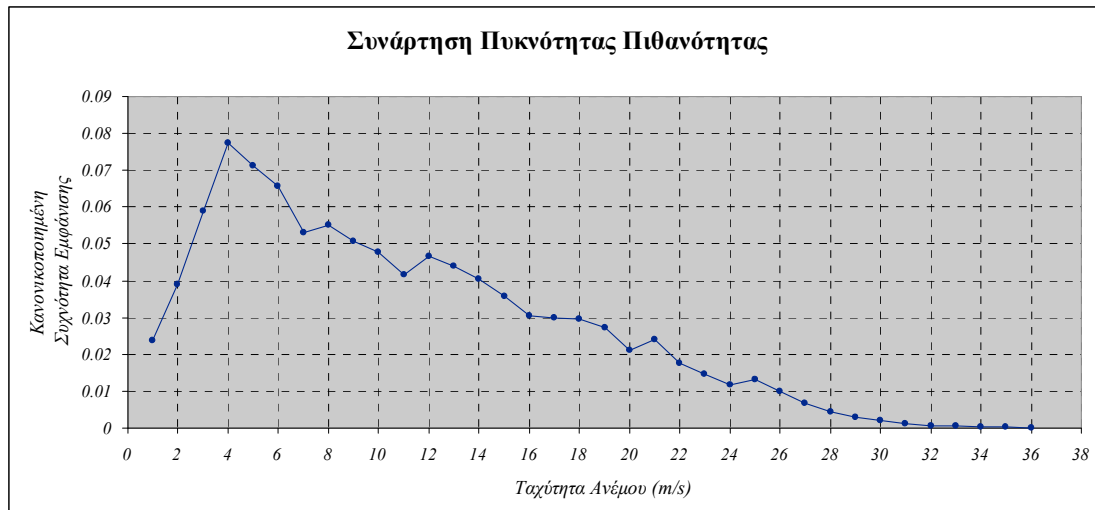
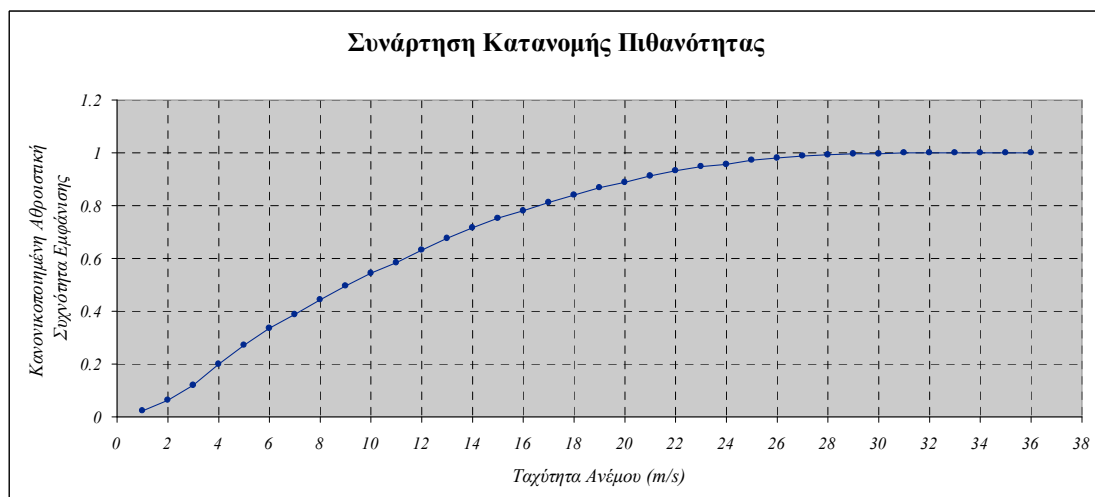


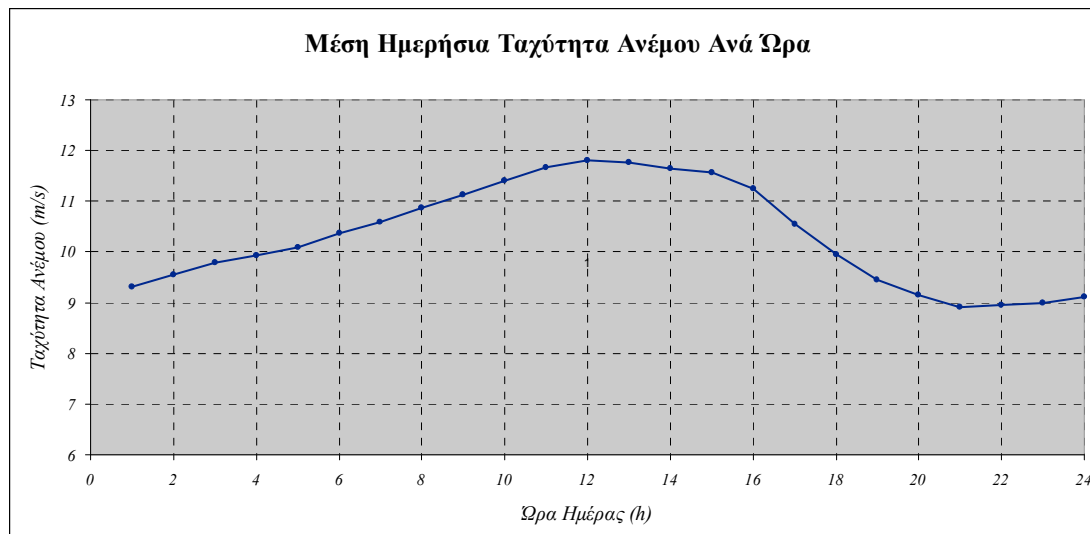


Σχήμα 3.11: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Ταχυτήτων Ανέμου του έτους 2004.



Σχήμα 3.12: Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας Ταχυτήτων Ανέμου του έτους 2004.

ο διαχωρισμός των παρατηρήσεων σε μετρήσεις μέρας και νύχτας. Άλλωστε ο άνεμος είναι μια μεταβλητή που αναφέρεται σε ένα φυσικό φαινόμενο αλλά δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη ή όχι του ήλιου. Επιπλέον, δεν παρουσιάζεται και κάποια περιοδικότητα για κάθε ημέρα (ανά 144 παρατηρήσεις – 24 ώρες). Ενδεικτικά παραθέτουμε το διάγραμμα της ημερήσιας ταχύτητας του ανέμου (ανά ώρα) μιας μέσης ημέρας (Σχήμα 3.13). Παρατηρούμε πως η μέση ημερήσια ταχύτητα του ανέμου έχει μικρή σχετικά διακύμανση γύρω από μία συγκεκριμένη τιμή (περίπου 10.5 m/s).



Σχήμα 3.13: Ημερήσια Ταχύτητα Ανέμου για μία μέση ημέρα του έτους 2004.

Από το διάγραμμα συχνοτήτων που προέκυψε προηγουμένως καθώς και από την απεικόνιση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας παρατηρούμε πως η κατανομή της ταχύτητας του ανέμου «θυμίζει» την κατανομή Weibull, κάτι που περιμέναμε άλλωστε, διότι είναι γνωστό πως η συχνότητα-πιθανότητα εμφάνισης των ταχυτήτων του ανέμου ακολουθεί την παραπάνω κατανομή [3]. Ωστόσο, στο σημείο αυτό προχωράμε σε μια «ποιοτική» μελέτη των δεδομένων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αποδείξουμε πως η κατανομή Weibull είναι η κατάλληλη για να απεικονίσει μαθηματικά την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της χρονοσειράς του ανέμου.

3.3.5 Ωριαίο Φορτίο

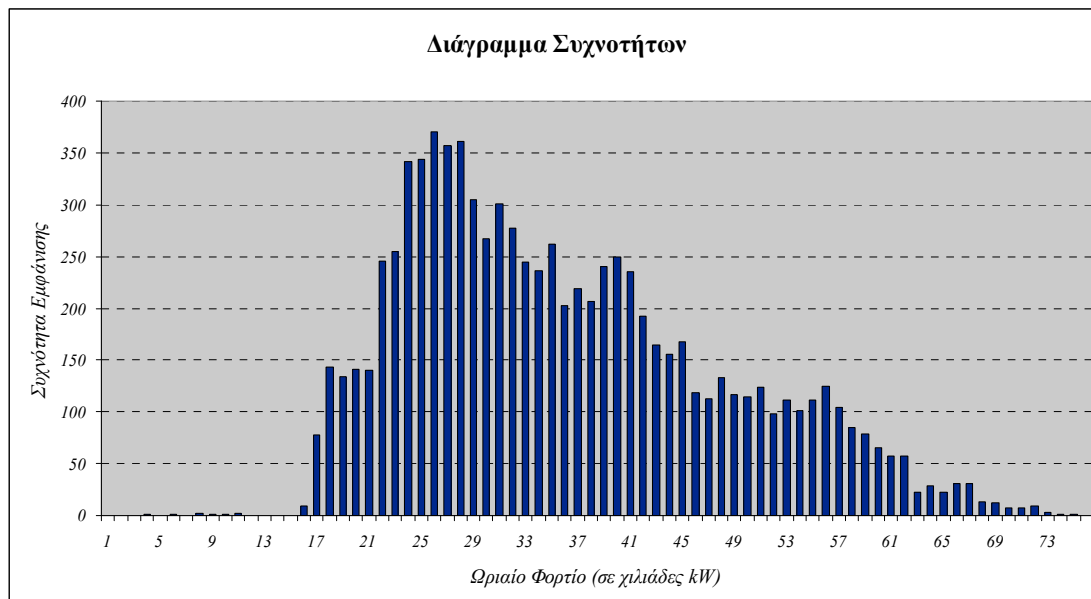
Για το φορτίο δόθηκαν συνολικά 8,760 ωριαίες μετρήσεις, που αντιστοιχούν σε 365 ημέρες, δηλαδή ένα ημερολογιακό έτος. Η χρονοσειρά μετρήσεων που χρησιμοποιήθηκε αναφέρεται στο νησί Κως. Οι διαστάσεις των παρατηρήσεων είναι, όπως και στη Φ/Β παραγωγή, σε χιλιάδες *Watt* ή αλλιώς *kW*. Η μέγιστη τιμή των μετρήσεων που είχαμε στη διάθεσή μας ήταν $74,000kW$ ενώ η ελάχιστη τιμή του ωριαίου φορτίου ήταν $3,200kW$. Η ομαδοποίηση των παρατηρήσεων έγινε με εύρος $1,000kW$ και τα αποτελέσματα αυτής φαίνονται στον Πίνακα Α.4. Επιπλέον, στον ίδιο πίνακα φαίνονται η συχνότητα εμφάνισης κάθε ομάδας παρατηρήσεων, η

κανονικοποίηση των συχνοτήτων (τιμές της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας) καθώς και οι τιμές της συνάρτησης κατανομής πιθανότητας.

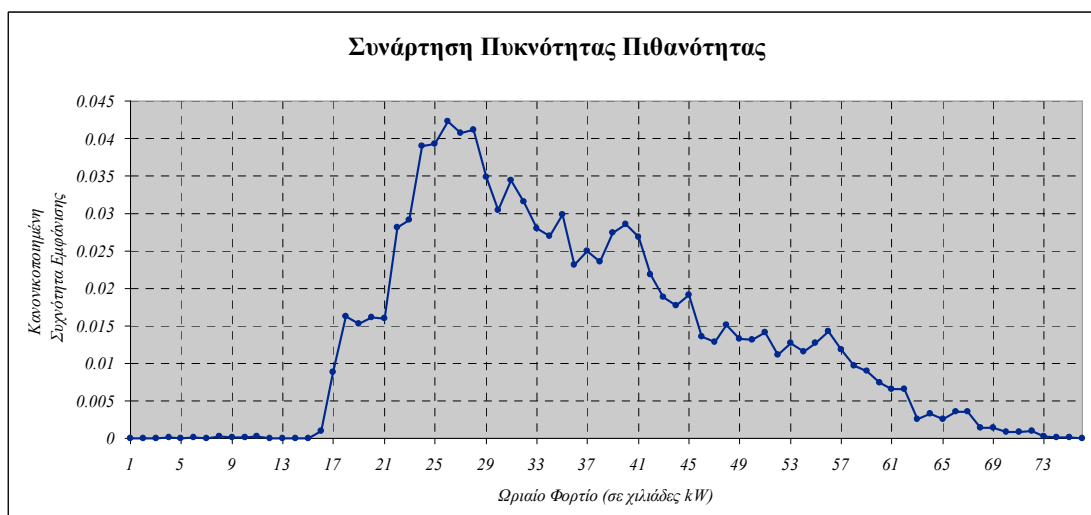
Με βάση τις τιμές του Πίνακα Α.4 κατασκευάζουμε τα διαγράμματα εμφάνισης συχνοτήτων (Σχήμα 3.14), συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (Σχήμα 3.15) και συνάρτησης κατανομής πιθανότητας (Σχήμα 3.16). Από τα δύο πρώτα σχήματα καθώς και από τον Πίνακα Α.4 βλέπουμε πως οι συχνότητες εμφάνισης μικρών τιμών φορτίου (μικρότερων από $15,000kW$) είναι μηδενικές ή ελάχιστες. Μετά παρατηρείται μια γρήγορη αύξηση των συχνοτήτων εμφάνισης για τις ομάδες που βρίσκονται στο διάστημα $(15,000kW, 25,000kW)$, ενώ στην ομάδα $(25,000kW, 26,000kW)$ παρατηρείται μέγιστο με συχνότητα εμφάνισης $f_{26} = 370$. Ακολουθεί μια σταδιακή (σχεδόν εκθετική αύξηση) που καταλήγει σε μηδενικές τιμές εμφάνισης συχνοτήτων για τιμές μεγαλύτερες των $74,000kW$. Τα παραπάνω απεικονίζονται και στο διάγραμμα συνάρτησης κατανομής πιθανότητας.

Όπως και στη μεταβλητή της ταχύτητας του ανέμου, έτσι και στο ωριαίο φορτίο δεν παρουσιάζεται «ανωμαλία» σε κάποιο σημείο (εμφάνιση πολύ μεγάλης συχνότητας). Ωστόσο, παρουσιάζεται μια περιοδικότητα για κάθε 24 μετρήσεις – ώρες (δηλαδή ανά μία ημέρα). Χωρίζοντας τις μετρήσεις ανά 24 μπορούμε εύκολα (χρησιμοποιώντας μέσους όρους) να βρούμε τη ημερήσια κατανάλωση – ζήτηση φορτίου ανά ώρα μιας «μέσης» ημέρας. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στο Σχήμα 3.17.

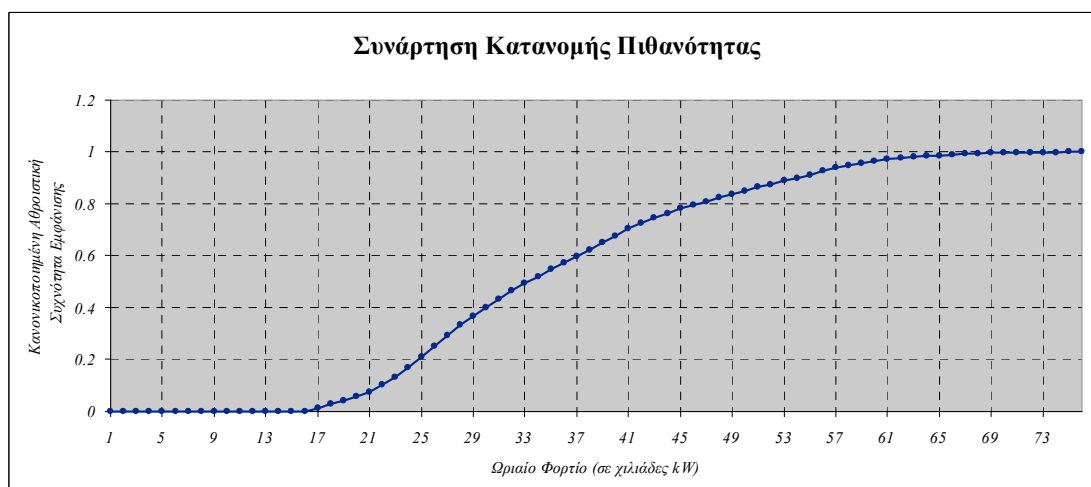
Από το τελευταίο διάγραμμα παρατηρούμε πως «κατά μέσο όρο» έχουμε μία αύξηση της ζήτησης του φορτίου από τις μεσημεριανές μέχρι τις βραδινές ώρες (με κορύφωση τις ώρες 20.00-22.00 μ.μ.) και χαμηλή ζήτηση τις πολύ πρωινές ώρες. Το φορτίο παρουσιάζει ελάχιστο τις πρώτες πρωινές ώρες ενός 24ωρου και αυξάνεται σταδιακά μέχρι τις βραδινές ώρες όπου και παρουσιάζει μέγιστο. Παράλληλα τις απογευματινές ώρες εμφανίζεται ένα τοπικό ελάχιστο. Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται και από το διάγραμμα όπου απεικονίζεται το φορτίο που καταναλώθηκε για δέκα 24ωρα που επιλέχθηκαν τυχαία (Σχήμα 3.18). Παρατηρούμε πως η μορφή των καμπυλών δεν αλλάζει γιατί η τάση κατανάλωσης φορτίου παραμένει ίδια κατά τη



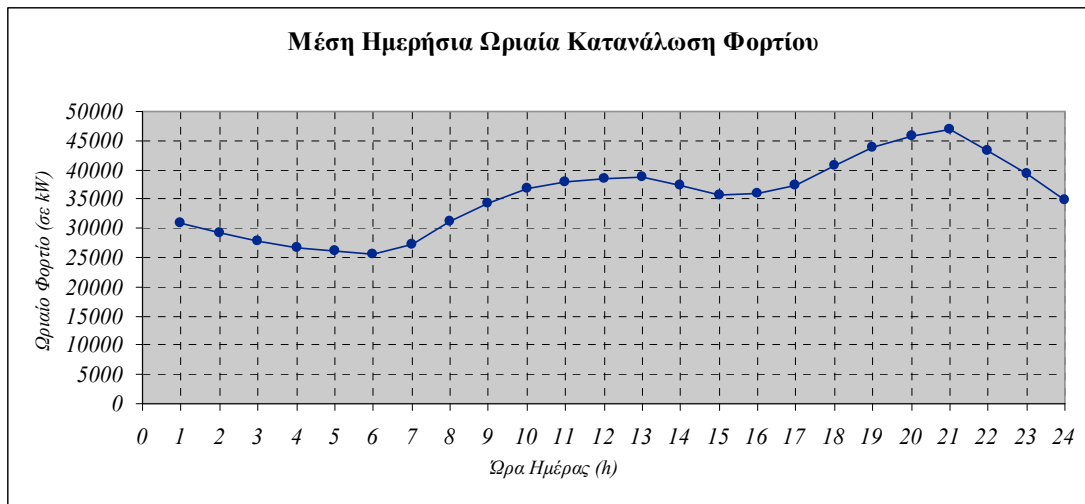
Σχήμα 3.14: Διάγραμμα συχνοτήτων Ωριαίου Φορτίου για το νησί Κως.



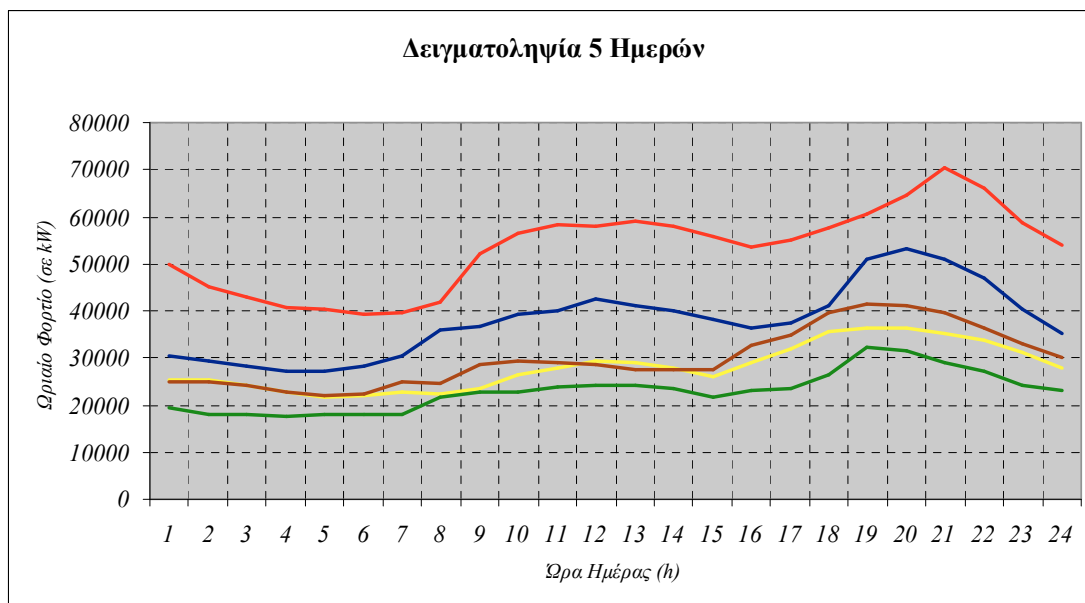
Σχήμα 3.15: Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας Ωριαίου Φορτίου για το νησί Κως.



Σχήμα 3.16: Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας Ωριαίου Φορτίου για το νησί Κως.



Σχήμα 3.17: Ημερήσια Ωριαία Κατανάλωση Φορτίου μιας «μέσης ημέρας».



Σχήμα 3.18: Δειγματοληψία της Ωριαίας Κατανάλωσης Φορτίου 5 ημερών.

διάρκεια ενός 24ώρου. Αυτό που αλλάζει είναι τα μέγιστα και τα ελάχιστα των καμπυλών – κάτι που μπορεί να οφείλεται στο ότι οι καμπύλες μπορεί να προέρχονται από ημέρες σε διαφορετικές εποχές (καλοκαίρι / χειμώνας) ή από διαφορετικές μέρες τις εβδομάδας (καθημερινές / σαββατοκύριακα).

Κεφάλαιο 4

Εύρεση Περιθώριων Κατανομών

Εισαγωγή

Στην ανάλυση που έγινε στο προηγούμενο κεφάλαιο συμπεράναμε ότι μπορούμε να αναγάγουμε το αρχικό πρόβλημα σε ένα στατιστικό πρόβλημα εύρεσης μίας από κοινού συνάρτησης κατανομής πιθανότητας που ουσιαστικά θα εκφράζει την πιθανότητα εμφάνισης μιας τριάδας μετρήσεων. Η τριάδα αυτή θα αποτελείται από τις εξής 3 μεταβλητές:

$$Q(x, y, z) = (\text{Ηλιακή Ακτινοβολία} , \text{Ταχύτητα ανέμου} , \text{Ωριαίο Φορτίο}) \quad (4.1)$$

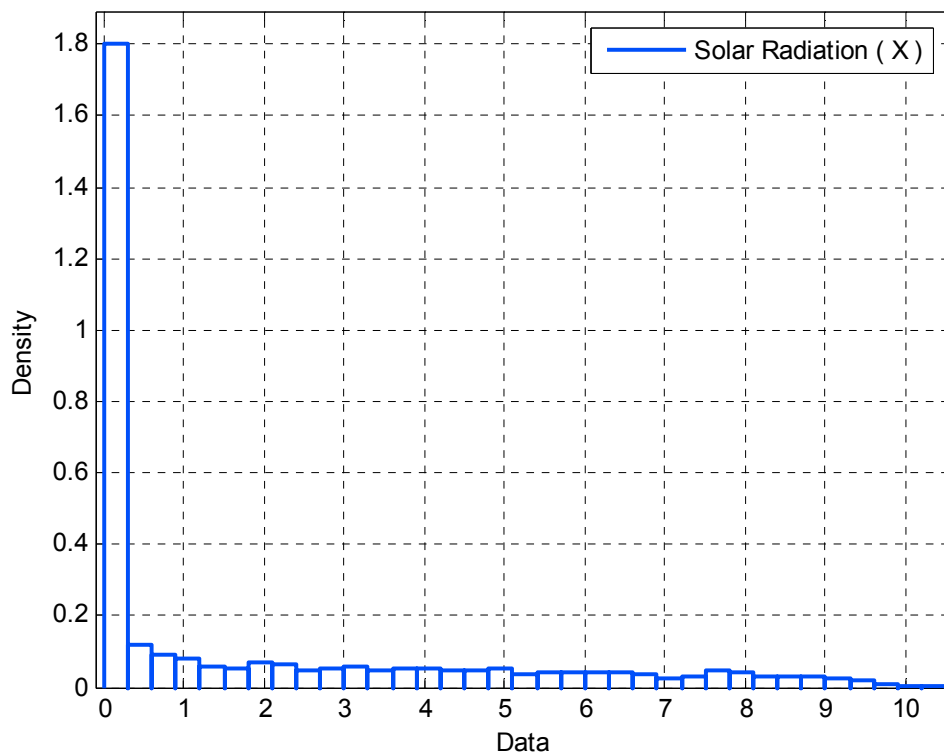
Στο παρόν κεφαλαίο θα ασχοληθούμε με την εύρεση των περιθώριων κατανομών, οι οποίες όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο θα μας βοηθήσουν στην εύρεση της τελικής εξίσωσης $Q(x, y, z)$. Για τον σκοπό αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι αρχικές μετρήσεις αναγόμενες όλες σε ωριαίες μετρήσεις ενός έτους (2004) – έτσι οι μετρήσεις της ηλιακής ακτινοβολίας από δεκάλεπτες (52.560 μετρήσεις) θα μετατραπούν σε ωριαίες (8.760 μετρήσεις) χρησιμοποιώντας για κάθε εξάδα μετρήσεων (1 ώρα) μία μέτρηση που θα αποτελεί τον μέσο όρο της αντίστοιχης εξάδας. Το ίδιο με τις μετρήσεις της ταχύτητας ανέμου. Οι μετρήσεις Ωριαίου Φορτίου δεν υπέστησαν κάποια μεταβολή αφού αρχικά είχαμε 8.760 ωριαίες μετρήσεις. Επιπλέον, όλες οι μετρήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο MATLAB® ανάχθηκαν σε μετρήσεις που βρίσκονται κοντά στη μονάδα – $O(1)$. Για τον λόγο αυτό πολλαπλασιάσαμε τις μετρήσεις της ηλιακής ακτινοβολίας με τον αριθμό 10, διαιρέσαμε τις μετρήσεις του ωριαίου φορτίου με 10,000 ενώ οι τιμές του ανέμου παρέμειναν αμετάβλητες.

4.1 Ανάλυση Δεδομένων – Εύρεση Περιθωρίων Κατανομών

Αρχικά θα προσπαθήσουμε να βρούμε, για κάθε μια από τις 3 παραπάνω μεταβλητές ξεχωριστά, μία μαθηματική σχέση – γραφική παράσταση που να προσεγγίζει όσο το δυνατόν καλύτερα την αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας ή αλλιώς το διάγραμμα συχνοτήτων. Η σχέση αυτή θα ορίζει την περιθώρια συνάρτηση κατανομής για κάθε μια από τις τρεις μεταβλητές.

4.1.1 Ηλιακή Ακτινοβολία

Αρχικά, φτιάχνουμε το διάγραμμα συχνοτήτων όπως φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 4.1: Διάγραμμα συχνοτήτων Ηλιακής Ακτινοβολίας (μεταβλητή X).

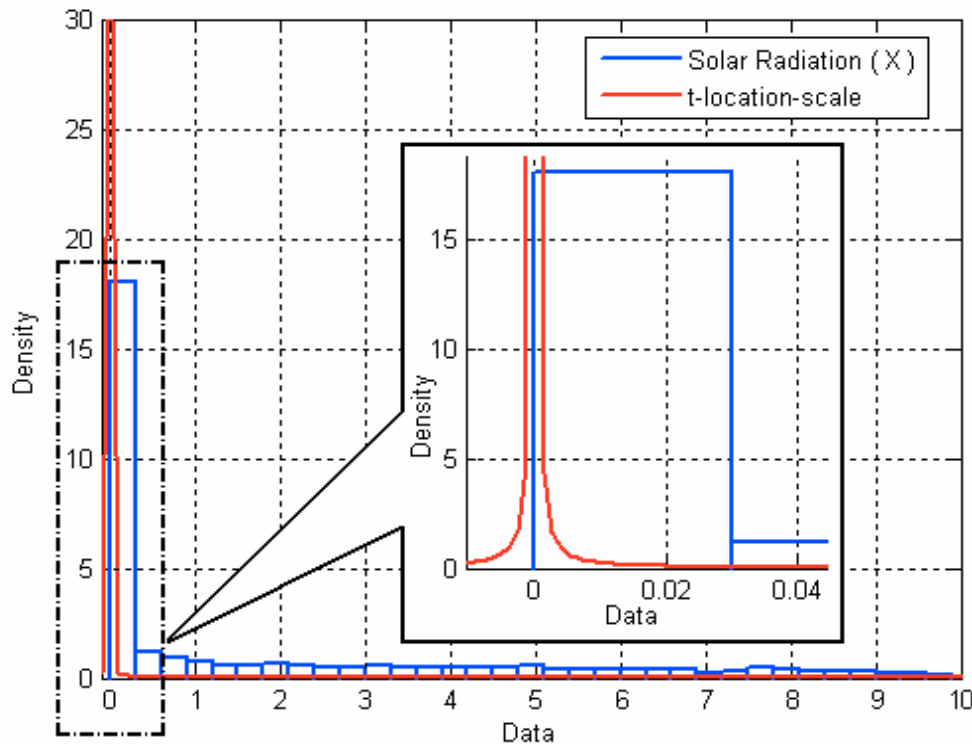
Για να επιλέξουμε την καταλληλότερη καμπύλη που θα προσεγγίζει με όσο το δυνατόν καλύτερο τρόπο το διάγραμμα συχνοτήτων της ηλιακής ακτινοβολίας θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό καταλληλότερη καμπύλη θα είναι εκείνη που θα δίνει

το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα [2], το οποίο δίνεται από την σχέση

$$MSE = \sum_{i=1}^k (x_i - \hat{x}_i)^2 . \text{ Έτσι, για την περίπτωση της ηλιακής ακτινοβολίας έχουμε:}$$

Οι επικρατέστερες καμπύλες για την προσομοίωση της ηλιακής ακτινοβολίας είναι οι εξής:

- Generalized extreme value
- t-location-scale.



Σχήμα 4.2: Διάγραμμα προσέγγισης αρχικών δεδομένων ηλιακής ακτινοβολίας με την καμπύλη t-location-scale. Στην λεπτομέρεια διακρίνεται πως η καμπύλη t-location-scale έχει και αρνητικές τιμές και για αυτό το λόγο απορρίπτεται χωρίς περαιτέρω μελέτη.

Ωστόσο, η καμπύλη t-location-scale παρέχει και αρνητικές τιμές - βλέπε Σχήμα 4.2 - και για αυτό το λόγο απορρίπτεται (επίσης κατά την μελέτη της καμπύλης αυτής διαπιστώθηκε ότι καλύπτει περίπου τις 1,500 μετρήσεις από τις 8,760, ποσοστό περίπου 17% που είναι πολύ μικρό για να γίνει αποδεκτή η καμπύλη). Η γενική μορφή της καμπύλης Generalized extreme value φαίνονται παρακάτω:

$$f(x; k, \mu, \sigma) = \left(\frac{1}{\sigma} \right) \exp \left\{ - \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \right\} \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}} \quad (4.2)$$

Στον Πίνακα A.5 παρατηρούμε πως παρουσιάζεται ένα πολύ μεγάλο σφάλμα στις μετρήσεις από 0 μέχρι 0.02. Στα πραγματικά δεδομένα υπάρχουν 4,684 μετρήσεις, η πλειοψηφία των οποίων έχουν μηδενικές τιμές (μηδενική ηλιακή ακτινοβολία λόγω νύχτας), ενώ η καμπύλη Generalized extreme value «προσομοιώνει» μόλις 887 μετρήσεις στην κλάση αυτή (0...0.02). Βλέπουμε λοιπόν πως χάνονται συνολικά 3,797 μετρήσεις ποσοστό που αντιστοιχεί σε περίπου 81% των μετρήσεων. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως ούτε η κατανομή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την προσομοίωση της ηλιακής ακτινοβολίας.

Ωστόσο, παρατηρώντας τον Πίνακα A.2 βλέπουμε πως οι υπόλοιπες μετρήσεις δεν παρουσιάζουν τόσο μεγάλα σφάλματα. Επομένως το πρόβλημα εντοπίζεται στο μεγάλο πλήθος των μετρήσεων της πρώτης κλάσης. Για τον λόγο αυτό θα ήταν εύλογο αν «χωρίζαμε» την ανάλυση της ηλιακής ακτινοβολίας σε 2 επιμέρους αναλύσεις όπου: (i) η πρώτη θα αφορά τις παρατηρήσεις που είναι μηδενικές – δηλαδή παρατηρήσεις που συγκεντρώνονται στο σημείο 0, (ii) ενώ η άλλη θα αναφέρεται στις παρατηρήσεις εκείνες που βρίσκονται στο διάστημα (0,1.2) – δηλαδή μη μηδενικές παρατηρήσεις. Στην πρώτη περίπτωση οι παρατηρήσεις αναφέρονται σε νυχτερινές ώρες όπου η ηλιακή ακτινοβολία είναι μηδενική ή (πρακτικά) σχεδόν μηδενική. Για τον λόγο αυτό αναφερόμενοι στην περίπτωση (i) θα εννοούμε τις «νυχτερινές» μετρήσεις (και αντίστροφα) ενώ στην περίπτωση (ii), αντίστοιχα, θα εννοούμε τις «ημερήσιες». Η πιθανότητα εμφάνισης της κάθε μιας περίπτωσης θα προκύπτει από το πλήθος των παρατηρήσεων νύχτας και ημέρας αντίστοιχα. Έτσι έχουμε:

Νύχτα: 4,081 παρατηρήσεις

Ημέρα: 4,679 παρατηρήσεις

Σύνολο: 8,760 παρατηρήσεις

Άρα η πιθανότητα μια τυχαία παρατήρηση να έχει γίνει νύχτα θα είναι:

$$p_1 = \frac{4,081}{8,760} \approx 0.4659 = 46.59\% \quad (4.3)$$

και αντίστοιχα για την ημέρα:

$$p_2 = \frac{4,679}{8,760} \approx 0.5341 = 53.41\% \quad (4.4)$$

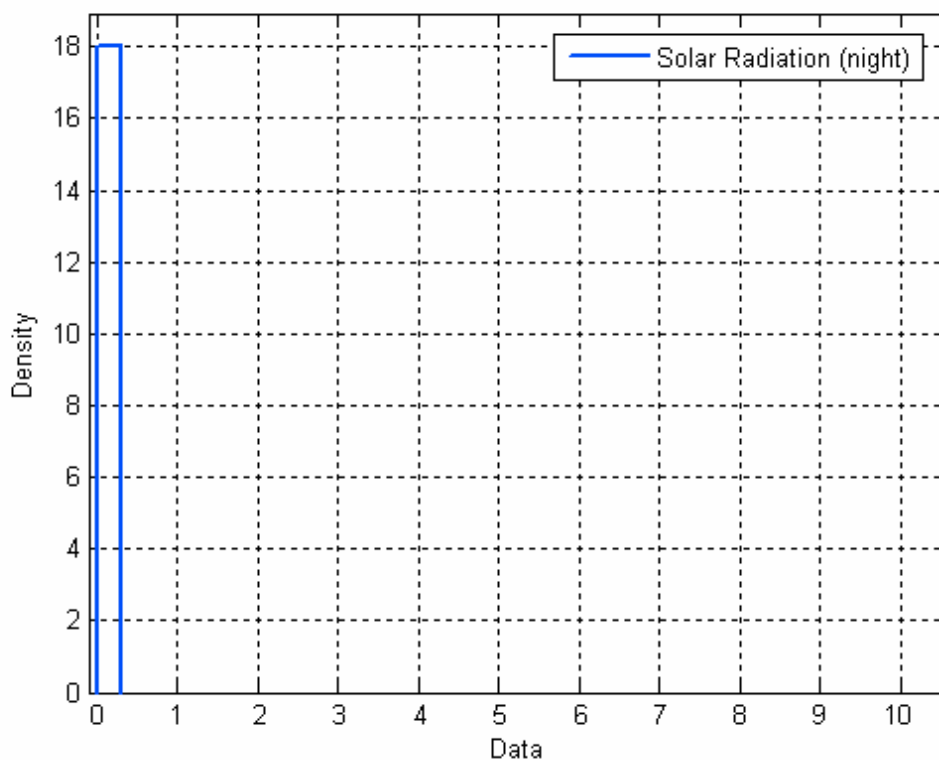
και έτσι αν $f_1(x)$ και $f_2(x)$ οι 2 συναρτήσεις που επιτυγχάνουν την βέλτιστη προσέγγιση για τις μετρήσεις της ηλιακής ακτινοβολίας νύχτας και ημέρας αντίστοιχα, είναι επόμενο πως η συνάρτηση που θα προσεγγίζει με τον βέλτιστο τρόπο τις μετρήσεις της ηλιακής ακτινοβολίας θα είναι:

$$f(x) = p_1 \cdot f_1(x) + p_2 \cdot f_2(x) \quad (4.5)$$

Επομένως, οι 2 υποπεριπτώσεις που προέκυψαν από την προηγούμενη ανάλυση έχουν ως εξής:

4.1.1.1 Ηλιακή Ακτινοβολία: Νυχτερινές Μετρήσεις

Στην περίπτωση των νυχτερινών μετρήσεων θα εργαστούμε διαφορετικά. Όπως ήταν αναμενόμενο οι νυχτερινές μετρήσεις είναι όλες μηδενικές. Παρατηρούμε λοιπόν πως ένα μεγάλο πλήθος παρατηρήσεων «συγκεντρώνεται» στην περιοχή του μηδέν, (συνολικά 4,081 από τις 8,760 παρατηρήσεις). Αποτέλεσμα αυτού είναι η κλάση $[0,00.2)$ να περιέχει σχεδόν το 54% του συνόλου των μετρήσεων,



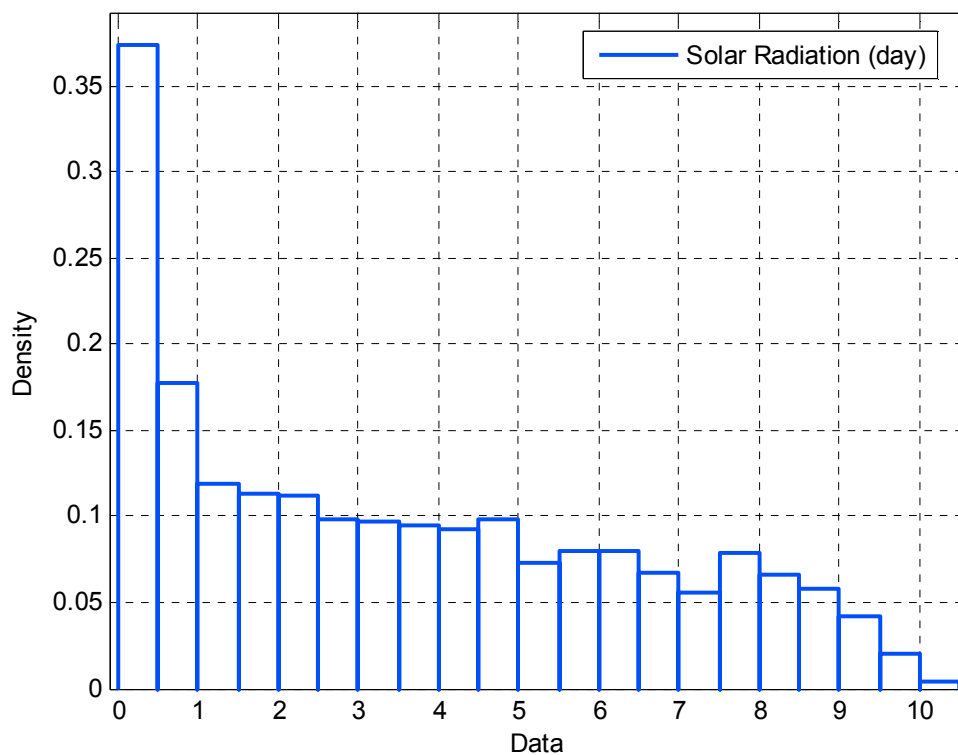
Σχήμα 4.3: Μετρήσεις ηλιακής ακτινοβολίας κατά τις νυχτερινές ώρες. Οι μετρήσεις είναι όλες συγκεντρωμένες στο σημείο 0.

ποσοστό που είναι κατά πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ποσοστό οποιασδήποτε άλλης κλάσης. Αυτό φαίνεται τόσο στο Σχήμα 4.1 όπου διακρίνουμε την μεγάλη διαφορά στην συχνότητα εμφάνισης της πρώτης κλάσης σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες, όσο και στο Σχήμα 4.3, όπου παριστάνονται μόνο οι μηδενικές μετρήσεις. Ο ιδανικός τρόπος για να παραστήσουμε την ιδιαιτερότητα αυτή της ηλιακής ακτινοβολίας είναι η συνάρτηση Dirac ή αλλιώς $\delta(x - x_0)$. Προφανώς $x_0 = 0$ καθώς η «συγκέντρωση» των παρατηρήσεων γίνεται στο σημείο 0. Τελικά, προκύπτει ότι:

$$f_1(x) = \delta(x) \quad (4.6)$$

4.1.1.2 Ηλιακή Ακτινοβολία: Ημερήσιες Μετρήσεις

Στην περίπτωση αυτή θα εργαστούμε όπως εργαστήκαμε στην αρχή της παραγράφου §4.4.1, ξεκινώντας με το διάγραμμα συχνοτήτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.4.



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα συχνοτήτων ημερήσιων μετρήσεων ηλιακής ακτινοβολίας.

Οι επικρατέστερες καμπύλες για την προσομοίωση των μετρήσεων της ηλιακής ακτινοβολίας κατά τη διάρκεια της ημέρας είναι οι εξής:

- Birnbaum-Saunders
- Exponential
- Gamma
- Log-logistic
- Log-normal
- Nakagami
- Weibull

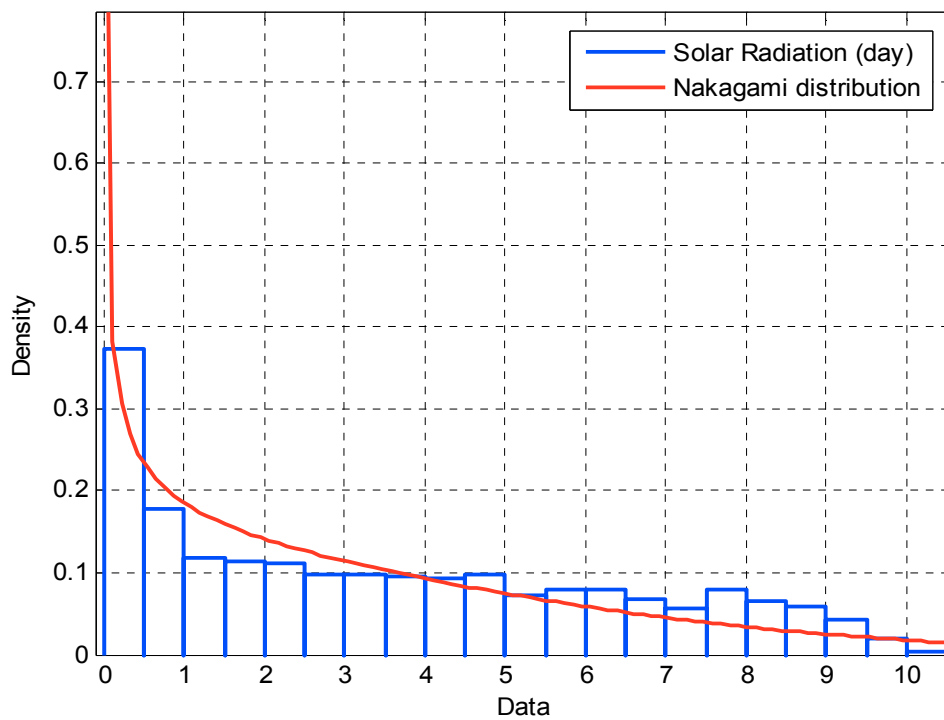
Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, για να επιλέξουμε την καμπύλη που προσεγγίζει καλύτερα τις μετρήσεις της ηλιακής ακτινοβολίας κατά τη διάρκεια της ημέρας θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο της ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος για τις παραπάνω 7 καμπύλες. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω Πίνακα:

Πίνακας 4.1: Μέσα τετραγωνικά σφάλματα διαφόρων προσεγγίσεων ηλιακής ακτινοβολίας (ημερήσιες μετρήσεις).

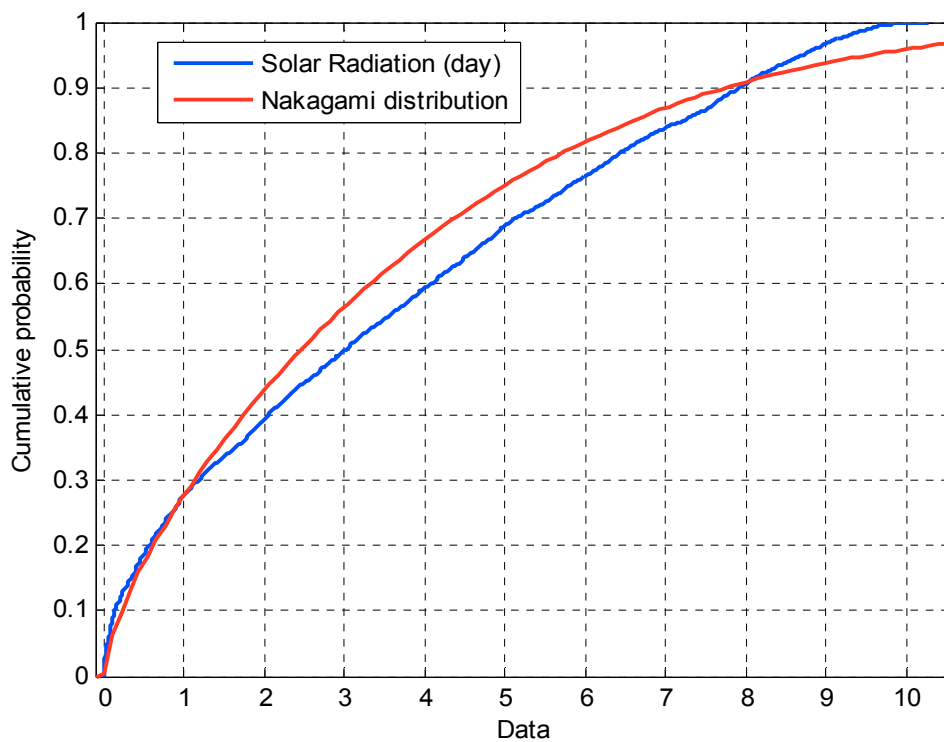
Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Birnbaum-Saunders	0.015552347	0.124709049
Exponential	0.008808795	0.093855182
Gamma	0.006089336	0.078034198
Log-logistic	0.009643549	0.098201571
Log-normal	0.014232824	0.119301400
Nakagami	0.004776444	0.069111822
Weibull	0.007441892	0.086266403

Σύμφωνα, λοιπόν, με το κριτήριο που αναφέρθηκε προηγουμένως η ιδανική καμπύλη για την προσέγγιση των ημερήσιων μετρήσεων της ηλιακής ακτινοβολίας είναι η Nakagami. Στον Πίνακα A.6 του Παραρτήματος A παραθέτουμε τους υπολογισμούς του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (MSE) για την προσέγγιση Nakagami.

Το διάγραμμα συχνοτήτων (density) που ταυτόχρονα απεικονίζει την προσέγγιση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 4.5. Αντίστοιχα το διάγραμμα κατανομής πιθανότητας (cumulative probability) θα είναι όπως στο Σχήμα 4.6. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή Nakagami είναι:



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα προσέγγισης ηλιακής ακτινοβολίας (ημερήσιες μετρήσεις) με την καμπύλη Nakagami.



Σχήμα 4.6: Διάγραμμα προσέγγισης αθροιστικής σ.π.π. ημερησίων μετρήσεων ηλιακής ακτινοβολίας με την καμπύλη Nakagami.

$$f_2(x|\mu, \omega) = 2 \left(\frac{\mu}{\omega} \right)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{(2\mu-1)} \exp\left(-\frac{\mu}{\omega} x^2\right) \quad (4.7)$$

όπου: $\Gamma(\alpha)$ η συνάρτηση Gamma η οποία ορίζεται ως:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (4.8)$$

μ παράμετρος μορφής και ω παράμετρος κλίμακας. Για την εύρεση των παραμέτρων μ και ω χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν είναι: $\mu = 33.9032 \cdot 10^{-2}$ και $\omega = 20.7236$. Στο Σχήμα 4.5 βλέπουμε πως όσο το x πλησιάζει στο 0 τόσο μεγαλώνει η τιμή της προσέγγισης Nakagami. Ωστόσο, αυτό δεν δημιουργεί πρόβλημα στην μελέτη μας καθώς όπως είπαμε παραπάνω τα σημεία κοντά στο 0 παρουσιάζουν ειδική «συμπεριφορά», την οποία χειριζόμαστε μέσω της συνάρτησης Dirac.

Τελικά, η ζητούμενη συνάρτηση που δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ηλιακής ακτινοβολίας για την ημέρα και την νύχτα θα είναι:

$$\begin{aligned} f(x; \mu, \omega) &= 0.4659 \cdot f_1(x) + 0.5341 \cdot f_2(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x; \mu, \omega) &= 0.4659 \cdot \delta(x) + 0.5341 \cdot \left[2 \left(\frac{\mu}{\omega} \right)^\mu \frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{(2\mu-1)} \exp\left(-\frac{\mu}{\omega} x^2\right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

με τις τιμές των παραμέτρων μ και ω να είναι όπως παραπάνω.

4.1.2 Ταχύτητα Ανέμου

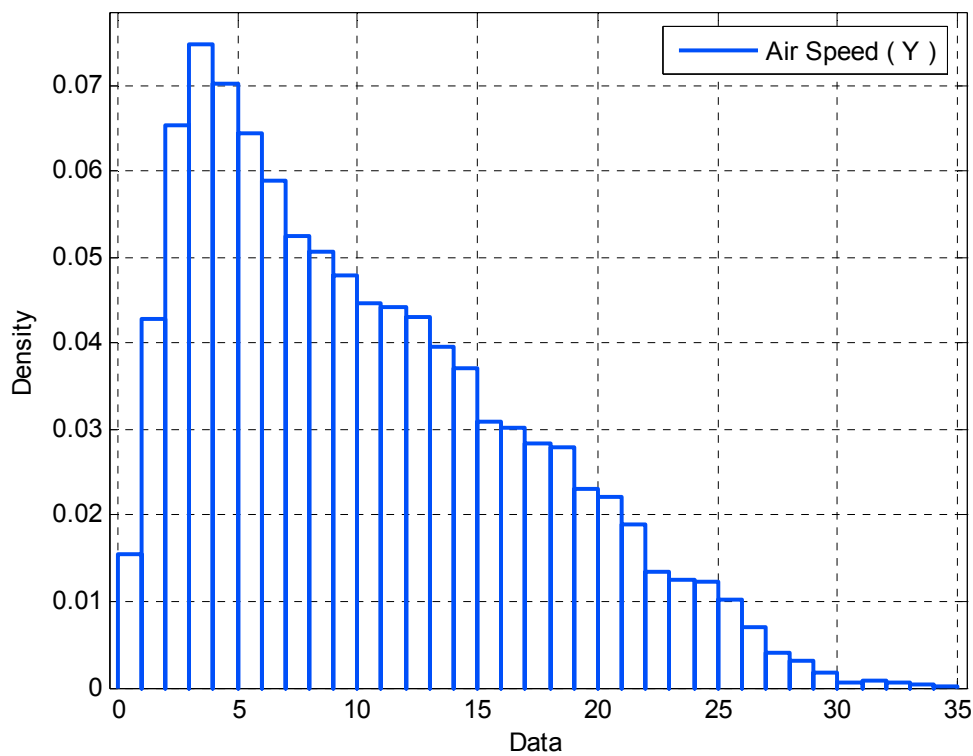
Αρχικά κατασκευάζουμε το διαγράμματα συχνοτήτων (Σχήμα 4.7). Μετά από δοκιμές διαφόρων προσεγγίσεων (fits) καταλήξαμε στις παρακάτω καμπύλες που θεωρούνται επικρατέστερες για την προσομοίωση των μετρήσεων του ανέμου:

- Birnbaum-Saunders
- Gamma
- Generalized extreme value
- Log-normal
- Weibull

Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα για κάθε μια από τις παραπάνω καμπύλες:

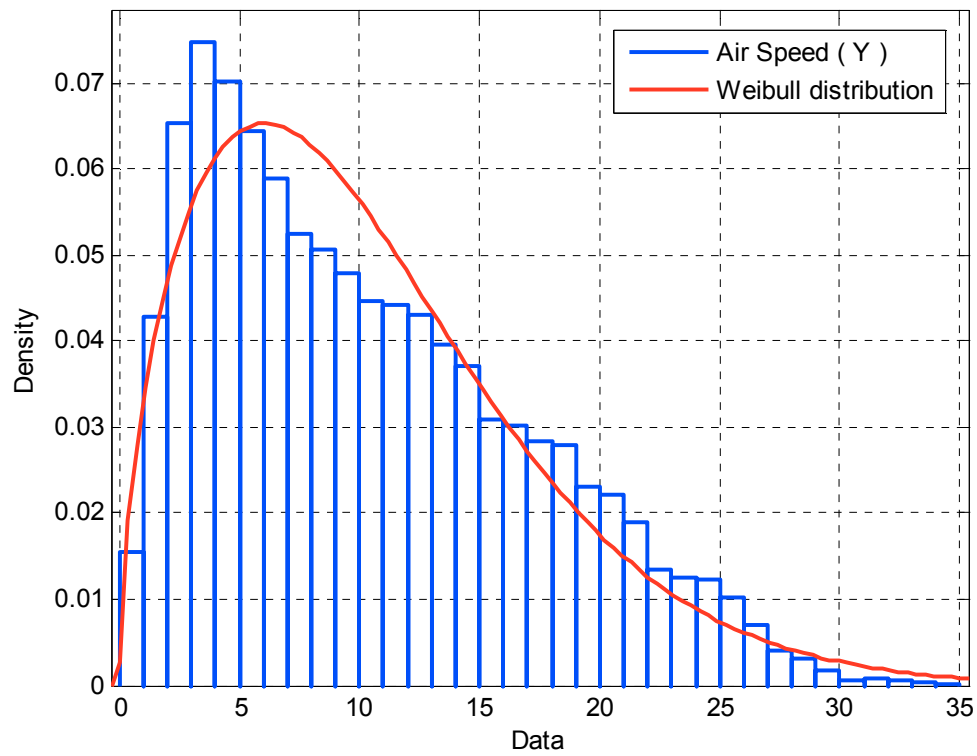
Πίνακας 4.2: Μέσα τετραγωνικά σφάλματα διαφόρων προσεγγίσεων ταχύτητας ανέμου.

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Birnbaum-Saunders	$33.35679 \cdot 10^{-4}$	$5.7755337 \cdot 10^{-2}$
Gamma	$11.64788 \cdot 10^{-4}$	$3.4128984 \cdot 10^{-2}$
Generalized extreme value	$29.08926 \cdot 10^{-4}$	$5.3934460 \cdot 10^{-2}$
Log-normal	$24.94931 \cdot 10^{-4}$	$4.9949282 \cdot 10^{-2}$
Weibull	$12.44475 \cdot 10^{-4}$	$3.5277113 \cdot 10^{-2}$

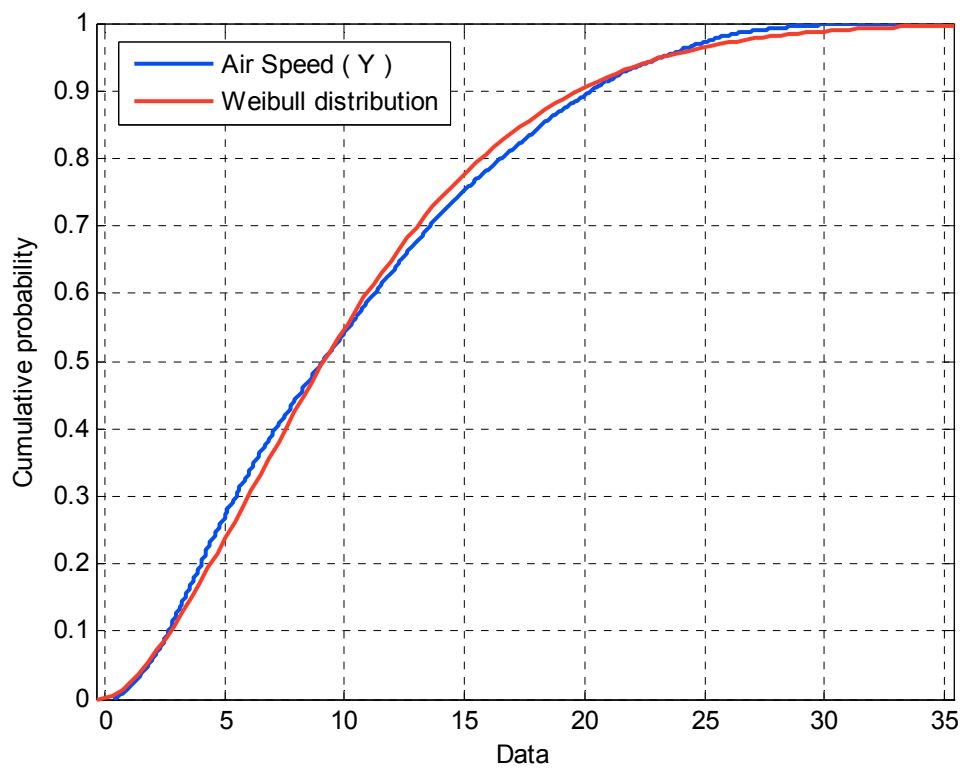


Σχήμα 4.7: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων ταχύτητας ανέμου

Βάσει του Πίνακα 4.1 η πιο καλή μέθοδος προσέγγισης επιτυγχάνεται με την κατανομή Gamma η οποία παρουσιάζει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Παρατηρούμε, όμως, πως σχεδόν εξίσου καλή προσέγγιση μας δίνει και η καμπύλη Weibull, την οποία θα προτιμήσουμε καθώς όπως γνωρίζουμε και από την θεωρία είναι η πιο κατάλληλη καμπύλη προσομοίωσης του ανέμου [3]. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή Weibull είναι:



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων ταχύτητας ανέμου



Σχήμα 4.9: Διάγραμμα προσέγγισης αθροιστικής σ.π.π. μετρήσεων ταχύτητας ανέμου.

$$g(y; a, b) = ba^{-b} y^{b-1} \exp\left(-\left(\frac{y}{a}\right)^b\right) \quad (4.10)$$

με παραμέτρους: **a** παράμετρος κλίμακας της ταχύτητας

b παράμετρος μορφής

Για την εύρεση των παραμέτρων a και b χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®, όπου τελικά βρέθηκε ότι $a=11.5754$ και $b=1.567$. Τέλος, παραθέτουμε το διάγραμμα που δείχνει την προσέγγιση των μετρήσεων ταχύτητας ανέμου με την κατανομή Weibull (density – Σχήμα 4.8) καθώς και το διάγραμμα αθροιστικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (cumulative probability – Σχήμα 4.9).

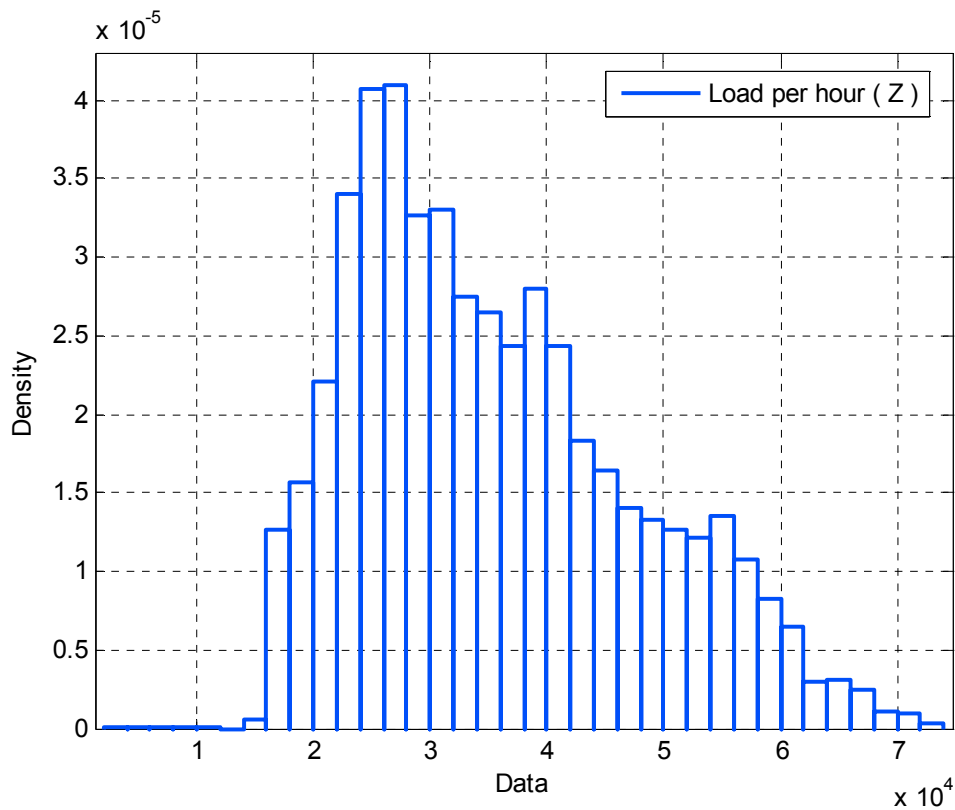
Επιπλέον, στην εύρεση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (Κεφάλαιο 5) θα μας χρειαστούν οι κατανομές που περιγράφουν τις νυχτερινές και τις ημερήσιες μετρήσεις – σε αντιστοιχία με την ηλιακή ακτινοβολία. Οι κατανομές αυτές θα είναι κατανομές Weibull με διαφορετικές όμως παραμέτρους από αυτές που βρέθηκαν παραπάνω. Έτσι για τις νυχτερινές μετρήσεις έχουμε: $a=10.6779$ και $b=1.4402$ ενώ για τις ημερήσιες: $a=12.3612$ και $b=1.7070$.

4.1.3 Ωριαίο Φορτίο

Όπως και στις δύο προηγούμενες μεταβλητές, αρχικά, φτιάχνουμε το διάγραμμα συχνοτήτων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.10.

Έπειτα από δοκιμές διάφορων προσεγγίσεων (fits) καταλήξαμε στις παρακάτω καμπύλες που θεωρούνται επικρατέστερες για την προσομοίωση των μετρήσεων του ωριαίου φορτίου:

- Birnbaum-Saunders
- Gamma
- Generalized extreme value
- Inverse Gaussian
- Log-logistic
- Log-normal
- Nakagami
- Negative Binomial



Σχήμα 4.10: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων ωριαίου φορτίου

Για κάθε μια από τις παραπάνω προσεγγίσεις βρίσκουμε τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τα αποτελέσματα φαίνονται παρακάτω:

Πίνακας 4.3: Μέσα τετραγωνικά σφάλματα διαφόρων προσεγγίσεων ωριαίου φορτίου.

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Birnbaum-Saunders	$33.9804 \cdot 10^{-6}$	$5.8293 \cdot 10^{-3}$
Gamma	$51.85 \cdot 10^{-6}$	$7.2005 \cdot 10^{-3}$
Generalized extreme value	$41.32 \cdot 10^{-6}$	$6.4284 \cdot 10^{-3}$
Inverse Gaussian	$33.49 \cdot 10^{-6}$	$5.7868 \cdot 10^{-3}$
Log-logistic	$57.44 \cdot 10^{-6}$	$7.5788 \cdot 10^{-3}$
Log-normal	$36.91 \cdot 10^{-6}$	$6.0751 \cdot 10^{-3}$
Nakagami	$73.86 \cdot 10^{-6}$	$8.5945 \cdot 10^{-3}$
Negative Binomial	$51.42 \cdot 10^{-6}$	$7.1708 \cdot 10^{-3}$

Παρατηρούμε λοιπόν πως η πιο καλή μέθοδος προσέγγισης επιτυγχάνεται με την κατανομή Inverse Gaussian η οποία παρουσιάζει το μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα. Πολύ καλή προσέγγιση μας δίνει και η καμπύλη Birnbaum-Saunders. Η γενική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή Inverse Gaussian είναι:

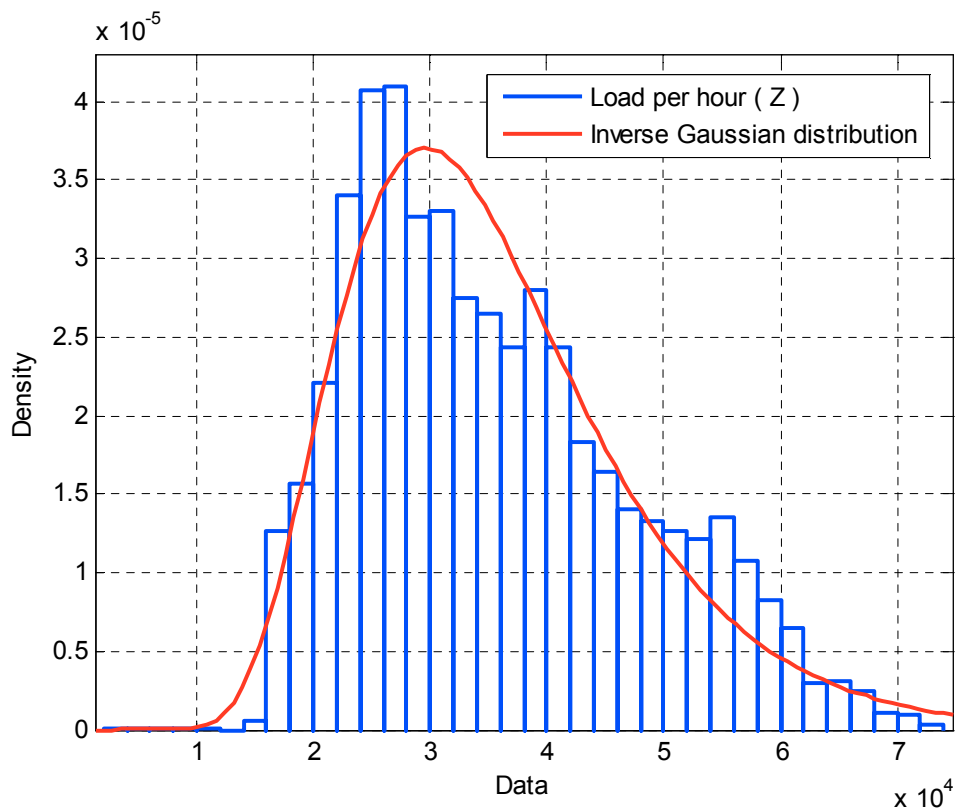
$$h(z; \lambda, \kappa) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi z^3}} \exp\left\{-\frac{\lambda}{2\kappa^2 z}(z - \kappa)^2\right\} \quad (4.11)$$

με παραμέτρους: $\lambda > 0$ παράμετρος κλίμακας της ταχύτητας

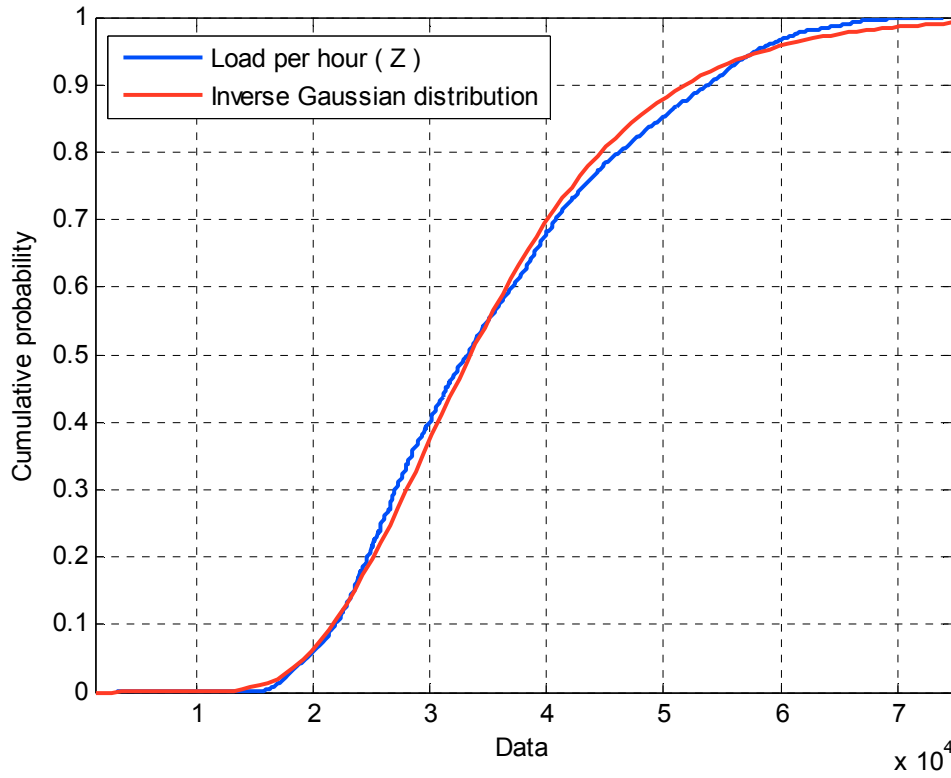
$\kappa > 0$ παράμετρος μορφής

Όπως και στις προηγούμενες μεταβλητές, για την εύρεση των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε το MATLAB® και τελικά βρήκαμε ότι: $\lambda = 29.3468$ και $\kappa = 3.5474$. Στην προηγούμενη σελίδα παραθέτουμε τα διαγράμματα της βέλτιστης προσέγγισης για τις μετρήσεις του ωριαίου φορτίου (density – Σχήμα 4.11) καθώς και το αντίστοιχο διάγραμμα της αθροιστικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (cumulative probability – Σχήμα 4.12).

Όπως και στις προηγούμενες δύο μεταβλητές έτσι και στο ωριαίο φορτίο θα βρούμε τις κατανομές που περιγράφουν τις νυχτερινές και τις ημερήσιες μετρήσεις αντίστοιχα. Έτσι, για τις νυχτερινές έχουμε: $\lambda = 24.7707$ και $\kappa = 3.4068$ ενώ για τις ημερήσιες: $\lambda = 35.8965$ και $\kappa = 3.6699$.



Σχήμα 4.11: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων ωριαίου φορτίου



Σχήμα 4.12: Διάγραμμα προσέγγισης αθροιστικής σ.π.π. μετρήσεων ωριαίου φορτίου

Συνοψίζοντας, λοιπόν, μπορούμε να πούμε πως οι τρεις κατανομές που προσεγγίζουν τις τρεις μεταβλητές της ηλιακής ακτινοβολίας, της ταχύτητας του ανέμου και του ωριαίου φορτίου είναι αντίστοιχα:

$$\text{I. } f(x; \mu, \omega) = 0.4659 \cdot \delta(x) + 0.5341 \cdot \left[2 \left(\frac{\mu}{\omega} \right)^{\mu} \frac{1}{\Gamma(\mu)} x^{(2\mu-1)} \exp \left(-\frac{\mu}{\omega} x^2 \right) \right] \quad (4.9)$$

$$\text{II. } g(y; a, b) = b a^{-b} y^{b-1} e^{-\left(\frac{y}{a}\right)^b} \quad (4.10)$$

$$\text{III. } h(z; \lambda, \kappa) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi z^3}} \exp \left\{ -\frac{\lambda}{2\kappa^2 z} (z - \kappa)^2 \right\} \quad (4.11)$$

Ωστόσο, στην ανάλυση που ακολουθεί στο επόμενο Κεφάλαιο θα χρειαστούμε τόσο τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας (που περιγράφονται από τις παραπάνω τρεις εξισώσεις) όσο και τις συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας. Για την εύρεση των CDF χρησιμοποιήθηκε το [18]. Έτσι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των I, II και III που περιγράφηκαν παραπάνω θα είναι αντίστοιχα:

$$\text{A.} \quad F(x; \mu, \omega) = \int f(x; \mu, \omega) dx = 0.4659 \cdot u(x) + 0.5341 \cdot \Gamma\left(\mu, \frac{\mu}{\omega} x^2\right) \quad (4.12)$$

$$\text{B.} \quad G(y; a, b) = \int g(y; a, b) dy = 1 - \exp\left(-\left(\frac{y}{a}\right)^b\right) \quad (4.13)$$

$$\text{C.} \quad H(z; \lambda, \kappa) = \int h(z; \lambda, \kappa) dx = N\left(\sqrt{\frac{\lambda}{z}} \frac{z - \kappa}{\kappa}\right) + \exp\left(\frac{2\lambda}{\kappa}\right) N\left(\sqrt{\frac{\lambda}{z}} \frac{-z - \kappa}{\kappa}\right) \quad (4.14)$$

όπου $u(x)$ η βηματική συνάρτηση, $\Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ η άνω συνάρτηση Gamma και

$N(x)$ η Γκαουσιανή κατανομή (standard Normal distribution με $\mu = 0$ και $\sigma^2 = 1$).

Οι τιμές των παραμέτρων μ και ω , a και b , λ και κ είναι όπως φαίνονται στον Πίνακα 4.1 για τις περιπτώσεις της νύχτας, της ημέρας καθώς και για την περίπτωση της καμπύλης που περιγράφει την ολική περίπτωση (νύχτα και ημέρα μαζί).

Πίνακας 4.4 Τιμές παραμέτρων για κάθε περίπτωση.

Κατανομές PDFs (CDFs)	Νυχτερινές Μετρήσεις	Ημερήσιες Μετρήσεις	Συνολικές Μετρήσεις
I (A)	$\delta(x)$ ($u(x)$)	$\mu = 33.9032 \cdot 10^{-2}$ $\omega = 20.7236$	$\mu = 33.9032 \cdot 10^{-2}$ $\omega = 20.7236$
II (B)	$a = 10.6779$ $b = 1.4402$	$a = 12.3612$ $b = 1.7070$	$a = 11.5754$ $b = 1.567$
III (C)	$\lambda = 24.7707$ $\kappa = 3.4068$	$\lambda = 35.8965$ $\kappa = 3.6699$	$\lambda = 29.3468$ $\kappa = 3.5474$

Κεφάλαιο 5

Εύρεση από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας

Εισαγωγή

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζουμε διάφορες μεθόδους κατασκευής πολυδιάστατων κατανομών μέσω διαφόρων προσεγγίσεων. Συνδυάζοντας τις περιθώριες κατανομές που βρήκαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορούμε να προσδιορίσουμε μια αναλυτική σχέση που θα μας δίνει την πιθανότητα εμφάνισης μια τριάδας μετρήσεων, δηλαδή την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή αλλιώς την κατανομή $Q(X, Y, Z)$ όπως αυτή ορίστηκε στα προηγούμενα κεφάλαια.

Για την κατασκευή μιας οικογένειας διανυσματικών συναρτήσεων (m μεταβλητών) μέσω των περιθώριων κατανομών χαμηλότερης τάξης ($m-1, m-2, \dots$) υπάρχει μια πληθώρα μεθόδων [8]. Αναφέρουμε επιγραμματικά κάποιες απ' αυτές:

- χρήση των Μετασχηματισμών Laplace.
- γενίκευση των περιθώριων κατανομών κατώτερης τάξης.
- Αρχή της Μέγιστης Εντροπίας.
- **εφαρμογή των περιθώριων κατανομών σε συγκεκριμένα παραμετρικά πρότυπα.**

Στο πρόβλημα εύρεσης μιας γενικής κατανομής $Q(X, Y, Z)$ που εξετάζουμε θα χρησιμοποιήσουμε τη τελευταία μέθοδο, δηλαδή χρήση συγκεκριμένων παραμετρικών προτύπων.

5.1 Παραμετρικά πρότυπα σε δεδομένες περιθώριες κατανομές

Τις τελευταίες δεκαετίες, λόγω της πολυπλοκότητας γενικών αναπαραστάσεων, έχει αναπτυχθεί ένα μεγάλο πλήθος παραμετρικών μοντέλων που βοηθούν στην εύρεση πολυδιάστατων κατανομών με δεδομένες περιθώριες. Στα πλαίσια της Στατιστικής επιστήμης τα παραμετρικά αυτά μοντέλα έχουν μελετηθεί και έχουν αναπτυχθεί δίνοντας τα αντίστοιχα «πρότυπα» που εφαρμόζονται στις περιθώριες κατανομές [1], [8], [14], [16].

Στην μελέτη αυτή θα χρησιμοποιηθούν τα παραμετρικά εκείνα πρότυπα με σκοπό την εύρεση μιας εξίσωσης που θα μας δίνει την πιθανότητα εμφάνισης μίας τριάδας μετρήσεων (ηλιακής ακτινοβολίας, ταχύτητας ανέμου, φορτίου).

