



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
& Μηχανικών Υπολογιστών

Τομέας Ηλεκτρομαγνητικών Εφαρμογών,
Ηλεκτροοπτικής & Ηλεκτρονικών Υλικών

ΣΚΕΔΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΑΓΩΓΙΜΟ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΚΑΛΥΜΜΕΝΟ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

Διπλωματική Εργασία

Γρηγόριος Π. Ζούρος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων: Ι. Ρουμελιώτης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα
2008

ΣΚΕΔΑΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΟΥ ΚΥΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΑΓΩΓΙΜΟ ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ ΚΑΛΥΜΜΕΝΟ ΜΕ ΚΥΚΛΙΚΟ ΔΙΗΛΕΚΤΡΙΚΟ ΚΥΛΙΝΔΡΟ

Διπλωματική Εργασία

Γρηγόριος Π. Ζούρος

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Επιβλέπων: Ι. Ρουμελιώτης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή. Αθήνα, 5 Σεπτεμβρίου 2008.

I. Ρουμελιώτης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

I. Τσαλαμέγκας

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

H. Γλύτσης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΓΡΗΓΟΡΙΟΣ Π. ΖΟΥΡΟΣ

Πτυχιούχος Εκπαιδευτικός Τεχνολόγος Ηλεκτρονικός Μηχανικός Α.Σ.Ε.Τ.Ε.Μ.-Α.Σ.ΠΑΙ.Τ.Ε.
(πρώην Σ.Ε.Λ.Ε.Τ.Ε.).

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Η στοιχειοθέτηση έγινε με χρήση των Times και *MathTimeTM Professional*.
MathTime is a trademark of Publish or Perish, Inc.

Η εκτύπωση έγινε σε χαρτί τύπου «acid-free». ☺

Copyright © 2008 Γρηγόριος Π. Ζούρος.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος.
All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας,
εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η αποθήκευση
και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης,
υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το
παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για
κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο
εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσω-
πεύονται τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

$\Sigma\tau\eta\,\varGamma\acute{\omega}\tau\alpha$

Προόμιο

Το κείμενο αυτό αποτελεί τη διπλωματική μου εργασία, εργασία την οποία οφείλουν να εκπονήσουν οι φοιτητές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου κατά το τελευταίο έτος των σπουδών τους.

Κατέβαλα προσπάθεια ώστε το περιεχόμενο να είναι αυτοδύναμο με την έννοια ότι, κάποιος που επιθυμεί να μελετήσει τις συναρτήσεις Mathieu καθώς και το εν λόγω πρόβλημα της σκέδασης, να είναι σε θέση να το κάνει δίχως να παρεπεμφθεί σε επιπρόσθετες βιβλιογραφικές αναφορές. Επιπλέον, η δομή είναι τέτοια ώστε να υπάρχει μια λογική αλλά συνάμα μη κουραστική ροή. Για το λόγο αυτό, μακροσκελείς αναπτύξεις και αποδείξεις έχουν τοποθετηθεί σε παραρτήματα ενώ, στο κυρίως σώμα, δίνονται μόνο τα βασικά αποτελέσματα συνοδευόμενα από μια αναγκαία περιγραφή. Συνοπτικά λοιπόν, ο σκελετός έχει την ακόλουθη δομή:

Ξεκινώντας, το πρώτο κεφάλαιο περιγράφει συνοπτικά τις εξισώσεις με τις οποίες αναπαριστούμε τα πεδία μέσω των διανυσματικών δυναμικών του Hertz και εμφανίζει την εξίσωση Mathieu μέσα από την εξίσωση Helmholtz. Συνεχίζοντας, το δεύτερο κεφάλαιο περιγράφει κάπως πιο αναλυτικά τις συναρτήσεις Mathieu. Τα αναπτύγματα αυτών των συναρτήσεων τα οποία χρησιμοποιούνται στο κύριο μέρος της εργασίας, δίνονται στο τρίτο κεφάλαιο.

Τα δύο επόμενα κεφάλαια, αποτελούν το κυρίως σώμα της εργασίας όπου μελετάται η σκέδαση επίπεδων κυμάτων τύπου TM και TE από τη διάταξη του προβλήματος. Στο σημείο αυτό προϋποθέτουμε τη γνώση των προηγούμενων κεφαλαίων, ωστόσο τα αρχικά κεφάλαια μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα. Κατά τη διάρκεια της ροής του τέταρτου και πέμπτου κεφαλαίου, χρησιμοποιούνται αποτελέσματα από τα παραρτήματα. Αυτά περιέχουν την επίλυση συστημάτων και διάφορα αναπτύγματα τα οποία, για την εύρεση των τελικών τους εκφράσεων, απαιτούν μακροσκελείς πράξεις. Όλοι αυτοί οι υπολογισμοί συσπερεύονται στα παραρτήματα όπου κάποιος μπορεί να απευθυνθεί για τις λεπτομέρειες. Τελικά, στο έκτο κεφάλαιο υλοποιούνται αριθμητικά τα αποτελέσματα των δύο προηγουμένων και επαληθεύεται η ορθότητα αυτών των αποτελεσμάτων.

Περίληψη

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η μελέτη της σκέδασης επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από μια σύνθετη διάταξη. Η προς μελέτη διάταξη αποτελείται από έναν αγώγιμο ελλειπτικό κύλινδρο άπειρου μήκους ο οποίος επικαλύπτεται ομοαξονικά από έναν διηλεκτρικό κύλινδρο κυκλικής διατομής, επίσης άπειρου μήκους.

Λόγω της μορφής που έχει η διάταξη, οι εκφράσεις των πεδίων στον εξωτερικό χώρο – αυτόν εκτός του διηλεκτρικού κυλίνδρου – αναπτύσσονται βάσει των κυκλικών κυλινδρικών κυματοσυναρτήσεων (συναρτήσεις Bessel και Hankel) ενώ εσωτερικά, η ανάπτυξη γίνεται με χρήση των ελλειπτικών κυλινδρικών κυματοσυναρτήσεων (συναρτήσεις Mathieu) οι οποίες μπορούν να γραφούν σαν αναπτύγματα άρτιων δυνάμεων μιας παραμέτρου h .

Η πολυπλοκότητα των συναρτήσεων Mathieu μας επιβάλλει αριθμητική λύση του προβλήματος για μεγάλες τιμές του h . Ωστόσο, εάν περιοριστούμε σε μικρές τιμές του h , μια πλήρως αναλυτική λύση είναι εφικτή. Αυτό ακριβώς επιτυγχάνεται εδώ και μάλιστα κρα-

τώντας όρους έως την τέταρτη τάξη για το h (h^4) ενώ, όροι τάξης h^6 και ανώτεροι αμελούνται. Έτσι, όλα τα αναπτύγματα που εμφανίζονται σ' αυτήν την εργασία έχουν τη μορφή $\alpha + \beta h^2 + \gamma h^4$.

Πιο συγκεκριμένα, μελετάται η σκέδαση από πρόσπτωση επίπεδων κυμάτων TM^z και TE^z και δίνονται διαγράμματα μεταβολής των διατομών σκέδασης για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων. Η ορθότητα των αποτελεσμάτων ελέγχεται αριθμητικά και τούτο γίνεται ποικιλοτρόπως. Ειδική περίπτωση αποτελεί το πρόβλημα των δύο ομοαξονικών κυκλικών κυλίνδρων θέτοντας $h = 0$. Επίσης, ελέγχουμε την ισχύ του θεωρήματος πρόσω σκέδασης και τελικά, την ισχύ των οριακών συνθηκών, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των υπολογισμών μας.

Abstract

The subject of the present undergraduate diploma thesis is the study of the scattering of plane electromagnetic waves by a complex configuration. This geometry consists of a metallic elliptic cylinder of infinite length which is coated coaxially by a dielectric circular cylinder, also of infinite length.

Due to the form of the geometry, the expansion of the fields in the outer space is based on circular cylindrical wavefunctions (Bessel and Hankel functions) whereas, for the inner region, elliptic cylindrical wavefunctions are used (Mathieu functions). The latter can be written as expansions of even powers of a parameter called h .

The complexity of Mathieu functions prevent us from finding an analytical solution for the problem for large values of h . However, for small values of this parameter, one can obtain an analytical solution. This is accomplished here keeping in our calculations terms up to the fourth order of h (h^4); that is, terms of the order h^6 and greater are just ignored. Keeping that in mind, all expansions throughout this thesis have the form $\alpha + \beta h^2 + \gamma h^4$.

More specifically, the scattering from incident TM^z and TE^z plane waves is studied and scattering cross section patterns are given for various values of the parameters. The correctness of the results can be checked numerically. A special case consists of two concentric circular cylinders by letting $h = 0$. Then, the validity of the forward scattering theorem is checked and finally, the satisfaction of boundary conditions is confirmed, by using the results of our calculations.

Ευχαριστίες

Θέλω να εκφράσω τις θερμές του ευχαριστίες αφενός μεν στους καθηγητές μου στα μαθήματα ηλεκτρομαγνητικών πεδίων κ. Ι.Α. Ρουμελιώτη και κ. Ι.Λ. Τσαλαμέγκα για την απλόχερη υποστήριξή τους και την ακαταπόνητη προθυμία ανταπόκρισή τους, αφετέρου δε στους γονείς μου για τη γενικότερη ενθάρρυνσή τους. Ευχαριστώ επίσης την αδερφή μου Βερόνικα για τη βοήθεια που προσέφερε στη φιλολογική επιμέλεια του κειμένου καθώς και τους συναδέλφους εκείνους που συντέλεσαν στην ανάπτυξη ενός δημιουργικού κλίματος μέχρι την ολοκλήρωση της προσπάθειας αυτής.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Οι εξισώσεις των πεδίων 1

1.1	Περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων	1
1.2	Οι εξισώσεις των ακτινοβολούμενων πεδίων	1
1.2.1	Τα ακτινοβολούμενα πεδία μέσω των \mathbf{P} και \mathbf{P}_m	2
1.2.2	Οι συνιστώσες σε ελειπτικές συντεταγμένες	3
1.2.3	Οι συνιστώσες σε κυλινδρικές συντεταγμένες	4
1.3	Επίλυση της εξισώσης Helmholtz	4
1.3.1	Η εξισωση για το z	5
1.3.2	Οι εξισώσεις για τα η και φ	6
1.3.3	Η εξισωση για το η	6
1.3.4	Η εξισωση για το φ	7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Συναρτήσεις Mathieu 9

2.1	Εισαγωγή	9
2.2	Οι άρτιες συναρτήσεις	10
2.2.1	Ανάπτυγμα των ιδιοτιμών	10
2.2.2	Ανάπτυγμα των συντελεστών	11
2.2.3	Αρχικές παρατηρήσεις – 1	11
2.2.4	Αρχικές παρατηρήσεις – 2	12
2.2.5	Αρχικές παρατηρήσεις – 3	13
2.2.6	Υπολογισμός συντελεστών	13
2.2.7	Κανονικοποίηση	13
2.2.8	Ανάπτυγμα γωνιακών συναρτήσεων	14
2.2.9	Ανάπτυγμα ακτινικών συναρτήσεων	15
2.3	Οι περιπτές συναρτήσεις	15
2.3.1	Ανάπτυγμα των ιδιοτιμών	16
2.3.2	Ανάπτυγμα των συντελεστών	16
2.3.3	Αρχικές παρατηρήσεις – 1	16
2.3.4	Αρχικές παρατηρήσεις – 2	17
2.3.5	Αρχικές παρατηρήσεις – 3	17
2.3.6	Κανονικοποίηση	18
2.3.7	Ανάπτυγμα γωνιακών συναρτήσεων	19
2.3.8	Ανάπτυγμα ακτινικών συναρτήσεων	19
2.4	Ορθογωνιότητα	19

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Αναπτύγματα των συναρτήσεων Mathieu 21

3.1	Εισαγωγή	21
3.2	Εκφράσεις άρτιων συναρτήσεων	21
3.2.1	Αναπτύγματα των γωνιακών συναρτήσεων	22
3.2.2	Αναπτύγματα των ακτινικών συναρτήσεων	23
3.3	Εκφράσεις περιπτών συναρτήσεων	25
3.3.1	Αναπτύγματα των γωνιακών συναρτήσεων	25
3.3.2	Αναπτύγματα των ακτινικών συναρτήσεων	25
3.4	Ορθογωνιότητα	27
3.4.1	Ανάπτυγμα των άρτιων συντελεστών	27
3.4.2	Ανάπτυγμα των περιπτών συντελεστών	27
3.5	Υπολογισμός συντελεστών	28

3.5.1	Συντελεστές άρτιων συναρτήσεων	28
3.5.2	Συντελεστές περιπτών συναρτήσεων	29
3.6	Αναπτύγματα ιδιοτιμών	29

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Κύμα TM 31

4.1	Περιγραφή της διάταξης	31
4.2	Ανάπτυξη σε σειρά κυκλικών κυλινδρικών κυματοσυναρτήσεων	32
4.3	Εκφράσεις πεδιακών συνιστωσών	33
4.4	Οριακές συνθήκες	33
4.4.1	Η οριακή συνθήκη για τον αγώγιμο κύλινδρο	34
4.4.2	Οι οριακές συνθήκες για το διηλεκτρικό κύλινδρο	35
4.5	Σύστημα προσδιορισμού των συντελεστών	36
4.6	Οι συντελεστές του στάσιμου πεδίου	37
4.7	Οι συντελεστές του σκεδαζόμενου πεδίου	38
4.8	Μακρινό πεδίο και διατομές σκέδασης	38
4.8.1	Διαφορική διατομή σκέδασης	39
4.8.2	Οπίσθια διατομή σκέδασης	40
4.8.3	Εμπρόσθια διατομή σκέδασης	40
4.8.4	Ολική διατομή σκέδασης	40

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Κύμα TE 43

5.1	Περιγραφή της διάταξης	43
5.2	Οριακές συνθήκες	44
5.3	Σύστημα προσδιορισμού των συντελεστών	46
5.4	Οι συντελεστές του στάσιμου και του σκεδαζόμενου πεδίου	48

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Αριθμητικά αποτελέσματα 49

6.1	Εισαγωγή	49
6.2	Οι διατομές σκέδασης	50
6.2.1	Κύμα TM	50
6.2.2	Κύμα TE	50
6.3	Το θεώρημα της πρόσω σκέδασης	50
6.4	Οριακές συνθήκες	60
6.5	Σχολιασμός – Παραπτηρήσεις	60

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A' Γραμμικό σύστημα κύματος TM 63

A'.1	Εισαγωγή	63
A'.2	Ο πίνακας του συστήματος	64
A'.3	Οι συντελεστές του συστήματος	66
A'.4	Ανάπτυξη των συντελεστών του συστήματος $aA = b$	67
A'.4.1	Ανάπτυξη στοιχείων κύριας διαγωνίου	69
A'.4.2	Ανάπτυξη στοιχείων δεύτερης κύριας διαγωνίου	69
A'.4.3	Ανάπτυξη στοιχείων τρίτης κύριας διαγωνίου	70
A'.5	Ανάπτυξη των συντελεστών του συστήματος $cC = d$	70
A'.5.1	Ανάπτυξη στοιχείων κύριας διαγωνίου	71
A'.5.2	Ανάπτυξη στοιχείων δεύτερης κύριας διαγωνίου	72
A'.5.3	Ανάπτυξη στοιχείων τρίτης κύριας διαγωνίου	73

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β' Επίλυση του γραμμικού συστήματος 75

- B'.1 Εισαγωγή 75
- B'.2 Υπολογισμός της ορίζουσας D 76
- B'.3 Υπολογισμός των οριζουσών D_m 77
- B'.4 Η λύση 77

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ' Ανάπτυξη των συντελεστών σκέδασης 79

- Γ'.1 Εισαγωγή 79
- Γ'.2 Ανάπτυξη γινομένων 80

Αναφορές 83

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

1

Οι εξισώσεις των πεδίων

1.1 Περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων

Η επίλυση των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τεχνικές οι οποίες, ανάλογα με την εφαρμογή, είναι δυνατό να επιλύσουν ένα συγκεκριμένο ΗΜ πρόβλημα. Στο Σχήμα 1.1 στην επόμενη σελίδα φαίνονται τρεις μεγάλες κατηγορίες προβλημάτων οι οποίες διακρίνονται μεταξύ τους ανάλογα με την πηγή διέγερσης.

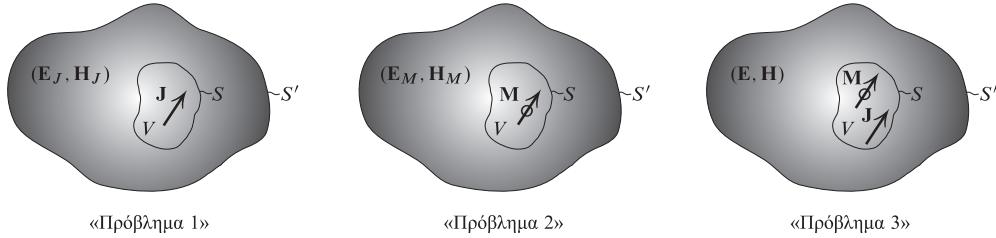
Το «πρόβλημα 1» αναφέρεται σε ηλεκτρικές πηγές (πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος **J**) και η επίλυσή του μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας, είτε την οικογένεια των δυναμικών (**A**, **F**), είτε το διανυσματικό ηλεκτρικό δυναμικό του Hertz **P**.

Το «πρόβλημα 2» διεγίρεται από μαγνητικές πηγές (πυκνότητα μαγνητικού ρεύματος **M**) και η εύρεση των ακτινοβολούμενων πεδίων (**E_M**, **H_M**) γίνεται με χρήση, είτε της οικογένειας δυναμικών (**F**, **Φ_m**), είτε του μαγνητικού διανυσματικού δυναμικού του Hertz **P_m**.

Το «πρόβλημα 3» αποτελεί μια σύνθεση των δύο προηγούμενων όπου και τα δύο είδη πηγών είναι παρόντα. Η επίλυση του σύνθετου αυτού προβλήματος γίνεται, είτε με ταυτόχρονη χρήση των οικογενειών (**A**, **F**) και (**F**, **Φ_m**), είτε με ταυτόχρονη χρήση των δυναμικών του Hertz **P** και **P_m**.

1.2 Οι εξισώσεις των ακτινοβολούμενων πεδίων

Η περιγραφή των ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων με τα διανυσματικά δυναμικά του Hertz προσφέρει έναν εναλλακτικό τρόπο επίλυσης με λιγότερους αγνώστους, ιδιαίτερα εάν η διαδικασία της λύσης πρέπει να γίνει στο πεδίο του χρόνου. Για το λόγο αυτό, περιγράφουμε πως μπορεί το πλήρες πρόβλημα («πρόβλημα 3») να επιλυθεί κάνοντας χρήση των δυναμικών του Hertz. Επειδή δε, μας ενδιαφέρει η ημιτονική μόνιμη κατάσταση, οι εξισώσεις αναφέρονται μόνο στο πεδίο της συχνότητας.



Σχήμα 1.1 Κατηγορίες ΗΜ προβλημάτων ανάλογα με την πηγή διέγερσης.

1.2.1 Τα ακτινοβολούμενα πεδία μέσω των $\boldsymbol{\Pi}$ και $\boldsymbol{\Pi}_m$

Ο προσδιορισμός της ακτινοβολίας μέσω των δυναμικών του Hertz προκύπτει από τις σχέσεις [1]

$$\mathbf{E} = \underbrace{\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Pi}}_{\text{Πρόβλημα 1}} - \frac{\mathbf{J}}{j\omega\epsilon} + \underbrace{(-j\omega\mu)\nabla \times \boldsymbol{\Pi}_m}_{\text{Πρόβλημα 2}}, \quad (1.1.\alpha')$$

$$\mathbf{H} = \underbrace{j\omega\epsilon\nabla \times \boldsymbol{\Pi}}_{\text{Πρόβλημα 1}} + \underbrace{\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\Pi}_m - \frac{\mathbf{M}}{j\omega\mu}}_{\text{Πρόβλημα 2}}. \quad (1.1.\beta')$$

όπου \mathbf{J} και \mathbf{M} οι πυκνότητες ηλεκτρικού και μαγνητικού ρεύματος, αντίστοιχα, ενώ τα δυναμικά $\boldsymbol{\Pi}$ και $\boldsymbol{\Pi}_m$ προσδιορίζονται επιλύοντας τις μη ομογενείς διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Pi} + k^2 \boldsymbol{\Pi} = -\frac{\mathbf{J}}{j\omega\epsilon} \quad \text{και} \quad \nabla^2 \boldsymbol{\Pi}_m + k^2 \boldsymbol{\Pi}_m = -\frac{\mathbf{M}}{j\omega\mu}.$$

Εάν τώρα βρεθούμε σε χώρο χωρίς πηγές, το ακτινοβολούμενο πεδίο θα προκύψει πάλι από τις Σχ. (1.1.α') και Σχ. (1.1.β') θέτοντας τους όρους διέγερσης ίσους με μηδέν. Ο προσδιορισμός των δυναμικών $\boldsymbol{\Pi}$ και $\boldsymbol{\Pi}_m$ γίνεται επιλύοντας τώρα πλέον τις ομογενείς διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz.

Οι Σχ. (1.1.α') και Σχ. (1.1.β') κρύβουν έξι άγνωστες ποσότητες, τις συνιστώσες των $\boldsymbol{\Pi}$ και $\boldsymbol{\Pi}_m$. Εάν όμως εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι τα $\boldsymbol{\Pi}$ και $\boldsymbol{\Pi}_m$ είναι αναλλοίωτα ως προς τους μετασχηματισμούς [1]

$$\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}_0 + \nabla V \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\Pi}_m = m\boldsymbol{\Pi}_0 + \nabla V_m,$$

όπου V και V_m διπλά παραγωγήσμες βαθμωτές ποσότητες, τότε οδηγούμαστε στο ότι το ακτινοβολούμενο πεδίο μπορεί να προκύψει μέσω δύο βαθμωτών ποσοτήτων σε χώρους ελεύθερους από πηγές. Οι δύο αυτές βαθμωτές ποσότητες είναι η z συνιστώσα των δυναμικών $\boldsymbol{\Pi}$ και $\boldsymbol{\Pi}_m$. Έτσι λοιπόν, το ακτινοβολούμενο πεδίο προκύπτει από τις Σχ. (1.1.α') και Σχ. (1.1.β') κάνοντας τις εξής αλλαγές:

- θέτουμε $\mathbf{J} = \mathbf{M} = \mathbf{0}$ (χώρος δίχως πηγές) και
- ορίζουμε $\boldsymbol{\Pi} \doteq \boldsymbol{\Pi}_z \mathbf{e}_z$ και $\boldsymbol{\Pi}_m \doteq \boldsymbol{\Pi}_{mz} \mathbf{e}_z$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, οι εξισώσεις από τις οποίες απορρέει το ακτινοβολούμενο πεδίο είναι, για μεν το ηλεκτρικό πεδίο

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_z - j\omega\mu \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_{mz}, \quad (1.2.\alpha')$$

ενώ για το μαγνητικό πεδίο

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_z + \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_{mz}. \quad (1.2.\beta')$$

Τα δυναμικά προκύπτουν επιλύοντας τις ομογενείς βαθμωτές εξισώσεις Helmholtz

$$\nabla^2 \Pi_z + k^2 \Pi_z = 0 \quad \text{και} \quad \nabla^2 \Pi_{mz} + k^2 \Pi_{mz} = 0.$$

Έτσι λοιπόν, το πρόβλημα ανάγκηκε στην εύρεση δύο μόνο άγνωστων ποσοτήτων. Τα δυναμικά μπορούν να προσδιοριστούν, για ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων, με εφαρμογή της μεθόδου χωρισμού των μεταβλητών. Στην ενότητα 1.3 γίνεται επίλυση της εξίσωσης στο ελλειπτικό σύστημα.

Παρατηρώντας τις Σχ. (1.2.α') και (1.2.β'), συμπεραίνουμε ότι, το \mathbf{H} που προκύπτει από το Π_z στερείται εγκάρσιας z συνιστώσας και έτσι το συνολικό πεδίο που προκύπτει έχει E_z πόλωση ή αλλιώς, παριστάνει ένα μαγνητικό εγκάρσιο κύμα ως προς \mathbf{e}_z , δηλαδή το γνωστό TM^z κύμα. Αντίστοιχα, το πεδίο που προκύπτει από το Π_{mz} δεν έχει E_z συνιστώσα και έτσι, στην περίπτωση αυτή, μιλάμε για H_z πόλωση, δηλαδή πρόκειται για ένα ηλεκτρικό εγκάρσιο κύμα ως προς \mathbf{e}_z , δηλαδή TE^z κύμα.

Με αυτές τις παρατηρήσεις, μπορούμε να χωρίσουμε το ολικό ακτινοβολούμενο πεδίο σε κύματα TM^z και TE^z δηλαδή, προκύπτει με επαλληλία αυτών των δύο. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{TM}} \\ \mathbf{H}^{\text{TM}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{TE}} \\ \mathbf{H}^{\text{TE}} \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{TM}} \\ \mathbf{H}^{\text{TM}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_z \\ j\omega\epsilon \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_z \end{bmatrix}$$

και

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}^{\text{TE}} \\ \mathbf{H}^{\text{TE}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_{mz} \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{e}_z \Pi_{mz} \end{bmatrix}.$$

1.2.2 Οι συνιστώσεις των πεδίων στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων

Για την εξαγωγή των συνιστωσών αυτών αρκεί η έκφραση της περιστροφής στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων, έτσι όπως φαίνεται από τις Σχ. (1.2.α') και (1.2.β'). Οι σχέσεις που προκύπτουν ομαδοποιούνται χωριστά για το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο.

Ηλεκτρικό πεδίο

$$E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi_z, \quad (1.3.\alpha')$$

$$E_\eta = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \eta \partial z} - j\omega\mu \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \Pi_{mz}}{\partial \varphi}, \quad (1.3.\beta')$$

$$E_\varphi = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi \partial z} + j\omega\mu \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \Pi_{mz}}{\partial \eta}. \quad (1.3.\gamma')$$

Μαγνητικό πεδίο

$$H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi_{mz}, \quad (1.4.\alpha')$$

$$H_\eta = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial^2 \Pi_{mz}}{\partial \eta \partial z} + j\omega\epsilon \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \varphi}, \quad (1.4.\beta')$$

$$H_\varphi = \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial^2 \Pi_{mz}}{\partial \varphi \partial z} - j\omega\epsilon \frac{1}{h_\eta} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \eta}. \quad (1.4.\gamma')$$

Στις σχέσεις αυτές, h_η είναι ο γνωστός μετρικός συντελεστής του ελλειπτικού συστήματος των οποίο επαναλαμβάνουμε εδώ:

$$\begin{aligned} h_\eta = h_\varphi &= a \sqrt{\cosh^2 \eta - \cos^2 \varphi} = a \sqrt{\sinh^2 \eta + \sin^2 \varphi} \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\cosh(2\eta) - \cos(2\varphi)}. \end{aligned}$$

1.2.3 Οι συνιστώσες των πεδίων στο κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων

Προσαρμόζοντας τις Σχ. (1.2.α') και Σχ. (1.2.β') στο κυλινδρικό σύστημα, προκύπτουν οι σχετικές εξισώσεις που δίνουν τις εκφράσεις των πεδίων.

Ηλεκτρικό πεδίο

$$E_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi_z, \quad (1.5.\alpha')$$

$$E_\rho = \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \rho \partial z} - j\omega\mu \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_{mz}}{\partial \varphi}, \quad (1.5.\beta')$$

$$E_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial \varphi \partial z} + j\omega\mu \frac{\partial \Pi_{mz}}{\partial \rho}. \quad (1.5.\gamma')$$

Μαγνητικό πεδίο

$$H_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \Pi_{mz}, \quad (1.6.\alpha')$$

$$H_\rho = \frac{\partial^2 \Pi_{mz}}{\partial \rho \partial z} + j\omega\epsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \varphi}, \quad (1.6.\beta')$$

$$H_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Pi_{mz}}{\partial \varphi \partial z} - j\omega\epsilon \frac{\partial \Pi_z}{\partial \rho}. \quad (1.6.\gamma')$$

1.3 Επίλυση της εξίσωσης Helmholtz στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων

Όπως έχει φανεί στην ενότητα 1.2, η επίλυση της βαθμωτής εξίσωσης Helmholtz οδηγεί στη γνώση των βαθμωτών δυναμικών Π_z και Π_{mz} και κατά συνέπεια στη γνώση των ακτινοβολούμενων πεδίων. Στο εδάφιο αυτό μελετάται η περίπτωση του ελλειπτικού συστήματος και τι εκφράσεις μπορούν να πάρουν σ' αυτήν τα δύο βαθμωτά δυναμικά.

