



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΔΕΣΜΗΣ, ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

Πολυσολιτονιακές Οπτικές Δίνες σε μέσα τύπου
Kerr.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Παναγιώτη Α.
Ζεστανάκη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2008



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΔΕΣΜΗΣ, ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΜΗ
ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΟΠΤΙΚΗΣ

Πολυσολιτονιακές Οπτικές Δίνες σε μέσα τύπου
Kerr.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Παναγιώτη Α
Ζεστανάκη

Επιβλέπων: Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 20-03-2008.

.....
Ηλίας Γλύτσος
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Ιωάννης Ρουμेलιώτης
Καθηγητής ΕΜΠ

.....
Κυριάκος Χιτζανίδης
Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Μάρτιος 2008.

.....
Παναγιώτης Α. Ζεστανάκης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικών Υπολογιστών.

© (2008) Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη.

Τα οπτικά σολιτόνια αποτελούν ένα θέμα με έντονο θεωρητικό και πρακτικό ενδιαφέρον. Στην παρούσα διπλωματική εργασία ασχολούμαστε με τη μελέτη πολυδιάστατων σολιτονίων σε μέσα Kerr. Συγκεκριμένα εξετάζουμε διάφορες περιπτώσεις πολυσολιτονιακών οπτικών δινών και επιχειρούμε την εύρεση προσεγγιστικών αναλυτικών λύσεων στο πρόβλημα της μορφής και της δυναμικής εξέλιξης τέτοιων δομών. Με χρήση της μεταβολικής μεθόδου μελετούμε σολιτόνια με στροφορμή σε τρεις διαστάσεις και επιπλέον εξειδικεύουμε στις περιπτώσεις δύο σολιτονίων, αν και η μέθοδος που προτείνουμε μπορεί να εφαρμοστεί για τη μελέτη της ύπαρξης και των ιδιοτήτων πολυσολιτονιακών λύσεων κάθε τάξης. Τέλος προτείνουμε μία πιθανή μεταβολική προσέγγιση στο πρόβλημα της αζιμουθιακής αστάθειας των περιστρεφόμενων σολιτονίων.

Λέξεις κλειδιά: Μέσα Kerr, Οπτικά Σολιτόνια, Πολλαπλά Σολιτόνια, Μεταβολική Μέθοδος, Χωρικά-Χωροχρονικά Σολιτόνια, Περιστρεφόμενα Σολιτόνια, Οπτικές Δίνες.

Abstract.

Optical solitons are a topic of great theoretical and practical interest. In this diploma thesis we concentrate on multidimensional solitons in Kerr media. In particular, we examine various cases of multisoliton optical vortices and acquire approximate analytical solutions for the form and dynamical evolution of these structures. By using the variational method, we study spinning solitons in three dimensions and specialize on the cases of two-soliton solutions; our method though, can be used to study the existence and the properties of multisoliton solutions of an arbitrary degree. Finally, we propose a possible variational approach to the problem of the azimuthal instability of spinning solitons.

Keywords: Quadratic Media, Kerr Media, Optical Solitons, Variational Method, Multisoliton Solutions, Temporal-Spatiotemporal Solitons, Spinning Solitons, Optical Vortices.

Στη μνήμη του πολυαγαπημένου μου
δασκάλου, Σοφρώνη Η. Παπαδόπουλου.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.	15
1.1	Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLSE).	15
1.2	Λύσεις της NLSE.	17
1.2.1	Ο μετασχηματισμός κλίμακας.	18
1.2.2	Ο μετασχηματισμός φάσης.	19
1.2.3	Ο Μετασχηματισμός του Γαλιλαίου.	19
1.2.4	Λύσεις ανώτερης τάξης.	20
1.2.5	Η τρισδιάστατη NLSE.	23
1.3	Η μεταβολική μέθοδος.	25
2	Επίλυση με απλά ansatz.	27
2.1	Επιλογή του χρονικού μέρους.	28
2.2	Πρώτο ansatz.	29
2.2.1	Υπολογισμός της Effective Lagrangian.	30
2.2.2	Οι εξισώσεις Euler-Lagrange.	35
2.3	Δεύτερο ansatz.	36
2.3.1	Υπολογισμός της Effective Lagrangian.	37
2.3.2	Οι εξισώσεις Euler-Lagrange.	40
2.3.3	Υπολογισμός των $\frac{\partial}{\partial \delta} I_0, \dots, \frac{\partial}{\partial \delta} I_3$	42
2.3.4	Επίλυση των εξισώσεων.	44
2.3.5	Τα αριθμητικά αποτελέσματα.	46
2.4	Τρίτο ansatz.	50
2.4.1	Υπολογισμός της Effective Lagrangian.	52
2.4.2	Οι εξισώσεις Euler-Lagrange.	53
3	Επίλυση με ακριβείς λύσεις της μονοδιάστατης εξίσωσης.	57
3.1	Η απλή περίπτωση του ενός σολιτονίου.	60
3.2	Η περίπτωση του breather.	61
3.3	Η γενική περίπτωση των σολιτονίων με διαφορετικά πλάτη και ίσες ταχύτητες.	64
3.3.1	Τα αριθμητικά αποτελέσματα.	66

3.4	Δύο παλμοί με ίσα πλάτη και αντίθετες ταχύτητες.	67
3.4.1	Τα αριθμητικά αποτελέσματα.	73
3.5	Ansatz για τη μελέτη της συμπεριφοράς σολιτονίων με αζιμουθιακές διαταραχές.	73

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται σε αδρές γραμμές το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του κύριου μέρους αυτής της εργασίας. Επιπλέον θελήσαμε το κεφάλαιο αυτό να μπορεί να χρησιμεύσει σαν μια πρώτη –και σίγουρα μη πλήρης– εισαγωγή στο γενικότερο θέμα των σολιτονίων στη μη γραμμική οπτική. Για τον λόγο αυτόν, πολλές σημαντικές λεπτομέριες έχουν παραλειφθεί. Έχει γίνει μια προσπάθεια σε κάθε θέμα που θίγεται να δίνεται επαρκής βιβλιογραφία, σαν οδηγός στον αναγνώστη που ενδιαφέρεται εμβαθύνει. Τα φαινόμενα που εξετάζονται στην παρούσα διπλωματική βασίζονται στη μη γραμμική απόκριση των υλικών στην εφαρμογή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Σε γενικές γραμμές η πόλωση εμφανίζει εξάρτηση από την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου σύμφωνα με μία σχέση της μορφής

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \hat{F}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1)$$

όπου \hat{F} ένας μη γραμμικός τελεστής. Γενικότερα ο \hat{F} είναι μη εντοπισμένος τόσο στο χρόνο όσο και στο χώρο. Η εφεύρεση laser ικανών να παραγάγουν δέσμες υψηλής ισχύος έκανε δυνατή την παρατήρηση τέτοιων μη γραμμικών φαινομένων.

1.1 Η μη γραμμική εξίσωση Schrödinger (NLSE).

Θεωρώντας ότι ο τελεστής \hat{F} είναι εντοπισμένος, δηλαδή ότι η τιμή του σε ένα σημείο του χώρου δεν εξαρτάται από τις τιμές που παίρνει σε άλλα σημεία, και κάνοντας χρήση των εξισώσεων του Maxwell, παίρνουμε την ακόλουθη κυματική εξίσωση (βλ. [16]):

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(L)} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} = 0 \quad (1.2)$$

όπου η $\mathbf{D}^{(L)} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}^{(L)} = \varepsilon\mathbf{E}$ περιλαμβάνει τους γραμμικούς όρους και η $\mathbf{P}^{(NL)}$ τους μη γραμμικούς.

Συχνά στην οπτική ο όρος $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E})$ αγνοείται, οπότε παίρνουμε την εξίσωση:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(L)} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} = 0 \quad (1.3)$$

Στη συνέχεια κάνουμε τις εξής παραδοχές:

- Θεωρούμε ότι αναφερόμαστε σε ισοτροπικό μέσο.
- Θεωρούμε ότι οι δέσμη είναι γραμμικά πολωμένη
- Θεωρούμε ότι η μή γραμμικότητα περιορίζεται στους όρους πρώτης και τρίτης τάξης, i.e $P_i = \chi_{ii}^{(1)} E_i + \chi_{iii}^{(3)} E_i^2 E_i$
- Τέλος θεωρούμε ότι οι λύσεις μπορούν να εκφραστούν με καλή ακρίβεια με την προσέγγιση του αργά μεταβαλλόμενου φακέλου:

$$E = A(x, y, z, t) \exp(ik_0 z - i\omega_0 t) \quad (1.4)$$

Σύμφωνα με αυτήν την προσέγγιση, η χωροχρονική μεταβολή του φακέλου A είναι πολύ πιο αργή από αυτήν του εκθετικού όρου.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η 1.3 δίνει:

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - \frac{k_0''}{2k_0} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \alpha |A|^2 A = 0 \quad (1.5)$$

όπου $\xi = k_0 z$, $\tau = t - k_0' z$, $\alpha = 2\pi\omega_0^2(\chi_{xxxx})/(k_0^2 c^2)$, $x \rightarrow k_0 x$, $y \rightarrow k_0 y$ και οι τόνοι σημαίνουν παραγωγή ως προς ω . Δηλαδή η εξίσωση 1.5 αναφέρεται σε ένα σύστημα παρατήρησης που κινείται με την ταχύτητα ομάδας της δέσμης. Για επίπεδα κύματα έχουμε $\partial^2/\partial x^2 = \partial^2/\partial y^2 = 0$. Με δύο ακόμα κανονικοποιήσεις, $\tau \rightarrow \sqrt{-2k_0/k_0''} \tau$ (για k_0'' αρνητικό) και $A \rightarrow \sqrt{\alpha} A$, παίρνουμε την συνηθισμένη μορφή της μονοδιάστατης (1+1) NLSE.

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + |A|^2 A = 0 \quad (1.6)$$

Η παραπάνω εξίσωση αναφέρεται στην περίπτωση της ανώμαλης διασποράς. Για ομαλή διασπορά, έχουμε k_0'' θετικό, οπότε προκύπτει

$$i \frac{\partial A}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + |A|^2 A = 0 \quad (1.7)$$

Η εξίσωση 1.6 ισχύει στην περιοχή της ανώμαλης διασποράς, στο χωρο-χρονικό πρόβλημα, δηλαδή στην περίπτωση του η μεταβλητή t αντιστοιχεί στον χρόνο. Στην περίπτωση που η t είναι χωρική συντεταγμένη περιγράφει φαινόμενα αυτοεστίασης. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, επιδέχεται ως λύσεις φωτεινά σολιτόνια¹ [1]. Από την άλλη η εξίσωση 1.7 περιγράφει φαινόμενα αυτόαποεστίασης ή ομαλής διασποράς και δέχεται ως λύσεις σκοτεινά σολιτόνια [2]. Για μία περισσότερο λεπτομερή ανάλυση της εξαγωγής των παραπάνω εξισώσεων, βλέπε [13] και [16].

1.2 Λύσεις της NLSE.

Γράφουμε την NLSE στην ακόλουθη μορφή:

$$i\psi_z - \psi_{tt} - |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.8)$$

όπου οι δείκτες σημαίνουν παραγωγή ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή. Είναι εμφανές ότι αυτή η μορφή είναι ισοδύναμη με την εξίσωση 1.6 για την ανώμαλη διασπορά. Η μονοδιάστατη NLSE δέχεται ένα άπειρο σύνολο λύσεων. Η ολοκληρωσιμότητα της εξίσωσης έχει αποδειχτεί και η τεχνική αντίστροφης σκέδασης (inverse scattering technique –IST) δίνει λύσεις στα προβλήματα αρχικών τιμών. Πολύπλοκες λύσεις μπορούν να κατασκευαστούν με μία μη γραμμική υπέρθεση απλούστερων λύσεων, με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Darboux. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται να εμβαθύνει θα βρει μία καλή εισαγωγή σε αυτές τις δύο τεχνικές στο [16].

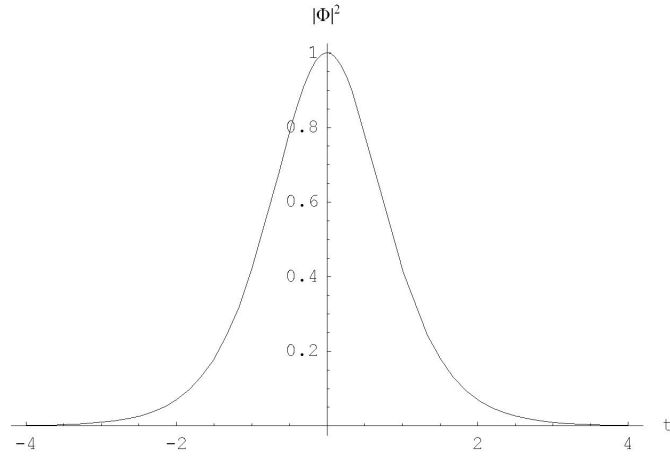
Μεγάλο ενδιαφέρον έχει η απλή σολιτονιακή λύση:

$$\psi = \frac{e^{-iz/2}}{\cosh t} \quad (1.9)$$

που έχει τη μορφή του σχήματος 1.1. Να σημειώσουμε ότι αυτή η λύση μπορεί να βρεθεί εύκολα, με μία αναγωγή σε ένα μηχανικό ανάλογο. Για μία ενδιαφέρουσα ανάλυση, βλ. [10].

Με χρήση των συμμετριών της εξίσωσης μπορεί κανείς να μετασχηματίσει ήδη γνωστές λύσεις, όπως η προηγούμενη, σε πιο γενικές μορφές και να παραγάγει οικογένειες λύσεων. Σύμφωνα με το θεώρημα της Noether, οι συμμετρίες της εξίσωσης αντιστοιχούν σε αρχές διατήρησης, η γνώση των οποίων συχνά αποδεικνύεται εξαιρετικά σημαντική, όταν κανείς προσπαθεί να

¹Στην παρούσα εργασία ο όρος σολιτόνιο δεν χρησιμοποιείται με την μαθηματική αυστηρότητα, αλλά χρησιμοποιείται με τη γενικευμένη σημασία, για να περιγράψει εντοπισμένες λύσεις στην περίπτωση της αυτοεστίασης, ή εντοπισμένες πτώσεις της έντασης σε ένα κατά τα άλλα ομοιόμορφο υπόβαθρο στην περίπτωση της αυτόαποεστίασης.



Σχήμα 1.1: Η μορφή του απλού σολιτόνιου.

ανακαλύψει προσεγγιστικές λύσεις σε πιο πολύπλοκα προβλήματα που ανάγονται στην NLSE [8], [9]. Ενδεικτικά αναφέρουμε τη διατήρηση της ενέργειας:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dt \quad (1.10)$$

και της ορμής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\psi_t \psi^* - \psi_t^* \psi) dt \quad (1.11)$$

Εξίσου σημαντική είναι η γνώση των μετασχηματισμών που επιτρέπουν οι συμμετρίες της εξίσωσης και δίνουν τη δυνατότητα παραγωγής οικογενειών λύσεων από μία αρχική λύση. Κατά τη μελέτη πολύπλοκων ή προσεγγιστικών λύσεων, πρέπει να είναι κανείς σε θέση να αναγνωρίσει τους μετασχηματισμούς εκείνους που θα δώσουν την απλούστερη μορφή και θα ελαττώσουν τον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων του προβλήματος.

1.2.1 Ο μετασχηματισμός κλίμακας.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς με απλή αντικατάσταση στην εξίσωση 1.8 ότι από μία λύση $\psi(t, z)$ μπορεί να πάρει κανείς μια οικογένεια λύσεων της μορφής:

$$\psi'(t, z) = q \psi(qt, q^2 z) \quad (1.12)$$

που για το απλό σολιτόνιο της εξίσωσης 1.9 δίνει:

$$\psi'(t, z) = \frac{q}{\cosh qt} \exp\left(-\frac{q^2}{2}z\right) \quad (1.13)$$

1.2.2 Ο μετασχηματισμός φάσης.

Είναι ο πλέον προφανής μετασχηματισμός και περιγράφεται από τη σχέση:

$$\psi'(t, z) = \psi(t, z)e^{i\phi} \quad (1.14)$$

1.2.3 Ο Μετασχηματισμός του Γαλιλαίου

Θεωρούμε την εξίσωση

$$i\psi_z + \frac{1}{2}\rho\psi_{tt} - |\psi|^2\psi = 0 \quad (1.15)$$

όπου $\rho \equiv \pm 1$ και μια «ακίνητη» λύση της, $\psi(z, t)$. Τότε συναρτήσεις της μορφής

$$\psi'(z, t) = \psi(z, t - Vz)e^{i\rho\left(Vt - \frac{V^2}{2}z\right)} \quad (1.16)$$

είναι και αυτές λύσεις της εξίσωσης. Η V μπορεί να ερμηνευτεί σαν μία ταχύτητα στο χώρο $z - t$.

Παρατηρούμε ότι εάν

$$\psi_2(z, t) = \psi_1(z, t - V_{2,1}z) \exp\left[i\rho\left(V_{2,1}t - \frac{V_{2,1}^2}{2}z\right)\right]$$

και

$$\psi_3(z, t) = \psi_2(z, t - V_{3,2}z) \exp\left[i\rho\left(V_{3,2}t - \frac{V_{3,2}^2}{2}z\right)\right]$$

τότε

$$\begin{aligned} \psi_3(z, t) &= \psi_1(z, t - (V_{3,2} + V_{2,1})z) e^{i\rho(V_{2,1}(t - V_{3,2}z) - V_{2,1}^2 \frac{z}{2})} e^{i\rho(V_{3,2}t - V_{3,2}^2 \frac{z}{2})} = \\ \psi_1(z, t - V_{3,1}z) e^{i\rho\left((V_{3,2} + V_{2,1})t - V_{3,2}V_{2,1}z - \frac{V_{3,2}^2}{2}z - \frac{V_{2,1}^2}{2}z\right)} &= \psi_1(z, t - V_{3,1}z) e^{i\rho\left(V_{3,1}t - \frac{V_{3,1}^2}{2}z\right)} \end{aligned}$$

Δηλαδή ισχύει η πρόσθεση ταχυτήτων. Η ιδιότητα αυτή μαζί με τη μορφή του μετασχηματισμού δικαιολογούν την ονομασία του. Να παρατηρήσουμε ότι δεν προκειται για μετασχηματισμό λόγω αλλαγής παρατηρητή, αλλά έχει να κάνει καθαρά με κατασκευή οικογενειών λύσεων.

Αντίστοιχη είναι και η περίπτωση της τρισδιάστατης εξίσωσης:

$$i\psi_z + \rho \frac{1}{2} (\nabla_{\perp}^2 \psi - \psi_{tt}) - |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.17)$$

Για την οποία, σύμφωνα με τα παραπάνω, μία λύση $\psi(x, y, z, t)$ παράγει την ακόλουθη οικογένεια λύσεων:

$$\psi'(x, y, z, t) = \psi(x - V_x z, y - V_y z, z, t - V_t z) e^{i \left((V_x + V_y - V_t) t - \frac{V_x^2 + V_y^2 - V_t^2}{2} z \right)} \quad (1.18)$$

Οι V_x και V_y περιγράφουν πράγματι μία ολίσθηση στον ευκλείδιο χώρο, ενώ η V_t αντιστοιχεί σε αλλαγή της συχνότητας του φέροντος, όπως μπορεί να επαληθευτεί και από την εξίσωση 1.18.

Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός του Γαλιλαίου δεν υπακούει στην αρχή της σχετικότητας, είναι εμφανές ότι οι τιμές των ταχυτήτων που δίνουν φυσικά αποδεκτές λύσεις είναι πεπερασμένες. Στην περίπτωση της οπτικής, ο περιορισμός ανάγεται στην αρχική υπόθεση του αργά μεταβαλλόμενου φακέλου. Οι ταχύτητες περιορίζονται από την απαίτηση οι ταλαντωτικοί όροι που εισάγονται με το μετασχηματισμό (βλ. εξ 1.18) να μεταβάλλονται αργά ώστε μὴ αναιρούν αυτήν την υπόθεση.

Εφαρμόζοντας τους προηγούμενους μετασχηματισμούς παίρνουμε μία οικογένεια τριών παραμέτρων για τη μονοσολιτονιακή λύση της εξίσωσης 1.8:

$$\psi = \frac{q}{\cosh[q(t - Vz)]} e^{-iVt + i \frac{V^2 - q^2}{2} z + i\phi} \quad (1.19)$$

1.2.4 Λύσεις ανώτερης τάξης.

Στην παρούσα παράγραφο παρουσιάζουμε δισολιτονιακές λύσεις που προκύπτουν με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Darboux. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η τεχνική αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή λύσεων ανώτερης τάξης με μη γραμμική υπέρθεση απλούστερων λύσεων.

Δύο σολιτόνια με αντίθετες ταχύτητες.

