



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων  
Πληροφορικής

**Αναγνώριση προτύπων σε εικόνες  
αρχαιολογικών ευρημάτων**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δήμητρα Ι. Μαυρίκου

**Επιβλέπων :** Κωνσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς  
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Μάρτιος 2006





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών  
και Μηχανικών Υπολογιστών  
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων  
Πληροφορικής

**Αναγνώριση προτύπων σε εικόνες  
αρχαιολογικών ευρημάτων**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**Επιβλέπων :** Κωνσταντίνος Ν. Παπαοδυσσεύς  
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17<sup>η</sup> Μαρτίου 2006.

.....  
Κ. Παπαοδυσσεύς  
Αν. Καθηγητής

.....  
Ν. Θεοδώρου  
Καθηγητής

.....  
Η. Κουκούτσης  
Επικ. Καθηγητής

Αθήνα, Μάρτιος 2006



## Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία επιτελείται μια μελέτη αλγορίθμων προσαρμογής καμπυλών, τόσο κλασικών, όπως παραδείγματος χάρη ο Μετασχηματισμός Hough, όσο και ενός πρωτότυπου αλγορίθμου ο οποίος παρουσιάζεται στην εργασία [8]. Αναλυτικότερα, πραγματοποιήθηκε διεξοδική βιβλιογραφική μελέτη του Μετασχηματισμού Hough, αλλά και αλγορίθμων προσαρμογής καμπυλών που χρησιμοποιούν ελαχιστοποίηση των αποστάσεων με σύγκλιση. Οι αλγόριθμοι αυτοί, εν συνεχεία, εφαρμόστηκαν σε ψηφισμένες τοιχογραφίες που έχουν ανασκαφεί στο Ακρωτήρι Σαντορίνης και ανάγονται στην Ύστερη εποχή του Χαλκού γύρω στο 1650π.Χ. Η εφαρμογή είχε σκοπό την αναζήτηση συγκεκριμένων προτύπων στα περιγράμματα των τοιχογραφιών Θαλάσσιοι Νάρκισσοι και Λάτρεις, ώστε να ελεγχθεί η υπόθεση οι τοιχογραφίες αυτές σχεδιάστηκαν με χρήση προκατασκευασμένων καμπυλογράφων που αντιστοιχούν σε γεωμετρικά πρότυπα με μεγάλη ακρίβεια. Στα περιγράμματα των ιδίων τοιχογραφιών εφαρμόστηκε και η μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο [8]. Τα τελικά αποτελέσματα θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν εντυπωσιακά : Οι κλασικοί αλγόριθμοι έδειξαν προσαρμογή τεσσάρων υπερβολών και μιας γραμμικής σπείρας στα περιγράμματα των τοιχογραφιών αυτών. Ο νέος αλγόριθμος [8] έδωσε πολύ ικανοποιητικότερα αποτελέσματα, επιβεβαιώνοντας ότι το συντριπτικά μεγαλύτερο μέρος των περιγραμμάτων των τοιχογραφιών αυτών αντιστοιχεί στα πέντε ανωτέρω γεωμετρικά σχήματα, με εξαιρετική ακρίβεια (μέσο λάθος προσαρμογής μικρότερο του 1/3 του χιλιοστού). Το μεγάλο μέσο μήκος των τμημάτων των περιγραμμάτων των τοιχογραφιών που αντιστοιχούν ή σε κάποια από τις τέσσερις υπερβολές ή στην σπείρα του Αρχιμήδη, υποδηλώνει αντίστοιχα πολύ μεγάλη πιθανότητα όλες οι τοιχογραφίες να σχεδιάστηκαν με την χρήση των πέντε αντιστοίχων προκατασκευασμένων καμπυλογράφων.

Λέξεις κλειδιά: Ανίχνευση ακμών εικόνας, ανάλυση ακμών σε αρχαιολογικές εικόνες, ταίριασμα καμπυλών σε ακμές αρχαιολογικών ευρημάτων, στατιστικό ταίριασμα σχεδίων.

## Abstract

In the present thesis is carried out a study of algorithms of curves fitting, so classic, for example the Transformation of Hough, as and an original algorithm which is presented in the paper [8]. In details, extensive bibliographic study of Transformation of Hough made, and also of curves fitting which use minimization of distance with convergence. These algorithms were applied in a number of renowned wall paintings excavated at Akrotiri Santorinis and are reduced in the Late Bronze Age around 1650B.C. This application had aim to search specific models of the wall paintings Sea Daffodils and Adorants. So to examine if the hypothesis that this wall paintings were drawn with the use of prefabricated geometric curves that corresponded in geometrical models with exceptional accuracy. In the outlines of the same wall paintings was applied also the methodology that is present in the paper [8]. The final result could be characterized impressive: The classic algorithms showed fitting for four hyperbola and a linear spiral in the outlines of the wall paintings. The new algorithm [8] gave much more satisfactory results, confirming that the bigger part of this outlines correspond in five above geometrical models, with exceptional accuracy (average error of fitting less than  $1/3$  mm) The big average length of the parts of the outlines of the wall paintings that correspond or in one of the four hyperbola or in the linear spiral , indicates very big probability that all the wall paintings were drawn with the use of the five corresponding prefabricated geometric curves (stencils).

Key words: Edge detection, archaeological image edge analysis, curve fitting, statistical pattern matching.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</b> .....	9
1.1 Εισαγωγή .....	9
1.2 Ιστορικά στοιχεία .....	9
1.3 Ανασκαφές .....	10
1.4 Σημαντικότερα μνημεία και αρχιτεκτονικά ευρήματα .....	11
1.5 Οι τοιχογραφίες της Θήρας .....	13
1.6 Μελέτη των τοιχογραφιών .....	14
1.7 Σκοπός της εργασίας .....	15
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</b> .....	16
2.1 Προσδιορισμός του όρου curve fitting .....	16
2.2 Ακμές .....	16
2.2.1 Γενικά .....	16
2.2.2 Έννοια των ακμών .....	16
2.2.3 Ανίχνευση ακμών .....	17
2.2.4 Κατωφλίωση .....	21
2.3 Μετασχηματισμός Hough .....	22
2.3.1 Γενικά .....	22
2.3.2 Αναζήτηση ευθειών γραμμών .....	22
2.3.3 Παραδείγματα αναζήτησης ευθειών γραμμών με την χρήση του μετασχηματισμού Hough.....	25
2.3.4 Αναζήτηση καμπυλών .....	26
2.3.5 Συμπεράσματα .....	28
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</b> .....	30
3.1 Γενικά .....	30
3.2 Διευκρίνιση εννοιών .....	30
3.2.1 Καθορισμός της έννοιας αντικείμενο της τοιχογραφίας .....	30
3.2.2 Καθορισμός τμήματος αντικειμένου.....	31
3.2.3 Προσδιορισμός του τμήματος αντικειμένου σε όλες τις θεματικές ενότητες των τοιχογραφιών .....	32

3.3	Εξέταση αν ένα τμήμα αντικειμένου αντιστοιχεί σε ένα stencil.....	33
3.3.1	Επιλογή ενός κατάλληλου stencil για κάθε τμήμα αντικειμένου και μιας αρχικής εκτίμησης των παραμέτρων του .....	33
3.3.2	Επιβεβαίωση των stencils και βελτιστοποίηση των παραμέτρων του για κάθε τμήμα αντικειμένου .....	35
3.3.3	Προσδιορισμός του συνόλου των stencils που χρησιμοποιήθηκαν για τον σχεδιασμό των τοιχογραφιών .....	39
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b>	.....	<b>42</b>
4.1	Γενικά .....	42
4.2	Γενική περιγραφή της σπείρας .....	42
4.3	Γενική περιγραφή των κωνικών τομών .....	43
4.4	Καθορισμός των stencils που βρέθηκαν .....	43
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b>	.....	<b>46</b>
5.1	Γενικά .....	46
5.2	Αποτελέσματα εφαρμογής στην πρώτη τοιχογραφία (Εικόνα 5.1) .....	47
5.3	Αποτελέσματα εφαρμογής στην δεύτερη τοιχογραφία (Εικόνα 5.2) .....	56
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b>	.....	<b>62</b>



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## *1.1 Εισαγωγή*

Στη νότια ακτή του νησιού Θήρα, στις Κυκλάδες, βρίσκεται ένας από τους σημαντικότερους αρχαιολογικούς χώρους της Ελλάδας, το Ακρωτήρι. Πρόκειται για έναν προϊστορικό οικισμό ο οποίος ανακαλύφθηκε θαμμένος κάτω από την τέφρα του ηφαιστείου.

## *1.2 Ιστορικά στοιχεία*

Οι πρώτες εγκαταστάσεις στο Ακρωτήρι χρονολογούνται από την Ύστερη Νεολιθική Εποχή, τουλάχιστον από την 4<sup>η</sup> χιλιετία π.Χ. Κατά την Πρώιμη Εποχή του Χαλκού, 3<sup>η</sup> χιλιετία π.Χ., υπήρχε οικισμός στο Ακρωτήρι. Κατά την Μέση και την Πρώιμη Ύστερη Εποχή του Χαλκού, 20<sup>ος</sup> -17<sup>ος</sup> αιώνας π.Χ., ο οικισμός αυτός επεκτάθηκε και αναδείχθηκε σε ένα από τα σημαντικότερα αστικά κέντρα και λιμάνια του Αιγαίου.[1] Αν λάβουμε υπόψη μας και την μεγάλη του έκταση, την άριστη πολεοδομική του οργάνωση, το αποχετευτικό του δίκτυο, τα περίτεχνα πολυόροφα κτίρια με τις έξοχες τοιχογραφίες, την πλούσια επίπλωση και οικοσκευή καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η περιοχή είχε μεγάλη ανάπτυξη.

Επιπλέον, τα διάφορα προϊόντα που βρέθηκαν μέσα στα κτίρια δείχνουν ότι το Ακρωτήρι διατηρούσε στενές σχέσεις με την Μινωική Κρήτη, καθώς επίσης βρισκόταν και σε επικοινωνία με την Ηπειρωτική Ελλάδα, τα Δωδεκάνησα, την Κύπρο, τη Συρία και την Αίγυπτο.

Υπολογίζεται ότι ο οικισμός εγκαταλείφθηκε απότομα στα τέλη του 17<sup>ου</sup> αιώνα π.Χ εξαιτίας των ισχυρών σεισμών. Ακολούθησε η έκρηξη του ηφαιστείου. Τα ηφαιστειακά υλικά που κάλυψαν την πόλη του Ακρωτηρίου και ολόκληρο το νησί προστάτευσαν έως σήμερα τα κτίρια και το περιεχόμενό τους, όπως έγινε και στην Πομπηία της Ιταλίας.

### 1.3 Ανασκαφές

Τα πρώτα στοιχεία για την κατοίκηση του Ακρωτηρίου κατά την προϊστορική εποχή άρχισαν να έρχονται στο φως από το δεύτερο ήμισυ του 19<sup>ου</sup> αιώνα, ωστόσο οι πρώτες συστηματικές ανασκαφές ξεκίνησαν εκεί το 1967 από τον καθηγητή Σπ. Μαρινάτο, οι οποίες μετά το θάνατό του συνεχίστηκαν υπό την επίβλεψη του καθηγητή Χρ. Ντούμα.

Ο συνοικισμός αυτός που ανακαλύφθηκε είναι ένας από τους καλύτερα διατηρημένους αρχαιολογικούς χώρους. Επειδή ήταν σκεπασμένος με ένα παχύ στρώμα ηφαιστειακής τέφρας διατηρήθηκε θαυμάσια και αποτελεί μια από τις κυριότερες μαρτυρίες της αστικής οργάνωσης και οικιακής αρχιτεκτονικής.

Το πολεοδομικό σύστημα του οικισμού χαρακτηρίζεται από πυκνή διάταξη, ορθογωνικό σχεδόν δίκτυο πλακόστρωτων δρόμων με αποχετευτικούς αγωγούς, καθώς και κτίρια με δύο ή τρεις ορόφους χωρίς αυλή ή φωταγωγούς.



Ορισμένα ανεξάρτητα οικοδομήματα, ιδιαίτερα επιμελημένης κατασκευής, από πελεκημένους λίθους, γνωστά σήμερα με την ονομασία Ξεστή, είχαν πιθανότατα μια ειδική λειτουργία διοικητική ή θρησκευτική. Τα υπόλοιπα κτίρια έχουν ορισμένα κοινά χαρακτηριστικά στοιχεία: πρόσοψη οδοντωτή, μία μοναδική είσοδο από το δρόμο σε μια γωνιά του κτιρίου, κεντρική σκάλα στο προθάλαμο, πολλές δευτερεύουσες σκάλες, μικρά δωμάτια στο ισόγειο τα οποία χρησίμευαν για αποθήκες ή εργαστήρια και τέλος χώρους διαμονής πιο ευρύχωρους στον όροφο. [1]

Τα πιο εντυπωσιακά όμως ευρήματα, που έκανε την αποκάλυψη του Ακρωτηρίου παγκοσμίως γνωστή, ήταν η παρουσία, σε όλα σχεδόν τα κτίρια του οικισμού, τοιχογραφιών. Όλα τα κτίρια που έχουν ερευνηθεί μέχρι στιγμής, παρουσιάζουν άριστες ποιοτικά τοιχογραφίες, οι οποίες στόλιζαν κατά κύριο λόγο το δεύτερο όροφο των κτιρίων, και σώζονται σε πολύ καλή κατάσταση. Αυτό είναι ένα φαινόμενο μοναδικό στην

προϊστορία του Αιγαίου, καθώς δίνεται η δυνατότητα στους ερευνητές να μελετήσουν την εποχή αυτή από τα ίδια τα εικονιστικά ντοκουμέντα.

#### **1.4 Σημαντικότερα μνημεία και αρχιτεκτονικά ευρήματα**

*Ξεστή 3:* Πρόκειται για ένα μεγάλο τριώροφο κτίριο με δεκατέσσερα δωμάτια σε κάθε όροφο. Πολλά από τα δωμάτια συνδέονται με πολύθυρα και είναι τοιχογραφημένα. Σε ένα από αυτά υπάρχει «δεξαμενή καθαμών», χώρος που θεωρείται ιερός. Οι πιο ενδιαφέρουσες από τις τοιχογραφίες είναι εκείνες των Κροκοσυλλεκτριών και του Βωμού. Από τις αρχιτεκτονικές ιδιορρυθμίες του κτιρίου και από τα θέματα των τοιχογραφιών συμπεραίνουμε ότι στην Ξεστή 3 πρέπει να τελούνταν κάποιες τελετές.

*Ξεστή 4:* Η Ξεστή 4 είναι το μεγαλύτερο οικοδόμημα που ανασκάφτηκε ως τώρα. Τα θραύσματα των τοιχογραφιών που ήλθαν στο φως ως σήμερα ανήκουν σε μια σύνθεση που στόλιζε το κλιμακοστάσιο της εισόδου και απεικονίζουν πομπή δωροφόρων ανδρών σε φυσικό μέγεθος να ανεβαίνουν σε βαθμίδες κλίμακας. Πρόκειται πιθανότητα για δημόσιο κτίριο όπως αποδεικνύουν το ασυνήθιστα μεγάλο του μέγεθος, η εντυπωσιακή εξωτερική του εμφάνιση και ο τοιχογραφικός του διάκοσμος.

*Τομέας Β:* Περιλαμβάνει πιθανότητα δύο ξεχωριστά κτίρια προσκολλημένα το ένα στο άλλο. Από τα κτίρια αυτά προήλθαν οι τοιχογραφίες των Αντιλοπών, των Πυγμάχων και των Πιθήκων. Η τελευταία απεικονίζει μια σύνθεση με πιθήκους να σκαρφαλώνουν σε βράχους στις όχθες ενός ποταμού.



*Δυτική οικία:* Είναι ένα σχετικά μικρό αλλά καλά οργανωμένο κτίριο. Στο ισόγειο υπάρχουν αποθήκες τροφίμων, εργαστηριακοί χώροι, μαγειρείο και εγκατάσταση μύλου. Ο πρώτος όροφος καταλαμβάνεται από ένα ευρύχωρο δωμάτιο, μια αποθήκη σκευών και τροφίμων, ένα αποχωρητήριο και από δύο συνεχόμενους τοιχογραφημένους χώρους. Από αυτούς, ο ένας διακοσμείται με τις δύο τοιχογραφίες των Ψαράδων, την τοιχογραφία της Ιέρειας και τη διάσημη μικρογραφική ζωφόρο του Στόλου που περιτρέχει τους τέσσερις τοίχους του. Ενώ ο άλλος χώρος διακοσμείται με τις οκτώ τοιχογραφίες των Θαλαμίσκων Πλοίων. Πρόκειται για μία λεπτομέρεια της μικρογραφικής ζωφόρου που επαναλαμβάνεται οκτώ φορές με μικρές παραλλαγές στους τοίχους του.



