή του C , μπορούμε να βρούμε έναν ακόμα πιο κοντινό singular πίνακα και να καταλήξουμε στο ότι $c(C) \geq 1502$. Με τη χρήση του MATLAB ή παρόμοιου λογισμικού για την εύρεση του αντιστρόφου του C , μπορούμε να βρούμε ότι $c(C) \approx 6885$ και ότι η απόσταση ∞ -νόρμας από τον πιο κοντινό singular πίνακα είναι περίπου 0.0018 και του πιο κοντινού πίνακα τάξης 1 είναι περίπου 0.006.

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι δύο λάθη υπεισέρχονται στην επίλυση ενός συστήματος: 1)η ανακρίβεια εισαγωγής των δεδομένων του πίνακα (εδώ συμμετέχει το roundoff error) και 2)η διαδικασία απαλοιφής για την επίλυση του συστήματος (εδώ συμμετέχει ο condition number του πίνακα). Μετά την παραπάνω ανάλυση, θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε το βαθμό ευστάθειας (condition number) του συστήματος που έχουμε να επιλύσουμε, με το πεπερασμένο μήκος ψηφιολέξης και το roundoff error. Είδαμε προηγουμένως ότι ο αντίστροφος του condition number του πίνακα του συστήματος είναι ένας δείκτης του πόσο απέχει ο πίνακας από τον πλησιέστερο singular πίνακα. Κατανοούμε, συνεπώς, ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο condition number, τόσο πιο ill-conditioned είναι το σύστημα. Επόμενο είναι και το ότι όσο πιο μεγάλος είναι ο condition number, τόσο μεγαλύτερη επίδραση στη λύση του συστήματος είναι δυνατόν να προκαλέσουν, μικρές διαταραχές στα δεδομένα του προβλήματος. Αν συνδυάσουμε τα παραπάνω με το roundoff error θα δούμε ότι από ένα σημείο και μετά, όσο αυξάνει ο condition number του συστήματος, τόσο μεγαλύτερες αλλαγές είναι δυνατόν να προκαλέσει το σφάλμα αυτό στη λύση του συστήματος, μεταβάλλοντας έστω κι ελάχιστα τα δεδομένα του προβλήματος. Σε πολλές περιπτώσεις το σφάλμα roundoff μπορεί να γίνει ο κυρίαρχος παράγοντας και να καλύψει την πραγματική συμπεριφορά της αριθμητικής λύσης, κάτι το οποίο δεν είναι επιθυμητό και πρέπει σε όλες τις περιπτώσεις να αποφεύγεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Τόσο η εξίσωση του Hallén όσο και η εξίσωση του Pocklington είναι γνωστές εδώ και αρκετές δεκαετίες ενώ η επίλυσή τους με τη μέθοδο των ροπών έχει επιχειρηθεί ήδη από τα μέσα της δεκαετίας του '60. Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τις δυσκολίες που παρουσιάζονται και τα λάθη που εμφανίζονται στην περίπτωση της γραμμικής κεραίας που τροφοδοτείται από delta-function generator και από magnetic frill generator. Θα δούμε ότι στην περίπτωση του delta-function generator οι πιο σημαντικές δυσκολίες έχουν να κάνουν με την εμφάνιση μεγάλων διακυμάνσεων στην τιμή του ρεύματος κοντά στα άκρα και στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας όταν στην ολοκληρωτική εξίσωση χρησιμοποιείται ο προσεγγιστικός πυρήνας. Στην περίπτωση του frill generator μεγάλες διακυμάνσεις εμφανίζονται στα άκρα της κεραίας. Ο σημαντικότερος λόγος φαίνεται να είναι το γεγονός ότι η εξίσωση που μας δίνει την κατανομή ρεύματος πάνω στην κεραία δεν έχει λύση. Η ιδιότητα αυτή των εξισώσεων που θα επιχειρήσουμε να επιλύσουμε αριθμητικά στο κεφάλαιο αυτό, δηλαδή να μην έχουν λύση όταν χρησιμοποιούμε τον προσεγγιστικό πυρήνα, είναι γνωστή από το 1952, ωστόσο σπάνια αναφέρεται στα σύγχρονα εγχειρίδια. Το βασικό εργαλείο μελέτης θα είναι το μοντέλο του σωληνοειδούς διπόλου που είχαμε αναπτύξει στο 1^ο κεφάλαιο.

Στο 1^ο κεφάλαιο αποδείξαμε τις εξισώσεις που μας δίνουν το ρεύμα πάνω σε μια γραμμική κεραία που τροφοδοτείται από delta function generator ή από frill generator. Στο κεφάλαιο αυτό η περίπτωση του διπόλου που τροφοδοτείται από κάποιο από τα παραπάνω μοντέλα τροφοδοσίας, θα μελετηθεί αναλυτικά. Η αρχική μορφή της εξίσωσης είναι η ακόλουθη:

$$\left(k^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') K(z-z') dz' = g(z) \quad (3.1)$$

όπου για delta function generator η $g(z)$ δίνεται από τη σχέση:

$$g(z) = \frac{jVk}{\zeta_0} \delta(z), \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (3.2)$$

ενώ για frill generator η δίνεται από τη σχέση:

$$g(z) = \frac{ikV}{2\zeta_0 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right] \quad (3.3)$$

όπου $R_1 = \sqrt{z^2 + a^2}$ και $R_2 = \sqrt{z^2 + b^2}$.

όπου V είναι τάση που αντιστοιχεί στη δεδομένη κατανομή ρεύματος και που αποτελεί την πηγή του διπόλου. Στη σχέση, b είναι η εξωτερική ακτίνα της κατανομής του μαγνητικού ρεύματος ή αλλιώς η ακτίνα του εξωτερικού αγωγού της ομοαξονικής γραμμής μεταφοράς, ζ_0 είναι η χαρακτηριστική αντίσταση του κενού με τιμή $\zeta_0 = 376.73$

Ω και $k = \frac{\omega}{c}$. Θα θεωρήσουμε τέλος τις συνήθεις υποθέσεις, δηλαδή $ka \ll 1$ και $a \ll h$.

Παράλληλα, λύνοντας τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις καταλήξαμε στις παρακάτω καθαρά ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallén:

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z-z')I_z(z')dz' = C \cos kz - j \frac{V}{2\zeta_0} \sin k|z|, \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (3.4)$$

$$\int_{-L/2}^{L/2} K_{ex}(z-z')I(z')dz' = C \cos kz + \frac{1}{k} \int_0^z g(t) \sin k(z-t)dt, \quad -\frac{L}{2} < z < \frac{L}{2} \quad (3.5)$$

όπου C είναι μια σταθερά η οποία υπολογίζεται από τη παρακάτω οριακή συνθήκη:

$$I(\pm h) = 0 \quad (3.6)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις παίρνουν δύο μορφές οι οποίες εξαρτώνται από την επιλογή του πυρήνα $K(z)$ της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Οι δύο πυρήνες που χρησιμοποιούνται είναι γνωστοί ως ακριβής και προσεγγιστικός πυρήνας. Με τη χρήση του ακριβούς πυρήνα η ολοκληρωτική εξίσωση έχει λύση, αφού η εξίσωση προέκυψε με τη χρήση των εξισώσεων του Maxwell και της σχέσης που μας δίνει το διανυσματικό δυναμικό, που παράγεται από δεδομένη κατανομή ρεύματος. Αντίθετα, με τη χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα, η εξίσωση δεν έχει λύση, όπως αποδείξαμε στο 1^ο Κεφάλαιο. Η αριθμητική μέθοδος εφαρμόζεται στην προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση, αφού τη συμπεριφορά του προσεγγιστικού πυρήνα θέλουμε να μελετήσουμε. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιούμε είναι η μέθοδος Galerkin με συνημιτονικές entire domain συναρτήσεις βάσης. Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή και για τους δύο τύπους ολοκληρωτικής εξίσωσης, Hallén και Rocklington, για κεραία πεπερασμένου μήκους. Θα προκύψει έτσι ένα σύστημα πεπερασμένου αριθμού αλγεβρικών εξισώσεων. Με τη βοήθεια του MATLAB, θα επιχειρήσουμε να επιλύσουμε το παραπάνω σύστημα και να παραστήσουμε γραφικά τα αποτελέσματα.

3.1 Μέθοδος Galerkin για την εξίσωση Hallén

3.1.1 Εισαγωγή

Έχει γίνει αρκετή συζήτηση πάνω σε δυσκολίες που συναντά κανείς όταν προσπαθεί να λύσει ολοκληρωτικές εξισώσεις που σχετίζονται με την κατανομή ρεύματος πάνω σε γραμμικές κεραίες- [18,19,20]. Στην παράγραφο αυτή, θα ασχοληθούμε με την προσεγγιστική εξίσωση του Hallén, θα μελετήσουμε τις δυσκολίες που σχετίζονται με την αριθμητική επίλυσή της και θα δείξουμε ότι οι απλές σχετικά εξισώσεις (3.4) και (3.5) παρουσιάζουν αξεπέραστες δυσκολίες, οι οποίες ως επί το πλείστον είναι συνέπεια του γεγονότος ότι δεν έχουν λύση. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι παρατηρεί κανείς όταν εφαρμόσει μία αριθμητική μέθοδο στις εξισώσεις (3.4) και (3.5). Αφού η προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση δεν έχει λύση, διαφορετικές αριθμητικές μέθοδοι παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι η μέθοδος Galerkin με entire domain basis functions. Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τα μεγέθη $\text{Re}\{I(z)/V\}$ και $\text{Im}\{I(z)/V\}$ δηλαδή το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας της κεραίας.

3.1.2 Delta function generator

3.1.2.1 Εφαρμογή της μεθόδου Galerkin

Έστω $I_{app}(z)$ η άγνωστη κατανομή ρεύματος στην προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén με το delta function generator. Για τη διευκόλυνσή μας, θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $I(z)$. Ακόμη θεωρούμε τις ποσότητες $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\int_{-h}^h K(z-z') I^{(1)}(z') dz' = \frac{1}{2\zeta_0} V \sin k|z|, \quad -h \leq z \leq h \quad (3.24)$$

$$\int_{-h}^h K(z-z') I^{(2)}(z') dz' = \cos kz, \quad -h \leq z \leq h \quad (3.25)$$

όπου $K(z-z')$ θεωρούμε τον προσεγγιστικό πυρήνα που ορίζεται από τη σχέση (1.151)

Για να βρούμε μια αριθμητική λύση για την (3.4), αρχικά, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ροπών στις εξισώσεις (3.24) και (3.25). Καθώς θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Galerkin με συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου, θα πρέπει να καθορίσουμε ποιες θα είναι οι συναρτήσεις αυτές. Μια πρώτη σκέψη ήταν να χρησιμοποιήσουμε τις συνημιτονικές συναρτήσεις βάσης που έχουν τη μορφή (2.18), καθώς μηδενίζονται στα άκρα του διπόλου, όπως και η άγνωστη συνάρτηση $I(z)$. Επειδή, όμως, όπως παρατηρούμε από τις εξισώσεις (3.24) και (3.25), με τις συναρτήσεις βάσης θα αναπαραστήσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ κι όχι την άγνωστη συνάρτηση $I(z)$, δε μας ενδιαφέρει οι συναρτήσεις βάσης να μηδενίζονται στα άκρα του σωληνοειδούς διπόλου.

Ένας επιπλέον λόγος, που συνηγορεί στην επιλογή συναρτήσεων βάσης που δε μηδενίζονται στα άκρα του διπόλου είναι ότι χρειαζόμαστε μια συνθήκη για την εύρεση του C , και η συνθήκη αυτή είναι η $I(\pm h) = 0$, που σε διαφορετική περίπτωση θα ίσχυε για κάθε C . Για όλους τους παραπάνω λόγους καταλήξαμε στις συναρτήσεις Fourier που δίνονται από την εξίσωση:

$$f_n(z') = \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \quad (3.26)$$

Θέτουμε λοιπόν:

$$I^{(1)}(z') \cong \sum_{n=0}^N I_n^{(1)} f_n(z') \quad (3.27)$$

$$I^{(2)}(z') \cong \sum_{n=0}^N I_n^{(2)} f_n(z') \quad (3.28)$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (3.27) και (3.28) στις εξισώσεις (3.24) και (3.25) αντίστοιχα, ο πολλαπλασιασμός με $f_l(z)$ και η ολοκλήρωση από $z = -h$ ως $z = h$ όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παράγει τα δύο ακόλουθα συστήματα εξισώσεων :

$$\sum_{n=0}^N A_{ln} I_n^{(1)} = B_l^{(1)}, \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (3.29)$$

$$\sum_{n=0}^N A_{ln} I_n^{(2)} = B_l^{(2)}, \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (3.30)$$

Στα συστήματα εξισώσεων (3.29) και (3.30) οι συντελεστές A_{ln} είναι, όπως έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο διπλά ολοκληρώματα, που έχουν την παρακάτω μορφή:

$$A_{ln} = \int_{-h}^h \int_{-h}^h f_n(z') f_l(z) K(z - z') dz' dz, \quad 0 < n, l < N \quad (3.31)$$

Επειδή όμως ισχύει ότι $K(z) = K(-z)$, έχουμε για τους συντελεστές A_{ln} :

$$A_{ln} = A_{nl} \quad (3.32)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι δε χρειάζεται να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές, αλλά μόνο αυτούς για τους οποίους ισχύει $l \geq n$ και οι υπόλοιποι θα προκύψουν από τη σχέση (3.32).

Οι συντελεστές $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ δίνονται από ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά κι έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
 B_l^{(1)} &= \int_{-h}^h \cos kz \cdot \cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right) dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \left[\cos\left(kz - \frac{l\pi z}{h}\right) + \cos\left(kz + \frac{l\pi z}{h}\right) \right] dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-h}^h \cos\left(z\left(k - \frac{l\pi}{h}\right)\right) dz + \frac{1}{2} \int_{-h}^h \cos\left(z\left(k + \frac{l\pi}{h}\right)\right) dz \\
 &= \frac{h}{(kh - l\pi)} \sin(kh - l\pi) + \frac{h}{(kh + l\pi)} \sin(kh + l\pi)
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Οι οποίοι για $l = \pm \frac{kh}{\pi}$ παίρνουν την τιμή $B_l^{(1)} = 2h$.

Έτσι λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε το $B_l^{(1)}$ για οποιαδήποτε ακέραια τιμή του l σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$B_l^{(1)} = \begin{cases} \frac{h}{(kh - l\pi)} \sin(kh - l\pi) + \frac{h}{(kh + l\pi)} \sin(kh + l\pi), & l \neq \pm \frac{kh}{\pi} \\ 2h, & l = \pm \frac{kh}{\pi} \end{cases} \tag{3.34}$$

Για τον υπολογισμό του $B_l^{(2)}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
 B_l^{(2)} &= \int_{-h}^h A \sin k|z| \cdot \cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right) dz \\
 &= \int_{-h}^0 -A \sin kz \cdot \cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right) dz + \int_0^h A \sin kz \cdot \cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right) dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-h}^0 -A \left[\sin\left(z\left(k + \frac{l\pi}{h}\right)\right) + \sin\left(z\left(k - \frac{l\pi}{h}\right)\right) \right] dz \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^h A \left[\sin\left(z\left(k + \frac{l\pi}{h}\right)\right) + \sin\left(z\left(k - \frac{l\pi}{h}\right)\right) \right] dz \\
 &= \frac{Ah}{(kh + l\pi)} [1 - \cos(kh + l\pi)] + \frac{Ah}{(kh - l\pi)} [1 - \cos(kh - l\pi)]
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

όπου $A = \frac{iV}{2\zeta_o}$.

Οι οποίοι για $l = \pm \frac{kh}{\pi}$, με χρήση της ταυτότητας $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$, παίρνουν την τιμή $B_l^{(2)} = 0$.

Έτσι λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε το $B_l^{(2)}$ για οποιαδήποτε ακέραια τιμή του l σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$B_l^{(2)} = \begin{cases} \frac{Ah}{(kh+l\pi)} [1 - \cos(kh+l\pi)] + \frac{Ah}{(kh-l\pi)} [1 - \cos(kh-l\pi)], & l \neq \pm \frac{kh}{\pi} \\ 0, & l = \pm \frac{kh}{\pi} \end{cases}$$

Με τη βοήθεια του προγράμματος του MATLAB του οποίου ο κώδικας περιέχεται στο παράρτημα Α της εργασίας υπολογίζουμε τα μεγέθη $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$ και αφού τα βρούμε υπολογίζουμε τη σταθερά C με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\begin{aligned} I(\pm h) = 0 &\Rightarrow I^{(1)}(\pm h) + C \cdot I^{(2)}(\pm h) = 0 \Rightarrow \\ C &= \frac{I^{(1)}(\pm h)}{I^{(2)}(\pm h)} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Η οποία προέκυψε από την απαίτηση το ρεύμα να μηδενίζεται στα άκρα της κεραίας. Η τελική αριθμητική λύση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I(z') = \sum_{n=0}^N I_n f_n(z') = \sum_{n=0}^N [I_n^{(1)} + C I_n^{(2)}] f_n(z') \quad (3.37)$$

Έτσι, λοιπόν, πρέπει κανείς να επιλύσει δύο $(N+1) \times (N+1)$ συμμετρικά συστήματα για να υπολογίσει τα μεγέθη $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$ και στη συνέχεια να υπολογίσει τη σταθερά C από τη σχέση (3.36). Εφαρμόζοντας τα παραπάνω μπορούμε να λύσουμε τα δύο συστήματα και να βρούμε μια τιμή για το ρεύμα με τη βοήθεια τη σχέσης (3.37) για διάφορες τιμές του N , του λόγου a/λ και του λόγου h/λ όπου λ το μήκος κύματος

που δίνεται από τον τύπο $\lambda = \frac{c}{f}$. Δηλαδή θα υπολογίσουμε αριθμητικά το πραγματικό

και το φανταστικό μέρος της κατανομής ρεύματος πάνω στην κεραία για διάφορες τιμές του μήκους της κεραίας h , το οποίο είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος λ και της ακτίνας του σωληνοειδούς διπόλου a , η οποία είναι πολύ μικρότερη του μήκους κύματος λ για το συγκεκριμένο μοντέλο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέγεθος $I^{(0)}/V$ είναι προσεγγιστικά η αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας. Οι ολοκληρώσεις γίνονται έτσι ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Στο παράρτημα Δ θα παρουσιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της αγωγιμότητας της κεραίας για διάφορες τιμές του N και για διάφορες τιμές του λόγου h/λ . Η ακτίνα του σωληνοειδούς διπόλου θα είναι αρκετά μικρότερη από το μήκος κύματος.

3.1.2.2 Η συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων και η σχέση της με το condition number του πίνακα A

Υστερα από εκτεταμένους υπολογισμούς για διάφορες τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων του προβλήματος καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούμε έτσι απλά να εκτιμήσουμε τις κατάλληλες τιμές του N για τις οποίες η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου πάνω στις ολοκληρωτικές εξισώσεις που μελετάμε, μας δίνουν αξιόπιστα αποτελέσματα, σε σχέση πάντα με όσα έχουμε παρατηρήσει για τη άπειρη κεραία, καθώς και για τον ακριβή πυρήνα με subdomain basis functions.

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των συντελεστών I_n , δηλαδή τα $\text{Re}\{I_n\}$ και $\text{Im}\{I_n\}$. Μέσα από προσεκτική μελέτη, παρατηρήσαμε ότι το $\text{Im}\{I_n\}$, από κάποια τιμή του N και μετά αρχίζει να αποκλίνει με ρυθμό συνεχώς αυξανόμενο, όπως φαίνεται στα σχήματα 1, 3 του παραρτήματος Δ, καθώς αυξάνει το N . Για σταθερό N διαπιστώναμε ότι υπάρχει κάποια συγκεκριμένη τιμή του n για την οποία άρχισε το $\text{Im}\{I_n\}$ να αποκλίνει. Και η τιμή αυτή για σταθερό λόγο h/a , παρέμενε σταθερή, ακόμα κι αν άλλαζε το N . Η κρίσιμη τιμή αυτή βρέθηκε (βλ. σχ. 17, παράρτημα Δ) ότι είναι περίπου $0.6h/a$. Συνεπώς για $N \geq 0.6h/a$, το $\text{Im}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει για $n = 0.6h/a$, με συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό καθώς αυξάνει το n . Καταλήγουμε, δηλαδή, στο συμπέρασμα ότι η κρίσιμη τιμή του N για την οποία οι λύσεις που μας δίνει η αριθμητική μέθοδος για το φανταστικό μέρος του ρεύματος είναι αξιόπιστες είναι χοντρικά η τιμή $0.6h/a$, όπου h το μήκος του διπόλου και a η ακτίνα του. επίσης, παρατηρήσαμε ότι για σταθερό λόγο h/a , η τελική τιμή του φανταστικού μέρους των συντελεστών I_n διπλασιάζεται αν διπλασιάσουμε τις παραμέτρους h και a , τριπλασιάζεται αν τις τριπλασιάσουμε κ.λ.π. Δηλαδή αν για δεδομένο h/a η τιμή αυτή είναι I_N , για $2h/2a$ είναι $2I_N$, για $3h/3a$ είναι $3I_N$ κ.ο.κ.

Το ίδιο, όμως δεν ισχύει και για το $\text{Re}\{I_n\}$. Δηλαδή δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή του N από την οποία και μετά το $\text{Re}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει. Η τιμή για την οποία αποκλίνει είναι σταθερή για σταθερό h/a , ακόμα και αν μεταβάλλουμε τα h, a , αλλά δεν είναι ανάλογη του h/a . Βέβαια, η τιμή αυτή είναι σε κάθε περίπτωση μεγαλύτερη του $0.6h/a$, αλλά δεν μπορούμε εκ των προτέρων να την προσδιορίσουμε. Συνεπώς, μια επιλογή του N , $N \leq 0.6h/a$ μπορεί να μας δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και για το $\text{Re}\{I_n\}$, αφού δεν έχει αρχίσει ακόμα να αποκλίνει.

Τώρα θα δούμε πώς επεκτείνονται τα παραπάνω συμπεράσματα στην κατανομή του ρεύματος $I(z)$, αφού πρώτα μελετήσουμε προσεκτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Όπως και πριν θα μελετήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση του πραγματικού $I(z)$ και του φανταστικού $I(z)$, δηλαδή των $\text{Re}\{I(z)\}$ και $\text{Im}\{I(z)\}$.

Για το $\text{Im}\{I(z)\}$, μπορούμε να πούμε ότι για N μεγαλύτερο του $0.6h/a$, αρχίζει να έχει ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου, οι οποίες ταλαντώσεις έχουν μεγαλύτερο πλάτος κοντά στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας, $z = 0$. Βέβαια για σχετικά μικρό h/a δεν μπορούμε να διακρίνουμε σε ποιο σημείο αρχίζουν αυτές οι ταλαντώσεις καθώς, τα I_n αρχίζουν να αποκλίνουν πριν προλάβουν να

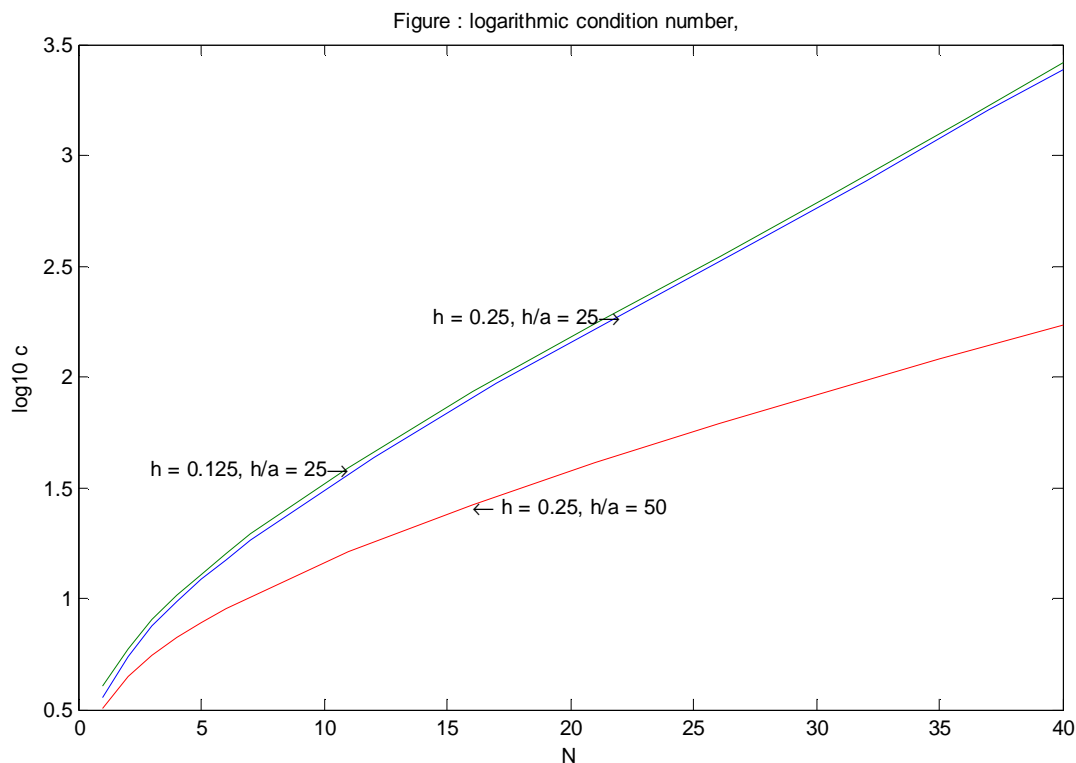
«κατασταλάζουν». Δηλαδή για μικρό h/a , το $\text{Im}\{I(z)\}$ παρουσιάζει ταλαντώσεις απ' την αρχή και δεν προλαβαίνει να ομαλοποιηθεί, ενώ για μεγάλο h/a το $\text{Im}\{I(z)\}$ προλαβαίνει να γίνει ομαλό και για $N \geq 0.6h/a$ αρχίζει να έχει ταλαντώσεις οι οποίες γίνονται πιο πυκνές και μεγαλώνει το πλάτος τους, καθώς αυξάνει το N . Επιπλέον η τιμή του $I(0)$ συνεχώς μειώνεται (σχ. 7, 9, 10, 11 παράρτημα Δ).

Για το $\text{Re}\{I(z)\}$ αυτό που παρατηρούμε είναι ότι, όταν το $\text{Re}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει, το $\text{Re}\{I(z)\}$ αρχίζει να έχει μικρού πλάτους ταλαντώσεις σε όλο του το μήκος οι οποίες είναι πιο έντονες στα άκρα του διπόλου. Όπως είπαμε και πριν, οι ταλαντώσεις στο πραγματικό μέρος εμφανίζονται αργότερα από τις ταλαντώσεις του φανταστικού μέρους. Επίσης, όσο πιο μεγάλο είναι το h/a , τόσο πιο ευδιάκριτο είναι το σημείο από το οποίο αρχίζουν οι ταλαντώσεις, διότι το $\text{Re}\{I(z)\}$ έχει προλάβει να γίνει ομαλό.

Όπως έχουμε δει, για $n = 0.6h/a$, το $\text{Im}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει με συνεχώς αυξανόμενο ρυθμό. Αν το συνδυάσουμε με το γεγονός ότι η ρευματική κατανομή προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των I_n με τις συναρτήσεις βάσης (3.26) με βάση τη σχέση (3.37) μπορούμε να εξηγήσουμε τις ταλαντώσεις που παρατηρούνται στο $\text{Im}\{I(z)\}$. Οι συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούμε, όπως βλέπουμε από το σχήμα 15, στο μηδέν έχουν πάντα τιμή 1. Όταν πολλαπλασιαστούν με τα $\text{Im}\{I_n\}$, των οποίων το μέτρο για $n \geq 0.6h/a$ αυξάνει με ταχύτατο ρυθμό, με αρνητικό πρόσημο, είναι επόμενο για $z=0$ η τιμή του $I(0)$ συνεχώς να μειώνεται, ενώ παράλληλα οι συναρτήσεις βάσης με $n \geq 0.6h/a$ να έχουν περισσότερο βάρος στη ρευματική κατανομή. Αν σκεφτούμε ότι οι συναρτήσεις βάσης όσο αυξάνει το n , παρουσιάζουν πιο πυκνές ταλαντώσεις, είναι λογικό, τελικά, το $\text{Im}\{I(z)\}$ να παρουσιάζει ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου. Από την άλλη, στα άκρα του διπόλου οι συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης έχουν εναλλάξ τιμή 1 και -1 . Επομένως, όταν πολλαπλασιαστούν με τα $\text{Im}\{I_n\}$, οι πολύ μεγάλες τιμές στις οποίες φτάνουν τα $\text{Im}\{I_n\}$ αναιρούνται και δεν προκαλούν ταλαντώσεις στα άκρα του διπόλου.

Το $\text{Re}\{I_n\}$, από την άλλη, αποκλίνει απομακρυνόμενο από το 0, με τιμές θετικές και αρνητικές εναλλάξ, ενώ για τις συναρτήσεις βάσης ισχύουν αυτά που είπαμε προηγουμένως. Συνεπώς για $z=0$, οι μεγάλες τιμές του $\text{Re}\{I_n\}$ αναιρούνται με αποτέλεσμα να μην έχουμε έντονες ταλαντώσεις στο σημείο τροφοδοσίας. Για $z = \pm h$, οι τιμές του $\text{Re}\{I_n\}$ μετά τον πολλαπλασιασμό με τις συναρτήσεις βάσης γίνονται από ένα σημείο και μετά όλες αρνητικές, κάτι το οποίο δημιουργεί ταλαντώσεις στο $\text{Re}\{I(z)\}$ κοντά στο $z = \pm h$. Οι μικρές ταλαντώσεις που παρατηρούνται σε όλο το μήκος του διπόλου είναι συνέπεια του γεγονότος ότι από κάποιο σημείο και μετά το $\text{Re}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει (με ρυθμό όχι τόσο ταχύτατο όσο το $\text{Im}\{I_n\}$) και αποκτούν μεγαλύτερο βάρος (οι συντελεστές τους έχουν μεγαλύτερο μέτρο) στη ρευματική κατανομή οι συναρτήσεις βάσης με μεγαλύτερο n , οι οποίες παρουσιάζουν πολύ πυκνές ταλαντώσεις.

Στο σχήμα 16 φαίνεται η γραφική παράσταση του condition number του πίνακα A συναρτήσει του N για $h/\lambda=0.25$ και $a/\lambda=0.01$, δηλαδή για $h/a=25$, για $h/\lambda=0.125$ και $a/\lambda=0.005$, δηλαδή επίσης για $h/a=25$ και για $h/\lambda=0.25$ και $a/\lambda=0.005$, δηλαδή για $h/a=50$. Όπως είδαμε στο 2^ο Κεφάλαιο ο condition number είναι ένας δείκτης της ευστάθειας του συστήματος.



Σχήμα 16: Ο condition number του πίνακα A για $h/a=25$ (μπλε και πράσινη γραμμή) και $h/a=50$ (κόκκινη γραμμή)

Από το σχήμα 16 παρατηρούμε ότι ο condition number αυξάνει εκθετικά συναρτήσει του N και προκύπτουν οι ευθείες του σχήματος. Επίσης, για σταθερό h/a , οι ευθείες του condition number συναρτήσει του N είναι παράλληλες και πολύ κοντά η μία στην άλλη. Παρατηρούμε ότι διπλασιάζοντας τα h/λ και a/λ , αλλά διατηρώντας το h/a σταθερό, η τιμή του condition number για σταθερό N , αλλάζει ελάχιστα, ενώ η αλλαγή είναι σημαντική αν αλλάξουμε το h/a .

Για να συσχετίσουμε τα όσα αναφέραμε παραπάνω για την κρίσιμη τιμή του N , με τον condition number, παρατηρούμε από το σχήμα 16 ότι για όλες τις τιμές των παραμέτρων h, a και $N=0.6h/a$ η τιμές του condition number είναι πολύ κοντά. Για παράδειγμα για $h/a=10$ είναι $c(A)=1.74$, για $h/a=25$ είναι $c(A)=1.85$, ενώ για $h/a=50$ είναι $c(A)=1.92$. Διαπιστώνουμε ότι η τιμή του condition number για το συγκεκριμένο N αυξάνει με μικρό ρυθμό όταν αυξάνει το h/a . Παρατηρούμε επίσης ότι η κρίσιμη τιμή του N , μπορεί να μεταφραστεί σε μία κρίσιμη περιοχή τιμών του condition number μέσω του σχήματος, δηλαδή μπορούμε να κάνουμε μια εκτίμηση για ποια τιμή του condition number και μετά θα έχουμε μη αποδεκτά αποτελέσματα κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου.

3.1.2.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων για entire domain basis functions και subdomain basis functions

Θα επιχειρήσουμε να συγκρίνουμε τα συμπεράσματα μας με αυτά που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με subdomain basis functions και ειδικότερα παλμικές συναρτήσεις. Παρατηρήσαμε ότι:

- Κοντά στο σημείο τροφοδοσίας, όπως στην περίπτωση των subdomain basis functions που οι τιμές του $\text{Im}\{I(z)\}$ είναι μεγάλες και ταλαντώνονται ταχύτατα για $N \gg h/a$, έτσι και στη δική μας περίπτωση οι τιμές του $\text{Im}\{I(z)\}$ παρουσιάζουν ταλαντώσεις που για $N \gg 0.6h/a$ είναι μεγάλες και πυκνές. Βέβαια στη δική μας περίπτωση οι ταλαντώσεις επεκτείνονται και στο υπόλοιπο δίπολο χωρίς να είναι τόσο μεγάλες, κάτι που δεν παρατηρείται στην περίπτωση των subdomain basis functions. Τέλος για subdomain basis functions παρατηρούνται ταλαντώσεις και στα άκρα του διπόλου για $N \gg h/a$ (όχι τόσο μεγάλες όσο αυτές κοντά στο $z=0$) κάτι που δε διακρίνουμε στην περίπτωση των entire domain basis functions.
- Στη μέθοδο με τα subdomain basis functions το $\text{Re}\{I(z)\}$ εμφανίζει ταλαντώσεις στα άκρα, παρόμοιες με τις ταλαντώσεις του $\text{Im}\{I(z)\}$ κοντά στο $z = \pm h$. Στη δική μας μέθοδο το $\text{Re}\{I(z)\}$ εμφανίζει, επίσης, ταλαντώσεις στα άκρα του διπόλου, εμφανίζει, όμως, και μικρότερες ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου, κάτι που δεν παρατηρείται για subdomain basis functions.
- Στη μέθοδο με subdomain basis functions για $N = h/a$, ανεξαρτήτως h, a , έχουμε σταθερό condition number. Έτσι και στη δική μας μέθοδο για $N = 0.6h/a$, ανεξαρτήτως h, a , το condition number παραμένει, σχεδόν, σταθερό.

3.1.3 Magnetic frill generator

3.1.3.1 Εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με entire-domain basis functions

Η διαδικασία που ακολουθούμε στην περίπτωση που θεωρούμε ότι η κεραία τροφοδοτείται από magnetic frill generator δεν διαφέρει από αυτή της προηγούμενης παραγράφου.

Έστω $I_{app}(z)$ η άγνωστη κατανομή ρεύματος στην προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση. Για τη διευκόλυνσή μας, θα χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο $I(z)$. Ακόμη θεωρούμε τις ποσότητες $I^{(1)}(z)$ και $I^{(2)}(z)$ που ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\int_{-h}^h K(z-z') I^{(1)}(z') dz' = \frac{1}{k} \int_0^z g(t) \sin k(z-t) dt, \quad -h \leq z \leq h \quad (3.38)$$

$$\int_{-h}^h K(z-z') I^{(2)}(z') dz' = \cos kz, \quad -h \leq z \leq h \quad (3.39)$$

όπου $K(z - z')$ θεωρούμε τον προσεγγιστικό πυρήνα που ορίζεται από τη σχέση .

Για να βρούμε μια αριθμητική λύση για την, αρχικά, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ροπών στις εξισώσεις (3.38) και (3.39). Θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο Galerkin με συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου, που όπως είδαμε στην παράγραφο 2.5.1 θα είναι οι συναρτήσεις Fourier που δίνονται από την εξίσωση:

$$f_n(z') = \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \quad (3.40)$$

Θέτουμε λοιπόν:

$$I^{(1)}(z') \cong \sum_{n=0}^N I_n^{(1)} f_n(z') \quad (3.41)$$

$$I^{(2)}(z') \cong \sum_{n=0}^N I_n^{(2)} f_n(z') \quad (3.42)$$

Η αντικατάσταση των σχέσεων (3.41) και (3.42) στις εξισώσεις (3.38) και (3.39) αντίστοιχα, ο πολλαπλασιασμός με $f_l(z)$ και η ολοκλήρωση από $z = -h$ ως $z = h$ όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, παράγει τα δύο ακόλουθα συστήματα εξισώσεων :

$$\sum_{n=0}^N A_{ln} I_n^{(1)} = B_l^{(1)}, \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (3.43)$$

$$\sum_{n=0}^N A_{ln} I_n^{(2)} = B_l^{(2)}, \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (3.44)$$

Στα συστήματα εξισώσεων (3.43) και (3.44) οι συντελεστές A_{ln} είναι όπως έχουμε δείξει στο προηγούμενο κεφάλαιο διπλά ολοκληρώματα, που έχουν την παρακάτω μορφή:

$$A_{ln} = \int_{-h}^h \int_{-h}^h f_n(z') f_l(z) K(z - z') dz' dz, \quad 0 < n, l < N \quad (3.45)$$

Επειδή, όμως, ισχύει ότι $K(z) = K(-z)$, έχουμε για τους συντελεστές A_{ln} :

$$A_{ln} = A_{nl} \quad (3.46)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι δε χρειάζεται να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές αλλά μόνο αυτούς για τους οποίους ισχύει $l \geq n$ και οι υπόλοιποι θα προκύψουν από τη σχέση (3.46).

Οι συντελεστές $B_l^{(1)}$ και $B_l^{(2)}$ δίνονται από ολοκληρώματα τα οποία μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά κι έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
 B_l^{(1)} &= \int_{-h}^h \cos kz \cdot \cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right) dz = \frac{1}{2} \int_{-h}^h \left[\cos\left(kz - \frac{l\pi z}{h}\right) + \cos\left(kz + \frac{l\pi z}{h}\right) \right] dz \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-h}^h \cos\left(z\left(k - \frac{l\pi}{h}\right)\right) dz + \frac{1}{2} \int_{-h}^h \cos\left(z\left(k + \frac{l\pi}{h}\right)\right) dz \\
 &= \frac{h}{(kh - l\pi)} \sin(kh - l\pi) + \frac{h}{(kh + l\pi)} \sin(kh + l\pi)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Οι οποίοι για $l = \pm \frac{kh}{\pi}$ παίρνουν την τιμή $B_l^{(1)} = 2h$.

Έτσι λοιπόν μπορούμε να ορίσουμε το $B_l^{(1)}$ για οποιαδήποτε ακέραια τιμή του l σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$B_l^{(1)} = \begin{cases} \frac{h}{(kh - l\pi)} \sin(kh - l\pi) + \frac{h}{(kh + l\pi)} \sin(kh + l\pi), & l \neq \pm \frac{kh}{\pi} \\ 2h, & l = \pm \frac{kh}{\pi} \end{cases} \tag{3.48}$$

Για το $B_l^{(2)}$ έχουμε:

$$B_l^{(2)} = \frac{1}{k} \int_{-h}^h \int_0^z g(t) \sin k(z-t) \cdot \cos\left(\frac{l\pi z}{h}\right) dt dz \tag{3.49}$$

$$\text{όπου } g(t) = \frac{ikV}{2\zeta_0 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right], \quad R_1 = \sqrt{t^2 + a^2} \quad \text{και} \quad R_2 = \sqrt{t^2 + b^2} .$$

Με τη βοήθεια του προγράμματος του MATLAB, του οποίου ο κώδικας περιέχεται στο Παράρτημα Α της εργασίας υπολογίζουμε τα μεγέθη $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$ και αφού τα βρούμε, υπολογίζουμε τη σταθερά C με τη βοήθεια της σχέσης:

$$\begin{aligned}
 I(\pm h) = 0 &\Rightarrow I^{(1)}(\pm h) + C \cdot I^{(2)}(\pm h) = 0 \Rightarrow \\
 C &= \frac{I^{(1)}(\pm h)}{I^{(2)}(\pm h)}
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

Η οποία προέκυψε από την απαίτηση το ρεύμα να μηδενίζεται στα άκρα της κεραίας. Η τελική αριθμητική λύση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I(z') = \sum_{n=0}^N I_n f_n(z') = \sum_{n=0}^N \left[I_n^{(1)} + C I_n^{(2)} \right] f_n(z') \quad (3.51)$$

Έτσι, λοιπόν, πρέπει κανείς να επιλύσει δύο $(N+1) \times (N+1)$ συμμετρικά συστήματα για να υπολογίσει τα μεγέθη $I_n^{(1)}$ και $I_n^{(2)}$ και στη συνέχεια να υπολογίσει τη σταθερά C από τη σχέση (3.50). Εφαρμόζοντας τα παραπάνω μπορούμε να λύσουμε τα δύο συστήματα και να βρούμε μια τιμή για το ρεύμα με τη βοήθεια τη σχέσης (3.51) για διάφορες τιμές του N , του λόγου a/λ και του λόγου h/λ όπου λ το μήκος κύματος που δίνεται από τον τύπο $\lambda = \frac{c}{f}$. Δηλαδή θα υπολογίσουμε αριθμητικά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της κατανομής ρεύματος πάνω στην κεραία για διάφορες τιμές του μήκους της κεραίας h , το οποίο είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος λ και της ακτίνας του σωληνοειδούς διπόλου a , η οποία είναι πολύ μικρότερη του μήκους κύματος λ για το συγκεκριμένο μοντέλο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέγεθος $I^{(0)}/V$ είναι προσεγγιστικά η αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας. Οι ολοκληρώσεις γίνονται, έτσι ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της αγωγιμότητας της κεραίας για διάφορες τιμές του N και για διάφορες τιμές του λόγου h/λ . Η ακτίνα του σωληνοειδούς διπόλου θα είναι αρκετά μικρότερη από το μήκος κύματος.

3.1.3.2 Η συμπεριφορά των αριθμητικών λύσεων και η σχέση της με το condition number του πίνακα A

Ύστερα από εκτεταμένους υπολογισμούς για διάφορες τιμές των χαρακτηριστικών παραμέτρων του προβλήματος, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι δεν μπορούμε έτσι απλά να εκτιμήσουμε τις κατάλληλες τιμές του N για τις οποίες η εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου πάνω στην ολοκληρωτική εξίσωση που μελετάμε, μας δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα.

Θα μελετήσουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των συντελεστών I_n , δηλαδή τα $\text{Re}\{I_n\}$ και $\text{Im}\{I_n\}$. Μέσα από προσεκτική μελέτη, παρατηρήσαμε ότι το $\text{Im}\{I_n\}$, από κάποια τιμή του N και μετά αρχίζει να αποκλίνει (σχ.2, 4 παράρτημα Δ). Την τιμή αυτή δεν μπορούμε να την προκαθορίσουμε, αλλά είναι σταθερή για σταθερό h/a . Βέβαια, η τιμή αυτή είναι σε κάθε περίπτωση είναι αρκετά μεγαλύτερη του $0.6h/a$.

