



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ**  
**ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

**ΝΙΚΟΛΑΟΣ Κ. ΜΠΕΚΙΑΡΗΣ ΛΥΜΠΕΡΗΣ**

**ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**  
**ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΑΘΗΝΑ**

**ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2007**

**ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ**  
**ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

**ΜΕΡΟΣ Α:**

**ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ BACKSTEPPING ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ**  
**ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ (TURBOGENERATOR)**

**ΜΕΡΟΣ Β:**

**ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΡΙ ΚΑΙ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ**  
**ΠΕΡΙΘΩΡΙΩΝ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΣΕ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ**  
**ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

Επιβλέπων : Παρασκευάς Παρασκευόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την      Οκτωβρίου 2007

.....  
Παρασκευάς Παρασκευόπουλος  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Τρύφων Κουσιουρής  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Νικόλαος Μαράτος  
Καθηγητής ΕΜΠ

.....  
Νικόλαος Μπεκιάρης Λυμπέρης  
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2007

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα εργασία αποτελείται από δύο ανεξάρτητα όσο αναφορά το αντικείμενο που πραγματεύονται μέρη. Στο πρώτο μέρος της διπλωματικής εργασίας εφαρμόζεται η μέθοδος του μη γραμμικού προσαρμοστικού ελέγχου backstepping για τον έλεγχο του αμοστροβίλου ενός συστήματος τουρμπογεννήτριας. Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζεται συνοπτικά η μέθοδος του backstepping ελεγκτή. Στο δεύτερο κεφάλαιο εφαρμόζεται η μέθοδος αυτή στο σύστημα της τουρμπογεννήτριας, τόσο για την περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας όσο και για την περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς. Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται αριθμητικές εφαρμογές της μεθόδου για το σύστημα της τουρμπογεννήτριας και για τις περιπτώσεις του ελέγχου παρακολούθησης τροχιάς και ρύθμισης του σημείου λειτουργίας. Στο τέταρτο και τελευταίο κεφάλαιο εξάγονται συμπεράσματα για τις επιδόσεις του ελεγκτή στο σύστημα της τουρμπογεννήτριας.

Το δεύτερο μέρος της εργασίας αποτελεί συνέχιση της δουλειάς του διδάκτορα του Ε.Μ.Π. Γιώργου Πασγιάνου και σε αυτό παρουσιάζονται μέθοδοι βαθμονόμησης PI και PID ελεγκτών που στηρίζονται στην επίτευξη του μέγιστου περιθωρίου φάσης για συστήματα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου και γίνεται ανάλυση των περιθωρίων ευστάθειας που επιτυγχάνονται, για κάθε μια μέθοδο. Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις εναλλακτικές μορφές για τον PID έλεγχο ασταθών συστημάτων πρώτης τάξης. Στο έκτο κεφάλαιο γίνεται ανάλυση των ιδιοτήτων των ασταθών συστημάτων πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου στο πεδίο της συχνότητας, όταν αυτά ελέγχονται από PI και PID ελεγκτή. Στο έβδομο και όγδοο κεφάλαιο παρουσιάζονται τρεις διαφορετικοί μέθοδοι βαθμονόμησης για PI και PID ελεγκτές αντίστοιχα. Επίσης, αναλύεται το μέγιστο περιθώριο φάσης που επιτυγχάνεται με την κάθε μια προτεινόμενη μέθοδο. Στο ένατο κεφάλαιο παρουσιάζονται αριθμητικά αποτελέσματα των μεθόδων βαθμονόμησης που παρουσιάστηκαν τόσο για PI όσο και για PID έλεγχο. Ακόμα, οι προτεινόμενες μέθοδοι εφαρμόζονται για τον έλεγχο ενός συστήματος ασταθούς βιολογικού αντιδραστήρα. Στο δέκατο και τελευταίο κεφάλαιο εξάγονται συμπεράσματα όσο αναφορά τις επιδόσεις των παρουσιαζόμενων μεθόδων.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή κύριο Παρασκευά Παρασκευόπουλο του οποίου ο συμβουλευτικός ρόλος υπήρξε καθοριστικός για την εκπόνηση της εργασίας αυτής. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα του Ε.Μ.Π. Γιώργο Πασγιάνο για την καθοδήγηση και την αμέριστη συμπαράσταση την οποία μου παρείχε κατά την εκπόνηση της παρούσας εργασίας.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## ΜΕΡΟΣ Α:

### ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ BACKSTEPPING ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ (TURBOGENERATOR)

#### **1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ BACKSTEPPING**

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.2 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ BACKSTEPPING	1

#### **2. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ BACKSTEPPING ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ**

2.1 ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ	6
2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ	7
2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ BACKSTEPPING ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ	8
2.3.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΡΥΘΜΙΣΗΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ	8
2.3.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	15
2.3.1.2 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	17
2.3.1.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΧΩΡΙΣ ΤΟΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟ ΝΟΜΟ	18
2.3.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗΣ ΤΡΟΧΙΑΣ	20
2.3.2.1 ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	21
2.3.2.2 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ	22
2.3.2.3 ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	24

#### **3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ BACKSTEPPING ΕΛΕΓΚΤΗ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΗΣ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**

3.1 ΡΥΘΜΙΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ	27
3.2 ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ	32

#### **4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

## **ΜΕΡΟΣ Β:**

### **ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΘΩΡΙΟΥ ΦΑΣΗΣ ΡΙ ΚΑΙ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΕ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ**

<b>5. ΕΛΕΓΚΤΗΣ 3 ΟΡΩΝ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ</b>	<b>43</b>
<b>6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ</b>	
6.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ	44
6.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΗ	47
<b>7. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ</b>	<b>45</b>
7.1 ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ	51
7.2 ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ	52
7.3 ΤΡΙΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ	59
<b>8. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΗ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ</b>	<b>60</b>
8.1 ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΗ	62
8.2 ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΗ	62
8.3 ΤΡΙΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΗ	71
<b>9. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ</b>	
9.1 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ	77
9.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙΔ ΕΛΕΓΚΤΗ	81
9.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΒΙΟΛΟΓΙΚΟΥ ΑΝΤΙΔΡΑΣΤΗΡΑ	84
<b>10. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ</b>	<b>86</b>
<b>ΑΝΑΦΟΡΕΣ</b>	<b>87</b>

## 1.Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ BACKSTEPPING

### 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η ανάγκη για άμεση εφαρμογή ελεγκτών σε μη γραμμικά συστήματα έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη πολλών μεθόδων για την σχεδίαση μη γραμμικών ελεγκτών. Η δυσκολία στην μέτρηση φυσικών μεγεθών και διεργασιών, η μη γνώση ορισμένων παραμέτρων, ή ακόμα και η ταχύτατη μεταβολή ορισμένων μεγεθών, έχει οδηγήσει στην ανάγκη για την ανάπτυξη εργαλείων αναγνώρισης των αγνώστων αυτών στοιχείων, αλλά και εργαλείων για την προσαρμογή στις μεταβολές των διαφόρων μεγεθών.

Η μέθοδος σχεδίασης μη γραμμικών προσαρμοστικών ελεγκτών με την μέθοδο του backstepping αποτελεί ένα τέτοιο εργαλείο, το οποίο δίνει έναν αλγοριθμικό τρόπο σχεδίασης τέτοιου είδους ελεγκτών. Εκτός των πλεονεκτημάτων που έχουν όλοι οι μη γραμμικοί προσαρμοστικοί ελεγκτές, όπως η άμεση εφαρμογή τους σε μη γραμμικά συστήματα, η ακρίβεια των ελεγκτών αυτών, αλλά και η προσαρμογή τους σε αλλαγές διαφόρων φυσικών μεγεθών, προσφέρει λόγω της αλγοριθμικής δομής του, την δυνατότητα της σχεδίασης βήμα προς βήμα και κατ' επέκταση την δυνατότητα εύκολου ελέγχου των αποτελεσμάτων και των επιδόσεων της συγκεκριμένης μεθόδου. Τέλος, σε αντίθεση με άλλες ήδη υπάρχουσες μεθόδους, χρησιμοποιεί τις διάφορες μη γραμμικότητες που εμφανίζονται για την βελτίωση των επιδόσεων του ελέγχου.

### 1.2 Ο ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ BACKSTEPPING

Ένα σύστημα λέγεται ότι είναι σε αυστηρά παραμετρική μορφή ανατροφοδότησης, όταν το μοντέλο κατάστασής του είναι της μορφής

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \varphi_1(x_1)^T \theta \\ \dot{x}_2 &= x_3 + \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n + \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^T \theta \\ \dot{x}_n &= \varphi_0(x) + \beta(x)u + \varphi_n(x)^T \theta\end{aligned}\tag{1.1}$$

όπου  $\theta \in \mathbb{R}^p$  είναι ένα διάνυσμα αγνώστων παραμέτρων και

$$F = [\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n]\tag{1.2}$$

είναι ομαλές συναρτήσεις  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $\varphi_0(x) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  και  $u \in \mathbb{R}$  η μεταβλητή ελέγχου.

Σκοπός του backstepping αλγορίθμου είναι να ρυθμίσουμε το  $x_1$  σε ένα επιθυμητό σημείο λειτουργίας  $y_s$ .

Τα σημεία ισορροπίας ( $\dot{x} = 0$ ) του παραπάνω συστήματος είναι (για τις  $n-1$  πρώτες εξισώσεις κατάστασης)

$$\begin{aligned} x_2^e &= -\varphi_1(x_1^e)^T \theta \\ x_3^e &= -\varphi_2(x_1^e, x_2^e)^T \theta \\ &\vdots \\ x_n^e &= -\varphi_{n-1}(x_1^e, x_2^e, \dots, x_{n-1}^e)^T \theta \end{aligned} \quad (1.3)$$

Από την τελευταία σχέση της (1.1) και για  $\dot{x}_n = 0$ , μπορούμε να λύσουμε ως προς  $u$  για να πετύχουμε  $x_1^e = y_s$ . Αυτό που μένει επομένως, είναι να ευσταθοποιήσουμε αυτό το σημείο ισορροπίας για τις άγνωστες παραμέτρους  $\theta$  του συστήματος και ταυτόχρονα να πετύχουμε  $x \rightarrow x^e$  καθώς  $t \rightarrow \infty$  για κάθε αρχική συνθήκη  $x(0)$  (global asymptotic stability).

Η σχεδίαση του backstepping ελεγκτή ολοκληρώνεται σε  $n$  βήματα. Σε κάθε βήμα, έστω  $i$ , ευσταθοποιούνται οι πρώτες  $i$  μεταβλητές κατάστασης, με την βοήθεια μιας συνάρτησης Lyapunov  $V_i$ . Στο τελευταίο βήμα της σχεδίασης ( $n$ ) διαλέγουμε τον έλεγχο  $u$  καθώς και τον προσαρμοστικό νόμο για την εκτίμηση του διανύσματος των αγνώστων παραμέτρων  $\theta$ . Το  $i$  βήμα του αλγορίθμου συνοπτικά είναι (λεπτομέρειες [1])

$$i = 1 \quad z_1 = x_1 - y_s \quad (1.4)$$

$$1 \leq i \leq n \quad z_i = x_i - a_{i-1} \quad (1.5)$$

$$a_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}) = -z_{i-1} - c_i z_i - w_i^T \hat{\theta} + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_i + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_i z_k \quad (1.6)$$

$$\tau_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}) = \tau_{i-1} + w_i z_i \quad (1.7)$$

$$w_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}) = \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k \quad (1.8)$$

Ενώ, ο νόμος ελέγχου δίνεται από την σχέση

$$u = \frac{1}{\beta(x)} \left[ a_n(x, \hat{\theta}) - \varphi_0(x) \right] \quad (1.9)$$

και η εκτίμηση του διανύσματος των αγνώστων παραμέτρων δίνεται από

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n(x, \hat{\theta}) = \Gamma W z \quad (1.10)$$

όπου  $\Gamma$  είναι ένας σταθερός θετικά ορισμένος  $p \times p$  πίνακας και  $W(z, \hat{\theta}) = [w_1, w_2, \dots, w_n]$ , ενώ η  $i$  συνάρτηση Lyapunov είναι

$$V_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^i z_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta} \quad (1.11)$$

Με την εφαρμογή του ελέγχου (1.9) το κλειστό σύστημα που προκύπτει είναι

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta})z + W(z, \hat{\theta})^T \tilde{\theta} \quad (1.12)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma W(z, \hat{\theta})z \quad (1.13)$$

όπου  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$ , είναι το σφάλμα της εκτίμησης του διανύσματος των αγνώστων παραμέτρων  $\hat{\theta}$  και ο πίνακας  $A_z(z, \hat{\theta})$  δίνεται από την σχέση

$$A_z(z, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -c_2 & 1 + \sigma_{23} & \cdots & \sigma_{2n} \\ 0 & -1 - \sigma_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 + \sigma_{n-1,n} \\ 0 & -\sigma_{2n} & \cdots & -1 - \sigma_{n-1,n} & -c_n \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

όπου  $\sigma_{ik} = -\frac{\partial a_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_k$ .

Επιλέγοντας σαν συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα που αποτελείται από τις εξισώσεις (1.12) και (1.13) την  $V_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n z_k^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Gamma^{-1} \tilde{\theta}$  προκύπτει

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n c_k z_k^2 \leq 0 \quad (1.15)$$

Από το θεώρημα του αναλλοίωτου συνόλου του LaSalle ([1]), προκύπτει ότι η κατάσταση  $(z(t), \tilde{\theta}(t))$  του συστήματος των εξισώσεων (1.12) και (1.13) συγκλίνει στο μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο  $M$  που περιέχεται στο σύνολο  $E = \{(z, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+p} \mid z = 0\}$  δηλαδή στο σύνολο όπου  $\dot{V}_n = 0$ . Στο σύνολο αυτό είναι  $z = 0$  και  $\dot{z} = 0$  και από τις εξισώσεις (1.12) και (1.13) προκύπτει ότι

$$W(z, \hat{\theta})^T (\theta - \hat{\theta}) = 0, \quad \forall (z, \hat{\theta}) \in M \quad (1.16)$$

Από τις σχέσεις (1.8) και  $W(z, \hat{\theta}) = [w_1, w_2, \dots, w_n]$  προκύπτει ότι

$$W(z, \hat{\theta})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_1} & \cdots & -\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_{n-1}} & 1 \end{bmatrix} F(x)^T = N(z, \hat{\theta}) F(x)^T \quad (1.17)$$

Λόγω του ότι ο πίνακας  $N(z, \hat{\theta})$  είναι αντιστρέψιμος (κάτω τριγωνικός) για  $\forall (z, \hat{\theta}) \in M$ , η σχέση (1.16) συνεπάγεται ότι

$$F(x)^T (\theta - \hat{\theta}) = 0, \quad \text{στο } M \quad (1.18)$$

Για να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου (1.3) δεν μένει παρά να δείξουμε ότι  $x = x^e$  στο  $M$ . Αφού  $z_1 = x_1 - y_s$ , τότε στο  $M$  είναι  $x_1 = x_1^e = y_s$ . Από την (1.18) προκύπτει

$$(\theta - \hat{\theta})^T \varphi_1(x_1^e) = 0, \quad \text{στο } M \quad (1.19)$$

Από την (1.6) προκύπτει ότι  $a_1 = -c_1 z_1 - \hat{\theta}^T \varphi_1$ . Έτσι στο  $M$  λόγω και της (1.19) είναι  $a_1 = -\hat{\theta}^T \varphi_1 = -\theta^T \varphi_1$ . Λόγω του ότι  $z_2 = 0 = x_2 - a_1$  και της σχέσης (1.3), προκύπτει ότι στο  $M$  είναι  $x_2 = x_2^e$ . Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.18) παίρνουμε



$$(\theta - \hat{\theta})^T \varphi_2(x_1^e, x_2^e) = 0, \text{ στο } M \quad (1.20)$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, αποδुकνείται ότι  $x_i = x_i^e$  και  $(\theta - \hat{\theta})^T \varphi_i(x_1^e, x_2^e, \dots, x_i^e) = 0$  στο  $M \forall i$ . Επομένως, το μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο  $M$  στο  $E$  είναι

$$M = \{(z, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+p} \mid z = 0, F_e^T \tilde{\theta} = 0\} = \{(x, \tilde{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+p} \mid x = x^e, F_e^T \tilde{\theta} = F_e^T \theta\} \quad (1.21)$$

όπου  $F_e = F(x^e)$ . Μια επιπλέον ιδιότητα του συνόλου  $M$  είναι η διάστασή του,  $p - \text{rank}\{F_e\}$ . Όταν  $\text{rank}\{F_e\} = p$ , τότε η διάσταση του συνόλου  $M$  είναι 0 και το  $M$  γίνεται το σημείο ισοροπίας  $x = x^e$ ,  $\hat{\theta} = \theta$ . Αυτό σημαίνει ότι η εκτίμηση  $\hat{\theta}$  συγκλίνει στην πραγματική τιμή του διανύσματος των αγνώστων παραμέτρων  $\theta$ .

Ο παραπάνω αλγόριθμος μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση όπου θέλουμε το  $x_i$  να ακολουθεί οποιαδήποτε είσοδο αναφοράς  $y_r(t)$  της οποίας οι πρώτες  $n$  παράγωγοι είναι γνωστοί, φραγμένοι και τμηματικά συνεχείς. Ο backstepping αλγόριθμος σε αυτήν την περίπτωση τροποποιείται ως εξής

$$i = 1 \quad z_1 = x_1 - y_r \quad (1.22)$$

$$1 \leq i \leq n \quad z_i = x_i - a_{i-1} - y_r^{(i-1)} \quad (1.23)$$

$$a_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i)}) = -z_{i-1} - c_i z_i - w_i^T \hat{\theta} + \sum_{k=1}^{i-1} \left( \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} x_{k+1} + \frac{\partial a_{i-1}}{\partial y_r^{(k-1)}} y_r^{(k)} \right) + \frac{\partial a_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \tau_i + \sum_{k=2}^{i-1} \frac{\partial a_{k-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma w_i z_k - k_i |w_i|^2 \quad (1.24)$$

$$\tau_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i)}) = \tau_{i-1} + w_i z_i \quad (1.25)$$

$$w_i(x_1, x_2, \dots, x_i, \hat{\theta}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(i)}) = \varphi_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial a_{i-1}}{\partial x_k} \varphi_k \quad (1.26)$$

$$u = \frac{1}{\beta(x)} \left[ a_n(x, \hat{\theta}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(n)}) - \varphi_0(x) \right] \quad (1.27)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \tau_n(x, \hat{\theta}, y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(n)}) = \Gamma W z \quad (1.28)$$

ενώ ο πίνακας  $A_z$  του κλειστού συστήματος είναι σε αυτήν την περίπτωση

$$A_z(z, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -c_1 - k_1 |w_1|^2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -c_2 - k_2 |w_2|^2 & 1 + \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2n} \\ 0 & -1 - \sigma_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 + \sigma_{n-1,n} \\ 0 & -\sigma_{2n} & \dots & -1 - \sigma_{n-1,n} & -c_n - k_n |w_n|^2 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

από όπου και παρατηρούμε ότι υπάρχουν οι επιπλέον όροι  $-k_i |w_i|^2$ , οι οποίοι είναι οι όροι της μη γραμμικής απόσβεσης (nonlinear damping) και μπορούν να εγγυηθούν ευστάθεια ακόμα και χωρίς την χρήση του προσαρμοστικού νόμου (1.28) ([1]). Αποδुकνείται ([1]), ότι όταν στην σχέση (1.28) είναι  $\Gamma = 0$  και έτσι η εκτίμηση  $\hat{\theta}$  είναι σταθερή, είναι

$$|z(t)| \leq |z(0)| e^{-c_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{c_0 k_0}} |\tilde{\theta}| \quad (1.30)$$

$$\text{όπου } \left( k_0 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \right)^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια συνάρτηση Lyapunov με τα προηγούμενα για το σύστημα που αποτελείται από τις σχέσεις (1.28) και (1.12) με τον πίνακα  $A_z$  να δίνεται από την σχέση (1.29), προκύπτει

$$\dot{V}_n = -\sum_{k=1}^n c_k z_k^2 - \sum_{i=1}^n k_i |w_i|^2 z_i^2 \leq -c_0 |z|^2 \quad (1.31)$$

όπου  $c_0 = \min_{1 \leq i \leq n} c_i$ . Επομένως το σημείο ισορροπίας  $(z, \tilde{\theta}) = 0$  είναι ευσταθές. Επίσης από το θεώρημα των LaSalle-Yoshizawa ([1]), προκύπτει ότι  $z \rightarrow 0$  καθώς  $t \rightarrow \infty$ . Άρα θα έχουμε και  $\lim_{t \rightarrow \infty} [x_1(t) - y_r(t)] = 0$ .

Η μέθοδος του backstepping μας δίνει επίσης την ευκαιρία για βελτίωση της μεταβατικής απόκρισης, όπως αυτή εκφράζεται από ένα φράγμα για το  $|z(t)|$ . Αποδुकνείεται ([1]), ότι

$$|z(t)| \leq \frac{1}{2\sqrt{c_0 k_0}} \left( |\tilde{\theta}(0)|^2 + \gamma |z(0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + |z(0)| e^{-c_0 t} \quad (1.32)$$

Έτσι μπορούμε να μικρύνουμε το φράγμα αυτό για το  $|z(t)|$  αυξάνοντας τον όρο  $c_0 k_0$ . Όμως, όπως αποδुकνείεται ([1]) αυτό μπορεί να συμβεί για αυθαίρετη αύξηση του όρου  $c_0 k_0$  όταν  $z(0) = 0$ . Από την σχέση (1.23) παρατηρούμε ότι για να έχουμε  $z(0) = 0$  πρέπει

$$\begin{aligned} y_r(0) &= x_1(0) \\ \dot{y}_r(0) &= x_2(0) - a_1(x_1(0), \hat{\theta}(0), y_r(0)) \\ &\vdots \\ y_r^{(n-1)}(0) &= x_n(0) - a_{n-1}(x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0), \hat{\theta}(0), y_r(0), \dot{y}_r(0), \dots, y_r^{(n-2)}(0)) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Λόγω του ότι τα  $y_r(0), \dot{y}_r(0), \dots, y_r^{(n-1)}(0)$  είναι προκαθορισμένα και έτσι δεν μπορούμε να τα διαλέξουμε όπως εμείς θέλουμε ώστε να πετύχουμε τα  $y_r^i(0)$  για  $1 \leq i \leq n-1$  της σχέσης (1.33) και επειδή η παρακολούθηση του  $y_r(t)$  επιτυγχάνεται ασυμπτωτικά, τροποποιούμε το σήμα αναφοράς που θέλουμε να παρακολουθήσουμε  $y_{r_0}(t)$  έτσι ώστε να παρακολουθούμε το  $y_r(t) = y_{r_0}(t) + \delta_r(t)$ , όπου το  $\delta_r(t)$  είναι ένα σήμα της επιλογής μας που τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν και έτσι καθώς  $t \rightarrow \infty$  θα έχουμε  $x_1(t) \rightarrow y_{r_0}(t) + \delta_r(t) \rightarrow y_{r_0}(t)$ . Επομένως, για να πετύχουμε  $z(0) = 0$  πρέπει να διαλέξουμε το  $\delta_r(t)$  έτσι ώστε

$$\begin{aligned} \delta_r(0) &= y_r(0) - y_{r_0}(0) \\ \dot{\delta}_r(0) &= \dot{y}_r(0) - \dot{y}_{r_0}(0) \\ &\vdots \\ \delta_r^{(n-1)}(0) &= y_r^{(n-1)}(0) - y_{r_0}^{(n-1)}(0) \end{aligned} \quad (1.34)$$

## **2.ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ BACKSTEPPING ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ**

### **2.1 ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ**

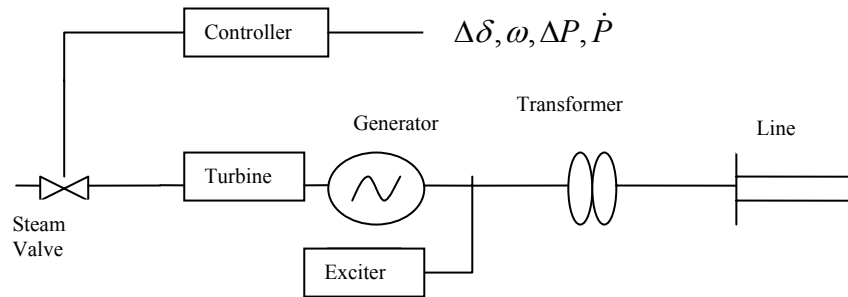
Ο έλεγχος συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, αποτελεί ένα πολύ μεγάλο πεδίο εφαρμογής της θεωρίας ελέγχου. Τα συστήματα αυτά υπόκεινται σε διαφόρων ειδών διαταραχές, περιλαμβάνουν άγνωστες παραμέτρους, εμπεριέχουν συνήθως μη γραμμικότητες και επομένως είναι δύσκολο να ελεγχθούν. Λόγω της ανάγκης ευσταθοποίησης τέτοιων συστημάτων, έχουν αναπτυχθεί διάφοροι μέθοδοι ελέγχου. Τα προηγούμενα χρόνια υπήρξε πολύ μεγάλη ανάπτυξη τέτοιων μεθόδων, που όμως συνήθως στηρίζονταν σε γραμμικούς ελεγκτές. Συστήματα όμως, όπως αυτά της ηλεκτρικής ενέργειας, είναι από την φύση τους μη γραμμικά και έτσι τέτοιοι ελεγκτές δεν είναι πάντα αξιόπιστοι.

Τα τελευταία χρόνια έχουν εφαρμοστεί σε τέτοιου είδους συστήματα μέθοδοι μη γραμμικού καθώς και προσαρμοστικού ελέγχου, για τον καλύτερο έλεγχο αυτών των συστημάτων. Στην βιβλιογραφία συναντάει κανείς παραδείγματα ελέγχου μιας μηχανής με έλεγχο του συστήματος διέγερσης εφαρμόζοντας τεχνικές ακριβούς γραμμικοποίησης ([2]), μη γραμμικού προσαρμοστικού ελέγχου ([3]), ασαφούς ελέγχου ([4]) και μεθόδους νευρωνικών δικτύων ([5]). Πολλές επίσης, είναι οι εφαρμογές μεθόδων ελέγχου για τον έλεγχο του αμοστροβίλου μιας γεννήτριας. Υπάρχουν εφαρμογές σχεδίασης εύρωστων ([6]) καθώς και μη γραμμικών προσαρμοστικών ελεγκτών ([7],[8]). Ακόμα, μπορεί να συναντήσει κανείς μεθόδους ταυτόχρονου ελέγχου του συστήματος διέγερσης και του αμοστροβίλου μιας γεννήτριας ([9]) αλλά και μορφές ελεγκτών που εφαρμόζονται σε συστήματα πολλών εξαρτημένων μεταξύ τους μηχανών, όπως για παράδειγμα στις ([10],[11],[12]).

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η εφαρμογή της μεθόδου του μη γραμμικού προσαρμοστικού ελέγχου backstepping, για τον έλεγχο του αμοστροβίλου σε ένα σύστημα μιας μηχανής συνδεδεμένης σε ένα άπειρο δίκτυο μεταφοράς (steam-valve control of a single machine infinite-bus). Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό και εμπεριέχει άγνωστες παραμέτρους. Επίσης υπόκειται σε μεγάλου και μικρού μεγέθους διαταραχές, οι οποίες δεν επηρεάζουν μόνο την είσοδο στο προς έλεγχο σύστημα αλλά αλλάζουν και τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Θα εφαρμόσουμε επομένως σε αυτό το σύστημα την παραπάνω μέθοδο, τόσο για την περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας όσο και για την περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς. Επίσης, εξάγονται οι ικανές συνθήκες για την σύγκλιση της εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων του συστήματος μέσω του προσαρμοστικού νόμου στις πραγματικές τους τιμές και μέσω προσομοίωσης ελέγχεται η συμπεριφορά του συστήματος όταν υπόκειται σε διαφόρων ειδών διαταραχές. Τέλος, παρουσιάζονται πολλά αριθμητικά παραδείγματα για τον έλεγχο της εγκυρότητας και των επιδόσεων του ελεγκτή για διάφορες πιθανές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να βρεθεί το σύστημα και γίνονται συγκρίσεις με άλλες τεχνικές ελέγχου.

## 2.2 ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ (TURBOGENERATOR)

Το μοντέλο της τουρμπογεννήτριας φαίνεται στο σχήμα 1



Σχήμα 1. Σύστημα τουρμπογεννήτριας (turbogenerator)

Το μαθηματικό μοντέλο για την τουρμπογεννητρία περιγράφεται από ένα μοντέλο 4ης τάξης σε αυστηρά παραμετρική μορφή ανατροφοδότησης (σχέση (1.3), [1]) και δίνεται ([6])

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (2.1)$$

$$\dot{y}_2 = \frac{1}{T_j} (y_3 - D y_2 - K_s (\sin(y_1 + \delta_0) - \sin \delta_0)) \quad (2.1)$$

$$\dot{y}_3 = y_4 \quad (2.3)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{1}{a_1} \left( u - \frac{1}{\sigma} y_2 - y_3 - a_2 y_4 \right) \quad (2.4)$$

όπου  $y^T = [y_1 \ y_2 \ y_3 \ y_4]^T = [\delta - \delta_0 \ \omega \ P - P_0 \ \dot{P}]$  και ([11])

$\delta = \delta_0 + y_1$  είναι η γωνία ροπής του ρότορα και  $\delta_0$  η ονομαστική της τιμή

$\omega = y_2$  είναι γωνιακή ταχύτητα του ρότορα

$P = P_0 + y_3$  είναι η μηχανική δύναμη του ρότορα

$T_j = \frac{T_m}{\omega_0}$  είναι η σταθερά χρόνου αδράνειας της τουρμπογεννήτριας

$D$  είναι ο συντελεστής απόσβεσης της δύναμης απόσβεσης της τουρμπογεννήτριας

$a_1 = T_{EH} T_T, a_2 = T_{EH} + T_T$  όπου  $T_{EH}$  είναι η σταθερά χρόνου του συστήματος ελέγχου του ατμοστρόβιλου και  $T_T$  η σταθερά χρόνου της τουρμπογεννήτριας

$\sigma$  είναι το κέρδος του κλασικού ελεγκτή της ταχύτητας του ατμοστρόβιλου

$K_s$  είναι παράμετρος που εξαρτάται από την γεννήτρια και την γραμμή μεταφοράς

$u$  είναι η μεταβλητή ελέγχου του συστήματος

Σημειώνουμε εδώ ότι ο συντελεστής απόσβεσης  $D$  και η παράμετρος  $K_s$  αποτελούν τις άγνωστες παραμέτρους του συστήματος και επίσης ότι η μεταβολή των τιμών αυτών των παραμέτρων αποτελούν μια από τις αιτίες διαταραχής του συστήματος.

Χρησιμοποιώντας τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$x = Ty \quad (2.5)$$

$$\text{όπου} \quad T = \begin{bmatrix} T_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

το σύστημα (2.1)-(2.4) γίνεται

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_2 = gx_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1) = gx_3 + \varphi_2(x_1, x_2)^T \theta \quad (2.8)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.9)$$

$$\dot{x}_4 = u - bx_2 - gx_3 - ax_4 \quad (2.10)$$

όπου οι άγνωστες παράμετροι είναι  $\theta^T = [\theta_1 \quad \theta_2]^T = \left[ \frac{D}{T_j} \quad K_s \right]^T$ , η συνάρτηση  $\varphi(x_1)$  δίνεται από την

$$\text{σχέση } \varphi(x_1) = \sin\left(\frac{x_1}{T_j} + \delta_0\right) - \sin(\delta_0), \quad a = \frac{a_2}{a_1}, \quad b = \frac{1}{\sigma T_j} \quad \text{και} \quad g = \frac{1}{a_1}.$$

Το μοντέλο (2.7)-(2.10) είναι και το μοντέλο στο οποίο θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του μη γραμμικού προσαρμοστικού ελέγχου backstepping.

## 2.3 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΥ BACKSTEPPING ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ

### 2.3.1 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΡΥΘΜΙΣΗΣ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ

Στην περίπτωση αυτή θέλουμε το  $x_1$  να ακολουθεί ένα επιθυμητό σταθερό σημείο λειτουργίας  $y_s$  δηλαδή θέλουμε στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος να είναι  $x_1^e = y_s$ . Από τις σχέσεις (2.7)-(2.9) παρατηρούμε ότι το σημείο ισορροπίας του συστήματος για  $x_1^e = y_s$  είναι

$$\dot{x}_1 = x_2^e = 0 \quad (2.11)$$

$$\dot{x}_2 = gx_3^e - \theta_1 x_2^e - \theta_2 \varphi(x_1^e) = 0 \quad (2.12)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 = 0 \quad (2.13)$$

Παρατηρώντας ότι  $\varphi(x_1^e) = \sin\left(\frac{x_1^e}{T_j} + \delta_0\right) - \sin(\delta_0) = \sin\left(\frac{y_s}{T_j} + \delta_0\right) - \sin(\delta_0) = \varphi(y_s)$  και  $g \neq 0$ ,

προκύπτει ότι

$$x^e = \begin{bmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \\ x_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_s \\ 0 \\ \theta_2 \frac{\varphi(y_s)}{g} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Το σημείο ισορροπίας (2.14) είναι και το σημείο το οποίο θέλουμε να ευσταθοποιήσουμε με την μέθοδο του backstepping διαλέγοντας κατάλληλα την μεταβλητή ελέγχου  $u$ .

Παρατήρηση 1 Όταν θέλουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας να είναι  $y_s = 0$  και παρατηρώντας ότι σε αυτήν την περίπτωση είναι  $\varphi(x_1^e) = \varphi(y_s) = \varphi(0) = 0$ , το σημείο ισορροπίας του συστήματος (2.15) γίνεται το σημείο  $[x^e]^T = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ .

**Βήμα 1:** Θέτουμε την πρώτη μεταβλητή σφάλματος  $z_1$  ως

$$z_1 = x_1 - y_s \quad (2.15)$$

Θεωρώντας σαν εικονική μεταβλητή ελέγχου την κατάσταση  $x_2$  θέτουμε

$$z_2 = x_2 - a_1(x_1) \quad (2.16)$$

Προκύπτει επομένως στο επίπεδο  $z$

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 - \dot{y}_s \quad (2.17)$$

Από τις σχέσεις (2.7), (2.16) και αφού το  $y_s$  είναι σταθερό η (2.17) γίνεται

$$\dot{z}_1 = z_2 + a_1 \quad (2.18)$$

Θέλουμε επομένως σε αυτό το βήμα να ευσταθοποιήσουμε την (2.18) στο σημείο  $z_1^e = 0$ . Για το λόγω αυτό διαλέγουμε την υποψήφια συνάρτηση Lyapunov  $V_1 = \frac{1}{2} z_1^2$ . Είναι

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = z_1 z_2 + z_1 a_1 \quad (2.19)$$

διαλέγοντας

$$a_1(x_1) = -c_1 z_1 \quad (2.20)$$

η σχέση (2.19) γίνεται

$$\dot{V}_1 = z_1 z_2 - c_1 z_1^2 \quad (2.21)$$

Από την σχέση (2.21) παρατηρούμε ότι αν η μεταβλητή κατάστασης  $x_2$  ήταν η πραγματική μεταβλητή ελέγχου και διαλέγοντας  $x_2 = a_1(z_1)$ , δηλαδή  $z_2 = 0$ , θα είχαμε  $\dot{V}_1 = -c_1 z_1^2 \leq 0$  που καθιστά το  $z_1$  ευσταθές. Τέλος, με αυτήν την επιλογή για το  $a_1$  η σχέση (2.18) δίνει

$$\dot{z}_1 = -c_1 z_1 + z_2 \quad (2.22)$$

**Βήμα 2:** Από το βήμα 1 και τις (2.7), (2.8) προκύπτει

$$\dot{z}_2 = \dot{x}_2 - \dot{a}_1(x_1) = g x_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 = g x_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} x_2 \quad (2.23)$$

Θεωρώντας σαν εικονική μεταβλητή ελέγχου την μεταβλητή  $x_3$ , θέτουμε

$$z_3 = g x_3 - a_2 \quad (2.24)$$

και η (2.23) γίνεται

$$\dot{z}_2 = z_3 + a_2 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1}{\partial x_1} x_2 \quad (2.25)$$

Για να ευσταθοποιήσουμε το σύστημα των εξισώσεων (2.22) και (2.25) και αφού στην σχέση (2.23) υπάρχουν άγνωστες παράμετροι, διαλέγουμε σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2 \quad (2.26)$$

όπου  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$  και  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$  είναι τα σφάλματα των εκτιμήσεων  $\hat{\theta}_1$ ,  $\hat{\theta}_2$  των αγνώστων παραμέτρων  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  αντίστοιχα. Από την σχέση (2.26) παίρνουμε

$$\dot{V}_2 = \dot{V}_1 + \dot{z}_2 z_2 + \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1 \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2 \dot{\tilde{\theta}}_2 \quad (2.27)$$

Θεωρώντας ότι οι άγνωστες παράμετροι  $\theta_1$  και  $\theta_2$  είναι σταθερές ή τουλάχιστον αργά μεταβαλλόμενες, δηλαδή  $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$  και κάνοντας χρήση των σχέσεων (2.21) και (2.25), η (2.27) γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + z_3 + a_2 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} x_2 \right] - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 = \\ &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + z_3 + a_2 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} x_2 \right] - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1 \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2 \dot{\hat{\theta}}_2 - \tilde{\theta}_1 z_2 x_2 - \tilde{\theta}_2 z_2 \varphi(x_1) = \\ &= -c_1 z_1^2 + z_2 \left[ z_1 + z_3 + a_2 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1) - \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} x_2 \right] + \tilde{\theta}_1 \left( -\frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 - z_2 x_2 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( -\frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 - z_2 \varphi(x_1) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Διαλέγοντας

$$a_2(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -c_2 z_2 - z_1 + \hat{\theta}_1 x_2 + \hat{\theta}_2 \varphi(x_1) + \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} x_2 - K_{\theta_1} z_2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2 \varphi^2(x_1) \quad (2.29)$$

η (2.28) γίνεται

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{11} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{12} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) \quad (2.30)$$

όπου

$$\tau_{11}(x_1, x_2) = -z_2 x_2 \quad (2.31)$$

$$\tau_{12}(x_1, x_2) = -z_2 \varphi(x_1) \quad (2.32)$$

Από τις σχέσεις  $z_3 = g x_3 - a_2$  και (2.30) βλέπουμε ότι αν η πραγματική μεταβλητή ελέγχου ήταν η μεταβλητή  $x_3$ , τότε διαλέγοντας την ως  $x_3 = \frac{1}{g} a_2$  θα είχαμε  $z_3 = 0$  και έτσι θέτοντας τις εκτιμήσεις

των παραμέτρων  $\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_{\theta_1} \tau_{11}$  και  $\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_{\theta_2} \tau_{12}$  θα είχαμε από την (2.30) ότι

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 + z_2 z_3 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) \leq 0.$$

Παρατήρηση 2 Οι όροι  $-K_{\theta_1} z_2 x_2^2$  και  $-K_{\theta_2} z_2 \varphi^2(x_1)$  αποτελούν τους όρους για την μη γραμμική απόσβεση, η οποία μας εγγυάται ευστάθεια ακόμα και χωρίς την εφαρμογή του προσαρμοστικού νόμου στις άγνωστες παραμέτρους ([1]).

Παρατήρηση 3 Ο προσαρμοστικός νόμος για τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων  $\theta_1$  και  $\theta_2$  θα επιλεγεί στο τέταρτο και τελευταίο βήμα του αλγορίθμου, έτσι ώστε να μην υπάρχει πλεονάζοντας αριθμός εκτιμώμενων παραμέτρων, κάτι που θα αύξανε την τάξη του κλειστού συστήματος ([1]).

**Βήμα 3:** Από το βήμα 2 και τις (2.7), (2.8), (2.9) προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{z}_3 &= g\dot{x}_3 - \dot{a}_2 = gx_4 - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 = \\ &= gx_4 - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (2.33)$$

Θεωρώντας σαν εικονική μεταβλητή την μεταβλητή  $x_4$  και θέτοντας

$$z_4 = gx_4 - a_3 \quad (2.34)$$

η (2.33) γίνεται

$$\dot{z}_3 = z_4 + a_3 - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \quad (2.35)$$

Για να ευσταθοποιήσουμε το σύστημα των εξισώσεων (2.22), (2.25) και (2.35) διαλέγουμε σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την

$$V_3 = V_2 + \frac{1}{2} z_3^2 \quad (2.36)$$

Κατά τα γνωστά, παραγωγίζοντας την  $V_3$  ως προς τον χρόνο παίρνουμε

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_2 + \dot{z}_3 z_3 \quad (2.37)$$

Μέσω των σχέσεων (2.30) και (2.35) προκύπτει από την (2.37) ότι

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &= -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) + \\ & z_3 \left[ z_2 + z_4 + a_3 - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \right] \\ & + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{11} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{12} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) + \\ & z_3 \left[ z_2 + z_4 + a_3 - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \right] + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{11} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{12} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \\ & + \tilde{\theta}_1 z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 + \tilde{\theta}_2 z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) + \\ & z_3 \left[ z_2 + z_4 + a_3 - \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \right] + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{21} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{22} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) \end{aligned} \quad (2.38)$$

όπου

$$\tau_{21} (x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \tau_{11} (x_1, x_2) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \quad (2.39)$$



$$\tau_{22}(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \tau_{12}(x_1, x_2) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \quad (2.40)$$

Επιλέγοντας το  $a_3$  ως

$$a_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -c_3 z_3 - z_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (g x_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} \tau_{21} + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \tau_{22} - \Lambda_{\theta_1} z_3 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \quad (2.41)$$

η  $\dot{V}_3$  γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + z_3 z_4 \\ & + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} (\gamma_{\theta_1} \tau_{21} - \dot{\hat{\theta}}_1) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} (\gamma_{\theta_2} \tau_{22} - \dot{\hat{\theta}}_2) + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{21} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{22} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Αν η μεταβλητή  $x_4$  ήταν η πραγματική μεταβλητή ελέγχου τότε διαλέγοντας  $x_4 = \frac{1}{g} a_3$  θα είχαμε

$z_4 = 0$ . Οπότε διαλέγοντας τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων σύμφωνα με τον προσαρμοστικό νόμο  $\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_{\theta_1} \tau_{21}$  και  $\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_{\theta_2} \tau_{22}$  θα είχαμε από την (2.42) ότι

$$\dot{V}_3 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \leq 0.$$

**Βήμα 4:** Από το βήμα 3 και τις (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{z}_4 = & g \dot{x}_4 - \dot{a}_3 = g u - g b x_2 - g^2 x_3 - a g x_4 - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \dot{x}_1 - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \dot{x}_2 - \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \dot{x}_3 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 = \\ = & g u - g b x_2 - g^2 x_3 - a g x_4 - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} (g x_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_3}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

Στο τέταρτο και τελευταίο βήμα θα διαλέξουμε τον έλεγχο  $u$  και τον προσαρμοστικό νόμο για τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  που καθιστούν το διάνυσμα  $z$  ασυμπτωτικά ευσταθές στο σημείο 0. Διαλέγοντας σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την

$$V = V_3 + \frac{1}{2} z_4^2 \quad (2.44)$$

παίρνουμε

$$\dot{V} = \dot{V}_3 + \dot{z}_4 z_4 \quad (2.45)$$

Μέσω των σχέσεων (2.42) και (2.43) προκύπτει από την (2.45) ότι

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\
& + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \left( \gamma_{\theta_1} \tau_{21} - \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \left( \gamma_{\theta_2} \tau_{22} - \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{21} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{22} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \\
& z_4 \left[ z_3 + gu - gbx_2 - g^2 x_3 - agx_4 - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} (gx_3 - \theta_1 x_2 - \theta_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_3}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \right]
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Όπου λόγω του ότι  $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \hat{\theta}_1$  και  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \hat{\theta}_2$ , η (2.46) γίνεται

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\
& + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \left( \gamma_{\theta_1} \tau_{21} - \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \left( \gamma_{\theta_2} \tau_{22} - \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{21} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{22} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \\
& z_4 \left[ z_3 + gu - gbx_2 - g^2 x_3 - agx_4 - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_3}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \right] \\
& + z_4 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \tilde{\theta}_1 x_2 + z_4 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \tilde{\theta}_2 \varphi(x_1)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Θέτοντας

$$\tau_{31}(x_1, x_2, x_3, x_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \tau_{21}(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + z_4 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \tag{2.48}$$

$$\tau_{32}(x_1, x_2, x_3, x_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \tau_{22}(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) + z_4 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \tag{2.49}$$

η (2.47) γίνεται

$$\begin{aligned}
\dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\
& + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \left( \gamma_{\theta_1} \tau_{21} - \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \left( \gamma_{\theta_2} \tau_{22} - \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{31} - \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{32} - \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + \\
& z_4 \left[ z_3 + gu - gbx_2 - g^2 x_3 - agx_4 - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) - \frac{\partial a_3}{\partial x_3} x_4 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \dot{\hat{\theta}}_1 - \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \dot{\hat{\theta}}_2 \right]
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Επιλέγοντας τον έλεγχο  $u$  σύμφωνα με την σχέση

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{1}{g} \left[ \begin{aligned} & -c_4 z_4 - z_3 + gbx_2 + g^2 x_3 + agx_4 + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) \\ & + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} \tau_{31} + \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \tau_{32} - \\ & M_{\theta_1} z_4 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_{\theta_2} z_4 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + v \end{aligned} \right] \tag{2.51}$$

η  $\dot{V}$  γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - K_\theta z_2^2 x_2^2 - K_\theta z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\ & - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + z_4 \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} (\gamma_\theta \tau_{31} - \dot{\hat{\theta}}_1) + z_4 \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} (\gamma_\theta \tau_{32} - \dot{\hat{\theta}}_2) \\ & + \tilde{\theta}_1 \left( \tau_{31} - \frac{1}{\gamma_\theta} \dot{\hat{\theta}}_1 \right) + \tilde{\theta}_2 \left( \tau_{32} - \frac{1}{\gamma_\theta} \dot{\hat{\theta}}_2 \right) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} (\gamma_\theta \tau_{21} - \dot{\hat{\theta}}_1) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} (\gamma_\theta \tau_{22} - \dot{\hat{\theta}}_2) + z_4 v \end{aligned} \quad (2.52)$$

Για να κάνουμε την  $\dot{V}$  αρνητική δεν μένει παρά μόνο να διαλέξουμε τον προσαρμοστικό νόμο για τα  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  καθώς και το  $v$ . Διαλέγοντας

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_\theta \tau_{31} (x_1, x_2, x_3, x_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad (2.53)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_\theta \tau_{32} (x_1, x_2, x_3, x_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) \quad (2.54)$$

η  $\dot{V}$  γίνεται

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - K_\theta z_2^2 x_2^2 - K_\theta z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\ & - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_\theta (\tau_{21} - \tau_{31}) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_\theta (\tau_{22} - \tau_{32}) + z_4 v \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (2.48) και (2.49) προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - K_\theta z_2^2 x_2^2 - K_\theta z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\ & - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 - z_3 z_4 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_\theta \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 - z_3 z_4 \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_\theta \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) + z_4 v = \\ = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - K_\theta z_2^2 x_2^2 - K_\theta z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_\theta z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\ & - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_\theta z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + z_4 \left[ v - z_3 \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_\theta x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_\theta \varphi(x_1) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.55)$$

Διαλέγοντας

$$v(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = z_3 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \left( \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_\theta x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_\theta \varphi(x_1) \right) \quad (2.56)$$

η  $\dot{V}$  τελικά προκύπτει

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \\ & - M_{\theta_1} z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_{\theta_2} z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

### 2.3.1.1 ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε και με βάση τις σχέσεις (2.18)-(2.0), (2.25)-(2.29), (2.35)-(2.41), (2.43)-(2.51)-(2.56),(2.53),(2.54), το σύστημα σφάλματος και ο προσαρμοστικός νόμος (1.12) και (1.13) αντίστοιχα, γίνονται σε αυτήν την περίπτωση

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta})z + W(z, \hat{\theta})^T \tilde{\theta} \quad (2.58)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma W(z, \hat{\theta})z \quad (2.59)$$

με

$$A_z(z, \hat{\theta}) = \begin{bmatrix} -c_1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -c_2 - K_{\theta_1} x_2^2 - K_{\theta_2} \varphi^2(x_1) & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -c_3 - \Lambda_{\theta_1} \left[ x_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 & 1 - \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \varphi(x_1) \right] \\ 0 & 0 & -1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \varphi(x_1) \right] & -c_4 - M_{\theta_1} \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - M_{\theta_2} \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

$$W(z, \hat{\theta})^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -x_2 & -\varphi(x_1) \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{\theta_1} & 0 \\ 0 & \gamma_{\theta_2} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Διαλέγοντας σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα (2.58) έως (2.62) την

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} z_4^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2 \quad (2.63)$$

η οποία είναι θετικά ορισμένη για  $\forall (z, \hat{\theta}) \in \{\mathbb{R}^{n+p} - \{0\}\}$  και συνεχώς παραγωγίσιμη, παίρνουμε ότι η παράγωγός της ως προς τον χρόνο κατά μήκος των τροχιών του παραπάνω συστήματος δίνεται από την σχέση (2.57), την οποία ξαναγράφουμε ως

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_1 z_1^2 - z_2^2 [c_2 + K_{\theta_1} x_2^2 + K_{\theta_2} \varphi^2(x_1)] - z_3^2 \left[ c_3 + \Lambda_{\theta_1} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 + \Lambda_{\theta_2} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \right] \\ & - z_4^2 \left[ c_4 + M_{\theta_1} \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 + M_{\theta_2} \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Από το θεώρημα του αναλλοίωτου συνόλου (LaSalle [1]) προκύπτει ότι το διάνυσμα  $(z, \hat{\theta})$  συγκλίνει για  $t \rightarrow \infty$  στο μεγαλύτερο αναλλοίωτο σύνολο  $M$  που περιέχεται στο σύνολο  $E = \{(z, \hat{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+p} \mid \dot{V} = 0\}$ , δηλαδή στο σύνολο  $E = \{(z, \hat{\theta}) \in \mathbb{R}^{n+p} \mid z = 0\}$ , αφού επιλέγουμε τις παραμέτρους του ελεγκτή  $c_1, c_2, c_3, c_4, K_{\theta_1}, K_{\theta_2}, \Lambda_{\theta_1}, \Lambda_{\theta_2}, M_{\theta_1}, M_{\theta_2}$  θετικές. Λόγω του ότι το σύνολο  $M$  είναι αναλλοίωτο, προκύπτει ότι στο  $M$  θα είναι  $z = 0$  αλλά και  $\dot{z} = 0$ . Λόγω αυτού, προκύπτει από την (2.58) ότι στο  $M$  θα είναι

$$W(z, \hat{\theta})^T \tilde{\theta} = W(z, \hat{\theta})^T (\theta - \hat{\theta}) = 0 \quad (2.65)$$

Επίσης, η  $W(z, \hat{\theta})^T$  μπορεί να γραφτεί

$$W(z, \hat{\theta})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a_1}{\partial x_1} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a_2}{\partial x_1} & -\frac{\partial a_2}{\partial x_2} & 1 & 0 \\ -\frac{\partial a_3}{\partial x_1} & -\frac{\partial a_3}{\partial x_2} & -\frac{\partial a_3}{\partial x_3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -x_2 & -\varphi(x_1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = N(z, \hat{\theta}) F(x)^T \quad (2.66)$$

Αφού ο πίνακας  $N(z, \hat{\theta})$  είναι αντιστρέψιμος, συμπεραίνουμε ότι στο  $M$  θα είναι

$$z = 0 \quad (2.67)$$

και

$$F(x)^T (\theta - \hat{\theta}) = 0 \quad (2.68)$$

Η (2.68) απλά μπορεί να γραφτεί

$$x_2 \theta_1 + \varphi(x_1) \theta_2 = x_2 \hat{\theta}_1 + \varphi(x_1) \hat{\theta}_2 \quad (2.69)$$

Επίσης, από την σχέση (2.15) προκύπτει ότι στο  $M$  θα είναι  $x_1 = y_s = x_1^e$ . Για  $z = 0$  οι σχέσεις (2.20), (2.29) και (2.41) δίνουν αντίστοιχα

$$a_1(x_1) = 0 \quad (2.70)$$

$$a_2(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \hat{\theta}_1 x_2 + \hat{\theta}_2 \varphi(x_1) + \frac{\partial a_1(x_1)}{\partial x_1} x_2 \quad (2.71)$$

$$a_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (g x_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} \tau_{21} + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \tau_{22} \quad (2.72)$$

Επειδή,  $\tau_{21}(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -z_2 x_2 + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2$  και  $\tau_{22}(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = -z_2 \varphi(x_1) + z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1)$  στο

$M$  είναι μηδέν θα είναι και

$$a_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) \quad (2.73)$$

Από τον ορισμό του διανύσματος  $z$  προκύπτει ότι στο  $M$  θα είναι

$$z = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - y_s \\ x_2 - a_1 \\ gx_3 - a_2 \\ gx_4 - a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Μέσω των σχέσεων (2.70), (2.71) και (2.73) παίρνουμε ότι στο  $M$  θα είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ gx_3 \\ gx_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_s \\ 0 \\ \hat{\theta}_1 x_2 + \hat{\theta}_2 \varphi(x_1) \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (gx_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Τέλος, κάνοντας χρήση της (2.73) προκύπτει

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_s \\ 0 \\ \frac{1}{g} \theta_2 \varphi(x_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Από όπου και παρατηρούμε λόγω της (2.14), ότι τελικά στο  $M$  θα είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_s \\ 0 \\ \theta_2 \frac{\varphi(y_s)}{g} \\ 0 \end{bmatrix} = x^e \quad (2.76)$$

Πετύχαμε τελικά την ασυμπτωτική ευστάθεια του συστήματος μας στο σημείο ισορροπίας του.

### 2.3.1.2 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Όσο αναφορά το σύνολο στο οποίο συγκλίνουν οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$ , το μόνο που μπορούμε να συμπεράνουμε (σχέση (2.69)) είναι ότι στο  $M$  θα ισχύει

$$x_2^e \theta_1 + \varphi(x_1^e) \theta_2 = x_2^e \hat{\theta}_1 + \varphi(x_1^e) \hat{\theta}_2 \quad (2.78)$$

Δηλαδή, αφού  $x_2^e = 0$  και  $x_1^e = y_s$

$$\varphi(y_s) \theta_2 = \varphi(y_s) \hat{\theta}_2 \quad (2.79)$$

Από την (2.79) παρατηρούμε ότι η εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta_1$  θα συγκλίνει σε μια τιμή, αφού στο  $M$  είναι  $\dot{\hat{\theta}}_1 = 0$  και το σύστημά μας είναι ευσταθές (ενότητα 2.3.1.1), αλλά δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα για αυτήν την τιμή σύγκλισης της  $\hat{\theta}_1$ . Επίσης, λόγω του ότι  $\varphi(y_s) = \sin\left(\frac{y_s}{T_j} + \delta_0\right) - \sin(\delta_0)$ , βλέπουμε ότι αν το  $y_s$  είναι τέτοιο ώστε  $\varphi(y_s) = 0$  (π.χ.  $y_s = 0$ ) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τίποτα και όσο αναφορά την τιμή σύγκλισης της εκτίμησης της παραμέτρου  $\theta_2$ . Όμως, αν διαλέξουμε το σημείο αναφοράς το οποίο θέλουμε να ακολουθεί ασυμπτωτικά η μεταβλητή  $x_1$ , έτσι ώστε  $\varphi(y_s) \neq 0$ , βλέπουμε από την (2.79) ότι η εκτίμηση της παραμέτρου  $\theta_2$  θα συγκλίνει στην πραγματική τιμή της παραμέτρου αυτής. Συνοψίζοντας, έχουμε στο  $M$

$$\hat{\theta}^T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2, \text{ αν } \varphi(y_s) = 0 \quad (2.80)$$

και

$$\hat{\theta}^T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \theta_2 \end{bmatrix}^T, \text{ όπου } \hat{\theta}_1 \in \mathbb{R}, \text{ αν } \varphi(y_s) \neq 0 \quad (2.81)$$

### 2.3.1.3 ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΧΩΡΙΣ ΤΟΝ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟ ΝΟΜΟ

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, στον έλεγχο μας προσθέτουμε κάποιους επιπλέον όρους που χρησιμοποιούνται για την μη γραμμική απόσβεση η οποία μας εγγυάται ευστάθεια ή ακόμα και σε ορισμένες περιπτώσεις ασυμπτωτική ευστάθεια ([1]) ακόμα και χωρίς τον προσαρμοστικό νόμο. Θα δείξουμε εδώ πως επιτυγχάνεται αυτό στο σύστημα της τουρμπογεννήτριας.

Χωρίς τον προσαρμοστικό νόμο, δηλαδή θέτοντας  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0$ , οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων,  $\hat{\theta}^T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 & \hat{\theta}_2 \end{bmatrix}^T$ , θα είναι σταθερές και ίσες με μία αρχική εκτίμηση, έστω  $\hat{\theta}(0)^T = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1(0) & \hat{\theta}_2(0) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ . Έτσι, το σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων θα είναι και αυτό σταθερό (υποθέτοντας σταθερές άγνωστες παραμέτρους) και ίσο με  $\tilde{\theta}^T = \begin{bmatrix} \theta_1 - \hat{\theta}_1(0) & \theta_2 - \hat{\theta}_2(0) \end{bmatrix}^T$ . Θεωρώντας την συνάρτηση

$$V' = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 + \frac{1}{2}z_4^2 \quad (2.82)$$

παίρνουμε ότι η παράγωγός της κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (2.58) για  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0$  είναι

$$\begin{aligned}
\dot{V}' = & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 - K_{\theta_1} z_2^2 x_2^2 - \tilde{\theta}_1 z_2 x_2 - K_{\theta_2} z_2^2 \varphi^2(x_1) - \tilde{\theta}_2 z_2 \varphi(x_1) \\
& - \Lambda_{\theta_1} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 + \tilde{\theta}_1 z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 - \Lambda_{\theta_2} z_3^2 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + \tilde{\theta}_2 z_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \\
& - M_{\theta_1} z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 + \tilde{\theta}_1 z_4 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 - M_{\theta_2} z_4^2 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + \tilde{\theta}_2 z_4 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας του Young, η οποία εκφράζεται στην περίπτωση μας ως  $xy - kx^2 \leq \frac{1}{4k} y^2$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  η (2.83) προκύπτει ότι ικανοποιεί

$$\begin{aligned}
\dot{V}' \leq & -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 - c_3 z_3^2 - c_4 z_4^2 + \frac{1}{4K_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{4K_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{4\Lambda_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{4\Lambda_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2 + \frac{1}{4M_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{4M_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2 \\
\leq & -c_0 |z|^2 + \frac{1}{4K_{\theta_0}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{4K_{\theta_{20}}} \tilde{\theta}_2^2
\end{aligned} \tag{2.84}$$

όπου  $c_0 = \min_{1 \leq i \leq 4} \{c_i\}$  και  $\frac{1}{K_{\theta_0}} = \frac{1}{K_{\theta_1}} + \frac{1}{\Lambda_{\theta_1}} + \frac{1}{M_{\theta_1}}$  για  $1 \leq i \leq 2$ . Θέτοντας  $K_0 = \max\{K_{\theta_0}, K_{\theta_{20}}\}$ , η (2.84) γίνεται

$$\dot{V}' \leq -c_0 |z|^2 + \frac{1}{4K_0} |\tilde{\theta}|^2 \tag{2.85}$$

Από την (2.85) βλέπουμε ότι για  $|z| \geq \frac{1}{2\sqrt{c_0 K_0}} |\tilde{\theta}|$  είναι  $\dot{V}' \leq 0$  και επειδή  $V'' = \frac{1}{2} |z|^2$  συμπεραίνουμε ότι το  $|z|$  θα φθίνει όταν  $|z| \geq \frac{1}{2\sqrt{c_0 K_0}} |\tilde{\theta}|$ . Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το διάνυσμα  $z$  παραμένει ευσταθές μιας και ικανοποιεί

$$|z(t)| \leq \max \left\{ \frac{1}{2\sqrt{c_0 K_0}} |\tilde{\theta}|, |z(0)| \right\}, \quad \forall t \geq 0 \tag{2.86}$$

Θα ήταν χρήσιμο επίσης, να δούμε στην περίπτωση που δεν έχουμε προσαρμοστικό έλεγχο που συγκλίνει η λύση του συστήματος (2.58). Από την (2.85) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |z(t)|^2 & \leq -c_0 |z|^2 + \frac{1}{4K_0} |\tilde{\theta}|^2 \Rightarrow \\
\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |z(t)|^2 e^{2c_0 t} & \leq -c_0 |z|^2 e^{2c_0 t} + \frac{1}{4K_0} |\tilde{\theta}|^2 e^{2c_0 t} \Rightarrow \\
\frac{d}{dt} \frac{1}{2} |z(t)|^2 e^{2c_0 t} + c_0 |z|^2 e^{2c_0 t} & \leq \frac{1}{4K_0} |\tilde{\theta}|^2 e^{2c_0 t} \Rightarrow \\
\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} |z(t)|^2 e^{2c_0 t} \right] & \leq \frac{1}{4K_0} |\tilde{\theta}|^2 e^{2c_0 t} \Rightarrow
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|z(t)|^2 e^{2c_0 t} &\leq \frac{1}{2}|z(0)|^2 + \frac{1}{4K_0}|\tilde{\theta}|^2 \int_0^t e^{2c_0 t} dt = \frac{1}{2}|z(0)|^2 + \frac{1}{8c_0 K_0}|\tilde{\theta}|^2 (e^{2c_0 t} - 1) \Rightarrow \\ |z(t)|^2 &\leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{4c_0 K_0}|\tilde{\theta}|^2 (1 - e^{-2c_0 t}) \leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{4c_0 K_0}|\tilde{\theta}|^2 \end{aligned} \quad (2.87)$$

Επειδή  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  είναι  $\sqrt{|a|^2 + |b|^2} \leq |a| + |b|$  η (2.87) γίνεται

$$|z(t)| \leq |z(0)| e^{-c_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{c_0 K_0}}|\tilde{\theta}| \quad (2.88)$$

Έτσι, όταν  $t \rightarrow \infty$ , το  $|z(t)| \rightarrow A$ , όπου το σύνολο  $A$  είναι το σύνολο  $A = \left\{ z \in \mathbb{R}^n : |z| \leq \frac{1}{2\sqrt{c_0 K_0}}|\tilde{\theta}| \right\}$

### 2.3.2 ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ

Στην περίπτωση αυτή θέλουμε η μεταβλητή  $x_1$  να ακολουθεί μια οποιαδήποτε είσοδο αναφοράς  $y_r(t)$  η οποία είναι φραγμένη, τμηματικά συνεχής και οι πρώτες της 4 παράγωγοι είναι γνωστοί. Συνήθως, αυτή η είσοδος αναφοράς προκύπτει από την έξοδο ενός ευσταθούς γραμμικού συστήματος, το οποίο μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο της συχνότητας από την συνάρτηση μεταφοράς

$$G_r(s) = \frac{Y_r(s)}{R_r(s)} = \frac{K}{s^4 + \beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_1 s + \beta_0} \quad (2.89)$$

Ενώ μια πραγματοποίηση του παραπάνω συστήματος στο πεδίο του χρόνου είναι με μεταβλητές κατάστασης στην κανονική μορφή φάσης, δηλαδή

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\beta_0 & -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{bmatrix} x_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} r_r \\ y_r &= x_{r1} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι με την πραγματοποίηση (2.90) τα  $y_r^{(i)}, 1 \leq i \leq 3$  είναι διαθέσιμα από τις καταστάσεις του συστήματος, δηλαδή  $y_r^{(i)} = x_{r(i+1)}, 0 \leq i \leq 3$ .

Ο αλγόριθμος του backstepping εφαρμόζεται και εδώ με μόνη τροποποίηση από τον αλγόριθμο της ενότητας 2.3.1 στον ορισμό του διανύσματος σφάλματος  $z$ . Ορίζουμε εδώ

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 - y_r \\ z_2 &= x_2 - \dot{y}_r - a_1 \\ z_3 &= g x_3 - \ddot{y}_r - a_2 \\ z_4 &= g x_4 - \dddot{y}_r - a_3 \end{aligned} \quad (2.91)$$

Ο ορισμός του διανύσματος  $z$  σύμφωνα με την σχέση (2.91) έχει σαν αποτέλεσμα τα  $a_i, \tau_{i1}, \tau_{i2}, 1 \leq i \leq 3$  να εξαρτώνται από τα  $y_r^{(i)}, 0 \leq i \leq 2$ . Τα  $a_i, 1 \leq i \leq 3$  τροποποιούνται εδώ ως εξής

$$\begin{aligned}
a_1(x_1, y_r) &= -c_1 z_1 \\
a_2(x_1, x_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, y_r, \dot{y}_r) &= -c_2 z_2 - z_1 + \hat{\theta}_1 x_2 + \hat{\theta}_2 \varphi(x_1) + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} x_2 - K_{\theta_1} z_2 x_2^2 - K_{\theta_2} z_2 \varphi^2(x_1) + \frac{\partial a_1}{\partial y_r} \dot{y}_r \\
a_3(x_1, x_2, x_3, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r) &= -c_3 z_3 - z_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} (g x_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) + \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} \tau_{21} \\
&+ \frac{\partial a_2}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \tau_{22} - \Lambda_{\theta_1} z_3 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 - \Lambda_{\theta_2} z_3 \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + \frac{\partial a_2}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial a_2}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Έτσι ο έλεγχος που προκύπτει εξαρτάται και αυτός από τα  $y_r^{(i)}$ ,  $0 \leq i \leq 2$  αλλά και λόγω του ότι εμπεριέχει το  $\dot{z}_4$  εξαρτάται και από τα  $y_r^{(i)}$ ,  $3 \leq i \leq 4$ . Προκύπτει ότι η μεταβλητή ελέγχου είναι

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, y_r, \dot{y}_r, \ddot{y}_r, y_r^{(4)}) = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} -c_4 z_4 - z_3 + g b x_2 + g^2 x_3 + a g x_4 + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} (g x_3 - \hat{\theta}_1 x_2 - \hat{\theta}_2 \varphi(x_1)) + \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_3} x_4 + \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_1} \gamma_{\theta_1} \tau_{31} + \frac{\partial a_3}{\partial \hat{\theta}_2} \gamma_{\theta_2} \tau_{32} - M_{\theta_1} z_4 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 \\ - M_{\theta_2} z_4 \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 + v + \frac{\partial a_3}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial a_3}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r + \frac{\partial a_3}{\partial \ddot{y}_r} y_r^{(4)} \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι οι ορισμοί για τα  $\tau_{i1}, \tau_{i2}$ ,  $1 \leq i \leq 3$  και για το  $v$ , παραμένουν ίδιοι με πριν εκτός του ότι εμπεριέχουν τα καινούργια  $a_i, z_i$  και επομένως εξαρτώνται από τα  $y_r^{(i)}$ ,  $0 \leq i \leq 3$ .

### 2.3.2.1 ΜΕΛΕΤΗ ΕΥΣΤΑΘΕΙΑΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Η μορφή του κλειστού συστήματος στην περίπτωση της παρακολούθησης τροχιάς είναι η ίδια με την περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας, δηλαδή

$$\dot{z} = A_z(z, \hat{\theta}, t)z + W(z, \hat{\theta}, t)^T \tilde{\theta} \tag{2.94}$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma W(z, \hat{\theta}, t)z \tag{2.95}$$

όπου το διάνυσμα  $z$  δίνεται τώρα από την σχέση (2.91), ενώ οι πίνακες  $A_z(z, \hat{\theta}, t)$  και  $W(z, \hat{\theta}, t)$  έχουν τις μορφές των αντίστοιχων πινάκων για την περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας, με την μόνη διαφορά ότι εμπεριέχουν τα  $a_i$  της σχέσης (2.92) και τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους τους.

Η εξάρτηση αυτών των πινάκων από τον χρόνο  $t$  προκύπτει λόγω της παρουσίας των όρων  $y_r^{(i)}$  μέσω των μερικών παραγώγων των  $a_i$ . Διαλέγοντας έτσι σαν υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την

$$V = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2} z_3^2 + \frac{1}{2} z_4^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2,$$

προσ τον χρόνο, κατά μήκος των τροχιών του συστήματος (2.94),(2.95) δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -c_1 z_1^2 - z_2^2 [c_2 + K_{\theta_1} x_2^2 + K_{\theta_2} \varphi^2(x_1)] - z_3^2 \left[ c_3 + \Lambda_{\theta_1} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} x_2 \right]^2 + \Lambda_{\theta_2} \left[ \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \right] \\ & - z_4^2 \left[ c_4 + M_{\theta_1} \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} x_2 \right]^2 + M_{\theta_2} \left[ \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \varphi(x_1) \right]^2 \right] \leq 0 \end{aligned} \quad (2.96)$$

Κατά τα γνωστά, προκύπτει ότι οι τροχιές του συστήματος είναι ευσταθείς και επίσης καθώς  $t \rightarrow \infty$  έχουμε  $z \rightarrow 0$ , δηλαδή, πετύχαμε την ασυμπτωτική παρακολούθηση της εισόδου  $y_r(t)$  από την μεταβλητή  $x_1(t)$ .

Τέλος, πρέπει να σημειώσουμε ότι και στην περίπτωση του συστήματος (2.94),(2.95) ισχύει η ίδια ανάλυση για την μελέτη της ευστάθειας του συστήματος χωρίς τον προσαρμοστικό νόμο, μιας και όλες οι σχέσεις της ενότητας 2.3.1.3 ισχύουν και εδώ για τα αντίστοιχα  $a_i, \hat{\theta}_i, z_i$  που τώρα δίνονται από τις σχέσεις (2.92), (2.95) και (2.91) αντίστοιχα.

### 2.3.2.2 ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΤΩΝ ΕΚΤΙΜΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ

Στην ενότητα 2.3.1.3 παρουσιάστηκαν οι περιοχές σύγκλισης των εκτιμήσεων των αγνώστων παραμέτρων. Στην περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας η περιοχή σύγκλισης των εκτιμήσεων εξαρτούνταν από το αν η συνάρτηση  $\varphi(y_s)$  ήταν ή όχι μηδέν, δηλαδή από το αν το σημείο λειτουργίας το οποίο θέλαμε να ευσταθοποιήσουμε ήταν τέτοιο ώστε να προέκυπτε  $\varphi(y_s) = 0$  ή  $\varphi(y_s) \neq 0$ . Στην περίπτωση όμως όπου δεν θέλουμε μόνο να ευσταθοποιήσουμε το σύστημά μας σε ένα σταθερό σημείο αλλά θέλουμε να παρακολουθεί μια είσοδο αναφοράς, η εξέταση της περιοχής σύγκλισης των εκτιμήσεων γίνεται πιο πολύπλοκη καθώς η είσοδος αναφοράς είναι ένα μεταβαλλόμενο σήμα. Στην περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς, για την εξέταση της σύγκλισης των εκτιμήσεων στις πραγματικές τιμές των αγνώστων παραμέτρων πρέπει να εξετάσουμε πόσο «πλούσιο» είναι το σήμα της εισόδου αναφοράς. Λέγοντας «πλούσιο» εννοούμε το αν το σήμα αναφοράς εμπεριέχει ικανό αριθμό αρμονικών συχνοτήτων ώστε να οδηγήσουν στην σύγκλιση των εκτιμήσεων στις πραγματικές τιμές τους.

Στην ([13]), η εξέταση του αν ένα σήμα αναφοράς είναι «πλούσιο» ανάγεται στην εξέταση του αν ένας πίνακας είναι συνεχώς διεγερμένος (persistent excited) το οποίο τελικά ελέγχεται απλά από το εάν ένας συγκεκριμένος πίνακας είναι πλήρους τάξης ως προς τις γραμμές τους. Πιο συγκεκριμένα, ο πίνακας ο οποίος θέλουμε να είναι συνεχώς διεγερμένος είναι ο πίνακας  $F$  της σχέσης (2.66), δηλαδή

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -x_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi(x_1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Μόνο που αντικαθιστούμε όπου  $x_1$  το  $y_r(t)$  και όπου  $x_2$  το  $\dot{y}_r(t)$  και έτσι προκύπτει ο πίνακας  $F_r$  που δίνεται από την σχέση

$$F_r = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{y}_r(t) & 0 & 0 \\ 0 & -\varphi(y_r(t)) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Έτσι ελέγχεται αν είναι συνεχώς διεγερμένος ένας πίνακας που περιέχει μόνο εξωγενή σήματα και όχι σήματα κλειστού βρόχου. Για να ελέγξουμε αν ο πίνακας αυτός είναι συνεχώς διεγερμένος πρέπει πρώτα να αναπτυχθούν οι συναρτήσεις  $-\dot{y}_r(t)$  και  $-\varphi(y_r(t))$  σε σειρές Fourier. Έστω ότι οι σειρές Fourier των  $-\dot{y}_r(t)$  και  $-\varphi(y_r(t))$  δίνονται από την σχέση

$$\begin{bmatrix} -\dot{y}_r(t) \\ -\varphi(y_r(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,\nu} & \mu_{1,\nu+1} & \mu_{1,\nu+2} & \cdots & \mu_{1,\nu+\kappa} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,\nu} & \mu_{2,\nu+1} & \mu_{2,\nu+2} & \cdots & \mu_{2,\nu+\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_2 t) \\ \vdots \\ \cos(\omega_\nu t) \\ \sin(\omega_{\nu+1} t) \\ \sin(\omega_{\nu+2} t) \\ \vdots \\ \sin(\omega_{\nu+\kappa} t) \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

Θέτοντας

$$M_2 = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,\nu} & \mu_{1,\nu+1} & \mu_{1,\nu+2} & \cdots & \mu_{1,\nu+\kappa} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,\nu} & \mu_{2,\nu+1} & \mu_{2,\nu+2} & \cdots & \mu_{2,\nu+\kappa} \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

αποδुकνεύεται ([13]) ότι οι εκτιμήσεις των παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές αν ο πίνακας  $M_2$  είναι πλήρους βαθμού γραμμών.

**Παρατήρηση 4** Αν οι συναρτήσεις  $-\dot{y}_r(t)$  και  $-\varphi(y_r(t))$  έχουν ανάπτυγμα Fourier με άπειρους όρους, τότε κρατάμε τους  $\nu + \kappa$  όρους οι οποίοι είναι ικανοί ώστε να προκύψει ο πίνακας  $M_2$  πλήρους βαθμού γραμμών ([13]).

Δεν μένει τώρα παρά να βρούμε ένα κατάλληλο σήμα  $y_r(t)$  ώστε να είναι ο  $M_2$  πλήρους βαθμού γραμμών. Για  $y_r(t) = A \sin(\omega_0 t)$  προκύπτει ότι

$$-\dot{y}_r(t) = -A\omega_0 \cos(\omega_0 t) \quad (2.101)$$

Επίσης, η  $-\varphi(A \sin(\omega_0 t))$  είναι  $-\varphi(A \sin(\omega_0 t)) = -\sin\left(\frac{A \sin(\omega_0 t)}{T_j} + \delta_0\right) + \sin(\delta_0)$ . Η οποία μπορεί να γραφτεί

$$-\varphi(A \sin(\omega_0 t)) = -\sin\left(\frac{A \sin(\omega_0 t)}{T_j}\right) \cos(\delta_0) - \cos\left(\frac{A \sin(\omega_0 t)}{T_j}\right) \sin(\delta_0) + \sin(\delta_0) \quad (2.102)$$

Από τα γνωστά αναπτύγματα σε πολυώνυμο Maclaurin του ημιτόνου και του συνημιτόνου προκύπτει

$$-\varphi(A \sin(\omega_0 t)) = -\cos(\delta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left[ \frac{A \sin(\omega_0 t)}{T_j} \right]^{2k+1} - \sin(\delta_0) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left[ \frac{A \sin(\omega_0 t)}{T_j} \right]^{2k} + \sin(\delta_0) \quad (2.103)$$

Λόγω των τριγωνομετρικών ιδιοτήτων, παρατηρούμε από την (2.103) ότι η συνάρτηση  $-\varphi(A \sin(\omega_0 t))$  περιέχει άπειρες συχνότητες στην σειρά Fourier και έτσι λόγω της παρατήρησης 4

κρατάμε μόνο όσους όρους είναι ικανοί να κάνουν τον πίνακα  $M_2$  πλήρους βαθμού γραμμών. Πιο συγκεκριμένα, κρατώντας τους δύο πρώτους όρους κάθε αναπτύγματος προκύπτει

$$-\varphi(A \sin(\omega_0 t)) \approx -\cos(\delta_0) \left[ \frac{A \sin(\omega_0 t)}{T_j} - \frac{A^3 \sin^3(\omega_0 t)}{6T_j^3} \right] - \sin(\delta_0) \left[ 1 - \frac{A^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2T_j^2} \right] + \sin(\delta_0) \quad (2.104)$$

Επειδή  $\sin^3(\omega_0 t) = \frac{3}{4} \sin(\omega_0 t) - \frac{1}{4} \sin(3\omega_0 t)$  και  $\sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\omega_0 t)$ , η (2.104) γίνεται

$$-\varphi(A \sin(\omega_0 t)) \approx \frac{A^2}{4T_j^2} \sin(\delta_0) - \frac{A^2}{4T_j^2} \sin(\delta_0) \cos(2\omega_0 t) + \frac{A}{T_j} \cos(\delta_0) \left[ \frac{3A^2}{24T_j^2} - 1 \right] \sin(\omega_0 t) - \frac{A^3}{24T_j^3} \cos(\delta_0) \sin(3\omega_0 t) \quad (2.105)$$

Από τις (2.101) και (2.105) η σχέση (2.99) γίνεται

$$\begin{bmatrix} -\dot{y}_r(t) \\ -\varphi(y_r(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A^2}{4T_j^2} \sin(\delta_0) & 0 & -\frac{A^2}{4T_j^2} \sin(\delta_0) & \frac{A}{T_j} \cos(\delta_0) \left[ \frac{3A^2}{24T_j^2} - 1 \right] & -\frac{A^3}{24T_j^3} \cos(\delta_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(0 \cdot t) \\ \cos(\omega_0 t) \\ \cos(2\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \\ \sin(3\omega_0 t) \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Έτσι ο  $M_2$  είναι

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -A\omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{A^2}{4T_j^2} \sin(\delta_0) & 0 & -\frac{A^2}{4T_j^2} \sin(\delta_0) & \frac{A}{T_j} \cos(\delta_0) \left[ \frac{3A^2}{24T_j^2} - 1 \right] & -\frac{A^3}{24T_j^3} \cos(\delta_0) \end{bmatrix} \quad (2.107)$$

Από την (2.107) παρατηρούμε ότι ο πίνακας  $M_2$  έχει πάντα δύο γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές καθώς δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα  $\sin(\delta_0) = \cos(\delta_0) = 0$ . Έτσι, προκύπτει ([13]) ότι μια είσοδο αναφοράς  $y_r(t) = A \sin(\omega_0 t)$  είναι ικανή (αρκετά «πλούσια») ώστε οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων να συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές των παραμέτρων αυτών.

### 2.3.2.3 ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΑΤΙΚΗΣ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑΣ ΤΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Ένα χρήσιμο στοιχείο στην μελέτη της συμπεριφοράς του ελεγκτή θα ήταν να βρούμε το μέγιστο σφάλμα που προκύπτει κατά την διάρκεια της μεταβατικής απόκρισης του συστήματος. Ισοδύναμα, θα ήταν πολύ χρήσιμο να βρούμε μια μέγιστη τιμή που λαμβάνει το  $|z(t)|$  κατά την διάρκεια της μεταβατικής απόκρισης του κλειστού συστήματος με τον προσαρμοστικό νόμο, όπως ακριβώς βρέθηκε μια μέγιστη τιμή στην περίπτωση που δεν έχουμε προσαρμογή στις άγνωστες παραμέτρους του συστήματος (ενότητα 2.3.1.3).

Σύμφωνα με την ανάλυση της ενότητας (2.3.1.3) και επειδή όπως προαναφέραμε και στην περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς για το κλειστό σύστημα που προκύπτει ισχύουν αντίστοιχες σχέσεις, προκύπτει και εδώ ότι

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}|z|^2\right)}{dt} \leq -c_0 |z|^2 + \frac{1}{4K_0} |\dot{\theta}|^2 \quad (2.108)$$

και

$$|z(t)|^2 \leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{2K_0} \sup_{0 \leq \tau \leq t} \left| \int_0^t e^{-2c_0(t-\tau)} |\tilde{\theta}(\tau)|^2 d\tau \right| \quad (2.109)$$

μόνο που τώρα το  $\tilde{\theta}$  είναι συνάρτηση του χρόνου και δεν μπορούμε να το βγάλουμε απευθείας από το ολοκλήρωμα της σχέσης (2.98). Αφού όμως όπως αποδείξαμε το σύστημα (2.94), (2.95) είναι ευσταθές, θα είναι και το  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$  ευσταθές και έτσι το  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |\tilde{\theta}(\tau)|^2$  θα είναι φραγμένο.

Αποδυνκνείται όμως ([1]) ότι όταν υπάρχει το  $\int_0^t |h(\tau)| d\tau$  για κάποια συνάρτηση  $h(t)$  η οποία είναι μηδέν για  $t < 0$  και το  $\sup_{0 \leq \tau \leq t} |g(\tau)|$  για κάποια συνάρτηση  $g(t)$ , ισχύει

$$\sup_{0 \leq \tau \leq t} \left| \int_0^t h(t-\tau)g(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |h(\tau)| d\tau \sup_{0 \leq \tau \leq t} |g(\tau)| \quad (2.110)$$

Παίρνοντας  $h(t) = e^{-2c_0 t}$ ,  $g(t) = \tilde{\theta}^2(t)$  έχουμε από τις (2.98) και (2.99) ότι

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &\leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{2K_0} \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\tilde{\theta}(\tau)|^2 \int_0^t e^{-2c_0 \tau} d\tau \Rightarrow \\ |z(t)|^2 &\leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{4c_0 K_0} \|\tilde{\theta}\|_{\infty}^2 (1 - e^{-2c_0 t}) \Rightarrow \\ |z(t)|^2 &\leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{4c_0 K_0} \|\tilde{\theta}\|_{\infty}^2 \end{aligned} \quad (2.111)$$

όπου  $\|\tilde{\theta}\|_{\infty}^2 = \sup_{0 \leq \tau \leq t} |\tilde{\theta}^2(\tau)|$ .

Από την σχέση  $V = \frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2$  παίρνουμε ότι  $\frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2(t) \leq 2V(t)$ . Από την σχέση

(2.96) όμως, προκύπτει ότι αφού  $\dot{V} \leq 0$  τότε θα είναι  $V(t) \leq V(0)$ . Προκύπτει επομένως ότι ισχύει

$$\frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2(t) + \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2(t) \leq |z(0)|^2 + \frac{1}{\gamma_{\theta_1}} \tilde{\theta}_1^2(0) + \frac{1}{\gamma_{\theta_2}} \tilde{\theta}_2^2(0), t \geq 0 \quad (2.112)$$

Θέτοντας  $\gamma_{\theta_{\max}} = \max\{\gamma_{\theta_1}, \gamma_{\theta_2}\}$  και  $\gamma_{\theta_{\min}} = \min\{\gamma_{\theta_1}, \gamma_{\theta_2}\}$ , προκύπτει

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(t)|^2 &\leq \gamma_{\theta_{\max}} |z(0)|^2 + \frac{\gamma_{\theta_{\max}}}{\gamma_{\theta_{\min}}} |\tilde{\theta}(0)|^2, t \geq 0 \Rightarrow \\ \|\tilde{\theta}\|_{\infty}^2 &\leq \gamma_{\theta_{\max}} |z(0)|^2 + \frac{\gamma_{\theta_{\max}}}{\gamma_{\theta_{\min}}} |\tilde{\theta}(0)|^2 \end{aligned} \quad (2.113)$$

Συνδυάζοντας τις (2.111) και (2.112) παίρνουμε ένα φράγμα για το μέτρο του διανύσματος σφάλματος  $|z|$ , το οποίο είναι

$$\begin{aligned} |z(t)|^2 &\leq |z(0)|^2 e^{-2c_0 t} + \frac{1}{4c_0 K_0} \left[ \gamma_{\theta_{\max}} |z(0)|^2 + \frac{\gamma_{\theta_{\max}}}{\gamma_{\theta_{\min}}} |\tilde{\theta}(0)|^2 \right] \Rightarrow \\ |z(t)| &\leq |z(0)| e^{-c_0 t} + \frac{1}{2\sqrt{c_0} K_0} \sqrt{\gamma_{\theta_{\max}} |z(0)|^2 + \frac{\gamma_{\theta_{\max}}}{\gamma_{\theta_{\min}}} |\tilde{\theta}(0)|^2} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Από την (2.114) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι μπορούμε να μειώσουμε αυτό το φράγμα είτε μειώνοντας το  $\gamma_{\theta_{\max}}$  είτε αυξάνοντας το  $\gamma_{\theta_{\min}}$ . Επίσης, εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι μπορούμε να μειώσουμε αυτό το φράγμα αυξάνοντας τα  $c_0, K_0$ . Όμως για παράδειγμα, από τις σχέσεις (2.91) και (2.92) βλέπουμε ότι επειδή  $z_2(0) = x_2(0) - \dot{y}_r + c_1 z_1(0)$  αυξάνοντας το  $c_1$  θα έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του  $z_2(0)$  άρα και του  $|z(0)|$ , με την προϋπόθεση ότι το  $z_1(0)$  δεν είναι μηδέν. Ακόμα, μια αύξηση στο  $z_2(0)$  θα έχει σαν αποτέλεσμα αύξηση του  $z_3(0)$  και κ.ο.κ.. Μπορούμε όμως να εξασφαλίσουμε μείωση του φράγματος (2.114) αυξάνοντας το  $c_0$  αυθαίρετα, αν θέσουμε  $z(0) = 0$ .

Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 1, μπορούμε να πετύχουμε  $z(0) = 0$  αν ισχύει η σχέση (1.33). Επειδή όμως τα  $y_r^{(i)}(0), 0 \leq i \leq 3$  είναι προκαθορισμένα, πρέπει να σχεδιάσουμε τον ελεγκτή μας έτσι ώστε αν θέλουμε το  $x_1$  να ακολουθεί μια είσοδο αναφοράς  $y_{r0}$ , να ακολουθεί ένα σήμα  $y_r(t) = y_{r0}(t) + \delta_r(t)$ , όπου το  $\delta_r(t)$  τείνει στο μηδέν καθώς  $t \rightarrow \infty$  και ικανοποιεί την σχέση (1.34). Ένα τέτοιο σήμα  $\delta_r(t)$  μπορεί να προκύψει αν το επιλέξουμε σαν την πρώτη μεταβλητή κατάστασης ενός γραμμικού ευσταθούς συστήματος στην κανονική μορφή φάσης, δηλαδή μπορούμε να επιλέξουμε

$$\dot{\delta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\delta_0 & -\delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 \end{bmatrix} \delta \quad (2.115)$$

όπου  $\delta^T(t) = [\delta_r(t) \quad \dot{\delta}_r(t) \quad \ddot{\delta}_r(t) \quad \dddot{\delta}_r(t)]^T$  και αρχικές συνθήκες που δίνονται από την σχέση (1.34).

Στην περίπτωση της τουρμπογεννήτριας, η σχέση (1.34) μέσω της (1.33) γίνεται

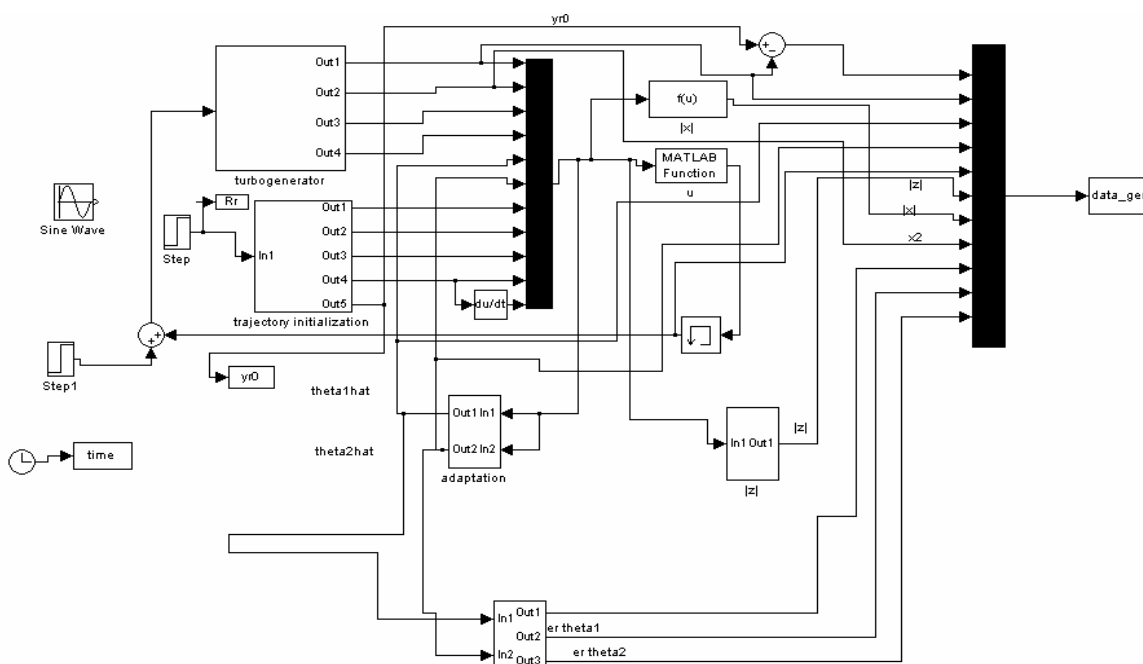
$$\begin{aligned} \delta_r(0) &= x_1(0) - y_{r0}(0) \\ \dot{\delta}_r(0) &= x_2(0) - \dot{y}_{r0}(0) - a_1(x_1(0), y_r(0)) - \dot{y}_{r0}(0) \\ \ddot{\delta}_r(0) &= gx_3(0) - a_2(x_1(0), x_2(0), \hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_2(0), y_r(0), \dot{y}_r(0)) - \ddot{y}_{r0}(0) \\ \dddot{\delta}_r(0) &= gx_4(0) - a_3(x_1(0), x_2(0), x_3(0), \hat{\theta}_1(0), \hat{\theta}_2(0), y_r(0), \dot{y}_r(0), \ddot{y}_r(0)) - \dddot{y}_{r0}(0) \end{aligned} \quad (2.116)$$

Μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \delta_r(0) &= x_1(0) - y_{r0}(0) \\ \dot{\delta}_r(0) &= x_2(0) - \dot{y}_{r0}(0) \\ \ddot{\delta}_r(0) &= gx_3(0) - \hat{\theta}_1(0)x_2(0) - \hat{\theta}_2(0)\varphi(x_1(0)) - \ddot{y}_{r0}(0) \\ \dddot{\delta}_r(0) &= gx_4(0) - \hat{\theta}_1(0)[gx_3(0) - \hat{\theta}_1(0)x_2(0) - \hat{\theta}_2(0)\varphi(x_1(0))] - \hat{\theta}_2(0)x_2(0)\frac{d\varphi(x_1(0))}{dx_1(0)} - \dddot{y}_{r0}(0) \end{aligned} \quad (2.117)$$

### 3. ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΟΣΑΡΜΟΣΤΙΚΟΥ BACKSTEPPING ΕΛΕΓΚΤΗ ΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΤΗΣ ΤΟΥΡΜΠΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑΣ ΜΕ ΤΗΝ ΧΡΗΣΗ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

Για την επιβεβαίωση της εγκυρότητας και αποτελεσματικότητας της μεθόδου backstepping για τον έλεγχο της τουρμπογεννήτριας τα θεωρητικά αποτελέσματα ελέγχονται με την χρήση προσομοίωσης. Για την πειραματική εφαρμογή της μεθόδου backstepping στο σύστημα της τουρμπογεννήτριας χρησιμοποιήθηκε το Simulink του πακέτου λογισμικού Matlab<sup>®</sup>. Το συνολικό σύστημα που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου backstepping στο σύστημα της τουρμπογεννήτριας φαίνεται παρακάτω. Επίσης, κατά την προσομοίωση χρησιμοποιήθηκαν δύο διαφορετικά αριθμητικά μοντέλα του συστήματος της τουρμπογεννήτριας για την καλύτερη σύγκριση των αποτελεσμάτων και της εγκυρότητας της μεθόδου. Τα προγράμματα του πακέτου λογισμικού Matlab<sup>®</sup> που χρησιμοποιήθηκαν περιέχονται στο συνοδευτικό CD.



Μοντέλο Simulink του κλειστού συστήματος

#### 3.1 ΡΥΘΜΙΣΗ ΤΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ

Σαν πρώτο παράδειγμα της εφαρμογής του backstepping ελεγκτή στην τουρμπογεννήτρια, παρουσιάζουμε την απόκριση του συστήματος της τουρμπογεννήτριας στην περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ([6]) θέλουμε να ευσταθοποιήσουμε το σημείο ισορροπίας  $x^e = 0$  όταν  $x(0)^T = [x_1(0) \ 0 \ 0 \ 0]^T$  και έτσι διαλέγουμε το επιθυμητό σημείο λειτουργίας του συστήματος  $y_s = 0$ . Στον πίνακα 1 φαίνονται οι παράμετροι ([6]) του συστήματος της τουρμπογεννήτριας για το συγκεκριμένο παράδειγμα.

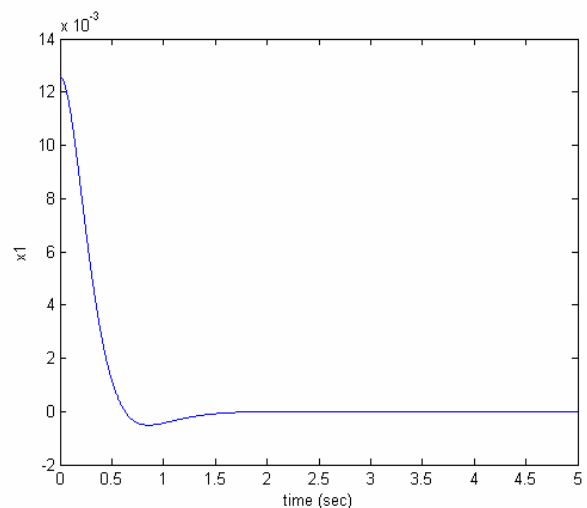
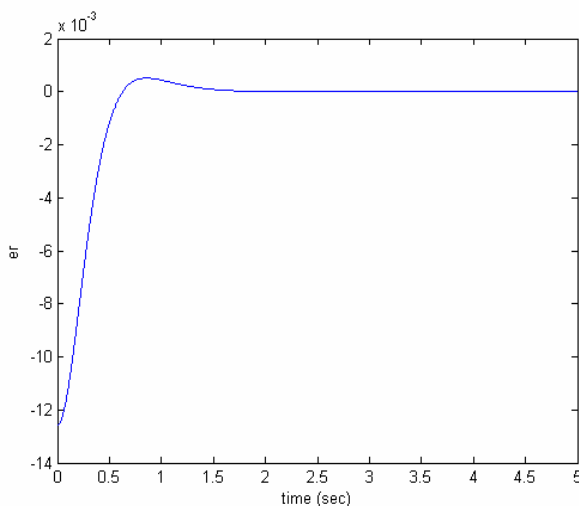


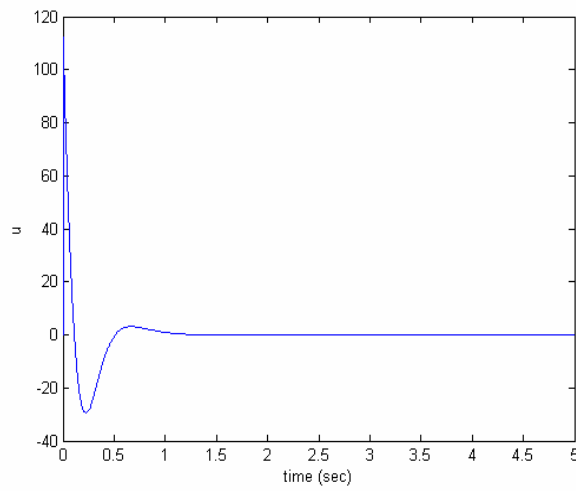
$g$	0.4
$T_j$	0.01258
$b$	0.08
$a$	2.8
$\delta_0$	0.76713
$\theta_1$	1.039
$\theta_2$	1.029
$x_1(0)$	0.01258

Πίνακας 1. Παράμετροι του μοντέλου τουρμπογεννήτριας

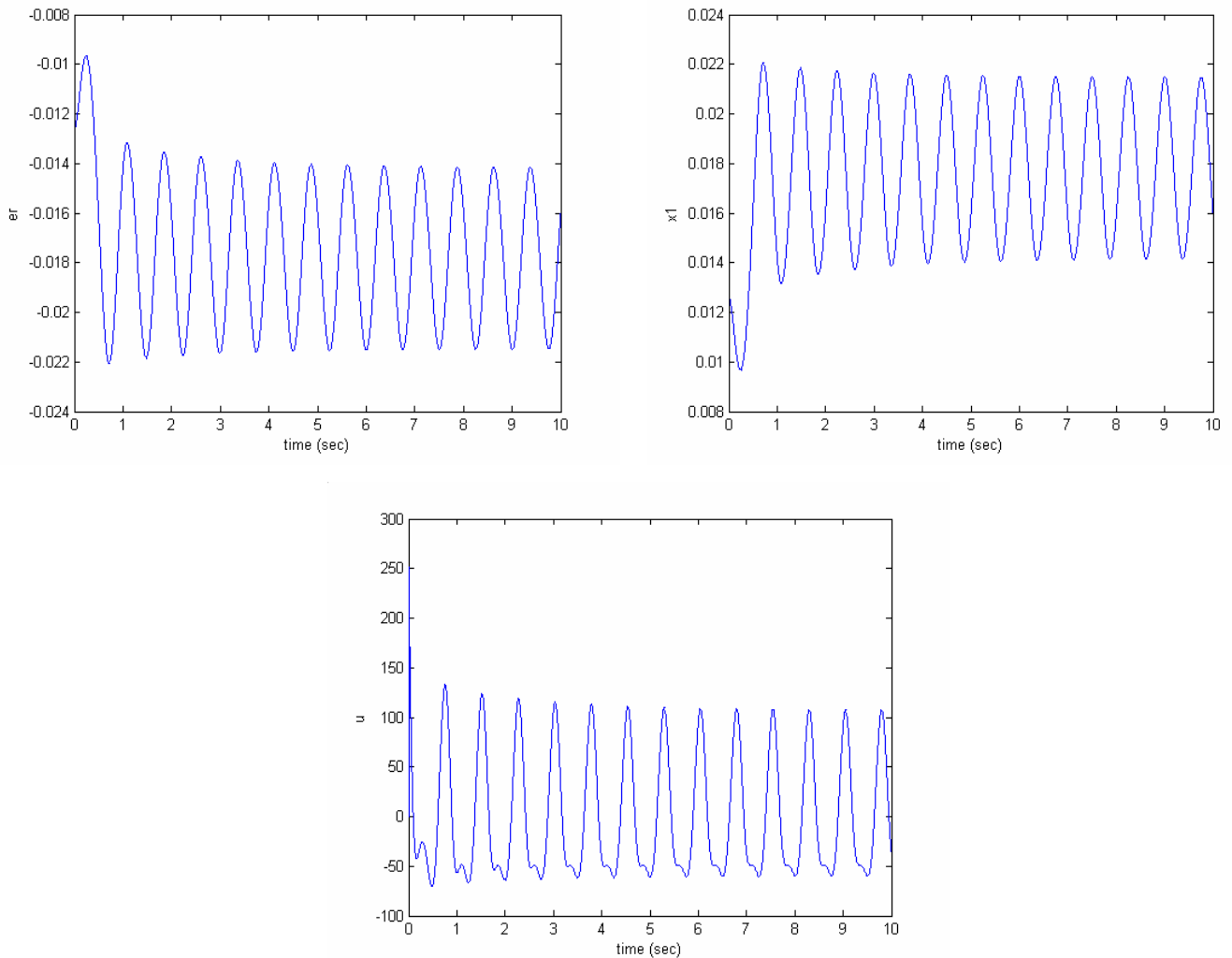
Στο σχήμα 2 βλέπουμε την μεταβλητή  $x_1$ , το σφάλμα  $er = y_s - x_1$  και τον έλεγχο  $u$  στην ιδανική περίπτωση όπου δεν έχουμε σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων. Οι παράμετροι του ελεγκτή της σχέσης (2.51) επιλέγονται ως  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$ , ενώ μιας και δεν έχουμε σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων, οι όροι της μη γραμμικής απόσβεσης και τα κέρδη των προσαρμοστικών νόμων είναι μηδέν, δηλαδή  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = \gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0$ .

Αντίθετα με το σχήμα 2 όπου έχουμε την ιδανική περίπτωση στην οποία δεν έχουμε σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων, στο σχήμα 3 και για ίδιες τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή, παρουσιάζονται όπως και πριν τα  $x_1$ ,  $er = y_s - x_1$  και  $u$  για την περίπτωση όπου έχουμε σφάλμα στις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(0) = 2\theta_1$  και  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(0) = 2\theta_2$ . Από το σχήμα 3 παρατηρούμε ότι η έξοδος του συστήματος (η μεταβλητή  $x_1$ ) όχι μόνο δεν τείνει στο μηδέν αλλά το σύστημα εκτελεί μόνιμες ταλαντώσεις. Επομένως, πρέπει να προσθέσουμε τους όρους της μη γραμμικής απόσβεσης ώστε να ευσταθοποιήσουμε το σύστημά μας χωρίς τον προσαρμοστικό νόμο (ενότητα 2.3.1.3).



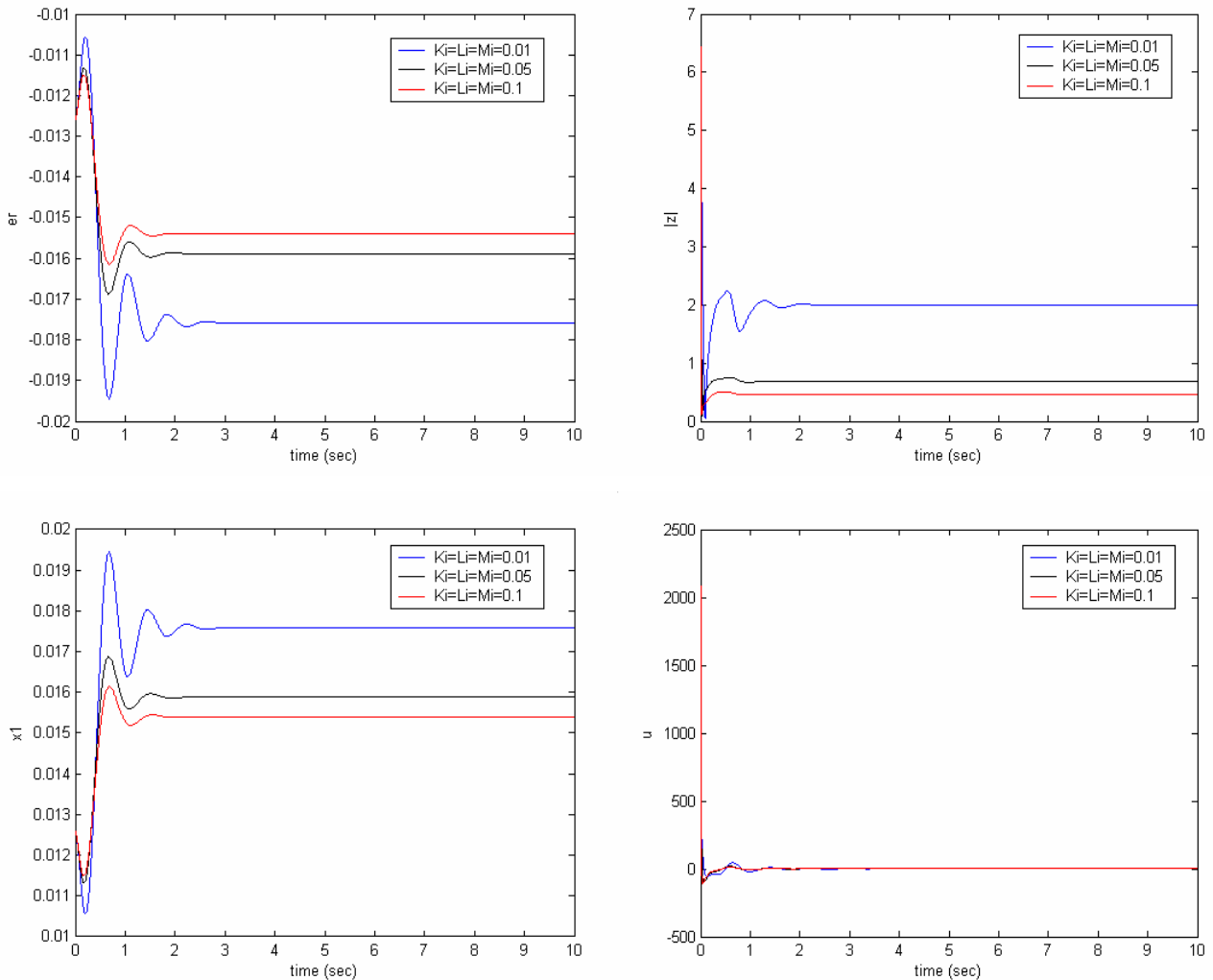


Σχήμα 2.  $x_1$ ,  $er = y_s - x_1$  και  $u$  με μηδενικό σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων.



Σχήμα 3.  $x_1$ ,  $er = y_s - x_1$  και  $u$  όταν  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(0) = 2\theta_1$  και  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(0) = 2\theta_2$ .

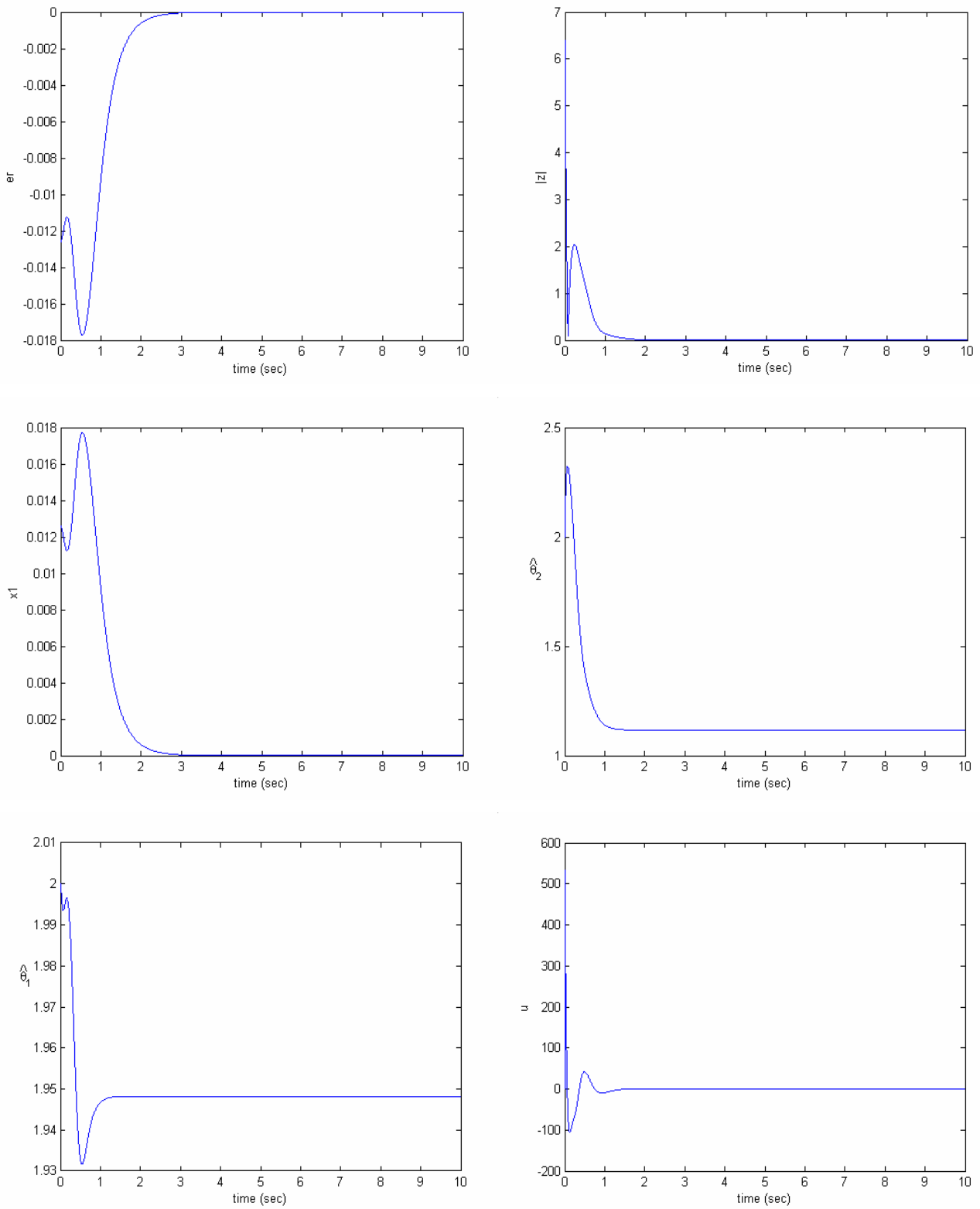
Στο σχήμα 4 μπορούμε να δούμε το σφάλμα  $er = y_s - x_1$ , την μεταβλητή  $x_1$ , το  $|z|$  και τον έλεγχο  $u$  για τρεις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = 0.01, 0.05, 0.1$  (τα  $c_i$  παραμένουν ίδια). Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι πλέον το σύστημα μας δεν εκτελεί ταλαντώσεις και αυξάνοντας τις τιμές των κερδών των όρων της μη γραμμικής απόσβεσης το μόνιμο σφάλμα μειώνεται. Τέλος, μπορούμε να δούμε ότι το  $|z|$  συγκλίνει στην περιοχή της σχέσης (2.86).



Σχήμα 4.  $x_1$ ,  $er = y_s - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  όταν  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(0) = 2\theta_1$  και  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(0) = 2\theta_2$ ,  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$  και  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = 0.01, 0.05, 0.1$ .

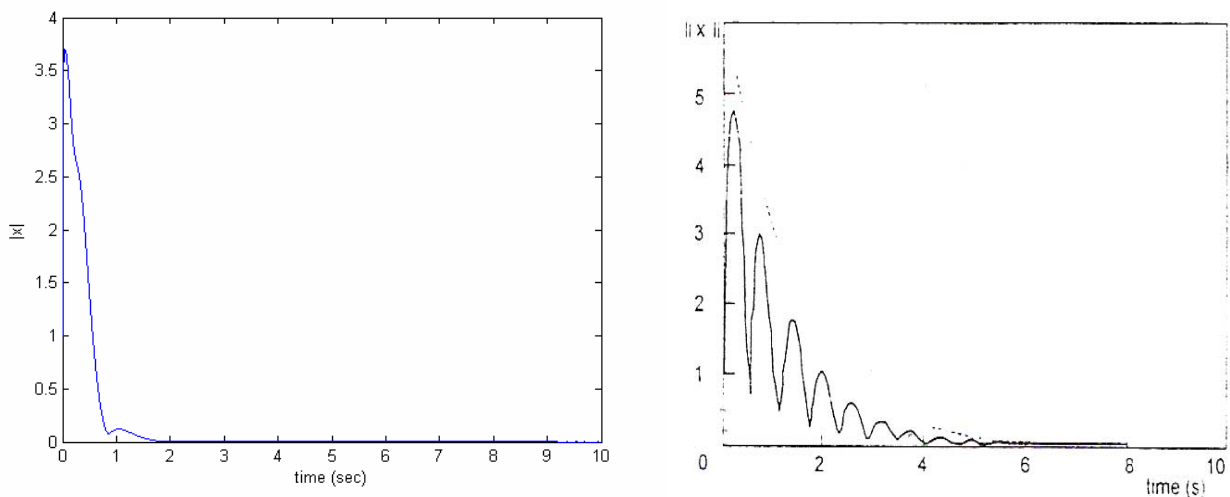
Επόμενο βήμα είναι να εφαρμόσουμε και τον προσαρμοστικό νόμο για τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων. Εφαρμόζοντας τον προσαρμοστικό νόμο που υποδυκνείται από τις σχέσεις (2.53) και (2.54) με κέρδη  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.05$  και παραμέτρους του ελεγκτή  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$  και  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = 0.01$  παίρνουμε το σχήμα 5 όπου φαίνονται για την περίπτωση του προσαρμοστικού ελεγκτή τα  $er = y_s - x_1$ , η μεταβλητή  $x_1$ , το  $|z|$  ο έλεγχος  $u$ , ενώ τώρα φαίνονται και οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων. Από το σχήμα αυτό βλέπουμε ότι το  $x_1$  τείνει στο μηδέν

ενώ οι εκτιμήσεις  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  συγκλίνουν σε κάποιες τιμές, οι οποίες όμως δεν είναι οι πραγματικές τιμές των αγνώστων παραμέτρων  $\theta_1$  και  $\theta_2$  (βλ. ενότητα 2.3.1.2).



Σχήμα 5.  $x_1$ ,  $er = y_s - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  όταν  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(0) = 2\theta_1$  και  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(0) = 2\theta_2$ ,  
 $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$ ,  $K_q = K_{\theta_2} = \Lambda_{q_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{q_1} = M_{\theta_2} = 0.01$  και  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.05$ .

Τελευταία εφαρμογή για το μοντέλο της τουρμπογεννήτριας με τις παραμέτρους του πίνακα 1 είναι η σύγκριση με τον εύρωστο ελεγκτή στην ([6]). Θεωρώντας ως αρχικές εκτιμήσεις για τις άγνωστες παραμέτρους  $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(0) = \theta_1$  και  $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(0) = \theta_2$  και υποθέτοντας τώρα ότι οι πραγματικές τιμές των  $\theta_1, \theta_2$  είναι  $\theta_1' = \frac{1}{2}\theta_1$ ,  $\theta_2' = \frac{3}{2}\theta_2$  (έχουμε δηλαδή αβεβαιότητα στις άγνωστες παραμέτρους  $\pm 50\%$ ), παίρνουμε στο σχήμα 6 το  $|x|$ , επιλέγοντας για τις παραμέτρους του ελεγκτή  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$ ,  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = 0.1$  και  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.5$ . Στο ίδιο σχήμα βλέπουμε το αντίστοιχο  $|x|$  που προκύπτει με την μέθοδο που προτείνεται στην ([6]) και για αβεβαιότητες στα  $\theta_1$  και  $\theta_2 -10\%$  και  $+10\%$  αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι ο backstepping ελεγκτής δίνει καλύτερη απόκριση τόσο ως προς την υπερύψωση όσο και ως προς τον χρόνο αποκατάστασης και για αβεβαιότητες στα  $\theta_1$  και  $\theta_2 \pm 50\%$ . Επίσης το σύστημα φτάνει στο σημείο ισορροπίας του σχεδόν χωρίς καθόλου ταλαντώσεις.



Σχήμα 6. Σύγκριση του  $|x|$  με τον εύρωστο ελεγκτή στην [6].

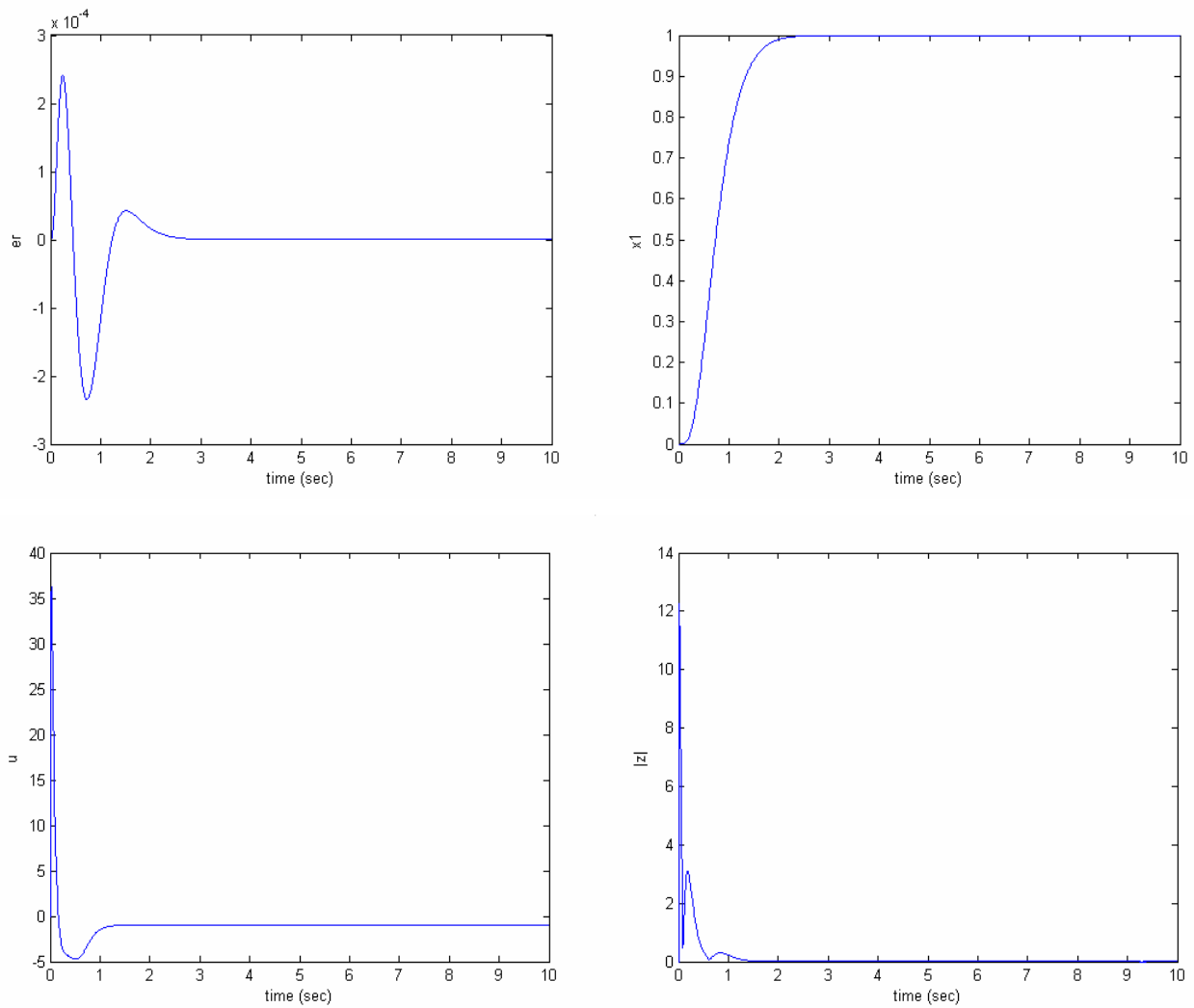
### 3.2 ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΡΟΧΙΑΣ

Το δεύτερο παράδειγμα που θα παρουσιαστεί εδώ αφορά την παρακολούθηση μιας επιθυμητής εισόδου αναφοράς από την μεταβλητή  $x_1$ . Οι παράμετροι της τουρμπογεννήτριας για αυτό το παράδειγμα φαίνονται στον πίνακα 2.

$g$	20
$T_j$	0.207
$b$	0.00012
$a$	8
$\delta_0$	0.7841
$\theta_1$	0.058
$\theta_2$	0.72

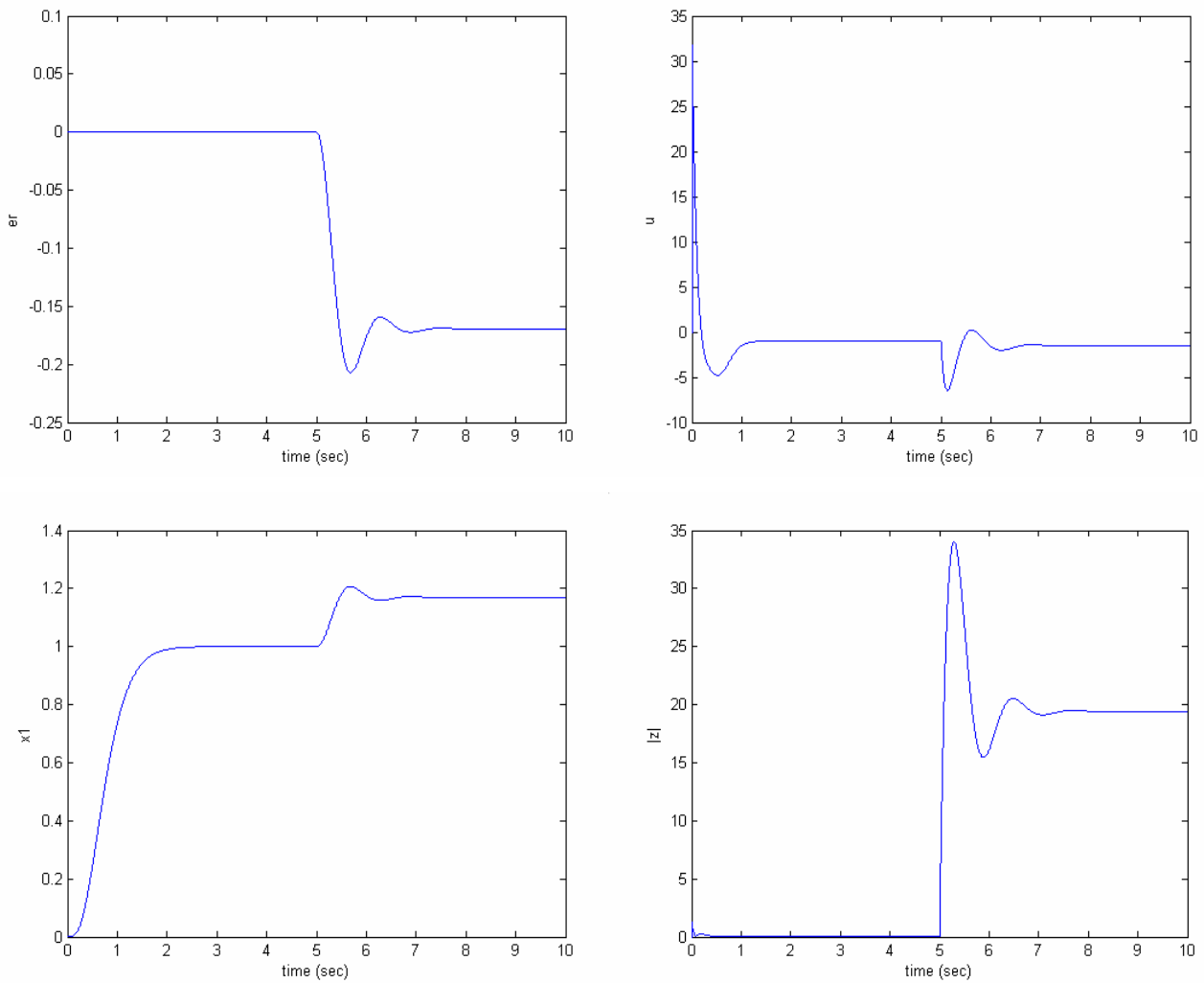
Πίνακας 2. Παράμετροι του μοντέλου τουρμπογεννήτριας

Η είσοδος αναφοράς που θέλουμε να παρακολουθήσουμε προκύπτει από την έξοδο ενός συστήματος αναφοράς με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής (2.89). Για την συγκεκριμένη εφαρμογή θέτουμε  $\beta_0 = 625$ ,  $\beta_1 = 500$ ,  $\beta_2 = 150$ ,  $\beta_3 = 20$  και  $K = 625$ . Επίσης, της παραγώγους μέχρι τρίτης τάξης που χρειάζονται για την εφαρμογή του backstepping ελεγκτή, τις παίρνουμε από το διάνυσμα της σχέσης (2.90). Όπως αναφέρθηκε και στην ενότητα 2.2.2.3, όταν θέλουμε να ακολουθήσουμε μια είσοδο αναφοράς έστω  $y_{r_0}(t)$  (που εδώ προκύπτει από το σύστημα αναφοράς που προαναφέρθηκε) σχεδιάζουμε τον ελεγκτή μας να ακολουθεί το σήμα  $y_{r_0}(t) + \delta_r(t)$ , όπου το  $\delta_r(t)$  είναι η πρώτη μεταβλητή κατάστασης του συστήματος της σχέσης (2.115) με αρχικές καταστάσεις που δίνονται στην σχέση (2.117). Στο παράδειγμά μας θεωρούμε  $\delta_0 = 625$ ,  $\delta_1 = 500$ ,  $\delta_2 = 150$  και  $\delta_3 = 20$  ενώ οι αρχικές συνθήκες  $y_{r_0}^i(0), 1 \leq i \leq 3$  θεωρούνται μηδέν. Θεωρώντας μηδενικό σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων και για παραμέτρους του ελεγκτή  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$  και  $K_{\theta} = K_{\beta} = \Lambda_{\theta} = \Lambda_{\beta} = M_{\theta} = M_{\beta} = \gamma_{\theta} = \gamma_{\beta} = 0$  (δηλαδή δεν έχουμε ούτε προσαρμογή στις άγνωστες παραμέτρους αλλά ούτε και όρους μη γραμμικής απόσβεσης μιας και δεν έχουμε σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων) προσομοιώνουμε το σύστημά μας για μοναδιαία βηματική είσοδο στο προαναφερθέν σύστημα αναφοράς. Στο σχήμα 7 μπορούμε να δούμε το σφάλμα  $er = y_{r_0} - x_1$ , την μεταβλητή  $x_1$  (υποτιθέμενη έξοδος του συστήματος), το  $|z|$  και τον έλεγχο  $u$  όταν το  $y_{r_0}(t)$  προκύπτει από την έξοδο του συστήματος αναφοράς και οι αρχικές συνθήκες του συστήματος της τουρμπογεννήτριας  $x_i(0), 1 \leq i \leq 4$  είναι μηδέν. Παρατηρούμε ότι στην ιδανική αυτή περίπτωση έχουμε μηδενικό σφάλμα παρακολούθησης στην μόνιμη κατάσταση και μηδενική υπερύψωση.



Σχήμα 7.  $x_1$ ,  $er = y_{r0} - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  με μηδενικό σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων.

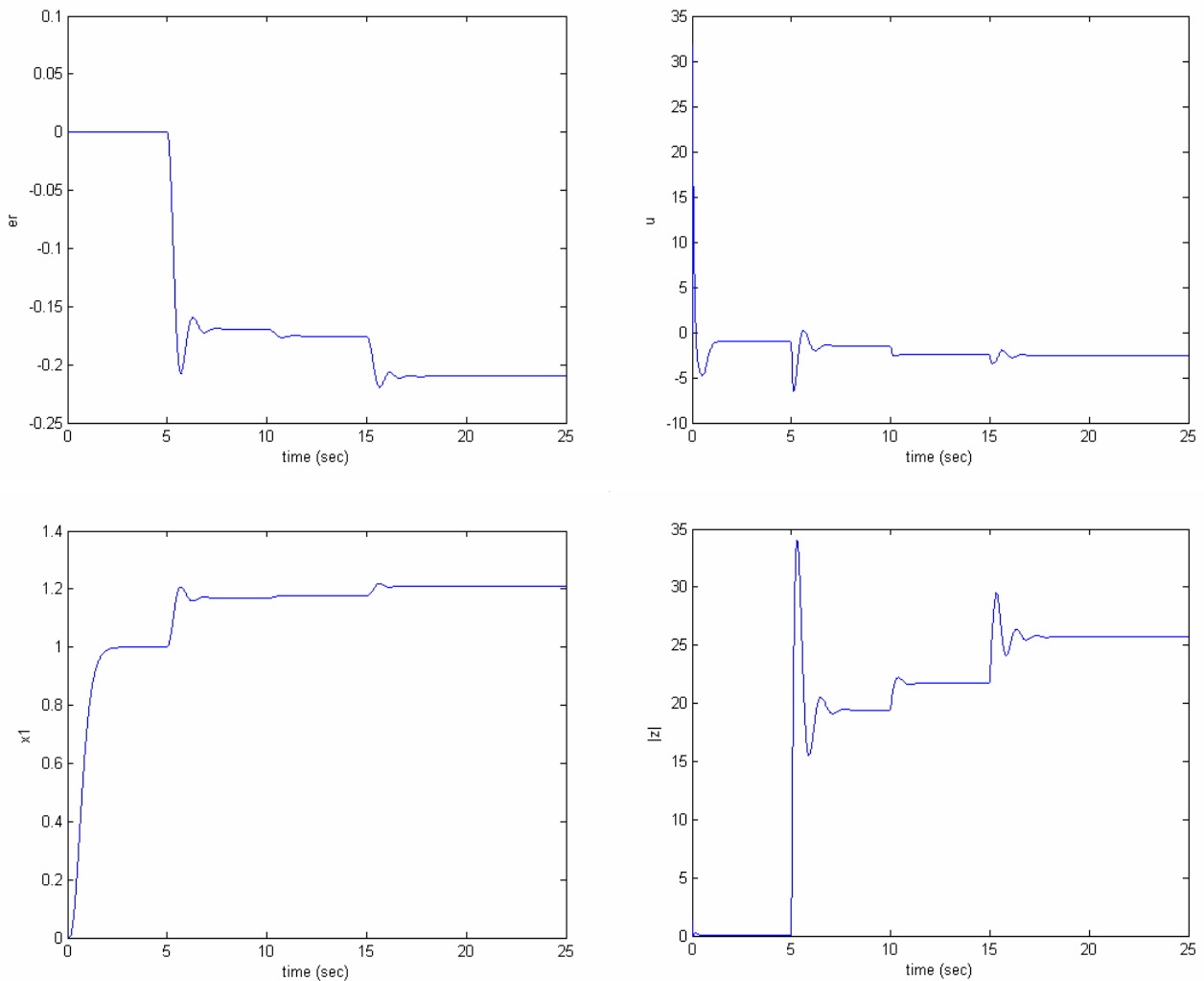
Στην συνέχεια παρουσιάζεται η απόκριση του συστήματος για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή αλλά την χρονική στιγμή  $t = 5s$  οι άγνωστες παράμετροι μεταβάλλονται έτσι ώστε να έχουμε σφάλμα στην εκτίμησή τους. Υποθέτουμε ότι η  $\theta_2$  γίνεται 2.72 και η  $\theta_1$  γίνεται -0.2. Στο σχήμα 8 βλέπουμε ότι τώρα έχουμε μια ταλαντωτική απόκριση και μόνιμο σφάλμα, ενώ το σύστημα παραμένει ευσταθές λόγω του ότι το σφάλμα των εκτιμήσεων των  $\theta_1$  και  $\theta_2$  δεν είναι ικανό για τις τιμές των  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$  να οδηγήσει το σύστημα σε αστάθεια κάτι που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμα (για μεγαλύτερες μεταβολές των αγνώστων παραμέτρων το σύστημα γίνεται ασταθές αλλά σκοπός στο παρών παράδειγμα είναι να ελέγξουμε και να βελτιώσουμε την συμπεριφορά του συστήματος όταν υπόκειται σε διάφορες διαταραχές).



Σχήμα 8.  $x_1$ ,  $er = y_{r0} - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  όταν την  $t = 5s$  αλλάζουν οι τιμές των αγνώστων παραμέτρων.

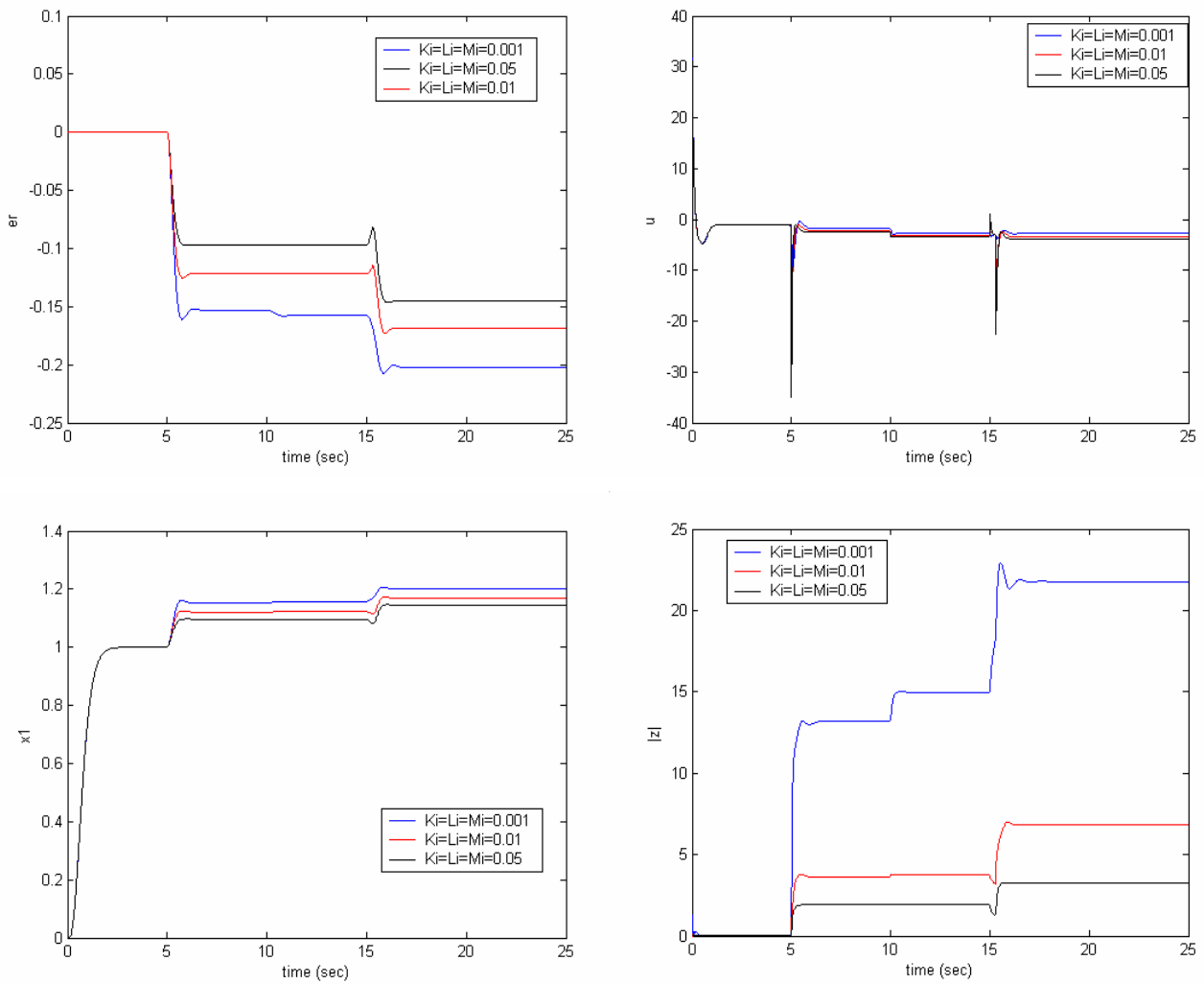
Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, το σύστημα της τουρμπογεννήτριας υπόκειται σε διάφορες διαταραχές. Εκτός από την απότομη αλλαγή των αγνώστων παραμέτρων, μια άλλη πολύ συχνά εμφανιζόμενη σε τέτοια συστήματα διαταραχή, είναι το τριφασικό σφάλμα σε μία από τις γραμμές μεταφοράς και κοντά στην γεννήτρια (3-phase fault [14]). Κατά την διάρκεια αυτού του σφάλματος η ηλεκτρική ενέργεια είναι μηδέν, ενώ μετά την εκκαθάριση του σφάλματος, η μέγιστη ηλεκτρική ενέργεια έχει αλλάξει τιμή ([14]). Η ηλεκτρική ενέργεια του συστήματος εκφράζεται από τους όρους  $P_e = \theta_1 x_2 + \theta_2 \sin\left(\frac{x_1}{T_j} + \delta_0\right)$  της σχέσης (2.8), ενώ η μέγιστη ηλεκτρική ενέργεια από τον όρο  $P_{e,\max} = \theta_2$ . Στο σχήμα 9 φαίνεται η απόκριση του συστήματος όταν ένα τέτοιο σφάλμα εμφανίζεται την χρονική στιγμή  $t = 15s$  και απομακρύνεται μετά από  $0.3ms$ , ενώ μετά την εκκαθάριση του σφάλματος η  $P_{e,\max}$  αλλάζει τιμή ξανά (η πρώτη φορά ήταν την  $t = 5s$ ) και γίνεται 4.22. Επίσης, την χρονική στιγμή  $t = 10s$  εμφανίζεται βηματική διαταραχή φορτίου στην είσοδο του συστήματος με μέτρο 1 (περίπου 200% πάνω από την τιμή ισορροπίας του ελέγχου  $u$  που είναι -1).





Σχήμα 9.  $x_1$ ,  $er = y_{r0} - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  για μεταβολή των αγνώστων παραμέτρων την  $t = 5s$ , διαταραχή φορτίου την  $t = 10s$  και 3-phase fault ([14]) την  $t = 15s$

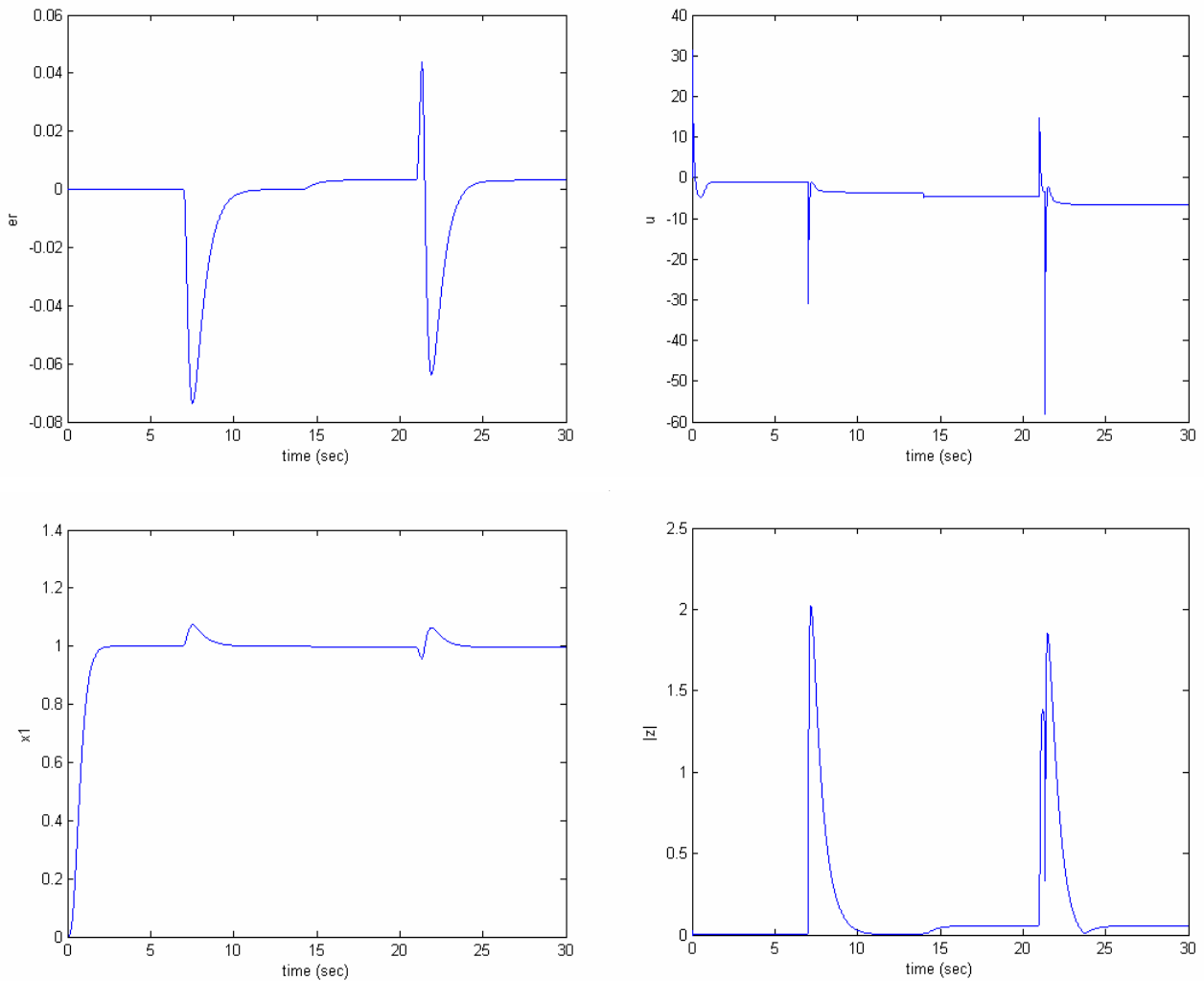
Από το σχήμα 9 βλέπουμε ότι η απόκριση έχει αρκετά μεγάλο μόνιμο σφάλμα και αρκετές ταλαντώσεις, ιδιαίτερα στην περίπτωση του τριφασικού σφάλματος. Για να βελτιώσουμε την συμπεριφορά του συστήματος προσθέτουμε στον ελεγκτή μας τους όρους της μη γραμμικής απόσβεσης. Στο σχήμα 10 βλέπουμε την απόκριση του συστήματος για τρεις διαφορετικές τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή  $K_q = K_{q2} = \Lambda_q = \Lambda_{q2} = M_q = M_{q2} = 0.001, 0.01, 0.05$ . Από αυτό το σχήμα μπορούμε να δούμε ότι όσο αυξάνονται οι τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή που είναι υπεύθυνες για την μη γραμμική απόσβεση, μειώνεται το μόνιμο σφάλμα που οφείλεται στο σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων και επιπλέον η απόκριση είναι λιγότερο ταλαντωτική. Επίσης, παρατηρούμε ότι το σφάλμα λόγω της διαταραχής φορτίου είναι σχεδόν μηδέν, ενώ μειώνεται επίσης το σφάλμα που οφείλεται στο τριφασικό σφάλμα στην γραμμή μεταφοράς και η απόκριση στην διαταραχή αυτή δεν έχει σχεδόν καθόλου ταλαντώσεις.



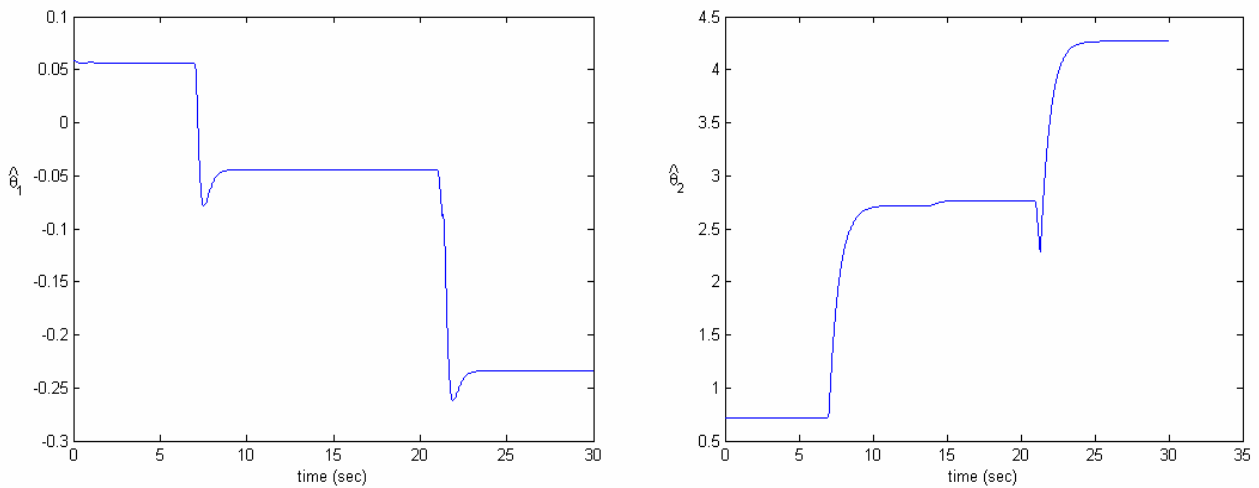
Σχήμα 10.  $x_1$ ,  $er = y_{r0} - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  για μεταβολή των αγνώστων παραμέτρων την  $t = 5s$ , διαταραχή φορτίου την  $t = 10s$  και 3-phase fault ([14]) την  $t = 15s$  όταν  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = 0.001, 0.01, 0.05$

Για να εξαλείψουμε τελείως το μόνιμο σφάλμα και για να κάνουμε ομαλότερη την απόκριση του συστήματος υπό την επίδραση των διαταραχών, προσθέτουμε στον ελεγκτή μας και τον προσαρμοστικό νόμο. Επιλέγουμε για τον προσαρμοστικό ελεγκτή  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = \gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.01$ . Στο σχήμα 11 βλέπουμε ότι δεν έχουμε μόνιμο σφάλμα ούτε κατά την αλλαγή των τιμών των αγνώστων παραμέτρων ούτε κατά την εμφάνιση του τριφασικού σφάλματος (το μόνο σφάλμα οφείλεται στην διαταραχή φορτίου και είναι σχεδόν μηδενικό). Επίσης η απόκριση του συστήματος είναι ομαλότερη κάτω από την επίδραση των διαταραχών. Τέλος, όπως αναμέναμε (ενότητα 2.2.1.2) μπορούμε να δούμε από το σχήμα 12 ότι στην προηγούμενη περίπτωση η εκτίμηση της άγνωστης παραμέτρου  $\theta_2$  συγκλίνει στην κάθε φορά πραγματική τιμή της, ενώ η εκτίμηση της  $\theta_1$  συγκλίνει μεν σε μία τιμή η οποία όμως δεν είναι η πραγματική της.

*Σημείωση* Στην συγκεκριμένη εφαρμογή οι διαταραχές εμφανίζονται τις χρονικές στιγμές  $t = 7, 14, 21s$  ώστε το σύστημα να έχει επανέλθει στην κατάσταση ισορροπίας του.



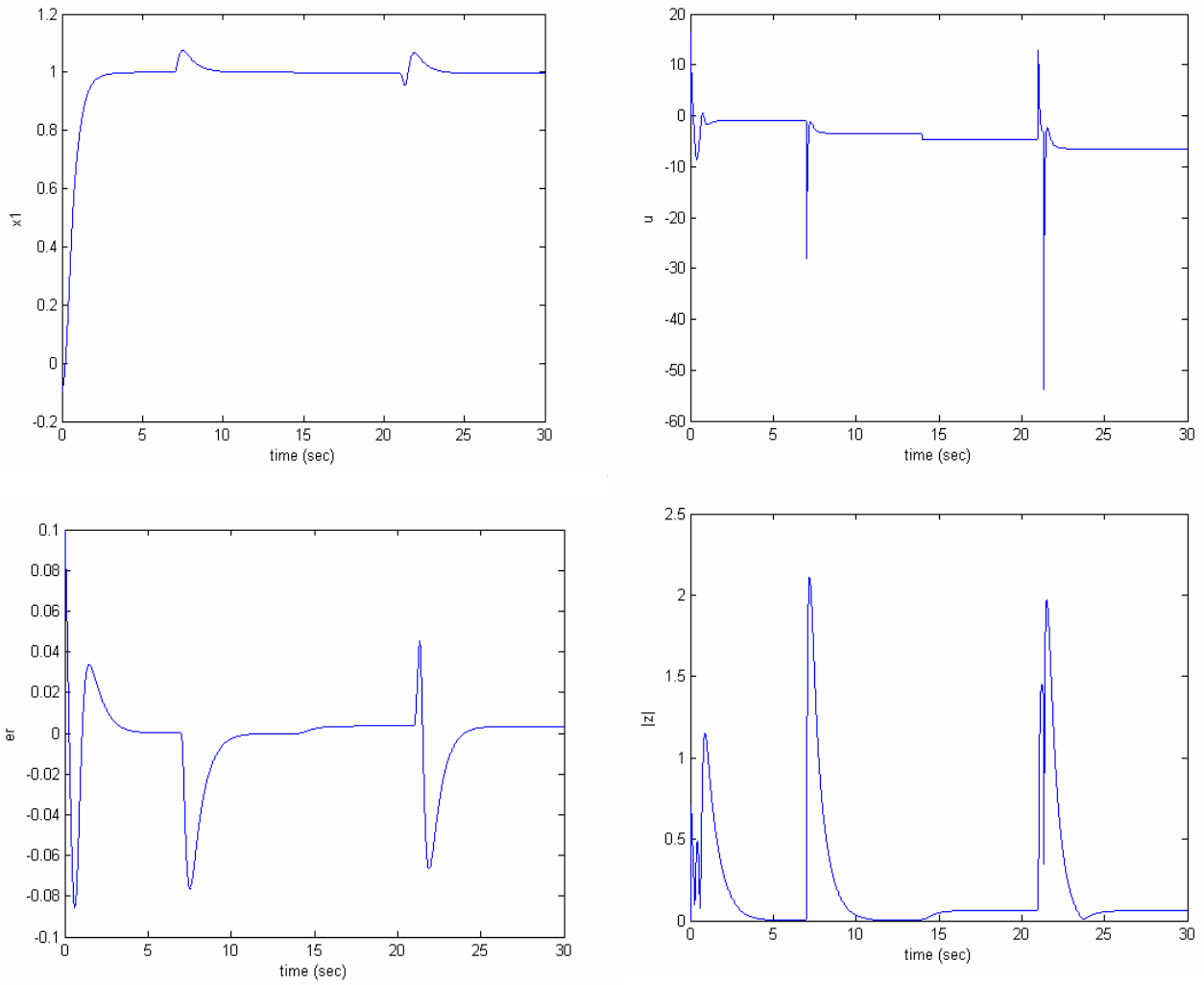
Σχήμα 11.  $x_1$ ,  $er = y_{r0} - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  για μεταβολή των αγνώστων παραμέτρων την  $t = 7s$ , διαταραχή φορτίου την  $t = 14s$  και 3-phase fault ([14]) την  $t = 21s$  όταν  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = \gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.01$



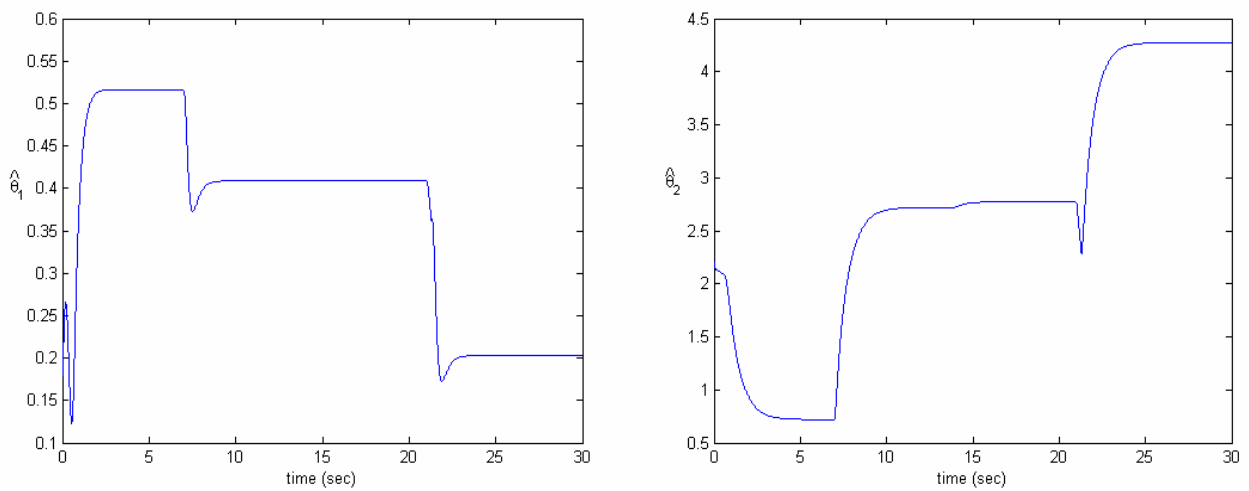
Σχήμα 12.  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  για μεταβολή των αγνώστων παραμέτρων την  $t = 7s$ , διαταραχή φορτίου την  $t = 14s$  και 3-phase fault  $t = 21s$  όταν  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = \gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.01$

Στα προηγούμενα παραδείγματα θεωρήσαμε αρχικές συνθήκες για το διάνυσμα  $x$  μηδέν και αρχικό σφάλμα στην εκτίμηση των αγνώστων παραμέτρων επίσης μηδέν. Στο σχήμα 13 βλέπουμε την απόκριση του συστήματος για ίδιες τιμές των παραμέτρων του ελεγκτή με την προηγούμενη εφαρμογή και αρχικές συνθήκες  $x(0)^T = [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0) \ x_4(0)]^T = [-0.1 \ 0.2 \ 0.1 \ -0.2]^T$  και  $\hat{\theta}_1(0) = 0.18, \hat{\theta}_2(0) = 2.2$ , ενώ στο σχήμα 14 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων.

Σημείωση Στην συγκεκριμένη εφαρμογή (όπως και πριν) οι διαταραχές εμφανίζονται τις χρονικές στιγμές  $t = 7, 14, 21s$  ώστε το σύστημα να έχει επανέλθει στην κατάσταση ισορροπίας του



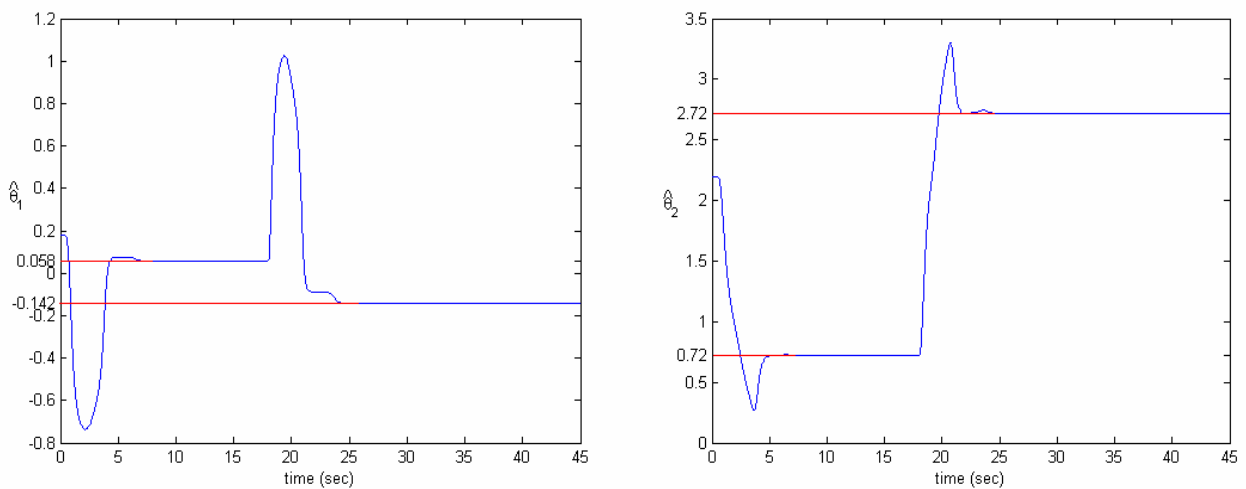
Σχήμα 13.  $x_1$ ,  $er = y_{r0} - x_1$ ,  $|z|$  και  $u$  για μεταβολή των αγνώστων παραμέτρων την  $t = 7s$ , διαταραχή φορτίου την  $t = 14s$  και 3-phase fault την  $t = 21s$  όταν  $\hat{\theta}_1(0) = 0.18$ ,  $\hat{\theta}_2(0) = 2.2$  και αρχικές συνθήκες  $x(0)^T = [x_1(0) \ x_2(0) \ x_3(0) \ x_4(0)]^T = [-0.1 \ 0.2 \ 0.1 \ -0.2]^T$



Σχήμα 14.  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  για μη μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα (2.2.2.2), αν επιλέξουμε για είσοδο αναφοράς ένα ημίτονο της μορφής  $A \sin(\omega_0 t)$  οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές. Στο σχήμα 15 βλέπουμε τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων για είσοδο αναφοράς  $0.2 \sin(1.1t)$  και παραμέτρους για τον ελεγκτή  $K_{\theta_1} = K_{\theta_2} = \Lambda_{\theta_1} = \Lambda_{\theta_2} = M_{\theta_1} = M_{\theta_2} = 0.02$  και  $\gamma_{\theta_1} = \gamma_{\theta_2} = 0.08$ , ενώ  $c_i = 6, 1 \leq i \leq 4$ . Υποθέτουμε επίσης ότι οι αρχικές εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων είναι  $\hat{\theta}_1(0) = 0.18$  και  $\hat{\theta}_2(0) = 2.2$ , δηλαδή περίπου τριπλάσιες των πραγματικών τιμών  $\theta_1$  και  $\theta_2$  αντίστοιχα και ότι την χρονική στιγμή  $t = 18s$  τα  $\theta_1$  και  $\theta_2$  αλλάζουν τιμή και γίνονται 2.72 και -0.142. Όπως αναμενόταν οι εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων συγκλίνουν στις πραγματικές τους τιμές.

**Παρατήρηση 5** Η ανάλυση της παραγράφου (2.2.2.2) έγινε όταν σχεδιάζουμε τον ελεγκτή μας να ακολουθεί μια ημιτονική είσοδο  $y_r(t)$ . Στο παράδειγμά μας όμως ο ελεγκτής σχεδιάστηκε ώστε να ακολουθεί το σήμα  $y_{r0}(t) + \delta_r(t)$  όπου το  $y_{r0}(t)$  είναι η έξοδος του συστήματος αναφοράς για είσοδο  $A \sin(\omega_0 t)$  και το  $\delta_r(t)$  είναι ένα σήμα που τείνει στο μηδέν ασυμπτωτικά. Επειδή όμως το  $y_{r0}(t)$  στην μόνιμη κατάσταση θα είναι και αυτό ημίτονο αλλά με άλλο μέτρο και φάση, η ανάλυση της ενότητας 2.2.2.2 ισχύει και σε αυτήν την περίπτωση.



Σχήμα 15.  $\hat{\theta}_1$  και  $\hat{\theta}_2$  όταν  $y_r(t) = 0.2 \sin(1.1t)$

#### **4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στην παρούσα ενότητα εφαρμόσαμε την μέθοδο του προσαρμοστικού ελέγχου backstepping για τον έλεγχο του αεροστροβίλου στο σύστημα της τουρμπογεννήτριας. Η μέθοδος αυτή εφαρμόστηκε σε ένα τέταρτης τάξης μη γραμμικό μοντέλο. Η μέθοδος δίνει εξαιρετικά αποτελέσματα στην περίπτωση ρύθμισης του σημείου λειτουργίας, παρά την παρουσία των αγνώστων παραμέτρων, το σφάλμα στην εκτίμηση των οποίων μπορεί να οδηγήσει το σύστημα ακόμα και σε αστάθεια. Επίσης, στην περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς ο ελεγκτής δίνει γρήγορη και ομαλή

απόκριση, και ταχύτατη εξουδετέρωση μεγάλων διαταραχών και ακραίων μεταβολών στις τιμές των αγνώστων παραμέτρων. Τέλος μελετήθηκε η δυνατότητα σύγκλισης των αγνώστων παραμέτρων στις πραγματικές τους τιμές με τον προσαρμοστικό νόμο του ελεγκτή.

### 5. ΕΛΕΓΚΤΗΣ 3 ΟΡΩΝ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ

Στην βιβλιογραφία τα πιο ευρέως χρησιμοποιούμενα σχήματα ελέγχου είναι εναλλακτικές μορφές του κλασικού PID ελεγκτή. Στο Σχήμα 16, παρουσιάζονται τρία εναλλακτικά σχήματα ελέγχου που έχουν χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο ασταθών συστημάτων πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου. Οι τρεις αυτοί ελεγκτές είναι ο PID, P-PID και ο PDF με τα αντίστοιχα προ-φίλτρα  $G_{F,PID}$ ,  $G_{F,P-PID}$ ,  $G_{F,PDF}$ . Τα τρία αυτά σχήματα ελέγχου είναι ισοδύναμα όταν

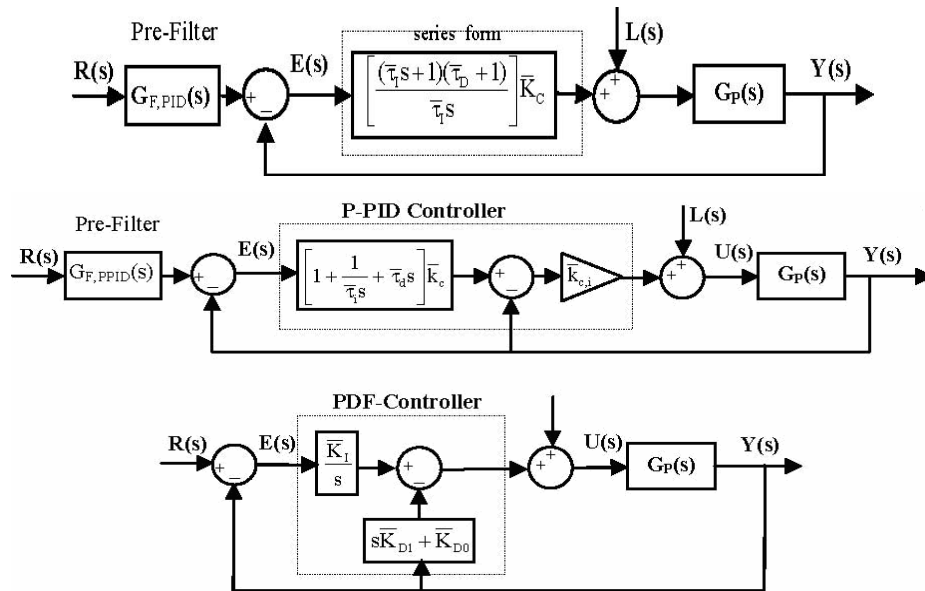
$$\bar{K}'_C = \bar{K}_C \frac{\bar{\tau}_I + \bar{\tau}_D}{\bar{\tau}_I} = (1 + \bar{k}_c) \bar{k}_{c,i} = \bar{K}_{D0}, \bar{\tau}'_I = \bar{\tau}_I + \bar{\tau}_D = \bar{\tau}_I \frac{1 + \bar{k}_c}{\bar{k}_c} = \frac{\bar{K}_{D0}}{\bar{K}'_I}, \bar{\tau}'_D = \frac{\bar{\tau}_D \bar{\tau}_I}{\bar{\tau}_I + \bar{\tau}_D} = \bar{\tau}_d \frac{1 + \bar{k}_c}{\bar{k}_c} = \frac{\bar{K}_{D0}}{\bar{K}'_{D1}} \quad (5.1)$$

$$G_{P,PID}(s) = \frac{1}{(s\bar{\tau}_I + 1)(s\bar{\tau}_D + 1)} \quad \text{και} \quad G_{P,P-PID}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{\tau}_I \bar{\tau}_d + s\bar{\tau}_I + 1} \quad (5.2)$$

όπου  $\bar{K}'_C$ ,  $\bar{\tau}'_I$  και  $\bar{\tau}'_D$  είναι οι παράμετροι του κλασικού PID ελεγκτή στην παράλληλη μορφή του. Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου που φαίνεται στο Σχήμα 16, όταν χρησιμοποιηθούν τα προ-φίλτρα που προτείνονται από την σχέση (5.2) είναι

$$G_{CL}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\bar{K}'_C G_P(s)}{\bar{\tau}_I s + (\bar{\tau}_I s + 1)(\bar{\tau}_D s + 1) \bar{K}'_C G_P(s)} \quad (5.3)$$

Από την σχέση (5.3) γίνεται φανερό ότι το προτεινόμενο σχήμα ελέγχου δεν συνεισφέρει στα μηδενικά του συστήματος κλειστού βρόχου και έτσι αναμένεται ότι δεν θα χειροτερέψει το ποσοστό υπερέψωσης της βηματικής απόκρισης του κλειστού συστήματος.



Σχήμα 16. Τρεις εναλλακτικές μορφές PID ελεγκτών

Όπως είναι γνωστό, οι ιδιότητες που αφορούν την ευρωστία του κλειστού συστήματος δεν εξαρτώνται από την επιλογή του προ-φίλτρου (αν βέβαια το προ-φίλτρο είναι ευσταθές). Από το σχήμα 16, είναι επίσης φανερό ότι στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου (regulatory control) οι τρεις ελεγκτές είναι ταυτόσημοι αν οι παράμετροί τους επιλεγούν όπως προτείνεται από την (5.1)



ανεξαρτήτως αν χρησιμοποιηθεί προ-φίλτρο ή όχι. Για το λόγο αυτό, στην ανάλυση που ακολουθεί, η παρουσία του προ-φίλτρου δεν λαμβάνεται υπόψη και τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται γενικεύονται για όλους τους τύπους PID ελεγκτή που παρουσιάστηκαν παραπάνω.

Στην συνέχεια θα αναλύσουμε την συμπεριφορά των PI και PID ελεγκτών στην περίπτωση όπου το σύστημα υπό έλεγχο είναι ασταθές σύστημα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου. Στην περίπτωση αυτή, το υπό έλεγχο σύστημα περιγράφεται από την συνάρτηση μεταφοράς

$$G_p(s) = \frac{\bar{K} \exp(-\bar{d}s)}{\bar{T}s - 1} \quad (5.4)$$

όπου  $\bar{K}$ ,  $\bar{T}$ , και  $\bar{d}$  είναι το κέρδος, η ασταθής σταθερά χρόνου και η καθυστέρηση χρόνου του ασταθούς συστήματος αντίστοιχα. Για να διευκολυνθεί η ανάλυση που ακολουθεί αλλά και για να υπάρχει δυνατότητα συγκρίσεων, όλες οι παράμετροι του συστήματος και του ελεγκτή στην συνέχεια θα παρουσιάζονται κανονικοποιημένες ως προς την ασταθή σταθερά χρόνου του συστήματος  $\bar{T}$  και ως προς το κέρδος του συστήματος  $\bar{K}$ . Οι κανονικοποιημένες παράμετροι φαίνονται στον πίνακα 3.

Αρχικές Παράμετροι	Κανονικοποιημένες Παράμετροι
$\bar{T}$	$T (=1)$
$\bar{d}$	$d = \bar{d} / \bar{T}$
$\bar{\tau}_I$	$\tau_I = \bar{\tau}_I / \bar{T}$
$\bar{\tau}_D$	$\tau_D = \bar{\tau}_D / \bar{T}$
$\bar{\omega}$	$\omega = \bar{\omega} T$
$\bar{K}_C$	$K_C = \bar{K} \bar{K}_C$
$\bar{K}$	$K (=1)$
$\bar{K}_D$	$K_D = \bar{K} \bar{K}_D$
$\bar{K}_I$	$K_I = \bar{K}_I \bar{K} \bar{T}$

Πίνακας 3. Κανονικοποιημένες παράμετροι.

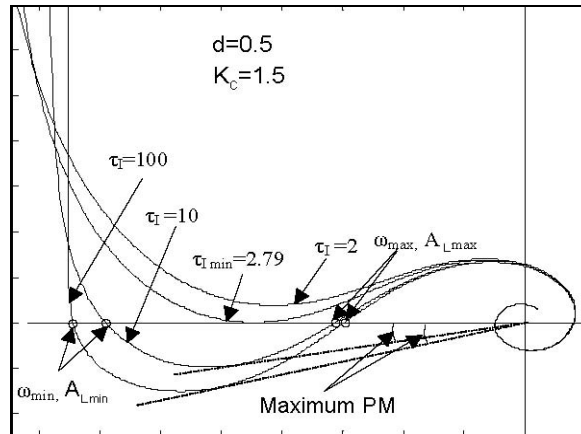
Η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου ενός ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου ελεγχόμενου από PI/PID ελεγκτή είναι

$$G_{L,PI}(s) = \frac{K_C(\tau_I s + 1)}{\tau_I s(s-1)} \exp(-ds) \quad \text{και} \quad G_{L,PID}(s) = \frac{K_C(\tau_I s + 1)(\tau_D s + 1)}{\tau_I s(s-1)} \exp(-ds) \quad (5.5)$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις μεταφοράς θα αποτελέσουν την βάση για τον καθορισμό των μεθόδων βαθμονόμησης που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια.

## **6. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ ΚΛΕΙΣΤΟΥ ΒΡΟΧΟΥ**

### **6.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ PI ΕΛΕΓΚΤΗ**



Σχήμα 17. Διάγραμμα Nyquist της  $G_{L,PI}(s)$  για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\tau_I$ .

