ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ & ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΤΟΥ SHANNON

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΠΑΠΑΚΟΥ

Επιβλέπων: Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

Αθήνα – Ιούλιος 2006

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ &
ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ ΤΟΥ SHANNON

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Α. ΠΑΠΑΚΟΥ

Επιβλέπων: Ι. ΣΑΡΑΝΤΟΠΟΥΛΟΣ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 24η Ιουλίου 2006

Ι. Σαραντόπουλος	Π. Μαραγκός	Ν. Μαράτος
....	....	....
Αν. Καθηγητής	Καθηγητής	Καθηγητής

Αθήνα , Ιούλιος 2006

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΠΑΠΑΚΟΣ

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου στον κ Ι. Σαραντόπουλο αναπληρωτή καθηγητή της Σχολής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών του ΕΜΠ για την ανάθεση του θέματος, την παροχή επαρκούς υλικού σχετικό με το θέμα καθώς και την ανάγνωση και διόρθωση της παρούσας εργασίας .

Επίσης ευχαριστώ τον Β. Αναγνωστόπουλο ηλεκτρολόγο μηχανικό και υποψήφιο διδάκτορα στον κ Ι. Σαραντόπουλο για την άμεση βοήθειά του και την χρήσιμη καθοδήγησή του.

Τέλος ευχαριστώ τους καθηγητές της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του ΕΜΠ Π. Μαραγκό και Ν. Μαράτο για την την προθυμία τους να μετέχουν στην εξεταστική επιτροπή.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ABSTRACT

Almost periodic functions is an important chapter in modern analysis due to the many applications to sampling and digital signal processing. In this work we attempt to introduce the ideas and concepts behind the theory and bring together some of the most important theorems that build the theory. A general introduction to almost periodic functions and how they are related to regular periodic functions kicks off the discussion. We describe in the first chapter the main features of the theory and the important mean value theorem. In the second chapter, we discuss some applications of almost periodic functions, especially to sampling theory. Chapter three consists entirely of the Hausdorff-Young theorem. We present all the steps that lead to this important theorem and a proof of the theorem itself. Finally in the last chapter we prove at the same time two theorems: Plancherel's theorem and Shannon's sampling theorem.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις είναι ένα σημαντικό κεφάλαιο της μοντέρνας ανάλυσης κυρίως λόγω της μεγάλης εφαρμογής που βρίσκει στη δειγματοληψία και την ψηφιακή επεξεργασία σήματος. Σ' αυτήν την εργασία προσπαθούμε να εισάγουμε τον αναγνώστη στις βασικές ιδέες και έννοιες πίσω από τη θεωρία και να διατυπώσουμε μερικά από τα πιο σημαντικά θεωρήματα που την αποτελούν. Η συζήτηση μας ξεκινάει από μία γενική εισαγωγή στις σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις και τη συνέχειά τους από τις κλασσικές περιοδικές συναρτήσεις. Περιγράφουμε στο πρώτο κεφάλαιο τις κύριες ιδιότητές τους και το σημαντικό θεώρημα ύπαρξης της μέσης τιμής αυτών. Στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζουμε κάποιες εφαρμογές των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων, κυρίως στη δειγματοληψία. Το κεφάλαιο 3 αποτελείται εξ' ολοκλήρου από το θεώρημα των Hausdorff-Young. Δείχνουμε όλα τα βήματα που οδηγούν σ' αυτό και παρουσιάζουμε αναλυτικά την απόδειξή του. Τέλος, στο τέταρτο κεφάλαιο αποδεικνύουμε ταυτόχρονα δύο θεωρήματα: το θεώρημα Plancherel και το θεώρημα δειγματοληψίας του Shannon.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πριν ξεκινήσουμε με τη γενική θεωρία των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων είναι χρήσιμο να κάνουμε μια εισαγωγή στις σχετικές έννοιες ξεκινώντας από τις περιοδικές συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει μια εκτεταμένη θεωρία. Ας ξεκινήσουμε με ένα απλό και διαφωτιστικό παράδειγμα από τη φυσική. Θεωρούμε, λοιπόν, μια γενική περιοδική κίνηση στο επίπεδο. Αν συμβολίσουμε με t το χρόνο και $w=u+iv$ τα σημεία του επιπέδου που χαρακτηρίζουν την κίνηση, τότε αυτή θα γράφεται:

$$w=w(t)=u(t)+iv(t)$$

όπου $w(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του $t,\ t\in\mathbb{R}$ και περιοδική με περίοδο p . Αυτή η κίνηση εν γένει μπορεί να είναι πολύ περίπλοκη. Από όλες τις δυνατές κινήσεις η πιο απλή είναι αυτή σε κύκλο. Αυτή η κίνηση περιγράφεται από την εξίσωση:

$$w=a e^{i\lambda t}$$

όπου a είναι μια μιγαδική σταθερά και λ πραγματικός αριθμός. Έστω ότι $a=re^{i\theta}$. Τότε r είναι η ακτίνα του κύκλου και το λ αντιπροσωπεύει τη γωνιακή ταχύτητα, οπότε η περίοδος είναι $p=2\pi/|\lambda|$, και θ είναι η φάση. Αυτό το είδος κίνησης θα το ονομάσουμε καθαρή ταλάντωση. Θα θεωρήσουμε τώρα καθαρές ταλαντώσεις που έχουν ένα συγκεκριμένο αριθμό p για περίοδο. Αν για απλότητα διαλέξουμε $p=2\pi$, η κυκλική κίνηση θα είναι $a_n e^{int}$, όπου n ένας αυθαίρετος ακέραιος και a_n μιγαδική σταθερά. Συνδυάζοντας ένα αυθαίρετο πεπερασμένο αριθμό τέτοιων περιοδικών κινήσεων με περίοδο 2π , π.χ.

$$s(t)=a_0+a_1 e^{it}+a_{-1}e^{-it}+\cdots+a_n e^{int}+a_{-n}e^{-int}$$

παίρνουμε πάλι μια συνεχή περιοδική κίνηση περιόδου 2π η οποία μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη. Κάθε κίνηση που περιγράφεται με αυτόν το τρόπο θα λέμε ότι αναλύεται σε αρμονικές καθαρές ταλαντώσεις. Θα επεκτείνουμε αυτή την έννοια ώστε να συμπεριλάβει όχι μόνο πεπερασμένο αλλά και άπειρο αριθμό ταλαντώσεων. Με άλλα λόγια θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε και μια μορφή ορίου. Έτσι γενικά θα λέμε ότι μια συνάρτηση $w(t)$ μπορεί να αναλυθεί σε αρμονικές ταλαντώσεις, αν η συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί σαν ένα ομοιόμορφο όριο πεπερασμένων αθροισμάτων. Έτσι το σημαντικό ερώτημα είναι: ποιές συνεχείς περιοδικές κινήσεις μπορούν να αναλυθούν σε ομοιόμορφες κυκλικές ταλαντώσεις. Το πρόβλημα αυτό λύθηκε από τον Weierstrass, ο οποίος έδειξε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση με περίοδο 2π μπορεί να αναλυθεί με αυτό το τρόπο. 'Ενα άλλο ερώτημα είναι το πως βρίσκουμε τους συντελεστές αυτής της ανάλυσης, που παριστάνουν την ένταση και τη φάση της κάθε ταλάντωσης. Αυτοί υπολογίζονται σύμφωνα με τη γνωστή διαδικασία των συντελεστών Fourier. 'Ετσι ο n-οστός συντελεστής Fourier είναι

$$A_n = M\{w(t)e^{-int}\}$$

όπου M είναι η μέση τιμή

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(t)e^{-int}dt$$

Υπάρχει και ένας άλλος τρόπος όμως , με τον οποίο μπορούμε να φτάσουμε αμέσως σε αυτή την έκφραση. Γράφουμε το $w(t)$ σαν μία άπειρη σειρά

$$w(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{int}$$

και θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι συναρτήσεις e^{int} αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα με την έννοια ότι για δύο συναρτήσεις $\varphi(t)=e^{in_1t}$ και $\psi(t)=e^{in_2t}$ ισχύει:

$$M\{\varphi(t)\overline{\psi}(t)\} = M\{e^{in_1t}e^{-in_2t}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \alpha\nu & n_1 \neq n_2 \\ 1 & \alpha\nu & n_1 = n_2 \end{Bmatrix} \quad .$$

Τότε, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη της σειράς με e^{-int} και ολοκληρώνοντας κάθε όρο παίρνουμε την ίδια έκφραση με την παραπάνω για τους συντελεστές A_n . Από το γεγονός ότι είναι δυνατό από τη σειρά Fourier να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $w(t)$ με μοναδικό τρόπο , οδηγούμαστε στο Θεώρημα Μοναδικότητας, που μας λέει ότι δύο διαφορετικές περιοδικές συναρτήσεις δε μπορούν να έχουν την ίδια σειρά Fourier.

Ας θεωρήσουμε τώρα το σύνολο των πεπερασμένων αθροισμάτων της μορφής

$$s(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n t}, \qquad -\infty < t < \infty \quad ,$$

όπου οι συντελεστές είναι αυθαίρετοι μιγαδικοί αριθμοί, ενώ τα λ_n είναι αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί, όχι όλοι πολλαπλάσια του ίδιου αριθμού. Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις.** Είναι σημαντικό να αναφέρουμε, ότι αν η (λn) είναι μία γνήσια αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών, τότε ο αριθμητικός μέσος της ακολουθίας $(e^{i\lambda_n t})$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.

Δηλαδή, $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i\lambda_n t}=0$. **Απόδειξη:** Έστω $f_N(x):=\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{i\lambda_n x}$.
Έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f_{m^2}(x)|^2 dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{m^2}\sum_{r=1}^{m^2} e^{i\lambda_r x}\cdot\frac{1}{m^2}\sum_{s=1}^{m^2} e^{-i\lambda_s x}dx=\frac{1}{m^4}\sum_{r=1}^{m^2}\sum_{s=1}^{m^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\lambda_r-\lambda_s)x}dx=\frac{1}{m^2}$$

Κατά συνέπεια

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}|f_{m^2}(x)|^2 dx=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}<\infty$$

Από το Θεώρημα Beppo-Levi (βλέπε παράρτημα) η σειρά $\sum_{m=1}^{\infty}|f_{m^2}(x)|^2$ συγκλίνει σ.π. και επομένως $\lim_{m\to\infty} f_{m^2}(x)=0$ σ.π. Έστω $m^2\leqslant N<(m+1)^2$. Έχουμε

$$\left|f_N(x)-\frac{m^2}{N}f_{m^2}(x)\right|=\frac{1}{N}\left|\sum_{n=m^2+1}^{N} e^{i\lambda_n x}\right|\leqslant\frac{N-m^2-1}{N}<\frac{(m+1)^2-m^2-1}{N}=\frac{2m}{N}\leqslant\frac{2\sqrt{N}}{N}=\frac{2}{\sqrt{N}} \quad (0.1)$$

Επειδή $m^2\leqslant N\leqslant(m+1)^2$ συνεπάγεται $1-1/N-2/\sqrt{N}<m^2/N\leqslant 1$, το $\lim_{N\to\infty} m^2/N=1$. Όμως $\lim_{m\to\infty} f_{m^2}(x)=0$ σ.π. και από την (0.1) προκύπτει ότι $\lim_{N\to\infty} f_N(x)=0$ σ.π.

Όπως και πριν, ενδιαφερόμαστε για τη συνεχή κίνηση που προσδιορίζεται από τη συνάρτηση $w=s(t)$. Μια θεμελιώδης διαφορά όμως, είναι ότι η συνολική κίνηση δεν είναι περιοδική. Κάθε όρος $a_n e^{i\lambda_n t}$ είναι περιοδική συνάρτηση, όμως γενικά όλοι οι όροι δεν έχουν μία κοινή περίοδο. Δεν είναι δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι μία συνάρτηση $w(t)$ που μπορεί να αναλυθεί σε καθαρές ταλαντώσεις, δηλ. μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από σειρά καθαρών ταλαντώσεων, είναι μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση.

Έχοντας λοιπόν υπ'οψιν αυτό το γεγονός πρέπει να βρούμε ένα τρόπο, ανάλογο με τις περιοδικές συναρτήσεις, ώστε να προσδιορίσουμε αυτούς τους συντελεστές και τους εκθέτες σε αυτή τη σειρά, δηλ. να προσδιορίσουμε τη σειρά Fourier για σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις. Η σειρά Fourier όμως σε αυτή την περίπτωση έχει τη γενική μορφή

$$\sum A_n e^{i\Lambda_n t}$$

όπου το σύνολο των εκθετών, χαρακτηριστικοί της συνάρτησης, μπορεί να είναι ένα οποιοδήποτε αριθμήσιμο σύνολο πραγματικών αριθμών, σε αντίθεση με ότι υποθέσαμε στο παράδειγμά μας. Το βασικό σημείο τώρα είναι ότι το σύνολο των καθαρών ταλαντώσεων $e^{i\lambda t}$, όπου το λ είναι πραγματικός αριθμός, σχηματίζει ένα κανονικοποιημένο ορθογώνιο σύστημα για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Έτσι η μέση τιμή για κάθε $t\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{\tau} f(t)\,dt$$

με:

$$M\{e^{i\Lambda_1 t}e^{-i\Lambda_2 t}\}=\begin{Bmatrix}0 & \alpha\nu & \Lambda_1\neq\Lambda_2\\ 1 & \alpha\nu & \Lambda_1=\Lambda_2\end{Bmatrix} \quad .$$

Έτσι γράφοντας την σχεδόν περιοδική συνάρτηση σαν άθροισμα ταλαντώσεων, δηλ.,

$$f(t)=\sum_{1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n t}$$

προσδιορίζουμε τους συντελεστές A_n, με τρόπο ανάλογο με τις περιοδικές συναρτήσεις. Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-i\Lambda t}$ και παίρνοντας τη μέση τιμή και των δύο πλευρών της εξίσωσης παίρνουμε:

$$A_n=M\{f(t)\,e^{-i\Lambda_n t}\}$$

Όμως, μια τέτοια κατασκευή, έχει μία βασική διαφορά από τις περιοδικές συναρτήσεις. Εκεί οι εκθέτες είναι γνωστοί από την αρχή. Εδώ μάς είναι άγνωστοι, αλλά μπορούμε να τους προσδιορίσουμε με τον ακόλουθο τρόπο. Για ένα τυχαίο πραγματικό λ σχηματίζουμε τη μέση τιμή

$$a(\lambda)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx \quad .$$

Για ένα δοσμένο λ, αν $a(\lambda)\neq 0$ τότε η συνάρτηση περιέχει την ταλάντωση $e^{i\lambda t}$. Αλλιώς, αν $a(\lambda)=0$ η συνάρτηση δεν περιέχει την ταλάντωση $e^{i\lambda t}$. Αυτό είναι και το αποφασιστικό σημείο στην ανάπτυξη της θεωρίας: με $a(\lambda)=0$ για **σχεδόν** όλες τις τιμές του λ εκτός από το πολύ ένα αριθμήσιμο σύνολο $\Lambda_1,\Lambda_2,\dots$. Αυτές οι τιμές του λ (για τις οποίες $a(\lambda)\neq 0$) ονομάζονται οι Fourier εκθέτες της συνάρτησης και οι αντίστοιχες μέσες τιμές οι συντελεστές της. Με αυτό το ζεύγος αριθμών A_n,Λ_n σχηματίζουμε την άπειρη σειρά $\sum A_n e^{i\Lambda_n t}$ που ονομάζεται και **σειρά Fourier της σχεδόν περιοδικής συνάρτησης**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ξεκινώντας ,ας θεωρήσουμε ένα απλό παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης, που είναι η

$$s(x)=e^{i\lambda_1 x}+e^{i\lambda_2 x} \quad ,$$

όπου λ_1 και λ_2 είναι πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί από το μηδέν. Οι δύο όροι $e^{i\lambda_1 x}$ και $e^{i\lambda_2 x}$ από μόνοι τους είναι περιοδικοί, με περιόδους αντίστοιχα $p_1=2\pi/|\lambda_1|$ και $p_2=2\pi/|\lambda_2|$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. λ_1/λ_2 είναι ρητός αριθμός, δηλαδή p_1/p_2 είναι ρητός αριθμός ή $n_1 p_1=n_2 p_2$ για δύο ακεραίους n_1, n_2 . Σε αυτή την απλή περίπτωση, οι δύο όροι $e^{i\lambda_1 x}$ και $e^{i\lambda_2 x}$ έχουν κοινή περίοδο $P=n_1 p_1=n_2 p_2$ και το άθροισμά τους είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο P .

2. λ_1/λ_2 είναι άρρητος, δηλαδή p_1/p_2 είναι άρρητος αριθμός. Σε αυτή τη περίπτωση κανένα p_2 δεν ισούται με πολλαλπλάσιο του p_2 . Επομένως η συνάρτηση $s(x)$ **δεν** είναι περιοδική.

Έτσι από αυτό το παράδειγμα οδηγούμαστε στον ορισμό της **σχεδόν ε-περιόδου** .

Ορισμός Ένας πραγματικός αριθμός τ θα ονομάζεται σχεδόν ε-περίοδος της $f(x)$ που αντιστοιχεί στο ε (και θα συμβολίζεται $\tau(\varepsilon)$ ή $\tau_f(\varepsilon)$), όταν

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{για} \quad -\infty<x<\infty$$

<u>Παρατηρήσεις</u> Ισχύει $\tau(\varepsilon_1)+\tau(\varepsilon_2)=\tau(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ και $\tau(\varepsilon_1)-\tau(\varepsilon_2)=\tau(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$, δηλαδή το άθροισμα ή η διαφορά δύο ε-περιόδων είναι ο ίδιος αριθμός που αντιστοιχεί στο $\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

Ορισμός: Ένα σύνολο Ε πραγματικών αριθμών θα λέγεται **σχετικά πυκνό**, αν δεν υπάρχουν αυθαιρέτως μεγάλα κενά ανάμεσα στους αριθμούς τ . Πιο συγκεκριμένα , αν $(\alpha, \alpha+L)$ είναι ένα διάστημα μήκους L ,τότε το διάστημα αυτό περιέχει ένα τουλάχιστον αριθμό τ του συνόλου Ε.

Κύριος Ορισμός: Μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ λέγεται σχεδόν περιοδική όταν, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα σχετικά πυκνό σύνολο σχεδόν ε-περιόδων της $f(x)$, που αντιστοιχούν στο ε . Με άλλα λόγια, για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα μήκος $L = L(\varepsilon)$ τέτοιο, ώστε κάθε διάστημα μήκους $L(\varepsilon)$ να περιέχει τουλάχιστον μία σχεδόν ε-περίοδο $\tau = \tau(\varepsilon)$.

Μία συνεχής περιοδική συνάρτηση, περιόδου p, είναι προφανώς μια ειδική περίπτωση μιας σχεδόν περιοδικής συνάρτησης. Για την ακρίβεια μπορούμε να θεωρήσουμε τις περιόδους $np(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ σαν σχεδόν ε-περιόδους. Επιπλέον αν η $f(x)$ είναι σχεδόν περιοδική, τότε το ίδιο ισχύει για την $f(x+c)$ (όπου c ένας πραγματικός αριθμός) καθώς και για την $cf(x)$ (όπου c ένας μιγαδικός αριθμός).

Θέλουμε να αναπτύξουμε τη θεωρία των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων με ανάλογο τρόπο με τη θεωρία των αμιγώς περιοδικών συναρτήσεων. Εδώ, βέβαια, πρέπει να επισημάνουμε το γεγονός ότι πολλά θεωρήματα που είναι προφανή για περιοδικές συναρτήσεις, δεν είναι και τόσο προφανή για σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις. Αυτό φαίνεται από τα δύο επόμενα θεωρήματα που θα αποδείξουμε, σύμφωνα με τα οποία κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση έναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής. Για περιοδικές συναρτήσεις αυτό ήταν προφανές γιατί μπορούσαμε να περιοριστούμε σε ένα πεπερασμένο διάστημα. Για σχεδόν συνεχείς συναρτήσεις η απόδειξη βασίζεται σε μια όμοια παρατήρηση που σχετίζεται με την ύπαρξη μήκους $L = L(\varepsilon)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι Μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $C = C(f)$ τέτοια ώστε:

$$|f(x)| \leqslant C \quad \text{, για κάθε } \quad x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη: Πρώτα ορίζουμε το μήκος $L = L(1)$ για $\varepsilon = 1$. Στο κλειστό διάστημα $[0, L(1)]$ η συνάρτηση $f(x)$ είναι φραγμένη, δηλ. $|f(x)| \leqslant c$. Τότε σε κάθε σημείο x_0 ισχύει η ανισότητα $|f(x_0)| \leqslant c + 1 = C$. Για την ακρίβεια θα μπορούσαμε να βρούμε μία ε-περίοδο $\tau = \tau(1)$ για ένα αυθαίρετα ορισμένο x_0 , τέτοιο ώστε $0 < x_0 + \tau < L(1)$. Έτσι προκύπτει:

$$|f(x_0)| \leqslant |f(x_0+\tau)| + |f(x_0) - f(x_0+\tau)| \leqslant c + 1$$

Πόρισμα: Αν η $f(x)$ είναι σχεδόν περιοδική τότε και η $(f(x))^2$ είναι σχεδόν περιοδική.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ Μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση $f(x)$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για $-\infty < x < +\infty$ (και όχι απλά για ένα πεπερασμένο διάστημα). Δηλαδή για ένα τυχαίο $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $\delta = \delta(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon \quad \text{, για} \quad |x_1 - x_2| \leqslant \delta$$

Απόδειξη: Δοθέντος του ε, πρώτα ορίζουμε ένα μήκος $L=L(\varepsilon/3)$ και κοιτάμε το πεπερασμένο κλειστό διάστημα $[-1, L(\varepsilon/3)+1]$. Μετά βρίσκουμε ένα $\delta(<1)$, τέτοιο ώστε η ανισότητα $|f(y_1)-f(y_2)|\leqslant\varepsilon/3$ ισχύει για κάθε ζεύγος σημείων (y_1, y_2) στο διάστημα $(-1, L(\varepsilon/3)+1)$ εφόσον $|y_1-y_2|\leqslant\delta$. Τότε αυτό το δ, θα έχει την επιθυμητή ιδιότητα. Για την ακρίβεια, έστω (x_1, x_2) ένα αυθαίρετο ζεύγος σημείων με $|x_1-x_2|\leqslant\delta$ και η ε-περίοδος $\tau=\tau(\varepsilon/3)$, που τη διαλέγουμε έτσι ώστε το σημείο $y_1=x_1+\tau$ να βρίσκεται στο διάστημα $(0, L(\varepsilon/3))$. Τότε προφανώς το σημείο $y_2=x_2+\tau$ βρίσκεται στο διάστημα $(-1, L(\varepsilon/3)+1)$ οπότε έχουμε:

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(y_1)|+|f(y_1)-f(y_2)|+|f(y_2)-f(x_2)|$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \quad .$$

Πόρισμα: Για κάθε ε, υπάρχει ένα L **και** ένα δ, τέτοια ώστε κάθε διάστημα $(\alpha, \alpha+L)$ μήκους L περιέχει όχι μόνο μία ε-περίοδο τ(ε), αλλά **ένα διάστημα μήκους δ**, του οποίου τα σημεία είναι ε-περίοδοι τ(ε).

Απόδειξη: Διαλέγουμε $L(\varepsilon/2)$ και $\delta(\varepsilon/2)$ σύμφωνα με τον ορισμό των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων και το Θεώρημα ΙΙ. Τότε οι δύο αριθμοί $L=L(\varepsilon/2)+2\delta(\varepsilon/2)$ $\delta=2\delta(\varepsilon/2)$ ικανοποιούν τις συνθήκες αυτού του πορίσματος. Για την ακρίβεια η ε-περίοδος $\tau(\varepsilon/2)$, βρίσκεται σε κάθε διάστημα μήκους $L(\varepsilon/2)$ και επιπλέον κάθε αριθμός της μορφής $\tau(\varepsilon/2)+\beta$ με $|\beta|\leqslant\delta(\varepsilon/2)$ είναι ε-περίοδος τ(ε), αφού σύμφωνα με το Θεώρημα ΙΙ, ο αριθμός β είναι μία ε-περίοδος $\tau(\varepsilon/2)$. Έτσι σε κάθε διάστημα μήκους $L(\varepsilon/2)+2\delta(\varepsilon/2)$ υπάρχει ένα διάστημα μήκους $2\delta(\varepsilon/2)$ και όλοι οι αριθμοί στο τελευταίο αυτό διάστημα είναι ε-περίοδοι τ(ε) .