Το ίδιο ισχύει και για το $\text{Re}\{I_n\}$. Δηλαδή δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει μία συγκεκριμένη τιμή του N από την οποία και μετά $\text{Re}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει. Η τιμή για την οποία αποκλίνει είναι σταθερή για σταθερό h/a , ακόμα και αν μεταβάλλουμε τα h, a , αλλά δεν είναι ανάλογη του h/a . Βέβαια, η τιμή αυτή είναι σε κάθε

περίπτωση μεγαλύτερη του $0.6h/a$, αλλά δεν μπορούμε εκ των προτέρων να την προσδιορίσουμε. Συνεπώς, μια επιλογή του N , $N \leq 0.6h/a$ μπορεί να μας δώσει αξιόπιστα αποτελέσματα και για το $\text{Re}\{I_n\}$, αφού δεν έχει αρχίσει ακόμα να αποκλίνει.

Τώρα θα δούμε πώς επεκτείνονται τα παραπάνω συμπεράσματα στην κατανομή του ρεύματος $I(z)$, αφού πρώτα μελετήσουμε προσεκτικά τα αποτελέσματα που προέκυψαν. Όπως και πριν θα μελετήσουμε ξεχωριστά την περίπτωση του πραγματικού $I(z)$ και του φανταστικού $I(z)$, δηλαδή των $\text{Re}\{I(z)\}$ και $\text{Im}\{I(z)\}$.

Για το $\text{Im}\{I(z)\}$, μπορούμε να πούμε ότι για κάποια τιμή του N αρχίζει να έχει μικρές ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου, εκτός από τα σημεία κοντά στο $z=0$, οι οποίες ταλαντώσεις έχουν μεγαλύτερο πλάτος κοντά στα άκρα του διπόλου, $z = \pm h$. Βέβαια για σχετικά μικρό h/a δεν μπορούμε να διακρίνουμε σε ποιο σημείο αρχίζουν αυτές οι ταλαντώσεις καθώς, τα I_n αρχίζουν να αποκλίνουν, πριν προλάβουν να «κατασταλάξουν». Δηλαδή, για μικρό h/a , το $\text{Im}\{I(z)\}$ παρουσιάζει ταλαντώσεις απ' την αρχή και δεν προλαβαίνει να ομαλοποιηθεί, ενώ για μεγάλο h/a το $\text{Im}\{I(z)\}$ προλαβαίνει να γίνει ομαλό και για κάποιο N αρχίζει να έχει ταλαντώσεις, οι οποίες γίνονται πιο πυκνές και μεγαλώνει το πλάτος τους, καθώς αυξάνει το N . Επιπλέον, η τιμή του $I(0)$ παραμένει σταθερή και δεν επηρεάζεται από τις ταλαντώσεις (σχ. 8, 12 παράρτημα Δ).

Για το $\text{Re}\{I(z)\}$ αυτό που παρατηρούμε είναι ότι, όταν το πραγματικό μέρος των I_n αρχίζει να αποκλίνει, αρχίζει να έχει μικρού πλάτους ταλαντώσεις σε όλο του το μήκος, οι οποίες είναι πιο έντονες στα άκρα του διπόλου. Επίσης, όσο πιο μεγάλο είναι το h/a , τόσο πιο ευδιάκριτο είναι το σημείο από το οποίο αρχίζουν οι ταλαντώσεις, διότι το $\text{Re}\{I(z)\}$ έχει προλάβει να γίνει ομαλό.

Όπως έχουμε δει, για κάποιο $n > 0.6h/a$, το $\text{Im}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει. Αν το συνδυάσουμε με το γεγονός ότι η ρευματική κατανομή προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των I_n με τις συναρτήσεις βάσης (3.26) με βάση τη σχέση (3.37) μπορούμε να εξηγήσουμε τις ταλαντώσεις που παρατηρούνται στο $\text{Im}\{I(z)\}$. Οι συναρτήσεις βάσης που χρησιμοποιούμε, όπως βλέπουμε από το σχήμα 15, στο μηδέν έχουν πάντα τιμή 1. Όταν πολλαπλασιαστούν με τα $\text{Im}\{I_n\}$, τα οποία αποκλίνουν με εναλλάξ θετική και αρνητική τιμή, είναι επόμενο για $z=0$ η τιμή του $I(0)$ να παραμένει σταθερή καθώς το N αυξάνει, γιατί οι μεγάλες τιμές των $\text{Im}\{I_n\}$ αναιρούνται. Αν σκεφτούμε ότι οι συναρτήσεις βάσης όσο αυξάνει το n , παρουσιάζουν πιο πυκνές ταλαντώσεις και οι συναρτήσεις αυτές λόγω των μεγαλύτερων συντελεστών τους, $\text{Im}\{I_n\}$, έχουν μεγαλύτερη βαρύτητα στην εύρεση της ρευματικής κατανομής, είναι λογικό τελικά το $\text{Im}\{I(z)\}$ να παρουσιάζει μικρές ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου. Από την άλλη, στα άκρα του διπόλου οι συγκεκριμένες συναρτήσεις βάσης έχουν εναλλάξ τιμή 1 και -1 . Επομένως όταν πολλαπλασιαστούν με τα $\text{Im}\{I_n\}$, από ένα σημείο και μετά όλα τα γινόμενα γίνονται αρνητικά γεγονός το οποίο δημιουργεί ταλαντώσεις κοντά στα $z = \pm h$.

Το $\text{Re}\{I_n\}$, από την άλλη, αποκλίνει απομακρυνόμενο από το 0 με τιμές θετικές και αρνητικές εναλλάξ, ενώ για τις συναρτήσεις βάσης ισχύουν αυτά που είπαμε πριν. Συνεπώς, για $z=0$, οι μεγάλες τιμές του $\text{Re}\{I_n\}$ αναιρούνται με αποτέλεσμα να μην έχουμε έντονες ταλαντώσεις στο σημείο τροφοδοσίας. Για $z=\pm h$, οι τιμές του $\text{Re}\{I_n\}$ μετά τον πολλαπλασιασμό με τις συναρτήσεις βάσης γίνονται από ένα σημείο και μετά όλες αρνητικές, κάτι το οποίο δημιουργεί ταλαντώσεις στο $\text{Re}\{I(z)\}$ κοντά στο $z=\pm h$. Οι μικρές ταλαντώσεις που παρατηρούνται σε όλο το μήκος του διπόλου είναι συνέπεια του γεγονότος ότι από κάποιο σημείο και μετά το $\text{Re}\{I_n\}$ αρχίζει να αποκλίνει και αποκτούν μεγαλύτερο βάρος (οι συντελεστές τους έχουν μεγαλύτερο μέτρο) στη ρευματική κατανομή οι συναρτήσεις βάσης με μεγαλύτερο n , οι οποίες παρουσιάζουν πολύ πυκνές ταλαντώσεις.

Στο σχήμα 16 φαίνεται η γραφική παράσταση του condition number του πίνακα A συναρτήσει του N , που ισχύει και στην περίπτωση του frill generator, καθώς τα στοιχεία του πίνακα A δίνονται από την ίδια σχέση (3.45).

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι ο condition number αυξάνει εκθετικά συναρτήσει του N και προκύπτουν οι ευθείες του σχήματος. Επίσης, για σταθερό h/a , οι ευθείες του condition number συναρτήσει του N είναι παράλληλες και πολύ κοντά η μία στην άλλη. Παρατηρούμε ότι διπλασιάζοντας τα h/λ και a/λ , αλλά διατηρώντας το h/a σταθερό, η τιμή του condition number για σταθερό N , αλλάζει ελάχιστα, ενώ η αλλαγή είναι σημαντική αν αλλάξουμε το h/a .

3.1.3.3 Σύγκριση αποτελεσμάτων για entire domain basis functions και subdomain basis functions

Θα επιχειρήσουμε να συγκρίνουμε τα συμπεράσματά μας με αυτά που προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin με subdomain basis functions και ειδικότερα με παλμικές συναρτήσεις. Παρατηρήσαμε ότι:

- Στην περίπτωση των subdomain basis functions οι ταλαντώσεις του $\text{Im}\{I(z)\}$ παρουσιάζονται μόνο στα άκρα του διπόλου, για N μεγαλύτερο από τη σημαντική παράμετρο h/a και γίνονται πιο γρήγορες καθώς το N αυξάνει. Με τη δική μας μέθοδο να μεν οι ταλαντώσεις είναι πιο έντονες στα άκρα και δεν εμφανίζονται ταλαντώσεις κοντά στο $z=0$, αλλά έχουμε και μικρού πλάτους ταλαντώσεις στο υπόλοιπο μήκος του διπόλου. Η τιμή του $I(0)$ παραμένει σταθερή για σταθερό λόγο h/a , όσο και να αυξήσουμε το N .
- Στη μέθοδο με τα subdomain basis functions το $\text{Re}\{I(z)\}$ εμφανίζει ταλαντώσεις στα άκρα, παρόμοιες με τις ταλαντώσεις του $\text{Im}\{I(z)\}$ κοντά στο $z=\pm h$. Στη δική μας μέθοδο το $\text{Re}\{I(z)\}$ εμφανίζει, επίσης, ταλαντώσεις στα άκρα του διπόλου, εμφανίζει, όμως, και μικρότερες ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου, κάτι που δεν παρατηρείται για τις subdomain basis functions.

- Στη μέθοδο με τις subdomain basis functions για σταθερό h/a , ανεξαρτήτως h, a , έχουμε σταθερό condition number. Στη δική μας μέθοδο για h/a σταθερό έχουμε τιμές του condition number που είναι πολύ κοντά αλλά παρουσιάζουν μια μικρή εξάρτηση από το λόγο h/a .

3.1.4 Σύγκριση αποτελεσμάτων για delta function generator και frill generator

Για τη διευκόλυνση της μελέτης θα συμβολίσουμε με $I_d(z)$ την προσεγγιστική ρευματική κατανομή που προκύπτει για delta function generator, ενώ με $I_{fr}(z)$ θα συμβολίσουμε την προσεγγιστική ρευματική κατανομή που προκύπτει από τη μοντελοποίηση frill generator. Μέσα από τη μελέτη μας πάνω στην ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén για τα δύο μοντέλα τροφοδοσίας, delta function generator και magnetic frill generator, καταλήξαμε στα παρακάτω συμπεράσματα:

- Το φανταστικό μέρος της ρευματικής κατανομής, $\text{Im}\{I_d(z)\}$, για $N \gg 0.6h/a$, παρουσιάζει έντονες ταλαντώσεις στο $z=0$ ενώ το $\text{Im}\{I_{fr}(z)\}$ για κάποια τιμή του N και μετά εμφανίζει ταλαντώσεις κοντά στα $z = \pm h$, που είναι μικρότερου πλάτους από τις προαναφερθείσες. Η τιμή του $I_d(0)$ μειώνεται, συνεχώς, όσο αυξάνει το N , ενώ η τιμή του $I_{fr}(0)$ μένει σχεδόν σταθερή όσο αυξάνει το N . Τόσο το $\text{Im}\{I_d(z)\}$ όσο και το $\text{Im}\{I_{fr}(z)\}$ για μεγάλο N εμφανίζουν ταλαντώσεις σε όλο το μήκος του διπόλου, μικρότερες από αυτές που παρουσιάζονται για $z=0$ και $z = \pm h$ αντίστοιχα.
- Οι τιμές του $\text{Re}\{I_d(z)\}$ και του $\text{Re}\{I_{fr}(z)\}$ είναι πάρα πολύ κοντά και οι κατανομές έχουν την ίδια μορφή. Με σταθερό h/a , για την ίδια τιμή του N και μετά αρχίζουν να εμφανίζουν ταλαντώσεις στα άκρα, οι οποίες επεκτείνονται και στο υπόλοιπο δίπολο.
- Τέλος, μπορούμε να πούμε για την εξίσωση του Hallén, ότι και οι δύο μοντελοποιήσεις έχουν τον ίδιο condition number (δείκτη κατάστασης) όπως φαίνεται και στο σχήμα 16, καθώς έχουν κοινό πίνακα A , τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση (3.45).

3.2 Μέθοδος Galerkin για την εξίσωση Pocklington

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την προσεγγιστική εξίσωση του Pocklington, θα μελετήσουμε τις δυσκολίες που σχετίζονται με την αριθμητική επίλυσή της και θα δείξουμε ότι η απλή σχετικά εξίσωση παρουσιάζει αξεπέραστες δυσκολίες οι οποίες, ως επί το πλείστον, είναι συνέπεια του γεγονότος ότι η εξίσωση δεν έχει λύση. Το ερώτημα που τίθεται είναι τι παρατηρεί κανείς όταν εφαρμόσει μία αριθμητική μέθοδο στην εξίσωση. Αφού η προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση δεν έχει λύση, διαφορετικές αριθμητικές μέθοδοι παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε εδώ είναι η μέθοδος Galerkin με entire domain basis functions. Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τα μεγέθη $\text{Re}\{I(z)/V\}$ και $\text{Im}\{I(z)/V\}$ δηλαδή, το πραγματικό και στο φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας της κεραίας, όπως και προηγουμένως.

Έστω $I_{ap}(z)$ η άγνωστη κατανομή ρεύματος στην προσεγγιστική ολοκληρωτική εξίσωση. Χρησιμοποιούμε το σύμβολο $I(z)$, για διευκόλυνση. Η εξίσωση που θα μελετήσουμε έχει την παρακάτω μορφή:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-h}^h K(z-z') I(z') dz' = g(z), \quad |z| < h \quad (3.52)$$

όπου η συνάρτηση $g(z)$ για delta function generator ισούται με:

$$g(z) = \frac{iVk}{\zeta_o} \delta(z) \quad (3.53)$$

και για frill generator:

$$g(z) = \frac{iVk}{2\zeta_o \ln(b/a)} \left[\frac{e^{ik\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{e^{ik\sqrt{z^2+b^2}}}{\sqrt{z^2+b^2}} \right] \quad (3.54)$$

Ο προσεγγιστικός πυρήνας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$K(z) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikR(z-z')}}{R(z-z')} \quad (3.55)$$

όπου:

$$R(z) = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (3.56)$$

Όπως έχουμε ξαναπεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε αντίθεση με τον ακριβή πυρήνα, ο προσεγγιστικός πυρήνας δεν απειρίζεται για $z = 0$. Εδώ, λοιπόν, δε συντρέχουν οι λόγοι του Παραρτήματος Β και ο διαφορικός τελεστής μπορεί να περάσει μέσα στο ολοκλήρωμα της εξίσωσης (3.52). Βέβαια ο προσεγγιστικός πυρήνας έχει μέγιστο για $z = 0$ και το μέγιστο αυτό γίνεται οξύτερο για λεπτότερες κεραίες. Παρακάτω θα περιγράψουμε τη διαδικασία διαφορίσης του πυρήνα.

Εάν $f = f(R(z))$, $g = g(R(z))$

τότε ισχύει:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial R} \right) \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial R} \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\end{aligned}$$

και με $h' = \frac{\partial h}{\partial R}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (f \cdot g) = (f''g + 2f'g' + fg'') \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 + (f'g + fg') \frac{\partial^2 R}{\partial z^2}$$

Με $f = e^{ikR}$, $f' = ike^{ikR}$, $f'' = -k^2 e^{ikR}$ και $g = \frac{1}{R}$, $g' = -\frac{1}{R^2}$, $g'' = \frac{2}{R^3}$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{z}{R}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \frac{R - z \frac{z}{R}}{R^2} = \frac{R^2 - z^2}{R^3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K(z)}{\partial z^2} &= \frac{e^{ikR}}{4\pi} \left[\left(-\frac{k^2}{R} - \frac{2ik}{R^2} + \frac{2}{R^3} \right) \frac{z^2}{R^2} + \left(\frac{ik}{R} - \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{1}{R} - \frac{z^2}{R^3} \right) \right] \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi} \left[-\frac{k^2 z^2}{R^3} - \frac{2ikz^2}{R^4} + \frac{2z^2}{R^5} + \frac{ik}{R^2} - \frac{ikz^2}{R^4} - \frac{1}{R^3} + \frac{z^2}{R^5} \right] \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi} \left[\frac{ik}{R^2} - \frac{1+k^2 z^2}{R^3} - \frac{3ikz^2}{R^4} + \frac{3z^2}{R^5} \right]\end{aligned}$$

Επομένως:

$$G(z) \square \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) K(z) = \frac{e^{ikR}}{4\pi} \left[\frac{k^2}{R} + \frac{ik}{R^2} - \frac{1+k^2z^2}{R^3} - \frac{3ikz^2}{R^4} + \frac{3z^2}{R^5} \right] \quad (3.57)$$

Άλλη μορφή προκύπτει χρησιμοποιώντας $z^2 = R^2 - a^2$

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R^5} \left[k^2 R^4 + ikR^3 - R^2 + (-k^2 R^2 - 3ikR + 3)(R^2 - a^2) \right] \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R^5} \left[-2ikR^3 + 2R^2 + a^2 k^2 R^2 - 3a^2 (1 - ikR) \right] \\ &= \frac{e^{ikR}}{4\pi R^5} \left[a^2 k^2 R^2 + (1 - ikR)(2R^2 - 3a^2) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Έτσι η νέα εξίσωση Pocklington προκύπτει για το delta function generator:

$$\int_{-h}^h G(z-z') I(z') dz' = \frac{iVk}{\zeta_o} \delta(z), \quad |z| < h \quad (3.59)$$

και για το frill generator:

$$\int_{-h}^h G(z-z') I(z') dz' = \frac{iVk}{2\zeta_o \ln(b/a)} \left[\frac{e^{ik\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}} - \frac{e^{ik\sqrt{z^2+b^2}}}{\sqrt{z^2+b^2}} \right], \quad |z| < h \quad (3.60)$$

όπου η $G(z)$ δίνεται από την (3.57) ή την (3.58).

Για να βρούμε μια αριθμητική λύση για την (3.52) αρχικά εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ροπών στην εξίσωση. Για τη μέθοδο Galerkin με entire domain basis functions θέτουμε:

$$I(z) \cong \sum_{n=1}^{N+1} I_n f_n(z), \quad |z| < h \quad (3.61)$$

όπου οι συναρτήσεις βάσης είναι:

$$f_n(z) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi z}{2h}\right), \quad |z| < h, \quad n=1,2,\dots,N+1 \quad (3.62)$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι κατάλληλες ως basis functions διότι το άγνωστο ρεύμα είναι άρτια συνάρτηση που μηδενίζεται για $z = \pm h$. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Κάθε άρτια συνάρτηση $g(z)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(z) \quad , \quad |z| < h \quad (3.63)$$

δηλαδή το σύνολο $\{f_1(z), f_2(z), \dots\}$ είναι πλήρες για τις άρτιες συναρτήσεις. Αυτό Δείχεται στο παράρτημα Γ.

(β) Τα $f_n(z)$ μηδενίζονται για $z = \pm h$ και επομένως η προσέγγιση (3.62) πλεονεκτεί έναντι της συνηθισμένης (για το διάστημα $[-h, h]$) σειράς Fourier $\sum_{n=1}^{N+1} I_n \cos\left(\frac{n\pi z}{h}\right)$, $|z| < h$.

Η αντικατάσταση της σχέσης (3.62) στην εξίσωση (3.59), ο πολλαπλασιασμός με $f_l(z)$ και η ολοκλήρωση από $-h$ ως h όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο παράγει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\sum_{n=1}^{N+1} A_{ln} I_n = B_l \quad , \quad l = 1, 2, \dots, N+1 \quad (3.64)$$

Στο σύστημα εξισώσεων (3.64), οι συντελεστές A_{ln} υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$A_{nl} = \int_{-h}^h \int_{-h}^h G(z-z') f_n(z') f_l(z) dz' dz \quad , \quad 1 \leq n, l \leq N+1 \quad (3.65)$$

Από τις εξισώσεις (3.56), (3.57) και (3.58) παρατηρούμε ότι ισχύει $G(z) = G(-z)$, Συνεπώς θα ισχύει και:

$$A_{ln} = A_{nl} \quad (3.66)$$

άρα δε χρειάζεται να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές A_{ln} , αλλά μόνο αυτούς για τους οποίους ισχύει $l \leq n$, και οι υπόλοιποι συντελεστές προκύπτουν από τη σχέση (3.66).

Οι συντελεστές B_l για delta function generator δίνονται παρακάτω:

$$B_l = \int_{-h}^h \frac{iVk}{\zeta_o} \delta(z) f_l(z) dz = \frac{iVk}{\zeta_o} f_l(0) = \frac{iVk}{\zeta_o} \quad , \quad l = 1, \dots, N+1 \quad (3.67)$$

ενώ για frill generator έχουμε το αριθμητικό ολοκλήρωμα:

$$B_l = \int_{-h}^h g(z) f_l(z) dz \quad , \quad l = 1, \dots, N+1 \quad (3.68)$$

όπου το $g(z)$ δίνεται από τη σχέση (3.54).

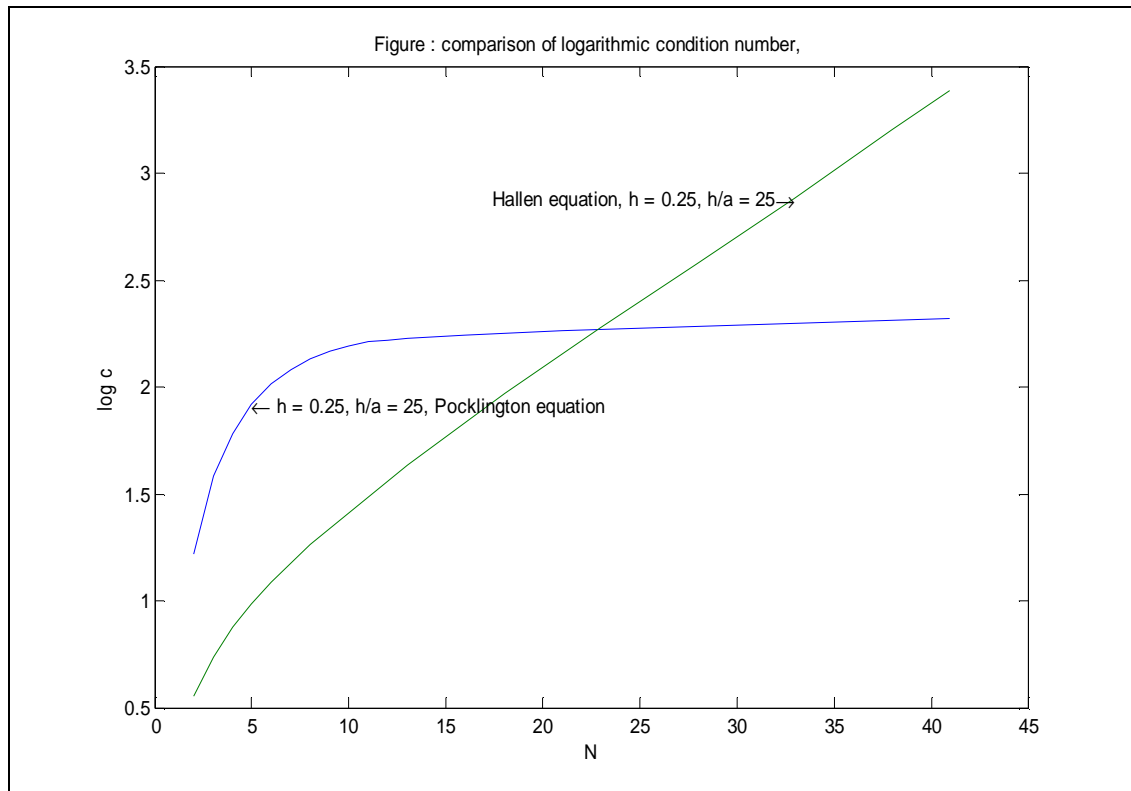
Με τη βοήθεια προγράμματος του MATLAB, του οποίου ο κώδικας περιέχεται στο Παράρτημα Α της εργασίας υπολογίζουμε το μέγεθος I_n και αφού το βρούμε υπολογίζουμε το προσεγγιστικό ρεύμα $I(z)$ από τη σχέση (3.61).

Έτσι, λοιπόν, πρέπει κανείς να επιλύσει ένα $(N+1) \times (N+1)$ συμμετρικό Toeplitz σύστημα για να υπολογίσει το I_n . Εφαρμόζοντας τα παραπάνω μπορούμε να λύσουμε το σύστημα και να βρούμε μια τιμή για το ρεύμα με τη βοήθεια τη σχέσης (3.61) για διάφορες τιμές του N , του λόγου a/λ και του λόγου h/λ όπου λ το μήκος κύματος που δίνεται από τον τύπο $\lambda = \frac{c}{f}$. Δηλαδή, θα υπολογίσουμε αριθμητικά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της κατανομής ρεύματος πάνω στην κεραία για διάφορες τιμές του μήκους της κεραίας, το οποίο είναι συγκρίσιμο με το μήκος κύματος, της ακτίνας του σωληνοειδούς διπόλου a , η οποία είναι πολύ μικρότερη του μήκους κύματος για το συγκεκριμένο μοντέλο. Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέγεθος $I^{(0)}/V$ είναι προσεγγιστικά η αγωγιμότητα εισόδου της κεραίας. Οι ολοκληρώσεις γίνονται έτσι ώστε το σφάλμα ολοκλήρωσης να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της αγωγιμότητας της κεραίας για διάφορες τιμές του N και για διάφορες τιμές του λόγου h/λ . Η ακτίνα a του σωληνοειδούς διπόλου θα είναι αρκετά μικρότερη από το μήκος κύματος.

3.2.1 Η συμπεριφορά της αριθμητική λύσης και η σχέση της με το condition number του πίνακα

Αυτό που θα μπορούσαμε να πούμε για την εξίσωση του Rocklington, είναι ότι τα αποτελέσματα που προέκυψαν ακολουθούν τη λογική των αποτελεσμάτων της εφαρμογής της μεθόδου Galerkin στην εξίσωση του Hallén. Δηλαδή, μετά από εκτεταμένη μελέτη, δεν παρατηρήσαμε διαφοροποίηση των αποτελεσμάτων. Συνεπώς, τα συμπεράσματα της παραγράφου, για τη ρευματική κατανομή $I(z)$ ισχύουν και εδώ, όπως φαίνεται και στα σχήματα 5, 6 του Παραρτήματος Δ.

Αυτό που διαφοροποιείται ανάμεσα στις δύο εξισώσεις είναι ο condition number του πίνακα A της εξίσωσης. Παρακάτω, παρουσιάζουμε ένα συγκριτικό σχήμα που δείχνει τον condition number συναρτήσει του N , για τις δύο εξισώσεις και στη συνέχεια το σχολιάζουμε.



Σχήμα 17: Ο condition number του πίνακα A για $h/a = 25$ της εξίσωσης του Hallén (πράσινη γραμμή) και της εξίσωσης του Pocklington (μπλε γραμμή).

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι ο condition number της εξίσωσης Pocklington δεν αυξάνεται με τόσο γρήγορο ρυθμό όσο ο αντίστοιχος της Hallén για σταθερό λόγο h/a . Κι ενώ για κάποιο διάστημα είναι μεγαλύτερος από αυτόν της Hallén, σε κάποιο σημείο ταυτίζονται και στη συνέχεια ο condition number της εξίσωσης Pocklington παραμένει πολύ μικρότερος. Αυτό ήταν κάτι το αναμενόμενο, αν σκεφτούμε ότι ο πυρήνας της Pocklington είναι πιο peaked σε σχέση με τον πυρήνα της Hallén στα σημεία $z = z'$ (μιλάμε πάντα για προσεγγιστικούς πυρήνες), που σημαίνει ότι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα της πρώτης εξίσωσης είναι πιο ισχυρά, δηλαδή ο πίνακας A της Pocklington είναι πιο ισχυρός διαγώνια (diagonally strong). Αυτό συνεπάγεται ότι ο πίνακας αυτός θα είναι λιγότερο ill-conditioned από τον αντίστοιχο πίνακα της εξίσωσης του Hallén, σύμφωνα με τα όσα έχουμε πει στο 2^ο Κεφάλαιο.

3.3 Μέθοδος point-matching για την εξίσωση του Hallén

Η μέθοδος που εφαρμόζουμε στη συνέχεια είναι η μέθοδος point-matching για την εξίσωση του Hallén. Η περιγραφή της μεθόδου αυτής προκύπτει σύμφωνα με την παράγραφο (2.2.3.2). Η εξίσωση του Hallén έχει τη μορφή :

$$\int_{-h}^h K(z-z') I(z') dz' = g_1(z) + C \cdot g_2(z), \quad -h \leq z \leq h \quad (3.69)$$

όπου $2h$ είναι το μήκος της κεραίας, $g_1(z) = \frac{i}{2\zeta_0} V \sin k|z|$ για delta function generator

και $g(z) = \frac{ikV}{2\zeta_0 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{jkR_1}}{R_1} - \frac{e^{jkR_2}}{R_2} \right]$, όπου $R_1 = \sqrt{z^2 + a^2}$ και $R_2 = \sqrt{z^2 + b^2}$, για frill generator, ενώ $g_2(z) = \cos kz$ και στις δύο περιπτώσεις.

Για να βρούμε μια αριθμητική λύση της, πρώτα εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ροπών στην εξίσωση αυτή. Για τη μέθοδο point-matching με την επιλογή συνημιτονικών συναρτήσεων βάσης ολικού πεδίου που είναι άρτιες και μηδενίζονται στα άκρα του διπόλου θέτουμε:

$$I(z') \cong \sum_{n=1}^{N+1} I_n f_n(z') \quad (3.70)$$

όπου οι συνημιτονικές συναρτήσεις είναι:

$$f_n(z') = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi z'}{2h}\right) \quad (3.71)$$

Αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση στην κι αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης και του αθροίσματος, προκύπτει:

$$\sum_{n=1}^{N+1} I_n \int_{-h}^h K(z-z') f_n(z') dz' \cong g(z) \quad (3.72)$$

Βρίσκουμε $N+1$ ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[0, h]$, (matching points), και ικανοποιούμε την στα σημεία αυτά. Παρακάτω, θα δούμε πώς επιλέγουμε τα σημεία αυτά. Παίρνουμε λοιπόν το σύστημα:

$$\sum_{n=1}^{N+1} I_n A_{ln} = g_l(z_l) + C g_l(z_l), \quad l, n = 1, \dots, N+1 \quad (3.73)$$

όπου:

$$A_{ln} = \int_{-h}^h K(z_l - z') f_n(z') dz', \quad 1 \leq l, n \leq N+1 \quad (3.74)$$

Η (3.73) είναι ένα $(N+1) \times (N+1)$ σύστημα με αγνώστους I_1, I_2, \dots, I_N και C .

$$\sum_{n=1}^{N+1} \begin{cases} A_{ln} I_n, & n=1, \dots, N \\ -C \cdot g_2(z_l), & n=N+1 \end{cases} = g_1(z_l) \quad l=1, 2, \dots, N+1 \quad (3.75)$$

και σε μορφή πίνακα:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1N} & -g_2(z_1) \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2N} & -g_2(z_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ A_{N1} & A_{N2} & A_{N3} & \cdots & A_{NN} & -g_2(z_N) \\ A_{N+1,1} & A_{N+1,2} & A_{N+1,3} & & A_{N+1,N+1} & -g_2(z_{N+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(z_1) \\ g_1(z_2) \\ \vdots \\ g_1(z_N) \\ g_1(z_{N+1}) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

Ένα ζήτημα που μας απασχόλησε ιδιαίτερα ήταν η επιλογή των σημείων, στα οποία θα ικανοποιήσουμε την εξίσωση. Σε αυτό το σημείο, πρέπει να τονίσουμε ότι παρόλο που η μέθοδος point-matching είναι η απλούστερη μέθοδος στον υπολογισμό, δεν είναι δυνατό να καθορίσουμε, εκ των προτέρων για μια συγκεκριμένη εξίσωση ποια matching points είναι τα κατάλληλα-[18-ch.4]. Ακριβές αποτέλεσμα εξασφαλίζεται μόνο αν γίνει δικαιολογημένη επιλογή των matching points. Επίσης πρέπει να επισημάνουμε ότι η μέθοδος point-matching εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα matching points-[18-ch.4, 14, 15]. Έχει αποδειχθεί πειραματικά ότι η απόκλιση ή η σύγκλιση της απλής μεθόδου point-matching εξαρτάται αποφασιστικά από την τοποθέτηση των matching-points - [14]. Στην περίπτωση που μελετάμε, επιλέξαμε τα σημεία να είναι ισαπέχοντα στο διάστημα $[0, h]$. Επιλέγουμε τα σημεία να βρίσκονται στο $[0, h]$, που είναι το μισό μήκος της κεραίας, για να αποκτήσουμε εξισώσεις που είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Μία επιλογή θα μπορούσε να είναι τα δύο από τα σημεία αυτά να είναι τα άκρα του διαστήματος 0 και h , και τα υπόλοιπα να ισοκατανέμονται στο υπόλοιπο διάστημα έτσι ώστε $z_l = \frac{(l-1)h}{N}$. Μία άλλη επιλογή θα μπορούσε να είναι να χωρίσουμε το προαναφερθέν διάστημα σε $N+1$ υποδιαστήματα και ως matching points να ορίσουμε

τα μέσα των διαστημάτων αυτών, έτσι ώστε $z_l = \frac{(l-1/2)h}{N+1}$. Άλλες επιλογές θα

μπορούσαν να είναι τα δεξιά ή τα αριστερά άκρα των $N+1$ υποδιαστημάτων. Βέβαια δεν είναι απαραίτητο τα σημεία να ισοκατανέμονται στο διάστημα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή, για παράδειγμα, θα μπορούσαμε να επιλέξουμε περισσότερα σημεία κοντά στο μέσο και στα άκρα της κεραίας, αφού εκεί περιμένουμε ότι θα υπάρχει πρόβλημα. Για να επιβεβαιώσουμε αυτό που ισχυριστήκαμε παραπάνω, δηλαδή, την εξάρτηση της μεθόδου από τα matching points, να πούμε ότι με διαφορετική επιλογή matching points

στην εφαρμογή της μεθόδου point matching στην εξίσωση του Hallén, παίρναμε διαφορετικά αποτελέσματα. Για να ελέγξουμε την ορθότητα των παραπάνω επιλογών, θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή σε μια ολοκληρωτική εξίσωση της οποίας γνωρίζουμε την ακριβή λύση εκ των προτέρων. Η ολοκληρωτική εξίσωση αυτή είναι η :

$$\int_{-1}^1 \ln|x-x'|I(x')dx' = f(x) \quad (3.77)$$

Για να προσομοιώσουμε την εξίσωση του Hallén, θέτουμε $f(x) = C \cdot x^2 + 1$ και η γίνεται:

$$\int_{-1}^1 \ln|x-x'|I(x')dx' = Cx^2 + 1 \quad (3.78)$$

Βρίσκουμε από τον πίνακα 1 ότι η λύση της $\int_{-1}^1 \ln|x-x'|I(x')dx' = x^2$ είναι

$$I(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[1 - 2x^2 - \frac{1}{2\ln 2} \right], \text{ ενώ η λύση της } \int_{-1}^1 \ln|x-x'|I(x')dx' = 1 \text{ είναι}$$

$$I(x) = -\frac{1}{\pi \ln 2 \sqrt{1-x^2}}. \text{ Συνεπώς η λύση της (3.78) είναι:}$$

$$\begin{aligned} I(x) &= C \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[1 - 2x^2 - \frac{1}{2\ln 2} \right] - \frac{1}{\pi \ln 2 \sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \\ I(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[C - 2Cx^2 - \frac{C}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right] \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \left[-2Cx^2 + C - \frac{C}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \right] \end{aligned} \quad (3.79)$$

Θέλουμε η λύση να μηδενίζεται στα άκρα του διπόλου, δηλαδή $I(\pm h) = 0$. Συνεπώς ο παράγοντας που βρίσκεται μέσα σε αγκύλη πρέπει να έχει τη μορφή:

$$C'(1-x^2) \quad (3.80)$$

όπου C' τυχαία σταθερά.

Εξισώνοντας τον παράγοντα μέσα στην αγκύλη με την (3.80) προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} C' &= 2C \\ C' &= C - \frac{C}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow 2C = C - \frac{C}{2\ln 2} - \frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow \quad (3.81)$$

$$C \left(1 + \frac{1}{2\ln 2} \right) = -\frac{1}{\ln 2} \Leftrightarrow C = -\frac{1}{\left(\ln 2 + \frac{1}{2} \right)} = -\frac{2}{(2\ln 2 + 1)}$$

Επομένως $C' = -\frac{4}{(2\ln 2 + 1)}$ και από την προκύπτει ότι η ακριβής λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης είναι:

$$I(x) = \frac{C'(1-x^2)}{\pi\sqrt{1-x^2}} = \frac{C'}{\pi}\sqrt{1-x^2} = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi(2\ln 2 + 1)} \quad (3.82)$$

όπου είναι εμφανές ότι ισχύει η συνθήκη $I(\pm 1) = 0$.

Εφαρμόζουμε λοιπόν την μέθοδο ροπών στην εξίσωση (3.78), της οποίας γνωρίζουμε την ακριβή λύση, με συναρτήσεις βάσης τις συνημιτονικές συναρτήσεις και τεχνική point-matching. Ως matching points δοκιμάσαμε πολλές επιλογές ανάμεσα στις οποίες ήταν και αυτές που προαναφέραμε και καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι για όλες τις επιλογές, η μέθοδος παρουσίαζε μεγάλο σχετικό σφάλμα (της τάξης του 80%) κοντά στα $x = \pm 1$, το οποίο δε μειωνόταν καθώς αυξανόταν το N . Παρόμοια συμπεράσματα για τη μέθοδο point matching με entire domain basis functions έχουν διατυπωθεί και σε άλλες εργασίες – [10].

Αυτό που μας ώθησε να εξετάσουμε τη συγκεκριμένη μέθοδο, εφαρμόζοντας την σε μια ολοκληρωτική εξίσωση με γνωστή λύση, ήταν ότι τα αποτελέσματα που μας έδινε όταν την εφαρμόζαμε στην ολοκληρωτική εξίσωση του Hallén δεν είχαν κάποια λογική συνέχεια και δεν μπορούσαμε να βγάλουμε κάποια συμπεράσματα. Επιπλέον θέλαμε να ελέγξουμε την ορθότητα των matching points, έτσι ώστε να κάνουμε την καλύτερη δυνατή επιλογή, διότι παρατηρούσαμε ότι άλλη επιλογή σημείων μας έδινε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα (σχ. 13 παράρτημα Δ).

Μετά τη μελέτη της δοκιμαστικής εξίσωσης άρχισαν να μας δημιουργούνται αμφιβολίες σχετικά με την ορθότητα της μεθόδου point matching με συναρτήσεις βάσης ολικού πεδίου. Αυτή η εξέλιξη φαίνεται αναμενόμενη διαισθητικά, αν σκεφτούμε ότι οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε έχουν τιμή μη μηδενική σε όλο το μήκος του διπόλου, ενώ ουσιαστικά η μέθοδος point matching ικανοποιεί την εξίσωση σε λίγα μόνο σημεία του διπόλου. Πρέπει να πούμε ότι η μέθοδος αυτή καθώς αυξάνουμε το N , συγκλίνει και για τις τέσσερις επιλογές σημείων με διαφορετικό βέβαιο ρυθμό. Να συμπληρώσουμε ότι, όταν εφαρμόσαμε τη μέθοδο αυτή στην εξίσωση της μορφής:

$$\int_{-1}^1 \ln|x-x'| I(x') dx' = f(x)$$

όπου $f(x)=1$ ή $f(x)=x^2$, για να προσομοιώσουμε την εξίσωση του Rocklington, η μέθοδος δεν συνέκλινε για όλες τις επιλογές των matching points, αλλά μόνο για $z_l = \frac{(l - \frac{1}{2})h}{N+1}$ και $z_r = \frac{(l-1)h}{N+1}$, δηλαδή τα μέσα και τα αριστερά άκρα των διαστημάτων (σχ. 16 παράρτημα Δ). Επιβεβαιώνεται, λοιπόν, το ότι η επιλογή των matching points είναι καθοριστική για τη σύγκλιση της μεθόδου.

Για να εξελίξουμε τη μέθοδο αυτή, σκεφτήκαμε ότι θα μπορούσαμε να ικανοποιήσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση σε περισσότερα σημεία για σταθερό αριθμό συναρτήσεων βάσης N . Σε αυτή την περίπτωση, ο αριθμός των συναρτήσεων δοκιμής, έστω M , θα υπερβαίνει τον αριθμό N των συναρτήσεων βάσης και συνεπώς, ο πίνακας της μεθόδου ροπών δε θα είναι τετραγωνικός και άρα μη αντιστρέψιμος με την κοινή έννοια. Παρόλα αυτά, η λύση μπορεί να βρεθεί με την τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων. Η τεχνική αυτή δίνει το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα, για τα matching points, σε αντίθεση με το μηδενικό σφάλμα όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής είναι ίδιος.

3.3.1 Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων – Μελλοντική έρευνα

Έστω $Ax = b$ ένα γραμμικό σύστημα $m \times n$. Στις εφαρμογές (π.χ. στη μοντελοποίηση) οι συντελεστές A και b αντιστοιχούν συνήθως σε μετρήσεις και το x σε παραμέτρους του μοντέλου, τις οποίες θέλουμε να εκτιμήσουμε, οπότε ισχύει $m \gg n$. Υποθέτουμε ότι το μοντέλο είναι γραμμικό ως προς τις παραμέτρους. Ένα τέτοιο σύστημα $Ax = b$, με $m \gg n$ είναι συνήθως αδύνατο, οπότε έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$:

$$Ax = b + \varepsilon(x)$$

όπου το διάνυσμα $\varepsilon(x)$ είναι το σφάλμα ή το υπόλοιπο. Ο σκοπός είναι τότε να επιλεγεί το x έτσι ώστε το $\varepsilon(x)$ να είναι το μικρότερο δυνατό. Στη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων ελαχιστοποιούμε τη συνάρτηση σφάλματος:

$$F(x) = \frac{1}{2} \|\varepsilon(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3.83)$$

όπου $\|\cdot\|_2$ η Ευκλείδεια νόρμα. Η F γράφεται:

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T A^T A x - b^T A x + \frac{1}{2} b^T b \quad (3.84)$$

και είναι άρα τετραγωνική με πίνακα $A^T A$, διάνυσμα $A^T b$ και σταθερά $\frac{1}{2} b^T b$.

Θεώρημα. Ο πίνακας $A^T A$ είναι συμμετρικός και θετικός. Οι τρεις ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

- α) Ο πίνακας $A^T A$ είναι θετικά ορισμένος
- β) Ο πίνακας $A^T A$ είναι ομαλός
- γ) Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, οπότε $m \geq n$.

Αν ισχύει μια από αυτές τις τρεις προτάσεις, τότε η F έχει ένα μοναδικό σημείο ελαχίστου \bar{x} που είναι η λύση του ομαλού συστήματος:

$$A^T A \bar{x} = A^T b \quad (3.85)$$

Το σημείο \bar{x} καλείται εκτίμηση του x με τη μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων και οι εξισώσεις καλούνται κανονικές εξισώσεις.

