ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
CORELAB

Tractability of Constraint Satisfaction Languages using Algebra.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Παναγιώτη Βούλγαρη

Επιβλέπων: Στάθης Ζάχος
Καθηγητής

Παναγιώτης Βούλγαρης

Αθήνα,

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
CORELAB

Tractability of Constraint Satisfaction Languages using Algebra.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Παναγιώτη Βούλγαρη

Επιβλέπων: Στάθης Ζάχος
Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την .

....	....	....
Ζάχος Σ. Καθηγητής	Σελλής Τ. Καθηγητής	Αφράτη Φ. Καθηγητής

Αθήνα, .

....
Παναγιώτης Βούλγαρης
Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Ηλεκτρονικών Υπολογιστών

Περίληψη

Πολλά combinatorial προβλήματα μπορούν να εκφραστούν ως προβλήματα constraint satisfaction. Αυτή η κλάση προβλημάτων είναι γνωστό οτι είναι NP-complete γενικά, αλλά περιορίζοντας τις μορφές των constraints μπορούμε να τα λύσουμε στο P. Αυτοί οι περιορισμοί μπορούν είτε να είναι στο ποιές μεταβλητές περιορίζουν ποιές άλλες, είτε περιορίζοντας τις μορφές των σχέσεων που χρησιμοποιούνται στα constraints. Αυτή η ιδέα είναι που θα μελετηθεί και στη παρούσα διπλωματική. Θα ακολουθήσουμε τις ιδέες που προτάθηκαν, από το 1978 μέχρι το 2005, και θα δούμε τις ισχυρές συνδέσεις του θέματος με την universal algebra.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά Ορισμοί

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα γνωρίσουμε το πρόβλημα το οποίο μελετάμε. Πρώτα θα κάνουμε μια γρήγορη εισαγωγή στα αποτελέσματα μέχρι τώρα στο πρόβλημα που μελετάμε. Θα δούμε τον τυπικό ορισμό του CSP, καθώς και ισοδύναμα προβλήματα. Να σημειωθεί οτί όταν λέμε ισοδύναμα δεν εννοούμε την ισοδυναμία με την έννοια της αναγωγής αφού τότε όλα τα NP-complete προβλήματα είναι ισοδύναμα. Μπορούμε να πούμε οτί μελετάμε το CSP μέσω διαφορετικών πρισμάτων, όπως είναι αυτό του προβλήματος της ύπαρξης ομομορφισμού. Τέλος για να υπάρξει καλύτερη κατανόηση της γλώσσας του CSP θα εκφράσουμε γνωστά προβλήματα στην γλώσσα του CSP αλλά και στη γλώσσα των ισοδύναμων μορφών του.

Το θέμα της διπλωματικής είναι ο χαρακτηρισμός της πολυπλοκότητας ενός προβλήματος CSP βασιζόμενοι στις ιδιότητες της Γλώσσας Περιορισμών, δηλαδή των σχέσεων που χρησιμοποιούμε ως περιορισμούς. Ειδικότερα θα ασχοληθούμε πότε μπορεί να λυθεί το πρόβλημα στο P και πότε γίνεται NP-complete.

1.1 Εισαγωγή

Σε ένα CSP ο σκοπός είναι να βρούμε μια άναθεση τιμών σε ένα δωσμένο σύνολο μεταβλητών, που υπόκειται σε περιορισμούς στο ποιές τιμές μπορούν να ανατεθούν συγχρόνως σε συγκεκριμένα υποσύνολα μεταβλητών [26, 28]. Ένα συχνό παράδειγμα ενός τέτοιου προβλήματος είναι αυτό της ικανοποιησιμότητας προτασιακών τύπων [15], οπού στις μεταβλητές πρέπει να ανατεθούν boolean τιμές και οι περιορισμοί είναι από τις προτάσεις.

Το μαθηματικό υπόβαθρο που χρησιμοποιείται για να περιγραφεί τα CSPs έχει στενούς δεσμούς με πολλές περιοχές της θεωρίας υπολογιστών και των μαθηματικών. Συνδέεται με την σχεσιακή θεωρία βάσεων δεδομένων [16], με λογική και συνολοθεωρία [35], και με universal algebra. Ένα survey αυτών των αποτελεσμάτων είναι το [31].

Σε ότι επακολουθήσει θεωρούμε οτί $P \neq NP$, και καλούμε ένα πρόβλημα tractable αν ανήκει στο P. Το CSP είναι γνωστό οτί είναι NP-hard γενικά [26, 28]. Παρόλ' αυτά, θέτοντας όρια στις μορφές των περιορισμών έχει αποδειχθεί οτι διασφαλίζει την tractability [9, 21, 22, 24, 36].

Ένα σημαντικό ανοιχτό πρόβλημα στην περιοχή είναι να χαρακτηριστούν ακριβώς οι μόρφες των σχέσεων περιορισμών οι οποίες δημιουργούν tractabe κλάσεις προβλημάτων. Αυτό το πρόβλημα είναι σημαντικό από θεωρητική άποψη, αφού βοηθάει στον καθορισμό του ορίου μεταξύ tractability και intractability σε ένα ευρύ φάσμα συνδιαστικών προβλημάτων έυρεσης (λύσης). Είναι επίσης σημαντικό από πρακτικής άποψης, αφού επιτρέπει τη δημιουργία γλωσσών προγραμματισμού περιορισμών που χρησιμοποιούν τη γνώση των tracabe κλάσεων περιορισμών ώστε να δίνουν πιο αποδοτικές τεχνικές επίλυσης [32, 25].

Το πρόβλημα του χαρακτηρισμού των tractable περιπτώσεων λύθηκε εξ ολοκλήρου στην ειδική περίπτωση που οι μεταβλητές παίρνουν Boolean τιμές, από τον Schaefer το 1978 [33]. Ο Schaefer απέδειξε οτί για Boolean CSP (τα οποία ονόμασε "γενικευμένα προβλήματα ικανοποιησιμοτητας"), υπάρχουν ακριβώς έξι διαφορετικές οικογένεις tractable περιορισμών, και οποιοδήποτε πρόβλημα που περιέχει περιορισμούς εκτός αυτών των έξι οικογενειών είναι NP-complete. Αυτό το σημαντικό αποτέλεσμα είναι γνωστό ως το θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer. Παρόμοια αποτελέσματα διχοτόμισης έχουν αποδειχθεί για άλλα συνδιαστικά προβλήματα σε Boolean πεδία τιμών που σχετίζονται με το παραπάνω.

Ο Schaefer [33] έθεσε το ερώτημα του εαν η ανάλυση της πολυπλοκότητας μπορούσε να επεκταθεί σε μεγαλύτερα σύνολα (δηλαδή παραπάνω από μόνο δύο τιμές). Κάποια πρόοδος σημειώθηκε σε αυτό το δρόμο πρόσφατα, και ένας αριθμός από tractable οικογένεις περιορισμών αναγνωρίστηκε, ορισμένων τόσο σε πεπερασμένα όσο και άπειρα σύνολα. Συγγεκριμένα, οι Feder και Vardi [35] χρησιμοποίησαν τεχνικές από λογικό προγραμματισμό και θεωρία συνόλων ωστέ να αναγνωρίσουν τρεις διευρημένες οικογένειες από tractable περιορισμούς, που είναι υπερσύνολα των έξι οικογενειών που όρισε ο Schaefer. Μια σειρά paper του Jeavons και άλλων συγγραφέων απέδειξε οτι οποιαδήποτε tractable κλάση περιορισμών ορισμένων σε πεπερασμένα σύνολα μπορεί να χαρακτηριστεί χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες σχέσεων [19, 23, 21, 22]. Αυτή η μεθοδολογία χρησιμοποιήθηκε αργότερα από τον Bulatov ώστε να μπορέσει να πετύχει πλήρη χαρακτηρισμό της πολυπλοκότητας περιορισμών ορισμένων σε σύνολα τριών στοιχείων [3]. Τέλος, σε temporal και spatial λγικής προβλήματα που περιέχουν περιορισμούς σε απειροσύνολα, αρκετές tractable κλάσεις έχουν βρεθεί [29], μάλιστα έχει προκύψει ένα θεώρημα διχοτόμισης για temporal reasoning προβλήματα ορισμένα σε διαστήματα που εκφράζονται με την άλγεβρα διαστημάτων του Allen. Έχει επίσης δειχθεί πρόσφατα οτι η πολυπλοκότητα συγκεκριμένων μορφών περιορισμών σε πεπερασμένα σύνολα τιμών μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας αλγεβρικές ιδιότητες.[5]

Παρ' όλα αυτά δεν υπάρχει ακόμα πλήρης χαρακτηρισμός της πολυπλοκότητας των περιορισμών σε πεπερασμένα σύνολα με παραπάνω από τρία στοιχεία, ούτε για τυχαία πεπερασμένα σύνολα.

Πρέπει να παρατηρήσουμε οτί τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στον τομέα έγιναν όταν χρησιμοποιήθηκαν δυνατότερα και πιο γενικευμένα μαθηματικά εργαλεία. Έτσι στο θέωρημα διχοτόμησης του Schaefer μιλάμε για συντακτικές ιδιότητες των προτασιακών τύπων που σίγουρα δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μη-Boolean περιορισμούς. Για να βρεθεί μια πιο ικανοποιητική γλώσσα και αντίστοιχα μαθηματικά εργαλεία έχουν γίνει διάφορες προσπάθεις [11, 12, 35, 19, 21], η διπλωματική θα ασχοληθεί περισσότερο με τις προσπάθειες που προσανατολίζονται στη χρήση των αλγεβρικών ιδιοτήτων των περιορισμών [19, 21] με κορύφωση το [2] που φτάνει να χαρακτηρίζει αλγεβρικές δομές ως προς tractability.

Το πρώτο βήμα σε αυτή την αλγεβρική θεώρηση χρησιμοποιεί την γνωστή ιδέα οτι δωσμένου ενός αρχικού συνόλου από περιορισμούς - σχέσεις, θα υπάρχουν περισσότερες σχέσεις οι οποίες θα μπορούν να προστεθούν στο σύνολο χωρίς να αλλάξει η πολυπλοκότητα του προβλήματος. Έχει αποδειχθεί οτι μπορούμε να προσθαίσουμε όλες τις σχέσεις που μπορούμε να παράξουμε από τις αρχικές χρησιμοποιώντας απλούς κανόνες. Τα μεγαλύτερα σύνολα σχέσεων που μπορούμε να πάρουμε χρησιμοποιώντας αυτούς τους κανόνες ονομάζονται relational clones [13]. Άρα καταλήγουμε οτι είναι αρκετό να αναλύσουμε την πολυπλοκότητα μόνο των συνόλων σχέσεων που είναι relational clones.

Το επόμενο βήμα στην αλγεβρική αντιμετώπιση είναι η παρατήριση οτι τα relational clones μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως από τους πολυμορφισμούς τους, οι οποίοι είναι αλγεβρικές πράξεις στο ίδιο σύνολο με το οποίο είναι ορισμένες οι σχέσεις [21, 18]. Έτσι όχι μόνο μπορούμε να περιγράφουμε οικογένειες σχέσεων που αλλιώς θα ήταν δύσκολο να περιγραφούν, αλλά μέσω των πράξεων μπορούμε να βρούμε ιδιότητες των σχέσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αποδοτικούς αλγόριθμους. Αυτή η σχέση μεταξύ relational clone και πολυμορφισμών έχει ήδη παίξει ένα σθμαντικό ρόλο στην αναγνώριση πολλών tractable κλάσεων και στη δημιουργία κατάλληλων αποδοτικών αλγοριθμικών λύσεων για αυτές [3, 1, 6, 4, 10, 19].

Όμως όπως θα δούμε μπορούμε να πάμε ένα βήμα παρακάτω συσχετίζοντας άλγεβρες και όχι πολυμορφισμούς με το σύνολο των περιορισμών. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε θεμελειώδη θεωρήματα για finite άλγεβρες [17, 27, 34], και έτσι να φτάσουμε στα αποτελέσματα του [2].

1.2 Βασικοί Ορισμοί

1.2.1 Σχέσεις και Συναρτήσεις

Παρακάτω θα δωθούν οι σημαντικότεροι ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν μετέπειτα, οι οποίοι χρησιμοποιούνται συνεχόμενα στα επόμενα κεφάλαια.

Ειδικά οι χαρακτηρισμοί των συναρτήσεων είναι εδώ σαν αναφορά και σε μια πρώτη ανάγνωση η περισσότεροι δεν χρειάζονται.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1.1

Σχέση: Για οποιοδήποτε σύνολο A, και φυσικό αριθμό n, το σύνολο όλων των n-άδων στοιχείων του A συμβολίζεται με A^n. Κάθε υποσύνολο του A^n ονομάζεται σχέση n ορισμάτων πάνω στο A. Το σύνολο όλων των πεπερασμένων σχέσεων στο A συμβολίζεται R_A. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1.2

Συνάρτηση: Μια συνάρτηση f από ένα σύνολο A σε σύνολο B, συμβολίζεται με $f : A \to B$, και είναι ένα υποσύνολο του $A \times B$ τέτοιο ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει ακριβώς ένα $b \in B$ τέτοιο ώστε το $\langle a.b \rangle \in f$. Αν $\langle a, b \rangle \in f$ γράφουμε $f(a) = b$. Με $=_A$ θα συμβολίζουμε την ισότητα στο A ενώ με $\neq_A$ την ανισότητα. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1.3

Συνάρτηση ν-ορισμάτων: Μια συνάρτηση ν-ορισμάτων σε ένα σύνολο A είναι μια συνάρτηση $f : A^n \to A$. Το σύνολο όλων των συναρτήσεων στο A καλείται O_A. Αν $\langle \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle, a_{n+1} \rangle \in f$ γράφουμε $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_{n+1}$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.1.4

Χαρακτηρισμοί συναρτήσεων: Έστω μια συνάρτηση f ν-ορισμάτων από το $A_n \to A$.

- Η f είναι injective αν $f(a) = f(a') \Leftrightarrow a = a'$. Αν n=1 τότε η f καλείται αναδιάταξη.

- Αν $f(a, a, \ldots, a) = a \ \forall a \in A$ τότε η f λέγεται idempotent.

- Αν υπάρχει κάποιος δείκτης $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοιος ώστε $\forall \langle a_1,\ a_2, \ldots, a_n \rangle \in A^n$ έχουμε $f(a_1, a_2,\ \ldots, a_n) = g(a_i)$, με $g : A \to A$ μη σταθερή, η f καλείται 'essentially unary'. Κάθε συνάρτηση που δεν ανήκει σε αυτές θα λέγεται essentially nonunary, συμπεριλαμβανομένων των σταθερών.

- Αν $n = 2$ και $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$ έχουμε $f(f(a_1, a_2), a_3) = f(a_1, f(a_2, a_3))$ (Προσαιτεριστικότητα Associativity) και $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$ (Αντιμεταθετικότητα Commutativity), τότε η f λέγεται AC συνάρτηση.

- Αν $n \geq 3$ και υπάρχει κάποιος δέικτης $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ τέτοιος ώστε $\forall a_1,\ a_2 \ldots, a_n \in A$ τέτοια ώστε $|\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}| < n$ έχουμε $f(a_1, a_2,\ \ldots, a_n) = a_i$, αλλά η f δεν είναι προβολή, τότε η f λέγεται ημιπροβολή.

- Αν $n = 3$ και $\forall a, a' \in A$ έχουμε $f(a,a,a') = f(a,a',a) = f(a',a,a) = a$, τότε η f λέγεται συνάρτηση πλειονότητας. Η συνάρτηση πλειονότητας στο A:
$$f(x,y,z) = \{^{yify=z}_{xotherwise}$$
θα καλείται 'dual discriminator' στο A και θα συμβολίζεται με μ_A.

- Αν $n = 3$ και $\forall a_1, a_2, a_3 \in A$ έχουμε $f(a_1,a_2,a_3) = a_1 + a_2 + a_3$, όπου $+$ είναι μια συνάρτηση με $n = 2$ στο A ώστε $\langle A, + \rangle$ να είναι μια Αβελιανή 2-ομάδα, τότε η f ονομάζεται 'generalised parity operation'.

□

1.2.2 Constraint Satisfaction Problem

Πλέον μπορούμε να ορίσουμε το CSP.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.2.1
Γλώσσα περιορισμών: Γλώσσα περιορισμών σε ένα σύνολο A είναι ένα σύνολο σχέσεων στο σύνολο A. $\Gamma = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n\}$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.2.2
Πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών : Για κάθε σύνολο A και κάθε γλώσσα περιορισμών Γ στο A, το Πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών $CSP(\Gamma)$ είναι το συνδυαστικό πρόβλημα απόφασης με
Είσοδο: (V, A, C) όπου

- V είναι ένα σύνολο μεταβλητών
- C είναι ένα σύνολο περιορισμών $C_1, \ldots, C_q$.
Κάθε περιορισμός $C_i \in C$ είναι ένα ζευγάρι (s_i, ρ_i) όπου
  - s_i είναι μια πλειάδα μεταβλητών μεγέθους m_i, που ονομάζεται το πεδίο του περιορισμού.
  - $\rho_i \in \Gamma$ είναι μια σχέση m_i μεταβλητών πάνω στο A, που ονομάζεται σχέση περιορισμού.

Έξοδο: Ναι, αν υπάρχει λύση, δηλαδή μια συνάρτηση $f(x)$, από το V στο A, τέτοια ώστε, για κάθε περιορισμό $(s_i, \rho_i) \in C$, με $s_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im})$, η πλειάδα $(f(x_{i1}), \ldots, f(x_{im}))$ ανήκει στο ρ_i. Όχι, αλλιώς. □

1.2.3 Πρόβλημα Ομομορφισμών

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3.1
Relational structure: Μια "relational structure" είναι ένα ζευγάρι, $\langle V, E_i\ (i \in I) \rangle$, που αποτελείται από ένα μη κενό σύνολο V, και ένα σύστημα,

E_i, από πεπερασμένες σχέσεις στο V, που δεικτοδοτούνται από τα στοιχεία του I. Το σύνολο V καλείται το 'σύμπαν' της relational structure.

Μια relational structure $S = \langle V, E_i \ (i \in I) \rangle$ καλείται πεπερασμένη αν το V και το i είναι πεπερασμένα. Σε αυτή την περίπτωση θα γράφουμε το S ως $\langle V, E_1, E_2, \ldots, E_{|I|} \rangle$ □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3.2

rank function: Η 'rank function' μιας relational structure $\langle V, E_i(i \in I) \rangle$, είναι μια συνάρτηση ρ από το I στο σύνολο των μη αρνητικών ακαιρέων, έτσι ώστε $\forall i \in I, \rho(i)$ είναι η πολαπλότητα της E_i.

Μια relational structure S είναι παρόμοια με μια άλλη αν έχουν την ίδια rank function. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3.3

Ομομορφισμοί: Έστω $S = \langle V, E_i(i \in I) \rangle$ και $S' = \langle V', E_i{}' \ (i \in I) \rangle$ δύο παρόμοιες relational structures, και έστω ρ η κοινή τους rank function.

Ένας ομομορφισμός από την S στην S' είναι μια συνάρτηση $h : V \rightarrow V'$ τέτοια ώστε, $\forall i \in I$,

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_{\rho(i)} \rangle \in E_i \Rightarrow \langle h(v_1), h(v_2), \ldots, h(v_{\rho(i)}) \rangle \in E_i'.$$

Το σύνολο όλων των ομομορφισμών από το σύνολο S στο S' καλείται $Hom\ (S, S')$. □

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε ένα ισοδύναμο με το CSP πρόβλημα αυτό της εύρεσης ομομορφισμού μεταξύ σύο relational structures. Επίσης καλείται και 'general combinatorial problem' (GCP).

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2.3.4

Πρόβλημα ομομορφισμού: Το πρόβλημα ομορφισμού είναι η κλάση των προβλημάτων απόφασης με:

Είσοδο: Ένα ζευγάρι από παρόμοιες relational structures, $\langle S_1, S_2 \rangle$.

Έξοδο: Αποδέχεται αν υπάρχει ένας ομομορφισμός μεταξύ των δύο, αλλιώς δεν αποδέχεται. □

1.3 Παραδείγματα

1.3.1 Γνωστά προβλήματα στη γλώσσα του CSP

Σ' αυτό το τμήμα θα δείξουμε την ισοδυναμία των παραπάνω προβλημάτων και θα εκφράσουμε γνωστά μας προβλήματα στη γλώσσα των προβλημάτων. Στα προβλήματα γράφων θα συμβολίζουμε με Δ τους κόμβους $\{\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_{|\Delta|}\}$ και E τις πλευρές $\{e_1, e_2, \ldots, e_{|E|}$. Ενώ V θα είναι το σύνολο των μεταβλητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.1

Χρωματισμός Γράφων: Η είσοδος του προβλήματος χρωματισμών γράφων είναι ένας γράφος G και ένας ακάιρεος q. Το ερώτημα είναι εάν οι κόμβοι του G μπορούν να δεικτοδοτηθούν με q χρώματα έτσι ώστε οι γειτονικές κορυφές να έχουν διαφορετικά χρώματα.