Μια κάπως πιο εφαρμόσιμη αν και ασθενέστερη διατύπωση του προηγούμενου πορίσματος είναι η εξής: Για κάθε ε υπάρχει ένα L και ένα δ τέτοιο ώστε, για κάθε αυθαίρετο θετικό αριθμό $\eta\leqslant\delta$ το διάστημα $(\alpha, \alpha+L)$ περιέχει μία ε-περίοδο τ(ε) που είναι **ακέραιο πολλαπλάσιο του η**.

Ορισμός: Για μία συνάρτηση $f\in L^{\infty}(\mathbb{R})$ συμβολίζουμε με $W_0(f)$ το σύνολο όλων των μεταθέσεων της f (συμβολίζουμε με $f_y(x)=f(x-y)$)

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ **Μία συνάρτηση $f\in L^{\infty}(\mathbb{R})$ είναι σχεδόν περιοδική, αν και μόνο αν, το $W_0(f)$ είναι precompact.**

Απόδειξη: Ένα σύνολο σε ένα πλήρη μετρικό χώρο είναι precompact, αν και μόνο αν, είναι ολικά φραγμένο, δηλαδή, για κάθε $\varepsilon>0$ μπορεί να καλυφθεί από μία ένωση πεπερασμένου το πλήθος περιοχών ακτίνας ε . Ας υποθέσουμε πρώτα ότι η f είναι σχεδόν περιοδική και θα δείξουμε ότι το $W_0(f)$ είναι ολικά φραγμένο στο $L^{\infty}(\mathbb{R})$. Έστω ένα δοθέν $\varepsilon>0$ και $\Lambda=\Lambda(\varepsilon/2, f)$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f μπορούμε να βρούμε αριθμούς $\eta_1, \dots, \eta_M$ στο $[0,\Lambda]$ τέτοιους ώστε αν $0\leqslant y_0\leqslant\Lambda$,τότε $inf_{1\leqslant j\leqslant M}\|f_{y_0}-f_{\eta_j}\|_{\infty}<\varepsilon/2$.

Για τυχαίο $y\in\mathbb{R}$ έστω τ μία $\varepsilon/2$ σχεδόν περίοδος της f στο $[y-\Lambda, y]$. Γράφοντας $y_0=y-\tau$ παίρνουμε $0\leqslant y_0\leqslant\Lambda$ και $\|f_y-f_{y_0}\|_\infty<\varepsilon/2$. Επομένως $inf_{1\leqslant j\leqslant M}\|f_y-f_{\eta_j}\|_\infty<\varepsilon$ και το $W_0(f)$ καλύπτεται από μία ένωση περιοχών ακτίνας ε και με κέντρο το $f_{\eta_j}, j=1,\ldots,M$.

Έστω τώρα ότι το $W_0(f)$ είναι precompact. Έστω $\varepsilon>0$ και $O_{1,}\ldots,O_M$ περιοχές ακτίνας $\varepsilon/2$ τέτοιες ώστε $W_0(f)\subset\cup_1^M O_j$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $O_j\cap W_0(f)\neq\emptyset$ και επομένως να διαλέξουμε $f_{y_j}\in O_j, j=1,\ldots,M$. Οι περιοχές, ακτίνας ε και με κέντρα τα f_{y_j} προφανώς καλύπτουν το $W_0(f)$. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε διάστημα J μήκους $\Lambda=2\,max_{1\leqslant j\leqslant M}|y_j|$ περιέχει μία ε -σχεδόν περίοδο της f. Για την ακρίβεια, συμβολίζοντας με y το μέσον του J, υπάρχει ένα j_0 τέτοιο ώστε $\|f_y-f_{y_{j_0}}\|_\infty<\varepsilon$. Γράφοντας $\tau=y-y_{j_0}$ είναι προφανές ότι $\tau\in J$ και ότι

$$\|f_\tau-f\|_\infty=\|f_{\tau+y_{j_0}}-f_{y_{j_0}}\|_\infty<\varepsilon$$

Επομένως, το μόνο που πρέπει να κάνουμε για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη είναι να δείξουμε ότι, με την υπόθεση ότι το $W_0(f)$ είναι precompact, η f είναι συνεχής. Μπορούμε να δείξουμε αμέσως ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής, δηλαδή ότι, $lim_{\eta\to 0}\|f_\eta-f\|_\infty=0$. Πράγματι, αν αυτό δεν ήταν αληθές, θα υπήρχε ένα $\varepsilon>0$ και μία ακολουθία $\eta_n\to 0$ τέτοια ώστε $\|f_{\eta_n}-f\|_\infty>\varepsilon$. Από τη σχετική πυκνότητα, θα υπήρχε μία υποακολουθία $\{\eta_{n_j}\}$ τέτοια ώστε η $f_{\eta_{n_j}}$ να συγκλίνει στο $L^\infty(\mathbb{R})$ σε κάποια συνάρτηση g που θα ικανοποιούσε την σχέση $\|f-g\|_\infty>\varepsilon$. Αλλά, αφού για αυθαίρετη $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ το $\eta\to 0$ δείχνει ότι $f(x-\eta)\to f(x)$, παρατηρούμε ότι $g(x)=f(x)$ και αυτό το άτοπο συμπληρώνει την απόδειξη.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV **Το άθροισμα $f(x)+g(x)$ δύο σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων είναι σχεδόν περιοδική συνάρτηση.**

Απόδειξη: Είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε ε>0, υπάρχει ένα σχετικό πυκνό σύνολο **κοινών** ε-περιόδων τ(ε) των δύο συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$. Για την ακρίβεια κάθε τέτοιος αριθμός $\tau=\tau_f(\varepsilon)=\tau_g(\varepsilon)$ είναι μία ε-περίοδος $\tau_{f+g}(2\varepsilon)$ γιατί:

$$|(f(x+\tau)+g(x+\tau))-(f(x)+g(x))|\leqslant|f(x+\tau)-f(x)|+|g(x+\tau)-g(x)|\leqslant 2\varepsilon$$

Χρησιμοποιούμε το τελευταίο πόρισμα που αποδείξαμε στην πιο απλοποιημένη μορφή του, και προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τους αριθμούς $L_f, \delta_f, L_g, \delta_g$ που αντιστοιχούν στον αριθμό ε/2 του πορίσματος. Έστω $L_0=Max(L_f, L_g)$ και $\eta=Min(\delta_f,\delta_g)$. Τότε κάθε διάστημα $(\alpha,\alpha+L_0)$ μήκους L_0 περιέχει μία ε-περίοδο $\tau_f(\varepsilon/2)$ όπως και μία ε-περίοδο $\tau_g(\varepsilon/2)$ που είναι πολλαπλάσια του η. Παίρνουμε **όλα** τα ζευγάρια αυτών των ε-περιόδων, δηλαδή $\left(\tau_f(\varepsilon/2),\tau_f(\varepsilon/2)\right)$ με $\tau_f=n'\eta$, $\tau_g=n''\eta$ και $|\tau_f-\tau_g|<L_0$. Για κάθε τέτοιο ζεύγος, βρίσκουμε:

$$\tau_f-\tau_g=(n'-n'')\eta=n\eta$$

όπου n είναι ακέραιος. Αφού $|n\eta|< L_0$ δε μπορεί να υπάρχει παρά ένα πεπερασμένος αριθμός διακριτών τιμών του $n\eta$. Θα συμβολίσουμε αυτές τις τιμές $n_1\eta, n_2\eta, \ldots, n_Q\eta$ και ας υποθέσουμε ότι αυτές "αντιπροσωπεύονται" από τα ζεύγη σημείων $(\tau_f^{(1)}, \tau_g^{(1)}), (\tau_f^{(2)}, \tau_g^{(2)}), \ldots, (\tau_f^{(Q)}, \tau_g^{(Q)})$ τα οποία είναι μεν αυθαίρετα, αλλά όταν τα διαλέξουμε, τα διατηρούμε σταθερά. Επιπλέον, ορίζουμε

$$\underset{q=1,2,\ldots,Q}{Max} |\tau_f^{(q)}| = l$$

Θα δείξουμε ότι **κάθε διάστημα μήκους** L_0+2l **περιέχει** μία τουλάχιστον κοινή ε-περίοδο $\tau=\tau_f(\varepsilon)=\tau_g(\varepsilon)$.

Έστω $(\alpha, \alpha+L_0+2l)$ ένα αυθαίρετο διάστημα μήκους L_0+2l. Διαλέγουμε δύο ε-περιόδους $\tau_f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=n'\eta$ και $\tau_g\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=n''\eta$. Έστω $n_q\eta$ ένα από τα πολλαπλάσια του η, για το οποίο $\tau_f-\tau_g=n_q\eta$ και $(\tau_f^{(q)}, \tau_g^{(q)})$ το "αντιπροσωπευτικό" ζεύγος για αυτό το $n_q\eta$. Τότε $\tau_f-\tau_g=\tau_f^{(q)}-\tau_g^{(q)}$ ή $\tau_f-\tau_f^{(q)}=\tau_g-\tau_g^{(q)}$ και ορίζουμε $\tau=\tau_f-\tau_f^{(q)}=\tau_g-\tau_g^{(q)}$. Αυτός είναι και ο αριθμός που ψάχνουμε. Για την ακρίβεια είναι ο πρώτος από όλες τις ε-περιόδους του $f(x)$ και του $g(x)$ και αντιστοιχεί στο ε, αφού είναι η διαφορά δύο ε-περιόδων που αντιστοιχούν σε ε/2. Ακόμη, βρίσκεται στο διάστημα $(\alpha, \alpha+L_0+2l)$, αφού το τ_f ανήκει στο διάστημα $(\alpha+l, \alpha+L_0+l)$ και $|\tau_f^{(q)}|\leqslant l$.

Πόρισμα: Το άθροισμα $f(x)=\sum_1^N p_n(x)$ ενός πεπερασμένου αριθμού συνεχών περιοδικών συναρτήσεων $p_n(x)$ με αυθαίρετες περιόδους είναι σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, **κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο**

$$s(x)=\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$$

είναι μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Επιπλέον αφού η $-g(x)$ είναι μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση, τότε και η διαφορά $f(x)-g(x)$ είναι σχεδόν περιοδική συνάρτηση, σύμφωνα με το Θεώρημα ΙΙΙ.

ΘΕΩΡΗΜΑ V Το γινόμενο δύο σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων $f(x)g(x)$ είναι σχεδόν περιοδική συνάρτηση.

ΘΕΩΡΗΜΑ VI **Η συνάρτηση όριο $f(x)$ μιας ακολουθίας σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ που συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ είναι επίσης**

σχεδόν περιοδική.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση. Έστω ε>0, αυθαίρετο, και $N=N(\varepsilon)$ που το διαλέγουμε αρκετά μεγάλο ώστε:

$$|f(x)-f_N(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3} \quad ,\text{για} \quad -\infty<x<+\infty$$

Τότε κάθε ε-περίοδος $\tau=\tau_{fN}(\frac{\varepsilon}{3})$ είναι σίγουρα και ε-περίοδος $\tau=\tau_f(\varepsilon)$. Πράγματι, είναι

$$|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant|f(x+\tau)-f_N(x+\tau)|+|f_N(x+\tau)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

Αφού οι ε-περίοδοι $\tau=\tau_{fN}(\frac{\varepsilon}{3})$ είναι σχετικά πυκνοί, το ίδιο θα ισχύει και για τους αριθμούς $\tau=\tau_f(\varepsilon)$.

Πόρισμα: Κάθε συνάρτηση $f(x)$, η οποία μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα για κάθε x από πεπερασμένα αθροίσματα $s(x)=\sum_1^N a_n e^{i\lambda_n x}$ είναι σχεδόν περιοδική.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ **Για κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση, υπάρχει μια <u>μέση τιμή</u>**

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=M\{f(x)\}$$

δηλαδή, η έκφραση $\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$ **συγκλίνει σε ένα πεπερασμένο όριο καθώς** $T\to\infty$ **.** Θα συμβολίσουμε αυτή τη τιμή με $M\{f(x)\}$

<u>Παρατήρηση:</u> Σε περίπτωση που η συνάρτηση, $f(x)$, είναι περιοδική, με περίοδο λ.χ. p , το θεώρημα είναι προφανές και η μέση τιμή συμφωνεί με το κλασσικό ορισμό

$$M\{f(x)\}=\frac{1}{p}\int_0^p f(x)dx \quad .$$

Για την ακρίβεια, βρίσκουμε ότι αν θέσουμε $T=mp+r \quad (0\leqslant r<p)$ τότε

$$\int_0^T f(x)dx=m\int_0^p f(x)dx+\int_{mp}^{mp+r} f(x)dx$$

από όπου προκύπτει η επιθυμητή σχέση

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx=\frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,dx \quad ,$$

γιατί το όριο $\frac{m}{T}\to\frac{1}{p}$ καθώς $T\to\infty$.

Απόδειξη: Θα εφαρμόσουμε τη γενική αρχή σύγκλισης. Οπότε, έστω ε>0, αυθαίρετο. Πρέπει να δείξουμε την ύπαρξη κάποιου αριθμού $T_0=T_0(\varepsilon)$ τέτοιου ώστε η ανισότητα

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)\,dx-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)\,dx\right|<2\varepsilon$$

να ισχύει για $T_1>T_0,\ T_2>T_0$. Η απόδειξη θα γίνει σε πολλά βήματα.

1. Συμβολίζουμε με l_0 το μήκος $L=L(\frac{\varepsilon}{2})$ που αντιστοιχεί σε ένα δεδομένο ε>0. Για ένα δεδομένο αριθμό T>0 και μία δεδομένη μεταβλητή α , θέλουμε να προσεγγίσουμε τη διαφορά

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx-\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx \quad .$$

Αυτό θα γίνει ως εξής: Βασιζόμενοι στη σχεδόν περιοδικότητα της $f(x)$, στο διάστημα $(\alpha,\alpha+l_0)$ διαλέγουμε μία ε-περίοδο $\tau=\tau_f(\varepsilon/2)$ και γράφουμε την εν λόγω διαφορά στη μορφή

$$\left\{\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx-\frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} f(x)\,dx\right\}-\frac{1}{T}\int_\alpha^{\tau} f(x)\,dx+\frac{1}{T}\int_{\alpha+T}^{\tau+T} f(x)\,dx \quad .$$

Τώρα, ο πρώτος όρος $\{\ldots\}$, αριθμητικά είναι $\leqslant\varepsilon/2$ γιατί $|f(x+\tau)-f(x)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$, και κάθε ένας από τους υπόλοιπους όρους είναι σε απόλυτη τιμή $\leqslant\frac{1}{T}l_0\Gamma$, όπου Γ είναι το supremum της f (ως γνωστόν, από το θεώρημα 1 (σελ. 12) η f είναι φραγμένη). Επομένως παίρνουμε:

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx-\frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\,dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2\,l_0\Gamma}{T} \qquad (1.1)$$

2. Το επόμενο πρόβλημά μας είναι να κάνουμε μία εκτίμηση της διαφοράς

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(x)dx \quad ,$$

όπου το $T>0$ είναι δοσμένο και ο θετικός αριθμός n είναι αυθαίρετος. Αυτή η διαφορά είναι απλώς ο αριθμητικός μέσος των n διαφορών

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{T}\int_{(\nu-1)T}^{\nu T} f(x)dx, \qquad \nu=1,\dots,n \quad ,$$

κάθε μία από τις οποίες είναι, σύμφωνα με την (1.1), κατά απόλυτη τιμή $\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2l_0\Gamma}{T}$. Επομένως η ίδια ανισότητα είναι αληθής για τον αριθμητικό μέσο αυτών των διαφορών. Έτσι έχουμε:

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2l_0\Gamma}{T} \tag{1.2}$$

3. Ορίζουμε ακόμη $T_1>0$ και $T_2>0$, έτσι ώστε ο λόγος T_1/T_2 να είναι **ρητός αριθμός**. Μετά βρίσκουμε δύο θετικούς ακέραιους n_1, n_2 τέτοιους ώστε $n_1T_1=n_2T_2$. Έτσι από τη (1.2) παίρνουμε:

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)dx - \frac{1}{n_1T_1}\int_0^{n_1T_1} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2l_0\Gamma}{T_1}$$

και

$$\left|\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)dx - \frac{1}{n_2T_2}\int_0^{n_2T_2} f(x)dx\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2l_0\Gamma}{T_2}$$

Αφού $n_1T_1=n_2T_2$, προκύπτει ότι:

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon+2l_0\Gamma\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right) \quad . \tag{1.3}$$

Τώρα, από άποψη συνέχειας, η (1.3) πρέπει να ισχύει για **αυθαίρετες (θετικές)** τιμές των T_1 και T_2 .

Ύστερα από αυτή τη προετοιμασία, προχωρούμε με την απόδειξη του θεωρήματος μέσης τιμής. Συγκεκριμένα, διαλέγουμε $T_0=\frac{4\,l_0\,\Gamma}{\varepsilon}=\frac{4\,\Gamma\,L(\varepsilon/2)}{\varepsilon}$, έτσι ώστε $T_1>T_0,\ T_2>T_0$ και προφανώς παίρνουμε

$$\varepsilon+2\,l_0\,\Gamma\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right)<2\,\varepsilon \quad .$$

Οπότε, από την (1.3) προκύπτει:

$$\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)\,dx-\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)\,dx\right|\leqslant 2\,\varepsilon \quad .$$

Τέλος, θα πρέπει να αναφέρουμε, ότι οι μέσες τιμές των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τους γνωστούς κανόνες. Για παράδειγμα, $M\{c\,f(x)\}=c\,M\{f(x)\}$ (όπου c ένας τυχαίος μιγαδικός αριθμός) και

$$M\{(f_1(x)+f_2(x))\}=M\{f_1(x)\}+M\{f_2(x)\} \quad .$$

Επίσης είναι σημαντικό για τις εφαρμογές να σημειώσουμε ότι αν $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x),\ldots$ είναι μια ακολουθία σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων, που συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x)$ (που είναι επίσης σχεδόν περιοδική), τότε το όριο

$$M\{f(x)\}=\lim_{n\to\infty} M\{f_n(x)\}$$

ισχύει. Αυτό προκύπτει αμέσως από το γεγονός ότι για αυθαίρετο n έχουμε:

$$M\{f(x)\}-M\{f_n(x)\}=M\{f(x)-f_n(x)\}$$

και επομένως

$$|M\{f(x)\}-M\{f_n(x)\}|\leqslant M\{|f(x)-f_n(x)|\}\leqslant \underset{-\infty<x<\infty}{supr}|f(x)-f_n(x)|$$

όπου η τελευταία ανισότητα συγκλίνει στο μηδέν όταν $n\to\infty$. Για α σταθερό ισχύει:

$$M\{f(x+\alpha)\}=M\{f(x)\} \quad .$$

Πράγματι:

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(x+a)\,dx=\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx=\frac{1}{T}\int_a^0 f(x)\,dx+\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx+\frac{1}{T}\int_T^{a+T} f(x)\,dx$$

που συγκλίνει στο $M\{f(x)\}$, καθώς $T\to\infty$ αφού οι δύο άλλοι όροι τείνουν στο μηδέν.

Επομένως,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} f(x)dx = M\{f(x)\} \quad .$$

ΙΣΧΥΡΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ: Το ακόλουθο όριο συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς α, $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{a}^{a+T} f(x)dx = M\{f(x)\}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο θέλουμε να αναπτύξουμε μερικές πλευρές της θεωρίας Fourier των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων.
Η κλάση των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται μεταξύ της κλάσης των περιοδικών συναρτήσεων και αυτής των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Η περιοδική συνάρτηση έχει μια σειρά Fourier που κατά κάποια έννοια την αναπαριστά. Όμως, η σειρά Fourier μοιάζει με τη σειρά Fourier της σχεδόν περιοδικής συνάρτησης.

2.1 ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις έχουν μεγάλο ενδιαφέρον στις διαφορικές εξισώσεις. Ας θεωρήσουμε την ομογενή διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές

$$\frac{d^n y}{dx^n}+c_1\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+c_{n-1}\frac{d\,y}{dx}+c_n y=0$$

Είναι γνωστό ότι η γενική λύση της είναι:

$$y(x)=p_1(x)e^{\alpha x}+\cdots+p_r(x)e^{\theta x}$$

όπου $\alpha, \beta, \ldots, \theta$ είναι διακριτές μιγαδικές ρίζες της αλγεβρικής εξίσωσης:

$$z^n+c_1 z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n=0$$

και $p_j(x), j=1,2,\ldots,r$ είναι πολυώνυμα βαθμού μικρότερου από την πολλαπλότητα των εκθετών $\alpha, \beta, \ldots, \theta$. Μια προφανής ερώτηση είναι: *μπορεί αυτή η εξίσωση να έχει λύσεις που να είναι φραγμένες σε όλη την ευθεία*; Η μορφή της λύσης μας δείχνει ότι η απάντηση είναι καταφατική. Για την ακρίβεια μια λύση της παραπάνω μορφής είναι φραγμένη, αν και μόνο αν, κάθε πολυώνυμο $p_j(x)$, που δεν είναι μηδέν, είναι μια σταθερά που αντιστοιχεί σε μία φανταστική ρίζα της αλγεβρικής εξίσωσης. Δηλαδή οι λύσεις που έχουν τη μορφή

$$y(x)=a_1 e^{i\lambda_1 x}+\cdots+a_k e^{i\lambda_k x}$$

για πραγματικούς $\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ldots,\lambda_k$, είναι φραγμένες. Με άλλα λόγια οι φραγμένες λύσεις είναι αυτές που είναι σχεδόν περιοδικές. Επίσης έχει αποδειχτεί ότι για μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση $g(x)$, όλες οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^n y}{dx^n}+c_1\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+c_{n-1}\frac{dy}{dx}+c_n y=g(x)$$

είναι σχεδόν περιοδικές.

Φαίνεται πιθανό, ότι μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε μια σειρά Fourier με εκθέτες, που δε χρειάζεται να είναι ακέραιοι και οι λόγοι των οποίων είναι άρρητοι αριθμοί. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας τριγωνομετρικών πολυωνύμων

$$p^{(n)}(x)=a_{n1} e^{i\lambda_{n1} x}+\cdots+a_{nm_n} e^{i\lambda_{nm_n} x}$$

Η ομοιόμορφη σύγκλιση του $p^{(n)}(x)$ πρέπει να συνεπάγεται τη σύγκλιση των συντελεστών και εκθετών σε μια σειρά της μορφής $\sum_\lambda c_\lambda e^{i\lambda x}$. 'Εχουμε λοιπόν τα εξής δύο βασικά προβλήματα της θεωρίας Fourier για σχεδον περιοδικές συνάρτησεις:

(1) να αποδείξουμε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση έχει μία και μόνο μία σειρά Fourier

(2) να αποδείξουμε ότι η σειρά αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση (έτσι που να μην υπάρχουν διαφορετικές συναρτήσεις που να αντιπροσωπεύονται από την ίδια σειρά). Σε ότι ακολουθεί, οι f και f_n θα συμβολίζουν συνεχείς και φραγμένες που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ και έχουν μιγαδικές τιμές.

ΛΗΜΜΑ 1 (Ύπαρξη και μοναδικότητα της σειράς Fourier). Για κάθε πραγματικό αριθμό λ, συμβολίζουμε με $\hat{f}(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{R}$ το όριο

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{+T} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx \quad ,$$

υπό την προυπόθεση ότι υπάρχει.

