ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σκέδαση Επίπεδου Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος από έκκεντρους κυκλικούς κυλίνδρους με Υλικά και Μεταϋλικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στάθης Γεώργιος-Θεόδωρος

Επιβλέπων : Ιωάννης Ρουμελιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2008

Ε Θ Ν Ι Κ Ο   Μ Ε Τ Σ Ο Β Ι Ο   Π Ο Λ Υ Τ Ε Χ Ν Ε Ι Ο

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σκέδαση Επίπεδου Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος από έκκεντρους κυκλικούς κυλίνδρους με Υλικά και Μεταϋλικά

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στάθης Γεώργιος-Θεόδωρος

Επιβλέπων : Ιωάννης Ρουμελιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την η Ιουλίου 2008.

....	....	....
Ι. Ρουμελιώτης	Ι. Τσαλαμέγκας	Η. Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2008

....
Γεώργιος-Θεόδωρος Στάθης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας είναι η επίλυση με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών μιας γεωμετρικής διάταξης που αποτελείται από δύο απείρου μήκους διηλεκτρικούς κυλίνδρους ο ένας μέσα στον άλλον και τους οποίους ακτινοβολούμε με προσπίπτον κύμα. Με άλλα λόγια επιλύσαμε ένα κλασσικό ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα με οριακές συνθήκες στα όρια των κυλίνδρων κάνοντας κάποιες προσεγγίσεις με σειρές Maclaurin στα πεδία που παρουσιάζονται. Έτσι, υπολογίσαμε τους συντελεστές του σκεδαζόμενου πεδίου και μέσω αυτών τις επιφάνειες σκέδασης(radar) για διάφορες τιμές των διηλεκτρικών σταθερών ε, μ. Επιπλέον, αντί για διηλεκτρικός θεωρήσαμε ότι ο κύλινδρος που περιβάλλει τον μικρότερο είναι μεταϋλικό, δηλαδή υλικό με αρνητικό ε και μ.

Η εργασία περιλαμβάνει μια σειρά αναλυτικών πράξεων και υπολογισμών μαθηματικούς τύπους καθώς και ένα πρόγραμμα που γράφτηκε σε Matlab για να μας δώσει τα αποτελέσματά μας και τις γραφικές μας παραστάσεις. Η επαλήθευση της ορθότητας των πράξεών μας έγινε μέσω του θεωρήματος πρόσω σκέδασης.

Λέξεις Κλειδιά

Μεταϋλικά, διάταξη κυλίνδρων, ηλεκτρομαγνητικό πρόβλημα, μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών, επιφάνειες σκέδασης.

Abstract

In this thesis the scattering of a plane electromagnetic wave from an eccentrically coated infinite dielectric cylinder is considered using classical separation of variables techniques combined with Maclaurin Series. That's a classical electromagnetic problem with boundary conditions on the cylinders surfaces. So, we found the terms of scattered field and through them the radar-scattering cross-sections for some values of dielectric constants ε, μ. Also, we changed the one dielectric cylinder with one made of metamaterial, a material with negative ε and μ.

This project consists of a large amount of analytical calculations and equations and a program written in Matlab in order to take results and graphs. The proof of the correctness of our calculations was made by the forward-scattering cross theorem.

Keywords

Metamaterials, eccentrically coated infinite dielectric cylinder, electromagnetic problem, separation of variables method, scattering sections.

1.Εισαγωγή

Η εργασία αυτή μελετά τη σκέδαση ενός ηλεκτρομαγνητικού επίπεδου κύματος, το οποίο προσπίπτει κάθετα στον άξονα ενός απείρου μήκους διηλεκτρικό κύλινδρο που περιβάλλει έκκεντρα έναν άλλο κυκλικό διηλεκτρικό κύλινδρο, επίσης απείρου μήκους. Οι δύο κύλινδροι έχουν παράλληλους άξονες και τα προσπίπτοντα κύματα είναι δύο ειδών, TM και TE, δηλαδή έχουν μηδενική συνιστώσα μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου αντίστοιχα στην διεύθυνση των αξόνων των δύο κυλίνδρων (σχ.1).

Ο **εσωτερικός** κύλινδρος έχει ακτίνα **b** και ο **εξωτερικός** ακτίνα **a**. Η απόσταση μεταξύ των αξόνων τους είναι **d**. Η εκκεντρότητα **d** θεωρείται μικρή και τέτοια ώστε η ποσότητα **d/a** να είναι:

$$\mathbf{d/a \ll 1}$$

ώστε να μπορούν να αμεληθούν όροι της μορφής:

$$\mathbf{(d/a)^n,\ n>2,}$$

οι οποίοι παρουσιάζονται κατά την ανάπτυξη των προκυπτουσών συναρτήσεων σε σειρές MacLaurin.

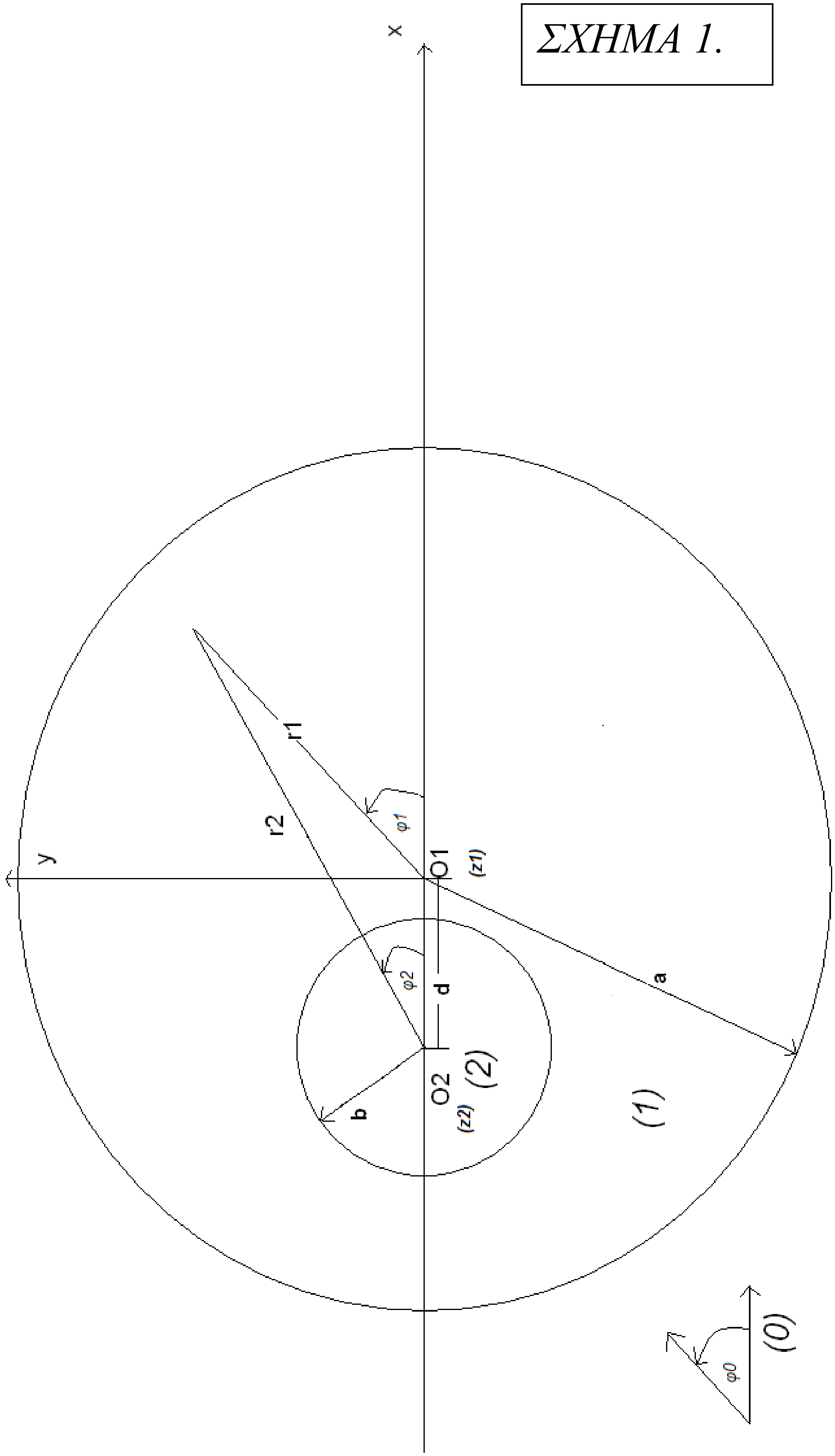
Η γωνία πρόσπτωσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι φ_0 ως προς τον θετικό ημιάξονα x, ενώ το σκεδαζόμενο πεδίο μετράται στη γωνία φ_1.

Στα αριθμητικά αποτελέσματα ο λόγος $\mathbf{a/\lambda_0}$(όπου λ_0 το μήκος κύματος στον χώρο (0) παίρνει τιμές στο διάστημα [0.1 -0.9] και αντιστοιχεί στην περιοχή συντονισμού(ή περιοχή Mie), όπου η επιφάνεια σκέδασης παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις συναρτήσει του λόγου a/λ_0, σε αντίθεση με την περιοχή Rayleigh, όπου είναι ανάλογη του λ_0^{-4} και την οπτική περιοχή, όπου παίρνει σχεδόν σταθερή τιμή. Για μεγαλύτερες τιμές του a/λ_0 χρειάζεται πολύ μεγάλος αριθμός όρων για σύγκλιση της σειράς.

Το πρόβλημα της εργασίας αυτής λύνεται με αναλυτικό τρόπο και δίνονται αριθμητικά αποτελέσματα βάσει προγράμματος στο μαθηματικό περιβάλλον **Matlab**, που γράφτηκε με βάση την αναλυτική λύση. Εμείς εκτελούμε το πρόγραμμα για διάφορες τιμές των σχετικών σταθερών $\boldsymbol{\varepsilon_1}$, $\boldsymbol{\mu_1}$, $\boldsymbol{\varepsilon_2}$, $\boldsymbol{\mu_2}$ που αφορούν τον εσωτερικό και εξωτερικό κύλινδρο. Έτσι, για αρνητικές τιμές των παραπάνω σταθερών κάνουμε και μια ταυτόχρονη έρευνα της απόκρισης της διάταξης σε **μεταϋλικά [1]**. Όλα τα αποτελέσματα της έρευνάς μας εκτίθενται σε αναλυτικούς πίνακες και γραφήματα σε αυτήν την εργασία.

Τέλος, σαν εφαρμογές αναφέρουμε την ανίχνευση ανομοιογενειών σε διηλεκτρικούς κυλίνδρους γενικά ή ιδιαίτερα σε οπτικές ίνες (fibers), όπου η παρατήρηση του πεδίου σκέδασης μπορεί να δώσει πληροφορίες για την εσωτερική κατάσταση του σκεδαστή π.χ. ύπαρξη ανομοιογενειών, ασυμμετριών κ.λ.π. Επίσης, παρατηρούμε την επίδραση των μεταϋλικών στις διάφορες διατομές σκέδασης της διάταξης.

Στο Σχήμα 1 σχεδιάζουμε τη διάταξη καθώς και τα μεγέθη που μας αφορούν πάνω σε αυτή.



ΣΧΗΜΑ 1.

2.Θεωρητική Ανάλυση

Στο Σχήμα 1 δείχνουμε την τομή ενός απείρου μήκους διηλεκτρικού κυκλικού κυλίνδρου ακτίνας **(b)** ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό ενός άλλου κυλίνδρου ακτίνας **(a),** οι άξονές τους είναι παράλληλοι με απόσταση μεταξύ τους ίση με **(d)** (μικρή)**.** Οι διηλεκτρικές σταθερές των χώρων **(0), (1), (2)** είναι αντίστοιχα $\boldsymbol{\varepsilon_0}$**,** $\boldsymbol{\varepsilon_1}$**,** $\boldsymbol{\varepsilon_2}$**,** οι μαγνητικές διαπερατότητες $\boldsymbol{\mu_0}$**,** $\boldsymbol{\mu_1}$**,** $\boldsymbol{\mu_2}$ και οι κυματικοί αριθμοί $\mathbf{k_0}$**,** $\mathbf{k_1}$**,** $\mathbf{k_2}$, αντίστοιχα.

$$\boxed{k_i = \omega\sqrt{\varepsilon_i \mu_i} \;,\; i=0,1,2}$$

Στο χώρο (0), κάθετα στους άξονες z1 και z2 **προσπίπτουν** στη διάταξη επίπεδα ηλεκτρομαγνητικά κύματα TM και TE της μορφής:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{\mathrm{E}_0}(x,y) = \hat{z}\exp[(jk_0 r_1\cos(\varphi_1-\varphi_0)] \,, \text{ (TM)} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (r_1 \geq a) \ (1) \\ &\overrightarrow{H_0}(x,y) = \hat{z}\exp[(jk_0 r_1\cos(\varphi_1-\varphi_0)] \,, \text{ (TE)} \end{aligned}$$

όπου r_1, φ_1 είναι οι πολικές συντεταγμένες ως προς τον άξονα z1 και φ_0 είναι η γωνία διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος ως προς τον θετικό ημιάξονα x.

Η χρονική εξάρτηση είναι: $\exp(-j\omega t)$.

Επειδή τα πεδία είναι ανεξάρτητα του z εκφράζονται με τη βοήθεια **βαθμωτών δυναμικών ψ,** που στη συνέχεια αναλύονται σε αθροίσματα στοιχειωδών κυλινδρικών κυμάτων, ως εξής:

$$\psi_0^{\mathrm{E,H}} = \exp[jk_0 r_1\cos(\varphi_1-\varphi_0)] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} j^m J_m(k_0 r_1)\exp[jm(\varphi_1-\varphi_0)] \quad (2)$$

Τα πεδία στους χώρους (1) και (2) του Σχήματος 1 μπορούν επίσης, να εκφραστούν σαν άπειρα αθροίσματα κυλινδρικών κυματοσυναρτήσεων με κέντρο αναφοράς το O_2 (άξονας z2):

$$\psi_1^{\mathrm{E,H}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [a_m J_m(k_1 r_2) + b_m Y_m(k_1 r_2)] \exp[jm(\varphi_2), \quad (r_2 \geq b) \ (3)$$

$$\psi_2^{\mathrm{E,H}} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m J_m(k_2 r_2) \exp[jm(\varphi_2), \qquad (r_2 \leq b) \ (4)$$

όπου r_2, φ_2 είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες με κέντρο αναφοράς το O_2 (άξονας z2) και J_m, Y_m οι κυλινδρικές συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους αντίστοιχα. Με εφαρμογή των **οριακών συνθηκών για r_2=b**:

$$\psi_1^{\mathrm{E}} = \psi_2^{\mathrm{E}} \quad , \quad \frac{\partial \psi_1^{\mathrm{E}}}{\partial r_2} = \frac{\partial \psi_2^{\mathrm{E}}}{\partial r_2} \qquad (5)$$

και

$$\psi_1^{\mathrm{H}} = \psi_2^{\mathrm{H}} \quad , \quad \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial \psi_1^{H}}{\partial r_2} = \frac{1}{k_2^2}\frac{\partial \psi_2^{H}}{\partial r_2} \quad (6)$$

και αντικατάσταση από τις **(3), (4)** προκύπτει:

$$\frac{b_m^E}{a_m^E} = \frac{x_2 J_m^{'}(x_2) J_m(x_3) - x_3 J_m(x_2) J_m^{'}(x_3)}{x_3 J_m^{'}(x_3) Y_m(x_2) - x_2 J_m(x_3) Y_m^{'}(x_2)} = q_m^E(x_2, x_3) \quad (7)$$

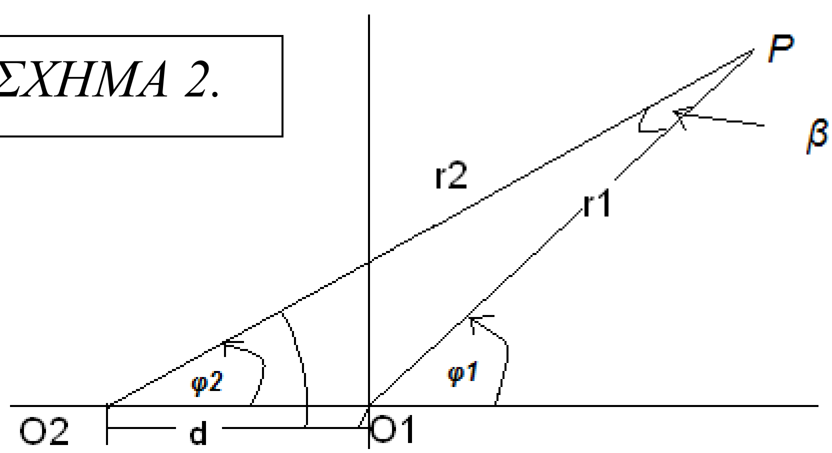
$$\frac{b_m^H}{a_m^H} = \frac{x_2 J_m^{'}(x_3) J_m(x_2) - x_3 J_m(x_3) J_m^{'}(x_2)}{x_3 Y_m^{'}(x_2) J_m(x_3) - x_2 Y_m(x_2) J_m^{'}(x_3)} = q_m^H(x_2, x_3) \quad (8)$$

όπου $\boxed{x_2 = k_1 b, \quad x_3 = k_2 b}$. Στη συνέχεια ορίζουμε $\boxed{x_1 = k_1 a}$

Για να μπορέσουμε να ικανοποιήσουμε τις οριακές **συνθήκες στην επιφάνεια r_1=a,** χρησιμοποιούμε το **νόμο των συνημιτόνων** στο τρίγωνο που σχηματίζεται στο Σχήμα 2 από τα **d, r_1, r_2,** ώστε να εκφράσουμε την **r_1 συναρτήσει της r_2.** Έτσι έχουμε:

$$r_2 = f\left(\frac{d}{r_1}\right) = r_1 \left[1 + \left(\frac{d}{r_1}\right)^2 - 2\frac{d}{r_1}\cos(\varphi_1)\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

ΣΧΗΜΑ 2.



Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε σε σειρά Maclaurin την $f(\frac{d}{r_1})$ κρατώντας μέχρι τους όρους δευτέρας τάξης. Αυτό έχει ως συνέπεια την έκφραση:

$$r_2 = f(\frac{d}{r_1}) = f(0) + f^{'}(0)\frac{d}{r_1} + \frac{1}{2} f^{''}(0)(\frac{d}{r_1})^2 = r_1[1 - \frac{d}{r_1}\cos(\varphi_1) + \frac{1}{2}(\frac{d}{r_1})^2 \sin^2(\varphi_1)] \quad (10)$$

Οι συναρτήσεις Bessel της σχέσης **(3)** μπορούν πλέον να γραφτούν με αντικατάσταση από τη **(10):**

$$J_m(k_1 r_2) = J_m\{k_1 r_1[1 - x\cos(\varphi_1) + \frac{1}{2} x^2 \sin^2(\varphi_1)]\}$$

$$(11)$$

$$Y_m(k_1 r_2) = Y_m\{k_1 r_1[1 - x\cos(\varphi_1) + \frac{1}{2} x^2 \sin^2(\varphi_1)]\}$$

όπου **x=d/r₁**. Γι' αυτό το x μπορώ να αναπτύξω κάθε μια από τις σχέσεις της (11) σε σειρά Maclaurin και τελικά οι συναρτήσεις Bessel της σχέσης **(3)** μπορούν να γραφτούν:

$$J_m(k_1 r_2) = J_m(k_1 r_1) + [-k_1 r_1 \cos(\varphi_1) J_m^{'}(k_1 r_1)](\frac{d}{r_1}) + \frac{1}{2}[k_1 r_1(\sin^2(\varphi_1) J_m^{'}(k_1 r_1) + k_1 r_1 \cos^2(\varphi_1) J_m^{''}(k_1 r_1))](\frac{d}{r_1})^2$$

$$(12)$$

$$Y_m(k_1 r_2) = Y_m(k_1 r_1) + [-k_1 r_1 \cos(\varphi_1) Y_m^{'}(k_1 r_1)](\frac{d}{r_1}) + \frac{1}{2}[k_1 r_1(\sin^2(\varphi_1) Y_m^{'}(k_1 r_1) + k_1 r_1 \cos^2(\varphi_1) Y_m^{''}(k_1 r_1))](\frac{d}{r_1})^2$$

Αντικαθιστώντας τις **(12)** στην **(3)** προκύπτει:

$$\begin{aligned}\psi_1^{\mathrm{E,H}} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \alpha_m \{J_m(k_1 r_1) + [-k_1 r_1 \cos(\varphi_1) J_m^{'}(k_1 r_1)](\frac{d}{r_1}) + \\ + \frac{1}{2}[k_1 r_1 (\sin^2(\varphi_1) J_m^{'}(k_1 r_1) + k_1 r_1 \cos^2(\varphi_1) J_m^{''}(k_1 r_1))](\frac{d}{r_1})^2\} \exp(jm\varphi_2) + \\ + \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} b_m \{Y_m(k_1 r_1) + [-k_1 r_1 \cos(\varphi_1) Y_m^{'}(k_1 r_1)](\frac{d}{r_1}) + \qquad (13) \\ + \frac{1}{2}[k_1 r_1 (\sin^2(\varphi_1) Y_m^{'}(k_1 r_1) + k_1 r_1 \cos^2(\varphi_1) Y_m^{''}(k_1 r_1))](\frac{d}{r_1})^2\} \exp(jm\varphi_2)\end{aligned}$$

Τώρα καλούμαστε να εκφράσουμε τη γωνία φ_2 συναρτήσει της γωνίας φ_1. Θα πραγματοποιήσουμε άλλη μία γεωμετρική προσέγγιση στο τρίγωνο του Σχήματος 2. Πρώτα από όλα ισχύει:

$$\mathrm{d} \ll \Rightarrow \beta \ll \Rightarrow \sin\beta \approx \beta \qquad \text{(i)}$$

δηλαδή, αν η απόσταση των 2 κέντρων είναι μικρή, τότε και η γωνία **β** παίρνει μικρές τιμές. Επιπλέον, η γωνία **φ_1 είναι παραπληρωματική με τις β, φ_2.** Αυτό σημαίνει ότι:

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \beta \qquad \text{(ii)}$$

Όμως, από το **νόμο των ημιτόνων** στο τρίγωνο του Σχήματος 2 μπορούμε να γράψουμε:

$$\sin\beta = \frac{d \sin\varphi_1}{r_2} \qquad \text{(iii)}$$

Εν συνεχεία, χρησιμοποιούμε τη σχέση **(10)** για το r_2, αντικαθιστώντας στην (ii) τις (i), (iii) και παίρνουμε μια αναλυτική σχέση για το φ_2.

$$\boxed{\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{d}{r_1}\sin\varphi_1 + (\frac{d}{r_1})^2 \frac{1}{2}\sin^2\varphi_1 \quad (14)}$$

Έτσι, μπορούμε να γράψουμε τον όρο $\exp(jm\varphi_2)$ της σχέσης **(13)** για $\mathbf{r_1=a}$ (όπου και θα εφαρμόσουμε την οριακή συνθήκη) χρησιμοποιώντας τη σχέση **(14)** ως εξής:

$$\boxed{\exp(jm\varphi_2) = \exp(jm\varphi_1)\exp(jm\frac{d}{a}\sin\varphi_1)\exp(jm(\frac{d}{a})^2\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1) \qquad (15)}$$

Γνωρίζοντας, ωστόσο, το ανάπτυγμα σε σειρά απείρων όρων $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ μπορούμε να γράψουμε τους όρους του γινομένου της σχέσης **(15)** ως εξής(πάντα κρατάμε τους όρους μέχρι τη δεύτερη τάξη $(\frac{d}{a})^2$):

$$\exp(jm\frac{d}{a}\sin\varphi_1) = 1 + jm\frac{d}{a}\sin\varphi_1 - \frac{1}{2}m^2(\frac{d}{a})^2\sin^2\varphi_1 \qquad (\alpha)$$

$$\exp(jm(\frac{d}{a})^2\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1) = 1 + jm(\frac{d}{a})^2\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1 \qquad (\beta)$$

Συνολικά, η σχέση **(15)** μέσω των **(α)** και **(β)** γράφεται:

$$\boxed{\exp(jm\varphi_2) = \exp(jm\varphi_1)[1 + jm\frac{d}{a}\sin\varphi_1 + m(j-m)(\frac{d}{a})^2\frac{1}{2}\sin^2\varphi_1] \qquad (16)}$$

Τώρα, αν αντικαταστήσουμε την **(16)** στην **(13)** έχουμε εκφράσει πλήρως πλέον τις συντεταγμένες **r_2, φ_2 συναρτήσει των r_1, φ_1** και μπορώ να εφαρμόσουμε τις οριακές συνθήκες στο σύνορο **r_1=a**. Η σχέση **(13)** γίνεται:

$$
\begin{aligned}
\psi_1^{\mathrm{E,H}} &= \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} \alpha_m \{J_m(k_1 r_1) + [-k_1 r_1 \cos(\varphi_1) J_m^{'}(k_1 r_1)](\frac{d}{r_1}) + \\
&+\frac{1}{2}[k_1 r_1 (\sin^2(\varphi_1) J_m^{'}(k_1 r_1) + k_1 r_1 \cos^2(\varphi_1) J_m^{''}(k_1 r_1))](\frac{d}{r_1})^2\} \exp(jm\varphi_1)[1 + jm\frac{d}{a}\sin\varphi_1 + m(j-m)(\frac{d}{a})^2 \frac{1}{2}\sin^2\varphi_1] + \\
&+\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} b_m \{Y_m(k_1 r_1) + [-k_1 r_1 \cos(\varphi_1) Y_m^{'}(k_1 r_1)](\frac{d}{r_1}) + \\
&+\frac{1}{2}[k_1 r_1 (\sin^2(\varphi_1) Y_m^{'}(k_1 r_1) + k_1 r_1 \cos^2(\varphi_1) Y_m^{''}(k_1 r_1))](\frac{d}{r_1})^2\} \exp(jm\varphi_1)[1 + jm\frac{d}{a}\sin\varphi_1 + m(j-m)(\frac{d}{a})^2 \frac{1}{2}\sin^2\varphi_1]
\end{aligned} \tag{17}
$$

Οι οριακές συνθήκες στο **r_1=a** είναι:

$$
\psi_1{}^{\mathrm{E}} = \psi_0{}^{\mathrm{E}} + \psi_s{}^{\mathrm{E}} \quad , \quad \frac{\partial \psi_1{}^{\mathrm{E}}}{\partial r_1} = \frac{\partial \psi_0{}^{\mathrm{E}}}{\partial r_1} + \frac{\partial \psi_s{}^{\mathrm{E}}}{\partial r_1} \tag{18}
$$

και

$$
\psi_1{}^{H} = \psi_0{}^{H} + \psi_s{}^{H} \quad , \quad \frac{1}{k_1^2}\frac{\partial \psi_1{}^{H}}{\partial r_1} = \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial \psi_0{}^{H}}{\partial r_1} + \frac{1}{k_0^2}\frac{\partial \psi_s{}^{H}}{\partial r_1} \tag{19}
$$

όπου **ψ_s είναι το σκεδαζόμενο πεδίο στο χώρο (0)**, το οποίο μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια σειράς συναρτήσεων Hankel πρώτου είδους ως εξής:

$$\boxed{\psi_s^{\mathrm{E,H}} = \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} d_m^{\mathrm{E,H}} H_m^{(1)}(k_0 r_1)\exp(jm\varphi_1) \quad (20)}$$

Κατόπιν, αντικαθιστούμε τις **(2),(17),(20)** στις **(18)** και **(19)** για να έχουμε την πλήρη μορφή των οριακών συνθηκών. Στις σχέσεις που προκύπτουν πολλαπλασιάζουμε δεξί και αριστερό μέλος με $\exp(-jn\varphi_1)$ και ολοκληρώνουμε στο διάστημα 0-2π. Με άλλα λόγια, εφαρμόζουμε κανόνες **ορθογωνιότητας** για να μείνουν ορισμένοι όροι από τους συντελεστές $a_{m,}b_m$. Τα ολοκληρώματα που χρησιμοποιήθηκαν στην προκειμένη περίπτωση εκτίθενται στο **Παράρτημα 1** αυτής της εργασίας. Από τις σχέσεις **(7),(8)** εκφράζουμε τα b_m^E, b_m^H συναρτήσει των a_m^E, a_m^H αντίστοιχα. Μετά απαλείφουμε τα d_m^E, d_m^H από τις αντίστοιχες σχέσεις τους που αφορούν το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο με μια σειρά από επίπονες πράξεις. Τελικά, καταλήγουμε σε ένα σύστημα υπολογισμού των συντελεστών a_m^E, a_m^H της μορφής:

$$\boxed{\begin{array}{l} C_{m,m-2}a_{m-2} + C_{m,m-1}a_{m-1} + C_{m,m}a_m + C_{m,m+1}a_{m+1} + C_{m,m+2}a_{m+2} = Q_m \\ \hfill (21) \\ m = (0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \end{array}}$$

Οι παραπάνω συντελεστές $C_{m,m-2}, C_{m,m-1}, C_{m,m}, C_{m,m+1}, C_{m,m+2}, Q_m$ είναι διαφορετικοί για TM και TE κύματα και η πλήρης αναλυτική μορφή τους παρουσιάζεται στο **Παράρτημα 2** της εργασίας. Το σύστημα (21) μπορεί να λυθεί με τον **κανόνα του Crammer** όπως αυτός εφαρμόζεται στην [10] της βιβλιογραφίας. Στην επόμενη σελίδα παραθέτουμε μόνο τα βήματα υπολογισμού των συντελεστών a_m .