Απόδειξη. Ο πίνακας $A^T A$ είναι προφανώς συμμετρικός $(A^T A)^T = A^T A$. Έστω A_j η στήλη j του A . Έχουμε:

$$x^T A^T A x = \|Ax\|_2^2 = \left\| \sum_j A_j x_j \right\|_2^2 \geq 0$$

που δείχνουν ότι ο $A^T A$ είναι θετικός και οι προτάσεις α, β, γ είναι ισοδύναμες.

Παρατηρήσεις. Στην πράξη το m είναι συνήθως πολύ μεγαλύτερο του n (πολλές μετρήσεις) και οι στήλες του A γραμμικά ανεξάρτητες. Το σύστημα μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο του Gauss.

Εφαρμογή-Βέλτιστη προσαρμογή συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση της μορφής:

$$g(x) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x)$$

όπου f_j είναι γνωστές συναρτήσεις και c_j είναι άγνωστοι συντελεστές που ζητάμε να εκτιμήσουμε. Έστω (x_i, y_i) , $i=1, \dots, m$ m σημεία του επιπέδου. Το πρόβλημα είναι να προσδιορίσουμε τους συντελεστές c_j έτσι ώστε οι τιμές $f(x_i)$ της f στα σημεία x_i να απέχουν το ελάχιστο δυνατό από τα y_i . Έχουμε έτσι:

$$g(x_i) = \sum_{j=1}^n c_j f_j(x_i) = y_i + \varepsilon$$

και ελαχιστοποιούμε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών ή σφαλμάτων, ε_i . Προκύπτει εδώ το σύστημα:

$$Ac = y + \varepsilon$$

όπου $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = f_j(x_i)$, $y = (y_i)$, $c = (c_j)$

και εφαρμόζοντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, το βέλτιστο \bar{c} είναι η λύση του συστήματος:

$$A^T A \bar{c} = A^T y$$

Στην περίπτωση μας έχουμε $\sum_{n=1}^{N+1} I_n \int_{-h}^h K(z-z') f_n(z') dz' \cong g(z)$, όπου I_n οι άγνωστοι συντελεστές και $\int_{-h}^h K(z-z') f_n(z') dz'$ οι γνωστές συναρτήσεις, ενώ $g(z) = g_1(z) + Cg_2(z)$ και ο πίνακας A φαίνεται στο σύστημα, ενώ $y = g(z)$.

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από αυτή τη μέθοδο πλησιάζουν τα αποτελέσματα από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin στην εξίσωση του Hallén, καθώς αυξάνει ο αριθμός των συναρτήσεων δοκιμής M σε σχέση με τον αριθμό των συναρτήσεων βάσης N (σχ. 14 παράρτημα Δ). Παρόλα αυτά, διατηρούμε επιφύλαξη σχετικά με την ορθότητα της μεθόδου, καθώς η εφαρμογή κι αυτής στην δοκιμαστική εξίσωση παρουσιάζει μεγάλο σχετικό σφάλμα στα άκρα, το οποίο δεν μειώνεται καθώς αυξάνουμε το N . Βέβαια και αυτή η μέθοδος, όπως και η προηγούμενη, συγκλίνει καθώς αυξάνουμε το N (σχ. 15 παράρτημα Δ). Επίσης η μέθοδος αυτή δεν παρουσιάζει τόσο μεγάλη εξάρτηση από τα matching points που επιλέγουμε (σχ. 13, 14 παράρτημα Δ). Σε αυτό το σημείο θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό το θέμα θα μπορούσε να αποτελέσει έναυσμα για μελλοντική έρευνα, καθώς η μέθοδος point-matching είναι απλή και ταχύτερη σε σχέση με τη μέθοδο Galerkin. Συνάμα, το σημείο αυτό, δηλαδή, το κατά πόσο θα μπορούσε η μέθοδος αυτή να είναι επαρκής για την εξαγωγή αποδεκτών αποτελεσμάτων στην περίπτωση που οι συναρτήσεις βάσης είναι entire-domain, αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον ζήτημα για διερεύνηση.

3.4 MATLAB

Όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι εφαρμογές όλων των αριθμητικών μεθόδων στις ολοκληρωτικές εξισώσεις που περιγράφηκαν, υλοποιήθηκαν με τη βοήθεια του MATLAB, έκδοση 7. Το MATLAB, ως γλώσσα προγραμματισμού και εργαλείο οπτικοποίησης δεδομένων, προσφέρει μεγάλη γκάμα δυνατοτήτων για τη λύση προβλημάτων στον τομέα της μηχανικής και της επιστήμης γενικότερα.

Στο παράρτημα Α, παρουσιάζουμε τα προγράμματα που υλοποιήσαμε με MATLAB, κι εδώ θα περιγράψουμε κάποιες από τις συναρτήσεις και εντολές που χρησιμοποιήσαμε.

Συνάρτηση	Είδος	Περιγραφή
cos	τριγωνομετρική συνάρτηση	Συνημίτονο
sin	τριγωνομετρική συνάρτηση	Ημίτονο
exp	εκθετική συνάρτηση	e
log	εκθετική συνάρτηση	φυσικός λογάριθμος
log10	εκθετική συνάρτηση	λογάριθμος με βάση το 10
sqrt	εκθετική συνάρτηση	Ρίζα
abs	μιγαδική συνάρτηση	απόλυτο ή μέτρο
imag	μιγαδική συνάρτηση	φανταστικό μέρος μιγαδικού
real	μιγαδική συνάρτηση	πραγματικό μέρος μιγαδικού
format long e	εντολή	16 ψηφία και εκθέτης
zeros	κατασκευή πινάκων	κατασκευή πίνακα με όλα τα στοιχεία του μηδενικά
linspace	κατασκευή πινάκων	κατασκευή πίνακα με επιλογή πρώτου στοιχείου, τελευταίου στοιχείου και αριθμό ενδιάμεσων στοιχείων
num2str	συνάρτηση	μετατροπή αριθμού σε string
tic	συνάρτηση χρόνου	εκκίνηση του χρονομέτρου
toc	συνάρτηση χρόνου	διακοπή του χρονομέτρου
inv(A)	συνάρτηση πινάκων	αντίστροφος πίνακα
cond(A)	συνάρτηση πινάκων	condition number πίνακα
lu(A)	συνάρτηση πινάκων	lu παραγοντοποίηση
trapz	συνάρτηση ολοκλήρωσης	ολοκλήρωση με κανόνα τραπεζίου
quadl	συνάρτηση ολοκλήρωσης	Ολοκλήρωση
dblquad	συνάρτηση ολοκλήρωσης	διπλή ολοκλήρωση
plot	συνάρτηση	γραφική αναπαράσταση δεδομένων
figure	object handles	παράθυρο για την παρουσίαση γραφικών
uicontrol	object handles	αντικείμενο για τη διεπαφή προγράμματος- χρήστη

Επίσης παρακάτω παρουσιάζεται η υλοποίηση των βασικών πράξεων μεταξύ πινάκων και μεταξύ πινάκων και βαθμωτών αριθμών.

Πράξη στοιχείο προς στοιχείο	Αναπαράσταση δεδομένων $a = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$, $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]$, $c = \langle \text{βαθμωτός} \rangle$
Πρόσθεση πίνακα με βαθμωτό	$a + c = [a_1 + c \ a_2 + c \ \dots \ a_n + c]$
Πολλαπλασιασμός πίνακα με αριθμό	$a * c = [a_1 * c \ a_2 * c \ \dots \ a_n * c]$
Πρόσθεση πινάκων	$a + b = [a_1 + b_1 \ a_2 + b_2 \ \dots \ a_n + b_n]$
Πολλαπλασιασμός πινάκων	$a * b = [a_1 * b_1 \ a_2 * b_2 \ \dots \ a_n * b_n]$
Διαίρεση πινάκων	$a ./ b = [a_1 / b_1 \ a_2 / b_2 \ \dots \ a_n / b_n]$
Δύναμη	$a.^c = [a_1^c \ a_2^c \ \dots \ a_n^c]$
	$c.^a = [c^{a_1} \ c^{a_2} \ \dots \ c^{a_n}]$
	$a.^b = [a_1^{b_1} \ a_2^{b_2} \ \dots \ a_n^{b_n}]$

3.5 Εφαρμογή αριθμητικής μεθόδου-Παρατηρήσεις

Ένα πρόβλημα που συναντήσαμε κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου Galerkin στις ολοκληρωτικές εξισώσεις τύπου Hallén και Rocklinton, ήταν ο πολύ μεγάλος υπολογιστικός χρόνος που απαιτούσε η χρήση της συνάρτησης dblquad. Η συγκεκριμένη συνάρτηση του MATLAB υλοποιεί διπλή ολοκλήρωση, κάτι που σε συνδυασμό με την επιθυμία μας για αρκετά υψηλή ακρίβεια και την πολυπλοκότητα των ολοκληρωτέων ποσοτήτων δικαιολογεί τον μεγάλο υπολογιστικό χρόνο. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα καταφύγαμε στο σύνθετο τύπο του τραπεζίου.

3.5.1 Σύνθετος τύπος τραπεζίου

Έστω $g \in C^2[a, b]$ και $\{x_i\}_{i=0}^N$ $N+1$ ισαπέχοντα σημεία του $[a, b]$ με $x_0 = a, x_N = b$, $C = x_{i+1} - x_i$. Στη σύνθετη μέθοδο τραπεζίου εφαρμόζουμε διαδοχικά τον τύπο Τραπεζίου σε κάθε υποδιάστημα $[x_{i-1}, x_i]$ του $[a, b]$. Παίρνουμε έτσι:

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) dx &= \sum_{i=1}^N \frac{C}{2} (g_{i-1} + g_i) - E(g) = T(g) - E(g) \\ &= C \left(\frac{1}{2} g_0 + g_1 + g_2 + \dots + g_{N-1} + \frac{1}{2} g_N \right) - E(g) \\ &= C \left(\frac{1}{2} g_0 + \frac{1}{2} g_N + \sum_{i=1}^{N-1} g_i \right) - E(g) = T(g) - E(g) \end{aligned} \quad (3.86)$$

όπου $E(g) = \frac{C^3}{12} \sum_{n=1}^N g''(\mu_i)$, $C = \frac{(b-a)}{N}$ και $\mu_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, N$

Επίσης ισχύει:

$$\begin{aligned} g_0 &= g(x_0) = g(a) \\ g_N &= g(x_N) = g(b) \\ g_i &= g(x_i) = g(a + iC) \end{aligned}$$

Το σφάλμα της σύνθετης μεθόδου του τραπεζίου ικανοποιεί:

$$|E(g)| \leq \frac{C^3}{12} \sum_{n=1}^N |g''(\mu_i)| \leq \frac{C^3}{12} N \|g''\|_{\infty} = \frac{C^2}{12} (b-a) \|g''\|_{\infty}$$

Αυτή η ανισότητα δείχνει ότι η σύνθετη μέθοδος τραπεζίου συγκλίνει με σφάλμα της τάξης του C^2 , όταν $C \rightarrow 0$ δηλαδή όταν $N \rightarrow \infty$.

Στη δική μας περίπτωση το διπλό ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε αριθμητικά έχει την παρακάτω μορφή:

$$\int_{-h}^h \int_{-h}^h K(z-z')f_n(z)f_l(z')dzdz' \quad (3.87)$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα με τη μέθοδο του τραπεζίου που περιγράψαμε παραπάνω, γι' αυτό θέτουμε:

$$I(g) = \int_{-h}^h g(z, z')dz = \int_{-h}^h K(z-z')f_n(z)f_l(z')dz \cong T(g) \quad (3.88)$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης είναι $[-h, h]$, άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$$\begin{aligned} C &= \frac{2h}{N} \\ z_0 &= -h, z_N = h \\ g_0 &= g(z_0, z') = g(-h, z') \\ g_N &= g(z_N, z') = g(h, z') \\ g_n &= g(z_n, z') = g(-h + nC, z') \end{aligned}$$

Άρα από την (3.86) παίρνουμε:

$$T(g) = C \left(\frac{1}{2}g_0 + \frac{1}{2}g_N + \sum_{i=1}^{N-1} g_i \right)$$

και η (3.87) γίνεται:

$$\int_{-h}^h T(g)dz' \quad (3.89)$$

όπου $g(z, z') = K(z-z')f_n(z)f_l(z')$

Συνεπώς τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση quadl για τον υπολογισμό του απλού ολοκληρώματος που προκύπτει και το χρονικό κέρδος είναι σημαντικό.

3.6 Αγωγιμότητα εισόδου

Η αντίσταση (αγωγιμότητα) εισόδου μιας κεραίας είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος, που χρησιμοποιείται για να καθορίσει την αποδοτικότητα της κεραίας. Για να βρούμε την αντίσταση (αγωγιμότητα) εισόδου ενός διπόλου, το πρώτο πράγμα που πρέπει να κάνουμε είναι να λύσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση, για την εύρεση της κατανομής του ρεύματος. Αυτό επιτυγχάνεται όπως έχουμε δει, χρησιμοποιώντας είτε την εξίσωση του Rocklington είτε την εξίσωση του Hallén. Επιπλέον, μπορούμε για κάθε μια από τις παραπάνω εξισώσεις να χρησιμοποιήσουμε είτε μοντελοποίηση τροφοδοσίας delta-function είτε magnetic frill. Από τη στιγμή που θα υπολογίσουμε τη ρευματική κατανομή, χρησιμοποιώντας κάποια από τις τέσσερις μορφές εξισώσεων που προκύπτουν, η αντίσταση (αγωγιμότητα) εισόδου μπορεί να καθοριστεί από τη σχέση:

$$Z_{in} = \frac{V}{I_{in}} \left(Y_{in} = \frac{I_{in}}{V} \right) \quad (3.90)$$

3.6.1 Μελέτη για την άπειρη κεραία

Όταν εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ροπών, στην εξίσωση τύπου Hallén για πεπερασμένου μήκους δίπολο, μπορούμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε δύο πυρήνες, τον ακριβή και τον προσεγγιστικό. Έτσι, αν συνδυάσουμε τον κάθε πυρήνα με καθένα από τα δύο μοντέλα τροφοδοσίας, προκύπτουν τέσσερις πιθανές ολοκληρωτικές εξισώσεις. Δύο από αυτές τις εξισώσεις, αυτές που περιλαμβάνουν τον προσεγγιστικό πυρήνα, οδηγούν σε μη επιλύσιμες ολοκληρωτικές εξισώσεις όπως έχουμε δει. Κι ενώ η χρήση του προσεγγιστικού πυρήνα είναι πολύ διαδεδομένη, το περίεργο θέμα της μη επιλυσιμότητας δημιουργεί το πρόβλημα της επιλογής των συναρτήσεων βάσης και δοκιμής, καθώς και του αριθμού τους. Όταν ο αριθμός των συναρτήσεων είναι πολύ μεγάλος, παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο σημείο τροφοδοσίας και /ή κοντά στα άκρα της κεραίας. (Τέτοιες ταλαντώσεις δεν παρατηρούνται στην περίπτωση του ακριβούς πυρήνα).

Στην περίπτωση της άπειρης κεραίας, από τις τέσσερις πιθανές εξισώσεις, μόνο μια είναι μη επιλύσιμη κι όχι δύο. Οι τρεις επιλύσιμες εξισώσεις, όπως έχουμε δει, έχουν ακριβή λύση που παίρνει τη μορφή ολοκληρώματος που συγκλίνει. Επιπλέον, κάθε τέτοιο ολοκλήρωμα είναι η λύση και της αντίστοιχης εξίσωσης του Rocklington. Όταν η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier εφαρμοστεί στην εξίσωση που δεν έχει λύση, οδηγεί σε ολοκλήρωμα που αποκλίνει. Με την άπειρη κεραία, συνεπώς, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ακριβείς λύσεις και όχι κάποια αριθμητική μέθοδο.

Στη συνέχεια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των αγωγιμοτήτων εισόδου (πραγματικό και φανταστικό μέρος), από τις δύο επιλύσιμες εξισώσεις που περιλαμβάνουν frill generator, και μόνο το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου από τις εξισώσεις που προέκυψαν με delta-function generator. Θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε τις γνώσεις αυτές με τα αποτελέσματα της δικής μας αριθμητικής μεθόδου, για το πεπερασμένο δίπολο.

Για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα και του delta-function generator, το φανταστικό μέρος του ρεύματος κοντά στο σημείο τροφοδοσίας είναι άπειρο. Κατά συνέπεια, το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου είναι άπειρο και δεν μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς. Το πραγματικό μέρος δίνεται από τη σχέση:

$$G_{ex,\delta}^{(\infty)} = \frac{4k}{\pi\zeta_0} \int_0^k \frac{d\zeta}{(k^2 - \zeta^2) \left[J_0^2(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]} \quad (3.91)$$

Για την περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα και του delta-function generator, η εξίσωση δεν έχει λύση. Παρόλα αυτά, το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου, μπορεί να υπολογιστεί, ακολουθώντας μια συγκεκριμένη μέθοδο – [6]:

$$G_{ap,\delta}^{(\infty)} = \frac{4k}{\pi\zeta_0} \int_0^k \frac{J_0(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) d\zeta}{(k^2 - \zeta^2) \left[J_0^2(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) + Y_0^2(a\sqrt{k^2 - \zeta^2}) \right]} \quad (3.92)$$

Βέβαια, η τιμή αυτή είναι μάλλον ανεξάρτητη της μεθόδου που ακολουθήθηκε.

Για την περίπτωση του ακριβούς πυρήνα και του frill generator η αγωγιμότητα εισόδου μπορεί να βρεθεί από τη σχέση:

$$G_{ex,fr}^{(\infty)} + iB_{ex,fr}^{(\infty)} = \frac{2ik}{\zeta_0 \ln(b/a)} \int_{0,(k)}^{\infty} \frac{\bar{K}_{ap}(\zeta, a) - \bar{K}_{ap}(\zeta, b)}{(k^2 - \zeta^2) \bar{K}_{ex}(\zeta, a)} d\zeta \quad (3.93)$$

Και τέλος, για τον προσεγγιστικό πυρήνα και frill generator η αγωγιμότητα εισόδου προκύπτει από τη σχέση:

$$G_{ap,fr}^{(\infty)} + iB_{ap,fr}^{(\infty)} = \frac{2ik}{\zeta_0 \ln(b/a)} \int_{0,(k)}^{\infty} \frac{\bar{K}_{ap}(\zeta, a) - \bar{K}_{ap}(\zeta, b)}{(k^2 - \zeta^2) \bar{K}_{ap}(\zeta, a)} d\zeta \quad (3.94)$$

Αν θεωρήσουμε την οριακή περίπτωση στην οποία $b \rightarrow a$, η οποία αναφέρεται ως «small frill limit», μπορεί κάποιος να περιμένει ότι το ρεύμα που οφείλεται σε αυτό το απειροστά μικρό frill generator είναι το ίδιο με το ρεύμα που προκαλείται από το delta-function generator. Αυτό σε γενικές γραμμές, όμως, δε συμβαίνει. Αυτό που συμβαίνει είναι ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$G_{ex,smfr}^{(\infty)} - G_{ex,\delta}^{(\infty)} = O(a^2) \quad (3.95)$$

$$G_{ap,smfr}^{(\infty)} = G_{ex,\delta}^{(\infty)} \quad (3.96)$$

Από την (3.95) παρατηρούμε ότι τα δύο πραγματικά μέρη της αγωγιμότητας για τον ακριβή πυρήνα με διαφορετικό μοντέλο τροφοδοσίας, είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο. Η διαφορά τους αυτή μηδενίζεται για πολύ μικρές τιμές της ακτίνας a του διπόλου. Από την (3.96) φτάνουμε σε ένα αναπάντεχο αποτέλεσμα: αν 1) αντικαταστήσουμε το small-frill από το delta-function generator και 2) αντικαταστήσουμε τον προσεγγιστικό από τον ακριβή πυρήνα, το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου μένει αμετάβλητο. Κάθε μια από τις παραπάνω μεταβολές ξεχωριστά, όμως, μεταβάλλει το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας.

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα για την αγωγιμότητα εισόδου με βάση τα όσα αναφέρθηκαν, προκύπτουν κάποια συμπεράσματα.

- Οι ποσότητες $G_{ap,\delta}^{\infty}$ και $G_{ex,\delta}^{\infty}$, που δεν εξαρτώνται από το b , είναι αρκετά κοντά για μικρή ακτίνα a και η διαφορά τους αυξάνεται καθώς αυξάνεται το a/λ .
- Οι ποσότητες $G_{ap,fr}^{\infty}$ και $G_{ex,fr}^{\infty}$, που εξαρτώνται από το b , για σταθερό λόγο a/λ μειώνονται καθώς αυξάνει ο λόγος b/λ .
- Για σταθερό $a/\lambda = 0.01$, και $b/\lambda < 0.03$, οι ποσότητες $G_{ap,\delta}^{\infty}$, $G_{ex,\delta}^{\infty}$, $G_{ap,fr}^{\infty}$ και $G_{ex,fr}^{\infty}$ είναι πολύ κοντά και καθώς αυξάνει περαιτέρω το b/λ , οι διαφορές αυξάνουν, όχι όμως με μεγάλο ρυθμό.
- Το μέτρο των ποσοτήτων $B_{ap,fr}^{\infty}$ και $B_{ex,fr}^{\infty}$, για σταθερό λόγο $b/a = 2$, αυξάνει καθώς αυξάνει το a/λ , όπως και η διαφορά τους. Η διαφορά τους για σταθερό a/λ , μειώνεται καθώς το b/a αυξάνει.
- Μετά από αριθμητική και αναλυτική μελέτη για τις διάφορες περιπτώσεις, έχει αποδειχθεί ότι τα πραγματικά μέρη των αγωγιμοτήτων εισόδου G είναι πολύ κοντά το ένα στο άλλο, ενώ τα φανταστικά μέρη B μπορεί να διαφέρουν σημαντικά.

3.6.2 Μέθοδος Galerkin για τη εξίσωση του Hallén με entire-domain basis functions

Κατά τη διάρκεια της μελέτης μας, επικεντρωθήκαμε στις δυσκολίες που σχετίζονται με την εφαρμογή της μεθόδου ροπών σε μια ολοκληρωτική εξίσωση για entire domain basis functions και πώς τα αποτελέσματα που προέκυψαν, συνάδουν με συμπεράσματα από εφαρμογή άλλων μεθόδων στην ολοκληρωτική εξίσωση. Ένα ερώτημα που μπορεί να δημιουργηθεί όμως είναι κατά πόσο και αν ναι, κάτω από ποιες συνθήκες, αυτή η μέθοδος μπορεί να μας δώσει αποδεκτά αποτελέσματα για την αγωγιμότητα εισόδου μιας κεραίας.

Για να υπολογίσουμε την αγωγιμότητα εισόδου μιας κεραίας με τη βοήθεια κάποιας αριθμητικής μεθόδου, αρχικά πρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο αυτή στην ολοκληρωτική εξίσωση που μας δίνει το ρεύμα. Στη δική μας περίπτωση, θα εφαρμόσουμε συγκεκριμένα τη μέθοδο των ροπών στην ολοκληρωτική εξίσωση για τη εύρεση της ρευματικής κατανομής. Και από τη στιγμή που θα βρεθεί η ρευματική κατανομή, η αντίσταση (αγωγιμότητα) εισόδου μπορεί να καθοριστεί από τη σχέση:

$$Z_{in} = \frac{V}{I_{in}} = \frac{V}{I(0)} \left(Y_{in} = \frac{I_{in}}{V} = \frac{I(0)}{V} \right) \quad (3.97)$$

όπου $I(0)$, το ρεύμα στο σημείο τροφοδοσίας της κεραίας.

Στην περίπτωση του delta function generator, όπως έχουμε δει, η σημαντική παράμετρος φαίνεται να είναι $0.6 \frac{h}{a}$, δηλαδή για $n < 0.6 \frac{h}{a}$ τα φανταστικά μέρη των I_n φαίνεται να συγκλίνουν, αλλά για $n = 0.6 \frac{h}{a}$ αρχίζουν να αποκλίνουν με αυξανόμενο ρυθμό. Συνεπώς αν επιλέξουμε το N έτσι ώστε να ισχύει $N < 0.6 \frac{h}{a}$, μπορούμε να πάρουμε αποδεκτά αποτελέσματα για το φανταστικό μέρος της αγωγιμότητα εισόδου. Για το πραγματικό μέρος δεν ισχύει κάτι αντίστοιχο, καθώς το $0.6 \frac{h}{a}$ δεν είναι η σημαντική παράμετρος. Βέβαια αυτό που έχουμε παρατηρήσει είναι ότι το πραγματικό μέρος των I_n , αρχίζει να αποκλίνει για n μεγαλύτερο από αυτό για το οποίο αποκλίνει το φανταστικό μέρος, δηλαδή για $n > 0.6 \frac{h}{a}$, χωρίς να μπορούμε να καθορίσουμε πιο είναι αυτό, εκ των προτέρων. Επομένως, αν δε θέλουμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο για κάποιο $\frac{h}{a}$ και κάποιο N , να δούμε για ποιο n αρχίζει να αποκλίνει, και να εφαρμόσουμε πάλι τη μέθοδο για $N = n - 1$, κάτι που είναι χρονοβόρο, μπορούμε να αρκεστούμε στην προηγούμενη επιλογή για το φανταστικό μέρος, δηλαδή και εδώ να επιλέξουμε το N έτσι ώστε $N < 0.6 \frac{h}{a}$. Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν δε διαφέρουν πολύ. Όπως μπορεί να υποθέσει κανείς, όσο πιο μεγάλο είναι το $\frac{h}{a}$, τόσο πιο καλή θα προκύψει η αγωγιμότητα εισόδου με την επιλογή $N < 0.6 \frac{h}{a}$, γιατί τόσο πιο καλή θα είναι η σύγκλιση των I_n μέχρι εκείνο το σημείο.

Στην περίπτωση του magnetic frill generator αυτό που μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα είναι ότι δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις κοντά στο $z = 0$, όπως περιμέναμε άλλωστε να συμβαίνει. Αυτό είναι πολύ ενθαρρυντικό για τον καθορισμό της αγωγιμότητας εισόδου της κεραίας τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού μέρους. Βέβαια, δεν πρέπει, κανείς να παραβλέψει το γεγονός ότι και στην περίπτωση του magnetic frill generator, τα I_n για συγκεκριμένο N , αρχίζουν να αποκλίνουν για κάποιο n , το οποίο (όπως και στην περίπτωση του πραγματικού μέρους των I_n για delta function generator), δεν μπορούμε να το καθορίσουμε από πριν, αλλά μόνο μετά από εφαρμογή της μεθόδου. Το σίγουρο είναι πως με την επιλογή $N < 0.6 \frac{h}{a}$, τα I_n (πραγματικό και φανταστικό μέρος) δεν έχουν αρχίσει να αποκλίνουν και μπορούν να μας δώσουν ικανοποιητικά αποτελέσματα. Όπως και πριν, όσο πιο

μεγάλο είναι το $\frac{h}{a}$, τόσο πιο καλή θα προκύψει η αγωγιμότητα εισόδου με την επιλογή $N < 0.6\frac{h}{a}$, γιατί τόσο πιο καλή είναι η σύγκλιση των I_n μέχρι εκείνο το σημείο.

Κάποια αποτελέσματα παρουσιάζονται παρακάτω:

$N = 20$ $h/a = 60$	$\Rightarrow N < 0.6h/a = 36$	delta function generator	magnetic frill generator
πραγματικό μέρος αγωγιμότητας εισόδου G		$1.373 \cdot 10^{-3}$	$1.372 \cdot 10^{-3}$
φανταστικό μέρος αγωγιμότητας εισόδου B		$-3.964 \cdot 10^{-3}$	$-3.485 \cdot 10^{-3}$

Από τον παραπάνω πίνακα παρατηρούμε, όπως είχαμε δει και στη μελέτη για την άπειρη κεραία, ότι οι ποσότητες G είναι πολύ κοντά, με συμφωνία δύο σημαντικών ψηφίων, ενώ οι ποσότητες B διαφέρουν περισσότερο. Στο παραπάνω παράδειγμα ισχύει $a/\lambda = 0.01$, και $b/\lambda = 0.023 < 0.03$, οπότε επιβεβαιώνεται και από τη μελέτη της άπειρης κεραίας η συμφωνία του πραγματικού μέρους των αγωγιμοτήτων. Ένα ακόμα παράδειγμα ακολουθεί, μόνο για το πραγματικό μέρος των αγωγιμοτήτων:

$N = 30$ $h/a = 50$	$\Rightarrow N = 0.6h/a = 30$	delta function generator	magnetic frill generator
πραγματικό μέρος αγωγιμότητας εισόδου G		$8.77 \cdot 10^{-3}$	$8.78 \cdot 10^{-3}$

Όπου για ακόμα μια φορά φαίνεται η συμφωνία delta function generator και magnetic frill generator, όσον αφορά το πραγματικό μέρος της αγωγιμότητας εισόδου, με σωστή επιλογή του N .

Παρακάτω, θα συγκρίνουμε τις τιμές της αντίστασης που προέκυψαν από τη μέθοδο μας για κάποιες τιμές των παραμέτρων, με τις τιμές αντιστάσεων άλλων μεθόδων με τις ίδιες παραμέτρους – [17] :

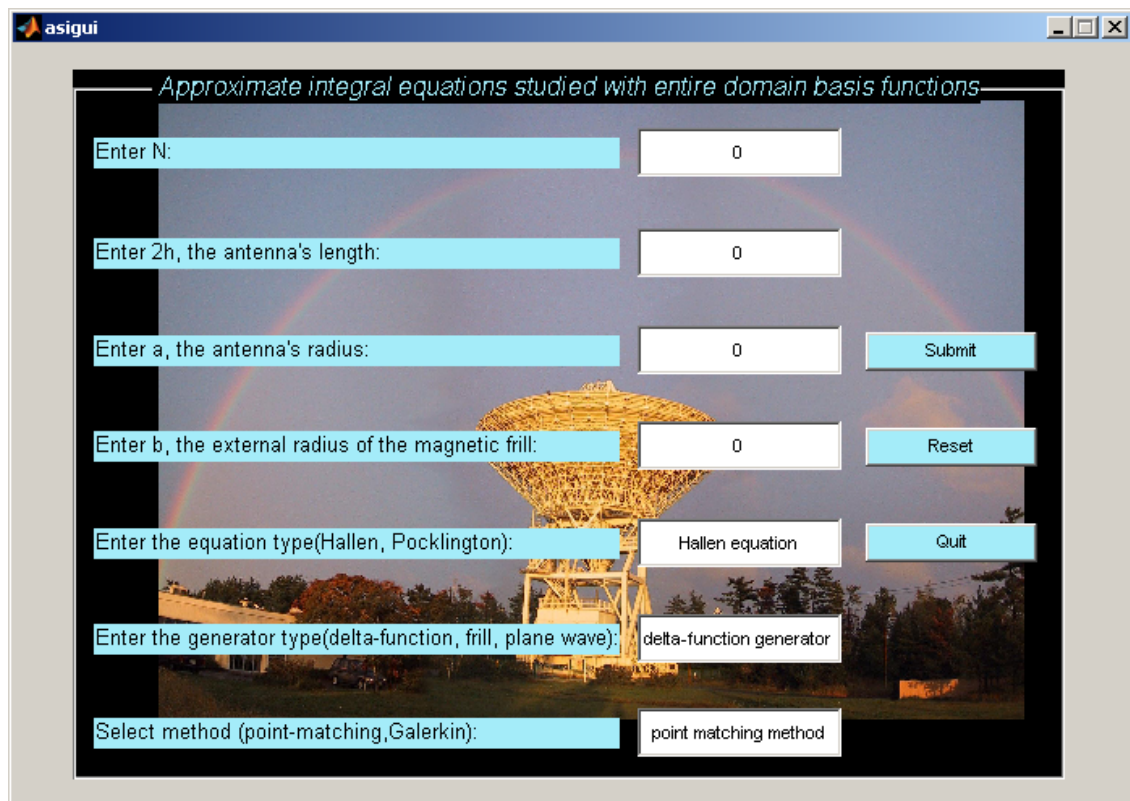
$h = 0.25$ $a = 0.007$		Αντίσταση εισόδου
Μέθοδος Galerkin με entire domain basis functions για τον προσεγγιστικό πυρήνα (delta function generator)		$100 + j35.3$
$N = 20$ $h/a = 35.7$	$\Rightarrow N < 0.6h/a$	
Nikol και Ridd		$95.5 + j38.3$
Chang και Wait		$99.5 + j36.8$
King, Sandler και Wu		$89.0 + j35.0$

$h = 0.25$ $a = 0.007022$	Αντίσταση εισόδου
Μέθοδος Galerkin με entire domain basis functions για τον προσεγγιστικό πυρήνα (delta function generator) $N = 20$ $h/a = 35.6$ } $\Rightarrow N < 0.6h/a$	$100.11 + j35.3$
Yokoyama	$115.7 + j24.8$
Fikioris και Wu (delta function generator)	$110.3 + j28.5$
Fikioris, Lionas και Lioutas (frill generator-ακριβής πυρήνας)	$96.5 + j42.6$
Μέθοδος Galerkin με entire domain basis functions για τον προσεγγιστικό πυρήνα (frill generator-προσεγγιστικός πυρήνας) $N = 20$ $h/a = 35.6$ } $\Rightarrow N < 0.6h/a$	$95.7 + j39.9$

$h = 0.25$ $a = 0.01$	Αντίσταση εισόδου
Μέθοδος Galerkin με entire domain basis functions για τον προσεγγιστικό πυρήνα $N = 14$ $h/a = 25$ } $\Rightarrow N < 0.6h/a$	$103.2 + j28.6$
Yokoyama	$117.8 + j17.8$
Fikioris και Wu	$110.9 + j21.5$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α – Κώδικας MATLAB

Για τη διευκόλυνση της εκτέλεσης του προγράμματος, δημιουργήσαμε ένα graphical user interface, με τη βοήθεια του Guide του MATLAB. Το πρόγραμμα του MATLAB καθώς και ο τρόπος εισαγωγής δεδομένων στο πρόγραμμα παρουσιάζονται παρακάτω:



Στο πρώτο textbox εισάγουμε τον αριθμό N που αντιστοιχεί στον αριθμό των $N+1$ συναρτήσεων βάσης, που χρησιμοποιούμε για να αναπαραστήσουμε τη ρευματική κατανομή. Στο δεύτερο textbox εισάγουμε το μήκος της κεραίας, σε μήκη κύματος, ενώ στο τρίτο την ακτίνα του διπόλου, επίσης, σε μήκη κύματος. Στο τέταρτο textbox εισάγουμε την εξωτερική ακτίνα b του magnetic frill σε μήκη κύματος. Στο πέμπτο textbox εισάγουμε τον τύπο της εξίσωσης, που θα χρησιμοποιήσουμε για την εύρεση της κατανομής του ρεύματος, δηλαδή την ολοκληρωτική εξίσωση τύπου Hallén ή την ολοκληροδιαφορική εξίσωση τύπου Pocklington. Στο επόμενο textbox εισάγουμε τον τύπο της γεννήτριας που θα μοντελοποιήσει την τροφοδοσία, delta-function ή frill generator και στο τελευταίο, τη μέθοδο ροπών που θα χρησιμοποιήσουμε, δηλαδή Galerkin ή point-matching. Με την ενεργοποίηση του κουμπιού με την ένδειξη submit, το πρόγραμμα παίρνει τα δεδομένα που έχουμε εισάγει και εμφανίζει τις γραφικές παραστάσεις του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της έντασης του ρεύματος, καθώς και του πραγματικού και φανταστικού μέρους των I_n , στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα. Το κουμπί reset επαναφέρει τις αρχικές επιλογές, ενώ το κουμπί quit τερματίζει τη διεπαφή προγράμματος χρήστη.

%generating code for the graphical user interface

```

function varargout = asigui(varargin)

% Begin initialization code
gui_Singleton = 1;
gui_State = struct('gui_Name',    mfilename, ...
                  'gui_Singleton', gui_Singleton, ...
                  'gui_OpeningFcn', @asigui_OpeningFcn, ...
                  'gui_OutputFcn', @asigui_OutputFcn, ...
                  'gui_LayoutFcn', [], ...
                  'gui_Callback', []);
if nargin && ischar(varargin{1})
    gui_State.gui_Callback = str2func(varargin{1});
end

if nargin
    [varargout{1:nargout}] = gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
else
    gui_mainfcn(gui_State, varargin{:});
end

% End initialization code

% --- Executes just before asigui is made visible.
function asigui_OpeningFcn(hObject, eventdata, handles, varargin)

% Choose default command line output for asigui
handles.output = hObject;
guidata(hObject, handles);
X=imread('7.jpg');
image(X);
axis off

initialize_gui(hObject, handles, false);

% --- Outputs from this function are returned to the command line.
function varargout = asigui_OutputFcn(hObject, eventdata, handles)

varargout{1} = handles.output;

function N_Callback(hObject, eventdata, handles)

N=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(N)
    set(hObject, 'String', 0);
    errorlg('Input must be a number','Error');
end

```

```

% Save the new N value
handles.inputdata.N = N;
guidata(hObject,handles);

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function N_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function L_Callback(hObject, eventdata, handles)

L=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(L)
    set(hObject, 'String', 0);
    errordlg('Input must be a number','Error');
end

% Save the new length value
handles.inputdata.L = L;
guidata(hObject,handles);

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function L_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function a_Callback(hObject, eventdata, handles)

a=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(a)
    set(hObject, 'String', 0);
    errordlg('Input must be a number','Error');
end

% Save the new radius value
handles.inputdata.a = a;
guidata(hObject,handles);

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function a_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white')
end

```

```

function b_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

b=str2double(get(hObject,'String'));
if isnan(b)
    set(hObject, 'String', 0);
    errorDlg('Input must be a number','Error');
end

```

```

% Save the new radius value
handles.inputdata.b = b;
guidata(hObject,handles);

```

```

% --- Executes during object creation, after setting all properties.

```

```

function b_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

function met1_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

met1=(get(hObject,'String'));

```

```

% Save the new value
handles.inputdata.met1 = met1;
guidata(hObject,handles);

```

```

% --- Executes during object creation, after setting all properties.