Υπερθεση των δύο λύσεων :

$$\psi_{1,2} = -\frac{i2b}{\cosh(2bt \mp 4b a z)} e^{\mp i2at + i2(a^2 - b^2)z - 2i\phi_{1,2}} \quad (1.20)$$

δίνει τη λύση για δύο σολιτόνια με ίσο πλάτος και αντίθετες ταχύτητες. Το φυσικό πρόβλημα είναι η σύγκρουση δύο παλμών με διαφορετικές συχνότητες

που διαδίδονται κατά την ίδια κατεύθυνση και που λόγω διασποράς έχουν διαφορετικές ταχύτητας ομάδας και συναντιούνται στο σημείο $z = 0$. Η εξέλιξη των παλμών δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση [15].

$$\psi = -8iab \frac{A - iB}{D} \exp[2i(a^2 - b^2z)z + i(\phi_1 + \phi_2)] \quad (1.21)$$

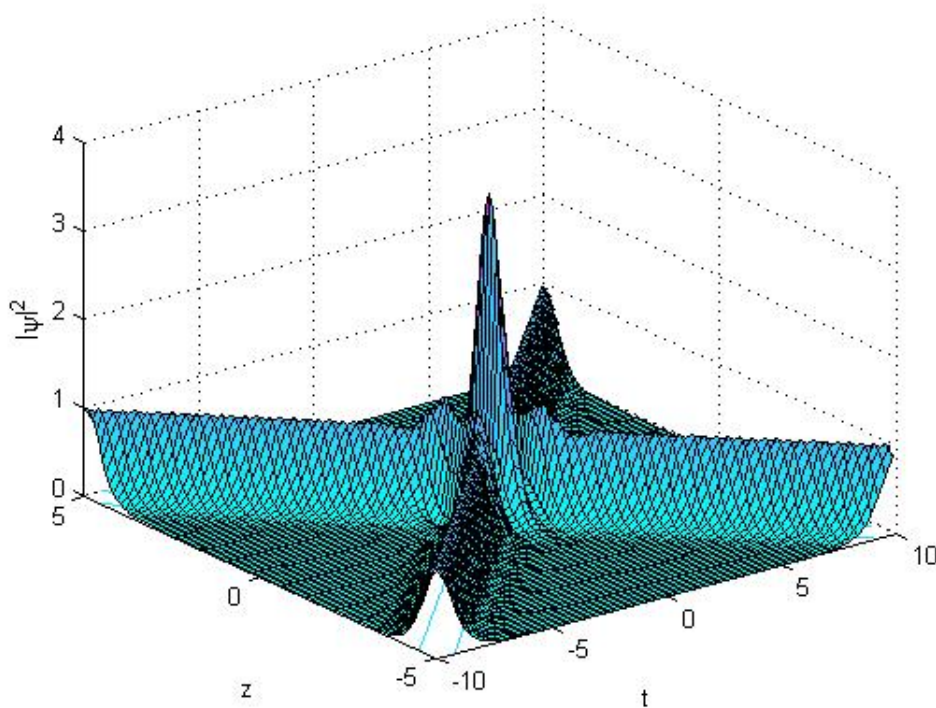
όπου

$$A = \cosh(4abz) [a \cosh(2bt) \cos[2at + \Delta\phi] - b \sinh(2bt) \sin[2at + \Delta\phi]]$$

$$B = \sinh(4abz) [a \sinh(2bt) \sin[2at + \Delta\phi] + b \cosh(2bt) \cos[2at + \Delta\phi]]$$

$$D = a^2 \cosh(4bt) + (a^2 + b^2) \cosh(8az) - b^2 \cos(4at + 2\Delta\phi)$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$



Σχήμα 1.2: Αργό και γρήγορο σολιτόνιο. $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ και $\Delta\phi = \pi$

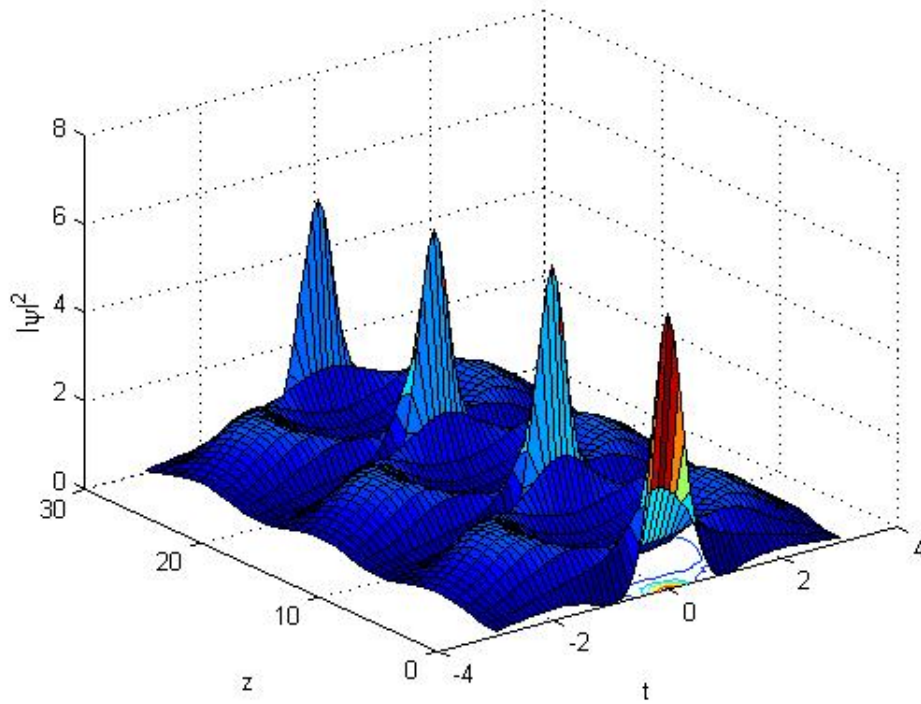
Δύο σολιτόνια με μηδενική ταχύτητα.

Η περίπτωση της μηδενικής ταχύτητας είναι της ίδιας οικογενείας με αυτή των ίσων ταχυτήτων. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η περίπτωση στην οποία τα δύο

σολιτόνια είναι αρχικά τοποθετημένα στην ίδια θέση. Όταν οι δύο παλμοί έχουν διαφορετικά πλάτη b_1 και b_2 η λύση είναι [16]:

$$\psi = \frac{4i(b_2^2 - b_1^2)[b_1 \cosh(2b_2 t) \exp(-2ib_1^2 z) - b_2 \cosh(2b_1 t) \exp(-2ib_2^2 z)]}{(b_1 - b_2)^2 C_+ + (b_1 + b_2)^2 C_- - 4b_1 b_2 \cos \phi} \quad (1.22)$$

όπου $C_{\pm} = \cosh[2(b_2 \pm b_1)t]$ και $\phi = 2(b_2^2 - b_1^2)z$. Για πλάτη με κοντινές τιμές ο παλμός αποτελείται από δύο σολιτόνια που περιοδικά απομακρύνονται και ξαναενώνονται σε έναν παλμό, όπως στο σχήμα 1.3. Στην περίπτωση $b_1 = b_2$ η περίοδος απειρίζονται και οι δύο παλμοί αποκλίνουν.



Σχήμα 1.3: Δύο σολιτόνια με μηδενική ταχύτητα. Τα πλάτη των παλμών είναι $b_1 = 0.5$ και $b_2 = 0.75$.

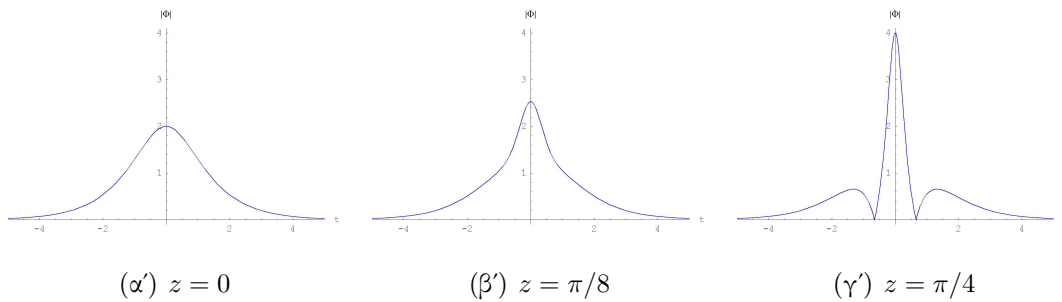
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση με $b_1 = 1/2$ και $b_2 = -3/2$. Τότε:

$$\psi = 4 \frac{\cosh 3t + 3 \cosh t \exp(-4iz)}{\cosh 4t + 4 \cosh 2t + 3 \cos 4z} \quad (1.23)$$

Αυτή η περιοδική δομή ονομάζεται breather, για το λόγο ότι εάν αναπαραστήσει κανείς την εξέλιξη της καμπύλης $|\psi|$ ως προς t καθώς προχωράμε στο z , τότε

δίνεται η εντύπωση ενός παλμού που αναπνέει. Για $z = 0$ ο παλμός παίρνει τη μορφή $2/\cosh(t)$, δηλαδή έχει τη μορφή του απλού σολιτόνιου της εξίσωσης 1.9, αλλά με διπλάσιο πλάτος.

Παρατηρούμε ότι ένας τέτοιος παλμός, που έχει αρχικά το γνωστό σχήμα $\text{sech}(t)$ εξελίσσεται για να γίνει πολύ στενότερος απ' ό,τι αρχικά. Αυτό το φαινόμενο έχει παρατηρηθεί σε πειράματα. Για breathers μεγαλύτερης τάξης επιτυγχάνεται ακόμα μεγαλύτερη συμπίεση [18].



Σχήμα 1.4: Η εξέλιξη ενός breater καθώς διαδίδεται στον άξονα z .

1.2.5 Η τρισδιάστατη NLSE.

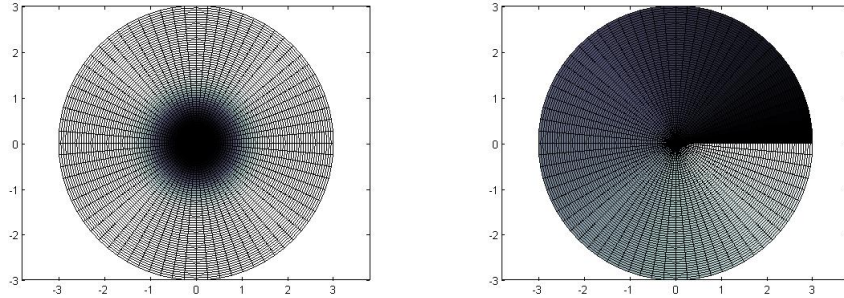
Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η εξίσωση

$$i\psi_z + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp}^2 \psi - \psi_{tt}) - |\psi|^2 \psi = 0 \quad (1.24)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάδοση σε ένα μέσο με αυτοαποεστιάζουσα χωρική μη γραμμικότητα στην περιοχή της ανώμαλης διασποράς. Επίσης εμφανίζεται στην περιγραφή των συμπυκνωμάτων Bose –Einstein, αλλά δεν θα επεκταθούμε περισσότερο σε αυτό το θέμα.

Στην παρούσα εργασία εξετάζουμε την ύπαρξη λύσεων της μέρφης πολυσολιτονιακών οπτικών δινών, λύσεων δηλαδή με στροφορμή στο επίπεδο κάθετο στη διάδοση και με πολυσολιτονιακό χρονικό μέρος. Οι οπτικές δίνες είναι λύσεις με χωριζόμενο φασικό μέρος, $\exp(im\phi)$, όπου το ϕ είναι η αξιμουθιακή συντεταγμένη στο επίπεδο κάθετα στη διάδοση και το m είναι ένας προσημασμένος ακέραιος αριθμός, που στη βιβλιογραφία συχνά αναφέρεται ως τοπολογικό φορτίο και αντιστοιχεί στη στροφορμή – σπιν – της δίνης. Εμφανίζονται σαν σκοτεινά σολιτόνια σαν μια τοπική πτώση της έντασης σε ένα υπόβαθρο που συνήθως επιλέγεται να έχει γκαουσιανή ή ομοιόμορφη κατανομή. Στην παρούσα εργασία ασχοληθήκαμε με δίνες σε ομοιόμορφο υπόβαθρο, όπου η ένταση παίρνει

μία σταθερή τιμή αν απομακρυνθούμε αρκετά από το κέντρο της δίνης, βλ. σχήμα 1.5.



(α') Η κατανομή της έντασης σε μία οπτική δίνη. (β') Το φασικό προφίλ σε μια οπτική δίνη

Σχήμα 1.5: Η κατανομή της έντασης και το φασικό προφίλ μιας οπτικής δίνης.

Η δυναμική των οπτικών δινών μοιάζει πολύ με αυτήν των δινών που παρατηρούνται στα ρευστά, καθώς NLSE είναι ακόμη ένα παράδειγμα όπου ο ηλεκτρομαγνητισμός μπορεί να αναχθεί στη μηχανική των ρευστών. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς μπορεί ναδειχθεί ότι μετασχηματίζεται σε δύο πεπλεγμένες εξισώσεις, που δεν είναι άλλες από την αρχή διατήρηση της μάζας και την εξίσωση του Bernoulli [17]. Η παρατήρηση αυτή μάς επιτρέπει να κάνουμε χρήση γνωστών θεωρημάτων της ρευστοδυναμικής, για να προβλέψουμε την συμπεριφορά των οπτικών δινών.

Μέχρι στιγμής υπάρχει πληθώρα θεωρητικών και πειραματικών εργασιών στις 2D οπτικές δίνες, σε αντίθεση με τις 3D δίνες, στις οποίες θα εστιάσουμε τη μελέτη μας, για τις οποίες η βιβλιογραφία είναι περιορισμένη. Είναι γνωστό ότι το φορτίο m μιας δίνης είναι διατηρήσιμη ποσότητα [10], που σημαίνει ότι οποιαδήποτε διεργασία ή διάσπαση λαμβάνει χώρα κατά τη διάδοση θα πρέπει να καταλήγει σε δομές με συνολικό φορτίο ίσο με το αρχικό. Οι 2D δίνες με μοναδιαία φορτία είναι οι ενεργειακά προτιμώμενες καταστάσεις και γι αυτόν τον λόγο είναι ευσταθείς. Μάλιστα ένα 2D σκοτεινό σολιτόνιο χωρίς φορτίο είναι ασταθές και διασπάται σε δύο 2D θεμελιώδεις δίνες με αντίθετα φορτία [11]. Οι 2D δίνες με μεγαλύτερα φορτία είναι ασταθείς και τείνουν να σπάνε σε απλές δίνες με μοναδιαίο φορτίο, εμφανίζοντας ωστόσο μεγάλους χρόνους ζωής [4].

Όσον αφορά τις 3D οπτικές δίνες, έχει παρατηρηθεί ότι είναι αρκετά ευσταθείς δομές [5]. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά των πολυσολιτονιακών 3D οπτικών δινών, δηλαδή των 3D οπτικών δινών με χρονικό προφίλ ανάλογο με αυτό των πολυσολιτονιακών λύσεων της μονοδιάστατης εξίσωσης που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες.

1.3 Η μεταβολική μέθοδος.

Η ολοκληρωσιμότητα της τρισδιάστατης NLSE παραμένει ένα ανοιχτό πρόβλημα. Σε αντίθεση με τη μονοδιάστατη NLSE, όπου μέθοδος αντίστροφης σκέδασης επιλύει επακριβώς τα προβλήματα αρχικών τιμών, όταν πρόκειται για την τρισδιάστατη εξίσωση, ελλείπει καλύτερης εναλλακτικής, είμαστε αναγκασμένοι να καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Μία τέτοια μέθοδος, που έχει χρησιμοποιηθεί συχνά στο παρελθόν είναι η μεταβολική μέθοδος.

Η μεταβολική μέθοδος είναι δανεισμένη από την κβαντομηχανική, όπου χρησιμοποιείται για την εύρεση προσεγγιστικών εκφράσεων της θεμελιώδους στάθμης και ορισμένων διεγερμένων σταθμών [7], [14]. Μία καλή περιγραφή της εφαρμογής της στην NLSE δίνεται στο [3].

Στη μεταβολική μέθοδο επιλέγεται αυθαίρετα μία παραμετρική μορφή της λύσης, που στη βιβλιογραφία ονομάζεται ansatz, η οποία έχει πλήρως καθορισμένη μορφή, εκτός από έναν μικρό αριθμό παραμέτρων, που εν γένει είναι ελεύθερες να μεταβάλλονται κατά τη διάδοση. Με αυτόν τον τρόπο ο βαθμός ελευθερίας του προβλήματος από άπειρος εκφυλίζεται στον αριθμό των ελεύθερων παραμέτρων του ansatz και το αρχικό πρόβλημα εκφυλίζεται σε ένα σύνολο πεπλεγμένων συνήθων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν την εξέλιξη των τιμών των παραμέτρων. Στην ουσία αυτό που επιχειρείται είναι μία βελτιστοποίηση των ελεύθερων παραμέτρων ώστε το ansatz να προσεγγίσει όσο το δυνατόν καλύτερα την πραγματική λύση του προβλήματος. Φυσικά η καλή επιλογή του ansatz είναι αποφασιστική για την επιτυχία της μεθόδου. Η λύση που θα δώσει η μεταβολική μέθοδος θα χρησιμοποιηθεί σαν αρχικό σημείο για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος. Συνοπτικά τα βήματα της μεταβολικής μεθόδου είναι τα εξής:

- Περιγραφή του προβλήματος μέσω μιας Lagrangian Density. Στην προκειμένη περίπτωση, η Lagrangian Density σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathcal{L} = i(\Psi^* \psi_z - \Psi_z^* \Psi) - |\Psi_\rho|^2 - \frac{|\Psi_\phi|^2}{\rho^2} + |\Psi_t|^2 - |\Psi|^4 \quad (1.25)$$

- Επιλογή ενός ansatz.
- Υπολογισμός της Effective Lagrangian:

$$L \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\phi \rho \mathcal{L} \quad (1.26)$$

Όπου στην \mathcal{L} έχουμε αντικαταστήσει το ψ με το ansatz.

- Με την εφαρμογή των εξισώσεων Euler-Lagrange [12] στην Effective Lagrangian θεωρώντας την z ως ανεξάρτητη μεταβλητή και τις παραμέτρους α_i του ansatz ως εξαρτημένες μεταβλητές, καταλήγουμε στο δυναμικό πρόβλημα που περιγράφει την εξέλιξη των παραμέτρων κατά τη διάδοση.

Η παραδοχή για συγκεκριμένη μορφή της λύσης καθορίζει πλήρως την συμπεριφορά της λύσης κατά τη μεταβολή όλων των μεταβλητών πλην της μεταβλητής z . Γι αυτόν τον λόγο η απαίτηση το ολοκλήρωμα της δράσης S να παρουσιάζει ακρότατο είναι ισοδύναμη και με το δυναμικό σύστημα που προκύπτει από το τελευταίο βήμα της μεθόδου.

Κεφάλαιο 2

Επίλυση με απλά ansatz.

Όπως γίνεται κατανοητό από την ανάλυση που προηγήθηκαν μία επιτυχημένη επιλογή του ansatz είναι ιδιαίτερα κρίσιμη για την εξεύρεση πραγματικών λύσεων της NLSE. Η επιλογή που θα κάνουμε είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει όλα τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης της οποίας επιθυμούμε να ανακαλύψουμε. Καλές ενδείξεις για αυτά τα χαρακτηριστικά αποτελούν ήδη γνωστές λύσεις απλοποιημένων προβλημάτων.

Στην παρούσα εργασία κάνουμε την υπόθεση ότι οι λύσεις της τρισδιάστατης NLSE ακολουθούν την προσέγγιση Hartree, i.e.

$$\psi(x, y, z, t) = T(t, z)X(x, z)Y(y, z) \quad (2.1)$$

ή σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\psi(\rho, \phi, z, t) = T(t, z)R(\rho, z)\Phi(\phi, z) \quad (2.2)$$

Επειδή αναζητούμε λύσεις της μορφής της δίνης, επιλέγουμε:

$$\Phi = \exp(im\phi) \quad (2.3)$$

όπου το m παίρνει ακεραίες τιμές και αντιπροσωπεύει τη στροφορμή της δίνης.

Έχει δειχθεί ότι μία καλή επιλογή για το ακτινικό μέρος είναι

$$R = \tanh(\delta \cdot \rho^m) \quad (2.4)$$

που ικανοποιεί τις οριακές συνθήκες $\lim_{\rho \rightarrow 0} R = 0$ και $\lim_{\rho \rightarrow \infty} R = 1$. Βλέπε [5]

Στην εργασία αυτή, στην οποία έχει βασιστεί μεγάλο μέρος της παρούσας διπλωματικής, έχει μελετηθεί η θεμελιώδης λύση του απλού σολιτονίου, η οποία μάλιστα φαίνεται να είναι αρκετά ευσταθής.

2.1 Επιλογή του χρονικού μέρους.

Έχοντας επιλέξει τη μορφή των R και Φ μένει μόνο να επιλέξουμε μία βολική μορφή για το χρονικό μέρος T . Η μελέτη της μονοδιάστατης NLSE στο κεφάλαιο που προηγήθηκε μας δίνει μια καλή ιδέα για τι να περιμένουμε στην δική μας περίπτωση. Η μονοδιάστατη NLSE (εξίσωση 1.8) :

$$i\Psi_z - \frac{1}{2}\Psi_{tt} - |\Psi|^2\Psi = 0 \quad (2.5)$$

περιγράφει το απλοποιημένο πρόβλημα της διάδοσης του παλμού, κατά την οποία δεν υπάρχει εγκάρσια εξάρτηση, i.e. $\nabla_{\perp}^2 = 0$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά με την τεχνική inverse scattering, ενώ ο μετασχηματισμός Darboux δίνει τη δυνατότητα κατασκευής λύσεων ανώτερης τάξης από ήδη γνωστές λύσεις. Οι λύσεις αυτές συχνά στο άπειρο εκφυλίζονται σε υπέρθεση δύο ή περισσότερων λύσεων πρώτης τάξης, πράγμα που δικαιολογεί τον χαρακτηρισμό τους ως πολυσολιτονιακές. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης 1.8, είναι η:

$$\psi = \text{sech}(t)e^{-i\frac{z}{2}} \quad (2.6)$$

Από την άλλη πλευρά, για τη θεμελιώδη λύση με τοπολογικό φορτίο, έχει δειχθεί στο [5] ότι η επιλογή

$$T = \text{sech}(at) \quad (2.7)$$

που δεν είναι άλλη από τη θεμελιώδη λύση του μονοδιάστατου προβλήματος, είναι παραπάνω από ικανοποιητική. Επομένως είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι και οι λύσεις ανώτερης τάξης του μονοδιάστατου προβλήματος αποτελούν μία καλή ενδειξη για τη μορφή αντίστοιχων λύσεων του δικού μας προβλήματος. Η υπόθεση αυτή ενισχύεται από το γεγονός ότι το πρόβλημά μας εκφυλίζεται σε μονοδιάστατο τοπικά για $\rho \rightarrow \infty$.

Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρούμε να προσεγγίσουμε ρυθμούς τύπου breather σε οπτικές δίνες. Οι ρυθμοί αυτοί παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον λόγω του ότι βρίσκουν εφαρμογή σε περιπτώσεις που επιθυμείται συμπίεση του αρχικού παλμού και διότι η αναλυτική μορφή τους στη μονοδιάστατη περίπτωση είναι σημαντικά απλούστερη από άλλες λύσεις δεύτερης τάξης. Ο μονοδιάστατος breather δίνεται από την εξίσωση 1.23 και η εξέλιξή του απεικονίζεται στο σχήμα 1.4.

Τρεις οι συνθήκες που πρέπει κανείς να ικανοποιήσει εξ αρχής κατά την επιλογή του ansatz για το T :

1. Το ansatz πρέπει να είναι σε θέση να πάρει την απλή μορφή της sech , όπως στην περίπτωση $z = 0$ του σχήματος 1.4.

2. Το ansatz πρέπει να είναι επίσης σε θέση να πάρει την περίπλοκη μορφή της περίπτωσης $z = \pi/4$ του σχήματος 1.4.
3. Το ansatz πρέπει να έχει επαρκώς απλή αναλυτική μορφή, για να εξασφαλιστεί η αναλυτικότητα των βημάτων της μεταβολικής μεθόδου.