Αρχικά, έχουμε μια ορίζουσα της μορφής:

$$D = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & C_{-2,-4} & C_{-2,-3} & C_{-2,-2} & C_{-2,-1} & C_{-2,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & C_{-1,-3} & C_{-1,-2} & C_{-1,-1} & C_{-1,0} & C_{-1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & C_{0,-2} & C_{0,-1} & C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & C_{1,-1} & C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & C_{2,4} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

η οποία υπολογίζεται ως εξής [10]:

$$D = P(C_{m,m})(1 - \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{C_{n+1,n}C_{n,n+1}}{C_{n,n}C_{n+1,n+1}})$$

$$\mu\varepsilon \quad P(C_{m,m}) = \ldots C_{-2,-2}C_{-1,-1}C_{0,0}C_{1,1}C_{2,2}\ldots$$

Έχω, όμως, και την D’ που σύμφωνα με την [10] είναι:

$$D^{'} = Q_m \frac{P(C_{m,m})}{C_{m,m}}(1 - \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq m,m-1}}^{n=\infty} \frac{C_{n+1,n}C_{n,n+1}}{C_{n,n}C_{n+1,n+1}} - \frac{Q_{m-1}C_{m,m-1}}{C_{m-1,m-1}Q_m} - \frac{Q_{m+1}C_{m,m+1}}{C_{m+1,m+1}Q_m} -$$

$$- \frac{Q_{m-2}C_{m,m-2}}{C_{m-2,m-2}Q_m} - \frac{Q_{m+2}C_{m,m+2}}{C_{m+2,m+2}Q_m} + \frac{Q_{m-2}C_{m-1,m-2}C_{m,m-1}}{C_{m-2,m-2}C_{m-1,m-1}Q_m} + \frac{Q_{m+2}C_{m+1,m+2}C_{m,m+1}}{C_{m+2,m+2}C_{m+1,m+1}Q_m})$$

Με βάση τα παραπάνω προκύπτουν τελικά οι συντελεστές a_m ως εξής:

$$\boxed{a_m = \frac{D}{D'} = a_m^0 + a_m^{'}(\frac{d}{a}) + a_m^{''}(\frac{d}{a})^2 \qquad (22)}$$

Για να υπολογίσουμε τώρα τους συντελεστές $a_m^0, a_m^{'}, a_m^{''}$ κάνουμε την εξής υπόθεση για τους συντελεστές της προηγούμενης σελίδας. Όλοι μπορούν να γραφτούν ως πολυώνυμα δευτέρου βαθμού του $\frac{d}{a}$. Δηλαδή, έχουμε, αν παρατηρήσουμε το **Παράρτημα 2**:

$$C_{m,m} = C_{m,m}^0 + C_{m,m}^{''}(\frac{d}{a})^2 \ , \ C_{m,m+1} = C_{m,m+1}^{'}(\frac{d}{a}) \ , \ C_{m,m-1} = C_{m,m-1}^{'}(\frac{d}{a})$$

$$\mathrm{C}_{m,m+2} = C_{m,m+2}^{''}(\frac{d}{a})^2 \ , \ C_{m,m-2} = C_{m,m-2}^{''}(\frac{d}{a})^2$$

Αντικαθιστώντας τους συντελεστές αυτούς στις ορίζουσες της προηγούμενης σελίδας και με συνεχή χρήση της σχέσης:

$$\frac{a+\beta x+\gamma x^2}{\delta+\varepsilon x+\zeta x^2} = \frac{\alpha}{\delta} + \frac{\delta\beta-\alpha\varepsilon}{\delta^2}x + \frac{\gamma\delta^2-\alpha\delta\gamma-\delta\beta\varepsilon+\alpha\varepsilon^2}{\delta^3}x^2 + O(x^3)$$

βρίσκουμε τους συντελεστές $a_m^0, a_m^{'}, a_m^{''}$ της σχέσης **(22).** Στην επόμενη σελίδα παρατίθεται η πλήρης μορφή τους.

Έχουμε, λοιπόν,

$$a_m^0 = \frac{Q_m}{C_{m,m}^0} \qquad (23)$$

$$a_m^{'} = -\frac{Q_m}{C_{m,m}^0}\left(\frac{Q_{m-1}C_{m,m-1}^{'}}{Q_m C_{m-1,m-1}^0} + \frac{Q_{m+1}C_{m,m+1}^{'}}{Q_m C_{m+1,m+1}^0}\right) \qquad (24)$$

$$a_m^{''} = \frac{Q_m}{C_{m,m}^0}\left(-C_{m,m}^0 + \frac{C_{m+1,m}^{'}C_{m,m+1}^{'}}{C_{m,m}^0 C_{m+1,m+1}^0} + \frac{C_{m-1,m}^{'}C_{m,m-1}^{'}}{C_{m,m}^0 C_{m-1,m-1}^0} - \frac{Q_{m-2}C_{m,m-2}^{''}}{Q_m C_{m-2,m-2}^0} - \right.$$
$$\left. - \frac{Q_{m+2}C_{m,m+2}^{''}}{Q_m C_{m+2,m+2}^0} + \frac{Q_{m-2}C_{m-1,m-2}^{'}C_{m,m-1}^{'}}{Q_m C_{m-2,m-2}^0 C_{m-1,m-1}^0} + \frac{Q_{m+2}C_{m,m+1}^{'}C_{m+1,m+2}^{'}}{Q_m C_{m+1,m+1}^0 C_{m+2,m+2}^0}\right) \qquad (25)$$

Με μια απλή αντικατάσταση των **(23),(24),(25)** στην **(22)** έχουμε την αναλυτική μορφή των συντελεστών a_m. Πλέον, επιστρέφοντας στο **σύστημα** που είχε προκύψει από τις οριακές συνθήκες **(18),(19)**, έχοντας απαλείψει τα b_m^E, b_m^H, διαθέτουμε 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους για τα TM κύματα και 2 εξισώσεις με 2 αγνώστους για τα TE κύματα. Επομένως, γνωρίζοντας τα a_m μπορούμε να υπολογίσουμε τα d_m^E, d_m^H με σχέσεις της μορφής:

$$d_m = \frac{1}{2}(a_m l_{m,m} + a_{m+1}l_{m,m+1} + a_{m,m+2}l_{m,m+2} + a_{m-1}l_{m,m-1} + a_{m-2}l_{m,m-2}) - K_m \quad (26)$$

Οι συντελεστές $l_{m,m}, K_m$ είναι παρόμοιοι με τους $C_{m,m}, Q_m$ και παραθέτονται στο **Παράρτημα 2.** Ακόμη, μπορούν να αναπτυχθούν σε τριώνυμα όπως και τα $C_{m,m}, Q_m$.

Συνεπώς, τα d_m^E, d_m^H μπορούν να γραφτούν όπως όλοι οι συντελεστές μας έως τώρα ως εξής:

$$\boxed{d_m = d_m^0 + d_m^{'}(\frac{d}{a}) + d_m^{''}(\frac{d}{a})^2 \quad (27)}$$

Ακριβώς όπως και στα $C_{m,m}$ ισχύουν με το **Παράρτημα 2** οι σχέσεις:

$$l_{m,m} = l_{m,m}^0 + l_{m,m}^{''}(\frac{d}{a})^2 \ , \ l_{m,m+1} = l_{m,m+1}^{'}(\frac{d}{a}) \ , \ l_{m,m-1} = l_{m,m-1}^{'}(\frac{d}{a})$$

$$l_{m,m+2} = l_{m,m+2}^{''}(\frac{d}{a})^2 \ , \ l_{m,m-2} = l_{m,m-2}^{''}(\frac{d}{a})^2$$

Με μια σειρά, λοιπόν, αλγεβρικών πράξεων στη σχέση **(26)** καταλήγουμε στις εκφράσεις:

$$d_m^0 = \frac{1}{2} a_m^0 l_{m,m}^0 - K_m \quad (28)$$

$$d_m^{'} = \frac{1}{2}(l_{m,m}^0 a_m^{'} + l_{m,m+1}^{'} a_{m+1}^0 + l_{m,m-1}^{'} a_{m-1}^0) \quad (29)$$

$$d_m^{''} = \frac{1}{2}(l_{m,m}^{''} a_m^0 + l_{m,m}^0 a_m^{''} + l_{m,m+1}^{'} a_{m+1}^{'} + l_{m,m-1}^{'} a_{m-1}^{'} + l_{m,m+2}^{''} a_{m+2}^0 + l_{m,m-2}^{''} a_{m-2}^0) \ (30)$$

Οι συντελεστές d_m^E, d_m^H ονομάζονται συντελεστές σκέδασης και είναι αυτοί που θα μας απασχολήσουν στους υπολογισμούς μας από εδώ και πέρα σε αυτήν την εργασία. Το πρόγραμμα το οποίο γράφεται σε Matlab στηρίζεται στη μέχρι τώρα αναλυτική μας επεξεργασία και υπολογίζει τα d_m^E, d_m^H .

3.Εύρος και Επιφάνειες Σκέδασης

Λόγω του ότι $k_0 r_1 \gg 1$ **(μακράν πεδίο)** η συνάρτηση Hankel παίρνει την ασυμπτωτική μορφή:

$$H_m^{(1)}(k_0 r_1) = \left(\frac{2}{\pi k_0 r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{-j\pi(2m+1)}{4} + jk_0 r_1\right] \quad (31)$$

Προκύπτει με βάση την **(20):**

$$\psi_s^{E,H} = \left(\frac{2}{\pi k_0 r_1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[j\left(k_0 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)\right] \sum_{m=\infty}^{\infty} d_m^{E,H} j^{-m} \exp(jm\varphi_1) \quad (32)$$

όπου τα d_m^E, d_m^H υπολογίζονται στην **(27).** Η (32) μπορεί να γραφτεί συναρτήσει του εύρους σκέδασης $f^{E,H}(\varphi_0, \varphi_1)$:

$$\psi_s^{E,H} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} \exp(jk_0 r_1) f^{E,H}(\varphi_0, \varphi_1) \quad (33)$$

όπου:

$$f^{E,H}(\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1-j}{(\pi k_0)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{G}^{E,H}(\varphi_0, \varphi_1) \quad (34)$$

και:

$$G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m^{E,H} j^{-m} \exp(jm\varphi_1) \quad (35)$$

Η διαφορική επιφάνεια σκέδασης (differential scattering cross-section) θα είναι:

$$\sigma^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) = \left| f^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) \right|^2 = \sigma^0(\varphi_0,\varphi_1) + \sigma^{'}(\varphi_0,\varphi_1)(\frac{d}{a}) + \sigma^{''}(\varphi_0,\varphi_1)(\frac{d}{a})^2 \quad (36)$$

Η επιφάνεια radar (back-scattering cross-section) είναι:

$$\sigma_b^{E,H} = 2\pi\sigma^{E,H}(\varphi_{0,}\varphi_1 = \varphi_0 + \pi) \text{ ή } k_0\sigma_b^{E,H} = 4\left| G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1 = \varphi_0 + \pi) \right|^2 \quad (37)$$

Η επιφάνεια πρόσω σκέδασης (total scattering cross-section) είναι:

$$\sigma_f^{E,H} = 2\pi\sigma^{E,H}(\varphi_{0,}\varphi_1 = \varphi_0) \text{ ή } k_0\sigma_f^{E,H} = 4\left| G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1 = \varphi_0) \right|^2 \quad (38)$$

Η ολική επιφάνεια σκέδασης (total scattering cross-section) είναι:

$$Q_t^{E,H}(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} \sigma^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) d\varphi_1 = \frac{4}{k_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| d_m^{E,H} \right|^2 \quad (39)$$

Πιστοί στη μέχρι τώρα διαδικασία μπορούμε να γράψουμε την **(39)** ως εξής:

$$\boxed{Q_t^{E,H}(\varphi_0) = Q_t^0(\varphi_0) + Q_t^{'}(\varphi_0)(\frac{d}{a}) + Q_t^{''}(\varphi_0)(\frac{d}{a})^2 \qquad (40)}$$

Επίσης, από την **(39)** μπορεί να προκύψει ότι:

$$\boxed{k_0 Q_t^{E,H}(\varphi_0) = 4\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|d_m^{E,H}\right|^2 \qquad (41)}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις είναι φανερό ότι οι συντελεστές $\sigma^0, \sigma^{'}, \sigma^{''}, Q_t^0, Q_t^{'}, Q_t^{''}$ μπορούν να εκφραστούν τελικά συναρτήσει των $a_m^0, a_m^{'}, a_m^{''}$ των σχέσεων **(23),(24),(25).** Οι εκφράσεις **(36)** και **(40)** μπορούν ακόμη να γραφτούν με τη μορφή:

$$\sigma^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) = \sigma^0(\varphi_0,\varphi_1)[1 + g_\sigma^{'}(\varphi_0,\varphi_1)(\frac{d}{a}) + g_\sigma^{''}(\varphi_0,\varphi_1)(\frac{d}{a})^2] \qquad (42)$$

$$Q_t^{E,H}(\varphi_0) = Q_t^0(\varphi_0)[1 + g_Q^{'}(\varphi_0)(\frac{d}{a}) + g_Q^{''}(\varphi_0)(\frac{d}{a})^2] \qquad (43)$$

όπου:

$$g_\sigma^{'}(\varphi_0,\varphi_1) = \frac{\sigma^{'}(\varphi_0,\varphi_1)}{\sigma^0(\varphi_0,\varphi_1)}, \quad g_\sigma^{''}(\varphi_0,\varphi_1) = \frac{\sigma^{''}(\varphi_0,\varphi_1)}{\sigma^0(\varphi_0,\varphi_1)}$$

$$g_Q^{'}(\varphi_0) = \frac{Q_t^{'}(\varphi_0)}{Q_t^0(\varphi_0)}, \quad g_Q^{''}(\varphi_0) = \frac{Q_t^{''}(\varphi_0)}{Q_t^0(\varphi_0)}$$

4.Παρατηρήσεις:

Ένας πρώτος έλεγχος της ορθότητας της όλης θεωρητικής ανάλυσης θα μπορούσε να γίνει με την αναλυτική απόδειξη της ισχύος του θεωρήματος της πρόσω σκέδασης, σύμφωνα με το οποίο:

$$Q_t(\varphi_0) = -2(\frac{\pi}{k_0})^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re}\{(1+j) f(\varphi_0, \varphi_1 = \varphi_0)\} = -(\frac{4}{k_0}) \operatorname{Re}\{G(\varphi_0, \varphi_1 = \varphi_0)\} \quad (44)$$

Λόγω της πολυπλοκότητας των σχέσεων είναι πολύ δύσκολη η αναλυτική απόδειξή του. Έτσι, η ισχύς του επαληθεύτηκε μόνο αριθμητικά για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

Εμείς εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις και τις εκθέτουμε στους πίνακες και τις γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν.

Η περιοχή (0) είναι πάντα αέρας, η περιοχή (1) είναι διηλεκτρικό ή μεταϋλικό, ενώ η περιοχή (2) πάντα διηλεκτρικό ‘πυκνότερο’ από το (1), δηλαδή $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$.

Επίσης, στην αριθμητική επεξεργασία έγιναν και άλλοι έλεγχοι από τις αναμενόμενες σχέσεις των τιμών των επιφανειών σκέδασης, ανάλογα με τη γωνία σκέδασης (φ_1).

<u>5.Αριθμητική Επεξεργασία:</u>

Στο πρόγραμμα Matlab αυτής της εργασίας χρησιμοποιήσαμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

α)Οι σταθερές ε_1, μ_1, ε_2, μ_2 του εξωτερικού και του εσωτερικού κυλίνδρου, αντίστοιχα, συμβολίζονται με e, e1, ee, ee1.

β)Ο λόγος των ακτίνων b/a συμβολίζεται με BA.

γ)Η γωνία πρόσπτωσης φ_0 με f0.

δ)Η γωνία σκέδασης φ_1 με f1.

ε)Ο λόγος α/λ_0 με A.

Επίσης, στο πρόγραμμα πήραμε υπ' όψη τις παρακάτω απλές σχέσεις και συμβολισμούς:

$$\frac{k_1}{k_0} = \sqrt{e}\sqrt{e1} = sqrt(e)sqrt(e1)$$

$$\frac{k_2}{k_0} = \sqrt{ee}\sqrt{ee1} = sqrt(ee)sqrt(ee1)$$

$$G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) = \sum_{m=-32}^{+32} d_m^{E,H}\, j^{-m} \exp(jm\varphi_1)$$

$$k_0 a = 2\pi * \mathrm{A} = x_0$$

$$k_1 a = 2\pi * \mathrm{A} * sqrt(e)sqrt(e1) = x_1$$

$$k_1 b = 2\pi \mathrm{A} * \mathrm{BA} sqrt(e)sqrt(e1) = x_2$$

$$k_2 b = 2\pi \mathrm{A} * \mathrm{BA} sqrt(ee)sqrt(ee1) = x_3$$

Οι συντελεστές των $(\frac{d}{a})^n, n = 0,1,2$ για το $G(\varphi_0, \varphi_1)$ συμβολίζονται αντίστοιχα CX1, CX2, CX3, δηλαδή:

$$G(\varphi_0, \varphi_1) = CX1 + CX2 * (\frac{d}{a}) + CX3 * (\frac{d}{a})^2$$

Όμοια, οι αντίστοιχοι συντελεστές για τις επιφάνειες radar και πρόσω σκέδασης συμβολίζονται με QSC1, QSC2, QSC3 δηλαδή:

$$k_0 \sigma_{b,f} = QSC1 + QSC2 * (\frac{d}{a}) + QSC3 * (\frac{d}{a})^2$$

Τους συντελεστές $g_{\sigma}^{'}(\varphi_0, \varphi_1), g_{\sigma}^{''}(\varphi_0, \varphi_1)$ συμβολίζουμε με GT1,GT2 αντίστοιχα, δηλαδή:

$$k_0 \sigma_{b,f} = QSC1(1 + GT1 * (\frac{d}{a}) + GT2 * (\frac{d}{a})^2)$$

Τέλος, τους συντελεστές $Q_t^0(\varphi_0), g_Q^{'}(\varphi_0), g_Q^{''}(\varphi_0)$ συμβολίζουμε με QTTL1, QTTL2, QTTL3 αντίστοιχα, δηλαδή:

$$k_0 Q_t = QTTL1(1 + QTTL2 * (\frac{d}{a}) + QTTL3 * (\frac{d}{a})^2)$$

Ο πλήρης κώδικας υπολογισμού των συντελεστών παρατίθεται στο τέλος αυτής της εργασίας στο **Παράρτημα 3.** Εμείς στο πρόγραμμα παίρνουμε αποτελέσματα από 0^0 έως 90^0 με βήμα 9^0 για το φ_0 αφού υπάρχει συμμετρία στη διάταξή μας. Προφανώς οι σταθεροί όροι QSC1,QTTL1,CX1 είναι ίδιοι ανεξαρτήτως της γωνίας πρόσπτωσης.

6.Αριθμητικά Αποτελέσματα:

Μια πρώτη γενική παρατήρηση είναι η εξάρτηση της σύγκλισης των σειρών υπολογισμού του $G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1)$ από το α/λ_0. Έτσι, όσο αυξάνει ο λόγος α/λ_0, τόσο περισσότεροι όροι απαιτούνται για την σύγκλιση. Στην εργασία αυτή όπου το α/λ_0 φθάνει μέχρι 0,9, ώστε να βρίσκεται στην **περιοχή Mie,** ο αριθμός των απαιτούμενων όρων βρέθηκε ότι είναι 65, δηλ. το $G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1)$ υπολογίζεται από τη σειρά:

$$G^{E,H}(\varphi_0,\varphi_1) = \sum_{m=-32}^{+32} d_m^{E,H} j^{-m} \exp(jm\varphi_1)$$

Για τιμές του α/λ_0 μεγαλύτερες του 0,9 απαιτούνται περισσότεροι όροι.

Όπως έχει προαναφερθεί η περιοχή (0) είναι πάντα αέρας, η περιοχή (1) είναι διηλεκτρικό ή μεταϋλικό (ε_1,μ_1 αρνητικά) ενώ η περιοχή (2) είναι διηλεκτρικό μεγαλύτερης πυκνότητας από το (1), δηλαδή ισχύει $\varepsilon_2>\varepsilon_1$.

Στους πίνακες που ακολουθούν δίνουμε αριθμητικά αποτελέσματα για όλους τους συντελεστές που έχουμε υπολογίσει στο **Κεφάλαιο 5** αυτής της εργασίας. Στον πίνακα 1 στην περιοχή (1) υπάρχει διηλεκτρικό ενώ στον πίνακα 2 μεταϋλικό. Στους δύο αυτούς πίνακες ο λόγος α/λ_0 είναι 0,3. Στους πίνακες 3 και 4 διατηρούμε τα ίδια υλικά αλλά ο λόγος α/λ_0 αυξάνεται στο 0,7. Κατόπιν, στις επόμενες σελίδες παραθέτουμε μια σειρά γραφικών παραστάσεων για την επιφάνεια radar (back-scattering cross-section) $\sigma_b^{E,H}$, την επιφάνεια πρόσω σκέδασης(forward scattering cross-section) $\sigma_f^{E,H}$ και την ολική επιφάνεια σκέδασης(total scattering cross-section) $Q_t^{E,H}$ για την περίπτωση πρώτα του διηλεκτρικού και ύστερα του μεταϋλικού στην περιοχή (1), ενώ $\frac{d}{a}$ =0,05 και 0,1.

Σημειώνεται ότι ο λόγος $\frac{b}{a}$ είναι σε όλους τους υπολογισμούς μας 0,5 πράγμα που μας δίνει ένα άνω φράγμα για το λόγο $\frac{d}{a}$ ίσο 0,5 λόγω των παρακάτω φυσικών-γεωμετρικών περιορισμών.

$$d \le a-b \Rightarrow \frac{d}{a} \le 1-\frac{b}{a}$$

Από τα αποτελέσματα μας προκύπτει εύκολα η περίπτωση που ο εσωτερικός κύλινδρος είναι τέλεια αγώγιμος, απλά θέτοντας $\varepsilon_2 \to \infty$ και $\mu_2 \to 0$, ώστε $\varepsilon_2 \mu_2 \to 1$.Στο πρόγραμμά μας θέσαμε $\varepsilon_2 = 10^{22}$ και $\mu_2 = 10^{-22}$ και επαληθεύσαμε τα αποτελέσματα της [10], με μεγάλη ακρίβεια.