```

```

function met1_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

```

```

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

```

```

function met2_Callback(hObject, eventdata, handles)

```

```

met2=(get(hObject,'String'));

```

```

% Save the new value
handles.inputdata.met2 = met2;
guidata(hObject,handles);

```

```

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function met2_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

function met3_Callback(hObject, eventdata, handles)

met3=(get(hObject,'String'));

% Save the value
handles.inputdata.met3 = met3;
guidata(hObject,handles);

% --- Executes during object creation, after setting all properties.
function met3_CreateFcn(hObject, eventdata, handles)

if ispc && isequal(get(hObject,'BackgroundColor'),
get(0,'defaultUicontrolBackgroundColor'))
    set(hObject,'BackgroundColor','white');
end

% --- Executes on button press in submit.
function submit_Callback(hObject, eventdata, handles)

k_approx(handles.inputdata.N,handles.inputdata.L,handles.inputdata.a,handles.inputdat
a.b,handles.inputdata.met1,handles.inputdata.met2,handles.inputdata.met3);

% --- Executes on button press in quit.
function quit_Callback(hObject, eventdata, handles)

close all;

% --- Executes on button press in reset.
function reset_Callback(hObject, eventdata, handles)

initialize_gui(gcbf, handles, true);

%αρχικοποίηση δεδομένων
function initialize_gui(fig_handle, handles, isreset)

if isfield(handles, 'inputdata') && ~isreset
    return;
end

handles.inputdata.N = 10;

```

```

handles.inputdata.L = 0.5;
handles.inputdata.a = 0.01;
handles.inputdata.b = 0.02;
handles.inputdata.met1 = 'Hallen equation';
handles.inputdata.met2 = 'delta-function generator';
handles.inputdata.met3 = 'point matching method';

```

```

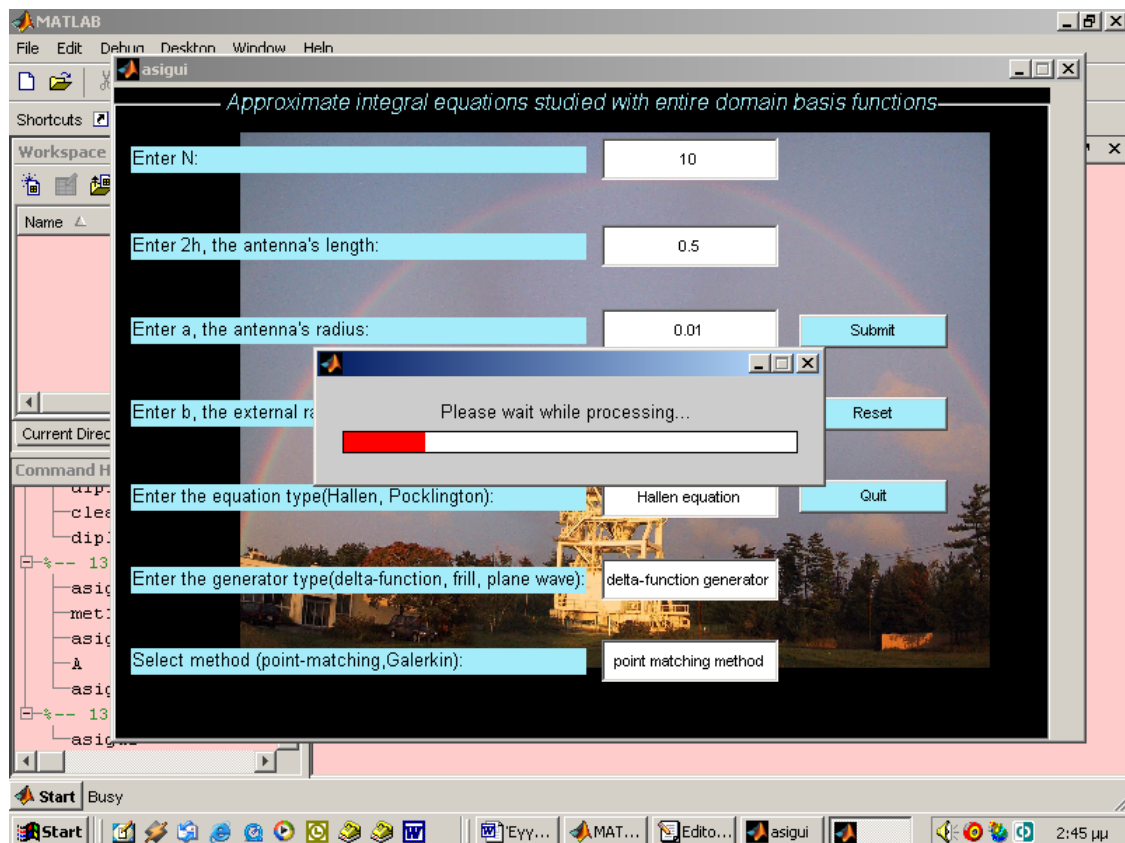
set(handles.N, 'String', handles.inputdata.N);
set(handles.L, 'String', handles.inputdata.L);
set(handles.a, 'String', handles.inputdata.a);
set(handles.b, 'String', handles.inputdata.b);
set(handles.met1, 'String', handles.inputdata.met1);
set(handles.met2, 'String', handles.inputdata.met2);
set(handles.met3, 'String', handles.inputdata.met3);

```

```

% Update handles structure
guidata(handles.figure1, handles);

```



%Η επόμενη συνάρτηση καλείται όταν πατήσουμε το κουμπί submit και επεξεργάζεται τα δεδομένα που έχουμε εισάγει για την εξαγωγή των γραφικών παραστάσεων της ρευματικής κατανομής

```
function k_approx(N,L,a,b,met1,met2,met3)
```

```
w=1;
V=1;
ko=2*pi/w;
zo=376.73;
x=8000;
```

```
%Αρχικοποίηση πινάκων
```

```
I=zeros(N+2,1);
Iz=zeros(x+1,1);
```

```
if strcmp(met1,'Hallen equation',4)& strcmp(met3,'Galerkin',4)
```

```
%Υπολογισμός του πίνακα A των συντελεστών του  $I_n$  για τη Hallén Galerkin
```

```
tic
```

```
A=coeff1(a,N,L,ko,met1);
G2=g2(N,L,ko,zo,met3);
```

```
%Συνθήκη για την επιλογή generator
```

```
if strcmp(met2,'delta-function generator',4)
```

```
G=delta(V,zo,ko,N,L,met3);
```

```
elseif strcmp(met2,'frill generator',4)
```

```
G=frill(N,L,V,zo,b,a,ko,met3);
```

```
elseif strcmp(met2,'plane wave',4)
```

```
G=plane(V,zo,N,L,prec,met3);
```

```
end
```

```
%Υπολογισμός των αγνώστων  $I_n$  και C, με λύση του γραμμικού συστήματος
```

```
[L1,U1] = lu(A);
```

```
I1(1:N+1,1) = U1(L1\G);
```

```
I2(1:N+1,1)=U1(L1\G2);
```

```
In1=I1(1:N+1,1);
```

```
In2=I2(1:N+1,1);
```

```
%Υπολογισμός του I(z) κατά μήκος της γραμμικής κεραίας
```

```
zn=zeros(x+1,1);
```

```
Q=waitbar(0,'Please wait while processing...');
```

```
for d=0:1:x
```

```
    waitbar(d/x);
```

```
    z=L*(d/x-0.5);
```

```
    zn(d+1,1)=z;
```

```
    Iz1(d+1,1)=current(z,N,L,In1);
```

```
    Iz2(d+1,1)=current(z,N,L,In2);
```

```
end
```



```

C=-(Iz1(1,1)/Iz2(1,1))
Iz=Iz1+C*Iz2;
Izr=real(Iz);
Izm=imag(Iz);
In=In1+C*In2;
Re=real(In/V);
Im=imag(In/V);
magn=sqrt(Izr.^2+Izm.^2);
close(Q);

```

%Γραφικές παραστάσεις του I_n και του $I(z)$

```

figure;
plot(0:N,Re), xlabel('n '),ylabel('Re (In)'),
title ({[met1, ', ',met2, ', ',met3];['Figure 1:real part of In/V, '];['N = ',num2str(N),...
',h/a = ',num2str(L/(2*a))]}); grid on

```

```

figure;
plot(0:N,Im),xlabel('n '),ylabel('Im (In)'),
title ({['Figure 2:imaginary part of In/V, '];['N = ',num2str(N),'h/a = ...
',num2str(L/(2*a))]}); grid on

```

```

figure; plot(zn,Izr), xlabel(' z '),ylabel('Re (I(z))'), title (['Figure 3:Method solution,...
real ', 'N = ',num2str(N)]);grid on

```

```

figure; plot(zn,Izm), xlabel(' z '),ylabel('Im (I(z))'), title (['Figure 4:Method solution,...
imaginary', 'N = ',num2str(N)]);grid on

```

%Υπολογισμός του πίνακα A των συντελεστών του I_n για τη Hallén point-matching
elseif strncmp(met1,'Hallen equation',4)&(strncmp(met3,'point matching',4))

```

tic
A=pm_coeff(a,N,L,ko,met1);
A(1:N+1,N+1)=g2(N,L,ko,zo,met3);

```

%Συνθήκη για την επιλογή generator
if strncmp(met2,'delta-function generator',4)
G=delta(V,zo,ko,N,L,met3);
elseif strncmp(met2,'frill generator',4)
G=frill(N,L,V,zo,b,a,ko,met3);
elseif strncmp(met2,'plane wave generator',4)
G=plane(V,zo,N,L,prec,met3);
end

%Υπολογισμός των αγνώστων I_n και C, με λύση του γραμμικού συστήματος
[L2,U] = (lu(A));
I = (U\L2\G);
C=I(N+1,1)
In=I(1:N,1)

```

Re=real(In/V);
Im=imag(In/V);

%Υπολογισμός του I(z) κατά μήκος της γραμμικής κεραίας
zn=zeros(x+1,1);
Q=waitbar(0,'Please wait while processing...');
for d=0:1:x
    waitbar(d/x);
    z=L*(d/x-0.5);
    zn(d+1,1)=z;
    Iz(d+1,1)=pm_current(z,N,L,In);
end
Izr=real(Iz);
Izm=imag(Iz);
magn=sqrt(Izr.^2+Izm.^2);
close(Q);

%Γραφικές παραστάσεις του In και του I(z)
figure;
plot(1:N,Re), xlabel('n '),ylabel('Re (In)'),
title ({[met1, ', ',met2, ', ',met3];['Figure 1:real part of In/V, '];['N = ',num2str(N),...
',h/a = ',num2str(L/(2*a))]}); grid on

figure;
plot(1:N,Im),xlabel('n '),ylabel('Im (In)'),
title ({['Figure 2:imaginary part of In/V, '];['N = ',num2str(N),'h/a = ...
',num2str(L/(2*a))]}); grid on

figure; plot(zn,Izr), xlabel(' z '),ylabel('Re (I(z))'), title (['Figure 3:...
Method solution, real ', ',N = ',num2str(N)]);grid on

figure; plot(zn,Izm), xlabel(' z '),ylabel('Im (I(z))'), title (['Figure 4:...
Method solution, imaginary', ',N = ',num2str(N)]);grid on

%Υπολογισμός του πίνακα A των συντελεστών του In για την Pocklington point-
matching και Galerkin

elseif strncmp(met1,'Pocklington equation',4)& ...
(strncmp(met3,'Galerkin',4)|strncmp(met3,'point matching',4))

tic
A=coeff2(a,N,L,ko,met1,met3);

%Συνθήκη για την επιλογή generator
if strncmp(met2,'delta-function generator',4)
G=p_delta(N,V,ko,zo);
elseif strncmp(met2,'frill generator',4)& strncmp(met3,'Galerkin',4)
G=p_frill(V,ko,N,zo,L,b,a);
elseif strncmp(met2,'frill generator',4)& strncmp(met3,'point matching',4)

```

```

G=pm_frill(V,zo,b,a,ko,L,N);
end

[L2,U] = lu(A);
In(1:N+1,1) = U\((L2\G);
Re=real(In/V);
Im=imag(In/V);

%Υπολογισμός του I(z) κατά μήκος της γραμμικής κεραίας
zn=zeros(x+1,1);
Q=waitbar(0,'Please wait while processing...');
for d=0:1:x
    waitbar(d/x);
    z=L*(d/x-0.5);
    zn(d+1,1)=z;
    Iz(d+1,1)=p_current(z,N,L,In);
end
Izr=real(Iz);
Izm=imag(Iz);
magn=sqrt(Izr.^2+Izm.^2);
close(Q);

%Γραφικές παραστάσεις του I_n και του I(z)
figure;
plot(1:N+1,Re), xlabel(' n '),ylabel('Re (In)'),...
title ( {[met1, ', ',met2, ', ',met3];['Figure 1:real part of In/V, '];['N = ',num2str(N),...
',h/a = ',num2str(L/(2*a))]}); grid on

figure;
plot(1:N+1,Im),xlabel(' n '),ylabel('Im (In)'),
title ( {[ 'Figure 2:imaginary part of In/V, '];['N = ',num2str(N),'h/a = ...
',num2str(L/(2*a))]}); grid on

figure; plot(zn,Izr,'b-'), xlabel(' z '),ylabel('Re (I(z))'), title (['Figure 3:...
Method solution, real ', ' ,N = ',num2str(N)]);grid on

figure; plot(zn,Izm,'b-'), xlabel(' z '),ylabel('Im (I(z))'), title (['Figure 4:...
Method solution, imaginary', ' ,N = ',num2str(N)]);grid on

end
toc

%Υπολογισμός του πίνακα των συντελεστών για τη Hallén Galerkin με συνδυασμό
quadl και σύνθετης μεθόδου του τραπεζίου

function Aln = coeff1(a,N,L,ko,met1)

P=waitbar(0,'Please wait while processing...');
M=600;

```

```
Aln=zeros(N+1,N+1);
```

```
for l=1:1:N+1  
    waitbar(l/(N+1));  
    for n=1:1:N+1  
  
        if (n>=l)  
            Aln(l,n) = quadl(@trapez,-(L/2),L/2,1.e-10,[],ko,a,n,l,L,M,met1);  
        elseif (n<l)  
            Aln(l,n)=Aln(n,l);  
        end  
  
    end  
end  
close(P);
```

%Υπολογισμός του πίνακα των συντελεστών για την Pocklington Galerkin (σύνθετη μέθοδο του τραπεζίου) και point-matching

```
function Aln = coeff2(a,N,L,ko,met1,met3)
```

```
M=400;  
P=waitbar(0,'Please wait while processing...');  
Aln=zeros(N+1,N+1);  
  
for l=1:1:N+1  
    waitbar(l/(N+1));  
    for n=1:1:N+1  
  
        if strcmp(met3,'point matching',4)  
            zl=((l-1)*(L/2))/(N+1);  
            Aln(l,n) = quadl(@pm_kernel,-(L/2),L/2,1.e-7,[],ko,zl,a,n,L,met1);  
        elseif (n>=l)  
            A(1) = ((0.5)*trapez(-L/2,ko,a,n,l,L,M,met1)+(0.5)*trapez(L/2,ko,a,n,l,L,M,met1));  
            for j=2:1:(M)  
                s=-(L/2)+(j-1)*(L/M);  
                A(j) = A(j-1)+ trapez(s,ko,a,n,l,L,M,met1) ;  
            end  
            Aln(l,n) = A(j)*(L/M);  
        elseif (n<l)  
            Aln(l,n)=Aln(n,l);  
        end  
  
    end  
end  
close(P);
```

%Συνάρτηση υπολογισμού του πίνακα των συντελεστών για τη Hallén point-matching

```
function Aln = pm_coeff(a,N,L,ko,met1)
```

```

P=waitbar(0,'Please wait while processing...');
Aln=zeros(N+1,N+1);

for l=1:1:(N+1)
    waitbar(l/((N+1)));
    for n=1:1:N
        zl=((L/2)*(l-1))/((N));
        h=L/2;
        Aln(l,n) = quadl(@pm_kernel,-L/2,L/2,1.e-10,[],ko,zl,a,n,L,met1);
    end
end
close(P);

function K = g_kernel(t,z,ko,a,n,l,L,met1)

if strcmp(met1,'Pocklington equation',4)
    T1 = fn(z,n,L);
    T2 = fn(t,l,L);
    R=(t-z).^2+a^2;
    x=(R).^(1/2);
    K = ((exp(i*ko*(x)))/(4*pi*(x).^5)).*(ko^2*(a^2)*(R)+(1-i*ko*(x)).*(2*(R)-...
    3*(a^2))).*T1.*T2;

elseif strcmp(met1,'Hallen equation',4)
    T1 = fn1(z,n,L);
    T2 = fn1(t,l,L);
    K = (exp(i*ko*sqrt((t-z).^2+a^2)))/(4*pi*sqrt((t-z).^2+a^2));
    K=K.*(T1.*T2);
end

function K = pm_kernel(z,ko,zl,a,n,L,met1)

T = fn(z,n,L);
R=(zl-z).^2+a^2;
x=sqrt(R);

if strcmp(met1,'Hallen equation',4)
    K = ((exp(i*ko*x))/(4*pi*x));
    K=K.*T;
end

if strcmp(met1,'Pocklington equation',4)
    K=((exp(i*ko*(x)))/(4*pi*(x).^5)).*((ko^2)*(a^2)*(R)+(1-i*ko*(x)).*(2*(R)-...
    3*(a^2)));
    K=K.*T;
end

```

```

function y=g2(N,L,ko,zo,met3)

y=zeros(N+1,1);
h=L/2;

for l=1:1:(N+1)
    if strcmp(met3,'point matching',4)
        zl=((L/2)*(l-1))/(N);
        y(l,1)=-cos(ko*zl);
    elseif strcmp(met3,'Galerkin',4)
        y(l,1)=(sin(ko*h-(l-1)*pi)*h)/(ko*h-(l-1)*pi)+(sin(ko*h+(l-1)*pi)*h)/(ko*h+...
        (l-1)*pi);
    end
end

function G=delta(V,zo,ko,N,L,met3)

G=zeros(N+1,1);
x=(i/(2*zo))*V;
h=L/2;

for l=1:1:(N+1)

    if strcmp(met3,'point matching',4)
        zl=((L/2)*(l-1))/(N);
        G(l,1)=x*sin(ko*abs(zl));
    else
        G(l,1)=(x*(1-cos(ko*h-(l-1)*pi))*h)/(ko*h-(l-1)*pi)+(x*(1-cos(ko*h+(l-1) ...
        *pi))*h)/(ko*h+(l-1)*pi);
    end

end

function Gf=frill(N,L,V,zo,b,a,ko,met3)

Gf=zeros(N+1,1);

for l=1:1:(N+1)
    if strcmp(met3,'point matching',4)
        zl=((L/2)*(l-1))/(N);
        Gf(l,1)=quadl(@fr,0,zl,[],[],V,zo,b,a,ko,zl);
    else
        Gf(l,1)=dblquad(@gdf,-(L/2),L/2,0,1,1.e-10,@quadl,V,ko,zo,b,a,l,L);
    end
end

function H=fr(t,V,zo,b,a,ko,zl)

```

```
H = (((i*V)/(2*zo*log(b/a)))*sin(ko*(zl-...
t))).*((exp(i*ko*sqrt(t.^2+a^2)))/(sqrt(t.^2+a^2))-...
(exp(i*ko*sqrt(t.^2+b^2)))/(sqrt(t.^2+b^2))));
```

```
function y=gdfz(z,u,V,ko,zo,b,a,l,L)
```

```
T = (((i*V)/(2*zo*log(b/a)))).*((exp(i*ko*sqrt((u*z).^2+a^2)))/(sqrt((u*z).^2+...
a^2))-(exp(i*ko*sqrt((u*z).^2+b^2)))/(sqrt((u*z).^2+b^2))));
K1=z.*sin(ko*z.*(1-u));
K2=fn1(z,l,L);
y = T.*K1.*K2;
```

```
function Aln=trapez(t,ko,a,n,l,L,M,met1)
```

```
if strcmp(met1,'Hallen equation',4)
A(1,:) = ((0.5)*g_kernel(t,-L/2,ko,a,n,l,L,met1)+(0.5)*g_kernel(t,L/2,ko,a,n,l,L,met1));
for i=2:1:(M)
s=-(L/2)+(i-1)*(L/M);
A(i,:) = A(i-1,:)+ g_kernel(t,s,ko,a,n,l,L,met1) ;
end
Aln = A(i,:)*(L/M);
```

```
elseif strcmp(met1,'Pocklington equation',4)
A(1) = ((0.5)*g_kernel(t,-L/2,ko,a,n,l,L,met1)+(0.5)*g_kernel(t,L/2,ko,a,n,l,L,met1));
for i=2:1:(M)
s=-(L/2)+(i-1)*(L/M);
A(i) = A(i-1)+ g_kernel(t,s,ko,a,n,l,L,met1) ;
end
Aln = A(i)*(L/M);
```

```
end
```

```
function H=p_delta(N,V,ko,zo)
```

```
for l=1:1:N+1
H(l,1) = i*V*ko/zo;
end
```

```
function H=p_frill(V,ko,N,zo,L,b,a)
```

```
for l=1:1:N+1
H(l,1) = quadl(@blfr,-L/2,L/2,1.e-10,[],V,ko,zo,b,a,l,L);
end
```

```
function y=blfr(t,V,ko,zo,b,a,l,L)
```

```
H = (((i*V*ko)/(2*zo*log(b/a)))).*((exp(i*ko*sqrt(t.^2+a^2)))/(sqrt(t.^2+a^2))-...
(exp(i*ko*sqrt(t.^2+b^2)))/(sqrt(t.^2+b^2))));
```

```
T = fn(t,l,L);
y = (H .*T);
```

```
function G=pm_frill(V,zo,b,a,ko,L,N)
```

```
G=zeros(N+1,1);
for l=1:1:N+1
    zl=((l-1)*(L/2))/(N+1);
    x1=sqrt(zl.^2+a^2);
    x2=sqrt(zl.^2+b^2);
    G(l,1) = (((i*V*ko)/(2*zo*log(b/a))).*((exp(i*ko*(x1)))/(x1)-(exp(i*ko*(x2)))/(x2)));
end
```

```
function T=fn(z,n,L)
```

```
T=cos((2*n-1)*pi*z/L);
```

```
function T=fn1(z,n,L)
```

```
T=cos(((n-1)*pi*z/(L/2)));
```

```
function Iz=current(z,N,L,In)
```

```
for k=1:1:N+1
    f(k,1)=cos((k-1)*pi*z/(L/2));
end
Iz=(In.)*f;
```

```
function Iz=p_current(z,N,L,In)
```

```
for k=1:1:N+1
    f(k,1)=cos((2*k-1)*pi*z/(L));
end
Iz=(In.)*f;
```

```
function Iz=pm_current(z,N,L,In)
```

```
for k=1:1:N
    f(k,1)=cos((2*k-1)*pi*z/(L));
end
Iz=(In.)*f;
```

```
function v=plane(V,zo,N,L,met1)
```

```
v=zeros(N+1,1);
h=(i*V/(zo));
if strcmp(met3,'point matching',4)
v(1:N+1,1)=h;
```



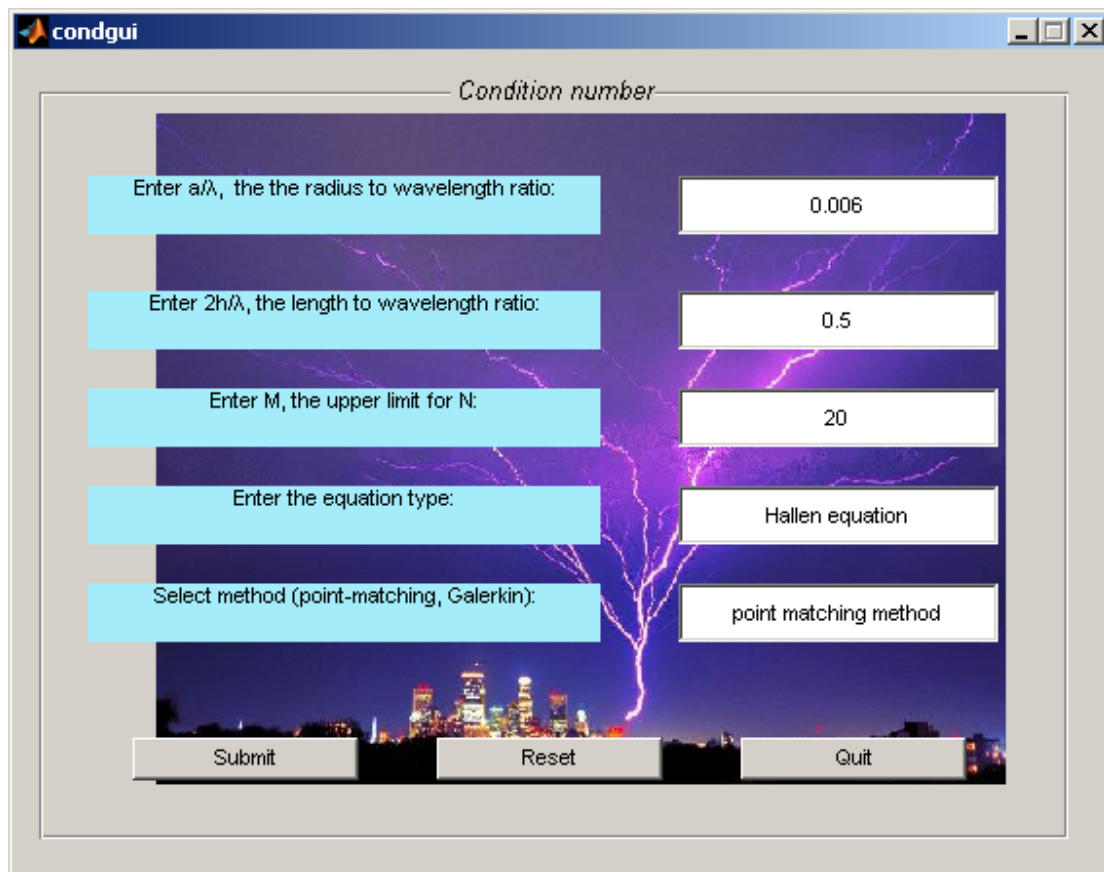
```

else
  for l=1:1:N+1
    if l==1
      v(l,1)=h*L;
    else
      v(l,1)=0;
    end
  end
end
end

```

%Δημιουργία κώδικα για την εύρεση του condition number του πίνακα A

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ο τρόπος εισαγωγής των δεδομένων στο πρόγραμμα και στη συνέχεια ακολουθεί ο κώδικας για τη γραφική αναπαράσταση του condition number:



```
function K =con_num(a,L,M,met1,met3)
```

```

w=1;
V=1;
ko=2*pi/w;
zo=376.73;

```

```

for t=1:2
    L(t)=t.*L;
    a(t)=t.*a;
    P=waitbar(0,'Please wait while processing...');

    if strcmp(met1,'Hallen equation',4)
for N=1:M+1
waitbar(N/(M+1));
tic
A=coeff1(a(t),N,L(t),ko,prec,met1);
u=cond(A,1);
K(t,N)=log10(u);
end

        elseif strcmp(met1,'Pocklington equation',4)
for N=1:M+1
waitbar(N/(M+1));
tic
A=coeff2(a(t),N,L(t),ko, met3);
u=cond(A,1);
K(t,N)=log10(u);
end

    end
close(P);

end

figure; plot(2:N+1,K(1,:),2:N+1,K(2,:))
xlabel('N')
ylabel('condition number');
title('condition number');

```


ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β - Απειρισμός του ακριβούς πυρήνα-Εναλλαγή διαφορικού τελεστή και ολοκλήρωσης

Για μικρά z ισχύει:

$$K_{\text{ex}}(z) \square \beta_1 \ln |z| \tag{B.1}$$

όπου β_1 μια σταθερά. Για να δείξουμε την (B.1), προσθέτουμε και αφαιρούμε την ποσότητα:

$$\xi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + 4a^2 \sin^2(\phi'/2)}} d\phi' \tag{B.2}$$

στο δεξί μέλος της (8). Το $\xi(z)$ μπορεί να υπολογισθεί, ακριβώς, με τη βοήθεια του συμπληρωμένου ελλειπτικού ολοκληρώματος (complete elliptic integral) K [25] και από τις ιδιότητες του K [24] βρίσκουμε ότι, για μικρά z , $\xi(z) \square \beta_1 \ln |z|$ (β_1 σταθερά). Η ζητούμενη σχέση (B.1) έπεται από το ότι, για μικρά z , το υπόλοιπο $K_{\text{ex}}(z) - \xi(z)$ παραμένει φραγμένο.

Λόγω της (B.1), η δεύτερη παράγωγος $\partial^2 K_{\text{ex}}(z)/\partial z^2$ συμπεριφέρεται ως $1/z^2$ για μικρά z . Άρα, η δεύτερη αυτή παράγωγος δεν είναι ολοκληρώσιμη και επομένως δεν επιτρέπεται η εναλλαγή του διαφορικού τελεστή T και του ολοκληρώματος στην εξίσωση του Rocklinton. Σημειώνουμε ότι το επιχείρημα που αναπτύξαμε δεν εφαρμόζεται στην περίπτωση του προσεγγιστικού πυρήνα που παραμένει φραγμένος για μικρά z .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ - Πληρότητα των $f_n(z)$ για άρτιες συναρτήσεις

Στο πρόβλημα Sturm-Liouville:

$$\Phi''(z) - \lambda\Phi(z) = 0, \quad -h < z < h \quad (\Gamma.1)$$

με συνθήκη:

$$\Phi(-h) = \Phi(h) = 0 \quad (\Gamma.2)$$

η διαφορική εξίσωση έχει λύση:

$$\Phi(z) = A \cos(\sqrt{-\lambda}z) + B \sin(\sqrt{-\lambda}z) \quad (\Gamma.3)$$

Από την (Γ.2) παίρνουμε $B \sin(\sqrt{-\lambda}h) = 0$ οπότε $B = 0$ (Περίπτωση 1) ή $\sqrt{-\lambda} = \frac{m\pi}{h}$, $m = \text{ακέραιος}$ (Περίπτωση 2).

Περίπτωση 1: Εάν $B = 0$ τότε $\Phi(z) = A \cos(\sqrt{-\lambda}z)$ και η (Γ.2) δίνει $\sqrt{-\lambda}h = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, $n = \text{ακέραιος}$. Επομένως οι συναρτήσεις:

$$f_n(z) = \cos\left[\frac{(2n-1)\pi z}{2h}\right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.4)$$

είναι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_n^{(1)} = -\left[\frac{(2n-1)\pi}{2h}\right]^2$, $n = 1, 2, \dots$

Περίπτωση 2: Εάν $\sqrt{-\lambda} = \frac{m\pi}{h}$ τότε $\Phi(z) = A \cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right) + B \sin\left(\frac{m\pi z}{h}\right)$ και η (Γ.2) δίνει $A = 0$. Επομένως οι συναρτήσεις:

$$g_m(z) = \sin\left[\frac{m\pi z}{h}\right], \quad m = 1, 2, \dots \quad (\Gamma.5)$$

είναι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $\lambda_m^{(1)} = -\left[\frac{m\pi}{h}\right]^2$, $m = 1, 2, \dots$.

(Για όλα τα m, n ισχύει $\lambda_n^{(1)} \neq \lambda_m^{(2)}$)

Έχουμε λοιπόν βρει όλες τις ιδιοσυναρτήσεις του προβλήματος. Σύμφωνα με τη θεωρία Sturm-Liouville – [] κάθε συνάρτηση $F(z)$ (με $F(z)$ και $F'(z)$ τμηματικά συνεχείς) μπορεί να γραφτεί ως:

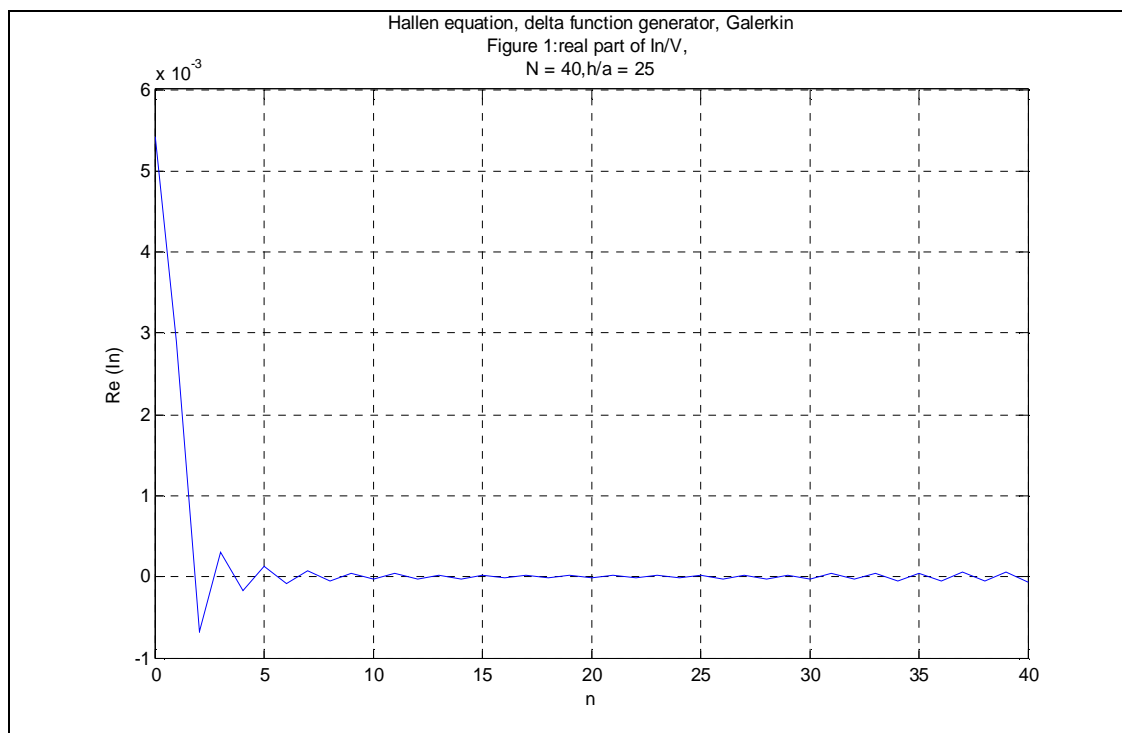
$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(z) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m g_m(z) \quad (\Gamma.6)$$

$$\text{όπου } A_n = \int_{-h}^h F(z) f_n(z) dz, \quad B_m = \int_{-h}^h F(z) g_m(z) dz, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

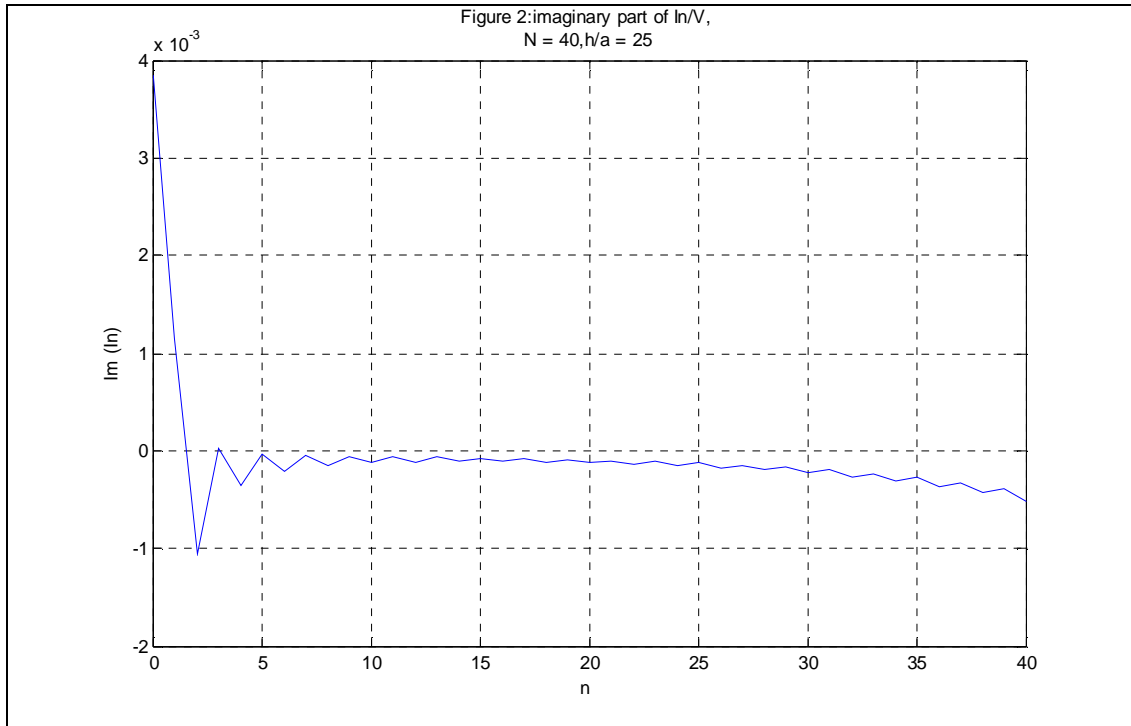
Εάν η $F(z)$ είναι άρτια, τότε $B_m = 0$ οπότε $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(z)$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ – Γραφικές Παραστάσεις- Σχόλια

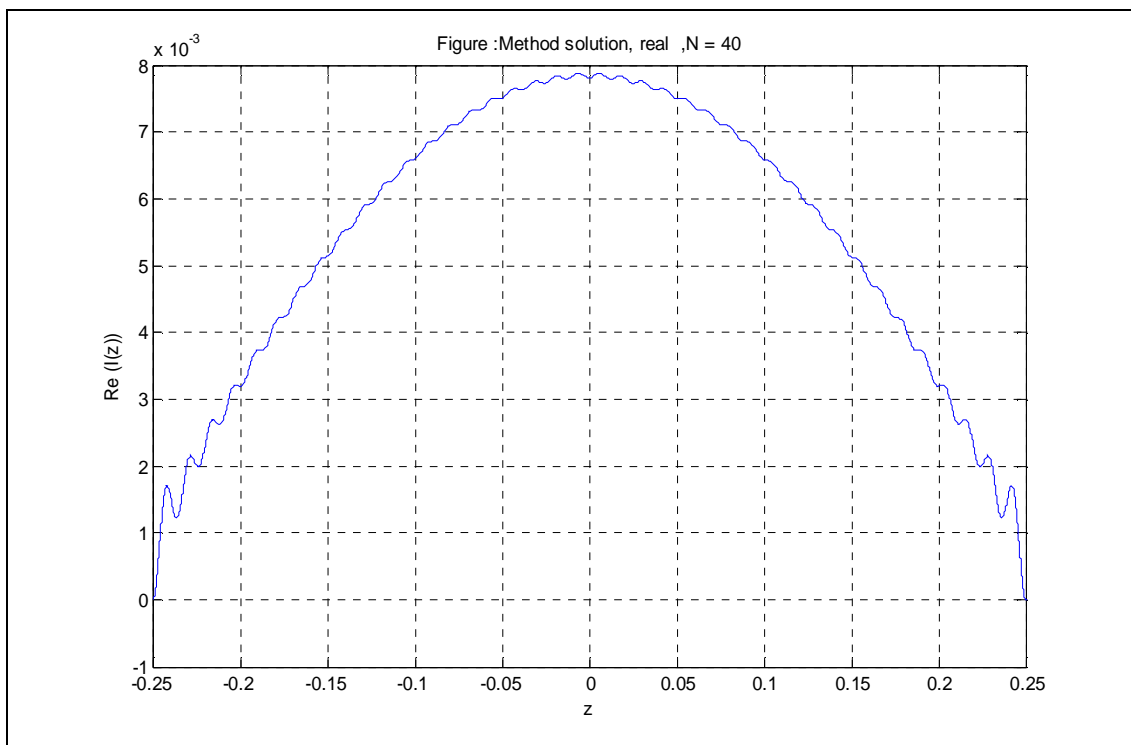
Με τη χρήση του κώδικα του MATLAB, που είδαμε στο παράρτημα Α, μπορούμε να εξάγουμε με ακρίβεια τις τιμές του ρεύματος κατά μήκος της γραμμικής κεραίας, η οποία τροφοδοτείται είτε από delta function generator είτε από magnetic frill generator και να πάρουμε τις γραφικές παραστάσεις του ρεύματος. Παρακάτω θα παραθέσουμε ορισμένες γραφικές παραστάσεις των συντελεστών I_n και της ρευματικής κατανομής $I(z)$, χρησιμοποιώντας τον προσεγγιστικό πυρήνα, όπως επίσης θα δείξουμε ξεχωριστά το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των παραπάνω ποσοτήτων, κάνοντας ορισμένες παρατηρήσεις και επισημαίνοντας κάποια προβλήματα που παρουσιάζονται. Παίρνοντας ως δεδομένα $N = 40$, $a/\lambda = 0.01$, $h/\lambda = 0.25$, $b/a = 2.3$ και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του Hallén με τη μέθοδο Galerkin, έχουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις, όπου τα σχήματα 1 αναφέρονται στη μοντελοποίηση delta function, τα σχήματα 2 στη μοντελοποίηση magnetic frill, με (α) συμβολίζουμε τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Re}\{I_n\}$, με (β) τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Im}\{I_n\}$, με (γ) το πραγματικό μέρος της ρευματικής κατανομής και τέλος με (δ) το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης ρευματικής κατανομής:



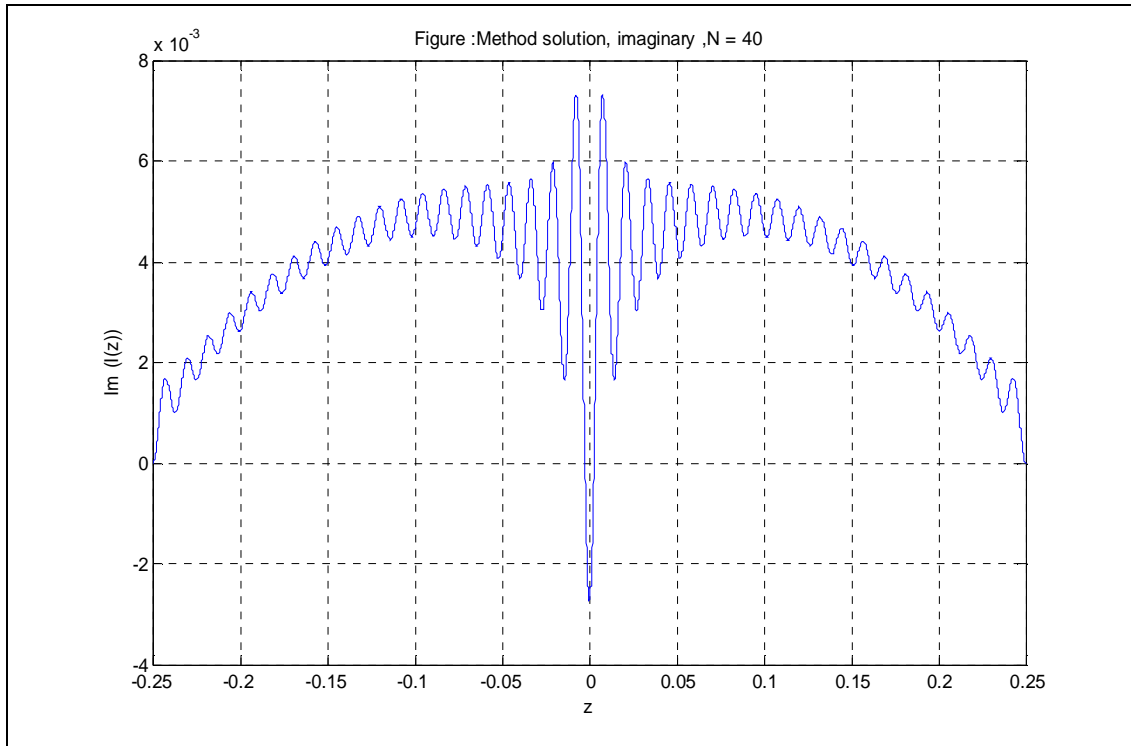
Σχ. 1(α)