CSP: $A = \{1, \ldots, q\}$ τα χρώματα $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|\Delta|}\}$ (μια μεταβλητή για κάθε κόμβο), $\Gamma = \{\neq_A\}$ και $C = \}C_1, \ldots, C_{|E|}\}$ με $C_i = \langle e_i, \neq_A \rangle$ για κάθε $e_i \in E$ οι κόμβοι του γράφου.

GCP: Εύρεση ομομορφισμού μεταξύ των $\langle G, K_q \rangle$, με K_q τον πλήρη γράφο με q κόμβους. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.2

Έυρεση Κλίκας: Η είσοδος του προβλήματος έυρεσης κλίκας είναι ένας γράφος G και ένας ακάιρεος q. Το ερώτημα είναι εάν υπάρχει κλίκα μεγέθους q.

CSP: $A = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{|\Delta|}\}$ όλοι οι κόμβοι του G, $V = \{v_1, v_2, \ldots v_k$ οι επιλεγμένες κόμβοι για την κλίκα , $\Gamma = \{E\}$ οι κόμβοι και $C = \{C_{1,1}, \ldots , C_{|K|,|K|}\}$ με $C_{i,j} =$ αν $i \neq j$ $\langle\langle v_i, v_j \rangle, E\rangle$ αλλιώς $\langle\langle v_i, v_j \rangle, \neq_A\rangle$.

GCP: Εύρεση ομομορφισμού μεταξύ των $\langle K_q, G \rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.3

Vertex Cover: Η είσοδος εδώ είναι ένας γράφος G και ακέραιος q. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει $V' \subseteq V$ με $|V'| \leq k$, έτσι ώστε για κάθε $\langle v, w \rangle \in E$ ή $v \in V'$ ή $w \in V'$.

CSP: $A = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{|\Delta|}\}$, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|\Delta|-q}\}$, $\Gamma = \{overlineE\}$, $C = \ldots C_{i,j} \ldots i, j \leq |\Delta| - q$, με $C_{i,j} = \langle\langle v_i, v_j \rangle, overline(E)\rangle$.

GCP: Εύρεση ομομορφισμού μεταξύ των $\langle K_{(|\Delta|-q)}, \overline{G} \rangle$, οπού G ο συμπληρωματικός γράφος $\langle V, \neq_V -E \rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.4

k-Dimesnional matching: Η είσοδος εδώ είναι ένας μια σχέση M πολλαπλότητας k σε ένα σύνολο Λ. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει $M' \subseteq M$ με $|M'| = |V|$, έτσι ώστε οποιαδήποτε $t_1, t_2 \in M'$ δεν συμφωνούν σε καμία συντεταγμένη.

Ορίζουμε εκ των προτέρων την $\neq'_M = M^2 - \langle t_i, t_j \rangle$ όταν τα $\langle t_i, t_j \rangle$ συμφωνούν σε κάποια συντεταγμένη.

CSP: $A = M, V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}, \Gamma = \{\neq'_M\}, C = \{\ldots C_{i,j} \ldots\} i, j \leq k$, με $C_{i,j} = \langle\langle v_i, v_j \rangle, \neq'_M\rangle$.

GCP: Εύρεση ομομορφισμού μεταξύ των $\langle\langle V, \neq_V \rangle, \langle M, \neq'_M \rangle\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.5

Hamiltonian Circuit: Η είσοδος είναι ένας γράφος G και ζητείται αν υπάρχει κύκλος ο οποίος να περνάει από κάθε κόμβο μια φορά.

Ορίζουμε C_V μια κυκλική αναδιάταξή του V

CSP: A = οι κόμβοι, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|\Delta|}\}$ η σειρά μετην οποία περνάμε τους κόμβους. $\Gamma = \{E, \neq_V\}$ και $C = \{C_1, \ldots, C_{|\Delta|}\}$ με $C_i = \langle\langle v_i, v_{(i+1)\ mod|\Delta|}\rangle, E\rangle$, επίσης βάζουμε constraints για να μην αντιστοιχούν δύο κόμβοι σε ίδια σειρά. ($C_{\neq i,j} = \langle\langle v_i, v_j\rangle, \neq_V\rangle$).

GCP: Εύρεση ομομορφισμού μεταξύ των $\langle\langle V, C_V, \neq_v\rangle, \langle V, E, \neq_V\rangle\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.6

Bandwidth: Η είσοδος είναι ένας γράφος $G = \langle\Delta, E\rangle$ με $\Delta = \{\ \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{|\Delta|}\}$, και ένας θετικός ακέραιος q. Το ερώτημα είναι εάν υπάρχει μια γραμμική διάταξη του V τέτοια ώστε οι γειτονικοί κόμβοι του γράφου να απέχουν το πολύ q στη διάταξη.

Ορίζουμε $B_q = \{\langle v_i, v_j\rangle \in V^2 ||i - j| \leq q\}$.

CSP: A = οι κόμβοι, $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_{|\Delta|}\}$ η σειρά με την οποία τους διαλέγουμε. $\Gamma = \{E, \neq_V\}$ και $C = \{C_1, \ldots, C_{|E|}\}$ με $C_i = \langle e_i, B_q\rangle$, επίσης βάζουμε constraints για να μην αντιστοιχούν δύο κόμβοι σε ίδια σειρά.

GCP: Εύρεση ομομορφισμού μεταξύ $\langle\langle\Delta, E, \neq_V\rangle, \langle V, B_q, \neq_V\rangle\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.7

H-colorability: Η είσοδος είναι δύο γράφοι $G = \langle V, E\rangle$ και $G' = \langle\Delta, E'\rangle$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει αντιστοίχιση των κόμβων ώστε γειτονικές κορυφές του G να γίνονται γειτονικές στον G'.

CSP: A = οι κόμβοι του G', V = οι κόμβοι του G'. $\Gamma = \{E'\}$. $C = \{\ldots, C_{i,j}, \ldots\}$ $C_i = \langle\langle e_i\rangle, E'\rangle$, $\forall e_i \in E$.

GCP: Ομομορφισμός μεταξύ $\langle\langle V, E\rangle, \langle\Delta, E'\rangle\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.8

Graph Isomorphism: Η είσοδος είναι δύο γράφοι $G = \langle V, E\rangle$ και $G' = \langle\Delta, E'\rangle$ με $|V| = |\Delta|$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει αντιστοίχιση των κόμβων ώστε γειτονικές κορυφές του G να γίνονται γειτονικές στον G' και αντίστοιχα για τις μη γειτονικές.

CSP: A = οι κόμβοι του G', V = οι κόμβοι του G'. $\Gamma = \{E', \overline{E'}\}$. $C = \{\ldots, C_{i,j}, \ldots\}$ $C_{i,j}$ = εάν $\langle v_i, v_j\rangle \in E$ $\langle\langle v_i, v_j\rangle, E'\rangle$, αλλιώς $\langle\langle v_i, v_j\rangle, \overline{E'}\rangle$.

GCP: Ομομορφισμός μεταξύ $\langle\langle V, E, \overline{E}\rangle, \langle\Delta, E', \overline{E'}\rangle\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.9

Undirected Graph Reachability: Η είσοδος είναι ένας γράφος $G = \langle\Delta, E\rangle$ και δύο κόμβοι $v, w \in \Delta$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει ένα μονοπάτι στον G που συνδέει τους δύο κόμβους.

Θα εκφράσουμε το συμπληρωματικό πρόβλημα:

CSP: $A = \{0, 1\}$, $V = \Delta$, $\Gamma = \{=_\Delta, \neq_\Delta\}$. $C = \{\ldots, C_{0,i} \ldots, C_1\}$, με $C_i = \langle e_i, =_\Delta\rangle$ και $C_1 = \langle\langle v, w\rangle, \neq_\Delta\rangle$.

GCP: Ομομορφισμός μεταξύ $\langle \varDelta, E, \{\langle v, w\rangle\}\rangle, \langle\{0,1\}, =_{\{0,1\}}, \neq_{\{0,1\}}\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.1.10

Satisfiability: Η είσοδος είναι ένας τύπος, F, σε προτασιακή λογική, δηλαδή ένα conjucntion από προτάσεις, P. Κάθε πρόταση στο P είναι μια dijunction από literals, οπού κάθε literal είναι είτε μια μεταβλητή είτε η άρνησή της. Το ερώτημα είναι αν υπάρχει ανάθεση αληθοτιμών στις μεταβλητές του F τέτοιες ωστέ η F να γίνεται αληθής.

Ορίζουμε V το σύνολο των προτασιακών μεταβλητών της F, $E_p = \{\langle x_1, \ldots, x_{\rho(p)}\}$, με $x_1, \ldots, x_{\rho(p)}$ της μεταβλητές που εμφανίζονται στην πρόταση p, και R_p οι αντίστοιχες πλειάδες που ικανοποιούν την σχέση p.

CSP: $A = \{0,1\}$,$V =$ το σύνολο των μεταβλητών, $\varGamma = \{\ldots R_i \ldots\}$ για κάθε πρόταση i, και $C = \{\ldots, C_i, \ldots\}$ με $C_i = \langle\langle x_1, x_2, \ldots, x_{\rho(i)}\rangle, R_i\rangle$ για κάθε πρόταση i.

GCP: Ομομορφισμός μεταξύ των $\langle\langle V, E_p(p \in P)\rangle, \langle\{0,1\}, R_p(p \in P)\rangle\rangle$. □

1.3.2 Αναγωγή CSP $\leftrightarrow$ GCP

Μετά από όλα αυτά τα παραδείγματα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε και την προφανη πλέον αναγωγή από το ένα πρόβλημα στο άλλο και να πισθούμε για την ισοδυναμία τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.2.1

CSP εκφρασμένο ως GCP: Έστω CSP με A,V,$C = \{C_i\}$ με $C_i = \langle t_i, R_i\rangle$ με το t_i να είναι πλειάδα μεταβλητών και το R_i μια σχέση $\in \varGamma$. Το αντίστοιχο GCP είναι το ερώτημα αν υπάρχει ομομορφισμός μεταξύ των $\langle\langle V, \{t_1\}, \{t_2\}, \ldots, \{t_{|C|}\}\rangle$,$\langle A, R_1, R_2, \ldots, R_{|C|}\rangle\rangle$. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3.2.2

GCP εκφρασμένο ως CSP: Έστω το GCP το ερώτημα εύρεσης ομομορφισμού μεταξύ των δομών $\langle A, D_1, D_2, \ldots, D_k\rangle$ και $\langle V, R_1, R_2, \ldots, R_k\rangle$. Το αντίστοιχο CSP έχει $A = A$, $V = V$, και για το iστό στοιχείο της D_j έχει το $C_{\{i,j\}} = \langle t_i, R_j\rangle$ με t_i την iστή πλειάδα του D_j, και αυτό για κάθε i, j. □

1.4 Συμπεράσματα

Μέχρι τώρα γνωρίσαμε το πρόβλημά μας και τον "σκοπό" μας, δηλαδή να μπορέσουμε να χαρακτηρίσουμε το εκάστοτε πρόβλημα CSP αν είναι στο P ή NP-complete με βάση τις ιδιότητες των σχέσεων που ορίζουν τους περιορισμούς. Επίσης είδαμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα το GCP ή πρόβλημα ομομορφισμού που σε μερικές περιπτώσεις δίνει πιο μικρές εκφράσεις και σίγουρα πιο όμορφες από μαθηματική άποψη.

Μέχρι τώρα μπορούμε να κάνουμε ένα έυκολο και προφανή διαχωρισμό με βάση τη γραφή του GCP. Έστω $GCP(A, B)$ να είναι το πρόβλημα αν υπάρχει ομομορφισμός από την αλγεβρική δομή A στην B. Έστω οτί θέλουμε να χαρακτηρίσουμε το $GCP(A, all)$ δηλαδή δεδομένης μιας σταθερής αλγεβρικής δομής A να δούμε αν υπάρχει ομομορφισμός σε οποιαδήποτε άλλη. Αυτή η κλάση προβλημάτων όσο γενική και αν φαίνεται είναι στο P. Συγκεκριμένα αν σκεφτούμε το ανάλογο CSP πρόβλημα η αλγεβρική δομή A μας δίνει πόσες μεταβλητές έχουμε έστω c (σταθερά) ενώ η B τις τιμές που μπορούν να πάρουν n. Προφανώς οι διαφορετικές περιπτώσεις τιμών των μεταβλητών είναι n^c και άρα το κόστος του brute force είναι ένα πολυώνυμο ως προς n, άρα σίγουρα λύνεται στο P.

Το βασικό ερώτημα είναι τί γίνεται στην περίπτωση $GCP(All, B)$, δηλαδή με σταθερή τη δομή B να χαρακτηρίσουμε το πρόβλημα όποια και να είναι η δομή A. (Αυτό το πρόβλημα το καλούμε και $CSP(B)$. Αν τα στοιχεία του B είναι c και τα στοιχεία του A n βλέπουμε οτί το κόστος της brute force είναι c^n που είναι εκθετικό, άρα πρέπει να βρούμε πιο έξυπνους αλγορίθμους αν γίνεται όντως κάποιες από αυτές τις περιπτώσεις να λυθούν στο P.

Ας σκεφτούμε τί είναι τελικά η αλγεβρική δομή B. Είναι κάποιες τιμές που μπορούν να πάρουν οι μεταβλητές μας και κάποιες σχέσεις. Τελικά αυτό που μπορούμε να εκμεταλευτούμε είναι ιδιότητες των σχέσεων που τις κάνουν "πιο έυκολα υπολογιστές". Δηλαδή να βρούμε ιδιότητες που αν εκπληρώνουν οι σχέσεις του B μπορούμε να κάνουμε κάτι πιο έξυπνο από brute force αλγορίθμους. Αυτό είναι τελικά το θέμα που θα μας απασχολήσει.

Κεφάλαιο 2

Complexity of CSP

2.1 SNP

2.1.1 Εισαγωγή

Η Κλάση SNP περιέχει όλα τα προβλήματα που μπορούν να εκφραστούν από μια υπαρξιακή δεύτερης τάξης πρόταση με ένα καθολικό πρώτο μέρος, συγκεκριμένα μία πρόταση της μορφής $(\exists S')(\forall x)\Phi(x, S, S')$, οπού Φ είναι μια πρώτης τάξης πρόταση χωρίς ποσοδέικτες. Δηλαδή η Φ είναι μια πρόταση που χρησιμοποιεί σχέσεις από τα σύνολα S, S' που εφαρμόζονται στις μεταβλητές x, και άρνηση, το και και το ή. Το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε αν για κάποια δομή S που έχουμε ως είσοδο, υπάρχει μια δομή S' ορισμένη στο ίδιο πεδίο έτσι ώστε για όλες τις τιμές του πεδίου για όλες τις μεταβλητές του x είναι αληθές οτί ισχύει $\Phi(x, S, S')$. Τα αναφερόμαστε στις σχέσεις του S ως σχέσεις εισόδου, ενώ στις σχέσεις του S' ως υπαρξιακές σχέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1.1.1

Το 3SAT εκφρασμένο ως SNP: Η δομή εισόδου S αποτελείται από τέσσερεις τριαδικές σχέσεις C_0, C_1, C_2, C_3 ορισμένες στο πεδίο $\{0, 1\}$, οπού C_i αντιστοιχεί στη διάζευξη τριών μεταβλητών με τις πρώτες i από αυτές με άρνηση. Η υπαρξιακή δομή S' αποτελείται μόνο από μια monadic σχέση T την απονομή αληθείας. Η σχέση που πρέπει να ικανοποιείται είναι οτί για κάθε x_1, x_2, x_3 , αν $C_0(x_1, x_2, x_3)$ τότε $T(x_1) \vee T(x_2) \vee T(x_3)$, και ομοίως για τα υπόλοιπα C_i με άρνηση για τα $T(x_j)$ αν $j \leq i$. □

Ας ασχολήθούμε με το παρακάτω ερώτημα: Ποιές υποκλάσεις του NP έχουν την ίδια υπολογιστική δύναμη όση όλο το NP;

Δηλαδή, ποιές υποκλάσεις του NP είναι τέτοιες ωστε για κάθε πρόβλημα που ανήκει στο NP να υπάρχει ένα ισοδύναμο με πολυωνυμική αναγωγή πρόβλημα στην εν λόγω υποκλάση. Συγκεκριμένα λέμε οτί δύο προβλήματα A και B είναι ισοδύναμα καω από πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή αν υπάρχει μια πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή από το A στο B, αλλά και από το B στο A. Αποδεικνύεται οτί κάθε πρόβλημα του NP είναι ισοδύναμο με ένα πρόβλημα στο SNP καω από πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή. Αυτό συμαίνει οτι για κάθε πρόβλημα A στο NP, υπάρχει ένα πρόβλημα B στο SNP τέτοιο ώστε με πολυωνυμικό χρόνο να περνάμε από το A στο B και αντίστροφα. Μάλιστα αυτό ισχύει και για πιο περιορισμένες κλάσεις του SNP. Θα αρχίσουμε θεωρώντας οτι οι σχέσεις ισότητας και ανισότητας δεν επιτρέπονται σε μια πρώτης τάξης σχέση, αλλά μόνο σχέσεις από την δομή εισόδου S και την υπαρξιακή δομή S'. Για την κλάση monotone SNP χωρίς ανισότητες, απαιτούμε οτί όλες οι εμφανίσεις της σχέσης εισόδου C_i στο Φ έχουν την ίδια πολικότητα (η πολικότητα μιας σχέσης είναι θετική αν περιέχεται σε άρτιο αριθμό από υπόπροτάσεις με άρνηση, και αρνητική διαφορετικά), συμφωνούμε αυτή η πολικότητα να είναι αρνητική, ωστέ τα C_i να μπορούν να θεωρηθούν περιορισμοί, από την άποψη οτί αν ισχύει η C_i για περισσότερα στοιχεία της δομής εισόδου μπορεί να κάνει το πρόβλημα "λίγοτερο ικανοποιήσιμο". Παρατηρούμε οτί το 3SAT έχει αυτή την ιδιότητα. Για monadic SNP χωρίς ανισότητες απαιτούμε η υπαρξιακή δομή S' να αποτελείται από monadic σχέσεις μόνο. Ο παραπάνω ορισμός του 3SAT εμπιπτει και σε αυτή την κλάση. Τέλος για monotone monadic SNP με ανισότητα, θεωρούμε οτί η γλώσσα περιέχει και την ισότητα άρα και η ισότητα και η ανισότητα ανήκουν στη Φ. (Αν θεωρήσουμε οτί οι ισσότητες και ανισότητες εμφανίζονται με αρνητική πολικότητα, τότε μόνο οι ανισότητες δίνουν μεγαλύτερη δύναμη στη γλώσσα, αφού η πρόταση της μορφής "εάν $x = y$ τότε $\Phi(x, y)$" μπορεί να αντικατασταθεί με "$\Phi(x, x)$".)

Κεφάλαιο 3

Άλγεβρα στο CSP

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει σκοπός μας είναι να χαρακτηρίσουμε προβλήματα CSP ως προς την πολυπλοκότητά τους. Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να τα χαρακτηρίσουμε μέσω αλγεβρικών δομών που ορίζονται από αυτά. Σε κάθε υποενότητα θα δούμε διαφορετικές δομές που μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες, τελικά να παίρνουμε πληροφορίες από τις άλγεβρες που μπορούν να οριστούν από τα CSP.