7.Πίνακες:

Πίνακας 1 ($\alpha/\lambda_0=0,3, \varepsilon_1=2,54, \varepsilon_2=4,00, \mu_1=\mu_2=1, b/a=0,5$)

	FORWARD							
ΚΥΜΑ	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_f^0$	g'_σ	g''_σ	ΚΥΜΑ	$k_0\sigma_f^0$	g'_σ	g''_σ
	0	46,9146	-2,382e-17	-6,3732e-04		32,8272	-0,00857423	0,01552455
	9	46,9146	-1,7494e-17	-5,0250e-04		32,8272	-0,00860141	0,01539406
	18	46,9146	3,0558e-18	-1,1126e-04		32,8272	-0,00841680	0,01515382
	27	46,9146	-6,9300e-18	4,9812e-04		32,8272	-0,00802493	0,01482734
TM	36	46,9146	-1,9055e-17	12,66e-04	TE	32,8272	-0,00743547	0,01444658
(E)	45	46,9146	-3,7586e-18	21,1719e-04	(H)	32,8272	-0,00666292	0,01404881
	54	46,9146	1,7059e-18	29,684e-04		32,8272	-0,00572630	0,01367270
	63	46,9146	1,1214e-18	37,3625e-04		32,8272	-0,00464870	0,01335584
	72	46,9146	-1,7079e-17	43,4564e-04		32,8272	-0,00345661	0,01312847
	81	46,9146	6,8335e-18	47,3689e-04		32,8272	-0,00217941	0,01301312
	90	46,9146	6,2329e-18	48,7170e-04		32,8272	0	0,01302108
	BACK							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_b^0$	g'_σ	g''_σ		$k_0\sigma_b^0$	g'_σ	g''_σ
	0	3,8918	-0,2795611	0,0351117		21,7695	0,0371213065	-0,0044273739
	9	3,8918	-0,2761192	0,0341820		21,7695	0,0364510401	-0,0044608555
	18	3,8918	-0,2658784	0,0314839		21,7695	0,0348832281	-0,0044674747
	27	3,8918	-0,2490908	0,0272814		21,7695	0,0324564753	-0,0044465837
TM	36	3,8918	-0,2261697	0,0219861	TE	21,7695	0,0292305364	-0,0044002273
(E)	45	3,8918	-0,1976795	0,0161161	(H)	21,7695	0,0252848446	-0,0043329432
	54	3,8918	-0,1643219	0,0102462		21,7695	0,0207165560	-0,0042513178
	63	3,8918	-0,1269180	0,0049509		21,7695	0,0156381570	-0,0041633409
	72	3,8918	-0,0863891	0,0007485		21,7695	0,0101746948	-0,0040776245
	81	3,8918	-0,0437330	-0,001950		21,7695	0,0044606977	-0,0040025590
	90	3,8918	0	-0,002879		21,7695	-0,001363136	-0,0039454924
	TOTAL							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0Q_t^0$	g'_Q	g''_Q		$k_0Q_t^0$	g'_Q	g''_Q
	0	13,058342	-6,90899e-18	0,00263761		11,644194	0,0072676902	0,008208294984
	9	13,058342	-7,76461e-19	0,00268264		11,644194	0,0070902674	0,008109099650
	18	13,058342	5,792940e-18	0,00281330		11,644194	0,0067382587	0,007927467636
	27	13,058342	4,649496e-18	0,00301683		11,644194	0,0062203317	0,007681178349
TM	36	13,058342	-2,60074e-18	0,00327327	TE	11,644194	0,0055492395	0,007394340301
(E)	45	13,058342	8,725143e-18	0,00355755	(H)	11,644194	0,0047415066	0,007095031199
	54	13,058342	3,585546e-19	0,00384182		11,644194	0,0038170221	0,006812549501
	63	13,058342	4,110530e-18	0,00409826		11,644194	0,0027985496	0,006574546487
	72	13,058342	-1,43827e-17	0,00430178		11,644194	0,0017111680	0,006404319549
	81	13,058342	7,082050e-18	0,00443244		11,644194	0,0005816515	0,006318531684
	90	13,058342	1,014836e-17	0,00447747		11,644194	-0,000562187	0,006325580409

Πίνακας 2 (α/λ_0=0,3,ε_1=-2,54,ε_2=4,00,μ_1=-1, μ_2=1,b/a=0,5)

	FORWARD							
KYMA	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_f^0$	g'_σ	g''_σ	KYMA	$k_0\sigma_f^0$	g'_σ	g''_σ
	0	46,9146	-6,76676e-19	-0,02315078		24,67463	-0,00585903807	0,0025687938195
	9	46,9146	-6,72640e-19	-0,02301596		24,67463	-0,00606119727	0,0026090751447
	18	46,9146	7,537973e-19	-0,02262471		24,67463	-0,00611410967	0,0027695602115
	27	46,9146	-4,19639e-18	-0,02201533		24,67463	-0,00601647240	0,0030345396236
TM	36	46,9146	-7,52998e-18	-0,02124746	TE	24,67463	-0,00577068962	0,0033780753499
(E)	45	46,9146	-9,26129e-18	-0,02039627	(H)	24,67463	-0,00538281331	0,0037665397198
	54	46,9146	-3,83130e-18	-0,01954507		24,67463	-0,00486239426	0,0041619071344
	63	46,9146	3,301600e-18	-0,01877720		24,67463	-0,00422224694	0,0045254762763
	72	46,9146	-1,07274e-17	-0,01816782		24,67463	-0,00347813388	0,0048216584648
	81	46,9146	-1,06528e-17	-0,01777657		24,67463	-0,00264837762	0,0050214613237
	90	46,9146	-8,51786e-18	-0,01764176		24,67463	-0,00175340951	0,0051053267570
	BACK							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_b^0$	g'_σ	g''_σ		$k_0\sigma_b^0$	g'_σ	g''_σ
	0	3,8918	-0,279561133	0,05183105		4,349116	-0,04618999386	-0,002029935827
	9	3,8918	-0,276119271	0,05090134		4,349116	-0,04556619818	-0,001858275578
	18	3,8918	-0,265878437	0,04820323		4,349116	-0,04382041147	-0,001570680247
	27	3,8918	-0,249090793	0,04400082		4,349116	-0,04099562080	-0,001195301668
TM	36	3,8918	-0,226169707	0,03870548	TE	4,349116	-0,03716138189	-0,000768884511
(E)	45	3,8918	-0,197679573	0,03283554	(H)	4,349116	-0,03241210643	-0,000333169460
	54	3,8918	-0,164321911	0,02696561		4,349116	-0,02686473733	6,919266164e-05
	63	3,8918	-0,126918098	0,02167026		4,349116	-0,02065586924	0,0003988158451
	72	3,8918	-0,086389141	0,01746785		4,349116	-0,01393838511	0,0006234342767
	81	3,8918	-0,043732996	0,01476974		4,349116	-0,00687769167	0,0007210607395
	90	3,8918	0	0,01384003		4,349116	0	0,0006821388750
	TOTAL							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0Q_t^0$	g'_Q	g''_Q		$k_0Q_t^0$	g'_Q	g''_Q
	0	13,058342	6,318561e-17	-0,02070859		8,64126	0,00254491235	0,0035357012932
	9	13,058342	4,289184e-17	-0,02066357		8,64126	0,00253867471	0,0036181601806
	18	13,058342	4,704514e-17	-0,02053291		8,64126	0,00246992648	0,0038431813340
	27	13,058342	4,187486e-17	-0,02032939		8,64126	0,00234036046	0,0041887381151
TM	36	13,058342	3,009556e-17	-0,02007294	TE	8,64126	0,00215316699	0,0046210050186
(E)	45	13,058342	2,347082e-17	-0,01978867	(H)	8,64126	0,00191295541	0,0050976687481
	54	13,058342	1,533106e-17	-0,01950440		8,64126	0,00162564052	0,0055720701368
	63	13,058342	2,158907e-17	-0,01924795		8,64126	0,00129829697	0,0059977714712
	72	13,058342	1,359238e-17	-0,01904444		8,64126	0,00093898503	0,0063331021389
	81	13,058342	-4,19425e-19	-0,01891377		8,64126	0,00055655216	0,0065452376376
	90	13,058342	-4,20714e-18	-0,01886875		8,64126	0,00016041513	0,0066134126667

Πίνακας 3(α/λ_0=0,7,ε_1=2,54,ε_2=4,00,μ_1= μ_2=1,b/a=0,5)

	FORWARD							
KYMA	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_f^0$	g'_{σ}	g''_{σ}	KYMA	$k_0\sigma_f^0$	g'_{σ}	g''_{σ}
	0	85,25987	4,437255e-17	-0,00247982		116,97975	0,00964255751	0,0040328163157
	9	85,25987	5,040649e-17	-0,00243564		116,97975	0,00965736819	0,0040043084062
	18	85,25987	3,167634e-17	-0,00230744		116,97975	0,00943438241	0,0039173664892
	27	85,25987	3,351442e-17	-0,00210775		116,97975	0,00897909082	0,0037805010452
TM	36	85,25987	4,718744e-17	-0,00185614	TE	116,97975	0,00830270422	0,0036071094176
(E)	45	85,25987	2,906209e-17	-0,00157722	(H)	116,97975	0,00742187748	0,0034141643869
	54	85,25987	2,543202e-17	-0,00129830		116,97975	0,00635829949	0,0032205527571
	63	85,25987	1,466646e-17	-0,00104669		116,97975	0,00513815906	0,0030452265835
	72	85,25987	1,846919e-17	-0,00084700		116,97975	0,00379150011	0,0029053480135
	81	85,25987	1,068857e-17	-0,00071880		116,97975	0,00235148183	0,0028146093361
	90	85,25987	5,895216e-18	-0,00067462		116,97975	0,00085356227	0,0027818926854
	BACK							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_b^0$	g'_{σ}	g''_{σ}		$k_0\sigma_b^0$	g'_{σ}	g''_{σ}
	0	3,863803	0,3403439706	-0,01379648		34,10984	0,03950137254	0,0054101103771
	9	3,863803	0,3361537715	-0,01375131		34,10984	0,03896423025	0,0052995490377
	18	3,863803	0,3236863510	-0,01362024		34,10984	0,03746765928	0,0049952298281
	27	3,863803	0,3032486983	-0,01341608		34,10984	0,03504851019	0,0045269416331
TM	36	3,863803	0,2753440561	-0,01315882	TE	34,10984	0,03176635047	0,0039405237639
(E)	45	3,863803	0,2406595296	-0,01287366	(H)	34,10984	0,02770199777	0,0032933788874
	54	3,863803	0,2000491666	-0,01258849		34,10984	0,02295552994	0,0026488540530
	63	3,863803	0,1545129293	-0,01233123		34,10984	0,01764382079	0,0020700398421
	72	3,863803	0,1051720707	-0,01212707		34,10984	0,01189766220	0,0016135946227
	81	3,863803	0,0532415268	-0,01199599		34,10984	0,00585854369	0,0013241984329
	90	3,863803	0	-0,01195082		34,10984	-0,0003248316	0,0012301793882
	TOTAL							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0Q_t^0$	g'_{Q}	g''_{Q}		$k_0Q_t^0$	g'_{Q}	g''_{Q}
	0	18,46665	1,605636e-17	-0,00119942		27,06991	0,00780856907	0,0011996957127
	9	18,46665	1,576483e-17	-0,00117800		27,06991	0,00709212365	0,0012089985422
	18	18,46665	5,902613e-18	-0,00111585		27,06991	0,00620104662	0,0011943920980
	27	18,46665	8,344674e-18	-0,00101906		27,06991	0,00515727923	0,0011573061605
TM	36	18,46665	1,389655e-17	-0,00089708	TE	27,06991	0,00398652251	0,0011013709597
(E)	45	18,46665	7,212911e-18	-0,00076187	(H)	27,06991	0,00271760438	0,0010320618229
	54	18,46665	6,759771e-18	-0,00062665		27,06991	0,00138176981	0,0009561632111
	63	18,46665	8,791672e-18	-0,00050468		27,06991	1,19114838e-05	0,0008811046095
	72	18,46665	3,558519e-18	-0,00040787		27,06991	-0,00135824014	0,0008142332768
	81	18,46665	1,314888e-17	-0,00034572		27,06991	-0,00269494739	0,0007620950450
	90	18,46665	4,813161e-18	-0,00032430		27,06991	-0,00396529610	0,0007297935675

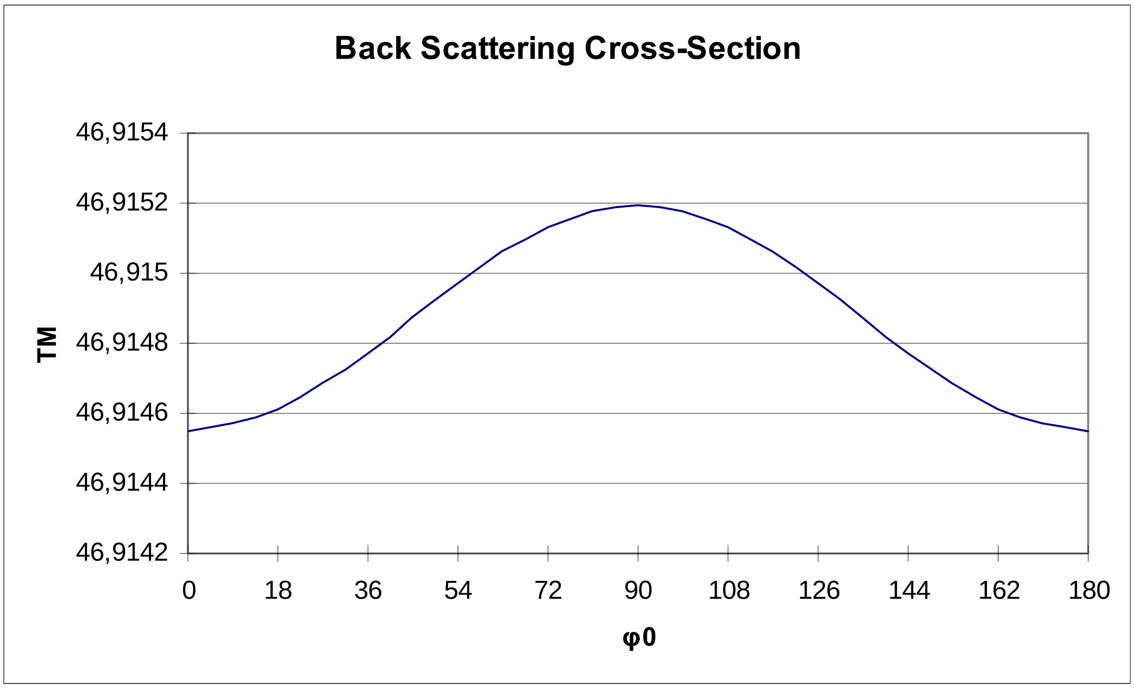
Πίνακας 4(α/λ_0=0,7,ε_1=-2,54,ε_2=4,00,μ_1=-1, μ_2=1,b/a=0,5)

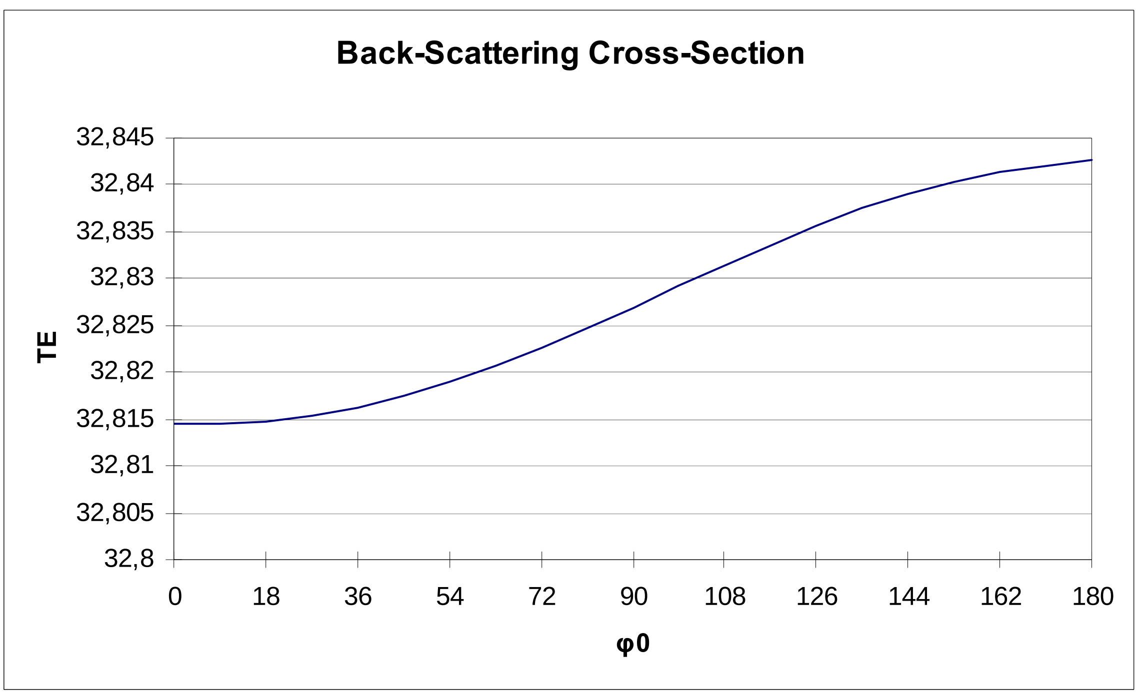
	FORWARD							
KYMA	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_f^0$	g'_σ	g''_σ	KYMA	$k_0\sigma_f^0$	g'_σ	g''_σ
	0	85,25987	5,680523e-17	0,01216436		25,21445	0,05382300061	-0,011821042881
	9	85,25987	5,536630e-17	0,01220854		25,21445	0,05486589716	-0,011797962856
	18	85,25987	5,617984e-17	0,01233674		25,21445	0,05455781322	-0,011734780968
	27	85,25987	4,189686e-17	0,01253642		25,21445	0,05290633486	-0,011637681899
TM	36	85,25987	6,085495e-17	0,01278804	TE	25,21445	0,04995212695	-0,011516170384
(E)	45	85,25987	4,320218e-17	0,01306696	(H)	25,21445	0,04576793189	-0,011382140817
	54	85,25987	3,131836e-17	0,01334588		25,21445	0,04045677845	-0,011248712945
	63	85,25987	3,234251e-17	0,01359749		25,21445	0,03414944486	-0,011128947617
	72	85,25987	7,924118e-19	0,01379718		25,21445	0,02700123860	-0,011034568300
	81	85,25987	1,162334e-17	0,01392538		25,21445	0,01918817223	-0,010974813497
	90	85,25987	-7,10073e-18	0,01392538		25,21445	0,01090262938	-0,010955532425
	BACK							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0\sigma_b^0$	g'_σ	g''_σ		$k_0\sigma_b^0$	g'_σ	g''_σ
	0	3,863803	0,3403439706	-0,06238059		76,37098	-0,02243228911	-0,000814190835
	9	3,863803	0,3361537716	-0,06233542		76,37098	-0,02108508406	-0,001107224045
	18	3,863803	0,3236863511	-0,06220435		76,37098	-0,01921869426	-0,001482624507
	27	3,863803	0,3032486983	-0,06200019		76,37098	-0,01687907643	-0,001903645405
TM	36	3,863803	0,2753440562	-0,06174293	TE	76,37098	-0,01412383972	-0,002329074284
(E)	45	3,863803	0,2406595296	-0,06145776	(H)	76,37098	-0,01102082720	-0,002717267198
	54	3,863803	0,2000491666	-0,06117259		76,37098	-0,00764644533	-0,003030225122
	63	3,863803	0,1545129293	-0,06091533		76,37098	-0,00408378261	-0,003237313553
	72	3,863803	0,1051720709	-0,06071118		76,37098	-0,00042056360	-0,003318261232
	81	3,863803	0,0532415270	-0,06058010		76,37098	0,00325301107	-0,003265144438
	90	3,863803	0	-0,06053493		76,37098	0,00684648582	-0,003083162610
	TOTAL							
	$\varphi_0(^0)$	$k_0Q_t^0$	g'_Q	g''_Q		$k_0Q_t^0$	g'_Q	g''_Q
	0	18,46665	4,425247e-17	-0,00645059		19,11437	0,01896755564	-0,012303764222
	9	18,46665	4,001516e-17	-0,00642917		19,11437	0,01983385660	-0,012583006545
	18	18,46665	3,956198e-17	-0,00636702		19,11437	0,02021178219	-0,012919255795
	27	18,46665	2,946606e-17	-0,00627022		19,11437	0,02009202662	-0,013279597549
TM	36	18,46665	3,383636e-17	-0,00614825	TE	19,11437	0,01947753867	-0,013628759048
(E)	45	18,46665	3,223386e-17	-0,00601303	(H)	19,11437	0,01838344908	-0,013932561930
	54	18,46665	3,384586e-17	-0,00587782		19,11437	0,01683669796	-0,014161267855
	63	18,46665	2,103586e-17	-0,00575584		19,11437	0,01487537146	-0,014292489490
	72	18,46665	4,012026e-18	-0,00565904		19,11437	0,01254776395	-0,014313381950
	81	18,46665	6,044057e-18	-0,00559689		19,11437	0,00991118884	-0,014221900133
	90	18,46665	-4,73846e-18	-0,00557548		19,11437	0,00703056738	-0,014026998919

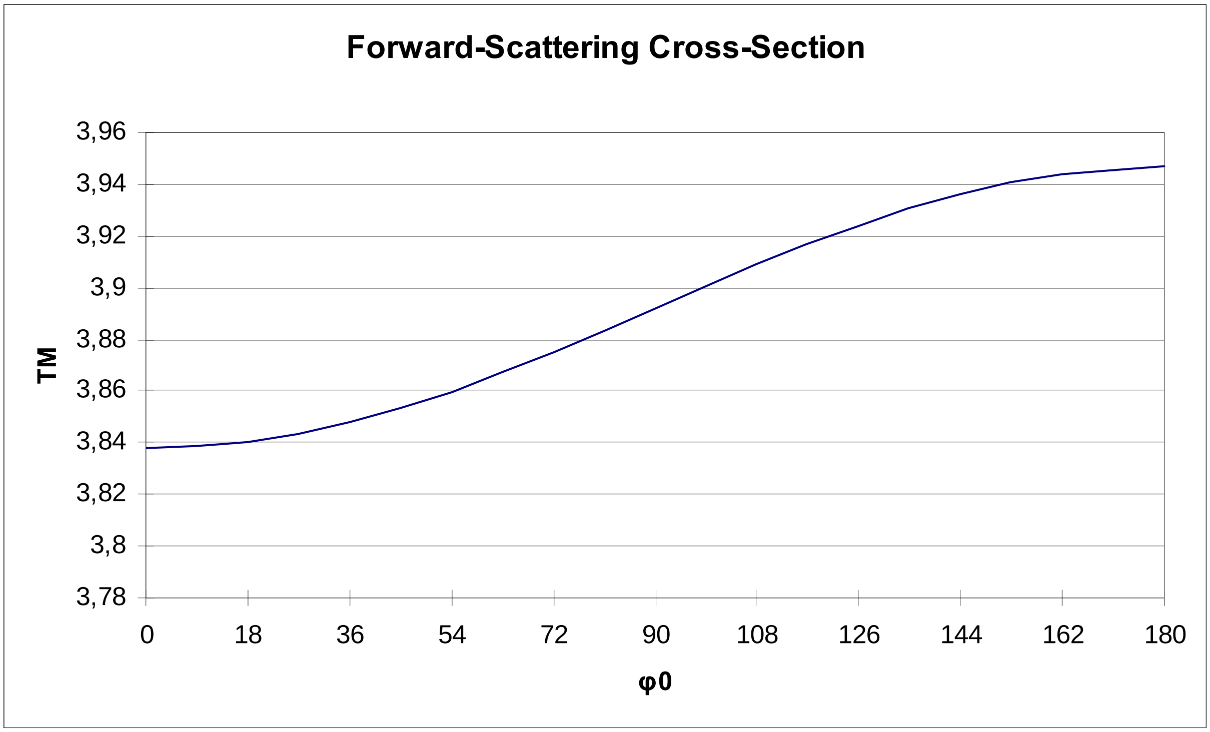
<u>8.Γραφικές Παραστάσεις:</u>

Α)Στις περιοχές (1) και (2) υπάρχουν διηλεκτρικά υλικά

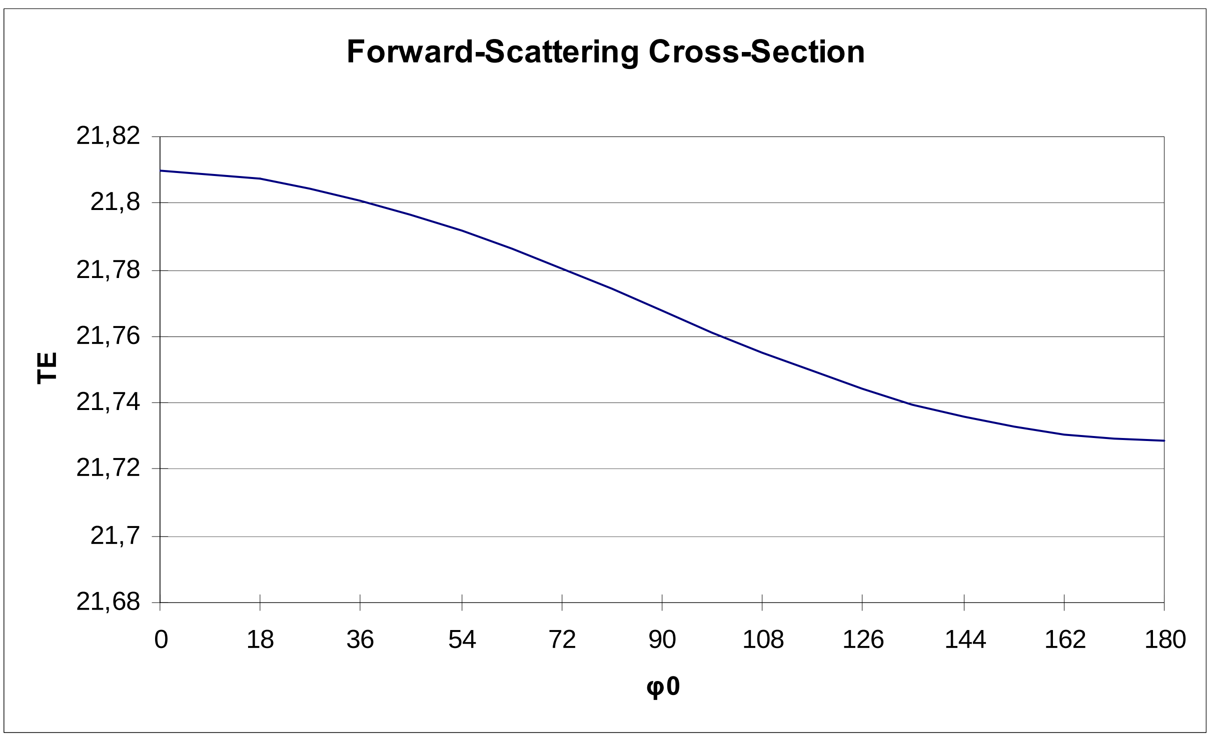
(ι) b/a=0.5 , ε1=2.54, ε2=4.0, μ1=μ2=1, d/a=0.05, α/λ0=0.3