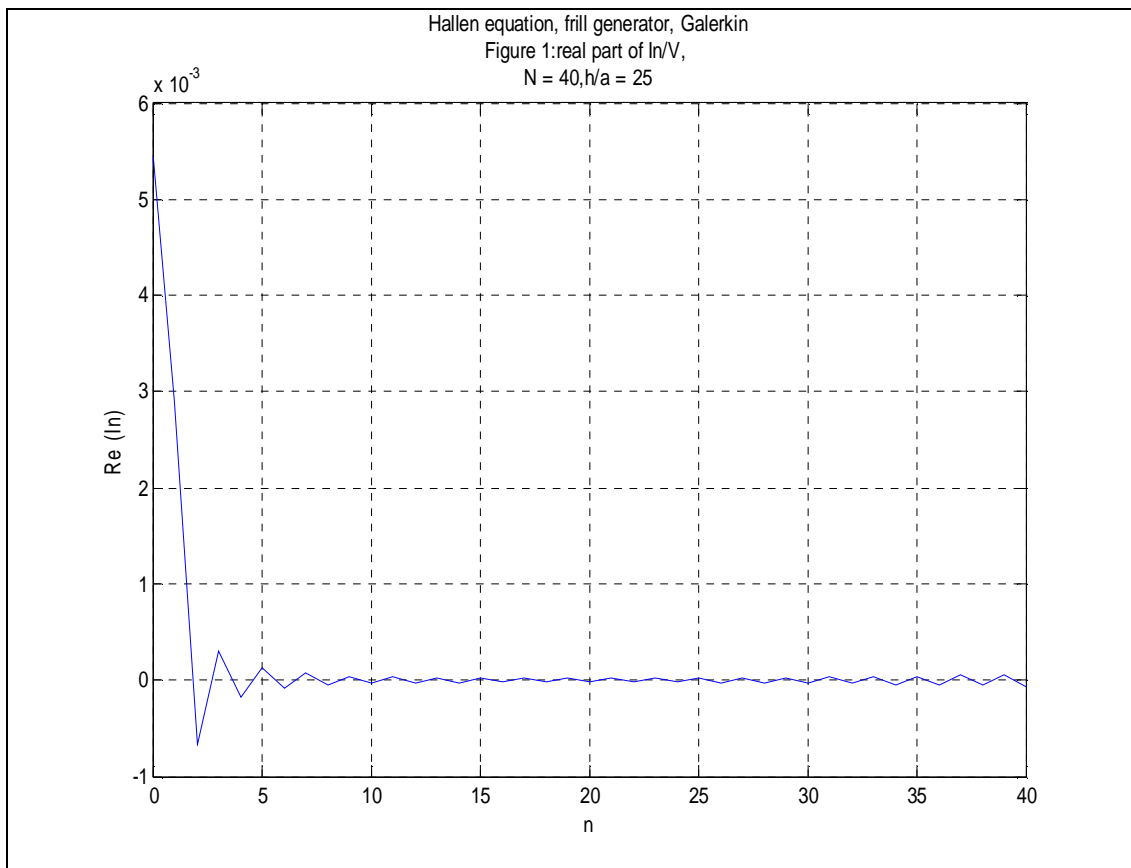
$\Sigma \chi. 1(\beta)$



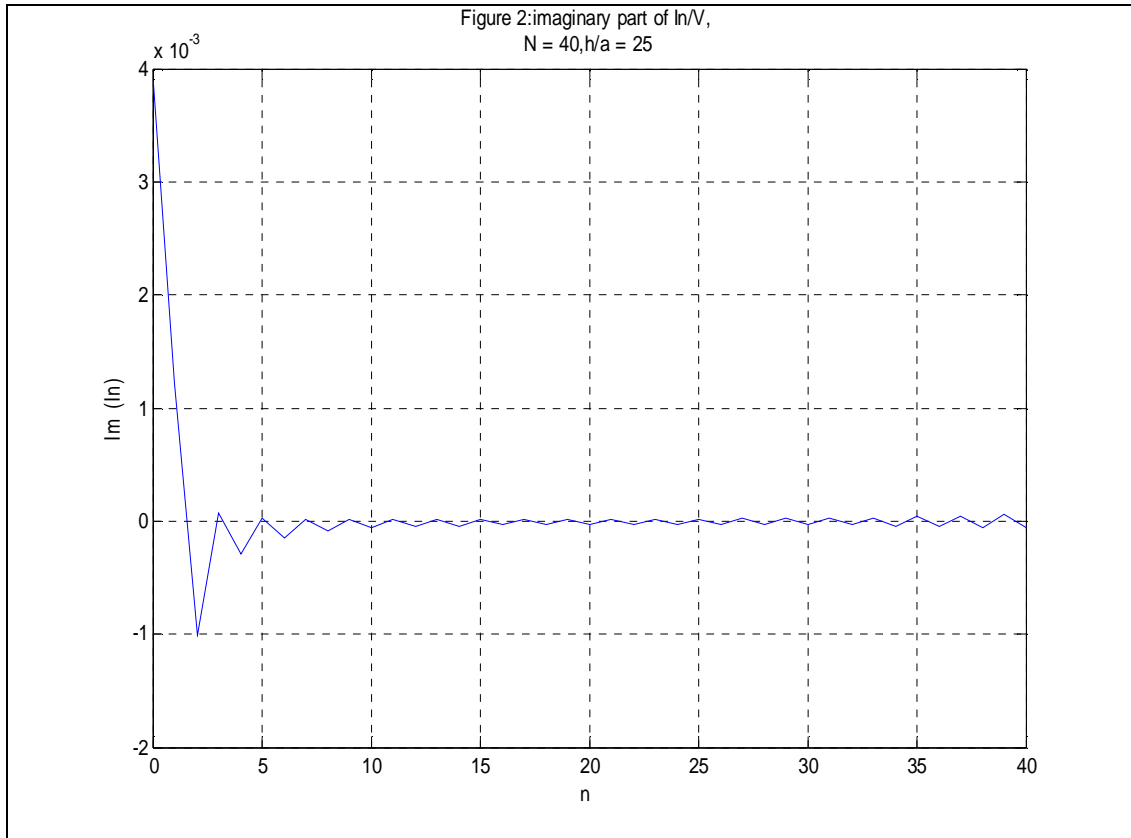
$\Sigma \chi. 1(\gamma)$



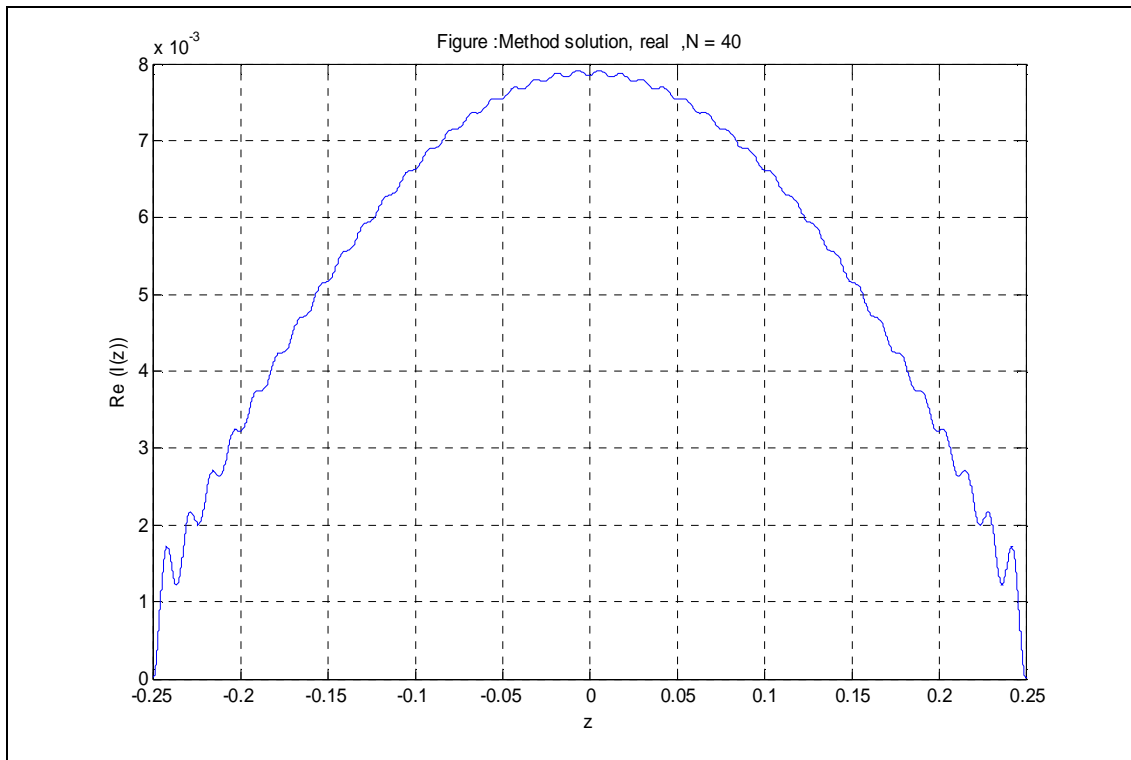
Σχ. 1(δ)



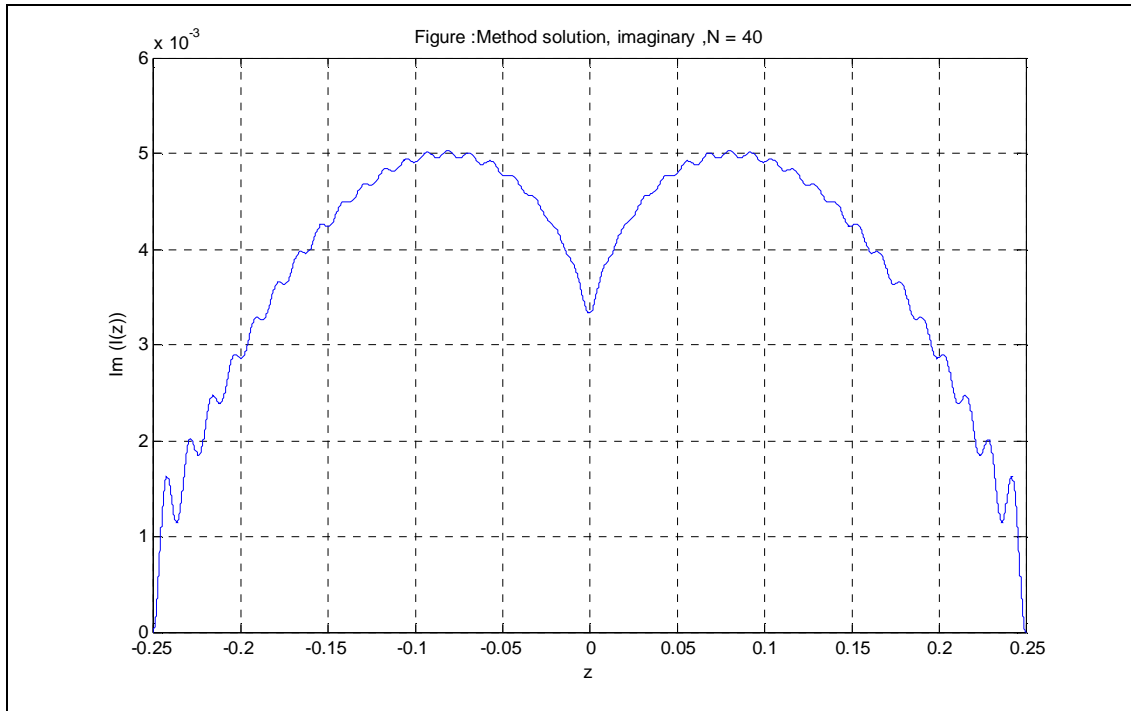
Σχ. 2(α)



$\Sigma\chi. 2(\alpha)$

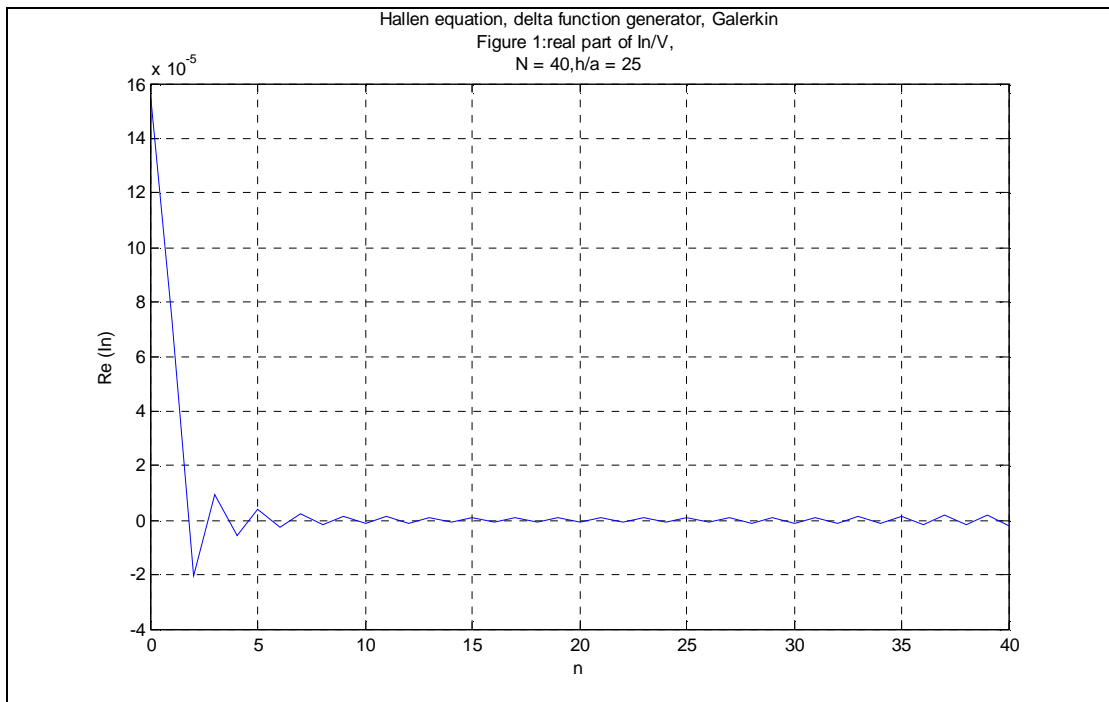


$\Sigma\chi. 2(\gamma)$

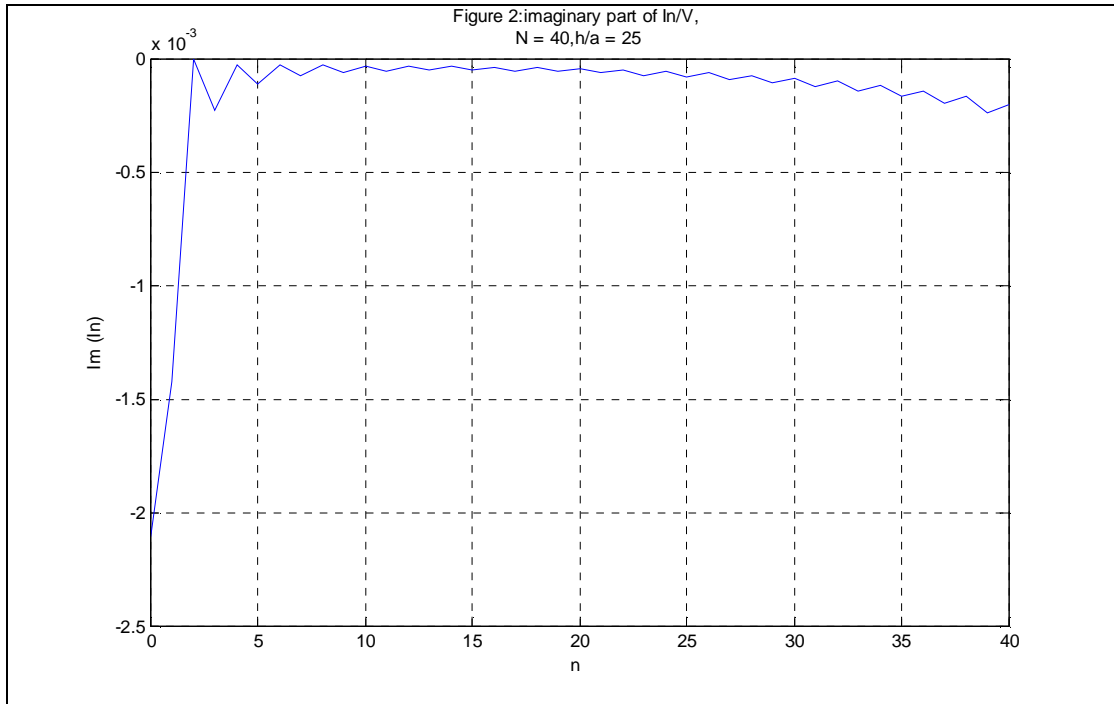


Σχ. 2(δ)

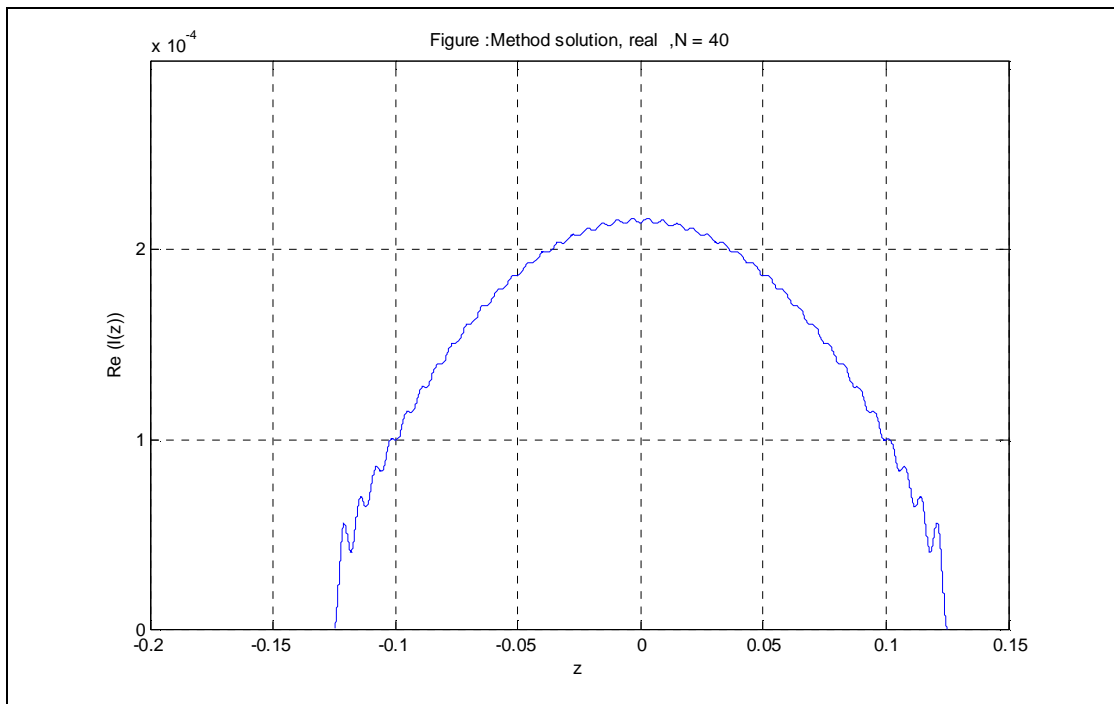
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τις γραφικές παραστάσεις για δεδομένα $N = 40, \alpha/\lambda = 0.005, h/\lambda = 0.125, b/a = 2.3$. Τα σχήματα 3 αφορούν το delta function generator ενώ τα σχήματα 4, το frill generator. Με (α) συμβολίζουμε τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Re}\{I_n\}$, με (β) τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Im}\{I_n\}$, με (γ) το πραγματικό μέρος της ρευματικής κατανομής και τέλος με (δ) το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης ρευματικής κατανομής:



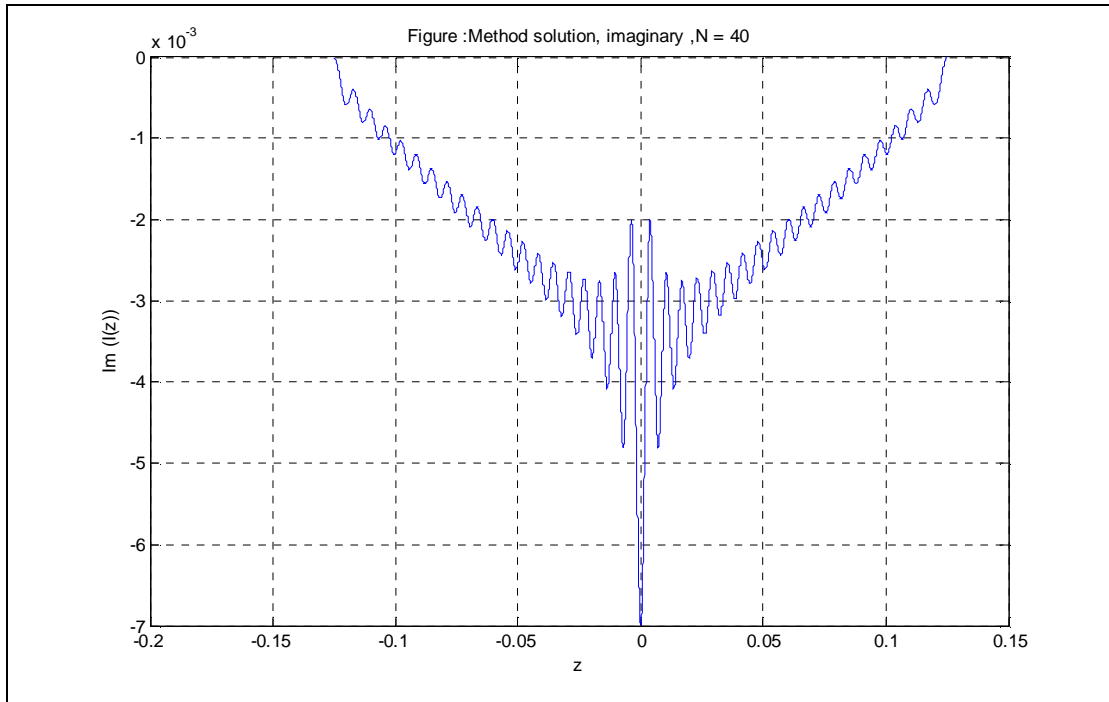
Σχ. 3(α)



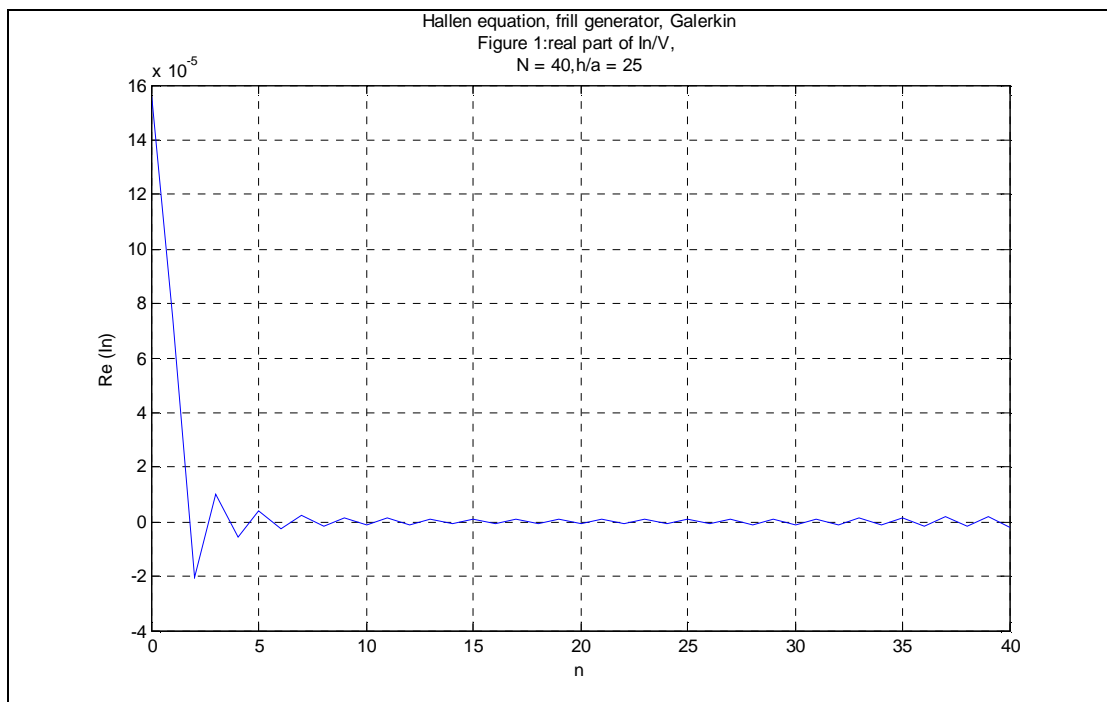
$\Sigma\chi. 3(\beta)$



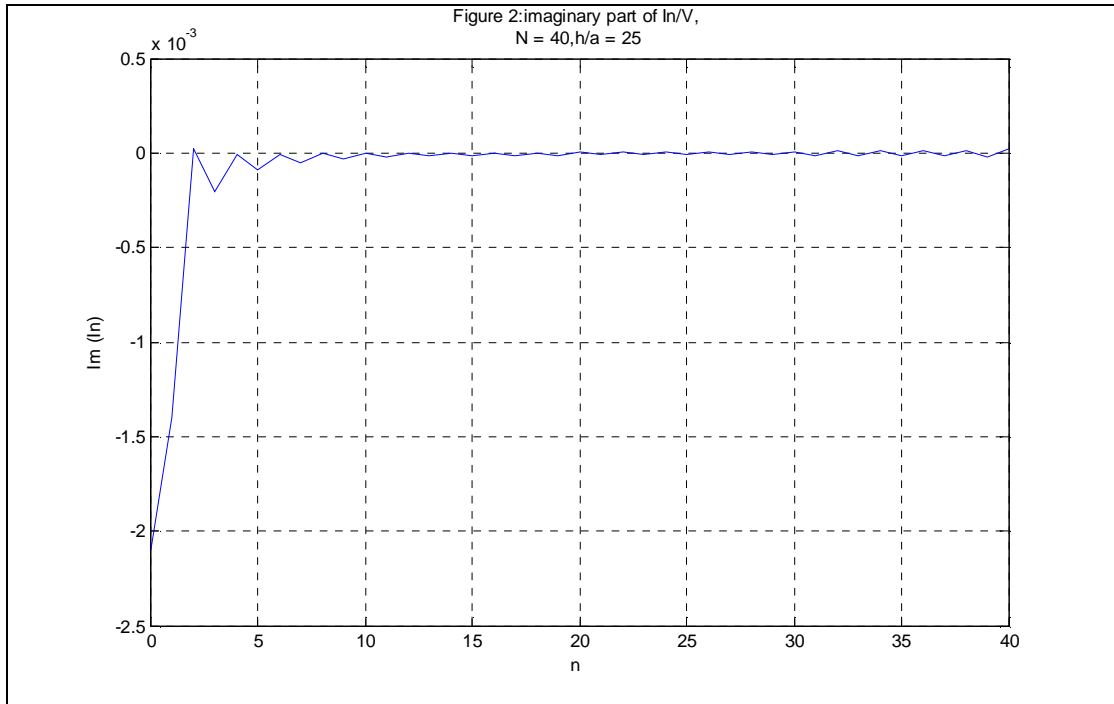
$\Sigma\chi. 3(\gamma)$



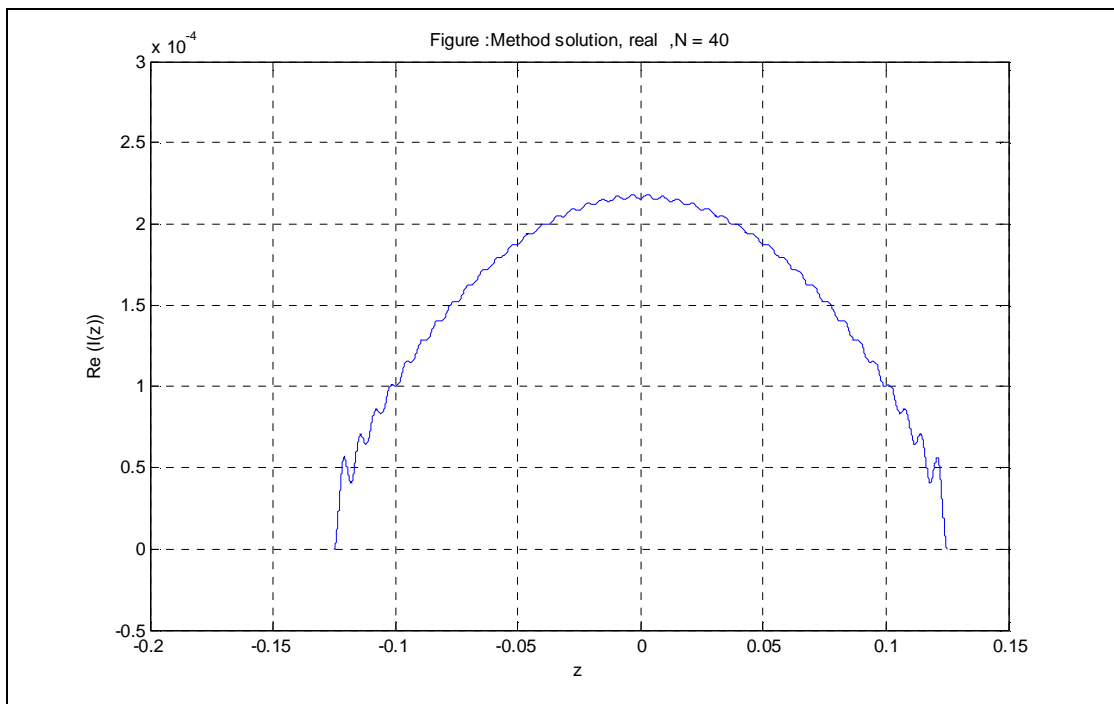
$\Sigma\chi. 3(\delta)$



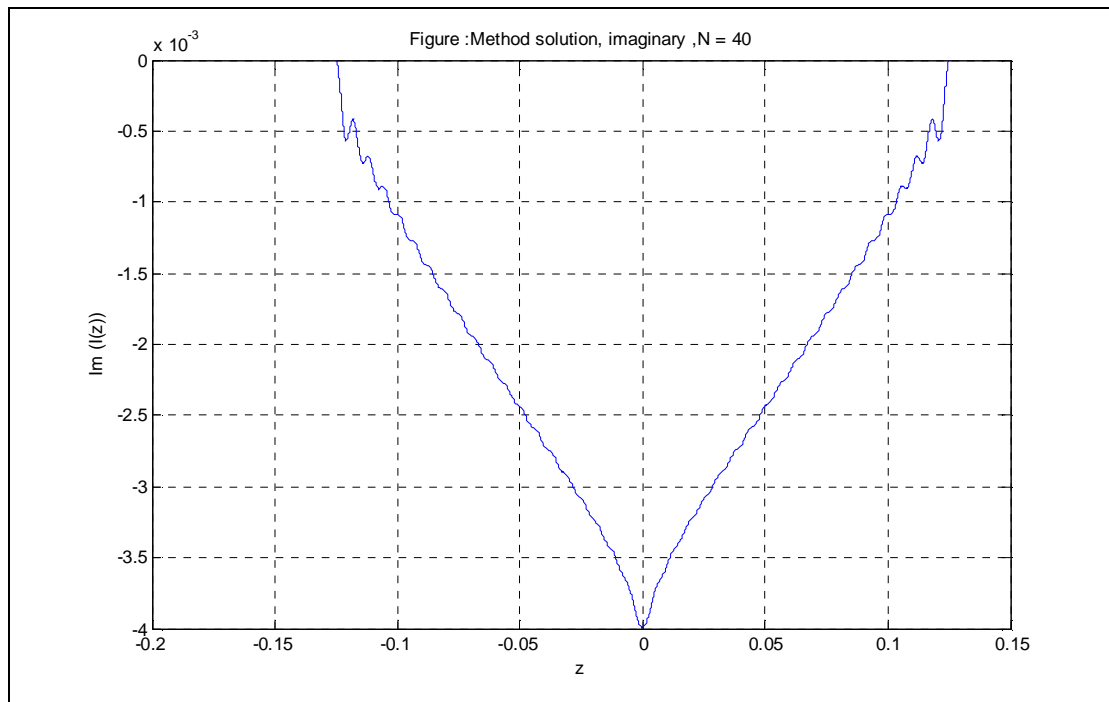
$\Sigma\chi. 4(\alpha)$



$\Sigma\chi. 4(\beta)$

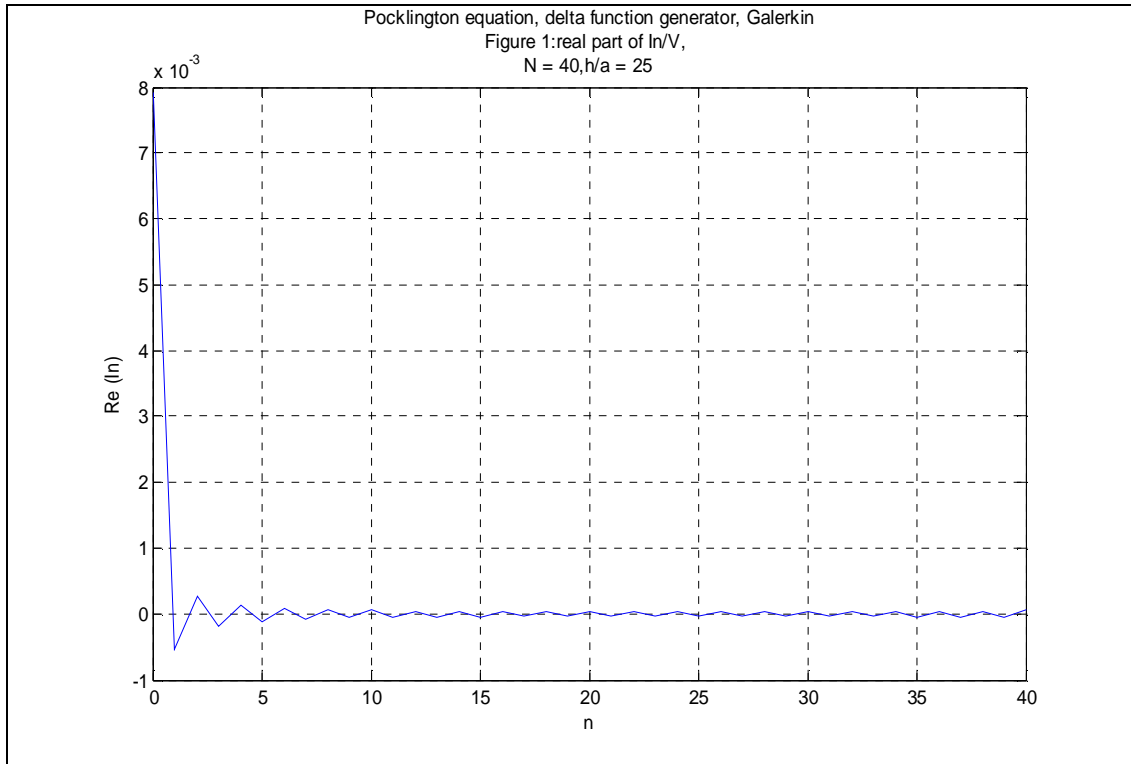


$\Sigma\chi. 4(\gamma)$

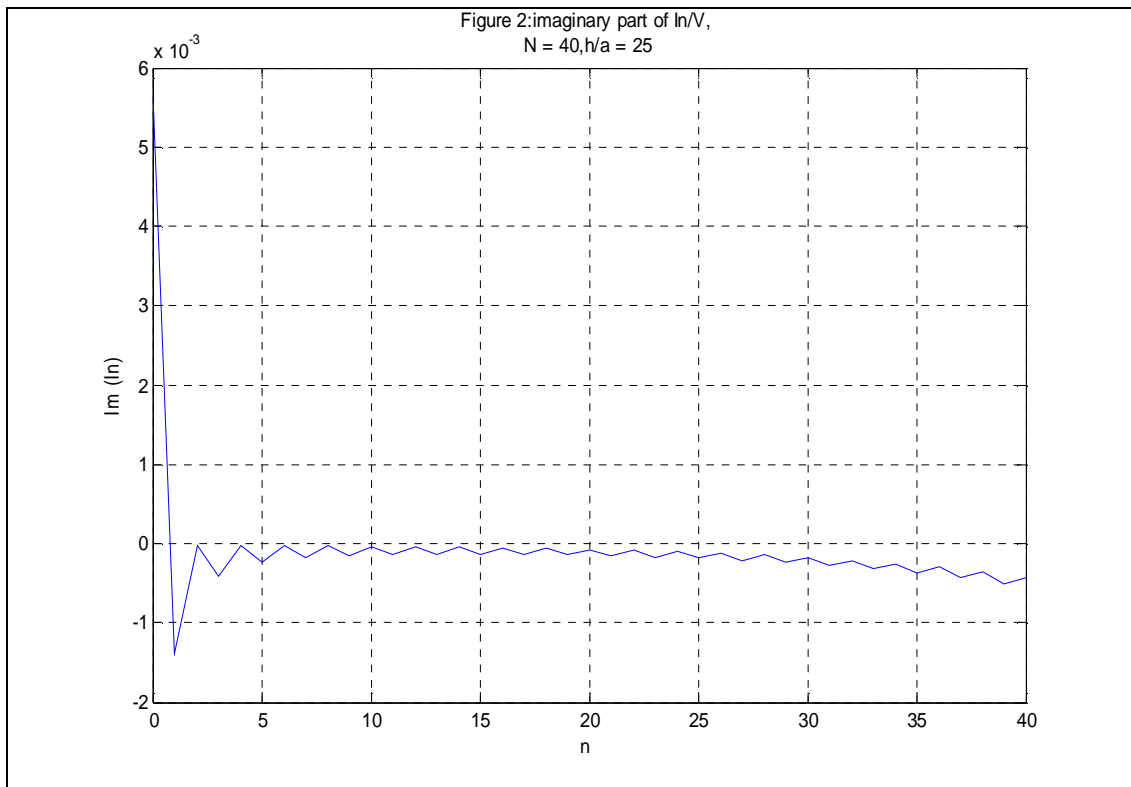


Σχ. 4(δ)

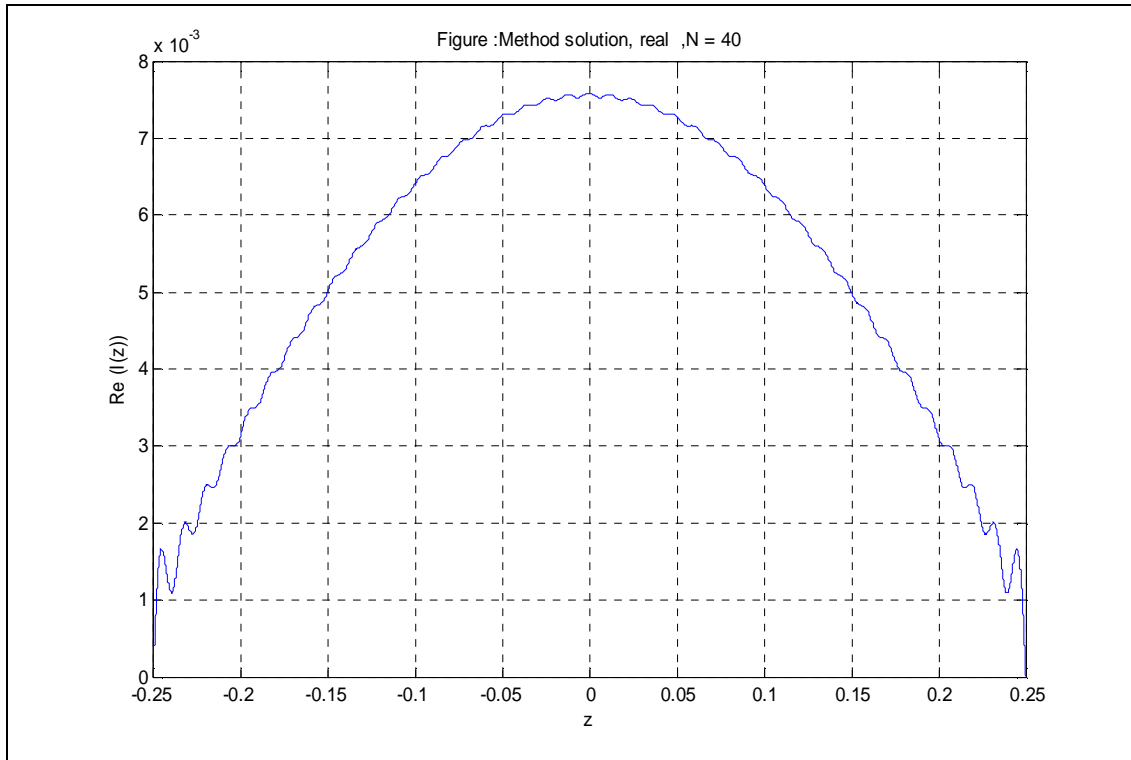
Τα αποτελέσματα των γραφικών παραστάσεων 1-4 βεβαιώνουν αυτά που έχουμε αναφέρει στο 3^ο Κεφάλαιο. Οι ταλαντώσεις στα άκρα της κεραίας ή στο σημείο τροφοδοσίας (για το φανταστικό μέρος της ρευματικής κατανομής για delta-function generator) είναι αναμενόμενες, λόγω του γεγονότος ότι η εξίσωση του Hallén δεν έχει λύση για τον προσεγγιστικό πυρήνα. Προβλήματα κατά την εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου παρουσιάζονται συνήθως όταν ο αριθμός των συναρτήσεων βάσης N ξεπερνά το χαρακτηριστικό λόγο $0.6h/a$ της κεραίας. Τα προβλήματα αυτά εμφανίζονται αρχικά μόνο στο φανταστικό μέρος της ρευματικής κατανομής, ενώ αργούν να εμφανισθούν στο πραγματικό μέρος (πολύ μεγαλύτερο N απ' ό τι στο φανταστικό). Εκφράζονται ουσιαστικά ως μεταφορά των ταλαντώσεων από το άκρο ή το μέσο της κεραίας προς το υπόλοιπο τμήμα της. Οφείλονται σε αδυναμίες της αριθμητικής μεθόδου, η οποία στην ουσία δεν μπορεί να παρακάμψει τη μη επιλυσιμότητα της προσεγγιστικής ολοκληρωτικής εξίσωσης του Hallén. Η μαθηματική εξήγηση αυτών των προβλημάτων είναι ότι για μεγάλο N , το condition number του πίνακα A αυξάνεται σχεδόν γραμμικά, δημιουργώντας τα παραπάνω αριθμητικά προβλήματα. Από τα σχήματα 1(β) και 3(β) παρατηρούμε ότι το $\text{Im}\{I_n\}$ αρχίζει να «πέφτει» για την ίδια τιμή και για τις δύο κατανομές, καθώς έχουν κοινή την παράμετρο h/a . Στα επόμενα σχήματα θα δούμε τα αποτελέσματα με τα ίδια δεδομένα, δηλαδή $N=40$, $a/\lambda=0.01$, $h/\lambda=0.25$, $b/a=2.3$, αλλά με χρήση της εξίσωσης του Pocklington. Τα σχήματα 5 αφορούν το delta function generator ενώ τα σχήματα 6, το frill generator. Με (α) συμβολίζουμε τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Re}\{I_n\}$, με (β) τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Im}\{I_n\}$, με (γ) το πραγματικό μέρος της ρευματικής κατανομής και τέλος με (δ) το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης ρευματικής κατανομής:



