



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σκέδαση πεδίου από κοιλότητα παρουσία αγώγιμης σφήνας

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ ΓΚΟΡΤΣΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΑΛΑΜΕΓΚΑΣ

Αθήνα, Ιούλιος 2006



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Σκέδαση πεδίου από κοιλότητα παρουσία αγώγιμης σφήνας

ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ ΓΚΟΡΤΣΑΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ ΤΣΑΛΑΜΕΓΚΑΣ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 17^η Ιουλίου 2006

.....
Ιωάννης Τσαλαμέγκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Ιωάννης Ρουμελιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Γεώργιος Φικιώρης
Λέκτορας Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2006

Copyright © Βασίλειος-Μάριος Γκορτσάς, 2006

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στη μητέρα μου,
τον πατέρα μου και τον αδερφό μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από διατάξεις που περιλαμβάνουν κοιλότητες αποτελούν ένα ενδιαφέρον πρόβλημα λόγω των πολλών εφαρμογών που έχουν τέτοιες διατάξεις. Διατάξεις με κοιλότητες έχουν χρησιμοποιηθεί για περισσότερα από 20 χρόνια σε συστήματα ακτινοβολίας στις τηλεπικοινωνίες και τη ραδιοαστρονομία. Παραδείγματα πρακτικών εφαρμογών αποτελούν η σχεδίαση μη ευαίσθητων ως προς την πόλωση κλωβών, ανακλαστικών φύλλων, διατάξεων ελέγχου της ενεργού διατομής σκεδάσεως (RCS) και πυραμιδοειδών κεραιών. Λόγω της πρακτικής τους σημασίας διατάξεις με κοιλότητες έχουν ευρέως μελετηθεί χρησιμοποιώντας αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους. Στην παρούσα εργασία μελετάται η σκέδαση από κοιλότητα παρουσία αγωγίμης σφήνας. Η διέγερση είναι ένα κύμα H-πολωμένο ή μια γραμμική μαγνητική πηγή. Η μελέτη ακολουθεί τα πιο κάτω στάδια : Στο κεφάλαιο 2 γίνεται η περιγραφή της διάταξης και η κατάστρωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης από την οποία θα βρεθεί το άγνωστο ισοδύναμο επιφανειακό μαγνητικό ρεύμα κατά μήκος της σχισμής. Με κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς, ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης διασπάται σε έναν ιδιόμορφο όρο κλειστής μορφής και σε έναν ομαλό όρο σε μορφή σειράς ιδιοσυναρτήσεων. Η νέα αυτή σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και αρκετά ταχέως. Με χρήση κατάλληλων τεχνικών που αναπτύχθηκαν στις [5], [6] η ολοκληρωτική εξίσωση διακριτοποιείται και δίνει ένα άπειρο αλγεβρικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς αγνώστους τους συντελεστές ανάπτυξης των ρευμάτων που δημιουργούν το πεδίο. Στο ίδιο κεφάλαιο δίνονται επίσης οι εκφράσεις του μακρινού πεδίου. Με βάση τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2, στο κεφάλαιο 3 παρατίθεται πλήθος αριθμητικών αποτελεσμάτων υπό μορφή πινάκων και διαγραμμάτων που αφορούν το μαγνητικό ρεύμα στη σχισμή και το διάγραμμα ακτινοβολίας για διάφορες τιμές των γεωμετρικών και ηλεκτρομαγνητικών χαρακτηριστικών της διάταξης.

Λέξεις Κλειδιά

Αγωγή σφήνα, κοιλότητες, ολοκληρωτικές εξισώσεις, συναρτήσεις Green, μέθοδος Nyström

ABSTRACT

Electromagnetic wave scattering from corrugated structures constitutes an interesting problem because of the many applications of these structures. Corrugated structures have been used for more than 20 years in radiating systems, in telecommunications, and in radio astronomy. For instance, they are employed to realize polarization-insensitive shields, reflector panels, stealth structures in RCS-related problems, and for horn antennas. Due to their practical importance, corrugated surfaces have been widely analyzed using analytical and numerical methods. The scope of this thesis is the study of the diffraction of EM waves by a cavity-backed slot that resides on the face of a conducting wedge. The excitation is either an H-polarized wave or a magnetic line-source. The study includes the following steps: The description of the configuration and the formulation of the SIE, from which the unknown equivalent surface magnetic current across the slot will be calculated, are carried out in chapter 2. With the help of proper mathematical handling the kernel of the SIE is being separated in one term that has a singular closed form and in another term that has a normal series form. This new series is converging uniformly and very fast. With the use of proper techniques which have been developed in [5], [6] a discretization of the SIE gives an infinite linear system with unknowns the development coefficients of the magnetic currents that produce the field. The expression of the far field is also given in the same chapter. Based upon chapter 2, there is given a great number of results in chapter 3 in the form of figures and tables that show the magnetic current across the slot and the radiation diagram for various values of the geometrical and electromagnetic characteristics of the configuration.

Key words

Conducting wedge, cavity, singular integral equations, Green functions, Nyström' s method

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ.....	8
1.1 Εισαγωγή	8
2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ.....	10
2.1 Κατάστρωση του προβλήματος	10
2.2 Κατάστρωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης.....	12
2.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου.....	16
2.4 Μετασχηματισμός της συνάρτησης Green στην περιοχή (0)	18
2.5 Επιτάχυνση των επιμέρους σειρών της συνάρτησης Green στην περιοχή (0)	20
2.6 Διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης	24
2.7 Υπολογισμός του μακρινού πεδίου.....	28
3. ΕΛΕΓΧΟΙ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ.....	30
3.1 Έλεγχοι ορθότητας.....	30
3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα	40
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : Απόδειξη της σχέσης (2.6.9) [5]	83
Βιβλιογραφικές παραπομπές.....	85

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

1.1 Εισαγωγή

Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από διατάξεις που περιλαμβάνουν κοιλότητες αποτελούν ένα ενδιαφέρον πρόβλημα λόγω των πολλών εφαρμογών που έχουν τέτοιες διατάξεις. Διατάξεις με κοιλότητες έχουν χρησιμοποιηθεί για περισσότερα από 20 χρόνια σε συστήματα ακτινοβολίας στις τηλεπικοινωνίες και τη ραδιοαστρονομία. Παραδείγματα πρακτικών εφαρμογών αποτελούν η σχεδίαση μη ευαίσθητων ως προς την πόλωση κλωβών, ανακλαστικών φύλλων, διατάξεων ελέγχου της ενεργού διατομής σκεδάσεως (RCS) και πυραμιδοειδών κεραιών. Λόγω της πρακτικής τους σημασίας διατάξεις με κοιλότητες έχουν ευρέως μελετηθεί χρησιμοποιώντας αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους.

Στην παρούσα εργασία μελετάται η σκέδαση από κοιλότητα παρουσία αγωγίμης σφήνας. Η διέγερση είναι ένα κύμα Η-πολωμένο ή μια γραμμική μαγνητική πηγή.

Η μελέτη ακολουθεί τα πιο κάτω στάδια : Στο κεφάλαιο 2 γίνεται η περιγραφή της διάταξης και η κατάστρωση της ολοκληρωτικής εξίσωσης από την οποία θα βρεθεί το άγνωστο ισοδύναμο επιφανειακό μαγνητικό ρεύμα κατά μήκος της σχισμής. Με κατάλληλους μαθηματικούς χειρισμούς, ο πυρήνας της ολοκληρωτικής εξίσωσης διασπάται σε έναν ιδιόμορφο όρο κλειστής μορφής και σε έναν ομαλό όρο σε μορφή σειράς ιδιοσυναρτήσεων. Η νέα αυτή σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και αρκετά ταχέως. Με χρήση κατάλληλων τεχνικών που αναπτύχθηκαν στις [5], [6] η ολοκληρωτική εξίσωση διακριτοποιείται και δίνει ένα άπειρο αλγεβρικό σύστημα γραμμικών εξισώσεων ως προς αγνώστους τους συντελεστές ανάπτυξης των ρευμάτων που δημιουργούν το πεδίο. Στο ίδιο κεφάλαιο δίνονται επίσης οι εκφράσεις του μακρινού πεδίου.

Με βάση τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 2, στο κεφάλαιο 3 παρατίθεται πλήθος αριθμητικών αποτελεσμάτων υπό μορφή πινάκων και διαγραμμάτων που αφορούν το μαγνητικό ρεύμα στη σχισμή και το διάγραμμα ακτινοβολίας για διάφορες τιμές των γεωμετρικών και ηλεκτρομαγνητικών χαρακτηριστικών της διάταξης.

Για τον έλεγχο της ορθότητας των αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκαν :

- Η επιβεβαίωση της αρχής διατήρησης της ισχύος, $P_{\text{rad}}=P_{\text{scat}}$, όπου P_{rad} , P_{scat} είναι η ακτινοβολούμενη και η σκεδαζόμενη ισχύς αντίστοιχα.
- Άμεσες συγκρίσεις με αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών σε πλήθος ειδικών περιπτώσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΤΡΩΣΗ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΗΣ ΕΙΣΩΣΗΣ

2.1 Κατάστρωση του προβλήματος

Το σχήμα 1 δείχνει σε τομή μία τέλεια αγωγίμη σφήνα ανοίγματος φ_0 , η οποία στην όψη $\varphi=0$ φέρει μία ημικυκλική κοιλότητα. Η κοιλότητα, ακτίνας a , φέρει σχισμή πλάτους $2w$ ($a \geq w$) και πληρούται με ομογενές ιστροπικό διηλεκτρικό (ϵ_1, μ_1). Ο υπόλοιπος χώρος (περιοχή (0)) είναι αέρας (ϵ_0, μ_0). Ο άξονας της κοιλότητας βρίσκεται σε απόσταση d από την ακμή της σφήνας. Η διάταξη εκτείνεται ομοιόμορφα και απεριόριστα κατά μήκος του άξονα των z .

Η πρωτεύουσα διέγερση είναι ένα επίπεδο κύμα Η-πόλωσης

$$\vec{H}^{inc} = \hat{z} H_0 e^{jk_0(x \cos \psi + y \sin \psi)} \quad (2.1.1)$$

$$\vec{E}^{inc} = -\zeta_0 \hat{k}^{inc} \times \vec{H}^{inc} \quad (2.1.2)$$

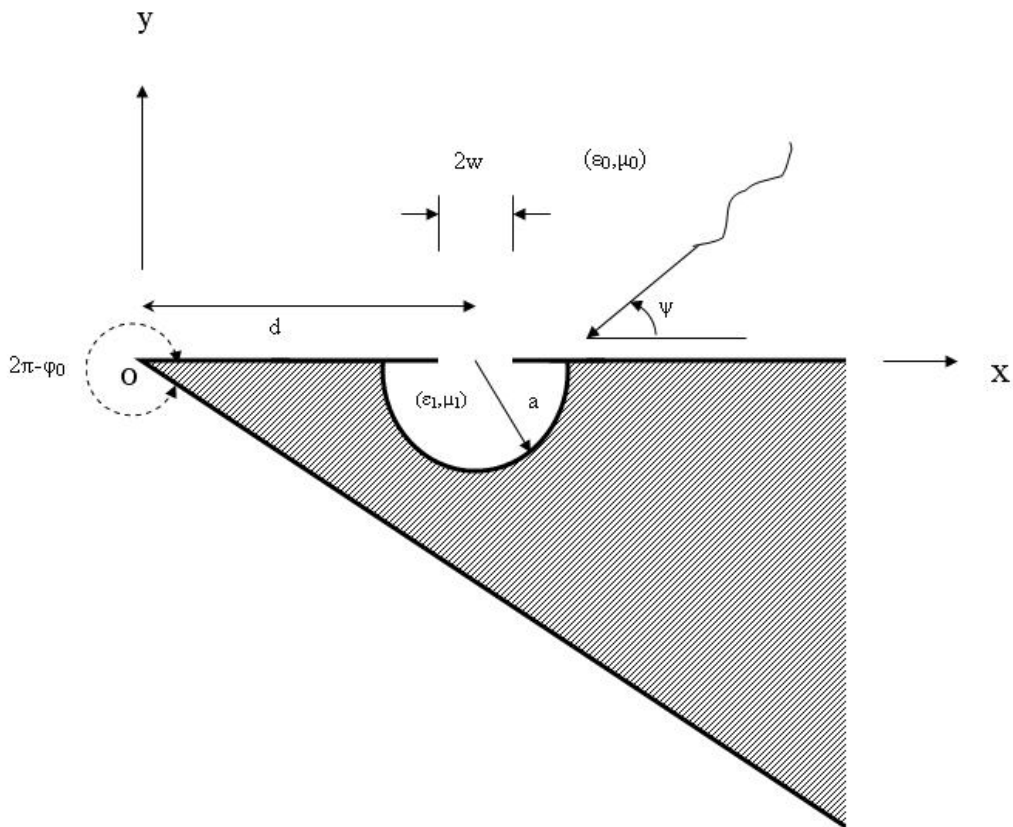
προερχόμενο από την περιοχή 0 και προσπίπτον κατά την κατεύθυνση \vec{k}^{inc}

$$\vec{k}^{inc} = -\hat{x} \cos \psi - \hat{y} \sin \psi \quad (2.1.3)$$

(ψ είναι η γωνία πρόσπτωσης). Στις (1), (2)

$$\zeta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \quad (2.1.4)$$

$$k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \quad (2.1.5)$$



Σχήμα 1: Γεωμετρία αγωγίμης σφήνας

2.2 Κατάστροψη της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Σε πολικές συντεταγμένες (ρ, ψ) το πεδίο $(\bar{E}_{exc}^{(0)}, \bar{H}_{exc}^{(0)})$ που διεγείρεται στα σημεία της περιοχής 0 με τη σχισμή βραχυκυκλωμένη δίνεται από τις σχέσεις [1]:

$$\bar{H}_{exc}^{(0)} = 2H_0 e^{-jkd \cos \psi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^{\frac{m\pi}{2\pi-\phi_0}} J_{\frac{m\pi}{2\pi-\phi_0}}(k_0 \rho) \cos\left(\frac{m\pi}{2\pi-\phi_0} \psi\right) \quad (2.2.1)$$

$$\bar{E}_{exc}^{(0)} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial y} - \hat{y} \frac{\partial}{\partial x} \right) H_{exc}^{(0)} \quad (2.2.2)$$

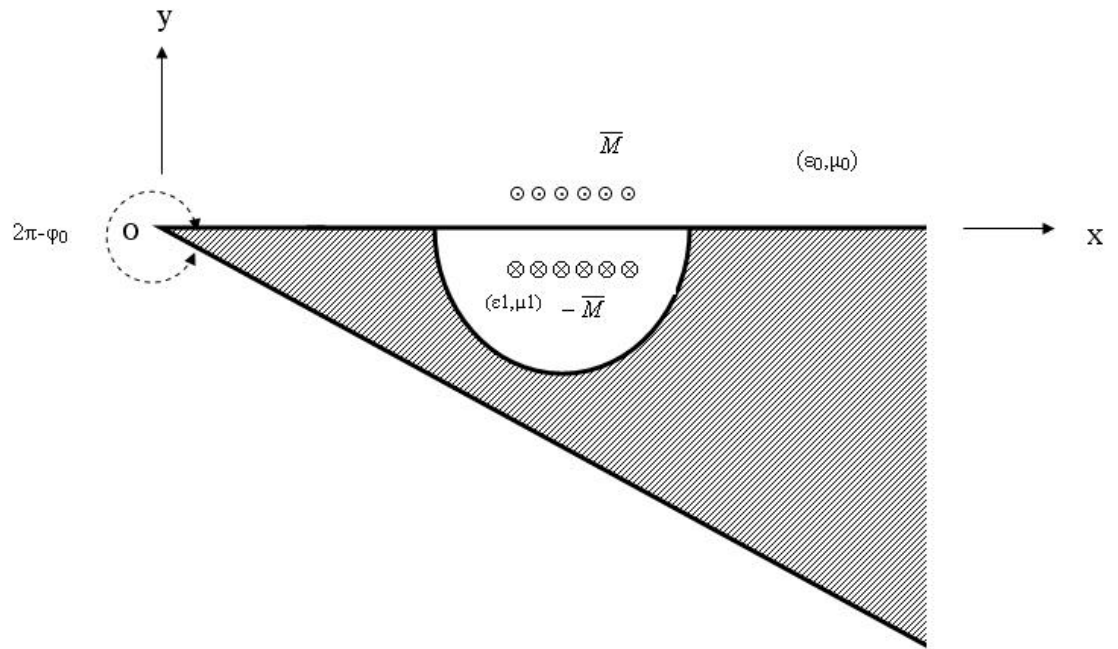
με $\varepsilon_m=1$ για $m=0$ και $\varepsilon_m=2$ για $m \neq 0$. Στη συνέχεια με $(\bar{E}_{tot}^{(0)}, \bar{H}_{tot}^{(0)})$ θα συμβολίζουμε το ολικό πεδίο στα σημεία της περιοχής (0) παρουσία της σχισμής, και με $(\bar{E}^{(1)}, \bar{H}^{(1)})$ το ολικό πεδίο στο εσωτερικό της κοιλότητας. Η διαφορά

$$\left(\bar{E}^{(0)}, \bar{H}^{(0)} \right) = \left(\bar{E}_{tot}^{(0)} - \bar{E}_{exc}^{(0)}, \bar{H}_{tot}^{(0)} - \bar{H}_{exc}^{(0)} \right) \quad (2.2.3)$$

είναι το σκεδαζόμενο πεδίο.

Επικαλούμενοι την “**αρχή της ισοδυναμίας των πεδίων**” [1], η κατάστροψη του προβλήματος οριακών τιμών μπορεί να γίνει με βάση το σχήμα 2, όπου με βραχυκυκλωμένη τη σχισμή επιβάλλουμε στις δυο όψεις ($y = \pm 0$) της επιφάνειας ($d - w < x < d + w, y = 0$) τα ισοδύναμα επιφανειακά μαγνητικά ρεύματα $\pm \bar{M}(x)$, αντίστοιχα, όπου

$$\bar{M}(x) = \bar{E}^{(0)}(x, 0) \times \hat{y} = \bar{E}^{(1)}(x, 0) \times \hat{y} \quad (2.2.4)$$



Σχήμα 2.: Ισοδύναμο πρόβλημα

Με τη βοήθεια των συναρτήσεων Green που παρατίθενται στον πίνακα 1, η κατάστρωση και η επίλυση της ολοκληρωτικής εξίσωσης μπορεί να γίνει όπως φαίνεται στην ανάλυση που ακολουθεί.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ GREEN

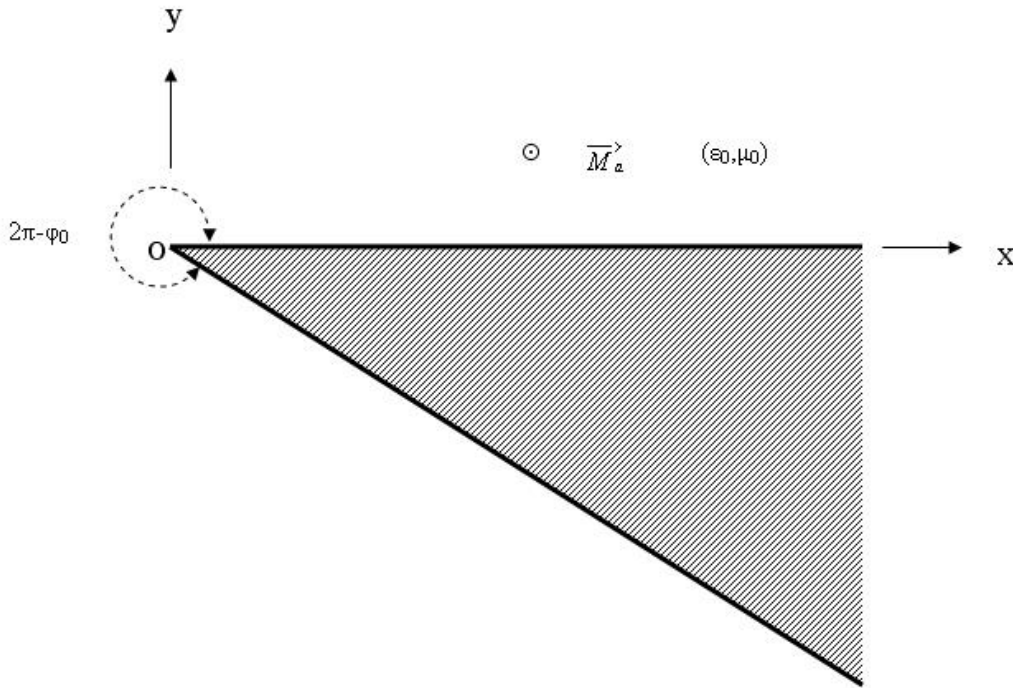
(A) Γραμμική μαγνητική πηγή στη γειτονιά τέλεια αγωγίμης σφήνας [1],[6]

Συμβολισμός:

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho}'(x', y') = \bar{\rho}'(\rho', \phi') = \text{θέση της πηγής}$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(x, y) = \bar{\rho}'(\rho, \phi) = \text{σημείο παρατήρησης}$$

στο σύστημα $O(x, y)$ με κέντρο πάνω στην ακμή της σφήνας.



$$G^{(A)}(\bar{\rho}, \bar{\rho}') = \begin{cases} -\frac{\omega \epsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}(k_0 \rho) H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}(k_0 \rho') \cos(s\phi) \cos(s\phi'), \rho \leq \rho' \\ -\frac{\omega \epsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\epsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}(k_0 \rho') H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}(k_0 \rho) \cos(s\phi) \cos(s\phi'), \rho \geq \rho' \end{cases}$$

$$\text{όπου } s = \frac{m\pi}{2\pi - \phi_0} \text{ και } \epsilon_m = 2 - \delta_{m0}$$

(B) Γραμμική μαγνητική πηγή στο εσωτερικό ημικυλινδρικής κοιλότητας [6]

Συμβολισμός:

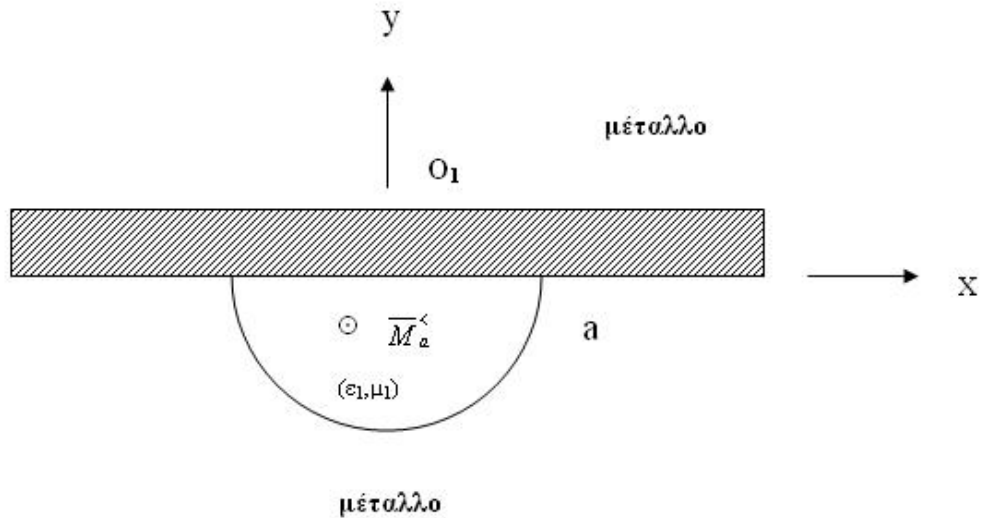
$$R^{\pm} = \left[(x-x')^2 + (y \pm y')^2 \right]^{1/2}$$

$$\bar{M}^< = \hat{z} \delta(x-x') \delta(y-y') \quad (y' < 0).$$

Επίσης, στο σύστημα $O_1(x,y)$ με κέντρο πάνω στον άξονα της σχισμής,

$$\bar{\rho}' = \bar{\rho}'(x', y') = \bar{\rho}'(\rho', \phi')$$
 είναι θέση της πηγής και

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(x, y) = \bar{\rho}'(\rho, \phi)$$
 είναι το σημείο παρατήρησης



$$G^{(B)}(\bar{\rho}, \bar{\rho}') = -\frac{1}{4} \omega \varepsilon_1 M_a \left[H_0^{(2)}(k_1 R^-) + H_0^{(2)}(k_1 R^+) \right] + \frac{1}{2} \omega \varepsilon_1 M_a \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 \rho) J_m(k_1 \rho') \cos(m\phi) \cos(m\phi')$$

$$A_m = \varepsilon_m H_m' / (k_1 a) ; \varepsilon_m = 2 - \delta_{m0}$$

2.3 Ολοκληρωτική αναπαράσταση του πεδίου

Το πεδίο παντού στο χώρο έχει τις συνιστώσες (H_z, E_x, E_y). Οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου συνδέονται με το H_z με βάση τις παρακάτω σχέσεις:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon\vec{E} \Leftrightarrow \begin{cases} E_x = \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_y = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Το επιφανειακό μαγνητικό ρεύμα \vec{M} δίνεται από τη σχέση (2.2.4)

Με αναφορά στο ισοδύναμο πρόβλημα του σχήματος 2, εφαρμόζοντας το θεώρημα της αντιστοιχίας δύο φορές,

$$\langle \vec{M}_a^>, \vec{M} \rangle = \langle \vec{M}, \vec{M}_a^> \rangle, \quad \langle \vec{M}_a^<, -\vec{M} \rangle = \langle -\vec{M}, \vec{M}_a^< \rangle \quad (2.3.2)$$

παίρνουμε

$$M_a \hat{z} \cdot \vec{H}^{(1)}(x', y') = - \int_{-w}^w M_z(x) G^{(B)}(x, 0; x', y') dx \quad (2.3.3)$$

και

$$M_a \hat{z} \cdot \vec{H}^{(0)}(x', y') = \int_{-w}^w M_z(x) G^{(A)}(x, 0; x', y') dx \quad (2.3.4)$$

όπου $\vec{M}_a^>< = \hat{z} M_a \delta(x-x') \delta(y-y')$ ($y' > 0$ και $y' < 0$ αντίστοιχα) είναι μια βοηθητική γραμμική μαγνητική πηγή και τα σύμβολα “>” και “<” χρησιμοποιούνται για να καθορίσουν τη θέση της γραμμικής πηγής είτε μέσα στην περιοχή (0), είτε μέσα στην περιοχή (1).

