ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Χρήση Μεταβολικού Λογισμού για τη Μελέτη Πολυδιάστατων Σολιτονίων σε Μέσα Δευτέρας Αρμονικής

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΦΑΚΙΑΝΑΚΗΣ

Επιβλέπων : Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2007

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Χρήση Μεταβολικού Λογισμού για τη Μελέτη Πολυδιάστατων Σολιτονίων σε Μέσα Δευτέρας Αρμονικής

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΙΩΑΝΝΟΥ ΣΦΑΚΙΑΝΑΚΗΣ

Επιβλέπων : Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 5η Ιουλίου 2007.

....	....	....
Κυριάκος Χιτζανίδης Καθηγητής ΕΜΠ	Ηλίας Γλύτσης Καθηγητής ΕΜΠ	Ιωάννης Βομβορίδης Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιούλιος 2007

<u>Περίληψη</u>

Τα οπτικά σολιτόνια αποτελούν ένα θέμα με έντονο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με τη μελέτη πολυδιάστατων σολιτονίων σε μέσα δευτέρας αρμονικής. Συγκεκριμένα εξετάζουμε διάφορες περιπτώσεις εντοπισμένων σολιτονίων και οπτικών δινών και δίνουμε προσεγγιστικές αναλυτικές λύσεις στο πρόβλημα της μορφής και της δυναμικής εξέλιξης τέτοιων δομών. Με χρήση της μεταβολικής μεθόδου μελετούμε σολιτόνια χωρίς στροφορμή σε δύο και τρεις διαστάσεις και επιπλέον εξειδικεύουμε στις περιπτώσεις χωροχρονικά ασύμμετρων σολιτονίων και σολιτονίων με άνισες ταχύτητες ομάδας στη δεύτερη αρμονική. Ακόμα ασχολούμαστε με τα περιστρφόμενα σολιτόνια σε μέσα τόσο με ανταγωνιστικές όσο και επαγόμενες μη γραμμικότητες. Τέλος προτείνουμε μία πιθανή μεταβολική προσέγγιση στο πρόβλημα της αζιμουθιακής αστάθειας των περιστρεφόμενων σολιτονίων.

Λέξεις κλειδιά: Δεύτερη Αρμονική, Τετραγωνικά Μέσα, Οπτικά Σολιτόνια, Μεταβολική Μέθοδος, Χωρικά-Χωροχρονικά Σολιτόνια, Περιστρεφόμενα Σολιτόνια, Οπτικές Δίνες

Abstract

Optical solitons are a topic of intense theoretical and practical interest. In this diploma thesis we concentrate on multidimensional solitons in second harmonic media. In particular we examine various cases of localized solitons and optical vortices and acquire approximate analytical solutions for the form and dynamical evolution of these structures. My using the variational method we study non-spinning solitons in two and three dimensions and furthermore specialize on the cases of spatiotemporally asymmetric solitons as well as solitons exhibiting a group velocity mismatch. We also work on spinning solitons in media with competing as well as engineered nonlinearities. Finally we propose a possible variational approach to the problem of the azimuthal instability of spinning solitons.

Keywords: Second Harmonic, Quadratic Media, Optical Solitons, Variational Method, Temporal-Spatiotemporal Solitons, Spinning Solitons, Optical Vortices, Light Bullets

Αφιερώνεται στη μνήμη του Σωφρόνιου Παπαδόπουλου,

εξαίρετου επιστήμονα, ταλαντούχου δασκάλου, υπέροχου ανθρώπου.

Ευχαριστίες

Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κ. Χιτζανίδη για την καθοδήγηση που μου προσέφερε, την εμπιστοσύνη που μου έδειξε και την ελευθερία που μου έδωσε στην ανάπτυξη του θέματος καθ' όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας. Ευχαριστώ επίσης τους καθηγητές των Σχολών ΗΜΜΥ και ΕΜΦΕ του ΕΜΠ με τους οποίους συνεργάστηκα στη διάρκεια των σπουδών μου και οι οποίοι μου προσέφεραν πολύτιμες γνώσεις και συμβουλές για το μέλλον μου. Θα προσπαθήσω να σταθώ αντάξιός τους στη μελλοντική επιστημονική διαδρομή μου.

Επίσης η συμβολή και η στήριξη των γονέων μου υπήρξε καθοριστική καθ' όλη τη διάρκεια της μέχρι τώρα εξέλιξής μου, επιστημονικής και μη. Τέλος αλλά όχι τελευταία νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω την Όλγα για τη συμπαράσταση, την υπομονή και την αγάπη της.

"It does not do harm to the mystery to know a little about it.
For far more marvellous is the truth than any artist of the past imagined.
What men are poets that can speak of Jupiter if he were like a man, but if he is an immense spinning sphere of methane and ammonia must be silent?"

Richard P. Feynman

Acknowledgements

In this point I would like to thank my supervisor Prof. K. Hizanidis for the guidance that he offered to me, the confidence that me showed in me and also the freedom of choosing a path that he gave me during the diploma thesis. I also thank the professors of the ECE and AMPS Departments of NTUA with which I collaborated during my study and who offered me precious knowledge and advice for my future. I will try to stand worthy of their inspiration in my future scientific career.

Also the contribution and the support of my parents has been decisive throughout my scientific and personal endeavours. Last but no least I feel the need to thank Olga for her support, patience and love.

"It does not do harm to the mystery to know a little about it.
For far more marvellous is the truth than any artist of the past imagined.
What men are poets that can speak of Jupiter if he were like a man, but if he is an
immense spinning sphere of methane and ammonia must be silent?"

Richard P. Feynman

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Θεωρητικό Υπόβαθρο

1 Μη Γραμμική Οπτική και Σολιτόνια....................10

1.1 Πόλωση και Δεύτερη Αρμονική....................11

1.2 Σολιτόνια: Ιστορία και Μη Γραμμική Εξίσωση Shroedinger....................13

2 Μεταβολική Μέθοδος....................15

Κυρίως Μέρος Εργασίας

1 Μη περιστρεφόμενα σολιτόνια....................19

1.1 Μία εγκάρσια χωρική διάσταση: (2+1)D....................21

1.1.1 Παλμοί με χωροχρονική συμμετρία μορφής: "Ελλειπτικά σολιτόνια".24

1.1.2 Παλμοί άνευ χωροχρονικής συμμετρίας μορφής: "Ασύμμετρα σολιτόνια"....................35

1.2 Δύο εγκάρσιες χωρικές διαστάσεις: (3+1)D....................40

1.2.1 Σολιτόνια με ίσες ταχύτητες ομάδας στις δύο αρμονικές....................41

1.2.2 Σολιτόνια με άνισες ταχύτητες ομάδας στις δύο αρμονικές: Συμπερίληψη χρονικής απομάκρυνσης και μη τετριμμένης φάσης παλμών....................50

2 Περιστρεφόμενα σολιτόνια....................57

2.1 Μέσα με ανταγωνιστικές μη γραμμικότητες....................58

2.1.1 Χωρικά σολιτόνια....................59

2.1.2 Χωροχρονικά σολιτόνια....................62

2.2 Χωρικά σολιτόνια σε μέσα με κατασκευασμένες μη γραμμικότητες (engineered nonlinearities)....................65

2.3 Περιστρεφόμενα σολιτόνια με αζιμουθιακή διαμόρφωση: Προτεινόμενο Ansatz....................68

Βιβλιογραφία....................73

Θεωρητικό Υπόβαθρο

Η καθημερινή πρακτική καθώς και η συντριπτική πλειοψηφία των φυσικών συστημάτων που έχει συναντήσει κανείς κατά τη διάρκεια των βασικών σπουδών του, είναι προσανατολισμένα στη μελέτη του φυσικού κόσμου με τη χρήση γραμμικών μοντέλων. Ωστόσο η γραμμική προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ότι ισχύει μόνο υπό συγκεκριμένες συνθήκες, όπως για παράδειγμα όταν το επιβαλλόμενο αίτιο είναι μικρής έντασης.

Η μελέτη των μη γραμμικοτήτων κατά τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (φωτός) ονομάζεται μη γραμμική οπτική και βρίσκεται στο επίκεντρο του ενδιαφέροντος τόσο για τη μαθηματική της ομορφιά, όσο και για το πλήθος των εφαρμογών της σε θέματα τεχνολογιών αιχμής που αφορούν άμεσα την καθημερινή ζωή.

Στις παραγράφους που ακολουθούν παραθέτουμε τις πιο βασικές έννοιες των σολιτονίων, έτσι ώστε η εισαγωγή στο κύριο μέρος της εργασίας να είναι πιο ομαλή. Ο αναγνώστης που έχει ήδη μία επαφή με το θέμα μπορεί κάλλιστα να παραλείψει το θεωρητικό μέρος.

1. Μη Γραμμική Οπτική και Σολιτόνια

Για να κάνουμε την κατανόηση των αποτελεσμάτων της εργασίας εύκολα κατανοητά θα προβούμε σε μία σύντομη επισκόπηση της ιστορίας και της θεωρίας των σολιτονίων και ειδικά σε οπτικά συστήματα. Λόγω του μεγάλου όγκου των πληροφοριών που αφορούν τη μη γραμμική οπτική και τα σολιτόνια, ο οποίος δεν είναι δυνατόν να ενσωματωθεί σε μία διπλωματική εργασία και επειδή σκοπός είναι η προσοχή του αναγνώστη να εστιαστεί περισσότερο στο Κύριο Μέρος της εργασίας, στο οποίο αναπτύσσονται οι μέθοδοι και τα αποτελέσματα της εργασίας, δε θα προβούμε σε εκτενείς αναφορές σε αυτό το σημείο. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για κάτι τέτοιο μπορεί να αναζητήσει περισσότερες πληροφορίες στην πλούσια βιβλιογραφία που υπάρχει, καθώς επίσης και σε παλαιότερες διπλωματικές εργασίες και διδακτορικές διατριβές του εργαστηρίου Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και Μη Γραμμικής Οπτικής της Σχολής Η.Μ.&Μ.Υ. του ΕΜΠ.

1.1 Πόλωση και Δεύτερη Αρμονική

Για να κατανοήσει κανείς τη συμπεριφορά των μη γραμμικών οπτικών υλικών οφείλει να ξεκινήσει τη μελέτη από τη Φυσική των διηλεκτρικών, μιας και τα οπτικά υλικά εντάσσονται σε αυτή την κατηγορία. Κατά τα γνωστά η απόκριση των διηλεκτρικών σε ασθενές ηλεκτρικό πεδίο στατικό ή χαμηλής συχνότητας δίνεται από την πολωσιμότητα $P=\varepsilon_0 \chi E$. Η απόκριση αυτή, αφού στα διηλεκτρικά δεν υπάρχουν ελεύθερα ηλεκτρόνια, πρέπει να αναζητηθεί στα άτομα που αποτελούν το υλικό. Συγκεκριμένα υπάρχουν τρεις μηχανισμοί για την εξήγηση και τον υπολογισμό της πολωσιμότητας (οι οποίοι σε πρώτη φάση μπορούν να γίνουν χωρίς τη χρήση του φορμαλισμού της κβαντομηχανικής). Η μετατόπιση του πυρήνα και του ηλεκτρονιακού νέφους επάγει διπολική (ή πολυπολική) μαγνητική ροπή στα άτομα, η οποία εξαρτάται από το ηλεκτρικό πεδίο και υπάρχει μόνο όσο υπάρχει το πεδίο. Αντίστοιχη επίδραση έχει η απομάκρυνση των ιόντων ενός ιοντικού στερεού από τις θέσεις ισορροπίας τους στο κρυσταλλικό πλέγμα. Αντίθετα στα μοριακά στερεά είναι δυνατόν τα μόρια να επιδεικνύουν μαγνητική ροπή, η οποία να προσανατολίζεται κατάλληλα με την εφαρμογή εξωτερικού πεδίου. Στη σχέση που γράψαμε παραπάνω για την πολωσιμότητα (όπως και στους συνήθεις υπολογισμούς που γίνονται με βάση κλασσικά μοντέλα) η πολωσιμότητα εξαρτάται γραμμικά από το πεδίο. Αυτό περιγράφει ικανοποιητικά την πραγματικότητα στην περίπτωση που το επιβαλλόμενο πεδίο είναι ασθενές (ο ορισμός του "ασθενούς" πεδίου είναι διαφορετικός για κάθε υλικό – ακόμα και για το κενό). Στη γενική περίπτωση οφείλουμε να ορίσουμε την πολωσιμότητα ως μία πολυωνυμική συνάρτηση του πεδίου, δηλαδή $P=aE+bE^2+cE^3+\ldots$. Στη συνήθη (γραμμική) περίπτωση μόνο το a θεωρείται διάφορο του μηδενός. Ανάλογα με το ποιον όρο από τους υπόλοιπους θεωρούμε σημαντικό, το υλικό έχει την ανάλογη ιδιότητα και ονομασία.

Στην περίπτωση συμμετρικών κρυστάλλων ίσα και αντίθετα πεδία πρέπει να παράγουν ίση και αντίθετη πόλωση. Συνεπώς ο όρος b μηδενίζεται. Γενικά το υλικό έχει συμπεριφορά που καθορίζεται από τον πρώτο σημαντικό μη γραμμικό όρο της πολωσιμότητας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα ασχοληθούμε με μέσα, στα οποία η κύρια μη γραμμική συμπεριφορά είναι ο όρος της δευτέρας αρμονικής, δηλαδή η περίπτωση όπου η επιβολή πεδίου συχνότητας ω γεννά εντός του κρυστάλλου πεδίο συχνότητας 2ω, με αποτέλεσμα τα δύο αυτά πεδία (η πρώτη και η δεύτερη αρμονική) να συνυπάρχουν και να αλληλεπιδρούν. Τα μέσα αυτά ονομάζονται και τετραγωνικά (quadratic).

1.2 Σολιτόνια: Ιστορία και Μη Γραμμική Εξίσωση Shroedinger

Η πρώτη παρατήρηση κυμάτων που σήμερα ονομάζονται Σολιτόνια έγινε από τον J.S. Russell το 1834. Ο Russell ήταν αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε Ναυπηγός Μηχανικός και παρατήρησε ένα κυματισμό σε αβαθές κανάλι στη Σκωτία, ο οποίος (αφού τον ακολούθησε για μεγάλη απόσταση παράλληλα στην κοίτη του ποταμού με το άλογό του) δε φάνηκε να αλλάζει μορφή ή να εξασθενεί.

Η μελέτη της μαθηματικής και φυσικής δομής των σολιτονίων άργησε να μελετηθεί. Συγκεκριμένα το μαθηματικό εργαλείο της Ανάστροφης Σκέδασης (το αντίστοιχο του μετασχηματισμού Fourier στην περίπτωση μη γραμμικών κυμάτων) αναπτύχθηκε τη δεκαετία του 1960 και ο όρος σολιτόνια δόθηκε το 1965, για να αναδείξει τις “σωματιδιακές” ιδιότητες αυτών των κυματοπακέτων, συγκεκριμένα την αναλλοίωτη διάδοση, τη διατήρηση της στροφορμής και τη συμπεριφορά στις συγκρούσεις.

Τα σολιτόνια εμφανίζονται σε διάφορους τομείς της φυσικής, όπου η μη γραμμικότητα παίζει ρόλο, όπως η ρευστοδυναμική (τα κύματα του Russell), το πλάσμα, η οπτική, η ηλεκτροδυναμική, η υπεραγωγιμότητα, ακόμα και η βαρύτητα και η Σχετικιστική Κβαντική Θεωρία Πεδίου (Quantum Field Theory).

Το πρώτο είδος οπτικού μη γραμμικού μέσου το οποίο μελετήθηκε εκτενώς είναι το μέσο τύπου Kerr, στο οποίο ο δείκτης διάθλασης εξαρτάται από την ένταση του πεδίου. Στην περίπτωση αυτή η διάδοση των σολιτονίων στη γενική χωχοχρονική περίπτωση περιγράφεται από την εξίσωση: $iu_z + \nabla^2 u + u_{tt} + \kappa |u|^2 u = 0$. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται Μη Γραμμική Εξίσωση Schroedinger (NLSE), καθώς η μορφή της θυμίζει έντονα την Εξίσωση Schroedinger της κβαντομηχανικής.

Η γνώση της NLSE είναι σημαντική για τη μελέτη των σολιτονίων σε μέσα δευτέρας αρμονικής. Κατ' αρχάς μιας και τα σολιτόνια σε μέσα τύπου Kerr έχουν μελετηθεί εκτενώς είναι απαραίτητο για κάποιον να κατανοήσει αυτά προτού προχωρήσει στα τετραγωνικά μέσα. Επίσης υπό συνθήκες στα τετραγωνικά μέσα μπορεί η απόκριση να τείνει να περιγραφεί από εξίσωση τύπου Kerr. Τέλος ένα ενδιαφέρον αντικείμενο της μελέτης των τετραγωνικών σολιτονίων είναι η συνύπαρξη της τετραγωνικής μη γραμμικότητας με μη γραμμικότητα τύπου Kerr.

2. Μεταβολική Μέθοδος

Η μεταβολική μέθοδος είναι δανεισμένη από την Αναλυτική Μηχανική. Σε αυτή την περίπτωση η Λαγκρανζιανή ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ κινητκής και δυναμικής ενέργειας, δηλαδή L=T-V. Αν θεωρήσουμε ότι το σύστημα δεν υπόκειται σε μη συντηρητικές δυνάμεις (όπως τριβή), τότε η δυναμική του συστήματος περιγράφεται από τις εξισώσεις Euler-Lagrange $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}-\frac{\partial L}{\partial q}=0$, όπου q είναι οι γενικευμένες συντεταγμένες του συστήματος και t ο χρόνος, στον οποίο εξελίσσεται το φαινόμενο.

Στην περίπτωση των σολιτονίων, αρχικά γράφουμε μία συνάρτηση, ονομαζόμενη Lagrangian Density, η οποία μέσω εξισώσεων τύπου Euler-Lagrange δίδει τις εξισώσεις τύπου NLSE του συστήματος. Για παράδειγμα ας δούμε την εξίσωση $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_t}-\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}=0$ που δίνει τη σχέση για την πρώτη αρμονική. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση αυτή είναι τύπου Euler-Lagrange, όπου η συνάρτηση u έχει το ρόλο της γενικευμένης θέσης.

Το δεύτερο βήμα είναι η επιλογή μίας υποθετικής μορφής της λύσης για την πρώτη και δεύτερη αρμονική. Επιλέγουμε μία συνάρτηση, αφήνοντας κάποιες παραμέτρους (όπως για παράδειγμα το πλάτος του παλμού), οι οποίες μένουν να καθοριστούν. Αντικαθιστούμε τις υποθετικές αυτές συναρτήσεις, οι οποίες ονομάζονται "Ansatz" (από τα Γερμανικά) στη Lagrangian Density. Κατόπιν ολοκληρώνουμε ως προς τις εγκάρσιες συντεταγμένες του προβλήματος, δηλαδή ως προς x,y,t. Αυτό που απομένει είναι η συνάρτηση Effective Lagrangian, η οποία εξαρτάται από τις ελεύθερες παραμέτρους που έχουμε εισάγει και από τη συντεταγμένη διάδοσης – z.

Σε αυτό το σημείο καταστρώνουμε ένα δυναμικό πρόβλημα με βάση τις εξισώσεις Euler-Lagrange, όπου οι ελεύθερες παράμετροι παίζουν το ρόλο των γενικευμένων συντεταγμένων και η κατεύθυνση z το ρόλο του χρόνου. Αυτή η αντιστοιχία του z με το χρόνο σημαίνει ότι το φαινόμενο που μελετάμε εξελίσσεται κατά μήκος του άξονα z, δηλαδή θεωρούμε ότι η μορφή του παλμού μπορεί να μεταβάλλεται καθώς αυτός διαδίδεται μέσα στο μέσο (π.χ. μία οπτική ίνα). Θέτοντας την εξάρτηση από το z ίση με μηδέν παίρνουμε λύσεις που δε μεταβάλλονται κατά τη διάδοση. Οι παράμετροι αυτές δίνουν την προσεγγιστική μορφή των σολιτονίων που αναζητούμε.

Κυρίως Μέρος Εργασίας

Η παρούσα διπλωματική μπορεί να χωριστεί σε 2 βασικές ενότητες, οι οποίες διαφοροποιούν θεμελιωδώς τις προκύπτουσες λύσεις του φυσικού συστήματος. Εντός αυτών των περιπτώσεων θα προβούμε σε επιμέρους διαφοροποιήσεις, οι οποίες θα προκύψουν από τον αριθμό των παραμέτρων -και ως εκ τούτου των φυσικών φαινομένων- που θεωρούμε ότι λαμβάνουν χώρα στο πρόβλημά μας. Πρέπει να τονίσουμε ότι στόχος της εργασίας είναι -εκτός από τη μελέτη του ίδιου του φυσικού προβλήματος- η δοκιμή και κατηγοριοποίηση των αναλυτικών μεθόδων μελέτης τετραγωνικών σολιτονίων, οι οποίες είναι βασισμένες στη μεταβολική μέθοδο (Variational Method). Ως εκ τούτου αναζητήσαμε αποκλειστικά λύσεις οι οποίες να είναι αναλυτικά επιλύσιμες, δηλαδή τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται να μπορούν να γραφούν με βάση "στοιχειώδεις" συναρτήσεις και μαθηματικές σταθερές. Αυτή η προσέγγιση του προβλήματος, εκτός του ότι ικανοποιεί την τάση του γράφοντος προς τη θεωρία και ειδικότερα την αναλυτική επίλυση φυσικών προβλημάτων, προσφέρει ένα τρόπο να περιγραφεί η δυναμική του συστήματος με χρήση μερικών βασικών χαρακτηριστικών των παλμών, όπως η ένταση, το πλάτος, η διάρκεια, η φάση κλπ. και να εξεταστεί η σημασία καθενός για το φυσικό πρόβλημα. Η φιλοσοφία αυτή με απέτρεψε από το να προβώ σε αριθμητική επίλυση ολοκληρωμάτων και curve fitting των αποτελεσμάτων και των παραμέτρων, γιατί κάτι τέτοιο θα εμπλεκόταν με την όποια μαθηματική απλότητα και αισθητική των εξισώσεων και δε θα προσέφερε κάτι σημαντικό στη μελέτη του προβλήματος, δεδομένων και των χρονικών περιορισμών κατά την εκπόνηση μίας διπλωματικής εργασίας.