Ορίζουμε τη βαθμωτή ποσότητα Ψ η οποία παριστάνει, είτε το ηλεκτρικό δυναμικό Π_z , είτε το μαγνητικό δυναμικό Π_{mz} . Έτσι, η εξίσωση Helmholtz είναι

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0$$

με $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ τον κυματάριθμο. Ο τελεστής ∇^2 σε ελλειπτικές συντεταγμένες έχει την έκφραση

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{a^2 (\cosh^2 \eta - \cos^2 \varphi)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{2}{a^2 [\cosh^2(2\eta) - \cos^2(2\varphi)]} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

όπου a η εστιακή απόσταση της έλλειψης. Εφαρμόζοντας τώρα τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, γράφουμε

$$\Psi(\eta, \varphi, z) = H(\eta)F(\varphi)Z(z)$$

οπότε, με αντικατάσταση στην Σχ. (1.7) προκύπτει

$$\frac{2}{a^2 [\cosh^2(2\eta) - \cos^2(2\varphi)]} \left(FZ \frac{d^2 H}{d\eta^2} + HZ \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \right) + HF \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 HFZ = 0.$$

Επειδή θέλουμε μη τετριμένη λύση, $\Psi \neq 0$, διαιρώντας με HFZ προκύπτει

$$\underbrace{\frac{2}{a^2 [\cosh^2(2\eta) - \cos^2(2\varphi)]} \left(\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \right)}_{K_{\eta\varphi}} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{K_z} + k^2 = 0, \quad \forall \eta, \varphi, z.$$

Για να είναι η λύση, λύση της εξίσωσης Helmholtz, πρέπει

$$K_{\eta\varphi} + K_z + k^2 = 0 \quad (1.8.\alpha')$$

η οποία αποτελεί μια πρώτη συνθήκη.

1.3.1 Η εξίσωση για το z

Η διαφορική εξίσωση που προκύπτει για τη μεταβλητή z είναι

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = K_z z.$$

Η σταθερά K_z μπορεί να πάρει διάφορες τιμές ανάλογα με το πρόβλημα. Για διάδοση κατά $+e_z$, $K_z = -k_z^2 \equiv -\beta^2$. Τότε, η Σχ. (1.8.α') γίνεται

$$K_{\eta\varphi} = \beta^2 - k^2 \quad \text{ή} \quad -K_{\eta\varphi} = k^2 - \beta^2. \quad (1.8.\beta')$$

Εάν υπάρχει ανεξαρτησία από το z , $\partial/\partial z = 0$ με αποτέλεσμα $K_z = 0$ και τότε η Σχ. (1.8.α') γίνεται

$$K_{\eta\varphi} = -k^2 \quad \text{ή} \quad -K_{\eta\varphi} = k^2. \quad (1.8.\gamma')$$

1.3.2 Οι εξισώσεις για τα η και φ

Οι εξισώσεις για τα η και φ προκύπτουν από την έκφραση

$$\frac{2}{a^2 [\cosh^2(2\eta) - \cos^2(2\varphi)]} \left(\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\eta^2} + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} \right) = K_{\eta\varphi}.$$

Το $K_{\eta\varphi}$ είναι γνωστό από τις Σχ. (1.8.β'), (1.8.γ') κατά περίπτωση, ωστόσο κρατάμε το συμβολισμό $K_{\eta\varphi}$. Αναπτύσσοντας την τελευταία προκύπτει

$$\underbrace{\frac{1}{H} \frac{d^2 H}{d\eta^2} - \frac{a^2}{2} \cosh(2\eta) K_{\eta\varphi}}_{K_\eta} + \underbrace{\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \frac{a^2}{2} \cos(2\varphi) K_{\eta\varphi}}_{K_\varphi} = 0.$$

Όπως και πριν, πρέπει να ισχύει

$$K_\eta + K_\varphi = 0. \quad (1.9.\alpha')$$

Στο σημείο αυτό εργαζόμαστε με την εξίσωση για το η δηλαδή εκφράζουμε το K_φ συναρτήσει του K_η :

$$K_\varphi = -K_\eta. \quad (1.9.\beta')$$

1.3.3 Η εξίσωση για το η

Η διαφορική εξίσωση για το η είναι η

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - \frac{a^2}{2} \cosh(2\eta) K_{\eta\varphi} H = K_\eta H$$

η οποία έχει μορφή εξίσωσης ιδιοτυπών, με το H να αποτελεί τις ιδιοσυναρτήσεις και το K_η τις ιδιοτυμές. Υστερα από λίγη άλγεβρα, η τελευταία καταλήγει στη μορφή

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - \left[K_\eta - \frac{a^2 (k^2 - \beta^2)}{2} \cosh(2\eta) \right] H = 0$$

όπου έχουμε αντικαταστήσει το $-K_{\eta\varphi}$ από τη Σχ. (1.8.β').

Ορίζοντας

$$h^2 \hat{=} a^2 (k^2 - \beta^2), \quad (1.10)$$

προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} - \left[K_\eta - \frac{h^2}{2} \cosh(2\eta) \right] H = 0 \quad (1.11)$$

η οποία αποτελεί την τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Mathieu.

1.3.4 Η εξίσωση για το φ

Η εξίσωση για το φ προκύπτει από την έκφραση

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \frac{a^2}{2} \cos(2\varphi) K_{\eta\varphi} = K_\varphi.$$

Δεδομένου ότι το K_φ είναι γνωστό από τη Σχ. (1.9.β') και κάνοντας χρήση του ορισμού για το h^2 , προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + \left[K_\eta - \frac{h^2}{2} \cos(2\varphi) \right] F = 0 \quad (1.12)$$

η οποία είναι η διαφορική εξίσωση Mathieu για το F .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

Συναρτήσεις Mathieu

2.1 Εισαγωγή

Οι συναρτήσεις Mathieu εμφανίζονται σε προβλήματα μαθηματικής φυσικής όπου η διάταξη του προβλήματος έχει ελλειπτική γεωμετρία. Πιο συγκεκριμένα, η επίλυση της εξίσωσης Helmholtz στο ελλειπτικό σύστημα συντεταγμένων, με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, οδηγεί στις διαφορικές εξισώσεις Mathieu (κανονική και τροποποιημένη)^{*} και κατά συνέπεια, για την εύρεση της πλήρης λύσης, η επίλυση των δύο νέων αυτών εξισώσεων είναι απαραίτητη.

Η κανονική μορφή της διαφορικής εξίσωσης Mathieu, η οποία αναφέρεται και ως γωνιακή εξίσωση Mathieu, είναι

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + \left[b - \frac{h^2}{2} \cos(2\varphi) \right] y = 0. \quad (2.1)$$

Οι λύσεις αυτής χωρίζονται σε άρτιες και περιττές, ονομάζονται γωνιακές συναρτήσεις Mathieu και συμβολίζονται με $Se_m(h, \cos \varphi)$ και $So_m(h, \cos \varphi)$ αντίστοιχα.

Η τροποποιημένη διαφορική εξίσωση Mathieu, ισοδύναμα γνωστή και ως ακτινική εξίσωση, είναι

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} - \left[b - \frac{h^2}{2} \cosh(2\eta) \right] y = 0. \quad (2.2)$$

Ομοίως, οι λύσεις της χωρίζονται σε άρτιες και περιττές, ονομάζονται ακτινικές συναρτήσεις Mathieu και συμβολίζονται με $Ze_m(h, \cosh \eta)$ και $Zo_m(h, \cosh \eta)$ αντίστοιχα. Και στις δύο εξισώσεις, b είναι οι ιδιοτιμές, y οι ιδιοσυναρτήσεις ενώ h μια σταθερά η οποία σχετίζεται με τον κυματάριθμο σύμφωνα με τη σχέση $h = ak^{\dagger}$ όπου $2a$ είναι η εστιακή απόσταση της έλλειψης.

Η μελέτη των άρτιων και περιττών συναρτήσεων θα γίνει ξεχωριστά.

^{*} Βλέπε ενότητα 1.3.

[†] Βλέπε ενότητα 1.3.

2.2 Οι άρτιες συναρτήσεις

Οι άρτιες γωνιακές συναρτήσεις δίνονται από τη σχέση [2, σελ. 1408]

$$Se_m(h, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^e(h, m) \cos(n\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

ενώ οι άρτιες ακτινικές συναρτήσεις από τη σχέση [2, σελ. 1408]

$$Ze_m(h, \cosh \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} B_n^e(h, m) Z_n(h \cosh \eta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

όπου $Z_n(h \cosh \eta)$ είναι η συνάρτηση Bessel ίδιου ειδους με την $Ze_m(h, \cosh \eta)$.

Στις προηγούμενες εκφράσεις, τα m και n είναι ταυτόχρονα άρτια ή περιττά. Αυτό μας οδηγεί σε μια εναλλακτική έκφραση για το n . Όταν το m είναι άρτιο, το n μπορεί να γραφεί ως $n = 2p$ με $p = 0, 1, 2, \dots$ ενώ, όταν το m είναι περιττό, το $n = 2p + 1$ με $p = 0, 1, 2, \dots$ Έτσι, μπορούμε να γράψουμε

$$n = m \pm 2p, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

με την επιλογή \pm να σημαίνει τα εξής:

- όταν $m \geq 2p$, κρατάμε και τα δύο σύμβολα (δηλαδή προκύπτουν δύο τιμές για το n) ενώ,
- όταν $m < 2p$, κρατάμε μόνο το $+$ (διότι διαφορετικά θα προέκυπτε $n < 0$).

Κατ' αυτόν τον τρόπο, η λύση για τις γωνιακές συναρτήσεις γράφεται

$$Se_m(h, \cos \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} B_{m \pm 2p}^e(h, m) \cos[(m \pm 2p)\varphi], \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Ομοίως, η εναλλακτική γραφή για τις ακτινικές συναρτήσεις είναι

$$Ze_m(h, \cosh \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{\pm p} B_{m \pm 2p}^e(h, m) Z_{m \pm 2p}(h \cosh \eta). \quad (2.5)$$

2.2.1 Ανάπτυγμα των ιδιοτιμών

Όταν μελετάμε τις άρτιες συναρτήσεις, οι ιδιοτιμές b συμβολίζονται με be και έχουν το ανάπτυγμα

$$be_m = m^2 + l_2^e h^2 + l_4^e h^4 + \dots$$

δηλαδή μια άπειρη σειρά άρτιων δυνάμεων του h . Οι συντελεστές l^e θα δοθούν στην ενότητα 3.6. Στη συνέχεια και μέχρι εκείνο το σημείο, δε θα μας απασχολήσουν.

2.2.2 Ανάπτυγμα των συντελεστών

Για κάθε τιμή του m ($m = 0, 1, 2, \dots$), οι συντελεστές $B_n^e(h, m)$ αναπτύσσονται σε μια άπειρη σειρά άρτιων δυνάμεων του h . Δηλαδή έχουν μορφή

$$B_n^e(h, m) = \alpha + \beta h^2 + \gamma h^4 + \delta h^6 + \dots \quad (2.6)$$

Εναλλακτικά, υπό τη μορφή $B_{m \pm 2p}^e(h, m)$ γράφονται

$$\begin{aligned} B_{m \pm 2p}^e(h, m) &= \left(\alpha_{2p,0}^{e\pm} h^{2p} + \alpha_{2p,2}^{e\pm} h^{2p+2} + \alpha_{2p,4}^{e\pm} h^{2p+4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} + \dots + \alpha_{2p,2k}^{e\pm} h^{2p+2k} \right) \\ &\quad \times \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4 + \dots + g_{2s}^e h^{2s} + \dots g_{2k}^e h^{2k} \right) \quad (2.7) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s} \right), \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$ και, για κάθε $m = 0, 1, 2, \dots$, το $p = 0, 1, 2, \dots$. Η μορφή αυτή είναι ισοδύναμη με τη Σχ. (2.6).

2.2.3 Αρχικές παρατηρήσεις – 1

Εάν στη Σχ. (2.1) το $h = 0$, αυτή παίρνει μορφή $y'' + b y = 0$ με $b = m^2$ οπότε $y'' + m^2 y = 0$ η οποία έχει τις γνωστές λύσεις

$$y_m = A_m \cos(m\varphi) + B_m \sin(m\varphi).$$

Εάν περιοριστούμε στις άρτιες συναρτήσεις θα έχουμε

$$y_m^e = A_m \cos(m\varphi)$$

ή γενικότερα

$$y^e = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\varphi)$$

και σε ανεπτυγμένη μορφή,

$$y^e = A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos(2\varphi) + \dots.$$

Εναλλακτικά, εφαρμόζοντας τη θεωρία των εξισώσεων Mathieu λαμβάνουμε

$$y^e = S e_m(0, \cos \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^e(0, m) \cos(n\varphi).$$

Θέτουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^e(0, m) \cos(n\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

ή εναλλακτικά

$$\sum_{p=0}^{\infty} B_{m \pm 2p}^e(0, m) \cos[(m \pm 2p)\varphi] = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos(m\varphi), \quad m = 0, 1, 2, \dots.$$

Εξισώνοντας τους όρους με $m = 0, m = 1, m = 2$ κ.λπ., προκύπτει ότι

$$A_0 = B_0^e(0, 0), \quad A_1 = B_1^e(0, 1), \quad \dots$$

οπότε,

$$y^e = \underbrace{B_0^e(0, 0)}_{p=0} + \underbrace{B_1^e(0, 1)}_{p=0} \cos \varphi + \dots$$

Όμως

$$B_0^e(0, 0) = (\alpha_{0,0}^{e\pm} + \text{μηδενικοί όροι}) (1 + \text{μηδενικοί όροι}) = \alpha_{0,0}^{e\pm},$$

$$B_1^e(0, 1) = (\alpha_{0,0}^{e\pm} + \text{μηδενικοί όροι}) (1 + \text{μηδενικοί όροι}) = \alpha_{0,0}^{e\pm}$$

και ομοίως για τους υπόλοιπους όρους. Τώρα, κάνοντας κανονικοποίηση [2, σελ. 1408], πρέπει

$$\sum_{p=0}^{\infty} B_{m \pm 2p}^e(0, m) = 1, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

δηλαδή

$$B_m^e(0, m) + B_{m \pm 2}(0, m) + B_{m \pm 4}(0, m) + \dots = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Για $m = 0$, ο μόνος μη μηδενικός όρος είναι αυτός με $p = 0$, δηλαδή ο $B_0^e(0, 0)$, οπότε

$$B_0^e(0, 0) = 1 \rightarrow \alpha_{0,0}^{e\pm} = 1.$$

Για $m = 1$, ο μη μηδενικός όρος είναι πάλι αυτός με $p = 0$, οπότε

$$B_1^e(0, 1) = 1 \rightarrow \alpha_{0,0}^{e\pm} = 1.$$

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται για όλα τα $m = 0, 1, 2, \dots$ με τελικό αποτέλεσμα

$$\alpha_{0,0}^{e\pm} = 1, \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

2.2.4 Αρχικές παρατηρήσεις – 2

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα συμπεραίνουμε ότι, η ανάπτυξη για τους συντελεστές $B_{m \pm 2p}^e(h, m)$ πρέπει να δίνει 1 όταν το $p = 0$ ούτως ώστε, στην περίπτωση που το $h = 0$, η λύση με χρήση των συναρτήσεων Mathieu να συμπίπτει με τη λύση της απλούστερης συνήθους διαφορικής εξισώσης που προκύπτει στην περίπτωση αυτή. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\alpha_{0,2i}^{e\pm} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Έτσι, όταν $p = 0$

$$\begin{aligned} B_m^e(h, m) &= \left(\alpha_{0,0}^{e\pm} h^0 + \alpha_{0,2}^{e\pm} h^2 + \alpha_{0,4}^{e\pm} h^4 + \dots \right) \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4 + \dots \right) \\ &= 1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4 + \dots \end{aligned}$$

και όταν επιπρόσθετα $h = 0$, $B_m^e(0, m) = 1$.

2.2.5 Αρχικές παρατηρήσεις – 3

Από την εναλλακτική γραφή για το n που έγινε στην ενότητα 2.2, μπορούμε να εξάγουμε ακόμα μια αρχική παρατήρηση. Για παράδειγμα, έστω ότι επιλέγουμε την τιμή $m = 3$. Τότε αναμένουμε $n = 1, 3, 5, \dots$. Πράγματι, με $n = m \pm 2p$, όταν

$$\begin{aligned} p = 0 &\rightarrow n = 3 \\ p = 1 &\rightarrow n = \begin{cases} 5 \text{ λαμβάνοντας το +} \\ 1 \text{ λαμβάνοντας το -} \end{cases} \\ p = 2 &\rightarrow n = 7 \text{ λαμβάνουμε μόνο το + διαφορετικά το } n < 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι συντελεστές

$$\alpha_{2p,2i}^e = 0 \quad \text{όταν } m < 2p.$$

2.2.6 Υπολογισμός συντελεστών

Ο υπολογισμός των συντελεστών ανάπτυξης $B_{m \pm 2p}^e(h, m)$ έγκειται στον υπολογισμό των συντελεστών $\alpha_{2p,2i}^{e\pm}$ και g_{2s}^e . Οι συντελεστές $\alpha_{2p,2i}^{e\pm}$ υπολογίζονται στην [3] και θα δοθούν, όσοι είναι απαραίτητοι, στο Κεφ. 3.

2.2.7 Κανονικοποίηση

Ο υπολογισμός των συντελεστών g_{2s}^e θα γίνει εάν εφαρμόσουμε τη συνθήκη κανονικοποίησης των συναρτήσεων Mathieu η οποία είναι [2, σελ. 1408]

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^e(h, m) = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{p=0}^{\infty} B_{m \pm 2p}^e(h, m) = 1.$$

Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των συντελεστών, προκύπτει ότι

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s} \right) \right] = 1$$

το οποίο ισοδύναμα γράφεται

$$\left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s} \right) \left(1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \right) = 1$$

μιας και ο όρος των αθροισμάτων των $g_{2s}^e h^{2s}$ είναι ανεξάρτητος του p και παράλληλα $\alpha_{0,2i}^{e\pm} = 1$ για $i = 0$ ενώ $\alpha_{0,2i}^{e\pm} = 0$ για $i = 1, 2, 3, \dots$. Βεβαίως, για πλήρη λύση, $k \rightarrow \infty$.

Σε ανεπτυγμένη μορφή, η προηγούμενη σχέση γράφεται

$$\begin{aligned} \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4 + \dots\right) & \left(1 + \alpha_{2,0}^{e\pm} h^2 + \alpha_{2,2}^{e\pm} h^4 + \dots\right. \\ & + \alpha_{4,0}^{e\pm} h^4 + \alpha_{4,2}^{e\pm} h^6 + \dots \\ & \left. + \dots\right) = 1. \end{aligned}$$

Ομαδοποιώντας σε δυνάμεις του h^{2i} ,

$$1 + \left(\alpha_{2,0}^{e\pm} + g_2^e\right)h^2 + \left(\alpha_{2,2}^{e\pm} + \alpha_{4,0}^{e\pm} + \alpha_{2,0}^{e\pm}g_2^e + g_4^e\right)h^4 + \dots = 1$$

απ' όπου προκύπτει

$$g_0^e = 1, \quad (2.8.\alpha')$$

$$g_2^e = -\alpha_{2,0}^{e\pm} \quad (2.8.\beta')$$

και

$$g_4^e = -\left(\alpha_{2,2}^{e\pm} + \alpha_{4,0}^{e\pm} - \alpha_{2,0}^{e\pm}\alpha_{2,0}^{e\pm}\right). \quad (2.8.\gamma')$$

Γενικεύοντας, οι συντελεστές g_{2s}^e γράφονται

$$g_{2s}^e = -\sum_{p=1}^s \sum_{j=0}^{s-p} \alpha_{2p,2(s-p-j)}^{e\pm} g_{2j}^e, \quad s = 1, 2, \dots$$

ενώ $g_0^e = 1$.

2.2.8 Ανάπτυγμα γωνιακών συναρτήσεων

Έχοντας πλέον αναπτύξει τους συντελεστές, εάν τους αντικαταστήσουμε στη Σχ. (2.4), προκύπτει το ανάπτυγμα για τις γωνιακές συναρτήσεις Mathieu:

$$\begin{aligned} Se_m(h, \cos \varphi) &= \sum_{p=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s}\right) \right] \cos[(m \pm 2p)\varphi] \\ &= \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s}\right) \sum_{p=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \cos[(m \pm 2p)\varphi] \right\} \\ &= \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s}\right) \\ &\quad \times \left\{ \cos(m\varphi) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \cos[(m \pm 2p)\varphi] \right\}, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$

2.2.9 Ανάπτυγμα ακτινικών συναρτήσεων

Αντικαθιστώντας το ανάπτυγμα των συντελεστών $B_m^e(h, m)$ στην έκφραση των ακτινικών συναρτήσεων, προκύπτει η έκφραση

$$\begin{aligned} Ze_m(h, \cosh \eta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s} \right) \\ &\times \left[Z_m(h \cosh \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{\pm p} \sum_{i=0}^k \alpha_{2p, 2i}^{e\pm} h^{2p+2i} Z_{m\pm 2p}(h \cosh \eta) \right] \end{aligned}$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$ ενώ $k \rightarrow \infty$.

2.3 Οι περιττές συναρτήσεις

Οι περιττές γωνιακές συναρτήσεις είναι η δεύτερη κατηγορία λύσεων της Σχ. (2.1) και δίδονται από την έκφραση [2, σελ. 1408]

$$So_m(h, \cos \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^o(h, m) \sin(n\varphi), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

ενώ, οι περιττές ακτινικές συναρτήσεις από την έκφραση [2, σελ. 1408]

$$Zo_m(h, \cosh \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n-m}{2}} n B_n^o(h, m) Z_n(h \cosh \eta)$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$ ικανοποιούν τη Σχ. (2.2).

Όπως και στις άρτιες συναρτήσεις, τα m, n είναι ταυτόχρονα άρτια ή περιττά. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$n = m \pm 2p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Τώρα, η επιλογή των συμβόλων γίνεται λίγο διαφορετικά απ' ότι πριν.

- Όταν $m > 2p$ κρατάμε και τα δύο σύμβολα ενώ,
- όταν $m \leq 2p$, κρατάμε μόνο το $+$ (διαφορετικά θα προέκυπτε $n \leq 0$ ενώ τώρα το $n \geq 1$).

Παρόμοια με τις άρτιες, οι περιττές γωνιακές συναρτήσεις γράφονται

$$So_m(h, \cos \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} B_{m\pm 2p}^o(h, m) \sin[(m \pm 2p)\varphi], \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

και οι περιττές ακτινικές συναρτήσεις γράφονται

$$Zo_m(h, \cosh \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{\pm p} (m \pm 2p) B_{m\pm 2p}^o(h, m) Z_{m\pm 2p}(h \cosh \eta)$$

όπου $m = 1, 2, 3, \dots$

2.3.1 Ανάπτυγμα των ιδιοτιμών

Στην περίπτωση αυτή, οι ιδιοτιμές συμβολίζονται με bo και αναπτύσσονται ως

$$bo_m = m^2 + l_2^o h^2 + l_4^o h^4 + \dots$$

2.3.2 Ανάπτυγμα των συντελεστών

Οι συντελεστές $B_{m\pm 2p}^o(h, m)$ έχουν και εδώ την ίδια έκφραση ανάπτυξης μόνο με μια διαφορά στο δεύτερο μέρος του γινομένου, δηλαδή

$$\begin{aligned} B_{m\pm 2p}^o(h, m) &= \left(\alpha_{2p,0}^{o\pm} h^{2p} + \alpha_{2p,2}^{o\pm} h^{2p+2} + \alpha_{2p,4}^{o\pm} h^{2p+4} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} + \dots + \alpha_{2p,2k}^{o\pm} h^{2p+2k} \right) \\ &\quad \times \left(g_0^o + g_2^o h^2 + g_4^o h^4 + \dots + g_{2s}^o h^{2s} + \dots g_{2k}^o h^{2k} \right) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} \left(g_0^o + \sum_{s=1}^k g_{2s}^o h^{2s} \right), \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$. Για κάθε μια από τις τιμές αυτές του m , το $p = 0, 1, 2, \dots$

2.3.3 Αρχικές παρατηρήσεις – 1

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην ενότητα 2.2.3 και κρατώντας αυτή τη φορά μόνο τις περιττές λύσεις, έχουμε

$$y^o = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\varphi) = B_1 \sin \varphi + B_2 \sin(2\varphi) + \dots$$

και εξισώνοντας με την

$$y^o = So_m(0, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} B_{m\pm 2p}^o(0, m) \sin[(m \pm 2p)\varphi]$$

προκύπτει ότι, για $m = 1$, $B_1 = B_1^o(0, 1)^{\ddagger}$, για $m = 2$, $B_2 = B_2^o(0, 2)^{\ddagger}$ κ.ο.κ. Άρα

$$y^o = B_1^o(0, 1) \sin \varphi + B_2^o(0, 2) \sin(2\varphi) + \dots$$

Όμως,

$$\begin{aligned} B_1^o(0, 1) &= (\alpha_{0,0}^{o\pm} + \mu\text{δενικοί όροι})(1 + \mu\text{δενικοί όροι}) = \alpha_{0,0}^{o\pm} \\ B_2^o(0, 2) &= (\alpha_{0,0}^{o\pm} + \mu\text{δενικοί όροι}) \left(\frac{1}{2} + \mu\text{δενικοί όροι} \right) = \frac{1}{2} \alpha_{0,0}^{o\pm} \\ &\vdots \end{aligned}$$

[‡] Δηλαδή, ο μη μηδενικός συντελεστής προκύπτει όταν $p = 0$ ενώ οι υπόλοιποι ($p = 1, 2, 3, \dots$) είναι μηδενικοί.

Η κανονικοποίηση για τις περιττές συναρτήσεις είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} n B_n^o(0, m) = 1$$

ή

$$\sum_{p=0}^{\infty} (m \pm 2p) B_{m \pm 2p}^o(0, m) = 1.$$

Αναπτύσσοντας, έχουμε

$$m B_m^o(0, m) + (m \pm 2) B_{m \pm 2}^o(0, m) + \dots = 1.$$

Για $m = 1$, ο μόνος μη μηδενικός συντελεστής είναι αυτός με $p = 0$, έτσι

$$B_1^o(0, 1) = 1 \rightarrow \alpha_{0,0}^{o\pm} = 1.$$

Για $m = 2$,

$$2 B_2^o(0, 2) = 1 \rightarrow \alpha_{0,0}^{o\pm} = 1.$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί για όλα τα m . Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\alpha_{0,0}^{o\pm} = 1, \quad \forall m = 1, 2, 3, \dots.$$

2.3.4 Αρχικές παρατηρήσεις – 2

Ανατρέχοντας στην ενότητα 2.2.4, είδαμε ότι οι συντελεστές $\alpha^{e\pm}$ για $p = 0$ και $i \neq 0$ είναι μηδενικοί. Οι παρατηρήσεις αυτές ισχύουν και εδώ, οπότε

$$\alpha_{0,2i}^{o\pm} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots.$$

2.3.5 Αρχικές παρατηρήσεις – 3

Όπως και στην ενότητα 2.2.5, έτσι και εδώ μια ακόμα αρχική παρατήρηση είναι δυνατή. Εάν παραδείγματος χάριν επιλέξουμε την τιμή $m = 4$, θα αναμένουμε το n να πάρει τις τιμές $2, 4, 6, \dots$. Δεδομένου ότι $n = m \pm 2p$, έχουμε

$$\begin{aligned} p = 0 &\rightarrow n = 4 \\ p = 1 &\rightarrow n = \begin{cases} 6 & \text{λαμβάνοντας το +} \\ 2 & \text{λαμβάνοντας το -} \end{cases} \\ p = 2 &\rightarrow n = 8 \text{ λαμβάνουμε μόνο το + διαφορετικά το } n = 0 \\ p = 3 &\rightarrow n = 10 \text{ λαμβάνουμε μόνο το + διαφορετικά το } n < 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Συνεπώς, οι συντελεστές

$$\alpha_{2p,2i}^{o-} = 0 \quad \text{όταν } m \leq 2p.$$

2.3.6 Κανονικοποίηση

Οι συντελεστές g_{2i}^o , όπως και στην περίπτωση των άρτιων συναρτήσεων, θα προκύψουν κάνοντας χρήση της κανονικοποίησης. Αντικαθιστώντας τα αναπτύγματα των συντελεστών $B_{m \pm 2p}^o(h, m)$ στην έκφραση κανονικοποίησης για τις περιττές συναρτήσεις, λαμβάνουμε

$$\left(g_0^o + \sum_{s=1}^k g_{2s}^o h^{2s} \right) \left[m + \sum_{p=1}^k (m \pm 2p) \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} \right] = 1$$

με $k \rightarrow \infty$. Αναπτύσσοντας έχουμε

$$\begin{aligned} & \left(g_0^o + g_2^o h^2 + g_4^o h^4 + \dots \right) \left[m + (m \pm 2) \left(\alpha_{2,0}^{o\pm} h^2 + \alpha_{2,2}^{o\pm} h^4 + \dots \right) \right. \\ & \quad \left. + (m \pm 4) \left(\alpha_{4,0}^{o\pm} h^4 + \alpha_{4,2}^{o\pm} h^6 + \dots \right) \right. \\ & \quad \left. + \dots \right] = 1. \end{aligned}$$

Ομαδοποιώντας σε δυνάμεις του h^{2i} , προκύπτει

$$\begin{aligned} & mg_0^o + \left(mg_2^o + \frac{m \pm 2}{m} \alpha_{2,0}^{o\pm} \right) h^2 \\ & + \left[mg_4^o + (m \pm 2) \alpha_{2,0}^{o\pm} g_2^o + \frac{m \pm 2}{m} \alpha_{2,2}^{o\pm} + \frac{m \pm 4}{m} \alpha_{4,0}^{o\pm} \right] h^4 \\ & + \dots = 1 \end{aligned}$$

απ' όπου εξάγονται

$$g_0^o = \frac{1}{m}, \quad (2.9.\alpha')$$

$$g_2^o = -\frac{m \pm 2}{m^2} \alpha_{2,0}^{o\pm} \quad (2.9.\beta')$$

και

$$g_4^o = \frac{(m \pm 2)^2}{m^3} (\alpha_{2,0}^{o\pm})^2 - \frac{1}{m^2} [(m \pm 2) \alpha_{2,2}^{o\pm} + (m \pm 4) \alpha_{4,0}^{o\pm}]. \quad (2.9.\gamma')$$

Γενικεύοντας, οι συντελεστές g_{2s}^o προκύπτουν βάσει της σχέσης

$$g_{2s}^o = -\frac{1}{m} \sum_{p=1}^s \sum_{j=0}^{s-p} (m \pm 2p) \alpha_{2p,2(s-p-j)}^{o\pm} g_{2j}^o, \quad s = 1, 2, 3, \dots$$

ενώ $g_0^o = 1/m$.