*Συγκρότημα Δ:* Αποτελείται από τέσσερα κτίρια. Ένα δωμάτιο του ανατολικού κτιρίου βρέθηκε διακοσμημένο με την τοιχογραφία της Άνοιξης. Εδώ ο ζωγράφος απέδωσε με ιδιαίτερη ευαισθησία ένα βραχώδες τοπίο με ανθισμένους ερυθρούς κρίνους ανάμεσα στους οποίους πετούν χελιδόνια.

*Οικία των Γυναικών:* Πρόκειται για ένα μεγάλο διώροφο οικοδόμημα, του οποίου το πιο ενδιαφέρον αρχιτεκτονικό στοιχείο είναι ο φωταγωγός στο κέντρο του. Στο κτίριο αυτό βρέθηκε η τοιχογραφία των Γυναικών και των Παπύρων στην οποία οφείλει και το όνομά του. [1]

### 1.5 Οι Τοιχογραφίες της Θήρας

Οι τοιχογραφίες της Θήρας, χάρη στην άριστη συντήρησή τους, έχουν αναγνωρισθεί ως ορόσημο στην ιστορία της παγκόσμιας τέχνης και έχουν μελετηθεί εκτενώς. Επιπλέον, ως μνημειακά έργα τέχνης, ήταν οι καλύτεροι αντιπρόσωποι για τη μετάδοση ενός αριθμού μηνυμάτων : στα ιδιωτικά σπίτια ίσως ενεργούσαν ως στοιχεία γοήτρου, γεγονός που ενίσχυε την κοινωνική θέση των χρηστών τους, ενώ στα δημόσια κτίρια ίσως εξυπηρετούσαν ιδεολογικούς σκοπούς (τελετουργικά, θρησκεία κλπ).

Χάρη στο απέραντο θεματικό ρεπερτόριό τους, έχουμε την δυνατότητα σήμερα να γνωρίζουμε τον πολιτισμό της εποχής, αφού τα θέματά τους τα αντλούσαν από την φύση και την καθημερινή ζωή, χωρίς να αποκλείονται και κάποιες αναφορές σε τελετουργίες, όπως στην τοιχογραφία της νεαρής «ιέρειας». Γενικά οι τοιχογραφίες θεωρούνται πλούσια πηγή πληροφοριών για την πανίδα και τη χλωρίδα, για τις κατασκευές (σκάφη, κτίρια), για διάφορες λεπτομέρειες όπως το ντύσιμο και τη κόμμωση και για τις καθημερινές δραστηριότητες.

Τα κύρια χαρακτηριστικά των τοιχογραφιών της Θήρας είναι η ελευθερία της έκφρασης και του χρώματος. Στις περισσότερες τοιχογραφίες συναντάμε την απεικόνιση ενός κεντρικού θέματος, όπως παραδείγματος χάρι ο ψαράς, η πυγμαχία και οι βράχοι με τα κρίνα. Ωστόσο δεν λείπουν και μεγαλύτερες συνθέσεις όπου εικονίζονται ολόκληρες πολιτείες, η θάλασσα, τα καράβια, δελφίνια και άνθρωποι.



Τα χρώματα που χρησιμοποίησαν οι καλλιτέχνες ποικίλουν. Έτσι έχουμε μορφές με γαλάζια μαλλιά και κόκκινα κορμιά, κόκκινους, κίτρινους και γαλάζιους βράχους και γαλάζιους πίθηκους. Στο σύνολό της η χρωματική κλίμακα περιλαμβάνει τα παραπάνω χρώματα σε διάφορες αποχρώσεις, ενώ συμπληρώνεται με την χρήση του μαύρου.[2]

## **1.6 Μελέτη των τοιχογραφιών**

Οι μεγάλες ποσότητες τοιχογραφιών που αποκαλύφθηκαν γενικά στα ερείπια του Ακρωτηρίου, καθώς επίσης και οι τυποποιημένες μορφές στις οποίες ορισμένες λεπτομέρειες δόθηκαν, οδήγησαν τους αρχαιολόγους στο να τις εξετάσουν συστηματικότερα. Οι αρχαιολόγοι παρατήρησαν ότι σε αρκετές τοιχογραφίες υπάρχουν ορισμένες επαναλήψεις στις ακμές των διάφορων τοιχογραφιών αλλά ο βαθύτερος λόγος για αυτές τις επαναλήψεις ήταν εντελώς άγνωστος, καθώς επίσης και η πραγματική μέθοδος με την οποία αυτές οι τοιχογραφίες σχεδιάστηκαν. Φαίνεται ότι η μέθοδος κατασκευής των τοιχογραφιών είναι μοναδική στην ιστορία των τεχνών αφού αυτές φανερώνουν μια υψηλή ικανότητα σχεδιασμού, καθώς επίσης και προηγμένη αίσθηση της γεωμετρίας και της τεχνολογίας.

Η άποψη αυτή ενισχύεται και από την διαπίστωση ότι αυτά τα έργα ζωγραφικής είναι νωπογραφίες και έχουν δημιουργηθεί με χρώματα τα οποία τοποθετούνται επάνω σε κονίαμα τοίχου όσο ακόμη αυτός είναι νωπός. Βασικός όμως παράγοντας της τεχνικής της νωπογραφίας, για να πάρουμε καλά αποτελέσματα είναι η ικανότητα της πολύ γρήγορης και σίγουρης ζωγραφικής εκτελέσεως, αφού σε σύγκριση με άλλες ζωγραφικές τέχνες η παρούσα δεν επιτρέπει δισταγμό και διορθώσεις. Αυτό μας οδηγεί στο να υποθέσουμε ότι ο καλλιτέχνης, για να μπορέσει να ανταποκριθεί σε αυτήν την τεχνική και να χαράξει με όση μεγαλύτερη ακρίβεια μπορούσε τις ιδιαίτερα σταθερές γραμμές των περιγραμμάτων των αντικειμένων της συνθέσεώς του και σε περιορισμένο χρόνο, θα έπρεπε να είχε στην διάθεσή του έναν αριθμό πολύ καλά προκατασκευασμένων καμπυλών που αντιστοιχούν σε γεωμετρικά αρχέτυπα. Αυτές οι παρατηρήσεις μας κάνουν να υποθέσουμε ότι πιθανώς κάποια γεωμετρικά πρότυπα (stencils) μπορεί να χρησιμοποιήθηκαν τουλάχιστον για τον σχεδιασμό ορισμένων καμπυλών.

Ύστερα από την εκτενή ανάλυση των σχεδίων των συνθέσεων των εσωτερικών τοίχων του Ξεστή 3 παρατηρήσαμε και αποδείξαμε ότι ένα μεγάλο σύνολο των τοιχογραφιών δημιουργήθηκαν με την χρήση προκατασκευασμένων stencils που έχουν την μορφή των γραμμικών σπειρών και των κωνικών τομών (παραβολών, ελλείψεων και υπερβολών). Με βάση την απόδειξη αυτή συμπεραίνουμε ότι οι καλλιτέχνες των τοιχογραφιών του 1600 π.Χ. της Θήρας είχαν κάποια γνώση της γεωμετρίας. Αυτό είναι ιδιαίτερα εντυπωσιακό, αφού αν λάβουμε υπόψη μας ότι η πρώτη αναφορά στις κωνικές τομές γίνεται περίπου το 300 π.Χ. από τον Ευκλείδη και ότι η πρώτη γνωστή σπείρα είναι αυτή του Αρχιμήδη κατά

το 250 π.Χ. συμπεραίνουμε ότι ήδη πριν 3600 έτη οι άνθρωποι γνώριζαν πως να κατασκευάσουν γεωμετρικά πρωτότυπα.

### ***1.7 Σκοπός της εργασίας***

Ο σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η προσπάθεια να δείξουμε ότι ένα σύνολο από τις τοιχογραφίες της Θήρας δεν είναι σχεδιασμένες με το χέρι αλλά έχουν δημιουργηθεί από την χρήση μερικών προκατασκευασμένων γεωμετρικών προτύπων. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού χρησιμοποιήθηκαν δυο αλγόριθμοι εύρεσης καμπυλών, ο μετασχηματισμός Hough και ένας πρωτότυπος αλγόριθμος εύρεσης καμπυλών σε εικόνες (κεφάλαια 2,3 και 4) και τα αποτελέσματα της εφαρμογής των αλγορίθμων αυτών δίνονται στο κεφάλαιο 5.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### *2.1 Προσδιορισμός του όρου curve fitting*

Με τον όρο curve fitting αναφερόμαστε στην τεχνική που εφαρμόζεται για την εύρεση μιας καμπύλης στις ακμές ενός αντικειμένου μιας ψηφιακή εικόνας. Η εύρεση της θέσης και ο προσδιορισμός της μορφής των γραμμών και των ακμών στις ψηφιακές εικόνες είναι ένας από τους σημαντικότερους τομείς της ψηφιακής επεξεργασίας εικόνων. Πολλές εφαρμογές στο χώρο της αυτόματης αναγνώρισης προτύπων, καθώς και άλλων πεδίων όπως της ρομποτικής, βασίζονται στην χρήση μεθόδων αυτής της κατηγορίας.

Σήμερα πολλές είναι οι τεχνικές που έχουν αναπτυχθεί για τον προσδιορισμό της μορφής των γραμμών. Ο μετασχηματισμός Hough αποτελεί μια από τις πιο γνωστές τεχνικές και χρησιμοποιείται ευρέως για τον προσδιορισμό σε ψηφιακές εικόνες ευθύγραμμων τμημάτων και γενικά παραμετρικά εκφραζόμενων καμπυλών.

### *2.2 Ακμές*

#### *2.2.1 Γενικά*

Οι ακμές αποτελούν βασικό χαρακτηριστικό γνώρισμα των εικόνων. Περιέχουν χρήσιμες πληροφορίες για τα όρια των αντικειμένων της εικόνας, τα οποία μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυσή της, για την αναγνώριση και τη περιγραφή του αντικειμένου και για τις εφαρμογές φίλτρων σε εικόνες. Παρά το γεγονός ότι οι ακμές είναι πολύ σημαντικές στην επεξεργασία και στην ανάλυση των ψηφιακών εικόνων, δεν υπάρχει ακόμα κάποιος ακριβής και ευρέως αποδεκτός μαθηματικός ορισμός των ακμών. Αυτό εξηγείται από την πολυπλοκότητα των περιεχομένων της εικόνας και από την παρέμβαση του οπτικού συστήματος στην ανθρώπινη αντίληψη για τα όρια των αντικειμένων.

#### *2.2.2 Έννοια των ακμών*

Αν υποθέσουμε ότι μια εικόνα αποτελείται από διάφορα αντικείμενα που βρίσκονται σε κάποιο φόντο και χωρίζονται μεταξύ τους με ασυνέχειες στην τιμή της φωτεινής έντασης, τότε το σημείο όπου η μεταβολή της φωτεινής έντασης είναι τοπικά μέγιστη ορίζεται ως



ακμή. Το σύνολο των συνδεόμενων σημείων ακμής αποτελεί το περίγραμμα ενός αντικειμένου. Σε κάθε σημείο του περιγράμματος μπορεί να ορισθεί ο προσανατολισμός του σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου της εικόνας. Η φωτεινή ένταση παρουσιάζει τη μέγιστη μεταβολή της στην κάθετη στο περίγραμμα κατεύθυνση.

### 2.2.3 Ανίχνευση ακμών

Η ανίχνευση ακμών αποτελεί το πρώτο στάδιο εφαρμογή της επεξεργασίας εικόνας. Η ανίχνευση μπορεί να γίνει είτε με την βοήθεια του διανύσματος των δύο πρώτων μερικών παραγώγων της φωτεινής έντασης, δηλαδή της κλίσης, είτε με την βοήθεια του αθροίσματος των δύο δεύτερων μερικών παραγώγων της φωτεινής έντασης, δηλαδή με τον Λαπλασιανό τελεστή. Ο τελεστής αυτός είναι ισοτροπικός. Αυτό σημαίνει ότι η απόκρισή του είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό του περιγράμματος. Η ιδιότητα αυτή είναι σημαντική για την ακρίβεια του εντοπισμού των περιγραμμάτων.

Μερικές από τις μεθόδους ανίχνευσης ακμών παρουσιάζονται παρακάτω:

#### α. Μέθοδος της κλίσης

Το διάνυσμα της κλίσης της φωτεινής έντασης  $I(x, y)$ , έχει ως συνιστώσες τις δύο πρώτες μερικές παραγώγους:

$$\nabla I(x, y) = [ \partial I / \partial x \quad \partial I / \partial y ]^T = [ I_x \quad I_y ]^T \quad (2.1)$$

Για την ανίχνευση των ακμών χρησιμοποιείται το μέτρο του διανύσματος της κλίσης:

$$\| \nabla I(x, y) \| = \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \quad (2.2)$$

Αποδεικνύεται ότι το μέτρο του διανύσματος της κλίσης ικανοποιεί την ιδιότητα της ισοτροπικότητας. Η κατεύθυνση του διανύσματος της κλίσης δίνεται από την γωνία:

$$\theta = \arctan \frac{I_y}{I_x} \quad (2.3)$$

και η κλίση της φωτεινής έντασης σε μια δοσμένη κατεύθυνση  $\varphi$  είναι:

$$I_\varphi = I_x \cos \varphi + I_y \sin \varphi \quad (2.4)$$

Η κλίση της φωτεινής έντασης είναι μέγιστη στην κατεύθυνση του διανύσματος της κλίσης και μηδενική στην κάθετη σε αυτήν κατεύθυνση. Σημεία ακμής ανιχνεύονται ακριβώς στην κατεύθυνση που η κλίση είναι μέγιστη, οπότε είναι ίση με το μέτρο του

διανύσματος  $\|\nabla I(x,y)\|$ . Τα σημεία ακμής ανιχνεύονται ως τα τοπικά μέγιστα του μέτρου του διανύσματος της κλίσης και βρίσκονται στην κατεύθυνση αυτού του διανύσματος.

Για την ανίχνευση των ακμών υπάρχουν αρκετοί γνωστοί τελεστές που υλοποιούν τις εξισώσεις του μέτρου (σχέση (2.2)) και της φάσης (σχέση (2.3)), συνελισσόμενοι με την εικόνα. Δύο από αυτούς τους τελεστές είναι ο τελεστής Prewitt και ο τελεστής Sobel. Αυτοί μπορούν να εκφραστούν με την μορφή μητρώων συνέλιξης ή μάσκων και είναι οι ακόλουθοι:

$$\text{Τελεστής Prewitt : } U_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\text{Τελεστής Sobel : } U_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad U_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Αφού υπολογίσουμε το μέτρο της παραγώγου  $\|\nabla I(x,y)\|$ , συγκρίνεται με κάποιο κριτήριο (κατώφλι) και το αποτέλεσμα της σύγκρισης προσδιορίζει αν το σημείο  $(x,y)$  ανήκει ή όχι σε κάποια ακμή.

Όταν το επίπεδο του κατωφλίου είναι υψηλό, γίνεται μια συντηρητική ανίχνευση των απότομων μεταβολών της εικόνας με αποτέλεσμα να ελαττώνεται η επίδραση του θορύβου και ταυτόχρονα όμως να αμελούνται μικρές λεπτομέρειες των ακμών οι οποίες γίνονται λεπτότερες. Αντίθετα, όταν το επίπεδο του κατωφλίου είναι χαμηλό, οι ακμές διατηρούν τις λεπτομέρειές τους αλλά παραμένει ταυτόχρονα και η επίδραση του θορύβου.

### β. Μέθοδος δεύτερων παραγώγων

Οι ακμές μπορούν να θεωρηθούν ως τοπικά μέγιστα της πρώτης παραγώγου της εικόνας. Οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο μηδενισμός των τιμών του αθροίσματος των δύο δεύτερων παραγώγων θα δίνει τα σημεία των ακμών. Ο τελεστής που μας δίνει το άθροισμα αυτό είναι ο Λαπλασιανός και ορίζεται ως εξής:

$$\nabla^2 I(x,y) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

Ο τελεστής αυτός είναι ιστροπικός όταν ισχύει  $I_{xy} = I_{yx}$ . Η μορφή της μάσκας του τελεστή αυτού είναι η ακόλουθη:

$$\text{Τελεστής Laplace : } U_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Τα μειονέκτημα του Λαπλασιανού τελεστή είναι ότι δεν δίνει καμία πληροφορία για κατεύθυνση των ακμών και ότι ενισχύει το θόρυβο περισσότερο από ότι οι τελεστές που χρησιμοποιούν την πρώτη παράγωγο. Για τη μείωση του θορύβου χρησιμοποιείται συνήθως πριν από τον Λαπλασιανό τελεστή κάποιο φίλτρο εξομάλυνσης.