3.1 Tractability σε Γλώσσες Περιορισμών.

3.1.1 Ορισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1.1

Tractable πρόβλημα: Θα λέμε ένα πρόβλημα tractable αν υπάρχει ντετερμινιστικός πολυονυμικού χρόνου αλγόριθμος που λύνει όλες τις πιθανές εισόδους του προβλήματος. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1.2

Tractable γλώσσα περιορισμών: Για κάθε σύνολο A, μια πεπερασμένη γλώσσα περιορισμών $\Gamma \subseteq R_A$ λέγεται tractable αν το CSP(Γ) είναι tractable. Μια άπειρη γλώσσα περιορισμών λέγεται tractable αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολό της είναι tractable. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1.1.3

NP-complete γλώσσα περιορισμών: Μια γλώσσα περιορισμών Γ λέγεται NP-complete αν $\exists \Delta \subset \Gamma$ με Δ πεπερασμένο έτσι ώστε το $CSP(\Delta)$ να είναι NP-Complete. $\square$

3.1.2 Παραδείγματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.1

Χρωματισμός γράφων: Όπως είδαμε πιο πάνω ο q-Χρωματισμός γράφων εκφράζεται μέσω της γλώσσας περιορισμών $\{\neq_q\}$. Γνωρίζουμε όμως οτί ενώ για $q/leq2$ το πρόβλημα λύνεται στο P ενώ αλλιώς είναι NP-complete. Άρα η $\{\neq_q\}$ είναι tractable για $q \leq 2$ διαφορετικά είναι NP-complete. □

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.2

H-Colorability: Αυτό το πρόβλημα έχει πλήρως χαρακτηριστεί και συγκεκριμένα ξέρουμε οτί για H μη κατευθυνόμενο γράφο όταν είναι bipartite ή έχει βρόγχο τότε το πρόβλημα είναι tractable, αλλιώς είναι NP-complete.

Γνωρίζοντας ήδη οτι εδώ $\Gamma = \{E_H\}$, ξέρουμε οτί μια συμμετρική διμελής σχέση E είναι tractable όταν ανήκει σε bipartite γράφο ή σε ένα γράφο με βρόγχο. □

Αν μια πεπερασμένη ή άπειρη γλώσσα περιορισμών Γ έχει την ιδιότητα $CSP(\Gamma)$ είναι tractable θα ονομάζεται globally tractable. Εμφανώς μια γλώσσα περιορισμών που είναι glabally tractable είναι tractable, με βάση τον παραπάνω ορισμό, αλλά δεν είναι άμεσα εμφανές γιατί το αντίστροφο θα έπρεπε να ισχύει για όλες τις μη πεπερασμένες γλώσσες. Έστω κάποια άπειρη γλώσσα περιορισμών Γ, μπορεί να ισχύει οτί για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\Delta \subseteq \Gamma$ υπάρχει ένας πολυονυμικός αλγόριθμος $Alg(\Delta)$ που επιλύει το $CSP(\Delta)$, αλλά δεν υπάρχει γενικός αλγόριθμος πολυονυμικού χρόνου που να λύνει το $CSP(\Gamma)$. Παρ' όλα αυτά δεν γνωρίζουμε παραδείγματα οπού ισχύει αυτό και υποθέτουμε οτι κάθε tractable γλώσσα περιορισμών είναι και globally tractable.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.3

Γ_{LIN}: Έστω A ένα πεπερασμένο πεδίο, και έστω Γ_{LIN} μια γλώσσα περιορισμών που περιέχει όλες τις σχέσεις ορισμένες στο A που είναι λύσεις σε κάποιο σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο A. Κάθε σχέση στο Γ_{LIN}, και άρα κάθε $CSP(\Gamma_{LIN})$, μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα σύνολο γραμμικών εξισώσεων στο A. Πράγματι αν $\rho \in \Gamma_{LIN}$, τότε είναι ο χώρος λύσεων ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων που παίρνουμε από τα παρακάτω βήματα:

1ό Πάρε ένα τυχαίο στοιχείο $\overline{a_0} = (a_{01}, \dots a_{0n}) \in \rho$, και θέσε $\rho_0 = \{\overline{b} - \overline{a_0} | \overline{b} \in \rho\}$.

2ό Για κάθε μέλος $(a_1, \dots, a_n)$ του ρ_0, δημιούργησε την εξίσωση: $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$, και βρές μια βάση $r^{\perp}$, του χώρου λύσεων του συστήματος εξισώσεων που προέκυψε.

3ό Για κάθε $(b_1, \dots, b_n) \in \rho^{\perp}$, δώσε την εξίσωση $b_1x_1 + \dots + b_nx_n = b_0$, οπού $b_0 = b_1a_{01} + \dots + b_na_{0n}$.

Εφόσων το $CSP(\Gamma_{LIN})$ μπορεί να λυθεί σε πολυονυμικό χρόνο (π.χ με Gaussian elimination), είναι επακόλουθο οτί το Γ_{LIN} είναι (globally) tractable γλώσσα περιορισμών. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.2.1

Διχοτόμησης του Schaefer: Η απόδειξη του θεωρήματος είναι μια από αυτές που δίνονται στο κεφάλαιο των αποδείξεων. Όμως μπορούμε από τώρα να εκφράσουμε τα αποτελέσματα στη γλώσσα μας:

Μια γλώσσα περιορισμών ορισμένη στο $A = \{0, 1\}$ είναι tractable αν (τουλάχιστον) ένα από τα παρακάτω ισχύει:

1. Κάθε σχέση στο Γ περιέχει ένα tuple που είναι όλο 0.
2. Κάθε σχέση στο Γ περιέχει ένα tuple που είναι όλο 1.
3. Κάθε σχέση στο Γ μπορεί να οριστεί από ένα τύπο σε conjuctive normal form οπού κάθε conjuct έχει το πολύ μια μεταβλητή με άρνηση.
4. Κάθε σχέση στο Γ μπορεί να οριστεί από ένα τύπο σε conjuctive normal form οπού κάθε conjuct έχει το πολύ μια μεταβλητή χωρίς άρνηση.
5. Κάθε σχέση στο Γ μπορεί να οριστεί από μια CNF με κάθε conjuct να περιέχει το πολύ 2 literal.
6. Κάθε σχέση στο Γ είναι το σύνολο λύσεων ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων στο πεπερασμένο field $GF(2)$.

Αλλιώς είναι NP-complete. $\boxtimes$

Βλέπουμε λοιπόν οτί το $CSP(B)$ όταν το B περιέχει μόνο 2 στοιχεία είναι πλήρως ορισμένο[33]. Επίσης όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή πλέον έχει πλήρως χαρακτηριστεί και για 3 στοιχεία [3]. Αλλά για μεγαλύτερο πληθάριθμο δεν έχουμε γενικά αποτελέσματα ακόμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1.2.4

Γ_{ZOA}**:** Μια από τις πρώτες γλώσσες περιορισμών που χαρακτηρίστηκε πλήρως (και δεν ήταν ορισμένη σε boolean) ήταν η Γ_{ZOA} των “0,1,all” σχέσεων που περιγράφονται στο [9]. Το σύνολο Γ_{ZOA} περιέχει όλες τις σχέσεις ορισμένες σε κάποιο συγκεκριμένο σύνολο A με τις εξής μορφές:

1. Όλες τις μοναδιαίες σχέσεις
2. Όλες τις διμελείς της μορφής $A_1 \times A_2$ με $A_1, A_2 \subseteq A$.
3. Όλες τις διμελείς σχέσεις της μορφής $\{(\alpha, \pi(\alpha) | \alpha \in A_1\}$ για κάποιο υποσύνολο A_1 του A και κάποια αναδιάταξη π του A.
4. Όλες τις διμελείς σχέσεις της μορφής $\{(a, b) \in A_1 \times A_2 | a = a_1 \vee b = a_2\}$ για κάποια υποσύνολα A_1, A_2 του A και κάποια στοιχεία $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$

Έχει δειχθεί στο [9] ότι το $CSP(\Gamma_{ZOA})$ όχι μόνο είναι tractable αλλά και για οποιαδήποτε διμελή σχέση ρ προσθαίσουμε που δεν είναι στο Γ_{ZOA} τότε το $CSP(\Gamma_{ZOA} \cup \{\rho\})$ είναι NP-complete. □

3.2 Tractability σε Relational Clones.

3.2.1 Ορισμοί

Για να περιγράψει τις tractable γλώσσες περιορισμών ο Schaefer χρησιμοποίησε τις συντακτικές ιδιότητες των προτασιακών τύπων που αντιστοιχούσαν σε Boolean σχέσεις. Σε μη Boolean σχέσεις προφανώς αυτή η μέθοδος δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια επαρκή γλώσσα οπού μπορούμε να εκφράσουμε τις ιδιότητες μια γλώσσας περιορισμών που είναι υπέυθυνες για την πολυπλοκότητα των αντίστοιχων CSPs.

Ένα χρήσιμο πρώτο βήμα στο να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα είναι να σκεφτούμε ποιές πρόσθαιτες σχέσεις θα προσταιθούν σε μια γλώσσα περιορισμών χωρίς να αλλάξουν την πολυπλοκότητα της συγκεκριμένης κλάσης προβλημάτων. Αυτή η τεχνική χρησιμοποιήθηκε ευρέως στην ανάλυση Boolean CSPs [33], και στην ανάλυση temporal και spatial περιορισμών [29], και εισήχθηκε στην ανάλυση περιορισμών σε aritary πεπερασμένα σύνολα στο [18].

Για να χρησιμοποιήσουμε αυη την τεχνική πρώτα ορίζουμε μία μέθοδο για να παράγουμε νέες σχέσεις από τις δωσμένες. Αυτή η μέθοδος είναι ένας τρόπος μέσω λογικών τύπων και των δωσμένων σχέσεων να ορίζουμε νέες. Για να ορίσουμε τέτοιους λογικούς τύπους θα χρησιμοποιήσουμε τη συνηθισμένη αντιστοιχία μεταξύ σχέσεων και predicates: Μια σχέση αποτελείται από όλα τα tuples που κάνουν το αντίστοιχο predicate να αληθές. (Θα χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για τις αντίστοιχες σχέσεις και predicates, αφού το σε ποιό αναφερόμαστε θα είναι εμφανές από τα συμφραζόμενα.)

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.1.1

Relational Clone: Μια γλώσσα περιορισμών $\Gamma \subseteq R_A$ λέγεται relational clone αν περιέχει όλες τις σχέσεις που μπορούν να εκφραστούν με προταβάθμιους τύπους που χρησιμοποιούν:

1. Σχέσεις από το $\Gamma \cup \{=_A\}$
2. σύζευξη και
3. υπαρξιακή ποσοδείκτες.

Οι προτοβάθμιοι τύποι που χρησιμοποιούν μόνο σύζευξη και υπαρξιακούς ποσοδείκτες λέγονται primitive positive (pp) τύποι. □

Για κάθε γλώσσα περιορισμών Γ, υπάρχει ένα μοναδικό realtional clone που περιέχει τη Γ, το οποίο συμβολίζεται με $\langle \Gamma \rangle$ και καλείται relational clone που παράγεται από τη Γ. Το σύνολο $\langle\Gamma\rangle$ εμπεριέχει όλες τις σχέσεις που ορίζονται από pp-τύπους χρησιμοποιώντας σχέσεις στο Γ μαζί με τη σχέση της ισότητας.

3.2.2 Παραδείγματα - Αποτελέσματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2.1

Κλείσιμο σε 2 διμελής σχέσεις: Έστω η Boolean γλώσσα περιορισμών $\Gamma = \{R_1, R_2\}$, οπού $R_1 = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$ και $R_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$.

Είναι προφανές να ελέγξουμε οτί καθε Binary σχέση μπορεί να εκφραστεί από ένα pp-τύπο που περιέχει τα R_1 και R_2. Για παράδειγμα, η σχέση $R_3 = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$ μπορεί να εκφραστεί από τον τύπο $R_3 = \exists y R_1(x,y) \wedge R_2(y,z)$. Άρα το relational clone που παράγεται από τη Γ, $\langle\Gamma\rangle$, περιέχει όλες τις 16 διμελείς Binary σχέσεις.

Μάλιστα μπορεί να αποδειχθεί οτί το $\langle\Gamma\rangle$ περιέχει ακριβώς αυτές τις Bool σχέσεις (οποιασδήποτε πολλαπλότητας) που μπορούν να εκφραστούν σαν μια σύζευξη μοναδιαίων ή διμελών Boolean σχέσεων [34]. □

Υπάρχουν αρκετοί διαφορετικοί αλλα ισοδύναμοι ορισμοί των realtional clones [13], ένας από αυτούς χρησιμοποιήθηκε στο [18] για να αποδειχθεί το παρακάτω θεώρημα. Εδώ δίνεται μια απόδειξη με τον ορισμό που δώσαμε πιο πάνω.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2.2.1

Αναγωγής στη παράγουσα γλώσσα περιορισμών: Για κάθε σύνολο σχέσεων Γ και κάθε πεπερασμένο σύνολο $\Delta \subseteq \langle\Gamma\rangle$, υπάρχει μια πολυωνυμικού χρόνου αναγωγή από το $CSP(\Delta)$ στο $CSP(\Gamma)$. ⊠

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\Delta = \{\rho_1, \ldots, \rho_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο σχέσεων ορισμένων στο πεπερασμένο σύνολο A, όπου κάθε ρ_i μπορεί να εκφραστεί ως ένας pp-τύπος που χρησιμοποιεί τις σχέσεις από το Γ και την σχέση ισότητας στο A , $=_A$. Παρατηρούμε οτί μπορούμε να σταθεροποιήσουμε αυτές τις αναπαραστάσεις.

Έστω $(V, A, C) \in CSP(\Delta)$ θα την μετατρέψουμε ως εξής: Για κάθε περιορισμό $\langle\sigma, \rho\rangle \in C$, με $s = (v_1, \ldots, v_l)$ και το ρ είναι αναπαραστήσιμο από ένα pp-τύπο.

$$\rho(v_1, \ldots, v_l) = \exists u_1, \ldots, u_m(\rho_1(w_1^1, \ldots, w_{l_1}^1) \wedge \ldots \wedge \rho_n(w_1^n, \ldots, w_{l_n}^n))$$

όπου $w_1^1, \ldots, w_{l_1}^1, \ldots, w_1^n, \ldots, w_{l_n}^n \in \{v_1, \ldots, v_l, u_1, \ldots, u_m\}$,

1. προσθαίτουμε τις βοηθητικές μεταβλητές $u_1, \ldots, u_m$ στο V (αλλάζοντας ονόματα αν χρειατεί ωστέ κανένα να μην επαναλαμβάνεται)

2. προσθαίτουμε περιορισμούς $\langle(w_1^1, \ldots, w_{l_1}^1, \ldots, w_1^n, \ldots, w_{l_n}^n), \rho_n\rangle$ στο C.

3. Αφαιρούμε το $\langle s, \rho\rangle$ από το C.

Μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε οτί με αυτή τη διαδικασία έχουμε ένα ισοδύναμο πρόβλημα στο (V, A, C) και ανήκει στο $CSP(\Gamma \cup \{=_A\})$. Μάλιστα εφόσων όλες οι αναπαραστάσεις σχέσεων από το Δ είναι σταθερές αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί να γίνει σε γραμμικό χρόνο ως προς την είσοδο. Τέλος, όλοι οι περιορισμοί της μορφής $\langle(v_1, v_2), =_A\rangle$ μπορούν να απαληφθούν αντικαθιστώντας όλες τις αναφορές στην v_1 με τη v_2. Αυτός ο μετασχηματισμός μπορεί επίσης να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.2.2.1

Ένα σύνολο σχέσεων Γ είναι tractable αν και μόνο αν το relational clone $\langle\Gamma\rangle$ είναι tractable. Ομοίως , το Γ είναι NP-complete αν και μόνο αν το $\langle\Gamma\rangle$ είναι NP-complete. ⊡

Αυτό το αποτέλεσμα απλοποιεί το πρόβλημα του χαρακτηρισμού tractable γλώσσως περιορισμών στο να χαρακτηρίζουμε relational clones.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2.2.2

Γ_{ZOA}: Ας ξαναθυμηθούμε την tractable γλώσσα περιορισμών των 0 /1 /all σχέσεων, Γ_{ZOA}.

Παρατηρούμε οτί για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο A, το σύνολο των $0/1/all$ σχέσεων στο A περιέχει μόνο μοναδιαίες και διμελής σχέσεις και άρα είναι πεπερασμένη. Όμως, σύμφωνα με το παραπάνω πόρισμα οτί το relational clone $\langle\Gamma_{ZOA}\rangle$ είναι επίσης tractable. Αυτό είναι ένα απειροσύνολο σχέσεων που περιέχει σχέσης οποιασδήποτε πολλαπλότητας. Στη πραγματικότητα το σύνολο $\langle\Gamma_{ZOA}\rangle$ είναι ακριβώς οι σχέσεις που ορίζονται στο [24]. Μάλιστατο σύνολο των 0/1/all σχέσεων, Γ_{ZOA}, είναι ακριβώς το σύνολο των μοναδιαίων και διμελών σχέσεων στο relational clone $\langle\Gamma_{ZOA}\rangle$. □

3.2.3 Ένας διαφορετικός ορισμός των relational clones.

Είναι αρκετά ενδιαφέρον να δούμε τον ορισμό που δίνεται εκτός των άλλων και στα [18, 21] που δεν είναι από τον κόσμο της προτοβάθμιας λογικής αλλά από τις relational databases. Συγκεκριμένα έχουμε:

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2.3.1

Πράξεις σε σχέσεις: Ορίζουμε τις παρακάτω σχέσεις στις σχέσεις:

- Έστω R μια n-αδική και S μια m-αδική σχέση ορισμένες στο A. Το καρτεσιανό γινόμενο $R \times S$ ορίζεται να είναι η $(n+m)$-αδική σχέση:

$$R \times S = \{\langle t[1], t[2], \ldots, t[n+m]\rangle | (\langle t[1], t[2], \ldots, t[n]\rangle \in R) \wedge$$

$$(\langle t[n+1], t[n+2], \ldots, t[n+m]\rangle \in S)\}.$$

- Έστω R να είναι μια n-αδική σχέση ορισμένη στο A. Και $1 \le i, j \le n$. Η επιλογή ισότητας $\sigma_{i=j}(R)$ ορίζεται να είναι η n-αδική σχέση:

$$\sigma_{i=j}(R) = \{t \in R | t[i] = t[j]\}.$$

- Έστω R να είναι μια n-αδική σχέση σε ένα σύνολο A. Έστω $i_1, \ldots, i_m$ να είναι μια υπακολουθία του $1, \ldots, n$. Η προβολή $\pi_{i_1,\ldots,i_m}(R)$ ορίζεται να είναι η m-αδική σχέση:

$$\pi_{i_1,\ldots,i_m}(R) = \{\langle t[i_1], \ldots, t[i_m]\rangle | t \in R\}.$$

$\square$

Είναι γνωστό οτί η συνδιασμένη χρήση δύο περιορισμών σε ένα CSP μπορεί να παραχθεί αν κάνουμε ένα join [7] στους δύο περιορισμούς [16]. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια συνέπεια του ορισμού του join σε σχέσεις.

ΛΗΜΜΑ 3.2.3.1
Οποιοδήποτε join των σχέσεων R και S μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας το Καρτεσιανό γινόμενο, τις πράξεις $\sigma()$ και $\pi()$ στις σχέσεις R και S. $\boxplus$

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το $\langle \Gamma \rangle$ με βάση τις παραπάνω σχέσεις.

3.3 Tractability σε Πολυμορφισμούς.

3.3.1 Ορισμοί

Δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα οτι το να αναλύσεις την πολυπλοκότητα οποιασδήποτε γλώσσας περιορισμών ήταν αρκετό να σκεφτόμαστε μόνο τα relational clones. Αυτό μειώνει αρκετά τα είδη των γλωσσών που αναλύουμε. Όμως, αμέσως προκύπτει το ερώτημα πώς μπορούμε να αναπαραστήσουμε και να περιγράψουμε τα relational clones. Για αρκετά relational clones τα μόνα σύνολα που τα παράγουν είναι αρκετά περίπλοκα, και σε μερικές περιπτώσεις δεν έχουν βρεθεί σύνολα που τα παράγουν.

Ευτυχώς όμως φάινεται οτί υπάρχει ένας εναλακτικός τρόπος να απεικονίζουμε και να περιγράφουμε τα relational clones, χρησιμοποιώντας πράξεις (συναρτήσεις). Εδώ μπορεί ο αναγνώστης να ανατρέξει στο πρώτο κεφάλαιο που δίνονται οι ορισμοί των συναρτήσεων. Η παρακάτω παρουσίαση ακολουθεί τα [27, 34]

Πρώτα περιγράφουμε μια σημαντική αλγεβρική σχέση μεταξύ πράξεων και σχέσεων. Παρατηρούμε οτί οποιαδήποτε πράξη ορισμένη στο A μπορεί να επεκταθεί με συγκεκριμένο τρόπο σε μια πράξη tuples του A. Συγκεκριμένα για μια m-αδική f και μια συλογή από tuples $\overline{a_1}, \ldots \overline{a_m} \in A^n$, όπου $\overline{a_i} = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$, ορίζουμε

$$f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}) = ((f(a_{11}, \ldots, a_{1m}), \ldots, f(a_{n1}, \ldots, a_{nm}))$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1.1

Πολυμορφισμοί[13, 34]: Μια m-αδική πράξη $f \in O_A$ διατηρεί μια n-αδική σχέση $\rho \in R_A$ (ή η f είναι πολυμορφισμός της r, ή η ρ είναι αναλοίωτη της f) εάν $f(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m}) \in \rho \ \forall \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_m} \in \rho$.