Η οριακή συνθήκη στη διαχωριστική επιφάνεια δίνει:

$$\bar{H}^{(1)}(x',0) = \bar{H}_{exc}^{(0)}(x',0) + \bar{H}_{scat}^{(0)}(x',0) \quad (|x'| \leq w), \quad (2.3.5)$$

Για $y'=0$ η συνάρτηση Green $G^{(A)}(x,0;x',y')$ γίνεται

$$G^{(A)}(x,x') = \begin{cases} -\frac{\omega\varepsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d+x)] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d+x')] & x \leq x' \\ -\frac{\omega\varepsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d+x')] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d+x)] & x \geq x' \end{cases} \quad (2.3.6)$$

και αν θέσουμε $x^{\max} = \max(x, x')$, $x^{\min} = \min(x, x')$ μπορούμε να τη γράψουμε σε ενιαία μορφή ως εξής:

$$G^{(A)}(x,x') = -\frac{\omega\varepsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d+x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d+x^{\max})] \quad (2.3.7)$$

Για τη συνάρτηση Green της περιοχής (1) είναι :

$$G^{(B)}(x,x') = -\frac{\omega\varepsilon_1}{2} M_a H_0^{(2)} \left(|x^{\max} - x^{\min}| \right) + \frac{\omega\varepsilon_1}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 x^{\max}) J_m(k_1 x^{\min}) \quad (2.3.8)$$

Στη συνέχεια, χωρίς βλάβη της γενικότητας, για διευκόλυνση της ανάλυσής μας θα θέσουμε $M_a = 1$. Έτσι προκύπτει η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση :

$$\begin{aligned}
& \int_{-w}^w M_z(x') \left\{ \frac{\omega \varepsilon_1}{2} H_0^{(2)}(k_1 |x^{\max} - x^{\min}|) - \frac{\omega \varepsilon_1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 x^{\max}) J_m(k_1 x^{\min}) + \right. \\
& \left. + \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}[k_0(d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] \right\} dx' = H_z^{exc(0)}(x', 0)
\end{aligned}
\tag{2.3.9}$$

2.4 Μετασχηματισμός της συνάρτησης Green στην περιοχή (0)

Υπό τη μορφή της σειράς (2.3.6), η συνάρτηση Green αποκλίνει για $x \rightarrow x'$. Επομένως η (2.3.6) είναι ακατάλληλη αν πρόκειται να αποτελέσει τον πυρήνα της ολοκληρωτικής μας εξίσωσης. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να τη φέρουμε σε πρόσφορη μορφή απομονώνοντας την ιδιομορφία που υπάρχει ως εξής.

Το πεδίο, το οποίο ακτινοβολεί μία γραμμική μαγνητική πηγή τοποθετημένη στη θέση $\bar{\rho}'$ μόνη της υπεράνω τελείου, απεράντου, αγωγίμου επιπέδου, σε κλειστή μορφή δίνεται από τον τύπο

$$H_z^i(\bar{\rho}, \bar{\rho}') = -\frac{k_0^2 I_m}{2\omega\mu_0} H_0^{(2)}(k_0 |\bar{\rho} - \bar{\rho}'|),
\tag{2.4.1}$$

ενώ σε μορφή σειράς δίνεται από τον τύπο

$$H_z^i(\bar{\rho}, \bar{\rho}') = -\frac{k_0^2 I_m}{2\omega\mu_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m(k_0 \rho^{\min}) H_m^{(2)}(k_0 \rho^{\max}),
\tag{2.4.2}$$

όπου $\rho^{\max} = \max(\rho, \rho')$, $\rho^{\min} = \min(\rho, \rho')$

Έτσι, προσθέτοντας στην (2.3.7) τον όρο $H_z^i(\bar{\rho}, \bar{\rho}')$ σε κλειστή μορφή και συγχρόνως αφαιρώντας τον σε μορφή σειράς, παίρνουμε

$$\begin{aligned} G^{(A)}(x, x') &= -\frac{\omega \varepsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \\ &- \frac{\omega \varepsilon_0}{2} H_0^{(2)}(|x^{\max} - x^{\min}|) + \frac{\omega \varepsilon_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m [k_0(d + x^{\min})] H_m^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Συνεπώς η ολοκληρωτική εξίσωση γίνεται :

$$\begin{aligned} \int_{-w}^w M_z(x') \left\{ \varepsilon_r H_0^{(2)}(k_1 |x^{\max} - x^{\min}|) + H_0^{(2)}(k_0 |x^{\max} - x^{\min}|) - \varepsilon_r \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 x^{\max}) J_m(k_1 x^{\min}) \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \right. \\ \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m [k_0(d + x^{\min})] H_m^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \right\} dx' = \frac{2}{\omega \varepsilon_0} H_z^{exc(0)}(x', 0), \text{ όπου } \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0} \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

2.5 Επιτάχυνση των επιμέρους σειρών της συνάρτησης Green στην περιοχή (0)

Στη συνέχεια θα επιδιώξουμε να πετύχουμε ταχύτερη σύγκλιση για τις σειρές

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})]$$

και

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m [k_0(d + x^{\min})] H_m^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \quad \text{της σχέσης (2.4.4)}$$

Αρχικά γράφουμε κάθε σειρά έτσι ώστε ο όρος για $m=0$ να είναι ξεχωριστός από την υπόλοιπη σειρά, στους όρους της οποίας θα εφαρμόσουμε κάποιες αλλαγές για αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης.

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] = \\ & = \frac{\pi}{2\pi - \phi_0} J_0 [k_0(d + x^{\min})] H_0^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Από τον γενικό όρο της σειράς

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} \left[k_0 (d + x^{\min}) \right] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} \left[k_0 (d + x^{\max}) \right]$$

θα αφαιρέσουμε την

ασυμπτωτική του έκφραση για $m \rightarrow \infty$, οπότε θα προκύψει μία καινούρια σειρά και στη συνέχεια θα προσθέσουμε την κλειστή μορφή της νέας (ασυμπτωτικής) σειράς. Η ασυμπτωτική έκφραση του γενικού όρου της σειράς προκύπτει ως εξής:

Για τις συναρτήσεις Bessel και Neumann ισχύουν οι σχέσεις

$$J_\nu \left[k_0 (d + x^{\min}) \right] \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{ek_0 (d + x^{\min})}{2\nu} \right)^\nu \quad (2.5.2)$$

και

$$Y_\nu \left[k_0 (d + x^{\min}) \right] \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}} \left(\frac{ek_0 (d + x^{\min})}{2\nu} \right)^{-\nu}. \quad (2.5.3)$$

για $\nu \rightarrow \infty$. Έτσι

$$J_\nu \left[k_0 (d + x^{\min}) \right] Y_\nu \left[k_0 (d + x^{\min}) \right] \approx -\frac{1}{\pi\nu} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^\nu \quad (2.5.4)$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] = \\
& = \frac{\pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_0 [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_0^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] + \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} \right\} \\
& - j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi - \phi_0}} \right] \tag{2.5.5}
\end{aligned}$$

Για να φτάσουμε στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} = -\ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi - \phi_0}} \right]. \tag{2.5.6}$$

Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια μεθοδολογία και για τη σειρά

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \mathbf{J}_m [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_m^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] \text{ έχουμε :}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \mathbf{J}_m [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_m^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] = \mathbf{J}_0 [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_0^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2 \mathbf{J}_m [k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_m^{(2)} [k_0(d + x^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^m \right\} - j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right) \right] \tag{2.5.7}$$

Συνεπώς η ολοκληρωτική εξίσωση του προβλήματος είναι η εξής:

$$\begin{aligned}
& \int_{-w}^w \mathbf{M}_z(x') \left\{ \varepsilon_r \mathbf{H}_0^{(2)}(k_1 |x^{\max} - x^{\min}|) + \mathbf{H}_0^{(2)}(k_0 |x^{\max} - x^{\min}|) \right. \\
& - \varepsilon_r \sum_{m=0}^{\infty} A_m \mathbf{J}_m(k_1 x^{\max}) \mathbf{J}_m(k_1 x^{\min}) + \frac{\pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_0[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_0^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] + \\
& \left. \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} \right\} \right. \\
& - j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi - \phi_0}} \right] - \mathbf{J}_0[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_0^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] \\
& \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2 \mathbf{J}_m[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_m^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^m \right\} \right. \\
& \left. + j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right) \right] \right\} dx' = \frac{2}{\omega \varepsilon_0} \mathbf{H}_z^{exc(0)}(x', 0)
\end{aligned}$$

(2.5.8)

2.6 Διακριτοποίηση της ολοκληρωτικής εξίσωσης

Λαμβάνοντας υπ' όψιν τη συνθήκη των άκρων, το ρεύμα $M_z(x)$ θα γραφεί στη μορφή

$$M_z(x) = \frac{M(t)}{\sqrt{1-t^2}}, t = \frac{x}{w} \quad (2.6.1)$$

Θέτουμε $x=wt$ και $x'=w\tau$ ($-1 \leq t, \tau \leq 1$) και η ολοκληρωτική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$I(t) = \int_{-1}^1 \frac{M(t)}{\sqrt{1-t^2}} \left[aH_0^{(2)}(kw|t-\tau|) + bR(t, \tau) \right] d\tau \quad (2.6.2)$$

όπου a, b σταθερές και $R(t, \tau)$ ομαλή συνάρτηση των ορισμάτων της.

Κάνοντας χρήση του ολοκληρωτικού τύπου του Lobatto [5] προκύπτει ότι

$$\int_{-1}^1 \frac{M(t)}{\sqrt{1-t^2}} R(t, \tau) d\tau = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^L M(t_n) R(t, t_n), \quad (2.6.3)$$

$$t_n = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} \quad (2.6.4)$$

Ο ακέραιος L επιλέγεται τόσο μεγάλος όσο χρειάζεται ώστε να εξασφαλιστεί η απαιτούμενη ακρίβεια των υπολογισμών. Ο L τελικά καθορίζει και το μέγεθος ($L \times L$) του πίνακα του τελικού συστήματος των γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων.

Το ιδιόμορφο ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{M(t)}{\sqrt{1-t^2}} H_0^{(2)}(kw|t-\tau|) d\tau$$

υπολογίζεται με τις τεχνικές που περιγράφονται στην παραπομπή [6].

Τέλος, θέτοντας $t = t_j$, $j=1,2,\dots,L$, προκύπτει το παρακάτω $(L) \times (L)$ γραμμικό αλγεβρικό σύστημα με άγνωστο το $M(t_n)$.

$$w \sum_{n=1}^L M(t_n) A_{jn}(k_0 w) + \varepsilon_r w \sum_{n=1}^L M(t_n) A_{jn}(k_1 w) + \frac{w\pi}{L} \sum_{n=1}^L M(t_n) P(t_j, t_n) = \frac{2}{\omega \varepsilon_0} \mathbf{H}_z^{exc(0)}(t_j)$$

$j=1,2,\dots,L$ (2.6.5)

$$\text{όπου } t_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2L}$$

Η ποσότητα $A_{jn}(k_1 w)$, προερχόμενη από το ιδιόμορφο μέρος του πυρήνα, δίδεται στην [6]. Η ποσότητα $P(t_j, t_n)$, προερχόμενη από το ομαλό μέρος του πυρήνα, έχει την παρακάτω έκφραση:

- Για $n \neq j$

$$\begin{aligned}
P(t_j, t_n) = & -\varepsilon_r \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 w t^{\max}) J_m(k_1 w t^{\min}) + \\
& \frac{\pi}{2\pi - \phi_0} J_0[k_0(d + w t^{\min})] H_0^{(2)}[k_0(d + w t^{\max})] \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}[k_0(d + w t^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}[k_0(d + w t^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + w t^{\min}}{d + w t^{\max}} \right)^{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} \right\} \\
& - j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + w t^{\min}}{d + w t^{\max}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi - \phi_0}} \right] - J_0[k_0(d + w t^{\min})] H_0^{(2)}[k_0(d + w t^{\max})] \\
& - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \varepsilon_m J_m[k_0(d + w t^{\min})] H_m^{(2)}[k_0(d + w t^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + w t^{\min}}{d + w t^{\max}} \right)^m \right\} + \\
& + j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + w t^{\min}}{d + w t^{\max}} \right) \right] \tag{2.6.6}
\end{aligned}$$

- Για $n=j$:

$$\begin{aligned}
P(t_j, t_n) = & -\varepsilon_r \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_m(k_1 w t^{\max}) J_m(k_1 w t^{\min}) + \\
& \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}[k_0(d + w t^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}[k_0(d + w t^{\max})] \\
& - \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m J_m[k_0(d + w t^{\min})] H_m^{(2)}[k_0(d + w t^{\max})] + j \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{2\pi - \phi_0}{\pi} \right] \tag{2.6.7}
\end{aligned}$$

όπου $t_{\max} = \max(t_n, t_j)$ και $t_{\min} = \min(t_n, t_j)$

Για να φτάσουμε στη (2.6.7) χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα

$$\lim_{t^{\min} \rightarrow t^{\max}} \left(-\ln \left[1 - \left(\frac{d + wt^{\min}}{d + wt^{\max}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi - \phi_0}} \right] + \ln \left[1 - \left(\frac{d + wt^{\min}}{d + wt^{\max}} \right) \right] \right) = \ln \left[\frac{2\pi - \phi_0}{\pi} \right]$$

Το μαγνητικό ρεύμα στις διάφορες θέσεις πάνω στην επιφάνεια της σχισμής προσδιορίζεται από τον τύπο :

$$M(t) \approx \sum_{N=0}^{L-1} a_N T_N(t) \quad (2.6.8)$$

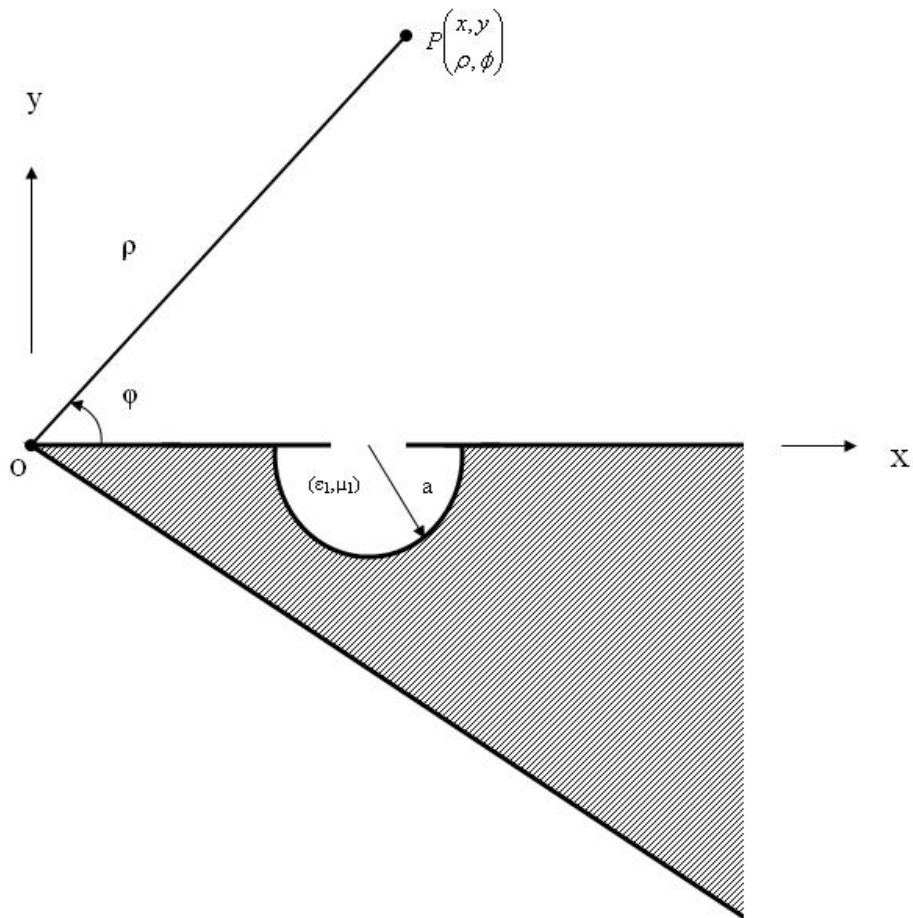
όπου

$$a_N = \frac{\hat{\varepsilon}_N}{L} \sum_{n=1}^L T_N(t_n) M(t_n) \quad (2.6.9)$$

Η απόδειξη της σχέσης (2.6.9) δίνεται στο παράρτημα Α.

2.7 Υπολογισμός του μακρινού πεδίου

Γνωρίζοντας τους συντελεστές ανάπτυξης του μαγνητικού ρεύματος $M_z(x)$ μπορούμε να υπολογίσουμε οποιοδήποτε μέγεθος πρακτικού ενδιαφέροντος αφορά τη διάταξη. Στην παράγραφο αυτή θα βρούμε την έκφραση του πεδίου H_z όταν η απόσταση r του σημείου παρατήρησης $P(x, y)$ από την αρχή O είναι πολύ μεγαλύτερη από το μήκος κύματος, δηλαδή για $k_0 r \gg 1$ (Σχ. 3)



Σχήμα 3

Η ασυμπτωτική μορφή της $H_v^{(2)}(k\rho)$ για $k\rho \rightarrow \infty$ είναι :

$$H_v^{(2)}(k\rho) \approx \sqrt{\frac{2j}{\pi k \rho}} j^v e^{-jk\rho} \quad (2.7.1)$$

Άρα για $k\rho \rightarrow \infty$

$$G(\rho^{\min}, 0; \rho^{\max}, \phi) = -\sqrt{\frac{2j}{\pi k}} \frac{e^{-jk\rho^{\max}}}{\sqrt{\rho^{\max}}} \frac{\omega \varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} j^{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}(k\rho^{\min}) \cos\left(\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0} \phi\right) \quad (2.7.2)$$

και το μαγνητικό πεδίο [στο σύστημα αναφοράς $O(\rho, \phi)$] δίνεται από τον τύπο :

$$H(\rho, \phi) = \frac{w\pi}{L} \sum_{n=1}^L M(t_n) G(d + wt_n, 0; \rho, \phi), \quad (2.7.3)$$

όπου $\{M(t_n), n=1, 2, \dots, L\}$ είναι η λύση της (2.6.5)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

ΕΛΕΓΧΟΙ ΟΡΘΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

3.1 Έλεγχοι ορθότητας

Πρώτα θα ελέγξουμε την ορθότητα της συνάρτησης Green της περιοχής (0) για την ειδική περίπτωση όπου το άνοιγμα της σφήνας είναι 270° . Η σύγκριση θα γίνει με το πεδίο το οποίο προκαλεί μια γραμμική μαγνητική πηγή τοποθετημένη στη θέση (x_s, y_s) . Η συνάρτηση Green της περιοχής (0) στη θέση $(x', 0)$ δίνεται από τον τύπο

$$G^{(A)}(x, x') = -\frac{\omega \varepsilon_0}{2} M_a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \pi}{2\pi - \phi_0} J_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} [k_0 (d + x^{\min})] H_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)} [k_0 (d + x^{\max})] \quad (3.1.1)$$

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε σε προηγούμενη ενότητα καταλήγουμε στην εξής μορφή για τη συνάρτηση Green

$$\begin{aligned}
G^A(x, x') &= \frac{\pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_0[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_0^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2\pi}{2\pi - \phi_0} \mathbf{J}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}}^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{m\pi}{2\pi - \phi_0}} \right\} \\
&- j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^{\frac{\pi}{2\pi - \phi_0}} \right] - \mathbf{J}_0[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_0^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] \\
&- \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ 2 \mathbf{J}_m[k_0(d + x^{\min})] \mathbf{H}_m^{(2)}[k_0(d + x^{\max})] - j \frac{2}{\pi} \frac{1}{m} \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right)^m \right\} \\
&+ j \frac{2}{\pi} \ln \left[1 - \left(\frac{d + x^{\min}}{d + x^{\max}} \right) \right] \tag{3.1.2}
\end{aligned}$$

Το πεδίο που προκαλεί στο χώρο μια γραμμική μαγνητική πηγή τοποθετημένη στη θέση (x_s, y_s) της διάταξης δίνεται από τον τύπο :

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x, y) &= -\bar{z} \frac{1}{4} \omega \varepsilon_0 M_s \left[\mathbf{H}_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2} \right) + \mathbf{H}_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x - x_s)^2 + (y + y_s)^2} \right) \right] + \\
&\quad \left[\mathbf{H}_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x + x_s)^2 + (y - y_s)^2} \right) + \mathbf{H}_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x + x_s)^2 + (y + y_s)^2} \right) \right] \tag{3.1.3}
\end{aligned}$$

όπου $M_s = 1$. Σημειώνουμε ότι, από τους όρους στην αγκύλη, ο πρώτος δείχνει το πεδίο που προκαλεί η γραμμική μαγνητική πηγή όταν δρα στον απεριόριστο κενό χώρο, ενώ οι άλλοι 3 όροι αντιπροσωπεύουν την συμβολή των τριών ειδώλων. Για σημεία παρατήρησης πάνω στη σχισμή (οπότε $y = y_s = 0$) προκύπτει ότι:

$$\bar{H}(x, y) = -\bar{z} \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \left[\mathbf{H}_0^{(2)}(k_0 |x_1 - x_2|) + \mathbf{H}_0^{(2)}(k_0 |x_1 + x_2|) \right] \tag{3.1.4}$$

όπου

$$x_1 = d + x^{\max} \text{ και } x_2 = d + x^{\min}, \text{ με } x^{\max} = \max(x, x_s) \text{ και } x^{\min} = \min(x, x_s).$$

Ο όρος $-\hat{z} \frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \mathbf{H}_0^{(2)}(k_0 |x_1 - x_2|)$ είναι ο όρος που αφαιρέσαμε από τη συνάρτηση Green. Επομένως για την ειδική αυτή περίπτωση πρέπει η (3.1.2) να ισούται με

$$-\frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \mathbf{H}_0^{(2)}(k_0 |x_1 + x_2|) = -\frac{1}{2} \omega \varepsilon_0 \mathbf{H}_0^{(2)}(k_0 |2d + x^{\max} + x^{\min}|) \quad (3.1.5)$$

Αυτό πράγματι συμβαίνει, όπως δείχνουμε στον Πίνακα 2 για διάφορους συνδυασμούς των x^{\max} και x^{\min} (ή, που είναι το ίδιο, των δεικτών n και j).