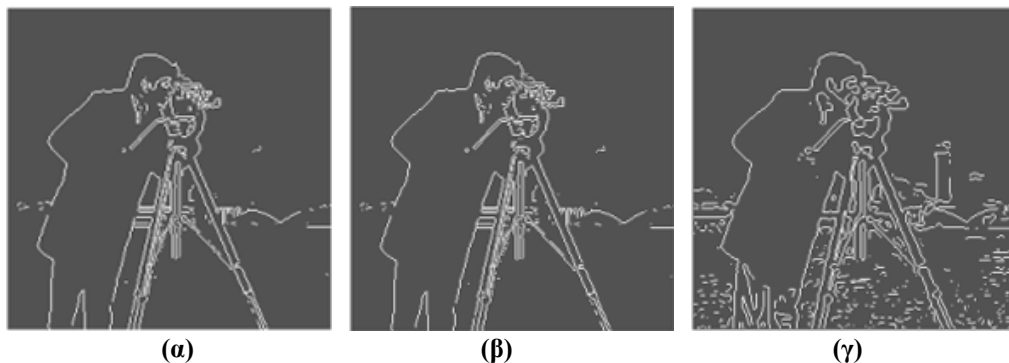
### Παραδείγματα ανίχνευσης ακμών

Στις παρακάτω εικόνες (Εικόνες 2.1, 2.3 και 2.5) για την ανίχνευση των ακμών τους, χρησιμοποιήσαμε τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους ανίχνευσης (μέθοδος κλίσης και μέθοδος των δεύτερων παραγώγων).

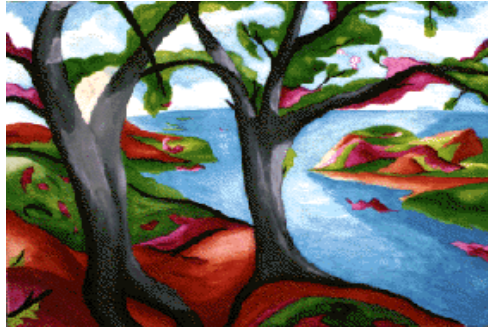
Τα αποτελέσματα που πήραμε από την εφαρμογή των τελεστών Prewitt, Sobel και Laplace φαίνονται στις εικόνες 2.2, 2.4 και 2.6.



**Εικόνα 2.1:** Αρχική εικόνα



**Εικόνα 2.2 :** (α) Μέθοδος κλίσης τελεστής Prewitt, (β) Μέθοδος κλίσης τελεστής Sobel  
(γ) Μέθοδος δεύτερων παραγώγων τελεστής Laplace



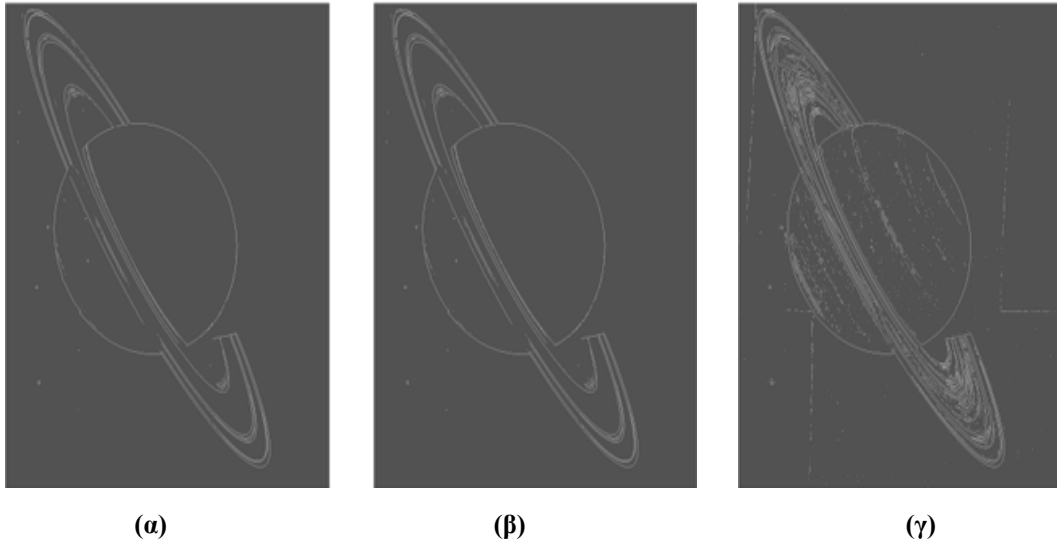
Εικόνα 2.3: Αρχική εικόνα



(α) Μέθοδος κλίσης τελεστής Prewitt, (β) Μέθοδος κλίσης τελεστής Sobel  
(γ) Μέθοδος δεύτερων παραγώγων τελεστής Laplace



Εικόνα 2.5: Αρχική εικόνα



**Εικόνα 2.6 :** (α) Μέθοδος κλίσης τελεστής Prewitt, (β) Μέθοδος κλίσης τελεστής Sobel  
(γ) Μέθοδος δευτέρων παραγώγων τελεστής Laplace

#### 2.2.4 Κατωφλίωση

Οι περισσότεροι μέθοδοι ανίχνευσης ακμών χρησιμοποιούν κάποιο κριτήριο για να προσδιορίσουν αν ένα σημείο ανήκει ή όχι σε μια ακμή. Το κριτήριο αυτό είναι ο προσδιορισμός ενός κατωφλίου (Threshold).

Η εφαρμογή των τεχνικών κατωφλίου σε μια ψηφιακή εικόνα (σε απόχρωση του γκρι) βασίζεται στην υπόθεση ότι τα pixels ενός αντικειμένου της εικόνας μπορούν να διαχωριστούν από αυτά του φόντου (background) με βάση τις τιμές των αποχρώσεών τους. Για τον προσδιορισμό των δύο κύριων αποχρώσεων του γκρι, με τη χρήση ενός κατωφλίου η εικόνα μετατρέπεται σε εικόνα δύο κύριων αποχρώσεων με τη χρήση μιας μοναδικής τιμής κατωφλίου για όλα τα pixels της. Η τεχνική αυτή χρησιμοποιείται για την μετατροπή μιας εικόνας σε δυαδική. Συνήθως οι μέθοδοι ενός απόλυτου κατωφλίου πρέπει να εφαρμόζονται σε εκείνες τις εικόνες στις οποίες είναι ξεκάθαρη η διαφορά μεταξύ των αποχρώσεων του αντικειμένου με το φόντο.[3]

Αν προσδιορίσουμε με μια κατάλληλη μέθοδο την τιμή του κατωφλίου  $T$ , τότε μπορούμε να διαχωρίσουμε την εικόνα και να την μετατρέψουμε σε δυαδική σύμφωνα με την σχέση:

$$E(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{αν } e(m,n) \geq T \\ 0, & \text{αν } e(m,n) < T \end{cases} \quad (2.9)$$

όπου  $(m,n)$  οι συντεταγμένες του pixel  $e(m,n)$ . Οπότε στην τελική δυαδική εικόνα τα pixels του αντικειμένου θα έχουν την τιμή 1 ενώ τα pixels του φόντου την τιμή 0.

Η διαδικασία αυτή αναφέρεται στις μεθόδους του απολύτου κατώφλιου. Αν όμως η εικόνα περιέχει αντικείμενα με διαφορετικές φωτεινότητες μεταξύ τους, τότε σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να ορίσουμε περισσότερα από ένα κατώφλια. Ο αριθμός των κατωφλίων εξαρτάται από την φωτεινότητα. Αν υπάρχουν  $n$  διαφορετικές τιμές φωτεινότητας τότε ο αριθμός των κατωφλίων θα είναι  $n-1$ . Και αν  $T_i, i=1,2,\dots,n-1$  είναι τα κατώφλια, τότε η τελική εικόνα μετά την κατωφλίωση προκύπτει από την σχέση:

$$E(m,n) = \begin{cases} L_1, & \alpha\nu e(m,n) \leq T_1 \\ L_2, & \alpha\nu T_1 \leq e(m,n) \leq T_2 \\ \vdots & \\ L_{n-1}, & \alpha\nu e(m,n) \geq T_{n-1} \end{cases} \quad (2.10)$$

## 2.3 Μετασχηματισμός Hough

### 2.3.1 Γενικά

Ο μετασχηματισμός Hough είναι μια μέθοδος ανίχνευσης ευθειών γραμμών και καμπυλών σε εικόνες απόχρωσης του γκρι.[4] Στην μέθοδο αυτή εισάγεται αρχικά η μορφή των καμπυλών που αναζητούνται και στην συνέχεια η μέθοδος παράγει την ομάδα των καμπυλών αυτής της μορφής που εμφανίζονται στην εικόνα που επεξεργαζόμαστε. Ο μετασχηματισμός Hough αναζητεί για μέγιστα στον παραμετρικό χώρο. Επομένως συμπεραίνουμε ότι κάθε σχήμα το οποίο μπορεί να περιγραφεί παραμετρικά είναι κατάλληλο για τεχνικές που χρησιμοποιούν τον μετασχηματισμό αυτόν.

### 2.3.2 Αναζήτηση ευθειών γραμμών

Ας υποθέσουμε ότι αναζητούμε ευθείες γραμμές σε μια δυαδική εικόνα η οποία έχει μέγεθος  $N = N_1 \times N_2$  pixels. Η πιο απλή προσέγγιση είναι να βρούμε όλες τις πιθανές γραμμές οι οποίες καθορίζονται από ένα ζευγάρι σημείων (pixels) και να ελέγξουμε αν κάποιο υποσύνολο από pixels της δυαδικής εικόνας ανήκει σε αυτές τις γραμμές. Ο μέγιστος αριθμός των πιθανών αυτών γραμμών είναι  $N(N-1)/2$ . Στην χειρότερη περίπτωση θα πρέπει κάθε pixel της εικόνας να ελεγχθεί για το αν ανήκει σε κάποια γραμμή. Η

υπολογιστική πολυπλοκότητα στην περίπτωση αυτή, της απλής μεθόδου είναι της τάξης  $O(N^3)$ , η οποία είναι απαγορευτική για μια πρακτική εφαρμογή. [5]

Ο μετασχηματισμός Hough χρησιμοποιεί παραμετρική περιγραφή απλών γεωμετρικών σχημάτων (καμπυλών) με σκοπό να ελαττώσει την υπολογιστική πολυπλοκότητα της αναζήτησής τους σε μια δυαδική εικόνα. Το βασικό του χαρακτηριστικό, για τον προσδιορισμό ευθειών, είναι η σχέση σημείου-ευθείας. Ένα οποιοδήποτε σημείο μπορεί να οριστεί είτε από ένα ζεύγος συντεταγμένων, είτε ως το σημείο τομής ενός συνόλου ευθειών οι οποίες διέρχονται από αυτό. Η βασική ιδέα του μετασχηματισμού γίνεται φανερή αν θεωρήσουμε ένα σύνολο συνευθειακών σημείων και εξετάσουμε τις ευθείες που διέρχονται από καθένα από αυτά τα σημεία. Τότε θα παρατηρήσουμε ότι από όλες τις ευθείες υπάρχει μόνο μία που διέρχεται από όλα τα σημεία. Η δυαδικότητα σημείου-ευθείας ισχύει και αντιστρόφως.

Για την αναζήτηση ευθειών γραμμών χρησιμοποιείται η ακόλουθη εξίσωση:

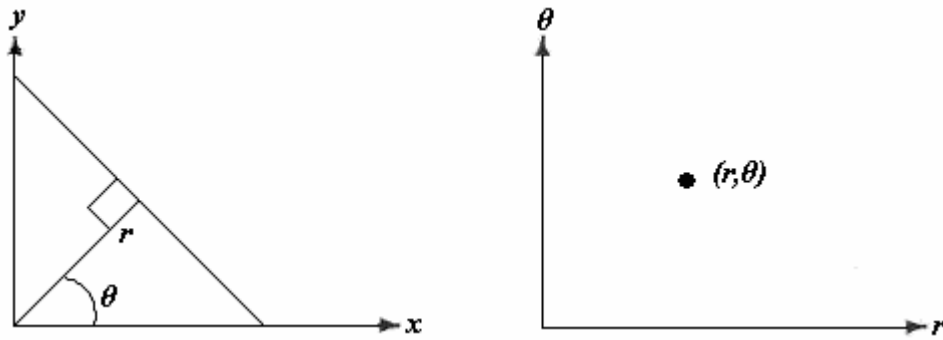
$$y = ax + b \quad (2.11)$$

Κάθε σημείο του επιπέδου  $[x-y]$  αντιστοιχεί σε μια ευθεία στο παραμετρικό επίπεδο  $[a-b]$  το οποίο προκύπτει από όλα τα ζεύγη  $(a, b)$  που ικανοποιούν την σχέση (2.11). Ο προσδιορισμός των συνευθειακών σημείων του επιπέδου  $[x-y]$  πραγματοποιείται ανιχνεύοντας τα σημεία του επιπέδου  $[a-b]$  από τα οποία διέρχονται περισσότερες από μία ευθείες.

Στην σχέση όμως (2.11) τα όρια των τιμών  $(a, b)$  είναι μη πεπερασμένα. Αυτό σημαίνει ότι για να μπορέσουμε να προσδιορίσουμε στο επίπεδο  $[a-b]$  τις ευθείες του επιπέδου  $[x-y]$  που είναι παράλληλες στον άξονα  $y$  απαιτούνται άπειρα ζεύγη τιμών  $(a, b)$ . Το πρόβλημα αυτό λύθηκε με την προσέγγιση των Duda και Hart [6] οι οποίοι αντικατέστησαν το επίπεδο  $[a-b]$  με το επίπεδο  $[\theta-r]$  των πολικών παραμέτρων μιας ευθείας. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί της εξίσωσης (2.11) η σχέση :

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.12)$$

Η παραπάνω σχέση περιγράφει μια γραμμή με προσανατολισμό  $\theta$  σε απόσταση  $r$  από την αρχή των αξόνων, η οποία φαίνεται και στο Σχήμα 2.1



Σχήμα 2.1 : Πολική αναπαράσταση ευθείας γραμμής

Μια ευθεία η οποία διέρχεται από ένα σημείο  $(x_1, y_1)$  αναπαριστά μια ημιτονοειδή καμπύλη  $r = x_1 \cos \theta + y_1 \sin \theta$  στο παραμετρικό επίπεδο  $[\theta-r]$ . Συνευθειακά σημεία  $(x_i, y_i)$  μιας δυαδικής εικόνας αντιστοιχούν σε διατομή μιας ημιτονοειδούς καμπύλης στο επίπεδο  $[\theta-r]$ . Το εύρος των παραμέτρων  $(\theta-r)$  δίνεται από τις σχέσεις:

$$-\sqrt{N_1^2 + N_2^2} \leq r \leq \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \quad (2.13.α)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (2.13.β)$$

για δυαδική εικόνα μεγέθους  $N_1 \times N_2$ .

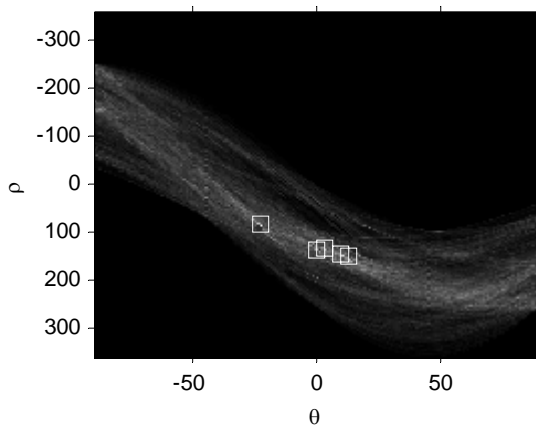
Αν χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο ανίχνευσης ακμών η οποία μας δίνει και την διεύθυνσή τους  $\varphi(x,y)$ , όπως η μέθοδος που χρησιμοποιεί τον τελεστή Sobel, τότε μπορούμε να διευκολύνουμε τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Hough. Έτσι λοιπόν, η χρήση της κλίσης των ακμών μπορεί να περιορίσει την πολυπλοκότητα του μετασχηματισμού μας στην τάξη  $O(N)$ . Ωστόσο θα πρέπει να φροντίσουμε να αποφευχθεί η χρήση θορυβωδών εκτιμήσεων της διεύθυνσης ακμής, αφού κάτι τέτοιο μειώνει την απόδοση του αλγορίθμου.