2.3.7 Ανάπτυγμα γωνιακών συναρτήσεων

Ακολουθώντας βήματα παρόμοια με αυτά της ενότητας 2.2.8, προκύπτει το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} So_m(h, \cos \varphi) &= \left(\frac{1}{m} + \sum_{s=1}^k g_{2s}^o h^{2s} \right) \\ &\times \left\{ \sin(m\varphi) + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} \sin[(m \pm 2p)\varphi] \right\}, \quad k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$

2.3.8 Ανάπτυγμα ακτινικών συναρτήσεων

Το ανάπτυγμα των περιττών ακτινικών συναρτήσεων είναι

$$\begin{aligned} Zo_m(h, \cosh \eta) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta \left(1 + \sum_{s=1}^k g_{2s}^e h^{2s} \right) \\ &\times \left[mZ_m(h \cosh \eta) + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{\pm p} (m \pm 2p) \sum_{i=0}^k \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} Z_{m \pm 2p}(h \cosh \eta) \right] \end{aligned}$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$ ενώ $k \rightarrow \infty$.

2.4 Ορθογωνιότητα

Οι γωνιακές συναρτήσεις Mathieu αποτελούν ένα πλήρες ορθογώνιο σύνολο. Οι σχέσεις ορθογωνιότητας είναι [2, σελ. 1409]

$$\int_0^{2\pi} Se_m(h, \cos \varphi) Se_n(h, \cos \varphi) d\varphi = M_m^e(h) \delta_{mn}$$

και

$$\int_0^{2\pi} So_m(h, \cos \varphi) So_n(h, \cos \varphi) d\varphi = M_m^o(h) \delta_{mn}$$

ενώ

$$\int_0^{2\pi} Se_m(h, \cos \varphi) So_n(h, \cos \varphi) d\varphi = 0, \quad \forall m, n.$$

Στις εκφράσεις αυτές, $M_m^e(h)$ και $M_m^o(h)$ είναι οι συντελεστές κανονικοποίησης και δίνονται από τις σχέσεις

$$M_m^e(h) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_n} [B_n^e(h, m)]^2$$

και

$$M_m^o(h) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} [B_n^o(h, m)]^2.$$

Οι υπό ολοκλήρωση συναρτήσεις $Se_m(h, \cos \varphi)$ και $So_m(h, \cos \varphi)$ περιέχουν το δείκτη m ο οποίος, εάν κάποιος ανατρέξει στους ορισμούς των γωνιακών συναρτήσεων, ανάλογα με την τιμή του, επιτρέπει άρτιους ή περιττούς δείκτες για τους συντελεστές B . Αποτέλεσμα τούτου, οι συντελεστές κανονικοποίησης να αναπτύσσονται σε σειρά από όρους B^2 ανάλογα με την τιμή του m . Συνεπώς, εναλλακτική γραφή για τους συντελεστές κανονικοποίησης είναι

$$M_m^e(h) = \pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2}{\varepsilon_{m \pm 2p}} \left[B_{m \pm 2p}^e(h, m) \right]^2 \quad (2.10)$$

και

$$M_m^o(h) = \pi \sum_{p=0}^{\infty} \left[B_{m \pm 2p}^o(h, m) \right]^2. \quad (2.11)$$

Βεβαίως, στις εκφράσεις αυτές, $\varepsilon_{m \pm 2p}$ είναι ο συντελεστής Neumann με

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & i = 0 \\ 2, & i \neq 0 \end{cases}. \quad (2.12)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

3

Αναπτύγματα των συναρτήσεων Mathieu

3.1 Εισαγωγή

Τα αναπτύγματα των συναρτήσεων Mathieu έως την τέταρτη τάξη προκύπτουν με χρήση των αναπτυγμάτων των συντελεστών B μέχρι τέταρτη δύναμη του h , δηλαδή

$$B_{m \pm 2p}^e(h, m) = \alpha + \beta h^2 + \gamma h^4 + \mathcal{O}(h^6) \quad (3.1)$$

και όμοια για τους $B_{m \pm 2p}^o(h, m)$.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τις άρτιες και τις περιττές συναρτήσεις.

3.2 Εκφράσεις άρτιων συναρτήσεων

Για να βρούμε τα αναπτύγματα ως την τέταρτη τάξη τόσο των άρτιων γωνιακών συναρτήσεων όσο και των αντίστοιχων ακτινικών, αφετηρία είναι τα αναπτύγματα των συντελεστών $B_{m \pm 2p}^e(h, m)$:

$$\begin{aligned} B_{m \pm 2p}^e(h, m) &= \left(\alpha_{2p,0}^{e\pm} h^{2p} + \alpha_{2p,2}^{e\pm} h^{2p+2} + \alpha_{2p,4}^{e\pm} h^{2p+4} + \dots \right) \\ &\times \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4 + \dots \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Για να έρθει η Σχ. (3.2) στη μορφή της Σχ. (3.1), πρέπει, μετά την εκτέλεση των πράξεων, να διατηρήσουμε δυνάμεις έως h^4 . Επειδή όμως οι εκθέτες εξαρτώνται από το p , τα αναπτύγματα θα εξαρτώνται επίσης από το p . Έτσι, για $p = 0$, η επιτρεπόμενη έκφραση η οποία

δίνει όρους μέχρι h^4 είναι

$$\begin{aligned} B_m^e(h, m) &= \alpha_{0,0}^{e\pm} + \alpha_{0,2}^{e\pm} h^2 + \alpha_{0,4}^{e\pm} h^4 \\ &\quad + g_2^e \left(\alpha_{0,0}^{e\pm} h^2 + \alpha_{0,2}^{e\pm} h^4 \right) \\ &\quad + g_4^e \left(\alpha_{0,0}^{e\pm} h^4 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^6), \end{aligned}$$

για $p = 1$

$$\begin{aligned} B_{m\pm 2}^e(h, m) &= \alpha_{2,0}^{e\pm} h^2 + \alpha_{2,2}^{e\pm} h^4 \\ &\quad + g_2^e \left(\alpha_{2,0}^{e\pm} h^4 \right) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^6), \end{aligned}$$

για $p = 2$

$$B_{m\pm 4}^e(h, m) = \alpha_{4,0}^{e\pm} h^4 + \mathcal{O}(h^6)$$

ενώ, τιμές του $p \geq 3$ δίνουν όρους h^6 και ανώτερους.

Παρατηρώντας τα αναπτύγματα αυτά, μια πιο συμπτηγμένη έκφραση είναι δυνατή. Πιο ειδικά, εάν ανατρέξουμε στη Σχ. (2.7), σελ. 11 και θέσουμε $k = k_{\max}$, τότε οι τρεις προηγούμενες αναπτύξεις μπορούν να προκύψουν από τη

$$B_{m\pm 2p}^e(h, m) \simeq \sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left(\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^e h^{2j} \quad (3.3)$$

θέτοντας $k_{\max} = 2$. Τιμές του $k_{\max} \geq 3$ οδηγούν στην εμφάνιση όρων h^6 και άνω.

3.2.1 Αναπτύγματα των γωνιακών συναρτήσεων

Αντικαθιστώντας τη Σχ. (3.3) στη Σχ. (2.4), σελ. 10, προκύπτει η έκφραση για τις γωνιακές συναρτήσεις. Είναι

$$Se_m(h, \cos \varphi) \simeq \sum_{p=0}^{k_{\max}} \left[\sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left(\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^e h^{2j} \right] \cos[(m \pm 2p)\varphi]$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$

Ανάπτυγμα τέταρτης τάξης Για να βρούμε το ανάπτυγμα τέταρτης τάξης, θέτουμε $k_{\max} = 2$, οπότε,

$$\begin{aligned} Se_m(h, \cos \varphi) &\simeq \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4 \right) \cos(m\varphi) \\ &\quad + \left[\alpha_{2,0}^{e\pm} h^2 + (\alpha_{2,2}^{e\pm} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e\pm}) h^4 \right] \cos[(m \pm 2)\varphi] \\ &\quad + \alpha_{4,0}^{e\pm} h^4 \cos[(m \pm 4)\varphi]. \end{aligned}$$

Τελικά, σε πλήρη ανάπτυξη, η ζητούμενη έκφραση είναι

$$\begin{aligned} \text{Se}_m(h, \cos \varphi) \simeq & \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4\right) \cos(m\varphi) \\ & + \left[\alpha_{2,0}^{e+} h^2 + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) h^4\right] \cos[(m+2)\varphi] \\ & + \left[\alpha_{2,0}^{e-} h^2 + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-}) h^4\right] \cos[(m-2)\varphi] \\ & + \alpha_{4,0}^{e+} h^4 \cos[(m+4)\varphi] \\ & + \alpha_{4,0}^{e-} h^4 \cos[(m-4)\varphi] \end{aligned}$$

ή, ως προς δυνάμεις του h ,

$$\begin{aligned} \text{Se}_m(h, \cos \varphi) \simeq & \cos(m\varphi) \\ & + \left\{g_2^e \cos(m\varphi) + \alpha_{2,0}^{e+} \cos[(m+2)\varphi] + \alpha_{2,0}^{e-} \cos[(m-2)\varphi]\right\} h^2 \\ & + \left\{g_4^e \cos(m\varphi) \right. \\ & \quad \left. + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) \cos[(m+2)\varphi] + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-}) \cos[(m-2)\varphi] \right. \\ & \quad \left. + \alpha_{4,0}^{e+} \cos[(m+4)\varphi] + \alpha_{4,0}^{e-} \cos[(m-4)\varphi]\right\} h^4. \end{aligned}$$

3.2.2 Αναπτύγματα των ακτινικών συναρτήσεων

Κατ' όμοιο τρόπο με τις γωνιακές συναρτήσεις, αντικαθιστώντας τη Σχ. (3.3) στη Σχ. (2.5), σελ. 10, προκύπτουν τα αναπτύγματα για τις ακτινικές συναρτήσεις Mathieu:

$$\begin{aligned} \text{Ze}_m(h, \cosh \eta) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{p=0}^{k_{\max}} (-1)^{\pm p} \\ & \times \sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left[\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \left(\alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^e h^{2j} \right] \\ & \times Z_{m \pm 2p}(h \cosh \eta) \end{aligned}$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$

Ανάπτυγμα τέταρτης τάξης Θέτοντας $k_{\max} = 2$, το ανάπτυγμα είναι

$$\begin{aligned} \text{Ze}_m(h, \cosh \eta) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4\right) Z_m(h \cosh \eta) \right. \\ & + \left[\alpha_{2,0}^{e+} h^2 + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) h^4\right] Z_{m+2}(h \cosh \eta) \\ & + \left[\alpha_{2,0}^{e-} h^2 + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-}) h^4\right] Z_{m-2}(h \cosh \eta) \\ & + \alpha_{4,0}^{e+} h^4 Z_{m+4}(h \cosh \eta) \\ & \left. + \alpha_{4,0}^{e-} h^4 Z_{m-4}(h \cosh \eta) \right\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Εναλλακτικά, ως προς δυνάμεις του h ,

$$\begin{aligned}
 Z_{\text{e}}(h, \cosh \eta) &\simeq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ Z_m(h \cosh \eta) \right. \\
 &\quad + \left[g_2^{\text{e}} Z_m(h \cosh \eta) \right. \\
 &\quad - \alpha_{2,0}^{\text{e}+} Z_{m+2}(h \cosh \eta) \\
 &\quad - \alpha_{2,0}^{\text{e}-} Z_{m-2}(h \cosh \eta) \left. \right] h^2 \\
 &\quad + \left[g_4^{\text{e}} Z_m(h \cosh \eta) \right. \\
 &\quad - (\alpha_{2,2}^{\text{e}+} + g_2^{\text{e}} \alpha_{2,0}^{\text{e}+}) Z_{m+2}(h \cosh \eta) \\
 &\quad - (\alpha_{2,2}^{\text{e}-} + g_2^{\text{e}} \alpha_{2,0}^{\text{e}-}) Z_{m-2}(h \cosh \eta) \\
 &\quad + \alpha_{4,0}^{\text{e}+} Z_{m+4}(h \cosh \eta) \\
 &\quad \left. \left. + \alpha_{4,0}^{\text{e}-} Z_{m-4}(h \cosh \eta) \right] h^4 \right\}. \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

Ανάλογα με το πρόβλημα, ενδιαφέρει επίσης η γνώση της παραγώγου των ακτινικών συναρτήσεων ως προς τη μεταβλητή η . Το αποτέλεσμα επιτυγχάνεται παραγωγίζοντας όρο προς όρο τη Σχ. (3.5). Χρησιμοποιούμε τον κανόνα της αλυσίδας για τον πρώτο όρο

$$\frac{dZ_{\text{e}}(h, \cosh \eta)}{d\eta} \propto \frac{dZ_m(h \cosh \eta)}{du} \frac{du}{d\eta}$$

με $u \hat{=} h \cosh \eta$. Οπότε, το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\begin{aligned}
 \frac{dZ_{\text{e}}(h, \cosh \eta)}{d\eta} &\simeq h \sinh \eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ Z'_m(h \cosh \eta) \right. \\
 &\quad + \left[g_2^{\text{e}} Z'_m(h \cosh \eta) \right. \\
 &\quad - \alpha_{2,0}^{\text{e}+} Z'_{m+2}(h \cosh \eta) \\
 &\quad - \alpha_{2,0}^{\text{e}-} Z'_{m-2}(h \cosh \eta) \left. \right] h^2 \\
 &\quad + \left[g_4^{\text{e}} Z'_m(h \cosh \eta) \right. \\
 &\quad - (\alpha_{2,2}^{\text{e}+} + g_2^{\text{e}} \alpha_{2,0}^{\text{e}+}) Z'_{m+2}(h \cosh \eta) \\
 &\quad - (\alpha_{2,2}^{\text{e}-} + g_2^{\text{e}} \alpha_{2,0}^{\text{e}-}) Z'_{m-2}(h \cosh \eta) \\
 &\quad + \alpha_{4,0}^{\text{e}+} Z'_{m+4}(h \cosh \eta) \\
 &\quad \left. \left. + \alpha_{4,0}^{\text{e}-} Z'_{m-4}(h \cosh \eta) \right] h^4 \right\} \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

όπου ο τόνος στις συναρτήσεις Bessel δηλώνει παράγωγο ως προς το όρισμα.

3.3 Εκφράσεις περιττών συναρτήσεων

Ακολουθώντας την ίδια πορεία εργασίας όπως στην περίπτωση των άρτιων συναρτήσεων, καταλήγουμε σε μία παρόμοια έκφραση για τα αναπτύγματα των συντελεστών $B_{m\pm 2p}^o(h, m)$ και τελικά, στις αντίστοιχες εκφράσεις των περιττών γωνιακών και ακτινικών συναρτήσεων.

3.3.1 Αναπτύγματα των γωνιακών συναρτήσεων

Τα αναπτύγματα των περιττών γωνικών συναρτήσεων είναι

$$So_m(h, \cos \varphi) \simeq \sum_{p=0}^{k_{\max}} \left[\sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left(\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^o h^{2j} \right] \sin[(m \pm 2p)\varphi]$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$

Ανάπτυγμα τέταρτης τάξης Θέτοντας $k_{\max} = 2$, το ζητούμενο ανάπτυγμα είναι

$$\begin{aligned} So_m(h, \cos \varphi) \simeq & \left(\frac{1}{m} + g_2^o h^2 + g_4^o h^4 \right) \sin(m\varphi) \\ & + \left[\frac{1}{m} \alpha_{2,0}^{o+} h^2 + \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{o+} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o+} \right) h^4 \right] \sin[(m+2)\varphi] \\ & + \left[\frac{1}{m} \alpha_{2,0}^{o-} h^2 + \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{o-} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o-} \right) h^4 \right] \sin[(m-2)\varphi] \\ & + \frac{1}{m} \alpha_{4,0}^{o+} h^4 \sin[(m+4)\varphi] \\ & + \frac{1}{m} \alpha_{4,0}^{o-} h^4 \sin[(m-4)\varphi]. \end{aligned}$$

Αντίστοιχη μορφή μπορεί να βρεθεί εκφράζοντας το ανάπτυγμα ως προς δυνάμεις του h .

3.3.2 Αναπτύγματα των ακτινικών συναρτήσεων

Τα αναπτύγματα των περιττών ακτινικών συναρτήσεων είναι

$$\begin{aligned} Zo_m(h, \cosh \eta) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta \sum_{p=0}^{k_{\max}} (-1)^{\pm p} (m \pm 2p) \\ & \times \left[\sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left(\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^o h^{2j} \right] Z_{m\pm 2p}(h \cosh \eta) \end{aligned}$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$

Ανάπτυγμα τέταρτης τάξης Με $k_{\max} = 2$, η προηγούμενη έκφραση δίνει

$$\begin{aligned} Z_{0m}(h, \cosh \eta) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta \left\{ m \left(\frac{1}{m} + g_2^o h^2 + g_4^o h^4 \right) Z_m(h \cosh \eta) \right. \\ & - (m+2) \left[\frac{1}{m} \alpha_{2,0}^{o+} h^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{o+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{o+} \right) h^4 \right] Z_{m+2}(h \cosh \eta) \\ & - (m-2) \left[\frac{1}{m} \alpha_{2,0}^{o-} h^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{o-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{o-} \right) h^4 \right] Z_{m-2}(h \cosh \eta) \\ & + (m+4) \frac{1}{m} \alpha_{4,0}^{o+} h^4 Z_{m+4}(h \cosh \eta) \\ & \left. + (m-4) \frac{1}{m} \alpha_{4,0}^{o-} h^4 Z_{m-4}(h \cosh \eta) \right\} \end{aligned}$$

ενώ, η ανάλογη μορφή της Σχ. (3.5) είναι

$$\begin{aligned} Z_{0m}(h, \cosh \eta) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta \left\{ Z_m(h \cosh \eta) \right. \\ & + \left[mg_2^o Z_m(h \cosh \eta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{m+2}{m} \alpha_{2,0}^{o+} Z_{m+2}(h \cosh \eta) \right. \\ & \quad \left. - \frac{m-2}{m} \alpha_{2,0}^{o-} Z_{m-2}(h \cosh \eta) \right] h^2 \\ & + \left[mg_4^o Z_m(h \cosh \eta) \right. \\ & \quad \left. - (m+2) \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{o+} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o+} \right) Z_{m+2}(h \cosh \eta) \right. \\ & \quad \left. - (m-2) \left(\frac{1}{m} \alpha_{2,2}^{o-} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o-} \right) Z_{m-2}(h \cosh \eta) \right. \\ & \quad \left. + \frac{m+4}{m} \alpha_{4,0}^{o+} Z_{m+4}(h \cosh \eta) \right. \\ & \quad \left. + \frac{m-4}{m} \alpha_{4,0}^{o-} Z_{m-4}(h \cosh \eta) \right] h^4 \right\}. \tag{3.7} \end{aligned}$$

Τέλος, η παράγωγος των περιττών συναρτήσεων προκύπτει από τη Σχ. (3.7) και είναι

$$\begin{aligned}
\frac{dZ_0m(h, \cosh \eta)}{d\eta} &\simeq h \cosh \eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ Z'_m(h \cosh \eta) \right. \\
&+ \left[\frac{1}{(h \cosh \eta)^3} Z_m(h \cosh \eta) + A \right. \\
&- \left. \frac{1}{(h \cosh \eta)^2} Z'_m(h \cosh \eta) \right] h^2 \\
&+ \left[\frac{1}{(h \cosh \eta)^3} B + \Gamma \right. \\
&- \left. \frac{1}{(h \cosh \eta)^2} A \right] h^4 \left. \right\}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Στην προηγούμενη έκφραση, B είναι ο συντελεστής του h^2 στη Σχ. (3.7), A είναι η ίδια ποσότητα με το B αντικαθιστώντας τις συναρτήσεις Bessel με τις παραγώγους τους ως προς το όρισμα και τέλος, Γ είναι ο συντελεστής του h^4 επίσης στη Σχ. (3.7), αντικαθιστώντας πάλι τις συναρτήσεις Bessel με τις παραγώγους τους ως προς το όρισμα.

3.4 Ορθογωνιότητα

Ενδιαφέρουν επίσης τα αναπτύγματα των συντελεστών κανονικοποίησης $M_m^e(h)$ και $M_m^o(h)$ μέχρι την τέταρτη τάξη.

3.4.1 Ανάπτυγμα των άρτιων συντελεστών

Για να προκύψει το ζητούμενο ανάπτυγμα, αντικαθιστούμε τη Σχ. (3.3) στη Σχ. (2.10) οπότε και προκύπτει το ανάπτυγμα για τους άρτιους συντελεστές κανονικοποίησης. Είναι

$$M_m^e(h) \simeq \pi \sum_{p=0}^{k_{\max}} \frac{2}{\varepsilon_{m \pm 2p}} \left[\sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left(\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \alpha_{2p,2i}^{e\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^e h^{2j} \right]^2$$

όπου το $m = 0, 1, 2, \dots$

Ανάπτυγμα τέταρτης τάξης Για να προκύψει το ανάπτυγμα τέταρτης τάξης για τους συντελεστές $M_m^e(h)$, θέτουμε $k_{\max} = 2$ και κρατάμε όρους μέχρι την τέταρτη τάξη. Έτσι λοιπόν προκύπτει το αποτέλεσμα

$$M_m^e(h) \simeq 2\pi \left\{ \frac{1}{\varepsilon_m} + \frac{2}{\varepsilon_m} g_2^e h^2 + \left\{ \frac{1}{\varepsilon_m} \left[(g_2^e)^2 + 2g_4^e \right] + \frac{1}{\varepsilon_{m \pm 2}} (\alpha_{2,0}^{e\pm})^2 \right\} h^4 \right\}.$$

3.4.2 Ανάπτυγμα των περιττών συντελεστών

Η γενική έκφραση για τους περιττούς συντελεστές είναι

$$M_m^o(h) \simeq \pi \sum_{p=0}^{k_{\max}} \left[\sum_{j=0}^{k_{\max}-p} \left(\sum_{i=0}^{k_{\max}-p-j} \alpha_{2p,2i}^{o\pm} h^{2p+2i} \right) g_{2j}^o h^{2j} \right]^2$$

με το $m = 1, 2, 3, \dots$

Ανάπτυγμα τέταρτης τάξης Με $k_{\max} = 2$, προκύπτει το επιθυμητό ανάπτυγμα:

$$M_m^o(h) \simeq \pi \left\{ \frac{1}{m^2} + \frac{2}{m} g_2^o h^2 + \left[(g_2^o)^2 + \frac{2}{m} g_4^o + \frac{1}{m^2} (\alpha_{2,0}^{o\pm})^2 \right] h^4 \right\}.$$

3.5 Υπολογισμός συντελεστών

Σε όλες τις προηγούμενες αναπτύξεις, εμφανίζονται οι συντελεστές $\alpha_{2,0}^{e\pm}$, $\alpha_{4,0}^{e\pm}$ και $\alpha_{2,2}^{e\pm}$, οι g_2^e και g_4^e , οι αντίστοιχοι περιττοί και γενικά, όλοι αυτοί είναι συναρτήσεις του m . Ο πλήρης προσδιορισμός των αναπτυγμάτων αυτού του κεφαλαίου, προϋποθέτει τον υπολογισμό των συντελεστών αυτών. Παρακάτω αναφέρουμε τους τύπους υπολογισμού των συγκεκριμένων αυτών ποσοτήτων, κατηγοριοποιώντας τους ανάλογα με το αν αναφέρονται στις άρτιες ή περιττές συναρτήσεις. Όλοι οι τύποι υπολογίζονται αναλυτικά στην [3].

3.5.1 Συντελεστές άρτιων συναρτήσεων

Οι τύποι υπολογισμού των συντελεστών $\alpha^{e\pm}$ είναι κατά σειρά (υπενθυμίζεται ότι για τις άρτιες συναρτήσεις, $m \geq 0$):

$$\alpha_{2,0}^{e+} = -\frac{1}{\varepsilon_m} \frac{2m!}{16(m+1)!}, \quad m \geq 0,$$

$$\alpha_{2,0}^{e-} = \begin{cases} \frac{(m-2)!}{16(m-1)!}, & m \geq 2 \\ 0, & m = 0, 1 \end{cases},$$

$$\alpha_{4,0}^{e+} = \frac{1}{\varepsilon_m} \frac{m!}{256(m+2)!}, \quad m \geq 2,$$

$$\alpha_{4,0}^{e-} = \begin{cases} \frac{(m-3)!}{512(m-1)!}, & m \geq 4 \\ 0, & m = 0, 1, 2, 3 \end{cases},$$

$$\alpha_{2,2}^{e+} = \begin{cases} -\frac{1}{1024}, & m = 1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}$$

και

$$\alpha_{2,2}^{e-} = \begin{cases} \frac{1}{1024}, & m = 3 \\ 0, & m \neq 3 \end{cases}.$$

Οι συντελεστές g^e μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από τις Σχ. (2.8.α'), (2.8.β') και (2.8.γ'), σελ. 14:

$$g_0^e = 1,$$

$$g_2^e = -(\alpha_{2,0}^{e+} + \alpha_{2,0}^{e-})$$

και

$$g_4^e = - \left[\alpha_{4,0}^{e+} + \alpha_{4,0}^{e-} + \alpha_{2,2}^{e+} + \alpha_{2,2}^{e-} - (\alpha_{2,0}^{e+})^2 - (\alpha_{2,0}^{e-})^2 \right].$$

3.5.2 Συντελεστές περιττών συναρτήσεων

Για την περίπτωση των περιττών συναρτήσεων, οι επιτρεπτές τιμές για το m είναι $1, 2, 3, \dots$, οι δε τύποι υπολογισμού είναι

$$\begin{aligned}\alpha_{2,0}^{o+} &= -\frac{m!}{16(m+1)!}, \quad m \geq 1, \\ \alpha_{2,0}^{o-} &= \begin{cases} \frac{(m-2)!}{16(m-1)!}, & m \geq 3 \\ 0, & m = 1, 2 \end{cases}, \\ \alpha_{4,0}^{o+} &= \frac{m!}{512(m+2)!}, \quad m \geq 1, \\ \alpha_{4,0}^{o-} &= \begin{cases} \frac{(m-3)!}{512(m-1)!}, & m \geq 5 \\ 0, & m = 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}, \\ \alpha_{2,2}^{o+} &= \begin{cases} \frac{1}{1024}, & m = 1 \\ 0, & m \neq 1 \end{cases}\end{aligned}$$

και

$$\alpha_{2,2}^{o-} = \begin{cases} -\frac{1}{1024}, & m = 3 \\ 0, & m \neq 3 \end{cases}.$$

Τώρα, οι επιθυμητοί συντελεστές g^o προκύπτουν από τις Σχ. (2.9.α'), (2.9.β') και (2.9.γ'), σελ. 18 και είναι

$$g_0^o = \frac{1}{m},$$

$$g_2^o = -\frac{1}{m^2} \left[(m+2)\alpha_{2,0}^{o+} + (m-2)\alpha_{2,0}^{o-} \right]$$

και

$$\begin{aligned}g_4^o &= \frac{1}{m^3} \left[(m+2)\alpha_{2,0}^{o+} \right]^2 + \frac{1}{m^3} \left[(m-2)\alpha_{2,0}^{o-} \right]^2 \\ &\quad - \frac{1}{m^2} \left[(m+4)\alpha_{4,0}^{o+} + (m-4)\alpha_{4,0}^{o-} + (m+2)\alpha_{2,2}^{o+} + (m-2)\alpha_{2,2}^{o-} \right].\end{aligned}$$

3.6 Αναπτύγματα ιδιοτιμών

Η ανάπτυξη των ιδιοτιμών έχει γίνει στις ενότητες 2.2.1 (σελ. 10) και 2.3.1 (σελ. 16). Πιο συγκεκριμένα, τα αναπτύγματα τέταρτης τάξης είναι

$$be_m \simeq m^2 + l_2^e h^2 + l_4^e h^4$$

και

$$bo_m \simeq m^2 + l_2^o h^2 + l_4^o h^4.$$

Τέλος, οι συντελεστές l^e και l^o που απαιτούνται υπολογίζονται στην [3] και είναι

$$l_2^e = \frac{2 - \varepsilon_{m-1}}{4}, \quad m \geq 0,$$

$$l_4^e = \begin{cases} -\frac{1}{128}, & m = 1 \\ \frac{5}{192}, & m = 2 \\ \frac{1}{32(m^2-1)}, & m \neq 1, 2 \end{cases},$$

$$l_2^o = -\frac{2 - \varepsilon_{m-1}}{4}, \quad m \geq 1$$

κατ

$$l_4^o = \begin{cases} -\frac{1}{128}, & m = 1 \\ -\frac{1}{192}, & m = 2 \\ \frac{1}{32(m^2-1)}, & m \geq 3 \end{cases}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

4

Κύμα TM

4.1 Περιγραφή της διάταξης

Η προς μελέτη διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 4.1 στη σελίδα που ακολουθεί. Αυτή αποτελείται από δύο κυλίνδρους άπειρου μήκους. Ο εξωτερικός κύλινδρος είναι κυκλικός διηλεκτρικός με συντακτικές παραμέτρους ϵ_2 και μ_2 ενώ ο εσωτερικός είναι ελλειπτικός και τέλεια αγώγιμος. Ο εξωτερικός χώρος μπορεί να είναι ο αέρας ή όμως για γενικότητα, έχει τις παραμέτρους ϵ_1 και μ_1 . Επισήμως, ο εξωτερικός χώρος περιγράφεται ως «περιοχή 1» ενώ ο εσωτερικός ως «περιοχή 2».