Βασιζόμενοι στην  $G_{L,PI}$  της σχέσης (5.5), η φάση και το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς βρόχου ενός ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης ελεγχόμενου από PID ελεγκτή δίνονται από τις σχέσεις

$$\phi_L(\omega) = -3\pi/2 - d\omega + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(\tau_I\omega) \quad (6.1)$$

$$A_L(\omega) = |G_{L,PI}(j\omega)| = K_C \frac{\sqrt{1 + \tau_I^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} \frac{1}{\tau_I \omega} \quad (6.2)$$

αντίστοιχα. Στο σχήμα 17, απεικονίζονται τα διαγράμματα Nyquist της  $G_{L,PI}(s)$  για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\tau_I$ . Από το σχήμα αυτό γίνεται φανερό ότι για συγκεκριμένη τιμή του  $d$  και για τιμές του  $\tau_I$  μεγαλύτερες από μια κρίσιμη τιμή  $\tau_{I,min}$  (η οποία θα καθοριστεί στην συνέχεια), υπάρχουν δύο σημεία τομής (crossover points) του διαγράμματος Nyquist με τον αρνητικό πραγματικό άξονα. Από το σχήμα 17 είναι προφανές ότι μόνο όταν υπάρχουν δύο τέτοια σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα είναι δυνατόν να βρεθεί η τιμή της ενίσχυσης  $K_C$  που θα τοποθετήσει τα δύο σημεία εκατέρωθεν του σημείου  $(-1,0)$ . Από το κριτήριο του Nyquist προκύπτει ότι αυτή είναι και η προϋπόθεση για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθές.

Έστω ότι  $\omega_{min}$  η μικρότερη και  $\omega_{max}$  η μεγαλύτερη συχνότητα που αντιστοιχεί στα δύο σημεία τομής (όταν αυτά υπάρχουν, δηλαδή όταν  $\tau_I > \tau_{I,min}$ ). Οι δύο αυτές συχνότητες αποκαλούνται κρίσιμες συχνότητες του συστήματος. Από την σχέση (6.2), οι κρίσιμες συχνότητες  $\omega_{min}$  και  $\omega_{max}$  καθορίζουν τα πλάτη  $A_{L,min}$  και  $A_{L,max}$  της συνάρτησης μεταφοράς βρόχου στα αντίστοιχα σημεία τομής. Με βάση τα παραπάνω είναι φανερό ότι υπάρχουν δύο κρίσιμα κέρδη  $K_{min} = A_{min}^{-1}$  και  $K_{max} = A_{max}^{-1}$  που καθορίζουν το μέγεθος της αβεβαιότητας του κέρδους  $K$  του συστήματος για το οποίο το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές. Προφανώς όσο μεγαλύτερη είναι η περιοχή  $(K_{min}, K_{max})$  τόσο πιο εύρωστο είναι το κλειστό σύστημα όσο αναφορά την αβεβαιότητα στο κέρδος.

Από την μορφή του διαγράμματος Nyquist όταν μεταβάλλεται το  $\tau_I$ , παρατηρούμε ότι καθώς μειώνεται το  $\tau_I$  η περιοχή ευστάθειας μικραίνει, αρχίζοντας από την μέγιστη περιοχή που επιτυγχάνεται καθώς  $\tau_I \rightarrow \infty$ , (που αντιστοιχεί σε P ελεγκτή) και καταλήγοντας σε ένα μοναδικό σημείο όταν  $\tau_I = \tau_{I,\min}$ . Είναι επίσης γνωστό ότι η περιοχή ευστάθειας μειώνεται με την αύξηση της καθυστέρησης  $d$ . Όπως έχει αποδειχθεί στην [15] για  $d > 1$  το σύστημα δεν είναι δυνατόν να ευσταθοποιηθεί με ΡΙ ελεγκτή.

Μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα που παρουσιάζουν τα ασταθή συστήματα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου είναι ότι για δεδομένες τιμές των  $d$  και  $\tau_I$  υπάρχει ένα σημείο του διαγράμματος Nyquist αντιστοιχεί στο σημείο μέγιστης φάσης  $\phi_{L,\max}(d, \tau_I)$ . Αν  $\phi_{L,\max}(d, \tau_I) > -\pi$ , τότε είναι πάντοτε δυνατόν να βρεθεί κατάλληλη τιμή του κέρδους  $K_C$  που καθιστά το κλειστό σύστημα ευσταθές. Η συχνότητα  $\omega_p$  για την οποία η φάση  $\phi_L(\omega)$  μεγιστοποιείται, δίνεται από την μοναδική θετική και πραγματική ρίζα της εξίσωσης  $\frac{d\phi_L(\omega)}{d\omega} = 0$  η οποία μετά από υπολογισμούς

προκύπτει

$$\omega_p = \sqrt{\frac{[\tau_I^2(1-d) + \tau_I - d] + \sqrt{[\tau_I^2(1-d) + \tau_I - d]^2 + 4d\tau_I^2(1 + \tau_I - d)}}{2d\tau_I^2}} \quad (6.3)$$

αντικαθιστώντας  $\omega = \omega_p$  στην σχέση (6.1) μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη φάση  $\phi_{L,\max}(\omega) = \phi_L(\omega_p)$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του περιθωρίου φάσης  $PM = \phi_L(\omega_G) + \pi$ , όπου  $\omega_G$  είναι η συχνότητα για την οποία ισχύει  $|G_{L,PI}(\omega_G)| = 1$ , μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το μέγιστο περιθώριο φάσης για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $d$  και  $\tau_I$ , επιτυγχάνεται αν διαλέξουμε το κέρδος του ελεγκτή  $K_C$  έτσι ώστε  $\omega_G = \omega_p$ , δηλαδή

$$K_C = \tau_I \omega_p \sqrt{\frac{1 + \omega_p^2}{1 + \tau_I^2 \omega_p^2}} \quad (6.4)$$

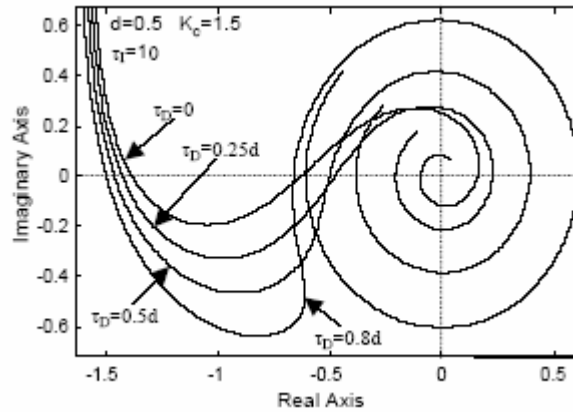
όπου η συχνότητα  $\omega_p$  δίνεται από την σχέση (6.3). Με αυτήν την επιλογή για το κέρδος του ελεγκτή  $K_C$  το μέγιστο περιθώριο φάσης που επιτυγχάνεται είναι

$$PM(d, \tau_I) = -\frac{\pi}{2} - d\omega_p + \tan^{-1}(\omega_p) + \tan^{-1}(\tau_I \omega_p) \quad (6.5)$$

το μεγαλύτερο περιθώριο φάσης  $PM_{\max}$  επιτυγχάνεται με Ρ ελεγκτή. Από τις σχέσεις (6.3) και (6.5) για  $\tau_I \rightarrow \infty$ , προκύπτει

$$PM_{\max}(d) = -d\sqrt{\frac{1}{d} - 1} + \tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{d} - 1}\right) \quad (6.6)$$

## 6.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΓΙΑ PID ΕΛΕΓΚΤΗ



Σχήμα 18. Διάγραμμα Nyquist της  $G_{L,PID}(s)$  για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\tau_D$ .

Στο σχήμα 18 φαίνεται το διάγραμμα Nyquist της συνάρτησης μεταφοράς βρόχου  $G_{L,PID}(s)$  για διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\tau_D$ . Από τα σχήματα, είναι φανερό ότι η περιοχή ευστάθειας μεγαλώνει με την αύξηση της παραμέτρου  $\tau_D$  για μικρές τιμές του  $\tau_D$ , για μεγάλα  $\tau_D$  όμως, η περιοχή αυτή μικραίνει και καταλήγει σε ένα μοναδικό σημείο όταν το  $\tau_D$  είναι ίσο με μια τιμή έστω  $\tau_{D,max}$ . Στην πράξη αυτή η τιμή της παραμέτρου  $\tau_D$  δεν παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον, αφού μεγάλες τιμές του  $\tau_D$  δεν έχουν θετικά αποτελέσματα στον έλεγχο ασταθών συστημάτων πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου, εκτός του ότι αυξάνουν το περιθώριο φάσης. Μεγάλο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει η τιμή της παραμέτρου  $\tau_D$ , έστω  $\tau_{D,max PI}$ , για την οποία τα περιθώρια φάσης και κέρδους που επιτυγχάνονται με χρήση PID ελεγκτή είναι μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα περιθώρια φάσης και κέρδους που επιτυγχάνονται με χρήση PI ελεγκτή.

Όπως προαναφέρθηκε, τα ασταθή συστήματα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου παρουσιάζουν δύο κρίσιμα κέρδη  $K_{min}$  και  $K_{max}$  και το κλειστό σύστημα είναι ευσταθές για κέρδη του ελεγκτή στην περιοχή  $(K_{min}, K_{max})$ . Ορίζονται επομένως, για αυτά τα συστήματα δύο περιθώρια κέρδους, ένα που δείχνει την μέγιστη αύξουσα και ένα που δείχνει την μέγιστη φθίνουσα αβεβαιότητα του κέρδους  $K$  που μπορεί να υποστεί το κλειστό σύστημα. Ορίζουμε επομένως, δύο περιθώρια κέρδους, το αυξητικό περιθώριο κέρδους και το μειωτικό περιθώριο κέρδους,  $GM_{inc}$  και  $GM_{dec}$  αντίστοιχα, τα οποία δίνονται από τις σχέσεις

$$GM_{inc} = \frac{K_{max}}{K_C} \text{ και } GM_{dec} = \frac{K_C}{K_{min}} \quad (6.7)$$

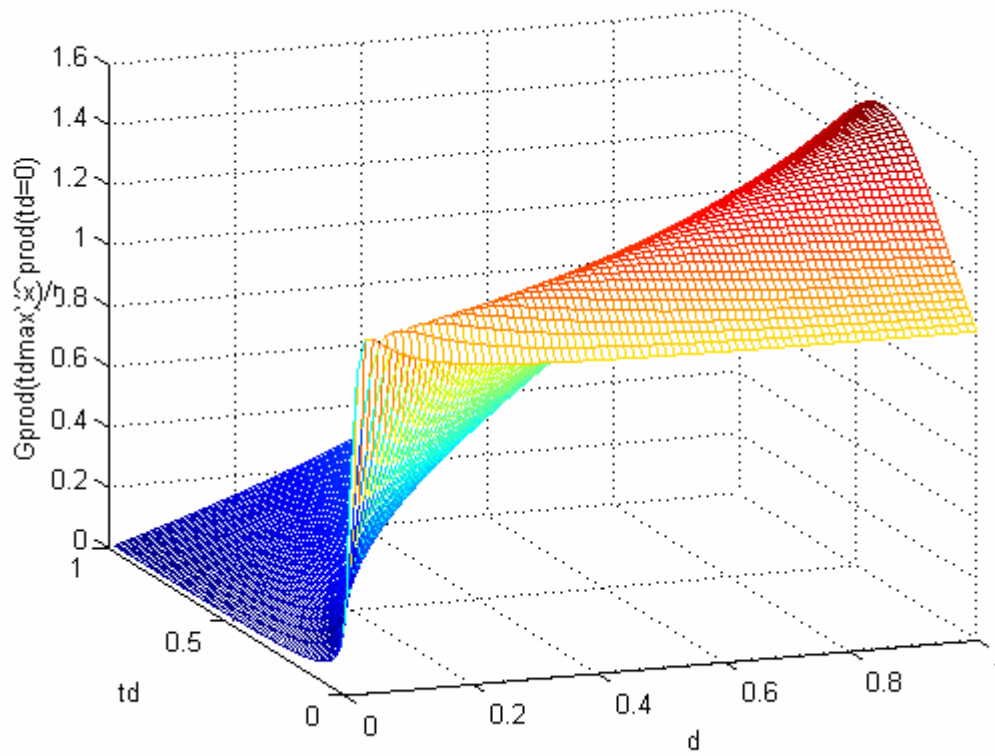
Με την προϋπόθεση ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα στην φάση, είναι προφανές ότι το κλειστό σύστημα παραμένει ευσταθές όταν

$$\frac{1}{GM_{dec}} < K < GM_{inc} \quad (6.8)$$

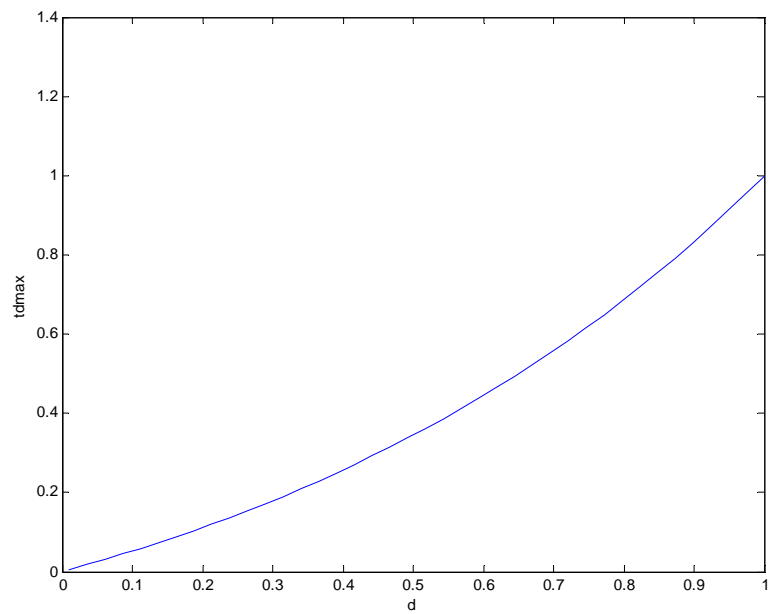
Ορίζεται επίσης το γινόμενο των περιθωρίων κέρδους  $GM_{prod} = GM_{inc} GM_{dec} = \frac{K_{max}}{K_{min}}$  το οποίο είναι ένα μέτρο της περιοχής ευστάθειας και μάλιστα ανεξάρτητο από το κέρδος του ελεγκτή  $K_C$ .

Από το σχήμα 17, είναι φανερό ότι όλα τα περιθώρια φάσης και κέρδους αυξάνουν με την αύξηση της παραμέτρου  $\tau_I$  και λαμβάνουν την μέγιστη τιμή τους όταν  $\tau_I \rightarrow \infty$ . Για  $\tau_I \rightarrow \infty$  προκύπτει εύκολα (λεπτομέρειες στη αναφορά [15]) ότι  $K_{min} = 1$ . Έτσι, για δεδομένη τιμή του κέρδους του ελεγκτή  $K_C$ , για τον υπολογισμό όλων των περιθωρίων κέρδους χρειάζεται να υπολογίσουμε μόνο το  $K_{max}$  το οποίο για  $K_{min} = 1$  είναι ίσο με το γινόμενο των περιθωρίων κέρδους  $GM_{prod}$ . Στο σχήμα 19 φαίνεται η συνάρτηση  $GM_{prod,PID}(d, \tau_D) / GM_{prod,PID}(d, 0)$  για  $\tau_I \rightarrow \infty$ . Από το σχήμα 19 παρατηρούμε ότι για δεδομένη τιμή της καθυστέρησης χρόνου  $d$  υπάρχει μια μέγιστη τιμή για του  $\tau_D$  για την οποία η συνάρτηση αυτή είναι μεγαλύτερη της μονάδας για όλα τα  $\tau_D$  που είναι μικρότερα από αυτή την τιμή. Λαμβάνοντας τη μοναδιαία σταθμική επιφάνεια της συνάρτησης  $GM_{prod,PID}(d, \tau_D) / GM_{prod,PID}(d, 0)$  προκύπτει η συνάρτηση  $\tau_D(d)$  για την οποία τα περιθώρια κέρδους που επιτυγχάνονται με PID ελεγκτή είναι πάντοτε μεγαλύτερα από αυτά που επιτυγχάνονται με PI ελεγκτή. Δεδομένου του ότι το περιθώριο φάσης που επιτυγχάνεται με PID ελεγκτή είναι πάντοτε μεγαλύτερο από αυτό που επιτυγχάνεται με PI ελεγκτή η συνάρτηση  $\tau_D(d)$  που περιγράφτηκε παραπάνω είναι ίση με  $\tau_{D,max PI}(d)$ . Η συνάρτηση αυτή φαίνεται στο σχήμα 20. Επίσης, για να είναι δυνατή η πραγματοποίηση συγκρίσεων, στο σχήμα 21 έχει σχεδιαστεί η συνάρτηση  $GM_{prod,PID}(d, \tau_I, \tau_D = \tau_{D,max PI}) - GM_{prod,PID}(d, \tau_I, 0)$ , από όπου και παρατηρούμε ότι πράγματι η συνάρτηση αυτή είναι πάντοτε θετική. Τέλος, χρησιμοποιώντας εργαλεία βελτιστοποίησης του λογισμικού Matlab με σκοπό την ελαχιστοποίηση του μέγιστου σχετικού σφάλματος, η συνάρτηση  $\tau_{D,max PI}(d)$  μπορεί να προσεγγιστεί από της απλής μορφής συνάρτηση

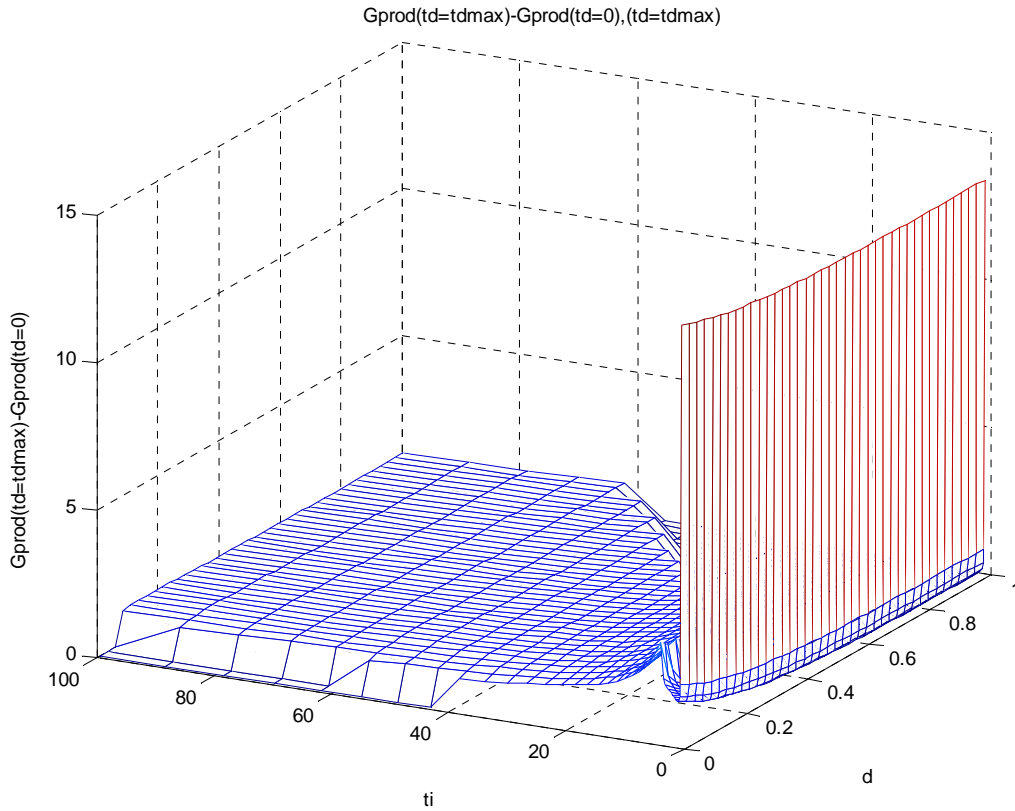
$$\hat{\tau}_{D,max PI}(d) = d(0.5 + 0.2779d + 0.2171d^2) \quad (6.9)$$



Σχήμα 19.  $GM_{prod,PID}(d, \tau_D) / GM_{prod,PID}(d, 0)$  για  $\tau_I \rightarrow \infty$



Σχήμα 20.  $\tau_{D,max PI}(d)$



Σχήμα 21.  $GM_{prod,PID}(d, \tau_I, \tau_D = \tau_{D,max PI}) - GM_{prod,PID}(d, \tau_I, 0)$

Βασισμένοι στην συνάρτηση μεταφοράς  $G_{L,PID}(s)$  της σχέσης (5.5), η φάση και το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς βρόχου ενός ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου ελεγχόμενο από PID ελεγκτή δίνονται από τις σχέσεις

$$\phi_{L,PID}(\omega) = -3\frac{\pi}{2} - d\omega + \tan^{-1}(\omega) + \tan^{-1}(\tau_I\omega) + \tan^{-1}(\tau_D\omega) \quad (6.10)$$

$$A_{L,PID}(\omega) = |G_{L,PID}(j\omega)| = K_C \sqrt{\frac{(1 + \tau_I^2\omega^2)(1 + \tau_D^2\omega^2)}{1 + \omega^2}} \frac{1}{\tau_I\omega} \quad (6.11)$$

Η συχνότητα  $\omega_p$ , για την οποία επιτυγχάνεται η μέγιστη φάση προκύπτει για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $d$ ,  $\tau_I$  και  $\tau_D$  από την λύση της εξίσωσης  $\frac{d\phi_{L,PID}(\omega)}{d\omega} = 0$ , η οποία είναι

$$-d + \frac{1}{1 + \omega^2} + \frac{\tau_I}{1 + \tau_I^2\omega^2} + \frac{\tau_D}{1 + \tau_D^2\omega^2} = 0 \quad (6.12)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική τρίτης τάξης ως προς  $\omega^2$ , με μια μόνο αποδεκτή (θετική και πραγματική) ρίζα  $\omega_p$ . Ανάλογα με την περίπτωση του PI ελεγκτή, το μέγιστο περιθώριο φάσης επιτυγχάνεται όταν  $\omega_p = \omega_G$ , δηλαδή όταν το κέρδος του ελεγκτή επιλεγεί σύμφωνα με την σχέση

$$K_C = \tau_I \omega_p \sqrt{\frac{1 + \omega_p^2}{(1 + \tau_I^2 \omega_p^2)(1 + \tau_D^2 \omega_p^2)}} \quad (6.13)$$

όπου  $\omega_G$  είναι η συχνότητα όπου ισχύει  $A_{L,PID}(\omega_G) = 1$ .

Το περιθώριο φάσης του συστήματος για αυτήν την επιλογή του  $K_C$ , δίνεται από την σχέση

$$PM(d, K_C, \tau_I, \tau_D) = -\frac{\pi}{2} - d\omega_p + \tan^{-1}(\omega_p) + \tan^{-1}(\tau_I \omega_p) + \tan^{-1}(\tau_D \omega_p) \quad (6.14)$$

Αυτό το περιθώριο φάσης για δεδομένες τιμές των παραμέτρων  $d$  και  $\tau_D$ , λαμβάνει την μέγιστη τιμή του όταν  $\tau_I \rightarrow \infty$  και δίνεται από την σχέση

$$PM_{\max}(d, \tau_D) = -d\omega_{p,\max} + \tan^{-1}(\omega_{p,\max}) + \tan^{-1}(\tau_D \omega_{p,\max}) \quad (6.15)$$

όπου η συχνότητα  $\omega_{p,\max}$  προκύπτει από την εξίσωση (6.12) για  $\tau_I \rightarrow \infty$  και δίνεται από την σχέση

$$\omega_{p,\max} = \sqrt{\frac{[\tau_D^2(1-d) + \tau_D - d] + \sqrt{[\tau_D^2(1-d) + \tau_D - d]^2 + 4\tau_D^2(1 + \tau_D - d)}}{2d\tau_D^2}} \quad (6.16)$$

## **7. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΠΙ ΕΛΕΓΚΤΗ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ**

Για την εφαρμογή όλων των μεθόδων βαθμονόμησης που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον κλασικό ΠΙ ελεγκτή με το αντίστοιχο προ-φίλτρο που δίνεται από την πρώτη σχέση της (5.2) για  $\bar{\tau}_D = \tau_D = 0$  και  $\bar{\tau}_I = \tau_I$ . Με αυτή την επιλογή για το προ-φίλτρο, η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου ελεγχόμενο από ΠΙ ελεγκτή δίνεται από την σχέση

$$G_{CL,PI}(s) = \frac{\exp(-ds)}{\tau_I s(s-1)K_C^{-1} + (\tau_I s + 1)\exp(-ds)} \quad (7.1)$$

Το κυριότερο χαρακτηριστικό των παρακάτω μεθόδων βαθμονόμησης είναι ότι η επιλογή του κέρδους  $K_C$  του ελεγκτή γίνεται με βάση την σχέση (6.4). Με αυτήν την επιλογή για το  $K_C$  εξασφαλίζουμε το μέγιστο περιθώριο φάσης για δεδομένη τιμή της παραμέτρου  $\tau_I$ . Έχοντας επιλέξει το κέρδος του ελεγκτή  $K_C$ , αποκλειστικά και μόνο για να εξασφαλίσουμε τις προδιαγραφές ευρωστίας του κλειστού συστήματος, μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή της παραμέτρου  $\tau_I$  ώστε να εξασφαλίσουμε την επιθυμητή συμπεριφορά του κλειστού συστήματος στο πεδίο του χρόνου.

### **7.1 ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΠΙ ΕΛΕΓΚΤΗ**

Ο πιο απλός τρόπος επιλογής της παραμέτρου  $\tau_I$  του ελεγκτή είναι να επιλεγεί τυχαία με το μόνο περιορισμό να ικανοποιεί την συνθήκη για να είναι το κλειστό σύστημα ευσταθοποίησιμο,



δηλαδή  $\tau_I > \tau_{I,\min}$ . Λόγω του ότι για τον υπολογισμό του  $\tau_{I,\min}$  πρέπει να γίνει χρήση επαναληπτικών αλγορίθμων (για λεπτομέρειες αναφορά [15]), προτείνεται εδώ η εξής προσέγγιση για την τιμή  $\tau_{I,\min}$  η οποία εξαρτάται μόνο από την καθυστέρηση χρόνου του συστήματος  $d$ . Η προσέγγιση αυτή δίνεται από την σχέση

$$\hat{\tau}_{I,\min}(d) = \frac{0.0029 - 0.0682\sqrt{d} + 1.4941d}{(1.003 - d)^2} \quad (7.2)$$

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε την παράμετρο και ως  $\tau_I > 1.014\hat{\tau}_{I,\min}(d)$  ([15]).

Η προσέγγιση αυτή προέκυψε κάνοντας χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε το μέγιστο σχετικό σφάλμα  $\frac{\Delta \tau_{I,\min}}{\tau_{I,\min}}$ . Σημειώνουμε επίσης ότι το μέγιστο σχετικό σφάλμα αυτής της προσέγγισης είναι πάντα μικρότερο του 1.4%. Πρέπει να σημειώσουμε τέλος, ότι όσο μεγαλύτερο επιλεγεί το  $\tau_I$  τόσο πιο εύρωστο γίνεται το κλειστό σύστημα ενώ ταυτόχρονα γίνεται πιο αργό.

## 7.2 ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ

Σε αυτήν την μέθοδο βαθμονόμησης χρησιμοποιείται η παράμετρος  $\tau_I$  σαν ελεύθερη παράμετρος επιλογής της συμπεριφοράς του συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Για κριτήριο απόκρισης στο πεδίο του χρόνου χρησιμοποιούνται η σταθερά απόσβεσης  $\zeta$  και η ιδιοσυχνότητα

$\omega_0 = \frac{1}{\tau_e}$  ενός συστήματος δεύτερης τάξης που προσεγγίζει την απόκριση του κλειστού ασταθούς

συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου. Είναι γνωστό ότι για ένα σύστημα δεύτερης τάξης, όσο πιο μικρή επιλεγεί η τιμή της παραμέτρου  $\zeta$  τόσο πιο γρήγορη είναι η απόκριση του συστήματος, ενώ ταυτόχρονα γίνεται πιο ταλαντωτική. Επίσης είναι γνωστό ότι όσο πιο μεγάλο επιλεγεί το  $\zeta$  τόσο πιο εύρωστο είναι το κλειστό σύστημα και ταυτόχρονα πιο αργό. Αντίστοιχα

ισχύουν και για τη ιδιοσυχνότητα του συστήματος δεύτερης τάξης  $\omega_0 = \frac{1}{\tau_e}$ .

Στην περίπτωση βέβαια των ασταθών συστημάτων πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου, το κλειστό σύστημα που προκύπτει δεν είναι δεύτερης τάξης. Για τον λόγω αυτό, στην συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από την σχέση (7.1) αντικαθιστούμε τον εκθετικό όρο στον παρονομαστή με την προσέγγιση πρώτης τάξης  $\exp(-ds) = 1 - ds$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει το κλειστό σύστημα δεύτερης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς

$$G_{CL,PI}(s) = \frac{\exp(-ds)}{\tau_I(K_C^{-1} - d)s^2 + [\tau_I(1 - K_C^{-1}) - d]s + 1} \quad (7.3)$$

Η σχέση (7.3) μπορεί να γραφτεί στην μορφή ενός συστήματος δεύτερης τάξης, δηλαδή

$$G_{CL,PI}(s) = \frac{\exp(-ds)}{\tau_e s^2 + 2\zeta\tau_e s + 1} \quad (7.4)$$

όπου

$$\tau_e = \sqrt{\tau_I (K_C^{-1} - d)} \quad (7.5)$$

και

$$\zeta = \frac{\tau_I (1 - K_C^{-1}) - d}{2\sqrt{\tau_I (K_C^{-1} - d)}} \quad (7.6)$$

Επομένως η παράμετρος του ελεγκτή  $\tau_I$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε στην σχέση (7.6) να έχουμε την επιθυμητή τιμή της παραμέτρου  $\zeta$ , έστω  $\zeta_{des}$  αυτή η συγκεκριμένη τιμή του  $\zeta$ , ή έτσι ώστε στην σχέση (7.5) να έχουμε την επιθυμητή τιμή της παραμέτρου  $\tau_e$ , έστω  $\tau_{e,des}$ . Άρα, το  $\tau_I$  προκύπτει από την επίλυση του συστήματος που περιλαμβάνει τις σχέσεις (6.3), (6.4) και (7.6) για την περίπτωση που επιλέγουμε ως προδιαγραφή σχεδίασης την τιμή του  $\zeta$ , ενώ για την περίπτωση που θέλουμε μια επιθυμητή τιμή για το  $\tau_e$ , το  $\tau_I$  προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (6.3), (6.4) και (7.5). Τα δύο αυτά συστήματα εξισώσεων είναι μη γραμμικά και η λύση τους ως προς το  $\tau_I$  δεν μπορεί να εκφραστεί με αναλυτική σχέση. Για τον λόγο αυτό προτείνεται ο παρακάτω αλγόριθμος σταθερού σημείου, για τον προσδιορισμό της τιμής της παραμέτρου  $\tau_I$ .

#### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ

**Βήμα 1:** Ξεκινάμε με μία αρχική εκτίμηση για το  $\tau_I$  μεγαλύτερη από  $\tau_{I,\min}$ , π.χ.  $\tau_I = 2\tau_{I,\min}$ .

**Βήμα 2:** Για την τιμή αυτή του  $\tau_I$  υπολογίζουμε την τιμή του  $K_C$  από την σχέση (6.4) κάνοντας χρήση της σχέσης (6.3) για τον υπολογισμό της συχνότητας μέγιστου περιθωρίου κέρδους  $\omega_p$ .

**Βήμα 3:** Αν η προδιαγραφή σχεδίασης είναι το  $\zeta_{des}$ , επιλέγουμε την νέα τιμή του  $\tau_I$  από την λύση της εξίσωσης (7.6) ως προς  $\tau_I$ , η οποία δίνεται από την μέγιστη ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\tau_I^2 (1 - K_C^{-1})^2 - \tau_I [4\zeta_{des}^2 (K_C^{-1} - d) + 2d(1 - K_C^{-1})] + d^2 = 0 \quad (7.7)$$

Αντίστοιχα, αν η προδιαγραφή σχεδίασης είναι το  $\tau_{e,des}$ , επιλέγουμε την νέα τιμή του  $\tau_I$  από την λύση της εξίσωσης (7.5) ως προς  $\tau_I$ , δηλαδή

$$\tau_I = \frac{\tau_{e,des}^2}{K_C^{-1} - d} \quad (7.8)$$

**Βήμα 4:** Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 μέχρι να επέλθει σύγκλιση.

Ο παραπάνω αλγόριθμος συγκλίνει πάντα στις τιμές του  $\tau_I$  και  $K_C$  που ικανοποιούν τις σχέσεις (6.4) και (7.7) στην περίπτωση που επιλέγουμε την επιθυμητή τιμή του  $\zeta$  σαν προδιαγραφή σχεδίασης και στις τιμές του  $\tau_I$  και  $K_C$  που ικανοποιούν τις σχέσεις (6.4) και (7.8) στην περίπτωση

που επιλέγουμε την επιθυμητή τιμή του  $\tau_e$  σαν προδιαγραφή σχεδίασης, όταν αυτές οι εξισώσεις για δεδομένα τα  $\zeta_{ses}$  ή  $\tau_{e,des}$  έχουν αποδεκτή λύση, δηλαδή  $K_C > 0$  και  $\tau_I > \tau_{I,min}$ .

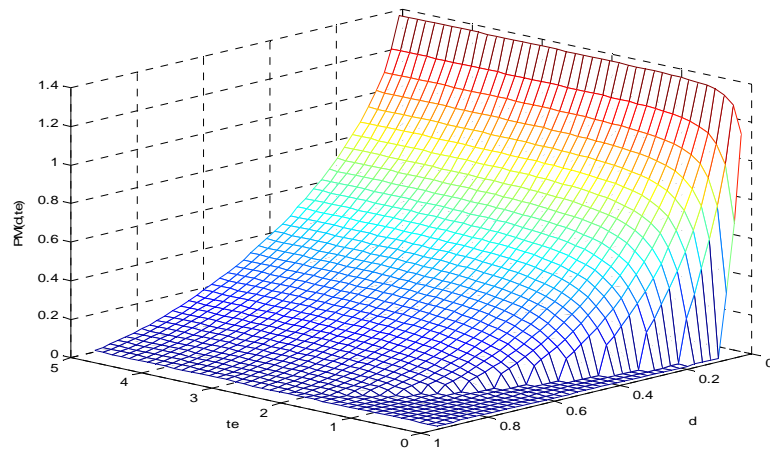
Για να είναι δυνατή η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου σε πραγματικό χρόνο οι συναρτήσεις  $\tau_I(d, \zeta_{des})$  και  $\tau_I(d, \tau_{e,des})$  υπολογίσθηκαν κάνοντας χρήση του παραπάνω αλγορίθμου και στην συνέχεια προσεγγίσθηκαν από απλές συναρτήσεις για κάποιες βασικές τιμές των  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$ . Για ενδιάμεσες τιμές των προδιαγραφών  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί γραμμική παρεμβολή για τον προσδιορισμό του  $\tau_I$ . Οι προσεγγίσεις αυτές προέκυψαν με χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης με σκοπό την ελαχιστοποίηση του μέγιστου σχετικού σφάλματος  $\frac{\Delta \tau_I}{\tau_I}$  το οποίο είναι πάντοτε μικρότερο του 5%. Στον πίνακα 2 φαίνονται οι προσεγγίσεις αυτές μαζί με το αντίστοιχο μέγιστο σχετικό σφάλμα  $\max \frac{\Delta \tau_I}{\tau_I}$ .

$\zeta_{des}$	$\tau_I(d)$	d	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$	$\tau_I(d)$	d	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
0.5	$3.244d+2.467d^2$	$d<0.45$	1.23%			
0.75	$6.13d+2.422d^2$	$d<0.57$	2.1%			
1	$12.534d+1.1653d^2$	$d<0.66$	2%			
1.5	$24.273d+2.866\sqrt{d}$	$d<0.25$	2.2%	$-1.55+36.33d+58.04d^6$	$0.2<d<0.7$	2%
2	$40.41d+8.063\sqrt{d}$	$d<0.25$	2.4%	$-3.40+69.92d+160.1d^6$	$0.2<d<0.7$	1.8%
$\tau_{e,des}$	$\tau_I(d)$	d	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$	$\tau_I(d)$	d	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
0.5	$0.597-0.232/(d-\sqrt{d})$	$d<0.15$	1.7%	$1.567+4.474d^3+9.08d^4$	$0.15<d<0.5$	0.5%
0.75	$0.92-0.51/(d-\sqrt{d})$	$d<0.2$	2.3%	$3.06-0.788d^3+27.13d^4$	$0.2<d<0.68$	1.9%
1	$1.032-0.937/(d-\sqrt{d})$	$d<0.2$	2.7%	$4.91+0.623d^3+33.6d^4$	$0.2<d<0.7$	0.8%
1.5	$1.89-2.171/(d-\sqrt{d})$	$d<0.2$	1%	$9.94+1.93d^3+52.97d^4$	$0.2<d<0.7$	1%
2	$2.27-3.9126/(d-\sqrt{d})$	$d<0.2$	2.2%	$16.96+6.09d^3+72.99d^4$	$0.2<d<0.7$	0.6%

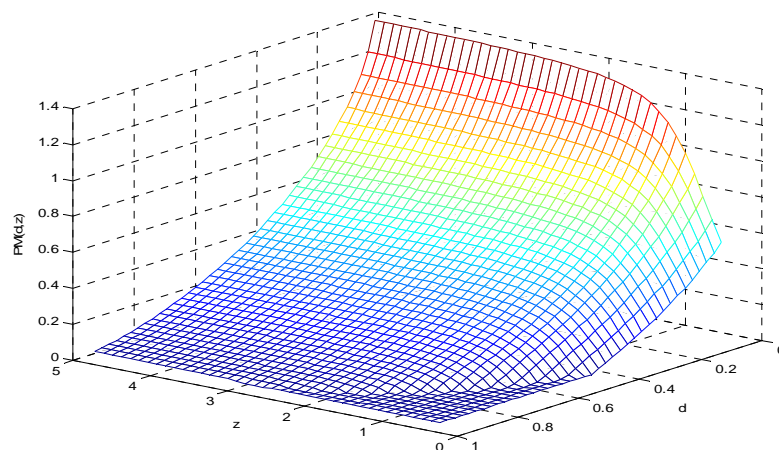
Πίνακας 4. Προσεγγίσεις του  $\tau_I(d)$  για διάφορες τιμές των  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$  (2<sup>η</sup> ΡΙ μέθοδος)

Όπως έχει προαναφερθεί, η μέθοδος αυτή ταυτόχρονα με την επιθυμητή απόκριση στο πεδίο του χρόνου δίνει και το μέγιστο περιθώριο φάσης για την συγκεκριμένη επιλογή του  $\tau_I$  και για δεδομένη την καθυστέρηση χρόνου του συστήματος  $d$ . Το περιθώριο φάσης αυτό φαίνεται στα σχήματα 22α και 22β συναρτήσεις των προδιαγραφών  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$  και του  $d$ . Από τα σχήματα 22α και 22β μπορούμε να δούμε ότι τα περιθώρια φάσης  $PM(d, \zeta_{ses})$  και  $PM(d, \tau_{e,des})$  είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις ως προς  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$  αντίστοιχα. Επίσης, για να υπάρχει δυνατότητα εύκολων συγκρίσεων μεταξύ των προδιαγραφών  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$  και του αντίστοιχου περιθωρίου φάσης που προκύπτει από την παραπάνω μέθοδο βαθμονόμησης για διάφορες τιμές της καθυστέρησης

χρόνου  $d$  του συστήματος, οι συναρτήσεις  $PM(d, \zeta_{des})$  και  $PM(d, \tau_{e,des})$  προσεγγίστηκαν από απλές συναρτήσεις για κάποιες βασικές τιμές των  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$ . Στον πίνακα 5 φαίνονται αυτές οι προσεγγίσεις μαζί με το μέγιστο σχετικό σφάλμα της κάθε προσέγγισης. Επίσης, στα σχήματα 23α-23ε φαίνονται οι συναρτήσεις  $\hat{PM}(d)$  (κόκκινη καμπύλη) που προέκυψαν από τις προσεγγίσεις μαζί με την πραγματική καμπύλη  $PM(d)$  (μπλε καμπύλη) για 5 βασικές τιμές του  $\zeta_{des}$ , ενώ στα σχήματα 24α-24ε φαίνονται οι συναρτήσεις  $\hat{PM}(d)$  που προέκυψαν από τις προσεγγίσεις μαζί με την πραγματική καμπύλη  $PM(d)$  για 5 βασικές τιμές του  $\tau_{e,des}$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάθε περίπτωση το μέγιστο σχετικό σφάλμα των προσεγγίσεων είναι μικρότερο του 5%, κάτι που φαίνεται στα σχήματα 25α-25ε για την περίπτωση που έχουμε προδιαγραφή σχεδίασης το  $\zeta_{des}$  και στα σχήματα 26α-26ε για την περίπτωση που έχουμε προδιαγραφή σχεδίασης το  $\tau_{e,des}$ .