### 2.3.3 Παραδείγματα αναζήτησης ευθειών γραμμών με την χρήση του μετασχηματισμού Hough

Στο σημείο αυτό εφαρμόσαμε τον μετασχηματισμό Hough στις εικόνες 2.1, 2.3 και 2.5 με σκοπό την ανίχνευση σε αυτές ευθείες γραμμές καθώς επίσης και για να ελέγξουμε κατά πόσο ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Για την υλοποίηση του μετασχηματισμού Hough χρησιμοποιήσαμε τα αποτελέσματα της ανίχνευσης ακμών που πήραμε με την μέθοδο των δεύτερων παραγώγων.

Στις παρακάτω εικόνες (Εικόνες 2.7,2.8, 2.9) φαίνονται τα αποτελέσματα που πήραμε από τον μετασχηματισμό του Hough. Οι εικόνες 2.7α, 2.8α και 2.9α απεικονίζουν τις ημιτονοειδείς καμπύλες στο παραμετρικό επίπεδο, οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις ευθείες γραμμές της εικόνας, ενώ στις εικόνες 2.7β, 2.8β και 2.9β απεικονίζουν τις ευθείες γραμμές που ανιχνεύθηκαν.

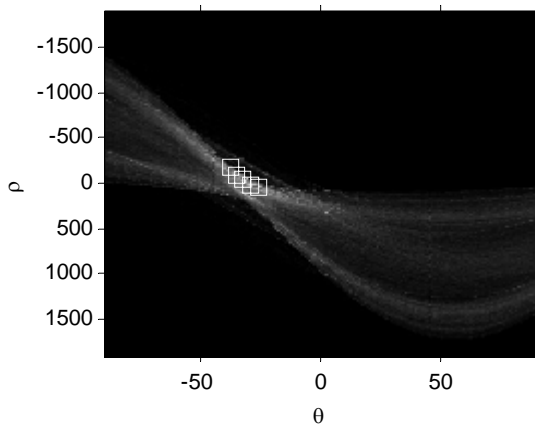


(α)

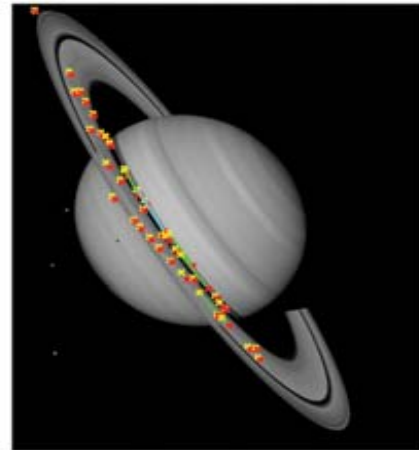


(β)

Εικόνα : 2.7

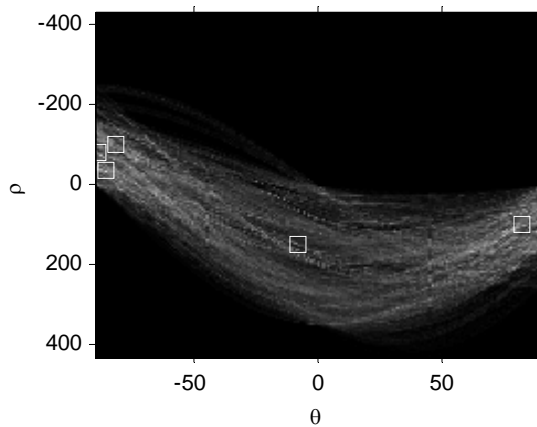


(α)

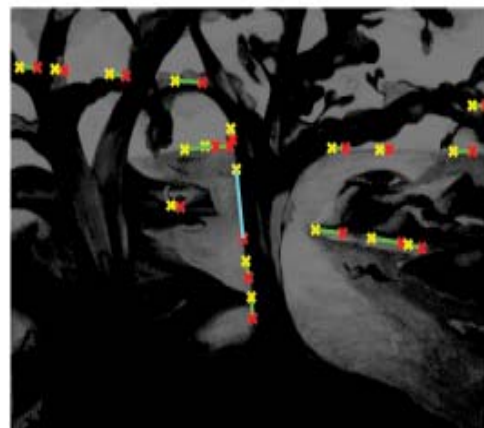


(β)

Εικόνα : 2.8



(α)



(β)

Εικόνα : 2.9

Από την παρατήρηση των εικόνων διαπιστώνουμε ότι ο μετασχηματισμός Hough δεν δίνει ακριβή αποτελέσματα, καθώς και ότι σε ορισμένες περιπτώσεις έχει ανιχνεύσει ευθείες γραμμές ενώ στην πραγματικότητα δεν υπάρχουν.

### 2.3.4 Αναζήτηση καμπυλών

Ο μετασχηματισμός Hough μπορεί να γενικευτεί έτσι ώστε να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση οποιασδήποτε καμπύλης που μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο παραμέτρων.[5]

Έτσι, παραδείγματος χάριν, για την ανίχνευση σε μια εικόνα ενός κύκλος χρησιμοποιούμε την ακόλουθη παραμετρική μορφή της καμπύλης :

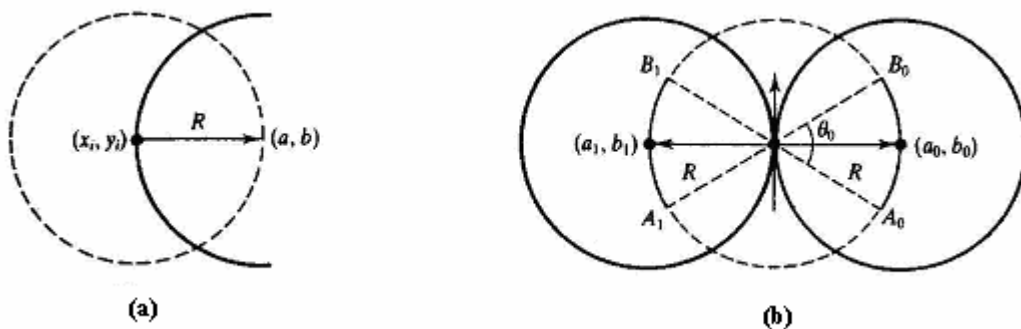
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (2.14)$$

Οι παράμετροι του Hough είναι η ακτίνα  $r$  και οι συντεταγμένες του κέντρου  $(a, b)$ . Επειδή ο κύκλος μετασχηματίζεται σε ένα σύνολο τριών παραμέτρων, όπως φαίνεται από την εξίσωσή του, ο παραμετρικός χώρος του Hough απαιτεί μια τρισδιάστατη παραμετρική μήτρα  $P(r, a, b)$ . Ο μετασχηματισμός Hough πραγματοποιείται με τον ακόλουθο τρόπο: Έστω ότι  $(x_i, y_i)$  είναι ένα υποψήφιο pixel της δυαδικής ακμής στην εικόνα. Οι συντεταγμένες του κέντρου  $(a, b)$  ενός κύκλου ακτίνας  $r = R$  ο οποίος διέρχεται από το  $(x_i, y_i)$  βρίσκονται πάνω σε κύκλο της μορφής:

$$x_i = a + R \cos \theta \quad (2.15)$$

$$y_i = b + R \sin \theta \quad (2.16)$$

όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα 2.2.α. Για κάθε ακτίνα  $r$ ,  $0 < r < r_{\max}$ , οι συντεταγμένες  $(a, b)$  υπολογίζονται από τις εξισώσεις (2.15) και (2.16) και τα αντίστοιχα στοιχεία της μήτρας  $P(r, a, b)$  αυξάνονται κατά ένα. Αυτά τα σημεία ανήκουν σε μια κωνική επιφάνεια. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για κάθε υποψήφιο pixel της δυαδικής εξόδου του ανιχνευτή ακμών. Τα στοιχεία της μήτρας  $P(r, a, b)$  τα οποία έχουν μια τελική τιμή μεγαλύτερη από ένα συγκεκριμένο κατώφλι, δηλώνουν τους κύκλους που υπάρχουν στην έξοδο του ανιχνευτή ακμών.



**Σχήμα 2.2 :** (a) Ο τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το  $(x_i, y_i)$ . (b) Κέντρα κύκλων που διέρχονται από το  $(x_i, y_i)$  και είναι εφαπτόμενοι στο αντίστοιχο σημείο της ακμής

Ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Hough διευκολύνεται αρκετά αν είναι διαθέσιμη η διεύθυνση ακμής  $\varphi(x_i, y_i)$ . Κυρίως αν το στοιχείο της τοπικής ακμής είναι εφαπτόμενο σε κάθε κύκλο ακτίνας  $R$  που διέρχεται από το  $(x_i, y_i)$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.β. Τότε, μόνο δύο τέτοια κέντρα κύκλου  $(a_0, b_0)$  και  $(a_1, b_1)$  είναι επιτρεπτά και μόνο τα αντίστοιχα στοιχεία στην μήτρα  $P(r, a, b)$  θα πρέπει να ανανεωθούν. Επειδή η διεύθυνση ακμής  $\varphi(x_i, y_i)$  είναι συνήθως θορυβώδης, είναι επιτρεπτή μια συγκεκριμένη ανοχή  $\theta_0$  στις σχέσεις (2.15) και (2.16), και μόνο τα κέντρα των κύκλων τα οποία αντιστοιχούν στα τόξα  $A_0B_0, A_1B_1$  επιτρέπεται να ανανεωθούν στην μήτρα  $P(r, a, b)$ .

Με παρόμοια ανάλυση μπορεί να γίνει και η ανίχνευση σε μια εικόνα κωνικών τομών παραδείγματος χάριν η ανίχνευση μιας έλλειψης.[7]. Η παραμετρική εξίσωση που χρησιμοποιούμε είναι η ακόλουθη:

$$\frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1 \quad (2.17)$$

Στην περίπτωση αυτή οι παράμετροι του Hough είναι οι συντεταγμένες του κέντρου  $(x_c, y_c)$ , τα  $a, b$  που είναι τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα αντίστοιχα της έλλειψης και η γωνία  $\theta$  όπου είναι ο προσανατολισμός του μεγάλου άξονα. Επειδή η έλλειψη μετασχηματίζεται σε ένα σύνολο πέντε παραμέτρων ο παραμετρικός χώρος του Hough απαιτεί μια παραμετρική μήτρα πέντε διαστάσεων  $P(x_c, y_c, a, b, \theta)$ . Ο μετασχηματισμός Hough πραγματοποιείται με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε και στον κύκλο με την διαφορά ότι αντί των εξισώσεων (2.16) και (2.17) χρησιμοποιούμε τις παρακάτω οι οποίες αναφέρονται στην έλλειψη :

$$x_i = x_c + a \cos \theta \quad (2.18)$$

$$y_i = y_c + b \sin \theta \quad (2.19)$$

### **2.3.5 Συμπεράσματα**

Από την παραπάνω ανάλυση διαπιστώνουμε ότι η γενίκευση του μετασχηματισμού Hough για την εύρεση καμπυλών σε μια εικόνα έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση των παραμέτρων της μήτρας του. Όσο ο αριθμός των παραμέτρων είναι μικρός, όπως συμβαίνει

στον κύκλο όπου είναι μόλις τρεις, η χρήση του μετασχηματισμού αυτού δεν είναι απαγορευτική. Αντίθετα αν ο αριθμός αυτός αυξηθεί, όπως συμβαίνει στις κωνικές τομές όπου φτάνουμε τις πέντε παραμέτρους, η χρήση του μετασχηματισμού Hough γίνεται πολύ αργή αφού η υπολογιστική πολυπλοκότητα είναι μεγάλη.

Στην διαπίστωση αυτή καταλήξαμε και ύστερα από εφαρμογή του μετασχηματισμού Hough σε τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου με σκοπό την ανίχνευση σε αυτές ελλείψεων και υπερβολών. Επειδή το μέγεθος της εικόνας των τοιχογραφιών είναι πολύ μεγάλο, η εφαρμογή κατέληξε στο να είναι αρκετά χρονοβόρα και επιπλέον τα αποτελέσματα της ανίχνευσης που πήραμε δεν ήταν ιδιαίτερα ακριβή. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός και για τις δύο εικόνες που εξετάσαμε χρειάστηκε μέρες εκτέλεσης για να επιστρέψει αποτελέσματα. Από τα δε αποτελέσματα που επέτρεψε, τα περισσότερα ήταν ψευδή ή/και μη βέλτιστα τοποθετημένες καμπύλες. Ένα άλλο μειονέκτημα του μετασχηματισμού Hough είναι ότι δεν μπορεί να προσφέρει τοποθετήσεις καμπυλών με ακρίβεια μικρότερη του pixel, καθώς βασίζεται στην τοποθέτηση των σημείων των καμπύλων πάνω στις ακμές της εικόνας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### 3.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε την βασική δομή του πρωτότυπου αλγορίθμου που χρησιμοποιήσαμε προκειμένου να δείξουμε ότι κάποιες από τις τοιχογραφίες της Θήρας δημιουργήθηκαν από την χρήση προκατασκευασμένων γεωμετρικών προτύπων (stencils). Δηλαδή θα αναφερθούμε στον τρόπο με τον οποίο γίνεται η επιλογή ενός stencil και πως κρίνουμε ότι αυτή η επιλογή ταιριάζει βέλτιστα σε μια καμπύλη της τοιχογραφίας.

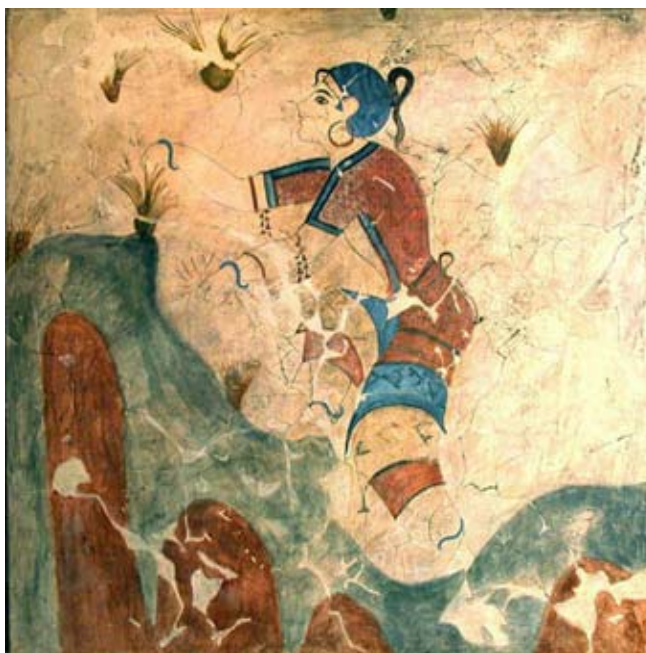
Για την καλύτερη κατανόηση του πρωτότυπου αλγορίθμου, είναι σκόπιμο πρώτα από όλα να διευκρινίσουμε ορισμένες έννοιες που χρησιμοποιούμε, όπως αντικείμενο τοιχογραφίες κλπ.

### 3.2 Διευκρίνιση εννοιών

#### 3.2.1 Καθορισμός της έννοιας αντικείμενο της τοιχογραφίας

Παρατηρήσαμε ότι η κάθε θεματική μονάδα αποτελείται από διάφορα σχεδιασμένα αντικείμενα. Για παράδειγμα, η γυναικεία φιγούρα που απεικονίζεται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 2.1) αποτελείται από σχεδιαστικά στοιχεία, όπως: (α) η καμπούρα, (β) η συνεχής γραμμή του αριστερού βραχίονα η οποία συνεχίζεται μέχρι τον καρπό (γ) η συνεχής γραμμή που αποτελείται από το μέτωπο και την άνω γραμμή της μύτης, (δ) το κεφάλι, (ε) η εξωτερική πλευρά της κοτσίδας, κλπ. [8]

Οι γραμμές που σχηματίζονται από τις ακμές του κάθε τέτοιου σχεδιαστικού στοιχείου θεωρούνται αντικείμενα. Για παράδειγμα, το στοιχείο (β) στην προαναφερθείσα εικόνα αντιστοιχεί σε δύο αντικείμενα, όπου το κάθε ένα είναι μια συνεχής καμπύλη, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.1



**Εικόνα 2.1**

Με αυτό τον τρόπο, το αντικείμενο μπορεί να θεωρηθεί πως είναι ένα υποσύνολο της γραμμής που σχηματίζεται από τις ακμές της τοιχογραφίας και πως αντιπροσωπεύει μια θεματική ενότητα. Από μαθηματικής άποψης, η καμπύλη που αποτελεί το αντικείμενο πρέπει να είναι συνεχής και τα άκρα της να είναι ασυνέχειες του συνόρου ή της πρώτης παραγώγου του. Πιο προσεκτική εξέταση των διαφόρων αντικειμένων μας δείχνει ότι τα αντικείμενα είναι μια αλληλουχία από συνεχείς ομαλές συναρτήσεις, με βάση τις οποίες μπορούμε πλέον να ορίσουμε την έννοια του μέρους αντικειμένου.