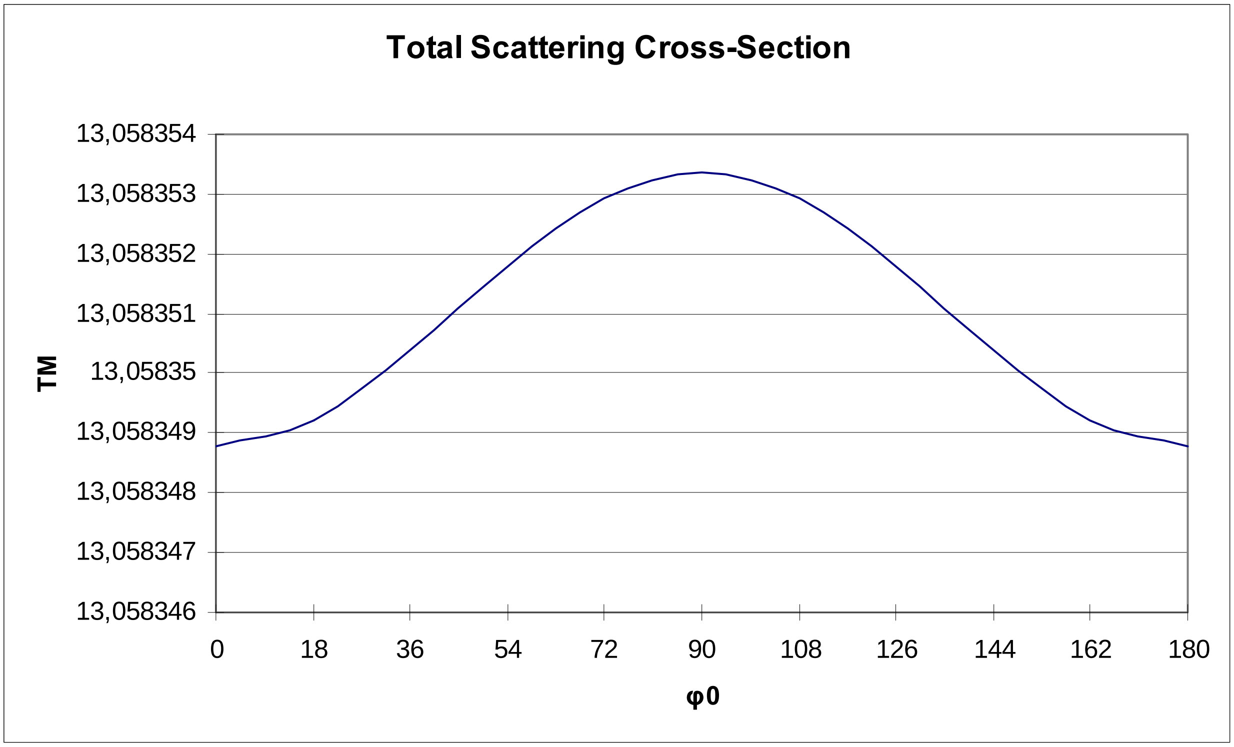




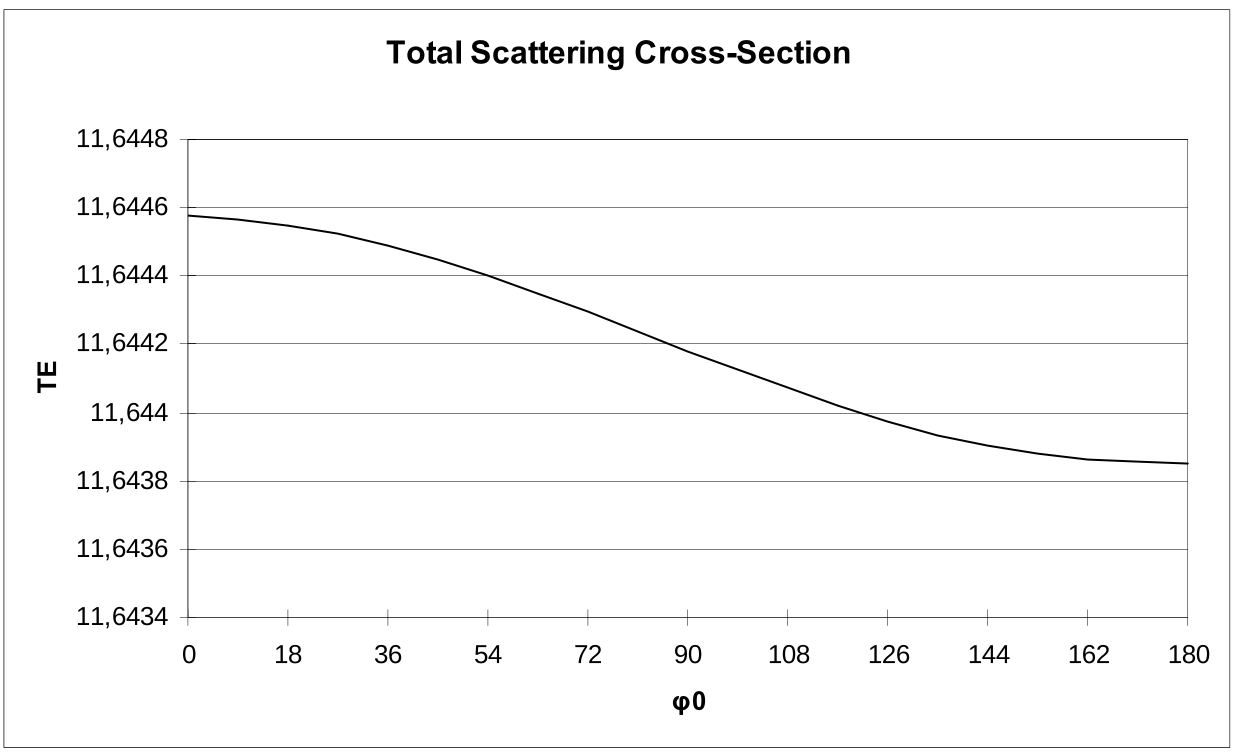
Forward-Scattering Cross-Section
3,96
3,94
3,92
3,9
3,88
3,86
3,84
3,82
3,8
3,78
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0



Forward-Scattering Cross-Section
21,82
21,8
21,78
21,76
21,74
21,72
21,7
21,68
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

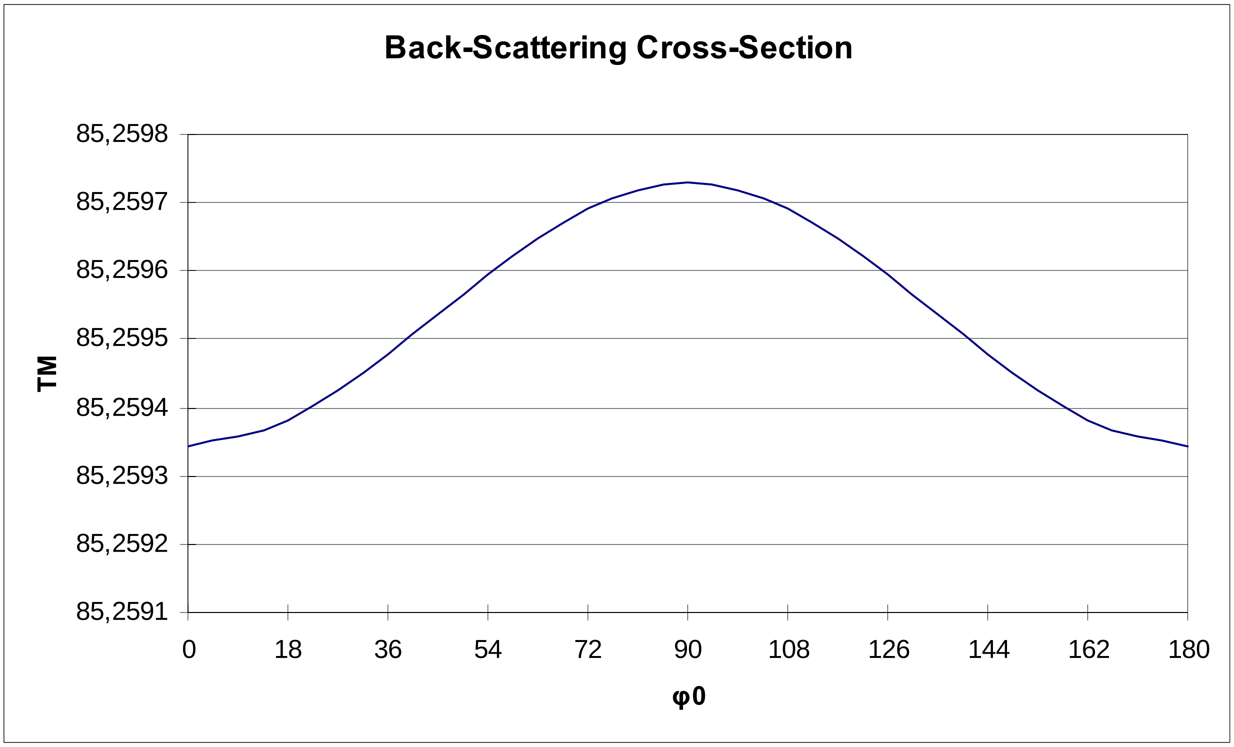


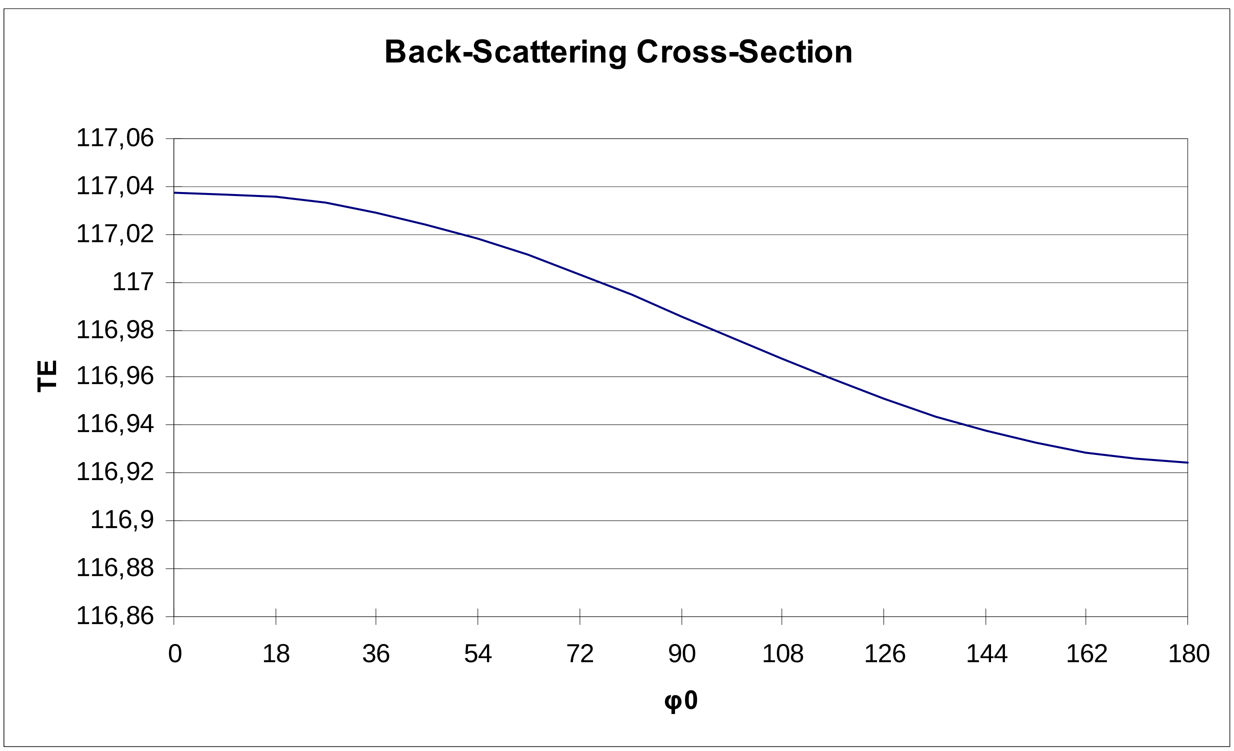
Total Scattering Cross-Section
TM
13,058354
13,058353
13,058352
13,058351
13,05835
13,058349
13,058348
13,058347
13,058346
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

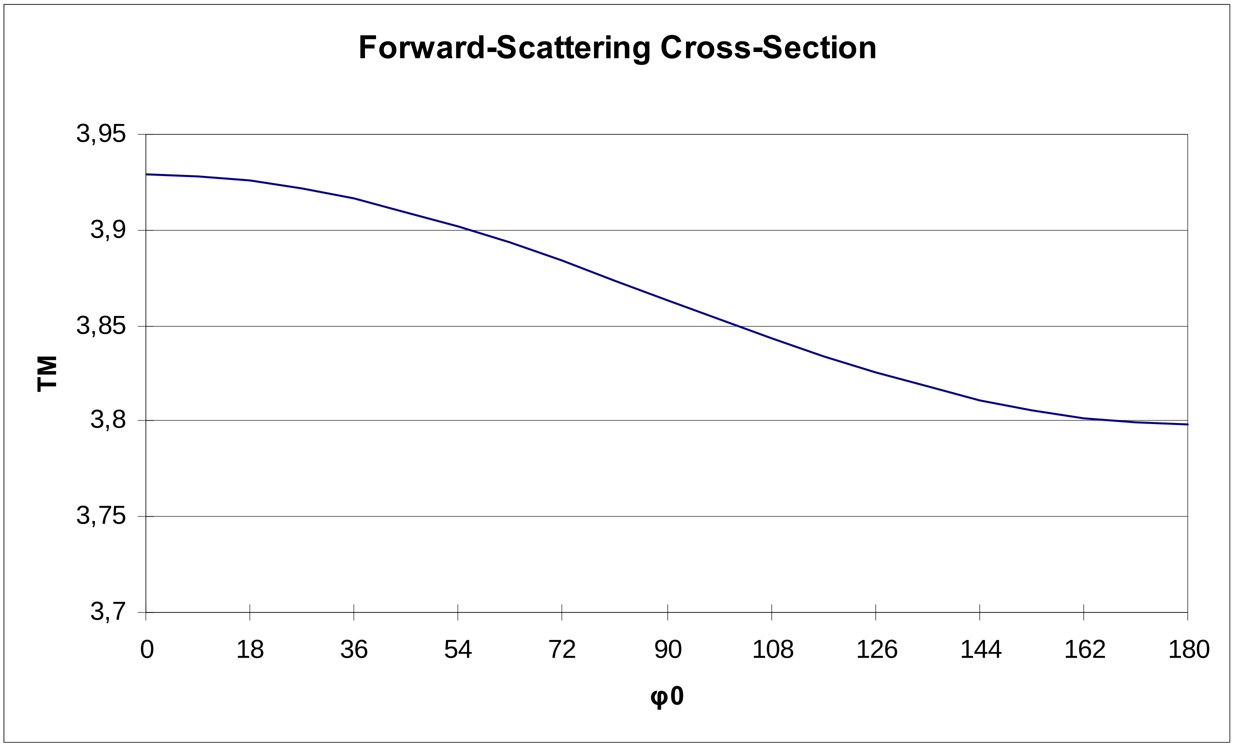


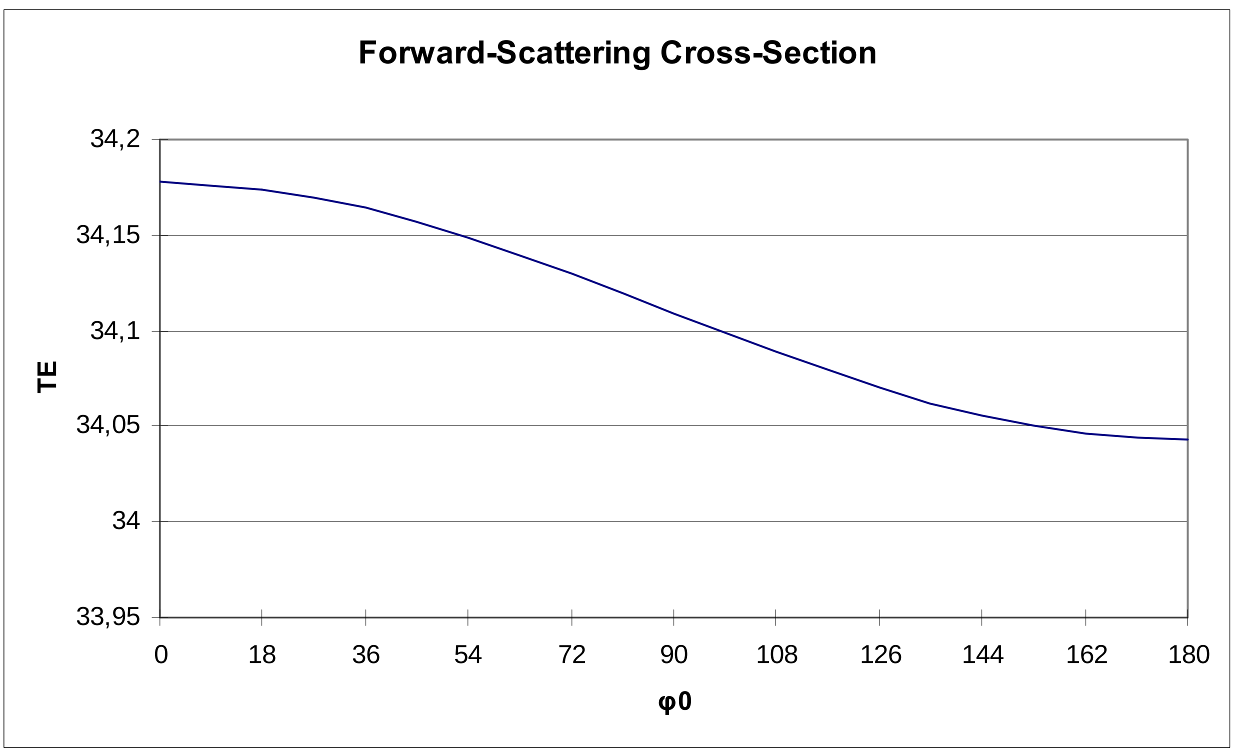
Total Scattering Cross-Section
TE
11,6448
11,6446
11,6444
11,6442
11,644
11,6438
11,6436
11,6434
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

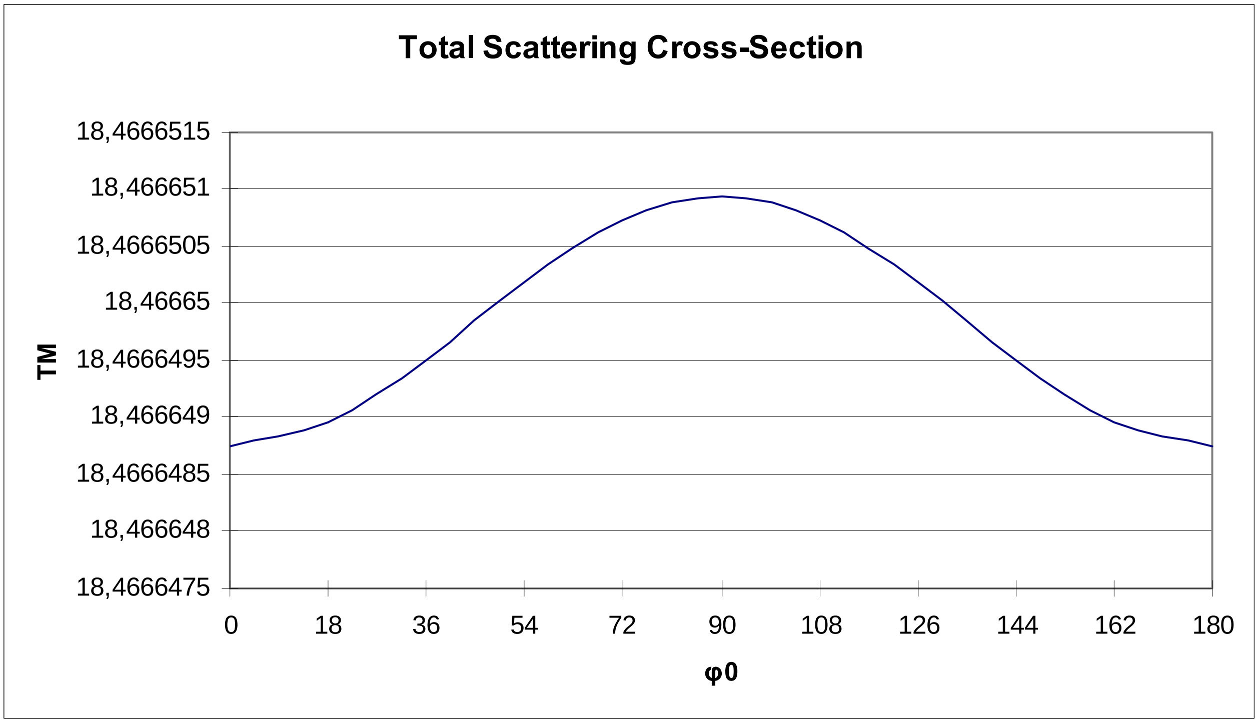
(ι) b/a=0.5 , ε1=2.54, ε2=4.0, μ1=μ2=1, d/a=0.05, α/λ0=0.7

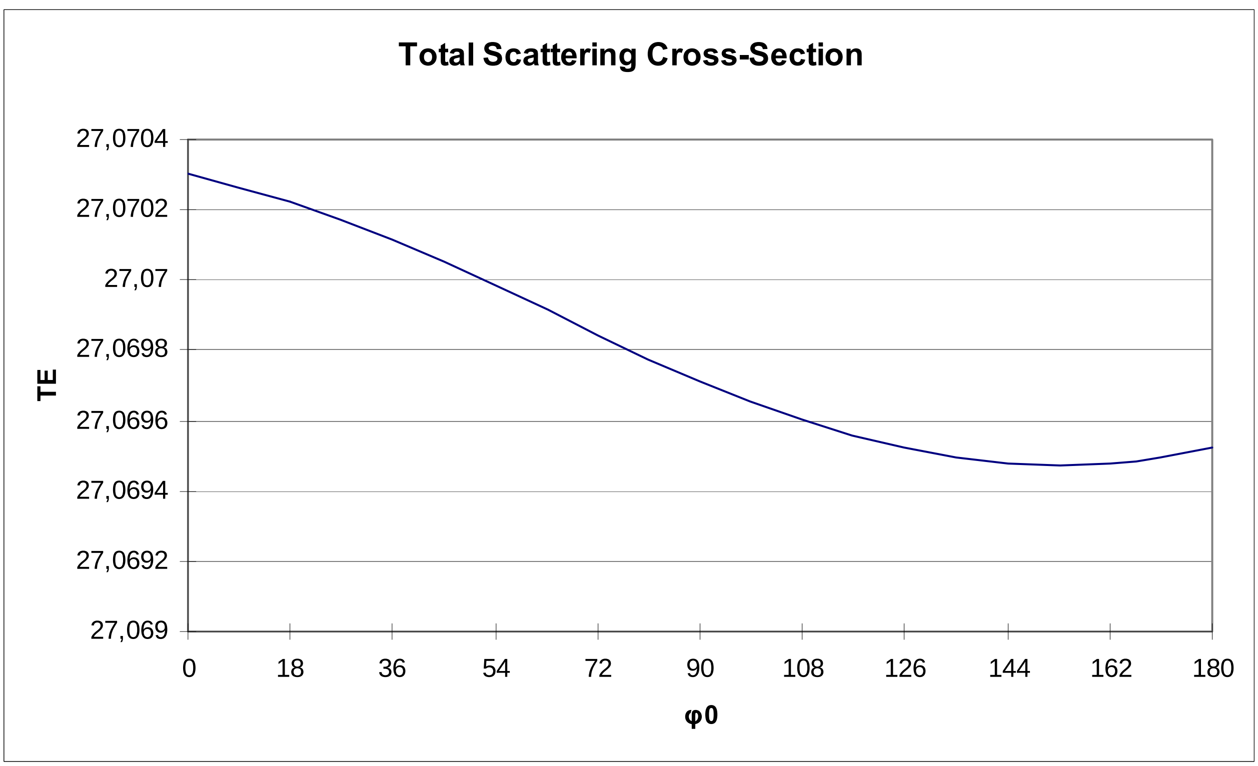




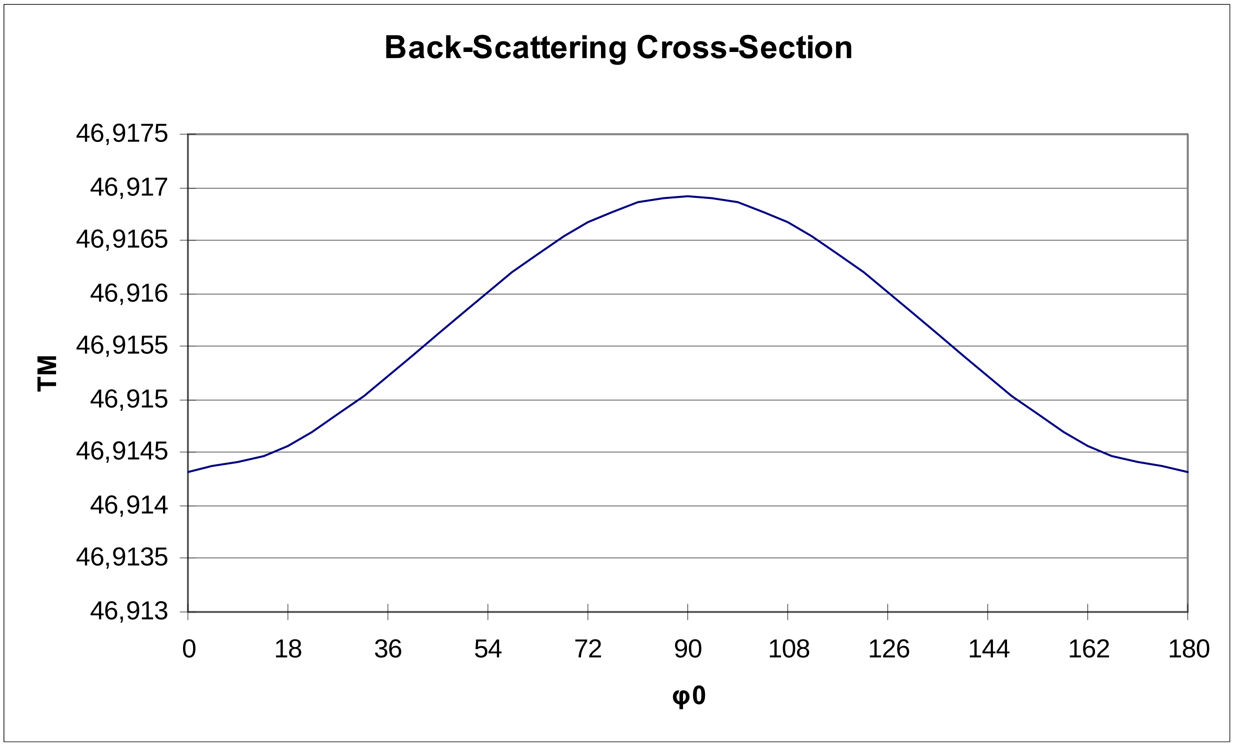

Forward-Scattering Cross-Section
3,95
3,9
3,85
3,8
3,75
3,7
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