Το προσπίπτον κύμα είναι τύπου TM^z και το ηλεκτρικό πεδίο έχει μορφή

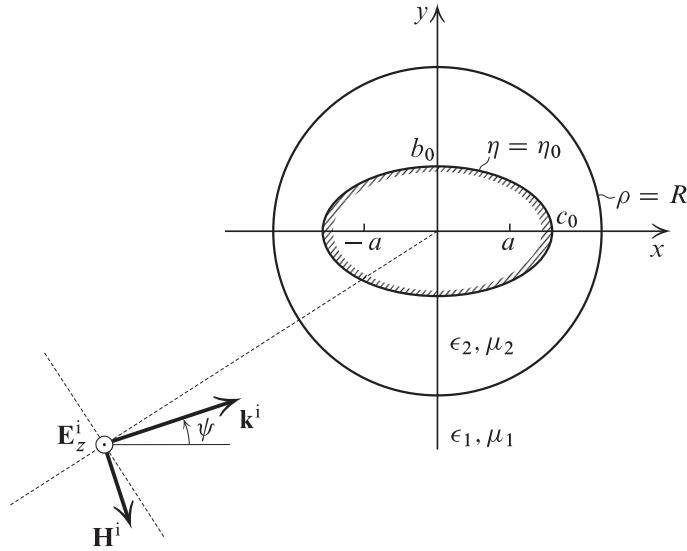
$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}_z^i = E_0 e^{-jk^i \cdot \mathbf{r}} \mathbf{e}_z$$

και προσπίπτει κάθετα στον άξονα z των κυλίνδρων και υπό γωνία ψ ως προς το θετικό ήμιάξονα x . Η πρόσπτωση δηλώνεται με τον εκθέτη « i ». Στην έκφραση αυτή, \mathbf{k}^i είναι το κυματάνυσμα πρόσπτωσης το οποίο μπορεί εναλλακτικά να γραφεί ως $\mathbf{k}^i = k_x^i \mathbf{e}_x + k_y^i \mathbf{e}_y = k^i (\cos \psi \mathbf{e}_x + \sin \psi \mathbf{e}_y)$ με $k^i = \omega \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}$. Επειδή η διάταξη είναι άπειρη ως προς z , ισχύει $\partial/\partial z = 0$. Τώρα, \mathbf{r} είναι το διάνυσμα θέσης οπότε, το προσπίπτον ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\mathbf{E}_z^i = e^{-jk^i \rho \cos(\varphi - \psi)} \mathbf{e}_z$$

όπου έχουμε θέσει το πλάτος ίσο με μονάδα. Η έκφραση αυτή είναι γραμμένη σε κυλινδρικές συντεταγμένες οπότε, από τη Σχ. (1.5.a'), το δυναμικό που περιγράφει το πρόβλημα αυτό είναι

$$\Pi_z^i = \frac{1}{(k^i)^2} e^{-jk^i \rho \cos(\varphi - \psi)}.$$



Σχήμα 4.1 Η προς μελέτη διάταξη αποτελείται από έναν αγώγιμο ελλειπτικό κύλινδρο ο οποίος επικαλύπτεται ομοιαζονικά από έναν διηλεκτρικό κυκλικό κύλινδρο ενώ ένα επίπεδο κύμα TM^z προσπίπτει κάθετα στον άξονα z και υπό γωνία ψ ως προς το θετικό ημιάξονα x .

4.2 Ανάπτυξη επίπεδου κύματος σε σειρά κυκλικών κυλινδρικών κυματοσυναρτήσεων

Ο εκθετικός όρος του προσπίπτοντος κύματος αναπτύσσεται ως γνωστό σε σειρά υπό τη μορφή

$$e^{-jk^i\rho \cos(\varphi-\psi)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-j)^m J_m(k^i\rho) e^{-jm(\varphi-\psi)}$$

η οποία αποτελεί μιγαδική σειρά Fourier με συντελεστές ανάπτυξης

$$c_m(\rho) = (-j)^m J_m(k^i\rho), \quad m = -\infty, \dots, \infty.$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και σε σειρά Fourier συνημιτόνων της μορφής

$$A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos[m(\varphi - \psi) - \gamma_m]$$

και η οποία εξυπηρετεί περισσότερο απ' ότι η μιγαδική μορφή για την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών. Οι σχέσεις μετατροπής μπορούν να βρεθούν στην [4, σελ. 523] και είναι

$$A_0 = c_0, \quad A_m = 2\sqrt{c_m c_{-m}} \quad \text{και} \quad \gamma_m = \arctan \left(j \frac{c_m - c_{-m}}{c_m + c_{-m}} \right)$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$. Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $J_{-m}(\xi) = (-1)^m J_m(\xi)$, προκύπτει $c_{-m} = c_m$ και έτσι, η νέα ζητούμενη μορφή είναι

$$e^{-jk^i\rho \cos(\varphi-\psi)} = J_0(k^i\rho) + \sum_{m=1}^{\infty} 2(-j)^m J_m(k^i\rho) \cos[m(\varphi-\psi)].$$

Στην έκφραση αυτή μπορούμε να ενσωματώσουμε τον εξωτερικό όρο μέσα στο άθροισμα, κάνοντας χρήση του συντελεστή Neumann ο οποίος έχει οριστεί στη Σχ. (2.12), σελ. 20. Κατ' αυτόν τον τρόπο,

$$e^{-jk^i\rho \cos(\varphi-\psi)} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J_m(k^i\rho) \cos[m(\varphi-\psi)].$$

Επομένως, το προσπίπτον δυναμικό γράφεται τελικά στη μορφή

$$\Pi_z^i = \frac{1}{(k^i)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J_m(k^i\rho) [\cos(m\psi) \cos(m\varphi) + \sin(m\psi) \sin(m\varphi)]. \quad (4.1.\alpha')$$

4.3 Εκφράσεις πεδιακών συνιστωσών

Οι εκφράσεις των πεδίων θα βρεθούν χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση των δυναμικών. Το σκεδαζόμενο δυναμικό του Hertz έχει την αναπαράσταση

$$\Pi_z^{sc} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k^s\rho) [P_m \cos(m\varphi) + Q_m \sin(m\varphi)] \quad (4.1.\beta')$$

όπου με τον εκθέτη «sc» δηλώνεται το σκεδαζόμενο πεδίο ενώ, στην «περιοχή 2»,

$$\begin{aligned} \Pi_z^{st} &= \sum_{i=0}^{\infty} [A'_i J e_i(h, \cosh \eta) + B_i Y e_i(h, \cosh \eta)] S e_i(h, \cos \varphi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} [C'_i J o_i(h, \cosh \eta) + D_i Y o_i(h, \cosh \eta)] S o_i(h, \cos \varphi) \end{aligned} \quad (4.1.\gamma')$$

με τον εκθέτη «st» να δηλώνεται το στάσιμο πεδίο.

4.4 Οριακές συνθήκες

Όπως προκύπτει από τη Σχ. (1.3.γ'), επειδή $\partial/\partial z = 0$, η οριακή συνθήκη για την E_φ συνιστώσα ικανοποιείται αυτόματα σε όλες τις επιφάνειες. Συνεπώς, για την επιφάνεια του εσωτερικού κυλίνδρου που είναι αγώγιμη, πρέπει

$$E_z^{st}|_{\eta=\eta_0} = 0. \quad (4.2)$$

Για την επιφάνεια τώρα του κυκλικού κυλίνδρου ο οποίος είναι διηλεκτρικός, πρέπει

$$(E_z^i + E_z^{sc})_{\rho=R} = E_z^{st}|_{\rho=R} \quad (4.3.\alpha')$$

ενώ παράλληλα

$$(H_\varphi^i + H_\varphi^{sc})_{\rho=R} = H_\varphi^{st}|_{\rho=R} \quad (4.3.\beta')$$

αφού $H_z = 0^*$.

Επιπρόσθετα, πρέπει οι κυματάριθμοι ανά περιοχή να είναι ίσοι. Αντό σημαίνει ότι ο κυματάριθμος πρόσπτωσης ισούται με τον κυματάριθμο σκέδασης, οπότε ισχύουν οι εξής σχέσεις:

$$k^i = k^{sc} \equiv k_1 \quad \text{και} \quad k^{st} \equiv k_2.$$

Έτσι, από δω και πέρα, οι Σχ. (4.1.α'), (4.1.β') και (4.1.γ') προσαρμόζονται κατάλληλα.

4.4.1 Η οριακή συνθήκη για τον αγώγιμο κύλινδρο

Η οριακή συνθήκη της Σχ. (4.2) ισοδυναμεί με $\Pi_z^{st} = 0$ στο $\eta = \eta_0$, οπότε από τη Σχ. (4.1.γ') και εκμεταλλευόμενοι την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Mathieu (βλέπε ενότητα 2.4), προκύπτουν οι εξισώσεις

$$A'_i J_{ei}(\xi) + B_i Y_{ei}(\xi) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$C'_i J_{0i}(\xi) + D_i Y_{0i}(\xi) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

όπου $\xi \hat{=} [h, \cosh \eta_0]$.

Στο σημείο αυτό, βιολεύει να εκφράσουμε τις σταθερές B_i και D_i συναρτήσει των A'_i και C'_i αντίστοιχα. Κατ' αυτόν τον τρόπο, ελαττώνουμε το σύστημα κατά μια εξίσωση. Έτσι λοιπόν

$$B_i = -\frac{J_{ei}(\xi)}{Y_{ei}(\xi)} A'_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

και

$$D_i = -\frac{J_{0i}(\xi)}{Y_{0i}(\xi)} C'_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

οπότε, η έκφραση για το Π_z^{st} που ικανοποιεί τη Σχ. (4.2) είναι

$$\begin{aligned} \Pi_z^{st} &= \sum_{i=0}^{\infty} A_i [Y_{ei}(\xi) J_{ei}(h, \cosh \eta) \\ &\quad - J_{ei}(\xi) Y_{ei}(h, \cosh \eta)] S_{ei}(h, \cos \varphi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} C_i [Y_{0i}(\xi) J_{0i}(h, \cosh \eta) \\ &\quad - J_{0i}(\xi) Y_{0i}(h, \cosh \eta)] S_{0i}(h, \cos \varphi) \end{aligned} \quad (4.4)$$

όπου έχουμε θέσει $A_i = A'_i / Y_{ei}(\xi)$ και $C_i = C'_i / Y_{0i}(\xi)$.

* Στο παρόν κεφάλαιο μελετάται το κύμα TM. Έτσι, $\Pi_{mz} = 0$ οπότε, από τις Σχ. (1.4.α') και (1.6.α'), $H_z = 0$.

4.4.2 Οι οριακές συνθήκες για το διηλεκτρικό κύλινδρο

Για να προχωρήσουμε στην ικανοποίηση των οριακών συνθηκών στην επιφάνεια $\rho = R$, πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις συσχέτισης των συναρτήσεων Mathieu με τις συναρτήσεις Bessel. Αυτές είναι [5, σελ. 386]

$$Se_i(h, \cos \varphi) Ze_i(h, \cosh \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} B_m^e(h, i) \cos(m\varphi) Z_m(k\rho) \quad (4.5.\alpha')$$

και

$$So_i(h, \cos \varphi) Zo_i(h, \cosh \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} j^{m-i} B_m^o(h, i) \sin(m\varphi) Z_m(k\rho) \quad (4.5.\beta')$$

για τις άρτιες και τις περιττές συναρτήσεις αντίστοιχα, και βέβαια, τα i και m είναι ταυτόχρονα άρτια ή ταυτόχρονα περιττά. Έτσι, η Σχ. (4.4) γίνεται

$$\begin{aligned} \Pi_z^{\text{st}} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} \left\{ A_i B_m^e(h, i) [Ye_i(\xi) J_m(k_2 \rho) \right. \\ & - Je_i(\xi) Y_m(k_2 \rho)] \cos(m\varphi) \\ & + C_i B_m^o(h, i) [Yo_i(\xi) J_m(k_2 \rho) \right. \\ & \left. - Jo_i(\xi) Y_m(k_2 \rho)] \sin(m\varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Η Σχ. (4.3.α') ισοδυναμεί με $k_1^2 (\Pi_z^i + \Pi_z^{\text{sc}}) = k_2^2 \Pi_z^{\text{st}}$ στο $\rho = R$. Αντικαθιστώντας τις Σχ. (4.1.α'), (4.1.β') και (4.6), προκύπτει η εξίσωση

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J_m(x_1) [\cos(m\psi) \cos(m\varphi) + \sin(m\psi) \sin(m\varphi)] \\ & + k_1^2 \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(x_1) [P_m \cos(m\varphi) + Q_m \sin(m\varphi)] \\ & = k_2^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} \left\{ A_i B_m^e(h, i) [Ye_i(\xi) J_m(x_2) \right. \\ & - Je_i(\xi) Y_m(x_2)] \cos(m\varphi) \\ & + C_i B_m^o(h, i) [Yo_i(\xi) J_m(x_2) \right. \\ & \left. - Jo_i(\xi) Y_m(x_2)] \sin(m\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (4.7.\alpha')$$

όπου έχουμε θέσει $x_1 \hat{=} k_1 R$ και $x_2 \hat{=} k_2 R$.

Βάσει τώρα της Σχ. (1.6.γ'), η Σχ. (4.3.β') ισοδυναμεί με $\epsilon_1 (\partial \Pi_z^i / \partial \rho + \partial \Pi_z^{\text{sc}} / \partial \rho) =$

$\epsilon_2 \partial \Pi_z^{\text{st}} / \partial \rho$ στο $\rho = R$, οπότε, κάνοντας τις σχετικές αντικαταστάσεις, προκύπτει

$$\begin{aligned}
& \frac{\epsilon_1}{k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J'_m(x_1) [\cos(m\psi) \cos(m\varphi) + \sin(m\psi) \sin(m\varphi)] \\
& + \epsilon_1 k_1 \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)\prime}(x_1) [P_m \cos(m\varphi) + Q_m \sin(m\varphi)] \\
& = \epsilon_2 k_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} \left\{ A_i B_m^e(h, i) [Y_{ei}(\xi) J'_m(x_2) \right. \\
& \quad \left. - J_{ei}(\xi) Y'_m(x_2)] \cos(m\varphi) \right. \\
& \quad \left. + C_i B_m^o(h, i) [Y_{oi}(\xi) J'_m(x_2) \right. \\
& \quad \left. - J_{oi}(\xi) Y'_m(x_2)] \sin(m\varphi) \right\} \tag{4.7.β'}
\end{aligned}$$

όπου $J'_m(x_1) = dJ_m(x_1)/dx_1$ και ομοίως για τις υπόλοιπες παραγώγους.

Οι Σχ. (4.7.α') και (4.7.β') αποτελούν ένα ζεύγος συστημάτων 2×2 για την εύρεση των συντελεστών P_m , A_i από το ένα και Q_m , C_i από το άλλο.

4.5 Σύστημα προσδιορισμού των συντελεστών

Κάνοντας χρήση της ορθογωνιότητας των συνημιτόνων στις Σχ. (4.7.α') και (4.7.β') και εκφράζοντας το συντελεστή P_m συναρτήσει του A_i από τη Σχ. (4.7.α'), προκύπτει

$$\begin{aligned}
P_m &= \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} A_i j^{m-i} B_m^e(h, i) [Y_{ei}(\xi) J_m(x_2) - J_{ei}(\xi) Y_m(x_2)] \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)} \\
&\quad - \frac{1}{k_1^2} \varepsilon_m (-j)^m \frac{J_m(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \cos(m\psi), \quad m = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Αντικαθιστώντας τώρα την έκφραση αυτή του P_m στη Σχ. (4.7.β') βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} A_i j^{m-i} B_m^e(h, i) k_2^2 \\
& \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} [Y_{ei}(\xi) J'_m(x_2) - J_{ei}(\xi) Y'_m(x_2)] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} [Y_{ei}(\xi) J_m(x_2) - J_{ei}(\xi) Y_m(x_2)] \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right\} \\
& = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \varepsilon_m (-j)^m \left[J'_m(x_1) - J_m(x_1) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right] \cos(m\psi)
\end{aligned} \tag{4.9.α'}$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$. Η σχέση αυτή αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα με μορφή

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{mi} A_i = b_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{4.9.β'}$$

για τον προσδιορισμό των συντελεστών A_i όπου m και i ταυτόχρονα ή ταυτόχρονα περιττά.

Επαναλαμβάνοντας τώρα την ίδια διαδικασία στη Σχ. (4.7.α') με μόνη διαφορά ότι εφαρμόζουμε την ορθογωνιότητα των ημιτόνων και επιλύοντας το Q_m συναρτήσει του C_i , προκύπτει

$$\begin{aligned} Q_m = & \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} C_i j^{m-i} B_m^o(h, i) [Y_{0i}(\xi) J_m(x_2) - J_{0i}(\xi) Y_m(x_2)] \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)} \\ & - \frac{1}{k_1^2} \varepsilon_m (-j)^m \frac{J_m(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \sin(m\psi), \quad m = 1, 2, 3, \dots . \end{aligned}$$

Εν συνεχεία, εάν αντικαταστήσουμε το Q_m στη Σχ. (4.7.β'), προκύπτει αντίστοιχο γραμμικό σύστημα για τον υπολογισμό των συντελεστών C_i με τη μορφή

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{mi} C_i = d_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots . \quad (4.10.\alpha')$$

Το σύστημα αυτό είναι

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} C_i j^{m-i} B_m^o(h, i) k_2^2 \\ & \times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} [Y_{0i}(\xi) J'_m(x_2) - J_{0i}(\xi) Y'_m(x_2)] \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} [Y_{0i}(\xi) J_m(x_2) - J_{0i}(\xi) Y_m(x_2)] \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right\} \\ & = \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \varepsilon_m (-j)^m \left[J'_m(x_1) - J_m(x_1) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right] \sin(m\psi) \end{aligned} \quad (4.10.\beta')$$

όπου $m = 1, 2, 3, \dots$

Η ανάλυση των συστημάτων των Σχ. (4.9.α') και (4.10.β') γίνεται στο Παραρτ. A' όπου και εξάγονται σχέσεις ανάπτυξης των στοιχείων των πινάκων $[a_{mi}]$ και $[c_{mi}]$ έως την τάξη h^4 .

4.6 Οι συντελεστές του στάσιμου πεδίου

Η επίλυση των συστημάτων γίνεται στο Παραρτ. B' όπου, εφαρμόζοντας τον κανόνα του Crammer, επιτυγχάνουμε την εύρεση αναλυτικής λύσης έως την τάξη h^4 για τους άγνωστους συντελεστές A_m και C_m . Η ακριβής λύση δίνεται στη Σχ. (B'.3) όπου, για κάθε τιμή του m , προκύπτουν οι άγνωστοι συντελεστές.

Η λύση που προσφέρει η Σχ. (B'.3) είναι η λύση των συντελεστών για το δυναμικό Π_z^{st} , δηλαδή για το δυναμικό με το οποίο περιγράφεται το στάσιμο πεδίο. Επειδή $E_z^{\text{st}} = k_2^2 \Pi_z^{\text{st}}$, οι συντελεστές A_m και C_m για το στάσιμο πεδίο θα δίνονται από τις σχέσεις

$$A_m^{(E)} = k_2^2 A_m \quad \text{και} \quad C_m^{(E)} = k_2^2 C_m .$$

Παρατηρώντας τώρα τη λύση που προσφέρει η Σχ. (B'.3) και ανατρέχοντας στις εκφράσεις για τα L , M , N μέσω των Σχ. (A'.12), (A'.14.α'), (A'.14.β'), (A'.16.α') και (A'.16.β'), συμπεραίνουμε ότι $A_m \propto 1/k_2^2$. Συνεπώς, η λύση για τους συντελεστές $A_m^{(E)}$ είναι αυτούσια με τη Σχ. (B'.3) εάν στις εκφράσεις των L , M και N αγνοήσουμε το συντελεστή k_2^2 .

4.7 Οι συντελεστές του σκεδαζόμενου πεδίου

Ο προσδιορισμός των συντελεστών P_m και Q_m είναι τώρα εφικτός μιας και οι συντελεστές A_m και C_m είναι γνωστοί. Για παράδειγμα, ο συντελεστής P_m με δεδομένο το A_m προκύπτει από τη Σχ. (4.8) και μπορούμε να τον φέρουμε στη γνωστή μορφή $P_m = P_m^{(0)} + P_m^{(2)}h^2 + P_m^{(4)}h^4$.

Από όσα έχουν λεχθεί στο Παραρτ. A', η μορφή αυτή επιτυγχάνεται εάν στη Σχ. (4.8) θέσουμε $i = m \pm 2q$, παρατηρήσουμε τα γινόμενα που εμφανίζονται μέσα στο άθροισμα και απορρίψουμε όρους h^6 και άνω. Η διαδικασία αυτή γίνεται στο Παραρτ. Γ'.

Η ακριβής λύση δίνεται στη Σχ. (Γ'.4). Βεβαίως, η έκφραση αυτή αντιστοιχεί στο δυναμικό σκέδασης οπότε, ο συντελεστής του σκεδαζόμενου πεδίου είναι

$$P_m^{(E)} = k_1^2 P_m.$$

Η έκφραση για τον $P_m^{(E)}$ δίνεται πάλι από τη Σχ. (Γ'.4) αγνοώντας τους συντελεστές k_1^2 δεδομένου ότι οι $A_{m \pm 2q}$ που εμφανίζονται μέσα στο άθροισμα αντιστοιχούν στο στάσιμο δυναμικό. Εάν τους συντελεστές αυτούς τους αντικαταστήσουμε με τους $A_{m \pm 2q}^{(E)}$, τότε, η λύση για τους $P_m^{(E)}$ προκύπτει εάν αγνοήσουμε τόσο τους k_1^2 όσο και τον k_2^2 που εμφανίζεται έξω από το άθροισμα. Τα ίδια βεβαίως ισχύουν και για τους $Q_m^{(E)}$.

4.8 Μακρινό πεδίο και διατομές σκέδασης

Το σκεδαζόμενο ηλεκτρικό πεδίο έχει μόνο z συνιστώσα διότι, όπως προκύπτει από τις Σχ. (1.5.β') και (1.5.γ'), οι E_ρ^{sc} και E_φ^{sc} είναι μηδενικές μιας και $\partial/\partial z = 0$. Η έκφραση για το πεδίο σκεδάσεως είναι

$$E_z^{\text{sc}} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_1 \rho) \left[P_m^{(E)} \cos(m\varphi) + Q_m^{(E)} \sin(m\varphi) \right].$$

Το μακρινό πεδίο τώρα προκύπτει εάν κάνουμε χρήση της ασυμπτωτικής έκφρασης της συνάρτησης Hankel για μεγάλα ορίσματα:

$$H_m^{(2)}(k_1 \rho) \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 \rho}} j^m e^{-j(k_1 \rho - \pi/4)}.$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει

$$E_z^{\text{sc}} \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-jk_1 \rho} f(\varphi)$$

όπου

$$f(\varphi) \hat{=} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} e^{j\pi/4} G(\varphi)$$

με

$$G(\varphi) \hat{=} \sum_{m=0}^{\infty} j^m \left[P_m^{(E)} \cos(m\varphi) + Q_m^{(E)} \sin(m\varphi) \right].$$

Από τις σχέσεις αυτές μπορούν να υπολογιστούν η διαφορική, η οπίσθια (radar), η εμπρόσθια και η ολική διατομή σκέδασης. Επειδή ωστόσο οι τρεις πρώτες ποσότητες είναι συναρτήσεις του $|G(\varphi)|^2$ και επειδή ενδιαφέρει η ανάπτυξή τους σε μορφή άρτιων δυνάμεων του h , εξυπηρετεί να αναπτύξουμε πρώτα το $|G(\varphi)|^2$ στη μορφή αυτή.

Από τον ορισμό της $G(\varphi)$ προκύπτει

$$\begin{aligned} G(\varphi) = & \sum_{m=0}^{\infty} j^m \left\{ P_m^{(0)} \cos(m\varphi) + Q_m^{(0)} \sin(m\varphi) \right. \\ & + \left[P_m^{(2)} \cos(m\varphi) + Q_m^{(2)} \sin(m\varphi) \right] h^2 \\ & \left. + \left[P_m^{(4)} \cos(m\varphi) + Q_m^{(4)} \sin(m\varphi) \right] h^4 \right\}, \end{aligned}$$

δηλαδή, έχει τη μορφή $G(\varphi) = G^{(0)}(\varphi) + G^{(2)}(\varphi)h^2 + G^{(4)}(\varphi)h^4$. Η ποσότητα $|G(\varphi)|^2$ μπορεί να γραφτεί σε ανάλογη μορφή παίρνοντας το γινόμενο της $G(\varphi)$ με τη συζυγή της:

$$\begin{aligned} |G(\varphi)|^2 = G(\varphi)G^*(\varphi) = & \left| G^{(0)}(\varphi) \right|^2 + 2\text{Re} \left[G^{(0)*}(\varphi)G^{(2)}(\varphi) \right] h^2 \\ & + \left\{ 2\text{Re} \left[G^{(0)*}(\varphi)G^{(4)}(\varphi) \right] + \left| G^{(2)}(\varphi) \right|^2 \right\} h^4 \end{aligned} \quad (4.11)$$

με το τελεστή Re να συμβολίζει το πραγματικό μέρος. Βεβαίως, η ανάπτυξη αυτή ισχύει για κάθε μιγαδική ποσότητα.

Είμαστε τώρα σε θέση να προβούμε στον υπολογισμό των διατομών σκέδασης.