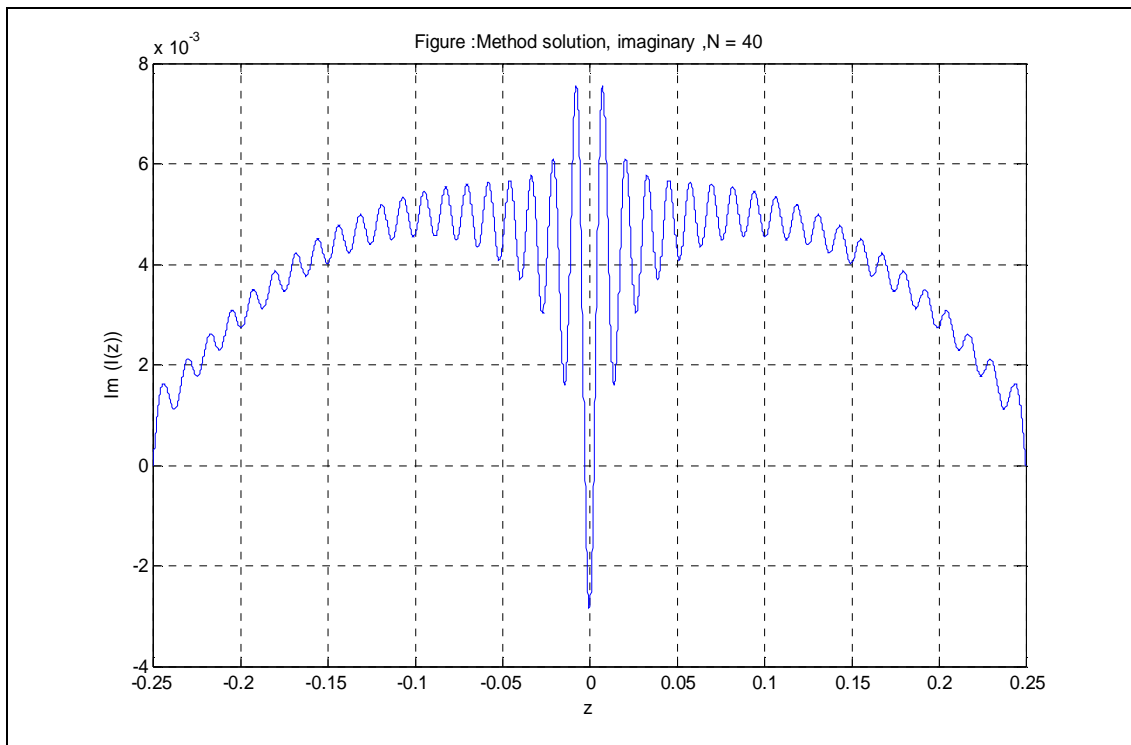
$\Sigma\chi. 5(\alpha)$



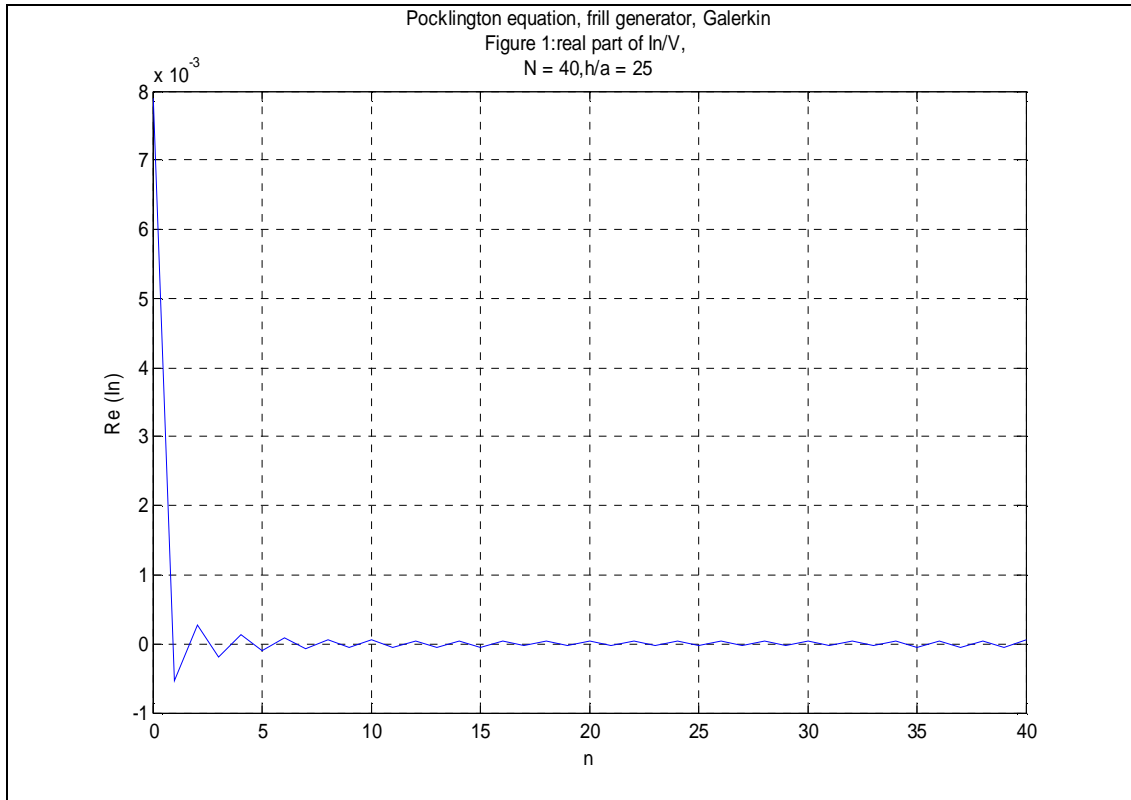
$\Sigma\chi. 5(\beta)$



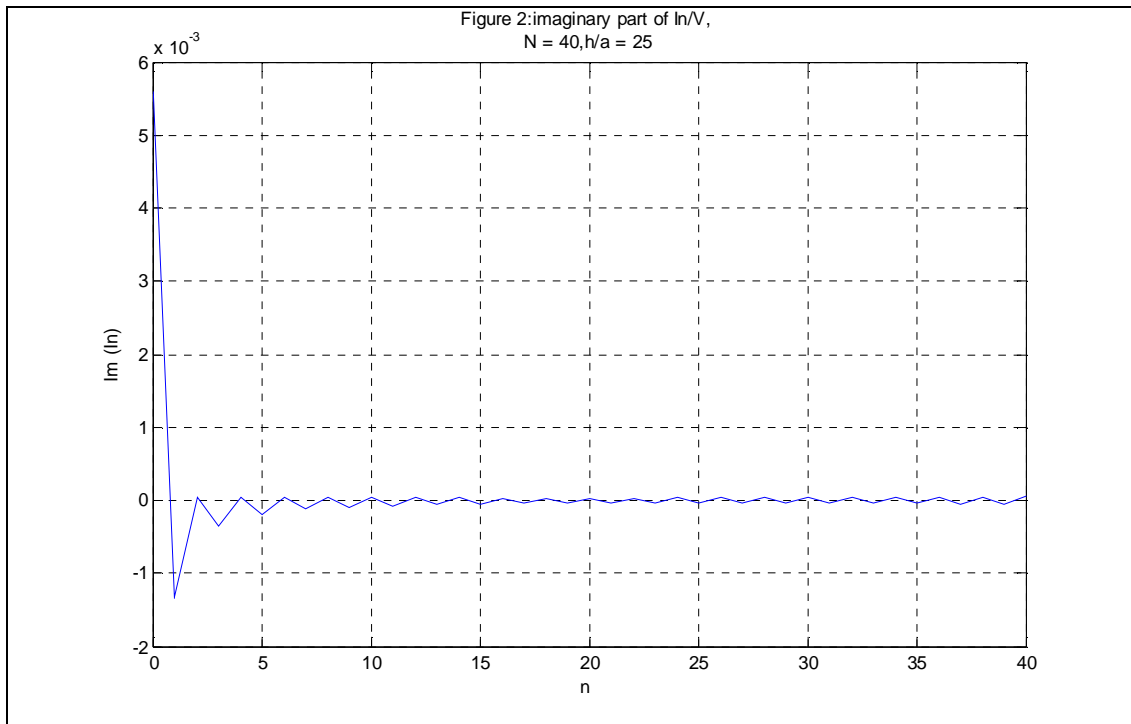
$\Sigma\chi. 5(\gamma)$



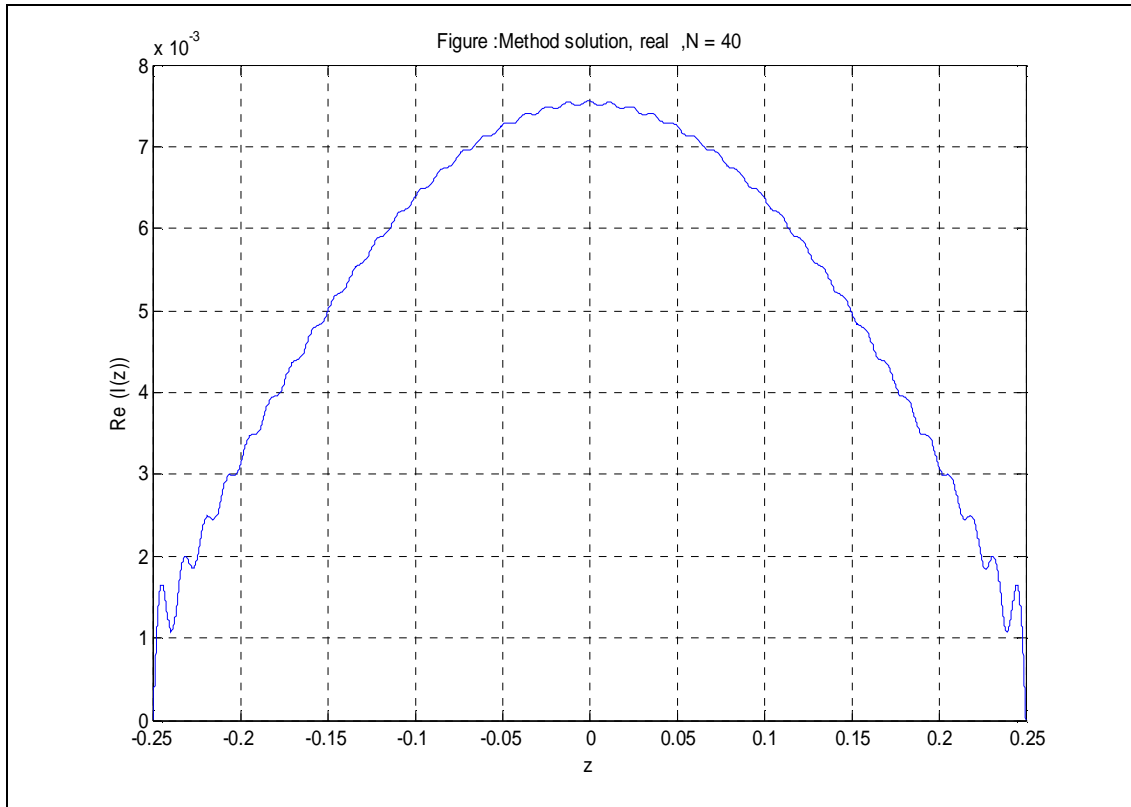
$\Sigma\chi. 5(\delta)$



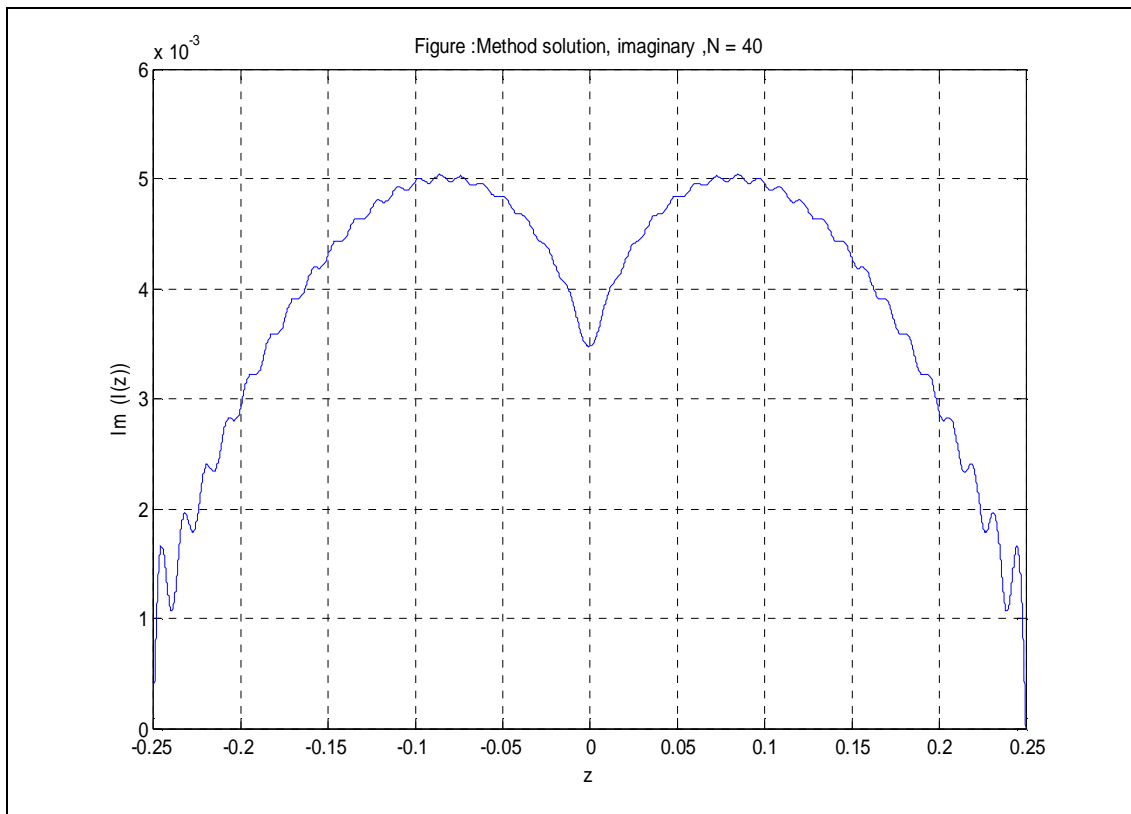
$\Sigma\chi. 6(\alpha)$



$\Sigma\chi. 6(\beta)$



Σχ. 6(γ)



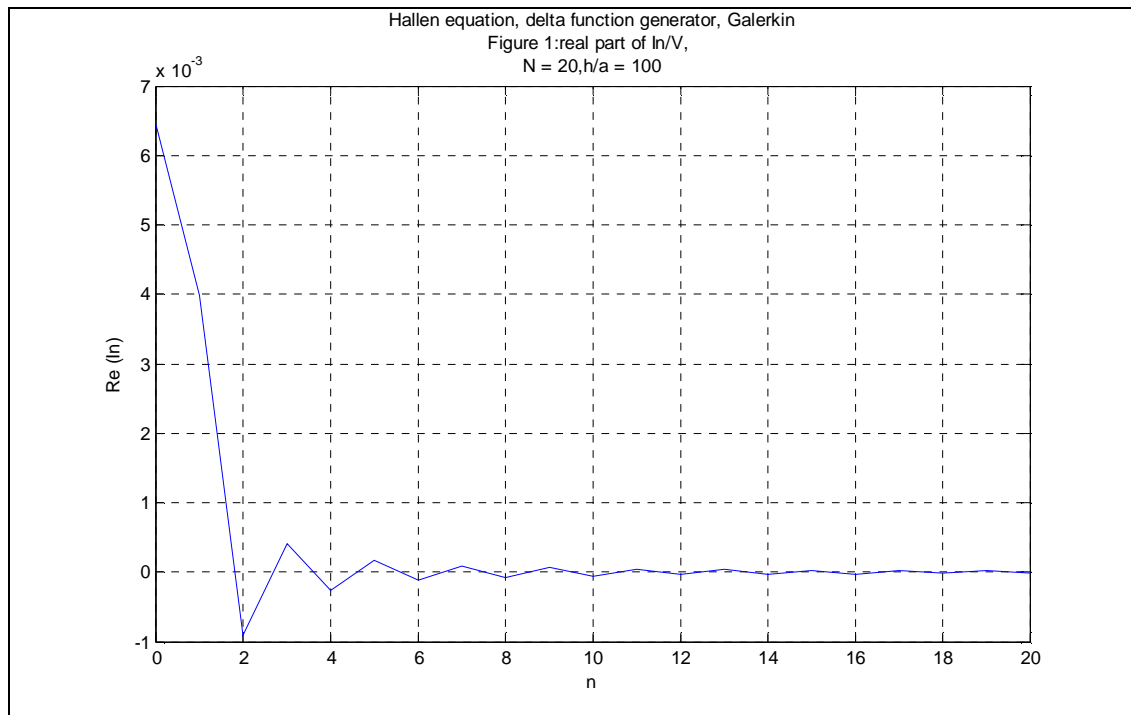
Σχ. 6(δ)

Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα για την εξίσωση του Rocklington ελάχιστα διαφέρουν από αυτά για την εξίσωση του Hallén, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο. Να τονίσουμε ότι αν ήταν λίγο καλύτερη η ακρίβεια του υπολογισμού των διπλών

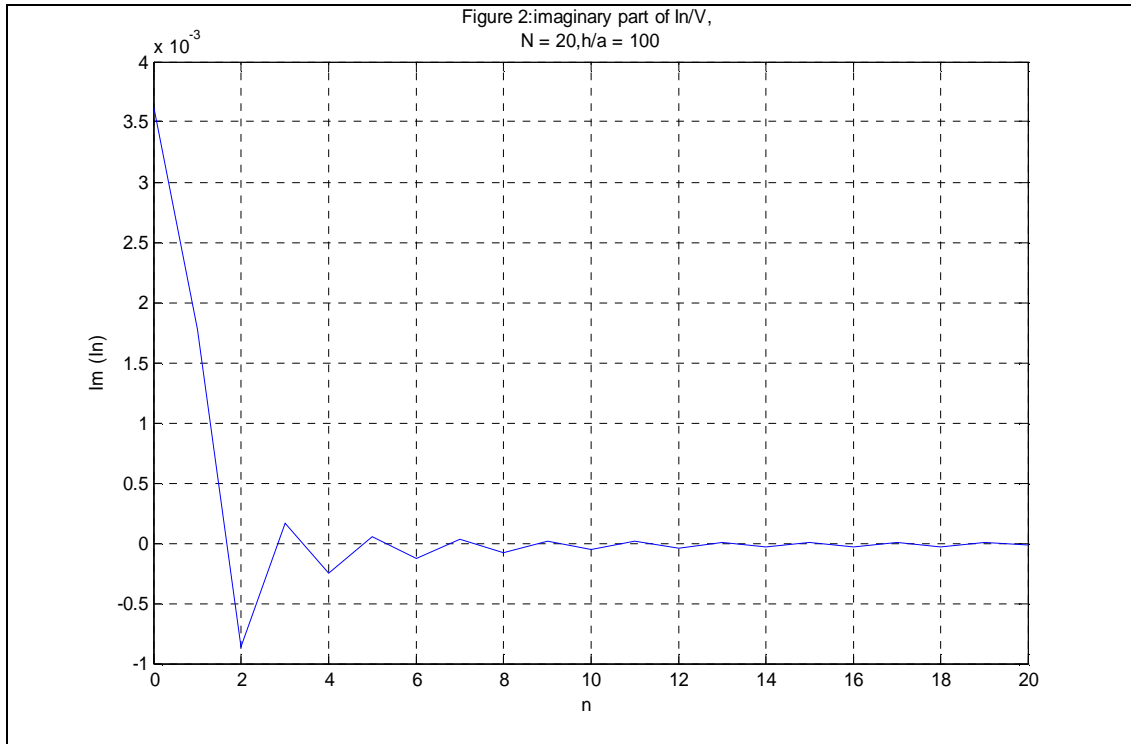
ολοκληρωμάτων σε λογικό υπολογιστικό χρόνο, τα αποτελέσματα θα ταυτίζονταν. Αυτό συμβαίνει εξαιτίας του προγράμματος του MATLAB, του οποίου οι αλγόριθμοι για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων δεν είναι πολύ ελαστικοί και αξιόπιστοι, ενώ συγχρόνως απαιτούν μεγάλους υπολογιστικούς χρόνους, Γι' αυτό και πολλές φορές αναγκαστήκαμε να αντικαταστήσουμε τους αλγορίθμους αυτούς με δικούς μας πιο ευέλικτους, όπως η σύνθετη μέθοδος τραπεζίου και η σύνθετη μέθοδος του Simpson .

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά είναι ανεξάρτητα της μεθόδου ολοκλήρωσης και μεθόδου επίλυσης συστήματος. Δοκιμάσαμε τουλάχιστον τρεις αλγορίθμους ολοκλήρωσης, δηλαδή τη σύνθετη μέθοδο τραπεζίου, τη σύνθετη μέθοδο του Simpson, τον αλγόριθμο της MATLAB, συνδυασμό τους καθώς και ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητής, αλλά και τρεις μεθόδους επίλυσης συστημάτων, την άμεση αριθμητική λύση που παρέχει το MATLAB με χρήση του αντιστρόφου πίνακα και τη μέθοδο απαλοιφής Gauss. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν δε διέφεραν μεταξύ τους.

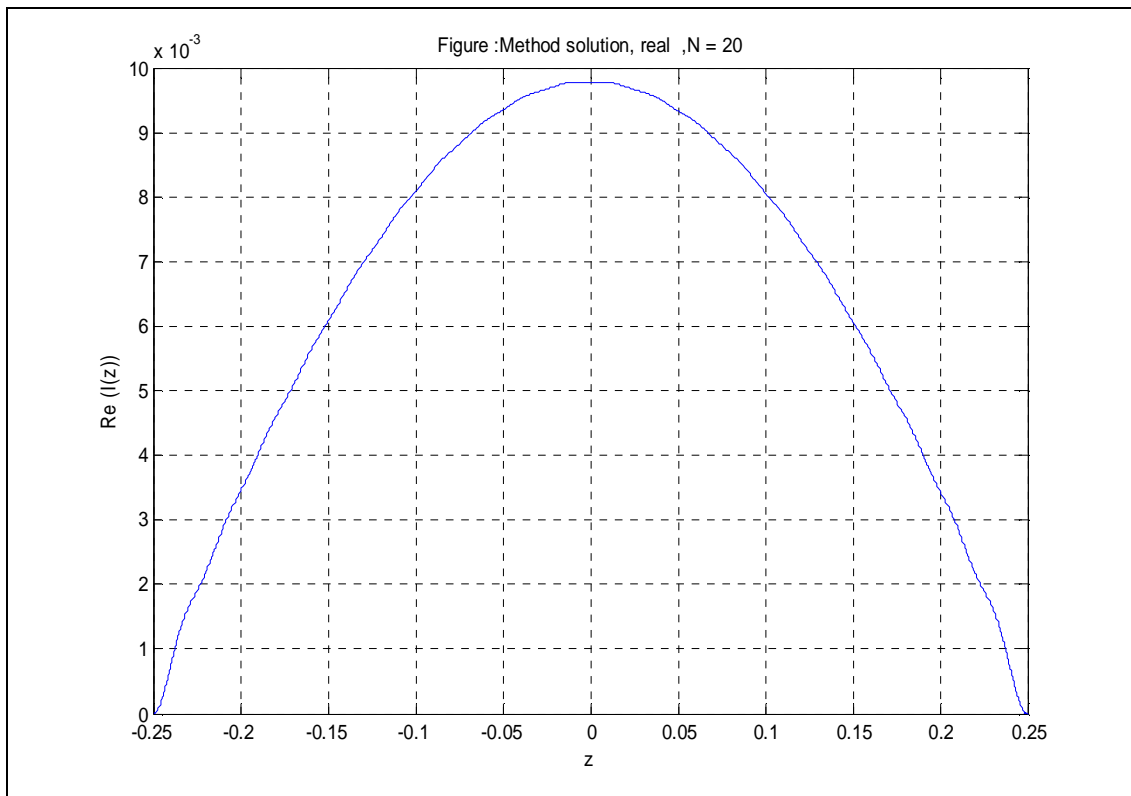
Στη συνέχεια θα παραθέσουμε κάποιες γραφικές παραστάσεις από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin στην εξίσωση του Hallén με $N \ll 0.6h/a$. Από τα διαγράμματα αυτά διαπιστώνουμε ότι τόσο το φανταστικό όσο και το πραγματικό μέρος των κατανομών του ρεύματος είναι ομαλά σε αυτή την περίπτωση. Τα δεδομένα είναι $N = 20, a/\lambda = 0.0025, h/\lambda = 0.25, b/a = 2.3$. Τα σχήματα 7 αφορούν το delta function generator ενώ τα σχήματα 8, το frill generator. Με (α) συμβολίζουμε τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Re}\{I_n\}$, με (β) τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Im}\{I_n\}$, με (γ) το πραγματικό μέρος της ρευματικής κατανομής και τέλος με (δ) το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης ρευματικής κατανομής:



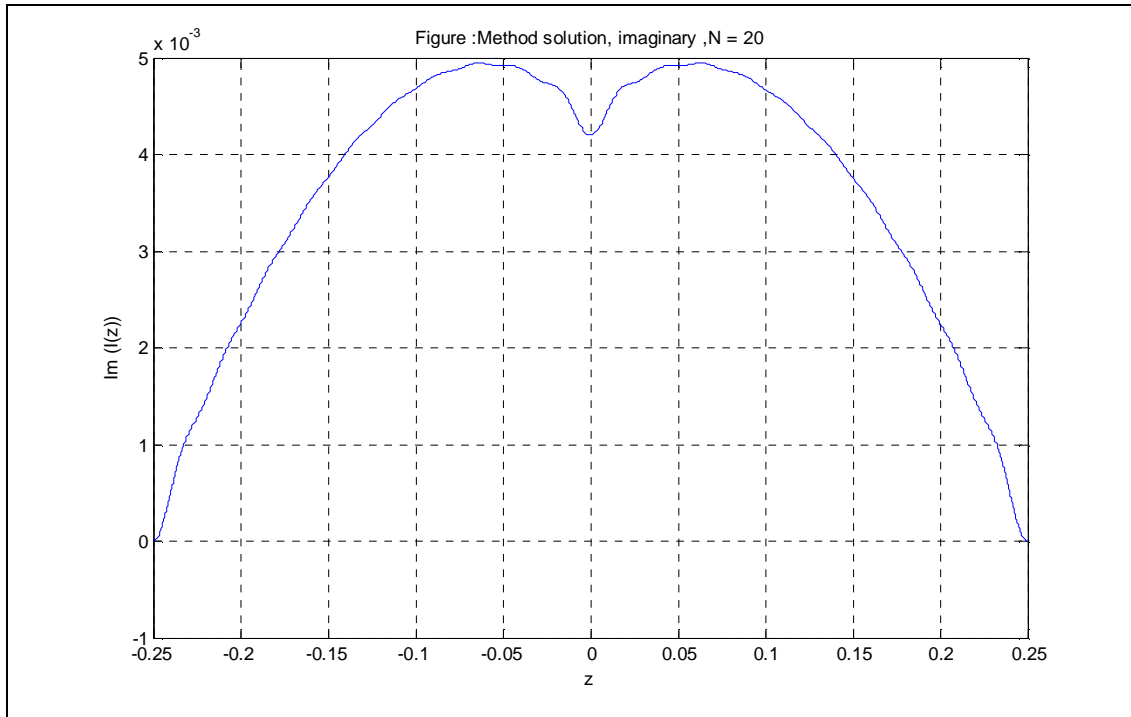
Σχ. 7(α)



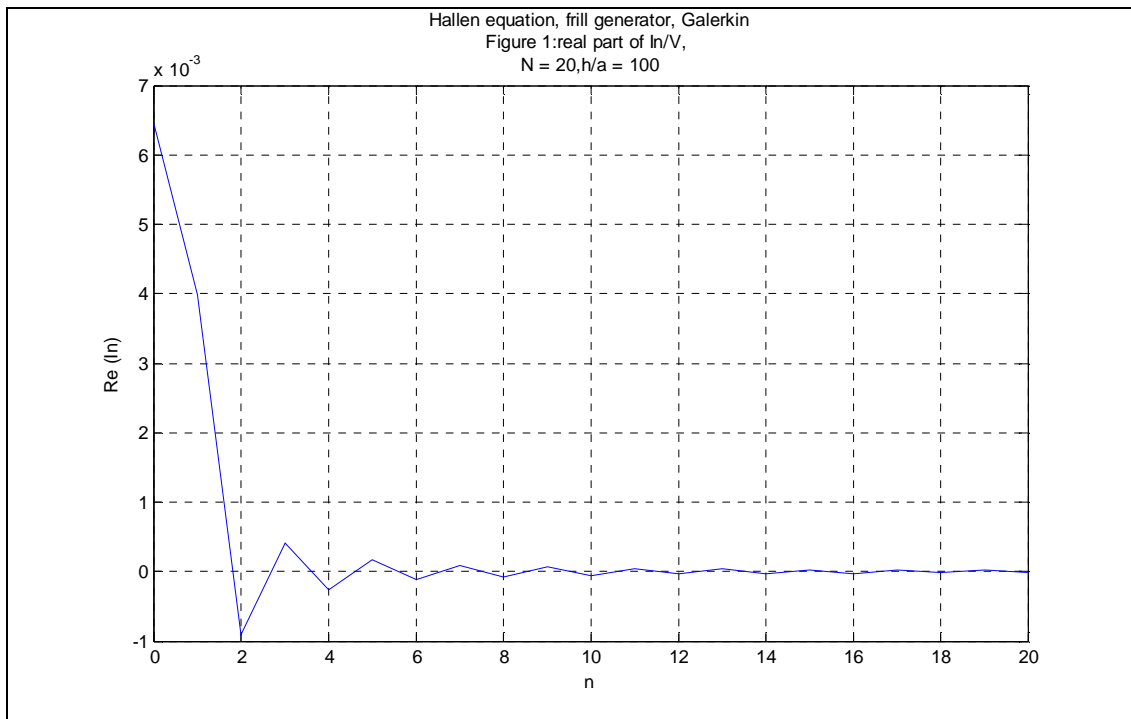
$\Sigma\chi. 7(\beta)$



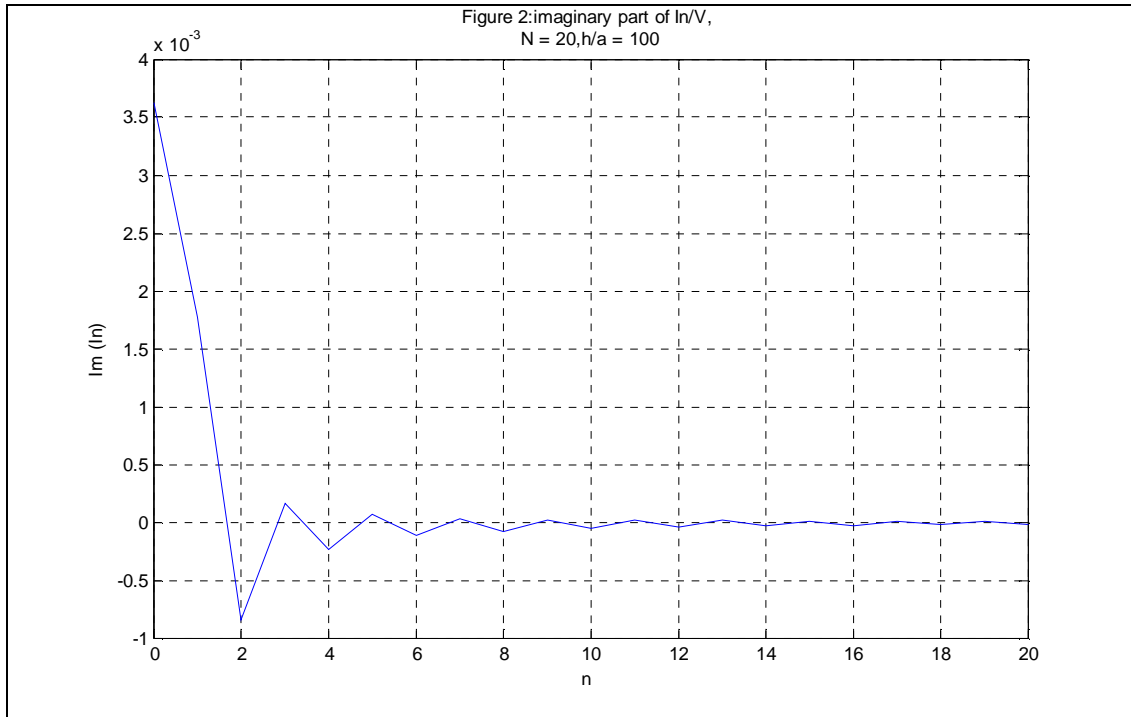
$\Sigma\chi. 7(\gamma)$



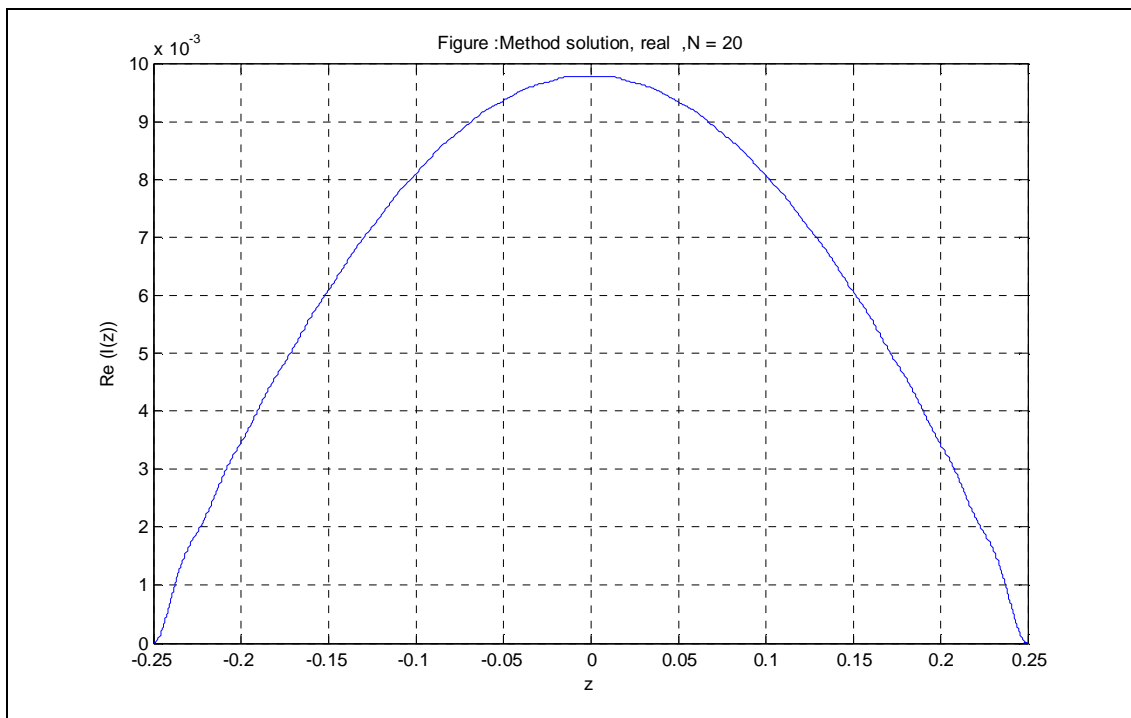
$\Sigma\chi.7(\delta)$



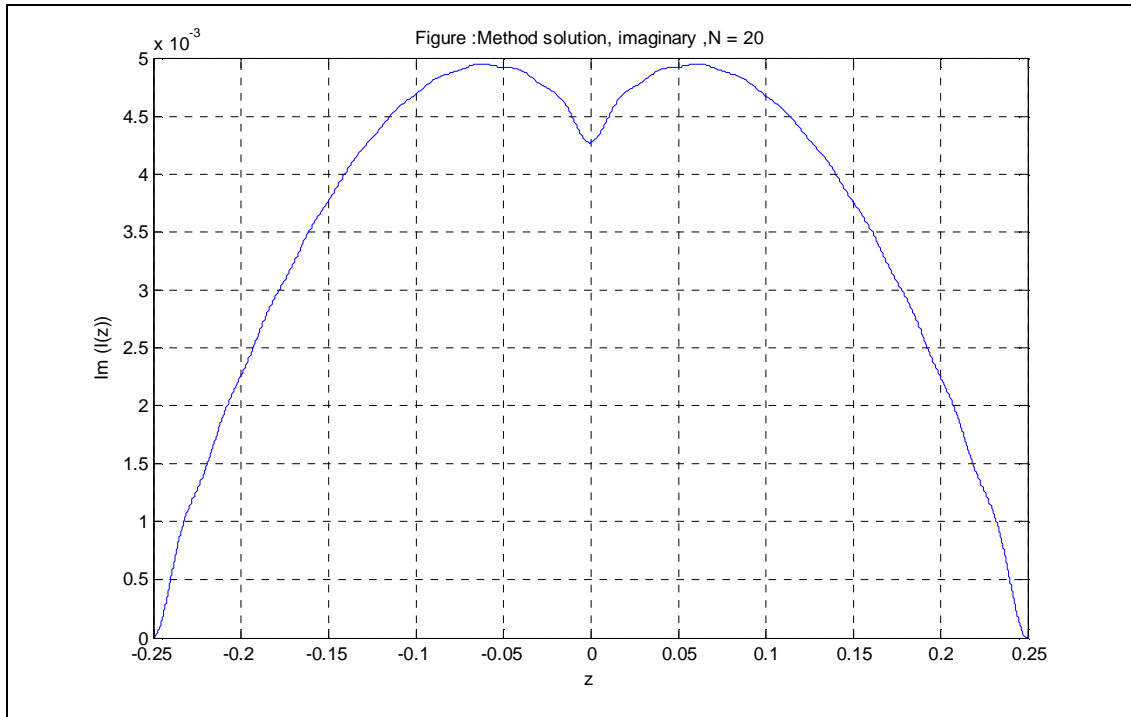
$\Sigma\chi.8(\alpha)$



$\Sigma\chi. 8(\beta)$

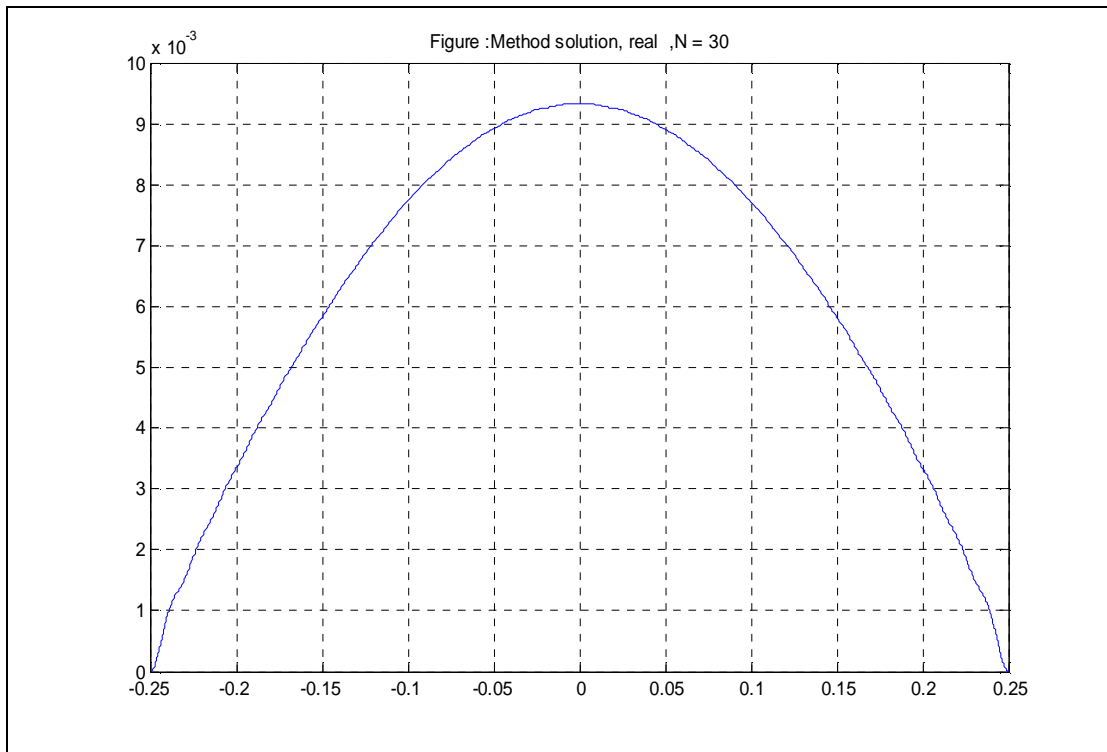


$\Sigma\chi. 8(\gamma)$

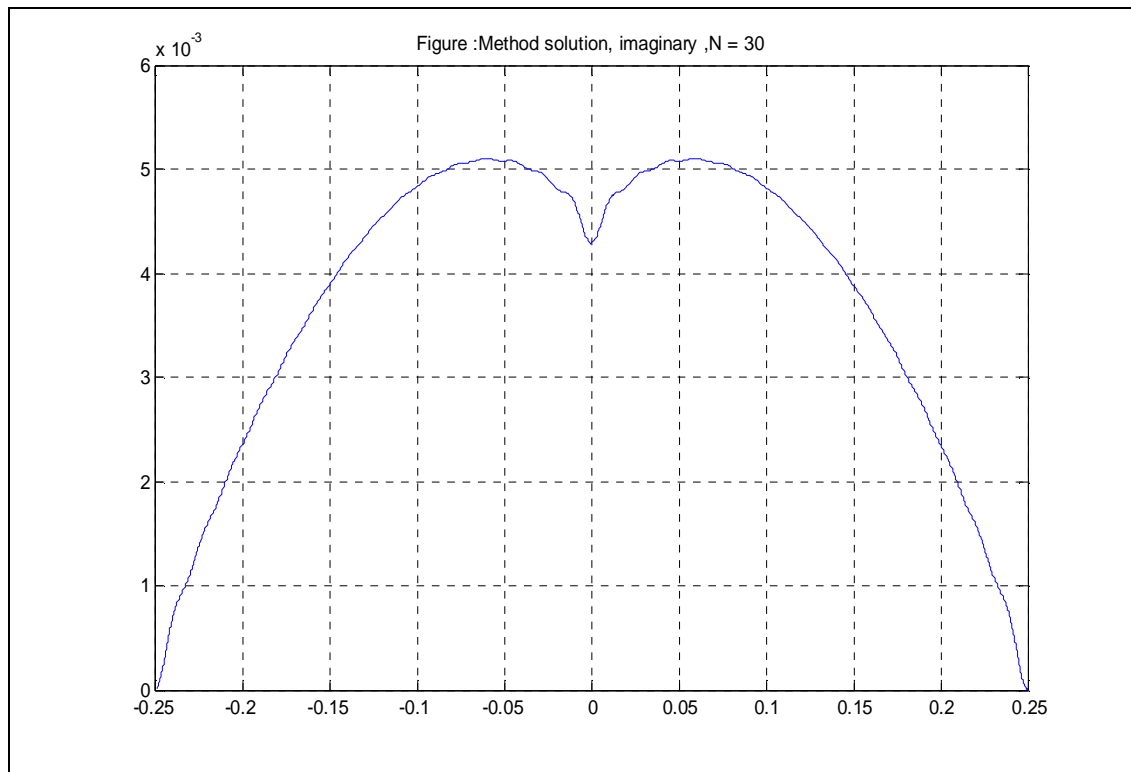


Σχ. 8(δ)

Στη συνέχεια παραθέτουμε στα σχήματα 9 το πραγματικό (α) και το φανταστικό (β) μέρος της κατανομής του ρεύματος με τα ίδια δεδομένα, για delta function generator, αλλά για $N=30$. Παρατηρούμε ότι παραμένουν ομαλά όπως αναμενόταν.

