



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Επεξεργασία και Ανάλυση Ιατρικών Απεικονίσεων Χαμηλής Ποιότητας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος, Ε. Αραμπατζής

Επιβλέπων : Ηλίας Κουκούτσης

Επίκουρος Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2006



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

Επεξεργασία και Ανάλυση Ιατρικών Απεικονίσεων Χαμηλής Ποιότητας

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημήτριος, Ε. Αραμπατζής

Επιβλέπων : Ηλίας Κουκούτσης
Επίκουρος Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31^η Οκτωβρίου 2006.

.....
Ηλίας Κουκούτσης
Μέλος Δ.Ε.Π
Επίκουρος Καθηγητής

.....
Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς
Μέλος Δ.Ε.Π
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Διονύσιος-Δημήτριος Κουτσούρης
Μέλος Δ.Ε.Π
Καθηγητής

Αθήνα, Οκτώβριος 2006

.....
Δημήτριος, Ε. Αραμπατζής

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Δημήτριος, Αραμπατζής , 2006.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή επιχειρείται μια πρώτη προσέγγιση του προβλήματος της αναγνώρισης σε ακτινογραφικές απεικονίσεις οι οποίες , λόγω του τρόπου παραγωγής τους αλλά και των σύνθετων τριδιάστατων δομών που προβάλλουν στο επίπεδο , είναι από τις δυσχερέστερες εικόνες στην προσπάθεια εξαγωγής συμπαγούς πληροφορίας . Κύριο αντικείμενο επεξεργασίας και ανάλυσης είναι η ακτινογραφία του χεριού , ωστόσο λόγω της μεγάλης πολυπλοκότητας που παρουσιάζει στη διάταξη της πληροφορίας κρίθηκε απαραίτητη η χρήση μιας δεύτερης απλούστερης ακτινογραφίας ορθοπεδικού καρφίου σε οστό , ως εικόνα αναφοράς για την απόδοση των μεθόδων που δοκιμάζονται .

Αρχικά , λοιπόν , δοκιμάζονται χαρακτηριστικοί αλγόριθμοι από τη βιβλιογραφία της επεξεργασίας εικόνας , έτσι ώστε να διαπιστωθεί η επίδραση των απεικονιστικών ιδιαιτεροτήτων της ακτινογραφίας στην απόδοση των μεθόδων . Από τη διαδικασία αυτή έγινε αντιληπτό πως συνολική επεξεργασία και ανάλυση της εικόνας δεν ήταν δυνατό , τουλάχιστον με την υπάρχουσα μεθοδολογία , να παράγει αποτελέσματα που περιγράφουν με συμπαγή τρόπο την πληροφορία της εικόνας .

Ωστόσο από συνεργασία με ειδικούς γιατρούς (ορθοπεδικούς , ακτινολόγους) διαπιστώθηκε η ύπαρξη αλγορίθμου στον τρόπο με τον οποίο ο γιατρός κάνει την αναγνώριση , συμπληρωματικού προς τη διαδικασία διάγνωσης που αυτός ακολουθεί . Διαπιστώθηκε , δηλαδή , πως ο ορθοπεδικός χρησιμοποιεί , αντίστοιχα προς τη γνώση που καθοδηγεί τη διάγνωση , πρότερη γνώση με τη μορφή αφαιρετικών μοντέλων για τη θέση και το σχήμα των βιολογικών δομών που αναγνωρίζει .

Με βάση λοιπόν τα συμπεράσματα πως ενιαία επεξεργασία της εικόνας δεν μπορεί να δώσει αποτελέσματα περιγραφικά της επιθυμητής πληροφορίας και πως η πρότερη γνώση του ειδικού γιατρού παράγει ένα επιτυχημένο αλγόριθμο αναγνώρισης , προτείνονται μέθοδοι και δομές επεξεργασίας και ανάλυσης που βηματικά εντοπίζουν τη διαδικασία της αναγνώρισης σε περιοχές όπου με τη χρήση πρότερης γνώσης από τους ειδικούς γιατρούς είναι δυνατό να εξαχθεί η πληροφορία που είναι αναγκαία για την αναγνώριση .

Λέξεις Κλειδιά : επεξεργασία ακτινογραφικών εικόνων , επεξεργασία εικόνας με πρότερη γνώση , κατάτμηση εικόνας , ανίχνευση / αναγνώριση αντικειμένων , εξαγωγή πληροφορίας , εξαγωγή μοντέλου

Abstract

In this work is given an initial approach to the problem of recognition in x-ray medical images. In this kind of medical depictions, extraction of the desired information in a compact form, is proved to be a tricky problem, due to substance of complex projections for the 3D biological structures and the way that x-ray images are produced. The main processed and analysed subject is the X-ray of human hand, an image that represents the contained information in a very complex configuration. So, it was used a second X-ray image of an orthopaedic nail in a bone, as a reference for the performance of tested methods.

In the beginning, were applied distinctive algorithms from the image processing bibliography, in order to ascertain the effects of X-ray's illustrative distinctiveness to their performance. This testing process has shown that a uniform treatment for image analysis, could not achieve results that describe image's information in a compact form.

Though these results, interaction with specialized doctors has revealed the existence of an algorithm that leads the recognition that doctor performs, in a manner complementary to diagnostical process that he follows. Namely, it has been ascertained that orthopaedic doctor uses prior knowledge formed in abstract models for the site and the shape of recognised biological structures.

Based on the suggestions that uniform treatment of X-ray image can't give out results representative to the desirable information and that the prior knowledge of specialized doctor gears a successful recognition algorithm; are proposed methods and structures that support gradual localization of recognition process to sites, where usage of prior knowledge can lead to the successful extraction of the information, that is necessary to perform recognition.

Keywords : x-rays image processing, image processing with prior knowledge, biomedical image segmentation, object detection / recognition, information extraction, model extraction

Κεφάλαιο 1 : Εισαγωγή

Η ακτινογραφία έχει καθιερωθεί ως μη επεμβατική μέθοδος , σχετικά ακριβούς , παρατήρησης φυσιολογικών δομών του οργανισμού(οστά) και αντικειμένων χειρουργικά τοποθετημένων στον ανθρώπινο οργανισμό , όπως είναι το ορθοπεδικά καρφιά και άλλοι μηχανισμοί υποστηρικτικοί της λειτουργίας του ανθρώπινου σκελετού.

Η ακτινογραφία στηρίζεται στη διαφορετική απορρόφηση ακτινοβολίας γ των υπό παρατήρηση δομών λόγω διαφορετικής σύστασης . Έτσι , για παράδειγμα , η υψηλή περιεκτικότητα των οστών σε ασβέστιο αποδίδει στις δομές αυτές υψηλή απορροφητικότητα ακτινοβολίας γ , με αποτέλεσμα η ποσότητα οστικής μάζας που διαπερνάται από την ακτινοβολία να απεικονίζεται σε ανάλογη διαβάθμιση του λευκού στην εικόνα της ακτινογραφίας.

Λόγω του τρόπου παραγωγής τους οι ακτινογραφίες χαρακτηρίζονται από χαμηλή ποιότητα απεικόνισης , καθώς η προβολή μιας σύνθετης σε γεωμετρία και σύσταση δομής όπως είναι ο ανθρώπινος σκελετός , δημιουργεί μια πολύπλοκη και ευαίσθητη στις επιδράσεις του θορύβου απεικόνιση . Έτσι παρουσιάζονται διάφορα τεχνικά εμπόδια στην προσπάθεια έγκυρης επεξεργασίας της ακτινογραφίας όπως είναι : **α)** οι διαβαθμισμένες και ασαφείς ακμές και περιγράμματα , **β)** η παρουσία ισχυρού θορύβου τύπου 'salt & pepper' , **γ)** η ασάφεια της απεικόνισης που προκαλείται από τη μη – σημειακή φύση της πηγής των ακτίνων γ , **δ)** οι χαμηλές διαφορές φωτεινότητας μεταξύ των απεικονίσεων βιολογικών δομών διαφορετικής σύστασης , καθώς διαφορετικής σύστασης δομές και αντικείμενα παρουσιάζουν παρόμοια απορρόφηση των ακτίνων γ και επομένως απεικονίζονται με την ίδια χρωματική ένταση στις ακτινογραφίες . Όπως θα φανεί από τα επόμενα , μόνη η διαβάθμιση της φωτεινότητας της εικόνας δεν είναι ικανή για την αυτόματη διάκριση αντικειμένων και δομών που παρουσιάζονται στις ακτινογραφίες.

Στην εργασία αυτή εξετάζονται και συγκρίνονται ως προς την επιτυχία τους υπάρχουσες και καινοτόμες μέθοδοι αυτόματης (χωρίς την παρέμβαση ανθρώπου) εξαγωγής χαρακτηριστικών και περιγραμμάτων . Στόχος της μελέτης και στη συνέχεια της επεξεργασίας και της ανάλυσης της ακτινογραφικής εικόνας είναι η παραγωγή συνεχών καμπυλών περιγραμμάτων για τις περιοχές ενδιαφέροντος χωρίς λάθη και κενά , καθώς και η διερεύνηση της δυνατότητας να αναπτυχθεί ένας αλγόριθμος αναγνώρισης , αρχικά για την ακτινογραφία του χεριού , με ικανότητα γενίκευσης αντίστοιχης εκείνης των ειδικών γιατρών .

Το κίνητρο για τη διερεύνηση αυτή συνίσταται στην εκμετάλλευση της ταχύτητας και της ακρίβειας στην υπολογιστική υλοποίηση ενός αλγορίθμου αναγνώρισης ακτινογραφιών , ο οποίος θα μπορούσε να στηρίξει την ανάπτυξη εφαρμογών υποβοήθησης ιατρικών διαδικασιών , όπως εγχειρήσεις κλειστών ενδομυελικών ενώσεων, διαγνωστικές μέθοδοι καταστάσεων και ασθενειών(αρθρίτιδες χεριών κλπ), καθώς και βελτίωσης των ιατρικών απεικονίσεων(δημιουργία απεικονίσεων στις οποίες υπάρχει πληροφορία από διαφορετικού τύπου ιατρικές απεικονίσεις – medical image fusion).

Κεφάλαιο 2 : Υπάρχουσες Μέθοδοι Ανίχνευσης Χαρακτηριστικών και Αντικειμένων σε Γκρίζες Εικόνες και Εφαρμογή τους σε Ακτινογραφίες

2.1 Γενικά

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται και εφαρμόζονται σε ακτινογραφίες μέθοδοι εντοπισμού χαρακτηριστικών από τη βιβλιογραφία, οι οποίες όμως έχουν χρησιμοποιηθεί με επιτυχία για την εξαγωγή επιθυμητής πληροφορίας από ιατρικές απεικονίσεις σε προβλήματα όπως η αναγνώριση όγκων σε μαγνητικές τομογραφίες και ο εντοπισμός αντικειμένων σε εικόνες ηλεκτρονικού μικροσκοπίου. Οι μέθοδοι αυτές στηρίζουν την εξαγωγή γεωμετρικών και μορφολογικών χαρακτηριστικών από γκρίζες εικόνες στον προσδιορισμό του χαρακτηριστικού ως μια περιοχή της εικόνας στην οποία εμφανίζεται ομοιογένεια της φωτεινότητας, ως προς κάποιο κριτήριο αντίστοιχο του χαρακτηριστικού αυτού. Με την αντιστοιχία χαρακτηριστικού σε περιοχή το πρόβλημα της εξαγωγής χαρακτηριστικών εκφράζεται ως πρόβλημα διάκρισης περιοχών ή ισοδύναμα εύρεσης των ορίων των περιοχών αυτών. Μεταγράφεται δηλαδή η σημασία του προς ανίχνευση χαρακτηριστικού σε κριτήριο το οποίο εφαρμόζεται στην εικόνα και εντοπίζονται τα περιθώρια (καμπύλες) που ορίζουν τις περιοχές οι οποίες εκπληρώνουν το κριτήριο αυτό. Έτσι μετασχηματίζεται το πρόβλημα της εξαγωγής χαρακτηριστικών σε πρόβλημα εντοπισμού καμπυλών.

Αναλυτικές μέθοδοι, όπως αυτές που δοκιμάζονται εδώ, αντιμετωπίζουν τη γκρίζα εικόνα ποσοτικοποιώντας τη φωτεινότητά της σε συνάρτηση $f(x,y)$, με μέγιστο τη φωτεινότητα του λευκού και ελάχιστο του μαύρου. Στη συνέχεια πρέπει να ποσοτικοποιηθούν σε κριτήριο τα προς ανίχνευση χαρακτηριστικά, δημιουργώντας μετασχηματισμένες εκδοχές της εικόνας. Εφόσον όμως το ζητούμενο είναι να αντιστοιχιστούν τα χαρακτηριστικά σε περιοχές ομοιογενείς ως προς το κριτήριο που τα περιγράφει, οι καμπύλες που ορίζουν τις περιοχές δίνονται από μια οριακή μεταβολή του κριτηρίου που περιγράφει ποσοτικά το προς ανίχνευση χαρακτηριστικό. Όταν το κριτήριο είναι η ομοιογένεια ως προς τη φωτεινότητα, παίρνουμε μια οικογένεια μεθόδων που εξετάζουν τις μεταβολές της φωτεινότητας $f(x,y)$, ώστε να εντοπίσουν τις καμπύλες που αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα των μεταβολών αυτών (σε απόλυτες τιμές). Από την οικογένεια αυτή των μεθόδων θα εξεταστεί η εφαρμογή γνωστών αλγορίθμων ανίχνευσης ακμών (edge detectors), καθώς και ο αλγόριθμος πλημμυρισμού watershed.

Μέθοδοι που στηρίζονται σε κριτήρια μορφολογικής ομοιογένειας θεωρούν ως χαρακτηριστικό προς ανίχνευση το σχήμα, το οποίο προσπαθούν να προσεγγίσουν με μια βάση επίπεδων σχημάτων που εφαρμόζονται ως μάσκα κεντραρισμένη σε θέση της εικόνας, ορίζοντας τη γειτονιά της θέσης αυτής. Στη συνέχεια η φωτεινότητα κάθε θέσης μετασχηματίζεται με βάση μια “λογική αποτίμηση” της γειτονιάς της. Οι μετασχηματισμοί αυτοί εκτελούν μια ακολουθία τελεστών $\infimum(\wedge)$ ή $\supremum(\vee)$ στη γειτονιά που εντοπίζονται, ενώ μια αναλυτική τους έκφραση τους αντιστοιχίζει σε κλιμάκωση της εικόνας, σε κλίμακα που ορίζεται από το εύρος της γειτονιάς.

2.2 Θέματα Κλίμακας

Σημαντικός παράγοντας για την επίδοση οποιασδήποτε αναλυτικής μεθόδου ανίχνευσης χαρακτηριστικών είναι η διακριτική ικανότητα στην εικόνα που αυτή επεξεργάζεται. Η παράμετρος αυτή εκφρασμένη σε dpi ή σε πλήθος pixels ανά μονάδα εμβαδού, δίνει ουσιαστικά

την πυκνότητα της δειγματοληψίας κατά την ψηφιοποίηση της εικόνας, η οποία ορίζει και την ελάχιστη περιοχή καταγραφής μεταβολών της φωτεινότητας. Οι μεταβολές τόσο της συνάρτησης φωτεινότητας, όσο και οποιουδήποτε κριτηρίου πάνω σε αυτή είναι, όπως περιγράφηκε παραπάνω, κρίσιμη μέτρηση για την απόφαση που λαμβάνουν οι αναλυτικές μέθοδοι προσπαθώντας να διακρίνουν χαρακτηριστικά και αντικείμενα στην εικόνα που αναλύουν. Επομένως η διακριτική ικανότητα επηρεάζει άμεσα την ικανότητα διάκρισης των χαρακτηριστικών μιας εικόνας από τις μεθόδους που αναλύουν τη συνάρτηση φωτεινότητάς της. Για παράδειγμα, χαμηλή διακριτική ικανότητα σε θορυβώδεις εικόνες μπορεί να απαλείψει ασυνέχειες μικρού εμβαδού της εικόνας αυτής, ωστόσο σε σύνθετες εικόνες με χαρακτηριστικά σε μικρή κλίμακα, χαμηλή διακριτική ικανότητα υπάρχει κίνδυνος να αποκόπτεται πληροφορία από τα χαρακτηριστικά αυτά. Υπάρχει δηλαδή μια συμπληρωματική σχέση μεταξύ διακριτικής ικανότητας και κλίμακας στην οποία περιγράφεται η πληροφορία της εικόνας. Είναι σημαντικό λοιπόν να εντοπιστεί, σε ποια κλίμακα της μη-ψηφιοποιημένης εικόνας περιγράφεται το χαρακτηριστικό ή το αντικείμενο προς ανίχνευση, έτσι ώστε να προσδιοριστεί κατάλληλα η διακριτική ικανότητα που διατηρεί αναλλοίωτη την πληροφορία για αυτό. Πρέπει δηλαδή να διακρίνουμε από τις μεταβολές σε μικρές κλίμακες (απότομες μεταβολές), ποιες συνιστούν πληροφορία και ποιες θόρυβο.

Σε σύνθετες εικόνες, που έχουν κατανεμημένη την πληροφορία τους σε όλες τις κλίμακες ενώ ταυτόχρονα περιέχουν και θορυβώδη σήματα, ενιαία αντιμετώπιση της επιλογής διακριτικής ικανότητας για την εικόνα που θα αναλυθεί (ή ισοδύναμα της κλίμακας στην οποία θα αναλυθεί η εικόνα), μπορεί να οδηγήσει την ανάλυση για ανίχνευση χαρακτηριστικών σε αποτελέσματα που αφομοιώνουν χαρακτηριστικά και θόρυβο σε μη διακρίσιμη μορφή. Πρέπει εδώ να σημειωθεί πως θόρυβος για την ανίχνευση ενός χαρακτηριστικού θεωρούνται και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά που εντοπίζονται υπό την ίδια ανάλυση, όταν αυτά είναι αφομοιωμένα με το προς ανίχνευση χαρακτηριστικό σε μη διακρίσιμη μορφή. Αυτή η τοπικότητα στην κλίμακα που περιγράφεται πλήρως και διακεκριμένα από το θόρυβο κάποιο χαρακτηριστικό ή αντικείμενο, ορίζει ένα τρίπτυχο [χαρακτηριστικό, κλίμακα, περιοχή] το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως αναγκαίο για να περιγραφεί πλήρως το χαρακτηριστικό στο οποίο αντιστοιχεί – κατά συνέπεια μονοσήμαντα – και επομένως μπορεί να μειωθεί στο ζεύγος [κλίμακα(χαρακτηριστικού), περιοχή(χαρακτηριστικού)].

Σύνθετες εικόνες, όπως αυτές που περιγράφηκαν παραπάνω, είναι και οι ακτινογραφίες τμημάτων του ανθρώπινου σκελετού, οι οποίες προβάλλουν στο επίπεδο μια ιδιαίτερα σύνθετη (λόγω των μηχανικών λειτουργιών που υποστηρίζει) τριδιάστατη δομή παράγοντας μια εικόνα αντικειμένων πολύμορφων (λόγω διαφοροποίησης στη λειτουργία και τη σύνθεση), διαφορετικού μεγέθους, συγγενούς φωτεινότητας και με επικαλύψεις. Επίσης στις ακτινογραφικές εικόνες δεν είναι πάντα βέβαιο ότι μπορεί να ρυθμιστεί η διακριτική ικανότητα, αφού πολλές φορές η ψηφιοποίηση γίνεται από το ίδιο το ακτινογραφικό μηχάνημα, οπότε πρέπει να ελεγχθεί η πληρότητά της ως προς την περιγραφή της πληροφορίας. Όταν δίνεται η δυνατότητα καθορισμού της διακριτικής ικανότητας, αυτή επιλέγεται πληθωρική, αρχικά, ως προς την πυκνότητα της διακριτοποίησης, με κάποιο ευρεστικό κάτω φράγμα που καθορίζεται από τη διακριτική ικανότητα που καθιστά ικανό τον ορθοπεδικό να διακρίνει όλη την πληροφορία που του υπαγορεύει η γνώση του και οι διαγνωστικοί του αυτοματισμοί. Όπως είδαμε όμως παραπάνω, η διακριτική ικανότητα(ή ισοδύναμα η κλίμακα στην εικόνα) που καθιστά ανιχνεύσιμο ένα χαρακτηριστικό, με βάση κάποια μεθοδολογία θεωρητικά ορθή, αποτελεί ιδιότητα του χαρακτηριστικού και το περιγράφει μονοσήμαντα μαζί με την περιοχή που αυτό εντοπίζεται. Έτσι η διακριτική ικανότητα που επιλέγεται είναι ουσιαστικά

εκείνη που εκτιμάται ότι θα εξασφαλίσει μη απώλεια πληροφορίας και δε μπορεί σύμφωνα με το προηγούμενο συμπέρασμα να χρησιμοποιηθεί αξιόπιστα ενιαία , για την ανίχνευση κάθε χαρακτηριστικού που περιγράφει την πληροφορία που εξασφαλίσαμε .

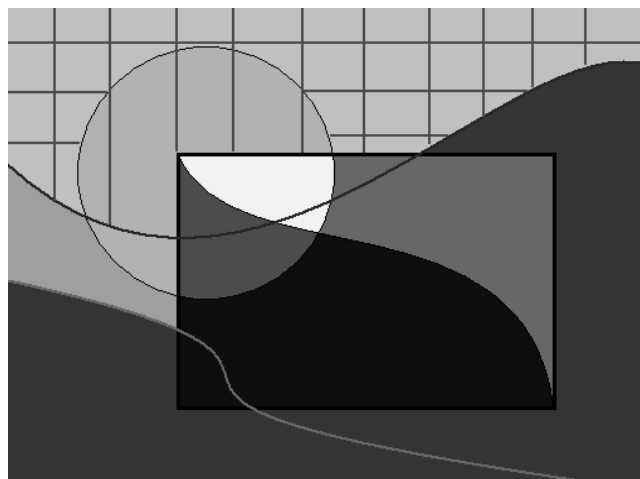
2.3 Αλγόριθμοι Ανίχνευσης Ακμών

Οι αλγόριθμοι που δοκιμάζονται εδώ εντοπίζουν τις ακμές σε θέσεις που μεγιστοποιούν τη μεταβολή της φωτεινότητας της εικόνας .Ορίζοντας λοιπόν τη συνάρτηση φωτεινότητας $f(x,y)$ τα τοπικά μέγιστα της μεταβολής της αντιστοιχούν σε τοπικά μέγιστα της κλίσης της f (παράγωγος ως προς (x,y)) $\nabla f(x, y)$. Για τον υπολογισμό της κλίσης θα πρέπει να εξασφαλιστεί η συνέχεια της $f(x,y)$, οπότε πριν τη διαφόριση την εξομαλύνουμε φιλτράροντας την με πυρήνα $h(x,y)$:

$\nabla[f * h](x, y) = f * \nabla h(x, y)$ και εφόσον η $h(x,y)$ είναι γνωστή (κατά συνέπεια και η παράγωγός της) , για την εκτίμηση της κλίσης μιας εξομαλυμένης έκφρασης της f , αρκεί η συνέλιξή της με την κλίση της απόκρισης του φίλτρου που χρησιμοποιείται για εξομάλυνση.

Στη συνέχεια δοκιμάζονται αλγόριθμοι διαφορετικών υπολογιστικών προσεγγίσεων στην παραπάνω μεθοδολογία ανίχνευσης ακμών . Για κάθε αλγόριθμο παρουσιάζεται αρχικά , ως μέτρο επίδοσης , το αποτέλεσμά του σε δύο απλές (ως προς τη μεταβλητότητα της φωτεινότητάς τους και το θόρυβο) εικόνες , ενώ στη συνέχεια εφαρμόζεται σε δύο ακτινογραφικές εικόνες (ακτινογραφία καρφίου σε οστό και ακτινογραφία χεριού) για την εξαγωγή των ακμών τους .

Οι δυο εικόνες που χρησιμοποιούνται ως μέτρο επίδοσης είναι

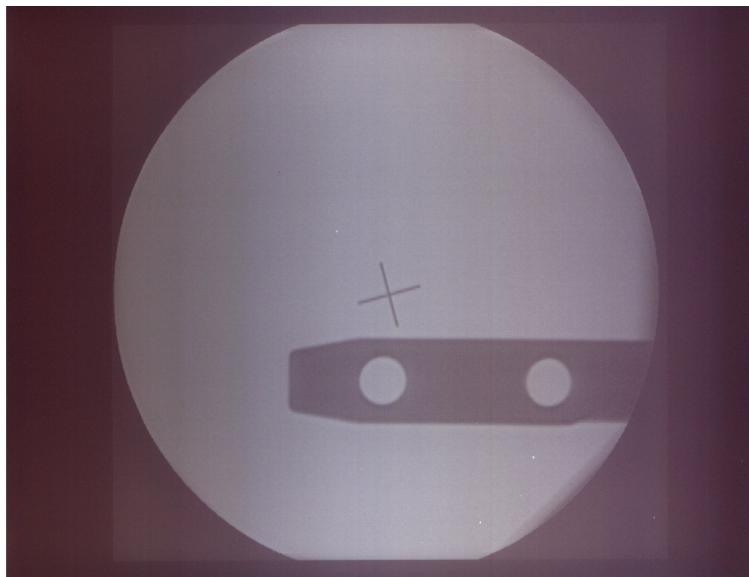


εικόνα 2.1α



εικόνα 2.1β

Και οι δύο ακτινογραφικές εικόνες στις οποίες εφαρμόζονται οι αλγόριθμοι είναι



εικόνα 2.2α
ακτινογραφία καρφίου σε οστό



εικόνα 2.2β
ακτινογραφία χεριού

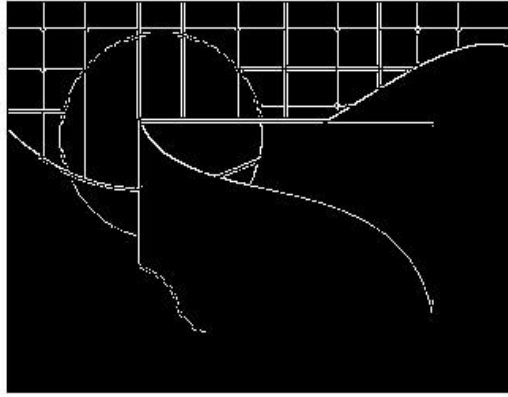
2.3.α Αλγόριθμοι Υπολογισμού της Κλίσης

Στην ουσία πρόκειται για διαφορετικές προσεγγίσεις στην παραπάνω ιδέα της συνέλιξης με το διαφορικό της απόκρισης ενός φίλτρου ομαλοποίησης. Εδώ δοκιμάζονται οι πυρήνες (αποκρίσεις) που πρότειναν οι Roberts, Prewitt και Sobel για την προσέγγιση της κλίσης σε ψηφιακές εικόνες. Για την ανίχνευση των ακμών χρησιμοποιείται κατώφλι για τον προς τα κάτω περιορισμό κάποιας νόρμας της κλίσης ($|f_x|+|f_y|$, $\sqrt{f_x^2+f_y^2}$, ..., $\max(|f_x|,|f_y|)$).