Ο πρώτος διαχωρισμός των λύσεων έχει να κάνει με το αν αναζητούμε σολιτόνια με ή χωρίς ιδιοστροφορμή (spin). Η ορολογία αυτή είναι δανεισμένη από τη Μηχανική, όπου το spin μπορεί να οριστεί εύκολα τόσο μαθηματικά, όσο και διαισθητικά. Στη μη γραμμική οπτική, τα περιστρεφόμενα σολιτόνια (spinning solitons/spinning light bullets) μπορούμε να πούμε ότι διαχωρίζονται από τα μη περιστρεφόμενα, επειδή τα πρώτα εμπεριέχουν στην μορφή της κυματοσυνάρτησής τους τον όρο exp(jmθ), όπου θ είναι η γωνία σε κυλινδρικές συντεταγμένες και m είναι θετικός ή αρνητικός ακέραιος. Περισσότερα για τα περιστρεφόμενα σολιτόνια, τόσο σε φορμαλιστικό όσο και σε “φυσικό” επίπεδο θα αναφέρουμε στο οικείο κεφάλαιο.

1. Μη περιστρεφόμενα σολιτόνια

Τα σολιτόνια αυτής της μορφής μπορούν να περιγραφούν (απλοποιημένα) ως εντοπισμένες καταστάσεις φωτός τόσο στο χώρο όσο και στο χρόνο, οι οποίες διαδίδονται ευθύγραμμα κατά μήκος ενός άξονα, ο οποίος στη συνέχεια θα ονομάζεται z.

Η κανονικοποιημένη μορφή του ζεύγους των εξισώσεων που διέπουν τα τετραγωνικά σολιτόνια είναι η εξής:

$$iu_z+\nabla^2 u+u_{tt}-u+\bar{u}\,w=0 \qquad (eq.\,1)$$

$$2\mathrm{i}\mathrm{w}_z+\nabla^2 w+\delta w_{tt}-i\sigma w_t-\gamma w+\frac{1}{2}u^2=0 \qquad (eq.\,2)$$

Αξίζει σε αυτό το σημείο να εξηγήσουμε κάθε όρο των παραπάνω εξισώσεων χωριστά με αναφορά στο φυσικό φαινόμενο που περιγράφει.

- Ο πρώτος όρος και των δύο εξισώσεων περιγράφει τη διάδοση (propagation) κατά μήκος του άξονα z.

- Ο τελεστής της Λαπλασιανής δρα πάνω στης εγκάρσιες χωρικές συνιστώσες, δηλαδή στις κάθετες στον άξονα διάδοσης του παλμού, και περιγράφει τη χωρική διασπορά (disperion) του παλμού.

- Η δεύτερη παράγωγος ως προς το χρόνο περιγράφει τη χρονική διασπορά του παλμού, η οποία είναι προκύπτει από την αρχή της αβεβαιότητας της κυματομηχανικής και αποτελεί το βασικό παράγοντα περιορισμού του εύρους ζώνης των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Το γεγονός ότι η χρονική διασπορά στη δεύτερη αρμονική έχει πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα "δ" αντανακλά το γεγονός ότι η διασπορά στην πρώτη και δεύτερη αρμονική δεν είναι υποχρεωτικά ίδια. Στην θεμελιώδη αρμονική (εξίσωση 1) θεωρούμε ότι έχουμε ανώμαλη διασπορά, ενώ στη δεύτερη αρμονική η διασπορά μπορεί να είναι είτε ομαλή ($\delta<0$) είτε ανώμαλη ($\delta>0$). Γενικά σταθερά σολιτόνια (όπως είναι γνωστό θεωρητικά και πειραματικά από μέσα με κυβική -Kerr- μη γραμμικότητα) υπάρχουν στην περιοχή της ανώμαλης διασποράς. Ένα εντυπωσιακό και ελπιδοφόρο αποτέλεσμα είναι ότι σε μέσα με ομαλή διασπορά στη δεύτερη αρμονική (και ανώμαλη διασπορά στην πρώτη) είναι δυνατόν να διαδοθούν ευσταθή (ή ημιευσταθή) σολιτόνια, με προϋπόθεση η απόλυτη τιμή της διασποράς στη δεύτερη αρμονική να είναι μικρή. Θέτοντας $\delta=1$, η χωρική και χρονική διάσταση του προβλήματος δεν μπορεί να διακριθεί και έτσι οδηγούμαστε στην εκφυλισμένη περίπτωση των συμμετρικών σολιτονίων, τα οποία έχουν μελετηθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία.

➔ Ο όρος $-i\sigma w_t$ είναι το λεγόμενο Group Velocity Mismatch, δηλαδή αντιπροσωπεύει το γεγονός ότι οι ταχύτητες ομάδας της περιβάλλουσας στην πρώτη και δεύτερη αρμονική διαφέρουν (το οποίο ισχύει γενικά στην πραγματικότητα). Η ενσωμάτωσή του στις εξισώσεις οδηγεί στα λεγόμενα Walking Solitons, τα οποία αποτελούν ειδική περίπτωση και ως τέτοια θα μελετηθούν.

➔ Οι όρου u^2 και $\bar{u}w$ είναι οι όροι που προσδιορίζουν την παραμετρική αλληλεπίδραση των δύο κυμάτων. Οι όροι αυτοί είναι και οι πιο σημαντικοί για τη φάση των παλμών και συγκεκριμένα για το μέρος της φάσης που δεν εξαρτάται από τις εγκάρσιες συνιστώσες (χωρικές και χρόνο). Περισσότερα για το συγκεκριμένο θέμα θα πούμε κατά τη διάρκεια της μελέτης των επιμέρους προβλημάτων.

Στο συγκεκριμένο σημείο θα προβούμε σε ένα ακόμη διαχωρισμό περιπτώσεων. Συγκεκριμένα θα διαχωρίσουμε τη μελέτη της μίας εγκάρσιας διάστασης από τις δύο (προφανώς ο διαχωρισμός αυτός δε θα γίνει για τα περιστρεφόμενα σολιτόνια, γιατί σε αυτή την περίπτωση είναι απαραίτητη η ύπαρξη δύο εγκάρσιων χωρικών διαστάσεων).

1.1. Μία εγκάρσια χωρική διάσταση

Η συγκεκριμένη θεώρηση ισχύει στην περίπτωση όπου η γεωμετρία της διάταξης περιορίζει τον παλμό κατά τη μία διεύθυνση, όπως για παράδειγμα σε έναν επίπεδο κυματοδηγό (slab waveguide). Η περίπτωση αυτή είναι ενδιαφέρουσα, επειδή οι επίπεδοι κυματοδηγοί έχουν σήμερα ευρεία χρήση στο σχεδιασμό και την προσθήκη οπτικών στοιχείων σε πλακέτες και την υλοποίηση ολοκληρωμένων οπτικών κυκλωμάτων. Πρόκειται δηλαδή για ένα φαινόμενο που αφορά κυρίως στην επεξεργασία των οπτικών σημάτων.
Σε μία τέτοια γεωμετρία, οι διαστάσεις που ενδιαφέρουν είναι η διάσταση κατά την οποία γίνεται η διάδοση (z), η κάθετη διάσταση κατά την οποία ο κυματοδηγός έχει άπειρο μήκος και ο χρόνος. Η προφανής λογική υπερβολή του άπειρου μήκους δεν είναι ασύμβατη με την πραγματικότητα, μιας και τα σολιτόνια και γενικώς οι εντοπισμένοι παλμοί φωτός περιορίζονται χωρικά και ως εκ τούτου αντιλαμβάνονται τον πεπερασμένο κυματοδηγό περίπου ως εάν ήταν άπειρος.

Σε αυτήν την περίπτωση στις εξισώσεις 1 και 2 που περιγράφουν το γενικό πρόβλημα ο λαπλασιανός τελεστής εκφυλίζεται σε μία δεύτερη παράγωγο κατά μήκος της εγκάρσιας χωρικής διάταξης $\nabla^2 u = \partial^2 u / \partial x^2$ και $\nabla^2 w = \partial^2 w / \partial x^2$.
Μία πρόσθετη παραδοχή που θα γίνει είναι η θεώρηση ίσων ταχυτήτων ομάδας στις δύο συχνότητες, η απουσία δηλαδή του όρου που αντιστοιχεί στην GVM. Η πλήρης μελέτη των εξισώσεων, συμπεριλαμβανομένου του GVM θα γίνει στη συνέχεια για την τρισδιάστατη περίπτωση.

Η Lagrangian Density για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η εξής:

$$L = \frac{i}{2}\left(u\,\bar{u}_z - \bar{u}\,u_z\right) + i\left(w\,\bar{w}_z - \bar{w}\,w_z\right) + \left|u_x^2\right| + \left|w_x^2\right| + \left|u^2\right| + \gamma\left|w^2\right| - \frac{\bar{u}^2 w}{2} - \frac{u^2\,\bar{w}}{2} + \left|u_t^2\right| + \delta\, w_t^2$$

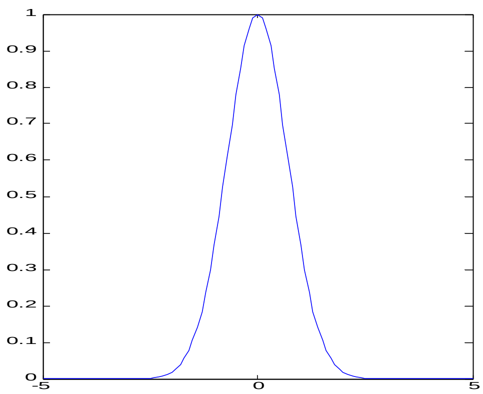
Εισάγοντας τη Lagrangian Density στις σχέσεις

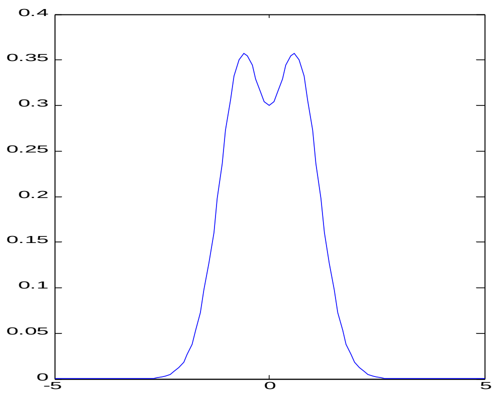
$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_t}-\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}=0 \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_t}-\frac{\partial L}{\partial \bar{w}}=0$$

προκύπτουν οι εξισώσεις 1 και 2, όπως μπορεί να αποδειχθεί με άμεση αντικατάσταση και στοιχειώδεις πράξεις.

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να υποθέσουμε ότι οι λύσεις που αναζητούμε έχουν κάποια (αυθαίρετη) μορφή, δίνοντας ιδιαίτερη βάση στη μαθηματική απλότητα (όσο αυτό είναι δυνατό) αλλά και στην περιγραφή των βασικών ποιοτικών χαρακτηριστικών των παλμών που αναζητούμε. Το μόνο αδιαμφισβήτητο χαρακτηριστικό των παλμών αυτών είναι το γεγονός ότι είναι εντοπισμένοι (localized) τόσο στο χρόνο (περί του μηδενός) όσο και στο χώρο (περί του άξονα z).

Ένα χαρακτηριστικό των παλμών το οποίο τις περισσότερες φορές λαμβάνεται ως αληθές, χωρίς όμως να υπαγορεύεται από κάποιο επιχείρημα βασισμένο στη θεωρία, είναι η θέση του μεγίστου του παλμού. Στη συνέχεια παραθέτουμε δύο εντοπισμένους παλμούς (κατά τη μία διάσταση), οι οποίοι όμως διαφέρουν μορφολογικά ως προς τη θέση του μεγίστου.





Η πρώτη εικόνα είναι μία γκαουσιανή συνάρτηση και αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία το μέγιστο είναι στο μηδέν, ενώ η δεύτερη είναι μία γκαουσιανή πολλαπλασιασμένη επί $1-0.7e^{-r^2}$, έτσι ώστε να εμφανίζονται δύο μέγιστα συμμετρικά κατανεμημένα ως προς το μηδέν. Η συγκεκριμένη συνάρτηση επελέγη εκτός από το γεγονός ότι τροποποιεί τον παλμό με τρόπο που -ποιοτικά- είναι ο επιθυμητός, και επειδή δεν εισάγει πρόσθετες δυσκολίες στην ολοκλήρωση, μιας και χωρίζεται σε μία σταθερά και μία γκαουσιανή, η οποία ενσωματώνεται στην γκαουσιανή περιβάλλουσα του παλμού. Γενικότερα σε περιπτώσεις όπου έχουμε μη γραμμική αλληλεπίδραση κυμάτων, η γκαουσιανή είναι ενδεδειγμένη, επειδή στους όρους της Λαγκρανζιανής, όπου πολλαπλασιάζονται οι περιβάλλουσες, το αποτέλεσμα είναι πάλι μία Γκαουσιανή (με άλλες παραμέτρους), η οποία γνωρίζουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη μόνη της ή πολλαπλασιασμένη με κάποιο πολυώνυμο.

Μιας και τα σολιτόνια που μελετούμε είναι χωροχρονικά στη συνέχεια θα παρουσιάζουμε το αποτέλεσμα της θεώρησης ενός παλμού με το μέγιστο στο μηδέν ως προς τη χωρική συνιστώσα, αλλά με το μέγιστο είτε προς το μηδέν είτε μετατοπισμένο ως προς το χρόνο. Οι δύο αυτές περιπτώσεις μορφολογικά συμμετρικών και ασύμμετρων σολιτονίων έχουν τόσο συναρτησιακή όσο και φυσική διαφορά και ως εκ τούτου θα μελετηθούν χωριστά.

1.1.1. Παλμοί με χωροχρονική συμμετρία μορφής: Ελλειπτικά Σολιτόνια

Σε αυτή την περίπτωση αναζητούμε την απλούστερη μορφή συνάρτησης, η οποία να παράγει παλμούς εντοπισμένους γύρω από την αρχή των συντεταγμένων. Η κλασική τέτοια συνάρτηση είναι η Γκαουσιανή, συνεπώς η υπόθεση λύσης (Ansatz) που επιλέγουμε είναι η εξής:

$$u = Ae^{-a_1 x^2 - b_{1t}^2} e^{j\varphi_1} \qquad \wedge \qquad w = Be^{-a_2 x^2 - b_{2t}^2} e^{j\varphi_2}$$

Θεωρούμε ότι οι παράμετροι $A, B, a_{1,} a_{2,} b_{1,} b_{2,} \varphi_{1,} \varphi_2$ εξαρτώνται από τη θέση z. Η μεταβολική μέθοδος που χρησιμοποιούμε έχει δύο αποτελέσματα. Αν από τις προκύπτουσες εξισώσεις θέσουμε τις παραγώγους ίσες με μηδέν βρίσκουμε τη λεγόμενη στατική λύση (stationary solution), η οποία είναι η συνάρτηση που υποθέσαμε με τις “βέλτιστες” τιμές των ελεύθερων παραμέτρων, έτσι ώστε η λύση να προσεγγίζει κατά το δυνατόν την πραγματική λύση. Στην περίπτωση που επιλέξαμε τη μορφή της συνάρτησής μας κοντά στην πραγματική λύση του προβλήματος, η εισαγωγή της στατικής λύσης (εφόσον είναι ευσταθής) σε ένα κώδικα προσομοίωσης των πλήρων εξισώσεων θα οδηγήσει σε παλμό που είτε θα ταλαντώνεται ελαφρά είτε μετά από κάποιο μήκος διάδοσης θα “κλειδώσει” στην ακριβή λύση και θα συνεχίσει να διαδίδεται κρατώντας αμετάβλητη τη μορφή του. Σε περίπτωση που δεν προβούμε σε μηδενισμό των παραγώγων έχουμε ένα δυναμικό σύστημα, το οποίο αν το τροφοδοτήσουμε με κάποιες αρχικές συνθήκες περιμένουμε η συμπεριφορά του να ομοιάζει με αυτή του σολιτονίου των πλήρων εξισώσεων. Βέβαια το δυναμικό σύστημα μπορεί να μας δώσει μόνο αυτά τα χαρακτηριστικά, με τα οποία το έχουμε εφοδιάσει εμείς, μέσω της επιλογής των παραμέτρων. Είναι εμφανές ότι οι στατικές λύσεις δεν είναι παρά τα στατικά σημεία (stationary points) του δυναμικού συστήματος.

Στην προκειμένη περίπτωση αναμένουμε ένα 8*8 σύστημα πρωτοβάθμιων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό θα δείξουμε ότι μπορεί να αναχθεί σε 7*7, καθώς το σύστημα δεν εξαρτάται όπως είναι αναμενόμενο ξεχωριστά από τις δύο φάσεις των αρμονικών του παλμού, αλλά από κάποιο συνδυασμό τους (δεν υπάρχει απόλυτο σύστημα αναφοράς στη φύση).

Εισάγοντας το Ansatz στη Lagrangian Density και προχωρώντας στις ολοκληρώσεις ως προς τις εγκάρσιες συντεταγμένες καταλήγουμε στην Effective Langangian, η οποία στην περίπτωσή μας είναι η εξής:

$$L = A^2 \varphi_1{}' \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{(a_1 b_1)}} + B^2 \varphi_2{}' \pi \frac{1}{\sqrt{(1_2 b_2)}} + \frac{\pi}{2} a^2 \sqrt{\frac{a_1}{b_1}} + \frac{\pi}{2} B^2 \sqrt{\frac{a_2}{b_2}} + \frac{\pi}{2} A^2 \sqrt{\frac{b_1}{a_1}} + \ldots$$

$$\ldots + \delta \frac{\pi}{2} B^2 \sqrt{\frac{b_2}{a_2}} + A^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}} + \gamma B^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{a_2 b_2}} - \frac{A^2 B \pi}{\sqrt{(2\mathrm{a}_1 + a_2)(2\mathrm{b}_1 + b_2)}} \cos(2\varphi_1 + \varphi_2)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange από τις οποίες θα προκύψει το δυναμικό σύστημα και οι στατικές λύσεις είναι για την περίπτωσή μας οι εξής:

1. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial A_z} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0$ $\quad$ 1′. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial B_z} - \frac{\partial L}{\partial B} = 0$

2. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial a_{1z}} - \frac{\partial L}{\partial a_1} = 0$ $\quad$ 2′. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial a_{2z}} - \frac{\partial L}{\partial a_2} = 0$

3. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial b_{1z}} - \frac{\partial L}{\partial b_1} = 0$ $\quad$ 3′. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial b_{2z}} - \frac{\partial L}{\partial b_2} = 0$

4. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{1z}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0$ $\quad$ 4′. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{2z}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$

Μετά την αντικατάσταση της Effective Lagrangian στις εξισώσεις Euler-Lagrange και την εκτέλεση των πράξεων καταλήγουμε στις παρακάτω οκτώ εξισώσεις:

1. $\varphi_1{}' = \frac{2\mathrm{B}\sqrt{a_1 b_1} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{(2\mathrm{a}_1 + a_2)(2\mathrm{b}_1 + b_2)}} - a_1 - b_1 - 1$

2. $\varphi_1' = \dfrac{4B\sqrt{b_1}\, a_1^{3/2}\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{(2a_1 + a_2)^{3/2}\sqrt{2b_1 + b_2}} + a_1 - b_1 - 1$

3. $\varphi_1' = \dfrac{4B\sqrt{a_1}\, b_1^{3/2}\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{(2b_1 + b_2)^{3/2}\sqrt{2a_1 + a_2}} - a_1 + b_1 - 1$

4. $\dfrac{AA'}{\sqrt{a_1 b_1}} - \dfrac{A^2 a_1'}{4a_1^{3/2}\sqrt{b_1}} - \dfrac{A^2 b_1'}{4b_1^{3/2}\sqrt{a_1}} - \dfrac{2A^2 B\sin(2\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{(2a_1 + a_2)(2b_1 + b_2)}} = 0$

1′. $\varphi_2' = \dfrac{A^2\sqrt{b_2 a_2}\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{2B\sqrt{(2a_1 + a_2)(2b_1 + b_2)}} - \dfrac{a_2}{2} - \dfrac{\delta b_2}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$

2′. $\varphi_2' = \dfrac{A^2\sqrt{b_2}\, a_2^{3/2}\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{2B(2a_1 + a_2)^{3/2}\sqrt{2b_1 + b_2}} + \dfrac{a_2}{2} - \dfrac{\delta b_2}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$

3′. $\varphi_2' = \dfrac{A^2\sqrt{a_2}\, b_2^{3/2}\cos(2\varphi_1 - \varphi_2)}{B(2b_1 + b_2)^{3/2}\sqrt{2a_1 + a_2}} - \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{\delta b_2}{2} - \dfrac{\gamma}{2}$

4′. $\dfrac{2BB'}{\sqrt{a_2 b_2}} - \dfrac{B^2 a_2'}{2a_2^{3/2}\sqrt{b_2}} - \dfrac{B^2 b_2'}{4b_2^{3/2}\sqrt{a_2}} - \dfrac{A^2 B\sin(2\varphi_1 - \varphi_2)}{\sqrt{(2a_1 + a_2)(2b_1 + b_2)}} = 0$

Σε αυτό το σημείο θα σχολιάσουμε μερικά σημεία των παραπάνω εξισώσεων.

- Παρατηρούμε ότι σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις η εξάρτηση των παραγώγων από τις φάσεις των δύο αρμονικών δε γίνεται ανεξάρτητα, αλλά πάντοτε με βάση τον όρο $2\varphi_1 - \varphi_2$. Θα ονομάσουμε αυτόν τον παράγοντα "φ" από εδώ και στο εξής. Το γεγονός αυτό μπορεί να εξηγηθεί τόσο φορμαλιστικά όσο και διαισθητικά. Η φορμαλιστική εξήγησή του έχει να κάνει με τον όρο της Lagrangian Density που γεννά αυτούς τους όρους και ο οποίος είναι αποκλειστικά ο όρος $\dfrac{-\bar{u}^2 w}{2} - \dfrac{u^2 \bar{w}}{2}$, μιας και οι υπόλοιποι όροι δεν εμφανίζουν τη φάση. Από αυτό τον όρο φαίνεται ξεκάθαρα ότι θα προκύψει μία διαφορά των δύο φάσεων (λόγω των συζυγών μιγαδικών που εμφανίζονται) και μάλιστα σταθμισμένη έτσι ώστε η φάση της πρώτης αρμονικής να είναι διπλάσια, λόγω του τετραγώνου του "u".
Αξίζει εδώ να επισημάνουμε τη διαφορά της παραμετρικής κυματικής αλληλεπίδρασης (parametric wave interaction / mixing) από τη σύζευξη δύο ρυθμών για παράδειγμα σε μέσο Kerr, η οποία περιγράφεται από ασύμφωνα

συζευγμένες γενικευμένες εξισώσεις Shroedinger (Incoherently coupled GNLS's). Στην περίπτωση της ασύμφωνης αλληλεπίδρασης οι φάσεις (για την ακρίβεια, το μέρος που εξαρτάται αποκλειστικά από το z) δεν επηρεάζουν τη δυναμική του συστήματος και ως εκ τούτου η εξέλιξη της διαφοράς τους περιγράφεται από μία αποσυζευγμένη από το υπόλοιπο σύστημα εξίσωση). Αυτό συμβαίνει επειδή σε μέσα με κυβική μη γραμμικότητα (ή σε όποιο μέσο η σύζευξη γίνεται μέσω των απολύτων τιμών των συνιστωσών) η επίδραση της μίας συνιστώσας στην άλλη εξαρτάται αποκλειστικά από το τετράγωνο του μέτρου της (την ένταση) και όχι από τη φάση. Αντίθετα όπως είδαμε και παραπάνω οι όροι που συζεύγνουν τις δύο εξισώσεις σε μέσα δευτέρας αρμονικής δεν περιέχουν τα μέτρα των ποσοτήτων, αλλά τις ίδιες τις ποσότητες, με αποτέλεσμα η σύζευξη να είναι ευαίσθητη στη φάση και όχι μόνο στο πλάτος της κάθε αρμονικής. Διαισθητικά μπορεί κανείς να περιμένει ότου αφού δε νοείται στη φύση απόλυτη φάση για κανένα φαινόμενο, η οποιαδήποτε εξάρτηση του δυναμικού συστήματος θα πρέπει να είναι από τη διαφορά των φάσεων. Η ύπαρξη του παράγοντα "2" στη φάση της θεμελιώδους αρμονικής θα μπορούσε να προκύψει με βάση το γεγονός της διπλάσιας συχνότητας της δευτέρας από την πρώτη αρμονική. Επεκτείνοντας την εμπειρία μας στα μέσα τρίτης αρμονικής μπορούμε με απλή επισκόπηση των εξισώσεων και αξιοποιώντας τα όσα είπαμε παραπάνω να προβλέψουμε ότι η δυναμική των παλμών θα καθορίζεται από τον όρο $3\varphi_1 - \varphi_2$.

- Ως δεύτερο σχόλιο επί της μορφής του δυναμικού συστήματος θα μιλήσουμε για τον τρόπο επίλυσής του. Κατ' αρχάς μετά την αντικατάσταση των δύο φάσεων από τη σταθμισμένη διαφορά τους οι άγνωστοι μειώθηκαν κατά ένα και ως εκ τούτου οι οκτώ εξισώσεις πρέπει να γίνουν επτά. Επίσης οι έξι από τις οκτώ εξισώσεις εμπλέκουν μόνο τις παραγώγους των γωνιών. Στόχος μας είναι να καταλήξουμε σε σύστημα που κάθε εξίσωση να εκφράζει μία παράγωγο ως συνάρτηση των παραμέτρων. Αυτό που θα κάνουμε είναι να εξισώσουμε τα ζεύγη (1,2), (1,3), (1',2'), (1',3') και αφού εξισώσουμε τα δεξιά μέλη να τις παραγωγίσουμε. Οι προκύπτουσες εξισώσεις, όπως και η εξισώσεις 4 και 4' γράφονται ως άθροισμα των παραγώγων πολλαπλασιασμένων με συναρτήσεις των παραμέτρων. Επιλέγοντας για παράδειγμα τις 1 και 1' και προσθέτοντάς τις κατάλληλα παράγουμε τη διαφορική εξίσωση για την εξέλιξη της φάσης. Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε τις επτά προκύπτουσες εξισώσεις υπό μορφή εξίσωσης πινάκων ως εξής: $PX=Q$, όπου ο X είναι πίνακας-στήλη που περιέχει τις παραγώγους των επτά παραμέτρων, ο P είναι 7*7 τετραγωνικός πίνακας, που εξαρτάται αποκλειστικά από τις παραμέτρους και όχι τις παραγώγους τους και ο Q είναι πίνακας στήλη που εξαρτάται ομοίως από τις παραμέτρους. Το δυναμικό σύστημα προκύπτει άμεσα από αυτό τον τρόπο γραφής με απλή αναστροφή του P ως εξής $X=P^{-1}Q$. Συνεπώς έχουμε ένα 7*7 σύστημα της μορφής

$$\frac{dA}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

$$\frac{dB}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

$$\frac{da_1}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

$$\frac{da_2}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

$$\frac{db_1}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

$$\frac{db_2}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

$$\frac{d\varphi}{dz}=f(A,B,a_{1,}a_{2,}b_{1,}b_{2,}\varphi)$$

Το σύστημα αυτό είναι επιλύσιμο αριθμητικά με οποιαδήποτε ρουτίνα επίλυσης συστήματος πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων. Αξίζει να αναφερθεί ότι η αναστροφή που αναφέραμε παραπάνω δεν είναι βολικό να γίνει αναλυτικά “με το χέρι” για πίνακες τέτοιου μεγέθους και ως εκ τούτου -ανάλογα με την επεξεργαστική ισχύ- μπορεί να γίνεται είτε αριθμητικά σε κάθε επαναληπτικό βήμα της επίλυσης του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων, είτε αναλυτικά με τη χρήση κάποιου συμβολικού μαθηματικού προγράμματος.

Στάσιμα σημεία (stationary points):

Για να προσδιορίσουμε τα στάσιμα σημεία του συστήματος καταφεύγουμε στις αρχικές εξισώσεις και θέτουμε όλες τις παραγώγους ίσες με το μηδέν.

- Αρχίζουμε με την εξίσωση 4, η οποία απλοποιείται σε $\sin(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi=0 \vee \varphi=\pi$. Η εξίσωση 4' δίδει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Θα αρχίσουμε με τη λύση $\varphi=0$.
- Από τις εξισώσεις 1 και 1' μπορούμε να εκφράσουμε τα ύψη των παλμών συναρτήσει όλων των άλλων μεγεθών και να μειώσουμε έτσι την τάξη του αλγεβρικού συστήματος. Συγκεκριμένα έχουμε

$$1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}(a_1+b_1+1)\frac{\sqrt{(2a_1+a_2)(2b_1+b_2)}}{\sqrt{a_1 b_1}}$$

$$1' \Rightarrow A^2=(a_2+\delta b_2+\gamma)(a_1+b_1+1)\frac{(2a_1+a_2)(2b_1+b_2)}{2\mathrm{sqrt}\, a_1 a_2 b_1 b_2}$$

- Εν συνεχεία εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις 2 και 3 καταλήγουμε σε εκφράσεις για πλάτη της περιβάλλουσας της δευτέρας αρμονικής, συγκεκριμένα

$$a_2=\frac{4a_1^2}{b_1-1_1+1}$$

$$b_2=\frac{4b_1^2}{a_1-b_1+1}$$

- Τέλος μέσω των εξισώσεων 2' και 3' καταλήγουμε στις σχέσεις υπολογισμού των πλατών της πρώτης αρμονικής, οι οποίες είναι:

$$2a_2(a_2+\delta b_2+\gamma)=(2a_1+a_2)(\delta b_2-a_2+\gamma)$$

$$2b_2(a_2+\delta b_2+\gamma)=(2b_1+b_2)(a_2-\delta b_2+\gamma)$$

όπου τα $a_{2,} b_2$ τα αντικαθιστούμε από τις παραπάνω σχέσεις.

Σχετικά με τη λύση $\varphi=\pi$ την οποία αφήσαμε, αν κανείς προβεί στις αντίστοιχες πράξεις το μόνο που θα αλλάξει θα είναι το πλάτος του B το οποίο θα βγει αρνητικό, καθώς περιγράφουμε παλμούς εκτός φάσης. Πολλαπλασιάζοντας επί cos(π)=-1 (έχοντας θεωρήσει μηδέν τη φάση της πρώτης αρμονικής) καταλήγουμε στον ίδιο παλμό.

Η ακριβής μορφή του δυναμικού συστήματος είναι πολύπλοκη και δε θα προσέφερε κάτι στην κατανόηση σε αυτό το σημείο.

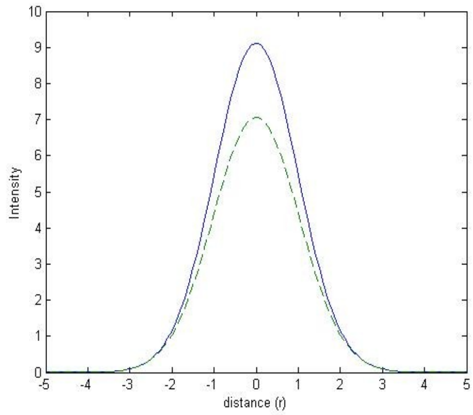
Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε μερικά στάσιμα σημεία και θα μελετήσουμε τη δυναμική του συστήματος γύρω από αυτά τα σημεία, με βάση το δυναμικό μοντέλο μας.

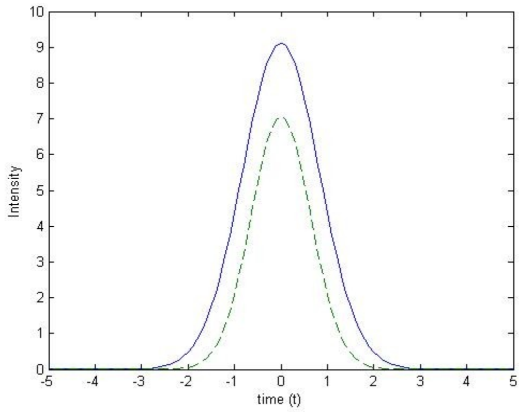
Είναι ιδιαίτερα σημαντικό να μπορεί να μελετηθεί με τρόπο σχετικά απλό η συμπεριφορά ενός παλμού ο οποίος απέχει από τις "ιδανική περίπτωση" του στάσιμου σημείου, καθώς στην πράξη οι παλμοί που εισάγονται σε κάποιο μη γραμμικό κρύσταλλο δεν είναι εφικτό να έχουν πάντα την ακριβή σολιτονική μορφή. Αντίθετα καταβάλλεται προσπάθεια σε τεχνικό επίπεδο οι παλμοί να έχουν χαρακτηριστικά "κοντά" στη σολιτονική λύση (ενέργεια, πλάτος) και μετά από κάποιο μήκος διάδοσης να κλειδώσουν στη σολιτονική λύση, ανακατανέμοντας την ενέργειά τους ή αποβάλλοντας μέρος αυτής. Βέβαια στο μοντέλο μας δεν έχουμε συμπεριλάβει όρους απόσβεσης, συνεπώς η ενέργεια του συστήματος θεωρούμε ότι μένει σταθερή και ανακατανέμεται στις αρμονικές. Η ανάγκη για τη μελέτη της δυναμικής των παλμών είναι εμφανής αν σκεφτεί κανείς τη μορφή των παλμών που παράγουν τα LASER (γκαουσιανή, sin(x)/x) και η οποία θα θελήσουμε να συζευχθεί σε ένα μη γραμμικό κρύσταλλο υπό μορφή σολιτονίου.

Φυσικά η δυναμική αυτή μελέτη μπορεί να γίνει μέσω επίλυσης των πλήρων εξισώσεων με κάποια μέθοδο (π.χ. Split Step Fourier), το οποίο είναι ακριβές, σε αντίθεση με το μεταβολικό μοντέλο που είναι προσεγγιστικό. Ωστόσο η μεταβολική μέθοδος απαιτεί λιγότερη επεξεργαστική ισχύ για να παράξει τη δυναμική του συστήματος, ενώ μπορεί να δώσει καλύτερη φυσική κατανόηση των επιμέρους χαρακτηριστικών του παλμού, της αλληλεπίδρασής τους και της σημασίας τους για τη δημιουργία του σολιτονίου. Αυτή ακριβώς είναι η ισχύς της Μεταβολικής Μεθόδου: ο διαχωρισμός του φυσικού συστήματος σε έναν αριθμό μοντέλων επιλεγόμενης πολυπλοκότητας, έτσι ώστε να αξιολογηθεί η συνεισφορά κάθε παράγοντα στην εξέλιξη του παλμού κατά τη διάδοση.

Αρχίζουμε με την παράθεση των σολιτονίων που εμφανίζονται στα στάσιμα σημεία. Κατόπιν θα μελετήσουμε ενδεικτικά τη δυναμική ενός παλμού όταν απομακρυνόμαστε λίγο από το στάσιμο σημείο, κυρίως για να παρουσιάσουμε τη σημασία και το αποτέλεσμα της Μεταβολικής Μεθόδου.

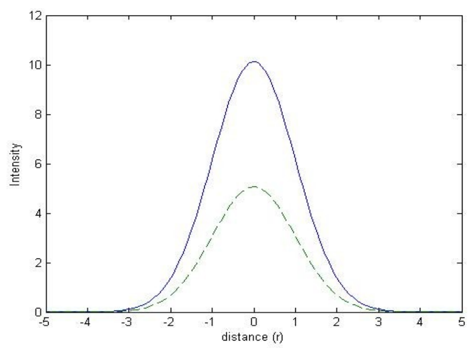
➔ **δ=0.1 γ=1**

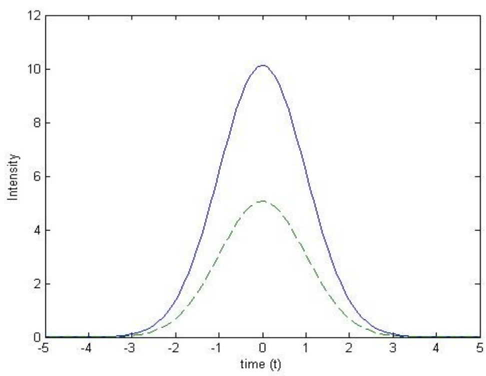




Ξεκινούμε τη μελέτη με σχετικά μικρή τιμή του phase mismatch και πολύ μικρή τιμή της χρονικής διασποράς στη δεύτερη αρμονική. Παρατηρούμε κοντινή μορφή των παλμών στο χώρο και σαφώς πιο στενό παλμό δευτέρας αρμονικής στο χρόνο. Αυτό συμβαίνει επειδή η μικρή χρονική διασπορά επιτρέπει στον παλμό να διατηρεί ένα στενό χρονικό "προφίλ".

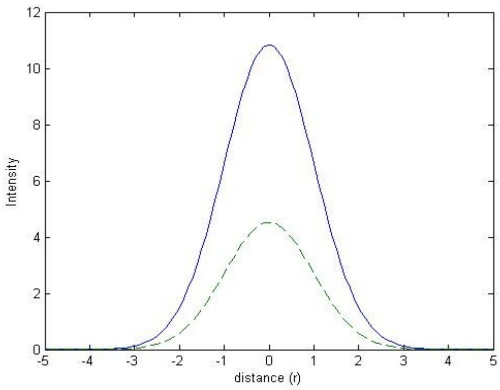
➔ **δ=1 γ=1**

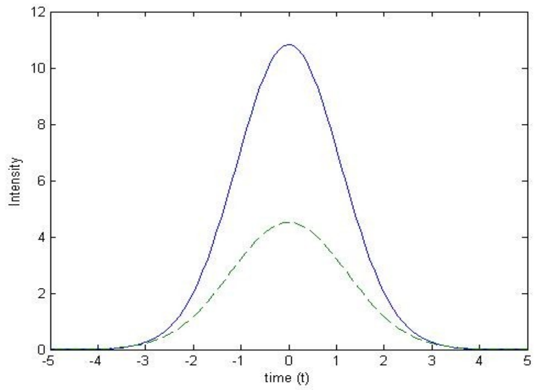




Παρατηρούμε ότι λόγω της χωροχρονικής συμμετρίας των εξισώσεων οι παλμοί είναι ταυτόσημοι στο χώρο και στο χρόνο. Συνεπώς οι δύο διαστάσεις πέραν της φυσικής τους σημασίας δεν έχουν μαθηματική διαφορά και ως εκ τούτου είναι μη διαχωρίσιμες. Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η ταύτιση των διαστάσεων αφορά τις κανονικοποιημένες τιμές τους που εμφανίζονται στις εξισώσεις. Οι πραγματικές διαστάσεις βρίσκονται αν πολλαπλασιάσουμε τις παραπάνω τιμές με τη χρονική και χωρική σταθερά κανονικοποίησης.

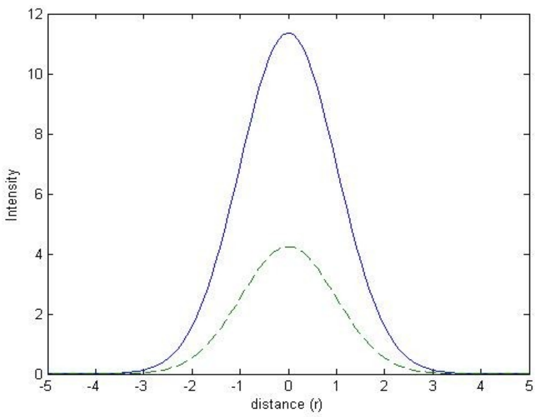
➔ **<u>δ=2 γ=1</u>**

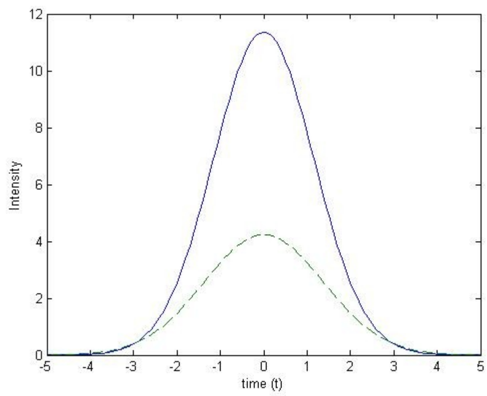




Αυξάνοντας τη χρονική διασπορά παρατηρούμε ότι και οι δύο αρμονικές πλαταίνουν στο χρόνο. Ήταν αναμενόμενο ότι αύξηση της διασποράς οδηγεί σε διαπλάτυνση του παλμού στο χρόνο. Το ενδιαφέρον εδώ είναι το γεγονός ότι η πλάτυνση της μίας αρμονικής συμπαρασύρει και την άλλη, το οποίο είναι άμεσα απόρροια και ένδειξη της σύζευξης των εξισώσεων.

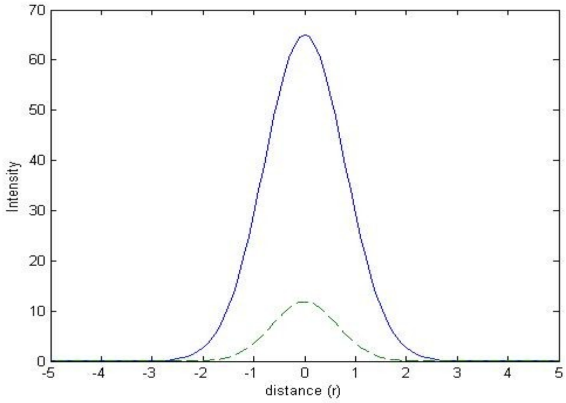
➔ **<u>δ=3 γ=1</u>**

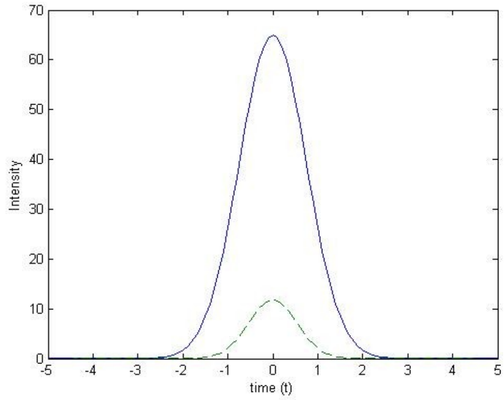




Η κυριότερη παρατήρηση όταν αυξάνουμε ακόμα περισσότερο τη διασπορά της δευτέρας αρμονικής είναι ότι εκτός της πλάτυνσης έχουμε και αυξανόμενη διαφορά στο ύψος των παλμών.

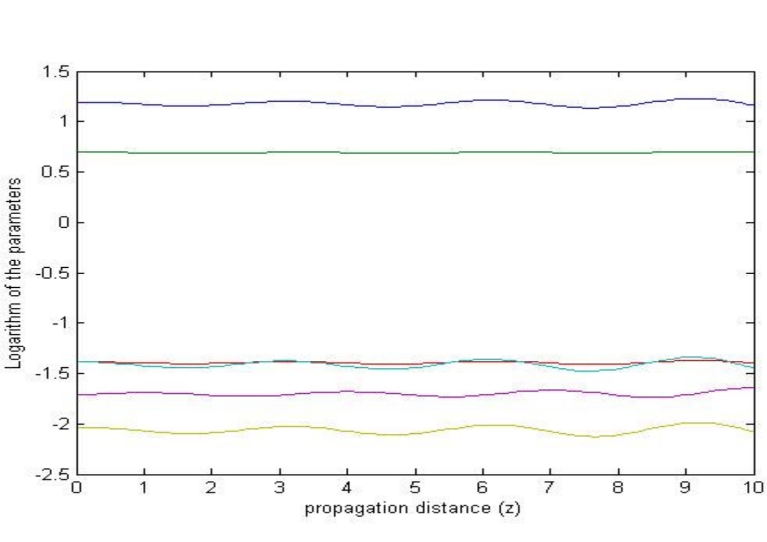
Το τελευταίο στάσιμο σημείο θα αφορά την περίπτωση μεγάλου phase mismatch, ενδεικτικά **γ=8** και μικρής χρονικής διασποράς δευτέρας αρμονικής, συγκεκριμένα **δ=0.1**:





Παρατηρούμε ότι καθώς αυξάνουμε πολύ το phase mismatch, η μορφή των παλμών πλησιάζει στο ασυμπτωτικό όριο $w = \frac{u^2}{2\gamma}$ με τη θεμελιώδη αρμονική να κυριαρχεί.

Κλείνοντας την παράγραφο θα παραθέσουμε τη δυναμική εξέλιξη του σολιτονίου στην περίπτωση "γ=1, δ=3", όπου θα μεταβάλλουμε ελαφρώς τις αρχικές συνθήκες και θα εξετάσουμε τη δυναμική εξέλιξη του παλμού, όπως αυτή περιγράφεται από το δυναμικό σύστημα που έχει εξαχθεί μέσω της μεταβολικής μεθόδου.



Σχολιάζοντας το παραπάνω γράφημα παρατηρούμε ότι όταν διαταράσσουμε ελαφρώς τις αρχικές συνθήκες γύρω από ένα σημείο (ευσταθούς) ισορροπίας, τότε το δυναμικό σύστημα θα παράξει ταλαντώσεις γύρω από αυτό το σημείο. Φυσικά μπορεί να περιγραφεί η κατάσταση ως η προσπάθεια του παλμού να "κλειδώσει" στην πιο κοντινή σολιτονική λύση, η οποία είναι το στάσιμο σημείο, και να συνεχίσει τη διάδοσή του ως σολιτόνιο. Στην πραγματικότητα αυτό θα συμβεί μέσω αποβολής της παραπάνω ενέργειας μέσω ακτινοβολίας ή ανακατανομής της ενέργειας ανάμεσα στις δύο αρμονικές.

1.1.2. Παλμοί άνευ χωροχρονικής συμμετρίας μορφής: "Ασύμμετρα σολιτόνια"

Για τιμές της σταθεράς "δ" που διαφέρει από τη μονάδα είναι εμφανές ότι καταργείται η χωροχρονική συμμετρία των εξισώσεων, αφού η χρονική και χωρική διασπορά της δευτέρας αρμονικής δρουν έχοντας διαφορετική ισχύ. Αυτό σε πρώτη φάση μπορεί να μελετηθεί ως διαφορά στο πλάτος (width) του παλμού στο χώρο και στο χρόνο. Παίρνοντας τις ισεντασικές επιφάνειες του παλμού στο πεδίο x-t, καταλήγουμε γενικά σε ελλείψεις (όπως παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα), εξ' ου και ο χαρακτηρισμός "ελλειπτικά σολιτόνια". Αυτό όμως μπορεί να πει κανείς ότι εξετάζει χωριστά τα δύο φαινόμενα, της χωρικής και χρονικής διασποράς, με το να θεωρεί την ίδια συναρτησιακή μορφή και για τα δύο. Αριθμητικές επιλύσεις που έχουν γίνει στη βιβλιογραφία και ξεκινούν από τα στάσιμα σημεία της παραπάνω ανάλυσης έδειξαν μία παραμόρφωση του αρχικού γκαουσιανού παλμού, ο οποίος οδηγεί σε ποιοτική μορφολογική διαφοροποίηση της δεύτερης αρμονικής σε σχέση με την πρώτη (η οποία παραμένει ελλειπτική). Προσπαθώντας να περιγράψουμε αυτή τη διαφοροποίηση καταφεύγουμε στο παρακάτω Ansatz, το οποίο παραμένει γκαουσιανό στη θεμελιώδη αρμονική, αλλά ενσωματώνει το σπάσιμο της χωροχρονικής συμμετρίας (και τη δημιουργία δύο χρονικών μεγίστων) στην περιβάλλουσα της δεύτερης αρμονικής. Συγκεκριμένα το Ansatz που επιλέγουμε είναι το παρακάτω:

$$u = Ae^{-a_1x^2 - b_{1t}^2} e^{j\varphi_1} \qquad \wedge \qquad w = B(1 - de^{-ct^2})\, e^{-a_2x^2 - b_{2t}^2} e^{j\varphi_2}$$

Σε σχέση με την απλή γκαουσιανή υπόθεση, έχουμε αυξήσει την τάξη του συστήματος και όπως θα φανεί στη συνέχεια η αλγεβρική πολυπλοκότητα έχει αυξηθεί εμφανώς.

Η μορφή της Lagrangian density παραμένει ως έχει και μετά την αντικατάσταση καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$L=A^2\frac{\pi}{2}\varphi_1{}'\frac{1}{a_1 b_1}+\frac{B^2\pi\varphi_2{}'}{2\sqrt{2}\sqrt{a_2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b_2}}+d\left(\frac{-4}{\sqrt{2\mathrm{b}_2+c}}+\frac{\sqrt{2}\,d}{\sqrt{b_2+c}}\right)\right]+\frac{\pi}{2}A^2\frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{b_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{B^2\pi\sqrt{a_2}}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{b_2}}+d\left(\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{2\mathrm{b}_2+c}}+\frac{d}{\sqrt{b_2+c}}\right)\right]+A^2\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{a_1 b_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\gamma\frac{B^2\pi}{4\sqrt{2}\sqrt{a_2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b_2}}+d\left(\frac{-4}{\sqrt{2\mathrm{b}_2+c}}+\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{b_2+c}}\right)\right]+\frac{\pi}{2}A^2\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{a_1}}+\ldots$$

$$\ldots+\delta\frac{B^2\pi}{4\sqrt{2}\sqrt{a_2}}\left[\sqrt{2}\sqrt{b_2}+d\left(\frac{-8\mathrm{b}_2(b_2+c)}{(2\mathrm{b}_2+c)^{3/2}}+\sqrt{2}\sqrt{b_2+c}\,d\right)\right]-\ldots$$

$$\ldots-\frac{A^2 B\pi}{2\sqrt{2\mathrm{a}_1+a_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\mathrm{b}_1+b_2}}-\frac{d}{2\mathrm{b}_1+b_2+c}\right)\cos(2\varphi_1-\varphi_2)$$

όπου είναι εμφανής η αυξημένη πολυπλοκότητα του νέου συστήματος.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange, όντας ισάριθμες με τις μεταβλητές του προβλήματος αυξάνουν κατά 2, δηλαδή:

1. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial B_z}-\frac{\partial L}{\partial A}=0$ 1΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial B_z}-\frac{\partial L}{\partial B}=0$

2. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial a_1}=0$ 2΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial a_2}=0$

3. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial b_1}=0$ 3΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial b_2}=0$

4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$ 4΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{\varphi}_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=0$

5΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{d}_z}-\frac{\partial L}{\partial d}=0$

6΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{c}_z}-\frac{\partial L}{\partial c}=0$

Το φαινομενικά 10*10 σύστημα δύναται να μειωθεί σε 9*9, μέσω θεώρησης του όρου $2\varphi_1-\varphi_2$ ως μοναδικής ανεξάρτητης μεταβλητής στη θέση των δύο φάσεων, το οποίο όπως είπαμε αποτελεί γενική “αρχή” στα παραμετρικά σολιτόνια.

Στάσιμα Σημεία:

Σε κάθε μεταβολικό πρόβλημα το πιο σημαντικό βήμα είναι ο υπολογισμός των στάσιμων σημείων για διάφορους λόγους.

- Οι σχέσεις που συνδέουν τα στάσιμα σημεία απαρτίζουν ένα αλγεβρικό σύστημα, το οποίο μπορεί συνήθως σχετικά εύκολα να μειωθεί ως προς την τάξη του μέσω αντικαταστάσεων και απαλοιφών.
- Τα στάσιμα σημεία είναι αυτά που καθορίζουν τις καταστάσεις ισορροπίας -ευσταθούς και ασταθούς- του συστήματος και ως εκ τούτου μπορούν από μόνα τους να μας δώσουν την εικόνα της μορφής των σολιτονικών παλμών, ανάλογα με τις σταθερές του προβλήματος ("γ" και "δ" στην περίπτωσή μας).
- Τέλος τα στάσιμα σημεία έχουν αξία και για τη δυναμική μελέτη του προβλήματος, καθ' ότι είναι λογικό όταν προβούμε σε ανάλυση της δυναμικής εξέλιξης να χρησιμοποιήσουμε ως αρχικά σημεία κάποιες διαταραγμένες εκφράσεις των στάσιμων σημείων, καθ' ότι όπως είπαμε αυτό που ενδιαφέρει είναι η συμπεριφορά του παλμού γύρω από τη σολιτονική λύση και όχι σε κάποιο τυχαίο σημείο, το οποίο μπορεί να απέχει τόσο από κάποιο στάσιμο σημείο, ώστε ένας παλμός που ξεκινά από εκεί να μην καταλήξει ποτέ σε σολιτονική κατάσταση (π.χ. να αποσυντεθεί σε ακτινοβολία ή να χωριστεί σε επιμέρους παλμούς)

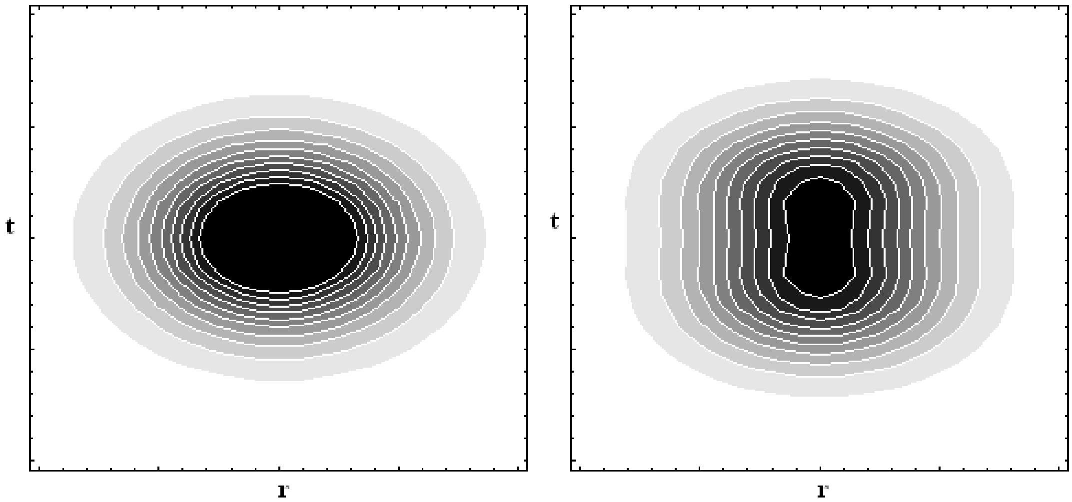
Με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε να προβούμε στην εύρεση των στάσιμων σημείων, συγκρίνοντάς τα με τα στάσιμα σημεία της προηγούμενης παραγράφου (για ίδια ζεύγη σταθερών) καθώς επίσης και με αντίστοιχες αριθμητικές λύσεις της βιβλιογραφίας (Malomed et al.). Η σύγκριση με τις αριθμητικά αποτελέσματα θα αποτελέσει ένδειξη για την ορθότητα του επιλεγέντος Ansatz, ενώ η σύγκριση με τα αποτελέσματα της θεώρησης μορφολογικής συμμετρίας θα αποκαλύψει την ισχύ της διαφορετικής χρονικής διασποράς και το σημείο στο οποίο το σπάσιμο της συμμετρίας γίνεται "σημαντικό".

Οι συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν από την παραπάνω

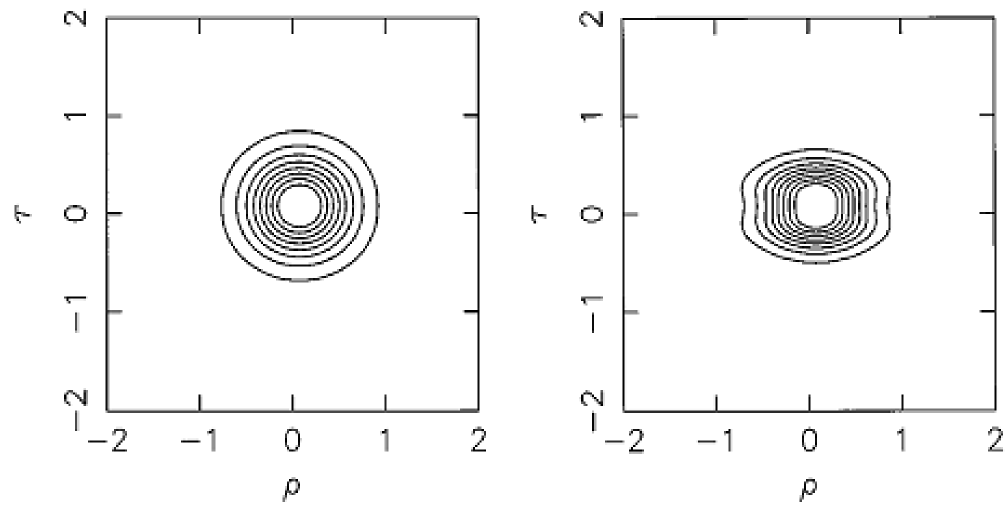
Λαγκρανζιανή μέσω εφαρμογής των εξισώσεων Euler-Lagrange δε θα μελετηθούν περαιτέρω, συνεπώς η αναγραφή τους εδώ δεν εξυπηρετεί σε κάτι τη συνέχεια του κειμένου.

Λόγω της αλγεβρικής πολυπλοκότητας του συστήματος η επίλυσή του είναι ένα καθαρά αριθμητικό πρόβλημα. Αντί να προβούμε σε αριθμητική επίλυση του προβλήματος (μιας και δεν έχουμε ακριβή αριθμητικά αποτελέσματα της διάδοσης του παλμού βασισμένα στις πλήρεις εξισώσεις για να προβούμε σε συγκρίσεις) θα συγκρίνουμε ποιοτικά τη μορφή των ισεντασικών καμπυλών που προκύπτουν από το Ansatz (με τυπικές τιμές των παραμέτρων) με τις ισεντασικές επιφάνειες που δίνονται στη βιβλιογραφία.

Οι ισεντασικές καμπύλες που παράγει το Ansatz είναι οι ακόλουθες για ελλειπτικά σολιτόνια (θεώρηση χωροχρονικής συμμετρίας μορφής) και για σύμμετρα σολιτόνια.



Τα αντίστοιχα αριθμητικά αποτελέσματα της βιβλιογραφίας (Malomed et al.) είναι τα ακόλουθα:



Παρατηρούμε ότι το Ansatz των ασύμμετρων σολιτονίων που προτείνουμε μπορεί να αναπαράγει με αρκετή ακρίβεια την ποιοτική μορφή των ισεντασικών επιφανειών της περιβάλλουσας της δευτέρας αρμονικής. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να περιγράψει το φυσικό μηχανισμό με καλό τρόπο. Σε συνδυασμό με την αναλυτική επιλυσιμότητά του το ανάγει σε ένα αποδεκτό Ansatz για την περίπτωση της χωροχρονικής ασυμμετρίας μορφής.

1.2. Δύο εγκάρσιες χωρικές διαστάσεις: Τρισδιάστατα σολιτόνια

Η φυσική γενίκευση της προηγούμενης ενότητας όσον αφορά τη γεωμετρία της διάταξης είναι η εισαγωγή ενός ακόμα βαθμού ελευθερίας στις εξισώσεις. Μιας και η περίπτωση των τρισδιάστατων σολιτονίων είναι και η πιο γενική από άποψη γεωμετρίας θα μελετήσουμε εκτός από το απλοποιημένο πρόβλημα των ίσων ταχυτήτων ομάδας, το πιο γενικό (και "φυσικά" πιο ορθό) πρόβλημα των άνισων ταχυτήτων σε καθεμιά από τις δύο αρμονικές. Στην περίπτωση των δύο χωρικών εγκάρσιων συντεταγμένων ο Λαπλασιανός Τελεστής που εμφανίζεται είναι η Λαπλασιανή σε κυλινδρικές συντεταγμένες, χωρίς το διάμηκες κομμάτι. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεχόμαστε πλήρη κυλινδρική συμμετρία των λύσεων στο χώρο, τόσο στο μέτρο όσο και στη φάση. Αυτό σημαίνει ότι ισχύει $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου δε θα ίσχυε η κυλινδρική συμμετρία θα ήταν το πρόβλημα της σύζευξης σολιτονίου από ένα δισδιάστατο σε ένα τρισδιάστατο μέσο, δηλαδή από έναν επίπεδο κυματοδηγό σε ένα bulk μέσο. Σε αυτή την περίπτωση θα παίρναμε το σολιτόνιο του πρώτου μέσου ως αρχική συνθήκη για το δεύτερο, αφού πρώτα μετατρέψουμε το μονοδιάστατο χωρικό προφίλ του αρχικού σολιτονίου σε τρισδιάστατο, μέσω του μεγέθους του επίπεδου κυματοδηγού. Κάτι τέτοιο θα αύξανε κατά 2 το μέγεθος του συστήματός μας. Επίσης κάτι τέτοιο θα απαιτούσε τη γνώση των σχεδιαστικών χαρακτηριστικών των επίπεδων κυματοδηγών που χρησιμοποιούνται σε πειράματα σολιτονίων. Αφήνουμε αυτό το θέμα ως ανοιχτή πρόταση για το μέλλον, καθώς πιστεύουμε ότι έχει θεωρητικό και πειραματικό ενδιαφέρον και η δυναμική του μπορεί να μελετηθεί με βάση τη μεθοδολογία που περιγράφουμε εδώ, συγκεκριμένα τροποποιώντας το Ansatz του προηγούμενου προβλήματος ως εξής: $u = Ae^{-a_1 x^2 - c_1 y^2 - b_{1t}^2} e^{j\varphi_1} \quad \wedge \quad w = Be^{-a_2 x^2 - c_2 y^2 - b_{2t}^2} e^{j\varphi_2}$. Κατά τα άλλα η μελέτη δε διαφοροποιείται ιδιαίτερα σε σχέση με την παραπάνω περίπτωση.

1.2.1. Σολιτόνια με ίσες ταχύτητες ομάδας στις δύο αρμονικές

Σε αυτή την περίπτωση -όπως και στην περίπτωση της μίας εγκάρσιας χωρικής διάστασης- αναζητούμε την απλούστερη μορφή συνάρτησης, η οποία να παράγει παλμούς εντοπισμένους γύρω από την αρχή των συντεταγμένων. Δε θα μελετήσουμε στην τρισδιάστατη περίπτωση το φαινόμενο της χωροχρονικής ασυμμετρίας, καθώς η μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος είναι ταυτόσημη με αυτή των δύο διαστάσεων και ο κύριος σκοπός μας ήταν να αναπτύξουμε κάποιο Ansatz για τη μελέτη των σολιτονίων με χωροχρονική ασυνέχεια. Αφού επιβεβαιώσαμε ότι η μέθοδος που προτείνουμε δίδει το σωστό αποτέλεσμα στη δισδιάστατη περίπτωση, η εφαρμογή του στις τρις διαστάσεις μπορεί να γίνει άμεσα. Η κλασική εντοπισμένη συνάρτηση που θα χρησιμοποιήσουμε και εδώ είναι η Γκαουσιανή, συνεπώς η υπόθεση λύσης (Ansatz) που επιλέγουμε είναι η εξής:

$$u=Ae^{-a_1 r^2-b_{1t}^2}e^{j\varphi_1} \qquad \wedge \qquad w=Be^{-a_2 r^2-b_{2t}^2}e^{j\varphi_2}$$

Θεωρούμε ότι οι παράμετροι $A, B, a_1, a_2, b_1, b_2, \varphi_1, \varphi_2$ εξαρτώνται από τη θέση z.

Η Lagrangian Density στην περίπτωση αυτή είναι η εξής:

$$L=r\left\{\frac{i}{2}\left(u\bar{u}_z-\bar{u}\,u_z\right)+i\left(w\bar{w}_z-\bar{w}\,w_z\right)+|u_r^2|+|w_r^2|+|u^2|+\gamma|w^2|-\frac{\bar{u}^2 w}{2}-\frac{u^2\bar{w}}{2}+|u_t^2|+\delta\, w_t^2\right\}$$

Εισάγοντας τη Lagrangian Density στις σχέσεις $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_t}-\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}=0$ και $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_r}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_t}-\frac{\partial L}{\partial \bar{w}}=0$ προκύπτουν οι εξισώσεις 1 και 2, πολλαπλασιασμένες όμως κατά "r". Η ολοκλήρωση για την εύρεση της Effective Lagrangian θα γίνει ως προς drdt και όχι ως προς rdrdt, όπως θα περίμενε κανείς από την ολοκλήρωση κατά μήκος της γωνίας, η οποία θα δώσει μόνο "2πr". Αντ' αυτού συμπεριλάβαμε τον παράγοντα "r" στη παραπάνω

Λαγκρανζιανή, υπονοώντας έτσι την κυλινδρική γεωμετρία του προβλήματος, οπότε δε χρειάζεται να τον επαναλάβουμε στα ολοκληρώματα.

Όπως και στη δισδιάστατη περίπτωση, το 8*8 σύστημα πρωτοβάθμιων μη γραμμικών συνήθων διαφορικών εξισώσεων που θα προκύψει θα αναχθεί σε 7*7, καθώς είναι η σχετικότητα της φάσης ως φυσικής ποσότητας και όχι η γεωμετρία που υπαγορεύουν αυτή τη συμπεριφορά.

Εισάγοντας το Ansatz στη Lagrangian Density και προχωρώντας στις ολοκληρώσεις ως προς τις εγκάρσιες συντεταγμένες καταλήγουμε στην Effective Langangian, η οποία σε αυτή την περίπτωση είναι η εξής:

$$L=\frac{A^2}{4}\varphi_1{}'\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a_1\sqrt{b_1}}+\frac{B^2}{2}\varphi_2{}'\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a_2\sqrt{b_2}}+\frac{A^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a_1\sqrt{b_1}}+\gamma\frac{B^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{a_2\sqrt{b_2}}+\frac{A^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{b_1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{B^2}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{b_2}+\frac{A^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{b_1}}{a_1}+\delta\frac{B^2}{4}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{b_2}}{a_2}-\frac{A^2B\sqrt{\pi}}{2(2\mathrm{a}_1+a_2)\sqrt{2\mathrm{b}_1+b_2}}\cos(2\varphi_1+\varphi_2)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange από τις οποίες θα προκύψει το δυναμικό σύστημα και οι στάσιμες λύσεις είναι για την περίπτωσή μας οι εξής (ίδιες με τη δισδιάστατη περίπτωση):

1. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial A_z}-\frac{\partial L}{\partial A}=0$ 1΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial B_z}-\frac{\partial L}{\partial B}=0$

2. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial a_1}=0$ 2΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial a_2}=0$

3. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial b_1}=0$ 3΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial b_2}=0$

4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$ 4΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{\varphi}_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=0$

Μετά την αντικατάσταση της Effective Lagrangian στις εξισώσεις Euler-Lagrange και την εκτέλεση των πράξεων καταλήγουμε στις παρακάτω οκτώ εξισώσεις:

1. $\varphi_1{}'=\dfrac{2\sqrt{2}\,B\,a_1\sqrt{b_1}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}{(2a_1+a_2)\sqrt{2b_1+b_2}}-2a_1-b_1-1$

2. $\varphi_1{}'=\dfrac{4\sqrt{2}\,B\sqrt{b_1}\,a_1^2\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}{(2a_1+a_2)^2\sqrt{2b_1+b_2}}-b_1-1$

3. $\varphi_1{}'=\dfrac{4\sqrt{2}\,B\,a_1 b_1^2\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}{(2b_1+b_2)^{3/2}(2a_1+a_2)}-2a_1+b_1-1$

4. $4AA'a_1b_1-2A^2a_1{}'b_1-A^2b_1{}'a_1-\dfrac{8\sqrt{2}A^2Ba_1^2b_1^{3/2}\sin(2\varphi_1-\varphi_2)}{(2a_1+a_2)\sqrt{2b_1+b_2}}=0$

1′. $\varphi_2{}'=\dfrac{A^2\sqrt{2}\,a_2\sqrt{b_2}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}{2B(2a_1+a_2)\sqrt{2b_1+b_2}}-a_2-\dfrac{\delta b_2}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$

2′. $\varphi_2{}'=\dfrac{A^2\sqrt{2}\sqrt{b_2}\,a_2^2\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}{B(2a_1+a_2)^2\sqrt{2b_1+b_2}}-\dfrac{\delta b_2}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$

3′. $\varphi_2{}'=\dfrac{A^2\sqrt{2}\,a_2 b_2^{3/2}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)}{B(2b_1+b_2)^{3/2}(2a_1+a_2)}-a_2+\dfrac{\delta b_2}{2}-\dfrac{\gamma}{2}$

4′. $4BB'a_2b_2-2B^2a_2{}'b_2-B^2b_2{}'a_2+\dfrac{A^2B2\sqrt{2}a_2^2b_2^{3/2}\sin(2\varphi_1-\varphi_2)}{(2a_1+a_2)\sqrt{2b_1+b_2}}=0$

Τα σχόλια που κάναμε στην δισδιάστατη περίπτωση για τη φάση μεταφέρονται αυτούσια και στις τρεις διαστάσεις (όπως και σε όλα τα υπόλοιπα προβλήματα που μελετάμε). Συνεπώς το 8*8 σύστημα μειώνεται σε 7*7. Επίσης χρησιμοποιούμε τον ίδιο φορμαλισμό και για αυτό το πρόβλημα, εξισώνοντας τα κατάλληλα μέλη των παραπάνω εξισώσεων και παραγωγίζοντας, έτσι ώστε να καταλήξουμε και πάλι σε ένα σύστημα πινάκων της μορφής $PX=Q$, το οποίο σε συνδυασμό με κάποια μέθοδο αριθμητικής επίλυσης συστημάτων Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων μας δίνει τη δυναμική του συστήματος.

<u>Στάσιμα Σημεία:</u>

Σε αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε τη μορφή των παλμών για μερικές τιμές των παραμέτρων “δ” και “γ” και τους παρουσιάζουμε παρακάτω, τόσο αριθμητικά όσο και γραφικά, έτσι ώστε να πετύχουμε καλύτερη εποπτεία των αποτελεσμάτων.

Η μέθοδος απαλοιφής των παραμέτρων είναι ταυτόσημη με την περίπτωση των ελλειπτικών δισδιάστατων σολιτονίων.

Αρχικά θέτουμε όλες τις παραγώγους στις παραπάνω εξισώσεις ίσες με το μηδέν.

- Αρχίζουμε με την εξίσωση 4, η οποία απλοποιείται σε $\sin(\varphi)=0 \Rightarrow \varphi=0 \vee \varphi=\pi$. Η εξίσωση 4' δίδει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα. Θα αρχίσουμε με τη λύση $\varphi=0$.
- Από τις εξισώσεις 1 και 1' μπορούμε να εκφράσουμε τα ύψη των παλμών συναρτήσει όλων των άλλων μεγεθών και να μειώσουμε έτσι την τάξη του αλγεβρικού συστήματος. Συγκεκριμένα έχουμε

$$1 \Rightarrow B=\frac{(1+2\mathrm{a}_1+b_1+1)(2\mathrm{a}_1+a_2)}{2\mathrm{a}_1}\frac{\sqrt{(2\mathrm{b}_1+b_2)}}{\sqrt{2b_1}}$$

$$1' \Rightarrow A^2=\frac{(a_2+\delta b_2+\gamma)(2\mathrm{a}_1+b_1+1)(2\mathrm{a}_1+a_2)^2(2\mathrm{b}_1+b_2)}{4\mathrm{sqrt}\, a_1 a_2 b_1 b_2}$$

- Εν συνεχεία εισάγοντας τις παραπάνω σχέσεις στις εξισώσεις 2 και 3 καταλήγουμε σε εκφράσεις για πλάτη της περιβάλλουσας της δευτέρας αρμονικής, συγκεκριμένα

$$a_2=\frac{4\mathrm{a}_1^2}{1+b_1}$$

$$b_2=\frac{4\mathrm{b}_1^2}{1+2\mathrm{a}_1-b_1}$$

- Τέλος μέσω των εξισώσεων 2' και 3' καταλήγουμε στις σχέσεις υπολογισμού των πλατών της πρώτης αρμονικής, οι οποίες είναι:

$$2\mathrm{a}_2(a_2+\delta b_2+\gamma)=(2\mathrm{a}_1+a_2)(\delta b_2+\gamma)$$

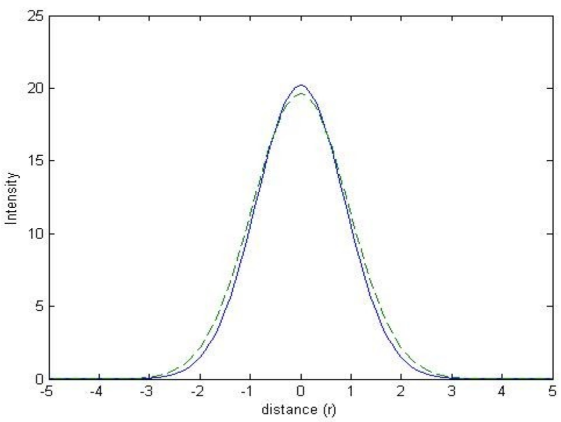
$$2\mathrm{b}_2(a_2+\delta b_2+\gamma)=(2\mathrm{b}_1+b_2)(2\mathrm{a}_2-\delta b_2+\gamma)$$

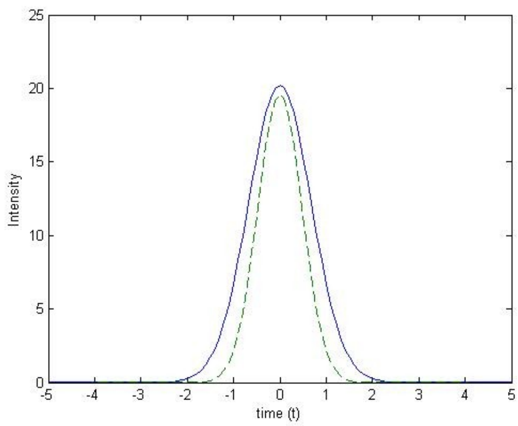
όπου τα $a_{2,} b_2$ τα αντικαθιστούμε από τις παραπάνω σχέσεις.

Σχετικά με τη λύση $\varphi=\pi$ την οποία αφήσαμε, αν κανείς προβεί στις αντίστοιχες πράξεις το μόνο που θα αλλάξει θα είναι το πλάτος του B το οποίο θα βγει αρνητικό καθώς περιγράφουμε παλμούς εκτός φάσης. Πολλαπλασιάζοντας επί cos(π)=-1 (έχοντας θεωρήσει μηδέν τη φάση της πρώτης αρμονικής) καταλήγουμε στον ίδιο παλμό.

Παρουσιάζουμε μερικές ενδεικτικές περιπτώσεις παλμών για δεδομένη τιμή της διαφοράς φάσης (phase mismatch) γ=0.8 (όπου παράγονται ευσταθή σολιτόνια) και μεταβλητή τιμή του "δ".

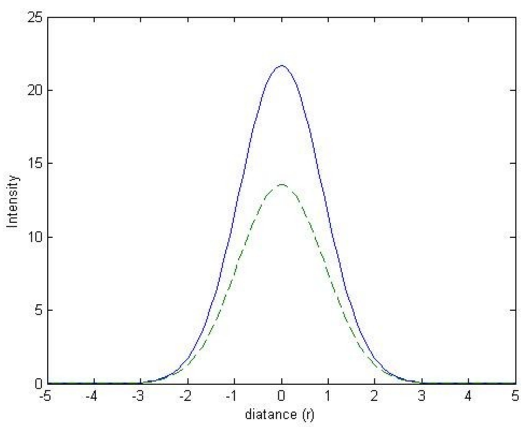
<u>δ=0:</u>

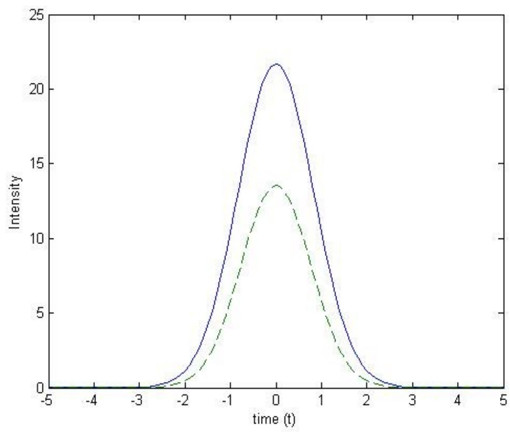




Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε μέσο χωρίς χρονική διασπορά στη δεύτερη αρμονική. Παρατηρούμε ότι οι παλμοί είναι σχεδόν ταυτόσημοι στο χώρο, και η δεύτερη αρμονική είναι στενότερη στο χρόνο.

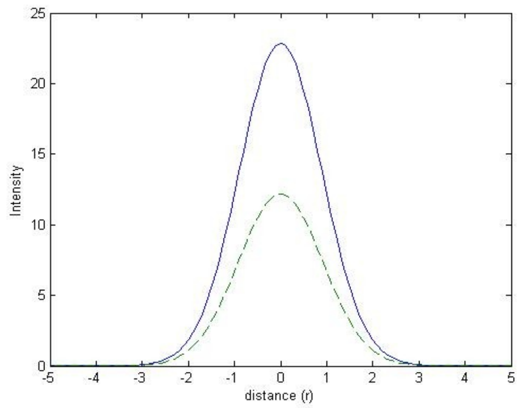
➔ **<u>δ=0.5:</u>**

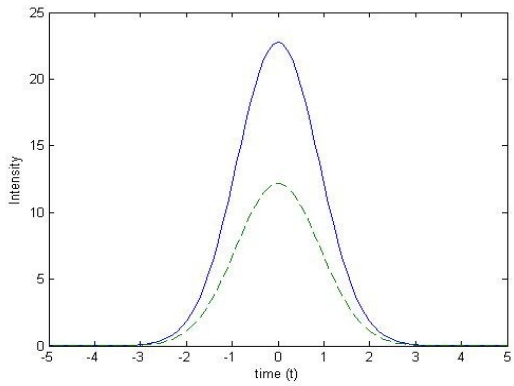




Αυξάνοντας τη χρονική διασπορά στη δεύτερη αρμονική παρατηρούμε ότι υπάρχει διαφοροποίηση της έντασης των παλμών με παράλληλο “άνοιγμα” των παλμών στο χρόνο, λόγω ακριβώς της διασποράς. Το πλάτος των παλμών στο χρόνο δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα.

➔ **δ=1:**

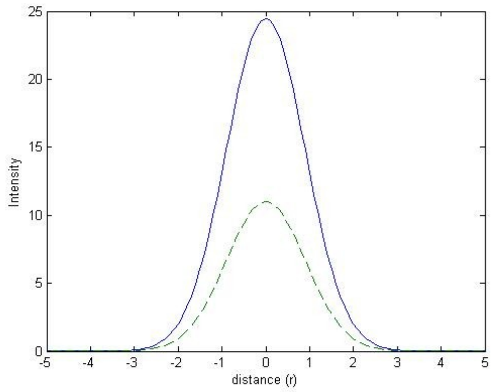


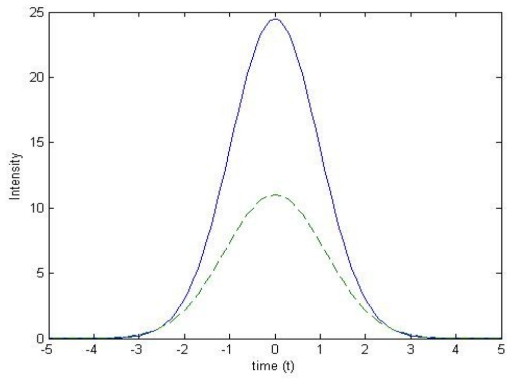


Αυξάνοντας ακόμα περισσότερο τη χρονική διασπορά της δευτέρας αρμονικής δεν παρατηρούμε αξιόλογη μεταβολή στις εντάσεις των παλμών (απόλυτα και σχετικά) ούτε στα χρονικά πλάτη. Αυτό που είναι ενδιαφέρον στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι η απόλυτη ταύτιση των δύο διαγραμμάτων που παρουσιάζονται. Στο σημείο αυτό υπάρχει συμμετρία στις εξισώσεις ανάμεσα στο χώρο και το χρόνο και ως εκ τούτου είναι αναμενόμενο να περιμένουμε ταύτιση των αποτελεσμάτων.

Ωστόσο η χρονική και χωρική συντεταγμένη δεν είναι απόλυτα συμμετρικές στις εξισώσεις μας. Συγκεκριμένα έχουμε $\nabla^2 u + u_{tt} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, όπου είναι εμφανής η απουσία φορμαλιστικής συμμετρίας ανάμεσα στις δύο χωρικές μεταβλητές, r και t. Ας ξαναγράψουμε λοιπόν τον παραπάνω όρο αναλύοντας την ακτινική συνιστώσα στις καρτεσιανές συντεταγμένες x και y. $\nabla^2 u + u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Στην περίπτωση αυτή το Ansatz γίνεται $A e^{-a_1 x^2 - c_1 y^2 - b_{1t}^2}$ και επειδή θα προκύψει (λόγω συμμετρίας των εξισώσεων) ότι $a_1 = b_1 = c_1$, μπορούμε να ξαναγράψουμε το Ansatz χρησιμοποιώντας την ακτινική συνιστώσα $r^2 = x^2 + y^2$, από όπου φαίνεται καθαρά η συμμετρία χώρου και χρόνου στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

➔ **<u>δ=2:</u>**



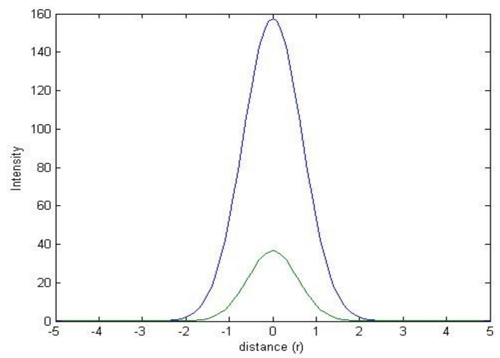


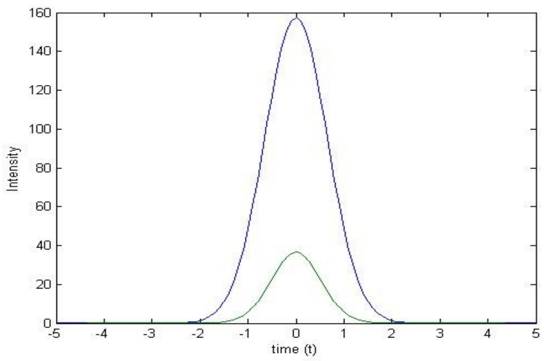
Ως τελική περίπτωση εξετάζουμε αυτή όπου αυξάνουμε περαιτέρω τη χρονική διασπορά της δευτέρας αρμονικής και παρατηρούμε ότι η πρώτη αρμονική ενισχύεται σε σχέση με τη δεύτερη, το χωρικό πλάτος των παλμών δε μεταβάλλεται ιδιαίτερα, ενώ στο χρόνο οι περιβάλλουσες πλαταίνουν, κυρίως της δευτέρας αρμονικής.

Εξετάσαμε τη μεταβολή της μορφής των παλμών καθώς μεταβάλλαμε τη χρονική διασπορά της δευτέρας αρμονικής. Αντίστοιχου ενδιαφέροντος είναι και η μεταβολή της μορφής των σολιτονίων καθώς μεταβάλλουμε τη διαφορά των φάσεων phase-mismatch "γ" για δεδομένη τιμή του "δ". Θα παραστήσουμε τους παλμούς για μεταβαλλόμενο "γ" και για "δ" πάνω και κάτω από την περίπτωση της χωροχρονικής συμμετρίας.

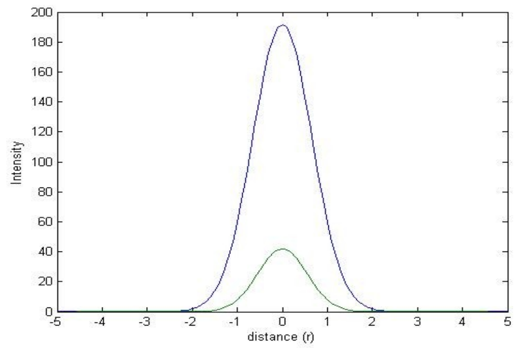
Θα επιλέξουμε δύο τιμές που απέχουν αρκετά μεταξύ τους. Συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τις περιπτώσεις γ=0.8 και γ=8 και δ=0.5 και δ=2. Η περίπτωση γ=0.8 έχει παρουσιαστεί προηγουμένως, συνεπώς εδώ θα παρουσιάσουμε τις περιπτώσεις για **<u>γ=8</u>** και θα κάνουμε τις κατάλληλες συγκρίσεις.

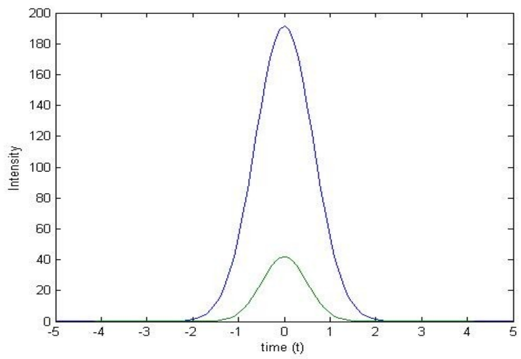
➔ **δ=0.5:**





➔ **δ=2:**





Αυτό που παρατηρεί κανείς είναι η επιβεβαίωση του Kerr-limit (cascading limit), δηλαδή το γεγονός ότι για μεγάλα "γ" η θεμελιώδης αρμονική κυριαρχεί στο σύστημα. Αυτό μπορεί να φανεί αμέσως από την eq. 2, από την οποία μάλιστα προκύπτει η προσεγγιστική σχέση $w = \frac{u^2}{2\gamma}$, η οποία αν αντικατασταθεί στην eq.1 δίνει τη γνωστή εξίσωση για μέσα τύπου Kerr.

Στη συνέχεια μπορούμε να εισάγουμε τις παραπάνω τιμές, αφού τις μεταβάλουμε κατά 5-10%, ως αρχικές συνθήκες στο σύστημα των ΣΔΕ, έτσι ώστε να δούμε την εξέλιξη παλμών που απέχουν κατά τι από τις στάσιμες (σολιτονικές) λύσεις, στα πλαίσια πάντα του απλοποιημένου μεταβολικού μοντέλου μας. Ωστόσο η συμπεριφορά των λύσεων είναι απολύτως ανάλογη της (2+1)D περίπτωσης με την εμφάνιση ταλαντώσεων περί του στάσιμου σημείου και ως εκ τούτου δεν παρατίθενται τα διαγράμματα.

1.2.2. Σολιτόνια με άνισες ταχύτητες ομάδας στις δύο αρμονικές: Συμπερίληψη χρονικής απομάκρυνσης και μη τετριμμένης φάσης παλμών

Σε αυτό το σημείο θα μελετήσουμε ένα ακόμη χαρακτηριστικό των σολιτονίων, το οποίο κατά κανόνα εμφανίζεται και στην πράξη, ωστόσο δεν το είχαμε συμπεριλάβει στις προηγούμενες αναλύσεις μας. Πρόκειται για το γεγονός της διαφορετικής ταχύτητας ομάδας στις δύο αρμονικές, το οποίο μπορεί να οδηγήσει όπως είναι αναμενόμενο στην αποσταθεροποίηση και διάλυση του σύνθετου παλμού, αν η μία αρμονική δεν μπορεί να ακολουθήσει την άλλη. Ωστόσο αν και θα περίμενε κανείς απλά και μόνο η ύπαρξη της GVM να αρκεί για την αποσύνθεση του σολιτονίου σε ακτινοβολία, καθώς η μία αρμονική δε θα μπορούσε να παραμείνει και να αλληλεπιδράσει με την άλλη, αριθμητικές μελέτες που έχουν δημοσιευτεί στη διεθνή βιβλιογραφία δείχνουν το αντίθετο. Συγκεκριμένα παρατηρείται το λεγόμενο “mutual dragging effect”, κατά το οποίο παρατηρείται ότι οι δύο αρμονικές “παρασύρουν” η μία την άλλη μέσω της αλληλεπίδρασής τους (η οποία όπως έχουμε πει εξαρτάται τόσο από το μέτρο όσο και από τη φάση των περιβαλλουσών), έτσι ώστε να καταστεί δυνατή η δημιουργία ενός σταθερού σολιτονικού παλμού.

Η Lagrangian density τροποποιείται ελαφρώς, έτσι ώστε να εμφανιστεί ο όρος που είναι υπεύθυνος για το GVM, δηλαδή ο $\frac{-i\sigma}{2}(w\bar{w}_t-\bar{w}w_t)$. Έτσι έχουμε:

$$L=r\left\{\frac{i}{2}\left(u\bar{u}_z-\bar{u}u_z\right)+i\left(w\bar{w}_z-\bar{w}w_z\right)+\left|u_r^2\right|+\left|w_r^2\right|+\left|u^2\right|+\gamma\left|w^2\right|-\frac{\bar{u}^2w}{2}-\frac{u^2\bar{w}}{2}+\ldots\right\}$$
$$r\left\{\ldots+\left|u_t^2\right|+\delta w_t^2-\frac{i\sigma}{2}(w\bar{w}_t-\bar{w}w_t)\right\}$$

Το Variational Ansatz που θα χρησιμοποιηθεί θα πρέπει να συμπεριλάβει την εντοπισμένη φύση του σολιτονίου, όπως και προηγουμένως, με ταυτόχρονη θεώρηση μη τετριμμένης φάσης (non-trivial phase) η οποία να εξαρτάται όχι μόνο από τη διεύθυνση διάδοσης z, αλλά και από τις εγκάρσιες συντεταγμένες (chirp). Η μορφή που επιλέγουμε, η οποία συμπεριλαμβάνει όλα τα παραπάνω, έστω σε απλή μορφή, είναι η εξής:

$$u = A\exp[-a_1 r^2 - b_1(t-t_1)^2]\exp[j[\varphi_1 + c_1 r^2 + d_1(t-t_1)]]$$
$$w = B\exp[-a_2 r^2 - b_2(t-t_2)^2]\exp[j[\varphi_2 + c_2 r^2 + d_2(t-t_2)]]$$

Προτού προχωρήσουμε είναι απαραίτητο να εξηγήσουμε τη μορφή του Ansatz που επελέγη, μιας και ξεφεύγει αισθητά από την προφανή Γκαουσιανή μορφή. Προς τούτο θα εξετάσουμε κάθε δυάδα αντίστοιχων όρων (που εμφανίζονται στις δύο αρμονικές) χωριστά (στη συνέχεια i = 1,2):

- ➔ $\boldsymbol{a_i \wedge b_i}$: Τα πλάτη (widths) των παλμών στο χώρο και το χρόνο, όπως και στις προηγούμενες μελέτες.

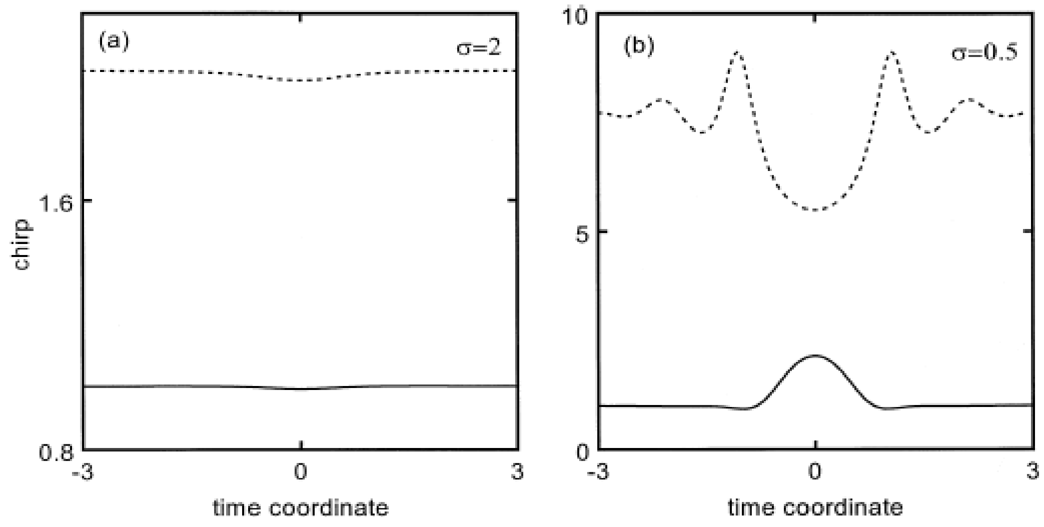
- ➔ $\boldsymbol{A \wedge B}$: Τα ύψη (amplitudes) των παλμών, κατά τα γνωστά

- ➔ $\boldsymbol{\varphi_i}$: Οι φάσεις των παλμών

- ➔ $\boldsymbol{t_i}$: Από τη μορφή του Ansatz, φαίνεται ότι θεωρούμε και τους δύο παλμούς μετατοπισμένους από το μηδέν του άξονα του χρόνου. Αυτό συμβαίνει ακριβώς λόγω της διαφορετικής ταχύτητας ομάδας, η οποία θεωρούμε ότι μπορεί να καταλήξει στη δημιουργία χρονικής απομάκρυνσης των δύο συνιστωσών του παλμού κατά τη διάδοση. Σε ολόκληρο το Ansatz θεωρούμε ότι όλοι οι χρονικοί όροι εξαρτώνται όχι από το t αλλά από το $t-t_i$. Είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι λόγω της ανυπαρξίας απόλυτου συστήματος αναφοράς του χρόνου, η δυναμική μεταβλητή που θα υπεισέλθει στις τελικές εξισώσεις του συστήματος θα είναι η διαφορά των δύο αυτών χρονικών παραμέτρων. Αυτή η υπόθεση θα φανεί στη συνέχεια ότι ισχύει όταν θα κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις.

➔ c_i : Η παράμετρος αυτή είναι το λεγόμενο χωρικό (spatial) chirp και ουσιαστικά περιγράφει μία μη επίπεδη φάση του παλμού ως προς την ακτινική διεύθυνση. Η παράμετρος αυτή δεν προκύπτει άμεσα από τη χρονική εξάρτηση των παλμών, αν και η χωρική και η χρονική εξέλιξη αλληλοεπηρεάζονται και δε δύνανται να μελετηθούν ανεξάρτητα. Σε κάθε περίπτωση αν η απαλοιφή κάποιου όρου καταστήσει τη μελέτη ευκολότερη και τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της δυναμικής περισσότερο εμφανή, τότε το χωρικό chirp θα είναι η παράμετρος που θα επιλεγεί ως η μικροτέρας σημασίας και θα απαλειφθεί., καθώς το παρόν πρόβλημα διαφοροποιείται από τα υπόλοιπα ως προς την ταχύτητα ομάδας, η οποία αναμένουμε να επηρεάσει το χρονικό μέρος του παλμού εντονότερα από το χωρικό.

➔ d_i : Οι όροι αυτοί είναι οι πιο σημαντικοί για την περιγραφή των παλμών με GVM από οποιονδήποτε άλλο, καθώς προσδιορίζουν την εξάρτηση της φάσης των δύο περιβαλλουσών από το χρόνο. Στο σημείο αυτό αξίζει να εξετάσουμε τον τρόπο που επιλέξαμε τη συναρτησιακή μορφή του χρονικού chirp. Κάθε όρος των δύο πλήρων εξισώσεων του συστήματος αντιστοιχούν σε έναν όρο τις Lagrangian Density και αντίστοιχα σε έναν όρο της Effective Lagrangian (μετά τις απαραίτητες ολοκληρώσεις). Με δεδομένο το ότι κάθε όρος μοντελοποιεί και ένα φυσικό φαινόμενο, είναι προφανές ότι ο τελικός όρος της Effective Lagrangian είναι αυτός που θα μοντελοποιεί άμεσα το φαινόμενο, σύμφωνα με το Ansatz που έχουμε επιλέξει. Η λέξη "άμεσα" που χρησιμοποιήσαμε σημαίνει ότι μέσω των δυναμικών εξισώσεων η επίδραση του ενός φαινομένου θα μεταφερθεί και σε άλλους όρους (π.χ. το χρονικό και το χωρικό chirp δύνανται να επηρεάσουν το ένα το άλλο). Έτσι αν κάποιος όρος της Effective Lagrangian είναι μηδενικός, σημαίνει ότι το Ansatz μας είναι ανίκανο να μοντελοποιήσει το συγκεκριμένο φαινόμενο. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το καινούριο φυσικό φαινόμενο που θέλουμε να περιγράψουμε είναι το GVM. Ο όρος των πλήρων εξισώσεων που αντιστοιχεί σε αυτό είναι ο $-i\sigma w_t$ και ο όρος της Lagrangian Density $\frac{-i\sigma}{2}(w\bar{w}_t-\bar{w}w_t)\cdot r$. Συνεπώς θέλουμε το αποτέλεσμα που προκύπτει από την αντικατάσταση του Ansatz σε αυτόν τον όρο, όταν ολοκληρώνεται στο διάστημα $r \in (0,\infty) \wedge t \in (-\infty,\infty)$ να παραμένει μη μηδενικός. Θα θεωρήσουμε ότι το Ansatz για τη δεύτερη αρμονική είναι γενικά της μορφής $w = B\exp[-a_2 r^2 - b_2 (t-t_2)^2]\exp\{j \cdot f[z, r, (t-t_2)]\}$. Μετά από απλή Άλγεβρα καταλήγουμε στην έκφραση του όρου της Effective Lagrangian $\frac{-i\sigma}{2}(w\bar{w}_t - \bar{w}w_t) = \sigma B r \exp[-2\mathrm{a}_2 r^2 - 2\mathrm{b}_2 (t-t_2)^2]\frac{\partial f}{\partial t}$. Τώρα θα πρέπει να ολοκληρωθεί η συνάρτηση αυτή ως προς r και t. Θεωρούμε ότι η παραγώγιση ως προς r γίνεται μετά την παραγώγιση ως προς t (για την ακρίβεια γίνεται ανεξάρτητα και πολλαπλασιαστικά) και ότι δεν μηδενίζει το αποτέλεσμα. Συνεπώς πρέπει να φροντίσουμε έτσι ώστε το αποτέλεσμα να μη μηδενίζεται κατά την παραγώγιση ως προς το χρόνο. Αρχικά αντικαθιστούμε το t με το $t-t_1$, το οποίο δε μεταβάλλει τα όρια ολοκλήρωσης, τα οποία παραμένουν το θετικό και το αρνητικό άπειρο. Επειδή η γκαουσιανή είναι άρτια συνάρτηση, θα πρέπει η παράγωγος της φάσης να μην είναι περιττή. Στο Ansatz που θεωρήσαμε, έχουμε υποθέσει $\frac{\partial f}{\partial t} = konst.$, το οποίο είναι η πιο απλή άρτια συνάρτηση. Ωστόσο η επιλογή της συνάρτησης αυτής δε στηρίχτηκε μόνο στα επιχειρήματα περί μη περιττότητας. Στη βιβλιογραφία έχουν γίνει αριθμητικές μελέτες του συγκεκριμένου προβλήματος και παρακάτω δίνονται τα αντίστοιχα διαγράμματα για τον όρο $\frac{\partial f}{\partial t}$

➔ 

Παρατηρούμε ότι για “σ=2” η υπόθεση ότι ο όρος αυτός είναι περίπου σταθερός ισχύει με καλή προσέγγιση. Ωστόσο για “σ=0.5” παρατηρούμε τη δημιουργία περίπλοκων δομών, ιδιαίτερα στη δεύτερη αρμονική. Προσπαθήσαμε να μελετήσουμε chirp της μορφής $d_2(t-t_2)+v_2(t-t_2)^3$ (και με χρήση άλλων, πιο πολύπλοκων περιττών συναρτήσεων). Ωστόσο αυτό καθιστά τον όρο της αλληλεπίδρασης αναλυτικά μη ολοκληρώσιμο. Έτσι περιγράφουμε μόνο το πρώτης τάξεως φαινόμενο, το οποίο όπως φαίνεται και από το γράφημα είναι αριθμητικά πιο μεγάλο από το τρίτης τάξης, συνεπώς έχουμε πίστη ότι η περιγραφή μας είναι ικανοποιητικά κοντά στην πραγματικότητα.

Με βάση όλα τα παραπάνω και αντικαθιστώντας το Ansatz, η Lagrangian Density γίνεται:

$$
\begin{aligned}
L = {} & \frac{A^2}{4}\frac{2\varphi_1{}' a_1 - 2a_1 d_1 t_1{}' + c_1{}'}{a_1^2\sqrt{b_1}} + \frac{B^2}{2}\frac{2\varphi_2{}' a_2 - 2a_2 d_2 t_2{}' + c_2{}'}{a_2^2\sqrt{b_2}} - \sigma B^2 \frac{d_2}{2a_2\sqrt{b_2}} + A^2\frac{(a_1^2+c_1^2)}{a_1^2\sqrt{b_1}} + \ldots \\
& \ldots + B^2\frac{(a_2^2+c_2^2)}{a_2^2\sqrt{b_2}} + \frac{A^2}{2\mathrm{a}_1^{2\mathrm{sqrt}} b_1} + \gamma\frac{B^2}{2\mathrm{a}_2^{2\mathrm{sqrt}} b_2} + \frac{A^2}{2\mathrm{a}_1}\frac{(b_1+d_1^2)}{\sqrt{b_1}} + \delta\frac{B^2}{2\mathrm{a}_2}\frac{(b_2+d_2^2)}{\sqrt{b_2}} - \ldots \\
& ..- \frac{\sqrt{2}A^2 B}{[(2\mathrm{a}_1+a_2)^2+(2\mathrm{c}_1-c_2)^2]\sqrt{2\mathrm{b}1+b_2}}\exp\left(-\frac{4d_1^2+d_2^2+8\mathrm{b}_1 b_2(t_1-t_2)^2+d_1 d_2}{2\mathrm{b}_1+b_2}\right) * \ldots \\
& \ldots * \cos[2(t_1-t_2)(b_1 d_2 - d_1 b_2)]\cdot[(2\mathrm{a}_1+a_2)\cos(2\varphi_1+\varphi_2)-(2\mathrm{c}_1-c_2)\sin(2\varphi_1+\varphi_2)]
\end{aligned}
$$

Ο αριθμός των εξισώσεων Euler-Lagrange από τις οποίες θα προκύψει το δυναμικό σύστημα και οι στάσιμες λύσεις για τη γενική περίπτωση που μελετάμε εδώ αυξάνει σημαντικά εξαιτίας των περισσοτέρων μεταβλητών που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε τη φυσική πολυπλοκότητα του συστήματος:

1. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial A_z} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0$ $\quad$ 1′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial B_z} - \frac{\partial L}{\partial B} = 0$

2. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{1\mathrm{z}}} - \frac{\partial L}{\partial a_1} = 0$ $\quad$ 2′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{2\mathrm{z}}} - \frac{\partial L}{\partial a_2} = 0$

3. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{1\mathrm{z}}} - \frac{\partial L}{\partial b_1} = 0$ $\quad$ 3′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{2\mathrm{z}}} - \frac{\partial L}{\partial b_2} = 0$

4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial t_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial t_1}=0$ 4′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial t_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial t_2}=0$

5. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial c_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial c_1}=0$ 5′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial c_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial c_2}=0$

6. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial d_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial d_1}=0$ 6′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial d_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial d_2}=0$

7. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$ 7′. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{\varphi}_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=0$

Κατόπιν εφαρμογής των παραπάνω εξισώσεων Euler-Lagrange προς εύρεση των βέλτιστων παραμέτρων με βάση το θεωρούμενο Ansatz καταλήγουμε στο πρωτογενές σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξεως. Λόγω μεγάλου μεγέθους του συστήματος δεν παρατίθεται σε αυτό το σημείο, καθώς περισσότερο θα διέκοπτε τη ροή του κειμένου παρά θα βοηθούσε στην κατανόηση.

Στάσιμα Σημεία:

Σε αυτό το σημείο θα μιλήσουμε για τα στάσιμα σημεία του προβλήματος και κυρίως για τα κύρια φυσικά φαινόμενα που απορρέουν από αυτά.

- ➔ Από τις εξισώσεις 4 και 4' παίρνουμε την ίδια σχέση για τη διαφορά των χρονικών κέντρων $T=t_1-t_2$.
  Συγκεκριμένα έχουμε:
  $\tan[T\cdot 2(b_1 d_2-d_1 b_2)]=T\frac{16 b_1 b_2}{2(2b_1+b_2)(b_1 d_2-d_1 b_2)}$. Η εξίσωση αυτή έχει άπειρες λύσεις, με απλούστερη τη μηδενική. Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση για τη χρονική διαφορά των παλμών δεν περιέχει ρητά το μέτρο της GVM, δηλαδή το “σ”. Μία ενδεχόμενη ανεξαρτησία του Τ από το σ, θα σήμαινε ότι και για $\sigma\neq 0$ οι δύο αρμονικές είναι δυνατόν να έχουν χρονική διαφορά, ακόμα και αν έχουν ίδια φασική ταχύτητα. Για να απαλλαγούμε από αυτή την “αφύσικη” κατάσταση θα δεχθούμε ως λύση μόνο το $T=0$. Συνεπώς το πρώτο αποτέλεσμα της μεταβολικής μεθόδου είναι η εξαγωγή του “dragging effect”,

δηλαδή η απόδειξη ότι οι περιβάλλουσες των δύο αρμονικών, οι οποίες έχουν διαφορετική φασική ταχύτητα μέσα σε κάποιο μέσο, μέσω της μη-γραμμική αλληλεπίδρασής τους μπορούν να οδηγηθούν σε μία κατάσταση, όπου θα διαδίδονται συγχρόνως. Αυτό δε σημαίνει ότι αυτή η κατάσταση είναι ευσταθής, άλλωστε το dragging effect δε σημαίνει ότι υπάρχει οπωσδήποτε ευσταθές σολιτόνιο, αλλά αντίθετα ότι μπορεί να υπάρξει σολιτονικός παλμός με δύο ταυτόχρονα διαδιδόμενες αρμονικές, ακόμα και αν αυτές έχουν διαφορετικές φασικές ταχύτητες. Και αυτό ακριβώς δείχνει και η λύση $T=0$ που βρήκαμε με τη βοήθεια της μεταβολικής μεθόδου.

- Από τις εξισώσεις 7 και 7' θα πάρουμε τη σχέση για τη σταθμισμένη διαφορά φάσης των δύο αρμονικών. Συγκεκριμένα καταλήγουμε στη σχέση $\tan(\varphi)=\dfrac{2c_1-c_2}{2a_1+a_2}$. Η εξίσωση αυτή γενικά έχει μη μηδενική λύση, εκτός αν $2c_1-c_2=0$. Είπαμε στην εισαγωγή αυτής της παραγράφου ότι η πιο σημαντική παράμετρος του προβλήματος είναι το χρονικό chirp. Συνεπώς μπορούμε με σχετική ασφάλεια να θεωρήσουμε ότι $c_1=c_2=0$. Με αυτό τον τρόπο απλοποιούμε τις εξισώσεις ενώ ταυτόχρονα διατηρούμε το κυρίαρχο φαινόμενο, το οποίο έχει να κάνει με το χρονικό chirp.
- Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω τιμές τόσο το αλγεβρικό σύστημα όσο και το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι εν γένει επιλύσιμο.

2. Περιστρεφόμενα σολιτόνια (Οπτικές δίνες)

Περιστρεφόμενο σολιτόνιο ή οπτική δίνη ορίζεται ένας παλμός, ο οποίος έχει αζιμουθιακή εξάρτηση exp(jmθ), όπου m ακέραιος. Το m ονομάζεται και στροφορμή του σολιτονίου. Η φάση ενός τέτοιου παλμού θυμίζει μία “βίδα”. Υπάρχει όμως ένα σημείο, όπου η φάση δεν ορίζεται. Στο κέντρο του παλμού, για r=0, έχουμε την ύπαρξη μίας singularity. Κάνοντας ασυμπτωτική ανάλυση στη μη γραμμική εξίσωση Schroedinger, καταλήγει κανείς στο αποτέλεσμα, ότι οφείλει το πλάτος να τείνει στο μηδέν ως $u \propto r^{|m|}$ για να εξασφαλίζεται η ισχύς της εξίσωσης.

Στην παραμετρική αλληλεπίδραση κυμάτων, όταν έχουμε οπτικές δίνες, δεν μπορούμε να επιλέξουμε τη στροφορμή της κάθε αρμονικής αυθαίρετα. Ένας απλός τρόπος να το δούμε αυτό είναι εξετάζοντας τις εξισώσεις. Απαιτώντας η μόνη εξάρτηση του σολιτονίου από τη γωνία να είναι η exp{jmθ} σημαίνει ότι αντικαθιστώντας αυτή την εξάρτηση στις εξισώσεις πρέπει το μιγαδικό εκθετικό να απλοποιείται. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει υποχρεωτικά η στροφορμή της δευτέρας αρμονικής να είναι διπλάσια από τη στροφορμή της πρώτης.

2.1. Μέσα με ανταγωνιστικές μη γραμμικότητες

Μέχρι στιγμής η μόνη περίπτωση όπου έχουν βρεθεί αριθμητικά οποιασδήποτε μορφής ευσταθούς τετραγωνικής οπτικής δίνης (με ή χωρίς μηδενικές ασύμπτωτες), είναι το μοντέλο όπου συνυπάρχουν δύο είδη μη γραμμικής συμπεριφοράς, συγκεκριμένα τετραγωνική (δευτέρας αρμονικής) και κυβική (Kerr). Συγκεκριμένα έχουν βρεθεί τα περιθώρια ευστάθειας των δινών, οι οποίες δεν αποσυντίθενται λόγω αζιμουθιακών διαταραχών, τόσο σε μέσα με ανταγωνιστικές μη γραμμικότητες (περίπου ίσης έντασης) , όσο και σε μέσα με τετραγωνική και ασθενή κυβική μη-γραμμικότητα. Η μελέτη των δύο αυτών περιπτώσεων από τη σκοπιά της μεταβολικής μεθόδου δεν αλλάζει, καθώς οι εξισώσεις είναι απόλυτα ίδιες, με τη διαφορά του μεγέθους των πολλαπλασιαστικών συντελεστών.

Προτού ξεκινήσουμε την κατάστρωση των εξισώσεων του δυναμικού συστήματος, οφείλουμε να επισημάνουμε μία σημαντική εγγενή αδυναμία της μορφής του Ansatz που θα χρησιμοποιήσουμε. Επειδή θα αναζητήσουμε λύσεις με αζιμουθιακή συμμετρία δε θα είμαστε σε θέση να προβλέψουμε την αντίδραση του σολιτονίου σε αζιμουθιακές διαταραχές, οι οποίες είναι το κύριο είδος αστάθειας των περιστρεφόμενων σολιτονίων. Στο τέλος της εργασίας θα προτείνουμε ένα τρόπο θεραπείας αυτού του προβλήματος.

2.1.1. Χωρικά σολιτόνια

Η πιο απλή περίπτωση περιστρεφόμενων παραμετρικών σολιτονίων σε μέσα με ανταγωνιστικές μη-γραμμικότητες είναι τα χωρικά σολιτόνια, δηλαδή σολιτόνια άπειρα ως προς το χρόνο. Οι χωρικές οπτικές δίνες ονομάζονται πολλές φορές και επαγόμενοι κυματοδηγοί (soliton-induced waveguides), εξ' αιτίας του γεγονότος ότι μεταβάλλουν τοπικά το συντελεστή διάθλασης του μέσου και είναι δυνατόν εντός τους να κυματοδηγηθεί ένα άλλο κύμα, το οποίο αντιλαμβάνεται αυτή τη διαμόρφωση του συντελεστή διάθλασης ως εξωγενή. Οι εξισώσεις που διέπουν το φαινόμενο είναι

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\nabla^2 u-\beta u+\bar{u}\,w-(|u^2|+2|w^2|)\,u=0$$

$$\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{8}\nabla^2 u-\frac{\alpha}{2}w+\frac{u^2}{2}-(2|u^2|+|w^2|)\,w=0$$

όπου φαίνονται οι όροι που αντιστοιχούν στην παραμετρική και στην Kerr μη γραμμικότητα. Εισάγουμε αρχικά τη γωνιακή εξάρτηση των δύο αρμονικών $u\propto e^{jm\theta} \quad \wedge \quad w\propto e^{j2m\theta}$ και έχουμε

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\nabla^2 u+\frac{1}{2}\frac{m^2}{r^2}u-\beta u+\bar{u}\,w-(|u^2|+2|w^2|)\,u=0$$

$$\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{8}\nabla^2 u+\frac{1}{2}\frac{m^2}{r^2}w-\frac{\alpha}{2}w+\frac{u^2}{2}-(2|u^2|+|w^2|)\,w=0$$

όπου m=1. Το πρόβλημα είναι πλέον κυλινδρικά συμμετρικό.

Επιλέγουμε ως Ansatz τις συναρτήσεις

$$u=Ar\,e^{-a_1 r^2}\exp j\varphi_1 \quad \wedge \quad w=Br^2 e^{-a_2 r^2}\exp j\varphi_1$$

Παρατηρούμε ότι και οι δύο αρμονικές είναι εντοπισμένες στο χώρο, δηλαδή τείνουν στο μηδέν για $r\rightarrow\infty$. Επίσης ικανοποιούνται οι συνθήκες που υπαγορεύονται από τη vorticity στο μηδέν, δηλαδή $u \propto r \quad , \quad r \to 0 \wedge w \propto r^2 \quad , \quad r \to 0$.

Η effective Lagrangian προκύπτει

$$L = \frac{A^2 \varphi_1'}{8 a_1^2} + \frac{B^2 \varphi_2'}{8 a_1^3} + \frac{A^2}{8 a_1} + \frac{B^2}{32 a_2^2} + \frac{A^2}{8 a_1} + \frac{B^2}{16 a_2^2} + \beta \frac{A^2}{8 a_1^2} + \alpha \frac{B^2}{16 a_2^3} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{A^2 B}{(2a_1 + a_2)^3} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{6 A^2 B^2}{16 (a_1 + a_2)^4} + \frac{6 A^4}{64 a_1^3} + \frac{3 B^4}{128 a_2^5}$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι οι ακόλουθες:

1. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial B_z} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0 \qquad 1'.\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial B_z} - \frac{\partial L}{\partial B} = 0$

2. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial a_{1z}} - \frac{\partial L}{\partial a_1} = 0 \qquad 2'.\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial a_{2z}} - \frac{\partial L}{\partial a_2} = 0$

3. $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{1z}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \qquad 3'.\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{2z}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο 6*6 σύστημα που μπορεί με το συνήθη τρόπο $(\varphi = 2\varphi_1 - \varphi_2)$ να αναχθεί σε 5*5, το οποίο και μπορεί να μελετηθεί με σχετική ευκολία. Συγκεκριμένα το προκύπτον 6*6 (αρχικό) σύστημα είναι το εξής:

1. $0 = \frac{2A \varphi_1'}{8 a_1^2} + \frac{2A}{8 a_1} + \frac{2A}{8 a_1} + \beta \frac{2A}{8 a_1^2} - \frac{2A B}{(2a_1 + a_2)^3} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{12 A B^2}{16 (a_1 + a_2)^4} + \frac{24 A^3}{64 a_1^3}$

1'. $0 = \frac{2B \varphi_2'}{8 a_1^3} + \frac{2B}{32 a_2^2} + \frac{2B}{16 a_2^2} + \alpha \frac{2B}{16 a_2^3} - \frac{A^2}{(2a_1 + a_2)^3} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{12 A^2 B}{16 (a_1 + a_2)^4} + \frac{12 B^3}{128 a_2^5}$

2. $0 = \frac{-A^2 \varphi_1'}{4 a_1^3} - \frac{A^2}{8 a_1^2} - \frac{A^2}{8 a_1^2} - 2\beta \frac{A^2}{8 a_1^3} + 6 \frac{A^2 B}{(2a_1 + a_2)^4} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{24 A^2 B^2}{16 (a_1 + a_2)^5} - \frac{18 A^4}{64 a_1^4}$

2'. $0 = \frac{-3 B^2 \varphi_2'}{8 a_1^4} - \frac{B^2}{16 a_2^3} - \frac{B^2}{8 a_2^3} - 3\alpha \frac{B^2}{16 a_2^4} + \frac{3 A^2 B}{(2a_1 + a_2)^4} \cos(2\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{6 A^2 B^2}{4 (a_1 + a_2)^4} - \frac{15 B^4}{128 a_2^6}$

3. $0 = \frac{2AA'}{8 a_1^2} - \frac{A^2 a_1'}{4 a_1^3} - \frac{2 A^2 B}{(2a_1 + a_2)^3} \sin(2\varphi_1 - \varphi_2)$

$$3'.\quad 0=\frac{2BB'}{8a_2^3}-\frac{3B^2a_2'}{8a_2^4}+\frac{A^2B}{(2a_1+a_2)^3}\sin(2\varphi_1-\varphi_2)$$

<u>Στάσιμα Σημεία:</u>

Μηδενίζουμε τις παραγώγους και εξετάζουμε χωριστά τις αλγεβρικές εξισώσεις που προκύπτουν. Από τις εξισώσεις 3 και 3' παίρνουμε την ίδια σχέση $\varphi=2\varphi_1-\varphi_2=0$. Εν συνεχεία λύνουμε αριθμητικά το αλγεβρικό μη γραμμικό σύστημα των 1, 1', 2, 2' (έχοντας αντικαταστήσει την τιμή φ=0) . Για τη δυναμική μελέτη ακολουθούνται τα σχόλια τις παραγράφου 1.1.1. Το Ansatz που επιλέξαμε παράγει ικανοποιητικά αποτελέσματα (σε σχέση με τα λιγοστά γραφήματα της βιβλιογραφίας) για μικρές τιμές του phase mismatch. Ωστόσο για μεγαλύτερες τιμές τα σολιτόνια τείνουν να γίνουνε περισσότερα "τετράγωνα", συνεπώς διαφοροποιούνται από το Ansatz. Η εισαγωγή ενός νέου Ansatz για τα τετράγωνα περιστρεφόμενα σολιτόνια παρουσιάζει προβλήματα τόσο πολυπλοκότητας (λόγω αύξησης των βαθμών ελευθερίας - παραμέτρων) όσο και αναλυτικής επιλυσιμότητας. Συνεπώς η ισχύς του Ansatz θα πρέπει να αξιολογηθεί κατόπιν συγκρίσεως με αριθμητικά αποτελέσματα, τα οποία θα εξαχθούν για εξισώσεις που έχουν κανονικοποιηθεί με τον ίδιο τρόπο.

2.1.2. Χωροχρονικά σολιτόνια

Στο συγκεκριμένο σημείο θα εισάγουμε τη χρονική διάσταση στο πρόβλημά μας. Οι εξισώσεις που διέπουν το φυσικό πρόβλημα είναι οι εξής:

$$i\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{2}\nabla^2 u+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\beta u+\bar{u}w-(|u^2|+2|w^2|)u=0$$

$$\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{8}\nabla^2 u+\frac{\sigma}{8}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\alpha}{2}w+\frac{u^2}{2}-(2|u^2|+|w^2|)w=0$$

και η αντίστοιχη Lagrangian Density

$$L=\frac{i}{2}(u\bar{u}_z-\bar{u}u_z)r+\frac{i}{4}(w\bar{w}_z-\bar{w}w_z)r+\frac{1}{2}r|u_r|^2+\frac{1}{8}r|w_r|^2+\frac{1}{2}\frac{m^2}{r^2}r|u|^2+\frac{1}{2}\frac{m^2}{r^2}r|w|^2+\frac{1}{2}|u_t|^2 r+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\sigma}{8}|w_t|^2 r+\beta|u|^2 r+\frac{\alpha}{2}|w|^2 r-r\frac{\bar{u}^2 w}{2}-r\frac{u^2\bar{w}}{2}+2r|w|^2|u|^2+r\frac{|u|^4}{2}+r\frac{|w|^4}{2}$$

και επιλέγουμε m=1, δηλαδή ενδιαφερόμαστε για τη θεμελιώδη κατάσταση περιστρεφόμενων σολιτονίων.

Εισάγουμε το Ansatz

$$u=A\,r\,e^{-a_1 r^2-b_1 t^2}e^{j\varphi_1}\quad\wedge\quad w=B\,r^2 e^{-a_2 r^2-b_2 t^2}e^{j\varphi_2}$$

και μετά τις ολοκληρώσεις η Effective Lagrangian γίνεται:

$$L=\frac{A^2\varphi_1'}{a_1^2\sqrt{b_1}}+\frac{B^2\varphi_2'}{a_2^3\sqrt{b_1}}+\frac{A^2}{a_1\sqrt{b_1}}+\frac{1}{4}\frac{B^2}{a_2^2\sqrt{b_2}}+\frac{A^2}{\sqrt{a_1\sqrt{b_1}}}+\frac{1}{2}\frac{B^2}{a_2^2\sqrt{b_2}}+\frac{1}{2}\frac{A^2\sqrt{b_1}}{a_1^2}+\frac{\sigma}{2}\frac{B^2\sqrt{b_2}}{a_2^3}+\ldots$$
$$\ldots+\beta\frac{A^2}{a_1^2\sqrt{b_1}}+\frac{\alpha}{2}\frac{B^2}{a_2^2\sqrt{b_2}}+3\frac{A^2B^2}{(a+1+a_2)^4\sqrt{b_1+b_2}}+\frac{\sqrt{2}}{32}\frac{A^2}{a_1^3\sqrt{b_1}}+6144\frac{B^4}{a_2^5\sqrt{b_2}}-\ldots$$
$$\ldots\frac{A^2B\,8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2\mathrm{a}_1+a_2)^3\sqrt{2\mathrm{b}_1+b_2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)$$

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι οι

1. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial A_z}-\frac{\partial L}{\partial A}=0$ 1΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial B_z}-\frac{\partial L}{\partial B}=0$

2. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial a_1}=0$ 2΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial a_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial a_2}=0$

3. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial b_1}=0$ 3΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial b_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial b_1}=0$

4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{1z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}=0$ 4΄. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{\varphi}_{2z}}-\frac{\partial L}{\partial \varphi_2}=0$

Συνδυάζοντας την Effective Lagrangian με τις Euler-Lagrange καταλήγουμε στο 8*8 σύστημα, το οποίο ανάγεται και πάλι σε 7*7 μέσω της αντικατάστασης $2\varphi_1-\varphi_2=\varphi$. Το αρχικό σύστημα είναι το εξής:

1. $\varphi_1{}'=\frac{8B\sqrt{2}a_1^2\sqrt{b_1}}{\sqrt{\pi}(2a_1+a_2)^3\sqrt{2b_1+b_2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)-\frac{2}{a_1\sqrt{b_1}}-\frac{\sqrt{b_1}}{2a_1^2}-\frac{\beta}{a_1^2\sqrt{b_1}}-\frac{3B^2}{(a_1+a_2)^2\sqrt{b_1+b_2}}$

1΄. $\varphi_2{}'=\frac{4A^2\sqrt{2}a_2^3\sqrt{b_2}}{\sqrt{\pi}B(2a_1+a_2)^3\sqrt{2b_1+b_2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)-3\frac{a_2}{4}-\sigma\frac{b_2}{2}-\alpha\frac{a_2}{2}-\frac{3A^2a_2^3\sqrt{b_2}}{(a_1+a_2)^4\sqrt{b_1+b_2}}-...$

$$...-12288\frac{B^2}{a_2^2}$$

2. $\varphi_1{}'=\frac{24B\sqrt{2}a_1^3\sqrt{b_1}}{\sqrt{2}B(2a_1+a_2)^4\sqrt{2b_1+b_2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)-a_1-\frac{b_1}{2}-\beta-\frac{6B^2a_1^3\sqrt{b_1}}{(a_1+a_2)^5\sqrt{b_1+b_2}}-\frac{3\sqrt{2}A^2}{64a_1}$

2΄. $\varphi_2{}'=\frac{8A^2\sqrt{2}a_2^4\sqrt{b_2}}{\sqrt{\pi}B(2a_1+a_2)^4\sqrt{2b_1+b_2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)-\frac{a_2}{2}-\sigma\frac{b_2}{2}-\alpha\frac{a_2}{3}-\frac{4A^2a_2^4\sqrt{b_2}}{(a_1+a_2)^5\sqrt{b_1+b_2}}-...$

$$...10240\frac{B^2}{a_2^2}$$

3. $\varphi_1{}'=\frac{16B\sqrt{2}a_1^2b_1^{3/2}}{\sqrt{\pi}(2a_1+a_2)^3(2b_1+b_2)^{3/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2)-a_1+\frac{b_1}{2}-\beta-\frac{A^2\sqrt{2}}{32a_1}-\frac{3B^2a_1^2b_1^{3/2}}{(a_1+a_2)^4(b_1+b_2)^{3/2}}$

$$3'.\quad \varphi_2{}' = \frac{8A^2\sqrt{2}\,a_2^3 b_2^{3/2}}{\sqrt{\pi}\,B(2\mathrm{a}_1+a_2)^3(2\mathrm{b}_1+b_2)^{3/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2) - 3\frac{a_2}{4} + \sigma\frac{b_2}{2} - \alpha\frac{a_2}{2} - \ldots$$

$$\ldots - \frac{3A^2 a_2^3 b_2^{3/2}}{(a_1+a_2)^4(b_1+b_2)^{3/2}} - 6144\frac{B^2}{a_2^2}$$

$$4.\quad \frac{2\mathrm{AA}'}{a_1^2\sqrt{b_1}} - \frac{2\mathrm{A}^2 a_1{}'}{a_1^3\sqrt{b_1}} - \frac{A^2 b_1{}'}{2a_1^2 b_1^{3/2}} = \frac{A^2 B\,16\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2\mathrm{a}_1+a_2)^3\sqrt{2\mathrm{b}_1+b_2}}\sin(2\varphi_1-\varphi_2)$$

$$4'.\quad \frac{2\mathrm{BB}'}{a_2^3\sqrt{b_2}} - \frac{3\mathrm{B}^2 a_2{}'}{a_2^4\sqrt{b_2}} - \frac{3B^2 b_2{}'}{2a_2^3\sqrt{b_2^{3/2}}} = \frac{-A^2 B\,8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(2\mathrm{a}_1+a_2)^3\sqrt{2\mathrm{b}_1+b_2}}\sin(2\varphi_1-\varphi_2)$$

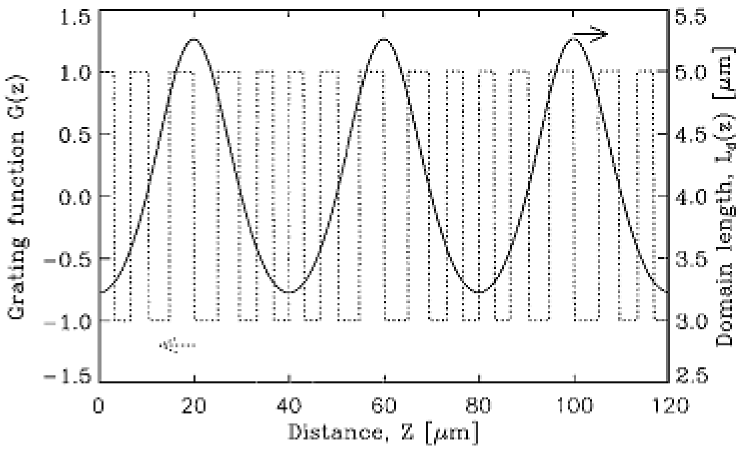
<u>Στάσιμα Σημεία – Δυναμική:</u>

Από τη δομή του παραπάνω συστήματος βλέπουμε ότι είναι ταυτόσημο (ως προς τη μορφή) με τις περιπτώσεις 1.1.1 και 1.2.1 και είναι αντιμετωπίσιμο ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Λόγω της φορμαλιστικής ομοιότητας του συστήματος με τις περιπτώσεις 1.1.1 και 1.2.1 και της φυσικής ομοιότητας με την περίπτωση των χωρικών δινών της παραγράφου 2.1.2 τα όσα σχολιάσαμε σχετικά με την ισχύ του Ansatz (γα τη χωρική διάσταση) μεταφέρονται αυτούσια εδώ.

2.2. Χωρικά σολιτόνια σε μέσα με επαγόμενες μη γραμμικότητες (engineered nonlinearities)

Είπαμε νωρίτερα ότι ευσταθείς τετραγωνικές δίνες έχει αποδειχθεί ότι υπάρχουν μόνο σε μέσα με ανταγωνιστικές μη-γραμμικότητες. Αυτό εγείρει το πρόβλημα της διαθεσιμότητας τέτοιων μέσων και γενικά της σύνθεσης υλικών όπου η ισχύς και το είδος της μη-γραμμικής συμπεριφοράς να μπορεί να ελεγχθεί και να κατασκευαστεί κατά βούληση.

Έχει δειχθεί ότι σε υπερπλέγματα (superlattices) υλικών με τετραγωνική μη-γραμμικότητα μπορεί να υπάρξει επαγώμενη κυβική μη-γραμμικότητα, ανάλογα με την επιλογή των διαδοχικών στρωμάτων. Συγκεκριμένα θεωρούμε το ακόλουθο προφίλ της διαμόρφωσης των μη-γραμμικών στρωμάτων:



Στο συγκεκριμένο σχήμα η διακεκομμένη γραμμή συμβολίζει το μέγεθος της τετραγωνικής μη-γραμμικότητας, η οποία είναι διαμορφωμένη ως ένα τετραγωνικό δικτύωμα (grating) με μεταβλητό πλάτος περιοχής (συνεχής γραμμή).

Αναλύοντας την παραπάνω κυματομορφή κατά Fourier και κρατώντας μόνο τους ισχυρότερους όρους μπορεί να δειχθεί (Bang et.al.) ότι η συνολική απόκριση αποτελείται από την τετραγωνική μη γραμμικότητα με ταυτόχρονη επαγωγή κυβικών όρων. Με κατάλληλη επιλογή των χαρακτηριστικών της συνάρτησης διαμόρφωσης είναι δυνατόν να καταλήξουμε συνολικά στη συνύπαρξη ανταγωνιστικών μη-γραμμικοτήτων, οι οποίες όπως είπαμε μπορούν να υποστηρίξουν τη διάδοση ευσταθών περιστρεφόμενων σολιτονίων.

Υπάρχει όμως μία αδυναμία στην παραπάνω θεώρηση, η οποία έγκειται στον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η επαγόμενη μη-γραμμικότητα. Συγκεκριμένα όπως είπαμε θεωρείται ότι δεν επηρεάζεται η φυσική του προβλήματος αν αποκοπούν όλοι οι όροι του αναπτύγματος Fourier, πέραν των κυρίων όρων. Αυτό εν δυνάμει σημαίνει ότι η συμπεριφορά του συστήματος παύει να περιγράφεται από τις averaged εξισώσεις σε κάποιες περιπτώσεις. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι χρήσιμο να μελετήσει κανείς το πρόβλημα με χρήση της μεταβολικής μεθόδου, η οποία παράγει προσεγγιστικά αποτελέσματα, ανάλογα με το Ansatz, ωστόσο δε χρειάζεται να γίνει η μελέτη Fourier και μπορεί το τελικό δυναμικό σύστημα να διατυπωθεί με βάση τις αρχικές πλήρεις εξισώσεις, ενσωματώνοντας πλήρως το φαινόμενο της διαμόρφωσης της μη-γραμμικής απόκρισης του μέσου, όπως θα γίνει εδώ.

Οι πλήρεις εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι εξής:

$$2iu_z+\nabla^2 u+2G(z)\chi_1 \bar{u}\, w\exp(-j\Delta k\cdot z)=0$$
$$iw_z+\frac{1}{4}\nabla^2 u+G(z)\chi_2 u^2\exp(j\Delta k\cdot z)=0$$

και η αντίστοιχη Lagrangian Density

$$L=ri(u\bar{u}_z-\bar{u}u_z)+r\frac{i}{2}(w\bar{w}_z-\bar{w}w_z)+r|u_r|^2+\frac{1}{4}r|w_r|^2-\ldots$$
$$\ldots-rG(z)\chi[\bar{u}^2 w\exp(-j\beta z)+u^2\bar{w}\exp(j\beta z)]$$

Μπορεί να δειχθεί ότι η εφαρμογή των εξισώσεων $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{u}_r}-\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}=0$ και $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_z}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial L}{\partial \bar{w}_r}-\frac{\partial L}{\partial \bar{w}}=0$ μας οδηγεί στις παραπάνω εξισώσεις.