Πίνακας 2

$w=0.25*\lambda$, $d=\lambda$, $\acute{\alpha}\nu\omicron\iota\gamma\mu\alpha\ \sigma\phi\acute{\eta}\nu\alpha\varsigma=270^\circ$

n	j	Σχέση (3.1.2)	Σχέση (3.1.5)
1	1	0.00985644627153724 + i 0.013697442503262613	0.009856446271537547 + i 0.013701199234459144
1	2	0.0009056340427733289 + i 0.017172281012271556	0.000905634042773668 + i 0.0171723447220627
1	3	-0.01358084510048592 + i 0.011430880808285089	-0.01358084510048583 + i 0.011430880808347388
1	4	-0.017903707733803714 - i 0.004083775571514119	-0.017903707733803793 - i 0.0040837755715141194
1	5	-0.013143813764962037 - i 0.013407074832005709	-0.013143813764962167 - i 0.013407074832005747
2	1	0.0009056340427733289 + i 0.017172281012271556	0.000905634042773668 + i 0.0171723447220627
2	2	-0.00868533499560753 + i 0.0152272836319046	-0.008685334995607231 + i 0.015230509225598854
2	3	-0.017972482122516967 + i 0.002325045869717051	-0.01797248212251689 + i 0.0023250459880769735
2	4	-0.013143813764961973 - i 0.013407074832005796	-0.013143813764962167 - i 0.013407074832005747
2	5	-0.0039002370733723724 - i 0.018815904770986422	-0.003900237073372588 - i 0.018815904770986335
3	1	-0.01358084510048592 + i 0.011430880808285089	-0.01358084510048583 + i 0.011430880808347388
3	2	-0.017972482122516967 + i 0.002325045869717051	-0.01797248212251689 + i 0.0023250459880769735
3	3	-0.013143813764962289 - i 0.013409526759770116	-0.013143813764962167 - i 0.013407074832005747
3	4	0.002887449276567186 - i 0.019289307180285344	0.0028874492765671197 - i 0.019289307170413432
3	5	0.01318378676898082 - i 0.015038926872078709	0.013183786768980727 - i 0.015038926872078646
4	1	-0.017903707733803714 - i 0.004083775571514119	-0.017903707733803793 - i 0.0040837755715141194
4	2	-0.013143813764961973 - i 0.013407074832005796	-0.013143813764962167 - i 0.013407074832005747
4	3	0.002887449276567186 - i 0.019289307180285344	0.0028874492765671197 - i 0.019289307170413432
4	4	0.017856443029903194 - i 0.009710562421763472	0.017856443029903142 - i 0.00970877820853775`
4	5	0.020831430490506515 + i 0.001529020450718472	0.020831430490506495 + i 0.0015290212243534195
5	1	-0.013143813764962037 - i 0.013407074832005709	-0.013143813764962167 - i 0.013407074832005747
5	2	-0.0039002370733723724 - i 0.018815904770986422	-0.003900237073372588 - i 0.018815904770986335
5	3	0.01318378676898082 - i 0.015038926872078709	0.013183786768980727 - i 0.015038926872078646
5	4	0.020831430490506515 + i 0.001529020450718472	0.020831430490506495 + i 0.0015290212243534195
5	5	0.017184877271501715 + i 0.012917195036726992	0.017184877271501753 + i 0.012918619546523331

Για τον έλεγχο της ορθότητας του αλγορίθμου χρησιμοποιήθηκαν δύο ανεξάρτητες μέθοδοι.

1. Η Αρχή διατήρησης της ισχύος

Η ανά μονάδα μήκους του άξονα των z ακτινοβολούμενη και σκεδαζόμενη ισχύς ($P_{\text{rad}}, P_{\text{scat}}$) υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$P_{\text{rad}} = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi - \phi_0} \frac{1}{2} \zeta_0 |H(\rho, \phi)|^2 \rho d\phi \quad (3.1.6)$$

$$P_{\text{scat}} = \frac{1}{2} \text{Re} \int_{-w}^w H_{\text{exc}}^*(x, 0) \cdot \overline{M}(x) dx = \frac{w\pi}{2L} \text{Re} \sum_{n=1}^L M(t_n) H_{\text{exc}}^*(t_n) \quad (3.1.7)$$

όπου $H(\rho, \phi)$ είναι το σκεδαζόμενο πεδίο για $\rho \rightarrow \infty$ και δίνεται από τη σχέση (2.7.3) και $\{M(t_n)\}$ είναι η λύση της (2.6.5).

Θα πρέπει να ισχύει $P_{\text{rad}} = P_{\text{scat}}$. Αξίζει όμως να τονιστεί ότι η ισότητα αυτή αποτελεί αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για την ορθότητα της μεθόδου.

Ένας πρώτος έλεγχος γίνεται στον Πίνακα 3 για την ειδική περίπτωση όπου το άνοιγμα της σφήνας είναι 180° . Συγκεκριμένα συγκρίνουμε το P_{scat} της (3.1.7) με το P_{scat} της (30a) του [6] για διάφορες τιμές της γωνίας προσπτώσεως. Όπως βλέπουμε, η συμφωνία μεταξύ των δυο μεθόδων είναι εξαιρετική.

Στη συνέχεια, στους Πίνακες 4 και 5 ελέγχουμε την ισότητα των P_{scat} και P_{rad} για διάφορες τιμές του ανοίγματος της σφήνας και για διάφορες τιμές της γωνίας προσπτώσεως του επίπεδου κύματος.

Πίνακας 3

P_{scat} για $w=0.25*\lambda$, $a=3*\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180°

$\psi(^\circ)$	Παρούσα εργασία	Παραπομπή [6]
0	10.42490497913329	10.42490497913328
15	10.57722386409622	10.57722386409622
30	10.94917866491149	10.94917866491148
45	11.32582884022581	11.32582884022581
60	11.50233159840805	11.50233159840805
75	11.46921712432524	11.46921712432523
90	11.41661009442447	11.41661009442447
105	11.46921712432524	11.46921712432523
120	11.50233159840805	11.50233159840805
135	11.32582884022580	11.32582884022581
150	10.94917866491149	10.94917866491148
165	10.57722386409622	10.57722386409622
180	10.42490497913329	10.42490497913329

Πίνακας 4

$w=0.25*\lambda$, $d=8\lambda$, $a=3*\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 30°

$\psi(^{\circ})$	P_{scat}	P_{rad}
0	23.47350349603472	23.47350624329291
15	32.63649338809054	32.63649829281883
30	5.50575950217096	5.50575902550556
45	1.77812623818462	1.77812228518900
60	0.74063599351082	0.74063396294888
75	0.35643798335810	0.35643530513099
90	0.25387614027399	0.25387809351579
105	0.24773823320926	0.24774070510784
120	0.22293552306649	0.22293373387057
135	0.34185656308251	0.34243810459159
150	4.10313047248482	4.10313056645696
165	49.89123423136742	49.89124499755179
180	6.10197666213780	6.10197680604620

Πίνακας 5

$w=0.75\lambda$, $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 270°

$\psi(^{\circ})$	P_{scat}	P_{rad}
0	4.72215792850817	4.72215795302513
15	12.58077420985947	12.58077443646359
30	15.25150165924950	15.25149955836553
45	11.88113707438800	11.88113678360871
60	14.40612216667073	14.40612231365422
75	23.66666893898261	23.66666883107324
90	34.53959949080982	34.53959954414550

2. Συγκρίσεις με άλλες εργασίες

Πραγματοποιήθηκαν συγκρίσεις με αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Δείγματα των συγκρίσεων αυτών παρουσιάζονται παρακάτω.

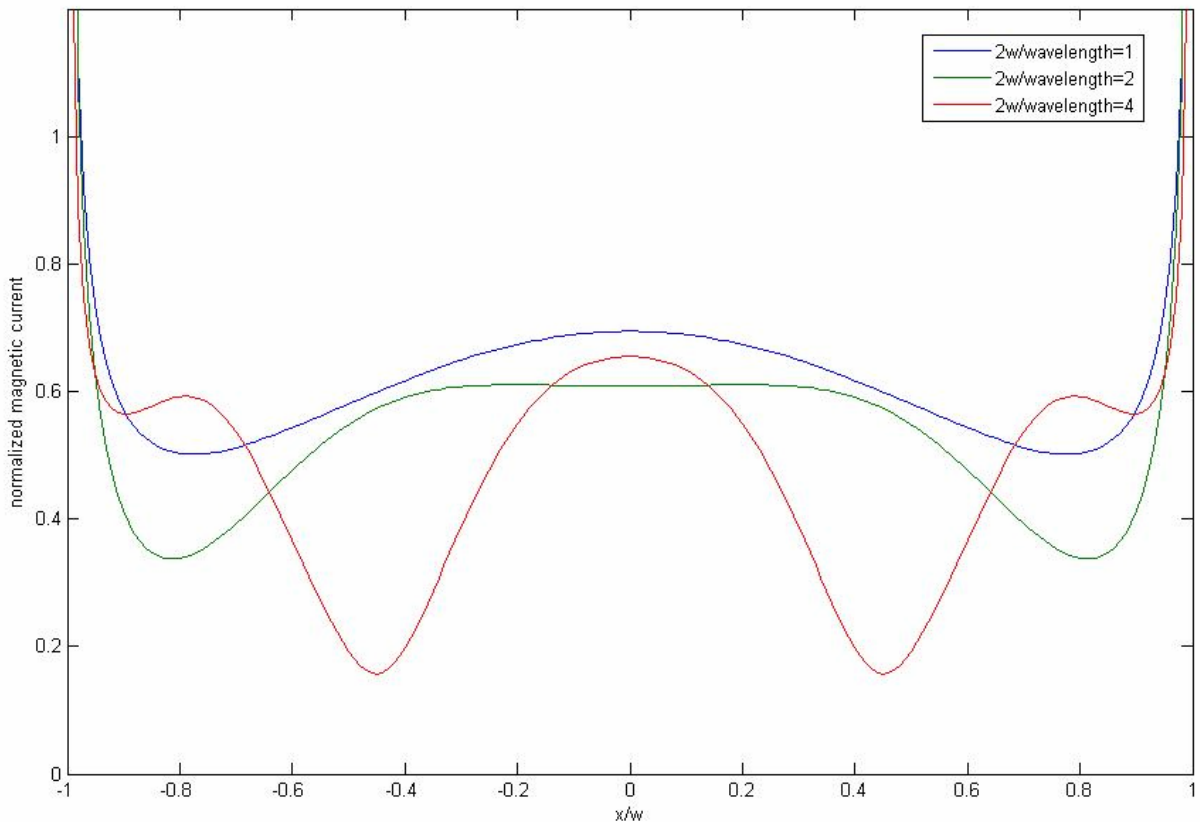
Ο πίνακας παρουσιάζει τη μεταβολή του μαγνητικού ρεύματος σε διάφορες θέσεις κατά μήκος της σχισμής για την ειδική περίπτωση όπου το άνοιγμα της σφήνας είναι 180° (επίπεδη γη) και η γωνία πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος είναι 90° . Σύγκρισή των αποτελεσμάτων με τα αντίστοιχα που προκύπτουν εφαρμόζοντας τη μέθοδο της [6] (μέθοδο Galerkin) δείχνουν σχεδόν απόλυτη συμφωνία.

x/w	This work	From [6]
	magnetic current $\times 10^2$	magnetic current $\times 10^2$
-0.9	2.74187759476179 – i 6.05220926175792	2.74187759476179 - i 6.05220926175793
-0.8	2.21025648011129 – i 4.18819564872040	2.21025648011129 – i 4.18819564872042
-0.7	2.02687262825347 - i 3.36843601759554	2.02687262825347 – i 3.36843601759552
-0.6	1.94638441166539 – i 2.89367834901240	1.94638441166539 – i 2.89367834901240
-0.5	1.90896345785874 – i 2.58668734343269	1.90896345785873 – i 2.58668734343269
-0.4	1.89213217864445 – i 2.37884122746574	1.89213217864445 – i 2.37884122746575
-0.3	1.88545382373315 – i 2.23756429362532	1.88545382373316 – i 2.23756429362534
-0.2	1.88349221333125 – i 2.14563666594732	1.88349221333125 – i 2.14563666594732
-0.1	1.88329932616205 – i 2.09363870347281	1.88329932616205 – i 2.09363870347279
0	1.88338714030332 – i 2.07679502905337	1.88338714030332 – i 2.07679502905337
0.1	1.88329932616204 – i 2.09363870347277	1.88329932616205 – i 2.09363870347279
0.2	1.88349221333125 – i 2.14563666594731	1.88349221333125 – i 2.14563666594732
0.3	1.88545382373316 – i 2.23756429362534	1.88545382373316 - i 2.2375642936253
0.4	1.89213217864445 – i 2.37884122746575	1.89213217864445 – i 2.37884122746575
0.5	1.90896345785874 – i 2.58668734343272	1.90896345785873 - i 2.58668734343269
0.6	1.94638441166539 – i 2.89367834901240	1.94638441166539 - i 2.89367834901240
0.7	2.02687262825347 – i 3.36843601759549	2.02687262825347 - i 3.36843601759552
0.8	2.21025648011129 – i 4.18819564872046	2.21025648011129 - i 4.18819564872042
0.9	2.74187759476179 – i 6.05220926175791	2.74187759476179 - i 6.05220926175793

Το σχήμα που ακολουθεί απεικονίζει το μέτρο του μαγνητικού ρεύματος σε διάφορες θέσεις επάνω στη σχισμή κανονικοποιημένο ως προς το μέγεθος $\zeta_0 \bar{z} \bar{H}_{exc}^{(0)}(x=0, y=0)$. Η διέγερση είναι γραμμική μαγνητική πηγή. Το σχήμα αναφέρεται στην ειδική περίπτωση όπου το άνοιγμα της σφήνας είναι $\varphi_0=\pi$, δηλαδή η σφήνα έχει γίνει άπειρο επίπεδο. Είναι φανερό πως η συμφωνία με το σχήμα 9α της [6] είναι απόλυτη.

Αφού έχουμε γραμμική μαγνητική πηγή μπορούμε να ακολουθήσουμε ακριβώς τη μεθοδολογία που προηγήθηκε σε προηγούμενη ενότητα. Το πεδίο διέγερσης στην ειδική αυτή περίπτωση δίνεται από τη σχέση :

$$\bar{H}_{exc}^{(0)}(x, y) = \bar{z} \frac{1}{4} \omega \varepsilon_0 M_s \left[\mathbf{H}_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2} \right) + \mathbf{H}_0^{(2)} \left(k_0 \sqrt{(x-x_s)^2 + (y+y_s)^2} \right) \right] \quad (3.1.8)$$

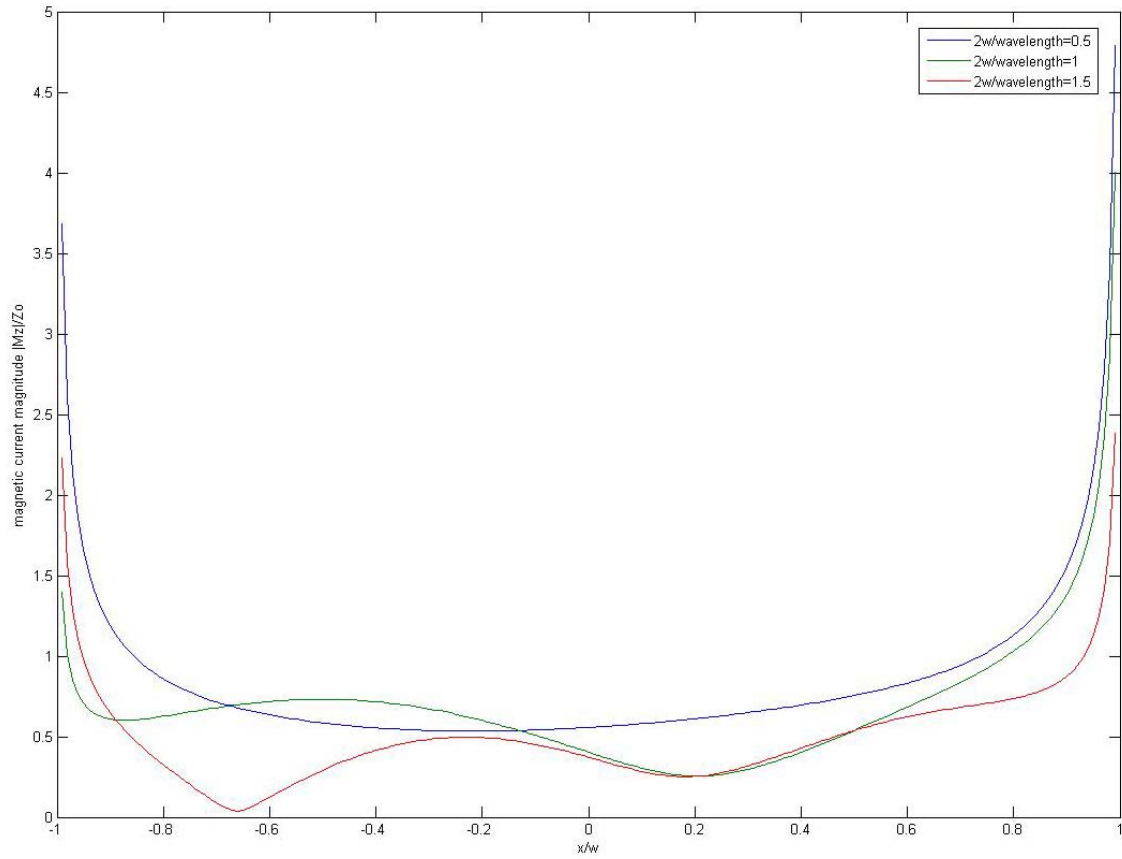


Σχήμα 4: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής που διεγείρεται από γραμμική μαγνητική πηγή ($\varepsilon_r=1$, $x_s=0$, $y_s=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

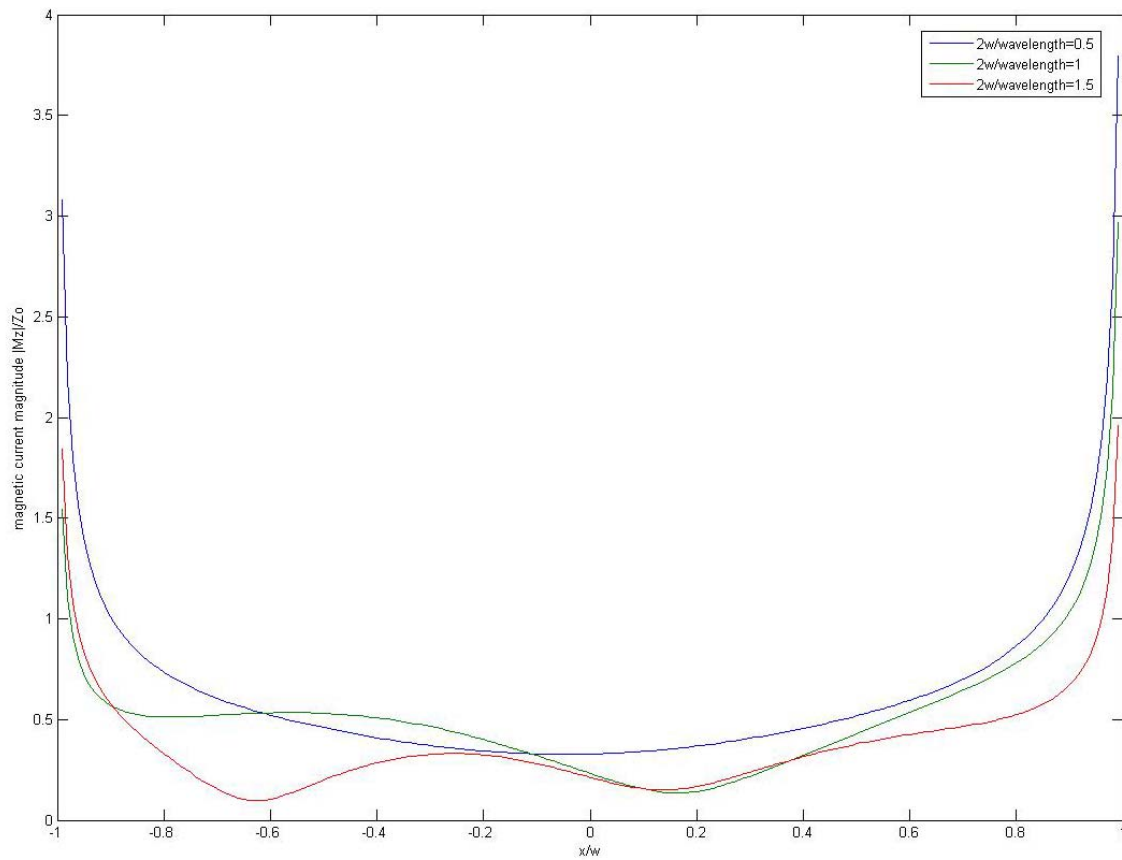
3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στα σχήματα 5 έως 22 απεικονίζουμε το $|M_z(t)|/\zeta_0$ ($\zeta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ είναι η κυματική αντίσταση του κενού), για διάφορες τιμές του d και για διάφορες τιμές της γωνίας πρόσπτωσης του επιπέδου κύματος ή της θέσης της γραμμικής μαγνητικής πηγής. Θεωρήσαμε ότι η ακτίνα της ημικυκλικής κοιλότητας είναι 3λ . Παρακάτω εξετάζουμε και την περίπτωση που το d είναι ίσο με το a για άνοιγμα σφήνας 90° και 270° . **(Σημείωση:** Όπως αναμέναμε από τις συνθήκες των άκρων το μέτρο του μαγνητικού ρεύματος τείνει στο άπειρο στα άκρα της σχισμής). Πιο συγκεκριμένα:

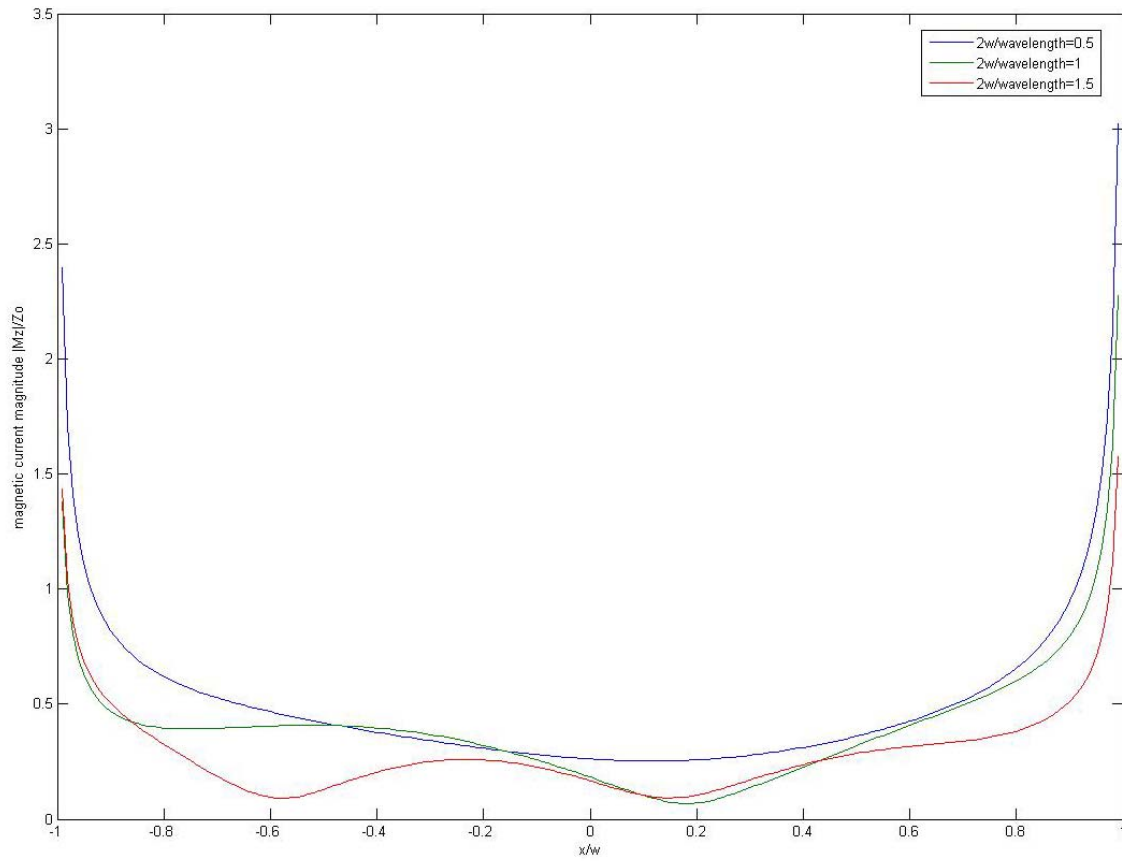
Στα σχήματα 5α, 5β και 5γ δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής του d (για $d=8\lambda$, 10λ και 12λ), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 30° , γωνία πρόσπτωσης επίπεδου κύματος= 30° , $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.