4.8.1 Διαφορική διατομή σκέδασης

Η διαφορική διατομή σκέδασης $\sigma(\varphi)$ είναι

$$\sigma(\varphi) = |f(\varphi)|^2 = \frac{2}{\pi k_1} |G(\varphi)|^2$$

και αντικαθιστώντας από τη Σχ. (4.11), προκύπτει

$$\begin{aligned} k_1 \sigma(\varphi) = & \frac{2}{\pi} \left\{ \left| G^{(0)}(\varphi) \right|^2 + 2\text{Re} \left[G^{(0)*}(\varphi)G^{(2)}(\varphi) \right] h^2 \right. \\ & \left. + \left\{ 2\text{Re} \left[G^{(0)*}(\varphi)G^{(4)}(\varphi) \right] + \left| G^{(2)}(\varphi) \right|^2 \right\} h^4 \right\}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.8.2 Οπίσθια διατομή σκέδασης

Η οπίσθια διατομή σκέδασης είναι

$$\sigma_b = 2\pi\sigma(\psi + \pi)$$

ενώ, μέσω της Σχ. (4.11),

$$\begin{aligned} k_1\sigma_b &= 4|G(\psi + \pi)|^2 \\ &= 4\left\{ \left|G^{(0)}(\psi + \pi)\right|^2 + 2\text{Re}\left[G^{(0)*}(\psi + \pi)G^{(2)}(\psi + \pi)\right]h^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2\text{Re}\left[G^{(0)*}(\psi + \pi)G^{(4)}(\psi + \pi)\right] + \left|G^{(2)}(\psi + \pi)\right|^2 \right\}h^4 \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.8.3 Εμπρόσθια διατομή σκέδασης

Η εμπρόσθια διατομή σκέδασης είναι

$$\sigma_f = 2\pi\sigma(\psi)$$

και στη ζητούμενη μορφή

$$\begin{aligned} k_1\sigma_f &= 4|G(\psi)|^2 \\ &= 4\left\{ \left|G^{(0)}(\psi)\right|^2 + 2\text{Re}\left[G^{(0)*}(\psi)G^{(2)}(\psi)\right]h^2 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ 2\text{Re}\left[G^{(0)*}(\psi)G^{(4)}(\psi)\right] + \left|G^{(2)}(\psi)\right|^2 \right\}h^4 \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.8.4 Ολική διατομή σκέδασης

Η ολική διατομή σκέδασης Q_t προκύπτει έπειτα από ολοκλήρωση της διαφορικής διατομής, δηλαδή

$$Q_t = \int_0^{2\pi} \sigma(\varphi) d\varphi.$$

Αντικαθιστώντας το $\sigma(\varphi)$ δίνει τελικά την έκφραση

$$k_1 Q_t = 4|P_0|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(|P_m|^2 + |Q_m|^2 \right).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα αντίστοιχες μορφές ανάπτυξης με τη Σχ. (4.11) για τις ποσότητες $|P_m|^2$ και $|Q_m|^2$, προκύπτει η ολική διατομή σκέδασης στη μορφή αναπτύγματος άρτιων

δυνάμεων του h :

$$\begin{aligned}
 k_1 Q_t = & 4 |P_0^{(0)}|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(|P_m^{(0)}|^2 + |Q_m^{(0)}|^2 \right) \\
 & + \left\{ 8 \operatorname{Re} \left(P_0^{(0)*} P_0^{(2)} \right) \right. \\
 & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left(P_m^{(0)*} P_m^{(2)} \right) + 2 \operatorname{Re} \left(Q_m^{(0)*} Q_m^{(2)} \right) \right] \left. \right\} h^2 \\
 & + \left\{ 4 \left[2 \operatorname{Re} \left(P_0^{(0)*} P_0^{(4)} \right) + |P_0^{(2)}|^2 \right] \right. \\
 & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[2 \operatorname{Re} \left(P_m^{(0)*} P_m^{(4)} \right) + |P_m^{(2)}|^2 \right. \\
 & \quad \left. \left. + 2 \operatorname{Re} \left(Q_m^{(0)*} Q_m^{(4)} \right) + |Q_m^{(2)}|^2 \right] \right\} h^4. \tag{4.15}
 \end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

5

Κύμα ΤΕ

5.1 Περιγραφή της διάταξης

Στο κεφάλαιο αυτό μελετάται η πρόσπτωση κύματος τύπου TE^z , κατά τα άλλα η γεωμετρία του προβλήματος παραμένει η ίδια. Η διάταξη φαίνεται στο Σχήμα 5.1 στην επόμενη σελίδα.

Επειδή το πρόβλημα αυτό είναι κατά ένα μεγάλο μέρος δυαστικό ως προς αυτό του προηγούμενου κεφαλαίου, θα αναφέρονται μόνο τα βασικά αποτελέσματα δίχως να δίνεται έμφαση στις λεπτομέρειες, χωρίς βέβαια να παραμερίζονται ουσιαστικές διευκρινήσεις.

Οι εξισώσεις περιγράφονται τώρα από το μαγνητικό δυναμικό Π_{mz} . Το προσπίπτον δυναμικό αναπτύσσεται σε σειρά υπό τη μορφή

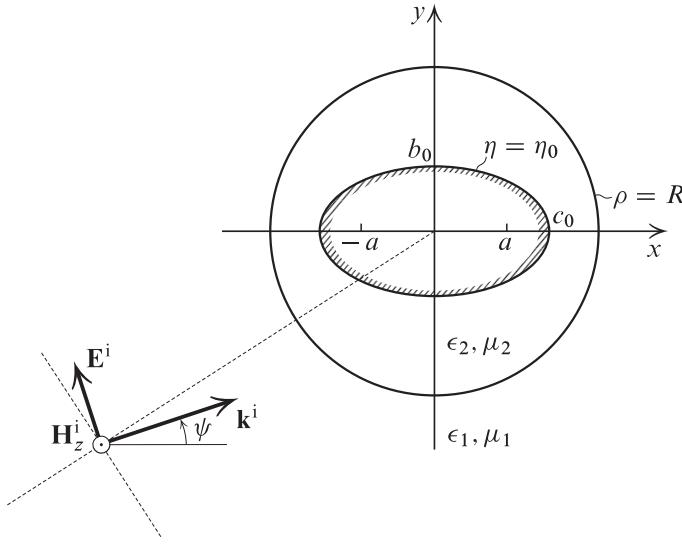
$$\Pi_{\text{mz}}^{\text{i}} = \frac{1}{k_1^2} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J_m(k_1 \rho) [\cos(m\psi) \cos(m\varphi) + \sin(m\psi) \sin(m\varphi)] \quad (5.1.\alpha')$$

ενώ το σκεδαζόμενο υπό τη μορφή

$$\Pi_{\text{mz}}^{\text{sc}} = \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(k_1 \rho) [P_m \cos(m\varphi) + Q_m \sin(m\varphi)] \quad (5.1.\beta')$$

και το στάσιμο υπό τη μορφή

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mz}}^{\text{st}} &= \sum_{i=0}^{\infty} [A'_i J_{\text{e}_i}(h, \cosh \eta) + B_i Y_{\text{e}_i}(h, \cosh \eta)] S_{\text{e}_i}(h, \cos \varphi) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{\infty} [C'_i J_{\text{o}_i}(h, \cosh \eta) + D_i Y_{\text{o}_i}(h, \cosh \eta)] S_{\text{o}_i}(h, \cos \varphi). \end{aligned} \quad (5.1.\gamma')$$



Σχήμα 5.1 Ένα επίπεδο κύμα τύπου TE^z προσπίπτει στη διάταξη των κυλίνδρων.

5.2 Οριακές συνθήκες

Για τον εσωτερικό αγώγιμο κύλινδρο, η οριακή συνθήκη είναι

$$E_\varphi^{\text{st}}|_{\eta=\eta_0} = 0 \quad (5.2)$$

ενώ το E_z είναι πάντα μηδενικό μιας και μελετάται το κύμα TE. Για την επιφάνεια $\rho = R$, οι οριακές συνθήκες είναι

$$(E_\varphi^{\text{i}} + E_\varphi^{\text{sc}})|_{\rho=R} = E_\varphi^{\text{st}}|_{\rho=R} \quad (5.3.\alpha')$$

και

$$(H_z^{\text{i}} + H_z^{\text{sc}})|_{\rho=R} = H_z^{\text{st}}|_{\rho=R} \quad (5.3.\beta')$$

ενώ, λόγω της Σχ. (1.6.γ'), $H_\varphi = 0$ στην επιφάνεια αυτή διότι $\partial/\partial z = 0$.

Η Σχ. (5.2) ισοδυναμεί με

$$\frac{\partial \Pi_{\text{mz}}^{\text{st}}}{\partial \eta}|_{\eta=\eta_0} = 0$$

και ακολουθώντας παρόμοια βήματα όπως στην ενότητα 4.4.1, το δυναμικό στο εσωτερικό παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{mz}}^{\text{st}} = & \sum_{i=0}^{\infty} A_i [Y\text{e}'_i(\xi) J\text{e}_i(h, \cosh \eta) \\ & - J\text{e}'_i(\xi) Y\text{e}_i(h, \cosh \eta)] S\text{e}_i(h, \cos \varphi) \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} C_i [Y\text{o}'_i(\xi) J\text{o}_i(h, \cosh \eta) \\ & - J\text{o}'_i(\xi) Y\text{o}_i(h, \cosh \eta)] S\text{o}_i(h, \cos \varphi) \end{aligned}$$

υπενθυμίζοντας ότι $\xi = [h, \cosh \eta_0]$ ενώ, οι τονούμενες ποσότητες σύμφωνα με τα λεγόμενα στην ενότητα 3.2.2 αντιστοιχούν σε παράγωγο ως προς τη μεταβλητή η . Χρησιμοποιώντας τη Σ_{χ} .(4.5.α') και τη Σ_{χ} .(4.5.β'), η τελευταία παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \Pi_{mz}^{\text{st}} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} \left\{ A_i B_m^e(h, i) [Y\epsilon'_i(\xi) J_m(k_2 \rho) \right. \\ & - J\epsilon'_i(\xi) Y_m(k_2 \rho)] \cos(m\varphi) \\ & + C_i B_m^o(h, i) [Y\omega'_i(\xi) J_m(k_2 \rho) \\ & \left. - J\omega'_i(\xi) Y_m(k_2 \rho)] \sin(m\varphi) \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Η Σ_{χ} .(5.3.β') αντιστοιχεί σε $k_1^2 (\Pi_{mz}^i + \Pi_{mz}^{\text{sc}}) = k_2^2 \Pi_{mz}^{\text{st}}$ στο $\rho = R$ οπότε, από τις Σ_{χ} .(5.1.α'), (5.1.β') και (5.4) έχουμε

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J_m(x_1) [\cos(m\psi) \cos(m\varphi) + \sin(m\psi) \sin(m\varphi)] \\ & + k_1^2 \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)}(x_1) [P_m \cos(m\varphi) + Q_m \sin(m\varphi)] \\ & = k_2^2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} \left\{ A_i B_m^e(h, i) [Y\epsilon'_i(\xi) J_m(x_2) \right. \\ & - J\epsilon'_i(\xi) Y_m(x_2)] \cos(m\varphi) \\ & + C_i B_m^o(h, i) [Y\omega'_i(\xi) J_m(x_2) \\ & \left. - J\omega'_i(\xi) Y_m(x_2)] \sin(m\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (5.5.\alpha')$$

όπου $x_1 = k_1 R$ και $x_2 = k_2 R$.

Η απομένουσα οριακή συνθήκη δίνει $\mu_1 (\partial \Pi_{mz}^i / \partial \rho + \partial \Pi_{mz}^{\text{sc}} / \partial \rho) = \mu_2 \partial \Pi_{mz}^{\text{st}} / \partial \rho$ στο $\rho = R$ με αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_1}{k_1} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-j)^m J'_m(x_1) [\cos(m\psi) \cos(m\varphi) + \sin(m\psi) \sin(m\varphi)] \\ & + \mu_1 k_1 \sum_{m=0}^{\infty} H_m^{(2)\prime}(x_1) [P_m \cos(m\varphi) + Q_m \sin(m\varphi)] \\ & = \mu_2 k_2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} j^{m-i} \left\{ A_i B_m^e(h, i) [Y\epsilon'_i(\xi) J'_m(x_2) \right. \\ & - J\epsilon'_i(\xi) Y'_m(x_2)] \cos(m\varphi) \\ & + C_i B_m^o(h, i) [Y\omega'_i(\xi) J'_m(x_2) \\ & \left. - J\omega'_i(\xi) Y'_m(x_2)] \sin(m\varphi) \right\} \end{aligned} \quad (5.5.\beta')$$

υπενθυμίζοντας ότι, ο τόνος στις συναρτήσεις Mathieu αντιστοιχεί σε παράγωγο ως προς το η ενώ για τις συναρτήσεις Bessel, σε παράγωγο ως προς το όρισμα.

5.3 Σύστημα προσδιορισμού των συντελεστών

Πραγματοποιώντας όμοια βήματα όπως στην ενότητα 4.5, οι συντελεστές P_m θα δίνονται από τη σχέση

$$\begin{aligned} P_m = & \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} A_i j^{m-i} B_m^e(h, i) [Y\epsilon'_i(\xi) J_m(x_2) - J\epsilon'_i(\xi) Y_m(x_2)] \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)} \\ & - \frac{1}{k_1^2} \varepsilon_m(-j)^m \frac{J_m(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \cos(m\psi), \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

και το σύστημα που αντιστοιχεί σε αυτό της Σχ. (4.9.α')

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^{\infty} A_i j^{m-i} B_m^e(h, i) k_2^2 \\ & \times \left\{ \sqrt{\mu_2} [Y\epsilon'_i(\xi) J'_m(x_2) - J\epsilon'_i(\xi) Y'_m(x_2)] \right. \\ & \left. - \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} [Y\epsilon'_i(\xi) J_m(x_2) - J\epsilon'_i(\xi) Y_m(x_2)] \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right\} \\ & = \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \varepsilon_m(-j)^m \left[J'_m(x_1) - J_m(x_1) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right] \cos(m\psi) \end{aligned} \quad (5.6.\alpha')$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$

Η αντίσχτοιχη σχέση για τους Q_m είναι

$$\begin{aligned} Q_m = & \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} C_i j^{m-i} B_m^o(h, i) [Y\omega'_i(\xi) J_m(x_2) - J\omega'_i(\xi) Y_m(x_2)] \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)} \\ & - \frac{1}{k_1^2} \varepsilon_m(-j)^m \frac{J_m(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \sin(m\psi), \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

και το σύστημα που αντιστοιχεί στη Σχ. (4.10.β') είναι

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=1}^{\infty} C_i j^{m-i} B_m^o(h, i) k_2^2 \\ & \times \left\{ \sqrt{\mu_2} [Y\omega'_i(\xi) J'_m(x_2) - J\omega'_i(\xi) Y'_m(x_2)] \right. \\ & \left. - \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} [Y\omega'_i(\xi) J_m(x_2) - J\omega'_i(\xi) Y_m(x_2)] \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right\} \\ & = \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \varepsilon_m(-j)^m \left[J'_m(x_1) - J_m(x_1) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right] \sin(m\psi) \end{aligned} \quad (5.6.\beta')$$

όπου $m = 1, 2, 3, \dots$

Οι $\Sigma\chi.$ (5.6.α') και (5.6.β') αποτελούν συστήματα με μορφή όπως οι $\Sigma\chi.$ (4.9.β') και (4.10.α') αντίστοιχα. Η αντιμετώπιση αυτών γίνεται όπως ακριβώς στο Παραρτ. A' με τους συντελεστές a_{mm} , $a_{m,m\pm 2}$ και $a_{m,m\pm 4}$ να δίνονται ακριβώς από τις ίδιες εκφράσεις μόνο που τώρα οι ποσότητες $y_{0,m,0}$, $j_{0,m,0}$ κ.λπ. προκύπτουν από τη $\Sigma\chi.$ (3.6) αντικαθιστώντας το m με $m \pm 2q$:

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{e,m\pm 2q}(\xi)}{d\eta} \simeq h \sinh \eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \left\{ Z'_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & + \left[g_2^e Z'_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & - \alpha_{2,0}^{e+} Z'_{m\pm 2q+2}(\xi) \\ & \left. \left. - \alpha_{2,0}^{e-} Z'_{m\pm 2q-2}(\xi) \right] h^2 \right. \\ & + \left[g_4^e Z'_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & - (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) Z'_{m\pm 2q+2}(\xi) \\ & - (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-}) Z'_{m\pm 2q-2}(\xi) \\ & + \alpha_{4,0}^{e+} Z'_{m\pm 2q+4}(\xi) \\ & \left. \left. + \alpha_{4,0}^{e-} Z'_{m\pm 2q-4}(\xi) \right] h^4 \right\}. \end{aligned}$$

Οι συντελεστές c_{mm} , $c_{m,m\pm 2}$ και $c_{m,m\pm 4}$ δίνονται πάλι από τις αντίστοιχες σχέσεις του Παραρτ. A' με τις ποσότητες $y_{0,m,0}$, $j_{0,m,0}$ κ.λπ. να προκύπτουν από τη

$$\begin{aligned} \frac{dZ_{o,m\pm 2q}(\xi)}{d\eta} \simeq h \cosh \eta \sqrt{\frac{\pi}{2}} & \left\{ Z'_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & + \left[\frac{1}{(h \cosh \eta)^3} Z_{m\pm 2q}(\xi) + A(m \pm 2q, \xi) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{(h \cosh \eta)^2} Z'_{m\pm 2q}(\xi) \right] h^2 \right. \\ & + \left[\frac{1}{(h \cosh \eta)^3} B(m \pm 2q, \xi) + \Gamma(m \pm 2q, \xi) \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{(h \cosh \eta)^2} A(m \pm 2q, \xi) \right] h^4 \right\}. \end{aligned}$$

Επιπρόσθετα, οι $\Sigma\chi.$ (A'.8) και (A'.9) τροποποιούνται στις

$$U_m = \left[\sqrt{\mu_2} J'_m(x_2) - \sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} J_m(x_2) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right] \quad (5.7)$$

και

$$V_m = \left[\sqrt{\mu_1} \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} Y_m(x_2) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} - \sqrt{\mu_2} Y_m'(x_2) \right]. \quad (5.8)$$

5.4 Οι συντελεστές του στάσιμου και του σκεδαζόμενου πεδίου

Η επίλυση των συστημάτων των Σχ. (5.6.α') και (5.6.β') γίνεται όπως ακριβώς στην περίπτωση του κύματος TM. Ο τύπος υπολογισμού των A_m δίνεται από τη Σχ. (B'.3) ενώ για τους C_m ισχύουν οι ίδιες παρατηρήσεις της σελ. 78 όπως για την περίπτωση του κύματος TM.

Τέλος, ο τύπος υπολογισμού των συντελεστών του σκεδαζόμενου πεδίου δίνεται από τη Σχ. (Γ'.4) κάνοντας χρήση και των σχολίων που την ακολουθούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

6

Αριθμητικά αποτελέσματα

6.1 Εισαγωγή

Η επαλήθευση για την ορθότητα των αποτελεσμάτων γίνεται αριθμητικά. Πιο συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό δίνονται τα διαγράμματα των διατομών σκέδασης για το ΤΜ και ΤΕ κύμα και συγκρίνονται με άλλα αριθμητικά αποτελέσματα. Επιπρόσθετα, επαληθεύεται η ισχύς του θεωρήματος πρόσω σκέδασης και γίνεται αριθμητικός έλεγχος της ικανοποίησης των οριακών συνθηκών.

Στους υπολογισμούς μας εισάγουμε την εκκεντρότητα $h' = a/c_0$ του ελλειπτικού κυλίνδρου, μια ποσότητα η οποία σχετίζεται με την h μέσω της σχέσης $h = k_2 c_0 h'$. Ετσι, σε όλα τα προηγούμενα αναπτύγματα, αντί του h θα χρησιμοποιείται η αριθμητική τιμή του h' (π.χ. $h' = 0.1$ ή 0.05) ωστόσο, το σύμβολο θα παραμένει το ίδιο.

Επίσης, για τις ανάγκες της υλοποίησης των σχέσεων στον υπολογιστή, έχουν σχηματιστεί οι λόγοι

$$R_\epsilon \hat{=} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}, \quad R_R \hat{=} \frac{c_0}{R} \quad \text{και} \quad R_\lambda \hat{=} \frac{R}{\lambda_1}$$

όπου c_0 είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης $\eta = \eta_0$, $\lambda_1 = 2\pi/k_1$ το μήκος κύματος της «περιοχής 1» ενώ, η διαπερατότητα των περιοχών 1 και 2 είναι $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$. Συναρτήσει των λόγων αυτών, τα ορίσματα των συναρτήσεων Bessel γράφονται

$$x_1 = k_1 R = 2\pi R_\lambda$$

και

$$x_2 = k_2 R = 2\pi R_\lambda \sqrt{R_\epsilon}$$

όπου στην τελευταία έχει γίνει χρήση της σχέσης $k_2 = k_1 \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$. Επιπλέον, η σταθερή ποσότητα ζ έχει οριστεί στο Παραρτ. A' και μπορεί να γραφεί εναλλακτικά ως $\zeta = k_2 c_0$ μιας και γενικότερα, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις συσχέτισης καρτεσιανών και ελλειπτικών συντεταγμένων, το $h \cosh \eta_0 = k_2 c_0$. Συναρτήσει των προηγούμενων λόγων,

$$\zeta = 2\pi R_R R_\lambda \sqrt{R_\epsilon}.$$

Επιπλέον, υπάρχουν δύο ακόμα παράμετροι για τους αριθμητικούς υπολογισμούς. Ο ένας είναι το πλήθος των όρων που εισάγονται στα αθροίσματα όπου $m = 1, (1), \text{NIT}$. Έχει επιλεγεί μια τιμή $\text{NIT} = 20$ ώστε να εξασφαλιστεί η σύγκλιση των αθροισμάτων. Η δεύτερη παράμετρος είναι η ανοχή του μηδενός, ZT . Αριθμητικές τιμές οι οποίες είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερες απ' αυτήν, θεωρούνται μηδέν. Έχει επιλεγεί η τιμή $ZT = 0$ που αντιστοιχεί σε 10^{-324} .

Τέλος, όλοι οι υπολογισμοί γίνονται χρησιμοποιώντας πράξεις κινητής υποδιαστολής με διπλή ακρίβεια και απεικόνιση 14 δεκαδικών ψηφίων.

6.2 Οι διατομές σκέδασης

6.2.1 Κύμα TM

Οπίσθια διατομή σκέδασης Βάσει της Σχ. (4.13) σχεδιάζεται το γράφημα της οπίσθιας διατομής σκέδασης για διάφορες τιμές των παραμέτρων. Στα Σχήματα 6.1 και 6.2 στην παρακείμενη σελίδα, φαίνονται τα γραφήματα αυτά. Ενδείκνεται ωστόσο να αναγραφούν οι ακριβείς τιμές που προέκυψαν για μελλοντική αναφορά, κάτι που γίνεται στον Πίνακα 6.1.

Εμπρόσθια διατομή σκέδασης Από τη Σχ. (4.14) προκύπτει η εμπρόσθια διατομή σκέδασης, τα αποτελέσματα της οποίας φαίνονται στα Σχήματα 6.3 και 6.4 στη σελίδα 52.

Διαφορική διατομή σκέδασης Μέσω της Σχ. (4.12), υπολογίζουμε τη διαφορική διατομή του TM κύματος για όλο το εύρος από $\varphi = 0$ έως 2π . Τα αποτελέσματα δίνονται στα Σχήματα 6.5 και 6.6 στη σελίδα 53. Τα γραφήματα αυτά βλέπουμε ότι επικαλύπτονται για τις διάφορες τιμές του h .

Ολική διατομή σκέδασης Αυτή προκύπτει από τη Σχ. (4.15) και το αποτέλεσμα δίνεται στα Σχήματα 6.7 και 6.8 στη σελίδα 54 όμως, για μια μόνο τιμή του h .

6.2.2 Κύμα TE

Στα Σχήματα 6.9 έως 6.16 (σελ. 55 έως 58) φαίνονται αντίστοιχα γραφήματα για την περίπτωση του κύματος TE ενώ στον Πίνακα 6.2 στη σελίδα 59 οι αντίστοιχες ακριβείς τιμές.

6.3 Το θεώρημα της πρόσω σκέδασης

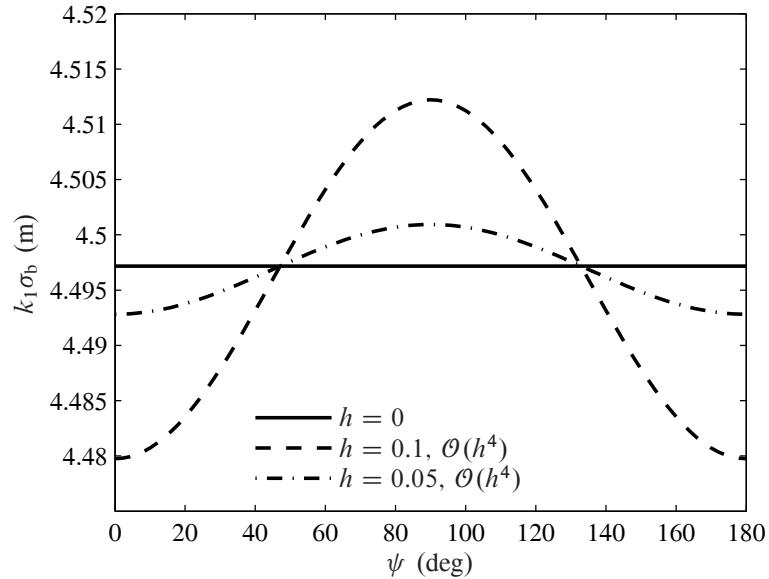
Το θεώρημα αυτό [6] αποτελεί στην ουσία την αρχή της διατήρησης της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας σε μια διάταξη σκέδασης και αποτελεί έναν πολύ καλό έλεγχο για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Για την περίπτωσή μας έχει τη μορφή

$$k_1 Q_i = -4 \operatorname{Re}[G(\psi)].$$

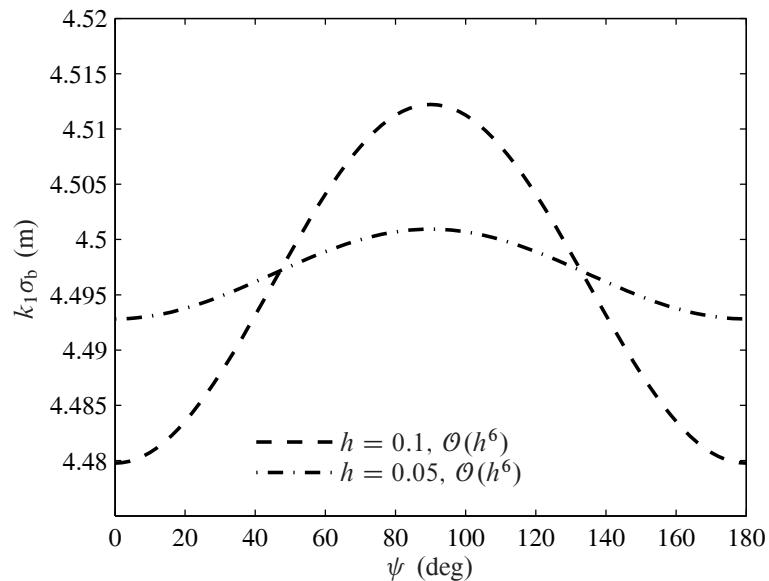
Έτσι, ο έλεγχος ανάγεται στο

$$k_1 Q_i^{(i)} = -4 \operatorname{Re}\left[G^{(i)}(\psi)\right]$$

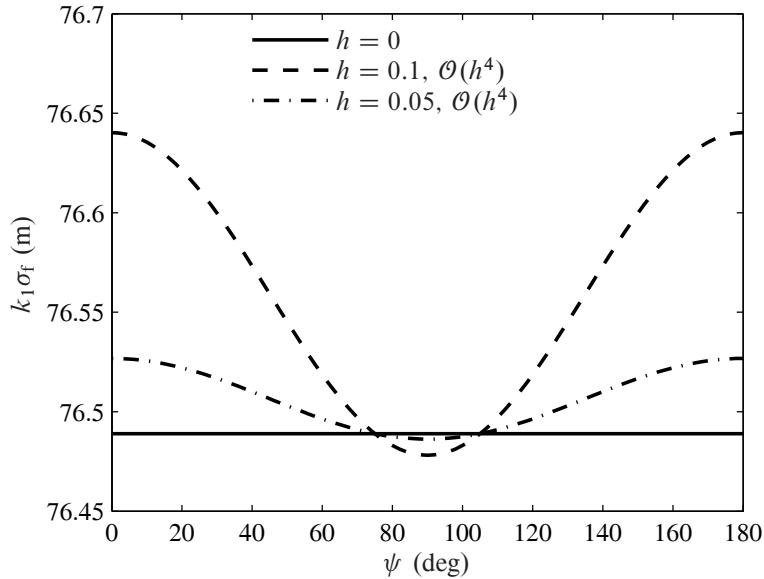
για $i = 0, 2$ και 4 . Η επαλήθευση του θεωρήματος έγινε τόσο για την περίπτωση του TM κύματος, όσο και για το TE. Ενδεικτικές τιμές φαίνονται στον Πίνακα 6.3 στη σελίδα 60 για κάποιες χαρακτηριστικές γωνίες πρόσπτωσης.



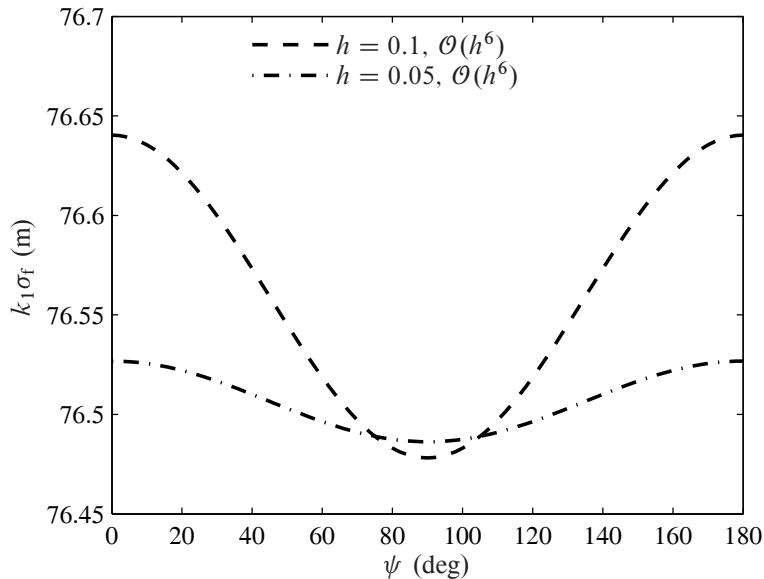
Σχήμα 6.1 Οπίσθια διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.5$, NIT = 20, ZT = 0.