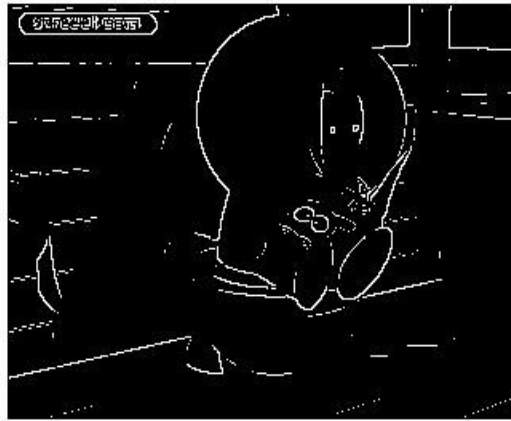
Ο Roberts λοιπόν προσεγγίζει $f_x=f(i, j)*\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $f_y=f(i, j)*\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Οι πυρήνες αυτοί για τον υπολογισμό της κλίσης προέκυψαν από τη διαφορίση επίπεδης επιφάνειας προσαρμοσμένης στην εικόνα f ώστε, σε ένα 2×2 παράθυρο, να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

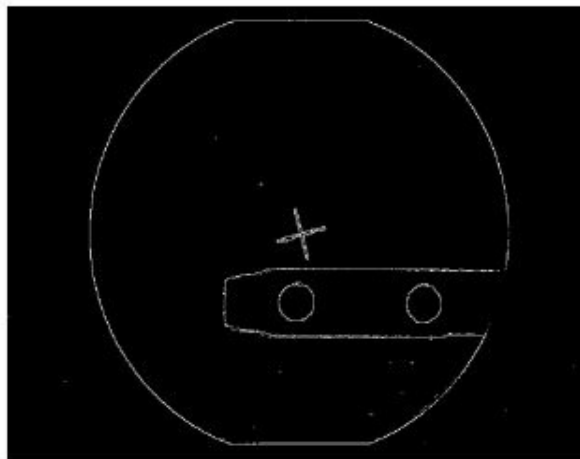
Χρησιμοποιώντας ως κριτήριο ανίχνευσης των ακμών καταωφλιοποίηση του μέτρου της κλίσης που υπολογίστηκε και εφαρμόζοντας τη μέθοδο τόσο στις δύο δοκιμαστικές εικόνες όσο και στις ακτινογραφικές εικόνες πήραμε τα παρακάτω αποτελέσματα



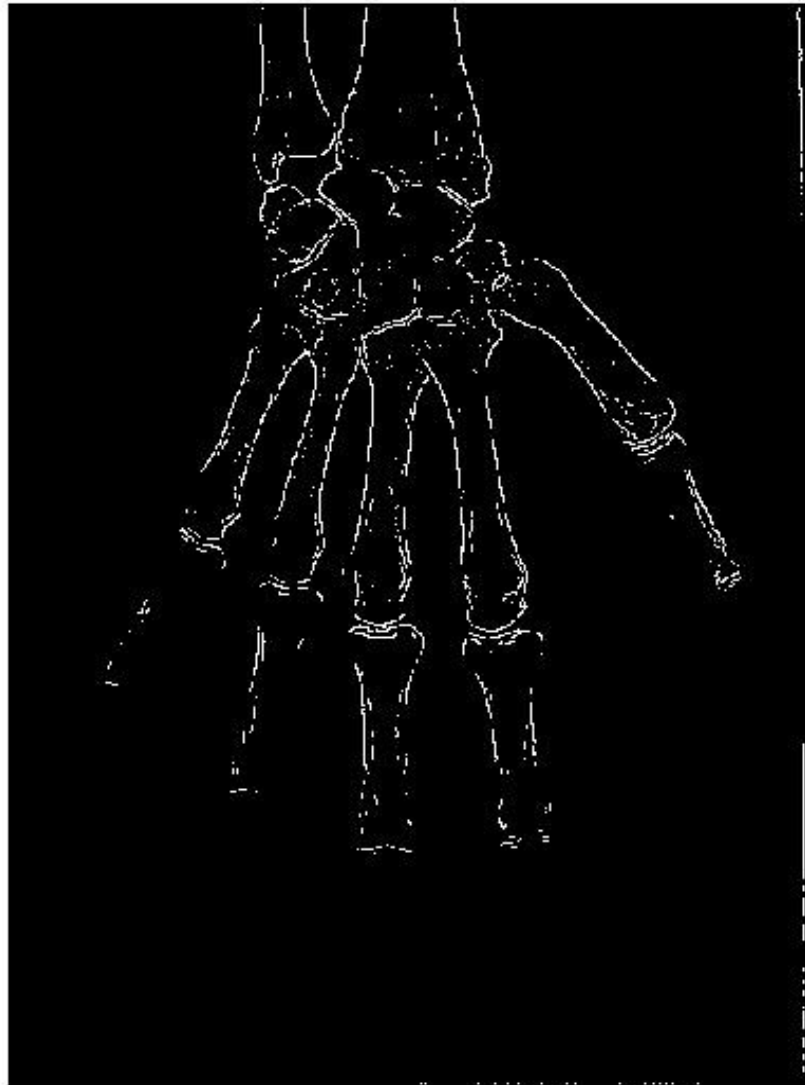
εικόνα 2.2α



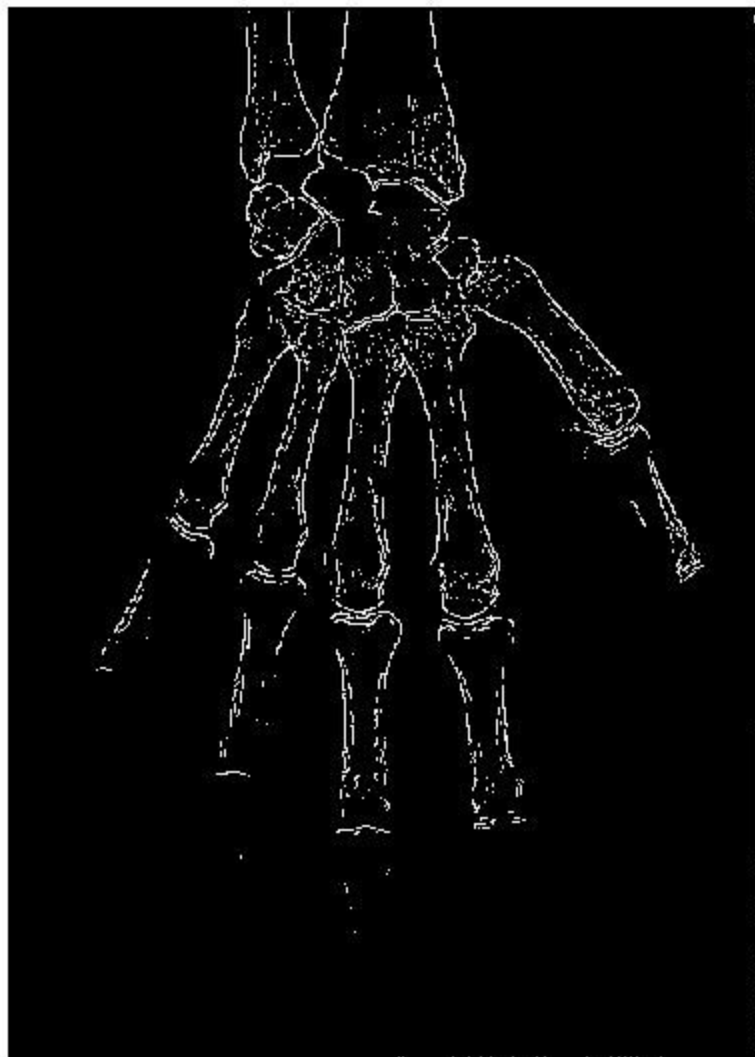
εικόνα 2.2.β
ακμές των δοκιμαστικών εικόνων
με αυτόματη επιλογή κατωφλίου



εικόνα 2.2α



εικόνα 2.2β
κατώφλι $thr=0.045$



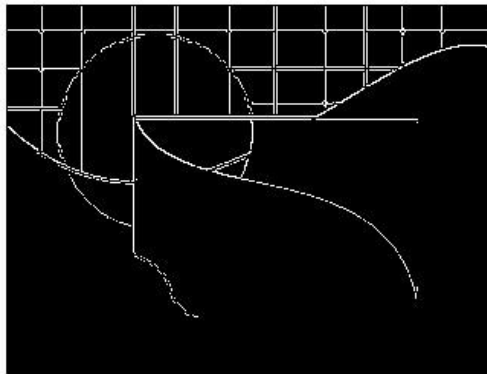
εικόνα 2.2γ
κατώφλι $thr=0.035$

Τα αποτελέσματα που παρατίθενται για την ακτινογραφία του χεριού είναι χαρακτηριστικά της επίδρασης του κατωφλίου στην απόδοση της μεθόδου, αφού περαιτέρω μείωση του κατωφλίου έδωσε απλά περισσότερα μεμονωμένα pixel χωρίς να εντοπίζει περαιτέρω γραμμές ακμών. Στις υπόλοιπες εφαρμογές της μεθόδου, μεταβολή του κατωφλίου επιδεινώνει τα αποτελέσματα είτε παραλείποντας ακμές (αύξηση κατωφλίου), είτε αποδίδοντας σε ακμές ασυνέχειες μεμονωμένων pixel.

Η προσέγγιση του Prewitt χρησιμοποιεί πυρήνα $f_x = [f * P_x](i, j) = f(i, j) * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ και

$f_y = [f * P_y](i, j) = [f * P_x^T](i, j)$. Οι πυρήνες του Prewitt για τον υπολογισμό της κλίσης προέκυψαν από τη διαφόριση τετραγωνικής επιφάνειας προσαρμοσμένης στην εικόνα f ώστε, σε ένα 3×3 παράθυρο, να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

Για τις δύο εικόνες δοκιμών η μέθοδος του Prewitt έδωσε ως εικόνες των ακμών

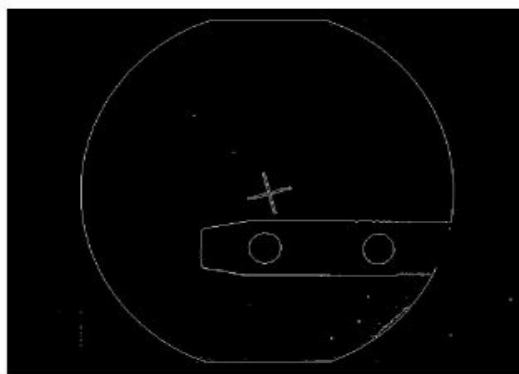


εικόνα 2.3α



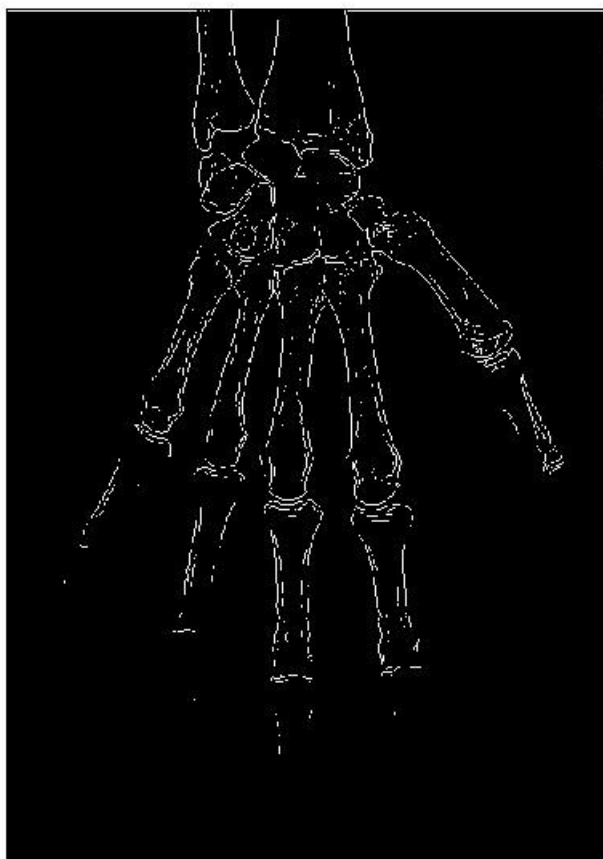
εικόνα 2.3β

Για την ακτινογραφία του καρφίου πήραμε την εικόνα των ακμών

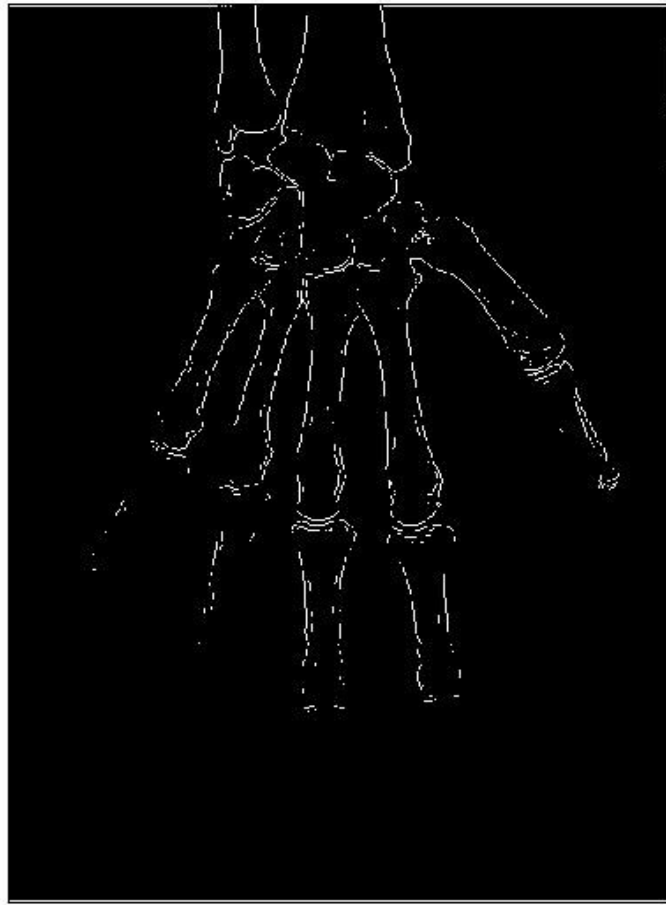


εικόνα 2.4α

Αντίστοιχα με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε και για την ανίχνευση με τον πυρήνα του Roberts και για δύο ενδεικτικές τιμές κατώφλιου για το μέτρο της κλίσης πήραμε στην ακτινογραφία χεριού τα παρακάτω αποτελέσματα



εικόνα 2.4β
κατώφλι $thr=0.03$



εικόνα 2.4γ
κατώφλι thr=0.04

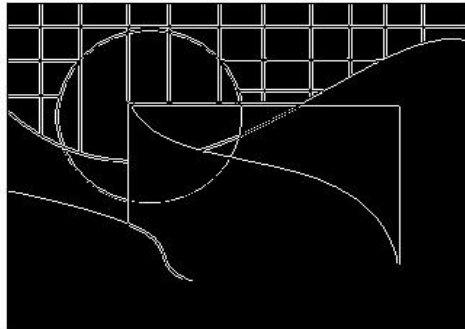
Τέλος οι πυρήνες που χρησιμοποίησε ο Sobel για την προσέγγιση της κλίσης είναι :

$$f_x = [f * S_x](i, j) = f(i, j) * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } f_y = [f * S_y](i, j) = [f * S_x^T](i, j)$$

Οι πυρήνες του Sobel προέκυψαν από τη διαφοράση με τους πυρήνες του Roberts μιας εξομαλυμένης εκδοχής της f με 2×2 mean-φίλτρο, αφού μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \text{mean}_{2 \times 2} * R_x$$

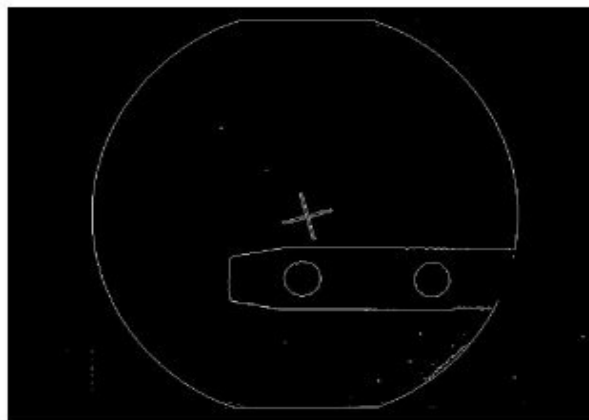
Ενώ τα αποτελέσματα για μια ενδεικτική τιμή κατωφλίου για το μέτρο της κλίσης που υπολογίστηκε στις δύο εικόνες δοκιμών και στις ακτινογραφικές εικόνες προέκυψαν



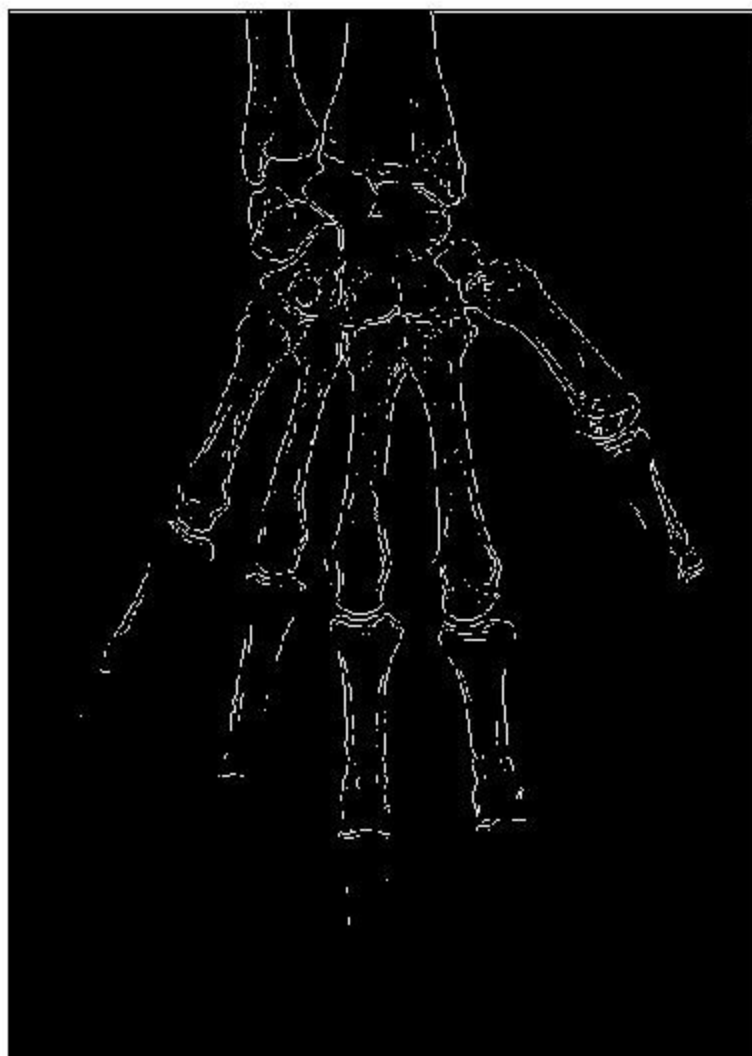
εικόνα 2.5α



εικόνα 2.5β



εικόνα 2.6α



εικόνα 2.6β
κατώφλι $thr=0.031$

Στη δοκιμή αυτή είναι ανεπαίσθητες οι μεταβολές που επιφέρουν αυξομειώσεις του κατωφλίου στην ίδια τάξη μεγέθους, ενώ με την αλλαγή τάξης εντοπίζονται ελάχιστες (υψηλότερη τάξη) ή ανύπαρκτες (χαμηλότερη τάξη) ακμές.

2.3.β Αλγόριθμοι Βασισμένοι σε Μηδενισμό Δευτέρου Βαθμού Διαφορικών

Οι αλγόριθμοι αυτοί διαφέρουν από εκείνους της μεγιστοποίησης της κλίσης στο γεγονός ότι προσπαθούν να προσδιορίσουν την εξίσωση των καμπυλών των ακμών από την ιδιότητα των ακμών να μεγιστοποιούν τοπικά, κατά μήκος τους, τη μεταβολή της φωτεινότητας. Η ιδιότητα αυτή περιγράφεται από τη μεγιστοποίηση της παραγώγου στην κατεύθυνση του κάθετου στην καμπύλη

της ακμής διανύσματος $\hat{n} = \frac{\nabla f(\vec{C}(t))}{\|\nabla f(\vec{C}(t))\|}$ (όπου $\vec{C}(t)$ η καμπύλη της ακμής) οπότε

$$\frac{\partial}{\partial n} f = \nabla^T f \hat{n} = \|\nabla f\| = \max \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial n^2} f = 0 \Leftrightarrow n^T f_{xx} n = 0 \Leftrightarrow \frac{f_x^2 f_{xx} + 2f_{xy} f_x f_y + f_y^2 f_{yy}}{f_x^2 + f_y^2} = 0$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τις καμπύλες των ακμών της $f(x,y)$, ωστόσο δεν είναι απόλυτο ότι ο μηδενισμός της δεύτερης κατευθυντικής παραγώγου συνεπάγεται μεγιστοποίηση της πρώτης παραγώγου. Αυτό εξασφαλίζεται ωστόσο από το πρόσημο της τρίτης κατευθυντικής παραγώγου αφού για $f_{nn} = 0$ και $f_{nnn} < 0 \Leftrightarrow f_n = \max$. Επίσης η απαίτηση για ομαλότητα μέχρι δεύτερου ή και τρίτου βαθμού διαφορίσης καθιστά επιβεβλημένη την εξομάλυνση της $f(x,y)$ με κάποιο φίλτρο το οποίο, στη βέλτιστη περίπτωση, είναι ένας γραμμικός συνδυασμός φίλτρων που ανήκουν στην οικογένεια των B-Splines. Η οικογένεια των φίλτρων αυτών παράγεται από ακολουθιακές συνελιξίξεις τετραγωνικών παλμών: $BSplines = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} : b_n = b_{n-1} * b_0$ όπου b_0 ο τετραγωνικός παλμός ενώ ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = Gaussian$ [2].

Ο Αλγόριθμος του Canny[3]:

Η παραπάνω ανάλυση αποτελεί και τη βάση της μεθοδολογίας του αλγόριθμου ανίχνευσης ακμών του Canny για 2D εικόνες. Έτσι στον αλγόριθμο του Canny αρχικά η εικόνα εξομαλύνεται με Gausssian ώστε να εξασφαλιστεί η διαφορισιμότητα. Στη συνέχεια αναζητάται η κατεύθυνση που μεγιστοποιεί κατά μήκος της την παράγωγο της φωτεινότητας $f(x,y)$, ώστε να βρεθεί το κάθετο διάνυσμα στην καμπύλη της ακμής και να υπολογιστεί η f_{nn} και με κάποιο κατώφλι ελέγχεται ο μηδενισμός της. Από τις θέσεις μηδενισμού της f_{nn} θεωρούνται ως ακμές όσες ανήκουν σε συνεχείς γραμμές των οποίων τα σημεία έχουν f_n μεγαλύτερη από ένα κατώφλι έστω 'μ' ή $f_{nn} < 0$ ώστε να εξασφαλίζεται η μεγιστοποίηση της f_n . Η παραγωγή αυτών των συνεχών

γραμμών γίνεται με την κίνηση κάθετα στο διάνυσμα της κλίσης $\hat{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$ από σημεία εκκίνησης

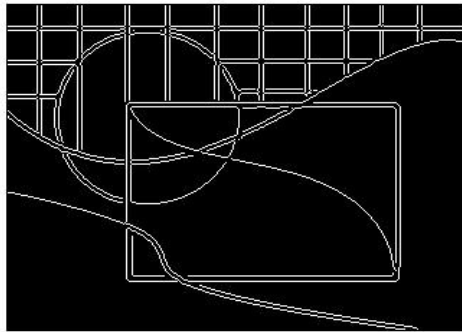
σε θέσεις που λαμβάνονται από ένα υψηλό κατώφλι $M > \mu$. Για κάθε νέο σημείο που εντοπίζεται από την κίνηση αυτή ελέγχεται η συνθήκη $f_n > \mu$ ώστε να ενταχθεί ή όχι στη γραμμή της ακμής.

Η εύρεση της κατεύθυνσης του κάθετου στη γραμμή της ακμής διανύσματος είναι ισοδύναμη με την εύρεση της κατεύθυνσης της κλίσης της εικόνας $\theta = \tan^{-1}(f_y / f_x)$ οπότε ο αλγόριθμος

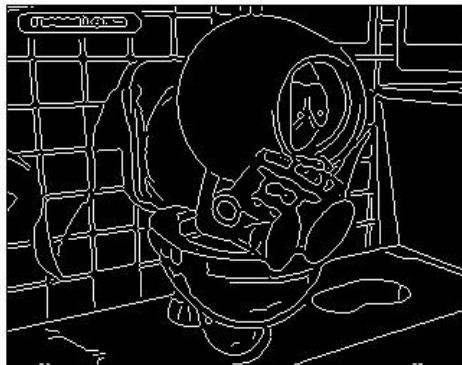
υπολογίζει ως ακμές τα σημεία $(x, y) : (x, y) - (X_k, Y_k) = \begin{pmatrix} f_y \\ f_x \end{pmatrix}_{(X_k, Y_k)} \cdot (X_{k+1} - X_k, Y_{k+1} - Y_k)$ και

$f_n(x, y) < \mu$, όπου η ακολουθία $\{(X_k, Y_k)\}_{k=1 \dots N} : f_{nn}(X_k, Y_k) = 0$ και $f_n(X_k, Y_k) > M$.

Ο αλγόριθμος ανίχνευσης ακμών του Canny , υλοποιημένος στο Matlab , εφαρμόστηκε τόσο στις δύο εικόνες δοκιμών στην όσο και στις ακτινογραφικές εικόνες . Τα αποτελέσματα για τις εικόνες δοκιμών είναι οι παρακάτω εικόνες των ακμών .