Για οποιαδήποτε σύνολα $\Gamma \subseteq R_A$ και $F \subseteq O_A$, έστω:

$$Pol(\Gamma) = \{f \in O_A | f \text{ διατηρεί κάθε σχέση του } \Gamma\},$$

$$Inv(F) = \{\rho \in R_A | \rho \text{ είναι αναλοίωτη για κάθε πράξη από το } F\}.$$

□

Επισημαίνουμε οτί οι τελεστές Pol και Inv δημιουργούν μια Galois correspondence μεταξύ των R_A και O_A. Εισαγωγή στις ιδιοτητες αυτής της σχέσης μπορούν να βρεθούν στο [13]. Πρώτον έχουμε $Inv(F) = Inv(Pol(Inv(F)))$, για κάθε σύνολο από πράξεις F. Σύνολα της μορφής $Inv(F)$ είναι ακριβώς relational clones όπως φαίνεται στο παρακάτω αποτέλεσμα:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.1.1

Για κάθε σύνολο A, και κάθε $F \subseteq O_A$, το σύνολο $Inv(F)$ είναι ένα relational clone. Από την άλλη κάθε relational clone μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή $Inv(F)$ για κάποιο $F \subseteq O_A$. Συγκεκριμένα, για κάθε $\Gamma \subseteq R_A$, $\langle \Gamma \rangle = Inv(Pol(\Gamma))$. Συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε $\Gamma \subseteq R_A$, $\langle \Gamma \rangle = Inv(Pol(\Gamma))$.
⊡

Χρησιμοποιώντας την πάνω ποταση μπορούμε να μεταφράσουμε το αρχικό πρόβλημα μας του να χαρακτηρίσουμε tractable σύνολα σχέσεων σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα για σύνολα από πράξεις. Πρώτον, ορίζουμε τι σημαίνει για ένα σύνολο πράξεων να είναι tractable ή NP-complete.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3.1.2

Χαρακτηρισμός σύνολου πράξεων: Το $F \subseteq O_A$ είναι tractable εάν το $Inv(F)$ είναι tractable. Αντίστοιχα ένα σύνολο $F \subseteq O_A$ λέγεται NP-complete εάν το $Inv(F)$ είναι NP-complete. □

Και έτσι πλέον το αρχικό μας πρόβλημα μετασχηματίζεται στο εξής: Να χαρακτηρισοτύν όλα τα tractable σύνολα πράξεων σε πεπερασμένα σύνολα.

Σε πολλές περιπτώσεις η περιγραφή ενός συνόλου από πράξεις δίνει ένα σύντομο και συνεπή τρόπο να περιγράψουμε το αντίστοιχο relational clone, όπως το επόμενο παράδειγμα δείχνει.

3.3.2 Παραδείγματα - Αποτελέσματα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2.1

Έκφραση του Γ_{ZOA} μέσω πολυμορφισμού: Ας ξαναθυμηθούμε τη Γ_{ZOA} των $0/1/all$ σχέσεων που ορίστηκε στο παραπάνω και επεκτάθηκε στο $\langle \Gamma_{ZOA} \rangle$. Αποδείχθηκε στο [21] ότι το $\langle \Gamma_{ZOA} \rangle$ είναι ακριβώς η γλώσσα περιορισμών που αποτελείται από όλες τις σχέσεις που είναι αναλείωτες της "dual discriminator" πράξης d, που ορίζεται ως:

$$d(x, y, z) = \begin{cases} y \; if \; y = z \\ x \; otherwise \end{cases}$$

Άρα αυτή η άπειρη tractable γλώσσα περιορισμών, που είναι αρκετά δύσκολο να περιγραφθεί με λεπτομέρεια, μπορεί να παρασταθεί πολυ απλά ώς το σύνολο των σχέσεων που είναι αναλείωτες του tractable συνόλου πράξεων $\{d\}$. □

Σε πολλές περιπτώσεις, έχει δειχθεί οτι η παρουσία μιας μοναδικής πράγης που ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιοότητες είναι αρκετή για να είναι σίγουρη η tractability όλου του συνόλου των πράξεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2.2

Ιδιότητα που αποδεικνύει tractability: Έστω μια πράξη $f(x, y)$ που ικανοποιεί τις τρεις παρακάτω συνθήες να καλείται semilattice operation: (Να σημειώσουμε οτί χρησιμοποιείται και ο όρος ACI - (associativity, commutativity, idepotency)).

- $f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z)$ (associativity),
- $f(x, y) = f(y, x)$ (commutativity),
- $f(x, x) = x$ (idempotency).

Το θεώρημα 16 του [20] αποδεικνύει ότι για ένα πεπερασμένο σύνολο A, κάι σύνολο πράξεων $F \subseteq O_A$ που περιέχει μια semilatice πράξη είναι tractable. □

Σε αντίθεση θα ασχοληθούμε με ιδιότητες σχέσεων οι οποίες δείχνουν NP-completeness των γλωσσών περιορισμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.3.2.1

Για κάθε πεπερασμένο σύνολο A και οποιοδήποτε $\Gamma \subseteq R_A$, αν το $Pol(\Gamma)$ περιέχει essentially unary πράξεις μόνο, τότε το $CSP(\Gamma)$ είναι NP-complete. ⊡

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.3.2.3

NP-completeness μέσω πολυμορφισμού: Θεωρήστε σχέση N ορισμένη στο σύνολο $\{0,1\}$, που ορίζεται από:

$$N = \{0,1\}^3 \backslash \{(0,0,0),(1,1,1)\}.$$

Μπορεί να δειχθεί οτί το $Pol(\{N\})$ περιέχει μόνο essentially operations και άρα το $CSP(\{N\})$ είναι NP-complete, από την πιο πάνω πρόταση.

Εδώ να πούμε οτί το $CSP(\{N\})$ αποδειχθηκε πρώτα από τον Schaefer οτί ήταν NP-complete, και είναι μια ειδική περίπτωση του NOT-ALL-EQUAL SATISFIABILITY problem [30, 15]. □

Οι Boolean πράξεις, δηλαδή οι πράξεις στο $A = \{0,1\}$, έχουν μελετηθεί πολύ καλά [34]. Συγκεκριμένα, είναι γνωστό οτί αν μια Boolean γλώσσα περιορισμών αν δεν ανήκει σε μια από τις έξι κλάσεις που όρισε ο Schaefer, τότε όλοι οι πολυμορφισμοί της είναι essentially unary πράξεις. Έτσι μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer ώστε να πάρουμε ένα πλήρη χαρακτηρισμό των Boolean πράξεων.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.3.2.1

Ένα σύνολο Boolean πράξεων είναι tractable αν περιέχει μια essentially nonunary πράξη. Αλλιώς είναι NP-complete. ⊡

3.4 Tractability σε Άλγεβρες.

3.4.1 Ορισμοί

Έχει ήδη αποδειχθεί στην προηγούμενη ενότητα οτι το πρόβλημα της ανάλυσης της πολυπλοκότητας μιας γλώσσας περιορισμών μπορεί να μεταφραστεί στο πρόβλημα της ανάλυσης την πολυπλοκότητας ενός συνόλου από πράξεις οι οποίες διατηρου όλες τις σχέσεις της γλώσσας. Στη περίπτωση Boolean συνόλου, είναι αρκετό για να αποκτήσουμε έναν πλήρη χαρακτηρισμό της πολυπλοκότητας, αλλά σε μεγαλύτερα σύνολα χρειαζόμαστε δυνατότερα αναλυτικά εργαλεία. Όπως θα δούμε στο επόμενο παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1.1

Παράδειγμα πράξης που δεν μπορούμε να χαρακτηρίσουμε.: Θεωρήστε τη binary πράξη $\circ$ στο σύνολο $\{0,1,2\}$ που ορίζεται από τον παρακάτω πίνακα Cayley:

$\circ$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	0
2	2	2	2

Αυτή η πράξη δεν εμπίπτει σε καμία από τις γνωστές tractable κλάσεις και δεν είναι essentially unary. Αρα δεν μπορούμε να καθορίσουμε την πολυπλοκότητα αυτής της πράξης χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που έχουμε μέχρι τώρα. □

Σε αυτή την ενότητα θα κάνουμε το τελευταίο βήμα της αλγεβρικής μεθόδου, θα περάσουμε από σύνολα πράξεων σε άλγεβρες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.1.1

Άλγεβρα: Μια άλγεβρα είναι ένα διατεταγμένο ζέυγος $\mathcal{A} = (A, F)$ τέτοια ώστε το A να είναι ένα μη κενό σύνολο και Fνα είναι μια οικογένεια απο πεπερασμένες πράξεις σοτ A. Το σύνολο A καλείται το σύμπαν του $\mathcal{A}$, και οι πράξεις από το F καλούνται βασικές. Μια άλγεβρα με πεπερασμένο σύμπαν καλείται πεπερασμένη άλγεβρα. □

Για να κάνουμε τη μετάβαση από σύνολα πράξεων σε άλγεβρες πρέπει απλά να σημειώσουμε οτί το σύνολο πράξεων F σε ένα σταθερό σύνολο A μπορεί να αντιστοιχιστεί στην άλγεβρα (A, F). Άρα, θα ορίσουμε τί σημαίνει μια άλγεβρα να είναι tractable με βάση το αν οι βασικές πράξεις είναι tractable.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.1.2

Tractability σε άλγεβρες: Μια άλγεβρα $\mathcal{A} = (A, F)$ λέγεται tractable αν η F είναι tractable, και αντίστοιχα λέγεται NP-complete αν η F είναι NP-complete. □

Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό μπορούμε τώρα να μεταφράσουμε το θεώρημα διχοτόμησης του Schaefer στο χαρακτηρισμό των αλγεβρών που ορίζονται σε δισύνολα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.4.1.1

Μια άλγεβρα που είναι ορισμένη σε έαν σύμπαν δύο στοιχείων είναι NP-Complete αν όλες οι βασικές πράξεις της είναι essentially unary. Αλλιώς είναι tractable. ⊡

Το πρώτο προτέρημα του να χρησιμοποιούμε άλγεβρες αντί από σύνολα πράξεων είναι οτι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε έτοιμη θεωία και δομές άλγεβρας ωστέ να πάρουμε νέα συμπεράσματα για την πολυπλοκότητα των γλωσσών περιορισμών. Ένα άλλο προταίρημα είναι οτί οι πεπερασμένες άλγεβρες έχουν ήδη μελετηθείεκτενώς, και υπάρχει ήδη σημαντική θεωρία πάνω στις δομές της [27, 34, 17]. Μέσω αυτών των ιδεών θα καταλήξουμε σε χρήσιμα αποτελέσματα για τον χαρακτηρισμό αλγεβρών.

Στη μελέτη μας είναι χρήσιμο να περιγράψουμε μια σχέση ισοδυναμίας που συνδέει τις άλγεβρες που αντιστοιχουν στην ίδια γλώσσα περιορισμών. Όπως προείπαμε οι απεικονήσεις Pol, Inv έχουν την ιδιότητα $Inv(Pol(Inv(F))) = Inv(F)$, και έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε το σύνολο πράξεων F στο σύνολο $Pol(Inv(F))$ χωρίς να αλλάζουμε την αντίστοιχο σύνολο των αναλοίωτων σχέσεων. Το σύνολο $Pol(Inv(F))$ αποτελείται από όλες τις πράξεις που μπορούμε να πάρουμε από τις πράξεις της F, μαζί με το σύνολο των προβολών με την πράξη της σύνθεσης συναρτήσεων [13]. (Εαν η f είναι n-αδική πράξη στο A, και $g_1, \ldots, g_n$ είναι k-αδικές πράξεις στο A, τότε η σύνθεση της f και των $g_1, \ldots, g_n$ είναι η k-αδική πράξη h στο A που ορίζεται ως $h(a_1, \ldots, a_k)$

$f(g_1(a_1,\ldots,a_k),\ldots,g_n(a_1,\ldots,a_k)).)$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.1.3

Πράξεις όροι: Για μία άλγεβρα $\mathcal{A}=(A,F)$, μια πράξη f στο A θα λέγεται πράξη όρος της $\mathcal{A}$ εα $f\in Pol(Inv(F))$. Το σύνολο όλων των πράξεων όρων της $\mathcal{A}$ θα συμβολίζεται με $Term(\mathcal{A})$. □

Δύο άλγεβρες με το ίδιο σύμπαν ονομάζονται ισοδύναμοι ώς προς τους όρους αν έχουν το ίδιο σύνολο πράξεων όρων. Παρατηρούμε οτι, για οποιαδήποτε άλγεβρα $\mathcal{A}=(A,F)$, έχουμε $Inv(F)=Inv(Term(\mathcal{A}))$, έτσι δύο άλγεβρες είναι ισοδύναμες ως προς τους όρους αν και μόνο εάν έχουν το ίδιο σύνολο από αναλείωτες σχέσεις. Ως αποτέλεσμα χρειάζεται να χαρακτηρίσουμε τις άλγεβρες μέχρι το επίπεδο ισοδυναμίας όρων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.1.2

Χαρακτηρισμός ομάδων: Μια ομάδα είναι μια άλγεβρα με τρεις βασικές πράξεις: έναν δυαδικό πολλαπλασιασμό, τη μοναδιαία πράξη του αντίθετου, και μια σταθερή πράξη της μονάδας [14]. Ένα coset μιας ομάδας είναι μια σχέση που είναι αναλείωτη της τριαδικής πράξης όρου $t(x,y,z)=xy^{-1}z$. Αποδεικνύεται οτι οποιαδήποτε γλώσσα περιορισμών αποτελείται από cosets μιας πεπερασμένης ομάδας είναι tractable. Άρα οποιοδήποτε πεπερασμένη ομάδα είναι tractable, και κάθε πεπερασμένη άλγεβρα που έχει την τριαδική πράξη t ως όρο είναι επίσης tractable. □

3.4.2 Ειδικές κλάσεις αλγεβρών

Σε αυτό το τμήμα θα δείξουμε οτι, όταν μελετάμε την tractability των πεπερασμένων αλγεβρών, μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας σε ειδικές περιπτώσεις - κλάσεις από άλγεβρες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.2.1

Surjuctive (Επί) άλγεβρες.: Καλούμε μια άλγεβρα surjective (επί) αν όλες οι πράξεις όροι είναι surjective (επί). □

Είναι έυκολο να ελέξουμε αν μια πεπερασμένη άλγεβρα είναι επί αν και μόνο αν οι μοναδιαίοι πράξεις όροι είναι όλοι ep;i και άρα αποτελούν μια ομάδα μεταθέσεων.

Έχει δειχθεί στο [18] οτι οποιασδήποτε μοναδιαίος πολυμορφισμός μπορεί να εφαρμοσθεί στο σύνολο των σχέσεων χωρίς να αλλάξει την πολυπλοκότητα του συνόλου.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4.2.1

Για ένα σύνολο σχέσεων Γ, και οποιαδήποτε μοναδιαία πράξη $f\in Pol(\Gamma)$, έστω $f(\Gamma)$ να είναι το σύνολο των σχέσεων $\{f(\rho)|\rho\in\Gamma\}$, οπού $f(\rho)=\{f(\overline{a})|\overline{a}\in\rho\}$. Το σύνολο Γ είναι tractable αν και μόνο εάν το $f(\Gamma)$ είναι tractable, και το Γ είναι NP-complete αν και μόνο εάν το $f(\Gamma)$ είναι NP-complete.

Κάθε άλγεβρα $\mathcal{A} = (A, F)$ η οποία δεν είναι επί θα έχει μια μοναδιαία πράξη όρο f η οποία δεν θα είναι επί, και άρα θα έχει πεδίο τιμών U, οπού $U \subset A$ (αυστηρό υποσύνολο). Με το να εφαρμόσουμε αυτή την πράξη σε όλες τις σχέσεις στο $Inv(F)$, όπως περιγράφεται από την παραπάνω σχέση μπορούμε να πάρουμε ένα σύνολο σχέσεων ορισμένων στο U χωρίς να αλλάξουμε την πολυπλοκότητα. Η άλγεβρα που αντιστοιχεί στις νέες σχέσεις μπορεί να δειχθεί οτί είναι μια term induced άλγεβρα της $\mathcal{A}$, η οποία ορίζεται ακολούθως. $\boxdot$

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.2.2

Term induced άλγεβρα: Έστω $\mathcal{A} = (A, F)$ μια άλγεβρα, και έστω U ένα μη κενό υποσύνολο του A. Η term induced άλγεβρα $\mathcal{A}|_U$ ορίζεται ως $(U, Term(\mathcal{A})|_U)$, οπού $Term(\mathcal{A})|_U = \{g|_U : g \in Term(\mathcal{A})$ και η g διατηρεί το $U\}$. $\square$

Με την επιλογή μιας μοναδιαίας πράξης όρου f με πεδίο τιμών U με το μικρότερο πληθάριθμο, μπορούμε να είμαστε σίγουροι οτι η term induced άλγεβρα $\mathcal{A}|_U$ είναι επί. Άρα έχουμε το επόμενο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4.2.1

Αναγωγή κάθε άλγεβρας σε μια επί-άλγεβρα: Για κάθε πεπερασμένη άλγεβρα $\mathcal{A}$, υπάρχει ένα σύνολο U τέτοι ώστε:

- η άλγεβρα $\mathcal{A}|_U$ είναι επί και
- η άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι tractable αν και μόνο εάν η $\mathcal{A}|_U$ είναι tractable, και είναι NP-complete ανν η $\mathcal{A}|_U$ είναι NP-complete.

$\boxtimes$

Το παραπάνω θεώρημα αποδεικνύει οτί μπορούμε να περιορίσουμε την προσοχή μας σε επί άλγεβρες. Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει οτί σε πολλές περιπτώσεις αρκεί να ενδιαφερόμαστε για αυτές τις επί άλγεβρες οι οποίες είναι και idempotent.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.2.3

Idempotent απλοποίηση: Θυμόμαστε οτί μια πράξη f ορισμένη στο A, καλείται idempotent όταν ικανοποιεί $f(a, \ldots, x) = x$ για κάθε $x \in A$. Η πλήρης idempotent απλοποίηση μιας άλγεβρας $\mathcal{A} = (A, F)$ είναι η άλγεβρα $(A, Term_{id}(\mathcal{A}))$, οπού $Term_{id}(\mathcal{A})$ αποτελείται πό όλες τις idempotent πράξεις από το $Term(\mathcal{A})$. $\square$

Παρατηρούμε οτι μια πράξη f σε ένα σύνολο A είναι idempotent ανν διατηρεί όλες τις σχέσεις του συνόλου $\Gamma_{CON} = \{\{(a)\} | a \in A\}$, που αποτελείται από όλες τις μοναδιαίες ενός στοιχείου σχέσεις του A. Άρα, $Inv(Term_{id}(\mathcal{A}))$ είναι το relational clone που παράγεται από $Inv(F) \cup \Gamma_{CON}$.

Για το επόμενο θεώρημα χρειαζόμαστε το ακόλουθο βοηθητικό λήμμα του [34] ΛΗΜΜΑ 3.4.2.1

Έστω $\mathcal{A} = (\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, F)$ να είναι μια πεπερασμένη άλγεβρα της οποίας οι μοναδιέες πράξεις όροι είναι μια ομάδα μεταθέσεων G. Τότε η σχέση ρ_G, που ορίζεται ώς:

$$\rho_G = \{(g(a_1), \ldots, g(a_k)) | g \in G\},$$

ανήκει στο $Inv(F)$. ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την πρόταση 1.3 του [34] έχουμε οτί οι σχέσεις της μορφής ρ_G διατηρούνται από όλες τις πράξεις της άλγεβρας $\mathcal{A}$ και άρα ανήκουν στο $Inv(F)$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4.2.2

Ισοδυναμία idempotent Αλγεβρών με τις αρχικές: Μια πεπερασμένη επί άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι tractable ανν η πλήρη idempotent απλοποίησή της $\mathcal{A}_0$ είναι tractable. Όμοίως για τον χαρακτηρισμό NP-complete. ⊠

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\mathcal{A} = (A, F)$ να είναι μια πεπερασμένη επί άλγεβρα, και έστω $\mathcal{A}_0$ να είναι η πλήρης idempotent απλοποίηση της $\mathcal{A}$.