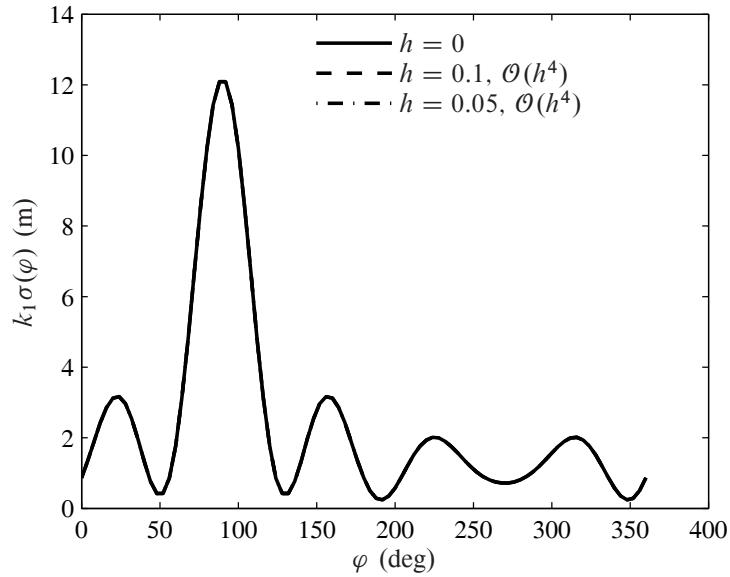
Σχήμα 6.2 Οπίσθια διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.5$, NIT = 20, ZT = 0.



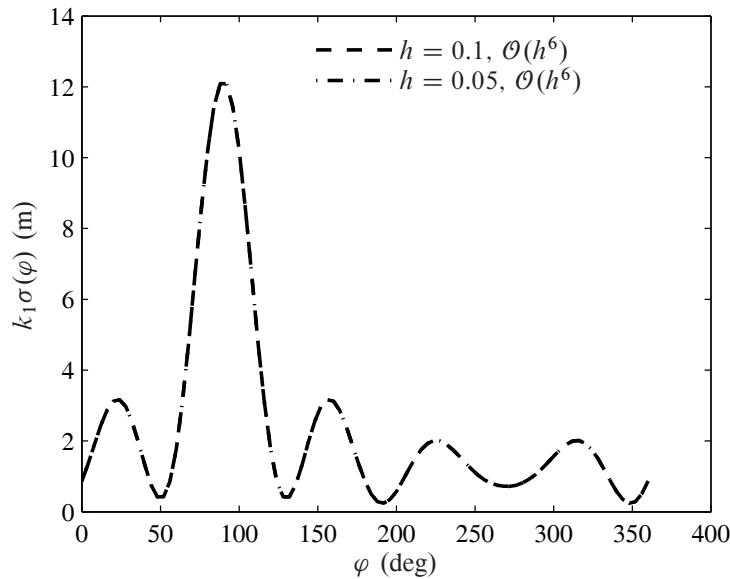
Σχήμα 6.3 Εμπρόσθια διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.5$, NIT = 20, ZT = 0.



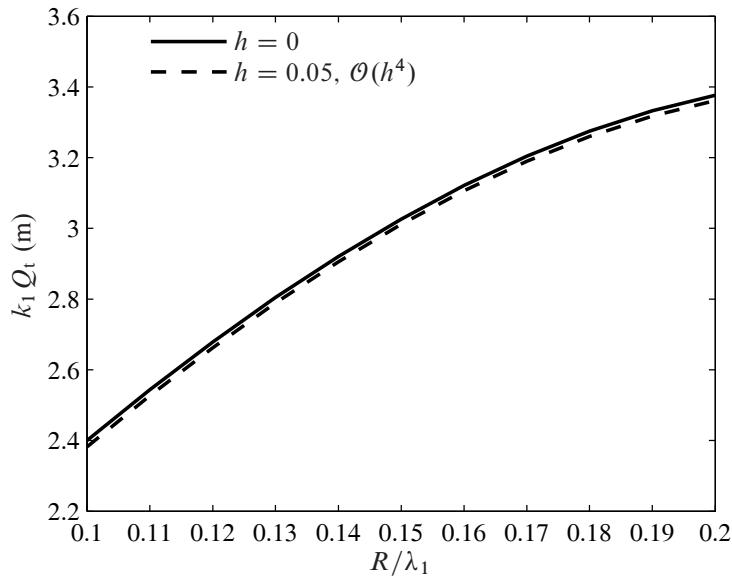
Σχήμα 6.4 Εμπρόσθια διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.5$, NIT = 20, ZT = 0.



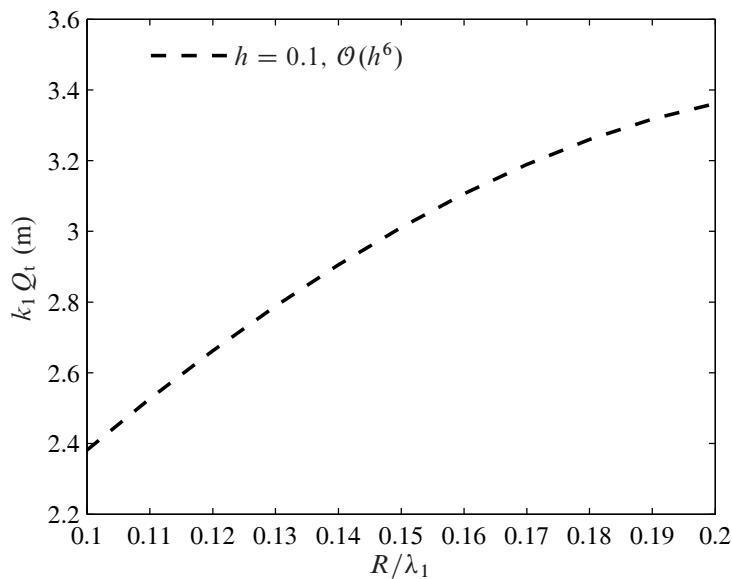
Σχήμα 6.5 Διαφορική διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.5$, $\psi = 90^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



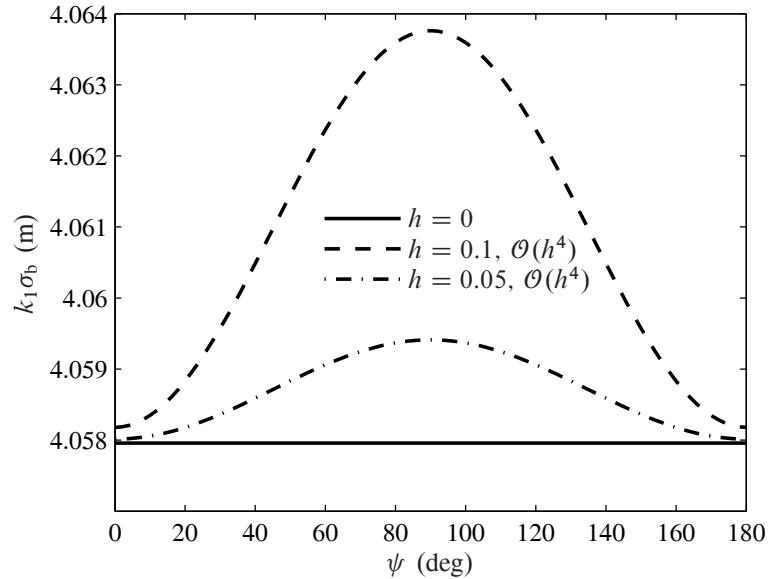
Σχήμα 6.6 Διαφορική διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.5$, $\psi = 90^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



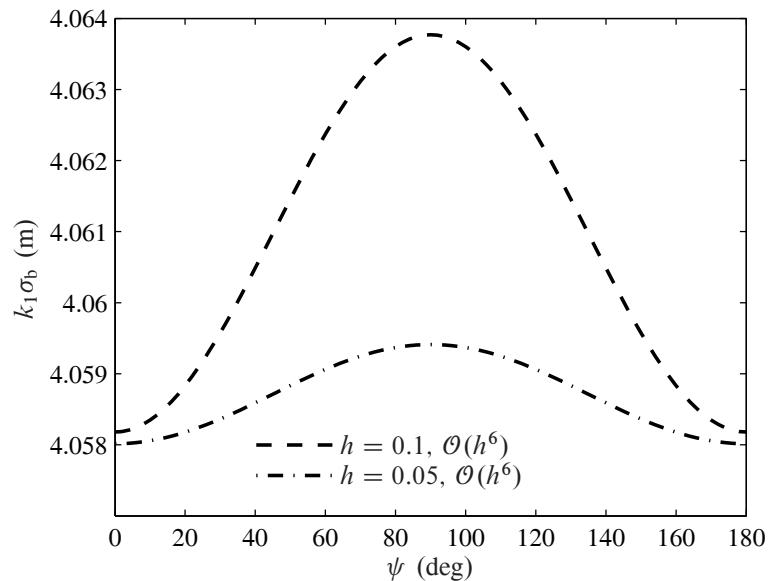
Σχήμα 6.7 Ολική διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $\psi = 0^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



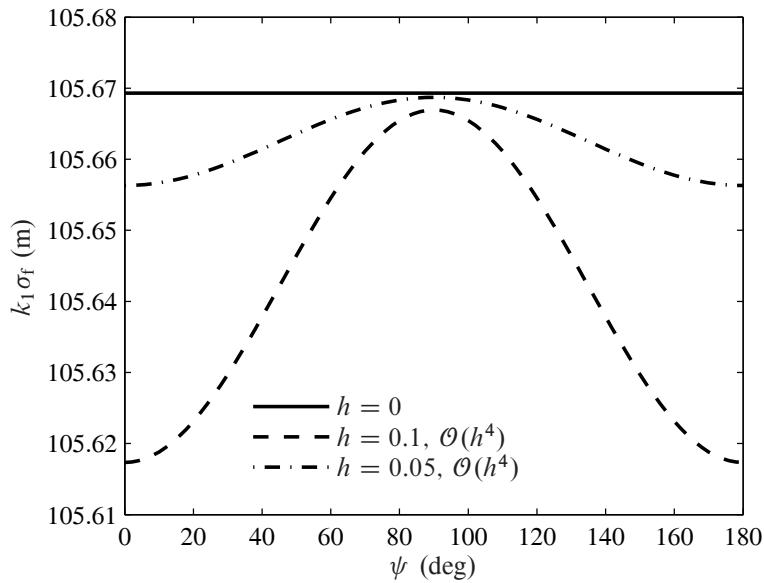
Σχήμα 6.8 Ολική διατομή σκέδασης TM κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $\psi = 0^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



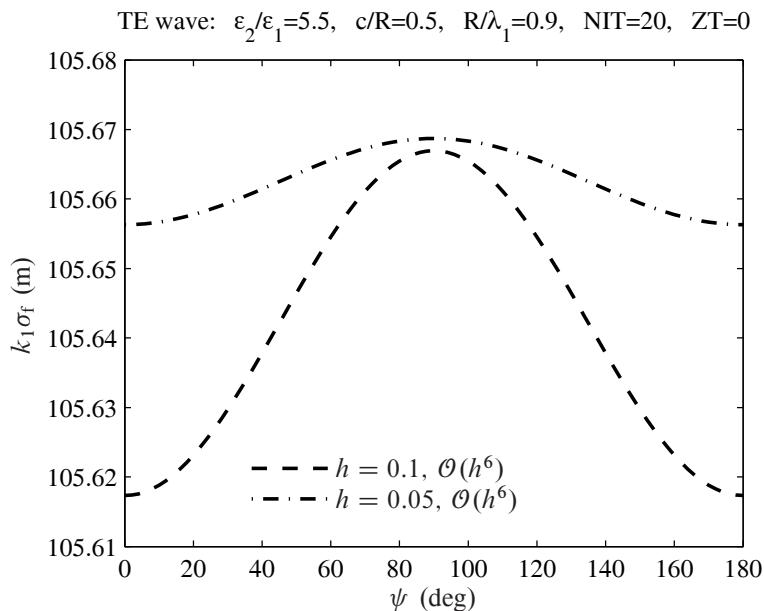
Σχήμα 6.9 Οπίσθια διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.9$, NIT = 20, ZT = 0.



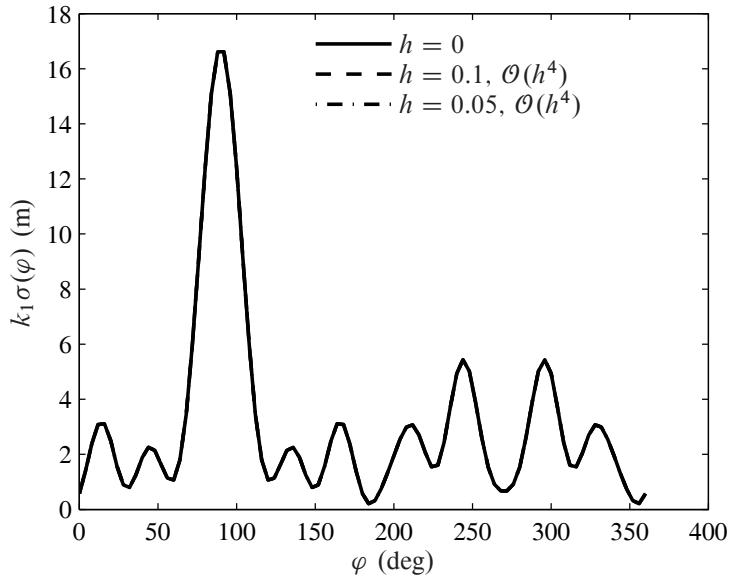
Σχήμα 6.10 Οπίσθια διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.9$, NIT = 20, ZT = 0.



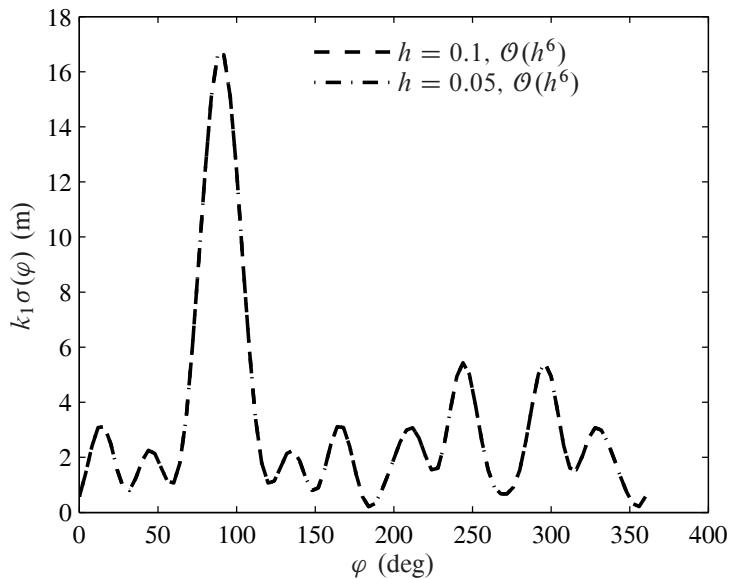
Σχήμα 6.11 Εμπρόσθια διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.9$, NIT = 20, ZT = 0.



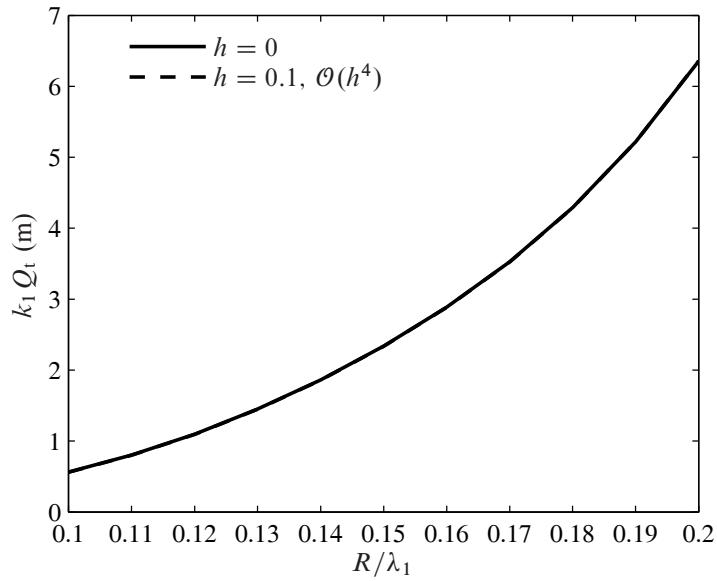
Σχήμα 6.12 Εμπρόσθια διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.9$, NIT = 20, ZT = 0.



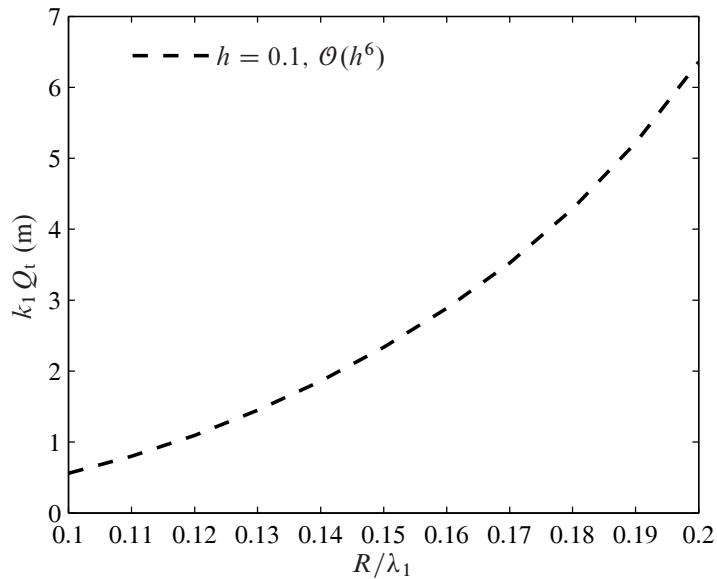
Σχήμα 6.13 Διαφορική διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.9$, $\psi = 90^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



Σχήμα 6.14 Διαφορική διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.9$, $\psi = 90^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



Σχήμα 6.15 Ολική διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^4)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $\psi = 0^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.



Σχήμα 6.16 Ολική διατομή σκέδασης TE κύματος τάξης $\mathcal{O}(h^6)$. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $\psi = 0^\circ$, NIT = 20, ZT = 0.

Πίνακας 6.1 Σύνοψη ακριβών τιμών για το κύμα TM.

$\psi = 0^\circ$	$h = 0$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$k_1\sigma_b$	4.49717633409838		
$\mathcal{O}(h^4)$		4.47974970402621	4.49281967658034
$\mathcal{O}(h^6)$		4.47976893682242	4.49282087863010
$k_1\sigma_f$	76.48897800947108		
$\mathcal{O}(h^4)$		76.64028453271347	76.52680464028168
$\mathcal{O}(h^6)$		76.64034704029101	76.52680854700527
$k_1\sigma(\varphi)^*$	0.86612474593676		
$\mathcal{O}(h^4)$		0.86700440441687	0.86634466055679
$\mathcal{O}(h^6)$		0.86700370494022	0.86634461683949
$k_1 Q_t^\dagger$	2.40010336714247		
$\mathcal{O}(h^4)$		2.38184303137893	
$\mathcal{O}(h^6)$		2.38163695152189	

* Για τη διαφορική διατομή, οι τιμές αναφέρονται στη γωνία $\varphi = 0^\circ$.

† Για την ολική διατομή, οι τιμές αναφέρονται για $R/\lambda_1 = 0.1$.

Πίνακας 6.2 Σύνοψη ακριβών τιμών για το κύμα TE.

$\psi = 0^\circ$	$h = 0$	$h = 0.1$	$h = 0.05$
$k_1\sigma_b$	4.05795938977311		
$\mathcal{O}(h^4)$		4.05817928270027	4.05801436300490
$\mathcal{O}(h^6)$		4.05818057600588	4.05801444383650
$k_1\sigma_f$	105.66929560550439		
$\mathcal{O}(h^4)$		105.61732336351361	105.65630254500669
$\mathcal{O}(h^6)$		105.61733321865224	105.65630316095286
$k_1\sigma(\varphi)^*$	0.57804574350161		
$\mathcal{O}(h^4)$		0.57816803104985	0.57807631538867
$\mathcal{O}(h^6)$		0.57816805022653	0.57807631658721
$k_1 Q_t^\dagger$	0.56136332221120		
$\mathcal{O}(h^4)$		0.55869184753901	
$\mathcal{O}(h^6)$		0.55868525498852	

* Για τη διαφορική διατομή, οι τιμές αναφέρονται στη γωνία $\varphi = 0^\circ$.

† Για την ολική διατομή, οι τιμές αναφέρονται για $R/\lambda_1 = 0.1$.

Πίνακας 6.3 Ακριβείς τιμές για την επαλήθευση του θεωρήματος πρόσω σκέδασης για το κύμα TM. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 5.5$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.2$, NIT = 20, ZT = 0.

ψ (deg)		LHS	RHS
0			
	$\mathcal{O}(h^2)$	1.63769176982372	1.63769176982372
	$\mathcal{O}(h^4)$	-0.84627727149224	-0.84627727149224
	$\mathcal{O}(h^6)$	0.45121440525829	0.44611881461396
30			
	$\mathcal{O}(h^2)$	1.63769176982372	1.63769176982372
	$\mathcal{O}(h^4)$	-0.42909997669993	-0.42909997669994
	$\mathcal{O}(h^6)$	0.62271680852114	0.62015808584834
45			
	$\mathcal{O}(h^2)$	1.63769176982372	1.63769176982372
	$\mathcal{O}(h^4)$	-0.01192268190763	-0.01192268190763
	$\mathcal{O}(h^6)$	0.80292727008856	0.80291635211002
60			
	$\mathcal{O}(h^2)$	1.63769176982372	1.63769176982372
	$\mathcal{O}(h^4)$	0.40525461288468	0.40525461288468
	$\mathcal{O}(h^6)$	0.99184642159005	0.99439422628204
90			
	$\mathcal{O}(h^2)$	1.63769176982372	1.63769176982372
	$\mathcal{O}(h^4)$	0.82243190767698	0.82243190767698
	$\mathcal{O}(h^6)$	1.18947489414441	1.19459232075037

6.4 Οριακές συνθήκες

Η αριθμητική επαλήθευση των οριακών συνθηκών στην επιφάνεια $\rho = R$ αποτελεί έναν ακόμη έλεγχο για την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Ο Πίνακας 6.4 προσφέρει διάφορες ενδεικτικές τιμές. Όπως φαίνεται, έχουν ελεγθεί τόσο οι Σχ. (4.7.α') και (4.7.β') για το κύμα TM όσο και οι Σχ. (5.5.α'), (5.5.β') για το κύμα TE. Η επαλήθευση γίνεται για κάποιες γωνίες πρόσπτωσης και ισχύει για κάθε τιμή της αζυμούθιακής γωνίας. Ωστόσο, στον πίνακα φαίνονται οι τιμές για συγκεκριμένες γωνίες φ .

6.5 Σχολιασμός – Παρατηρήσεις

Όπως προκύπτει από τα αριθμητικά αποτελέσματα, επαληθεύεται η ορθότητα των τελικών αναλυτικών εκφράσεων. Συγκεκριμένα, από τα διαγράμματα των διατομών σκέδασης, επιβεβαιώθηκε το αποτέλεσμα της αναγωγής του προβλήματος σε δύο ομόκεντρους κυκλικούς κυλίνδρους θέτοντας $h = 0$ [7] ενώ παράλληλα, υπάρχει συμμετρία περί τη γωνία πρόσπτωσης $\psi = 90^\circ$, κάτι που εξάλλου επιβάλλει η γεωμετρία της διάταξης.

Επιβεβαιώθηκε επίσης το θεώρημα της πρόσω σκέδασης. Αυτό επιτεύχθηκε με σημαντική ακρίβεια – έως 14 δεκαδικά ψηφία – για τις τάξεις $\mathcal{O}(h^2)$ και $\mathcal{O}(h^4)$ ενώ, η ακρίβεια για την τάξη $\mathcal{O}(h^6)$ ήταν μικρότερη (έως και 4 σημαντικά ψηφία).

Η επαλήθευση της ορθότητας των αποτελεσμάτων κλείνει με την επιτυχή εξαγωγή

Πίνακας 6.4 Ακριβείς τιμές για την επολλίθευση των οριακών συνθηκών για τα κύματα TM και TE. $\epsilon_2/\epsilon_1 = 2.54$, $c_0/R = 0.5$, $R/\lambda_1 = 0.2$, $NIT = 20$, $ZT = 0$.

Κύμα TM, $\Sigma\chi(4.7.\alpha)$, $\varphi = 45^\circ$			
ψ (deg)	LHS	RHS	
0			
$\mathcal{O}(h^2)$	0.29950006884833 – 0.18682791877789j	0.29950006884833 – 0.18682791877789j	
$\mathcal{O}(h^4)$	0.16269208189589 – 0.08929958412464j	0.16269208189589 – 0.08929958412464j	
$\mathcal{O}(h^6)$	0.05976035592766 – 0.05815896414985j	0.05976035592766 – 0.05815896414985j	
Κύμα TM, $\Sigma\chi(4.7.\beta)$, $\varphi = 45^\circ$			
30			
$\mathcal{O}(h^2)$	-0.06645387534709 – 0.10180274654161j	-0.06645387534709 – 0.10180274654161j	
$\mathcal{O}(h^4)$	-0.04124372411454 – 0.01231406117359j	-0.04124372411454 – 0.01231406117359j	
$\mathcal{O}(h^6)$	-0.03256015904206 + 0.00450069859503j	-0.03256015904206 + 0.00450069859503j	
Κύμα TE, $\Sigma\chi(5.5.\alpha)$, $\varphi = 90^\circ$			
60			
$\mathcal{O}(h^2)$	-0.37484552059109 – 0.94435396411596j	-0.37484552059109 – 0.94435396411596j	
$\mathcal{O}(h^4)$	-0.09783855873235 – 0.05878887250079j	-0.09783855873235 – 0.05878887250079j	
$\mathcal{O}(h^6)$	-0.06052076745649 – 0.03471470898202j	-0.06052076745649 – 0.03471470898202j	
Κύμα TE, $\Sigma\chi(5.5.\beta)$, $\varphi = 90^\circ$			
90			
$\mathcal{O}(h^2)$	-0.33814105828733 + 0.39125999691249j	-0.33814105828733 + 0.39125999691249j	
$\mathcal{O}(h^4)$	-0.07520853214483 + 0.14177845428645j	-0.07520853214483 + 0.14177845428645j	
$\mathcal{O}(h^6)$	-0.00299007323061 + 0.05598197837495j	-0.00299007323061 + 0.05598197837495j	

τιμών για τις οριακές συνθήκες οι οποίες ικανοποιήθηκαν με πλήρη ακρίβεια (στον Πίνακα 6.4 μέχρι 14 δεκαδικά ψηφία).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A'

Γραμμικό σύστημα κύματος

TM

A'.1 Εισαγωγή

Τα γραμμικά συστήματα των Σχ. (4.9.α') και (4.10.β') του Κεφ. 4 όπως είδαμε, έχουν τις μορφές

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_{mi} A_i = b_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A'.1.α'})$$

και

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{mi} C_i = d_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A'.1.β'})$$

αντίστοιχα ή, εναλλακτικά,

$$\mathbf{a}\mathbf{A} = \mathbf{b} \quad \text{και} \quad \mathbf{c}\mathbf{C} = \mathbf{d}.$$

Επειδή οι δείκτες m και i είναι ταυτόχρονα άρτιοι ή ταυτόχρονα περιττοί, οι συντελεστές A με άρτιους δείκτες θα προκύψουν όταν το m λαμβάνει άρτιες τιμές, ενώ αυτοί με περιττούς δείκτες όταν το m λαμβάνει περιττές τιμές. Προκύπτουν δηλαδή δύο υποσυστήματα για τον υπολογισμό των συντελεστών A_i (και αντίστοιχα για τους C_i) ανάλογα με τις τιμές που πέρνει το m . Θα έχουμε λοιπόν, για τις άρτιες τιμές του m ,

$$\begin{aligned} m = 0 &\rightarrow i = 0, 2, 4, \dots \rightarrow a_{0,0} A_0 + a_{0,2} A_2 + a_{0,4} A_4 + \dots = b_0 \\ m = 2 &\rightarrow i = 0, 2, 4, \dots \rightarrow a_{2,0} A_0 + a_{2,2} A_2 + a_{2,4} A_4 + \dots = b_2 \\ m = 4 &\rightarrow i = 0, 2, 4, \dots \rightarrow a_{4,0} A_0 + a_{4,2} A_2 + a_{4,4} A_4 + \dots = b_4 \end{aligned} \quad (\text{A'.2.α'})$$

\vdots

ενώ για τις περιττές,

$$\begin{aligned}
 m = 1 \rightarrow i = 1, 3, 5, \dots &\rightarrow a_{1,1}A_1 + a_{1,3}A_3 + a_{1,5}A_5 + \dots = b_1 \\
 m = 3 \rightarrow i = 1, 3, 5, \dots &\rightarrow a_{3,1}A_1 + a_{3,3}A_3 + a_{3,5}A_5 + \dots = b_3 \\
 m = 5 \rightarrow i = 1, 3, 5, \dots &\rightarrow a_{5,1}A_1 + a_{5,3}A_3 + a_{5,5}A_5 + \dots = b_5 \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{A'.2.β'}$$

Είναι λοιπόν λογικό να θέσουμε $i \hat{=} m \pm 2q$ με $q = 0, 1, 2, \dots$

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε στη μελέτη του συστήματος της Σχ. (A'.1.α') για να βρούμε τη μορφή που έχει ο πίνακας $\mathbf{a} = [a_{mi}]$.