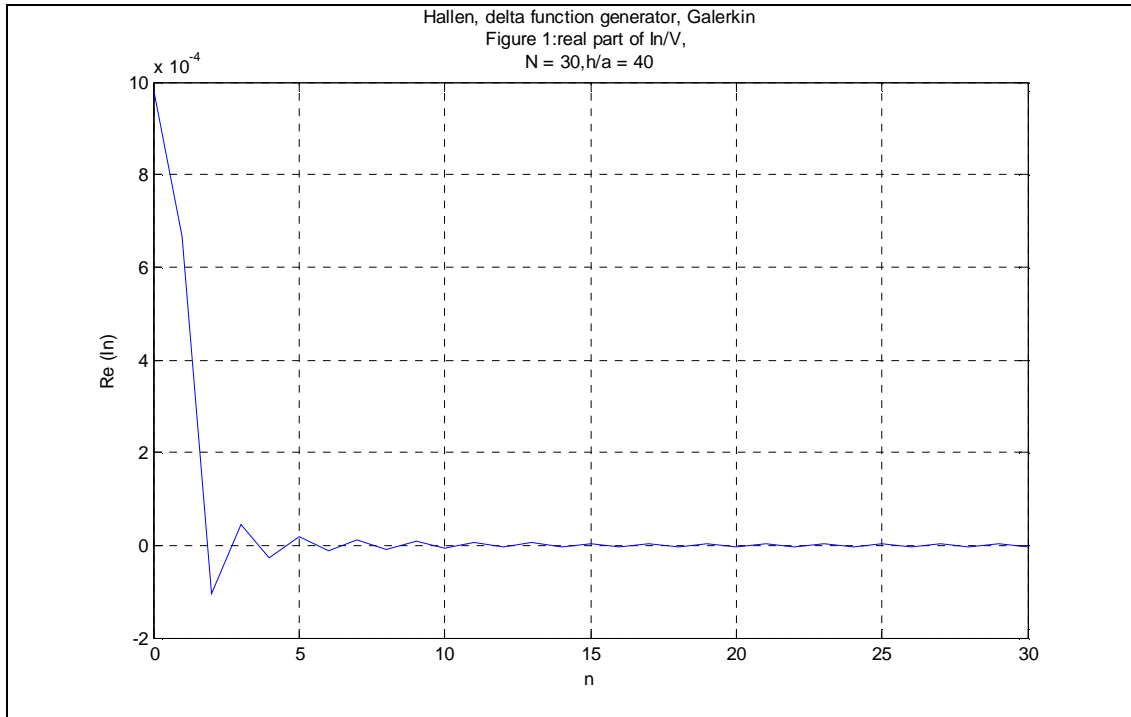


Σχ. 9(α)

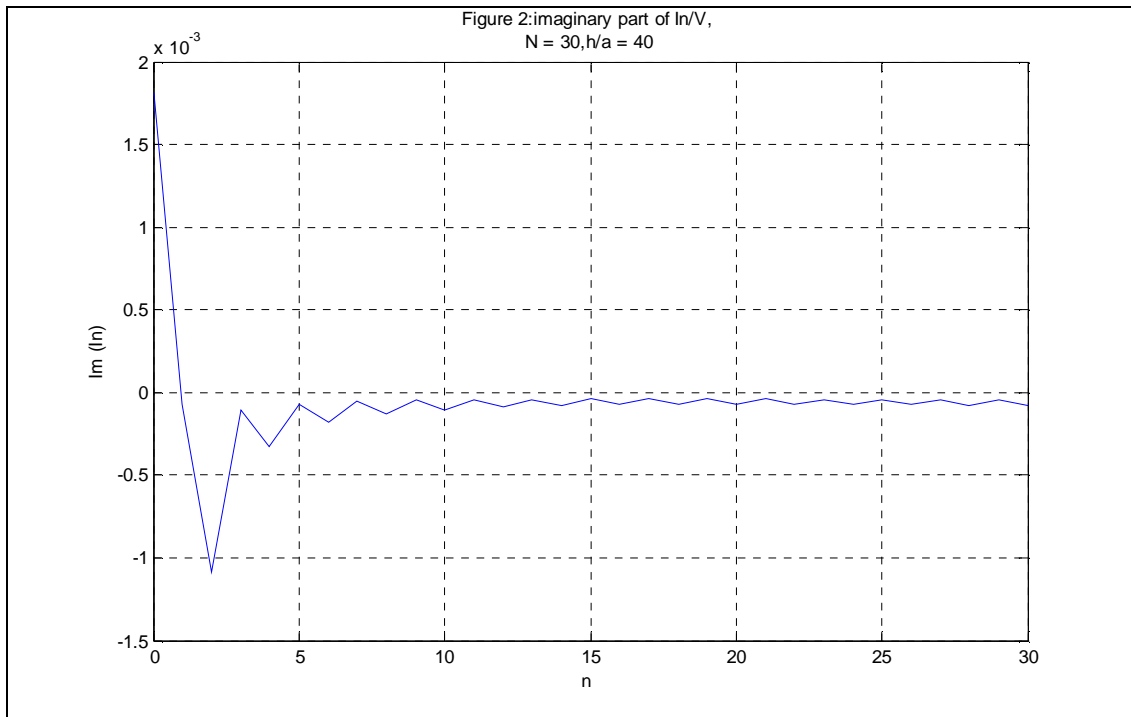


Σχ. 9(β)

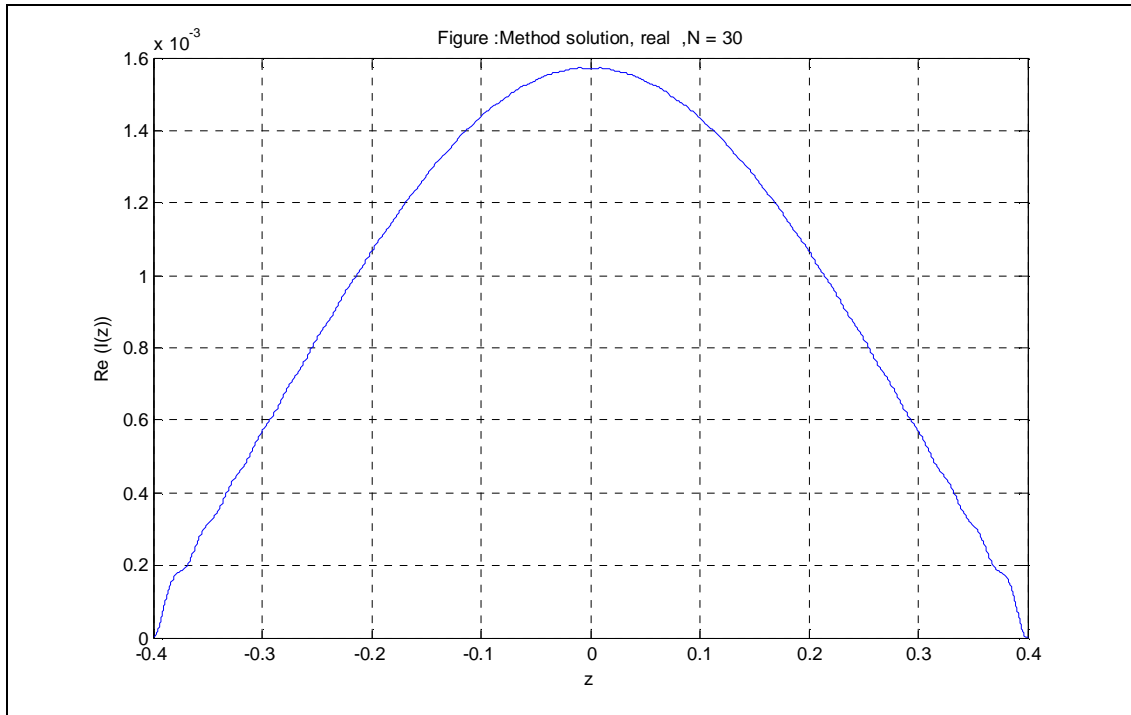
Οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν, προέκυψαν από την εφαρμογή της μεθόδου Galerkin στην εξίσωση του Hallén, με delta function generator, για την εύρεση της ρευματικής κατανομής με $N > 0.6h/a$. Από τα διαγράμματα αυτά διαπιστώνουμε ότι μόνο το πραγματικό μέρος της κατανομής του ρεύματος είναι ομαλό σε αυτή την περίπτωση. Τα δεδομένα είναι $N = 30$, $a/\lambda = 0.01$, $h/\lambda = 0.4$. Με (α) συμβολίζουμε τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Re}\{I_n\}$, με (β) τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Im}\{I_n\}$, με (γ) το πραγματικό μέρος της ρευματικής κατανομής και τέλος με (δ) το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης ρευματικής κατανομής:



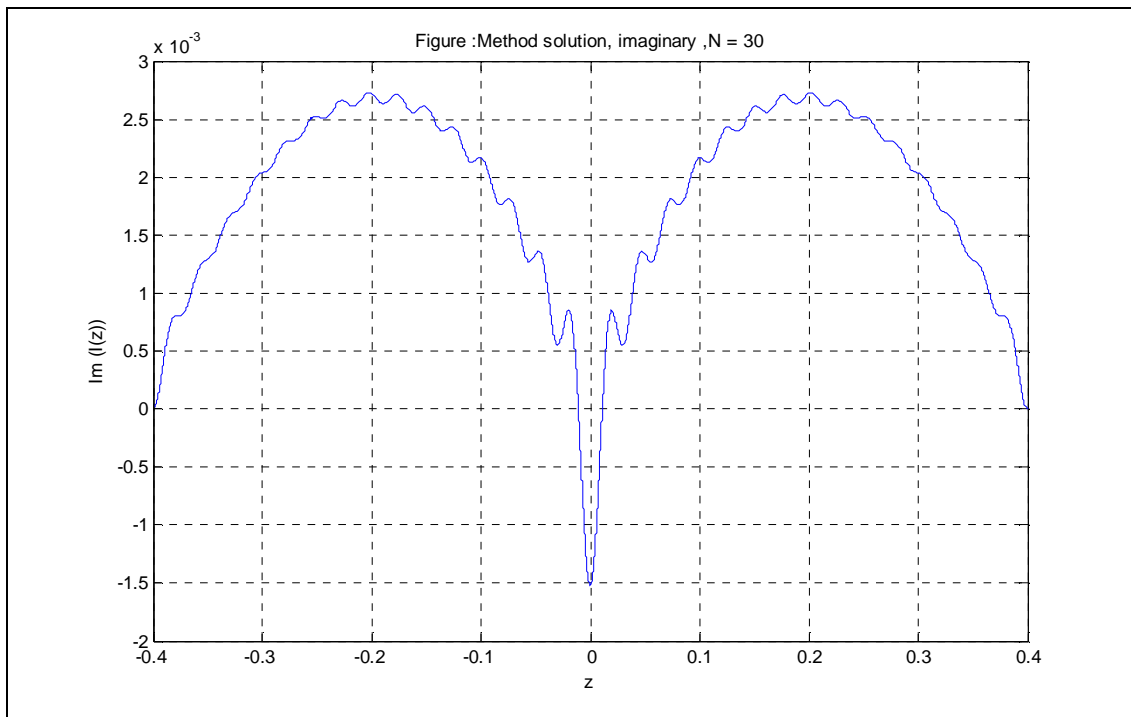
$\Sigma\chi. 10(\alpha)$



$\Sigma\chi. 10(\beta)$



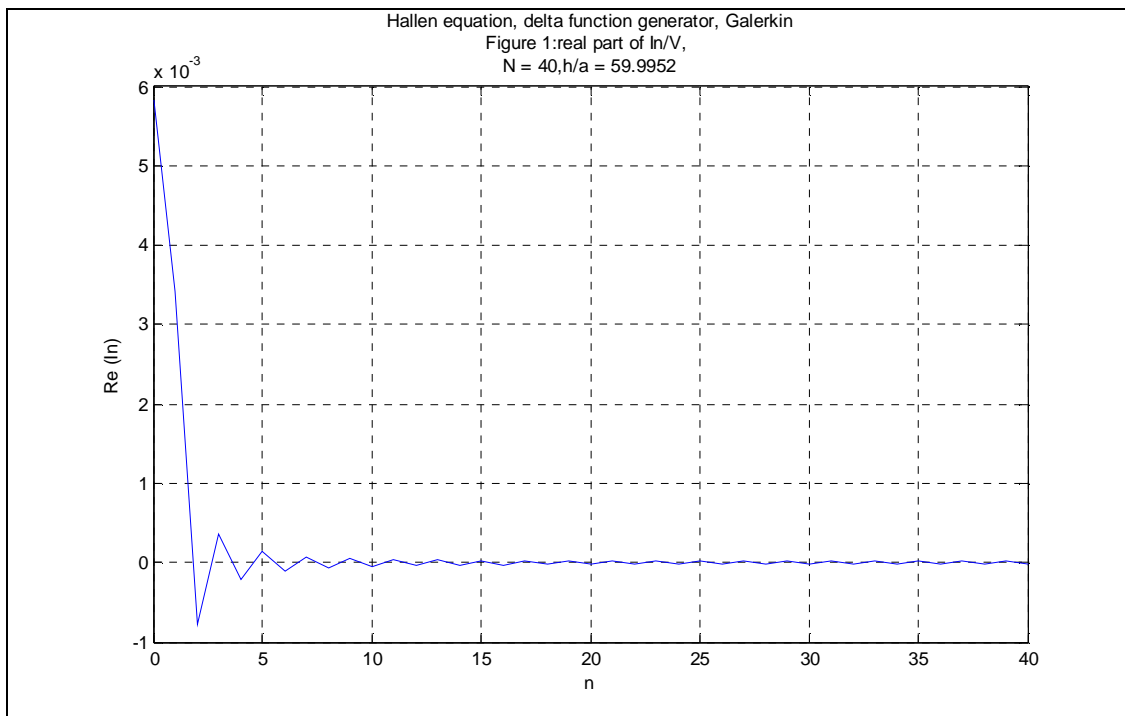
Σχ. 10(γ)



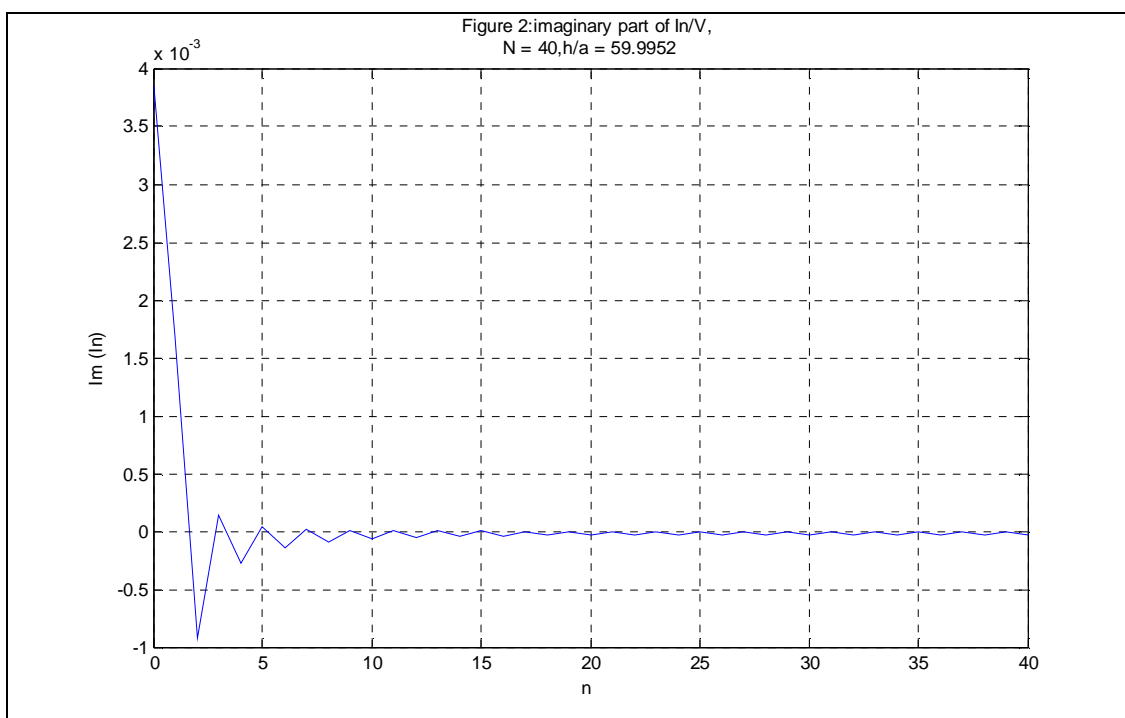
Σχ. 10(δ)

Θα δούμε ότι για N λίγο μεγαλύτερο από $0.6h/a$, δηλαδή $N = 40$ και $h/a = 60$, το μόνο που δεν είναι ομαλό όπως περιμέναμε άλλωστε είναι το φανταστικό μέρος της κατανομής του ρεύματος για delta function generator. Χρησιμοποιήσαμε μεγάλο h/a για να έχουν προλάβει τα αποτελέσματα να ομαλοποιηθούν. Τα σχήματα 11 αφορούν το delta function generator ενώ τα σχήματα 12, το frill generator. Με (α) συμβολίζουμε

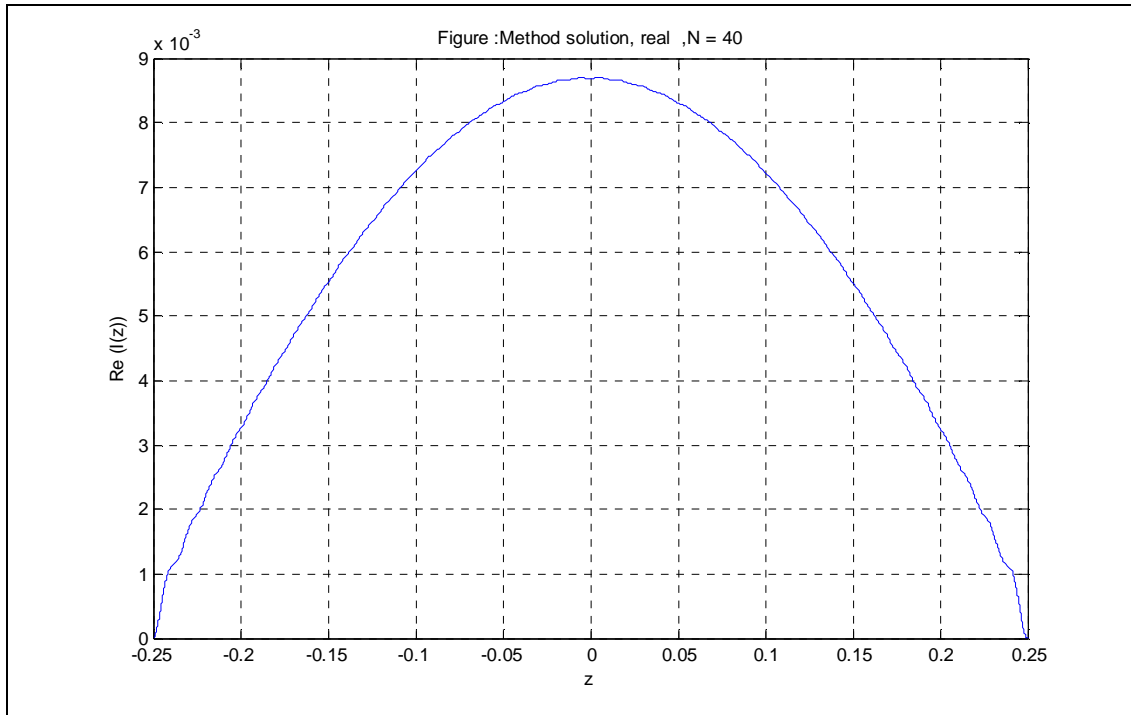
τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Re}\{I_n\}$, με (β) τις γραφικές παραστάσεις του $\text{Im}\{I_n\}$, με (γ) το πραγματικό μέρος της ρευματικής κατανομής και τέλος με (δ) το φανταστικό μέρος της αντίστοιχης ρευματικής κατανομής:



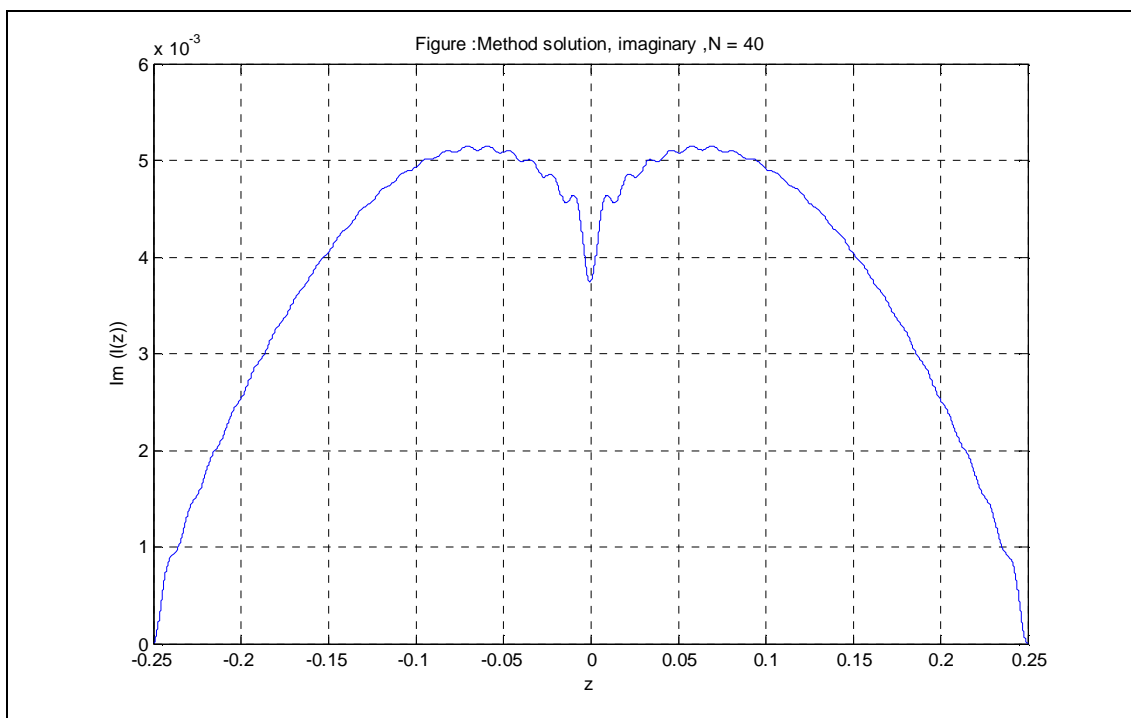
Σχ. 11(α)



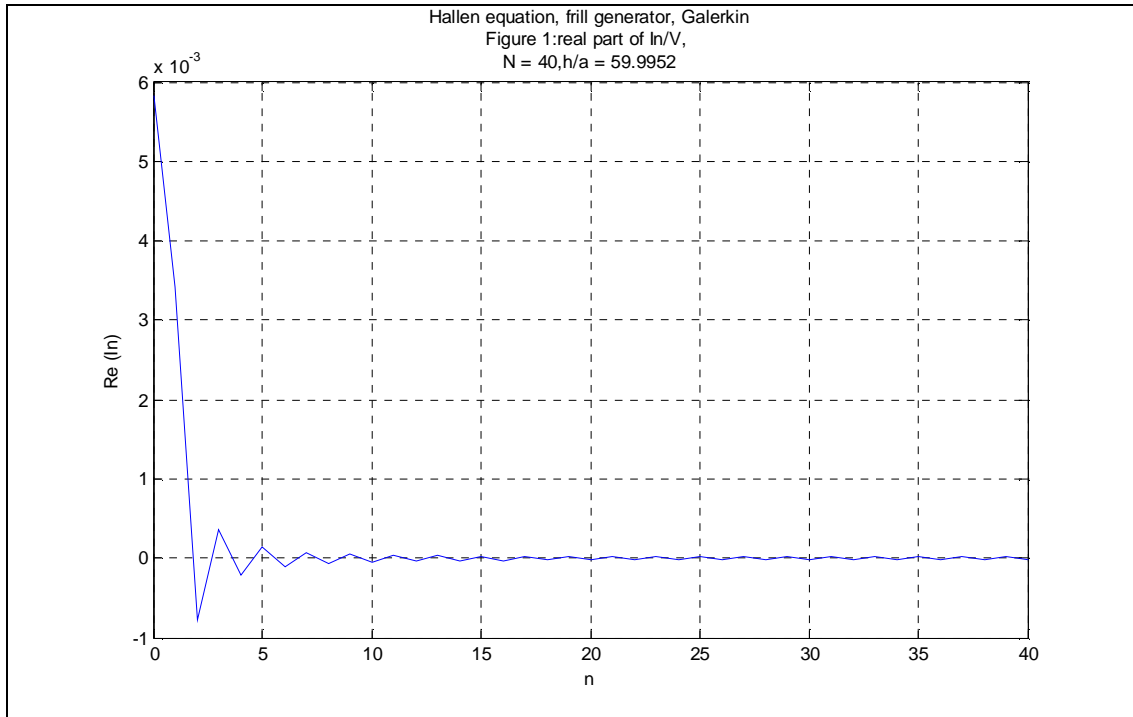
Σχ. 11(β)



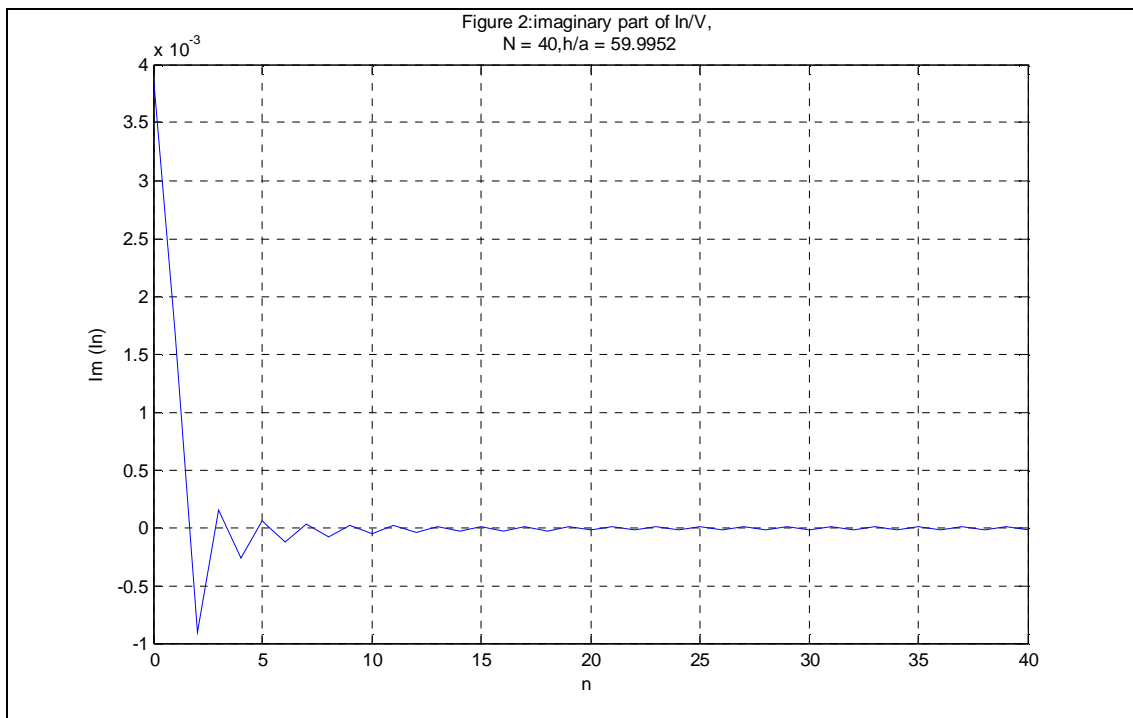
$\Sigma\chi. 11(\gamma)$



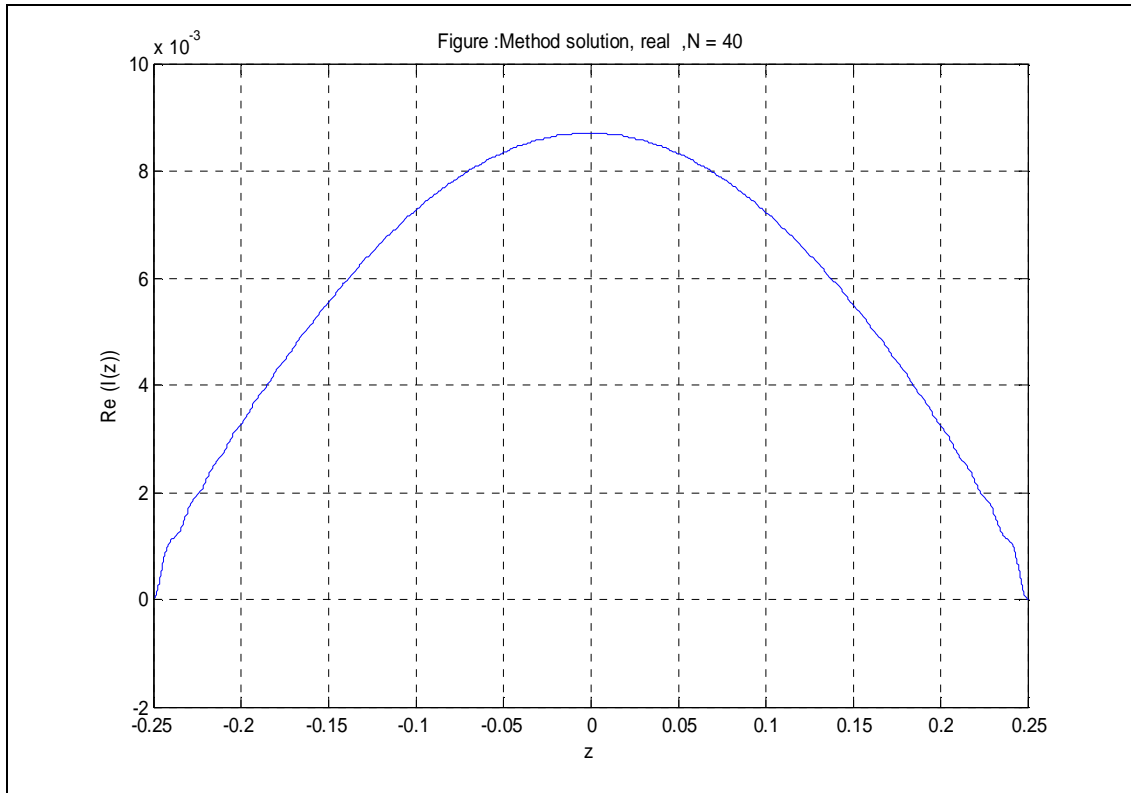
$\Sigma\chi. 11(\delta)$



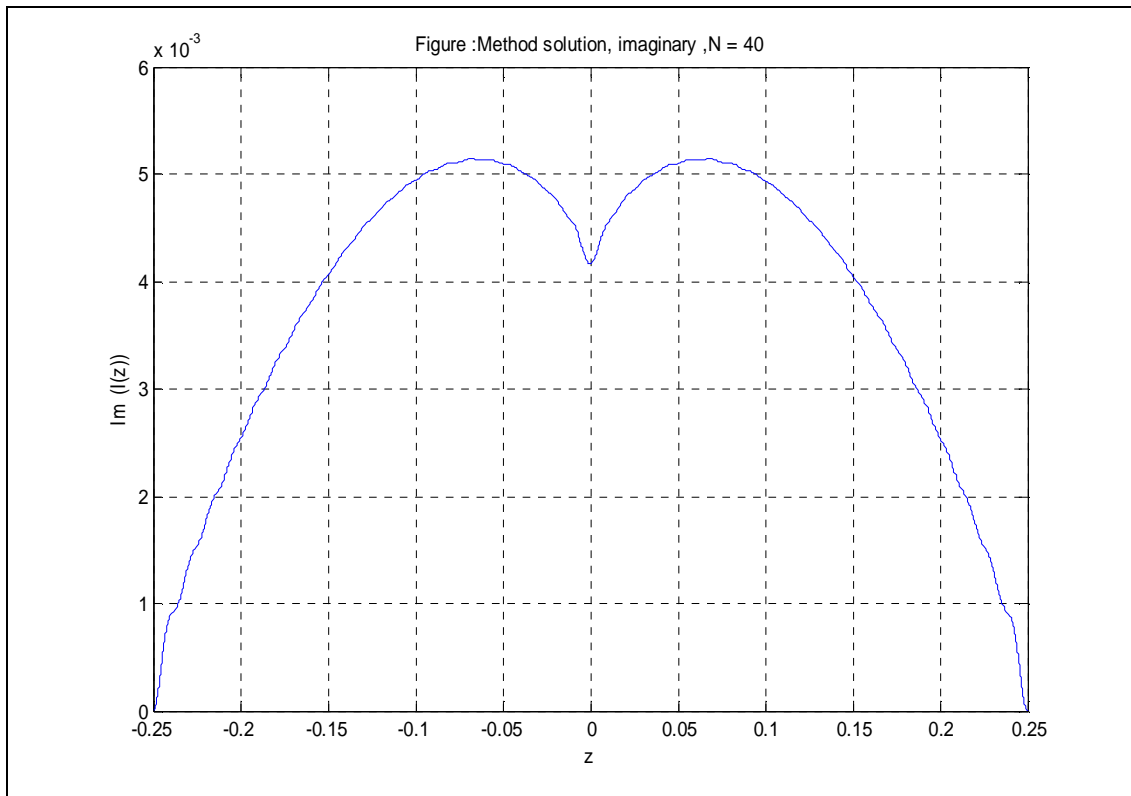
$\Sigma\chi. 12(\alpha)$



$\Sigma\chi. 12(\beta)$

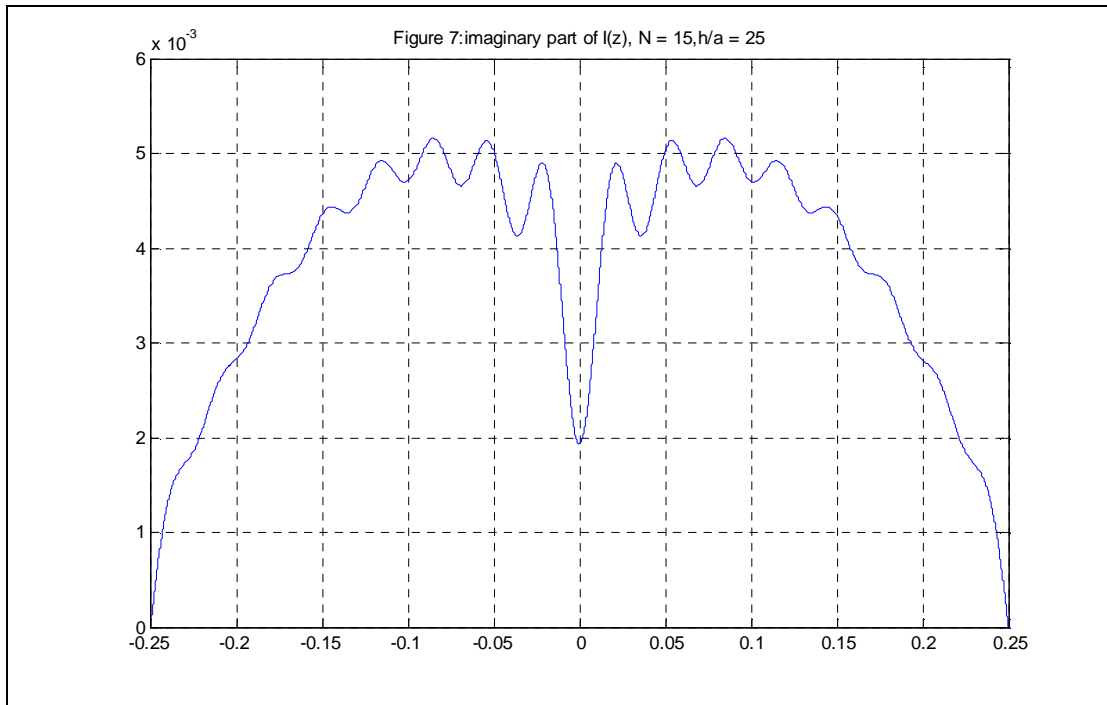


$\Sigma\chi. 12(\gamma)$

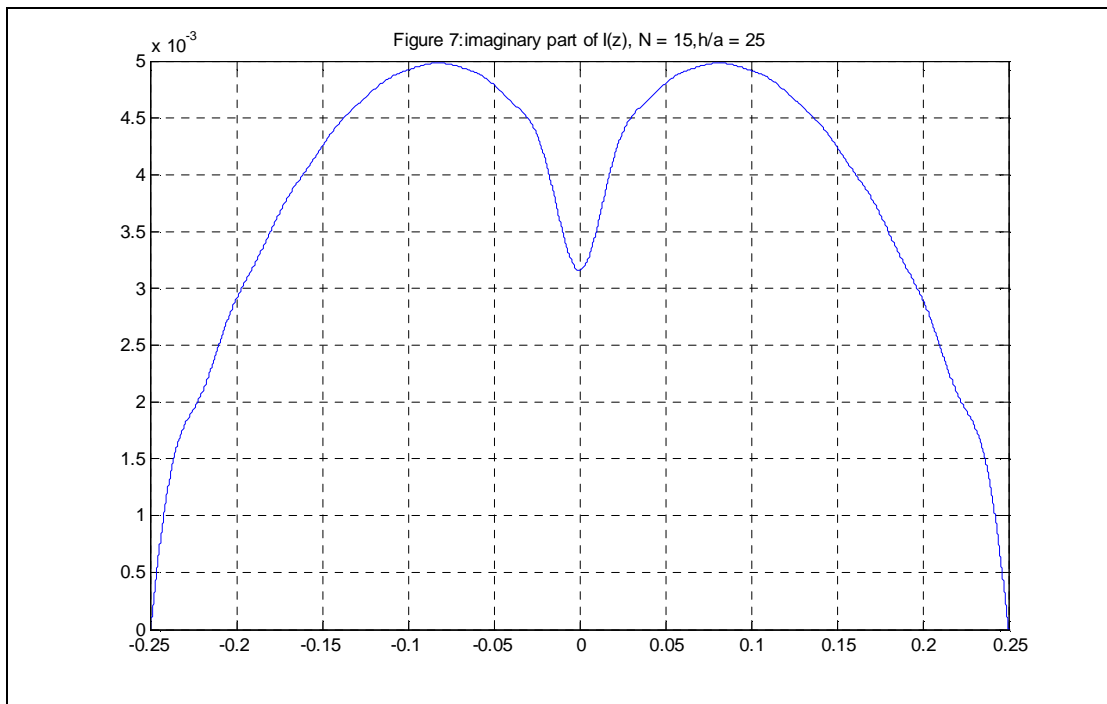


$\Sigma\chi. 12(\delta)$

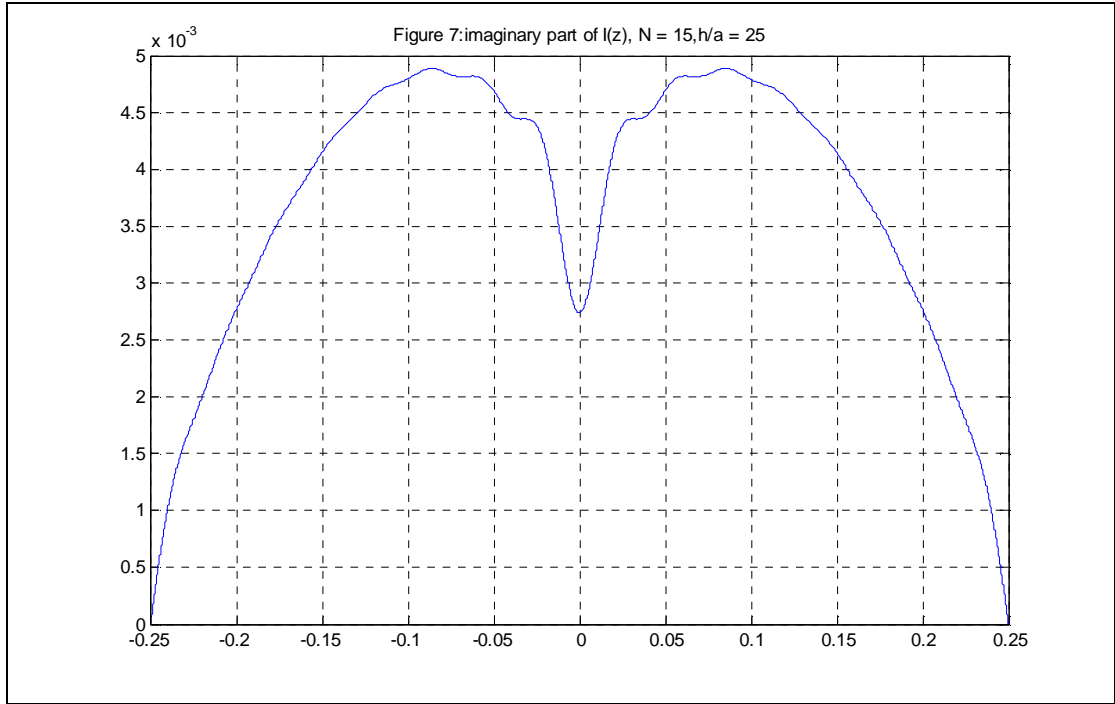
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις μόνο του $\text{Im}\{I(z)\}$ για τη μέθοδο point-matching των (Σχ.13) και τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων (Σχ.14) με δεδομένα $N=15, h/\lambda=0.25, a/\lambda=0.01, M=6 \cdot N$ για την περίπτωση του delta function generator. Με (α) συμβολίζουμε τα αποτελέσματα για matching points $z_l = \frac{(l-1)h}{N}$, με (β) για $z_l = \frac{(l)h}{N+1}$, με (γ) για $z_l = \frac{(l-0.5)h}{N+1}$ και με (δ) για $z_l = \frac{(l-1)h}{N+1}$:



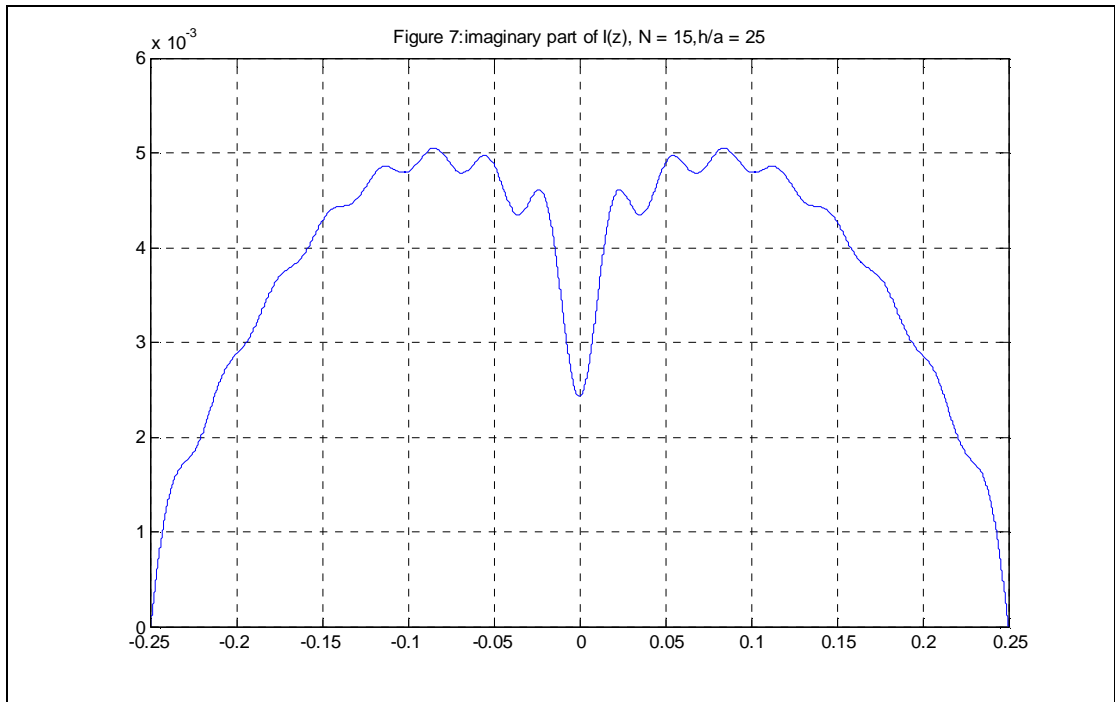
Σχ. 13(α)



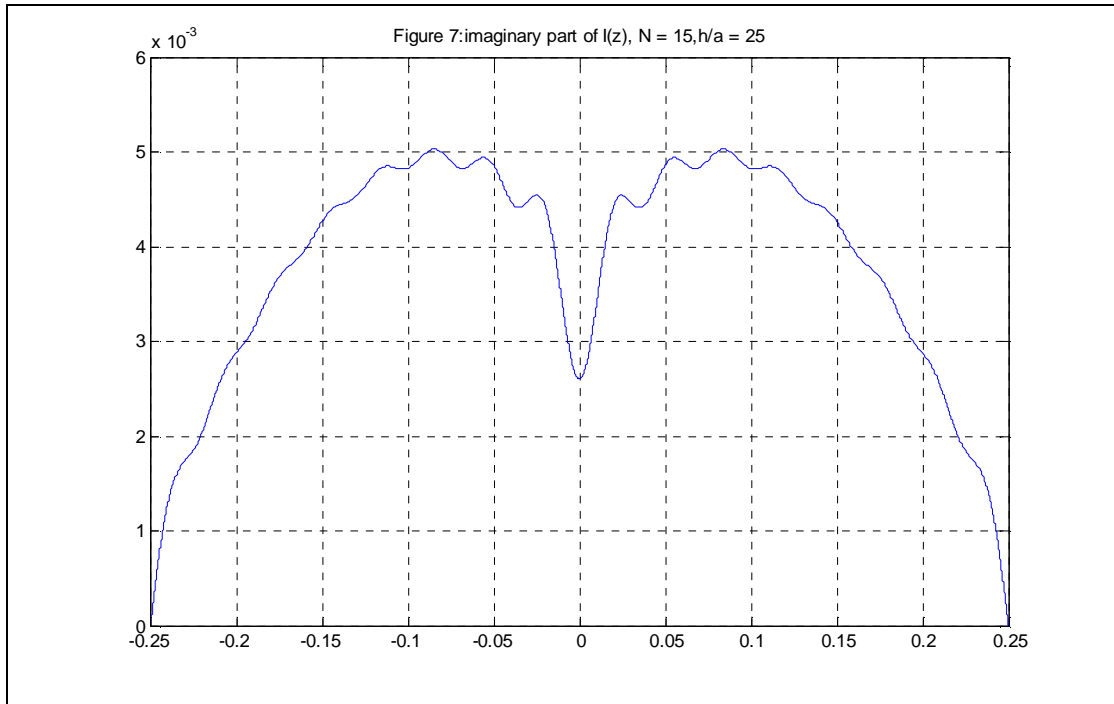
Σχ. 13(β)