### **3.2.2 Καθορισμός τμήματος αντικειμένου**

Υποθέτουμε ότι η τοιχογραφία δεν έχει υποστεί καμία φθορά και επιπλέον ότι όλα τα περιγράμματα των αντικειμένων είναι συνεχή και περιγράφονται από την τμηματικά δύο φορές διαφορίσιμη μονοπαραμετρική διανυσματική εξίσωση  $r(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j}$ . Τότε, ένα τμήμα αντικειμένου καθορίζεται να είναι ένα υποσύνολο από τμήματα καμπύλης, του οποίου τα σημεία αρχής και τέλους είναι ένα από τα ακόλουθα:

- (1) Η αρχή ή το τέλος του αντικειμένου, (2) Ένα σημείο όπου η δεύτερη παράγωγος του  $r''(t)$  είναι ασυνεχής, (3) Ένα σημείο όπου η τιμή της ορίζουσας  $C = \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}$  αλλάζει πρόσημο. Η έννοια του τμήματος αντικειμένου είναι κρίσιμη, διότι αν ο καλλιτέχνης

πράγματι χρησιμοποίησε τα stencils, τότε, κάθε φορά που τοποθετούσε το stencil στον τοίχο και χάραζε μια γραμμή θεωρούμε ότι αυτός δημιουργούσε ένα τμήμα αντικειμένου.

### 3.2.3 Προσδιορισμός του τμήματος αντικειμένου σε όλες τις θεματικές ενότητες των τοιχογραφιών

Σε αυτήν την υποενότητα εισάγονται μαθηματικές μέθοδοι για τον προσδιορισμό των σημείων τέλους του κάθε τμήματος αντικειμένου. Αυτό είναι ένα κρίσιμο πρόβλημα, αφού αν ο καλλιτέχνης χρησιμοποίησε stencils για να σχεδιάσει τις τοιχογραφίες, τότε αυτός κάθε φορά που τοποθετούσε το stencil στο τοίχο και σχεδίαζε μια συγκεκριμένη ομαλή γραμμή ακολουθώντας το stencil, δημιουργούσε με αυτόν τον τρόπο ένα καλά καθορισμένο τμήμα αντικειμένου. Για τον λόγο αυτόν, αν κάποιος θέλει να δείξει ότι πράγματι έτσι είναι η περίπτωση, τότε θα πρέπει να καθορίσει ένα περιορισμένο αριθμό συγκεκριμένων stencils που ταιριάζουν καλά με το όλο σύνολο των τμημάτων αντικειμένων.



Εικόνα 2.2

Αν  $L_o$  είναι το μήκος ενός αυθαίρετου αντικειμένου τότε επιλέγουμε ένα κατάλληλο μικρό ποσοστό του  $L_o$ , έστω  $L_s$ . Στην συνέχεια, με σκοπό να επισημανθούν τα σημεία όπου υπάρχει αλλαγή του stencil μαζί με αλλαγή της κοιλότητας, προχωρούμε ως εξής : Διαιρούμε όλα τα αντικείμενα σε διαδοχικά υποσύνολα από pixel μήκους  $L_s$ , ελαφρώς επικαλυπτόμενα  $L_{ov}$  pixels, και υπολογίζουμε πολυώνυμο τρίτου ή μεγαλύτερου βαθμού το οποίο ταιριάζει καλύτερα σε κάθε ένα τέτοιο υποσύνολο.

Κατά αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε ένα σύνολο από διαδοχικά ελαφρώς επικαλυπτόμενα πολυώνυμα τρίτου (ή μεγαλύτερου) βαθμού  $S_i, i = 1, 2, \dots, N_s$ , τα οποία καλύπτουν κάθε αντικείμενο, όπως φαίνεται και στην Εικόνα 2.2. Παρατηρούμε επίσης, ότι όλα τα μικρά κενά των διάφορων αντικειμένων εξαιτίας της φθοράς ξεπερνιούνται με αυτήν την διαδικασία. Καλές επιλογές για το  $L_s$  και το  $L_{ov}$  είναι :

$$L_s = \begin{cases} [0.15 \cdot L_o], & L_o \geq 400 \text{ pixels} \\ [0.33 \cdot L_o], & L_o < 400 \text{ pixels} \end{cases} \quad L_{ov} = \begin{cases} [0.09 \cdot L_s], & L_o \geq 400 \text{ pixels} \\ [0.18 \cdot L_s], & L_o < 400 \text{ pixels} \end{cases}$$



όπου για κάθε  $x \in R$ ,  $[x]$  αντιπροσωπεύει ένα αναπόσπαστο μέρος του  $x$ . Γειτονικές τιμές του  $L_S$  και του  $L_{OV}$  προσφέρουν παρόμοια και ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Έπειτα, υπολογίζουμε τα πιθανά σημεία καμψής των πολυωνύμων  $S_i$  και τα λαμβάνουμε υπόψη ως ξεχωριστά σημεία των τμημάτων των αντικειμένων. Τα σημεία καμψής καθορίζονται μέσω της καθιερωμένης μεθόδου η οποία περιγράφεται στην ενότητα 3.2.2, καθορισμός του τμήματος αντικειμένου περίπτωση 3.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι αν και μπορεί να επιτευχθεί μια πολύ καλή πολυωνυμική προσέγγιση για όλα τα αντικείμενα με την βοήθεια της προαναφερθείσας τεχνικής, είναι σαφές ότι αυτά τα πολυώνυμα δεν αποτελούν τα stencils, αφού οι τιμές των παραμέτρων τους διαφέρουν πολύ από το ένα τμήμα αντικειμένου στο άλλο.

### 3.3 Εξέταση αν ένα τμήμα αντικειμένου αντιστοιχεί σε ένα stencil

#### 3.3.1 Επιλογή ενός κατάλληλου stencil για κάθε τμήμα αντικειμένου και μιας αρχικής εκτίμησης των παραμέτρων του

Θεωρούμε ένα σχεδιασμένο τμήμα αντικειμένου, του οποίου η ψηφιακή εικόνα αποτελείται από  $N^P$  pixels. Τα pixels αυτά περιγράφονται από μια ακολουθία διανυσμάτων  $\vec{r}_i^P$ ,  $i = 1, 2, \dots, N^P$ , η οποία ξεκινάει από ένα σημείο αναφοράς και δείχνει στο κέντρο του κάθε pixel, ενώ ο άνω δείκτης  $P$  συμβολίζει το κάθε τμήμα. Υποθέτουμε ότι κάποιος θέλει να εξετάσει αν αυτό το τμήμα αντικειμένου είναι το επιτυχές αποτέλεσμα της προσπάθειας ενός καλλιτέχνη να χαράξει ένα γεωμετρικό πρωτότυπο, το οποίο περιγράφεται από μια παραμετρική διανυσματική εξίσωση  $\vec{r}^M(\theta | \Pi)$ , όπου  $\theta$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή, το  $\Pi$  είναι το σύνολο των παραμετρικών καμπυλών και ο άνω δείκτης  $M$  συμβολίζει το πρότυπο. Για παράδειγμα, η πολική παραμετρική εξίσωση της γραμμικής σπείρας είναι :

$$\vec{r}^M(\theta | \Pi) = (x_0 + k \cdot (\theta - \theta_0) \cdot \cos(\theta - \theta_0 + \phi_0))\vec{i} + (y_0 + k \cdot (\theta - \theta_0) \cdot \sin(\theta - \theta_0 + \phi_0))\vec{j}$$

όπου  $\theta \in \mathbf{R}$  είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή (η πολική γωνία) και  $\Pi = \{x_0, y_0, k, \phi_0, \theta_0\}$  είναι το σύνολο των παραμέτρων της σπείρας.

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε το βέλτιστο σύνολο παραμέτρων  $\Pi^o$  και τις αντίστοιχες τιμές της ακολουθίας της ανεξάρτητης μεταβλητής  $\theta_i, i = 1, 2, \dots, N^P$ , έτσι ώστε το διάνυσμα  $\overrightarrow{r^M}(\theta_i | \Pi^o)$  να ταιριάζει καλύτερα στο  $\overrightarrow{r_i^P}$  σύμφωνα με την επιλεγμένη νόρμα L. Αλγόριθμοι οι οποίοι το επιτυγχάνουν αυτό είναι οι γνωστοί αλγόριθμοι συζυγούς ανάδελτα (conjugate gradient) ή η πιο εύκολα εφαρμόσιμη μέθοδος Nelder-Mead, η οποία αρχίζει από ένα πειραματικό σύνολο τιμών του  $\Pi$  και αφήνει το  $\Pi$  να συγκλίνει στο  $\Pi^o$  έτσι ώστε η L να ελαχιστοποιηθεί. Για παράδειγμα, για ένα δοσμένο τμήμα αντικειμένου  $\overrightarrow{r_i^P}$  και ένα συγκεκριμένο πιθανό stencil το οποίο περιγράφεται από το  $\overrightarrow{r^M}$  ελαχιστοποιούμε την ποσότητα

$$E_2 = \sum_{i=1}^{N^P} \|r_i^P - r_i^M\| = \sum_i^{N^P} \left( (x_i^P - x_i^M)^2 + (y_i^P - y_i^M)^2 \right)$$

Για όλα τα αποκτηθέντα τμήματα αντικειμένου της κάθε τοιχογραφίας, έχουμε εφαρμόσει την προαναφερθείσα διαδικασία, λαμβάνοντας υπόψη κάθε φορά ότι το  $\overrightarrow{r^M}$  είναι : η σπείρα του Αρχιμήδη, η σπείρα ξετυλίγματος, η εκθετική σπείρα και οι τρεις κωνικές τομές. Με αυτόν τον τρόπο, για κάθε τμήμα αντικειμένου της τοιχογραφίας και για κάθε πιθανό stencil έχουμε λάβει ένα σύνολο αντίστοιχων αρχικών παραμέτρων που προσφέρουν ένα αρχικό αλλά όχι ακόμη βέλτιστο, ελάχιστο σφάλμα. Η μη ελαχιστοποίηση οφείλεται στην ουσιαστικά αναποτελεσματική διαδικασία της ελαχιστοποίησης. Ο σχετικά μεγάλος αριθμός των παραμετρικών καμπυλών, καθώς επίσης και ο πολύ μεγάλος αριθμός pixels  $N^P$  του τμήματος του αντικειμένου εισάγουν μια αξιοσημείωτη πολυπλοκότητα στην διαδικασία ελαχιστοποίησης, η οποία κάνει τον χρησιμοποιούμενο αλγόριθμο να συγκλίνει σε ένα τοπικό ελάχιστο κοντά στο απόλυτο ελάχιστο, αλλά διαφορετικό από αυτό. Αυτό γίνεται σχεδόν πάντα στην πράξη, ανεξάρτητα του τύπου του χρησιμοποιούμενου αλγορίθμου ελαχιστοποίησης. Έτσι, για κάθε τμήμα του υπό συζήτηση αντικειμένου της τοιχογραφίας, κάποιος μπορεί να προσδιορίσει το πιθανό stencil που αντιστοιχεί στο ελάχιστο σφάλμα μεταξύ των έξι τιμών σφαλμάτων που υπολογίζονται με την προαναφερθείσα διαδικασία. Αυτό το ελάχιστο σφάλμα πρωτότυπου αποτελεί ένα πρώτο υποψήφιο stencil, το οποίο ο καλλιτέχνης πιθανόν χρησιμοποίησε για να σχεδιάσει το συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου. Το αντίστοιχο βέλτιστο σύνολο παραμέτρων είναι μια πρώτη εκτίμηση των χαρακτηριστικών αυτού του υποψήφιου stencil.

Σημείωση ότι ο μετασχηματισμός Hough πρόσφερε επίσης αρκετά πρόχειρα αποτελέσματα στην προσπάθεια να καθορίσουμε τα stencils και αποκτήσαμε μια πρώτη εκτίμηση των παραμέτρων τους [Hough 1962]. Γενικά, το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε σε αυτήν την εργασία, δεν είναι ένα τυπικό πρόβλημα curve fitting όπως αυτά που αντιμετωπίστηκαν στα [Werman 1995], [Craig 1999], [Voss 1997], [Ahn 2002], [Sarfranz 2002]. Απεναντίας κάποιος μπορεί να καθορίσει το υπό συζήτηση πρόβλημα ως ακολούθως: Να προσπαθήσει να υπολογίσει πιθανά πρωτότυπα που χρησιμοποιήθηκαν από τον καλλιτέχνη για να σχεδιάσει μια συγκεκριμένη ζωγραφιά, να διευκρινίσει τις αρχικές παραμέτρους και να αποδείξει τα αντίστοιχα stencils που χρησιμοποιήθηκαν για το σχεδιασμό των ζωγραφιών με την μέγιστη δυνατή ακρίβεια.

### ***3.3.2 Επιβεβαίωση των stencils και βελτιστοποίηση των παραμέτρων του για κάθε τμήμα αντικειμένου***

Σε αυτό το τμήμα θα εισάγουμε μια μέθοδο με σκοπό να αποφασίσουμε οριστικά εάν το προηγούμενο κατ' εκτίμηση πρωτότυπο ελάχιστου σφάλματος αντιστοιχεί πράγματι στο υπό συζήτηση τμήμα του αντικειμένου και επιπλέον να λάβουμε μια ακριβέστερη εκτίμηση των παραμέτρων του.

Έτσι, εξετάζουμε ένα πιθανό stencil  $\overline{r^M}(\theta_i | \Pi^o)$ , όπου  $\Pi^o$  είναι η αρχική εκτίμηση των παραμέτρων του, όπως υπολογίστηκε στην υποενότητα 3.3.1. Τονίζουμε ότι μεταξύ αυτών των παραμέτρων, υπάρχει ένα υποσύνολο το οποίο καθορίζει την μορφή των πρωτοτύπων, ενώ οι υπόλοιπες παράμετροι καθορίζουν τη θέση τους στο σχέδιο. Για παράδειγμα, το  $k$  καθορίζει τη μορφή της γραμμικής σπείρας, το  $r_o$  την ακριβή μορφή της σπείρας ξετυλίγματος, τα  $\alpha, \beta$  τη μορφή της εκθετικής σπείρας, τα  $a, b$  τη μορφή της έλλειψης ή της υπερβολής και τα  $a, b, c$  τη μορφή της παραβολής. Θα αναφερόμαστε σε αυτές τις παραμέτρους με το όνομα “αρχικές παραμέτρους” των πρωτοτύπων.

Στην συνέχεια για κάθε ένα από τα έξι πιθανά stencil με τις βέλτιστες αρχικές παραμέτρους του  $\Pi_p^o$ , καθορίζουμε μια υποπεριοχή γύρω από τις τιμές του  $\Pi_p^o$ , με σκοπό να επιτευχθεί η βέλτιστη εκτίμηση αυτών των τιμών σε αυτήν την υποπεριοχή. Για λόγους διαύγειας, θα κατασκευάσουμε αυτήν την υποπεριοχή πρώτα σε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα: Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι το πιθανό υπό συζήτηση stencil είναι μια υπερβολή με κατ' εκτίμηση βέλτιστες αρχικές παραμέτρους  $a^o, b^o$ . Έπειτα καθορίζουμε

δύο διαστήματα γύρω τους, τα  $[a^o \cdot (1 - p_a), a^o \cdot (1 + p_a)]$  και  $[b^o \cdot (1 - p_b), b^o \cdot (1 + p_b)]$ , όπου  $p_a, p_b$  είναι κατάλληλοι επιλεγμένοι παράγοντες. Όλα τα εκτελεσμένα πειράματα έδειξαν ότι μια πολύ ικανοποιητική επιλογή για την παρούσα εφαρμογή είναι  $p_a = p_b = 0.25$ . Επιπλέον καθορίζουμε τμήματα αυτών των διαστημάτων για να λαμβάνουμε δύο ακολουθίες  $I^a, I^b$  των  $K_a$  και  $K_b$  σημείων, αντιστοίχως, έτσι ώστε  $a^o \in I^a$  και  $b^o \in I^b$ . Στην συνέχεια, μέσω του καρτεσιανού γινομένου  $I^a \times I^b$  αυτών των δύο ακολουθιών λαμβάνουμε  $K_a \cdot K_b$  τιμές για τις αντίστοιχες αρχικές παραμέτρους της υπερβολής.