Όπως παρατηρήσαμε πιο πάνω, $Inv(Term(\mathcal{A}_0))$ είναι το relational clone που παράγεται από το σύνολο $Inv(F) \cup \Gamma_{CON}$, όπου $\Gamma_{CON} = \{\{(a)\} | a \in A\}$. Άρα η $\mathcal{A}_0$ είναι tractable ανν $Inv(F) \cup \Gamma_{CON}$ είναι tractable, και $\mathcal{A}_0$ είναι NP-complete αν και μόνο αν $Inv(F) \cup \Gamma_{CON}$ είναι NP-complete. Στην υπόλοιπή απόδειξη θα δείξουμε ότι το $CSP(Inv(F) \cup \Gamma_{CON})$ είναι σε πολυονυμικό χρόνο ισοδύναμο με το $CSP(Inv(F))$.

Προφανώς, κάθε είσοδος της μορφής $CSP(Inv(F))$ μπορεί να θεωρηθεί είσοδος της μορφής $CSP(Inv(F) \cup \Gamma_{CON})$, άρα υπάρχει μια σταθερού χρόνο αναγωγή από το $CSP(Inv(F))$ στο $(CSP(Inv(F) \cup \Gamma_{CON})$.

Για το αντίστροφο αποτέλεσμα, έστω $\mathcal{P} = (V, A, C)$ μια είσοδος της μορφής $CSP(Inv(F) \cup \Gamma_{CON})$ και έστω $\mathcal{P}'$ να είναι το πρόβλημα με είσοδο (V', A, C'), όπου $V' = V \cup \{v_a | a \in A\}$ (κάθε μια από τις μεταβλητές v_a είναι νέα μεταβλητή του V). Για να αποκτήσουμε τους περιορισμούς C', παίρνουμε τις αρχικούς περιορισμούς C του $\mathcal{P}$, και αντικαθιστούμε κάθε μοναδιαίο περιορισμό της μορφής $\langle v, \{(a)\}\rangle$ του C με τον περιορισμό $\langle (v, v_a), =_A\rangle$. Τέλος προσθαίτουμε τον περιορισμό $\langle (v_{a_1}, \ldots, v_{a_k}), \rho_G\rangle$, οπού $a_1, \ldots, a_k$ είναι τα στοιχεία του A (σε κάποια σειρά) και ρ_G είναι η σχέση που ορίστηκε στο παραπάνω λήμμα. Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{P}'$ είναι μια είσοδος του $CSP(Inv(F))$ και οτι αυτή η κατασκευή μπορεί να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο.

Ισχυριζόμαστε τώρα οτί το πρόβλημα $\mathcal{P}'$ έχει μια λύση c, τότε υπάρχει μία λύση ϕ τέτοια ώστε $\phi(v_a) = a$ για κάθε $a \in A$. Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό, παρατηρούμε ότι από τον ορισμό του ρ_G, υπάρχει μια $g \in G$ τέτοια ώστε $\psi(v_a) = g(a)$ για κάθε $a \in A$. Αφού το G είναι μια ομάδα, η αντίστροφη πράξη $g^{-1} \in G$, που σημαίνει οτί είναι μια πράξη όρος της $\mathcal{A}$. Αυτό σημαίνει οτί καε σχέση στο $Inv(F)$ είναι αναλείωτη της g^{-1}, και άρα $\phi = g^{-1}\psi$ είναι επίσης μια λύση στο $\mathcal{P}'$, και έχει την ιδιότητα $g^{-1}\psi(v_a) = a$ για κάθε $a \in A$.

Κάθε λύση ϕ η οποία ικανοποιεί αυη τη συνθήκη προφανώς ικανοποιεί και όλου τους περιορισμούς της C, και άρα ο περιορισμός της ϕ στο V είναι μια λύση του $\mathcal{P}$. Από την άλλη, αν ψ είναι μια λύση του $\mathcal{P}$, τότε η επέκτασή της ψ' στο V' ώστε $\psi'(v_a) = a$, για κάθε $a \in A$, είναι μια λύση του $\mathcal{P}'$. Άρα αυτή η κατασκευή είναι μια πολυονυμικού χρόνου αναγωγή από το $CSP(Inv(F) \cup \Gamma_{CON})$ στο $CSP(Inv(F))$. ■

Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να εκφραστεί με όρους των γλωσσών περιορισμών ως:

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.4.2.1

Έστω Γ μια γλώσσα περιορισμών ορισμένη σε ένα πεπερασμένο σύνολο A, και έστω $\Gamma_{CON} = \{\{(a)\} | a \in A\}$ να είναι το σύνολο όλων των μοναδιαίων με ένα στοιχείο σχέσεων στο A.

Αν όλοι οι μοναδιαίοι πολυμορφισμοί του Γ είναι μεταθέσεις, τότε το Γ είναι tractable αν και μόνο αν το $\Gamma \cup \Gamma_{CON}$ είναι tractable, και το ίδιο για τον χαρακτηρισμό NP-complete. ⊡

Το παραπάνω πόρισμά έχει ως ενδιαφέρουσα συνέπεια τη σύνδεση των προβλημάτων απόφασης με τα προβλήματα εύρεσης λύσης. Έχουμε περιγράψει το CSP ως ένα πρόβλημα απόφασης, με ερώτημα αν υπάρχει μια λύση. Όμως το αντίστοιχο πρόβλημα εύρεσης λύσης, πολλές φορές εμφανίζεται πρακτικά. Θα δείξουμε τώρα οτί οι tractable περιπτώσεις των δύο προβλημάτων είναι ίδιες. (Παρατηρούμε οτι οι tractable περιπτώσεις του προβλήματος έυρεσης λύσης είανι αυτές που ανήκουν στην κλάση FP.)

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.4.2.2

Ένα πρόβλημα απόφασης $CSP(G)$ είναι tractable αν και μόνο αν το αντίστοιχο πρόβλημα έυρεσης λύσης μπορεί να λυθεί σε πολυωνυμικό χρόνο. ⊡

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Προφανώς, αν το πρόβλημα έυρεσης λύσης είναι πολυωνυμικό τοότε και το πρόβλημα απόφασηςε είναι.

Για το αντίστροφο, έστω Γ ένα tractable σύνολο σχέσεων ορισμένων σε ένα πεπερασμένο σύνολο A. Επιλέγοντας ένα μοναδιαίο πολυμορφισμό f του Γ, του οποίου το πεδίο τιμών U έχει το μικρότερο πληθάριθμο, μπορούμε να πάρουμε το αντίστοιχο συνολο σχέσεων $\Gamma' = f(\Gamma)$ ορισμένων στο U, έτσι ώστε κάθε μοναδιαίος πολμορφισμός του Γ' να είναι μετάθεση. Από τα παραπάνω η Γ' είναι επίσης tractable.

Τώρα θεωρούμε μια είσοδο $\mathcal{P} = (V, U, C)$ του $CSP(\Gamma)$. Από την επιλογή του Γ, μπορούμε να αποφασίσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο (με βάση το μέγεθος της $\mathcal{P}$) αν αυτή η είσοδος έχει λύση. Έστω οτί έχει. Τότε η είσοδος $\mathcal{P}' = (V, U, C')$, που αποκτούμε αν αντικαταστήσουμε κάθε σχέση περιορισμού ρ με την αντίστοιχη σχέση $f(\rho)$, έχει επίσης λύση, και μάλιστα κάθε λύση του $\mathcal{P}'$ είναι λύση και του $\mathcal{P}$.

Αφού το $\mathcal{P}'$ έχει λύση, συνεπάγεται οτί για κάθε $v \in V$ υπάρχει κάποιο $a \in A$ για το οποίο μπορούμε να προσθαίσουμε τον περιορισμό $\langle (v), \{(a)\} \rangle$ και να έχουμε ακόμη επιλύσιμη είσοδο. Άρα, αν ασχοληθούμε με μία μεταβλητή κάθε φορά, και κάθε πιθανή τιμή $a \in A$ για αυτή τη μεταβλητή, μπορούμε να πάρουμε έναν περιορισμό για κάθε μεταβλητή κάθε φορα, και τελικά μια λύση για το $\mathcal{P}'$. Ελέγχοντας για επιλυσημότητα σε κάθιε πιθανή τιμή όλων των μεταβλητών χρειάζεται να λύσουμε το πολύ $|V||U|$ φορές εισόδους του $CSP(\Gamma' \cup \Gamma_{CON})$, και έτσι μπορούμε να βρούμε σε πολυωνυμικό χρόνο σε σχέση με το $\mathcal{P}'$ μια λύση του. ■

3.4.3 Δομές στις άλγεβρες

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ σχετίζουν την πολυπλοκότητα μια πεπερασμένης άλγεβρας με την πολυπλοκότητα των υποαλγεβρών και των ομομορφικών απεικονίσεων της [27, 13, 8]. Σε πολλές περιπτώσεις, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα αποτελέσματα για να ανάγουμε το πρόβλημα της ανάλυσης της πολυπλοκότητς μια άλγεβρας σε ένα παρόμοιο πρόβλημα που εμπεριέχει μια άλγεβρα με μικρότερο σύμπαν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.3.1

Υποάλγεβρα: Έστω $\mathcal{A} = (A, F)$ μια άλγεβρα και B ένα υποσύνολο του A τέτοιο ώστε, για κάθε $f \in F$ και για οποιαδήποτε $b_1, \ldots, b_n \in B$, όπου n είναι η πληθικότητα της f, έχουμε ότι $f(b_1, \ldots, b_n) \in B$. Τότε η άλγεβρα $\mathcal{B} = (B, F|_B)$ καλέιται υποάλγεβρα της $\mathcal{A}$, οπού $F|_B$ περιέχει τους περιορισμούς όλων των πράξεων του F στο B. Αν $B \neq A$, τότε το B λέγεται αυστηρή υποάλγεβρα. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4.3.1

Χαρακτηρισμός μέσω υποάλγεβρας: Έστω $\mathcal{A}$ μια πεπερασμένη άλγεβρα.

1. Αν $\mathcal{A}$ είναι tractable τότε κάθε υποάλγεβρα της είναι επίσης.

2. Αν η $\mathcal{A}$ έχει μια NP-complete υποάλγεβρα, είναι και η ίδια NP-complete.

⊠

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\mathcal{B} = (B, F|_B)$ μια υποάλγεβρα του $\mathcal{A} = (A, F)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε αν $Inv(F|_B) \subseteq Inv(F)$. Άρα , $CSP(Inv(F|_B))$ μπορεί να αναχθεί στο $CSP(Inv(F))$ σε σταθερό χρόνο. Τα παραπάνω αποτελέσματα είναι άμεσες συνέπειες της παραπάνω αναγωγής. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.3.2

Ομομορφισμοί αλγεβρών: Έστω $\mathcal{A}_1 = (A_1, F_1)$ και $\mathcal{A}_2 = (A_2, F_2)$ τέτοιες ώστε $F_1 = \{f_i^1 | i \in I\}$ και $F_2 = \{f_i^2 | i \in I\}$, όπου τα f_i^1, g_i^2 είναι n_i-αδικά, για κάθε $i \in I$.

Μια απεικόνιση $\phi : A_1 \to A_2$ καείται ομομορφισμός από το $\mathcal{A}_1$ στο $\mathcal{A}_2$ εάν:

$$\phi(f_i^1(a_1, \ldots, a_{n_i})) = f_i^2(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_{n_i}))$$

ισχύει για κάθε $i \in I$ και για όλα τα $a_1, \ldots, a_{n_i} \in A_1$.

Αν η απεικόνιση είναι και επί, τότε η $\mathcal{A}_2$ λέγεται ομομορφική εικόνα της $\mathcal{A}_a$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4.3.2

Χαρακτηρισμός μέσω ομομορφικών εικόνων: Έστω $\mathcal{A}$ μια πεπερασμένη άλγεβρα.

1. Εάν $\mathcal{A}$ είναι tractable, τότε κάθε ομομορφική εικόνα του $\mathcal{A}$ είναι.

2. Εάν η $\mathcal{A}$ έχει μια ομομορφική εικόνα που είναι NP-complete είναι και η ίδια NP-complete.

⊠

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\mathcal{B} = (B, F_B)$ μια ομομορφική εικόνα του $\mathcal{A} = (A, F_A)$ και έστω ϕ ο αντίστοιχος ομομορφισμός. Θα δείξουμε οτί για κάθε πεπερασμένο $\Gamma \subseteq Inv(F_B)$, το $CSP(\Gamma)$ ανάγεται σε γραμμικό χρόνο στο $CSP(\Gamma')$ για κάποιο πεπερασμένο $\Gamma' \subseteq Inv(F_A)$.

Για $\rho \in Inv(F_B)$, θέτουμε $\phi^{-1}(\rho) = \{\overline{a} | \phi(\overline{a} \in \rho\}$. Είναι προφανές ότι η $\phi^{-1}(\rho)$ είναι αναλείωτη της ίδιας πολλαπλότητας με την ρ. Μπορεί άμεσα να αποδειχθεί οτι $\phi^{-1}(\rho) \in Inv(F_A)$. Έστω $\Gamma' = \{\phi^{-1}(\rho) | \rho \in \Gamma\}$. Τότε Γ' είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $Inv(F_A)$.

Παίρνουμε μια είσοδο $\mathcal{P} = (V, B, C)$ του $CSP(\Gamma)$ και κατασκευάζουμε μια είσοδο $\mathcal{P}' = (V, A, C')$ του $CSP(\Gamma')$ όπου $C' = \{\langle s, \phi^{-1}(\rho) | \langle s, \rho\rangle \in C\}$.

Εάν ψ είναι μια λύση του $\mathcal{P}'$, τότε η $\phi\psi$ είναι λύση του $\mathcal{P}$. Όμοια, αν ξ είναι μια λύση του $\mathcal{P}$, τότε οποιαδήποτε συνάρτηση $\psi : V \to A$ τέτοια ώστε $\phi\psi(v) = \xi(v)$ για κάθε $v \in V$ είναι λύση της $\mathcal{P}'$. ■

Τώρα θα δώσουμε δύο παραδείγματα χρήσης των παραπάνω θεωρημάτων χαρακτηρισμού. Τα παραδείγματα δείχνουν οτι και τα δύο αποτελέσματα μπορούν να είναι χρήσιμα (ανεξάρτητα) για να χαρακτιρίσουν την πολυπλοκότητα συγκεκριμένων αλγεβρών ανάγωντας το πρόβλημα σε μιά άλγεβρα ορισμένη σε μικρότερο σύνολο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.3.1

Χρήση αλγεβρικών δομών για NP-completeness: Έστω $\mathcal{A}$ να είναι η idempotent άλγεβρα $(\{0,1,2\},\circ)$, όπου $\circ$ είναι η ακόλουθη σχέση:

$\circ$	0	1	2
0	0	1	1
1	1	1	0
2	2	2	2

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα για τις ομομορφικές εικόνες, θα δείξουμε οτί η $\mathcal{A}$ είναι NP-complete ακόμη και αν όλες οι υποάλγεβρές του είναι tractable.

Παρατηρούμε οτι, οι ισότητες $0\circ 2 = 1$, $1\circ 2 = 0$, $0\circ 1 = 1\circ 0 = 1$ δείχνουν, οτί η $\mathcal{A}$ έχει μόνο μια αυστηρή υποάλγεβρα η οποία έχει μόνο ένα στοιχείο, την άλγεβρα $\mathcal{B} = (\{0,1\},\circ|_{\{0,1\}})$. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι η $\circ|_{\{0,1\}}$ είναι μια semilattice πράξη στο $\{0,1\}$. Έτσι, η άλγεβρα $\mathcal{B}$ είναι tractable.

Από την άλλη, ας θεωρήσουμε την άλγεβρα $\mathcal{C} = (C,*)$, όπου $C = \{a,b\}$ και για όλα τα $x,y \in \{a,b\}$, $x*y = x$. Είναι εύκολο να δούμε οτί η απεικόνιση $\phi : \{0,1,2\} \to C$ τέτοια ώστε $\phi(0) = \phi(1) = a$, και $\phi(2) = b$, είναι ομομορφισμοί από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι NP-complete,(όλες οι βασικές πράξεις είναι essentially unary και είμαστε στο $\{0,1\}$). Και άρα η $\mathcal{A}$ είναι NP-complete. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.4.3.2

Χρήση αλγεβρικών δομών για NP-completeness: Έστω $\mathcal{A}$ να είναι η idempotent άλγεβρα $(\{0,1,2\},\circ)$, όπου $\circ$ είναι η ακόλουθη σχέση:

$\circ$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	1	1
2	1	1	2

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα χαρακτηρισμού μέσω υποαλγεβρών θα δείξουμε οτί η $\mathcal{A}$ είναι NP-complete ακόμη και αν όλες οι μικρότερες ομομορφικές απεικονίσεις της είναι tractable.

Αφού οι άλγεβρες με μόνο ένα στοιχείο είναι σίγουρα tractable, αρκεί να ασχοληθούμε με τις ομομορφικές εικόνες $\mathcal{B}$ της $\mathcal{A}$ που έχουν δύο στοιχεία. Έστω $\mathcal{B} = (\{a,b\},*)$ όπου $*$ είναι μια δυαδική πράξη στο $\{a,b\}$ και υποθέτουμε οτί η ϕ είναι ένας ομομορφισμός από το $\mathcal{A}$ στο $\mathcal{B}$. Τότε έχουμε $\phi(x\circ y) = \phi(x)\circ\phi(y)$ για όλα τα $x,y \in \{0,1,2\}$.

Έχουμε τις εξής περιπτώσεις τώρα:

1. $\phi(0) = \phi(1) = a$, $\phi(2) = b$. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$a * a = \phi(0) * \phi(0) = \phi(0 \circ 0) = \phi(0) = a$$

$$a * b = \phi(0) * \phi(2) = \phi(0 \circ 2) = \phi(1) = a$$

$$b * a = \phi(2) * \phi(0) = \phi(2 \circ 0) = \phi(1) = a$$

$$b * b = \phi(2) * \phi(2) = \phi(2 \circ 2) = \phi(2) = b$$

   Είναι εύκολο να δούμε ότι η $*$ είναι μια semilattice πράξη στο $\{a, b\}$. Άρα η $\mathcal{B}$ είναι tractable.

2. Έστω $\phi(0) \neq \phi(1)$. Τότε έχουμε οτι $\phi(2) \in \{\phi(0), \phi(1)\}$. Εάν $\phi(2) = \phi(0)$, τότε:

$$\phi(0) = \phi(0 \circ 0) = \phi(0) * \phi(0) = \phi(0) * \phi(2) = \phi(0 \circ 2) = \phi(1).$$

   Ενώ αν $\phi(2) = \phi(1)$, τότε:

$$\phi(0) = \phi(1 \circ 0) = \phi(1) * \phi(0) = \phi(2) * \phi(0) = \phi(2 \circ 0) = \phi(1)$$

Έτσι η δεύτερη περίπτωση είναι αδύνατη, και αποδείξαμε οτί όλες οι μικρότερες ομομορφικές εικόνες του $\mathcal{A}$ είναι tractable.

Από την άλλη, η άλγεβρα $\mathcal{A}$ έχει την υποάλγεβρα $\mathcal{A}' = (\{0, 1\}, \circ)$ τέτοια ώστε $x \circ y = y$ για όλα τα $x, y \in \{0, 1\}$. Όμως η $\mathcal{A}'$ είναι NP-complete (όλες οι βασικές πράξεις είναι essentially unary και είμαστε στο $\{0, 1\}$) και άρα και η $\mathcal{A}$ είναι NP-complete. □

3.4.4 Αυστηρά "απλές" επί άλγεβρες

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας απέδειξαν οτί μια tractable άλγεβρα πρέπει να έχει την ιδιότητα οτί όλες οι υποάλγεβρες και οι ομομορφικές εικόνες της είναι tractable. Οπότε, μια πρώτη ερώτηση που έρχεται φυσικά είναι αν θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε την πολυπλοκότητα όλων των αλγεβρών που δεν έχουν μικρότερες υποάλγεβρες και ομομορφικές εικόνες. Αν μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε όλες αυτές τις άλγεβρες θα μπορούσε να είναι μια βάση αναγωγής για οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.4.4.1

Απλή άλγεβρα, αυστηρά απλή άλγεβρα: Μια πεπερασμένη άλγεβρα θα λέγεται απλή αν όλες οι μικρότερες ομομορφικές εικόνες της έχουν μόνο ένα στοιχείο, και αυστηρά απλή αν όλες είναι απλή και όλες οι αυστηρές υποάλγεβρες της έχουν επίσης ένα στοιχείο. □

Έχουμε ήδη αποδείξει οτί αρκεί να ασχοληθούμε με επί άλγεβρες. Σε αυτό το τμήμα θα πάρουμε ένα πλήρη χαρακτηρισμό όλων των αυστηρά απλών επί αλγεβρών.[1] Δείχνουμε οτι οποιαδήποτε άλγεβρα αυτού του τύπου είναι είτε tractable είτε NP-complete, και δίνουμε ένα πλήρη χαρακτηρισμό των tractable περιπτώσεων. Τέτοιες άλγεβρες εμπεριέχουν όλες τις επί άλγεβρες με σύο στοιχεία, αλλά και πολλές άλγεβρες με μεγαλύτερο σύμπαν, έτσι η διχοτόμιση εμπεριέχει και γενικεύει το αποτέλεσμα του Schaefer για άλγεβρες με σύο στοιχεία.