Σχήμα 5α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 30° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 30° , $d=8\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

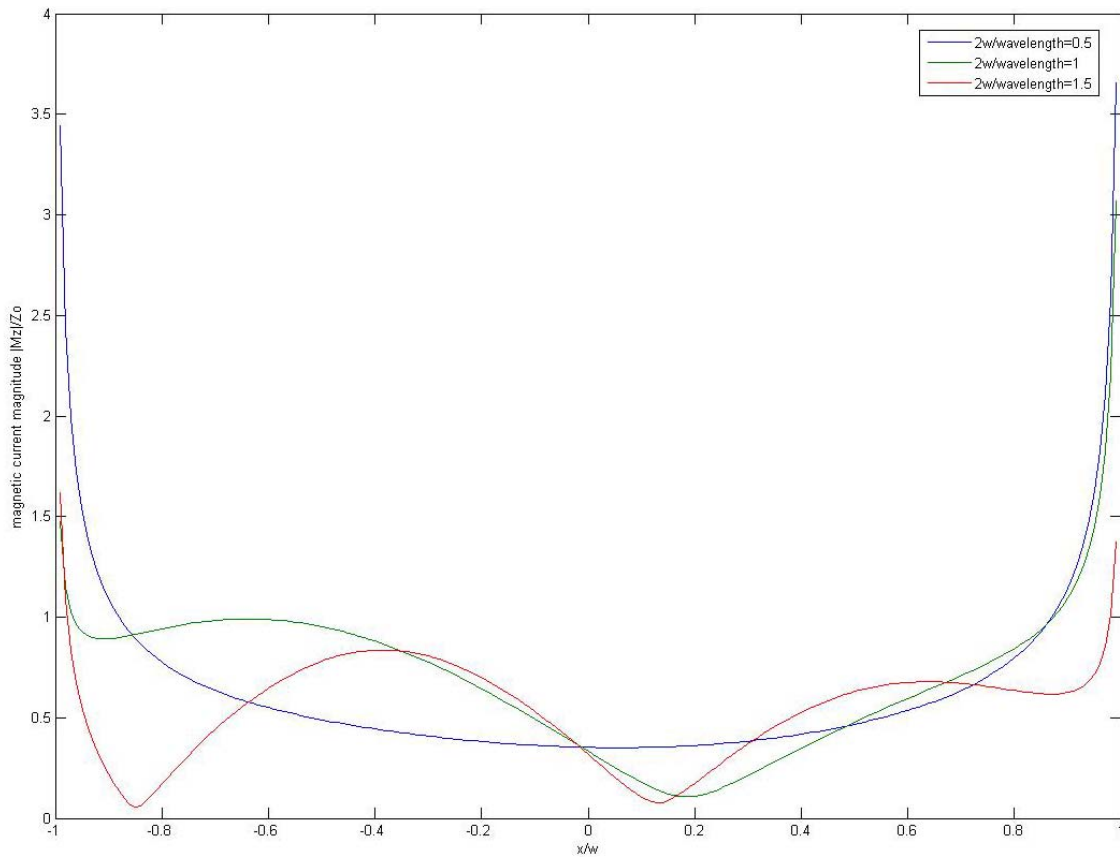


Σχήμα 5β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 30° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 30° , $d=10\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

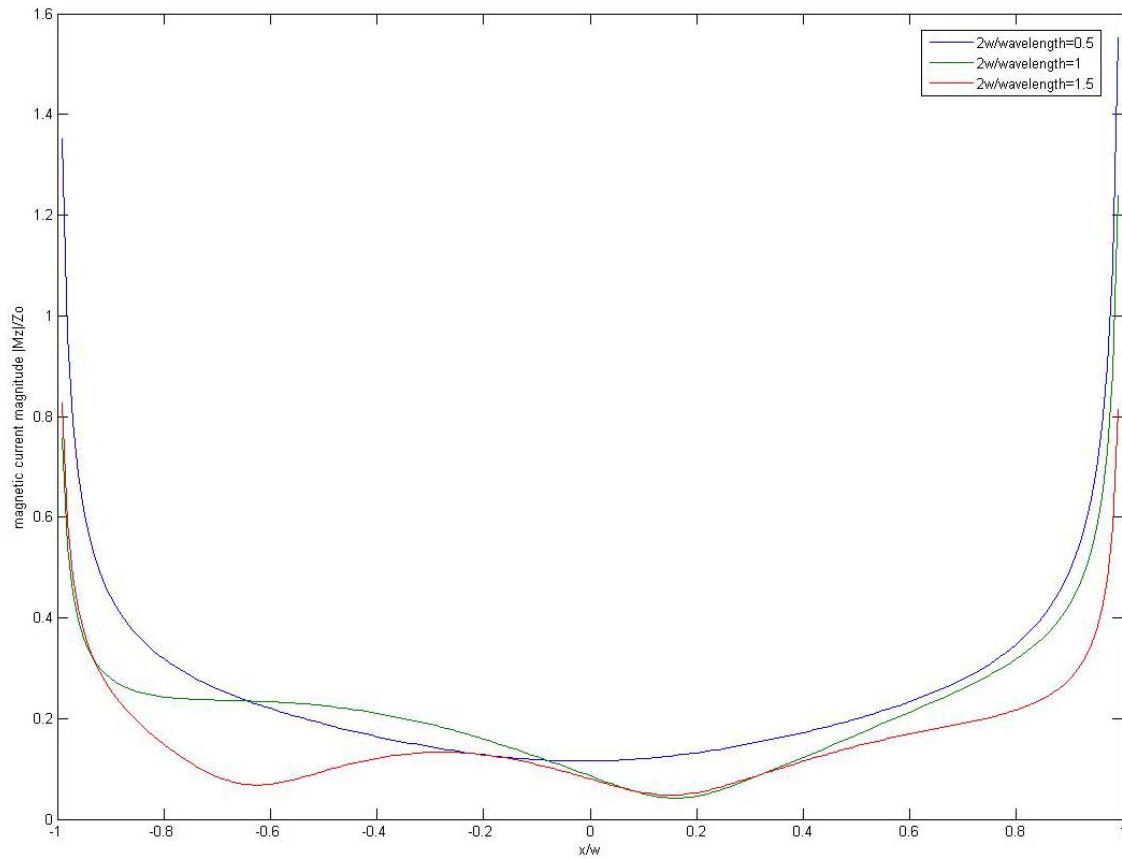


Σχήμα 5γ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 30° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 30° , $d=12\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 6α και 6β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής του d (για $d=5\lambda$, και 10λ), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας $=30^\circ$, γωνία πρόσπτωσης επίπεδου κύματος $=60^\circ$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.

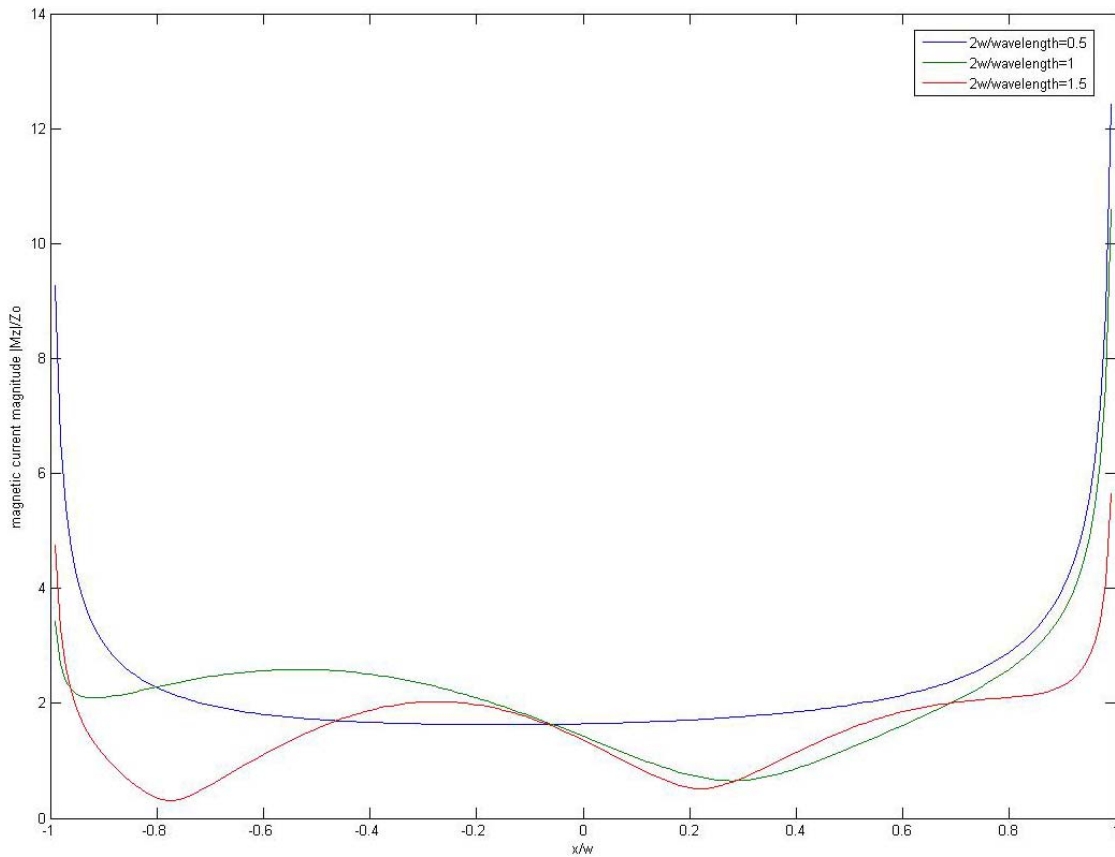


Σχήμα 6α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας $=30^\circ$, γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος $=60^\circ$, $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

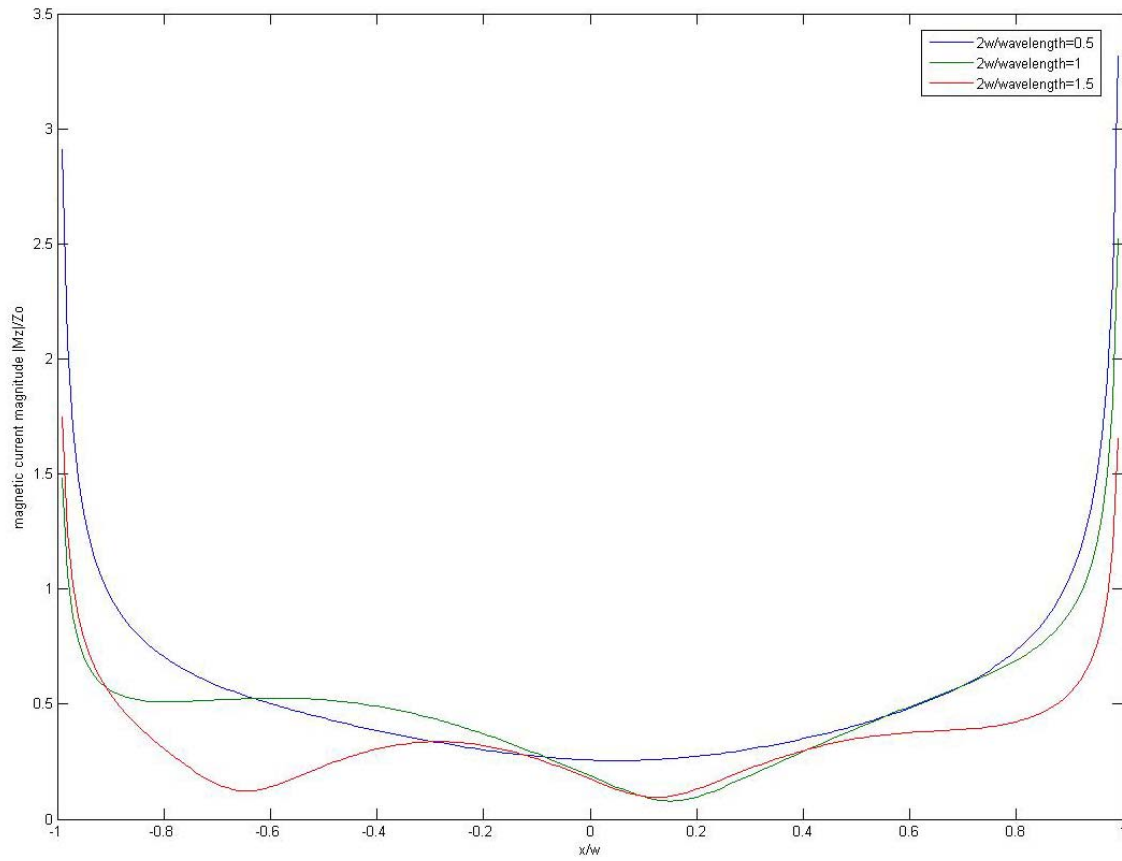


Σχήμα 6β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 30° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=10\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 7α και 7β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής του d (για $d=5\lambda$, και 10λ), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επίπεδου κύματος= 30° , $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.

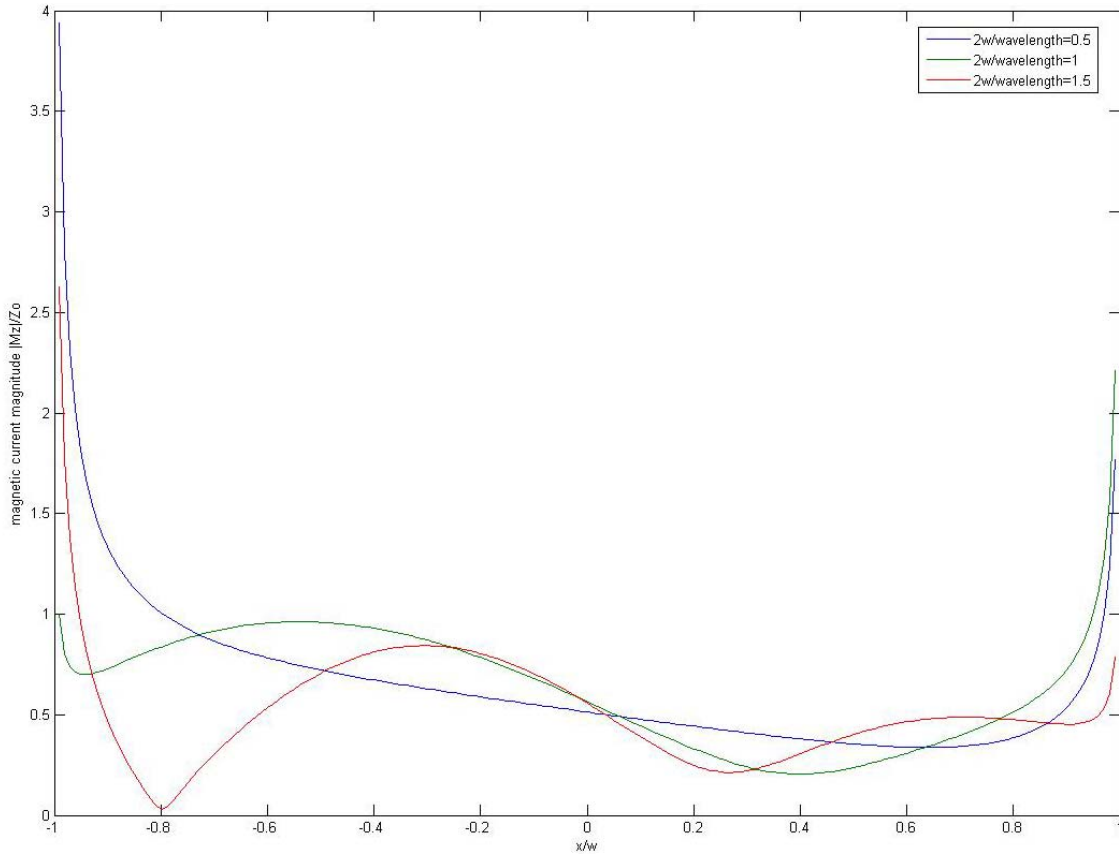


Σχήμα 7α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 30° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

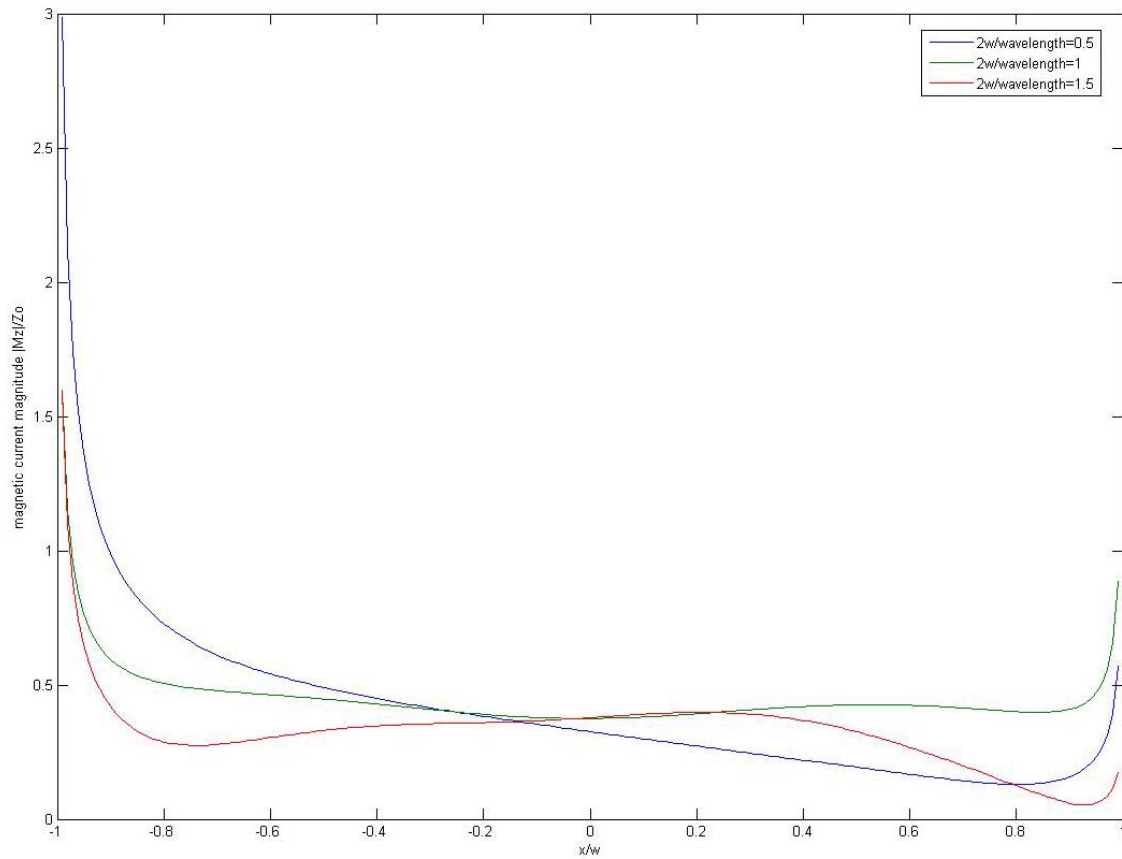


Σχήμα 7β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 30° , $d=10\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

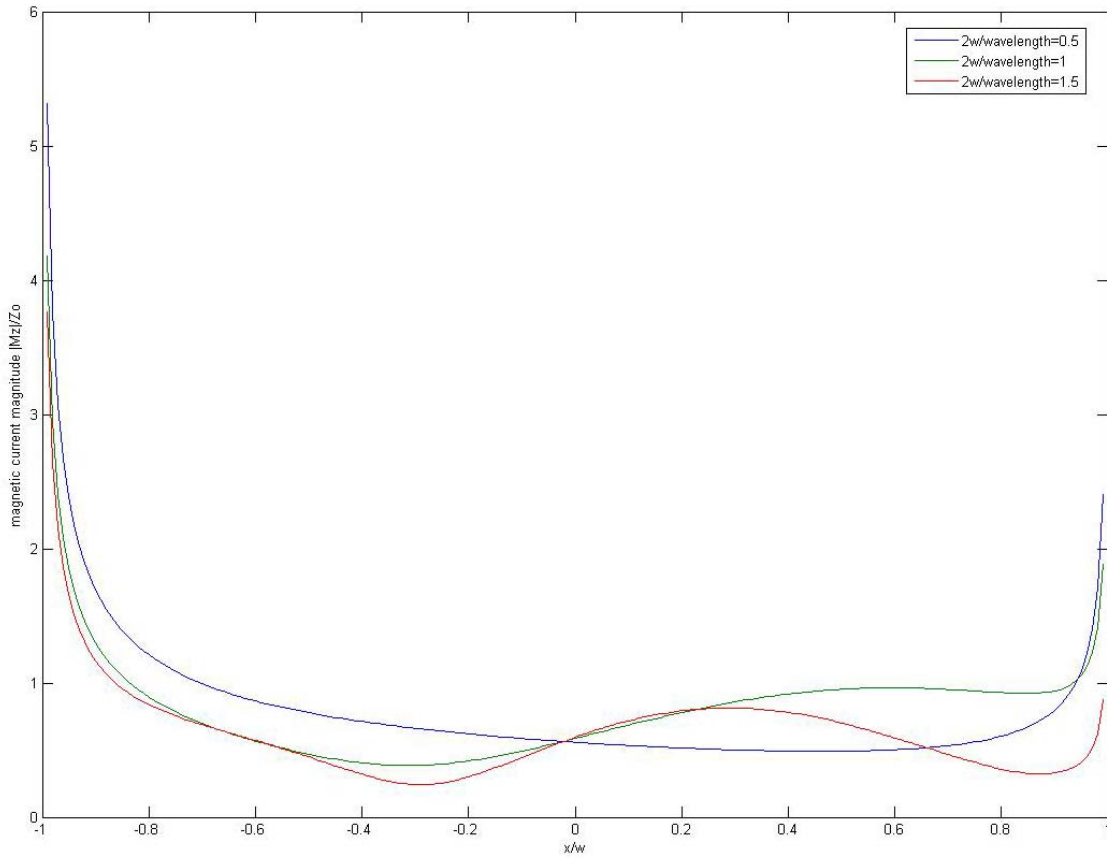
Στα σχήματα 8α, 8β, 8γ, 8δ, και 8ε δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της γωνίας πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος (για γωνία πρόσπτωσης 60° , 90° , 120° , 150° και 180°), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.