Κάθε ζευγάρι  $(I_\lambda^a, I_\mu^b)$  αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο πρωτότυπο υπερβολής στο οποίο το υπό συζήτηση τμήμα αντικειμένου πρέπει να ταιριάζει βέλτιστα. Για να επιτευχθεί αυτό το βέλτιστο ταίριασμα η ακόλουθη Λήμμα θα αποδειχθεί χρήσιμη:

### ΛΗΜΜΑ 1

Θεωρούμε δύο ξεχωριστές καμπύλες N-σημείων στο ίδιο σχέδιο, έστω  $(x_i, y_i)$  και  $(P_i, Q_i)$  με αυθαίρετο προσανατολισμό. Υποθέτουμε ότι κάποιος θέλει να εκτιμήσει τη βέλτιστη γωνία περιστροφής  $\theta$  και τη βέλτιστη μετατόπιση συντεταγμένων  $(x_0, y_0)$  έτσι ώστε να ταιριάζει η καμπύλη  $(x_i, y_i)$  στην καμπύλη  $(P_i, Q_i)$  με την έννοια των ελαχίστων τετραγώνων. Ισοδύναμα, αν  $(X_i, Y_i)$  είναι το αποτέλεσμα της περιστροφής και της μετατόπισης της καμπύλης  $(x_i, y_i)$ , απαιτούμε η ποσότητα  $E_2 = \sum_{all\ i} \{(X_i - P_i)^2 + (Y_i - Q_i)^2\}$  να είναι ελάχιστη. Μετά θέτουμε τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους ίσες με το μηδέν και με ανάλυση λαμβάνουμε:

$$x_0 = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (P_i - \delta x_i), \quad y_0 = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N (Q_i - \delta y_i), \quad \tan(\theta) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i \cdot \delta Q_i - y_i \cdot \delta P_i)}{\sum_{i=1}^N (x_i \cdot \delta P_i + y_i \cdot \delta Q_i)}, \quad \text{όπου}$$

$$\delta x_i = -y_i \cdot \sin(\theta) + x_i \cdot \cos(\theta), \quad \delta y_i = y_i \cdot \cos(\theta) + x_i \cdot \sin(\theta), \quad \delta P_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_j - P_i, \quad \delta Q_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Q_j - Q_i$$

## ΛΗΜΜΑ 2

Τώρα με σκοπό να ταιριάζουμε το δοσμένο τμήμα αντικειμένου των  $L$  pixels  $(x_i, y_i)$  στην καλύτερη θέση του προτύπου του πιθανού stencil, συνεχίζουμε ως εξής :

1. Συχνά, τα  $L$  pixels του τμήματος του αντικειμένου όπως λαμβάνονται από την μέθοδο της κατάτμησης, είναι πολύ πυκνά και τοποθετούνται σε λάθος μέρος, έτσι ώστε να είναι πολύ δύσκολο να επιτευχθεί μία προς μία αντιστοιχία μεταξύ αυτών των pixels και σημείων του πιθανού stencil. Για να αντιμετωπίσουμε αυτήν την δυσκολία, επιλέγουμε  $N$  pixels του τμήματος αντικειμένου έτσι ώστε τα δύο διαδοχικά pixels να χωρίζονται από ένα μικρό αριθμό pixels του τμήματος αντικειμένου, όπως τρία ή τέσσερα. Παρακάτω όταν αναφερόμαστε στο  $N$ -pixel του τμήματος του αντικειμένου εννοούμε το προαναφερθέν υποσύνολο των pixels του τμήματος αντικειμένου. Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την Ευκλείδεια απόσταση για όλα τα ζεύγη των διαδοχικών pixels του τμήματος αντικειμένου· υποθέτουμε ότι  $d_j^P$  είναι η Ευκλείδεια απόσταση ανάμεσα στο  $j^{\text{th}}$  και στο  $j+1^{\text{th}}$  pixel του τμήματος του αντικειμένου και ότι  $D(M, \Lambda)$  είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των δύο σημείων  $M$  και  $\Lambda$ .

2. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο πιθανό stencil με ανεξάρτητη μεταβλητή  $t$ . Κατόπιν δημιουργούμε ένα σύνολο σημείων, τα οποία ανήκουν στο πιθανό stencil, αρχίζοντας από το  $t_0$  και τελειώνοντας στο  $t_e$ , το οποίο είναι όσο το δυνατόν πιο πυκνό. Με άλλα λόγια, στην αρχή δημιουργείται μια ακολουθία σημείων του πιθανού stencil  $P^S(t_i)$ ,  $t_i \in [t_0, t_e]$ , τέτοια ώστε δύο διαδοχικά σημεία να έχουν πολύ μικρή απόσταση, πολύ μικρότερη από τις διαστάσεις του pixel.

3. Για κάθε σημείο  $n$  της ακολουθίας  $P^S(t_i)$ , δημιουργούμε  $N$ -κορυφές πολυγωνικής γραμμής (poly-line) αρχίζοντας από το υπό συζήτηση σημείο  $P^S(t_n)$ , το οποίο το καλούμε  $M_1^n$ , και όπου οι επόμενες κορυφές καθορίζονται ως εξής :

Η δεύτερη κορυφή  $M_2^n$  είναι το σημείο  $P^S(t_k)$ , για το οποίο ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

$$D(P^S(t_k), M_1^n) \geq d_1^P, \quad D(P^S(t_{k-1}), M_1^n) < d_1^P \quad (3.1)$$

$$D(P^S(t_k), M_1^n) - d_1^P \leq d_1^P - D(P^S(t_{k-1}), M_1^n) \quad (3.2)$$

Ξεκάθαρα, αν η πρώτη ανισότητα ισχύει, ενώ  $D(P^s(t_k), M_1^n) - d_1^P > d_1^P - D(P^s(t_{k-1}), M_1^n)$  τότε  $M_2^n = P^s(t_{k-1})$

Στην συνέχεια, η  $M_j^n$  κορυφή ορίζεται επαγωγικά μέσω τις αναλογικές σχέσεις :

$$D(P^s(t_k), M_{j-1}^n) \geq d_{j-1}^P, \quad D(P^s(t_{k-1}), M_{j-1}^n) < d_{j-1}^P$$

Αν  $D(P^s(t_k), M_{j-1}^n) - d_{j-1}^P \leq d_{j-1}^P - D(P^s(t_{k-1}), M_{j-1}^n)$  τότε  $M_j^n$  είναι  $P^s(t_k)$ , διαφορετικά αν

$$D(P^s(t_k), M_{j-1}^n) - d_{j-1}^P > d_{j-1}^P - D(P^s(t_{k-1}), M_{j-1}^n) \text{ τότε } M_j^n \text{ είναι } P^s(t_{k-1}).$$

4. Για όλα τα  $n$  εφαρμόζουμε το προαναφερθέν Λήμμα όπου  $(x_i, y_i)$  είναι οι συντεταγμένες των κέντρων των  $N$  pixels που ανήκουν στο υπό συζήτηση τμήμα του αντικειμένου, ενώ  $(P_i, Q_i)$  είναι οι συντεταγμένες των πρότυπων των κορυφών  $M_1^n, M_2^n, \dots, M_N^n$ . Με αυτόν τον τρόπο για κάθε σημείο  $P^s(t_n)$  του συγκεκριμένου πιθανού stencil λαμβάνουμε το σφάλμα  $E_2^n$  περιγράφοντας τον τρόπο που το τμήμα του αντικειμένου ταιριάζει καλύτερα στη συγκεκριμένη πρότυπη πολυγωνική γραμμή (poly-line). Σαφώς η ελαχιστοποίηση του  $E_2^n$ , για όλα τα σημεία  $P^s(t_n)$  για τα οποία μπορεί να κατασκευαστεί πρότυπη πολυγωνική γραμμή, προτείνει την θέση, δηλαδή την τιμή του  $n$  για την οποία το τμήμα του υπό συζήτηση αντικειμένου ταιριάζει καλύτερα στο συγκεκριμένο πιθανό stencil. Η αντίστοιχη ελάχιστη τιμή του  $E_2^n$  είναι μέτρο του πόσο καλά ταιριάζουν αυτά τα δύο σύνολα σημείων.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε ξεκάθαρα να υπολογίσουμε την γωνία της περιστροφής και την παράλληλη μετατόπιση που κάποιος πρέπει να εφαρμόσει στην ακολουθία των σημείων  $(x_i, y_i)$  που ανήκουν στο συγκεκριμένο τμήμα αντικειμένου, έτσι ώστε αυτό να ταιριάζει καλύτερα στο πιθανό stencil με αρχικές παραμέτρους  $(I_\lambda^a, I_\mu^b)$  με άμεση εφαρμογή των Λημμάτων 2 και 1. Αυτή η διαδικασία θα δώσει επίσης το αντίστοιχο ελάχιστο μέσο σφάλμα  $\varepsilon_{\lambda, \mu}$  καθώς επίσης και την ακριβή θέση του ταιριάσματος.

Η ελαχιστοποίηση της τιμής του  $\varepsilon_{\lambda, \mu}$  για όλα τα ζευγάρια των αρχικών παραμέτρων  $(I_\lambda^a, I_\mu^b)$  προσφέρει μια καλύτερη και πολύ πιο αξιόπιστη εκτίμηση των βέλτιστων αρχικών παραμέτρων του υπό συζήτηση stencil.

Η περιοδικά επαναλαμβανόμενη εφαρμογή αυτής της διαδικασίας που χρησιμοποιεί συνεχώς μικρότερου μεγέθους και συνεχώς λεπτότερες υποπεριοχές των αντίστοιχων διαστημάτων  $I^a, I^b$  προσφέρει σύγκλιση με βέλτιστες αρχικές παραμέτρους του εξεταζόμενου πιθανού stencil.

Ανάλογη διαδικασία με την προαναφερθείσα εφαρμόζεται και στα άλλα πέντε πιθανά stencil, προκειμένου να συνδέσουμε με κάθε τμήμα αντικειμένου και κάθε πιθανό stencil τις καλύτερες παραμέτρους στο ταίριασμα και το αντίστοιχο ελάχιστο σφάλμα, το οποίο είναι ένα πραγματικό μέτρο του τρόπου που το συγκεκριμένο πιθανό stencil ταιριάζει καλύτερα με το υπό συζήτηση τμήμα αντικειμένου. Κατ' αυτό τον τρόπο, κάποιος συνδέει τις έξι τιμές του σφάλματος στο ταίριασμα με κάθε τμήμα του αντικειμένου και τα αντίστοιχα έξι σύνολα των παραμέτρων.

Για όλα τα τμήματα αντικειμένου, υπάρχει ένα ευδιάκριτο ελάχιστο σφάλμα μεταξύ των έξι τιμών σφάλματος που ταιριάζουν καλύτερα. Θεωρούμε ότι το πρωτότυπο που αντιστοιχεί σε αυτό το ελάχιστο σφάλμα είναι του πρότυπου του stencil που ο καλλιτέχνης χρησιμοποίησε για να σχεδιάσει τα αντίστοιχα τμήματα αντικειμένου το 1650π.Χ.

Τέλος τονίζουμε ότι για όλα τα τμήματα αντικειμένου της γνωστής τοιχογραφίας “Κροκοσυλλέκτριες” εμφανίστηκε ελάχιστο σφάλμα μόνο για τρεις τύπους stencils : για την υπερβολή, την έλλειψη και την γραμμική σπείρα. Αυτό σημαίνει ότι ο καλλιτέχνης χρησιμοποίησε stencils που αντιστοιχούν μόνο σε αυτούς τους τρεις τύπους καμπυλών.

### ***3.3.3 Προσδιορισμός του συνόλου των stencils που χρησιμοποιήθηκαν για τον σχεδιασμό των τοιχογραφιών***

Πρώτα από όλα ταξινομούμε όλα τα τμήματα αντικειμένου σύμφωνα με το αν αυτά ταιριάζουν καλύτερα με υπερβολή ή με έλλειψη ή με γραμμική σπείρα. Περιμένουμε ότι ο καλλιτέχνης χρησιμοποίησε ένα περιορισμένο αριθμό stencils για να σχεδιάσει τις τοιχογραφίες. Από την άλλη μεριά, αν υποθέσουμε ότι δύο τμήματα αντικειμένου σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας το ίδιο stencil, έστω την υπερβολή, με αρχικές παραμέτρους  $a_1, b_1$ . Αν κάποιος εφαρμόσει την μεθοδολογία που εισάγεται στις υποενότητες 3.3.1 και 3.3.2 σε αυτά τα δύο τμήματα αντικειμένου τότε θα λάβει δύο διαφορετικά ζεύγη αρχικών παραμέτρων, τα οποία ταιριάζουν βέλτιστα στην υπερβολή, κοντά στα  $a_1, b_1$  αλλά διαφορετικά από αυτά. Αυτή η απόκλιση οφείλεται πιθανότατα στις

μικρές τυχαίες μετακινήσεις του πινέλου, στο μεταβλητό πλάτος της γραμμής, στις φθορές που οι τοιχογραφίες έχουν υποστεί, στην πεπερασμένη ανάλυση των εικόνων και αλλού.

Επομένως θα πρέπει να καταβληθεί ειδική προσπάθεια προκειμένου να καθοριστεί ο αριθμός των διαφορετικών stencils που ο καλλιτέχνης χρησιμοποίησε καθώς επίσης και μια συνεπής εκτίμηση των αρχικών παραμέτρων αυτών των stencils. Με σκοπό να επιτευχθεί αυτό συνεχίζουμε ως ακολούθως :

Ας θεωρούμε πρώτα όλα τα τμήματα αντικειμένου τα οποία αντιστοιχούν στο stencil της υπερβολής, όπως περιγράφηκε στην ενότητα 3.3.2. Στο επίπεδο  $(a, b)$  τοποθετούμε όλες τις αρχικές παραμέτρους, οι οποίες ταιριάζουν καλύτερα στην υπερβολή, σε κάθε μέρος του αντικειμένου ξεχωριστά. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε τέσσερα σύνολα σημείων, όπου κάθε ένα σύνολο αποτελείται από τα συνεχόμενα σημεία. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι κάθε τέτοιο σύνολο αντιστοιχεί σε ένα διαφορετικό stencil υπερβολής. Έστω  $N1, N2, N3, N4$  είναι ο αριθμός σημείων κάθε συνόλου· τονίζουμε ακόμη μια φορά ότι κάθε τέτοιο σημείο αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο μέρος αντικειμένου και στο ζευγάρι των αρχικών παραμέτρων της υπερβολής που ταιριάζει περισσότερο σε αυτό. Προκειμένου να υπολογιστούν οι παράμετροι για κάθε ένα από τα τέσσερα stencils ενεργούμε όπως στην ενότητα 3.3.2 :

Για κάθε ένα από τα τέσσερα σύνολα καθορίζουμε μια ορθογώνια περιοχή η οποία περιέχει όλα τα σημεία του συνόλου και μετά καθορίζουμε ένα πυκνό χώρισμα  $I^a \times I^b$  της περιοχής. Για κάθε τμήμα σημείων  $(I_\lambda^a, I_\mu^b)$  υπολογίζουμε το συνολικό σφάλμα

$$\gamma_{\lambda, \mu}^{agg} = \sum_{j=1}^{N1} \varepsilon_{\lambda, \mu}^j, \text{ όπου } \varepsilon_{\lambda, \mu}^j \text{ είναι το μέσο σφάλμα προσέγγισης του } j^{\text{th}} \text{ τμήματος}$$

αντικειμένου της υπερβολής με αρχικές παραμέτρους  $(I_\lambda^a, I_\mu^b)$ . Το ελάχιστο αυτού του συναθροιστικού σφάλματος για όλα τα τμήματα σημείων  $(I_\lambda^a, I_\mu^b)$  λαμβάνεται υπόψη για να καθορίσει τις τελικές “αρχικές παραμέτρους” του πρώτου stencil της υπερβολής. Όμοια, υπολογίζουμε και τις τελικές “αρχικές παραμέτρους” των τριών άλλων stencils της υπερβολής.

Με χρήση της παραπάνω διαδικασίας για παρόμοιες γραμμές μπορούμε να δείξουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικά ελλειπτικά stencils και μπορούμε να υπολογίσουμε τις τελικές “αρχικές παραμέτρους” τους.

Η περίπτωση της γραμμικής σπείρας είναι παρόμοια και πραγματικά απλούστερη επειδή υπάρχει μόνο μία αρχική παράμετρος,  $k$ . Σχετική ανάλυση δείχνει ότι υπάρχει μια



μεγάλη κατηγορία τμημάτων αντικειμένων η οποία αντιστοιχεί στο stencil της γραμμικής σπείρας.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### 4.1 Γενικά

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα ακριβή stencils που βρήκαμε μετά την εφαρμογή του πρωτότυπου αλγορίθμου σε κάποιες από τις τοιχογραφίες της Θήρας. Δηλαδή θα αναφερθούμε στα είδη των γεωμετρικών αρχέτυπων που βρήκαμε και που πιθανότατα χρησιμοποιήθηκαν και θα δώσουμε και τις τιμές των αρχικών τους παραμέτρων.