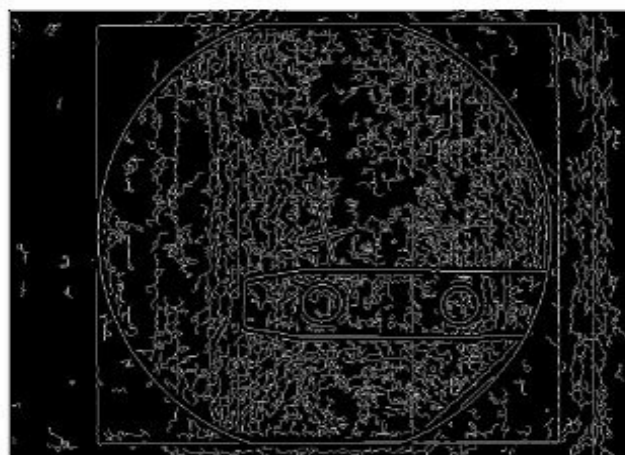


εικόνα 2.7α



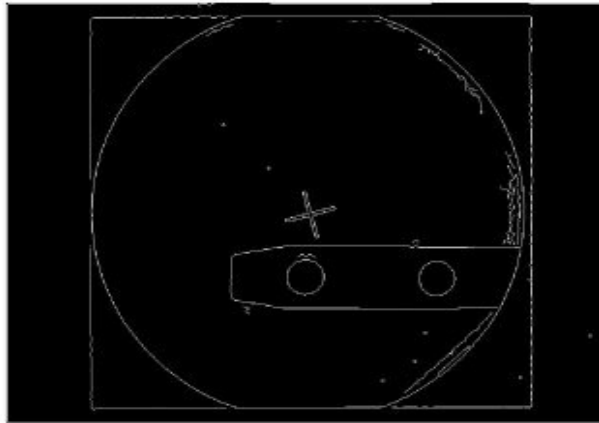
εικόνα 2.7β

Για την ακτινογραφία του καρφίου πήραμε την εικόνα των ακμών



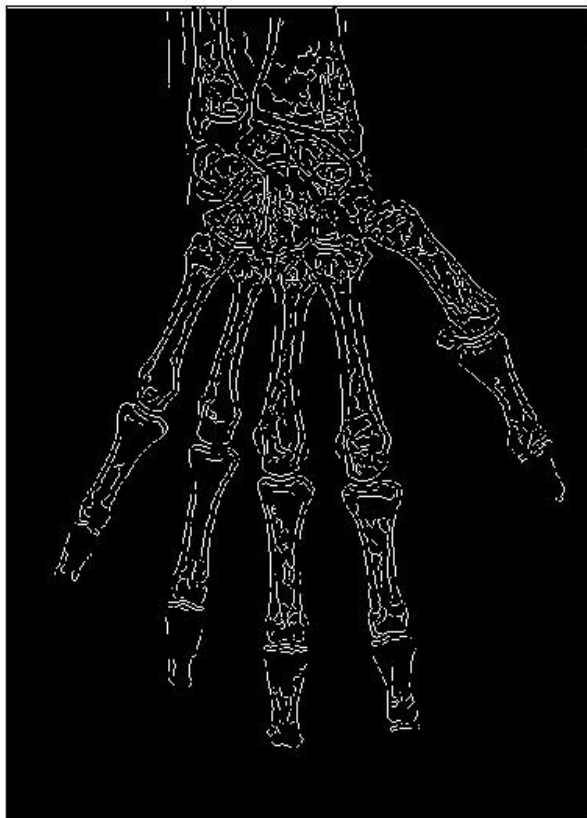
εικόνα 2.8α

τυπική απόκλιση αυτόματα επιλεγμένη

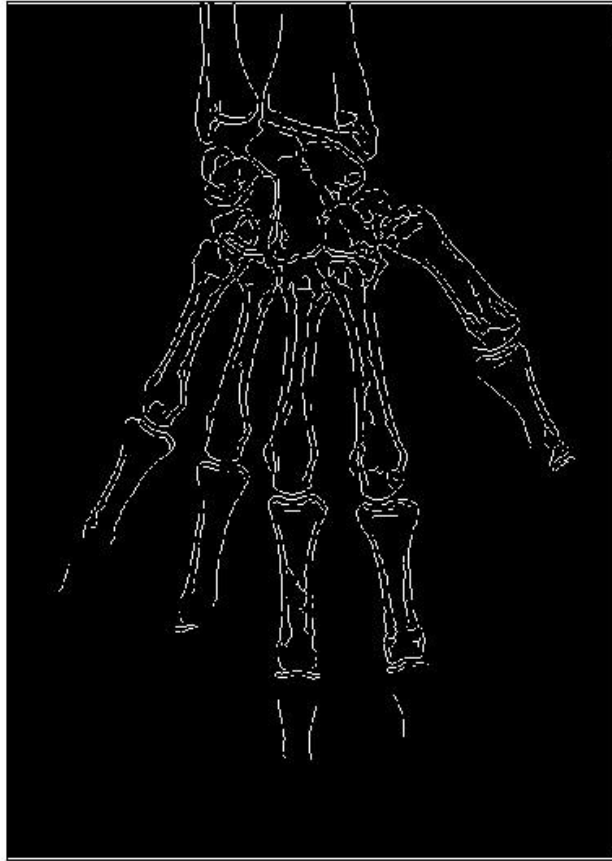


εικόνα 2.8β
τυπική απόκλιση $s=0.09$

Τα αποτελέσματα στην ακτινογραφία ενδεικτικά για δύο τιμές κατώφλιου και δύο τιμές τυπικής απόκλισης, για την Gaussian που χρησιμοποιείται για εξομάλυνση, είναι οι παρακάτω εικόνες.



εικόνα 2.8γ
κατώφλι αυτόματα επιλεγμένο, τυπική απόκλιση $s=0.5$



εικόνα 2.8δ
κατώφλι $thr=0.71$, τυπική απόκλιση $s=1$

Ο Αλγόριθμος των Marr & Hildreth (1980) :

Στην προσέγγιση αυτή για την ανίχνευση των ακμών εικόνας $f(x,y)$, αντί της μη-γραμμικής διαφορίσης στην κατεύθυνση της κλίσης , χρησιμοποιείται ο γραμμικός τελεστής $\nabla^T \cdot = [\partial/\partial x , \partial/\partial y]$. Οπότε αντί των κατευθυντικών διαφορίσεων $\partial/\partial n = n^T \partial/\partial(x , y)$, η χρήση του γραμμικού τελεστή εκφράζει το μηδενισμό του δεύτερου διαφορικού σε μηδενισμό της λαπλασιανής $\nabla^2 f = f_{xx} + f_{yy} = 0$. Και σε αυτή την περίπτωση είναι επιβεβλημένη η εξομάλυνση της εικόνας ώστε να εξασφαλιστεί η ύπαρξη των δευτεροβάθμιων παραγώγων. Το φίλτρο που επιλέχθηκε ως εκείνο που εξασφαλίζει τη βέλτιστη C^∞ ομαλότητα είναι το γκαουσιανό. Οπότε η συνθήκη μηδενισμού της λαπλασιανής γράφεται $\nabla^2(f * G_s) = f * \nabla^2 G_s = 0$ όπου

$$\nabla^2 G_s = 2 \left(\frac{x^2 + y^2}{s^4 \pi^2} \right) G_s = L_s .$$

Στην πραγματικότητα ο αλγόριθμος περιορίζει με κατώφλι (θ) τη φιλτραρισμένη με την L_s εικόνα θεωρώντας ως ακμές τις θέσεις $(x, y) : |(f * L_s)(x, y)| < \theta$.

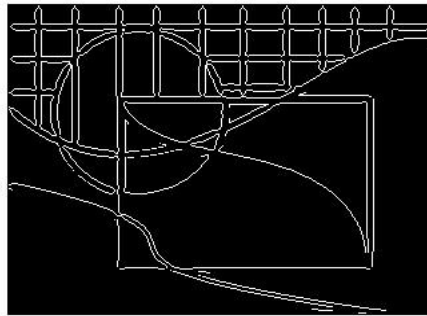
Με την αλλαγή όμως του τελεστή διαφορίσης από κατευθυντικό σε ισοτροπικό δεν είναι βέβαιο ότι οι θέσεις μηδενισμού του δεύτερου διαφορικού παραμένουν σταθερές. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει $\nabla^2 f - f_{nn} = 0$, $f_n = \|\nabla f\| \neq 0$. Όμως η καμπυλότητα κατά μήκος μιας ισοϋψούς της f

γράφεται $k(x, y) = \nabla \cdot (\hat{n}) = \frac{1}{\|\nabla f\|} (\nabla^2 f - f_{nn})$. Επομένως ο ταυτόχρονος μηδενισμός της

λαπλασιανής και του δεύτερου κατευθυντικού διαφορικού αντιστοιχεί σε θέσεις μηδενικής καμπυλότητας. Δηλαδή για να λαμβάνονται από μια εικόνα οι ίδιες ακμές με το μηδενισμό της λαπλασιανής και του δεύτερου κατευθυντικού διαφορικού θα πρέπει οι καμπύλες των ακμών να έχουν μηδενική καμπυλότητα. Η καμπυλότητα κατά μήκος μιας καμπύλης $\vec{C}(t)$ ορίζεται

$k = \frac{d\theta}{dl}$ όπου $dl = \|\vec{C}'(t)\| dt$ το διαφορικό του μήκους της καμπύλης και $\theta = \tan^{-1}(y'(t)/x'(t))$ η γωνία του εφαπτομενικού διανύσματος. Άρα μηδενική καμπυλότητα σημαίνει σταθερή γωνία για τις εφαπτομένες της καμπύλης, δηλαδή οι καμπύλες είναι ευθύγραμμα τμήματα.

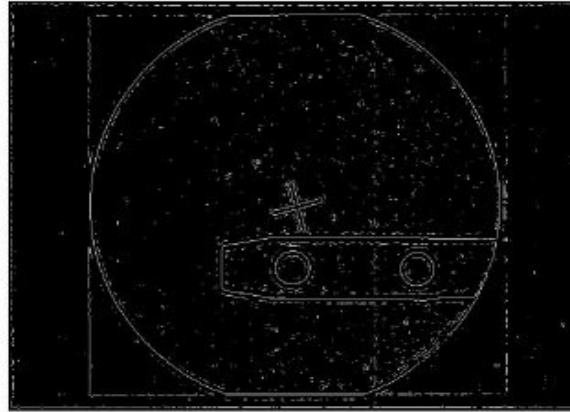
Η υπολογιστική υλοποίηση της μεθόδου αυτής είναι ο αλγόριθμος LoG (Laplacian of Gaussian) ο οποίος δοκιμάστηκε υλοποιημένος σε Matlab τόσο στις δύο εικόνες δοκιμών στην όσο και στις ακτινογραφικές εικόνες. Τα αποτελέσματα για τις εικόνες δοκιμών είναι οι παρακάτω εικόνες των ακμών.



Εικόνα 2.9α

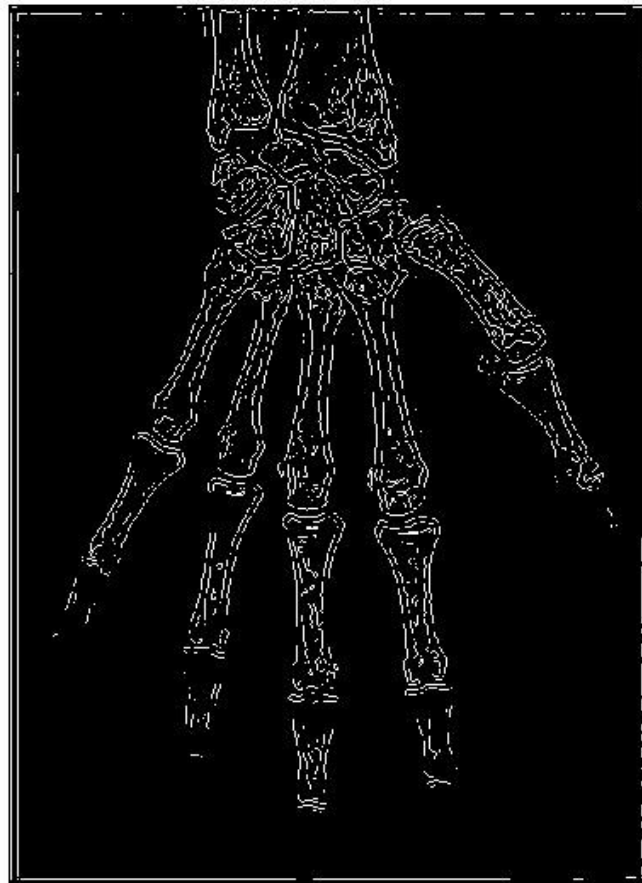


εικόνα 2.9β

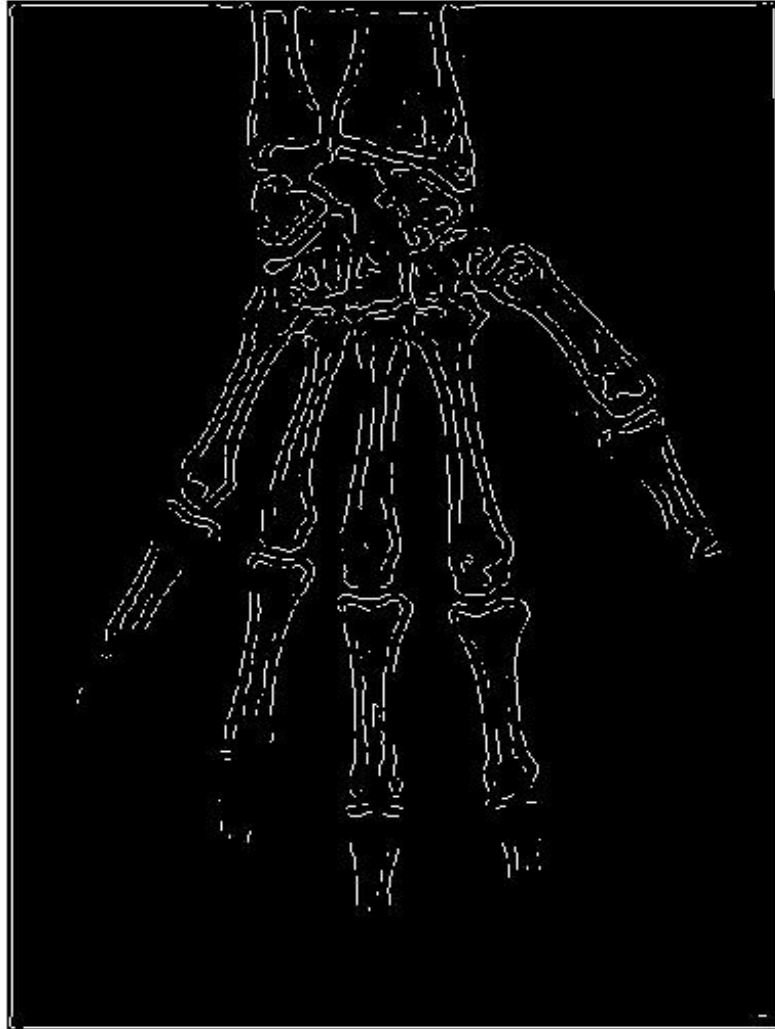


εικόνα 2.10α

Τα αποτελέσματα για δύο ενδεικτικές τιμές της τυπικής απόκλισης του γκαουσιανού φίλτρου στην ακτινογραφία του χεριού είναι οι παρακάτω εικόνες



εικόνα 2.10β
τυπική απόκλιση $s=1$



εικόνα 2.10γ
τυπική απόκλιση $s=3$

2.4 Αλγόριθμοι Ανίχνευσης Περιγραμμάτων

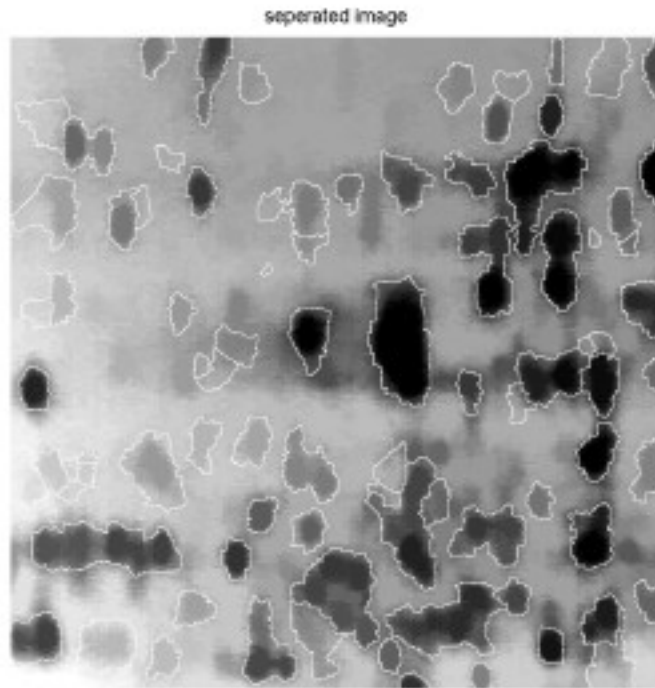
Η διάκριση των αλγορίθμων της κατηγορίας αυτής από εκείνους της ανίχνευσης ακμών , έγκειται στο γεγονός ότι προσπαθούν να αντιστοιχίσουν τα προς ανίχνευση χαρακτηριστικά της εικόνας σε περιοχές και όχι σε καμπύλες , με αποτέλεσμα , αντί των ακμών , το αποτέλεσμα της ανίχνευσης να εκφράζεται από τα περιγράμματα των περιοχών που διακρίθηκαν. Με την αντιστοίχιση λοιπόν των προς ανίχνευση χαρακτηριστικών σε περιοχές αναγνωρίζεται στα χαρακτηριστικά αυτά μια πρώτη δομή , αντίστοιχη της απεικόνισης αντικειμένου σε φόντο , ωστόσο η μόνη πληροφορία που κρατείται από την ανίχνευση των περιοχών είναι τα περιγράμματά τους . Κατά συνέπεια η πληροφορία που εξάγεται από τις μεθόδους αυτές είναι αντίστοιχη εκείνης των μεθόδων ανίχνευσης ακμών , με την απαίτηση οι καμπύλες που εντοπίζονται να είναι συνεχείς και κλειστές .

2.4.α Ο αλγόριθμος watershed – περιγραφή

Χαρακτηριστική κατηγορία των αλγορίθμων αυτών είναι οι αλγόριθμοι πλημμυρισμού (floodings) από τους οποίους ο πιο διαδεδομένος είναι ο watershed . Η λειτουργία του αλγορίθμου περιγράφεται από τον πλημμυρισμό των τοπικών ελαχίστων της εικόνας μέχρι ισορροπίας της στάθμης πλημμυρισμού. Οι θέσεις ισορροπίας αποτελούν τα περιγράμματα των περιοχών που ορίζονται από τα τοπικά ελάχιστα της εικόνας και εκτείνονται όσο ορίζει ο πλημμυρισμός των ελαχίστων αυτών. Μια αναλυτική έκφραση για τη διαδικασία αυτή δίνεται στο [8] περιγράφοντας τον πλημμυρισμό με τη μερική διαφορική εξίσωση $\varphi_t = \frac{c}{\|\nabla f\|} \|\nabla \varphi\|$ (όπου ' f ' η συνάρτηση της εικόνας στην οποία γίνεται ο πλημμυρισμός και ' φ ' η στάθμη του πλημμυρισμού). Η εξίσωση αυτή , λόγω του σταθερού προσήμου της ταχύτητας , στη συνέχεια λύνεται μέσω του υπολογισμού του ελαχίστου χρόνου άφιξης της $\varphi(x,y,t)$ σε θέση (x,y) : $\varphi(x,y,t)=0$, έστω $T(x,y)$, από την $\|\nabla T\| = \frac{\|\nabla f\|}{c}$ (ΜΔΕ τύπου Eikonal). Αριθμητική επίλυση της εξίσωσης αυτής με τον αλγόριθμο FM (Fast Marching) [7] παράγει ουσιαστικά ένα μετασχηματισμό απόστασης ο οποίος εφαρμοσμένος στη $\varphi(x,y)$ απεικονίζει την κίνηση των ισοϋψών της . Τα περιγράμματα των περιοχών που εξάγονται από τον πλημμυρισμό είναι οι θέσεις όπου οι μετασχηματισμοί απόστασης δύο ή παραπάνω ισοϋψών τέμνονται .

2.4.β Ο αλγόριθμος watershed – εφαρμογή

Στην εφαρμογή του watershed στην ακτινογραφία ακολουθήθηκε μια μεθοδολογία η οποία εμφανίζεται στο [2] εφαρμοσμένη σε εικόνα ηλεκτρονικού μικροσκοπίου για την εξαγωγή των περιγραμμάτων κυττάρων . Η επίδοση της μεθόδου στη συγκεκριμένη εφαρμογή ήταν ιδιαίτερα ικανοποιητική , αφού εντοπίστηκαν και διαχωρίστηκαν σχεδόν όλα τα κύτταρα που εικονιζόταν . Επίσης η εφαρμογή αυτή αποτέλεσε εργαστηριακή άσκηση του μαθήματος “Όραση Υπολογιστών” του 8ου εξαμήνου στη σχολή ΗΜΜΥ ΕΜΠ το 2005. Ο κώδικας που αναπτύχθηκε, με τις αναγκαίες τροποποιήσεις , δοκιμάστηκε και για την κατάτμηση της ακτινογραφίας . Αρχικά και ως μέτρο απόδοσης παρατίθεται το αποτέλεσμα της εργαστηριακής άσκησης.



εικόνα 2.10
υπόδειγμα κατάτμησης

Η εφαρμογή της ίδιας μεθόδου στην ακτινογραφία όπως θα δούμε παράγει κατάτμηση πολύ φτωχότερη σε πληροφορία . Η χονδρικότερη κατάτμηση της εικόνας επιτυγχάνεται για ελάχιστα των περιοχών πλημμυρισμού που εντοπίζονται με παράμετρο ύψους $h=5$



εικόνα 2.11α
ASF με reconstruction opening-closing 3 επαναλήψεων



εικόνα 2.11β
τοπικά ελάχιστα περιοχών



εικόνα 2.11γ
τα όρια των περιοχών που εκτελείται ο watershed
θεωρούνται πως ορίζουν και αυτά περιοχές για την ανίχνευση
περιοχών που περικλείουν εκείνες που ορίζουν τα τοπικά ελάχιστα



εικόνα 2.11δ
κατάτμηση με εφαρμογή του watershed στην εικόνα του $\|\nabla f\|$
με ελάχιστα το \min των δύο παραπάνω marker

Ωστόσο η κατάτμηση αυτή δεν εξάγει πληροφορία από την εικόνα , αφού ούτε το περίγραμμα των οστών εντοπίζεται ικανοποιητικά , ούτε το περίγραμμα του ιστού. Ικανοποιητικότερες ως προς την πληροφορία ωστόσο ελλιπτικές είναι οι κατατμήσεις για $h=15$ και $h=25$ όπου γίνεται φανερό πως πέρα της δεύτερης φάλαγγας δε μπορεί να εξαχθεί το περίγραμμα των οστών.

seperated image



εικόνα 2.12
για $h=15$

seperated image



εικόνα 2.13
για $h=25$

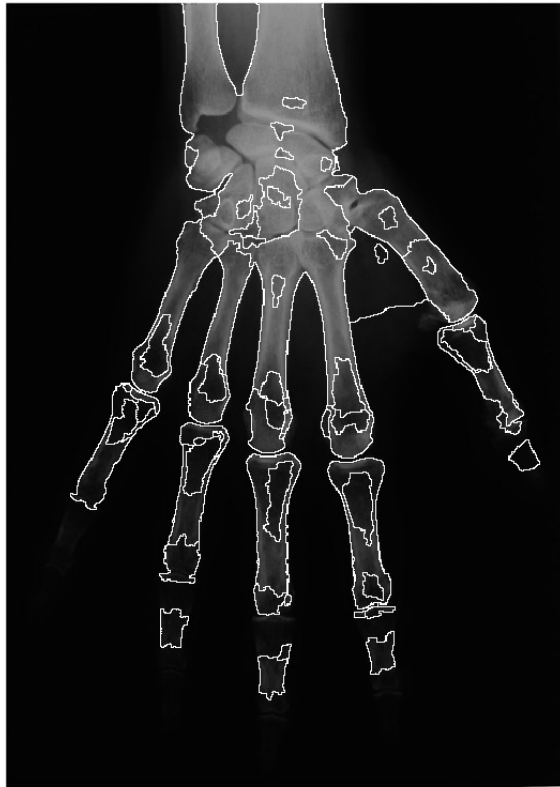
Βέβαια πρέπει να σημειώσουμε πως η πληροφορία στην ακτινογραφία , αντίθετα με την εικόνα του υποδείγματος , έχει μεγαλύτερη φωτεινότητα από το φόντο , οπότε οι περιοχές προς διαχωρισμό θα μπορούσαν να χαρακτηρίζονται από τα τοπικά μέγιστα της εικόνας , τα οποία αντιστοιχούν σε πληροφορία μεγαλύτερης πυκνότητας προβαλλόμενου οστού. Δοκιμάζοντας λοιπόν την προηγούμενη μέθοδο κατάτμησης με τις περιοχές πλημμυρισμού να ορίζονται από τα τοπικά μέγιστα της εικόνας , προσδιορισμένα με ύψος $h=60\%$ της μέγιστης φωτεινότητας , παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα .



εικόνα 2.14
κατάτμηση με θέσεις τοπικού ελαχίστου τα μέγιστα της εικόνας

Συνθέτοντας τώρα σε μια εικόνα τις πιο περιγραφικές κατατμήσεις από τους δύο τρόπους προσδιορισμού των περιοχών , παίρνουμε την παρακάτω εικόνα για την κατάτμηση της ακτινογραφίας

seperated image



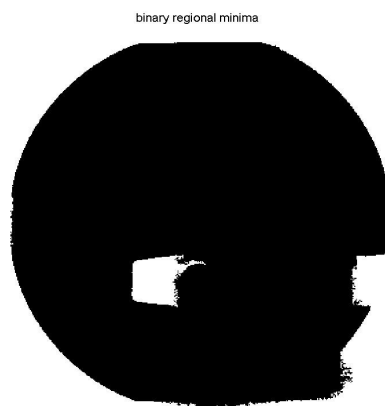
εικόνα 2.15
ένωση των κατατιμήσεων

Ορίζοντας τις περιοχές προς διάκριση με τα τοπικά μέγιστα της εικόνας , τα αποτελέσματα της κατάτμησης παρατηρούμε πως είναι πληρέστερα στην περιγραφή της πληροφορίας σε περιοχές της εικόνας όπου η φωτεινότητα είναι υψηλή , καθώς αυτές βρίσκονται κοντύτερα σε θέσεις τοπικού μεγίστου. Ωστόσο παραμένει το πρόβλημα εντοπισμού περιοχών σε θέσεις όπου η πληροφορία δεν περιγράφεται από την πυκνότητα της φωτεινότητας . Τέτοιες περιοχές είναι τα οστά των ακροδαχτύλων και η φάλαγγα που ακολουθεί όπως και ο ιστός γύρω από τα οστά . Εκεί τα τοπικά ελάχιστα ή μέγιστα διαφέρουν σημαντικά σε ισχύ από εκείνα της υπόλοιπης εικόνας και επομένως δεν μπορούν να εντοπιστούν με ένα ενιαίο κριτήριο ύψους ' h ' για ολόκληρη την εικόνα . Επιπλέον δεν είναι βέβαιο πως ένα από τα δύο κριτήρια ορισμού των περιοχών , με τοπικά μέγιστα ή τοπικά ελάχιστα , είναι το ίδιο περιγραφικό της πληροφορίας σε ολόκληρη την εικόνα . Για παράδειγμα ο πλημμυρισμός των τοπικών μεγίστων διακρίνει τα οστά από το φόντο , ωστόσο αποτυγχάνει στο διαχωρισμό των οστών μεταξύ τους , αφού επικαλύψει οστών προβάλλοντας ως τοπικά μέγιστα και επομένως κέντρα και όχι περιγράμματα περιοχών .

Φαίνεται λοιπόν πως η διαφορετική μορφή και πυκνότητα της δομής των οστών και η ανομοιόμορφη , αλλά όχι τυχαία , διάταξή τους στην εικόνα διαφοροποιεί τη δομή της πληροφορίας μέσα στην ίδια εικόνα . Επομένως ενιαία κριτήρια για ανίχνευση των

χαρακτηριστικών της εικόνας , που δε λαμβάνουν υπόψη την τοπικότητα στη δομή της πληροφορίας , δίνουν περιγραφικά αποτελέσματα μόνο σε περιοχές της εικόνας όπου το κριτήριο αυτά αντιστοιχούν στη δομή της πληροφορίας .

Εφαρμόζοντας τώρα την ίδια μέθοδο για την ακτινογραφία του καρφίου παρατηρούμε μια αδυναμία του watershed να εντοπίσει περιοχές οι οποίες αντιστοιχούν σε αντικείμενα , τα οποία προβάλλονται το ένα μέσα στο άλλο και ορίζονται από την αντίθεση στη φωτεινότητα . Έτσι ήταν αδύνατο να εντοπιστούν οι τρύπες του καρφίου , καθώς ως περιοχές ορίζονται από τα τοπικά μέγιστα της εικόνας , ενώ ο πλημμυρισμός των δύο τοπικών ελαχίστων που ορίζουν την περιοχή του καρφίου περιορίζεται από τα τοπικά μέγιστα και την αυξημένη αντίθεση στη φωτεινότητα , η οποία συνεπάγεται αυξημένο $\|\nabla f\|$ και επομένως περιορισμένη ταχύτητα πλημμυρισμού.