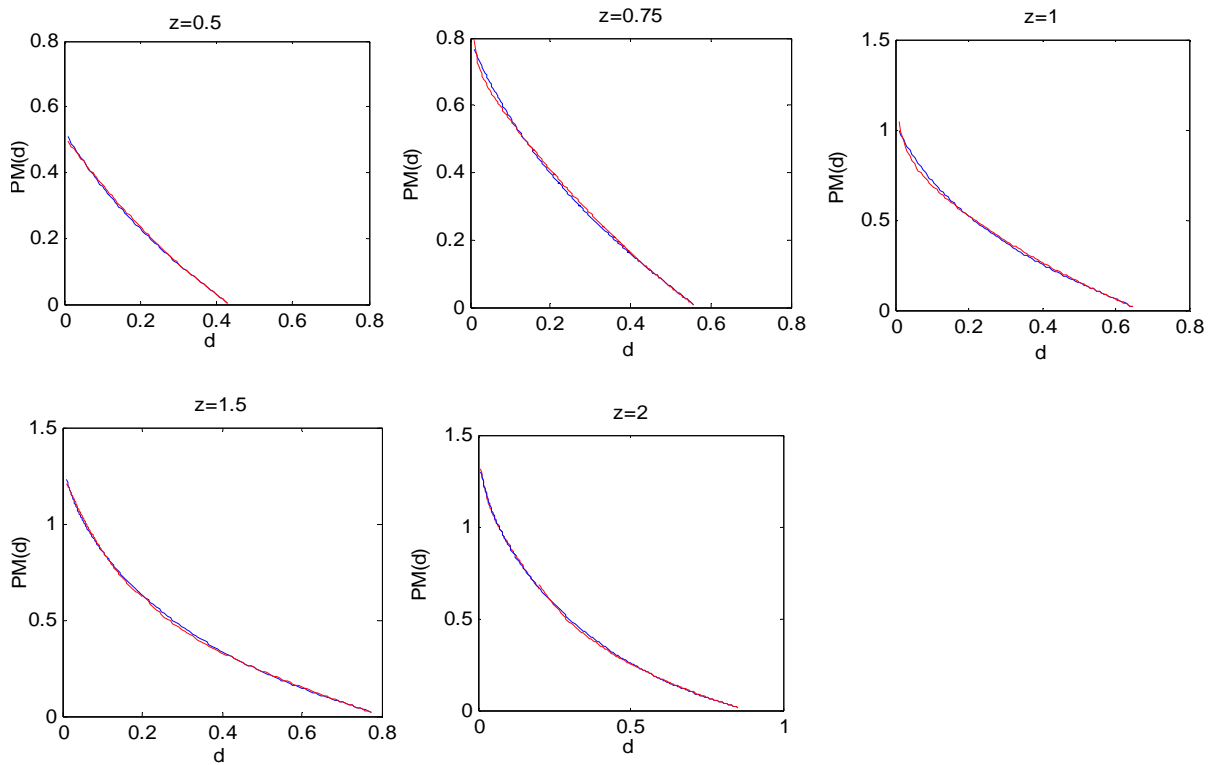


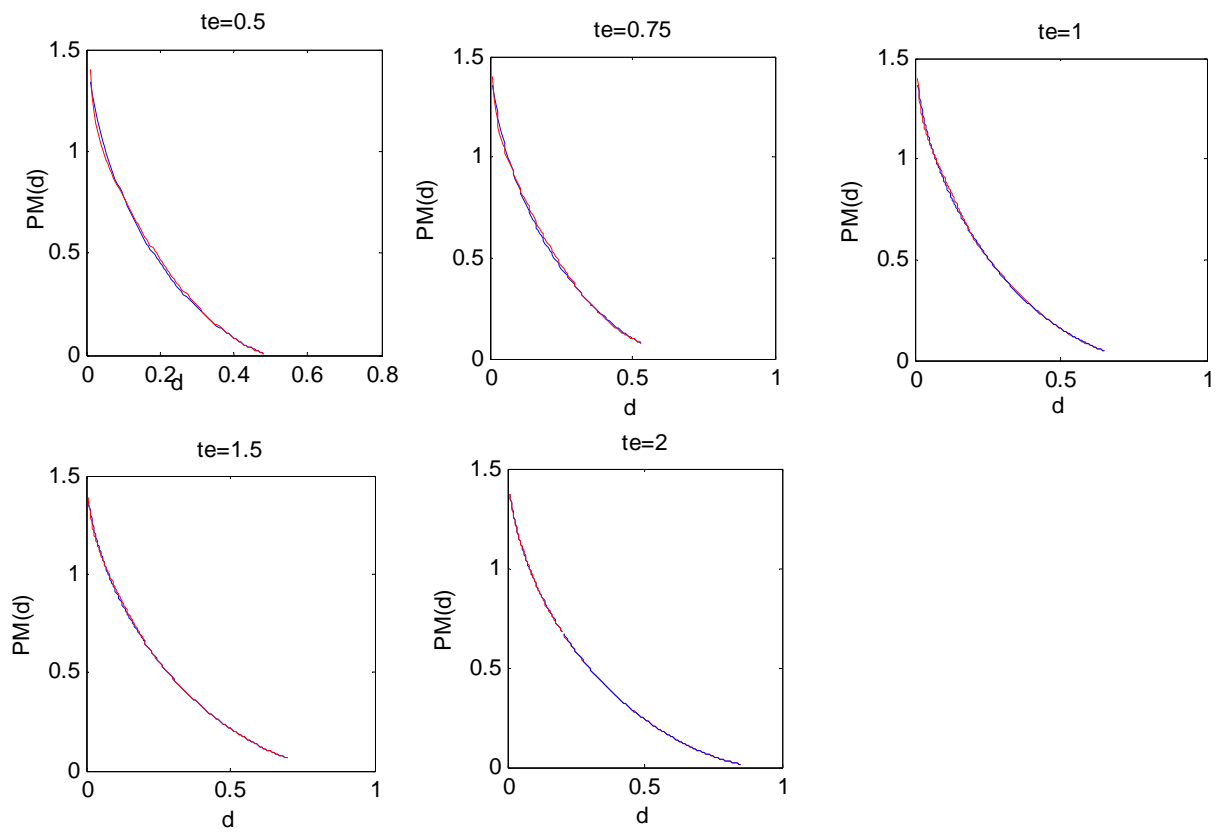
Σχήμα 22α. Περιθώριο φάσης  $PM(d, \zeta_{des})$



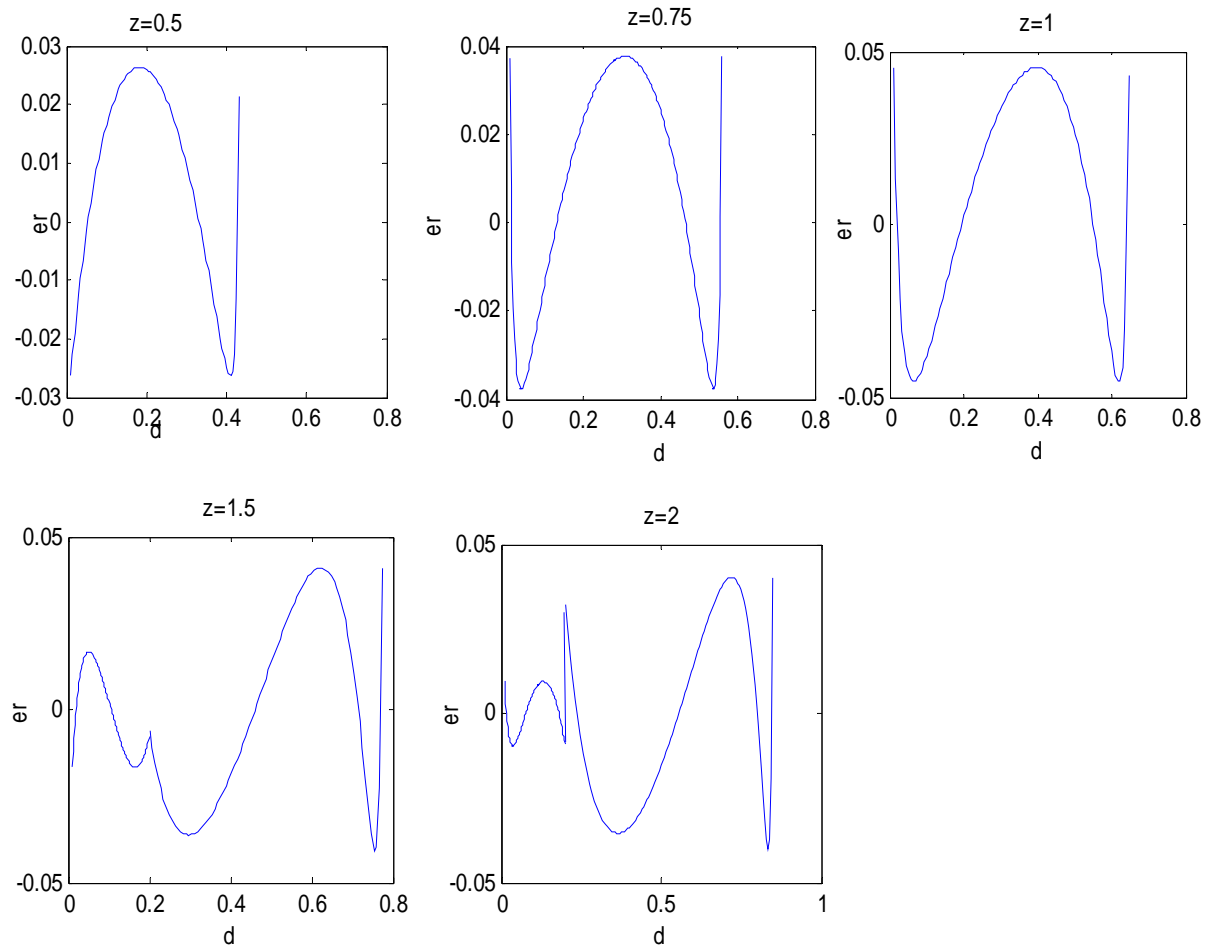
Σχήμα 22β. Περιθώριο φάσης  $PM(d, \tau_{e,des})$

$\zeta_{des}$	$PM(d, \zeta_{des})$	$d$	$\max \Delta PM / PM$	$PM(d, \zeta_{des})$	$d$	$\max \Delta PM / PM$
0.5	$0.874d^2 - 1.553d + 0.511$	$d < 0.43$	2.7%			
0.75	$0.671d^2 - 1.617d + 0.699 + 0.001/d$	$d < 0.56$	4%			
1	$0.514d^2 - 1.505d + 0.764 + 0.009/(d+0.001)$	$d < 0.65$	4.7%			
1.5	$8.25d^2 - 4.805d + 1.256$	$d < 0.2$	1.8%	$-0.602d + 0.396 + 0.07/d$	$0.2 < d < 0.78$	4.5%
2	$-2.128d + 1.045 + 0.009/(d+0.02)$	$d < 0.2$	1%	$0.188d^2 - 0.738d + 0.408 + 0.084/d$	$0.2 < d < 0.85$	1.1%
$\tau_{e,des}$	$PM(d, \tau_{e,des})$	$d$	$\max \Delta PM / PM$	$PM(d, \zeta_{des})$	$d$	$\max \Delta PM / PM$
0.5	$3.366d^2 - 3.911d + 1.101 + 0.003/d$	$d < 0.48$	5%			
0.75	$2.744d^2 - 3.496d + 1.156 + 0.003/d$	$d < 0.53$	3.8%			
1	$-2.914d + 1.175d + 0.0025d$	$d < 0.2$	2.8%	$1.652d^2 - 2.637d + 1.065$	$0.2 < d < 0.65$	1.6%
1.5	$2.802d^2 - 3.469d + 1.234 + 0.002/d$	$d < 0.2$	1.8%	$0.994d^2 - 1.874d + 0.845 + 0.03/d$	$0.2 < d < 0.7$	0.15%
2	$6.886d^2 - 4.56d + 1.311 + 0.001/d$	$d < 0.2$	0.6%	$0.918d^2 - 1.828d + 0.875 + 0.026/d$	$0.2 < d < 0.85$	0.4%

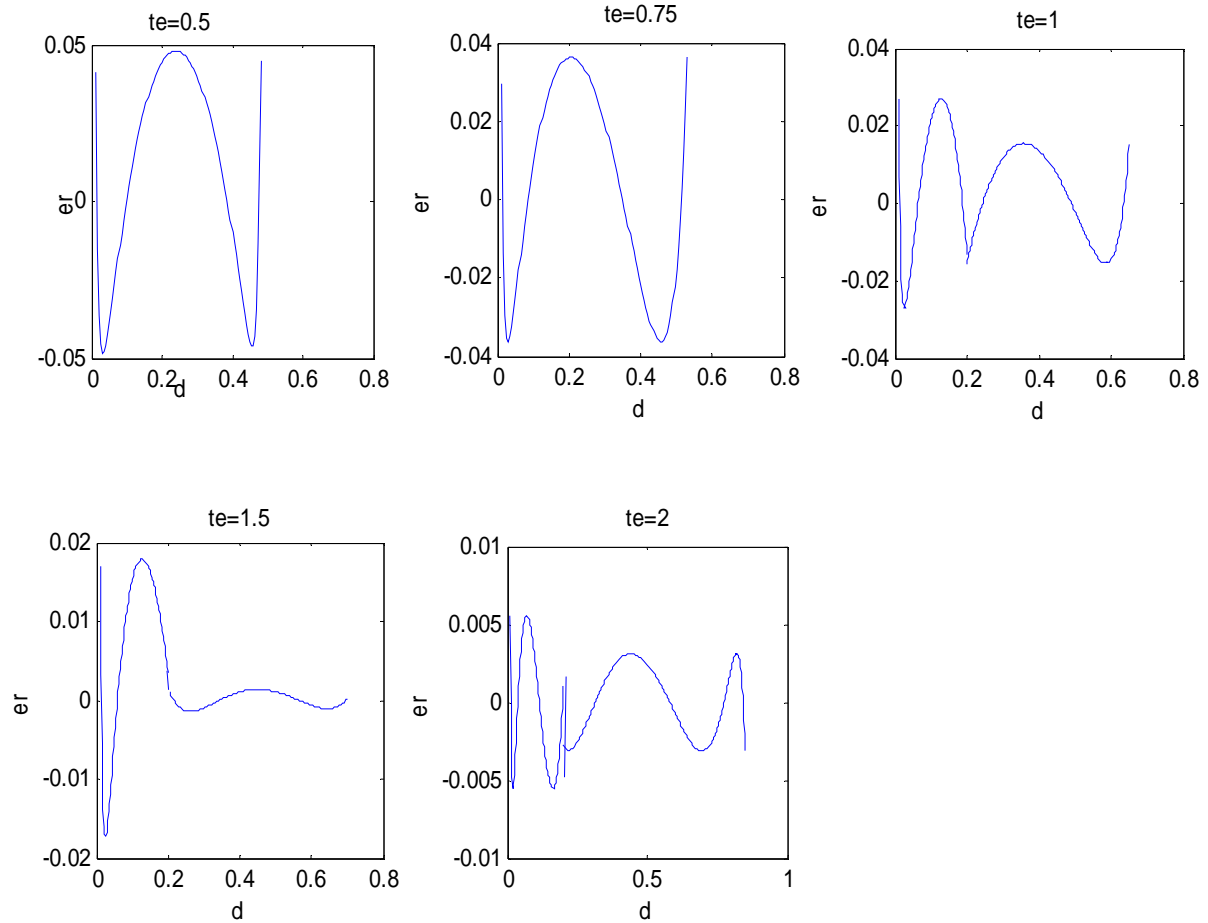
Πίνακας 5. Προσεγγίσεις των  $PM(d, \zeta_{des})$  και  $PM(d, \tau_{e,des})$ Σχήματα 23. Προσεγγιστικές (με κόκκινο χρώμα) και πραγματικές (με μπλέ χρώμα) καμπύλες του περιθωρίου φάσης  $PM(d)$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$ .



Σχήματα 24. Προσεγγιστικές (με κόκκινο χρώμα) και πραγματικές (με μπλέ χρώμα) καμπύλες του περιθωρίου φάσης  $PM(d)$  για διάφορες τιμές του  $\tau_{e,des}$ .



Σχήματα 25. Μέγιστο σχετικό σφάλμα των προσεγγίσεων του  $PM(d)$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$ .



Σχήματα 26. Μέγιστο σχετικό σφάλμα των προσεγγίσεων του  $PM(d)$  για διάφορες τιμές του  $\tau_{e,des}$ .

### 7.3 ΤΡΙΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ

Μια εναλλακτική μέθοδος βαθμονόμησης μπορεί να προκύψει από την ελαχιστοποίηση διαφόρων ολοκληρωτικών κριτηρίων. Τέτοια κριτήρια περιλαμβάνουν την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος του τετραγώνου του σφάλματος που προκύπτει από μία βηματική αλλαγή της εισόδου αναφοράς του συστήματος (ISE-SP) ή από μια βηματική διαταραχή στην είσοδο του συστήματος (ISE-L)

$$J_{ISE} = \int_0^{\infty} [y(t) - r(t)]^2 dt \quad (7.9)$$

Άλλα ευρέως χρησιμοποιούμενα ολοκληρωτικά κριτήρια περιλαμβάνουν την ελαχιστοποίηση του τετραγώνου του σφάλματος συν το τετράγωνο της κανονικοποιημένης μεταβολής της εξόδου του ελεγκτή από την τελική της τιμή  $u_{\infty}$  (ISENSCOD) ή του τετραγώνου της παραγώγου της εξόδου του ελεγκτή (ISENSDCO) τα οποία δίνονται από τις σχέσεις



$$J_{ISENSCOD} = \int_0^{\infty} [y(t) - r(t)]^2 + K^2 [u(t) - u_{\infty}]^2 dt \quad (7.10)$$

$$J_{ISENSDCO} = \int_0^{\infty} [y(t) - r(t)]^2 + K^2 T^2 \dot{u}(t)^2 dt \quad (7.11)$$

Μέθοδοι βαθμονόμησης που βασίζονται στην ελαχιστοποίηση ISE κριτηρίων εγγυώνται πολύ μικρές τιμές σφάλματος και πολύ γρήγορη απόκριση, κάτι που είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου. Ωστόσο, η βηματική απόκριση του κλειστού συστήματος είναι πολύ ταλαντωτική με πολύ μεγάλη υπερύψωση. Επιπλέον και η έξοδος του ελεγκτή παρουσιάζει ταλαντωτική συμπεριφορά με αποτέλεσμα να προκαλούνται διαταραχές σε άλλους βρόχους ελέγχου του συστήματος. Αντίθετα, ελαχιστοποίηση των κριτηρίων (7.10) και (7.11) οδηγούν σε ομαλότερες αποκρίσεις οι οποίες είναι λιγότερο απαιτητικές από τον ενεργοποιητή του συστήματος.

Λόγω της καθυστέρησης χρόνου που υπάρχει στα ασταθή συστήματα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου, δεν είναι δυνατόν να υπολογιστεί η απόκριση του συστήματος στο πεδίο του χρόνου με αναλυτικό τρόπο. Έτσι για τον υπολογισμό της τιμής των παραπάνω κριτηρίων χρησιμοποιείται προσομοίωση.

Τέλος, για να είναι δυνατή η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου σε πραγματικό χρόνο, οι τιμές του  $\tau_I$  που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση των παραπάνω κριτηρίων υπολογίστηκαν για διάφορες τιμές της καθυστέρησης χρόνου του συστήματος  $d$  και στην συνέχεια προσεγγίστηκαν από απλές συναρτήσεις. Οι συναρτήσεις αυτές προέκυψαν από την ελαχιστοποίηση του μέγιστου σχετικού σφάλματος  $\max \frac{\Delta \tau_I}{\tau_I}$  και φαίνονται στον πίνακα 6, από όπου μπορούμε να δούμε ότι σε κάθε περίπτωση το μέγιστο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης είναι μικρότερο του 5%.

Criterion	d	$\tau_I(d)$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
ISE-SP	0.05<d<0.85	$54.3975d^6 + 3.6549d^2 + 2.1088 / (0.89 - d) - 2.3698$	4.5%
ISE-L	0.05<d<0.85	$66.8317d^6 + (1.0941d^2 + 2.5404d) / (0.89 - d) - 0.0137$	4.5%
ISENSCOD-SP	0.01<d<0.85	$55.9188d^6 + (-1.0402d^2 + 3.5246d) / (0.892 - d) + 0.6814$	5%
ISENSDCO-SP	0.03<d<0.85	$42.8553d^6 + (0.8429d^2 + 2.4289d) / (0.895 - d) + 2.9493$	5%

Πίνακας 6. Προσέγγιση του  $\tau_I(d)$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων (3<sup>η</sup> ΡΙ μέθοδος).

## **8. ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ PID ΕΛΕΓΚΤΗ ΓΙΑ ΑΣΤΑΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ**

Όλες οι παραπάνω μέθοδοι βαθμονόμησης για ΡΙ ελεγκτή μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση του PID ελεγκτή. Η επέκταση αυτή, ώστε να συμπεριληφθεί στην σχεδίαση και ο διαφορικός όρος, γίνεται με την προϋπόθεση ότι διαφορικός όρος επιλέγεται εκ των προτέρων και στην συνέχεια γίνεται η σχεδίαση του υπόλοιπου ελεγκτή με βάση την επιλογή αυτή. Ο λόγος για τον οποίο ο διαφορικός όρος δεν επιβάλλεται μονοσήμαντα από την μέθοδο είναι ότι συνήθως οι τιμές που μπορεί να λάβει περιορίζονται από το σύστημα. Ο περιορισμός των τιμών του διαφορικού όρου

οφείλεται κυρίως στα επίπεδα θορύβου και από την αλληλεπίδραση που τυχόν υπάρχει με άλλους κλειστούς βρόχους του συστήματος. Σημειώνεται ότι η ελευθερία που δίνεται στον σχεδιαστή του ελεγκτή να επιλέξει τον διαφορικό όρο του ελεγκτή με βάση την γνώση του για το σύστημα, αποτελεί ένα από τα βασικότερα πλεονεκτήματα των μεθόδων που παρουσιάζονται παρακάτω.

Η τιμή της σταθεράς χρόνου διαφορίσης  $\tau_D$  είναι προφανές ότι δεν μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα. Όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 6.2, η παράμετρος  $\tau_D$  του ελεγκτή δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το  $\tau_{D,\max}$  και φυσικά δεν έχει νόημα να λάβει αρνητικές τιμές. Οι μέθοδοι επομένως που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια μπορούν να εφαρμοστούν όταν η παράμετρος  $\tau_D$  λαμβάνει τιμές στο διάστημα

$$0 < \tau_D < \tau_{D,\max} \quad (8.1)$$

Επίσης, όπως αναφέρθηκε στην ενότητα 6.2, όταν το  $\tau_D$  είναι μεγαλύτερο από  $\tau_{D,\max PI}$  η ευρωστία του συστήματος μειώνεται σημαντικά και μπορεί το κλειστό σύστημα ελεγχόμενο από PID ελεγκτή να είναι λιγότερο εύρωστο από το αντίστοιχο κλειστό σύστημα ελεγχόμενο από PI ελεγκτή. Αν λοιπόν δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος να επιλεγεί πολύ μεγάλη τιμή για το  $\tau_D$  (π.χ. πολύ μεγάλη ταχύτητα εξουδετέρωσης διαταραχών), είναι προτιμότερο η παράμετρος  $\tau_D$  να λαμβάνει τιμές στο διάστημα

$$0 < \tau_D < \tau_{D,\max PI} \quad (8.2)$$

και μάλιστα, αν δεν υπάρχει κανένας περιορισμός από το σύστημα προτείνεται η επιλογή

$$\tau_D = \hat{\tau}_{D,\max PI} \quad (8.3)$$

όπου  $\hat{\tau}_{D,\max PI}$  είναι η προσέγγιση του  $\tau_{D,\max PI}$  που δίνεται από την σχέση (6.9). Με αυτήν την επιλογή για το  $\tau_D$  το κλειστό σύστημα μπορεί να γίνει εξαιρετικά γρήγορο με το μεγαλύτερο περιθώριο φάσης που μπορεί να επιτευχθεί με PID ελεγκτή και ταυτόχρονα εγγυάται ότι όλα τα περιθώρια ευρωστίας ( $PM$ ,  $GM_{dec}$ ,  $GM_{inc}$ ,  $GM_{prod}$ ) είναι μεγαλύτερα από αυτά που επιτυγχάνονται με τον PI ελεγκτή.

Με βάση τις παραπάνω κατευθύνσεις για τη επιλογή του  $\tau_D$ , μπορούμε να επεκτείνουμε τις μεθόδους βαθμονόμησης για PI ελεγκτή στην περίπτωση του PID αφού έχουμε προεπιλέξει το  $\tau_D$ .

Για την εφαρμογή όλων των μεθόδων βαθμονόμησης που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε τον κλασικό PID ελεγκτή με το αντίστοιχο προ-φίλτρο που δίνεται από την πρώτη σχέση της (5.2) για  $\bar{\tau}_D = \tau_D$  και  $\bar{\tau}_I = \tau_I$ . Με αυτή την επιλογή για το προ-φίλτρο, η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου ελεγχόμενο από PID ελεγκτή δίνεται από την σχέση

$$G_{CL,PID}(s) = \frac{\exp(-ds)}{\tau_I s(s-1)K_C^{-1} + (\tau_I s + 1)(\tau_D s + 1)\exp(-ds)} \quad (8.4)$$

Το κυριότερο χαρακτηριστικό των παρακάτω μεθόδων βαθμονόμησης είναι ότι η επιλογή του κέρδους  $K_C$  του ελεγκτή γίνεται με βάση την σχέση (6.13). Με αυτήν την επιλογή για το  $K_C$  εξασφαλίζουμε το μέγιστο περιθώριο φάσης για δεδομένη τιμή της παραμέτρου  $\tau_I$  και του  $\tau_D$ .

Έχοντας επιλέξει το κέρδος του ελεγκτή  $K_C$ , αποκλειστικά και μόνο για να εξασφαλίσουμε τις προδιαγραφές ευρωστίας του κλειστού συστήματος και το  $\tau_D$  με βάση την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε να επιλέξουμε την τιμή της παραμέτρου  $\tau_I$  ώστε να εξασφαλίσουμε την επιθυμητή συμπεριφορά του κλειστού συστήματος στο πεδίο του χρόνου.

### 8.1 ΠΡΩΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ PID ΕΛΕΓΚΤΗ

Αυτή η μέθοδος είναι αντίστοιχη της πρώτης μεθόδου βαθμονόμησης για PI ελεγκτή, όπου επιλέγουμε την παράμετρο  $\tau_I$  σχεδόν σαν αυθαίρετη μεταβλητή, με μόνο περιορισμό

$$\tau_I > \tau_{I,\min} \quad (8.5)$$

Όπως και στην πρώτη μέθοδο βαθμονόμησης για PI ελεγκτή, έτσι και εδώ λόγω του ότι για τον υπολογισμό του  $\tau_{I,\min}$  πρέπει να γίνει χρήση επαναληπτικών αλγορίθμων (για λεπτομέρειες αναφορά [15]), προτείνεται εδώ η εξής προσέγγιση για την τιμή  $\tau_{I,\min}$  η οποία εξαρτάται στην περίπτωση του PID από την καθυστέρηση χρόνου του συστήματος  $d$ , και την παράμετρο  $\tau_D$ . Η προσέγγιση αυτή δίνεται από την σχέση ([15])

$$\hat{\tau}_{I,\min}(d, \tau_D) = \hat{\tau}_{I,\min}(d - \tau_D) \left[ 1 + \frac{(0.367 + 1.78d)a^3}{1 - a^2} \right] \quad (8.6)$$

όπου το  $\hat{\tau}_{I,\min}(d - \tau_D)$  δίνεται από την σχέση (7.2) για  $d = d - \tau_D$ .

Έτσι μπορούμε να επιλέξουμε την παράμετρο και ως  $\tau_I > 1.02\hat{\tau}_{I,\min}(d, \tau_D)$  ([15]).

Αυτή η μέθοδος βαθμονόμησης μπορεί να εφαρμοστεί για όλα τα συστήματα με  $d < 0.9$  και  $a = \frac{\tau_D}{d}$

που ικανοποιεί την σχέση  $0 < a < 0.55 + d(0.31 - \frac{0.0098}{1-d})$ , χωρίς την χρήση επαναληπτικών

αλγορίθμων για τον υπολογισμό του  $\tau_{I,\min}$ , ενώ μπορεί να εφαρμοστεί σε συστήματα με  $d < 1 + \tau_D$  κάνοντας χρήση επαναληπτικού αλγορίθμου για τον ακριβή υπολογισμό του  $\tau_{I,\min}$  ([15]).

Σημειώνεται εδώ ότι αν ο διαφορικός όρος επιλεγεί σύμφωνα με την σχέση (8.2), τότε ισχύει και για την περίπτωση του PID ελεγκτή ότι όσο πιο μεγάλη επιλεγεί η τιμή του  $\tau_I$  τόσο πιο εύρωστο γίνεται το κλειστό σύστημα, ενώ ταυτόχρονα η απόκριση του κλειστού συστήματος είναι πιο αργή και ομαλή.

### 8.2 ΔΕΥΤΕΡΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ PID ΕΛΕΓΚΤΗ

Αυτή η μέθοδος βαθμονόμησης για τον PID ελεγκτή είναι επέκταση της δεύτερης μεθόδου βαθμονόμησης για PI ελεγκτή όπου η επιλογή της παραμέτρου  $\tau_I$  ( $\tau_D$  προεπιλεγμένο) γίνεται με

βάση τις προδιαγραφές για την σταθερά απόσβεσης  $\zeta$  ή την ιδοσυχνότητα  $\omega_0 = \frac{1}{\tau_e}$  ενός ισοδύναμου συστήματος δεύτερης τάξης που προσεγγίζει την απόκριση του κλειστού ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου.

Από την σχέση (8.4) μπορούμε να δούμε ότι ακόμα και με την επιλογή  $\exp(-ds) = 1 - ds$  για την προσέγγιση του εκθετικού όρου στην συνάρτηση μεταφοράς (8.4), το κλειστό σύστημα που προκύπτει δεν είναι δεύτερης αλλά τρίτης τάξης. Μπορούμε όμως να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου του ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου ελεγχόμενου από PID ελεγκτή (5.5) μπορεί να γραφτεί στην ισοδύναμη μορφή

$$G_{L,PID}(s) = \frac{K_C(\tau_I s + 1)(\tau_D s + 1)}{\tau_I s(s-1)} \left[ \frac{\exp(-(1-a)ds)}{\exp(ads)} \right] \quad (8.7)$$

Όταν  $ads \ll 1$ , οι πρώτοι δύο όροι του αναπτύγματος Taylor μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να προσεγγίσουν τον εκθετικό όρο στον παρανομαστή της (8.7). Με αυτήν την προσέγγιση η (8.7) γίνεται

$$G_{L,PID}(s) = \frac{K_C(\tau_I s + 1)(\tau_D s + 1)}{\tau_I s(s-1)} \left[ \frac{\exp(-(1-a)ds)}{ads + 1} \right] \quad (8.8)$$

Αν τώρα επιλέξουμε την τιμή της παραμέτρου  $\tau_D$  ίση με  $ad$ , τότε η συνάρτηση μεταφοράς βρόχου του συστήματος ελεγχόμενου από PID ελεγκτή μπορεί να προσεγγιστεί από την συνάρτηση μεταφοράς βρόχου ενός συστήματος ελεγχόμενου από PI ελεγκτή με μικρότερη καθυστέρηση χρόνου κατά  $1-a$ , δηλαδή

$$G_{L,PID}(s) = \frac{K_C(\tau_I s + 1)}{\tau_I s(s-1)} \exp[-d(1-a)s] \quad (8.9)$$

Με βάση τα παραπάνω, η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου ενός ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου ελεγχόμενο από PID ελεγκτή μπορεί να προσεγγιστεί από το σύστημα δεύτερης τάξης με συνάρτηση μεταφοράς που δίνεται από την σχέση

$$G_{CL,PID}(s) = \frac{\exp(-ds)}{\tau_I [K_C^{-1} - (1-a)d] s^2 + [\tau_I(1-K_C^{-1}) - (1-a)d] s + 1} \quad (8.10)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$G_{CL,PID}(s) = \frac{\exp(-ds)}{\tau_e s^2 + 2\zeta\tau_e s + 1} \quad (8.11)$$

όπου

$$\tau_e = \sqrt{\tau_I [K_C^{-1} - (1-a)d]} \quad (8.12)$$

και

$$\zeta = \frac{\tau_I(1-K_C^{-1}) - (1-a)d}{2\sqrt{\tau_I [K_C^{-1} - (1-a)d]}} \quad (8.13)$$

$$\text{όπου } a = \frac{\tau_D}{d}$$

Για την εφαρμογή της παρούσας μεθόδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο αλγόριθμος της δεύτερης μεθόδου για PI ελεγκτή, με την διαφορά ότι αντί της σχέσης (7.7) πρέπει να χρησιμοποιηθεί η σχέση

$$\tau_I^2(1 - K_C^{-1})^2 - \tau_I \left[ 4\zeta_{des}^2 \left[ K_C^{-1} - (1-a)d \right] + 2(1-a)d(1 - K_C^{-1}) \right] + [(1-a)d]^2 = 0 \quad (8.14)$$

και αντί της σχέσης (7.8) η σχέση

$$\tau_I = \frac{\tau_{e,des}^2}{K_C^{-1} - (1-a)d} \quad (8.15)$$

Ο παραπάνω αλγόριθμος όπως και στην περίπτωση του PI ελεγκτή συγκλίνει πάντα στις τιμές του  $\tau_I$  και  $K_C$  που ικανοποιούν τις σχέσεις (6.13) και (8.14) ή (8.15), όταν αυτές οι εξισώσεις για δεδομένα  $\zeta_{des}$  ή  $\tau_{e,des}$  έχουν αποδεκτή λύση, δηλαδή  $K_C > 0$  και  $\tau_I > \tau_{I,min}$ .

Για να είναι δυνατή η εφαρμογή της παραπάνω μεθόδου σε πραγματικό χρόνο η συνάρτηση  $\tau_I(d, \tau_D, \zeta_{des})$  υπολογίσθηκε κάνοντας χρήση του παραπάνω αλγορίθμου και στην συνέχεια προσεγγίσθηκε από απλή συνάρτηση για κάποιες βασικές τιμές του  $\zeta_{des}$  και για τις δύο ειδικές περιπτώσεις όπου  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$ . Στον πίνακα 7 φαίνονται οι προσεγγίσεις αυτές μαζί με

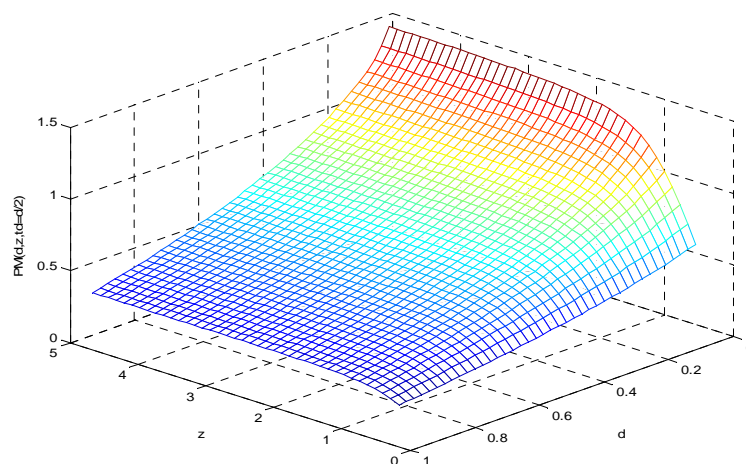
το αντίστοιχο μέγιστο σχετικό σφάλμα  $\max \frac{\Delta \tau_I}{\tau_I}$ .

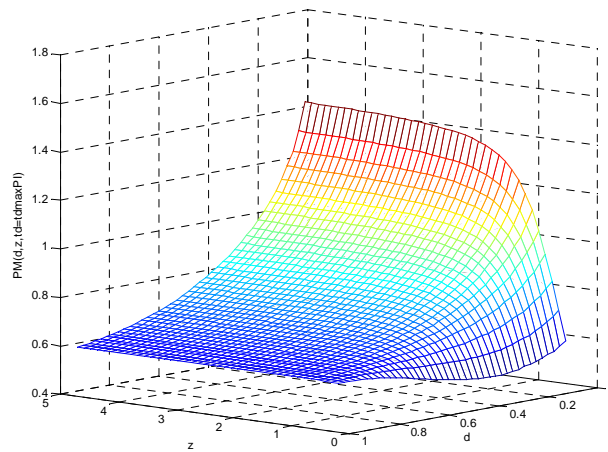
	$\zeta_{des}$	$0 < d < 0.3$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$	$0.3 < d < 1.2$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
$\tau_D = d/2$	0.5	$2.046d + 9.31d^3$	2.5%	$-0.2113 + 3.575d + 8.889d^5$	4.7%
	0.75	$3.88d + 17.13d^3$	2%	$0.259 + 14.13d^2 + 9.324d^8$	4.2%
	1	$7.782d + 18.32d^3$	1.5%	$0.4875 + 25.05d^2 + 15.7d^8$	4.5%
	1.5	$18.15d + 6.614d^2 + 1.135\sqrt{d}$	4%	$1.45 + 57.2d^2 + 33.35d^8$	4.9%
	2	$25.16d + 29.52d^2 + 5.067\sqrt{d}$	2.5%	$3.476 + 99.07d^2 + 65.81d^8$	3.7%
	$\zeta_{des}$	$0 < d < 0.45$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$	$0.45 < d < 0.8$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
$\tau_D = \tau_{D,max PI}$	0.5	$1.957d + 1.81d^2 + 15.3d^4$	0.8%	$8.966d^2 + 1.3d^4 + 161.6d^{10}$	2.2%
	0.75	$3.76d + 3.169d^2 + 38.57d^4$	0.7%	$24.92d^2 - 35.89d^4 + 304d^8$	4%
	1	$7.729d + 0.738d^2 + 84.93d^4$	1.5%	$38.3d^2 - 41.05d^4 + 504.6d^8$	4.5%
	1.5	$19.25d + 347.4d^5 + 0.9582\sqrt{d}$	4.5%	$103.7d^2 - 152.4d^4 + 1226d^8$	3.9%
	2	$28.86d + 321.8d^4 + 4.904\sqrt{d}$	1.8%	$163d^2 - 952.2d^6 + 3155d^8$	4.6%

Πίνακας 7. Προσεγγίσεις του  $\tau_I(d)$  για διάφορες τιμές των  $\zeta_{des}$  και  $\tau_{e,des}$  και για  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$

(2<sup>η</sup> PID μέθοδος)

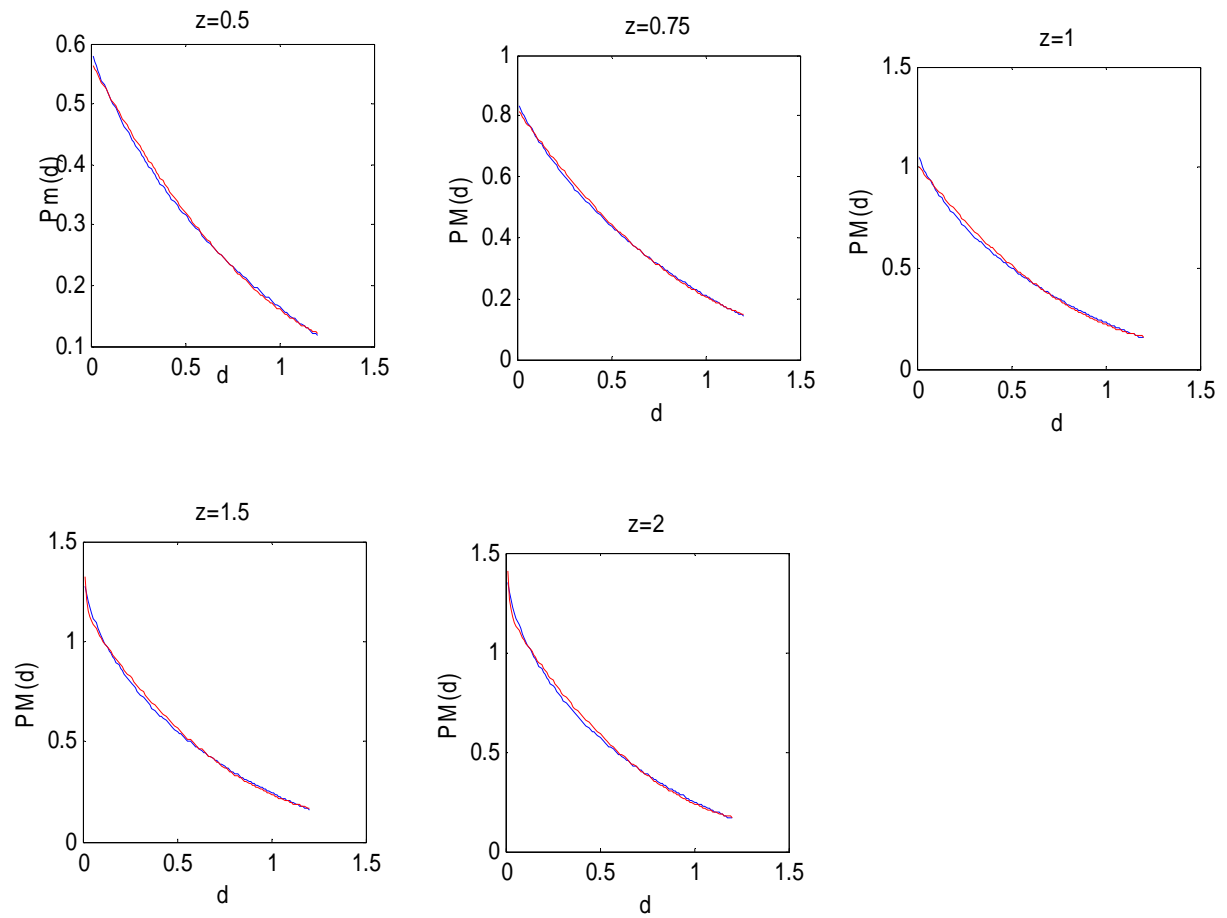
Όπως και στην περίπτωση του PI ελεγκτή, η μέθοδος αυτή ταυτόχρονα με την επιθυμητή απόκριση στο πεδίο του χρόνου δίνει και το μέγιστο περιθώριο φάσης για την συγκεκριμένη επιλογή του  $\tau_I$  και του  $\tau_D$  και για δεδομένη την καθυστέρηση χρόνου του συστήματος  $d$ . Το περιθώριο φάσης αυτό φαίνεται στα σχήματα 27α και 27β συναρτήσει της προδιαγραφής  $\zeta_{des}$  και του  $d$  για  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$  αντίστοιχα. Από τα σχήματα 27α και 27β μπορούμε να κάνουμε τις ίδιες παρατηρήσεις όπως και στην περίπτωση του PI ελεγκτή, δηλαδή ότι τα περιθώρια φάσης  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})$  και  $PM(d, \tau_D = \tau_{D,max PI}, \zeta_{des})$  είναι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις ως προς  $\zeta_{des}$ . Επίσης, για να υπάρχει δυνατότητα εύκολων συγκρίσεων μεταξύ της προδιαγραφής  $\zeta_{des}$  και του αντίστοιχου περιθωρίου φάσης που προκύπτει από την παραπάνω μέθοδο βαθμονόμησης για διάφορες τιμές της καθυστέρησης χρόνου  $d$  του συστήματος, οι συναρτήσεις  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})$  και  $PM(d, \tau_D = \tau_{D,max PI}, \zeta_{des})$  προσεγγίστηκαν από απλές συναρτήσεις για κάποιες βασικές τιμές του  $\zeta_{des}$ . Οι προσεγγίσεις αυτές φαίνονται στον πίνακα 8 μαζί με το μέγιστο σχετικό σφάλμα της κάθε προσέγγισης. Επίσης στα σχήματα 28α-28ε φαίνονται οι συναρτήσεις  $PM\hat{(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})}$  προέκυψαν από τις προσεγγίσεις μαζί με την πραγματική καμπύλη  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})$  για 5 βασικές τιμές του  $\zeta_{des}$ . Αντίστοιχα βλέπουμε στα σχήματα 29α-29ε για την περίπτωση όπου  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$ . Αξίζει να σημειωθεί ότι σε κάθε περίπτωση το μέγιστο σχετικό σφάλμα των προσεγγίσεων είναι μικρότερο του 5%, κάτι που φαίνεται στα σχήματα 30α-30ε για την περίπτωση όπου  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και στα σχήματα 31α-31ε για την περίπτωση όπου  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$ .



