Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Ηλεκτρολογων Μηχανικων
και Μηχανικων Υπολογιστων
Τομεας Τεχνολογιας Πληροφορικης & Υπολογιστων

Η ΡΗΤΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟΝ λ-ΛΟΓΙΣΜΟ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ηλίας Γ. Ρογάρης

Επιβλέπων : Γεώργιος Κολέτσος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2007

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Η ΡΗΤΗ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗ ΣΤΟΝ λ-ΛΟΓΙΣΜΟ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ηλίας Γ. Ρογάρης

Επιβλέπων : Γεώργιος Κολέτσος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 3η Δεκεμβρίου 2007.

Αθήνα, Δεκέμβριος 2007

....	....	....
Γεώργιος Κολέτσος	Νίκος Παπασπύρου	Άρης Παγουρτζής
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Λέκτορας Ε.Μ.Π.

....
Ηλίας Γ. Ρογάρης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Γιώργο Κολέτσο για το χρόνο που μου αφιέρωσε και για τις συμβουλές που μου έδωσε κατά τη διάρκεια της συγγραφής αυτής της διπλωματικής αλλά και κατά τη διάρκεια της φοίτησής μου στη σχολή των ηλεκτρολόγων τα τελευταία τέσσερα χρόνια.

Περίληψη

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του μεγάλου προβλήματος της "ρητής αντικατάστασης" (Explicit Substitution) στον λάμδα λογισμό. Η αντικατάσταση μιας μεταβλητής από μια άλλη, που τη συναντάμε στη β-αναγωγή και συμβολίζεται ως $((\lambda x.A)B) \to_\beta A[x := B]$, δεν είναι μια απλή διαδικασία. Από πίσω της κρύβονται τεράστιες υπολογιστικές διεργασίες οι οποίες προσδιορίζονται απ' τους περιορισμούς που θέτει η ίδια η αντικατάσταση. Στον λ-λογισμό αυτό το πρόβλημα δεν ενδιαφέρει. Ο λ-λογισμός είναι ένα μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει κάθε τι που είναι υπολογίσιμο και όχι ένα μοντέλο για μια πρακτική υλοποίηση ενός αλγορίθμου. Παρ' όλα αυτά οι συναρτησιακές γλώσσες, που ολοένα και περισσότερη απήχηση φαίνεται να έχουν, στηρίζονται σ' αυτόν. Άρα λοιπόν είναι χρήσιμο να υπάρχει ένα αποδοτικό μοντέλο που να προκύπτει απ' τον λάμδα λογισμό και το οποίο να περιγράφει ακριβώς ποιο είναι το αποτέλεσμα της β-αναγωγής με όσο το δυνατόν πιο κομψό και αποδοτικό τρόπο.

Πιο κάτω θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή του λ-λογισμού καθώς και των ιδιοτήτων που τον διέπουν. Ιδιότητες πολύ σημαντικές, τις οποίες θα πρέπει να μας εγγυάται και το καινούριο μοντέλο υπολογισμού, ο λs-λογισμός (λs-calculus) προκειμένου να είναι αποδεκτός. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορεί να γίνει το πέρασμα απ' το λ-λογισμό στο λs-λογισμό, με τη χρήση των **δεικτών de Bruijn**, ο οποίος είναι πραγματικά ένας "λογισμός ρητής αντικατάσταση" (explicit substitution calculus). Θα αναλύσουμε αυτόν το λογισμό και θα αποδείξουμε διάφορες ιδιότητες που έχει.

Λέξεις κλειδιά:

Ρητή αντικατάσταση, λ-λογισμός με δείκτες de Bruijn, λs-λογισμός, λσ-λογίσμός, λυ-λογισμός

Abstract

The purpose of this diploma dissertation is to study the great problem of Explicit Substitution in λ-calculus. The rewriting of a variable from another is represented with the notation $((\lambda x.A)B) \rightarrow_{\beta} A[x := B]$. This is not a simply prosedure but a disastrous one because of the condisions that the Substitution deposits. λ-calculus is a mathematical model which describes every computable fanction and not a model for an efficient implementation of an algorithm. However, functional programming, is depended on λ-calculus, so it is important to have an elegant model which comes up from λ-calculus and describes explicit which is the result of beta reduction. This model is λs-calculus.

Key words:

Explicit substitution, λ-calculus with de Bruijn indeces, λs-calculus, λσ-calculus, λυ-calculus

Περιεχόμενα:

Κεφάλαιο 1 : ο λ-λογισμός

Κάθε μαθηματικό σύστημα έχει τα εξής χαρακτηριστικά : κατ' αρχάς έχει ένα συντακτικό που καθορίζει πως θα είναι οι όροι του συστήματος και δεύτερον έχει και ένα σύνολο από κανόνες οι οποίοι "διασκευάζουν" τους όρους σε κάποιους άλλους του ίδιου συστήματος. Δηλαδή κανόνες της μορφής $A \to_R B$ ή $(A,B) \in R$ αν θέλουμε να μιλάμε με σχέσεις. Αυτοί οι κανόνες αντικατάστασης (αναγωγής) (rewriting rules) μιας έκφρασης από (σε) μια άλλη είναι φυσική απόρροια της προσέγγισης που έχει ο άνθρωπος για το φυσικό κόσμο και της ανάγκης του να απλοποιεί τις καταστάσεις έτσι να είναι όσο το δυνατόν πιο εύκολα κατανοητές. Για παράδειγμα είναι πολύ πιο κατανοητό το 9 από το $\int_4^5 2x dx$. Έτσι λοιπόν αντικαθιστάμε το $\int_4^5 2x dx$ με το 9 μέσω κάποιου κανόνα της ανάλυσης. Αυτοί οι κανόνες όμως πρέπει να έχουν και ορισμένες ιδιότητες αφού σκοπός τους είναι να απεικονίσουν τη διαίσθηση του ανθρώπου για το φυσικό κόσμο. Θα δούμε αυτές τις ιδιότητες αμέσως μόλις δούμε το συντακτικό του λ-λογισμού.

- **Το συντακτικό των λ-όρων με μεταβλητές**

Οι λ-όροι ορίζονται επαγωγικά:
Αν *A* και *B* είναι λ-όροι τότε ο (λV.*A*) είναι λ-όρος και ο (*AB*) είναι λ-όρος όπου $V = \{x, y, z, ...\}$ άπειρο σύνολο από μεταβλητές κάθε μία απ τις οποίες είναι και ένας (πρωταρχικός) λ-όρος.

Δηλαδή το σύνολο των λ-όρων Λ δίνεται από :

$\boxed{M ::= V \mid (\lambda V.M) \mid (MM)}$.

Ο πρώτος κανόνας παράγει τους πρωταρχικούς λ-όρους (μεταβλητές), ο δεύτερος τη λ-αφαίρεση και ο τρίτος την εφαρμογή. Τους λ-όρους θα τους συμβολίζουμε συνήθως με *A*, *B*, *C*.

Οι πιο κάτω είναι λ-όροι:
y, $(\lambda x.y)$, $(z(\lambda z.((xx)(yy))))$, $((\lambda x.x)(\lambda x.x))$.

Συνήθως χρησιμοποιούμε τις εξής συμβάσεις για να απαλλαγούμε απ' τις περιττές παρενθέσεις και να απλοποιήσουμε τους λ-όρους:

- Η εφαρμογή έχει προτεραιότητα απ' τα αριστερά δηλαδή ABC σημαίνει ((AB)C).
- Η λ-αφαίρεση εκτείνεται όσο γίνεται αριστερά δηλαδή λx.ABC σημαίνει (λx.((AB)C))
- Μια ακολουθία από λ-αφαιρέσεις μπορεί να συμπτυχθεί σε ένα λ δηλαδή λxyz.x σημαίνει (λx.(λy.(λz.x)))

Αποτέλεσμα των παραπάνω συμβάσεων είναι ότι οι εξωτερικές παρενθέσεις μπορούν να παραληφθούν και ότι η εφαρμογή προηγείται της αφαίρεσης.

Σ' αυτή τη διπλωματική όμως δε θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις συμβάσεις οι οποίες κάνουν τους λ-όρους πιο κατανοητούς στον άνθρωπο αλλά όχι και στον υπολογιστή. Αυτό γιατί στον υπολογιστή μπορούμε να έχουμε την εξής υλοποίηση: κατά την ανάγνωση ενός λ-όρου ο compiler κάθε φορά που συναντά μια αριστερή παρένθεση κάνει push σε μια στοίβα έναν δείκτη που δείχνει σ΄ αυτήν την παρένθεση και κάθε φορά που συναντά μια δεξιά παρένθεση συνδέει (με διπλή σύνδεση) το δείκτη που δείχνει σ' αυτήν την παρένθεση με το δείκτη που κάνει pop απ΄ τη στοίβα. Οπότε στο τέλος της επεξεργασίας του όρου ο υπολογιστής ξέρει ακριβώς πως είναι φτιαγμένος ο όρος και μπορεί πλέον να τον επεξεργαστεί εύκολα.

Παρά την απλότητα του συντακτικού του ο λ-λογισμός έχει πλούσια εκφραστικότητα. Στην πραγματικότητα ο λ-λογισμός εισήχθηκε απ' τον Church προκειμένου να περιγράψει τις μερικές αναδρομικές συναρτήσεις που πιστεύεται άλλωστε πως αυτές και μόνο είναι οι συναρτήσεις που μπορούν να υπολογιστούν με κάποια αλγοριθμική διαδικασία (υπολογίσιμες συναρτήσεις – θέση Church Turing). Αφ' ενός μεν οι όροι του λ-λογισμού αντιστοιχούν σε μερικές αναδρομικές συναρτήσεις, αφ' εταίρου οι μερικές αναδρομικές συναρτήσεις αντιστοιχούν σε λ-όρους.

Η κλάση των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων είναι μικρότερη κλάση συναρτήσεων που:

- Περιέχει τις εξής αρχικές συναρτήσεις : S, Z, U_i^n (για όλα τα n και $i \leq n$) και
- Είναι κλειστή ως προς το σχήμα της σύνθεσης, της πρωταρχικής αναδρομής και το μ-σχήμα (σχήμα απεριόριστης ελαχιστοποίησης).

Εξηγήσεις:

$$S\ : N \to N \text{ ορίζεται με } S(x) = x + 1$$
$$Z\ : N \to N \text{ ορίζεται με } Z(x) = 0\ ,\ \forall x \in N$$
$$U_i^n : N \to N \text{ ορίζεται με } U_i^n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_i\ ,\ 1 \le i \le n$$

Σύνθεση :

$$\boxed{f(x_1, x_2, ..., x_n) = h(g_1(x_1, x_2, ..., x_n), ..., g_m(x_1, x_2, ..., x_n))}$$

Πρωταρχική αναδρομή:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, ..., x_n, 0) & = & g(x_1, x_2, ..., x_n) \\ f(x_1, x_2, ..., x_n, Sy) & = & h(x_1, x_2, ..., x_n, y, f(x_1, x_2, ..., x_n, y)) \end{cases}$$

Σχήμα απεριόριστης ελαχιστοποίησης :

$$\boxed{f(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu y[h(x_1, ..., x_n, y) = 0]}$$

δηλαδή το μικρότερο y ώστε να ισχύει το επόμενο κατηγόρημα αν αυτό υπάρχει αλλιώς η τιμή δεν είναι ορισμένη.

Τέλος όταν λέμε ότι μια κλάση είναι κλειστή ως προς κάποιες πράξεις εννοούμε ότι οι πράξεις αυτές δεν οδηγούν έξω απ' την κλάση.

Οι λ-όροι λοιπόν περιγράφουν συναρτήσεις, για παράδειγμα ο (λx.x) δηλώνει την ταυτοτική συνάρτηση ενώ ο (λx.(λy.x)) δηλώνει τη συνάρτηση που δέχεται δύο ορίσματα και από αυτά επιστρέφει το πρώτο.

Η πλούσια αυτή εκφραστικότητα του λ-λογισμού οφείλεται στο γεγονός ότι μπορούμε να δημιουργούμε και να εφαρμόζουμε συναρτήσεις σε άλλες συναρτήσεις, ακόμα και στους εαυτούς τους. Με το συντακτικό του λ-λογισμού μπορούμε να φτιάξουμε τους αριθμούς (νούμερα του Church) και οποιαδήποτε μερικώς αναδρομική (υπολογίσιμη) συνάρτηση θέλουμε.

Νούμερα του Church:
$c_n \equiv \lambda fx.f^n(x)$

Οι αρχικές συναρτήσεις είναι λ-ορίσιμες γιατί:
$U_i^n \equiv \lambda x_1. \ldots \lambda x_n.x_i$
$S \equiv \lambda x.\lambda y.\lambda z.y(xyz)$
$Z \equiv \lambda x.c_0$

Επίσης αποδεικνύεται ότι οι λ-ορίσιμες συναρτήσεις είναι κλειστές για τα τρία προηγούμενα σχήματα αλλά και το αντίστροφο. Έτσι λοιπόν υπάρχει πλήρης ταύτιση των λ-ορίσιμων και των μερικών αναδρομικών συναρτήσεων.

Ο τρόπος που είναι φτιαγμένοι οι λ-όροι καθορίζουν και το πώς πρέπει να λειτουργούν οι κανόνες αντικατάστασης πάνω στους όρους. Έτσι λοιπόν αν ένας όρος A μπορεί να αντικατασταθεί από έναν όρο B μέσω κάποιου κανόνα τότε και ο όρος (AC) θα πρέπει να μπορεί να αντικατασταθεί απ' τον όρο (BC). Θα πρέπει οι κανόνες δηλαδή να είναι όπως λέμε συμβατοί με τον τρόπο που κατασκευάζονται οι λ-όροι. Αυτή τη συμβατότητα τη συναντάμε πολλές φορές στα μαθηματικά, και προκύπτει απ' την πεποίθηση που έχουμε ότι για παράδειγμα το 3+6 μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το 9 αλλά και το 3+6+8 πρέπει να μπορούμε να το αντικαταστήσουμε με το 9+8. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

- **Συμβατότητα**

Για να είναι μια σχέση R συμβατή θα πρέπει (αν A, B $\in \mathcal{M}$):

$$\frac{(A,B)\in R}{(AC,BC)\in R}, \qquad \frac{(A,B)\in R}{(CA,CB)\in R}, \qquad \frac{(A,B)\in R}{(\lambda x.A,\lambda x.B)\in R}$$

Γενικότερα για οποιοδήποτε μοντέλο συζητήσουμε οι κανόνες αντικατάστασης θα πρέπει (σχεδόν πάντα) να είναι συμβατοί με το συντακτικό του. Και έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Αν R είναι μια σχέση σ΄ ένα σύνολο S τότε

- $\rightarrow_R$ είναι το συμβατό κλείσιμο της R
- $\rightarrow_R^{\in}$ είναι το ανακλαστικό κλείσιμο της $\rightarrow_R$
- $\rightarrow_R^{+}$ είναι το μεταβατικό κλείσιμο της $\rightarrow_R$
- $\rightarrow_R^{*}$ είναι το ανακλαστικό και μεταβατικό κλείσιμο της $\rightarrow_R$
- $=_R$ είναι το ανακλαστικό, συμμετρικό και μεταβατικό κλείσιμο της $\rightarrow_R$
- Όταν έχουμε $(A,B)\in R$ τότε το A είναι το R-redex και το B είναι το R-contructum.
- $A\in S$ είναι σε R-κανονική μορφή (R-normal form/R-nf) αν το A δεν περιέχει R-redex.
- Το B είναι R-nf του A αν B είναι R-nf και $A =_R B$

Η πρώτη σημαντική μέριμνα που πρέπει να έχουμε για τις αναγωγές είναι η εξής:
Οι εκφράσεις μπορούν να αντικατασταθούν με διάφορους τρόπους, για παράδειγμα 2+3+4 = (2+3)+4 = 2+(3+4). Θέλουμε όμως και τις δύο φορές να πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα. Έχουμε λοιπόν τον ακόλουθο ορισμό που περιγράφει αυτό το φαινόμενο:

Συμβολή

Αν R είναι μια σχέση αναγωγής σ' ένα σύνολο S τότε ορίζουμε :

- Τοπική(αδύναμη) συμβολή (local confluence / Weak Church Rosser-WCR)έχουμε όταν
$\forall A,B,C \in S \ \exists D \in S : (A \to_R B \wedge A \to_R C) \Rightarrow (B \to_R^* D \wedge C \to_R^* D)$
- Συμβολή (confluence/Church Rosser-CR) έχουμε όταν
$\forall A,B,C \in S \ \exists D \in S : (A \to_R^* B \wedge A \to_R^* C) \Rightarrow (B \to_R^* D \wedge C \to_R^* D)$
- Ισχυρή συμβολή (strong confluence / Strong Church Rosser-SCR) έχουμε όταν
$\forall A,B,C \in S \ \exists D \in S : (A \to_R B \wedge A \to_R C) \Rightarrow (B \to_R D \wedge C \to_R D)$

Με βάσει τα παραπάνω έχουμε το εξής σημαντικό Θεώρημα

Θεώρημα 1.1
Αν μια σχέση αναγωγής είναι CR τότε ισχύουν τα ακόλουθα

- Αν $A =_R B \Rightarrow \exists C : A \to_R^* C \wedge B \to_R^* C$
- Αν $A =_R B \wedge B \text{ είναι } R-nf \Rightarrow A \to_R^* B$
- Αν $A =_R B$ τότε είτε οι A, B δεν έχουν R-κανονική μορφή είτε έχουν την ίδια R-κανονική μορφή
- Αν ο A έχει R-nf τον B και τον C, τότε οι B, C ταυτίζονται αν εξαιρέσουμε την ονομασία των μεταβλητών (modulo a-αναγωγή –θα δούμε πιο κάτψ τι σημαίνει αυτό).
- Αν $A =_R B \wedge B, C \text{ είναι } R-nf$ τότε ο A ταυτίζεται με τον B mod a-αναγωγή.

Από τις τρεις παραπάνω ιδιότητες μιας σχέσης αναγωγής αυτή που μας ενδιαφέρει πιο πολύ να ικανοποιεί μια σχέση είναι η CR.

Η δεύτερη σημαντική μέριμνα που πρέπει να έχουμε για τις αναγωγές είναι αυτή του τερματισμού κατά την εφαρμογή κάποιας αναγωγής. Μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε αν με η αντικατάσταση κάποιας έκφρασης από κάποια άλλη θα σταματήσει κάποια στιγμή ή αν θα οδηγήσει σε μια απεριόριστη ακολουθία εκφράσεων. Για παράδειγμα αν ο κανόνας $n \to n+1$ εφαρμοστεί στο 1 τότε δε θα έχουμε τερματισμό. Ο τερματισμός μιας έκφρασης είναι κρίσιμος αν σκοπεύουμε να κάνουμε κάποια υλοποίηση ενός συστήματος αφού είναι καταστρεπτικός για την διαδικασία υπολογισμού και αν κάποια έκφραση δεν τερματίζει κατά την αποτίμηση της μπορούμε με την προσθήκη κάποιων προσεκτικών κανόνων να πετύχουμε τερματισμό.

<u>Ορισμός:</u>

Αν R μια σχέση αναγωγής στο S τότε λέμε ότι

- Ένας όρος Α είναι ισχυρά R-κανονικοποιήσιμος (strongly R-normalizing) αν δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία με R-αναγωγές ξεκινώντας απ τον Α
- Η R είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμη (SN) αν δεν υπάρχει άπειρη ακολουθία από όρους στο S για οποιονδήποτε όρο Α δηλαδή κάθε όρος στο S είναι SR-N
- Το R είναι ασθενές κανονικοποιήσιμο (WN) αν κάθε όρος στο S έχει R-nf

Στον λ-λογισμό συναντάμε τρεις κανόνες αναγωγής, την α, τη β και την η.
Η α-αναγωγή ταυτίζει τους όρους που έχουν την ίδια σημασία δηλαδή τον όρο λx.x με τον όρο λy.y αφού και οι δύο περιγράφουν την ταυτοτική συνάρτηση. Η β-αναγωγή είναι αυτή που προάγει την υπολογιστική διαδικασία και η η-αναγωγή είναι αυτή που ταυτίζει συναρτήσεις που επιστρέφουν ίδιες τιμές αν εφαρμοστούν στο ίδιο όρισμα.