Ορισμός 5.1: Λέγοντας **παραμετρικό πρότυπο** διάστασης m αναφερόμαστε σε μία οικογένεια κατανομών όπου η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας έχει την μορφή:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m; \vec{\theta}) \quad (5.1)$$

όπου $x_1, x_2, \dots, x_m \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$ και $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα $\vec{\theta}$ αντιπροσωπεύει τις παραμέτρους του αρχικού προτύπου. Σε αυτό το σημείο πρέπει να επισημανθεί ότι το διάνυσμα των παραμέτρων $\vec{\theta}$ «χωρίζεται» για λόγους ευκολίας σε επιμέρους διανύσματα ως εξής:

$$\vec{\theta} = (\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2, \dots, \vec{\theta}_m, \vec{\theta}_{\kappa\lambda}) \text{ όπου } \kappa = 1, 2, 3 \dots m \text{ και } \lambda = 1, 2, 3 \dots m \text{ με } \kappa \neq \lambda$$

Τα διανύσματα $\vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2, \dots, \vec{\theta}_m$ αναφέρονται στις παραμέτρους των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών των μεταβλητών $x_1, x_2, \dots, x_m$ ενώ τα υπόλοιπα διανύσματα παραμέτρων $\vec{\theta}_{\kappa\lambda}$ αναφέρονται στις παραμέτρους συσχέτισης, π.χ. το $\vec{\theta}_{12}$ θα περιέχει τις παραμέτρους που δείχνουν την συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών x_1 και x_2 . Οι τιμές των παραμέτρων αυτών μπορούν να προσδιοριστούν βάσει των αρχικών δεδομένων (χρονοσειρές μετρήσεων) που διαθέτουμε. Η μέθοδος εύρεσης των

παραμέτρων αυτών βασίζεται στη **μέθοδο των εκτιμητριών**, που θα αναπτυχθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Επιπλέον, το παραμετρικό πρότυπο πρέπει να πληροί τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:

$$(α) \quad F(b_1, b_2, \dots, b_m; \vec{\theta}) = 1 \quad \text{για κάθε} \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_2) \quad (5.2)$$

$$(β) \quad F(a_1, x_2, \dots, x_m; \vec{\theta}) = F(x_1, a_2, \dots, x_m; \vec{\theta}) = \dots = F(x_1, x_2, \dots, a_m; \vec{\theta}) = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{για κάθε} \quad x_1, x_2, \dots, x_m \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m].$$

(γ) για κάθε $x_1 < x'_1, x_2 < x'_2, \dots, x_m < x'_m$ όπου $x_1, x'_1 \in [a_1, b_1], x_2, x'_2 \in [a_2, b_2], \dots, x_m, x'_m \in [a_m, b_m]$ πρέπει να ισχύει η ιδιότητα:

$$\begin{aligned} & F(x'_1, x'_2, \dots, x'_m; \vec{\theta}) - F(x_1, x'_2, \dots, x'_m; \vec{\theta}) - F(x'_1, x_2, \dots, x'_m; \vec{\theta}) - \dots \\ & \dots - F(x'_1, x'_2, \dots, x_m; \vec{\theta}) \geq 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Η πρώτη από τις παραπάνω τρεις ιδιότητες είναι γνωστή και ως συνθήκη κανονικοποίησης. Η ιδιότητες (β) και (γ) προκύπτουν από το 2^ο και 3^ο αξίωμα του Kolmogorov. Η (β) δείχνει πως όταν έστω και μία από τις υπό μεταβλητές τεθεί ίση με το ελάχιστο του πεδίου ορισμού της τότε η κατανομή πιθανότητας ισούται με μηδέν. Η τελευταία ιδιότητα δείχνει πως η $F(x_1, x_2, \dots, x_m; \vec{\theta})$ είναι μια συνάρτηση αύξουσα ως προς καθένα από τα ορίσματα $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια του παραμετρικού προτύπου αναφέρουμε ως παράδειγμα το **πρότυπο Plackett**. Πρόκειται για ένα απλοποιημένο διμεταβλητό παραμετρικό πρότυπο ($m=2$) που ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} M(F_1(x_1), F_2(x_2); \vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2, \theta) &= \frac{1}{2(\theta-1)} \left\{ 1 + (\theta-1)(F_1(x_1) + F_2(x_2)) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{[1 + (\theta-1)(F_1(x_1) + F_2(x_2))]^2 - 4\theta(\theta-1)F_1(x_1)F_2(x_2)} \right\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

όπου $F_1(x_1), F_2(x_2)$ οι περιθώριες κατανομές συνάρτησης κατανομής πιθανότητας του προβλήματος και $\theta_1 \in \mathbb{R}^+$ η παράμετρος που θα καθοριστεί από τη χρονοσειρά των δεδομένων. Στο παραπάνω πρότυπο τα διανύσματα $\vec{\theta}_1$ και $\vec{\theta}_2$ αναφέρονται στις

παραμέτρους των $F_1(x_1)$ και $F_2(x_2)$ ενώ $\vec{\theta}_{12} = \theta$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του παραμετρικού αυτού μοντέλου έχει ως εξής:

$$m(F_1(x_1), F_2(x_2); \vec{\theta}_1, \vec{\theta}_2, \theta) = \frac{\theta[1 + (\theta - 1)(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 2F_1(x_1)F_2(x_2))]}{\left\{ [1 + (\theta - 1)(F_1(x_1) + F_2(x_2))]^2 - 4\theta(\theta - 1)F_1(x_1)F_2(x_2) \right\}^{\frac{3}{2}}} \quad (5.6)$$

5.2 Προσαρμογή Παραμετρικών προτύπων στο αρχικό πρόβλημα των τριών μεταβλητών: Ηλιακή Ακτινοβολία, Ταχύτητα Ανέμου και Ωριαίο Φορτίο

Στην περίπτωση του προβλήματος που εξετάζουμε στην παρούσα εργασία το ζητούμενο παραμετρικό πρότυπο θα έχει τρεις διαστάσεις ($m = 3$) και θα ορίζεται ως εξής:

$$Q(x_1, x_2, x_3; \vec{\theta}) = Q(x, y, z; \vec{\theta}) \quad (5.7)$$

όπου $x, y, z \in [0, 1.5] \times [0, 40] \times [0, 100,000]$ και $\vec{\theta}$ το διάνυσμα των παραμέτρων. Οι τρεις ιδιότητες που περιγράφηκαν παραπάνω – σχέσεις (5.2)-(5.4) – γίνονται:

$$(α) \quad Q(1.5, 50, 100,000; \vec{\theta}) = 1 \quad \text{για κάθε } \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n). \quad (5.8)$$

$$(β) \quad Q(0, y, z; \vec{\theta}) = Q(x, 0, z; \vec{\theta}) = Q(x, y, 0; \vec{\theta}) = 0 \quad (5.9)$$

για κάθε $x, y, z \in [0, 1] \times [0, 40] \times [0, 100,000]$.

(γ) για κάθε $x < x', y < y', z < z'$ όπου $x, x' \in [0, 1], y, y' \in [0, 40], z, z' \in [0, 100,000]$ ισχύει η ιδιότητα:

$$Q(x', y', z'; \vec{\theta}) - Q(x, y', z'; \vec{\theta}) - Q(x', y, z'; \vec{\theta}) - Q(x', y', z; \vec{\theta}) \geq 0 \quad (5.10)$$

Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι το πεδίο ορισμού της κάθε μιας μεταβλητής προήλθε από παρατήρηση των χρονοσειρών που έχουμε στη διάθεσή

μας. Συγκεκριμένα, η μεταβλητή x που αναπαριστά την ηλιακή ακτινοβολία παίρνει τιμές από 0 kW/m^2 (μηδενική ηλιακή ακτινοβολία κατά τη διάρκεια της νύχτας) έως 1.20 kW/m^2 καθώς η μέγιστη τιμή της ηλιακής ακτινοβολίας είναι 1.18 kW/m^2 . Αντίστοιχα, η μεταβλητή y (ταχύτητα ανέμου) παίρνει τιμές από 0 m/s (άπνοια) μέχρι 40 m/s (πολύ ισχυροί άνεμοι) καθώς η μέγιστη τιμή ανέμου που μετρήθηκε είναι 35.6 m/s . Τέλος, το ωριαίο φορτίο κυμαίνεται από 0 (πλήρης απώλεια ζήτησης φορτίου) έως $100,000$. Η μέγιστη τιμή των δεδομένων που διαθέτουμε είναι $74,000$, ωστόσο, επειδή είναι πολύ πιθανό να προστεθούν στο άμεσο μέλλον φορτία έχουμε αφήσει ένα περιθώριο της τάξης των $26,000$ (ποσοστό 35%) για να είναι δυνατή η αύξηση της μέγιστης τιμής (αιχμής) του φορτίου. Κάτι τέτοιο δεν είναι απαραίτητο για τις άλλες δύο μεταβλητές καθώς αναπαριστούν φυσικά φαινόμενα (ηλιακή ακτινοβολία, άνεμος) και δεν είναι δυνατό να ξεπεράσουν μια ορισμένη τιμή στην περιοχή όπου έγιναν οι μετρήσεις.

Έχοντας προσαρμόσει πλέον το παραμετρικό πρότυπο, που ορίστηκε στην αρχή του κεφαλαίου, στα πλαίσια της μελέτης του προβλήματος που εξετάζουμε προχωράμε στην δοκιμή διάφορων οικογενειών παραμετρικών πολυμεταβλητών «μοντέλων».

5.3 Προσαρμογή Παραμετρικών πολυμεταβλητών οικογενειών στο αρχικό πρόβλημα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τρεις οικογένειες παραμετρικών πολυμεταβλητών προτύπων. Οι οικογένειες αυτές έχουν παρόμοιες συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας καθώς ανήκουν στην οικογένεια των Extreme Value Copulas. Πρέπει να σημειωθεί πως μια m -μεταβλητή Copula $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ είναι πολυμεταβλητή Extreme Value Copula αν ισχύει η παρακάτω ιδιότητα:

$$M(x_1^t, x_2^t, \dots, x_m^t) = M^t(x_1, x_2, \dots, x_m) \text{ για κάθε } t > 0 \quad (5.11)$$

5.3.1 Οικογένεια Παραμετρικών Πολυμεταβλητών Προτύπων M1

Στην πρώτη κατηγορία παραμετρικών προτύπων για $\theta \geq 1$, $v_j \geq 0$, και $\delta_{ij} \geq 1$, $i < j$ έχουμε [8]:

$$M_{(1)}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i < j} \left((p_i z_i^\theta)^{\delta_{ij}} + (p_j z_j^\theta)^{\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} + \sum_{j=1}^m v_j p_j z_j^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.12)$$

όπου $z_j = -\log x_j$, $p_j = (v_j + m - 1)^{-1}$ και $j = 1, 2, \dots, m$. Όπως ειπώθηκε και παραπάνω η παραμετρική αυτή οικογένεια ανήκει στις Extreme Value Copulas καθώς όπως εύκολα διακρίνεται $M_{(1)}(x_1^t, x_2^t, \dots, x_m^t) = M_{(1)}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Οι περιθώριες κατανομές 2^{ης} τάξης δίνονται από τον τύπο:

$$M_{(1)ij}(x_i, x_j) = \exp \left\{ - \left[\left((p_i z_i^\theta)^{\delta_{ij}} + (p_j z_j^\theta)^{\delta_{ij}} \right)^{\frac{1}{\delta_{ij}}} + (v_i + m - 2) p_i z_i^\theta + (v_j + m - 2) p_j z_j^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.13)$$

Στο πρόβλημα που εξετάζουμε οι σχέσεις (5.12) και (5.13) για $m = 3$ και $M_{(1)}(x_1, x_2, x_3) = Q_{(1)}(x, y, z)$, (όπου με x, y, z θα συμβολίζουμε από δω και στο εξής τις συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας των 3 μεταβλητών, δηλαδή σύμφωνα με τα όσα βρέθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο $x = F$, $y = G$ και $z = H$) γίνονται:

$$Q_{(1)}(x, y, z) = \exp \left\{ - \left[\sum_{i < 2} \left((p_i z_i^\theta)^{\delta_{i2}} + (p_2 z_2^\theta)^{\delta_{i2}} \right)^{\frac{1}{\delta_{i2}}} + \sum_{i < 3} \left((p_i z_i^\theta)^{\delta_{i3}} + (p_3 z_3^\theta)^{\delta_{i3}} \right)^{\frac{1}{\delta_{i3}}} + \sum_{j=1}^m v_j p_j z_j^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \Rightarrow$$

$$Q_{(1)}(x, y, z) = \exp \left\{ - \left[\left((p_1 z_1^\theta)^{\delta_{12}} + (p_2 z_2^\theta)^{\delta_{12}} \right)^{\frac{1}{\delta_{12}}} + \left((p_2 z_2^\theta)^{\delta_{23}} + (p_3 z_3^\theta)^{\delta_{23}} \right)^{\frac{1}{\delta_{23}}} + \left((p_1 z_1^\theta)^{\delta_{13}} + (p_3 z_3^\theta)^{\delta_{13}} \right)^{\frac{1}{\delta_{13}}} + v_1 p_1 z_1^\theta + v_2 p_2 z_2^\theta + v_3 p_3 z_3^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.14a)$$

όπου $\begin{cases} z_1 = -\log x \\ z_2 = -\log y \\ z_3 = -\log z \end{cases}$ και $\begin{cases} p_1 = (v_1 + m - 1)^{-1} = (v_1 + 2)^{-1} \\ p_2 = (v_2 + m - 1)^{-1} = (v_2 + 2)^{-1} \\ p_3 = (v_3 + m - 1)^{-1} = (v_3 + 2)^{-1} \end{cases}$. Για τις παραμέτρους

έχουμε: $\theta \geq 1$, $v_1, v_2, v_3 \geq 0$ και $\delta_{ij} \geq 1$. Αντίστοιχα, οι περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης θα γίνουν:

$$Q_{(1)xy}(x, y) = \exp \left\{ - \left[\left((p_1 z_1^\theta)^{\delta_{12}} + (p_2 z_2^\theta)^{\delta_{12}} \right)^{\frac{1}{\delta_{12}}} + (v_1 + 1) p_1 z_1^\theta + (v_2 + 1) p_2 z_2^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.15\alpha)$$

$$Q_{(1)yz}(y, z) = \exp \left\{ - \left[\left((p_2 z_2^\theta)^{\delta_{23}} + (p_3 z_3^\theta)^{\delta_{23}} \right)^{\frac{1}{\delta_{23}}} + (v_2 + 1) p_2 z_2^\theta + (v_3 + 1) p_3 z_3^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.16\alpha)$$

$$Q_{(1)xz}(x, z) = \exp \left\{ - \left[\left((p_1 z_1^\theta)^{\delta_{13}} + (p_3 z_3^\theta)^{\delta_{13}} \right)^{\frac{1}{\delta_{13}}} + (v_1 + 1) p_1 z_1^\theta + (v_3 + 1) p_3 z_3^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.17\alpha)$$

Αναλυτικότερα, λοιπόν, οι σχέσεις (5.14α)-(5.17α) γίνονται:

$$\begin{aligned} Q_{(1)}(F, G, H) = \exp \left\{ - \left[\left(\left(\frac{(-\log F)^\theta}{(v_1 + 2)} \right)^{\delta_{12}} + \left(\frac{(-\log G)^\theta}{(v_2 + 2)} \right)^{\delta_{12}} \right)^{\frac{1}{\delta_{12}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\left(\frac{(-\log G)^\theta}{(v_2 + 2)} \right)^{\delta_{23}} + \left(\frac{(-\log H)^\theta}{(v_3 + 2)} \right)^{\delta_{23}} \right)^{\frac{1}{\delta_{23}}} + \left(\left(\frac{(-\log F)^\theta}{(v_1 + 2)} \right)^{\delta_{13}} + \left(\frac{(-\log H)^\theta}{(v_3 + 2)} \right)^{\delta_{13}} \right)^{\frac{1}{\delta_{13}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{v_1}{(v_1 + 2)} (-\log F)^\theta + \frac{v_2}{(v_2 + 2)} (-\log G)^\theta + \frac{v_3}{(v_3 + 2)} (-\log H)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.14) \end{aligned}$$

ενώ για τις περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης:

$$Q_{(1)FG}(F, G) = \exp \left\{ - \left[\left(\left(\frac{(-\log F)^\theta}{(v_1 + 2)} \right)^{\delta_{12}} + \left(\frac{(-\log G)^\theta}{(v_2 + 2)} \right)^{\delta_{12}} \right)^{\frac{1}{\delta_{12}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(v_1 + 1)}{(v_1 + 2)} (-\log F)^\theta + \frac{(v_2 + 1)}{(v_2 + 2)} (-\log G)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.15)$$

$$Q_{(1)GH}(G, H) = \exp \left\{ - \left[\left(\left(\frac{(-\log G)^\theta}{(v_2 + 2)} \right)^{\delta_{23}} + \left(\frac{(-\log H)^\theta}{(v_3 + 2)} \right)^{\delta_{23}} \right)^{\frac{1}{\delta_{23}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(v_2 + 1)}{(v_2 + 2)} (-\log G)^\theta + \frac{(v_3 + 1)}{(v_3 + 2)} (-\log H)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.16)$$

$$Q_{(1)FH}(F, H) = \exp \left\{ - \left[\left(\left(\frac{(-\log F)^\theta}{(v_1 + 2)} \right)^{\delta_{13}} + \left(\frac{(-\log H)^\theta}{(v_3 + 2)} \right)^{\delta_{13}} \right)^{\frac{1}{\delta_{13}}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(v_1 + 1)}{(v_1 + 2)} (-\log F)^\theta + \frac{(v_3 + 1)}{(v_3 + 2)} (-\log H)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.17)$$

5.3.2 Οικογένεια Παραμετρικών Πολυμεταβλητών Προτύπων M2

Τα πολυμεταβλητά παραμετρικά πρότυπα της κατηγορίας αυτής έχουν τη μορφή [8]:

$$M_{(2)}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \left[\sum_{j=1}^m x_j^{-\theta} - (m-1) - \sum_{1 \leq i < j \leq m} \left(\tilde{x}_i^{-\delta_{ij}} + \tilde{x}_j^{-\delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.18)$$

όπου $\tilde{x}_j = p_j (x_j^{-\theta} - 1) = \frac{(x_j^{-\theta} - 1)}{(v_j + m - 1)}$ και $p_j = (v_j + m - 1)^{-1}$, για κάθε $\theta > 0$, $v_j \geq 0$,

$\delta_{ij} > 0$ όταν $i < j$ και $j = 1, 2, \dots, m$. Και στην περίπτωση αυτή φαίνεται πως ισχύει η ιδιότητα $M_{(2)}(x_1^t, x_2^t, \dots, x_m^t) = M_{(2)}^t(x_1, x_2, \dots, x_m)$ (Extreme Value Copulas). Οι περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης στην περίπτωση αυτή θα είναι:

$$M_{(2)ij}(x_i, x_j) = \left[x_i^{-\theta} + x_j^{-\theta} - 1 - \left(\tilde{x}_i^{-\delta_{ij}} + \tilde{x}_j^{-\delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.19)$$

Στο παρόν πρόβλημα που εξετάζουμε η σχέση (5.18) για 3 μεταβλητές και θέτοντας $M_{(2)}(x_1, x_2, x_3) = Q_{(2)}(x, y, z)$ θα γίνει:

$$Q_{(2)}(x, y, z) = \left[\sum_{j=1}^3 x_j^{-\theta} - (3-1) - \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\tilde{x}_i^{-\delta_{ij}} + \tilde{x}_j^{-\delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{-1/\theta} \Rightarrow$$

$$Q_{(2)}(x, y, z) = x^{-\theta} - 2 + y^{-\theta} - 2 + z^{-\theta} - 2 - \left(\tilde{x}^{-\delta_{12}} + \tilde{y}^{-\delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} - \\ - \left(\tilde{x}^{-\delta_{13}} + \tilde{z}^{-\delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} - \left(\tilde{y}^{-\delta_{23}} + \tilde{z}^{-\delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \Rightarrow$$

$$Q_{(2)}(x, y, z) = x^{-\theta} + y^{-\theta} + z^{-\theta} - 6 - \left(\tilde{x}^{-\delta_{12}} + \tilde{y}^{-\delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} - \left(\tilde{x}^{-\delta_{13}} + \tilde{z}^{-\delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} - \left(\tilde{y}^{-\delta_{23}} + \tilde{z}^{-\delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \quad (5.20\alpha)$$

$$\text{όπου } \begin{cases} \tilde{x} = p_1 (x^{-\theta} - 1) = \frac{(x^{-\theta} - 1)}{(v_1 + 2)} \\ \tilde{y} = p_2 (y^{-\theta} - 1) = \frac{(y^{-\theta} - 1)}{(v_2 + 2)} \\ \tilde{z} = p_3 (z^{-\theta} - 1) = \frac{(z^{-\theta} - 1)}{(v_3 + 2)} \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} p_1 = (v_1 + 2)^{-1} \\ p_2 = (v_2 + 2)^{-1} \\ p_3 = (v_3 + 2)^{-1} \end{cases} \quad \text{για} \quad v_1, v_2, v_3 \geq 0,$$

$\theta > 0$ και $\delta_{ij} > 0$. Αντίστοιχα, η σχέση (5.19) για τις περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης γίνεται:

$$Q_{(2)xy}(x, y) = \left[x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1 - \left(\tilde{x}^{-\delta_{12}} + \tilde{y}^{-\delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.21\alpha)$$

$$Q_{(2)yz}(y, z) = \left[y^{-\theta} + z^{-\theta} - 1 - \left(\tilde{y}^{-\delta_{23}} + \tilde{z}^{-\delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.22\alpha)$$

$$Q_{(2)xz}(x, z) = \left[x^{-\theta} + z^{-\theta} - 1 - \left(\tilde{x}^{-\delta_{13}} + \tilde{z}^{-\delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.23\alpha)$$

Αναλυτικότερα οι σχέσεις (5.20α)-(5.23α) γίνονται:

$$\begin{aligned} Q_{(2)}(F, G, H) = & F^{-\theta} + G^{-\theta} + H^{-\theta} - 6 - \left[\left(\frac{(F^{-\theta} - 1)}{(v_1 + 2)} \right)^{-\delta_{12}} + \left(\frac{(G^{-\theta} - 1)}{(v_2 + 2)} \right)^{-\delta_{12}} \right]^{-1/\delta_{12}} - \\ & - \left[\left(\frac{(F^{-\theta} - 1)}{(v_1 + 2)} \right)^{-\delta_{13}} + \left(\frac{(H^{-\theta} - 1)}{(v_3 + 2)} \right)^{-\delta_{13}} \right]^{-1/\delta_{13}} - \left[\left(\frac{(G^{-\theta} - 1)}{(v_2 + 2)} \right)^{-\delta_{23}} + \left(\frac{(H^{-\theta} - 1)}{(v_3 + 2)} \right)^{-\delta_{23}} \right]^{-1/\delta_{23}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

ενώ οι περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης γίνονται:

$$Q_{(2)FG}(F, G) = \left[F^{-\theta} + G^{-\theta} - 1 - \left[\left(\frac{(F^{-\theta} - 1)}{(v_1 + 2)} \right)^{-\delta_{12}} + \left(\frac{(G^{-\theta} - 1)}{(v_2 + 2)} \right)^{-\delta_{12}} \right]^{-1/\delta_{12}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.21)$$

$$Q_{(2)GH}(G, H) = \left[G^{-\theta} + H^{-\theta} - 1 - \left[\left(\frac{(y^{-\theta} - 1)}{(v_2 + 2)} \right)^{-\delta_{23}} + \left(\frac{(z^{-\theta} - 1)}{(v_3 + 2)} \right)^{-\delta_{23}} \right]^{-1/\delta_{23}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.22)$$

$$Q_{(2)FH}(F, H) = \left[F^{-\theta} + H^{-\theta} - 1 - \left[\left(\frac{(x^{-\theta} - 1)}{(v_1 + 2)} \right)^{-\delta_{13}} + \left(\frac{(z^{-\theta} - 1)}{(v_3 + 2)} \right)^{-\delta_{13}} \right]^{-1/\delta_{13}} \right]^{-1/\theta} \quad (5.23)$$

5.3.3 Οικογένεια Παραμετρικών Πολυμεταβλητών Προτύπων M3

Στην τελευταία κατηγορία παραμετρικών προτύπων για $\theta > 0$, $v_j \geq 0$, και $\delta_{ij} > 0$, $i < j$ έχουμε [8]:

$$M_{(3)}(x_1, x_2, \dots, x_m) = \exp \left\{ - \left[\sum_{j=1}^m z_j^\theta - \sum_{i < j} \left(p_i^{-\delta_{ij}} z_i^{-\theta \cdot \delta_{ij}} + p_j^{-\delta_{ij}} z_j^{-\theta \cdot \delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.24)$$

όπου $z_j = -\log x_j$, $p_j = (v_j + m - 1)^{-1}$ για $j = 1, 2, \dots, m$. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε πως και εδώ ισχύει η ιδιότητα (5.11). Οι περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης δίνονται απ' ευθείας από την παρακάτω σχέση:

$$M_{(3)ij}(x_i, x_j) = \exp \left\{ - \left[z_i^\theta + z_j^\theta - \left(p_i^{-\delta_{ij}} z_i^{-\theta \cdot \delta_{ij}} + p_j^{-\delta_{ij}} z_j^{-\theta \cdot \delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{-1/\theta} \right\} \quad (5.25)$$

Όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις για $m = 3$ και $M_{(3)}(x_1, x_2, x_3) = Q_{(3)}(x, y, z)$ οι σχέσεις (5.24) και (5.25) γίνονται:

$$\begin{aligned} Q_{(3)}(x, y, z) &= \exp \left\{ - \left[\sum_{j=1}^3 z_j^\theta - \sum_{i < j} \left(p_i^{-\delta_{ij}} z_i^{-\theta \cdot \delta_{ij}} + p_j^{-\delta_{ij}} z_j^{-\theta \cdot \delta_{ij}} \right)^{-1/\delta_{ij}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \Rightarrow \\ Q_{(3)}(x, y, z) &= \exp \left\{ - \left[z_1^\theta + z_2^\theta + z_3^\theta - \left(p_1^{-\delta_{12}} z_1^{-\theta \cdot \delta_{12}} + p_2^{-\delta_{12}} z_2^{-\theta \cdot \delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(p_1^{-\delta_{13}} z_1^{-\theta \cdot \delta_{13}} + p_3^{-\delta_{13}} z_3^{-\theta \cdot \delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} - \left(p_2^{-\delta_{23}} z_2^{-\theta \cdot \delta_{23}} + p_3^{-\delta_{23}} z_3^{-\theta \cdot \delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.26a) \end{aligned}$$

$$\text{όπου } \begin{cases} z_1 = -\log x \\ z_2 = -\log y \\ z_3 = -\log z \end{cases} \text{ και } \begin{cases} p_1 = (v_1 + 2)^{-1} \\ p_2 = (v_2 + 2)^{-1} \\ p_3 = (v_3 + 2)^{-1} \end{cases} \text{ για } \theta > 0, v_1, v_2, v_3 \geq 0 \text{ και } \delta_{ij} > 0.$$

Επίσης, η σχέση (5.25) για τις περιθώριες κατανομές $2^{\text{ης}}$ τάξης γίνεται:

$$Q_{(3)12}(x_1, x_2) = \exp \left\{ - \left[z_1^\theta + z_2^\theta - \left(p_1^{-\delta_{12}} z_1^{-\theta \cdot \delta_{12}} + p_2^{-\delta_{12}} z_2^{-\theta \cdot \delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} \right]^{-1/\theta} \right\} \quad (5.27a)$$

$$Q_{(3)23}(x_2, x_3) = \exp \left\{ - \left[z_2^\theta + z_3^\theta - \left(p_2^{-\delta_{23}} z_2^{-\theta \cdot \delta_{23}} + p_3^{-\delta_{23}} z_3^{-\theta \cdot \delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \right]^{-1/\theta} \right\} \quad (5.28\alpha)$$

$$Q_{(3)13}(x_1, x_3) = \exp \left\{ - \left[z_1^\theta + z_3^\theta - \left(p_1^{-\delta_{13}} z_1^{-\theta \cdot \delta_{13}} + p_3^{-\delta_{13}} z_3^{-\theta \cdot \delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} \right]^{-1/\theta} \right\} \quad (5.29\alpha)$$

Αναλυτικότερα οι σχέσεις (5.26α) γίνονται:

$$Q_{(3)}(F, G, H) = \exp \left\{ - \left[(-\log F)^\theta + (-\log G)^\theta + (-\log H)^\theta - \left(\left(\frac{v_1 + 2}{(-\log F)^\theta} \right)^{\delta_{12}} + \left(\frac{v_2 + 2}{(-\log G)^\theta} \right)^{\delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} - \left(\left(\frac{v_1 + 2}{(-\log F)^\theta} \right)^{\delta_{13}} + \left(\frac{v_3 + 2}{(-\log H)^\theta} \right)^{\delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} - \left(\left(\frac{v_2 + 2}{(-\log G)^\theta} \right)^{\delta_{23}} + \left(\frac{v_3 + 2}{(-\log H)^\theta} \right)^{\delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.26)$$

ενώ οι περιθώριες κατανομές 2^{ης} τάξης γίνονται:

$$Q_{(3)12}(F, G) = \exp \left\{ - \left[(-\log F)^\theta + (-\log G)^\theta - \left(\left(\frac{v_1 + 2}{(-\log F)^\theta} \right)^{\delta_{12}} + \left(\frac{v_2 + 2}{(-\log G)^\theta} \right)^{\delta_{12}} \right)^{-1/\delta_{12}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.27)$$

$$Q_{(3)23}(G, H) = \exp \left\{ - \left[(-\log G)^\theta + (-\log H)^\theta - \left(\left(\frac{v_2 + 2}{(-\log G)^\theta} \right)^{\delta_{23}} + \left(\frac{v_3 + 2}{(-\log H)^\theta} \right)^{\delta_{23}} \right)^{-1/\delta_{23}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.28)$$

$$Q_{(3)13}(F, H) = \exp \left\{ - \left[(-\log F)^\theta + (-\log H)^\theta - \left(\left(\frac{v_1 + 2}{(-\log F)^\theta} \right)^{\delta_{13}} + \left(\frac{v_3 + 2}{(-\log H)^\theta} \right)^{\delta_{13}} \right)^{-1/\delta_{13}} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (5.29)$$

5.4 Εύρεση Παραμέτρων των Παραμετρικών Πολυμεταβλητών Προτύπων

Στα τρία παραμετρικά πρότυπα που περιγράψαμε παραπάνω παρατηρούμε πως η γενική τους μορφή περιγράφεται από ένα σύνολο παραμέτρων, του θ , των v_1, v_2, v_3 και των $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$. Παρατηρούμε ότι για το παραμετρικό πρότυπο $M1$ οι οριακές τιμές είναι των παραμέτρων αυτών είναι 1 (για την θ), 0 (για τις v_1, v_2, v_3), και 1 (για τις $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$) έτσι ώστε: $\theta \geq 1$, $v_1, v_2, v_3 \geq 0$ και $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13} \geq 1$. Αντίστοιχα τόσο για το παραμετρικό πρότυπο $M2$ όσο και για το $M3$ οι οριακές τιμές είναι 0 (για την θ), 0 (για τις v_1, v_2, v_3), και 0 (για τις $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13}$) έτσι ώστε: $\theta > 0$, $v_1, v_2, v_3 \geq 0$ και $\delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13} > 0$. Οι οριακές αυτές τιμές θα χρησιμοποιηθούν στον προσδιορισμό των τελικών τιμών που θα περιγράφουν τα παραμετρικά πρότυπα που βρήκαμε παραπάνω. Στο σημείο αυτό θα περιγραφεί συνοπτικά ο αλγόριθμος εύρεσης των παραπάνω παραμέτρων για το πρότυπο $M1$ (βλέπε Παράρτημα Β: κώδικας MATLAB®). Ο αντίστοιχος αλγόριθμος για τα $M2$ και $M3$ είναι παρόμοιος. Επιπλέον, πρέπει να επισημάνουμε πως για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα χωρίσαμε την μελέτη, όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, σε δύο μέρη: νυχτερινές και ημερήσιες μετρήσεις. Έτσι για την εύρεση των παραμέτρων της κάθε μιας από τις παραπάνω δύο περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε τα αντίστοιχα δεδομένα (υπενθυμίζουμε ότι νυχτερινές μετρήσεις θεωρούνται εκείνες στις οποίες η ηλιακή ακτινοβολία είναι μηδενική).

Για την εύρεση των παραμέτρων θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της **μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood method)**. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή αρκεί για κάθε διάνυσμα των παραμέτρων $\vec{s} = (\vec{\theta}, \vec{v}, \vec{\delta}) = (\theta, v_1, v_2, v_3, \delta_{12}, \delta_{23}, \delta_{13})$ να προσπαθούμε να μεγιστοποιούμε συνεχώς την ποσότητα

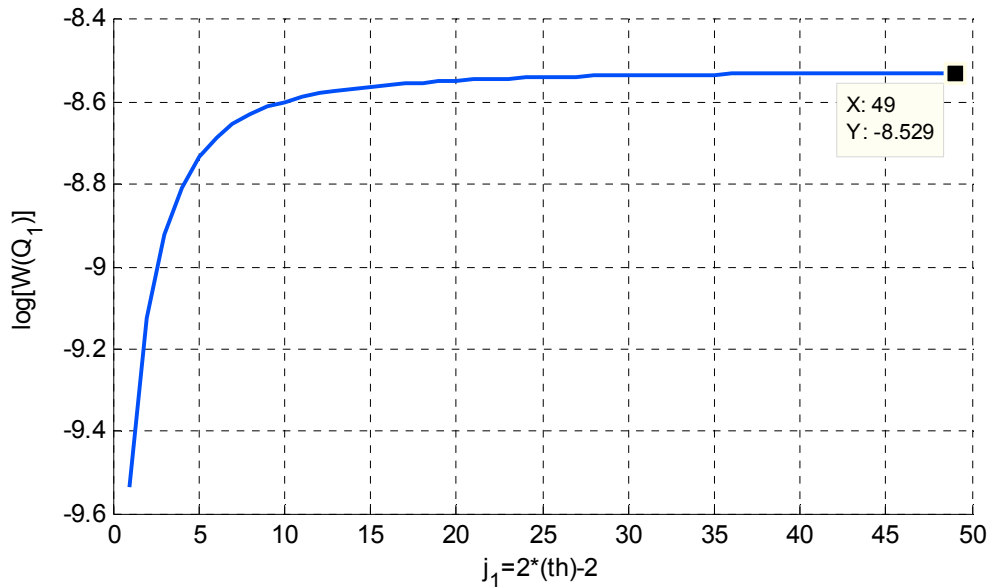
$$W(Q_{(i)}) = \log \left(\prod_{q=1}^n Q_{(i)}(F_q, G_q, H_q) \right) \quad \text{για } i=1,2,3 \quad (4) \quad (\text{για τα παραμετρικά πρότυπα})$$

(4) Σύμφωνα με την [16] η προς μεγιστοποίηση σχέση είναι η μερική παράγωγος 3^{ns} τάξης της Q ως προς F, G, H . Χρησιμοποιείται, όμως η παραπάνω σχέση για λόγους απλοποίησης του προβλήματος.

$M1, M2$ και $M3$) και $n = 4081$ ή $n = 4679$ για νυχτερινές ή ημερήσιες μετρήσεις αντίστοιχα. Προφανώς θα υπάρχει κάποιο βέλτιστο διάνυσμα $\bar{s} = \bar{s}^*$ το οποίο θα μας δίνει την μέγιστη τιμή $\log(Q_{(i)}(F, G, H))^*$. Το σύνολο των παραμέτρων $\bar{s}^* = (\theta^*, \nu_1^*, \nu_2^*, \nu_3^*, \delta_{12}^*, \delta_{23}^*, \delta_{13}^*)$ μας προσδιορίζει επακριβώς, πλέον, την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που αναζητούμε στην παρούσα μελέτη [8], [16], [19].

Είναι προφανές ότι ως αρχικές τιμές στον προσδιορισμό του $\bar{s}^*$ θα χρησιμοποιήσουμε τις οριακές τιμές των παραμέτρων που έχουμε παραπάνω, δηλαδή: $\bar{s}^*_{(0)} = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ για το παραμετρικό πρότυπο $M1$ (αντίστοιχα για τα $M2$ και $M3$). Έτσι, μετά από k αριθμό δοκιμών θα προσδιορίσουμε το βέλτιστο διάνυσμα παραμέτρων: $\bar{s}^* = \bar{s}^*_{(k)}$ [9], [10], [11].

Στο σημείο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά την διαδικασία εύρεσης των παραμέτρων για τις **ημερήσιες μετρήσεις του παραμετρικού πρότυπου $M1$** . Με αρχικό διάνυσμα το $\bar{s}^*_{(0)}$ ($k=1$) διατηρούμε σταθερές όλες τις παραμέτρους του αρχικού διανύσματος εκτός από την παράμετρο θ την οποία θέτουμε ίση με την ποσότητα $1 + 0.5(j_1)$ για $j_1 = 0..50$ ώστε να βρούμε την τιμή εκείνη της θ για την



Σχήμα 5.1: Απεικόνιση της προς μεγιστοποίηση ποσότητας $W(Q_{(1)})$ συναρτήσει της παραμέτρου

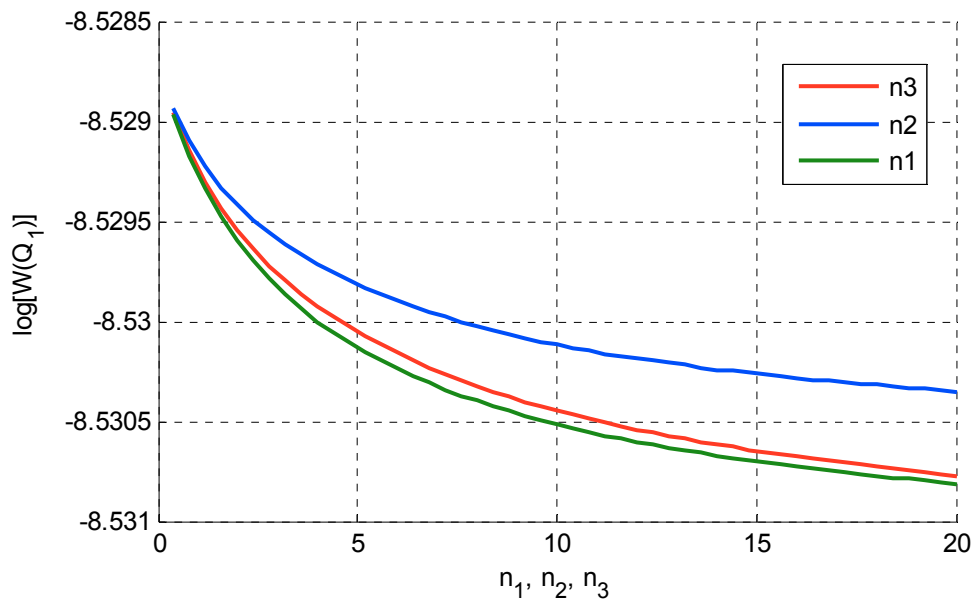
$\theta = 1 + 0.5j_1$, ενώ οι υπόλοιπες 6 παράμετροι παραμένουν σταθερές.