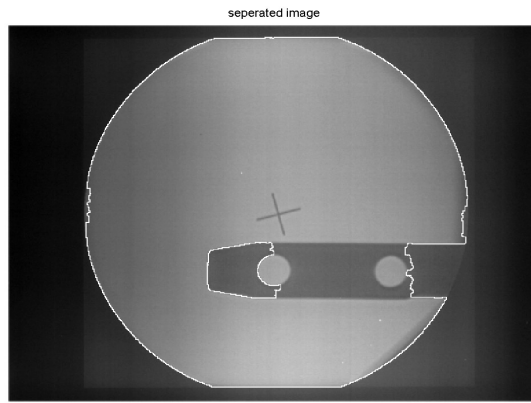


εικόνα 2.16α
τοπικά ελάχιστα με ύψος $h=20\%$

Binary Outside Marker

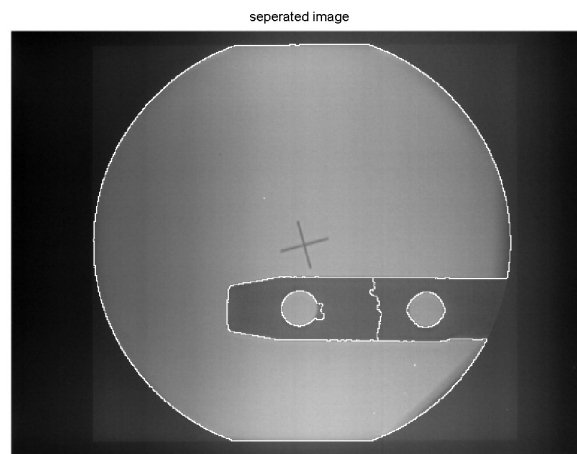


εικόνα 2.16β
όρια περιοχής που εκτελείται πλημμυρισμός



εικόνα 2.16γ
κατάτμηση εικόνας

Περιγραφικότερα αποτελέσματα προκύπτουν αν ορίσουμε σαν περιοχές τα τοπικά μέγιστα της εικόνας με ύψος $h=75\%$ της μέγιστης φωτεινότητας



εικόνα 2.17
κατάτμηση με ορισμό των περιοχών μέσω των τοπικών μεγίστων

Παράρτημα : Μορφολογικοί Τελεστές και Ανάλυση των Εικόνων υπό Κλίμακα

A. Βασικοί μορφολογικοί τελεστές και αντίστοιχοι χώροι κλίμακας

Οι μορφολογικοί τελεστές παράγονται από παράλληλο ή σε σειρά συνδυασμό δύο βασικών τελεστών πάνω στην άλγεβρα που ορίζεται από τη δομή $L = \{\mathbb{R}^d, \leq, \wedge, \vee, +\}$.

Ως “συνελίξη” με βάση το infimum (\wedge), ορίζεται το erosion $\varepsilon[f](x) = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x+a) - g(a)]$ και

με βάση το supremum (\vee), το dilation $\delta[f](x) = \vee_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x-a) + g(a)]$ (ορισμοί που εισάγονται

στο []). Επίσης για τον πυρήνα $g(x)$ ορίζεται η ιδιότητα της κλιμάκωσης $g^t(x) = t g(x/t)$ με αρχική τιμή αντίστοιχη μιας συνάρτησης – ουδέτερου στοιχείου για τις παραπάνω “συνελίξεις” $g_0(x) = 0$ για $x=0$, $-\infty$ για $x \neq 0$. Οπότε ορίζονται οι παραπάνω τελεστές υπό κλίμακα 't'.

Για να εκφράσουμε την κλιμάκωση που οι τελεστές αυτοί παράγουν αναπτύσσουμε κατά Taylor

$$\begin{aligned} \varepsilon^t[f](x) &= \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x+a) - g^t(a)] = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x+a) - t g(a/t)] = \\ &= \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x+ta) - t g(a)] = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x) + \nabla^T f a t + 0(|at|) - t g(a)] \Rightarrow \frac{\varepsilon^t[f](x) - f(x)}{t} = \\ &= \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [\nabla^T f a - g(a) + 1/t \cdot 0(|at|)] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^t[f] - f}{t} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{t=0}[f] = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [\nabla^T f a - g(a)] \end{aligned}$$

Όμως από τον ορισμό της κλιμάκωσης της $g^t(x) \Rightarrow \varepsilon^t[g^t] = g^{t+t}$. Άρα μπορούμε να αντικαταστήσουμε στο παραπάνω όριο $f \rightarrow \varepsilon^t[f]$

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{dt}[\varepsilon^t] - \varepsilon^t}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{t+dt} - \varepsilon^t}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^t = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [\nabla^T \varepsilon^t a - g(a)] = - \vee_{a \in \mathbb{R}^d} [-a^T \nabla \varepsilon^t + g(a)].$$

Δηλαδή κλιμάκωση του erosion προκύπτει ως λύση της εξίσωσης Hamilton-Jacobi

$$\varepsilon_t(x, t) = -H_\vee(\nabla \varepsilon) \text{ όπου } H_\vee(p) = \vee_{a \in \mathbb{R}^d} [a^T p + g(-a)] \text{ η Hamiltonian (γενικευμένη ενέργεια που}$$

παράγει ο τελεστής). Όμως η H μπορεί να γραφεί ως μετασχηματισμός Legendre της συνάρτησης Lagrange (κατανομή της ενέργειας σε δυναμική και κινητική (<0 και >0 αντίστοιχα)) οπότε

$$\text{γράφουμε } H_\vee(p) = \vee_{a \in \mathbb{R}^d} [a^T p + g(-a)] = (-g(-a))^* = (-g^*(p))^** = -g^*(p). \text{ Άρα η συνάρτηση}$$

Lagrange στην οποία αντιστοιχεί το erosion είναι η $L_\wedge = -g(-a)$.

Όμοια για το dilation παίρνουμε την κλιμάκωση που ορίζει η HJ εξίσωση

$$\delta_t(x, t) = -H_\wedge(\nabla \delta) \text{ όπου } H_\wedge(p) = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [a^T p - g(-a)] = (g(-a))^* = g^*(-p) = L_\vee^*$$

Και οι δύο εξισώσεις έχουν αρχικές συνθήκες $\varepsilon(x, 0) = \delta(x, 0) = f(x)$ τη συνάρτηση πάνω στην οποία εφαρμόζονται. Για τις συναρτήσεις Lagrange και Hamilton των δύο τελεστών ισχύει

$$L_\wedge = -g(-a) = -L_\vee \Rightarrow H_\vee(p) = L_\wedge^*(p) = -L_\vee^*(-p) = -H_\wedge(-p) \text{ [4],[5]}. \text{ Ακόμη χρησιμοποιούμε}$$

την ιδιότητα του μετασχηματισμού Legendre να μετατρέπει τις συνελίξεις με βάση το infimum σε αθροίσματα: $(f \star_\wedge \gamma)(x) = \wedge_{a \in \mathbb{R}^d} [f(x-a) + \gamma(a)] \Rightarrow (f \star_\wedge \gamma)^*(x) = f^*(p) + \gamma^*(p)$ γράφοντας

$$\varepsilon(f|g^t)(x) = [f(x) \star_\wedge (-t g(-x/t))] \Rightarrow \varepsilon^*(p) = f^*(p) + (-t g^*(p))^** = f^*(p) - t g^*(p)$$

$$\delta(f|g^t)(x) = [-f(x) \star_\wedge -t g(x/t)] \Rightarrow \delta^*(p) = -f^*(-p) + (-t g^*(-p))^** = f^*(p) - t g^*(-p)$$

Ξαναγράφουμε λοιπόν τις HJ εξισώσεις για τους δύο τελεστές

$$\begin{aligned}
\varepsilon_i &= g^*(p) = \frac{f^*(p) - \varepsilon^*(p)}{t} = \frac{1}{t} (f^*(p) + (-\varepsilon(-x, t))^*) = \frac{1}{t} \left[\bigwedge_{a \in \mathbb{R}^d} (f(x-a) - \varepsilon(-a, t)) \right]^* = \\
&= \frac{1}{t} \varepsilon^*(f|\varepsilon')(p) \quad , \quad \delta_i = -g^*(-p) = -\frac{f^*(p) - \delta^*(p)}{t} = \frac{-1}{t} \left[\bigwedge_{a \in \mathbb{R}^d} (f(x-a) - \delta(-a, t)) \right]^* = \\
&= \frac{1}{t} \left[- \bigwedge_{a \in \mathbb{R}^d} (f(-x-a) - \delta(-a, t)) \right]^* = \frac{1}{t} \left[\bigvee_{a \in \mathbb{R}^d} (-f(-x-a) + \delta(-a, t)) \right]^* = \frac{1}{t} \delta(-f(-x)|\delta(-x, t)) = \\
&= \frac{1}{t} [\delta(-f|\delta')(-x)]^*
\end{aligned}$$

Αν τώρα θεωρήσουμε τη συνάρτηση σχήματος B $g_B(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \in B \\ -\infty & \text{αλλιού} \end{cases}$ παίρνουμε την οικογένεια των επίπεδων τελεστών $\delta(f|rB)(x) = (f \oplus rB)(x) = \bigvee_{a \in rB} f(x-a)$ και $\varepsilon(f|rB)(x) = (f \ominus rB)(x) = \bigwedge_{a \in rB} f(x+a)$ όπου $r(x,y)$ η απόσταση του $(x,y) \in \partial rB$ από το κέντρο του rB . Οι αντίστοιχοι χώροι κλίμακας για τους τελεστές αυτούς γράφονται $\delta_r = \bigvee_{a \in B} -a^T \nabla \delta = F_{\partial B}(\nabla \delta)$, $\varepsilon_r = -F_{\partial B}(\nabla \varepsilon)$ όπου $F_{\partial B} : \text{για } x \in \partial B \quad F_{\partial B}(x) = \rho(x) \leq 1$
Αν λοιπόν το B ο μοναδιαίος κύκλος $\delta_r = \|\nabla \delta\|$ και $\varepsilon_r = -\|\nabla \varepsilon\|$ [2]

B. Ο χώρος κλίμακας των μετασχηματισμών πλημμυρισμού & μετασχηματισμοί απόστασης

Ένας μεταβαλλόμενος χρονικά πλημμυρισμός, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, περιγράφεται από την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial t} u = a(x) \|\nabla u\|$ με σταθερού προσήμου $a(x) = \frac{c_0}{\|\nabla f\|}$.

Θεωρούμε πως μια λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται μέσω ενός τελεστή dilation / erosion (αντίστοιχα για $a(x) > 0$ και $a(x) < 0$) πάνω στην $u(x,0) = \varphi(x)$ με πυρήνα δίσκο ακτίνας $r(x,t)$ οπότε γράφουμε $\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\partial u}{\partial r} r_t = a(x) \|\nabla u\| \Rightarrow r_t = |a(x)| \Rightarrow r(x,t) = |a(x)|t \Rightarrow t = \frac{r}{|a|}$ η κλίμακα του

πλημμυρισμού. Το γεγονός ότι η ακτίνα $r(x,t)$ του τελεστή που παράγει τη $u(x,t)$ εξαρτάται εκτός από την κλίμακα και από τη θέση, αντιστοιχεί τη διαδικασία $u(x,t)$ σε ένα κλιμακούμενο μετασχηματισμό απόστασης των θέσεων x σε απόσταση $r(x,t)$. Για να υπολογιστεί μια στάσιμη λύση για αυτό το μετασχηματισμό θεωρούμε ότι $t = T(x,y)$ ο ελάχιστος “χρόνος” για το

μετασχηματισμό της $u(x,t)$ σε απόσταση $r(x,t)$. Τότε $T = \frac{r}{|a|} \Rightarrow \nabla T = \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{|a|} - \frac{1}{a^2} \nabla |a|$. Όμως ο

ελάχιστος χρόνος παράγεται από κίνηση παράλληλη στις ισοϋψείς της ταχύτητας $a(x)$ και επομένως η κλίση του είναι κάθετη στην κλίση της $a(x)$. Άρα $\|\nabla T\| = \frac{1}{|a|}$ η εξίσωση ελαχίστου

χρόνου και η αντίστοιχη στάσιμη λύση του μετασχηματισμού απόστασης $r(x) = |a(x)|T(x)$. Στη γενική περίπτωση ενός χώρου κλίμακας που δίνεται από την εξίσωση $u_t = a(x)v(t)\|\nabla u\|$ οπότε $r_t = |a(x)v(t)| \Rightarrow r = |a(x)|L(t)$ όπου $L(t)$ η απόσταση που θα διανυόταν από τις ισοϋψείς της $u(x,t)$ απουσία του ανισοτροπικού παράγοντα $a(x)$. Άρα η αντίστοιχη εξίσωση ελαχίστου

χρόνου γράφεται $L(t) = \frac{r}{|a(x)|} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} L(t) = v(t)\|\nabla t\| = \frac{1}{|a(x)|} \Rightarrow \|\nabla T\| = \frac{1}{v(T)|a(x)|}$.

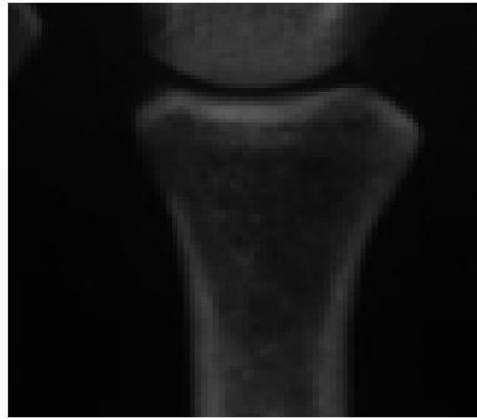
Κεφάλαιο 3 : Ερμηνεία βασικών αιτίων μερικής αστοχίας των αλγορίθμων

3.1 Προβλήματα που προκύπτουν από τη φύση και τον τρόπο παραγωγής τις απεικόνισης στις ακτινογραφίες – Απλό μοντέλο προβολής κοίλου κυλίνδρου , αντιστοιχία του με τα προφίλ των φαλαγγών

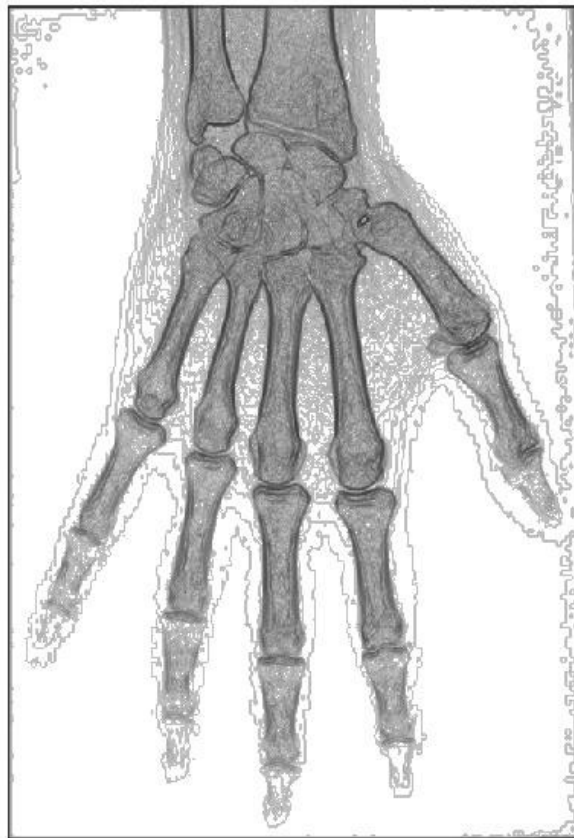
Στο προηγούμενο κεφάλαιο διαπιστώθηκε η περιορισμένη επιτυχία , ενδεικτικών αλγορίθμων από τη βιβλιογραφία , να ανιχνεύσουν χαρακτηριστικά της εικόνας σε μορφή που να περιγράφει με συμπαγή τρόπο την επιθυμητή πληροφορία της εικόνας . Στο ίδιο κεφάλαιο εξηγήθηκαν , μέσω της περιγραφής τους , ενδογενείς λόγοι αστοχίας των αλγορίθμων αυτών , που άπτονται κυρίως στην αδυναμία ενιαίων κριτηρίων ανάλυσης της εικόνας να περιγράψουν τη διαφοροποίηση της πληροφορίας στη μορφολογία και την απεικόνισή της σε διαφορετικές περιοχές της ίδιας εικόνας . Ωστόσο ιδιαιτερότητες που αφορούν τον τρόπο με τον οποίο παράγεται η απεικόνιση της ακτινογραφίας και την ιδιομορφία των βιολογικών δομών που απεικονίζονται , δημιουργούν έναν αριθμό παραγόντων αστοχίας των αναλυτικών μεθόδων, που δεν αφορούν άμεσα τη λειτουργία τους , αλλά την ποιοτική αξιολόγηση των αποτελεσμάτων τους .

3.1α Προβλήματα χρήσης αναλυτικών εκφράσεων για τα προς ανίχνευση χαρακτηριστικά της ακτινογραφίας

Ενδογενής αδυναμία των αναλυτικών μεθόδων ανίχνευσης χαρακτηριστικών και αντικειμένων είναι η ευαισθησία τους στο συστηματικό θόρυβο της εικόνας που επεξεργάζονται , καθώς στην ανάλυσή τους χρησιμοποιούν εκτιμήσεις της μεταβλητότητας στη φωτεινότητα της εικόνας ή κάποιου μετασχηματισμού της που αντιστοιχούν σε , περισσότερο ή λιγότερο ακριβείς , προσεγγίσεις διαφορικών της συνάρτησης φωτεινότητας . Η διαφόριση ως διαδικασία είναι παράγοντας επιδείνωσης του θορύβου , καθώς στη γραμμική της εκδοχή ισοδυναμεί με εξάπλωση του φάσματος της εικόνας στο πεδίο των συχνοτήτων και κατά συνέπεια εξασθένηση της φασματικής πληροφορίας . Επίσης η διαφόριση είναι παράγοντας επιδείνωσης ασυνεχειών που εμφανίζονται στην εικόνα με τη μορφή απότομων κορυφών(“salt & pepper ” θόρυβος)και ταυτόχρονα αιτία δημιουργίας τέτοιας φύσης θορύβου . Στην ακτινογραφία του χεριού υπάρχουν και οι δύο εκδοχές θορύβου αφού σε πολλά σημεία εντοπίζονται είτε ασυνεχείς , είτε μη ομαλές μεταβολές της φωτεινότητας . Χαρακτηριστικές είναι οι παρακάτω εικόνες στις οποίες φαίνονται τόσο οι τοπικές ασυνέχειες της φωτεινότητας (εικόνα 2.1), όσο και οι ασυνέχειες που προκαλεί η πρώτου βαθμού διαφόριση (εικόνα 2.2) στην ακτινογραφία του χεριού .



εικόνα 3.1
ασυνέχειες της φωτεινότητας σε εντοπισμένα pixels

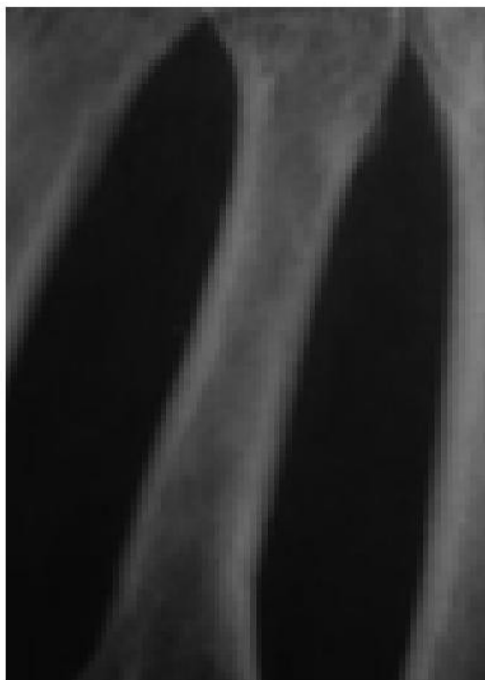


εικόνα 3.2
εικόνα ενέργειας των ακμών $g = \frac{1}{1 + \|\nabla f\|^p}$

Ωστόσο τόσο το πρόβλημα της συνέχειας , όσο και το πρόβλημα της ομαλότητας αντιμετωπίζονται από τους αναλυτικούς αλγορίθμους ανίχνευσης χαρακτηριστικών είτε με εξομάλυνση της εικόνας με γραμμικά ή μορφολογικά φίλτρα(αλγόριθμοι ανίχνευσης ακμών) , είτε με τη μεταφορά του προβλήματος της ανίχνευσης σε ομαλές και απλές , στη μορφή τους , εικόνες με το σχηματισμό μιας διαδικασίας που αντιστοιχίζει το πρόβλημα της ανίχνευσης στη νέα εικόνα αναφοράς (αλγόριθμοι πλημμυρισμού και ενεργών καμπυλών[1]).

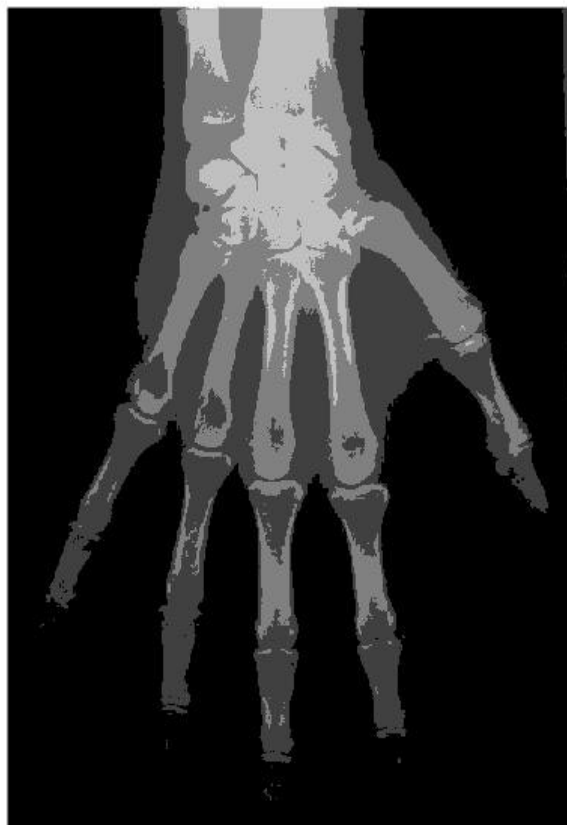
3.1β Προβλήματα αναλυτικού προσδιορισμού της έννοιας της ακμής και του περιγράμματος

Πέρα των τεχνικών προβλημάτων που προκαλεί ο ειδικός θόρυβος της ακτινογραφίας , μια πιο προσεκτική ματιά στην απεικόνιση των αντικειμένων καθιστά προβληματικούς τους απόλυτους αναλυτικούς ορισμούς για τα χαρακτηριστικά των ακμών και των περιγραμμάτων .Έτσι η διαστρωμάτωση των βιολογικών δομών που συνθέτουν τα οστά καθώς και η γεωμετρική αντιστοιχία τους σε κελύφη παράγουν μια απεικόνιση για το οστό με ανομοιόμορφη σκίαση στο εσωτερικό του και μια περιοχή απότομα υψηλής φωτεινότητας στο περιθώριό του. Σύμφωνα λοιπόν με τους ορισμούς που χρησιμοποιούν οι αναλυτικές μέθοδοι , τόσο το εσωτερικό όσο και το περιθώριο του οστού αποτελούν αντικείμενα αφού διαχωρίζονται από ισχυρές ακμές και αντιστοιχούν σε διαφορετικές κλάσεις φωτεινότητας , συμπέρασμα που αλλοιώνει την πληροφία της εικόνας . Ακόμη η απεικόνιση του περιθωρίου του οστού σε περιοχή αναιρεί κάθε εκτίμηση των ορίων του οστού με υπολογισμό των ακμών αφού αυτές θα δώσουν στην ουσία τα όρια της περιοχής του περιθωρίου. Μάλιστα τις περισσότερες φορές ανιχνεύεται μόνο το εσωτερικό όριο του περιθωρίου καθώς φαίνεται πως η ακμή που παράγεται κατά τη μετάβαση από το κέλυφος στο εσωτερικό του είναι πολύ ισχυρότερη από εκείνη της μετάβασης από το φόντο στο οστό . Η ακόλουθη εικόνα της πρώτης φάλαγγας είναι χαρακτηριστική της ασάφειας στον προσδιορισμό της ακμής του οστού



εικόνα 3.3

Το πρόβλημα της απεικόνισης της πληροφορίας για τη γεωμετρία και τη σύσταση των βιολογικών δομών στην ακτινογραφία εξετάζεται αναλυτικότερα στην επόμενη παράγραφο , ωστόσο εδώ θα πρέπει να αναφερθεί η ανεπάρκεια της ίδιας της συνάρτησης φωτεινότητας να απεικονίσει με διαχωρίσιμο τρόπο την πληροφορία που περιέχει . Έτσι περιοχές όπου απεικονίζονται οι ίδιες βιολογικές δομές , με διαφορετική γεωμετρία ή πυκνότητα , διαφέρουν σημαντικά στη φωτεινότητα με αποτέλεσμα να απεικονίζονται σε ύψος φωτεινότητας αντίστοιχο δομών διαφορετικής σύστασης . Το πρόβλημα αυτό γίνεται ιδιαίτερα έντονο στην απεικόνιση μετά τη δεύτερη φάλαγγα όπου η μείωση της οστικής μάζας οδηγεί σε απεικόνιση των οστών αυτών στην ίδια τάξη φωτεινότητας με τους ιστούς της παλάμης . Χαρακτηριστική απεικόνιση αυτών των ιδιαιτεροτήτων της ακτινογραφικής εικόνας παράγεται αν προσπαθήσουμε να διαχωρίσουμε τις κλάσεις στις τιμές της συνάρτησης φωτεινότητας και τις περιοχές που αντιστοιχούν στις κλάσεις αυτές . Η απεικόνιση αυτή παράγεται στο Matlab με υπολογισμό των βέλτιστων κέντρων και τυπικών αποκλίσεων των κλάσεων του ιστογράμματος της συνάρτησης φωτεινότητας , χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο EM(Expectation Maximization)[6] . Η τοποθέτηση των κλάσεων φωτεινότητας στην εικόνα απεικονίζει τόσο την ομοιογένεια στη φωτεινότητα “ελαφρών” οστών και ιστών , όσο και την παρουσία των περιθωρίων ορισμένων φαλαγγών ως οντότητες ξεχωριστές από το οστό στο οποίο ανήκουν

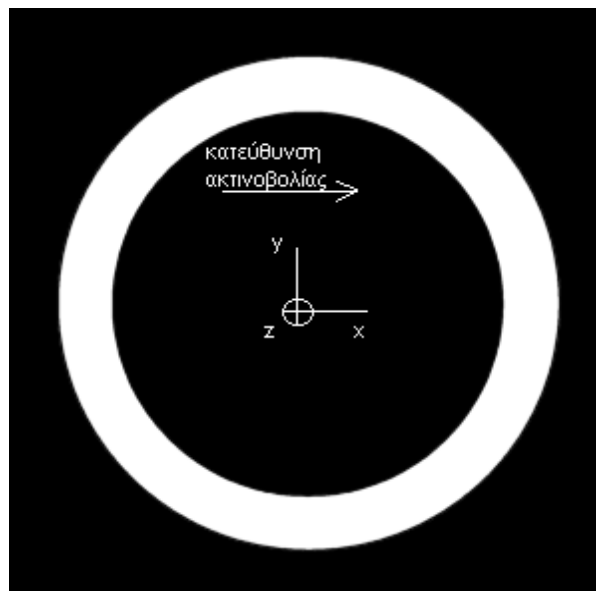


εικόνα 3.4
διάσπαση της συνάρτησης φωτεινότητας
σε 5 κλάσεις και τοποθέτηση στην εικόνα

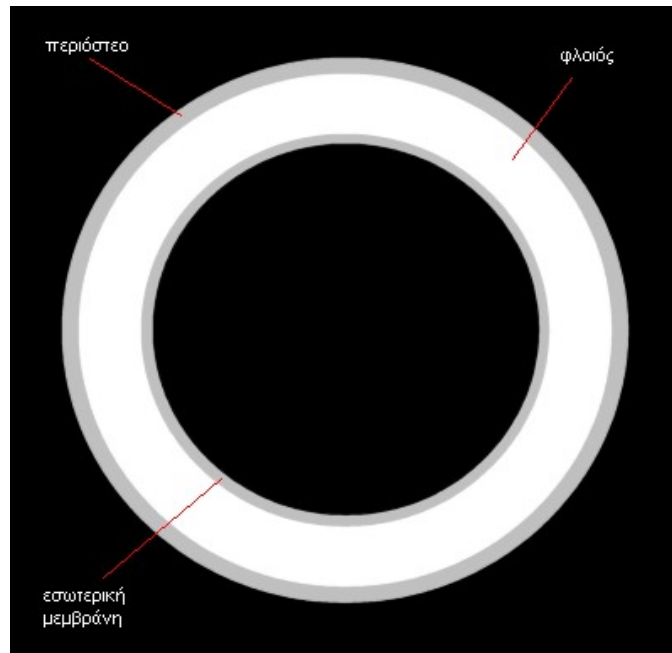
3.1γ Τρόπος παραγωγής ακτινογραφικών απεικονίσεων – απλό μοντέλο απορρόφησης κούλου κυλίνδρου

Οι ακτινογραφικές εικόνες παράγονται μέσω της σάρωσης ενός αντικειμένου από οριζόντια και - κατά το δυνατό- γραμμική πηγή ακτινοβολίας – γ απεικονίζοντας την απορροφόμενη ποσότητα ακτινοβολίας από το αντικείμενο . Δεδομένης της σύστασης του υλικού που δέχεται την ακτινοβολία , η ποσότητα που αυτό απορροφά , όπου η σύσταση είναι ομοιογενής , είναι ανάλογη της απόστασης που διανύει η ακτινοβολία μέσα στο υλικό . Κατά συνέπεια η ακτινογραφία ,για παράδειγμα ενός οστού , απεικονίζει την προβολή του στο επίπεδο που είναι κάθετο στην ακτινοβολία , με την οστική μάζα που προβάλλεται να είναι ανάλογη της απορροφόμενης ακτινοβολίας και επομένως της φωτεινότητας της ακτινογραφικής εικόνας . Στην ακτινογραφία του χεριού , λοιπόν , προκύπτουν διάφορα προβλήματα , που αφορούν την πραγματική πληροφορία που αντιστοιχεί σε ιδιότητες της συνάρτησης φωτεινότητας της εικόνας , τις οποίες θεωρούν ως χαρακτηριστικά οι μέθοδοι που δοκιμάστηκαν στο δεύτερο κεφάλαιο. Έτσι απότομες μεταβολές τις φωτεινότητας παράγονται μεν από την παρουσία οστού στο φόντο της ακτινογραφίας αλλά παράγονται και από τη γεωμετρία και τη διαστρωμάτωση των βιολογικών δομών που το συνθέτουν. Αποτέλεσμα είναι , μέθοδοι που χρησιμοποιούν ως κριτήριο διάκρισης χαρακτηριστικών και αντικειμένων τη μεγιστοποίηση της μεταβολής της φωτεινότητας (ή συμπληρωματικά την τοπική ομοιογένεια της φωτεινότητας) να εντοπίζουν μαζί με την οντότητα του οστού , ως αντικείμενα και σκιάσεις ή επικαλύψεις που δημιουργεί η προβολή της τριδιάστατης δομής αυτού και του τμήματος του σκελετού στο οποίο συμμετέχει .

Για την απεικόνιση της γεωμετρίας του οστού , αλλά και μιας χονδρικής προσέγγισης για τη διαστρωμάτωση στη σύνθεσή του , χρησιμοποιήθηκε σε τομή το γεωμετρικό μοντέλο του κυλινδρικού κελύφους(εικόνα 3.5) και μιας διαστρωμάτωσης τριών κυλινδρικών κελυφών χονδρικά αντίστοιχη της διαστρωμάτωσης του οστού (εικόνα 3.6)



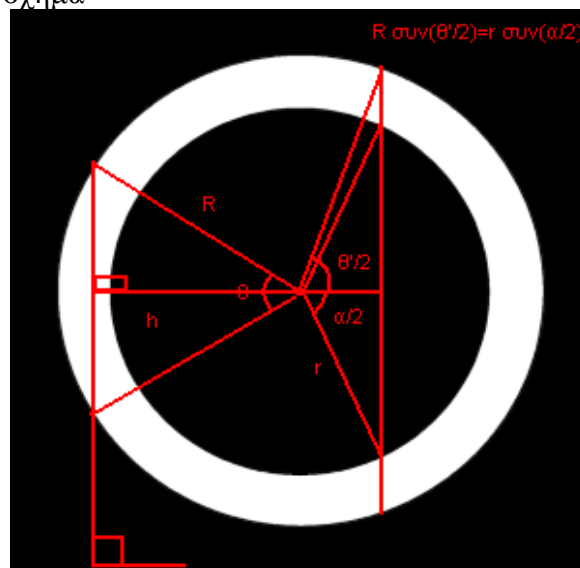
εικόνα 3.5
διατομή κυλινδρικού κελύφους
και κατεύθυνση προβολής στον y – άξονα



εικόνα 3.6

διατομή διαστρωμάτωσης τριών κυλινδρικών κελυφών και αντιστοιχία τους στη διαστρωμάτωση του οστού

Η προβολή του κυλινδρικού φλοιού σε άξονα κάθετο στην κατεύθυνση της προβολής υπολογίζεται σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα



εικόνα 3.7

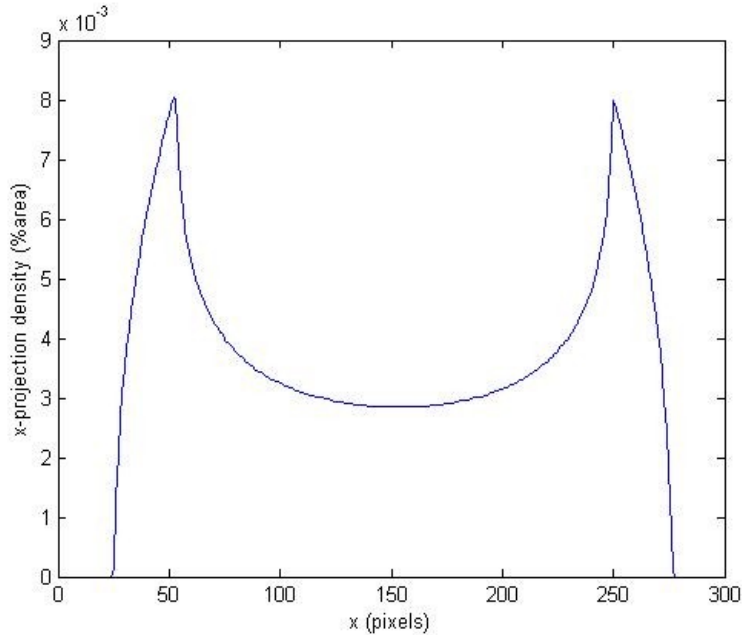
$$h = R \sin(\theta/2), \quad \gamma = \begin{cases} 2 R \eta \mu(\theta/2), & h \geq r \\ 2(R \eta \mu(\theta/2) - r \eta \mu(\alpha/2)), & h < r \end{cases} = \begin{cases} 2 R \eta \mu(\theta/2), & h \geq r \\ 2(R \eta \mu(\theta/2) - \frac{r}{R} \sqrt{R^2 - r^2 \sin^2(\theta/2)}), & h < r \end{cases}$$

Όμως η σάρωση του σχήματος κάθετα στην κατεύθυνση της προβολής περιγράφεται από τη μεταβολή $dx = -dh = \frac{R}{2} \eta \mu(\theta/2) d\theta$ αφού $x = c - h \Rightarrow \sin(\theta/2) = \frac{c-x}{R}$ (όπου $x=c$ η θέση του

κέντρου του κύκλου). Οπότε η προβαλλόμενη ποσότητα υλικού στον x-άξονα υπολογίζεται

$$\gamma(x) = \begin{cases} 2\sqrt{R^2 - (c-x)^2}, & x \leq c-r \\ 2\sqrt{R^2 - (c-x)^2} - \frac{r}{R}\sqrt{R^2 - \left(\frac{r}{R}\right)^2(c-x)^2}, & x > c-r \end{cases} \quad \text{ασυνεχής συνάρτηση του } x \text{ με}$$

ισχυρότερη ακμή στη θέση ασυνέχειας $x=c-r$ ενώ το κριτήριο του μηδενισμού της δεύτερης κατευθυντικής παραγώγου δε δουλεύει αφού δεν υπάρχει πραγματικό $c-R \leq x \leq c$: $\gamma''(x)=0$. Η απεικόνιση της προβολής του κυλινδρικού κελύφους στον x-άξονα καθώς και οι θέσεις ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου που εντοπίζονται ως ακμές υπολογίστηκαν στο Matlab και παρατίθενται παρακάτω



εικόνα 3.8α
προβολή του κελύφους της εικόνας 3.5



εικόνα 3.8β
θέσεις των ακμών που εντοπίζονται

Στην περίπτωση της διαστρωμάτωσης κυλινδρικών κελυφών (έστω πλήθος N) η προβολή του σχήματος στον x-άξονα προκύπτει αθροιστικά

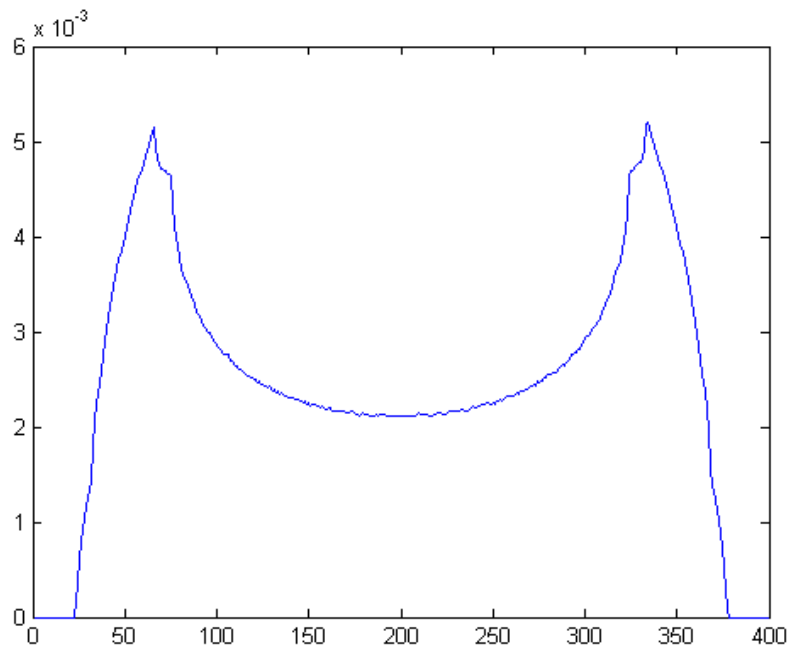
$$\gamma_v = \sum_{\kappa=1}^v 2c_{\kappa}(\rho_{\kappa}\eta\mu(\theta_{\kappa}/2) - \rho_{\kappa+1}\eta\mu(\theta_{\kappa+1}/2)) \quad \text{όπου } c_{\kappa} \text{ η μέση απορρόφηση του } \kappa\text{-στρώματος .}$$

$$\rho_{\kappa}\sigma\upsilon\nu(\theta_{\kappa}/2) = \rho_{\kappa+1}\sigma\upsilon\nu(\theta_{\kappa+1}/2) \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\theta_{\kappa}/2) = \frac{\rho_{\kappa+1}}{\rho_{\kappa}}\sigma\upsilon\nu(\theta_{\kappa+1}/2) \Rightarrow \eta\mu(\theta_{\kappa}/2) = \sqrt{1 - \left(\frac{\rho_{\kappa+1}}{\rho_{\kappa}}\right)^2 \sigma\upsilon\nu^2(\theta_{\kappa+1}/2)}$$

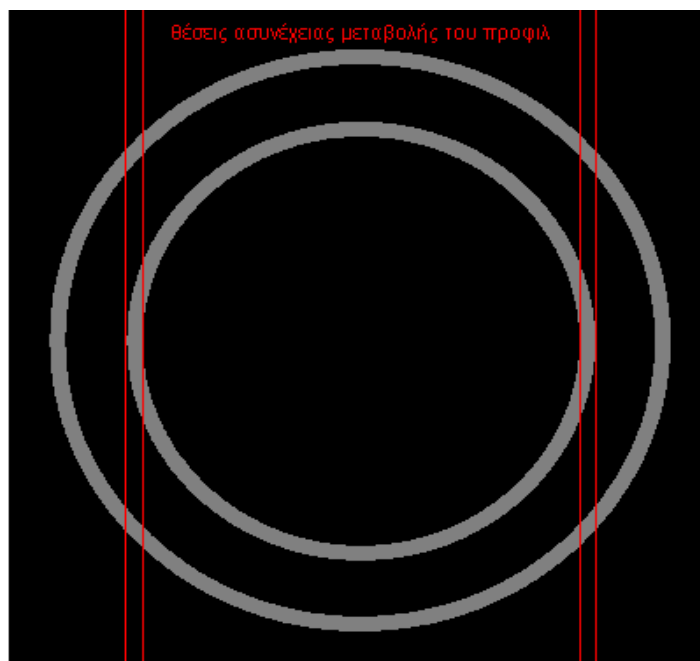
Όμως όπως δείξαμε προηγουμένως $\sigma\upsilon\nu(\theta_1/2) = \frac{c-x}{\rho_1}$ άρα $\eta\mu(\theta_{\kappa}/2) = \sqrt{1 - \left(\frac{c-x}{\rho_{\kappa}}\right)^2}$ και έτσι

$$\gamma_v(x) = \sum_{\kappa=1}^v 2c_{\kappa}(\sqrt{\rho_{\kappa}^2 - (c-x)^2} - \sqrt{\rho_{\kappa+1}^2 - (c-x)^2}) \quad \text{για } x \leq c - \rho_{v+1}, v=1 \dots N.$$

Και στην περίπτωση αυτή είναι φανερή η ασυνέχεια της μεταβολής της $\gamma(x)$ λόγω της διαφορετικής απορρόφησης των στρωμάτων που συνθέτουν το κέλυφος. Σε σχέση με την προηγούμενη γεωμετρία προστίθενται ασυνέχειες στην επιφάνεια επαφής δύο διαφορετικών στρωμάτων, οι οποίες και αντιστοιχούν σε ακμές που οι μέθοδοι ανίχνευσης εντοπίζουν ως το ίδιο ισχυρές με τις ακμές του περιγράμματος του κελύφους. Αυτή η εικόνα εμφανίζεται και στην προβολή της γεωμετρίας του κυλινδρικού κελύφους τριών στρωμάτων, με δύο διαφορετικές τιμές για την απορρόφηση ακτινοβολίας, που εμφανίζεται στην εικόνα 3.6. Η προβολή καθώς και οι θέσεις ασυνέχειας της μεταβολής υπολογίστηκαν στο Matlab και φαίνονται παρακάτω



εικόνα 3.9α
προβολή του κελύφους της εικόνας 3.2



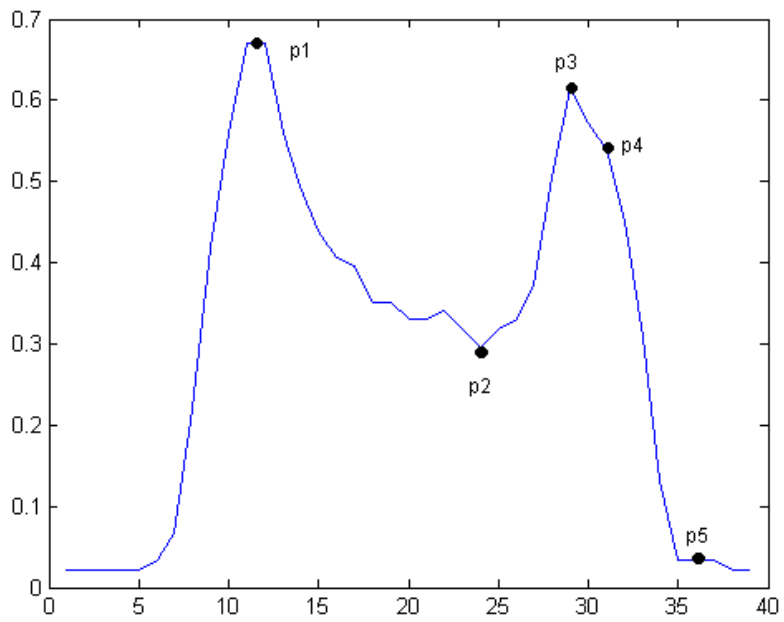
εικόνα 3.9β
θέσεις των ακμών που εντοπίζονται

Η διακριτή απορρόφηση για τα διαφορετικά στρώματα που συνθέτουν το κέλυφος μπορεί να θεωρηθεί ότι περιγράφει επαρκώς τη σύνθεση ενός οστικού κελύφους, καθώς αυτό δημιουργείται με διαστρωμάτωση διαφορετικής σύστασης και επομένως δραστικά διαφορετικής απορρόφησης κελυφών. Βέβαια η κυριότερη αιτία για την εμφάνιση εσωτερικών ακμών στο οστό είναι η ίδια η γεωμετρία του κελύφους που αντιστοιχεί σε ακμή το πέρασμα από το κέλυφος στο εσωτερικό του.

Η αντιστοιχία του παραπάνω απλού μοντέλου σε πραγματική προβολή οστού με επίμηκες σχήμα μπορεί να ελεγχθεί από το προφίλ των φαλαγγών των οποίων η γεωμετρία και η σύνθεση μοιάζει αρκετά με κοίλο κύλινδρο



εικόνα 3.10α
2η φάλαγγα μέσου



εικόνα 3.10β
 προφίλ κάθετα στην προβολή της φάλαγγας
 p1...p5 κορυφές που επιλέγονται για εντοπισμό στην εικόνα



εικόνα 3.10γ
 τοποθέτηση των p1...p5 κατά μήκος της
 κατεύθυνσης στην οποία υπολογίζεται το προφίλ

Από το παράδειγμα του υπολογισμού του προφίλ κάθετα στη δεύτερη φάλαγγα του μέσου , παρατηρούμε πως το μοντέλο του κυλινδρικού κελύφους έδωσε μια ποιοτικά χονδρική αλλά γεωμετρικά ακριβή περιγραφή της προβολής του οστού της φάλαγγας σε θέσεις όπου αυτό είναι επίμηκες . Σημαντικό στοιχείο που εξάγεται από το προφίλ είναι ότι οι μεταβολές στη φωτεινότητα (ισοδύναμα στην απορρόφηση) που δίνουν ακμές πάνω στην εικόνα , αντιστοιχούν σε μη-ομαλές κορυφές του προφίλ που παράγονται από τη μεταβολή της σύνθεσης της βιολογικής δομής που προβάλλεται . Φαίνεται λοιπόν πως η επεξεργασία της ακτινογραφικής απεικόνισης του οστού , χωρίς τη χρήση πληροφορίας για τη γεωμετρία και τη σύσταση των βιολογικών δομών του , οδηγεί σε αποτελέσματα η αντιστοίχιση των οποίων σε πληροφορία της εικόνας έχει νόημα μόνο σε θέσεις όπου η γεωμετρία και η σύσταση των δομών διατηρούνται .

3.2 Προσέγγιση του τρόπου λειτουργίας του ανθρώπινου μυαλού

3.2α Δυνατότητα επαγωγής της διαγνωστικής διαδικασίας σε αλγόριθμο αναγνώρισης και εξαγωγής της πληροφορίας που περιέχουν οι ακτινογραφίες του ανθρώπινου σκελετού

Μπορεί λοιπόν , για τους λόγους που εξετάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους , η ακτινογραφία του ανθρώπινου σκελετού να αποτελεί μια απεικόνιση , της οποίας η πολυπλοκότητα και οι απεικονιστικές ιδιαιτερότητες οδηγούν τους αναλυτικούς αλγόριθμους σε ασθενή και ανακριβή περιγραφή της πληροφορίας της , ωστόσο είναι δεδομένο πως ο εξειδικευμένος γιατρός εξάγει με σαφή και συμπαγή τρόπο την πληροφορία αυτή ώστε να προχωρήσει σε διάγνωση . Είναι λοιπόν σκόπιμο να εξεταστεί ο τρόπος με τον οποίο ο γιατρός αναγνωρίζει και διακρίνει τα διαφορετικά αντικείμενα και δομές στην ακτινογραφία καθώς η διαδικασία αυτή αποτελεί μια , κατά τεκμήριο , πλήρη λύση του προβλήματος της αναγνώρισης τουλάχιστον ανά ακτινογραφία . Ωστόσο η ολική εξάρτηση της αναγνώρισης που κάνει ο γιατρός από την υπό εξέταση ακτινογραφία , υποβαθμίζει την αναγνώριση σε εκτίμηση , παρακάμπτοντας την σκοπιμότητά της ως αντικειμενική βάση της διαγνωστικής διαδικασίας . Όμως η αναγνώριση που κάνει ο γιατρός κάθε άλλο παρά αποσυνδεδεμένη είναι από τη διαγνωστική διαδικασία , καθώς ο στόχος της διάγνωσης και η δομημένη επιστημονική γνώση που την καθοδηγεί φαίνεται να είναι ο πυρήνας κάθε παράγωγης διαδικασίας , και της αναγνώρισης . Από εκτεταμένη , λοιπόν, συνεργασία και συζητήσεις με ορθοπεδικούς γιατρούς , έγινε φανερό ότι τόσο η αναγνώριση των ακτινογραφικών εικόνων όσο και η διάγνωση με βάση αυτές , συντίθενται σε μια συστηματικά επαναλαμβανόμενη διαδικασία η οποία δίνει επιτυχημένα αποτελέσματα και επομένως συνιστά αλγόριθμο.

3.2β Περιγραφή τυπικών βημάτων ενός αλγορίθμου αναγνώρισης της ακτινογραφίας του χεριού από ορθοπεδικό γιατρό

Βήμα 1: Προσανατολισμός της εικόνας σε οικεία για το γιατρό τοποθέτηση . Αυτή είναι και η πρώτη ένδειξη πως η αναγνώριση της ακτινογραφίας περιλαμβάνει διαδικασίες ταιριάσματος για τις οποίες είναι απαραίτητος ο σύμφωνος προσανατολισμός της εικόνας με το προς ταίριασμα πρότυπο .

Βήμα 2: Ανίχνευση οδηγών χαρακτηριστικών όπως είναι η εκτεταμένη λευκή περιοχή στη θέση του καρπού , που υποδηλώνει παρουσία συγκεντρωμένων ογκωδών οστών και η θέση των ακραίων φαλαγγών , η οποία χρησιμοποιείται ως περιοχή αναφοράς για τον εντοπισμό των οστών των

δαχτύλων και της παλάμης

Βήμα 3: Εντοπισμός της περιοχής του μετακαρπίου και διάκριση των οστών που την αποτελούν με βάση πρότερη γνώση για το σχήμα και τη θέση τους

Τα βήματα αυτά περιγράφουν μια πρώτη χονδρική αλλά κρίσιμη εξαγωγή της πληροφορίας από την ακτινογραφία του χεριού , ωστόσο επόμενα βήματα μιας πιο λεπτής αναγνώρισης χρησιμοποιούν την πληροφορία αυτή ως οδηγό εντοπίζοντας τις διαδικασίες του ταιριάσματος , της εύρεσης οδηγών χαρακτηριστικών και τη χρήση πρότερης γνώσης σε περιοχές ενιαίες ως προς την πληροφορία που περιγράφουν .Επίσης είναι φανερό από τον αλγόριθμο που περιγράφηκε πως , αντίθετα με τους αναλυτικούς αλγορίθμους ανίχνευσης χαρακτηριστικών , οδηγείται από την πρότερη γνώση για την πληροφορία που περιέχει η εικόνα , επικεντρώνοντας την ανίχνευση χαρακτηριστικών μόνο σε όσα από αυτά μπορούν να λειτουργήσουν ως πληροφορία αναφοράς για την εντοπισμένη εφαρμογή της γνώσης του γιατρού για το σχήμα και τη θέση των βιολογικών δομών που προσπαθεί να αναγνωρίσει .

Είναι φανερό λοιπόν πως αυτή η κεντρική λειτουργία της πρότερης γνώσης για το σχήμα και τη θέση των βιολογικών δομών στοιχειοθετεί την ύπαρξη κάποιου αφαιρετικού μοντέλου για τα χαρακτηριστικά αυτά με επίπεδο γενίκευσης τέτοιο ώστε να είναι προσαρμόσιμο στις διαφορετικές απεικονίσεις που παράγονται από τις διαφοροποιήσεις στο φύλο , την ηλικία ή ακόμα και την διαφορετική τοποθέτηση των οστών στην ακτινογραφία .

Κεφάλαιο 4 : Κατευθύνσεις προς Μεθόδους Υψηλότερης Επιτυχίας

4.1 Εντοπισμός Καμπυλών και Περιοχών Ελάχιστης Ενέργειας

Το ζητούμενο σε αυτή την ενότητα είναι η παραγωγή κατάλληλα μετασχηματισμένων εκδοχών της προς ανάλυση εικόνας, ώστε να δημιουργηθούν εικόνες αναφοράς για τα χαρακτηριστικά της, κατάλληλες για τη ρύθμιση του μοντέλου με βάση το οποίο θα αναλυθεί. Η μέθοδος που ακολουθείται είναι αντίστοιχη των αναλυτικών μεθόδων εντοπισμού χαρακτηριστικών, παράγοντας εικόνες με βάση την ελαχιστοποίηση μιας εικόνας – κριτηρίου για τα προς ανίχνευση χαρακτηριστικά. Οι δυο μετασχηματισμοί που αναλύονται στη συνέχεια περιγράφουν την ελαχιστοποίηση της εικόνας – ενέργειας αρχικά κατά μήκος καμπυλών (4.1.α) και στη συνέχεια στην επιφάνεια μιας εικόνας αναφοράς (4.1.β).

4.1.α Εντοπισμός Καμπυλών

Το προς ανίχνευση χαρακτηριστικό εδώ αφορά τις ισοϋψείς μιας εικόνας αναφοράς (μπορεί να είναι η εικόνα προς επεξεργασία, κάποιος μετασχηματισμός της, ή κάποια περιοχή της) που ελαχιστοποιούν κατά μήκος τους την εικόνα που παράγει κάποιος τελεστής ενέργειας πάνω στην εικόνα αναφοράς. Από την αρχική περιγραφή της μεθόδου γίνεται εμφανές πως η επιτυχία της να ανιχνεύσει την πληροφορία της εικόνας αναφοράς, που τονίζεται στην εικόνα της ενέργειας, εξαρτάται από τη συνέχεια στον τρόπο με τον οποίο οι ισοϋψείς της εικόνας μεταφοράς μετασχηματίζονται στις ισοϋψείς της εικόνας ενέργειας. Ορίζουμε λοιπόν το ενεργειακό $g[f](x)$ και την ενέργεια κατά μήκος της καμπύλης $\tilde{L}(t) \perp \tilde{C}(t) : u(x, t) = u(C(t))$

$$E(C) = \int_0^1 g|\tilde{L}'(p)| dp = \int_0^\infty g|\tilde{L}'(p)| \dot{p} dt = \int_0^\infty g|\dot{x}| dt . \text{ Στη συνέχεια απαιτούμε η } C(t) \text{ να}$$

περιγράφει ισοϋψείς της 'value function' που παράγει την ελάχιστη ενέργεια $E(C)$ μέσω της εξίσωσης Hamilton – Jacobi – Bellman $-u_t = H(p = \nabla u) = \wedge_x [\nabla^T u \dot{x} + J|\dot{x}|]$, $u(x_0, 0) = f(x)$.

Η λύση που προκύπτει, παράγει τη $u(x, t)$ μεταβάλλοντάς την τόσο παράλληλα όσο και κάθετα στις ισοϋψείς της με την ολική μεταβολή σε κατεύθυνση \hat{r} να γράφεται

$$du = dt a(t) (\|\nabla u\| \hat{n} - (sJ + \|\nabla u\|) \hat{l}) \cdot \hat{r} \text{ όπου } (\hat{n}, \hat{l}) \text{ τα μοναδιαία διανύσματα } \parallel \text{ και } \perp \text{ στην } \nabla u, \hat{r} \text{ η κατεύθυνση της διαφοράρισης.}$$

Η μεταβολή αυτή δείχνεται ότι αντιστοιχεί σε μετασχηματισμό απόστασης $\dot{r} = a(t)$ όπου

$$a(t) = \frac{\text{sgn}(n^T \nabla J)}{\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + 2 \frac{t}{H} |n^T \nabla J|}} \Rightarrow r(t) = \int_0^t a(T) dT = \frac{H}{n^T \nabla J} \left(\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + 2 \frac{t}{H} |n^T \nabla J|} - \frac{1}{|a_0|} \right)$$

Σε αυτό το μετασχηματισμό απόστασης υπάρχει το πρόβλημα της μη-μονότονης και ασυνεχούς ταχύτητας $a(t)$, περιορίζοντας τις υπολογιστικές δυνατότητες για επίλυση του αντίστοιχου προβλήματος ελαχίστου χρόνου διάσχισης της $r(t)$ από τη $u(x, t)$. Για αυτό το λόγο η υλοποίηση της διαδικασίας σε Matlab έγινε με αναδρομική αριθμητική μέθοδο η οποία ωστόσο είναι αρκετά δαπανηρή υπολογιστικά και ευάλωτη σε ασυνέχειες. Ωστόσο αν εξετάσουμε τη φυσική σημασία του προσήμου στην ταχύτητα $a(t)$ και την απόσταση $r(t)$, αυτό περιγράφει μια διαδικασία πλημμυρισμού, όταν $a > 0$ και απορρόφησης, όταν $a < 0$. Η διαδικασία αυτή ισορροπεί στις θέσεις αλλαγής προσήμου αφού εκεί η ταχύτητα πλημμυρισμού είναι ίση με την ταχύτητα απορρόφησης. Το θέμα βέβαια είναι να προσδιοριστούν οι διαδρομές, με μήκος $r(t)$, πάνω στην εικόνα που οδηγούν στις θέσεις αυτές, υπολογισμός ο οποίος στις μονότονες διαδικασίες γινόταν μέσω της

λύσης του προβλήματος ελαχίστου χρόνου. Εδώ ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει ανεξάρτητα, στις περιοχές όπου διατηρεί πρόσημο η ταχύτητα, με αρχικές θέσεις τις θέσεις ελαχίστου και μέγιστου της $n^T \nabla J$ σε περιοχές αρνητικής και θετικής ταχύτητας αντίστοιχα (η εξίσωση ελαχίστου χρόνου που χρησιμοποιούνται αναφέρεται στο τέλος του παραρτήματος Α και απαιτεί πολύ μεγάλη αρχική ταχύτητα).

4.1.β Εντοπισμός Περιοχών

Εδώ οι μεταβολές της ενέργειας κατά μήκος καμπύλης αντικαθίστανται με επιφανειακές μεταβολές σε επιφάνεια που ορίζεται από εικόνα αναφοράς $f(x)$: $\delta E = J \delta s = J n^T \delta x = J \frac{\nabla^T f}{\|\nabla f\|} \delta x$. Όπως

και πριν, σχηματίζουμε την εξίσωση HJB για την ελαχιστοποίηση της E

$$-u_t = H(p = \nabla u) = \wedge_x [\nabla^T u \dot{x} + J n_f^T \dot{x}], \quad u(x_0, 0) = u_0(x) \quad (\text{όπου } n_f = \nabla f / \|\nabla f\|).$$

Η διαφορά με την προηγούμενη μέθοδο έγκειται στο γεγονός ότι η εικόνα $u(x, t)$ που ενσωματώνει στις ισοϋψείς της τη μεταβολή $x(t)$, δεν κινείται σε καρτεσιανό επίπεδο, αλλά σε επιφάνεια που ορίζει μια εικόνα αναφοράς $f(x)$. Οπότε η λύση που προκύπτει από την παραπάνω εξίσωση ορίζει τη μεταβολή της u στην κατεύθυνση διανύσματος \hat{r} :

$du = dt a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (J n_f^T n_u + \|\nabla u\|) \hat{l}] \cdot \hat{r}$. Αυτή η εξίσωση μεταγράφεται, όπως και στην προηγούμενη ανάλυση, στο μετασχηματισμό απόστασης $\dot{r} = a(t)$ με ταχύτητα

$$a(t) = \frac{\text{sgn}(n_f^T n_u)}{\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{2At}{H}}} \quad \text{όπου} \quad A = n_f^T \nabla J - \frac{J f_m}{\|\nabla f\|} \frac{1 - (n_f^T n_u)^2}{(n_f^T n_u)^2} \quad \text{και} \quad -H \text{ η στάσιμη συνάρτηση}$$

Hamilton του προβλήματος. Και στην ανάλυση αυτή παρουσιάζονται τα ίδια προβλήματα υπολογιστικής υλοποίησης με την πρώτη μέθοδο. Οπότε ο αναδρομικός υπολογισμός φαίνεται να είναι αυτός ο οποίος δίνει τα ακριβέστερα αποτελέσματα για την υλοποίηση της διαδικασίας, ενώ στάσιμη λύση μπορεί να υπολογιστεί από μια προσεγγιστική εκδοχή του αντίστοιχου προβλήματος ελαχίστου χρόνου για πολύ μεγάλη αρχική ταχύτητα (Παράρτημα Β).

4.1.γ Εφαρμογή των δύο μεθόδων στην ακτινογραφία του χεριού με βάση την ενέργεια των ακμών.

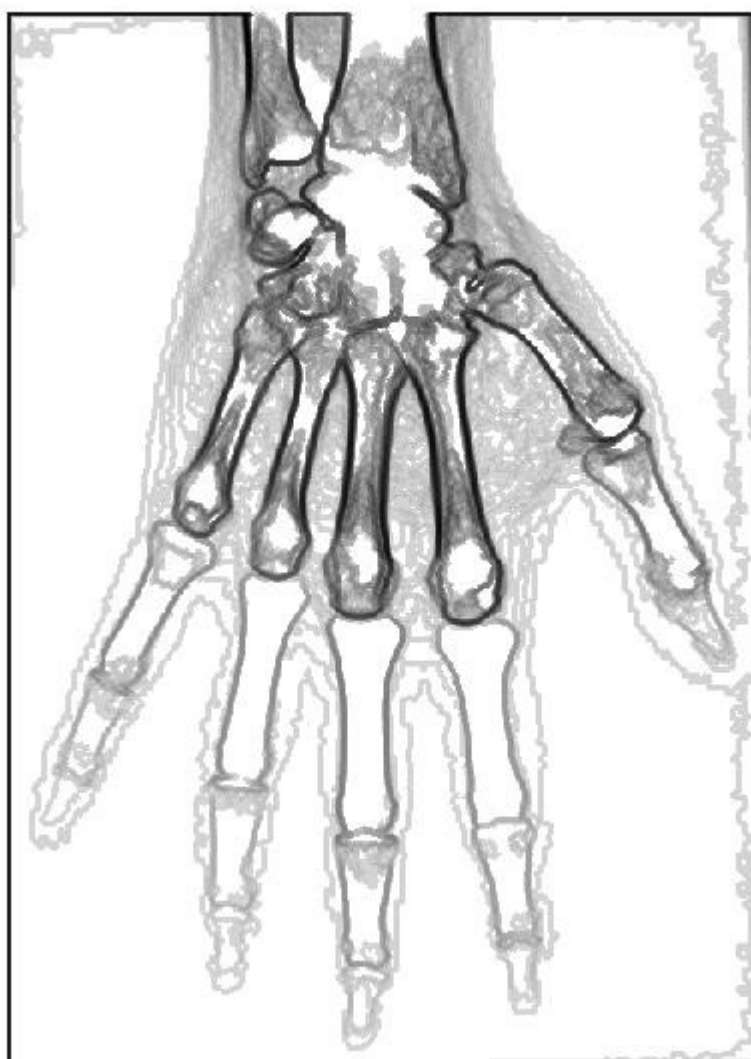
Αρχικά θα πρέπει να προσδιοριστεί το ενεργειακό που θα παράγει με την ολοκλήρωσή του σε καμπύλη ή επιφάνεια την προς ελαχιστοποίηση ενέργεια. Η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη εικόνα για την ενέργεια των ακμών είναι το ενεργειακό Perona – Malick το οποίο για εικόνα $f(x)$ ορίζεται

$$J_p = \frac{1}{1 + \|\nabla f\|^p}. \quad \text{Για να εξομαλυνθεί ο ισχυρός θόρυβος της ακτινογραφίας διατηρώντας όμως}$$

τα τοπολογικά χαρακτηριστικά της εικόνας, χρησιμοποιείται φιλτράρισμα με εναλλαγή φίλτρων ανακατασκευής τύπου opening και closing με εικόνα αναφοράς

$$m_n = f_n \ominus nB \quad \text{όπου } f(n) = a b(f_{n-1} | m_{n-1}) \quad \text{με } a(f|m) = \rho^+(f|m) \quad \text{και } b(f|m) = \rho^-(f|m) \quad [9].$$

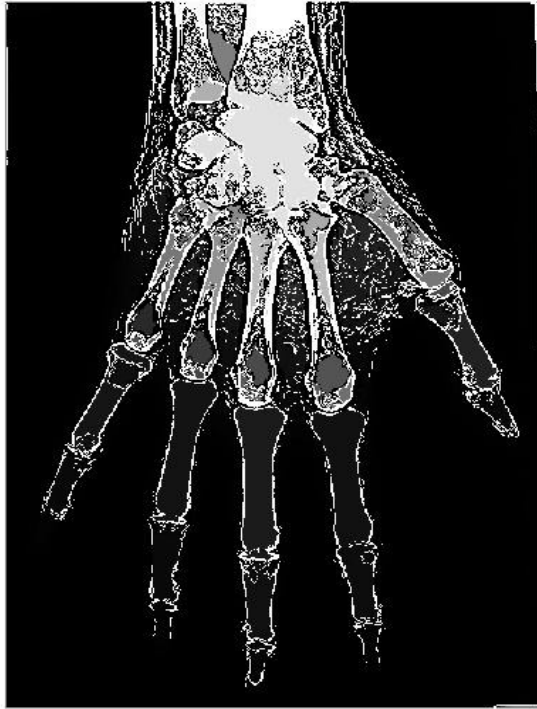
Στη συνέχεια προσεγγίζουμε το μέτρο της κλίσης $\|\nabla f\| \approx f \oplus drB - f \ominus drB$ όπου drB δίσκος ακτίνας $dr = 2$ pixels, οπότε το ενεργειακό για εκθέτη $p=0.5$ προκύπτει



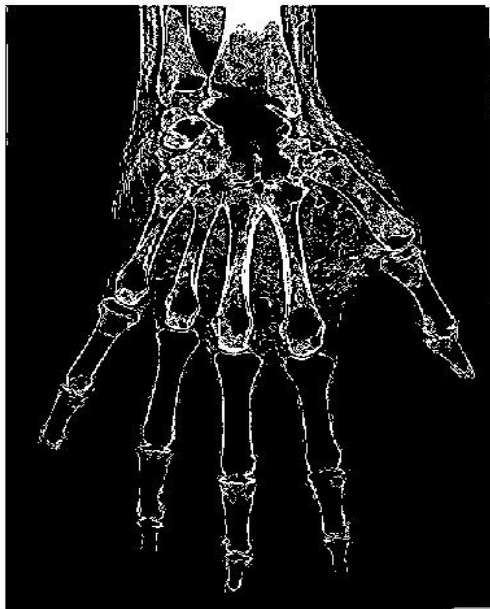
εικόνα 4.1
ενέργεια των ακμών της εξομαλυμμένης εικόνας

Στην εικόνα αυτή είναι χαρακτηριστική , παρά τη μεγάλη εξομάλυνση , η πολύπλοκη διάταξη της πληροφορίας και η παραπλανητική απεικόνιση των περιγραμμάτων των φαλαγγών στο ίδιο επίπεδο ενέργειας . Το πρόβλημα αυτό , που συζητήθηκε αναλυτικότερα στο τρίτο κεφάλαιο , θα οδηγήσει τις δύο μεθόδους εντοπισμού των τοπικών ελαχίστων της ενέργειας που παράγεται από το ενεργειακό αυτό , να εντοπίσουν τα περιγράμματα των φαλαγγών στο ίδιο επίπεδο ανάλυσης όπου εντοπίζονται και οι ακμές που δημιουργούνται από τους ιστούς του χεριού .

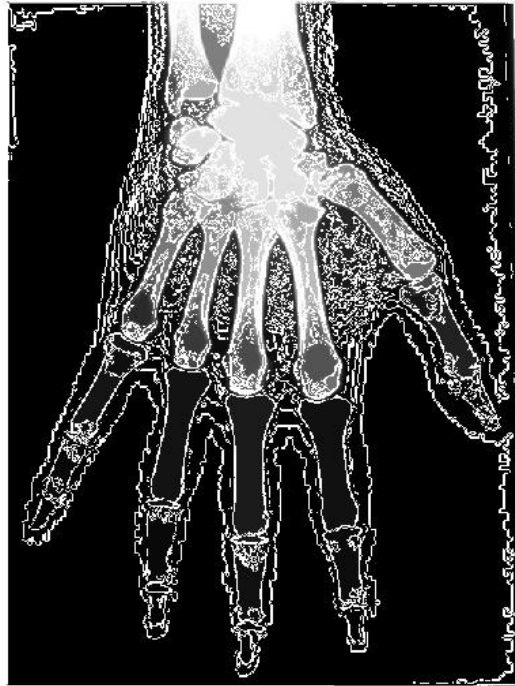
Οι εικόνες στις οποίες συγκλίνουν οι διαδικασίες εντοπισμού των καμπυλών και των περιοχών ελάχιστης ενέργειας υπολογίστηκαν αναλυτικά στα παραρτήματα Α και Β αντίστοιχα και υπολογίστηκαν στο Matlab



εικόνα 4.2
καμπύλες ελάχιστης ενέργειας – συνεχής εικόνα



εικόνα 4.3
καμπύλες ελάχιστης ενέργειας – δυαδική εικόνα



εικόνα 4.4
περιοχές ελάχιστης ενέργειας – συνεχής εικόνα
με μέγιστα στις θέσεις όπου εντοπίζονται τα όρια των περιοχών

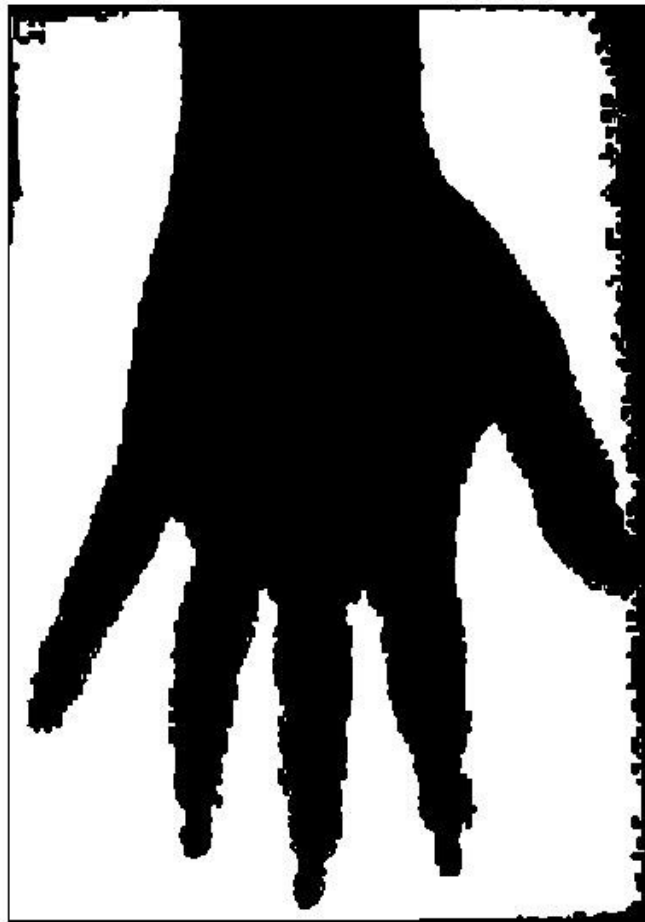


εικόνα 4.5
απεικόνιση μετά από 155 επαναλήψεις



εικόνα 4.6
απεικόνιση μετά από 355 επαναλήψεις

Μια σημαντική απεικόνιση που λαμβάνουμε είναι από τα ελάχιστα της εικόνας 4.4 τα οποία διαχωρίζουν το φόντο της ακτινογραφίας από την απεικόνιση του χεριού



εικόνα 4.7
τα ελάχιστα της εικόνας 4.4 αντιστοιχούν
στην περιοχή που ορίζει η φωτεινότητα του φόντου

Η εικόνα αυτή , αν αφαιρεθεί ο θόρυβος του πλαισίου της ακτινογραφίας , περιέχει με αρκετά συμπαγή και αφαιρετικό τρόπο πληροφορία τόσο για το σχήμα όσο και για τις θέσεις των οστών του χεριού και μπορεί να λειτουργήσει ως αρχική εικόνα σε μια διαδικασία αναδρομικής διάσπασης της εικόνας σε περιοχές με κριτήριο την πληροφορία που αυτές περιγράφουν .

4.2 Διάκριση περιοχών με κριτήριο την πληροφορία που περιγράφουν – πρώτα βήματα για το σχηματισμό μοντέλου , βάσης για την αναγνώριση

Εικόνες αντιπροσωπευτικές του σχήματος με βάση το οποίο κατανέμονται οι βιολογικές δομές που απεικονίζονται στην ακτινογραφία του χεριού , μπορούν να ληφθούν (εκτός από την παραπάνω διαδικασία που ούτως ή άλλως διαφορετικό στόχο έχει) με απλές κατωφλιοποιήσεις της αρχικής εικόνας της ακτινογραφίας ή κάποιας εξομαλυμμένης εκδοχής της . Ωστόσο από δοκιμές που έγιναν για διάφορα κατώφλια φάνηκε ότι , εικόνα πλουσιότερη σε πληροφορία αλλά το ίδιο συμπαγής στην περιγραφή της παράγεται από τη χρήση κατωφλίου στο 0.9% της μέγιστης φωτεινότητας . Η εικόνα που προκύπτει διατηρεί την περιγραφικότητά της ως προς το σχήμα του χεριού , δίνει ωστόσο ακριβή πληροφορία όχι για τους ιστούς αλλά για τα οστά των δαχτύλων (φάλαγγες) η οποία στην εικόνα 4.7 δεν υπάρχει και θα έπρεπε να εξαχθεί .

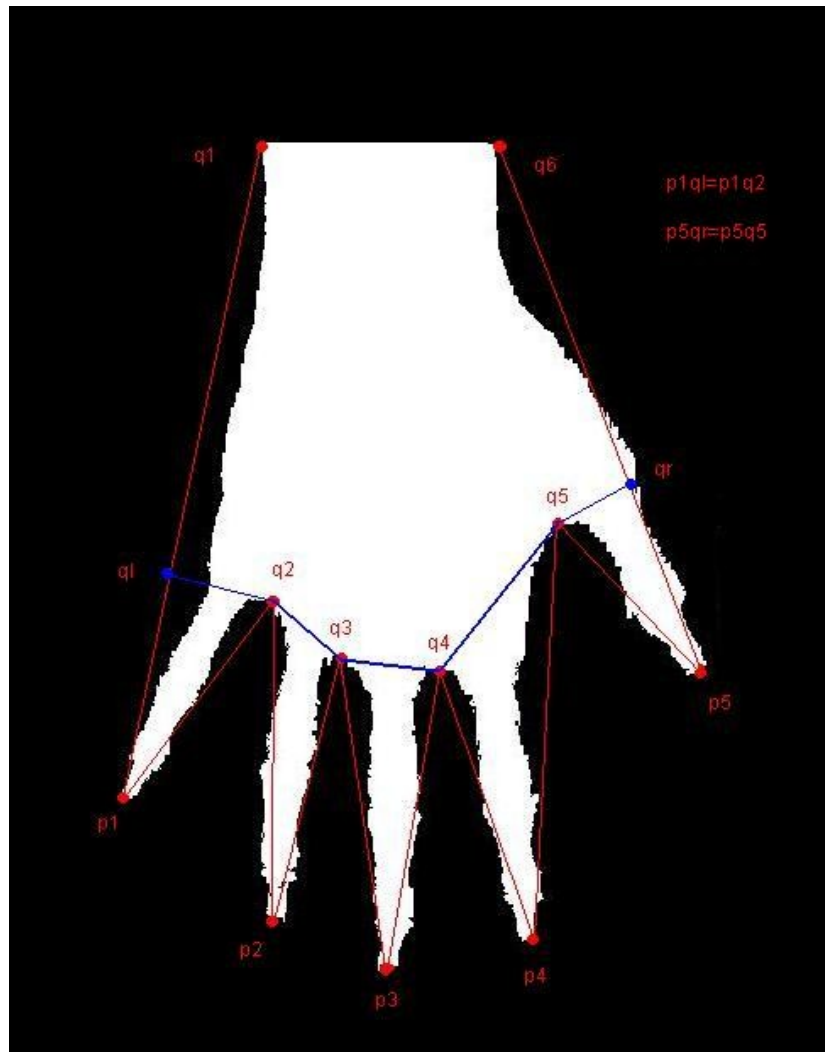


εικόνα 4.8
κατωφλιοποίηση της εξομαλυμμένης στο 0.9%
της μέγιστης φωτεινότητας

Η πληροφορία που είναι ανιχνεύσιμη μέσα από τη γεωμετρία αυτής της περιοχής – μάσκα διαπιστώθηκε , και μετά από συνεργασία με ορθοπεδικούς , πως είναι επαρκής για τον εντοπισμό τόσο της θέσης όσο και του προσανατολισμού των δαχτύλων καθώς και για τη διάκριση των οστών της παλάμης από τις φάλαγγες των δαχτύλων . Έχει νόημα λοιπόν να εξετασθεί η ανάπτυξη μιας διαδικασίας η οποία σε πρώτο στάδιο θα εντοπίζει τον προσανατολισμό των δαχτύλων και θα ορίζει στην εικόνα δύο περιοχές εντοπισμού της ανάλυσης , τα δάχτυλα και την παλάμη – καρπό . Αυτός ο διαχωρισμός είναι αντίστοιχος της σημαντικής μεταβολής της πυκνότητας τόσο της οστικής μάζας όσο και των ιστών μεταξύ των δαχτύλων και της παλάμης .

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε για το πρώτο αυτό βήμα αναγνώρισης στηρίζεται στον εντοπισμό οδηγών σημείων για μια πιο αφαιρετική γεωμετρική περιγραφή της εικόνας . Τέτοια σημεία είναι οι κορυφές των ακροδαχτύλων και οι “εγκολπώσεις” των θέσεων ανάμεσα στα δάχτυλα όπου αρχίζει να περιγράφεται ο ιστός της παλάμης . Ο εντοπισμός των θέσεων αυτών έγινε αρχικά με ανά στήλη επιλογή της θέσης (i,j) όπου πρωτοεμφανίζεται λογικό 1 ($i^*(j) = \wedge \{i : f(i, j) = 1\}$) . Στη συνέχεια από αυτά τα σημεία επιλέγουμε τις θέσεις που αντιστοιχούν σε τοπικά ελάχιστα και μέγιστα της συνάρτησης μιας μεταβλητής $i^*(j)$. Ως τοπικά ελάχιστα θεωρούνται όσες θέσεις $j^* : i^*(j^*) < i^*(j^* + 1)$ και $i^*(j^* - 1)$, αντίστροφα για τα τοπικά μέγιστα . Τα τοπικά μέγιστα (συμβολίζονται με $p=[p_x, p_y]$), εναλλάξ με τα τοπικά ελάχιστα(συμβολίζονται με $q=[q_x, q_y]$), στη συνέχεια ορίζουν , με δεύτερο σημείο το κοντινότερο τοπικό μέγιστο/ελάχιστο , ευθύγραμμα τμήματα pq και αντίστοιχες κατευθύνσεις $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{p_y - q_y}{p_x - q_x} \right)$. Σχηματίζεται λοιπόν μια αλυσίδα

pq σημείων η οποία ξεκινά και καταλήγει στην πρώτη και την τελευταία θέση αντίστοιχα όπου εμφανίζεται λογικό 1 στην τελευταία γραμμή (q1 και q6 αντίστοιχα) . Στη συνέχεια ενώνονται με ευθύγραμμα τμήματα μεταξύ τους οι θέσεις – q με τη συμπλήρωση δύο ακόμα θέσεων q1 και q6 κατά μήκος των p1q1 και p5q6 αντίστοιχα έτσι ώστε p1q1=p1q2 και p5q1=p5 q5 .



εικόνα 4.9
 παραμετροποίηση της γεωμετρίας της εικόνας
 με τις κορυφές(p) και τις εγκολπώσεις(q) και ορισμός
 της πρώτης διάσπασης σε δάχτυλα και παλάμη

Από αυτή τη γεωμετρική επεξεργασία ορίζονται ουσιαστικά κάποιες παράμετροι αναφοράς για τις περιοχές όπου θα εντοπιστεί η ανάλυση της εικόνας , έτσι ώστε να εξαχθεί η πληροφορία που περιγράφεται με συμπαγή τρόπο σε κάθε περιοχή . Στη συνέχεια η αξιολόγηση της πληροφορίας αυτής με βάση πρότερη γνώση που παρέχουν οι συνεργαζόμενοι ορθοπεδικοί γιατροί , θα οδηγήσει στην τελική απόφαση για τη νέα διάσπαση σε περιοχές όπου και πάλι θα εφαρμοστεί αντίστοιχη διαδικασία αφαίρεσης – εντοπισμένης επεξεργασίας και ανάλυσης – αξιολόγησης των αποτελεσμάτων με βάση πρότερη γνώση – απόφασης για νέα κατάτμηση .

Οι δοκιμές που έχουν γίνει για την εξαγωγή πληροφορίας από την τοπική ανάλυση των υποπεριοχών της εικόνας , δείχνουν πως αποδοτικότερη είναι η μέθοδος της προσαρμογής [11] κάποιας καμπύλης (πιθανά και ενός χονδρικού έτοιμου μοντέλου για το περίγραμμα των δομών της εικόνας που αντιστοιχούν στην προς ανίχνευση πληροφορία) στην εικόνα που παράγεται από τοπική εφαρμογή μιας από τις μεθόδους καμπυλών / περιοχών ελάχιστης ενέργειας . Στη συνέχεια η καμπύλη αυτή θα χρησιμοποιηθεί ως πρότυπο για το περίγραμμα των δομών της περιοχής , που συγκεντρώνουν την προς ανίχνευση πληροφορία και με βάση το προφίλ της αρχικής εικόνας στην

κατεύθυνση των κάθετων διανυσμάτων της καμπύλης – προτύπου , θα προσπαθήσουμε να εξάγουμε πληροφορία για τη γεωμετρία και τη σύνθεση των αντικειμένων (δομών) που συνθέτουν την περιοχή . Ωστόσο η ανάπτυξη ενός πλήρους και υψηλού βαθμού γενίκευσης αλγορίθμου αναγνώρισης για την ακτινογραφία του χεριού , απαιτεί στα επόμενα βήματα τη χρήση αρκετά εξειδικευμένης πληροφορίας από τους ορθοπεδικούς γιατρούς . Τόσο η καταγραφή , όσο και ο μετασχηματισμός της πληροφορίας αυτής σε υπολογιστική διαδικασία απαιτούν πολύ ευρύτερη συνεργασία με τους ειδικούς γιατρούς και αρκετά μεγάλο αριθμό δοκιμών για τη ρύθμιση των παραμέτρων των διαδικασιών αυτών . Ωστόσο παρακάτω θα παρουσιαστούν ιδέες για τη δομή ενός αλγορίθμου που θα στηρίζει εντοπισμένη επεξεργασία και ανάλυση της εικόνας , καθώς και ιδέες για τη ρύθμιση των παραμέτρων μιας τέτοιας δομής .