(1) Αν η $\hat{f}_n(\lambda)$ είναι ορισμένη για κάθε λ σε ένα υποσύνολο D της πραγματικής ευθείας , $n=1,2,\ldots$ και η $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f(x)$, τότε η $\hat{f}_n(\lambda)$ είναι ορισμένη για όλα τα λ στο D και η $\hat{f}_n(\lambda)$ συγκλίνει ομοιόμορφα, μέσα στο D , στην $\hat{f}(\lambda)$.

(2) Αν η $f(x)$ είναι σχεδόν περιοδική, τότε η $\hat{f}(\lambda)$ είναι ορισμένη για κάθε πραγματικό λ και $\hat{f}(\lambda)=0$ για όλα τα λ εκτός από ένα αριθμήσιμο σύνολό του.Δηλαδή, η $\hat{f}(\lambda)$ είναι

μηδέν σχεδόν παντού.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $\lambda \in D$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $f(x)$, υπάρχει ένα N τέτοιο ώστε $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ για κάθε $m > N, n > N$ και για όλα τα x . Προφανώς λοιπόν έχουμε $|\hat{f}_m(x) - \hat{f}_n(x)| \leqslant \varepsilon$ για όλα τα $m > N, n > N$ και για κάθε λ στο D . Προκύπτει λοιπόν ότι η $\hat{f}_n(\lambda)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο D σε ένα όριο $\Lambda(\lambda)$. Οπότε έχουμε:

$$\left| \Lambda(\lambda) - \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{+T} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| \leqslant |\Lambda(\lambda) - \hat{f}_n(\lambda)| + \left| \hat{f}_n(\lambda) - \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{+T} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right|$$
$$+ \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{+T} |f_n(x) - f(x)| dx$$

Από όσα έχουμε υποθέσει, μπορούμε να πάρουμε το n αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ για όλα τα x και $|\Lambda(\lambda) - \hat{f}_n(\lambda)| < \varepsilon/3$. Αν διαλέξουμε το T_0 αρκετά μεγάλο, έτσι ώστε

$$\left| \hat{f}_n(\lambda) - \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{+T} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon/3$$

για κάθε $T > T_0$, παίρνουμε:

$$\left| \Lambda(\lambda) - \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{+T} f(x) e^{-i\lambda x} dx \right| < \varepsilon \quad \text{για} \quad T > T_0 \ .$$

Αυτό αποδεικνύει, πρώτα από όλα, ότι η $\hat{f}(\lambda)$ είναι ορισμένη για λ στο D και ότι $\hat{f}(\lambda) = \Lambda(\lambda)$. Αφού η $\hat{f}_n(\lambda)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $\Lambda(\lambda)$, προκύπτει ότι η $\hat{f}_n(\lambda)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στη $\hat{f}(\lambda)$ για κάθε λ στο D . Έτσι αποδεικνύεται το (1) .

Για την απόδειξη του (2), παρατηρούμε πρώτα ότι αν το $p(x)$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο, π.χ.

$$p(x) = a_1 e^{i\lambda_1 x} + \cdots + a_k e^{i\lambda_k x}$$

είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\hat{p}(\lambda_j) = a_j$ για $j = 1, 2, \ldots, k$ και ότι $\hat{p}(\lambda) = 0$ για όλες τις άλλες τις τιμές του λ . Για να αποδείξουμε το (2) είναι αρκετό να εφαρμόσουμε το μέρος (1) σε μία ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων που συγκλίνουν στο $f(x)$ ομοιόμορφα σε όλη τη πραγματική γραμμή. Το Λήμμα 1 τώρα έχει αποδειχθεί.

Έχουμε λοιπόν, για κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση, μία μοναδική τριγωνομετρική σειρά $\sum_{\lambda} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}$ που θα την λέμε και σειρά Fourier της $f(x)$. Έτσι έχουμε έναν τρόπο να «αναλύουμε» μια τέτοια συνάρτηση, δηλ. να την αναλύουμε στο φάσμα της. Αυτή η ανάλυση, όμως, είναι περιορισμένης χρησιμότητας, εκτός αν έχουμε ένα τρόπο να «συνθέσουμε» τη συνάρτηση από το φάσμα της. Από ότι γνωρίζουμε για τις κλασσικές σειρές Fourier περιοδικών συναρτήσεων, θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε να φτιάξουμε ένα μερικό άθροισμα σειράς Fourier μιας σχεδόν περιοδικής συνάρτησης και μετά να δείξουμε ότι αυτά τα μερικά αθροίσματα συγκλίνουν στη συνάρτηση που η σειρά αναπαριστά. Σε αυτό το σημείο προκύπτουν κάποιες δυσκολίες που δεν παρουσιάζονται στις περιοδικές συναρτήσεις. Ο ορισμός του μερικού αθροίσματος της σειράς Fourier είναι

$$S_{\omega}(f;x)=\sum_{|\lambda|\leqslant\omega} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda x}$$

Δυστυχώς αυτό το άθροισμα μπορεί να περιέχει έναν άπειρο αριθμό όρων. Φαίνεται λοιπόν ότι πρέπει να ψάξουμε για μερικά αθροίσματα για να ορίσουμε τα μερικά αθροίσματα της παραπάνω μορφής. Αυτή η απροσδιοριστία λύθηκε από τον Bochner. Έδειξε ότι αν και το $S_{\omega}(f;x)$ μπορεί να περιέχει άπειρο αριθμό όρων, είναι παρόλα αυτά, η σειρά Fourier μιας σχεδόν περιοδικής συνάρτησης $f_{\omega}(x)$. Η σύγκλιση της αρχικής σειράς σημαίνει σύγκλιση των συναρτήσεων $f_{\omega}(x)$. Τα θεωρήματα σύγκλισης που θα αποδείξουμε παρακάτω θα τα χρησιμοποιήσουμε με αυτή την έννοια.

Πριν αποδείξουμε τα θεωρήματα θα δείξουμε δύο λήμματα και θα εισάγουμε μερικούς ακόμα συμβολισμούς. Θα συμβολίσουμε με $f(x)$ μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Θα εισάγουμε επιπλέον μερικούς ακόμα συμβολισμούς.

(1) $A_0(x)=\hat{f}(0)$ και για $v>0$, $A_v(x)=\hat{f}(v)e^{ivx}+\hat{f}(-v)e^{-ivx}$. Έτσι η σειρά Fourier της f μπορεί να γραφτεί $\sum_{v\geqslant 0} A_v(x)$.

(2) Για $a\geqslant 0$, $h\geqslant 0$, $N_{a,h}$ είναι ο αριθμός των εκθετών λ που ικανοποιούν $\hat{f}(\lambda)\neq 0$ και $a<\lambda^2\leqslant a+h$.

(3) $f_x(t)=(f(x+t)+f(x-t))/2$.

(4) $H(t)=(4/\pi t^2)((\sin(t)/t)-\cos(t))$.

Λήμμα 2.

$$\int_0^{\infty} H(t)\cos(at)\,dt=\begin{Bmatrix} 1-a^2 & \alpha\nu \quad a^2\leqslant 1 \\ 0 & \alpha\nu \quad a^2\geqslant 1 \end{Bmatrix}$$

Απόδειξη: Έστω $F(z)=\int_0^{\infty} e^{-zt} t^{-2}(t^{-1}\sin(t)-\cos(t))\,dt$. Η συνάρτηση $F(z)$ είναι συνεχής στο κλειστό ημιεπίπεδο $\Re(z)\geqslant 0$ και αναλυτική στο ανοιχτό ημιεπίπεδο $\Re(z)>0$. Το ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι $4\pi^{-1}\Re(F(ia))$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για $\Re(z)>0$,

$$\int_0^\infty e^{-zt}\cos(t)\,dz = z(z^2+1)^{-1} \quad \text{και} \quad \int_0^\infty e^{-zt}\sin(t)\,dz = (z^2+1)^{-1}$$

(Τα δύο τελευταία ολοκληρώματα μπορούν να υπολογιστούν με ολοκλήρωση κατά παράγοντες). Θα χρησιμοποιήσουμε αυτούς τους δύο τύπους για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα που θέλουμε. Για $\Re(z)>0$ έχουμε

$$F'(z) = -\int_o^\infty e^{-zt}t^{-1}(t^{-1}\sin(t)-\cos(t))\,dt \tag{2.1.1}$$

και

$$F''(z) = \int_o^\infty e^{-zt}(t^{-1}\sin(t)-\cos(t))\,dt$$

δηλαδή

$$F''(z) = \varphi(z) - z(z^2+1)^{-1} \tag{2.1.2}$$

όπου

$$\varphi(z) = \int_0^\infty e^{-zt}t^{-1}\sin(t)\,dt$$

οπότε

$$\varphi'(z) = -(z^2+1)^{-1}$$

(Για την ακρίβεια $\varphi(z) = -\arctan(z)+C$ αν το z είναι πραγματικό. Αυτό όμως δε μας βοηθάει αφού χρειαζόμαστε $F(z)$ για φανταστικές τιμές του z). Αν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες την εξίσωση (1) παίρνοντας $u = t^{-1}(t^{-1}\sin(t)-\cos(t))$ και $dv = -e^{-zt}dt$ έτσι ώστε $du = (-2t^{-2}(t^{-1}\sin(t)-\cos(t))+t^{-1}\sin(t))\,dt$ και $v = z^{-1}e^{-zt}$, βρίσκουμε

$$F'(z) = 2\mathrm{z}^{-1}F(z) - z^{-1}\varphi(z) \tag{2.1.3}$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.1.3) παίρνουμε

$$F''(z) = 2\mathrm{z}^{-1}F'(z) - 2\mathrm{z}^{-2}F(z) - z^{-1}\varphi'(z) + z^{-2}\varphi(z) \tag{2.1.4}$$

Αν λύσουμε τη (2.1.3) για $F(z)$ και αντικαταστήσουμε το αποτέλεσμα στη (2.1.4), παίρνουμε

$$F''(z) = z^{-1}F'(z) + z^{-1}(z^2+1)^{-1} \tag{2.1.5}$$

Από τις (2.1.2),(2.1.3) και (2.1.5) μπορούμε να γράψουμε τη $F(z)$ σε σχέση με τη $\varphi(z)$ ως εξής

$$F(z) = \frac{1}{2}(z^2+1)^{-1}\varphi(z) - \frac{1}{2}z$$

Αφού η $F(z)$ είναι συνεχής στο κλειστό δεξί ημιεπίπεδο

$$4\pi^{-1}\Re(F(ia)) = \lim_{x\to 0^+} 4\pi^{-1}\Re(F(x+ia)) = 2\pi^{-1}(1-a^2) \lim_{x\to 0^+} \Re(\varphi(x+ia)) \quad (2.1.6)$$

Τώρα έχουμε

$$\Re(\varphi(x+ia)) = \int_0^\infty e^{-xt}(\cos(at))t^{-1}\sin(t)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}t^{-1}\sin(1+a)t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt}t^{-1}\sin(1-a)t\,dt$$

Όπως είναι γνωστό

$$\lim_{x\to 0^+} \int_0^\infty e^{-xt}t^{-1}\sin(\beta t)dt = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\pi & \alpha\nu & \beta<1 \\ 0 & \alpha\nu & \beta=1 \\ -\frac{1}{2}\pi & \alpha\nu & \beta<1 \end{Bmatrix}$$

Έτσι προκύπτει

$$\lim_{x\to 0^+} \Re(\varphi(x+ia)) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\pi & \alpha\nu & a^2<1 \\ 0 & \alpha\nu & a^2>1 \\ \frac{1}{4}\pi & \alpha\nu & a^2=1 \end{Bmatrix} \quad (2.1.7)$$

Οι σχέσεις (2.1.6) και (2.1.7) δίνουν το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3. Οι συναρτήσεις $H(t), H_1(t) = -\int_t^\infty H(s)ds$ και $H_2(t) = -\int_t^\infty H_1(s)ds$ είναι όλες $O(t^{-2})$, καθώς το $t\to\infty$. Δηλαδή όλες είναι ολοκληρώσιμες στο $(0,\infty)$.

Απόδειξη: Για τήν $H(t)$ η απόδειξη είναι προφανής. Αν η $g(s)$ είναι $\sin(s)$ ή $\cos(s)$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε με ολοκλήρωση κατά παράγοντες ότι η $g_1(s) = \int_t^\infty s^{-k}g(s)ds$ και η $g_2(s) = \int_t^\infty g_1(s)ds$ είναι $O(t^{-k})$, καθώς το $t\to\infty$, με τον όρο ότι το k είναι θετικό. Οι εκτιμήσεις για τα H_1 , H_2 προκύπτουν εύκολα από τα δεδομένα.

Λήμμα 4. Έστω ότι η $f(x)$ είναι σχεδόν περιοδική με σειρά Fourier $\sum_{\nu\geqslant 0} A_\nu(x)$. Τότε για κάθε $\omega>0$ η συνάρτηση

$$T_\omega^f(x) := \int_0^\infty f_x(t\omega^{-1/2})H(t)dt$$

είναι επίσης μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση. Η σειρά Fourier που αντιστοιχεί σε αυτή είναι:

$$\sum_{\nu^2 \leqslant \omega} (1-\nu^2 \omega^{-1}) A_\nu(x) \qquad (2.1.8)$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $f(x)=e^{i\lambda x}$, έτσι ώστε $f_x(t)=e^{i\lambda x}\cos(\lambda t)$. Από το Λήμμα 2 παίρνουμε:

$$T_\omega^f(x)=\begin{Bmatrix} (1-\lambda^2 \omega^{-1} e^{i\lambda x}) & \alpha\nu & \lambda^2 \leqslant \omega \\ 0 & \alpha\nu & \lambda^2 \geqslant \omega \end{Bmatrix}$$

Όποια από τις δύο σχέσεις και να ισχύει μεταξύ του λ και ω , η $T_\omega^f(x)$ είναι σαφώς μία σχεδόν περιοδική συνάρτηση, της οποίας η σειρά Fourier δίνεται από την (2.1.8). Το Λήμμα 4 αποδεικνύεται έτσι για ένα εκθετικό μονώνυμο. Το Λήμμα αποδεικνύεται έτσι και για τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Στη γενική περίπτωση η $f(x)$ είναι το ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας τριγωνομετρικών συναρτήσεων $p^{(n)}(x)$. Προκύπτει έτσι ότι οι μέσοι όροι $p_x^{(n)}(t)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα ως προς x και t στη $f_x(t)$. Αφού η $H(t)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$, προκύπτει ότι η $T_\omega^{p^{(n)}}(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα x και ω στη $T_\omega^f(x)$. Άρα η $T_\omega^f(x)$ είναι σχεδόν περιοδική. Αφού η σειρά Fourier της $f(x)$ είναι το όριο της σειράς του $p^{(n)}$ και μια ίδια σχέση ισχύει ανάμεσα στις σειρές των $T_\omega^f(x)$ και $T_\omega^{p^{(n)}}(x)$, η σειρά Fourier της $T_\omega^f(x)$ δίνεται από την (8). Αποδεικνύεται έτσι το Λήμμα 4.

Δύο Τυπικά Θεωρήματα Σύγκλισης

Θεώρημα 1. Έστω ότι η $f(x)$ είναι μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

(1) Η $f''(x)$ είναι φραγμένη και ομοιόμορφα συνεχής (αυτή η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την υπόθεση ότι η $f'(x)$ και $f''(x)$ είναι σχεδόν περιοδικές) .

(2) Για κάποιο $\eta>0$, $\alpha\geqslant 0$ το $N_{\omega,\eta}$ είναι πεπερασμένο για όλα τα $\omega>\alpha$ και $N_{\omega,\eta}=O(\omega^2)$ καθώς $\omega\to\infty$. Τότε, για όλα τα $\omega>\alpha$ το μερικό άθροισμα $\sum_{\nu\geqslant\omega} A_\nu(x)$ της σειράς Fourier της $f(x)$ είναι η σειρά Fourier μιας σχεδόν περιοδικής συνάρτησης $f_\omega(x)$ και η $f_\omega(x)$ τείνει ομοιόμορφα στη $f(x)$, καθώς το $\omega\to\infty$. Σημειώνουμε ότι για όλη την απόδειξη το η είναι σταθερό.

Απόδειξη: Αν ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες τον τύπο που ορίζει την $T_\omega^f(x)$ βρίσκουμε

$$T_\omega^f(x)=-f_x(0)H_1(0)+\omega^{-1/2} f_x'(0)H_2(0)+\omega^{-1}\int_0^\infty f_x''(\omega^{-1/2}t)H_2(t)dt$$

Αφού $f_x(0)=f(x)$ και $H_1(0)=-1$, έχουμε

$$T_\omega^f(x)-f(x)=h(x)\omega^{-1/2}+\omega^{-1}Q(\omega,x)$$

όπου η $h(x)=H_2(0)f_x{}'(0)$ είναι φραγμένη γιατί η $f(x)$ και η $f''(x)$ είναι και οι δύο φραγμένες. Έστω Β ένας σταθερός θετικός αριθμός. Αφού η $f_x{}''(\omega^{-1/2}t)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στα x και t και ω, και τείνει ομοιόμορφα στο σύνολο $0<t\leqslant B, -\infty<x<\infty$ στη $f_x{}''(0)$ καθώς $\omega\rightarrow\infty$, ενώ η $H_2(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο $(0,\infty)$, προκύπτει ότι η $Q(\omega,x)$ τείνει ομοιόμορφα στο x στο όριο $f_x{}''(0)\int_0^\infty H_2(t)dt$.

Τώρα ξαναγράφουμε την τελευταία εξίσωση στη μορφή

$$\omega T_\omega^f(x)-\omega f(x)=h(x)\omega^{1/2}+Q(\omega,x) \qquad (2.1.9)$$

Αν αντικαταστήσουμε το ω με ω+η στην εξίσωση (2.1.9) και αφαιρέσουμε την (2.1.9) από το αποτέλεσμα, παίρνουμε:

$$(\omega+\eta)T_{\omega+\eta}^f(x)-\omega T_\omega^f(x)-\eta f(x)=h(x)(\sqrt{\omega+\eta}-\sqrt{\omega})+Q(\omega+\eta,x)-Q(\omega,x) \qquad (2.1.10)$$

Από ότι έχουμε συμπεράνει για τις $h(x)$ και $Q(\omega,x)$ ο πρώτος όρος στο δεξιό μέρος της (2.1.10) είναι ομοιόμορφα $O(\omega^{-1/2})$ ενώ η διαφορά των δύο Q είναι ομοιόμορφα $O(1)$.

Έτσι η συνάρτηση $g_\omega(x)=\eta^{-1}((\omega+\eta)T_{\omega+\eta}^f(x)-\omega T_\omega^f(x))$ τείνει ομοιόμορφα στη $f(x)$. Αυτή η συνάρτηση είναι σχεδόν περιοδική και η Fourier σειρά της είναι:

$$\sum_{\nu^2\leqslant\omega}A_\nu(x)+\sum_{\omega<\nu^2\leqslant\omega+\eta}\left(1-\frac{\nu^2-\omega}{\eta}\right)A_\nu(x)$$

Τώρα για $\omega>\alpha$ ο δεύτερος όρος σε αυτή τη σχέση είναι το πεπερασμένο τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$p_\omega(x)=\sum_{\omega<\nu^2\leqslant\omega+\eta}c_\nu\hat{f}(\nu)e^{i\nu t}$$

όπου $0\leqslant c_\nu<1$. Έτσι για $\omega>\alpha$ το μερικό άθροισμα $\sum_{\nu^2\leqslant\omega}A_\nu(x)$ είναι η Fourier σειρά της σχεδόν περιοδικής συνάρτησης

$$f_\omega(x)=g_\omega(x)-p_\omega(x)$$

Αφού έχουμε ήδη σημειώσει ότι η $g_\omega(x)$ τείνει ομοιόμορφα στη $f(x)$ το θεώρημα θα αποδειχθεί αν δείξουμε ότι η $p_\omega(x)$ τείνει ομοιόμορφα στο 0. Για να το δείξουμε παρατηρούμε ότι

$$|p_\omega(x)|\leqslant\sum_{\omega<\nu^2\leqslant\omega+\eta}|\hat{f}(\nu)|\leqslant\left(\sum_{\omega<\nu^2\leqslant\omega+\eta}|\hat{f}(\nu)|^2\right)^{1/2}N_{\omega,\eta}^{1/2}$$

Αφού η f'' είναι σχεδόν περιοδική , η ανισότητα του Bessel μας δίνει ότι

$$\sum_{\omega<\nu^2\leqslant\omega+\eta} |\hat{f}''(\nu)|^2 = O(1)$$

Επειδή $|\hat{f}''(\nu)|^2 = \nu^4 |\hat{f}(\nu)|^2$, παίρνουμε

$$\sum_{\omega<\nu^2\leqslant\omega+\eta} |\hat{f}(\nu)|^2 = O(\omega^{-2})$$

Οπότε η υπόθεση ότι $N_{\omega,\eta} = O(\omega^2)$ μας λέει ότι το $p_\omega(x)$ είναι ομοιόμορφα O(1). Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Θεώρημα 2. Έστω $f(x)$ μια σχεδόν περιοδική συνάρτηση που ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

(1) $f'(x) \in Lip(\beta)$ για κάποιο $\beta > \frac{1}{2}$ (βλέπε παράρτημα για συνθήκη Lipschitz).

(2) Για κάποιο $\eta>0$, $\alpha \geqslant 0$ το $N_{\omega,\eta}$ είναι πεπερασμένο για όλα τα $\omega>\alpha$ και $N_{\omega,\eta} = O(\omega)$ καθώς το $\omega\to\infty$.

Τότε για όλα τα $\omega>\alpha$, η $\sum_{\nu^2\leqslant\omega} A_\nu(x)$ είναι η Fourier σειρά της σχεδόν περιοδικής συνάρτησης $f_\omega(x)$ και η $f_\omega(x)$ τείνει ομοιόμορφα στη $f(x)$ καθώς το $\omega\to\infty$.

Απόδειξη: Στα περισσότερα σημεία η απόδειξη είναι όμοια με το Θεώρημα 1. Ολοκληρώνουμε μία φορά κατά παράγοντες το ολοκλήρωμα που ορίζει την $T_\omega^f(x)$ και παίρνουμε:

$$T_\omega^f(x) - f(x) = \omega^{-1/2} \int_0^\infty f_x'(\omega^{-1/2} t) H_1(t)\, dt$$

έτσι ώστε

$$(\omega+\eta) T_{\omega+\eta}^f(x) - \omega T_\omega^f(x) - \eta f(x) = (\sqrt{\omega+\eta} - \sqrt{\omega}) \int_0^\infty f_x'(t(\omega+\eta)^{-1/2}) H_1(t)\, dt$$
$$+ \sqrt{\omega} \int_0^\infty (f_x'(t(\omega+\eta)^{-1/2}) - f_x'(t(\omega)^{-1/2})) H_1(t)\, dt \qquad (2.1.11)$$

Η πρώτη μας υπόθεση λέει ότι η $f'(x)$ είναι σχεδόν περιοδική, άρα φραγμένη. Αφού η $H_1(t)$ είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της (2.1.11) είναι ομοιόμορφα $O(\omega^{-1/2})$. Όσο για το δεύτερο μέρος, χωρίζουμε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη, με το πρώτο μέρος ορισμένο στο $(0, \omega^{1/2}\log(\omega))$ και το δεύτερο στο $(\omega^{1/2}\log(\omega), \infty)$. Το ολοκλήρωμα στο πρώτο από αυτά τα διαστήματα είναι ομοιόμορφα $O(|((\omega+\eta)^{-1/2} - \omega^{-1/2})\omega^{1/2}\log(\omega)|^\beta)$,το οποίο είναι $O(\omega^{-\beta}(\log(\omega))^\beta)$. Το ολοκλήρωμα στο δεύτερο από αυτά τα διαστήματα θα είναι $O(\omega^{-1/2}(\log(\omega))^{-1})$ αφού $\int_t^\infty |H_1(s)|ds=O(t^{-1})$. Πολλαπλασιάζοντας με $\sqrt{\omega}$, βρίσκουμε ότι ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέρος της (11) είναι $O(\omega^{1/2-\beta}(\log(\omega))^{\beta})+O((\log(\omega))^{-1})$,το οποίο είναι $O(1)$ αν $\beta>\frac{1}{2}$. Έτσι, όπως και στο Θεώρημα 1, η συνάρτηση $g_\omega(x)$ τείνει ομοιόμορφα στη $f(x)$. Η απόδειξη ότι το υπόλοιπο τείνει ομοιόμορφα στο 0 χρησιμοποιεί την υπόθεση ότι $N_{\omega,\eta}=O(\omega)$ και είναι παρόμοια με το Θεώρημα 1. Έτσι αποδεικνύεται και το Θεώρημα 2.