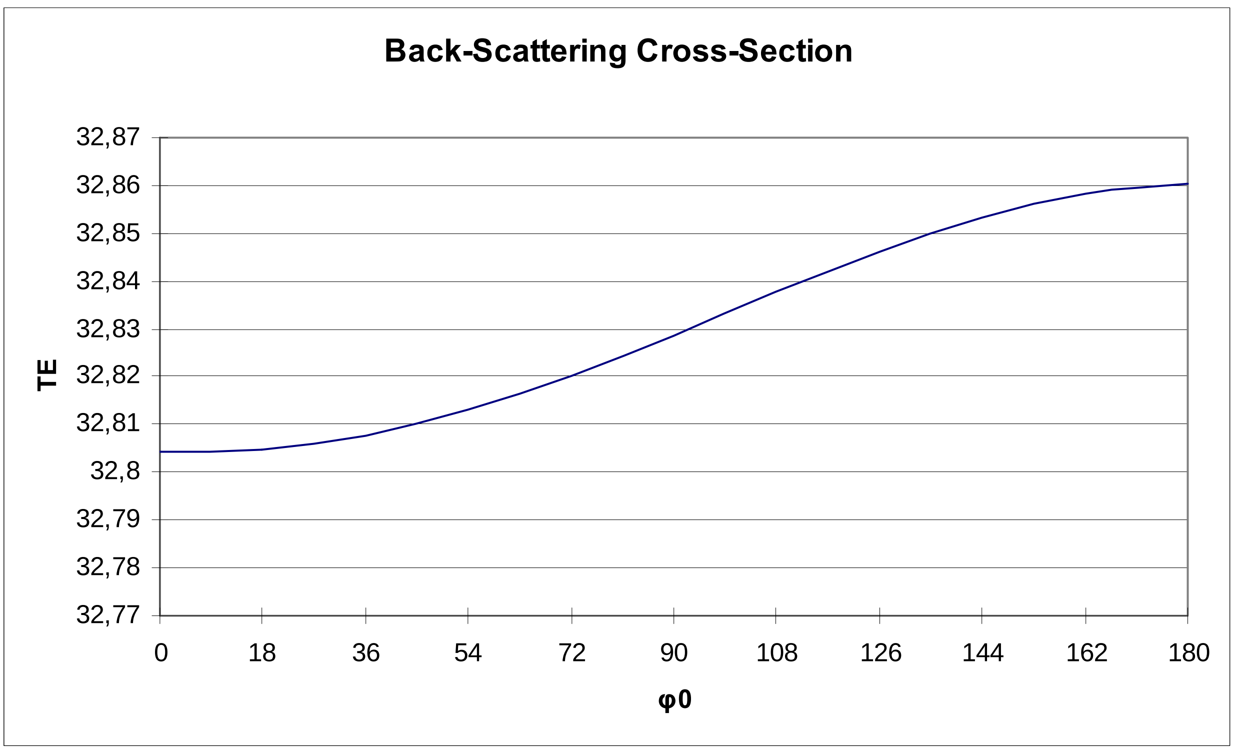

Forward-Scattering Cross-Section
34,2
34,15
34,1
34,05
34
33,95
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

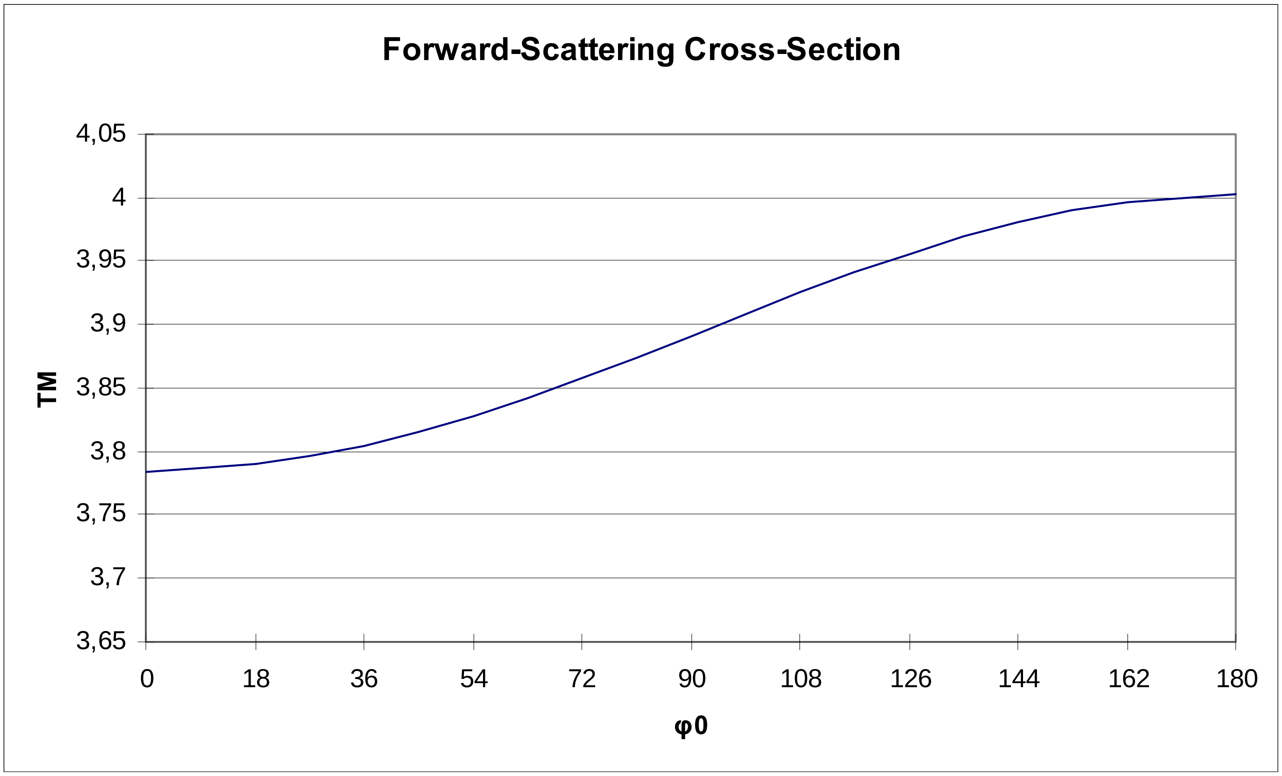

Total Scattering Cross-Section
18,4666515
18,466651
18,4666505
18,46665
18,4666495
18,466649
18,4666485
18,466648
18,4666475
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

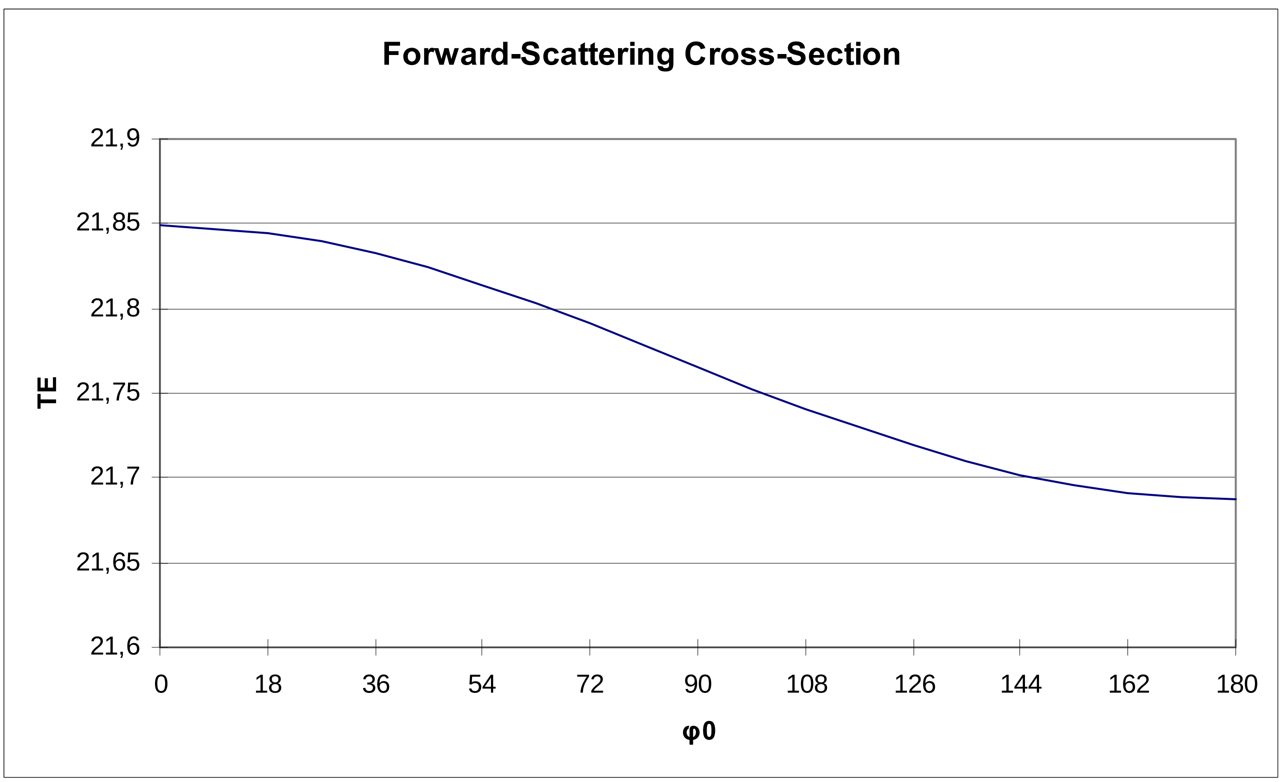

Total Scattering Cross-Section
27,0704
27,0702
27,07
27,0698
27,0696
27,0694
27,0692
27,069
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

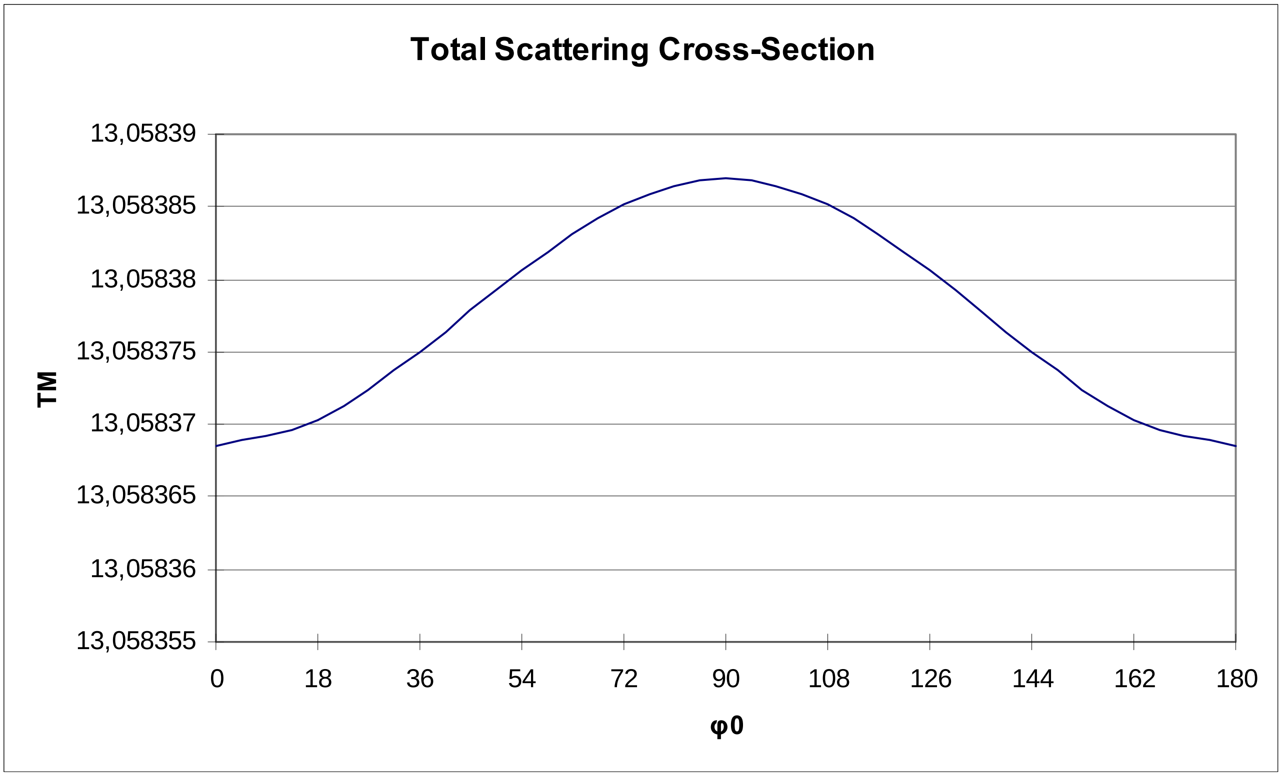
(ιιι) b/a=0.5 , ε1=2.54, ε2=4.0, μ1=μ2=1, d/a=0.1, α/λ0=0.3

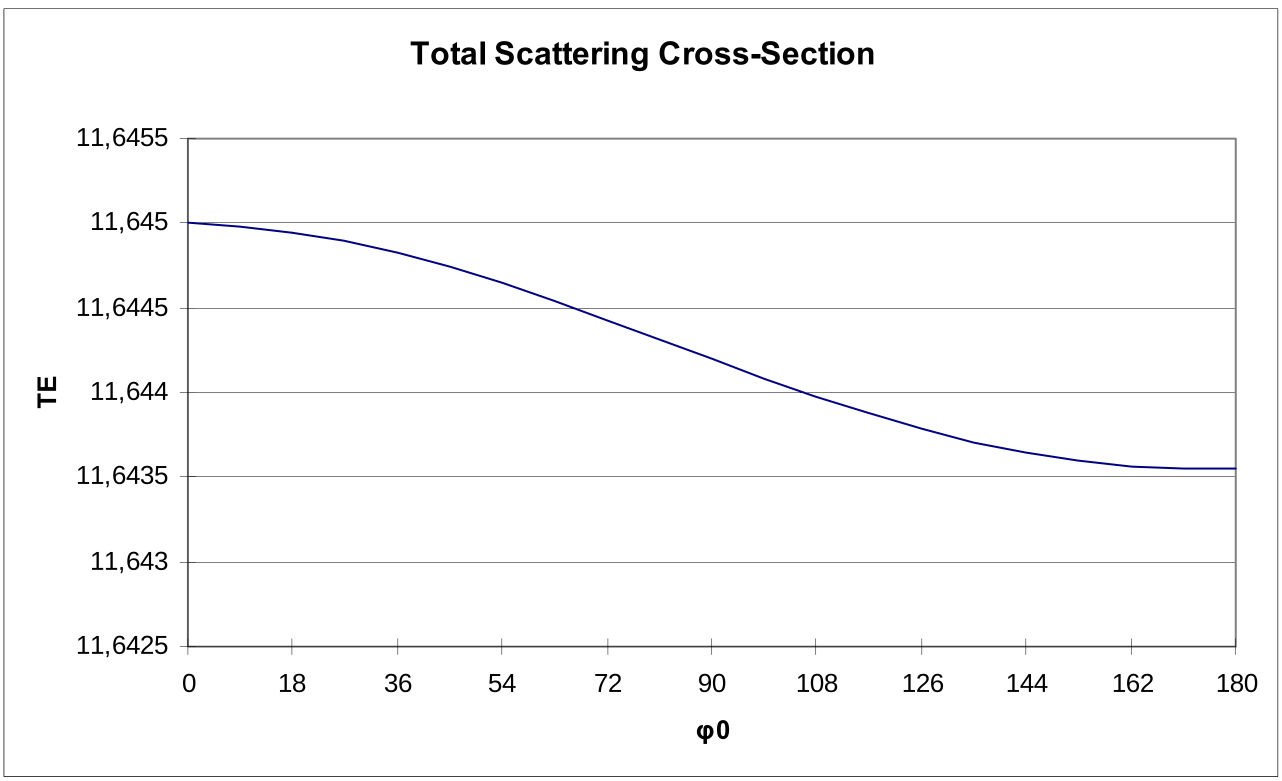





Forward-Scattering Cross-Section
TM
4,05
4
3,95
3,9
3,85
3,8
3,75
3,7
3,65
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

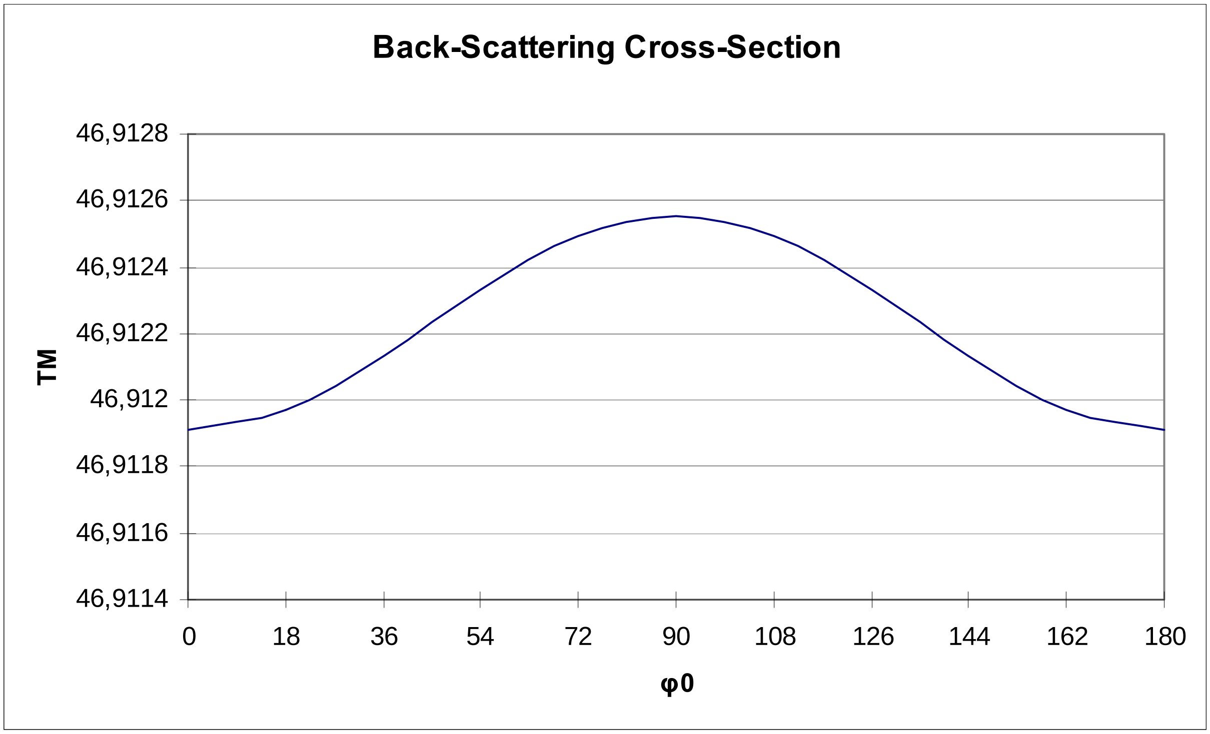

Forward-Scattering Cross-Section
TE
21,9
21,85
21,8
21,75
21,7
21,65
21,6
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

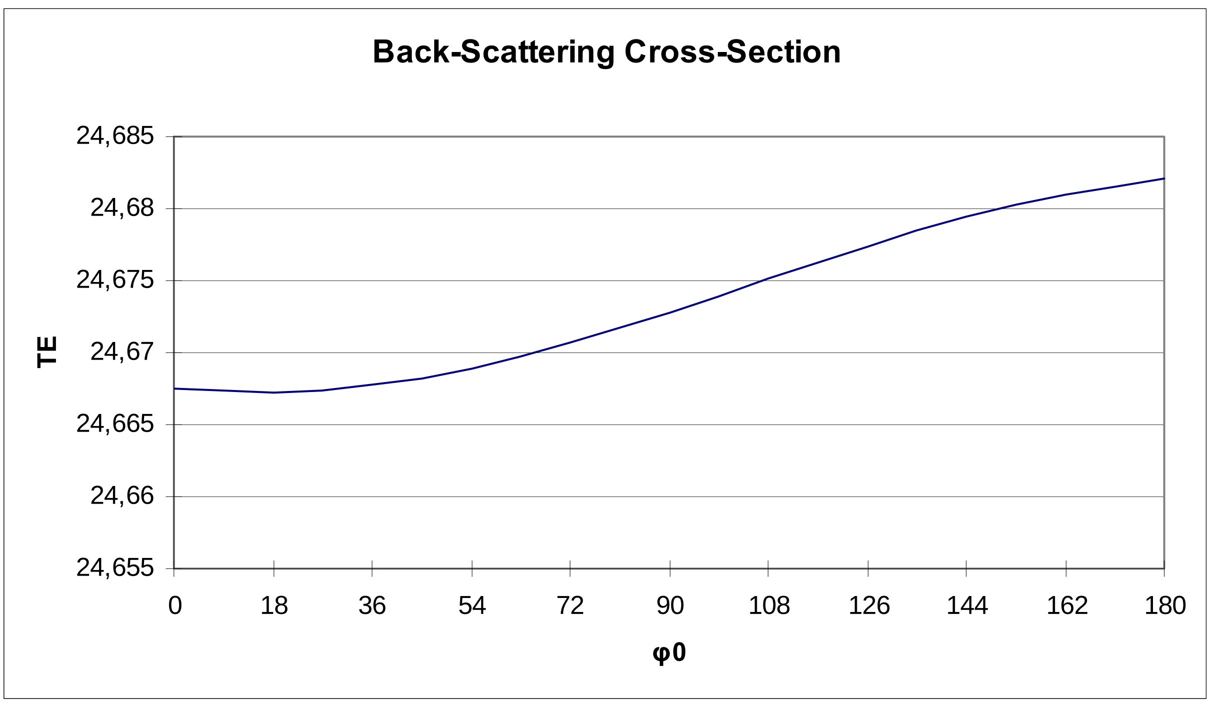

Total Scattering Cross-Section
13,05839
13,058385
13,05838
13,058375
13,05837
13,058365
13,05836
13,058355
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

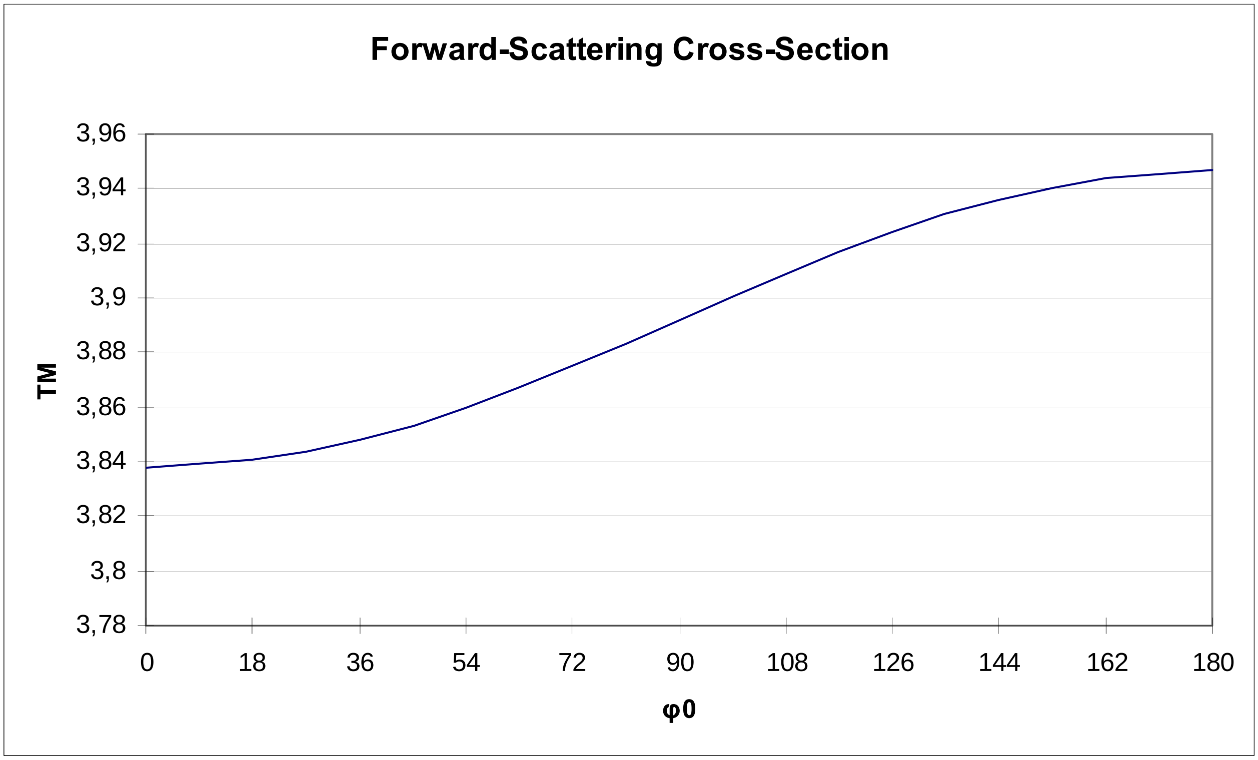

Total Scattering Cross-Section
11,6455
11,645
11,6445
11,644
11,6435
11,643
11,6425
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

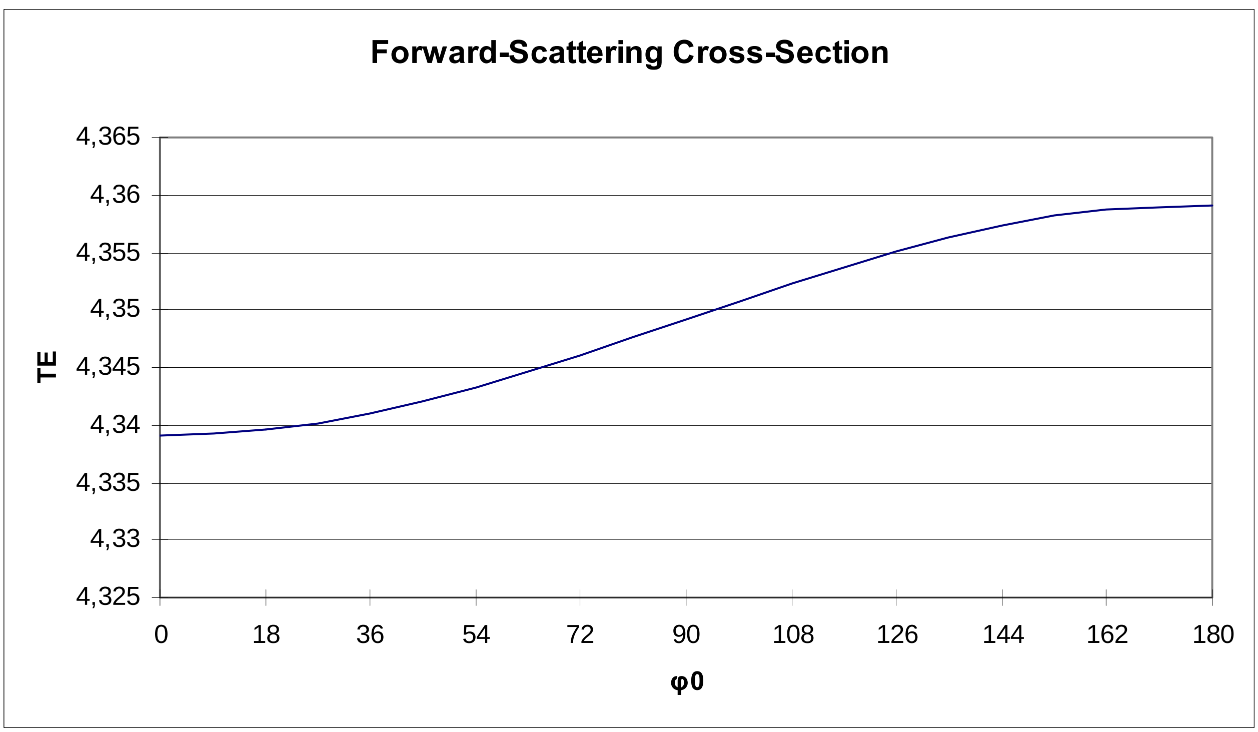
Β)Στην περιοχή (1) υπάρχει μεταϋλικό, ενώ στην περιοχή (2) υπάρχει διηλεκτρικό υλικό