Για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα, χρησιμοποιούμε τη πλήρη περιγραφή των πεπερασμένων αυστηρά απλών αλγεβρών από τον Szendrei. Για να μπορέσουμε να αναπαραστήσουμε τα αποτλέσματα όμως πρέπει να εισάγουμε κάποιες βασικές αλγεβρικές έννοιες.

Μια ομάδα μεταθέσεων G στο σύνολο A λέγεται regular αν, για κάθε $a, b \in A$, υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $g(a) = b$, και αν κάθε μηταυτοτικό μέλος του G δεν έχει σταθερό σημείο. Η G λέγεται primitive αν η άλγεβρα (A, G) είναι απλή.

Έστω $\overline{A} = (A, +)$ μια πεπερασμένη Αβελιανή ομάδα, και έστω K ένα πεπερασμένο πεδίο. Ο πεπερασμένος διανυσματικός χώρος στο $\overline{A}$ ορισμένος στο K θα γράφεται ${}_K\overline{A} = (A; +, K)$, η ομάδα των $\{x + a | a \in A\}$ θα συμβολίζεται με $T(\overline{A})$, και ο ενδομορφισμ

[1] Να παρατηρήσουμε εδώ οτί η πλήρης idempotent αναγωγή αυστηρά απλών επί αλγεβρών δεν είναι πάντα αυστηρά απλή. Έτσι παίρνουμε ένα λίγο δυνατότερο αποτέλεσμα χαρακτηρίζοντας όλες τις αυστηρά απλές επί άλγεβρες, οπό ότι αν χαρακτηρίζαμε τις αυστηρά απλές idempotent άλγεβρες.

Κεφάλαιο 4

Αποδείξεις

4.1 Το CSP σε δισύνολα - Schaefer

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι αυτούσιες αποδείξεις από τα paper για δύο λόγους. Πρώτον προφανώς την κατανόησή τους, και δεύτερον για να γίνει εμφανής η διαφοροποίηση μεταξύ των μαθηματικών εργαλείων που χρησιμοποιούνται.

4.1.1 Εισαγωγή

Το CSP όταν οι μεταβλητές παίρνουν τιμές από ένα σύνολο δύο στοιχείων έχει μελετηθεί πλήρως ως προς την tractability ήδη από το 1978 από τον Thomas J. Schaefer. Δηλαδή όταν το A έχει πληθάριθμο 2 το $CSP(\Gamma)$ γνωρίζουμε αν είναι P ή NP-complete. Παρακάτω γίνεται παρουσίαση της απόδειξης. Αξίζει να σημειωθεί οτί το πρόβλημα στο paper του Schaefer φαίνεται σαν μια γενίκευση του satisfiability problem μια και ο ορισμός και το ενδιαφέρον για το ακόμα πιο γενικό CSP προήλθε πιο μετά (αφού η αρχή ήταν αυτό το paper). Η παρουσίαση παρακάτω θα γίνει με την αρχική σημειολογία, και όπου κριθεί αναγκαίο θα εκφραστεί και στη σημερινή γλώσσα του CSP. Παρακάτω παρουσιάζονται οι συμβολισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη:

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.1

S-τύπος, S-ικανοποιησιμότητα, $SAT(S)$: Έστω $S = \{R_1, \ldots R_m\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο από λογικές σχέσεις. (Μια λογική σχέση ορίζεται ως ένα υποσύνολο του $\{0,1\}^{\kappa}$). Έστω S-τύπος να είναι μια conjuction από προτάσεις της μορφής $R_i(\xi_1, \xi_2, \ldots.)$, οπού $\xi_1, \xi_2, \ldots$ είναι μεταβλητές, ο αριθμός των οποίων είναι η πολλαπλότητα της R_i, $i \in (1, \ldots, m)$. Το να αποφασίσεις αν ένας S-τύπος είναι ικανοποιήσιμος είναι το πρόβλημα S-ικανοποιησιμότητας. Συμβολίζουμε με $SAT(S)$ το σύνολο όλων των ικανοποιήσιμων S-τύπων. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.2

$(0-1)$**-ικανοποιήσιμη, ασθενώς θετική-αρνητική, bijunctive,affine:**

- Μια σχέση R είναι 0-ικανοποιήσιμη (1-ικανοποιήσιμη) αν το $(0, \ldots 0) \in R$ $((1, \ldots 1) \in R)$.
- Μια σχέση είναι ασθενώς θετική (αρνητική) αν η $R(x_1, \ldots)$ είναι λογικά ισοδύναμη με ένα CNF τύπο ο οποίος έχει το πολύ μια μεταβλητή με άρνηση (χωρίς άρνηση) σε κάθε conjuct.
- Μια σχέση R είναι bijunctive αν η $R(x_1, \ldots)$ είναι λογικά ισοδύναμη με ένα CNF τύπο που έχει 2 μεταβλητές σε κάθε conjuct.
- Μια σχέση R είναι affine αν $R(x_1, \ldots)$ είναι λογικά ισοδύναμη με ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο δισύνολο $\{0, 1\}$, δηλαδή αν $R(x_1, \ldots)$ είναι λογικά ισοδύναμο με μια conjuction από τύπους της μορφής $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n = 0$ και $\xi_1 \oplus \ldots \oplus \xi_n = 1$ με $\oplus$ να συμβολίζει την πρόσθεση mod 2.

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.3

Τύποι: Με τον όρο τύπος θα εννοούμε ένα καλώς ορισμένο τύπο από μεταβλητές, σταθερές, λογικούς συνδέσμους, παρενθέσεις, σύμβολα λογικών σχέσεων και υπαρξιακούς και καθολικούς ποσοδείκτες. Η ιδέα είναι να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε συμβολισμό μας είναι χρήσιμος για την έκφραση σχέσεων μεταξύ προτασιακών μεταβλητών.

- Μεταβλητή θα θεωρήσουμε ένα στοιχείο από το σύνολο $\{x, x_0, x_1 \ldots, y, y_0\ , \ldots,\ z, \ldots u\ , \ldots v,\ \ldots\}$.Οι μεταβλητές όπως και οι τύποι είναι αλφαριθμητικά (πχ το x_{18} είναι ένα αλφαριθμητικό τριών συμβόλων.
- Σταθερά είναι ένα από τα σύμβολα $0, 1$ (1=αληθές, 0 =ψευδές).
- Λογικός σύνδεσμος είναι ένα από τα σύμβολα $\vee, \wedge,\ \neg, \rightarrow,\ \equiv, \neq$ με τις συνήθεις σημασίες τους
- Κάθε λογική σχέση R έχει το αντίστοιχο σύμβολο λογικής σχέσης
- Οι ποσοδείκτες $\exists x, \forall x$ έχουν τη συνήθη σημασία.
- Literal είναι μια μεταβλητή η μια μεταβλητή με άρνηση.

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.4

$Var(A)$**:** Αν A είναι ένας τύπος, τότε με $Var(A)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ελεύθερων (που δεν έχουν ποσοδειχθεί) μεταβλητών που εμφανίζονται στο A. Μια ανάθεση στο A είναι μια συνάρτηση $s : Var(A) \to \{0, 1\}$. Λέμε οτί η ανάθεση s ικανοποιεί το A αν η s κάνει το A αληθές. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.5

$Sat(A)$: $Sat(A)$ είναι το σύνολο όλων των αναθέσεων s που ικανοποιούν το A. Δύο τύποι A και B είναι λογικά ισοδύναμοι αν $Var(A) = Var(B)$ και $Sat(A) = Sat(B)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.6

$K^A_{i,V}$: Έστω A τύπος με $V \subseteq Var(A)$, και $i \in \{0, 1\}$. Τότε $K^A_{i,V}$ είναι η ανάθεση $s : Var(A) \to \{0, 1\}$ που ορίζεται ως $s(\xi) = i$ αν και μόνο αν $\xi \in V$. Συνήθως γράφουμε απλώς $K_{i,V}$ με το A να βγαίνει από τα συμφραζόμενα. Το K_i συμβολίζει την ανάθεση που έχει την σταθερή τιμή i (και πάλι το A βγαίνει από τα συμφραζόμενα). □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.7

$A[^\xi_w]$: Αν A ένας τύπος, ξ μια μεταβλητή, και w είναι ένα literal, τότε $A[^\xi_w]$ συμβολίζει τον τύπο που σχηματίζεται από το A αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της ξ με το w. Αν V είναι ένα σύνολο μεταβλητών, τότε $A[^V_w]$ συμβολίζει το αποτέλεσμα της αντικατάστασης με w κάθε εμφάνισης μεταβλητής του V. Πολλαπλές αντικαταστάσεις συμβολίζονται με εκφράσεις όπως $A[^V_w,^{V'}_{w'},^{V''}_{w''}]$ και με νόημα προφανές. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.8

$Gen(S)$: Το σύνολο των υπαρξιακά ποσοδεικτούμενων S-τύπων με σταθερές συμβολίζεται με $Gen(S)$. Συγκεκριμένα, $Gen(S)$ είναι το μικρότερο σύνολο τύπων τέτοιων ώστε:

- $\forall R \in S, R(x_1, \ldots) \in Gen(S)$.
- $\forall A, B \in Gen(S)$ και όλες τις μεταβλητές ξ, η τα παρακάτω είναι όλα στο $Gen(S) : A \wedge B, A[^\xi_\eta], A[^\xi_0], A[^\xi_1]$ και $(\exists\xi)A$.

Με $Gen^+(S)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των τύπων που είναι λογικά ισοδύναμοι με κάποιο τύπο του $Gen(S)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.9

$[A]$: Αν A είναι ένα τύπος τότε με $[A]$ συμβολίζουμε τη λογική σχέση που ορίζει η A, όταν οι μεταβλητές παίρνονται σε λεξικογραφική σειρά. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.1.10

$Rep(S)$: Τέλος συμβολίζουμε με $Rep(S) := \{[A] : A \in Gen(S)\}$. Δηλαδή $Rep(S)$ είναι το σύνολο των σχέσεων που μπορούν να εκφραστούν με ποσοδεικτούμενους S-τύπους με σταθερές. Παρατηρούμε ότι αν $S \subseteq S'$, τότε $Rep(S) \subseteq Rep(S')$. □

4.1.2 Θεώρημα κλάσεων του $Rep(S)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.2.1

Θεώρημα κλάσεων του $Rep(S)$**:** Έστω S ένα οποιοδήποτε σύνολο λογικών σχέσεων. Αν το S ικανοποιεί έναν από τους παρακάτω περιορισμούς $(a) - (d)$ παρακάτω τότε το $Rep(S)$ ικανοποιεί τον ίδιο περιορισμό. Αλλιώς το $Rep(S)$ είναι το σύνολο όλων των λογικών σχέσεων.

(a) Κάθε σχέση στο S είναι ασθενώς αρνητική

(b) Κάθε σχέση στο S είναι ασθενώς θετική

(c) Κάθε σχέση στο S είναι affine.

(d) Κάθε σχέση στο S είναι bijunctive.

$\boxtimes$

Το υπόλοιπο της υποενότητας είναι η απόδειξη αυτού του θεωρήματος.

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.1

Έστω R μια λογική σχέση και $A := R(x_1, \ldots)$. Τότε η R είναι affine αν και μόνο αν για κάθε $s_1, s_2, s_3 \in Sat(A), s_1 \oplus s_2 \oplus s_3 \in Sat(A)$. $\boxplus$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο γεγονός, που αποδεικνύεται με απλή γραμμική άλγεβρα. Αν K είναι ένα field, τότε το $D \subseteq K^n$ είναι σύνολο λύσεων ενός συστήματος γραμμικών εξισώσεων στο K αν και μόνο αν $\forall b_1, b_2, b_3 \in D$ και $\forall c_1, c_2, c_3 \in K$ με $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, τότε $c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 \in D$. Σε περίπτωση που το K είναι το $\{0, 1\}$, αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με "το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών στοιχείων του D είναι στοιχείο του D." Αφού η R είναι affine αν και μόνο εάν A είναι ισοδύναμη με ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο $\{0, 1\}$, το λήμμα συνεπάγεται από αυτό το γεγονός. Επίσης αποδεικνύεται οτί ο πληθικός αριθμός μιας affine σχέσης είναι δύναμη του 2 που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξει ότι κάποια σχέση δεν είναι affine. $\blacksquare$

Τώρα θα εισάγουμε συμβολισμό για το επόμενο λήμμα: Αν ξ είναι μια μεταβλητή, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\langle \xi, i \rangle$ για να δηλώσουμε το literal ξ αν $i = 1$ και $\neg\xi$ αν i=0. Όπως συνηθίζεται, το $\overline{\alpha}$ δηλώνει το συμπληρωματικό literal του α, δηλαδή το literal $\langle \xi, 1 - i \rangle$ όταν $\alpha = \langle \xi, i \rangle$. Λέμε οτί το literal $\alpha = \langle \xi, i \rangle$ είναι συμβατό με ένα τύπο A αν $s(\xi) = i$ για κάποιο $s \in Sat(A)$. Λέμε οτι η ανάθεση s συμφωνεί με το literal α αν $\alpha = \langle \xi, s(\xi) \rangle$ για κάποια μεταβλητή ξ. Ένα σύνολο από literals είναι συμβατό αν δεν συμπεριλαμβάνει τα α και $\overline{\alpha}$ για κάποιο literal α. Αν s είναι μια ανάθεση και Q είναι ένα συνεπές σύνολο από literal, συμβολίζουμε με $s\#Q$ την ανάθεση η οποία διαφέρει από το s μόνο στο σύνολο $\{\xi : \langle \xi, 1 - s(\xi) \rangle \in Q\}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.2.1

$Imp_A(\alpha)$: Έστω α ένα literal και A ένας τύπος. Ορίζουμε $Imp_A(\alpha)$ να είναι το σύνολο όλων των literals β τέτοιων ώστε κάθε $s \in Sat(A)$ που συμφωνεί με το α συμφωνεί επίσης και με το β. Έτσι, το $Imp_A(\alpha)$ είναι το σύνολο των literal που "επάγονται" από το literal α. Για παράδειγμα, αν $A = x \vee y$, τότε $\langle y, 1\rangle \in Imp_A(\langle x, 0\rangle)$. □

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.2.2

Σύνολο αλλαγής: Έστω A ένας τύπος και $s \in Sat(A)$. Ένα σύνολο αλλαγής για το (A, s) είναι ένα σύνολο $V \subseteq Var(A)$ τέτοιο ώστε $s \oplus K_{1,V} \in Sat(A)$. Δηλαδή, V είναι ένα σύνολο αλλαγών για το (A,s) αν και μόνο αν η ανάθεση που διαφέρει από το s μόνο στο V ικανοποιεί το A. □

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.2

Έστω R μια λογική σχέση και $A := R(x_1, \ldots)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(a) R είναι bijunctive

(b) Για κάθε $s \in Sat(A)$, αν V_1 και V_2 είναι σύνολα αλλαγής για το (A,s) τότε είναι και το $V_1 \cap V_2$

(c) Για κάθε $s \in Sat(A)$ και κάθε literal α το οποίο είναι συμβατό με το A, $s\#Imp_A(\alpha) \in Sat(A)$.

⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$(a) \rightarrow (b)$: Έστω οτί η R είναι bijunctive. Έτσι, το A είναι λογικά ισοδύναμο με κάποιο τύπο B ο οποίος είναι conjuction από προτάσεις της μορφής $(\alpha \rightarrow \beta)$, με α, β literal. Έστω $s \in Sat(A)$ δωσμένο και έστω V_1, V_2 σύνολα αλλαγής για το (A, s). Έστω Q το μικρότερο σύνολο literal τέτοιο ώστε:

- $\{\langle \eta, 1 - s(\eta)\rangle : \eta \in V_1 \cap V_2\} \in Q$.
- όταν $\alpha \in Q$ και $(\alpha \rightarrow \beta)$ ή $(\overline{\beta} \rightarrow \overline{\alpha})$ είναι ένα conjuct του B για κάποιο literal β, τότε $\beta \in Q$.

Προφανώς κάθε ανάθεση $t \in Sat(B)$ η οποία διαφέρει από το s σε όλα τα $V_1 \cap V_2$ πρέπει να συμφωνεί με κάθε literal στο Q. Εφόσων $s \oplus K_{1,V_1}$ είναι μια τέτοια ανάθεση, το Q είναι συμβατό και δεν μπορεί να περιέχει literal $\langle \eta, 1 - s(\eta)\rangle$ με $\eta \notin V_2$. Οπότε, $s\#Q = s \oplus K_{1,V_1 \cap V_2}$. Είναι εύκολο να δείξουμε οτι $s\#Q$ ικανοποιεί κάθε conjuct του B, και άρα $s\#Q = s \oplus K_{1,V_1 \cap V_2} \in Sat(B) = Sat(A)$. Άρα $V_1 \cap V_2$ είναι ένα σύνολο αλλαγής για το (A, s).

$(b) \rightarrow (c)$: Έστω οτί το (b) ισχύει. Έστω $s \in Sat(A)$, και έστω α να είναι ένα literal συμβατό με το A. Θέλουμε να δείξουμε οτι $s\#Imp_A(\alpha) \in Sat(A)$.

Έστω οτι το s δεν είναι συμβατό με το α, δηλαδή $\alpha = \langle \xi, 1-s(\xi)\rangle$ για κάποια μεταβλητή ξ. Έστω $W := \{\eta : \langle \eta, 1-s(\eta)\rangle \in Imp_A(\alpha)\}$ δηλαδή, W είναι το σύνολο όλων των μεταβλητών στις οποίες το το $Imp_A(\alpha)$ διαφωνεί με το s. Ισχυριζόμαστε οτί $W = \cap\{V : V$ είναι ένα σύνολο αλλαγών για το (A, s) και $\xi \in V\}$. Προσέχουμε οτι κάθε σύνολο αλλαγών που περιέχει το ξ πρέπει επίσης να περιέχει και όλο το W, αφού το W αποτελείται από όλες τις μεταβλητές που αναγκαστικά πρέπει να αλλάξουν αν αλλάξει το ξ. Από την άλλη, αν κάποια μεταβλητη η δεν περιέχεται στο W, τότε υπάρχει κάποια ανάθεση t ώστε $t(\xi) \neq s(\xi)$ αλλά $t(\eta) = s(\eta)$, έτσι ώστε το η δεν περιέχεται στο σύνολο αλλαγής $\{\zeta : t(\zeta) \neq s(\zeta)\}$. Αυτό αποδυκνύει τον ισχυρισμό. Τώρα με αλλεπάλληλες χρήσεις της υπόθεσης (b), το W είναι ένα σύνολο αλλαγής για το (A, s). Έτσι, $s \oplus K_{1,W} = s\#Imp_A(\alpha) \in Sat(A)$.

