



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Ευφυών Συστημάτων

ReSuPFuNIS: Ανάπτυξη Αναδρομικού
Νευρο-ασαφούς Μοντέλου και Εφαρμογές στην
Πρόβλεψη Χαοτικών Χρονοσειρών

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νέζη Ε. Παναγιώτη

Επιβλέπων: Ανδρέας - Γεώργιος Ν. Σταφυλοπάτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος 2007



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών
Εργαστήριο Ευφυών Συστημάτων

**ReSuPFuNIS: Ανάπτυξη Αναδρομικού
Νευρο-ασαφούς Μοντέλου και Εφαρμογές στην
Πρόβλεψη Χαοτικών Χρονοσειρών**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Νέζη Ε. Παναγιώτη

Επιβλέπων: Ανδρέας - Γεώργιος Ν. Σταφυλοπάτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 30η Αυγούστου 2007.

.....
Ανδρέας Σταφυλοπάτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Στέφανος Κόλλιας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Παναγιώτης Τσανάκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Αύγουστος 2007.

.....
Νέζης Ε. Παναγιώτης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών

Copyright © 2007, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας εξ' ολοκλήρου ή τμήματος αυτής για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

$\Sigma\tau\eta\ \mu\eta\tau\epsilon\rho a\ \mu o v$

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στόχος της διπλωματικής αυτής, ήταν η ανάπτυξη ενός αναδρομικού νευρο-ασαφούς μοντέλου και η εφαρμογή του σε προβλήματα πρόβλεψης χαοτικών χρονοσειρών. Βασιστήκαμε στο SuPFuNIS ένα πολύ ενδιαφέρον νευρο-ασαφές μοντέλο που στηρίζεται στο μέτρο αμοιβαίας επικάλυψης. Επεκτείναμε το μοντέλο αυτό προσθέτοντας αναδρομικές συνδέσεις από τις εξόδους στο στρώμα εισόδου. Η αναδρομικότητα αυτή καθιστά το προκύπτον μοντέλο ReSuPFuNIS (Recurrent SuPFuNIS) ικανό να μοντελοποιεί δυναμικά συστήματα και ιδιαίτερο για εφαρμογή στην πρόβλεψη χαοτικών χρονοσειρών.

Οι χαοτικές χρονοσειρές συναντώνται πολύ συχνά σε διάφορους επιστημονικούς τομείς και έχουν πολύ σημαντικό ρόλο σε πολλές περιοχές της ανθρώπινης δραστηριότητας. Η ημερήσια θερμοκρασία σε μια πόλη, οι τιμές των μετοχών, η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας σε μια χώρα, οι πωλήσεις αυτοκινήτων από μια βιομηχανία κ.ο.κ. είναι μερικά μόνο παραδείγματα χαοτικών χρονοσειρών. Οι χρονοσειρές αυτές δεν ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη μαθηματική συνάρτηση και η πορεία τους στο χρόνο μοιάζει τυχαία. Είναι όμως πολύ σημαντικές και για τον λόγο αυτό έχουν γίνει πολλές προσπάθειες πρόβλεψης τους. Οι σημαντικές συνέπειες μιας ορθής πρόβλεψης είναι προφανείς.

Το ReSuPFuNIS, λόγω της αναδρομικής του δομής μπορεί να βρει εφαρμογή στην πρόβλεψη τέτοιων χρονοσειρών. Στην παρούσα διπλωματική εκπαίδευσή μας το νευρο-ασαφές σύστημα που αναπτύξαμε για την πρόβλεψη τριών χαοτικών χρονοσειρών : της γνωστής χρονοσειράς Mackey-Glass που χρησιμοποιείται από την σχετική βιβλιογραφία σαν benchmark για μεθόδους υπολογιστικής νοημοσύνης, της μέγιστης ημερήσιας θερμοκρασίας στην Μελβούρνη της Αυστραλίας και στην τιμή της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος. Τα αποτελέσματα είναι αρκετά ενθαρρυντικά και το μοντέλο σε πολλές περιπτώσεις παρουσιάζει πολύ αξιόλογες προβλέψεις. Βέβαια δεν λείπουν τα σφάλματα, τα οποία και προσπαθούμε να εξηγήσουμε.

Το ReSuPFuNIS είναι ένα από τα λίγα αναδρομικά νευρο-ασαφή συστήματα που μπορεί να συναντήσει κάποιος στην παγκόσμια βιβλιογραφία. Η απλή δομή του, και ο μικρός αριθμός παραμέτρων που απαιτεί σε συνδυασμό με τις δυνατότητες μοντελοποίησης που παρέχει το καθιστούν ένα πολύ ενδιαφέρον νευρο-ασαφές μοντέλο. Υπάρχουν ακόμα πολλά περιθώρια βελτίωσης (π.χ. αυτόματη εισαγωγή νέων κόμβων κανόνων) τα οποία θα οδηγήσουν το μοντέλο σε ακόμα καλύτερες προβλέψεις.

Λέξεις Κλειδιά: νευρο-ασαφές μοντέλα, ReSuPFuNIS, SuPFuNIS, ασαφής συστήματα, νευρωνικά δίκτυα, αμοιβαίος εγκλεισμός, τεχνικές ομαδοποίησης, ασαφείς κανόνες, χαοτικές χρονοσειρές, πρόβλεψη χρονοσειρών, προ-επεξεργασία δεδομένων, εξαγωγή ασαφών κανόνων, πρόβλεψη τιμής μετοχής, πρόβλεψη θερμοκρασίας

ABSTRACT

The main aim of this dissertation was the development of a recurrent neuro-fuzzy model and its application to problems of chaotic time series prediction. The model we introduce is based on SuPFuNIS, a unique neuro-fuzzy system that uses the mutual subsethood measure. Our model extends SuPFuNIS with the addition of recurrent, time delayed connections from the output nodes back to the input layer. The introduced recurrence makes our model (named ReSuPFuNIS) ideal to model dynamical systems and efficient for the prediction of chaotic time series. Chaotic time series can be found in many scientific fields and they have great influence on many areas of human life. Daily temperature, stock prices, electric load consumption etc are only some small examples of chaotic time series we meet daily. These time series cannot be modeled by an analytic mathematic function and they fluctuate randomly with respect to time. Despite their randomness and the obvious difficulty in their prediction, they are so important that many methods for their prediction have been developed.

ReSuPFuNIS, due to the recurrent connections we introduced, may be applied for the prediction of time series like the afore mentioned. On this dissertation ReSuPFuNIS is trained in order to predict the Mackey-Glass time series, which is used as benchmark for computational intelligence methods; the maximum daily temperature in Melbourne, Australia and the stock price of National Bank of Greece. The results are very promising and ReSuPFuNIS in many cases predicts with phenomenal accuracy. Of course like every other prediction system it exhibits errors in some occasions.

ReSuPFuNIS is one of the few recurrent neuro-fuzzy system that can be traced on neuro-fuzzy literature. It's simple structure, the small number of parameters it needs and the modeling capabilities it provides, can classify it as a very promising model. Of course it can be ameliorated further in order to achieve better predictions and minimize the prediction error.

Key Words : neuro-fuzzy system, ReSuPFuNIS, SuPFuNIS, fuzzy systems, neural networks, mutual subsethood, clustering methods, fuzzy rules, chaotic time series, time series prediction, data preprocessing, fuzzy rules extraction, stock price prediction, temperature prediction

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή κ. Ανδρέα Σταφυλοπάτη για την δυνατότητα που μου έδωσε να πραγματοποιήσω την παρούσα εργασία καθώς και για την εμπιστοσύνη που μου έδειξε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής.

Ακόμη ωστόσο θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα κ. Μηνά Περτσελάκη για τη σημαντική του βοήθεια στην αρχή αυτής της εργασίας.

Τέλος ωστόσο θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για την αγάπη και τη στήριξη που μου έδειξαν σε κάθε μου απόφαση.

Νέζης Ε. Παναγιώτης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 Ασαφή Σύνολα, Ασαφής Συλλογιστική και Ασαφή Συστήματα	21
1.1 Εισαγωγή	21
1.2 Ασαφή Σύνολα	21
1.2.1 Γενικά	21
1.2.2 Βασικοί Ορισμοί	22
1.2.3 Τυπικές Συναρτήσεις Συμμετοχής	25
1.2.4 Πράξεις των Ασαφών Συνόλων	28
1.2.5 Γενίκευση των Τριών Βασικών Πράξεων (Τελεστές t)	30
1.2.5.1 Ασαφές Συμπλήρωμα	31
1.2.5.2 Ασαφής Τομή (Μέτρο-t)	32
1.2.5.3 Ασαφής Ένωση (Σύμμετρο-t)	33
1.3 Ασαφείς Κανόνες και Ασαφής Συλλογιστική	34
1.3.1 Γενικά	34
1.3.2 Αρχή της Ασαφούς Επέκτασης	35
1.3.3 Ασαφείς Σχέσεις	36
1.3.4 Γλωσσικές Μεταβλητές	37
1.3.5 Ασαφείς Κανόνες	39
1.3.6 Ασαφής Συλλογιστική	40
1.4 Ασαφή Συστήματα	41
1.4.1 Γενικά	41
1.4.2 Μέθοδοι Ασαφοποίησης	42
1.4.3 Μέθοδοι Από-ασαφοποίησης	42
1.4.4 Μέθοδος Mamdani Ασαφούς Συλλογισμού	43
1.4.5 Μέθοδος Takagi - Sugeno Ασαφούς Συλλογισμού	44
2 Βασικές Έννοιες Νευρωνικών Δικτύων	45
2.1 Εισαγωγή	45
2.2 Βιολογικά Νευρωνικά Δίκτυα	45
2.3 Μοντέλο Mc Culloch - Pitts	47
2.4 Το Βασικό Μοντέλο Τεχνητού Νευρονίου	47
2.5 Συναρτήσεις Ενεργοποίησης	48
2.6 Αρχιτεκτονικές Νευρωνικών Δικτύων	49
2.6.1 Γενικά	49
2.6.2 Νευρωνικά Δίκτυα Προσοτροφοδότησης	49
2.6.3 Αναδρομικά Νευρωνικά Δίκτυα	50
2.7 Μάθηση Νευρωνικών Δικτύων	52
2.7.1 Γενικά	52
2.7.2 Επιβλεπόμενη Μάθηση	52
2.7.3 Ενισχυτική Μάθηση	52
2.7.4 Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση	53

3 Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης και Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων	55
3.1 Εισαγωγή	55
3.2 Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης	55
3.2.1 Επιφάνειες Λάθους - Ορισμός Προβλήματος	55
3.2.2 Αλγόριθμος Απότομης Καθόδου	56
3.2.3 Αλγόριθμος Απότομης Καθόδου με Όρο Ορμής	57
3.2.4 Κλασική Μέθοδος Newton	58
3.2.5 Τροποποιήσεις Μεθόδου Newton	59
3.2.5.1 Προσαρμοζόμενο Μήκος Βήματος	59
3.2.5.2 Τροποποιήσεις Levenberg-Marquardt	59
3.2.6 Σύγχριση Μεθόδων	59
3.2.7 Κριτήρια Τερματισμού	61
3.3 Αλγόριθμοι Εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων	62
3.3.1 Γενικά	62
3.3.2 Ορισμός Προβλήματος	62
3.3.3 Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων Προσοτροφοδότησης	62
3.3.4 Εκπαίδευση Αναδρομικών Νευρωνικών Δικτύων	64
3.3.4.1 Ανάστροφη Διάδοση Δια Μέσου του Χρόνου (BPTT)	65
3.3.4.2 Αναδρομική Μάθηση Πραγματικού Χρόνου (RTRL)	65
4 Νευρο-Ασαφή Συστήματα	69
4.1 Εισαγωγή	69
4.2 Εκπαίδευση στα Νευρο-Ασαφή Συστήματα	69
4.3 Γνωστά Νευρο-Ασαφή Συστήματα	70
4.3.1 ANFIS : Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System	70
4.3.1.1 Αρχιτεκτονική Συστήματος ANFIS	70
4.3.1.2 Αλγόριθμος Εκπαίδευσης Συστήματος ANFIS	71
4.3.2 HyFIS : Hybrid Fuzzy Inference System	72
4.3.2.1 Αρχιτεκτονική Συστήματος HyFIS	72
4.3.2.2 Εκπαίδευση Συστήματος HyFIS	74
4.3.3 SuPFuNIS : Subsethood-Product Fuzzy Inference System	74
4.3.3.1 Αρχιτεκτονική Συστήματος SuPFuNIS	75
4.3.3.2 Εκπαίδευση Συστήματος SuPFuNIS	77
5 ReSuPFuNIS: Recurrent Subsethood Product Fuzzy Inference System	79
5.1 Εισαγωγή	79
5.2 Αρχιτεκτονική και Λειτουργία ReSuPFuNIS	79
5.2.1 Στρώμα Εισόδου	80
5.2.2 Σχέση Αμοιβαίου Εγκλεισμού (Mutual Subsethood)	81
5.2.3 Στρώμα Κανόνων	87
5.2.4 Στρώμα Εξόδου	87
5.3 Διαδικασία Μάθησης ReSuPFuNIS	88
5.3.1 Εξισώσεις Ανανέωσης	88
5.3.2 Υπολογισμός των Μερικών Παραγώγων	88
5.3.2.1 Ενημέρωση των u_{jk}^c , u_{jk}^σ	88
5.3.2.2 Ενημέρωση των w_{ij}^c , w_{ij}^σ , z_i^σ	89
6 Μέθοδοι Εξαγωγής Ασαφών Κανόνων από Δεδομένα	97
6.1 Εισαγωγή	97
6.2 Εξαγωγή Κανόνων με Χρήση Τεχνικών Clustering	97
6.2.1 Θεωρητική Εισαγωγή	97
6.2.1.1 Clustering και Δεδομένα	98
6.2.1.2 Τα Συήνη - Clusters	98

6.2.1.3	Τεμαχισμός σε Clusters	99
6.2.2	Αλγόριθμοι Συγνοποίησης (Clustering Algorithms)	99
6.2.2.1	K-Means Clustering	99
6.2.2.2	Fuzzy C-Means Clustering	100
6.2.2.3	Αλγόριθμος Gustafson-Kessel	102
6.2.2.4	Συγνοποίηση Βουνού (Mountain Clustering)	103
6.2.2.5	Άλλες Τεχνικές Clustering	104
6.2.3	Μέτρα Εγκυρότητας	104
6.2.4	Εξαγωγή Κανόνων από Clusters	106
6.3	Εξαγωγή Κανόνων από Αριθμητικά Δεδομένα	107
6.3.1	Γενικά	107
6.3.2	Μέθοδος Παραγωγής Ασαφών Κανόνων από Αριθμητικά Δεδομένα	107
7	Μεθοδολογία Πρόβλεψης Χαοτικών Χρονοσειρών	111
7.1	Εισαγωγή	111
7.2	Παραδείγματα Χαοτικών Χρονοσειρών	111
7.3	Παρουσίαση Μεθόδων Πρόβλεψης	112
7.4	Μεθοδολογία Ανάπτυξης Νευρο-Ασαφών Μοντέλων	113
7.4.1	Ανάλυση Προβλήματος	114
7.4.2	Συλλογή Δεδομένων	114
7.4.3	Ανάλυση Δεδομένων και Επιλογή Μεταβλητών Εισόδου και Εξόδου	115
7.4.3.1	Στατιστικές Μέθοδοι	115
7.4.3.2	Ανάλυση Ευαισθησίας	118
7.4.3.3	Επιλογή Δειγμάτων με Χρονική Υστέρηση (Lagged Versions)	118
7.4.3.4	Διαχωρισμός Προβλεπτικών-Πληροφοριακών Μεταβλητών	118
7.4.4	Προ-Επεξεργασία Δεδομένων (Data Pre-Processing)	119
7.4.4.1	Αφαίρεση της Γραμμής Τάσης (Detrending)	119
7.4.4.2	Κλιμάκωση (Scaling) - Κανονικοποίηση (Normalization)	120
7.4.4.3	Διαχείριση Ακραίων Σημείων (Statistical Outliers)	121
7.4.4.4	Λοιποί Μετασχηματισμοί Δεδομένων	121
7.4.5	Κατασκευή Συνόλων Δεδομένων	123
7.4.6	Ανάπτυξη Μοντέλου και Βελτιστοποίηση	124
7.4.7	Αξιολόγηση του Μοντέλου	125
7.4.7.1	Κριτήρια Αξιολόγησης	125
7.4.7.2	Μέτρα Επιδόσεων Μοντέλων Πρόβλεψης Χρονοσειρών	126
8	Εφαρμογές του ReSuPFuNIS στην Πρόβλεψη Χαοτικών Χρονοσειρών	129
8.1	Εισαγωγή	129
8.2	Πρόβλεψη της Χρονοσειράς Mackey-Glass	129
8.3	Πρόβλεψη Μέγιστης Ημερήσιας Θερμοκρασίας	131
8.4	Πρόβλεψη Τιμής Μετοχής	135
8.5	Συμπεράσματα	140

ΛΙΣΤΑ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Κλασικό σύνολο	22
1.2	Ασαφές σύνολο	22
1.3	Συνάρτηση συμμετοχής ορισμένη σε διακριτό a και συνεχές b ασαφές σύνολο	23
1.4	α -τομές	24
1.5	(a) Τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής $triangle(x; 10, 65, 85)$, (b) Τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής $trapezoid(x; 10, 15, 70, 95)$	26
1.6	(a) Gaussian συνάρτηση συμμετοχής $gaussian(x; 50, 20)$, (b) Ασύμμετρη gaussian συνάρτηση συμμετοχής $agaussian(x; 60, 15, 40)$	27
1.7	Κωδωνοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής (a) $bell(x; 20, 4, 50)$, (b) $bell(x; 20, 6, 70)$	27
1.8	(a) Δύο σιγμοειδείς συναρτήσεις, (b) Μία κλειστή συνάρτηση συμμετοχής όπως προκύπτει από τη διαφορά $ y_1 - y_2 $	28
1.9	Ασαφές υποσύνολο, $A \subseteq B$	29
1.10	Παράδειγμα εφαρμογής τελεστών πάνω σε ασαφή σύνολα (a) Ασαφή σύνολα a, B , (b) $\neg B$, (c) $A \cup B$, (d) $A \cap B$	30
1.11	Συμπλήρωμα του Sugeno	31
1.12	Συμπλήρωμα του Yager	32
1.13	Στην πρώτη σειρά, έχουμε τους τέσσερις t-norm τελεστές $T_{min}(a, b)$, $T_{ap}(a, b)$, $T_{bp}(a, b)$ και $T_{dp}(a, b)$. Στη δεύτερη σειρά φαίνονται οι επιφάνειες που προκύπτουν μετά την εφαρμογή των τελεστών στα ασαφή σύνολα a, b	33
1.14	Στην πρώτη σειρά, έχουμε τους τέσσερις t-conorm τελεστές $S_{min}(a, b)$, $S_{as}(a, b)$, $S_{bs}(a, b)$ και $S_{ds}(a, b)$. Στη δεύτερη σειρά φαίνονται οι επιφάνειες που προκύπτουν μετά την εφαρμογή των τελεστών στα ασαφή σύνολα a, b	34
1.15	Ορισμένες ενδεικτικές τιμές της γλωσσικής μεταβλητής Ηλικία	38
1.16	Γενικευμένο Modus Ponens με χρήση του κανόνα ελαχίστου Mamdani και την max-min σύνθεση	41
1.17	Block διάγραμμα ασαφούς συστήματος	41
1.18	Παράδειγμα ασαφούς συλλογισμού κατά Mamdani σε σύστημα με 3 κανόνες και είσοδο καθορισμένες τιμές.	43
1.19	Τελικό ασαφές συμπέρασμα ενός ασαφούς συστήματος που χρησιμοποιεί την μέθοδο Mamdani με τρεις διαφορετικούς τελεστές.	44
2.1	Δομή τυπικού βιολογικού νευρονίου.	46
2.2	Νευρώνας τριγωνικού σχήματος από την παρεγκεφαλίδα (cerebellum) και κυκλικός νευρώνας από την περιοχή του ιππόκαμπου.	46
2.3	Μοντέλο νευρονίου Mc Culloch - Pitts.	47
2.4	Βασικό μοντέλο τεχνητού νευρονίου.	47
2.5	Νευρωνικό δίκτυο ενός στρώματος και νευρωνικό δίκτυο δύο στρώματων.	49
2.6	Νευρωνικό δίκτυο προσοτροφοδότησης δύο στρώματων.	49
2.7	Τοπικό αναδρομικό νευρωνικό δίκτυο.	51
2.8	Δίκτυο Elman.	51
2.9	Δίκτυο Jordan.	52

3.1	Επιφάνεια σφάλματος.	55
3.2	Εφαρμογή της μεθόδου steepest descent σε δύο συναρτήσεις.	57
3.3	Εφαρμογή της μεθόδου steepest descent και του αλγορίθμου Newton στην ίδια επιφάνεια σφάλματος.	58
3.4	Μη τετραγωνική επιφάνεια και οι κατευθύνσεις εφαρμογής των αλγορίθμων βελτιστοποίησης με αρχικό σημείο το A	59
3.5	Παραβολική επιφάνεια και οι κατευθύνσεις εφαρμογής των αλγορίθμων βελτιστοποίησης με αρχικό σημείο το A	60
3.6	Υπερβολική επιφάνεια και οι κατευθύνσεις εφαρμογής των αλγορίθμων βελτιστοποίησης με αρχικό σημείο το A	60
3.7	Ξεδίπλωμα αναδρομικού δικτύου στο χρόνο.	65
3.8	Δίκτυο που χρησιμοποιείται για την επίδειξη του αλγορίθμου RTRL.	66
4.1	Αρχιτεκτονική νευρο-ασαφούς μοντέλου ANFIS ισοδύναμου με σύστημα ασαφούς συλλογιστικής Sugeno δύο εισόδων και δύο κανόνων.	70
4.2	Δομή νευρο-ασαφούς μοντέλου HyFIS.	72
4.3	Δομή νευρο-ασαφούς μοντέλου SuPFuNIS.	74
4.4	Ποσοστό επικάλυψης δύο Γκαουσιανών συναρτήσεων συμμετοχής.	76
5.1	Αρχιτεκτονική ReSuPFuNIS.	80
5.2	Παράδειγμα εξόδου ασαφοποιητή στο πρώτο στρώμα του ReSuPFuNIS.	81
5.3	Μετάδοση ασαφούς σήματος στο ReSuPFuNIS.	81
5.4	Συνάρτηση σφάλματος.	82
5.5	Περίπτωση 1, $z_i^c = w_{ij}^c$, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$	83
5.6	Περίπτωση 1, $z_i^c = w_{ij}^c$, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$	83
5.7	Περίπτωση 2, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$, $z_i^c > w_{ij}^c$	84
5.8	Περίπτωση 2, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$, $z_i^c < w_{ij}^c$	84
5.9	Περίπτωση 3, $z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$, $z_i^c < w_{ij}^c$	85
5.10	Περίπτωση 3, $z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$, $z_i^c > w_{ij}^c$	85
5.11	Περίπτωση 4, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$, $z_i^c < w_{ij}^c$	86
5.12	Περίπτωση 4, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$, $z_i^c > w_{ij}^c$	86
6.1	Παράδειγμα δύο συνόλων δεδομένων όπου διαχρίνονται σαφώς διαχωρισμένα clusters.	98
6.2	Εφαρμογή του αλγορίθμου K-means στα δύο σύνολα που είδαμε παραπάνω. Τα διαφορετικά clusters στα οποία κατέληξε ο αλγόριθμος συμβολίζονται με διαφορετικό χρώμα.	100
6.3	Εφαρμογή του αλγορίθμου FCM σε ένα σύνολο δεδομένων.	102
6.4	Κατασκευή βουνού: (a) 2-D σύνολο δεδομένων, (b) $\sigma = 0.02$, (c) $\sigma = 0.1$, (d) $\sigma = 0.2$. . .	104
6.5	Αποδόμηση βουνού με $\beta = 0.1$: (a) η αρχική συνάρτηση βουνού με $\sigma = 0.1$, (b) μετά την εύρεση του πρώτου κέντρου, (c) μετά την εύρεση του δεύτερου κέντρου, (d) μετά την εύρεση του τρίτου κέντρου	104
6.6	Εφαρμογή αλγορίθμου FHC σε δύο σύνολα δεδομένων.	105
6.7	Διαίρεση των χώρων εισόδου και εξόδου σε ασαφείς περιοχές και οι αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής.	108
6.8	Η μορφή μιας βάσης ασαφών κανόνων.	110
7.1	Παράδειγμα ανάλυσης πρωτευουσών συνιστώσων όπου εικονίζονται οι δύο κύριες συνιστώσες. .	117
7.2	Παράδειγμα αφαίρεσης της τάσης (detrending).	120
7.3	Παράδειγμα εφαρμογής απλού κινητού μέσου όρου σε χρονοσειρά ισοτιμίας λίρασ-δολαρίου. .	122
7.4	Παράδειγμα εφαρμογής εκθετικού κινητού μέσου όρου και απλού κινητού στην ίδια χρονοσειρά. .	123
8.1	Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της χρονοσειράς Mackey-Glass (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).	130
8.2	Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της χρονοσειράς Mackey-Glass στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).	130

8.3 Μέγιστη ημερήσια ωρομοκρασία στην Μελβιόρνη από το 1981 έως το 1990.	131
8.4 Μέγιστη ημερήσια ωρομοκρασία στην Μελβιόρνη για διάστημα 300 ημερών.	131
8.5 Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας (4 κανόνες, 0,005 ρυθμός μάθησης).	132
8.6 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας στο σύνολο εκπαίδευσης (4 κανόνες, 0,005 ρυθμός μάθησης).	132
8.7 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας στο σύνολο ελέγχου (4 κανόνες, 0,005 ρυθμός μάθησης).	133
8.8 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας σε τμήμα του συνόλου ελέγχου (4 κανόνες, 0,005 ρυθμός μάθησης).	133
8.9 Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας (8 κανόνες, 0,007 ρυθμός μάθησης).	134
8.10 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (8 κανόνες, 0,007 ρυθμός μάθησης).	134
8.11 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της ωρομοκρασίας σε τμήμα του συνόλου ελέγχου (8 κανόνες, 0,007 ρυθμός μάθησης).	134
8.12 Τιμή της Εθνικής Τράπεζας (κανονικοποιημένες τιμές) σε διάστημα 450 ημερών.	135
8.13 Είσοδοι για την πρόβλεψη της τιμής μετοχής της Εθνικής Τράπεζας (αριστερά) και η επιθυμητή έξοδος του μοντέλου (δεξιά), σε διάστημα 450 ημερών.	136
8.14 Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE (9 κανόνες, 0,003 ρυθμός μάθησης).	136
8.15 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (9 κανόνες, 0,003 ρυθμός μάθησης).	137
8.16 Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE (9 κανόνες, 0,003 ρυθμός μάθησης).	137
8.17 Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE (10 κανόνες, 0,008 ρυθμός μάθησης).	138
8.18 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (10 κανόνες, 0,008 ρυθμός μάθησης).	138
8.19 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την μετοχή της Εθνικής Τράπεζας σε τμήμα του συνόλου ελέγχου (10 κανόνες, 0,008 ρυθμός μάθησης).	138
8.20 Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE στο σύνολο ελέγχου (13 κανόνες, 0,009 ρυθμός μάθησης).	139

Κεφάλαιο 1

Ασαφή Σύνολα, Ασαφής Συλλογιστική και Ασαφή Συστήματα

1.1 Εισαγωγή

Η θεωρία των ασαφών συνόλων, υφελιώθηκε από τον Lofti Zadeh το 1965. Η θεωρία αυτή βρήκε εφαρμογές σε πληθύρα επιστημονικών περιοχών, από την οικονομία και την πληροφορική μέχρι την ψυχολογία και την οργάνωση επιχειρήσεων. Μέσω της ασαφούς λογικής και της ασαφούς συλλογιστικής, καταφέρνουμε να δώσουμε απαντήσεις σε προβλήματα τα οποία δεν μπορούν να περιγραφούν με μαθηματική αυστηρότητα. Τέτοια είναι τα προβλήματα που δίνονται με γλωσσική περιγραφή, καθώς η ασάφεια είναι ένα χαρακτηριστικό της γλώσσας και πηγάζει από την αναχρίσια που ενυπάρχει στο γλωσσικό ορισμό.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε τους βασικούς ορισμούς και τους συμβολισμούς για τα ασαφή σύνολα και την ασαφή συλλογιστική, που θα χρησιμοποιήσουμε στα ακόλουθα κεφάλαια.

1.2 Ασαφή Σύνολα

1.2.1 Γενικά

Η κλασική συνολοθεωρία δομείται εξ' ολοκλήρου σε ένα αξίωμα βασισμένο στη διχοτομία: **ένα στοιχείο ανήκει ή δεν ανήκει στο σύνολο**. Αν X ένα σύνολο και a ένα τυχαίο στοιχείο τότε συμβολικά

$$a \in X \vee a \notin X \quad (1.1)$$

Παρόλο που η κλασική συνολοθεωρία, είναι κατάλληλη για πλήθος εφαρμογών και είναι ένα πολύ ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη περιγραφή της ανθρώπινης σκέψης η οποία στηρίζεται στην ασάφεια και την αβεβαιότητα. Αν για παράδειγμα προσπαθήσουμε να εκφράσουμε μέσω ενός κλασικού συνόλου τους ανθρώπους μεγάλης ηλικίας τότε θα μπορούσαμε να έχουμε το σύνολο

$$X = \{a \mid a > 60\} \quad (1.2)$$

Είναι προφανές ότι το παραπάνω σύνολο δεν επαρκεί για την μαθηματική αναπαράσταση της γλωσσικής έννοιας ηλικιαμένοι ανθρώποι. Η διχοτομική φύση της κλασικής συνολοθεωρίας κατατάσσει έναν άνθρωπο 60 χρονών εκτός του X έναν άλλο ηλικίας 60 χρονών και μιας μέρας εντός του X . Αυτός ο διαχωρισμός διαισθητικά δεν έχει καμία λογική και οφείλεται στην απότομη μετάβαση ανάμεσα στη συμμετοχή ή όχι ενός στοιχείου σε ένα σύνολο.

Αν αμφισβητήσουμε τη διχοτομία, τότε η κλασική συνολοθεωρία καταστρέφεται και προκύπτει η θεωρία των ασαφών συνόλων. Σε αντίθεση με τα κλασικά σύνολα, σε ένα ασαφές σύνολο η μετάβαση από το «*ανήκω στο σύνολο*» στο «*δεν ανήκω στο σύνολο*» είναι σταδιακή, και χαρακτηρίζεται από συναρτήσεις συμμετοχής, μέσω των οποίων μοντελοποιούνται γλωσσικές εκφράσεις.

1.2.2 Βασικοί Ορισμοί

Έστω X ένας χώρος αντικειμένων και x ένα στοιχείο του X . Ορίζοντας μια **χαρακτηριστική συνάρτηση** για κάθε x , μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα κλασικό σύνολο A με ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών $(x, 0)$ ή $(x, 1)$ που εκφράζουν τις σχέσεις $x \in A$ ή $x \notin A$ αντίστοιχα. Αντιψέτως με τα κλασικά σύνολα, ένα ασαφές σύνολο εκφράζει το βαθμό στον οποίο ένα στοιχείο ανήκει σε ένα σύνολο. Έτσι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ασαφούς συνόλου, επιτρέπεται να πάρει οποιαδήποτε τιμή μεταξύ των 0 και 1.

Ορισμός 1.1 [Ασαφή Σύνολα]

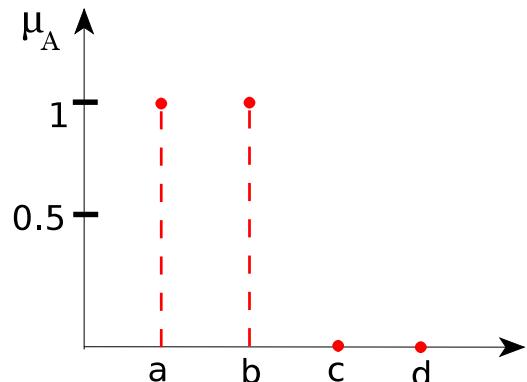
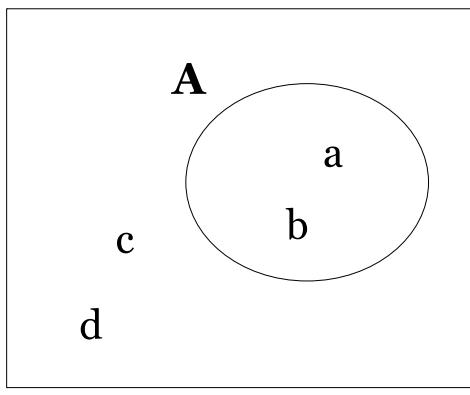
Αν X υπερσύνολο αναφοράς, τότε ορίζουμε σαν **ασαφές υποσύνολο** A του X το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X, \mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]\} \quad (1.3)$$

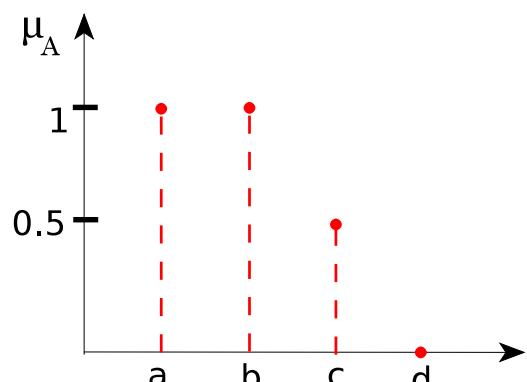
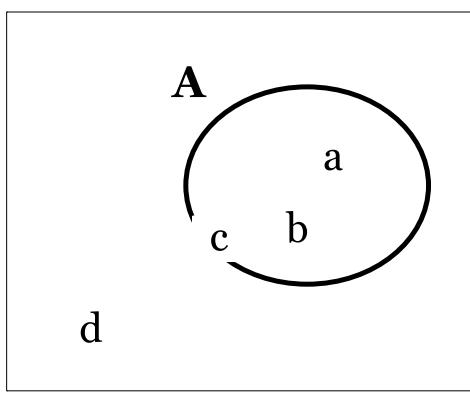
όπου η $\mu_A(x)$ καλείται **συνάρτηση συμμετοχής** (membership function) του ασαφούς συνόλου A . Η συνάρτηση συμμετοχής αντιστοιχεί κάθε στοιχείο του X σε έναν βαθμό συμμετοχής ανάμεσα στο 0 και το 1. ■

Παράδειγμα 1.1

Τα σχήματα 1.1 και 1.2 δείχνουν την διαφορά ανάμεσα σε ένα κλασικό και ένα ασαφές σύνολο A και στις αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής.



Σχήμα 1.1 - Κλασικό σύνολο



Σχήμα 1.2 - Ασαφές σύνολο

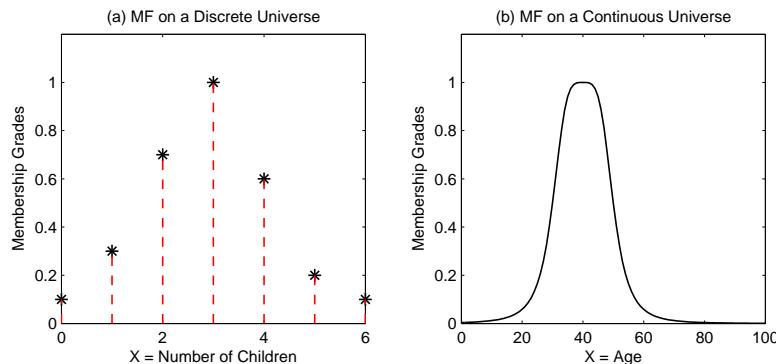


Το υπερσύνολο αναφοράς X μπορεί να αποτελείται από διακριτά αντικείμενα ή να είναι συνεχής χώρος. Με βάση την προηγούμενη παρατίρηση, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό για τα ασαφή σύνολα

$$A = \begin{cases} \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i)/x_i, & \text{αν } X \text{ πεπερασμένο} \\ \int_X \mu_A(x)/x, & \text{αν } X \text{ μη πεπερασμένο} \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.2

Στο σχήμα 1.1 φαίνονται οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων A , B που ορίζονται αντίστοιχα πάνω σε διακριτό και συνεχή χώρο X .



Σχήμα 1.3 - Συνάρτηση συμμετοχής ορισμένη σε διακριτό και συνεχές b ασαφές σύνολο

1. Έστω $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ το σύνολο των αριθμού των παιδιών που μπορεί να έχει μια οικογένεια. Τότε το διακριτό ασαφές σύνολο $A=»\epsilonπιψυμητός αριθμός παιδιών σε μια οικογένεια»$, θα μπορούσε να περιγραφεί ως εξής:

$$\begin{aligned} A &= \{(0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\} \\ &= 0.1/0 + 0.3/1 + 0.7/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.3/5 + 0.1/6 \end{aligned}$$

2. Έστω $X = R^+$ το σύνολο των πιθανών ηλικιών για τους ανθρώπους. Τότε το συνεχές ασαφές σύνολο $B=»\piερίπου 40 χρονών»$ μπορεί να εκφραστεί σαν

$$B = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$$

όπου

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-40}{10}\right)^4}$$

Το ασαφές σύνολο B θα μπορούσε να εκφραστεί και σαν:

$$B = \int_{R^+} \frac{1}{1 + \left(\frac{x-40}{10}\right)^4} / x$$



Ορισμός 1.2 [Στήριγμα]

Έστω X υπερσύνολο αναφοράς και A ασαφές υποσύνολο του X . Καλούμε **στήριγμα** του A το σύνολο όλων των στοιχείων x του X για τα οποία $\mu_A(x) > 0$:

$$\text{support}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (1.4)$$



Παράδειγμα 1.3

Αν $X = 1, 2, 3, 4, 5$ και $A = 0.3/1 + 0.4/2 + 0.7/5$ τότε $support(A) = 1, 2, 5$.

Ορισμός 1.3 [α-τομή, ισχυρή α-τομή]

α-τομή ενός ασαφούς συνόλου A είναι το κλασικό σύνολο A_α που ορίζεται ως εξής:

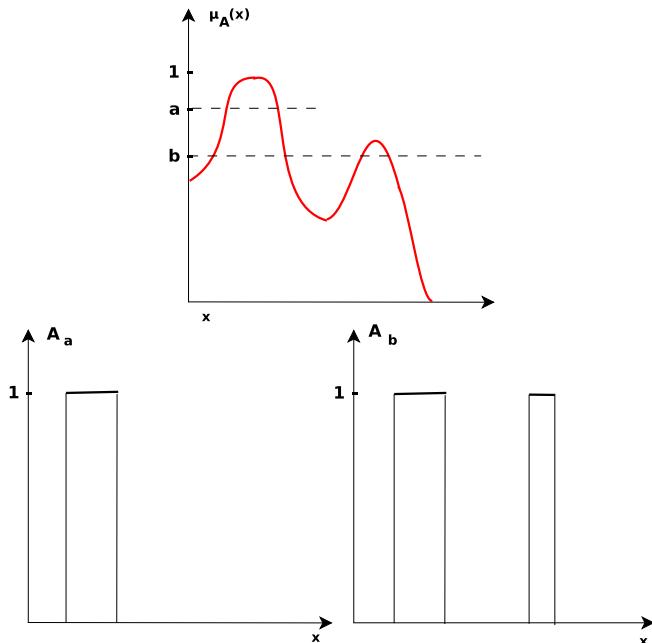
$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (1.5)$$

Αντίστοιχα ορίζεται η ισχυρή α-τομή ως εξής:

$$A'_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\} \quad (1.6)$$

Παράδειγμα 1.4

Το παρακάτω δείχνει πως επενεργεί ο τελεστής της α-τομής πάνω σε ένα ασαφές σύνολο A .



Σχήμα 1.4 - α-τομές

Συνδυάζοντας τους δύο παραπάνω ορισμούς, μπορούμε να εκφράσουμε το στήριγμα ενός ασαφούς συνόλου A σαν

$$support(A) = A'_0$$

Ορισμός 1.4 [Πυρήνας]

Πυρήνας (core) ενός ασαφούς συνόλου A είναι το σύνολο όλων των στοιχείων x του υπερσυνόλου αναφοράς X για τα οποία $\mu_A(X) = 1$.

$$core(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) = 1\} \quad (1.7)$$

Παράδειγμα 1.5

Αν $X = 2, 3, 4, 7$ και $A = 0.3/2 + 1/3 + 1/4 + 0.2/7$ τότε $\text{core}(A) = 3, 4$.



Ορισμός 1.5 [Μέτρο ασαφούς συνόλου - Cardinality]

Έστω X ένα συνεχές υπερσύνολο αναφοράς. Σαν μέτρο (Cardinality) ενός ασαφούς συνόλου A ορισμένου πάνω στο X ορίζουμε το μέγεθος

$$\text{cardinality}(A) = |A| = \int_A \mu_A(x) dx \quad (1.8)$$

Αν το υπερσύνολο αναφοράς X είναι πεπερασμένο τότε το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από άθροισμα.



1.2.3 Τυπικές Συναρτήσεις Συμμετοχής

Σε αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε τυπικές συναρτήσεις συμμετοχής σε μία διάσταση. Οι συναρτήσεις αυτές και κυρίως η Gaussian θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια στους ασαφείς κανόνες.

Ορισμός 1.6 [Τριγωνικές Συναρτήσεις Συμμετοχής]

Μία τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής ορίζεται από τρεις παραμέτρους a, b, c ως εξής:

$$\text{triangle}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & x \leq a. \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b. \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c. \\ 0, & c \leq x. \end{cases} \quad (1.9)$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής χρησιμοποιώντας τους τελεστές \min και \max ως εξής:

$$\text{triangle}(x; a, b, c) = \max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right) \quad (1.10)$$

Οι παράμετροι a, b, c (με $a < b < c$) ορίζουν τις x συντεταγμένες των γωνιών του τριγώνου.



Ορισμός 1.7 [Τραπεζοειδείς Συναρτήσεις Συμμετοχής]

Μία τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής ορίζεται από τέσσερις παραμέτρους a, b, c, d ως εξής:

$$\text{trapezoid}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & x \leq a. \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b. \\ 1, & b \leq x \leq c. \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d. \\ 0, & d \leq x. \end{cases} \quad (1.11)$$

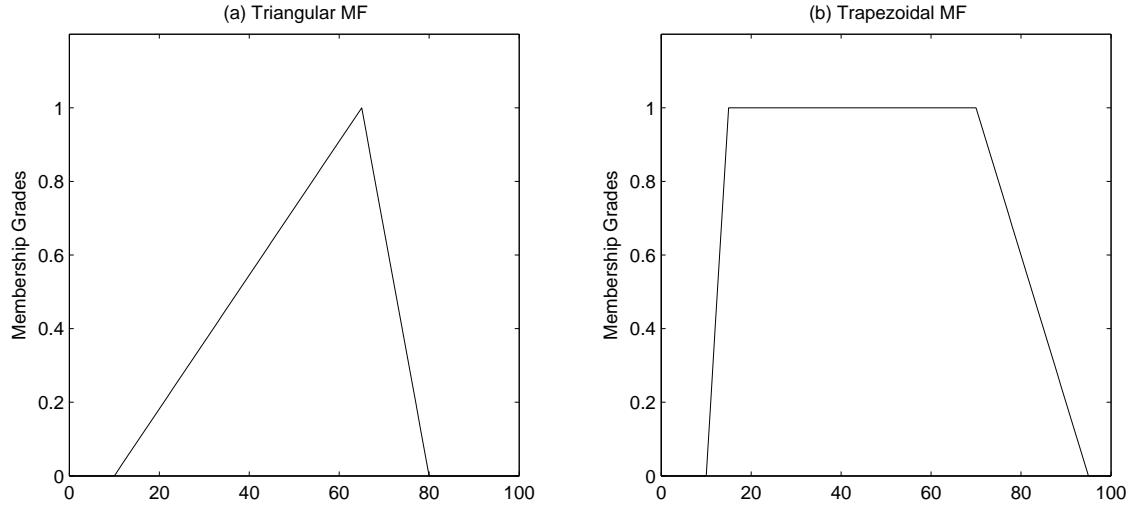
Θα μπορούσαμε να ορίσουμε μία τραπεζοειδή συνάρτηση συμμετοχής χρησιμοποιώντας τους τελεστές \min και \max ως εξής:

$$\text{trapezoid}(x; a, b, c, d) = \max \left(\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right) \quad (1.12)$$

Οι παράμετροι a, b, c, d (με $a < b < c < d$) ορίζουν τις x συντεταγμένες των τεσσάρων γωνιών του τραπεζίου.

■

Στο Σχήμα 1.5 απεικονίζονται μία τριγωνική και μια τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής.



Σχήμα 1.5 - (a) Τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής $triangle(x; 10, 65, 85)$, **(b)** Τραπεζοειδής συνάρτηση συμμετοχής $trapezoid(x; 10, 15, 70, 95)$

Οι παραπάνω δύο κατηγορίες συναρτήσεων, λόγω της απλότητάς τους, έχουν χρησιμοποιηθεί διεξοδικά. Οστόσο λόγω του ότι αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα δεν είναι συνεχείς στα γωνιακά σημεία. Παρακάτω εισαγάγουμε μη γραμμικές συναρτήσεις συμμετοχής που ξεπερνούν τα προβλήματα αυτά.

Ορισμός 1.8 [Gaussian Συναρτήσεις Συμμετοχής]

Μία **Gaussian** συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να οριστεί από δύο παραμέτρους c, σ :

$$gaussian(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-c}{\sigma})^2} \quad (1.13)$$

Το c αντιστοιχεί στο κέντρο της συνάρτησης συμμετοχής ενώ το σ ορίζει το εύρος.

■

Ορισμός 1.9 [Ασύμμετρες Gaussian Συναρτήσεις Συμμετοχής]

Μία ασύμμετρη **gaussian** συνάρτηση συμμετοχής ορίζεται από τρεις παραμέτρους c, σ^l, σ^r ως εξής:

$$agaussian(x; c, \sigma^l, \sigma^r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-c}{\sigma^l})^2}, & -\infty < x \leq c. \\ e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-c}{\sigma^r})^2}, & c \leq x < +\infty \end{cases} \quad (1.14)$$

Το c αντιστοιχεί στο κέντρο της συνάρτησης συμμετοχής ενώ τα σ^l, σ^r ορίζουν αντίστοιχα το αριστερό και δεξιό του κέντρου εύρος.

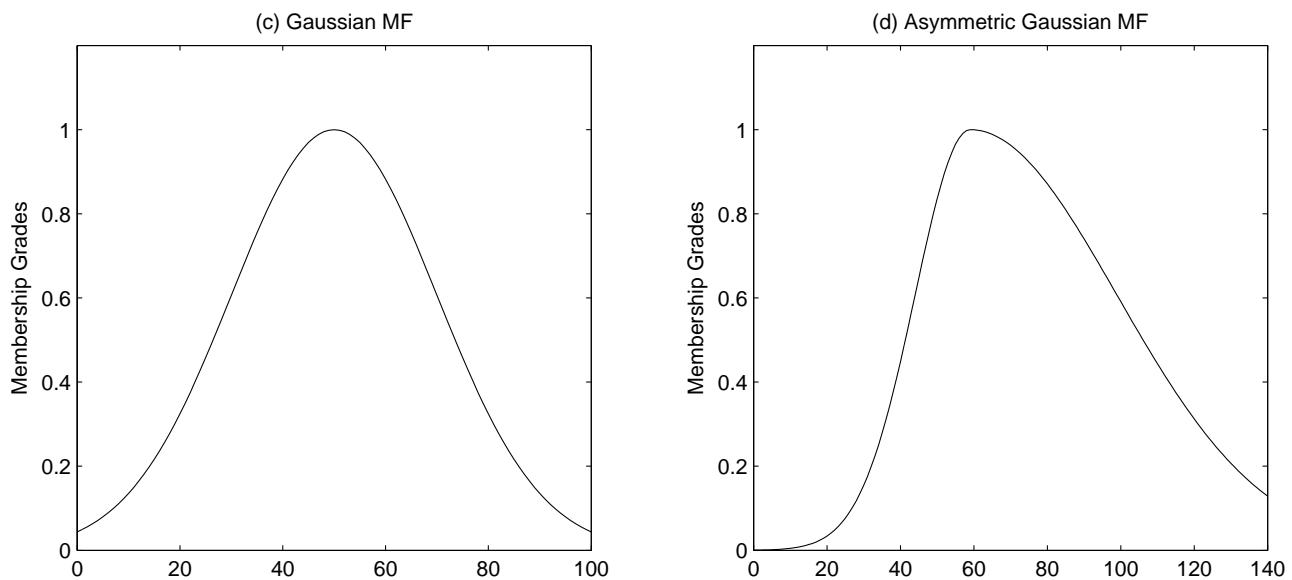
■

Στο Σχήμα 1.6 απεικονίζονται συμμετρικές και ασύμμετρες gaussian συναρτήσεις συμμετοχής.

Ορισμός 1.10 [Κωδωνοειδείς Συναρτήσεις Συμμετοχής]

Μία **κωδωνοειδής** συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να οριστεί από τρεις παραμέτρους a, b, c :

$$bell(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + |\frac{x-c}{a}|^{2b}} \quad (1.15)$$

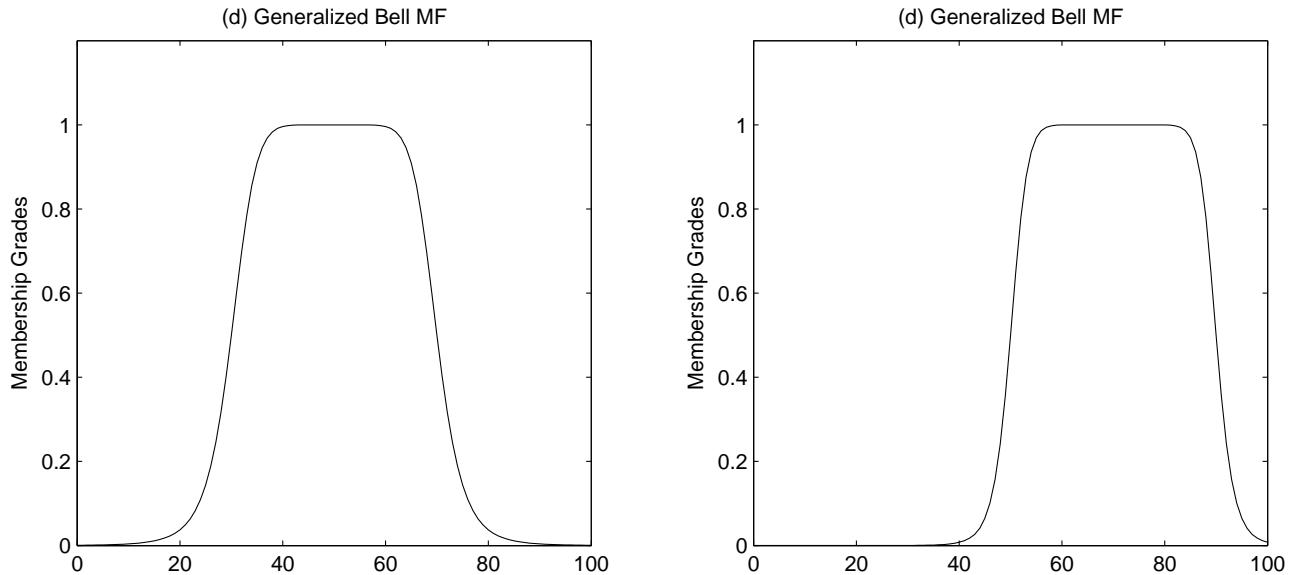


Σχήμα 1.6 - (a) Gaussian συνάρτηση συμμετοχής $gaussian(x; 50, 20)$, **(b)** Ασύμμετρη gaussian συνάρτηση συμμετοχής $agaussian(x; 60, 15, 40)$

Το b είναι συνήθως θετικό. Σε αντίθετη περίπτωση έχουμε μία ανεστραμμένη κωδωνοειδή συνάρτηση.

■

Στο Σχήμα 1.7 απεικονίζονται δύο κωδωνοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής.



Σχήμα 1.7 - Κωδωνοειδείς συναρτήσεις συμμετοχής **(a)** $bell(x; 20, 4, 50)$, **(b)** $bell(x; 20, 6, 70)$

Ορισμός 1.11 [Σιγμοειδείς Συναρτήσεις Συμμετοχής]

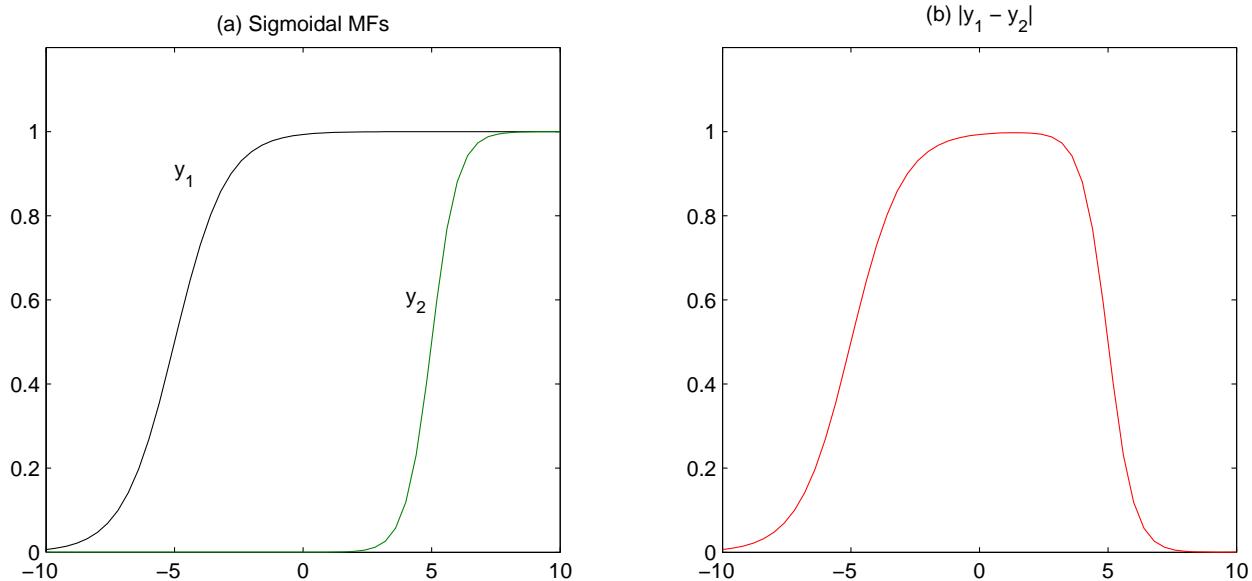
Μία σιγμοειδής ορίζεται ως εξής:

$$sig(x; a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}} \quad (1.16)$$

όπου το a ελέγχει την κλίση στο σημείο $x = c$.

■

Παρατήρηση 1.1 Ανάλογα με το πρόσημο του α η σιγμοειδής συνάρτηση είναι «ανοικτή» είτε αριστερά είτε δεξιά και είναι μία κατάλληλη συνάρτηση για την αναπαράσταση των εννοιών «πολύ μεγάλος» ή «πολύ αρνητικός». Παίρνοντας την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο σιγμοειδών συναρτήσεων με ίδιο πρόσημο στο α τότε προκύπτει μία κλειστή και μη συμμετρική συνάρτηση συμμετοχής. Στο Σχήμα 1.8 φαίνονται τα παραπάνω.



Σχήμα 1.8 - (a) Δύο σιγμοειδείς συναρτήσεις, **(b)** Μία κλειστή συνάρτηση συμμετοχής όπως προκύπτει από τη διαφορά $|y_1 - y_2|$

1.2.4 Πράξεις των Ασαφών Συνόλων

Η ένωση, η τομή και το συμπλήρωμα αποτελούν τις βασικότερες πράξεις της κλασικής συνολοθεωρίας. Μπορούμε να εδραιώσουμε μια σειρά ταυτότητων, βασισμένων στις 3 αυτές πράξεις. Οι ταυτότητες αυτές, ακολουθούν στον Πίνακα 1.1, και μπορούν εύκολα να επαληθευτούν με χρήση διαγραμμάτων Venn.

Βασικές ταυτότητες και αξιώματα	
Αξιωματικός ορισμός συμπληρώματος	$A \cap \bar{A} = \emptyset, A \cup \bar{A} = X$
Διπλή άρνηση	$\bar{\bar{A}} = A$
Αντιμεταθετική	$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
Προσεταιριστική	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Επιμεριστική	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Απορρόφηση	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Απορρόφηση Συμπληρώματος	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
	$A \cap (A \cup B) = A$
	$A \cup (A \cap B) = A$
	$A \cap (\bar{A} \cup B) = A \cap B$
	$A \cup (\bar{A} \cap B) = A \cup B$
Νόμοι DeMorgan	$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

Πίνακας 1.1 - Ταυτότητες κλασικής συνολοθεωρίας

Βασιζόμενος στην έννοια της συνάρτησης συμμετοχής ο Zadeh πρότεινε αντίστοιχες πράξεις και για τα ασαφή σύνολα. Αρχικά και πριν ορίσουμε τις τρεις αυτές θεμελιώδεις για την θεωρία των ασαφών συνόλων

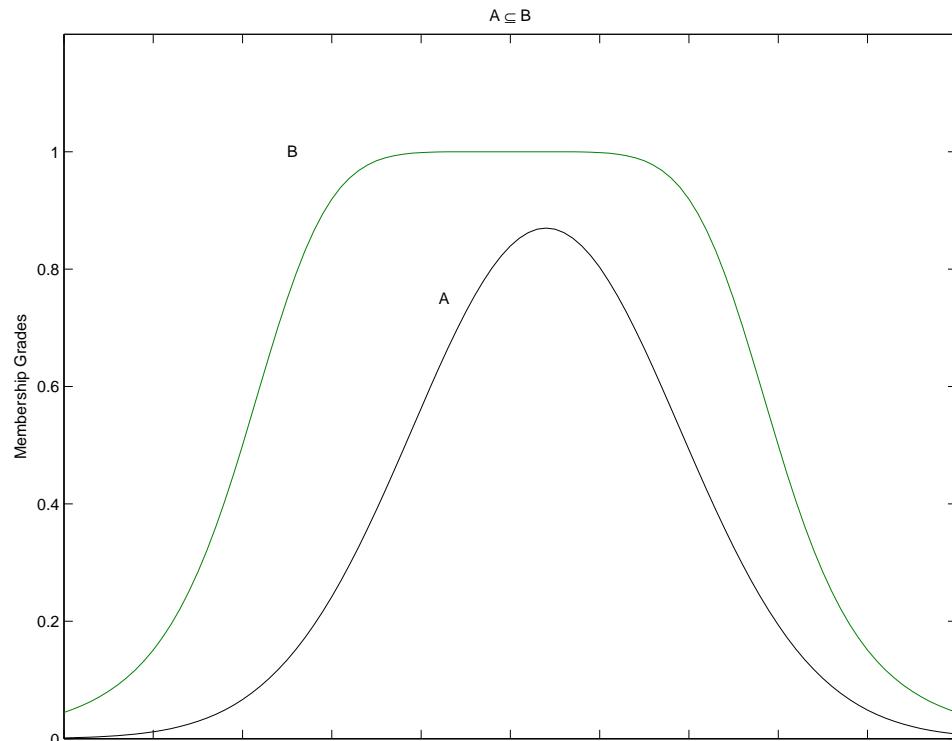
πράξεις, όταν ορίζουμε το ασαφές υποσύνολο. Ο ορισμός αυτός προήλθε άμεσα από τον αντίστοιχο ορισμό της κλασικής συνολοθεωρίας.

Ορισμός 1.12 [Ασαφές Υποσύνολο]

Το ασαφές σύνολο A **περιέχεται** στο ασαφές σύνολο B (ή αντίστοιχα το A είναι **υποσύνολο** του B) αν και μόνο αν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ για όλα τα x . Συμβολικά,

$$A \subseteq B \iff \mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in X \quad (1.17)$$

■



Σχήμα 1.9 - Ασαφές υποσύνολο, $A \subseteq B$

Ορισμός 1.13 [Ένωση]

Η **ένωση** δύο ασαφών συνόλων A, B είναι ένα ασαφές σύνολο C , το οποίο μπορεί να γραφεί σαν $C = A \cup B$ και έχει συνάρτηση συμμετοχής που δίνεται από τον τύπο,

$$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad (1.18)$$

■

Μία πιο διαισθητική ερμηνεία της έννοιας της ασαφούς ένωσης, όπως προτάθηκε από τον Zadeh, είναι το «μικρότερο» ασαφές σύνολο που περιέχει και το A και το B . Δηλαδή αν D ένα ασαφές σύνολο που περιέχει τα A, B τότε περιέχει και την ένωση $A \cup B$. Ανάλογα μπορεί να οριστεί και η τομή δύο ασαφών συνόλων.