A'.2 Ο πίνακας του συστήματος

Ο πίνακας \mathbf{a} κατασκευάζεται από τους συντελεστές a_{mi} ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνουν τα m και i . Οι συντελεστές αυτοί είναι σύμφωνα με τη Σχ. (4.9.α')

$$\begin{aligned}
 a_{mi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{m-i} B_m^e(h, i) k_2^2 & \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} [Y e_i(\xi) J'_m(x_2) - J e_i(\xi) Y'_m(x_2)] \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} [Y e_i(\xi) J_m(x_2) - J e_i(\xi) Y_m(x_2)] \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right\}. \tag{A'.3}
 \end{aligned}$$

Στην έκφραση αυτή, εμφανίζονται οι συντελεστές $B_m^e(h, i)$ οι οποίοι είναι οι συντελεστές ανάπτυξης των συναρτήσεων Mathieu και ορίζονται αντίστοιχα με τη Σχ. (2.3) από τη

$$Se_i(h, \cos \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^e(h, i) \cos(m\varphi), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

όπου έγινε αντικατάσταση του m με το i και του n με το m . Τώρα, σε αντιστοιχία με τη Σχ. (2.4), η τελευταία γράφεται

$$Se_i(h, \cos \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} B_{i \pm 2p}^e(h, i) \cos[(i \pm 2p)\varphi], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

δηλαδή, σύμφωνα με τη θεωρία του Κεφ. 2, $m = i \pm 2p$ με $p = 0, 1, 2, \dots$ Εμείς βέβαια, στο προηγούμενο εδάφιο θέσαμε $i = m \pm 2q$ το οποίο προς το παρόν δεν πρέπει να επιφέρει σύγχυση.

Τώρα, για τις διάφορες τιμές που λαμβάνει το i , το m θα παίρνει τις αντίστοιχες (άρτιες ή περιττές). Σχηματικά έχουμε

$$\begin{aligned}
 i = 0 &\rightarrow m = 0, 2, 4, \dots \\
 i = 1 &\rightarrow m = 1, 3, 5, \dots \\
 i = 2 &\rightarrow m = 0, 2, 4, \dots \\
 i = 1 &\rightarrow m = 1, 3, 5, \dots \\
 i = 4 &\rightarrow m = 0, 2, 4, \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Αναδιατάσσοντας τους όρους θέτοντας το m ως κύρια παράμετρο, ο σχηματισμός γίνεται

$$\begin{aligned} m = 0 &\rightarrow i = 0, 2, 4, \dots \\ m = 1 &\rightarrow i = 1, 3, 5, \dots \\ m = 2 &\rightarrow i = 0, 2, 4, \dots \\ m = 1 &\rightarrow i = 1, 3, 5, \dots \\ m = 4 &\rightarrow i = 0, 2, 4, \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν, έχουμε τον ακόλουθο σχηματισμό για τους συντελεστές ανάπτυξης $B_m^e(h, i) = B_{i \pm 2p}^e(h, i)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} m = 0 & \rightarrow & i = 0 & i = 2 & i = 4 & i = 6 & i = 8 & \cdots \\ & & B_{\pm 2p}^e(h, o) & B_{2 \pm 2p}^e(h, 2) & B_{4 \pm 2p}^e(h, 4) & B_{6 \pm 2p}^e(h, 6) & B_{8 \pm 2p}^e(h, 8) & \\ & & p = 0 & p = 1 & p = 2 & p = 3 & p = 4 & \\ & & - & - & - & - & - & \\ \\ m = 2 & \rightarrow & i = 0 & i = 2 & i = 4 & i = 6 & i = 8 & \cdots \\ & & B_{\pm 2p}^e(h, o) & B_{2 \pm 2p}^e(h, 2) & B_{4 \pm 2p}^e(h, 4) & B_{6 \pm 2p}^e(h, 6) & B_{8 \pm 2p}^e(h, 8) & \\ & & p = 1 & p = 0 & p = 1 & p = 2 & p = 3 & \\ & & + & & - & - & - & \\ \\ m = 4 & \rightarrow & i = 0 & i = 2 & i = 4 & i = 6 & i = 8 & \cdots \\ & & B_{\pm 2p}^e(h, o) & B_{2 \pm 2p}^e(h, 2) & B_{4 \pm 2p}^e(h, 4) & B_{6 \pm 2p}^e(h, 6) & B_{8 \pm 2p}^e(h, 8) & \\ & & p = 2 & p = 1 & p = 0 & p = 1 & p = 2 & \\ & & + & + & + & - & - & \\ \\ m = 6 & \rightarrow & i = 0 & i = 2 & i = 4 & i = 6 & i = 8 & \cdots \\ & & B_{\pm 2p}^e(h, o) & B_{2 \pm 2p}^e(h, 2) & B_{4 \pm 2p}^e(h, 4) & B_{6 \pm 2p}^e(h, 6) & B_{8 \pm 2p}^e(h, 8) & \\ & & p = 3 & p = 2 & p = 1 & p = 0 & p = 1 & \\ & & + & + & + & - & - & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \vdots \end{array}$$

Στον ορθογώνιο αυτό σχηματισμό, που ουσιαστικά πρόκειται για το σχηματισμό που έχει ο πίνακας $\mathbf{a} = [a_{mi}]$ όταν το m παίρνει άρτιες τιμές, φαίνονται οι τιμές που παίρνει το p καθώς και το πρόσημο (+) ή (-) που χρησιμοποιείται κάθε φορά έτσι ώστε το $m = i \pm 2p$ να λαμβάνει την κατάλληλη τιμή. Παρατηρούμε ότι η τιμή $p = 0$ δίνει τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του πίνακα. Επιπρόσθετα, όταν χρησιμοποιείται το πρόσημο (-), προκύπτουν τα στοιχεία τα οποία βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο ενώ, όταν χρησιμοποιείται το (+), προκύπτουν τα στοιχεία κάτω της κύριας διαγωνίου.

Παρ' όλα αυτά, ανατρέχοντας στη Σχ. (3.3), βλέπουμε ότι για να έχουμε όρους μέχρι και τάξη h^4 , θα πρέπει αφενός μεν $k_{\max} = 2$, αφετέρου δε $p = 0, 1, 2$. Δηλαδή, το p δεν μπορεί να ξεπεράσει την τιμή 2 και συνεπώς, στον προηγούμενο σχηματισμό, στοιχεία που δημιουργούνται με $p \geq 3$ θεωρούνται μηδενικά.

Συμπερασματικά λοιπόν, ο πίνακας $[a_{mi}]$ με m άρτιο λαμβάνει μορφή ταινίας:

$$[a_{mi}] = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,2} & a_{0,4} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,2} & a_{2,4} & a_{2,6} & 0 & 0 & \dots \\ a_{4,0} & a_{4,2} & a_{4,4} & a_{4,6} & a_{4,8} & 0 & \dots \\ 0 & a_{6,2} & a_{6,4} & a_{6,6} & a_{6,8} & a_{6,10} & \dots \\ 0 & 0 & a_{8,4} & a_{8,6} & a_{8,8} & a_{8,10} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{10,6} & a_{10,8} & a_{10,10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Αντίστοιχη μορφή έχει ο πίνακας $[a_{mi}]$ όταν το m πέρνει περιττές τιμές καθώς επίσης και ο πίνακας $[c_{mi}]$.

A'.3 Οι συντελεστές του συστήματος

Εφαρμόζοντας τη Σχ. (3.3) και κάνοντας τις σχετικές αναπτύξεις, παρατηρούμε ότι για $p = 0$, οι συντελεστές $B_m^e(h, i) \propto \alpha + \beta h^2 + \gamma h^4$, για $p = 1$, $B_m^e(h, i) \propto \beta h^2 + \gamma h^4$ ενώ, για $p = 2$, $B_m^e(h, i) \propto \gamma h^4$. Επίσης, τα στοιχεία του πίνακα $[a_{mi}]$ εμφανίζουν τα γινόμενα $B_m^e(h, i)Y_{ei}(\xi)$ και $B_m^e(h, i)J_{ei}(\xi)$ όπου οι συναρτήσεις $Y_{ei}(\xi)$, $J_{ei}(\xi) \propto a + bh^2 + ch^4$. Συνεπώς, τα στοιχεία με $p = 0$ έχουν όρους

$$(\alpha + \beta h^2 + \gamma h^4)(a + bh^2 + ch^4) = \alpha a + (\alpha b + \beta a)h^2 + (\alpha c + \beta b + \gamma a)h^4 + O(h^6),$$

τα στοιχεία με $p = 1$ όρους

$$(\beta h^2 + \gamma h^4)(a + bh^2 + ch^4) = \beta ah^2 + (\beta b + \gamma a)h^4 + O(h^6)$$

ενώ, τα στοιχεία με $p = 2$ όρους

$$\gamma h^4(a + bh^2 + ch^4) = \gamma ah^4 + O(h^6).$$

Από τις προηγούμενες εκφράσεις μπορούμε να γράψουμε μια γενική έκφραση για τα γινόμενα $B_m^e(h, i)Y_{ei}(\xi)$ και $B_m^e(h, i)J_{ei}(\xi)$ που εμφανίζονται στους συντελεστές a_{mi} . Θα έχουμε λοιπόν

$$B_m^e(h, i)Y_{ei}(\xi) = B_{\underbrace{(m \pm 2q)}_i \pm 2q}^e(h, \underbrace{m \pm 2q}_i) Y_{\underbrace{m \pm 2q}_i}(\xi)$$

με

$$B_{\underbrace{(m \pm 2q)}_i \pm 2p}^e(h, \underbrace{m \pm 2q}_i) \simeq \sum_{j=0}^{2-q} \left[\sum_{l=0}^{2-q-j} \left(\alpha_{2q, 2l}^{e \pm} h^{2q+2l} \right) \right] g_{2j}^e h^{2j}, \quad q = 0, 1, 2. \quad (\text{A'}.4)$$

Η επιλογή του προσήμου του εκτός της παρένθεσης όρου στο δείκτη των συντελεστών $B^e(h, i)$ γίνεται σύμφωνα με τα λεγόμενα της προηγούμενης ενότητας, δηλαδή όταν βρισκόμαστε πάνω από την κύρια διαγώνιο, επιλέγουμε το πρόσημο $(-)$ ενώ όταν βρισκόμαστε

κάτω απ' αυτήν, επιλέγουμε το (+). Η επιλογή τώρα του προσήμου εντός της παρένθεσης στο δείκτη του $B^e(h, i)$ γίνεται επιλέγοντας τα πρόσημα με αντίθετο τρόπο απ' ότι πριν.

Έτσι λοιπόν έχουμε την τελική έκφραση για το γινόμενο $B_m^e(h, i)Ye_i(\xi)$:

$$B_m^e(h, i)Ye_i(\xi) = B_m^e(h, m \pm 2q)Ye_{m \pm 2q}(\xi), \quad q = 0, 1, 2 \quad (\text{A'.5})$$

ενώ το $m = 0, 1, 2, \dots$. Η επιλογή των προσήμων γίνεται ως εξής:

- όταν το προς κατασκευή στοιχείο είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο, δηλαδή όταν $i > m$, επιλέγεται το πρόσημο (+) ενώ,
- όταν $i < m$, δηλαδή το προς κατασκευή στοιχείο είναι κάτω από την κύρια διαγώνιο, τότε επιλέγουμε το πρόσημο (-).

Επίσης, οι συντελεστές a_{mi} έχουν διαφορετική μορφή ανάλογα σε ποια διαγώνιο ανήκουν. Οι συντελεστές της κύριας διαγωνίου έχουν μορφή

$$a_{mm} = L_{mm} + M_{mm}h^2 + N_{mm}h^4 + O(h^6), \quad (\text{A'.6.a'})$$

της δεύτερης κύριας διαγωνίου μορφή

$$\begin{aligned} a_{m,m \pm 2} &= M'_{m,m \pm 2}h^2 + N'_{m,m \pm 2}h^4 + O(h^6) \\ &= M'_{m,m \pm 2}h^2 \left[1 + \frac{N'_{m,m \pm 2}}{M'_{m,m \pm 2}}h^2 + O(h^4) \right] \\ &= M'_{m,m \pm 2}h^2 \left[1 + O(h^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{A'.6.b'})$$

ενώ, αυτοί της τρίτης κύριας διαγωνίου έχουν τη μορφή

$$a_{m,m \pm 4} = N''_{m,m \pm 4}h^4 + O(h^6) = N''_{m,m \pm 4}h^4 \left[1 + O(h^2) \right]. \quad (\text{A'.6.c'})$$

Στις εκφράσεις αυτές, το πρόσημο (+) επιλέγεται όταν βρισκόμαστε πάνω από την κύρια διαγώνιο ενώ το (-) όταν το στοιχείο βρίσκεται κάτω απ' αυτήν.

Σύμφωνα με τα νέα αυτά δεδομένα, το σύστημα της Σχ. (A'.1.a') λαμβάνει μορφή

$$\sum_{q=0}^2 [a_{m,m+2q}A_{m+2q} + (1 - \delta_{q0})a_{m,m-2q}A_{m-2q}] = b_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

με $a_{m,m-2q} = 0$ όταν $m < 2q$.

A'.4 Ανάπτυξη των συντελεστών του συστήματος $\mathbf{a}\mathbf{A} = \mathbf{b}$

Στο εδάφιο αυτό θα βρούμε εκφράσεις για τους συντελεστές a_{mi} του συτήματος έως την τάξη h^4 . Αφετηρία είναι η Σχ. (A'.3) απ' την οποία, θέτωντας $i = m \pm 2q$ και κάνοντας αναδιάταξη των όρων, προκύπτει

$$\begin{aligned} a_{m,m \pm 2q} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{\mp 2q} k_2^2 [B_m^e(h, m \pm 2q)Ye_{m \pm 2q}(\xi)U_m \\ &\quad + B_m^e(h, m \pm 2q)Je_{m \pm 2q}(\xi)V_m] \end{aligned} \quad (\text{A'.7})$$

όπου έχουμε θέσει

$$U_m \hat{=} \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_2}} J'_m(x_2) - \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} J_m(x_2) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \right] \quad (\text{A'.8})$$

και

$$V_m \hat{=} \left[\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} Y_m(x_2) \frac{H_m^{(2)\prime}(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} - \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} Y'_m(x_2) \right]. \quad (\text{A'.9})$$

Οι ποσότητες αυτές είναι ανεξάρτητες του h .

Στη νέα έκφραση της Σχ. (A'.7) για τους συντελεστές, εμφανίζονται γινόμενα της μορφής $\Pi_q \hat{=} B_m^e(h, m \pm 2q) Z_{m \pm 2q}(\xi)$. Οι συναρτήσεις $Z_{m \pm 2q}(\xi)$ προκύπτουν από τη Σχ. (3.5), σελ. 24 αντικαθιστώντας το m με $m \pm 2q$. Για ευκολία, γράφουμε εδώ την τροποποιημένη αυτή μορφή:

$$\begin{aligned} Z_{m \pm 2q}(\xi) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ Z_{m \pm 2q}(\zeta) \right. \\ & + \left[g_2^e Z_{m \pm 2q}(\zeta) \right. \\ & - \alpha_{2,0}^{e+} Z_{m \pm 2q+2}(\zeta) \\ & - \alpha_{2,0}^{e-} Z_{m \pm 2q-2}(\zeta) \left. \right] h^2 \\ & + \left[g_4^e Z_{m \pm 2q}(\zeta) \right. \\ & - \left(\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+} \right) Z_{m \pm 2q+2}(\zeta) \\ & - \left(\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-} \right) Z_{m \pm 2q-2}(\zeta) \\ & + \alpha_{4,0}^{e+} Z_{m \pm 2q+4}(\zeta) \\ & \left. \left. + \alpha_{4,0}^{e-} Z_{m \pm 2q-4}(\zeta) \right] h^4 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'.10.a'})$$

όπου έχουμε θέσει $\zeta \hat{=} h \cosh \eta_0$. Η έκφραση αυτή μπορεί να συμπτυχθεί ως

$$Z_{m+2q}(\xi) \simeq z e_{0,m,q}^+ + z e_{2,m,q}^+ h^2 + z e_{4,m,q}^+ h^4 \quad (\text{A'.10.b'})$$

και

$$Z_{m-2q}(\xi) \simeq z e_{0,m,q}^- + z e_{2,m,q}^- h^2 + z e_{4,m,q}^- h^4 \quad (\text{A'.10.g'})$$

ανάλογα με το είδος των προσήμου που επιλέγουμε. Η επιλογή γίνεται σύμφωνα με τα λεγόμενα του προηγούμενου εδαφίου. Οι αντικαταστάσεις γίνονται με επισκόπηση και είναι για παράδειγμα

$$z e_{2,m,q}^+ \hat{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[g_2^e Z_{m+2q}(\zeta) - \alpha_{2,0}^{e+} Z_{m+2q+2}(\zeta) - \alpha_{2,0}^{e-} Z_{m+2q-2}(\zeta) \right].$$

A'.4.1 Ανάπτυξη στοιχείων κύριας διαγωνίου

Τα στοιχεία $a_{m,m}$ της κύριας διαγωνίου προκύπτουν με $q = 0$. Τότε, από τη $\Sigma_{\chi.}(A'.4)$ προκύπτει

$$B_m^e(h, m \pm 2q) = B_m^e(h, m) = 1 + g_2^e h^2 + g_4^e h^4$$

ενώ, από τη $\Sigma_{\chi.}(A'.10.\alpha')$ και τις $\Sigma_{\chi.}(A'.10.\beta'), (A'.10.\gamma')$ προκύπτει

$$Ze_m(\xi) = ze_{0,m,0} + ze_{2,m,0}h^2 + ze_{4,m,0}h^4.$$

Οπότε, το γινόμενο $\Pi_0 = B_m^e(h, m)Ze_m(\xi)$, κρατώντας όρους τάξης έως h^4 , γράφεται

$$\Pi_0 \simeq ze_{0,m,0} + (ze_{2,m,0} + ze_{0,m,0}g_2^e)h^2 + (ze_{4,m,0} + ze_{2,m,0}g_2^e + ze_{0,m,0}g_4^e)h^4. \quad (A'.11)$$

Έτσι λοιπόν, προσαρμόζοντας κατάλληλα τη $\Sigma_{\chi.}(A'.7)$, προκύπτει η ανάπτυξη των στοιχείων της κύριας διαγωνίου έως την τάξη h^4 :

$$\begin{aligned} a_{m,m} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}k_2^2 & \left\{ ye_{0,m,0}U_m + je_{0,m,0}V_m \right. \\ & + [(ye_{2,m,0} + ye_{0,m,0}g_2^e)U_m + (je_{2,m,0} + je_{0,m,0}g_2^e)V_m]h^2 \quad (A'.12) \\ & + [(ye_{4,m,0} + ye_{2,m,0}g_2^e + ye_{0,m,0}g_4^e)U_m \\ & \left. + (je_{4,m,0} + je_{2,m,0}g_2^e + je_{0,m,0}g_4^e)V_m]h^4 \right\} \end{aligned}$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$ η οποία έχει τη μορφή της $\Sigma_{\chi.}(A'.6.\alpha')$.

A'.4.2 Ανάπτυξη στοιχείων δεύτερης κύριας διαγωνίου

Τώρα, τα στοιχεία ένθεν και ένθεν της κύριας διαγωνίου προκύπτουν με $q = 1$. Από τη $\Sigma_{\chi.}(A'.4)$, η ανάπτυξη για τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι

$$B_m^e(h, m+2) = \alpha_{2,0}^{e-}h^2 + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e\alpha_{2,0}^{e-})h^4$$

ενώ, για τα στοιχεία κάτω της κύριας διαγωνίου

$$B_m^e(h, m-2) = \alpha_{2,0}^{e+}h^2 + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e\alpha_{2,0}^{e+})h^4.$$

Τώρα, από τις $\Sigma_{\chi.}(A'.10.\alpha'), (A'.10.\beta')$ και $(A'.10.\gamma')$, για τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο έχουμε

$$Ze_{m+2}(\xi) = ze_{0,m,1}^+ + ze_{2,m,1}^+h^2 + ze_{4,m,1}^+h^4$$

ενώ για τα κάτω έχουμε

$$Ze_{m-2}(\xi) = ze_{0,m,1}^- + ze_{2,m,1}^-h^2 + ze_{4,m,1}^-h^4.$$

Τα γινόμενα $\Pi_1^+ = B_m^e(h, m+2)Ze_{m+2}(\xi)$ και $\Pi_1^- = B_m^e(h, m-2)Ze_{m-2}(\xi)$ στην περίπτωση αυτή είναι

$$\Pi_1^+ = \alpha_{2,0}^{e-}ze_{0,m,1}^+h^2 + [\alpha_{2,0}^{e-}ze_{2,m,1}^+ + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e\alpha_{2,0}^{e-})ze_{0,m,1}^+]h^4 \quad (A'.13.\alpha')$$

και

$$\Pi_1^- = \alpha_{2,0}^{e+} z e_{0,m,1}^- h^2 + \left[\alpha_{2,0}^{e+} z e_{2,m,1}^- + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) z e_{0,m,1}^- \right] h^4. \quad (\text{A'.13.β}')$$

Τελικά, από τη $\Sigma\chi.$ (A'.7), για τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιο προκύπτει

$$\begin{aligned} a_{m,m+2} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{-2} k_2^2 \left\{ \alpha_{2,0}^{e-} \left(y e_{0,m,1}^+ U_m + j e_{0,m,1}^+ V_m \right) h^2 \right. \\ & + \left\{ \left[\alpha_{2,0}^{e+} y e_{2,m,1}^+ + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-}) y e_{0,m,1}^+ \right] U_m \right. \\ & \left. \left. + \left[\alpha_{2,0}^{e+} j e_{2,m,1}^+ + (\alpha_{2,2}^{e-} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e-}) j e_{0,m,1}^+ \right] V_m \right\} h^4 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'.14.α}')$$

ενώ, για τα στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο προκύπτει

$$\begin{aligned} a_{m,m-2} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^2 k_2^2 \left\{ \alpha_{2,0}^{e+} \left(y e_{0,m,1}^- U_m + j e_{0,m,1}^- V_m \right) h^2 \right. \\ & + \left\{ \left[\alpha_{2,0}^{e+} y e_{2,m,1}^- + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) y e_{0,m,1}^- \right] U_m \right. \\ & \left. \left. + \left[\alpha_{2,0}^{e+} j e_{2,m,1}^- + (\alpha_{2,2}^{e+} + g_2^e \alpha_{2,0}^{e+}) j e_{0,m,1}^- \right] V_m \right\} h^4 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'.14.β}')$$

με $m = 0, 1, 2, \dots$ και στις δύο εκφράσεις. Οι σχέσεις αυτές έχουν τη μορφή της $\Sigma\chi.$ (A'.6.β').

A'.4.3 Ανάπτυξη στοιχείων τρίτης κύριας διαγωνίου

Τα στοιχεία αυτά προκύπτουν θέτοντας $q = 2$. Τα αναπτύγματα είναι

$$\begin{aligned} B_m^e(h, m+4) &= \alpha_{4,0}^{e-} h^4, \quad B_m^e(h, m-4) = \alpha_{4,0}^{e+} h^4, \\ \Pi_2^+ &= \alpha_{4,0}^{e-} z e_{0,m,2}^+ h^4, \\ \Pi_2^- &= \alpha_{4,0}^{e+} z e_{0,m,2}^- h^4 \end{aligned} \quad (\text{A'.15.α}'), \quad (\text{A'.15.β}')$$

και τα ζητούμενα αναπτύγματα στη μορφή της $\Sigma\chi.$ (A'.6.γ') είναι

$$a_{m,m+4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{-4} k_2^2 \alpha_{4,0}^{e-} \left(y e_{0,m,2}^+ U_m + j e_{0,m,2}^+ V_m \right) h^4, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A'.16.α}')$$

και

$$a_{m,m-4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^4 k_2^2 \alpha_{4,0}^{e+} \left(y e_{0,m,2}^- U_m + j e_{0,m,2}^- V_m \right) h^4, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A'.16.β}')$$

A'.5 Ανάπτυξη των συντελεστών του συστήματος $\mathbf{cC} = \mathbf{d}$

Οι συντελεστές του συστήματος της $\Sigma\chi.$ (A'.1.β') έχουν μορφή αντίστοιχη με τη $\Sigma\chi.$ (A'.7) και είναι

$$\begin{aligned} c_{m,m\pm 2q} = & \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{\mp 2q} k_2^2 \left[B_m^o(h, m \pm 2q) Y_{0m\pm 2q}(\xi) U_m \right. \\ & \left. + B_m^o(h, m \pm 2q) J_{0m\pm 2q}(\xi) V_m \right] \end{aligned} \quad (\text{A'.17})$$

όπου, τα U_m και V_m έχουν οριστεί στις Σχ. (A'.8) και (A'.9) αντίστοιχα. Οι συντελεστές αυτοί λαμβάνουν μορφή αντίστοιχη με αυτή των Σχ. (A'.6.α'), (A'.6.β') και (A'.6.γ') ενώ, το σύστημα της Σχ. (A'.1.β') παίρνει μορφή

$$\sum_{q=0}^2 [c_{m,m+2q} C_{m+2q} + (1 - \delta_{q0}) c_{m,m-2q} C_{m-2q}] = d_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

με $c_{m,m-2q} = 0$ όταν $m \leq 2q$.