2.2 ΜΙΑ ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΧΕΙ ΟΛΕΣ ΤΙΣ ΧΟΡΔΕΣ

Θα εισάγουμε πρώτα το συμβολισμό:

$$E\{\varepsilon, f\}=\{t: |f(x+t)-f(x)|<\varepsilon \ \ \text{για καθε}\ x\}$$

Από τον ορισμό ξέρουμε ότι μία συνάρτηση είναι σχεδόν περιοδική αν το σύνολο $E\{\varepsilon, f\}$ είναι σχετικά πυκνό, δηλαδή αν υπάρχει ένας θετικός αριθμός m τέτοιος ώστε το $E\{\varepsilon, f\}$ να περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο σε κάθε ανοικτό διάστημα μήκους m . Το ότι μια συνεχής περιοδική συνάρτηση με περίοδο p ,είναι σχεδόν περιοδική, προκύπτει αν θέσουμε m ίσο με $p+1$,αφού $E\{\varepsilon, f\}\supset\{np: n\in\mathbb{Z}\}$ για κάθε $\varepsilon>0$. Πριν προχωρήσουμε όμως θα συγκεντρώσουμε μερικά δεδομένα για τις σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις που θα φανούν χρήσιμα:

(i) $t\in E\{\varepsilon, f\}$ αν και μόνο αν $-t\in E\{\varepsilon, f\}$.
(ii) Αν $0<q\leqslant m$, τότε $E\{q, f\}\subset E\{m, f\}$.
(iii) Οι σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς.
(iv) Αν f και g είναι σχεδόν περιοδικές, τότε το $E\{\varepsilon, f\}\cap E\{\varepsilon, f\}$ είναι σχετικά πυκνό για κάθε $\varepsilon>0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό (m,n) για το διάστημα $\{x: m<x<n\}$.
Έστω λοιπόν μια σχεδόν περιοδική f και α ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Για να αποδείξουμε ότι η f έχει μία χορδή μήκους α , θα δείξουμε ότι $f(x+a)-f(x)=0$ για κάποιο πραγματικό αριθμό x . Αν αυτό δεν ισχύει, τότε η συνεχής συνάρτηση που ορίζεται ως $x\rightarrow f(x+a)-f(x)$ είναι ή πάντα θετική ή πάντα αρνητική, από το θεώρημα μέσης τιμής. Υποθέτουμε, ότι $f(x+a)-f(x)>0$ για όλα τα x και στο τέλος θα φτάσουμε σε άτοπο. Έστω $\varepsilon>0$. Από την (iii), μπορούμε να διαλέξουμε ένα θετικό αριθμό δ τέτοιο ώστε

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2 \ \ , \text{ όπου } \ |x-y|<\delta$$

Η συνάρτηση g , με περίοδο α , που ορίζεται ως $g(x)=\sin(2\pi x/\alpha)$ θα χρησιμοποιηθεί σαν ένα χρήσιμο εργαλείο. Έστω ένας θετικός αριθμός p , μικρότερος από την ελαχιστη τιμή των δ και $\alpha/8$ και έστω $\beta=g(p)$. Θεωρούμε t τέτοιο ώστε

$$|g(x+t)-g(x)|<\beta \ \text{ για κάθε x.}$$

Διαλέγοντας $x=0$, αυτή η ανισότητα δίνει:

$$\left|\sin\left(\frac{2\pi t}{\alpha}\right)\right|<\beta=\sin\left(\frac{2\pi p}{\alpha}\right)$$

οπότε

$$t\in \bigcup_{-\infty<n<+\infty}\left(\frac{na}{2}-p,\frac{na}{2}+p,\right)$$

Όμως διαλέγοντας $x=a/4$ παίρνουμε:

$$\left|\sin\left[\frac{2\pi}{a}\left(\frac{a}{4}+t\right)\right]-\sin\left(\frac{2\pi}{a}\frac{a}{4}\right)\right|<\sin\left(\frac{2\pi p}{a}\right)$$

πού είναι το ίδιο με $|\cos(2\pi t/a)-1|<\sin(2\pi p/a)$. Επομένως:

$$\cos(2\pi t/a)>1-\sin(2\pi p/a)>0$$

έτσι ώστε

$$t\in \bigcup_{-\infty<n<+\infty}\left(na-\frac{a}{4},na+\frac{a}{4}\right)$$

Αφού το p είναι λιγότερο από $a/8$, τέμνοντας αυτά τα δύο σύνολα παίρνουμε:

$$t\in \bigcup_{-\infty<n<+\infty}(na-p,na+p)$$

και αφού το p είναι μικρότερο από δ , έχουμε $t\in \cup_{-\infty<n<+\infty}(na-\delta,na+\delta)$. Οπότε

$$E\{\beta,g\}\subset \cup_{-\infty<n<+\infty}(na-\delta,na+\delta)$$

Τέλος, έστω $\eta=min\{\beta,\varepsilon/2\}$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι

$$E\{\eta,g\}\cap E\{\eta,f\}\subset E\{\eta,g\}\subset E\{\beta,g\}\subset \cup_{-\infty<n<+\infty}(na-\delta,na+\delta)$$

όπου το δεύτερο σύνολο το παίρνουμε από την (ii). Από την (iv), το σύνολο στα αριστερά, είναι σχετικά πυκνό και επομένως περιέχει αυθαιρέτως μεγάλους αριθμούς. Άρα μπορούμε να διαλέξουμε $t\in E\{\eta,g\}\cap E\{\eta,f\}$ τέτοιο ώστε $t=ma+q$, όπου m είναι ένας θετικός αριθμός και $|t-ma|=|q|<\delta$. Διαλέγοντας το δ για όλα τα x έχουμε:

$$f(x+ma-t)-f(x)<\varepsilon/2$$

και αφού από την (i), το $-t$ είναι επίσης μέλος του $E\{\eta, f\}$ παίρνουμε:

$$f(x+ma)-f(x+ma-t)<\eta$$

Από το γεγονός ότι το $x \rightarrow f(x+a)-f(x)$ είναι θετικό, προκύπτει

$$\begin{gathered}0<f(x+a)-f(x) \leqslant \sum_{k=1}^{m}[f(x+ka)-f(x+(k-1)a)] \\ =f(x+ma)-f(x)=[f(x+ma)-f(x+ma-t)]+[f(x+ma-t)-f(x)] \\ <\eta+\varepsilon/2 \leqslant \varepsilon\end{gathered}$$

Όμως, αφού το ε είναι αυθαίρετο, προκύπτει ότι το $f(x+a)-f(x)$ είναι μηδέν για κάθε x, το οποίο είναι **άτοπο**. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η f έχει μια οριζόντια χορδή μήκους a.

2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑ

Η ανακατασκευή μιγαδικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής έχοντας γνώση ενός πεπερασμένου αριθμού τιμών (δείγματά της) είναι το αντικείμενο της θεωρίας δειγματοληψίας. Η μέθοδος ανακατασκευής είναι πολύ συχνά της μορφής:

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} f(t_n) s_n(t)$$

η οποία ονομάζεται δειγματοληπτική ανάπτυξη της f, ή δειγματοληπτική σειρά. Το ενδιαφέρον για τη δειγματοληψία μπορεί να αναχθεί πίσω στον Shannon και τη δουλειά του στα τέλη της δεκαετίας του σαράντα, αν και αρκετοί μαθηματικοί και μηχανικοί είχαν σκεφτεί για το πρόβλημα από τις αρχές του 20ου αιώνα. Το πρόβλημα της δειγματοληψίας έδωσε ώθηση σε πολλούς τομείς των μαθηματικών, αλλά περισσότερο από όλους στον τομέα της αρμονικής ανάλυσης.

Η θεωρία των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων έμεινε έξω από το πεδίο έρευνας της δειγματοληψίας για αρκετό καιρό. Τελευταία όμως το ενδιαφέρον εστιάστηκε στις συναρτήσεις που είναι φραγμένες και έχουν ασυνεχείς Fourier μετασχηματισμούς. Η σχεδόν περιοδική επέκταση αυτών των συναρτήσεων έδωσε σημαντικά αποτελέσματα στη θεωρία και κυρίως το θεώρημα μη ομοιόμορφης δειγματοληψίας που θα αναπτύξουμε παρακάτω.

Όπως έχουμε δει, είναι δυνατόν να αντιστοιχίσουμε με κάθε σχεδόν περιοδική συνάρτηση, μια σειρά Fourier, με τον ακόλουθο τρόπο. Το όριο

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

υπάρχει για κάθε ομοιόμορφη σχεδόν περιοδική συνάρτηση, και είναι μη μηδενικό το πολύ για ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών του λ, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Οι συντελεστές Fourier της f ορίζονται:

$$c_n = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\lambda_n t} dt$$

και η σειρά Fourier της είναι:

$$f(t) \sim \sum_n c_n e^{i\lambda_n t}$$

Το θεώρημα Parseval για μία ομοιόμορφη σχεδόν περιοδική συνάρτηση, μας λέει ότι:

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} \left| f(t) - \sum_{n=0}^{k-1} c_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = 0$$

Μία έννοια μεγάλου ενδιαφέροντος για εμάς είναι η επέκταση του ορισμού της σχεδόν περιοδικής συνάρτησης κατά Stepanoff. Έστω l ένας αυθαίρετος θετικός αριθμός και $p \geqslant 1$. Η νόρμα Stepanoff, S_l^p, μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ανήκει στο $L_p(I)$ για οποιοδήποτε διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ ορίζεται ως:

$$\|f\|_{S_l^p} = \sup_{x\in\mathbb{R}} r \left[\frac{1}{l} \int_{x}^{x+l} |f(t)|^p dt \right]^{1/p}$$

Η ακριβής τιμή του l δεν έχει σημασία. Μπορεί να δειχθεί ότι παίρνουμε την ίδια κλάση συναρτήσεων αν το l αντικατασταθεί με οποιοδήποτε άλλο αριθμό.

Ορισμός (σχεδόν περιοδική συνάρτηση κατά Stepanoff) Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ανήκει στο $L_p(I)$ για κάθε συμπαγές διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ είναι σχεδόν περιοδική κατά Stepanoff αν, για ένα $\varepsilon > 0$, έχει ένα σχετικά πυκνό σύνολο αριθμών τ τέτοιο ώστε

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} r \left[\frac{1}{l} \int_{x}^{x+l} |f(x) - f(x-\tau)|^p dt \right]^{1/p} < \varepsilon$$

Το σύνολο των S_l^p σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων περιέχει το σύνολο των ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων, αφού μπορεί να δειχθεί ότι κάθε S_l^p ομοιόμορφα συνεχής περιοδική συνάρτηση είναι και ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική. Εξάλου υπάρχουν S_l^p συναρτήσεις που δεν είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικές. Οι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις μπορούν να φτιαχτούν συμπληρώνοντας το μετρικό χώρο των γενικευμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων της μορφής

$$\sum_{n=0}^{k-1} A_n e^{i\lambda_n t}$$

με τη μετρική

$$d(a,b)=\sup_{t\in\mathbb{R}} r|a(t)-b(t)|$$

Με τον ίδιο τρόπο οι S_l^p συναρτήσεις μπορούν να φτιαχτούν συμπληρώνοντας τον ίδιο μετρικό χώρο των γενικευμένων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, με την απόσταση

$$d(a,b)=\|a-b\|_{S_l^p}$$

Σχεδόν περιοδική επέκταση συναρτήσεων Έστω μία συνάρτηση $\hat{x}$ με φορέα (support) $[-\sigma,\sigma]$. Θεωρούμε

$$\hat{y}(\omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \hat{x}(\omega-\omega_n) \qquad (2.3.1)$$

και διαλέγουμε τα $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ με τέτοιο τρόπο ώστε η $\hat{y}$ να είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική.

Θεώρημα 3 *Έστω $\hat{x}$ μία συνεχής συνάρτηση με φορέα (support) το $[-\sigma,\sigma]$. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικές και $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ομοιόμορφα σχεδόν γραμμικές. Αν $|\omega_i-\omega_j|>\sigma$, $\forall i,j\in\mathbb{Z}$ τότε η $\hat{y}$ είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική.*

Απόδειξη: Αφού η $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ομοιόμορφα σχεδόν γραμμική, υπάρχει ένα $\Omega>0$ πραγματικό και μία ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική ακολουθία $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ τέτοια ώστε $\omega_n=n\Omega+\Delta_n$, $\forall n\in\mathbb{Z}$. Αφού τα $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι και τα δύο ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικά , για κάθε $\delta>0$, υπάρχει ένα σχετικά πυκνό σύνολο $P(\delta)$ δ-σχεδόν περιόδων που αντιστοιχούν στα $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ (μία απόδειξη αυτής της εικασίας είναι ουσιαστικά ίδια με την απόδειξη του θεωρήματος άθροισης, που λέει ότι το άθροισμα δύο ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικό).

Θα δείξουμε ότι, για οποιδήποτε θετικό ε είναι δυνατό να βρούμε ένα θετικό δ ,τέτοιο ώστε οι αριθμοί της μορφής $m\Omega$, όπου $m\in P(\delta)$, είναι ε-σχεδόν περίοδοι της $\hat{y}$.

Γι' αυτό το σκοπό, είναι βολικό να ορίσουμε τρία ξένα μεταξύ τους και συμπληρωματικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, που θα τα συμβολίσουμε S_1 , S_2 και S_3 . Εξ' ορισμού, $\omega\in S_1$ αν υπάρχει ένα $n\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$|\omega-\omega_n|<\sigma-\delta \qquad (2.3.2)$$

Λέμε ότι $\omega \in S_2$ αν

$$|\omega - \omega_n| > \sigma + \delta \tag{2.3.3}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{Z}$. Τέλος, $\omega \in S_3$ σημαίνει ότι

$$\sigma - \delta \leqslant |\omega - \omega_n| \leqslant \sigma + \delta \tag{2.3.4}$$

για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$. Τα σύνολα S_1 και S_3 είναι απαραίτητα μη-κενά, αλλά το S_2 μπορεί να είναι κενό.

Πρίν συνεχίσουμε με την απόδειξη είναι χρήσιμο να σημειώσουμε την ταυτότητα

$$\omega + m\Omega - \omega_{m+n} = \omega - \omega_n + \Delta_n - \Delta_{n+m} \tag{2.3.5}$$

που προκύπτει αμέσως από τη σχέση $\omega_n = n\Omega + \Delta_n$.

Αν $\omega \in S_1$, δηλαδή, αν ικανοποιεί την (2.3.2) για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$, τότε $\hat{y}(\omega) = a_n \hat{x}(\omega - \omega_n)$. Από την (2.3.5) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} |\omega + m\Omega - \omega_{m+n}| &\leqslant |\omega - \omega_n| + |\Delta_n - \Delta_{n+m}| \\ &\leqslant \sigma - \delta + \delta \end{aligned}$$

Αλλά η $|\omega + m\Omega - \omega_{m+n}| \leqslant \sigma$, με τη σειρά της δίνει

$$\hat{y}(\omega + m\,\Omega) = a_{n+m}\hat{x}(\omega + m\,\Omega - \omega_{n+m})$$

Οπότε

$$\begin{aligned} |\hat{y}(\omega + m\,\Omega) - \hat{y}(\omega)| &= |a_{n+m}\hat{x}(\omega + m\,\Omega - \omega_{n+m}) - a_n\hat{x}(\omega - \omega_n)| \\ &\leqslant |a_{n+m}||\hat{x}(\omega + m\,\Omega - \omega_{n+m}) - \hat{x}(\omega - \omega_n)| + \\ &\quad + |\hat{x}(\omega - \omega_n)||a_{n+m} - a_n| \\ &\leqslant A|\hat{x}(\omega + m\,\Omega - \omega_{n+m}) - \hat{x}(\omega - \omega_n)| + B|a_{n+m} - a_n| \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} A &= \sup_i r|a_i| \\ B &= \sup_\omega r|\hat{x}(\omega)| \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Για συντομία, έστω $p = \omega - \omega_n$. Τότε

$$\begin{aligned} |\hat{y}(\omega + m\Omega) - \hat{y}(\omega)| &\leqslant A|\hat{x}(p + \Delta_n - \Delta_{n+m}) - \hat{x}(p)| + B|a_{n+m} - a_n| \\ &\leqslant A|\hat{x}(p + \theta\delta) - \hat{x}(p)| + B\,\delta \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

όπου $|\theta| < 1$. Αφού η $\hat{x}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, η σωστή εκλογή του δ κάνει αυτή την έκφραση μικρότερη από οποιαδήποτε θετική ποσότητα ε . Με αυτό ολοκληρώνεται το πρώτο μέρος της απόδειξης.

Για το δεύτερο μέρος, υποθέτουμε ότι το ω ικανοποιεί την (2.3.3), δηλαδή ανήκει στο S_2 . Τότε, υπάρχει ένα $n\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$\omega_n+\sigma+\delta<\omega<\omega_{n+1}-\sigma-\delta$$

δηλαδή

$$\omega_n+m\Omega+\sigma+\delta<\omega+m\Omega<\omega_{n+1}+m\Omega-\sigma-\delta$$

Αντικαθιστώντας $\omega_n=n\Omega+\Delta_n$, $\omega_{n+1}=(n+1)\Omega+\Delta_{n+1}$ και χρησιμοποιώντας ότι $|\Delta_{i+m}-\Delta_i|<\delta$, παίρνουμε

$$\omega_{n+m}+\sigma<\omega+m\Omega<\omega_{n+m+1}-\sigma$$

που αποδεικνύει ότι $\hat{y}(\omega+m\Omega)=0$. Αλλά και $\hat{y}(\omega)=0$ οπότε

$$|\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)| \ = \ 0 \tag{2.3.8}$$

που συμπληρώνει το δεύτερο σκέλος της απόδειξης.

Μένει μόνο το τρίτο και τελευταίο μέρος. Έστω ότι το ω ανήκει στο S_3 ή ισοδύναμα έστω, ότι ικανοποιεί την (2.3.4). Αυτό μας λέει ότι

$$|\hat{y}(\omega)| \ \leqslant \ A|\hat{x}(\sigma+2\theta_1\delta)|$$

όπου το θ_1 συμβολίζει ένα κατάλληλο αριθμό στο διάστημα [-1,1] και το A ορίζεται όπως στην (2.3.6).

Από την άλλη, προκύπτει από τη (2.3.5) ότι

$$\sigma-2\delta\leqslant|\omega+m\Omega-\omega_{n+m}|\leqslant\sigma+2\delta$$

που σημαίνει

$$|\hat{y}(\omega+m\Omega)| \ \leqslant \ A|\hat{x}(\sigma+2\theta_2\delta)|$$

όπου πάλι, το θ_2 ανήκει στο [-1,1]. Οπότε

$$|\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)| \ \leqslant \ A|\hat{x}(\sigma+2\theta_2\delta)|+A|\hat{x}(\sigma+2\theta_1\delta)| \tag{2.3.9}$$

Αφού η $\hat{x}$ είναι συνεχής, $\hat{x}(\sigma)=0$, και επομένως, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει ένα δ τέτοιο ώστε αυτή η έκφραση να είναι μικρότερη από ε . Με αυτό ολοκληρώνεται και το τελευταίο σκέλος της απόδειξης.

Αφού η $\hat{y}$ είναι συνεχής, το θεώρημα προκύπτει από τις (2.3.7), (2.3.8) και (2.3.9), που δείχνουν ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, οι αριθμοί $m\Omega$, με $m\in P(\delta)$, είναι ένα σχετικά πυκνό σύνολο ε-σχεδόν περιόδων της $\hat{y}$, με τον όρο ότι το δ είναι αρκετά μικρό.

Θα διατυπώσουμε τώρα συνθήκες που βεβαιώνουν ότι η $\hat{y}$ είναι S_l^p σχεδόν περιοδική. Η συνέχεια του $\hat{x}$ δεν είναι πλέον απαραίτητη.

Θεώρημα 4 *Έστω* $\hat{x}$ *μία φραγμένη συνάρτηση με φορέα (support)* $[-\sigma,\sigma]$ *. Αν τα* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικά και τα* $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *ομοιόμορφα σχεδόν γραμμικά και* $|\omega_i-\omega_j|>\sigma$, $\forall i,j\in\mathbb{Z}$ *τότε η* $\hat{y}$ *είναι μία* S_l^p *σχεδόν περιοδική συνάρτηση.*

Απόδειξη: Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα σχετικά πυκνό σύνολο ε-σχεδόν περιόδων της $\hat{y}$ στη S_l^p $(p\geqslant 1)$ νόρμα, δηλαδή, ένα σύνολο αριθμών τ τέτοιο ώστε

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} r\left[\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+l}|\hat{y}(\omega+\tau)-y(\omega)|^p\,dt\right]^{1/p}<\varepsilon \qquad (2.3.10)$$

Θυμόμαστε ότι, αφού η $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ομοιόμορφα σχεδόν γραμμική, υπάρχει ένα $\Omega>0$ τέτοιο ώστε $\omega_n=n\Omega+\Delta_n$, όπου η ακολουθία $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική. Τα $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι και τα δύο ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικά και επομένως, για κάθε δοθέν $\delta>0$, υπάρχει ένα σχετικά πυκνό σύνολο $P(\delta)$, δ-σχεδόν περιόδων των $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Θα δείξουμε ότι η (2.3.10) ισχύει για κάθε $\tau=m\Omega$ όπου $m\in P(\delta)$, αν το δ είναι αρκετά μικρό.

Η ακριβής τιμή του l στη (2.3.10) είναι άνευ σημασίας, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $l<2\sigma$. Αυτό υπονοεί ότι κάθε διάστημα $I=[\alpha,\alpha+l]$ μπορεί να εκφραστεί σαν ένωση το πολύ τριών ασύνδετων συνόλων S_1 , S_2 και S_3 που ορίζονται ως εξής: S_1 είναι το σύνολο όλων των $\omega\in I$ τέτοιων ώστε

$$|\omega-\omega_n|<\sigma-\delta \qquad (2.3.11)$$

για κάποιο ακέραιο n . S_2 το σύνολο όλων των $\omega\in I$ τέτοιων ώστε

$$|\omega-\omega_n|>\sigma+\delta \qquad (2.3.12)$$

για κάθε $n\in\mathbb{Z}$, και το S_3 ορίζεται παρόμοια αντικαθιστώντας

$$\sigma-\delta\leqslant|\omega-\omega_n|\leqslant\sigma+\delta \qquad (2.3.13)$$

στη (2.3.12). Αυτοί οι ορισμοί είναι παρόμοιοι με του προηγούμενου θεωρήματος. Το ολοκλήρωμα (2.3.10) μπορεί να γραφεί σαν ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων πάνω στο σύνολο S_1 , S_2 και S_3 , τα οποία θα εξετάσουμε ξεχωριστά.