α-αναγωγή:
Συμβολίζεται με το $\to_\alpha$ και είναι το συμβατό κλείσιμο κάτω απ' το αξίωμα $(\lambda x.A) \to_\alpha (\lambda x'.A[x := x'])$ με την προϋπόθεση ότι $x' \notin FV(A)$. Ο καινούριος αυτός συμβολισμός σημαίνει αντικατάσταση των ελεύθερων μεταβλητών x από τον όρο B και θα τον αναλύσουμε πιο κάτω.
Παράδειγμα $(\lambda x.x) \to_\alpha (\lambda y.y)$ αλλά όχι $(\lambda x.(xy)) \to_\alpha (\lambda y.(yy))$
Όταν γράφουμε κάπου ότι $A \equiv B$ θα εννοούμε ότι $A =_\alpha B$ δηλαδή δεν θα διαχωρίζουμε δεσμευμένες ίδιες μεταβλητές.

β-αναγωγή:
Συμβολίζεται με το $\to_\beta$ και είναι το συμβατό κλείσιμο κάτω απ' το αξίωμα
$((\lambda x.A)B) \to_\beta A[x := B]$
Για παράδειγμα $((\lambda x.x)y) \to_\beta y$

η-αναγωγή:
Συμβολίζεται με το $\to_\eta$ και είναι το συμβατό κλείσιμο κάτω απ' το αξίωμα
$(\lambda x.(Ax)) \to_\eta A$ με $x \notin FV(A)$
Για παράδειγμα $(\lambda x.((y)x)) \to_\eta y$

- **Αντικατάσταση**

Μια μεταβλητή σε έναν όρο μπορεί να είναι ελεύθερη ή να είναι δεσμευμένη από μια λ-αφαίρεση. Για να ξεχωρίζουμε τις ελεύθερες(FV) απ' τις δεσμευμένες(BV) έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

$BV(x) =_{def} \varnothing$	$FV(x) =_{def} \{x\}$
$BV(AB) =_{def} BV(A) \cup BV(B)$	$FV(AB) =_{def} FV(A) \cup FV(B)$
$BV(\lambda x.A) =_{def} BV(A) \cup \{x\}$	$FV(\lambda x.A) =_{def} FV(A) - \{x\}$

Με άλλα λόγια, η εμφάνιση μιας μεταβλητής x σ' έναν λ-όρο, θα είναι ελεύθερη αν δεν βρίσκεται στην εμβέλεια ενός λx, αλλιώς θα είναι δεσμευμένη. Σημειώνουμε εδώ ότι το x στο λx δεν είναι εμφάνιση της μεταβλητής x. Για παράδειγμα στον $((\lambda x.(xy))(\lambda y.(xy)))$ η πρώτη εμφάνιση της y είναι ελεύθερη ενώ η δεύτερη δεσμευμένη. Αντίθετα η πρώτη εμφάνιση της μεταβλητής x είναι δεσμευμένη ενώ η δεύτερη ελεύθερη. Ένας όρος θα λέγεται κλειστός αν όλες οι μεταβλητές που περιέχει είναι δεσμευμένες.

Η αντικατάσταση ενός όρου από έναν άλλο, που αυτό είναι και το θέμα της διπλωματικής, συμβαίνει όταν έχουμε β-αναγωγή. Συμβολίζεται με το A[x:=B] και σημαίνει ότι στον όρο A θα αντικαταστήσουμε κάθε ελεύθερη μεταβλητή x με τον όρο B. Αυτή η διαδικασία όμως δεν είναι απλή. *Πρέπει να αντικατασταθούν μόνο οι ελεύθερες μεταβλητές x και η αντικατάστασή τους θα πρέπει να γίνει με τέτοιο τρόπο που να μη γίνει δέσμευση κάποιων ελεύθερων μεταβλητών*. Για παράδειγμα ο όρος $((\lambda x.(\lambda y.(xy)))z)$ αποτιμάται στον όρο $(\lambda y.(zy))$ αλλά το να αποτιμήσεις τον όρο $((\lambda x.(\lambda y.(xy)))y)$ στον όρο $(\lambda y.(yy))$ είναι λάθος γιατί η μεταβλητή x ήταν ελεύθερη και όταν αντικαταστάθηκε απ' την y δεσμεύτηκε απ΄ το λy. Θα έπρεπε πρώτα να μετονομάζαμε τη μεταβλητή y σε μια άλλη και μετά να κάνουμε την αντικατάσταση. Δηλαδή τον όρο $(\lambda x.(\lambda y.(xy)))$ να τον μετονομάσουμε στον όρο $(\lambda x.(\lambda z.(xz)))$ που απ' τον ορισμό που δώσαμε για τη σημασία των λ-όρων είναι ο ίδιος (α-αναγωγή), και στη συνέχεια να κάνουμε την αντικατάσταση και να πάρουμε τελικά $(\lambda z.(yz))$ το οποίο είναι και το σωστό και είναι σίγουρα διαφορετικό απ' το $(\lambda y.(yy))$. Πιο κάτω δίνουμε έναν ακριβή ορισμό για το πώς πρέπει να γίνεται η αντικατάσταση. Πάντα, όταν θα γράφουμε μια μεταβλητή x και μετά μια μεταβλητή x' η μια μεταβλητή y θα εννοούμε ότι η x είναι διαφορετική από την x' και διαφορετική από την y οπότε δεν θα το διευκρινίζουμε.

Για κάθε A, B, x <u>*ορίζουμε το A[x:=B] να είναι το αποτέλεσμα της αντικατάστασης κάθε ελεύθερης εμφάνισης της x στον A*</u> , ως εξής :

$x[x := B]$	$\equiv B$
$x'[x := B]$	$\equiv x'$
$(AC)[x := B]$	$\equiv (A[x := B]C[X := B])$
$(\lambda x.A)[x := B]$	$\equiv (\lambda x.A)$
$(\lambda x'.A)[x := B]$	$\equiv (\lambda x'.A[x := B])$ αν $x' \notin FV(B)$ ή $x \notin FV(A)$, αλλιώς
$(\lambda x'.A)[x := B]$	$\equiv (\lambda x''.A[x' := x''][x := B])$ αν $x' \in FV(B)$ και $x \in FV(A)$ με την προυπόθεση ότι $x'' \notin FV(A) \cup FV(B)$

Για την αντικατάσταση των μεταβλητών ισχύει τα ακόλουθα:

<u>***Λήμμα 1.1***</u> (πρώτο λήμμα της αντικατάστασης)
Αν $A, B \in M$, $x \in V$ και $B \to_\beta B'$ τότε $A[x := B] \to_\beta^* A[x := B']$
Οι αποδείξεις που σχετίζονται με προτάσεις του λ-λογισμού γενικά βασίζονται στην επαγωγή αφού οι λ όροι είναι ορισμένοι επαγωγικά.

<u>Απόδειξη</u>:

1. Στην περίπτωση που ο A είναι μια μεταβλητή τότε
   - αν $A \equiv x$ τότε
     $A[x := B] \equiv x[x := B] \equiv B \to_\beta B'$
     και
     $A[x := B'] \equiv x[x := B'] \equiv B'$
   - αν $A \equiv y$ τότε
     $A[x := B] \equiv y[x := B] \equiv y \to_\beta^* y$
     και
     $A[x := B'] \equiv y[x := B'] \equiv y$

2. Στην περίπτωση που ο A είναι μια εφαρμογή δηλαδή $A \equiv (A_1 A_2)$ και για τους A_1και A_2 ισχύει η πρόταση τότε
   $A[x := B] \equiv (A_1 A_2)[x := B] \equiv (A_1[x := B]A_2[x := B]) \to_\beta^* (A_1[x := B']A_2[x := B'])$
   $(A_1 A_2)[x := B']$
   και
   $A[x := B'] \equiv (A_1 A_2)[x := B']$

3. Αν ο A είναι λ-αφαίρεση δηλαδή $A \equiv (\lambda y.A')$ με (δυνατό με α-αναγωγή να γίνει) $y \notin FV(B) \cup FV(B')$ και για τον A' ισχύει η επαγωγική υπόθεση τότε

   $A[x := B] \equiv (\lambda y.A')[x := B] \equiv (\lambda y.A'[x := B]) \to_\beta^* (\lambda y.A'[x := B']) \equiv$

   $(\lambda y.A')[x := B']$

   και

   $A[x := B'] \equiv (\lambda y.A')[x := B']$

<u>Λήμμα 1.2</u> (δεύτερο λήμμα της αντικατάστασης)

Αν $A, B, C \in M$ και $x, y \in V$ τότε για $x \notin FV(C)$ έχουμε :

$A[x := B][y := C] \equiv A[y := C][x := B[y := C]]$

δηλαδή θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα αν στον όρο A αντικαταστήσουμε την x από τον B και στη συνέχεια αντικαταστήσουμε την y από τον C με το αν στον όρο A αντικαταστήσουμε την y από τον C και στη συνέχεια την x από τον B στον οποίο B όμως έχουμε ήδη αντικαταστήσει την y από τον C, δεδομένου όμως ότι $x \notin FV(C)$

<u>Απόδειξη</u>:

1. Στην περίπτωση που ο A είναι μια μεταβλητή τότε
   - αν $A \equiv x$ τότε

     $A[x := B][y := C] \equiv x[x := B][y := C] \equiv B[y := C]$

     και

     $A[y := C][x := B[y := C]] \equiv x[y := C][x := B[y := C]] \equiv B[y := C]$

   - αν $A \equiv y$ τότε

     $A[x := B][y := C] \equiv y[x := B][y := C] \equiv C$

     και

     $A[y := C][x := B[y := C]] \equiv y[y := C][x := B[y := C]] \equiv C[x := B[y := C]] \equiv C$

     γιατί $x \notin FV(C)$ άρα δεν γίνεται καμία αντικατάσταση

   - αν $A \equiv z$ τότε

     $A[x := B][y := C] \equiv z[x := B][y := C] \equiv z$

     και

     $A[y := C][x := B[y := C]] \equiv z[y := C][x := B[y := C]] \equiv z$

2. Αν ο A είναι εφαρμογή δηλαδή $A \equiv (A_1A_2)$ και για τους A_1και A_2 ισχύει η πρόταση τότε
$A[x := B][y := C] \equiv (A_1A_2)[x := B][y := C] \equiv$
$(A_1[x := B][y := C]A_2[x := B][y := C]) \equiv$(από επαγωγική υπόθεση)
$(A_1[y := C][x := B[y := C]]A_2[y := C][x := B[y := C]]) \equiv$
$(A_1A_2)[y := C][x := B[y := C]]$
και
$A[y := C][x := B[y := C]] \equiv (A_1A_2)[y := C][x := B[y := C]]$

3. Αν ο A είναι λ-αφαίρεση δηλαδή $A \equiv (\lambda z.A')$ με (δυνατό με α-αναγωγή να γίνει) $z \notin FV(B) \cup FV(C)$ και για τον A' ισχύει η επαγωγική υπόθεση τότε
$A[x := B][y := C] \equiv (\lambda z.A')[x := B][y := C] \equiv (\lambda z.A'[x := B][y := C]) \equiv$
$(\lambda z.A'[y := C][x := B[y := C]])$
και
$A[y := C][x := B[y := C]] \equiv (\lambda z.A')[y := C][x := B[y := C]] \equiv$
$(\lambda z.A'[y := C][x := B[y := C]])$

<u>Λήμμα 1.3</u> (τρίτο λήμμα της αντικατάστασης)
Αν $A, B \in M, u \in V$ και $A \to_\beta A'$ τότε $A[y := B] \to_\beta A'[y := B]$

<u>Απόδειξη</u>:
1. Στην περίπτωση που ο A είναι μια μεταβλητή τότε ο A είναι σε β-κανονική μορφή οπότε η πρόταση ισχύει.
2. Αν ο A είναι λ-αφαίρεση δηλαδή $A \equiv (\lambda x.A_1)$ με $x \neq u$ και $x \notin FV(B)$ τότε $A' \equiv (\lambda x.A_1')$ με $A_1 \to_\beta A_1'$ οπότε $A[y := B] \equiv (\lambda x.A_1[y := B])$. Αλλά από επαγωγική υπόθεση $A_1[y := B] \to_\beta A_1'[y := B]$ άρα $(\lambda x.A_1[y := B]) \to_\beta (\lambda x.A_1'[y := B])$. Τέλος $(\lambda x.A_1'[y := B]) \equiv A'[y := B]$ οπότε έχουμε ότι $A[y := B] \to_\beta A'[y := B]$
3. Αν $A \equiv (A_1A_2)$ τότε υπάρχουν διάφορες περιπτώσεις
   - $A' \equiv (A_1'A_2)$ με $A_1 \to_\beta A_1'$. Από επαγωγική υπόθεση $A_1[y := B] \to_\beta A_1'[y := B]$ άρα $A[y := B] \to_\beta A'[y := B]$.
   - $A' \equiv (A_1A_2')$ με $A_2 \to_\beta A_2'$ όπου ισχύουν τα ίδια με πριν.
   - $A \equiv ((\lambda x.A_0)A_2)$ με $x \neq y$ και $x \notin FV(B)$ οπότε $A' \equiv A_0[x := A_2]$.
     $A[y := A] \equiv ((\lambda x.A_0[y := B])A_2[y := B]) \to_\beta A_0[y := B][x := A_2[y := B]] \equiv$
     $A_0[x := A_2][y := B] \equiv A'[y := B]$

Θα δούμε τώρα αν ο λ-λογισμός έχει κάποιες τις ιδιότητες που αναφέραμε παραπάνω για την σχέση $\to_\beta$ μιας και αυτή είναι που μας ενδιαφέρει πιο πολύ αφού είναι αυτή που προάγει την υπολογιστική διαδικασία.

Θεώρημα 1.2 ***Η σχέση $\to_\beta$ είναι CR*** δηλαδή αν $A \in M$, $A \to_\beta^* A'$ και $A \to_\beta^* A''$ τότε $\exists\, B \in M$ έτσι ώστε $A' \to_\beta^* B$ και $A'' \to_\beta^* B$.

Όσον αφορά στην ιδιότητα SN της σχέσης $\to_\beta$ προφανώς ο όρος ((λx.(xx))(λx.(xx))) δεν είναι κανονικοποιήσιμος άρα η $\to_\beta$ δεν είναι SN. Ισχύει όμως το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.3 (κανονικοποίησης)
Αν ένας όρος A έχει κανονική μορφή τότε η αντικατάσταση του αριστερότερου redex οδηγεί σ' αυτή.

Κεφάλαιο 2 : ο λ-λογισμός με δείκτες de Bruijn

Πιο πάνω είδαμε ότι η αντικατάσταση δεν είναι μια καθόλου απλή διαδικασία. Απεναντίας έχει πολύ μεγάλο υπολογιστικό κόστος αφού κάθε φορά που κάνουμε αντικατάσταση πρέπει να γίνεται έλεγχος αν δεσμεύεται κάποια μεταβλητή η οποία πριν ήταν ελεύθερη. Εκτός αυτού ο λ-λογισμός δεν περιγράφει ακριβώς πως πρέπει να γίνει η αντικατάσταση. Αρκείται μόνο στο να πει ότι όταν γίνει αντικατάσταση δεν πρέπει να δεσμεύονται ελεύθερες μεταβλητές. Πιο κάτω θα δούμε πως με την χρήση των δεικτών de Bruijn μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως το φαινόμενο της αντικατάστασης και να περάσουμε απ τον κλασσικό λ-λογισμό σ' έναν λογισμό ρητής αντικατάστασης τον λs-λογισμό.

Οι όροι λx.x και λy.y περιγράφουν και οι δύο την ίδια συνάρτηση. Παρότι διαφέρουν στα ονόματα των μεταβλητών είναι ίδιοι. Βλέπουμε λοιπόν ότι τα ονόματα των μεταβλητών δημιουργούν πρόβλημα αφού μπορούμε να γράψουμε την ίδια συνάρτηση με άπειρους τρόπους. Αυτός είναι και ο λόγος που η διαδικασία της αντικατάστασης είναι πολύπλοκη : όταν γίνει κάποια αντικατάσταση σε κάποιον όρο και στη συνέχεια ξαναγίνει σε κάποιον υποόρο του (ή το αντίθετο) τότε (λόγω της α-αναγωγής) μπορεί να έχουμε πρόβλημα αν δεν κάνουμε έλεγχο. *<u>Το ζήτημα είναι λοιπόν να βρούμε έναν λ-συμβολισμό modulo α-αναγωγής.</u>* Ο Barendregt χρησιμοποίησε τη σύμβαση των μεταβλητών (VC) η οποία υποθέτει ότι όλες οι δεσμευμένες μεταβλητές είναι διαφορετικές απ' τις ελεύθερες και το πρόβλημα της αντικατάστασης φαίνεται να λύνεται αφού οι κανόνες αντικαθίστανται με το μοναδικό $(\lambda x'.A)[x := B] \equiv (\lambda x'.A[x := B])$. Βέβαια η VC υποθέτει ότι υπάρχει ένα μαγικό ραβδί που "φτιάχνει" τους όρους ώστε να μην διαφέρουν αυτοί που είναι ίδιοι modulo α-αναγωγή. Κάτι τέτοιο όμως δεν συμβαίνει στην πραγματικότητα, άρα η VC δεν λύνει το πρόβλημα, απλά το κρύβει. Απ' την άλλη η συνδυαστική λογική η οποία δεν χρησιμοποιεί ονόματα μεταβλητών αλλά συνδυαστες (την ταυτοτική συνάρτηση λx.x την παριστάνουμε με τον συνδυαστή I (αλλά και την λy.y) και (Iα) ανάγεται στο α) είναι λιγότερο διαισθητική και δεν μπορεί να καταλάβει κάποιος τι ακριβώς κάνουν οι συνδυαστές ειδικά σε κάποιον μεγάλο όρο.

<u>Το πρόβλημα λύνεται αν χρησιμοποιήσουμε αριθμούς αντί για ονόματα μεταβλητών.</u>

<u>Κάθε δεσμευμένη μεταβλητή σ΄ έναν όρο θα αντικαθιστάται από έναν αριθμό ο οποίος θα δείχνει πόσα λ χρειάζεται κάποιος να διασχίσει προτού φτάσει το λ που δεσμεύει τη συγκεκριμένη μεταβλητή</u>.

Οπότε ο όρος (λx.x) γίνεται (λ1) και ο όρος (λy.y) γίνεται και αυτός (λ1). Ο όρος (λx.(λy.(xy))) γίνεται (λ(λ(21))) αφού το λ που δεσμεύει το x είναι το δεύτερο ενώ το λ που δεσμεύει το y είναι το πρώτο αν μετρήσουμε απ τις αντίστοιχες μεταβλητές. Παρόμοια ο όρος (λz.((λy.(y(λx.x)))(λx.(xz)))) γίνεται (λ((λ(1(λ1)))(λ(12)))).

Οι όροι που είδαμε πιο πάνω είναι κλειστοί, δηλαδή δεν περιείχαν ελεύθερες μεταβλητές.

<u>Στην περίπτωση που έχουμε ελεύθερες μεταβλητές χρησιμοποιούμε μια λίστα με τις ελεύθερες μεταβλητές κατά σειρά και αντικαθιστάμε την μεταβλητή με τον δείκτη που προκύπτει αν αθροίσουμε τα λ στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται η ελεύθερη μεταβλητή με τον αριθμό που έχει η μεταβλητή στη λίστα.</u>

Έτσι με δεδομένο ότι η λίστα μας είναι (x,y,z,…) ο όρος (λx.(xz)) αντικαθιστάται απ' τον (λ(14)), ο όρος ((λx.(xz))y) απ' τον ((λ(14))2) και ο όρος ((λx.(xz))x) απ' τον ((λ(14))1). Δηλαδή ο όρος με δείκτες de Bruijn είναι ο ίδιος με το λ-όρο εκτός απ΄ το ότι τα λ δεν έχουν κάτι δίπλα τους και οι μεταβλητές είναι πλέον αριθμοί. Οι παρενθέσεις όμως καθώς και οι θέσεις των μεταβλητών παραμένουν οι ίδιες. Ορίζουμε το σύνολο Λ των όρων με δείκτες de Bruijn ως εξής:

$$\boxed{\Lambda ::= n \mid (\Lambda\Lambda) \mid (\lambda\Lambda)}$$

Όπως και στον λ-λογισμό θα αναφερόμαστε και σ' αυτούς τους όρους με τα ονόματα Α, Β, …

Στον λ-λογισμό με μεταβλητές κατά τη β-αναγωγή γινόταν αντικατάσταση μιας μεταβλητής σ΄ έναν όρο Α από έναν όρο Β. Στον λ-λογισμό με δείκτες de Bruijn δεν έχουμε μεταβλητές αλλά αριθμούς οπότε θα πρέπει

- να βρούμε μεταξύ των αριθμών ενός όρου ποιοι είναι αυτοί που αντιστοιχούν στις μεταβλητές που πρέπει να αντικατασταθούν

και επιπλέον

- να ανανεώσουμε τους αριθμούς του όρου που αντικαθιστά κάποιον αριθμό αλλά και τους αριθμούς του όρου στον οποίο βρίσκεται ο αριθμός που αντικαθιστάμε έτσι ώστε να διατηρήσουμε τη σωστή αρίθμηση των δεικτών

Για παράδειγμα $((\lambda x.(\lambda y.((zx)y)))(\lambda x.(yx))) \to_\beta (\lambda u.((z(\lambda x.(yx)))u))$ οπότε αν χρησιμοποιήσουμε δείκτες de Bruijn $((\lambda(\lambda((52)1)))(\lambda(31))) \to_\beta (\lambda((4(\lambda(41)))1))$.