Στην έκφραση της Σχ. (A'.17) εμφανίζονται γινόμενα που έχουν μορφή $B_m^o(h, m \pm 2q) Z_{0,m\pm 2q}(\xi)$. Οι συναρτήσεις $Z_{0,m\pm 2q}(\xi)$ προκύπτουν από τη Σχ. (3.7) αντικαθιστώντας το m με $m \pm 2q$ όπως κάναμε προηγουμένως. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} Z_{0,m\pm 2q}(\xi) \simeq & \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tanh \eta_0 \left\{ Z_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & + \left[(m \pm 2q) g_2^o Z_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & - \frac{m \pm 2q + 2}{m \pm 2q} \alpha_{2,0}^{o+} Z_{m\pm 2q+2}(\xi) \\ & - \frac{m \pm 2q - 2}{m \pm 2q} \alpha_{2,0}^{o-} Z_{m\pm 2q-2}(\xi) \left. \right] h^2 \\ & + \left[(m \pm 2q) g_4^o Z_{m\pm 2q}(\xi) \right. \\ & - (m \pm 2q + 2) \\ & \times \left(\frac{1}{m \pm 2q} \alpha_{2,2}^{o+} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o+} \right) Z_{m\pm 2q+2}(\xi) \\ & - (m \pm 2q - 2) \\ & \times \left(\frac{1}{m \pm 2q} \alpha_{2,2}^{o-} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o-} \right) Z_{m\pm 2q-2}(\xi) \\ & + \frac{m \pm 2q + 4}{m \pm 2q} \alpha_{4,0}^{o+} Z_{m\pm 2q+4}(\xi) \\ & \left. \left. + \frac{m \pm 2q - 4}{m \pm 2q} \alpha_{4,0}^{o-} Z_{m\pm 2q-4}(\xi) \right] h^4 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'.18.α'})$$

και βεβαίως, αυτό μπορεί να γραφεί ως

$$Z_{0,m\pm 2q}(\xi) \simeq z_{0,m,q}^+ + z_{0,m,q}^- h^2 + z_{4,m,q}^+ h^4 \quad (\text{A'.18.β'})$$

και

$$Z_{0,m\pm 2q}(\xi) \simeq z_{0,m,q}^- + z_{0,m,q}^+ h^2 + z_{4,m,q}^- h^4. \quad (\text{A'.18.γ'})$$

A'.5.1 Ανάπτυξη στοιχείων κύριας διαγωνίου

Ακολουθώντας ίδια βήματα με τα προηγούμενα, οι συντελεστές της κύριας διαγωνίου του πίνακα $[c_{mi}]$ προκύπτουν με $q = 0$ οπότε, έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$B_m^o(h, m) = \frac{1}{m} + g_2^o h^2 + g_4^o h^4$$

και

$$Zo_m(\xi) = zo_{0,m,0} + zo_{2,m,0}h^2 + zo_{4,m,0}h^4.$$

Κατά συνέπεια, το γινόμενο είναι

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \frac{1}{m}zo_{0,m,0} + \left(\frac{1}{m}zo_{2,m,0} + zo_{0,m,0}g_2^o \right)h^2 \\ &\quad + \left(\frac{1}{m}zo_{4,m,0} + zo_{2,m,0}g_2^o + zo_{0,m,0}g_4^o \right)h^4 \end{aligned} \quad (\text{A'.19})$$

και τελικά

$$\begin{aligned} c_{m,m} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}k_2^2 \left\{ \frac{1}{m}yo_{0,m,0}U_m + jo_{0,m,0}V_m \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{m}yo_{2,m,0} + yo_{0,m,0}g_2^o \right)U_m \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m}jo_{2,m,0} + jo_{0,m,0}g_2^o \right)V_m \right]h^2 \right. \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{m}yo_{4,m,0} + yo_{2,m,0}g_2^o + yo_{0,m,0}g_4^o \right)U_m \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m}jo_{4,m,0} + jo_{2,m,0}g_2^o + jo_{0,m,0}g_4^o \right)V_m \right]h^4 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'.20})$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$

A'.5.2 Ανάπτυξη στοιχείων δεύτερης κύριας διαγωνίου

Στην περίπτωση αυτή, θέτοντας $q = 1$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} B_m^o(h, m+2) &= \frac{1}{m+2}\alpha_{2,0}^{o-}h^2 + \left(\frac{1}{m+2}\alpha_{2,2}^{o-} + \alpha_{2,0}^{o-}g_2^o \right)h^4, \\ B_m^o(h, m-2) &= \frac{1}{m-2}\alpha_{2,0}^{o+}h^2 + \left(\frac{1}{m-2}\alpha_{2,2}^{o+} + \alpha_{2,0}^{o+}g_2^o \right)h^4, \end{aligned}$$

με συνοδεία τα

$$Zo_{m+2}(\xi) = zo_{0,m,1}^+ + zo_{2,m,1}^+h^2 + zo_{4,m,1}^+h^4$$

και

$$Zo_{m-2}(\xi) = zo_{0,m,1}^- + zo_{2,m,1}^-h^2 + zo_{4,m,1}^-h^4.$$

Συνεπώς, τα γινόμενα είναι

$$\begin{aligned} \Pi_1^+ &= \frac{1}{m+2}\alpha_{2,0}^{o-}zo_{0,m,1}^+h^2 \\ &\quad + \left[\left(\frac{1}{m+2}\alpha_{2,2}^{o-} + \alpha_{2,0}^{o-}g_2^o \right)zo_{0,m,1}^+ + \frac{1}{m+2}\alpha_{2,0}^{o-}zo_{2,m,1}^+ \right]h^4, \end{aligned} \quad (\text{A'.21.a'})$$

$$\begin{aligned}\Pi_1^- &= \frac{1}{m-2} \alpha_{2,0}^{o+} z_{0,m,1}^- h^2 \\ &+ \left[\left(\frac{1}{m-2} \alpha_{2,2}^{o+} + \alpha_{2,0}^{o+} g_2^o \right) z_{0,m,1}^- + \frac{1}{m-2} \alpha_{2,0}^{o+} z_{2,m,1}^- \right] h^4,\end{aligned}\quad (\text{A'}.21.\beta')$$

και τελικός

$$\begin{aligned}c_{m,m+2} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{-2} k_2^2 \left\{ \frac{1}{m+2} \alpha_{2,0}^{o-} \left(y_{0,m,1}^+ U_m + j_{0,m,1}^+ V_m \right) h^2 \right. \\ &+ \left\{ \left[\frac{1}{m+2} \alpha_{2,0}^{o-} y_{0,m,1}^+ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m+2} \alpha_{2,2}^{o-} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o-} \right) y_{0,m,1}^+ \right] U_m \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{m+2} \alpha_{2,0}^{o-} j_{0,m,1}^+ \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m+2} \alpha_{2,2}^{o-} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o-} \right) j_{0,m,1}^+ \right] V_m \right\} h^4 \right\}\end{aligned}\quad (\text{A'}.22.\alpha')$$

και

$$\begin{aligned}c_{m,m-2} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^2 k_2^2 \left\{ \frac{1}{m-2} \alpha_{2,0}^{o+} \left(y_{0,m,1}^- U_m + j_{0,m,1}^- V_m \right) h^2 \right. \\ &+ \left\{ \left[\frac{1}{m-2} \alpha_{2,0}^{o+} y_{0,m,1}^- \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m-2} \alpha_{2,2}^{o+} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o+} \right) y_{0,m,1}^- \right] U_m \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\frac{1}{m-2} \alpha_{2,0}^{o+} j_{0,m,1}^- \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{m-2} \alpha_{2,2}^{o+} + g_2^o \alpha_{2,0}^{o+} \right) j_{0,m,1}^- \right] V_m \right\} h^4 \right\}\end{aligned}\quad (\text{A'}.22.\beta')$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$

A'.5.3 Ανάπτυξη στοιχείων τρίτης κύριας διαγωνίου

Θέτωντας τώρα $q = 2$, προκύπτουν κατά σειρά οι σχέσεις:

$$B_m^o(h, m+4) = \frac{1}{m+4} \alpha_{4,0}^{o-} h^4,$$

$$B_m^o(h, m-4) = \frac{1}{m-4} \alpha_{4,0}^{o+} h^4,$$

$$Z_{0,m+4}(\xi) = z_{0,m,2}^+ + z_{2,m,2}^+ h^2 + z_{4,m,2}^+ h^4$$

και

$$Z_{0,m-4}(\xi) = z_{0,m,2}^- + z_{2,m,2}^- h^2 + z_{4,m,2}^- h^4.$$

Τα γνωμενα είναι

$$\Pi_2^+ = \frac{1}{m+4} \alpha_{4,0}^{o-} z_{0,m,2}^+ h^4 \quad (\text{A'.23.α}')$$

και

$$\Pi_2^- = \frac{1}{m-4} \alpha_{4,0}^{o+} z_{0,m,2}^- h^4 \quad (\text{A'.23.β}')$$

οπότε,

$$c_{m,m+4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^{-4} k_2^2 \frac{1}{m+4} \alpha_{4,0}^{o-} (y_{0,m,2}^+ U_m + j o_{0,m,2}^+ V_m) h^4 \quad (\text{A'.24.α}')$$

και

$$c_{m,m-4} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} j^4 k_2^2 \frac{1}{m-4} \alpha_{4,0}^{o+} (y_{0,m,2}^- U_m + j o_{0,m,2}^- V_m) h^4 \quad (\text{A'.24.β}')$$

με $m = 1, 2, 3, \dots$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

B'

Επίλυση του γραμμικού συστήματος

B'.1 Εισαγωγή

Στο παράρτημα αυτό θα παρουσιαστεί η διαδικασία επίλυσης των γραμμικών συστημάτων των Σχ. (4.9.α') και (4.10.β'). Το σύστημα της Σχ. (4.9.α') ισχύει για τιμές του $m = 0, 1, 2, \dots$. Για τις άρτιες τιμές του m , αυτό έχει τη μορφή της Σχ. (A'.2.α') ενώ, για τις περιττές τιμές, τη μορφή της Σχ. (A'.2.β'). Τώρα, το σύστημα της Σχ. (4.10.β') έχει την ίδια μορφή με τη Σχ. (A'.2.β') για περιττές τιμές του m ενώ, για τις άρτιες τιμές, την ίδια μορφή με τη Σχ. (A'.2.α') μόνο που λείπει ο όρος $m = 0$. Συνεπώς, τα τέσσερα υποσυστήματα έχουν πίνακα με μορφή

$$\left[\begin{array}{ccccccc} a_{w,w} & a_{w,w+2} & a_{w,w+4} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{w+2,w} & a_{w+2,w+2} & a_{w+2,w+4} & a_{w+2,w+6} & 0 & 0 & \dots \\ a_{w+4,w} & a_{w+4,w+2} & a_{w+4,w+4} & a_{w+4,w+6} & a_{w+4,w+8} & 0 & \dots \\ 0 & a_{w+6,w+2} & a_{w+6,w+4} & a_{w+6,w+6} & a_{w+6,w+8} & a_{w+6,w+10} & \dots \\ 0 & 0 & a_{w+8,w+4} & a_{w+8,w+6} & a_{w+8,w+8} & a_{w+8,w+10} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{w+10,w+6} & a_{w+10,w+8} & a_{w+10,w+10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right]$$

όπου, εάν θέσουμε $w = 0$, προκύπτει ο πίνακας του συστήματος της Σχ. (A'.2.α'), εάν θέσουμε $w = 1$ προκύπτει ο πίνακας του συστήματος της Σχ. (A'.2.β') ενώ, εάν αντικαταστήσουμε τα a με c , με $w = 1$ προκύπτει ο πίνακας του συστήματος της Σχ. (4.10.β') για τις περιττές τιμές του m ενώ, με $w = 2$, προκύπτει ο πίνακας του συστήματος της Σχ. (4.10.β') για τις άρτιες τιμές του m .

Η αναζήτηση αναλυτικής λύσης των συστημάτων αυτών είναι εφικτή με χρήση του κανόνα του Crammer. Για το σκοπό αυτό, υπολογίζονται στη συνέχεια η ορίζουσα του πίνακα καθώς και η ορίζουσα που προκύπτει με αντικατάσταση των σταθερών όρων. Η ανάλυση θα επικεντρωθεί στο σύστημα της Σχ. (4.9.α') στην ουσία σε δύο υποσυστήματα,

ένα όταν $m = 0, 2, 4, \dots$ και ένα όταν $m = 1, 3, 5, \dots$. Στο τέλος, θα αναφερθούν όποιες αλλαγές χρειάζονται για το σύστημα της Σχ. (4.10.β').

B'.2 Υπολογισμός της ορίζουσας D

Για έναν πίνακα 3×3 της μορφής

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix},$$

η ανάπτυξη της ορίζουσάς του μπορεί να γίνει σύμφωνα με τον κανόνα [8, σελ. 164]

$$D = \sum_{i,j,km} \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$$

όπου $i, j, k = 1, 2, 3$ και ε_{ijk} είναι το σύμβολο Levi-Civita. Στην περίπτωσή μας, επειδή ο πίνακας έχει μορφή ταινίας, βιολένει η ανάπτυξη με τον προαναφερόμενο τρόπο, διότι πολλά γινόμενα θα είναι μηδενικά. Κατ' αυτόν τον τρόπο, η ορίζουσα D του προς μελέτη πίνακα προκύπτει να είναι

$$D = \prod_{s=1}^{\infty} a_{ss} \left(1 - \sum_{w=0}^{\infty} \frac{a_{w,w+2} a_{w+2,w}}{a_{ww} a_{w+2,w+2}} \right).$$

Στην ουσία πρόκειται για δύο ορίζουσες, μια όταν το m λαμβάνει άρτιες τιμές και μια όταν το m λαμβάνει περιττές. Στην πρώτη περίπτωση, το γινόμενο αναπτύσσεται με τιμές $s = 0, (2), \infty$ (δηλαδή μόνο άρτιες, $s = 0, 2, 4, \dots$) ενώ στη δεύτερη, με τιμές $s = 1, (2), \infty$. Ομοίως για το δείκτη w .

Τώρα, ο λόγος μέσα στο άθροισμα μπορεί να γραφεί ως πολυνόμιο έως την τάξη h^4 . Αυτό μπορεί να γίνει εάν λάβουμε υπόψη τις Σχ. (A'.6.α'), (A'.6.β') καθώς και την ανάπτυξη σε σειρά Maclaurin του λόγου

$$\begin{aligned} \frac{L_1 + M_1 h^2 + N_1 h^4}{L_2 + M_2 h^2 + N_2 h^4} &= \frac{L_1}{L_2} \\ &\quad + \frac{L_2 M_1 - L_1 M_2}{L_2^2} h^2 \\ &\quad + \frac{N_1 L_2^2 - L_1 L_2 N_2 - L_2 M_1 M_2 + L_1 M_2^2}{L_2^3} h^4 \end{aligned} \tag{B'.1}$$

η οποία βεβαίως ισχύει για μικρές τιμές του h . Έτσι λοιπόν, η ορίζουσα γράφεται

$$D = \prod_{s=1}^{\infty} a_{ss} \left(1 - \sum_{w=1}^{\infty} \frac{M'_{w,w+2} M'_{w+2,w}}{L_{ww} L_{w+2,w+2}} h^4 \right). \tag{B'.2}$$

B'.3 Υπολογισμός των οριζουσών D_m

Αντικαθιστώντας σε κάθε στήλη του πίνακα το διάνυσμα \mathbf{b} , μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα D_m . Αυτή προκύπτει να είναι

$$D_m = b_m \frac{\prod_{s=0}^{\infty} a_{ss}}{a_{mm}} \left[1 - \sum_{\substack{w=0 \\ w=1 \\ (w \neq m) \\ (w \neq m-2)}}^{\infty} \frac{a_{w,w+2} a_{w+2,w}}{a_{ww} a_{w+2,w+2}} \right. \\ \left. - \sum_{\substack{s=m-2, m-4, \\ m+2, m+4}} \frac{b_s a_{ms}}{b_m a_{ss}} + \sum_{\substack{(s=m-2, q=m-4) \\ (s=m+2, q=m+4)}} \frac{b_q a_{ms} a_{sq}}{b_m a_{ss} a_{qq}} \right].$$

Μερικά σχόλια χρειάζονται εδώ. Όταν το $m = 0, 2, 4, \dots$, το γινόμενο και το πρώτο άθροισμα αναπτύσσονται με τιμές $s, w = 0, (2), \infty$. Αντιθέτως, όταν $m = 1, 3, 5, \dots$, αυτά αναπτύσσονται με τιμές $s, w = 1, (2), \infty$. Επίσης, από το πρώτο άθροισμα αποκλείονται οι τιμές m και $m-2$. Το δεύτερο άθροισμα γίνεται για τέσσερις διαφορετικές τιμές του s και πάντα με το κριτήριο αυτές να είναι μη αρνητικές. Τέλος, το τρίτο άθροισμα γίνεται με ένα διπλό ζεύγος τιμών και βέβαια, όταν οι τιμές του ζεύγους δεν είναι αρνητικές. Αρνητικές τιμές στους δείκτες των αθροισμάτων δε συνεισφέρουν.

Ακολουθώντας πορεία ίδια με προηγουμένως, μπορούμε να εκφράσουμε την ορίζουσα σε πολυώνυμο άρτιων δυνάμεων του h έως την τέταρτη τάξη. Έτσι λοιπόν

$$D_m = b_m \frac{\prod_{s=0}^{\infty} a_{ss}}{a_{mm}} \left\{ 1 - \sum_{\substack{s=m-2, \\ m+2}} \frac{b_s}{b_m} \frac{M'_{ms}}{L_{ss}} h^2 \right. \\ \left. + \left[- \sum_{\substack{w=0 \\ w=1 \\ (w \neq m) \\ (w \neq m-2)}}^{\infty} \frac{M'_{w,w+2} M'_{w+2,w}}{L_{w,w} L_{w+2,w+2}} - \sum_{\substack{s=m-2, \\ m+2}} \frac{b_s}{b_m} \frac{N'_{ms} L_{ss} - M'_{ms} M_{ss}}{L_{ss}^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{\substack{s=m-4, \\ m+4}} \frac{b_s}{b_m} \frac{N''_{ms}}{L_{ss}} + \sum_{\substack{(s=m-2, q=m-4) \\ (s=m+2, q=m+4)}} \frac{b_q}{b_m} \frac{M'_{ms} M'_{sq}}{L_{ss} L_{qq}} \right] h^4 \right\}.$$

B'.4 Η λύση

Παρατηρώντας ότι στο άπειρο άθροισμα του όρου h^4 της D_m εξαρουνται δύο όροι, αφαιρούμε αυτούς τους δύο όρους από τη Σχ. (B'.2) ουτώς ώστε τα δύο άπειρα αθροίσματα να ταυτιστούν. Κατ' αυτόν τον τρόπο, σχηματίζοντας το λόγο D_m/D και φέρνοντάς τον στη μορφή άρτιων δυνάμεων του h , το άπειρο άθροισμα εξαλείφεται και παραμένουν μόνο τα πεπερασμένα αθροίσματα. Έτσι, έχουμε την τελική αναλυτική μορφή λύσης για τους

συντελεστές A_m :

$$\begin{aligned}
 A_m = b_m & \left\{ \frac{1}{L_{mm}} - \frac{1}{L_{mm}^2} \left[L_{mm} \sum_{\substack{s=m-2, \\ m+2}} \left(\frac{b_s}{b_m} \frac{M'_{ms}}{L_{ss}} \right) + M_{mm} \right] h^2 \right. \\
 & + \frac{1}{L_{mm}^3} \left\{ \left[\frac{M'_{m,m+2} M'_{m+2,m}}{L_{mm} L_{m+2,m+2}} + \frac{M'_{m-2,m} M'_{m,m-2}}{L_{m-2,m-2} L_{mm}} \right. \right. \\
 & - \sum_{\substack{s=m-2, \\ m+2}} \frac{b_s}{b_m} \frac{N'_{ms} L_{ss} - M'_{ms} M_{ss}}{L_{ss}^2} - \sum_{\substack{s=m-4, \\ m+4}} \frac{b_s}{b_m} \frac{N''_{ms}}{L_{ss}} \\
 & \left. \left. + \sum_{\substack{(s=m-2, q=m-4) \\ (s=m+2, q=m+4)}} \frac{b_q}{b_m} \frac{M'_{ms} M'_{sq}}{L_{ss} L_{qq}} \right] L_{mm}^2 \right. \\
 & \left. + \left[M_{mm} \sum_{\substack{s=m-2, \\ m+2}} \left(\frac{b_s}{b_m} \frac{M'_{ms}}{L_{ss}} \right) - N_{mm} \right] L_{mm} + M_{mm}^2 \right\} h^4 \}
 \end{aligned} \tag{B'.3}$$

η οποία ισχύει για $m = 0, 1, 2, \dots$ και έχει μορφή $A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(2)}h^2 + A_m^{(4)}h^4$.

Η αναλυτική έκφραση για τους συντελεστές C_m προκύπτει από τη Σχ. (B'.3) αντικαθιστώντας το b_m με το d_m και υπολογίζοντας για $m = 1, 2, 3, \dots$ ενώ, οι συντελεστές L, M κ.λπ. προκύπτουν από τις Σχ. (A'.20), (A'.22.α'), (A'.22.β'), (A'.24.α') και (A'.24.β'). Έτσι, προκύπτει πάλι μορφή λύσης $C_m = C_m^{(0)} + C_m^{(2)}h^2 + C_m^{(4)}h^4$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Γ'

Ανάπτυξη των συντελεστών σκέδασης

Γ'.1 Εισαγωγή

Οι συντελεστές P_m και Q_m που εμφανίζονται στο δυναμικό σκέδασης Π_z^{sc} μπορούν να τεθούν στη μορφή

$$P_m = P_m^{(0)} + P_m^{(2)}h^2 + P_m^{(4)}h^4$$

και

$$Q_m = Q_m^{(0)} + Q_m^{(2)}h^2 + Q_m^{(4)}h^4.$$

Για το σκοπό αυτό και από όλα όσα έχουν περιγραφεί στο Παραρτ. Α', θέτουμε στους όρους άθροισης στη Σχ. (4.8) $i = m \pm 2q$ οπότε

$$\begin{aligned} P_m = \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} & \left\{ A_{m \pm 2q} j^{\mp 2q} \left[B_m^e(h, m \pm 2q) Y e_{m \pm 2q}(\xi) J_m(x_2) \right. \right. \\ & \left. \left. - B_m^e(h, m \pm 2q) J e_{m \pm 2q}(\xi) Y_m(x_2) \right] \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)} \right\} + K_m \end{aligned}$$

όπου έχουμε θέσει

$$K_m \hat{=} -\frac{1}{k_1^2} \varepsilon_m(-j)^m \frac{J_m(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \cos(m\psi).$$

Στην εξίσωση αυτή, εμφανίζονται γινόμενα της μορφής

$$\Pi_q'^{\pm} \hat{=} A_{m \pm 2q} B_m^e(h, m \pm 2q) Z e_{m \pm 2q}(\xi)$$

τα οποία εξαρτώνται από το h . Στη συνέχεια, θα αναπτύξουμε αυτά τα γινόμενα για τις διάφορες τιμές του q .

Γ'.2 Ανάπτυξη γινομένων

Για $q = 0$, το γινόμενο λαμβάνει μορφή

$$\Pi'_0 = A_m \underbrace{B_m^e(h, m) Z e_m(\xi)}_{\Pi_0} .$$

Τώρα βεβαίως $A_m = A_m^{(0)} + A_m^{(2)}h^2 + A_m^{(4)}h^4$ ενώ, το γινόμενο Π_0 σύμφωνα με τη Σχ. (A'.11) λαμβάνει κι αυτό μορφή $\Pi_0 = \Pi_0^{(0)} + \Pi_0^{(2)}h^2 + \Pi_0^{(4)}h^4$. Ετσι, αναπτύσσοντας το γινόμενο Π'_0 και κρατώντας όρους μέχρι και τέταρτης τάξης, προκύπτει

$$\begin{aligned} \Pi'_0 \simeq & A_m^{(0)} \Pi_0^{(0)} + \left(A_m^{(0)} \Pi_0^{(2)} + A_m^{(2)} \Pi_0^{(0)} \right) h^2 \\ & + \left(A_m^{(0)} \Pi_0^{(4)} + A_m^{(2)} \Pi_0^{(2)} + A_m^{(4)} \Pi_0^{(0)} \right) h^4 . \end{aligned} \quad (\Gamma'.1)$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όταν $q = 1$ πέρνοντας

$$\Pi'^+_1 = A_{m+2} \underbrace{B_m^e(h, m+2) Z e_{m+2}(\xi)}_{\Pi_1^+}$$

και χρησιμοποιώντας τη Σχ. (A'.13.α'), προκύπτει

$$\Pi'^+_1 \simeq A_{m+2}^{(0)} \Pi_1^{+(2)} h^2 + \left(A_{m+2}^{(0)} \Pi_1^{+(4)} + A_{m+2}^{(2)} \Pi_1^{+(2)} \right) h^4 . \quad (\Gamma'.2.α')$$

Επιπρόσθετα, για $q = 1$ λαμβάνουμε

$$\Pi'^-_1 = A_{m-2} B_m^e(h, m-2) Z e_{m-2}(\xi)$$

και μέσω της Σχ. (A'.13.β') προκύπτει

$$\Pi'^-_1 \simeq A_{m-2}^{(0)} \Pi_1^{-(2)} h^2 + \left(A_{m-2}^{(0)} \Pi_1^{-(4)} + A_{m-2}^{(2)} \Pi_1^{-(2)} \right) h^4 . \quad (\Gamma'.2.β')$$

Συνεχίζοντας, θέτοντας $q = 2$, το γινόμενο γίνεται

$$\Pi'^+_2 = A_{m+4} \underbrace{B_m^e(h, m+4) Z e_{m+4}(\xi)}_{\Pi_2^+}$$

και με χρήση της Σχ. (A'.15.α'),

$$\Pi'^+_2 \simeq A_{m+4}^{(0)} \Pi_2^{+(4)} h^4 . \quad (\Gamma'.3.α')$$

Φυσικά υπάρχει και ο όρος

$$\Pi'^-_2 = A_{m-4} B_m^e(h, m-4) Z e_{m-4}(\xi)$$

ο οποίος, μέσω της Σχ. (A'.15.β') γίνεται

$$\Pi'^-_2 \simeq A_{m-4}^{(0)} \Pi_2^{-(4)} h^4 . \quad (\Gamma'.3.β')$$

Όταν το $q \geq 3$, τα γινόμενα $\Pi_q'^{\pm}$ περιέχουν μόνο όρους τάξης h^6 και ανώτερης με συνέπεια να μην τα λαμβάνουμε υπόψη. Κάτω από αυτούς τους περιορισμούς, οι συντελεστές P_m λαμβάνουν μορφή

$$\begin{aligned} P_m = & \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{q=0}^2 \left\{ j^{-2q} \left[\Pi_q'^+ Y J_m(x_2) - \Pi_q'^+ Y_m(x_2) \right] \right. \\ & + (1 - \delta_{q0}) j^{2q} \left[\Pi_q'^- Y J_m(x_2) - \Pi_q'^- Y_m(x_2) \right] \left. \right\} \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)} \\ & + K_m \end{aligned}$$

με $A_{m-2q} = 0$ όταν $m < 2q$. Τα νέα σύμβολα που εμφανίζονται απλά δηλώνουν ότι στα αντίστοιχα γινόμενα, πρέπει να γίνει χρήση είτε της συνάρτησης Bessel Y , είτε της J .

Αντικαθιστώντας τώρα στην τελευταία αυτή σχέση τα αναπτύγματα των γινομένων, βρίσκουμε τη ζητούμενη έκφραση για το συντελεστή P_m στη μορφή άρτιων δυνάμεων του h έως και την τέταρτη τάξη:

$$\begin{aligned} P_m = & \frac{k_2^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left[\Pi_0'^{Y(0)} J_m(x_2) - \Pi_0'^{J(0)} Y_m(x_2) \right] + \frac{k_1^2}{k_2^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} H_m^{(2)}(x_1) K_m \right. \\ & + \left[\left(\Pi_0'^{Y(2)} + j^{-2} \Pi_1'^+ Y^{(2)} + j^2 \Pi_1'^- Y^{(2)} \right) J_m(x_2) \right. \\ & \quad \left. - \left(\Pi_0'^{J(2)} + j^{-2} \Pi_1'^+ J^{(2)} + j^2 \Pi_1'^- J^{(2)} \right) Y_m(x_2) \right] h^2 \\ & + \left[\left(\Pi_0'^{Y(4)} \right. \right. \\ & \quad \left. + j^{-2} \Pi_1'^+ Y^{(4)} + j^{-4} \Pi_2'^+ Y^{(4)} \right. \\ & \quad \left. + j^2 \Pi_1'^- Y^{(4)} + j^4 \Pi_2'^- Y^{(4)} \right) J_m(x_2) \\ & \quad \left. - \left(\Pi_0'^{J(4)} \right. \right. \\ & \quad \left. + j^{-2} \Pi_1'^+ J^{(4)} + j^{-4} \Pi_2'^+ J^{(4)} \right. \\ & \quad \left. + j^2 \Pi_1'^- J^{(4)} + j^4 \Pi_2'^- J^{(4)} \right) Y_m(x_2) \left. \right] h^4 \left. \right\} \frac{1}{H_m^{(2)}(x_1)}. \tag{Γ'.4} \end{aligned}$$

Αντίστοιχη έκφραση προκύπτει και για το συντελεστή Q_m κάνοντας τις εξής αλλαγές: το K_m με το Λ_m όπου

$$\Lambda_m \doteq -\frac{1}{k_1^2} \varepsilon_m (-j)^m \frac{J_m(x_1)}{H_m^{(2)}(x_1)} \sin(m\psi),$$

στα τονούμενα γινόμενα αντικαθιστούμε τους συντελεστές A με τους C και τέλος, οι ποσότητες των άτονων γινομένων στις Σχ. (Γ'.1), (Γ'.2.α'), (Γ'.2.β'), (Γ'.3.α') και (Γ'.3.β') αντικαθίστανται από αυτές των Σχ. (A'.19), (A'.21.α'), (A'.21.β'), (A'.23.α') και (A'.23.β').

Αναφορές

- [1] W.L. Weeks, *Electromagnetic theory for engineering applications*, John Wiley & Sons, Inc., 1964.
- [2] Philip M. Morse, Herman Feshbach, *Methods of theoretical physics*, McGraw-Hill Co., Inc., New York, 1953.
- [3] G.C. Kokkorakis and J.A. Roumeliotis, *Power series expansion for Mathieu functions with small arguments*, Mathematics of Computation, Vol.70, 1221-1235, 2000.
- [4] C. Ray Wylie, Louis C. Barrett, *Advanced engineering mathematics*, 6th edition, McGraw-Hill, Inc., 1995.
- [5] Julius Adams Stratton, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill Co., Inc., New York, 1941.
- [6] J. Van Bladel, *Electromagnetic fields*, McGraw-Hill Co., Inc., New York, 1964.
- [7] Nikolaos B. Kakogiannos and John A. Roumeliotis, *Electromagnetic scattering from an infinite metallic cylinder coated by a circular dielectric one*, IEEE Trans. Microwave Theory and Tech., Vol.38, 1660-1666, 1990.
- [8] Hans J. Weber, George B. Arfken, *Essential mathematical methods for physicists*, Academic Press, 2004.