οποία μεγιστοποιείται η ποσότητα $W(Q_{(1)})$ στην περίπτωση των ημερήσιων μετρήσεων. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 5.1, που δείχνει την μεταβολή της παραπάνω ποσότητας συναρτήσει του j_1 και επομένως συναρτήσει του θ , η μεγιστοποίηση του $W(Q_{(1)})$ προκύπτει για $j_1 = 49$ δηλαδή για $\theta^*_{(1)} = 25.5$. Μετά λοιπόν την πρώτη δοκιμή προέκυψε ότι $\bar{s}^*_{(1)} = (25.5, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Στην δοκιμή $k = 2$ διατηρούμε σταθερές όλες τις παραμέτρους (συμπεριλαμβανομένου και του θ που μεταβαλλόταν στην προηγούμενη δοκιμή) εκτός από μία παράμετρος της επιλογής μας. Για παράδειγμα επιλέγοντας να μεταβάλλουμε την παράμετρο δ_{12} βρίσκουμε ότι $\delta_{12}^*_{(2)} = 14.2$ ($j_1 = 22$).

5.5 Αποτελέσματα Παραμέτρων

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία προσδιορίζουμε και τις υπόλοιπες παραμέτρους του πολυμεταβλητού $M1$ προτύπου φτάνοντας στα αποτελέσματα που συνοψίζονται στον Πίνακα 5.1.

Ωστόσο, παρατηρούμε πως οι βέλτιστες τιμές των παραμέτρων v_1, v_2, v_3 είναι μηδενικές. Αυτό οφείλεται στο ότι ενδεχόμενη αύξηση σε οποιαδήποτε από τις παραμέτρους v_1, v_2, v_3 οδηγεί σε μείωση της τιμής $W(Q_{(1)})$ (συνεχίζοντας το παράδειγμα παραπάνω) την οποία επιδιώκουμε να μεγιστοποιήσουμε. Το γεγονός αυτό φαίνεται και από το Σχήμα 5.2 όπου συνοψίζεται η μεταβολή της ποσότητας $W(Q_{(1)})$ όταν μεταβάλλεται μία από τις παραμέτρους v_1, v_2, v_3 ενώ ταυτόχρονα όλες οι υπόλοιπες παράμετροι (6) παραμένουν σταθεροί. Παρατηρούμε πως οι συναρτήσεις που απεικονίζονται στο Σχήμα 5.2 είναι γνησίως φθίνουσες. Είναι επόμενο λοιπόν πως η μέγιστη τιμή της ποσότητας $W(Q_{(1)})$ που ζητάμε θα δίνεται για $v_1 = v_2 = v_3 = 0$.



Σχήμα 5.2: Απεικόνιση της προς μεγιστοποίηση ποσότητας $W(Q_{(1)})$ συναρτήσεως των παραμέτρων

v_1, v_2, v_3 , ενώ κάθε φορά οι υπόλοιπες 6 παράμετροι παραμένουν σταθερές.

Πίνακας 5.1: Αποτελέσματα εύρεσης παραμέτρων πολυμεταβλητών προτύπων $M1$, $M2$ και $M3$.

	Πρότυπο $M1$	Πρότυπο $M2$	Πρότυπο $M3$
Νύχτα	$\theta = 24.5$ $v_2 = v_3 = 0$ $\delta_{23} = 8.2$	$\theta = 10^{-6} > 0$ $v_2 = v_3 = 0$ $\delta_{23} = 2.5946$	$\theta > 0$ $v_2 = v_3 = 0$ $\delta_{23} > 0$
Ημέρα	$\theta = 25.85$ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ $\delta_{12} = 14.2$ $\delta_{23} = 8.6$ $\delta_{13} = 8.6$	$\theta = 10^{-6} > 0$ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ $\delta_{12} = 3.0842$ $\delta_{23} = 2.0562$ $\delta_{13} = 2.0562$	$\theta > 0$ $v_1 = v_2 = v_3 = 0$ $\delta_{12} > 0$ $\delta_{23} > 0$ $\delta_{13} > 0$

Στο σημείο αυτό πρέπει να σημειωθούν κάποιες παρατηρήσεις για τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.1 και συγκεκριμένα τις τιμές των παραμέτρων στα παραμετρικά πρότυπα $M2$ και $M3$. Αρχικά, στο $M2$ τόσο για τις ημερήσιες όσο και για τις νυχτερινές μετρήσεις παρατηρούμε πως η τιμή της παραμέτρου θ προέκυψε

πολύ μικρή και σχεδόν ίση με το 0 (καθώς στο παραμετρικό αυτό πρότυπο πρέπει $\theta > 0$). Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η εξίσωση (5.20) δεν έχει εκθετική μορφή όπως συνέβη στο παραμετρικό πρότυπο $M1$ και την εξίσωση (5.14). Έτσι, κατά την

μεγιστοποίηση της ποσότητας $W(Q_{(i)}) = \log \left(\prod_{q=1}^n Q_{(i)}(F_q, G_q, H_q) \right)$ που ορίστηκε

παραπάνω σύμφωνα με την μέθοδο της μέγιστης πιθανοφάνειας, το μοντέλο $M2$ δεν δούλεψε όπως έπρεπε. Τέλος, το παραμετρικό πρότυπο $M3$ συμπεριφέρεται με ανάλογο τρόπο καθώς εμφανίζονται πολλές απροσδιοριστίες κατά τη διαδικασία εύρεσης των παραμέτρων.

Κεφάλαιο 6

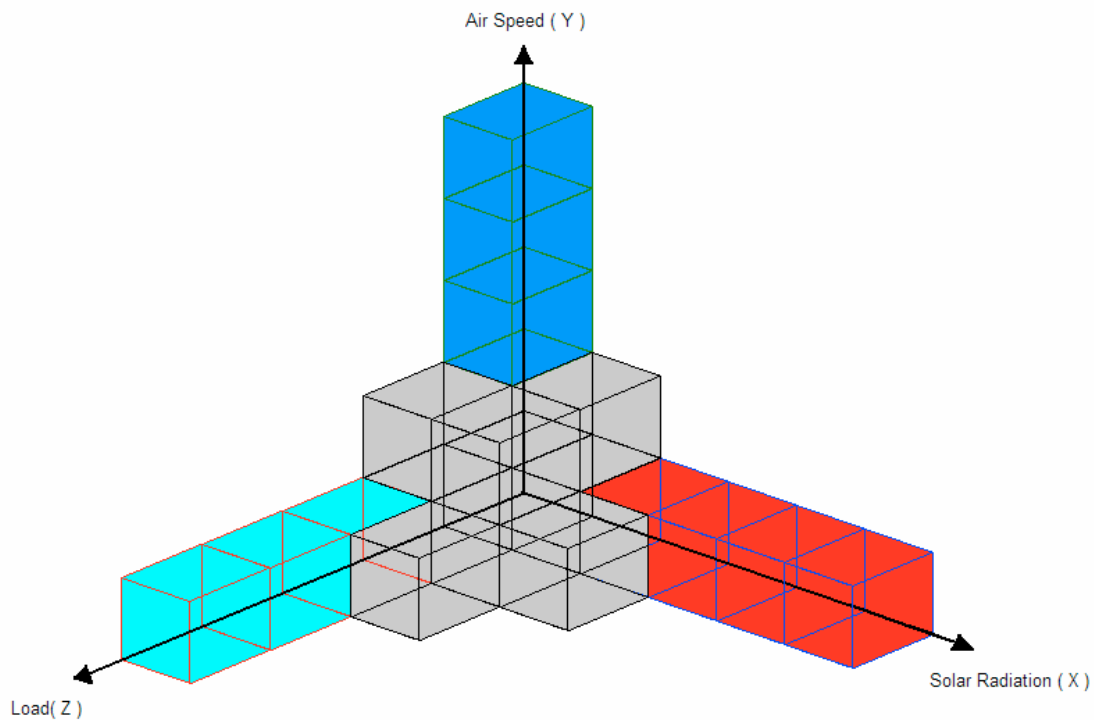
Εφαρμογές – Συμπεράσματα

Εισαγωγή

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο βρέθηκε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ζητούσαμε από την αρχή της παρούσας εργασίας. Στο παρόν κεφάλαιο θα βρούμε το συνολικό (σχετικό) τετραγωνικό σφάλμα που παρουσιάζει η χρησιμοποίηση του πολυμεταβλητού παραμετρικού μοντέλου που προτάθηκε. Επιπλέον, θα παρασταθούν γραφικά οι περιθώριες κατανομές δεύτερης τάξης και θα δοθούν τα γενικότερα συμπεράσματα της εργασίας.

6.1 Εφαρμογές – Εύρεση Σφαλμάτων

Για την εύρεση των σφαλμάτων θα ακολουθήσουμε συγκεκριμένη μέθοδο. Θα χωρίσουμε τον υπό μελέτη χώρο (δηλαδή τον χώρο που ορίζει το πεδίο ορισμού, όπως αυτό ορίστηκε στο Κεφάλαιο 5) σε μικρότερα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Αρχικά θα βρούμε την πιθανότητα εμφάνισης των πραγματικών δεδομένων (τριάδων) σε κάθε παραλληλόγραμμο και έπειτα θα την συγκρίνουμε με την αντίστοιχη πιθανότητα εμφάνισης τριάδων που θα μας δίνει η συνάρτηση που βρήκαμε στο Κεφάλαιο 5 (για κάθε παραλληλόγραμμο).



Σχήμα 6.1: Χωρισμός του υπό μελέτη χώρου $[0, 1.5] \times [0, 40] \times [0, 100,000]$ σε μικρότερα παραλληλόγραμμα.

Επιλέξαμε να χωρίσουμε τον κάθε ένα από τους 3 άξονες του υπό μελέτη χώρου (x' , y' , z' ή αντίστοιχα άξονες ηλιακής ακτινοβολίας, ταχύτητας ανέμου, ωριαίου φορτίου) σε 8 ευθύγραμμα τμήματα (Σχήμα 6.1). Συνολικά, λοιπόν, θα έχουμε $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ παραλληλεπίπεδα όπου το κάθε ένα θα περιέχει κατά μέσο όρο:

$\frac{8760}{512} = 17.109 \approx 17$ τριάδες μετρήσεων. Επιλογή μικρότερων τμημάτων (και επομένως περισσότερων παραλληλόγραμμων) θα οδηγούσε σε αρκετά μικρότερο αριθμό τριάδων μετρήσεων για κάθε παραλληλεπίπεδο, κάτι που θα είχε ως συνέπεια τα αποτελέσματα των σφαλμάτων που θα προκύψουν να μην είναι ικανοποιητικά. Το ίδιο θα συνέβαινε αν είχαμε επιλέξει μικρότερο αριθμό «χωρισμάτων» για κάθε άξονα, καθώς τότε θα είχαμε πολύ μικρότερο αριθμό παραλληλεπιπέδων.

Επομένως, η διαμέριση κάθε μιας από τις τρεις μεταβλητές έχει ως εξής:

$$x = 0 + \left(\frac{1.5 - 0}{8} \right) * n_1 = 0.1875 * n_1 \quad (6.1)$$

$$y = 0 + \left(\frac{40 - 0}{8} \right) * n_2 = 5 * n_2 \quad (6.2)$$

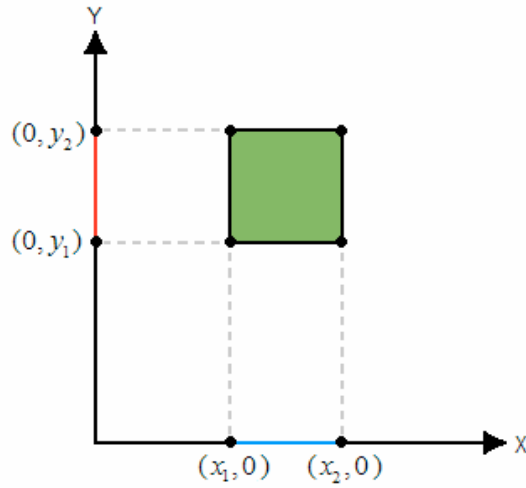
$$z = 0 + \left(\frac{100,000 - 0}{8} \right) * n_3 = 12,500 * n_3 \quad (6.3)$$

για $n_1 \in [0, 8]$, $n_2 \in [0, 8]$, $n_3 \in [0, 8]$ και $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$.

Επιπλέον, για την εύρεση της πιθανότητας εμφάνισης μετρήσεων τριάδων σε κάθε παραλληλεπίπεδο (δεδομένου ότι έχουμε την αθροιστική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας) είναι απαραίτητο να βρούμε την τιμή της συνάρτησης $Q(X, Y, Z)$ σε όλες τις κορυφές του παραλληλεπιπέδου όπως φαίνεται και στο Σχήμα 6.2. Για να γίνουν πιο κατανοητά τα παραπάνω παραθέτουμε και την περίπτωση όπου το πρόβλημα έχει μόνο δύο μεταβλητές (δυδιάστατο πρόβλημα) όπου αναζητούμε την πιθανότητα εμφάνισης μιας δυάδας μετρήσεων μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο (Σχήμα 6.2).

Για την περίπτωση των δύο διαστάσεων προκύπτει ότι η ζητούμενη πιθανότητα εμφάνισης μιας δυάδας μετρήσεων μέσα σε ένα παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα σημεία (x_1, y_1) και (x_2, y_2) είναι:

$$P[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = Q(x_2, y_2) + Q(x_1, y_1) - Q(x_2, y_1) - Q(x_1, y_2) \quad (6.4)$$



$$P[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = Q(x_2, y_2) - Q(x_1, y_2) - Q(x_2, y_1) + Q(x_1, y_1)$$

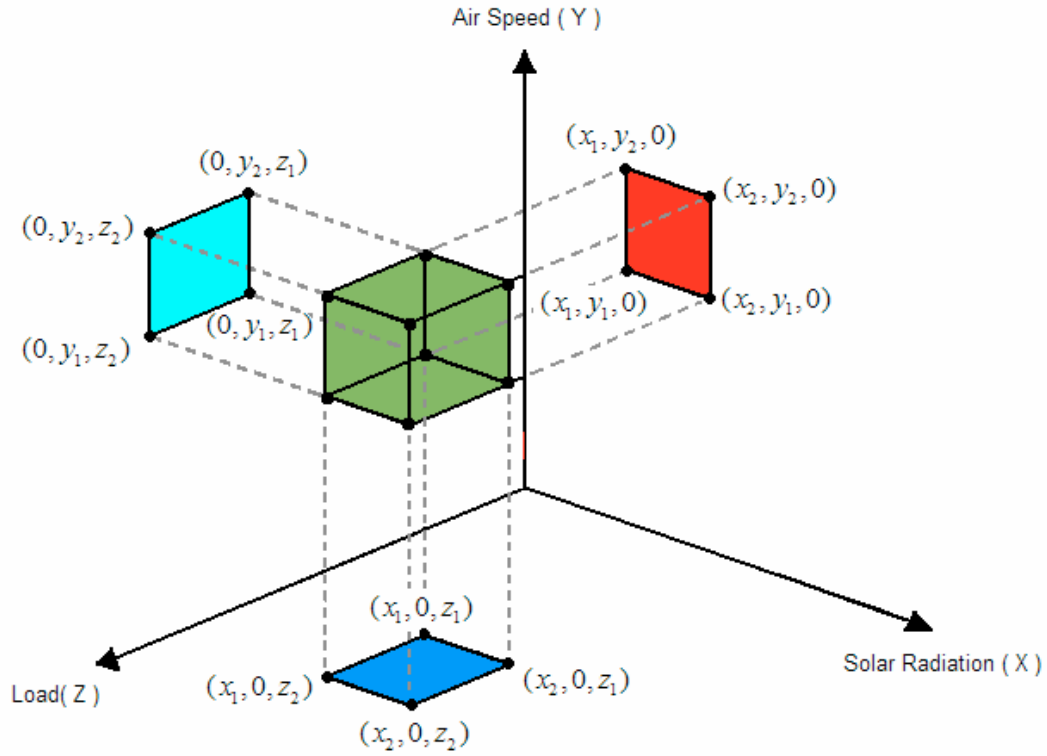
Σχήμα 6.2: Εύρεση πιθανότητας εμφάνισης δυνάδας μετρήσεων μέσα σε ένα παραλληλόγραμμο (περίπτωση δύο διαστάσεων).

Για την περίπτωση των τριών διαστάσεων, που είναι και το πρόβλημά μας, προκύπτει ότι η ζητούμενη πιθανότητα εμφάνισης μιας δυνάδας μετρήσεων μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τα σημεία (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) είναι:

$$P[(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)] = Q(x_2, y_2, z_2) - Q(x_1, y_2, z_2) - Q(x_2, y_2, z_1) + Q(x_1, y_2, z_1) - Q(x_2, y_1, z_2) + Q(x_1, y_1, z_2) + Q(x_2, y_1, z_1) - Q(x_1, y_1, z_1) \quad (6.5)$$

Έχοντας ήδη προσδιορίσει την συνάρτηση Q με τη βοήθεια των παραμετρικών προτύπων στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτό που μένει για την εύρεση των σφαλμάτων είναι να προσδιορίσουμε την πιθανότητα εμφάνισης των πραγματικών μετρήσεων που διαθέτουμε εξ' αρχής στα αντίστοιχα παραλληλεπίπεδα που κατασκευάσαμε παραπάνω βάσει της διαμέρισης που επιλέχθηκε. Είναι γνωστό πως το σχετικό σφάλμα για κάθε παραλληλεπίπεδο δίνεται από τον τύπο:

$$E_{(n_1, n_2, n_3)} = \frac{Q_{realdata(n_1, n_2, n_3)} - Q_{M1(n_1, n_2, n_3)}}{Q_{M1(n_1, n_2, n_3)}} \quad (6.6)$$



$$\begin{aligned}
 P[(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)] = & Q(x_2, y_2, z_2) - Q(x_1, y_2, z_2) + \\
 & Q(x_2, y_1, z_1) - Q(x_2, y_2, z_1) + \\
 & Q(x_1, y_2, z_1) - Q(x_1, y_1, z_1) + \\
 & Q(x_1, y_1, z_2) - Q(x_2, y_1, z_2)
 \end{aligned}$$

Σχήμα 6.3: Εύρεση πιθανότητας εμφάνισης τριάδας μετρήσεων μέσα σε ένα παραλληλεπίπεδο (περίπτωση τριών διαστάσεων).

Το συνολικό τετραγωνικό σχετικό σφάλμα θα είναι:

$$E_{total} = \sum_{n_3=0}^8 \sum_{n_2=0}^8 \sum_{n_1=0}^8 E_{(n_1, n_2, n_3)}^2 \quad (5) \quad (6.7)$$

Επιπλέον, η τετραγωνική ρίζα του συνολικού σφάλματος, δηλαδή η ποσότητα

(5) Είναι προφανές πως για να προσδιοριστεί ένα παραλληλεπίπεδο επακριβώς απαιτούνται κατ' ελάχιστο δυο σημεία: εκείνο με τις μικρότερες συντεταγμένες και εκείνο με τις μεγαλύτερες ή από το Σχήμα 6.3 τα σημεία (x_1, y_1, z_1) και (x_2, y_2, z_2) . Οι δείκτες n_1, n_2, n_3 αναφέρονται στο σημείο εκείνο με τις «μικρότερες» συντεταγμένες και συγκεκριμένα στο (x_1, y_1, z_1) .

$R = \sqrt{E_{total}}$, αποτελεί ένα κριτήριο για το αν η συνάρτηση Q_{M1} που βρέθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο αποτελεί ένα καλό μοντέλο αναπαράστασης (προσομοίωσης) των τριών μεταβλητών που ερευνούμε στην παρούσα εργασία: ηλιακή ακτινοβολία, ταχύτητα ανέμου και ωριαίο ζητούμενο φορτίο. Στον Πίνακα 6.1 που ακολουθεί παραθέτουμε τις πραγματικές ($Q_{realdata(n_1, n_2, n_3)}$) και τις εκτιμούμενες ($Q_{M1(n_1, n_2, n_3)}$) – βάσει του μοντέλου $M1$ που προσδιορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο – πιθανότητες εμφάνισης μετρήσεων σε 10 παραλληλεπίπεδα σύμφωνα με τη διαμέριση που έγινε παραπάνω. Επιπλέον δίνεται και το αντίστοιχο τετραγωνικό σχετικό σφάλμα.

Πίνακας 6.1: Σύγκριση πραγματικών και ενδεικτικών τιμών του παραμετρικού μοντέλου (ημερήσιες μετρήσεις) που βρέθηκε για 10 παραλληλεπίπεδα, σύμφωνα με την διαμέριση που προηγήθηκε.

(n_1, n_2, n_3)	$Q_{realdata(n_1, n_2, n_3)}$	$Q_{M1(n_1, n_2, n_3)}$	$E_{(n_1, n_2, n_3)}^2$
(0,0,0)	0	0	0
(2,2,2)	0.0002	0	0
(3,2,3)	0.0137	0	0
(6,8,4)	0.3924	0.4040	0.0008
(3,3,5)	0.1502	0.4416	0.4353
(4,4,5)	0.2763	0.6560	0.3350
(7,6,5)	0.5732	0.7019	0.0336
(3,5,6)	0.3133	0.5159	0.1542
(8,7,7)	0.9186	1.0000	0.0066
(8,8,8)	1.0000	1.0000	0
ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΣΦΑΛΜΑ $E_{total} = \sum_{n_3=0}^8 \sum_{n_2=0}^8 \sum_{n_1=0}^8 E_{(n_1, n_2, n_3)}^2$			22.7930

Από τον Πίνακα 6.1 μπορούμε να επισημάνουμε τα εξής: αρχικά παρατηρούμε πως μη μηδενικά σφάλματα εμφανίζονται σε παραλληλεπίπεδα που βρίσκονται στη «μέση» του χώρου που μελετάμε και όχι «στα άκρα». Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στα άκρα, δηλαδή στα παραλληλεπίπεδα που έχουν είτε μικρούς δείκτες ($n_i = 0, 1, 2$) είτε μεγάλους ($n_i = 7, 8$) οι αποκλίσεις των πραγματικών τιμών από τις ενδεικτικές τιμές που δίνει το παραμετρικό μοντέλο που προτείνουμε είναι πολύ μικρές.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι οι μεγαλύτερες αποκλίσεις και επομένως τα μεγαλύτερα σχετικά τετραγωνικά σφάλματα παρουσιάζονται κυρίως στα παραλληλεπίπεδα που βρίσκονται στη μέση του χώρου που εξετάζουμε και ταυτόχρονα χαρακτηρίζονται από μικρούς δείκτες. Για παράδειγμα, παρατηρούμε ότι το παραλληλεπίπεδο με χαρακτηριστικούς δείκτες $(3, 3, 5)$ παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερο σφάλμα – 0.4353 – από το αντίστοιχο σφάλμα του παραλληλεπίπεδου $(7, 6, 5)$ το οποίο είναι περίπου 0.0336. Αυτό οφείλεται στο ότι όσο αυξάνονται οι χαρακτηριστικοί δείκτες τόσο αυξάνεται και η αθροιστική συχνότητα που χαρακτηρίζει ένα παραλληλεπίπεδο (υπενθυμίζεται ότι η αθροιστική συχνότητα περιγράφεται από μια συνάρτηση γνησίως αύξουσα με πεδίο τιμών $[0, 1]$), με αποτέλεσμα να αυξάνεται ο παράγοντας $Q_{M1(n_1, n_2, n_3)}$ που συνεπάγεται μείωση του αντίστοιχου σχετικού σφάλματος όπως φαίνεται και από την σχέση (6.7).

Επιπλέον, παρατηρούμε πως ισχύουν και οι ιδιότητες της αθροιστικής συχνότητας καθώς $Q_{realdata(0,0,0)} = Q_{M1(0,0,0)} = 0$ και ταυτόχρονα $Q_{realdata(8,8,8)} = Q_{M1(8,8,8)} = 1.0000$. Για να γίνει πιο κατανοητή η διαμέριση που προηγήθηκε παραπάνω καθώς και η ανάγνωση του Πίνακα 6.1 παραθέτουμε ένα παράδειγμα: για $(n_1, n_2, n_3) = (7, 6, 5)$ πιθανότητα να εμφανιστεί μια τυχαία τριάδα μετρήσεων από τις 8,760 που περιέχονται σε ένα ημερολογιακό έτος στα όρια των μεταβλητών όπως προκύπτουν από την αντίστοιχη διαμέριση (ταυτόχρονη εμφάνιση ηλιακής ακτινοβολίας μέχρι $1.5 \cdot kW/m^2$, ταχύτητας ανέμου: μέχρι $35 \cdot m/sec$ και ωριαίου ζητούμενου φορτίου: μέχρι $75,000 \cdot kW$) είναι 0.7019 σύμφωνα με το μοντέλο που προτείναμε ενώ σύμφωνα με τις πραγματικές μετρήσεις που είχαμε στη

διάθεσή μας η αντίστοιχη πιθανότητα είναι: 0.5732, με τετραγωνικό σχετικό σφάλμα 0.0336.

Τέλος, μετά από υπολογισμούς όλων των τετραγωνικών σχετικών σφαλμάτων (512 παραλληλεπίπεδα) βρέθηκε ότι το συνολικό τετραγωνικό σχετικό σφάλμα, όπως φαίνεται και στον Πίνακα 6.1, είναι ίσο με 31.6519 ενώ η ποσότητα $R = \sqrt{E_{total}}$ προκύπτει ίση με 5.626. Δηλαδή το συνολικό σφάλμα της μελέτης προκύπτει ίσο με 5.63%, ικανοποιητικό ποσοστό βάσει του σχετικά μικρού αριθμού των μετρήσεων (τριάδων) που είχαμε στη διάθεσή μας.

6.2 Διαγράμματα Περιθώριων Κατανομών Δεύτερης Τάξης

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματα που δείχνουν πως επηρεάζονται οι τρεις μεταβλητές του προβλήματος ανά δύο – δηλαδή τις μεταξύ τους συσχετίσεις που δίνονται από τις περιθώριες κατανομές δεύτερης τάξης. Όπως ειπώθηκε και στο Κεφάλαιο 3 (§3.2) η γενική συμβολική εξίσωση $Q(X, Y, Z)$ παριστάνει μια υπερεπιφάνεια στο χώρο του $\mathbb{R}^4$, που δεν μπορεί να παρασταθεί σε τρεις διαστάσεις. Αυτός είναι και ο λόγος που θα χρησιμοποιηθούν τα διαγράμματα των περιθώριων κατανομών δεύτερης τάξης.

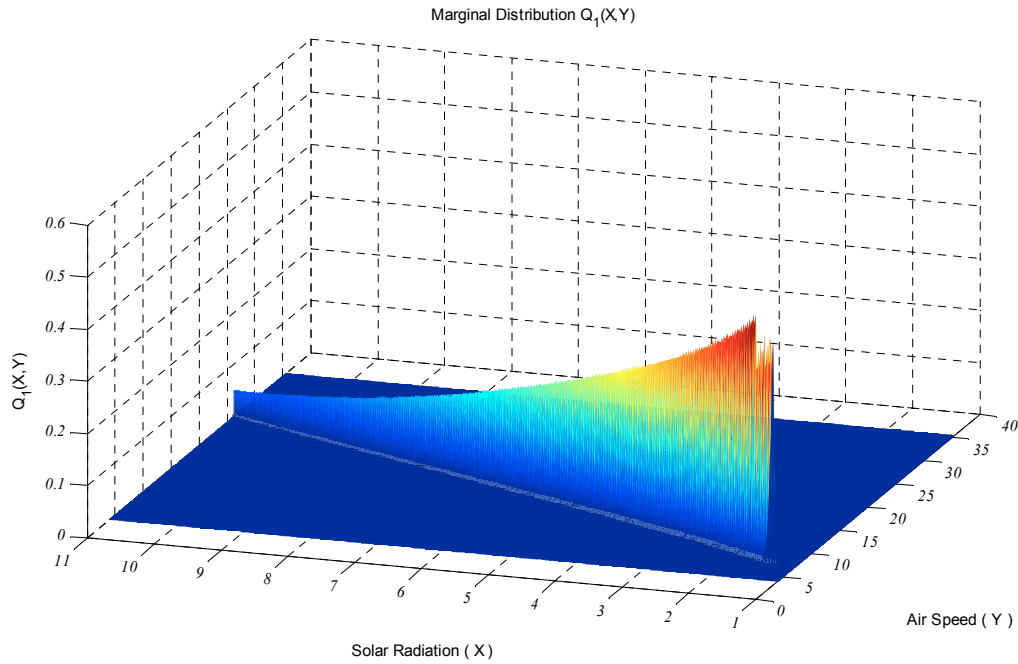
Αρχικά υπενθυμίζουμε πως οι σχέσεις που δίνουν τις περιθώριες κατανομές δεύτερης τάξης – συσχετίσεις είναι ($\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0$):

$$Q_{(1)FG}(F, G) = \exp \left\{ - \left[\left((-\log F)^{\theta\delta_{12}} + (-\log G)^{\theta\delta_{12}} \right)^{\frac{1}{\delta_{12}}} + \frac{(-\log F)^\theta}{2} + \frac{(-\log G)^\theta}{2} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (6.8)$$

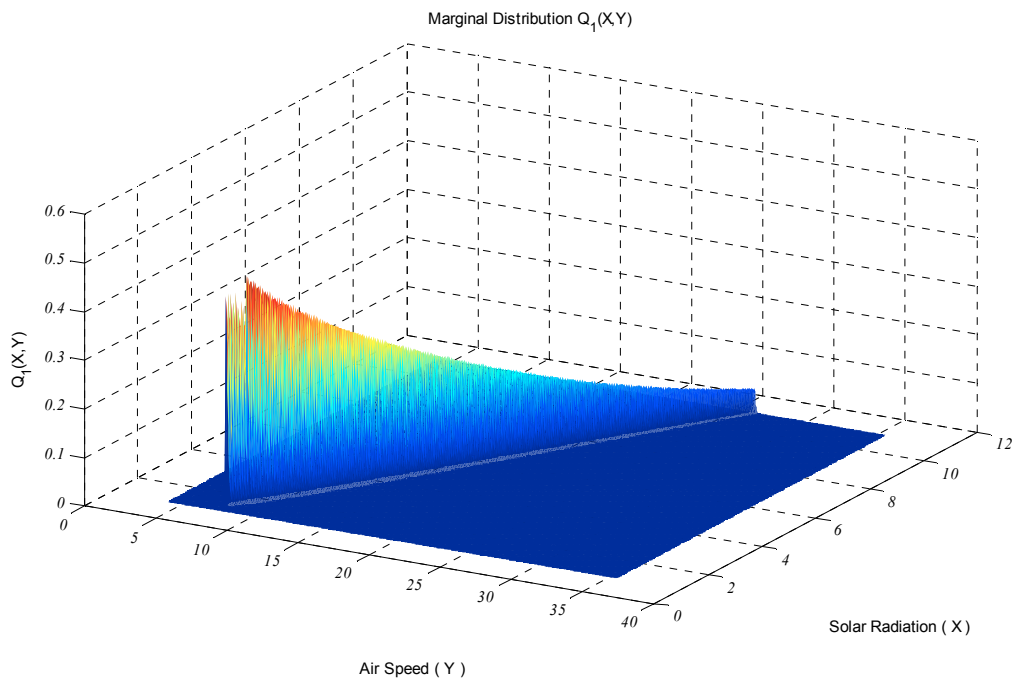
$$Q_{(1)GH}(G, H) = \exp \left\{ - \left[\left((-\log G)^{\theta\delta_{23}} + (-\log H)^{\theta\delta_{23}} \right)^{\frac{1}{\delta_{23}}} + \frac{(-\log G)^\theta}{2} + \frac{(-\log H)^\theta}{2} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (6.9)$$

$$Q_{(1)FH}(F, H) = \exp \left\{ - \left[\left((-\log F)^{\theta\delta_{13}} + (-\log H)^{\theta\delta_{13}} \right)^{\frac{1}{\delta_{13}}} + \frac{(-\log F)^{\theta}}{2} + \frac{(-\log H)^{\theta}}{2} \right]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (6.10)$$

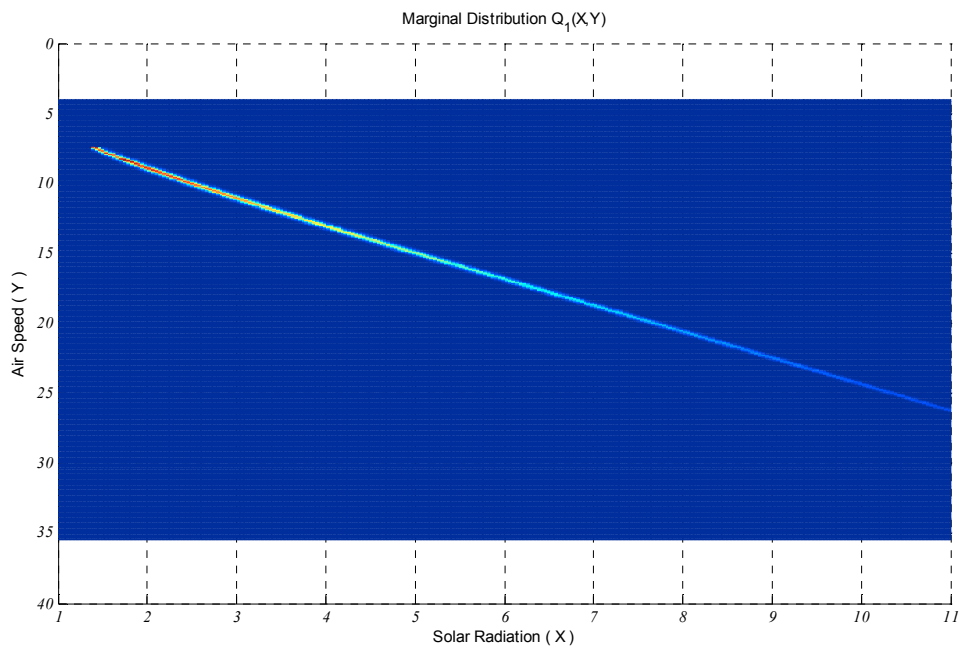
όπου F, G, H οι συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας των τριών μεταβλητών με τις παραμέτρους να έχουν τις εξής τιμές (για τις ημερήσιες μετρήσεις): $\theta = 25.85$, $\delta_{12} = 14.2$, $\delta_{23} = 8.6$ και $\delta_{13} = 8.6$. Στα Σχήματα που ακολουθούν στις επόμενες σελίδες φαίνονται τα διαγράμματα της κάθε περιθώριας κατανομής (αντίστοιχα για τις σχέσεις (6.8), (6.9) και (6.10)).



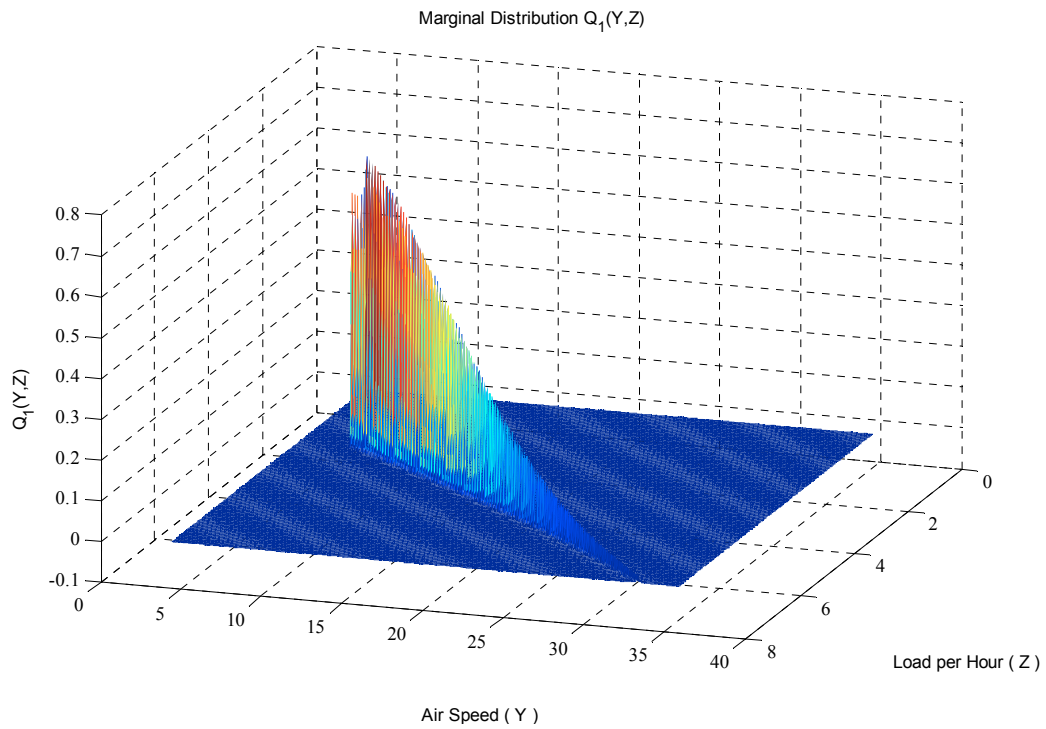
Σχήμα 6.4: Γραφική αναπαράσταση (πλάγια όψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών X και Y για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



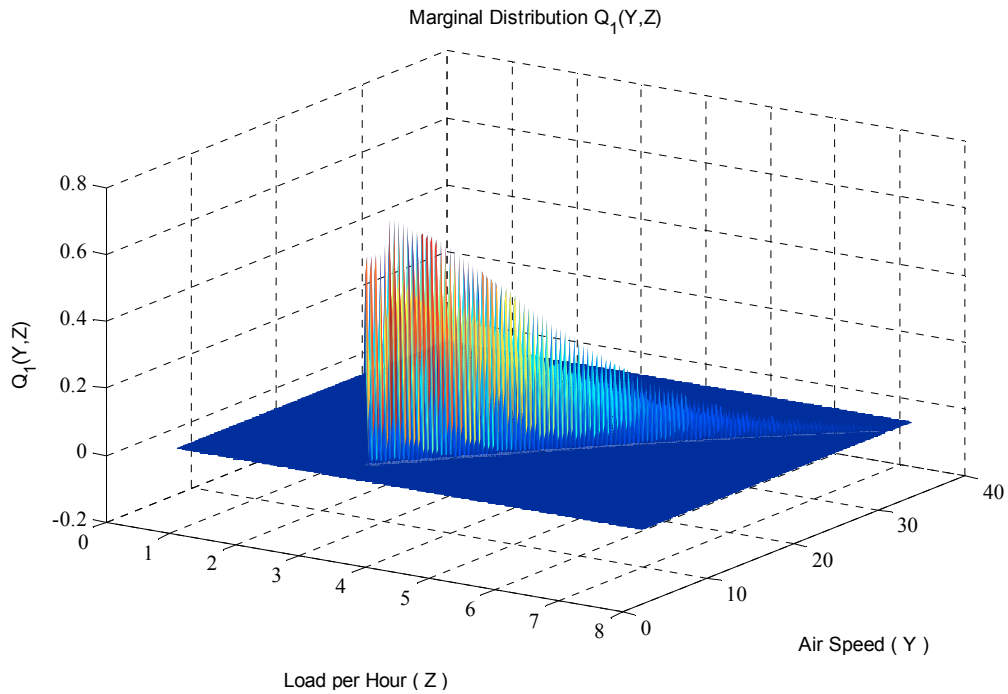
Σχήμα 6.5: Γραφική αναπαράσταση (πλάγια όψη) περιθώριας κατανομής $2^{η5}$ τάξης των μεταβλητών X και Y για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



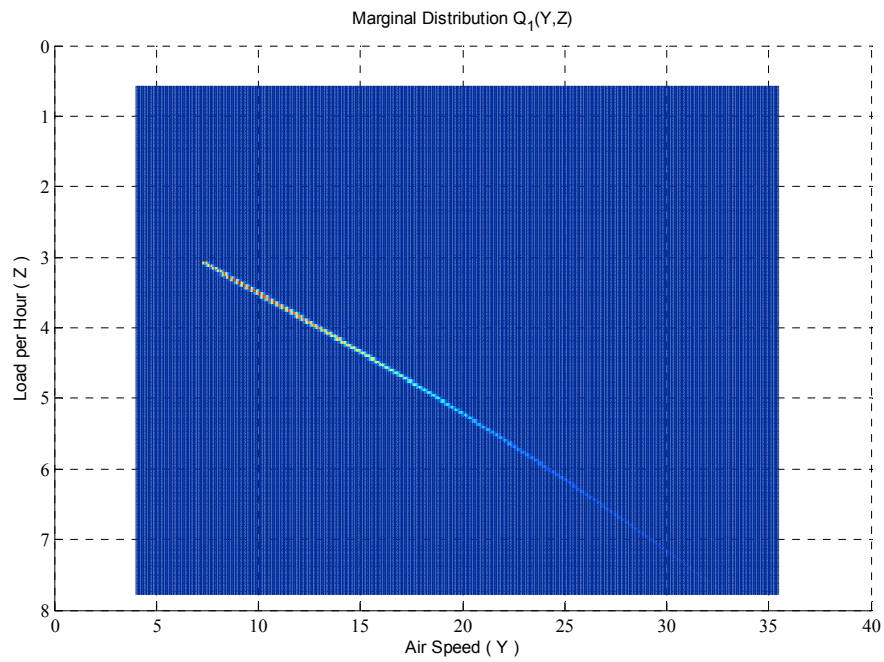
Σχήμα 6.6: Γραφική αναπαράσταση (κάτοψη) περιθώριας κατανομής $2^{η5}$ τάξης των μεταβλητών X και Y για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1. Έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζει η γραμμική συμπεριφορά που παρατηρείται μεταξύ των 2 μεταβλητών.