Σχήμα 27α. Περιθώριο φάσης  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})$ Σχήμα 27β. Περιθώριο φάσης  $PM(d, \tau_D = \tau_{D,maxPI}, \zeta_{des})$ 

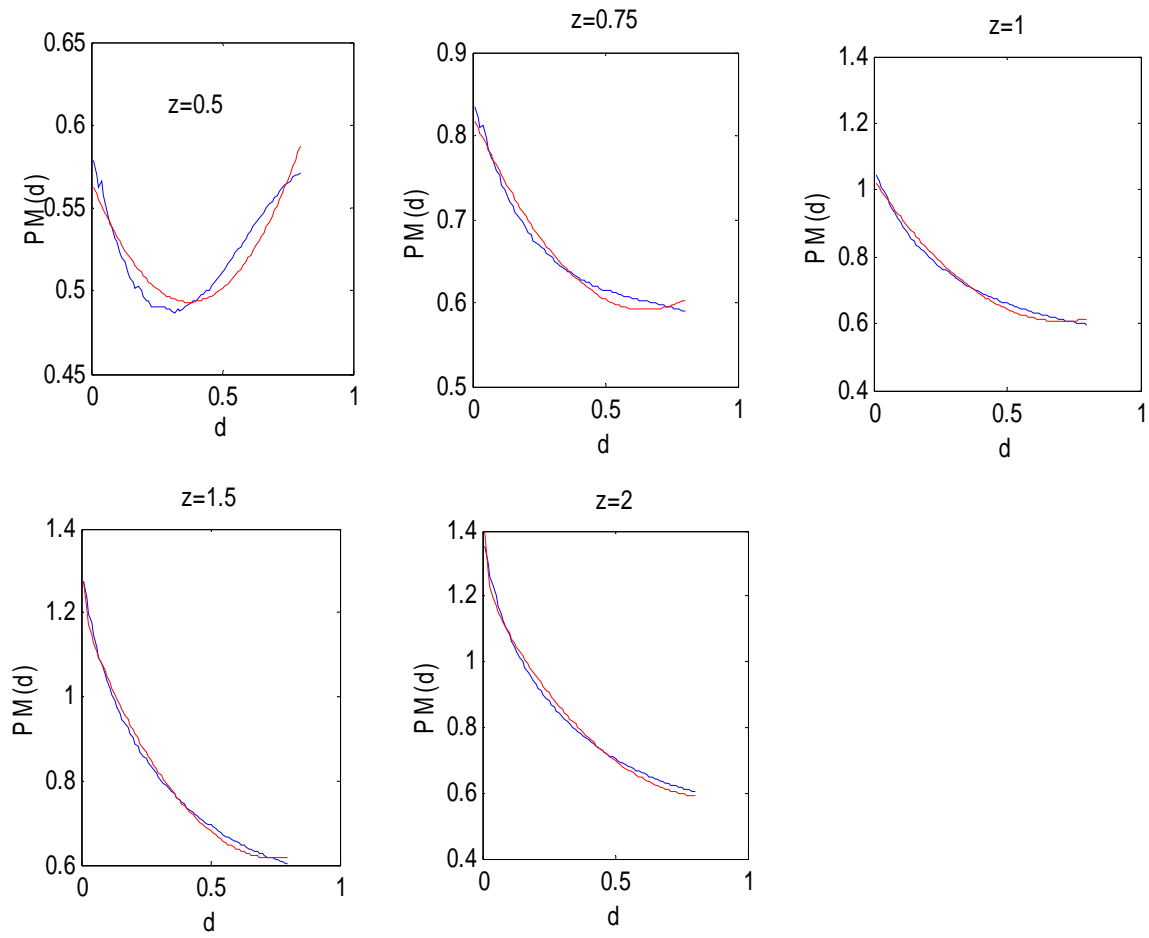
	$\zeta_{des}$	$0 < d < 1.2$	$\max(\Delta PM / PM)$
$\tau_D = d/2$	0.5	$-0.5864d + 0.5704 + 0.1763d^2$	4.4%
	0.75	$-0.8942d + 0.8239 + 0.2755d^2$	4%
	1	$-1.2081d + 1.0158 + 0.4126d^2$	4.4%
	1.5	$-1.3554d + 1.1254 + 0.0021/d + 0.4635d^2$	2.5%
	2	$-1.4582d + 1.1831 + 0.0021/d + 0.5071d^2$	2.5%
	$\zeta_{des}$	$0 < d < 0.8$	$\max(\Delta PM / PM)$
$\tau_D = \tau_{D,maxPI}$	0.5	$-0.3912d + 0.5665 + 0.5217d^2$	3%
	0.75	$-0.7141d + 0.8245 + 0.5471d^2$	2.8%
	1	$-1.195d + 1.0305 + 0.8426d^2$	3%
	1.5	$-1.4942d + 1.1755 + 0.9929d^2 + 0.0012/d$	2.5%
	2	$-1.4199d + 1.1995 + 0.8197d^2 + 0.0021/d$	3%

Πίνακας 8. Προσεγγίσεις του  $PM(d, \tau_D, \zeta_{ses})$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$  και για  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και  $\tau_D = \tau_{D,maxPI}$ .

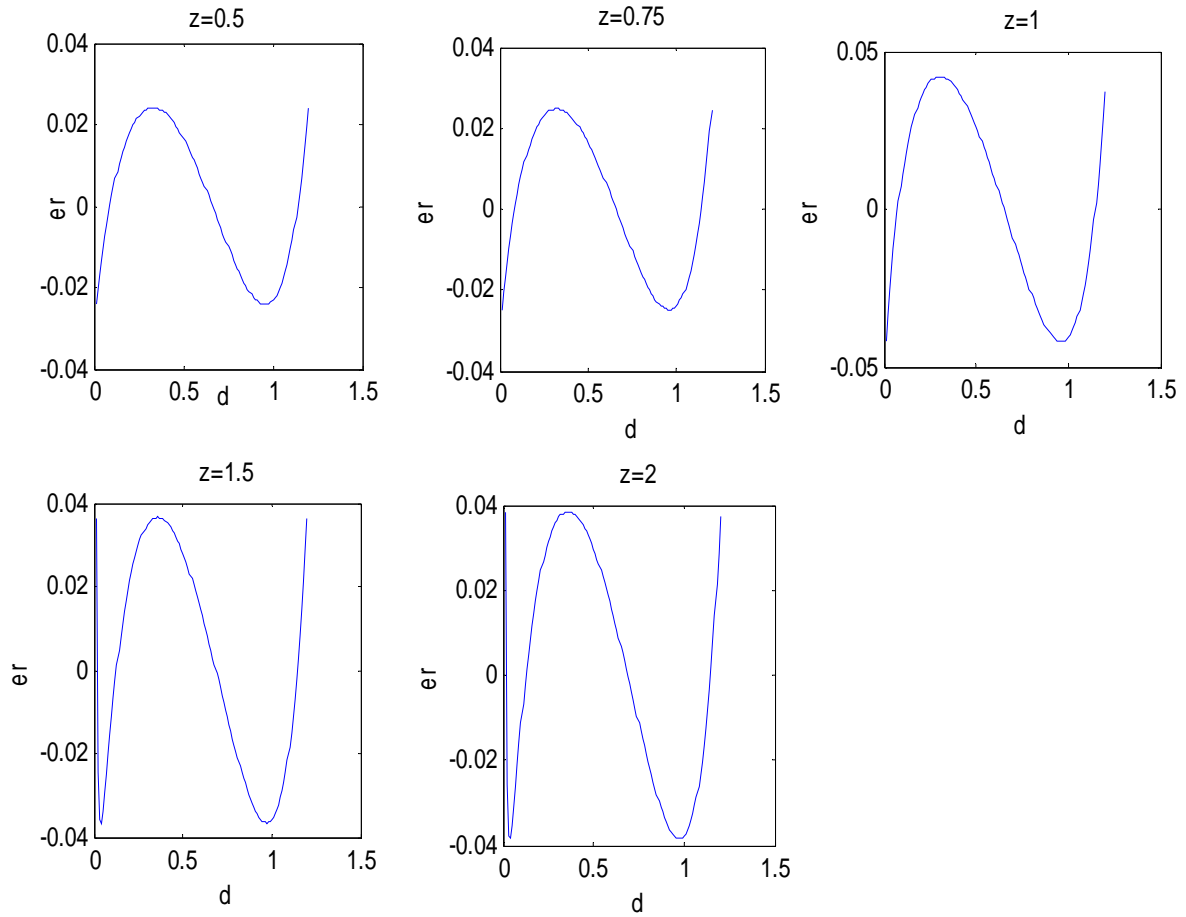


Σχήματα 28. Προσεγγιστική (κόκκινη καμπύλη) και πραγματική (μπλε καμπύλη) καμπύλη του  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$  (2<sup>η</sup> μέθοδος PID ελεγκτή).

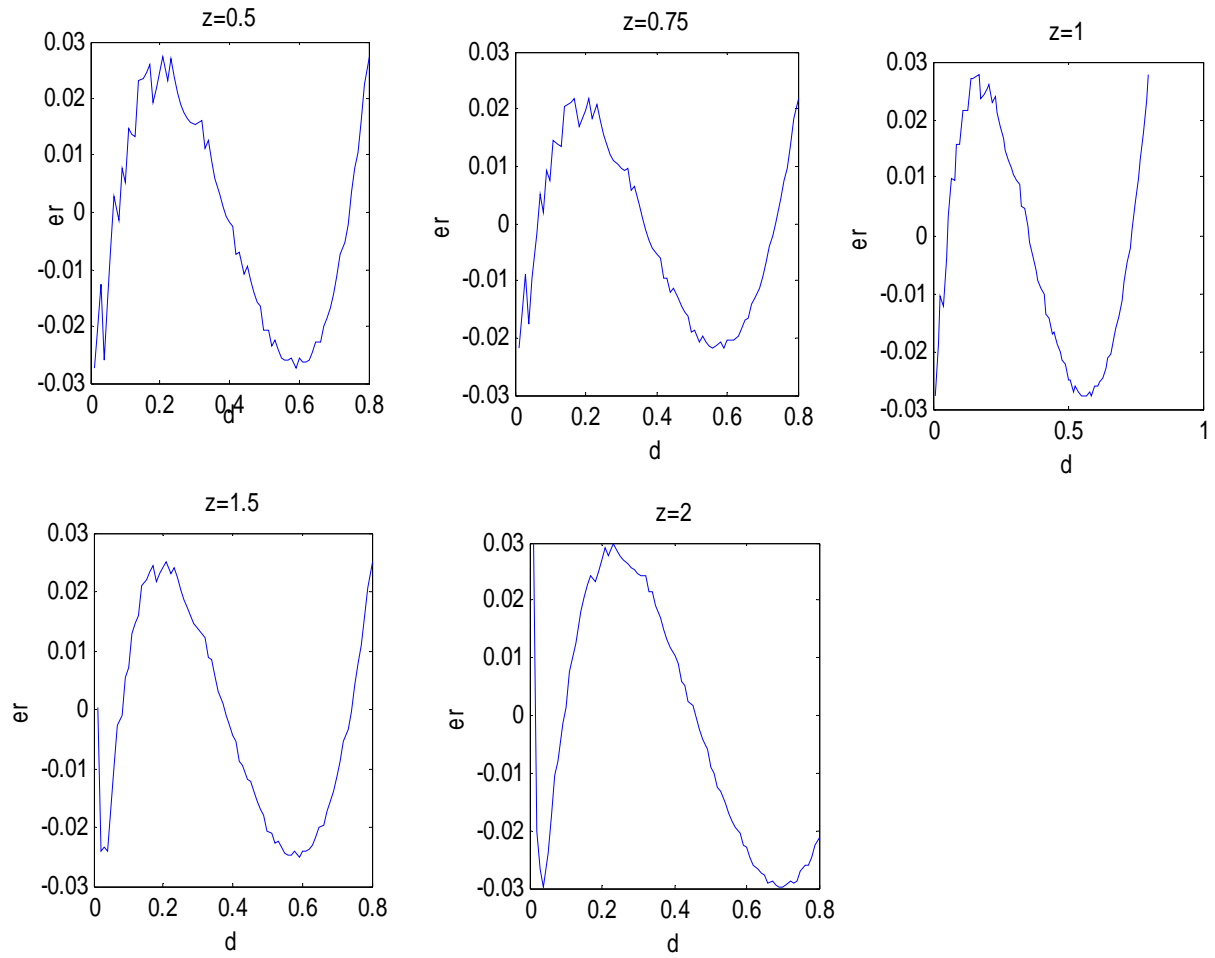




Σχήματα 29. Προσεγγιστική (κόκκινη καμπύλη) και πραγματική (μπλε καμπύλη) καμπύλη του  $PM(d, \tau_D = \tau_{D \max PI}, \zeta_{des})$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$  (2<sup>η</sup> μέθοδος PID ελεγκτή).



Σχήματα 30. Μέγιστο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης του  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2}, \zeta_{ses})$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$ .



Σχήματα 31. Μέγιστο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης του  $PM(d, \tau_D = \tau_{D \max PI}, \zeta_{des})$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$ .

## 8.3 ΤΡΙΤΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ PID ΕΛΕΓΚΤΗ

Αντίστοιχα με την τρίτη μέθοδο βαθμονόμησης για PI ελεγκτή είναι δυνατόν να υπολογιστεί η τιμή του  $\tau_I(d, \tau_D)$  για την οποία ελαχιστοποιείται κάποιο από τα κριτήρια που αναφέρθηκαν στην ενότητα 7.3. Για τον ακριβή υπολογισμό του  $\tau_I$  πρέπει να χρησιμοποιηθεί επίσης προσομοίωση. Όπως και στην περίπτωση του PI ελεγκτή, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του  $\tau_I(d, \tau_D)$  που προκύπτουν με την χρήση προσομοίωσης και ελαχιστοποιούν τα προαναφερθείσα στην ενότητα 7.3 ολοκληρωτικά κριτήρια και στην συνέχεια για την εφαρμογή της μεθόδου χωρίς την χρήση επαναληπτικών αλγορίθμων, οι τιμές αυτές προσεγγίζονται από απλές συναρτήσεις για τις τιμές του  $\tau_D$ ,  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και  $\tau_D = \tau_{D, \max PI}$  και για κάθε ένα από τα ολοκληρωτικά κριτήρια. Οι συναρτήσεις αυτές φαίνονται στον πίνακα 9.

	Criteria	$0 < d < 0.4$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$	$0.4 < d < 0.9$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
$\tau_D = d/2$	ISE-SP	$2.976d + 33.2d^3 - 24.33d^4$	2.5%	$\frac{1.295d + 12.8d^4}{0.96 - d}$	4.9%
	ISE-L	$2.739d + 32.63d^3 - 16.34d^4$	2.3%	$\frac{1.2d + 15.79d^4}{0.95 - d}$	3.9%
	ISENSCOD-SP	$0.7774 + 1.344d + 13.68d^2$	2.6%	$\frac{1.78d + 11.8d^4}{0.95 - d}$	3.3%
	ISENSCOD-L	$5.926d + 96.8d^2 + 0.158\sqrt{d}$	2.9%	$\frac{1.62d + 15.54d^4}{0.95 - d}$	4.2%
	IENSDCO-SP	$3.123 - 1.877d + 19.41d^2$	1.6%	$\frac{2.9d + 8.23d^4}{0.95 - d}$	2.3%
	IENSDCO-L	$3.62d + 56.84d^4 + 0.124\sqrt{d}$	3%	$\frac{1.26d + 15.41d^4}{0.95 - d}$	4%
	Criteria	$0 < d < 0.9$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$	$0.4 < d < 0.9$	$\max(\Delta \tau_I / \tau_I)$
$\tau_D = \tau_{D, \max PI}$	ISE-SP	$2.387d + 3.485d^2 + 5.91d^4$	1.5%		
	ISE-L	$2.186d + 3.237d^2 + 5.697d^4$	1.2%		
	ISENSCOD-SP	$0.6736 + 3.67d + 9.747d^4$	4.1%		
	ISENSCOD-L	$5.968d - 7.23d^2 + 13.16d^3$	2.1%		
	IENSDCO-SP	$3.051 + 6.396d^2 + 5.147d^4$	4%		
	IENSDCO-L	$2.326d + 7.878d^3 + 0.2488$	3%		

Πίνακας 9. Προσεγγίσεις του  $\tau_I(d, \tau_D)$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων για

$$\tau_D = \frac{d}{2} \text{ και } \tau_D = \tau_{D, \max PI} \text{ (3}^{\text{η}} \text{ PID μέθοδος)}$$

Θα ήταν και εδώ χρήσιμο να δούμε τι περιθώριο φάσης πετυχαίνετε με την επιλογή του  $\tau_I$  ώστε να ελαχιστοποιούνται τα προαναφερθείσα ολοκληρωτικά κριτήρια. Έτσι στην περίπτωση του PID, για διάφορες τιμές της καθυστέρησης χρόνου του συστήματος  $d$  υπολογίζουμε το περιθώριο φάσης (σχέση (6.14)) του συστήματος που προκύπτει για τις τιμές του  $\tau_I$  που ελαχιστοποιούν τα

προαναφερθέντα κριτήρια και για τις δύο συγκεκριμένες τιμές του  $\tau_D$ ,  $\tau_D = \frac{d}{2}$  και  $\tau_D = \tau_{D,\max PI}$ . Επίσης, για ευκολία των συγκρίσεων οι συναρτήσεις του περιθωρίου φάσης ως συνάρτηση της καθυστέρησης χρόνου  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2})$  και  $PM(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})$  που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση τέτοιων κριτηρίων, προσεγγίστηκαν από απλές συναρτήσεις  $\hat{PM}(d, \tau_D = \frac{d}{2})$  και  $\hat{PM}(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})$ . Στον πίνακα 10 φαίνονται οι συναρτήσεις  $\hat{PM}(d, \tau_D = \frac{d}{2})$  και  $\hat{PM}(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})$  που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση του καθενός από τα προαναφερθείσα κριτήρια. Επίσης, στα σχήματα 34α-34στ φαίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2})$  μαζί με τις αντίστοιχες προσεγγίσεις  $\hat{PM}(d, \tau_D = \frac{d}{2})$ , ενώ στα σχήματα 35α-35στ βλέπουμε αντίστοιχα τα  $PM(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})$  και  $\hat{PM}(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})$ . Τέλος, στα σχήματα 36α-36στ και 37α-37στ

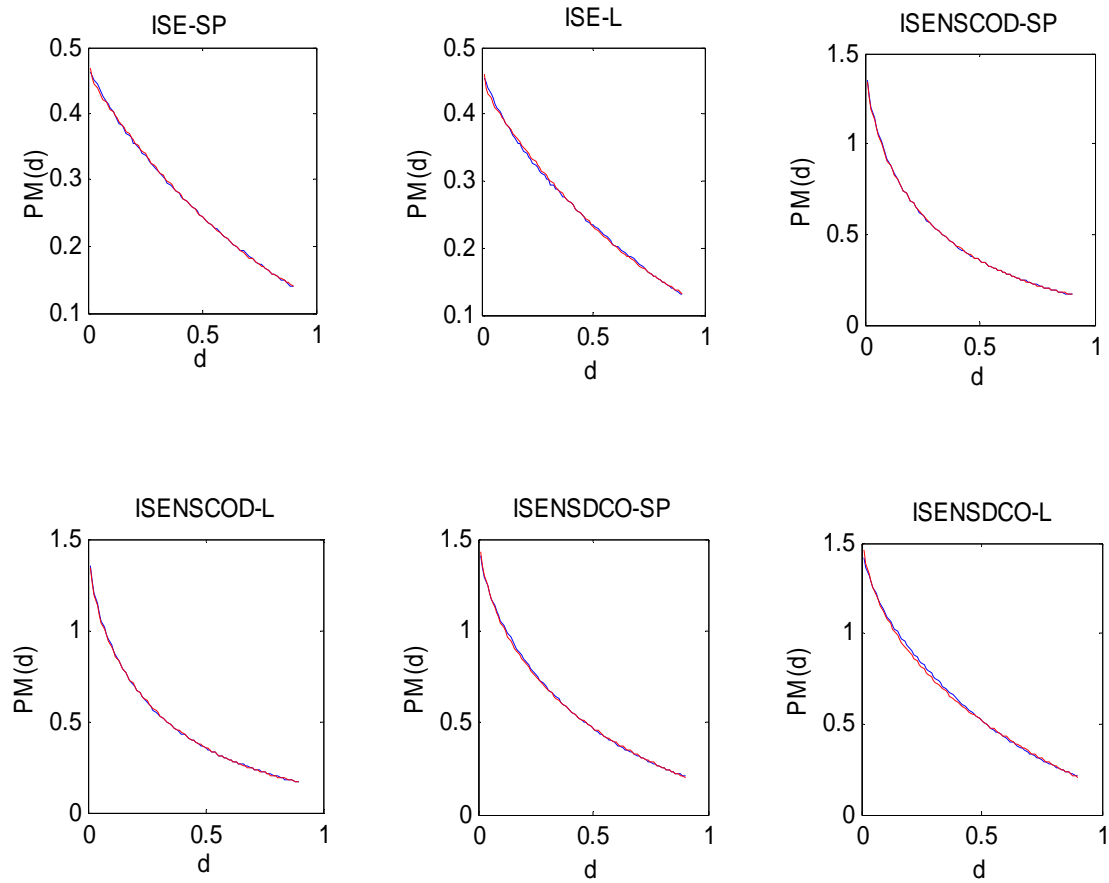
βλέπουμε τα μέγιστα σχετικά σφάλματα  $\max \frac{\Delta PM(d, \tau_D = \frac{d}{2})}{PM(d, \tau_D = \frac{d}{2})}$  και  $\max \frac{\Delta PM(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})}{PM(d, \tau_D = \tau_{D,\max PI})}$

για κάθε ολοκληρωτικό κριτήριο, από όπου και παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση το μέγιστο σχετικό σφάλμα δεν ξεπερνάει το 5%.

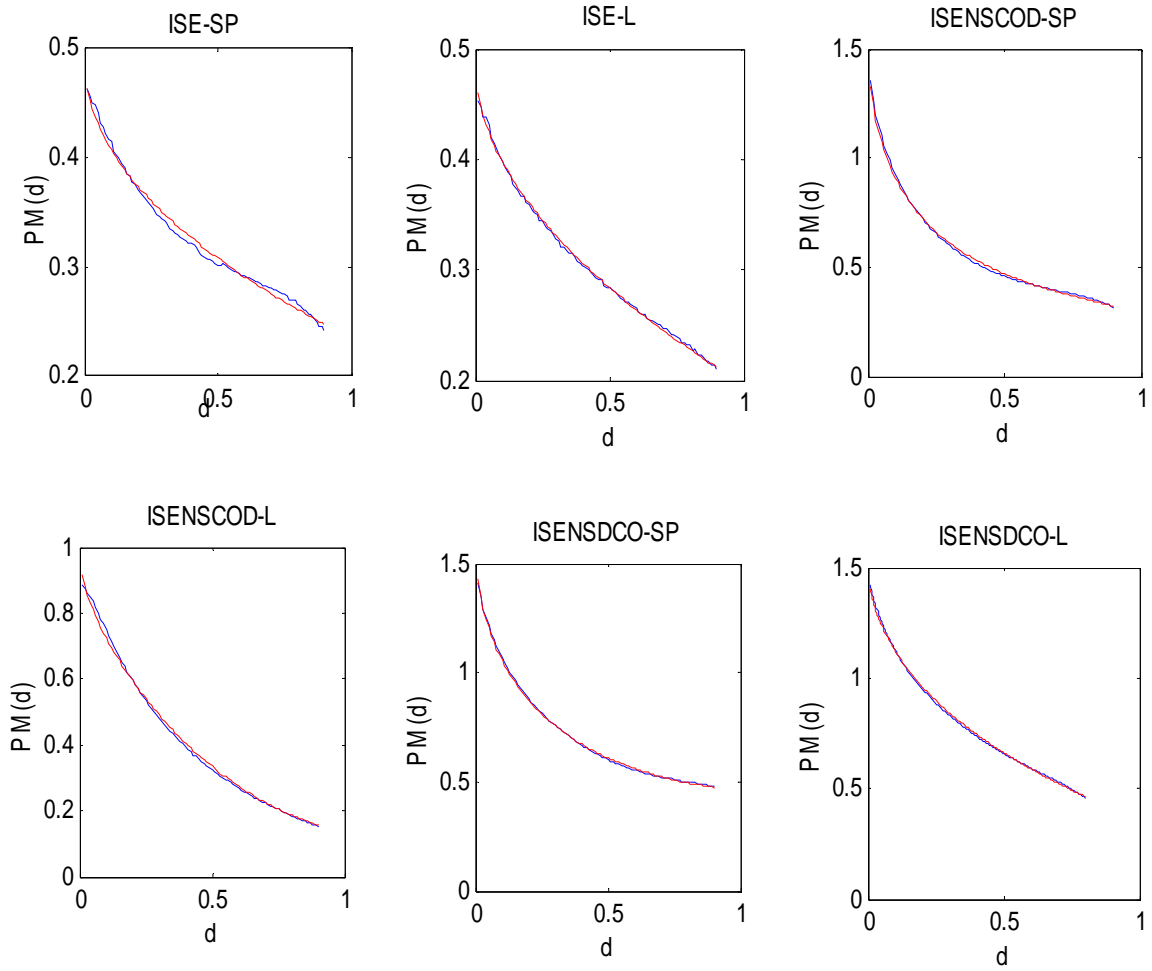
	Κριτήριο	PM(d)	d	max( $\Delta \tau_I / \tau_I$ )
$\tau_D = d/2$	ISE-SP	$-0.5073d + 0.4542 + 0.1768d^2 + 0.0002/d$	$0 < d < 0.9$	1.5%
	ISE-L	$-0.4895d + 0.4346 + 0.17d^2 + 0.0003/d$	$0 < d < 0.9$	2%
	ISENSCOD-SP	$1.0038d + 1.5809 - 2.4429\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	1%
	ISENSCOD-L	$-0.5371d + 0.9869 + 0.3581d^2 - 0.6705\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	1.7%
	ISENSDCO-SP	$0.5618d + 1.6319 - 2.0387\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	3%
	ISENSDCO-L	$0.2964d + 1.6357 - 1.7894\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	3%
	Criteria	PM(d)	d	max( $\Delta \tau_I / \tau_I$ )
$\tau_D = \tau_{D,\max PI}$	ISE-SP	$0.006d + 0.4895 - 0.2606\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	3%
	ISE-L	$-0.0111d + 0.4883 - 0.2811\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	1.5%
	ISENSCOD-SP	$1.59d + 1.5733 - 0.2827d^2 - 2.5852\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	3%
	ISENSCOD-L	$0.1031d + 1.0132 - 0.9138\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	5%
	ISENSDCO-SP	$0.9393d + 1.6295 - 2.108\sqrt{d}$	$0 < d < 0.9$	1.5%
	ISENSDCO-L	$0.1963d + 1.539 - 1.376\sqrt{d}$	$0 < d < 0.8$	1.7%

Πίνακας 10. Προσεγγίσεις του  $PM(d, \tau_D)$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων για

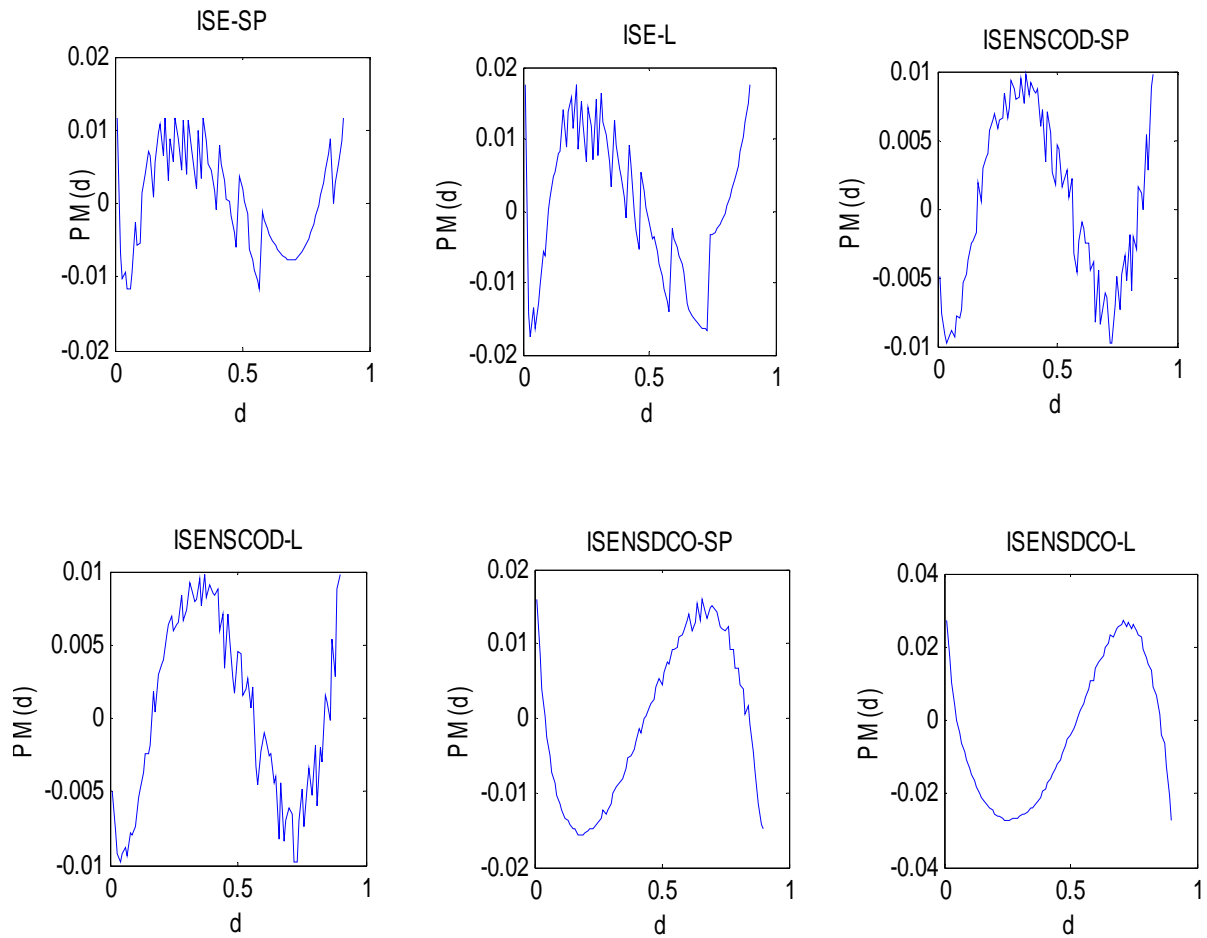
$$\tau_D = \frac{d}{2} \text{ και } \tau_D = \tau_{D,\max PI} \text{ (3}^{\text{η}} \text{ PID μέθοδος)}$$



Σχήματα 32. Προσεγγιστική (κόκκινη καμπύλη) και πραγματική (μπλε καμπύλη) καμπύλη του  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2})$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων (3<sup>η</sup> PID μέθοδος)

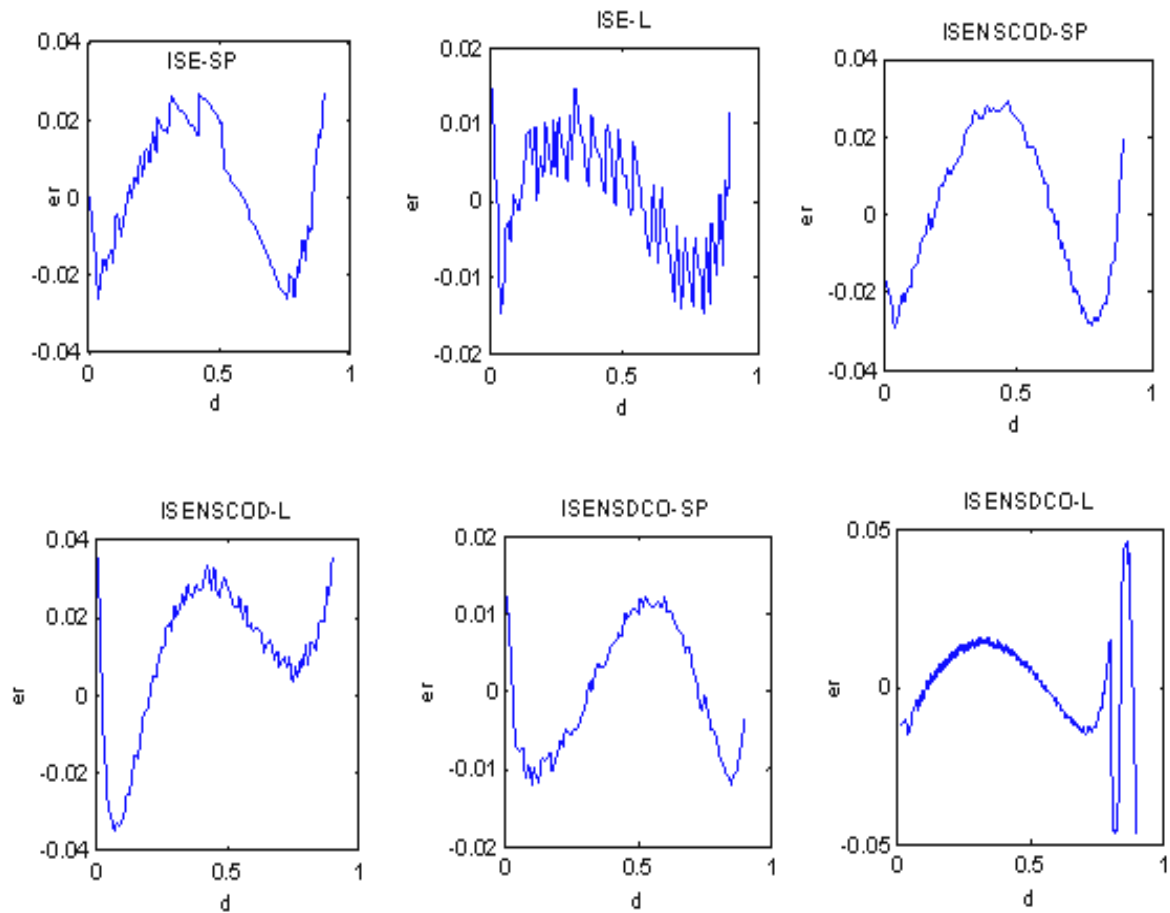


Σχήματα 33. Προσεγγιστική (κόκκινη καμπύλη) και πραγματική (μπλε καμπύλη) καμπύλη του  $PM(d, \tau_D = \tau_{D, \max PI})$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων (3<sup>η</sup> PID μέθοδος).



Σχήματα 34. Μέγιστο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης του  $PM(d, \tau_D = \frac{d}{2})$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων (3<sup>η</sup> PID μέθοδος).





Σχήματα 35. Μέγιστο σχετικό σφάλμα της προσέγγισης του  $PM(d, \tau_D = \tau_{D, \max PI})$  που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ολοκληρωτικών κριτηρίων (3<sup>η</sup> PID μέθοδος).

**9. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ****9.1. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΡΙ ΕΛΕΓΚΤΗ**

Για να ελέγξουμε την εγκυρότητα και τις δυνατότητες των παρών μεθόδων βαθμονόμησης και για να συγκρίνουμε αυτές τις μεθόδους με άλλες υπάρχουσες, παρουσιάζουμε εδώ διάφορα αριθμητικά παραδείγματα. Στον πίνακα 11 φαίνονται οι τιμές των παραμέτρων του ΡΙ ελεγκτή,  $\tau_I$  και  $K_C$  για διάφορες αριθμητικές εφαρμογές των μεθόδων βαθμονόμησης που παρουσιάστηκαν στην ενότητα 7, ενώ οι αποκρίσεις του κλειστού συστήματος για βηματική αλλαγή της εισόδου αναφοράς, αλλά και για βηματικές διαταραχές στην είσοδο του συστήματος, για τις συγκεκριμένες αριθμητικές εφαρμογές, φαίνονται στα σχήματα 36 έως 40.

Σχήμα	Περίπτωση	Παράμετροι του Ελεγκτή
Σχήμα 21	$d=0.9$	$K_C=1.0661, \tau_I=363.7499$
	$d=0.9$	$K_C=1.0634, \tau_I=489.998$
Σχήμα 22α	$d=0.1$	$K_C=4.2237, \tau_I=1.1867$
	$d=0.3$	$K_C=2.0948, \tau_I=3.6157$
	$d=0.5$	$K_C=1.5665, \tau_I=6.7113$
Σχήμα 22b	$\zeta_{des}=0.5$	$K_C=2.3509, \tau_I=1.1959$
	$\zeta_{des}=1$	$K_C=2.0948, \tau_I=3.6157$
	$\zeta_{des}=2$	$K_C=1.895, \tau_I=17.5784$
Σχήμα 23	$\zeta_{des}=1$	$K_C=1.5665, \tau_I=6.7113$
	$\zeta_{des}=2$	$K_C=1.4523, \tau_I=34.2329$
	$\zeta_{des}=5$	$K_C=1.4201, \tau_I=236.6596$
Σχήμα 24a	$\zeta_{des}=1$	$K_C=1.5665, \tau_I=6.7113$
	R&L	$K_C=1.9091, \tau_I=9.24$
	P&M	$K_C=1.357, \tau_I=6.944$
	V&C	$K_C=1.5066, \tau_I=12.5$
Σχήμα 24b	K&C	$K_C=1.4528, \tau_I=10.94$
	$\zeta_{des}=1$	$K_C=1.5665, \tau_I=6.7113$
	P&M	$K_C=1.357, \tau_I=4.6002, \tau_D=0.2174$
	R&L	$K_C=2.0091, \tau_I=8.86, \tau_D=0.2429$
Σχήμα 25	I-R&L	$K_C=2.3477, \tau_I=6.01, \tau_D=0.2396$
	$\zeta_{des}=1$	$K_C=1.5665, \tau_I=6.7113$
	ISE L	$K_C=1.601, \tau_I=5.0446$
	ISENSCOD	$K_C=1.5878, \tau_I=5.6078$
	IENSDCO	$K_C=1.5543, \tau_I=7.5019$
	IMC $\lambda=2$	$K_C=0.1402, \tau_I=0.9571, K_{C,I}=1.4142$
IMC $\lambda=2.5$	$K_C=0.1121, \tau_I=0.9571, K_{C,I}=1.4142$	

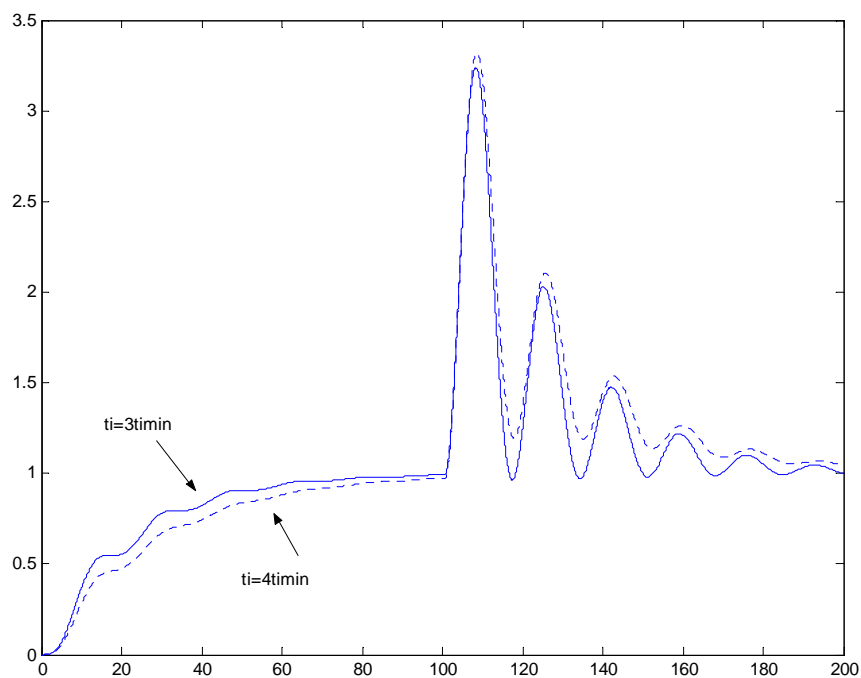
Πίνακας 11. Παράμετροι του ελεγκτή.

Πιο συγκεκριμένα, στο σχήμα 36 φαίνονται οι αποκρίσεις σε μοναδιαία βηματική αλλαγή της εισόδου αναφοράς ενός ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου κλειστού βρόχου, με ΡΙ ελεγκτή βαθμονομημένο σύμφωνα με την πρώτη μέθοδο βαθμονόμησης, με  $\tau_I = 3\tau_{I,\min}$  και  $\tau_I = 4\tau_{I,\min}$  και καθυστέρηση χρόνου του συστήματος  $d = 0.9$ . Τα αποτελέσματα είναι αρκετά ικανοποιητικά, αν λάβουμε υπόψη ότι υπάρχουσες μέθοδοι βαθμονόμησης δεν μπορούν

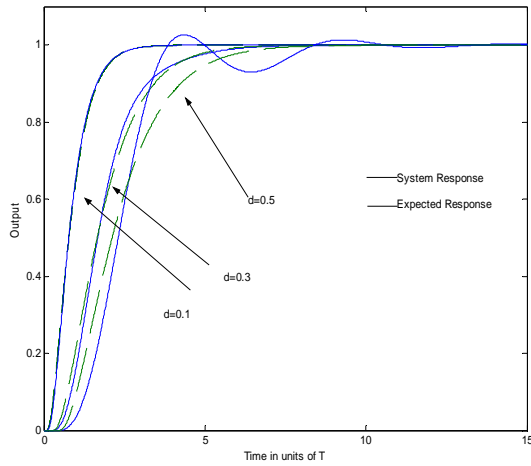
να εφαρμοστούν σε συστήματα με  $d > 0.6$ . Στα σχήματα 37α και 37β συγκρίνονται οι αποκρίσεις του συστήματος σε μοναδιαία βηματική αλλαγή της εισόδου αναφοράς, εφαρμόζοντας την δεύτερη μέθοδο βαθμονόμησης, με την αναμενόμενη από την σχέση (7.3) απόκριση. Στο σχήμα 37α εφαρμόζεται η δεύτερη μέθοδος βαθμονόμησης με  $\zeta_{des} = 1$  και για τιμές της καθυστέρησης χρόνου του συστήματος  $d = 0.1$ ,  $d = 0.3$  και  $d = 0.5$ , ενώ στο σχήμα 37β εφαρμόζεται η ίδια μέθοδος σε σύστημα με καθυστέρηση χρόνου  $d = 0.3$  και για τιμές του  $\zeta_{des}$ ,  $\zeta_{des} = 0.5$ ,  $\zeta_{des} = 1$  και  $\zeta_{des} = 2$ . Από τα σχήματα 37, είναι ξεκάθαρο ότι οι αποκρίσεις του συστήματος είναι πολύ κοντά στις αναμενόμενες. Επιπλέον, η διαφορά των αποκρίσεων του συστήματος σε σχέση με τις αναμενόμενες αποκρίσεις αυξάνει με την μείωση του  $\zeta_{des}$  ή την αύξηση του  $d$ , οπότε και η προσέγγιση (7.3) δεν είναι ακριβής. Παρόμοια αποτελέσματα ισχύουν και στην περίπτωση όπου η προδιαγραφή σχεδίασης είναι το  $\tau_{e,des}$  (λεπτομέρειες [15]). Στο σχήμα 38 φαίνεται η συμπεριφορά του συστήματος σε μοναδιαία βηματική αλλαγή της εισόδου αναφοράς και βηματική διαταραχή στην είσοδο του ελεγκτή με  $|L| = 0.1$ , όταν έχουμε παραμετρική αβεβαιότητα στην τιμή της καθυστέρησης  $d$  και του κέρδους  $K$  και εφαρμόζεται η δεύτερη μέθοδος βαθμονόμησης με  $\zeta_{des} = 1$ . Από το σχήμα αυτό παρατηρούμε ότι το κλειστό σύστημα είναι αρκετά εύρωστο και ότι η ευρωστία του συστήματος αυξάνεται με την αύξηση του  $\zeta_{des}$ .

Στα σχήματα 39 συγκρίνονται οι αποκρίσεις του συστήματος όταν εφαρμόζονται οι παρούσες μέθοδοι βαθμονόμησης, σε σχέση με ήδη υπάρχουσες, για το χαρακτηριστικό παράδειγμα όπου  $d = 0.5$  ([2], [3], [4]), για μοναδιαία βηματική αλλαγή της εισόδου αναφοράς και βηματική διαταραχή στην είσοδο του ελεγκτή με  $|L| = 0.1$ , όταν έχουμε παραμετρική αβεβαιότητα στην τιμή της. Στο σχήμα 39α συγκρίνεται η απόκριση του συστήματος με ΠΙ ελεγκτή βαθμονομημένο σύμφωνα με την δεύτερη μέθοδο για  $\zeta_{des} = 1$ , σε σχέση με τις μεθόδους βαθμονόμησης για ΠΙ ελεγκτή που έχουν προταθεί από τους Rotstein και Lewin (R&L), ([16] για  $\lambda = 2.2$ ), De Paor και O'Malley (P&M) ([17] quasi-optimum phase margin method), Venkatasankar και Chindamvaram (V&C) ([18]) και Kavdia και Chidabaram (K&C) ([19]). Όλα αυτά τα κλασικά σχήματα ΠΙ ελεγκτή, δίνουν πάρα πολύ μεγάλη υπερέψωση (της τάξης του 300%) και μερικά από αυτά ταλαντωτική συμπεριφορά. Η παρούσα μέθοδος εγγυάται την καλύτερη απόκριση όσο αναφορά το ποσοστό υπερέψωσης, ταλαντώσεων και χρόνου αποκατάστασης σε σχέση με αυτά τα σχήματα ελέγχου. Στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου, η παρούσα μέθοδος είναι συγκρίσιμη με τις προαναφερθείσες μεθόδους. Στο σχήμα 39β συγκρίνεται η απόκριση του συστήματος με ΠΙ ελεγκτή βαθμονομημένο σύμφωνα με την δεύτερη μέθοδο για  $\zeta_{des} = 1$ , σε σχέση με τις PID μεθόδους βαθμονόμησης P&M, R&L με  $\lambda = 2.1$  και την βελτιωμένη R&L μέθοδο με  $\lambda = 1.6$  ([16]). Είναι ξεκάθαρο, ότι η παρούσα μέθοδος εγγυάται καλύτερη απόκριση στην περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς, ενώ, στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου, τα κλασικά αυτά σχήματα PID ελέγχου συμπεριφέροντε καλύτερα, όπως αναμενόταν, λόγω της δράσης του διαφορικού όρου.

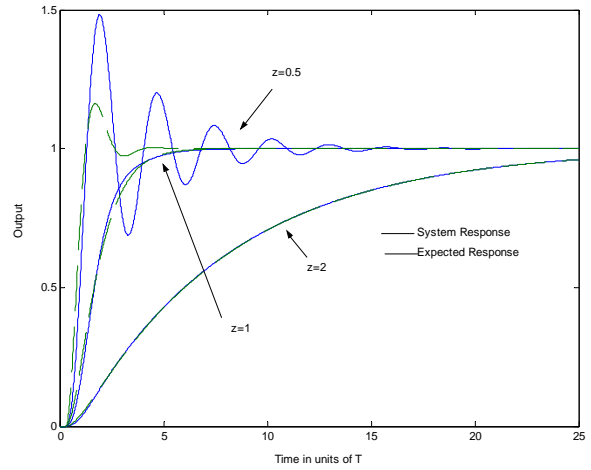
Στα σχήματα 40 συγκρίνεται η δύο βημάτων IMC μέθοδος ([20]) με την δεύτερη μέθοδο βαθμονόμησης με  $\zeta_{des} = 1$ , καθώς και με την τρίτη μέθοδο βαθμονόμησης για ελαχιστοποίηση των κριτηρίων ISENSCOD ή ISENSDCO στην περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς (σχήμα 40α) και για ελαχιστοποίηση του κριτηρίου ISE-L στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου με διαταραχή φορτίου  $|L|=0.1$  (σχήμα 40β). Από τα σχήματα αυτά, συμπεραίνουμε ότι η επίδοση της τρίτης μεθόδου βαθμονόμησης είναι συγκρίσιμη σε σχέση με την βέλτιστα-ρυθμιζόμενη δύο-βημάτων (best-tuned two-stages) IMC μέθοδο στην περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς. Στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου, η δεύτερη μέθοδος είναι συγκρίσιμη με την μέθοδο στην αναφορά [20], αφού παράγει μικρότερο σφάλμα, ενώ η ISE-L μέθοδος είναι καλύτερη όσο αναφορά το μέγιστο σφάλμα και χειρότερη όσο αναφορά τις ταλαντώσεις και τον χρόνο αποκατάστασης.



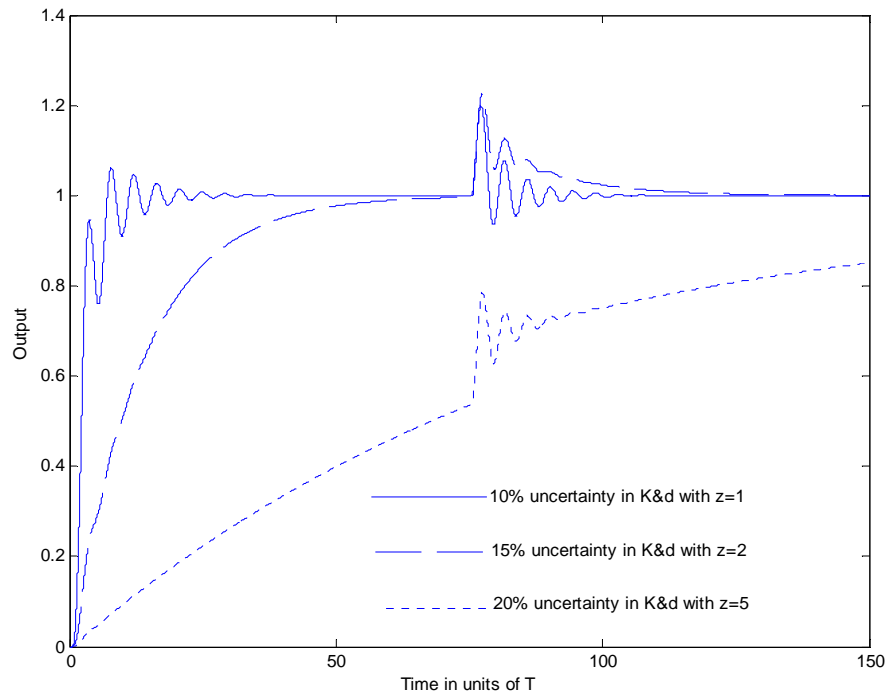
Σχήμα 36. Βηματική απόκριση και απόκριση σε βηματική διαταραχή φορτίου ( $|L|=0.1$ ) ενός ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου  $d=0.9$  βαθμονομημένο σύμφωνα με την 1<sup>η</sup> PI μέθοδο.



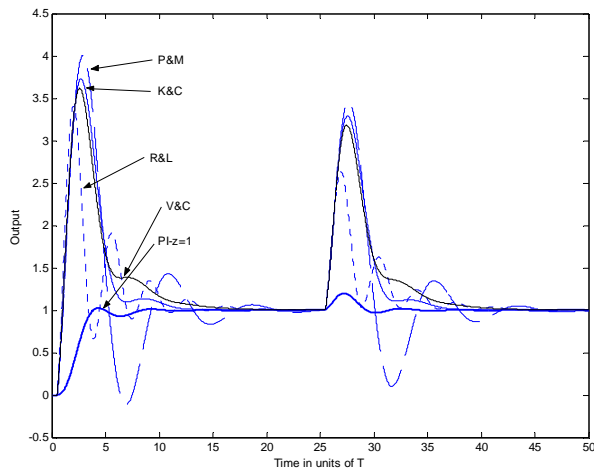
Σχήμα 27α. Βηματική απόκριση ενός ασταθούς συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης για διάφορες τιμές της καθυστέρησης με  $\zeta_{des} = 1$  (2<sup>η</sup> ΠΙ μέθοδος) .



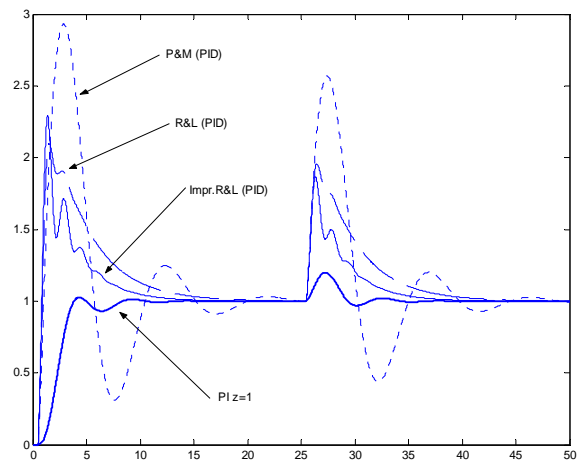
Σχήμα 27β.Βηματική απόκριση ενός ασταθούς συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης με  $d = 0.3$  για διάφορες τιμές του  $\zeta_{des}$  (2<sup>η</sup> ΠΙ μέθοδος).



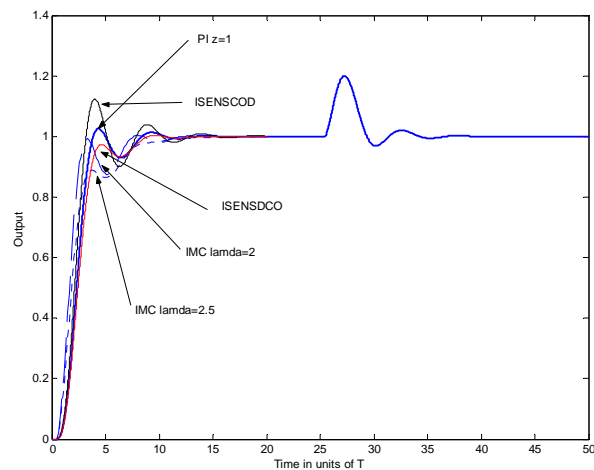
Σχήμα 38. Βηματική απόκριση και απόκριση σε διαταραχή φορτίου  $|L| = 0.1$  για  $d = 0.5$  και αβεβαιότητα στις τιμές των  $d$  και  $K$  .



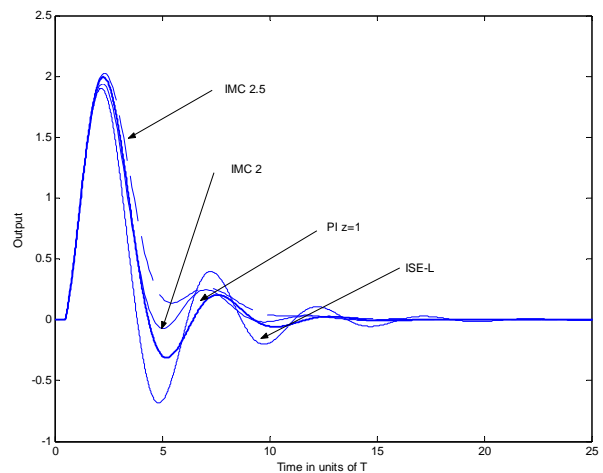
Σχήμα 39α. Σύγκριση της 2<sup>ης</sup> μεθόδου με άλλες PI μεθόδους βαθμονόμησης.



Σχήμα 39β. Σύγκριση της PI μεθόδου με άλλες PI μεθόδους βαθμονόμησης.



Σχήμα 40α. Σύγκριση της απόκρισης της 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> PI μεθόδου με την IMC μέθοδο για βηματική είσοδο.

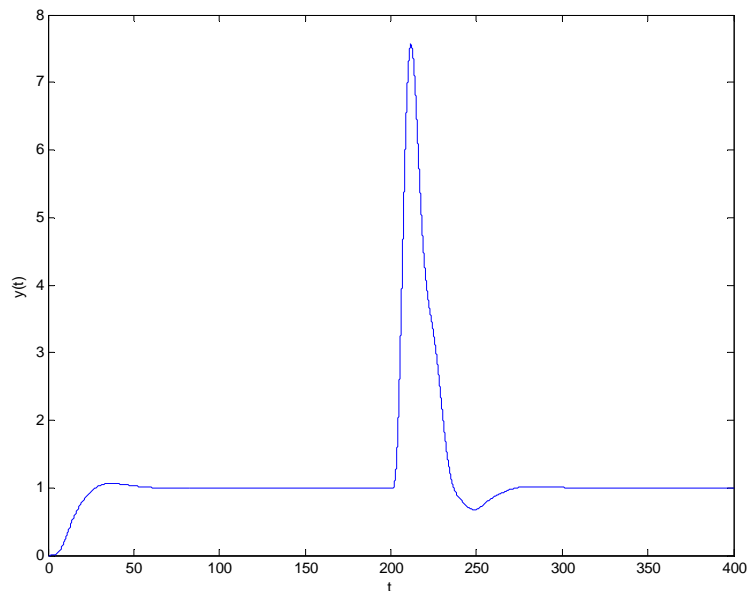


Σχήμα 40β. Σύγκριση της απόκρισης της 2<sup>ης</sup> και 3<sup>ης</sup> PI μεθόδου με την IMC μέθοδο για βηματική αλλαγή φορτίου.

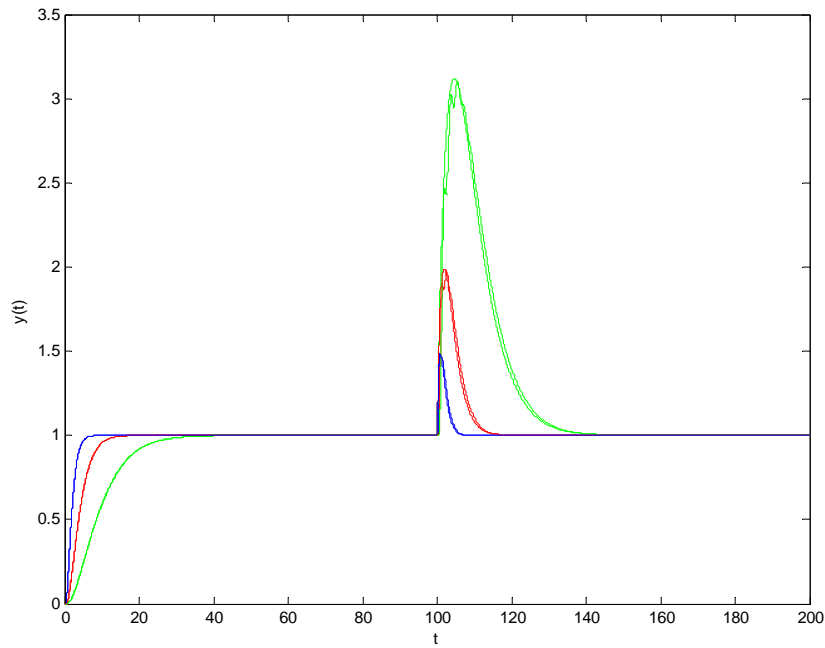
## 9.2. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ PID ΕΛΕΓΚΤΗ

Με την χρήση του διαφορικού όρου στον ελεγκτή είναι δυνατόν να ελεγχθούν ασταθή συστήματα πρώτης τάξης με πολύ μεγάλη καθυστέρηση χρόνου. Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας την πρώτη μέθοδο για PID ελεγκτή σε ένα σύστημα με  $d = 1.7$  και με προεπιλεγμένη την τιμή για τον διαφορικό όρο  $\tau_D = 0.8$  προκύπτει ο ελεγκτής με  $K_C = 1.0136$  και  $\tau_I = 955$ . Στο σχήμα 41, φαίνεται η απόκριση του κλειστού συστήματος σε μοναδιαία αλλαγή της εισόδου αναφοράς, καθώς και βηματική διαταραχή στην είσοδο του ελεγκτή με  $|L| = 0.1$ . Αν λάβει κανείς υπόψη το γεγονός ότι δεν είναι δυνατόν να ελεγχθεί με PID ελεγκτή ασταθές σύστημα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου μεγαλύτερη από 2, η απόκριση του συστήματος είναι αρκετά ικανοποιητική. Βέβαια το σύστημα είναι πολύ ευαίσθητο σε διαταραχές φορτίου.

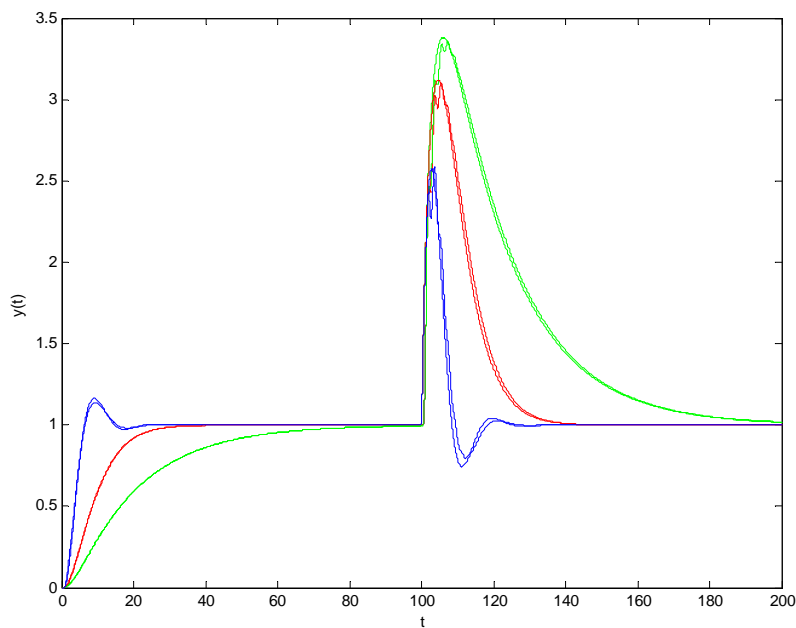
Στο σχήμα 42 φαίνεται η απόκριση του συστήματος εφαρμόζοντας την δεύτερη μέθοδο βαθμονόμησης με  $\zeta_{des} = 1$  και για τιμές της καθυστέρησης χρόνου του συστήματος  $d = 0.3$ ,  $d = 0.5$  και  $d = 0.7$ , ενώ στο σχήμα 43 παρουσιάζεται η απόκριση του συστήματος για  $d = 0.7$  και για τιμές του  $\zeta_{des}$ ,  $\zeta_{des} = 0.5$ ,  $\zeta_{des} = 1$ ,  $\zeta_{des} = 1.5$ . Στα ίδια σχήματα με διακεκομμένες γραμμές φαίνονται οι αναμενόμενες από το αντίστοιχο δεύτερης τάξης σύστημα, ενώ και στα δύο σχήματα η τιμή του διαφορικού όρου του ελεγκτή έχει επιλεγεί  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$ . Είναι φανερό ότι αυτές οι αποκρίσεις σχεδόν ταυτίζονται, κάτι που επιβεβαιώνει την ακρίβεια τη μεθόδου. Τέλος, στο σχήμα 44, γίνεται σύγκριση των αποκρίσεων που λαμβάνονται για  $d = 0.7$ ,  $\zeta_{des} = 1$  και για τιμές του διαφορικού όρου  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$  και  $\tau_D = 0.2$ . Από το σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι όσο πιο μεγάλη επιλεγεί η τιμή για τον διαφορικό όρο τόσο πιο γρήγορη είναι η απόκριση του συστήματος, τόσο για την περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς όσο και για την περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου.



Σχήμα 41. Βηματική απόκριση και απόκριση σε βηματική διαταραχή φορτίου για ασταθές σύστημα πρώτης τάξης με  $d = 1.7$  βαθμονομημένο με την πρώτη PID μέθοδο και  $\tau_D = 0.8$ .

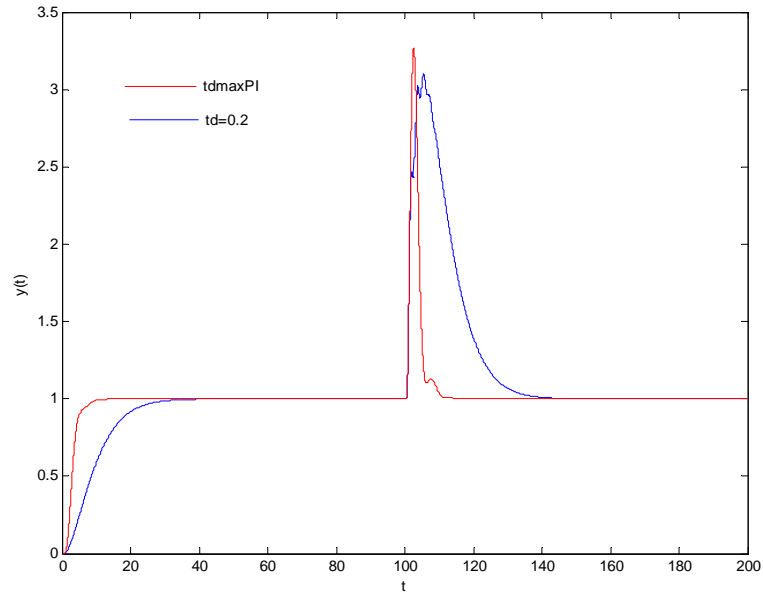


Σχήμα 42. Αναμενόμενη(διακεκομμένη γραμμή) και πραγματική, βηματική απόκριση και απόκριση σε βηματική διαταραχή φορτίου ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης βαθμονομημένο σύμφωνα με την 2<sup>η</sup> PID μέθοδο με  $\zeta_{des} = 1$  και για  $d = 0.3$ ,  $d = 0.5$ ,  $d = 0.7$  με  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$ .



Σχήμα 43. Αναμενόμενη(διακεκομμένη γραμμή) και πραγματική, βηματική απόκριση και απόκριση σε βηματική διαταραχή φορτίου ασταθούς συστήματος πρώτης τάξης βαθμονομημένο σύμφωνα με την 2<sup>η</sup> PID μέθοδο με  $d = 0.7$  και  $\zeta_{des} = 0.5$ ,  $\zeta_{des} = 1$ ,  $\zeta_{des} = 1.5$  με  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$ .





Σχήμα 44. Σύγκριση των αποκρίσεων της 2<sup>ης</sup> PID μεθόδου με  $d = 0.7$  και  $\zeta_{des} = 1$  για  $\tau_D = \tau_{D,max PI}$  και  $\tau_D = 0.2$ .

### 9.3. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ ΣΕ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΣΤΑΘΟΥΣ ΒΙΟΛΟΓΙΚΟΥ ΑΝΤΙΔΡΑΣΤΗΡΑ

Η δεύτερη μέθοδος βαθμονόμησης για PI ελεγκτή εφαρμόζεται στο σύστημα ασταθούς πυρηνικού αντιδραστήρα. Οι εξισώσεις του μοντέλου του συστήματος δίνονται από τις σχέσεις ([4],[7],[8])

$$\dot{X} = [\mu(S) - D]X \quad (9.1)$$

$$\dot{S} = D[S_f - S] - \mu(S)XY_{X/S}^{-1} \quad (9.2)$$

όπου  $X$  είναι η συγκέντρωση της εκρέουσας μάζας,  $S$  είναι η συγκέντρωση υποστρώματος,

$\mu(S) = \mu_m S \left[ K_m + S + \frac{S^2}{K_{SI}} \right]^{-1}$  είναι ο ειδικός ρυθμός ανάπτυξης,  $Y_{X/S}$  είναι ο συντελεστής απόδοσης

βιομάζας,  $\mu_m$  είναι ο μέγιστος ειδικός ρυθμός ανάπτυξης,  $K_m$  είναι η σταθερά του ρυθμού ανάπτυξης

και  $K_{SI}$  είναι η σταθερά αναστολής του υποστρώματος. Ο ρυθμός διάλυσης  $D$  χρησιμοποιείται

ως η ελεγχόμενη είσοδος του συστήματος, ενώ  $S_f$  είναι η συγκέντρωση του υποστρώματος

τροφοδοσίας. Τυπικές τιμές για τις παραμέτρους του συστήματος είναι ([21]):  $Y_{X/S} = 0.4\%g/g$ ,

$S_f = 4\%g/g$ ,  $D = 3h^{-1}$ ,  $\mu_m = 0.53h^{-1}$ ,  $K_m = 0.12\%g/g$ ,  $K_{SI} = 0.4545\%g/g$ . Το παραπάνω

σύστημα έχει ένα ασταθές σημείο ισορροπίας  $[X, S]_2 = [0.9951, 1.5122]$ , που είναι το επιθυμητό

σημείο λειτουργίας του συστήματος. Η συγκέντρωση της εκρέουσας βιομάζας  $X$ , είναι η μεταβλητή

την οποία θέλουμε να ελέγξουμε. Η ελεγχόμενη είσοδος του συστήματος  $D$  υπόκειται στον

περιορισμό  $0.25h^{-1} < D < 0.4h^{-1}$ . Επίσης υπάρχει χρονική καθυστέρηση μιας ώρας στην μέτρηση της

μεταβλητής  $X$ . Γραμμικοποίηση του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας  $[X, S]_2$ , δίνει το ακόλουθο γραμμικό σύστημα ([22])

$$G_p(s) = \frac{-5.89 \exp(-s)}{5.86s - 1} \quad (9.3)$$

Για τον έλεγχο του παραπάνω συστήματος δεν χρησιμοποιούμε το μοντέλο της συνάρτησης μεταφοράς (9.3) αλλά, χρησιμοποιώντας τεχνικές αναγνώρισης συστημάτων (λεπτομέρειες [15]) χρησιμοποιούμε το μοντέλο

$$G_p(s) = \frac{\bar{K} \exp(-\bar{d}s)}{\bar{T}s - 1} \quad (9.4)$$

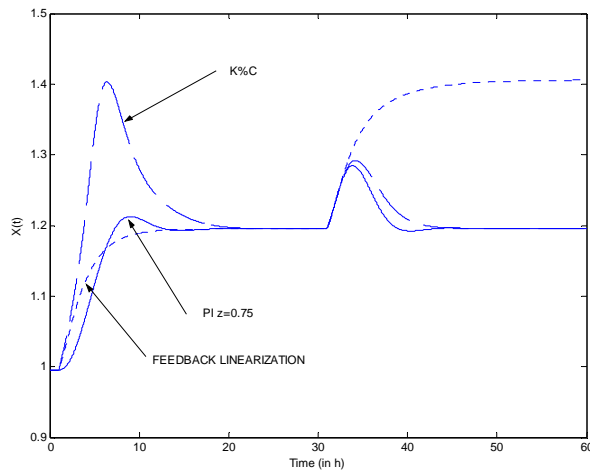
όπου σύμφωνα με τις τεχνικές αναγνώρισης που προτείνονται στην [15], βρίσκουμε  $\bar{K} = -5.6818$ ,  $\bar{T} = 5.2$  και  $\bar{d} = 1$ , οι οποίες είναι πολύ κοντά στις πραγματικές τιμές του μοντέλου (9.3). Η συνάρτηση μεταφοράς επομένως του προς έλεγχο συστήματος είναι

$$G_p(s) = \frac{-5.6818 \exp(-s)}{5.2s - 1} \quad (9.5)$$

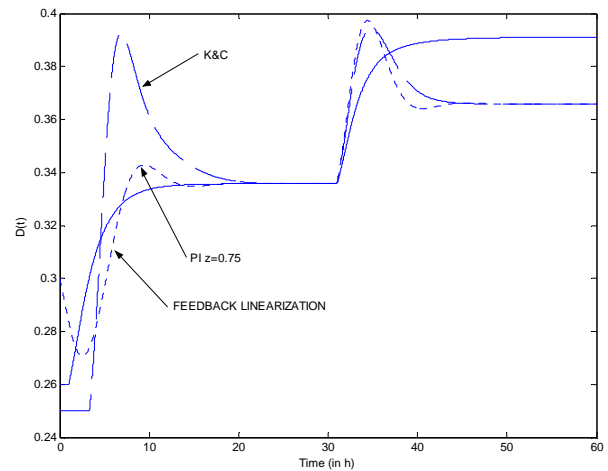
Στην συνέχεια, χρησιμοποιούμε την δεύτερη μέθοδο βαθμονόμησης για PI ελεγκτή με προδιαγραφή την σταθερά απόσβεσης  $\zeta$  και επιθυμητή τιμή για την σταθερά απόσβεσης  $\zeta_{des} = 0.75$ . Οι παράμετροι του ελεγκτή προκύπτουν  $\bar{K}_C = -0.4262$  και  $\bar{\tau}_I = 10.5878$ . Η προτεινόμενη μέθοδος, συγκρίνεται με την μέθοδο της γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης, για την οποία, η είσοδος του συστήματος είναι

$$u = -T_{cl}^{-1} X_{des} X^{-1} + T_{cl}^{-1} + \mu_m S (K_{SI} S^2 + S + K_m)^{-1} \quad (9.6)$$

όπου  $T_{cl}$  είναι επιθυμητή σταθερά χρόνου του κλειστού συστήματος και  $X_{des}$  είναι η επιθυμητή τιμή του σημείου λειτουργίας. Για να εφαρμόσουμε την μέθοδο της γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης σε σύστημα με καθυστέρηση χρόνου, η μεταβλητή  $T_{cl}$  πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε  $T_{cl} \geq 5\bar{d}$ . Στην συγκεκριμένη περίπτωση, διαλέγουμε  $T_{cl} = 5h$ . Τέλος, η μέθοδος που προτείνουμε εδώ, συγκρίνεται με την K&C μέθοδο βαθμονόμησης για PI ελεγκτή (με  $K_C = -0.4788$  και  $\tau_I = 8.45$ ). Στο σχήμα 45α, φαίνεται η βηματική απόκριση του συστήματος για αλλαγή του σημείου λειτουργίας από  $X = 0.9951$  σε  $X = 1.1951$  και για βηματική διαταραχή στην είσοδο του συστήματος  $-0.03$ . Είναι φανερό, ότι η προτεινόμενη μέθοδος δίνει συγκρίσιμα αποτελέσματα σε σχέση με την μέθοδο γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης και πολύ μικρότερη υπερύψωση σε σχέση με την K&C μέθοδο. Η μέθοδος γραμμικοποίησης μέσω ανατροφοδότησης κατάστασης δίνει πολύ μεγάλο σφάλμα στην περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου και έτσι χρειάζεται επιπλέον PI ελεγκτής. Στο σχήμα 45β, φαίνονται οι έξοδοι των ελεγκτών. Από αυτό το σχήμα, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση του PI ελεγκτή η έξοδος του ελεγκτή ξεπερνάει την αποδεκτή τιμή για την είσοδο του συστήματος ( $D < 0.25$ ). Συμπερασματικά, βλέπουμε ότι η προτεινόμενη μέθοδος βαθμονόμησης δίνει καλύτερη απόκριση.



Σχήμα 45α. Σύγκριση της 2<sup>ης</sup> PI μεθόδου με άλλες τεχνικές ελέγχου (έξοδος συστήματος)



Σχήμα 45β. Σύγκριση της 2<sup>ης</sup> PI μεθόδου με άλλες τεχνικές ελέγχου (έξοδος ελεγκτή)

## 10. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στη παρούσα ενότητα παρουσιάστηκαν μέθοδοι βαθμονόμησης PI και PID ελεγκτών για ασταθή συστήματα πρώτης τάξης με καθυστέρηση χρόνου. Όπως αποδείχθηκε, οι μέθοδοι αυτοί εφαρμόζονται άμεσα σε κάθε μια από τις ισοδύναμες μορφές PI και PID ελεγκτών. Οι μέθοδοι αυτοί εκτός από το ότι ικανοποιούν κάποιο κριτήριο απόκρισης στο πεδίο του χρόνου, δίνουν και το μέγιστο περιθώριο φάσης που μπορεί να επιτευχθεί ταυτόχρονα με την προδιαγραφή απόκρισης του κλειστού συστήματος στο πεδίο του χρόνου. Επίσης γίνεται ανάλυση αυτού του μέγιστου περιθωρίου φάσης και εξάγονται προσεγγίσεις για ευκολία συγκρίσεων των περιθωρίων φάσης που επιτυγχάνονται με κάθε μέθοδο. Ακόμα, προτείνονται απλές προσεγγιστικές σχέσεις που δίνουν τις παραμέτρους των ελεγκτών που προκύπτουν από την εφαρμογή των παραπάνω μεθόδων βαθμονόμησης, ώστε να είναι δυνατή η εφαρμογή τους σε πραγματικό χρόνο. Τέλος, παρουσιάστηκαν διάφορα αριθμητικά αποτελέσματα από όπου και παρατηρήσαμε, ότι οι μέθοδοι αυτοί δίνουν εύρωστους και γρήγορους ελεγκτές τόσο για την περίπτωση ρυθμιστικού ελέγχου όσο και για την περίπτωση παρακολούθησης τροχιάς.

Κλείνοντας, διευκρινίζεται ότι ένα πολύ μεγάλο ποσοστό της ύλης του Μέρους Β είναι από τις εργασίες [15], [22] και [23]. Η συμβολή του συγγραφέα της παρούσας διπλωματικής στο Μέρος Β, συνίσταται κυρίως στα εξής: 1) Απόδειξη ότι για την εύρεση του  $\tau_{D, \max PI}$  χρησιμοποιείται μόνο το  $K_{\max}$  και γραφική εξαγωγή του  $\tau_{D, \max PI}$ . 2) Εύρεση προσεγγιστικών σχέσεων για το περιθώριο φάσης που προκύπτει από κάθε μία μέθοδο βαθμονόμησης και γραφική απεικόνιση αυτών μαζί με τα μέγιστα σχετικά σφάλματα των προσεγγίσεων. 3) Εύρεση προσεγγιστικής σχέσης για το  $\tau_l(d)$  που προκύπτει από την 2<sup>η</sup> PI μέθοδο. 4) Αριθμητικές προσομοιώσεις με την χρήση Matlab των μεθόδων βαθμονόμησης που στηρίζονται στην επίτευξη του μέγιστου περιθωρίου φάσης.

**ΑΝΑΦΟΡΕΣ**

- [1] M. KRSTIC, I. KANELLAKOPOULOS, P. KOKOTOVIC, “NONLINEAR AND ADAPTIVE CONTROL DESIGN”, John Wiley & Sons, 1995.
- [2] L. GAO, L. CHEN, Y. FAN, H. MA, “A NONLINEAR CONTROL DESIGN FOR POWER SYSTEMS”, *Automatica*, Vol. 28, No. 5, pp. 975-979, 1992.
- [3] Y. WANG, D. J. HILL, R. H. MIDDLETON, L. GAO, “TRANSIENT STABILIZATION OF POWER SYSTEMS WITH AN ADAPTIVE CONTROL LAW”, *Automatica*, Vol. 30, No. 9, pp. 1409-1413, 1994.
- [4] A. L. ESHAFEI, K. A. EL-METWALLY, A. A. SHALTOU, “A VARIABLE STRUCTURE ADAPTIVE FUZZY-LOGIC STABILIZER FOR SINGLE AND MULTI-MACHINE POWER SYSTEMS”, *Control Engineering Practice* 13, pp. 413-423, Elsevier 2005.
- [5] D. FLYNN, S. McLOONE, G. W. IRWIN, M. D. BROWN, E. SWIDENBANK, B. W. HOGG, “NEURAL CONTROL OF TURBOGENERATOR SYSTEMS”, *Automatica*, Vol. 33, No. 11, pp. 1961-1973, 1997.
- [6] V. VESELY et al, “A ROBUST NONLINEAR CONTROL DESIGN PROCEDURE APPLIED TO A TURBOGENERATOR SYSTEM”, *Journal of Electrical Engineering*, Vol. 49, No. 11-12, pp. 281- 288, 1998.
- [7] H. F. WANG, F. J. SWIFT, Y. S. HAO, B. W. HOGG, “ADAPTIVE STABILIZATION OF POWER SYSTEMS BY GOVERNOR-TURBINE CONTROL”, *Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 18, No. 2, pp. 131-138, Elsevier 1996.
- [8] J. FU, J. ZHAO, “A NEW ADAPTIVE BACKSTEPPING METHOD FOR NONLINEAR CONTROL OF TURBINE MAIN STEAM VALVE”, *Journal of Control Theory and Applications* 2007 5 (1) 17-22.
- [9] V. VESELY, D. MUDRONCIK, “POWER SYSTEM NONLINEAR ADAPTIVE CONTROL”, *Electric Power Systems Research*, 22 (1991) 235-242.
- [10] V. VESELY, D. MUDRONCIK, “ROBUST ADAPTIVE DECENTRALIZED CONTROL FOR A CLASS OF COMPLEX SYSTEMS”, Slovak Technical University, Department of Automatic Control Systems.
- [11] V. VESELY, “DECENTRALIZED VARIABLE STRUCTURE CONTROL OF LARGE SCALE SYSTEMS”, 1<sup>st</sup> IFAC Workshop on New Trends in Design of Control Systems, September 7-10, 1994, Smolenice, Slovakia.
- [12] W. HU, S. MEI, Q. LU, T. SHEN, A. YOKOHAMA, ”NONLINEAR ADAPTIVE DECENTRALIZED STABILIZING CONTROL OF MULTIMACHINE SYSTEMS”, *Applied Mathematics and Computation* 133 (2002) 519-532.
- [13] J-S. LIN, I. KANELLAKOPOULOS, “NONLINEARITIES ENHANCE PARAMETER CONVERGENCE IN STRICT FEEDBACK SYSTEMS”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 44, No. 1, January 1999.

- [14] G. ANDERSON, “MODELLING AND ANALYSIS OF ELECTRIC POWER SYSTEMS”, Lecture 227-0526-00, ITET ETH Zurich.
- [15] ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΠΑΣΓΙΑΝΟΣ “ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗ PID ΕΛΕΓΚΤΩΝ ΣΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΧΡΟΝΟ ΓΙΑ ΤΟΝ ΕΛΕΓΧΟ ΑΣΤΑΘΩΝ ΜΕ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΧΡΟΝΟΥ”, ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ, ΑΘΗΝΑ, ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2003
- [16] G.E. ROSTEIN, D.R. LEWIN “SIMPLE PI AND PID TUNING FOR OPEN-LOOP UNSTABLE SYSTEMS” *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol.30, pp.1864-1869, 1991.
- [17] A.M. DE PAOR, M. O’MALEY “CONTROLLERS OF ZIEGLER-NICHOLS TYPE FOR UNSTABLE PROCESS WITH TIME DELAY”, *Int. J. Control.*, vol. 49, pp. 1273-1284, 1989
- [18] V. VENKATASHANKAR, M. CHIDAMBARAM “DESIGN OF P AND PI CONTROLLERS FOR UNSTABLE FIRST-ORDER PLUS TIME DELAY SYSTEMS”, *Int. J. Control.*, vol. 60, pp. 137-144, 1994.
- [19] M. KAVDIA, M. CHIDAMBARAM “ON-LINE CONTROLLER TUNING FOR UNSTABLE SYSTEMS”, *Comp. & Chem. Eng.*, vol. 20, pp. 301-305, 1996.
- [20] E.F. JACOB, M. CHIDAMBARAM “DESIGN OF CONTROLLERS FOR UNSTABLE FIRST-ORDER PLUS TIME DELAY SYSTEMS”, *Comp. & Chem. Eng.*, vol. 20, pp. 579-584, 1996.
- [21] E.F. JACOB, M. CHIDAMBARAM “ROBUST CONTROL OF UNSTABLE BIOREACTORS”, *Proc. Contr. Qual.*, vol. 8, pp. 147-157, 1996.
- [22] L. ANATH, M. CHIDAMBARAM “CLOSED-LOOP IDENTIFICATION OF TRANSFER FUNCTION MODEL FOR UNSTABLE SYSTEMS”, *J. Franklin Inst.*, vol. 336, pp. 1055-1061, 1999.
- [22] P.N. PARASKEVOPOULOS, G.D. PASGIANOS, K. G. ARVANITIS “PID-TYPE CONTROLLER TUNING FOR UNSTABLE FIRST ORDER PLUS DEAD TIME PROCESSES BASED ON GAIN AND PHASE MARGIN SPECIFICATIONS”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol.14, No. 5, September 2006.
- [23] P.N. PARASKEVOPOULOS, G.D. PASGIANOS, K. G. ARVANITIS “NEW TUNING AND IDENTIFICATION METHODS FOR UNSTABLE FIRST ORDER PLUS DEAD TIME PROCESSES BASED ON PSEUDO-DERIVATIVE FEEDBACK CONTROL” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, Vol.12, No. 3, pp.455-464, May 2004.