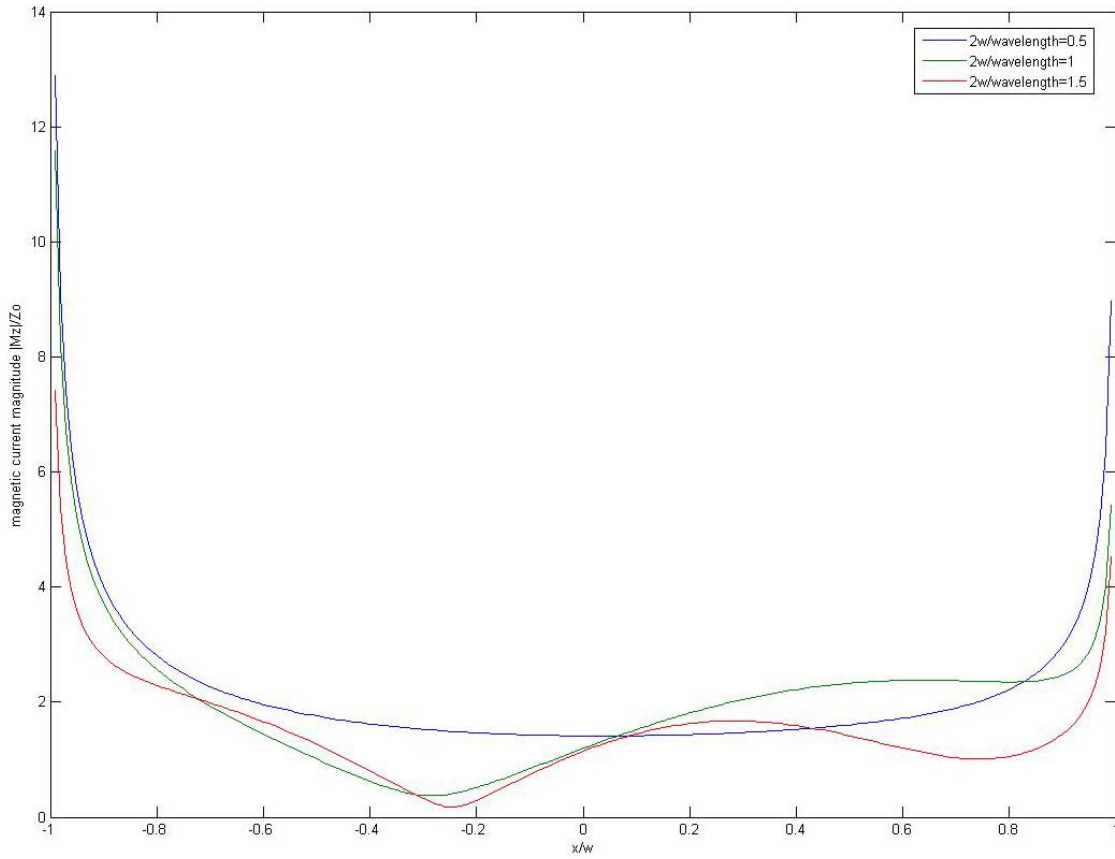
Σχήμα 8α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)



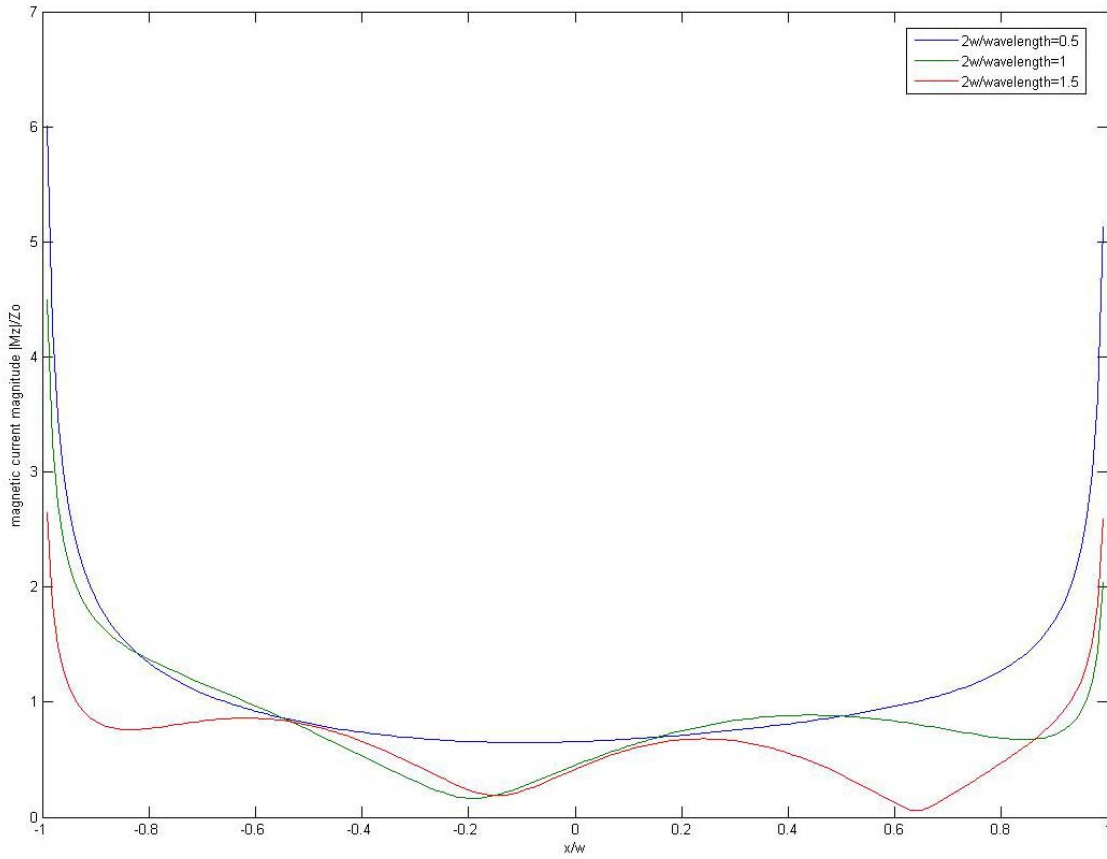
Σχήμα 8β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 90° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)



Σχήμα 8γ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

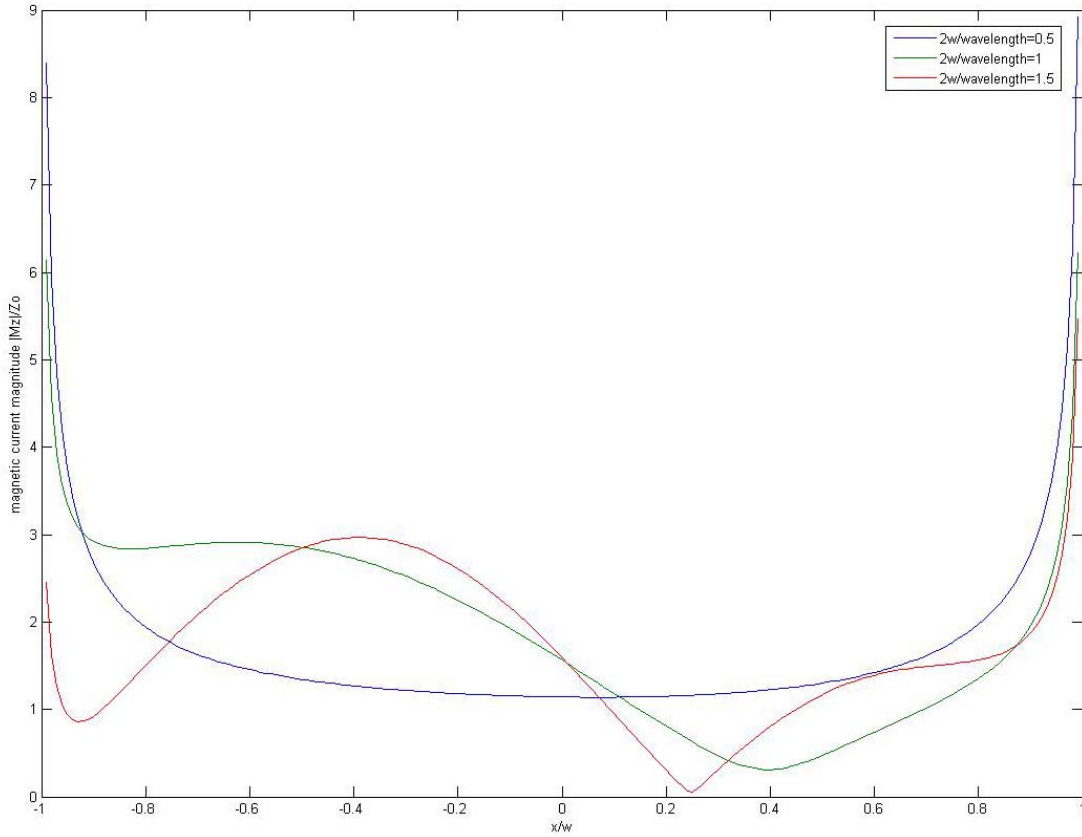


Σχήμα 8δ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 150° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)



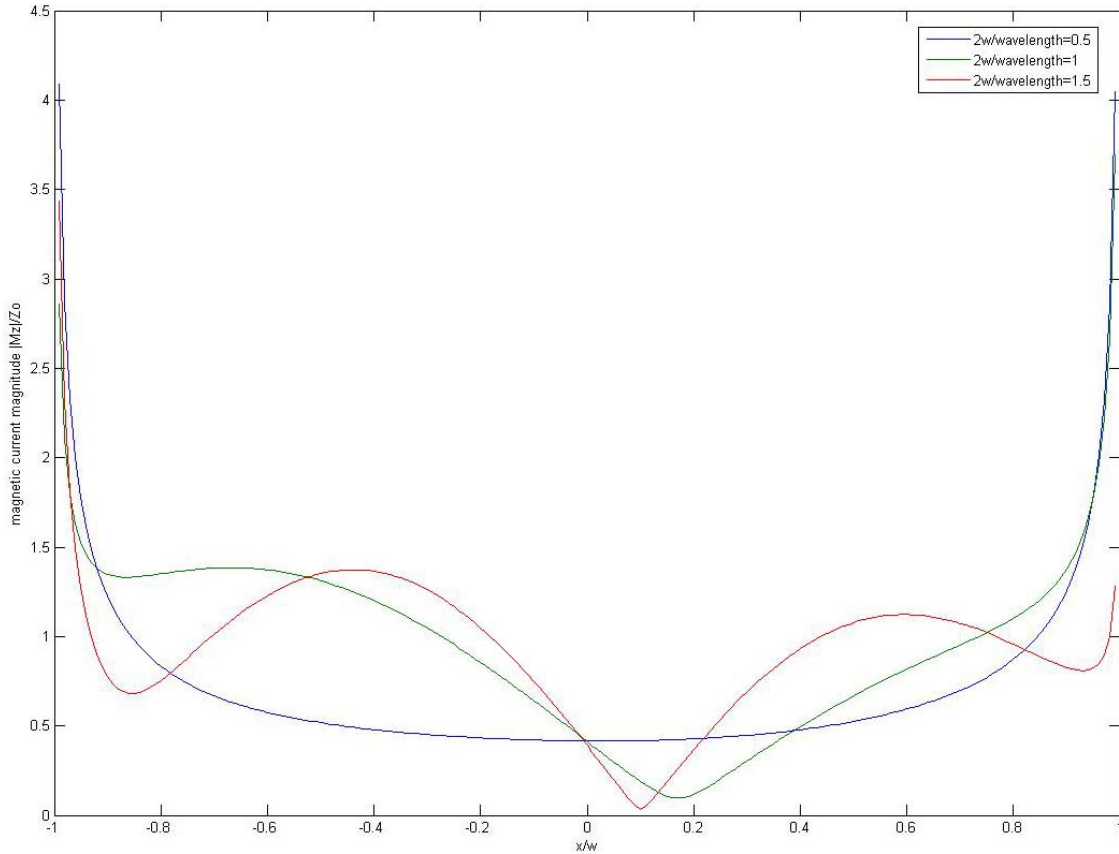
Σχήμα 8ε: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 60° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 180° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στο σχήμα 9 εξετάζουμε την ειδική περίπτωση που το d είναι ίσο με το a για άνοιγμα σφήνας 90° .

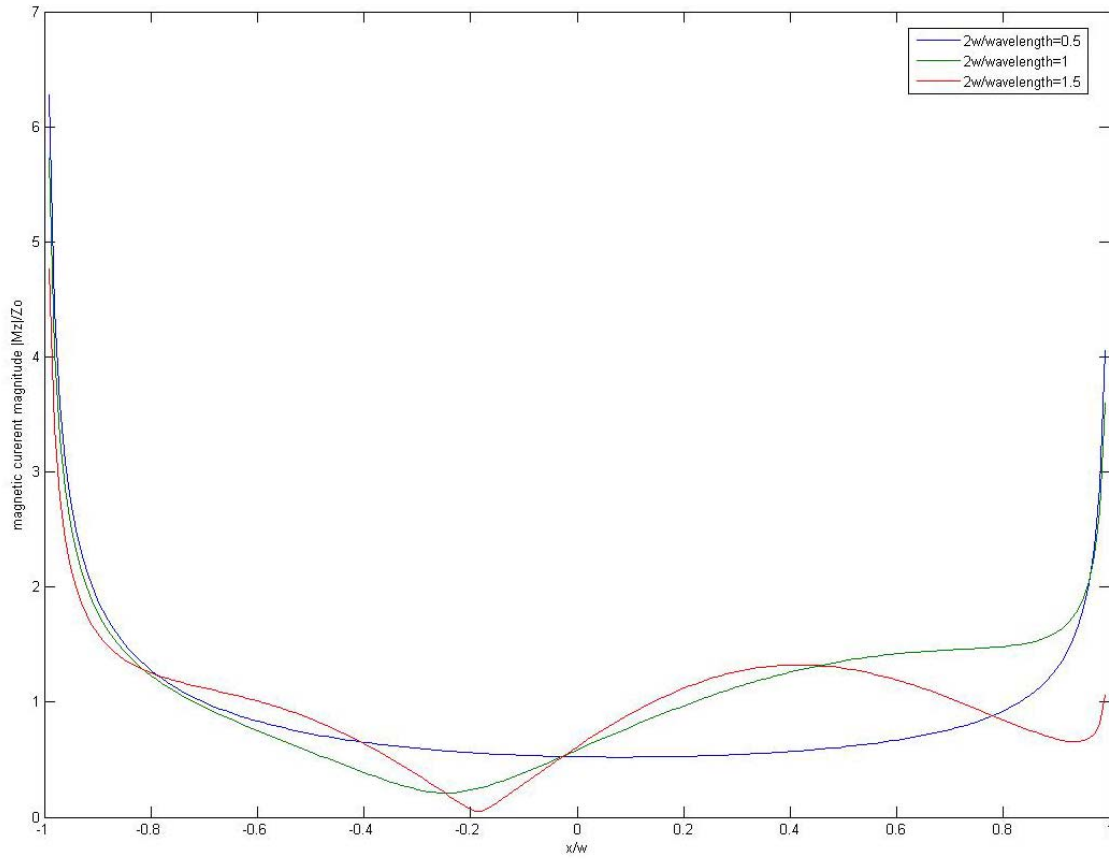


Σχήμα 9: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας $=90^\circ$, γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος $=60^\circ$, $d=3\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 10α και 10β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της γωνίας πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος (για γωνία πρόσπτωσης 60° και 120°), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 90° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.

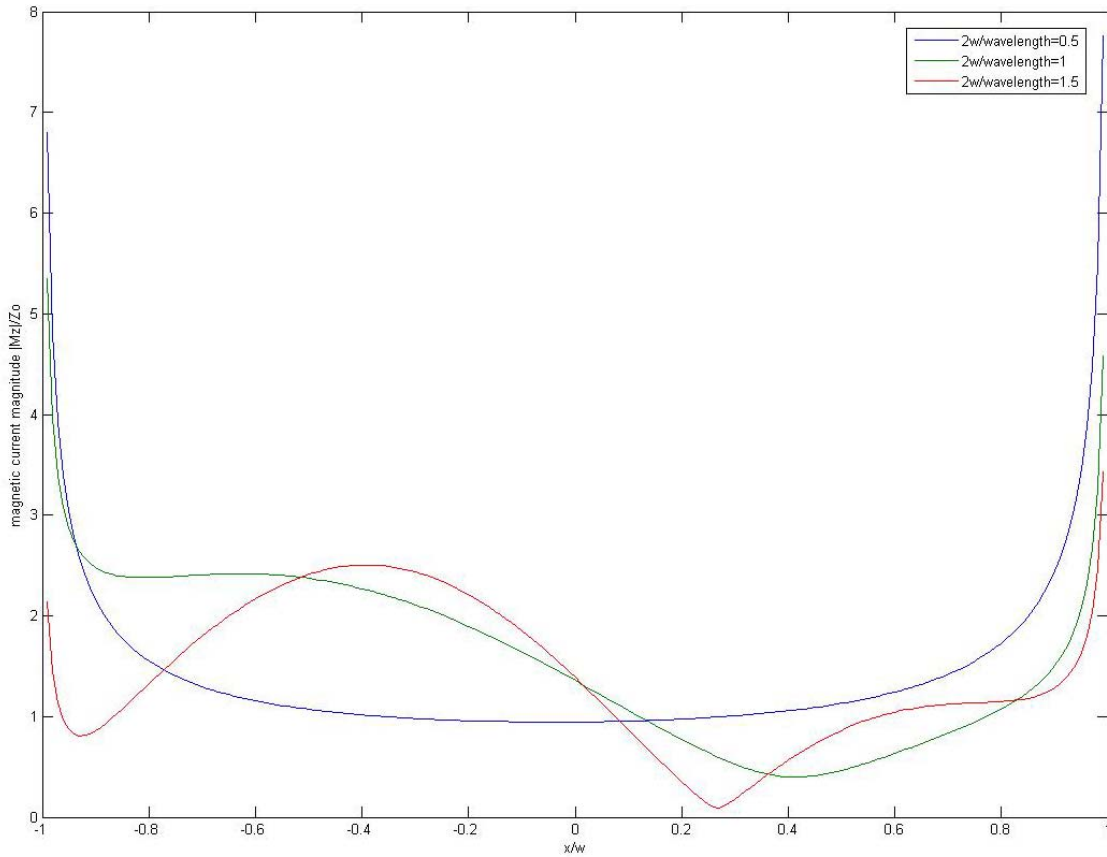


Σχήμα 10α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 90° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

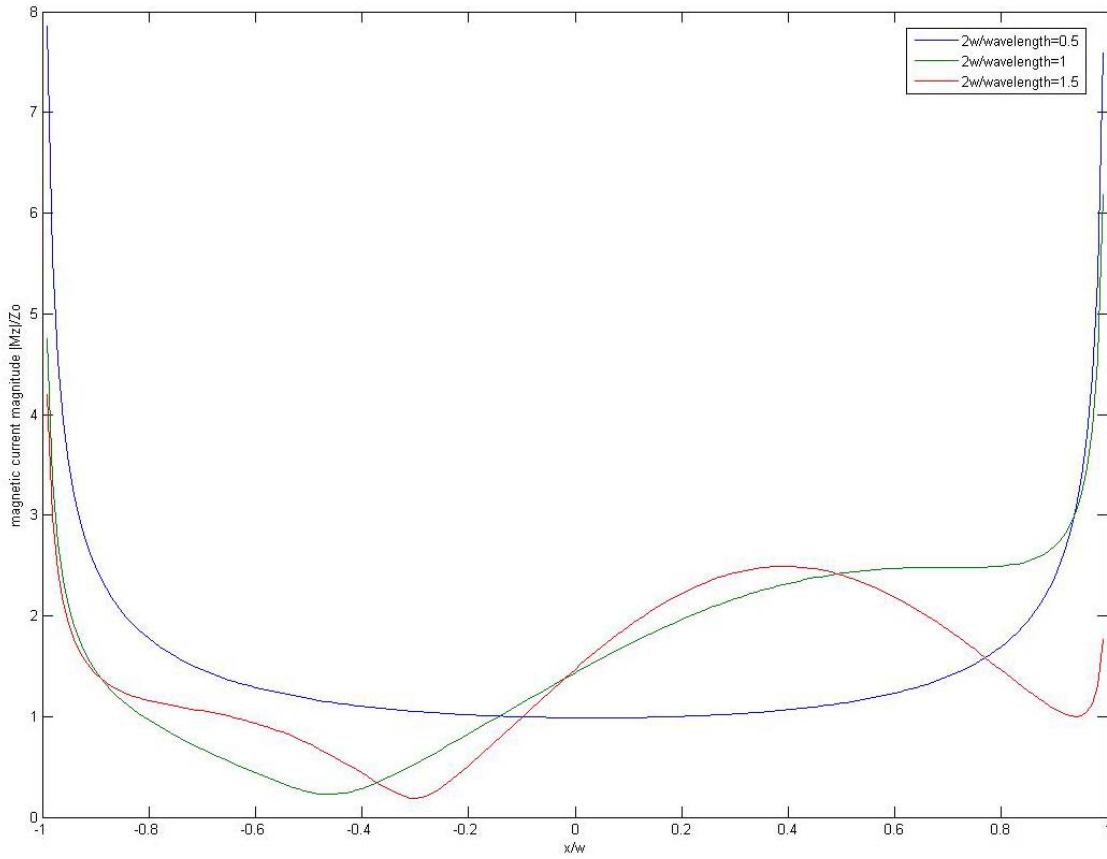


Σχήμα 10β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 90° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 11α και 11β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της γωνίας πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος (για γωνία πρόσπτωσης 60° και 120°), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 145° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.