Στην πραγματικότητα αυτό που κάνουμε για να *αυτοματοποιήσουμε* τη διαδικασία της β-αναγωγής και στις δύο περιπτώσεις είναι να εντοπίζουμε ακολουθίες της μορφής "((λ" οπότε έχουμε β-contructum. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τη μεταβλητή που πρέπει στον όρο αμέσως μετά την ακολουθία ((λ με τον όρο που ακολουθεί.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, στην περίπτωση των μεταβλητών, αντικαθιστάμε τη μεταβλητή x στον όρο (λy.((zx)y)) απ' τον όρο (λx.(yx)). Αλλά επειδή δεν πρέπει να δεσμευτεί η μεταβλητή y ο όρος (λy.((zx)y)) γίνεται (λu.((zx)u)) και στη συνέχεια αντικαθιστάμε το x με το (λx.(yx)) και παίρνουμε τελικά (λu.((z(λx.(yx)))u)).

Όταν έχουμε αριθμούς αντί για μεταβλητές πρέπει πρώτα να βρούμε ποιος είναι ο αριθμός που πρέπει να αντικατασταθεί. Στη συγκεκριμένη περίπτωση βλέπουμε ότι οι αριθμοί που πρέπει να αντικατασταθούν βρίσκονται στον όρο (λ((52)1)). Όλοι οι αριθμοί του όρου βρίσκονται στην εμβέλεια του λ οπότε αφού προηγείται ένα ακόμα λ ο αριθμός που αντικαθιστάται είναι το 2. Όταν κάνουμε την αντικατάσταση θα πρέπει να διατηρήσουμε τη σωστή αρίθμηση γιατί τα λ μειώνονται κατά ένα για τον όρο μέσα στον οποίο βρίσκεται ο αριθμός που αντικαθιστάμε ενώ για τον όρο που αντικαθιστά τον αριθμό πάλι μπορεί να αλλάξει η αρίθμηση αφού μπορεί να μπει στην εμβέλεια κάποιου λ. Για την περίπτωση που μελετάμε πρέπει να αντικατασταθεί το 2 στον όρο (λ((52)1)) από το όρο (λ(31)). Αν γράψουμε τελικά (λ((5(λ(31)))1)) θα πάρουμε ένα λάθος αποτέλεσμα αφού το 5 στον όρο (λ((52)1)) είχε προκύψει από το επιπλέον λ που υπήρχε και τώρα έχει διαγραφεί απ' τη β-αναγωγή. Το 5 πρέπει να γίνει 4. Επιπλέον το 1 στον όρο (λ((52)1)) δεν πρέπει να αλλάξει γιατί είναι δεσμευμένη μεταβλητή απ το λ του όρου και η απαλοιφή του λ δεν το επηρεάζει. Απ' την άλλη μεριά ο όρος που αντικαθιστά το 2, ο (λ(31)) όταν πάρει τη θέση του 2 θα βρίσκεται στην εμβέλεια του λ άρα οι αριθμοί που δεν είναι δεσμευμένοι θα πρέπει να αυξηθούν κατά 1. Δηλαδή ο 3 να γίνει 4 αφού η προσθήκη ενός λ το επηρεάζει ενώ το 1 δεν θα αλλάξει καθώς είναι δεσμευμένο και η προσθήκη του λ δεν το επηρεάζει καθόλου. Τελικά ο όρος που προκύπτει είναι ο (λ((4(λ(41)))1)) και που είναι αυτός που αντιστοιχεί στον όρο (λu.((z(λx.(yx)))u)) και όχι ο (λ((5(λ(31)))1)).

Για να δούμε συνοπτικά τι πρέπει να κάνουμε όταν έχουμε β-αναγωγή με δείκτες δηλαδή όταν έχουμε τον όρο ((λΑ)Β) γράφουμε τα ακόλουθα:

- βρίσκουμε στον Α τους αριθμούς $n_1,\ldots,n_\kappa$ που δεσμεύονται απ' το λ
- μειώνουμε τους αριθμούς που χρειάζεται να μειώσουμε στον Α λόγο της απαλοιφής του λ
- αντικαθιστάμε τους αριθμούς $n_1,\ldots,n_\kappa$ στον Α με το ανανεωμένο Β γιατί έχουμε φροντίσει μήπως οι αριθμοί του Β βρεθούν στην εμβέλεια κάποιου λ μέσα στο Α.

Για να απλοποιήσουμε λίγο τα πράγματα συμβολίζουμε τη β-αναγωγή στον λ-λογισμό με δείκτες de Bruijn ως εξής: $((\lambda A)B) \to_\beta A\{\{1 \leftarrow B\}\}$. Για να συνεχίσουμε την αναγωγή χρειαζόμαστε μετρητές για τους οποίους έχουμε (άτυπα)

1. Ξεκινάμε διασχίζοντας τον A (εδώ τον (λ((52)1)) με έναν μετρητή αρχικοποιημένο στο 1
2. Φτάνοντας σε μια λ-αφαίρεση αυξάνουμε τον μετρητή κατά 1
3. Φτάνοντας σε μια εφαρμογή δημιουργούμε ένα αντίγραφο του μετρητή για να έχουμε ένα αντίγραφο του μετρητή για κάθε υποόρο
4. Φτάνοντας σ΄ έναν αριθμό τότε
   - Αν αυτός ο αριθμός είναι μεγαλύτερος απ' τον μετρητή τότε μειώνουμε αυτόν τον αριθμό κατά ένα αφού αυτός σηματοδοτεί ελεύθερη μεταβλητή και μετά την απαλοιφή του λ της β-αναγωγής τα λ στων οποίων την εμβέλεια θα είναι αυτός ο αριθμός θα είναι κατά ένα λιγότερα.
   - Αν αυτός ο αριθμός είναι μικρότερος απ' τον μετρητή τότε αναγκαστικά υπάρχει ένα λ μέσα στον A που δεσμεύει τη συγκεκριμένη μεταβλητή οπότε δεν μεταβάλλουμε αυτόν τον αριθμό
   - Αν ο αριθμός είναι ίσος με τον μετρητή (ο οποίος έχει πάρει την τιμή i) τότε πρέπει να αντικατασταθεί από τον B ο οποίος B θα βρεθεί στην εμβέλεια i-1 λ. Οπότε θα πρέπει να προσαρμόσουμε τους αριθμούς του B ώστε να λάβουμε υπ' όψιν τα επιπλέον λ στην εμβέλεια των οποίων θα βρεθεί. Για να το κάνουμε αυτό χρησιμοποιούμε μια οικογένεια συναρτήσεων τις λεγόμενες *συναρτήσεις μετα-ανανέωσης (meta-updating functions)*.

<u>Ορισμός</u>

Οι συναρτήσεις μετα-ανανέωσης $\boxed{U_k^i : \Lambda \to \Lambda \text{ για } k \geq 0 \text{ και } i \geq 1}$ ορίζονται με τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό

$$\boxed{\begin{array}{lcl} U_k^i((AB)) & \equiv & (U_k^i(A)U_k^i(B)) \\ U_k^i((\lambda A)) & \equiv & (\lambda U_{k+1}^i(A)) \\ U_k^i(n) & \equiv & \begin{cases} n+i-1 & \text{αν} \quad n > k \quad (FV) \\ n & \text{αν} \quad n \leq k \quad (BV) \end{cases} \end{array}}$$

Η διαίσθηση που βρίσκεται πίσω απ το U_k^i είναι η εξής: ο αριθμός k ελέγχει αν η μεταβλητή είναι ελεύθερη και αν ναι πρέπει να αυξηθεί κατά i-1. Δηλαδή ο k είναι και αυτός μετρητής ακριβώς με τον ίδιο τρόπο που είχαμε και πριν για τον A δηλαδή δημιουργούμε αντίγραφο γι' αυτόν αν βρεθούμε σε εφαρμογή $(U_k^i((AB)) \equiv (U_k^i(A)U_k^i(B)))$, τον αυξάνουμε αν βρούμε λ-αφαίρεση $(U_k^i((\lambda A)) \equiv (\lambda U_{k+1}^i(A)))$ και τέλος τον συγκρίνουμε με κάθε αριθμό του όρου προκειμένου να ανανεώσουμε αυτόν τον αριθμό. Η ανανέωση θα γίνει όπως και πριν μόνο που στην περίπτωση της αύξησης του αριθμού η αύξηση δεν θα γίνει μόνο κατά ένα αλλά κατά i-1 αφού i είναι ο μετρητής του όρου A και είναι αυτός που μας δείχνει τον αριθμό των λ στην εμβέλεια των οποίων μπαίνει ο B και βέβαια στην περίπτωση της ισότητας ο αριθμός μένει αμετάβλητος ενώ πριν γινόταν η αντικατάσταση. Τελικά κατά τη β-αναγωγή χρησιμοποιούμε δύο βασικούς μετρητές –οι οποίοι μετά δημιουργούν και άλλους όταν βρεθούν σε μια εφαρμογή- τους οποίους τους αρχικοποιούμε τον μεν μετρητή του A ,i, στη μονάδα τον δε μετρητή του B ,k, στο 0. Και ορίζουμε συνοπτικά και τυπικά την οικογένεια των συναρτήσεων *μετα-αντικατάστασης (meta-substitution functions)* ως εξής:

<u>Ορισμός</u>

Η μετα-αντικατάσταση στο επίπεδο i, για $i \geq 1$, ενός όρου $B \in \Lambda$ σ' έναν όρο $A \in \Lambda$ υποδηλωμένη απ' τον συμβολισμό $A\{\{i \leftarrow B\}\}$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής :

$$
\begin{array}{lcl}
(A_1A_2)\{\{i \leftarrow B\}\} & \equiv & (A_1\{\{i \leftarrow B\}\}A_2\{\{i \leftarrow B\}\}) \\
(\lambda A)\{\{i \leftarrow B\}\} & \equiv & (\lambda A\{\{i \leftarrow B\}\}) \\
n\{\{i \leftarrow B\}\} & \equiv & \begin{cases} n-1 & \text{αν } n > i \\ U_0^i(B) & \text{αν } n = i \\ n & \text{αν } n < i \end{cases}
\end{array}
$$

Για τις *συναρτήσεις μετα-ανανέωσης* και *μετα-αντικατάστασης* ισχύουν τα ακόλουθα λήμματα

1. Για $k < n \le K + i$: $U_k^i(A) \equiv U_k^{i+1}(A)\{\{n \leftarrow B\}\}$

2. Για $p \le k < j + p$: $U_k^i(U_p^j(A)) \equiv U_p^{j+i-1}(A)$

3. Για $i \le n - k$: $U_k^i(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^i(A\{\{n - i + 1 \leftarrow B\}\})$

4. [Λήμμα της μετα-αντικατάστασης]
Για $1 \le i \le n$: $A\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv A\{\{n + 1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n - i + 1 \leftarrow C\}\}\}\}$

5. Για $m \le k + 1$: $U_{k+p}^i(U_p^m(A)) \equiv U_p^m(U_{k+p+1-m}^i(A))$

6. Για $n \le K + 1$: $U_k^i(A\{\{n \leftarrow B\}\}) \equiv U_{k+1}^i(A)\{\{n \leftarrow U_{k-n+1}^i(B)\}\}$

7. Αν $C \to_\beta D$ τότε $U_k^i(C) \to_\beta U_k^i(D)$

8. Αν $C \to_\beta D$ τότε $A\{\{i \leftarrow C\}\} \to_\beta^* A\{\{i \leftarrow D\}\}$

9. Αν $C \to_\beta D$ τότε $C\{\{i \leftarrow E\}\} \to_\beta D\{\{i \leftarrow E\}\}$

Επίσης *τα λήμματα 7, 8, 9 ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το* $\to_\beta$ *με* $\to_\beta^*$ *παντού και θα τα ονομάσουμε 7η, 8η, 9η*. Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη (πρέπει να ελέγξουμε επιπλέον την περίπτωση της ταυτότητας και της μεταβατικότητας και το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως) και μ' αυτή τη μορφή θα τα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τη συμβολή του λ-λογισμού με δείκτες de bruin (αλλά και του λs-λογισμού παρακάτω).

Απόδειξη:

- Για $k < n \leq K + i \quad U_k^i((A)) \equiv U_k^{i+1}(A)\{\{n \leftarrow B\}\}$

1. Αν $A \equiv l$ τότε

$$U_k^i(A) \equiv U_k^i(l) \equiv \begin{cases} l+i\text{-}1 & \text{αν } l > k \\ l & \text{αν } l \leq k \end{cases}$$

$$U_k^{i+1}(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^{i+1}(l)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv \begin{cases} l+i\,\{\{n \rightarrow B\}\} & \text{αν } l > k \\ l\,\{\{n \rightarrow B\}\} & \text{αν } l \leq k \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l+i\text{-}1 & \text{αν } l > k \,\&\, l+i > n & (1) \\ U_0^n(B) & \text{αν } l > k \,\&\, l+i = n & (2) \\ l+i & \text{αν } l > k \,\&\, l+i < n & (3) \\ l\text{-}1 & \text{αν } l \leq k \,\&\, l > n & (4) \\ U_0^n(B) & \text{αν } l \leq k \,\&\, l = n & (5) \\ l & \text{αν } l \leq k \,\&\, l < n & (6) \end{cases}$$

Για κάθε μια περίπτωση ξεχωριστά έχουμε ότι

- Για την περίπτωση 1 $k + i \geq n$ από υπόθεση και με δεδομένο ότι l>k έχουμε ότι ούτως η άλλως l+i>n. Άρα τελικά η περίπτωση 1 είναι για l>k.
- Οι περιπτώσεις 2,3 λόγω της προηγούμενης παρατήρησης δεν είναι δυνατόν να ισχύουν.
- Για την περίπτωση 6 $k < n$ από υπόθεση και με δεδομένο ότι $l \leq k$ έχουμε αναγκαστικά ότι l <n. Άρα τελικά η περίπτωση 6 ισχύει για $l \leq k$.
- Οι περιπτώσεις 4,5 προφανώς δεν μπορούν να ισχύουν.

Τελικά $U_k^i(A) \equiv U_k^{i+1}(A)\{\{n \leftarrow B\}\}$

2. Αν $A \equiv (A_1 A_2)$ και για τους A_1, A_2 ισχύει η πρόταση τότε

$$U_k^{i+1}(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^{i+1}((A_1 A_2))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv (U_k^{i+1}(A_1) U_k^{i+1}(A_2))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv$$

$$(U_k^{i+1}(A_1)\{\{n \leftarrow B\}\} U_k^{i+1}(A_2)\{\{n \leftarrow B\}\}) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv} (U_k^i(A_1) U_k^i(A_2)) \equiv U_k^i((A_1 A_2))$$

$$\equiv U_k^i(A)$$

3. Αν $A \equiv (\lambda A')$ και για τον A' ισχύει η πρόταση τότε

$$U_k^{i+1}(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^{i+1}((\lambda A'))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv (\lambda U_{k+1}^{i+1}(A'))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv$$

$$(\lambda U_{k+1}^{i+1}(A')\{\{n+1 \leftarrow B\}\}) \underset{\text{και με } k<n\leq k+i \Rightarrow k+1<n+1\leq k+1+i}{\overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}} (\lambda U_{k+1}^{i}(A')) \equiv U_k^i((\lambda A'))$$

$$\equiv U_k^i(A)$$

- Για $p \le k < j+p \quad : U_k^i(U_p^j(A)) \equiv U_p^{j+i-1}(A)$

1. Αν $A \equiv l$ τότε

$$U_k^i(U_p^j(A)) \equiv U_k^i(U_p^j(l)) \equiv \begin{cases} U_k^i(l+j-1) & \text{αν}\, l > p \\ U_k^i(l) & \text{αν}\, l \le p \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l+j+i-2 & \text{αν} \;\; l > p \,\&\, l+j-1 > k & (1) \\ l+j-1 & \text{αν} \;\; l > p \,\&\, l+j-1 \le k & (2) \\ l+i-1 & \text{αν} \;\; l \le p \,\&\, l > k & (3) \\ l & \text{αν} \;\; l \le p \,\&\, l \le k & (4) \end{cases}$$

$$U_p^{j+i-1}(A) \equiv \begin{cases} l+j+i-2 & \text{αν}\, l > p \\ l & \text{αν}\, l \le p \end{cases}$$

Για κάθε μια περίπτωση ξεχωριστά έχουμε ότι

- Για την περίπτωση 1 $k < j+p$ από υπόθεση και με δεδομένο ότι l>p έχουμε ότι ούτως η άλλως $l+j-1 > k$. Άρα τελικά η περίπτωση 1 είναι για l>p.
- Η περίπτωση 2 λόγω της προηγούμενης παρατήρησης δεν είναι δυνατόν να ισχύει.
- Για την περίπτωση 4 $p \le k$ από υπόθεση και με δεδομένο ότι $l \le p$ έχουμε αναγκαστικά ότι $l \le k$. Άρα τελικά η περίπτωση 6 ισχύει για $l \le p$.
- Η περίπτωση 3 προφανώς δεν μπορεί να ισχύει.

Τελικά $\quad U_k^i(U_p^j(A)) \equiv U_p^{j+i-1}(A)$

2. Αν $A \equiv (A_1 A_2)$ και για τους A_1, A_2 ισχύει η πρόταση τότε

$$U_k^i(U_p^j(A)) \equiv U_k^i(U_p^j((A_1A_2))) \equiv U_k^i((U_p^j(A_1)U_p^j(A_2))) \equiv (U_k^i(U_p^j(A_1))U_k^i(U_p^j(A_2)))$$

$$\overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv} (U_p^{j+i-1}(A_1)U_p^{j+i-1}(A_2)) \equiv U_p^{j+i-1}((A_1A_2)) \equiv U_p^{j+i-1}(A)$$

3. Αν $A \equiv (\lambda A')$ και για τον A′ ισχύει η πρόταση τότε

$$U_k^i(U_p^j(A)) \equiv U_k^i(U_p^j((\lambda A'))) \equiv U_k^i((\lambda U_{p+1}^j(A'))) \equiv (\lambda U_{k+1}^i(U_{p+1}^j(A')))$$

$$\underset{\text{και με } p\le k<j+p \Rightarrow p+1\le k+1<j+p+1}{\overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}} (\lambda U_{p+1}^{i+j-1}(A')) \equiv U_p^{j+i-1}((\lambda A')) \equiv U_p^{j+i-1}(A)$$

- Για $i \le n-k$: $U_k^i(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^i(A\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\})$

1. Αν $A \equiv l$ τότε

$$U_k^i(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^i(l)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv \begin{cases} l+i-1\{\{n \leftarrow B\}\} & \text{αν } l > k \\ l\{\{n \leftarrow B\}\} & \text{αν } l \le k \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l+i-2 & \text{αν } l > k \,\&\, l+i-1 > n & (1a) \\ U_o^n(B) & \text{αν } l > k \,\&\, l+i-1 = n & (2a) \\ l+i-1 & \text{αν } l > k \,\&\, l+i-1 < n & (3a) \\ l-1 & \text{αν } l \le k \,\&\, l > n & (4a) \\ U_o^n(B) & \text{αν } l \le k \,\&\, l = n & (5a) \\ l & \text{αν } l \le k \,\&\, l < n & (6a) \end{cases}$$

$$U_k^i(A\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\}) \equiv U_k^i(l\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\}) \equiv$$

$$\begin{cases} U_k^i(l-1) & \text{αν } l > n-i+1 \\ U_k^i(U_0^{n-i+1}(B)) & \text{αν } l = n-i+1 \equiv \\ U_k^i(l) & \text{αν } l < n-i+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l+i-2 & \text{αν } l > n-i+1 \,\&\, l-1 > k & (1b) \\ l-1 & \text{αν } l > n-i+1 \,\&\, l-1 \le k & (2b) \\ U_k^i(U_0^{n-i+1}(B)) & \text{αν } l = n-i+1 & (3b) \\ l+i-1 & \text{αν } l < n-i+1 \,\&\, l > k & (4b) \\ l & \text{αν } l < n-i+1 \,\&\, l \le k & (5b) \end{cases}$$

Για κάθε μια περίπτωση ξεχωριστά έχουμε ότι

- Οι περιπτώσεις 4a, 5a, δεν μπορούν να ισχύουν γιατί από υπόθεση $i \le n-k$ και με $l \le k$ έχουμε αναγκαστικά $l < n$. Επίσης η περίπτωση 2b δεν ισχύει.
- Η περίπτωση 2a ισχύει αναγκαστικά λόγω των υποθέσεων για l=n-i+1.
- Η περίπτωση 6a ισχύει για l<n-i+1 αφού $l \le k$.
- Απ το προηγούμενο λήμμα με p=0 έχουμε -αφού η υπόθεση του λήμματος ισχύει γιατί $k \le n-i$ $U_k^i(U_0^j(B)) \equiv U_0^{j+i-1}(B) \Rightarrow U_k^i(U_0^{n-i+1}(B)) \equiv U_0^n(B)$

Οι περιπτώσεις συνοψίζονται στις εξής:

- ✓ $l > n-i+1 \,\&\, l > k+1$ (αναγκαστικά l<K+1)
- ✓ $l > n-i+1 \,\&\, l = k+1$
- ✓ $l > n-i+1 \,\&\, l < k+1$ $\Big\}$ που δεν μπορούν να ισχύουν γιατί ισχύει αναγκαστικά η προηγούμενη
- ✓ $l = n-i+1$
- ✓ $l < n-i+1 \,\&\, l > k$
- ✓ $l < n-i+1 \,\&\, l = k$
- ✓ $l < n-i+1 \,\&\, l < k$

Σε κάθε περίπτωση τα δύο μέλη ταυτίζονται οπότε :

Τελικά $U_k^i(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^i(A\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\})$

2. Αν $A \equiv (A_1A_2)$ και για τους A_1, A_2 ισχύει η πρόταση τότε

$$U_k^i(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^i((A_1A_2))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv (U_k^i(A_1)U_k^i(A_2))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv$$
$$(U_k^i(A_1)\{\{n \leftarrow B\}\}U_k^i(A_2)\{\{n \leftarrow B\}\}) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}$$
$$(U_k^i(A_1\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\})U_k^i(A_2\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\})) \equiv U_k^i((A_1A_2)\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\}) \equiv$$
$$U_k^i(A\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\})$$

3. Αν $A \equiv (\lambda A')$ και για τον A' ισχύει η πρόταση τότε

$$U_k^i(A)\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv U_k^i((\lambda A'))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv (\lambda U_{k+1}^i(A'))\{\{n \leftarrow B\}\} \equiv$$
$$(\lambda U_{k+1}^i(A')\{\{n+1 \leftarrow B\}\}) \underset{\text{και με } p\le k<j+p \Rightarrow p+1\le k+1<j+p+1}{\overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}}$$
$$(\lambda U_{k+1}^i(A'\{\{n-i+2 \leftarrow B\}\})) \equiv U_k^i((\lambda A'\{\{n-i+2 \leftarrow B\}\}))$$
$$\equiv U_k^i((\lambda A')\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\}) \equiv U_k^i(A\{\{n-i+1 \leftarrow B\}\})$$

- Για $1 \le i \le n$:
  $A\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv A\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\}$

1. Αν $A \equiv l$ τότε

$$A\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv l\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv \begin{cases} (l-1)\{\{n \leftarrow C\}\} & \text{αν } l > i \\ U_0^i(B)\{\{n \leftarrow C\}\} & \text{αν } l = i \\ l\{\{n \leftarrow C\}\} & \text{αν } l < i \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l-2 & \text{αν } l > i \,\&\, l-1 > n & (1a) \\ U_0^n(C) & \text{αν } l > i \,\&\, l-1 = n & (2a) \\ l-1 & \text{αν } l > i \,\&\, l-1 < n & (3a) \\ U_0^i(B)\{\{n \leftarrow C\}\} & \text{αν } l = i & (4a) \\ l-1 & \text{αν } l < i \,\&\, l > n & (5a) \\ U_0^n(C) & \text{αν } l < i \,\&\, l = n & (6a) \\ l & \text{αν } l < i \,\&\, l < n & (7a) \end{cases}$$

$$A\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} \equiv$$
$$l\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} \equiv$$

$$\begin{cases} (l-1)\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} & \text{αν } l > n+1 \\ U_0^{n+1}(C)\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} & \text{αν } l = n+1 \\ l\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} & \text{αν } l < n+1 \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l-2 & l > n+1 \,\&\, l-1 > i & (1b) \\ U_0^i(B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}) & l > n+1 \,\&\, l-1 = i & (2b) \\ l-1 & l > n+1 \,\&\, l-1 < i & (3b) \\ U_0^{n+1}(C)\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} & l = n+1 & (4b) \\ l-1 & l < n+1 \,\&\, l > i & (5b) \\ U_0^i(B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}) & l < n+1 \,\&\, l = i & (6b) \\ l & l < n+1 \,\&\, l < i & (7b) \end{cases}$$

Για παρόμοιους λόγους με αυτούς που αναλύσαμε πιο πάνω οι περιπτώσεις 5α, 6α, 2b, 3b δεν μπορούν να ισχύουν, και επιπλέον με χρήση του πρώτου και του τρίτου λήμματος με k=0 παρατηρούμε ότι τα δύο μέλη ταυτίζονται και έχουμε τελικά

$$A\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv A\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\}$$

2. Αν $A \equiv (A_1 A_2)$ και για τους A_1, A_2 ισχύει η πρόταση τότε

$$A\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv (A_1 A_2)\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv$$
$$(A_1\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\}A_2\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\}) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}$$
$$(A_1\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\}A_2\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\})$$
$$\equiv (A_1 A_2)\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} \equiv$$
$$A\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\}$$

3. Αν $A \equiv (\lambda A')$ και για τον A' ισχύει η πρόταση τότε

$$A\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv (\lambda A')\{\{i \leftarrow B\}\}\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv$$
$$(\lambda A'\{\{i+1 \leftarrow B\}\})\{\{n \leftarrow C\}\} \equiv$$
$$(\lambda A'\{\{i+1 \leftarrow B\}\}\{\{n+1 \leftarrow C\}\}) \underset{\text{και με } 1 \le i < n \Rightarrow 1 \le i+1 < n+1}{\overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}}$$
$$(\lambda A'\{\{n+2 \leftarrow C\}\}\{\{i+1 \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\}) \equiv$$
$$(\lambda A')\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\} \equiv$$
$$A\{\{n+1 \leftarrow C\}\}\{\{i \leftarrow B\{\{n-i+1 \leftarrow C\}\}\}\}$$

- Για $m \le k+1$: $U^i_{k+p}(U^m_p(A)) \equiv U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(A))$

1. Αν $A \equiv l$ τότε

$$U^i_{k+p}(U^m_p(A)) \equiv U^i_{k+p}(U^m_p(l)) \equiv \begin{cases} U^i_{k+p}(l+m-1) & \text{αν } l > p \\ U^i_{k+p}(l) & \text{αν } l \le p \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l+m+i-2 & l > p \ \& \ l+m-1 > k+p \quad (1a) \\ l+m-1 & l > p \ \& \ l+m-1 \le k+p \quad (2a) \\ l+i-1 & l \le p \ \& \ l > k+p \quad (3a) \\ l & l \le p \ \& \ l \le k+p \quad (4a) \end{cases}$$

$$U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(A)) \equiv U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(l)) \equiv \begin{cases} U^m_p(l+i-1) & \text{αν } l > k+p+1-m \\ U^m_p(l) & \text{αν } l \le k+p+1-m \end{cases} \equiv$$

$$\begin{cases} l+i+m-2 & l > k+p+1-m \ \& \ l+i-1 > p \quad (1b) \\ l+i-1 & l > k+p+1-m \ \& \ l+i-1 \le p \quad (2b) \\ l+m-1 & l \le k+p+1-m \ \& \ l > p \quad (3b) \\ l & l \le k+p+1-m \ \& \ l \le p \quad (4b) \end{cases}$$

Για κάθε μια περίπτωση ξεχωριστά έχουμε ότι

- Για την περίπτωση 1α $m \le k+1$ από υπόθεση και με δεδομένο ότι $l > k+p+1-m$ έχουμε ότι ούτως η άλλως l>p. Άρα τελικά η περίπτωση 1α είναι για $l > k+p+1-m$ ή για l>p (το ίδιο είναι).
- Όμοια η περίπτωση 1b ισχύει για $l > k+p+1-m$ ή για $l > p$
- Τα ίδια ισχύουν για τις περιπτώσεις 4α, 4b.
- Οι περιπτώσεις 2α ,3α, 2β, 3β λόγω των προηγούμενων παρατηρήσεων δεν είναι δυνατόν να ισχύουν.

Τελικά $U^i_{k+p}(U^m_p(A)) \equiv U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(A))$

2. Αν $A \equiv (A_1A_2)$ και για τους A_1, A_2 ισχύει η πρόταση τότε

$$U^i_{k+p}(U^m_p(A)) \equiv U^i_{k+p}(U^m_p((A_1A_2))) \equiv (U^i_{k+p}(U^m_p(A_1))U^i_{k+p}(U^m_p(A_2))) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}$$
$$U^m_p(U^i_{k+p+1-m}((A_1A_2))) \equiv U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(A))$$

3. Αν $A \equiv (\lambda A')$ και για τον A′ ισχύει η πρόταση τότε

$$U^i_{k+p}(U^m_p(A)) \equiv U^i_{k+p}(U^m_p((\lambda A'))) \equiv (\lambda U^i_{k+p+1}(U^m_{p+1}(A'))) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\equiv}$$
$$(\lambda U^m_{p+1}(U^i_{k+p+2-m}(A'))) \equiv U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(\lambda(A'))) \equiv U^m_p(U^i_{k+p+1-m}(A))$$

- $C \to_\beta D \quad \Rightarrow \quad U^i_k(C) \to_\beta U^i_k(D)$

1. Αν $C \equiv ((\lambda A)B)$ και $D \equiv A\{\{1 \leftarrow B\}\}$ τότε

$$U^i_k(C) \equiv U^i_k(((\lambda A)B)) \equiv (U^i_k((\lambda A))U^i_k(B)) \equiv ((\lambda U^i_{k+1}(A))U^i_k(B))$$
$$\to_\beta U^i_{k+1}(A)\{\{1 \leftarrow U^i_k(B)\}\} \overset{\text{λήμμα 2.6 με n=1}}{\equiv} U^i_k(D)$$

2. Αν $C \equiv (A_1A_2)$ και $D \equiv (A_1'A_2)$ με $A_1 \to_\beta A_1'$ τότε

$$U^i_k(C) \equiv U^i_k((A_1A_2)) \equiv (U^i_k(A_1)U^i_k(A_2)) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\to_\beta} (U^i_k(A_1')U^i_k(A_2))$$
$$\equiv U^i_k((A_1'A_2)) \equiv U^i_k(D)$$

3. Αν $C \equiv (A_1A_2)$ και $D \equiv (A_1A_2')$ με $A_2 \to_\beta A_2'$ τότε

$$U^i_k(C) \equiv U^i_k((A_1A_2)) \equiv (U^i_k(A_1)U^i_k(A_2)) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\to_\beta} (U^i_k(A_1)U^i_k(A_2'))$$
$$\equiv U^i_k((A_1A_2')) \equiv U^i_k(D)$$

4. Αν $C \equiv (\lambda A_1)$ και $D \equiv (\lambda A_1^{'})$ με $A_1 \to_\beta A_1^{'}$ τότε

$$U_k^i(C) \equiv U_k^i((\lambda A_1)) \equiv (\lambda U_k^i(A_1)) \overset{\text{λόγω ε.υ}}{\to_\beta} (\lambda U_k^i(A_1^{'})) \equiv U_k^i((\lambda A_1^{'})) \equiv U_k^i(D)$$

- $C \to_\beta D \Rightarrow A\{\{i \leftarrow C\}\} \to_\beta^* A\{\{i \leftarrow D\}\}$

Αν $A \equiv n$ τότε

$$A\{\{i \leftarrow C\}\} \equiv \begin{cases} n-1 & \text{αν } n > i \\ U_0^i(C) & \text{αν } n = i \\ n & \text{αν } n < i \end{cases} \overset{\text{λήμμα 2.7}}{\to_\beta} \begin{cases} n-1 & \text{αν } n > i \\ U_0^i(D) & \text{αν } n = i \\ n & \text{αν } n < i \end{cases} \equiv A\{\{i \leftarrow D\}\}$$

Αν $A \equiv (A_1 A_2)$ τότε

$$A\{\{i \leftarrow C\}\} \equiv (A_1 A_2)\{\{i \leftarrow C\}\} \equiv (A_1\{\{i \leftarrow C\}\}A_2\{\{i \leftarrow C\}\})$$

$$\overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta} (A_1\{\{i \leftarrow D\}\}A_2\{\{i \leftarrow D\}\}) \equiv (A_1 A_2)\{\{i \leftarrow D\}\} \equiv A\{\{i \leftarrow D\}\}$$

Αν $A \equiv (\lambda A_1)$ τότε

$$A\{\{i \leftarrow C\}\} \equiv (\lambda A_1)\{\{i \leftarrow C\}\} \equiv (\lambda A_1\{\{i+1 \leftarrow C\}\})$$

$$\overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta} (\lambda A_1\{\{i+1 \leftarrow D\}\}) \equiv (\lambda A_1)\{\{i \leftarrow D\}\} \equiv A\{\{i \leftarrow D\}\}$$

- $C \to_\beta D \quad \Rightarrow \quad C\{\{i \leftarrow E\}\} \to_\beta D\{\{i \leftarrow E\}\}$

1. Αν $C \equiv ((\lambda A)B)$ και $D \equiv A\{\{1 \leftarrow B\}\}$ τότε

$$C\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv ((\lambda A)B)\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv ((\lambda A)\{\{i \leftarrow E\}\}B\{\{i \leftarrow E\}\})$$

$$\equiv ((\lambda A\{\{i+1 \leftarrow E\}\})B\{\{i \leftarrow E\}\}) \to_\beta A\{\{i+1 \leftarrow E\}\}\{\{1 \leftarrow B\{\{i \leftarrow E\}\}\}\}$$

$$\overset{\text{λήμμα 2.4 με n=1 και i=1}}{\equiv} A\{\{1 \leftarrow B\}\}\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv D\{\{i \leftarrow E\}\}$$

2. Αν $C \equiv (A_1 A_2)$ και $D \equiv (A_1^{'} A_2)$ με $A_1 \to_\beta A_1^{'}$ τότε

$$C\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv (A_1 A_2)\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv (A_1\{\{i \leftarrow E\}\}A_2\{\{i \leftarrow E\}\})$$

$$\overset{\text{λόγω ε.υ.}}{\to_\beta} (A_1^{'}\{\{i \leftarrow E\}\}A_2\{\{i \leftarrow E\}\}) \equiv (A_1^{'} A_2)\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv D\{\{i \leftarrow E\}\}$$

3. Αν $C \equiv (A_1 A_2)$ και $D \equiv (A_1 A_2^{'})$ με $A_2 \to_\beta A_2^{'}$ τότε

$$C\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv (A_1 A_2)\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv (A_1\{\{i \leftarrow E\}\}A_2\{\{i \leftarrow E\}\})$$

$$\overset{\text{λόγω ε.υ.}}{\to_\beta} (A_1\{\{i \leftarrow E\}\}A_2^{'}\{\{i \leftarrow E\}\}) \equiv (A_1 A_2^{'})\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv D\{\{i \leftarrow E\}\}$$

4. Αν $C \equiv (\lambda A_1)$ και $D \equiv (\lambda A_1^{'})$ με $A_1 \to_\beta A_1^{'}$ τότε

$C\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv (\lambda A_1)\{\{i \leftarrow E\}\} \equiv (\lambda A_1\{\{i+1 \leftarrow E\}\})$

$\overset{\text{λόγω ε.υ.}}{\to_\beta} (\lambda A_1^{'}\{\{i+1 \leftarrow E\}\}) \equiv (\lambda A_1^{'})\{\{i+1 \leftarrow E\}\} \equiv D\{\{i \leftarrow E\}\}$

Θα αποδείξουμε τώρα το εξής σημαντικό θεώρημα

<u>Θεώρημα 2.1</u>

Ο λ-λογισμός με δείκτες de bruin έχει την ιδιότητα CR δηλαδή αν $A, A', A'' \in \Lambda$, $A \to_\beta^* A'$ και $A \to_\beta^* A''$ τότε $\exists\ B \in \Lambda$ έτσι ώστε $A' \to_\beta^* B$ και $A'' \to_\beta^* B$.

Απόδειξη: (λάθος)

Για τον κανόνα $\rightarrow_b^*$ ισχύουν τα παρακάτω (λόγω του αρχικού αξιώματος της συμβατότητας, της ανακλαστικότητας και της μεταβατικότητας)

$$\begin{array}{|l|}\hline
((\lambda a)b) \rightarrow_\beta^* a\{\{1 \leftarrow b\}\} \qquad\qquad (1) \\
a \rightarrow_\beta^* b \Rightarrow \begin{cases} (ac) \rightarrow_\beta^* (bc) & (2) \\ (ca) \rightarrow_\beta^* (cb) & (3) \\ (\lambda a) \rightarrow_\beta^* (\lambda b) & (4) \end{cases} \\
\qquad\qquad a \rightarrow_\beta^* a \qquad\qquad (5) \\
\begin{matrix} a \rightarrow_\beta^* b \\ \wedge b \rightarrow_\beta^* c \end{matrix} \Rightarrow a \rightarrow_\beta^* c \qquad (6) \\ \hline
\end{array}$$

οπότε οι $A \rightarrow_\beta^* A'$ και $A \rightarrow_\beta^* A''$ μπορούν να έχουν προκύψει μ' έναν απ' τους 6*6-α=36-α τρόπους όπου α είναι ο αριθμός των αδύνατων περιπτώσεων όπως η περίπτωση 1-4. Δε χρειάζεται να ελέγξουμε όμως 36-α περιπτώσεις αφού η δυαδική περίπτωση είναι προφανές ότι ισχύει (αν ισχύει η περίπτωση 1-2 τότε θα ισχύει και η περίπτωση 2-1). Θα ελέγξουμε τελικά τις περιπτώσεις
1-1, 1-2, 1-3
2-2,2-3
3-3
4-4
καθώς και τις περιπτώσεις που ο ένας τουλάχιστόν απ' τους έχει προκύψει από τη συμμετρικότητα και που ο ένας τουλάχιστόν απ' τους έχει προκύψει από τη μεταβατικότητα.

Περιπτώσεις:

1-1:
$A \equiv ((\lambda a)b)$ $A' \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$ και $A'' \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$
οπότε σ' αυτή την περίπτωση το θεώρημα προφανώς ισχύει.

1-2:
$A \equiv ((\lambda a)b)$ $A' \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$ και $A'' \equiv ((\lambda a')b)$ με $a \rightarrow_\beta^* a'$
με $B \equiv a'\{\{1 \leftarrow b\}\} \overset{\text{λήμμα 2.9η}}{\Rightarrow} A' \rightarrow_\beta^* B \wedge A'' \rightarrow_\beta^* B$

1-3:

$A \equiv ((\lambda a)b)$ $A' \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$ και $A'' \equiv ((\lambda a)b')$ με $b \to_\beta^* b'$

με $B \equiv a\{\{1 \leftarrow b'\}\} \overset{\text{λήμμα 2.8η}}{\Rightarrow} A' \to_\beta^* B \wedge A'' \to_\beta^* B$

2-2:

$A \equiv (ac)$ $A' \equiv (a'c)$ και $A'' \equiv (a''c)$ με $a \to_\beta^* a'$ και $a \to_\beta^* a''$

οπότε από επαγωγική υπόθεση $\exists b_1 : a' \to_\beta^* b_1 \wedge a'' \to_\beta^* b_1$

οπότε με $B \equiv (b_1c) \Rightarrow A' \to_\beta^* B \wedge A'' \to_\beta^* B$

2-3:

$A \equiv (ac)$ $A' \equiv (a'c)$ και $A'' \equiv (ac')$ με $a \to_\beta^* a'$ και $c \to_\beta^* c'$

με $B \equiv (a'c') \Rightarrow A' \to_\beta^* B \wedge A'' \to_\beta^* B$

3-3:

$A \equiv (ac)$ $A' \equiv (ac')$ και $A'' \equiv (ac'')$ με $c \to_\beta^* c'$ και $c \to_\beta^* c''$

οπότε από επαγωγική υπόθεση $\exists b_1 : c' \to_\beta^* b_1 \wedge c'' \to_\beta^* b_1$

με $B \equiv (ab_1) \Rightarrow A' \to_\beta^* B \wedge A'' \to_\beta^* B$

4-4:

$A \equiv (\lambda a)$ $A' \equiv (\lambda a')$ και $A'' \equiv (\lambda a'')$ με $a \to_\beta^* a'$ και $a \to_\beta^* a''$

οπότε από επαγωγική υπόθεση $\exists b_1 : a' \to_\beta^* b_1 \wedge a'' \to_\beta^* b_1$

με $B \equiv (\lambda b_1) \Rightarrow A' \to_\beta^* B \wedge A'' \to_\beta^* B$

Σε περίπτωση που ο ένας τουλάχιστον έχει προκύψει από ανακλαστικότητα τότε ο άλλος (απ' τους A', A'' θα είναι ο B)

Στην περίπτωση που ο ένας τουλάχιστον έχει προκύψει από μεταβατικότητα τότε αν για παράδειγμα $A \to_\beta^* A_1 \to_\beta^* A''$ τότε υπάρχει $B_1 : A' \to_\beta^* B_1 \;\; A_1 \to_\beta^* B_1$ από επαγωγική υπόθεση. Αλλά τότε υπάρχει $B : B_1 \to_\beta^* B \;\; A'' \to_\beta^* B$ από επαγωγική υπόθεση. Δηλαδή υπάρχει $B : A' \to_\beta^* B_1 \to_\beta^* B \;\; A'' \to_\beta^* B$ δηλαδή $B : A' \to_\beta^* B \;\; A'' \to_\beta^* B$

Απόδειξη:

Αν αποδείξουμε το εξής

Strip lemma:
Αν P, Q, R, T$\in$ Λ , P$\rightarrow_{\beta}$Q και P$\rightarrow_{\beta}^{*}$***R*** τότε $\exists$ T$\in$Λ έτσι ώστε Q$\rightarrow_{\beta}^{*}$T και R$\rightarrow_{\beta}^{*}$T.

το οποίο μπορούμε να το ξαναγράψουμε ως εξής

Για κάθε i, αν $A_i^{'}, A_i^{''} \in \Lambda$, $A_i^{'} \rightarrow_{\beta} A_{i+1}^{'}$ και $A_i^{'} \rightarrow_{\beta}^{*} A_i^{''}$ τότε $\exists\, A_{i+1}^{''} \in \Lambda$ έτσι ώστε $A_{i+1}^{'} \rightarrow_{\beta}^{*} A_{i+1}^{''}$ και $A_i^{''} \rightarrow_{\beta}^{*} A_{i+1}^{''}$.

τότε με

$A \equiv A_0^{'} \rightarrow_{\beta} A^{'} \equiv A_1^{'} \rightarrow_{\beta} \ldots \rightarrow_{\beta} A_n^{'}$

$A^{''} \equiv A_0^{''} \rightarrow_{\beta}^{*} A_1^{''} \rightarrow_{\beta}^{*} A_2^{''} \rightarrow_{\beta}^{*} \ldots A_n^{''} \equiv B$

εφαρμόζοντας το strip lemma n φορές προκύπτει το Θεώρημα.

Άρα αυτό που πρέπει να κάνουμε είναι να αποδείξουμε το strip lemma.

Στο λήμμα αυτό υπάρχει η αναγωγή $\rightarrow_{\beta}$ δηλαδή στον όρο P μια συγκεκριμένη ακολουθία ((λ εξαφανίζεται. Η ιδέα είναι να μαρκάρουμε αυτό το λ στον όρο P. Έτσι λοιπόν φτιάχνουμε έναν καινούριο όρο ο οποίος διαφέρει απ' τον αρχικό στο ότι έχουμε μαρκάρει κάποιο λ.

Ορίζουμε το σύνολο των μαρκαρισμένων λ-όρων με δείκτες de Bruin , Λ ως εξής:

Λ::=n|(Λ Λ)|(λ Λ)|((λ Λ)Λ)

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιούμε μπλε γραφή για οτιδήποτε έχει σχέση με το σύνολο των μαρκαρισμένων λ-όρων με δείκτες de Bruin. Έτσι λοιπόν όταν γράφουμε α θα εννοούμε έναν λ-όρο με δείκτες de bruin ενώ όταν γράφουμε α θα εννοούμε τον ίδιο ακριβώς όρο αλλά με τη διαφορά ότι 0 ή και περισσότερα ((λ τα έχουμε μαρκάρει και έχουν γίνει ((λ. Απ' το συντακτικό των μαρκαρισμένων λ-όρων με δείκτες de Bruin παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να μαρκάρουμε οποιοδήποτε λ παρά μόνο αν προηγούνται τουλάχιστον δύο παρενθέσεις οπότε και έχουμε β αναγωγή. Προφανώς ο όρος α είναι ο όρος α χωρίς κανένα μαρκάρισμα καθώς επίσης ο όρος α είναι κάποιο μαρκάρισμα του όρου α.
Ακολουθούν κάποιοι ορισμοί που συμπληρώνουν ήδη γνωστούς και σκοπό έχουν την καλή λειτουργία του συστήματος Λ.

Ορισμός

Η αναγωγή $\to_\beta$ ορίζεται ως εξής:

$$
\boxed{\begin{array}{lllll}
((\lambda a)b) & \to_\beta & a\{\{1 \leftarrow b\}\} & & (1)\\
((\lambda a)b) & \to_\beta & a\{\{1 \leftarrow b\}\} & & (2)\\
a \to_\beta b & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{lll}
(ac) & \to_\beta & (bc)\\
(ca) & \to_\beta & (cb)\\
(\lambda a) & \to_\beta & (\lambda b)\\
((\lambda a)c) & \to_\beta & ((\lambda b)c)\\
((\lambda c)a) & \to_\beta & ((\lambda c)b)
\end{array}\right. & & \begin{array}{l}(3)\\(4)\\(5)\\(6)\\(7)\end{array}
\end{array}}
$$

Ορισμός

Το ανακλαστικό και μεταβατικό κλείσιμο της $\to_\beta$ ορίζεται ως εξής:

$$
\boxed{\begin{array}{lllll}
((\lambda a)b) & \to_\beta^* & a\{\{1 \leftarrow b\}\} & & (1)\\
((\lambda a)b) & \to_\beta^* & a\{\{1 \leftarrow b\}\} & & (2)\\
a \to_\beta^* b & \Rightarrow & \left\{\begin{array}{lll}
(ac) & \to_\beta^* & (bc)\\
(ca) & \to_\beta^* & (cb)\\
(\lambda a) & \to_\beta^* & (\lambda b)\\
((\lambda a)c) & \to_\beta^* & ((\lambda b)c)\\
((\lambda c)a) & \to_\beta^* & ((\lambda c)b)
\end{array}\right. & & \begin{array}{l}(3)\\(4)\\(5)\\(6)\\(7)\end{array}\\
a \to_\beta^* a & & & & (8)\\
\begin{array}{l} a \to_\beta^* b\\ b \to_\beta^* c\end{array} & \Rightarrow & a \to_\beta^* c & & (9)
\end{array}}
$$

Ορισμός

Οι συναρτήσεις μετα-ανανέωσης $\boxed{U_k^i : \Lambda \to \Lambda \text{ για } k \geq 0 \text{ και } i \geq 1}$ ορίζονται με τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό

$$
\boxed{\begin{array}{lll}
U_k^i((ab)) & \equiv & U_k^i(a)U_k^i(b))\\
U_k^i((\lambda a)) & \equiv & (\lambda U_{k+1}^i(a))\\
U_k^i(((\lambda a)b)) & \equiv & ((\lambda U_{k+1}^i(a)U_{k+1}^i(b)))\\
U_k^i(n) & \equiv & \left\{\begin{array}{llll} n+i-1 & \text{αν} & n>k & (FV)\\ n & \text{αν} & n \leq k & (BV)\end{array}\right.
\end{array}}
$$

Ορισμός
Η μετα-αντικατάσταση στο επίπεδο i, για $i \geq 1$, ενός όρου $b \in \Lambda$ σ' έναν όρο $a \in \Lambda$ υποδηλωμένη απ' τον συμβολισμό $a\{\{i \leftarrow b\}\}$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} (ab)\{\{i \leftarrow c\}\} & \equiv & (a\{\{i \leftarrow c\}\}b\{\{i \leftarrow c\}\}) \\ (\lambda a)\{\{i \leftarrow c\}\} & \equiv & (\lambda a\{\{i+1 \leftarrow c\}\}) \\ ((\lambda a)b)\{\{i \leftarrow c\}\} & \equiv & ((\lambda a\{\{i+1 \leftarrow c\}\})b\{\{i \leftarrow c\}\}) \\ n\{\{i \leftarrow c\}\} & \equiv & \begin{cases} n-1 & \text{αν} \quad n > i \\ U_k^i(c) & \text{αν} \quad n = i \\ n & \text{αν} \quad n < i \end{cases} \end{array}}$$

Τέλος ορίζουμε μια καινούρια συνάρτηση, τη συνάρτηση map η οποία μετατρέπει τους μαρκαρισμένους όρους σε κλασσικούς με δείκτες de bruin κάνοντας όμως ταυτόχρονα αναγωγή στους μαρκαρισμένους όρους από μέσα προς τα έξω.

Ορισμός
Η συνάρτηση map $\boxed{\varphi : \Lambda \rightarrow \Lambda}$ ορίζεται με τον ακόλουθο επαγωγικό ορισμό:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \varphi(n) & \equiv & n \\ \varphi((ab)) & \equiv & \varphi(a)\varphi(b)) \\ \varphi((\lambda a)) & \equiv & (\lambda\varphi(a)) \\ \varphi(((\lambda a)b)) & \equiv & \varphi(a)\{\{1 \leftarrow \varphi(b)\}\} \end{array}}$$

Ορισμός
Όταν γράφουμε $|a|$ εννοούμε τον όρο a χωρίς τα μαρκαρίσματα. Προφανώς

$|n| \equiv n$

$|(ab)| \equiv (|a||b|)$

$|(\lambda a)| \equiv (\lambda |a|)$

$|((\lambda a)b)| \equiv ((\lambda |a|)|b|)$

Πρόταση 2.1:

$$\boxed{|\alpha| \rightarrow_\beta^* \varphi(\alpha)}$$

Απόδειξη:

- Αν $\alpha \equiv n$ τότε

  $|\alpha| \equiv |n| \equiv n \rightarrow_\beta^* n \equiv \varphi(n) \equiv \varphi(\alpha)$

  Άρα $|\alpha| \rightarrow_\beta^* \varphi(\alpha)$

- Αν $\alpha \equiv (\alpha_1\alpha_2)$ τότε

  $|\alpha| \equiv |(\alpha_1\alpha_2)| \equiv |\alpha_1||\alpha_2| \overset{\text{από ε.υ.}}{\rightarrow_\beta^*} (\varphi(\alpha_1)\varphi(\alpha_2)) \equiv \varphi((\alpha_1\alpha_2)) \equiv \varphi(\alpha)$

  Άρα $|\alpha| \rightarrow_\beta^* \varphi(\alpha)$

- Αν $\alpha \equiv (\lambda\alpha_1)$ τότε

  $|\alpha| \equiv |(\lambda\alpha_1)| \equiv (\lambda|\alpha_1|) \overset{\text{από ε.υ.}}{\rightarrow_\beta^*} (\lambda\varphi(\alpha_1)) \equiv \varphi((\lambda\alpha_1)) \equiv \varphi(\alpha)$

  Άρα $|\alpha| \rightarrow_\beta^* \varphi(\alpha)$

- Αν $\alpha \equiv ((\lambda\alpha_1)\alpha_1)$ τότε

  $|\alpha| \equiv |((\lambda\alpha_1)\alpha_2)| \equiv ((\lambda|\alpha_1|)|\alpha_2|) \overset{\text{από ε.υ.}}{\rightarrow_\beta^*} ((\lambda\varphi(\alpha_1))\varphi(\alpha_2)) \rightarrow_\beta^* \varphi(\alpha_1)\{\{1 \leftarrow \varphi(\alpha_2)\}\}$

  $\equiv \varphi(((\lambda\alpha_1)\alpha_2)) \equiv \varphi(\alpha)$

  Άρα $|\alpha| \rightarrow_\beta^* \varphi(\alpha)$

Για τις *συναρτήσεις μετα-ανανέωσης* και *μετα-αντικατάστασης* ισχύουν όπως και πριν τα ακόλουθα λήμματα

1. Για $k < n \le K + i$: $U_k^i(a) \equiv U_k^{i+1}(a)\{\{n \leftarrow b\}\}$

2. Για $p \le k < j + p$: $U_k^i(U_p^j(a)) \equiv U_p^{j+i-1}(a)$

3. Για $i \le n - k$: $U_k^i(a)\{\{n \leftarrow b\}\} \equiv U_k^i(a\{\{n - i + 1 \leftarrow b\}\})$

4. [Λήμμα της μετα-αντικατάστασης]
Για $1 \le i \le n$: $a\{\{i \leftarrow b\}\}\{\{n \leftarrow c\}\} \equiv a\{\{n + 1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{n - i + 1 \leftarrow c\}\}\}\}$

5. Για $m \le k + 1$: $U_{k+p}^i(U_p^m(a)) \equiv U_p^m(U_{k+p+1-m}^i(a))$

6. Για $n \le k + 1$: $U_k^i(a\{\{n \leftarrow b\}\}) \equiv U_{k+1}^i(a)\{\{n \leftarrow U_{k-n+1}^i(b)\}\}$

7. Αν $c \to_\beta d$ τότε $U_k^i(c) \to_\beta U_k^i(d)$

8. Αν $c \to_\beta d$ τότε $a\{\{i \leftarrow c\}\} \to_\beta^* a\{\{i \leftarrow d\}\}$

9. Αν $c \to_\beta d$ τότε $c\{\{i \leftarrow e\}\} \to_\beta d\{\{i \leftarrow e\}\}$

Επίσης *τα λήμματα 7, 8, 9 ισχύουν αν αντικαταστήσουμε το* $\to_\beta$ *με* $\to_\beta^*$ *παντού και θα τα ονομάσουμε 7n, 8n, 9n*. Η απόδειξη είναι πολύ εύκολη (πρέπει να ελέγξουμε επιπλέον την περίπτωση της ταυτότητας και της μεταβατικότητας και το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως) και μ' αυτή τη μορφή θα τα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τη συμβολή του λ-λογισμού με δείκτες de bruin.

Η απόδειξή τους είναι ακριβώς η ίδια με πριν μόνο που τώρα πρέπει να εξετάσουμε επιπλέον την περίπτωση ((λ Λ)Λ) είτε όταν κάνουμε επαγωγή στον όρο είτε όταν έχουμε κανόνα συμβατότητας.

Ενδεικτικά θα εξετάσουμε το λήμμα 4 στην περίπτωση που έχουμε τον όρο $((\lambda a_1)a_2)$. Τότε από επαγωγική υπόθεση

$1 \le i \le n$: $a_1\{\{i+1 \leftarrow b\}\}\{\{n+1 \leftarrow c\}\} \equiv a_1\{\{n+2 \leftarrow c\}\}\{\{i+1 \leftarrow b\{\{n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\}$

$1 \le i \le n$: $a_2\{\{i \leftarrow b\}\}\{\{n \leftarrow c\}\} \equiv a_2\{\{n+1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\}$

Οπότε έχουμε:

$a\{\{i \leftarrow b\}\}\{\{n \leftarrow c\}\} \equiv ((\lambda a_1)a_2)\{\{i \leftarrow b\}\}\{\{n \leftarrow c\}\} \equiv$
$((\lambda a_1\{\{i+1 \leftarrow b\}\}\{\{n+1 \leftarrow c\}\})a_2\{\{i \leftarrow b\}\}\{\{n \leftarrow c\}\}) \equiv$
$((\lambda a_1\{\{n+2 \leftarrow c\}\}\{\{i+1 \leftarrow b\{\{n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\})a_2\{\{n+1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{$
$n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\}) \equiv$
$((\lambda a_1)\{\{n+1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\}a_2\{\{n+1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{$
$n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\}) \equiv$
$((\lambda a_1)a_2)\{\{n+1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\}) \equiv$
$a\{\{n+1 \leftarrow c\}\}\{\{i \leftarrow b\{\{n-i+1 \leftarrow c\}\}\}\})$

Παρόμοια αποδεικνύονται και όλα τα άλλα λήμματα.

Θα αποδείξουμε τώρα το εξής:

$$\boxed{\varphi(U_k^i(a)) \equiv U_k^i(\varphi(a))}$$

Απόδειξη:

- Αν $a \equiv n$ τότε

$$\varphi(U_k^i(a)) \equiv \varphi(U_k^i(n)) \equiv \begin{cases} \varphi(n+i-1) & n>k \\ \varphi(n) & n \leq k \end{cases} \equiv \begin{cases} n+i-1 & n>k \\ n & n \leq k \end{cases} \equiv U_k^i(n)$$

$$\equiv U_k^i(\varphi(n)) \equiv U_k^i(\varphi(a))$$

- Αν $a \equiv (a_1 a_2)$ τότε

$$\varphi(U_k^i(a)) \equiv \varphi(U_k^i((a_1 a_2))) \equiv \varphi((U_k^i(a_1)U_k^i(a_2))) \equiv (\varphi(U_k^i(a_1))\varphi(U_k^i(a_2)))$$

$$\overset{\text{από ε.υ}}{\equiv} (U_k^i(\varphi(a_1))U_k^i(\varphi(a_2))) \equiv U_k^i((\varphi(a_1)\varphi(a_2))) \equiv U_k^i(\varphi((a_1 a_2))) \equiv U_k^i(\varphi(a))$$

- Αν $a \equiv (\lambda a_1)$ τότε

$$\varphi(U_k^i(a)) \equiv \varphi(U_k^i((\lambda a_1))) \equiv \varphi((\lambda U_{k+1}^i(a_1))) \equiv (\lambda \varphi(U_{k+1}^i(a_1)))$$

$$\overset{\text{από ε.υ}}{\equiv} (\lambda U_{k+1}^i(\varphi(a_1))) \equiv U_k^i((\lambda \varphi(a_1))) \equiv U_k^i(\varphi((\lambda a_1))) \equiv U_k^i(\varphi(a))$$

- Αν $a \equiv ((\lambda a_1)a_2)$ τότε

$$\varphi(U_k^i(a)) \equiv \varphi(U_k^i(((\lambda a_1)a_2))) \equiv \varphi((U_k^i((\lambda a_1))U_k^i(a_2)))$$

$$\equiv \varphi(((\lambda U_{k+1}^i(a_1))U_k^i(a_2))) \equiv \varphi(U_{k+1}^i(a_1))\{\{1 \leftarrow \varphi(U_k^i(a_2)\}\}$$

$$\overset{\text{από ε.υ}}{\equiv} U_{k+1}^i(\varphi(a_1))\{\{1 \leftarrow U_k^i(\varphi(a_2)\}\} \overset{\text{από λήμμα 6}}{\equiv} U_k^i(\varphi(a_1)\{\{1 \leftarrow \varphi(a_2)\}\})$$

$$\equiv U_k^i(\varphi(((\lambda a_1)a_2))) \equiv U_k^i(\varphi(a))$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\boxed{\varphi(a\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi(a)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}}$$

Απόδειξη:

- Αν $a\equiv n$ τότε

$$\varphi(a\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi(n\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\begin{cases} n-1 & n>i\\ U_0^i(b) & n=i\\ n & n<i\end{cases}\equiv\begin{cases} \varphi(n-1) & n>i\\ \varphi(U_0^i(b)) & n=i\\ \varphi(n) & n<i\end{cases}$$

$$\overset{\text{από την προηγούμενη πρόταση}}{\equiv}\begin{cases} \varphi(n-1) & n>i\\ U_0^i\varphi((b)) & n=i\\ \varphi(n) & n<i\end{cases}\equiv\varphi(n)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\equiv\varphi(a)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}$$

- Αν $a\equiv(a_1a_2)$ τότε

$$\varphi(a\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi((a_1a_2)\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi((a_1\{\{i\leftarrow b\}\}a_2\{\{i\leftarrow b\}\}))$$

$$\equiv(\varphi(a_1\{\{i\leftarrow b\}\})\varphi(a_2\{\{i\leftarrow b\}\}))\overset{\text{από ε.υ}}{\equiv}(\varphi(a_1)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\varphi(a_2)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\})$$

$$\equiv(\varphi(a_1)\varphi(a_2))\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\equiv\varphi((a_1a_2))\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\equiv\varphi(a)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}$$