Ορισμός 1.14 [Τομή]

Η **τομή** δύο ασαφών συνόλων A, B είναι ένα ασαφές σύνολο C , το οποίο μπορεί να γραφεί σαν $C = A \cap B$ και έχει συνάρτηση συμμετοχής που δίνεται από τον τύπο,

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \quad (1.19)$$

■

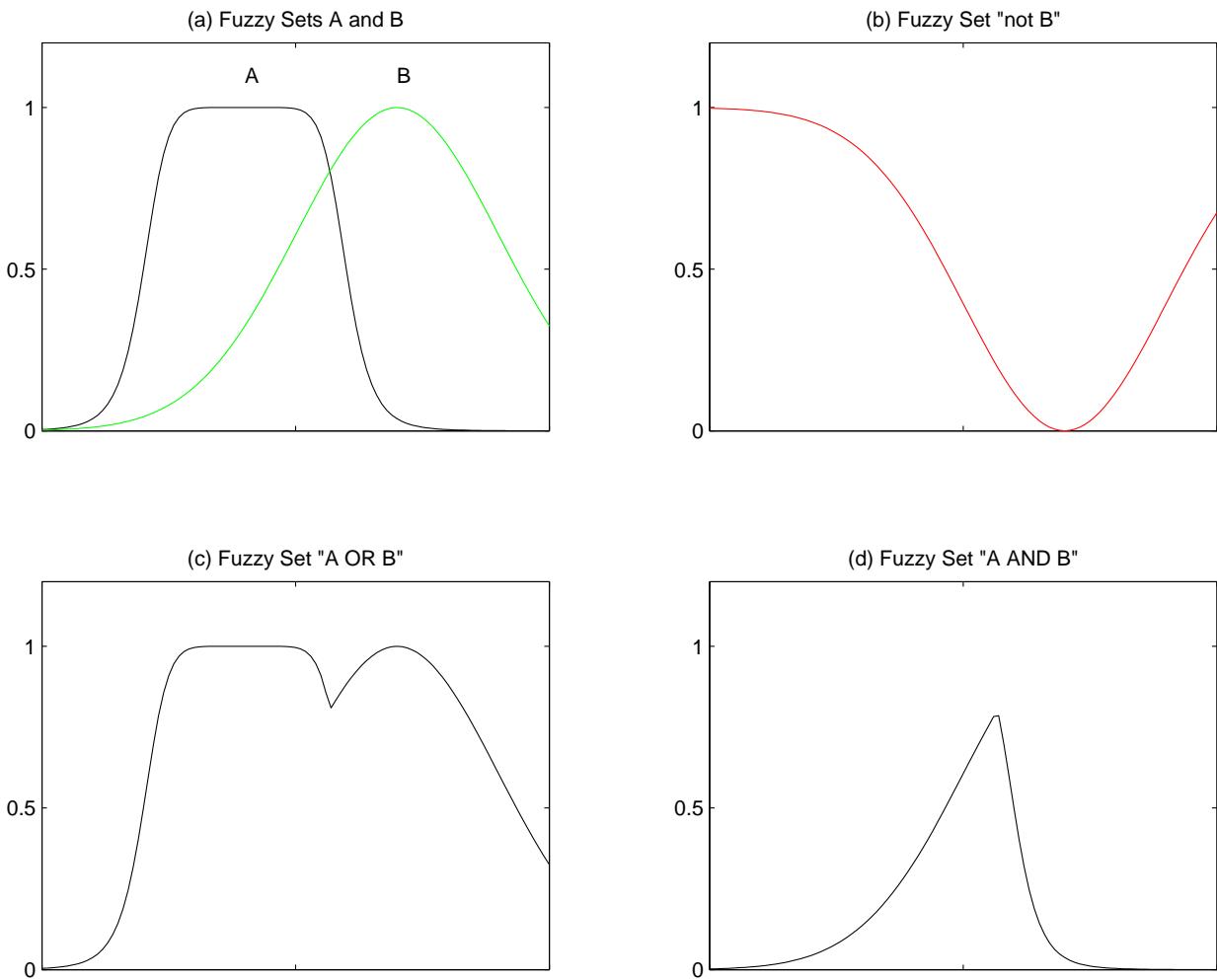
Η τομή των A, B μπορεί να ερμηνευτεί σαν το «μεγαλύτερο» ασαφές υποσύνολο των A και B . Τέλος ορίζουμε το ασαφές συμπλήρωμα.

Ορισμός 1.15 [Συμπλήρωμα]

Το συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου A , συμβολίζεται ως \bar{A} και ορίζεται ως εξής,

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (1.20)$$

■



Σχήμα 1.10 - Παράδειγμα εφαρμογής τελεστών πάνω σε ασαφή σύνολα (a) Ασαφή σύνολα a, B , (b) $\neg B$, (c) $A \cup B$, (d) $A \cap B$

Παρατήρηση 1.2 Έστω A ασαφές σύνολο και A^c το συμπλήρωμά του. Τότε $A \cap A^c \neq \emptyset$ και $A \cup A^c \neq X$ όπου X το υπερσύνολο αναφοράς. Δηλαδή στην ασαφή θεωρία δεν ισχύουν τα βασικά αξιώματα της Αριστοτελειας λογικής.

1.2.5 Γενίκευση των Τριών Βασικών Πράξεων (Τελεστές t)

Οι κλασικοί τελεστές για τις πράξεις των ασαφών συνόλων, που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, δεν αποτελούν τις μόνες επιλογές για την ασαφή τομή, την ένωση και το συμπλήρωμα. Αυτή η ενότητα, εξετάζει και άλλους δυνατούς ορισμούς για τους τελεστές των πράξεων αυτών.

1.2.5.1 Ασαφές Συμπλήρωμα

Ο τελεστής του ασαφούς συμπληρώματος είναι μία συνεχής συνάρτηση $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ η οποία πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω δύο αξιώματα :

$$\begin{aligned} N(0) &= 1 \text{ και } N(1) = 0 && (\text{όρια}) \\ N(a) &\geq N(b) \text{ αν } a \leq b && (\text{μονοτονία}) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Όλες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν αυτά τα αξιώματα, αποτελούν τη γενική υλάση των ασαφών συμπληρωμάτων. Το πρώτο αξιώμα είναι άμεση επέκταση της κλασικής λογικής. Η απαίτηση για φύλνουσα συμπεριφορά είναι απαραίτητη καθώς διαισθητικά περιμένουμε πως μία αύξηση της συνάρτησης συμμετοχής ενός ασαφούς συνόλου, πρέπει να έχει σαν αποτέλεσμα την μείωση της συνάρτησης συμμετοχής του συμπληρώματος. Αυτές οι δύο συνθήκες αποτελούν τον αξιωματικό σκελετό για τα ασαφή συμπληρώματα. Αυτός ο σκελετός δεν επαρκεί για να υποστηρίζει τις ανάγκες που πηγάζουν από τη χρήση του συμπληρώματος σε συλλογιστικούς κανόνες. Γι' αυτό έχει προστεθεί και η ακόλουθη προαιρετική συνθήκη:

$$N(N(a)) = a \quad (1.22)$$

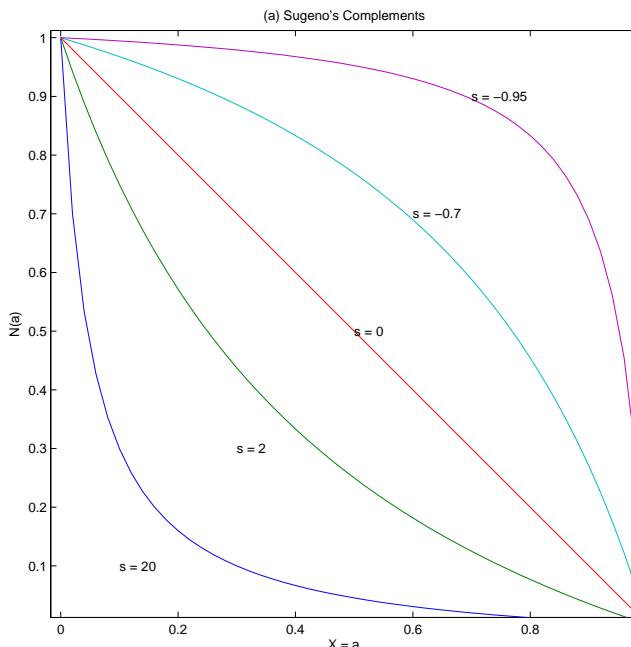
το οποίο εγγυάται ότι το διπλό συμπλήρωμα ενός ασαφούς συνόλου είναι το ίδιο το σύνολο. Τα ακόλουθα παραδείγματα ασαφών συμπληρωμάτων ικανοποιούν τόσο τα δύο βασικά αξιώματα όσο και την προαιρετική συνθήκη.

Παράδειγμα 1.6 [Συμπλήρωμα του Sugeno]

Το συμπλήρωμα του Sugeno ορίζεται ως,

$$N_s(a) = \frac{1-a}{1+sa} \quad (1.23)$$

όπου s μία παράμετρος μεγαλύτερη από -1. Για κάθε τιμή της παραμέτρου s , παίρνουμε έναν διαφορετικό τελεστή συμπληρώματος. Το παρακάτω σχήμα δείχνει μερικά από τα μέλη της οικογένειας συμπληρωμάτων Sugeno



Σχήμα 1.11 - Συμπλήρωμα του Sugeno

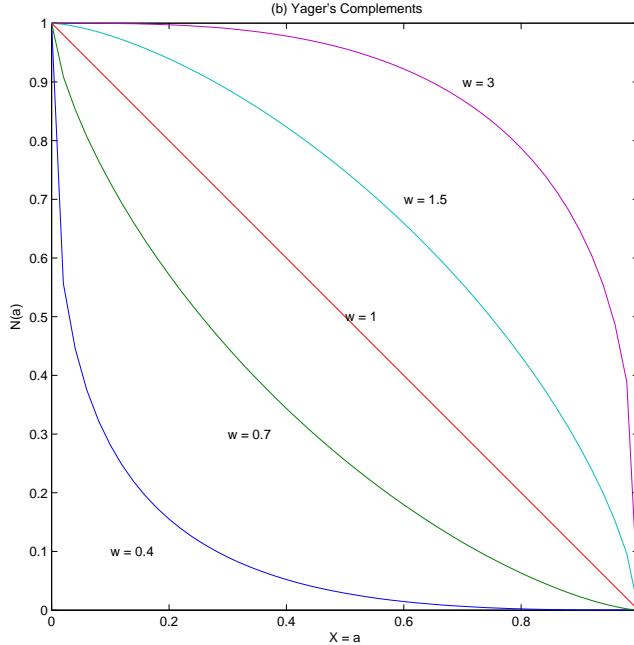


Παράδειγμα 1.7 [Συμπλήρωμα του Yager]

Μία άλλη τάξη ασαφών συμπληρωμάτων, είναι το **συμπλήρωμα του Yager** που ορίζεται ως,

$$N_w(a) = (1 - a)^{\frac{1}{w}} \quad (1.24)$$

όπου w μία θετική παράμετρος. Το παρακάτω σχήμα δείχνει μερικά από τα μέλη της οικογένειας συμπληρωμάτων Yager.



Σχήμα 1.12 - Συμπλήρωμα του Yager



1.2.5.2 Ασαφής Τομή (Μέτρο-t)

Η τομή δύο ασαφών συνόλων A και B ορίζεται ως μία συνάρτηση $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, η οποία προκύπτει από δύο συναρτήσεις συμμετοχής ως εξής :

$$\mu_{A \cap B}(x) = T(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{*} \mu_B(x) \quad (1.25)$$

όπου $\tilde{*}$ ένας δυαδικός τελεστής για την συνάρτηση T . Η οικογένεια των τελεστών ασαφούς τομής (Μέτρο-t), πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες.

Ορισμός 1.16 [Μέτρο-t]

Ένας τελεστής **μέτρο-t** είναι μία συνάρτηση T δύο μεταβλητών που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} T(0, 0) &= 0, \quad T(a, 1) = T(1, a) = a && (\text{όρια}) \\ T(a, b) &\leq T(c, d) \text{ αν } a \leq c \text{ και } b \leq d && (\text{μονοτονία}) \\ T(a, b) &= T(b, a) && (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα}) \\ T(a, T(b, c)) &= T(T(a, b), c) && (\text{προσεταιριστική ιδιότητα}) \end{aligned} \quad (1.26)$$



Στο ακόλουθο παράδειγμα παρουσιάζονται πέντε από τους συνηθέστερους τελεστές μέτρο-t.

Παράδειγμα 1.8 [Πέντε μέτρο-t τελεστές]

Πέντε από τους συνηθέστερους τελεστές μέτρο-t είναι

Ελάχιστο (Mamdani):

$$T_{min}(a, b) = \min(a, b) = a \wedge b$$

Αλγεβρικό γινόμενο (Larsen):

$$T_{ap}(a, b) = ab$$

Φραγμένο γινόμενο:

$$T_{bp}(a, b) = 0 \vee (a + b - 1)$$

Δραστικό γινόμενο:

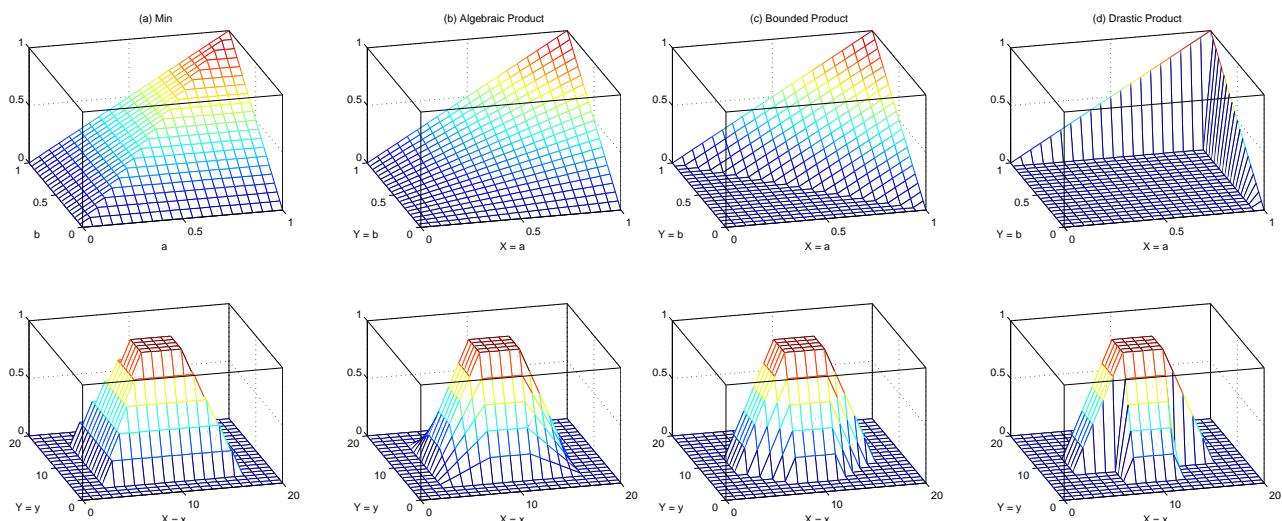
$$T_{dp}(a, b) = \begin{cases} a & \text{αν } b = 1 \\ b & \text{αν } a = 1 \\ 0 & \text{αν } a, b \neq 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

Αριθμητική μέθοδος Zadeh:

$$T_{Zadeh}(a, b) = 1 \wedge (1 - a + b)$$

Τα a, b αντιστοιχούν σε συναρτήσεις συμμετοχής και μπορούν να πάρουν τιμές από το 0 έως το 1. Οι γραφικές παραστάσεις των τελεστών αυτών φαίνονται στο Σχήμα 1.13.

Έστω $a = \mu_A(x) = trapezoid(x; 3, 8, 12, 17)$ και $b = \mu_B(y) = trapezoid(y; 3, 8, 12, 17)$ οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων A, B . Παρακάτω απεικονίζεται η εφαρμογή των τελεστών στις δύο αυτές συναρτήσεις συμμετοχής.



Σχήμα 1.13 - Στην πρώτη σειρά, έχουμε τους τέσσερις t-norm τελεστές $T_{min}(a, b)$, $T_{ap}(a, b)$, $T_{bp}(a, b)$ και $T_{dp}(a, b)$. Στη δεύτερη σειρά φαίνονται οι επιφάνειες που προκύπτουν μετά την εφαρμογή των τελεστών στα ασαφή σύνολα a, b .



1.2.5.3 Ασαφής Ένωση (Σύμμετρο-t)

Αντίστοιχα με την ασαφή τομή, ο τελεστής της ασαφούς ένωσης ορίζεται ως μία συνάρτηση $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

$$\mu_{A \cup B}(x) = S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \tilde{+} \mu_B(x) \quad (1.28)$$

όπου $\tilde{+}$ ένας δυαδικός τελεστής για την συνάρτηση S . Η οικογένεια των τελεστών ασαφούς ένωσης (Σύμμετρο-t), πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες βασικές συνθήκες.

Ορισμός 1.17 [Σύμμετρο-t]

Ένας τελεστής σύμμετρο-t είναι μία συνάρτηση S δύο μεταβλητών που ικανοποιεί

$$\begin{aligned} S(1, 1) = 1, \quad S(0, a) = S(a, 0) = a & \quad (\text{όρια}) \\ S(a, b) \leq S(c, d) \text{ αν } a \leq c \text{ και } b \leq d & \quad (\text{μονοτονία}) \\ S(a, b) = S(b, a) & \quad (\text{αντιμεταθετική ιδιότητα}) \\ S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c) & \quad (\text{προσεταιριστική ιδιότητα}) \end{aligned} \quad (1.29)$$

■

Παράδειγμα 1.9 [Τέσσερις σύμμετρο-t τελεστές]

Αντίστοιχοι στους τέσσερις πρώτους μέτρο-t τελεστές του προηγούμενου παραδείγματος, είναι οι επόμενοι τέσσερις σύμμετρο-t τελεστές.

Μέγιστο (Mamdani):

$$S_{max}(a, b) = max(a, b) = a \vee b$$

Αλγεβρικό άθροισμα (Larsen):

$$S_{as}(a, b) = a + b - ab$$

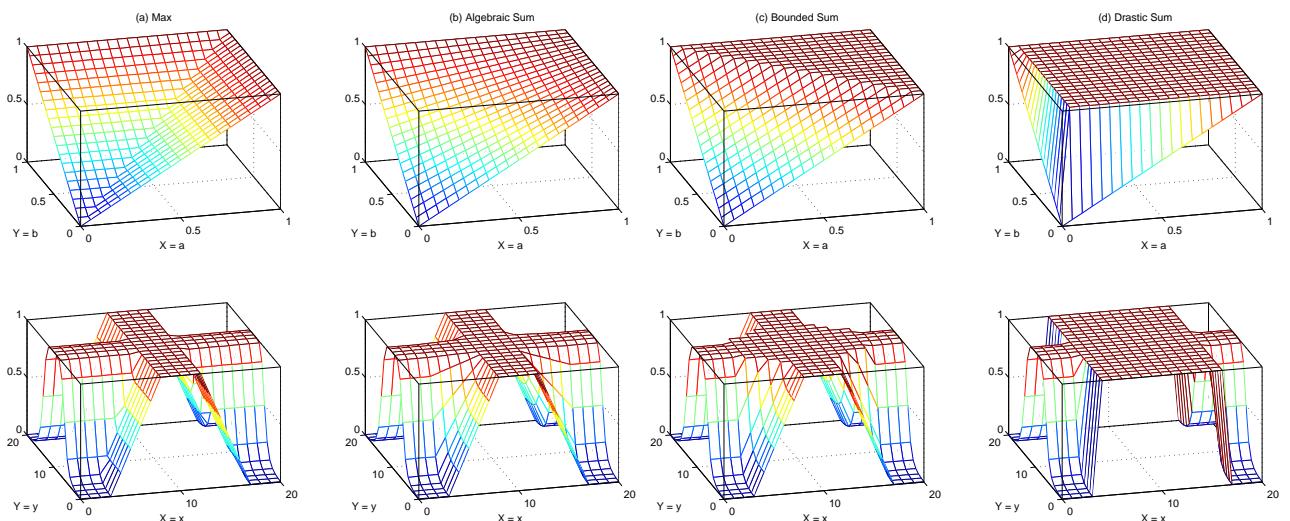
Φραγμένο άθροισμα:

$$S_{bs}(a, b) = 1 \wedge (a + b)$$

Δραστικό άθροισμα:

$$S_{ds}(a, b) = \begin{cases} a & \text{αν } b = 0 \\ b & \text{αν } a = 0 \\ 0 & \text{αν } a, b > 0 \end{cases}$$

Έστω $a = \mu_A(x) = \text{trapezoid}(x; 3, 8, 12, 17)$ και $b = \mu_B(y) = \text{bell}(y; 4, 3, 10)$ οι συναρτήσεις συμμετοχής των ασαφών συνόλων A, B . Παρακάτω απεικονίζεται η εφαρμογή των τελεστών στις δύο αυτές συναρτήσεις συμμετοχής.



Σχήμα 1.14 - Στην πρώτη σειρά, έχουμε τους τέσσερις t-conorm τελεστές $S_{min}(a, b)$, $S_{as}(a, b)$, $S_{bs}(a, b)$ και $S_{ds}(a, b)$. Στη δεύτερη σειρά φαίνονται οι επιφάνειες που προκύπτουν μετά την εφαρμογή των τελεστών στα ασαφή σύνολα a, b .

◆

1.3 Ασαφείς Κανόνες και Ασαφής Συλλογιστική

1.3.1 Γενικά

Μετά την εισαγωγή στη θεωρία των ασαφών συνόλων, προχωράμε στην παρουσίαση της αρχής της ασαφούς επέκτασης και των ασαφών σχέσεων. Θα δούμε ακόμα τις γλωσσικές μεταβλητές και πως αυτές

μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε ασαφείς κανόνες για την ποσοτική μοντελοποίηση εννοιών της φυσικής γλώσσας. Οι «ασαφείς σχέσεις», οι «γλωσσικές μεταβλητές» και ο «γενικευμένος κανόνας του θέτειν/αναιρείν» αποτελούν τις τρεις θεμελιώδεις έννοιες της ασαφούς ή προσεγγιστικής συλλογιστικής, της μεθοδολογίας δηλαδή εξαγωγής ασαφών συμπερασμάτων. Η ασαφής συλλογιστική, βρίσκεται εφαρμογή σε πληθώρα περιοχών όπως συστήματα αυτομάτου ελέγχου, έμπειρα συστήματα, αναγνώριση προτύπων, πρόβλεψη χρονοσειρών κ.ο.κ.

1.3.2 Αρχή της Ασαφούς Επέκτασης

Η αρχή της ασαφούς επέκτασης κατέχει μία σημαντικότατη θέση στη θεωρία των ασαφών συνόλων και βοηθάει στην ασαφοποίηση μαθηματικών συναρτήσεων. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τη συνάρτηση f από το X στο Y και το ασαφές σύνολο A που ορίζεται ως

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n$$

Η αρχή της ασαφούς επέκτασης επιτρέπει την μεταβίβαση της ασάφειας του A σ' ένα άλλο ασαφές σύνολο B μέσω της συνάρτησης f

$$B = f(A) = \mu_A(x_1)/y_1 + \mu_A(x_2)/y_2 + \dots + \mu_A(x_n)/y_n$$

όπου $y_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Αν η f αντιστοιχεί πολλά σημεία του A σ' ένα σημείο του B δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2) = y^*$, $y^* \in Y$, τότε

$$\mu_B(y) = \max_{x=f^{-1}(y)} \mu_A(x).$$

Παράδειγμα 1.10 [Εφαρμογή της αρχής της ασαφούς επέκτασης σε διακριτό ασαφές σύνολο]

Έστω

$$A = 0.1/-2 + 0.4/-1 + 0.8/0 + 0.9/1 + 0.3/2$$

και

$$f(x) = x^2 - 3.$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της ασαφούς επέκτασης, έχουμε

$$\begin{aligned} B &= 0.1/1 + 0.4/-2 + 0.8/-3 + 0.9/-2 + 0.3/1 \\ &= 0.8/-3 + (0.4 \vee 0.9)/-2 + (0.1 \vee 0.3)/1 \\ &= 0.8/-3 + 0.9/-2 + 0.3/1 \end{aligned}$$



Προχωράμε τώρα στη γενικότερη περίπτωση και δίνουμε τον ορισμό της αρχής της ασαφούς επέκτασης.

Ορισμός 1.18 [Αρχή της Ασαφούς Επέκτασης]

Έστω η συνάρτηση f που αποτελεί απεικόνιση ανάμεσα στο n -διάστατο Καρτεσιανό γινόμενο $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ στο υπερσύνολο αναφοράς Y , δηλαδή $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Υποθέτουμε ακόμα ότι A_1, \dots, A_n είναι ασαφή σύνολα οριζόμενα στα υπερσύνολα αναφοράς X_1, \dots, X_n αντίστοιχα. Τότε σύμφωνα με την αρχή της ασαφούς επέκτασης προκύπτει ένα ασαφές σύνολο B στο Y μέσω της απεικόνισης f που ορίζεται ως,

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \max_{(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) = f^{-1}(y)} [\min_i \mu_{A_i}(x_i)], & \text{αν } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{αν } f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases} \quad (1.31)$$



1.3.3 Ασαφείς Σχέσεις

Ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της ασαφούς συλλογιστικής είναι οι ασαφείς σχέσεις. Χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ασαφών συνεπαγωγών και τη συλλογιστική με αυτές ενώ βρίσκουν εφαρμογή σε όλες τις επιστημονικές περιοχές ασαφούς συλλογιστικής.

Ορισμός 1.19 [Ασαφής Σχέση]

Έστω X, Y υπερσύνολα αναφοράς. Ονομάζουμε ασαφή σχέση και συμβολίζουμε με R , ένα ασαφές σύνολο στο Καρτεσιανό γινόμενο $X \times Y$ το οποίο χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x, y)$:

$$\mu_R(x, y) = ((x, y), \mu_R(x, y)) | (x, y) \in X \times Y \quad (1.32)$$

■

Παράδειγμα 1.11

Έστω $X = Y = \mathbb{R}^+$ και η ασαφής σχέση $R = \langle\text{to } y \text{ είναι πολύ μεγαλύτερο του } x\rangle$. Η συνάρτηση συμμετοχής θα μπορούσε να οριστεί ως

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} \frac{y-x}{x+y+2}, & \text{αν } y > x \\ 0, & \text{αν } y \leq x \end{cases}$$

Αν $X = 3, 4, 5$ και $Y = 3, 4, 5, 6, 7$ τότε θα μπορούσαμε να εκφράσουμε την ασαφή σχέση R μέσω μίας μήτρας

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0.111 & 0.200 & 0.273 & 0.333 \\ 0 & 0 & 0.091 & 0.167 & 0.231 \\ 0 & 0 & 0 & 0.077 & 0.143 \end{pmatrix}$$

όπου οι γραμμές αντιστοιχούν στα στοιχεία του X και οι στήλες σε αυτά του Y .

◆

Παράδειγμα 1.12

Έστω $X = Y \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση συμμετοχής $\mu_R(x, y)$ της ασαφούς σχέσης «το x είναι σημαντικά μικρότερο του y , ($x \ll y$)», θα μπορούσε να οριστεί ως

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} [1 + (\frac{20}{y-x})^2]^{-1}, & \text{αν } x < y \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

◆

Ασαφείς σχέσεις ορισμένες σε διαφορετικούς χώρους Καρτεσιανών γινομένων μπορούν να συνδυαστούν μέσω ενός τελεστή σύνθεσης. παρακάτω παρουσιάζουμε δύο από τους τελεστές που έχουν προταθεί στη βιβλιογραφία, αρχίζοντας από τη σύνθεση max-min του Zadeh.

Ορισμός 1.20 [max-min Σύνθεση]

Έστω R_1, R_2 δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στο $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα. Η max-min σύνθεση είναι ένα ασαφές σύνολο που ορίζεται ως

$$R_1 \circ R_2 = [(x, z), \max_y \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z))] | x \in X, y \in Y, z \in Z \quad (1.33)$$

ή ισοδύναμα

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y \min[\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)] \quad (1.34)$$

■

Παρόλο που η max-min σύνθεση χρησιμοποιείται ευρέως δεν μπορούμε να την αναλύσουμε μαθηματικά. Για το λόγο αυτό προτάθηκε η σύνθεση max-product.

Ορισμός 1.21 [max-product Σύνθεση]

Έστω R_1, R_2 δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στο $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα. Η max-product σύνθεση ορίζεται ως

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x, z) = \max_y [\mu_{R_1}(x, y) \cdot \mu_{R_2}(y, z)] \quad (1.35)$$

■

Παράδειγμα 1.13

Έστω R_1, R_2 δύο ασαφείς σχέσεις ορισμένες στους χώρους γινομένου $X \times Y$ και $Y \times Z$ αντίστοιχα, με $X = 1, 2, 3$, $Y = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ και $Z = a, b$. Οι συναρτήσεις συμμετοχής των R_1, R_2 δίνονται από τους παρακάτω πίνακες

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.7 \\ 0.4 & 0.2 & 0.8 & 0.9 \\ 0.6 & 0.8 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix} \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0.6 \\ 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Η $R_1 \circ R_2$ δίνει την ασαφή σχέση ανάμεσα στο x και το z . Για λόγους ευκολίας θα υπολογίσουμε μόνο το $\mu_{R_1 \circ R_2}(2, a)$. Με την max-min σύνθεση θα είναι

$$\begin{aligned} \mu_{R_1 \circ R_2}(2, a) &= \max(0.4 \wedge 0.9, 0.2 \wedge 0.2, 0.8 \wedge 0.5, 0.9 \wedge 0.7) \\ &= \max(0.4, 0.2, 0.5, 0.7) \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

Αν διαλέξουμε την max-product σύνθεση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_{R_1 \circ R_2}(2, a) &= \max(0.4 \times 0.9, 0.2 \times 0.2, 0.8 \times 0.5, 0.9 \times 0.7) \\ &= \max(0.36, 0.04, 0.40, 0.63) \\ &= 0.63 \end{aligned}$$

◆

1.3.4 Γλωσσικές Μεταβλητές

Σύμφωνα με τον Zadeh οι συμβατικές τεχνικές είναι ακατάλληλες όταν θέλουμε να μελετήσουμε συστήματα των οποίων η λειτουργία εξαρτάται από υποκειμενικούς παράγοντες όπως η ανθρώπινη κρίση και τα συναισθήματα. Για την αντιμετώπιση τέτοιων συστημάτων πρότεινε τις γλωσσικές μεταβλητές, σαν έναν εναλλακτικό τρόπο μοντελοποίησης της ανθρώπινης σκέψης.

Με τον όρο γλωσσική μεταβλητή εννοούμε μία μεταβλητή της οποίας οι τιμές είναι λέξεις ή προτάσεις μίας φυσικής γλώσσας. Για παράδειγμα η *Ηλικία* είναι γλωσσική μεταβλητή αν οι τιμές της δεν είναι αριθμητικές αλλά γλωσσικές (π.χ. νέος, όχι νέος, πολύ νέος, γέρος, όχι πολύ γέρος κ.ο.κ.). Ακολουθεί ο ακριβής ορισμός.

Ορισμός 1.22 [Γλωσσική Μεταβλητή]

Μία γλωσσική μεταβλητή χαρακτηρίζεται από μία πεντάδα $(x, T(x), U, G, M)$ όπου x το όνομα της γλωσσικής μεταβλητής, $T(x)$ το σύνολο των τιμών της (που είναι ασαφή σύνολα), U το υπερσύνολο αναφοράς πάνω στο οποίο δομείται το σύνολο τιμών $T(x)$, G ένας συντακτικός κανόνας που παράγει τα ονόματα τιμών της x και M ένας σημασιολογικός κανόνας που αποδίδει νόημα στα ονόματα.

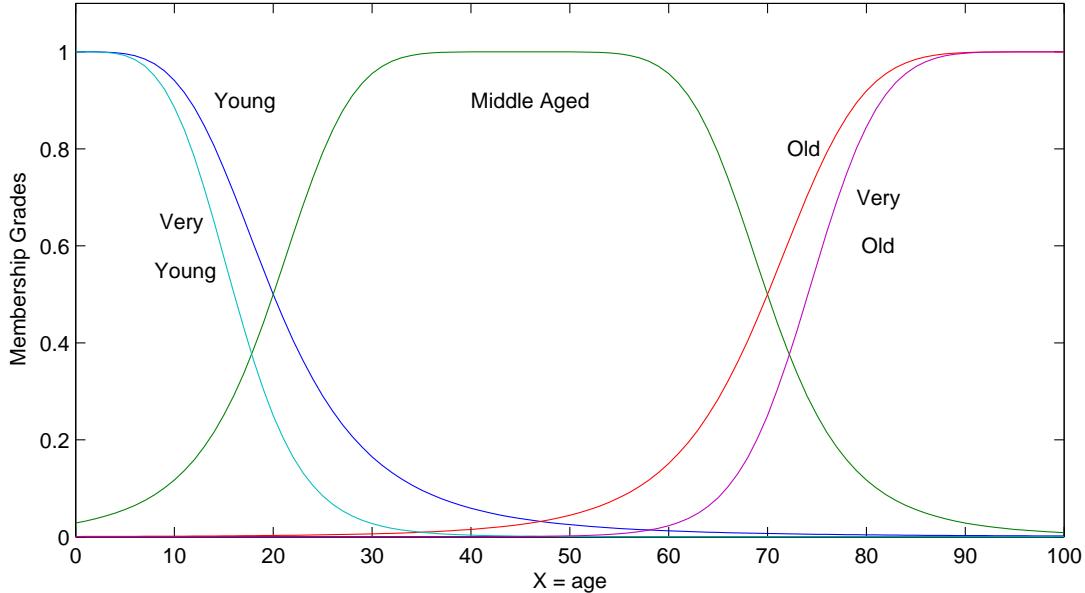
■

Παράδειγμα 1.14

Έστω η γλωσσική μεταβλητή *Ηλικία*. Τότε το σύνολο των γλωσσικών τιμών $T(\text{Ηλικία})$ θα μπορούσε να είναι

$$T(\text{Ηλικία}) = \{ \text{ νέος, όχι νέος, πολύ νέος, ...} \\ \text{ μεσήλικας, όχι μεσήλικας, ...} \\ \text{ γέρος, λίγο πολύ γέρος, όχι πολύ γέρος, ...} \\ \text{ όχι πολύ νέος και όχι πολύ γέρος, ... } \}$$

Κάθε τιμή $T(x)$ είναι ένα ασαφές σύνολο στο υπερσύνολο αναφοράς $X = [0, 100]$. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται μερικά από τα ασαφή σύνολα της γλωσσικής μεταβλητής *Ηλικία*. Ο σημασιολογικός κανόνας είναι



Σχήμα 1.15 - Ορισμένες ενδεικτικές τιμές της γλωσσικής μεταβλητής Ηλικία

αυτός που καθορίζει την συνάρτηση συμμετοχής κάθε τιμής της γλωσσικής μεταβλητής. Τέλος ο συντακτικός κανόνας για τη συγκεκριμένη μεταβλητή φαίνεται ότι προκύπτει αλγορίθμικά. Τέτοιες γλωσσικές μεταβλητές καλούνται δομημένες.

Από το προηγούμενο παράδειγμα βλέπουμε ότι η γλωσσική μεταβλητή αποτελείται από μερικούς πρωταρχικούς όρους (νέος, μεσήλικας, γέρος) που διαφοροποιούνται και αποκτούν πολλαπλά νοήματα μέσω κάποιων γλωσσικών διαμορφωτών (όχι, λίγο, πολύ, και) και συνδυασμούς αυτών.

Ορισμός 1.23 [Γλωσσικοί Διαμορφωτές]

Γλωσσικός διαμορφωτής (τροποποιητής) είναι ένας τελεστής που, εφαρμοζόμενος σε μια τιμή (ασαφές σύνολο) μιας γλωσσικής μεταβλητής μεταβάλλει το νόημά της. Έστω A μια γλωσσική μεταβλητή που χαρακτηρίζεται από ένα ασαφές σύνολο με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_A(\cdot)$. Τότε το A^k εφιληνεύεται σαν μια τροποποιημένη μορφή της αρχικής μεταβλητής και εκφράζεται ως

$$A^k = \int_X [\mu_A(x)]^k / x. \quad (1.36)$$

Ο τελεστής της συγκέντρωσης που δίνει την έννοια πολύ ορίζεται ως

$$CON(A) = A^2, \quad (1.37)$$

ενώ ο τελεστής εξάπλωσης που έχει την έννοια του σχεδόν, λίγο ορίζεται ως

$$DIL(A) = A^{0.5}, \quad (1.38)$$

Αντίστοιχα μπορούμε να ορίσουμε τους διαμορφωτές της άρνησης, της τομής και της ένωσης

$$NOT(A) = \neg A = \int_X [1 - \mu_A(x)]/x, \quad (1.39)$$

$$A AND B = A \cap B = \int_X [\mu_A(x) \wedge \mu_B(x)]/x, \quad (1.40)$$

$$A OR B = A \cup B = \int_X [\mu_A(x) \vee \mu_B(x)]/x, \quad (1.41)$$

όπου $\mu_A(\cdot)$, $\mu_B(\cdot)$ οι συναρτήσεις συμμετοχής που αντιστοιχούν στις γλωσσικές μεταβλητές A, B . ■

Το παρακάτω παράδειγμα, μας βοηθάει να καταλάβουμε τους παραπάνω γλωσσικούς διαμορφωτές.

Παράδειγμα 1.15

Έστω ότι οι γλωσσικοί όροι «νέος» και «γέρος» ορίζονται από τις παρακάτω συναρτήσεις

$$\mu_{\text{νέος}}(x) = bell(x, 20, 2, 0) = \frac{1}{1 + (\frac{x}{20})^4}$$

$$\mu_{\text{γέρος}}(x) = bell(x, 30, 3, 100) = \frac{1}{1 + (\frac{x-100}{30})^6}$$

όπου x η ηλικία στο διάστημα $[0, 100]$. Με βάση τους γλωσσικούς διαμορφωτές που είδαμε παραπάνω μπορούν να προκύψουν οι παρακάτω σύνθετοι γλωσσικοί όροι:

$$\Sigmaχεδόν Γέρος = DIL(\text{γέρος}) = \int_X (\mu_{\text{γέρος}}(x))^{0.5}/x$$

$$\text{'Οχι! γέρος και όχι νέος} = \neg \mu_{\text{γέρος}} \wedge \neg \mu_{\text{νέος}} = \int_X [1 - \mu_{\text{γέρος}}(x)] \wedge [1 - \mu_{\text{νέος}}(x)]/x$$



1.3.5 Ασαφείς Κανόνες

Ένας ασαφής κανόνας έχει τη μορφή

$$R : \text{ΕΑΝ } x \text{ είναι } A, \text{ ΤΟΤΕ } y \text{ είναι } B. \quad (1.42)$$

όπου A, B γλωσσικές μεταβλητές, που ποσοτικοποιούνται από συναρτήσεις συμμετοχής ορισμένες στα υπερσύνολα αναφοράς X, Y αντίστοιχα. Το μέρος « x είναι A » του κανόνα ονομάζεται «γεγονός» ενώ το μέρος « y είναι B » ονομάζεται «συμπέρασμα». Ασαφείς κανόνες αυτής της μορφής είναι ευρέως διαδεδομένοι στις καθημερινές συζητήσεις, όπως για παράδειγμα οι ακόλουθοι :

- ΕΑΝ έχεις μεγάλη ταχύτητα, ΤΟΤΕ το φρενάρισμα είναι δύσκολο
- ΕΑΝ βρέχει, ΤΟΤΕ η οδήγηση είναι επικίνδυνη
- ΕΑΝ η ντομάτα είναι κόκκινη, ΤΟΤΕ είναι ώριμη

Τους κανόνες αυτούς μπορούμε να τους γράψουμε και στην μορφή

$$R : A \longrightarrow B. \quad (1.43)$$

Ουσιαστικά, ένας ασαφής κανόνας περιγράφει μια σχέση $R_{A \rightarrow B}$ μεταξύ δύο μεταβλητών x, y στο $X \times Y$ με συνάρτηση συμμετοχής

$$\mu_R(x, y) = f(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

Η συνάρτηση f απεικονίζει τους βαθμούς συμμετοχής της x στο υπερσύνολο X και της y στο U στο βαθμό συμμετοχής του (x, y) στο $X \times Y$. Μερικές ευρέως χρησιμοποιούμενες συναρτήσεις είναι οι εξής :

$$\begin{aligned} \mu_R(x, y) &= \min \{1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y)\} && , \text{ Αριθμητικός κανόνας Zadeh} \\ \mu_R(x, y) &= \max \{1 - \mu_A(x), \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\}\} && , \text{ Κανόνας μεγίστου Zadeh} \\ \mu_R(x, y) &= \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\} && , \text{ Κανόνας ελαχίστου Mamdani} \\ \mu_R(x, y) &= \mu_A(x) \cdot \mu_B(y) && , \text{ Γινόμενο Larsen} \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.3.6 Ασαφής Συλλογιστική

Στόχος της ασαφών συλλογιστικής είναι η εξαγωγή συμπερασμάτων, μέσα από ένα σύνολο ασαφών κανόνων και μερικών δεδομένων. Στην κλασική λογική η διαδικασία της απόδειξης στηρίζεται εξ' ολοκλήρου σε λογικές ταυτολογίες και κυρίως στον κανόνα του θέτειν (modus ponens). Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό, η αλήθεια μιας πρότασης B , μπορεί να προκύψει αν γνωρίζουμε την αλήθεια της πρότασης A και ισχύει ο κανόνας $A \rightarrow B$. Δηλαδή :

Γεγονός	x είναι A
Κανόνας	EAN x είναι A , TOTE y είναι B
Συμπέρασμα	y είναι B

Αν τώρα έχουμε σαν δεδομένο μια γλωσσική μεταβλητή A' , $A' \neq A$, τότε η κλασική λογική και ο κανόνας modus ponens δεν μπορεί να δώσει κάποιο συμπέρασμα. Η ασαφής συλλογιστική έρχεται να λύσει το πρόβλημα αυτό και δίνει σαν συμπέρασμα ένα ασαφές σύνολο B' :

Γεγονός	x είναι A'
Κανόνας	EAN x είναι A , TOTE y είναι B
Συμπέρασμα	y είναι B'

Η συλλογιστική αυτή διαδικασία είναι πιο κοντά στον ανθρώπινο τρόπο σκέψης. Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον μαθηματικό ορισμό της διαδικασίας της ασαφών συλλογιστικής.

Ορισμός 1.24 [Ασαφής Συλλογιστική - max-min Σύνθεση]

Έστω A, A' και B ασαφή σύνολα ορισμένα στα υπερσύνολα αναφοράς X, X και Y αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο ασαφής κανόνας $A \rightarrow B$ εκφράζεται σαν μια ασαφής σχέση R στο $X \times Y$. Τότε το ασαφές σύνολο B' που προκύπτει σαν συμπέρασμα του γεγονότος « x είναι A' » και του κανόνα «EAN x είναι A , TOTE y είναι B » ορίζεται ως

$$\mu_{B'}(y) = \max_x \min [\mu_{A'}(x), \mu_R(x, y)] \quad (1.45)$$

ή ισοδύναμα

$$B' = A' \circ R = A' \circ (A \rightarrow B) \quad (1.46)$$

■

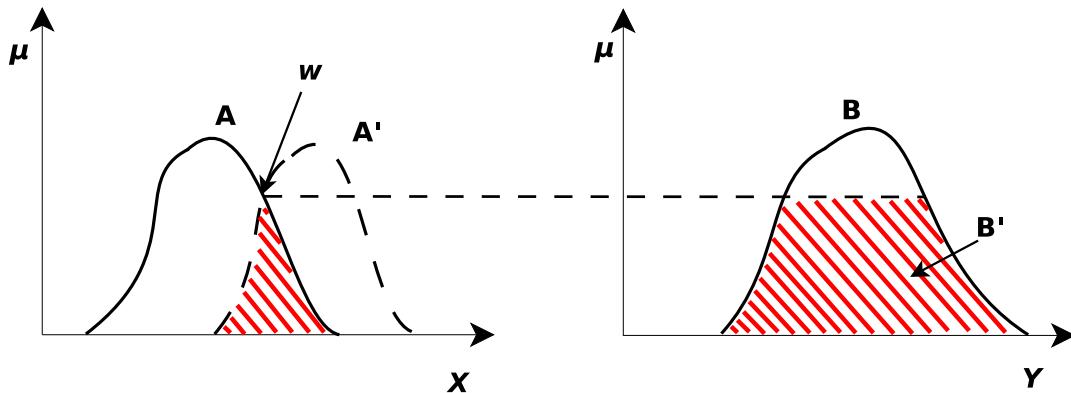
Το ο συμβολίζει τον τελεστή σύνθεσης max-min και είναι αυτός που χρησιμοποιείται συχνότερα σε συνδυασμό με τον κανόνα ελαχίστου Mamdani. Σύμφωνα με τον κανόνα αυτό

$$\mu_R(x, y) = \min \{\mu_A(x), \mu_B(y)\} \quad (1.47)$$

οπότε με βάση την Εξ. (1.45)

$$\begin{aligned} \mu_{B'}(y) &= \left[\bigvee_x (\mu_{A'}(x) \wedge \mu_A(x)) \right] \wedge \mu_B(y) \\ &= w \wedge \mu_B(y) \end{aligned} \quad (1.48)$$

Ουσιαστικά λοιπόν αρχικά βρίσκουμε το w που είναι το μέγιστο της τομής των συναρτήσεων συμμετοχής των ασαφών συνόλων A, A' και εν συνεχείᾳ η συνάρτηση συμμετοχής του B' είναι το ελάχιστο ανάμεσα στην $\mu_B(x)$ και το w . Η διαδικασία αυτή γίνεται αντιληπτή στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1.16 - Γενικευμένο Modus Ponens με χρήση του κανόνα ελαχίστου Mamdani και την max-min σύνθεση

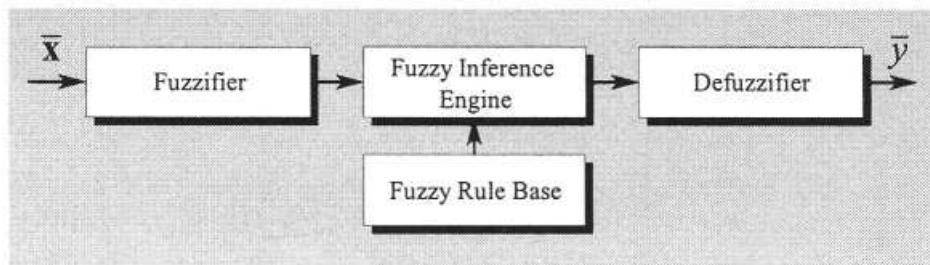
Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να γενικευτεί και για ασαφείς κανόνες με περισσότερα του ενός γεγονότα, ή για πολλαπλούς ασαφείς κανόνες.

1.4 Ασαφή Συστήματα

1.4.1 Γενικά

Θα προχωρήσουμε στην μελέτη της γενικής αρχιτεκτονικής των ασαφών συστημάτων, δηλαδή των συστημάτων εκείνων που λειτουργούν σε αβέβαιο περιβάλλον και μοντελοποιούνται με ασαφείς μεταβλητές. Τα ασαφή συστήματα ανήκουν στην κατηγορία των ευφυών συστημάτων και βρίσκουν εφαρμογή σε πληθώρα πρακτικών προβλημάτων.

Η γενική αρχιτεκτονική των ασαφών συστημάτων, απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα και περιλαμβάνει τέσσερις μονάδες.



Σχήμα 1.17 - Block διάγραμμα ασαφούς συστήματος

- Μια βάση ασαφών κανόνων της μορφής **EAN - TOTE** (rule base).
- Ένα μηχανισμό εξαγωγής ασαφών συμπερασμάτων (reasoning mechanism).
- Μια μονάδα ασαφοποίησης που μετατρέπει τα δεδομένα εισόδου σε ασαφή σύνολα (fuzzification unit).
- Μια μονάδα απο-ασαφοποίησης που μετατρέπει τα ασαφή συμπεράσματα σε συμπεράσματα με σαφώς καθορισμένη μορφή (defuzzification unit).

1.4.2 Μέθοδοι Ασαφοποίησης

Ο ασαφοποιητής υλοποιεί μια απεικόνιση από το σύνολο πραγματικών τιμών εισόδου $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in X$ στο ασαφές σύνολο A του υπερσυνόλου αναφοράς X . Δύο δυνατές απεικονίσεις είναι οι εξής :

Ορισμός 1.25 [Μονότιμος Ασαφοποιητής]

Στον μονότιμο ασαφοποιητή (singleton fuzzifier) η συνάρτηση συμμετοχής είναι μοναδιαία δηλαδή,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{εάν } x' = x \\ 0, & \text{εάν } x' \neq x \end{cases} \quad (1.49)$$

■

Ορισμός 1.26 [Μη Μονότιμος Ασαφοποιητής]

Εδώ θεωρούμε ότι $\mu_A(\mathbf{x}) = 1$ και ότι το $\mu_A(\mathbf{x}')$ μικραίνει όσο το \mathbf{x}' απομακρύνεται από το \mathbf{x} . Για παράδειγμα ένας Gaussian ασαφοποιητής θα είναι

$$\mu_A(\mathbf{x}') = \exp \left[-\frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x})^T (\mathbf{x}' - \mathbf{x})}{\sigma^2} \right] \quad (1.50)$$

■

Συνήθως χρησιμοποιείται ο μονότιμος ασαφοποιητής ενώ ο μη μονότιμος είναι καταλληλότερος όταν οι είσοδοι υπόκεινται σε θόρυβο.

1.4.3 Μέθοδοι Από-ασαφοποίησης

Απο-ασαφοποίηση είναι η διαδικασία μετατροπής ενός ασαφούς συνόλου B σε μια τιμή w_0 η οποία είναι και η έξοδος του ασαφούς συστήματος. Μερικές μέθοδοι απο-ασαφοποίησης είναι οι ακόλουθες.

Ορισμός 1.27 [Μέθοδος Κέντρου Βάρους]

Στη μέθοδο αυτή που είναι γνωστή ως COG (Center Of Gravity) η τιμή w_0 δίνεται από τη σχέση

$$w_0 = \frac{\sum_i w_i \mu_B(w_i)}{\sum_i \mu_B(w_i)} \quad (1.51)$$

■

Ορισμός 1.28 [Μέθοδος Μέσης Τιμής των Μεγίστων]

Στη μέθοδο αυτή που είναι γνωστή ως MOM (Mean Of Maxima) η τιμή w_0 δίνεται από τη σχέση

$$w_0 = \frac{\sum_{j=1}^m w_j}{m} \quad (1.52)$$

■

όπου w_j η τιμή που αντιστοιχεί στο j μέγιστο της συνάρτησης συμμετοχής.

Ορισμός 1.29 [Τροποποιημένη Μέθοδος Κέντρου Βάρους]

Η τιμή w_0 δίνεται από τη σχέση

$$w_0 = \frac{\sum_i w_i \left[\frac{\mu_B(w_i)}{\delta_i} \right]}{\sum_i \frac{\mu_B(w_i)}{\delta_i}} \quad (1.53)$$

όπου το δ_i χαρακτηρίζει το σχήμα της συνάρτησης συμμετοχής.

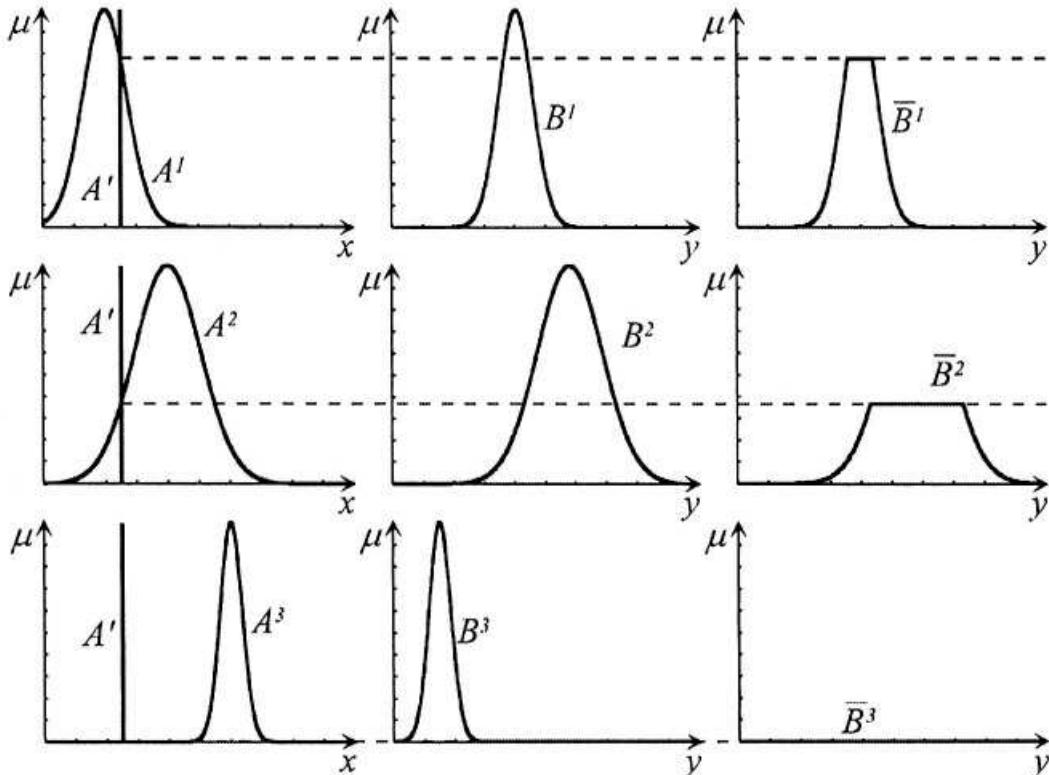
■

1.4.4 Μέθοδος Mamdani Ασαφούς Συλλογισμού

Σε αυτή τη μέθοδο ακολουθείται ο κανόνας του ελαχίστου.

$$\mu_{A^k \rightarrow B^k}(x, y) = \min \{ \mu_{A^k}(x), \mu_{B^k}(y) \} \quad (1.54)$$

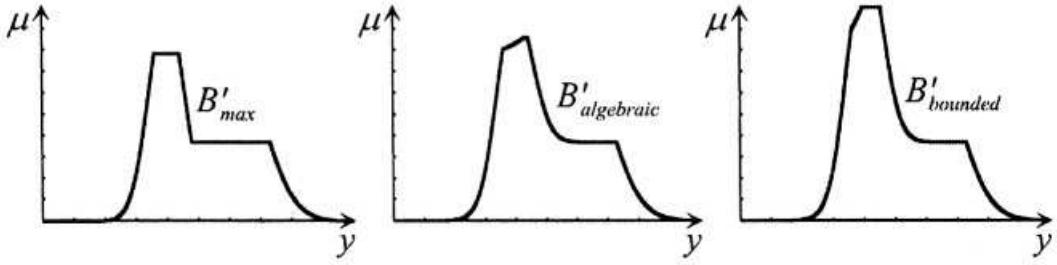
Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η συλλογιστική διαδικασία για ένα ασαφές σύστημα με τρεις ($N = 3$) κανόνες. Τα ασαφή σύνολα B^1 , B^2 και B^3 είναι το αποτέλεσμα του ασαφούς συλλογισμού για κάθε κανόνα.



Σχήμα 1.18 - Παράδειγμα ασαφούς συλλογισμού κατά Mamdani σε σύστημα με 3 κανόνες και είσοδο καθορισμένες τιμές.

Το ολικό αποτέλεσμα προκύπτει από τον συνδυασμό της εξόδου όλων των κανόνων. Παρακάτω φαίνεται το τελικό ασαφές συμπέρασμα με χρήση τριών σύμπερα-t τελεστών: του μέγιστου, του αλγεβρικού αύριοίσματος και του φραγμένου αύριοίσματος.

Αν αντί για τη μέθοδο του ελαχίστου ακολουθήσουμε τη μέθοδο του αλγεβρικού γινομένου θα πάρουμε ένα ασαφές σύστημα τύπου Larsen.



Σχήμα 1.19 - Τελικό ασαφές συμπέρασμα ενός ασαφούς συστήματος που χρησιμοποιεί την μέθοδο Mamdani με τρεις διαφορετικούς τελεστές.

1.4.5 Μέθοδος Takagi - Sugeno Ασαφούς Συλλογισμού

Το ασαφές σύστημα Takagi - Sugeno, προτάθηκε από τους Takagi, Sugeno και Kang σε μια προσπάθεια να αναπτύξουν έναν τρόπο εξαγωγής ασαφών κανόνων από δεδομένα εισόδου - εξόδου. Οι κανόνες στο μοντέλο Sugeno είναι της μορφής

$$R : \text{ΕΑΝ } x \text{ είναι } A \text{ και } y \text{ είναι } B \text{ ΤΟΤΕ } z = f(x, y), \quad (1.55)$$

όπου A και B ασαφή σύνολα ενώ το συμπέρασμα είναι μια συνάρτηση $z = f(x, y)$. Συνήθως η συνάρτηση αυτή είναι πολυωνυμική ως προς τις μεταβλητές εισόδου x, y . Το πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι ότι μειώνει σημαντικά τον αριθμό των κανόνων που χρειάζονται για την ασαφή μοντελοποίηση του συστήματος.

Την τελική έξοδο του ασαφούς αυτού συστήματος την παίρνουμε με χρήση σταθμισμένου μέσου όρου

$$y = \frac{\sum_{i=1}^m w^i y^i}{\sum_{i=1}^m w^i} \quad (1.56)$$

όπου w^i η προσαρμοστικότητα του αριστερού μέλους του κανόνα i

$$w^i = \prod_{k=1}^n \mu_{A_k^i}(x_k) \quad (1.57)$$

Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε τη χρονοβόρα διαδικασία απο-ασαφοποίησης που απαιτεί το μοντέλο Mamdani.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες Νευρωνικών Δικτύων

2.1 Εισαγωγή

Τα νευρωνικά δίκτυα εκτελούν υπο-συμβολική επεξεργασία πληροφορίας η οποία βασίζεται στη λειτουργία του ανθρώπινου εγκεφάλου. Για την εφαρμογή των μεθόδων αυτών σε αντίθεση με τις συμβολικές μεθόδους της τεχνητής νοημοσύνης, δεν απαιτείται ρητή γνώση. Τα νευρωνικά δίκτυα έχουν εμπνευστεί από την βιολογία και τη νευροφυσιολογία με κεντρική ιδέα την μοντελοποίηση «μαύρου κουτιού».

Τα νευρωνικά δίκτυα (ή τεχνητά νευρωνικά δίκτυα) είναι συστήματα μεγάλης κλίμακας συνήθως, τα οποία περιέχουν έναν μεγάλο αριθμό νευρονίων. Κάθε νευρόνιο χαρακτηρίζεται από μια κατάσταση, ένα σύνολο εισόδων με βάρη που προέρχονται από άλλα νευρόνια, και μια εξίσωση που περιγράφει τη δυναμική λειτουργία του νευρονίου. Τα βάρη του δικτύου ανανεώνονται μέσω μιας διαδικασίας μάθησης (εκπαίδευσης) η οποία στοχεύει στην ελαχιστοποίηση κάποιας συνάρτησης κόστους (σφάλματος).

Προβλήματα στα οποία ο συνήθης υπολογισμός δεν είναι αποδοτικός, όπως μηχανική όραση, αναγνώριση προτύπων, αναγνώριση φωνής, μη γραμμική πρόβλεψη, αυτόματος έλεγχος, ρομποτική, επιχειρησιακά προβλήματα κ.ο.κ. είναι περιοχές στις οποίες τα νευρωνικά δίκτυα βρίσκουν τις περισσότερες εφαρμογές.

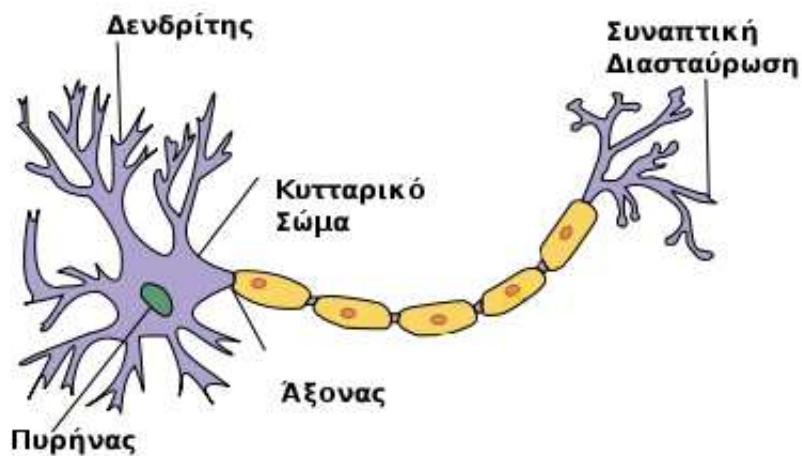
Στο κεφάλαιο αυτό όμα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες των νευρωνικών δικτύων. Θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στις βιολογικές έννοιες πίσω από αυτά, όμα εξετάσουμε το βασικό μοντέλο του τεχνητού νευρονίου και όμα παρουσιάσουμε μερικές αρχιτεκτονικές. Τέλος όμα παρουσιάσουμε συνοπτικά τους κύριους τύπους νευρωνικής μάθησης (επιβλεπόμενη, ενισχυτική, μη επιβλεπόμενη). Στο επόμενο κεφάλαιο όμα εξετάσουμε αναλυτικά αλγορίθμους επιβλεπόμενης μάθησης κυρίως για αναδρομικά δίκτυα, τα οποία και χρησιμοποιούμε στην εργασία αυτή.