### 4.2 Γενική περιγραφή της σπείρας

Οποιαδήποτε σπείρα μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι ένας κύκλος του οποίου η ακτίνα αυξάνεται μονότονα. Η γενική εξίσωση της σπείρας είναι :

$$\begin{aligned}x(\theta) &= x_0 + R(\theta) \cdot \cos(\alpha(\theta) - \phi_0) \\y(\theta) &= y_0 + R(\theta) \cdot \sin(\alpha(\theta) - \phi_0)\end{aligned}$$

όπου  $x_0, y_0$  είναι οι συντεταγμένες του κέντρου της σπείρας,  $R(\theta)$  είναι μια οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση του  $\theta$  και  $\alpha(\theta)$  είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση του  $\theta$ , ενώ το  $\phi_0$  εξηγεί μια πιθανή περιστροφή της σπείρας. Οι πιο γνωστές σπείρες είναι οι ακόλουθες, και οι εξισώσεις τους είναι γραμμένες έτσι ώστε να περιλαμβάνουν την περίπτωση που εξετάζει ένα τμήμα της αντίστοιχης σπείρας το οποίο δεν ξεκινά απαραιτήτως από το  $\theta = 0$ .

1. Η σπείρα του Αρχιμήδη. Ένας απλός ορισμός της είναι ότι πρόκειται για την σπείρα της οποίας η ακτίνα εξαρτάται γραμμικά από την επίκεντρη γωνία. Πιο αυστηρά, η σπείρα αυτή χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι η ακτίνα της  $R(\theta)$  είναι μια γραμμική συνάρτηση της πολικής γωνίας  $\theta$ , δηλαδή :

$$R(\theta) = k \cdot (\theta - \theta_0) \text{ και } \alpha(\theta) = (\theta - \theta_0)$$

όπου  $k$  είναι μια πραγματική σταθερά.

2. Η σπείρα ξετυλίγματος ακτίνας  $r_0$ . Η σπείρα αυτή παράγεται από το ξετύλιγμα ενός νήματος γύρω από ένα καρφί (γενικά ενός σταθερού σημείου). Αυτή η σπείρα φαίνεται να είναι η απλούστερη που μπορεί κάποιος να σχεδιάσει. Η εξίσωση που την περιγράφουν είναι :

$$R(\theta) = r_0 \sqrt{1 + (\theta - \theta_0)^2} \quad \text{και} \quad \alpha(\theta) = (\theta - \theta_0) - \arctan(\theta - \theta_0)$$

3. Η εκθετική ή λογαριθμική σπείρα., της οποίας η ακτίνα αυξάνεται εκθετικά με τη επίκεντρο γωνία  $\theta$  και ικανοποιεί τις :

$$R(\theta) = a \cdot e^{\beta(\theta - \theta_0)}, \quad \alpha(\theta) = (\theta - \theta_0)$$

όπου  $a, \beta$  είναι θετικές σταθερές.

#### 4.3 Γενική περιγραφή των κωνικών τομών

Η γενική εξίσωση των κωνικών τομών σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι :

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

όπου  $A, B, C, D, E, F \in \mathbf{R}$  και  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ . Η διακρίνουσα  $\Delta = 4 \cdot A \cdot B - C^2$  καθορίζει το είδος τους (έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή).

Η έλλειψη μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της προβολής ενός κύκλου επάνω σε ένα επίπεδο μη παράλληλο στο επίπεδο του κύκλου. Ισοδύναμα μπορεί να θεωρηθεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, τα οποία καλούνται συνήθως εστίες της έλλειψης. Η έλλειψη προκύπτει όταν η διακρίνουσα στην παραπάνω εξίσωση είναι μεγαλύτερη από το μηδέν  $\Delta > 0$ .

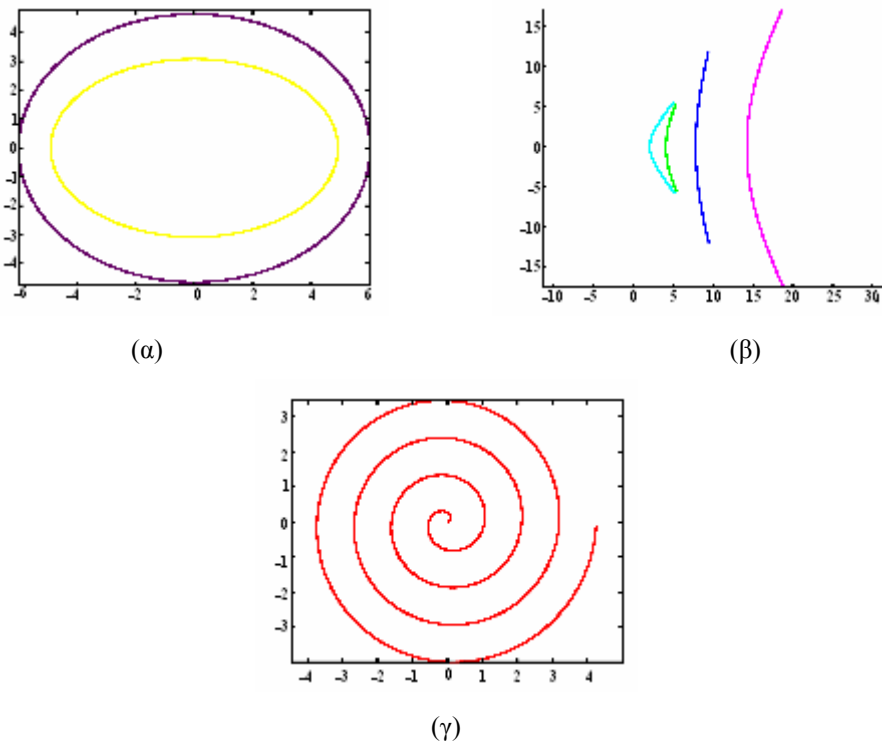
Η υπερβολή μπορεί να θεωρηθεί ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων των οποίων η απόλυτη διαφορά από δύο σταθερά σημεία, που ονομάζονται εστίες, είναι σταθερή. Αν η διακρίνουσα είναι αρνητική  $\Delta < 0$ , τότε η γενική εξίσωση των κωνικών τομών περιγράφει μια υπερβολή.

Τέλος όταν η διακρίνουσα είναι ίση με το μηδέν  $\Delta = 0$  τότε έχουμε μια παραβολή. Η παραβολή ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν ίση απόσταση από ένα σημείο και μια γραμμή.

#### 4.4 Καθορισμός των stencils που βρέθηκαν

Με βάση τον αλγόριθμο τον οποίο αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 σχετικά με την μέθοδο που ακολουθήσαμε για την εύρεση καμπυλών σε εικόνες και την γνώση μας για τις εξισώσεις της γραμμικής σπείρας και των κωνικών τομών καταλήξαμε ύστερα από εφαρμογή τους στο ότι ορισμένες τοιχογραφίες της Θήρας έχουν κατασκευαστεί με την

χρήση προκατασκευασμένων καμπυλών (stencils). Συγκεκριμένα βρέθηκε ότι ο καλλιτέχνης προκειμένου να σχεδιάσει ορισμένα θέματά του όπως τις Κροκοσυλλέτριες, το φυτό Κρόκος και άλλα, χρησιμοποίησε επτά stencils. Δύο ελλείψεις, τέσσερις υπερβολές και την σπείρα του Αρχιμήδη (γραμμική σπείρα). Τα γεωμετρικά αυτά αρχέτυπα απεικονίζονται στην παρακάτω Εικόνα 4.1:



**Εικόνα 4.1:** (α) Δύο ελλείψεις, (β) Τέσσερις υπερβολές και (γ) η γραμμική σπείρα

Οι αρχικοί παράμετροι αυτών των stencils καθώς επίσης και τα χρώματα τα οποία αντιστοιχήσαμε σε κάθε ένα από αυτά προκειμένου να τα ξεχωρίσουμε κατά την απεικόνισή τους αναγράφονται στον Πίνακα 4.1.

**Πίνακας 4.1**

<b>Είδος του stencil</b>	<b>Αντίστοιχο χρώμα</b>	<b>Αρχικοί παράμετροι [cm]</b>	
υπερβολή 1	βαθύ κόκκινο (magenta)	a = 14.24	b = 20.12
υπερβολή 2	Πράσινο (green)	a = 4.11	b = 6.29
υπερβολή 3	μπλε (blue)	a= 7.86	b=17.63
υπερβολή 4	γαλάζιο (cyan)	a= 2.09	b= 2.52
έλλειψη 1	κίτρινο (yellow)	a= 4.64	b= 6.03
έλλειψη 2	μοβ (purple)	a=10.85	b= 7.96
γραμμική σπείρα	κόκκινο (red)	k=0.169	

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### 5.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της εφαρμογής του πρωτότυπου αλγορίθμου εύρεσης καμπυλών πάνω σε δύο τοιχογραφίες του Ακρωτηρίου της Θήρας. Οι τοιχογραφίες με τις οποίες ασχοληθήκαμε απεικονίζονται στις εικόνες 5.1 (Θαλάσσιοι Νάρκισσοι) και 5.2 (Λάτρεις).

Για την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων τονίζουμε ότι ο αλγόριθμος εύρεσης καμπυλών εφαρμόστηκε μόνο στις ακμές των αντικειμένων των τοιχογραφιών οι οποίες δεν έχουν υποστεί καμία σημαντική φθορά, και όχι για τα τμήματα των τοιχογραφιών που έχουν ανακατασκευαστεί και συντηρηθεί από ειδικούς.



Εικόνα 5.1



**Εικόνα 5.2**

### **5.2 Αποτελέσματα εφαρμογής στην πρώτη τοιχογραφία (Εικόνα 5.1)**

Ύστερα από εφαρμογή της μεθοδολογίας που αναφέραμε στο κεφάλαιο 3 για την εύρεση καμπυλών τα αποτελέσματα που πήραμε για την Εικόνα 5.1 είναι αυτά που φαίνονται στην παρακάτω εικόνα (Εικόνα 5.3).

Με βάση μιας πρώτης εκτίμησης από την παρατήρηση της εικόνας, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ο καλλιτέχνης χρησιμοποίησε στο μεγαλύτερο ποσοστό ένα stencil για να σχεδιάσει την τοιχογραφία και πιο συγκεκριμένα την υπερβολή 1 (χρώμα βαθύ κόκκινο). Ωστόσο σε αυτήν την τοιχογραφία βρέθηκαν και άλλα αξιοπρόσεκτα αποτελέσματα όπως της σπείρας (κόκκινο χρώμα) και της υπερβολής 3 (χρώμα μπλε) για τα οποία θα αναφερθούμε πιο αναλυτικά.





**Εικόνα 5.3**

Στην συνέχεια παραθέτουμε τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που βρέθηκαν από το ταίριασμα, καθώς επίσης και αναλυτικούς πίνακες οι οποίοι περιέχουν στοιχεία σχετικά με τα σφάλματα (μέσο και ελάχιστο σφάλμα) και τα μήκη των τμημάτων των αντικειμένων.

Στις εικόνες που ακολουθούν (Εικόνα 5.4 και 5.5) φαίνονται ορισμένες λεπτομέρειες που πήραμε για το πρώτο φυτό (δηλαδή για το φυτό που βρίσκεται στα αριστερά της τοιχογραφίας, Εικόνα 5.1). Πιο συγκεκριμένα σε αυτήν την τοιχογραφία βρήκαμε ότι το πρώτο άνθος από αριστερά, Εικόνα 5.4, είναι σχεδιασμένο με την χρήση της υπερβολής 1 και μόνο για την άνω πλευρά του δεξιού σέπαλου βρήκαμε ότι χρησιμοποιήθηκε η σπείρα. Ακόμη, στην Εικόνα 5.5 φαίνεται καθαρά πως αυτοί οι μίσχοι δεν κατασκευάστηκαν από τον καλλιτέχνη με ελεύθερο χέρι, αλλά με την χρήση stencils, και συγκεκριμένα για τον μίσχο στα αριστερά της υπερβολή 1, ενώ για τον μίσχο ο οποίος βρίσκεται στα δεξιά έγινε χρήση της υπερβολής 3.





Εικόνα 5.4



Εικόνα 5.5

Ο Πίνακας 5.1 περιέχει όλα τα αποτελέσματα της εφαρμογής που πήραμε για το πρώτο φυτό της τοιχογραφίας.

Πίνακας 5.1

	Όνομα του τμήματος αντικειμένου (περιγραφή)	Μήκος τμήματος αντικειμένου(cm)	Min error (pixels)	Max error (pixels)	
1	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, πλευρά πετάλου αριστερά	11,0756	1,259140	4,116854	Υπερβολή 1 (magenta)
2	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, πλευρά πετάλου δεξιά	14,6093	1,087069	2,933388	Υπερβολή 1 (magenta)

3	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, αριστερό σέπαλο πλευρά πάνω	9,4472	0,886535	2,071756	Υπερβολή 1 (magenta)
4	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, αριστερό σέπαλο πλευρά κάτω	12,0627	1,328709	3,534802	Υπερβολή 1 (magenta)
5	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, δεξί σέπαλο πλευρά πάνω	9,7612	1,494246	3,893663	Σπείρα (red)
6	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, δεξί σέπαλο πλευρά κάτω	9,7794	1,488895	3,959237	Υπερβολή 1 (magenta)
7	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, αριστερή πλευρά μίσχου	20,5463	1,409867	3,331192	Υπερβολή 1 (magenta)
		23,4696	1,384660	3,932994	
		12,3589	1,297245	2,742840	
8	Πρώτο φυτό, άνθος πρώτο, δεξιά πλευρά μίσχου	18,8383	1,228079	3,408162	Υπερβολή 1 (magenta)
		14,3047	1,940731	5,767709	
		22,3798	1,902215	4,152957	
9	Πρώτο φυτό, άνθος δεύτερο, πλευρά πετάλου δεξιά	10,9914	1,238424	3,033060	Υπερβολή 1 (magenta)
10	Πρώτο φυτό, άνθος δεύτερο, δεξί σέπαλο πλευρά πάνω	8,0789	0,926880	2,296881	Υπερβολή 1 (magenta)
11	Πρώτο φυτό, άνθος δεύτερο, δεξί σέπαλο πλευρά κάτω	9,4965	1,164422	3,022748	Υπερβολή 1 (magenta)
12	Πρώτο φυτό, άνθος τρίτο, πλευρά πετάλου δεξιά	13,7643	1,447576	4,010147	Υπερβολή 1 (magenta)
13	Πρώτο φυτό, άνθος τρίτο, δεξί σέπαλο πλευρά πάνω	8,2292	0,793131	1,784818	Υπερβολή 1 (magenta)

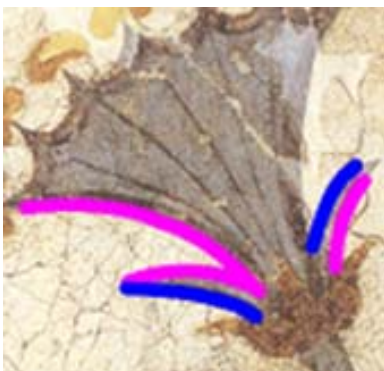
14	Πρώτο φυτό, άνθος τρίτο, δεξί σέπαλο πλευρά κάτω	9,7122	0,817291	2,489095	Υπερβολή 1 (magenta)
15	Πρώτο φυτό, άνθος τρίτο, αριστερή πλευρά μίσχου	21,8973	1,256678	2,902183	Υπερβολή 3 (blue)
		20,7792	1,850159	4,973377	
		18,2600	1,253713	3,693594	
16	Πρώτο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά πάνω	14,6323	1,536878	3,565437	Υπερβολή 1 (magenta)
17	Πρώτο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά πάνω	15,3564	1,074713	3,453436	Υπερβολή 1 (magenta)
18	Πρώτο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά κάτω	9,6614	1,229021	3,516769	Υπερβολή 1 (magenta)
19	Πρώτο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο κάτω, πλευρά πάνω	10,0173	0,872456	1,779794	Υπερβολή 1 (magenta)
20	Πρώτο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο κάτω, πλευρά κάτω	8,1979	0,996319	2,556267	Υπερβολή 1 (magenta)
		8,5190	0,663708	1,332430	
21	Πρώτο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά πάνω	9,3613	0,844949	2,596872	Υπερβολή 1 (magenta)
		9,7783	1,281726	3,121657	
22	Πρώτο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά κάτω	12,8515	2,074498	3,775601	Υπερβολή 1 (magenta)
23	Πρώτο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά πάνω	7,0854	0,650720	2,073414	Υπερβολή 1 (magenta)
		7,0196	0,735790	1,685504	
24	Πρώτο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά κάτω	8,7256	0,876898	2,304248	Υπερβολή 1 (magenta)

25	Πρώτο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο κάτω, πλευρά πάνω	6,9466	1,238379	2,864183	Υπερβολή 1 (magenta)
26	Πρώτο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο κάτω, πλευρά κάτω	10,5514	1,543998	3,667937	Υπερβολή 1 (magenta)

( 1cm = 33,65 pixels , όπου 33,65 είναι η ανάλυση της εικόνας 5.1)

Όμοια για το δεύτερο φυτό, δηλαδή αυτό που βρίσκεται δεξιά της τοιχογραφίας (Εικόνα 5.1), τα αποτελέσματα που πήραμε είναι ιδιαίτερα σημαντικά. Μερικά από αυτά παρουσιάζονται στις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 5.6, 5.7 και 5.8) και αναλυτικά στον Πίνακα 5.2.