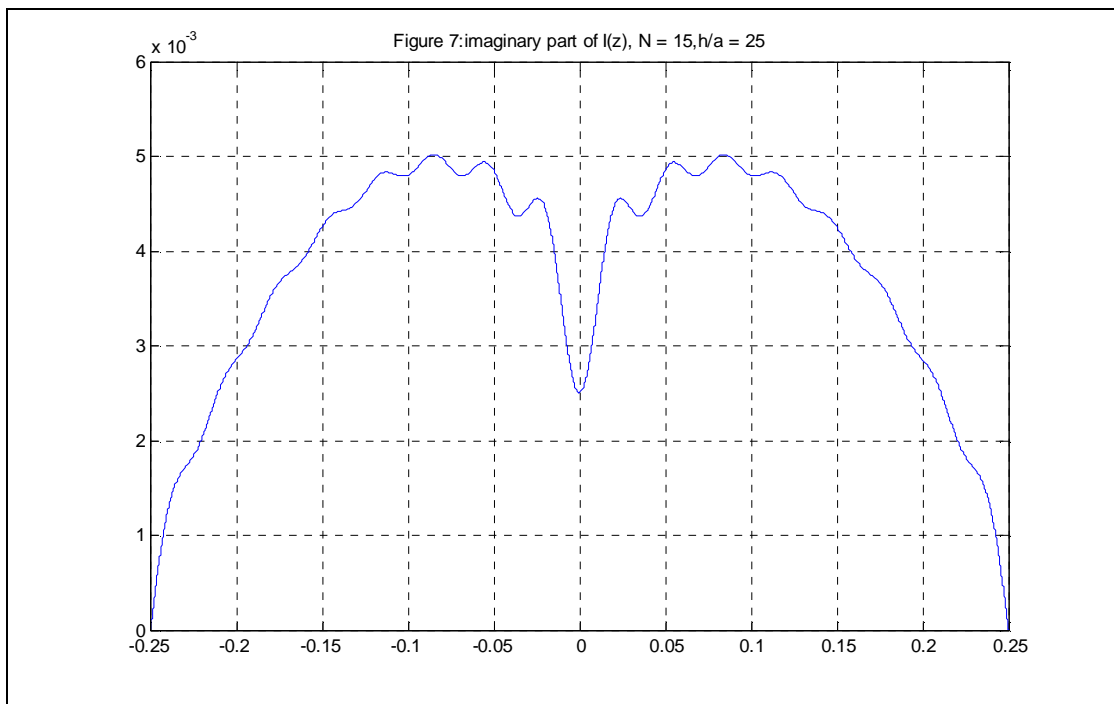
$\Sigma\chi. 13(\gamma)$



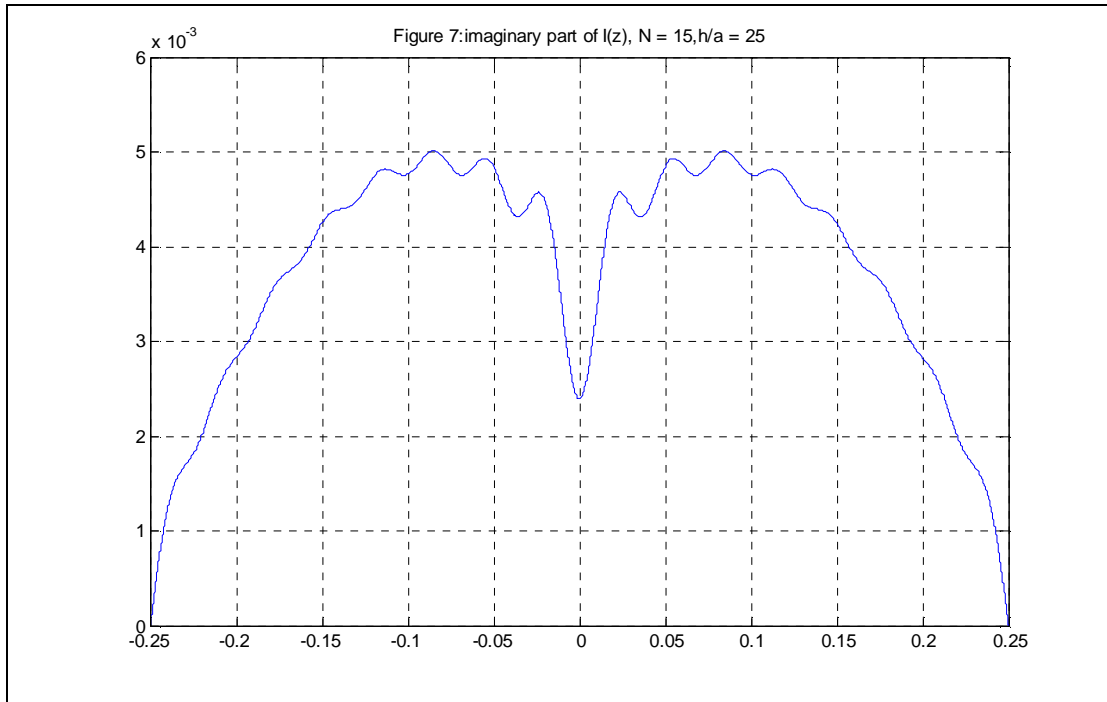
$\Sigma\chi. 14(\alpha)$



$\Sigma\chi. 14(\beta)$



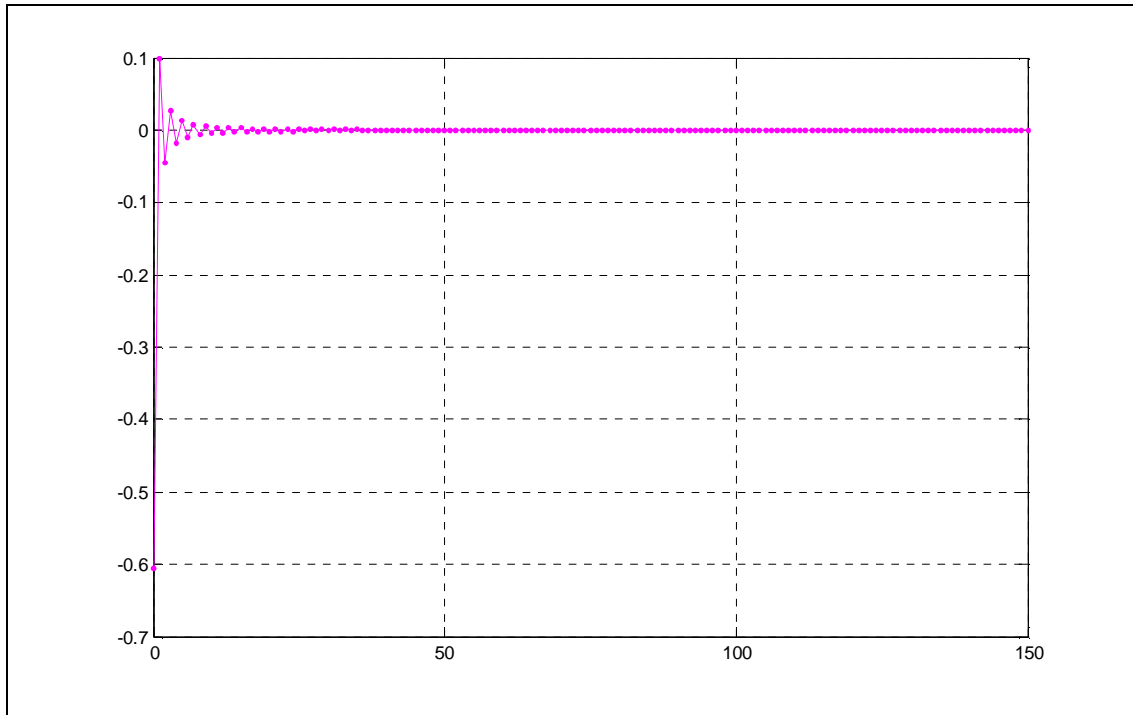
$\Sigma\chi. 14(\gamma)$



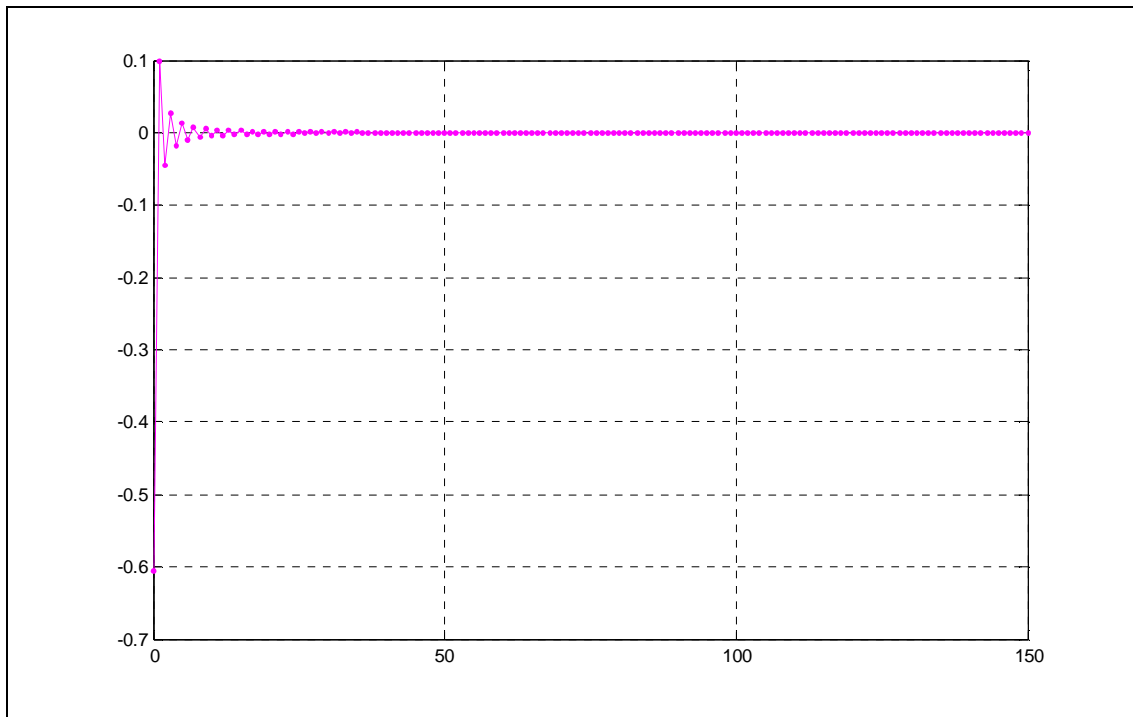
Σχ. 14(δ)

Αυτό που μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα σχήματα 13, είναι η μεγάλη εξάρτηση της μεθόδου point-matching από τα match points. Ακόμα μπορούμε να πούμε ότι για καμία από τις επιλογές σημείων δεν ισχύει η σημαντική παράμετρος h/a . Αντιθέτως, από τα σχήματα 14, για τα οποία ισχύει $M = 6 \cdot N$, διαπιστώνουμε ότι οι γραφικές παραστάσεις του φανταστικού μέρους της κατανομής ελάχιστα διαφοροποιούνται για διαφορετικά match points. Και σε αντίθεση με την τεχνική point-matching, στην τεχνική των ελαχίστων τετραγώνων, με τα δεδομένα που προαναφέραμε, για μια ακόμα φορά η σημαντική παράμετρος είναι ο λόγος h/a . Επίσης, να προσθέσουμε ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων όσο αυξάνει το M , πλησιάζουν τα αποτελέσματα της μεθόδου Galerkin. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζουν τη σύγκλιση της μεθόδου point-matching για τη δοκιμαστική εξίσωση τύπου Hallén ($N=150$) της παραγράφου 3.3 (σχήματα 15) και για τη δοκιμαστική εξίσωση τύπου Pocklington ($N=100$) της ίδιας παραγράφου (σχήματα 16). Με (α) συμβολίζουμε τα αποτελέσματα για matching points $z_l = \frac{(l-1)h}{N}$,

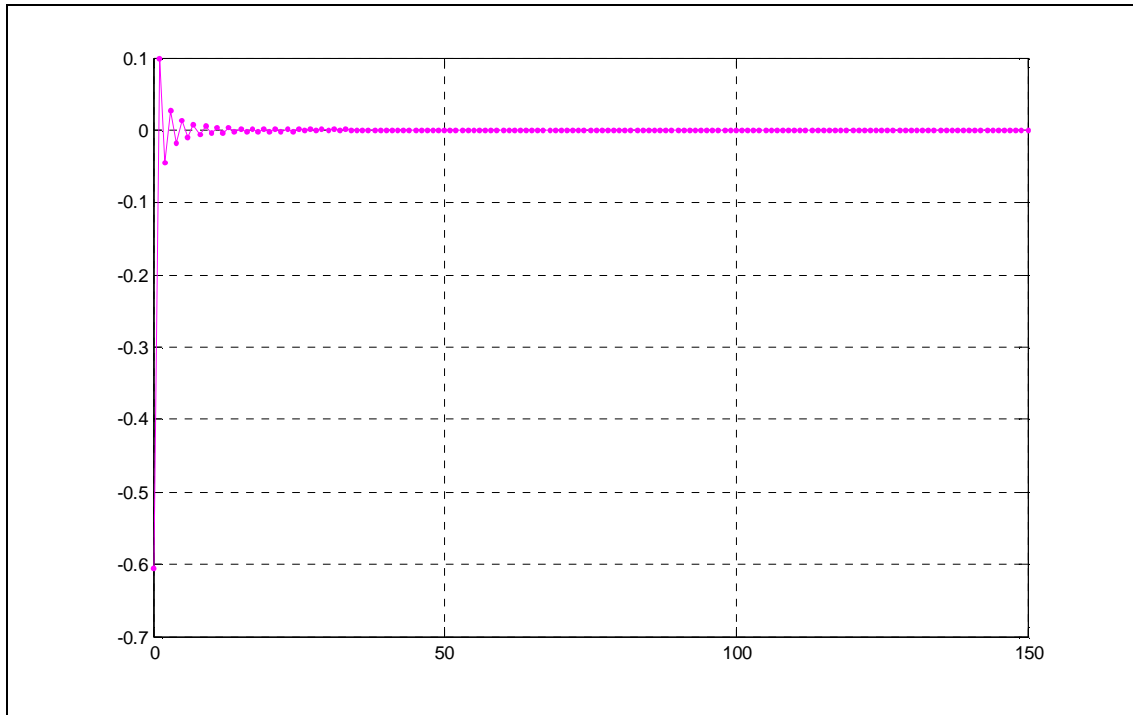
με (β) για $z_l = \frac{(l)h}{N+1}$, με (γ) για $z_l = \frac{(l-0.5)h}{N+1}$ και με (δ) για $z_l = \frac{(l-1)h}{N+1}$:



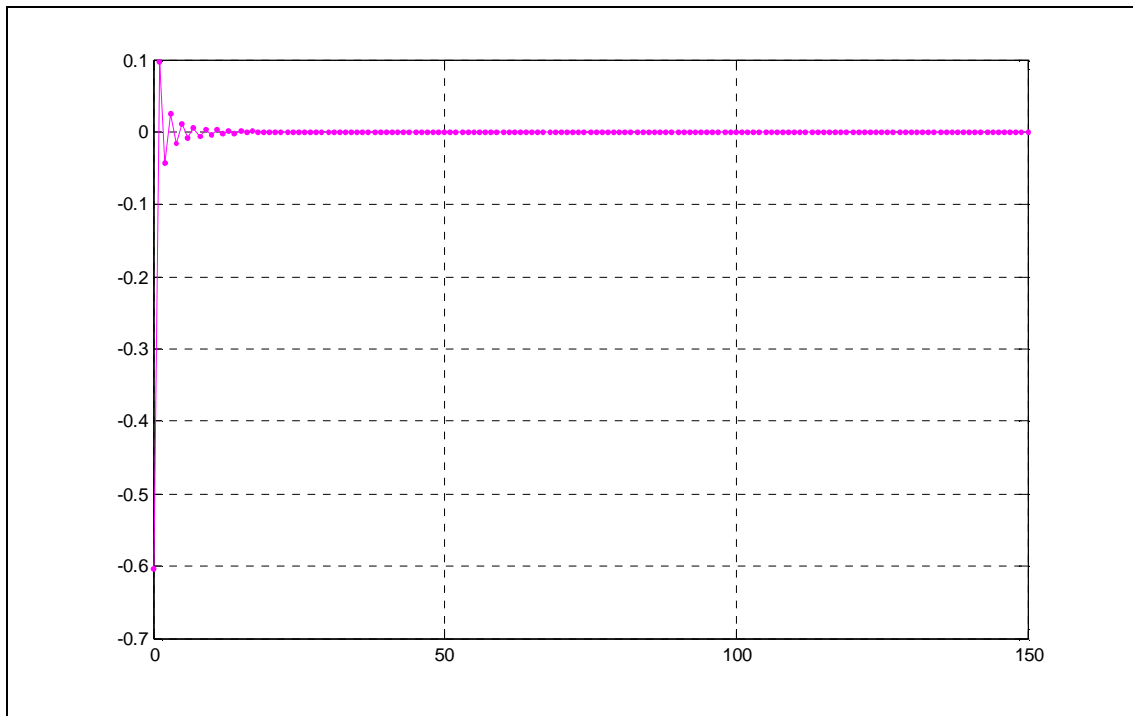
$\Sigma\chi.15(\alpha)$



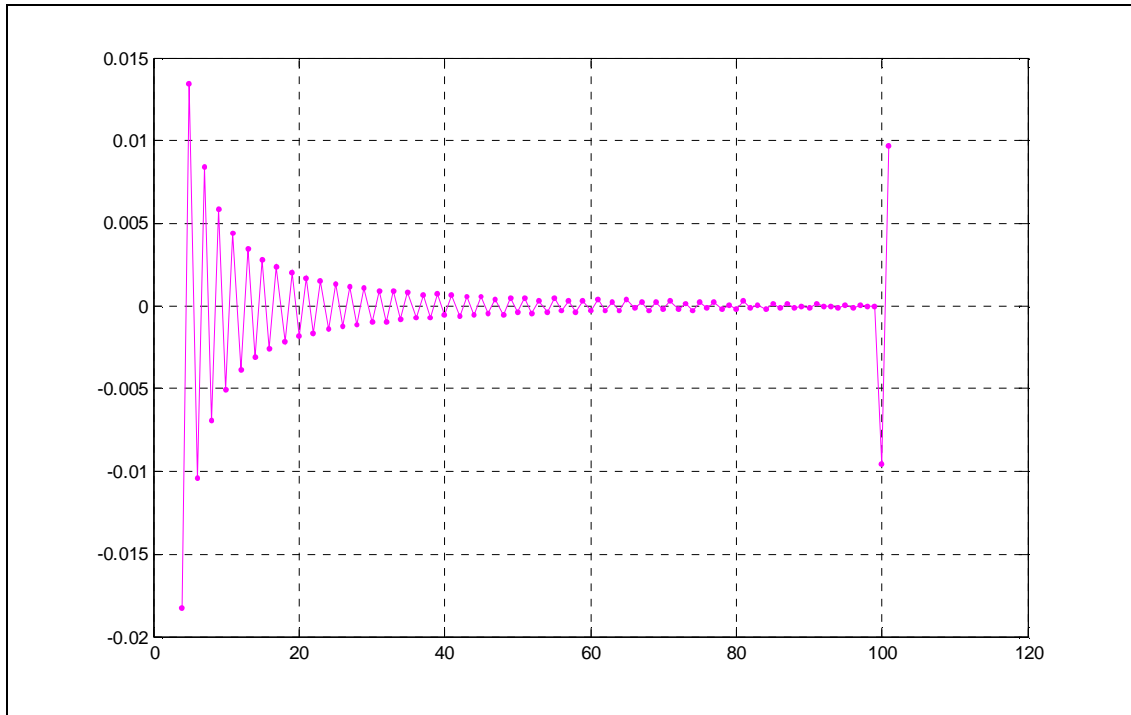
$\Sigma\chi.15(\beta)$



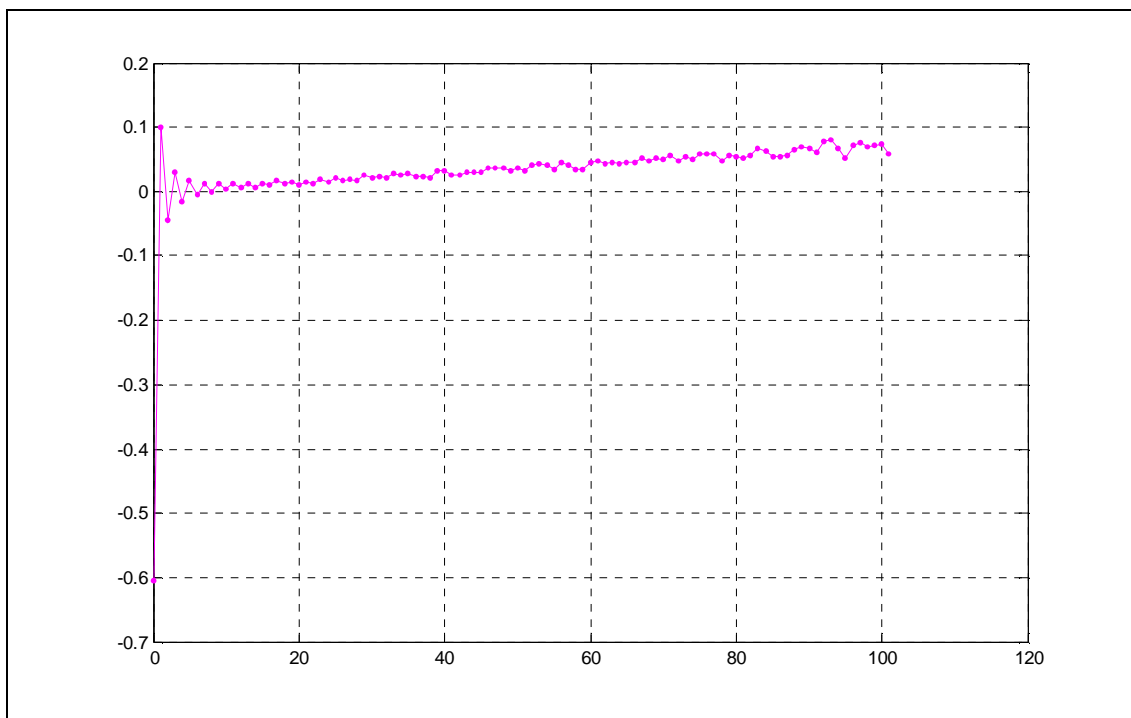
$\Sigma\chi.15(\gamma)$



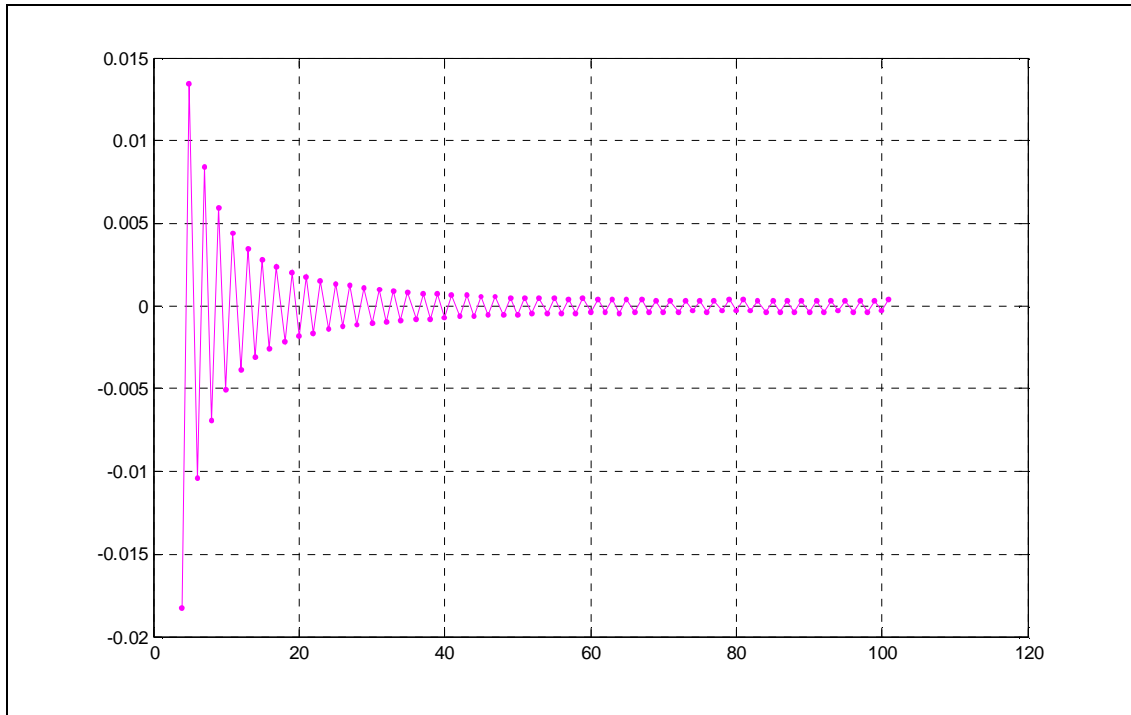
$\Sigma\chi.15(\delta)$



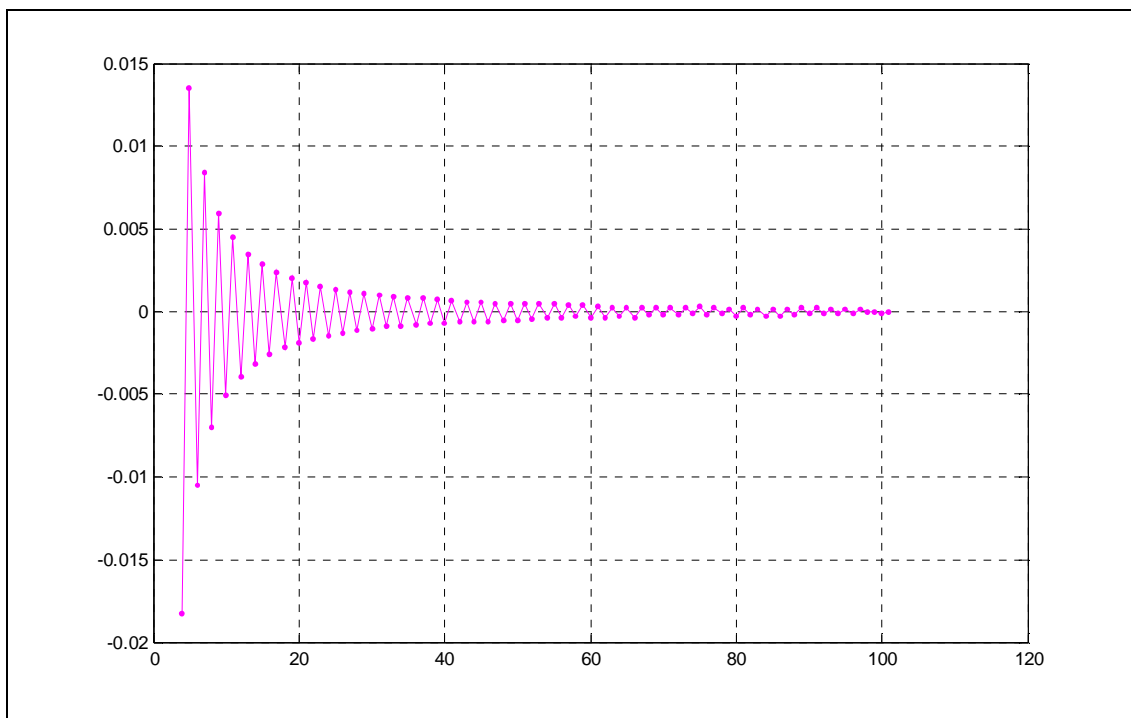
$\Sigma\chi.16 (\alpha)$



$\Sigma\chi.16 (\beta)$



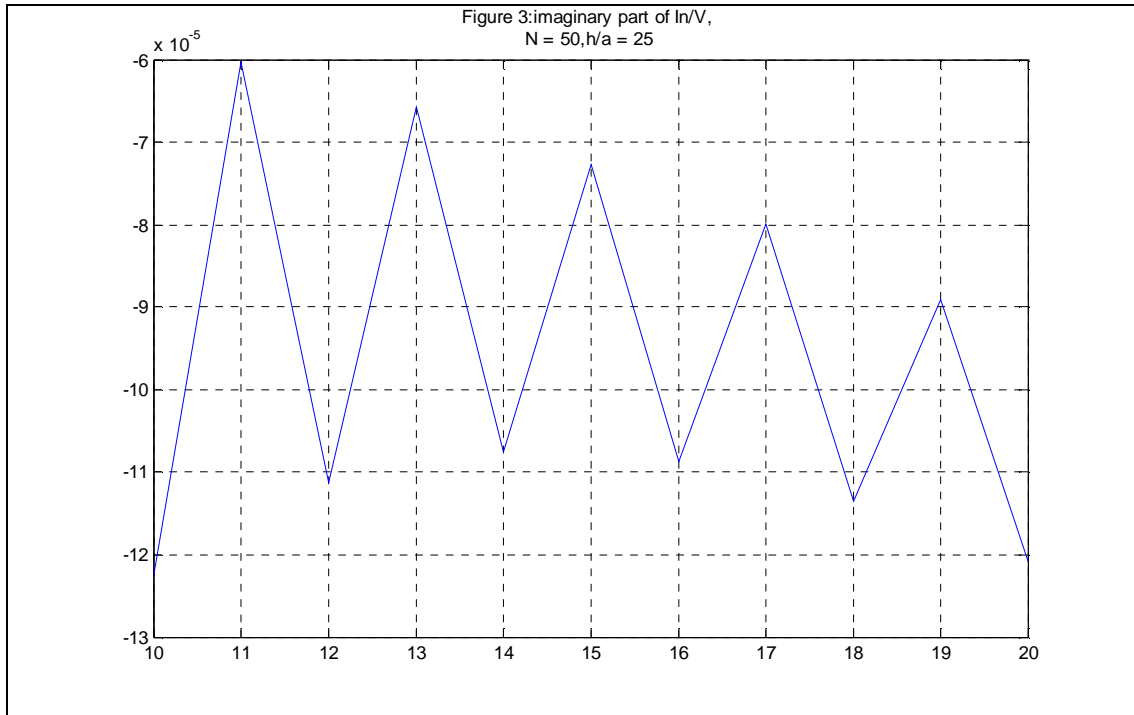
Σχ.16 (γ)



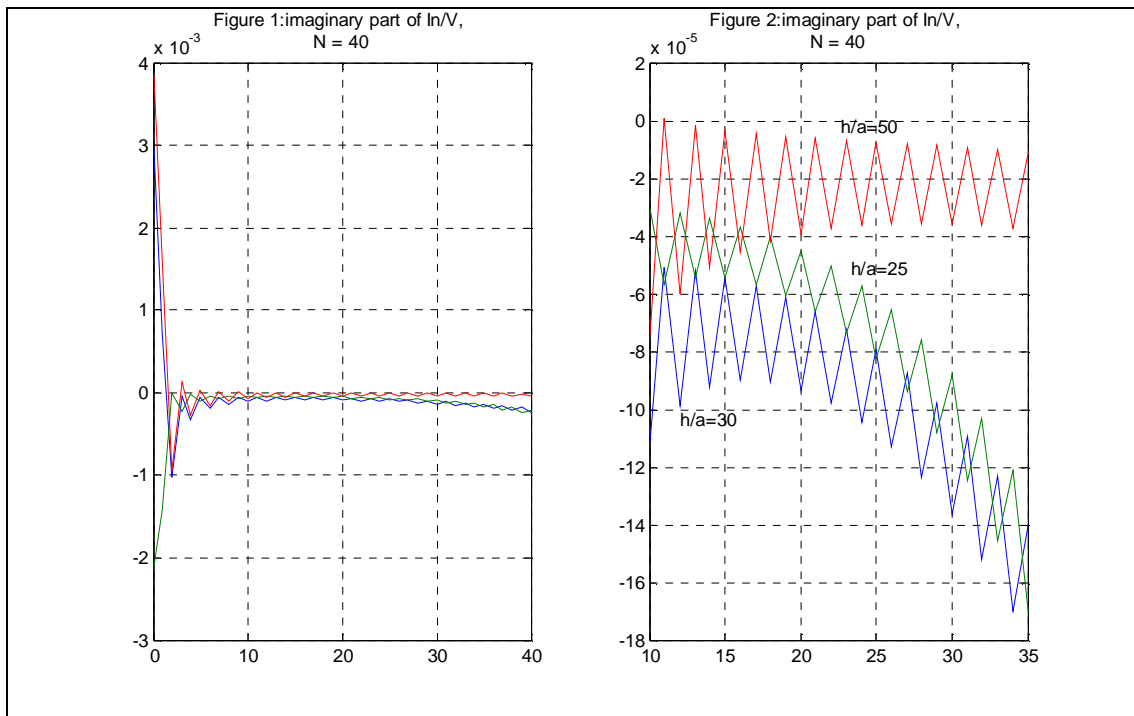
Σχ.16 (δ)

Από τα προηγούμενα σχήματα παρατηρούμε, ότι στις γραφικές παραστάσεις 15, τα I_n συγκλίνουν και για τις 4 επιλογές σημείων. Γρηγορότερη σύγκλιση ως προς το C , (του οποίου η ακριβής τιμή είναι $C = -0.83812$), έχει η μέθοδος (α) με $C = -0.83872$ για $N=150$ και ακολουθεί η μέθοδος (β) με $C = -0.83874$. Από τις γραφικές παραστάσεις 16, είναι εμφανές ότι μόνο η μέθοδοι (γ) και (δ) συγκλίνουν για $N=100$.

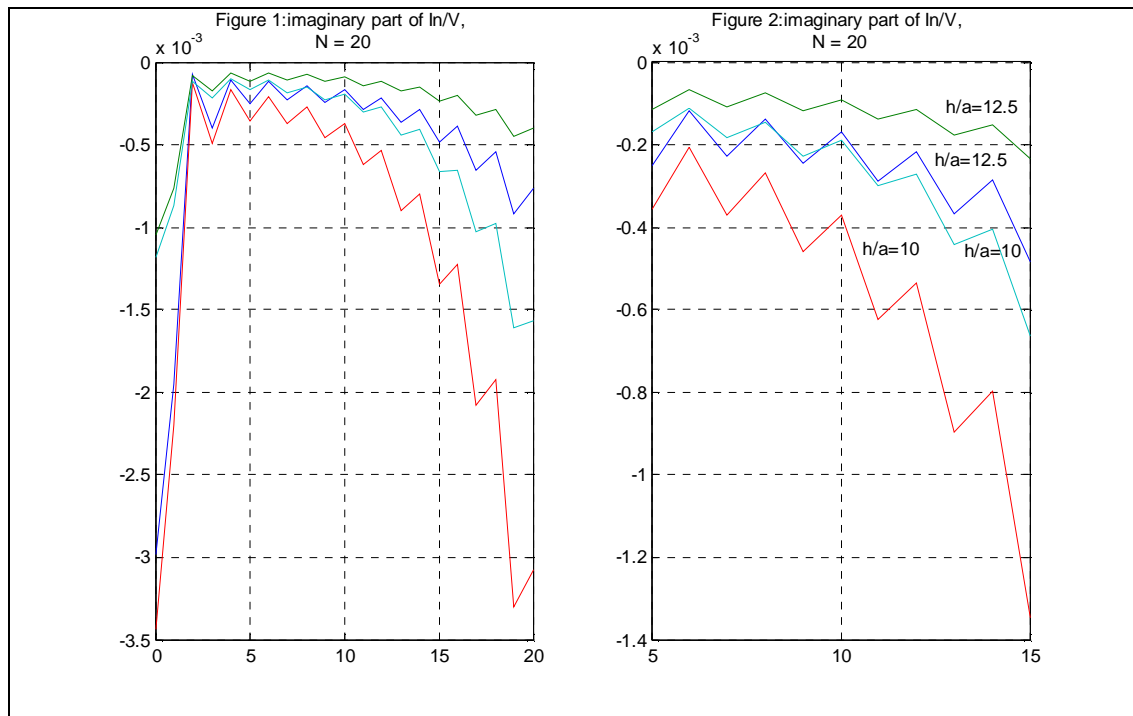
Στις επόμενες γραφικές παραστάσεις θα παρουσιάσουμε, εν συντομία, πως καταλήξαμε στη χοντρική τιμή $0.6h/a$, ως το σημείο που αρχίζει να «πέφτει» το φανταστικό μέρος του I_n .



Σχ. 17(α)



Σχ. 17(β)



Σχ. 17(γ)

Από το σχήμα 17(α) για $h/a = 25$ παρατηρούμε με προσεκτική μελέτη των τιμών του I_n , ότι το φανταστικό μέρος του I_n , αρχίζει να φθίνει για $n=13$ ως $n=15$, δηλαδή για $[0.52h/a, 0.6h/a]$. Από το σχήμα 17 (β) η αρχή του φαινομένου αυτού τοποθετείται στο διάστημα $[0.53h/a, 0.6h/a]$ για $h/a = 30$ και στο διάστημα $[0.56h/a, 0.6h/a]$ για $h/a = 50$. Από το σχήμα 17 (γ) το αντίστοιχο διάστημα είναι $[0.5h/a, 0.7h/a]$ για $h/a = 10$ και τέλος, $[0.56h/a, 0.72h/a]$ για $h/a = 12.5$. Από αυτή τη μελέτη, για διάφορες τιμές των παραμέτρων N και h/a , προέκυψε ότι το διάστημα (που είναι η τομή των παραπάνω διαστημάτων), στο οποίο πρωτοεμφανίζεται αυτό το φαινόμενο, είναι το $[0.56h/a, 0.6h/a]$ και χοντρικά παίρνουμε το πάνω όριο του διαστήματος, το οποίο είναι $0.6h/a$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε - Χρήσιμες ιδιότητες της συνάρτησης δέλτα του Dirac

Η «συνάρτηση» δέλτα $\delta(z)$ του Dirac είναι μηδέν εκτός εάν $z = 0$. Επιπλέον γνωστές ιδιότητές της είναι

$$\delta(z) = \begin{cases} 0, & z \neq 0 \\ \infty, & z = 0 \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

$$\delta(kz) = \frac{1}{|k|} \delta(z) \quad (k > 0 \text{ ή } k < 0) \quad (\text{E.2})$$

$$f(z)\delta(z) = f(0)\delta(z) \quad (\text{E.3})$$

$$\int_{-b}^b f(z)\delta(z)dz = f(0) \quad (b > 0) \quad (\text{E.4})$$

όπου $f(z)$ είναι ομαλή συνάρτηση του z . Όπως φαίνεται από τη γνωστή σχέση:

$$\frac{d}{dz} H(z) = \delta(z) \quad \text{όπου} \quad H(z) = \begin{cases} 1, & z > 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

η συνάρτηση δέλτα μας επιτρέπει να παραγωγίζουμε και ασυνεχείς συναρτήσεις. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left\{ \begin{array}{l} \cos kz, \quad z > 0 \\ -\cos kz, \quad z < 0 \end{array} \right\} &= \frac{d}{dz} \{ \cos kz [2H(z) - 1] \} \\ &= -k \sin kz [2H(z) - 1] + \cos kz [2\delta(z)] = -k \sin k|z| + 2\delta(z) \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γνωστό κανόνα παραγωγίσης του γινομένου δύο συναρτήσεων, την (E.5) και την (E.3). Στη τελευταία έκφραση (E.6), ο πρώτος όρος είναι η «κλασσική» παράγωγος (που παίρνουμε με το συνηθισμένο τρόπο, για όλα τα σημεία εκτός από το σημείο ασυνέχειας). Στον πρώτο αυτόν όρο, προσθέτουμε μια συνάρτηση δέλτα πολλαπλασιασμένη με το ύψος (εδώ 2) της ασυνέχειας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] C.A. Balanis, “*Antenna Theory: Analysis and design*”, 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1997.
- [2] L. L. Tsai, “*A Numerical Solution for the Near and Far Fields of an Annular Ring of Magnetic Current*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. AP-42, no 5, September 1972.
- [3] G. Fikioris and T. T. Wu, “*On the Application of Numerical Methods to Hallén’s Equation*”, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 49, pp. 383-392, March 2001.
- [4] G. Fikioris, “*The approximate integral equation for a cylindrical scatterer has no solution*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol. 15, pp. 1153-1159, 2001.
- [5] Α. Μπακόπουλος και Ι. Χρυσοβέργης, “*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*”, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, Σεπτέμβριος 1994.
- [6] G. Fikioris and C. A. Valagiannopoulos, “*Input Admittances arising from Explicit Solutions to Integral Equations for Infinite-Length Dipole Antennas*”, Progress In Electromagnetics Research, PIER 55, p 285-306, 2005.
- [7] E. T. Whittaker and G. N Watson, “*A Course of Modern Analysis*”, 4th ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1927.
- [8] G. Fikioris, J. Lionas and C. G. Lioutas, “*The Use of the Frill Generator in Thin-Wire Integral Equations*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 51, p.1847-1854, August 2003.
- [9] Χ. Καβάλης και Π. Κωττής, “*Κεραίες-Ασύρματες Ζεύξεις*”, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2005.
- [10] E. Alanen, “*Pyramidal and Entire Domain Basis Functions in the Method of Moments*”, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, vol. 5, pp. 315-329, 1991.
- [11] D. Hanselman and B. Littlefield, “*Mastering MATLAB 5-A Comprehensive Tutorial and Reference*”, MATLAB Curriculum Series.
- [12] D. R. Wilton and C. E. Butler “*Electromagnetics I*”, Hemisphere Publishing Corporation, pp. 289-308, 1981.
- [13] E. K. Miller and F. J. Deadrick, “*Some Computational Aspects of Thin Wire Modeling*”,
- [14] S. Christiansen and R. E. Kleinman, “*On a Misconception involving Point Collocation and the Rayleigh Hypothesis*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 44, p.1309-1315, October 1996.
- [15] A. I. Kleev and A. B. Manenkov, “*The Convergence of Point-Matching Techniques*”, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 37, p.1309-1315, January 1989.
- [16] B. D. Popović, “*Polynomial approximation of current along thin symmetrical cylindrical dipoles*”, Proc. IEE, vol. 117, May 1970.
- [17] A. Yokoyama, “*Radiation Impedance of a Thin Straight Antenna Derived from Hallén’s Equation by the Circuit-Theoretical Method*”, IEICE Trans. Electron., vol. E89-C, January 2006.
- [18] M. N. O. Sadiku, “*Numerical Techniques in Electromagnetics*”, 2nd Edition, CRC Press, 2001.
- [19] A. E. Peterson, S. L. Ray and R. Mittra, “*Computational Methods for Electromagnetics*”, IEEE Press, 1998.