$(c) \to (a)$: Υποθέτουμε οτι για κάθε $s \in Sat(A)$ και κάθε literal α το οποίο είναι σύμβατο με το A, $s\#Imp_A(a) \in Sat(A)$. Ορίζουμε B να είναι η conjuction των $\{(\alpha \to \beta) : \alpha, \beta$ literal και $\beta \in Imp_A(\alpha)\}$. Σημειώνουμε οτι $Var(B) = Var(A)$, αφού το B έχει το conjuct $(\xi \to \xi)$ για κάθε $\xi \in Var(A)$. Ισχυριζόμαστε οτι το B είναι λογικά ισοδύναμο με το A, και άρα η R είναι bijunctive. Πρέπει να δείξουμε οτί $Sat(B) = Sat(A)$. Προφανώς $Sat(A) \subseteq Sat(B)$, αφού κάθε ανάθεση που ικανοποιεί το A πρέπει να ικανοποιεί και κάθε conjuct του B. Απομένει να δείξουμε οτι $Sat(B) \subseteq Sat(A)$. Έστω οτί δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχει $s_1 \in Sat(B) - Sat(A)$. Επιλέγουμε $s_2 \in Sat(A)$ ώστε $|W|$ είναι μέγιστο, με $W = \{\eta : s_1(\eta) = s_2(\eta)\}$. Επιλέγουμε $\xi \in Var(A) - W$, και έστω $\alpha := \langle \xi, s_1(\xi)\rangle$. Το literal α είναι συμβατό με το A, γιατί αν το α ήταν ασύμβατο με το A, το B θα είχε ένα conjuct που θα επιβεβαίωνε το γεγονός(δηλαδή, αν $\alpha = \langle \xi, 0\rangle$ είναι ασύμβατο με το A, τότε το B έχει ένα conjuct $(\neg\xi \to \xi)$, και αν $\alpha = \langle \xi, 1\rangle$ είναι ασύμβατο με το A, τότε το B έχει ένα conjuct $(\xi \to \neg\xi)$), και αυτό θα ανάγκαζε $s_2(\xi) = s_1(\xi)$. Έστω $s_3 := s_2\#Imp_A(\alpha)$. από υπόθεση το s_3 ικανοποιεί το A. Υποστηρίζουμε οτί για κάθε $\eta \in W, s_3(\eta) = s_2(\eta)$. Για να το δούμε αυτό, υποθέτουμε $\eta \in W$ με $s_3(\eta) \neq s_2(\eta)$. Αφού τώρα $\langle \eta, 1 - s_2(\eta)\rangle \in Imp_A(\alpha)$, το B θα έχει ένα conjuct $(\alpha \to \langle \eta, 1 - s_2(\eta)\rangle)$, ή ισοδύναμα $(\langle \xi, s_1(\xi)\rangle \to \langle \eta, 1 - s_1(\eta)\rangle)$. Αυτό το conjuct δεν ικανοποιείται από το s_1, αναιρώντας την υπόθεση οτι το s_1 ικανοποιεί το B. Αυτό αποδυκνύει τον ισχυρισμό. Έτσι το s_3 συμφωνεί με το s_1 σε όλα τα $W \cup \xi$. το οποίο αναιρεί την υπόθεση οτί το s_2 μεγιστοποιεί το $|W|$. Και με αυτήν την εις άτοπο απαγωγή τελειώνει η απόδειξη. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1.2.3

***i*-κλείσιμο:** Έστω A ένας τύπος, έστω $i \in \{0, 1\}$, και έστω $V \subseteq Var(A)$. Ορίζουμε το i-κλείσιμο του V σε σχέση με το A να είναι το σύνολο $Cl_{i,A}(V)$ $:= \{\xi \in Var(A) : \forall s \in Sat(A)$ τέτοιο ώστε $s|V \equiv i, s(\xi) \equiv i\}$. Δηλαδή $Cl_{0,A}(V)$ $(Cl_{1,A}(V))$ είναι το σύνολο όλων των μεταβλητών που αναγκαστικά γίνονται ψευδείς (αληθείς) όταν όλες οι μεταβλητές του V γίνονται ψευδείς (αληθείς). Είναι εύκολο να δούμε οτι $V \subseteq Cl_{i,A}(V)$, και οτι $V \subseteq V'$

συνεπάγεται $Cl_{i,A}(V) \subseteq Cl_{i,A}(V')$, για κάθε $V, V' \subseteq Var(A), i \in \{0,1\}$. Καλούμε το σύνολο $V \subseteq Var(A)$ i-κλειστό στο A αν $V = Cl_{i,A}(V)$. Επίσης καλούμε το V i-συμβατό στο A αν υπάρχει κάποιο $s \in Sat(A)$ τέτοιο ώστε $s|V \equiv i$. Λέμε οτι το V είναι i-μηκλειστό (i-ασύμβατο) στο A αν το V δεν είναι i-κλειστό (i-συμβατό) στο A. □

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.3

Έστω R μια λογισκή σχέση και $A := R(x_1, \ldots)$. Τότε

- Η R είναι ασθενώς θετική αν και μόνο αν όταν $V \subseteq Var(A)$ είναι 0-συμβατή και 0-κλειστή για το A, $K_{0,V} \in Sat(A)$
- R είναι ασθενώς αρνητική αν και μόνο αν όταν $V \subseteq Var(A)$ είναι 1-συμβατή και 1-κλειστή για $A, K_{1,V} \in Sat(A)$.

⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Πρέπει να αποδείξουμε το πρώτο μέρος. Η απόδειξη του 2ού βγαίνει όμοια. Αν R είναι κενό, τότε το λήμμα ισχύει προφανώς, οπότε θεωρούμε R μη κενό.

($\Rightarrow$): Έστω οτί το R είναι ασθενώς θετικό. Έτσι το A είναι λογικά ισοδύναμο με κάποιο CNF τύπο A' ο οποίος έχει το πολύ μια μεταβλητή με άρνηση σε κάθε conjuct. Αρκεί να δείξουμε οτί αν $V \subseteq Var(A')$ είναι 0-συμβατό και 0-κλειστό για το A', τότε $K_{0,V} \in Sat(A')$. Έστω V είναι ένα τέτοιο σύνολο και υποθέτουμε ότι $K_{0,V} \notin Sat(A')$. Έστω C ένα conjuct της A' στο οποίο η $K_{0,V}$ αποτυγχάνει. Έστω U τό σύνολο από μεταβλητές χωρίς άρνηση του C. Εφόσον $K_{0,V}$ αποτυγχάνει στο C, $U \subseteq V$. Αν το C δεν έχει μεταβλητές με άρνηση, τότε δεν ισχύει οτί το V είναι 0-συμβατό για το A'. Αλλιώς, έστω η η μόνη μεταβλητή με άρνηση στο C. Είναι προφανές οτι $\eta \in Cl_{0,A'}(U)$. Επίσης, αφού $K_{0,V}$ αποτυγχάνει στο C, $\eta \notin V$. Αλλά τότε η V δεν είναι 0-κλειστή στο A'. Αυτό αποδεικνύει το γεγονός οτι $K_{0,V} \in Sat(A')$.

($\Leftarrow$): Υποθέτουμε $K_{0,V} \in Sat(A)$ για όλα τα 0-κλειστά και 0-συμβατα σύνολα $V \subseteq Var(A)$. Έστω A' να είναι το conjuction όλων των προτάσεων $\{(\xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n) : \xi_1, \ldots, \xi_n$ είναι 0-μηικανοποιήσιμα για το A $\} \cup \{(\neg\eta \vee \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_\nu) : \eta \in Cl_{0,A}(\{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\})\}$. Εφόσον κάθε μεταβλητή περιέχεται στο ίδιο της το 0-κλείσιμο, A' έχει ένα conjuct $(\neg\xi \vee \xi)$ για κάθε $\xi \in Var(A)$, και άρα $Var(A') = Var(A)$. Ισχυριζόμαστε οτί το A' είναι λογικά ισοδύναμο με το A. Για να δείξουμε οτι $Sat(A) \subseteq Sat(A')$, υποθέτουμε οτι $s \notin Sat(A')$. Έστω C να είναι ένα conjuct της A' στο οποίο η s αποτυγχάνει. Αν το C είναι της μορφής $(\xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n)$ τότε $s(\xi_1) = \ldots = s(\xi_n) = 0$ και από τον ορισμό του $A'\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ είναι 0-μησυμβατό στο A, έτσι, $s \notin Sat(A)$. Αλλιώς το C είναι της μορφής $(\neg\eta \vee \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n)$, και άρα $s(\eta) = 1$, $s(\xi_1) = \ldots = s(\xi_n) = 0$. Τότε από ορισμό του A', $\eta \in Cl_{0,A}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, και άρα $s \notin Sat(A)$. Αυτό αποδεικνύει οτι $Sat(A) \subseteq Sat(A')$. Μετά δείχνουμε οτι $Sat(A') \subseteq Sat(A)$. Έστω $s \notin Sat(A)$. Έστω $V = \{\xi : s(\xi) = 0\}$. Από την ιδιότητα που έχουμε υποθέσει για την A, η V είναι είτε 0-μησυμβατή ή 0-μηκλειστή στο A. Αν είναι 0-μησυμβατή, τότε $(\xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n)$ είναι conjuct της A', όπου $V = \{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\}$, και άρα $s \notin Sat(A')$. Αν V είναι 0-μηκλειστή, έστω $\eta \in Cl_{0,A}(V) - V$. Τότε $(\neg\eta \vee \xi_1 \vee \ldots \vee \xi_n)$ είναι ένα conjuct της A', και άρα $s \notin Sat(A')$. Αυτό αποδεικνύει οτι $Sat(A') \subseteq Sat(A)$. Άρα $Sat(A) = Sat(A')$ και άρα A' είναι λογικά ισοδύναμο με το A. Και τελικά η R είναι ασθενώς θετική. ■

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.4

Έστω R μια λογική σχέση. Αν R δεν είναι ασθενώς αρνητική, τότε $Rep(\{R\}) \cap \{[x \neq y], [x \vee y]\} \neq \emptyset$. Αν R δεν είναι ασθενώς θετική, τότε $Rep(\{R\}) \cap \{[x \neq y], [\neg x \vee \neg y]\} \neq \emptyset$. ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω R μια λογική σχέση η οποία δεν είναι ασθενώς αρνητική, και έστω $A := R(x_1, \ldots)$. Από προηγούμενο λήμμα (ενότητα 4.1.2 σελίδα 46) υπάρχει ένα σύνολο $V \subseteq Var(A)$ το οποίο είναι 1-συμβατό και 1-κλειστό ωστέ $K_{1,V} \notin Sat(A)$. Έστω $\overline{V} := Var(A) - V$. Επιλέγουμε $W \subseteq \overline{V}$ τέτοιο ώστε να έχει τη μεγαλύτερη πληθικότητα έτσι ώστε το $K_{0,W} \in Sat(A)$. Είναι προφανές από τους ορισμούς οτι $1 \leq |W| \langle |\overline{V}|$. Επιλέγουμε $\xi \in \overline{V} - W$, και έστω s μια ανάθεση που ικανοποιεί το A έτσι ώστε $s|V \equiv 1$ και $s(\xi) = 0$. Ένα τέτοιο s υπάρχει γιατί το V είναι 1-κλειστό και 1-συμβατό. Για $j \in \{0, 1\}$ ορίζουμε $W_j := \{\eta \in W : s(\eta) = j\}$, $\overline{W_j} := \{\eta \in Var(A) - W : s(\eta) = j\}$, και έστω $B := A[^{W_0}_0, ^{W_1}_x, ^{\overline{W_0}}_y, ^{\overline{W_1}}_1]$. W_1 είναι μη κενό αφού το $|W|$ είναι μέγιστο. $\overline{W_0}$ είναι μη κενό αφού περιέχει το ξ. Άρα τα x και y υπάρχουν στο B.

Προφανώς $[B] \in Rep(\{R\})$. Επίσης, το $[B]$ περιέχει το $(0, 1)$ και το $(1, 0)$, γιατί το A είναι ικανοποιήσιμο από $K_{0,W}$ και το s ταυτοχρόνως. Τέλος το $[B]$ δεν περιέχει το $(0, 0)$ λόγω του οτι το $|W|$ είναι μέγιστο. Τελικά ανάλογα με το αν το $(1, 1)$ περιέχεται στο $[B]$, το $[B]$ είναι είτε το $[x \neq y]$ ή το $[x \vee y]$. Αυτό αποδεικνύει το λήμμα στην περίπτωση που η R είναι ασθενώς αρνητική. Όμοια και για τις ασθενώς θετικές. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1.2.1

Αν η S έχει κάποια σχέση η οποία δεν είναι ασθενώς αρνητική και μια που δεν είναι ασθενώς θετική τότε $[x \neq y] \in Rep(S)$. ⊡

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $R, R' \in S$ με R μη ασθενώς θετική και R' μη ασθενώς αρνητική. Έστω οτι $[x \neq y] \notin Rep(S)$. Τότε από το προηγούμενο λήμμα, $[x \vee y]$ και $[\neg x \vee \neg y]$ είναι στο $Rep(S)$. Άρα το $Rep(S)$ περιέχει και το $[(x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)]$, το οποίο είναι το $[x \neq y]$. ■

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.5

Λήμα αντικατάστασης με άρνηση: Έστω $[x \neq y] \in Rep(S)$. Τότε το $Gen^+(S)$ είναι κλειστό στη αντικατάσταση με άρνηση, δηλαδή, αν $A \in Gen^+(S)$ και ξ, η είναι μεταβλητές, $A[^{\xi}_{\neg\eta}] \in Gen^+(S)$. ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από υπόθεση $Gen^+(S)$ περιέχει τον τύπο $x \neq y$. Παρατηρήστε οτι $A[^{\xi}_{\neg\eta}]$ είναι λογικά ισοδύναμο με $(\exists u)(A[^{\xi}_{u}] \wedge \eta \neq u)$, με u να είναι μια μεταβλητή η οποία δεν υπάρχει στο A. Άρα, $A[^{\xi}_{\neg\eta}] \in Gen^+(S)$. ■

Με τον όρο "λογική σχέση 3 στοιχείων" ενοούμε μια σχέση με ακριβώς 3 στοιχεία ορισμένη στο 2^2. Προφανώς αυτές είναι 4 οι $[x \vee y], [\neg x \vee y], [x \vee \neg y]$ και $[\neg x \vee \neg y]$.

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.6

Έστω R μια σχέση η οποία δεν είναι affine. Τότε το $Rep(\{R, [x \neq y]\})$ περιέχει όλες τις λογικές σχέσεις 3 στοιχείων. ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αρκεί να δείξουμε οτι η $Rep(\{R, [x \neq y]\})$ περιέχει κάποια τέτοια σχέση αφού με την αντικατάσταση με άρνηση μπορούμε να πάρουμε όλες τις άλλες.

Έστω $A := R(x_1, \ldots)$. Χρησιμοποιώντας προηγούμενο λήμμα (ενότητα 4.1.2 σελίδα 43) έστω s_0, s_1, s_2 αναθέσεις που ικανοποιούν το A έτσι ώστε το $s_0 \oplus s_1 \oplus s_2$ δεν ικανοποιεί το A. Δημιουργούμε το A' από το A αντιστρέφοντας κάθε εμφάνιση μεταβλητής στο σύνολο $\{\eta : s_0(\eta) = 1\}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα της αρνητικής αντικατάστασης, $A' \in Gen^+(\{R, [x \neq y]\})$. Ορίζουμε $s'_j := s_i \oplus s_0$, με $i = 1, 2$. Παρατηρούμε οτι μια ανάθεση t ικανοποιεί το A' αν και μόνο αν $t \oplus s_0$ ικανοποιεί το A. Έτσι K_0 (δηλαδή η ανάθεση 0 σε όλες τις μεταβλητές), οι s'_1, s'_2 ικανοποιούν το A' , αλλά η $s'_1 \oplus s'_2$ όχι. Για $i, j = 0, 1$, έστω $V_{i,j} := \{\xi \in Var(A') : s'_1(\xi) = i$ και $s'_2(\xi) = j\}$ και έστω $B := A[^{V_{0,0}}_{0} {}^{V_{0,1}}_{,x} {}^{V_{1,0}}_{,y} {}^{V_{1,1}}_{,z}]$. Προφανώς, $B \in Gen^+(\{R, [x \notin y]\})$. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας οτί x,y,z εμφανίζονται στο B. (Αν κάποιο δεν εμφανίζεται, έστω το x είσάγουμε ένα conjuct $(\exists w)(w \neq x)$ απλώς για να εμφανιστεί.) Από οτι έχουμε πει για το A', το $[B]$ περιέχει τα $(0,0,0), (0,1,1), (1,0,1)$ αλλά όχι το $(1,1,0)$. Υποθέτουμε οτί $Rep(\{R, [x \neq y]\})$ δεν περιέχει καμία σχέση τριών στοιχείων. Τότε η $[B]$ πρέπει να περιέχει το $(0,1,0)$ ή αλλιώς $[(\exists x)B]$ είναι $\{(0,0), (1,1), (0,1)\}$. Επίσης το $[B]$ πρέπει να περιέχει τα $(1,0,0)$ ή αλλιώς $[(\exists y)B]$ είναι $\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$, και αυτή η αντίθεση τελειώνει την απόδειξη. ■

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.7

Έστω R μια λογική σχέση η οποία δεν είναι bijunctive. Τότε το $Rep(\{R,$ $[x \neq y]$, $[x \vee y]\})$ περιέχει τη σχέση "ακριβώς ένα από τα x, y, z." ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $A := R(x_1, \ldots)$. Σύμφωνα με λήμα (ενότητα 4.1.2 σελίδα 44) , υπάρχει $s_0 \in Sat(A)$ και $U, V \subseteq Var(A)$ τέτοια ώστε U και V είναι σύνολα αλλαγών για το (A, s), αλλά $U \cap V$ δεν είναι σύνολο αλλαγών για το (A, s). Δημιουργούμε το A' από το A αντιστρέφοντας κάθε εμφάνιση κάθε μεταβλητής στο σύνολο $\{\eta : s_0(\eta) = 1\}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα της αντίστροφης αντικατάστασης $A' \in Gen^+(\{R, [x \neq y]\})$. Παρατηρούμε οτί τα U και V είναι σύνολα αλλαγής για το (A', K_0), οπού K_0 είναι η ανάθεση που σε όλες τις μεταβλητές αποδίδει το 0, αλλά το $U \cap V$ δεν είναι. (Επίσης το K_0 ικανοποιέι την A'). Ορίζουμε: $B := A'[{}^{Var(A')-(U \cup V)}_{0}\,{}^{U \cap V}_{,x}\,{}^{U-V}_{,y}\,{}^{V-U}_{,z}]$. Με βάση τα παραπάνω για τα σύνολα αλλαγής για το (A', K_0), το $[B]$ περιέχει τα $(0,0,0), (1,1,0)$ και $(1,0,1)$ αλλά όχι το $(1,0,0)$. Τώρα ορίζουμε το $B' := B[{}^{x}_{\neg x}] \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg y \vee \neg z) \wedge (\neg z \vee \neg x)$. Σύμφωνα με το λήμμα την αντικατάστασης με αντιστροφή, $B' \in Gen^+(\{R, [x \neq y], [x \vee y]\})$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε οτι $[B'] = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$. Δηλαδή, $[B']$ είναι η σχέση "ακριβώς ένα από τα x, y, z." ■

ΛΗΜΜΑ 4.1.2.8

Έστω R η λογική σχέση "ακριβώς ένα από τα x, y, z". Τότε $Rep(\{R\})$ είναι το σύνολο όλων των λογικών σχέσεων. ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Ορίζουμε:

$$A := (\exists u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)$$

$$(R(x, u_1, u_4) \wedge R(y, u_2, u_4) \wedge R(u_1, u_2, u_5) \wedge R(u_3, u_4, u_6) \wedge R(z, u_3, 0))$$

$$B := R(x, y, 0)$$

Είναι προφανές να αποδείξουμε οτί το A είναι λογικά ισοδύναμο με το $(x \vee y \vee z)$ και οτί το B είναι λογικά ισοδύναμο με το $x \neq y$. Έστω η λογική σχέση Q δωσμένη με $Q = [C]$ για κάποιο προτασιακό τύπο C. Με το να εισάγει μια νέα υπαρξιακά ποσοδεικτούμενη μεταβλητή για κάθε binary λογικό σύνδεσμο του C, μπορούμε να δημιουργήσουμε τον τύπο $(\exists y_1, \ldots, y_m)D$, ισοδύναμη με την C, οπού D είναι μια conjuction προτάσεων κάθε μια από τις οποίες με το πολύ 3 μεταβλητές (και άρα η D μπορεί να επεκταθεί σε CNF μορφή με το πολύ 3 literal ανά conjuct.) Λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας μπορούν να βρεθούν στα [BBFMP] και [St]. Τώρα είναι προφανές, χρησιμοποιώντας τους τύπους A και B, να μετατρέψουμε το D σε έναν ισοδύναμο τύπο στο $Gen(\{R\})$. Προφανώς $Q \in Rep(\{R\})$. Άρα $Rep(\{R\})$ είναι το σύνολο όλων των λογικών προτάσεων.

■

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Απόδειξη του αρχικού θεωρήματος.

Πρώτα δείχνουμε οτι αν η S δεν ικανοποιεί καμία από τις περιπτώσεις (a) - (d) του πρώτου θεωρήματος, $Rep(S)$ είναι το σύνολο όλων των λογικών σχέσεων. Υποθέτουμε οτι η S δεν ικανοποιεί κανένα από τα (a) - (d). Τότε το S περιέχει κάποια σχέση R_1 που δεν είναι ασθενώς θετική, κάποια σχέση R_2 που δεν είναι ασθενώς αρνητική, κάποια R_3 που δεν είναι affine, και κάποια R_4 που δεν είναι bijunctive. Ακολουθώντας τώρα την πορεία των προηγούμενων λημμάτων $[x \neq y] \in Rep(\{R_1, R_2\})$, $[x \vee y] \in Rep(\{R_1, R_2, R_3\})$ και τέλος $Rep(\{R_1, R_2, R_3, R_4\})$ περιέχει τη σχέση "ακριβώς ένα από τα x,y,z" και έτσι είναι το σύνολο όλων των λογικών σχέσεων. Έτσι το $Rep(S)$ είναι το σύνολο όλων των λογικών σχέσεων. Απομένει να δείξουμε οτι αν το S ικανοποιεί έναν από τους περιορισμούς (a)-(d) τότε το ίδιο ισχύει και για το $Rep(S)$. (Εύκολη απόδειξη η οποία δεν χρειάζεται για περετέρω). ■

4.1.3 Το θεώρημα διχοτόμησης

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1.3.1

Θεώρημα διχοτόμησης στο πρόβλημα ικανοποιησιμότητας: Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο λογικών σχέσεων. Αν το S ικανοποιεί κάποιους από τους παρακάτω περιορισμούς τότε το $SAT(S)$ είναι αποφασίσιμο σε πολυονυμικό χρόνο. Αλλιώς το $SAT(S)$ είναι log-complete στο NP.