Η εικόνα 5.6 αντιστοιχεί στο πρώτο άνθος του υπό συζήτηση φυτού και όπως διακρίνουμε δημιουργήθηκε με την χρήση της υπερβολής 1 και της υπερβολής 3. Στην εικόνα 5.7 (δεύτερο άνθος) χρησιμοποιήθηκαν και πέρα από το stencil της υπερβολή 1 και αυτό της υπερβολής 2 για το οποίο το αποτέλεσμα, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και από τον πίνακα 2, είναι πολύ εντυπωσιακό.



Εικόνα 5.6



Εικόνα 5.7



Εικόνα 5.8

Ο Πίνακας 5.2 που ακολουθεί περιέχει όλα τα αποτελέσματα της εφαρμογής που πήραμε για το δεύτερο φυτό της τοιχογραφίας.

**Πίνακας 5.2**

	<b>Όνομα του τμήματος αντικειμένου (περιγραφή)</b>	<b>Μήκος τμήματος αντικειμένου(cm)</b>	<b>Min error (pixels)</b>	<b>Max error (pixels)</b>	
1	Δεύτερο φυτό, άνθος πρώτο, πλευρά πετάλου αριστερά	9,4067	1,357378	3,093569	Υπερβολή 1 (magenta)
		9,9989	1,030320	2,564873	
2	Δεύτερο φυτό, άνθος πρώτο, αριστερό σέπαλο πλευρά πάνω	9,1715	0,996617	2,471076	Υπερβολή 1 (magenta)
3	Δεύτερο φυτό, άνθος πρώτο, αριστερό σέπαλο πλευρά κάτω	10,0731	1,569522	3,067179	Υπερβολή 3 (blue)
4	Δεύτερο φυτό, άνθος πρώτο, δεξί σέπαλο πλευρά πάνω	7,0294	1,073032	4,238086	Υπερβολή 3 (blue)
5	Δεύτερο φυτό, άνθος πρώτο, δεξί σέπαλο πλευρά κάτω	6,9324	0,838573	2,981148	Υπερβολή 1 (magenta)
6	Δεύτερο φυτό, άνθος δεύτερο, πλευρά πετάλου αριστερά	9,8958	1,280906	2,935665	Υπερβολή 1 (magenta)
		9,3120	1,184520	3,249822	
7	Δεύτερο φυτό, άνθος δεύτερο, πλευρά πετάλου δεξιά	13,7358	1,629886	3,726069	Υπερβολή 1 (magenta)
8	Δεύτερο φυτό, άνθος δεύτερο, αριστερό σέπαλο πλευρά πάνω	9,0985	1,225480	2,767604	Υπερβολή 1 (magenta)

9	Δεύτερο φυτό, άνθος δεύτερο, αριστερό σέπαλο πλευρά κάτω	12,0227	2,168491	4,326616	Υπερβολή 1 (magenta)
10	Δεύτερο φυτό, άνθος δεύτερο, δεξί σέπαλο πλευρά πάνω	7,2576	1,387145	3,435031	Υπερβολή 2 (green)
11	Δεύτερο φυτό, άνθος δεύτερο, δεξί σέπαλο πλευρά κάτω	7,1421	1,282499	3,160630	Υπερβολή 1 (magenta)
12	Δεύτερο φυτό, άνθος τρίτο, πλευρά πετάλου αριστερά	12,6275	1,552569	4,358397	Υπερβολή 1 (magenta)
13	Δεύτερο φυτό, άνθος τρίτο, πλευρά πετάλου δεξιά	15,6581	1,218564	2,939202	Υπερβολή 1 (magenta)
14	Δεύτερο φυτό, άνθος τρίτο, αριστερό σέπαλο πλευρά πάνω	8,9698	0,967493	2,538842	Σπείρα (red)
15	Δεύτερο φυτό, άνθος τρίτο, αριστερό σέπαλο πλευρά κάτω	11,1208	0,834857	2,401985	Υπερβολή 1 (magenta)
16	Δεύτερο φυτό, άνθος τρίτο, δεξί σέπαλο πλευρά πάνω	7,7117	1,102522	2,743040	Υπερβολή 1 (magenta)
17	Δεύτερο φυτό, άνθος τρίτο, δεξί σέπαλο πλευρά κάτω	9,4323	1,114026	3,297755	Υπερβολή 1 (magenta)
18	Δεύτερο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά πάνω	14,4518	1,656534	3,965496	Υπερβολή 1 (magenta)
		9,8648	1,475450	3,354528	
		7,4835	1,929331	3,542568	
19	Δεύτερο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά κάτω	7,2377	1,065648	2,613676	Υπερβολή 3 (green)
		7,5704	1,905705	3,767716	

20	Δεύτερο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά πάνω	9,0053	0,887979	3,279574	Υπερβολή 1 (magenta)
		7,9686	1,549168	3,432204	
21	Δεύτερο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά κάτω	7,2306	1,000386	2,421756	Υπερβολή 1 (magenta)
		7,1577	1,316532	3,698506	
22	Δεύτερο φυτό, αριστερά κάτω, φύλλο τρίτο, πλευρά πάνω	11,8922	1,916368	3,941448	Υπερβολή 1 (magenta)
23	Δεύτερο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά πάνω	10,1870	0,684126	1,986854	Υπερβολή 1 (magenta)
24	Δεύτερο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο πάνω, πλευρά κάτω	14,0028	1,346440	3,712360	Υπερβολή 1 (magenta)
25	Δεύτερο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο μεσαίο, πλευρά πάνω	7,9408	1,131541	2,425148	Υπερβολή 1 (magenta)
		7,3179	1,294587	3,2392282	
26	Δεύτερο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο κάτω, πλευρά πάνω	12.5457	1.161277	2.776480	Υπερβολή 1 (magenta)
27	Δεύτερο φυτό, δεξιά κάτω, φύλλο κάτω, πλευρά κάτω	10.4180	1.538178	4.332022	Υπερβολή 1 (magenta)
		15.0521	1.599844	3.429734	

( 1cm = 33,65 pixels , όπου 33,65 είναι η ανάλυση της εικόνας 5.1)

Συνοψίζοντας αναφέρουμε ότι στην τοιχογραφία της εικόνας 5.1 βρέθηκαν 53 τμήματα αντικειμένων τα οποία αντιστοιχούν σε τέσσερα από τα επτά stencils που βρέθηκαν και συγκεκριμένα αντιστοιχούν στις υπερβολές 1, 2 και 3 και στη σπείρα.

### 5.3 Αποτελέσματα εφαρμογής στην δεύτερη τοιχογραφία (Εικόνα 5.2)

Για την εύρεση των καμπυλών στην τοιχογραφία της γυναικείας φιγούρας (Εικόνα 5.2) ακολουθήσαμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της προηγούμενης τοιχογραφίας. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι αυτά που απεικονίζονται στην Εικόνα 5.9



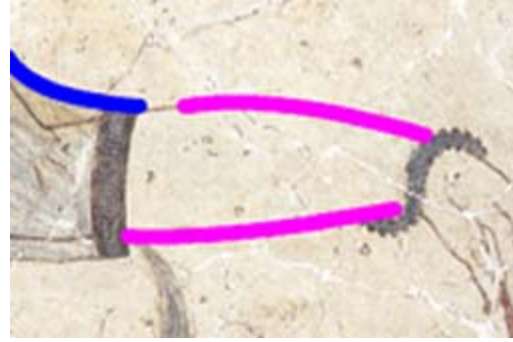
Εικόνα 5.9

Και σε αυτήν την τοιχογραφία διαπιστώνουμε ότι ο καλλιτέχνης την σχεδίασε έχοντας στην διάθεσή του προκατασκευασμένα stencils. Για να γίνει πιο εμφανές αυτό δίνουμε στην συνέχεια ορισμένες εικόνες (Εικόνα 5.10, 5.11 και 5.12), στις οποίες αποδεικνύεται η ύπαρξη stencils στην γυναικεία φιγούρα καθώς επίσης και ένας αναλυτικός πίνακας ο οποίος περιέχει, όπως και οι προηγούμενοι, στοιχεία σχετικά με τα σφάλματα στο ταίριασμα των stencils και τα μήκη των τμημάτων των αντικειμένων.





**Εικόνα 5.10**



**Εικόνα 5.11**



**Εικόνα 5.12**

Πιο συγκεκριμένα παρατηρώντας την Εικόνα 5.10 και σε συνδυασμό με τα στοιχεία του πίνακα 5.3, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο καλλιτέχνης της τοιχογραφίας σχεδίασε τα βασικά χαρακτηριστικά του προσώπου με την χρήση των stencils αφού βρέθηκε ότι τα σφάλματα είναι αρκετά μικρά.

Στην Εικόνα 5.11 φαίνεται ότι το αριστερό χέρι της γυναικείας φιγούρας δημιουργήθηκε με την χρήση της υπερβολής 1. Πρόκειται για ένα αποτέλεσμα το οποίο το έχουμε συναντήσει και σε άλλες τοιχογραφίες με γυναικείες φιγούρες όπως στην τοιχογραφία με τις Κροκοσυλλέκτριες, όπου τα αντίστοιχα τμήματα των χεριών δημιουργήθηκαν με το ίδιο stencil.

Στην συνέχεια δίνεται ο Πίνακας 5.3 με όλα τα αποτελέσματα της εφαρμογής που πήραμε για την τοιχογραφία της Εικόνας 5.2.

Πίνακας 5.3

	Όνομα του τμήματος αντικειμένου (περιγραφή)	Μήκος τμήματος αντικειμένου(cm)	Min error (pixels)	Max error (pixels)	
1	Σκουλαρίκι εσωτερική πλευρά	9,8489	0,955188	2,449174	Σπείρα (red)
2	Σκουλαρίκι εξωτερική πλευρά	12,4499	1,169807	2,817839	Σπείρα (red)
3	Προφίλ προσώπου	6,5169	0,529887	1,297384	Υπερβολή 1 (magenta)
		1,1578	0,482362	1,831241	Σπείρα (red)
		1,9267	0,846985	1,909364	
		1,6990	0,609151	2,420527	
		4,6456	1,033073	2,179884	
		1,6889	0,407356	0,949255	
4	Εσωτερική μεριά αφτιού	2,9972	0,690473	1,533621	Σπείρα (red)
		2,4760	0,542159	1,562921	
		1,8533	0,676555	2,830123	
5	Άνω πλευρά φρυδιού	7,3414	0,850907	2,376673	Υπερβολή 4 (cyan)
6	Κάτω πλευρά φρυδιού	6,7929	0,672309	1,633077	Υπερβολή 3 (blue)
7	Άνω πλευρά ματιού	3,0749	0,643703	1,588136	Σπείρα (red)
8	Κάτω πλευρά ματιού	2,8251	0,317868	1,327763	Σπείρα (red)

9	Οι αφέλειες (το τμήμα που είναι ακριβώς πάνω από το μάτι)	1,4423	0,485279	1,342184	Σπείρα (red)
		1,6926	0,253836	0,678781	
		1,7422	0,275616	1,350553	
		1,7983	0,520960	1,366965	
		1,7122	0,434573	1,033168	
		0,9504	0,377343	0,825516	
		0,6791	0,291033	0,592324	
10	Μπούκλα μπροστά στην φράντζα (εξωτερική πλευρά)	2,6369	0,421098	1,483839	Σπείρα (red)
		2,2270	0,697306	2,211639	
		3,5926	0,443700	1,160032	
11	Εξωτερική πλευρά κοτσίδας	8,8825	1,255998	2,867547	Σπείρα (red)
		7,3156	1,423721	2,996238	
12	Εσωτερική πλευρά κοτσίδας	8,5827	0,717028	1,602425	Υπερβολή 2 (green)
		9,0473	0,810294	3,841065	
13	Το τμήμα μαλλιών στο πίσω μέρος του κεφαλιού	9,6509	0,894214	3,112020	Υπερβολή 3 (blue)
		8,7213	1,118131	3,005208	
14	Το τμήμα των μαλλιών μετά την κοτσίδα	6,9437	0,781711	2,653587	Σπείρα (red)
		10,9030	1,099046	2,822747	
15	Η συνεχής γραμμή του λαιμού, στήθους και κοιλιάς	19,9357	1,294545	3,847599	Υπερβολή 1 (magenta)
		11,1648	1,208359	3,977027	Σπείρα (red)
		8,7281	0,973633	3,235561	
		8,2306	0,881003	2,138380	Υπερβολή 1 (magenta)

16	Δεξιά πλευρά του πέτου του πουκαμίσου	14,9179	1,262223	2,931986	Υπερβολή 1 (magenta)
		15,3075	1,301039	2,845107	
17	Αριστερή πλευρά του πέτου του πουκαμίσου	15,0429	0,739014	2,534836	Υπερβολή 1 (magenta)
		12,5908	1,392884	3,447272	
		15,7267	0,777783	2,306636	
18	Αριστερό μανίκι πουκαμίσου, εξωτερική πλευρά	21,1466	1,849002	4,749737	Υπερβολή 3 (blue)
		10,3331	1,180031	3,708280	
19	Πάνω πλευρά αριστερού χεριού	18,8457	1,073617	2,811498	Υπερβολή 1 (magenta)
20	Κάτω πλευρά αριστερού χεριού	17,3074	1,315599	3,659130	Υπερβολή 1 (magenta)
21	Δεξί μανίκι πουκαμίσου, εσωτερική πλευρά	7,4875	0,746111	2,064036	Υπερβολή 2
		10,3895	1,287163	3,066521	Υπερβολή 1 (magenta)
		11,3236	0,998932	2,801430	
22	Δεξί πλευρό γυναίκας	7,9872	1,045785	2,778205	Υπερβολή 1 (magenta)
		8,5666	0,766552	2,251139	
23	Αριστερή πλευρά φούστας κάτω τμήμα	18,3635	1,623821	3,355649	Υπερβολή 3 (blue)
24	Αριστερή πλευρά φούστας άνω τμήμα	11.2571	1.489557	3.229935	Υπερβολή 1 (magenta)
		9.6671	0.967941	2.591706	
25	Δεξιά πλευρά φούστας	7,0972	0,944061	2,945388	Υπερβολή 1 (magenta)
		15,9233	1,056581	3,155543	
		13,0225	1,038254	2,505453	

( 1cm = 44,33 pixels , όπου 44,33 είναι η ανάλυση της εικόνας 5.2)

Συνοψίζοντας αναφέρουμε ότι στην τοιχογραφία της εικόνας 5.2 βρέθηκαν 25 τμήματα αντικειμένων τα οποία αντιστοιχούν σε πέντε stencils (συγκεκριμένα αντιστοιχούν στις υπερβολές 1, 2, 3 και 4 και στη σπείρα).

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] René Treuil, Pascal Darcque, J.-Cl Poursat, Giller Touchais, Οι πολιτισμοί του Αιγαίου, Εκδόσεις ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΑ, Αθήνα 1996
- [2] Πέπη Ρηγοπούλου, Λευτέρης Οικονόμου, Σταθμοί στην ιστορία της Ελληνικής τέχνης, ΟΕΔΒ
- [3] Kohler R., “A segmentation system based on thresholding”, Computer Graphics and Image Processing, CGIP -15, pp. 319-338, 1981
- [4] P.V.C. Hough, “Methods and Means for recognizing complex patterns”, U.S. Patent, 1962
- [5] Ioannis Pitas, Digital Image Processing algorithms
- [6] R.D. Duda and Hart, “Use of the Hough transformation to detect lines and curves in Pictures”, commun. ACM, vol 15, pp. 11-15, 1972
- [7] Clark F. Olson, “Constrained Hough transforms for curve detections”, Computer vision and Image understanding, vol 15, pp. 329-345, 1999
- [8] C. Papaodysseus, D. Fragoulis, A. Skembris, M. Panagopoulos, Th. Panagopoulos, P Rousopoulos, M.Exarhos, “Determination of the method of construction of 1650 BC wall paintings”, Pattern Analysis & Machine Intelligence.