Να σημειώσουμε ότι η ικανοποίηση των παραπάνω περιορισμών, είναι μεν απαραίτητη, αλλά σε καμία περίπτωση δεν θα πρέπει να θεωρηθεί ότι εγγυάται την επιτυχία του ansatz. Η ικανοποίηση και των τριών συνθηκών ταυτόχρονα είναι κάθε άλλο από τετριμμένη, κυρίως διότι η περίπλοκη μορφή του δεύτερου περιορισμού έρχεται σε σύγκρουση με την απαίτηση για απλή αναλυτική έκφραση του τρίτου περιορισμού.

Ένα παράδειγμα είναι η προφανής επιλογή της παραμετροποιημένης μορφής της εξίσωσης του breather, δηλαδή ένα ansatz της μορφής:

$$\psi = 4A \frac{3e^{-4ibz} \cosh(at) + \cosh(3at)}{3 \cos(4bz) + 4 \cosh(2at) + \cosh(4at)} e^{-\frac{ibz}{2}} \quad (2.8)$$

όπου A , a , και b είναι παράμετροι ελεύθερες να μεταβάλλονται κατά τη διάδοση. Είναι προφανές ότι η μορφή αυτή ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνθήκες, εντούτοις η αλγεβρική πολυπλοκότητα δεν μας επιτρέπει να πάμε μακριά, καθώς είναι αδύνατον να βρεθεί αναλυτική έκφραση για την Effective Lagrangian. Πολλές είναι οι πιθανές εναλλακτικές που απορρίφθηκαν, διότι δεν ικανοποιούσαν κάποια από τις παραπάνω συνθήκες, αλλά για λόγους συντομίας, δεν κρίθηκε σκόπιμο να παρουσιαστούν στην παρούσα διπλωματική.

2.2 Πρώτο ansatz.

Το ansatz που θα διερευνήσουμε έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\Psi = A \operatorname{sech}[at] \cos[bt] \tanh[\delta \cdot \rho^m] e^{i(\omega t + m\phi + \theta)} \quad (2.9)$$

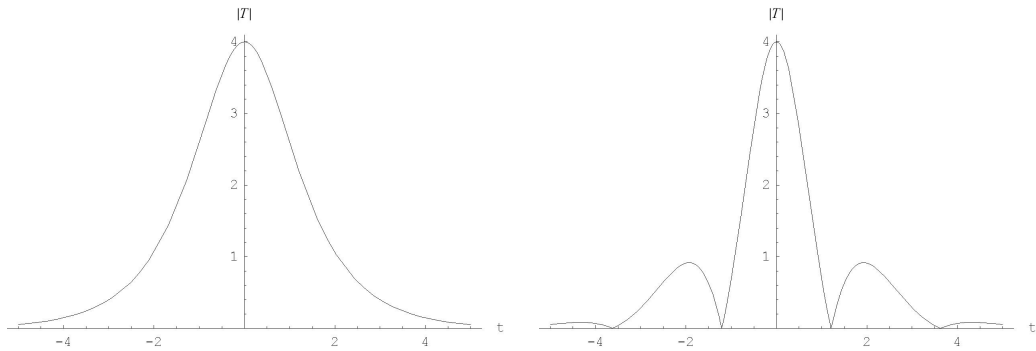
όπου A , a , b , δ , ω , θ παράμετροι που μεταβάλλονται κατά τη διάδοση. Η παράμετρος A επιτρέπει τη μεταβολή του πλάτους του παλμού, ενώ οι παράμετροι a και b καθορίζουν το σχήμα του στη διάσταση του χρόνου. Η παράμετρος δ καθορίζει το εύρος της δίνης, η παράμετρος ω επιτρέπει την αλλαγή συχνότητας κατά τη διάδοση, ενώ τέλος η παράμετρος θ επιτρέπει την αλλαγή φάσης κατά τη διάδοση και είναι ιδιαίτερα σημαντική, διότι όπως θα δούμε στη συνέχεια η βελτιστοποίηση του ansatz ως προς αυτήν την παράμετρο ισοδυναμεί με την διατήρηση της ενέργειας. Για λόγους αλγεβρικής απλότητας, όλες οι παράμετροι είναι πραγματικές. Εναλλακτικά θα μπορούσε να συγχωνέψει κανείς το A και το θ σε μία μιγαδική παράμετρο \mathbf{A} , ελαττώνοντας τον αριθμό των συμβόλων,

αλλά όχι και των παραμέτρων, αφού η βελτιστοποίηση θα έπρεπε να γίνει τόσο ως προς το πραγματικό μέρος, $Re(\mathbf{A})$, όσο και ως προς το φανταστικό, $Im(\mathbf{A})$, ή ισοδύναμα ως προς το \mathbf{A} και τον συζυγή του, \mathbf{A}^* .

Το χρονικό μέρος του ansatz δίνεται από τη σχέση:

$$T(t, z) = \text{sech}[at] \cos[bt] e^{i\omega t} \quad (2.10)$$

και το μέτρο του μπορεί μεταξύ άλλων να πάρει τις μορφές που απεικονίζονται στο σχήμα 2.1. Γίνεται αντιληπτό ότι η παραπάνω μορφή προσεγγίζει τις δύο ακραίες θέσεις του breather με μεγάλη επιτυχία, δεν παρουσιάζει εντούτοις την ίδια επιτυχία όσον αφορά τα ενδιάμεσα στάδια. Παρόλα αυτά είναι μια καλή αρχική προσέγγιση και γι αυτόν τον λόγο θα συνεχίσουμε την ανάλυση έχοντας πάντα υπ όψη μας αυτήν την εγγενή αδυναμία.



(α') $|T(t, z)|$ για $A = 2$, $a = 1$ και $b = 0$. (β') $|T(t, z)|$ για $A = 4$, $a = 1$ και $b = 1.3$.

Σχήμα 2.1: Δυνατές μορφές του $|T|$. Γίνεται αντιληπτό ότι μπορεί να προσεγγίσει τον breather με μεγάλη επιτυχία.

2.2.1 Υπολογισμός της Effective Lagrangian.

Αρχικά αντικαθιστούμε στην εξίσωση 1.25, που εκφράζει τη Lagrangian Density και που για ευκολία την παραθέτουμε και εδώ, το ansatz της εξίσωσης 2.9.

$$\mathcal{L} = i(\psi^* \psi_z - \psi_z^* \psi) - |\Psi_\rho|^2 - \frac{|\Psi_\phi|^2}{\rho^2} + |\Psi_t|^2 - |\Psi|^4 \quad (2.11)$$

Έχουμε:

$$|\Psi|^4 = (\Psi \Psi^*)^2$$

$$\Psi \Psi^* = A^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] \tanh^2[\delta \cdot \rho^m]$$

$$\Psi_\rho = m \delta \rho^{m-1} A \operatorname{sech}[at] \cos[bt] \operatorname{sech}^2[\delta \rho^m] e^{i(\omega t + m\phi + \theta)}$$

$$\Psi_\rho \Psi_\rho^* = m^2 \delta^2 \rho^{2m-2} A^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m]$$

$$T_t = -\operatorname{sech}[at] [b \sin[bt] + a \cos[bt] \tanh[at]] e^{i\omega t} + i\omega \operatorname{sech}[at] \cos[bt] e^{i\omega t}$$

$$T_t T_t^* = \operatorname{sech}^2[at] [b \sin[bt] + a \cos[bt] \tanh[at]]^2 + \omega^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt]$$

$$\Phi_\phi = im e^{i[m\phi + \theta]}$$

$$\Phi_\phi \Phi_\phi^* = m^2$$

$$i(\Psi^* \Psi_z - \Psi \Psi_z^*) = i \left[2i \frac{d\theta}{dz} + 2it \frac{d\omega}{dz} \right] |\Psi|^2 = -2 \frac{d\theta}{dz} |\Psi|^2 - 2t \frac{d\omega}{dz} |\Psi|^2$$

Επομένως η Lagnangian Density θα είναι:

$$\mathcal{L} = -2 \frac{d\theta}{dz} |\Psi|^2 - 2t \frac{d\omega}{dz} |\Psi|^2 - m^2 \delta^2 \rho^{2m-2} \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m] A^2 |T|^2 - m^2 \frac{|\Psi|^2}{\rho^2} +$$

$$\{ \operatorname{sech}^2[at] [b \sin[bt] + a \cos[bt] \tanh[at]]^2 + \omega^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] \} A^2 |R|^2 -$$

$$- A^4 |T|^4 |R|^4 \quad (2.12)$$

Έστω:

$$L_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dt \quad (2.13)$$

Για τον υπολογισμό της L_1 είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τα ακόλουθα

ολοκληρώματα:

$$It_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} TT^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] dt = \frac{1}{a} + \frac{b\pi}{a^2} \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \quad (2.14)$$

$$It_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (TT^*)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[at] \cos^4[bt] dt = \frac{1}{2a} + \frac{b\pi (a^2 + 4b^2 + 4(a^2 + b^2) \cosh(\frac{b\pi}{a})) \operatorname{csch}(\frac{2b\pi}{a})}{3a^4}, \quad (2.15)$$

$$It_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (T_t T_t^*) dt = b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2[bt] \operatorname{sech}^2[at] dt + 2ab \int_{-\infty}^{\infty} \sin[bt] \cos[bt] \tanh[at] \operatorname{sech}^2[at] dt + a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2[bt] \tanh^2[at] \operatorname{sech}^2[at] dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] dt, \quad (2.16)$$

$$b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2[bt] \operatorname{sech}^2[at] dt = \frac{b^2}{a^2} \left(a - b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right] \right), \quad (2.17)$$

$$2ab \int_{-\infty}^{\infty} \sin[bt] \cos[bt] \tanh[at] \operatorname{sech}^2[at] dt = ab \int_{-\infty}^{\infty} \sin[2bt] \tanh[at] \operatorname{sech}^2[at] dt = \frac{b^2}{a^2} \cdot 2b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \quad (2.18)$$

$$a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2[bt] \tanh^2[at] \operatorname{sech}^2[at] dt = \frac{a}{3} + \frac{1}{3} \left[1 - \frac{b^2}{a^2} \right] b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \quad (2.19)$$

$$\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] dt = \frac{\omega^2}{a} + \frac{\omega^2}{a^2} \pi b \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \quad (2.20)$$

Επομένως

$$It_3 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt = \frac{b^2 + \omega^2}{a} + \frac{a}{3} + \left[\frac{1}{3} + \frac{2b^2}{3a^2} + \frac{\omega^2}{a^2} \right] b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \quad (2.21)$$

$$It_4 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t T_t T_t^* dt = 0. \quad (2.22)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$\begin{aligned} L_1 = & -2 \frac{d\theta}{dz} A^2 R^2 It_1 - m^2 \delta^2 \rho^{2m-2} \operatorname{sech}^4[\delta\rho^m] A^2 It_1 - m^2 \frac{A^2 R^2 It_1}{\rho^2} + \\ & + A^2 R^2 It_3 - A^4 R^4 It_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Το επόμενο βήμα είναι η ολοκλήρωση L_1 ως προς ρ . Λόγω της μορφής του ansatz, τα ολοκληρώματα δεν συγκλίνουν. Γι αυτό το λόγο, θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$L_2 = \int_0^{\rho_0} \rho L_1 d\rho \quad (2.24)$$

Και στις εξισώσεις Euler - Lagrange θα πάρουμε το όριο $\rho_0 \rightarrow \infty$. Για τον υπολογισμό της L_2 πρέπει να υπολογίσουμε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

$$I_0 \equiv \int_0^{\rho_0} \rho R R^* d\rho = \int_0^{\rho_0} \rho \tanh^2[\delta\rho^m] d\rho \quad (2.25)$$

Το ολοκλήρωμα της σχέσης 2.25 δεν μπορεί να υπολογιστεί, αλλά λαμβάνοντας υπ όψη το γεγονός ότι η παράσταση $\tanh^2[\delta\rho^m]$ τείνει πολύ γρήγορα στη μονάδα, μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι:

$$I_0 = \frac{1}{2} \rho_0^2 + O(1) \quad (2.26)$$

$$I_1 \equiv \int_0^{\rho_0} \rho R_\rho R_\rho^* d\rho = m^2 \delta^2 \int_0^{\rho_0} \rho^{2m-1} \operatorname{sech}^4[\delta\rho^m]$$

Κάνοντας την αντικατάσταση: $r = \delta \rho^m$, $dr = m \delta \rho^{m-1} d\rho$, $r_0 = \delta \rho_0^m$, παίρνουμε:

$$I_1 = m \int_0^{r_0} r \operatorname{sech}^4[r] dr = m \frac{4e^{4r_0} (3 + e^{2r_0}) r_0}{3(1 + e^{2r_0})^3} + m \frac{e^{3r_0} \cosh[r_0] [2 - 16 \ln(1 + e^{2r_0}) \cosh^2[r_0] + 8 \ln(2) + \cosh[2r_0] (8 \ln(2) - 2)]}{3(1 + e^{2r_0})^3} \quad (2.27)$$

Εύκολα προκύπτει:

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} I_1 = m \frac{4 \ln(2) - 1}{6} \quad (2.28)$$

$$I_2 \equiv \int_0^{\rho_0} \rho (R R^*)^2 = I_1 \equiv \int_0^{\rho_0} \rho \tanh^4[\delta \rho^m] d\rho \quad (2.29)$$

Εντελώς όμοια με το I_0 προκύπτει για $\rho_0 \rightarrow \infty$:

$$I_2 = \frac{1}{2} \rho_0^2 + O(1) \quad (2.30)$$

Με ανάλογο σκεπτικό υπολογίζεται και το τελευταίο ολοκλήρωμα:

$$I_3 \equiv \int_0^{\rho_0} \frac{1}{\rho} R R^* d\rho \quad (2.31)$$

Που στο $\rho_0 \rightarrow \infty$ γίνεται:

$$I_3 = \ln(\rho_0) + O(1) \quad (2.32)$$

Επομένως

$$L_2 = -2 \frac{d\theta}{dz} A^2 I_0 I t_1 - A^2 I_1 I t_1 - m^2 A^2 I_3 I t_1 + A^2 I_0 I t_3 - A^4 I_2 I t_2 \quad (2.33)$$

Επειδή η L_2 δεν εξαρτάται από το ϕ , η ολοκλήρωση ως προς ϕ δεν προσφέρει παρά μία πολλαπλασιαστική σταθερά στην Effective Lagrangian. Επομένως μπορούμε να επιλέξουμε:

$$L = L_2 \quad (2.34)$$

2.2.2 Οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

Σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, η εξίσωση $\delta S = 0$ είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial A_z} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0 \quad (2.35)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial a_z} - \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial b_z} - \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \quad (2.37)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \omega_z} - \frac{\partial L}{\partial \omega} = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \theta_z} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \delta_z} - \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0 \quad (2.40)$$

Να παρατηρήσουμε ότι οι παραγωγίσεις στις εξισώσεις 2.35 - 2.39 δεν επηρεάζουν τα ολοκληρώματα I_0, \dots, I_3 και επομένως μετά την εφαρμογή του ορίου $\rho_0 \rightarrow \infty$ και τη διαίρεση με $\frac{1}{2}\rho_0^2$ θα μείνουν μόνο οι κυρίαρχοι όροι, δηλαδή αυτοί που πολλαπλασιάζονται με το I_0 ή το I_2 .

Επομένως:

$$(2.35) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} It_1 = It_3 - 2A^2 It_2 \quad (2.41)$$

$$(2.36) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} \frac{\partial It_1}{\partial a} = \frac{\partial It_3}{\partial a} - A^2 \frac{\partial It_2}{\partial a} \quad (2.42)$$

$$(2.37) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} \frac{\partial It_1}{\partial b} = \frac{\partial It_3}{\partial b} - A^2 \frac{\partial It_2}{\partial b} \quad (2.43)$$

$$(2.38) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} \frac{\partial It_1}{\partial \omega} = \frac{\partial It_3}{\partial \omega} - A^2 \frac{\partial It_2}{\partial \omega} \quad (2.44)$$

Έχουμε επίσης:

$$(2.39) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [A^2 I_0 It_1] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [A^2 It_1] I_0 + A^2 It_1 \frac{\partial}{\partial z} I_0 = 0 \quad (2.45)$$

Επειδή το $\frac{\partial}{\partial z} I_0$ είναι πεπερασμένο, η παραπάνω εξίσωση τελικά δίνει:

$$\frac{\partial}{\partial z} [A^2 I t_1] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{A^2}{a} + \frac{A^2 \pi b}{a^2} \operatorname{csch} \left[\frac{b \pi}{a} \right] = E} \quad (2.46)$$

Όπου E μια σταθερά που εκφράζει την ενέργεια του παλμού.

Τέλος, η εξίσωση 2.40 δίνει:

$$\begin{aligned} -2 \frac{d\theta}{dz} A^2 I t_1 \frac{d}{d\delta} I_0 - A^2 I t_1 \frac{d}{d\delta} I_1 - m^2 A^2 I t_1 \frac{d}{d\delta} I_3 + \\ + A^2 I t_3 \frac{d}{d\delta} I_0 - A^4 I t_2 \frac{d}{d\delta} I_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

Τα ολοκληρώματα $\frac{d}{d\delta} I_0, \dots, \frac{d}{d\delta} I_3$ είναι όλα πεπερασμένα και λόγω της περιπλοκότητάς τους μπορούν να υπολογιστούν μόνο για $m = 1$ και $m = 2$.

Οι εξισώσεις 2.41, ..., 2.44 και 2.46 αποτελούν ένα σύνολο πέντε εξισώσεων με πέντε αγνώστους (την παράγωγο του θ και τις τιμές των A, a, b και ω), που μπορεί να λυθεί αυτοτελώς, ανεξάρτητα δηλαδή από την εξίσωση 2.47. Η τιμή του δ προσδιορίζεται από την εξίσωση 2.47 μετά τη λύση του συστήματος. Το πρόβλημα είναι ότι το σύστημα περιέχει ρητά μόνο την παράγωγο του θ και έτσι εκφυλίζεται σε μία εξίσωση της μορφής:

$$f(\theta_z, A, a, b, \omega) = 0 \quad (2.48)$$

και ένα αλγεβρικό σύστημα 4×4 για τις μεταβλητές A, a, b και ω . Με άλλα λόγια, η λύση των εξισώσεων Euler–Lagrange θα δώσει στάσιμες λύσεις για τις παραμέτρους του χρονικού μέρους, κάτι που βέβαια δεν είναι αποδεκτό για πολυσολιτονιακές λύσεις. Η παρατήρηση αυτή μάς οδηγεί στην αναζήτηση νέου ansatz.

2.3 Δεύτερο ansatz.

Αναζητώντας τους λόγους αποτυχίας του πρώτου ansatz, παρατηρεί κανείς ότι στην Effective Lagrangian απουσιάζει η παράγωγος του ω , λόγω του μηδενισμού του I_4 . Έτσι ο όρος $\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial \omega_z}$ είναι μηδενικός και όπως είδαμε καταλήγουμε με ένα αλγεβρικό αντί για ένα δυναμικό σύστημα.

Για να το αποφύγουμε αυτό, τροποποιούμε το ansatz ως εξής:

$$\Psi = A \operatorname{sech}[at] \cos[bt] \tanh[\delta \cdot \rho^m] e^{i(\frac{\omega}{2} t^2 + m\phi + \theta)} \quad (2.49)$$

Το χρονικό μέρος τώρα είναι:

$$T(t, z) = \operatorname{sech}[at] \cos[bt] e^{i\frac{\omega}{2} t^2} \quad (2.50)$$

όπου έχει συμπεριληφθεί ένα γραμμικό chirp πλάτους $\frac{\omega}{2}$. Το chirp επιτρέπει στην συχνότητα του παλμού να αλλάζει γραμμικά με τον χρόνο, κάτι που για μεγάλες τιμές του t δεν μπορεί να είναι φυσικά αποδεκτό, γιατί τότε παύει να ισχύει η προσέγγιση του αργά μεταβαλλόμενου φακέλου και καταρρίπτεται η ισχύς της NLSE. Η χρήση του ωστόσο μπορεί να αιτιολογηθεί, λαμβάνοντας υπ όψη τον χρονικά εντοπισμένο χαρακτήρα των λύσεων καθώς και τον προσεγγιστικό χαρακτήρα της μεταβολικής μεθόδου. Άλλωστε το chirp έχει χρησιμοποιηθεί συχνά σε ανάλογα προβλήματα [3] και η αναγκαιότητα του γίνεται εμφανής από την αποτυχία του προηγούμενου μοντέλου. Παλμοί με chirp χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες των οπτικών ινών, καθώς έχει παρατηρηθεί ότι με αυτόν τον τρόπο μπορεί να αυξηθεί το μέγιστο μήκος μεταξύ δύο διαδοχικών ενισχυτών [6]. Στην πραγματικότητα όλη η προηγούμενη ανάλυση θα μπορούσε να είχε παραλειφθεί, αλλά τότε θα ήταν δύσκολο να εξηγήσουμε τους λόγους που μας οδήγησαν στην επιλογή του ansatz της εξίσωσης 2.49.

Τα βήματα που ακολουθούν είναι ανάλογα με αυτά της προηγούμενης ενότητας.

2.3.1 Υπολογισμός της Effective Lagrangian.