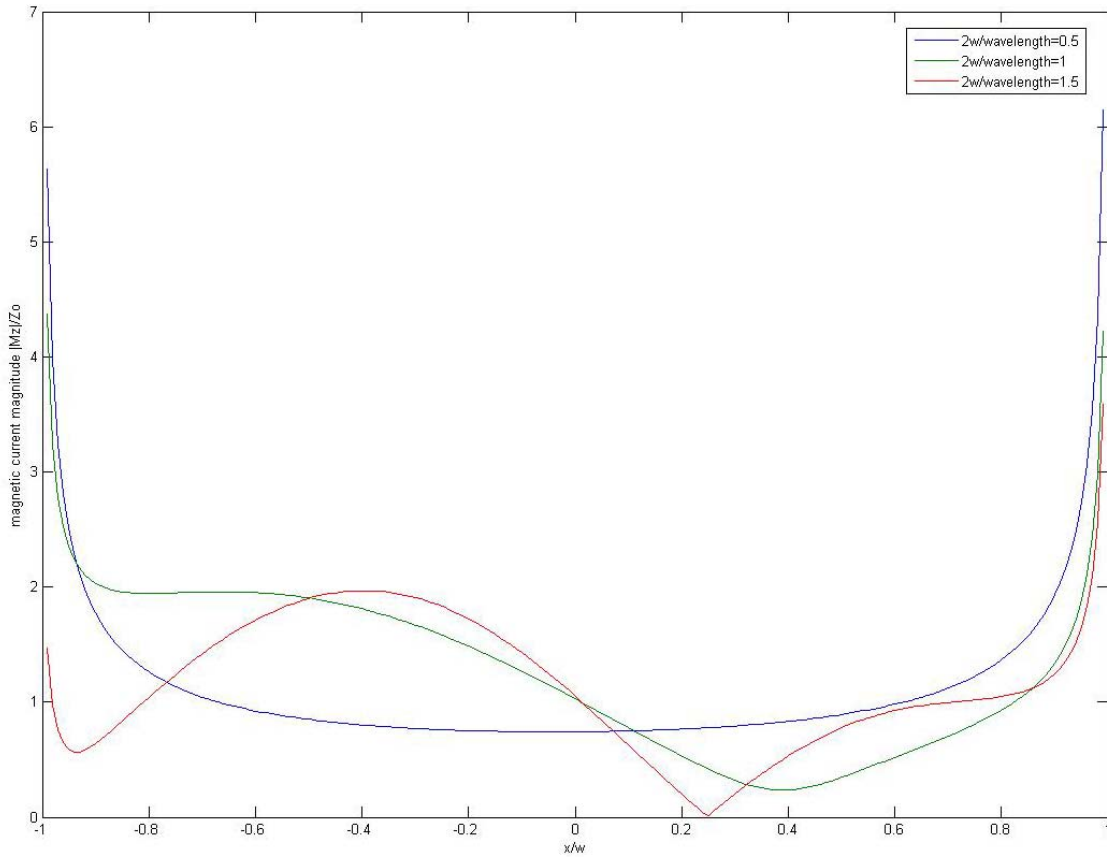


Σχήμα 11α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 145° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

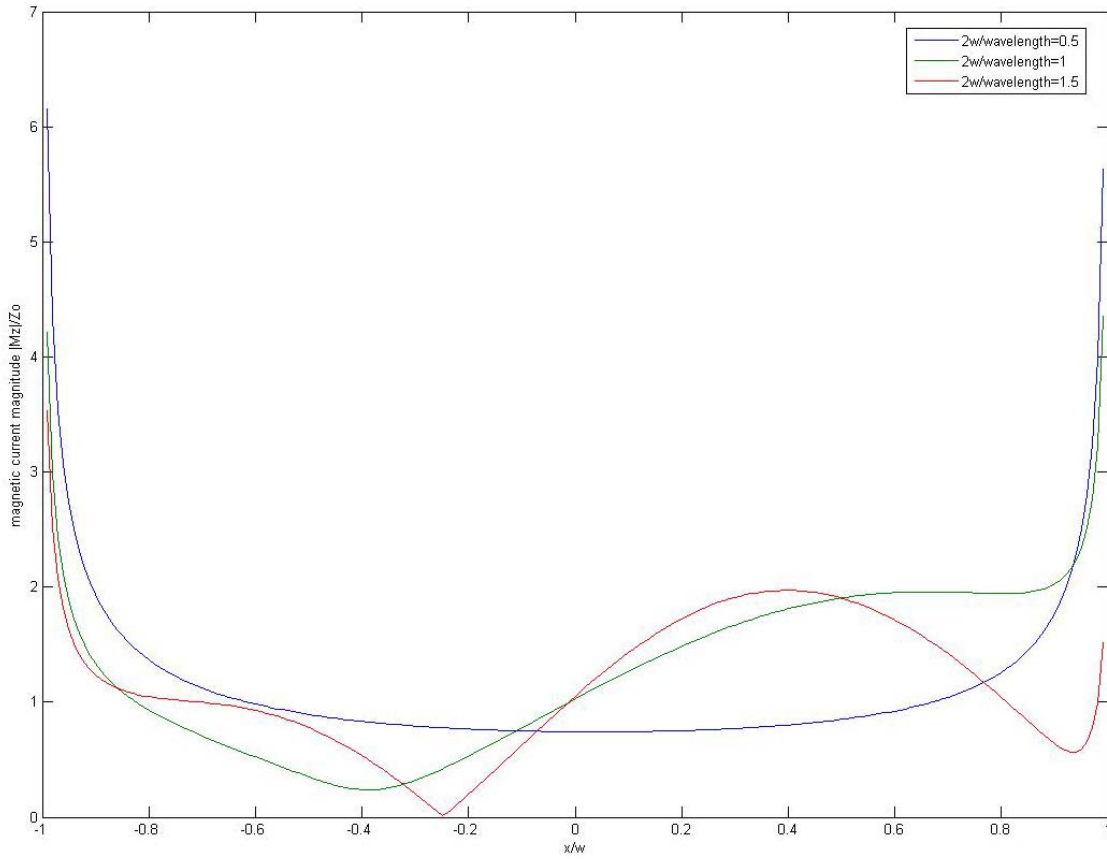


Σχήμα 11β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 145° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 12α και 12β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της γωνίας πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος (για γωνία πρόσπτωσης 60° και 120°), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 180° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.

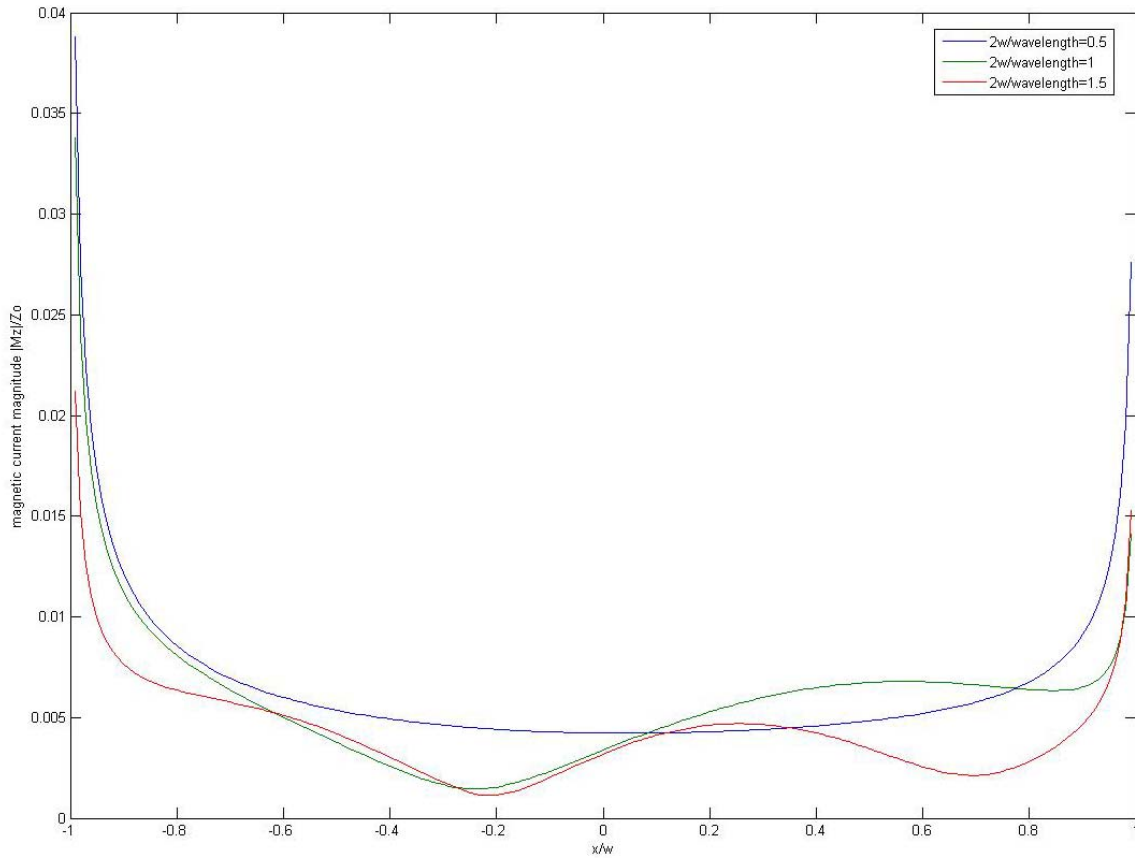


Σχήμα 12α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

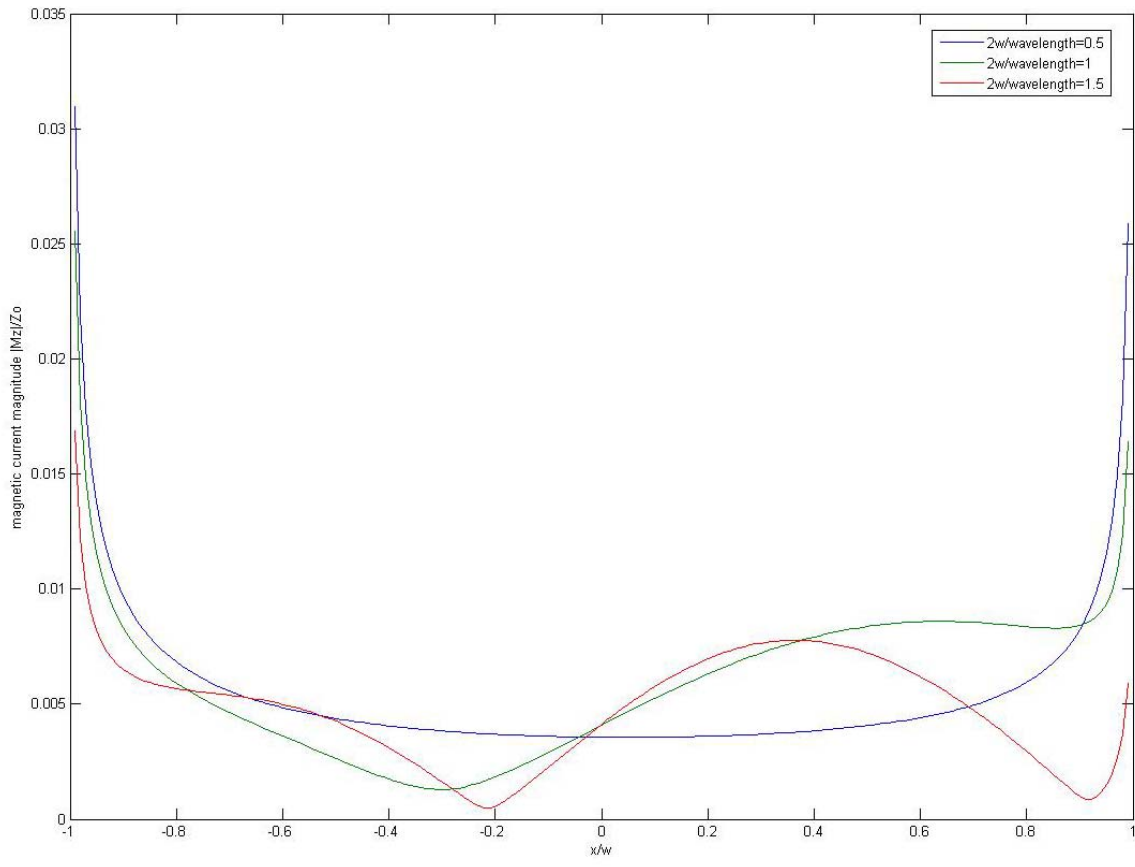


Σχήμα 12β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

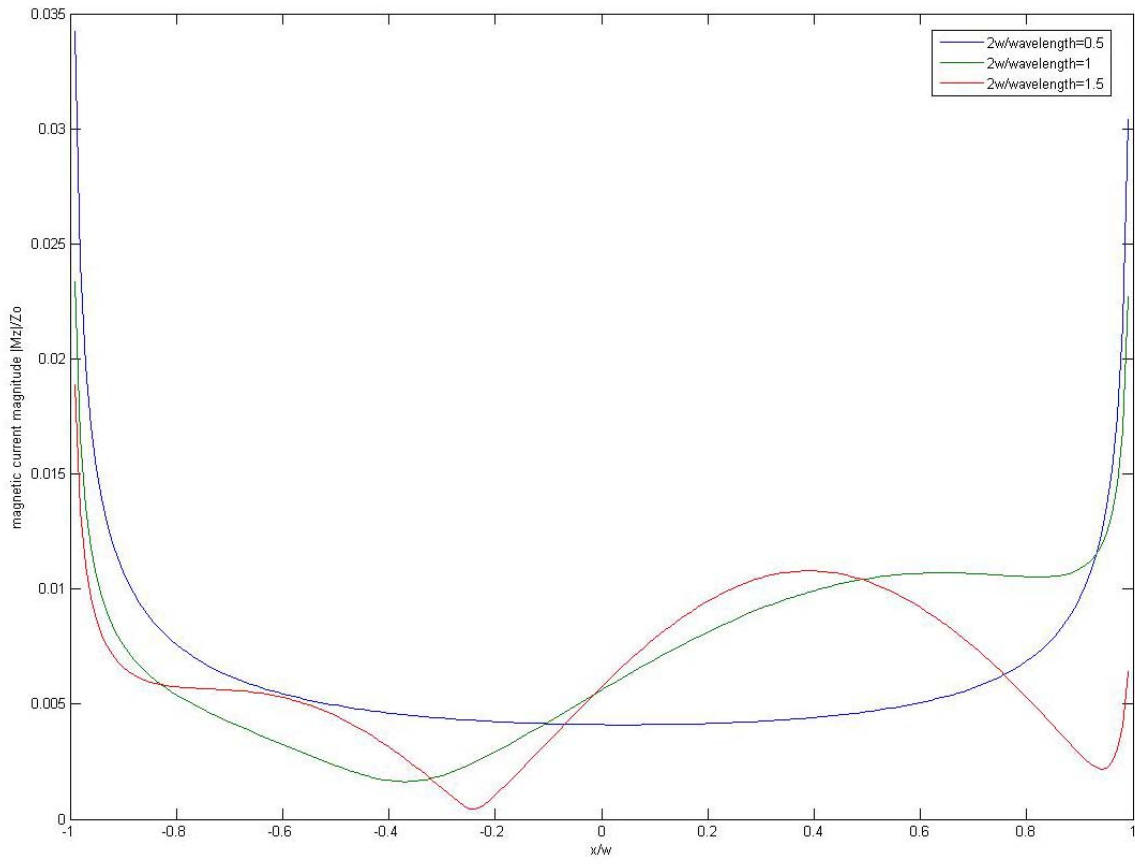
Στα σχήματα 13α, 13β, 13γ και 13δ δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της θέσης της γραμμικής μαγνητικής πηγής όταν $\epsilon_r=1$, $d=5\lambda$, $a=3\lambda$ $f=3\text{GHz}$.



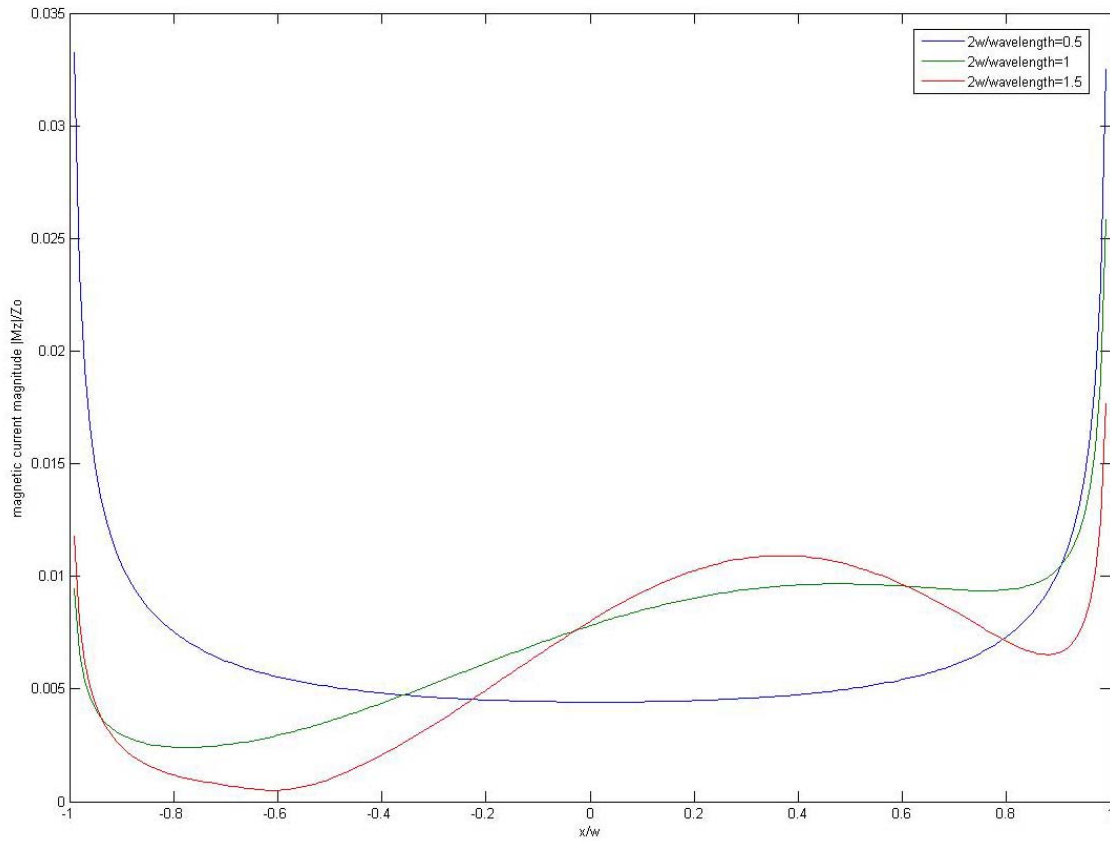
Σχήμα 13α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 180° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=0$, $y_s=3\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)



Σχήμα 13β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας=180°, θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=0, y_s=6\lambda$), $d=5\lambda, a=3\lambda, f=3\text{GHz}$)

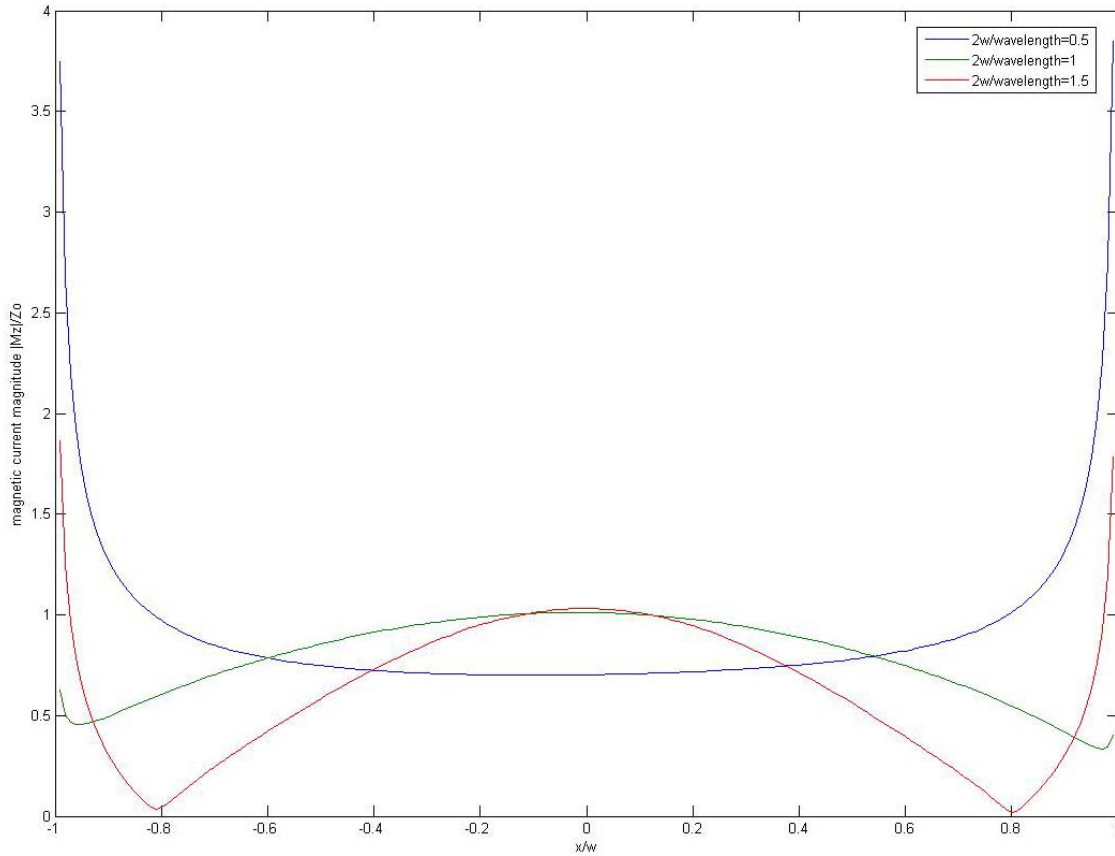


Σχήμα 13γ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 180° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=2\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

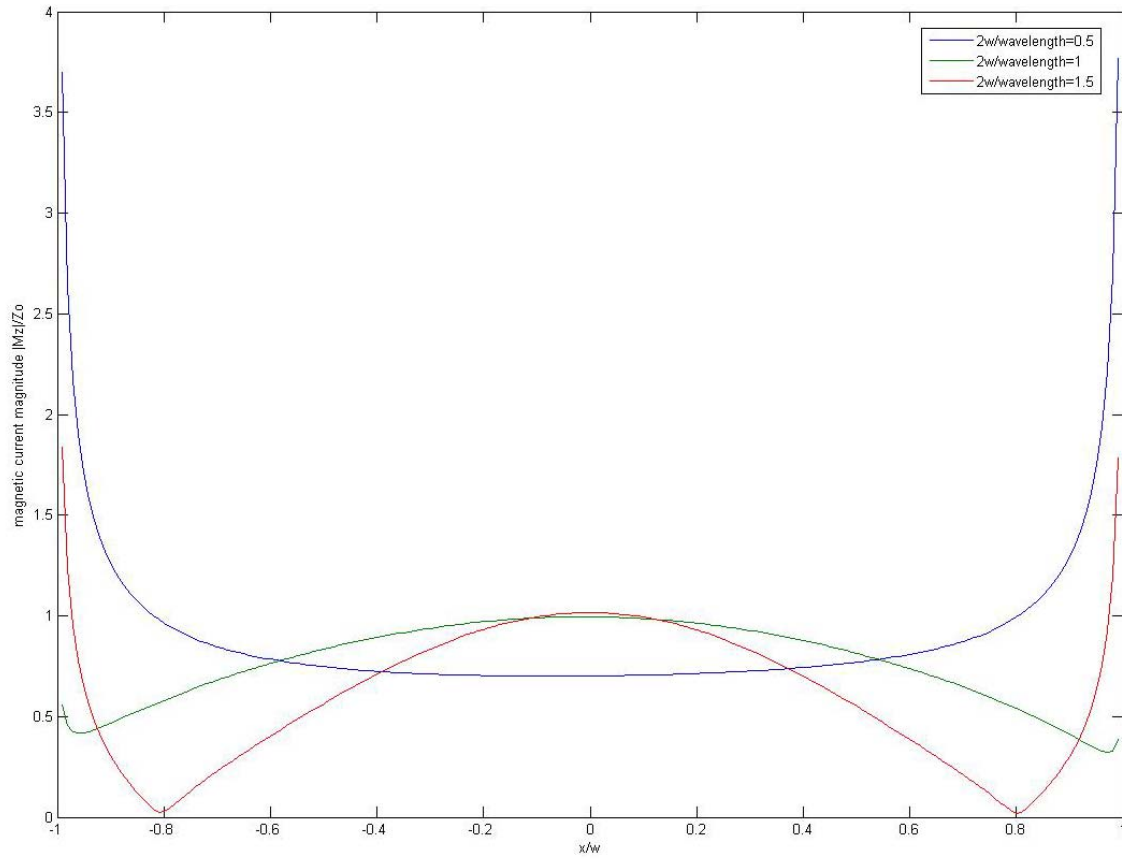


Σχήμα 13δ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 180° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=4\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

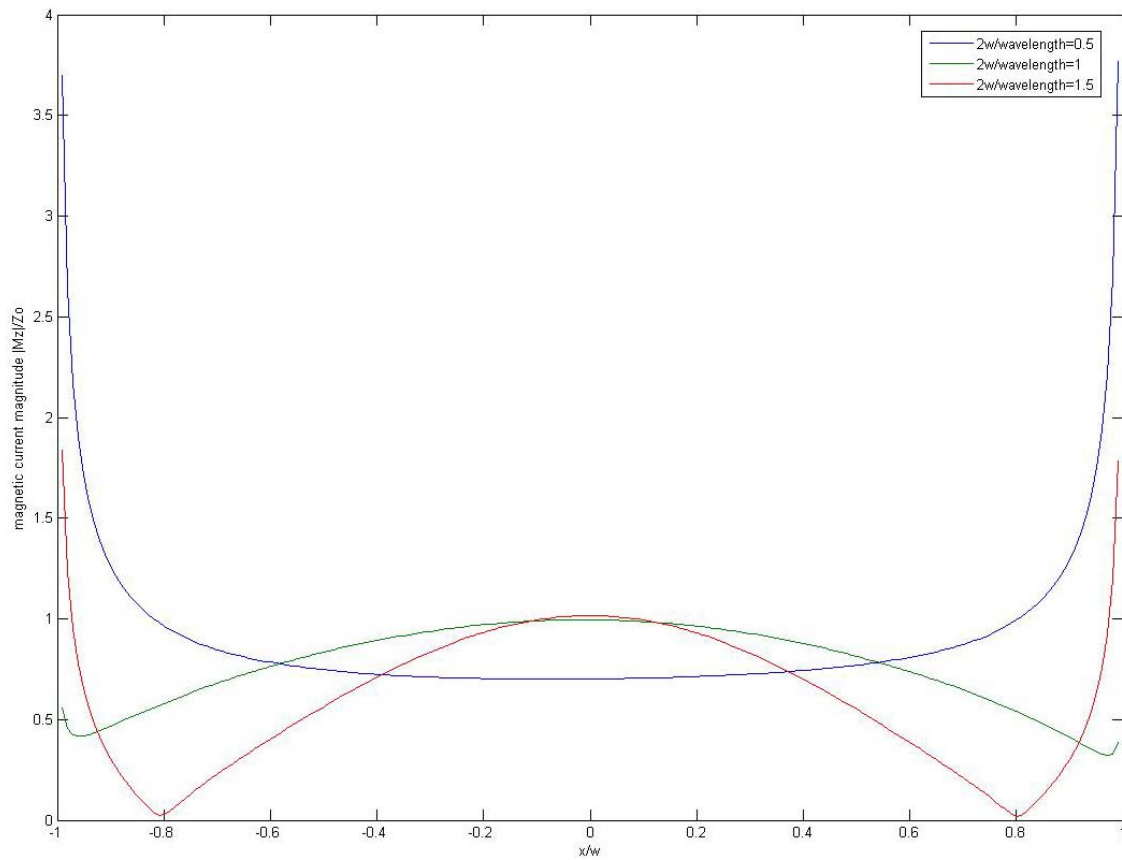
Στα σχήματα 14α και 14β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής του d (για $d=3\lambda$ και 5λ), όταν $\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.



Σχήμα 14α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=3\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

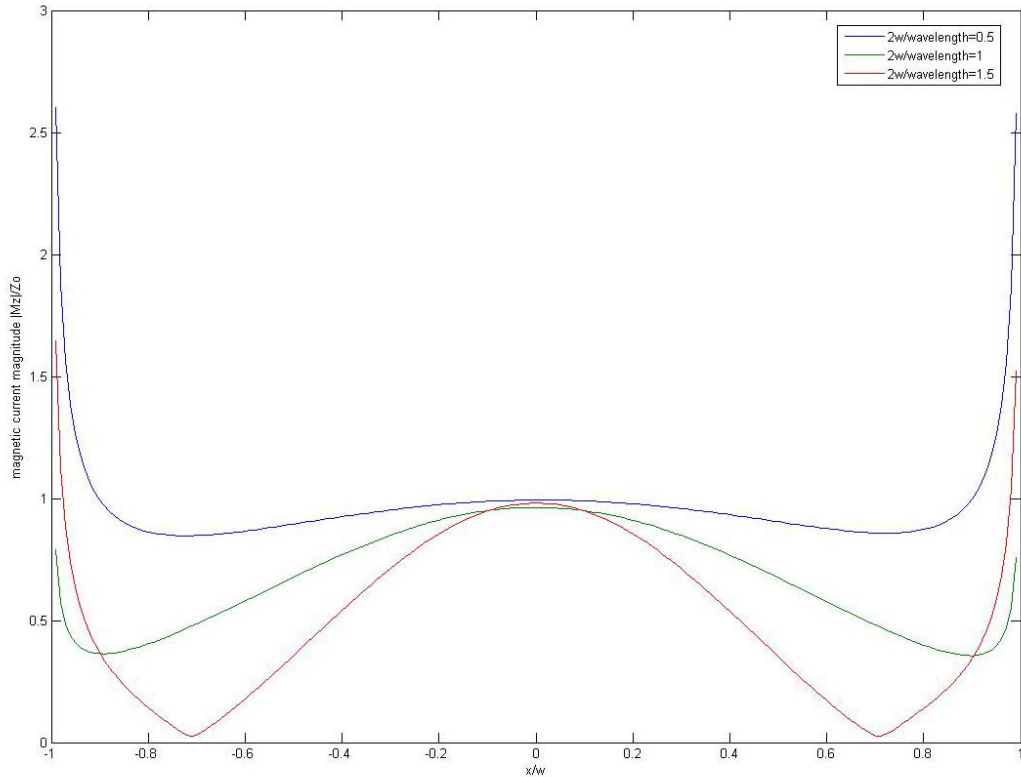


Σχήμα 14β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 60° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)



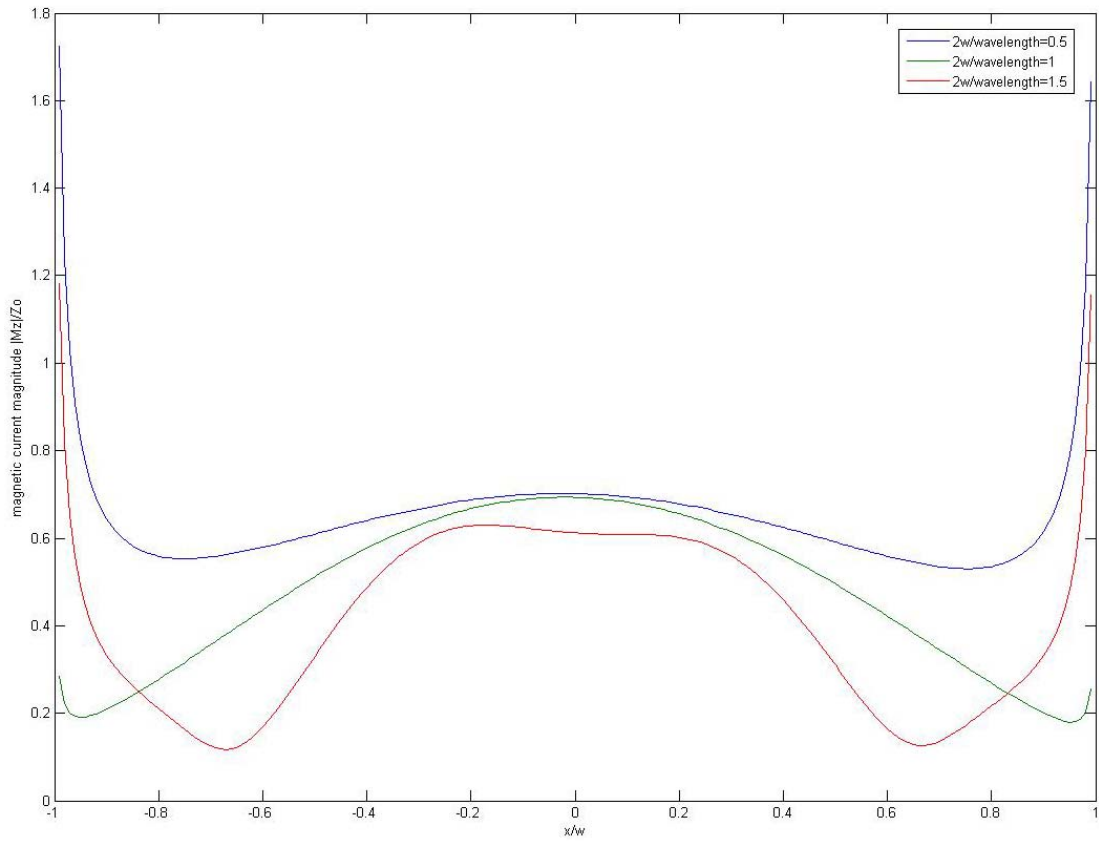
Σχήμα 15: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 16 και 17 δείχνουμε την επίδραση που προκαλεί η μεταβολή του διηλεκτρικού της κοιλότητας (για $\epsilon_r=2$ και $\epsilon_r=4$) όταν άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$.



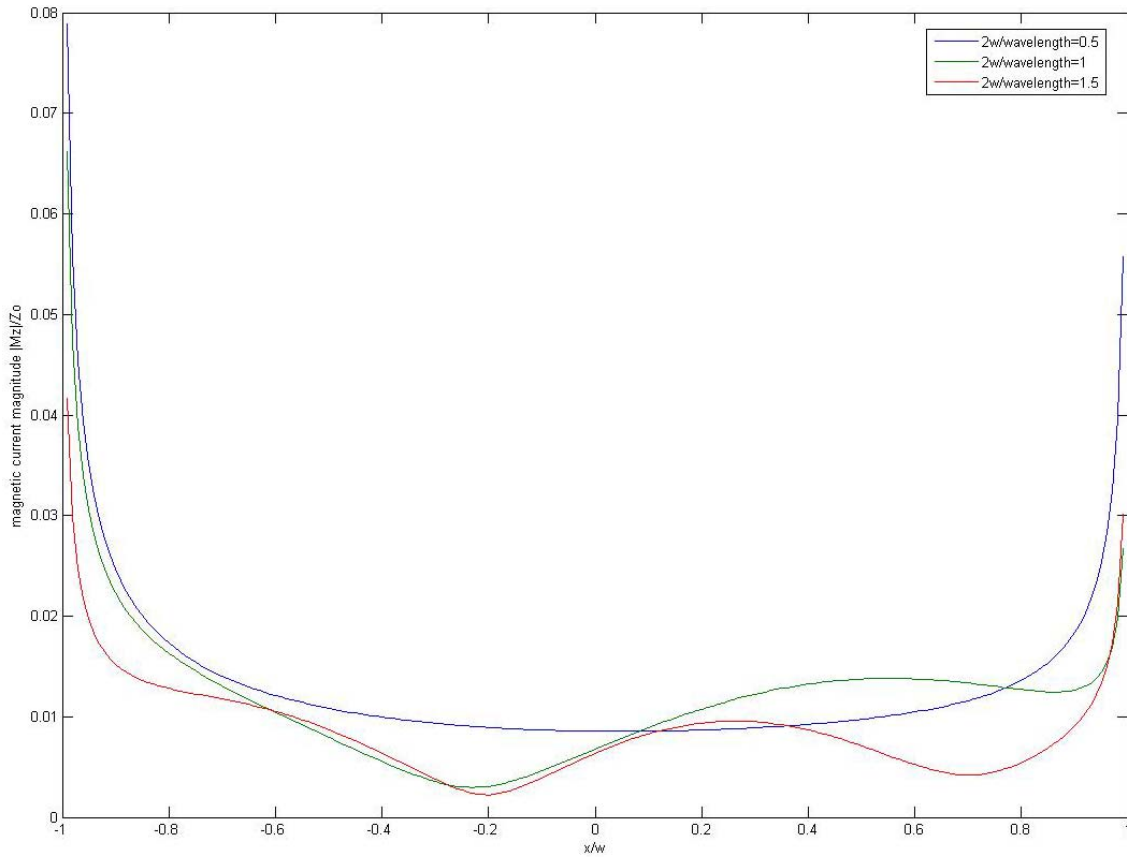
Σχήμα 16: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=2$, άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

6

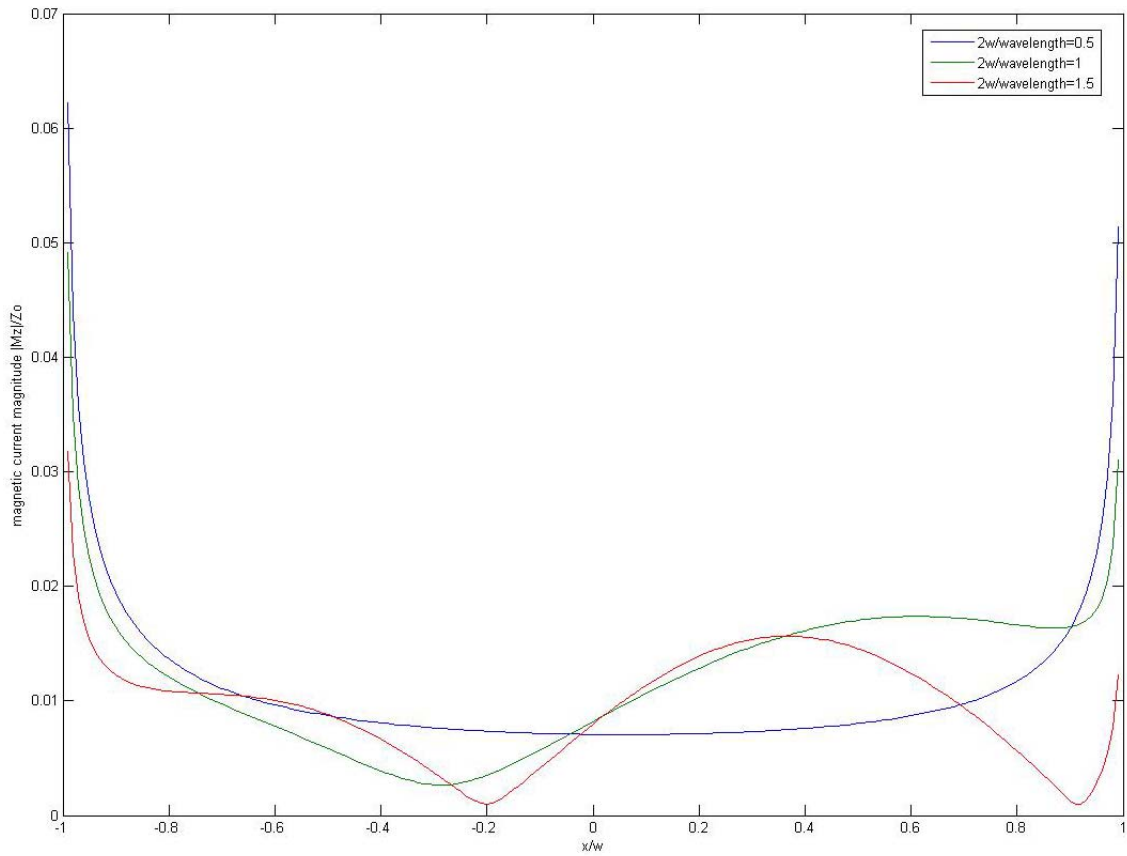


Σχήμα 17: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=4$, άνοιγμα σφήνας= 270° , γωνία πρόσπτωσης επιπέδου κύματος= 120° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

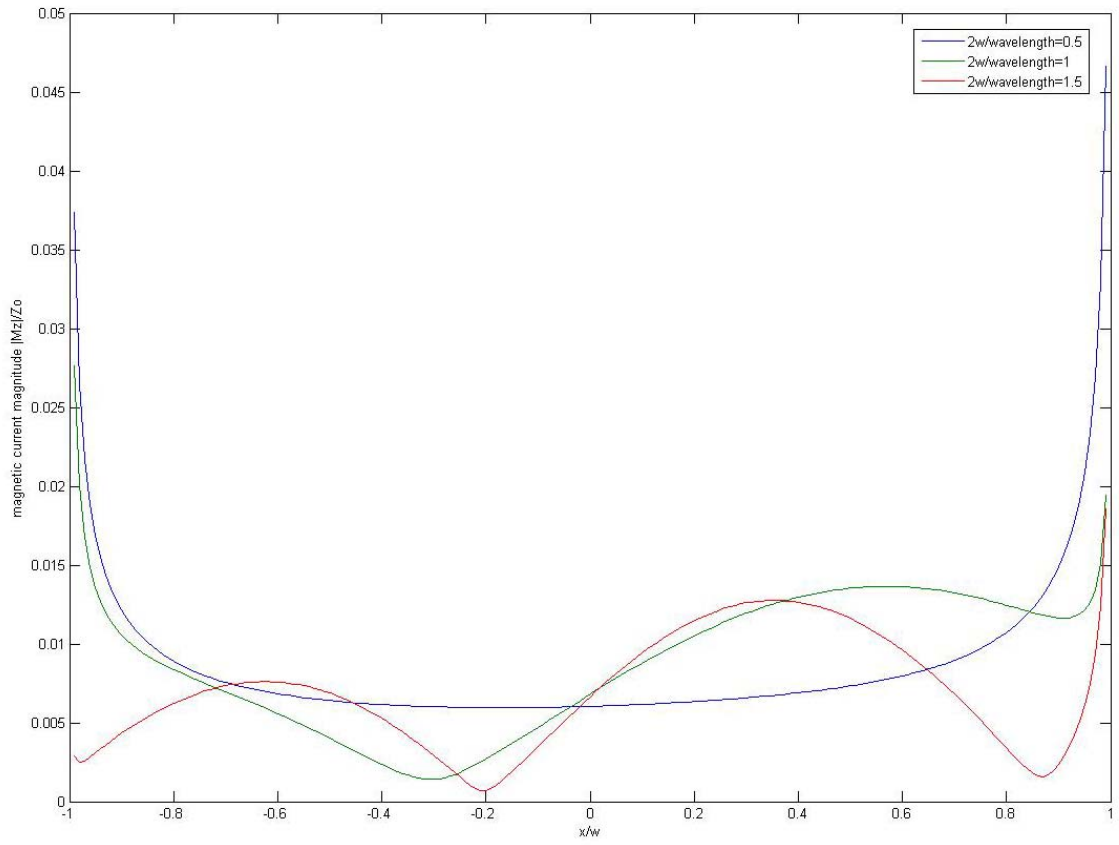
Στα σχήματα 18α, 18β, 18γ και 18δ δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της θέσης της γραμμικής μαγνητικής πηγής όταν $\epsilon_r=1$, $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$ $f=3\text{GHz}$.



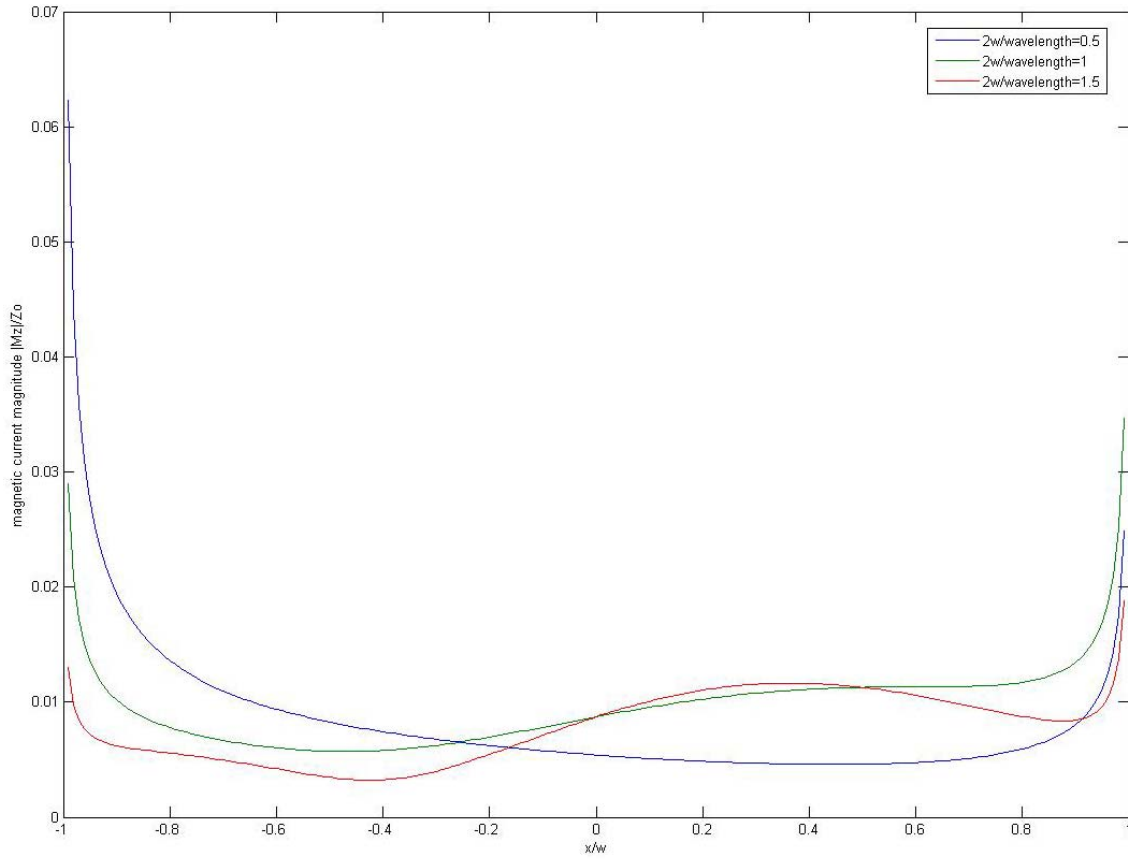
Σχήμα 18α: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=0$, $y_s=3\lambda$), $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)



Σχήμα 18β: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=0, y_s=6\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

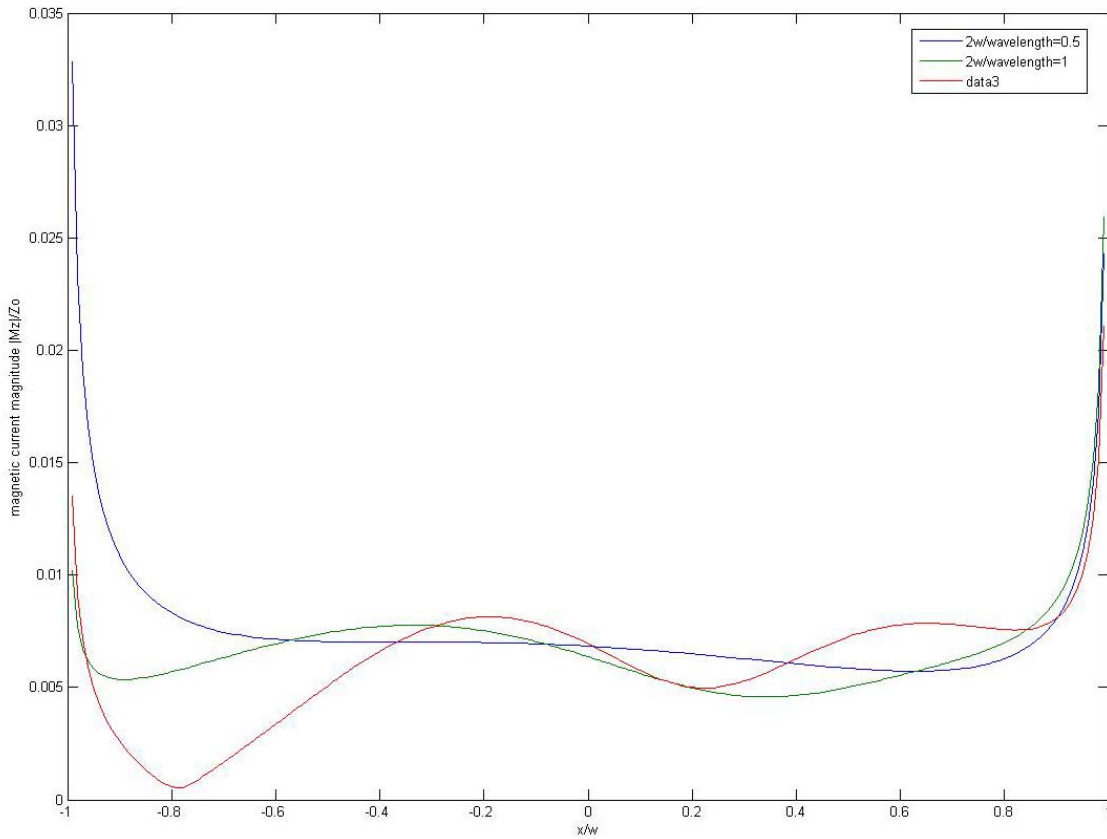


Σχήμα 18γ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=2\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