- Αν $a\equiv(\lambda a_1)$ τότε

$$\varphi(a\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi((\lambda a_1)\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi((\lambda a_1\{\{i+1\leftarrow b\}\}))$$

$$\equiv(\lambda\varphi(a_1\{\{i+1\leftarrow b\}\}))\overset{\text{από ε.υ}}{\equiv}(\lambda\varphi(a_1)\{\{i+1\leftarrow\varphi(b)\}\})$$

$$\equiv(\lambda\varphi(a_1))\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\equiv\varphi((\lambda a_1))\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\equiv\varphi(a)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}$$

- Αν $a\equiv((\lambda a_1)a_2)$ τότε

$$\varphi(a\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi(((\lambda a_1)a_2)\{\{i\leftarrow b\}\})\equiv\varphi(((\lambda a_1\{\{i+1\leftarrow b\}\})a_2\{\{i\leftarrow b\}\}))$$

$$\equiv\varphi(a_1\{\{i+1\leftarrow b\}\})\{\{1\leftarrow\varphi(a_2\{\{i\leftarrow b\}\})\}\}$$

$$\overset{\text{από ε.υ}}{\equiv}\varphi(a_1)\{\{i+1\leftarrow\varphi(b)\}\}\{\{1\leftarrow\varphi(a_2)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\}\}$$

$$\overset{\text{λήμμα 4}}{\equiv}\varphi(a_1)\{\{1\leftarrow\varphi(a_2)\}\}\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}\equiv\varphi(((\lambda a_1)a_2))\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}$$

$$\equiv\varphi(a)\{\{i\leftarrow\varphi(b)\}\}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\boxed{e \to_\beta^* f \Rightarrow \varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)}$$

<u>*Απόδειξη*</u>:

Για τον κανόνα $\to_\beta^*$ ισχύουν τα εξής:

$$
\boxed{
\begin{array}{llllllll}
((\lambda a)b) & \to_\beta^* & & a\{\{1 \leftarrow b\}\} & & & & (1) \\
((\lambda a)b) & \to_\beta^* & & a\{\{1 \leftarrow b\}\} & & & & (2) \\
a \to_\beta^* b & \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{lll} (ac) & \to_\beta^* & (bc) \\ (ca) & \to_\beta^* & (cb) \\ (\lambda a) & \to_\beta^* & (\lambda b) \\ ((\lambda a)c) & \to_\beta^* & ((\lambda b)c) \\ ((\lambda c)a) & \to_\beta^* & ((\lambda c)b) \end{array} \right. & & & & & \begin{array}{l} (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} \\
a \to_\beta^* a & & & & & & & (8) \\
\begin{array}{l} a \to_\beta^* b \\ b \to_\beta^* c \end{array} & \Rightarrow & & a \to_\beta^* c & & & & (9)
\end{array}
}
$$

Αν έχουμε την περίπτωση

1. $e \equiv ((\lambda a)b)$, $f \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$

   $\varphi(e) \equiv \varphi(((\lambda a)b)) \equiv (\varphi((\lambda a))\varphi(b)) \equiv ((\lambda\varphi(a))\varphi(b)) \to_\beta \varphi(a)\{\{1 \leftarrow \varphi(b)\}\}$

   $\overset{\text{λόγω της προηγούμενης πρότασης}}{\equiv} \varphi(a\{\{1 \leftarrow b\}\}) \equiv \varphi(f)$

   Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

2. $e \equiv ((\lambda a)b)$, $f \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$

   $\varphi(e) \equiv \varphi(((\lambda a)b)) \equiv \varphi(a)\{\{1 \leftarrow \varphi(b)\}\} \equiv \varphi(a\{\{1 \leftarrow b\}\}) \equiv \varphi(f)$

   Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

3. $e \equiv (ac)$, $f \equiv (bc)$ με $a \to_\beta^* b$

   $\varphi(e) \equiv \varphi((ac)) \equiv (\varphi(a)\varphi(c)) \overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta^*} (\varphi(b)\varphi(c)) \equiv \varphi((bc)) \equiv \varphi(f)$

   Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

4. $e \equiv (ca)$, $f \equiv (cb)$ με $a \to_\beta^* b$

   $\varphi(e) \equiv \varphi((ca)) \equiv (\varphi(c)\varphi(a)) \overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta^*} (\varphi(c)\varphi(b)) \equiv \varphi((cb)) \equiv \varphi(f)$

   Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

5. $e \equiv (\lambda a)$, $f \equiv (\lambda b)$ με $a \to_\beta^* b$

$\varphi(e) \equiv \varphi((\lambda a)) \equiv (\lambda \varphi(a)) \overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta^*} (\lambda \varphi(b)) \equiv \varphi((\lambda b)) \equiv \varphi(f)$

Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

6. $e \equiv ((\lambda a)c)$, $f \equiv ((\lambda b)c)$ με $a \to_\beta^* b$

$\varphi(e) \equiv \varphi(((\lambda a)c)) \equiv \varphi(a)\{\{1 \leftarrow \varphi(c)\}\} \overset{\text{από ε.υ. και λήμμα 9η}}{\to_\beta^*} \varphi(b)\{\{1 \leftarrow \varphi(c)\}\}$

$\equiv \varphi(((\lambda b)c)) \equiv \varphi(f)$

Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

7. $e \equiv ((\lambda c)a)$, $f \equiv ((\lambda c)b)$ με $a \to_\beta^* b$

$\varphi(e) \equiv \varphi(((\lambda c)a)) \equiv \varphi(c)\{\{1 \leftarrow \varphi(a)\}\} \overset{\text{από ε.υ. και λήμμα 8η}}{\to_\beta^*} \varphi(c)\{\{1 \leftarrow \varphi(a)\}\}$

$\equiv \varphi(((\lambda c)b)) \equiv \varphi(f)$

Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

8. $e \equiv a$, $f \equiv a$

$\varphi(e) \equiv \varphi(a) \to_\beta^* \varphi(a) \equiv \varphi(f)$

Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

9. $e \equiv a$, $f \equiv c$ γιατί $a \to_\beta^* b \wedge b \to_\beta^* c$

$\varphi(e) \equiv \varphi(a) \overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta^*} \varphi(b) \overset{\text{από ε.υ.}}{\to_\beta^*} \varphi(c) \equiv \varphi(f)$

Άρα $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

Τέλος χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε την πρόταση 2.2 και να αποδείξουμε αμέσως το strip lemma.

Πρόταση 2.2:

Αν $e \to_\beta^* f$ τότε για κάθε μαρκάρισμα του e e υπάρχει κάποιο μαρκάρισμα του f ας την πούμε f για το οποίο ισχύει $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

Απόδειξη:

Δε χρειάζεται να αναλύσουμε πλήρως όλες τις περιπτώσεις. Αρκεί να δούμε τις εξής:

- Αν $e \to_\beta^* f$ επειδή $e \to_\beta f$ τότε κάποιο συγκεκριμένο redex στον e ανάγεται, οπότε για κάθε μαρκάρισμα του e e υπάρχει κάποιο μαρκάρισμα του f το f ώστε να έχουμε $e \to_\beta f$ (αν κάνουμε αναγωγή στο ίδιο redex που ανοίχθηκε με τον κανόνα $e \to_\beta f$ αφού ο κανόνας $\to_\beta$ εμπεριέχει τον κανόνα $\to_\beta$, και αν κάνουμε στον f το ίδιο μαρκάρισμα που κάνουμε και στον e) $\overset{\text{και από την προηγούμενη πρόταση}}{\Rightarrow}$ υπάρχει κάποιο μαρκάρισμα του f το f όπως το περιγράψαμε πριν, για το οποίο ισχύει $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

- Αν $e \to_\beta^* f$ επειδή $e \equiv f$ η πρόταση είναι προφανής.

- Αν $e \to_\beta^* f$ επειδή $e \to_\beta^* g \to_\beta^* f$ τότε από επαγωγική υπόθεση για κάθε μαρκάρισμα του e e υπάρχει κάποιο μαρκάρισμα του g το g για το οποίο ισχύει $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(g)$ και για κάθε μαρκάρισμα του g g υπάρχει κάποιο μαρκάρισμα του f το f για το οποίο ισχύει $\varphi(g) \to_\beta^* \varphi(f)$. Άρα τελικά για κάθε μαρκάρισμα του e e υπάρχει κάποιο μαρκάρισμα του f το f για το οποίο ισχύει $\varphi(e) \to_\beta^* \varphi(f)$

Από την πρόταση 2.2 προκύπτει άμεσα το strip lemma.

Έστω P μαρκάρισμα του P έτσι ώστε να είναι μαρκαρισμένο το λ που κάνει την αναγωγή $P \to_\beta Q$. Τότε $\varphi(P) \equiv Q \overset{\text{από την προηγούμενη πρόταση}}{\Rightarrow} Q \to_\beta^* \varphi(R)$ για κάποιο μαρκάρισμα R του R. Αλλά και το $R \to_\beta^* \varphi(R)$ αφού $R \equiv |R|$. Δηλαδή το T που ψάχνουμε υπάρχει και είναι το $\varphi(R)$.

Κεφάλαιο 3 : ο λs-λογισμός

Έχοντας υπ' όψιν μας τα παραπάνω που αφορούν στον λ-λογισμό με δείκτες de Bruijn μπορούμε να ορίσουμε πλέον έναν λογισμό ρητής αντικατάστασης οι κανόνες του οποίου θα προκύπτουν από τον ορισμό των συναρτήσεων μετα-ανανέωσης και μετα-αντικατάστασης. Ο νέος αυτός λογισμός ονομάζεται λs-λογισμός και το συντακτικό του είναι το εξής:

$$\boxed{\Lambda s ::= \mathbb{N} \mid (\Lambda s \Lambda s) \mid (\lambda \Lambda s) \mid (\Lambda s \sigma^i \Lambda s) \mid (\varphi_k^i \Lambda s) \;\; \text{με}\; i \geq 1, k \geq 0}$$

Το σύνολο των (συμβατών) κανόνων του λs-λογισμού είναι το εξής:

Οι κανόνες $\to_{\lambda s}$:

σ - generation	$((\lambda a)b)$	$\to$	$(a\sigma^1 b)$
σ - λ - transition	$((\lambda a)\sigma^i b)$	$\to$	$(\lambda(a\sigma^{i+1}b))$
σ - app - transition	$((a_1a_2)\sigma^i b)$	$\to$	$((a_1\sigma^i b)(a_2\sigma^i b))$
σ - destruction	$(n\sigma^i b)$	$\to$	$\begin{cases} n-1 & \text{αν}\; n>i \\ (\varphi_0^i b) & \text{αν}\; n=i \\ n & \text{αν}\; n<i \end{cases}$
φ - λ - transition	$(\varphi_k^i(\lambda a))$	$\to$	$(\lambda(\varphi_{k+1}^i a))$
φ - app - transition	$(\varphi_k^i(a_1a_2))$	$\to$	$((\varphi_k^i a_1)(\varphi_k^i a_2))$
φ - destruction	$(\varphi_k^i n)$	$\to$	$\begin{cases} n+i-1 & \text{αν}\; n>k \\ n & \text{αν}\; n\leq k \end{cases}$

Το σύνολο των (συμβατών) κανόνων του s-λογισμού δηλαδή οι κανόνες $\to_s$ είναι το παραπάνω σύνολο χωρίς τον κανόνα σ-generation.

Παρατηρούμε την αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των κανόνων με τον ορισμό των συναρτήσεων μετα-αντικατάστασης και μετα-ανανέωσης.

Μας ενδιαφέρει σίγουρα να δούμε αν ο λs-λογισμός έχει την ιδιότητα της συμβολής (CR) καθώς και αν κάποιος όρος A που είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος στον λ-λογισμό (όλες οι παραγωγές τελειώνουν κάποτε) το οποίο το συμβολίζουμε με $A \in \beta\text{-}SN$ είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος και στον λs-λογισμό το οποίο και θα συμβολίζουμε $A \in \lambda s\text{-}SN$ (δηλαδή ο λs-λογισμός έχει την ιδιότητα PSN).

Για να δείξουμε ότι ο λs-λογισμός έχει αυτές τις σημαντικές ιδιότητες θα μελετήσουμε δύο διαφορετικούς λογισμούς που είναι και αυτοί λογισμοί ρητής αντικατάστασης: τον λσ-λογισμό (για την απόδειξη της συμβολής) και τον λυ-λογισμό(για την απόδειξη της ιδιότητας PSN).

3.1 <u>*Ο λσ-λογισμός.*</u>

Η αντικατάσταση στον λ-λογισμό πραγματοποιείται όταν έχουμε β-αναγωγή : $((\lambda x.a)b) \rightarrow_{\beta} a\{b/x\}$ και σημαίνει την αντικατάσταση όλων των ελεύθερων εμφανίσεων της x στον α απ' τον β (χωρίς όμως να γίνει δέσμευση ελεύθερων μεταβλητών). *Η αντικατάσταση δεν ανήκει στο συντακτικό του λ-λογισμού αλλά ορίζεται σ΄ ένα άτυπο "μετά-επίπεδο".*

Χρησιμοποιήσαμε τον συμβολισμό { } γιατί ο συμβολισμό [ ] ανήκει στο συντακτικό του λσ-λογισμού και ο όρος (α[s]) συμβολίζει τον όρο α με την αντικατάσταση s.

Όπως και στον λs-λογισμό η αντικατάσταση μπορεί να χειριστεί ανεξάρτητα απ' τη β-αναγωγή (κανόνες s) και αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό αν αναλογιστεί κανείς ότι δεν είναι πάντα καλό κατά την υλοποίηση κάποιου μοντέλου του λ-λογισμού να γίνονται αμέσως οι β-αναγωγές. Αν για παράδειγμα ο όρος στον οποίο γίνεται η αντικατάσταση της μεταβλητής x έχει πολλές ελεύθερες εμφανίσεις της, μπορεί να οδηγηθούμε σε όρους με πολύ μεγάλο μέγεθος (π.χ. α{β/x} με α=xxxxxx). Έχοντας υπ' όψιν τα μπορούμε να εκφράσουμε την β-αναγωγή με μια θα μπορούσε να πει κανείς "αναβαλλόμενη αντικατάσταση" (delayed substitution) την οποία ονομάζουμε Beta : $((\lambda x.a)b) \rightarrow_{Beta} a[(b/x)\cdot id]$. Θα δούμε σε λίγο την ερμηνεία των συμβόλων.

Ο λσ-λογισμός είναι ένα βήμα να κλείσουμε το κενό ανάμεσα στον θεωρητικό λ-λογισμό και στις υλοποιήσεις του, και μας βοηθάει να τις καταλάβουμε, να τις σχεδιάσουμε και να τις συγκρίνουμε. Ο λσ-λογισμός μπορεί να πει κανείς ότι μοιάζει με τον λογισμό των συνδυαστών (συμπεριλαμβανομένων των κατηγορικών συνδυαστών) όμως έχει το πλεονέκτημα ότι είναι πιο κοντά στο κλασσικό λ-λογισμό.

Ο όρος α[s] δηλώνει τον όρο α με την αντικατάσταση s όπου s μπορεί να είναι μια αντικατάσταση της μορφής {a1/1,…, an/n,…} όπου 1,…,n,… οι δείκτες de bruin. Τονίζουμε ότι στον κλασσικό λ-λογισμό έχουμε τον συμβολισμό { } ενώ εδώ τον [ ] για να δείξουμε ότι η αντικατάσταση δεν είναι μια πράξη σε κάποιο "μετά-επίπεδο" αλλά πράξη του ίδιου του λογισμού.

Το συντακτικό του λσ-λογισμού είναι το εξής:

Όροι $\Lambda\sigma^{t}$:	$a\,,b ::= 1 \mid (ab) \mid (\lambda a) \mid (a[s])$
Αντικαταστάσεις $\Lambda\sigma^{s}$:	$s\,,t ::= id \mid \uparrow \mid (a\cdot s) \mid (s\circ t)$

Εξηγήσεις:

1. id : είναι η ταυτοτική αντικατάσταση {1/1, 2/2,...} δηλαδή η {i/i}

2. $\uparrow$: είναι η αντικατάσταση {i+1/i} για παράδειγμα $(1[\uparrow]) = 2$. Χρειαζόμαστε μόνο τον δείκτη 1 για τη σύνταξη των όρων αφού ο δείκτης n+1 κωδικοποιείται απ' τον όρο $(1[\uparrow^{n}])$ όπου $\uparrow^{n}$ είναι η σύνθεση n $\uparrow$ δηλαδή $\uparrow\circ\ldots\circ\uparrow$. Γενικότερα για οποιαδήποτε αντικατάσταση $s^{n}\equiv s\circ\ldots\circ s$ δηλαδή $s^{1}\equiv s$, $s^{n+1}\equiv(s\circ s^{n})$. Χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $s^{0}\equiv id$

3. $(i[s])$: Είναι η τιμή του δείκτη i με την αντικατάσταση s. Καμιά φορά γράφουμε $s(i)$ αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση σαν μια συνάρτηση.

4. $(a\cdot s)$ (cons): Είναι η αντικατάσταση {a/1,s(i)/i+1}
   Για παράδειγμα
   $(a\cdot id)=\{a/1,1/2,2/3,\ldots\}$
   $(1\cdot\uparrow)=\{1/1,\uparrow(1)/2,\uparrow(2)/3,\ldots\}=\{1/1,2/2,3/3,\ldots\}=id$

5. $(s\circ t)$ (σύνθεση δηλαδή των s και t αντικαταστάσεων) : είναι η αντικατάσταση έτσι ώστε $(a[(s\circ t)])=((a[s])[t])$ οπότε $(s\circ t)=\{(s(i)[t])/i\}=\{t(s(i))/i\}$.
   Για παράδειγμα
   $(id\circ t)=\{t(id(i))/i\}=\{t(i)/i\}=t$
   $(\uparrow\circ(a\cdot s))=\{\uparrow[(a\cdot s)]/i\}=\{(i+1)\{a/1,s(i)/(i+1)\}/i\}=\{s(i)/i\}=s$

Για τη σύνθεση και το cons ισχύει ότι $((a\cdot s)\circ t)=((a[t])\cdot(s\circ t)$ οπότε $((1[s])\cdot(\uparrow\circ s))=(id\circ s)=s$. Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω κανόνες μπορούμε να γράψουμε τον κανόνα Beta ως εξής :

$$\boxed{((\lambda a)b)\rightarrow_{Beta} a[(b\cdot id)]}$$

Για να συμπληρώσουμε αυτόν τον κανόνα έχουμε

- τον κανόνα αποτίμησης του 1 ο οποίος είναι
$$(1[(c\cdot s)]) \rightarrow c$$

- καθώς επίσης και τον κανόνα της εφαρμογής που είναι
$$((cd)[s]) \rightarrow ((c[s])(d[s]))$$

- και τέλος τον κανόνα του λ που είναι
$$((\lambda c)[s]) = (\lambda c)\{s(i)/i\} = (\lambda(c\{1/1, s(i)\{i+1/i\}/i+1\}))$$
$$\overset{\text{απ' τον ορισμό του } \uparrow}{=} (\lambda(c\{1/1, s(i)[\uparrow]/i+1\}))$$
$$\overset{\text{απ' τον ορισμό του } \cdot}{=} (\lambda(c[1\cdot\{s(i)[\uparrow]/i\}])) \overset{\text{απ' τον ορισμό του } \circ}{=} (\lambda(c[(1\cdot(s\circ\uparrow))]))$$

Απ' τον τελευταίο κανόνα παρατηρούμε ότι η χρήση των τελεστών είναι αναγκαία και μάλλον αναπόφευκτη. Η ρητή αντικατάσταση περιπλέκει τη δομή του όρου και δεν είναι ξεκάθαρο ποιο λ δεσμεύει τι. Για παράδειγμα στον όρο $\boxed{((\lambda(1[(2\cdot id)]))[(a\cdot id)])}$ μπορεί να θεωρήσουμε ότι ο 1 δεσμεύεται απ' το λ (όπως θα θεωρούσαμε στον λ-λογισμό με δείκτες de bruin). Όμως η αντικατάσταση $[(2\cdot id)]$ δίνοντας την τιμή 2 στον 1. Έπειτα ο δείκτης 2 παίρνει την τιμή 1 και τελικά λαμβάνει την τιμή α. Γι' αυτό πρέπει να ορίσουμε με συγκεκριμένο τρόπο τη δέσμευση των δεικτών. Πρώτα θα ορίσουμε ποιο είναι το μήκος μιας αντικατάστασης.