Έχουμε:

$$|\Psi|^4 = (\Psi \Psi^*)^2$$

$$\Psi \Psi^* = A^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] \tanh^2[\delta \cdot \rho^m]$$

$$\Psi_\rho = m \delta \rho^{m-1} A \operatorname{sech}[at] \cos[bt] \operatorname{sech}^2[\delta \rho^m] e^{i(\omega t + m\phi + \theta)}$$

$$\Psi_\rho \Psi_\rho^* = m^2 \delta^2 \rho^{2m-2} A^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m]$$

$$T_t = -\operatorname{sech}[at] [b \sin[bt] + a \cos[bt] \tanh[at]] e^{i\frac{\omega}{2}t^2} + i\omega t \operatorname{sech}[at] \cos[bt] e^{i\frac{\omega}{2}t^2}$$

$$T_t T_t^* = \operatorname{sech}^2[at] [b \sin[bt] + a \cos[bt] \tanh[at]]^2 + \omega^2 t^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt]$$

$$\Phi_\phi = im e^{i[m\phi + \theta]}$$

$$\Phi_\phi \Phi_\phi^* = m^2$$

$$i(\Psi^* \Psi_z - \Psi \Psi_z^*) = i \left[2i \frac{d\theta}{dz} + it^2 \frac{d\omega}{dz} \right] |\Psi|^2 = -2 \frac{d\theta}{dz} |\Psi|^2 - 2 \frac{d\omega}{dz} \frac{t^2}{2} |\Psi|^2$$

Επομένως η Lagnangian Density θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -2\frac{d\theta}{dz}|\Psi|^2 - 2\frac{d\omega}{dz}\frac{t^2}{2}|\Psi|^2 - m^2 \delta^2 \rho^{2m-2} \operatorname{sech}^4[\delta\rho^m]A^2|T|^2 - m^2\frac{|\Psi|^2}{\rho^2} + \\
& \{ \operatorname{sech}^2[at] [b \sin[bt] + a \cos[bt]\tanh[at]]^2 + \omega^2 \operatorname{sech}^2[at]\cos^2[bt] \} A^2|R|^2 - \\
& - A^4|T|^4|R|^4
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Όπως και προηγουμένως, θέτουμε:

$$L_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L} dt \tag{2.52}$$

Για τον υπολογισμό της L_1 είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε τα ακόλουθα ολοκληρώματα, μερικά από τα οποία έχουν ήδη υπολογιστεί στην προηγούμενη ενότητα και παρατίθενται εδώ για καλύτερη εποπτεία:

$$I_1^t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} TT^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2[at]\cos^2[bt] dt = \frac{1}{a} + \frac{b\pi}{a^2} \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
I_2^t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (TT^*)^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4[at]\cos^4[bt] dt = \\
& \frac{1}{2a} + \frac{b\pi (a^2 + 4b^2 + 4(a^2 + b^2) \cosh(\frac{b\pi}{a})) \operatorname{csch}(\frac{2b\pi}{a})}{3a^4},
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
I_3^t &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} (T_t T_t^*)^2 dt = \\
&= b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2[bt] \operatorname{sech}^2[at] dt + 2ab \int_{-\infty}^{\infty} \sin[bt] \cos[bt] \tanh[at] \operatorname{sech}^2[at] dt + \\
&+ a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2[bt] \tanh^2[at] \operatorname{sech}^2[at] dt + \omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] dt,
\end{aligned} \tag{2.56}$$

$$b^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2[bt] \operatorname{sech}^2[at] dt = \frac{b^2}{a^2} \left(a - b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right] \right), \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned}
2ab \int_{-\infty}^{\infty} \sin[bt] \cos[bt] \tanh[at] \operatorname{sech}^2[at] dt &= \\
&= ab \int_{-\infty}^{\infty} \sin[2bt] \tanh[at] \operatorname{sech}^2[at] dt = \frac{b^2}{a^2} \cdot 2b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right],
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$a^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2[bt] \tanh^2[at] \operatorname{sech}^2[at] dt = \frac{a}{3} + \frac{1}{3} \left[1 - \frac{b^2}{a^2} \right] b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right], \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \operatorname{sech}^2[at] \cos^2[bt] dt &= \\
&= \frac{1}{12a^4} \left[a\pi^2\omega^2 - 3\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right] \left[2\pi \left[b\pi \operatorname{csch}^2 \left[\frac{b\pi}{a} \right] - a \coth \left[\frac{b\pi}{a} \right] \right] \omega^2 + b\pi^2\omega^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
I_3^t &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt = \frac{b^2}{a} + \frac{a}{3} + \left[\frac{1}{3} + \frac{2b^2}{3a^2} \right] b\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right] + \frac{1}{12a^4} [a\pi^2\omega^2 - \\
&- 3\pi \operatorname{csch} \left[\frac{b\pi}{a} \right] \left[2\pi \left[b\pi \operatorname{csch}^2 \left[\frac{b\pi}{a} \right] - a \coth \left[\frac{b\pi}{a} \right] \right] \omega^2 + b\pi^2\omega^2],
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\tag{2.62}$$

$$I_4^t \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{2} T_t T_t^* dt = \frac{1}{96a^4} \pi^2 \operatorname{csch}^3 \left[\frac{b\pi}{a} \right] \cdot \left[-6\pi \cosh \left[\frac{2b\pi}{a} \right] b - 18\pi b + a \left[-3 \sinh \left[\frac{b\pi}{a} \right] + 12 \sinh \left[\frac{2b\pi}{a} \right] + \sinh \left[\frac{3b\pi}{a} \right] \right] \right] \quad (2.63)$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω:

$$L_1 = -2 \frac{d\theta}{dz} A^2 R^2 I_1^t - 2 \frac{d\omega}{dz} A^2 R^2 I_4^t - m^2 \delta^2 \rho^{2m-2} \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m] A^2 I_1^t - m^2 \frac{A^2 R^2 I_1^t}{\rho^2} + A^2 R^2 I_3^t - A^4 R^4 I_2^t \quad (2.64)$$

Το επόμενο βήμα είναι η ολοκλήρωση της L_1 ως προς ρ και δεν διαφέρει σε τίποτα με την αντίστοιχη ανάλυση της προηγούμενης ενότητας. Εδώ παρατίθεται μόνο το αποτέλεσμα:

$$L_2 = -2 \frac{d\theta}{dz} A^2 I_0 I_1^t - 2 \frac{d\omega}{dz} A^2 I_0 I_4^t - A^2 I_1 I_1^t - m^2 A^2 I_3 I_1^t + A^2 I_0 I_3^t - A^4 I_2 I_2^t \quad (2.65)$$

Όπως και προηγουμένως, επειδή η L_2 δεν εξαρτάται από το ϕ , η ολοκλήρωση ως προς ϕ δεν προσφέρει παρά μία πολλαπλασιαστική σταθερά στην Effective Lagrangian, μπορούμε να επιλέξουμε:

$$L = L_2 \quad (2.66)$$

2.3.2 Οι εξισώσεις Euler-Lagrange.

Οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial A_z} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial a_z} - \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial b_z} - \frac{\partial L}{\partial b} = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \omega_z} - \frac{\partial L}{\partial \omega} = 0 \quad (2.70)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \theta_z} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.71)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \delta_z} - \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0 \quad (2.72)$$

Να παρατηρήσουμε ότι, όπως προηγουμένως, έτσι και τώρα, οι παραγωγίσεις στις εξισώσεις 2.67 - 2.71 δεν επηρεάζουν τα ολοκληρώματα I_0, \dots, I_3 και επομένως μετά την εφαρμογή του ορίου $\rho_0 \rightarrow \infty$ και τη διαίρεση με $\frac{1}{2}\rho_0^2$ θα μείνουν μόνο οι όροι που πολλαπλασιάζονται με το I_0 ή το I_2 . Έτσι παίρνουμε

$$(2.67) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} I_1^t + 2 \frac{d\omega}{dz} I_4^t = I_3^t - 2A^2 I_2^t \quad (2.73)$$

$$(2.68) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} \frac{\partial I_1^t}{\partial a} + 2 \frac{d\omega}{dz} \frac{\partial I_4^t}{\partial a} = \frac{\partial I_3^t}{\partial a} - A^2 \frac{\partial I_2^t}{\partial a} \quad (2.74)$$

$$(2.69) \Rightarrow 2 \frac{d\theta}{dz} \frac{\partial I_1^t}{\partial b} + 2 \frac{d\omega}{dz} \frac{\partial I_4^t}{\partial b} = \frac{\partial I_3^t}{\partial b} - A^2 \frac{\partial I_2^t}{\partial b} \quad (2.75)$$

Έχουμε επίσης:

$$(2.70) \Rightarrow \frac{d}{dz} [-A^2 I_0 I_4^t] - A^2 I_0 \frac{\partial I_3^t}{\partial \omega} = 0 \quad (2.76)$$

$$(2.71) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [A^2 I_0 I_1^t] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} [A^2 I_1^t] I_0 + A^2 I_1^t \frac{\partial}{\partial z} I_0 = 0 \quad (2.77)$$

Επειδή το $\frac{\partial}{\partial z} I_0$ είναι πεπερασμένο, οι παραπάνω εξισώσεις τελικά δίνουν:

$$\boxed{2 \frac{d}{dz} [A^2 I_4^t] + A^2 \frac{\partial I_3^t}{\partial \omega} = 0} \quad (2.78)$$

$$\frac{d}{dz} [A^2 I_1^t] = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{A^2}{a} + \frac{A^2 \pi b}{a^2} \operatorname{csch} \left[\frac{b \pi}{a} \right] = E} \quad (2.79)$$

Όπου E μια σταθερά που εκφράζει την ενέργεια του παλμού. Ή σε ανεπτυγμένη μορφή:

$$4A_z I_4^t + 2a_z A \frac{\partial I_4^t}{\partial a} + 2b_z A \frac{\partial I_4^t}{\partial b} + A \frac{\partial I_3^t}{\partial \omega} = 0 \quad (2.80)$$

$$2A_z I_1^t + a_z A \frac{\partial I_1^t}{\partial a} + b_z A \frac{\partial I_1^t}{\partial b} = 0 \quad (2.81)$$

Τέλος, η εξίσωση 2.72 δίνει:

$$\begin{aligned} & -2 \frac{d\theta}{dz} A^2 I_1^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 - 2 \frac{d\omega}{dz} A^2 I_4^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 - A^2 I_1^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_1 - \\ & - m^2 A^2 I_1^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_3 + A^2 I_3^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 - A^4 I_2^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.82)$$

Τα ολοκληρώματα $\frac{\partial}{\partial \delta} I_0, \dots, \frac{\partial}{\partial \delta} I_3$ είναι όλα πεπερασμένα, αλλά λόγω της περιπλοκότητάς τους μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά μόνο για $m = 1$ και $m = 2$.

2.3.3 Υπολογισμός των $\frac{\partial}{\partial \delta} I_0, \dots, \frac{\partial}{\partial \delta} I_3$

Επειδή τα ολοκληρώματα είναι πεπερασμένα, θα πάρουμε $\rho_0 = \infty$. Σε όλες οι ισότητες που ακολουθούν θα εννοείται $\rho_0 = \infty, r_0 = \infty$.

Υπολογισμός για $m = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial \delta} I_0 = \int_0^\infty 2\rho^{m+1} \operatorname{sech}^2[\delta \rho^m] \tanh[\delta \rho^m] d\rho \quad (2.83)$$

Οπότε για $m = 1$ θα είναι:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_0 = \int_0^\infty 2\rho^2 \operatorname{sech}^2[\delta \rho] \tanh[\delta \rho] d\rho = \frac{\ln(2)}{\delta^3}} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \delta} I_1 &= \frac{\partial}{\partial \delta} \left[m^2 \delta^2 \int_0^\infty 2\rho^{2m-1} \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m] d\rho \right] = 2m^2 \delta \int_0^\infty 2\rho^{2m-1} \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m] d\rho - \\ &\quad - 4m^2 \delta^2 \int_0^\infty 2\rho^{3m-1} \operatorname{sech}^4[\delta \rho^m] \tanh[\delta \rho^m] d\rho \end{aligned} \quad (2.85)$$

Αλλά, κάνοντας την αντικατάσταση $r = \delta \rho^m$, $dr = m \delta \rho^{m-1} d\rho$, προκύπτει:

$$I_1 = \int_0^\infty r \operatorname{sech}^4[r] dr \quad (2.86)$$

Δηλαδή το I_1 είναι ανεξάρτητο του δ . Οπότε:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_1 = 0} \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} I_2 = \frac{\partial}{\partial \delta} \int_0^{\rho_0} \rho \tanh^4[\delta \rho^m] d\rho = 4 \int_0^{\rho_0} \rho^{m+1} \operatorname{sech}^2[\delta \rho^m] \tanh^3[\delta \rho^m] d\rho \quad (2.88)$$

Οπότε, για $m = 1$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_2 = 4 \int_0^\infty \rho^2 \operatorname{sech}^2[\delta \rho] \tanh^3[\delta \rho] d\rho = \frac{1 + 8 \ln(2)}{3 \delta^3}} \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} I_3 = \frac{\partial}{\partial \delta} \int_0^{\rho_0} \frac{1}{\rho} \tanh^2[\delta \rho^m] d\rho = 2 \int_0^{\rho_0} \rho^{m-1} \operatorname{sech}^2[\delta \rho^m] \tanh[\delta \rho^m] d\rho \quad (2.90)$$

Για $m = 1$ είναι:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_3 = 2 \int_0^\infty \operatorname{sech}^2[\delta \rho] \tanh[\delta \rho] d\rho = \frac{1}{\delta}} \quad (2.91)$$

Υπολογισμός για $m = 2$

Για $m = 2$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών: $r = \delta \rho^2$, $dr = 2 \delta \rho d\rho$. Οπότε:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_0 = \frac{1}{\delta} \int_0^{r_0} r \operatorname{sech}^2[r] \tanh[r] dr = \frac{1}{2 \delta^2}} \quad (2.92)$$

Επίσης, ισχύει για κάθε m :

	m = 1	m = 2
$\frac{\partial}{\partial \delta} I_0$	$\frac{2 \ln(2)}{\delta^3}$	$\frac{1}{2\delta^2}$
$\frac{\partial}{\partial \delta} I_1$	0	0
$\frac{\partial}{\partial \delta} I_2$	$\frac{1 + 8 \ln(2)}{3\delta^3}$	$\frac{2}{3\delta^2}$
$\frac{\partial}{\partial \delta} I_3$	$\frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{2\delta}$

Πίνακας 2.1: Οι αναλυτικές εκφράσεις των παραγώγων των I_i ως προς δ για $m = 1$ και $m = 2$.

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_1 = 0} \quad (2.93)$$

Ακόμη:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_2 = \frac{2}{\delta^2} \int_0^{r_0} r \operatorname{sech}^2[r] \tanh^3[r] dr = \frac{2}{3\delta^2}} \quad (2.94)$$

Τέλος,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \delta} I_3 = \frac{1}{\delta} \int_0^{r_0} \operatorname{sech}^2[r] \tanh[r] dr = \frac{1}{2\delta}} \quad (2.95)$$

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον πίνακα 2.1.

2.3.4 Επίλυση των εξισώσεων

Είναι εμφανές ότι το σύστημα των έξι εξισώσεων Euler–Lagrange μπορεί να χωριστεί σε ένα σύστημα πέντε πεπλεγμένων εξισώσεων (εξισώσεις 2.73, 2.74, 2.75, 2.80, 2.81) και μιας ανεξάρτητης εξίσωσης (εξίσωση 2.82) της οποίας η λύση μπορεί να βρεθεί μετά την λύση του συστήματος των πέντε πεπλεγμένων εξισώσεων. Το σύστημα είναι της μορφής:

$$\begin{array}{l} (2.73) \\ (2.74) \\ (2.75) \\ (2.80) \\ (2.81) \end{array} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{43} & x_{44} & x_{45} \\ 0 & 0 & x_{53} & x_{54} & x_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_z \\ \omega_z \\ A_z \\ a_z \\ b_z \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

και είναι προφανές ότι δεν λύνεται, παρά μόνο εάν παραγωγιστεί μία από τις τρεις πρώτες εξισώσεις.

Από τις πρώτες δύο (εξισώσεις 2.73 και 2.74) υπολογίζουμε τις εκφράσεις των θ_z και ω_z συναρτήσει των A , a , b και ω :

$$\theta_z = K(A, a, b, \omega) \quad (2.96)$$

$$\omega_z = M(A, a, b, \omega) \quad (2.97)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 2.75, παίρνουμε:

$$2K \frac{\partial I_1^t}{\partial b} + 2M \frac{\partial I_4^t}{\partial b} = \frac{\partial I_3^t}{\partial b} - A^2 \frac{\partial I_2^t}{\partial b} \quad (2.98)$$

Θέτοντας $P(A, a, b, \omega) = 2K \frac{\partial I_1^t}{\partial b}$ και $R(A, a, b, \omega) = 2M \frac{\partial I_4^t}{\partial b}$, παίρνουμε

$$P + R + A^2 \frac{\partial I_2^t}{\partial b} - \frac{\partial I_3^t}{\partial b} = 0 \quad (2.99)$$

Ονομάζοντας:

$$Q = P + R + A^2 \frac{\partial I_2^t}{\partial b} - \frac{\partial I_3^t}{\partial b}$$

η προηγούμενη εξίσωση γράφεται:

$$Q = 0 \quad (2.100)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση 2.100 παίρνουμε:

$$A_z \frac{\partial Q}{\partial A} + a_z \frac{\partial Q}{\partial a} + b_z \frac{\partial Q}{\partial b} + K \frac{\partial Q}{\partial \omega} = 0 \quad (2.101)$$

κάνοντας τους υπολογισμούς προκύπτει $\frac{\partial Q}{\partial \omega} = 0$, οπότε:

$$A_z \frac{\partial Q}{\partial A} + a_z \frac{\partial Q}{\partial a} + b_z \frac{\partial Q}{\partial b} = 0 \quad (2.102)$$

Η παραπάνω εξίσωση μαζί με τις εξισώσεις 2.81 και 2.80 αποτελούν ένα σύστημα 3×3 , που έχει λύση :

$$A_z = f_1(A, a, b, \omega)$$

$$a_z = f_2(A, a, b, \omega)$$

$$b_z = f_3(A, a, b, \omega)$$

Συνοψίζοντας, μέχρι στιγμής έχουμε κατασκευάσει ένα σύστημα λύσεων:

$$\begin{aligned}A_z &= f_1(A, a, b, \omega) \\a_z &= f_2(A, a, b, \omega) \\b_z &= f_3(A, a, b, \omega) \\\theta_z &= K(A, a, b, \omega) \\\omega_z &= M(A, a, b, \omega)\end{aligned}$$

Επειδή μία από τις εξισώσεις του αρχικού συστήματος προέρχεται από παραγωγή (εξίσωση 2.102) το ανωτέρω σύστημα θα συνοδεύεται υποχρεωτικά από την:

$$Q = 0$$

για τις αρχικές συνθήκες.

Το σύστημα αυτό μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Η διαδικασία είναι ιδιαίτερα επίπονη, καθώς οι αναλυτικές εκφράσεις του συστήματος είναι εξαιρετικά μακροσκελείς. Υπ' αυτήν την έννοια η απαίτηση για αναλυτικότητα ικανοποιείται οριακά.

2.3.5 Τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Το σύστημα που κατασκευάσαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι εξαιρετικά περίπλοκο και οι οριακές συνθήκες θα πρέπει να επιλεγούν με μεγάλη προσοχή. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι το γεγονός ότι παίρνουμε περιοδικές λύσεις, γεγονός που αυξάνει τις πιθανότητες να έχουμε προσεγγίσει μερικές πραγματικές λύσεις της NLSE. Η μεγάλη αριθμητική δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι οι λύσεις εμφανίζουν περιοδική συμπεριφορά και ταυτόχρονα παρουσιάζουν απότομες μεταβολές σε χρόνους πολύ μικρούς εάν συγκριθούν με την περίοδο. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι η αριθμητική λύση σπάνια υπολογίζεται με καλή ακρίβεια. Δυστυχώς στις περισσότερες των περιπτώσεων το σύστημα πέφτει σε αστάθεια και ο αλγόριθμος δεν επιστρέφει κάποια ικανοποιητική λύση.

Ένα από τα λίγα παραδείγματα για τα οποία έχουμε ικανοποιητική λύση είναι αυτό με τις αρχικές συνθήκες:

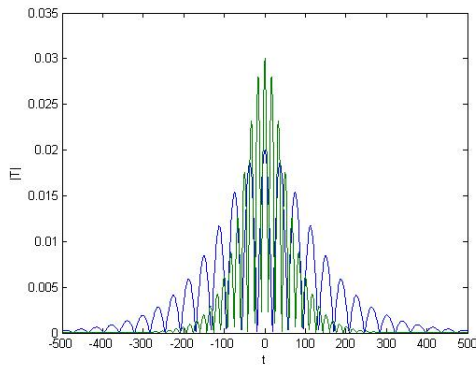
$$\begin{aligned}A_0 &= 0.02 \\a_0 &= 0.01 \\b_0 &= 0.083 \\\omega_0 &= 0 \\\theta_0 &= 0\end{aligned}$$

Η τιμή του b_0 προσδιορίστηκε από την συνθήκη $Q = 0$. Εδώ έχουμε εκμεταλλευτεί τον μετασχηματισμό της κλίμακας, σύμφωνα με τον οποίον, εάν η ψ είναι λύση της NLSE, τότε είναι λύση και η $a\psi(at, ar, \phi, a^2z)$, και έτσι διαιρώντας για παράδειγμα τις αρχικές συνθήκες με το 100, η εξέλιξη κατά τη διάδοση είναι 10000 φορές πιο αργή, που σημαίνει ότι το πρόβλημα εξομαλύνεται και αυτό συχνά διευκολύνει την αριθμητική επίλυση. Η λύση που παίρνουμε παρουσιάζεται στο σχήμα 2.4

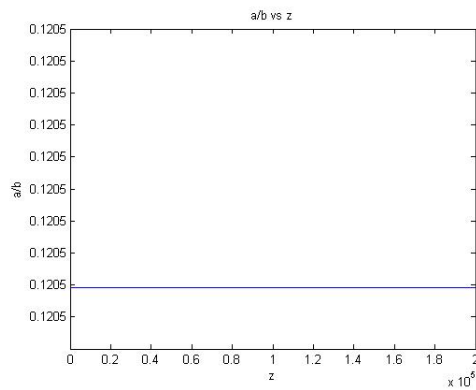
Κατά τη διάδοση οι όλες οι παράμετροι του ansatz αλλάζουν περιοδικά με κοινή περίοδο, εκτός από την παράμετρο θ , που εικονίζεται στο σχήμα 2.4(δ') η οποία όντας παράμετρος που εκφράζει γωνία είναι υπέρθεση μιας γραμμικής συνάρτησης και μιας περιοδικής με περίοδο ίση με αυτήν των υπολοίπων. Η παράμετρος ω (σχήμα 2.4(ε')), που αντιστοιχεί στο chirp, διατηρεί μικρές τιμές κατά τη διάδοση, κάτι που όπως έχουμε ήδη τονίσει είναι απαραίτητο για να έχει η λύση μας φυσική σημασία. Όσον αφορά την αριθμητική ακρίβεια, επιβεβαιώνεται ο ισχυρισμός μας για ταυτόχρονες απότομες μεταβολές τόσο των τιμών των παραγώγων όσο και των ίδιων των μεταβλητών (ειδικά στην περίπτωση του ω έχουμε πολύ απότομες ποσοστιαίες μεταβολές), γεγονός που δυσχεραίνει την επίλυση, καθώς το βήμα του αλγορίθμου πρέπει να πάρει πολύ μικρές τιμές στην συγκεκριμένη περιοχή. Η σωστή επιλογή του αλγορίθμου παίζει πολύ σημαντικό ρόλο για την επιτυχία της αριθμητικής μεθόδου.