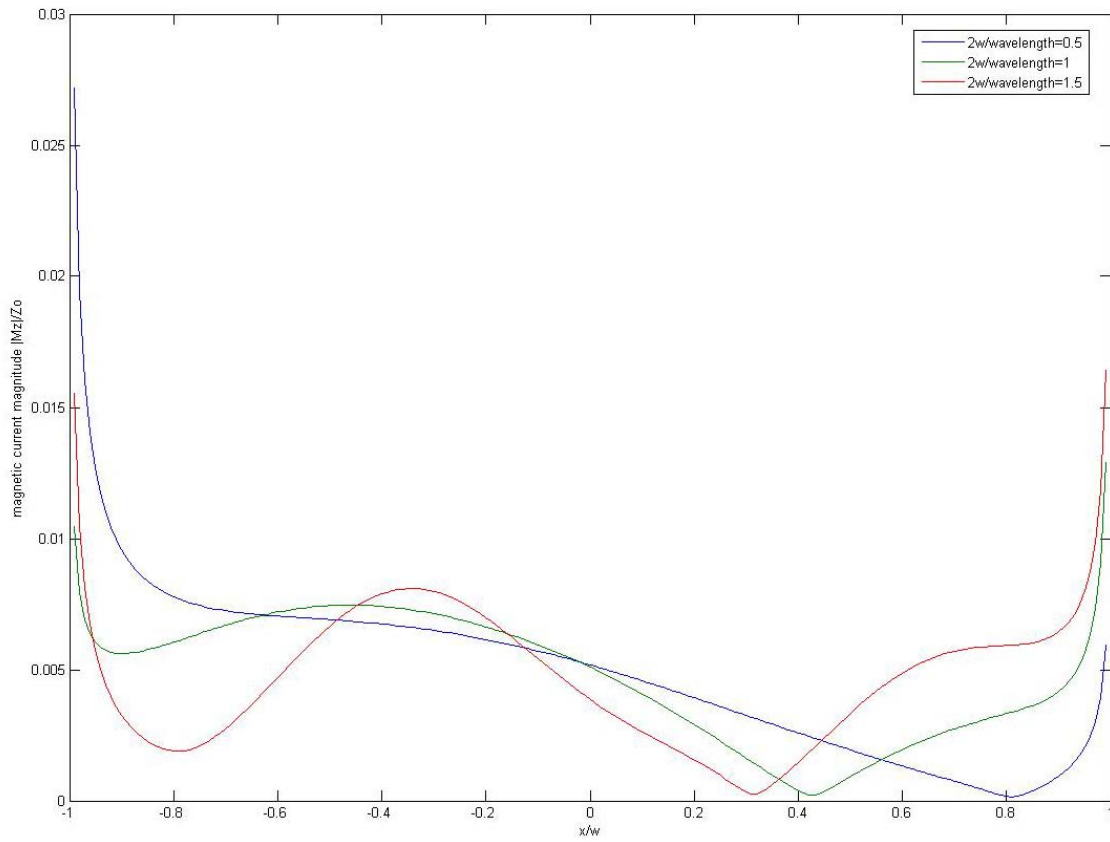


Σχήμα 18δ: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=1$, άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=4\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

Στα σχήματα 19 και 20 δείχνουμε την επίδραση που προκαλεί η μεταβολή του διηλεκτρικού της κοιλότητας. (για $\epsilon_r=2$ και $\epsilon_r=4$), όταν άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=4\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$



Σχήμα 19: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=2$, άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=4\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

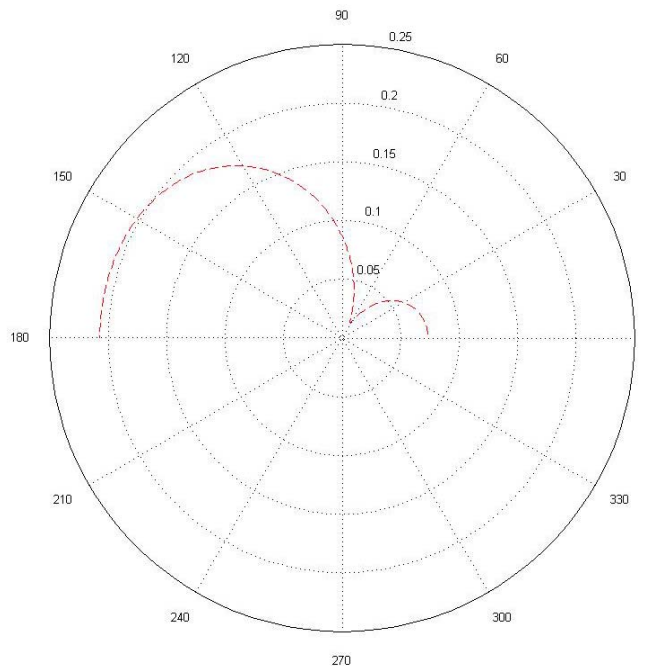


Σχήμα 20: Κατανομή κανονικοποιημένου μέτρου μαγνητικού ρεύματος κατά μήκος της σχισμής ($\epsilon_r=4$, άνοιγμα σφήνας= 270° , θέση γραμμικής μαγνητικής πηγής στο χώρο ($x_s=4\lambda$, $y_s=5\lambda$), $d=5\lambda$, $a=3\lambda$, $f=3\text{GHz}$)

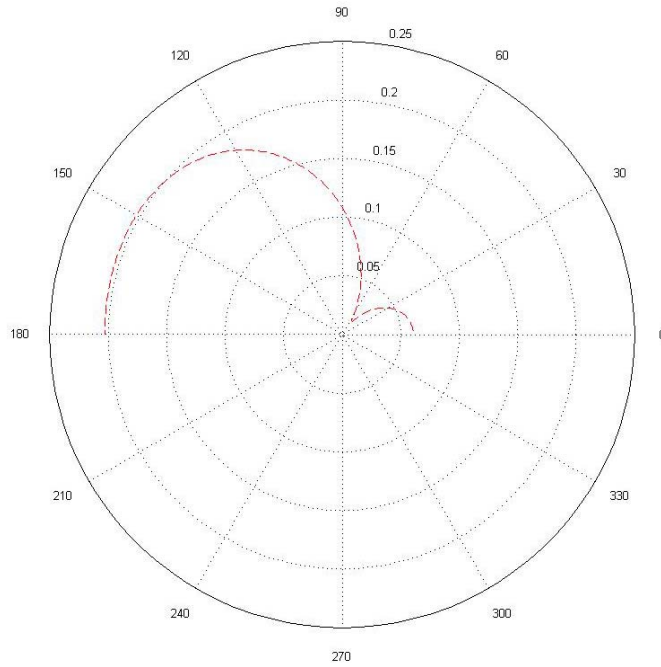
Στα σχήματα 21 έως 23 παριστάνεται το διάγραμμα ακτινοβολίας. Για το διάγραμμα ακτινοβολίας πήραμε την απόλυτη τιμή του μεγέθους $\frac{w\pi}{L} \sum_{n=1}^L M(t_n)G(\phi)$, όπου $G(\phi) = -\sqrt{\frac{2j}{\pi k}} \frac{\omega \varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^m J_m[k(d + wt_n)] \cos(m\phi)$ (3.2.1)

Θα μεταβάλλουμε τα w , d και τη γωνία πρόσπτωσης του επιπέδου κύματος. Με την αλλαγή των χαρακτηριστικών αυτών μπορούμε να επεμβαίνουμε στη μορφή και τα χαρακτηριστικά του διαγράμματος ακτινοβολίας. Στα παρακάτω σχήματα θα δούμε να μεταβάλλεται ο αριθμός των λοβών ακτινοβολίας και το εύρος των λοβών ακτινοβολίας.

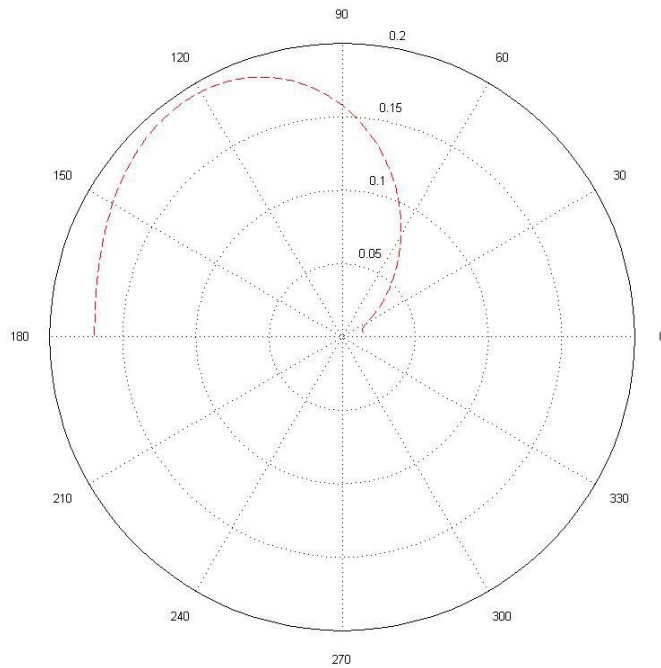
Στα σχήματα 21α, 21β, 21γ, 21δ, 21ε και 21στ δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής της γωνίας πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος (για γωνία πρόσπτωσης 0° , 30° , 60° , 90° , 120° και 150°), όταν $\varepsilon_r=1$, $w=0.25\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$



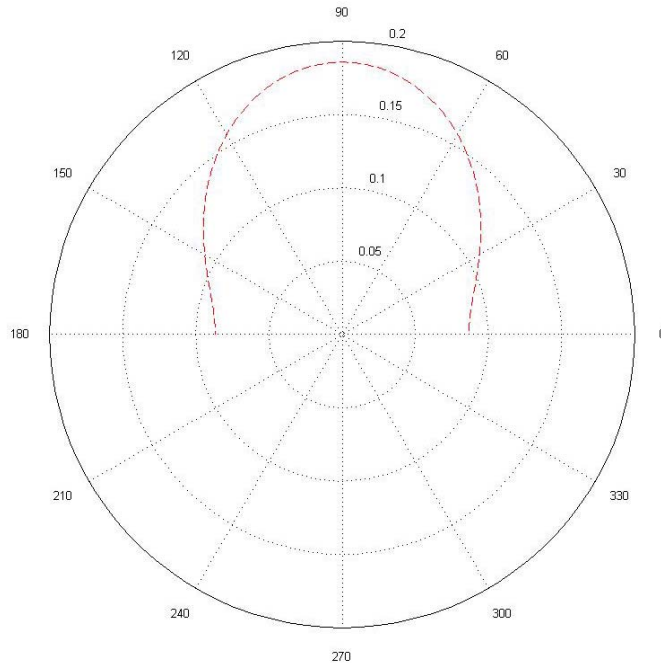
Σχήμα 21(α): $w=0.25\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 0° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$



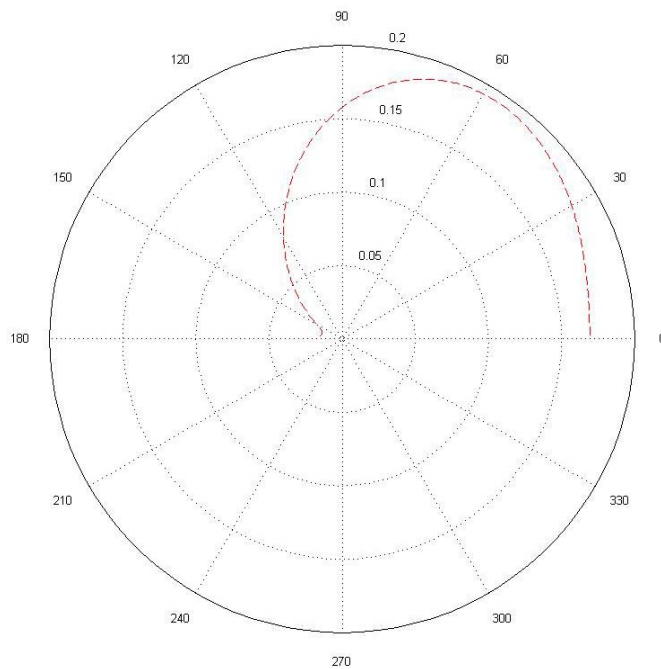
Σχήμα 21(β) $w=0.25\lambda$, $\text{άνοιγμα σφήνας}=180^\circ$, $\text{γωνία πρόσπτωσης}=30^\circ$, $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$



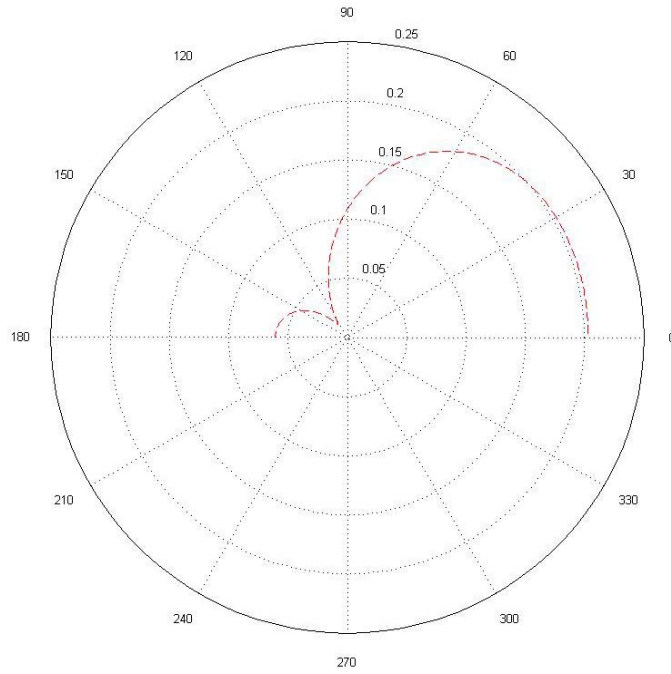
Σχήμα 21(γ) $w=0.25\lambda$, $\text{άνοιγμα σφήνας}=180^\circ$, $\text{γωνία πρόσπτωσης}=60^\circ$, $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$



Σχήμα 21(δ) $w=0.25\lambda$, $\text{άνοιγμα σφήνας}=180^\circ$, $\text{γωνία πρόσπτωσης}=90^\circ$, $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$

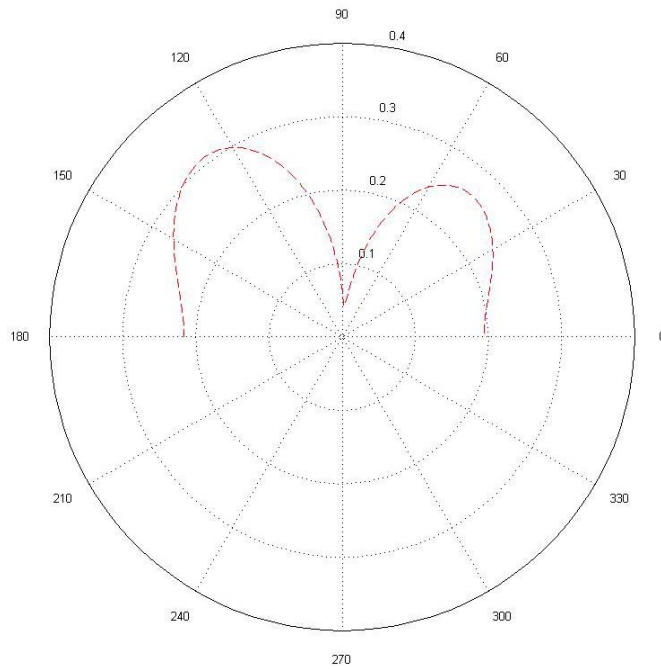


Σχήμα 21(ε) $w=0.25\lambda$, $\text{άνοιγμα σφήνας}=180^\circ$, $\text{γωνία πρόσπτωσης}=120^\circ$, $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$

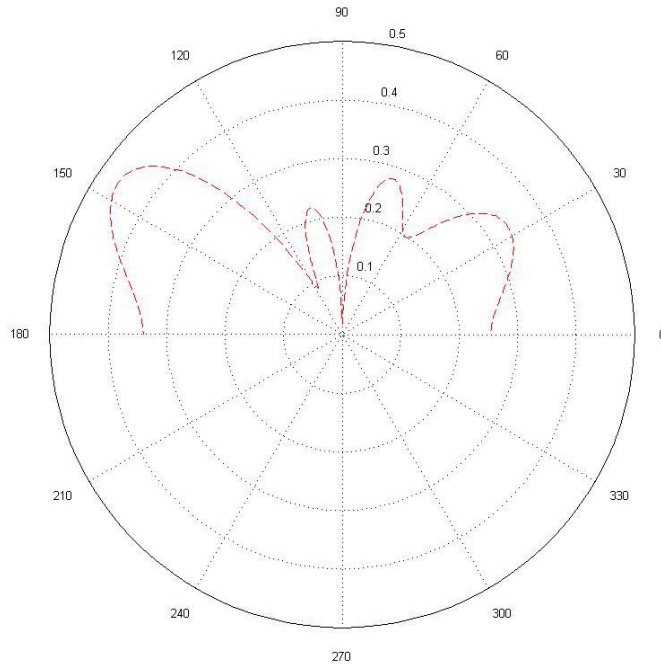


Σχήμα 21(στ) $w=0.25\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 150° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$

Στα σχήματα 22α και 22β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής του w (για $w=0.5\lambda$ και $w=\lambda$) όταν άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 30° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$.

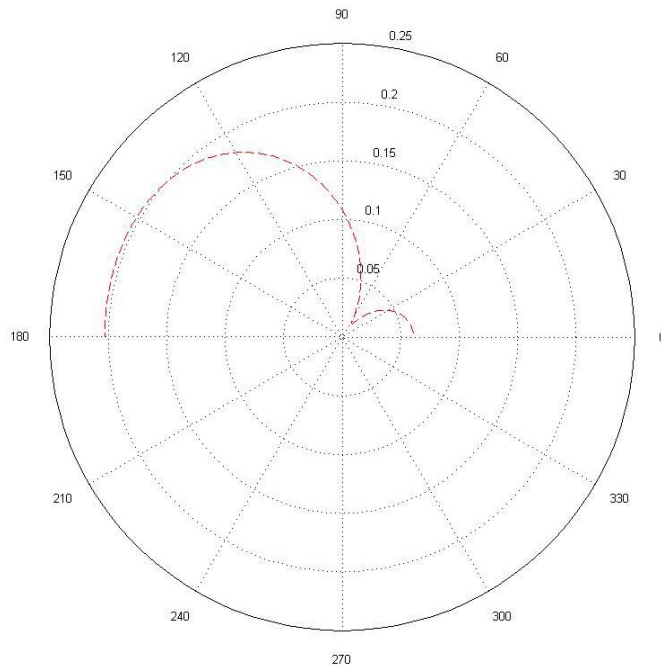


Σχήμα 22(α) $w=0.5\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 30° , $d=5\lambda$, $\alpha=3\lambda$.

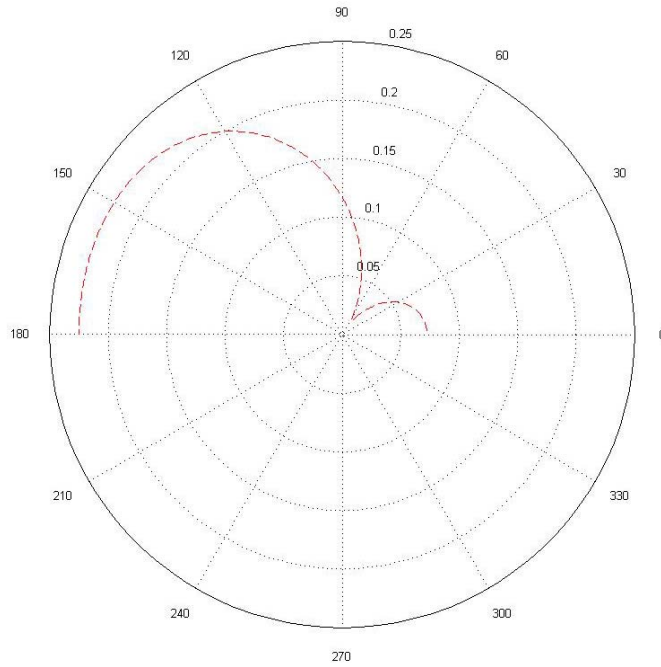


Σχήμα 22(β) $\underline{w}=\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 30° , $d=5\lambda$, $a=3\lambda$

Στα σχήματα 23α και 23β δείχνουμε την επίδραση της μεταβολής του d (για $d=3\lambda$ και 9λ), όταν $w=0.25\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 30° , $a=3\lambda$



Σχήμα 23(α) $w=0.25\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 30° , $\underline{d}=3\lambda$, $a=3\lambda$



Σχήμα 23(β) $w=0.25\lambda$, άνοιγμα σφήνας= 180° , γωνία πρόσπτωσης= 30° , $d=9\lambda$, $a=3\lambda$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α : Απόδειξη της σχέσης (2.6.9) [5]

Θα αποδείξουμε τη σχέση (2.6.9).

$$\text{Είναι } M(t) \approx \sum_{N=0}^{L-1} a_N T_N(t). \quad (\text{A.1})$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (B.1) με $\frac{T_M(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ και ολοκληρώνουμε από $t=-1$ έως $t=1$.

$$\int_{-1}^1 M(t) \frac{T_M(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{N=0}^{L-1} a_N \int_{-1}^1 T_N(t) \frac{T_M(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\text{A.2})$$

Το αριστερό μέλος θα προκύψει από τον τύπο του Lobatto, ενώ το δεξί μέλος από τη συνθήκη ορθογωνιότητας των πολωνύμων Chebychev.

$$\text{Ο τύπος του Lobatto δίνει: } \int_{-1}^1 M(t) \frac{T_N(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{L-1} T_N(t_n) M(t_n) \quad (\text{A.3})$$

Η συνθήκη ορθογωνιότητας των πολωνύμων Chebychev είναι η εξής :

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} T_N(t) T_M(t) dt = \begin{cases} 0, N \neq M \\ \frac{\pi}{2}, N \neq 0, N = M \\ \pi, N = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Συνεπώς

$$\frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^{L-1} T_N(t_n) M(t_n) = \sum_{N=0}^{L-1} a_N \frac{\pi}{\hat{\varepsilon}_N}, \text{ όπου } \hat{\varepsilon}_N = 2 - \delta_{N0} \quad (\text{A.5})$$

Αρα

$$a_N = \frac{\hat{\varepsilon}_N}{L} \sum_{n=1}^{L-1} T_N(t_n) M(t_n) \quad (\text{A.6})$$

- [1] C.A. Balanis, “Advanced Engineering Electromagnetics” Wiley, 1989
- [2] A. Ishimaru, “Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering”
Prentice Hall, 1991
- [3] M. Abramowitz and I.A. Stegun, “Handbook of Mathematical Functions”, New York:
Dover, 1972
- [4] Felsen and Marcuvitz, “Radiation and Scattering of Waves”, IEEE Press
- [5] J.L. Tsalamengas, “Exponentially Converging Nyström’s Methods for Systems of
Singular Integral Equations With Applications to Open/Closed Strip- or Slot-Loaded 2-D
Structures”, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. 54, pp.1549-1558, May 2006
- [6] J.L. Tsalamengas, “TE/TM electromagnetic scattering by a slot on a ground plane and
in the presence of a semi-cylindrical load”, Journal of Electromagnetic Waves and
Applications, vol. 8, pp 613-646, 1994
- [7] A. Borgioli, R. Coccioli, G. Pelosi, J.L. Volakis, “Electromagnetic Scattering from a
Corrugated Wedge”, IEEE Trans. Antennas Propagat., vol.45, pp 1265-1269,
August 1997
- [8] G. Pelosi, R. Coccioli, G. Manara, A. Monorchio, “ Scattering from a wedge with
cavity backed apertures in its faces and related configurations: TE case”, Proc.
Inst. Elect. Eng., vol. 142, pp 183-188, April 1995

[9] R.G. Kouyoumjian and P.H. Pathak, "A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface", Proc IEEE, vol. 62, pp. 1448-1461, November 1974