4.3 Μια αναδρομική δομή για την ανάπτυξη εντοπισμένου αλγορίθμου αναγνώρισης

Από την ανάλυση του τρόπου με τον οποίο κατανέμεται και απεικονίζεται η πληροφορία στη σύνθετη εικόνα της ακτινογραφίας του χεριού διαπιστώθηκε η ανάγκη εντοπισμού της ανάλυσης σε περιοχές ομοιογενείς ως προς την πληροφορία που περιγράφουν. Μια μέθοδος τοποθέτησης των περιοχών αυτών στην εικόνα με βάση πρότερη γνώση δόθηκε στην παράγραφο 4.2 , ωστόσο παρακάτω θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε μια αναδρομική δομή εντοπισμού της επεξεργασίας και ανάλυσης της εικόνας . Η ανάπτυξη της δομής αυτής βασίζεται στη διαπίστωση που έγινε στην παράγραφο 2.2 (Θέματα Κλίμακας) πως υπάρχει τοπικά ορισμένη κλίμακα επεξεργασίας και ανάλυσης στην οποία κάποιο χαρακτηριστικό θα μπορούσε να περιγραφεί πλήρως και σε συμπαγή μορφή απέναντι στο θόρυβο(συστηματικό ή κυρίως θόρυβος ανίχνευσης μη επιθυμητής πληροφορίας) και επομένως μια αναγκαία συνθήκη για την εξαγωγή της πληροφορίας στην οποία αντιστοιχεί το χαρακτηριστικό είναι να οριστεί το ζεύγος [κλίμακα(χαρακτηριστικού), περιοχή(χαρακτηριστικού)].

Θα μπορούσαμε λοιπόν να ορίσουμε μια εντοπισμένη κλιμάκωση $t(x,y)$ η οποία όμως δε μπορεί να είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε (x,y) λόγω του αριθμησίμου των αντικειμένων και της μονοσήμαντης αντιστοιχίας της με ένα αντικείμενο(χαρακτηριστικό) ή ένα σύνολο ομαδοποιημένων αντικειμένων (το οποίο μπορούμε και πάλι να το θεωρήσουμε αντικείμενο) .

Άρα μπορούμε να ορίσουμε την

$$t(x) = \sum_i t_i(x) \text{ όπου } t_i(x) = \begin{cases} s(x; \pi(i)) , & x \in \pi(i) \\ 0 , & x \text{ αλλού} \end{cases} \text{ όπου } i=1...N \text{ τα "αντικείμενα" και } \pi(i) \text{ η}$$

περιοχή που το i -αντικείμενο ορίζει . Θεωρώντας όπως παραπάνω τα αντικείμενα ως σύνολα αντικειμένων ορίζουμε τα διανύσματα που προκύπτουν από την ομαδοποίηση των αντικειμένων

$$o_i^n \rightarrow [o_j^{n+1}]_{j=\vec{i}(n+1)} , i=1...N(n) , j=1...N(n+1) , \sum_n N(n) = \text{πλήθος αντικειμένων}$$

Άρα ξαναγράφουμε τις κλιμακώσεις $t_n(x) = \sum_i t_i^n(x) \text{ όπου } t_i^n(x) = \begin{cases} s(x; \pi(o_i^n)) , & x \in \pi(o_i^n) \\ 0 , & x \text{ αλλού} \end{cases}$

Οπότε θα μπορούσαμε να περιγράψουμε την ανίχνευση ως μια συστολική ως προς την κλιμάκωση και την επιφάνεια των περιοχών ακολουθία η οποία στο n -οστό βήμα της εκτελεί τη διαδικασία

$$\pi_i^n = a(o_i^n) , t_i^n(x) = \begin{cases} s(x; \pi_i^n) , & x \in \pi_i^n \\ 0 , & \text{αλλού} \end{cases} , u_i^n = \lambda(f; t_i^n) = \lambda(o_i^n; s(x; \pi_i^n)) , \vec{i}(n+1) = S(u_i^n; o_i^n)$$

$a(\cdot)$: μια συνάρτηση περιοχής για τη μέτρηση της διάστασης του αντικειμένου .

$s(x; \pi)$: μια ενδεχομένως ανισοτροπική εκδοχή της κλιμάκωσης με βάση τη διάσταση της περιοχής

$\lambda(f,t)$: μια εντοπισμένη , μέσω του ορισμού της κλιμάκωσης , ανάλυση της εικόνας

$S()$: ένας μετασχηματισμός διάκρισης αντικειμένων δεδομένου του αντικειμένου που διασπάται
 $o_i^0 = f$: το αρχικό αντικείμενο είναι ολόκληρη η εικόνα

Η παραπάνω ακολουθία δεν καθορίζει κάποιον αλγόριθμο ανίχνευσης χαρακτηριστικών, περιγράφει όμως μια αναδρομική δομή εντοπισμένης ανάλυσης της εικόνας με πιθανή δυνατότητα κλιμάκωσης στην περιοχή που εντοπίζεται η ανάλυση αυτή. Η λειτουργία ενός αλγορίθμου που αναπτύσσεται με βάση αυτή την αναδρομική δομή καθορίζεται από την επιλογή των συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται σε αυτή. Κρίσιμη είναι η επιλογή του μετασχηματισμού $S()$ που προσδιορίζει τα αντικείμενα που ομαδοποιούνται σε κάθε περιοχή ανάλυσης, καθώς το αντικείμενο αποτελεί καθοριστικό παράγοντα της ανάλυσης ως όρισμα όλων των συναρτήσεων και τη μοναδική μεταβλητή ορισμού της περιοχής όπου εντοπίζεται η ανάλυση ($\pi = \alpha(o)$). Ο κρίσιμος αυτός ρόλος του αντικειμένου στο οποίο αντιστοιχίζεται μια “συντακτική” (μέσω της $S()$) και μια “σημασιολογική” (μέσω της $\lambda()$) λειτουργία στη δομή, δίνει τη δυνατότητα ανάλυσης της εικόνας παρουσία μοντέλου με παραμέτρους τη θέση των αντικειμένων και την κλίμακα του μοντέλου στην αρχή της αναδρομής $\vec{i}_0 = S[\lambda(f; t_0); f]$, $t_0 = s(x; a(f))$. Θεωρητικά λοιπόν, εκτός των χαρακτηριστικών συναρτήσεων που καθορίζουν τί περιγράφει το μοντέλο, η μόνη παράμετρος προς ρύθμιση με βάση την εικόνα είναι η κλίμακα αφού αυτή είναι η μόνη εξωγενής παράμετρος των συναρτήσεων της δομής.

Για παράδειγμα η ανάλυση που περιγράφηκε στην παράγραφο 4.2 θα μπορούσε να αντιστοιχιστεί στα δύο πρώτα βήματα μιας τέτοιας αναδρομής με αρχική κλίμακα $t_0 = \infty$ (δηλαδή εφαρμογή της επεξεργασίας σε ολόκληρη την εικόνα), επεξεργασία $u_0 = \theta(f, f_{min})$ (κατωφλιοποίηση σε ύψος $f > f_{min}$ για να εντοπιστεί το χέρι στην εικόνα), διαχωρισμός περιοχών

$$p_i \rightarrow \text{κορυφές}, q_j \rightarrow \text{εγκολπώσεις}, (ql, qr) : p_1 ql = p_1 qr \text{ και } p_N qr = p_{N-1} q_{N-1},$$

$$S_0(u_0) = T([q_i p_i], [ql, q_1, \dots, q_M, qr]) = [[q_i^* p_i q_{i+1}^*], [ql, q_1, \dots, q_N, qr]] \text{ , } q^* = [ql, q_2, \dots, q_{N-1}, qr]$$

(ορισμός των αλυσίδων εγκολπώσεων – κορυφών και σχηματισμός των πολυγώνων που ορίζουν γεωμετρικά τα δάχτυλα και την περιοχή της παλάμης).

Στο επόμενο βήμα θα πρέπει με βάση τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τις υποδείξεις του γιατρού και κάποιο μοντέλο να τοποθετηθούν στην εικόνα τα νέα αντικείμενα (περιοχές των δαχτύλων και της παλάμης).

Για να αποτελέσει όμως ένας αλγόριθμος που περιγράφεται από την παραπάνω δομή μια γενίκευση της διαδικασίας αναγνώρισης στην ακτινογραφία του χεριού θα πρέπει οι παράμετροι που δεν καθορίζονται από την επεξεργασία της εικόνας (όπως είναι οι συναρτήσεις αξιολόγησης της ανάλυσης που γίνεται στην περιοχή που ορίζει κάθε αντικείμενο, καθώς και ο ίδιος ο προσδιορισμός των περιοχών αυτών), να ρυθμιστούν με τρόπο τέτοιο ώστε να αντιπροσωπεύουν μια κλάση ακτινογραφιών χεριού που παρουσιάζουν κάποια ομοιογένεια ως προς την πληροφορία που απεικονίζουν (ηλικιακή, ως προς το φύλο κ.α.). Μια ιδέα προσαρμογής παραμέτρων βασισμένη στον αλγόριθμο EM (Expectation Maximization) [6] περιγράφεται στο παράρτημα Γ ενώ σε συνδυασμό με την εξέλιξη καμπυλών προτείνεται μια μέθοδος εξαγωγής μοντέλων για τα αντικείμενα μιας εικόνας στο [1].

Παράρτημα

Α . Εντοπισμός ελάχιστης ενέργειας με κίνηση κατά μήκος της καμπύλης και μετατόπιση προς το κάθετο διάνυσμα

Το ζητούμενο εδώ είναι να εντοπιστούν οι ισοϋψείς μιας εικόνας με βάση ένα μετασχηματισμό της, στον οποίο περιγράφονται ως θέσεις τοπικού ελαχίστου κάποια προς ανίχνευση χαρακτηριστικά της. Έστω λοιπόν το συναρτησιακό $J(f, \nabla f)$ - όπου 'f' η αρχική εικόνα - και αντίστοιχη

ενέργεια $E = \int_{x \in \mathbb{R}^n} J(f, \nabla f) dx = \int_0^\infty J(f, \nabla f) \|\dot{x}\| dt$. Η καμπύλη $x(t)$ που ελαχιστοποιεί το

ενεργειακό αυτό ικανοποιεί την εξίσωση Hamilton-Jacobi-Belman $-\frac{\partial}{\partial t} u = \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^n} \{\nabla u^T \dot{x} + J\|\dot{x}\|\}$

Όμως η ελαχιστοποίηση της $H = \nabla u^T \dot{x} + J\|\dot{x}\|$ ως προς την καμπύλη $x(t)$ οδηγεί στην εξίσωση

Euler $[u]_x = u_{xx}^* \dot{x} + \nabla J^* \|\dot{x}\| - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla u^* + J^* \frac{\dot{x}}{\|\dot{x}\|} \right) = 0$. Θεωρώντας πως η καμπύλη που

περιγράφεται από το $x(t)$ αντιστοιχεί στην επίπεδη καμπύλη $u(x,t)=c$ της εικόνας $u(x,t)$ η ταχύτητα εξέλιξης της καμπύλης $x(p(t))$ που προκύπτει από την εξίσωση $u(x,t)=u_c$ γράφεται

$\dot{x}(p(t)) = \frac{d}{dp} x(p(t)) \dot{p} = V \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$ με $V = \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|}$. Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή για

την ταχύτητα στην εξίσωση Euler προκύπτει για τη χρονική μεταβολή

$$\begin{aligned} \|\dot{x}\| = V = \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla u + J \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) = \nabla u_t + J \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \\ &= \nabla u_t + J \left(\frac{u_{xx} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \dot{u} - \nabla u u_{nn} \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} + \left[\nabla u_t \|\nabla u\| - \nabla u \nabla^T u_t \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right]^*}{\|\nabla u\|^2} \right) = \nabla u_t + J \dot{u} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^3} (u_{xx} - I u_{nn}) \end{aligned}$$

* σημείωση : $\nabla u_t \|\nabla u\| - \nabla u \nabla^T u_t \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = (I \|\nabla u\|^2 - \nabla u \nabla^T u) \frac{\nabla u_t}{\|\nabla u\|}$ θεωρούμε διάνυσμα z

ώστε να $\exists [\nabla u z^T]^{-1}$ οπότε $\nabla u \nabla^T u = \nabla u \|\nabla u\|^2 z^T [\nabla u z^T]^{-1} = I \|\nabla u\| \Rightarrow I \|\nabla u\|^2 - \nabla u \nabla^T u = 0$

Από την ανεξαρτησία \dot{x} , x έχουμε $\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2} \right) = \frac{-\nabla^T u}{\|\nabla u\|^2} \nabla \dot{u} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|^2} u_{nn} = \frac{\nabla^T u}{\|\nabla u\|^2} \nabla \dot{u} &\Rightarrow \dot{u} = \frac{\nabla^T u \nabla \dot{u}}{u_{nn}} \Rightarrow \nabla (\ln(\dot{u})) = u_{nn} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(\dot{u}) = \int \frac{u_{nn}}{u_n} dn = \ln(u_n) + \ln(a(t)) \Rightarrow \dot{u} = a(t) \|\nabla u\| \end{aligned}$$

Συνολικά τώρα η εξίσωση Euler γράφεται

$$\begin{aligned} u_{xx} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2} \dot{u} + \nabla J \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} &= \nabla H = \nabla u_t + J \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2} (u_{xx} - I u_{nn}) \Rightarrow \\ &\left(\nabla J - J(u_{xx} - I u_{nn}) \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2} + u_{xx} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \right) \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} = \nabla u_t \\ &\Rightarrow \left(\nabla^T J \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} + u_{nn} \right) \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} = \nabla^T H \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \nabla^T u_t \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή καθώς και την έκφραση της $x(t)$ μέσω της $u(x,t)$ στην εξίσωση HJB προκύπτει η ' value function ' $u(x,t)$:

$$-\nabla u_t = \nabla H \Rightarrow -\nabla^T u_t \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = \nabla^T H \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = -\nabla^T H \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} \Rightarrow \nabla^T u_t \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|} = 0 = \nabla^T H \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$$

άρα $u_t = v(C(t), t)$ όπου C η ισοδυναμική της $u(x, t)$

Τελικά η $x(t)$ μπορεί να περιγραφεί ως η καμπύλη του επιπέδου $u(x, t) = u_c$ της ροής

$$-\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\dot{u}}{\|\nabla u\|} (\|\nabla u\| + \text{sgn}(a)J) = a(t)(sJ + \|\nabla u\|) = -v(C(t), t) \text{ δηλαδή η } u(x, t)$$

μεταβάλλεται ως προς t ανεξάρτητα από τη $x(t)$ μόνο κατά την κατεύθυνση της ισοδυναμικής της οπότε $u_t(C(t), t) = -a(t)(sJ(C(t)) + \|\nabla u(C(t), t)\|)$.

Άρα το ολικό διαφορικό της $u(x(t), t)$ γράφεται $du = (a(t)\|\nabla u\| dt \hat{n} - a(sJ + \|\nabla u\|) dt \hat{l}) \cdot \vec{r}$
 $du = dt a(t) (\|\nabla u\| \hat{n} - (sJ + \|\nabla u\|) \hat{l}) \cdot \hat{r}$ όπου (\hat{n}, \hat{l}) τα μαοναδιαία διανύσματα \parallel και \perp στην ∇u , \hat{r} η κατεύθυνση της διαφορίσης
 $du = dt a(t) [\|\nabla u\| (\cos(\theta) - \sin(\theta)) - sJ \sin(\theta)] = -dt a(t) [\|\nabla u\| \sin(\theta + 3\pi/4) + sJ \sin(\theta)]$

Δηλαδή η εξίσωση $u_t(C(t), t) = -a(t)[sJ(C(t)) + \|\nabla u(C(t), t)\|]$ περιγράφει την εξίσωση των ισοδυναμικών της $u(x, t)$: $u(C(t), t) = u_c(t)$ με τη $u_c(t)$ να προκύπτει από την εξίσωση

$$\frac{d}{dt} u_c(t) = -a(sJ_c + \|\nabla u_c(t)\|) = -|a(t)| J_c . \text{ Άρα οι εξισώσεις των ισοδυναμικών της } u(x, t)$$

γράφονται $u(C(t), t) = u_c(0) - J_c \int_0^t |a(\tau)| d\tau = f_c - r(t) J_c$.

Επιστρέφοντας τώρα στο ολικό διαφορικό της ' u ' και γράφοντας την κατεύθυνσή του $\frac{\vec{r}}{r} = \frac{d\vec{r}}{dr}$

$$\frac{du}{d\vec{r}} \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \nabla_{\vec{r}} u = a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (sJ + \|\nabla u\|) \hat{l}] \text{ όμως } \frac{\nabla_{\vec{r}} u}{\|\nabla_{\vec{r}} u\|} = \frac{\vec{r}}{|r|} \Rightarrow \dot{r} u_r = a(t) \sqrt{(\|\nabla u\| + J)^2 + \|\nabla u\|^2} \Rightarrow$$

$$\dot{r} \|\nabla_{\vec{r}} u\| = a(t) \|\nabla u\| \sqrt{\left(1 + s \frac{J}{\|\nabla u\|}\right)^2 + 1} \text{ γράφουμε την } \|\nabla u\| \text{ ως προβολή της } \nabla_{\vec{r}} u \text{ στο } \hat{n}$$

$$\|\nabla_{\vec{r}} u\| = \frac{\|\nabla u\|}{\cos(\theta)} \Rightarrow \dot{r} = a(t) \cos(\theta) \sqrt{\left(1 + s \frac{J}{\|\nabla u\|}\right)^2 + 1} \text{ όμως } \cos(\theta) = \frac{\|\nabla u\|}{\sqrt{(\|\nabla u\| + sJ)^2 + \|\nabla u\|^2}}$$

Άρα $\dot{r} = a(t)$ η εξίσωση της απόστασης από θέση $x \in C(t)$ στην οποία θα μετακινηθεί η ' x ' και αφού $r = r(t)$, ανεξάρτητο του ' x ' , θα μετακινηθεί ολόκληρη η $C(t)$.

Αυτή η ερμηνεία της εξίσωσης που προκύπτει από το ολικό διαφορικό της $u(x, t)$ μπορεί να περιγραφεί θεωρώντας πως η $u(x, t)$ προκύπτει από την κλιμακούμενη εφαρμογή τελεστών πλέγματος σε εικόνα $u(x(0), 0) = f(x)$. Ξαναγράφουμε λοιπόν την εξίσωση ροής της $u(x, t)$ σε κατεύθυνση \hat{r} :

$$du = dt a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (sJ + \|\nabla u\|) \hat{l}] \cdot \hat{r}$$

Λόγω της μορφής που έχει η εξίσωση ροής χρησιμοποιούμε την ιδιότητα κλιμάκωσης των

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta_t(f) = \|\nabla \delta_t(f)\|$$

τελεστών πλέγματος με βάση επίπεδη συνάρτηση κυκλικής συμμετρίας

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_t(f) = -\|\nabla \varepsilon_t(f)\|$$

Συμπύσσοντας τους τελεστές αυτούς σε ενιαίο τελεστή

$$\lambda_t(f) = f \circ r(t) B \text{ όπου } \circ \rightarrow \oplus \text{ ή } \ominus \text{ αντίστοιχα προς το πρόσημο του } r(t) \text{ τότε}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \lambda_t = \text{sgn}(r(t)) \|\nabla \lambda_t\| |\dot{r}(t)| \text{ γράφοντας την εξίσωση οπτικής ροής που προέκυψε από την}$$

ελαχιστοποίηση της J πάνω σε καμπύλη $x(t)$ αφού θεωρήσουμε ότι η $u(x, t)$ παράγεται από ένα

τέτοιο τελεστή $\lambda_i(u_0)$: $sgn(r(t))|\dot{r}(t)|\|\nabla_{\vec{r}}u\| = \frac{d}{dt}u = T_{p \leq |r(t)|} \left\{ a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (sJ + \|\nabla u\|)] \cdot \frac{\vec{p}}{p} \right\}$

Όπου $T_{\odot} \{ \} \rightarrow \vee$ ή \wedge για $\odot \rightarrow \oplus$ ή \ominus αντίστοιχα. Άρακαθηστώντας στην παραπάνω εξίσωση

$$sgn(r)|\dot{r}\|\nabla_{\vec{r}}u\| = sgn(a \cdot r) a(t) \|\nabla u\| \sqrt{\left(1 + s \frac{J}{\|\nabla u\|}\right)^2 + 1} \Rightarrow |\dot{r}| = |a(t)|$$

Δηλαδή η μετακίνηση των ισοδυναμικών της $u(x,t)$ που περιγράφηκε παραπάνω υλοποιείται με την εφαρμογή εντοπισμένων φίλτρων dilation / erosion σε κλίμακα $r(t)$ με

$sgn(r) = sgn[S(f, \nabla f, J, \nabla J)]$ όπου η $S(\cdot)$ περιγράφει την τοπική εφαρμογή των φίλτρων.

Η ταχύτητα $a(t)$ υπολογίζεται από την εκπλήρωση της αναγκαίας συνθήκης της αρχής του μεγίστου του Pontryagin ως προς την $a(t)$:

$$H \text{ Hamiltonian γράφεται για } \dot{x} = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2} \dot{u} = a(t)n \quad H = -J|a(t)| + p^T n a(t) \text{ με } \frac{\partial}{\partial t} H = 0$$

$$\text{και συζυγή εξίσωση των συντελεστών } \dot{p} = \nabla J|a| - \frac{a}{u_n}(u_{xx} - I u_{nn}) p \Rightarrow n^T \dot{p} = n^T \nabla J|a|$$

$$\frac{\partial}{\partial t} H = -sgn(a)J\dot{a} + n^T \dot{p}a + n^T p\dot{a} = 0 \Rightarrow n^T p = sgn(a)J - n^T \nabla J|a| \frac{a}{\dot{a}} \Rightarrow H = -J|a| + |a|J - \frac{|a|^3}{\dot{a}} n^T \nabla J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{\dot{a}}{a^3} = sgn(a) \frac{n^T \nabla J}{H} \Rightarrow \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a_o^2} + 2t sgn(a) \frac{n^T \nabla J}{H} \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad \text{άρα } sgn(a) = sgn\left(\frac{n^T \nabla J}{H}\right)$$

$$a(t) = \frac{sgn(n^T \nabla J)}{\sqrt{\frac{1}{a_o^2} + 2\frac{t}{H}|n^T \nabla J|}} \Rightarrow r(t) = \int_0^t a(T) dT = \frac{H}{n^T \nabla J} \left(\sqrt{\frac{1}{a_o^2} + 2\frac{t}{H}|n^T \nabla J|} - \frac{1}{|a_o|} \right)$$

Άρα η οπτική ροή που εφαρμόζεται στην εικόνα $f(x,y)$ για τον εντοπισμό των ισοϋψών της με βάση ένα ενεργειακό κριτήριο 'J' ισοδυναμεί με ένα μετασχηματισμό απόστασης

$$u(x,t) = f \odot r(x,t) B \quad \text{με} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} r = \begin{cases} +\infty, & x: n^T \nabla J \geq 0 \\ -\infty, & x: n^T \nabla J < 0 \end{cases} \Rightarrow u_{\infty} = \begin{cases} \vee_a f(a), & x: n^T \nabla J \geq 0 \\ \wedge_a f(a), & x: n^T \nabla J < 0 \end{cases} .$$

Η εξίσωση αυτή για την $u(x,t)$ ισχύει για την κάθετη μετατόπιση των ισοϋψών της, ενώ παράλληλα σε αυτές $u(C(t),t) = f_C - r(t)J_C$

Αν προσπαθήσουμε να παράγουμε μια εξίσωση αντίστοιχη αυτής του ελαχίστου χρόνου

$$dr = a(t)dt \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{a(t)} \frac{\vec{r}}{|r|} \Rightarrow \|\nabla T\| = \frac{1}{|a(t)|} \Rightarrow \|\nabla T\|^2 = \frac{1}{a_o^2} + 2T \frac{|n^T \nabla J|}{H} \quad \text{αν } a_o \rightarrow \infty$$

$$\|\nabla T\|^2 = 2 \frac{T}{H} |n^T \nabla J| \Rightarrow \|\nabla \sqrt{2T}\| = \sqrt{\frac{|n^T \nabla J|}{H}} \quad \text{δίνει μια προσεγγιστική λύση του προβλήματος}$$

ελαχίστου χρόνου για πολύ μεγάλη αρχική ταχύτητα. Επιλύσιμη υπολογιστικά με τη μέθοδο Fast Marching [7].

B . Εντοπισμός ελάχιστης ενέργειας με κίνηση στο επίπεδο εικόνας αναφοράς $f(x,y)$

Εδώ η ενέργεια προς ελαχιστοποίηση παράγεται με ολοκλήρωση του ενεργειακού ' J ' πάνω σε μια επιφάνεια αναφοράς ορισμένη από τη συνάρτηση $f(x,y)$.

Οπότε $E = \int_{A(f)} J ds = \int_{A(f)} J \frac{\nabla^T f}{\|\nabla f\|} dx = \int_{A(f)} J \frac{\nabla^T f}{\|\nabla f\|} \dot{x}(t) dt$. Γράφουμε και πάλι την εξίσωση

HJB για την ελαχιστοποίηση της ενέργειας αυτής $-u_t = \wedge_x H$, $H = \nabla^T u \dot{x} + J \frac{\nabla^T f}{\|\nabla f\|} \dot{x}$.

Για την ελαχιστοποίηση αυτή γράφουμε την εξίσωση Euler $[u]_x = \frac{\partial}{\partial x} H^* - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} H^* \right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} H^* = \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla u + J \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} \right) = \nabla u_t$. Εφόσον η εξίσωση αυτή περιγράφει την ελαχιστοποίηση

της H πάνω στις καμπύλες $x(t)$ θα πρέπει να ικανοποιεί και την εξίσωση HJB από την οποία ,

παραγωγίζοντας ως προς x , παίρνουμε $-\nabla u_t = \frac{\partial}{\partial x} H^*$ και αντικαθιστώντας την Euler προκύπτει

$$: \frac{\partial}{\partial x} H^* = 0 \Rightarrow \left[u_{xx} + \nabla J \frac{\nabla^T f}{\|\nabla f\|} + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{xx} - I f_{mm}) \right] \dot{x} = 0 \Rightarrow u_{mm} + n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla u\|} (f_{uu} - f_{mm}) = 0 \quad (1)$$

όπου $n_u = \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}$, $n_f = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. Όπως και προηγουμένως θεωρούμε τη $x(t)$ επίπεδη καμπύλη

της $u(x,t)$ που προκύπτει από την εξίσωση $u(x,t) = u(C(t))$ οπότε γράφουμε για την ταχύτητα

της $\dot{u} = \dot{x}^T \nabla u \Rightarrow \dot{u} \frac{\nabla^T u}{\|\nabla u\|^2} \nabla u = \dot{x}^T \nabla u \Rightarrow \dot{x} = \dot{u} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|^2}$. Η έκφραση αυτή για την ταχύτητα μαζί

με την απαίτηση της εξίσωσης Euler για ανεξαρτησία (x, \dot{x}) δίνει μια λύση για την $\frac{\partial}{\partial x} \dot{x} = 0$

$\dot{u} = a(t) \|\nabla u\| \Rightarrow x(t) = a(t) n_u$ οπότε η H γράφεται $H^* = a(t) (\|\nabla u\| + J n_f^T n_u) = H^*(C(t), t)$.