Ένας τρόπος να ελέγξουμε την ακρίβεια είναι να κοιτάξουμε τη μεταβολή της ενέργειας κατά την διάδοση. Κανονικά η ενέργεια θα πρέπει να διατηρείται, κάτι που, όπως φαίνεται καθαρά από το σχήμα 2.4(ε'), δεν ισχύει. Παρ' όλα αυτά μπορούμε να δούμε ότι σε διάστημα δύο περιόδων η ενέργεια παραμένει σταθερή με ακρίβεια τριών σημαντικών ψηφίων. Να σημειώσουμε ότι η μη διατήρηση της ενέργειας δεν έχει να κάνει με κάποια αποτυχημένη επιλογή του ansatz, αλλά είναι καθαρά θέμα κακής ακρίβειας της αριθμητικής μεθόδου. Όπως είδαμε προηγουμένως, η διατήρηση της ενέργειας ισοδυναμεί με τη βελτιστοποίηση ως προς τη φασική παράμετρο θ , δηλαδή με μία από τις εξισώσεις του προς επίλυση συστήματος. Η εξήγηση βρίσκεται στις συμμετρίες της NLSE και συγκεκριμένα στη συμμετρία ως προς την αλλαγή της φάσης. Σύμφωνα με το θεώρημα της Noether είναι η συγκεκριμένη συμμετρία που οδηγεί στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Αυτό είναι αρκετά προφανές, αν αναλογιστούμε ότι εργαζόμαστε στον χώρο της συχνότητας και ότι κλασσικά η διατήρηση της ενέργειας προέρχεται από την ομογένεια του χρόνου, δηλαδή τη συμμετρία ως προς τις χρονικές μετατοπίσεις. Η παρατήρηση αυτή είναι εξαιρετικά σημαντική, διότι δίνει μία εξήγηση για τους λόγους για τους οποίους η φασική παράμετρος θ είναι εκ των ων ουκ άνευ για ένα επιτυχημένο ansatz.

Τέλος, θα πρέπει να αξιολογήσουμε τα αποτελέσματα, για να δούμε εάν όντως καταφέραμε να προσεγγίσουμε τον breather ή κάποια άλλη πιθανή λύση του προβλήματος. Παρατηρούμε ότι υπάρχει περιοδικότητα καθώς και συμπίεση



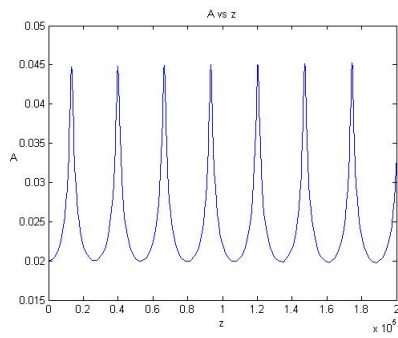
Σχήμα 2.2: Δύο διαδοχικές φάσεις του παλμού κατά τη διάδοση.



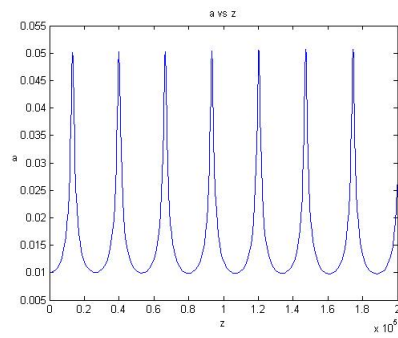
Σχήμα 2.3: Ο λόγος $\frac{a}{b}$ κατά τη διάδοση.

του παλμού κατά τη διάδοση όπως φαίνεται και από τα σχήματα 2.4(α') – 2.4(γ'). Από την άλλη το σχήμα 2.2 δείχνει ότι, εάν πράγματι καταφέραμε να προσεγγίσουμε κάποια λύση, τότε είτε αυτή θα είναι πολύ υψηλότερης τάξης από αυτήν του breather, είτε η προσέγγιση δεν είναι πολύ καλή. Τελος το σχήμα 2.3 δείχνει ότι ο λόγος a/b παραμένει σταθερός κατά την διάδοση, ενώ από την άλλη θα περιμέναμε σημαντικά μεγαλύτερη ποσοστιαία μεταβολή του b από αυτήν του a . Ο σταθερός λόγος σημαίνει ότι κατά την συμπίεση του παλμού δεν έχουμε παρά μία κλιμάκωση στο χρόνο κάτι που είναι αρκετά μακριά από αυτό που στην πραγματικότητα συμβαίνει σε έναν breather. Το γεγονός αυτό καταδεικνύει ότι είτε η επιλογή των αρχικών συνθηκών δεν ήταν καλή (φαίνεται μάλιστα ότι κάναμε το λάθος να επιλέξουμε μεγάλο b_0 στις αρχικές συνθήκες) είτε ότι πιθανώς η πιό χοντροειδής προσέγγιση της απλής $sech(at)$ αντί για την $sech(at) * \cos(bt)$ να έδινε πιο ακριβή αποτελέσματα.

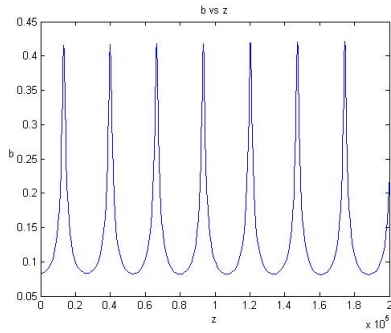
Η συνθήκη $Q = 0$ για $A = 0.02$, και $a = 0.01$ έχει τη λύση $b = 0.083$



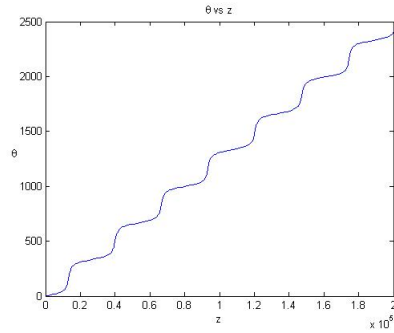
(α') A vs z



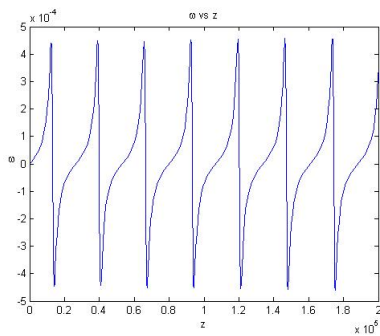
(β') a vs z



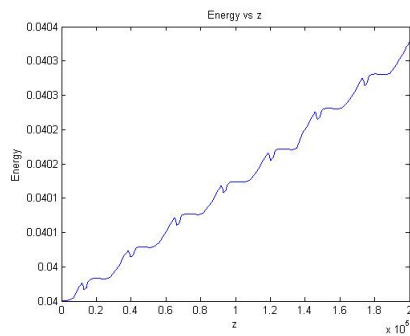
(γ') b vs z



(δ') θ vs z



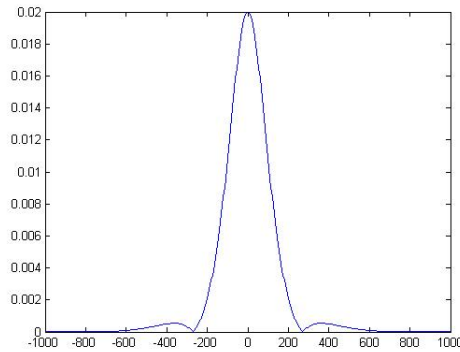
(ϵ') ω vs z



(ζ') Energy vs z

Σχήμα 2.4: Τα αριθμητικά για τις αρχικές συνθήκες $A = 0.02$, $a = 0.01$, $b = 0.083$, $\theta = 0$ και $\omega = 0$

που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως. Για την ακρίβεια υπάρχει πάντα, η λύση $b = 0$, που δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί, γιατί σε πολλά βήματα του αναλυτικού μέρους που προηγήθηκε έχει σιωπηρά εννοηθεί $b \neq 0$ και για $b = 0$ οι τελικές εκφράσεις παίρνουν τη μορφή $0/0$. Εκτός από τη μηδενική λύση υπάρχουν περιπτώσεις, όπως αυτή που εξετάζουμε, όπου υπάρχουν δύο ακόμη θετικές λύσεις (και φυσικά οι αντίθετές τους). Μέχρι στιγμής έχουμε εξετάσει τη μεγαλύτερη από τις δύο. Για την μικρότερη, που είναι η $b = 0.0058$ παίρνουμε τον αρχικό παλμό του σχήματος 2.5, που είναι πολλά υποσχόμενος, γιατί φαίνεται να είναι αρκετά κοντά στη μορφή του breather. Δυστυχώς όμως, παρά τις πολλές προσπάθειες με πολλούς διαφορετικούς αλγόριθμους, το σύστημα γίνεται πάντοτε ασταθές και όλοι οι αλγόριθμοι αποτυγχάνουν.



Σχήμα 2.5: Ο αρχικός παλμός για $A_0 = 0.02$, $a_0 = 0.01$ και $b_0 = 0.0053$.

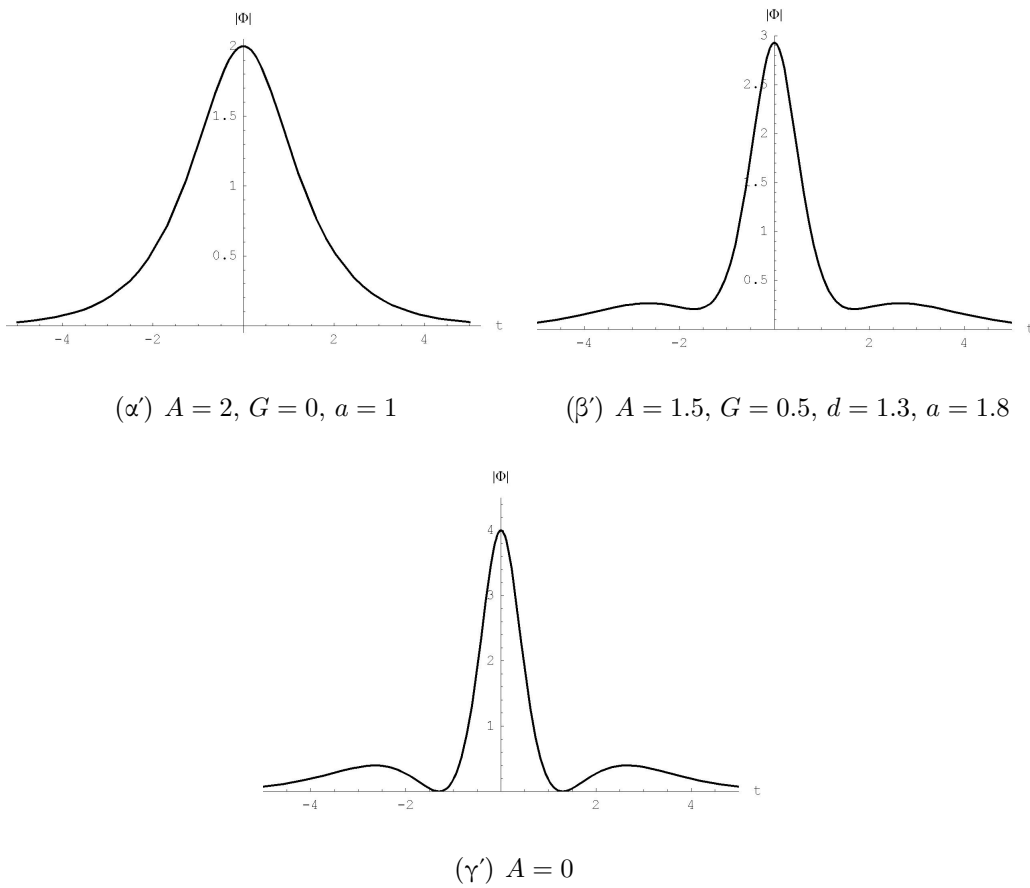
2.4 Τρίτο ansatz.

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε μία τρίτη εναλλακτική για την προσέγγιση ενός breather. Τα πλεονεκτήματά της είναι ότι είναι σε θέση να προσεγγίσει και τα ενδιάμεσα στάδια της εξέλιξης και ότι δίνει σημαντικά απλούστερες αναλυτικές σχέσεις. Η αναλυτική της έκφραση είναι:

$$\psi = (A + G(t^2 - d^2)^2) \operatorname{sech}(at) \tanh(\delta\rho^m) e^{i\frac{c}{2}t^2 + i\theta + im\phi} \quad (2.103)$$

Εδώ το πλάτος δεν εκφράζεται με μία μόνο παράμετρο, αλλά είναι συνάρτηση τριών διαφορετικών παραμέτρων. Η παράσταση $(t^2 - d^2)$ εισήχθει για να επιτύχουμε τους μηδενισμούς στα σημεία $\pm d$. Για να μπορέσουμε να πάρουμε την απλή $\operatorname{sech}(at)$, έπρεπε να την πολλαπλασιάσουμε με μία παράμετρο G , η οποία θα μπορεί να μηδενίζεται την κατάλληλη στιγμή, καθώς και να προσθέσουμε μία ακόμη παράμετρο, A . Η παράσταση αυτή μπορεί είναι σε θέση να δώσει

και τα ενδιάμεσα στάδια της εξέλιξης του breather, αφού για $A > 0$ δεν έχουμε μηδενισμούς, αλλά απλώς δύο τοπικά ελάχιστα, που σημαίνει ότι είμαστε απαλλαγμένοι από μία από τις κύριες αδυναμίες του προηγούμενου ansatz. Η παράμετρος θ θα μας δώσει τη διατήρηση της ενέργειας, ενώ η αναγκαιότητα της παραμέτρου c έχει ήδη αναλυθεί στις προηγούμενες ενότητες. Στο σχήμα 2.6 εικονίζονται τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα των μορφών που μπορεί να πάρει το ansatz.



Σχήμα 2.6: Η προσέγγιση των φάσεων του breather από το τρίτο ansatz.

2.4.1 Υπολογισμός της Effective Lagrangian.

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 2.103 στην λαγκρανζιανή (εξίσωση 1.25), παίρνουμε:

$$\mathcal{L} = -2\theta_z |\psi|^2 - c_z t^2 |\psi|^2 - R_\rho^2 |T|^2 - m^2 \frac{|\psi|^2}{\rho^2} + R^2 |T_t|^2 - |T|^4 R^4 \quad (2.104)$$

όπου T και R το χρονικό και το ακτινικό μέρος αντίστοιχα.

Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε την έκφραση για την Effective Lagrangian:

$$L = -2\theta_z I_0 I_1^t - 2c_z I_0 I_4^t - I_1 I_1^t - m^2 I_3 I_1^t + I_0 I_3^t - I_2 I_2^t \quad (2.105)$$

Όπου τα I_i είναι τα ίδια με τα αντίστοιχα της προηγούμενης ενότητας και τα I_i^t είναι τα χρονικά ολοκληρώματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια.

$$I_1^t = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^2 dt = -\frac{31G^2 \pi^6 d^2}{168a^7} - \frac{2G(Gd^4 + A)\pi^2 d^2}{3a^3} + \frac{2(Gd^4 + A)^2}{a} + \frac{127G^2 \pi^8}{1920a^9} + \frac{7G(3Gd^4 + A)\pi^4}{60a^5} \quad (2.106)$$

$$I_2^t = \int_{-\infty}^{\infty} |T|^4 dt = \frac{1}{12546293760a^{17}} [16728391680 (Gd^4 + A)^4 a^{16} - 11152261120d^2 G (Gd^4 + A)^3 (-6 + \pi^2) a^{14} + 278806528G (Gd^4 + A)^2 (7Gd^4 + A) \pi^2 (-60 + 7\pi^2) a^{12} - 99573760d^2 G^2 (7G^2 d^8 + 10AGd^4 + 3A^2) \pi^4 (-294 + 31\pi^2) a^{10} + 8712704G^2 (35G^2 d^8 + 30AGd^4 + 3A^2) \pi^6 (-1240 + 127\pi^2) a^8 - 3960320d^2 G^3 (7Gd^4 + 3A) \pi^8 (-25146 + 2555\pi^2) a^6 + 11968G^3 (7Gd^4 + A) \pi^{10} (-13950300 + 1414477\pi^2) a^4 - 544544d^2 G^4 \pi^{12} (-2828954 + 286685\pi^2) a^2 + 7007G^4 \pi^{14} (-167096400 + 16931177\pi^2)] \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned}
I_3^t = \int_{-\infty}^{\infty} |T_t|^2 dt = \frac{1}{40320a^7} & [1568G ((3Gd^4 + A) a^2 + 12d^2G) \pi^4 a^2 \\
& - 8960 (a^2 d^2 + 6) G (Gd^4 + A) \pi^2 a^4 \\
& + 26880 (Gd^4 + A) ((Gd^4 + A) a^2 + 8d^2G) a^6 \\
& + 889G^2 \pi^8 - 2480 (a^2 d^2 + 2) G^2 \pi^6] + c^2 \left[- \frac{127G^2 \pi^8 d^2}{480a^9} \right. \\
& - \frac{7G (Gd^4 + A) \pi^4 d^2}{30a^5} + \frac{2555G^2 \pi^{10}}{16896a^{11}} + \frac{31G (3Gd^4 + A) \pi^6}{336a^7} \\
& \left. + \frac{(Gd^4 + A)^2 \pi^2}{6a^3} \right] \quad (2.108)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_4^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{2} |T|^2 dt = \frac{\pi^2}{1182720a^{11}} & [98560 (Gd^4 + A)^2 a^8 \\
& - 137984d^2 G (Gd^4 + A) \pi^2 a^6 + 54560G (3Gd^4 + A) \pi^4 a^4 \\
& - 156464d^2 G^2 \pi^6 a^2 + 89425G^2 \pi^8] \quad (2.109)
\end{aligned}$$

2.4.2 Οι εξισώσεις Euler –Lagrange.

Οι εξισώσεις Euler –Lagrange είναι:

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial A_z} - \frac{\partial L}{\partial A} = 0 \quad (2.110)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial a_z} - \frac{\partial L}{\partial a} = 0 \quad (2.111)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial d_z} - \frac{\partial L}{\partial d} = 0 \quad (2.112)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial G_z} - \frac{\partial L}{\partial G} = 0 \quad (2.113)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \theta_z} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.114)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial c} - \frac{\partial L}{\partial c} = 0 \quad (2.115)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial L}{\partial \delta_z} - \frac{\partial L}{\partial \delta} = 0 \quad (2.116)$$

Να παρατηρήσουμε ότι, όπως προηγουμένως, έτσι και τώρα, οι παραγωγίσεις στις εξισώσεις 2.110 - 2.114 δεν επηρεάζουν τα ολοκληρώματα I_0, \dots, I_3 και επομένως μετά την εφαρμογή του ορίου $\rho_0 \rightarrow \infty$ και τη διαίρεση με $\frac{1}{2}\rho_0^2$ θα μείνουν μόνο οι όροι που πολλαπλασιάζονται με το I_0 ή το I_2 . Επίσης και πάλι η βελτιστοποίηση ως προς το δ δίνει μια αποσυμπλεγμένη εξίσωση και η τιμή του δ μπορεί να βρεθεί απ ευθείας, αφού πρώτα βρεθούν οι τιμές των υπολοίπων μεταβλητών.

Έχουμε:

$$(2.110) \Rightarrow -2\theta_z \frac{\partial I_1^t}{\partial A} - 2c_z \frac{\partial I_4^t}{\partial A} + \frac{\partial I_3^t}{\partial A} - \frac{\partial I_2^t}{\partial A} \quad (2.117)$$

$$(2.111) \Rightarrow -2\theta_z \frac{\partial I_1^t}{\partial a} - 2c_z \frac{\partial I_4^t}{\partial a} + \frac{\partial I_3^t}{\partial a} - \frac{\partial I_2^t}{\partial a} \quad (2.118)$$

$$(2.112) \Rightarrow -2\theta_z \frac{\partial I_1^t}{\partial d} - 2c_z \frac{\partial I_4^t}{\partial d} + \frac{\partial I_3^t}{\partial d} - \frac{\partial I_2^t}{\partial d} \quad (2.119)$$

$$(2.113) \Rightarrow -2\theta_z \frac{\partial I_1^t}{\partial G} - 2c_z \frac{\partial I_4^t}{\partial G} + \frac{\partial I_3^t}{\partial A} - \frac{\partial I_2^t}{\partial G} \quad (2.120)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ισοδυναμούν με δύο διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$\theta_z = K(A, a, d, G, c)$$

$$c_z = M(A, a, d, G, c)$$

που προκύπτουν από επίλυση του συστήματος των εξισώσεων 2.117 και 2.119, καθώς και με δύο αλγεβρικές της μορφής, που προκύπτουν από αντικατάσταση στις 2.118 και 2.120:

$$Q(A, a, d, G, c) = 0$$

$$R(A, a, d, G, c) = 0$$

Οι δύο παραπάνω εξισώσεις παραγωγίζονται και έτσι έχουμε

$$Q_z(A, a, d, G, c) = 0$$

$$R_z(A, a, d, G, c) = 0$$

αλλά είναι ευθύνη μας να επιλέγουμε αρχικές συνθήκες που να ικανοποιούν το σύστημα $Q = 0$ και $R = 0$.

Ακόμη:

$$(2.115) \Rightarrow 2A_z \frac{\partial I_4^t}{\partial A} + 2a_z \frac{\partial I_4^t}{\partial a} + 2d_z \frac{\partial I_4^t}{\partial d} + 2G_z \frac{\partial I_4^t}{\partial G} + \frac{\partial I_3^t}{\partial c} = 0 \quad (2.121)$$

$$(2.114) \Rightarrow A_z \frac{\partial I_1^t}{\partial A} + a_z \frac{\partial I_1^t}{\partial a} + d_z \frac{\partial I_1^t}{\partial d} + G_z \frac{\partial I_1^t}{\partial G} = 0 \quad (2.122)$$

Να σημειώσουμε ότι η εξίσωση 2.122 ισοδυναμεί με την διατήρηση της ενέργειας, δηλαδή με τη διατήρηση του I_1^t .

Οι εξισώσεις 2.121 και 2.122 μαζί με τις $Q_z = 0$ και $R_z = 0$ και τις $\theta_z = K$ και $c_z = M$ αποτελούν ένα επιλύσιμο σύστημα που μπορεί να λυθεί αριθμητικά.