Χρησιμοποιώντας το γνωστό Ansatz $u=Are^{-a_1 r^2}e^{j\varphi_1} \wedge w=Bre^{-a_2 r^2}e^{j\varphi_2}$ καταλήγουμε στην Effective Lagrangian

$$L=\frac{A^2}{a_1^2}\varphi_1'+\frac{B^2}{a_2^3}\varphi_2'+\frac{A^2}{4a_1}+\frac{B^2}{4a_2^2}-2\chi G(z)\frac{A^2 B\,3\sqrt{\pi}}{4(2a_1+a_2)^{3/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z) \quad .$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Euler-Lagrange καταλήγουμε στο ακόλουθο (πρωταρχικό) σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

1. $\frac{2\varphi_1'}{a_1^2}+\frac{1}{2a_1}-\chi G(z)\frac{B3\sqrt{\pi}}{(2a_1+a_2)^{5/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z)=0$

1'. $\frac{2B\varphi_2'}{a_2^3}+\frac{B}{2a_1^2}-\chi G(z)\frac{A^2 3\sqrt{\pi}}{2(2a_1+a_2)^{5/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z)=0$

2. $-\frac{2\varphi_1'}{a_1^3}-\frac{1}{4a_1^2}+\frac{5}{2}\chi G(z)\frac{B3\sqrt{\pi}}{(2a_1+a_2)^{7/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z)=0$

2'. $-\frac{3B^2\varphi_2'}{a_1^4}-\frac{B^2}{2a_1^3}+\frac{5}{4}\chi G(z)\frac{A^2 B3\sqrt{\pi}}{(2a_1+a_2)^{7/2}}\cos(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z)=0$

3. $\frac{2AA'}{a_1^2}-\frac{2A^2 a_1'}{a_1^3}-\chi G(z)\frac{A^2 B3\sqrt{\pi}}{(2a_1+a_2)^{5/2}}\sin(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z)=0$

3'. $\frac{2BB'}{a_2^3}-\frac{3B^2 a_2'}{a_1^4}+\frac{1}{2}\chi G(z)\frac{A^2 B3\sqrt{\pi}}{(2a_1+a_2)^{5/2}}\sin(2\varphi_1-\varphi_2+\beta z)=0$

Το σύστημα αυτό μπορεί και πάλι να μειωθεί κατά 1 ως προς την τάξη, μέσω απαλοιφής των δύο φάσεων. Κατόπιν επιλύεται όπως έχει εξηγηθεί στις πρώτες παραγράφους. Μία ουσιώδης διαφορά χρίζει περαιτέρω σχολιασμού. Η ανεξάρτητη μεταβλητή, η οποία θα αντικαταστήσει τις φάσεις είναι η $\varphi=2\varphi_1-\varphi_2+\beta z$. Γενικά σε QPM μέσα είναι δυνατό να αναζητηθούν περιοδικές λύσεις, με βάση την περίοδο του grating. Στη συγκεκριμένη περίπτωση το grating περιλαμβάνει εκτός από τη γρήγορη αλλαγή του προσήμου και μία αργή διαμόρφωση ως προς το πλάτος. Αυτό καθιστά την εύρεση των στάσιμων σημείων πιο περίπλοκη, καθώς οι δύο κλίμακες χρόνου, που υπάρχουν σε QPM μέσα -αργή και γρήγορη (grating)- δεν είναι εδώ εύκολα διαχωρίσιμες.

2.3. Περιστρεφόμενα σολιτόνια με αζιμουθιακή διαμόρφωση: προτεινόμενο Ansatz

Είπαμε σε προηγούμενο στάδιο της εργασίας ότι η κυριότερη αιτία αστάθειας των περιστρεφόμενων σολιτονίων είναι η αζιμουθιακές διαταραχές, οι οποίες οδηγούν το σολιτόνιο στη διάλυση σε μη περιστρεφόμενα κομμάτια, τα οποία κινούνται ακτινικά προς τα έξω, έτσι ώστε να διατηρείται η στροφορμή του συστήματος. Οι παραπάνω κυλινδρικά συμμετρικές συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν δεν ήταν δυνατό να περιγράψουν οποιαδήποτε αζιμουθιακή ασυμμετρία (διαταραχή ή διάσπαση). Το πρόβλημα αυτό είναι (θεωρητικά τουλάχιστον) θεραπεύσιμο. Γενικά θα πρέπει να τροποποιηθεί έτσι το Ansatz, ώστε να μπορεί να δώσει είτε τον κυλινδρικά συμμετρικό παλμό των προηγούμενων περιπτώσεων, είναι τα θραύσματα στα οποία τείνει να διαλυθεί ένα ασταθές περιστρεφόμενο σολιτόνιο.

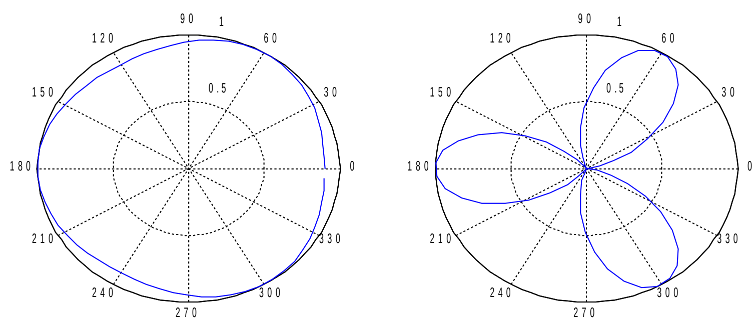
Συγκεκριμένα μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το Ansatz με έναν παράγοντα της μορφής $(1-f\cdot\cos(p\cdot\theta)^2)$, όπου $f\in[0,1]$ και 2p είναι τα θραύσματα στα οποία περιμένουμε να διαλυθεί το σολιτόνιο, εφόσον δεν είναι ευσταθές. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη μίας αζιμουθιακής διαταραχής και μάλιστα μπορούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη μίας προκαθορισμένης αζιμουθιακής διαταραχής (ενδεχομένως λόγω της προκαθορισμένης και όχι τυχαίας μορφής της διαταραχής, πιο κατάλληλος όρος ενδεχομένως θα ήταν "διαμόρφωση"). Ένα πλεονέκτημα μίας τέτοιας προσέγγισης είναι ότι μπορούμε να μελετήσουμε απευθείας τη τάση του σολιτονίου να χωριστεί σε συγκεκριμένο αριθμό θραυσμάτων. Συγκεκριμένα για μέσα δευτέρας αρμονικής και μοναδιαία στροφορμή, ο παλμός διαλύεται σε τρία θραύσματα, συνεπώς $p=1.5$. Από την άλλη αν αφήσουμε το p ως μεταβλητή, τότε η μελέτη θα μας δείξει από μόνη της την τάση του σολιτονίου να διαλυθεί σε συγκεκριμένο αριθμό θραυσμάτων. Βέβαια σε αυτή την περίπτωση το πρόβλημα ανάγεται σε ένα μεικτό και πολύπλοκο πρόβλημα διακριτής και συνεχούς βελτιστοποίησης. Συνεπώς είναι αρκετό να "προβλέψει" κανείς τον αριθμό των θραυσμάτων για κάθε τιμή της στροφορμής, ο οποίος εξάλλου είναι γνωστός στη βιβλιογραφία.

Εξάλλου μία οποιαδήποτε διαταραχή στην αζιμουθιακή δομή του σολιτονίου μπορεί να αναλυθεί σε άπειρο άθροισμα αρμονικών διαταραχών (κατά Fourier). Ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του συστήματος μόνο μία από τις αρμονικές θα ενισχυθεί τόσο που θα υπερισχύσει των υπολοίπων και θα κυριαρχήσει στη δυναμική εξέλιξη και διάσπαση του σολιτονίου. Θεωρώντας εξ' αρχής κάποια προκαθορισμένη αρμονική διαταραχή και εφόσον η αρμονική αυτή είναι ορθά επιλεγμένη, ώστε να παράγει τον τελικό αριθμό των θραυσμάτων, τότε μπορούμε να πούμε ότι προσομοιώνουμε το worst-case scenario, συνεπώς δε χάνουμε πληροφορίες για την ευστάθεια του παλμού.

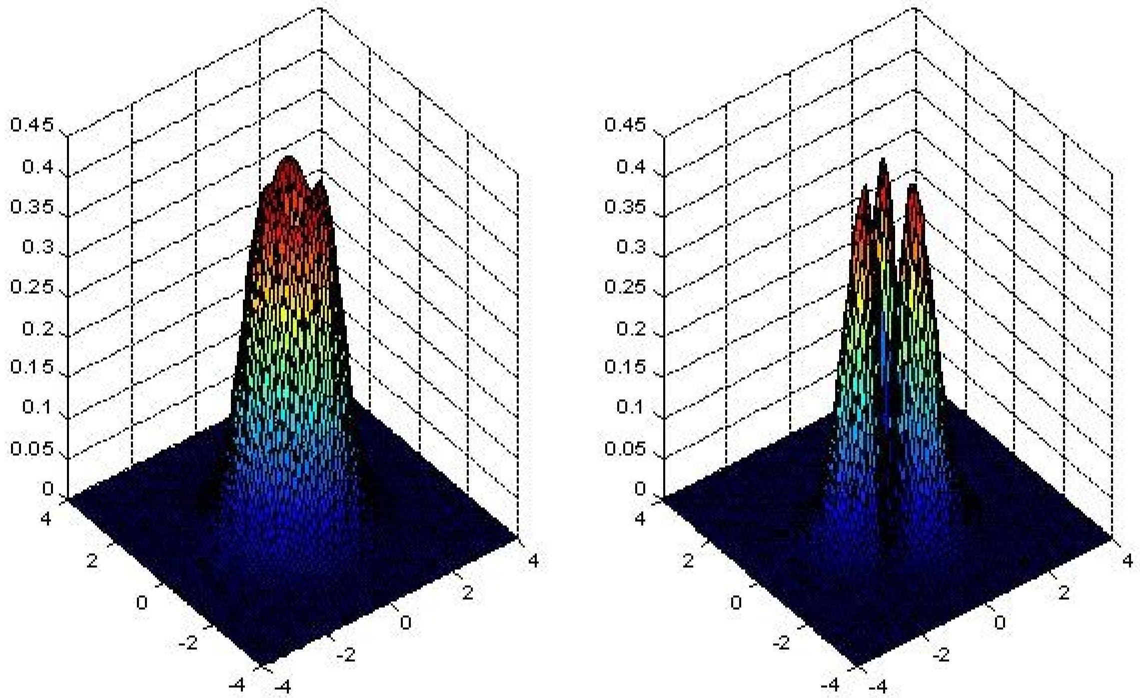
Αν επιθυμούμε να μελετήσουμε τη σχετική ενίσχυση (ή απόσβεση) δύο ανταγωνιστικών αρμονικών διαταραχών που συνυπάρχουν σε ένα σολιτόνιο δεν έχουμε παρά να τροποποιήσουμε το Ansatz, εισάγοντας τον πολλαπλασιαστικό όρο που αντιστοιχεί σε κάθε αρμονική διαταραχή, δηλαδή $(1-f_1\cdot\cos(p_1\cdot\theta)^2)\cdot(1-f_2\cdot\cos(p_2\cdot\theta)^2)$.

Κρατώντας την τιμή $p=1.5$, θα δείξουμε πώς μεταβάλλεται ένας παλμός με τη μεταβολή του f. Ο παλμός αυτός είναι απλά προβολή του Ansatz και δεν προέρχεται από κάποιον υπολογισμό.

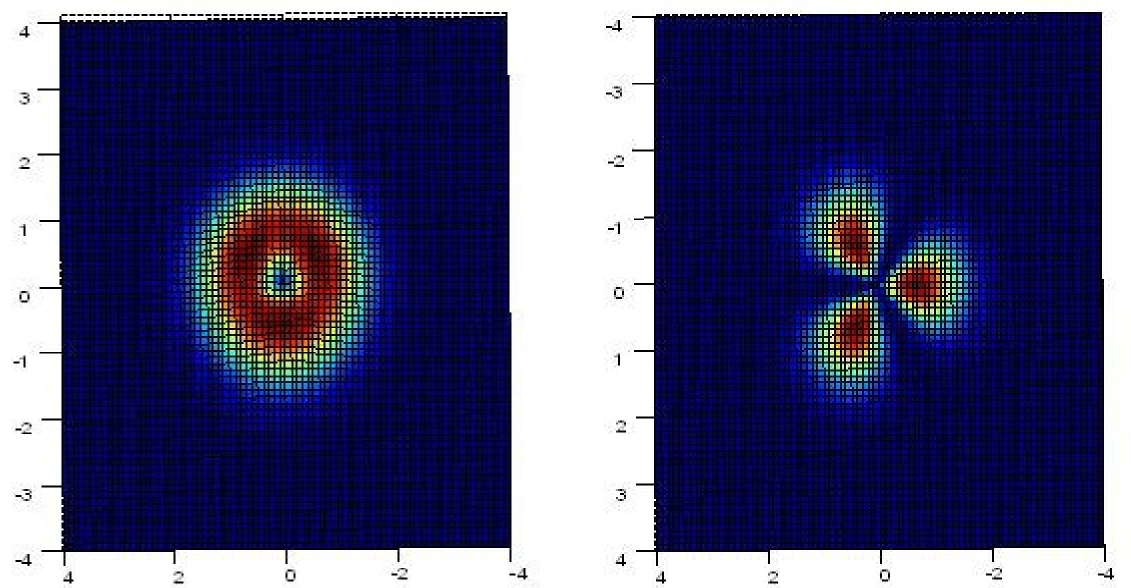
Αρχικά τυπώνουμε τον παράγοντα $(1-f\cdot\cos(p\cdot\theta)^2)$ σε πολικές συντεταγμένες για δύο τιμές του f: 0.1 και 1, δηλαδή για μικρή διαταραχή και για παλμό την ώρα της πλήρους αποσύνθεσης σε θραύσματα



Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιους παλμούς (την θεμελιώδη αρμονική) για τις παραπάνω τιμές του f και ίδιες τις υπόλοιπες παραμέτρους (και μοναδιαίες).



Για λόγους καλύτερης εποπτείας παρουσιάζουμε τα παραπάνω σχήματα ιδωμένα από πάνω:



Παρατηρούμε ότι το Ansatz που επιλέξαμε είναι σε θέση να παράξει από κυλινδρικούς παλμούς με ήπια αζιμουθιακή διαταραχή έως πλήρως διαχωρισμένους παλμούς σε τρία θραύσματα. Προφανώς δεν έχει νόημα στο Ansatz να συμπεριλάβουμε και την κίνηση των επιμέρους θραυσμάτων, συνεπώς μόλις ο παράγοντας "f" μειωθεί πέρα από κάποιο κατώτατο κατώφλι θα μπορούμε να θεωρήσουμε με σιγουριά ότι ο παλμός βαίνει προς διάλυση.

Εξίσου σημαντική με τη δυνατότητα του Ansatz να περιγράψει το φαινόμενο είναι και η αναλυτική επιλυσιμότητά του. Σε αυτό το σημείο θα τροποποιήσουμε κατάλληλα τη Lagrangian Density έτσι ώστε να συμπεριλάβουμε και την αζιμουθιακή γωνία στις εγκάρσιες συντεταγμένες και θα εξετάσουμε τα αποτελέσματα της χρήσης του Ansatz ως προς τα προκύπτοντα ολοκληρώματα. Συγκεκριμένα θα έχουμε για την πιο γενική περίπτωση (χωροχρονικά σολιτόνια σε μέσα με ανταγωνιστικές μη-γραμμικότητες):

$$L=\frac{i}{2}(u\bar{u}_z-\bar{u}u_z)r+\frac{i}{4}(w\bar{w}_z-\bar{w}w_z)r+\frac{1}{2}r|u_r|^2+\frac{1}{8}r|w_r|^2+\frac{1}{2}\frac{1}{r}|u_\theta|^2+\frac{1}{8}\frac{1}{r}|w_\theta|^2+\frac{1}{2}|u_t|^2r+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\sigma}{8}|w_t|^2r+\beta|u|^2r+\frac{\alpha}{2}|w|^2r-r\frac{\bar{u}^2w}{2}-r\frac{u^2\bar{w}}{2}+2r|w|^2|u|^2+r\frac{|u|^4}{2}+r\frac{|w|^4}{2}$$

Σε όλα τα ολοκληρώματα ο όρος της γωνιακής διαμόρφωσης ολοκληρώνεται αυτούσια ως προς "θ" και πολλαπλασιάζεται το αποτέλεσμα.

Επίσης ο όρος της παραγώγου ως προς "θ" είναι

$$|u_\theta{}^2|=|j*e^{jm\theta}m(1-f\cdot\cos(p\theta))^2+e^{jm\theta}fp\sin(2p\theta)^2|=m^2(1-f\cdot\cos(p\theta))^4+f^2p^2\sin(2p\theta)^2$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα ως προς "θ" χωρίζεται σε δύο ολοκληρώσιμα τμήματα.

Οι όροι που συχνά προκαλούν δυσκολίες και περιορίζουν σημαντικά τα υποψήφια Ansatz στις παραμετρικές αλληλεπιδράσεις είναι οι όροι της αλληλεπίδρασης, όπου πολλαπλασιάζονται οι δύο αρμονικές. Στη συγκεκριμένη περίπτωση θεωρούμε ίδιο p και διαφορετικό f. Ο όρος της παραμετρικής αλληλεπίδρασης είναι ανάλογος του - $\frac{\pi}{8}[8(f_2-2)+f_1(16-12*f_2+f_1(5*f_2-6))]$ (για p=1.5) και ό όρος της αλληλεπίδρασης Kerr είναι παρόμοιος.

Συνεπώς προτείνουμε μία τροποποίηση του Ansatz για την περίπτωση των περιστρεφόμενων σολιτονίων, το οποίο συνδυάζει την αναλυτική επιλυσιμότητα με την πλήρη περιγραφή του φαινομένου της αζιμουθιακής διαμόρφωσης από το επίπεδο της μικρής διαταραχής έως και τη διάσπαση του παλμού σε συγκεκριμένο αριθμό θραυσμάτων.

Βιβλιογραφία (ενδεικτική)

Η παρακάτω βιβλιογραφία είναι ενδεικτική και μπορεί να προσφέρει μία αρκετά πλήρη εικόνα για τον τομέα των τετραγωνικών σολιτονίων και των μεταβολικών μεθόδων στη μη γραμμική οπτική, καθώς επίσης και για το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για την πλήρη κατανόηση του αντικειμένου και των εφαρμογών του (ηλεκτρομαγνητισμός, μηχανική, μεταβολικός λογισμός, οπτικές ίνες)

1 Βιβλία

1.1 "Classical Mechanics (3rd Edition)", Herbert Goldstein, Charles P. Poole, and John L. Safko

1.2 "Optical Solitons", Yuri S. Kivshar, Govind P. Agrawal

1.3 "Spatial Solitons", Stefano Trillo and William Torruelas

1.4 "Variational Principles", B.L. Moisewitsch

1.5 "Classical Electrodynamics (Third Edition)", John David Jackson

1.6 "Solid State Physics", Hook and Hall

1.7 "Φυσική Στερεάς Κατάστασης", Σ. Παπαδόπουλος

1.8 "Τηλεπικοινωνίες Οπτικών Ινών", Ν.Κ. Ουζούνογλου

2 Review Papers

2.1 A.V. Buryak, P. Di Trapani, B.V. Skryabin, S. Trillo, Physics Reports 370, 63 (2002)

2.2 A.S. Desyatnikov, L. Torner and Y.S. Kivshar, PROGRESS IN OPTICS 47 (2005)

3 Δημοσιεύσεις

3.1 Μεταβολικές Μέθοδοι και Σολιτόνια (Γενικά)

3.1.1 D. Anderson, PRA 27, 3135 (1983)

3.1.2 D. Anderson, M. Bonnedal, AIP 22, 105 (1079)

3.1.3 D. Anderson, M. Bonnedal, et al. , AIP 22, 1838 (1979)

3.1.4 D. Anderson, M. Bonnedal, et al. AIP 22, 788 (1979)

3.1.5 E.D Farnum, J.N. Kutz, J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt. 6, 405 (2004)

3.2 <u>Τετραγωνικά Σολιτόνια (Bright Quadratic Solitons)</u>

3.2.1 B.A. Malomed, P. Drummond, H. He, A. Bernston, D. Anderson, M. Lisak, PRE 56, 4725 (1997)

3.2.2 A.V. Buryak, Y.S. Kivshar, Phys. Lett. A 197, 407 (1995)

3.2.3 X. Liu, K. Beckwitt, F. Wise, PRE 62, 1328 (2000)

3.2.4 X. Liu, K. Beckwitt, F. Wise, PRL 85, 1871 (2000)

3.2.5 N.C. Panoiu, R.M. Osgood Jr., B.A. Malomed, F. Lederer, D. Malizu, D. Mihalache, PRE 71, 036615 (2005)

3.2.6 D. Mihalache et al., PRE 62, 7340 (2000)

3.2.7 I.N. Towers, B.A. Malomed, F.W. Wise, PRL 90, 123901-1 (2003)

3.2.8 D. Mihalache, D. Mazilu, J. Doerring, L. Torner, Opt. Commun. 159, 129 (1999)

3.3 <u>Τετραγωνικές Οπτικές Δίνες – Περιστρεφόμενα Σολιτόνια</u>

3.3.1 O. Bang, C.B. Clausen, P.L. Christiansen and L. Torner, OPTICS LETTERS 24, 1463 (1999)

3.3.2 T. J. Alexander, Y.S. Kivshar, A.V. Buryak and R.A. Sammut, Phys Rev E 61, 2042 (2000)

3.3.3 J.R. Salgueiro, A.H. Carlsson, E. Ostrovskaya and Y. Kivshar, OPTICS LETTERS 29, 593 (2004)

3.3.4 B.A. Malomed, G.D. Peng, P.L. Chu, I. Towers, A.V. Buryak and R.A. Sammut, PRAMANA 57, 1061 (2001)

3.3.5 I. Towers, A.V. Buryak, R.A. Sammut and B.A. Malomed, PRE 63, 055601 (2001)

3.3.6 D.V. Skryabin, W.J. Firth, PRE 58, 3916 (1998)

3.3.7 J.P. Torres, J.M. Soto-Crespo, L.Torner, D.V. Petrov, OPTICS COMMUNICATIONS 149, 77 (1998)

3.3.8 W.J. Firth, D.V. Skryabin, PRL 79, 2450 (1997)

3.3.9 L Torner, J.P. Torres, D.V. Petrov, J.M. Soto-Crespo, Optics and Quantum Electronics 30, 809 (1998)

3.3.10 P. Di Trapani, W. Chinaglia, S. Minardi, A. Piskarskas, G. Valiulis, PRL 84, 3843 (2000)

3.3.11 D. Mihalache, D. Malizu, L.C.Crasovan, I. Towers, B.A. Malomed, A.V. Buryak, L. Torner, F. Lederer, PRE 66, 016613 (2002)

3.3.12 D. Mihalache, D. Malizu, B.A. Malomed, F. Lederer, PRE 69, 066614 (2004)