2.2 Βιολογικά Νευρωνικά Δίκτυα

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τα τεχνητά νευρωνικά δίκτυα, είναι χρήσιμο να κάνουμε μια αναφορά στα βιολογικά νευρωνικά δίκτυα και στη δομή αυτών. Το νευρόνιο (νευρώνας) είναι το θεμελιακό δομικό στοιχείο του ανθρώπινου (και όχι μόνο) νευρικού συστήματος. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος, περιέχει κατά προσέγγιση 1.5×10^{10} νευρόνια διάφορων μορφών, ενώ ο κάθε νευρώνας λαμβάνει σήματα μέσω 10^4 περίπου συνάψεων.

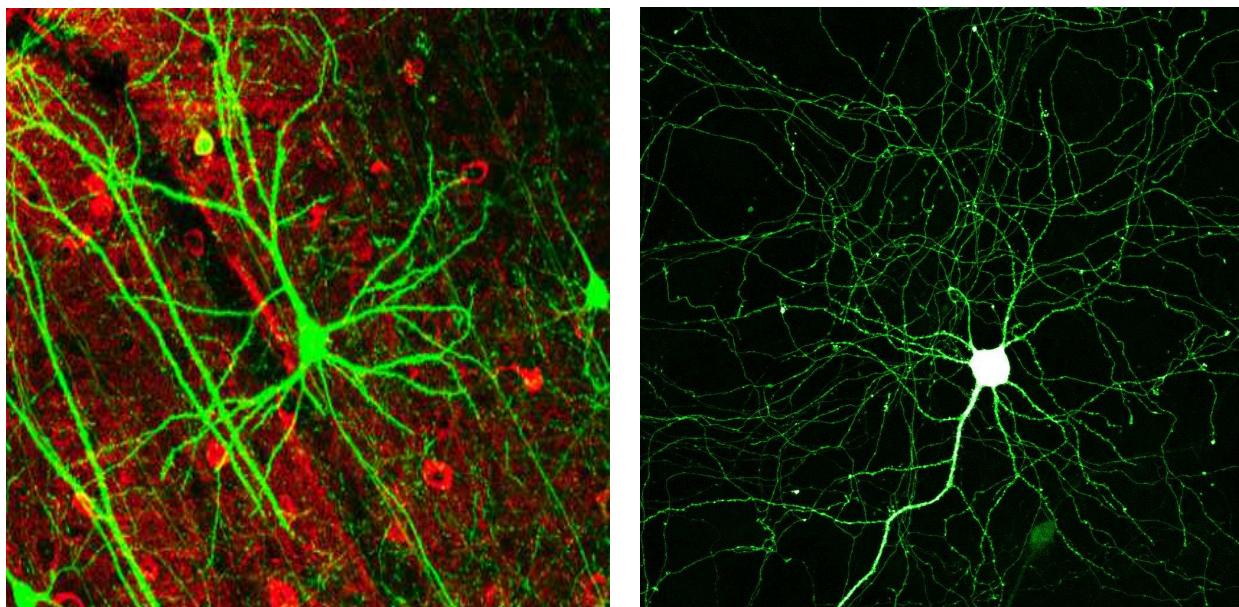
Όλα τα νευρόνια ανεξαρτήτου είδους, σχήματος και μεγέθους αποτελούνται από τα ίδια βασικά μέρη, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 2.1. Το **κυτταρικό σώμα** είναι το κεντρικό μέρος του νευρονίου και το σχήμα του μπορεί να είναι στρογγυλό, τριγωνικό, σταγονοειδές, μυτερό στα δύο άκρα κλπ, ανάλογα με το είδος του νευρονίου (οπτικό, ακουστικό, αφής, μυϊκό κλπ.).

Το μέγεθος του σώματος είναι περίπου $10 - 80$ μμ. Το σώμα περιέχει τον **πυρήνα** και το αντίστοιχο **συνδετικό πρωτόπλασμα**. Η σύνδεση του νευρονίου με τα πολυάριθμα γειτονικά νευρόνια γίνεται μέσω του **άξονα** και των **συνάψεων**. Οι δενδρίτες συνθέτουν την εξωτερική επιφάνεια του νευρονίου και μεταφέρουν πληροφορίες στο σώμα του κυττάρου. Ο άξονας, που αποτελεί το τμήμα εξόδου του νευρικού κυττάρου, είναι μια λεπτή κυλινδρική ίνα, η οποία μπορεί να μεταφέρει πληροφορίες ηλεκτροχημικά με βάση την κατάσταση του κυττάρου. Η δομή αυτή μπορεί να υποστεί σημαντική δενδροποίηση καθώς τελειώνει στους **καταληκτικούς βολβούς** κοντά στους δενδρίτες άλλων νευρονίων. Οι διασυνδέσεις ενός καταληκτικού



Σχήμα 2.1 - Δομή τυπικού βιολογικού νευρονίου.

βολβού με το κύτταρο στο οποίο εισβάλλει είναι αυτό που ονομάστηκε από τον Sherrington **συνάψεις**. Ένας παλμός που ταξιδεύει κατά μήκος του άξονα τερματίζεται στους καταληκτικούς βολβούς, και αν το επιτρέπουν οι συνθήκες αναπαράγεται από το επόμενο νευρόνιο της αλυσίδας. Παρακάτω απεικονίζονται ορισμένα πραγματικά νευρωνικά κύτταρα.

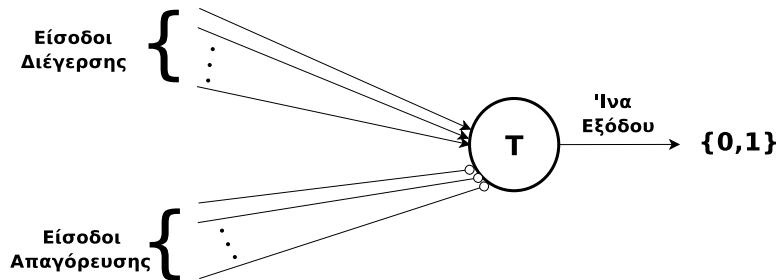


Σχήμα 2.2 - Νευρώνας τριγωνικού σχήματος από την παρεγκεφαλίδα (cerebellum) και κυκλικός νευρώνας από την περιοχή του ιππόκαμπου.

Ένα νευρόνιο παράγει έξοδο μόνο όταν εμφανιστούν αρκετοί παλμοί στην περιοχή των δευδριτών για ένα μικρό χρονικό διάστημα που ονομάζεται **λανθάνουσα περίοδος άθροισης**. Στην πραγματικότητα κάποιες είσοδοι εμποδίζουν την ενεργοποίηση του κυττάρου και ένα νευρόνιο ενεργοποιείται μόνο όταν οι ενεργές είσοδοι διέγερσης ξεπερνούν τις απαγορευτικές εισόδους κατά μια ποσότητα ίση με την **τιμή κατωφλίου**. Τστερα από μια ενεργοποίηση το νευρόνιο εισέρχεται σε μια απαγορευτική περίοδο κατά τη διάρκεια της οποίας δεν μπορεί να ενεργοποιηθεί ξανά. Επαναλαμβανόμενες ενεργοποιήσεις αυξάνουν την τιμή του κατωφλίου με αποτέλεσμα το κύτταρο να οδηγείται σε **κόπωση**.

2.3 Μοντέλο Mc Culloch - Pitts

Οι McCulloch και Pitts κάνανε τη σημαντικότερη προσπάθεια μοντέλοποίησης του βιολογικού νευρονίου. Το μοντέλο που πρότειναν δεν είναι μια πιστή αναπαράσταση του νευρικού κυττάρου αλλά μια απλή παρουσίαση των δύο καταστάσεων της λογικής διαδικασίας που λαμβάνει χώρα σε αυτό. Το βασικό μοντέλο νευρονίου των McCulloch, Pitts έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 2.3 - Μοντέλο νευρονίου McCulloch - Pitts.

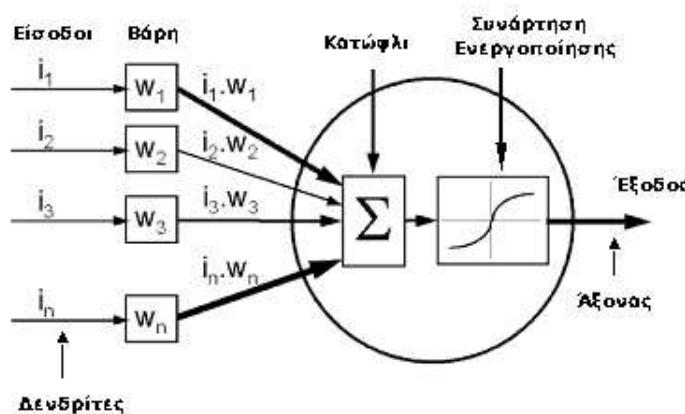
Η ίνα εξόδου μεταδίδει την κατάσταση του νευρονίου (διέγερση ή όχι) και τελικά γίνεται η είσοδος σ' ένα άλλο (ή και στο ίδιο αν έχουμε ανατροφοδότηση) νευρόνιο. Οι είσοδοι διαιρούνται σ' αυτές που διεγείρουν το κύτταρο και στις απαγορευτικές. Αν T η αριθμητική τιμή του κατωφλίου διέγερσης, τότε το κύτταρο McCulloch - Pitts θα διεγερθεί αν το άθροισμα των εισόδων διέγερσης είναι μεγαλύτερο ή ίσο με την τιμή κατωφλίου και δεν υπάρχουν απαγορευτικές είσοδοι.

Σε μια παραλλαγή του μοντέλου McCulloch - Pitts τόσο οι είσοδοι διέγερσης E_i όσο και οι απαγορευτικές είσοδοι A_i μπορούν να πάρουν τις τιμές 0 και 1. Τότε έχουμε διέγερση του κυττάρου μόνο αν

$$\sum_i E_i - \sum_i A_i \geq T \quad (2.1)$$

2.4 Το Βασικό Μοντέλο Τεχνητού Νευρονίου

Το βασικό μοντέλο τεχνητού νευρονίου στηρίζεται στο μοντέλο McCulloch - Pitts και έχει τη μορφή του παρακάτω σχήματος.



Σχήμα 2.4 - Βασικό μοντέλο τεχνητού νευρονίου.

Το νευρόνιο είναι μια θεμελιακή μονάδα επεξεργασίας πληροφορίας η οποία αποτελείται από ένα σύνολο ακλάδων διασύνδεσης, έναν αόμβο άθροισης και μια συνάρτηση ενεργοποίησης. Κάθε ακλάδος

διασύνδεσης i έχει ένα βάρος w_i το οποίο είναι θετικό εαν η σύναψη είναι διεγερτικού τύπου και αρνητικό αν η σύνψη είναι απαγορευτικού τύπου. Ο κόμβος άθροισης αθροίζει τα σήματα εισόδου αφού πρώτα αυτά πολλαπλασιαστούν με τα αντίστοιχα βάρη. Υπολογίζεται δηλαδή το μέγεθος

$$u = \sum_{i=1}^n w_i x_i \quad (2.2)$$

αν υποθέσουμε ότι έχουμε n εισόδους.

Το μοντέλο του νευρονίου περιέχει επίσης ένα κατώφλι θ , $\theta > 0$ που εφαρμόζεται εξωτερικά και αφαιρείται από την έξοδο του αθροιστή. Προκύπτει το σήμα

$$v = u - \theta. \quad (2.3)$$

Το v αποτελεί την είσοδο της συνάρτησης ενεργοποίησης η οποία περιορίζει το επιτρεπόμενο πλάτος του σήματος σε κάποια πεπερασμένη τιμή. Η τιμή αυτή είναι και η έξοδος του νευρονίου.

$$y = f(v) \quad (2.4)$$

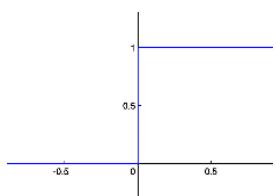
Αν θέσουμε $w_0 = \theta$ και $x_0 = -1$, μπορούμε να γράψουμε

$$v = \sum_{i=0}^n w_i x_i. \quad (2.5)$$

2.5 Συναρτήσεις Ενεργοποίησης

Η συνάρτηση ενεργοποίησης ή αλλιώς συνάρτηση σύνθλιψης (squashing function) εγγυάται ότι το πλάτος του σήματος εξόδου βρίσκεται σε ένα καθορισμένο διάστημα. Συνήθως το διάστημα αυτό είναι το $[0, 1]$. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις τρεις συναρτήσεις που συναντώνται συχνότερα.

Ορισμός 2.1 [Συνάρτηση Κατωφλίου]

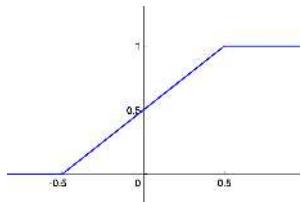


Η συνάρτηση κατωφλίου δίνεται από την εξίσωση

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

■

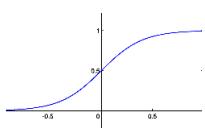
Ορισμός 2.2 [Κατά Τυμήματα Γραμμική Συνάρτηση]



$$f(v) = \begin{cases} 0, & v \leq -\frac{1}{2} \\ v, & -\frac{1}{2} \leq v < \frac{1}{2} \\ 1, & v \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2.7)$$

■

Ορισμός 2.3 [Σιγμοειδής Συνάρτηση]



Πρόκειται για την συνάρτηση που χρησιμοποιούμε συχνότερα. Δίνεται από τη σχέση

$$f(v) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda v}} \quad (2.8)$$

όπου λ η παράμετρος κλίσης.

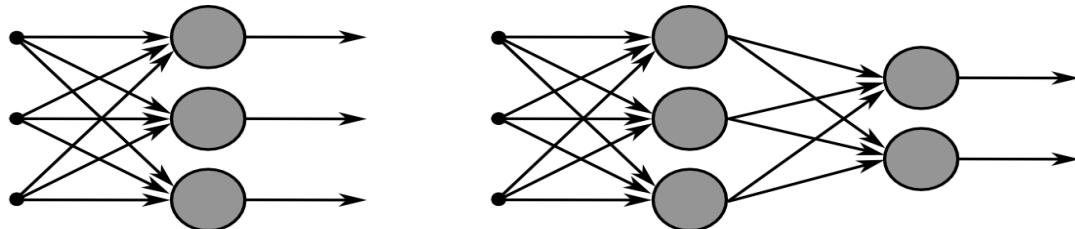
■

Εύκολα ορίζονται οι αντίστοιχες συναρτήσεις με σύνολο τιμών το $[-1, +1]$.

2.6 Αρχιτεκτονικές Νευρωνικών Δικτύων

2.6.1 Γενικά

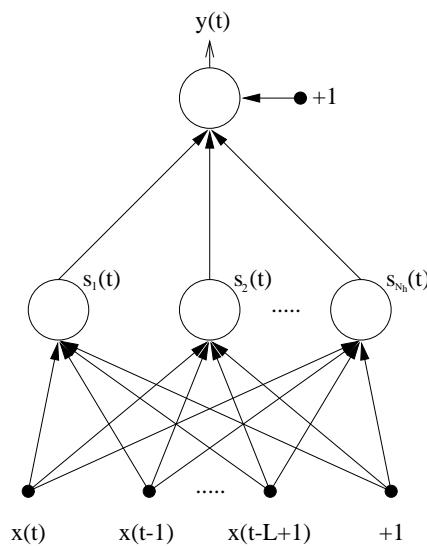
Η τοπολογική δομή είναι (μαζί με τον τρόπο μάθησης) το κύριο χαρακτηριστικό των νευρωνικών δικτύων, και αναφέρεται στην αρχιτεκτονική με την οποία διευθετούνται και διασυνδέονται πολλαπλά νευρόνια. Οι δύο βασικές ιδιότητες που καθορίζουν την αρχιτεκτονική είναι το πλήθος των στρωμάτων και οι συνδέσεις ανάμεσα στα νευρόνια.



Σχήμα 2.5 - Νευρωνικό δίκτυο ενός στρώματος και νευρωνικό δίκτυο δύο στρωμάτων.

2.6.2 Νευρωνικά Δίκτυα Προσοτροφοδότησης

Τα νευρόνια ενός δικτύου προσοτροφοδότησης διατάσσονται σε ένα ή περισσότερα κρυφά επίπεδα και ένα στρώμα εξόδου. Χρησιμοποιούμε τον όρο κρυμμένο επίπεδο, διότι οι έξοδοι των νευρονίων των στρωμάτων αυτών δεν είναι εξωτερικά παρατηρήσιμες. Τα νευρόνια των διαφόρων στρωμάτων συνδέονται μεταξύ τους μέσω προσαρμοζόμενων παραμέτρων (βάρη). Τέλος έχουμε και ένα στρώμα εισόδου που περιλαμβάνει τους κόμβους πηγής μέσω των οποίων οι εξωτερικοί είσοδοι περνάνε στο πρώτο κρυμμένο επίπεδο. Παρακάτω απεικονίζεται ένα νευρωνικό δίκτυο προσοτροφοδότησης που έχει ένα μόνο νευρώνα εξόδου και ένα κρυφό στρώμα που αποτελείται από N_h νευρόνια.



Σχήμα 2.6 - Νευρωνικό δίκτυο προσοτροφοδότησης δύο στρωμάτων.

Σε εφαρμογές πρόβλεψης χρονοσειρών που είναι και το κύριο αντικείμενο της διπλωματικής αυτής, οι είσοδοι είναι ένα διάνυσμα τιμών που έχουν παρατηρηθεί στο παρελθόν. Έστω λοιπόν $\mathbf{x}(t) = [x(t), \dots, x(t-L+1)]$ οι L είσοδοι του δικτύου τη χρονική στιγμή t . Μέσω των συναπτικών βαρών οι είσοδοι περνάνε στο πρώτο κρυμμένο επίπεδο. Στα δίκτυα προσοτροφοδότησης με w_{jk} συμβολίζουμε το βάρος της σύνδεσης ανάμεσα στον j νευρώνα ενός επιπέδου και τον k νευρώνα του αμέσως προηγούμενου επιπέδου. Για το

παραπάνω σχήμα η έξοδος του j νευρονίου του χρυφού επιπέδου θα είναι

$$s_j(t) = f \left(\sum_{k=0}^{L-1} w_{jk} x(t-k) - \theta_j \right) \quad (2.9)$$

όπου $f(\cdot)$ η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρονίου και θ_j το κατώφλι. Αν έχουμε περισσότερα του ενός χρυμμένα επίπεδα, οι έξοδοι των νευρώνων ενός χρυμμένου στρώματος χρησιμοποιούνται σαν είσοδοι για το επόμενο. Τέλος οι έξοδοι του τελευταίου χρυφού επιπέδου αποτελούν τις εισόδους του στρώματος εξόδου του οποίου οι έξοδοι αποτελούν και τις συνολικές εξόδους του δικτύου. Στην περίπτωσή μας

$$y(t) = g \left(\sum_{j=1} N_h w_{oj} s_j(t) - \theta_o \right) \quad (2.10)$$

όπου $g(\cdot)$ η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρώνα εξόδου. Αξίζει να σημειώσουμε πως δεν είναι απαραίτητο όλοι οι νευρώνες ενός δικτύου να έχουν την ίδια συνάρτηση ενεργοποίησης.

Όταν κάθε κόμβος οποιουδήποτε στρώματος συνδέεται με όλους τους κόμβους του γειτονικού του προς τα εμπρός στρώματος, τότε το δίκτυο ονομάζεται **πλήρως διασυνδεδεμένο**. Εάν αυτό δεν ισχύει, αν λείπουν δηλαδή μερικές συνδέσεις τότε έχουμε ένα **μερικά διασυνδεδεμένο** νευρωνικό δίκτυο.

Από την παραπάνω ανάλυση φαίνεται καθαρά ότι ένα νευρωνικό δίκτυο προστροφοδότησης ουσιαστικά αποτελεί μια μη γραμμική απεικόνιση από ένα διάνυσμα εισόδου σε ένα διάνυσμα εξόδου. Για το λόγο αυτό τέτοια δίκτυα είναι χρήσιμα για την μοντελοποίηση μη γραμμικών προβλημάτων.

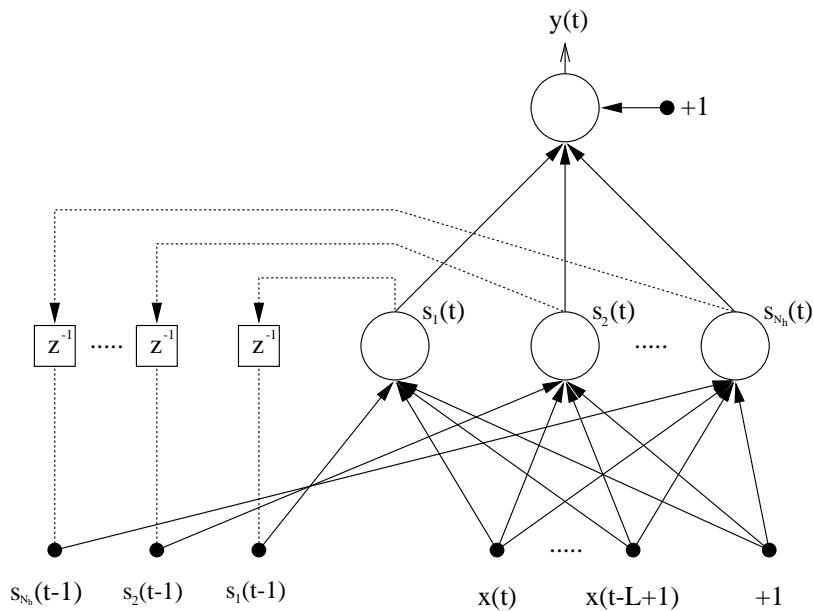
Όταν χρησιμοποιούμε δίκτυα προστροφοδότησης για πρόβλεψη χρονοσειρών, δεν αρκεί μόνο να καθορίσουμε την αρχιτεκτονική του δικτύου, δηλαδή τον αριθμό των χρυφών επιπέδων και των νευρώνων σε κάθε στρώμα. Πρέπει ακόμα να καθορίσουμε πόσες προηγούμενες παρατηρήσεις της χρονοσειράς είναι απαραίτητες για την πρόβλεψη καθώς και ποια πρέπει να είναι η ιδιαίτερη καθυστέρηση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές παρατηρήσεις. Αν χρησιμοποιούμε πολύ μικρό αριθμό παρατηρήσεων δεν θα καταφέρουμε να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά το χαοτικό σύστημα, ενώ αν πάρουμε μεγάλο αριθμό προηγούμενων τιμών μπορεί να οδηγηθούμε σε προβλήματα υπερεκπαίδευσης. Δηλαδή ενώ το δίκτυο θα ανταποκρίνεται πολύ καλά στα πρότυπα με τα οποία έχει εκπαιδευτεί δεν θα μπορεί να κάνει ικανοποιητικές προβλέψεις για πρότυπα που δεν έχει ξαναδεί. Η βιβλιογραφία περιέχει μερικές μεθόδους με τις οποίες μπορούμε να καθορίσουμε τον κατάλληλο αριθμό προηγούμενων παρατηρήσεων για το μοντέλο μας αλλά μια παρουσίασή τους ζεφεύγει από τα όρια της διπλωματικής αυτής εργασίας.

2.6.3 Αναδρομικά Νευρωνικά Δίκτυα

Εάν το νευρωνικό δίκτυο περιέχει τουλάχιστον ένα βρόχο ανατροφοδότησης ο οποίος ανακυκλώνει πληροφορία μέσω του ίδιου ή προηγούμενων στρώμάτων τότε ονομάζεται **αναδρομικό νευρωνικό δίκτυο**. Ο απλούστερος τρόπος για την εισαγωγή αναδρομής σ' ένα ΝΔ μπορεί να γίνει μέσω ενός τοπικού συνδέσμου ανατροφοδότησης. Σε δίκτυα αυτού του τύπου αναδρομικές συνδέσεις υπάρχουν μόνο από νευρώνες του χρυφού επιπέδου πίσω στον εαυτό τους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.7. Τα δίκτυα που προκύπτουν ονομάζονται **τοπικά αναδρομικά νευρωνικά δίκτυα** και η έξοδος $y(t)$ δεν εξαρτάται μόνο από το διάνυσμα εισόδου $x(t)$ αλλά και από τις προηγούμενες εξόδους του χρυμμένου στρώματος, δηλαδή το διάνυσμα $s(t-1)$. Με τον τρόπο αυτό, έμεσσα μέσω του χρυφού στρώματος η έξοδος του δικτύου θα εξαρτάται από όλες τις προηγούμενες εισόδους.

Τα πλεονεκτήματα για την εφαρμογή τοπικών αναδρομικών συνδέσεων σχετίζονται κυρίως με λόγους υλοποίησης. Η απαραίτητη πληροφορία για τον υπολογισμό της εξόδου ενός νευρονίου, είναι τοπική σε κάθε νευρώνα καθώς οι τιμές των εξόδων των άλλων νευρώνων του ίδιου επιπέδου δεν συμμετέχουν στον υπολογισμό. Αυτή η ιδιότητα κάνει την υλοποίηση (εισαγωγή) τοπικών αναδρομικών συνδέσεων πολύ εύκολη (απλή επέκταση του δικτύου προστροφοδότησης). Έτσι λόγω μικρής πολυπλοκότητας το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται συχνά.

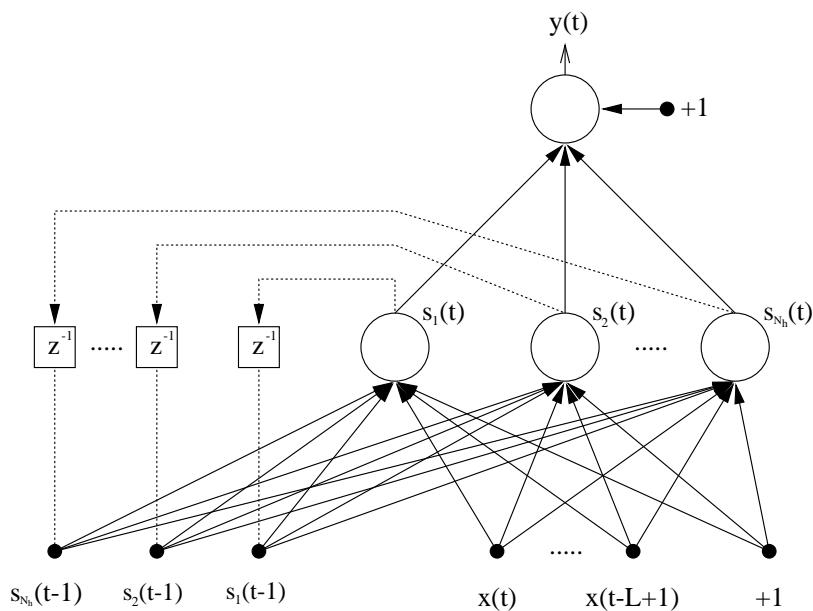
Αν δούμε όμως τι μας προσφέρει μια τοπική αναδρομική σύνδεση ποιοτικά, θα διαπιστώσουμε ότι τα ωφέλια είναι ελάχιστα. Καθώς δεν υπάρχουν συνδέσεις μεταξύ των νευρώνων του χρυφού επιπέδου, δεν υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ τους με αποτέλεσμα η δυναμική που μπορεί να μοντελοποιήσει ένα τέτοιο



Σχήμα 2.7 - Τοπικό αναδρομικό νευρωνικό δίκτυο.

δίκτυο να είναι περιορισμένη. Έτσι για πρόβλεψη χρονοσειρών με χρήση τοπικά αναδρομικών δικτύων, είναι και πάλι απαραίτητο να κάνουμε μία σωστή επιλογή των εισόδων.

Ένα πιο σύνθετο αναδρομικό μοντέλο είναι αυτό που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Εδώ κάθε νευρώνας του χρυφού επιπέδου έχει μια αναδρομική σύνδεση με όλους τους νευρώνες του χρυφού στρώματος, δηλαδή με όλα τα στοιχεία του διανύσματος $s(t-1)$. Το δίκτυο αυτό ονομάζεται **πλήρως αναδρομικό δίκτυο Elman**.

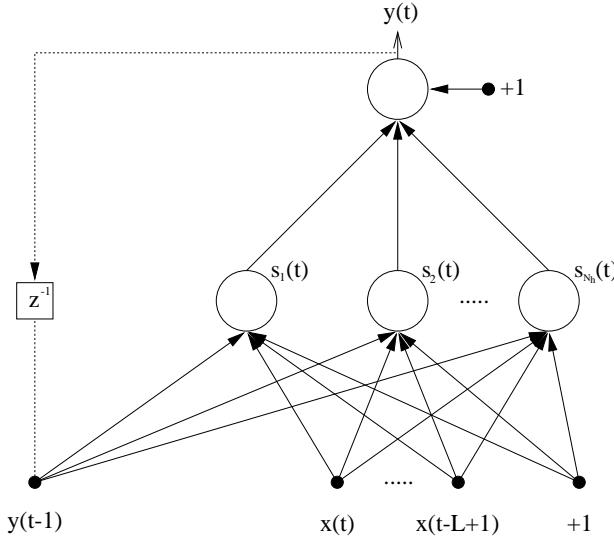


Σχήμα 2.8 - Δίκτυο Elman.

Εξ' αιτίας των πολλαπλών αναδρομικών συνδέσεων των πλήρως αναδρομικών δικτύων, αυτά παρουσιάζουν πολύ περισσότερες δυνατότητες μοντελοποίησης χαοτικών συστημάτων σε σχέση με τα τοπικά αναδρομικά δίκτυα. Συγκεκριμένα έχει αποδειχτεί ότι ένα πλήρως αναδρομικό νευρωνικό δίκτυο, μ' ένα μόνο χρυφό στρώμα μπορεί να μοντελοποιήσει ένα αυθαίρετο δυναμικό σύστημα. Αυτό σημαίνει πως τέτοια δίκτυα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την πρόβλεψη οποιασδήποτε χρονοσειράς.

Εάν τώρα δημιουργήσουμε συνδέσμους ανατροφοδότησης από τους νευρώνες εξόδου σε αυτούς του χρυφού στρώματος και απομακρύνουμε τις αναδρομικές συνδέσεις μεταξύ των νευρονίων του χρυμμένου

επιπέδου προκύπτει το δίκτυο που φαίνεται στο Σχήμα 2.9. Στη βιβλιογραφία το δίκτυο αυτό συχνά συναντάται με την ονομασία δίκτυο Jordan.



Σχήμα 2.9 - Δίκτυο Jordan.

2.7 Μάθηση Νευρωνικών Δικτύων

2.7.1 Γενικά

Η μάθηση είναι μία θεμελιακή ικανότητα των νευρωνικών δικτύων, η οποία τους επιτρέπει να μαθαίνουν από το περιβάλλον τους και να βελτιώνουν τη συμπεριφορά του, δηλαδή την αποτελεσματικότητα στη μοντελοποίηση του εκάστοτε προβλήματος, με το πέρασμα του χρόνου. Στα ΝΔ η μάθηση έγκειται στην ανανέωση των συναπτικών βαρών έτσι ώστε η απόκριση του δικτύου να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα μια επιθυμητή συμπεριφορά. Η μάθηση αυτή ουσιαστικά είναι μια επαναληπτική διαδικασία ανανέωσης των συναπτικών βαρών και κατωφλίων.

Ανάλογα με το πρόβλημα που καλείται να προσομοιώσει ένα ΝΔ εφαρμόζουμε και την κατάλληλη διαδικασία μάθησης. Θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την επιβλεπόμενη, την ενισχυτική και την μη επιβλεπόμενη μάθηση.

2.7.2 Επιβλεπόμενη Μάθηση

Το κύριο χαρακτηριστικό της επιβλεπόμενης μάθησης είναι η ύπαρξη ενός εξωτερικού «δασκάλου» ο οποίος παρέχει στο δίκτυο τις επιθυμητές εξόδους στις διάφορες εισόδους. Όταν ένα διάνυσμα εισόδου εκπαίδευσης εισάγεται στο δίκτυο, ο «δάσκαλος» εισαγάγει την επιθυμητή απόκριση. Οι παράμετροι του δικτύου ανανέωνται έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί το σφάλμα ανάμεσα στην επιθυμητή και την πραγματική έξοδο. Η τετραγωνική συνάρτηση κόστους είναι

$$J(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} E [(y(t) - y_d(t))^2] \quad (2.11)$$

όπου \mathbf{w} είναι το διάνυσμα των ελεύθερων παραμέτρων του συστήματος μάθησης, $y(t)$ η πραγματική έξοδος και $y_d(t)$ η επιθυμητή απόκριση του δικτύου. Σκοπός της διαδικασίας εκπαίδευσης είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $J(\cdot)$. Οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούμε θα εξεταστούν στο επόμενο κεφάλαιο.

2.7.3 Ενισχυτική Μάθηση

Στον τύπο αυτό μάθησης, το νευρωνικό δίκτυο τροφοδοτείται πάλι με δειγματικά πρότυπα εισόδου αλλά σε αντίθεση με την επιβλεπόμενη μάθηση δεν παρουσιάζονται οι επιθυμητές αποκρίσεις στις εισόδους αυτές. Εδώ

χρησιμοποιείται ένα μέτρο της επάρκειας της προκύπτουσας απόκρισης το οποίο μπορεί να οδηγήσει το δίκτυο στην επιθυμητή συμπεριφορά. Το μέτρο αυτό είναι γνωστό ως **ενισχυτικό σήμα** και ανατροφοδοτείται στο ΝΔ έτσι ώστε να επιβραβεύσει τις ορθές συμπεριφορές και να τιμωρήσει τις λανθασμένες.

Συνοπτικά η ενισχυτική μάθηση λειτουργεί ως εξής :

- Το νευρωνικό δίκτυο υπολογίζει τις εξόδους που παράγονται από την τρέχουσα είσοδο με τις παρούσες τιμές των βαρών.
- Το σύστημα αξιολογεί την έξοδο και το ενισχυτικό σήμα τροφοδοτείται στο δίκτυο.
- Τα βάρη ανανεώνονται με βάση το ενισχυτικό σήμα αυξάνοντας τις τιμές των βαρών που συνέβαλαν σε καλή συμπεριφορά ή μειώνοντας τις τιμές αυτών που προκάλεσαν κακή συμπεριφορά.
- Το δίκτυο ψάχνει να βρει ένα σύνολο βαρών τα οποία τείνουν ν' αποφύγουν αρνητικά ενισχυτικά σήματα.

Η διαφορά ανάμεσα στην επιβλεπόμενη και την ενισχυτική μάθηση είναι ότι στην ενισχυτική το σύστημα μάθησης βελτιώνεται χρησιμοποιώντας ένα κριτήριο συμπεριφοράς οι τιμές του οποίου δίνονται από το περιβάλλον, σε αντίθεση με την επιβλεπόμενη όπου το κριτήριο συμπεριφοράς καθορίζεται με βάση τις επιθυμητές εξόδους. Ένα σύστημα ενισχυτικής μάθησης μπορεί να υεωρηθεί ως ένα «σύστημα αξιολόγησης με ανατροφοδότηση» ενώ οι κανόνες που χρησιμοποιεί μπορούν να υεωρηθούν ως διαδικασία τυχαίας αναζήτησης η οποία προσπαθεί να βελτιστοποιήσει ένα μέτρο συμπεριφοράς. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα νευρωνικά δίκτυα προσπαθούν να εκπαιδευτούν και με κανόνες ενισχυτικής μάθησης.

2.7.4 Μη Επιβλεπόμενη Μάθηση

Στον τύπο αυτό μάθησης, που καλείται και αυτο-οργανούμενη μάθηση, δεν χρησιμοποιείται εξωτερικός δάσκαλος για να επιβλέψει την διαδικασία εκπαίδευσης. Ένα σύστημα μη επιβλεπόμενης μάθησης λειτουργεί εξάγοντας ιδιότητες ή χαρακτηριστικά των προτύπων εισόδου χωρίς να γνωρίζει ποιες κατηγορίες εξόδων είναι επιθυμητές. Δηλαδή το σύστημα κατηγοριοποιεί μόνιμες ιδιότητες χωρίς καμία ανατροφοδότηση από το περιβάλλον. Το νευρωνικό δίκτυο συνήθως εκπαιδεύεται να δυναμώνει την πυροδότηση σε απόκριση συχνά εμφανιζόμενων προτύπων. Με τον τρόπο αυτό καταφέρνει να αναπτύσσει εσωτερικές παραστάσεις για την καδικοποίηση προτύπων εισόδου.

Κεφάλαιο 3

Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης και Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων

3.1 Εισαγωγή

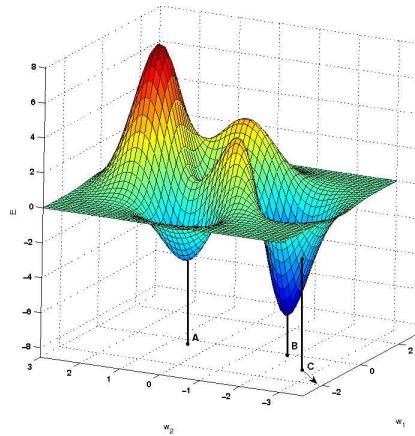
Στο κεφάλαιο αυτό, θα εξετάσουμε το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης συνεχών και διαφορίσμων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, παρουσιάζοντας μερικούς ευρέως χρησιμοποιήμενους αλγορίθμους. Μία από τις απλούστερες μεθόδους, είναι αυτή της απότομης καθόδου (gradient descent) την οποία και θα μελετήσουμε αναλυτικά. Εκτός αυτής θα δούμε περιληπτικά, και ορισμένους άλλους αλγορίθμους έτσι ώστε να αποκτήσουμε μία πιο σφαιρική εικόνα των μεθόδων που συναντάμε στη βιβλιογραφία για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης.

3.2 Αλγόριθμοι Βελτιστοποίησης

3.2.1 Επιφάνειες Λάθους - Ορισμός Προβλήματος

Το πρόβλημα που θα εξετάσουμε είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος E ορισμένη σε έναν χώρο n -διαστάσεων $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T$. Η εύρεση δηλαδή ενός ελαχίστου (είτε τοπικού είτε ολικού) $\mathbf{w} = \mathbf{w}^*$ της $E(\mathbf{w})$.

Είναι χρήσιμο να έχουμε μια απλή γεωμετρική αναπαράσταση της διαδικασίας ελαχιστοποίησης του σφάλματος. Η αναπαράσταση αυτή μπορεί να προκύψει θεωρώντας την $E(\mathbf{w})$ σαν μια επιφάνεια ορισμένη πάνω στον διανυσματικό χώρο των παραμέτρων \mathbf{w} όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1 - Επιφάνεια σφάλματος.

Τα σημεία A και B είναι τα ελάχιστα της συνάρτησης σφάλματος. Το βελάκι στο σημείο C δείχνει την κλίση ∇E .

Στη γενική περίπτωση η συνάρτηση σφάλματος E μπορεί να είναι μη γραμμική ως προς το \mathbf{w}^* . Λόγω της πολυπλοκότητας αυτής της E καταφεύγουμε σ' επαναληπτικούς αλγορίθμους για την εύρεση των ακροτάτων και συγκεκριμένα των ελαχίστων. Οι αλγόριθμοι αυτοί ξεκινούν από ένα δεδομένο αρχικό σημείο x_0 και κατασκευάζουν μια ακολουθία σημείων $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ σύμφωνα με τον κανόνα

Κανόνας 3.1 Κάθε νέο σημείο x_{i+1} της ακολουθίας προκύπτει από το προηγούμενο μέσω μιας απεικόνισης $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ώστε

$$x_{i+1} = A(x_i). \quad (3.1)$$

Η απεικόνιση A χαρακτηρίζει τον αλγόριθμο και διαφέρει από αλγόριθμο σε αλγόριθμο.

Ουσιαστικά σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου η νέα τιμή των παραμέτρων \mathbf{w} διαφέρει από την προηγούμενη κατά μιά ποσότητα $\Delta \mathbf{w}$. Δηλαδή,

$$\mathbf{w}^{(\tau+1)} = \mathbf{w}^{(\tau)} + \Delta \mathbf{w}^{(\tau)} \quad (3.2)$$

όπου με τ συμβολίζουμε τον αριθμό επαναλήψεων του αλγορίθμου.

Κάποιοι αλγόριθμοι όπως οι ψευδο-Νευτώνιοι μπορούν να εγγυηθούν ότι η συνάρτηση σφάλματος δεν θα αυξηθεί εξ' αιτίας της αλλαγής του διανύσματος \mathbf{w} . Ένα πιθανό πρόβλημα είναι ότι οι αλγόριθμοι αυτοί αν εντοπίσουν τοπικό ελάχιστο θα παγιδευτούν εκεί. Η αρχική επιλογή των βαρών είναι αυτή που θα καθορίσει αν οι μέθοδοι θα καταλήξουν στο ολικό ελάχιστο. Ακόμα οι αλγόριθμοι αυτοί ενδέχεται να «χολλήσουν» για μεγάλο χρονικό διάστημα σε σαμαροειδή σημεία ή περιοχές στις οποίες η συνάρτηση σφάλματος έχει πολύ μικρές μεταβολές (είναι δηλαδή σχεδόν επίπεδη).

Αντιθέτως σε άλλους αλγορίθμους μπορεί να εμφανιστεί τοπικά αύξηση της συνάρτησης σφάλματος E εξ' αιτίας της αλλαγής του διανύσματος \mathbf{w} , παρουσιάζοντας μη συγχλίνουσα συμπεριφορά. Μπορούν όμως να ξεπερνούν τοπικά ελάχιστα και να κατευθύνονται στα ολικά ελάχιστα του προβλήματος.

Διαφορετικοί αλγόριθμοι παρουσιάζουν διαφορετική συμπεριφορά στην περιοχή ενός ελάχιστου σημείου. Αν συμβολίσουμε με $\epsilon^{(\tau)}$ την απόσταση από το ελάχιστο τη στιγμή (τ) , τότε η σύγκλιση έχει τη γενική μορφή

$$\epsilon^{(\tau+1)} \propto (\epsilon^{(\tau)})^L \quad (3.3)$$

όπου το L αντιστοιχεί στην τάξη της σύγκλισης. Για $L = 1$ έχουμε γραμμική ενώ για $L = 2$ τετραγωνική σύγκλιση.

3.2.2 Αλγόριθμος Απότομης Καθόδου

Η κλίση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ στο σημείο \mathbf{w} είναι το διάνυσμα των μερικών παραγώγων της E και το συμβολίζουμε με \mathbf{g} .

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}) = \nabla E(\mathbf{w}) = \left[\frac{\vartheta E(\mathbf{w})}{\vartheta w_1}, \frac{\vartheta E(\mathbf{w})}{\vartheta w_2}, \dots, \frac{\vartheta E(\mathbf{w})}{\vartheta w_n} \right]^T \quad (3.4)$$

Στον αλγόριθμο της απότομης καθόδου (steepest descent), που είναι και ένας από τους απλούστερους, αρχίζουμε με ένα διάνυσμα παραμέτρων $w^{(0)}$ που έχει προκύψει με τυχαία επιλογή. Στη συνέχεια επαναληπτικά ανανεώνουμε το διάνυσμα αυτό έτσι ώστε στο βήμα τ να κινηθούμε προς την κατεύθυνση του μεγαλύτερου ρυθμού μείωσης του σφάλματος, δηλαδή στην κατεύθυνση της αρνητικής κλίσης στο σημείο $\mathbf{w}^{(\tau)}$:

$$\Delta \mathbf{w}^{(\tau)} = -\eta \nabla E|_{\mathbf{w}^{(\tau)}}. \quad (3.5)$$

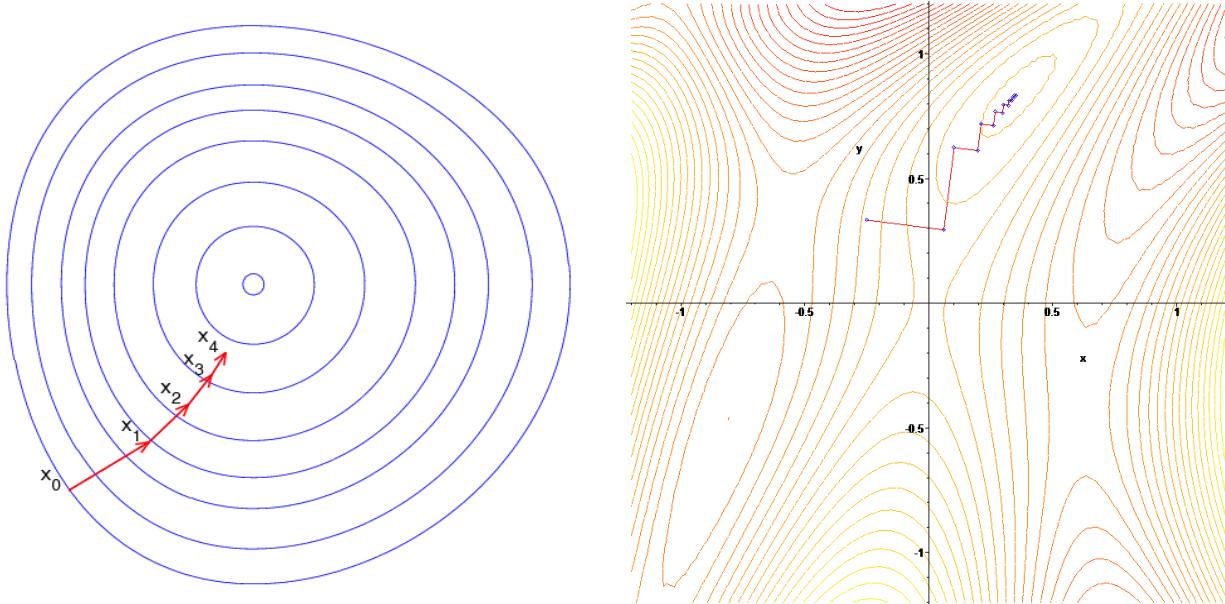
Η παράμετρος η ονομάζεται ρυθμός μάθησης και αν εξασφαλίζουμε ότι ο ρυθμός αυτός είναι αρκετά μικρός, μπορούμε να πειμένουμε μείωση της τιμής του σφάλματος E σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου.

Παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου μπορεί να εφαρμοστεί σε κάθε διανύσματικό χώρο, ανεξαρτήτου αριθμού διαστάσεων. Δύο μειονεκτήματα της μεθόδου είναι τα ακόλουθα.

- Ο αλγόριθμος μπορεί να χρειαστεί μεγάλο αριθμό επαναλήψεων για να φτάσει σ' ένα ελάχιστο.

- Η επιλογή του κατάλληλου ρυθμού μάθησης. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί έρευνα γραμμής για τον προσδιορισμό του αλλά είναι χρονοβόρα διαδικασία. Αντίθετα αν επιλέξουμε μια τυχαία σταθερή τιμή για το η μπορεί να έχουμε φτωχά αποτελέσματα.

Παρακάτω απεικονίζεται η εφαρμογή της μεθόδου σε δύο διαφορετικές συναρτήσεις.



Σχήμα 3.2 - Εφαρμογή της μεθόδου steepest descent σε δύο συναρτήσεις.

3.2.3 Αλγόριθμος Απότομης Καθόδου με 'Όρο Ορμής

Η χρήση ενός όρου ορμής στην εξίσωση ανανέωσης των βαρών του αλγορίθμου της απότομης καθόδου, οδηγεί στην στατικότητα της κίνησης του αλγορίθμου μέσα στον διανυσματικό χώρο των παραμέτρων και ελαττώνει πιθανές ταλαντώσεις. Η τροποποιημένη εξίσωση γίνεται

$$\Delta \mathbf{w}^{(\tau)} = -\eta \nabla E|_{\mathbf{w}^{(\tau)}} + \mu \Delta \mathbf{w}^{(\tau-1)}. \quad (3.6)$$

όπου με μ συμβολίζουμε τον όρο ορμής.

Για να καταλάβουμε το αποτέλεσμα της εισαγωγής ενός όρου ορμής, ας θεωρήσουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου σε μια περιοχή του χώρου των παραμέτρων όπου η συνάρτηση σφάλματος έχει πολύ μικρή καμπυλότητα. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κλίση παραμένει αμετάβλητη οπότε εφαρμόζοντας την παραπάνω εξίσωση διαδοχικά παίρνουμε

$$\Delta \mathbf{w} = -\eta \nabla E \{1 + \mu + \mu^2 + \dots\}. \quad (3.7)$$

Μέσα στις αγγύλες έχουμε μια αριθμητική σειρά οπότε ανθροίζοντας παίρνουμε

$$\Delta \mathbf{w} = -\frac{\eta}{1-\mu} \nabla E \quad (3.8)$$

δηλαδή με την εισαγωγή του όρου ορμής αυξάνουμε τον ρυθμό μάθησης από η σε $\frac{\eta}{1-\mu}$. Είναι προφανές ότι το μ πρέπει να βρίσκεται στο διάστημα $0 \leq \mu < 1$.

Τώρα σε μια περιοχή μεγάλης καμπυλότητας όπου η μέθοδος της κλίσης παρουσιάζει ταλαντώσεις, η ύπαρξη του όρου ορμής δεν έχει επιρροή στο ρυθμό μάθησης καθώς οι διαδοχικές συνεισφορές του όρου ορμής αλληλοεξουδετερώνονται.

Γενικά η εισαγωγή ενός όρου ορμής οδηγεί σε σημαντική βελτίωση της απόδοσης του αλγορίθμου της απότομης καθόδου. Έχουμε όμως την εισαγωγή μιας ακόμα παραμέτρου μ η τιμή της οποίας πρέπει να επιλεχτεί μαζί με αυτή του ρυθμού μάθησης η .

3.2.4 Κλασική Μέθοδος Newton

Αν αναπτύζουμε σε σειρά Taylor δεύτερης τάξης την συνάρτηση σφάλματος $E(\mathbf{w})$ γύρω από ένα σημείο \mathbf{w}_i χοντά σε ένα τοπικό ελάχιστο, τότε η E προσεγγίζεται από την τετραγωνική συνάρτηση

$$E(\mathbf{w}) = E(\mathbf{w}_i) + \mathbf{g}^T(\mathbf{w} - \mathbf{w}_i) + \frac{1}{2}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_i)^T \mathbf{H}(\mathbf{w} - \mathbf{w}_i) \quad (3.9)$$

όπου \mathbf{H} η μήτρα Hessian που αποτελείται από τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $E(\mathbf{w})$.

Η παραπάνω είναι μία τετραγωνική εξίσωση ως προς \mathbf{w} οπότε για να βρούμε το ελάχιστο \mathbf{w}^* της E δεν έχουμε παρά να βρούμε το σημείο μηδενισμού της παραγώγου της E ως προς $(\mathbf{w} \frac{dE}{d\mathbf{w}})$, δηλαδή να λύσουμε την εξίσωση

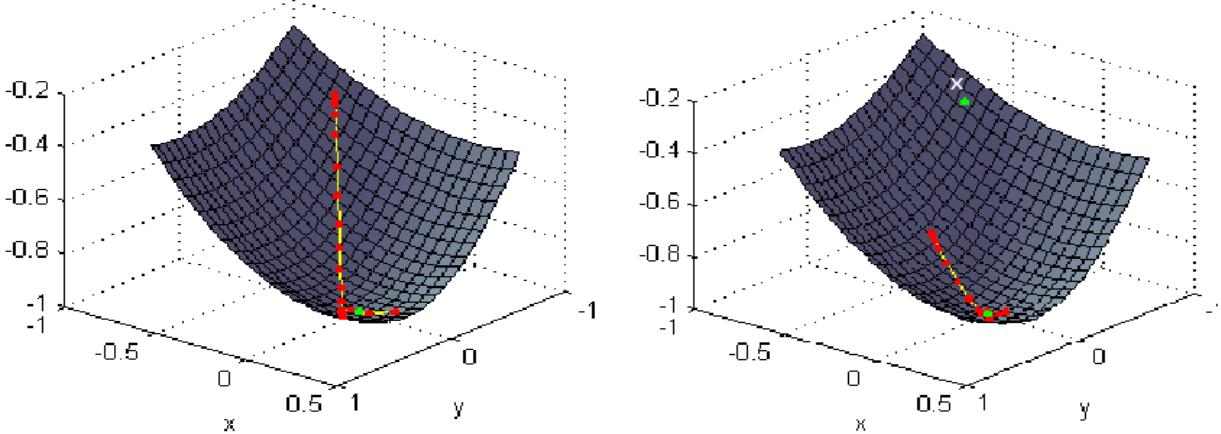
$$0 = \mathbf{g} + \mathbf{H}(\mathbf{w}^* - \mathbf{w}_i). \quad (3.10)$$

Αν ο αντίστροφος πίνακας της μήτρας \mathbf{H} υπάρχει, έχουμε μία μοναδική λύση. Όταν το ελάχιστο σημείο \mathbf{w}^* του αναπτύγματος Taylor επιλέγεται σαν το επόμενο σημείο του \mathbf{w}_i , έχουμε την κλασική **Νευτώνια μέθοδο** ή τη μέθοδο **Newton-Raphson**

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}_i - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}. \quad (3.11)$$

Το διάνυσμα $-\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$ είναι γνωστό σαν κατεύθυνση Newton. Σε αντίθεση με το διάνυσμα της κλίσης $-\nabla E$ η κατεύθυνση Newton σε μία τετραγωνική επιφάνεια σφάλματος, υπολογισμένη σε οποιοδήποτε σημείο \mathbf{w} στοχεύει κατευθείαν στο ελάχιστο της συνάρτησης σφάλματος. Επειδή όμως η τετραγωνική συνάρτηση προκύπτει μέσω προσέγγισης Taylor χρειάζεται να εφαρμόσουμε την παραπάνω εξίσωση επαναληπτικά και να υπολογίσουμε την μήτρα Hessian σε κάθε ενδιάμεσο σημείο \mathbf{w}^* .

Στο ακόλουθο σχήμα φαίνεται η εφαρμογή των δύο μεθόδων που έχουμε εξετάσει (μέθοδος απότομης καθόδου, μέθοδος Newton) στην ίδια επιφάνεια σφάλματος.



Σχήμα 3.3 - Εφαρμογή της μεθόδου steepest descent και του αλγορίθμου Newton στην ίδια επιφάνεια σφάλματος.

Η μέθοδος Newton παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα στην εφαρμογή της σε νευρωνικά δίκτυα. Αρχικά ο ακριβής υπολογισμός της μήτρας Hessian για μη γραμμικά δίκτυα, είναι πολύ απαιτητικός υπολογιστικά καθώς απαιτεί $O(NW^3)$ βήματα, όπου W ο αριθμός των παραμέτρων και N ο αριθμός των προτύπων εκπαίδευσης. Αυτός ο υπολογισμός πρέπει να γίνει σε κάθε στάδιο της επαναληπτικής διαδικασίας οπότε είναι απαγορευτικά χρονοβόρος. Δεύτερον πρέπει να υπολογιστεί ο αντίστροφος του Hessian πίνακα, διαδικασία που έχει $O(W^3)$ χρονική πολυπλοκότητα και απαιτεί πάλι πολύ χρόνο. Ακόμα η κατεύθυνση Newton μπορεί να στοχεύει σε ένα μέγιστο ή ένα σαμαροειδές σημείο παρά στο επιμυητό ελάχιστο. Αυτό συμβαίνει αν η μήτρα Hessian δεν είναι θετικά ορισμένη. Έτσι κανείς δεν μπορεί να εγγυηθεί ότι το σφάλμα θα μειώνεται σε κάθε επανάληψη. Αυτό φαίνεται και στο προηγούμενο σημείο όπου ο αλγόριθμος Newton δεν συγκλίνει για το σημείο X σε αντίθεση με τον αλγόριθμο της απότομης καθόδου. Τέλος το μήκος βήματος του αλγορίθμου ($\mathbf{H}^{-1}\mathbf{g}$) μπορεί να είναι πολύ μεγάλο έτσι ώστε να ξεφεύγουμε από τα όρια της εγγυρότητας της τετραγωνικής προσέγγισης, και να έχουμε ασταθή αλγόριθμο.

3.2.5 Τροποποιήσεις Μεθόδου Newton

Αν κάποιο τρέχον σημείο \mathbf{w} είναι μακριά από ένα τοπικό ελάχιστο \mathbf{w}^* , η κλασική μέθοδος μπορεί να μην δώσει μια κατεύθυνση καθόδου εξ' αιτίας των αποκομμένων όρων υψηλότερης τάξης στο ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $E(\cdot)$. Υπάρχουν ορισμένες τροποποιήσεις της κλασικής μεθόδου Newton οι οποίες της προσδίδουν περισσότερη αποδοτικότητα και αξιοπιστία.

3.2.5.1 Προσαρμοζόμενο Μήκος Βήματος

Όπως αναφέραμε παραπάνω το μήκος βήματος μπορεί να είναι πολύ μεγάλο για να οδηγήσει σε μείωση της συνάρτησης σφάλματος $E(\mathbf{w})$. Μια απλή τροποποίηση είναι η εισαγωγή μιας θετικής παραμέτρου η . Έτσι η εξίσωση ανανέωσης γίνεται

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i - \eta \mathbf{H}^{-1} \mathbf{g}, \quad (3.12)$$

όπου η είναι επιλεγμένο έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η E . Κοντά στη λύση το η αναμένεται να είναι κοντά στο 1. Μπορούμε να καθορίσουμε το η έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $E(\mathbf{w}_{i+1}) < E(\mathbf{w}_i)$ με έναν ευριστικό τρόπο. Για παράδειγμα όταν μπορούσαμε να έχουμε

$$\eta_{k+1} = \frac{1}{2} \eta_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.13)$$

όπου το αρχικό σημείο η_0 επιλέγεται να είναι 1 ή μικρότερο. Υπάρχουν και πιο σύνθετες μέθοδοι για τον καθορισμό του βήματος όπως η έρευνα γραμμής, αλλά η μελέτη τους ξεφεύγει από τα όρια αυτής της εργασίας.

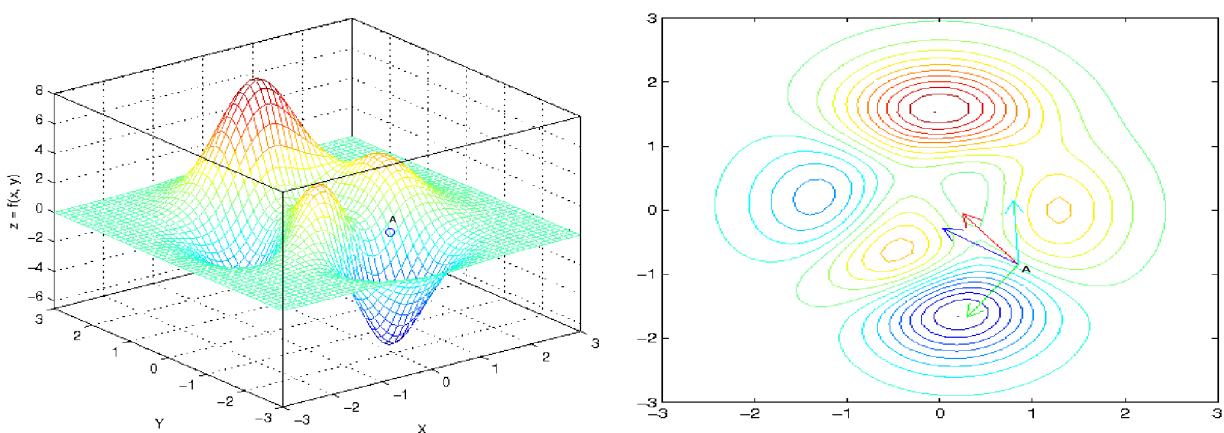
3.2.5.2 Τροποποιήσεις Levenberg-Marquardt

Όταν η μήτρα Hessian δεν είναι θετικά ορισμένη, τότε όπως είδαμε, η κατεύθυνση Newton μπορεί να οδηγήσει σε ένα τοπικό μέγιστο ή κάποιο σαμαροειδές σημείο. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αν προσθέσουμε έναν θετικά ορισμένο πίνακα \mathbf{P} στη μήτρα \mathbf{H} έτσι ώστε να γίνει θετικά ορισμένη. Η μεθοδολογία αυτή προτάθηκε από τους Levenberg, Marquardt για προβλήματα ελαχίστων τετραγώνων και αργότερα ο Goldfield εφήρμοσε την ιδέα στη μέθοδο Newton. Όταν $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{I}$ τότε η εξίσωση ανανέωσης των παραμέτρων γίνεται

$$\mathbf{w}_{i+1} = \mathbf{w}_i - (\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{g}, \quad (3.14)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας και λ μία μη αρνητική τιμή. Ανάλογα στη τιμή του λ η μέθοδος μεταβαίνει ομαλά ανάμεσα στις δύο ακραίες περιπτώσεις. Για $\lambda \rightarrow 0$ έχουμε τη μέθοδο Newton ενώ για $\lambda \rightarrow \infty$ προκύπτει ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου.

3.2.6 Σύγχριση Μεθόδων



Σχήμα 3.4 - Μη τετραγωνική επιφάνεια και οι κατευθύνσεις εφαρμογής των αλγορίθμων βελτιστοποίησης με αρχικό σημείο το A .