Τέλος

$$(2.116) \Rightarrow -2\theta_z \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 I_1^t - 2c_z \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 I_4^t - \frac{\partial}{\partial \delta} I_1 I_1^t - m^2 \frac{\partial}{\partial \delta} I_3 I_1^t + \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 I_3^t - \frac{\partial}{\partial \delta} I_2 I_2^t = 0 \quad (2.123)$$

Η παραπάνω εξίσωση με την αντικατάσταση των θ_z και c_z από τα K και M παίρνει τη μορφή $\delta = f(A, a, G, d)$ και η τιμή του δ υπολογίζεται απευθείας μετά τη λύση του συστήματος για τα A, a, G και d . Οι τιμές των παραγώγων των I_i για $m = 1$ και $m = 2$ παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1. Το σύστημα λύθηκε αριθμητικά με τη βοήθεια του Matlab, ωστόσο τα αποτελέσματα δεν ήταν καθόλου ικανοποιητικά. Αυτό οφείλεται εν μέρει στη δυσκολία που παρουσιάζει η εύρεση καλών αρχικών τιμών οι οποίες ταυτόχρονα να ικανοποιούν τις συνθήκες $Q = 0$ και $R = 0$.

Κεφάλαιο 3

Επίλυση με ακριβείς λύσεις της μονοδιάστατης εξίσωσης.

Έστω ένα ansatz της μορφής:

$$\psi = T(a_1, a_2, \dots, a_n; t) R(\delta; \rho^m) e^{im\phi} \quad (3.1)$$

όπου a_1, a_2, \dots, a_n και δ παράμετροι που μεταβάλλονται κατά τη διάδοση στο z . Τα ansatz που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι όλα ειδικές περιπτώσεις του παραπάνω ansatz, που δεν είναι άλλο από μια μορφή της προσέγγισης Hartree. Αν και η προσέγγιση αυτή δεν είναι μονόδρομος, είναι δύσκολο να εργαστεί κανείς με μορφές στις οποίες η ακτινική συντεταγμένη συμπλέκεται με τη χρονική, κυρίως λόγω του ότι τότε περιπλέκεται η φυσική σημασία των παραμέτρων. Πρέπει να σημειωθεί ότι η προσέγγιση Hartree προτιμάται μόνο και μόνο λόγω της απλότητας της και δεν υπάρχει καμία εγκύηση ότι στην πραγματική λύση του προβλήματος οι μεταβλητές παραμένουν χωριζόμενες.

Έστω ακόμη ότι η R είναι πραγματική συνάρτηση που όταν το ρ τείνει στο άπειρο πάει στη μονάδα γρηγορότερα από το $(1 - \frac{1}{\rho})$. Αν αντικαταστήσουμε το παραπάνω ansatz στη Lagrangian Density (εξίσωση 1.25), παίρνουμε:

$$\mathcal{L} = i [T^* T_z - T_z^* T] R^2 - |T|^2 R_\rho^2 - \frac{m^2 |T|^2 R^2}{\rho^2} + |T_t|^2 R^2 - |T|^4 R^4 \quad (3.2)$$

και ολοκληρώνοντας:

$$L = I_0^t I_0 - I_1^t I_1 - m^2 I_1^t I_3 + I_3^t I_0 - I_2^t I_2 \quad (3.3)$$

όπου

$$\begin{aligned}
I_0^t &= \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt & I_1^t &= \int_{-\infty}^{\infty} TT^* dt \\
I_2^t &= \int_{-\infty}^{\infty} (TT^*)^2 dt & I_3^t &= \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt \\
I_0 &= \int_0^{\rho_0} \rho R^2 d\rho & I_1 &= \int_0^{\rho_0} \rho R_\rho^2 d\rho \\
I_2 &= \int_0^{\rho_0} \rho R^4 d\rho & I_3 &= \int_0^{\rho_0} \frac{1}{\rho} R^2 d\rho
\end{aligned}$$

Να παρατηρήσουμε ότι:

- Οι χρονικές παράμετροι a_1, a_2, \dots, a_n βρίσκονται μόνο στα ολοκληρώματα I_i^t .
- Η παράμετρος δ βρίσκεται μόνο στα ολοκληρώματα I_i .
- Τα I_i^t συγκλίνουν όλα, ενώ από τα I_i για $\rho_0 \rightarrow \infty$ μόνο το I_1 συγκλίνει.

Συγκεκριμένα, για $\rho_0 \rightarrow \infty$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\rho_0} \rho R^2 d\rho \sim \frac{1}{2} \rho_0^2 \\
I_1 &= \int_0^{\rho_0} \rho R_\rho^2 d\rho = O(1) \\
I_2 &= \int_0^{\rho_0} \rho R^4 d\rho \sim \frac{1}{2} \rho_0^2 \\
I_3 &= \int_0^{\rho_0} \frac{1}{\rho} R^2 d\rho \sim \ln(\rho_0)
\end{aligned}$$

Παίνοντας τις n πρώτες εξισώσεις Euler–Lagrange για τις χρονικές παραμέτρους a_1, \dots, a_n , τα ολοκληρώματα I_0, \dots, I_3 δεν επηρεάζονται από τις παραγωγίσεις, αλλά παραμένουν σαν πολλαπλασιαστικοί όροι. Στη συνέχεια, παίρνοντας το όριο $\rho_0 \rightarrow \infty$, κρατάμε μόνο τους κυρίαρχους όρους, δηλαδή μόνο αυτούς που πολλαπλασιάζονται με το I_0 ή με το I_2 . Μεγάλη σημασία έχει το γεγονός ότι

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow \infty} \frac{I_2}{I_0} = 1$$

Με βάση τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν γίνεται εμφανές ότι μία ισοδύναμη Effective Lagrangian για τις χρονικές παραμέτρους a_1, \dots, a_n είναι η εξής:

$$L = I_0^t + I_3^t - I_2^t \tag{3.4}$$

που δεν είναι άλλη από την Effective Lagrangian της μονοδιάστατης NLSE:

$$i\psi_z - \psi_{tt} - |\psi|^2 \psi = 0 \quad (3.5)$$

Μια τελευταία παρατήρηση είναι ότι στις εξισώσεις Euler –Lagrange για τις χρονικές παραμέτρους a_1, \dots, a_n δεν εμπλέκεται ούτε η μεταβλητή δ ούτε και η σταθερή παράμετρος m . Έτσι από μόνες τους οι εξισώσεις αυτές αποτελούν ένα αυτόνομο επιλύσιμο σύστημα με n εξισώσεις και n αγνώστους. Η εξίσωση Euler –Lagrange για την μεταβλητή δ , μετά τη λύση του συστήματος, εκφυλίζεται σε μία εξίσωση της μορφής $\delta = F(a_1, \dots, a_n)$.

Το συμπέρασμα είναι ότι στην περίπτωση των οπτικών δινών, η βελτιστοποίηση ως προς τις χρονικές παραμέτρους ισοδυναμεί με βελτιστοποίηση πάνω στην μονοδιάστατη NLSE. Όπως όμως έχουμε ήδη εξηγήσει στο πρώτο κεφάλαιο, η 1D-NLSE είναι ολοκληρώσιμη και οι λύσεις της είναι ήδη γνωστές. Αντί να προσπαθούμε επομένως να προσεγγίσουμε ήδη γνωστές λύσεις είναι προτιμότερο να τις αντικαταστήσουμε κατευθείαν στο ansatz, παίρνοντας την μονοπαραμετρική μορφή:

$$\psi = T(t, z)R(\delta; \rho^m)e^{im\phi} \quad (3.6)$$

όπου $T(t, z)$ μια ακριβής λύση της 1D-NLSE. Να τονίσουμε ακόμη μία φορά ότι αυτή η προσέγγιση, παρόλο που απλοποιεί σημαντικά τα πράγματα, δεν απαιτεί καμία επιπλέον παραδοχή από τη μεριά μας και έτσι δεν υπολείπεται σε τίποτα της πρόσέγγισης της εξίσωσης 3.1.

Τέλος η εξίσωση Euler –Lagrange για την μεταβλητή δ δίνει:

$$L = I_0^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 - I_1^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_1 - m^2 I_1^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_3 + I_3^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_0 - I_2^t \frac{\partial}{\partial \delta} I_2 = 0 \quad (3.7)$$

Αν επιλέξουμε:

$$R = \tanh(\delta \rho^m)$$

οι μερικές παράγωγοι των ολοκληρωμάτων I_0, \dots, I_3 υπολογίζονται αναλυτικά για $m = 1$ και $m = 2$ και οι εκφράσεις τους παρουσιάζονται στον πίνακα 2.1. Αντικαθιστώντας, παίρνουμε:

$$\text{Για } m = 1: \delta = \sqrt{\frac{2I_0^t \ln(2) + 2I_3^t \ln(2) - I_2^t (1 + 8 \ln(2))}{3I_1^t}} \quad (3.8)$$

$$\text{Για } m = 2: \delta = \frac{I_0^t + I_3^t - 4I_2^t/3}{4I_1^t} \quad (3.9)$$

3.1 Η απλή περίπτωση του ενός σολιτονίου

Έχουμε το ansatz:

$$\psi = \operatorname{sech}(t) \operatorname{tanh}(\delta \rho^m) e^{im\phi - iz/2} \quad (3.10)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} I_0^t &= \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt = \int_{-\infty}^{\infty} i \left[-\frac{i}{2} \operatorname{sech}^2(t) - \frac{i}{2} \operatorname{sech}^2(t) \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) dt = 2 \end{aligned}$$

$$I_1^t = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) dt = 2$$

$$I_2^t = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^4(t) dt = 4/3$$

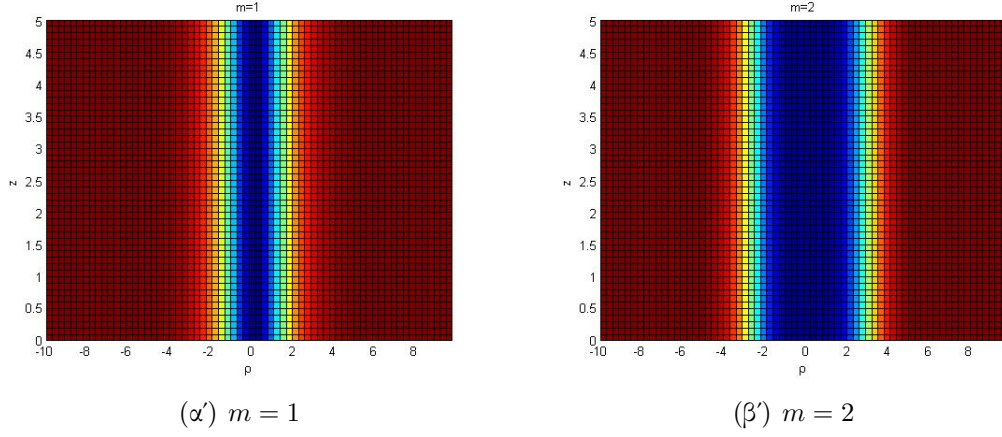
$$I_3^t = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(t) \operatorname{tanh}^2(t) dt = 2/3$$

Από τις εξισώσεις 3.8 και 3.9 παίρνουμε:

$$\delta \approx 0.63, \quad \text{για } m = 1$$

$$\delta \approx 0.11, \quad \text{για } m = 2$$

Παρατηρούμε ότι ο παλμός διατηρεί το σχήμα του καθώς διαδίδεται στον άξονα z . Αυτό δεν μας εκπλήσσει, καθώς είναι μία θεμελιώδης ιδιότητα των λύσεων πρώτης τάξης. Ακόμη, για $m = 2$, δηλαδή για δίνες που περιστρέφονται γρηγορότερα, η οπή είναι μεγαλύτερη, αλλά κλείνει πιο γρήγορα. Με άλλα λόγια, καθώς αυξάνεται η ταχύτητα περιστροφής, η ενέργεια μετατοπίζεται προς μεγαλύτερα ρ πράγμα που βρίσκεται σε συμφωνία με τη φυσική μας διαίσθηση.



Σχήμα 3.1: Εδώ αποτυπώνεται το τετάγωνο του ακτινικού μέρους του σολιτόνιου. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από το z καθώς και ότι η οπή είναι μεγαλύτερη για $m = 2$.

3.2 Η περίπτωση του breather.

Το ansatz είναι:

$$\psi = 4 \frac{\cosh(3t) + 3 \cosh(t) \exp(-i4z)}{\cosh(4t) + 4 \cosh(2t) + 3 \cos(4z)} \tanh(\delta \rho^m) e^{im\phi - iz/2} \quad (3.11)$$

Έχουμε

$$I_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt$$

Αν συμβολίσουμε $T \equiv \frac{A}{B}$, επειδή $B \in \mathbb{R}$, είναι:

$$i [T^* T_z - T_z^* T] = i \frac{A^* A_z - A_z^* A}{B^2}$$

$$A = 4 [\cosh(3t) e^{-iz/2} + 3 \cosh(t) e^{-i9z/2}], \quad A^* = 4 [\cosh(3t) e^{iz/2} + 3 \cosh(t) e^{i9z/2}]$$

$$A_z = -2i [\cosh(3t) e^{-iz/2} + 27 \cosh(t) e^{-i9z/2}], \quad A_z^* = 2i [\cosh(3t) e^{iz/2} + 27 \cosh(t) e^{i9z/2}]$$

Επομένως:

$$I_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt$$

$$= 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^2(3t) + 81 \cosh^2(t) + 60 \cosh(t) \cosh(3t) \cos(4z)}{(\cosh(4t) + 4 \cosh(2t) + 3 \cos(4z))} dt \quad (3.12)$$

Ακόμη

$$I_1^t = \int_{-\infty}^{\infty} TT^* dt = 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^2(3t) + 9\cosh^2(t) + 6\cosh(3t)\cosh(t)\cos(4z)}{(\cosh(4t) + 4\cosh(2t) + 3\cos(4z))} dt$$

Επειδή το I_1^t εκφράζει την ενέργεια του παλμού, η τιμή του είναι ανεξάρτητη από την τιμή του z . Για $z=0$ γίνεται:

$$\begin{aligned} I_1^t &= 16 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cosh(3t) + 3\cosh(t))^2}{(\cosh(4t) + 4\cosh(2t) + 3)^2} dt = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cosh^6(t)}{\cosh^8(t)} dt \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}(t) dt = 8 \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} I_2^t &= \int_{-\infty}^{\infty} [TT^*]^2 dt \\ &= 256 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\cosh^2(3t) + 9\cosh^2(t) + 6\cosh(3t)\cosh(t)\cos(4z)}{(\cosh(4t) + 4\cosh(2t) + 3\cos(4z))} \right]^2 dt \end{aligned}$$

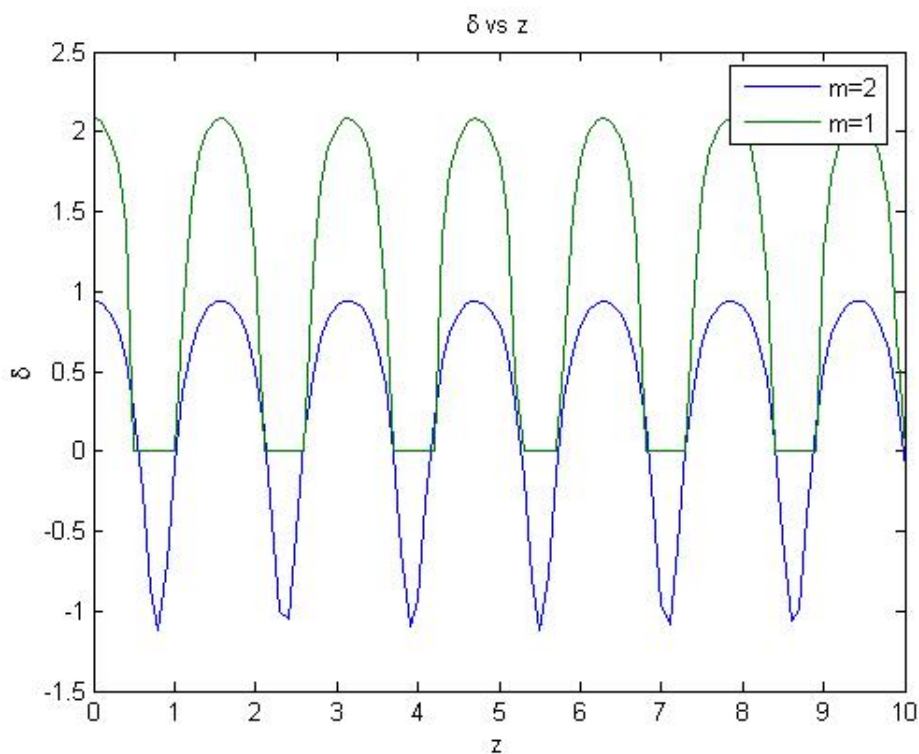
Τέλος, για το I_3^t , συμβολίζουμε:

$$T \equiv 4 \frac{\cosh(3t) + 3 \cosh(t) \exp(-i4z)}{B} e^{-iz/2}$$

Έτσι:

$$\begin{aligned} I_3^t &= \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt \\ &= 16 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[\frac{d \cosh(3t)}{dt} \frac{1}{B} \right]^2 + 6 \left[\frac{d \cosh(3t)}{dt} \frac{1}{B} \right] \left[\frac{d \cosh(t)}{dt} \frac{1}{B} \right] \cos(4z) \right. \\ &\quad \left. + 9 \left[\frac{d \cosh(t)}{dt} \frac{1}{B} \right]^2 \right] dt \end{aligned}$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια του Matlab. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο σχήμα 3.2. Παρατηρούμε ότι για $m = 1$ το δ παίρνει πραγματικές και φανταστικές τιμές, ενώ για $m = 2$ παίρνει μόνο πραγματικές, άλλα αλλάζει πρόσημο κατά τη διάδοση και μηδενίζεται περιοδικά. Είναι προφανές ότι η λύση στην περίπτωση που $m = 1$ δεν έχει φυσικό νόημα,



Σχήμα 3.2: Η εξέλιξη του δ κατά τη διάδοση του breather. Για $m = 1$ το δ παίρνει και φανταστικές τιμές, στις οριζόντιες περιοχές όπου εξισώνεται με το μηδέν, ενώ για $m = 2$ το δ παίρνει και αρνητικές.

γεγονός που μας κάνει να συμπεράνουμε ότι κατά πάσα πιθανότητα δεν υπάρχουν δίνες με μοναδιαία στροφορμή που να φιλοξενούν παλμούς τύπου breather.

Για $m = 2$, ακόμη κι αν ήθελε κανείς να αποδώσει φυσικό νόημα στην αλλαγή προσήμου, θα ήταν δύσκολο να εξηγήσει την ασυμμετρία της καμπύλης στο θετικό και αρνητικό ημιεπίπεδο. Επιπλέον ο στιγμιαίος μηδενισμός του δ σημαίνει ότι ο παλμός στιγμιαία εξαφανίζεται και αμέσως μετά επανεμφανίζεται, γεγονός που αντιβαίνει στην αρχή διατήρησης της ενέργειας. Το ότι η ενέργεια στο σύστημά μας δεν διατηρείται δεν φανερώνει κάποιο λάθος στις πράξεις. Είναι συνέπεια του ότι έχουμε θέσει τον περιορισμό η ενέργεια να διατηρείται μόνο χρονικά και όχι χωρικά, αφού το χωρικό ολοκλήρωμα της ενέργειας είναι άπειρο για $\delta \neq 0$ και η διατήρησή του δεν θα είχε κανένα νόημα. Άλλωστε οι εξισώσεις 3.8 και 3.9 υπολογίστηκαν έχοντας σαν δεδομένο ότι $\delta > 0$ και μόνο σε αυτήν την περιοχή θα πρέπει να θεωρούνται αληθείς. Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματά μας συνηγορούν υπέρ της ανυπαρξίας παλμών τύπου breather σε οπτικές δίνες, ή τουλάχιστον υπέρ της ανυπαρξίας τους σε δίνες με μικρή

στροφορμή, όπως αυτές που μελετάμε.

3.3 Η γενική περίπτωση των σολιτονίων με διαφορετικά πλάτη και ίσες ταχύτητες.

Στην ενότητα αυτή μελετάμε τη γενική περίπτωση των σολιτονίων με διαφορετικά πλάτη και ίσες ταχύτητες. Η ανυπαρξία παλμών τύπου breather εγείρει το ερώτημα εάν το συμπέρασμα της προηγούμενης ενότητας μπορεί να γενικευτεί για όλους τους συνδυασμούς με δύο σολιτόνια με μηδενική ταχύτητα. Το χρονικό μέρος του ansatz είναι:

$$T = \frac{4i(b_2^2 - b_1^2)[b_1 \cosh(2b_2 t) \exp(-2ib_1^2 z) - b_2 \cosh(2b_1 t) \exp(-2ib_2^2 z)]}{(b_1 - b_2)^2 C_+ + (b_1 + b_2)^2 C_- - 4b_1 b_2 \cos \phi} \quad (3.13)$$

όπου $C_{\pm} = \cosh[2(b_2 \pm b_1)t]$ και $\phi = 2(b_2^2 - b_1^2)z$. Οι παράμετροι b_1 και b_2 αντιστοιχούν στα πλάτη των δύο σολιτονίων.

Αν εκμεταλλευτούμε την αλλαγή της κλίμακας, παίρνουμε την ισοδύναμη, αλλά απλούστερη μονοπαραμετρική έκφραση, θέτοντας:

$$b_1 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad b_2 = \frac{b}{2}$$

Τότε

$$T = \frac{2(b^2 - 1)[\cosh(bt) - b \cosh(t) \exp[i(1 - b^2)z/2]]}{(1 - b)^2 C_+ + (1 + b)^2 C_- - 4b \cos \phi} \quad (3.14)$$

όπου $C_{\pm} = \cosh[2(b \pm 1)t]$ και $\phi = \frac{1}{2}(b^2 - 1)z$ και b πραγματικός. Είναι εμφανές ότι ο breather ισοδυναμεί με την ειδική περίπτωση $b = -3$.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η περίπτωση $b' = -b$ ισοδυναμεί με μία καθυστέρηση μισής περιόδου επί μία διαφορά φάσης. Επομένως οι δύο χώροι $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$ είναι ισοδύναμοι. Λόγω της συμμετρίας μεταξύ των δύο πλατών των δύο σολιτονίων, οι χώροι $(0, 1)$ και $(1, \infty)$ είναι επίσης ισοδύναμοι. Στην παρούσα εργασία περιορίζουμε την ανάλυσή μας στον χώρο $(1, \infty)$, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Να σημειώσουμε ότι όσο το πλάτος του ενός σολιτονίου πάει προς το άπειρο, ή ισοδύναμα το πλάτος του άλλου σολιτονίου πάει προς το μηδέν, τόσο μετακινούμαστε προς την περίπτωση του ενός και μοναδικού

σολιτονίου. Συνεπώς, για μεγάλες τιμές του b περιμένουμε ότι το ansatz θα μας δώσει φυσικά αποδεκτές λύσεις.

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τα χρονικά ολοκληρώματα.

Έχουμε

$$I_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt$$

Αν όπως και πριν συμβολίσουμε $T \equiv \frac{A}{B}$, επειδή $B \in \mathbb{R}$, θα πάρουμε:

$$i [T^* T_z - T_z^* T] = i \frac{A^* A_z - A_z^* A}{B^2}$$

Είναι:

$$A = 2(b^2 - 1) [\cosh(bt)e^{-iz/2} - b \cosh(t)e^{-ib^2/2}] \quad (3.15)$$

$$A^* = 2(b^2 - 1) [\cosh(bt)e^{iz/2} - b \cosh(t)e^{ib^2/2}] \quad (3.16)$$

$$A_z = -i(b^2 - 1) [\cosh(bt)e^{-iz/2} - b^3 \cosh(t)e^{-ib^2/2}] \quad (3.17)$$

$$A_z^* = i(b^2 - 1) [\cosh(bt)e^{iz/2} - b^3 \cosh(t)e^{ib^2/2}] \quad (3.18)$$

Τελικά:

$$I_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(b^2 - 1)^2 [\cosh^2[bt] + b^4 \cosh^2[t] - 2(b^3 - b) \cosh[bt] \cosh[t] \cos[(b^2 - 1)z/2]}{B^2} dt \quad (3.19)$$

Ακόμη:

$$\begin{aligned} I_1^t &= \int_{-\infty}^{\infty} TT^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(b^2 - 1)^2 [\cosh^2[bt] + b^2 \cosh^2[t] - 2b \cosh[bt] \cosh[t] \cos[(b^2 - 1)z/2]}{B^2} dt \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$I_2^t = \int_{-\infty}^{\infty} (TT^*)^2 dt \quad (3.21)$$

του οποίου η μορφή προσδιορίζεται απ ευθείας από την προηγούμενη εξίσωση.

Τέλος:

$$\begin{aligned}
 I_3^t &= \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt \\
 &= 4(b^2 - 1)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left[\frac{d \cosh(bt)}{dt} \frac{1}{B} \right]^2 - 2b \left[\frac{d \cosh(bt)}{dt} \frac{1}{B} \right] \left[\frac{d \cosh(t)}{dt} \frac{1}{B} \right] \cos\left(\frac{b^2 - 1}{2} z\right) \right. \\
 &\quad \left. + b^2 \left[\frac{d \cosh(t)}{dt} \frac{1}{B} \right]^2 \right] dt
 \end{aligned}$$

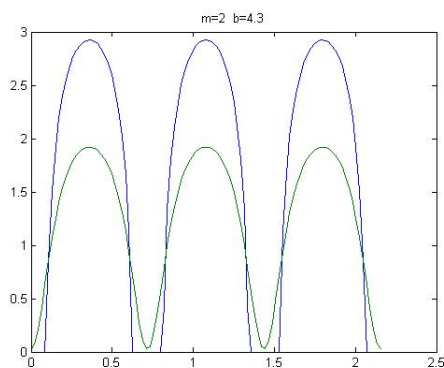
3.3.1 Τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται αριθμητικά με τη βοήθεια του Matlab. Όπως είχαμε προβλέψει, για κάθε τιμή της στροφορμής υπάρχει ένα κατώφλι πέρα από το οποίο οι λύσεις που παίρνουμε είναι φυσικά αποδεκτές. Με άλλα λόγια, μία οπτική δίνη μπορεί να φιλοξενήσει δύο σολιτόνια, αρκεί το ένα να είναι κυρίαρχο με επαρκώς μεγαλύτερο πλάτος από το άλλο. Καθώς η στροφορμή της δίνης αυξάνεται, η απαίτηση αυτή γίνεται όλο και λιγότερο αυστηρή. Για $m = 1$ θα πρέπει $b_2/b_1 > 6.2$ ενώ για $m = 2$ αρκεί $b_2/b_1 > 4.3$. Ο breather προφανώς δεν ικανοποιεί καμία από τις παραπάνω απαιτήσεις, ωστόσο είναι πολύ πιθανό να υπάρχουν breathers για μεγαλύτερα m . Μία αξιοσημείωτη ιδιότητα των λύσεων είναι η διαμόρφωση του εύρους της οπής της δίνης. Αυτή η ιδιότητα ενδεχομένως να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές κυματοδότησης.

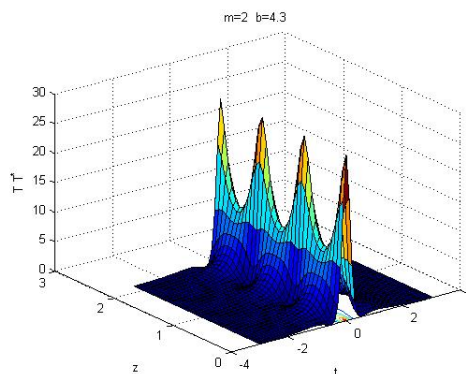
Τα αποτελέσματα για $b = 4.3$ απεικονίζονται στα διαγράμματα του σχήματος 3.3. Παρόλο που ο παλμός δεν είναι ακριβώς breather, το σχήμα του δεν διαφέρει σημαντικά από αυτόν.

Στο σχήμα 3.4 απεικονίζονται τα αποτελέσματα για $b = 7$, όπου υπάρχουν λύσεις και για $m = 1$. Παρατηρούμε ότι σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση το χρονικό μέρος του παλμού μεταβάλλεται πολύ λιγότερο κατά τη διάδοση. Αυτό είναι αναμενόμενο, καθώς έχουμε μετακινηθεί πιο κοντά στη μονοσολιτονιακή λύση. Επίσης, παρόλο που η περίοδος του ακτινικού μέρους είναι ίδια και για τις δύο τιμές του spin, η μεταβολή είναι αρκετά πιο απότομη για $m = 1$. Τέλος, είναι εμφανές ότι, όπως και προηγουμένως, η αύξηση του spin μεγαλώνει την οπή και μετατοπίζει την ενέργεια προς τα έξω.

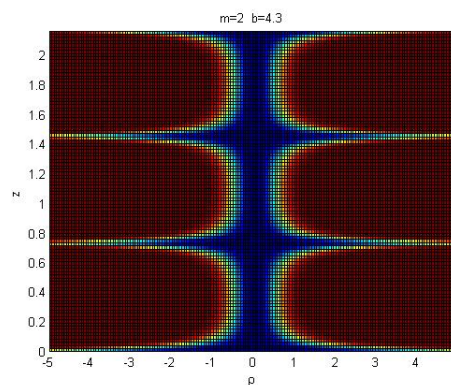
Στα σχήματα 3.5 και 3.6 απεικονίζονται τα ακτινικά μέρη των λύσεων για διαφορετικές τιμές του b για $m = 1$ και $m = 2$ αντίστοιχα. Αλλάζοντας την τιμή του b μεταβάλλεται η περίοδος, ενώ αλλάζοντας το spin μεταβάλλεται το σχήμα της οπής. Επομένως, σε περίπτωση που επιθυμούμε να επιτύχουμε κάποιο συγκεκριμένο σχήμα για την οπή, έχουμε δύο βαθμούς ελευθερίας. Εάν τέλος λάβουμε υπ όψη την αλλαγή της κλίμακας και πάρουμε τη διπαραμετρική



(α') Τα δ_1 (μπλέ χρώμα) και δ_2 (πρασινό χρώμα) για $b = 4.3$



(β') TT^* για $b = 4.3$



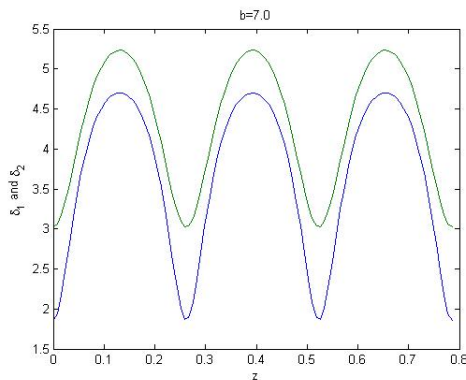
(γ') $|R|$ για $b = 4.3$ και $m = 2$.

Σχήμα 3.3: Τα αποτελέσματα για $b = 4.3$. Μόνο η λύση για $m = 2$ είναι φυσικώς αποδεκτή.

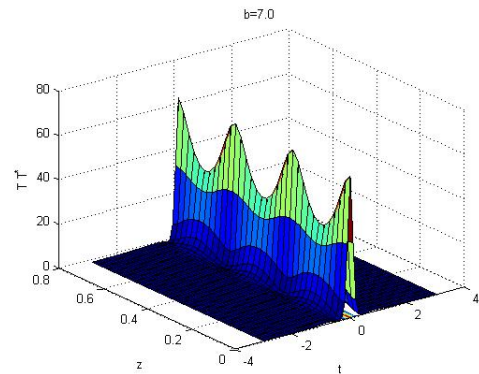
μορφή του T , οι βαθμοί ελευθερίας γίνονται τρεις (η στροφορμή, το μέτρο του b_1 καθώς και ο λόγος b_2/b_1).

3.4 Δύο παλμοί με ίσα πλάτη και αντίθετες ταχύτητες.

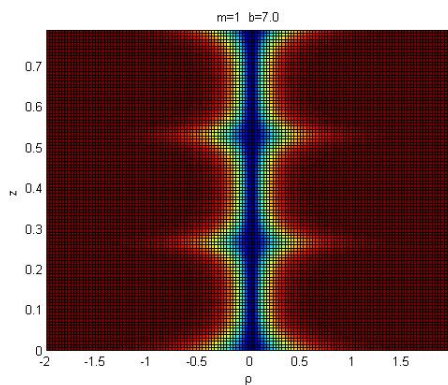
Αφού είδαμε ότι μία δίνη δεν μπορεί να φιλοξενήσει δύο σολιτόνια με σχεδόν ίσα πλάτη που κινούνται με την ίδια ταχύτητα, θα είχε ενδιαφέρον να δούμε εάν θα μπορούσε να φιλοξενήσει δύο σολιτόνια με ίσα πλάτη αλλά διαφορετικές ταχύτητες, που συγκρούονται και μοιράζονται τον ίδιο χώρο για ένα πεπερασμένο



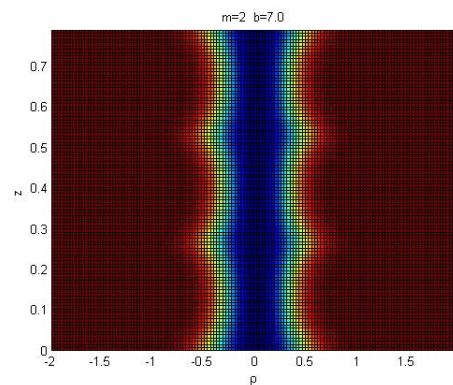
(α') Τα δ_1 (μπλέ χρώμα) και δ_2 (πρασινό χρώμα) για $b = 7$



(β') TT^* για $b = 7$



(γ') $|R|$ για $b = 7$ και $m = 1$.



(δ') $|R|$ για $b = 7$ και $m = 2$.

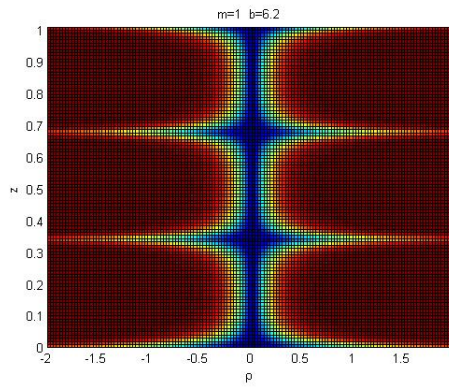
Σχήμα 3.4: Τα αποτελέσματα για $b = 7$.

χρονικό διάστημα. Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτό των δύο σολιτονίων με αντίστοιχες ταχύτητες, που έχουμε συναντήσει στο πρώτο κεφάλαιο. Μπορούμε να προβλέψουμε με αρκετή σιγουριά ότι για μικρές ταχύτητες το μοντέλο θα καταρρέει, καθώς θα προσεγγίζουμε το πρόβλημα των δύο σολιτονίων με ίσα πλάτη και ίδιες ταχύτητες.

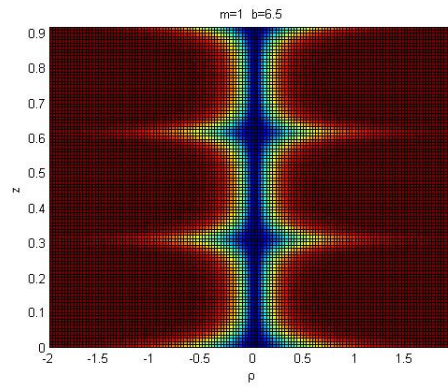
Αν οι ταχύτητες των σολιτονίων είναι $\pm a$ και τα πλάτη τους είναι ίσα με b , το χρονικό μέρος του ansatz θα είναι:

$$T = -8iab \frac{A - iB}{D} e^{[2i(a-b^2)z + i(\phi_1 + \phi_2)]} \quad (3.22)$$

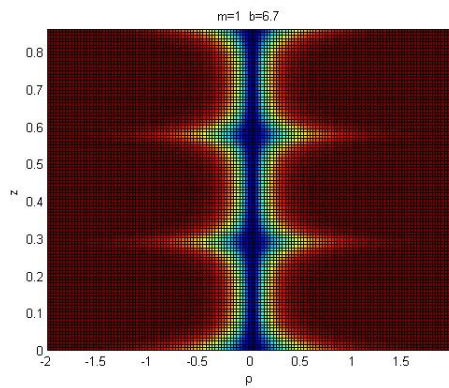
όπου $2\phi_1$ και $2\phi_2$ οι φάσεις των δύο σολιτονίων και



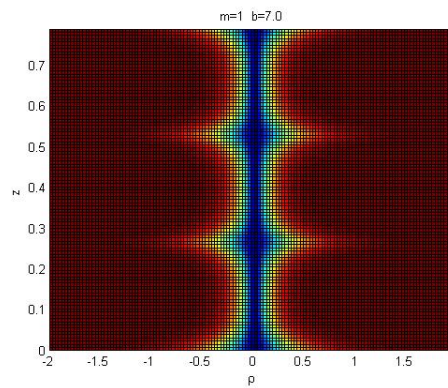
(α') $|R|$ για $b = 6.2$



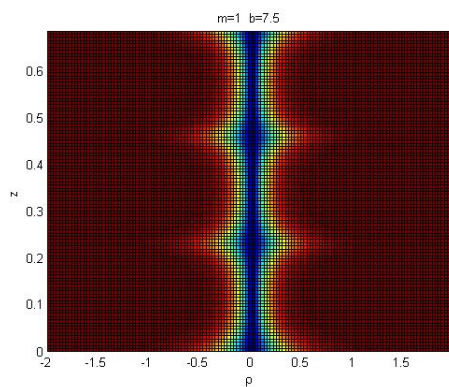
(β') $|R|$ για $b = 6.5$



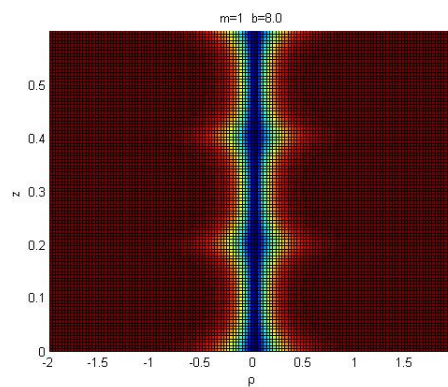
(γ') $|R|$ για $b = 6.7$



(δ') $|R|$ για $b = 7$

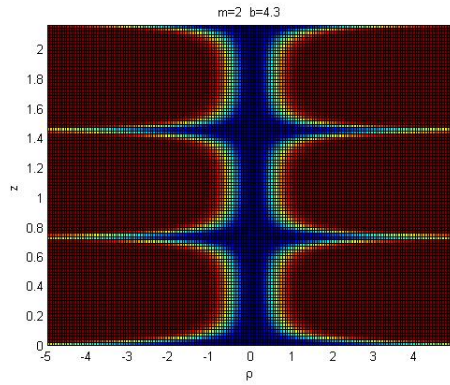


(ε') $|R|$ για $b = 7.5$

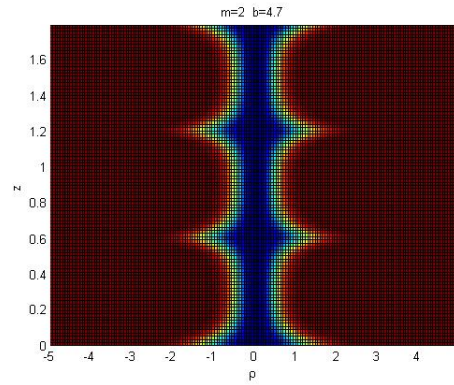


(ϛ') $|R|$ για $b = 8$

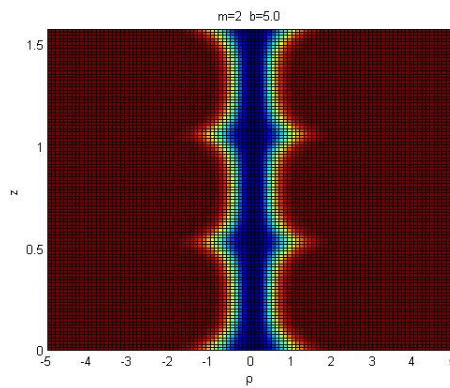
Σχήμα 3.5: Τα ακτινικά μέρη των λύσεων για $m = 1$ για διάφορες τιμές του b .



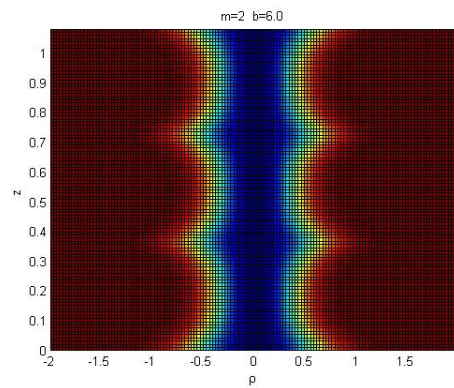
(α') $|R|$ για $b = 4.3$



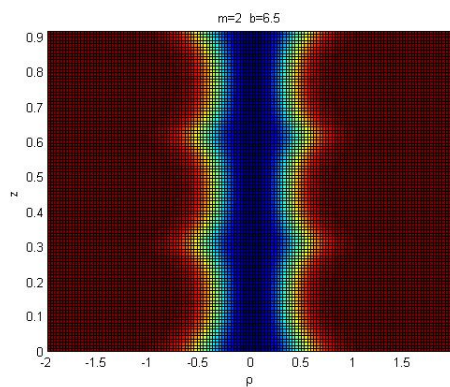
(β') $|R|$ για $b = 4.7$



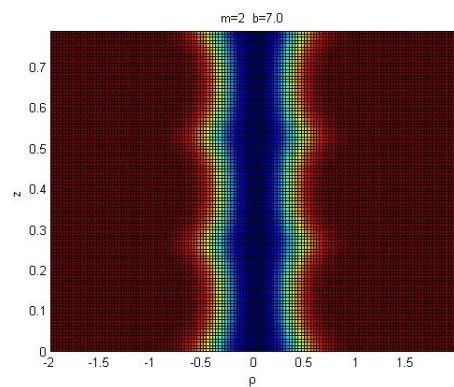
(γ') $|R|$ για $b = 5$



(δ') $|R|$ για $b = 6$



(ϵ') $|R|$ για $b = 6.5$



(ζ') $|R|$ για $b = 7$

Σχήμα 3.6: Τα ακτινικά μέρη των λύσεων για $m = 2$ για διάφορες τιμές του b .

$$A = \cosh(4abz) [a \cosh(2bt) \cos[2at + \Delta\phi] - b \sinh(2bt) \sin[2at + \Delta\phi]]$$

$$B = \sinh(4abz) [a \sinh(2bt) \sin[2at + \Delta\phi] + b \cosh(2bt) \cos[2at + \Delta\phi]]$$

$$D = a^2 \cosh(4bt) + (a^2 + b^2) \cosh(8az) - b^2 \cos(4at + 2\Delta\phi)$$

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$$

Αλλάζοντας την κλίμακα και τη φάση, θέτουμε:

$$a = \frac{V}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \phi_1 + \phi_2 = 0$$

και παίρνουμε την ισοδύναμη έκφραση:

$$T = -2iV \frac{A - iB}{D} e^{i[V^2-1]z/2} \quad (3.23)$$

όπου τώρα

$$A = \frac{1}{2} \cosh(Vz) [V \cosh(t) \cos[Vt + \Delta\phi] - b \sinh(t) \sin[Vt + \Delta\phi]]$$

$$B = \frac{1}{2} \sinh(Vz) [V \sinh(2bt) \sin[Vt + \Delta\phi] + \cosh(t) \cos[Vt + \Delta\phi]]$$

$$D = \frac{V^2}{4} \cosh(2t) + \frac{V^2 + 1}{4} \cosh(2Vz) - \frac{1}{4} \cos(2Vt + 2\Delta\phi)$$

Όταν $z \rightarrow \pm\infty$ η λύση μηδενίζεται για πεπερασμένο t και παίρνει μη μηδενικές τιμές μόνο για $t \rightarrow \pm\infty$. Συγκεκριμένα για $z \rightarrow +\infty$ και $t \rightarrow +\infty$ έχουμε:

$$\sinh(t) = \cosh(t) = \frac{e^t}{2}, \quad \sinh(Vz) = \cosh(Vz) = \frac{e^{Vz}}{2}$$

και κάνοντας τις πράξεις το T προκύπτει ίσο με:

$$T = -i \frac{\exp[i[V^2 - 1]z/2 - iVt - i\Delta\phi - i \arctan(1/V)]}{\cosh[t - Vz - \ln(\sqrt{V^2 + 1}/V)]}$$

Για $z \rightarrow +\infty$ και $t \rightarrow +\infty$, το $\ln(\sqrt{V^2+1}/V)$ στον παρονομαστή εμφανίζεται με διαφορετικό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι ο παλμός λόγω της σύγκρουσης καθυστερεί κατά $2\ln(\sqrt{V^2+1}/V)$. Η εξήγηση είναι ότι κατά τη συνάντησή του με τον άλλο παλμό στην ουσία βλέπει ένα πιο πυκνό μέσο και επομένως διανύει μεγαλύτερο οπτικό δρόμο. Να παρατηρήσουμε επίσης ότι το V απαντάται σε παραστάσεις της μορφής $t \pm Vz$ και επομένως δεν έχει το νόημα της συμβατικής ταχύτητας, αλλά μάλλον του αντιστρόφου της. Εντούτοις επιλέξαμε αυτόν τον συμβολισμό για ιστορικούς λόγους, εξαιτίας του ότι το T απαντάται συχνά με αυτήν τη μορφή στη βιβλιογραφία που αφορά χωρικά σολιτόνια όπου η z και η t είναι και οι δύο χωρικές συντεταγμένες και τότε ο όρος ταχύτητα παίρνει περισσότερο την έννοια της κλίσης της δέσμης στο επίπεδο z, t .