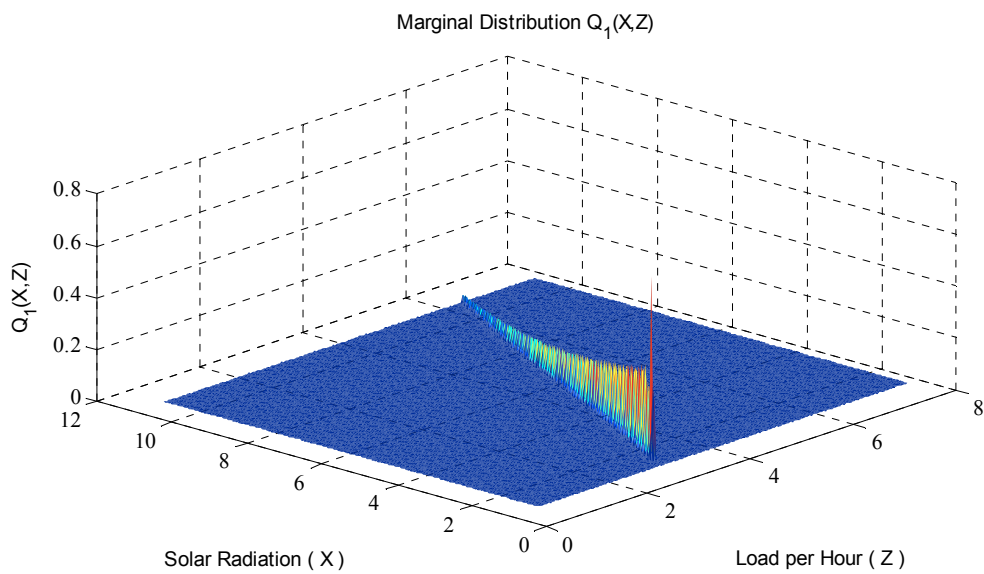
Σχήμα 6.7: Γραφική αναπαράσταση (πλάγια όψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών Y και Z για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



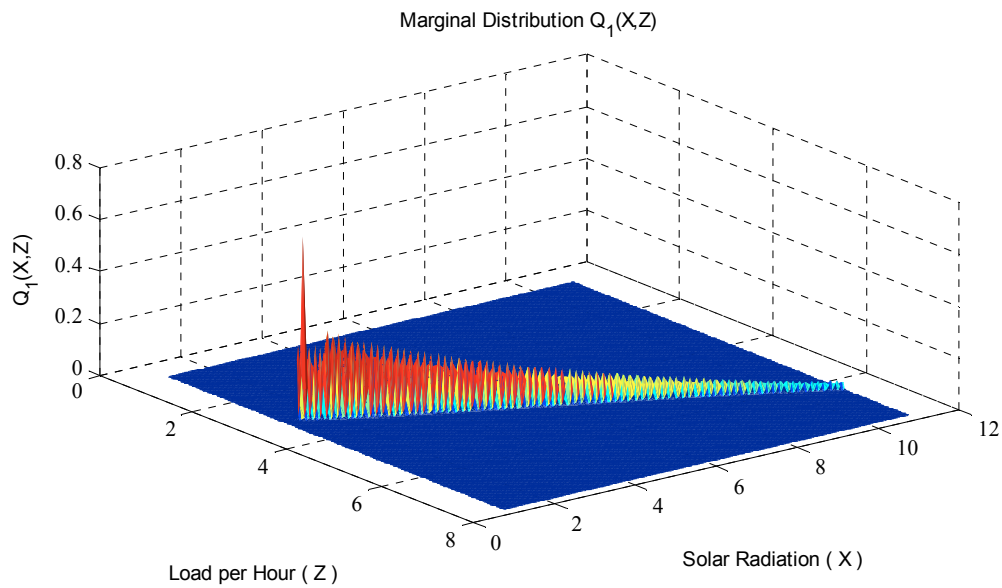
Σχήμα 6.8: Γραφική αναπαράσταση (πλάγια όψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών Y και Z για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



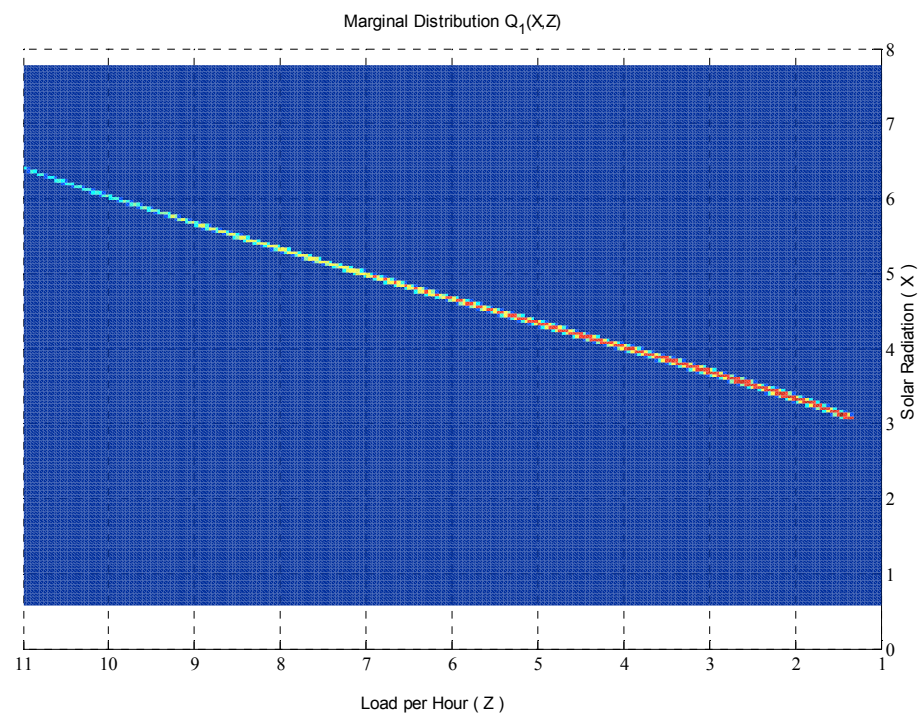
Σχήμα 6.9: Γραφική αναπαράσταση (κάτοψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών Y και Z για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



Σχήμα 6.10: Γραφική αναπαράσταση (πλάγια όψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών X και Z για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



Σχήμα 6.11: Γραφική αναπαράσταση (πλάγια όψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών X και Z για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.



Σχήμα 6.12: Γραφική αναπαράσταση (κάτοψη) περιθώριας κατανομής 2^{ης} τάξης των μεταβλητών X και Z για το προτεινόμενο παραμετρικό μοντέλο M1.

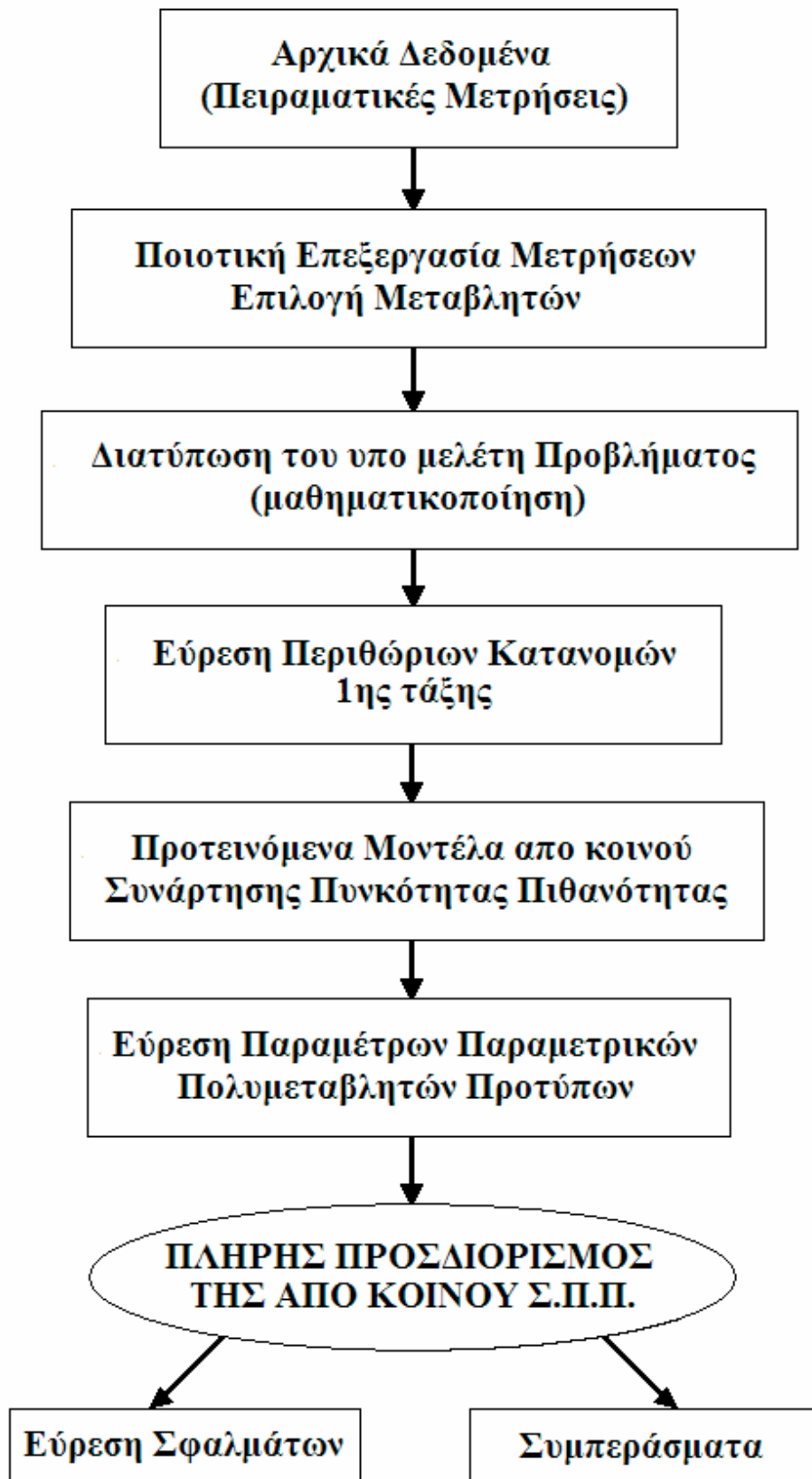
6.3 Συμπεράσματα

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε πως δημιουργήσαμε μέσα από μια σειρά δεδομένων (αρχικές τριάδες μετρήσεων) μια συνάρτηση η οποία μας δίνει την πιθανότητα εμφάνισης ενός συνόλου μετρήσεων (συγκεκριμένα την πιθανότητα εμφάνισης ενός μικρού κύβου που περιλαμβάνει μετρήσεις από μια αρχική τριάδα τιμών (x_0, y_0, z_0) μέχρι μία άλλη τριάδα (x_1, y_1, z_1)). Το συνολικό σφάλμα του παραμετρικού μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε ανήλθε σε ποσοστό στην τιμή του 5.63%. Είναι, λοιπόν, εμφανές πως η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε (σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου φαίνεται στο Σχήμα 6.13) είναι ικανοποιητική.

Επιπλέον, πρέπει να επισημανθεί πως στην παρούσα εργασία δεν πραγματοποιήθηκε μελέτη της συνολικής εκτίμησης της ενεργειακής παραγωγής. Αυτό θα μπορούσε να γίνει με δύο τρόπους: (α) είτε θεωρώντας ως αρχικές μεταβλητές του προβλήματος την Φ/Β παραγωγή, την αιολική παραγωγή και το ζητούμενο ωριαίο φορτίο αντί των πρωτογενών μεταβλητών που θεωρήσαμε στην παρούσα μελέτη (ηλιακή ακτινοβολία, αιολική παραγωγή και ωριαίο ζητούμενο φορτίο), είτε (β) έχοντας πραγματοποιήσει την μελέτη που έγινε και στην παρούσα εργασία να γίνει μια εκτίμηση τόσο σε ποσοτικό όσο και ποιοτικό επίπεδο της εκάστοτε Φ/Β παραγωγής και της αιολικής παραγωγής μέσω της άμεσης συσχέτισης που υπάρχει μεταξύ των δύο παραπάνω μορφών παραγωγής ενέργειας και των αντίστοιχων πρωτογενών μεταβλητών αυτών, δηλαδή της ηλιακής ακτινοβολίας και της ταχύτητας του ανέμου. Άλλωστε, όπως είδαμε και στο Κεφάλαιο 3, τα μεγέθη της ηλιακής ακτινοβολίας και της Φ/Β παραγωγής είναι πολύ στενά συνδεδεμένα μεταξύ τους, όπως είναι αναμενόμενο, και γι' αυτό χρησιμοποιήθηκε μόνο η πρώτη από τις δύο μεταβλητές. Με τον ίδιο τρόπο συμπεριφέρεται και το «ζεύγος» των μεγεθών ταχύτητα ανέμου (πρωτογενής μεταβλητή) – αιολική παραγωγή.

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε πως στην εργασία αυτή αναπτύχθηκαν τα εξής:

- με την βοήθεια της συνάρτησης $Q(X, Y, Z)$ που βρέθηκε μπορούμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα εμφάνισης των πρωτογενών μεταβλητών που μελετήθηκαν (είτε σε τριάδες, είτε σε δυάδες από τις περιθώριες κατανομές 2^{15} τάξης – θεωρώντας την τρίτη μεταβλητή ως αόριστη, είτε μία μία από τις



Σχήμα 6.13: Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου – αλγόριθμου που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία για την εύρεση της από κοινού Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας.

- περιθώριες κατανομές πρώτης τάξης – θεωρώντας τις άλλες δύο μεταβλητές αόριστες).
- χρησιμοποιώντας τις περιθώριες κατανομές 2^{ης} τάξης μπορούμε, και πάλι με τη βοήθεια της συνάρτησης $Q(X,Y,Z)$, να βρούμε τις συσχετίσεις μεταξύ των μεταβλητών που μελετώνται ανά δύο. Για παράδειγμα μπορούμε να μελετήσουμε πώς μεταβάλλεται το ζητούμενο φορτίο σε κάποια μεταβολή της ηλιακής ακτινοβολίας (ή αντίστοιχα της ταχύτητας του ανέμου).
- χρησιμοποιώντας ανάλογη μέθοδο με αυτή που έγινε για την εύρεση της συνάρτησης $Q(X,Y,Z)$ να βρούμε μία άλλη συνάρτηση $W(X',Y',Z')$ όπου ως μεταβλητές θα θεωρήσουμε όχι τα πρωτογενή μεγέθη αλλά τις αντίστοιχες ενεργειακές παραγωγές αυτών, δηλαδή την Φ/Β παραγωγή, την αιολική παραγωγή και ως τρίτη μεταβλητή το ζητούμενο φορτίο.
- μέσω της τελευταίας θεώρησης και έχοντας βρει πλέον την συνάρτηση $W(X',Y',Z')$ μπορούμε εύκολα να δώσουμε μια εκτίμηση για την κατανομή της ενεργειακής παραγωγής από τις διάφορες μορφές της (είτε Φ/Β είτε αιολική).

Από τις δύο τελευταίες παρατηρήσεις που επισημάνθηκαν παραπάνω, γίνεται κατανοητό πως **είναι δυνατό να συνδέσουμε την εκτίμηση της ενεργειακής παραγωγής (διαφόρων μορφών) σε ένα τόπο με τον χώρο των πιθανοτήτων**, καθώς μπορούμε πλέον να βρούμε ένα παραμετρικό «μοντέλο» (μια πολυμεταβλητή παραμετρική συνάρτηση) που θα μας δίνει την πιθανότητα εμφάνισης $X' \cdot kWh$ Φ/Β παραγωγής, $Y' \cdot kWh$ αιολικής παραγωγής όταν το φορτίο που ζητείται στην υπό μελέτη περιοχή είναι $Z' \cdot kWh$.

Έτσι, λαμβάνοντας υπ' όψιν τα παραπάνω μπορούμε να προτείνουμε δύο θέματα για περαιτέρω μελέτη: (α) δημιουργία ενός πολυμεταβλητού παραμετρικού μοντέλου (όμοιο με αυτό της παρούσας εργασίας) με μεταβλητές: Φ/Β παραγωγή, αιολική παραγωγή και ζητούμενο φορτίο καθώς και εκτίμηση της Φ/Β και αιολικής παραγωγής (ή αλλιώς της ενεργειακής παραγωγής από ΑΠΕ) και (β) την χρησιμοποίηση του παραμετρικού μοντέλου που βρέθηκε στην παρούσα εργασία χρησιμοποιώντας επιπλέον και τα χαρακτηριστικά των εγκατεστημένων πάρκων Φ/Β παραγωγής και αιολικής παραγωγής με σκοπό, πάλι, την συνολική ενεργειακή εκτίμηση, δηλαδή την «έμμεση» εύρεση των τιμών της μέσης Φ/Β και αιολικής παραγωγής (καθώς και του αντίστοιχου ζητούμενου φορτίου).

Κεφάλαιο 7

Μεταβολή της Καμπύλης Φορτίου με διείσδυση της Φ/Β Παραγωγής

Εισαγωγή

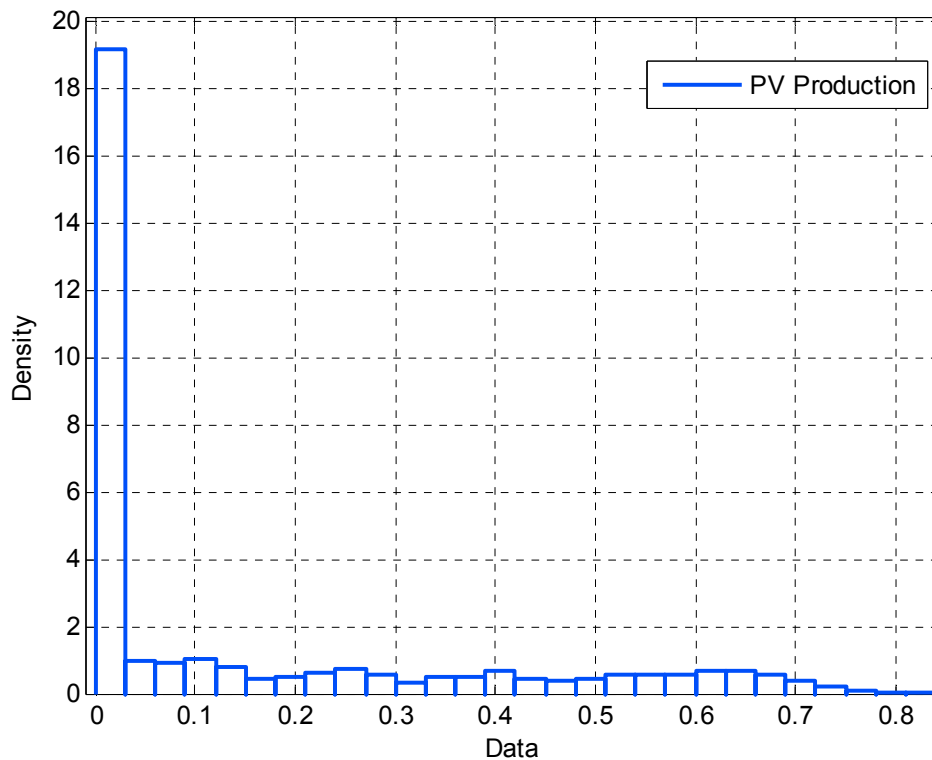
Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μία εκτενής σύγκριση των ποιοτικών χαρακτηριστικών τριών καμπυλών: της καμπύλης φορτίου, της καμπύλης Φ/Β παραγωγής και της καμπύλης που προκύπτει αν αφαιρέσουμε από τις μετρήσεις φορτίου την αντίστοιχη ωριαία Φ/Β παραγωγή.

Η πρώτη από τις τρεις παραπάνω καμπύλες κατανομές έχει ήδη προσδιοριστεί από το κεφάλαιο 4 (§4.1.3) όπου βρέθηκε ότι ακολουθεί την κατανομή Inverse Gaussian, με τιμές των παραμέτρων όπως φαίνονται στον Πίνακα 4.1. Ακολουθώντας την ίδια μέθοδο με αυτήν που ακολουθήθηκε στο κεφάλαιο 4 για να βρούμε τις κατανομές εκείνες που προσεγγίζουν με την μεγαλύτερη ακρίβεια τις μετρήσεις που διαθέταμε, θα προσδιορίσουμε, πρώτα, την κατανομή εκείνη που θα προσεγγίζει την καμπύλη των μετρήσεων της Φ/Β παραγωγής και, έπειτα, την καμπύλη που θα δίνει προσεγγιστικά τις μετρήσεις φορτίου μείον την αντίστοιχη ωριαία Φ/Β παραγωγή.

Πρέπει επιπλέον να επισημάνουμε πως και στις δύο περιπτώσεις θα γίνει διαχωρισμός των μετρήσεων ημέρας και νύχτας, όπως έγινε και στην ανάλυση των υπόλοιπων μεταβλητών στο κεφάλαιο 4.

7.1 Βέλτιστη Κατανομή της χρονοσειράς Φ/Β Παραγωγής

Αρχικά, φτιάχνουμε το διάγραμμα συχνοτήτων όπως φαίνεται παρακάτω:



Σχήμα 7.1: Διάγραμμα συχνοτήτων Φ/Β Παραγωγής.

Παρατηρούμε πως το Σχήμα 7.1 παρουσιάζει πολλές ομοιότητες με το Σχήμα 4.1 που απεικονίζει το διάγραμμα συχνοτήτων της ηλιακής ακτινοβολίας. Είναι επομένως προφανές πως και στην ανάλυση της Φ/Β Παραγωγής πρέπει να γίνει διαχωρισμός των νυχτερινών (μηδενικών) μετρήσεων από τις ημερήσιες (μη μηδενικές) μετρήσεις. Συνολικά έχουμε:

Νύχτα: 4,732 παρατηρήσεις

Ημέρα: 4,028 παρατηρήσεις

Σύνολο: 8,760 παρατηρήσεις

Άρα η πιθανότητα μια τυχαία παρατήρηση να έχει γίνει νύχτα θα είναι:

$$p_1 = \frac{4,732}{8,760} \approx 0.5402 = 54.02\% \quad (7.1)$$

και αντίστοιχα για την ημέρα:

$$p_2 = \frac{4,028}{8,760} \approx 0.4598 = 45.98\% \quad (7.2)$$

Έτσι, όπως και στο κεφάλαιο 4, αν $w_1(x)$ και $w_2(x)$ οι 2 συναρτήσεις που επιτυγχάνουν την βέλτιστη προσέγγιση για την χρονοσειρά της Φ/Β παραγωγής νύχτας και ημέρας αντίστοιχα, είναι επόμενο πως η συνάρτηση που θα προσεγγίζει με τον βέλτιστο τρόπο τις μετρήσεις της Φ/Β παραγωγής θα είναι:

$$w(x) = p_1 \cdot w_1(x) + p_2 \cdot w_2(x) \quad (7.3)$$

Για την πρώτη περίπτωση, αυτή της $w_1(x)$, θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Dirac $\delta(x - x_0)$ για $x_0 = 0$. Επομένως: $w_1(x) = \delta(x)$. Για την δεύτερη περίπτωση θα βρούμε αρχικά τις επικρατέστερες καμπύλες:

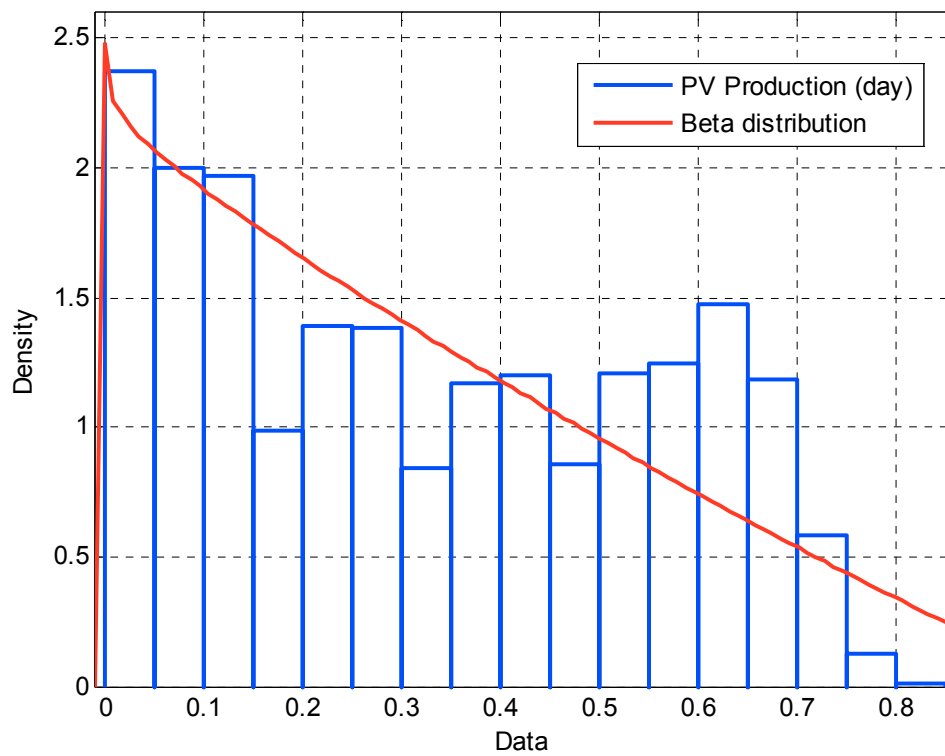
- Beta
- Gamma
- Log-logistic
- Nakagami
- Weibull

Η βέλτιστη καμπύλη θα είναι αυτή που θα παρουσιάζει το ελάχιστο τετραγωνικό σφάλμα [2]. Στον παρακάτω Πίνακα συνοψίζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα για κάθε μια από τις παραπάνω καμπύλες:

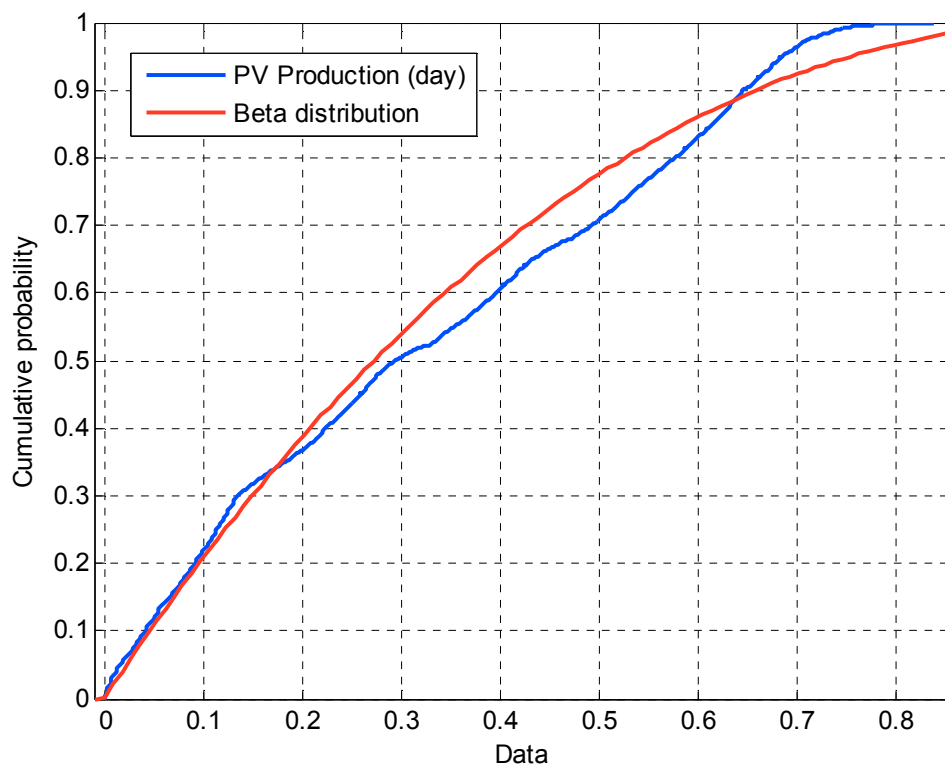
Πίνακας 7.1: Μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα προσέγγισης Φ/Β παραγωγής.

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Beta	0.006004887	0.077491208
Gamma	0.010236746	0.101176808
Log-logistic	0.014801800	0.121662646
Nakagami	0.007974898	0.089302285
Weibull	0.010530310	0.102617297

Από τον παραπάνω Πίνακα εύκολα συμπεραίνουμε πως η βέλτιστη καμπύλη προσέγγισης των μετρήσεων Φ/Β παραγωγής είναι η κατανομή Beta. Το διάγραμμα



Σχήμα 7.2: Διάγραμμα προσέγγισης Φ/Β Παραγωγής (μόνο ημερήσιες μετρήσεις).



Σχήμα 7.3: Διάγραμμα προσέγγισης συνάρτησης κατανομής πιθανότητας Φ/Β Παραγωγής (μόνο ημερήσιες μετρήσεις).

συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (probability density function) που ταυτόχρονα απεικονίζει την προσέγγιση αυτή φαίνεται στο Σχήμα 7.2. Αντίστοιχα το διάγραμμα κατανομής πιθανότητας (cumulative probability) θα είναι όπως στο Σχήμα 7.3. Η μαθηματική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή Beta είναι:

$$w_2(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x) \quad (7.4)$$

όπου $B(a, b)$ η συνάρτηση Beta ενώ η συνάρτηση $I_{(0,1)}(x)$ διασφαλίζει ότι μόνο τιμές του x μεταξύ 0 και 1 έχουν μη μηδενική πιθανότητα. Η συνάρτηση Beta ορίζεται ως εξής:

$$B(z, n) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{n-1} dt = \frac{\Gamma(z)\Gamma(n)}{\Gamma(z+n)} \quad (7.5)$$

όπου $\Gamma(z)$ η συνάρτηση Gamma, η οποία ορίζεται ως:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt \quad (7.6)$$

Για την εύρεση των παραμέτρων a και b χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®. Τελικά βρέθηκε ότι: $a = 0.9765$ και $b = 2.1198$. Επομένως, η σχέση (7.3) γίνεται:

$$w(x; a, b) = 0.5402 \cdot \delta(x) + 0.4598 \cdot \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} I_{(0,1)}(x) \quad (7.7)$$

7.2 Βέλτιστη Κατανομή της χρονοσειράς Καμπύλης Φορτίου – Φ/Β Παραγωγής (καμπύλη Εναπομείναντος Φορτίου)

Αφαιρώντας από τις μετρήσεις φορτίου τις αντίστοιχες μετρήσεις της ωριαίας Φ/Β παραγωγής προκύπτει η χρονοσειρά της καμπύλης φορτίου – Φ/Β παραγωγής. Ωστόσο, οι μετρήσεις της Φ/Β παραγωγής που είχαμε αρχικά αντιπροσωπεύουν την ωριαία ισχύ που δίνει το Φ/Β σύστημα ανά εγκατεστημένο kW . Είναι επόμενο, λοιπόν, πως για να γίνει η αφαίρεση των μετρήσεων της Φ/Β παραγωγής από τις

μετρήσεις της καμπύλης φορτίου πρέπει να αναφερόμαστε σε συγκεκριμένη ποσότητα εγκατεστημένων kW_p . Παρακάτω θα εξεταστούν συνολικά τέσσερις περιπτώσεις στις οποίες το ποσοστό της μέσης Φ/Β παραγωγής θα αποτελεί αντίστοιχα το 5%, 15%, 25% και 35% του μέσου ωριαίου φορτίου.

Το μέσο ωριαίο φορτίο βρίσκεται εύκολα από την αρχική χρονοσειρά φορτίου που διαθέτουμε και είναι ίσο με $35,473kW$. Η μέση ωριαία Φ/Β παραγωγή της αρχικής χρονοσειράς είναι $15.0354 \cdot 10^{-2} kW / kW_p$. Έτσι, για κάθε εγκατεστημένο kW_p Φ/Β θα παράγονται σε κάθε ώρα κατά μέσο όρο $15.0354 \cdot 10^{-2} kW$. Στον Πίνακα 7.1 που ακολουθεί φαίνεται το συνολικό ποσό των εγκατεστημένων kW_p Φ/Β που απαιτείται για να καλύπτεται αντίστοιχα το 5%, 15%, 25% και 35% του μέσου ωριαίου φορτίου.

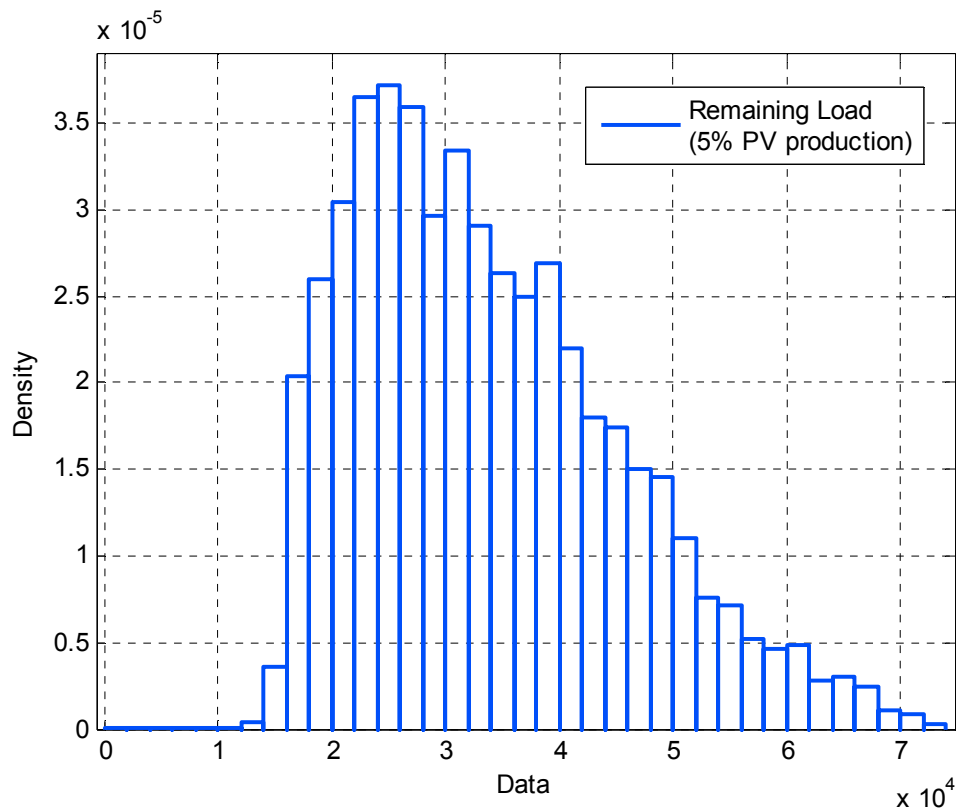
Πίνακας 7.2: Απαιτούμενο μέγεθος εγκατεστημένης ισχύς Φ/Β για την κάλυψη ποσοστού του μέσου φορτίου.

Ποσοστό κάλυψης Μέσου Φορτίου	Φορτίο που καλύπτεται από τη παραγωγή Φ/Β (kW)	Απαιτούμενο μέγεθος εγκατεστημένων Φ/Β
5%	1774.7	$11,796 \approx 11.8kW_p$
15%	5321.0	$35,390 \approx 35.5kW_p$
25%	8868.4	$58,983 \approx 59.0kW_p$
35%	12415.7	$82,576 \approx 82.6kW_p$

Έχοντας πλέον το μέγεθος του Φ/Β πάρκου που απαιτείται για την εκάστοτε περίπτωση κάλυψης μέρους του μέσου ωριαίου φορτίου, μπορούμε εύκολα να βρούμε την αντίστοιχη Φ/Β παραγωγή και κατ' επέκταση την ζητούμενη χρονοσειρά φορτίου – Φ/Β παραγωγής για κάθε μια από τις τρεις περιπτώσεις.

7.2.1 Χρονοσειρά Καμπύλης Φορτίου – Φ/Β Παραγωγής για κάλυψη του 5% του μέσου ημερήσιου Φορτίου

Αρχικά κατασκευάζουμε το διάγραμμα συχνοτήτων (Σχήμα 7.4). Οι επικρατέστερες καμπύλες για την προσομοίωση των μετρήσεων της χρονοσειράς φορτίου – Φ/Β παραγωγής (5% κάλυψη) είναι οι εξής:



Σχήμα 7.4: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 5% από την Φ/Β παραγωγή.

- Birnbaum-Saunders
- Gamma
- Generalized Extreme Value
- Inverse Gaussian
- Log Normal
- Negative Bionimal

Στον παρακάτω Πίνακα παρουσιάζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα που προέκυψαν μετά από υπολογισμούς για κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις:

Πίνακας 7.3: Μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα προσέγγισης εναπομείναντος φορτίου (5% Φ/Β παραγωγή).

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Birnbaum-Saunders	0.001630720	0.040382179
Gamma	0.003490703	0.059082170
Generalized extreme value	0.003467606	0.058886381
Inverse Gaussian	0.002891616	0.053773747
Log-normal	0.003106214	0.055733420
Negative Binomial	0.003495877	0.059125946

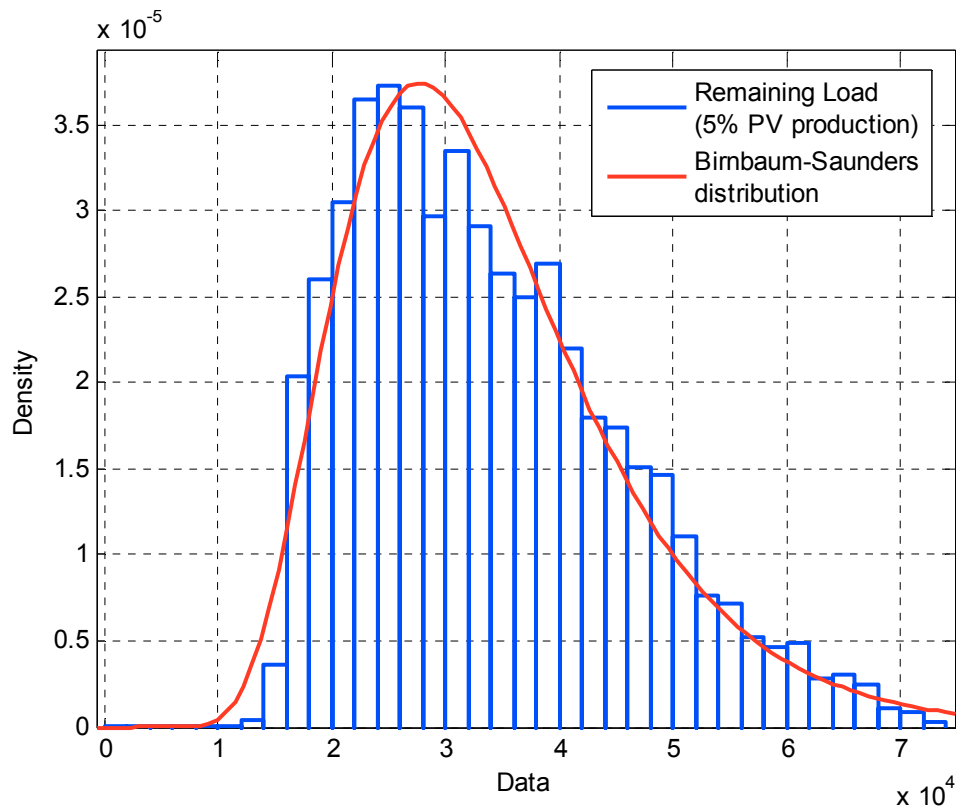
Σύμφωνα, λοιπόν, με το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος η βέλτιστη καμπύλη – κατανομή για την προσομοίωση των μετρήσεων της χρονοσειράς φορτίου – Φ/Β παραγωγής (5% κάλυψη) είναι η Birnbaum-Saunders. Η γενική εξίσωση που περιγράφει την παραπάνω κατανομή είναι:

$$\rho(x; \beta, \gamma) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\sqrt{x/\beta} - \sqrt{\beta/x})^2}{2\gamma^2} \right\} \left(\frac{(\sqrt{x/\beta} + \sqrt{\beta/x})}{2\gamma x} \right) \quad (7.8)$$

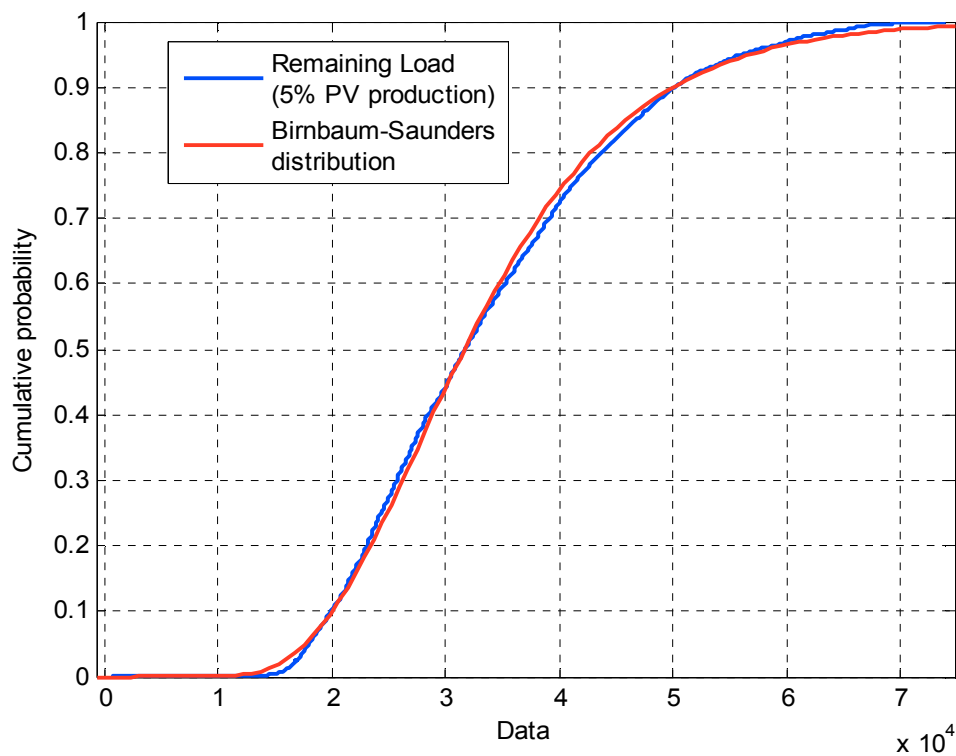
με παραμέτρους: $\beta > 0$ παράμετρος κλίμακας

$\gamma > 0$ παράμετρος μορφής.

Για την εύρεση των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®. Τελικά βρέθηκε ότι $\beta = 31.6436 \cdot 10^3$ και $\gamma = 36.0276 \cdot 10^{-2}$. Στα Σχήματα 7.5 και 7.6 παραθέτουμε τα διαγράμματα της βέλτιστης προσέγγισης της χρονοσειράς φορτίου – Φ/Β παραγωγής (5% κάλυψη) με την καμπύλη Birnbaum-Saunders (CDF και PDF αντίστοιχα).



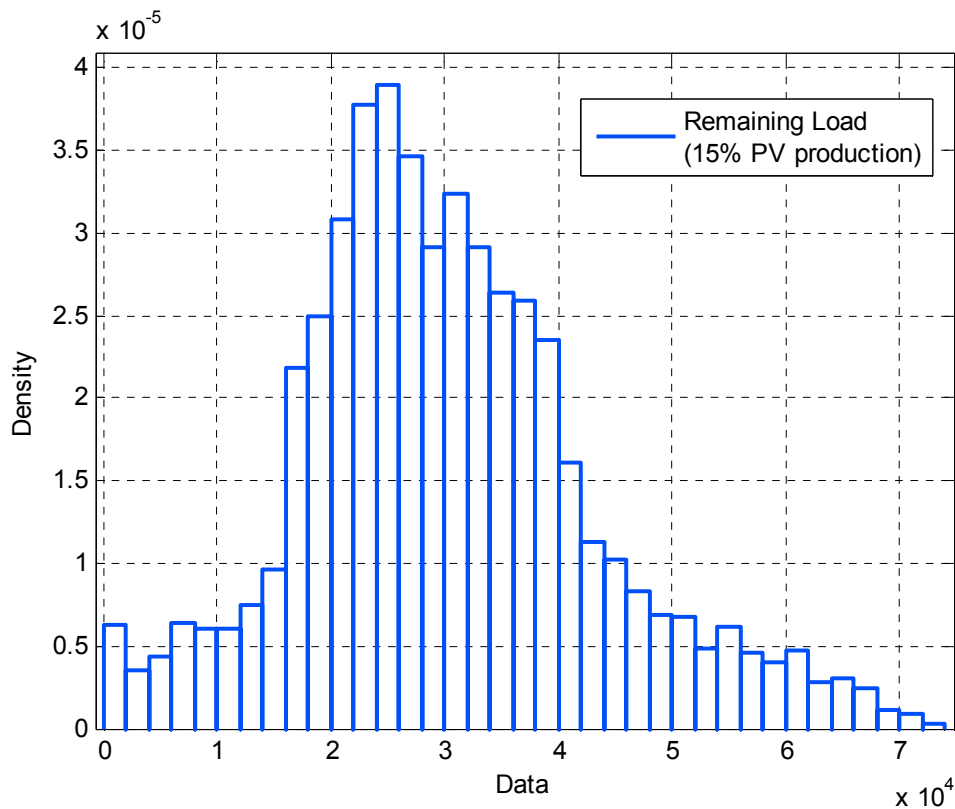
Σχήμα 7.5: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 5% από την Φ/Β παραγωγή (PDF).



Σχήμα 7.6: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 5% από την Φ/Β παραγωγή (CDF).

7.2.2 Χρονοσειρά Καμπύλης Φορτίου – Φ/Β Παραγωγής για κάλυψη του 15% του μέσου ημερήσιου Φορτίου

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, κατασκευάζουμε το διάγραμμα συχνοτήτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.7.



Σχήμα 7.7: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 15% από την Φ/Β παραγωγή.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε πως κατά τη διάρκεια εύρεσης της καμπύλης του εναπομείναντος φορτίου (περίπτωση Φ/Β παραγωγής σε ποσοστό 10%) προέκυψαν και αρκετές αρνητικές μετρήσεις. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η παραγωγή ενέργειας των εκάστοτε Φ/Β πανέλων είναι μεγαλύτερη από το ζητούμενο ηλεκτρικό φορτίο. Στην περίπτωση αυτή θα θεωρούμε στην χρονοσειρά του εναπομείναντος φορτίου πως έχουμε μηδενικές τιμές. Η περίσσεια ενέργειας που προκύπτει από την Φ/Β παραγωγή αλλά δεν καταναλώνεται από την ζήτηση του φορτίου μπορεί να έχει διάφορες χρήσεις:

- αποθήκευση της περισσευούμενης ενέργειας σε μπαταρίες

- «εξαγωγή» της περίσσειας ενέργειας. Για παράδειγμα όταν σε ένα νησί (ή μια χώρα αντίστοιχα) η Φ/ Β παραγωγή ξεπερνά το ζητούμενο φορτίο τότε είναι δυνατόν με κατάλληλα δίκτυα μεταφοράς να καταναλώνεται η περισσευούμενη ενέργεια σε άλλα φορτία (άλλα νησιά ή χώρες).
- σε περίπτωση όπου δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστούν κάποια λύση από τις παραπάνω είναι δυνατόν με κατάλληλες γειώσεις να απορροφηθεί η περισσευούμενη ενέργεια στο έδαφος.

Ωστόσο, από το τελευταίο διάγραμμα παρατηρούμε πως ενώ αρχικά οι μετρήσεις δείχνουν μια τάση αύξησης, οι μετρήσεις της κλάσης $[0, 0.2]$ εμφανίζουν μεγαλύτερη συχνότητα εμφάνισης από όσο θα έπρεπε. Αυτό συμβαίνει λόγω της εμφάνισης των μηδενικών μετρήσεων την ύπαρξη των οποίων σχολιάσαμε παραπάνω. Για αυτό (αλλά και για άλλους λόγους που θα εξηγηθούν παρακάτω) θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Dirac αφαιρώντας από την παραπάνω καμπύλη τις μηδενικές μετρήσεις. Οι αρχικές 8,760 μετρήσεις που διαθέταμε χωρίζονται σε 55 μηδενικές και 8,705 μη μηδενικές. Υπολογίζοντας λοιπόν τις αντίστοιχες πιθανότητες έχουμε:

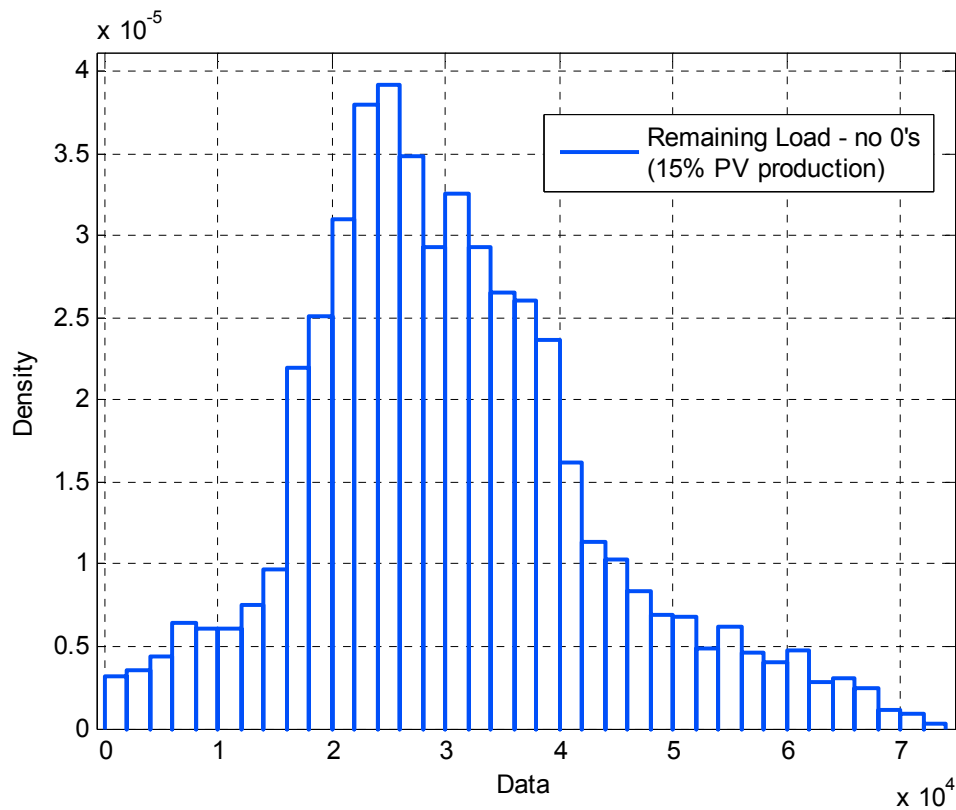
$$p_1 = \frac{55}{8,760} \approx 0.0063 = 0.63\% \quad (7.9)$$

$$p_2 = \frac{8,705}{8,760} \approx 0.9937 = 99.37\% \quad (7.10)$$

ενώ η συνάρτηση βέλτιστης προσέγγισης του εναπομείναντος φορτίου (15% Φ/Β παραγωγή) γίνεται:

$$\tau(x) = p_1 \cdot \tau_1(x) + p_2 \cdot \tau_2(x) \quad (7.11)$$

όπου $\tau_1(x) = \delta(x - x_0) = \delta(x)$. Η συνάρτηση $\tau_2(x)$ θα προσδιοριστεί παρακάτω. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα συχνοτήτων για το εναπομένον φορτίο (15% Φ/Β παραγωγή) χωρίς να συμπεριλάβουμε τις μηδενικές μετρήσεις (Σχήμα 7.8).



Σχήμα 7.8: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 15% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις.

Οι επικρατέστερες καμπύλες για την προσομοίωση της παραπάνω χρονοσειράς είναι οι εξής:

- Generalized Extreme Value
- Log-Logistic
- Logistic
- Nakagami
- Negative Binomial
- Normal
- Rician
- t-location-scale
- Weibull

Στον Πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα που προέκυψαν μετά από υπολογισμούς για κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις:

Πίνακας 7.4: Μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα προσέγγισης εναπομείναντος φορτίου (15% Φ/B παραγωγή).

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Generalized extreme value	0.001544256	0.039297021
Log-Logistic	0.001530297	0.039119011
Logistic	0.001671732	0.040886822
Log-normal	0.002425495	0.049249311
Negative Binomial	0.003100122	0.055678739
Normal	0.002611023	0.051098168
Rician	0.002511965	0.050119511
t-location-scale	0.001737858	0.041687629
Weibull	0.002622251	0.051207915

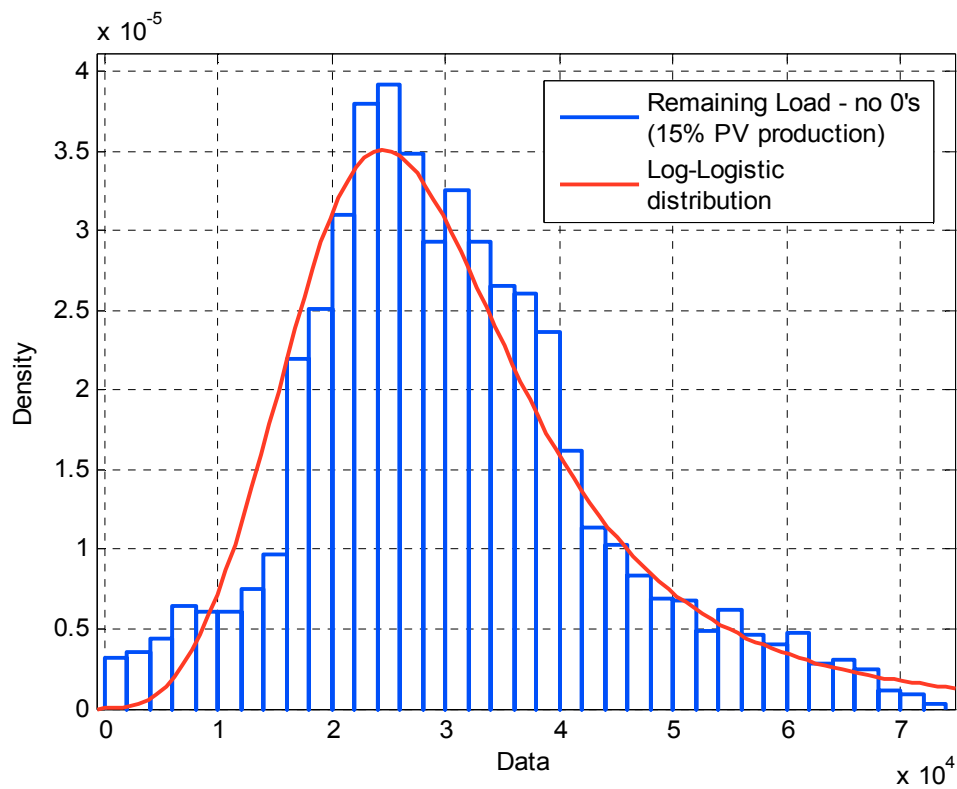
Σύμφωνα, λοιπόν, με το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος η βέλτιστη καμπύλη – κατανομή για την προσομοίωση των μετρήσεων της χρονοσειράς του εναπομείναντος φορτίου, στην περίπτωση όπου η Φ/B παραγωγή καλύπτει το 15% του μέσου φορτίου, είναι η Log-Logistic. Η γενική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή αυτή ορίζεται ως εξής [20]:

$$\tau_2(x; \mu, \sigma) = \frac{e^{\frac{\ln(T)-\mu}{\sigma}}}{\sigma x \left(1 + e^{\frac{\ln(T)-\mu}{\sigma}} \right)^2} \quad (7.12)$$

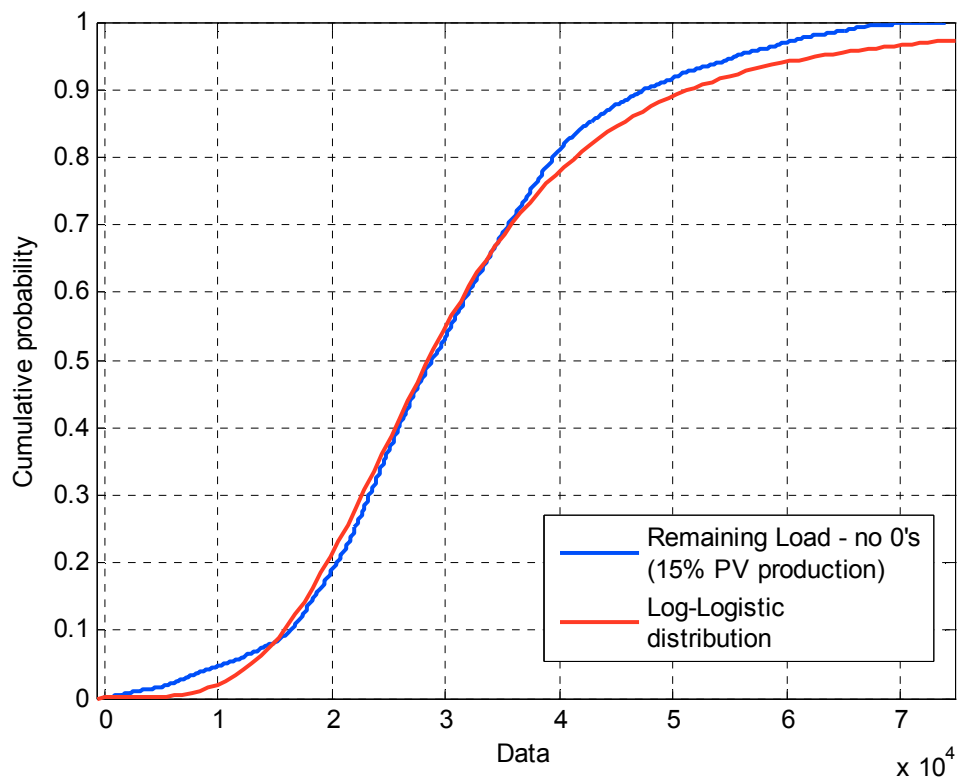
με παραμέτρους: $\mu \in \mathbb{R}$ παράμετρος κλίμακας

$\sigma > 0$ παράμετρος μορφής.

Για την εύρεση των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®. Τελικά βρέθηκε ότι $\mu = 10.2563$ και $\sigma = 26.9472 \cdot 10^{-2}$. Στα Σχήματα 7.9 και 7.10 παραθέτουμε τα διαγράμματα της βέλτιστης προσέγγισης της χρονοσειράς εναπομείναντος φορτίου (χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις) για κάλυψη από την Φ/B παραγωγής κατά 15% (CDF και PDF αντίστοιχα).



Σχήμα 7.9: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 15% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις (PDF).



Σχήμα 7.10: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 15% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις (CDF).

Τελικά, η αρχική συνάρτηση που περιγράφει την βέλτιστη προσέγγιση της καμπύλης του εναπομείναντος φορτίου για Φ/Β παραγωγή 15% γίνεται:

$$\tau(x; \mu, \sigma) = 0.0063 \cdot \delta(x) + 0.9937 \cdot \frac{e^{\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}}}{\sigma x \left(1 + e^{\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma}} \right)^2} \quad (7.13)$$

με τις παραμέτρους μ και σ όπως ορίστηκαν παραπάνω.

7.2.3 Χρονοσειρά Καμπύλης Φορτίου – Φ/Β Παραγωγής για κάλυψη του 25% του μέσου ημερήσιου Φορτίου

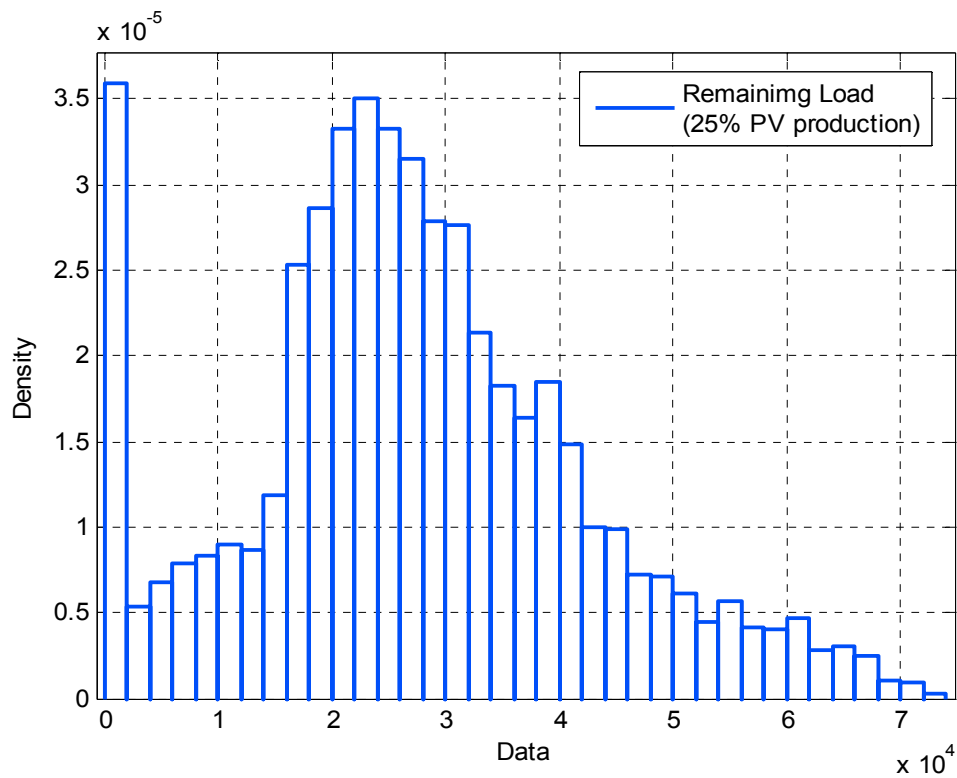
Αρχικά, κατασκευάζουμε το διάγραμμα συχνοτήτων όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.11 που ακολουθεί. Όπως και την προηγούμενη περίπτωση, όπου η Φ/Β παραγωγή αποτελούσε το 15% του μέσου φορτίου, έτσι και εδώ προκύπτουν πολλές αρνητικές μετρήσεις τις οποίες θεωρούμε μηδενικές λόγω της πλήρους κάλυψης του φορτίου (το περίσσευμα ενέργειας διοχετεύεται σε άλλες χρήσεις όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη ενότητα). Παρατηρούμε μάλιστα πως η κλάση $[0, 0.2]$ εμφανίζει την μεγαλύτερη συχνότητα κάτι που θα αποτελέσει πρόβλημα στην εύρεση της βέλτιστης καμπύλης για την προσομοίωση του εναπομείναντος φορτίου. Για τον λόγο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε για μια ακόμα φορά την συνάρτηση Dirac.

Οι αρχικές 8,760 μετρήσεις που διαθέταμε χωρίζονται σε 557 μηδενικές και 8,203 μη μηδενικές. Υπολογίζοντας λοιπόν τις αντίστοιχες πιθανότητες έχουμε:

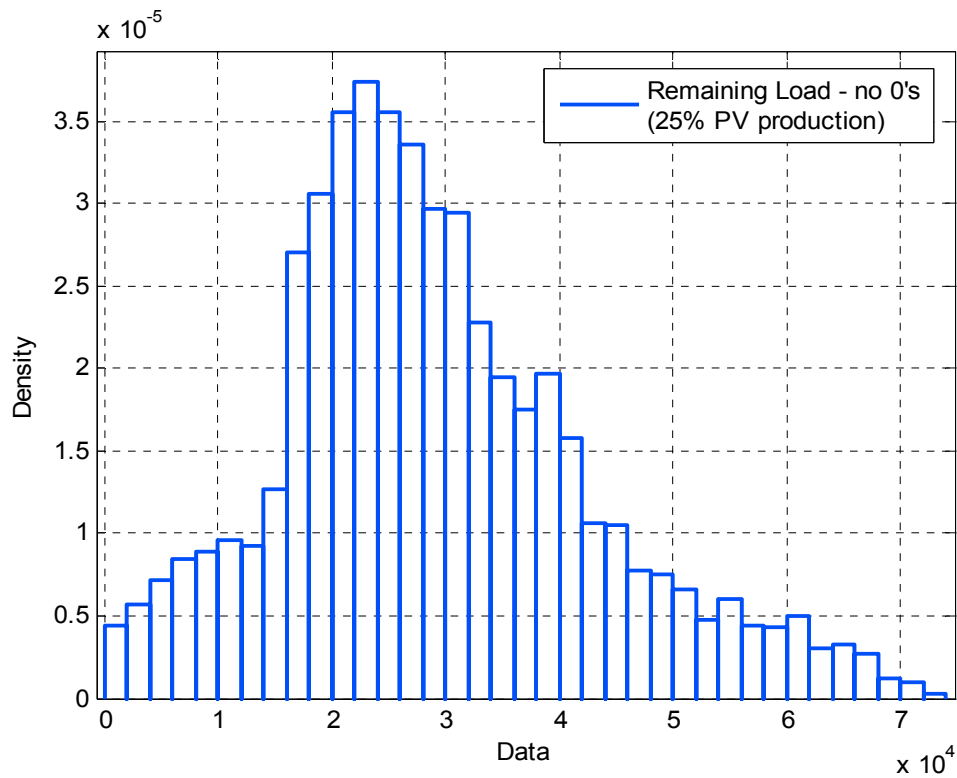
$$p_1 = \frac{557}{8,760} \approx 0.0636 = 6.36\% \quad (7.14)$$

$$p_2 = \frac{8,203}{8,760} \approx 0.9364 = 93.64\% \quad (7.15)$$

ενώ η συνάρτηση βέλτιστης προσέγγισης του εναπομείναντος φορτίου (25% Φ/Β παραγωγή) γίνεται:



Σχήμα 7.11: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 25% από την Φ/Β παραγωγή.



Σχήμα 7.12: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 25% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις.

$$\phi(x) = p_1 \cdot \phi_1(x) + p_2 \cdot \phi_2(x) \quad (7.16)$$

όπου $\phi_1(x) = \delta(x - x_0) = \delta(x)$. Η συνάρτηση $\phi_2(x)$ θα προσδιοριστεί παρακάτω. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα συχνοτήτων για το εναπομένον φορτίο (25% Φ/Β παραγωγή) χωρίς να συμπεριλάβουμε τις μηδενικές μετρήσεις (Σχήμα 7.12).

Οι επικρατέστερες καμπύλες για την προσομοίωση της παραπάνω χρονοσειράς είναι οι εξής:

- Gamma
- Generalized Extreme Value
- Log-Logistic
- Logistic
- Nakagami
- Negative Binomial
- Weibull
- t-location-scale
- Normal
- Rayleigh
- Rician

Στον Πίνακα 7.5 παρουσιάζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα που προέκυψαν μετά από υπολογισμούς για κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις:

Πίνακας 7.5: Μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα προσέγγισης εναπομ. φορτίου (25% Φ/Β παραγωγή).

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Gamma	0.003689537	0.060741556
Generalized Extreme Value	0.001668811	0.040851088
Log-Logistic	0.002057195	0.045356308
Logistic	0.002084064	0.045651547
Nakagami	0.002711460	0.052071682
Negative Binomial	0.003437252	0.058628086
Weibull	0.002733663	0.052284440
t-location-scale	0.002333004	0.048301181
Normal	0.003061501	0.055330835
Rayleigh	0.003631073	0.060258382
Rician	0.002810674	0.053015786

Σύμφωνα, λοιπόν, με το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος η βέλτιστη καμπύλη – κατανομή για την προσομοίωση των μετρήσεων της χρονοσειράς του εναπομείναντος φορτίου, στην περίπτωση όπου η Φ/B παραγωγή καλύπτει το 25% του μέσου φορτίου, είναι η Generalized Extreme Value. Η γενική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή αυτή ορίζεται:

$$\phi_2(x; \sigma, \mu, k) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \exp \left(- \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}} \quad (7.17)$$

με παραμέτρους: $\sigma \in \mathbb{R}$ παράμετρος κλίμακας

$\mu \in \mathbb{R}$ παράμετρος μορφής

$k \neq 0$ παράμετρος Σχήματος

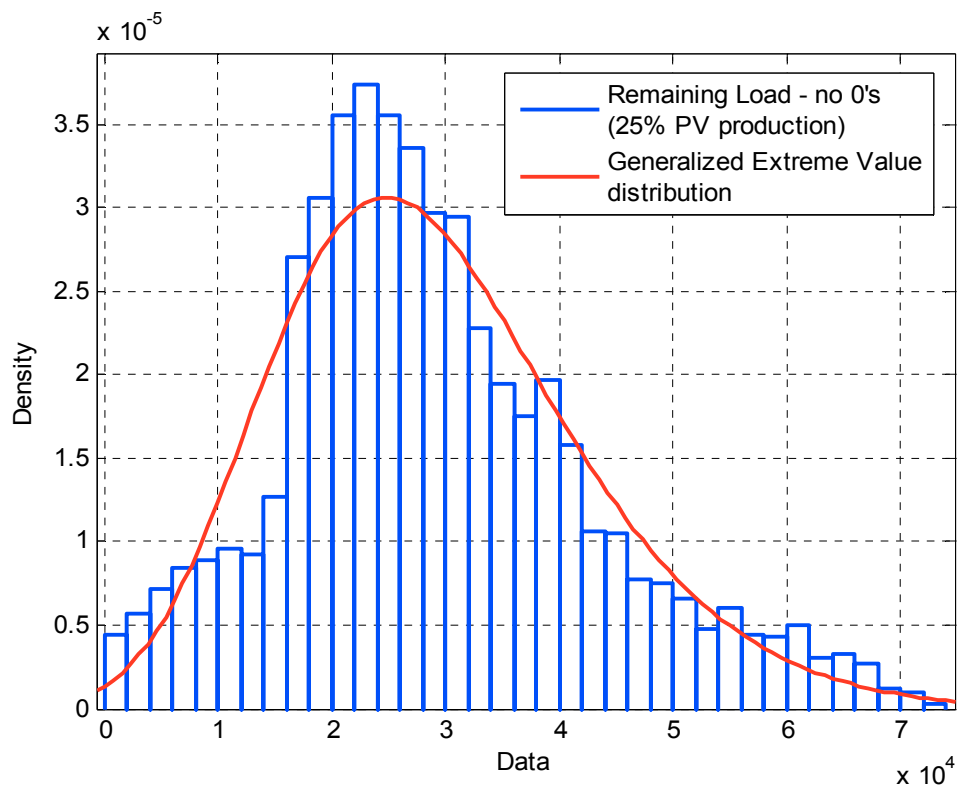
$$\text{και} \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right) > 0 \quad (7.18).$$

Για την εύρεση των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®. Τελικά βρέθηκε ότι $\sigma = 12.0965 \cdot 10^3$, $\mu = 23.2687 \cdot 10^3$ και $k = -11.9649 \cdot 10^{-2}$ (για τις τιμές αυτές ικανοποιείται και η σχέση (7.18)). Στα Σχήματα 7.13 και 7.14 παραθέτουμε τα διαγράμματα της βέλτιστης προσέγγισης της χρονοσειράς εναπομείναντος φορτίου (χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις) για κάλυψη από την Φ/B παραγωγής κατά 25% (PDF και CDF αντίστοιχα).

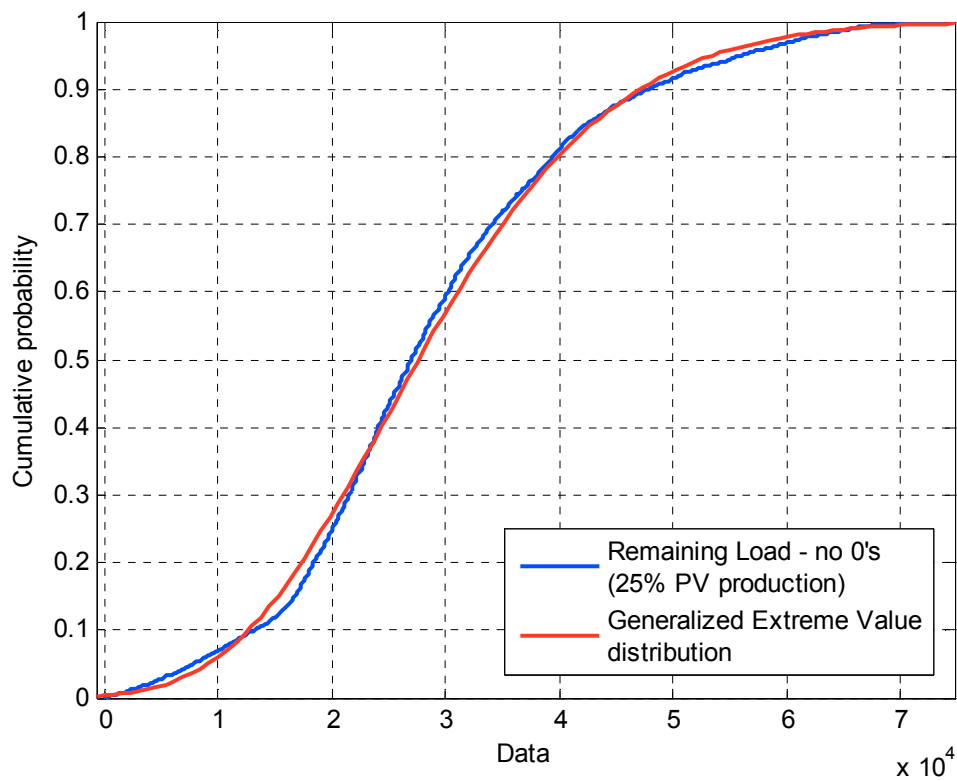
Συνοψίζοντας, η αρχική συνάρτηση που περιγράφει την βέλτιστη προσέγγιση της καμπύλης του εναπομείναντος φορτίου για Φ/B παραγωγή 25% γίνεται:

$$\phi(x; \sigma, \mu, k) = 0.0636 \cdot \delta(x) + 0.9364 \cdot \left(\frac{1}{\sigma}\right) \exp \left(- \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}} \quad (7.19)$$

με τις παραμέτρους σ , μ και k όπως ορίστηκαν παραπάνω.



Σχήμα 7.13: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 25% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις (PDF).



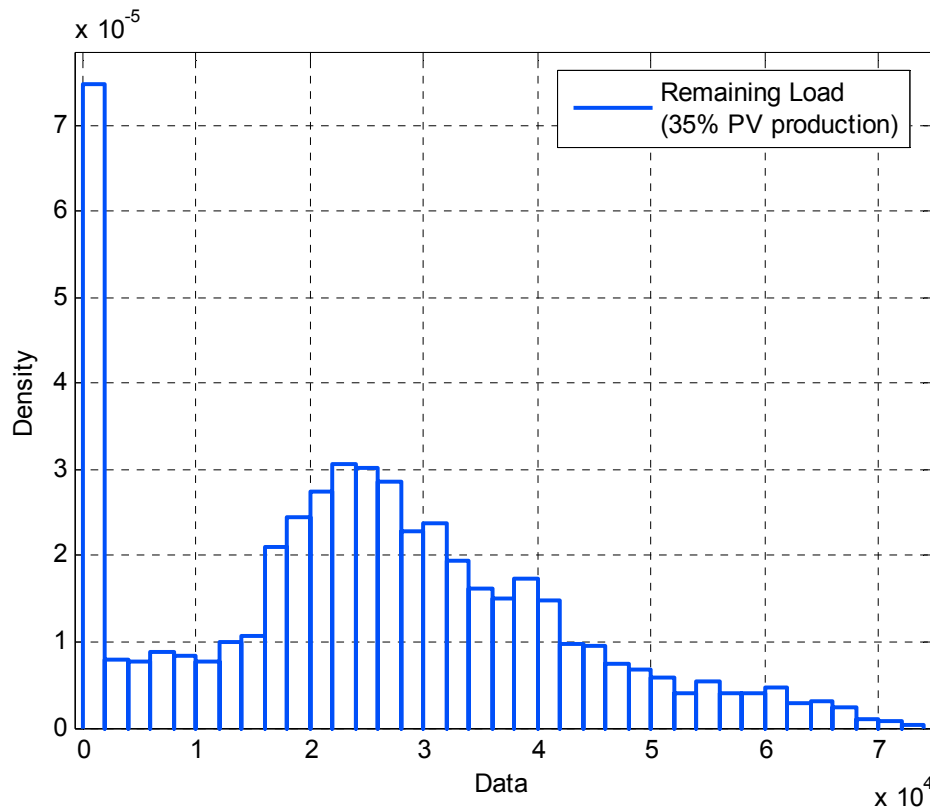
Σχήμα 7.14: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 25% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις (CDF).

7.2.4 Χρονοσειρά Καμπύλης Φορτίου – Φ/Β Παραγωγής για κάλυψη του 35% του μέσου ημερήσιου Φορτίου

Ξεκινώντας από το διάγραμμα συχνοτήτων (Σχήμα 7.15) παρατηρούμε πως η κλάση $[0,0.2]$ εμφανίζει αρκετά μεγαλύτερη συχνότητα από όλες τις υπόλοιπες κλάσεις του διαγράμματος. Για μία ακόμα φορά, λοιπόν, θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση Dirac, ως εξής:

$$\psi(x) = p_1 \cdot \psi_1(x) + p_2 \cdot \psi_2(x) \quad (7.20)$$

όπου $\psi_1(x) = \delta(x - x_0) = \delta(x)$. Η συνάρτηση $\psi_2(x)$ θα προσδιοριστεί παρακάτω, ενώ για τις πιθανότητες p_1 και p_2 έχουμε:

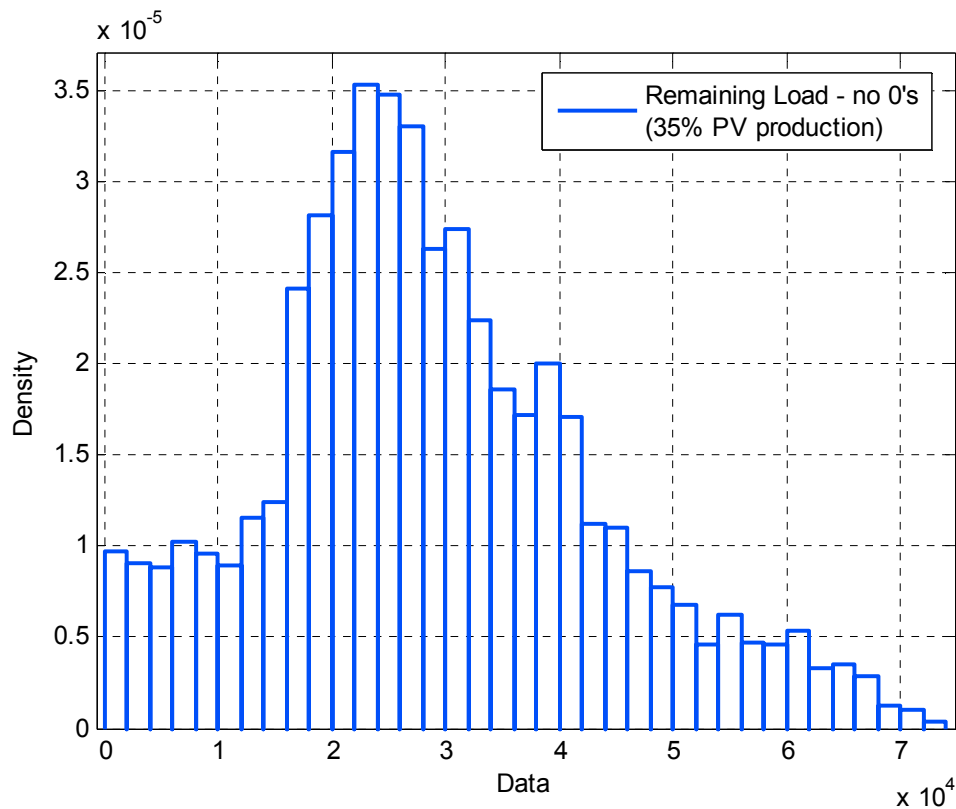


Σχήμα 7.15: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 35% από την Φ/Β παραγωγή.

$$p_1 = \frac{1,163}{8,760} \approx 0.1328 = 13.28\% \quad (7.21)$$

$$p_2 = \frac{7,597}{8,760} \approx 0.8672 = 86.72\% \quad (7.22)$$

καθώς οι 8,760 μετρήσεις που είχαμε χωρίζονται σε 1,163 μηδενικές και 7,597 μη μηδενικές. Κατασκευάζουμε το διάγραμμα συχνοτήτων για το εναπομένον φορτίο (35% Φ/Β παραγωγή) χωρίς να συμπεριλάβουμε τις μηδενικές μετρήσεις (Σχήμα 7.16).



Σχήμα 7.16: Διάγραμμα συχνοτήτων μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 35% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις.

Οι επικρατέστερες καμπύλες για την προσομοίωση της παραπάνω χρονοσειράς είναι οι εξής:

- Generalized Extreme Value
- Logistic
- Nakagami
- Normal
- t-location-scale
- Weibull

Στον Πίνακα 7.6 παρουσιάζονται τα μέσα τετραγωνικά σφάλματα που προέκυψαν μετά από υπολογισμούς για κάθε μία από τις παραπάνω προσεγγίσεις:

Πίνακας 7.6: Μέσα Τετραγωνικά Σφάλματα προσέγγισης εναπομείναντος φορτίου (35% Φ/Β παραγωγή).

Καμπύλη Προσέγγισης	MSE	$\sqrt{MSE}$
Generalized Extreme Value	0.001789900	0.042307206
Logistic	0.002356673	0.048545578
Nakagami	0.003225971	0.056797631
Normal	0.002459299	0.049591322
t-location-scale	0.002259869	0.047538079
Weibull	0.002917365	0.054012638

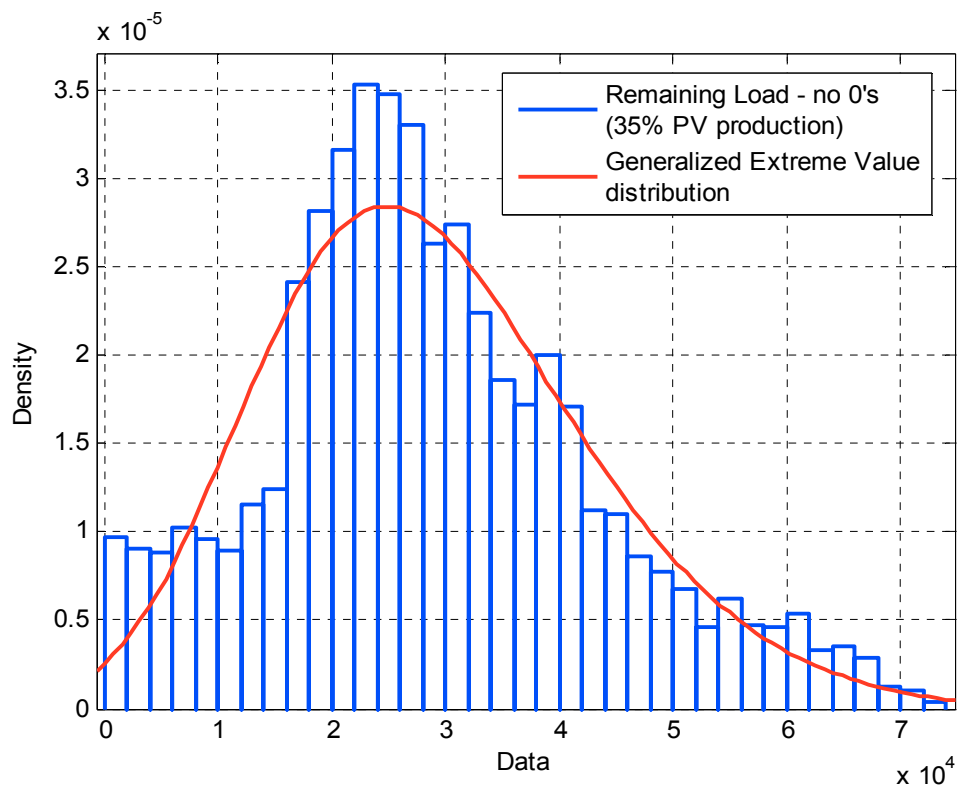
Σύμφωνα, λοιπόν, με το κριτήριο του ελάχιστου μέσου τετραγωνικού σφάλματος η βέλτιστη καμπύλη – κατανομή για την προσομοίωση των μετρήσεων της χρονοσειράς του εναπομείναντος φορτίου, στην περίπτωση όπου η Φ/Β παραγωγή καλύπτει το 35% του μέσου φορτίου, είναι η Generalized Extreme Value (η ίδια κατανομή δηλαδή με την κατανομή που προσομοιώνει το εναπομένον φορτίο στην περίπτωση όπου η Φ/Β παραγωγή είναι το 25% του μέσου φορτίου). Η γενική εξίσωση που περιγράφει την κατανομή αυτή ορίζεται όπως και στην σχέση της προηγούμενης ενότητας.

Για την εύρεση των παραμέτρων χρησιμοποιήθηκε το MATLAB®. Τελικά βρέθηκε ότι $\sigma = 13.0867 \cdot 10^3$, $\mu = 22.8024 \cdot 10^3$ και $k = -14.6676 \cdot 10^{-2}$. Στα Σχήματα 7.17 και 7.18 παραθέτουμε τα διαγράμματα της βέλτιστης προσέγγισης της χρονοσειράς εναπομείναντος φορτίου (χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις) για κάλυψη από την Φ/Β παραγωγής κατά 35% (PDF και CDF αντίστοιχα).

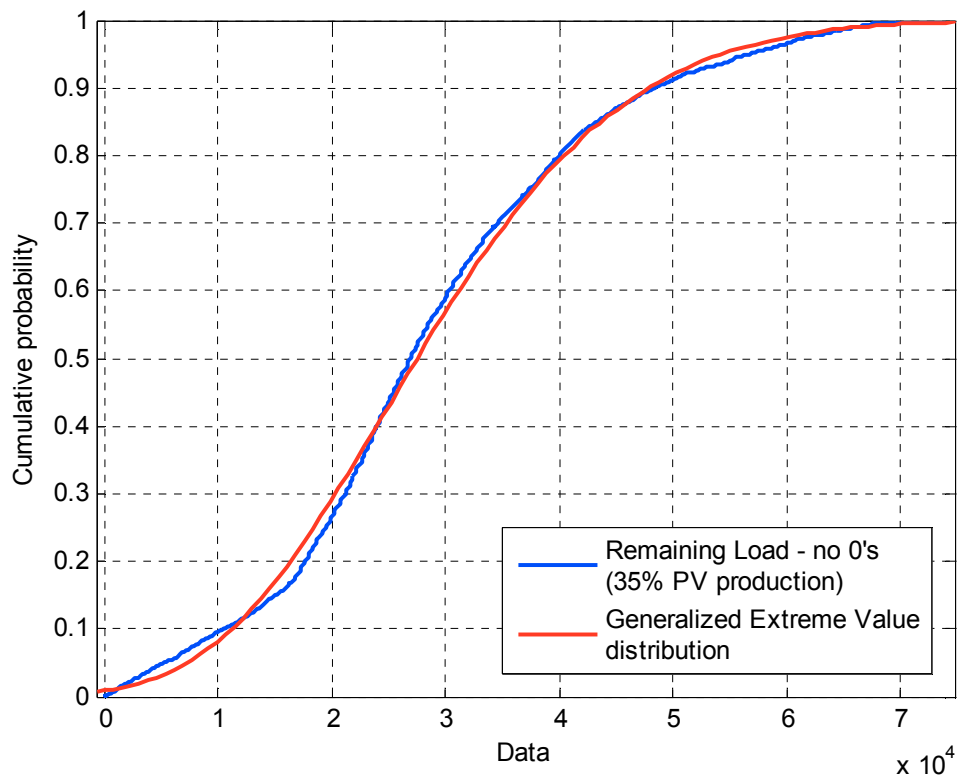
Συνοψίζοντας, η αρχική συνάρτηση που περιγράφει την βέλτιστη προσέγγιση της καμπύλης του εναπομείναντος φορτίου για Φ/Β παραγωγή 35% γίνεται:

$$\psi(x; \sigma, \mu, k) = 0.1328 \cdot \delta(x) + 0.8672 \cdot \left(\frac{1}{\sigma} \right) \exp \left(- \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-\frac{1}{k}} \right) \left(1 + k \frac{(x - \mu)}{\sigma} \right)^{-1 - \frac{1}{k}} \quad (7.23)$$

με τις παραμέτρους σ , μ και k όπως ορίστηκαν παραπάνω.



Σχήμα 7.17: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 35% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις (PDF).



Σχήμα 7.18: Διάγραμμα βέλτιστης προσέγγισης μετρήσεων εναπομείναντος φορτίου με κάλυψη 25% από την Φ/Β παραγωγή, χωρίς τις μηδενικές μετρήσεις (CDF).

7.3 Σύγκριση Αποτελεσμάτων – Συμπεράσματα

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιαστούν συνοπτικά τα αποτελέσματα όλου του Κεφαλαίου 7, δηλαδή της μελέτης ενσωμάτωσης της Φ/Β παραγωγής (ως ποσοστού του μέσου φορτίου) στην καμπύλη φορτίου.

Θα γίνει μια σύντομη σύγκριση των ποιοτικών χαρακτηριστικών των περιπτώσεων που μελετήθηκαν προηγουμένως. Συγκεκριμένα: της αρχικής καμπύλης φορτίου (0% Φ/Β παραγωγή), της αρχικής καμπύλης Φ/Β παραγωγής, και των τεσσάρων καμπυλών εναπομείναντος φορτίου (περιπτώσεις 5%, 15%, 25% και 35% Φ/Β παραγωγή ως προς το μέσο φορτίο) που μελετήθηκαν στην ενότητα 7.2.

Οι παραπάνω 6 καμπύλες θα εξεταστούν ως προς τα εξής χαρακτηριστικά όπως αυτά ορίστηκαν στην ενότητα 2.7.3: **αιχμή φορτίου, περίοδος φορτίου, ενέργεια φορτίου, μέσο φορτίο, μέσος χρόνος φορτίου και συντελεστής φορτίου** [17]. Επιπλέον, για κάθε καμπύλη παραθέτουμε την βέλτιστη κατανομή που προσομοιώνει την αντίστοιχη χρονοσειρά.

Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται στους Πίνακες 7.7α και 7.7β, παρακάτω. Από τους Πίνακες αυτούς μπορούμε να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την συμπεριφορά της καμπύλης φορτίου και των ποιοτικών και ποσοτικών χαρακτηριστικών αυτής κατά την εισχώρηση Φ/Β συστημάτων στην παραγωγή ενέργειας. Παρακάτω θα εξετάσουμε ένα-ένα τα ποσοτικά χαρακτηριστικά που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Αιχμή Φορτίου $P_A(kW)$: παρατηρούμε πως το μέγεθος αυτό παραμένει αμετάβλητο σε όλες τις περιπτώσεις των καμπυλών φορτίου, όσο και αν είναι το ποσοστό της Φ/Β παραγωγής σε σχέση με το μέσο φορτίο. Αυτό οφείλεται στο εξής: είναι γνωστό ότι η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από Φ/Β επηρεάζει κυρίως (αν όχι εξ ολοκλήρου) τα φορτία που εμφανίζονται τις ημερήσιες ώρες και όχι τις νυκτερινές καθώς τα Φ/Β πανέλα παράγουν ηλεκτρική ενέργεια μόνο όταν υπάρχει ήλιος. Είναι, λοιπόν, επόμενο πως οι νυκτερινές μετρήσεις της αρχικής καμπύλης φορτίου θα παραμείνουν αμετάβλητες εφ' όσον η Φ/Β παραγωγή συμβάλλει κυρίως στην κάλυψη των ημερήσιων αναγκών του φορτίου και όχι των νυκτερινών (ειδικά αν δεν υπάρχουν αποθηκευτικοί «χώροι» ενέργειας π.χ. μπαταρίες). Έτσι, αν η αιχμή φορτίου P_A έχει συμβεί μια νυκτερινή ώρα τότε θα παραμείνει αμετάβλητη όσο και

Πίνακας 7.7α: Σύγκριση των μεγεθών: αιχμής φορτίου, περίοδος φορτίου, ετήσια ενέργεια φορτίου και μέσου ωριαίου φορτίου των καμπυλών του αρχικού φορτίου, της Φ/Β παραγωγής και όλων των περιπτώσεων του εναπομείναντος φορτίου.

Καμπύλη	Αιχμή Φορτίου $P_A (kW)$	Περίοδος Φορτίου T	Ετήσια Ενέργεια Φορτίου $E (GWh)$	Μέσο Ωριαίο Φορτίο $P_\mu (kW)$
Αρχικό Φορτίο για 0% Φ/Β παραγωγή	74,000	1 έτος (8760h)	310.75	35,473
Φ/Β παραγωγή (εγκατεστημένη ισχύς Φ/Β πάρκου για την κάθε περίπτωση: 11.8kW _p (5%) , 35.5kW _p (15%) , 59.0kW _p (25%) , 82.6kW _p (35%))	9,874 (5%)	1 έτος (8760h)	15.54 (5%)	1,774 (5%)
	29,621 (15%)		46.61 (15%)	5,321 (15%)
	49,368 (25%)		77.69 (25%)	8,868 (25%)
	69,115 (35%)		108.76 (35%)	12,416 (35%)
Εναπομένον Φορτίο για 5% Φ/Β παραγωγή	74,000	1 έτος (8760h)	295.21	33,700
Εναπομένον Φορτίο για 15% Φ/Β παραγωγή	74,000	1 έτος (8760h)	264.14	30,152
Εναπομένον Φορτίο για 25% Φ/Β παραγωγή	74,000	1 έτος (8760h)	233.06	26,605
Εναπομένον Φορτίο για 35% Φ/Β παραγωγή	74,000	1 έτος (8760h)	201.99	23,058

Πίνακας 7.7β: Σύγκριση των μεγεθών: μέσου χρόνου φορτίου, συντελεστή φορτίου και βέλτιστης καμπύλης προσομοίωσης φορτίου των καμπυλών του αρχικού φορτίου, της Φ/Β παραγωγής και όλων των περιπτώσεων του εναπομείναντος φορτίου.

Καμπύλη	Μέσος Χρόνος Φορτίου $T_A(h)$	Συντε- λεστής Φορτίου m	Καμπύλη Προσομοίωσης της Χρονοσειράς
Αρχικό Φορτίο για 0% Φ/Β παραγωγή	4199	0.4793	Inverse Gaussian $h(z; \lambda, \kappa) = 0 \cdot \delta(z) +$ $+1 \cdot h_2(z; \lambda, \kappa)$
Φ/Β παραγωγή (εγκατεστημένη ισχύς Φ/Β πάρκου για την κάθε περίπτωση: $11.8kW_p(5\%)$, $35.5kW_p(15\%)$, $59.0kW_p(25\%)$, $82.6kW_p(35\%)$)	1574	0.1797	Beta (Dirac) $w(x; a, b) = 0.5402 \cdot \delta(x) +$ $+0.4598 \cdot w_2(x; a, b)$
Εναπομένον Φορτίο για 5% Φ/Β παραγωγή	3989	0.4554	Birnbaum-Saunders $\rho(x; \beta, \gamma) = 0 \cdot \delta(x) +$ $+ \rho_2(x; \beta, \gamma)$
Εναπομένον Φορτίο για 15% Φ/Β παραγωγή	3569	0.4074	Log-Logistic (Dirac) $\tau(x; \mu, \sigma) = 0.0063 \cdot \delta(x) +$ $+0.9937 \cdot \tau_2(x; \mu, \sigma)$
Εναπομένον Φορτίο για 25% Φ/Β παραγωγή	3149	0.3595	Generalized Extreme Value (Dirac) $\phi(x; \sigma, \mu, k) = 0.0636 \cdot \delta(x) +$ $+0.9364 \cdot \phi_2(x; \sigma, \mu, k)$
Εναπομένον Φορτίο για 35% Φ/Β παραγωγή	2730	0.3116	Generalized Extreme Value (Dirac) $\psi(x; \sigma, \mu, k) = 0.1328 \cdot \delta(x) +$ $+0.8672 \cdot \psi_2(x; \sigma, \mu, k)$

αν είναι το ποσοστό της Φ/Β παραγωγής σε σχέση με το μέσο φορτίο (είτε 0% είτε 35%). Πράγματι, μελετώντας τις 8,760 μετρήσεις της αρχικής καμπύλης φορτίου διαπιστώνουμε ότι η τιμή των 74,000kW εμφανίζεται την 5325^η ώρα του έτους δηλαδή περί τα μέσα Αυγούστου και ώρα 21.00 μ.μ. Επίσης, την ίδια ακριβώς ώρα η Φ/Β παραγωγή είναι μηδενική και γι' αυτό δεν συμβάλλει καθόλου στην μείωση του ζητούμενου φορτίου. Αντίστοιχα, οι 5325^{ες} μετρήσεις των καμπυλών του εναπομείναντος φορτίου για τα διάφορα ποσοστά της Φ/Β παραγωγής εμφανίζουν την ίδια τιμή (74,000kW).

Οι μέγιστες τιμές της Φ/Β παραγωγής μεταβάλλονται γραμμικά με το ποσοστό της Φ/Β παραγωγής επί του μέσου φορτίου (5%, 15%, 25%, 35%), δηλαδή με το μέγεθος του Φ/Β πάρκου (επίσης μεταβάλλεται γραμμικά) που επιλέγεται για κάλυψη των ενεργειακών αναγκών.

Περίοδος Φορτίου T : η περίοδος όλων των χρονοσειρών που μελετώνται είναι ίδια: 1 ημερολογιακό έτος ή 8,760 ώρες.

Ετήσια Ενέργεια Φορτίου $E(GWh)$: το μέγεθος αυτό εκφράζει την συνολική ενέργεια που καταναλώθηκε ή παράχθηκε (αν η καμπύλη φορτίου είναι αντίστοιχα ζήτησης ή παραγωγής ενέργειας). Γι' αυτό αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα της εκάστοτε καμπύλης φορτίου. Ωστόσο, στην περίπτωση της παρούσας μελέτης η ετήσια ενέργεια φορτίου αποτελεί το άθροισμα των 8,760 ωριαίων μετρήσεων που είχαμε στη διάθεσή μας. Με τον τρόπο αυτό βρέθηκαν οι συνολικές ενέργειες των 5 καμπυλών φορτίου και της Φ/Β παραγωγής που περιγράφονται στους Πίνακες 7.6α και 7.6β.

Επιπλέον, παρατηρούμε πως παρόλο που οι παραπάνω ποσότητες βρέθηκαν αναλυτικά ισχύει προσεγγιστικά η παρακάτω σχέση:

$$310.75 = 15.54 + 295.21 = 46.61 + 264.14 = 77.69 + 233.06 = 108.76 + 201.99$$

κάτι που ήταν αναμενόμενο καθώς ισχύει ότι:

Αρχικό Ζητούμενο Φορτίο = Φορτίο (Φ/Β Παραγωγής) + Εναπομένον Φορτίο

για οποιοδήποτε ποσοστό Φ/Β παραγωγής επί του μέσου φορτίου.

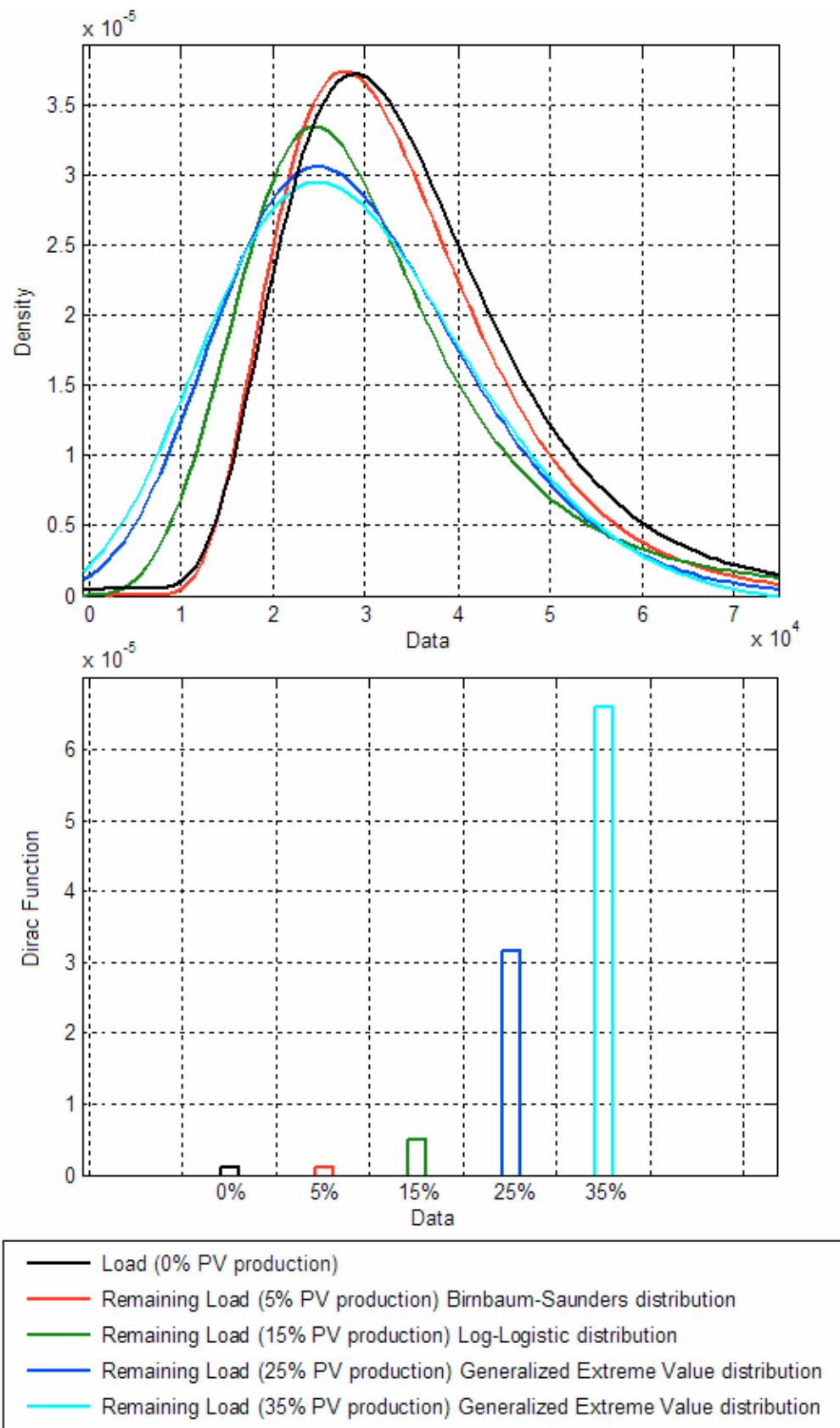
Μέσο Ωριαίο Φορτίο $P_{\mu}(kW)$: ίδια συμπεριφορά με την ετήσια ενέργεια φορτίου παρουσιάζει το μέσο ωριαίο φορτίο καθώς προκύπτει από την συνολική ενέργεια προς τον αριθμό των ωρών της περιόδου του φορτίου, δηλαδή 8,760 ώρες. Παρατηρούμε πως και στην περίπτωση του μεγέθους αυτού ισχύει η σχέση:

$$\text{Αρχικό Μέσο Ωριαίο Φορτίο} = \text{Μέσο Ωριαίο Φορτίο (Φ/Β Παραγωγής)} + \text{Εναπομένων Μέσο Ωριαίο Φορτίο}$$

για οποιοδήποτε ποσοστό Φ/Β παραγωγής επί του μέσου φορτίου.

Μέσος Χρόνος Φορτίου $T_A(h)$: το μέγεθος αυτό εκφράζει την ιδεατή διάρκεια της αιχμής, δηλαδή πόσες ώρες λειτουργίας θα απαιτούνταν για την κάλυψη της συνολικής ετήσιας ενέργειας στην περίπτωση που η ζήτηση (παραγωγή αντίστοιχα) φορτίου ήταν συνεχώς σταθερή και ίση με το φορτίο αιχμής. Προφανώς $T_A \leq T$. Παρατηρούμε πως το μέγεθος αυτό παραμένει σταθερό στις τέσσερις περιπτώσεις της Φ/Β παραγωγής διότι εξαρτάται μόνο από τον λόγο της συνολικής ενέργειας προς την αιχμή φορτίου και όπως ειπώθηκε παραπάνω τα 2 αυτά μεγέθη είναι μεταξύ τους ανάλογα. Το ίδιο δεν συμβαίνει, όμως, και στην περίπτωση των καμπυλών φορτίου. Το γεγονός αυτό δικαιολογείται απ' το ότι η αιχμή φορτίου παραμένει σταθερή για τις καμπύλες φορτίου ενώ η ενέργεια του εναπομένοντος φορτίου συνεχώς μειώνεται όσο αυξάνεται η εισχώρηση της Φ/Β παραγωγής στην παραγωγή ενέργειας. Επιπλέον, παρατηρούμε πως οι διαφορά του εναπομείναντος φορτίου ενός ποσοστού (x%) μείον την διαφορά του εναπομείναντος φορτίου του αμέσως επόμενου ποσοστού (x%+5%) παραμένει σταθερή και ίση με το 10% του μέσου χρόνου φορτίου της αρχικής καμπύλης φορτίου.

Συντελεστής Φορτίου m : ίδια συμπεριφορά με τον μέσο χρόνο φορτίου παρουσιάζει ο συντελεστής φορτίου καθώς η σχέση που συνδέει τα δύο μεγέθη είναι γραμμική (ο λόγος του μέσου χρόνου φορτίου προς την περίοδο φορτίου δίνει τον συντελεστή φορτίου – η περίοδος φορτίου είναι σταθερή για όλες τις καμπύλες, όπως ειπώθηκε παραπάνω, και επομένως τα δύο προαναφερθέντα μεγέθη παρουσιάζουν σχέση αναλογίας).

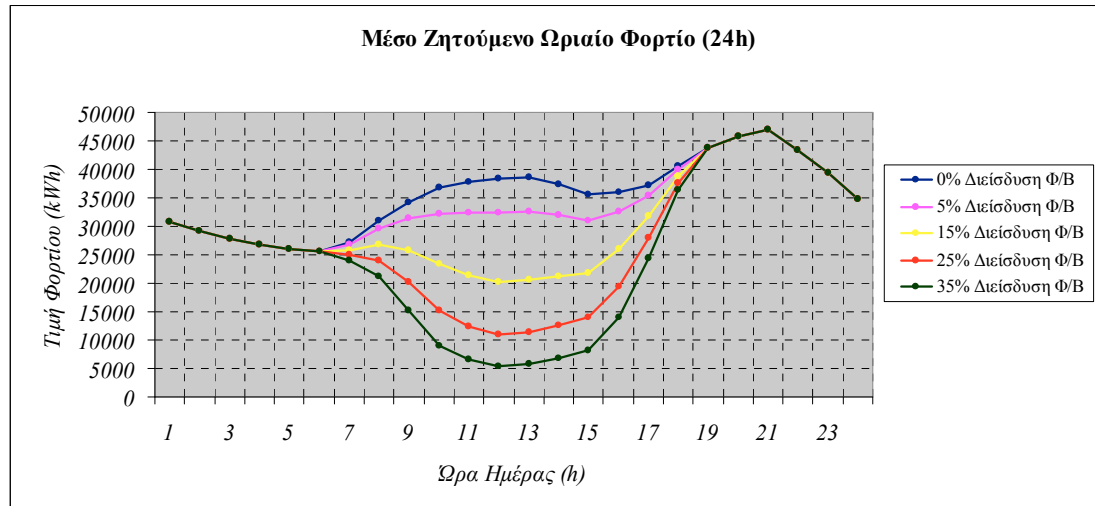


Σχήμα 7.19: (α) μεταβολή της καμπύλης του εναπομείναντος φορτίου και (β) μεταβολή των αντίστοιχων συναρτήσεων Dirac με την αύξηση της Φ/Β παραγωγής.

Καμπύλη Προσομοίωσης της Χρονοσειράς: για κάθε καμπύλη φορτίου και για την καμπύλη Φ/Β παραγωγής παραθέτουμε τον αντίστοιχο μαθηματικό τύπο που δίνει την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κάθε χρονοσειράς. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες προσομοίωσης κάποιων χρονοσειρών περιέχουν και ένα όρο που περιλαμβάνει τη συνάρτηση Dirac. Βλέπουμε πως όσο περισσότερο εισχωρούν τα Φ/Β στην παραγωγή ενέργειας (αύξηση του ποσοστού Φ/Β παραγωγής επί του μέσου φορτίου) τόσο περισσότερο αυξάνεται ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας της συνάρτησης Dirac. Δηλαδή, τόσο περισσότερο αυξάνεται η πιθανότητα εμφάνισης μηδενικής μέτρησης. Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η Φ/Β παραγωγή είναι «καθαρή» ενέργεια και γι' αυτό χρησιμοποιείται κατά προτεραιότητα, με αποτέλεσμα ένα μεγάλο μέρος των ημερήσιων ωριαίων φορτίων να καλύπτεται από αυτήν. Όταν η «κάλυψη» αυτή αγγίζει το 100% τότε το εναπομένον φορτίο γίνεται 0 και δεν απαιτείται άλλου είδους ενέργεια πέραν της ενέργειας που προέρχεται από τα Φ/Β πανέλα για την κάλυψη του εκάστοτε ζητούμενου ωριαίου φορτίου. Το φαινόμενο της αύξησης των μηδενικών μετρήσεων με την αύξηση του ποσοστού της Φ/Β παραγωγής στην ζήτηση του φορτίου αποτυπώνεται και στο διάγραμμα (β) του Σχήματος 7.19.

Στο διάγραμμα (α) του ίδιου Σχήματος απεικονίζονται η αρχική καμπύλη φορτίου μαζί με τις τέσσερις καμπύλες του εναπομείναντος φορτίου για τις διάφορες περιπτώσεις «διείσδυσης» της Φ/Β παραγωγής (σε ποσοστό 5%, 15%, 25% και 35%). Παρατηρούμε πως όσο περισσότερο αυξάνεται η Φ/Β παραγωγή τόσο περισσότερο αυξάνονται οι συχνότητες εμφάνισης μικρότερων φορτίων (όπως και με τις συναρτήσεις Dirac – μηδενικά φορτία), ενώ παράλληλα μειώνονται οι συχνότητες εμφάνισης των μεγαλύτερων σε μέγεθος φορτίων. Μείωση στην συχνότητα εμφάνισης παρατηρείται και στα μεσαία φορτία [20,000...40,000] όπου εμφανίζονται και οι μεγαλύτερες συχνότητες (μέγιστα καμπυλών). Μάλιστα, παρατηρούμε πως τα μέγιστα σημεία των καμπυλών ολοένα και μειώνονται και «τείνουν» προς τα αριστερά, δηλαδή σε φορτία μικρότερου μεγέθους. Γενικά, είναι εμφανές πως η αύξηση της Φ/Β παραγωγής έχει ως άμεση συνέπεια την μετακίνηση της καμπύλης που περιγράφει το εναπομένον φορτίο προς τον άξονα των τετμημένων. Άλλωστε, στην ιδανική περίπτωση όπου η Φ/Β παραγωγή αποτελεί το 100% ή και περισσότερο του μέσου φορτίου (περίπτωση όμοια με αυτή των αυτόνομων συστημάτων) τότε

είναι αναμενόμενο πως η καμπύλη του εναπομείναντος φορτίου είτε θα ταυτιστεί με τον οριζόντιο άξονα (οριακή περίπτωση – πλήρης κάλυψη της ζήτησης φορτίου από τη Φ/Β παραγωγή) είτε θα εμφανίζει μικρές σχετικά συχνότητες για μικρά φορτία, καθώς οι συχνότητες εμφάνισης μεγάλων (εναπομεινάντων) φορτίων θα είναι μηδενικές.



Σχήμα 7.20: Μεταβολή της καμπύλης Φορτίου με αύξηση του ποσοστού διείσδυσης της Φ/Β παραγωγής επί του μέσου φορτίου.

Πίνακας 7.8: Μέγιστες και Ελάχιστες τιμές των καμπυλών του μέσου Φορτίου για διάφορα ποσοστά διείσδυσης της Φ/Β παραγωγής.

Ποσοστό Διείσδυσης	Ελάχιστη Τιμή (kWh)	Μέγιστη Τιμή (kWh)
0%	25,677	46,907
5%	25,677	46,907
15%	20,239	46,907
25%	10,919	46,907
35%	5,451	46,907

Τέλος, στο Σχήμα 7.20 παραθέτουμε το μέσο ζητούμενο φορτίο για κάθε ώρα ενός 24ώρου. Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το ποσοστό διείσδυσης της Φ/Β παραγωγής επί του μέσου φορτίου τόσο η καμπύλη φορτίου τείνει προς τα κάτω, καθώς μειώνονται οι ποσότητες του εναπομείναντος φορτίου που καλύπτονται από μη ανανεώσιμες πηγές ενέργειας. Επιπλέον, η μείωση των φορτίων παρατηρείται μόνο στα ημερήσια φορτία, κάτι που περιμέναμε άλλωστε καθώς δεν υπάρχει Φ/Β

παραγωγή της νυχτερινές ώρες. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο Πίνακας 7.8 στον οποίο φαίνονται οι ελάχιστες και οι μέγιστες τιμές της κάθε καμπύλης του Σχήματος 7.20.

Σύνοψη

Σκοπός της παρούσας εργασίας ήταν εξ' αρχής η εύρεση μίας συνάρτησης που θα έδινε την πιθανότητα εμφάνισης ενός συνόλου μετρήσεων. Χρησιμοποιήθηκαν, εν τέλει, τρεις πρωτογενείς μεταβλητές: η ηλιακή ακτινοβολία (άμεσα συνδεδεμένη με την Φ/Β παραγωγή), η ταχύτητα του ανέμου και το ζητούμενο ωριαίο φορτίο. Αφού βρέθηκαν οι περιθώριες κατανομές που περιέγραφαν με τον βέλτιστο δυνατό τρόπο τις αντίστοιχες μεταβλητές προτάθηκαν τρία παραμετρικά μοντέλα που θα προσομοίωναν την από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανότητας.

Από τα τρία αυτά παραμετρικά μοντέλα χρησιμοποιήθηκε μόνο το πρώτο καθώς τα άλλα δύο δεν οδηγούσαν σε ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε για την εύρεση των παραμέτρων του μοντέλου $M1$ είναι η μέθοδος της μέγιστης πιθανοφάνειας.

Επιπλέον, μελετήθηκε (Κεφάλαιο 7) και η συμπεριφορά της καμπύλης φορτίου με αύξηση της διείσδυσης της Φ/Β παραγωγής ως ποσοστού του μέσου ζητούμενου φορτίου.

Αυτό που περιγράφεται σε αυτήν την μελέτη είναι η μέθοδος και όλα τα ενδιάμεσα βήματα εύρεσης της από κοινού κατανομής πιθανότητας. Είναι προφανές πως υπάρχουν πολλά περιθώρια βελτίωσης της μεθόδου όπως:

- χρησιμοποίηση μεγαλύτερου όγκου δεδομένων (αρχικές τριάδες μετρήσεων).
- χρησιμοποίηση άλλων μεθόδων εύρεσης της από κοινού συνάρτησης κατανομής (ή πυκνότητας) πιθανότητας.
- χρησιμοποίηση και άλλων πολυμεταβλητών παραμετρικών μοντέλων όπως προτείνονται και στο [8].

Τέλος, θα προτείνουμε μερικά κάποια θέματα για περαιτέρω μελέτη που θα συμβάλλουν τόσο στη βελτίωση της παραπάνω μεθόδου όσο και στην μεγαλύτερη ακρίβεια των τελικών αποτελεσμάτων:

- εισαγωγή και άλλων μεταβλητών πέραν της ηλιακής ακτινοβολίας (Φ/B παραγωγής), της ταχύτητας ανέμου και του ζητούμενου φορτίου (π.χ. παραγωγή ενέργειας που προέρχεται από άλλες ΑΠΕ).
- χρήση άλλων μεθόδων (εκτός των έτοιμων πολυμεταβλητών παραμετρικών μοντέλων) για την εύρεση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, όπως για παράδειγμα: χρήση των Μετασχηματισμών Laplace, γενίκευση των περιθώριων κατανομών κατώτερης τάξης, Αρχή της Μέγιστης Εντροπίας κ.ά.

Παραρτήματα

Παράρτημα Α

Πίνακας Α.1: Ομαδοποίηση μετρήσεων Φ/Β παραγωγής.

Παρατηρήσεις		Συχνότητα Εμφάνισης	Τιμές Συνάρτησης Πυκνότητας	
Από	Έως		Πιθανότητας	Κατανομής Πιθανότητας
0	0.01	4875	0.556506849	0.556506849
0.01	0.02	83	0.009474886	0.565981735
0.02	0.03	77	0.008789954	0.574771689
0.03	0.04	88	0.010045662	0.584817352
0.04	0.05	84	0.009589041	0.594406393
0.05	0.06	80	0.00913242	0.603538813
0.06	0.07	74	0.008447489	0.611986301
0.07	0.08	79	0.009018265	0.621004566
0.08	0.09	85	0.009703196	0.630707763
0.09	0.1	85	0.009703196	0.640410959
0.1	0.11	87	0.009931507	0.650342466
0.11	0.12	106	0.012100457	0.662442922
0.12	0.13	97	0.011073059	0.673515982
0.13	0.14	62	0.007077626	0.680593607
0.14	0.15	44	0.005022831	0.685616438
0.15	0.16	41	0.004680365	0.690296804
0.16	0.17	43	0.004908676	0.695205479
0.17	0.18	37	0.004223744	0.699429224
0.18	0.19	35	0.003995434	0.703424658
0.19	0.2	43	0.004908676	0.708333333
0.2	0.21	49	0.005593607	0.713926941
0.21	0.22	65	0.007420091	0.721347032
0.22	0.23	54	0.006164384	0.727511416
0.23	0.24	50	0.005707763	0.733219178
0.24	0.25	62	0.007077626	0.740296804
0.25	0.26	63	0.007191781	0.747488584
0.26	0.27	72	0.008219178	0.755707763
0.27	0.28	50	0.005707763	0.761415525
0.28	0.29	52	0.005936073	0.767351598
0.29	0.3	42	0.004794521	0.772146119
0.3	0.31	34	0.003881279	0.776027397
0.31	0.32	24	0.002739726	0.778767123
0.32	0.33	20	0.002283105	0.781050228
0.33	0.34	43	0.004908676	0.785958904
0.34	0.35	49	0.005593607	0.791552511
0.35	0.36	38	0.0043379	0.795890411
0.36	0.37	41	0.004680365	0.800570776
0.37	0.38	51	0.005821918	0.806392694
0.38	0.39	47	0.005365297	0.811757991
0.39	0.4	59	0.00673516	0.818493151
0.4	0.41	50	0.005707763	0.824200913
0.41	0.42	68	0.007762557	0.83196347
0.42	0.43	50	0.005707763	0.837671233
0.43	0.44	32	0.003652968	0.841324201
0.44	0.45	41	0.004680365	0.846004566
0.45	0.46	29	0.003310502	0.849315068
0.46	0.47	28	0.003196347	0.852511416
0.47	0.48	36	0.004109589	0.856621005
0.48	0.49	30	0.003424658	0.860045662
0.49	0.5	50	0.005707763	0.865753425
0.5	0.51	40	0.00456621	0.870319635
0.51	0.52	49	0.005593607	0.875913242
0.52	0.53	48	0.005479452	0.881392694

0.53	0.54	56	0.006392694	0.887785388
0.54	0.55	50	0.005707763	0.893493151
0.55	0.56	47	0.005365297	0.898858447
0.56	0.57	49	0.005593607	0.904452055
0.57	0.58	40	0.00456621	0.909018265
0.58	0.59	54	0.006164384	0.915182648
0.59	0.6	61	0.00696347	0.922146119
0.6	0.61	50	0.005707763	0.927853881
0.61	0.62	57	0.006506849	0.934360731
0.62	0.63	67	0.007648402	0.942009132
0.63	0.64	61	0.00696347	0.948972603
0.64	0.65	63	0.007191781	0.956164384
0.65	0.66	52	0.005936073	0.962100457
0.66	0.67	43	0.004908676	0.967009132
0.67	0.68	61	0.00696347	0.973972603
0.68	0.69	43	0.004908676	0.978881279
0.69	0.7	40	0.00456621	0.983447489
0.7	0.71	37	0.004223744	0.987671233
0.71	0.72	23	0.002625571	0.990296804
0.72	0.73	22	0.002511416	0.992808219
0.73	0.74	21	0.00239726	0.995205479
0.74	0.75	14	0.001598174	0.996803653
0.75	0.76	10	0.001141553	0.997945205
0.76	0.77	5	0.000570776	0.998515982
0.77	0.78	3	0.000342466	0.998858447
0.78	0.79	3	0.000342466	0.999200913
0.79	0.8	4	0.000456621	0.999657534
0.8	0.81	2	0.000228311	0.999885845
0.81	0.82	0	0	0.999885845
0.82	0.83	0	0	0.999885845
0.83	0.84	1	0.000114155	1
0.84	0.85	0	0	1

Πίνακας Α.2: Ομαδοποίηση μετρήσεων Ηλιακής Ακτινοβολίας.

Παρατηρήσεις		Συχνότητα Εμφάνισης	Τιμές Συνάρτησης Πυκνότητας Πιθανότητας	Τιμές Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας
Από	Έως			
-0.01	0	25313	0.481601979	0.481601979
0	0.01	1795	0.034151446	0.515753425
0	0.01	27108	0.515753425	0.515753425
0.01	0.02	988	0.018797565	0.534550989
0.02	0.03	875	0.016647641	0.551198630
0.03	0.04	718	0.013660578	0.564859209
0.04	0.05	575	0.010939878	0.575799087
0.05	0.06	501	0.009531963	0.585331050
0.06	0.07	426	0.008105023	0.593436073
0.07	0.08	439	0.008352359	0.601788432
0.08	0.09	358	0.006811263	0.608599696
0.09	0.1	387	0.007363014	0.615962709
0.1	0.11	367	0.006982496	0.622945205
0.11	0.12	335	0.006373668	0.629318874
0.12	0.13	324	0.006164384	0.635483257
0.13	0.14	333	0.006335616	0.641818874
0.14	0.15	308	0.005859970	0.647678843
0.15	0.16	340	0.006468798	0.654147641
0.16	0.17	382	0.007267884	0.661415525
0.17	0.18	325	0.006183409	0.667598935
0.18	0.19	339	0.006449772	0.674048706

0.19	0.2	335	0.006373668	0.680422374
0.2	0.21	303	0.005764840	0.686187215
0.21	0.22	323	0.006145358	0.692332572
0.22	0.23	305	0.005802892	0.698135464
0.23	0.24	293	0.005574581	0.703710046
0.24	0.25	280	0.005327245	0.709037291
0.25	0.26	317	0.006031202	0.715068493
0.26	0.27	277	0.005270167	0.720338661
0.27	0.28	306	0.005821918	0.726160578
0.28	0.29	268	0.005098935	0.731259513
0.29	0.3	274	0.005213090	0.736472603
0.3	0.31	284	0.005403349	0.741875951
0.31	0.32	267	0.005079909	0.746955860
0.32	0.33	243	0.004623288	0.751579148
0.33	0.34	254	0.004832572	0.756411720
0.34	0.35	233	0.004433029	0.760844749
0.35	0.36	226	0.004299848	0.765144597
0.36	0.37	263	0.005003805	0.770148402
0.37	0.38	249	0.004737443	0.774885845
0.38	0.39	261	0.004965753	0.779851598
0.39	0.4	244	0.004642314	0.784493912
0.4	0.41	243	0.004623288	0.789117199
0.41	0.42	232	0.004414003	0.793531202
0.42	0.43	240	0.004566210	0.798097412
0.43	0.44	249	0.004737443	0.802834855
0.44	0.45	211	0.004014460	0.806849315
0.45	0.46	226	0.004299848	0.811149163
0.46	0.47	223	0.004242770	0.815391933
0.47	0.48	227	0.004318874	0.819710807
0.48	0.49	252	0.004794521	0.824505327
0.49	0.5	228	0.004337900	0.828843227
0.5	0.51	267	0.005079909	0.833923135
0.51	0.52	226	0.004299848	0.838222983
0.52	0.53	210	0.003995434	0.842218417
0.53	0.54	250	0.004756469	0.846974886
0.54	0.55	211	0.004014460	0.850989346
0.55	0.56	245	0.004661339	0.855650685
0.56	0.57	246	0.004680365	0.860331050
0.57	0.58	227	0.004318874	0.864649924
0.58	0.59	221	0.004204718	0.868854642
0.59	0.6	207	0.003938356	0.872792998
0.6	0.61	197	0.003748097	0.876541096
0.61	0.62	213	0.004052511	0.880593607
0.62	0.63	210	0.003995434	0.884589041
0.63	0.64	184	0.003500761	0.888089802
0.64	0.65	192	0.003652968	0.891742770
0.65	0.66	196	0.003729072	0.895471842
0.66	0.67	183	0.003481735	0.898953577
0.67	0.68	171	0.003253425	0.902207002
0.68	0.69	211	0.004014460	0.906221461
0.69	0.7	174	0.003310502	0.909531963
0.7	0.71	161	0.003063166	0.912595129
0.71	0.72	171	0.003253425	0.915848554
0.72	0.73	192	0.003652968	0.919501522
0.73	0.74	140	0.002663623	0.922165145
0.74	0.75	168	0.003196347	0.925361492
0.75	0.76	182	0.003462709	0.928824201
0.76	0.77	165	0.003139269	0.931963470
0.77	0.78	186	0.003538813	0.935502283
0.78	0.79	173	0.003291476	0.938793760

0.79	0.8	185	0.003519787	0.942313546
0.8	0.81	201	0.003824201	0.946137747
0.81	0.82	219	0.004166667	0.950304414
0.82	0.83	173	0.003291476	0.953595890
0.84	0.85	179	0.003405632	0.960635464
0.85	0.86	195	0.003710046	0.964345510
0.86	0.87	157	0.002987062	0.967332572
0.87	0.88	161	0.003063166	0.970395738
0.88	0.89	192	0.003652968	0.974048706
0.89	0.9	154	0.002929985	0.976978691
0.9	0.91	171	0.003253425	0.980232116
0.91	0.92	137	0.002606545	0.982838661
0.92	0.93	134	0.002549467	0.985388128
0.93	0.94	122	0.002321157	0.987709285
0.94	0.95	131	0.002492390	0.990201674
0.95	0.96	122	0.002321157	0.992522831
0.96	0.97	104	0.001978691	0.994501522
0.97	0.98	82	0.001560122	0.996061644
0.98	0.99	65	0.001236682	0.997298326
0.99	1	31	0.000589802	0.997888128
1	1.01	35	0.000665906	0.998554033
1.01	1.02	24	0.000456621	0.999010654
1.02	1.03	9	0.000171233	0.999181887
1.03	1.04	12	0.000228311	0.999410198
1.04	1.05	4	0.000076104	0.999486301
1.05	1.06	10	0.000190259	0.999676560
1.06	1.07	5	0.000095129	0.999771689
1.07	1.08	2	0.000038052	0.999809741
1.08	1.09	3	0.000057078	0.999866819
1.09	1.0	1	0.000019026	0.999885845
1.1	1.11	3	0.000057078	0.999942922
1.11	1.12	0	0.000000000	0.999942922
1.12	1.13	1	0.000019026	0.999961948
1.13	1.14	0	0.000000000	0.999961948
1.14	1.15	0	0.000000000	0.999961948
1.15	1.16	0	0.000000000	0.999961948
1.16	1.17	0	0.000000000	0.999961948
1.17	1.18	2	0.000038052	1.000000000
1.18	1.19	0	0.000000000	1.000000000

Πίνακας Α.3: Ομαδοποίηση μετρήσεων Ταχύτητας Ανέμου.

Παρατηρήσεις (m / s)		Συχνότητα Εμφάνισης	Τιμές Συνάρτησης Πιθανότητας	Τιμές Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας
Από	Έως			
0	1	1248	0.023744292	0.023744292
1	2	2054	0.039079148	0.06282344
2	3	3103	0.059037291	0.121860731
3	4	4065	0.077340183	0.199200913
4	5	3737	0.071099696	0.270300609
5	6	3459	0.065810502	0.336111111
6	7	2786	0.053006088	0.389117199
7	8	2902	0.05521309	0.444330289
8	9	2669	0.050780061	0.49511035
9	10	2518	0.047907154	0.543017504
10	11	2193	0.041723744	0.584741248
11	12	2449	0.046594368	0.631335616
12	13	2311	0.043968798	0.675304414
13	14	2121	0.040353881	0.715658295
14	15	1875	0.035673516	0.751331811

15	16	1596	0.030365297	0.781697108
16	17	1570	0.029870624	0.811567732
17	18	1555	0.029585236	0.841152968
18	19	1432	0.027245053	0.868398021
19	20	1117	0.021251903	0.889649924
20	21	1263	0.02402968	0.913679604
21	22	925	0.017598935	0.931278539
22	23	775	0.014745053	0.946023592
23	24	618	0.011757991	0.957781583
24	25	693	0.013184932	0.970966514
25	26	518	0.009855403	0.980821918
26	27	355	0.006754186	0.987576104
27	28	233	0.004433029	0.992009132
28	29	159	0.003025114	0.995034247
29	30	107	0.002035769	0.997070015
30	31	58	0.001103501	0.998173516
31	32	34	0.00064688	0.998820396
32	33	27	0.000513699	0.999334094
33	34	21	0.000399543	0.999733638
34	35	12	0.000228311	0.999961948
35	36	2	3.80518E-05	1

Πίνακας Α.4: Ομαδοποίηση μετρήσεων Ωριαίου Φορτίου.

Παρατηρήσεις		Συχνότητα Εμφάνισης	Τιμές Συνάρτησης Πιθανότητας	Τιμές Συνάρτησης Κατανομής Πιθανότητας
Από	Έως			
0	1000	0	0	0
1000	2000	0	0	0
2000	3000	0	0	0
3000	4000	1	0.000114155	0.000114155
4000	5000	0	0	0.000114155
5000	6000	1	0.000114155	0.000228311
6000	7000	0	0	0.000228311
7000	8000	2	0.000228311	0.000456621
8000	9000	1	0.000114155	0.000570776
9000	10000	1	0.000114155	0.000684932
10000	11000	2	0.000228311	0.000913242
11000	12000	0	0	0.000913242
12000	13000	0	0	0.000913242
13000	14000	0	0	0.000913242
14000	15000	0	0	0.000913242
15000	16000	9	0.001027397	0.001940639
16000	17000	78	0.00890411	0.010844749
17000	18000	143	0.016324201	0.02716895
18000	19000	134	0.015296804	0.042465753
19000	20000	141	0.01609589	0.058561644
20000	21000	140	0.015981735	0.074543379
21000	22000	246	0.028082192	0.102625571
22000	23000	255	0.029109589	0.13173516
23000	24000	342	0.039041096	0.170776256
24000	25000	344	0.039269406	0.210045662
25000	26000	370	0.042237443	0.252283105
26000	27000	357	0.040753425	0.29303653
27000	28000	361	0.041210046	0.334246575
28000	29000	305	0.034817352	0.369063927
29000	30000	267	0.030479452	0.399543379
30000	31000	301	0.034360731	0.43390411
31000	32000	277	0.031621005	0.465525114

32000	33000	245	0.027968037	0.493493151
33000	34000	236	0.026940639	0.52043379
34000	35000	262	0.029908676	0.550342466
35000	36000	203	0.023173516	0.573515982
36000	37000	219	0.025	0.598515982
37000	38000	207	0.023630137	0.622146119
38000	39000	240	0.02739726	0.649543379
39000	40000	250	0.028538813	0.678082192
40000	41000	235	0.026826484	0.704908676
41000	42000	192	0.021917808	0.726826484
42000	43000	165	0.018835616	0.7456621
43000	44000	155	0.017694064	0.763356164
44000	45000	168	0.019178082	0.782534247
45000	46000	119	0.013584475	0.796118721
46000	47000	113	0.012899543	0.809018265
47000	48000	133	0.015182648	0.824200913
48000	49000	117	0.013356164	0.837557078
49000	50000	115	0.013127854	0.850684932
50000	51000	124	0.014155251	0.864840183
51000	52000	98	0.011187215	0.876027397
52000	53000	112	0.012785388	0.888812785
53000	54000	101	0.01152968	0.900342466
54000	55000	111	0.012671233	0.913013699
55000	56000	125	0.014269406	0.927283105
56000	57000	104	0.011872146	0.939155251
57000	58000	85	0.009703196	0.948858447
58000	59000	79	0.009018265	0.957876712
59000	60000	65	0.007420091	0.965296804
60000	61000	57	0.006506849	0.971803653
61000	62000	57	0.006506849	0.978310502
62000	63000	23	0.002625571	0.980936073
63000	64000	29	0.003310502	0.984246575
64000	65000	23	0.002625571	0.986872146
65000	66000	31	0.003538813	0.990410959
66000	67000	31	0.003538813	0.993949772
67000	68000	13	0.001484018	0.99543379
68000	69000	12	0.001369863	0.996803653
69000	70000	7	0.000799087	0.99760274
70000	71000	7	0.000799087	0.998401826
71000	72000	9	0.001027397	0.999429224
72000	73000	3	0.000342466	0.999771689
73000	74000	1	0.000114155	0.999885845
74000	75000	1	0.000114155	1
75000	76000	0	0	1

Πίνακας Α.5: Πίνακας Σφαλμάτων – Επεξεργασίας των Μετρήσεων generalized extreme value.

Παρατηρήσεις		Συχνότητα Εμφάνισης Πραγματικών Δεδομένων	Generalized extreme Value	Σφάλμα	Σχετικό Σφάλμα	Τετραγωνικό Σφάλμα
Από	Έως					
0	0.02	4684	887	3797	0.332191781	0.110351379
0.02	0.04	266	233	33	-0.02283105	0.000521257
0.04	0.06	180	124	56	-0.007762557	6.02573E-05
0.06	0.08	145	82	63	-0.00216895	4.70434E-06
0.08	0.1	125	60	65	0.000570776	3.25786E-07
0.1	0.12	118	47	71	0.002739726	7.5061E-06
0.12	0.14	109	39	70	0.003538813	1.25232E-05
0.14	0.16	108	32	76	0.005022831	2.52288E-05
0.16	0.18	118	28	90	0.007077626	5.00928E-05
0.18	0.2	112	24	88	0.007305936	5.33767E-05

0.2	0.22	104	22	82	0.006849315	4.69131E-05
0.22	0.24	100	19	81	0.007077626	5.00928E-05
0.24	0.26	99	18	81	0.007191781	5.17217E-05
0.26	0.28	97	16	81	0.007420091	5.50578E-05
0.28	0.3	90	15	75	0.006849315	4.69131E-05
0.3	0.32	92	14	78	0.007305936	5.33767E-05
0.32	0.34	83	13	70	0.006506849	4.23391E-05
0.34	0.36	76	12	64	0.005936073	3.5237E-05
0.36	0.38	85	11	74	0.007191781	5.17217E-05
0.38	0.4	84	11	73	0.007077626	5.00928E-05
0.4	0.42	79	10	69	0.00673516	4.53624E-05
0.42	0.44	81	9	72	0.007191781	5.17217E-05
0.44	0.46	73	9	64	0.006278539	3.942E-05
0.46	0.48	75	9	66	0.006506849	4.23391E-05
0.48	0.5	80	8	72	0.007305936	5.33767E-05
0.5	0.52	82	8	74	0.007534247	5.67649E-05
0.52	0.54	77	7	70	0.007191781	5.17217E-05
0.54	0.56	76	7	69	0.007077626	5.00928E-05
0.56	0.58	79	7	72	0.007420091	5.50578E-05
0.58	0.6	71	7	64	0.006506849	4.23391E-05
0.6	0.62	68	6	62	0.006392694	4.08665E-05
0.62	0.64	66	6	60	0.006164384	3.79996E-05
0.64	0.66	65	6	59	0.006050228	3.66053E-05
0.66	0.68	59	6	53	0.005365297	2.87864E-05
0.68	0.7	64	6	58	0.005936073	3.5237E-05
0.7	0.72	55	5	50	0.005136986	2.63886E-05
0.72	0.74	55	5	50	0.005136986	2.63886E-05
0.74	0.76	58	5	53	0.005479452	3.00244E-05
0.76	0.78	58	5	53	0.005479452	3.00244E-05
0.78	0.8	60	5	55	0.005707763	3.25786E-05
0.8	0.82	70	5	65	0.006849315	4.69131E-05
0.82	0.84	61	5	56	0.005821918	3.38947E-05
0.84	0.86	62	5	57	0.005936073	3.5237E-05
0.86	0.88	53	4	49	0.005136986	2.63886E-05
0.88	0.9	58	4	54	0.005707763	3.25786E-05
0.9	0.92	51	4	47	0.004908676	2.40951E-05
0.92	0.94	43	4	39	0.003995434	1.59635E-05
0.94	0.96	42	4	38	0.003881279	1.50643E-05
0.96	0.98	31	4	27	0.002625571	6.89362E-06
0.98	1	16	4	12	0.000913242	8.34011E-07
1	1.02	10	4	6	0.000228311	5.21257E-08
1.02	1.04	3	4	-1	-0.000570776	3.25786E-07
1.04	1.06	2	4	-2	-0.000684932	4.69131E-07
1.06	1.08	1	4	-3	-0.000799087	6.3854E-07
1.08	1.1	1	4	-3	-0.000799087	6.3854E-07
1.1	1.12	0	4	-4	-0.000913242	8.34011E-07
1.12	1.14	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.14	1.16	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.16	1.18	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.18	1.2	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.2	1.22	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.22	1.24	0	23	-23	-0.005251142	2.75745E-05
1.24	1.26	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.26	1.28	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
1.28	1.3	0	3	-3	-0.000684932	4.69131E-07
ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ		8760	1843	6413	MSE	0.00280958

Πίνακας Α.6: Υπολογισμός MSE για την προσέγγιση Nakagami.

Παρατηρήσεις		Συχνότητα Εμφάνισης Πραγματικών Δεδομένων	Nakagami	Σφάλμα	Σχετικό Σφάλμα	Τετραγωνικό Σφάλμα
Από	Έως					
0	0.05	318	260	58	0.014229637	0.000202483
0.05	0.1	411	298	113	0.027723258	0.000768579
0.1	0.15	274	312	-38	-0.009322866	8.69158E-05
0.15	0.2	262	315	-53	-0.013002944	0.000169077
0.2	0.25	258	310	-52	-0.012757605	0.000162756
0.25	0.3	228	300	-72	-0.017664377	0.00031203
0.3	0.35	224	285	-61	-0.014965653	0.000223971
0.35	0.4	219	267	-48	-0.011776251	0.00013868
0.4	0.45	214	247	-33	-0.008096173	6.5548E-05
0.45	0.5	226	225	1	0.000245339	6.0191E-08
0.5	0.55	169	202	-33	-0.008096173	6.5548E-05
0.55	0.6	184	179	5	0.001226693	1.50478E-06
0.6	0.65	184	157	27	0.006624141	4.38792E-05
0.65	0.7	154	135	19	0.004661433	2.1729E-05
0.7	0.75	128	115	13	0.003189401	1.01723E-05
0.75	0.8	183	97	86	0.021099117	0.000445173
0.8	0.85	153	81	72	0.017664377	0.00031203
0.85	0.9	134	66	68	0.016683023	0.000278323
0.9	0.95	96	54	42	0.01030422	0.000106177
0.95	1	47	43	4	0.000981354	9.63056E-07
1	1.05	9	34	-25	-0.006133464	3.76194E-05
1.05	1.1	0	27	-27	-0.006624141	4.38792E-05
1.1	1.15	0	20	-20	-0.004906771	2.40764E-05
1.15	1.2	0	16	-16	-0.003925417	1.54089E-05
1.2	1.25	0	12	-12	-0.002944063	8.66751E-06
1.25	1.3	0	9	-9	-0.002208047	4.87547E-06
1.3	1.35	0	6	-6	-0.001472031	2.16688E-06
1.35	1.4	0	5	-5	-0.001226693	1.50478E-06
1.4	1.45	0	3	-3	-0.000736016	5.41719E-07
1.45	1.5	0	2	-2	-0.000490677	2.40764E-07
1.5	1.55	0	2	-2	-0.000490677	2.40764E-07
1.55	1.6	0	1	-1	-0.000245339	6.0191E-08
1.6	1.65	0	1	-1	-0.000245339	6.0191E-08
1.65	1.7	0	1	-1	-0.000245339	6.0191E-08
1.7	1.75	0	0	0	0	0
1.75	1.8	0	0	0	0	0
1.8	1.85	0	0	0	0	0
1.85	1.9	0	0	0	0	0
1.9	1.95	0	0	0	0	0
1.95	2	0	0	0	0	0
2	2.05	0	0	0	0	0
2.05	2.1	0	0	0	0	0
0	0.05	318	260	58	0.014229637	0.000202483
0.05	0.1	411	298	113	0.027723258	0.000768579
0.1	0.15	274	312	-38	-0.009322866	8.69158E-05
0.15	0.2	262	315	-53	-0.013002944	0.000169077
0.2	0.25	258	310	-52	-0.012757605	0.000162756
0.25	0.3	228	300	-72	-0.017664377	0.00031203
0.3	0.35	224	285	-61	-0.014965653	0.000223971
0.35	0.4	219	267	-48	-0.011776251	0.00013868
0.4	0.45	214	247	-33	-0.008096173	6.5548E-05
0.45	0.5	226	225	1	0.000245339	6.0191E-08
0.5	0.55	169	202	-33	-0.008096173	6.5548E-05
0.55	0.6	184	179	5	0.001226693	1.50478E-06
0.6	0.65	184	157	27	0.006624141	4.38792E-05
0.65	0.7	154	135	19	0.004661433	2.1729E-05

0.7	0.75	128	115	13	0.003189401	1.01723E-05
0.75	0.8	183	97	86	0.021099117	0.000445173
0.8	0.85	153	81	72	0.017664377	0.00031203
0.85	0.9	134	66	68	0.016683023	0.000278323
0.9	0.95	96	54	42	0.01030422	0.000106177
0.95	1	47	43	4	0.000981354	9.63056E-07
1	1.05	9	34	-25	-0.006133464	3.76194E-05
1.05	1.1	0	27	-27	-0.006624141	4.38792E-05
1.1	1.15	0	20	-20	-0.004906771	2.40764E-05
1.15	1.2	0	16	-16	-0.003925417	1.54089E-05
1.2	1.25	0	12	-12	-0.002944063	8.66751E-06
1.25	1.3	0	9	-9	-0.002208047	4.87547E-06
1.3	1.35	0	6	-6	-0.001472031	2.16688E-06
1.35	1.4	0	5	-5	-0.001226693	1.50478E-06
1.4	1.45	0	3	-3	-0.000736016	5.41719E-07
1.45	1.5	0	2	-2	-0.000490677	2.40764E-07
1.5	1.55	0	2	-2	-0.000490677	2.40764E-07
1.55	1.6	0	1	-1	-0.000245339	6.0191E-08
1.6	1.65	0	1	-1	-0.000245339	6.0191E-08
1.65	1.7	0	1	-1	-0.000245339	6.0191E-08
1.7	1.75	0	0	0	0	0
1.75	1.8	0	0	0	0	0
1.8	1.85	0	0	0	0	0
1.85	1.9	0	0	0	0	0
1.9	1.95	0	0	0	0	0
1.95	2	0	0	0	0	0
2	2.05	0	0	0	0	0
2.05	2.1	0	0	0	0	0
ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΑ		4075	4087	-12	-0.002944063	0.003555002

Παράρτημα Β

B1. Day.m

% Πρόγραμμα Υπολογισμού παραμέτρων Παραμετρικού Μοντέλου M1 (περίπτωση
% ημερήσιων μετρήσεων)

```
run('c:\data_photovolta.m');
```

```
%Katanomi F(x;m,w) NAKAGAMI
```

```
m=0.339032;
```

```
w=20.7236;
```

```
%Katanomi G(y;a,b) WEIBULL
```

```
a=11.5754;
```

```
b=1.567;
```

```
%Katanomi H(z;L,k) INVERSE GAUSSIAN
```

```
L=29.3468;
```

```
k=3.5474;
```

```
%Oikogeneia Parametrikwn Polimetavlitwn Protipwn M1 (Kef.5 - sel. 104)
```

```
%Voithitikes Posotites
```

```
for j1=1:50
```

```
    j1
```

```
    dd(j1)=j1;
```

```
    d_12=1+0.6*46;
```

```
    d_23=1+0.4*42;
```

```
    d_13=1+0.4*40;
```

```
    n_1=0;
```

```
    n_2=0;
```

```
    n_3=0.4*j1;
```

```
    th=1+0.5*24;
```

```
    LNT=0;
```

```
for kk=1:max(size(day1))
```

```
    x=day1(kk,1);
```

```
    y=day1(kk,2);
```

```
    z=day1(kk,3);
```

```
    F=gammainc(x^2*(m/w),m);
```

```
    G=1-exp(-(y/a)^b);
```

```
    H=erf((sqrt(L/z)*(zk)/k)/sqrt(2))/2+1/2+exp(2*L/k)*(erf((sqrt(L/z)*(-z-k)/k)/sqrt(2))/2+1/2);
```

```

help_F=(-log(F))^th/(n_1+2);
help_G=(-log(G))^th/(n_2+2);
help_H=(-log(H))^th/(n_3+2);

```

```
%Apo koinou S.P.P. gia to M1
```

```

Q_1=((((help_F)^d_12)+(help_G)^d_12))^(1/d_12)+(((help_G)^d_23)+...
((help_H)^d_23))^(1/d_23)+(((help_F)^d_13)+(help_H)^d_13))^(1/d_13)+...
+(n_1*help_F)+(n_2*help_G)+(n_3*help_H))^(1/th));

```

```
LNT=LNT+Q_1;
```

```

    end
LNT;
ID(j1)=LNT/1000;
end

```

```
plot(ID)
```

B2. Error.m

```
% Πρόγραμμα Υπολογισμού Σφαλμάτων και συνολικού Σφάλματος
```

```
run('C:\Program Files\MATLAB\R2006b\work\taksinomisi_se_koutakia.m');
```

```

for ss=1:120
    %Katanomi F(x;m,w) NAKAGAMI
    m=0.339032;
    w=20.7236;
    %Katanomi G(y;a,b) WEIBULL
    a=12.3612;
    b=1.7070;
    %Katanomi H(z;L,k) INVERSE GAUSSIAN
    L=35.8965;
    k=3.6699;
    %Orismos statherwn polidiastatis sinartisis piknotitas pithanotitas
    d_12=18; %kaliteri timi 146.25, th=72 me error=4.7742

    d_23=19;
    d_13=8.6;

    n_1=0;
    n_2=0;
    n_3=0;

    th=ss; %23 error=6.498
    gth(ss)=th;

```

```

xx=0.001:1.28272021:9.0;
yy=0.44:4.25625:32.49;
zz=0.58:0.885:7.0;
xx;
yy;
zz;

for n1_max=1:length(xx)
    for n2_max=1:length(yy)
        for n3_max=1:length(zz)
            % 3 for-loops gia na perasoume ola ta koutakia pou einai
            % sinolika 8x8x8= 512

            %ORISMOS (MEGISTHS K) ELAXISTHS TIMHS "KOUTIOY"

            x_min=xx(n1_max);
            y_min=yy(n2_max);
            z_min=zz(n3_max);

            % ORISMOS SINARTSHSHS Q222-----
            F=gammainc(x_min^2*(m/w),m);
            G=1-exp(-((y_min/a)^b));
            H=erf((sqrt(L/z_min)*(z_min-
k)/k)/sqrt(2))/2+1/2+exp(2*L/k)*(erf((sqrt(L/z_min)*(-z_min-k)/k)/sqrt(2))/2+1/2);

            help_F=(-log(F))^th/(n_1+2);
            help_G=(-log(G))^th/(n_2+2);
            help_H=(-log(H))^th/(n_3+2);

            %          Q222=F*G*H;

            Q222=exp(-((((help_F)^d_12)+((help_G)^d_12))^(1/d_12)+...
            (((help_G)^d_23)+((help_H)^d_23))^(1/d_23)+...
            (((help_F)^d_13)+((help_H)^d_13))^(1/d_13)+...
            (n_1*help_F)+(n_2*help_G)+(n_3*help_H))^(1/th));

            % ORISMOS SINARTSHSHS Q - c1-----

            Q(n1_max,n2_max,n3_max)=Q222;
            if (Q(n1_max,n2_max,n3_max)>=0.00001)
                pantelis=(Q(n1_max,n2_max,n3_max)-
c1(n1_max,n2_max,n3_max))/Q(n1_max,n2_max,n3_max);
                Errr(n1_max,n2_max,n3_max)=pantelis^2;
            else
                Errr(n1_max,n2_max,n3_max)=0;
            end

        end
    end
end

```

```
Q;  
c1;  
Errr;  
  
sfalma(ss)= sqrt(sum(sum(sum(Errr))));  
  
end  
  
plot(gth,sfalma);
```

Βιβλιογραφία

- [1] «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ», Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης, Έκδοση 3^η, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1999.
- [2] «ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΒΛΕΨΕΩΝ», Β. Ασημακόπουλος, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2005.
- [3] «ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΑΠΟ ΑΝΑΝΕΩΣΙΜΕΣ ΠΗΓΕΣ», Μ. Παπαδόπουλος, Εκδόσεις Ε.Μ.Π, Αθήνα 1997.
- [4] «ΠΗΓΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΣΥΜΒΑΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΑΝΑΝΕΩΣΙΜΕΣ», Ι. Ι. Γελεγένης, Π. Ι. Αξιάδουλος, Εκδόσεις Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα 2005.
- [5] «ΦΩΤΟΒΟΛΤΑΪΚΗ», Κ. Καγκαράκη, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1992.
- [6] «ΑΝΑΝΕΩΣΙΜΕΣ ΠΗΓΕΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ», Α. Ζερβός, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2004.
- [7] «RENEWABLE ENERGY TECHNOLOGIES-Applications to Industries and Agriculture», C. Palaniappan, Ajit Kumar Kolar, T.M.Haridasan, Narosa Publishing House, New Delhi 2001.
- [8] «MULTIVARIATE MODELS AND DEPENDENCE CONCEPTS», H. Joe, Chapman & Hall Publications, London 1997.
- [9] «A COURSE IN MATHEMATICAL STATISTICS», G. Roussas, Academic Press, San Diego 1997.
- [10] «METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS» Volume 1, R. Courant & D. Hilbert, John Wiley & Sons, New York 1953.
- [11] «A MULTIVARIATE LINNIK DISTRIBUTION», D. N. Anderson.
- [12] «DISTRIBUTIONS IN STATISTICS: CONTINUOUS MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS», N.L. Johnson and S. Kotz, John Wiley & Sons, New York 1992.
- [13] «THE CHISQUARED DISTRIBUTION», H.O. Lancaster , John Wiley and Sons, Sydney 1969.
- [14] «CONTINUOUS MULTIVARIATE DISTRIBUTIONS - Volume 1: MODELS AND APPLICATIONS», S. Kotz, N. Balakrishnan, N.L. Johnson, John Wiley and Sons, Toronto 2000.

-
- [15] «STATISTICS OF DIRECTIONAL DATA», K.V. Mardia, Academic Press, New York 1972.
- [16] Athanassoulis G., Skarsoulis E., Belibassakis K., «BIVARIATE DISTRIBUTIONS WITH GIVEN MARGINALS WITH AN APPLICATION TO WAVE CLIMATE DESCRIPTION», Applied Ocean Research **16** (1994) 1-17, 1993.
- [17] «ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΟΚΟΝΟΜΙΑ», Β. Παπαδιάς, Γ. Κονταξής, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα 2003.
- [18] http://www.causascientia.org/math_stat/Dists/Compendium.pdf
- [19] «ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ – ΜΕΡΟΣ 1», Χ. Δαμιανού, Μ. Κούτρας, Αθήνα 1995.
- [20] http://www.weibull.com/LifeDataWeb/the_loglogistic_distribution.html