Η συνάρτηση Hamilton όμως του προβλήματος αυτού θα πρέπει να ικανοποιεί και την αναγκαία συνθήκη της αρχής του μεγίστου του Pontryagin για $H = -J n_f^T \dot{x} + p^T \dot{x}$. Η συζυγής εξίσωση της

μεταβλητής p γράφεται $\dot{p} = -\frac{\partial}{\partial x} H = \left[\nabla J n_f^T + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{xx} - I f_{mm}) \right] \dot{x}$ γράφοντας

$\dot{x} = a(t) n_u$ παίρνουμε $\dot{p}^T n_u = \left[n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{uu} - f_{mm}) \right] a(t)$. Ισχύει όμως

$$\frac{\partial}{\partial t} H = 0 \Rightarrow -J n_f^T n_u \dot{a} + \dot{p}^T n_u a + p^T n_u \dot{a} = 0 \Rightarrow p^T n_u = J n_f^T n_u - \frac{a^2}{\dot{a}} \left[n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{uu} - f_{mm}) \right]$$

Αντικαθιστώντας τώρα στη Hamiltonian $H = \frac{-a^3}{\dot{a}} \left[n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{uu} - f_{mm}) \right]$ και

λύνοντας ως προς $a(t)$ παίρνουμε την έκφραση $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a_0^2} + \frac{2t}{H} \left[n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{uu} - f_{mm}) \right]$.

Ορίζουμε $A = \left[n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{uu} - f_{mm}) \right]$ και στη συνέχεια προσπαθούμε να εκφράσουμε

την f_{mm} ως συνάρτηση της f_{uu} : $f_{mm} = n_f^T f_{xx} n_f = n_f^T n_u z^T [n_u z^T]^{-1} f_{xx} [z n_u^T]^{-1} z n_u^T n_f =$

$$= (n_f^T n_u)^2 z^T [n_u z^T]^{-1} f_{xx} [z n_u^T]^{-1} z = (n_f^T n_u)^2 n_u^T n_u z^T [n_u z^T]^{-1} f_{xx} [z n_u^T]^{-1} z n_u^T n_u = (n_f^T n_u)^2 f_{uu}$$

Άρα $A = n_f^T n_u n_u^T \nabla J + \frac{J f_{uu}}{\|\nabla f\|} (1 - (n_f^T n_u)^2) = n_f^T n_u n_u^T \nabla J - \frac{J f_{mm}}{\|\nabla f\|} \frac{1 - (n_f^T n_u)^2}{(n_f^T n_u)^2}$

Όμως $n_f^T n_u n_u^T \nabla J = n_f^T n_u n_u^T n_u z^T [n_u z^T]^{-1} \nabla J = n_f^T \nabla J$ άρα $A = n_f^T \nabla J - \frac{J f_{mm}}{\|\nabla f\|} \frac{1 - (n_f^T n_u)^2}{(n_f^T n_u)^2}$

Σημαντικό είναι να εξετάσουμε πως προκύπτει το πρόσημο της A αφού για $A \cdot H < 0$ το t έχει άνω περιορισμό $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{a_0^2} + \frac{2t}{H} A \geq 0 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2a_0^2} \left| \frac{H}{A} \right|$.

Έστω λοιπόν $J_n = n_f^T \nabla J$, $f_n = \|\nabla f\|$, $c_{fu} = n_f^T n_u = \cos(\theta_{fu})$ τότε για $A < 0$ παίρνουμε

$$J_n - J \frac{f_{nn}}{f_n} \frac{1 - c_{fu}^2}{c_{fu}^2} < 0 \Rightarrow c_{fu}^2 J_n f_n - J f_{nn} (1 - c_{fu}^2) < 0, \quad \forall c_{fu} \text{ οπότε και για } c_{fu} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J_n f_n - J f_{nn} < 0 \Rightarrow \left(\frac{J}{f_n} \right)_n < 0 \Rightarrow \frac{J(x)}{f_n(x)} < \frac{J(C(t))}{f_n(C(t))} \text{ όπου } C(t) \text{ η θέση αναφοράς}$$

Τη συμπεριφορά της μπορούμε να την εξετάσουμε και μέσω της H επανερχόμενοι στη συζυγή

εξίσωση των p $\dot{p}^T n_u = A a(t)$ οπότε $A = -\frac{n_u^T \partial H}{a \partial x}$. Άρα γράφεται ο περιορισμός για το γινόμενο

$$A H < 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} \frac{\partial H^2}{\partial x} \cdot n_u < 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} \int \frac{\partial H^2}{\partial x} \cdot n_u ds < 0 \Rightarrow -\frac{1}{a} \int \frac{\partial H^2}{\partial x} \cdot n_u n_f^T dx < 0$$

Όπως και σε προηγούμενες περιπτώσεις προσπαθούμε να μεταγράψουμε το μητρώο του

εξωτερικού γινομένου $n_u n_f^T = n_u n_f^T n_u z^T [n_u z^T]^{-1} = I n_f^T n_u$. Οπότε ξαναγράφουμε τον περιορισμό

$$-\frac{1}{a} \int n_f^T n_u \frac{\partial H^2}{\partial x} \cdot dx < 0. \text{ Θεωρώντας όμως θετικό το διαφορικό της ενέργειας}$$

$$dE = J n_f^T \dot{x} dt = J n_f^T n_u a dt \geq 0 \Rightarrow \text{sgn}(a) = \text{sgn}(n_f^T n_u). \text{ Αντικαθιστούμε στον περιορισμό ο}$$

οποίος τώρα γράφεται $\int |n_f^T n_u| \frac{\partial H^2}{\partial x} \cdot dx > 0 \Rightarrow \int \frac{\partial H^2}{\partial x} \cdot dx > 0 \Rightarrow H^2(x) > H^2(C(t))$

Αν $H(x) > 0 \Rightarrow H(x) > H(C)$, δηλαδή η θέση x όπου υπολογίζεται η H είναι καλύτερη από τη θέση C ως προς το κριτήριο κόστους, η u(x,t) θα έπρεπε να μεταφέρει τη θέση C(t) στη θέση x για κάθε $t > 0$, κάτι το οποίο αναιρεί τον περιορισμό για το 't' που θέτει η ανισότητα $HA < 0$ που εξετάζουμε.

Οπότε $H(x) < 0 \Rightarrow H(x) < H(C)$. Δηλαδή η C είναι καλύτερη, ως προς το κριτήριο κόστους, από τη θέση x όπου υπολογίζεται η H, οπότε η u(x,t) δε μεταφέρει την C στη θέση x απλά

βελτιστοποιεί γύρω από τη x σε κλίμακα $t \leq \frac{1}{2a_0^2} \left| \frac{H}{A} \right|$.

Τελικά η μετατόπιση των ισοϋψών της u(x,t) περιγράφεται από την εξίσωση

$$\dot{u} = \frac{\text{sgn}(n_f^T n_u)}{\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{2At}{H}}} \|\nabla u\| \text{ η οποία, όπως εξηγήθηκε και για την προηγούμενη μέθοδο, αντιστοιχεί}$$

σε μετασχηματισμό απόστασης $r = \text{sgn}(n_f^T n_u) \frac{H}{2A} \left[\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{2At}{H}} - \frac{1}{|a_0|} \right]$ για $A \neq 0$

ή $r = \text{sgn}(n_f^T n_u) |a_0| t$ για $A=0$.

Επιστρέφουμε τώρα στην εξίσωση (1) που προέκυψε από το συνδυασμό της Euler και της HJB για

τη u(x,t): $u_{nn} + n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla u\|} (f_{uu} - f_{nn}) = 0 \Rightarrow u$ και αντικαθιστούμε το

$$A = n_u^T \nabla J n_f^T n_u + \frac{J}{\|\nabla u\|} (f_{uu} - f_{nn}) \text{ οπότε προκύπτει } -u_{nn} = A = -\frac{u_n^T \partial}{a \partial x} (H) = -\frac{1}{a} H_{u_n}$$

Άρα $[u_n]_C^x = \frac{1}{a} [H]_C^x \Rightarrow [\dot{u}]_x^C = [H]_x^C$. Δηλαδή η u(x,t) μετακινεί τις ισοϋψείς της στην κατεύθυνση

μεγιστοποίησης της H, κριτήριο το οποίο χρησιμοποιήθηκε για την επιλογή $H(x) > 0$.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι τις δύο Hamiltonian, αυτή της εξίσωσης HJB και της Αρχής του

Μεγίστου, τις συνδέει η σχέση $H_{HJB} = -H(-p)$ για $p = -\nabla u$

Ξαναγράφουμε τώρα την (1) χωρίς το εσωτερικό γινόμενο με το n_u :

$$\frac{\partial}{\partial x} H^* = 0 \Rightarrow \left[u_{xx} + \nabla J \frac{\nabla^T f}{\|\nabla f\|} + \frac{J}{\|\nabla f\|} (f_{xx} - I f_{mm}) \right] x = 0 \Rightarrow u_{xx} = -\frac{\partial}{\partial x} (J n_f) \Rightarrow [u_x]_C^x = -[J n_f]_C^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_n = [J_C n_f^T(C) + \nabla^T u(C)] n_u(x) - J n_f^T n_u \quad \text{οπότε η HJB γράφεται}$$

$-u_t = a(t)(u_n + J n_f^T n_u) = a(t) n_u(x)^T [J_C n_f(C) + \nabla u(C)]$. Αν θεωρήσουμε ολοκλήρωση κατά μήκος των κάθετων διανυσμάτων των ισοϋψών της $u(x,t)$ $n_u(x) = n_u(C)$, οπότε

$$u_t(C) = -a(t) [J(C) n_f^T(C) n_u(C) + \|\nabla u_C\|] \quad \text{η εξίσωση οπτικής ροής κατά μήκος της ισοϋψούς}$$

$C(t)$ της $u(x,t)$. Οπότε το ολικό διαφορικό της $u(x,t)$ σε κατεύθυνση \hat{r} γράφεται

$$du = dt a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (J n_f^T n_u + \|\nabla u\|) \hat{l}] \cdot \hat{r} \quad \text{όμως αφού } \hat{r} \text{ η κατεύθυνση της διαφορίσης}$$

$$\hat{r} = \frac{d\vec{r}}{dr} \Rightarrow \frac{du}{d\vec{r}} \frac{dr}{dt} = a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (J n_f^T n_u + \|\nabla u\|) \hat{l}] \quad \text{.Όμως } \nabla_{\vec{r}} u = \|\nabla_{\vec{r}} u\| \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{άρα}$$

$$\dot{\vec{r}} \|\nabla_{\vec{r}} u\| = a(t) [\|\nabla u\| \hat{n} - (J n_f^T n_u + \|\nabla u\|) \hat{l}] \quad \text{.Εξίσωση η οποία μεταγράφεται εκφράζοντας την}$$

$\|\nabla_{\vec{r}} u\|$ ως προβολή της ∇u στο \vec{r} , όπως και στην προηγούμενη μέθοδο , στην $\dot{r} = a(t)$ εξίσωση που περιγράφει το μετασχηματισμό απόστασης στον οποίο αντιστοιχεί η $u(x,t)$.

Το αντίστοιχο πρόβλημα ελαχίστου χρόνου γράφεται

$$dr = \frac{\text{sgn}(n_f^T n_u)}{\sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{2At}{H}}} dt \Rightarrow dt = |dr| \sqrt{\frac{1}{a_0^2} + \frac{2At}{H}}$$

άρα $\|\nabla T\|^2 = \frac{1}{a_0^2} + \frac{2AT}{H}$. Για $a_0 \rightarrow \infty$ θα πρέπει να θεωρήσουμε θετικό το γινόμενο AH

(δηλαδή οι μεταβολές προσήμου της H να ακολουθούν τις μεταβολές προσήμου της A) οπότε τότε

ορίζεται η εξίσωση ελαχίστου χρόνου $\|\nabla \sqrt{2T}\| = \left| \frac{A}{H} \right|$. Επιλύσιμη υπολογιστικά με τη μέθοδο

Fast Marching [7] .

Γ. Προσαρμογή παραμετροποιημένου μοντέλου σε άγνωστα δεδομένα

Το πρόβλημα της προσαρμογής ενός μοντέλου $M = \{\sigma^0, t^0, \lambda, S\}$, που προέκυψε από εικόνα ή πληροφορία 'I', ώστε να αναπαριστά την πληροφορία μιας δοσμένης εικόνας 'φ' μπορεί να αντιμετωπιστεί αναλυτικά με τη διαχείρισή του ως πρόβλημα μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας που ορίζεται από τη συνάρτηση πιθανότητας $U(f|M) \Rightarrow L(M) = \ln(U(f|M))$. Θεωρούμε την κατανομή $p(\varphi)$ και την κατανομή της ένωσης $q(f \wedge \varphi|M)$ οπότε

$$U(I|M) = \int q(I \wedge \varphi|M) d\varphi = \int p(\varphi) \frac{q(I \wedge \varphi|M)}{p(\varphi)} d\varphi \Rightarrow \ln(U(I|M)) = \ln \left[\int p(\varphi) \frac{q(I \wedge \varphi|M)}{p(\varphi)} d\varphi \right]$$

Όμως για $0 \leq x_i \leq 1$ $\prod_i x_i < \sum_i x_i \Rightarrow \ln \left(\prod_i x_i \right) = \sum_i \ln(x_i) < \ln \left(\sum_i x_i \right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_i x_j \ln(x_i) \leq \sum_i \ln(x_i) < \ln \left(\sum_i x_i \right)$ οπότε αντικαθιστώντας στην πιθανοφάνεια γράφουμε

$$L(M) = \ln(U(I|M)) = \ln \left[\int p(\varphi) \frac{q(I \wedge \varphi|M)}{p(\varphi)} d\varphi \right] > \int p(\varphi) \ln \left(\frac{q(I \wedge \varphi|M)}{p(\varphi)} \right) d\varphi = V(p, q(M))$$

Άρα η $V(p, q(M))$ είναι ένα κάτω φράγμα της πιθανοφάνειας ενώ μπορεί να γραφεί και με τη μορφή μέσης τιμής $V(p, q(M)) = E[\ln(q(f \wedge \varphi|M))] - E[\ln(p(\varphi))]$.

Όμως $q(I \wedge \varphi|M) = \frac{P(I \wedge \varphi \wedge M)}{P(M)} = P(\varphi|I \wedge M) \frac{P(I \wedge M)}{P(M)} = P(\varphi|I \wedge M) P(I|M)$ άρα

$$V(p, q(M)) = E[\ln(P(\varphi|I \wedge M))] + E[\ln(P(I|M))] - E[\ln(p(\varphi))] = V(p(\varphi), P(\varphi|I \wedge M)) + E[\ln(P(I|M))] \quad \mu\epsilon \quad V(p(\varphi), P(\varphi|I \wedge M)) < 0$$

Αντί της μεγιστοποίησης της πιθανοφάνειας $L(M)$ μεγιστοποιείται το κάτω φράγμα της $V(p, q(M))$ μέσω του αλγορίθμου EM (Expectation Maximization), ο οποίος συνοψίζεται στην αναδρομική διαδικασία :

E - βήμα : $p_{n+1} = \underset{p}{\operatorname{argmax}} [V(p, q(M_n))]$, M - βήμα : $M_{n+1} = \underset{M}{\operatorname{argmax}} [V(p_{n+1}, q(M))]$

Από τον κανόνα του Bayes και το νόμο ολικής πιθανότητας ισχύει

$$P(\varphi|I \wedge M) = \frac{P(I|\varphi \wedge M) P(\varphi|M)}{\int P(I|\varphi \wedge M) P(\varphi|M) d\varphi} \quad \text{και όταν } p(\varphi) \rightarrow P(\varphi|I \wedge M) = p^* \text{ μεγιστοποιείται η}$$

$$V(p(\varphi), P(\varphi|I \wedge M)) \text{ . Άρα στο E - βήμα εκτελείται η ανανέωση } p_{n+1} = \frac{P(I|\varphi \wedge M_n) p_n}{\int P(I|\varphi \wedge M_n) p_n d\varphi} \text{ .}$$

Οπότε $V(p_{n+1}, q(M)) = \int p_{n+1} \ln \left(\frac{q(\varphi, I|M)}{p_{n+1}} \right) d\varphi \Rightarrow M_{n+1} = \underset{M}{\operatorname{argmin}} [V(p_{n+1}, q(M))] =$

$$= \underset{M}{\operatorname{argmin}} \left[\int p_{n+1} \ln(q(\varphi, I|M)) d\varphi \right] = \underset{M}{\operatorname{argmin}} \left[\int p_{n+1} \ln(P(I|\varphi \wedge M) P(\varphi|M)) d\varphi \right]$$

Θεωρούμε γνωστή την $P(I|\varphi \wedge M) = \exp(F(I; \varphi, \mu(M))) \Rightarrow \ln(P(I|\varphi \wedge M)) = F_I(\varphi, \mu(M))$

όπου $\vec{\mu}(M)$ το διάνυσμα των παραμέτρων που ορίζονται για να αντιστοιχίσουν σε πιθανότητα το μοντέλο M. Άρα το πρόβλημα της μεγιστοποίησης τώρα μεταγράφεται $\underset{\mu}{\operatorname{argmax}} [F(\varphi, \mu)]$.

Θεωρούμε

$$\underset{\mu}{\operatorname{argmax}} \left[\int p(\varphi) F(\varphi, \mu) d\varphi \right] = \int p(\varphi) F(\varphi, \hat{\mu}) d\varphi = g^*(\hat{\mu}) = \underset{\mu}{\operatorname{argmax}} [\lambda_\mu \lambda_\varphi - g(\lambda_\varphi)] \Rightarrow p(\varphi) F(\varphi, \hat{\mu}) = \frac{\partial}{\partial \varphi} g^*(\hat{\mu})$$

Όμως για το μετασχηματισμό Legendre ισχύει $D g^* = [D g]^{-1} \Rightarrow \frac{d g^*}{d \lambda_{\hat{\mu}}} = \lambda_\varphi$ επομένως γράφουμε

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} g^*(\hat{\mu}) = \frac{d g^*}{d \lambda_{\hat{\mu}}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \lambda_{\hat{\mu}} = \lambda_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \lambda_{\hat{\mu}} = p(\varphi) F(\varphi, \hat{\mu}) \text{ .}$$

Ένας τρόπος να παράγουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της δεδομένης πληροφορίας $F_I(\varphi, \mu) = P(I|\varphi \wedge \mu)$ είναι δημιουργώντας “συναρτήσεις αξιολόγησης” για τις εικόνες που αντιστοιχούν στα I, M – έστω λ_I, λ_μ – και ένα μετασχηματισμό της 'φ', ώστε στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε πράξεις συνόλων μεταξύ των I, M, φ με πράξεις μεταξύ των συναρτήσεων συμμετοχής. Κρίσιμο στοιχείο για την ανταπόκριση των συναρτήσεων αξιολόγησης που θα επιλεγούν στο πρόβλημα μεγιστοποίησης που προσπαθούμε να λύσουμε είναι να ισχύει ο νόμος του Bayes $\lambda(\varphi|\mu) = \frac{\lambda(\varphi \wedge \mu)}{\lambda_\mu}$.

Επιλέγουμε ως υλοποίηση της $\lambda(\varphi|\mu)$ την εναλλαγή των φίλτρων ανακατασκευής τύπου opening και closing των συναρτήσεων $\lambda_\varphi, \lambda_\mu$: $\lambda(\varphi|\mu) = \frac{A(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)}{\rho^+(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)} = \frac{\rho^+(\lambda_\varphi|\rho^-(\lambda_\varphi|\lambda_\mu))}{\rho^+(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{d_n}$ όπου $u_{n+1} = \varepsilon(u_n|\delta(u_n|\lambda_\mu))$, $u_0 = \lambda_\varphi$ και $d_{n+1} = \delta(d_n|\lambda_\mu)$, $d_0 = \lambda_\mu$ [10].

Οπότε $\lambda(I|\varphi \wedge \mu) = \frac{A(\lambda_I|\lambda_\mu \lambda(\varphi|\mu))}{\rho^+(\lambda_I|\lambda_\mu \lambda(\varphi|\mu))} = \frac{A\left(\lambda_I \left| \frac{\lambda_\mu A(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)}{\rho^+(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)} \right.\right)}{\rho^+\left(\lambda_I \left| \frac{\lambda_\mu A(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)}{\rho^+(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)} \right.\right)}$. Οπότε η εξίσωση για την εξέλιξη

της συνάρτησης των παραμέτρων $\frac{\partial}{\partial \varphi} \lambda_\mu = \frac{p(\varphi)}{\lambda_\varphi} \lambda(I|\varphi \wedge \mu)$ επιλέγοντας $\lambda_\varphi = p(\varphi) = p_{n+1}$ τότε

$\frac{\partial}{\partial \varphi} \lambda_\mu = \lambda(I|\varphi \wedge \mu)$. Θεωρώντας πως η συνάρτηση αξιολόγησης μεταβάλλεται μόνο με τη μεταβολή του $\varphi(x)$ ($\mu = \mu(\varphi)$) $\|\nabla \lambda_\mu\| = \lambda(I|\varphi \wedge \mu) \|\nabla \varphi\|$.

Όμως $\lambda_\mu \lambda(\varphi|\mu) = \lambda_\varphi \lambda(\mu|\varphi) \Rightarrow \lambda_\mu = \lambda_\varphi \frac{A(\lambda_\mu|\lambda_\varphi) \rho^+(\lambda_\varphi|\lambda_\mu)}{A(\lambda_\varphi|\lambda_\mu) \rho^+(\lambda_\mu|\lambda_\varphi)}$.

Άρα το M – Βήμα του αλγορίθμου γράφεται $\lambda_\mu^{n+1} = p_{n+1} \frac{A(\lambda_\mu^*(n)|\lambda_\varphi) \rho^+(\lambda_\varphi|\lambda_\mu^*(n))}{A(\lambda_\varphi|\lambda_\mu^*(n)) \rho^+(\lambda_\mu^*(n)|\lambda_\varphi)}$

$\|\nabla \lambda_\mu^*(n+1)\| = \lambda(I|\varphi \wedge \mu) \|\nabla \varphi\|$. Από την τελική συνάρτηση παραμέτρων $\lambda_\mu^*(n+1)$ προσδιορίζονται οι παράμετροι $\mu(n+1)$ από τις θέσεις τοπικών μεγίστων της $\lambda_\mu^*(n+1)$.

Κεφάλαιο 5 : Συμπεράσματα

Η διερεύνηση που έγινε σε αυτή την εργασία για τη δυνατότητα ανάπτυξης ενός αλγορίθμου αναγνώρισης για ακτινογραφικές απεικονίσεις βιολογικών δομών και κυρίως του ανθρώπινου σκελετού , έδειξε πως η πολυπλοκότητα στην απεικόνιση των δομών αυτών , καθιστά τη μη επιβλεπόμενη και ανεξάρτητη μοντέλου επεξεργασία και ανάλυσή τους αναποτελεσματική στην περιγραφή της , αναγκαίας για την αναγνώριση , πληροφορίας . Το γεγονός αυτό οφείλεται στην ασαφή περιγραφή των δομών , που δημιουργείται από το μονοσήμαντο τρόπο με τον οποίο αυτές απεικονίζονται στην ακτινογραφία , μόνο από το βαθμό απορρόφησης της σύστασής τους σε ακτινοβολία γ. Έτσι αυτή φειδωλή περιγραφή των σύνθετων σε διάταξη και σύσταση βιολογικών δομών που σχηματίζουν τον ανθρώπινο σκελετό παράγει μια εξαιρετικά πολύπλοκη και , για το λόγο αυτό , εξαιρετικά ευαίσθητη σε θόρυβο απεικόνιση της πληροφορίας για τις δομές αυτές .

Η απόλυτη επιτυχία ωστόσο του εξειδικευμένου γιατρού στην αναγνώριση των ακτινογραφιών και η σύνδεση της διαδικασίας αυτής με τη δομημένη και αυστηρά επιστημονική διαδικασία της διάγνωσης , υποδεικνύει πως πυρήνας αυτού του , υψηλού βαθμού γενίκευσης , αλγορίθμου αναγνώρισης είναι η γνώση του γιατρού , οργανωμένη σε αφαιρετικά μοντέλα για τη θέση και το σχήμα των δομών που αναγνωρίζει . Η μεταγραφή του αλγορίθμου αυτού σε υπολογιστική διαδικασία πρέπει να αντιμετωπίσει το πρόβλημα της έγκυρης και πλήρους περιγραφής της πρότερης γνώσης σε αναλυτικά μοντέλα , καθώς η αφαίρεση που έκανε ο γιατρός οργανώνοντας τη γνώση του σε διαδικασία είναι πιθανό να περιέχει ατελείς επαγωγές , οι οποίες και δε μπορούν να απεικονιστούν σε έγκυρες μαθηματικά διαδικασίες .

Ωστόσο είναι δυνατό να περιγραφεί ένας αποτελεσματικός υπολογιστικός αλγόριθμος αν σε κατάλληλη δομή για την περιγραφή της πληροφορίας της εικόνας χρησιμοποιηθεί ως εξωγενής παράγοντας η πρότερη γνώση και μια προσέγγιση των μοντέλων που χρησιμοποιεί ο γιατρός για την προβολή της γνώσης αυτής στην εκάστοτε ακτινογραφία .

Ακόμη , η εξάρτηση της αναγνώρισης από το σκοπό της διάγνωσης , πιθανά επιτρέπει τη γενίκευση του αλγορίθμου αναγνώρισης σε αλγόριθμο αναγνώρισης – διάγνωσης , θεωρώντας το επιτυχημένο σχήμα για την αναγνώριση ως διάγνωση με δεδομένη την απουσία τραύματος . Ωστόσο μόνη η αναγνώριση στηρίζεται ήδη σε μια αλληλουχία παρατήρησης και πρότερης γνώσης ιδιαίτερα σύνθετη στην απεικόνισή της σε υπολογιστικό αλγόριθμο . Η γενίκευσή της σε διαγνωστική διαδικασία θα πρέπει να αντιμετωπίσει τον κεντρικό ρόλο, πλέον, αυτού που περιγράφηκε ως ατελής επαγωγή, και ως κριτήριο επιλογής και αξιολόγησης της γνώσης και των συμπερασμάτων της και όχι μόνο ως παράμετρος οργάνωσής της .

Βιβλιογραφία – Αναφορές

- [1] A.G.Amitha Perera , “Robust Region Extraction : Extracting Model and Domain Parameters in the Presence of Noise and Multiple Populations”, Rensselaer Polytechnic Institut , TroyNY,2005
- [2] Π . Μαραγκός , “Ανάλυση Εικόνων και Όραση Υπολογιστών” , Εκδόσεις ΕΜΠ , 2005.
- [3] J.F. Canny , “A computational approach to edge detection” , IEEE Trans Pattern Analysis and Machine intelligence, 8(6) : 679-698, 1986
- [4] H . Heijmans , P. Maragos , “Lattice calculus of the morphological slope transform”, Signal Processing , Elsevier , 59 : 17 – 42 , 1997
- [5] H . Heijmans , “Morphological Scale-Spaces , Scale-Invariance , and Lie Groups”
- [6] Arthur Dempster, Nan Laird, and Donald Rubin. "Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm". *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(1):1–38, 1977
- [7] J.A. Sethian , “A fast marching level set method for monotonically advancing fronts”, Proc. National Academy of Science , 1995
- [8] A.Sofou, P.Maragos , “PDE Based Modelling of Image Segmentation Using Volumic Flooding”, Proc. ICIIP-2003, Barcelona, Spain
- [9] M . Couprie , Gilles Bertrand ,”Topology Preserving Alternating Sequential Filter for Smoothing 2D and 3D Objects”
- [10] P.Maragos , “Algebraic and PDE approaches for Lattice Scale – Spaces with Global Constraints” , International Journal of Computer Vision 52(2/3),121-137,2003 .
- [11] CF Westin, L M. Lorigo, O. Faugeras, W.L.Grimson, Steven Dawson, Alexander Norbash, Ron Kikinis, “Segmentation by Adaptive Geodesic Active Contours”