Έχουμε:

$$I_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt$$

Θέτοντας:

$$T = Q e^{i[V^2-1]z/2}, \quad Q \equiv -2iV \frac{A - iB}{D}$$

παίρνουμε:

$$i [T^* T_z - T_z^* T] = i [Q^* Q_z - Q_z^* Q] - [V^2 - 1] Q Q^*$$

Συμβολίζοντας

$$R = \frac{A - iB}{D}$$

παίρνουμε:

$$\begin{aligned} i [Q^* Q_z - Q_z^* Q] &= i 4V^2 [R^* R_z - R_z^* R] = \\ &= i 4V^2 \left\{ \left[\frac{A}{D} + i \frac{B}{D} \right] \left[\left[\frac{A}{D} \right]_z - i \left[\frac{B}{D} \right]_z \right] - \left[\frac{A}{D} - i \frac{B}{D} \right] \left[\left[\frac{A}{D} \right]_z + i \left[\frac{B}{D} \right]_z \right] \right\} \\ &= 8V^2 \frac{A B_z - B A_z}{D^2} \end{aligned}$$

Επίσης:

$$Q Q^* = 4V^2 \frac{A^2 + B^2}{D^2}$$

Επομένως

$$I_0^t = 8V^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A B_z - B A_z - 1/2[A^2 + B^2]}{D^2} dt \quad (3.24)$$

$$I_1^t = \int_{-\infty}^{\infty} TT^* dt = 4V^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2 + B^2}{D^2} dt \quad (3.25)$$

$$I_2^t = \int_{-\infty}^{\infty} (TT^*)^2 dt = 4V^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A^2 + B^2)^2}{D^4} dt \quad (3.26)$$

$$I_3^t = \int_{-\infty}^{\infty} (T_t T_t^*)^2 dt = 4V^2 \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\left[\frac{A}{D} \right]_t \right]^2 + \left[\left[\frac{B}{D} \right]_t \right]^2 \right\} dt \quad (3.27)$$

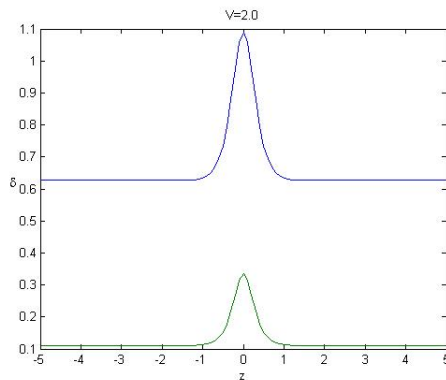
3.4.1 Τα αριθμητικά αποτελέσματα.

Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι υπάρχει λύση για κάθε τιμή της ταχύτητας V . Στο σχήμα 3.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για $V = 2$. Όταν τα δύο σολιτόνια είναι απομακρυσμένα, διαδίδονται το ένα ανεξάρτητα από το άλλο και η οπή παραμένει σταθερή κατά τη διάδοση, όπως ακριβώς και στην περίπτωση του ενός σολιτονίου. Κοντά στο $z = 0$ οι παλμοί αλληλεπιδρούν και εμφανίζεται στένωση στην οπή. Στην ίδια περιοχή το χρονικό μέρος σχηματίζει ένα διακρότημα.

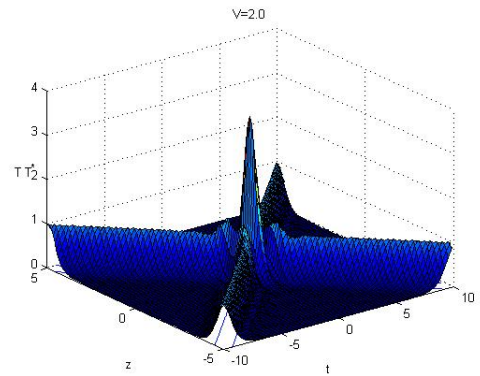
Στο σχήμα 3.8 παρουσιάζονται τα ακτινικά μέρη των λύσεων για διαφορετικές τιμές του V . Παρατηρούμε ότι καθώς το V αυξάνεται, δηλαδή καθώς αυξάνει ο αποσυντονισμός των δύο παλμών, το φαινόμενο της στένωσης εξασθενεί. Να σημειώσουμε ότι η διεύρυνση της οπής που παρατηρείται για μεγάλες τιμές του $|z|$ για $V = 5$ έχει να κάνει αποκλειστικά και μόνο με αδυναμία της αριθμητικής μεθόδου και δεν αποτελεί χαρακτηριστικό της πραγματικής λύσης.

3.5 Ansatz για τη μελέτη της συμπεριφοράς σολιτονίων με αζιμουθιακές διαταραχές.

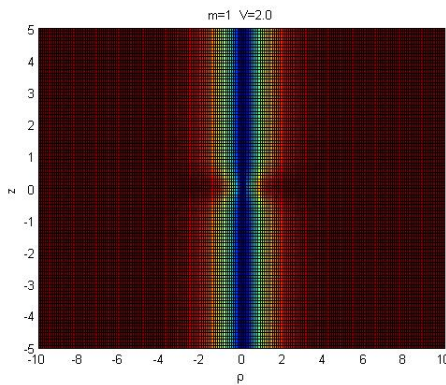
Τα ansatz που έχουμε εξετάσει έως τώρα εμφανίζουν κυλινδρική συμμετρία, εκτός βέβαια από μία διαμόρφωση φάσης $e^{im\phi}$, η οποία όμως δίνει μία Lagrangian Density ανεξάρτητη από τη γωνία ϕ . Είναι γνωστό ωστόσο ότι συχνά οι αζιμουθιακές διαταραχές δημιουργούν αστάθειες στα περιστρεφόμενα σολιτόνια, οι οποίες ενδέχεται να οδηγήσουν στην κατάρρευσή τους. Όπως λοιπόν προτείναμε στην αρχή του κεφαλαίου μια απλή γενική μέθοδο για τη μελέτη των πολυσολιτονιακών οπτικών δινών με κυλινδρική συμμετρία, θα ήταν επιθυμητό να προτείνουμε μία εξίσου απλή μέθοδο για μία εύκολη μελέτη και



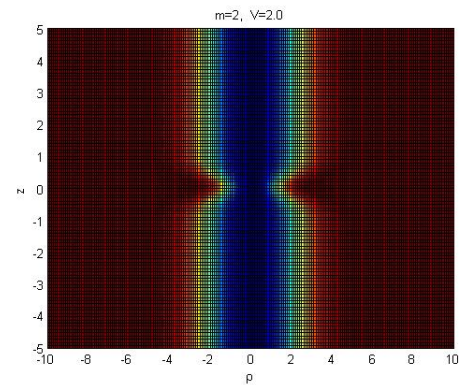
(α') Τα δ_1 (μπλέ χρώμα) και δ_2 (πρασίνο χρώμα) για $V = 2$



(β') TT^* για $V = 2$



(γ') $|R|$ για $V = 2$ και $m = 1$.



(δ') $|R|$ για $V = 2$ και $m = 2$.

Σχήμα 3.7: Τα αποτελέσματα για $V = 2$.

αξιολόγηση της συμπεριφοράς των οπτικών δινών όταν εμφανίζονται μικρές αζιμουθιακές διαταραχές.

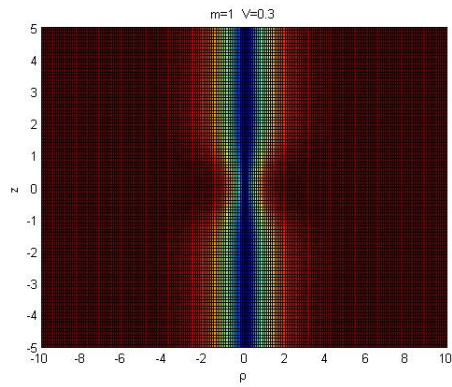
Ο απλούστερος τρόπος για να σπάσουμε την κυλινδρική συμμετρία είναι προφανώς ο πολλαπλασιασμός του αδιατάραχτου ansatz με μία περιοδική ως προς ϕ συνάρτηση, για παράδειγμα

$$1 + \epsilon \cos(n\phi)$$

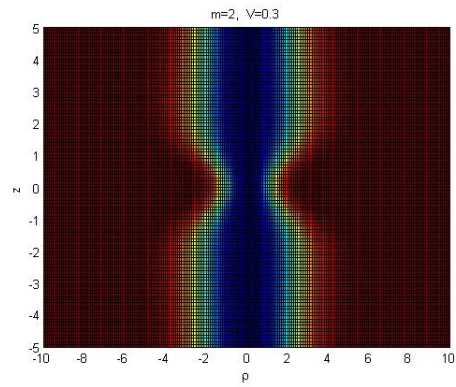
όπου το ϵ είναι διαταρακτικό και το n είναι ακέραια παράμετρος που δεν μεταβάλλεται κατά τη διάδοση. Έτσι παίρνουμε το ansatz:

$$\psi = [1 + \epsilon \cos(n\phi)] T R e^{im\phi} \quad (3.28)$$

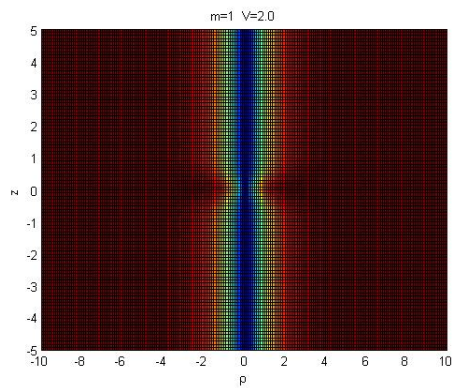
όπου T μια λύση της $1D - NLSE$ και $R = \tanh(\delta\rho^m)$



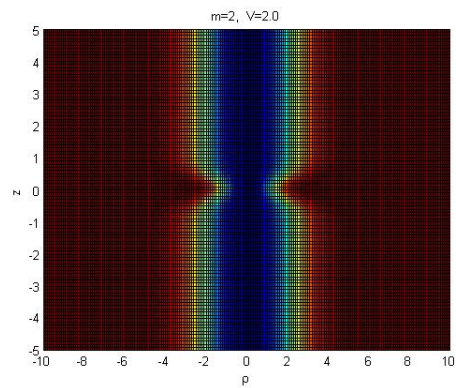
(α') $|R|$ για $m = 1$ και $V = 0.3$



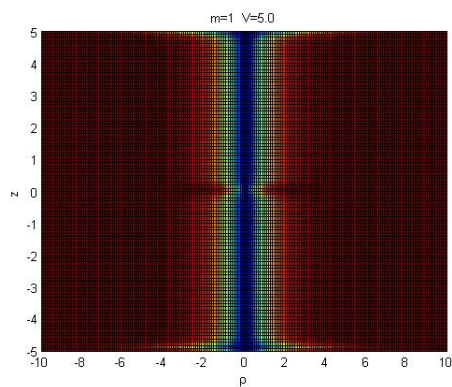
(β') $|R|$ για $m = 2$ και $V = 0.3$



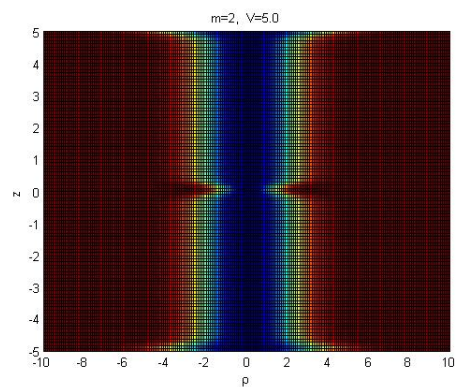
(γ') $|R|$ για $m = 1$ και $V = 2$



(δ') $|R|$ για $m = 2$ και $V = 2$



(ε') $|R|$ για $m = 1$ και $V = 5$



(ς') $|R|$ για $m = 2$ και $V = 5$

Σχήμα 3.8: Τα ακτινικά μέρη των λύσεων για διάφορες τιμές του V .

Θα μπορούσαμε ακόμη να εισάγουμε μια διαταραχή με πεπλεγμένη μορφή, όπως για παράδειγμα:

$$1 + \epsilon \cos(n\phi - a\rho)$$

η οποία διαισθητικά ίσως φαίνεται περισσότερο φυσικώς αποδεκτή. Παρόλα αυτά, η πεπλεγμένη μορφή περιπλέκει σημαντικά την ανάλυση και γι αυτόν τον λόγο δε θα μας απασχολήσει.

Η επιλογή που κάναμε στην 3.28 είναι απλοϊκή. Οι εξισώσεις Euler –Lagrange δε δίνουν παρα μία αλγεβρική εξίσωση για το ϵ , η τιμή του οποίου καθορίζεται αποκλειστικά από τη μορφή του χρονικού μέρους και επιπλέον είναι σταθερή. Είναι κατανοητό ότι μία τέτοια προσέγγιση δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει διαταραχές. Όπως έγινε κατανοητό από την ανάλυση των απλών ansatz του προηγούμενου κεφαλαίου, είναι απαραίτητο να συμπεριλάβουμε τις παρακάτω μεταβλητές:

- θ σε έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα $e^{i\theta}$, για να μας δώσει την αρχή διατήρησης της ενέργειας.
- c σε έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα $e^{i\frac{c}{2}t^2}$, για να πάρουμε ένα δυναμικό σύστημα.
- έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα A , για να μπορεί να ανταλλάσει ενέργεια με την αζιμουθιακή διαταραχή.

Μία προσεκτική ανάλυση φανερώνει την αναγκαιότητα να αντικατασταθεί το χρονικό μέρος $T(t)$, από μία παραμετρική μορφή $T(bt)$. Αν και γενικά μια τέτοια επιλογή μπορεί να οδηγήσει σε αδιέξοδο, καθώς η μεταβλητή b εμφανίζεται σε πολύπλοκες παραστάσεις μέσα στο ansatz, θα δούμε ότι τελικά στην Effective Lagrangian εμφανίζεται απλώς ένας αριθμός δυνάμεων της b πολλαπλασιασμένων επι κάποιων ολοκληρωμάτων I_i^t όμοιων με αυτά που έχουμε ως τώρα συναντήσει.

Το ansatz λοιπόν θα έχει τη μορφή:

$$\psi = [1 + \epsilon \cos(n\phi)] \mathcal{T} R e^{im\phi} \quad (3.29)$$

όπου

$$\mathcal{T} = A T(bt) e^{i\frac{c}{2}t^2} e^{i\theta} \quad (3.30)$$

Η Effective Lagrangian θα είναι:

$$L = (2 + \epsilon^2) \mathcal{I}_0^t I_0 - (2 + \epsilon^2) \mathcal{I}_1^t I_1 - [m^2 (2 + \epsilon^2) + n^2 \epsilon^2] \mathcal{I}_1^t I_3 + (2 + \epsilon^2) \mathcal{I}_3^t I_0 - \frac{1}{4} (8 + 3\epsilon^2 (8 + \epsilon^2)) \mathcal{I}_2^t I_2 \quad (3.31)$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0^t &= \int_{-\infty}^{\infty} i [T^* T_z - T_z^* T] dt & \mathcal{I}_1^t &= \int_{-\infty}^{\infty} T T^* dt \\ \mathcal{I}_2^t &= \int_{-\infty}^{\infty} (T T^*)^2 dt & \mathcal{I}_3^t &= \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt \end{aligned}$$

και τα ολοκληρώματα I_0, \dots, I_3 έχουν την συνηθισμένη τους σημασία.
Έχουμε:

$$\begin{aligned} i [T^* T_z - T_z^* T] &= -A^2 c_z t^2 T(bt) T^*(bt) - 2A^2 \theta_z T(bt) T^*(bt) \\ &+ iA^2 [T^*(bt) T_z(bt) - T_z^*(bt) T(bt)] + iA^2 b_z t [T^*(bt) T_t(bt) - T_t^*(bt) T(bt)] \end{aligned}$$

Δηλαδή το \mathcal{I}_0^t είναι άθροισμα των ολοκληρωμάτων:

$$-A^2 c_z \int_{-\infty}^{\infty} t^2 T(bt) T^*(bt) dt = -2A^2 c_z \frac{1}{b^3} I_4^t$$

όπου

$$I_4^t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^2}{2} T(t) T^*(t) dt$$

$$-2A^2 \theta_z \int_{-\infty}^{\infty} T(bt) T^*(bt) dt = -2A^2 \theta_z \frac{1}{b} I_1^t$$

όπου

$$I_1^t = \int_{-\infty}^{\infty} T(t) T^*(t) dt$$

$$iA^2 \int_{-\infty}^{\infty} [T^*(bt) T_z(bt) - T_z^*(bt) T(bt)] dt = A^2 \frac{1/b^t}{I_0}$$

όπου

$$I_0^t = \int_{-\infty}^{\infty} [T^* T_z - T_z^* T] dt$$

$$iA^2 b_z \int_{-\infty}^{\infty} t [T^*(bt) T_t(bt) - T_t^*(bt) T(bt)] dt = A^2 \frac{b_z}{b^2} I_5^t$$

όπου

$$I_5^t = \int_{-\infty}^{\infty} t [T^* T_t - T_t^* T] dt$$

Επομένως:

$$\mathcal{I}_0^t = \frac{A^2}{b^3} [bb_z I_5^t + b^2 I_0^t - 2b^2 \theta_z I_1^t - 2c_z I_4^t]$$

με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται και τα υπόλοιπα ολοκληρώματα:

$$\mathcal{I}_1^t = \frac{A^2}{b} I_1^t$$

$$\mathcal{I}_2^t = \frac{A^4}{b} I_2^t$$

όπου

$$I_2^t = \int_{-\infty}^{\infty} (TT^*)^2 dt$$

και τέλος

$$\mathcal{I}_3^t = A^2 \left[2\frac{c^2}{b^3} I_4^t + bI_3^t + \frac{c}{b} I_5^t \right]$$

όπου

$$I_3^t = \int_{-\infty}^{\infty} T_t T_t^* dt$$

Να σημειώσουμε ότι η ανάλυση που προηγήθηκε έχει γενικό χαρακτήρα και η μέθοδος που προτείνεται μπορεί να εφαρμοστεί για κάθε οπτική δίνη με spin ίσο με 1 ή 2. Τα I_i^t που εμφανίζονται στην Effective Lagrangian είναι παράμετροι χαρακτηριστικές για κάθε ξεχωριστό πρόβλημα, που προσδιορίζονται πλήρως από την αδιατάρακτη λύση του μονοδιάστατου προβλήματος και επομένως είναι ανεξάρτητες από τις μεταβλητές του ansatz. Ο υπολογισμός τους γίνεται με μια απλή ολοκλήρωση, αναλυτικά, όπου αυτό είναι δυνατόν, ή διαφορετικά αριθμητικά. Οι εξισώσεις Euler –Lagrange δίνουν ένα επιλύσιμο δυναμικό σύστημα, το οποίο και πάλι εκφυλίζεται 6×6 σε ένα δυναμικό σύστημα 5×5 στο οποίο δεν εμπεριέχεται η μεταβλητή δ και το οποίο επιλύεται αυτόνομα, καθώς και σε μία αλγεβρική εξίσωση, από την οποία υπολογίζεται η τιμή του δ με απλή αντικατάσταση των τιμών που παίρνουμε από την επίλυση του συστήματος.

Bibliography

- [1] A.Hasegawa and F.Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23:142, 1973.
- [2] A.Hasegawa and F.Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. ii. normal dispersion. *Appl. Phys. Lett.*, 23:171, 1973.
- [3] D. Anderson. Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fibers. *Phys. Rev. A*, 27(6):3135–3145, Jun 1983.
- [4] I. Aranson and V. Steinberg. Stability of multicharged vortices in a model of superflow. *Phys. Rev. B*, 53(1):75–78, Jan 1996.
- [5] N. K. Efremidis, K. Hizanidis, B. A. Malomed, and P. D. Trapani. Three-dimensional vortex solitons in self-defocusing media. *Physical Review Letters*, 98(11):113901, 2007.
- [6] G.P.Agrawal. *Applications of Nonlinear Fiber Optics*. Optics and Photonics. Academic Press, 2001.
- [7] J.H.Davies. *The Physics of Low-Dimensional Semiconductors: An introduction*. Cambridge University Press, 1998.
- [8] J.Rasmussen and K.Rypdal. Blow-up in nonlinear schroedinger equations - i a general review. *Physica Scripta*, 33:481–497, 1986.
- [9] J.Rasmussen and K.Rypdal. Blow-up in nonlinear schroedinger equations - ii similarity structure of the blow-up singularity. *Physica Scripta*, 33:498–504, 1986.
- [10] S.Trillo and W.Torruellas. *Spatial Solitons*. Springer, 2001.
- [11] C. T. Law and J. G. A. Swartzlander. Optical vortex solitons and the stability of dark soliton stripes. *Opt. Lett.*, 18(8):586, 1993.

- [12] L.D.Landau and E.M.Lifshitz. *Mechanics*, volume 1 of *Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 1976.
- [13] L.D.Landau, E.M.Lifshitz, and L.P.Pitaevskii. *Electrodynamics of Continuous Media*, volume 8 of *Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics*. Elsevier Butterworth-Heinemann, 1993.
- [14] E. Merzbacher. *Quantum Mechanics*. John Willey and Sons, third edition, 1998.
- [15] N.Akhmediev and A.Ankiewicz. Spatial soliton x-junctions and couplers. *Opt. Commun.*, 100:186–192, 1993.
- [16] N.Akhmediev and A.Ankiewicz. *Solitons: Nonlinear pulses and beams*. Chapman and Hall, 1997.
- [17] D. Rozas, C. T. Law, and J. G. A. Swartzlander. Propagation dynamics of optical vortices. *J. Opt. Soc. Am. B*, 14(11):3054–3065, 1997.
- [18] J. Satsuma and N. Yajima. B. Initial Value Problems of One-Dimensional Self-Modulation of Nonlinear Waves in Dispersive Media. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, 55:284–306, 1974.