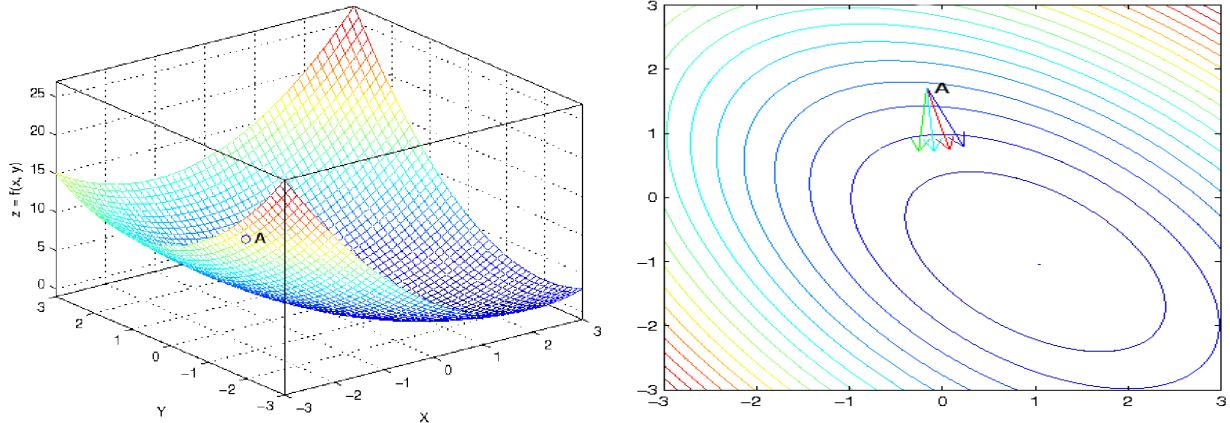
Στο παραπάνω σχήμα αριστερά βλέπουμε μια επιφάνεια σφάλματος και ένα σημείο πάνω σ' αυτήν. Η επιφάνεια αυτή δίνεται από την εξίσωση

$$E(\mathbf{w}) = 3(1-x)^2e^{-x^2-(y+1)^2} - 10\left(\frac{x}{5} - x^3 - y^5\right)e^{-x^2-y^2} - \frac{1}{3}e^{-(x+1)^2-y^2}, \quad (3.15)$$

πρόκειται δηλαδή για μια μη τετραγωνική εξίσωση. Δεξιά βλέπουμε τα διανύσματα που δείχνουν τις κατευθύνσεις που θ' ακολουθήσουν οι αλγόριθμοι που έχουμε εξετάσει αν εφαρμοστούν με το εν λόγω σημείο σαν αρχικό. Με πράσινο είναι ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου, με μπλέ η μέθοδος Newton ένω με κόκκινο και γαλάζιο η μέθοδος Levenberg-Marquardt για $\lambda = 1$ και $\lambda = 4$ αντίστοιχα. Παρατηρούμε πως μόνο η μέθοδος της απότομης καθόδου οδηγεί στο τοπικό ελάχιστο.

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα για μια παραβολική επιφάνεια σχήματος με εξίσωση

$$E(\mathbf{w}) = x^2 + xy + y^2 - x + y. \quad (3.16)$$

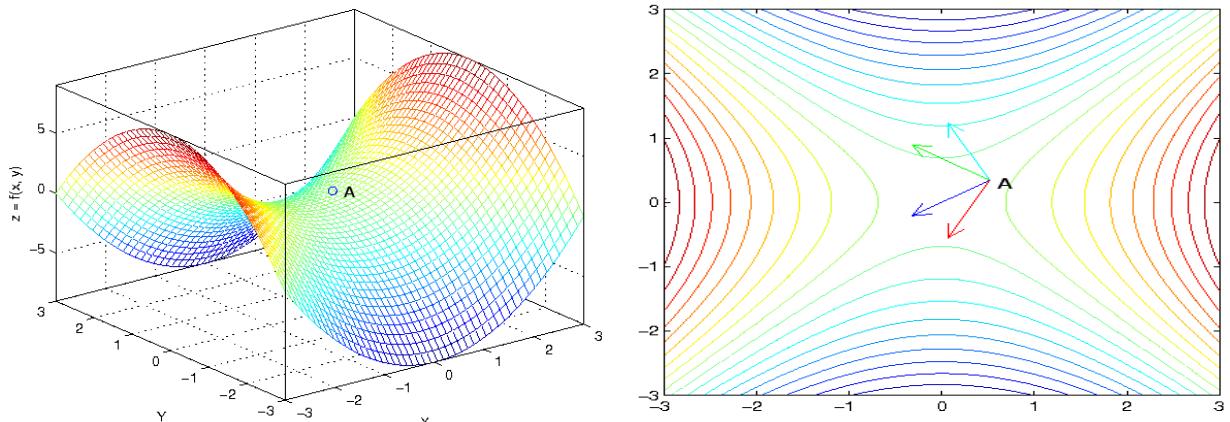


Σχήμα 3.5 - Παραβολική επιφάνεια και οι κατευθύνσεις εφαρμογής των αλγορίθμων βελτιστοποίησης με αρχικό σημείο το A.

Τέλος επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα για την υπερβολική επιφάνεια

$$E(\mathbf{w}) = x^2 - y^2 \quad (3.17)$$

και τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω.



Σχήμα 3.6 - Υπερβολική επιφάνεια και οι κατευθύνσεις εφαρμογής των αλγορίθμων βελτιστοποίησης με αρχικό σημείο το A.

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε πως ο αλγόριθμος της απότομης καθόδου, εμφανίζει τα καλύτερα αποτελέσματα και είναι αυτός που θα χρησιμοποιήσουμε για την εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων. Οι άλλες

μέθοδοι όπως βλέπουμε δεν δείχνουν πάντα σε τοπικά ελάχιστα αλλά συχνά κατευθύνουν την αναζήτηση σε μέγιστα ή σαμαροειδή σημεία.

3.2.7 Κριτήρια Τερματισμού

Όταν για την εύρεση του ελάχιστου σημείου δεν χρησιμοποιούμε κάποια αναλυτική μέθοδο αλλά αλγορίθμους βελτιστοποίησης, είναι απαραίτητο να καθορίσουμε ένα κριτήριο με το οποίο θα σταματάει η αναζήτηση βέλτιστου. Η εφαρμογή του κριτηρίου αυτού θα πρέπει να δείχνει ότι η αναζήτηση μας έχει οδηγήσει σ' ένα σημείο w^* που προσεγγίζει ικανοποιητικά το ελάχιστο. Μερικά από αυτά τα κριτήρια είναι τα ακόλουθα.

Τερματισμός μετά από έναν αριθμό επαναλήψεων. Το κριτήριο αυτό εγγυάται ότι η αναζήτηση βέλτιστου θα τερματιστεί. Το πολύ μετά από συγκεκριμένο αριθμό επαναλήψεων. Το πρόβλημα όμως είναι ότι δεν μπορούμε να ξέρουμε εκ των προτέρων πόσες επαναλήψεις θα χρειαστούν για να φτάσει ο αλγόριθμος κοντά σ' ένα ελάχιστο. Ακόμα ο αριθμός αυτός διαφέρει από δίκτυο σε δίκτυο. Για το λόγο αυτό πρέπει να χρησιμοποιείται σε συνδυασμό με κάποιο άλλο καθώς είναι μόνο ποσοτικό (αριθμός επαναλήψεων) και όχι ποιοτικό.

Τερματισμός μετά από συγκεκριμένο χρόνο. Ο χρόνος μετράται σε κύκλους της κεντρικής μονάδας επεξεργασίας του υπολογιστή. Και αυτό είναι ένα ποσοτικό καθαρά κριτήριο όπως το προηγούμενο καθώς δεν μπορούμε να ξέρουμε πόσος χρόνος θ' απαιτηθεί.

Τερματισμός όταν η συνάρτηση σφάλματος γίνει μικρότερη από ένα όριο. Το πρόβλημα με αυτό το κριτήριο είναι ότι ποτέ μπορεί να μη φτάσουμε στο επιθυμητό όριο. Μπορούμε όμως να το συνδυάσουμε με κάποιο από τα δύο προηγούμενα.

Τερματισμός όταν η σχετική αλλαγή της συνάρτησης σφάλματος πέσει κάτω από ένα όριο.

$$E(w_{k+1})/E(w_k) \leq \epsilon \quad (3.18)$$

Το μειονέκτημα του κριτηρίου αυτού είναι ότι στα μη γραμμικά μοντέλα, συχνά η επιφάνεια σφάλματος έχει περιοχές που είναι σχεδόν επίπεδες. Έτσι υπάρχει περίπτωση να τερματίσει την αναζήτηση πολύ γρήγορα και μακριά από κάποιο βέλτιστο σημείο.

Τερματισμός όταν το σφάλμα σε δεδομένα επαλήθευσης αρχίσει να αυξάνεται. Αυτό είναι ένα κριτήριο που βοηθάει το δίκτυο να μην εμφανίζει το πρόβλημα της υπερεκπαίδευσης και έχει δυνατότητες γενίκευσης.

Στην πράξη συνήθως χρησιμοποιούμε κάποιον συνδυασμό των παραπάνω κριτηρίων έτσι ώστε να έχουμε όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα μέσα σε λογικά πάντα πλαίσια χρόνου και υπολογιστικών απαιτήσεων.

3.3 Αλγόριθμοι Εκπαίδευσης Νευρωνικών Δικτύων

3.3.1 Γενικά

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε την αρχιτεκτονική των νευρωνικών δικτύων. Αφού καθορίσουμε τη μορφή του δικτύου πρέπει να προσαρμόσουμε τις παραμέτρους του (βάρη και κατώφλια) έτσι ώστε να μοντελοποιεί επιτυχώς το πρόβλημα. Για να γίνει αυτό πρέπει να εκπαιδεύσουμε το νευρωνικό δίκτυο και οι αλγόριθμοι που χρησιμοποιούνται για τον σκοπό αυτό θα εξεταστούν παρακάτω. Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης σφάλματος ανάμεσα στις εξόδους του δικτύου και τις επιθυμητές αποκρίσεις οπότε θα βασιστούμε στους γενικούς αλγορίθμους βελτιστοποίησης που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Αρχικά θα εξετάσουμε την εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων προστροφοδότησης και στη συνέχεια θα αναφερθούμε στους αλγορίθμους εκπαίδευσης αναδρομικών δικτύων. Αξίζει να σημειωθεί ότι ασχολούμαστε με δίκτυα επιβλεπόμενης μάθησης.

Ο βασικός κανόνας στον οποίο θα επικεντρωθούμε είναι αυτός της ανάστροφης διάδοσης (Backpropagation) και στηρίζεται στην μέθοδο της απότομης καθύδου. Μέσω του αλγορίθμου αυτού καταφέρνουμε να αποκτούμε αναδρομικά ένα διάνυσμα κλίσης κάθε στοιχείου του οποίου είναι η μερική παράγωγος μιας συνάρτησης σφάλματος ως προς μία παράμετρο (βάρος) του δικτύου. Χρησιμοποιούμε τον όρο ανάστροφη διάδοση, γιατί για τον υπολογισμό του διανύσματος κλίσης τα σφάλματα διαδίδονται προς τα πίσω μέσω των κρυμμένων στρωμάτων. Αφού υπολογιστεί το διάνυσμα αυτό μπορούν να εφαρμοστούν διάφορες τεχνικές για την ανανέωση των παραμέτρων του δικτύου.

3.3.2 Ορισμός Προβλήματος

Για να γίνει η εκπαίδευση του δικτύου χρειαζόμαστε ένα σύνολο από δεδομένα εκπαίδευσης D που αποτελείται από εισόδους $\mathbf{x}(t)$ και τις αντίστοιχες επιθυμητές εξόδους $\mathbf{d}(t)$, $D = \{\mathbf{x}(t), \mathbf{d}(t)\}_{p=1}^P$, όπου P ο αριθμός των παραδειγμάτων. Στόχος μας είναι να εκπαιδεύσουμε αυτό το δίκτυο ώστε οι έξοδοι του να είναι κοντά στις πραγματικές. Πρέπει να ορίσουμε λοιπόν, ένα μέτρο απόδοσης του δικτύου. Είναι λογικό να θεωρήσουμε πως ένα «καλό» δίκτυο περιγράφει καλά τα δεδομένα εκπαίδευσης, δηλαδή δίνει μικρά σφάλματα,

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{d}(t) - \mathbf{y}(t|\mathbf{w}, \mathbf{x}(t)) \quad (3.19)$$

όπου $\mathbf{d}(t)$ η επιθυμητή έξοδος τη χρονική στιγμή t και $\mathbf{y}(t|\mathbf{w}, \mathbf{x}(t))$ η πραγματική έξοδος του δικτύου την ίδια χρονική στιγμή για είσοδο $\mathbf{x}(t)$ και παραμέτρους \mathbf{w} . Για απλότητα από δω και στο εξής θα παραλείπουμε την εξάρτηση από την είσοδο και τις παραμέτρους και θα συμβολίζουμε την πραγματική έξοδο με $\mathbf{y}(t)$. Πρέπει να τονίσουμε ότι ενώ στα νευρωνικά δίκτυα προστροφοδότησης η σειρά με την οποία παρουσιάζονται τα παραδείγματα εκπαίδευσης δεν παίζει κανένα ρόλο, στα αναδρομικά δίκτυα πρέπει να παρουσιάζονται σε χρονική ακολουθία.

Βασιζόμενοι στην παραπάνω εξίσωση, μπορούμε να υπολογίσουμε τα σφάλματα για όλα τα πρότυπα εκπαίδευσης, του συνόλου D . Οι παράμετροι \mathbf{w} πρέπει να επιλεγούν ώστε το σφάλμα $\mathbf{e}(t)$, $t = 1, \dots, P$ να ελαχιστοποιηθεί. Το κριτήριο που χρησιμοποιούμε συνήθως για να μετρήσουμε το συνολικό σφάλμα είναι η συνάρτηση μέσου τετραγωνικού σφάλματος

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N [\mathbf{e}(t)]^2 \quad (3.20)$$

όπου ο συντελεστής $\frac{1}{2}$ χρησιμοποιείται για να διευκολυνθούμε στις παραγωγίσεις που θ' ακολουθήσουν.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το πρόβλημα εκπαίδευσης σαν το πρόβλημα προσδιορισμού ενός συνόλου παραμέτρων $\hat{\mathbf{w}}$ που προσεγγίζει το ελάχιστο \mathbf{w}^* της συνάρτησης μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

3.3.3 Εκπαίδευση Νευρωνικών Δικτύων Προστροφοδότησης

Έστω ένα νευρωνικό δίκτυο προστροφοδότησης το οποίο αποτελείται από L στρώματα, και το στρώμα l ($l = 0, 1, \dots, L$; $l = 0$ αντιπροσωπεύει το στρώμα εισόδου) έχει $N(l)$ νευρώνες. Τότε η έξοδος του νευρώνα

$i, 1 \leq i \leq N(l)$ στο στρώμα l μπορεί να γραφεί $x_{l,i}$ ή $f_{l,i}$ όπου f η συνάρτηση ενεργοποίησης του νευρονίου. Η έξοδος αυτή εξαρτάται από τις εισόδους και τις παραμέτρους του κάθε νευρώνα οπότε

$$x_{l,i} = f_{l,i}(x_{l-1,1}, \dots, x_{l-1,N(l-1)}, w_{l,i,1}, \dots, w_{l,i,N(l-1)}, \theta_{l,i}) \quad (3.21)$$

Την εξίσωση 3.19 μπορούμε να την γράψουμε και ως εξής

$$E(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum E_p \quad (3.22)$$

όπου

$$E_p = \sum_{k=1}^{N(L)} (d_k - x_{L,k})^2. \quad (3.23)$$

Το E_p συμβολίζει το τετραγωνικό σφάλμα για το p -οστό πρότυπο εκπαίδευσης.

Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο της απότυπης καθύδου, για την ελαχιστοποίηση του σφάλματος πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το διάνυσμα κλίσης. Παρατηρούμε ότι μια μικρή αλλαγή σε μία παράμετρο $w_{l,i,j}$ θα επηρεάσει την έξοδο του νευρώνα i του στρώματος l , η οποία με τη σειρά της θα επηρεάσει την τελική έξοδο άρα και το μέτρο σφάλματος. Για το λόγο αυτό η βασική ιδέα για τον προσδιορισμό του διανύσματος κλίσης έγκειται στην διάδοση πληροφορίας από το στρώμα εξόδου προς τα πίσω.

Ορίζουμε το **σήμα σφάλματος** $\epsilon_{l,i}$ σαν την παράγωγο του μέτρου σφάλματος E_p ως προς την έξοδο του νευρώνα i του στρώματος l , συνυπολογίζοντας τόσο τις άμεσες όσο και τις έμεσες συνδέσεις.

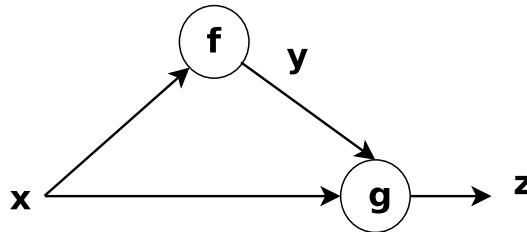
$$\epsilon_{l,i} = \frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta X_{l,i}} \quad (3.24)$$

Η παραπάνω σχέση ονομάζεται διατεταγμένη παράγωγος. Η διαφορά της διατεταγμένης από την απλή μερική παράγωγο βρίσκεται στον τρόπο παραγώγισης της συνάρτησης. Για την έξοδο $x_{l,i}$, $l \neq i$ ενός εσωτερικού νευρονίου η μερική παράγωγος $\frac{\vartheta E_p}{\vartheta X_{l,i}}$ ισούται με το μηδέν καθώς η E_p δεν εξαρτάται άμεσα από την $x_{l,i}$. Έμεσα όμως υπάρχει εξάρτηση, αφού μια αλλαγή στην παράμετρο $x_{l,i}$ προκαλεί μεταβολή της εξόδου του δικτύου άρα και της συνάρτησης σφάλματος E_p . Η διατεταγμένη παράγωγος συνυπολογίζει αυτή την έμμεση εξάρτηση. Το επόμενο παράδειγμα βοηθάει να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια αυτή.

Παράδειγμα 3.1

Έστω το απλό δίκτυο που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, όπου z συνάρτηση των x και y και y μια συνάρτηση του x :

$$\begin{aligned} z &= g(x, y) \\ y &= f(x) \end{aligned}$$



Για την κλασική μερική παράγωγο $\frac{\vartheta z}{\vartheta x}$ υποθέτουμε ότι όλες οι άλλες μεταβλητές είναι σταθερές (δηλαδή το y) οπότε

$$\frac{\vartheta z}{\vartheta x} = \frac{\vartheta g(x, y)}{\vartheta x}$$

Αντιθέτως στην διατεταγμένη παράγωγο, συνυπολογίζουμε το γεγονός ότι το y εξαρτάται από το x οπότε

$$\frac{\vartheta^+ z}{\vartheta x} = \frac{\vartheta^+ g(x, y)}{\vartheta x} = \frac{\vartheta g(x, y)}{\vartheta x} + \left. \frac{\vartheta g(x, y)}{\vartheta y} \right|_{y=f(x)} \frac{\vartheta f(x)}{\vartheta x}$$

Το σήμα σφάλματος για τον i νευρώνα του στρώματος L μπορεί να υπολογιστεί απ' ευθείας με χρήση της κλασικής παραγώγου

$$\epsilon_{L,i} = \frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta x_{L,i}}. \quad (3.25)$$

Οπότε με χρήση της 3.19 παίρνουμε

$$\epsilon_{L,i} = -(d_i - x_{L,i}). \quad (3.26)$$

Για έναν εσωτερικό κόμβο i του στρώματος l το σήμα σφάλματος προκύπτει από τον κανόνα της αλυσίδας:

$$\epsilon_{l,i} = \frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta x_{l+1,m}} \frac{\vartheta f_{l+1,m}}{\vartheta x_{l,i}} = \sum_{m=1}^{N(l+1)} \epsilon_{l+1,m} \frac{\vartheta f_{l+1,m}}{\vartheta x_{l,i}} \quad (3.27)$$

όπου $0 \leq l \leq L-1$. Με τον τρόπο αυτό το σήμα σφάλματος ενός εσωτερικού κόμβου στο στρώμα l μπορεί να εκφραστεί σαν γραμμικός συνδυασμός των σημάτων σφάλματος των κόμβων του επόμενου στρώματος, $l+1$. Έτσι για κάθε κόμβο μπορούμε εφαρμόζοντας επαναληπτικά την παραπάνω εξίσωση να υπολογίσουμε το σήμα σφάλματος συναρτήσει μόνο των σημάτων σφάλματος του στρώματος εξόδου τα οποία υπολογίζονται άμεσα από την εξίσωση 3.26. Όπως παρατηρούμε για να υπολογίσουμε το σήμα σφάλματος ενός νευρώνα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τα σήματα σφάλματος των νευρώνων των επόμενων αρχιτεκτονικά στρωμάτων. Για το λόγο αυτό η διαδικασία καλείται ανάστροφης διάδοσης.

Το διάνυσμα κλίσης ορίζεται σαν η παράγωγος της συνάρτησης σφάλματος E_p ως προς τις παραμέτρους του συστήματος, δηλαδή τα βάρη του δικτύου. Αν $w_{l,i,j}$ το βάρος ανάμεσα στον i νευρώνα του στρώματος l και τον j του στρώματος $l-1$ τότε

$$\frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta w_{l,i,j}} = \frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta x_{l,i}} \frac{\vartheta f_{l,i}}{\vartheta w_{l,i,j}} = \epsilon_{l,i} \frac{\vartheta f_{l,i}}{\vartheta w_{l,i,j}}. \quad (3.28)$$

Η παράγωγος του συνολικού μέτρου σφάλματος E θα είναι προφανώς

$$\frac{\vartheta^+ E}{\vartheta w_{l,i,j}} = \sum_{p=1}^P \frac{\vartheta^+ E_p}{\vartheta w_{l,i,j}}. \quad (3.29)$$

Σύμφωνα με τον αλγόριθμο της απότομης καθόδου ο τύπος ανανέωσης του βάρους $w_{l,i,j}$ θα είναι

$$\Delta w_{l,i,j} = -\eta \frac{\vartheta^+ E}{\vartheta w_{l,i,j}}, \quad (3.30)$$

όπου η ο ρυθμός μάθησης. Η εφαρμογή του παραπάνω τύπου ανανέωσης για όλες τις προσαρμοζόμενες παραμέτρους του δικτύου (βάρη, κατώφλια) μας δίνει τον αλγόριθμο μάθησης ανάστροφης διάδοσης.

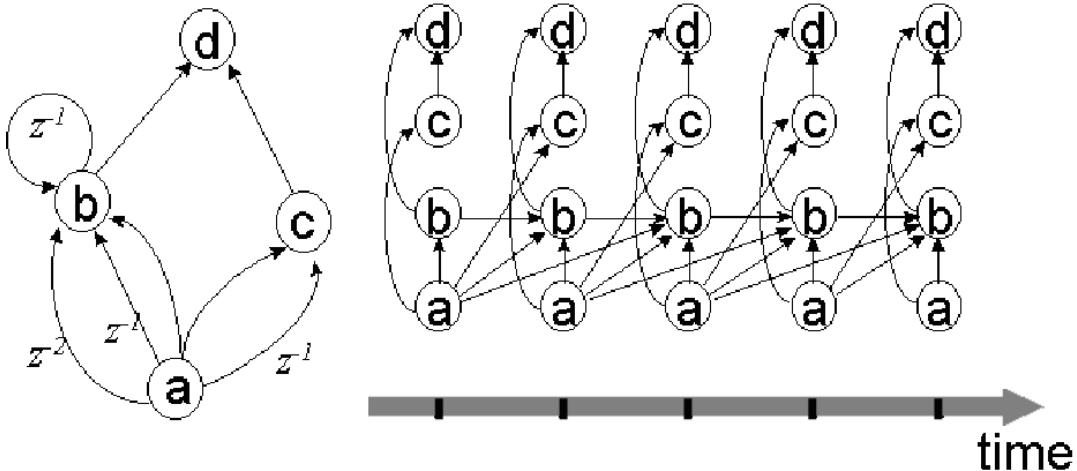
3.3.4 Εκπαίδευση Αναδρομικών Νευρωνικών Δικτύων

Στα αναδρομικά δίκτυα, μπορούμε να επεκτείνουμε τον αλγόριθμο ανάστροφης διάδοσης για τα δίκτυα προσοτροφοδότησης. Η κύρια διαφορά είναι πως η είσοδος/έξοδος του δικτύου δεν είναι στατικά διανύσματα αλλά χρονικές ακολουθίες. Μια μικρή αλλαγή σε ένα βάρος δεν επηρεάζει μόνο την τρέχουσα έξοδο αλλά μέσω των αναδρομικών συνδέσεων επηρεάζει έμεσα και τις επόμενες εξόδους του δικτύου.

Μια απλή προσέγγιση θα ήταν να αγνοήσουμε στον αλγόριθμο ανανέωσης των βαρών τις έμεσες συνδέσεις και να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο ανάστροφης διάδοσης που χρησιμοποιείται και στα δίκτυα προσοτροφοδότησης. Με τον τρόπο αυτό όμως χάνουμε την αξία της αναδρομικής πληροφορίας και της «μνήμης» του συστήματος. Υπάρχουν δύο βασικοί αλγόριθμοι για την εκπαίδευση αναδρομικών δικτύων, η ανάστροφη διάδοση δια μέσου του χρόνου και η αναδρομική μάθηση πραγματικού χρόνου, τους οποίους θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

3.3.4.1 Ανάστροφη Διάδοση Δια Μέσου του Χρόνου (BPTT)

Κύρια ιδέα του αλγορίθμου αυτού είναι να «ξεδίπλωσουμε» το αναδρομικό δίκτυο στον χρόνο, μετασχηματίζοντάς το έτσι σε ένα πολυστρωματικό δίκτυο προσοτροφοδότησης. Για ένα δηλαδή αναδρομικό δίκτυο όπου κάθε νευρώνας παράγει έξοδο τη χρονική στιγμή $t = 1, 2, \dots, T$ δημιουργούμε ένα πολυστρωματικό δίκτυο που περιέχει κάθε αρχικό νευρόνιο T φορές. Προφανώς για να γίνει κάτι τέτοιο πρέπει το T να είναι αρκετά μικρό. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα γενικό αναδρομικό δίκτυο και πως εξελίσσεται το «ξεδίπλωμά» του στο χρόνο.



Σχήμα 3.7 - Ξεδίπλωμα αναδρομικού δικτύου στο χρόνο.

Η εκπαίδευση του δικτύου γίνεται ουσιαστικά με χρήση του αλγορίθμου ανάστροφης διάδοσης μόνο που τώρα ξέρουμε τις επιθυμητές εξόδους για όλα τα στρώματα και όχι μόνο το τελευταίο. Αν αριθμήσουμε τους κόμβους του δικτύου τότε το $w_{i,j}$ θα συμβολίζει το βάρος της σύνδεσης από τον j στον i . Οπότε η παράγωγος του σφάλματος ως προς ένα βάρος στο πολυστρωματικό ισοδύναμο δίκτυο θα είναι

$$\frac{\partial E}{\partial w_{i,j}} = \sum_{t=1}^T \frac{\partial E}{\partial x_i(t)} \frac{\partial f(x_j(t-1))}{\partial w_{i,j}} \quad (3.31)$$

καθώς η είσοδος του i νευρώνα τη χρονική στιγμή t είναι η έξοδος x_j του j νευρώνα τη στιγμή $t-1$.

Το πλεονέκτημα αυτού του αλγορίθμου είναι ότι χρειάζεται να λύσουμε μόνο ένα σύστημα n διαστάσεων για την προσαρμογή των βαρών, όπου n ο αριθμός των νευρώνων. Δηλαδή έχει χρονική πολυπλοκότητα $O(n^2)$. Ωστόσο η χωρική του πολυπλοκότητα εξαρτάται από το T και είναι $O(nT)$ και αυξάνεται γραμμικά με το χρόνο. Στη συνέχεια της εργασίας θα προτιμήσουμε τον αλγόριθμο της αναδρομικής μάθησης πραγματικού χρόνου.

3.3.4.2 Αναδρομική Μάθηση Πραγματικού Χρόνου (RTRL)

Όπως είδαμε ο αλγόριθμος ανάστροφης διάδοσης δια μέσου του χρόνου παρουσιάζει πολύ υψηλές απαιτήσεις μνήμης. Για να αποφύγουμε αυτό το πρόβλημα χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο αναδρομικής μάθησης πραγματικού χρόνου, ο οποίος είναι ιδανικός για χρήση σε μεγάλες χρονοσειρές. Τα βάρη ανανεώνονται κατά τη διάρκεια που τρέχει ο αλγόριθμος και όχι στο τέλος της παρουσίασης των ακολουθιών (on-line learning).

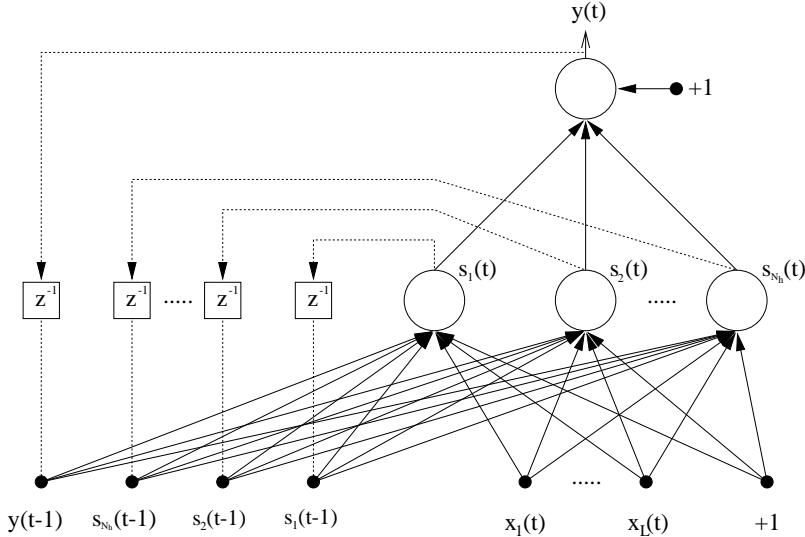
Για την παρουσίαση του αλγορίθμου θα θεωρήσουμε το δίκτυο που φαίνεται παρακάτω. Πρόκειται για ένα αναδρομικό δίκτυο με ένα χρυμμένο στρώμα και έναν νευρώνα εξόδου. Αναδρομικές συνδέσεις υπάρχουν τόσο από το χρυφό επίπεδο όσο και από το στρώμα εξόδου. Η διαδικασία που περιγράφεται εύκολα γενικεύεται και σε πιο σύνθετα μοντέλα.

Έστω $\mathbf{x}(t)$ ένα διάνυσμα που περιέχει τις L εξωτερικές εξόδους του δικτύου τη χρονική στιγμή t , $\mathbf{s}(t)$ το διάνυσμα που περιέχει τις N_h εξόδους των νευρώνων του χρυφού στρώματος τη χρονική στιγμή t και $y(t)$ η απόκριση του νευρώνα εξόδου. Για ευκολία θεωρούμε το διάνυσμα $\mathbf{z}^h(t)$ που περιέχει όλες τις εισόδους του

χρυφού στρώματος (τόσο τις εξωτερικές του δικτύου όσο και αυτές λόγω ανατροφοδότησης). Τα στοιχεία του διανύσματος αυτού ορίζονται ως εξής

$$z_k^h(t) = \begin{cases} x_k(t) & , k \in I \\ s_k(t-1) & , k \in H \\ y(t-1) & , k = o \end{cases} \quad (3.32)$$

όπου I συμβολίζει το σύνολο των L δεικτών για τους οποίους το z_k^h είναι εξωτερική είσοδος, H το σύνολο των N_h δεικτών για τους οποίους το z_k^h είναι η έξοδος ενός χρυμμένου κόμβου και με ο συμβολίζουμε την αναδρομική είσοδο από τον κόμβο εξόδου.



Σχήμα 3.8 - Δίκτυο που χρησιμοποιείται για την επίδειξη του αλγορίθμου RTRL.

Η έξοδος s του k νευρώνα του χρυφού επιπέδου είναι

$$\begin{aligned} s_k(t) &= f[u_k(t)], \quad k \in H \\ &= f \left[\sum_{j \in I \cup H \cup o} w_{k,j} z_j^h(t) + \theta_k^h \right] \\ &= f \left[\sum_{j \in I} w_{k,j} x_j t + \sum_{j \in H} w_{k,j} s_j(t-1) + w_{k,o} y(t-1) + \theta_k^h \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

όπου $u_k(t)$ η συνολική είσοδος του k χρυφού νευρώνα και $f(\cdot)$ η συνάρτηση ενεργοποίησης. Οι έξοδοι του χρυφού στρώματος αποτελούν τις εισόδους του νευρονίου εξόδου, το οποίο δίνει και την έξοδο $y(t)$ του δικτύου

$$y(t) = f \left[\sum_{j \in H} w_{o,j} z_j^o(t) + \theta^o \right] = f \left[\sum_{j \in H} w_{o,j} s_j(t) + \theta^o \right]. \quad (3.34)$$

Για την ανανέωση του βάρους χρησιμοποιούμε τον κανόνα ανανέωσης της απότομης καθόδου. Η παράγωγος του μέσου τετραγωνικού σφάλματος τη χρονική στιγμή t ως προς ένα βάρος $w_{i,j}$ του δικτύου είναι

$$\frac{\partial E}{\partial w_{i,j}} = \frac{\partial E}{\partial y(t)} \frac{\partial^+ y(t)}{\partial w_{i,j}}. \quad (3.35)$$

Η διατεταγμένη παράγωγος της εξόδου του δικτύου τη στιγμή t ως προς το βάρος είναι

$$\frac{\partial^+ y(t)}{\partial w_{i,j}} = \delta_{oi} \frac{\partial y(t)}{\partial w_{i,j}} + \sum_{j' \in H} \frac{\partial y(t)}{\partial s_{j'}(t)} \frac{\partial^+ s_{j'}(t)}{\partial w_{i,j}} \quad (3.36)$$

όπου δ_{oi} το δέλτα του Kronecker.

$$\delta_{ai} = \begin{cases} 1 & , \quad a = i \\ 0 & , \quad a \neq i \end{cases} \quad (3.37)$$

Οι παράγωγοι των εξόδων του χρυμμένου στρώματος ως προς το ανανέωση βάρος είναι με τη σειρά τους

$$\frac{\vartheta^+ s_k(t)}{\vartheta w_{i,j}} = \frac{\vartheta f[u_k(t)]}{\vartheta u_k(t)} \frac{\vartheta^+ u_k(t)}{\vartheta w_{i,j}}, \quad k \in H \quad (3.38)$$

όπου

$$\frac{\vartheta^+ u_k(t)}{\vartheta w_{i,j}} = \delta_{ki} z_j^h(t) + \sum_{j' \in H} w_{kj'} \frac{\vartheta s_{j'}(t-1)}{\vartheta w_{i,j}} + w_{k,o} \frac{\vartheta y(t-1)}{\vartheta w_{i,j}} \quad (3.39)$$

Αν υποθέσουμε ότι η αρχική χρονική στιγμή είναι $t = 1$, θέτουμε τις αρχικές συνθήκες μηδενικές

$$\begin{aligned} s_k(0) &= 0, \quad k \in H \\ \frac{\vartheta s_k(0)}{\vartheta w_{i,j}} &= 0, \quad k \in H \\ \frac{\vartheta y(0)}{\vartheta w_{i,j}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Οι παραπάνω αναδρομικές εξισώσεις αποτελούν τον αλγόριθμο αναδρομικής μάθησης πραγματικού χρόνου. Τα παραπάνω μπορούν εύκολα να γενικευτούν για οποιοδήποτε δίκτυο και οποιοδήποτε τύπο αναδρομικών συνδέσεων. Για την λειτουργία του αλγορίθμου πρέπει να αποθηκεύουμε τις μερικές παραγώγους που υπολογίζουμε καθώς θα χρειαστούν στα επόμενα βήματα. Στο σημείο αυτό καταλαβαίνουμε γιατί τα αναδρομικά δίκτυα για την εκπαίδευσή τους απαιτούν πρότυπα σε σωστή χρονολογική σειρά.

Ο αλγόριθμος αυτός αντιμετωπίζει το πρόβλημα που είχε ο BPTT με μεγάλες απαιτήσεις μνήμης. Είναι ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιηθεί στην εργασία αυτή για την εκπαίδευση του αναδρομικού νευρο-ασαφούς μοντέλου που υλοποιούμε.

Κεφάλαιο 4

Νευρο-Ασαφή Συστήματα

4.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια εξετάσαμε δύο περιοχές της υπολογιστικής νοημοσύνης. Τα ασαφή συστήματα συλλογισμού και τα νευρωνικά δίκτυα. Ο συνδυασμός αυτών των δύο οδήγησε στη δημιουργία ένος συτήματος ικανού να εκπαιδεύεται και έχει υψηλού επιπέδου συλλογιστικές ικανότητες. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται νευρο-ασαφές σύστημα συλλογισμού και για τους λόγους αυτούς αποτελεί ένα ιδανικό εργαλείο για την μοντελοποίηση ασαφώς ορισμένων δυναμικών/χαοτικών συστημάτων. Η πιο ουσιαστική δυνατότητα ενός νευρο-ασαφούς συστήματος είναι η δυνατότητα που παρέχει να εφαρμόζει αλγορίθμους μάθησης για νευρωνικά δίκτυα έτσι ώστε να προσαρμόζονται οι παράμετροι του ασαφούς συστήματος συλλογισμού.

Στη διεύθυνη βιβλιογραφία υπάρχει σημαντικός αριθμός δημοσιεύσεων που ασχολείται με την εκμετάλλευση των αλγορίθμων εκπαίδευσης ΝΔ από ασαφή συστήματα. Τα προταθέντα νευρο-ασαφή μοντέλα συνδυάζουν τα πλεονεκτήματα των δύο αυτών συστημάτων. Η γρήγορη και ακριβής μάθηση, οι άριστες δυνατότητες γενίκευσης, η ευκολία στην σημασιολογική κατανόηση των ασαφών κανόνων που χρησιμοποιούν και η δυνατότητα που παρέχουν να χειρίζονται τόσο δεδομένα όσο και γνώση ειδικού (expert knowledge) για το πρόβλημα, είναι μερικά μόνο από τα χαρακτηριστικά τους που τα καθιστούν ιδανικά για εφαρμογή σε πληθώρα επιστημονικών περιοχών.

Έχει προταθεί μεγάλος αριθμός νευρο-ασαφών μοντέλων τα οποία διαφέρουν μεταξύ τους στην αρχιτεκτονική και στην ασαφή συλλογιστική διαδικασία που ακολουθούν (π.χ. κανόνες EAN-TOTE ή Takagi-Sugeno συλλογιστική). Σ' αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε μερικά από τα χαρακτηριστικά παραδείγματα νευρο-ασαφών μοντέλων που συναντώνται στη βιβλιογραφία αφού πρώτα παρουσιάσουμε συνοπτικά την διαδικασία μάθησης σ' αυτά. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα προτείνουμε ένα νέο νευρο-ασαφές μοντέλο που χαρακτηρίζεται από αναδρομικές συνδέσεις κατάλληλο για εφαρμογή σε πρόβλεψη χαοτικών χρονοσειρών.

4.2 Εκπαίδευση στα Νευρο-Ασαφή Συστήματα

Στα νευρο-ασαφή συστήματα δύο βασικοί τύποι εκπαίδευσης απαιτούνται. Αλγόριθμοι δομικής μάθησης για την εύρεση των κατάλληλων ασαφών κανόνων και αλγόριθμοι για την σωστή ρύθμιση των παραμέτρων του δικτύου και των συναρτήσεων συμμετοχής.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι με τους οποίους οι δύο αυτές εκπαίδευτικές διαδικασίες μπορούν να συνδυαστούν σε ένα νευρο-ασαφές σύστημα. Ο πιο συνηθισμένος είναι η ακολουθιακή εφαρμογή τους. Αρχικά χρησιμοποιείται η δομική μάθηση για την εύρεση των ασαφών κανόνων που καθορίζουν και τη δομή του συστήματος ενώ στη συνέχεια οι παράμετροι ανανεώνονται μέσω των αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Σε μερικές περιπτώσεις η δομή του μοντέλου (ασαφείς κανόνες) ή οι παράμετροι (συναρτήσεις συμμετοχής, βάρη) καθορίζονται από ειδικούς. Αν συμβαίνει κάτι τέτοιο χρησιμοποιούνται μόνο αλγόριθμοι βελτιστοποίησης ή δομική μάθηση αντίστοιχα.

Η αναγνώριση και εν συνεχείᾳ η εξαγωγή των ασαφών κανόνων μέσα από ένα σύνολο δεδομένων είναι ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που συναντώνται κατά το σχεδιασμό ενός ασαφούς συστήματος συλλογισμού. Ακριβείς κανόνες οδηγούν σε γρήγορες και πάνω απ' όλα αξιόπιστες διαδικασίες μάθησης. Η εξαγωγή ασαφών κανόνων από αριθμητικά δεδομένα αποτελείται από δύο διακριτές διαδικασίες. Αρχικά γίνεται

μια διαμέριση του χώρου εισόδου ή/και εξόδου και στη συνέχεια αντιστοιχούμε έναν ασαφή κανόνα για κάθε ασαφή υποχώρο. Το πρόβλημα αυτό θα το εξετάσουμε αναλυτικά στο έκτο κεφάλαιο.

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε τους ασαφείς κανόνες που μοντελοποιούν το σύστημα και έχουμε πάρει την αντίστοιχη δομή, το νευρο-ασαφές μοντέλο χρησιμοποιεί αλγόριθμους εκπαίδευσης παραμέτρων (βελτιστοποίησης), όμοιους με αυτούς που παρουσιάσαμε στην εκπαίδευση νευρωνικών δικτύων, για τη σωστή προσαρμογή των βαρών και των συναρτήσεων συμμετοχής. Και εδώ όπως και στα ΝΔ στόχος είναι η ελαχιστοποίηση μιας συνάρτησης σφάλματος.

4.3 Γνωστά Νευρο-Ασαφή Συστήματα

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε τα νευρο-ασαφή συστήματα ANFIS, HyFIS και (A)SuPFuNIS σε συντομία. Θα εξετάσουμε μόνο την αρχιτεκτονική τους και θα αναφερθούμε επιφανειακά και στον τρόπο εκπαίδευσής τους χωρίς όμως να παρουσιάσουμε αναλυτικά τις εξισώσεις ανανέωσης βαρών για κάθε μοντέλο. Ιδιαίτερη προσοχή θα δώσουμε στο μοντέλο SuPFuNIS που είναι το σύστημα εκείνο πάνω στο οποίο βασίστηκε η ανάπτυξη του μοντέλου μας ReSuPFuNIS.

Σε όλα τα παρακάτω μοντέλα, για λόγους ομοιομορφίας η είσοδος ενός κόμβου i του l στρώματος θα συμβολίζεται με $a_i^{(l)}$ και η αντίστοιχη έξοδος με $s_i^{(l)}$. Η τελική έξοδος του δικτύου θα συμβολίζεται και με y_i .

4.3.1 ANFIS : Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System

Το σύστημα ANFIS, Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System είναι ένα από τα πρώτα που προτάθηκαν και εμπνευστής του είναι ο J.-S. Jang. Κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι χρησιμοποιεί ασαφή συλλογιστική Takagi - Sugeno. Παραμένει ακόμα και σήμερα ένα από τα πλέον αποδοτικά και αξιόπιστα νευρο-ασαφή συστήματα και βρίσκει εφαρμογές σε πληθώρα περιοχών.

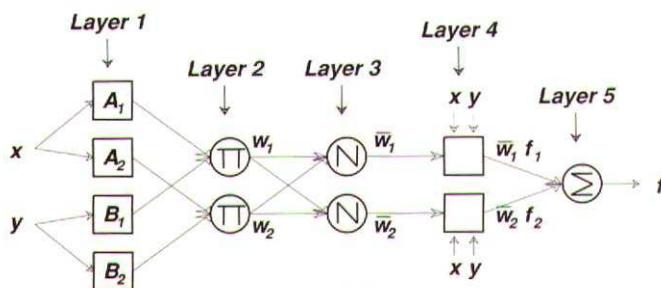
4.3.1.1 Αρχιτεκτονική Συστήματος ANFIS

Για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει δύο μόνο εισόδους x, y και μια έξοδο z . Ακόμα θεωρούμε ότι αντιστοιχεί σε ένα πρώτης τάξης σύστημα ασαφούς συλλογιστικής Sugeno με δύο μόνο κανόνες μορφής

Κανόνας 1: **EAN** x είναι A_1 και y είναι B_1 , **TOTE** $f_1 = p_1x + q_1y + r_1$ (4.1)

Κανόνας 2: **EAN** x είναι A_2 και y είναι B_2 , **TOTE** $f_2 = p_2x + q_2y + r_2$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αρχιτεκτονική του μοντέλου ANFIS που αντιστοιχεί στο σύστημα ασαφούς συλλογιστικής το οποίο μόλις περιγράψαμε.



Σχήμα 4.1 - Αρχιτεκτονική νευρο-ασαφούς μοντέλου ANFIS ισοδύναμου με σύστημα ασαφούς συλλογιστικής Sugeno δύο εισόδων και δύο κανόνων.

Το ANFIS αποτελείται από πέντε στρώματα. Ακολουθεί η περιγραφή των κόμβων του δικτύου και οι εξισώσεις έξόδου κάθε στρώματος.

Στρώμα 1: Κάθε κόμβος i δέχεται σαν είσοδο τις μεταβλητές x, y και έχει συνάρτηση ενεργοποίησης

$$\begin{aligned} s_i^{(1)} &= \mu_{A_i}(x), \quad i = 1, 2 \\ s_i^{(1)} &= \mu_{B_{i-2}}(x), \quad i = 3, 4 \end{aligned} \quad (4.2)$$

όπου A_j, B_j γλωσσικές μεταβλητές που αντιστοιχούν σ' αυτό τον κόμβο με αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής $\mu_{A_j}(x), \mu_{B_j}(x)$. Ουσιαστικά δηλαδή οι έξοδοι αυτού του στρώματος $s_i^{(1)}$ είναι ο βαθμός συμμετοχής σε κάποιο ασαφές σύνολο και καθορίζει το βαθμό στον οποίο η εκάστοτε είσοδος ικανοποιεί το δεδομένο του αντίστοιχου κανόνα. Η συνάρτηση συμμετοχής μπορεί να είναι οποιαδήποτε από αυτές που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 1. Κατά την εκπαίδευση οι παράμετροι της συνάρτησης αυτής προσαρμόζονται.

Στρώμα 2: Γενικά περιλαμβάνει n κόμβους, όπου n ο αριθμός των κανόνων. Κάθε κόμβος αυτού του στρώματος (κόμβοι ΙΙ) δίνει σαν έξοδο το γινόμενο όλων των εισόδων του.

$$s_i^{(2)} = w_i = \mu_{A_i}(x)\mu_{B_i}(y), \quad i = 1, 2 \quad (4.3)$$

Οι συνδέσεις ανάμεσα στα δύο πρώτα στρώματα γίνεται με βάση τους ασαφείς κανόνες στους οποίους βασίζεται το ANFIS. Οι έξοδοι του δεύτερου επιπέδου αντιστοιχούν στο βαθμό ενεργοποίησης ασαφών κανόνων. Αντί για το γινόμενο όμως μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιοσδήποτε σύμμετρο-t τελεστής.

Στρώμα 3: Είναι όσοι και οι κόμβοι του δεύτερου στρώματος. Οι κόμβοι αυτοί που ονομάζονται κόμβοι N υπολογίζουν το κλάσμα ανάμεσα στο βαθμό ενεργοποίησης του κανόνα στον οποίο αντιστοιχούν ως προς το άθροισμα των βαθμών ενεργοποίησης όλων των κανόνων.

$$s_i^{(3)} = \bar{w}_i = \frac{w_i}{w_1 + w_2}, \quad i = 1, 2 \quad (4.4)$$

Στρώμα 4: Κάθε κόμβος του επιπέδου αυτού δίνει έξοδο

$$s_i^{(4)} = \bar{w}_i f_i = \bar{w}_i (p_i x + q_i y + r_i), \quad (4.5)$$

όπου \bar{w}_i ο κανονικοποιημένος βαθμός ενεργοποίησης του κανόνα i (έξοδος τρίτου στρώματος) και $\{p_i, q_i, r_i\}$ οι παράμετροι του κόμβου που ανανεώνονται κατά την διαδικασία εκπαίδευσης.

Στρώμα 5: Ο μοναδικός κόμβος σ' αυτό το επίπεδο ονομάζεται κόμβος Σ και υπολογίζει τη συνολική έξοδο του νευρο-ασαφούς συστήματος ANFIS

$$y = s_i^{(5)} = \sum_i \bar{w}_i f_i = \frac{\sum_i w_i f_i}{\sum_i w_i}. \quad (4.6)$$

Πρόκειται για ένα δίκτυο με προσαρμοζόμενες παραμέτρους το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα σύστημα ασαφούς συλλογιστικής Sugeno.

4.3.1.2 Αλγόριθμος Εκπαίδευσης Συστήματος ANFIS

Όπως είδαμε οι παράμετροι του ANFIS που μπορούν να μεταβληθούν κατά τη μάθηση είναι οι παράμετροι των μη γραμμικών κόμβων του πρώτου στρώματος και οι παράμετροι των γραμμικών κόμβων του τέταρτου επιπέδου. Αν S το σύνολο των παραμέτρων τότε

$$S = S_1 \cup S_2 \quad (4.7)$$

όπου S_1 το σύνολο των μη γραμμικών και S_2 το σύνολο των γραμμικών παραμέτρων.

Για την εκπαίδευση του δικτύου χρησιμοποιούμε έναν υβριδικό αλγόριθμο ο οποίος χωρίζεται σε δύο μέρη και χοντρικά λειτουργεί ως εξής:

Διαδοση προς τα εμπρός Οι μη γραμμικοί παράμετροι παραμένουν σταθεροί και το δίκτυο παράγει εξόδους μέχρι το τέταρτο στρώμα όπου οι γραμμικοί παράμετροι προσδιορίζονται από την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Διάδοση προς τα πίσω Τα σήματα σφάλματος (η διαφορά της πραγματικής από την επιθυμητή έξοδο) διαδίδονται προς τα πίσω χωρίς αλλαγή των γραμμικών παραμέτρων. Οι μη γραμμικές ανανεώνονται με βάση τον αλγόριθμο της απότομης καυδόδου.

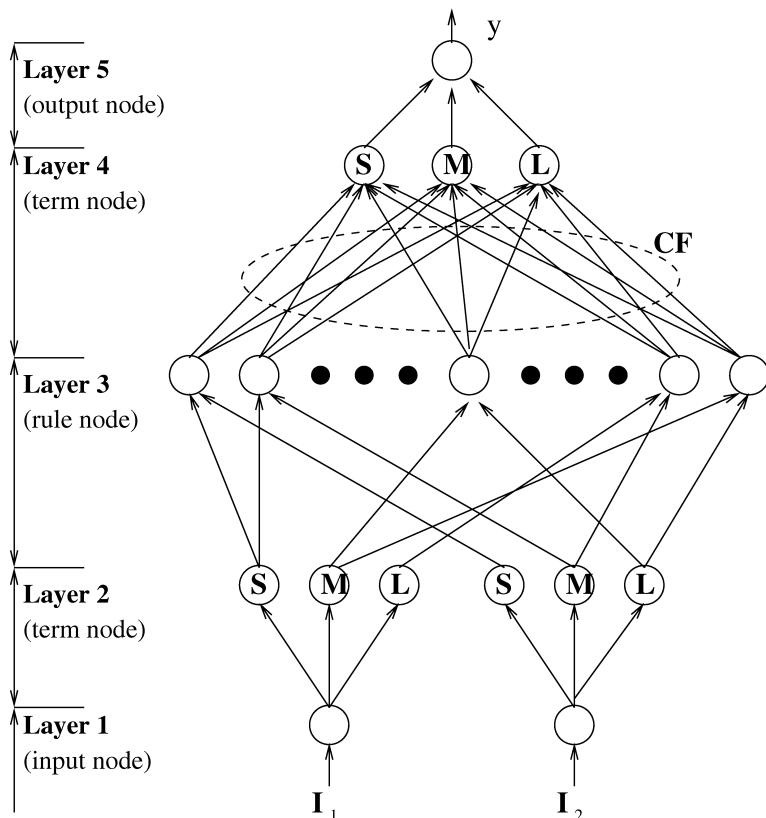
Το ANFIS συγχλίνει γρηγορότερα από τα συνηθισμένα νευρωνικά δίκτυα. Εκτός αυτού μπορούμε να εκφράσουμε με γλωσσικούς όρους τους ασαφείς κανόνες στους οποίους κατέληξε και χρησιμοποιεί για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Αυτό θυμίζουμε ότι δεν συμβαίνει με τα ΝΔ τα οποία έχουν τη λογική του μαύρου κουτιού και δεν μπορούμε να αποκωδικοποιήσουμε την πληροφορία που βρίσκεται χρυσμένη μέσα στα συναπτικά βάρη.

4.3.2 HyFIS : Hybrid Fuzzy Inference System

Το HyFIS προτάθηκε από τους Kim, Kasabov και είναι ένα πολυστρωματικό νευρο-ασαφές σύστημα. Το κύριο χαρακτηριστικό του είναι ότι εφαρμόζει και τις δύο κατηγορίες εκπαίδευσης (δομική και ρύθμισης παραμέτρων).

4.3.2.1 Αρχιτεκτονική Συστήματος HyFIS

Η τοπολογική δομή του HyFIS φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.2 - Δομή νευρο-ασαφούς μοντέλου HyFIS.

Οι κόμβοι κάθε στρώματος έχουν και διαφορετική λειτουργία η οποία επεξηγείται παρακάτω. Για παράδειγμα οι κόμβοι των στρωμάτων 2, 4 αντιστοιχούν στις συναρτήσεις συμμετοχής που εκφράζουν τις γλωσσικές μεταβλητές εισόδου/εξόδου. Στο προηγούμενο σχήμα θεωρήσαμε τα ασαφή σύνολα, μεγάλος (L), μεσαίος (M) και μικρός (S).

Στρώμα 1: Είναι κόμβοι εισόδου που το μόνο που κάνουν είναι να μεταδίδουν τις αριθμητικές εισόδους που αντιστοιχούν σε κάποια γλωσσική μεταβλητή στο δεύτερο στρώμα. Κάθε κόμβος του πρώτου στρώματος συνδέεται μόνο με εκείνους του δεύτερου που αντιστοιχούν σε γλωσσικές τιμές της εν λόγω γλωσσικής μεταβλητής.

$$s_i^{(1)} = a_i^{(1)} \quad (4.8)$$

Στρώμα 2: Οι κόμβοι του στρώματος αυτού δρουν σαν συναρτήσεις συμμετοχής και αντιστοιχούν σε τιμές γλωσσικών μεταβλητών. Οι είσοδοι περνάνε από το πρώτο στρώμα στους κόμβους του δεύτερου και αυτοί υπολογίζουν τους βαθμούς συμμετοχής. Χρησιμοποιούνται Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής, οπότε

$$s_i^{(2)} = e^{-\frac{(x-c)^2}{\sigma^2}} \quad (4.9)$$

όπου c , σ οι παράμετροι οι οποίες ανανεώνονται κατά τη διάρκεια της εκπαίδευσης.

Στρώμα 3: Κάθε κόμβος του τρίτου στρώματος αντιστοιχεί σε μια **EAN** υπόθεση ενός ασαφούς κανόνα. Τα βάρη των συνδέσεων είναι μοναδιαία. Έξοδος είναι η εφαρμογή του τελεστή **KAI** στις εισόδους.

$$s_i^{(3)} = \min_{j \in I_i^{(3)}} (s_j^{(2)}) \quad (4.10)$$

όπου $I_i^{(3)}$ το σύνολο των κόμβων του στρώματος 2 που συνδέονται με τον κόμβο i του στρώματος 3.

Στρώμα 4: Κάθε κόμβος του τέταρτου στρώματος αντιστοιχεί σ' ένα συμπέρασμα **TOTE** ενός κανόνα και εφαρμοζει τον τελεστή **H** στις εισόδους του. Τα στρώματα 3, 4 είναι πλήρως συνδεδεμένα μεταξύ τους. Κάθε κόμβος αντιστοιχεί σε μια γλωσσική τιμή της μεταβλητής εξόδου και η έξοδός του δείχνει το βαθμό στον οποίο οι ασαφείς κανόνες δίνουν σαν συμπέρασμα την γλωσσική αυτή τιμή. Τα βάρη w_{ik} των συνδέσεων μεταξύ ενός κόμβου i του τέταρτου επιπέδου και ενός κόμβου k του τρίτου, αντιστοιχούν στον βαθμό σημαντικότητας του αντίστοιχου κανόνα για την συγκεκριμένη έξοδο. Αρχικά τα βάρη αυτά επιλέγονται τυχαία στο διάστημα $[-1, +1]$. Η έξοδος των κόμβων του στρώματος αυτού είναι

$$s_i^{(4)} = \max_{k \in I_i^{(4)}} (s_k^{(3)} w_{ik}^2) \quad (4.11)$$

όπου $I_i^{(4)}$ το σύνολο των κόμβων του στρώματος 3 που συνδέονται με τον κόμβο i του στρώματος 4. Κάθε κανόνας ενεργοποιείται σε έναν βάθμο που ισούται με το τετράγωνο του βάρους της αντίστοιχης σύνδεσης.

Στρώμα 5: Το στρώμα αυτό αντιστοιχεί στις μεταβλητές εξόδου του HyFIS. Οι κόμβοι χρησιμοποιούνται για την απο-ασαφοποίηση των ασαφών συμπερασμάτων του προηγούμενου στρώματος. Χρησιμοποιείται είτε η μέθοδος κέντρου βάρους (COG, Centre of Gravity) είτε η μέθοδος κέντρου περιοχής (COA, centre of area). Αν υποθέσουμε ότι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο κέντρου περιοχής η έξοδος είναι

$$s_i^{(5)} = \frac{\sum_{k \in I_i^{(5)}} s_k^{(4)} \sigma_{ik} c_{ik}}{\sum_{k \in I_i^{(5)}} s_i^{(4)} \sigma_{ik}} \quad (4.12)$$

όπου $I_i^{(5)}$ το σύνολο των κόμβων του στρώματος 4 που συνδέονται με τον κόμβο i του στρώματος 5 και c_{ik} , σ_{ik} είναι αντίστοιχα το κέντρο και το εύρος της συνάρτησης συμμετοχής της γλωσσικής τιμής εξόδου που αντιστοιχεί στον k κόμβο του τέταρτου στρώματος. Τα βάρη των συνδέσεων ανάμεσα στα δύο τελευταία στρώματα είναι μοναδιαία. Έτσι τα μόνα βάρη που μεταβάλλονται κατά τη μάθηση είναι αυτά ανάμεσα στα στρώματα 3 και 4.

4.3.2.2 Εκπαίδευση Συστήματος HyFIS

Η εκπαίδευση του νευρο-ασαφούς συστήματος HyFIS αποτελείται από δύο φάσεις. Κατά τη διάρκεια της πρώτης χρησιμοποιούνται τεχνικές για την εξαγωγή των ασαφών κανόνων από αριθμητικά δεδομένα. Την ακολουθία που ακολουθείται την αναφέρουμε αναλυτικά στο έκτο Κεφάλαιο. Μετά την παραγωγή των κανόνων αυτών από ζευγάρια εισόδων-επιθυμητών εξόδων, μπορούμε να καθορίσουμε τη δομή του HyFIS. Στη συνέχεια το δίκτυο μπαίνει στη δεύτερη φάση εκπαίδευσης, όπου προσαρμόζονται οι παράμετροι των συναρτήσεων συμμετοχής και τα βάρη των συνδέσεων μεταξύ των στρωμάτων 3 και 4. Πρόκειται για μια διαδικασία επιβλεπόμενης μάθησης που βασίζεται στον αλγόριθμο της απότομης καθόδου.

Έστω d_i η επιθυμητή έξοδος του κόμβου i του πέμπτου στρώματος για ένα διάνυσμα εισόδου $X = (x_1, x_2, \dots, x_p)$. Σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης σφάλματος

$$E = \frac{1}{2} \sum_X \sum_{i=1}^q \left(d_i - s_i^{(5)} \right)^2 \quad (4.13)$$

όπου q ο αριθμός των κόμβων του πέμπτου στρώματος. Αξίζει να σημειωθεί ότι υπολογίζεται το σφάλμα για όλα τα πρότυπα εκπαίδευσης και έπειτα γίνεται η ανανέωση.

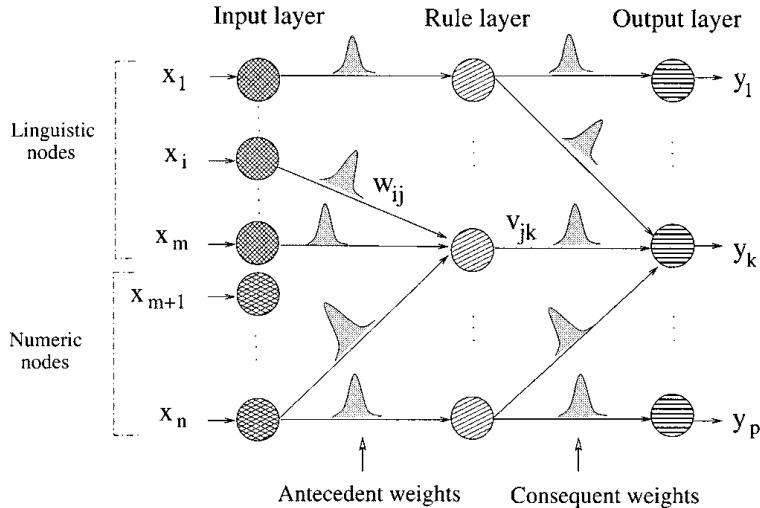
Αν ο μία παράμετρος του δικτύου που ανανεώνεται κατά τη μάθηση (είτε παράμετρος συνάρτησης συμμετοχής είτε βάρος) τότε ο κανόνας ανανέωσης που χρησιμοποιούμε στο HyFIS βασίζεται στον αλγόριθμο απότομης καθόδου και είναι

$$a(t+1) = a(t) - \eta \frac{\partial^+ E}{\partial a} \quad (4.14)$$

όπου $\eta > 0$ ο ρυθμός μάθησης.

4.3.3 SuPFuNIS : Subsethood-Product Fuzzy Inference System

Το SuPFuNIS είναι ένα εξαιρετικά ενδιαφέρον νευρο-ασαφές μοντέλο, το οποίο περιλαμβάνει τρία μόνο διασυνδεδεμένα στρώματα, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 4.3 - Δομή νευρο-ασαφούς μοντέλου SuPFuNIS.

Το SuPFuNIS διαφέρει σημαντικά από τα υπόλοιπα νευρο-ασαφή μοντέλα, αλλά αυτό δεν το εμποδίζει να παρουσιάζει πολύ καλά αποτελέσματα. Οι κύριες διαφορές είναι οι εξής:

1. Χρησιμοποιούνται ρυθμιζόμενοι ασαφοποιητές εισόδου οι οποίοι ασαφοποιούν τα εισερχόμενα αριθμητικά δεδομένα μετατρέποντάς τα σε μια Gaussian συνάρτηση συμμετοχής ρυθμιζόμενου πλάτους.
2. Όλη η πληροφορία που συναντάται στο δίκτυο είναι σε ασαφή μορφή. Για το λόγο αυτό το μοντέλο χρησιμοποιεί έναν μηχανισμό σύνθεσης που στηρίζεται σ' ένα μέτρο αμοιβαίας επικάλυψης.

3. Το μοντέλο συναθροίζει τις δραστηριότητες σε κάθε κόμβο κανόνα με τη χρήση ενός ασαφούς γνομένου.
4. Η έξοδος προκύπτει μετά την εφαρμογή χωρικής απο-ασαφοποίησης.

Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή της αρχιτεκτονικής του SuPFuNIS και μια αναφορά στην διαδικασία εκπαίδευσης που χρησιμοποιεί.

4.3.3.1 Αρχιτεκτονική Συστήματος SuPFuNIS

Θα θεωρήσουμε το γενικό μοντέλο του παραπάνω σχήματος που περιλαμβάνει n κόμβους εισόδου, q χρυφούς κόμβους (κόμβους κανόνων) και p κόμβους εξόδου. Κάθε χρυφός κόμβος αντιστοιχεί σ' έναν ασαφή κανόνα της μορφής

$$\text{ΕΑΝ } x_1 \text{ είναι } A_1 \text{ και } x_2 \text{ είναι } A_2, \text{ ΤΟ ΤΕ } y \text{ είναι } B \quad (4.15)$$

όπου A_1, A_2, B ασαφή σύνολα ορισμένα τόσο στο διάστημα εισόδου όσο και στο διάστημα εξόδου.

Στρώμα 1: Το διάνυσμα εισόδου $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ μπορεί να περιέχει και αριθμητικές και γλωσσικές τιμές. Για το λόγο αυτό το στρώμα εισόδου αποτελείται από δύο ειδών κόμβους. Στους γλωσσικούς κόμβους εισέρχονται οι πιθανές γλωσσικές τιμές του διανύσματος εισόδου, οι οποίες καθορίζονται από μια Gaussian συνάρτηση συμμετοχής κέντρου x_i^c και πλάτους x_i^σ . Αυτή είναι και η έξοδος των γλωσσικών κόμβων καθώς δεν συμβαίνει καμία επεξεργασία της εισόδου δηλαδή

$$s_i^{(1)} = x_i = (x_i^c, x_i^\sigma), \quad i \in I_{ling}^{(1)} \quad (4.16)$$

όπου $I_{ling}^{(1)}$ το σύνολο των γλωσσικών κόμβων του πρώτου επιπέδου.

Οι αριθμητικοί κόμβοι εκτελούν ασαφοποίηση της αριθμητικής τιμής εισόδου χρησιμοποιώντας Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής. Συγκεκριμένα η τιμή εισόδου είναι το κέντρο της Γκαουσιανής x_i^c ενώ το πλάτος x_i^σ είναι μια ρυθμιζόμενη παράμετρος. Έτσι αν x_i η αριθμητική είσοδος, τότε

$$s_i^{(1)} = (x_i^c = x_i, x_i^\sigma), \quad i \in I_{num}^{(1)} \quad (4.17)$$

όπου $I_{num}^{(1)}$ το σύνολο των γλωσσικών κόμβων του πρώτου επιπέδου.

Προσυναπτικά Βάρη: Η σύνδεση ανάμεσα σ' έναν κόμβο εισόδου i και έναν χρυφό κόμβο j χαρακτηρίζεται από ένα προσυναπτικό βάρος w_{ij} που χαρακτηρίζεται από το κέντρο w_{ij}^c και το πλάτος w_{ij}^σ μιας Gaussian συνάρτησης συμμετοχής.

$$w_{ij} = (w_{ij}^c, w_{ij}^\sigma) \quad (4.18)$$

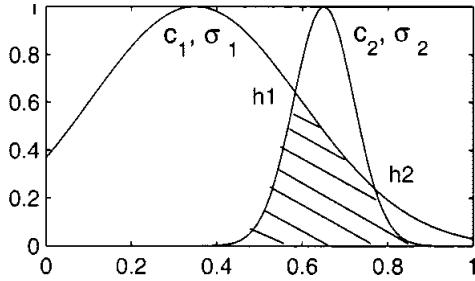
Το βάρος αυτό είναι ουσιαστικά η ασαφής απεικόνιση τμήματος του αριστερού μέρους του ασαφούς κανόνα j .

Αμοιβαία Σχέση Εγκλεισμού: Τόσο οι έξοδοι του στρώματος εισόδου όσο και τα προσυναπτικά βάρη είναι ασαφή σύνολα. Πρέπει με κάποιο τρόπο να ποσοτικοποιηθεί η σχέση ανάμεσα στα δύο αυτά ασαφή σύνολα. Στο μοντέλο SuPFuNIS χρησιμοποιείται το μέτρο της αμοιβαίας σχέσης εγκλεισμού (mutual subsethood) το οποίο έχει τιμές στο διάστημα $[0, 1]$ και ουσιαστικά δίνει το ποσοστό επικάλυψης μεταξύ των δύο ασαφών συνόλων. Η αμοιβαία σχέση εγκλεισμού \mathcal{E}_{ij} μεταξύ της εξόδου του κόμβου i , $s_i^{(1)} = (x_i^c, x_i^\sigma)$ και του ασαφούς βάρους $w_{ij} = (w_{ij}^c, w_{ij}^\sigma)$ δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}(s_i, w_{ij}) = \frac{C(s_i \cap w_{ij})}{C(s_i) + C(w_{ij}) - C(s_i \cap w_{ij})} \quad (4.19)$$

όπου $C(\cdot)$ το μέτρο (Cardinality) ενός ασαφούς συνόλου όπως έχει οριστεί στο Κεφάλαιο 1.

Για να γίνει περισσότερο κατανοητή η έννοια της αμοιβαίας σχέσης εγκλεισμού στο παρακάτω σχήμα φαίνονται δύο Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής και η περιοχή επικάλυψης.



Σχήμα 4.4 - Ποσοστό επικάλυψης δύο Γκαουσιανών συναρτήσεων συμμετοχής.

Στρώμα 2: Σε κάθε χρυφό κόμβο j , που αντιστοιχεί όπως είπαμε σε έναν κανόνα, εισέρχεται το διάνυσμα των αμοιβαίων σχέσεων εγκλεισμού $\mathcal{E}_j = (\mathcal{E}_{1j}, \dots, \mathcal{E}_{nj})$. Η ενεργοποίηση ενός κανόνα αναμένεται να εκφράζει το βαθμό ομοιότητας ανάμεσα σ' ένα διάνυσμα εισόδου $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)$ και το διάνυσμα προσυναπτικών βαρών $\mathbf{w}_j = (w_{1j}, \dots, w_{nj})$. Κάθε αμοιβαία σχέση εγκλεισμού \mathcal{E}_{ij} του διανύσματος \mathcal{E} εκφράζει την ομοιότητα ανάμεσα στα δύο συγκεκριμένα ασαφή σύνολα οπότε είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή γινομένου ο οποίος παράγει την ενεργοποίηση z_j του κόμβου j

$$z_j = \prod_{i=1}^n \mathcal{E}_{ij} = \prod_{i=1}^n \mathcal{E}(s_i, w_{ij}). \quad (4.20)$$

Μετασυναπτικά Βάρη: Η σύνδεση ανάμεσα σ' έναν χρυφό κόμβο j και έναν κόμβο εξόδου k χαρακτηρίζεται από ένα μετασυναπτικό βάρος u_{jk} που αντιστοιχεί στο κέντρο u_{jk}^c και το πλάτος u_{jk}^σ μιας Gaussian συναρτησης συμμετοχής.

$$u_{jk} = (u_{jk}^c, u_{jk}^\sigma) \quad (4.21)$$

Το βάρος αυτό είναι η ασαφής απεικόνιση τμήματος του δεξιού μέρους του ασαφούς κανόνα j .

Στρώμα 3: Αφού έχουμε υπολογίσει τους βαθμούς ενεργοποίησης όλων των κανόνων, τα σήματα z_j προχωράνε στο στρώμα εξόδου όπου γίνεται η απο-ασαφοποίηση. Χρησιμοποιείται η μέθοδος απο-ασαφοποίησης χωρικού κέντρου βάρους (volume based centroid defuzzification), η οποία για την έξοδο y_k εκφράζεται από τον γενικό τύπο

$$y_k = \frac{\sum_{j=1}^q z_j u_{jk}^c V_{jk} \xi_{jk}}{\sum_{j=1}^q z_j V_{jk} \xi_{jk}} \quad (4.22)$$

όπου με V_{jk} συμβολίζουμε τον όγκο των μετασυναπτικών ασαφών συνόλων βάρους, οι οποίοι στην περίπτωσή μας είναι $u_{jk}^\sigma \sqrt{\pi}$. Αν θεωρήσουμε τα βάρη ξ_{jk} μοναδιαία τότε έχουμε τον απλούστερο τύπο

$$y_k = \frac{\sum_{j=1}^q z_j u_{jk}^c u_{jk}^\sigma}{\sum_{j=1}^q z_j u_{jk}^\sigma} \quad (4.23)$$

Ουσιαστικά κατά τη διαδικασία της απο-ασαφοποίησης υπολογίζεται ένα σταθμισμένο άνθροισμα των κέντρων των μετασυναπτικών βαρών. Έτσι το αποτέλεσμα είναι πιο κοντά στο μετασυναπτικό βάρος του κανόνα με την μεγαλύτερη ενεργοποίηση.

4.3.3.2 Εκπαίδευση Συστήματος SuPFuNIS

Ένα τετραγωνικό χριτήριο σφάλματος χρησιμοποιείται κατά τη διαδικάσια εκπαίδευσης του SuPFuNIS που είναι κατά τα γνωστά

$$e(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p (d_k(t) - y_k(t))^2 \quad (4.24)$$

όπου $d_k(t)$ η επιθυμητή και $y_k(t)$ η πραγματική έξοδος του κόμβου k του στρώματος εξόδου. Το σφάλμα αποτιμάται για όλους τους κόμβους εξόδου. Παρατηρούμε ότι το SuPFuNIS ακολουθεί εκπαίδευση γραμμής (on-line learning) δηλαδή οι παράμετροι του συστήματος ανανεώνονται μετά την εμφάνιση κάθε προτύπου. Οι ελεύθερες παράμετροι του συστήματος, δηλαδή εκείνες που ανανεώνονται κατά τη μάθηση είναι τα πλάτη των Γκαουσιανών ασαφοποιητών εισόδου x_i^σ , τα κέντρα και οι διασπορές των προσυναπτικών w_{ij}^c , w_{ij}^σ και μετασυναπτικών u_{jk}^c , u_{jk}^σ βαρών. Η εξίσωση ανανέωσης βαρών είναι

$$r(t+1) = r(t) - \eta \frac{\vartheta^+ e(t)}{\vartheta r(t)} + \alpha \Delta r(t-1) \quad (4.25)$$

όπου r αντιστοιχεί σε μια ελεύθερη παράμετρο, η είναι ο ρυθμός μάθησης (learning rate), α η παράμετρος της ορμής και $\Delta r(t-1) = r(t) - r(t-1)$.

Κεφάλαιο 5

ReSuPFuNIS: Recurrent Subsethood Product Fuzzy Inference System

5.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε το SuPFuNIS ένα πρωτότυπο νευρο-ασαφές μοντέλο που συνδυάζει ασαφοποιητές, ενεργοποίηση κανόνων που στηρίζεται στην αμοιβαία σχέση εγκλεισμού, έναν τελεστή ασαφούς γινομένου και απο-ασαφοποιητές στην έξοδο. Ένα άλλο πλεονέκτημα του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι οι ασαφείς κανόνες ενσωματώνονται άμεσα στην τοπολογία του SuPFuNIS. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε γρήγορα το αρχιτεκτονικό ισοδύναμο ενός συνόλου ασαφών κανόνων αλλά και να «διαβάσουμε» εύκολα τους κανόνες που έχουν προκύψει μετά την εκπαίδευση.

Η λιτή δομή του SuPFuNIS δεν το εμποδίζει να βρει εφαρμογή σε πληθώρα εφαρμογών ενώ τα πειραματικά αποτελέσματα δείχνουν άριστη απόδοση σε σχέση με άλλα μοντέλα. Αξίζει να σημειωθεί πως το SuPFuNIS εμφανίζει τα αποτελέσματα αυτά με πολύ λιγότερες παραμέτρους από ότι τα υπόλοιπα νευρο-ασαφή συστήματα με τα οποία συγχρίνεται.

Η καινοτομία στην αρχιτεκτονική του ήταν ένα κίνητρο για να ασχοληθούμε με το μοντέλο αυτό στην παρούσα διπλωματική. Προσθέσαμε αναδρομικές συνδέσεις από τους κόμβους εξόδου πίσω στην είσοδο και το νέο μοντέλο που δημιουργήσαμε το ονομάσαμε ReSuPFuNIS. Η είσοδος αναδρομικών συνδέσεων το καθιστά αποδοτικό στην πρόβλεψη χρονοσειρών και στην μοντελοποίηση χαοτικών συστημάτων. Ακολουθεί πλήρης μαθηματική περιγραφή του μοντέλου ενώ εφαρμογές του θα δούμε αργότερα στο Κεφάλαιο 8.

5.2 Αρχιτεκτονική και Λειτουργία ReSuPFuNIS

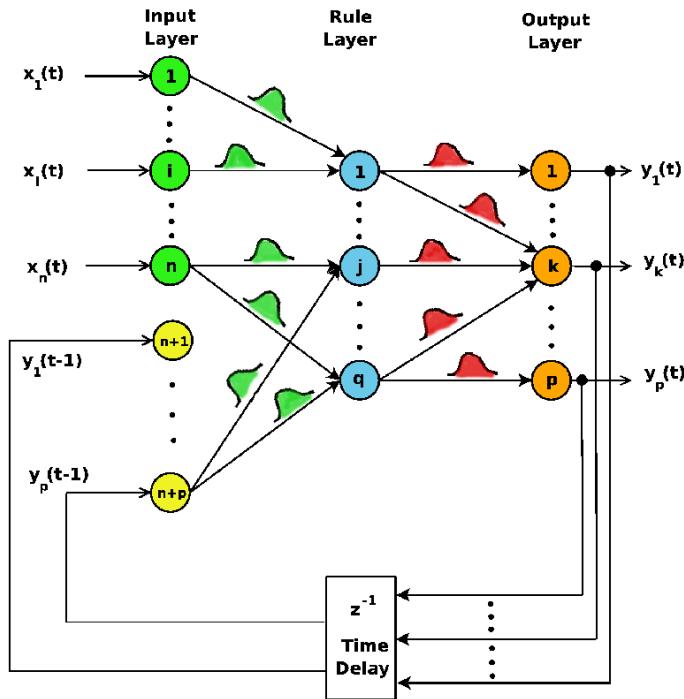
Το ReSuPFuNIS αποτελεί ένα νευρο-ασαφές μοντέλο τριών στρώματων. Οι ασαφείς κανόνες είναι ενσωματωμένοι στην αρχιτεκτονική του δικτύου και συγκεκριμένα στους χρυφούς κόμβους. Οι κανόνες στους οποίους στηρίζεται το σύστημα είναι της μορφής

$$\text{ΕΑΝ } x_i(t) \text{ είναι } A_i \text{ και } y_k(t-1) \text{ είναι } B_k, \text{ ΤΟΤΕ } y_m(t) \text{ είναι } B_m \quad (5.1)$$

όπου τα A_i , B_k και B_m ασαφή σύνολα. Οι κόμβοι του επιπέδου εισόδου αντιστοιχούν στις εξωτερικές εισόδους και τις προηγούμενες τιμές, οι κόμβοι του χρυμένου στρώματος αντιστοιχούν στους ασαφείς κανόνες ενώ οι κόμβοι εξόδου αντιπροσωπεύουν τις μεταβλητές/στόχους του συστήματος. Κάθε σύνδεση μεταξύ κόμβων των δύο πρώτων επιπέδων αντιστοιχεί σε υπόθεση του αντίστοιχου ασαφή κανόνα. Παρόμοια κάλυπτη σύνδεση μεταξύ των δύο τελευταίων επιπέδων αντιστοιχεί σε συμπέρασμα ενός ασαφούς κανόνα.

Για την παράσταση των ασαφών συνόλων που συναντώνται είτε σαν υποθέσεις είτε σαν συμπεράσματα κανόνων, χρησιμοποιούμε Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής που ορίζονται από το κέντρο και ένα πλάτος. Και οι δύο αυτές παράμετροι είναι ελεύθερες δηλαδή ανανεώνονται κατά τη μάθηση. Έτσι τα προσυναπτικά βάρη w_{ij} που καθορίζουν τις συνδέσεις ανάμεσα στο στρώμα εισόδου και το χρυφό επίπεδο, συνίστανται από το κέντρο w_{ij}^c και το πλάτος w_{ij}^σ μιας Γκαουσιανής. Αντίστοιχα και για τα μετασυναπτικά βάρη $u_{jk} = (u_{jk}^c, u_{jk}^\sigma)$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αρχιτεκτονική/δομή του ReSuPFuNIS.



Σχήμα 5.1 - Αρχιτεκτονική ReSuPFuNIS.

Θεωρούμε ότι το δίκτυο έχει n εξωτερικές εισόδους και p εισόδους λόγω ανατροφοδότησης, q κανόνες άρα q νευρώνες στο κρυφό στρώμα και p κόμβους εξόδου. Ακολουθεί αναλυτική περιγραφή όλων των στρωμάτων και της λειτουργίας του δικτύου.

5.2.1 Στρώμα Εισόδου

Οι κόμβοι του στρώματος εισόδου δέχονται τόσο τις εξωτερικές εισόδους $\mathbf{X} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ όσο και τις προηγούμενες εξόδους του δικτύου δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{Z} = (y_1(t-1), \dots, y_p(t-1))$. Όλες οι είσοδοι είναι αριθμητικές τιμές σε αντίθεση με το SuPFuNIS που μπορεί να περιέχει και γλωσσικές εισόδους.

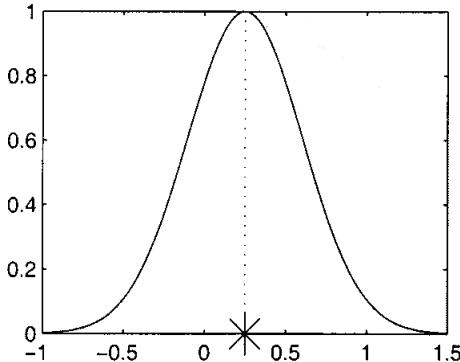
Ο κάθε κόμβος του στρώματος εισόδου λειτουργεί σαν ασαφαοποιητής και οι αριθμητικές είσοδοι μετατρέπονται σε Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής με κέντρο την αριθμητική τιμή εισόδου και πλάτος μία ελεύθερη παράμετρο η οποία ανανεώνεται κατά την διαδικασία μάθησης. Έχουμε λοιπόν

$$a_i^{(1)} = \begin{cases} x_i(t) & , 1 \leq i \leq n \\ y_{i-n}(t-1) & , n+1 \leq i \leq n+p \end{cases} \quad (5.2)$$

Η έξοδος των κόμβων του πρώτου στρώματος είναι

$$s_i^{(1)} = \left\{ a_i^{(1)}, z_i^\sigma \right\} = \{z_i^c, z_i^\sigma\} = \begin{cases} \{x_i^c(t), x_i^\sigma(t)\} & , 1 \leq i \leq n \\ \{y_{i-n}^c(t-1), y_{i-n}^\sigma(t-1)\} & , n+1 \leq i \leq n+p \end{cases} \quad (5.3)$$

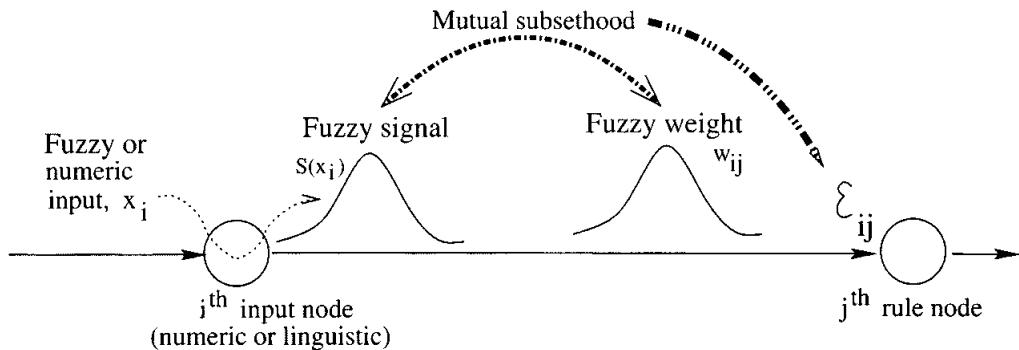
Έστω λοιπόν ότι η είσοδος ενός κόμβου του πρώτου στρώματος είναι $x_i(t) = 0.25$ και η παράμετρος πλάτους του συγκεχριμένου κόμβου είναι εκείνη τη στιγμή 0.5. Τότε η έξοδος φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 5.2 - Παράδειγμα εξόδου ασαφοποιητή στο πρώτο στρώμα του ReSuPFuNIS.

5.2.2 Σχέση Αμοιβαίου Εγκλεισμού (Mutual Subhood)

Το ReSuPFuNIS μεταδίδει την ασαφοποιημένη είσοδο πάνω από ένα ασαφές βάρος w_{ij} , που αντιστοιχεί στην σύνδεση ανάμεσα στον i κόμβο του στρώματος εισόδου και τον j κόμβο του κρυφού στρώματος. Πρέπει με κάποιο μέτρο να ποσοτικοποιηθεί η «αξία-σημαντικότητα» του σήματος που μεταδίδεται πάνω από το βάρος, δηλαδή να υπολογίσουμε το βαθμό στον οποίο τα δύο ασαφή σύνολα είναι ίσα.



Σχήμα 5.3 - Μετάδοση ασαφούς σήματος στο ReSuPFuNIS.

Το μέτρο που χρησιμοποιούμε είναι η σχέση του αμοιβαίου εγκλεισμού (mutual subhood) η οποία δείχνει σε τι βαθμό τα $s_i^{(1)}$, w_{ij} είναι ίσα και συμβολίζεται με $\mathcal{E}(s_i^{(1)}, w_{ij})$. Διαισθητικά θα είναι

$$\mathcal{E}(s_i^{(1)}, w_{ij}) = \text{Degree}(s_i^{(1)} = w_{ij}) = \text{Degree}(s_i^{(1)} \subseteq w_{ij} \wedge w_{ij} \subseteq s_i^{(1)}) \quad (5.4)$$

Για τον υπολογισμό της mutual subhood χρησιμοποιούμε το μέτρο (cardinality) των αντίστοιχων ασαφών συνόλων, το οποίο ψημίζουμε πως για ένα σύνολο F με συνάρτηση συμμετοχής $\mu_F(x)$ δίνεται από τον τύπο

$$C(F) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_F(x) dx \quad (5.5)$$

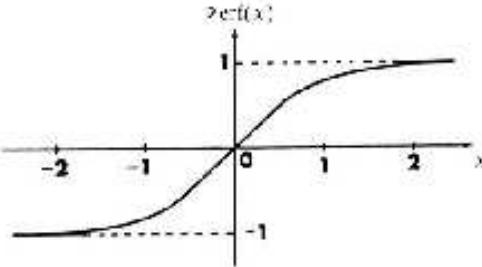
Θα είναι λοιπόν

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}(s_i^{(1)}, w_{ij}) = \frac{C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{C(s_i^{(1)}) + C(w_{ij}) - C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})} \quad (5.6)$$

Για τον υπολογισμό των Cardinalities για τις Γκαουσιανές συναρτήσεις συμμετοχής του ReSuPFuNIS θα χρειαστούμε την συνάρτηση σφάλματος η οποία ορίζεται ως εξής

$$\text{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (5.7)$$

με $\text{erf}(-\infty) = -\frac{1}{2}$, $\text{erf}(+\infty) = +\frac{1}{2}$ και $\text{erf}(0) = 0$.



Σχήμα 5.4 - Συνάρτηση σφάλματος.

Στο προτεινόμενο νευρο-ασαφές μοντέλο ReSuPFuNIS όλες οι συναρτήσεις συμμετοχής είναι Gaussian. Έχουμε δηλαδή να υπολογίσουμε την cardinality της τομής μεταξύ δύο συναρτήσεων

$$a(x) = e^{-\left(\frac{x-c_1}{\sigma_1}\right)^2} \quad (5.8)$$

$$b(x) = e^{-\left(\frac{x-c_2}{\sigma_2}\right)^2} \quad (5.9)$$

Για να υπολογίσουμε τις cardinalities πρέπει προφανώς να βρούμε τα σημεία τομής των παραπάνω συναρτήσεων συμμετοχής. Έχουμε

$$\begin{aligned} a(x) = b(x) &\Leftrightarrow e^{-\left(\frac{x-c_1}{\sigma_1}\right)^2} = e^{-\left(\frac{x-c_2}{\sigma_2}\right)^2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{x-c_1}{\sigma_1}\right)^2 = \left(\frac{x-c_2}{\sigma_2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{x-c_1}{\sigma_1} = \pm \frac{x-c_2}{\sigma_2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Από την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε τις ακόλουθες δύο λύσεις

$$h_1 = \frac{c_1 + \frac{\sigma_1 c_2}{\sigma_2}}{1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad (5.11)$$

$$h_2 = \frac{c_1 - \frac{\sigma_1 c_2}{\sigma_2}}{1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \quad (5.12)$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τα $C(\cdot)$ που εμφανίζονται στον τύπο (5.6)

$$C(s_i^{(1)}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = z_i^\sigma \sqrt{\pi} [\text{erf}(+\infty) - \text{erf}(-\infty)] = z_i^\sigma \sqrt{\pi} \quad (5.13)$$

Αντίστοιχα

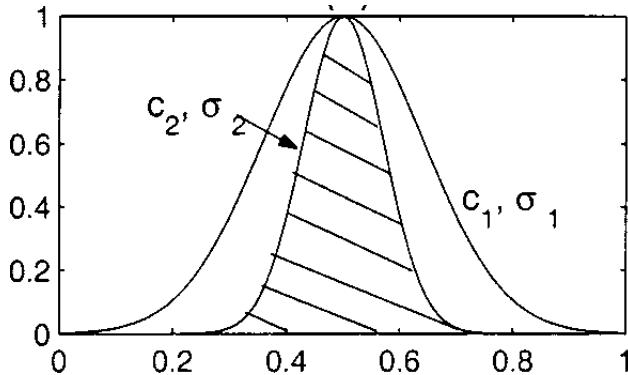
$$C(w_{ij}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} \quad (5.14)$$

Προχωράμε στον δυσκολότερο υπολογισμό της τομής $C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})$. Διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των z_i^σ , z_i^c , w_{ij}^σ και w_{ij}^c .

Περίπτωση 1: $z_i^c = w_{ij}^c$

Αν $z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$ τότε

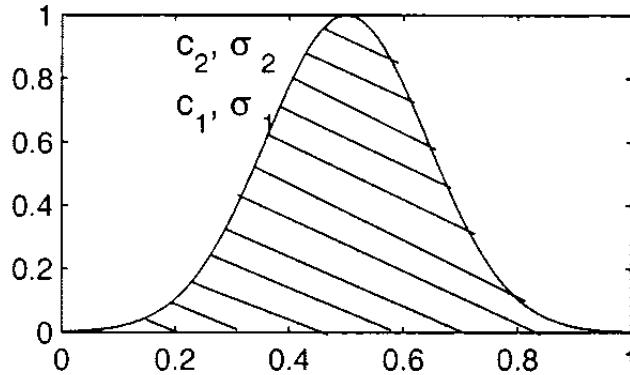
$$C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = C(s_i^{(1)}) = z_i^\sigma \sqrt{\pi}. \quad (5.15)$$



Σχήμα 5.5 - Περίπτωση 1, $z_i^c = w_{ij}^c$, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$.

Αν $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$ τότε

$$C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) = C(w_{ij}) = w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi}. \quad (5.16)$$



Σχήμα 5.6 - Περίπτωση 1, $z_i^c = w_{ij}^c$, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$.

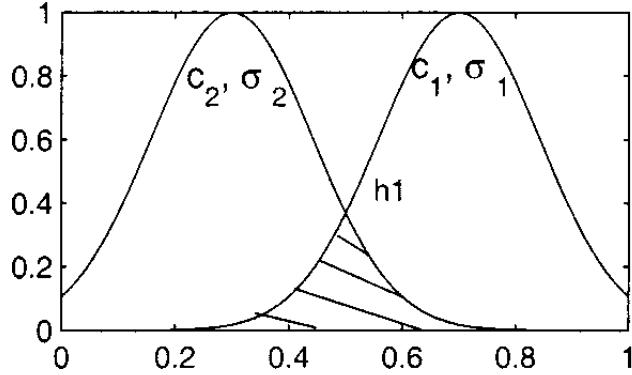
Αν τέλος $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$ όπως φαίνεται και στο παραπάνω σχήμα τα δύο ασαφή σύνολα είναι ταυτόσημα. Συγκεντρώνοντας τις τρεις αυτές υποπεριπτώσεις παίρνουμε

$$\text{Αν } z_i^c = w_{ij}^c \text{ τότε } C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) = \begin{cases} C(s_i^{(1)}) = z_i^\sigma \sqrt{\pi} & , \text{αν } z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma \\ C(w_{ij}) = w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} & , \text{αν } z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma \\ C(s_i^{(1)}) = C(w_{ij}) = z_i^\sigma \sqrt{\pi} = w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} & , \text{αν } z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma \end{cases} \quad (5.17)$$

Περίπτωση 2: $z_i^c \neq w_{ij}^c$, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$

Σε αυτή την περίπτωση υπάρχει μόνο ένα σημείο τομής το h_1 . Έστω $z_i^c > w_{ij}^c$. Τότε

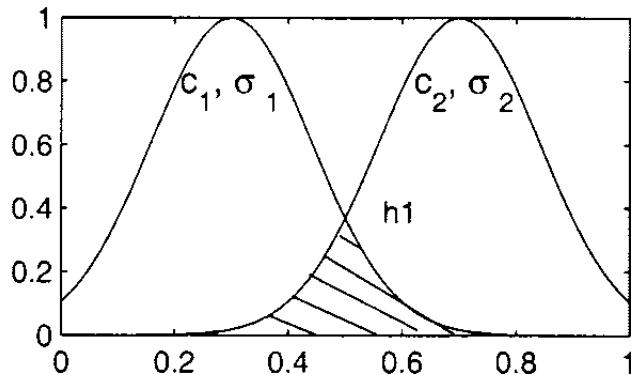
$$\begin{aligned} C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) &= \int_{-\infty}^{h_1} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= z_i^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] + w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$



Σχήμα 5.7 - Περίπτωση 2, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$, $z_i^c > w_{ij}^c$.

Αν $z_i^c < w_{ij}^c$ τότε

$$\begin{aligned} C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) &= \int_{-\infty}^{h_1} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] + z_i^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

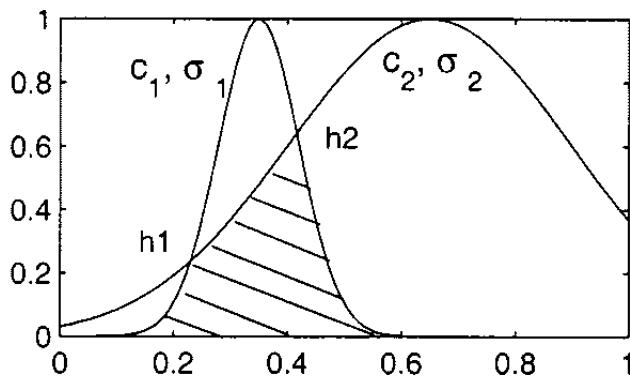


Σχήμα 5.8 - Περίπτωση 2, $z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$, $z_i^c < w_{ij}^c$.

Περίπτωση 3: $z_i^c \neq w_{ij}^c$, $z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$

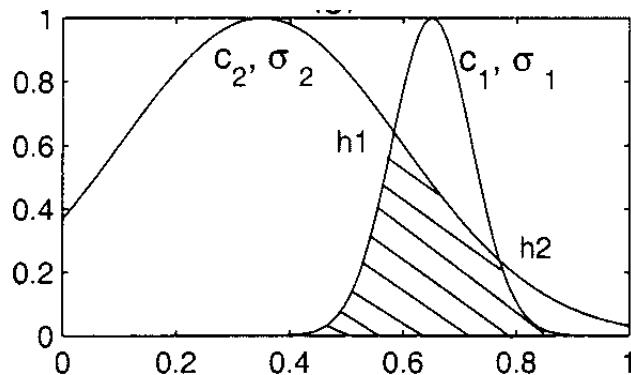
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε δύο σημεία τομής h_1 , h_2 . Υποθέτουμε ότι $h_1 < h_2$ και $w_{ij}^c > z_i^c$. Τότε

$$\begin{aligned} C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) &= \int_{-\infty}^{h_1} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{h_2} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_2}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= z_i^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] + z_i^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_2 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] \\ &\quad + w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_2 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.20)$$



Σχήμα 5.9 - Περίπτωση 3, $z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$, $z_i^c < w_{ij}^c$.

Ο ίδιος τύπος προκύπτει και όταν $w_{ij}^c < z_i^c$.

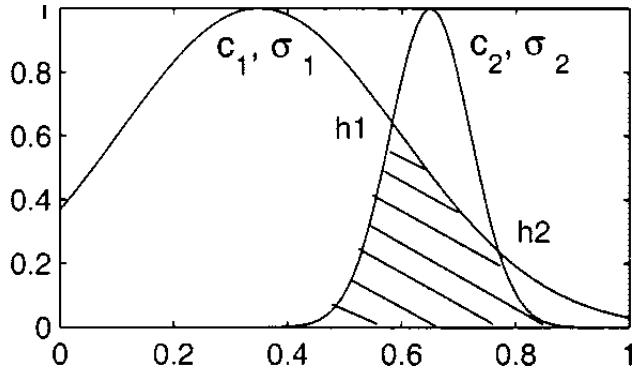


Σχήμα 5.10 - Περίπτωση 3, $z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$, $z_i^c > w_{ij}^c$.

Περίπτωση 4: $z_i^c \neq w_{ij}^c$, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$

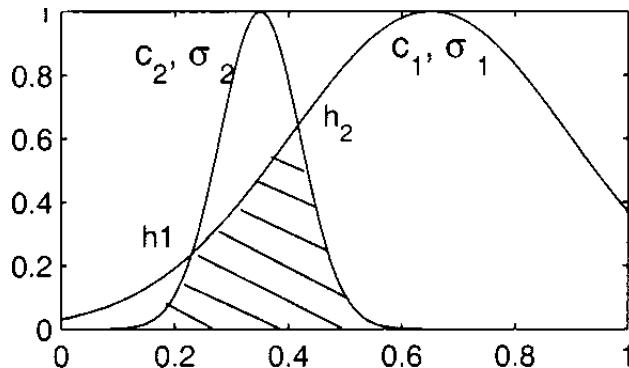
Σε αυτή την περίπτωση έχουμε πάλι δύο σημεία τομής h_1 , h_2 . Υποθέτουμε ότι $h_1 < h_2$ και $w_{ij}^c > z_i^c$. Τότε

$$\begin{aligned} C(s_i^{(1)} \cap w_{ij}) &= \int_{-\infty}^{h_1} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{h_2} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_2}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] + w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_2 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] \\ &\quad + z_i^\sigma \sqrt{\pi} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_2 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.21)$$



Σχήμα 5.11 - Περίπτωση 4, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$, $z_i^c < w_{ij}^c$.

Ο ίδιος τύπος προκύπτει και όταν $w_{ij}^c < z_i^c$.



Σχήμα 5.12 - Περίπτωση 4, $z_i^\sigma > w_{ij}^\sigma$, $z_i^c > w_{ij}^c$.

Οπότε οι αντίστοιχες σχέσεις αμοιβαίου εγκλεισμού E_{ij} (ανάλογα με τις τιμές των z_i^c , z_i^σ , w_{ij}^c και w_{ij}^σ) υπολογίζονται αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (5.13) έως (5.21) στην (5.6).

5.2.3 Στρώμα Κανόνων

Το χρυφό στρώμα αποτελείται από q κόμβους. Αφού υπολογίσουμε τις αμοιβαίες σχέσεις εγκλεισμού για έναν κόμβο j , $\mathcal{E}_j = (\mathcal{E}_{1j}, \dots, \mathcal{E}_{(n+p)j})$ μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε την αντιστοιχία ανάμεσα στο ασαφές διάνυσμα $\mathbf{S} = (s_1^{(1)}, \dots, s_{n+p}^{(1)})$ που είναι η έξοδος του πρώτου επιπέδου και διάνυσμα ασαφών βαρών $\mathbf{W}_j = (w_{1j}, \dots, w_{(n+p)j})$. Η ενεργοποίηση ενός κόμβου του στρώματος κανόνων πρέπει να μας δίνει το βαθμό στον οποίο τα \mathbf{S} , \mathbf{W}_j είναι όμοια. Αντικαθιστούμε τον τελεστή του ελαχίστου που χρησιμοποιείται στα περισσότερα συστήματα ασαφούς συλλογισμού με αυτόν του γινομένου. Έτσι η ενεργοποίηση $a_j^{(2)}$ είναι ένα γινόμενο σχέσεων αμοιβαίου εγκλεισμού, που μας επιτρέπει την άμεση εφαρμογή της μεθόδου της απότομης καθόδου κατά την εκπαίδευση.

$$a_j^{(2)} = \prod_{i=1}^{n+p} \mathcal{E}_{ij} = \prod_{i=1}^n \mathcal{E}(x_i(t), w_{ij}(t)) \prod_{i=n+1}^{n+p} \mathcal{E}(y_{i-n}(t-1), w_{ij}(t)) \quad (5.22)$$

Οι κόμβοι του στρώματος κανόνων είναι γραμμικοί οπότε

$$s_j^{(2)} = a_j^{(2)} \quad (5.23)$$

5.2.4 Στρώμα Εξόδου

Στο στρώμα εξόδου υπάρχουν p νευρώνες. Η σύνδεση ανάμεσα σ' έναν χρυφό κόμβο j και έναν κόμβο εξόδου k χαρακτηρίζεται από ένα μετασυναπτικό βάρος u_{jk} που χαρακτηρίζεται από το κέντρο u_{jk}^c και το πλάτος u_{jk}^σ μιας Gaussian συνάρτησης συμμετοχής.

$$u_{jk} = (u_{jk}^c, u_{jk}^\sigma) \quad (5.24)$$

Το βάρος αυτό είναι η ασαφής απεικόνιση τμήματος του δεξιού μέρους του ασαφούς κανόνα j .

Αφού έχουμε υπολογίσει τους βαθμούς ενεργοποίησης όλων των κανόνων, τα σήματα $s_j^{(2)}$ προχωράνε στο στρώμα εξόδου όπου γίνεται η απο-ασαφοποίηση. Χρησιμοποιείται η μέθοδος απο-ασαφοποίησης χωρικού κέντρου βάρους (volume based centroid defuzzification), η οποία για την έξοδο y_k εκφράζεται από τον γενικό τύπο

$$a_k^{(3)} = s_k^{(3)} = y_k = \frac{\sum_{j=1}^q s_j^{(2)} u_{jk}^c V_{jk} \xi_{jk}}{\sum_{j=1}^q s_j^{(2)} V_{jk} \xi_{jk}} \quad (5.25)$$

όπου με V_{jk} συμβολίζουμε τον όγκο των μετασυναπτικών ασαφών συνόλων βάρους, οι οποίοι στην περίπτωσή μας είναι $u_{jk}^\sigma \sqrt{\pi}$. Αν θεωρήσουμε τα βάρη ξ_{jk} μοναδιαία τότε έχουμε τον απλούστερο τύπο

$$y_k = \frac{\sum_{j=1}^q s_j^{(2)} u_{jk}^c u_{jk}^\sigma}{\sum_{j=1}^q s_j^{(2)} u_{jk}^\sigma} \quad (5.26)$$

Ουσιαστικά κατά τη διαδικασία της απο-ασαφοποίησης υπολογίζεται ένα σταθμισμένο άνθροισμα των κέντρων των μετασυναπτικών βαρών. Έτσι το αποτέλεσμα είναι πιο κοντά στο μετασυναπτικό βάρος του κανόνα με την μεγαλύτερη ενεργοποίηση.

5.3 Διαδικασία Μάθησης ReSuPFuNIS

Το νευρο-ασαφές μοντέλο ReSuPFuNIS βασίζεται στην επιβλεπόμενη μάθηση για την ανανέωση των παραμέτρων. Όπως έχουμε δει και σε προηγούμενα κεφάλαια, επιβλεπόμενη μάθηση σημαίνει παρουσίαση στο μοντέλο προτύπων εκπαίδευσης και σύγκριση της εξόδου με την επιθυμητή έξοδο. Οι ελεύθερες παράμετροι ανανεώνονται με στόχο την ελαχιστοποίηση του σφάλματος.

5.3.1 Εξισώσεις Ανανέωσης

Για την εκπαίδευση χρησιμοποιούμε την μέθοδο της απότομης καθόδου. Αν $d_k(t)$ έξοδος του κόμβου εξόδου k τη χρονική στιγμή t για ένα συγκεκριμένο πρότυπο εισόδου $\mathbf{Q}(t)$ τότε το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα για όλους τους κόμβους του στρώματος εξόδου είναι

$$e(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \left(d_k(t) - s_k^{(3)}(t) \right)^2 \quad (5.27)$$

όπου $s_k^{(3)}(t) = y_k(t)$.

Το ReSuPFuNIS ακολουθεί εκπαίδευση γραμμής (on-line learning) δηλαδή οι ελεύθερες παράμετροι του συστήματος ανανεώνονται κάθε φορά που παρουσιάζεται ένα νέο πρότυπο εκπαίδευσης. Τα w_{ij}^c , w_{ij}^σ , u_{jk}^c , u_{jk}^σ και z_i^σ μεταβάλλονται σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις

$$w_{ij}^c(t+1) = w_{ij}^c(t) - \eta \frac{\partial e(t)}{\partial w_{ij}^c(t)} + \alpha \Delta w_{ij}^c(t-1) \quad (5.28)$$

$$w_{ij}^\sigma(t+1) = w_{ij}^\sigma(t) - \eta \frac{\partial e(t)}{\partial w_{ij}^\sigma(t)} + \alpha \Delta w_{ij}^\sigma(t-1) \quad (5.29)$$

$$u_{jk}^c(t+1) = u_{jk}^c(t) - \eta \frac{\partial e(t)}{\partial u_{jk}^c(t)} + \alpha \Delta u_{jk}^c(t-1) \quad (5.30)$$

$$u_{jk}^\sigma(t+1) = u_{jk}^\sigma(t) - \eta \frac{\partial e(t)}{\partial u_{jk}^\sigma(t)} + \alpha \Delta u_{jk}^\sigma(t-1) \quad (5.31)$$

$$z_i^\sigma(t+1) = z_i^\sigma(t) - \eta \frac{\partial e(t)}{\partial z_i^\sigma(t)} + \alpha \Delta z_i^\sigma(t-1) \quad (5.32)$$

όπου η ο ρυθμός μάθησης και α ο όρος ορμής. Ακόμα

$$\Delta w_{ij}^c(t-1) = w_{ij}^c(t) - w_{ij}^c(t-1) \quad (5.33)$$

$$\Delta w_{ij}^\sigma(t-1) = w_{ij}^\sigma(t) - w_{ij}^\sigma(t-1) \quad (5.34)$$

$$\Delta u_{jk}^c(t-1) = u_{jk}^c(t) - u_{jk}^c(t-1) \quad (5.35)$$

$$\Delta u_{jk}^\sigma(t-1) = u_{jk}^\sigma(t) - u_{jk}^\sigma(t-1) \quad (5.36)$$

$$\Delta z_i^\sigma(t-1) = z_i^\sigma(t) - z_i^\sigma(t-1) \quad (5.37)$$

5.3.2 Υπολογισμός των Μερικών Παραγώγων

Προχωράμε τώρα στο πιο σύνθετο κομμάτι της εργασίας αυτής δηλαδή τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις.

5.3.2.1 Ενημέρωση των u_{jk}^c , u_{jk}^σ

Για τις παραγώγους της συνάρτησης σφάλματος ως προς τα κέντρα των μετασυναπτικών βαρών έχουμε

$$\frac{\partial e(t)}{\partial u_{jk}^c(t)} = \frac{\partial e(t)}{\partial s_k^{(3)}(t)} \frac{\partial s_k^{(3)}(t)}{\partial u_{jk}^c(t)} \stackrel{(5.26),(5.27)}{=} - \left(d_k(t) - s_k^{(3)}(t) \right) \frac{s_j^{(2)}(t) u_{jk}^\sigma}{\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma} \quad (5.38)$$

Αντίστοιχα για τα πλάτη των μετασυναπτικών βαρών παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta e(t)}{\vartheta u_{jk}^{\sigma}(t)} &= \frac{\vartheta e(t)}{\vartheta s_k^{(3)}(t)} \frac{\vartheta s_k^{(3)}(t)}{\vartheta u_{jk}^{\sigma}(t)} \stackrel{(5.26),(5.27)}{=} \\ &= - \left(d_k(t) - s_k^{(3)}(t) \right) \frac{s_j^{(2)}(t) u_{jk}^c \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^{\sigma} - s_j^{(2)} \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^c u_{hk}^{\sigma}}{\left(\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^{\sigma} \right)^2} \end{aligned} \quad (5.39)$$

5.3.2.2 Ενημέρωση των w_{ij}^c , w_{ij}^{σ} , z_i^{σ}

Ο υπολογισμός των μερικών παραγώγων για την ανανέωση των συγκεκριμένων παραμέτρων είναι πιο σύνθετος αφου περιλαμβάνει παραγώγους της σχέσης αμοιβαίου εγκλεισμού \mathcal{E}_{ij} μέσα στην αλυσίδα παραγώγησης. Ακόμα λόγω της αναδρομικής φύσης του δικτύου ότι χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο Real Time Recurrent Learning με αποτέλεσμα να πρέπει να παίρνουμε υπόψιν στις παραγωγίσεις και τις προηγούμενες εξόδους του δικτύου. Ακολουθούν οι αναλυτικοί υπολογισμοί.

Για το κέντρο των προσυναπτικών βαρών έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta e(t)}{\vartheta w_{ij}^c} &= \sum_{k=1}^p \frac{\vartheta e(t)}{\vartheta y_k(t)} \frac{\vartheta y_k(t)}{\vartheta s_j^{(2)}(t)} \frac{\vartheta s_j^{(2)}(t)}{\vartheta \mathcal{E}_{ij}(t)} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}(t)}{\vartheta w_{ij}^c(t)} \\ &= \sum_{k=1}^p \left[- (d_k(t) - y_k(t)) \underbrace{\frac{\vartheta y_k(t)}{\vartheta s_j^{(2)}(t)} \frac{\vartheta s_j^{(2)}(t)}{\vartheta \mathcal{E}_{ij}(t)} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}^+(t)}{\vartheta w_{ij}^c(t)}}_{\frac{\vartheta y_k}{\vartheta w_{ij}^c}(t)} \right] \end{aligned} \quad (5.40)$$

Αντίστοιχα για το πλάτος των προσυναπτικών βαρών θα έχουμε

$$\frac{\vartheta e(t)}{\vartheta w_{ij}^{\sigma}} = \sum_{k=1}^p \left[- (d_k(t) - y_k(t)) \underbrace{\frac{\vartheta y_k(t)}{\vartheta s_j^{(2)}(t)} \frac{\vartheta s_j^{(2)}(t)}{\vartheta \mathcal{E}_{ij}(t)} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}^+(t)}{\vartheta w_{ij}^{\sigma}(t)}}_{\frac{\vartheta y_k}{\vartheta w_{ij}^{\sigma}}(t)} \right] \quad (5.41)$$

ενώ για το πλάτος των ασαφοποιητών εισόδου z_i^{σ}

$$\frac{\vartheta e(t)}{\vartheta z_i^{\sigma}} = \sum_{k=1}^p \sum_{j=1}^q \left[- (d_k(t) - y_k(t)) \underbrace{\frac{\vartheta y_k(t)}{\vartheta s_j^{(2)}(t)} \frac{\vartheta s_j^{(2)}(t)}{\vartheta \mathcal{E}_{ij}(t)} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}^+(t)}{\vartheta z_i^{\sigma}(t)}}_{\frac{\vartheta y_k}{\vartheta z_i^{\sigma}}(t)} \right] \quad (5.42)$$

όπου

$$\begin{aligned}
 \frac{\vartheta y_k(t)}{\vartheta s_j^{(2)}} &\stackrel{(5.26)}{=} \frac{u_{jk}^c u_{hk}^\sigma \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma - u_{jk}^\sigma \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^c u_{hk}^\sigma}{\left(\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma \right)^2} = u_{jk}^\sigma \left[\frac{u_{jk}^c \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma - \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^c u_{hk}^\sigma}{\left(\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma \right)^2} \right] = \\
 &= u_{jk}^\sigma \left[\frac{u_{jk}^c \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma \left(1 - \frac{\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^c u_{hk}^\sigma}{u_{jk}^\sigma \sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma} \right)}{\left(\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma \right)^2} \right] = \frac{u_{jk}^\sigma (u_{jk}^c - y_k(t))}{\sum_{h=1}^q s_h^{(2)} u_{hk}^\sigma}
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

και

$$\frac{\vartheta s_j^{(2)}}{\vartheta \mathcal{E}_{ij}} \stackrel{(5.22), (5.23)}{=} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n+p} \mathcal{E}_{lj} \tag{5.44}$$

Συνεχίζουμε με τον υπολογισμό των μερικών παραγώγων των σχέσεων αμοιβαίου εγκλεισμού (mutual subsethoods) ως προς τα w_{ij}^c , w_{ij}^σ και z_i^σ . Θυμίζουμε ότι το \mathcal{E}_{ij} δίνεται από τον τύπο

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E} \left(s_i^{(1)}, w_{ij} \right) = \frac{C \left(s_i^{(1)} \cap w_{ij} \right)}{C \left(s_i^{(1)} \right) + C \left(w_{ij} \right) - C \left(s_i^{(1)} \cap w_{ij} \right)}$$

Ακόμα $C \left(s_i^{(1)} \right)$ $\stackrel{(5.13)}{=} z_i^\sigma \sqrt{\pi}$ και $C(w_{ij})$ $\stackrel{(5.14)}{=} w_{ij}^\sigma \sqrt{\pi}$. Τέλος τα μέτρα (cardinalities) της τομής $C \left(s_i^{(1)} \cap w_{ij} \right)$ δίνονται από τις σχέσεις (5.17) έως (5.21).

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι λόγω των αναδρομικών συνδέσεων οι μερικές παράγωγοι $\vartheta \mathcal{E}_{ij} / \vartheta \alpha$ όπου α w_{ij}^c , w_{ij}^σ ή z_i^σ είναι διατεταγμένη, καθώς εξαρτάται έμεσα και από τις προηγούμενες εξόδους του δικτύου. Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα αναδρομικής μάθησης πραγματικού χρόνου (RTRL) που εξετάσαμε στο Κεφάλαιο 3 για τον υπολογισμό των μερικών αυτών παραγώγων.

Για το κέντρο των προσυναπτικών βαρών έχουμε

$$\frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}^+}{\vartheta w_{ij}^c}(t) = \begin{cases} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta w_{ij}^c}(t) & , \quad i \leq n \\ \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta w_{ij}^c}(t) + \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta y_{i-n}} \frac{\vartheta y_{i-n}}{\vartheta w_{ij}^c}(t-1) & , \quad i > n \end{cases} \tag{5.45}$$

Για το πλάτος των προσυναπτικών βαρών θα είναι αντίστοιχα

$$\frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}^+}{\vartheta w_{ij}^\sigma}(t) = \begin{cases} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta w_{ij}^\sigma}(t) & , \quad i \leq n \\ \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta w_{ij}^\sigma}(t) + \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta y_{i-n}} \frac{\vartheta y_{i-n}}{\vartheta w_{ij}^\sigma}(t-1) & , \quad i > n \end{cases} \tag{5.46}$$

Ενώ τέλος για το πλάτος των ασαφοποιητών του πρώτου στρώματος παίρνουμε

$$\frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}^+}{\vartheta z_i^\sigma}(t) = \begin{cases} \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta z_i^\sigma}(t) & , \quad i \leq n \\ \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta z_i^\sigma}(t) + \frac{\vartheta \mathcal{E}_{ij}}{\vartheta y_{i-n}} \frac{\vartheta y_{i-n}}{\vartheta z_i^\sigma}(t-1) & , \quad i > n \end{cases} \tag{5.47}$$

Παραγωγίζοντας την (5.17) ως προς w_{ij}^σ έχουμε

$$\frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^\sigma} = \begin{cases} \sqrt{\pi} & \text{αν } w_{ij}^c = z_i^c \text{ και } w_{ij}^\sigma \leq z_i^\sigma \\ 0 & \text{αν } w_{ij}^c = z_i^c \text{ και } w_{ij}^\sigma > z_i^\sigma \end{cases} \quad (5.57)$$

Παραγωγίζοντας τώρα ως προς z_i^σ έχουμε

$$\frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{αν } w_{ij}^c = z_i^c \text{ και } w_{ij}^\sigma < z_i^\sigma \\ \sqrt{\pi} & \text{αν } w_{ij}^c = z_i^c \text{ και } w_{ij}^\sigma \geq z_i^\sigma \end{cases} \quad (5.58)$$

Περίπτωση 2: $z_i^c \neq w_{ij}^c, z_i^\sigma = w_{ij}^\sigma$

Όταν $z_i^c > w_{ij}^c$ τότε παραγωγίζοντας την (5.18) προκύπτουν οι ζητούμενες παράγωγοι.

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^c} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = e^{-\left(\frac{h_1-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^\sigma} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= \frac{h_1-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} + \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - erf \left(\frac{\sqrt{2}(h_1-w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^\sigma} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= -\frac{h_1-z_i^c}{z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} + \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} + erf \left(\frac{\sqrt{2}(h_1-z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.61)$$

Τέλος για $i > n$, $y_{i-n} = z_i^c$ οπότε

$$\frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^c} = \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = -e^{-\left(\frac{h_1-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} \quad (5.62)$$

Αν $z_i^c < w_{ij}^c$ τότε από την (5.19) παρανούμε

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^c} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx = -e^{-\left(\frac{h_1-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^\sigma} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= -\frac{h_1-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} + \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} + erf \left(\frac{\sqrt{2}(h_1-w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^\sigma} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= \frac{h_1 - z_i^c}{z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1 - z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} + \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.65)$$

Τέλος για $i > n$,

$$\frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^c} = \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = e^{-\left(\frac{h_1 - z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} \quad (5.66)$$

Περίπτωση 3: $z_i^c \neq w_{ij}^c, z_i^\sigma < w_{ij}^\sigma$

Όπως είδαμε το μέτρο της τομής στην περίπτωση αυτή είναι το ίδιο είτε $z_i^c > w_{ij}^c$ είτε $z_i^c < w_{ij}^c$. Παραγωγίζοντας την (5.20) προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^c} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_2}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= -e^{-\left(\frac{h_2 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} + e^{-\left(\frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^\sigma} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_2}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= \frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} - \frac{h_2 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{h_2 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} + \\ &\quad \sqrt{\pi} \left[-\operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_2 - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^\sigma} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_2}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= -\frac{h_1 - z_i^c}{z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1 - z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} + \frac{h_2 - z_i^c}{z_i^\sigma} e^{-\left(\frac{h_2 - z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} + \\ &\quad \sqrt{\pi} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_1 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{2}(h_2 - z_i^c)}{z_i^\sigma} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.69)$$

Τέλος για $i > n$,

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta z_i^c} &= \int_{-\infty}^{h_1} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_1}^{h_2} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} dx + \int_{h_2}^{+\infty} \frac{\vartheta}{\vartheta z_i^c} e^{-\left(\frac{x-z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} dx = \\ &= -e^{-\left(\frac{h_1 - z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} + e^{-\left(\frac{h_2 - z_i^c}{z_i^\sigma}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.70)$$

Συνδυάζοντας τις 2 παραπάνω σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{\vartheta C(s_i^{(1)} \cap w_{ij})}{\vartheta w_{ij}^\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x \rightarrow h_1}^{x \rightarrow +\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x \rightarrow h_1}^{x \rightarrow +\infty} (e^{-\frac{1}{2}t^2} t) t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x \rightarrow h_1}^{x \rightarrow +\infty} (-e^{-\frac{1}{2}t^2})' t dt = \\
 &= -\frac{t}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \Big|_{x \rightarrow h_1}^{x \rightarrow +\infty} + \sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \rightarrow h_1}^{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \\
 &= 0 + \frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} + \sqrt{\pi} \left[\operatorname{erf}(+\infty) - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}(x - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma}\right) \right] \\
 &= \frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma} e^{-\left(\frac{h_1 - w_{ij}^c}{w_{ij}^\sigma}\right)^2} + \sqrt{\pi} \left[\frac{1}{2} - \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2}(x - w_{ij}^c)}{w_{ij}^\sigma}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{5.77}$$

Δείξαμε λοιπόν τον αναλυτικό τρόπο υπολογισμού της σχέσης (5.60). Αντίστοιχα υπολογίζονται και οι υπόλοιπες.

Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω εξισώσεις έχουμε τον αλγόριθμο εκπαίδευσης του ReSuPFuNIS. Η διαφορά του από τον αντίστοιχο αλγόριθμο του SuPFuNIS είναι στον υπολογισμό των μερικών παραγώγων των σχέσεων αμοιβαίου εγκλεισμού όπου εφαρμόζουμε διατεταγμένη παράγωγο λαμβάνοντας υπ' όψιν και τις προηγούμενες εξόδους του δικτύου. Η μέθοδος αυτή είναι εφαρμογή του αλγορίθμου RTRL στο νευρο-ασαφές μοντέλο που προτείνουμε.

Κεφάλαιο 6

Μέθοδοι Εξαγωγής Ασαφών Κανόνων από Δεδομένα

6.1 Εισαγωγή

Τα μοντέλα που βασίζονται σε ασαφείς κανόνες (ασαφή συστήματα, νευρο-ασαφή) χρησιμοποιούνται συχνά για την μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων. Είναι επιθυμητό, η βάση κανόνων να καλύπτει όλες τις καταστάσεις του συστήματος που είναι σημαντικές για το μελετούμενο μοντέλο. Ταυτόχρονα ο αριθμός των κανόνων πρέπει να κρατηθεί μικρός για να μην περιοριστούν οι δυνατότητες γενίκευσης του νευρο-ασαφούς συστήματος.

Σε ορισμένες περιπτώσεις οι ασαφείς κανόνες μπορούν να προκύψουν άμεσα από ανθρώπους που είναι ειδικοί στο προς ασαφή μοντελοποίηση σύστημα. Η ανάκτηση γνώσης ωστόσο από ειδικούς, είναι μία δύσκολη και πολύπλοκη διαδικασία και σε ορισμένες περιπτώσεις αδύνατη, αν το σύστημα είναι σχετικά άγνωστο και δεν υπάρχουν ειδικοί. Για το λόγο αυτό η κατασκευή ασαφών κανόνων μέσω του συνόλου δεδομένων χρησιμοποιείται όλο και συχνότερα. Τέτοιους είδους προσεγγίσεις προσπαθούν να βελτισποιήσουν κάποια αριθμητική αντικειμενική συνάρτηση, ενώ η πολυπλοκότητα του μοντέλου που προκύπτει (άμεση εξάρτηση από τον αριθμό των κανόνων) παραμένει αδιάφορη στις περισσότερες από τις μενόδους αυτές. Στην βιβλιογραφία συναντάται πληθώρα μενόδων για την εξισορρόπηση του χάσματος μεταξύ πολυπλοκότητας μοντέλου και ακρίβειας στις προβλέψεις όπως η εντροπία, γενετικοί αλγόριθμοι, μέθοδοι ορθογώνιων μετασηματισμών, μέτρα ομοιότητας και στατιστικά κριτήρια.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με τεχνικές clustering (δημιουργία συστάδων, συστοιχιών ομοιων αντικειμένων) όπου κάθε cluster αντιστοιχεί σ' έναν ασαφή κανόνα. Θα δούμε ακόμα και μερικές άλλες τεχνικές εξαγωγής ασαφών κανόνων από αριθμητικά δεδομένα.

6.2 Εξαγωγή Κανόνων με Χρήση Τεχνικών Clustering

6.2.1 Θεωρητική Εισαγωγή

Οι αλγόριθμοι σμηνοποίησης (clustering) χρησιμοποιούνται εκτεταμένως όχι μόνο για την οργάνωση και κατηγοριοποίηση δεδομένων αλλά και για την κατασκευή μοντέλων μέσω της εξαγωγής ασαφών κανόνων από δεδομένα. Οι τεχνικές σμηνοποίησης χωρίζουν ένα σύνολο δεδομένων σε διάφορες ομάδες έτσι ώστε κάποιο μέτρο ομοιότητας στο εσωτερικό μίας τέτοιας ομάδας να είναι μεγαλύτερη από ότι στις υπόλοιπες ομάδες. Για την επίτευξη του διαχωρισμού αυτού απαιτείται όπως είδαμε η χρήση ενός μέτρου ομοιότητας που δέχεται δύο διανύσματα εισόδου και επιστρέφει μία τιμή που αντιστοιχεί στην ομοιότητά τους. Στις περισσότερες περιπτώσεις τα διανύσματα εισόδου κανονικοποιούνται έτσι ώστε να ανήκουν στον μοναδιαίο υπερκύβο, δηλαδή να πέρνουν τιμές στο διάστημα $[0, 1]$.

Οι τεχνικές σμηνοποίησης ανήκουν στις μη επιβλεπόμενες τεχνικές και κύριος στόχος τους είναι να εντοπίσουν την δομή πίσω από τα δεδομένα. Σύμφωνα με την αλγορίθμική προσέγγιση των τεχνικών clustering μπορούμε να τις ταξινομήσουμε σε τεχνικές τεμαχισμού (partitioning), ιεραρχικές μενόδους (hierarchical), μενόδους στηριζόμενες στην θεωρία των γράφων και τεχνικές αντικειμενικής συνάρτησης. Στο Κεφάλαιο

αυτό θα ασχοληθούμε κυρίως με τεχνικές τεμαχισμού, ο αναγνώστης όμως μπορεί να ανατρέξει στη διεύθυνη βιβλιογραφία για μια ποιο αναλυτική μελέτη των τεχνικών συμηνοποίησης.

6.2.1.1 Clustering και Δεδομένα

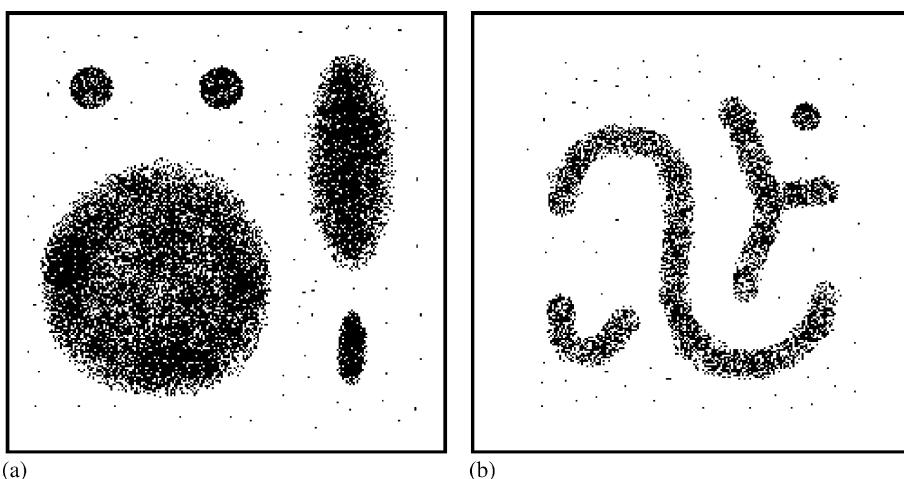
Οι τεχνικές συμηνοποίησης μπορούν να εφαρμοστούν είτε σε ποσοτικά (αριθμητικά), είτε σε ποιοτικά (χατηγορικά) δεδομένα, είτε σε συνδυασμό τους. Θα αναφερθούμε σε συμηνοποίηση αριθμητικών δεδομένων τα οποία είναι συνήθως παρατηρήσεις χάποιας φυσικής διαδικασίας. Κάθε παρατηρηση αποτελείται από n μετρήσιμες μεταβλητές, ομαδοποιημένες σ' ένα n -διάστατο διάνυσμα γραμμή $\mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn}]$, $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$. Ένα σύνολο από N παρατηρήσεις συμβολίζεται με $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_k | k = 1, 2, \dots, N\}$ και αντιστοιχεί στον $N \times n$ πίνακα

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Στην ορολογία της αναγνώρισης προτύπων, οι γραμμές του \mathbf{X} ονομάζονται πρότυπα ή αντικείμενα, ενώ οι στήλες ονομάζονται χαρακτηριστικά ή παράμετροι. Ο πίνακας \mathbf{X} καλείται πίνακας προτύπων. Το ουσιαστικό νόημα των γραμμών και των στηλών του \mathbf{X} σε σχέση με την πραγματικότητα εξαρτάται άμεσα από την περιοχή προέλευσης των δειγμάτων. Για παράδειγμα στην ιατρική διάγνωση οι γραμμές μπορεί να αντιστοιχούν σε ασθενείς και οι στήλες τα συμπτώματά τους. Όταν εφαρμόζονται τεχνικές clustering για την μοντελοποίηση δυναμικών συστημάτων, οι γραμμές του \mathbf{X} περιέχουν δείγματα χρονοσειρών και οι στήλες είναι φυσικές μεταβλητές που μετρώνται στο σύστημα (για παράδειγμα θέση, ταχύτητα, θερμοκρασία, τιμή μετοχής κτλ.). Για την αναπαράσταση της δυναμικής του συστήματος, προηγούμενες τιμές των μεταβλητών εμπεριέχονται στο \mathbf{X} .

6.2.1.2 Τα Σμήνη - Clusters

Το σμήνος μπορεί να οριστεί σαν μια ομάδα αντικειμένων που μοιάζουν περισσότερο μεταξύ τους απ' ότι μοιάζουν με μέλη άλλων συστάδων. Ο όρος «ομοιότητα» πρέπει να ερμηνεύεται σαν μαθηματική ομοιότητα, μετρούμενη από κάποια σαφώς καθορισμένη ποσότητα. Στους μετρικούς χώρους, η ομοιότητα συχνά ορίζεται μέσω μιας νόρμας απόστασης. Η απόσταση μπορεί να μετρηθεί μεταξύ διανυσμάτων δεδομένων ή σαν η απόσταση μεταξύ ενός διανύσματος δεδομένων και ενός πρωτότυπου αντικειμένου του σμήνους. Τα πρωτότυπα αυτά συνήθως δεν είναι γνωστά εκ των προτέρων και δημιουργούνται από τους αλγόριθμους συμηνοποίησης ταυτόχρονα με τον τεμαχισμό των δεδομένων.



Σχήμα 6.1 - Παράδειγμα δύο συνόλων δεδομένων όπου διαχρίνονται σαφώς διαχωρισμένα clusters

Τα δεδομένα μπορεί να εμπεριέχουν clusters διαφόρων σχημάτων (γεωμετρικών μορφών), μεγεθών και πυκνοτήτων. Η απόδοση των αλγορίθμων συμηνοποίησης δεν εξαρτάται μόνο από την γεωμετρική μορφή και την

πυκνότητα των συστάδων που ενυπάρχουν στα δεδομένα αλλά και από τις αποστάσεις μεταξύ διαφορετικών clusters. Τα συήνη μπορεί να είναι σαφώς διαχωρισμένα, συνεχώς συνδεδεμένα μεταξύ τους ή ακόμα και επικαλυπτόμενα. Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται δύο σύνολα δεδομένων που εμπεριέχουν σαφώς διαχωρισμένα clusters.

6.2.1.3 Τεμαχισμός σε Clusters

Δεδομένου ότι τα συήνη (κλάσεις) μπορούν να θεωρηθούν σαν υποσύνολα του αρχικού συνόλου δεδομένων, ένας πιθανός τρόπος ταξινόμησης των μεθόδων σμηνοποίησης είναι αν τα υποσύνολα αυτά είναι ασαφή η κλασικά (αυστηρά). Οι μέθοδοι της αυστηρής σμηνοποίησης βασίζονται στην κλασική συνολοθεωρία, και προϋποθέτουν ότι ένα αντικείμενο είτε ανήκει είτε όχι σε ένα συήνος. Η αυστηρή σμηνοποίηση ενός συνόλου δεδομένων \mathbf{X} σημαίνει τεμαχισμό των δεδομένων σ' έναν καθορισμένο αριθμό αμοιβαίων αποκλειόμενων υποσυνόλων του \mathbf{X} . Ο αριθμός των υποσυνόλων (clusters) συμβολίζεται με c . Οι μέθοδοι ασαφούς τεμαχισμού επιτρέπουν στ' αντικείμενα να ανήκουν συγχρόνως σε διάφορες κλάσεις, με διαφορετικό κάθε φορά βαθμό συμμετοχής. Σε πολλές πραγματικές καταστάσεις η ασαφής σμηνοποίηση είναι πολύ περισσότερο αληθιοφανής από την αυστηρή, καθώς τ' αντικείμενα που βρίσκονται στα σύνορα δύο ομάδων δεν ανήκουν εξ' ολοκλήρου σε μία από αυτές. Αντιθέτως τους αντιστοιχούμε βαθμούς συμμετοχής μεταξύ του 0 και του 1 που συμβολίζουν τις μερικές συμμετοχές σε κάθε ομάδα.

6.2.2 Αλγόριθμοι Σμηνοποίησης (Clustering Algorithms)

6.2.2.1 K-Means Clustering

Ο αλγόριθμος K-means που είναι γνωστός και σαν C-means έχει βρει εφαρμογή σε πληθώρα επιστημονικών περιοχών, συμπεριλαμβανομένων της συμπίεσης φωνής και εικόνας, την προ-επεξεργασία δεδομένων για μοντελοποίηση συστημάτων με χρήση νευρωνικών δικτύων κτλ.

Ο αλγόριθμος αυτός χωρίζει (τεμαχίζει) μία συλλογή N διανυσμάτων \mathbf{x}_j , $j = 1, \dots, N$ σε c ομάδες G_i , $i = 1, \dots, c$ και βρίσκει το κέντρο του συήνους για κάθε ομάδα έτσι ώστε μια συνάρτηση κόστους (ή μια αντικειμενική συνάρτηση) να ελαχιστοποιείται. Αν επιλεχθεί η Ευκλείδεια απόσταση σαν μέτρο ανομοιότητας ανάμεσα σ' ένα διάνυσμα \mathbf{x}_k στην ομάδα j και του αντίστοιχου κέντρου του συήνους c_j , τότε η συνάρτηση κόστους δίνεται από τον τύπο

$$J = \sum_{i=1}^c J_i = \sum_{i=1}^c \left(\sum_{k, \mathbf{x}_k \in G_i} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_k\|^2 \right) \quad (6.2)$$

όπου ο όρος $J_i = \sum_{k, \mathbf{x}_k \in G_i} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_i\|^2$ είναι η συνάρτηση κόστους της ομάδας i . Παρατηρούμε ότι η τιμή του J_i εξαρτάται άμεσα από τις γεωμετρικές ιδιότητες της G_i και την τοποθεσία του \mathbf{c}_i .

Οι τεμαχισμένες ομάδες συνήθως ορίζονται από έναν $c \times n$ δυαδικό πίνακα συμμετοχής \mathbf{U} , όπου το στοιχείο u_{ij} είναι 1 αν το \mathbf{x}_j ανήκει στην ομάδα i και 0 διαφορετικά. Από τη στιγμή που τα κέντρα των clusters έχουν σταθεροποιηθεί, τα u_{ij} που ελαχιστοποιούν την Εξ. (6.2) δίνονται από τη σχέση

$$u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i\|^2 \leq \|\mathbf{x}_j - \mathbf{c}_k\|^2, \text{ για κάθε } k \neq i, \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Επαναδιατυπώνοντας, το \mathbf{x}_j ανήκει στην ομάδα i αν και μόνο αν το \mathbf{c}_i είναι το κοντινότερο κέντρο ανάμεσα σε όλα τα κέντρα. Δεδομένου ότι ένα σημείο μπορεί να ανήκει σε μία μόνο ομάδα, ο πίνακας \mathbf{U} έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

$$\sum_{i=1}^c u_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (6.4)$$

και

$$\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij} = N. \quad (6.5)$$

Αντίστοιχα αν το u_{ij} είναι καθορισμένο τότε το βέλτιστο κέντρο \mathbf{c}_i που ελαχιστοποιεί την Εξ. (6.2) είναι ο μέσος όλων των διανυσμάτων της ομάδας i

$$\mathbf{c}_i = \frac{1}{|G_i|} \sum_{k, \mathbf{x}_k \in G_i} \mathbf{x}_k \quad (6.6)$$

όπου $|G_i|$ το μέγεθος της ομάδας i δηλαδή

$$|G_i| = \sum_{j=1}^N u_{ij}. \quad (6.7)$$

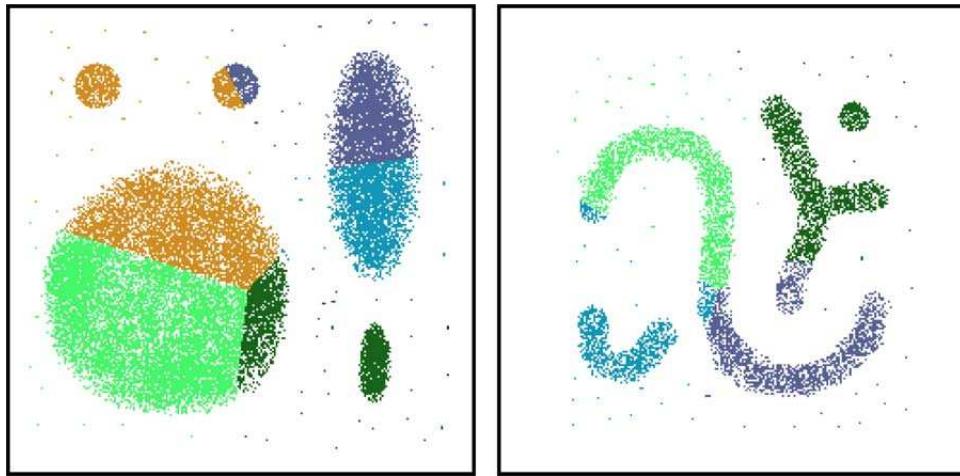
Στον αλγόριθμο K-means παρουσιάζεται ένα σύνολο από N διανύσματα \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N$ και ο αλγόριθμος καθορίζει επαναληπτικά τα κέντρα των clusters \mathbf{c}_i και τον πίνακα συμμετοχής \mathbf{U} ακολουθώντας τα επόμενα βήματα :

Βήμα 1: Θέσε αρχικές τιμές στα κέντρα των clusters \mathbf{c}_i , $i = 1, \dots, c$. Αυτό συνήθως επιτυγχάνεται με την τυχαία επιλογή c σημείων από όλα τα δεδομένα.

Βήμα 2: Καθόρισε τον πίνακα συμμετοχής \mathbf{U} χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (6.3).

Βήμα 3: Υπολόγισε την συνάρτηση κόστους που δίνεται από την Εξίσωση (6.2). Σταμάτησε αν είναι χαμηλότερο από κάποια προακιθρισμένη τιμή ή αν η βελτίωση που έχει επιτευχθεί σε σχέση με μια προηγούμενη επανάληψη, είναι κάτω από ένα συγκεκριμένο κατώφλι.

Βήμα 4: Ενημέρωσε τα κέντρα των clusters σύμφωνα με την Εξίσωση (6.6). Πήγαινε στο Βήμα 2.



Σχήμα 6.2 - Εφαρμογή του αλγορίθμου K-means στα δύο σύνολα που είδαμε παραπάνω. Τα διαφορετικά clusters στα οποία κατέληξε ο αλγόριθμος συμβολίζονται με διαφορετικό χρώμα.

Ο αλγόριθμος είναι επαναληπτικός και δεν εγγυάται ότι συγκλίνει σε βέλτιστη λύση. Η απόδοση του αλγορίθμου των K-means εξαρτάται από τις αρχικές θέσεις των κέντρων των σμηνών, και για το λόγο αυτό προτείνεται είτε η εύρεση καλών αρχικών κέντρων είτε η επανάληψη του αλγορίθμου πολλές φορές με διαφορετικά αρχικά κέντρα σε κάθε επανάληψη.

6.2.2.2 Fuzzy C-Means Clustering

Ο αλγόριθμος των ασαφών C-means είναι ένας αλγόριθμος συμηνοποίησης δεδομένων στον οποίο κάθε πρότυπο ανήκει σε ένα cluster σε ένα ποσοστό που καθορίζεται από ένα βαθμό συμμετοχής. Πρόκειται για μια βελτίωση που πρότεινε ο Bezdek στον αλγόριθμο των C-means που εξετάσαμε προηγουμένως.

Ο αλγόριθμος FCM τεμαχίζει το σύνολο των N διανυσμάτων \mathbf{x}_i , $i = 1, \dots, N$ σε c ασαφείς ομάδες, και βρίσκει ένα κέντρο για κάθε ομάδα έτσι ώστε μια συνάρτηση μέτρου ανομοιότητας να ελαχιστοποιείται. Η

κύρια διαφορά μεταξύ του FCM και του HCM είναι ότι ο FCM χρησιμοποιεί ασαφή τεμαχισμό έτσι ώστε ένα πρότυπο να μπορεί να ανήκει σε πολλαπλές ομάδες με διαφορετικούς βαθμούς συμμετοχής. Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας \mathbf{U} επιτρέπεται να έχει τιμές μεταξύ 0 και 1. Ωστόσο για λόγους κανονικοποίησης το άθροισμα των βαθμών συμμετοχής ενός συνόλου δεδομένων πρέπει πάντοτε να είναι μοναδιαίο

$$\sum_{i=1}^c u_{ij} = 1, \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (6.8)$$

Η συνάρτηση κόστους για τον αλγόριθμο FCM είναι μια γενίκευση της (6.2)

$$J(U, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_c) = \sum_{i=1}^c J_i = \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^m d_{ij}^2, \quad (6.9)$$

όπου το u_{ij} είναι μεταξύ του 0 και του 1, το \mathbf{c}_i είναι το κέντρο της ασαφούς ομάδας i , $d_{ij} = \|\mathbf{c}_i - \mathbf{x}_j\|$ είναι η Ευκλειδεια απόσταση μεταξύ του κέντρου του i cluster και του j προτύπου και $m \in [0, +\infty)$ είναι ένας εκθέτης βάρους.

Οι απαραίτητες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης κόστους μπορούν να βρεθούν αν τη μετασχηματίσουμε σε μια νέα συνάρτηση \bar{J} ως εξής

$$\bar{J}(U, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_c, \lambda_1, \dots, \lambda_N) = J(U, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_c) + \sum_{j=1}^N \lambda_j \left(\sum_{i=1}^c u_{ij} - 1 \right) \quad (6.10)$$

όπου λ_j , $j = 1, \dots, N$ οι πολλαπλασιαστές Lagrange για τους N περιορισμούς της εξίσωσης (6.8). Παραγωγίζοντας την $\bar{J}(U, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_c, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ ως προς όλες τις παραμέτρους εισόδου αποδεικνύεται ότι οι απαραίτητες συνθήκες για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους είναι

$$\mathbf{c}_i = \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m \mathbf{x}_j}{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m}, \quad (6.11)$$

και

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^c \left(\frac{d_{ij}}{d_{kj}} \right)^{2/(m-1)}}. \quad (6.12)$$

Ο αλγόριθμος FCM είναι μια επαναληπτική διαδικασία γύρω από τις προηγούμενες δύο συνθήκες. Τα βήματα του αλγορίθμου σε batch-mode είναι τα εξής

Βήμα 1: Θέσε αρχικές τιμές στον πίνακα U με τυχαίους βαθμούς συμμετοχής μεταξύ 0 και 1, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες της εξίσωσης (6.8).

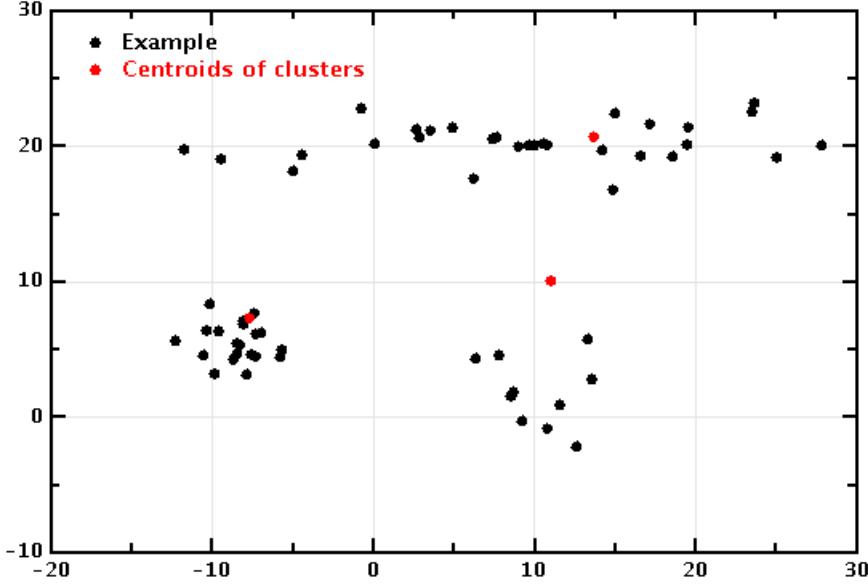
Βήμα 2: Υπολόγισε τα c κέντρα των clusters με χρήση της εξίσωσης (6.11).

Βήμα 3: Υπολόγισε την συνάρτηση κόστους που δίνεται από την Εξίσωση (6.9). Σταμάτησε αν είναι χαμηλότερο από κάποια προκαθορισμένη τιμή ή αν η βελτίωση που έχει επιτευχθεί σε σχέση με μια προηγούμενη επανάληψη, είναι κάτω από ένα συγκεκριμένο κατώφλι.

Βήμα 4: Ενημέρωσε τον πίνακα U σύμφωνα με την Εξίσωση (6.12). Πήγαινε στο Βήμα 2.

Ο αλγόριθμος δεν εγγυάται ότι θα συγκλίνει σε μια βέλτιστη λύση. Η απόδοση εξαρτάται από τις αρχικές τιμές του πίνακα U οπότε και τα αρχικά κέντρα των clusters. Η εκτέλεση του αλγορίθμου πολλές φορές με διαφορετικό κάθισε φορά αρχικό πίνακα U συνίσταται και σ' αυτόν τον αλγόριθμο.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα της εφαρμογής του αλγορίθμου FCM σε ένα απλό σύνολο δεδομένων. Οι κόκκινες κουκίδες αντιστοιχούν στα κέντρα των clusters στα οποία κατέληξε ο αλγόριθμος.



Σχήμα 6.3 - Εφαρμογή του αλγορίθμου FCM σε ένα σύνολο δεδομένων.

6.2.2.3 Αλγόριθμος Gustafson-Kessel

Οι Gustafson και Kessel επέκτειναν τον αλγόριθμο FCM που είδαμε παραπάνω εφαρμόζοντας μία προσαρμόζομενη νόρμα απόστασης και όχι την Ευκλείδεια. Με τον τρόπο αυτό ο αλγόριθμος μπορεί να εντοπίζει σμήνη (clusters) διαφορετικού γεωμετρικού σχήματος σε κάθε σύνολο δεδομένων. Κάθε κλάση i χαρακτηρίζεται τώρα εκτός από το άνυσμα κέντρου της και από έναν συμμετρικό θετικά ορισμένο πίνακα A_i ο οποίος προσδίδει μία μοναδική μετρική απόστασης για κάθε κλάση. Η απόσταση του δείγματος \mathbf{x}_k από το cluster (\mathbf{c}_i, A_i) είναι

$$d_{ikA_i}^2 = (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_i)^T A_i (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_i), \quad 1 \leq i \leq c, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (6.13)$$

Η απόσταση αυτή είναι μια γενικευμένη απόσταση Mahalanobis μεταξύ του δείγματος \mathbf{x}_k και του κέντρου \mathbf{c}_i της κλάσης i .

Οι πίνακες A_i παίζουν το ρόλο μεταβλητών βελτιστοποίησης επιτρέποντας σε κάθε κλάση να προσαρμόζει την μετρική απόστασης στις τοπικές τοπολογικές δομές των δεδομένων. Αν \mathbf{A} το σύνολο των c πινάκων A_i , δηλαδή $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_c)$ τότε η αντικειμενική συνάρτηση του αλγορίθμου Gustafson-Kessel είναι

$$J(\mathbf{U}, c_1, \dots, c_c, \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^c \sum_{k=1}^N u_{ik}^m d_{ikA_i}^2 \quad (6.14)$$

η παραπάνω αντικειμενική συνάρτηση δεν μπορεί να ελαχιστοποιηθεί άμεσα ως προς το A_i καθώς είναι γραμμική ως προς το A_i . Αυτό σημαίνει πως μικραίνοντας την τιμή του πίνακα A_i μειώνεται και το κόστος J . Για το λόγο αυτό τα A_i πρέπει να υπόκεινται σε κάποιους περιορισμούς. Ο τρόπος με τον οποίο επιτυγχάνεται κάτι τέτοιο είναι έναν περιορισμό στην ορίζουσα του A_i και επιτρέποντας στον πίνακα να μεταβάλλεται. Μέσω του περιορισμού αυτού βελτιστοποιούμε το σχήμα της κλάσης ενώ ο όγκος παραμένει σταθερός

$$\|A_i\| = \rho_i, \quad \rho_i > 0 \quad \forall i \quad (6.15)$$

όπου τα ρ_i είναι σταθερά για κάθε κλάση. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για τα A_i

$$A_i = \sqrt[n]{\rho_i \det(\mathbf{F}_i)} \mathbf{F}_i^{-1} \quad (6.16)$$

όπου \mathbf{F}_i ο ασαφής πίνακας συνδιασποράς του i -οστού cluster, και ορίζεται ως

$$\mathbf{F}_i = \frac{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_i) (\mathbf{x}_k - \mathbf{c}_i)^T}{\sum_{k=1}^N u_{ik}^m} \quad (6.17)$$

Αξίζει να σημειώσουμε πως ο αλγόριθμος αυτός έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος αλλά λόγω της προσαρμοστικότητας που οφείλεται στην μετρική της απόστασης για κάθε κλάση, παρουσιάζει αποτελέσματά του μοιάζουν περισσότερο με αυτά της ανθρώπινης διαίσθησης.

6.2.2.4 Σμηνοποίηση Βουνού (Mountain Clustering)

Ο αλγόριθμος σμηνοποίησης βουνού (mountain clustering) προτάθηκε από τους Yager, Filev και είναι μία σχετικά απλή και αποτελεσματική μέθοδος για τον ακριβή υπολογισμό κέντρων κλάσεων σε σύνολα δεδομένων. Έχει τη βάση της σε ένα μέτρο πυκνότητας που ονομάζεται συνάρτηση βουνού (mountain function). Αυτή η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ν' αποκτήσουμε τα αρχικά κέντρα που απαιτούνται από περισσότερο σύνθετους αλγόριθμους όπως ο FCM ή σαν μια γρήγορη προσεγγιστική μέθοδος σμηνοποίησης. Στηρίζεται στην διαδικασία που ακολουθεί ο άνθρωπος για να σχηματίσει κλάσεις ενός συνόλου δεδομένων.

Στο πρώτο στάδιο δημιουργείται ένα πλαίσιο (grid) του χώρου δεδομένων, όπου οι τομές των πλεγματικών γραμμών συνθέτουν ένα σύνολο σημείων που συμβολίζεται με V και αποτελούν τα υποψήφια σημεία για τα κέντρα των clusters. Όσο περισσότερες είναι οι πλεγματικές γραμμές τόσο περισσότερα όσα είναι και τα κέντρα των κλάσεων αλλά παράλληλα μια τέτοια αύξηση οδηγεί σε αυξημένη υπολογιστική πολυπλοκότητα. Οι αποστάσεις μεταξύ των γραμμών του πλέγματος είναι συνήθως σταθερές αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Στο δεύτερο βήμα κατασκευάζουμε τη συνάρτηση βουνού που είναι ένα μέτρο πυκνότητας δεδομένων. Το ύψος της συνάρτησης αυτής σ' ένα σημείο $\mathbf{v} \in V$ είναι

$$m(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{x}_i\|^2}{2\sigma^2} \right), \quad (6.18)$$

όπου \mathbf{x}_i το i -οστό δεδομένο και σ μια σταθερά που εξαρτάται από την εφαρμογή. Η προηγούμενη εξίσωση δείχνει ότι κάθε δεδομένο \mathbf{x}_i συμβάλλει στο ύψος της συνάρτησης βουνού στο σημείο \mathbf{v} και η συνεισφορά αυτή είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ \mathbf{x}_i και \mathbf{v} . Την συνάρτηση βουνού μπορούμε να την εκλαβόμενη σαν ένα μέτρο της πυκνότητας δεδομένων καθώς τείνει να είναι μεγαλύτερη (ψηλότερη) αν πολλά σημεία είναι κοντά στο \mathbf{v} και χαμηλότερη αν τριγύρω βρίσκονται λιγότερα σημεία. Η σταθερά σ καθορίζει τόσο το ύψος όσο και την ομαλότητα της συνάρτησης βουνού. Αν το σύνολο δεδομένων έχει επαρκές μέγεθος και περιέχει ευδιάκριτες κλάσεις τότε η τιμή της σταθεράς σ δεν επηρεάζει τα αποτελέσματα της σμηνοποίησης.

Στο τρίτο βήμα επιλέγουμε τα κέντρα των κλάσεων. Αρχικά βρίσκουμε το σημείο στο σύνολο των υποψήφιων κέντρων V στο οποίο η συνάρτηση βουνού παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή. Αυτό αποτελεί το πρώτο κέντρο \mathbf{c}_1 . Αν παρουσιαστούν περισσότερα του ενός μέγιστα τότε επιλέγουμε τυχαία ένα από αυτά. Για να πάρουμε το δεύτερο κέντρο πρέπει να εξαλείψουμε την επιδραση του κέντρου που μόλις βρήκαμε, καθώς συνήθως περιστοιχίζεται από άλλα πλεγματικά σημεία στα οποία η συνάρτηση βουνού παίρνει επίσης υψηλές τιμές. Αυτό επιτυγχάνεται ανανεώνοντας την συνάρτηση σφάλματος. Η νέα συνάρτηση είναι η διαφορά μιας Gaussian με κέντρο το \mathbf{c}_1 από την προηγούμενη συνάρτηση, δηλαδή

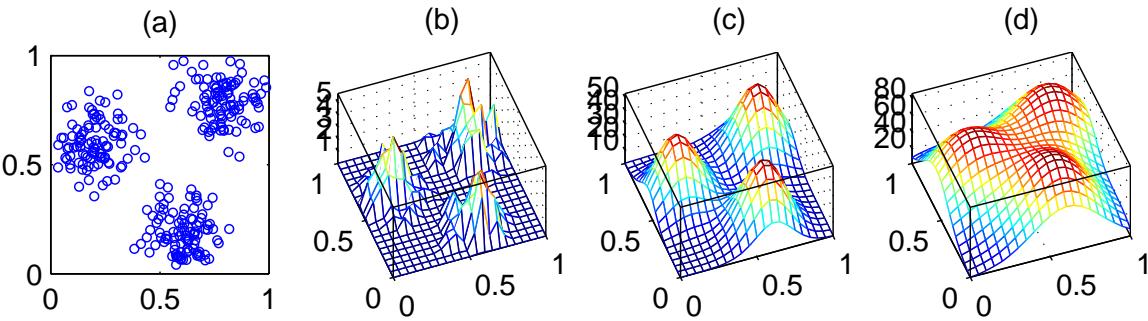
$$m_{new}(\mathbf{v}) = m(\mathbf{v}) - m(\mathbf{c}_1) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{c}_1\|^2}{2\beta^2} \right) \quad (6.19)$$

Η αφαιρούμενη ποσότητα $m(\mathbf{c}_1) \exp \left(-\frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{c}_1\|^2}{2\beta^2} \right)$ είναι αντιστρόφως ανάλογη της απόστασης μεταξύ του \mathbf{v} και του κέντρου \mathbf{c}_1 που μόλις εντοπίσαμε, ενώ είναι ευθέως ανάλογη του ύψους $m(\mathbf{c}_1)$ στο κέντρο. Αξίζει να προσέξουμε πως η νέα συνάρτηση βουνού $m_{new}(\mathbf{v})$ μηδενίζεται για $\mathbf{v} = \mathbf{c}_1$.

Μετά την παραπάνω αφαίρεση το κέντρο του δεύτερου cluster επιλέγεται να είναι το σημείο του συνόλου V στο οποίο μεγιστοποιείται η συνάρτηση βουνού. Η διαδικασία της ενημέρωσης της συνάρτησης βουνού και

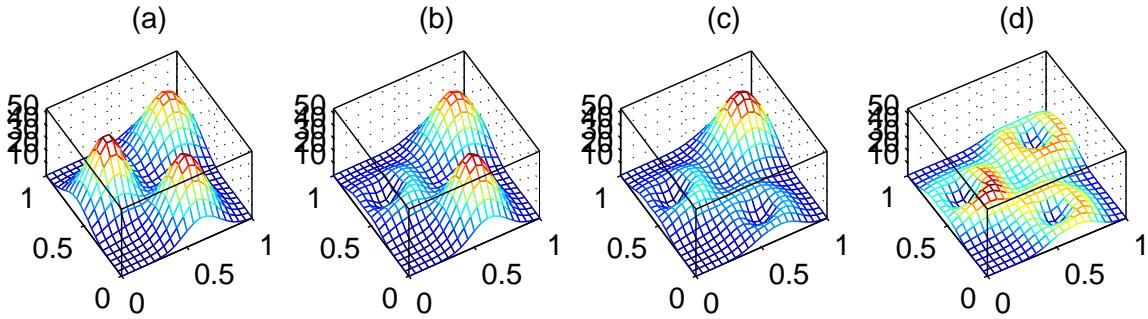
της επιλογής του επόμενου κέντρου επαναλαμβάνεται μέχρι να αποκτηθεί ένας επαρκής αριθμός clusters και των αντίστοιχων κέντρων τους.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η κατασκευή της συνάρτησης βουνού για διαφορετικές τιμές του σ και τα δεδομένα στα οποία εφαρμόζεται.



Σχήμα 6.4 - Κατασκευή βουνού: (a) 2-D σύνολο δεδομένων, (b) $\sigma = 0.02$, (c) $\sigma = 0.1$, (d) $\sigma = 0.2$

Επιλέγουμε την επιφάνεια βουνού για $\sigma = 0.1$ και προχωράμε στην εύρεση των κέντρων. Το παρακάτω δείχνει τις m_{new} που προκύπτουν διαδοχικά μετά την εύρεση των τριών πρώτων κέντρων.



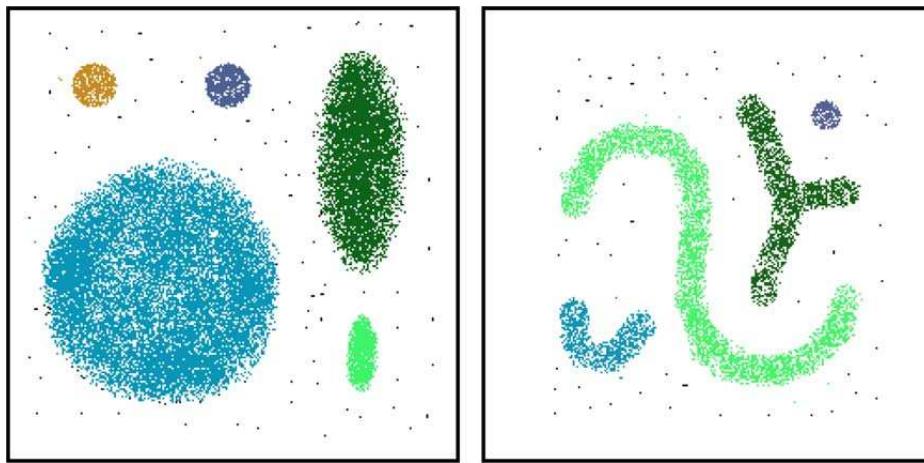
Σχήμα 6.5 - Αποδόμηση βουνού με $\beta = 0.1$: (a) η αρχική συνάρτηση βουνού με $\sigma = 0.1$, (b) μετά την εύρεση του πρώτου κέντρου, (c) μετά την εύρεση του δεύτερου κέντρου, (d) μετά την εύρεση του τρίτου κέντρου

6.2.2.5 Άλλες Τεχνικές Clustering

Παραπάνω παρουσιάσαμε μερικές από τις πιο γνωστές τεχνικές σμηνοποίησης που συναντώνται στην παγκόσμια βιβλιογραφία. Επειδή όμως η σωστή επιλογή των κέντρων των clusters είναι πολύ σημαντική έχει προταθεί πληθώρα άλλων αλγορίθμων οι οποίοι ομολογουμένως είναι αρκετά πολύπλοκοι. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε τον αλγόριθμο FHC, έναν αλγόριθμο που αρχικά κατασκευάζει έναν ασαφή γράφο αναλύοντας τον βαθμό ασαφούς συνεκτικότητας μεταξύ υποκλάσεων που έχουν προκύψει μετά από αρχικό διαμερισμό (partitioning) του χώρου δεδομένων. Παίρνωντας τις συνεκτικές συνιστώσες του γράφου προκύπτει η τελική σμηνοποίηση. Ο αλγόριθμος αυτός εμφανίζει εξαιρετικά αποτελέσματα βρίσκοντας clusters αυθαίρετου σχήματος, ενώ μπορεί να εφαρμοστεί και σε πολυδιάστατα δεδομένα. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το αποτέλεσμα εκτέλεσης του αλγορίθμου στο σύνολο δεδομένων στο οποίο τρέξαμε και τον k-means. Είναι εμφανές ότι ο FHC ομαδοποιεί τα δεδομένα με τον ίδιο τρόπο που θα το έκανε και ένας άνθρωπος.

6.2.3 Μέτρα Εγκυρότητας

Η εγκυρότητα των κλάσεων αναφέρεται στο πρόβλημα του ταιριάσματος ενός ασαφούς τεμαχισμού στο σύνολο των δεδομένων. Οι αλγόριθμοι σμηνοποίησης προσπαθούν να βρουν το τέλειο ταίριασμα για ένα δεδομένο αριθμό από clusters και τα αντίστοιχα σχήματα. Ωστόσο πολλές φορές το τέλειο ταίριασμα μπορεί



Σχήμα 6.6 - Εφαρμογή αλγορίθμου FHC σε δύο σύνολα δεδομένων.

να μην έχει κανένα νόημα. Μπορεί ο αριθμός των κλάσεων να είναι μικρός ή τα σχήματα των clusters μπορεί να μην ανταποκρίνονται στις ομάδες των δεδομένων. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο κύριους τρόπους για να καθορίσουμε τον κατάλληλο αριθμό από clusters για ένα σύνολο δεδομένων.

- Αρχίζοντας με ένα επαρκώς μεγάλο αριθμό clusters, διαδοχικά μειώνουμε τον αριθμό αυτό συγχωνεύοντας κλάσεις που είναι παρόμοιες ως προς κάποιο προκαθορισμένο κριτήριο.
- Εφαρμόζουμε αλγόριθμους σμηνοποίησης για διαφορετικές τιμές του αριθμού των κλάσεων c και χρησιμοποιούμε μέτρα εγκυρότητας για να εκτιμήσουμε την «απόδοση» των τεμαχισμών που προκύπτουν. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους
 - Η πρώτη προσέγγιση είναι να ορίσουμε μία συνάρτηση εγκυρότητας που εκτιμάται για ολόκληρο τον τεμαχισμό. Εκτιμάται ένα πάνω όριο για τον αριθμό των clusters c_{max} και ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται για κάθε $c \in \{2, 3, \dots, c_{max}\}$. Για κάθε τεμαχισμό που προκύπτει η συνάρτηση εγκυρότητας δίνει μία τιμή η οποία επιτρέπει την έμμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων.
 - Η δεύτερη προσέγγιση αφορά στον ορισμό μίας συνάρτησης εγκυρότητας που εκτιμά την εγκυρότητα μεμονωμένων κλάσεων σ' έναν τεμαχισμό. Πάλι πρέπει να εκτιμηθεί ο μέγιστος αριθμός clusters c_{max} και η ανάλυση πρέπει να εκτελεστεί αντίστοιχες φορές. Τα προκύπτοντα clusters συγκρίνονται μεταξύ τους ως προς την συνάρτηση εγκυρότητας. Παρόμοιες κλάσεις συνενώνονται σε μία και clusters με πολύ χαμηλό μέτρο εγκυρότητας εξαλείφονται με κύριο σκοπό την μείωση του αριθμού των clusters.

Στη βιβλιογραφία έχει προταθεί πληθώρα μέτρων εγκυρότητας. Παρακάτω παρουσιάζουμε μερικά από τα πιο σημαντικά.

1. **Partition Coefficient (PC)**: Μετράει την ποσότητα «αλληλοκάλυψης» μεταξύ δύο clusters. Ο Bezdek την ορίζει ως εξής

$$PC(c) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^2, \quad (6.20)$$

όπου u_{ij} ο βαθμός συμμετοχής του σημείου δεδομένων j στο cluster i . Το μειονέκτημα του μέτρου PC είναι ότι δεν παρουσιάζει άμεση σύνδεση με κάποια ιδιότητα του συνόλου δεδομένων. Ο βέλτιστος αριθμός κλάσεων προκύπτει από τη μεγιστοποίηση του μέτρου.

2. **Classification Entropy (CE)**: μετράει την ασάφεια του τεμαχισμού σε clusters και είναι παρόμοιο με το προηγούμενο μέτρο

$$CE(c) = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij} \log(u_{ij}), \quad (6.21)$$

3. **Partition index (SC)**: είναι ο λόγος του αυθοίσματος της πυκνότητας και του διαχωρισμού των clusters. Πρόκειται για ένα άθροισμα ξεχωριστών μέτρων εγκυρότητας κανονικοποιημένων μέσω της διαίρεσης με το ασαφές μέτρο κάθε χλάσης

$$SC(c) = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^m \| \mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i \|^2}{\sum_{i=1}^c N_i \sum_{k=1}^c \| \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_i \|^2} \quad (6.22)$$

Το μέτρο SC είναι χρήσιμο όταν θέλουμε να συγκρίνουμε διαφορετικούς τεμαχισμούς με ίδιο αριθμό χλάσεων. Χαμηλότερη τιμή του μέτρου SC υποδηλώνει καλύτερο τεμαχισμό.

4. **Separation Index (S)**: σε αντίθεση με το μέτρο SC το μέτρο διαχωρισμού S χρησιμοποιεί την ελάχιστη απόσταση διαχωρισμού για την εγκυρότητα του τεμαχισμού

$$S(c) = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^2 \| \mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i \|^2}{N \min_{i,k} \| \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_i \|^2}, \quad (6.23)$$

5. **Xie-Beni's Index (XB)**: το μέτρο αυτό στοχεύει να ποσοτικοποιήσει το λόγο της συνολικής μεταβλητότητας στο εσωτερικό των clusters προς τον διαχωρισμό των χλάσεων

$$XB(c) = \frac{\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^N u_{ij}^m \| \mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i \|^2}{N \min_{i,j} \| \mathbf{x}_j - \mathbf{c}_i \|^2} \quad (6.24)$$

Ο βέλτιστος αριθμός χλάσεων ελαχιστοποιεί την τιμή του μέτρου XB .

6.2.4 Εξαγωγή Κανόνων από Clusters

Μέχρι τώρα είδαμε αλγόριθμους με τους οποίους μπορούμε να βρούμε τα κέντρα χλάσεων σε σύνολα δεδομένων. Μέσω των clusters αυτών μπορούμε να πάρουμε μία αρχική βάση κανόνων με την οποία θα ξεκινήσει η εκπαίδευση ενός νευρο-ασαφούς μοντέλου.

Στην εργασία αυτή το μοντέλο που μελετάμε είναι το ReSuPFuNIS το οποίο χρησιμοποιεί Gaussian συναρτήσεις συμμετοχής για την διατύπωση των ασαφών κανόνων. Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε πώς μπορούμε από τις χλάσεις που έχουν προκύψει μετά από κάποιον αλγόριθμο σμηνοποίησης να πάρουμε τους ασαφείς κανόνες που αντιστοιχούν. Αξίζει να τονίσουμε ότι σε κάθε cluster θ' αντιστοιχούμε έναν κανόνα.

Τα κέντρα των clusters χρησιμοποιούνται όμεσα σαν τα κέντρα των Gaussian συναρτήσεων συμμετοχής ορισμένων στα υπερσύνολα αναφοράς εισόδου και εξόδου. Για να βρούμε τις διασπορές κάθε συνόλου χρησιμοποιούμε τους πίνακες συμμεταβλητότητας των διάφορων cluster, καθώς ένας πίνακας συμμεταβλητότητας μιας χλάσης δεδομένων ορίζει μία ελλειψοειδή καμπύλη γύρω από το κέντρο που έχει προκύψει από τον αλγόριθμο σμηνοποίησης. Το ελλειψοειδές που αντιστοιχεί στο j cluster ορίζεται ως

$$\zeta^2 = (X - V_j)^T K_j^{-1} (X - V_j) \quad (6.25)$$

όπου $X = \{X_k\}_{k=1}^N$ τα N πρότυπα εκπαίδευσης, ζ ένας θετικός πραγματικός αριθμός, V_j το κέντρο του j -οστού ελλειψοειδούς και K_j ο πίνακας συμμεταβλητότητας του j -οστού cluster. Το K_j υπολογίζεται μέσω των σημείων που ανήκουν στο εν λόγω cluster ως εξής

$$K_j = E [(X - V_j)(X - V_j)^T] \quad (6.26)$$

όπου $E[\cdot]$ ο συνηθισμένος εκτιμητής μέσης τιμής.

Για ευκολία στους υπολογισμούς τα ελλειψοειδή που περιγράφονται από την παραπάνω σχέση εγγράφονται σε ορθογώνια τα οποία προβάλλονται στους άξονες του διανυσματικού χώρου εισόδων-εξόδων για να προκύψουν τα ασαφή σύνολα. Παρόλο που μία τέτοια ενέργεια προκαλεί την απώλεια κάποιας πληροφορίας που εμπεριέχεται στους πίνακες συμμεταβλητότητας, το πρόβλημα αυτό ξεπερνιέται μέσω της διαδικασίας εκπαίδευσης του μοντέλου και της σωστής ρύθμισης των παραμέτρων.

Το προβαλόμενο μήκος ρ_{ji} του j ορθογωνίου στην i διάσταση δίνεται από τη σχέση

$$\rho_{ji} = 2\zeta \sum_{k=1}^N \frac{|\cos \gamma_{ijk}|}{\sqrt{\lambda_{jk}}} \quad (6.27)$$

όπου λ_{jk} οι ιδιοτιμές του πίνακα K_j^{-1} και γ_{ijk} η γωνία μεταξύ του j -οστού ιδιοδιανύσματος και της i -οστής διάστασης για το k -οστό ελλειψοειδές. Οπότε ένα τριγωνικό ασαφές σύνολο μπορεί να προκύψει αν θεωρήσουμε μοναδιαίο ύψος και ρ σαν μήκος βάσης. Η επιφάνεια αυτού του τριγωνικού ασαφούς συνόλου είναι $\rho/2$. Η επιφάνεια των Gaussian ασαφών συνόλων που χρησιμοποιούμε στο ReSuPFuNIS είναι $\sigma\sqrt{\pi}$ όπου σ το εύρος. Αν θεωρήσουμε ότι το τριγωνικό και το Gaussian ασαφές σύνολο έχουν ίσες επιφάνειες τότε προκύπτει εύρος

$$w_{ij}^\sigma = \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^N \frac{|\cos \gamma_{ijk}|}{\sqrt{\lambda_{jk}}} \quad (6.28)$$

Έτσι δεδομένου του κέντρου V_j ενός cluster μπορούμε να δώσουμε αρχικές τιμές στα κέντρα και τις διασπορές όλων των βαρών που εισέρχονται και εξέρχονται στον j -οστό κόμβο κανόνων του μοντέλου.

6.3 Εξαγωγή Κανόνων από Αριθμητικά Δεδομένα

6.3.1 Γενικά

Μέχρι τώρα εξετάσαμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να προκύψουν μέσω των clusters που έχουν δημιουργηθεί μετά την εκτέλεση κάποιου αλγόριθμου συμηνοποίησης σ' ένα σύνολο δεδομένων. Εκτός από την εξαγωγή ασαφών κανόνων μέσω clusters στη βιβλιογραφία συναντώνται και άλλες μέθοδοι. Στην ενότητα αυτή όμως παρουσιάσουμε μία διαδικασία που προτάθηκε από τους Wang και Mendel για την εξαγωγή ασαφών κανόνων από αριθμητικά δεδομένα. Ο αλγόριθμος αυτός είναι η διαδικασία που χρησιμοποιεί το νευρο-ασαφές μοντέλο HyFIS για την παραγωγή της αρχικής βάσης κανόνων.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα: διαθέτουμε ένα σύνθετο σύστημα ελέγχου στο οποίο ένας ανθρώπινος ελεγκτής είναι πολύ σημαντικό τμήμα. Το περιβάλλον στο οποίο λειτουργεί το σύστημα ελέγχου είναι τόσο σύνθετο που δεν υπάρχει κάποιο μαθηματικό μοντέλο. Σκοπός μας είναι να σχεδιάσουμε ένα σύστημα ελέγχου για την αντικαταστήσουμε τον ανθρώπινο παράγοντα.

Για τον σχεδιασμό ενός τέτοιου συστήματος ελέγχου πρέπει πρώτα να δούμε τι πληροφορία είναι διαθέσιμη. Δεδομένου ότι ήδη υπάρχει ένας ανθρώπινος ελεγκτής που ελέγχει επιτυχώς το σύστημα, υπάρχουν δύο ειδών πληροφορίες διαθέσιμες: 1) η εμπειρία του ανθρώπινου ελεγκτή και 2) ένα δείγμα δεδομένων εισόδου-εξόδου που είναι καταγεγραμμένα από τον επιτυχή έλεγχο του ελεγκτή. Η ανθρώπινη εμπειρία συνήθως εκφράζεται με τη μορφή κάποιων ασαφών κανόνων **EAN-TOTE** που διατυπώνουν ποιες ενέργειες πρέπει να γίνουν ανάλογα με την εκάστοτε κατάσταση. Τα δείγματα εισόδου-εξόδου είναι κάποια αριθμητικά δεδομένα που δίνουν για τις συγκεκριμένες αριθμητικές τιμές εισόδου τις επιθυμητές εξόδους.

Κύρια ιδέα αυτού του αλγορίθμου είναι να δημιουργήσουμε ασαφείς κανόνες από αυτά τα αριθμητικά ζευγάρια δεδομένων και να συλλέξουμε αυτούς τους ασαφείς κανόνες και όποιους άλλους γλωσσικούς κανόνες μπορεί να έχει δώσει κάποιος ειδικός σε μια κοινή αρχική βάση ασαφών κανόνων.

6.3.2 Μέθοδος Παραγωγής Ασαφών Κανόνων από Αριθμητικά Δεδομένα

Υποθέτουμε ότι διαθέτουμε ένα σύνολο από επιθυμητά δεδομένα εισόδου-εξόδου

$$\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y^{(1)} \right), \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}; y^{(2)} \right), \dots \quad (6.29)$$

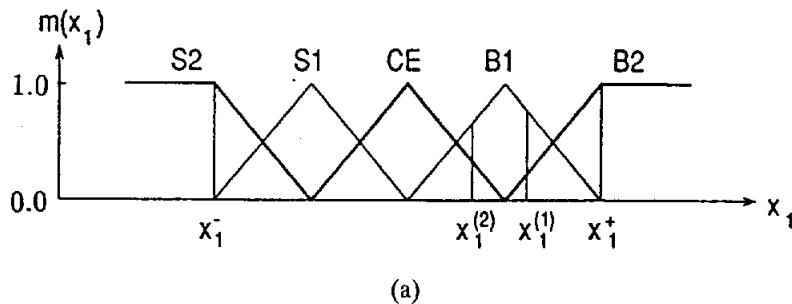
όπου x_1, x_2 οι είσοδοι και y η έξοδος. Χρησιμοποιούμε αυτό το απλό μοντέλο δύο μόνο εισόδων και μίας εξόδου για να εξηγήσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα τις βασικές ιδέες της προσέγγισης που ακολουθείται. Η μέθοδος μπορεί πολύ εύκολα να εφαρμοστεί και σε δεδομένα περισσότερων διαστάσεων. Στόχος είναι η δημιουργία ενός συνόλου ασαφών κανόνων από τα επιθυμητά δεδομένα εισόδου-εξόδου και μέσω των κανόνων να καθορίσουμε μία απεικόνιση

$$f : (x_1, x_2) \rightarrow y. \quad (6.30)$$

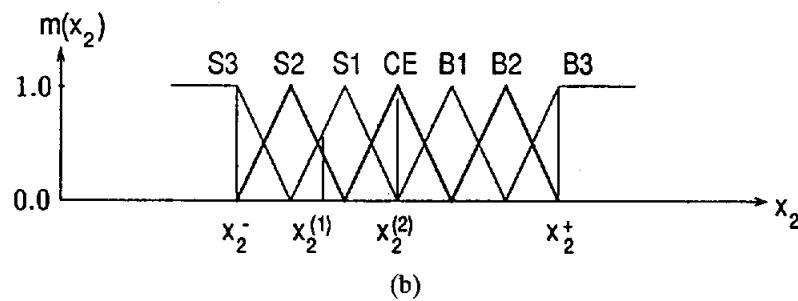
Ο αλγόριθμος αποτελείται από τα ακόλουθα τέσσερα βήματα.

Βήμα 1 - Διαιρούμε τους χώρους εισόδου και εξόδου σε ασαφείς περιοχές

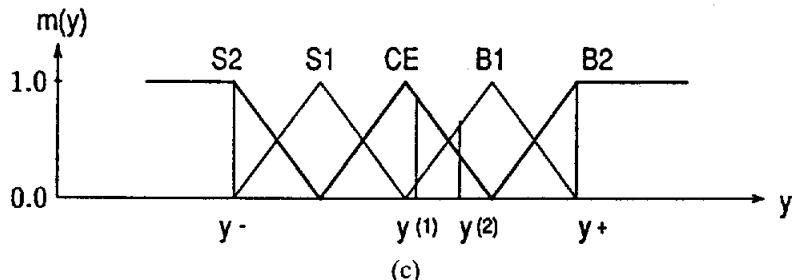
Την θέτουμε ότι τα πεδία ορισμού των μεταβλητών x_1, x_2 και y είναι $[x_1^-, x_1^+]$, $[x_2^-, x_2^+]$ και $[y^-, y^+]$ όπου με τον όρο «πεδίο ορισμού» μιας μεταβλητής αναφέρομαστε στο διάστημα όπου μπορεί να βρίσκεται η μεταβλητή αυτή κατά πάσα πιθανότητα (οι τιμές της επιτρέπεται να είναι και εκτός του πεδίου ορισμού). Στη συνέχεια διαιρούμε κάθε πεδίο ορισμού σε $2N+1$ περιοχές (το N μπορεί να είναι διαφορετικό για διαφορετικές μεταβλητές και τα μήκη των περιοχών μπορεί να είναι ίσα ή άνισα) τις οποίες συμβολίζουμε με $S1$ (Small 1), CE (Center), $B1$ (Big 1), \dots , BN (Big N) και σε κάθε μία από αυτές αντιστοιχούμε μία ασαφή συνάρτηση συμμετοχής.



(a)



(b)



(c)

Σχήμα 6.7 - Διαίρεση των χώρων εισόδου και εξόδου σε ασαφείς περιοχές και οι αντίστοιχες συναρτήσεις συμμετοχής.

Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται ένα παράδειγμα της διαδικασίας που μόλις περιγράψαμε, όπου το πεδίο ορισμού της x_1 χωρίζεται σε πέντε περιοχές ($N = 2$), της x_2 σε επτά ($N = 3$) και της μεταβλητής εξόδου y σε πέντε περιοχές ($N = 2$). Χρησιμοποιούμε τριγωνικές συναρτήσεις συμμετοχής που μεγιστοποιούνται στο κέντρο κάθε περιοχής ενώ στα άκρα που βρίσκονται στα κέντρα των δύο γειτονικών περιοχών οι συναρτήσεις

συμμετοχής μηδενίζονται. Προφανώς όταν μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλης μορφής συναρτήσεις συμμετοχής ή να διαιρέσουμε το πεδίο ορισμού με διαφορετικό τρόπο.

Βήμα 2 - Παραγωγή ασαφών κανόνων από ζευγάρια εισόδου-εξόδου

Αρχικά καθόρισε τους βαθμούς συμμετοχής των μεταβλητών $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ και $y^{(i)}$ στις διάφορες περιοχές. Για παράδειγμα, στο παραπάνω σχήμα το $x_1^{(1)}$ έχει βαθμό συμμετοχής 0.8 στο $B1$, βαθμό συμμετοχής 0.2 στο $B2$ και μηδενικούς βαθμούς συμμετοχής σε όλες τις άλλες περιοχές. Αντίστοιχα το $x_2^{(2)}$ έχει μοναδιαίο βαθμό συμμετοχής στην περιοχή CE και μηδενικό σε όλες τις άλλες.

Στη συνέχεια αντιστοιχούμε κάθε μεταβλητή $x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)}$ και $y^{(i)}$ στην περιοχή στην οποία έχει τον μεγαλύτερο βαθμό συμμετοχής. Για παράδειγμα το $x_1^{(1)}$ θεωρείται ότι είναι $B1$ και το $x_2^{(2)}$ CE .

Τέλος παίρνουμε έναν ασαφή κανόνα για κάθε ζευγάρι δεδομένων εισόδου εξόδου.

$$\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y^{(1)}\right) \Rightarrow \left[x_1^{(1)}(0.8 \text{ in } B1, \text{ max}), x_2^{(1)}(0.7 \text{ in } S1, \text{ max}); y^{(1)}(0.9 \text{ in } CE, \text{ max})\right] \Rightarrow \text{Rule 1}$$

$$\text{Rule 1 : EAN } x_1 \text{ είναι } B1 \text{ και } x_2 \text{ είναι } S1, \text{ TOTE } y \text{ είναι } CE; \quad (6.31)$$

$$\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}; y^{(2)}\right) \Rightarrow \left[x_1^{(2)}(0.6 \text{ in } B1, \text{ max}), x_2^{(2)}(1 \text{ in } CE, \text{ max}); y^{(2)}(0.7 \text{ in } B1, \text{ max})\right] \Rightarrow \text{Rule 1}$$

$$\text{Rule 1 : EAN } x_1 \text{ είναι } B1 \text{ και } x_2 \text{ είναι } CE, \text{ TOTE } y \text{ είναι } B1; \quad (6.32)$$

Οι κανόνες που παράγονται με τον τρόπο αυτό είναι διαζευκτικοί δηλαδή όλες οι αριστερές συνυθήκες πρέπει να ικανοποιούνται συγχρόνως για να ισχύει το συμπέρασμα.

Βήμα 3 - Απόδωσε έναν βαθμό σε κάθε κανόνα

Συνήθως τα σύνολα δεδομένων περιέχουν πολύ μεγάλο αριθμό προτύπων εκπαίδευσης. Όπως είδαμε παραπάνω από κάθε τέτοιο πρότυπο προκύπτει ένας ασαφής κανόνας οπότε υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να προκύψουν αντιφατικοί κανόνες δηλαδή κανόνες που έχουν το ίδιο αριστερό μέρος αλλά διαφορετικά συμπεράσματα. Για να αποφύγουμε αυτή την αντιφατικότητα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε παραγόμενο κανόνα έναν βαθμό, και να δεχτούμε από ένα σύνολο αντιφατικών κανόνων μόνο εκείνον που έχει τον μεγαλύτερο βαθμό. Με τον τρόπο αυτό όχι μόνο λύνουμε το πρόβλημα που περιγράφαμε αλλά μειώνουμε σημαντικά και τον αριθμό των κανόνων.

Για έναν κανόνα της μορφής **EAN** x_1 είναι A και x_2 είναι B , **TOTE** y είναι C ορίζουμε σαν βαθμό και συμβολίζουμε με $D(\text{Rule})$ το ακόλουθο γινόμενο

$$D(\text{Rule}) = m_A(x_1)m_B(x_2)m_C(y). \quad (6.33)$$

Για τα προηγούμενα παραδείγματα έχουμε

$$D(\text{Rule 1}) = m_{B1}(x_1)m_{S1}(x_2)m_{CE}(y) = 0.8 \times 0.7 \times 0.9 = 0.504 \quad (6.34)$$

και

$$D(\text{Rule 2}) = m_{B1}(x_1)m_{CE}(x_2)m_{B1}(y) = 0.6 \times 1 \times 0.7 = 0.42. \quad (6.35)$$

Στην πραγματικότητα συνήθως διαθέτουμε κάποια πληροφορία εκ των προτέρων για τα πρότυπα εκπαίδευσης. Για παράδειγμα αν δώσουμε σ' έναν ειδικό ένα σύνολο από πρότυπα εκπαίδευσης, αυτός μπορεί να ξεχωρίσει μερικά σαν πολύ σημαντικά ενώ να χαρακτηρίσει κάποια άλλα σαν απίθανα ή αποτέλεσμα σφαλμάτων μέτρησης. Μπορούμε λοιπόν να αντιστοιχίσουμε σε κάθε πρότυπο μία τιμή που υποδηλώνει την πίστη μας για την χρησιμότητα του εν λόγω προτύπου. Αν το πρότυπο $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}; y^{(1)}\right)$ έχει τιμή σημαντικότητας $M^{(1)}$ τότε ορίζουμε τον βαθμό του αντίστοιχου κανόνα σαν

$$D(\text{Rule 1}) = m_{B1}(x_1)m_{S1}(x_2)m_{CE}(y)m^{(1)} \quad (6.36)$$

Αυτή η προσαρμογή είναι ιδιαίτερα σημαντική για πραγματικά δεδομένα καθώς διαφορετικά πρότυπα έχουν διαφορετική αξιοπιστία. Στα αξιόπιστα δεδομένα αντιστοιχούμε μεγαλύτερους βαθμούς σημαντικότητας σε αντίθεση με τα αναξιόπιστα (μη πιθανά πρότυπα). Με τον τρόπο αυτό χρησιμοποιούμε την ανθρώπινη εμπειρία για τα δεδομένα σαν πηγή πληροφορίας για την βελτιστοποίηση της απόδοσης της μεθόδου. Εάν κάποιος δεν επιθυμεί την παρέμβαση του ανθρώπου για λόγους αντιεμενικότητας η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί και πάλι χωρίς την χρησιμοποίηση του βαθμού σημαντικότητας κάθε προτύπου.

Βήμα 4 - Δημιουργία βάσης ασαφών κανόνων

Η μορφή της βάσης των ασαφών κανόνων για το παράδειγμα των δύο μεταβλητών φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

B3					
B2					
B1					
x ₂	CE				
S1					
S2					
S3					
	S2	S1	CE	B1	B2
			x ₁		

Σχήμα 6.8 - Η μορφή μιας βάσης ασαφών κανόνων.

Θα συπληρώσουμε τα κουτιά της βάσης με ασαφείς κανόνες σύμφωνα με την ακόλουθη στρατηγική : η βάση των ασαφών κανόνων μπορεί να συμπληρωθεί είτε με τους κανόνες που έχουν προκύψει από τα αριθμητικά δεδομένα είτε με γλωσσικούς κανόνες που είναι άμεση απόρροια της ανθρώπινης εμπειρίας. Αν σ' ένα κουτί υπάρχουν περισσότεροι του ενός κανόνες, χρησιμοποιούμε αυτόν στον οποίο αντιστοιχεί ο μεγαλύτερος βαθμός (θεωρούμε ότι και στους γλωσσικούς κανόνες έχει αντιστοιχηθεί από κάποιον ειδικό ένας βαθμός). Με τον τρόπο αυτό τόσο αριθμητικοί όσο και γλωσσικοί κανόνες κωδικοποιούνται σε ένα κοινό πλαίσιο. Οι συζευκτικοί κανόνες καταλαμβάνουν ένα μόνο κουτί ενώ οι διαζευκτικοί (το δεξιό μέλος του κανόνα ισχύει αν ισχύει μία από τις αριστερές συνθήκες) γεμίζουν όλα τα κουτιά που αντιστοιχούν στις γραμμές και τις στήλες των αριστερών συνθηκών του κανόνα.

Κεφάλαιο 7

Μεθοδολογία Πρόβλεψης Χαοτικών Χρονοσειρών

7.1 Εισαγωγή

Οι κλασικές μέθοδοι της στατιστικής επεξεργασίας σημάτων χαρακτηρίζονται στις ακόλουθες βασικές παραδοχές σχετικά με τη φύση των σημάτων: γραμμικότητα (τλλινεαριτψ), στασιμότητα (stationarity) και κανονική κατανομή (gaussianity). Οι παραδοχές αυτές έχουν τεθεί ώστε να γίνει δυνατή η μαθηματική μοντελοποίηση των συστημάτων. Στην πράξη όμως οι περισσότερες παραδοχές, εάν όχι όλες, δεν ισχύουν σε πραγματικές εφαρμογές, όπου σήματα εισόδου προέρχονται από δυναμικά συστήματα. Για την πρόβλεψη αυτών των χαοτικών χρονοσειρών οι κλασικές μέθοδοι παρουσιάζουν υπο-βέλτιστη συμπεριφορά παρόλο που στηρίζονται σε καλά τεκμηριωμένα μαθηματικά μοντέλα. Μία από τις νέες τεχνολογίες η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποδοτικότερη πρόβλεψη είναι τα νευρο-ασαφή συστήματα στα οποία ανήκει και το ReSuPPuNIS που αναλύσαμε στο Κεφάλαιο 5.

Η πρόβλεψη σημάτων με χρονική εξάρτηση (χρονοσειρών) αποτελεί μία από τις σημαντικότερες περιοχές της επεξεργασίας σήματος και έχει ως στόχο την πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών ενός σήματος, με χρήση μιας σειράς μετρήσεων του παρελθόντος του καθώς και άλλων βιοηθητικών σημάτων (σε ορισμένες περιπτώσεις).

Ειδικά στην πρόβλεψη χαοτικών χρονοσειρών τα νευρο-ασαφή συστήματα εμφανίζουν σημαντικά πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλες συμβατικές μεθόδους πρόβλεψης, διότι έχουν τη δυνατότητα μοντελοποίησης μη-γραμμικών, μη-στασιμών και μη-γκαουσιανών διεργασιών. Δεδομένης της απουσίας καλά τεκμηριωμένης θεωρητικής βάσης της λειτουργίας των νευρο-ασαφών συστημάτων, η επιτυχής υλοποίηση συστημάτων πρόβλεψης απαιτεί εξαιρετικά συστηματική προσέγγιση. Στο παρόν Κεφάλαιο παρουσιάζεται η μεθοδολογία σχεδίασης και υλοποίησης αποδοτικών συστημάτων ενώ ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην προεπεξργασία των χαοτικών χρονοσειρών.

7.2 Παραδείγματα Χαοτικών Χρονοσειρών

Την παραδείγματα παραδειγμάτων χαοτικών χρονοσειρών οι οποίες παρουσιάζουν εξαιρετική σημασία για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων. Ένα εκτενώς μελετημένο πρόβλημα είναι η πρόβλεψη της ζήτησης ηλεκτρικής ενέργειας. Η ακριβής πρόβλεψη της ζήτησης είναι εξαιρετικά σημαντική για τη διαχείριση των παραγωγικών σταθμών ενέργειας και μπορεί να εξοικονομήσει σημαντικούς φυσικούς πόρους αποτρέποντας ταυτόχρονα τον κίνδυνο της έλλειψης ενέργειας.

Η επιστήμη της μετεωρολογίας διαθέτει ένα πλήθος τεχνικών για την πρόβλεψη του καιρού και παρ'οτι το πρόβλημα είναι τεσσάρων διαστάσεων, ορισμένα καιρικά φαινόμενα μπορούν να αναχθούν σε μονοδιάστατες χρονοσειρές (π.χ. θερμοκρασία η ταχύτητα ανέμων). Ένας άλλος πολύ ενδιαφέρον τομέας είναι η εφαρμογή νευρο-ασαφών μοντέλων στη γεωλογία και συγκεκριμένα στην πρόβλεψη σεισμών και την ανάλυση σεισμογραφικών χρονοσειρών.

Η ικανότητα της πρόβλεψης της χρονικής εξέλιξης οικονομικών μεγεθών, όπως η τιμή μιας μετοχής, το επιτόκιο, οι συναλλαγματικές ισοτιμίες κτλ, είναι εξαιρετικά σημαντική και καυχορίζει αποφασιστικά τη

με υδροδοτούμενή των επενδύσεων καθώς και τη διαχείριση του επενδυτικού ρίσκου.

Επίσης ένας τομέας στον οποίο υπάρχουν σημαντικά προβλήματα που ανάγονται σε πρόβλεψη η κατηγοριοποίηση χρονοσειρών είναι η ιατρική. Παραδείγματα αποτελούν τα ηλεκτροκαρδιογραφήματα και ηλεκτρογκεφαλογραφήματα, η πρόβλεψη του επιπέδου της γλυκόζης στο αίμα καρκινοπαθών και πολλά άλλα. Στην ιατρική η δυνατότητα πρόβλεψης είναι εξαιρετικής σημασίας διότι επιτρέπει τον καλύτερο σχεδιασμό της θεραπείας και την πρόληψη δυσμενών καταστάσεων για τον ασθενή.

Επίσης στη χημεία έχει παρατηρηθεί χαοτική χρονική εξάρτηση σε ορισμένες χημικές αντιδράσεις η οποία έχει μοντελοποιηθεί ως χρονοσειρά ώστε να καταστεί δυνατός ο έλεγχος του ρυθμού με τον οποίο εξελίσσονται οι αντίστοιχες χημικές διεργασίες.

Παρατηρούμε ότι το πεδίο εφαρμογής συστημάτων πρόβλεψης που βασίζονται σε νευρο-ασαφή συστήματα είναι τεράστιο. Μία σωστή πρόβλεψη μπορεί να έχει πληθώρα θετικών επιπτώσεων για το λόγο αυτό η προεπεξεργασία των δεδομένων και ο αναλυτικός σχεδιασμός του συστήματος πρόβλεψης είναι πολύ σημαντικός. Θα ασχοληθούμε κυρίως με πρόβλεψη οικονομικών χαοτικών χρονοσειρών αλλά ό,τι παρουσιαστεί έχει άμεση εφαρμογή σε οποιοδήποτε πρόβλημα.

7.3 Παρουσίαση Μεθόδων Πρόβλεψης

Η πολυπλοκότητα των μεθόδων πρόβλεψης χρονοσειρών ποικίλλει από σχετικά μικρή έως πολύ σύνθετη και υπολογιστικά απαιτητική. Γενικά οι περισσότερες μέθοδοι είναι ποσοτικές από τη φύση τους αλλά υπάρχουν και χρήσιμες ποιοτικές προσεγγίσεις. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι κυριότερες μέθοδοι πρόβλεψης που χρησιμοποιούνται στην πράξη.

Μέθοδος	Περιγραφή	Εφαρμογές
Κινητός Μέσος Όρος (Moving Average)	Τεχνική πρόβλεψης που βασίζεται στη μέση τιμή των παρατηρήσεων των γειτονικών χρονικών στιγμών. Προϋποθέτει στασιμότητα των χρονοσειρών αφού σταθμίζονται όλα τα δεδομένα με τον ίδιο συντελεστή. Δεν είναι δυνατή η πρόβλεψη της μεταβολής της διεύθυνσης της χρονοσειράς.	Προβλέψεις μικρού χρονικού εύρους για δραστηριότητες που χρειάζονται μεγάλο αριθμό μεγεθών.
Εκθετική Εξομάλυνση (Exponential Smoothing)	Οι προβλέψεις είναι σταθμισμένοι συνδυασμοί παρατηρήσεων και προβλέψεων του παρελθόντος. Δινεται περισσότερο βάρος στα πιο πρόσφατα γεγονότα. Δεν είναι δυνατή η πρόβλεψη της μεταβολής της διεύθυνσης της χρονοσειράς.	Εφαρμογές παρόμοιες με αυτές του Κινητού μέσου όρου με μικρό χρονικό εύρος.
Μέθοδοι Διαχωρισμού (Decomposition)	Η μέθοδος προϋποθέτει την ύπαρξη σχέσης μεταξύ του χρόνου και της μεταβλητής που υπάρχει. Η χρονοσειρά χωρίζεται σε συστηματικές και μη συστηματικές συνιστώσες.	Εφαρμογή σε μεγέθη που μπορούν να αναλυθούν σε συνιστώσες τάσης, εποχικότητας και κυκλικότητας.
Ανάλυση Παλινδρόμησης (Regression)	Ερμηνευτική πρόβλεψη που υποθέτει την ύπαρξη σχέσης μεταξύ της εξαρτημένης και μίας ή περισσότερων ερμηνευτικών μεταβλητών.	Πρόβλεψη μικρού και μέσου χρονικού ορίζοντα.

Οικονομετρικά Μοντέλα (Econometric Models)	Σύστημα ερμηνευτικών εξισώσεων που περιλαμβάνει εξωγενείς και ενδογενείς μεταβλητές.	Βραχυχρόνια και μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη.
Χρήση Αναπροσαρμοζόμενων Φίλτρων (Adaptive Filtering)	Αποτελεί επέκταση της εκθετικής εξομάλυνσης και χρησιμοποιεί μία επαναληπτική προσέγγιση για τον προσδιορισμό των καλύτερων συντελεστών στάθμισης.	Βραχυχρόνια και μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη.
Τεχνικές Box-Jenkins	Χρησιμοποιείται μία επαναληπτική προσέγγιση για την ανεύρεση του αποδοτικότερου μοντέλου μεταξύ μιας γενικότερης τάξης μοντέλων. Δεν υποθέτει ύπαρξη προτύπου στα δεδομένα.	Βραχυχρόνια και μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη.
Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα	Χρησιμοποιείται για την ανεύρεση μίας σχέσης μεταξύ μιας απεικόνισης μεταξύ των δεδομένων εισόδου και των επιθυμητών μεγεθών.	Βραχυχρόνια και μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη.
Νευρο-ασαφή Μοντέλα	Χρησιμοποιείται για την ανεύρεση μίας σχέσης μεταξύ μιας απεικόνισης μεταξύ των δεδομένων εισόδου και των επιθυμητών μεγεθών. Μέσα από το μοντέλο μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα σύνολο ασαφών κανόνων που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη.	Βραχυχρόνια και μεσοπρόθεσμη πρόβλεψη.

Πίνακας 7.1: Μέθοδοι Πρόβλεψης

7.4 Μεθοδολογία Ανάπτυξης Νευρο-Ασαφών Μοντέλων

Η μεθοδολογία ανάπτυξης ενός νευρο-ασαφούς συστήματος για την πρόβλεψη χρονοσειρών αποτελείται από τα ακόλουθα βήματα :

1. Ανάλυση προβλήματος
2. Συλλογή δεδομένων
3. Ανάλυση δεδομένων και επιλογή μεταβλητών εισόδου και εξόδου
4. Προ-επεξεργασία (pre-processing) δεδομένων
5. Κατασκευή συνόλων δεδομένων
6. Ανάπτυξη μοντέλου και βελτιστοποίηση
7. Αξιολόγηση μοντέλου

Καθένα από τα παραπάνω βήματα αναλύεται στις παραγράφους που ακολουθούν. Η διαδικασία ανάπτυξης του μοντέλου σχεδόν πάντα είναι επαναληπτική, δεδομένου ότι, τα αποτελέσματα που προκύπτουν από τα επόμενα βήματα οδηγούν συχνά στην ανάγκη αναθεώρησης προηγούμενων επιλογών.

Η ανάλυση PCA έχει ως στόχο την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ανακατασκευής

$$J_e = E \{ \|x - \hat{x}\|^2 \} = E \{ \text{tr} [(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T] \} = \text{tr}(R_x) - \text{tr}(WR_xW^T) \quad (7.9)$$

όπου

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) = \sum_{i=1}^N a_{ii}. \quad (7.10)$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος της σχέσης (7.9), έστω J_v , ισούται με τη μεταβλητή τα του διανύσματος y καθώς επίσης και με τη μεταβλητή της προβολής \hat{x} .

$$J_v = \text{tr}(WR_xW^T) = E \{ \text{tr}(yy^T) \} = \sum_{i=1}^N y_i^2 = \text{tr}(W^TWR_xW^TW) = E \{ \text{tr}(\hat{x}\hat{x}^T) \} = \sum_{i=1}^m \hat{x}_i^2 \quad (7.11)$$

Κατά συνέπεια η μεγιστοποίηση της μεταβλητής \hat{x} είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Γενικότερα η ανάλυση PCA μπορεί να θεωρηθεί είτε ως μια τεχνική μεγιστοποίησης της μεταβλητής, είτε ως τεχνική ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος.

Έστω ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ του R_x είναι ταξινομημένες κατά φυλίους τάξη, και έστω τα αντίστοιχα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα e_1, e_2, \dots, e_n . Η ελάχιστη τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ανακατασκευής J_e ή αντίστοιχα η μέγιστη τιμή της μεταβλητής J_v υπό τη συνθήκη $W^TW = I$ επιτυγχάνεται με χρήση του

$$W_{opt} = T [\pm e_1, \dots, \pm e_m]^T \quad (7.12)$$

όπου T οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας.

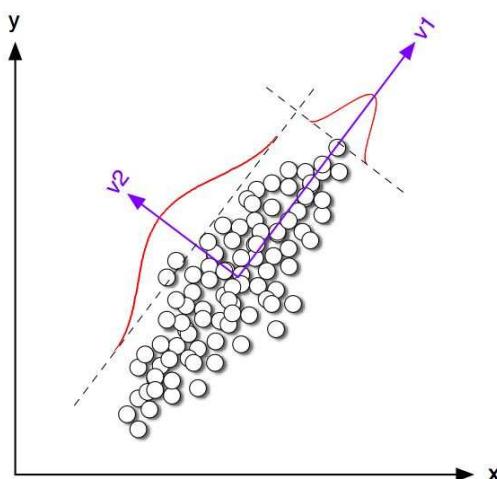
Το ελάχιστο σφάλμα ανακατασκευής δίνεται από τη σχέση

$$\min J_e = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \quad (7.13)$$

και αντίστοιχα η μέγιστη τιμή της μεταβλητής είναι

$$\max J_v = \sum_{i=1}^m \lambda_i. \quad (7.14)$$

Ένα παράδειγμα ανάλυσης PCA δίνεται στο παρακάτω σχήμα. Εικονίζονται οι δύο κύριες πρωτεύουσες συνιστώσες.



Σχήμα 7.1 - Παράδειγμα ανάλυσης πρωτεύουσών συνιστωσών όπου εικονίζονται οι δύο κύριες συνιστώσες.



Σχήμα 7.2 - Παράδειγμα αφαίρεσης της τάσης (detrending).

7.4.4.2 Κλιμάκωση (Scaling) - Κανονικοποίηση (Normalization)

Η κλιμάκωση των μεταβλητών έχει ως στόχο την κανονικοποίηση τους και είναι απαραίτητη για τους ακόλουθους λόγους

- Αποφεύγεται η πιθανότητα το μοντέλο να συντονισθεί σε μια συγκεκριμένη περιοχή των δεδομένων εισόδου-εξόδου.
- Κλιμακώνονται οι τιμές εισόδου ώστε να εμπίπτουν εντός της περιοχής λειτουργίας των κόμβων, δηλαδή του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων ενεργοποίησης.
- Η απ' ευθείας τροφοδότηση του μοντέλου με τις πρωτογενείς τιμές των μεταβλητών εισόδου θα είχε σαν αποτέλεσμα μεγάλες διαφορές στις περιοχές τιμών μεταξύ των αντίστοιχων εισόδων. Τις διαφορές αυτές το δίκτυο μπορεί να τις εκλάβει ως σημαντικές για τη βαρύτητα των αντίστοιχων εισόδων. Στην περίπτωση αυτή το μοντέλο θα εξαρτάται σημαντικά από τις εισόδους με υψηλές τιμές και θα ελαχιστοποιηθεί η επιρροή των εισόδων με μικρότερες απόλυτες τιμές, χωρίς αυτό να είναι πληροφοριακά ορθό.

Η συνήθης τακτική για την κανονικοποίηση των μεταβλητών εισόδου είναι ο μετασχηματισμός με κέντρο το 0 (μηδενική μέση τιμή) και μοναδιαία τυπική απόκλιση. Οι εξισώσεις που χρησιμοποιούνται για την κανονικοποίηση των μεταβλητών είναι οι ακόλουθες

$$\tilde{x}_i(t) = \frac{x_i(t) - \bar{x}}{\sigma_x} \quad (7.22)$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i(t) - \bar{x})^2}{N-1}} \quad (7.23)$$

όπου \tilde{x}_i είναι η κανονικοποιημένη τιμή της μεταβλητής x_i και \bar{x}_i η μέση τιμή της x_i .

Οι μεταβλητές εξόδου κανονικοποιούνται σε διαφορετικά διαστήματα ανάλογα με τη συνάρτηση ενεργοποίησης του στρώματος εξόδου. Ένας μετασχηματισμός που μπορεί να χρησιμοποιηθεί είναι

$$\tilde{y}(t) = SC \times y(t) + OFFSET \quad (7.24)$$

$$SC = \frac{Max - Min}{y_{max} - y_{min}} \quad (7.25)$$

$$OFFSET = Max - SC \times y_{max} \quad (7.26)$$

όπου $\tilde{y}(t)$ είναι η κανονικοποιημένη μεταβλητή εξόδου, $y(t)$ η επιθυμητή έξοδος, y_{max} , y_{min} η μέγιστη και ελάχιστη τιμή της επιθυμητής εξόδου και Max , Min οι τιμές του διαστήματος στόχου με τυπικές τιμές $Max = 0.9$ και $Min = 0.1$.

7.4.4.3 Διαχείριση Ακραίων Σημείων (Statistical Outliers)

Τα ακραία σημεία στις μεταβλητές εισόδου-εξόδου απαιτούν ειδική μεταχείριση διότι δημιουργούν τα ακόλουθα προβλήματα

- Ωθούν την πλειοψηφία του συνόλου των τιμών της μεταβλητής σε πολύ περιορισμένη δυναμική περιοχή η οποία απαιτεί εξαιρετικά υψηλή αριθμητική ακρίβεια από την υλοποίηση του αλγορίθμου εκπαίδευσης.
- Η συντριπτική πλειοψηφία των παρατηρήσεων θα εμπίπτει στη γραμμική περιοχή της συνάρτησης ενεργοποίησης με αποτέλεσμα να απωλεσθούν οι ιδιότητες μη γραμμικότητας του μοντέλου.

Ο εντοπισμός των ακραίων σημείων γίνεται συνήθως με τη γραφική αναπαράσταση των μεταβλητών. Σε πολλές περιπτώσεις η μέθοδος αυτή δεν είναι δυνατή σε περισσότερες από δύο ή τρείς διαστάσεις ή όταν τα δεδομένα είναι πολυάριθμα. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται στις περιπτώσεις αυτές είναι η εξέταση των σημείων στα οποία το σφάλμα του μοντέλου είτε είναι υψηλό είτε δεν αιτιολογείται από τη συμπεριφορά των μεταβλητών εισόδου.

Μία άλλη μέθοδος εντοπισμού ακραίων σημείων είναι η σχεδίαση ιστογραμμάτων συχνότητας εμφάνισης τιμών (frequency distribution histograms). Τα ιστογράμματα καταδεικνύουν τα ακραία σημεία και ταυτόχρονα παρέχουν πληροφορίες σχετικά με την στατιστική κατανομή των αντίστοιχων διανυσμάτων.

7.4.4.4 Λοιποί Μετασχηματισμοί Δεδομένων

Έκτός των μετασχηματισμών που έχουν περιγραφεί μέχρι τώρα σε πολλές περιπτώσεις είναι αποδοτική η εφαρμογή πρόσθετων μετασχηματισμών οι οποίοι υποβοηθούν τη διαδικασία μάθησης. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ταξινομούνται στις ακόλουθες κατηγορίες

- Αφαίρεση θορύβου από τα δεδομένα.
- Μετασχηματισμός πληροφοριακών εισόδων σε προβλεπτικές.
- Μεταβολή στατιστικής κατανομής.

Στο σύνολο των σημάτων που προέρχονται από μετρήσεις, ειδικά σε οικονομικά μεγέθη (π.χ. τιμές μετοχών), υπάρχει ένα σημαντικό επίπεδο θορύβου το οποίο καθιστά δύσκολη την ανακάλυψη των σχέσεων που διέπουν τις μεταβολές των μεγεθών. Επίσης, ο θόρυβος υψηλών συχνοτήτων που δημιουργείται από τοπικά φαινόμενα είναι ανεπιθύμητο να μοντελοποιηθεί. Για το λόγο αυτό τα σήματα πρέπει να διέλθουν από ένα βαθυπερατό φίλτρο (low-pass filter) το οποίο εκτελεί μια λειτουργία εξομάλυνσης.

Η τεχνική που χρησιμοποιείται εκτενώς για την αφαίρεση του θορύβου και την ανεύρεση των τάσεων (trends) σε οικονομικά μεγέθη είναι ο κινητός μέσος όρος (moving average). Στην πράξη χρησιμοποιούνται τρεις παραλλαγές του κινητού μέσου όρου

- Απλός κινητός μέσος όρος (simple moving average).
- Σταθμισμένος κινητός μέσος όρος (weighted moving average).

- Εκθετικός κινητός μέσος όρος (exponential moving average).

Στη γενική μορφή ο απλός κινητός μέσος όρος υπολογίζεται σταθμιζόντας με μοναδιαία βάρη $N + M + 1$ γειτονικά σημεία με βάση την εξίσωση

$$y(t) = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M x[t - k] \quad (7.27)$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η εφαρμογή του απλού κινητού μέσου όρου σε μια χρονοσειρά ισοτιμίας Βρεταννικής Λίρας - Δολαρίου.



Σχήμα 7.3 - Παράδειγμα εφαρμογής απλού κινητού μέσου όρου σε χρονοσειρά ισοτιμίας λίρας-δολαρίου.

Ο σταθμισμένος κινητός μέσος όρος αποτελεί γενίκευση του κινητού μέσου και προκύπτει χρησιμοποιώντας διαφορετικούς όρους στάθμισης για κάθε δείγμα σύμφωνα με την εξίσωση

$$y(t) = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{k=-N}^M b_k x[t - k] \quad (7.28)$$

όπου οι συντελεστές b_k μπορούν να επιλεγούν κατάλληλα ώστε να επιτευχθεί η επιθυμητή συμπεριφορά. Η στάθμιση των τιμών μπορεί να λύσει εν μέρει το πρόβλημα της καθυστέρησης που παρατηρείται στο κινητό μέσο όρο με τιμές $N = M$. Ακόμη καλύτερη συμπεριφορά επιτυγχάνεται με χρήση εκθετικού κινητού μέσου.

Ο εκθετικός κινητός μέσος ανήκει στην κατηγορία των αναδρομικών φίλτρων και υπολογίζεται από την ακόλουθη σχέση

$$y(t) = \beta x(t) + (1 - \beta)y(t - 1) \quad (7.29)$$

με αρχική συνθήκη $y(0) = x(0)$. Τιμές της παραμέτρου β επιλέγονται στην περιοχή 0.1 έως 0.5. Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζεται παράδειγμα της εφαρμογής του εκθετικού μέσου όρου και σύγκριση με τον απλό κινητό μέσο.

Όσο μικρότερη είναι η τιμή της παραμέτρου β τόσο μεγαλύτερη είναι η μνήμη του φίλτρου και κατ' επέκταση τόσο ισχυρότερη είναι η εξομάλυνση (smoothing) της χρονοσειράς.

Ο μετασχηματισμός των πληροφοριακών μεταβλητών σε προβλεπτικές αποτελεί έναν από τον σημαντικότερο στόχο της προ-επεξεργασίας των δεδομένων κατά την ανάπτυξη ενός νευρο-ασαφούς μοντέλου. Οι κλασικότερες μέθοδοι μετασχηματισμού που χρησιμοποιούνται είναι η διαφόριση μιας μετβλητής και ο υπολογισμός της διαφοράς και του λόγου δύο μεταβλητών.

Η διαφόριση μιας μεταβλητής παρέχει τα εξής πλεονεκτήματα



Σχήμα 7.4 - Παράδειγμα εφαρμογής εκθετικού μέσου όρου και απλού κινητού στην ίδια χρονοσειρά.

- Επιτυγχάνεται αφαίρεση της τάσης από τη χρονοσειρά. Η τάση μετατρέπεται σε μια σταθερή απόκλιση (offset) με αποτέλεσμα να βελτιώνεται σημαντικά η δυναμική περιοχή των δεδομένων.
- Οι κανονικοποιημένες διαφορές της μορφής Δψ/ψχρησιμοποιούνται πολύ συχνά στην μοντελοποίηση διότι επιλύουν το πρόβλημα της απόλυτης τιμής με αποτελεσματικό τρόπο.

Θα πρέπει επίσης να σημειωθεί και ένα πιθανό μειονέκτημα της διαφόρισης το οποίο εντοπίζεται στην υψηπερατή συμπεριφορά της συνάρτησης μεταφοράς που υλοποιεί. Στις περιπτώσεις που η πληροφορία χαμηλών συχνοτήτων είναι χρήσιμη θα πρέπει να ληφθούν μέτρα ώστε να συμπεριληφθεί στο σύστημα. Ειδικά σε χρηματο-οικονομικές εφαρμογές η πληροφορία αυτή είναι συνήθως χρήσιμη.

Ο λόγος δύο μεταβλητών μετασχηματίζει με απλό τρόπο πληροφοριακές μεταβλητές σε προβλεπτικές, δεδομένου ότι λειτουργεί ως μία λογική σύγκριση. Τυπικό παράδειγμα αποτελεί ο τεχνικός ενδείκτης Γραμμής Ανόδου/Καθόδου (Advnace/Decline Line) ο οποίος προκύπτει από το λόγο του αριθμού των μετοχών των οποίων αυξήθηκε η τιμή τους σε δεδομένη χρονική περίοδο προς τον αριθμό των μετοχών των οποίων η τιμή μειώθηκε. Ο ενδείκτης αυτός αποτελεί το πιο ευρέως χρησιμοποιούμενο εργαλείο ένδειξης της κινητικότητας της αγοράς. Έχει αποδειχθεί ότι η χρήση του ενδείκτη Γραμμής Ανόδου/Καθόδου ως είσοδο σε νευρωνικά δίκτυα και νευρο-ασαφή μοντέλα δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα και οδηγεί σε πιο φειδωλά μοντέλα σε σχέση με τη χρήση των δύο αριθμητικών τιμών.

Μία άλλη οικογένεια μετασχηματισμών έχει ως στόχο τον μετασχηματισμό της στατιστικής κατανομής των δεδομένων σε κανονική. Οι μετασχηματισμοί αυτοί έχουν τις ρίζες τους σε μενόδους της στατιστικής μοντελοποίησης και χρησιμοποιούνται ώστε να εξασφαλισθεί η απαίτηση που τίθεται από πολλά στατιστικά μοντέλα για δεδομένα που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

7.4.5 Κατασκευή Συνόλων Δεδομένων

Ένα από τα πιο χρονοβόρα βήματα στην ανάπτυξη ενός μοντέλου είναι η σχεδίαση και διαμόρφωση των συνόλων δεδομένων για τις διαδικασίες μάθησης (training set), δοκιμών (testing set) και αξιολόγησης γενίκευσης (validation set). Στην πράξη αποδεικνύεται ότι αποτελεί το κρισιμότερο βήμα στη φάση υλοποίησης για την επιτυχία του μοντέλου.

Οι εργασίες που εντάσσονται στην κατασκευή των συνόλων δεδομένων είναι

- Επιλογή των δεδομένων που θα χρησιμοποιηθούν στη φάση εκμάθησης.
- Διαμέριση σε σύνολα εκμάθησης, δοκιμών και αξιολόγησης.

Η πρώτη σχεδίαστική απόφαση αφορά στο μέγεθος των συνόλων. Η απόφαση είναι σύνθετη και επηρεάζεται συχνά από πρακτικούς περιορισμούς, όπως για παράδειγμα το κόστος συλλογής των δεδομένων. Γενικά το σύνολο εκμάθησης θα πρέπει να παρέχει όσο το δυνατόν αντιπροσωπευτικότερο δείγμα των δεδομένων.

Μεγάλος αριθμός δεδομένων ελαττώνει την πιθανότητα υποδειγματοληψίας της επιθυμητής συνάρτησης. Αντίθετα μικρά σύνολα, με υψηλό θόρυβο εμπεριέχουν αυξημένο κίνδυνο «απομνημονευθούν» από το μοντέλο με αποτέλεσμα να εμφανίζονται ικανοποιητικά αποτελέσματα στης φάση εκπαίδευσης αλλά το νευρο-ασαφές μοντέλο να αποτυγχάνει να ανταποκριθεί σωστά σε πραγματικά δεδομένα.

Δεδομένου ότι έχουν συλλεγεί τα δεδομένα, το πλήνος που θα χρησιμοποιηθεί για τη διαμόρφωση των απαιτούμενων συνόλων εξαρτάται από πολλούς παράγοντες όπως το μέγεθος του μοντέλου, τις απαιτήσεις για δοκιμές και αξιολόγηση της γενίκευσης, τις κατανομές των εισόδων και των εξόδων κλπ. Συνήθως η σημαντικότερη παράμετρος είναι το μέγεθος του μοντέλου. Ένα σύνθετο νευρο-ασαφές σύστημα συνήθως απαιτεί περισσότερα δεδομένα από ένα απλούστερο. Ένας εμπειρικός κανόνας είναι η ύπαρξη τουλάχιστον 5-10 δεδομένων για κάθε βάρος που εμφανίζεται στο σύστημα. Γενικά η επιλογή των εισόδων και εξόδων θα πρέπει να είναι φειδωλή ώστε το μεγεθύς του μοντέλου και κατ' επέκταση των συνόλων δεδομένων να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο.

Περιορισμούς στη διαμέριση των δεδομένων θέτει το γεγονός ότι η αξιολόγηση απαιτεί ένα ανεξάρτητο σύνολο δεδομένων. Ο απλούστερος τρόπος για τη δημιουργία του συνόλου αξιολόγησης είναι η διαμέριση του αρχικού συνόλου σε δύο τμήματα, κρατώντας ένα ποσοστό της τάξης του 10% – 30% για τις ανάγκες της αξιολόγησης. Η τυχαία επιλογή των προτύπων που θα συμπεριληφθούν στο σύνολο αξιολόγησης, ελαχιστοποιεί την πιθανότητα συστηματικών συσχετίσεων μεταξύ των συνόλων εκπαίδευσης και αξιολόγησης.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις είναι γενικές και ισχύουν για κάθε νευρο-ασαφές μοντέλο. Ειδικά για τα μοντέλα πρόβλεψης χρονοσειρών είναι αποδοτικότερη η λεπτομερής εξέταση και επιλογή των δειγμάτων μάθησης καθώς και η επιβλεπόμενη διαμέρισή τους στα σύνολα εκμάθησης, ελέγχου και αξιολόγησης γενίκευσης. Αυτό απαιτείται διότι θα πρέπει να συμπεριληφθούν στα τρία σύνολα αντιπροσωπευτικά παραδείγματα των σημείων ενδιαφέροντος.

7.4.6 Ανάπτυξη Μοντέλου και Βελτιστοποίηση

Το επόμενο βήμα της ανάπτυξης ενός μοντέλου μπορεί να αναλυθεί στα ακόλουθα βήματα

1. Αρχική επιλογή των παραμέτρων του δικτύου - Ασαφών κανόνων.
2. Εκπαίδευση.
3. Επισκόπηση και ανάλυση αποτελεσμάτων εκπαίδευσης.
4. Αναθεώρηση παραμέτρων
5. Βελτιστοποίηση μοντέλου.

Η αρχική επιλογή των παραμέτρων αποτελεί μια διαδικασία η οποία στηρίζεται, σε μεγάλο βαθμό, στην εμπειρία από αντίστοιχα ή ανάλογα σε μέγεθος προβλήματα. Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε αρκετές μεθόδους για την εξαγωγή ασαφών κανόνων από δεδομένα. Οι κανόνες αυτοί μπορούν να αποτελέσουν την αρχική επιλογή για τα νευρο-ασαφή μοντέλα.

Κατά τη φάση της επισκόπησης και ανάλυσης των αποτελεσμάτων πρέπει να εξετάζονται δύο μέτρα απόδοσης

- Τα κριτήρια αξιολόγησης ή ακρίβειας προσέγγισης τα οποία συνήθως είναι μετρικές σφάλματος.
- Η πορεία της σύγκλισης κυρίως στο σύνολο ελέγχου.

Στη συνέχεια βελτιστοποιούνται οι παράμετροι του μοντέλου. Τυπικές παράμετροι βελτιστοποίησης είναι

- Ο αριθμός των ασαφών κανόνων άρα και των κόμβων της ενδιάμεσης βαθμίδας.
- Οι αρχικές τιμές των βαρών δηλαδή οι αρχικοί κανόνες.
- Ο ρυθμός μάθησης και ο συντελεστής ορμής.
- Η διατεταγμένη ή τυχαία παρουσίαση των προτύπων στο δίκτυο.
- Η περίοδος εφαρμογής του συνόλου δοκιμών.

Οι παράμετροι που καθορίζουν το μέγεθος του δικτύου έχουν την υψηλότερη συνεισφορά στην ικανότητα γενίκευσης. Ειδικά στα feed-forward δίκτυα ο αριθμός των κόμβων στις ενδιάμεσες βαθμίδες έχει μεγάλο αντίκτυπο στη γενίκευση. Τα μοντέλα αυτά όταν διαθέτουν μεγάλο αριθμό κόμβων τείνουν να απομνημονεύουν τα δεδομένα (overtraining), ενώ αντίθετα αν ο αριθμός των βαρών είναι μικρός τα δίκτυα δεν μπορούν να επιτύχουν την απαιτούμενη ακρίβεια για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Δεδομένου ότι δεν υπάρχει κανένας κανόνας προσδιορισμού των βέλτιστων τιμών των παραμέτρων, η υλοποίηση της παραπάνω διαδικασίας γίνεται με τη μέθοδο του πειραματισμού και σφάλματος (trial and error).

7.4.7 Αξιολόγηση του Μοντέλου

Ο ορισμός της αξιολόγησης μεταβάλλεται ανάλογα με τον τύπο της απεικόνισης που υλοποιεί ένα νευρο-ασαφές μοντέλο. Για μοντέλα ταξινόμησης η αξιολόγηση μπορεί να οριστεί ως το ποσοστό των ορθών ταξινομήσεων στο σύνολο αξιολόγησης γενίκευσης. Για μοντελοποίηση απεικονίσεων δεν μπορεί να οριστεί ένα καθολικά εφαρμόσιμο μέτρο αξιολόγησης της ακρίβειας απεικόνισης και πρέπει να οριστούν κατάλληλα κριτήρια αξιολόγησης, ανάλογα με την εφαρμογή και τους στόχους της μοντελοποίησης.

Ένα δεύτερο σημαντικό ζήτημα είναι ο καθορισμός του συστήματος αναφοράς με το οποίο θα συγκριθούν τα αποτελέσματα του μοντέλου. Υπάρχουν δύο τυπικές προσεγγίσεις. Η μία βασίζεται στην απόδοση του ειδικού (human expert) στο αντικείμενο. Η δεύτερη αξιολογεί το υπό εξέταση σύστημα με το βέλτιστο υπάρχον σύστημα.

Γενικά η απόλυτη αξιολόγηση με βάση μόνο την απόδοση είναι ανεπαρκής. Ένα σύστημα μπορεί να είναι αποδεκτό ακόμη και εάν η απόδοσή του δεν είναι στα ίδια επίπεδα με αυτή του βέλτιστου συστήματος αλλά παρέχει άλλα πλεονεκτήματα. Η μεθόδοι λογία αξιολόγησης διαχωρίζεται σε ποιοτικές και ποσοτικές μεθόδους. Οι ποιοτικές μέθοδοι χρησιμοποιούν υποκειμενικές συγκρίσεις της απόδοσης, ενώ οι ποσοτικές χρησιμοποιούν στατιστικές τεχνικές.

7.4.7.1 Κριτήρια Αξιολόγησης

Η εγκυρότητα της υλοποίησης ενός νευρο-ασαφούς μοντέλου μπορεί να αξιολογηθεί με βάση τα ακόλουθα κριτήρια

- **Απόδοση (Performance)**

Η απόδοση του συστήματος αξιολογείται με βάση μετρικές της ικανότητας γενίκευσης. Τα μέτρα που προκύπτουν ελέγχονται υπό κανονικές συνθήκες και σε συνθήκες θορύβου. Σε συνθήκες θορύβου το σύστημα θα πρέπει να λειτουργεί σωστά, με πιθανώς αυξημένα αλλά εντός αποδεκτών ορίων, σφάλματα.

- **Γενικότητα (Generality)**

Το κριτήριο αυτό εξετάζει εάν η μέθοδος που υλοποιεί το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί επιτυχώς σε πολλούς διαφορετικούς τομείς. Τότε διαθέτει την ιδιότητα της γενικότητας. Όσοι περισσότεροι είναι οι τομείς στους οποίους μπορεί να εφαρμοστεί τόσο γενικότερες είναι οι θεμελιώδεις αρχές του μοντέλου.

- **Ευστάθεια (Stability)**

Το κριτήριο ευστάθειας αναφέρεται στην ικανότητα του μοντέλου να διατηρεί τη γνώση που έχει συσσωρεύσει. Ένα σύστημα μπορεί να «ξεχνά» παλαιότερη γνώση όταν ξεπεραστούν τα όρια της μνήμης του, ή όταν νέα δεδομένα δεν συμφωνούν με παλαιά γνώση. Για να χαρακτηριστεί ένα μοντέλο ως ευσταθές θα πρέπει η συσσώρευση της γνώσης και η απόδοσή του να είναι μονοτονικά αύξουσες στην πάροδο του χρόνου.

- **Αποδοτικότητα (Efficiency)**

Η ιδιότητα της αποδοτικότητας εκτιμά την υπολογιστική πολυπλοκότητα του μοντέλου και την ταχύτητα εκμάθησης. Η αξιολόγηση της αποδοτικότητας γίνεται μεταξύ μοντέλων τα οποία διαθέτουν ορισμένες σταθερές παραμέτρους απόδοσης (π.χ. σταθερό μέσο τετραγωνικό σφάλμα).

- **Συνέπεια (Consistency)**

Η συνέπεια εξετάζει εάν τα συστήματα που παράγονται από το μοντέλο διαθέτουν συνεπή απόδοση σε παρόμοια σύνολα δεδομένων. Το κριτήριο αυτό είναι: ιδιαίτερα σημαντικό για μη-επιβλεπόμενα συστήματα καθώς η μέτρηση της ακρίβειας δεν είναι εφικτή.

- **Δομική Ευστάθεια - Σταδιακή Μάθηση (Incremental Learning)**

Ένα σύστημα το οποίο διαθέτει την ιδιότητα της σταδιακής μάθησης μπορεί να προσαρμόζεται σε νέα δεδομένα και κατά συνέπεια διαθέτει δομική ευστάθεια. Η ιδιότητα αυτή είναι ιδιαίτερα σημαντική για συστήματα που λειτουργούν σε ένα περιβάλλον πραγματικού χρόνου (real-time).

- **Ευαισθησία (Sensitivity)**

Η απόδοση του συστήματος πρέπει να παραμένει σταθερή για μικρές διαταραχές των παραμέτρων του συστήματος ή των δεδομένων εκμάθησης. Υψηλή ευαισθησία σε μικρές αλλαγές στο ίδιο σύστημα ή το περιβάλλον του συνιστούν μικρή ανεκτικότητα στο θόρυβο και τα σφάλματα.

7.4.7.2 Μέτρα Επιδόσεων Μοντέλων Πρόβλεψης Χρονοσειρών

Το μέτρο του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος (MSE) αποτελεί ίσως το πιο γενικό και ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο της επίδοσης ενός συστήματος. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα όπως έχουμε δεί και σε προηγούμενα κεφάλαια δίνεται από τη σχέση

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N (d_p - y_p)^2 \quad (7.30)$$

όπου y_p οι έξοδοι του δικτύου και d_p οι επιθυμητές τιμές.

Παράλληλα με το μέσο τετραγωνικό σφάλμα χρησιμοποιείται η μέση τιμή των απόλυτων σφαλμάτων mAE , και η μέγιστη τιμή του απόλυτου σφαλμάτος MAE που δίνονται από τις σχέσεις

$$mAE = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N |d_p - y_p| \quad (7.31)$$

$$MAE = \max_N |d_p - y_p|. \quad (7.32)$$

Ο συντελεστής συσχέτισης (Correlation Coefficient) αποτελεί ένα κλασικό μέτρο της ακρίβειας πρόβλεψης. Συγκεκριμένα, μετρά τη γραμμική συσχέτιση μεταξύ των προβλεπόμενων τιμών y_p και των πραγματικών (επιθυμητών) τιμών d_p , σταθμισμένη για όλες τις παρατηρήσεις N

$$R = \frac{\sum_{p=1}^N (y_p - \bar{y})(d_p - \bar{d})}{\sqrt{\sum_{p=1}^N (y_p - \bar{y})^2} \sqrt{\sum_{p=1}^N (d_p - \bar{d})^2}} \quad (7.33)$$

όπου \bar{y} και \bar{d} η μέση τιμή των εξόδων του δικτύου και των επιθυμητών εξόδων αντίστοιχα. Συνήθως χρησιμοποιείται το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης R^2 ωστε $R^2 = 1$ να αναπαριστά τέλεια συσχέτιση και $R^2 = 0$ καμία συσχέτιση μεταξύ των εξόδων και των επιθυμητών τιμών.

Ο συντελεστής πληροφορίας (Information Coefficient) μετρά την απόδοση πρόβλεψης ως προς τον τετριμένο προβλέπτη του τυχαίου περιπάτου (random walk). Ο προβλέπτης τυχαίου περιπάτου δίνει ως πρόβλεψη της επόμενης τιμής την τρέχουσα. Ο συντελεστής πληροφορίας δίνεται από τη σχέση

$$T_r = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^N (y_p - d_p)^2}}{\sqrt{\sum_{p=1}^N (d_p - d_{p-1})^2}} \quad (7.34)$$

Ο συντελεστής πληροφορίας T_r δίνει ένα μέτρο της ποιότητας του προβλέπτη. Για τιμές $T_r \geq 1$ ο προβλέπτης είναι χειρότερος από τον τετριμένο προβλέπτη. Αντίστοιχα κάθε προβλέπτης με $T_r < 1$ αποτελεί ένδειξη αποδοτικής λειτουργίας.

Εντελώς αντίστοιχα με το συντελεστή πληροφορίας ορίζεται ο συντελεστής μέσης αναστροφής (Mean Reversion Coefficient) με τη μόνη διαφορά ότι ο τετριμένος προβλέπτης είναι ίσος με τη μέση τιμή της επιθυμητής εξόδου

$$T_\mu = \frac{\sqrt{\sum_{p=1}^N (y_p - d_p)^2}}{\sqrt{\sum_{p=1}^N (\bar{d} - d_{p-1})^2}} \quad (7.35)$$

Όπως έχει ήδη αναλυθεί, κατά τη φάση της επιλογής του μοντέλου ο σχεδιαστής αντιμετωπίζει έναν συμβιβασμό μεταξύ ακρίβειας πρόβλεψης και φειδωλού μοντέλου. Για το σκοπό αυτό έχουν αναπτυχθεί ειδικές μετρικές ακρίβειας που να λαμβάνουν υπ' όψιν και τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου.

Το χρητήριο πληροφορίας του Akaike (Akaike Information Criterion) παρέχει ένα μέτρο στάθμισης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ώστε να ληφθεί υπ' όψιν η πολυπλοκότητα του προβλέπτη

$$A = \frac{1}{N} \left[\frac{N+k}{N-k} \right] \sum_{p=1}^N (d_p - y_p)^2 \quad (7.36)$$

όπου k ο αριθμός των ελεύθερων παραμέτρων του μοντέλου.

Το χρητήριο πληροφορίας του Bayes (Bayesian Information Criterion) αποτελεί μία εναλλακτική μέθοδο στάθμισης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος ώστε να συμπεριληφθεί το κόστος της πολυπλοκότητας. Μια κανονικοποιημένη έκδοση του χρητηρίου που χρησιμοποιείται συχνά είναι

$$B = \ln \left[\frac{\sum_{p=1}^N (d_p - y_p)^2}{N} \right] + \frac{\ln[N]}{N} k \quad (7.37)$$

όπου k είναι ο αριθμός των βαρών. Τα μοντέλα που επιτυγχάνουν τη χαμηλότερη τιμή για τον συντελεστή B παρέχουν τις καλύτερες δυνατότητες πρόβλεψης και γενίκευσης.

Κεφάλαιο 8

Εφαρμογές του ReSuPFuNIS στην Πρόβλεψη Χαοτικών Χρονοσειρών

8.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την απόδοση του νευρο-ασαφούς μοντέλου ReSuPFuNIS που αναπτύχθαμε, στην πρόβλεψη χαοτικών χρονοσειρών. Αρχικά θα εφαρμόσουμε το ReSuPFuNIS στην πρόβλεψη της χρονοσειράς Mackey-Glass που χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία σαν Benchmark των διάφορων μεθόδων πρόβλεψης. Στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην πρόβλεψη πραγματικών χρονοσειρών από την καθημερινή ζωή όπως η θερμοκρασία και η τιμή μετοχών.

Τα αποτελέσματα του μοντέλου είναι συγκρίσιμα με αυτά του SuPFuNIS όπως θα δούμε αναλυτικά και παρακάτω. Στις περισσότερες χρονοσειρές έχουμε εφαρμόσει προ-επεξεργασία σύμφωνα με την μεθοδολογία που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 7.

Σε όλα τα παρακάτω πειράματα, οι αρχικοί κανόνες των νευρο-ασαφών μοντέλων που χρησιμοποιούμε προκύπτουν μέσω τυχαίας επιλογής. Δεν χρησιμοποιούμε κάποια τεχνική clustering για εξαγωγή ασαφών κανόνων από δεδομένα καθώς και μέσω της τυχαίας επιλογής των κανόνων μπορούμε να συγκρίνουμε την επιδραση της αλλαγής των παραμέτρων στην απόδοση του μοντέλου. Αν χρησιμοποιούσαμε κάποια τεχνική clustering, ειδικά για τα μοντέλα με πολλούς κανόνες, θα είχαμε ταχύτερη μείωση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και πολύ καλύτερα αποτελέσματα στις επιδόσεις.

8.2 Πρόβλεψη της Χρονοσειράς Mackey-Glass

Η μοντελοποίηση δυναμικών μη-γραμμικών χρονοσειρών αποτελεί κεντρικό πρόβλημα σε πλήθος επιστημονικών περιοχών. Η χαοτική χρονοσειρά Mackey-Glass αποτελεί benchmark των διαφόρων μεθόδων πρόβλεψης και συναντάται πολύ συχνά στη βιβλιογραφία που ασχολείται με τα νευρο-ασαφή (και όχι μόνο) συστήματα. Η χρονοσειρά προκύπτει από την ακόλουθη διαφορική εξίσωση διαφορών

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{0.2x(t - \tau)}{1 + x^{10}(t - \tau)} - 0.1x(t) \quad (8.1)$$

Καθώς το τ στην παραπάνω εξίσωση μεταβάλλεται, το σύστημα μπορεί να επιδείξει συμπεριφορά περιορισμένης περιοδικότητας, χαοτική ή σταθερού σημείου. Για $\tau = 17$ έχουμε χαοτική συμπεριφορά και για την συγκεκριμένη τιμή του τ θα επιχειρήσουμε την πρόβλεψη.

Το πρόβλημα της πρόβλεψης αντιστοιχεί στην πρόβλεψη μιας μελλοντικής τιμής $x(t + \Delta t)$ της χρονοσειράς με βάση ένα σύνολο τιμές της $x(t)$ σε συγκεκριμένα χρονικά σημεία μικρότερα του t . Η καθιερωμένη μέθοδος για τις προβλέψεις αυτής της μορφής είναι η δημιουργία μιας απεικόνισης από D σημεία της χρονοσειράς που απέχουν μεταξύ τους σταθερή χρονική απόσταση Δ ($x(t - (D - 1)\Delta), \dots, x(t - \Delta), x(t)$), στην πρόβλεψη μιας μελλοντικής τιμής $x(t + \Delta)$. Στόχος είναι να χρησιμοποιήσουμε ένα νευρο-ασαφές μοντέλο το οποίο θα «μάθει» μια απεικόνιση της μορφής

$$x(t + 6) = f(x(t - 18), x(t - 12), x(t - 6), x(t)). \quad (8.2)$$

Για την εκπαίδευση και τον έλεγχο του μοντέλου δημιουργήσαμε ένα σύνολο δεδομένων με εφαρμογή της αριθμητικής μεθόδου Runge-Kutta στην εξίσωση διαφορών 8.1 με βήμα = 0.1 και αρχική συνθήκη $x(0) = 1.2$. Από την χρονοσειρά Mackey-Glass $x(t)$ που προήλθε, μέσω της διαδικασίας που αναφέραμε, πήραμε 1000 ζευγάρια εισόδων-εξόδων από $t = 118$ έως 1117 στην ακόλουθη μορφή

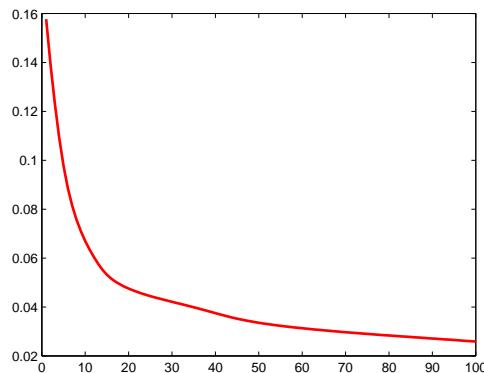
$$[x(t-18), x(t-12), x(t-6); x(t+6)]. \quad (8.3)$$

όπου οι τρείς πρώτες τιμές είναι είσοδοι στο σύστημα και η τελευταία τιμή είναι η επιθυμητή έξοδος. Αξίζει να σημειώσουμε ότι λόγω της αναδρομικής σύνδεσης στο δίκτυο μπαίνει σαν είσοδο κάθε φορά και η πρόβλεψη πριν 6 χρονικές μονάδες δηλαδή η τιμή $y(t)$. Τα πρώτα 500 ζευγάρια χρησιμοποιήθηκαν για την εκπαίδευση ενώ τα υπόλοιπα 500 αποτέλεσαν το σύνολο ελέγχου. Η εκπαίδευση γίνεται με ακολουθιακή παρουσίαση των προτύπων και ενημέρωση των βαρών μετά από κάθε πρότυπο, σύμφωνα με τις εξισώσεις του κεφαλαίου 7.

Η χρονοσειρά Mackey-Glass δεν είναι ιδανική για την επίδοση των αναδρομικών δικτύων καθώς προσεγγίζεται πολύ καλά και από ένα απλό νευρωνικό δίκτυο. Για το λόγο αυτό όμως εξετάσουμε τα αποτελέσματα εν συντομίᾳ και όμως περάσουμε σε δύο άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές του ReSuPFuNIS.

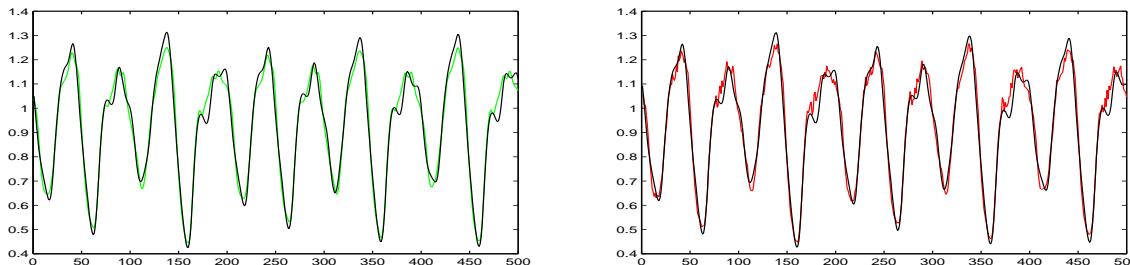
Το ReSuPFuNIS παρουσιάζει στην πρόβλεψη της χρονοσειράς Mackey-Glass αντίστοιχες επιδόσεις με αυτές του SuPFuNIS. Για 3 κανόνες, που τα αρχικά τους βάρη έχουν επιλεγεί τυχαία, εμφανίζει μέσο τετραγωνικό σφάλμα 0.025959 στα δεδομένα εκπαίδευσης ενώ 0.0275 στο σύνολο ελέγχου. Τα αποτελέσματα αυτά είναι καλύτερα από αυτά του SuPFuNIS το οποίο εκπαιδεύεται για 500 εποχές με μεταβλητό ρυθμό μάθησης αλλά και όρο ορμής.

Αντίστοιχα είναι τα αποτελέσματα και για μοντέλα με μεγαλύτερο αριθμό κανόνων. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την καμπύλη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος για ένα μοντέλο ReSuPFuNIS με 4 κανόνες σε διάστημα 100 εποχών. Η εκπαίδευση γίνεται με σταθερό ρυθμό μάθησης 0.005.



Σχήμα 8.1 - Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της χρονοσειράς Mackey-Glass (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).

Παρακάτω μπορούμε να δούμε την απόδοση του μοντέλου τόσο στο σύνολο εκπαίδευσης (αριστερά) όσο και στο σύνολο ελέγχου. Με μάρο συμβολίζεται η επιθυμητή έξοδος.



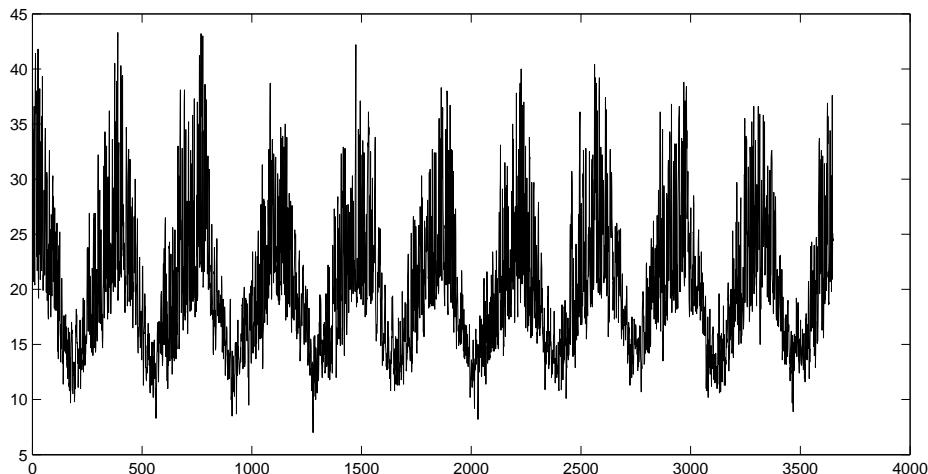
Σχήμα 8.2 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της χρονοσειράς Mackey-Glass στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).

8.3 Πρόβλεψη Μέγιστης Ημερήσιας Θερμοκρασίας

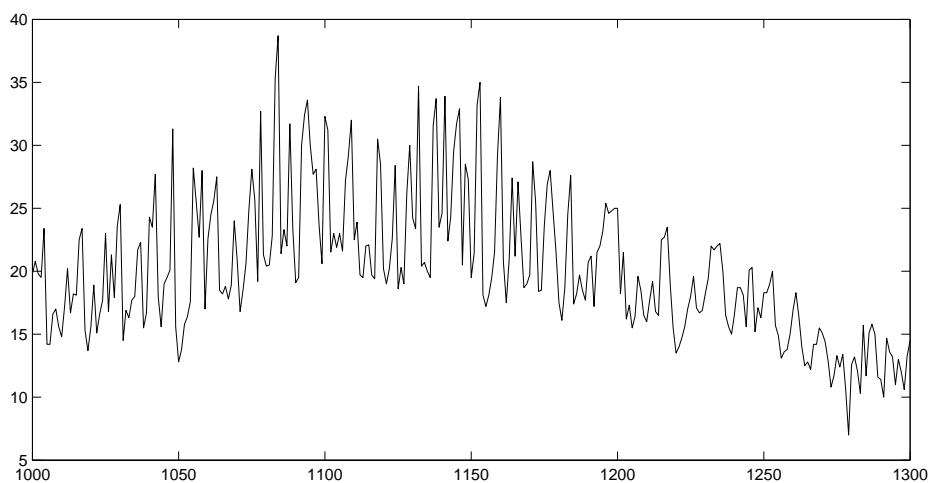
Ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα ήταν αυτό της πρόβλεψης κάποιας πραγματικής χρονοσειράς, η οποία επηρεάζει άμεσα την καθημερινή μας ζωή. Σε αυτού του είδους τις χρονοσειρές ανήκουν και οι μετεωρολογικές (θερμοκρασία, υγρασία, ταχύτητα ανέμου, ηλιοφάνεια κλπ), η επιτυχής πρόβλεψη των οποίων με χρήση νευρο-ασαφών μοντέλων θα ήταν πολύ σημαντική.

Μετά από αναζήτηση στο Διαδίκτυο βρήκαμε πληθώρα μετεωρολογικών χρονοσειρών. Αποφασίσαμε να εφαρμόσουμε το ReSuPFuNIS στην πρόβλεψη της μέγιστης ημερήσιας θερμοκρασίας στην Μελβούρνη της Αυστραλίας. Ο λόγος αυτής της επιλογής ήταν η μεγάλη χρονική διάρκεια της χρονοσειράς αυτής (από το 1981 έως το 1990), εν αντιθέσει με άλλες χρονοσειρές που ήταν πολύ σύντομες (διάρκεια έως πέντε χρόνια). Προτιμάται η χρήση χρονοσειρών μεγάλης διάρκειας γιατί το μοντέλο καταφέρνει να αποτυπώσει τις γενικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών εισόδου και εξόδου, και όχι κάποια βραχυχρόνια σύνδεσή τους που μπορεί να οφείλεται σε τυχαία περιστατικά μιας μικρής χρονικής περιόδου.

Η χρονοσειρά που χρησιμοποιήσαμε προέρχεται από την Μετεωρολογική Υπηρεσία της Αυστραλίας και περιέχει 3650 μετρήσεις θερμοκρασίας. Η μονάδα που χρησιμοποιείται είναι βαθμοί Celsius. Παρακάτω απεικονίζεται η εν λόγω χρονοσειρά ενώ έχουμε μεγενθύνει και για διάστημα τριακοσίων ημερών.



Σχήμα 8.3 - Μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία στην Μελβούρνη από το 1981 έως το 1990.



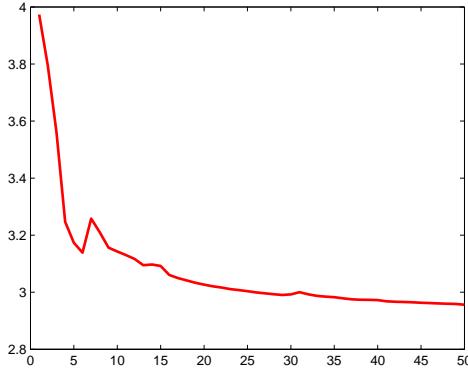
Σχήμα 8.4 - Μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία στην Μελβούρνη για διάστημα 300 ημερών.

Για την πρόβλεψη χρησιμοποιήσαμε ένα μοντέλο που δέχεται σαν εισόδους την μέση τιμή της μέγιστης ημερήσιας θερμοκρασίας της προηγούμενης εβδομάδας ($\frac{1}{7}\sigma_{i=1}^7 T(t-i)$) και τις μετρήσεις των δύο προηγούμενων ημερών ($T(t-1)$, $T(t-2)$). Ακόμα χρησιμοποιούμε σαν είσοδο λόγω της αναδρομικότητας

του μοντέλου μας την προηγούμενη έξοδο. Στόχος είναι η πρόβλεψη της μέγιστης ημερήσιας θερμοκρασίας την επομένη $T(t)$, όπου με T συμβολίζουμε τη θερμοκρασία (Temperature). Στα δεδομένα δεν χρειάστηκε να εφαρμόσουμε κάποια κανονικοποίηση καθώς όλες οι μεταβλητές εισόδου είναι τιμές του ίδιου μεγέθους και έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού. Η αφαίρεση της γραμμής τάσης δεν έχει νόημα για την συγκεκριμένη χρονοσειρά ενώ χρίναμε πως η χρησιμοποίηση κάποιας τεχνικής αφαίρεσης υορύβου θα οδηγούσε στην απώλεια σημαντικής πληροφορίας.

Την χρονοσειρά την σπάσαμε σε δύο σύνολα μεγέθους χιλίων δειγμάτων το καθένα. Το σύνολο εκπαίδευσης περιέχει 1000 πρότυπα ενώ οι αμέσως επόμενες 1000 παρατηρήσεις συνιστούν το σύνολο ελέγχου. Αξίζει να σημειωθούμε πως λόγω της αναδρομικότητας, όπως έχουμε τονίσει και σε προηγούμενα κεφάλαια, τα δεδομένα δεν μπορούν να εισάγονται με τυχαία χρονική σειρά αλλά μόνο ακολουθιακά.

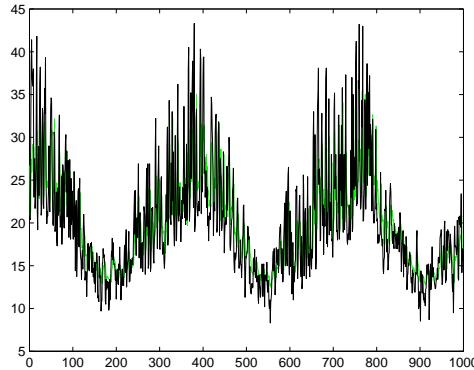
Αρχικά εκπαίδευσαμε ένα μοντέλο με τέσσερις μόνο κανόνες για 50 εποχές, χρησιμοποιώντας σταθερό ρυθμό μάθησης 0.005. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η εξέλιξη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος συναρτήσει της εποχής εκπαίδευσης.



Σχήμα 8.5 - Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).

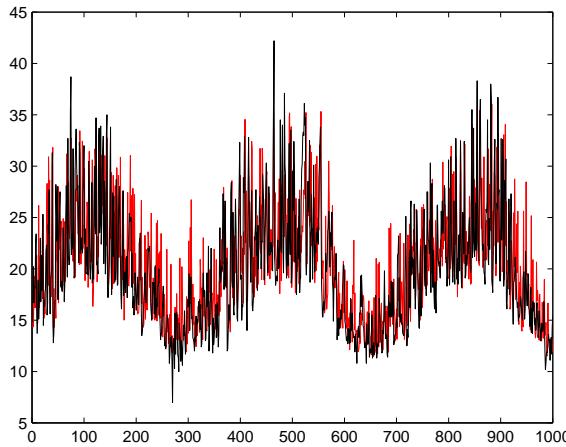
Παρατηρούμε στην παραπάνω καμπύλη, ότι για ορισμένες εποχές το μέσο τετραγωνικό σφάλμα αυξάνεται. Κάτι τέτοιο δεν πρέπει να μας φαίνεται παράλογο γιατί όπως έχουμε εξηγήσει στο τέταρτο Κεφάλαιο, ο αλγόριθμος της απότομης καθύδου στον οποίο και βασίζεται το ReSuPFuNIS, δεν εγγυάται συγχλίνουσα συμπεριφορά. Η τοπική αποκλίνουσα συμπεριφορά που παρατηρούμε οφείλεται στον σχετικά μεγάλο ρυθμό μάθησης. Αξίζει να τονίσουμε πως για άλλη μια φορά το σημαντικό στάδιο της εκπαίδευσης ολοκληρώνεται στις πρώτες 10-15 εποχές ενώ στη συνέχεια βελτιστοποιούνται οι παράμετροι του μοντέλου.

Παρακάτω μπορούμε να δούμε την απόδοση του μοντέλου στα δεδομένα εκπαίδευσης μετά την περάτωση των πενήντα εποχών. Με μαύρο χρώμα είναι η καμπύλη της πραγματικής θερμοκρασίας ενώ με πράσινο η τιμή που προέβλεψε το μοντέλο.



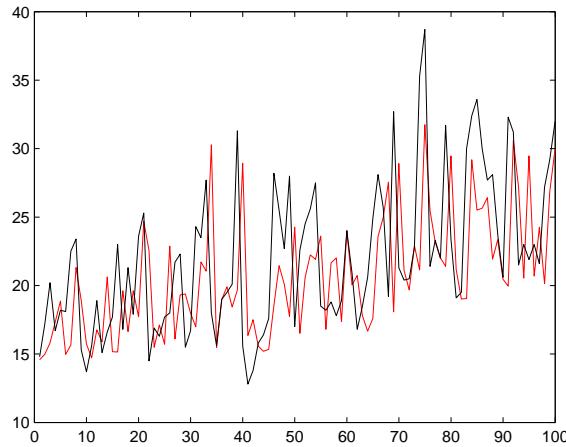
Σχήμα 8.6 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας στο σύνολο εκπαίδευσης (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα στα δεδομένα εκπαίδευσης είναι 2.9562 βαθμοί Celsius. Προχωράμε τώρα στον έλεγχο του μοντέλου μέσω του συνόλου ελέγχου. Τώρα η προβλεπόμενη τιμή απεικονίζεται με κόκκινο χρώμα.



Σχήμα 8.7 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας στο σύνολο ελέγχου (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).

Στο σύνολο ελέγχου το μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι 3.2541 πολύ κοντά δηλαδή στο σφάλμα που παρατηρήσαμε μετά την ολοκλήρωση της εκπαίδευσης. Αυτό το γεγονός δείχνει ότι το δίκτυο δεν υπερεκπαιδεύτηκε και κατάφερε να βρει μια απεικόνιση ανάμεσα στις επιλεγμένες μεταβλητές εισόδου και την έξοδο με ένα σφάλμα της τάξης των τριών βαθμών Celsius. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μεγενθυμένο ένα τμήμα της παραπάνω καμπύλης όπου διαπιστώνεται η σχετικά αξιόπιστη απόδοση του ReSuPFuNIS στην πρόβλεψη της θερμοκρασίας.

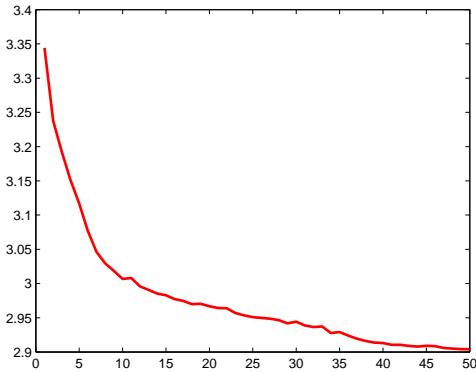


Σχήμα 8.8 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας σε τμήμα του συνόλου ελέγχου (4 κανόνες, 0.005 ρυθμός μάθησης).

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα στα παραπάνω 100 πρότυπα ελέγχου ήταν 3.0542 τιμή σχεδόν ταυτόσημη με αυτή στα δεδομένα εκπαίδευσης.

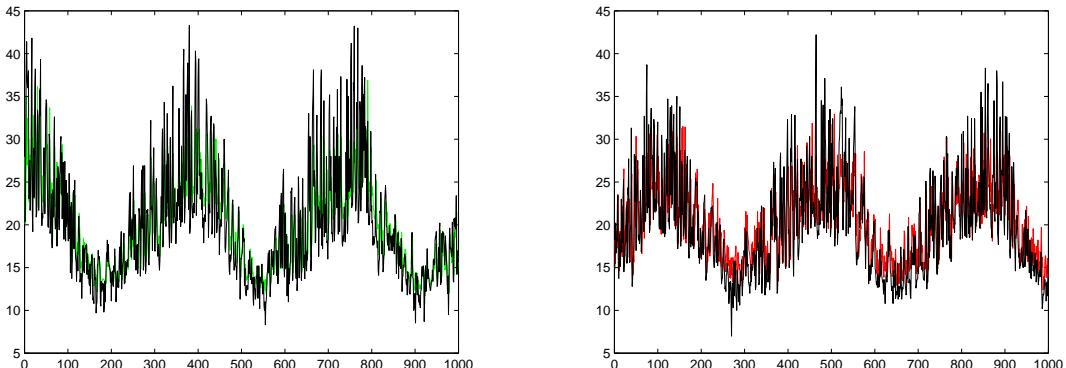
Στη συνέχεια αυξάνουμε τον αριθμό των κανόνων σε 8 και χρησιμοποιούμε σταθερό ρυθμό μάθησης 0.007. Οι εποχές εκπαίδευσης παραμένουν 50. Η καμπύλη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος φαίνεται παρακάτω. Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα στα δεδομένα εκπαίδευσης μετά από 50 εποχές είναι 2.904. Παρατηρούμε πως και τώρα σε ορισμένα σημεία της εκπαίδευσης ο αλγόριθμος αποκλίνει, αλλά σε πολύ μικρότερο βαθμό από ότι απέκλινε πριν, παρόλο που τώρα ο ρυθμός μάθησης είναι αρκετά μεγαλύτερος. Μια άλλη σημαντική παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε, είναι ότι το σφάλμα δεν έχει σταθεροποιηθεί όπως προηγουμένως, αλλά συνεχίζει να μειώνεται με σημαντικό ρυθμό. Από την παρατήρηση αυτή συμπεραίνουμε ότι οι πενήντα

εποχές δεν επαρκούσαν για την εκπαίδευση του μοντέλου. Εκπαίδευση για περισσότερες εποχές όμως οδηγούσε σε μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα στα δεδομένα εκπαίδευσης και πιθανώς στο σύνολο ελέγχου. Τέλος βλέπουμε ότι και σε αυτό το παράδειγμα στις πρώτες δέκα εποχές επιτελείται το σημαντικότερο στάδιο της εκπαίδευσης διαδικασίας.

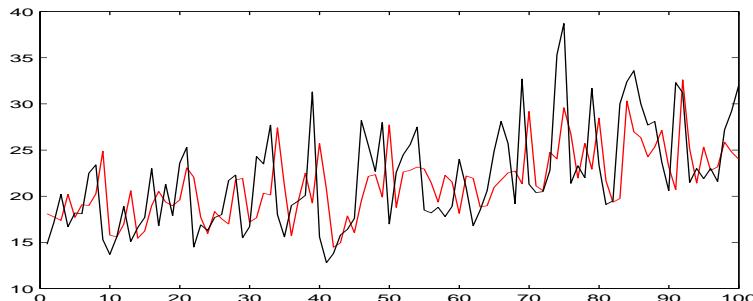


Σχήμα 8.9 - Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας (8 κανόνες, 0.007 ρυθμός μάθησης).

Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε την απόδοση του μοντέλου με τους 8 κανόνες τόσο στα δεδομένα εκπαίδευσης όσο και στο σύνολο ελέγχου. Στο σύνολο ελέγχου επετεύχθη μέσο τετραγωνικό σφάλμα αντίστοιχο αυτού που παρουσιάστηκε στα δεδομένα εκπαίδευσης (2.9603).



Σχήμα 8.10 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (8 κανόνες, 0.007 ρυθμός μάθησης).



Σχήμα 8.11 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της θερμοκρασίας σε τμήμα του συνόλου ελέγχου (8 κανόνες, 0.007 ρυθμός μάθησης).

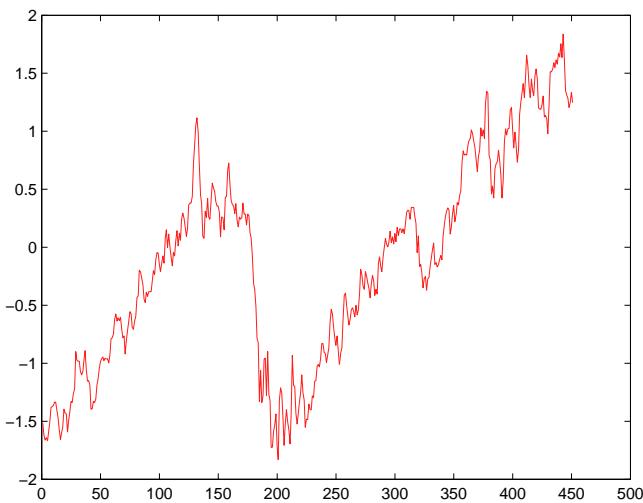
8.4 Πρόβλεψη Τιμής Μετοχής

Ένας από τους κύριους στόχους αυτής της διπλωματικής ήταν η δημιουργία ενός νευρο-ασαφούς μοντέλου που θα έβρισκε εφαρμογή στην πρόβλεψη οικονομικών χρονοσειρών. Αποφασίσαμε να ελέγξουμε την δυνατότητα του ReSuPFuNIS να προβλέψει την τιμή μετοχών του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών. Η μεθοδολογία που ακολουθήσαμε μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε μετοχή, ενώ με μερικές παραλλαγές θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την πρόβλεψη μεγεθών όπως ο γενικός δείκτης, οι ισοτιμίες συναλλάγματος, τα αμοιβαία κεφάλαια και πολλά άλλα.

Στην παρούσα εργασία, ασχοληθήκαμε με την πρόβλεψη της τιμής της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας της Ελλάδος. Τις τιμές της μετοχής αλλά και όλων των άλλων μεγεθών που χρησιμοποιήσαμε σαν εισόδους στο μοντέλο, τα βρήκαμε στον δίκτυουντο τόπο της εφημερίδας Ναυτεμπορική.

Σαν εισόδους χρησιμοποιήσαμε τις τιμές $E(t-2)$, $E(t-3)$ της μετοχής, την τιμή κλεισίματος της προηγούμενης μέρας του Γενικού Δείκτη του Χρηματιστηρίου, την αντίστοιχη τιμή του κλαδικού δείκτη τραπεζών και τον Dow Jones. Το μοντέλο δίνει στην έξοδό του την πρόβλεψη για την τιμή της μετοχής τη χρονική στιγμή t ($E(t)$). Σαν είσοδος εισέρχεται λόγω της αναδρομικής σύνδεσης και η προηγούμενη πρόβλεψη του μοντέλου. Επειδή οι διάφορες είσοδοι διαφέρουν σημαντικά ως προς τις τιμές που παίρνουν, τις έχουμε κανονικοποιήσει ώστε να έχουν μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία τυπική απόκλιση. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι για να μην αγνοήσει το μοντέλο κάποια είσοδο που παίρνει μικρές τιμές σε σχέση με τις υπόλοιπες εισόδους, αλλά παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην πρόβλεψη.

Κατά τη διάρκεια των πειραματισμών αφαιρέσαμε μερικές εισόδους για να δούμε την σημαντικότητά τους. Οι χρονοσειρές αποτελούνταν από 450 μετρήσεις μέσα σε ένα χρονικό ορίζοντα δύο ετών. Από αυτά τα δείγματα, τα 200 πρώτα αποτέλεσαν το σύνολο εκπαίδευσης ενώ τα υπόλοιπα το σύνολο ελέγχου. Παρακάτω βλέπουμε την διακύμανση της τιμής της Εθνικής Τράπεζας στο διάστημα των 450 ημερών.



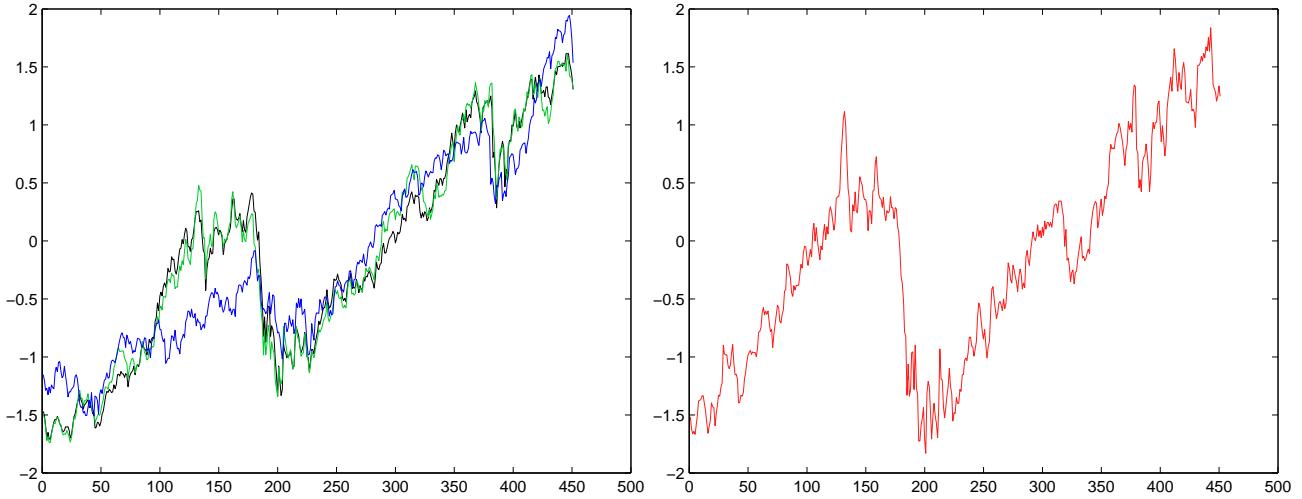
Σχήμα 8.12 - Τιμή της Εθνικής Τράπεζας (κανονικοποιημένες τιμές) σε διάστημα 450 ημερών.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέγεθος των χρονοσειρών είναι πολύ μικρό γι' αυτό και εστιάσαμε σε βραχυχρόνιες προβλέψεις, καθώς το μοντέλο μπορεί να αναγνωρίσει τοπικές απεικονίσεις από το χώρο εισόδου στο χώρο εξόδου. Ερευνώντας τη διευθύνη βιβλιογραφία διαπιστώσαμε ότι σε αντίστοιχες εφαρμογές χρησιμοποιούνται χρονοσειρές διάρκειας τουλάχιστον δέκα ετών. Δυστυχώς δεν καταφέραμε να βρούμε τέτοια σύνολα δεδομένων για μετοχές του Χρηματιστηρίου Αθηνών.

Λόγω της πολυπλοκότητας της πρόβλεψης και των πολλών παραγόντων που επηρεάζουν την τιμή μιας μετοχής, χρησιμοποιήσαμε νευρο-ασαφή μοντέλα με πολλούς κανόνες έτσι ώστε να καταφέρουμε όσο το δυνατόν καλύτερη μοντελοποίηση. Επίσης διαπιστώσαμε ότι η εκπαίδευση του δικτύου για μεγάλο αριθμό εποχών δεν έχει νόημα καθώς στις πρώτες 30 το μοντέλο φτάνει στη βέλτιστη απόδοση.

Για να έχουμε μια εποπτική εικόνα των μεταβλητών εισόδου στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε αριστερά την κίνηση του Γενικού Δείκτη (μαύρο χρώμα), του δείκτη του κλαδίου των τραπεζών (πράσινο) και την διακύμανση του Dow Jones (μπλέ), ενώ δεξιά η τιμή της μετοχής της Εθνικής Τράπεζας για τις ίδιες 450

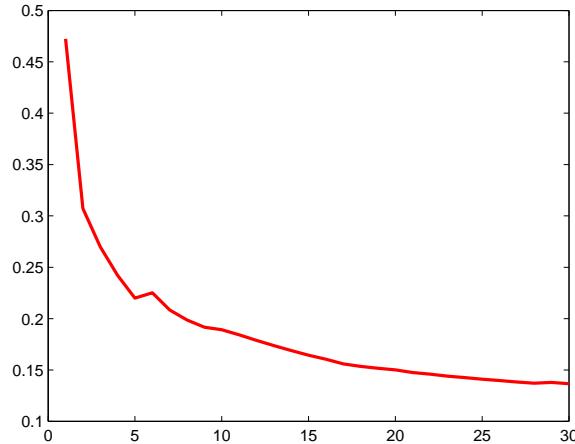
μέρες. Οι υπόλοιπες είσοδοι του μοντέλου που χρησιμοποιούμε, δεν έχει νόημα να σχεδιαστούν καθώς αποτελούν χρονική ολίσθηση της επιθυμητής εξόδου.



Σχήμα 8.13 - Είσοδοι για την πρόβλεψη της τιμής μετοχής της Εθνικής Τράπεζας (αριστερά) και η επιθυμητή έξοδος του μοντέλου (δεξιά), σε διάστημα 450 ημερών.

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μερικά από τα πειράματα που διεξαγάγαμε και θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα.

Αρχικά δημιουργούμε ένα μοντέλο με 9 κανόνες. Επιλέγουμε σταυρερό ρυθμό μάθησης 0.003 και το εκπαίδευσμε για 30 εποχές. Η καμπύλη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος φαίνεται παρακάτω.

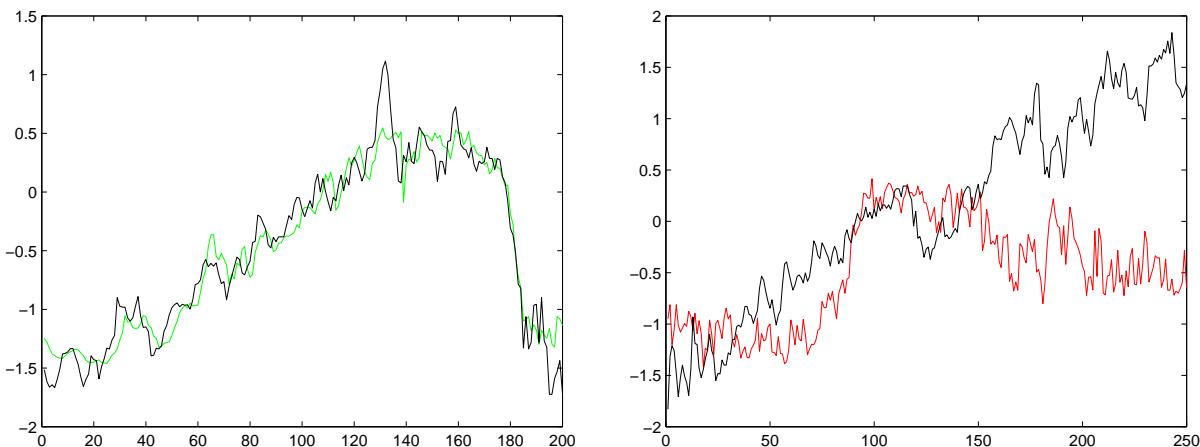


Σχήμα 8.14 - Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE (9 κανόνες, 0.003 ρυθμός μάθησης).

Παρατηρούμε ότι οι παράμετροι έχουν ακόμα περιθώρια βελτίωσης, λόγω του μικρού ρυθμού μάθησης. Στα δεδομένα εκπαίδευσης το σφάλμα ήταν 0.13792 ενώ στα δεδομένα ελέγχου 0.7268. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η επιθυμητή έξοδος και η πρόβλεψη του ReSuPFuNIS τόσο στο σύνολο εκπαίδευσης όσο και στα δεδομένα ελέγχου.

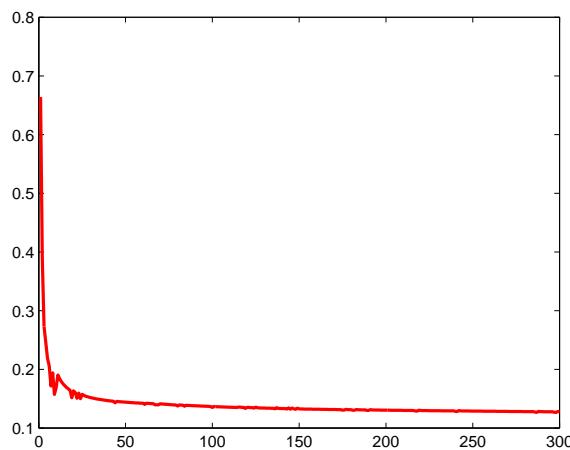
Εύκολα μπορεί κάποιος να δει, ότι ενώ στα δεδομένα εκπαίδευσης το μοντέλο προσεγγίζει ικανοποιητικά την επιθυμητή έξοδο, στο σύνολο ελέγχου υπάρχει μεγάλη απόκλιση. Αποκλείουμε την πιθανότητα της υπερεκπαίδευσης καθώς η εκπαίδευση διήρκεσε μόλις 30 εποχές. Η αιτία της μεγάλης αυτής απόκλισης οφείλεται κυρίως στον μικρό αριθμό κανόνων, καθώς όπως θα δούμε στη συνέχεια, αυξάνοντας τους κανόνες αυξάνονται σημαντικά και οι επιδόσεις. Ακόμα ίσως κάποια από τις μεταβλητές εισόδου είναι αυτή που ευθύνεται για την κακή απόδοση. Σε επόμενο πείραμα θα αφαιρέσουμε από τις εισόδους τον δείκτη Dow Jones καθώς είναι η είσοδος εκείνη που δεν σχετίζεται εμφανώς με την τιμή των μετοχών του Χρηματιστηρίου

Αξιών Αθηνών.



Σχήμα 8.15 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (9 κανόνες, 0.003 ρυθμός μάθησης).

Για να δείξουμε ότι η εκπαίδευση του ReSuPFuNIS δεν χρειάζεται παραπάνω από 30 εποχές για προβλήματα πρόβλεψης τιμών μετοχών, εκτελούμε την εκπαίδευτική διαδικασία με τις ίδιες παραμέτρους με πριν αλλά για 300 εποχές. Η καμπύλη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος φαίνεται παρακάτω.

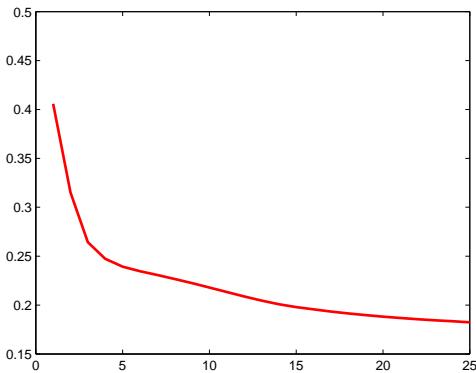


Σχήμα 8.16 - Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE (9 κανόνες, 0.003 ρυθμός μάθησης).

Παρατηρούμε ότι στις 50 εποχές το RMSE ελαχιστοποιείται. Το μοντέλο εκπαιδευμένο για 300 εποχές παρουσίασε τις ίδιες αποδόσεις με πριν τόσο στο σύνολο εκπαίδευσης όσο και στο σύνολο ελέγχου. Για το λόγο αυτό στη συνέχεια, τα πειράματα που εκτελούμε δεν ξεπερνούν σε διάρκεια τις 30 εποχές.

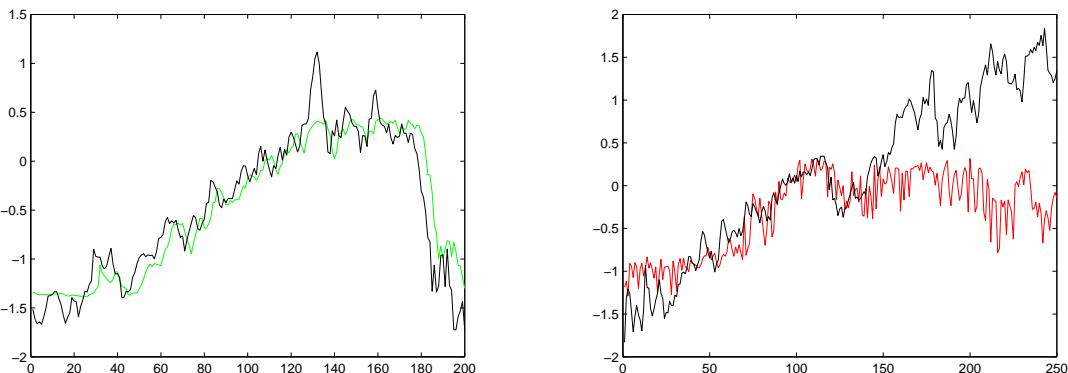
Στο επόμενο πείραμα αφαιρέσαμε από τις εισόδους την διακύμανση του Dow Jones και αυξήσαμε τους κανόνες σε 10. Εκπαιδεύσαμε το δίκτυο για 25 εποχές με σταθερό ρυθμό μάθησης ίσο με 0.008. Η καμπύλη του μέσου τετραγωνικού σφάλματος παρουσιάζει απόλυτα συγκλίνουσα συμπεριφορά και φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το σφάλμα στα δεδομένα εκπαίδευσης είναι 0.18227. Η τιμή αυτή όπως φαίνεται από την καμπύλη του RMSE θα μπορούσε να μειωθεί κι' άλλο αν συνεχιζόταν η εκπαίδευση για μερικές ακόμα εποχές. Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση του Dow Jones από τις εισόδους δεν επηρεάζει την απόδοση του μοντέλου, οπότε η τιμή αυτής της μεταβλητής δεν παίζει σημαντικό ρόλο για την μετοχή της Ευρωπαϊκής Τράπεζας, ή τουλάχιστον το μοντέλο δεν βελτιώνει την επίδοσή του αν δεχτεί σαν είσοδο τις μονάδες κλείσιματος του Dow Jones την προηγούμενη μέρα. Αντιθέτως διαπιστώσαμε ότι πιθανή αφαίρεση από τις εισόδους του Γενικού Δείκτη του

Χρηματιστηρίου Αξιών Αυθηνών, είχε σημαντικές επιπτώσεις στην επίδοση και στις δυνατότητες πρόβλεψης του ReSuPFuNIS.



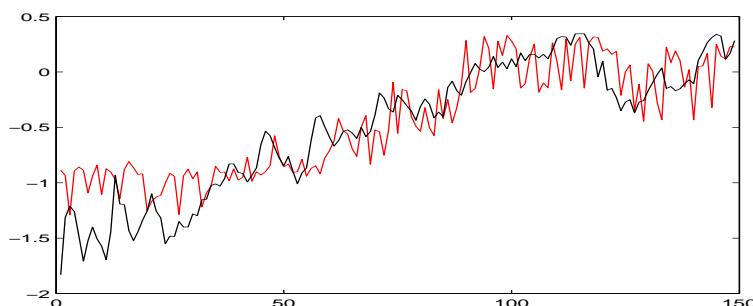
Σχήμα 8.17 - Καμπύλη RMSE συναρτήσει εποχών για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE (10 κανόνες, 0.008 ρυθμός μάθησης).

Στο σύνολο ελέγχου το μοντέλο είχε σφάλμα 0.54782, σημαντικά μικρότερο από πριν. Παρακάτω βλέπουμε τις πραγματικές εξόδους και τις αντίστοιχες επιυθυμητές τιμές (πραγματικές τιμές της μετοχής) στα δύο σύνολα.



Σχήμα 8.18 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της μετοχής της ETE στα σύνολα εκπαίδευσης και ελέγχου (10 κανόνες, 0.008 ρυθμός μάθησης).

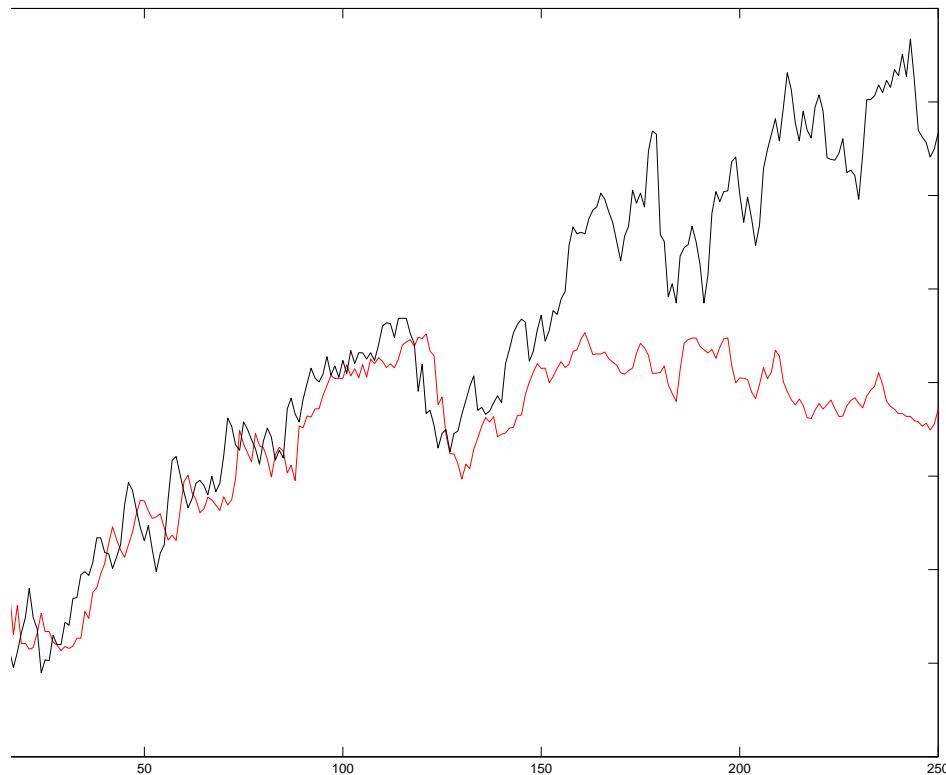
Παρατηρούμε ότι στο σύνολο ελέγχου ενώ αρχικά η πρόβλεψη ακολουθεί την επιυθυμητή καμπύλη, στη συνέχεια έχουμε πολύ μεγάλο σφάλμα. Παρακάτω βλέπουμε τα αποτελέσματα της πρόβλεψης μόνο για τις πρώτες 150 μέρες του συνόλου ελέγχου, όπου το σφάλμα είναι μόλις 0.21487. Τους λόγους του φαινομένου αυτού θα τους εξηγήσουμε στο επόμενο πείραμα όπου φαίνεται ακόμα πιο έντονα.



Σχήμα 8.19 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την μετοχή της Εθνικής Τράπεζας σε τμήμα του συνόλου ελέγχου (10 κανόνες, 0.008 ρυθμός μάθησης).

Τέλος, εκτελέσαμε τη διαδικασία εκπαίδευσης, για τα ίδια δεδομένα εισόδου, σ' ένα μοντέλο με 13 κανόνες,

με σταθερό ρυθμό μάθησης 0.009 και για χρονικό διάστημα 30 εποχών. Η σύγκριση των επιθυμητών και των πραγματικών εξόδων στο σύνολο ελέγχου φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 8.20 - Πραγματικές τιμές και έξοδος ReSuPFuNIS για την πρόβλεψη της μετοχής της ΕΤΕ στο σύνολο ελέγχου (13 κανόνες, 0.009 ρυθμός μάθησης).

Στο σύνολο εκπαίδευσης έχουμε μέσο τετραγωνικό σφάλμα 0.18413 ενώ στο σύνολο ελέγχου 0.5413. Παρατηρούμε και πάλι ότι ενώ τις πρώτες μέρες στο σύνολο ελέγχου, η έξοδος του δικτύου ακολουθεί την επιθυμητή, από ένα σημείο και μετά το σφάλμα μεγαλώνει σημαντικά και υπάρχει πλήρης απόκλιση. Ο λόγος για τον οποίο συμβαίνει αυτό είναι ο εξής:

Το νευρο-ασαφές μοντέλο έχει «μάθει» μια απεικόνιση ανάμεσα στις μεταβλητές εισόδου και τις μεταβλητές εξόδου. Η «μάθηση» αυτή έχει γίνει με βάση κάποια πρότυπα εκπαίδευσης τα οποία βρίσκονται μεταξύ κάποιων ακραίων τιμών, τόσο στις μεταβλητές εισόδου όσο και στις μεταβλητές εξόδου. Αν τώρα στο μοντέλο παρουσιαστούν είσοδοι οι οποίες βρίσκονται εκτός των ορίων αυτών (εκτός δηλαδή του πεδίου ορισμού των μεταβλητών εισόδου το οποίο έχει συναντήσει κατά την εκπαίδευση), τότε προφανώς το μοντέλο θα δώσει μια τιμή εξόδου η οποία θα πρέπει να βρίσκεται μέσα στο σύνολο τιμών των μεταβλητών εξόδου που έχει μάθει. Προφανώς λοιπόν τότε θα έχουμε σφάλμα.

Αν στο παράδειγμά μας παρατηρήσουμε τις μεταβλητές εισόδου θα δούμε ότι τις πρώτες 200 μέρες (σύνολο εκπαίδευσης) παίρνουν τιμές μέχρι το 0.5. Στη συνέχεια όμως από την 350 μέρα και μετά (150 στο σύνολο ελέγχου) οι τιμές τους ξεπερνούν αυτό το όριο. Όταν λοιπόν γίνεται η εκπαίδευση το μοντέλο έχει «μάθει» να ανταποκρίνεται σωστά όταν οι μεταβλητές εισόδου είναι μέχρι 0.5. Για το λόγο αυτό, για τις πρώτες 150 μέρες του συνόλου ελέγχου το ReSuPFuNIS εμφανίζει εξαιρετικά αποτελέσματα. Στη συνέχεια όμως οι μεταβλητές εισόδου παίρνουν τιμές τις οποίες το σύστημα δεν έχει ξανασυναντήσει με αποτέλεσμα μια σωστή πρόβλεψη να είναι αδύνατη.

Για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα μπορούσαμε να είχαμε αφαιρέσει τη γραμμή τάσης από τα δεδομένα εισόδου και εξόδου. Κάτι τέτοιο όμως οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας που ειδικά για χρηματιστηριακές χρονοσειρές είναι ανεπιθύμητο. Για τον λόγο αυτό χρειάζεται μεγάλο πλήθος δεδομένων στο σύνολο εκπαίδευσης (αρκετά χρόνια) ώστε το σύστημα να έχει συναντήσει την πλειοψηφία των τιμών που θα μπορούσε να συναντήσει στις μεταβλητές εισόδου. και να δίνει έτσι σωστότερα αποτελέσματα.

8.5 Συμπεράσματα

Το ReSuPFuNIS εμφανίζει αξιόλογα αποτελέσματα στην πρόβλεψη χαοτικών χρονοσειρών. Οι αναδρομικές συνδέσεις που περιλαμβάνει το καθιστούν ικανό να προσωμειώνει δυναμικά συστήματα και να μοντελοποιεί χαοτικές χρονοσειρές. Όπως όλα τα νευρο-ασαφή συστήματα απαιτεί πειραματισμό για την εύρεση των μεταβλητών-παραμέτρων που βλετιστοποιούν την απόδοσή του για κάθε πρόβλημα πρόβλεψης.

Μπορεί να βρει εφαρμογή σε πληθώρα επιστημονικών περιοχών όπου η πρόβλεψη τυχαίων χρονοσειρών είναι σημαντική. Τέτοιες περιοχές είναι η μετεωρολογία, η οικονομική επιστήμη, η γεωλογία κον. Το ReSuPFuNIS με την αναδρομικότητα που παρέχει έρχεται να καλύψει ένα κενό στην βιβλιογραφία, καθώς σπανίζουν τα νευρο-ασαφή συστήματα με αναδρομικές συνδέσεις.

Η χρήση κάποιας τεχνικής clustering για την εξαγωγή των αρχικών κανόνων από τα σύνολα δεδομένων μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε πολύ καλύτερα αποτελέσματα απ' ότι η χρήση τυχαίων αρχικών κανόνων. Οι τεχνικές αυτές όμως απαιτούν υπολογιστικό κόστος και θα πρέπει να αποφασίζεται σε κάθε περίπτωση αν προτιμάται η γρήγορη πρόβλεψη ή η βελτιωμένη απόδοση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] AHMED, M., YAMANY, S., MOHAMED, N., FARAG, A., AND MORIARTY, T. A modified fuzzy c-means algorithm for bias field estimation and segmentation of MRI data. *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 21 (2002), 193–199.
- [2] ANG, K. K., AND QUEK, C. Stock trading using rspot: A novel rough set-based neuro-fuzzy approach. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17 (2006), 1301–1315.
- [3] ARMANO, G., MARCHESI, M., AND MURRU, A. A hybrid genetic-neural architecture for stock indexes forecasting. *Information Sciences* 170 (2005), 3–33.
- [4] ATIYA, A. F., AND PARLOS, A. G. New results on recurrent network training: Unifying the algorithms and accelerating convergence. *IEEE Transactions on Neural Networks* 11 (2000), 697–709.
- [5] BARBOUNIS, T., AND THEOCHARIS, J. Locally recurrent neural networks for long-term wind speed and power prediction. *Neurocomputing* 69 (2006), 466–496.
- [6] BATYRSHIN, I. On linguistic representation of quantitative dependencies. *Expert Systems with Applications* 26 (2004), 95–104.
- [7] BINKS, D., AND ALLINSON, N. Financial data recognition and prediction using neural networks. *Artificial Neural Networks* 2 (1991), 1709–1712.
- [8] BISHOP, C. *Neural Networks for Pattern Recognition*. Oxford University Press, 1995.
- [9] BOUCHACHIA, A., AND PEDRYCZ, W. Enhancement of fuzzy clustering by mechanisms of partial supervision. *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006), 1733–1759.
- [10] BOX, G., AND JENKINS, G. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*. Holden-Day, Incorporated, 1990.
- [11] BUCKLEY, J. J., AND HAYASHI, Y. Neural nets for fuzzy systems. *Fuzzy Sets and Systems* 71 (1995), 265–276.
- [12] CHEN, J.-Q., AND XI, Y.-G. Nonlinear system modeling by competitive learning and adaptive fuzzy inference system. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part C* 28 (1998), 231–238.
- [13] CHEN, M.-Y., AND LINKENS, D. Rule-base self-generation and simplification for data-driven fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems* 142 (2004), 243–265.
- [14] CHEN, Y., YANG, B., DONG, J., AND ABRAHAM, A. Time-series forecasting using flexible neural tree model. *Information Sciences* 174 (2005), 219–235.
- [15] CHEN, Y.-J., AND TENG, C.-C. Rule combination in a fuzzy neural network. *Fuzzy Sets and Systems* 82 (1996), 161–166.

- [16] CIMINO, M. G., LAZZERINI, B., AND MARCELLONI, F. A novel approach to fuzzy clustering based on a dissimilarity relation extracted from data using a ts system. *Pattern Recognition* 39 (2006), 2077–2091.
- [17] COTTRELL, M., GIRARD, B., GIRARD, Y., MANGEAS, M., AND MULLER, C. Neural modeling for time series: A statistical stepwise method for weight elimination. *Neural Networks, IEEE Transactions on* 6 (1995), 1355–1364.
- [18] DOMBI, J. A general class of fuzzy operators, the demorgan class of fuzzy operators and fuzziness measure induced by fuzzy operators. *Fuzzy Sets and Systems* 8 (1982), 149–163.
- [19] DONG, Y., ZHUANG, Y., CHEN, K., AND TAI, X. A hierarchical clustering algorithm based on fuzzy graph connectedness. *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006), 1760–1774.
- [20] DUBOIS, D., LANG, J., AND PRADE, H. Fuzzy sets in approximate reasoning, part 2: Logical approaches. *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991), 203–244.
- [21] DUBOIS, D., AND PRADE, H. Fuzzy sets in approximate reasoning, part 1 : Inference with possibility distributions. *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991), 143–202.
- [22] DUBOIS, D., AND PRADE, H. What are fuzzy rules and how to use them. *Fuzzy Sets and Systems* 84 (1996), 169–185.
- [23] DUCH, W. Uncertainty of data, fuzzy membership functions, and multilayer perceptrons. *IEEE Transactions on Neural Networks* 16 (2005), 10–23.
- [24] DUDUL, S. V. Prediction of a lorenz chaotic attractor using two-layer perceptron neural network. *Applied Soft Computing* 5 (2005), 333–355.
- [25] FANG, Y., AND SEJNOWSKI, T. Faster learning for dynamic recurrent backpropagation. *Neural Computation* 2 (1990), 270–273.
- [26] FERNANDEZ, C., SORIA, E., MARTDN, J., AND SERRANO, A. Neural networks for animal science applications: Two case studies. *Expert Systems with Applications* 31 (2006), 444–450.
- [27] FUKAMI, S., MIZUMOTO, M., AND TANAKA, K. Some considerations on fuzzy conditional inference. *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980), 243–273.
- [28] GAO, D., KINOUCHI, Y., ITO, K., AND ZHAO, X. Neural networks for event extraction from time series: a back propagation algorithm approach. *Future Generation Computer Systems* 21 (2005), 1096–1105.
- [29] GAO, Y., AND ER, M. J. Narmax time series model prediction: feedforward and recurrent fuzzy neural network approaches. *Fuzzy Sets and Systems* 150 (2005), 331–350.
- [30] GHIELMI, L., AND ECCEL, E. Descriptive models and artificial neural networks for spring frost prediction in an agricultural mountain area. *Computers and Electronics in Agriculture* 54 (2006), 101–114.
- [31] GUILLAUME, S. Designing fuzzy inference systems from data: An interpretability-oriented review. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 9 (2001), 426–443.
- [32] HAUPT, R. L., AND HAUPT, S. E. *Practical Genetic Algorithms*. JOHN WILEY & SONS, 2004.
- [33] ISHIBUCHI, H., NOZAKI, K., AND TANAKA, H. Efficient fuzzy partition of pattern space for classification problems. *Fuzzy Sets and Systems* 59 (1993), 295–304.
- [34] ISHIBUCHI, H., AND TANAKA, H. Interpolation of fuzzy if-then rules by neural networks. *International Journal of Approximate Reasoning* 10 (1994), 3–27.

- [35] ISHIKAWA, M. Learning of modular structured networks. *Artificial Intelligence* 75 (1995), 51–62.
- [36] ISHIKAWA, M., AND MORIYAMA, T. Prediction of time series by a structural learning of neural networks. *Fuzzy Sets and Systems* 82 (1996), 167–176.
- [37] JANG, G., LAI, F., JIANG, B., PAN, C., AND CHIEN, L. An intelligent stock portfolio management system based on short-term trend prediction using dual-module neural networks. *Proceedings of the International Conference on Artificial Neural Networks*, 447–452.
- [38] JANG, J., SUN, C., AND MIZUTANI, E. *Neuro-fuzzy and soft computing*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ, 1997.
- [39] JANG, R. *Neuro-Fuzzy Modeling: Architecture, Analyses and Applications*. PhD thesis, University of California, Berkeley, 1992.
- [40] JIE ZHANG, M., AND MORRIS, A. J. Recurrent neuro-fuzzy networks for nonlinear process modeling. *IEEE Transactions on Neural Networks* 10 (1999), 313–326.
- [41] JIN, L., AND GUPTA, M. M. Stable dynamic backpropagation learning in recurrent neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* 10 (1999), 1321–1334.
- [42] JOUFFE, L. Fuzzy inference system learning by reinforcement methods. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part C* 28 (1998), 338–355.
- [43] JUANG, C.-F., AND LIN, C.-T. An on-line self-constructing neural fuzzy inference network and its applications. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6 (1998), 12–32.
- [44] JUNG KIM, H., AND SHIK SHIN, K. A hybrid approach based on neural networks and genetic algorithms for detecting temporal patterns in stock markets. *Applied Soft Computing Article in press* (2006), 8.
- [45] KASABOV, N. K. Learning fuzzy rules and approximate reasoning in fuzzy neural networks and hybrid systems. *Fuzzy Sets and Systems* 82 (1996), 135–149.
- [46] KASABOV, N. K. Denfis: Dynamic evolving neural-fuzzy inference system and its application for time-series prediction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 10 (2002), 144–154.
- [47] KIM, J., AND KASABOV, N. HyFIS: hybrid connectionist fuzzy inference for adaptive dynamic systems. *Neural Networks* 12 (2001), 1301–1321.
- [48] KOLMAN, E., AND MARGALIOT, M. Are artificial neural networks white boxes? *IEEE Transactions on Neural Networks* 16 (2005), 844–852.
- [49] LEE, H.-M., LU, B.-H., AND LIN, F.-T. A fuzzy neural network model for revising imperfect fuzzy rules. *Fuzzy Sets and Systems* 75 (1996), 25–45.
- [50] LEE, R. S. T., AND LIU, J. N. K. Tropical cyclone identification and tracking system using integrated neural oscillatory elastic graph matching and hybrid rbf network track mining techniques. *IEEE Transactions on Neural Networks* 11 (2000), 680–689.
- [51] LESKI, J., AND CZOGALA, E. A new artificial neural network based fuzzy inference system with moving consequents in if then rules and selected applications. *Fuzzy Sets and Systems* 108 (1999), 289–297.
- [52] LI, C., AND CHENG, K.-H. Recurrent neuro-fuzzy hybrid-learning approach to accurate system modeling. *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007), 194–212.
- [53] LIN, C.-J., AND XU, Y.-J. A self-adaptive neural fuzzy network with group-based symbiotic evolution and its prediction applications. *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006), 1036–1056.

- [54] MACKEY, M., AND GLASS, L. Oscillation and chaos in physiological control systems. *Science* 197 (1977), 287.
- [55] MAMDANI, E. H., AND ASSILIAN, S. An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International Journal of Human-Computer Studies* 51 (1999), 135–147.
- [56] MELIN, P., AND CASTILLO, O. Intelligent control of a stepping motor drive using an adaptive neuro-fuzzy inference system. *Information Sciences* 170 (2005), 133–151.
- [57] MELIN, P., MANCILLA, A., LOPEZ, M., AND MENDOZA, O. A hybrid modular neural network architecture with fuzzy sugeno integration for time series forecasting. *Applied Soft Computing Article in press* (2006), 10.
- [58] MITCHELL, M. *An Introduction to Genetic Algorithms*. MIT Press, 1999.
- [59] MITRA, S., AND HAYASHI, Y. Neuro-fuzzy rule generation: Survey in soft computing framework. *IEEE Transactions on Neural Networks* 11 (2000), 748–768.
- [60] MIZUMOTO, M. Fuzzy conditional inference under max- 0 composition. *Information Sciences* 27 (1982), 183–209.
- [61] NAFARIEH, A., AND KELLER, J. M. A new approach to inference in approximate reasoning. *Fuzzy Sets and Systems* 41 (1991), 17–37.
- [62] NAUCK, D., AND KRUSE, R. A neuro-fuzzy method to learn fuzzy classification rules from data. *Fuzzy Sets and Systems* 89 (1997), 277–288.
- [63] NISHINA, T., AND HAGIWARA, M. Fuzzy inference neural network. *Neurocomputing* 14 (1997), 223–239.
- [64] NOZAKI, K., ISHIBUCHI, H., AND TANAKA, H. A simple but powerful heuristic method for generating fuzzy rules from numerical data. *Fuzzy Sets and Systems* 86 (1997), 251–270.
- [65] OLIVEIRA, A. L., AND MEIRA, S. R. Detecting novelties in time series through neural networks forecasting with robust confidence intervals. *Neurocomputing* 70 (2006), 79–92.
- [66] OBCONNOR, N., AND MADDEN, M. G. A neural network approach to predicting stock exchange movements using external factors. *Knowledge-Based Systems* 19 (2006), 371–378.
- [67] PAL, N., AND BEZDEK, J. On cluster validity for the fuzzy c-means model. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 3 (1995), 370–379.
- [68] PAL, S. K., DE, R. K., AND BASAK, J. Unsupervised feature evaluation: A neuro-fuzzy approach. *IEEE Transactions on Neural Networks* 11 (2000), 366–376.
- [69] PAUL, S., AND KUMAR, S. Fuzzy neural inference system using mutual subsethood products with applications in medical diagnosis and control. *Fuzzy Systems, 2001. The 10th IEEE International Conference on* 2 (2001).
- [70] PAUL, S., AND KUMAR, S. Subsethood-product fuzzy neural inference system (SuPFuNIS). *Neural Networks, IEEE Transactions on* 13 (2002), 578–599.
- [71] PEDRYCZ, W. An identification algorithm in fuzzy relational systems. *Fuzzy Sets and Systems* 13 (1984), 153–167.
- [72] PHAM, D., AND OH, S. A recurrent backpropagation neural network for dynamic system identification. *Journal of Systems Engineering* 2 (1992), 213–223.
- [73] PINEDA, F. Generalization of back-propagation to recurrent neural networks. *Physical Review Letters* 59 (1987), 2229–2232.

- [74] PLAUT, D. C., NOWLAN, S. J., AND HINTON, G. E. Experiments on learning by back propagation. Tech. Rep. CMU-CS-86-126, Computer Science Department, Carnegie-Mellon University, June 1986.
- [75] RANGANATHAN, M. K., AND KILMARTIN, L. Neural and fuzzy computation techniques for playout delay adaptation in voip networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* 16 (2005), 1174–1194.
- [76] REFENES, A., BENTZ, Y., AND BURGESS, N. Neural networks in investment management. *Intelligent Systems for Finance and Business*, John Wiley & Sons (1995), 177–208.
- [77] RUSSO, M. Fugenesis: A fuzzy genetic neural system for fuzzy modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 6 (1998), 373–388.
- [78] RUSSO, M. Genetic fuzzy learning. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 4 (2000), 259–273.
- [79] RUTKOWSKI, L. Flexible neuro-fuzzy systems. *IEEE Transactions on Neural Networks* 14 (2003), 554–574.
- [80] SEOW, M.-J., AND ASARI, V. K. Recurrent neural network as a linear attractor for pattern association. *IEEE Transactions on Neural Networks* 17 (2006), 246–250.
- [81] SETNES, M. Supervised fuzzy clustering for rule extraction. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 8 (2000), 416–424.
- [82] SHANN, J., AND FU, H. A fuzzy neural network for rule acquiring on fuzzy control systems. *Fuzzy Sets and Systems* 75 (1995), 345–357.
- [83] SUGENO, M., AND KANG, G. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems* 28 (1988), 15–33.
- [84] SUN, R. Commonsense reasoning with rules, cases, and connectionist models: A paradigmatic comparison. *Fuzzy Sets and Systems* 82 (1996), 187–200.
- [85] TANG, Z., DE ALMEIDA, C., AND FISHWICK, P. Time series forecasting using neural networks vs. Box-Jenkins methodology. *SIMULATION* 57 (1991), 303.
- [86] TASKAYA-TEMIZEL, T., AND CASEY, M. C. A comparative study of autoregressive neural network hybrids. *Neural Networks* 18 (2005), 781–789.
- [87] ΣΠΥΡΟΣ ΤΖΑΦΕΣΤΑΣ. *Τυπολογιστική Νοημοσύνη*. 2002.
- [88] TICKLE, A. B., ANDREWS, R., GOLEA, M., AND DIEDERICH, J. The truth will come to light: Directions and challenges in extracting the knowledge embedded within trained artificial neural networks. *IEEE Transactions on Neural Networks* 9 (1998), 1057–1068.
- [89] TONG, R. M. The evaluation of fuzzy models derived from experimental data. *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980), 1–12.
- [90] TUNG, W. L., AND QUEK, C. Gensofnn: A generic self-organizing fuzzy neural network. *IEEE Transactions on Neural Networks* 13 (2002), 1075–1076.
- [91] TUNG, W. L., AND QUEK, C. Falcon: Neural fuzzy control and decision systems using fkp and pfkp clustering algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part B* 34 (2004), 686–695.
- [92] TURE, M., AND KURT, I. Comparison of four different time series methods to forecast hepatitis a virus infection. *Expert Systems with Applications* 31 (2006), 41–46.

- [93] TURKSEN, I. B. Type i and type ii fuzzy system modeling. *Fuzzy Sets and Systems* 106 (1999), 11–34.
- [94] URSO, P. D. Fuzzy clustering for data time arrays with inlier and outlier time trajectories. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 13 (2005), 583–604.
- [95] UYKAN, Z., AND KOIVO, H. N. Analysis of augmented-input-layer rbfnn. *IEEE Transactions on Neural Networks* 16 (2005), 364–369.
- [96] VELAYUTHAM, C., AND KUMAR, S. Asymmetric subsethood-product fuzzy neural inference system (ASuPFuNIS). *Neural Networks, IEEE Transactions on* 16 (2005), 160–174.
- [97] VELTHUIZEN, R., HALL, L., CLARKE, L., AND SILBINGER, M. Investigation of mountain method clustering for large data sets. *Pattern Recognition* 30 (1997), 1121–1135.
- [98] VIEW, T. Some applications of an asymmetric subsethood product fuzzy neural inference system. *Fuzzy Systems, 2003. FUZZ'03. The 12th IEEE International Conference on* 1 (2003).
- [99] VLAHOGIANNI, E. I., KARLAFTIS, M. G., AND GOLIAS, J. C. Optimized and meta-optimized neural networks for short-term traffic flow prediction: A genetic approach. *Transportation Research Part C* 13 (2005), 211–234.
- [100] WANG, T.-Y., AND HUANG, C.-Y. Applying optimized bpn to a chaotic time series problem. *Expert Systems with Applications* 32 (2007), 193–200.
- [101] WANG, X., WANG, Y., XUB, X., LING, W., AND YEUNG, D. A new approach to fuzzy rule generation: fuzzy extension matrix. *Fuzzy Sets and Systems* 123 (2001), 291–306.
- [102] WILLIAMS, R., AND ZIPSER, D. *A Learning Algorithm for Continually Running Fully Recurrent Neural Networks*. Institute for Cognitive Science, University of California, San Diego, 1988.
- [103] YAGER, R., AND FILEV, D. Learning of fuzzy rules by mountain clustering. *Proc. SPIE Applicat. Fuzzy Logic Technol.*, 246–254.
- [104] YAGER, R., AND FILEV, D. Approximate clustering via the mountain method. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on* 24 (1994), 1279–1284.
- [105] YAGER, R. R. On a general class of fuzzy connectives. *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980), 235–242.
- [106] YAMAKAWA, T. A fuzzy logic controller. *Journal of Biotechnology* 24 (1992), 1–32.
- [107] YUMLU, S., GURGEN, F. S., AND OKAY, N. A comparison of global, recurrent and smoothed-piecewise neural models for istanbul stock exchange (ise) prediction. *Pattern Recognition Letters* 26 (2005), 2093–2103.
- [108] ZADEH, L. A. Fuzzy sets. *Information and Control* 8 (1965), 338–353.
- [109] ZADEH, L. A. Quantitative fuzzy semantics. *Information Sciences* 3 (1971), 159–176.
- [110] ZADEH, L. A. Similarity relations and fuzzy orderings. *Information Sciences* 3 (1971), 177–200.
- [111] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-i. *Information Sciences* 8 (1975), 199–249.
- [112] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-ii. *Information Sciences* 8 (1975), 301–357.
- [113] ZADEH, L. A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-iii. *Information Sciences* 9 (1975), 43–80.

- [114] ZHANG, J., AND MORRIS, J. Process modelling and fault diagnosis using fuzzy neural networks. *Fuzzy Sets and Systems* 79 (1996), 127–140.
- [115] ZIKIDIS, K. C., AND VASILAKOS, A. V. Asafes2: a novel, neuro-fuzzy architecture for fuzzy computing, based on functional reasoning. *Fuzzy Sets and Systems* 83 (1996), 63–84.