(a) Κάθε σχέση στο S είναι 0-ικανοποιήσιμη.

(b) Κάθε σχέση στο S είναι 1-ικανοποιήσιμη.

(c) Κάθε σχέση στο S είναι ασθενώς θετική

(d) Κάθε σχέση στο S είναι ασθενώς αρνητική.

(e) Κάθε σχέση στο S είναι affine.

(f) Κάθε σχέση στο S είναι bijunctive.

⊠

ΛΗΜΜΑ 4.1.3.1

Έστω S ένα πεπερασμένο σύνολο λογικών σχέσεων. Αν το S ικανοποιεί έναν από τους περιορισμούς (a)-(d) του βασικού θεωρήματος της προηγούμενης υποεννότητας, τότε το $SAT_C(S)$ είναι αποφασίσιμο σε πολυονυμικό χρόνο. Αλλιώς το $SAT_C(S)$ είναι log-complete στο NP. ⊞

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

(a) Υποθέστε οτί κάθε σχέση στο S είναι ασθενώς αρνητική. Τότε το SAT(S) είναι αποφασίσιμο με τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Δωσμένου S-τύπου A, αντικαθιστούμε κάθε conjuct του A με έναν ισοδύναμο CNF τύπο A' που έχει το πολύ μια μεταβλητή με άρνηση σε κάθε conjuct.

- Αν κάθε conjuct του A' περιέχει μια μεταβλητή χωρίς άρνηση αποδέξου.

- Αλλιώς, έστω $(\neg\xi)$ ένα conjuct του A'. Αν το (ξ) είναι επίσης conjuct του A' ΑΠΕΡΙΨΕ. Αλλιώς, κόψε κάθε conjuct στο οποίο το $\neg\xi$ εμφανίζεται και το ξ από κάθε conjuct που εμφανίζεται χωρίς άρνηση. (Αν το A' είναι κενό ΑΠΟΔΟΧΗ).

- Πίσω στο 2.

(b) Όταν κάθε σχέση είναι ασθενώς αρνητική είναι παρόμοια με την (a).

(c) Υποθέτουμε οτι κάθε σχέση στην S είναι affine. Τότε για να αποφασίσουμε αν ένας δωσμένος S-τύπος A είναι ιακονοποιήσιμος, μετατρέπουμε το A δε ένα ισοδύναμο σύστημα γραμμικών εξισώσεων στο $\{0, 1\}$ και λύνουμε το σύστημα με Gaussian elimination. (Μειώνουμε τις μεταβλητές κατά μια κάθε φορά μέχρι είτε όλες οι μεταβλητές να φύγουν ή να καταλήξουμε σε $0 = 1$.) Αυτός είναι γνωστός πολυωνυμικός αλγόριθμος.

(d) Υποθέτουμε οτί κάθε σχέση στην S είναι bijunctive. Τότε για να αποφασίσουμε αν ένας δωσμένος S-τύπος είναι ικανοποιήσιμος, τον μετατρέπουμε σε ισοδύναμο CNF τύπο με το πολύ 2 literal ανά conjuct και χρησιμοποιούμε την Davis-Putnam διαδικασία [DP], η οποία όπως αναφέρεται και στο [C] αποφασίζει την ικανοποιησιμότητα ενός τέτοιου τύπου σε πολυωνυμικό χρόνο.

Στα (a)- (d) πάνω, δώσαμε πολυωνυμικούς αλγορίθμους για το $SAT(S)$. Για το $SAT_C(S)$, δηλαδή αν οι τύποι περιέχουν σταθερές, είναι προφανές πως μετατρέπουμε τους αλγορίθμους. Υποθέστε τώρα οτί το S δεν ικανοποιεί κανένα από τους περιορισμούς (a)- (d). Θα δείξουμε οτί το $SAT_C(S)$ είναι NP-complete δείχνοντας $SAT3 \leq_{log} SAT_C(S)$, οπού SAT3 είναι το σύνολο απο ικανοποιήσιμους CNF τύπους που έχουν το πολύ 3 literal ανα conjuct, ένα πολύ γνωστό NP-complete πρόβλημα.

Έστω R_0, R_1, R_2, R_3 είναι οι 3 θέσεων λογικές σχέσεις που ορίζονται ως $R_0(x, y, z) \equiv (x \vee y \vee z), R_1(x, y, z) \equiv (\neg x \vee y \vee z), R_2(x, y, z) = (\neg x \vee \neg y \vee z), R_3(x, y, z) \equiv (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$. Για $i = 0, 1, 2, 3$ έστω $F_i(x, y, z)$ ένα τύπος στο $Gen(S)$ που είναι λογικά ισοδύναμος με τον $R_i(x, y, z)$. Τέτοιοι τύποι υπάρχουν από το βασικό θεώρημα της προηγούμενης υποενότητας. Δωσμένου ενός CNF τύπου A με το πολύ 3 literal σε κάθε conjuct, δημιουργούμε έναν ισοδύναμο τύπο A' αντικαθιστώντας κάθε conjuct του A με έναν από τους τύπους F_i με τις κατάλληλες μεταβλητές να έχουν αντικατασταθεί. Δημιουργούμε το A'' από το A' διαγράφοντας όλους τους ποσοδείκτες, αφού είμαστε σίγουροι οτί όλες οι ποσοδεικτούμενες μεταβλητές είναι διαφορετικές μεταξύ τους και από όλες τις άλλες ελέυθερες μεταβλητές. Παρατηρούμε οτί το A'' είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν A είναι ικανοποιήσιμο. Δεν είναι δύσκολο να δείξουμε οτί το A'' είναι log-space υπολογίσιμο από το A. Αυτό αποδυκνύει οτι $SAT3 \leq_{log} SAT_C(S)$ Προφανώς αφού $SAT_C(S) \in NP$, είναι επακόλουθο οτί το πρόβλημα $SAT_C(S)$ είναι log-complete στο NP. ■

Ορίζουμε “χωρίς-σταθερές” ανάλογα του $Gen(S)$ και του $Rep(S)$, ως ακουλούθως. Έστω $Gen_{NC}(S) := \{A \in Gen(S)$: δεν εμφανίζονται μεταβλητές στο $A\}$, $Rep_{NC}(S) := \{[A] : A \in Gen_{NC}(S)\}$. Η λογική σχέση R είναι συμπληρωματική αν είναι κλειστή ως προς συμπλήρωμα, δηλαδή αν για κάθε $(a_1, \ldots, a_m) \in R$, $(1 - a_1, \ldots, 1 - a_m) \in R$. Το ακόλουθο λήμμα καθορίζει τη σχέση μεταξύ των $SAT(S)$ και $SAT_C(S)$.

ΛΗΜΜΑ 4.1.3.2

Αν $Rep_{NC}(S)$ περιέχει τα $[x]$ και $[\neg x]$, τότε $Rep(S) = Rep_{NC}(S)$, και άρα $SAT_C(S)$ και $SAT(S)$ έχουν την ίδια πολυπλοκότητα. $\boxplus$

Όπως το επόμενο λήμμα δείχνει η υπόθεση του λήμματος αποτυγχάνει μόνο σε πολύ περιορισμένες συνθήκες. Έτσι για τα περισσότερα σύνολα $S, SAT(S)$ και $SAT_C(S)$ έχουν την ίδια πολυπλοκότητα.

ΛΗΜΜΑ 4.1.3.3

Έστω S να είναι ένα σύνολο από μη κενές λογικές σχέσεις. Τότε τουλάχιστον ένα από τα ακόλουθα ισχύει:

(a) Κάθε σχέση στο S είναι ικανοποιήσιμη από το $(0, \ldots 0)$.

(b) Κάθε σχέση στο S είναι ικανοποιήσιμη από το $(1, \ldots 1)$.

(c) $[x]$ και $[\neg x]$ περιέχονται στο $Rep_{NC}(S)$.

(d) $[x \neq y] \in Rep_{NC}(S)$.

Μάλιστα, αν το (c) αποτυγχάνει και το (d) ισχύει, κάθε σχέση της S είναι συμπληρωματική. $\boxplus$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε όπως υπόθηκε πιο πάνω ότι όλες οι σχέσεις στο S είναι μη κενές. Υποθέτουμε οτί το (a) και το (b) αποτυγχάνουν. Θα δείξουμε οτι το (c) ή το (d) ισχύει.

• Πρώτη περίπτωση. Κάθε σχέση στο S είναι 0- ή 1-ικανοποιήσιμη. Σε αυτή την περίπτωση, αφού τα (a) και (b) αποτυγχάνουν, υπάρχει κάποιο $R_0 \in S$ το οποίο είναι 0-ικανοποιήσιμο αλλά όχι 1-ικανοποιήσιμο, και κάποιο $R_1 \in S$ το οποίο είναι 1-ικανοποιήσιμο αλλά όχι 0-ικανοποιήσιμο. Έστω $A_i := R_i(x_1 \ldots)$, έχουμε $[A_i[^{Var(A_i)}_{x}]] = (i)$ για $i = 0, 1$, άρα, $[x]$ και $[\neg x]$ είναι στο $Rep_{NC}(S)$,και άρα το (c) ισχύει.

• Δεύτερη περίπτωση. Το S περιέχει κάποια μη κενή σχέση R η οποία δεν είναι ούτε 0-ικανοποιήσιμη ούτε 1-ικανοποιήσιμη. Σε αυτή την περίπτωση, έστω $A := R(x_1, \ldots)$ και επιλέγουμε $s \in Sat(A)$. Έστω: $B := A[^{s^{-1}(0)}_{x_0}, ^{s^{-1}(1)}_{x_1}]$ Αφού το R δεν είναι 0 ή 1-ικανοποιήσιμο τα x_0, x_1 υπάρχουν στο B και το $[B]$ είναι είτε το $(0, 1)$ ή $(0, 1), (1, 0)$. Αν ισχύει το πρώτο $[(\exists x_0)B] = [x]$ και $[(\exists x_1)B] = [\neg x]$ και άρα το (c) ισχύει. Αλλιώς $[B] = [x \neq y]$ και ισχύει το (d). Άρα το (c) ή το (d) ισχύουν πάντα.

Τώρα υποθέτουμε οτί το (c) δεν ισχύει ενώ το (d) ισχύει. Ισχυριζόμαστε οτι $[x] \notin Rep_{NC}(S)$. Γιατί αν $[x] \in Rep_{NC}(S)$, θα είχαμε $[(\exists x)(x \wedge x \neq y)] = [\neg y]$, ενώ το (c) δεν ισχύει. Ομοίως, $[\neg x] \notin Rep_{NC}(S)$. Έστω οτί υπάρχει μια R που δεν είναι συμπληρωματική. Έστω $A := R(x_1, \ldots)$ και επιλέγουμε $s \in Sat(A)$ τέτοιο ώστε $\overline{s} \notin Sat(A)$, όπου $\overline{s}$ είναι η συμπληρωματική ανάθεση του s. Ορίζουμε έναν τύπο B όπως πάνω (στη δεύτερη περίπτωση). Τώρα το x_0 εμφανίζεται στη B αλλιώς $[B] = [x]$. Ομοίως και το x_1. Έτσι $Var(B) = \{x_1, x_2\}$ και το $[B]$ περιέχει τα $(0,1)$ αλλά όχι $(1,0)$. Όμως τώρα το $[B]$ πρέπει να περιέχει το $(0,0)$, γιατί αλλιώς το $[(\exists x_0)B]$ είναι $[x]$. Επίσης το $[B]$ περιέχει το $(1,1)$ αλλιώς το $[(\exists x_1)B]$ είναι το $[\neg x]$. Άρα $[B]$ είναι το $[x \rightarrow y]$. Αλλά τότε $[\exists x)((x \rightarrow y) \wedge (x \neq y))]$ είναι το $[y]$, και με εις άτοπο απαγωγή τελειώνει η απόδειξη. ■

Τελικά μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα διχοτόμησης του $SAT(S)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Υποθέτουμε οτι δεν είναι κάθε σχέση στην S 0-ικανοποιήσιμη ή κάσχέσηθε πρόταση 1-ικανοποιήσιμη. Δηλαδή τα $(a) - (b)$ του θεωρήματος αποτυγχάνουν. Από το παραπάνω λήμμα έχουμε δύο περιπτώσεις να εξετάσουμε.

• Πρώτη περίπτωση. $[x]$ και $[\neg x] \in Rep_{NC}(S)$

Τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε εύκολα έναν S-τύπο με σταθερές από έναν χωρίς σταθερές και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσμα του πιο πάνω λήμματος (ενότητα 4.1.3 σελίδα 50) .

• Δεύτερη περίπτωση. $[x \neq y] \in Rep_{NC}(S)$, και κάθε σχέση στην S είναι συμπληρωματική.

Έστω ένας S-τύπος με σταθερές και δωσμένο A. Έστω A' να είναι $A'' \wedge (y_0 \neq y_1)$, οπού A'' είναι το A αφού αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του 0 από το y_0 και κάθε εμφάνιση του 1 από το y_1, με y_0, y_1 νέες μεταβλητές. Άρα, A' είναι ένας S-τύπος χωρίς σταθερές, και από συμπληρωματικότητα το A' είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν το A είναι ικανοποιήσιμο και πάλι φτάνουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα με το λήμμα για το πρόβλημα με σταθερές. ■

4.2 Closure Properties of Constraints

4.2.1 Εισαγωγή

Σε αυτή την απόδειξη πλέον χρησιμοποιούνται πολυμορφισμοί. Συγκεκριμένα αποδυκνύεται οτι οποιοδήποτε σύνολο περιορισμών

Βιβλιογραφία

[1] Mak'tsev A. Bulatov. Constraints are tractable. Technical Report PRG-RR-02-05, Computing Laboratory, University of Oxford, Oxford, UK, 2002.

[2] P. Jeavons A. Bulatov and A.Krokhin. Classifying the complexity of constraints using finite algebras. *SIAM journal of Computing*, 34:720–742, 2005.

[3] A.Bulatov. A dichotomy theorem for constraints on a three-element set. In *Proceedings of the 43rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science —FOCS'02 (Vancouver,BC,Canada, 2002)*, pages 649–658, 2002.

[4] A.Krokhin A.Bulatov and P. Jeavons. The complexity of maximal constraint languages. In *Proceedings of the 33rd ACM Symposium on Theory of Computing —STOC'01 (2001)*, pages 667–674, 2001.

[5] M. Bodirsky and J. Nesetril. Constraint satisfaction with countable homogeneous templates. In *Proceedings of Computer Science Logic and the 8th Kurt Godel Colloquium, Lecture Notes in Comput. Sci. 2804, Springer-Verlag — (Berlin, 2003)*, pages 44–57, 2003.

[6] A. Bulatov and P. Jeavons. Tractable constraints closed under a binary operation. Technical Report PRG-TR-12-00, Computing Laboratory, University of Oxford, Oxford, UK, 2002.

[7] E.F. Codd. A relational model of data for large shared databanks. *Communications of the ACM*, 13(6):377–387, 1970.

[8] P.M. Cohn. *Universal Algebra*. Harper & Row, 1965.

[9] M.C. Cooper, D.A. Cohen, and P.G. Jeavons. Characterising tractable constraints. *Artificial Intelligence*, 65:347–361, 1994.

[10] V. Dalmau. A new tractable class of constraint satisfaction problems. In *Proceedings of the 6th International Symposium on Artificial Intelligence and Mathematics*, 2000.

[11] V. Dalmau. Constraint satisfaction problems in non-deterministic logarithmic space. In *Proceedings of 29th International Colloquium on Automata, Languages and Programming —ICALP'02, Lecture Notes in Comput. Sci. 2380, Springer-Verlag (Berlin, 2002)*, pages 414–425, 2002.

[12] V. Dalmau and J. Pearson. Set functions and width 1 problems. In *Proceedings of the 5th International Conference on Constraint Programming —CP'99, Lecture Notes in Comput. Sci. 1713, Springer-Verlag (Berlin, 1999)*, pages 159–173, 1999.

[13] K. Denecke and S. Wismath. *Universal Algebra and Applications in Theoretical Computer Science.* Champman and HALL/CRC Press,Boca Raton,FL, 2002.

[14] J. B. Fraleigh, editor. *A first course in Abstract Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1988.

[15] M. Garey and D.S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness.* Freeman, San Francisco, CA., 1979.

[16] M. Gyssens, P.G. Jeavons, and D.A. Cohen. Decomposing constraint satisfaction problems using database techniques. *Artificial Intelligence*, 66(1):57–89, 1994.

[17] D. Hobby and R. McKenzie. The structure of finite algebras. *Contemporary Mathematics,AMS,Providence,RI*, 76, 1988.

[18] P.G. Jeavons. On the algebraic structure of combinatorial problems. Technical Report CSD-TR-95-15, Computer Science Department, Royal Holloway, University of London, Egham , Surrey , UK, 1995. to appear in Theoretical Computer Science.

[19] P.G. Jeavons, D.A. Cohen, and M.C. Cooper. Constraints, consistency and closure. *Artificial Intelligence*, 101(1-2):251–265, 1998.

[20] P.G. Jeavons, D.A. Cohen, and M. Gyssens. A unifying framework for tractable constraints. In *Proceedings 1st International Conference on Constraint Programming—CP'95 (Cassis, France, September 1995)*, volume 976 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–291. Springer-Verlag, 1995.

[21] P.G. Jeavons, D.A. Cohen, and M. Gyssens. Closure properties of constraints. Technical Report CSD-TR-96-15, Computer Science Department, Royal Holloway, University of London, Egham, Surrey, UK, 1996. also appears in Journal of the ACM.

[22] P.G. Jeavons and M.C. Cooper. Tractable constraints on ordered domains. *Artificial Intelligence*, 79(2):327–339, 1995.

[23] P. Jonsson and C. Bäckström. A unifying approach to temporal constraint reasoning. *Artificial Intelligence*, 102:143–155, 1998.

[24] L. Kirousis. Fast parallel constraint satisfaction. *Artificial Intelligence*, 64:147–160, 1993.

[25] D. Lesaint, N. Azarmi, R. Laithwaite, and P. Walker. Engineering dynamic scheduler for work manager. *BT Technology Journal*, 16:16–29, 1998.

[26] A.K. Mackworth. Consistency in networks of relations. *Artificial Intelligence*, 8:99–118, 1977.

[27] R.N. McKenzie, G.F. McNulty, and W.F. Taylor. *Algebras, Lattices and Varieties*, volume I. Wadsworth and Brooks, California, 1987.

[28] U. Montanari. Networks of constraints: Fundamental properties and applications to picture processing. *Information Sciences*, 7:95–132, 1974.

[29] B. Nebel and H-J. Burckert. Reasoning about temporal relations: a maximal tractable subclass of Allen's interval algebra. *Journal of the ACM*, 42:43–66, 1995.

[30] C.H. Papadimitriou. *Computational Complexity.* Addison-Wesley, 1994.

[31] J.K. Pearson and P.G. Jeavons. A survey of tractable constraint satisfaction problems. Technical Report CSD-TR-97-15, Royal Holloway, University of London, July 1997.

[32] L. Purvis and P. Jeavons. Constraint tractability theory and its application to the product development process for a constraint-based scheduler. Technical report, Xerox Corporation, Webster, NY, USA, December 1998. (Submitted to PACT'99).

[33] T.J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. In *Proceedings 10th ACM Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 216–226, 1978.

[34] A. Szendrei. *Clones in Universal Algebra*, volume 99 of *Seminaires de Mathematiques Superieures.* University of Montreal, 1986.

[35] T.Feder and M.Vardi. The computational structure of monotone monadic snp and constraint satisfaction: A study through datalog and group theory. *SIAM journal of Computing*, 28:57–104, 1998.

[36] P. van Beek. On the minimality and decomposability of row-convex constraint networks. In *Proceedings AAAI-92 (San Jose, CA)*, pages 447–452, 1992.