<u>Ορισμός:</u>
Το μήκος της αντικατάστασης είναι ένα ζεύγος δύο ακεραίων (m,n). Για κάθε αντικατάσταση της μορφής $(a_1\cdot(a_2\cdot\ldots\cdot(a_m\cdot(\uparrow\circ(\uparrow\circ\ldots\circ(\uparrow\circ\uparrow)\ldots)))\ldots))$ m είναι ο αριθμός των cons και n ο αριθμός των shifts. Ο ολοκληρωμένος ορισμός είναι:

$\lvert id\rvert$	=	$(0,0)$		
$\lvert\uparrow\rvert$	=	$(0,1)$		
$\lvert(a\cdot s)\rvert$	=	$(m+1,n)$	αν	$\lvert s\rvert=(m,n)$
$\lvert(s\circ t)\rvert$	=	$(m+p-n,q)$	αν	$\lvert s\rvert=(m,n), \lvert t\rvert=(p,q), p\geq n$
$\lvert(s\circ t)\rvert$	=	$(n,q+n-p)$	αν	$\lvert s\rvert=(m,n), \lvert t\rvert=(p,q), p<n$

Για να βρούμε ποιο n είναι δεσμευμένο σε έναν όρο ξεκινάμε απ' τη ρίζα του δέντρου που μας δείχνει πώς είναι φτιαγμένος ο όρος (parse tree). Αρχικοποιούμε έναν μετρητή p στο n και τον μειώνουμε κάθε φορά που περνάμε από ένα λ. Αν γίνει 0 σε κάποιο λ, τότε αυτό είναι το λ που δεσμεύει τον n. Αν φτάσουμε σ' ένα κλείσιμο $(a[s])$ με $|s|=(m_s,n_s)$ συγκρίνουμε το p με το m_s. Αν $p \le m_s$ τότε συνεχίζουμε θέτοντας τον μετρητή στην τιμή $p-m_s+n_s$.

Οι (συμβατοί) κανόνες του λσ-λογισμού (οι οποίοι συμβολίζονται με $\rightarrow_{\lambda\sigma}$) συνοπτικά είναι:

Beta	$((\lambda a)b)$	$\rightarrow$	$a[(b \cdot id)]$
VarId	$(1[id])$	$\rightarrow$	1
VarCons	$(1[(a \cdot s)])$	$\rightarrow$	a
App	$((ba)[s])$	$\rightarrow$	$((b[s])(a[s]))$
Abs	$((\lambda a)[s])$	$\rightarrow$	$(\lambda(a[(1 \cdot (s \circ \uparrow))]))$
Clos	$((a[s])[t])$	$\rightarrow$	$(a[(s \circ t)])$
IdL	$(id \circ s)$	$\rightarrow$	s
ShiftId	$(\uparrow \circ id)$	$\rightarrow$	$\uparrow$
ShiftCons	$(\uparrow \circ (a \cdot s))$	$\rightarrow$	s
Map	$((a \cdot s) \circ t)$	$\rightarrow$	$((a[t]) \cdot (s \circ t))$
Ass	$((s_1 \circ s_2) \circ s_3)$	$\rightarrow$	$(s_1 \circ (s_2 \circ s_3))$

Ο κανόνας Beta είναι αυτός που εξαφανίζει το λ και δημιουργεί την αντικατάσταση. Οι υπόλοιποι κανόνες τους οποίους <u>θα τους συμβολίζουμε με το σύμβολο</u> $\rightarrow_{\sigma}$ <u>και αποτελούν τον σ-λογισμό</u> χειρίζονται τις αντικαταστάσεις. Κανονική μορφή κάποιου όρου για τους κανόνες μπορεί $\rightarrow_{\lambda\sigma}$ να μην υπάρχει, αλλά για τους κανόνες $\rightarrow_{\sigma}$ σίγουρα υπάρχει όπως θα δούμε πιο κάτω.

Πρόταση 3.1

Το σύστημα κανόνων σ είναι SN (δηλαδή οποιαδήποτε ακολουθία $\to_\sigma$ κάποια στιγμή τερματίζει).

Απόδειξη:

Ο λσ-λογισμός μπορεί να μεταφερθεί στους κατηγορικούς συνδυαστές συγχωνεύοντας τους δύο τύπους εκφράσεων που έχει ο λογισμός και συγχωνεύοντας τους τελεστές $[\,], \circ$ σε έναν. Κάτω από αυτόν τον μετασχηματισμό κάθε βήμα αντικατάστασης $\to_s$ αντιστοιχεί σε ένα βήμα αντικατάστασης στο SUBST το οποίο σύστημα έχει την ιδιότητα SN.

Πρόταση 3.2

Το σύστημα κανόνων σ έχει την ιδιότητα CR.

Απόδειξη:

Αν εξετάσουμε τα κρίσιμα ζευγάρια που προκύπτουν απ' τους κανόνες $\to_s$ παρατηρούμε ότι συγκλίνουν. Για παράδειγμα

$$((1[id])[s]) \xrightarrow{VarId}_s (1[s]) \qquad \text{αλλά} \quad (id \circ s) \xrightarrow{IdL}_s s$$
$$((1[id])[s]) \xrightarrow{Clos}_s (1[(id \circ s)])$$

Έτσι απ' το θεώρημα Knuth-Bendix ο σ-λογισμός είναι WCR. Τέλος απ' το λήμμα του Newmann αφού ο σ-λογισμός είναι $SN + WCR \Rightarrow$ είναι CR

Παρακάτω χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\to_R^{n..}$ για να δείξουμε ότι γίνονται n ή και περισσότερα βήματα της σχέσης $\to_R$

Τώρα θα δούμε πως μπορούμε να κάνουμε τη μετάβαση απ' τον λs στον λσ-λογισμό αφού πρώτα ορίσουμε δύο χρήσιμες αντικαταστάσεις.

Ορισμός:

Για $k \geq 0$ και $i > 1$ ορίζουμε

$s_{0\,i} = \uparrow^{i-1}$

$s_{k\,i} = (1 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (k \cdot \uparrow^{k+i-1}) \ldots))$

Ορισμός:

Αν $b \in \Lambda s^{\dagger}$ ορίζουμε την οικογένεια αντικαταστάσεων για $k \geq 1$ b_k ως εξής:

$b_1 = ((b[id]) \cdot id)$

$b_{i+1} = (1 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (i \cdot ((b[\uparrow^{i}]) \cdot \uparrow^{i})) \ldots))$

Πρόταση 3.3

$(1 \cdot (b_i \circ \uparrow)) \rightarrow_{\sigma}^{2..} b_{i+1}$

$(1 \cdot (s_{k\,i} \circ \uparrow)) \rightarrow_{\sigma}^{*} s_{k+1\,i}$

Απόδειξη:

$(1 \cdot (b_i \circ \uparrow)) \overset{Map}{\rightarrow_s^{*}} (1 \cdot ((1[\uparrow]) \cdot ((2[\uparrow]) \cdot \ldots \cdot ((i-1[\uparrow]) \cdot (((b[\uparrow^{i-1}][\uparrow])) \cdot (\uparrow^{i-1} \circ \uparrow))) \ldots))) \overset{Clos}{\rightarrow_s^{*}}$
$(1 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (i \cdot ((b[\uparrow^{i}]) \cdot \uparrow^{i})) \ldots)) \equiv b_{i+1}$

$(1 \cdot (s_{k\,i} \circ \uparrow)) \overset{Map,\,Clos}{\rightarrow_s^{*}} (1 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (k+1 \cdot \uparrow^{k+1+i-1}) \ldots)) \equiv s_{k+1\,i}$

Ορισμός:

Η συνάρτηση μετατροπής ενός όρου του λs-λογισμού σ' έναν όρο του λσ-λογισμού είναι:

$$T : \Lambda s \rightarrow \Lambda \sigma^{\dagger} \;/\; \begin{array}{rcl} T(n) & = & n \\ T((ab)) & = & (T(a)T(b)) \\ T((\lambda a)) & = & (\lambda T(a)) \\ T((a\sigma^{i}b)) & = & (T(a)[T(b)_i]) \\ T((\varphi_k^{i}a)) & = & (T(a)[s_{k\,i}]) \end{array}$$

Θεώρημα 3.1

$$\boxed{\text{Αν } m, l \in \Lambda s \text{ τότε } m \to_s l \Rightarrow T(m) \to_\sigma^{1..} T(l)}$$

Απόδειξη:

Για τους κανόνες s ισχύουν τα εξής (λόγω αξιωμάτων, και συμβατότητας):

$$
\begin{array}{lll}
((\lambda a)\sigma^i b) & \to_{\lambda s} & (\lambda(a\sigma^{i+1}b)) \quad (1)\\
((a_1a_2)\sigma^i b) & \to_{\lambda s} & ((a_1\sigma^i b)(a_2\sigma^i b)) \quad (2)\\
(n\sigma^i b) & \to_{\lambda s} & \begin{cases} n-1 & \text{αν } n>i \quad (3)\\ (\varphi_0^i b) & \text{αν } n=i \quad (4)\\ n & \text{αν } n<i \quad (5)\end{cases}\\
(\varphi_k^i(\lambda a)) & \to_{\lambda s} & (\lambda(\varphi_{k+1}^i a)) \quad (6)\\
(\varphi_k^i(a_1a_2)) & \to_{\lambda s} & ((\varphi_k^i a_1)(\varphi_k^i a_2)) \quad (7)\\
(\varphi_k^i n) & \to_{\lambda s} & \begin{cases} n+i-1 & \text{αν } n>k \quad (8)\\ n & \text{αν } n\le k \quad (9)\end{cases}
\end{array}
$$

$$
a \to_{\lambda s} b \Rightarrow \begin{cases}
(ac) \to_{\lambda s} (bc) & (10)\\
(ca) \to_{\lambda s} (cb) & (11)\\
(\lambda a) \to_{\lambda s} (\lambda b) & (12)\\
(a\sigma^i c) \to_{\lambda s} (b\sigma^i c) & (13)\\
(c\sigma^i a) \to_{\lambda s} (c\sigma^i b) & (14)\\
(\varphi_k^i a) \to_{\lambda s} (\varphi_k^i b) & (15)
\end{cases}
$$

Οπότε το $m \to_s l$ μπορεί να έχει προκύψει μ' έναν απ' τους 15 τρόπους.

αν ισχύει ο κανόνας

1. $m \equiv ((\lambda a)\sigma^i b),\quad l \equiv (\lambda(a\sigma^{i+1}b))$

   $T(m) = T(((\lambda a)\sigma^i b)) = (T((\lambda a))[T(b)_i]) = ((\lambda T(a))[T(b)_i])$

   $\overset{Abs}{\to}(\lambda T(a)[(1\cdot(T(b)_i \circ \uparrow))])) \quad \overset{\text{από πρόταση 3.3}}{\to_\sigma^{1..}} \quad (\lambda(T(a)[T(b)_{i+1}])) \equiv T(l)$

2. $m \equiv ((a_1a_2)\sigma^i b),\quad l \equiv ((a_1\sigma^i b)(a_2\sigma^i b))$

   $T(m) = T(((a_1a_2)\sigma^i b)) = (T((a_1a_2))[T(b)_i]) = ((T(a_1)T(a_2))[T(b)_i])$

   $\overset{App}{\to}((T(a_1)[T(b)_i])(T(a_2)[T(b)_i])) \equiv T(l)$

3. $m \equiv (n\sigma^i b),\quad l \equiv n-1 \quad \text{αν } n > i$

   $T(m) = T((n\sigma^i b)) = (n[T(b)_i]) = ((1[\uparrow^{n-1}])[T(b)_i]) \overset{Clos}{\to} (1[((\uparrow^{n-1} \circ T(b)_i))])$

   $\equiv (1[(((\uparrow \circ(\uparrow \circ \ldots \circ(\uparrow \circ \uparrow))\ldots)) \circ (1\cdot(2\cdot \ldots (i-1\cdot((T(b)[\uparrow^{i-1}])\cdot \uparrow^{i-1}))\ldots))])$

   $\overset{Ass,\, ShiftCons^i}{\to} \quad (1[(\uparrow^{n-1-i} \circ \uparrow^{i-1})]) \equiv (1[\uparrow^{n-2}]) \equiv n-1 \equiv T(l)$

4. $m \equiv (n\sigma^i b),\ \ l \equiv (\varphi_0^i b)$ αν $n = i$

$$T(m) = T((n\sigma^i b)) = (n[T(b)_i]) = ((1[\uparrow^{n-1}])[T(b)_i]) \xrightarrow{Clos} (1[((\uparrow^{n-1} \circ T(b)_i))])$$
$$\equiv (1[((\uparrow \circ(\uparrow \circ \ldots \circ (\uparrow \circ \uparrow))\ldots)) \circ (1 \cdot (2 \cdot \ldots(i-1 \cdot ((T(b)[\uparrow^{i-1}]) \cdot \uparrow^{i-1}))\ldots))])$$
$$\xrightarrow{Ass,\ ShiftCons^{n-1}} (1[((T(b)[\uparrow^{i-1}]) \cdot \uparrow^{i-1})]) \xrightarrow{VarCons} (T(b)[\uparrow^{i-1}]) \equiv T(l)$$

5. $m \equiv (n\sigma^i b),\ \ l \equiv n$ αν $n < i$

$$T(m) = T((n\sigma^i b)) = (n[T(b)_i]) = ((1[\uparrow^{n-1}])[T(b)_i]) \xrightarrow{Clos} (1[((\uparrow^{n-1} \circ T(b)_i))])$$
$$\equiv (1[((\uparrow \circ(\uparrow \circ \ldots \circ (\uparrow \circ \uparrow))\ldots)) \circ (1 \cdot (2 \cdot \ldots(i-1 \cdot ((T(b)[\uparrow^{i-1}]) \cdot \uparrow^{i-1}))\ldots))])$$
$$\xrightarrow{Ass,\ ShiftCons^{n-1}} (1[(n \cdot (\ldots(i-1 \cdot ((T(b)[\uparrow^{i-1}]) \cdot \uparrow^{i-1}))\ldots))]) \xrightarrow{VarCons} n \equiv T(l)$$

6. $m \equiv (\varphi_k^i(\lambda a)),\ \ l \equiv (\lambda(\varphi_{k+1}^i a))$

$$T(m) = T((\varphi_k^i(\lambda a))) = (T((\lambda a))[s_{k\,i}]) = ((\lambda T(a))[s_{k\,i}])$$
$$\xrightarrow{Abs} (\lambda T(a)[(1 \cdot (s_{k\,i} \circ \uparrow))])) \overset{\text{από πρόταση 3.3}}{\to_\sigma^*} (\lambda(T(a)[s_{k+1\,i}])) \equiv T(l)$$

7. $m \equiv (\varphi_k^i(a_1 a_2)),\ \ l \equiv ((\varphi_k^i a_1)(\varphi_k^i a_2))$

$$T(m) = T((\varphi_k^i(a_1 a_2))) = (T((a_1 a_2))[s_{k\,i}]) = ((T(a_1)T(a_2))[s_{k\,i}])$$
$$\xrightarrow{App} ((T(a_1)[s_{k\,i}])(T(a_2)[s_{k\,i}])) \equiv T(l)$$

8. $m \equiv (\varphi_k^i n),\ \ l \equiv n + i - 1$ αν $n > k$

$$T(m) = T((\varphi_k^i n)) = (T(n)[s_{k\,i}]) = ((1[\uparrow^{n-1}])[s_{k\,i}]) \xrightarrow{Clos} (1[((\uparrow^{n-1} \circ s_{k\,i}))])$$
$$= (1[((\uparrow^{n-1} \circ(1 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (k \cdot \uparrow^{k+i-1})\ldots)))]) \xrightarrow{Ass,\ ShiftCons^{k}} (1[(\uparrow^{n-1-k} \circ \uparrow^{k+i-1})])$$
$$\equiv (1[\uparrow^{n+i-2}]) \equiv n + i - 1 \equiv T(l)$$

9. $m \equiv (\varphi_k^i n),\ \ l \equiv n$ αν $n \leq k$

$$T(m) = T((\varphi_k^i n)) = (T(n)[s_{k\,i}]) = ((1[\uparrow^{n-1}])[s_{k\,i}]) \xrightarrow{Clos} (1[((\uparrow^{n-1} \circ s_{k\,i}))])$$
$$= (1[((\uparrow^{n-1} \circ(1 \cdot (2 \cdot \ldots \cdot (k \cdot \uparrow^{k+i-1})\ldots)))]) \xrightarrow{Ass,\ ShiftCons^{n-1}} (1[(n \cdot \ldots \cdot (k \cdot \uparrow^{k+i-1})\ldots)])$$
$$\xrightarrow{VarCons} n \equiv T(l)$$

10. $m \equiv (ac)$ $\ l \equiv (bc)$ επειδή $a \to_s b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $T(a) \to_\sigma^{1..} T(b)$)

$$T(m) = T((ac)) = (T(a)T(c)) \to_\sigma^{1..} (T(b)T(c)) = T((bc)) = T(l)$$

11. $m \equiv (ca)$ $\ l \equiv (cb)$ επειδή $a \to_s b$ τότε ισχύουν τα ίδια με πριν.

12. $m \equiv (\lambda a)$ $l \equiv (\lambda b)$ επειδή $a \to_s b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $T(a) \to_\sigma^{1..} T(b)$)
$T(m) = T((\lambda a)) = (\lambda T(a)) \to_\sigma^{1..} (\lambda T(b)) = T((\lambda b)) = T(l)$

13. $m \equiv (a\sigma^i c)$ $l \equiv (b\sigma^i c)$ επειδή $a \to_s b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $T(a) \to_\sigma^{1..} T(b)$)
$T(m) = T((a\sigma^i c)) = (T(a)[T(c)_i]) \to_\sigma^{1..} (T(b)[T(c)_i]) = T((b\sigma^i c)) = T(l)$

14. $m \equiv (c\sigma^i a)$ $l \equiv (c\sigma^i b)$ επειδή $a \to_s b$ τότε ισχύουν τα ίδια με πριν.
$T(m) = T((ac)) = (T(a)T(c)) \to_\sigma^{1..} (T(b)T(c)) = T((bc)) = T(l)$

15. $m \equiv (\varphi_k^i a)$ $l \equiv (\varphi_k^i b)$ επειδή $a \to_s b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $T(a) \to_\sigma^{1..} T(b)$)
$T(m) = T((\varphi_k^i a)) = (T(a)[s_{k\,i}]) \to_\sigma^{1..} (T(b)[s_{k\,i}]) = T((\varphi_k^i b)) = T(l)$

Πόρισμα 3.1

Το σύστημα κανόνων s είναι SN.

Απόδειξη:

Άμεση απ' το προηγούμενο θεώρημα. Αν δεν ήταν θα υπήρχε άπειρη ακολουθία κανόνων $\to_\sigma^{1..}$ άρα το σύστημα σ δε θα ήταν SN (Πρόταση 3.1)

Πόρισμα 3.2

Το σύστημα κανόνων s έχει την ιδιότητα CR.

Απόδειξη:

Το σύστημα κανόνων s έχει την ιδιότητα WCR αφού δεν υπάρχουν κρίσιμα ζευγάρια και επειδή είναι SN σύμφωνα με το λήμμα του Newmann θα έχει την ιδιότητα CR.

Λήμμα 3.1:

Το σύνολο των s-nf είναι το Λ δηλαδή ο λ-λογισμός με δείκτες de-bruin.

Απόδειξη:

Οι όροι $(a\sigma^i\beta)$ και $(\varphi_k^i a)$ δεν είναι s-nf γιατί:

- Αν $a \equiv n, a \equiv (\lambda a_1), a = (a_1 a_2)$ τότε προφανώς και δεν είναι
- Αν $a \equiv (a_1\sigma^j a_2)$ τότε $(a\sigma^i\beta) \equiv ((a_1\sigma^j a_2)\sigma^i\beta)$ και $(\varphi_k^i a) \equiv (\varphi_k^i(a_1\sigma^j a_2))$ αλλά $(a_1\sigma^j a_2) \to_s p$ αφού από ε.υ. $(a_1\sigma^j a_2)$ δεν είναι s-nf. Άρα $(a\sigma^i\beta) \to_s (p\sigma^i\beta)$ και $(\varphi_k^i a) \to_s (\varphi_k^i p)$
- Αν $a \equiv (\varphi_l^j a_1)$ τότε $(a\sigma^i\beta) \equiv ((\varphi_l^j a_1)\sigma^i\beta)$ και $(\varphi_k^i a) \equiv (\varphi_k^i(\varphi_l^j a_1))$ αλλά $(\varphi_l^j a_1) \to_s p$ αφού από ε.υ. $(\varphi_l^j a_1)$ δεν είναι s-nf. Άρα $(a\sigma^i\beta) \to_s (p\sigma^i\beta)$ και $(\varphi_k^i a) \to_s (\varphi_k^i p)$

Οι υπόλοιποι όροι είναι s-nf αφού δεν υπάρχει κανόνας αντικατάστασης γι' αυτούς οπότε τελικά το σύνολο Λ είναι ακριβώς το σύνολο των s-nf.