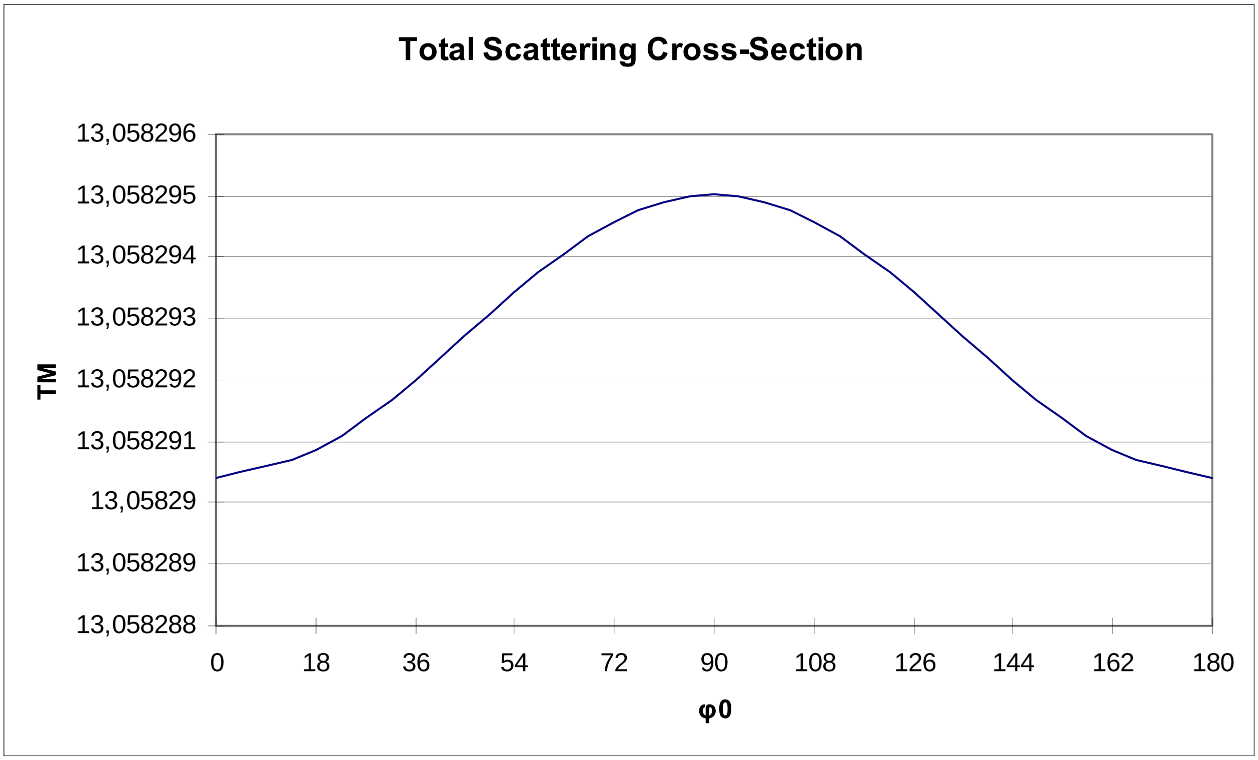
(ι) b/a=0.5 , ε1=-2.54, ε2=4.0, μ1=-1, μ2=1, d/a=0.05, α/λ0=0.3

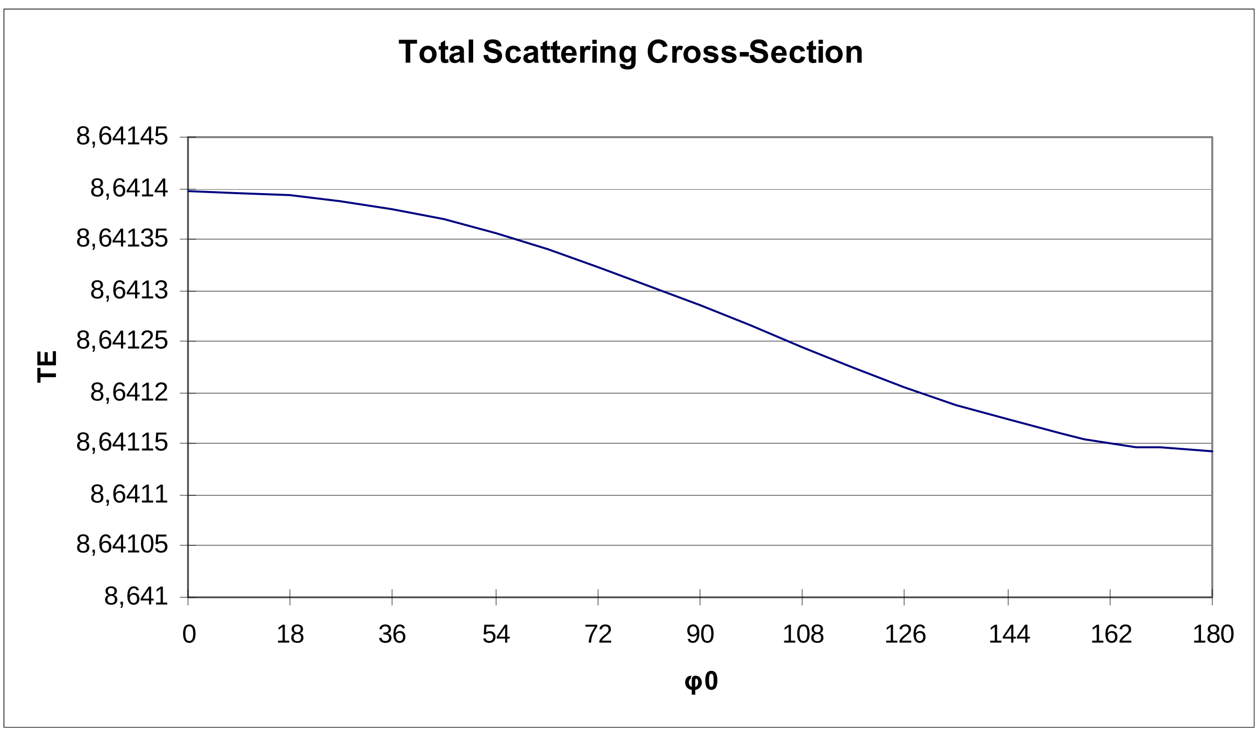




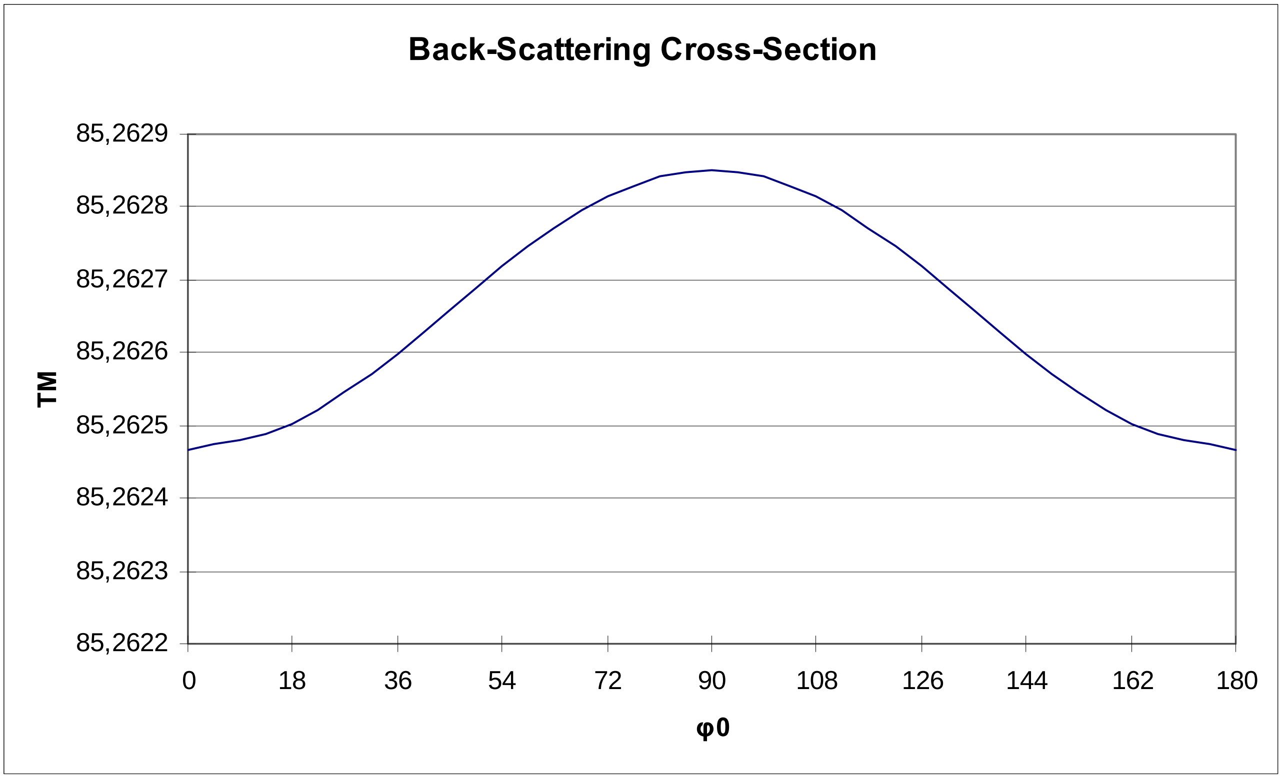

Forward-Scattering Cross-Section
TM
3,96
3,94
3,92
3,9
3,88
3,86
3,84
3,82
3,8
3,78
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

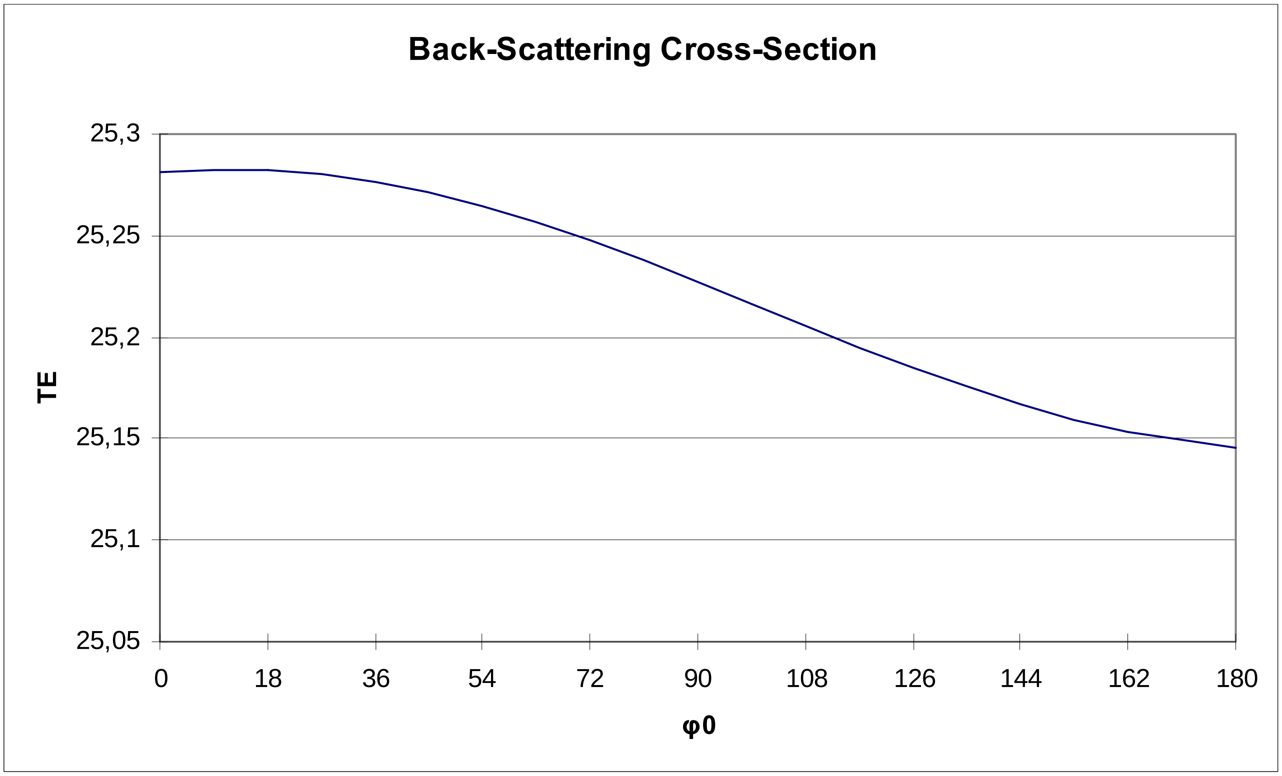

Forward-Scattering Cross-Section
TE
4,365
4,36
4,355
4,35
4,345
4,34
4,335
4,33
4,325
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

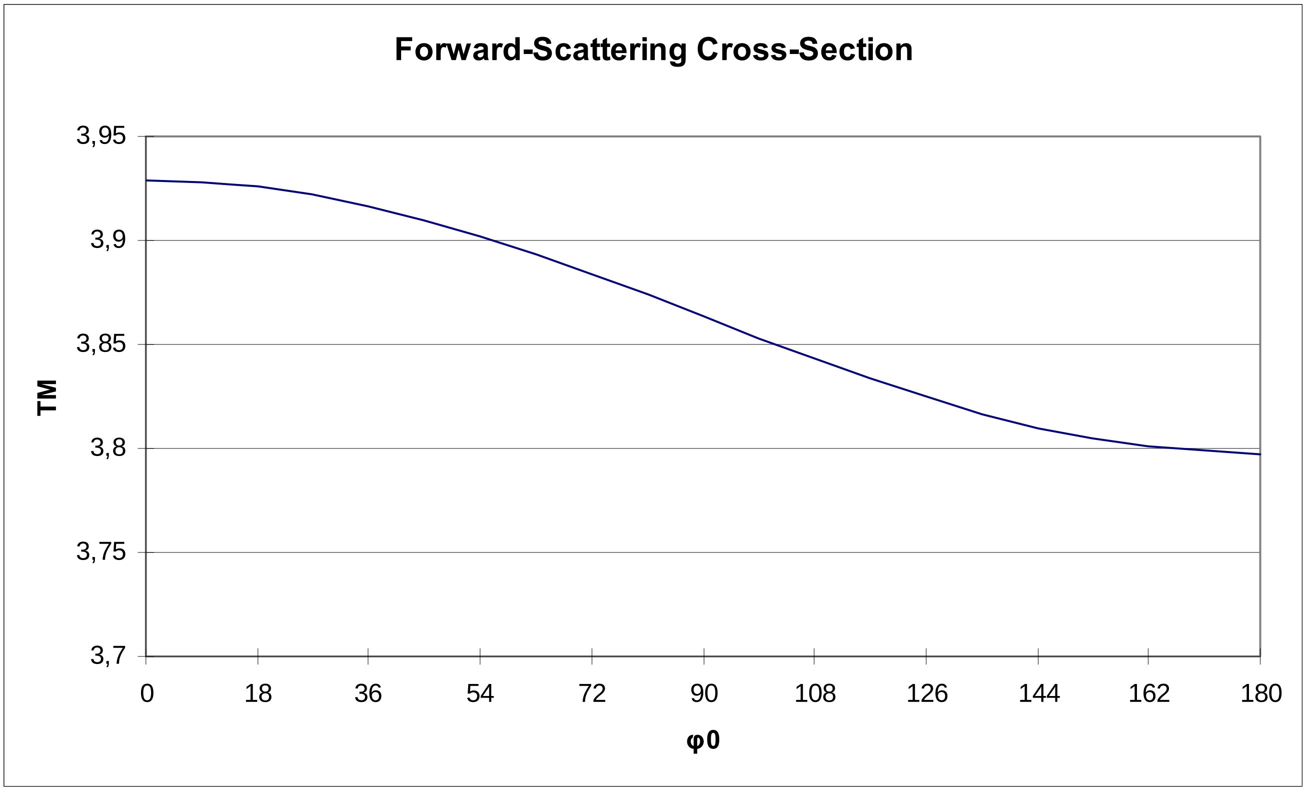

Total Scattering Cross-Section
13,058296
13,058295
13,058294
13,058293
13,058292
13,058291
13,05829
13,058289
13,058288
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

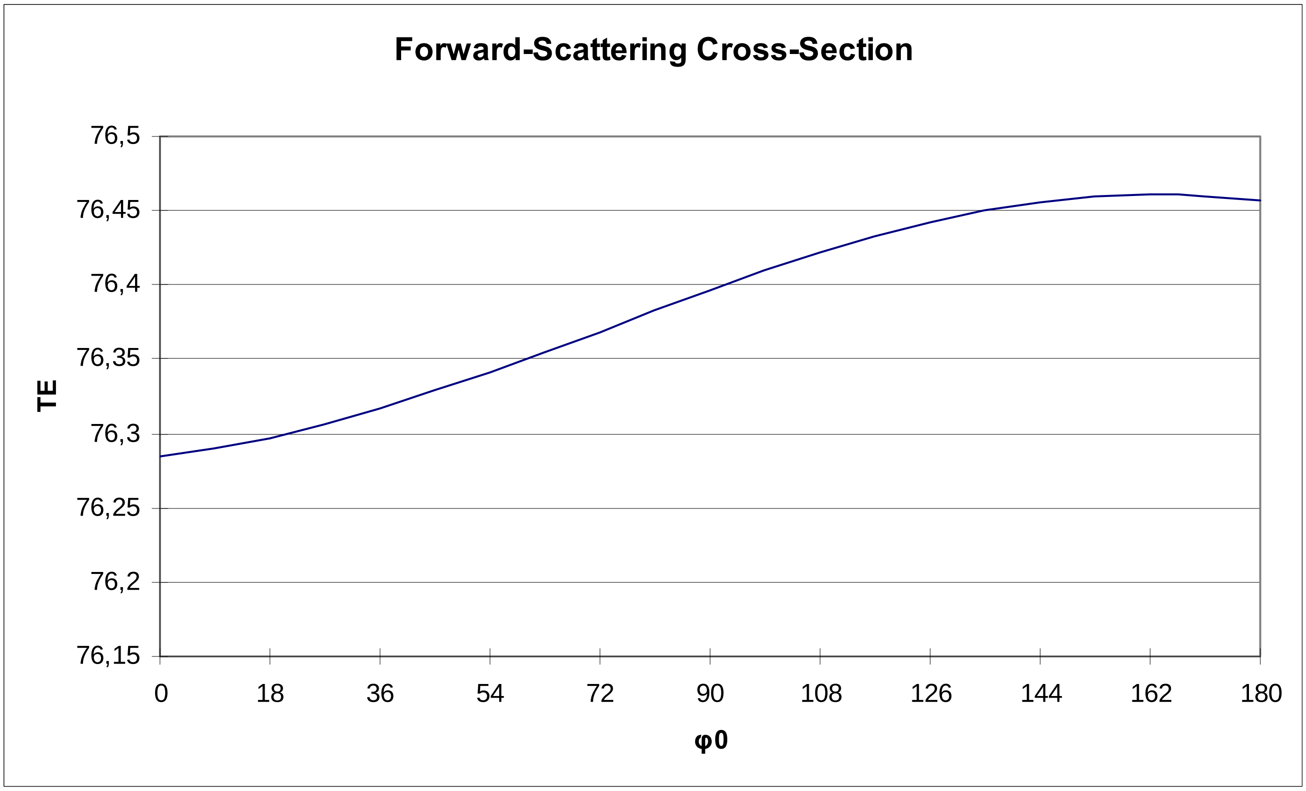

Total Scattering Cross-Section
8,64145
8,6414
8,64135
8,6413
8,64125
8,6412
8,64115
8,6411
8,64105
8,641
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

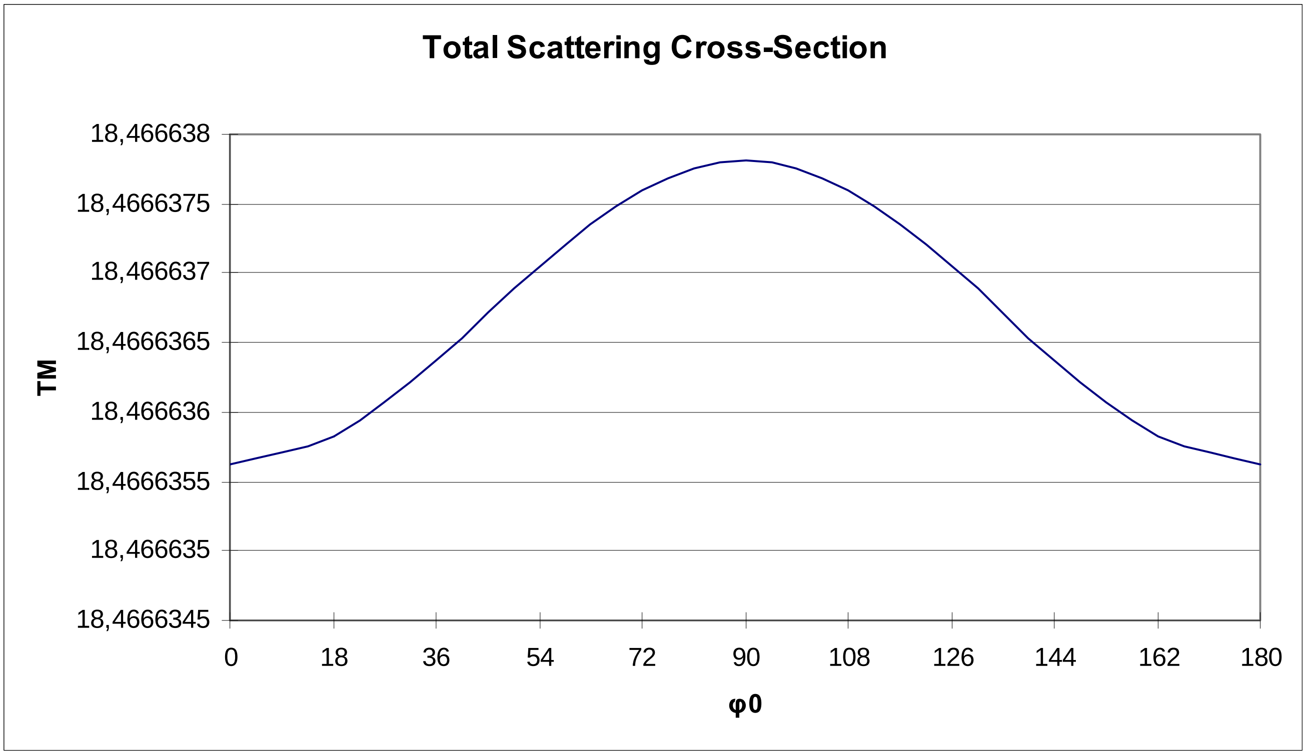
(ιι) b/a=0.5 , ε1=-2.54, ε2=4.0, μ1=-1, μ2=1, d/a=0.05, α/λ0=0.7