Η πρώτη περίπτωση είναι όταν $\omega\in S_1$. Τότε έχουμε

$$\hat{y}(\omega)=a_n \hat{x}(\omega-\omega_n) \qquad (2.3.14)$$

Όπως και στο προηγούμενο θεώρημα, από την (2.3.5) έχουμε ότι για κάθε $m \in P$

$$|\omega+m\Omega-\omega_{m+n}| \leqslant |\omega-\omega_n|+|\Delta_n-\Delta_{n+m}| \leqslant \sigma$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \hat{y}(\omega+m\Omega) &= a_{n+m}\hat{x}(\omega+m\Omega-\omega_{n+m}) \\ &= a_{n+m}\hat{x}(\omega-\omega_n+\theta\delta) \end{aligned} \qquad (2.3.15)$$

για κάποιο πραγματικό θ τέτοιο ώστε $|\theta| \leqslant 1$. Απο τις (2.3.14) και (2.3.15) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} &\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)=a_{n+m}\hat{x}(\omega-\omega_n+\theta\delta)-a_n\hat{x}(\omega-\omega_n) \\ &=a_{n+m}[\hat{x}(\omega-\omega_n+\theta\delta)-\hat{x}(\omega-\omega_n)]+\hat{x}(\omega-\omega_n)[a_{n+m}-a_n] \end{aligned}$$

Αυτό και η ανισότητα Minkowski μας δίνει

$$\begin{aligned} &\left|\int_{S_1}|\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)|^p d\omega\right|^{1/p} \leqslant \\ &\leqslant |a_{n+m}|\left|\int_{S_1}|\hat{x}(\omega-\omega_n+\theta\delta)-\hat{x}(\omega-\omega_n)|^p d\omega\right|^{1/p}+ \\ &+|a_{n+m}-a_n|\left|\int_{S_1}|\hat{x}(\omega-\omega_n)|^p d\omega\right|^{1/p} \\ &\leqslant A\left|\int_{S_1}|\hat{x}(\omega-\omega_n+\theta\delta)-\hat{x}(\omega-\omega_n)|^p d\omega\right|^{1/p}+\delta\|\hat{x}\|_p \end{aligned} \qquad (2.3.16)$$

όπου

$$A=\sup_i r|a_i|$$

Η δεύτερη περίπτωση είναι όταν $\omega \in S_2$ και τότε έχουμε $\hat{y}(\omega)=0$. Σ' αυτή την περίπτωση το $\hat{y}(\omega+m\Omega)=0$ επίσης, αφού στην περιοχή δ του $\omega \in S_2$ έχουμε $\hat{y}(\omega)=0$ και το m είναι μία δ-σχεδόν περίοδος των Δ_n. Επομένως

$$\int_{S_2}|\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)|^p d\omega=0 \qquad (2.3.17)$$

Μένει μόνο να κοιτάξουμε την τελευταία περίπτωση. Οπότε, έστω $\omega \in S_3$. Αφού $l<2\sigma$, το μέτρο του S_3 δεν υπερβαίνει την τιμή 4δ. Άρα

$$\int_{S_3}|\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)|^p d\omega \leqslant 4\delta(2\mathrm{B})^p \qquad (2.3.18)$$

όπου

$$B = \|\hat{x}\|_{\infty} = \underset{\omega}{supr}|\hat{x}(\omega)|$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.3.16),(2.3.17) και (2.3.18) παίρνουμε:

$$\frac{1}{l}\int_{\alpha}^{\alpha+l} |\hat{y}(\omega+m\Omega)-y(\omega)|^p\, d\omega =$$
$$= \left[\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3}\right]|\hat{y}(\omega+m\Omega)-\hat{y}(\omega)|^p\, d\omega$$
$$\leqslant A\left[\int_{S_1}|\hat{x}(\omega-\omega_n+\theta\delta)-\hat{x}(\omega-\omega_n)|^p\, d\omega\right]^{1/p} + \delta\|\hat{x}\|_p + 4\delta(2\mathrm{B})^p$$

που τείνει στο μηδέν όταν $\delta \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε πάντα να διαλέξουμε το δ τόσο μικρό ώστε να ισχύει η (2.3.10), και έτσι ολοκληρώσαμε την απόδειξη.

Σημειώνουμε ότι αν η $\hat{x}$ είναι συνεχής τότε το Θεώρημα 4 υπονοεί το Θεώρημα 3, αφού μία S_l^p σχεδόν περιοδική συνάρτηση είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική ,αν και μόνο αν, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Το παρακάτω Θεώρημα δειγματοληψίας είναι συνέπεια του Θεωρήματος 4.

Θεώρημα 5 *Έστω $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ και $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ομοιόμορφα σχεδόν γραμμική και ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική, αντίστοιχα, και έστω ότι ο φορέας (support) του μετασχηματισμού Fourier της $x\in L_2$ βρίσκεται στο $[-\sigma,+\sigma]$. Αν $\omega_n-\omega_{n-1}>2\sigma$ για όλα τα $n\in\mathbb{Z}$ τότε*

- *A. $s(t)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{k}}\sum_{n=-k}^{k} a_n e^{i\omega_n t}$ είναι μη μηδενικό μόνο για ένα αριθμήσιμο σύνολο τιμών του $t,(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.*
- *B. Αν η σειρά Fourier του $\hat{y}$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\hat{y}$, το x μπορεί να βρεθεί από το $[s(t_n)x(t_n)]_{n\in\mathbb{Z}}$ χρησιμοποιώντας τη σχέση*

$$x(t)=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=-k}^{k} s(t_n)\,x(t_n)\,h(t-t_n)$$

όπου $h(t)=2\sin(\sigma t)/\Omega t$ και το Ω είναι μία σταθερά που συσχετίζεται με την ομοιόμορφα σχεδόν γραμμική ακολουθία $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Απόδειξη Από το Θεώρημα 4 προκύπτει ότι η $\hat{y}$ είναι S_l^p σχεδόν περιοδική για όλα τα $p\geqslant 1$. Επομένως η συνάρτηση

$$b(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

είναι καλώς ορισμένη και μη μηδενική μόνο σε κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $(t_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Η Fourier σειρά της $\hat{y}$ μπορεί να γραφεί

$$\hat{y}(\omega)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{-i\omega t_n}$$

όπου

$$b_n=b(t_n)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}\hat{y}(\omega)e^{-i\omega t_n}d\omega$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (2.3.1),

$$\begin{aligned}b(t)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\hat{x}(\omega-\omega_n)e^{i\omega t}d\omega\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k\Omega}\int_{-k\Omega}^{k\Omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n\hat{x}(\omega-\omega_n)e^{i\omega t}d\omega\end{aligned}$$

Το άθροισμα των μεταθέσεων του $\hat{x}$ δε δημιουργεί πρόβληματα, αφού αυτές δεν επικαλύπτονται, σύμφωνα με την υπόθεση του Θεωρήματος. Αν τώρα πάρουμε το Ω να είναι μία σταθερά σχετιζόμενη με την ακολουθία $(\omega_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, οι ποσότητες $\omega_n-n\Omega$ θα είναι φραγμένες και

$$\begin{aligned}b(t)&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k\Omega}\int_{-k\Omega}^{k\Omega}\sum_{n=-k}^{k}a_n\hat{x}(\omega-\omega_n)e^{i\omega t}d\omega\\&=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k\Omega}\sum_{n=-k}^{k}a_n e^{i\omega t}\int_{-k\Omega}^{k\Omega}\hat{x}(\omega-\omega_n)e^{i(\omega-\omega_n)t}d\omega\end{aligned}$$

που δείχνει ότι $b(t)=\frac{2\pi}{\Omega}s(t)x(t)$ και αποδεικνύει το Α. Αφού η $\hat{y}$ είναι S_l^p σχεδόν περιοδική, οι Fourier συντελεστές της, $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, ικανοποιούν

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|^2<\infty$$

Αλλά

$$b_n=\frac{2\pi}{\Omega}s(t_n)x(t_n)$$

και επομένως $s(t_n)x(t_n)\in L_2$. Η σειρά Fourier της $\hat{y}$ γράφεται

$$\hat{y}(\omega)\sim\frac{2\pi}{\Omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(t_n)\,x(t_n)\,e^{-i\omega t_n}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή τη σειρά Fourier με $\frac{e^{i\omega t}}{2\pi}$ και ολοκληρώνοντας όρο με όρο στο $[-\sigma,+\sigma]$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}\hat{y}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\\
&= \int_{-\sigma}^{\sigma}\frac{1}{\Omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(t_n)\,x(t_n)\,e^{i\omega(t-t_n)}\,d\omega\\
&= \frac{1}{\Omega}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(t_n)\,x(t_n)\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{i\omega(t-t_n)}\,d\omega\\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}s(t_n)\,x(t_n)\frac{2\sin(\sigma(t-t_n))}{\Omega(t-t_n)}
\end{aligned}$$

που είναι το Β.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε μια νέα μέθοδο προσέγγισης μιας κλάσης συναρτήσεων που δε περιορίζονται σε ζώνη, χρησιμοποιώντας πεπερασμένες μη ομοιόμορφες δειγματοληπτικές σειρές. Η μέθοδος βασίζεται στην εξής απλή ιδέα: προσεγγίζουμε ένα ολοκλήρωμα συνέλιξης με μία πεπερασμένη σειρά και μετά χρησιμοποιούμε αυτό το πεπερασμένο άθροισμα για να πάρουμε ένα άνω φράγμα για το προσεγγιστικό σφάλμα.

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση f που ορίζεται στο $[a,b]$, λέγεται ότι έχει φραγμένη κύμανση αν

$$\sum_{k=1}^{N}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant C<\infty \qquad (2.3.19)$$

για κάθε διάτμηση $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$ του $[a,b]$. Η κύμανση της f στο $[a,b]$, η οποία συμβολίζεται με V_f , είναι το ελάχιστο πάνω φράγμα της (13) σε σχέση με όλες τις διατμήσεις του $[a,b]$. Θα συμβολίσουμε $f(x)=O(g(x))$ όταν $x\to\infty$ αν υπάρχει μια σταθερά C τέτοια ώστε $f(x)\leqslant C\,g(x)$ καθώς $x\to\infty$.

Έστω $f\in L_2$ και ας θεωρήσουμε τη συνέλιξη

$$g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)K(t-\tau)\,d\tau$$

όπου K είναι μια συνάρτηση τουλάχιστον μίας παραμέτρου w . Γενικά, θέλουμε να ισχύει $g\to f$ υπό κάποια έννοια καθώς $w\to\infty$. Μία κλάση πυρήνων με αυτή την ιδιότητα προκύπτει, αν θέσουμε στους Fourier μετασχηματισμούς $\hat{K}$,τον περιορισμό

$$\hat{K}(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \alpha\nu \quad |x|\leqslant w\\ 0 & \alpha\nu \quad |x|\geqslant w+a\end{cases}$$

όπου w και a είναι μη αρνητικά. Η απλούστερη περίπτωση είναι για $a=0$ που μας δίνει τον πυρήνα

$$K(t)=\frac{\sin(wt)}{\pi t} \tag{2.3.20}$$

Σε αυτή την περίπτωση η g , που προσεγγίζει την f στη νόρμα L_2 , συγκλίνει επίσης σημείο προς σημείο στην f . Όταν το $\hat{K}$ είναι συνεχές και μικραίνει γραμμικά στο $[w, w+a]$ παίρνουμε

$$K(t)=\frac{\cos(wt)-\cos((w+a)t)}{\pi a t^2}=\frac{2\sin((w+\frac{a}{2})t)\sin(at/2)}{\pi a t^2} \tag{2.3.21}$$

Ένας άλλος πυρήνας είναι

$$K(t)=\frac{a}{2\pi}\left[\frac{\sin(at/2)}{at/2}\right]^2=\frac{1-\cos(at)}{\pi a t^2} \tag{2.3.22}$$

που μπορεί να θεωρηθεί σαν οριακή περίπτωση της (2.3.21) όταν $w\to 0$. Είναι δυνατόν να φτιάξεις πυρήνες που ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier μικραίνει γρηγορότερα από $O(|t|^{-n})$ όταν $t\to\infty$.
Από εδώ και πέρα θα συμβολίσουμε με K όλους τους πυρήνες ακόμα κα αν εξαρτώνται από παραμέτρους όπως w και a .

Γιατί χρειαζόμαστε τέτοιους πυρήνες; Αφού για οποιοδήποτε τέτοιο πυρήνα έχουμε $g\to f$ καθώς $w\to\infty$, είναι δυνατόν να προσεγγίσουμε κάθε $f\in L_2$ αυθαιρέτως κοντά με τη g . Προκύπτει ότι η g μπορεί με τη σειρά της να προσεγγιστεί από μία δειγματοληπτική σειρά, **της οποίας οι συντελεστές είναι τα δείγματα της f .**

Θεώρημα 6 *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, φραγμένης κύμανσης, που είναι μηδέν έξω από το διάστημα $[0,1]$. Συμβολίζουμε με $\{t_i\}$ οποιουσδήποτε N πραγματικούς τέτοιους ώστε*

$$\frac{i-1}{N}<t_i<\frac{i}{N} \tag{2.3.23}$$

για $1\leqslant i\leqslant N$ και έστω

$$g(t)=\int_0^1 f(\tau)K(t-\tau)\,d\tau \tag{2.3.24}$$

Τότε

$$\left| g(t)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k)K(t-t_k) \right| \leqslant \frac{V_f \|K\|_\infty + V_k(t)\|f\|_\infty}{N}$$

όπου $\|\cdot\|_\infty$ *είναι το* L_∞ *μέτρο και* $V_k(t)$ *η κύμανση της συνάρτησης* $k(x)=K(x-t)$ *για* $x\in[0,1]$.

Απόδειξη: Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό έστω

$$s_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k)K(t-t_k) \tag{2.3.25}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στην (2.3.24) και παίρνουμε

$$g(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\xi_k)K(t-\xi_k)$$

όπου τα N πραγματικά ξ_i $(1\leqslant i\leqslant N)$ ικανοποιούν την (2.3.23). Αυτό μας δίνει

$$|g(t)-s_N(t)|\leqslant\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} |f(\xi_k)K(t-\xi_k)-f(t_k)K(t-t_k)|\leqslant\frac{V_F(t)}{N}$$

όπου $V_F(t)$ είναι η μεταβολή της συνάρτησης

$$F(x)=f(x)K(x-t)$$

στο $[0,1]$, που είναι συνάρτηση του t . Αλλά

$$V_F(t)\leqslant V_f\|K\|_\infty+V_k(t)\|f\|_\infty$$

Θεώρημα 7 *Έστω* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *μία συνεχής συνάρτηση, φραγμένης κύμανσης, που είναι μηδέν έξω από το διάστημα* $[0,1]$ *και έστω* ε *ένας αυθαίρετος μικρός θετικός αριθμός. Συμβολίζουμε με* $\{t_i\}$ *οποιουσδήποτε* N *πραγματικούς τέτοιους ώστε η (2.3.23) να ισχύει για* $1\leqslant i\leqslant N$ *και έστω* f_w *μία βαθυπερατή λεία (smoothed) έκδοση της* f ,

$$f_w(t)=\int_0^1 f(\tau)\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-\tau)}d\tau \qquad (2.3.26)$$

όπου w *ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε, για κάθε* $t<-\varepsilon$ *ή* $t>1+\varepsilon$ *, ισχύει*

$$\left|f_w(t)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k)\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-t_k)}\right|=\frac{O(w)}{N} \qquad (2.3.27)$$

ενώ για $0\leqslant t\leqslant 1$ *,*

$$\left|f_w(t)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k)\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-t_k)}\right|=\frac{O(w\log w)}{N} \qquad (2.3.28)$$

Απόδειξη: Σε αυτή τη περίπτωση έστω

$$s_N(t)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k)\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-t_k)} \qquad (2.3.29)$$

Από το θεώρημα 6 έχουμε

$$\left|f_w(t)-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(t_k)K(t-t_k)\right|\leqslant\frac{V_f\|K\|_\infty+V_k(t)\|f\|_\infty}{N}$$

όπου το $V_k(t)$ συμβολίζει τη κύμανση της συνάρτησης

$$k(t)=\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-\tau)}$$

στο [0,1], που είναι w/π επί τη μεταβολή V_S της $S(x)=\sin(x)/x$, για $x\in[-wt, w(1-t)]$. Επομένως:

$$V_k(t)\leqslant V_f\frac{w}{\pi}+\|f\|_\infty\frac{w}{\pi}V_S \qquad (2.3.30)$$

Τα σημεία x όπου η S έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο, που θα παίξουν ρόλο στην παρακάτω συζήτηση, συμβολίζονται με $x_n, n\in\mathbb{Z}$, με την ακόλουθη σύμβαση: $x_0=0$ είναι το σημείο όπου η S έχει το απόλυτο μέγιστο, x_n με n θετικό, το n -οστό σχετικό μέγιστο ή ελάχιστο στα δεξιά της αρχής και x_n με n αρνητικό, έχει την ίδια σημασία σε σχέση με τα αριστερά της αρχής.

Για να εκτιμήσουμε το V_S ξεχωρίζουμε μεταξύ των περιπτώσεων (i) $0\leqslant t\leqslant 1$, (ii)

$t<0$ ή $t>1$.

Στην πρώτη περίπτωση το διάστημα $[-wt, w(1-t)]$ περιέχει την αρχή και επομένως είναι η ένωση των $[0,a]$ και $[-b,0]$ για κάποια μη αρνητικά a και b (το a είναι μηδέν όταν $t=1$ και το b είναι μηδέν όταν $t=0$). Αφού το S είναι άρτιο, θα επικεντρωθούμε στη μεταβολή του S όταν $0<x<a$ μόνο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε

$$V_S \leqslant |S(x_0)| + 2\left(\sum_{k=1}^{i-1} |S(x_k)|\right) + |S(x_i)|$$

όπου το x_i συμβολίζει το μικρότερο από τα $\{x_n\}$ που είναι μεγαλύτερα του a . Τώρα

$$\begin{aligned} V_S &\leqslant 1+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k} \leqslant 1+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=2}^{i}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} \\ &\leqslant 1+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\log i \leqslant 1+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\log\left(\frac{x_i}{\pi}\right) \end{aligned}$$

που μας δείχνει ότι η μεταβολή του S στο $[0,a]$ είναι $O(\log a)$.

Ας γυρίσουμε στο $V_k(t)$ και την (2.3.30), υποθέτοντας για τώρα ότι $\varepsilon<t<1-\varepsilon$. Η μεταβολή V_S του S για $x\in[-wt, w(1-t)]$ είναι ίση με το άθροισμα των μεταβολών στο $[0, w|t|]$ και $[0, w|1-t|]$. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα υπάρχουν θετικές σταθερές A και B τέτοιες ώστε

$$V_k(t) \leqslant V_f \frac{w}{\pi} + \|f\|_\infty \frac{w}{\pi}\left[A\log|wt| + B\log w|1-t|\right] \qquad (2.3.31)$$

Αλλά το

$$A\log|wt| + B\log(w|1-t|) = (A+B)\log w + A\log|t| + B\log|1-t|$$

παραμένει φραγμένο στο t αν $\varepsilon<t<1-\varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $V_k(t)=O(w\log w)$ και άρα:

$$|f_w(t) - s_N(t)| = \frac{O(w\log w)}{N}$$

που είναι η (2.3.28). Όταν $t=0$ ή $t=1$ η σχέση ισχύει ακόμα αφού το $A\log|wt|$ ή το $B\log(w|1-t|)$ αντίστοιχα μπορούν να παραλειφθούν από την (2.3.31).

Για τις περιπτώσεις $t<0$ ή $t>1$ παίρνουμε ξανά την (2.3.30). Πρέπει να εκτιμήσουμε το V_S , τη μεταβολή του S στο $I=[-wt, w(1-t)]$. Όταν $t<0$ ή $t>1$ το διάστημα I δεν περιέχει την αρχή. Αφού το S είναι άρτιο, υποθέτουμε ότι $t<0$, που σημαίνει ότι το I θα είναι της μορφής $[a, b]$ με $b>a>0$. Η μεταβολή του S σ' αυτό το διάστημα ικανοποιεί την

$$V_S \leqslant |S(x_i)| + 2\left(\sum_{k=i+1}^{j-1} |S(x_k)|\right) + |S(x_j)|$$

όπου το x_i συμβολίζει το μεγαλύτερο από τα $\{x_n\}$ που είναι μικρότερο του a και το x_j, το μικρότερο από τα $\{x_n\}$ που είναι μεγαλύτερο του b. Τότε

$$\begin{aligned} V_S &\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=i}^{j}\frac{1}{k} \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=i}^{j}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} \\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{j}{i-1} \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{x_j}{x_{i-2}} \end{aligned}$$

Αυτό μας δείχνει ότι το V_S στο $[a,b]$ είναι $O(\log b/a)$ και θέτοντας $a=|wt|$, $b=w|1-t|$ παίρνουμε

$$V_k(t) \leqslant V_f\frac{w}{\pi} + \|f\|_\infty \frac{w}{\pi} A \log\left|\frac{1-t}{t}\right|$$

όπου η A είναι μια σταθερά (ανεξάρτητη του w ή του t). Όταν $t<-\varepsilon$ ή $t>1+\varepsilon$ η συνάρτηση $\log(|1-t|/|t|)$ είναι φραγμένη, και επομένως

$$|f_w(t) - s_N(t)| = \frac{O(w)}{N}$$

που είναι η (2.3.27).

Παρατηρήσεις: Όταν ο φορέας της f περιέχεται σε ένα συμπαγές διάστημα $[a,b]$ εκτός από το $[0,1]$, το θεώρημα και η απόδειξη έχουν μόνο μικρές αλλαγές. Τα προηγούμενα Θεωρήματα ισχύουν και για f ασυνεχή (αλλά φραγμένης κύμανσης).

Θεώρημα 8 *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, φραγμένης κύμανσης, που είναι μηδέν έξω από το διάστημα $[0,1]$ και έστω ε ένας αυθαίρετος μικρός θετικός αριθμός. Συμβολίζουμε με $\{t_i\}$ οποιουσδήποτε N πραγματικούς τέτοιους ώστε η (2.3.23) να ισχύει για $1\leqslant i\leqslant N$ και έστω f_w*

$$f_w(t) = \frac{w}{2\pi}\int_0^1 f(\tau)\left[\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-\tau)}\right]^2 d\tau \qquad (2.3.31)$$

όπου w είναι ένας θετικός πραγματικός. Τότε για κάθε $t<-\varepsilon$ ή $t>1+\varepsilon$, έχουμε:

$$\left| f_w(t) - \frac{w}{2\pi N} \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \left[\frac{\sin(w(t-t_k))}{\pi(t-t_k)} \right]^2 \right| = \frac{O(w)}{N} \qquad (2.3.33)$$

Απόδειξη: Σε αυτή την περίπτωση, έστω

$$s_N(t) = \frac{w}{2\pi N} \sum_{k=1}^{N} f(t_k) \left[\frac{\sin(w(t-t_k)/2)}{w(t-t_k)/2} \right]^2 \qquad (2.3.34)$$

Από το θεώρημα 6 έχουμε

$$\left| f_w(t) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(t_k) K(t-t_k) \right| \leqslant \frac{V_f \|K\|_\infty + V_k(t) \|f\|_\infty}{N}$$

όπου $V_k(t)$ είναι τώρα η μεταβολή του

$$k(x) = \frac{w}{2\pi} \left[\frac{\sin(w(x-t)/2)}{w(x-t)/2} \right]^2$$

στο $[0,1]$. Αυτή με τη σειρά της είναι

$$V_k(t) = \frac{w}{2\pi} V_S$$

όπου V_S είναι η μεταβολή της

$$\frac{\sin^{2x}}{x^2}$$

για $x \in [-wt/2, w(1-t)/2]$. Επομένως

$$V_k(t) \leqslant V_f \frac{w}{2\pi} + \frac{w}{2\pi} \|f\|_\infty V_S$$

Η συνάρτηση S (αντίθετα με ότι συνέβει στο Θεώρημα 7) έχει φραγμένη κύμανση. Επομένως, η $V_k(t)$ είναι φραγμένη από μία σταθερά ανεξάρτητη του t και ισχύει

$$V_k(t) = O(w)$$

που μας οδηγεί στη (2.3.33). Παρόμοια συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε και για άλλους πυρήνες φραγμένης μεταβολής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΩΝ HAUSDORFF-YOUNG ΓΙΑ ΣΧΕΔΟΝ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

3.1 Εισαγωγή

Το κλασσικό θεώρημα των Hausdorff-Young μας λέει ότι: αν η $f(t) \in L^q([0,2\pi])$, με $q \in [1,2]$, και

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \quad , \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.1.1}$$

τότε

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^{q'}\right)^{1/q'} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^q\, dt\right)^{1/q}$$

Επιπλέον, δοθείσης μιας ακολουθίας $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ μιγαδικών αριθμών με $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^q < +\infty$, υπάρχει ένα $f(t) \in L^{q'}([0,2\pi])$ που ικανοποιεί την (3.1) και

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^{q'}\, dt\right)^{1/q;} \leqslant \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^q\right)^{1/q}$$

Για να επεκτείνουμε αυτό το θεώρημα στο B_{ap}^q χώρο, χρειαζόμαστε λίγο χρόνο για να συζητήσουμε αυτούς τους χώρους.

Ο χώρος B_{ap}^q για $q \in [1,\infty]$ των σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων με την έννοια του Besicovitch (B-σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις) ορίζεται ως η συμπλήρωση του μιγαδικού διανυσματικού χώρου $\wp$ όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων

$$P(x)=\sum_{j=1}^{r} c_j e^{i\lambda_j x} \tag{3.1.2}$$

ως πρός τη νόρμα

$$\|P\|_q=\left(\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} |P(x)|^q dx\right)^{1/q} \quad , \quad q\in[1,+\infty] \tag{3.1.3}$$

Στην (3.1.2), τα $\lambda_{1,} \lambda_{2,} \dots, \lambda_r$ είναι διακριτοί πραγματικοί αριθμοί και τα $c_{1,} c_{2,} \dots, c_r$ είναι αυθαίρετοι μιγαδικοί αριθμοί. Αν οποιοδήποτε από τα $c_j, j=1,\dots,r$ είναι διαφορετικό από το μηδέν, το σύνολο

$$\sigma(P)=\{\lambda_{1,} \lambda_{2,} \dots, \lambda_r\}$$

ονομάζεται το **φάσμα** του P και η συνάρτηση

$$a(\lambda;P)=\lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} P(x) e^{-i\lambda x} dx=\begin{Bmatrix} c_j & \alpha\nu \quad \lambda=\lambda_j, j=1,\dots,r \\ 0 & \alpha\nu \quad \lambda\notin\sigma(P) \end{Bmatrix} \tag{3.1.4}$$

ονομάζεται μετασχηματισμός Bohr του P. Είναι γνωστό ότι ο χώρος C_{ap}^0 των ομοιόμορφα σχεδόν περιοδικών συναρτήσεων είναι η συμπλήρωση του $\wp$ ως προς τη νόρμα

$$\|P\|_\infty=\sup_{x\in\mathbb{R}} r|P(x)|, \quad \forall P\in\wp \tag{3.1.5}$$

επομένως σύμφωνα με το συμβολισμό B_{ap}^q για $q\in[1,\infty]$ θέτουμε

$$B_{ap}^q\equiv C_{ap}^0 \tag{3.1.6}$$

Κάθε στοιχείο f του B_{ap}^q δίνεται από μία κλάση Cauchy ακολουθιών τριγωνομετρικών πολυωνύμων $(P_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ που είναι ισοδύναμα ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_q$. Όπως είναι γνωστό

$$\|f\|_q=\lim_{n\to\infty} \|P(x)\|_q$$

και, σύμφωνα με την ανισότητα Holder (βλέπε παράρτημα),

$$B_{ap}^\infty \to B_{ap}^{q''} \to B_{ap}^{q'} \to B_{ap}^1, \quad 1<q'<q''<+\infty \tag{3.1.7}$$

Παρατηρούμε ότι αν η f είναι ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική τότε παίρνουμε

$$\|f\|_q = \|f+g\|_q, \quad \forall g \in L^q(\mathbb{R}), \quad q \in [1,+\infty] \tag{3.1.8}$$

Επομένως, δύο συναρτήσεις που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας του B^q_{ap} μπορεί να διαφέρουν κατά μία q-αθροίσιμη συνάρτηση.

Από την άλλη, σε κάθε $f \in B^1_{ap}$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε με μοναδικό τρόπο τον μετασχηματισμό της κατά Bohr ως ακολούθως: Αφού

$$|a(\lambda;P) - a(\lambda;Q)| \leqslant \|P-Q\|_{1,} \quad \forall P, Q \in \wp$$

έχουμε ότι για κάθε $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι μία Cauchy ακολουθία στο B^1_{ap} , η ακολουθία $a(\lambda;P_n)$ είναι ομοιόμορφα συγκλίνουσα ως προς το $\lambda \in \mathbb{R}$. Επομένως, αν η $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ορίζει το στοιχείο $f \in B^1_{ap}$ ο παρακάτω ορισμός είναι σωστός

$$a(\lambda; f) = \lim_{n\to\infty} a(\lambda; P_n) \tag{3.1.9}$$

Επιπλέον, το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$\sigma(f) = \{\lambda \in \mathbb{R} / a(\lambda; f) \neq 0\} \tag{3.1.10}$$

ονομάζεται το **φάσμα** της f . Από την άλλη, έχουμε

$$\sigma(f) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant k} \sigma(P_n) = \liminf_{n\to\infty} \sigma(P_n)$$

Έτσι για κάθε $f \in B^1_{ap}$, το $\sigma(f)$ είναι το πολύ ένα αριθμήσιμο σύνολο και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$$\sigma(f) = \{\lambda_{1,} \lambda_{2,} \ldots, \lambda_n, \ldots\}$$

Έπιπλέον, η σειρά

$$\sum_{j=1}^{\infty} a(\lambda_j; f) e^{i\lambda_j x}$$

ονομάζεται η σειρά Fourier της f .

3.2 Ένα βοηθητικό λήμμα

Σε αυτό το τμήμα θα αποδείξουμε δύο ανισότητες που θα χρησιμοποιήσουμε στο τμήμα 3.5 για να αποδείξουμε το Θεώρημα των Hausdorff-Young. Είναι επίσης βασικά εργαλεία όσον αφορά τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Bohr καθώς και τη δυαδικότητα των χώρων B_{ap}^{q} .

Έστω λοιπόν $\Lambda=\{\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ldots,\lambda_{n},\ldots\}$ μία σταθερή ακολουθία διακριτών πραγματικών αριθμών που περιέχουν το μηδέν. Υποθέτουμε για απλότητα ότι $\lambda_1=0$. Εισάγουμε τώρα το σύνολο V^q όλων των συναρτήσεων $f\in C_{ap}^{0}$ που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\sigma(f)\cap\Lambda\neq\varnothing \tag{3.2.1}$$

Κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P_n(x)$ της μορφής

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j e^{i\lambda_j x} \tag{3.2.2}$$

με $n\in\mathbb{N}$, ανήκει στο V^q με την προυπόθεση ότι δεν είναι ταυτοτικά μηδέν. Για κάθε σταθερό $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τους n αριθμούς $(\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ldots,\lambda_n)$ και για κάθε $f\in V^q$ αντιστοιχούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j e^{i\lambda_j x} \tag{3.2.3}$$

όπου, για κάθε $j=1,\ldots,n$, το b_j ορίζεται ως

$$b_j=a(\lambda_j;P)=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}f(x)e^{-i\lambda_j x}dx \tag{3.2.4}$$

Προφανώς, μερικά b_j μπορεί να είναι μηδέν και η f_n μπορεί να είναι ταυτοτικά μηδέν.

Αν το P_n δίνεται από την (3.2.2) θέτουμε

$$S_q(P_n)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|c_j|^q\right)^{1/q} \tag{3.2.5}$$

Τώρα θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε τις ακόλουθες ανισότητες: η πρώτη είναι η φυσική προέκταση των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που δεν είναι απαραίτητα περιοδικά,από την ανισότητα για τα περιοδικά πολυώνυμα και οφείλεται στους Hardy και Littlewood των οποίων την τεχνική απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε. Η δεύτερη ανισότητα είναι το δυαδικό αντίστροφο για τις σχεδόν περιοδικές.

ΛΗΜΜΑ 3.2.1 *Δοθέντων* $\Lambda=\{\lambda_{1,}\lambda_{2,}\ldots,\lambda_{n},\ldots\}$ *και* $n\in\mathbb{N}$ *, υποθέτουμε ότι* $1<q\leqslant 2$ *και*

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1 \tag{3.2.6}$$

Τότε για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο P_n *της μορφής (3.2.2) έχουμε*

$$\|P_n\|_{q'}\leqslant S_q(P_n) \tag{3.2.7}$$

Επιπλέον, για κάθε $f\in V^q$ *έχουμε*

$$S_{q'}(f_n)\leqslant\|f\|_q \tag{3.2.8}$$

όπου f_n *είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο που αντιστοιχεί στο* f *μέσω των σχέσεων* (3.2.3) *και* (3.2.4).

Απόδειξη: Για $(c_1,c_2,\ldots,c_n)=(0,\ldots,0)$ η ισότητα στη (3.2.7) είναι σωστή. Η σχέση (3.2.8) είναι αληθής αν $f_n(x)=0$, δηλαδή αν $a(\lambda_j;f)=0$ για κάθε $j=1,\ldots,n$, όταν $\|f\|_q=0$, καθώς και όταν $\|f\|_q>0$ (υπενθυμίζουμε ότι $1<q\leqslant 2\Rightarrow\|f\|_q\leqslant\|f\|_2$ και αν η f είναι σχεδόν περιοδική και $a(\lambda_n;f)=0,\forall n\in\mathbb{N}$ τότε $\|f\|_2=0$). Επομένως υποθέτουμε $(c_1,c_2,\ldots,c_n)\neq(0,\ldots,0)$ και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $k\in\{1,\ldots,n\}$ τέτοιο ώστε $b_k=a(\lambda_k;f)\neq 0$. Αυτή η παραδοχή είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι περιοριζόμαστε στο υποσύνολο $V_n^q\subset V^q$ όλων των συναρτήσεων που ικανοποιούν

$$\sigma(f)\cap\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\}\neq 0 \tag{3.2.9}$$

Η $f\in V_n^q$ υπονοεί ότι $\|f\|_q>0$. Πράγματι, αν $a(\lambda_k;f)\neq 0$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder έχουμε

$$0<|a(\lambda_k;P)|=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}|f(x)||e^{-i\lambda_j x}|dx\leqslant\lim_{T\to+\infty}\left(\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}|f(x)|^q dx\right)^{1/q}=\|f\|_q$$

Τώρα θέτουμε

$$M_q(n)=\underset{f\in V_n^q}{supr}\frac{S_{q'}(f_n)}{\|f\|_q}\equiv M \tag{3.2.10}$$

και

$$M_q'(n)=\underset{P_n\in V_n^q}{supr}\frac{\|P_n\|_{q'}}{S_q(P_n)}\equiv M'$$

Παρατηρούμε ότι δοθέντων $n\in\mathbb{N}$, $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ και $q\in[1,2]$, μπορούμε να θεωρήσουμε τα $\|P_n\|_q$ και $S_q(P_n)$ σαν συναρτήσεις των n συντελεστών $c_1,c_2,\ldots,c_n$ του P_n , αν το P_n

είναι ορισμένο από την (3.2.2), και να θέσουμε

$$M_q^{'}(n)=\sup_{(c_1,\dots,c_n)\in\mathbb{C}^n} r\frac{\|P_n\|_{q'}}{S_q(P_n)}\equiv M' \tag{3.2.11}$$

Για να δείξουμε τις ανισότητες (3.2.7) και (3.2.8), πρέπει να δείξουμε ότι $M=M'=1$. Θα χωρίσουμε την απόδειξη σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1 Ισχυριζόμαστε ότι

$$M_q(n)\leqslant n^{1/q'} \tag{3.2.12}$$

Χωρίς να χάσουμε τη γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε στην (3.2.10)

$$S_{q'}(f_n)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^{q'}\right)^{1/q'}=1 \tag{3.2.13}$$

Πράγματι, αν δεν ίσχυε η υπόθεση, θέτοντας για $f\in V_n$

$$\bar{f}(x)=\frac{f(x)}{S_{q'}(f_n)}$$

έχουμε

$$\bar{b}_j=a(\lambda_j;\bar{f})=\frac{b_j}{S_{q'}(f_n)},\quad j=1,\dots,n$$

και επομένως, $\bar{f}\in V_n$ και

$$\bar{f}_n(x)=\sum_{j=1}^{n}\bar{b}_j e^{i\lambda_j x}$$

Οπότε παίρνουμε στην (3.2.10)

$$\frac{S_{q'}(f_n)}{\|f\|_q}=\frac{1}{\|\bar{f}\|_q}$$

Συμπεραίνουμε από την (3.2.13) ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα δείκτης k τέτοιος ώστε

$$|b_k|\geqslant\left(\frac{1}{n}\right)^{1/q'}$$

αφού οι n ανισότητες

$$|b_j|^{q'} < (\frac{1}{n}), \quad j=1,\dots,n$$

μας δίνουν αντίφαση με τη (3.2.13).
Από το γεγονός αυτό και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$(\frac{1}{n})^{1/q'} \leqslant |b_k| \leqslant \|f\|_q$$

και έτσι προκύπτει η (3.2.12).

Βήμα 2 Τώρα θα δείξουμε οτι για κάθε $q \in [1,2]$

$$M_q(n) = M_q'(n) \tag{3.2.14}$$

Για να απλοποιήσουμε λίγο το συμβολισμό θα χρησιμοποιήσουμε M και M' όπου είναι δυνατόν.

Έστω P_n ένα αυθαίρετο τριγωνομετρικό πολυώνυμο που ανήκει στο V_n και ας ορίσουμε

$$g(x) = |P_n(x)|^{q'-1} sign\, P_n(x) \tag{3.2.15}$$

όπου

$$sign\, z = \begin{Bmatrix} \frac{z}{|z|} & z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ 0 & z = 0 \end{Bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι η $g(x)$ είναι σχεδόν περιοδική με την κλασσική έννοια, αφού από τον ορισμό έχουμε

$$g(x) = |P_n(x)|^{q'-2} P_n(x) \tag{3.2.16}$$

με $q'-2 \geqslant 0$. Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε για κάθε $j=1,\dots,n$

$$\gamma_j = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} g(x) e^{-i\lambda_j x} dx \tag{3.2.17}$$

και μπορούμε να κατασκευάσουμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$g_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^{i\lambda_j x} \tag{3.2.18}$$

Με ένα εύκολο υπολογισμό και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder έχουμε

$$\|P_n\|_{q'}^{q'} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(x)\overline{P(x)}\,dx = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \bar{c}_j = \left|\sum_{j=1}^{n} \gamma_j \bar{c}_j\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j||c_j|$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |c_j|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^{q'}\right)^{1/q'} = S_q(P_n) S_{q'}(g_n) \quad (3.2.19)$$

Από την $0 < \|P_n\|_{q'}^{q'} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j||c_j|$ προκύπτει ότι $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \neq (0,\ldots,0)$ και $g, g_n \in V_n$. Αυτό μας δίνει, με την (3.2.10) ότι

$$\|P_n\|_{q'}^{q'} \leqslant M S_q(P_n) \|g\|_q \quad (3.2.20)$$

Από την άλλη έχουμε

$$\|g(x)\|_q = \left(\|P_n\|_{q'}\right)^{1/(q-1)} \quad (3.2.21)$$

Πράγματι αφού $q(q'-1) = q'$ και $q'/q = 1/(q-1)$, από την (3.2.15) προκύπτει εύκολα

$$\|g\|_q = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |P_n(x)|^{q(q'-1)} dx\right)^{1/q} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |P_n(x)|^{q'} dx\right)^{1/q' q'/q} = \left(\|P_n\|_{q'}\right)^{1/(q-1)}$$

Από τις (3.2.20) και (3.2.21) έχουμε

$$\|P_n\|_{q'}^{q'} \leqslant M S_q(P_n) \left(\|P_n\|_{q'}\right)^{1/(q-1)}$$

Από αυτή την ανισότητα, παρατηρώντας ότι $q' - 1/(q-1) = 1$ παίρνουμε

$$\|P_n\|_{q'} \leqslant M S_q(P_n)$$

Έτσι δείξαμε ότι

$$\frac{\|P_n\|_{q'}}{S_q(P_n)} \leqslant M \quad \forall\, P_n \in V_n$$

και από την (3.2.11) παίρνουμε

$$M' \leqslant M \quad (3.2.22)$$

Για να πάρουμε την επιθυμητή ισότητα $M'=M$ αρκεί να δείξουμε ότι $M'\geqslant M$.

Για αυτό το σκοπό, θεωρούμε μια αυθαίρετη συνάρτηση f που ανήκει στο V_n^q και κατασκευάζουμε τα εξής δύο τριγωνομετρικά πολυώνυμα

$$f_n(x)=\sum_{j=1}^{n} b_j e^{i\lambda_j x} \tag{3.2.23}$$

και

$$h_n(x)=\sum_{j=1}^{n} |b_j|^{q'-1}\overline{sign\, b_j}\, e^{-i\lambda_j x} \tag{3.2.24}$$

όπου, για κάθε $j=1,\dots,n$, το b_j ορίζεται από την (3.2.4). Προφανώς έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} |b_j|^{q'}=\sum_{j=1}^{n} b_j |b_j|^{q'-1}\overline{sign\, b_j} \tag{3.2.25}$$

για κάθε $j=1,\dots,n$. Επομένως, παίρνοντας υπ'όψιν αυτές τις σχέσεις καθώς και τη (3.2.11) και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Holder (βλέπε παράρτημα) παίρνουμε

$$\begin{aligned} S_q^{q'}(f_n)&=\sum_{j=1}^{n} |b_j|^{q'}=\sum_{j=1}^{n} b_j||^{q'-1}\overline{sign\, b_j}\, \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} f(x)e^{-i\lambda_j x}\,dx \\ &=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T} f(x)h_n(x)\,dx\leqslant\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}|f(x)h_n(x)|\,dx \\ &\leqslant\|f\|_q\|h_n\|_{q'}\leqslant M'\|f\|_q S_q(h_n) \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

Όμως από τον ορισμό του $S_q(h_n)$ έχουμε

$$S_q(h_n)=\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^{q(q'-1)}\right)^{1/q}=\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^{q'}\right)^{1-1/q'}=\left(S_{q'}(f_n)\right)^{q'-1} \tag{3.2.27}$$

Από τις (3.2.26) και (3.2.27) προκύπτει

$$S_{q'}^{q'}(f_n)\leqslant M'\|f\|_q\left(S_{q'}(h_n)\right)^{q'-1}$$

από την οποία παίρνουμε

$$S_{q'}(f_n)\leqslant M'\|f\|_q$$

Αυτή η ανισότητα, η οποία ισχύει για κάθε $f\in V_n^q$, δίνει $M\leqslant M'$. Άρα αποδεικνύεται το

λήμμα.
Παρατηρούμε ότι

$$M = M' \geqslant 1 \tag{3.2.28}$$

που είναι εύκολο να αποδειχθεί θεωρώντας το συγκεκριμένο τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P_n(x) = 1$.

Βήμα 3 Θα αποδείξουμε ότι για σταθερό $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $q \in (1,2)$ έχουμε

$$M_q(n) \equiv M_q \leqslant M_{2/(3-q)} \equiv M_{2/(3-q)}(n) \tag{3.2.29}$$

Παρατηρούμε ότι σε αυτή τη σχέση, η ισότητα ισχύει για $q = 2$. Σταθερό $n \in \mathbb{N}$ και $q \in (1,2)$ εισάγουμε τη συνάρτηση

$$\Phi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$$

που ορίζεται ως

$$\Phi(c_1, \ldots, c_n) = \frac{\|P_n\|_{q'}}{S_q(P_n)} \tag{3.2.30}$$

Αφού η Φ είναι συνεχής και θετική ομογενής συνάρτηση βαθμού μηδέν, έχει ένα απόλυτο μέγιστο στο $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ που συμπίπτει με το απόλυτο μέγιστο της Φ / Γ όπου

$$\Gamma = \left\{ (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n / \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1 \right\}$$

Έτσι ώστε υπάρχουν $(c_1^*, \ldots, c_n^*) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ τέτοια ώστε $\Phi(c_1^*, \ldots, c_n^*) = M'$. Θεωρούμε τώρα το μέγιστο πολυώνυμο για το Φ

$$P_n^* = \sum_{j=1}^{n} c_j^* \, e^{i\lambda_j x} \tag{3.2.31}$$

το οποίο, από κατασκευής, ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση

$$\|P_n^*\|_{q'} = M' S_q(P_n^*) \tag{3.2.32}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\|P_n^*\|_{q'}^{q'} = S_q(P_n^*) S_{q'}(g_n^*) \tag{3.2.33}$$

Πράγματι, αν θυμηθούμε ότι στο Βημα 2 αποδείξαμε ότι $M = M'$, από την (3.2.32) παίρνουμε

$$\|P_n^*\|_{q'}=M\ S_q(P_n^*) \tag{3.2.34}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.2.34) με $\|P_n^*\|_{q'}^{1/(q-1)}$ και χρησιμοποιώντας την $1+1/(q-1)=q'$ έχουμε

$$\|P_n^*\|_{q'}^{q'}=M\ S_q(P_n^*)\|P_n^*\|_{q'}^{1/(q-1)} \tag{3.2.35}$$

Αντικαθιστώντας το P_n και το g με P_n^* και g^* αντίστοιχα στην (3.2.21), από την (3.2.35) παίρνουμε

$$\|P_n^*\|_{q'}^{q'}=M\ S_q(P_n^*)\|g^*\|_{q'} \tag{3.2.36}$$

Από αυτή την ισότητα, αφού από την (3.2.10)

$$S_{q'}(g_n^*)\leqslant M\|g^*\|_{q'}$$

παίρνουμε

$$\|P_n^*\|_{q'}^{q'}\geqslant M\ S_q(P_n^*)S_{q'}(g_n^*) \tag{3.2.37}$$

Από την άλλη, με το ίδιο επιχείρημα του Βήματος 2 για να εξάγουμε τις ανισότητες (3.2.19), μπορούμε να γράψουμε

$$\|P_n^*\|_{q'}^{q'}\leqslant M\ S_q(P_n^*)S_{q'}(g_n^*) \tag{3.2.38}$$

Οι σχέσεις (3.2.37) και (3.2.38) δίνουν την (3.2.33).
Τώρα παίρνοντας υπ'όψιν την (3.2.33), παρατηρούμε ότι η αλυσίδα (3.2.19), όταν γραφεί για τις P_n^* και g^*, έχει τα άκρα της ίσα και επομένως όλοι οι όροι είναι ίσοι. Επομένως έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n}|c_j^*||\gamma_j^*|=\|P_n^*\|_{q'}^{q'}=S_q(P_n^*)S_{q'}(g_n^*)=\left(\sum_{j=1}^{n}|c_j^*|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^{n}|\gamma_j^*|^{q'}\right)^{1/q'} \tag{3.2.39}$$

Από την ανισότητα Holder, αυτή η ισότητα υπονοεί ότι υπάρχει $\lambda>0$ τέτοιο ώστε

$$|c_j^*|^q=\lambda|\gamma_j^*|^{q'},\quad 1,\dots,n \tag{3.2.40}$$

και έτσι

$$\sum_{j=1}^{n}|c_j^*|^q=S_q^q(P_n^*)=\lambda S_{q'}^{q'}(g_n^*)¿ \tag{3.2.41}$$

Παρατηρούμε ότι

$$S_{q'}(g_n^*)=M\|g^*\|_q \tag{3.2.42}$$

Πράγματι υποθέτουμε ότι αυτό δεν είναι αληθές και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του M

έχουμε

$$S_{q'}(g_n^*) < M \|g^*\|_q$$

Επομένως, αν θυμηθούμε ότι

$$\|g_n^*\|_q = \|P_n^*\|_{q'}^{1/(q-1)} \tag{3.2.43}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\|P_n^*\|_{q'}^{q'} = M\ S_q(P_n^*) S_{q'}(g_n^*) < S_q(P_n^*) M \|g^*\|_q = S_q(P_n^*) M \|P_n^*\|_{q'}^{1/(q-1)}$$

και αφού $q'-1/(q-1)=1$ παίρνουμε

$$\|P_n^*\|_{q'} < M\ S_q(P_n^*)$$

και έτσι, επειδή $M = M'$

$$\|P_n^*\|_{q'} < M' S_q(P_n^*)$$

αυτή η ανισότητα είναι σε αντίφαση με την (3.2.32). Άρα από τις (3.2.34), (3.2.33) και (3.2.42) παίρνουμε

$$S_q(P_n^*) = \frac{1}{M} \|P_n^*\|_{q'} = \frac{1}{M} \|g^*\|_q^{q-1} = \frac{1}{M} \left(\frac{1}{M} S_{q'}(g_n^*) \right)^{q-1}$$

ή ισοδύναμα

$$S_q(P_n^*) = M^{-q} \left(S_{q'}(g_n^*) \right)^{q-1} \tag{3.2.44}$$

Επομένως από τις (3.2.41) και (3.2.44) προκύπτει

$$\lambda = \frac{S_q^q(P_n^*)}{S_{q'}^{q'}(g_n^*)} = M^{-q^2} \left(S_{q'}(g_n^*) \right)^{q^2-q-q'} \tag{3.2.45}$$

Αν θυμηθούμε τώρα την σχεδόν περιοδικότητα της $g^*(x) = |P^*(x)|^{q'-2} P_n^*(x)$ με τη κλασσική έννοια και τον ορισμό της $g_n^*(x)$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα Bessel και παίρνουμε

$$S_2^2(g_n^*) = \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^2 \leqslant \|g^*\|_2^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-T}^{T} |P_n^*(x)|^{2(q'-1)} dx \tag{3.2.46}$$

Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, θέτουμε

$$r' = r'(q) \equiv 2(q'-1) = 2\left(\frac{q}{q-1} - 1 \right) = \frac{2}{q-1} \tag{3.2.47}$$

και έχουμε το συμπληρωματικό εκθέτη του r' που είναι

$$r = \frac{r'}{r'-1} = \frac{2/(q-1)}{2/(q-1)-1} = \frac{2}{3-q} \tag{3.2.48}$$

Από αυτές τις σχέσεις, έχουμε ότι όταν το q πάει στο 1, το r' πηγαίνει στο $+\infty$ και το r πηγαίνει στο 1.
Για n σταθερό, εισάγουμε M_r' σε συμφωνία με τον ορισμό (3.2.11). Χρησιμοποιώντας την (3.2.46) παίρνουμε

$$S_2^2(g_n^*) \leqslant \|P_n^*\|_{r'}^{r'} \leqslant [M_r' S_r(P_n^*)]^{r'} = M_r'^{r'} S_r^{r'}(P_n^*) \tag{3.2.49}$$

όπου η τελευταία ισότητα επιτρέπεται από την σχέση (3.2.14).

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας την (3.2.40)

$$S_r^{r'}(P_n^*) = \left(\sum_{j=1}^{n} |c_j^*|\right)^{r'/r} = \left(\sum_{j=1}^{n} (\lambda^{1/q} |\gamma_j^*|^{q'/q})^r\right)^{r'/r} = \lambda^{r'/q} \left(\sum_{j=1}^{n} (|\gamma_j^*|^{r/(q-1)})^r\right)^{r'/r} = \lambda^{r'/q} (S_{r/(q-1)}(g_n^*))^{r'/(q-1)}$$

Παίρνοντας υπ'όψιν τις (3.2.49) και (3.2.45) έχουμε:

$$\begin{aligned} S_2^2(g_n^*) &\leqslant M_r^{r'} \lambda^{r'/q} (S_{r/(q-1)}(g_n^*))^{r'/(q-1)} \leqslant M_r^{r'} M_q^{-r'q} (S_{q'}(g_n^*))^{(q-1-1/(q-1))^{r'}} (S_{r/(q-1)}(g_n^*))^{r'/(q-1)} \\ &= M_r^{r'} M_q^{-r'q} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{q/(q-1)}\right)^{(q-1)/qr'(q-1-1/(q-1))} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{r'/(q-1)}\right)^{r'/r} \\ &= M_r^{r'} M_q^{-r'q} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{q/(q-1)}\right)^{-2(2-q)/(q-1)} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{r'/(q-1)}\right)^{r'/r} \end{aligned} \tag{3.2.50}$$

Παρατηρώντας ότι από την (3.2.48)

$$\frac{r}{q-1} = \frac{2}{(q-1)(3-q)} = 2\frac{q-1}{3-q} + \frac{2\text{q}(2-q)}{(q-1)(3-q)}$$

έχουμε

$$|\gamma_j^*|^{r/(q-1)} = |\gamma_j^*|^{2(q-1)/(3-q)} |\gamma_j^*|^{2\text{q}(2-q)/(q-1)(3-q)} \tag{3.2.51}$$

Τώρα εφαρμόζουμε την ανισότητα Holder με

$$p = \frac{3-q}{q-1} \quad \text{και} \quad p' = \frac{3-q}{2(2-q)}$$

και παίρνουμε, χρησιμοποιώντας την ισότητα (3.2.51)

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{r/(q-1)} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^2 \right)^{(q-1)/(3-q)} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{q/(q-1)} \right)^{2(2-q)/(3-q)} \tag{3.2.52}$$

Επομένως από τις (3.2.50) και (3.2.52) έχουμε

$$S_2^2(g_n^*) \leqslant M_r^{r'} M_q^{-r'q} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^{q/(q-1)} \right)^{2(2-q)(-1/(q-1)+r'/r(3-q))} \left(\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^2 \right)^{(q-1)/(3-q)r'/r}$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.2.47) και (3.2.48) έχουμε $r'/r=(3-q)/(q-1)$ και επομένως

$$2(2-q)\left(-\frac{1}{q-1} + \frac{r'}{r(3-q)} \right) = 0, \quad \frac{(q-1)r'}{(3-q)r} = 1$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$\sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^2 = S_2^2(g_n^*) \leqslant M_r^{r'} M_q^{-r'q} \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j^*|^2$$

Τέλος από αυτή την ανισότητα παίρνουμε

$$M_r^{r'} M_q^{-r'q} \geqslant 1 \quad \text{επομένως} \quad M_r \geqslant M_q^q$$

Αν θυμηθούμε τώρα την (3.2.28) μπορούμε να γράψουμε

$$M_{;} \leqslant M_q^q \leqslant M_r$$

όπου από την (3.2.48), $r=2/(3-q)$. Έτσι η απόδειξη ολοκληρώνεται.

<u>Βήμα 4.</u> Τέλος, θα δείξουμε ότι

$$M_q(n) \equiv M_q = 1 \quad \forall q \in (1,2)$$

και έτσι θα καταλήξουμε, μαζί με την (3.2.14), στη σχέση

$$M_q(n) = M_q'(n) = 1 \quad \forall q \in (1,2)$$

Για σταθερό $q \in (1,2)$, θεωρούμε την ακολουθία που ορίζεται από την αναδρομική σχέση

$$\left\{ \begin{array}{c} q_0 = q \\ q_k = \dfrac{2}{3 - q_{k-1}} \quad k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

Από την (3.2.29) έχουμε

$$M_q = M_{q_0} \leqslant M_{q_k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.2.53}$$

Επιπλέον, είναι εύκολο να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$q_k \in (1,2), \quad \forall k \in \mathbb{N} \tag{3.2.54}$$

και ότι η ακολουθία $(q_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ μειώνεται. Επομένως συγκλίνει στο

$$I = \inf \{ q_k , k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

και

$$I = \lim_{k \to \infty} q_k = \lim_{k \to \infty} \frac{2}{3 - q_{k-1}} = \frac{2}{3 - I} \tag{3.2.55}$$

Από τις (3.2.54) και (3.2.55) προκύπτει ότι $I = 1$. Από την άλλη, αν θυμηθούμε την (3.2.12) από το Βήμα 1, μπορούμε να γράψουμε για κάθε $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$M_{q_k} \leqslant n^{1/q'_k} \quad \text{με} \quad q'_k = \frac{q_k}{q_k - 1}$$

και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.28) και (3.2.53), καθώς και το γεγονός ότι

$$\lim_{k \to \infty} q'_k = \lim_{k \to \infty} \frac{q_k}{q_k - 1} = +\infty$$

παίρνουμε

$$1 \leqslant M_q = M_{q_0} \leqslant M_{q_k} \leqslant n^{1/q'_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 1$$

Αυτές οι ανισότητες μας επιτρέπουν να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα

$$M_q = 1$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.

3.3 Ένας χαρακτηρισμός της B_{ap}^{q} νόρμας

Θεώρημα 3.3.1 *Έστω $f \in B_{ap}^{q}$ με $\sigma(f)=\{\lambda_{1,} \ldots, \lambda_n, \ldots\}$ και $\wp_r$ συμβολίζει το σύνολο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων Q τέτοιων ώστε*

$$\sigma(f)=\{\lambda_{1,} \ldots, \lambda_r\} \cup \Sigma \qquad (3.3.1)$$

όπου Σ είναι το πεπερασμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τη συνθήκη

$$\Sigma \cap \sigma(f)=\varnothing \qquad (3.3.2)$$

Τότε έχουμε

$$\min_{Q \in \wp_r} \|f-Q\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{j=1}^{r} |a(\lambda_j ; f)|^2 \qquad (3.3.3)$$

και επιπλέον, το ελάχιστο βρίσκεται για το πολυώνυμο

$$Q_r^*(x)=\sum_{j=1}^{r} a(\lambda_j ; f) e^{i \lambda_j x}$$

δηλαδή το r μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της f .

Απόδειξη Οποιοδήποτε στοιχείο Q του $\wp_r$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$Q(x)=\sum_{j=1}^{r} c_j e^{i \lambda_j x}+\sum_{l=1}^{v} \beta_l e^{i p_l x}$$

όπου το v είναι αυθαίρετο, το r είναι σταθερό και $\Sigma=\{\mu_1, \ldots, \mu_v\}$ με $\Sigma \cap \sigma(f)=\varnothing$. Ας υπολογίσουμε

$$\begin{aligned}
\|f-Q\|_2^2 &= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (f(x)-Q(x))(\overline{f(x)}-\overline{Q(x)})\,dx \\
&= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left(f(x)-\sum_{j=1}^{r} c_j e^{i\lambda_j x}-\sum_{l=1}^{r} \beta_j e^{i\mu_l x}\right)\left(\overline{f(x)}-\sum_{j=1}^{r} \bar{c}_j e^{-i\lambda_j x}-\sum_{l=1}^{r} \bar{\beta}_j e^{-i\mu_l x}\right) dx \\
&= \lim_{T \to \infty} \left\{\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2 dx-\sum_{j=1}^{r} c_j \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \overline{f(x)} e^{i\lambda_j x} dx-\sum_{l=1}^{r} \beta_j \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i\mu_l x} \overline{f(x)}\, dx\right\} \\
&+ \lim_{T \to \infty} \left\{-\sum_{j=1}^{r} \bar{c}_j \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) e^{-i\lambda_j x} dx+\sum_{j,l} c_j \bar{c}_j \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_j-\lambda_l)x} dx+\sum_{j,l} \bar{c}_j \beta_l \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{i(\mu_l-\lambda_j)x}\, dx\right\}
\end{aligned}$$

$$+\lim_{T\to\infty}\left\{-\sum_{l=1}^{v}\bar{\beta}_l\bar{c}_j\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}f(x)e^{i\mu_l x}dx+\sum_{j,l}\bar{\beta}_l c_j\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}e^{-i(\mu_l-\lambda_j)x}dx+\sum_{j,l}\bar{\beta}_l\beta_j\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}e^{-i(\mu_l-\mu_j)x}dx\right\}$$

$$=\|f\|_2^2-\sum_{j=1}^{r}c_j\overline{a(\lambda_j;f)}-\sum_{j=1}^{r}\bar{c}_j a(\lambda_j;f)+\sum_{l=1}^{r}|c_j|^2+\sum_{j=1}^{v}|\beta_l|^2$$

$$=\|f\|_2^2-\sum_{j=1}^{r}|a(\lambda_j;f)|^2+\sum_{j=1}^{r}(a(\lambda_j;f)-c_j)(\overline{a(\lambda_j;f)}-\bar{c}_j)+\sum_{l=1}^{v}|\beta_l|^2$$

Επομένως παίρνουμε για κάθε $Q\in\wp_r$

$$\|f-Q\|_2^2=\|f\|_2^2-\sum_{j=1}^{r}|a(\lambda_j;f)|^2+\sum_{j=1}^{r}|a(\lambda_j;f)-c_j|^2+\sum_{l=1}^{v}|\beta_l|^2 \qquad (3.3.4)$$

Από την (3.3.4) παίρνουμε

$$\|f-Q\|_2^2\geqslant\|f\|_2^2-\sum_{j=1}^{r}|a(\lambda_j;f)|^2\ , \quad \forall\, Q\in\wp_r \qquad (3.3.5)$$

Επιπλέον, στην (3.3.5) η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν

$$c_j=a(\lambda_j;f)\ , \quad \forall\, j=1,\ldots,r$$

και

$$\beta_l\ , \quad \forall\, j=1,\ldots,v$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Θεώρημα 3.3.2 *Για κάθε* $q\in(1,+\infty)$ *και για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο* P *έχουμε*

$$\|P\|_q=supr\{|(P|g)|,\ \ g\in C_{ap}^0,\ \ \|g\|_{q'}\leqslant 1\} \qquad (3.3.6)$$

Απόδειξη Ας πάρουμε σταθερό $q\in(1,+\infty)$. Θυμίζουμε ότι η $\|\cdot\|_q$ είναι η νόρμα στο $\wp$. Επομένως $\|P\|_q=0$ αν και μόνο αν $P(x)\equiv 0$. Άρα, για $\|P\|_q=0$ η (3.3.6) ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι $\|P\|_q\neq 0$. Από την ανισότητα Holder μπορούμε να γράψουμε

$$|(P|g)|\leqslant\|P\|_q\|g\|_{q'}\leqslant\|P\|_q, \qquad \forall\, g\in C_{ap}^0,\ \ \|g\|_{q'}\leqslant 1 \qquad (3.3.7)$$

Από την άλλη θεωρώντας

$$\bar{g}(x)=|P(x)|^{q-1}sign\,P(x)$$

που είναι μια ομοιόμορφα σχεδόν περιοδική συνάρτηση, παίρνουμε

$$|(P|\overline{g})|=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}P(x)|P(x)|^{q-1}\overline{sign\,P(x)}\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}|P(x)|^{q}\,dx=\|P\|_q^q=\|P\|_q\|P\|_q^{q-1} \quad (3.3.8)$$

Θέτοντας

$$g^*(x)=\overline{g}(x)\|P\|_q^{1-q}=\|P\|_q^{1-q}|P(x)|^{q-1}sign\,P(x) \quad (3.3.9)$$

και χρησιμοποιώντας τη $(q-1)q'=q$ και τη (3.3.8) παίρνουμε

$$\|g^*\|=\|P\|_q^{1-q}\||P|^{q-1}\|_{q'}=\|P\|_q^{1-q}\left(\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\mathrm{T}}\int_{-T}^{T}|P(x)|^{(q-1)q'}\right)^{1/q'}=\|P\|_q^{1-q}\|P\|_q^{q-1}=1$$

και

$$|(P|g^*)|=\|P\|_q^{1-q}|(P|\overline{g})|=\|P\|_q \quad (3.3.10)$$

Από τις (3.3.7) και (3.3.10), προκύπτει η ισότητα (3.3.6).

Θεώρημα 3.3.3 *Για κάθε* $q\in(1,+\infty)$ *και για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο* P *έχουμε*

$$\|P\|_q=supr\{|(P|Q)|,\ \ Q\in\wp,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\} \quad (3.3.11)$$

Απόδειξη Για $\|P\|_q=0$, η (3.3.11) είναι προφανώς αληθής. Ας υποθέσουμε ότι $\|P\|_q\neq 0$. Από την ανισότητα Holder παίρνουμε

$$|(P|Q)|\leqslant\|P\|_q,\ \ Q\in\wp,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $g^*(x)$ ορισμένη από την (3.3.9). Έχουμε

$$g_*\in C_{ap}^0, \qquad \|g_*\|_{q'}=1 \quad (3.3.12)$$

Αφού $C_{ap}^0\subset B_{ap}^{q'}$ από την (3.2.6), μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει μία ακολουθία $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε

$$Q_n\to g_* \ \text{ στο } \ B_{ap}^{q'} \quad (3.3.13)$$

και

$$\|Q_n\|_{q'}\to\|g_*\|_{q'}=1 \quad (3.3.14)$$

Επιπλέον, από τις σχέσεις (3.3.13) και (3.3.14) βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας τη (3.3.10)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|(P|Q_n)|}{\|Q_n\|_{q'}}=|(P|g_*)|=\|P\|_q$$

Η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Το ακόλουθο Θεώρημα είναι ένας χαρακτηρισμός της q -νόρμας του B_{ap}^q , για $q\in(1,+\infty)$.

Θεώρημα 3.3.4 *Για κάθε* $f\in B_{ap}^q$ *, με* $q\in(1,+\infty)$ *έχουμε*

$$\|f\|_q=supr\{|(f|Q)|,\ \ Q\in\wp\,,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\} \tag{3.3.15}$$

Απόδειξη Αφού $f\in B_{ap}^q$ υπάρχει μια ακολουθία $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε

$$P_n\to f \ \text{ στο } \ B_{ap}^q \tag{3.3.16}$$

Θέτοντας

$$I(f)=supr\{|(f|Q)|,\ \ Q\in\wp\,,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\}=\underset{Q\in\wp_*}{supr}\frac{|(f|Q)|}{\|Q\|_{q'}}$$

όπου $\wp_*=\wp\setminus\{0\}$ παίρνουμε από την ανισότητα Holder

$$I(f)\leqslant\|f\|_q \tag{3.3.17}$$

Από την άλλη, από την (3.3.16), έχουμε ότι $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,v_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \ s.t.\,\forall\,n\in\mathbb{N}$ με $n>v_\varepsilon$

$$\|f-P_n\|_q<\varepsilon \ \text{ και } \ \|f\|_q-\varepsilon<\|P_n\|_q \tag{3.3.18}$$

Από τις (3.3.18) και (3.3.17) παίρνουμε

$$\begin{gathered}\|f\|_q-\varepsilon<\|P_n\|_q=supr\{|(P_n|Q)|,\ \ Q\in\wp\,,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\}\\ =supr\{|(P_n-f|Q)+(f|Q)|,\ \ Q\in\wp\,,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\}\\ \leqslant supr\{\|P_n-f\|_q\|Q\|_{q'},\ \ Q\in\wp\,,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\}+supr\{|(f|Q)|,\ \ Q\in\wp\,,\ \ \|Q\|_{q'}\leqslant 1\}\\ <\varepsilon+I(f)\end{gathered}$$

Από αυτή τη σχέση προκύπτει

$$\|f\|_q<I(f)+2\varepsilon\,,\quad\forall\,\varepsilon>0$$

Αφού το ε είναι αυθαίρετο μπορούμε να γράψουμε

$$\|f\|_q\leqslant I(f) \tag{3.3.19}$$

Από τις (3.3.17) και (3.3.19) παίρνουμε

$$\|f\|_q = I(f)$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

3.4 Θεώρημα των Hausdorff-Young για τις σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις

Κοιτώντας τη νόρμα $\|\cdot\|_q$ με $q \in (1,+\infty)$, ορισμένη στη σχέση (3.1.3), στο χώρο $\wp$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων παρατηρούμε ότι για οποιοδήποτε τριγωνομετρικό πολυώνυμο P που είναι Π -περιοδικό (δηλαδή $\Pi \in \mathbb{R}_+$ και $P(x+\Pi)=P(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$), είναι εύκολο να αποδείξει κανείς την ακόλουθη σχέση

$$\|P\|_q = \left(\frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} |P(x)|^q \, dx \right)^{1/q}$$

Από αυτό το γεγονός έχουμε ότι η B_{ap}^q -νόρμα του υπόχωρου $\wp_\Pi$ όλων των Π -περιοδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι ακριβώς η $L^q(0,\Pi)$ -νόρμα . Επομένως για κάθε $q \in (1,+\infty)$, ο χώρος B_{ap}^q περιέχει αλγεβρικά και τοπολογικά όλους τους χώρους $L^q(0,\Pi)$, για κάθε περίοδο $\Pi \in \mathbb{R}_+$.

Το αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε τώρα, είναι η επέκταση του Θεωρήματος Hausdorff-Young για περιοδικές συναρτήσεις, στις σχεδόν περιοδικές συναρτήσεις .

Θεώρημα των HAUSDORFF-YOUNG *Έστω* $f \in B_{ap}^q$ *και* $\sigma(f) \subseteq \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$. *Έχουμε*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j; f)|^{q'} \right)^{1/q'} \leqslant \|f\|_q \quad \alpha\nu \quad q \in [1,2] \tag{3.4.1}$$

$$\|f\|_q \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a(\lambda_j; f)|^{q'} \right)^{1/q'} \quad \alpha\nu \quad q \in [2,+\infty] \tag{3.4.2}$$

όπου η σειρά της (3.4.2) *μπορεί να είναι αποκλίνουσα.*

Απόδειξη Αν $\|f\|_q = 0$ τότε από την $|a(\lambda_j; f)| \leqslant \|f\|_q ,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι $a(\lambda_j; f) = 0$ και η ισότητα ισχύει στην (3.4.1) ή στην (3.4.2). Ας υποθέσουμε ότι $\|f\|_q \neq 0$. Αρχικά υποθέτουμε $q \in [1,2]$. Για να αποδείξουμε την (3.4.1), θα δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; f)|^{q'} \right)^{1/q'} \leqslant \|f\|_q + 2\varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 \tag{3.4.3}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon > 0$ αυθαίρετα και σταθερά. Θεωρούμε την ακολουθία $(P_m)_{m \in \mathbb{N}}$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που συγκλίνουν στο $f \in B_{ap}^q$. Τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\|P_m\|_q \leqslant \|f\|_q + \varepsilon, \quad \forall\, m > v_\varepsilon \tag{3.4.4}$$

Επιπλέον, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sigma(P_m) \cap \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\} \neq \varnothing, \quad \forall\, m > n_0 \tag{3.4.5}$$

Πράγματι, από την $\|f\|_q \neq 0$ και $\sigma(f) \subseteq \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$, προκύπτει ότι $a(\lambda_k; f) = 0$ για κάποιο $\lambda_k \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots\}$. Αφού

$$\lim_{n \to \infty} |a(\lambda_k; P_m)| = |a(\lambda_k; f)| \tag{3.4.6}$$

εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου με $\varepsilon_0 = |a(\lambda_k; f)/2|$ προκύπτει ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$|a(\lambda_k; P_m)| > |a(\lambda_k; f)| - \varepsilon_0 \geqslant \frac{1}{2} |a(\lambda_k; f)| > 0, \quad \forall\, m > n_0$$

και έτσι παίρνουμε την (3.4.5). Από την άλλη, η σχέση (3.4.6) ισχύει ομοιόμορφα σε σχέση με το $\lambda_k \in \mathbb{R}$ και έτσι έχουμε

$$\lim_{n \to \infty} |a(\lambda_k; P_m)|^{q'} = |a(\lambda_k; f)|^{q'}$$

ομοιόμορφα σε σχέση με το $\lambda_j \in \mathbb{R}$. Αυτό με τη σειρά του μας δίνει ότι για οποιοδήποτε υπάρχει $\bar{\varepsilon} > 0$ τέτοιο ώστε $v_{\bar{\varepsilon}} \in \mathbb{N}$

$$|a(\lambda_j; f)|^{q'} - \bar{\varepsilon} < |a(\lambda_j; P_m)| < |a(\lambda_j; f)|^{q'} + \bar{\varepsilon}, \quad \forall\, m > v_{\bar{\varepsilon}}, \forall\, j \in \mathbb{N} \tag{3.4.7}$$

Αφού διαλέξουμε $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^{q'}/n$ και προσθέτοντας τις σχέσεις (3.4.7) για $j = 1, \ldots, n$ μπορούμε να γράψουμε για κάθε $m > v_{\bar{\varepsilon}} = \bar{v}_\varepsilon$

$$\sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; f)|^{q'} - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; P_m)|^{q'} < \sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; f)|^{q'} + \varepsilon$$

και ισοδύναμα

$$\left| \sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; f)|^{q'} - \sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; P_m)|^{q'} \right| < \varepsilon^{q'}, \quad \forall\, m > \bar{v}_\varepsilon \tag{3.4.8}$$

Παίρνοντας υπ'όψιν ότι $0 < 1/q' \leqslant \frac{1}{2} < 1$ και την ανισότητα $|x - y|^r \geqslant |x^r - y^r|, \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ με $r = 1/q'$ από την (3.4.8) βρίσκουμε

$$\varepsilon > \left| \sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; f)|^{q'} - \sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; P_m)|^{q'} \right|^{1/q'} \geqslant \left| \left(\sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; f)|^{q'} \right)^{1/q'} - \left(\sum_{j=1}^{n} |a(\lambda_j; P_m)|^{q'} \right)^{1/q'} \right| \tag{3.4.9}$$

Με την (3.4.5) μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα (3.2.1) στο P_m, με $m>n_0$ χρησιμοποιώντας τις (3.4.9) και (3.4.4) για κάθε $m>m_k=max\{\nu_\varepsilon, \bar{\nu}_\varepsilon, n_0\}$ και να γράψουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a(\lambda_j;f)|^{q'}\right)^{1/q'}<\left(\sum_{j=1}^{n}|a(\lambda_j;P_m)|^{q'}\right)^{1/q'}+\varepsilon\leqslant\|P_m\|_q+\varepsilon\leqslant\|f\|_q+2\varepsilon$$

και έτσι αποδείξαμε την (3.4.3). Αυτή με τη σειρά της αποδεικνύει την (3.4.1).