Λήμμα 3.2:

Αν $a,b \in \Lambda s$ τότε για τις s -κανονικές μορφές τους ισχύουν τα ακόλουθα :

$s(n)$	$\equiv$	n
$s((ab))$	$\equiv$	$(s(a)s(b))$
$s((\lambda a))$	$\equiv$	$(\lambda s(a))$
$s((a\sigma^i b))$	$\equiv$	$s(a)\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$
$s((\varphi_k^i a))$	$\equiv$	$U_k^i(s(a))$

Απόδειξη:

Όταν βρίσκουμε μια s-nf για κάποιον όρο τότε αύτη είναι και η μοναδική s-nf του αφού σύμφωνα με το πόρισμα 3.2 αν είχε περισσότερες από μία τότε τα ζεύγη θα έπρεπε να συγκλίνουν. Άτοπο αφού ο όρος που είναι σε nf δεν μπορεί να αντικατασταθεί από κάποιον άλλο όρο.

- $n \to_s^* n$ και αφού n είναι nf τότε $s(n) = n$
- $(ab) \to_s^* (s(a)b) \to_s^* (s(a)s(b))$ και αφού $(s(a)s(b))$ είναι nf $s((ab)) \equiv (s(a)s(b))$
- $(\lambda a) \to_s^* (\lambda s(a))$ και αφού $(\lambda s(a))$ είναι nf $s((\lambda a)) \equiv (\lambda s(a))$
- $(\varphi_k^i a) \to_s^* (\varphi_k^i s(a))$

Θα δείξουμε ότι $s((\varphi_k^i s(a))) \equiv U_k^i(s(a))$ με επαγωγή στο $s(a)$

- αν $s(a) \equiv n$ τότε $(\varphi_k^i s(a)) \to_s^* \begin{cases} n+i-1 & n>k \\ n & n \le k \end{cases}$

  οπότε $s((\varphi_k^i s(a))) \equiv \begin{cases} s(n+i-1) & n>k \\ s(n) & n \le k \end{cases} \equiv \begin{cases} n+i-1 & n>k \\ n & n \le k \end{cases}$

  άρα $s((\varphi_k^i s(a))) \equiv U_k^i(s(a))$

- αν $s(a) \equiv (a_1 a_2)$ τότε $(\varphi_k^i s(a)) \to_s^* ((\varphi_k^i a_1)(\varphi_k^i a_2))$

  οπότε $s((\varphi_k^i s(a))) \equiv s(((\varphi_k^i a_1)(\varphi_k^i a_2)))$

  $\equiv (s((\varphi_k^i a_1)s((\varphi_k^i a_2))) \overset{\varepsilon.\upsilon}{\equiv} (U_k^i(s(a_1))U_k^i(s(a_2)))$

  $\equiv (U_k^i((s(a_1)s(a_2))) \equiv U_k^i(s((a_1 a_2))) \equiv U_k^i(s(s(a))) \equiv U_k^i(s(a))$

- αν $s(a) \equiv (\lambda a_1)$ τότε $(\varphi_k^i s(a)) \to_s^* (\lambda(\varphi_k^i a_1))$

  οπότε $s((\varphi_k^i s(a))) \equiv s((\lambda(\varphi_k^i a_1))) \equiv (\lambda s((\varphi_k^i a_1)))$

  $\overset{\varepsilon.\upsilon}{\equiv} (\lambda U_k^i(s(a_1))) \equiv U_k^i((\lambda s(a_1))) \equiv U_k^i(s((\lambda a_1)))$

  $\equiv U_k^i(s(s(a))) \equiv U_k^i(s(a))$

- $(a\sigma^i b) \to_s^* (s(a)\sigma^i b) \to_s^* (s(a)\sigma^i s(b))$

Θα δείξουμε ότι $s((s(a)\sigma^i s(b))) \equiv s(a)\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$ με επαγωγή στο $s(a)$

- αν $s(a) \equiv n$ τότε $(s(a)\sigma^i s(b)) \to_s^* \begin{cases} n-1 & n>i \\ (\varphi_0^i s(b)) & n=i \\ n & n<i \end{cases}$

  οπότε $s((s(a)\sigma^i s(b))) \equiv \begin{cases} s(n-1) & n>i \\ s((\varphi_0^i s(b))) & n=i \\ s(n) & n<i \end{cases} \equiv \begin{cases} n-1 & n>i \\ U_k^i(s(b)) & n=i \\ n & n<i \end{cases}$

  άρα $s((s(a)\sigma^i s(b))) = s(a)\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$

- αν $s(a) \equiv (a_1 a_2)$ τότε $(s(a)\sigma^i s(b)) \to_s^* ((a_1 a_2)\sigma^i s(b))$

  οπότε $s((s(a)\sigma^i s(b))) \equiv s(((a_1 a_2)\sigma^i s(b)))$

  $\equiv s(((a_1\sigma^i s(b))(a_2\sigma^i s(b)))) \equiv (s((a_1\sigma^i s(b)))s((a_2\sigma^i s(b))))$

  $\overset{\varepsilon.\upsilon}{\equiv} (s(a_1)\{\{i \leftarrow s(s(b))\}\}s(a_2)\{\{i \leftarrow s(s(b))\}\})$

  $\equiv (s(a_1)s(a_2))\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv (s(a_1 a_2))\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$

  $\equiv (s(s(a))\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv (s(a)\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$

- αν $s(a) \equiv (\lambda a_1)$ τότε $(s(a)\sigma^i s(b)) \to_s^* ((\lambda a_1)\sigma^i s(b))$

  οπότε $s((s(a)\sigma^i s(b))) \equiv s(((\lambda a_1)\sigma^i s(b)))$

  $\equiv s((\lambda(a_1\sigma^{i+1}s(b)))) \equiv (\lambda s((a_1\sigma^{i+1}s(b))))$

  $\overset{\varepsilon.\upsilon}{\equiv} (\lambda s(a_1)\{\{i+1 \leftarrow s(s(b))\}\})$

  $\equiv (\lambda s(a_1)\{\{i+1 \leftarrow s(b)\}\}) \equiv (\lambda s(a_1))\{\{i \leftarrow s(b)\}\})$

  $\equiv s((\lambda a_1))\{\{i \leftarrow s(b)\}\}) \equiv s(s(a))\{\{i \leftarrow s(b)\}\})$

  $\equiv s(a)\{\{i \leftarrow s(b)\}\})$

<u>Οι προτάσεις 3.4 και 3.5 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 2.1 (ο λ λογισμός με δείκτες de bruin έχει την ιδιότητα CR) είναι τα εργαλεία για την απόδειξη της συμβολής του λs-λογισμού.</u>

<u>Πρόταση 3.4:</u>

Αν $p,q \in \Lambda s \quad p \to_{\lambda s}^* q \Rightarrow s(p) \to_b^* s(q)$

<u>Απόδειξη:</u>

Για τους κανόνες λs ισχύουν τα εξής (λόγω αξιωμάτων, συμβατότητας, ανακλαστικότητας και μεταβατικότητας) :

$$
\begin{array}{lcll}
((\lambda a)b) & \to_{\lambda s}^* & (a\sigma^i b) & (1)\\
((\lambda a)\sigma^i b) & \to_{\lambda s}^* & (\lambda(a\sigma^{i+1} b)) & (2)\\
((a_1 a_2)\sigma^i b) & \to_{\lambda s}^* & ((a_1\sigma^i b)(a_2\sigma^i b)) & (3)\\
(n\sigma^i b) & \to_{\lambda s}^* & \begin{cases} n-1 & \text{αν } n>i \quad (4)\\ (\varphi_0^i b) & \text{αν } n=i \quad (5)\\ n & \text{αν } n<i \quad (6)\end{cases} & \\
(\varphi_k^i(\lambda a)) & \to_{\lambda s}^* & (\lambda(\varphi_{k+1}^i a)) & (7)\\
(\varphi_k^i(a_1 a_2)) & \to_{\lambda s}^* & ((\varphi_k^i a_1)(\varphi_k^i a_2)) & (8)\\
(\varphi_k^i n) & \to_{\lambda s}^* & \begin{cases} n+i-1 & \text{αν } n>k \quad (9)\\ n & \text{αν } n\le k \quad (10)\end{cases} &
\end{array}
$$

$$
a \to_{\lambda s}^* a \qquad (11)
$$

$$
a \to_{\lambda s}^* b \Rightarrow \begin{cases}
(ac) \to_{\lambda s}^* (bc) & (12)\\
(ca) \to_{\lambda s}^* (cb) & (13)\\
(\lambda a) \to_{\lambda s}^* (\lambda b) & (14)\\
(a\sigma^i c) \to_{\lambda s}^* (b\sigma^i c) & (15)\\
(c\sigma^i a) \to_{\lambda s}^* (c\sigma^i b) & (16)\\
(\varphi_k^i a) \to_{\lambda s}^* (\varphi_k^i b) & (17)
\end{cases}
$$

$$
\begin{array}{l} a \to_{\lambda s}^* b \\ \wedge b \to_{\lambda s}^* c \end{array} \Rightarrow a \to_{\lambda s}^* c \qquad (18)
$$

οπότε το $p \to_{\lambda s}^{*} q$ μπορεί να έχει προκύψει μ' έναν απ' τους 18 τρόπους.
Αν έχει προκύψει απ' τον κανόνα:

1. $p \equiv ((\lambda a)b)$ $q \equiv (a\sigma^{i}b)$ τότε
$s(p) \equiv s(((\lambda a)b)) \equiv (s((\lambda a))s(b)) \equiv ((\lambda s(a))s(b)) \to_{b} s(a)\{\{1 \leftarrow s(b)\}\} \equiv s(q)$

2. $p \equiv ((\lambda a)\sigma^{i}b)$ $q \equiv (\lambda(a\sigma^{i+1}b))$ τότε
$s(p) \equiv s(((\lambda a)\sigma^{i}b)) \equiv s((\lambda a))\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv (\lambda s(a))\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$
$\equiv (\lambda s(a)\{\{i+1 \leftarrow s(b)\}\}) \equiv (\lambda s((a\sigma^{i+1}b))) \equiv s((\lambda(a\sigma^{i+1}b))) \equiv s(q)$

3. $p \equiv ((a_1a_2)\sigma^{i}b)$ $q \equiv ((a_1\sigma^{i}b)(a_2\sigma^{i}b))$ τότε
$s(p) \equiv s(((a_1a_2)\sigma^{i}b)) \equiv s((a_1a_2))\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv (s(a_1)s(a_2))\{\{i \leftarrow s(b)\}\}$
$\equiv (s(a_1)\{\{i \leftarrow s(b)\}\}s(a_2)\{\{i \leftarrow s(b)\}\}) \equiv (s((a_1\sigma^{i}b))s((a_2\sigma^{i}b)))$
$\equiv s(((a_1\sigma^{i}b)(a_2\sigma^{i}b))) \equiv s(((a_1a_2)\sigma^{i}b)) \equiv s(q)$

4. $p \equiv (n\sigma^{i}b)$ $q \equiv n-1$ αν $n > i$ τότε
$s(p) \equiv s((n\sigma^{i}b)) \equiv s(n)\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv n\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv n-1 \equiv s(q)$

5. $p \equiv (n\sigma^{i}b)$ $q \equiv (\varphi_0^{i}b)$ αν $n = i$ τότε
$s(p) \equiv s((n\sigma^{i}b)) \equiv s(n)\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv n\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv U_0^{i}(s(b)) \equiv s(q)$

6. $p \equiv (n\sigma^{i}b)$ $q \equiv n$ αν $n < i$ τότε
$s(p) \equiv s((n\sigma^{i}b)) \equiv s(n)\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv n\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv n \equiv s(q)$

7. $p \equiv (\varphi_k^{i}(\lambda a))$ $q \equiv (\lambda(\varphi_{k+1}^{i}a))$ τότε
$s(p) \equiv s((\varphi_k^{i}(\lambda a))) \equiv U_k^{i}(s((\lambda a))) \equiv U_k^{i}((\lambda s(a))) \equiv (\lambda U_{k+1}^{i}(s(a)))$
$\equiv (\lambda s((\varphi_{k+1}^{i}a))) \equiv s((\lambda(\varphi_{k+1}^{i}a))) \equiv s(q)$

8. $p \equiv (\varphi_k^{i}(a_1a_2))$ $q \equiv ((\varphi_k^{i}a_1)(\varphi_k^{i}a_2))$ τότε
$s(p) \equiv s((\varphi_k^{i}(a_1a_2))) \equiv U_k^{i}(s((a_1a_2))) \equiv U_k^{i}((s(a_1)s(a_2)))$
$\equiv (U_k^{i}(s(a_1))U_k^{i}(s(a_2))) \equiv (s((\varphi_k^{i}a_1))s((\varphi_k^{i}a_2))) \equiv s(((\varphi_k^{i}a_1)(\varphi_k^{i}a_2))) \equiv s(q)$

9. $p \equiv (\varphi_k^{i}n)$ $q \equiv n+i-1$ αν $n > k$ τότε
$s(p) \equiv s((\varphi_k^{i}n)) \equiv U_k^{i}(s(n)) \equiv U_k^{i}(n) \equiv s(q)$

10. $p \equiv (\varphi_k^i n)$ $q \equiv n$ αν $n \le k$ τότε
$s(p) \equiv s((\varphi_k^i n)) \equiv U_k^i(s(n)) \equiv U_k^i(n) \equiv s(q)$

11. $p \equiv a$ $q \equiv a$ τότε
$s(p) \equiv s(a) \equiv s(q)$

12. $p \equiv (ac)$ $q \equiv (bc)$ επειδή $a \to_{\lambda s}^{*} b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $s(a) \to_{b}^{*} s(b)$)
$s(p) \equiv s((ac)) \equiv (s(a)s(c)) \to_{b}^{*} (s(b)s(c)) \equiv s((bc)) \equiv s(q)$

13. $p \equiv (ca)$ $q \equiv (cb)$ επειδή $a \to_{\lambda s}^{*} b$ τότε ισχύουν τα ίδια με πριν.

14. $p \equiv (\lambda a)$ $q \equiv (\lambda b)$ επειδή $a \to_{\lambda s}^{*} b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $s(a) \to_{b}^{*} s(b)$)
$s(p) \equiv s((\lambda a)) \equiv (\lambda s(a)) \to_{b}^{*} (\lambda s(b)) \equiv s((\lambda b)) \equiv s(q)$

15. $p \equiv (a\sigma^i c)$ $q \equiv (b\sigma^i c)$ επειδή $a \to_{\lambda s}^{*} b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $s(a) \to_{b}^{*} s(b)$)
$s(p) \equiv s((a\sigma^i c)) \equiv s(a)\{\{i \leftarrow s(c)\}\} \overset{\text{Λήμμα 2.9n}}{\to} s(b)\{\{i \leftarrow s(c)\}\} \equiv s((b\sigma^i c)) \equiv s(q)$

16. $p \equiv (c\sigma^i a)$ $q \equiv (c\sigma^i b)$ επειδή $a \to_{\lambda s}^{*} b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $s(a) \to_{b}^{*} s(b)$)
$s(p) \equiv s((c\sigma^i a)) \equiv s(c)\{\{i \leftarrow s(a)\}\} \overset{\text{Λήμμα 2.8n}}{\to} \equiv s(c)\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \equiv s((c\sigma^i b)) \equiv s(q)$

17. $p \equiv (\varphi_k^i a)$ $q \equiv (\varphi_k^i b)$ επειδή $a \to_{\lambda s}^{*} b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $s(a) \to_{b}^{*} s(b)$)
$s(p) \equiv s((\varphi_k^i a)) \equiv U_k^i(s(a)) \overset{\text{Λήμμα 2.7n}}{\to} U_k^i(s(b)) \equiv s((\varphi_k^i b)) \equiv s(q)$

18. Αν $p \to_{\lambda s}^{*} q$ επειδή $p \to_{\lambda s}^{*} r \wedge r \to_{\lambda s}^{*} q$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $s(p) \to_{b}^{*} s(r) \wedge s(r) \to_{b}^{*} s(q)$)
οπότε προφανώς $s(p) \to_{b}^{*} s(q)$

<u>Πρόταση 3.5:</u>

Αν $p,q \in \Lambda$ $\; p \to_b^* q \Rightarrow p \to_{\lambda s}^* q$

<u>Απόδειξη:</u>

Για τον κανόνα $\to_b^*$ ισχύουν τα παρακάτω (λόγω του αρχικού αξιώματος της συμβατότητας, της ανακλαστικότητας και της μεταβατικότητας)

$$\boxed{\begin{array}{lr}
((\lambda a)b) \;\to_\beta^*\; a\{\{1 \leftarrow b\}\} & (1) \\[6pt]
a \;\to_\beta^*\; b \;\Rightarrow\; \begin{cases} (ac) \;\to_\beta^*\; (bc) \\ (ca) \;\to_\beta^*\; (cb) \\ (\lambda a) \;\to_\beta^*\; (\lambda b) \end{cases} & \begin{array}{r}(2)\\(3)\\(4)\end{array} \\[20pt]
\qquad\qquad a \;\to_\beta^*\; a & (5) \\[6pt]
\begin{array}{l} a \;\to_\beta^*\; b \\ \wedge b \;\to_\beta^*\; c \end{array} \;\Rightarrow\; a \;\to_\beta^*\; c & (6)
\end{array}}$$

οπότε το $p \to_b^* q$ μπορεί να έχει προκύψει μ' έναν απ' τους 6 τρόπους όπου σε κάθε περίπτωση οι όροι που γράφουμε $\in \Lambda$.

Αν έχει προκύψει απ' τον κανόνα

1. $p \equiv ((\lambda a)b) \quad q \equiv a\{\{1 \leftarrow b\}\}$ τότε

   $p \equiv ((\lambda a)b) \to_{\lambda s} (a\sigma^i b) \to_s^* s((a\sigma^i b)) \equiv s(a)\{\{i \leftarrow s(b)\}\} \overset{a,b \in \Lambda}{\equiv} a\{\{i \leftarrow b\}\} \equiv q$

2. $p \equiv (ac) \quad q \equiv (bc)$ επειδή $a \to_\beta^* b$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $a \to_{\lambda s}^* b$)

   $p \equiv (ac) \to_{\lambda s}^* (bc) \equiv q$

3. $p \equiv (ca) \quad q \equiv (cb)$ επειδή $a \to_\beta^* b$ τότε(από επαγωγική υπόθεση $a \to_{\lambda s}^* b$)

   $p \equiv (ca) \to_{\lambda s}^* (cb) \equiv q$

4. $p \equiv (\lambda a) \quad q \equiv (\lambda b)$ επειδή $a \to_\beta^* b$ τότε(από επαγωγική υπόθεση $a \to_{\lambda s}^* b$)

   $p \equiv (\lambda a) \to_{\lambda s}^* (\lambda b) \equiv q$

5. $p \equiv a \quad q \equiv a$ τότε

   $p \equiv a \to_{\lambda s}^* a \equiv q$

6. Αν $p \rightarrow_{\beta} q$ επειδή $p \rightarrow_{\beta} r \wedge r \rightarrow_{\beta} q$ τότε (από επαγωγική υπόθεση $p \rightarrow^{*}_{\lambda s} r \wedge r \rightarrow^{*}_{\lambda s} q$)
   οπότε $p \rightarrow^{*}_{\lambda s} q$

Θεώρημα 3.2:
Ο λs-λογισμός έχει την ιδιότητα CR.

Απόδειξη:

$$
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "*"', "s"] & s(b) \arrow[dr, "\beta*"] & \\
a \arrow[ur, "\lambda s*"] \arrow[dr, "\lambda s*"'] & s(a) \arrow[u, phantom, "\text{πρόταση 3.4}"] \arrow[d, phantom, "\text{πρόταση 3.4}"] \arrow[ur, "\beta*"] \arrow[dr, "\beta*"'] & \text{θεώρημα 2.1} & d \arrow[r, phantom, "\text{πρόταση 3.5}"] & \\
 & c \arrow[r, "*"', "s"] & s(c) \arrow[ur, "\beta*"'] &
\end{tikzcd}
$$

Βιβλιογραφία

[2004] Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική : Γιώργος Κολέτσος

[2001] Reviewing the Classical abd the de Bruijn Notation for λ –calculus and pure Type Systems: Fairouz Kamareddine

[1995] A λ-calculus a la de Bruijn with explicit substitutions. 7th international conference on Programming Languages : Implementations, Logics and Programs, PLILP95 ,LNCS 982, pages 45-62.

[1991] Explicit Substitutions M.Abadi L. Cardelli P.-L. Currien J.-J. Levy May 31 1991

LAMBDA CALCULI WITH TYPES
Henk Barendregt Catholic Univercity Nijmengen