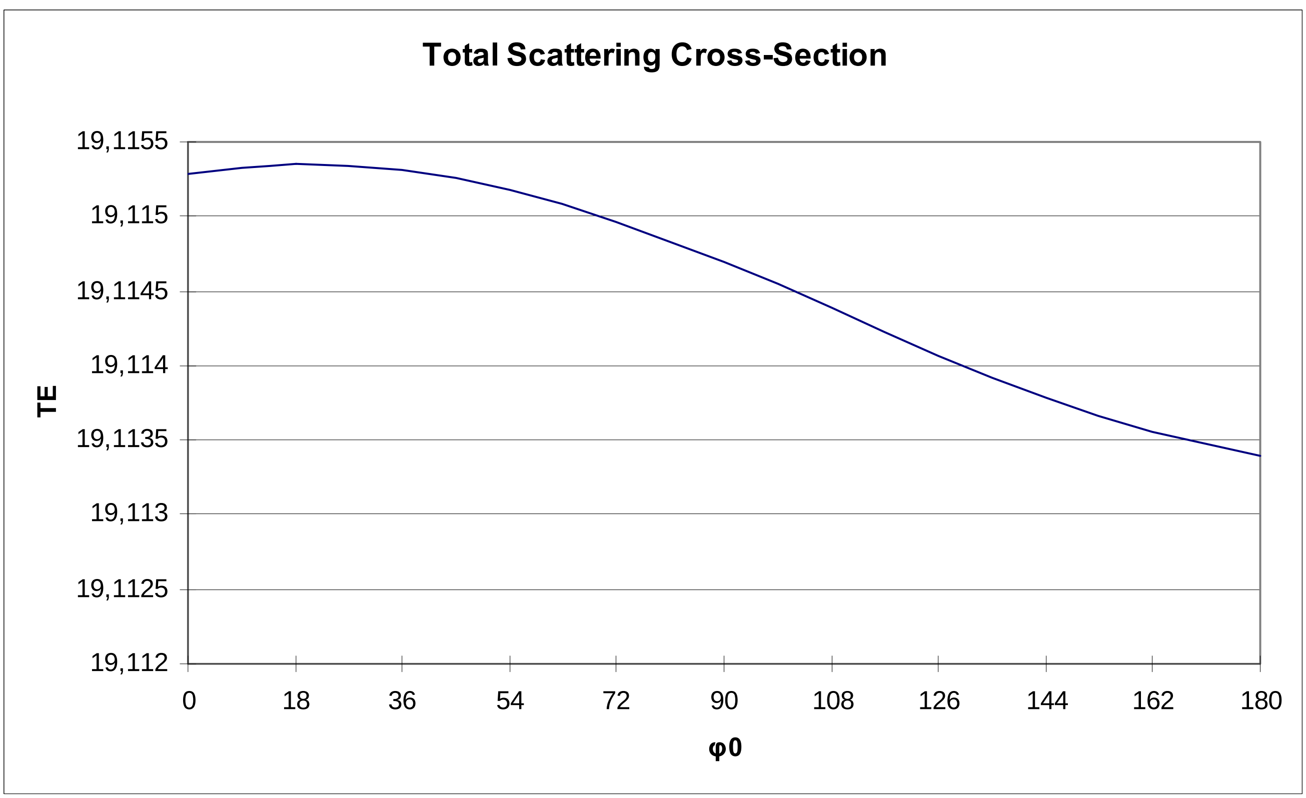




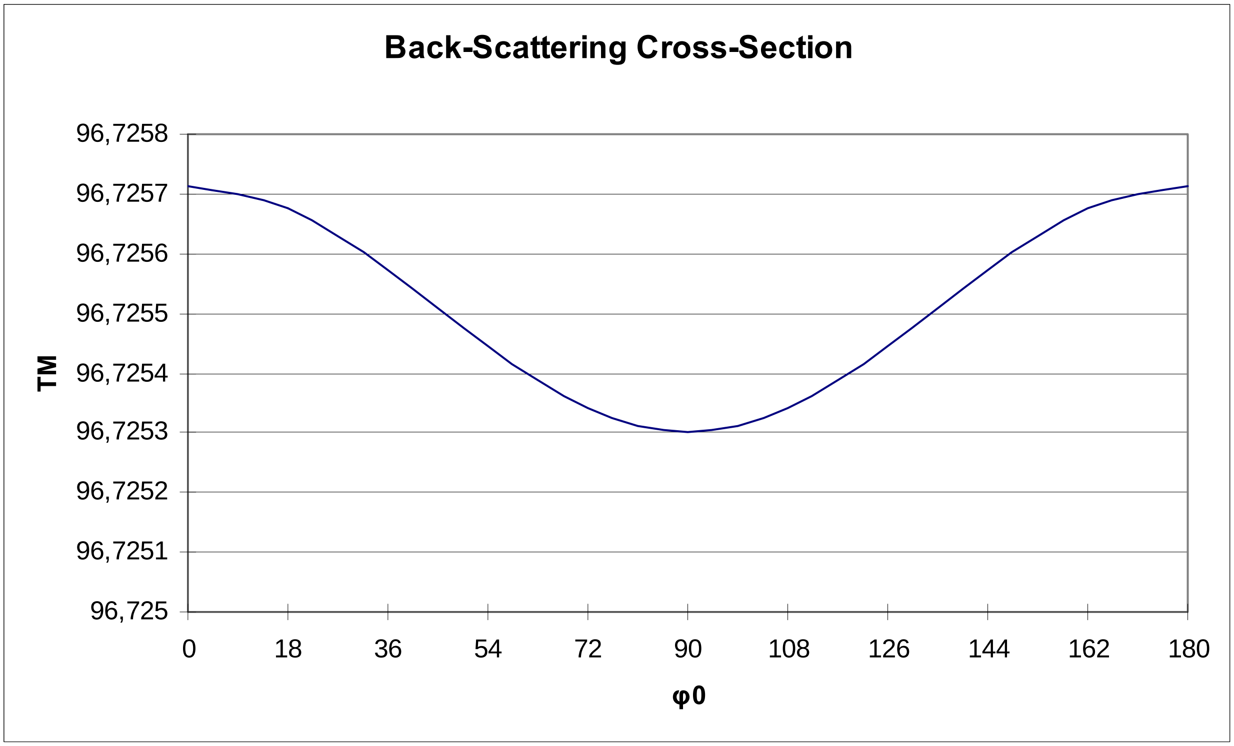

Forward-Scattering Cross-Section
3,95
3,9
3,85
3,8
3,75
3,7
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

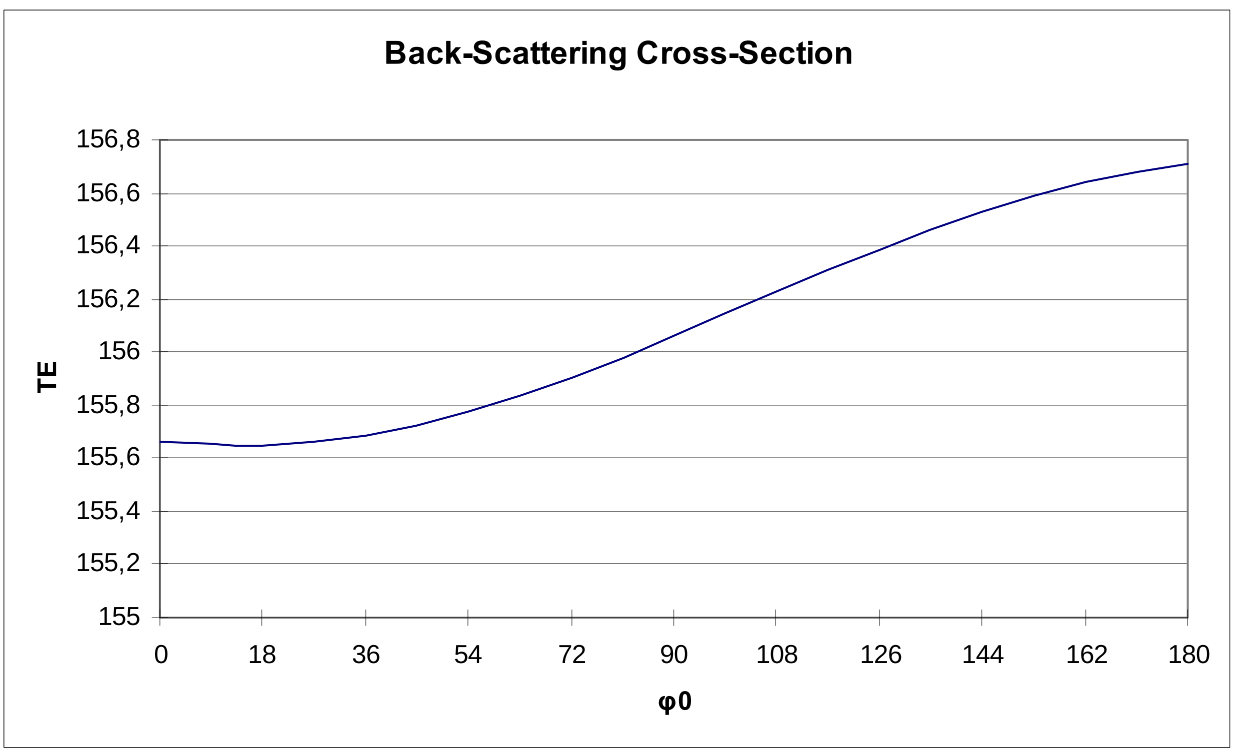

Forward-Scattering Cross-Section
76,5
76,45
76,4
76,35
76,3
76,25
76,2
76,15
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

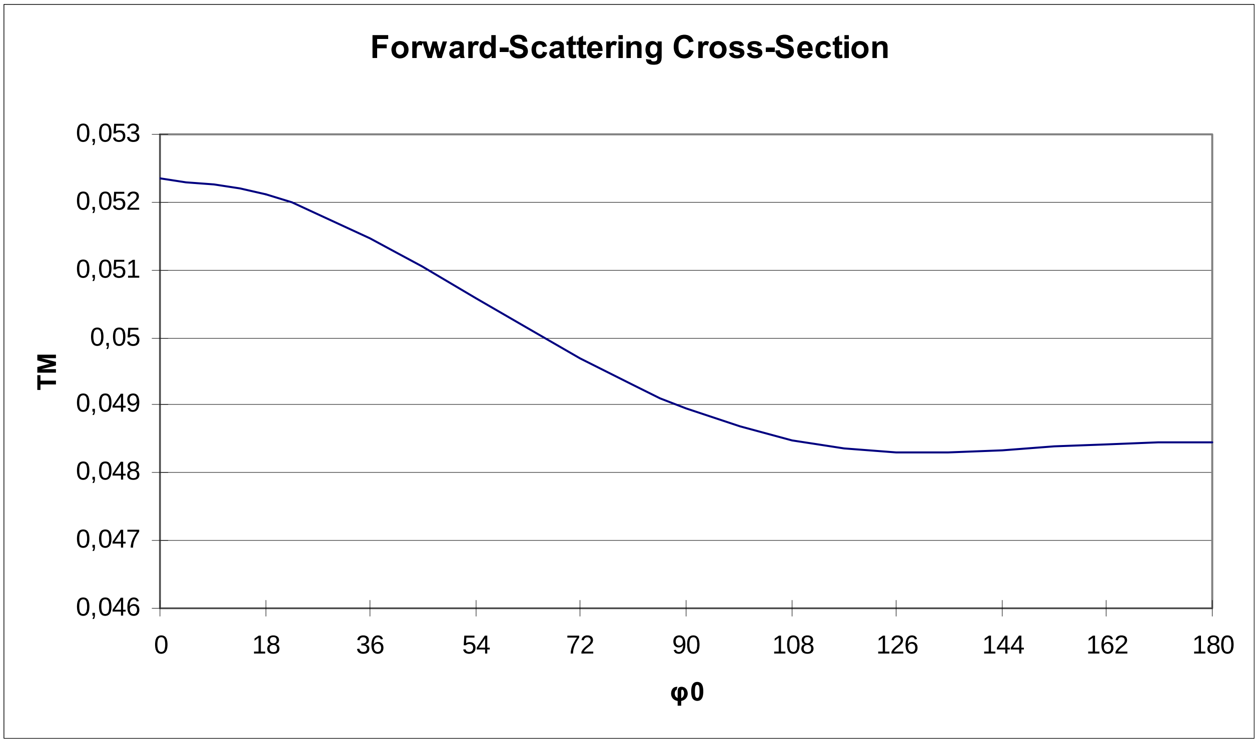

Total Scattering Cross-Section
TM
18,466638
18,4666375
18,466637
18,4666365
18,466636
18,4666355
18,466635
18,4666345
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

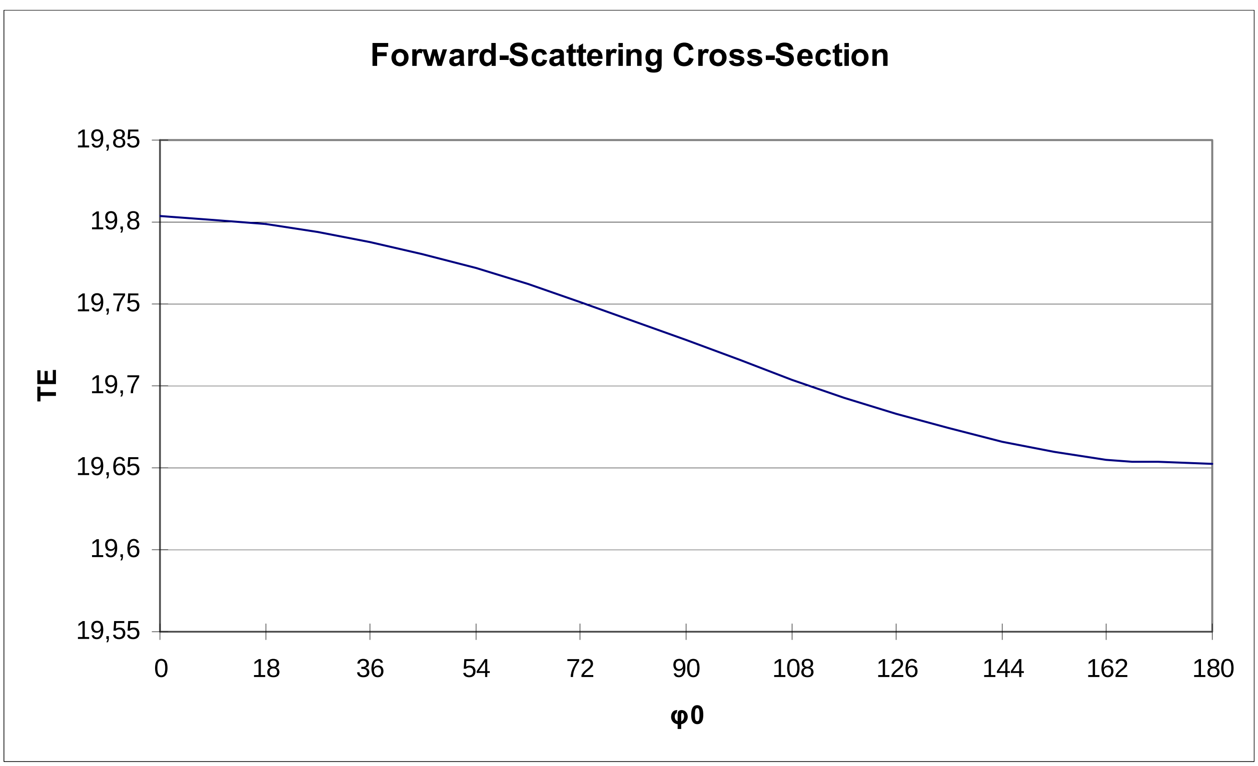

Total Scattering Cross-Section
TE
19,1155
19,115
19,1145
19,114
19,1135
19,113
19,1125
19,112
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

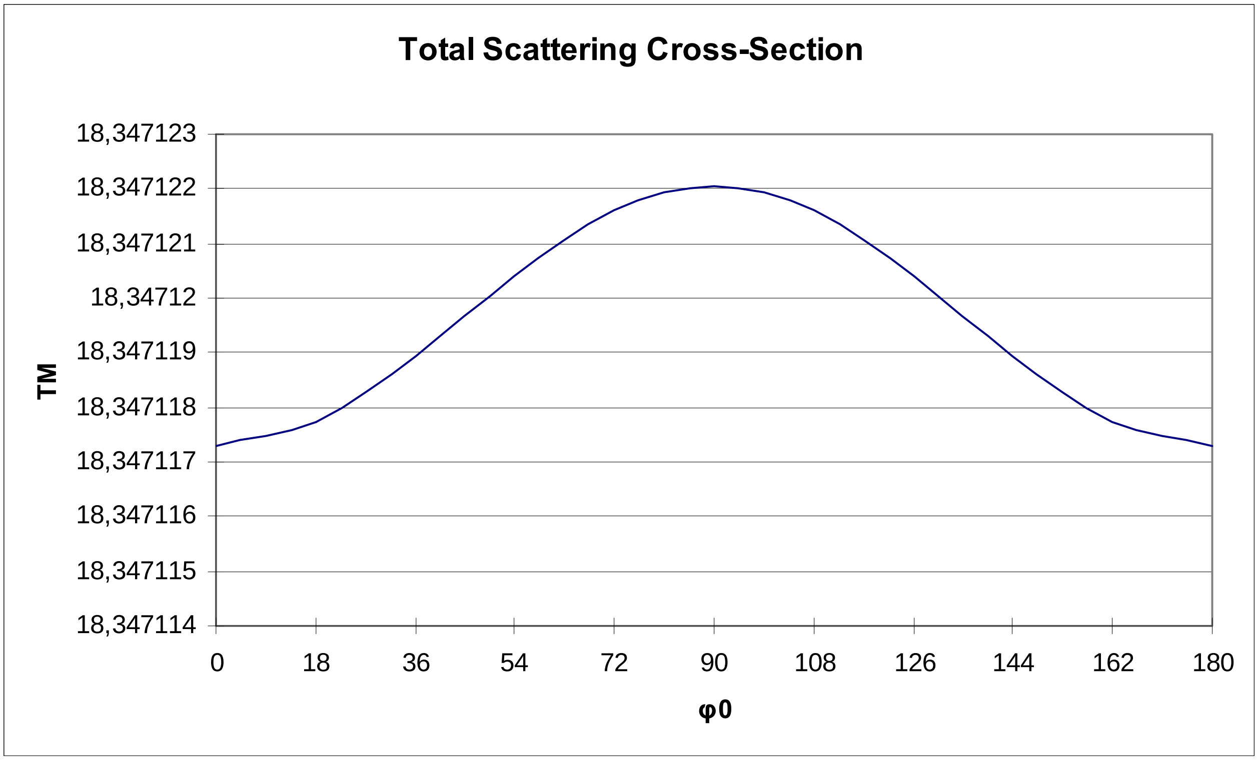
(ιιι) b/a=0.5 , ε1=-2.54, ε2=4.0, μ1=-1, μ2=1, d/a=0.1, α/λ0=0.5

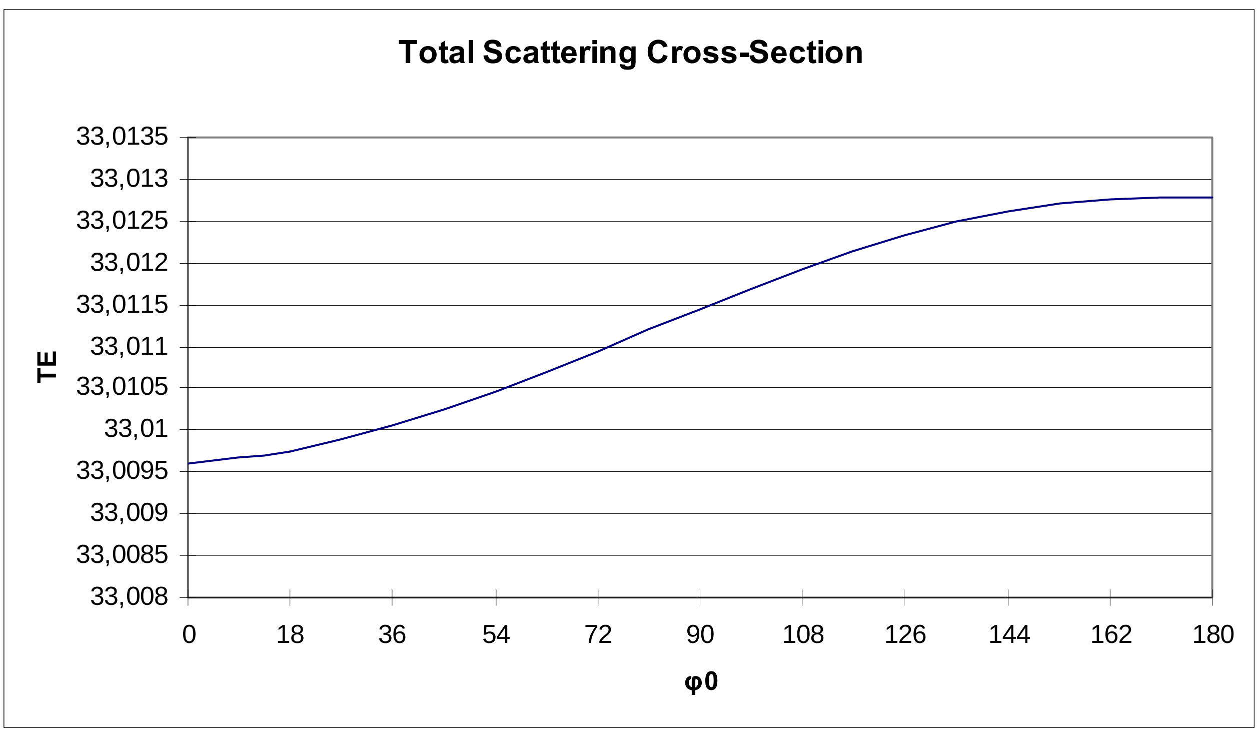





Forward-Scattering Cross-Section
TM
0,053
0,052
0,051
0,05
0,049
0,048
0,047
0,046
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0


Forward-Scattering Cross-Section
TE
19,85
19,8
19,75
19,7
19,65
19,6
19,55
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0


Total Scattering Cross-Section
18,347123
18,347122
18,347121
18,34712
18,347119
18,347118
18,347117
18,347116
18,347115
18,347114
TM
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0


Total Scattering Cross-Section
33,0135
33,013
33,0125
33,012
33,0115
33,011
33,0105
33,01
33,0095
33,009
33,0085
33,008
TE
0
18
36
54
72
90
108
126
144
162
180
φ0

9.Παραρτήματα:

Παράρτημα 1:

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑΣ:

Τα παρακάτω τριγωνομετρικά ολοκληρώματα χρησιμοποιήθηκαν για να απλοποιηθούν οι σειρές συντελεστών των οριακών συνθηκών.

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \sin l\varphi d\varphi = \begin{cases} \pi, \gamma\iota\alpha \ m = l \\ 0, \gamma\iota\alpha \ m \neq l \\ -\pi, \gamma\iota\alpha \ m = \text{-}l \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos l\varphi d\varphi = \begin{cases} 2\pi, \gamma\iota\alpha \ m = l = 0 \\ \pi, \gamma\iota\alpha \ m = l \neq 0 \text{ και για } m = -l \neq 0 \\ 0, \gamma\iota\alpha \ m \neq l \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin m\varphi \cos l\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \sin l\varphi d\varphi = 0$$

Στους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε και η παρακάτω σχέση:

$$\exp[j(m-n)\varphi] = \cos[(m-n)\varphi] + j\sin[(m-n)\varphi]$$

Επιπλέον, στους υπολογισμούς εμφανίζονται και τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\varphi]d\varphi = 2\pi \text{ για m=n}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\varphi]d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\varphi]\cos\varphi d\varphi = \pi, \text{για } m = n+1 \text{ και για } m = n-1$$

$$\int_0^{2\pi} \sin[(m-n)\varphi]\cos\varphi d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[(m-n)\varphi]\sin\varphi d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \sin[(m-n)\varphi]d\varphi = \begin{cases} \pi, \gamma\iota\alpha\ m = n+1 \\ -\pi, \gamma\iota\alpha\ m = n-1 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cos[(m-n)\varphi]d\varphi = \begin{cases} \pi, \gamma\iota\alpha\ m = n \\ \frac{\pi}{2}, \gamma\iota\alpha\ m = n+2 \text{ και για } m = n-2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \sin[(m-n)\varphi]d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \sin[(m-n)\varphi]d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos[(m-n)\varphi] d\varphi = \begin{cases} \pi, \gamma\iota\alpha\ m=n \\ -\dfrac{\pi}{2}, \gamma\iota\alpha\ m=n+2 \text{ και για } m=n-2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \sin[(m-n)\varphi] d\varphi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, \gamma\iota\alpha\ m=n+2 \\ -\dfrac{\pi}{2}, \gamma\iota\alpha\ m=n-2 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\varphi \cos\varphi \cos[(m-n)\varphi] d\varphi = 0$$

Παράρτημα 2:

Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΤΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ (21) ΚΑΙ (26)

Σε αυτό το παράρτημα εκθέτουμε μια σειρά συντελεστών που προέκυψαν μετά από τη διαδικασία της ορθογωνιότητας και μια σειρά αναλυτικών αλγεβρικών πράξεων. Αυτοί οι συντελεστές διαφοροποιούνται για TE και για TM κύματα:

TM (E-WAVE):

$$Q_m^E(-),K_m^E(+)=j^m\exp(-jm\varphi_0)\left[\frac{J_m^{'}(k_o a)}{H_m^{(1)'}(k_0 a)}\mp\frac{J_m(k_o a)}{H_m^{(1)}(k_0 a)}\right]$$

$$C_{m,m}^E(-),l_{m,m}^E(+)=\Bigg[\frac{\{k_1J_m^{'}(k_1a)+(\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}m(j-m)k_1J_m^{'}(k_1a)+\frac{1}{4}k_1^2aJ_m^{''}(k_1a)-}{k_0H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1J_m^{'}(k_1a)+\frac{1}{4}k_1^3aJ_m^{'''}(k_1a)]\}+q_m^E\{k_1Y_m^{'}(k_1a)+(\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}m(j-m)k_1Y_m^{'}(k_1a)+}{k_0H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{4}k_1^2aY_m^{''}(k_1a)-\frac{1}{4}k_1Y_m^{'}(k_1a)+\frac{1}{4}k_1^3aY_m^{'''}(k_1a)]\}}{k_0H_m^{(1)'}(k_0a)}\Bigg]\mp\Bigg[\frac{\{J_m(k_1a)+(\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}k_1aJ_m^{'}(k_1a)-}{H_m^{(1)}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1^2a^2J_m^{''}(k_1a)+\frac{1}{4}m(j-m)J_m(k_1a)]\}+q_m^E\{Y_m(k_1a)+(\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}k_1aY_m^{'}(k_1a)-}{H_m^{(1)}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1^2a^2Y_m^{''}(k_1a)+\frac{1}{4}m(j-m)Y_m(k_1a)]\}}{H_m^{(1)}(k_0a)}\Bigg]$$

$$C^{E}_{m,m+1}(-), l^{E}_{m,m+1}(+) = \{[\frac{\{-\frac{1}{2}(m+1)k_1 J^{'}_{m+1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a J^{'}_{m+1}(k_1 a)\} +}{k_0 H^{(1)'}_{m}(k_0 a)}$$

$$\frac{+q^{E}_{m+1}\{-\frac{1}{2}(m+1)k_1 Y^{'}_{m+1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a Y^{'}_{m+1}(k_1 a)\}}{k_0 H^{(1)'}_{m}(k_0 a)}] \mp [\frac{\{-\frac{1}{2}J_{m+1}(k_1 a)(m+1) -}{H^{(1)}_{m}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}J^{'}_{m+1}(k_1 a)k_1 a\} + q^{E}_{m+1}\{-\frac{1}{2}Y_{m+1}(k_1 a)(m+1) - \frac{1}{2}Y^{'}_{m+1}(k_1 a)k_1 a\}}{H^{(1)}_{m}(k_0 a)}]\}(\frac{d}{a})$$

$$C^{E}_{m,m-1}(-), l^{E}_{m,m-1}(+) = \{[\frac{\{\frac{1}{2}(m-1)k_1 J^{'}_{m-1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a J^{''}_{m-1}(k_1 a)\} +}{k_0 H^{(1)'}_{m}(k_0 a)}$$

$$\frac{+q^{E}_{m-1}\{\frac{1}{2}(m-1)k_1 Y^{'}_{m+1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a Y^{''}_{m-1}(k_1 a)\}}{k_0 H^{(1)'}_{m}(k_0 a)}] \mp [\frac{\{\frac{1}{2}J_{m-1}(k_1 a)(m-1) -}{H^{(1)}_{m}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}J^{'}_{m-1}(k_1 a)k_1 a\} + q^{E}_{m-1}\{\frac{1}{2}Y_{m-1}(k_1 a)(m-1) - \frac{1}{2}Y^{'}_{m-1}(k_1 a)k_1 a\}}{H^{(1)}_{m}(k_0 a)}]\}(\frac{d}{a})$$

$$C^E_{m,m-2}(-), l^E_{m,m-2}(+) = \{[\frac{\{-\frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)k_1 J'_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{4}k_1^2 a J''_{m-2}(k_1a)(m-2) +}{k_0 H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{8}k_1 J'_{m-2}(k_1a) + \frac{1}{8}k_1^3 a^2 J'''_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{8}k_1^2 a J''_{m-2}(k_1a)\} + q^E_{m-2}\{-\frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)k_1 Y'_{m-2}(k_1a) -}{k_0 H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1^2 a Y''_{m-2}(k_1a)(m-2) + \frac{1}{8}k_1 Y'_{m-2}(k_1a) + \frac{1}{8}k_1^3 a^2 Y'''_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{8}k_1^2 a Y''_{m-2}(k_1a)\}}{k_0 H_m^{(1)'}(k_0a)}] \mp [\frac{\{-\frac{1}{8}k_1 a J'_{m-2}(k_1a) -}{}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2 a^2 J''_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{4}(m-2)k_1 a J'_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)J_{m-2}(k_1a)\} + q^E_{m-2}\{-\frac{1}{8}k_1 a Y'_{m-2}(k_1a) -}{H_m^{(1)}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2 a^2 Y''_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{4}(m-2)k_1 a Y'_{m-2}(k_1a) - \frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)Y_{m-2}(k_1a)\}}{H_m^{(1)}(k_0a)}]\}(\frac{d}{a})^2$$

$$C^E_{m,m+2}(-), l^E_{m,m+2}(+) = \{[\frac{\{-\frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)k_1 J'_{m+2}(k_1a) + \frac{1}{4}k_1^2 a J''_{m+2}(k_1a)(m+2) +}{k_0 H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{8}k_1 J'_{m+2}(k_1a) + \frac{1}{8}k_1^3 a^2 J'''_{m+2}(k_1a) - \frac{1}{8}k_1^2 a J''_{m+2}(k_1a)\} + q^E_{m+2}\{-\frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)k_1 Y'_{m+2}(k_1a) +}{k_0 H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{4}k_1^2 a Y''_{m+2}(k_1a)(m+2) + \frac{1}{8}k_1 Y'_{m+2}(k_1a) + \frac{1}{8}k_1^3 a^2 Y'''_{m+2}(k_1a) - \frac{1}{8}k_1^2 a Y''_{m+2}(k_1a)\}}{k_0 H_m^{(1)'}(k_0a)}] \mp [\frac{\{-\frac{1}{8}k_1 a J'_{m+2}(k_1a) -}{}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2 a^2 J''_{m+2}(k_1a) + \frac{1}{4}(m+2)k_1 a J'_{m+2}(k_1a) - \frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)J_{m+2}(k_1a)\} + q^E_{m+2}\{-\frac{1}{8}k_1 a Y'_{m+2}(k_1a) -}{H_m^{(1)}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2 a^2 Y''_{m+2}(k_1a) + \frac{1}{4}(m+2)k_1 a Y'_{m+2}(k_1a) - \frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)Y_{m+2}(k_1a)\}}{H_m^{(1)}(k_0a)}]\}(\frac{d}{a})^2$$