Υποθέτουμε τώρα ότι $q\in[2,+\infty]$. Εισάγουμε τη σειρά Fourier της f και το μερικό της άθροισμα έτσι ώστε μπορούμε να γράψουμε την ισοδύναμη μορφή

$$P_n(x)=\sum_{j=1}^{n}a(\lambda_j;f)e^{i\lambda_j x} \tag{3.4.10}$$

Αφού $q\geqslant 2$, $B_{ap}^q\subset B_{ap}^2$ και επομένως

$$P_n\to f \text{ στο } B_{ap}^2 \tag{3.4.11}$$

Από την άλλη, για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q με $\sigma(f)\cap\sigma(Q)\neq\varnothing$ μπορούμε να γράψουμε

$$|(P_n|Q)|=\left|\sum_{j=1}^{n}a(\lambda_j;f)\overline{a(\lambda_j;Q)}\right|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|a(\lambda_j;f)|^{q'}\right)^{1/q'}\left(\sum_{j=1}^{n}|a(\lambda_j;Q)|^{q}\right)^{1/q}$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}|a(\lambda_j;f)|^{q'}\right)^{1/q'}\|Q\|_{q'}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a(\lambda_j;f)|^{q'}\right)^{1/q'}\|Q\|_{q'}, \quad \forall n\in\mathbb{N} \tag{3.4.12}$$

χρησιμοποιώντας την (3.2.8) στο Q, δηλαδή $S_q(Q)\leqslant\|Q\|_{q'}$. Παίρνοντας υπ'όψιν την (3.4.11) και τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου στον B_{ap}^2, παίρνοντας το όριο στη (3.4.12) έχουμε

$$|(f|Q)|=\lim_{n\to\infty}|(P_n|Q)|\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a(\lambda_j;f)|^{q'}\right)^{1/q'}\|Q\|_{q'}$$

για κάθε $Q\in\wp$ με $\sigma(f)\cap\sigma(Q)\neq\varnothing$. Από το Θεώρημα 3.3.4 η σχέση (3.4.2) προκύπτει και η απόδειξη ολοκληρώνεται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ PLANCHEREL ΚΑΙ Η ΣΕΙΡΑ SHANNON

Έστω ένα διάστημα, πεπερασμένο ή άπειρο, στην πραγματική γραμμη $\mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με $L^2(I)$ τον συνήθη πλήρη, νορμαλισμένο γραμμικό χώρο των μιγαδικών, τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων κατά Lebesgue, στο I. Υπενθυμίζουμε ότι δύο τέτοιες συναρτήσεις είναι ταυτόσημες, αν είναι ίσες σχεδόν παντού στο I και πλήρης σημαίνει ότι οι ακολουθίες Cauchy συγκλίνουν. Για $f, g \in L^2(I)$ ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο

$$(f, g) = \int_I f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

Η ανισότητα Holder μας λέει ότι αυτό είναι καλά ορισμένο και επιπλέον δίνει $|(f, g)|^2 \leqslant (f, f)(g, g)$ που είναι μια σχέση γνωστή ως η ανισότητα Schwartz. Η νόρμα στο $L^2(I)$ που συμβολίζεται $\|\cdot\|_{2,I}$ ορίζεται ως $\|f\|_{2,I} = \sqrt{(f, f)}$. Με αυτό το εσωτερικό γινόμενο, ο $L^2(I)$ είναι ένας χώρος Hilbert και επομένως έχει τη γνωστή δομή, τις βάσεις της οποίας έθεσαν ο Fourier και οι σύγχρονοι του πριν από περίπου 150 χρόνια. Θα διατυπώσουμε εν συντομία τα στοιχεία εκείνα που θα χρησιμοποιήσουμε εμείς.

Ένα ορθοκανονικό σύστημα στο $L^2(I)$ είναι μία ακολουθία $\{\psi_k\}_{-\infty}^{\infty} \subset L^2(I)$ που ικανοποιεί $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$ (1 αν $n = m$ και 0 αλλιώς). Δοθέντος ενός τέτοιου συστήματος και μία $f \in L^2(I)$, θέτουμε $s_n(f) = \sum_{|k| \leqslant n} (f, \psi_k)\psi_k$. Τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε

$$0 \leqslant (f - s_n(f), f - s_n(f)) = (f, f) - 2\sum_{|k| \leqslant n} |(f, \psi_k)|^2 + \sum_{|k| \leqslant n} |(f, \psi_k)|^2$$

επομένως $(f, f) \geqslant \sum_{|k| \leqslant n} |(f, \psi_k)|^2 = (s_n(f), s_n(f))$ που ονομάζεται η ανισότητα Bessel. Προκύπτει ότι η $\{s_n(f)\}$ είναι Cauchy στο $L^2(I)$ και συγκλίνει σε κάποιο $s(f) \in L^2(I)$ όπου $(s(f) - f, \psi_k) = 0$ για $|k| = 0, 1, 2, \ldots$. Το ορθοκανονικό σύστημα $\{\psi_k\}$ είναι πλήρες αν $(h, \psi_k) = 0$ για όλα τα k, υπονοεί $h = 0$. Συγκεκριμένα, αν το $\{\psi_k\}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα τότε $s(f) = f$ και γράφουμε $f = \sum_{-\infty}^{\infty} (f, \psi_k)\psi_k$, που σημαίνει ότι η σειρά συγκλίνει στην f στο $L^2(I)$. Οι συντελεστές (f, ψ_k) είναι οι συντελεστές Fourier της f και η σειρά $f = \sum (f, \psi_k)\psi_k$ είναι η σειρά Fourier της f, σχετικά με το $\{\psi_k\}$. Η ταυτότητα $(f,f)=(s_n(f),s_n(f))=\sum|(f,\psi_k)|^2$ είναι η ισότητα Parseval. Μπορούμε να πάρουμε την κλασσική σειρά Fourier θέτοντας $I=[0,2\pi]$ και $\psi_k(t)=e^{ikt}/2\pi$. Για να δείξουμε ότι το $\{e^{ikt}/2\pi\}$ είναι πλήρες, παρατηρούμε ότι οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί αυτών των συναρτήσεων καλύπτουν μία υποάλγεβρα των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,2\pi]$ που είναι supremum πυκνό από το Θεώρημα Stone-Weierstrass.

Όταν $I=\mathbb{R}$ τα μιγαδικά εκθετικά δεν είναι πια στοιχεία του $L^2(I)$. Όμως τα γνωστά αποτελέσματα της κλασσικής Fourier, ισχύουν ακόμα με μικρές τροποποιήσεις, όπως μας δείχνει το επόμενο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ PLANCHEREL *Ο τύπος*

$$f(x)=\hat{g}(x)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}g(t)e^{ixt}dt$$

ορίζει ένα γραμμικό μετασχηματισμό του $L^2(\mathbb{R})$ *στον εαυτό του που διατηρεί το νορμαλισμό. Ο αντίστροφος είναι*

$$g(t)=\check{f}(t)=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(x)e^{-ixt}dx$$

Αυτό το αποτέλεσμα είναι θεμελιώδες τόσο για τη θεωρητική όσο και για τη πρακτική ανάλυση Fourier. Ένα συγγενικό θεώρημα είναι το ακόλουθο :

ΘΕΩΡΗΜΑ ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΗΨΙΑΣ *Έστω* $g\in L^2(\mathbb{R})$ *και* $g\equiv 0$ *έξω από το* $[-a,a]$. *Θέτουμε* $f=\hat{g}$. *Τότε οι τιμές της* f *προσδιορίζονται πλήρως από το διακριτό σύνολο δειγματοληπτικών σημείων* $n\pi/a$, $n=0,\pm 1,\ldots,$ *και επιπλέον*

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\sum_{|n|\leqslant k}f(n\pi/a)\frac{\sin a(x-n\pi/a)}{a(x-n\pi/a)}$$

όπου η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα τόσο στο $\mathbb{R}$ *όσο και στον* $L^2(\mathbb{R})$.

Αυτή η ανάπτυξη της f σε σειρά ονομάζεται σειρά Shannon. Ο ίδιος ο Shannon δε το απέδειξε. Το αποτέλεσμα ήταν γνωστό από το 1915. Εδώ θα αποδείξουμε το Θεώρημα Plancherel με τρόπο που θα μας δώσει ταυτόχρονα και το Θεώρημα δειγματοληψίας.

Απόδειξη Θα προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα στο $L^2(-\infty,+\infty)$ μέσω των κλασσικών αποτελεσμάτων στο $L^2[-a,a]$. Συμβολίζουμε τις νόρμες αυτών των δύο χώρων με $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_{2,a}$ αντίστοιχα.
Δοθέντος $g\in L^2(-\infty,+\infty)$, έστω g_a το γινόμενο του g με τη χαρακτηριστική συνάρτηση του $[-a,a]$. Εφαρμοζουμε την κλασσική θεωρία της σειράς Fourier στο μετασχηματισμό

$\hat{g}_a(x)=1/\sqrt{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{ixt} g(t)\,dt$ με τη βοήθεια της πλήρους ορθοκανονικής ακολουθίας ψ_n για $L^2[-a,a]$ όπου

$$\psi_n(t,\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-it(n\tau+\alpha)} \qquad (n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

με $\tau=\pi/a$ και με $\alpha\in\mathbb{R}$ σταθερό αριθμό. Παρατηρούμε ότι για $a=\pi$ και $\alpha=0$ η ακολουθία γίνεται η γνωστή $e^{-int}/\sqrt{2\pi}$. Θέτουμε $c_n(\alpha)=\int_{-a}^{a} g_a(t)\overline{\psi_n(t,\alpha)}\,dt$ και θυμόμαστε ότι η κλασσική θεωρία μας δίνει την ισότητα Parseval $\sum_n |c_n(\alpha)|^2=(\|g_a\|_{2,a})^2$ και ότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $s_k(t,\alpha)=\sum_{|n|\leqslant k} c_n(\alpha)\psi_n(t,\alpha)$ συγκλίνει στο g_a . Παρατηρούμε επίσης ότι $c_n(\alpha)=\sqrt{\tau}\,\hat{g}_a(n\tau+\alpha)$. Επομένως μπορούμε να πάρουμε τη μέση τιμή στο α και να πάρουμε προσεγγιστικά το Θεώρημα Plancherel. Θα το κάνουμε αυτό σε δύο βήματα. Πρώτον, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Beppo Levi παίρνουμε από την ισότητα Parseval

$$\begin{aligned}\|\hat{g}_a\|_2^2&=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{g}_a(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}|\hat{g}_a(x)|^2\,dx\\ &=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\tau}|\hat{g}_a(n\tau+\alpha)|^2\,d\alpha=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}|c_n(\alpha)|^2\,d\alpha\\ &=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n(\alpha)|^2\,d\alpha=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}(\|g_a\|_{2,a})^2\,d\alpha=\|g_a\|_{2,a}^2 \qquad (4.1.1)\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ξέρουμε ότι το $s_k(t,\alpha)$ είναι το k -οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier σε σχέση με το $\{\psi_n(\cdot,\alpha)\}$. Για την ακρίβεια, $\|s_k(\cdot,\alpha)\|_{2,a}\leqslant\|g_a\|_2$ και $\|g_a-s_k(\cdot,\alpha)\|_{2,a}\to 0$ καθώς $k\to\infty$. Προκύπτει ότι η $D_k(\alpha)\equiv(\|g_a-s_k(\cdot,\alpha)\|_{2,a})^2$ είναι φραγμένη από το $4\|g_a\|_{2,a}^2$ και ότι η $D_k(\alpha)$ συγκλίνει σημείο προς σημείο στο 0 για κάθε α . Άρα το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης του Lebesgue μας δίνει $\int_0^{\tau}|D_k(\alpha)|\,d\alpha\to 0$,όταν $k\to\infty$. Μαζί με το θεώρημα Fubini και την ανισότητα Schwartz, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}|D_k(\alpha)|\,d\alpha&=\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{-a}^{a}|g_a(t)-s_k(t,\alpha)|^2\,dt\,d\alpha=\frac{1}{\tau^2}\int_{-a}^{a}\int_0^{\tau}|g_a(t)-s_k(t,\alpha)|^2\,d\alpha\int_0^{\tau}1\,d\alpha\,dt\\ &\geqslant\frac{1}{\tau^2}\int_{-a}^{a}\left|\int_0^{\tau}g_a(t)-s_k(t,\alpha)\,d\alpha\right|^2dt=\int_{-a}^{a}\left|g_a(t)-\int_0^{\tau}\frac{1}{\tau}\sum_{-k}^{k}c_n(\alpha)\psi_n(t,\alpha)\,d\alpha\right|^2dt\\ &=\int_{-a}^{a}\left|g_a(t)-\sum_{-k}^{k}\int_0^{\tau}\frac{1}{\sqrt{\tau}}\hat{g}_a(n\tau+\alpha)\psi_n(t,\alpha)\,d\alpha\right|^2dt=\int_{-a}^{a}\left|g_a(t)-\sum_{-k}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\tau}\hat{g}_a(n\tau+\alpha)e^{it(n\tau+\alpha)}\,d\alpha\right|^2dt\\ &=\int_{-a}^{a}\left|g_a(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k\tau}^{(k+1)\tau}\hat{g}_a(x)e^{itx}\,dx\right|^2dt\end{aligned}$$

Αφού το αριστερό μέρος της εξίσωσης τείνει στο 0 όταν $k \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k\tau}^{(k+1)\tau} \hat{g}_a(x) e^{itx} dx \to g_a(t) \quad \text{στο} \quad L^2[-a, a]$$

Επομένως

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k\tau}^{k\tau} \hat{g}_a(x) e^{-itx} dx \to g_a(t) \quad \text{στο} \quad L^2[-a, a] \tag{4.1.2}$$

Για να επεκτείνουμε αυτά τα αποτελέσματα στο $L^2[-\infty, +\infty]$, έστω $g \in L^2(-\infty, +\infty)$ και $a \to \infty$ για οποιαδήποτε ακολουθία. Τότε το $\{g_a\}$ είναι Cauchy στο $L^2[-\infty, +\infty]$. Επομένως από την (4.1.1) το $\{\hat{g}_a\}$ είναι Cauchy στο $L^2[-\infty, +\infty]$ και επομένως συγκλίνει στο $\hat{g}$ του θεωρήματος. Επιπλέον

$$\|g\|_2 = lim \|g_a\|_{2,a} = lim \|\hat{g}_a\|_{2,a} = \|\hat{g}\|_2$$

που δίνει την ισότητα Parseval. Τώρα από τη (4.1.2) συμπεραίνουμε ότι

$$(\hat{g}_a)^{\vee}(t) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k\tau}^{k\tau} e^{-itx} \hat{g}_a(x) dx = g_a(t) \quad \text{στο} \quad L^2[-a, a]$$

Ακόμα το $g \to \check{g}$ είναι συνεχές στο $L^2[-\infty, +\infty]$ για τον ίδιο λόγο που το $g \to \hat{g}$ είναι συνεχές. Οπότε στο $L^2[-\infty, +\infty]$

$$g = \lim_{a \to \infty} g_a = \lim_{a \to \infty} (\hat{g}_a)^{\vee} = (\lim_{a \to \infty} \hat{g}_a)^{\vee} = (\hat{g})^{\vee}$$

που είναι ο τύπος αντίστροφου του Plancherel. Τέλος, χρησιμοποιούμε ακόμα μία φορά τη συνέχεια του μετασχηματισμού Plancherel-Fourier μαζί με τον υπολογισμό του $(\psi_n)_a^{\wedge}$ για να δείξουμε ότι η

$$g_a(t) = \lim_{k \to \infty} \sum_{-k}^{k} c_n(\alpha) \psi_n(t, \alpha) \quad \text{στο} \quad L^2[-a, a]$$

μας δείχνει ότι

$$\hat{g}_a(x) = \lim_{k \to \infty} \sum_{-k}^{k} c_n(\alpha) (\psi_n)^{\wedge}(x, \alpha) \quad \text{στο} \quad L^2[-\infty, +\infty]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{-k}^{k} \hat{g}_a(n\tau+\alpha) \frac{\sin a[x-(n\tau+\alpha)]}{a[x-(n\tau+\alpha)]}$$
$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{-k}^{k} \hat{g}_a(n\tau) \frac{\sin a(x-n\tau)}{a(x-n\tau)}, \quad \alpha=0$$

που είναι η σειρά Shannon. Για την ακρίβεια το τελευταίο όριο υπάρχει και στην νόρμα supremum. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι

$$supr_x \left| \hat{g}_a(x) - \sum_{-k}^{k} \hat{g}_a(n\tau) \frac{\sin a(x-n\tau)}{a(x-n\tau)} \right| = supr_x \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} (g_a(t) - s_k(t,0)) e^{itx} dt \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} |g_a(t) - s_k(t,0)| dt \leqslant \sqrt{\frac{a}{\pi}} \| g_a(t) - s_k(\cdot,0) \|_{2,a}, \qquad k\to\infty$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα αυτό θα δώσουμε κάποιους ορισμούς εννοιών και θεωρήματα που χρησιμοποιήθηκαν στο κυρίως κείμενο.

Ορισμός συνάρτησης φραγμένης κύμανσης: Λέμε ότι η συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι **φραγμένης κύμανσης**, αν υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε η ανισότητα:

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant c$$

ισχύει για κάθε διαμέριση $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$. Θα γράφουμε $f\in BV[a,b]$.

Ορίζουμε τώρα

$$V(P,f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

Τότε **η ολική κύμανση** της f είναι:

$$V_a^b(f)=supr\{V(P,f): P\,\delta\iota\alpha\mu\acute{\varepsilon}\rho\iota\sigma\eta\,\tau o\upsilon\,[a,b]\}$$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(α) Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, τότε είναι φραγμένη.

(β) Αν οι $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, τότε οι $f+g$, $f\cdot g$ είναι φραγμένης κύμανσης και ισχύει

$$V_a^b(f+g)\leqslant V_a^b(f)+V_a^b(g)$$

Επιπλέον αν $c\in[a,b]$ τότε

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f)$$

Θεώρημα Jordan Decomposition Η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι φραγμένης κύμανσης, αν και μόνο αν, υπάρχουν αύξουσες συναρτήσεις $f_{1,}f_2:[a,b]\to\mathbb{R}$, τέτοιες ώστε $f=f_1-f_2$.

Κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού και η f' είναι ολοκληρώσιμη.

Λέμε ότι η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz (βαθμού 1) στο $[a,b]$, αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|$$

για κάθε $x, y \in [a,b]$. Σ' αυτή την περίπτωση για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ είναι: $V(P,f) \leqslant M(b-a)$. Η f είναι φραγμένης κύμανσης με $V_a^b(f) \leqslant M(b-a)$. Η f ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz στο σημείο x_0 αν υπάρχει $K>0$ και $\delta>0$ τέτοιο ώστε: $|h|<\delta$ συνεπάγεται ότι

$$|f(x_0+h)-f(x_0)| \leqslant K|h|$$

Τέλος αν η $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε η

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$$

είναι ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$.

Παρατηρήσεις

1. Μία συνεχής συνάρτηση είναι δυνατόν να μην είναι φραγμένης κύμανσης. Έστω

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x\cos(\pi/2\mathrm{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{matrix}\right\}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$. Αν $P=\left\{0,\frac{1}{2\mathrm{n}},\frac{1}{2\mathrm{n}-1},\ldots,\frac{1}{3},\frac{1}{2},1\right\}$ είναι μια διαμέριση του $[0,1]$, τότε

$$V(P,f)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

το οποίο δεν είναι φραγμένο για κάθε f (επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$).

2. Αν η $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και η f' είναι φραγμένη, από το θεώρημα μέσης τιμής προκύπτει ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης.

3. Αν $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε η f είναι φραγμένης κύμανσης με $V_a^b(f)=|f(b)-f(a)|$.

Η ανισότητα Holder Υποθέτουμε ότι η $f\in L^p(I)$ και $g\in L^q(I)$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Τότε $fg\in L^1(I)$ και

$$\int_I |f(t)g(t)|dt \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$$

Θεώρημα Beppo-Levi Υποθέτουμε ότι η ακολουθία (f_n) μετρήσιμων συναρτήσεων, $f_n : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι τέτοια ώστε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm < \infty \quad .$$

Τότε η σειρά

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, η $f \in L_1(\mathbb{R})$ και

$$\int_{\mathbb{R}} f\, dm = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm \quad .$$

Επιπλέον έχουμε

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm \right| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| dm \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm \quad .$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **Paulo Jorge S. G. Ferreira**, *Almost Periodic Extension of Functions and Applications*, Cadernos de Matematica, CM/I-22 (1996)
2. **Paulo Jorge S. G. Ferreira**, *Approximating non-band-limited functions by nonuniform sampling series*, SampTA 95, 1995 Workshop on Sampling Theory and Applications, Jurmala, Latvia, Sep. 1995
3. **Harold Bohr**, *On Almost Periodic Functions and the Theory of Groups*, The American Mathematical Monthly, Vol. 56, No. 9. (Nov., 1949), pp. 595-609
4. **M.C.Tews**, *A Continuous Almost Periodic Function has Every Chord*, The American Mathematical Monthly, Vol. 77, No. 7. (Aug. - Sep., 1970), pp. 729-731
5. **Roger L. Cooke**, *Almost-Periodic Functions*, The American Mathematical Monthly, Vol. 88, No. 7. (Aug. - Sep., 1981), pp. 515-526
6. **C.Gasquet, P.Witomski**, *Fourier Analysis and Applications, Filtering, Numerical Computation, wavelets*
7. **Antonio Steiner**, *Plancherel's Theorem and the Shannon series derived simultaneously*, The American Mathematical Monthly, Vol. 87, No. 3. (Mar., 1980), pp. 193-197
8. **A. Avantaggiati, G. Bruno, R. Iannacci**, *The Hausdorff-Young theorem for almost periodic functions*, Nonlinear Analysis, Methods & Applications (1995)
9. **Harald Bohr**, *Almost Periodic Functions*, Chelsea Publishing, (1947)
10. **Yitzhak Katznelson**, *An intronduction to HARMONIC ANALYSIS*, (1976)
11. **Γιάννης Κ. Σαραντόπουλος**, *Σημειώσεις Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης* (Φεβρουάριος 2005)