TE (H-WAVE):

$$Q_m^H(-), K_m^H(+) = j^m \exp(-jm\varphi_0)\left[\frac{J_m^{'}(k_o a)}{H_m^{(1)'}(k_0 a)} \mp \frac{J_m(k_o a)}{H_m^{(1)}(k_0 a)}\right]$$

$$C_{m,m}^H(-), l_{m,m}^H(+) = [\frac{\{k_1 J_m^{'}(k_1 a) + (\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}m(j-m)k_1 J_m^{'}(k_1 a) + \frac{1}{4}k_1^2 a J_m^{''}(k_1 a) -}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1 J_m^{'}(k_1 a) + \frac{1}{4}k_1^3 a J_m^{'''}(k_1 a)]\} + q_m^H \{k_1 Y_m^{'}(k_1 a) + (\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}m(j-m)k_1 Y_m^{'}(k_1 a) +}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{4}k_1^2 a Y_m^{''}(k_1 a) - \frac{1}{4}k_1 Y_m^{'}(k_1 a) + \frac{1}{4}k_1^3 a Y_m^{'''}(k_1 a)]\}}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}] \mp [\frac{\{J_m(k_1 a) + (\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}k_1 a J_m^{'}(k_1 a) -}{H_m^{(1)}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1^2 a^2 J_m^{''}(k_1 a) + \frac{1}{4}m(j-m)J_m(k_1 a)]\} + q_m^H \{Y_m(k_1 a) + (\frac{d}{a})^2[\frac{1}{4}k_1 a Y_m^{'}(k_1 a) -}{H_m^{(1)}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1^2 a^2 Y_m^{''}(k_1 a) + \frac{1}{4}m(j-m)Y_m(k_1 a)]\}}{H_m^{(1)}(k_0 a)}]$$

$$C^{H}_{m,m+1}(-), l^{H}_{m,m+1}(+) = \{[\frac{\{-\frac{1}{2}(m+1)k_1 J^{'}_{m+1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a J^{'}_{m+1}(k_1 a)\} +}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}$$

$$\frac{+q^{H}_{m+1}\{-\frac{1}{2}(m+1)k_1 Y^{'}_{m+1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a Y^{'}_{m+1}(k_1 a)\}}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}] \mp [\frac{\{-\frac{1}{2} J_{m+1}(k_1 a)(m+1) -}{H_m^{(1)}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{2} J^{'}_{m+1}(k_1 a) k_1 a\} + q^{H}_{m+1}\{-\frac{1}{2} Y_{m+1}(k_1 a)(m+1) - \frac{1}{2} Y^{'}_{m+1}(k_1 a) k_1 a\}}{H_m^{(1)}(k_0 a)}]\}(\frac{d}{a})$$

$$C^{H}_{m,m-1}(-), l^{H}_{m,m-1}(+) = \{[\frac{\{\frac{1}{2}(m-1)k_1 J^{'}_{m-1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a J^{''}_{m-1}(k_1 a)\} +}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}$$

$$\frac{+q^{H}_{m-1}\{\frac{1}{2}(m-1)k_1 Y^{'}_{m+1}(k_1 a) - \frac{1}{2}k_1^2 a Y^{''}_{m-1}(k_1 a)\}}{\frac{k_1^2}{k_0} H_m^{(1)'}(k_0 a)}] \mp [\frac{\{\frac{1}{2} J_{m-1}(k_1 a)(m-1) -}{H_m^{(1)}(k_0 a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{2} J^{'}_{m-1}(k_1 a) k_1 a\} + q^{H}_{m-1}\{\frac{1}{2} Y_{m-1}(k_1 a)(m-1) - \frac{1}{2} Y^{'}_{m-1}(k_1 a) k_1 a\}}{H_m^{(1)}(k_0 a)}]\}(\frac{d}{a})$$

$$C^{H}_{m,m-2}(-),l^{H}_{m,m-2}(+)=\{[\frac{\{-\frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)k_1J^{'}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{4}k_1^2aJ^{''}_{m-2}(k_1a)(m-2)+}{\frac{k_1^2}{k_0}H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{8}k_1J^{'}_{m-2}(k_1a)+\frac{1}{8}k_1^3a^2J^{'''}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{8}k_1^2aJ^{''}_{m-2}(k_1a)\}+q^{H}_{m-2}\{-\frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)k_1Y^{'}_{m-2}(k_1a)-}{\frac{k_1^2}{k_0}H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{4}k_1^2aY^{''}_{m-2}(k_1a)(m-2)+\frac{1}{8}k_1Y^{'}_{m-2}(k_1a)+\frac{1}{8}k_1^3a^2Y^{'''}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{8}k_1^2aY^{''}_{m-2}(k_1a)\}}{\frac{k_1^2}{k_0}H_m^{(1)'}(k_0a)}]\mp[\frac{\{-\frac{1}{8}k_1aJ^{'}_{m-2}(k_1a)-}{}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2a^2J^{''}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{4}(m-2)k_1aJ^{'}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)J_{m-2}(k_1a)\}+q^{H}_{m-2}\{-\frac{1}{8}k_1aY^{'}_{m-2}(k_1a)-}{H_m^{(1)}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2a^2Y^{''}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{4}(m-2)k_1aY^{'}_{m-2}(k_1a)-\frac{1}{8}(m-2)(j-m+2)Y_{m-2}(k_1a)\}}{H_m^{(1)}(k_0a)}]\}(\frac{d}{a})^2$$

$$C^{H}_{m,m+2}(-),l^{H}_{m,m+2}(+)=\{[\frac{\{-\frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)k_1J^{'}_{m+2}(k_1a)+\frac{1}{4}k_1^2aJ^{''}_{m+2}(k_1a)(m+2)+}{\frac{k_1^2}{k_0}H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{8}k_1J^{'}_{m+2}(k_1a)+\frac{1}{8}k_1^3a^2J^{'''}_{m+2}(k_1a)-\frac{1}{8}k_1^2aJ^{''}_{m+2}(k_1a)\}+q^{H}_{m+2}\{-\frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)k_1Y^{'}_{m+2}(k_1a)+}{\frac{k_1^2}{k_0}H_m^{(1)'}(k_0a)}$$

$$\frac{+\frac{1}{4}k_1^2aY^{''}_{m+2}(k_1a)(m+2)+\frac{1}{8}k_1Y^{'}_{m+2}(k_1a)+\frac{1}{8}k_1^3a^2Y^{'''}_{m+2}(k_1a)-\frac{1}{8}k_1^2aY^{''}_{m+2}(k_1a)\}}{\frac{k_1^2}{k_0}H_m^{(1)'}(k_0a)}]\mp[\frac{\{-\frac{1}{8}k_1aJ^{'}_{m+2}(k_1a)-}{}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2a^2J^{''}_{m+2}(k_1a)+\frac{1}{4}(m+2)k_1aJ^{'}_{m+2}(k_1a)-\frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)J_{m+2}(k_1a)\}+q^{H}_{m+2}\{-\frac{1}{8}k_1aY^{'}_{m+2}(k_1a)-}{H_m^{(1)}(k_0a)}$$

$$\frac{-\frac{1}{8}k_1^2a^2Y^{''}_{m+2}(k_1a)+\frac{1}{4}(m+2)k_1aY^{'}_{m+2}(k_1a)-\frac{1}{8}(m+2)(j-m-2)Y_{m+2}(k_1a)\}}{H_m^{(1)}(k_0a)}]\}(\frac{d}{a})^2$$

Παράρτημα 3:

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΑ ΤΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΣΕ MATLAB:

E-WAVE(TM)

```
syms x n l m ;
CT=zeros(9);
CP=zeros(15);
QTTL1=zeros(10);
QTTL2=zeros(10);
QTTL3=zeros(10);
QSC1=zeros(10);
QSC2=zeros(10);
QSC3=zeros(10);
GT1=zeros(10);
GT2=zeros(10);
e=2.54;
e1=1;
ee=4.0;
ee1=1;
BA=0.5;
ILA=3;
A=ILA*0.1;
x0=2*pi*A;
x1=x0*sqrt(e)*sqrt(e1);
x2=x1*BA;
x3=x0*BA*sqrt(ee)*sqrt(ee1);
for NF1=1:1:11
NF0=NF1-1;
f0=0.1*NF0*pi;
for L5=1:1:2
L4=L5-1;
f1=f0+L4*pi;
R=0;
R1=0;
R2=0;
CX1=0;
CX2=0;
CX3=0;
for I=1:1:51
M=I-26;
for N=1:1:5
K=M+N-3;
l=abs(K);
CT(N,1)=besselj(l,x1);
CT(N,2)=besselj(l,x0);
CT(N,3)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x1);
CT(N,4)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x0);
CT(N,5)=bessely(l,x1);
CT(N,6)=subs(diff(bessely(l,x),x),x,x1);
```

```
CT(N,7)=besselj(l,x0)+j*bessely(l,x0);
CT(N,8)=subs(diff((besselj(l,x)+j*bessely(l,x)),x),x,x0);
CT(N,9)=besselj(l,x2);
CT(N,10)=bessely(l,x2);
CT(N,11)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x2);
CT(N,12)=subs(diff(bessely(l,x),x),x,x2);
CT(N,13)=besselj(l,x3);
CT(N,14)=bessely(l,x3);
CT(N,15)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x3);
if K~=0
for L1=1:1:15
CT(N,L1)=((-1)^K)*CT(N,L1);
end
end

CR=(-j)*K*f0;
CP(1,N)=(sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(N,6)*CT(N,7)-
(CT(N,5)*CT(N,8)))/((CT(N,1)*CT(N,8))-
(sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(N,3)*CT(N,7)));
CP(2,N)=((j)^K)*(CT(N,2)*CT(N,8)-
CT(N,4)*CT(N,7))*exp(CR)/(CT(N,1)*CT(N,8)-
(sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(N,3)*CT(N,7)));
CP(3,N)=(x2*CT(N,11)*CT(N,13)-
(x3*CT(N,9)*CT(N,15)))/(x3*CT(N,10)*CT(N,15)-(x2*CT(N,12)*CT(N,13)));
end
CTM1=(CP(2,4)*CP(1,3)*(CP(3,3)-CP(3,4)))/((2*CP(2,3)*(1-
CP(1,4)*CP(3,4))));
CTM2=(-CP(2,2)*CP(1,3)*(CP(3,3)-CP(3,2)))/((CP(2,3)*2*(1-
CP(1,2)*CP(3,2))));
CW=(CP(1,3)*CP(1,4)*((CP(3,3)-CP(3,4))^2))/(4*(1-(CP(1,3)*CP(3,3)))*(1-
(CP(1,4)*CP(3,4))))+CP(1,2)*CP(1,3)*((CP(3,2)-CP(3,3))^2)/(4*(1-
(CP(1,3)*CP(3,3)))*(1-(CP(1,2)*CP(3,2))));
CLM2=((-1)*CP(2,5)*CP(1,3)*(CP(3,3)-
(2*CP(3,4))+CP(3,5)))/(CP(2,3)*8*(1-(CP(1,5)*CP(3,5))));
CLM3=(-1)*CP(2,1)*CP(1,3)*(CP(3,3)-(2*CP(3,2))+CP(3,1))/(CP(2,3)*8*(1-
(CP(1,1)*CP(3,1))));
CLM4=(CP(2,1)*CP(1,3)*CP(1,2)*(CP(3,3)-CP(3,2))*(CP(3,2)-
CP(3,1)))/((CP(2,3)*4*(1-(CP(1,2)*CP(3,2)))*(1-CP(1,1)*CP(3,1))));
CLM5=(CP(2,5)*CP(1,3)*CP(1,4)*(CP(3,3)-CP(3,4))*(CP(3,4)-
CP(3,5)))/(CP(2,3)*4*(1-(CP(1,4)*CP(3,4)))*(1-CP(1,5)*CP(3,5)));
CAM=CP(2,3)/(1-CP(1,3)*CP(3,3));
CAM1=(-1)*CP(2,3)*(CTM1+CTM2)/(1-CP(1,3)*CP(3,3));
CAM2=(2*CP(2,3)/((1-CP(1,3)*CP(3,3))^2))*((1-
CP(1,3)*CP(3,3))*CW+0.25*CP(1,3)*(CP(3,2)+CP(3,4))-(CLM2+CLM3-CLM4-
CLM5)*(1-CP(1,3)*CP(3,3)));
CR1=-(j)*M*f0;
CFM=(sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(3,1)*CT(3,6)-
sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(3,3)*CT(3,5))/((sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(3,7)*CT(3,6)-
CT(3,8)*CT(3,5)));
CGM=((j)^M)*(CT(3,4)*CT(3,5)-
sqrt(e)*sqrt(e1)*CT(3,2)*CT(3,6))*exp(CR1)/(CT(3,7)*sqrt(e)*sqrt(e1)*CT
(3,6)-CT(3,8)*CT(3,5));
CDM=CFM*CAM+CGM;
CDM1=CFM*CAM1/x1;
CDM2=CFM*CAM2/(2*(x1^2));
CE=j*M*f1;
CX1=CX1+(CDM*(j^(-M))*exp(CE));
```

```
CX2=CX2+(CDM1*(j^(-M))*exp(CE));
CX3=CX3+(CDM2*(j^(-M))*exp(CE));
R=R+(abs(CDM))^2;
R1=R1+2*real(CDM)*real(CDM1)+2*imag(CDM)*imag(CDM1);
R2=R2+((abs(CDM1))^2)+2*real(CDM)*real(CDM2)+2*imag(CDM)*imag(CDM2);
end
QTTL1(L5,NF1)=4*R;
QTTL2(L5,NF1)=4*R1/QTTL1(L5,NF1);
QTTL3(L5,NF1)=4*R2/QTTL1(L5,NF1);
QSC1(L5,NF1)=4*(abs(CX1))^2;
QSC2(L5,NF1)=8*(real(CX1)*real(CX2)+imag(CX1)*imag(CX2));
QSC3(L5,NF1)=4*(abs(CX2))^2+8*(real(CX1)*real(CX3)+imag(CX1)*imag(CX3))
;
GT1(L5,NF1)=QSC2(L5,NF1)/QSC1(L5,NF1);
GT2(L5,NF1)=QSC3(L5,NF1)/QSC1(L5,NF1);
end
end
```

H-WAVE(TE)

```
syms x n l m ;
CT=zeros(15);
CP=zeros(15);
QTTL1=zeros(10);
QTTL2=zeros(10);
QTTL3=zeros(10);
QSC1=zeros(10);
QSC2=zeros(10);
QSC3=zeros(10);
GT1=zeros(10);
GT2=zeros(10);
e=2.54;
e1=1;
ee=4.0;
ee1=1;
BA=0.5;
ILA=3;
A=ILA*0.1;
x0=2*pi*A;
x1=x0*sqrt(e)*sqrt(e1);
x2=x1*BA;
x3=x0*BA*sqrt(ee)*sqrt(ee1);
for NF1=1:1:11
NF0=NF1-1;
f0=0.1*NF0*pi;
for L5=1:1:2
L4=L5-1;
f1=f0+L4*pi;
R=0;
R1=0;
R2=0;
CX1=0;
```

```
CX2=0;
CX3=0;
for I=1:1:51
M=I-26;
for N=1:1:5
K=M+N-3;
l=abs(K);
CT(N,1)=besselj(l,x1);
CT(N,2)=besselj(l,x0);
CT(N,3)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x1);
CT(N,4)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x0);
CT(N,5)=bessely(l,x1);
CT(N,6)=subs(diff(bessely(l,x),x),x,x1);
CT(N,7)=besselj(l,x0)+j*bessely(l,x0);
CT(N,8)=subs(diff((besselj(l,x)+j*bessely(l,x)),x),x,x0);
CT(N,9)=besselj(l,x2);
CT(N,10)=bessely(l,x2);
CT(N,11)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x2);
CT(N,12)=subs(diff(bessely(l,x),x),x,x2);
CT(N,13)=besselj(l,x3);
CT(N,14)=bessely(l,x3);
CT(N,15)=subs(diff(besselj(l,x),x),x,x3);
if K~=0
for L1=1:1:15
CT(N,L1)=((-1)^K)*CT(N,L1);
end
end

CR=(-j)*K*f0;
CP(1,N)=(CT(N,6)*CT(N,7)-
sqrt(e)*CT(N,5)*CT(N,8))/(sqrt(e)*CT(N,1)*CT(N,8)-CT(N,3)*CT(N,7));
CP(2,N)=((sqrt(e)*((j)^K)*CT(N,2)*CT(N,8)-
CT(N,4)*CT(N,7))/(sqrt(e)*CT(N,1)*CT(N,8)-CT(N,3)*CT(N,7)))*exp(CR);
CP(3,N)=(x2*CT(N,9)*CT(N,15)-
(x3*CT(N,11)*CT(N,13)))/(x3*CT(N,13)*CT(N,12)-(x2*CT(N,15)*CT(N,10)));
end
CTM1=(CP(2,4)*CP(1,3)*(CP(3,3)-CP(3,4)))/(2*CP(2,3)*(1-
CP(1,4)*CP(3,4)));
CTM2=(-1)*CP(2,2)*CP(1,3)*(CP(3,3)-CP(3,2))/(CP(2,3)*2*(1-
CP(1,2)*CP(3,2)));
CW=(CP(1,3)*CP(1,4)*((CP(3,3)-CP(3,4))^2)/(4*(1-(CP(1,3)*CP(3,3)))*(1-
(CP(1,4)*CP(3,4)))))+CP(1,2)*CP(1,3)*((CP(3,2)-CP(3,3))^2)/(4*(1-
(CP(1,3)*CP(3,3)))*(1-(CP(1,2)*CP(3,2))));
CLM2=(-1)*CP(2,5)*CP(1,3)*(CP(3,3)-(2*CP(3,4))+CP(3,5))/(CP(2,3)*8*(1-
(CP(1,5)*CP(3,5))));
CLM3=(-1)*CP(2,1)*CP(1,3)*(CP(3,3)-(2*CP(3,2))+CP(3,1))/(CP(2,3)*8*(1-
(CP(1,1)*CP(3,1))));
CLM4=(CP(2,1)*CP(1,3)*CP(1,2)*(CP(3,3)-CP(3,2))*(CP(3,2)-
CP(3,1)))/((CP(2,3)*4*(1-(CP(1,2)*CP(3,2)))*(1-CP(1,1)*CP(3,1))));
CLM5=CP(2,5)*CP(1,3)*CP(1,4)*(CP(3,3)-CP(3,4))*(CP(3,4)-
CP(3,5))/(CP(2,3)*4*(1-(CP(1,4)*CP(3,4)))*(1-CP(1,5)*CP(3,5)));
CAM=CP(2,3)/(1-CP(1,3)*CP(3,3));
CAM1=(-1)*CP(2,3)*(CTM1+CTM2)/(1-CP(1,3)*CP(3,3));
CAM2=(2*CP(2,3)/((1-CP(1,3)*CP(3,3))^2))*((1-
CP(1,3)*CP(3,3))*CW+0.25*CP(1,3)*(CP(3,2)+CP(3,4))-(CLM2+CLM3-CLM4-
CLM5)*(1-CP(1,3)*CP(3,3)));
CR1=-(j)*M*f0;
```

```
CFM=(CT(3,1)*CT(3,6)-CT(3,3)*CT(3,5))/(CT(3,7)*CT(3,6)-
sqrt(e)*CT(3,8)*CT(3,5));
CGM=(-1)*((j)^M)*(CT(3,2)*CT(3,6)-
sqrt(e)*CT(3,4)*CT(3,5))*exp(CR1)/(CT(3,7)*CT(3,6)-
sqrt(e)*CT(3,8)*CT(3,5));
CDM=CFM*CAM+CGM;
CDM1=CFM*CAM1/x1;
CDM2=CFM*CAM2/(2*(x1)^2);
CE=j*M*f1;
CX1=CX1+(CDM*(j^(-M))*exp(CE));
CX2=CX2+(CDM1*(j^(-M))*exp(CE));
CX3=CX3+(CDM2*(j^(-M))*exp(CE));
R=R+(abs(CDM))^2;
R1=R1+2*real(CDM)*real(CDM1)+2*imag(CDM)*imag(CDM1);
R2=R2+((abs(CDM1))^2)+2*real(CDM)*real(CDM2)+2*imag(CDM)*imag(CDM2);
end
QTTL1(L5,NF1)=4*R;
QTTL2(L5,NF1)=4*R1/QTTL1(L5,NF1);
QTTL3(L5,NF1)=4*R2/QTTL1(L5,NF1);
QSC1(L5,NF1)=4*(abs(CX1))^2;
QSC2(L5,NF1)=8*(real(CX1)*real(CX2)+imag(CX1)*imag(CX2));
QSC3(L5,NF1)=4*(abs(CX2))^2+8*(real(CX1)*real(CX3)+imag(CX1)*imag(CX3))
;
GT1(L5,NF1)=QSC2(L5,NF1)/QSC1(L5,NF1);
GT2(L5,NF1)=QSC3(L5,NF1)/QSC1(L5,NF1);
end
end
```

10.Βιβλιογραφία:

1) Negative-Refraction Metamaterials: Fundamental Principles and Applications. Editors G.V. Eleftheriades and K.G. Balmain (John Wiley & Sons and IEEE Press); *ISBN: 0-471-60146-2, June 2005*
2) Π.Δ. Κοπίδης, ''Σκέδαση Επίπεδου Ηλεκτρομαγνητικού Κύματος από Έκκεντρα Καλυμμένο Κύλινδρο'', *Διπλωματική Εργασία, Ε.Μ.Π.,1982*
3) Vladimir Kuzmiak and Alexei A.Maradudin, ''Scattering properties of a cylinder fabricated from a left-handed material'', *Department of Physics and Astronomy, University of California, Irvine, California, July 2002,pp. 66-73*
4) G.C. Kokkorakis and J.A. Roumeliotis, ''Eigenfrequencies of Eccentric Acoustic Spherical Cavities/Cut-Off Frequencies of Eccentric Circular and Concentric Circular-Elliptic Metallic Waveguides '' *pp. 478-481, 8th International Symposium on Theoretical Electrical Engineering, September 22-23, 1995 Thessaloniki, Greece*
5) Muhammad A.Mushref, "Closed solution to electromagnetic scattering of a plane wave by an eccentric cylinder coated with metamaterials", *Optics Communications 270 (2007) pp.441-446*
6) A. Shooshtari and A.R. Sebak, ''Electromagnetic Scattering by Parallel Metamaterial Cylinders'', *Progress In Electromagnetics Research*, PIER 57, 165-177, 2006
7) C. Li and Z. Chen, ''Electromagnetic Scattering by a Conducting Cylinder Coated with Metamaterials'', *Progress In Electromagnetics Research,* PIER 42, pp. 91-105, 2003
8) Cheng-Wei Qiu, Hai-Ying YAO, Shah-Nawaz Burokur, Saïd Zouhdi, ''Electromagnetic Scattering Properties in a Multilayered Metamaterial Cylinder'', *IEEE Trans. Commun.* Vol. E90–B, no. 9,pp. 2423-2429 September 2006
9) C.A. Valagiannopoulos, ''Electromagnetic Scattering from two Eccentric Metamaterial Cylinders with Frequency-Depedent Permittivities Differing Slightly Each Other'', *Progress In Electromagnetics Research B,* Vol. 3,pp. 23-34, 2008
10) John A. Roumeliotis, John G. Fikioris and George P. Gounaris, ''Electromagnetic Scattering from Eccentrically Coated Infinite Metallic Cylinder'', *J. Appl. Physics*, 51(8), pp. 4488-4493, August 1980
11) V.Veselago ''The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ'', *Sov. Phys.,* vol. 10, pp. 509 – 514, Feb. 1968
12) J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins and W.J. Stewart ''Low Frequency plasmons in thin–wire structrures'', *J.Phys 1., March 1998, pp. 4785 – 4809*
13) B.I. Wu, T.M. Grzegorczyk, Y. Zhang and J.A. Kong ''Guided modes with imaginary transvrese wave number in a slab waveguide with negative permittivity and permeability'', *Journal of Appl. Phys.,* vol. 93, no. 11, June 2003

14) Y. Zhang, T. Grzegorczyk and J.A. Kong ‘‘Propagation of EM waves in a slab with negative permittivity and permeability’’, *Progress In Electromagnetic Research,* pp. 271 – 286, 2001
15) P. Baccarelli, P. Burghignoli, F. Frezza, A. Galli, P. Lampariello, G. Lovat and S. Paulotto ‘‘Effects of leaky–wave propagation in metamaterial grounded slabs excited by a dipole source’’, *IEEE Trans.Microw.Th. and Tech.,* vol.53, *no.1, pp. 40-52 Jan.* 2005

11.Περιεχόμενα: