



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Επεξεργασία Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος υπό την  
Παρουσία Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας 1800MHz με  
Χρήση Πολλαπλής Συνολοκλήρωσης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΡΗΓΟΡΙΑ Δ. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

**Επιβλέπων :** Χρήστος Καψάλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2008





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ  
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Επεξεργασία Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος υπό την  
Παρουσία Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας 1800MHz με  
Χρήση Πολλαπλής Συνολοκλήρωσης**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΡΗΓΟΡΙΑ Δ. ΑΝΤΩΝΙΟΥ

**Επιβλέπων :** Χρήστος Καψάλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 23<sup>η</sup> Οκτωβρίου 2008.

.....  
Χ. Καψάλης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Φ. Κωσταντίνου  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Π. Κωττής  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2008

.....  
Γρηγορία Δ. Αντωνίου

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γρηγορία Δ. Αντωνίου 2008

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

## Περίληψη

Η διπλωματική εργασία πραγματεύεται την επεξεργασία ανθρώπινου ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος αξιοποιώντας τα εργαλεία της θεωρίας χρονοσειρών. Θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της πολλαπλής συνολοκλήρωσης σε έτοιμα δεδομένα ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος, στο οποίο θα αναφερόμαστε με τη συντομογραφία EEG.

Σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει την επίδραση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας 1800MHz στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα του ανθρώπου και να διαπιστώσει τυχόν μεταβολές του EEG που οφείλονται στην ακτινοβολία.

Η θεωρία Χρονοσειρών αποτελεί ως επί το πλείστον εργαλείο της Οικονομικής Επιστήμης και η χρήση της στη μελέτη EEG αποτελεί μία σχετικά νέα και ανεξερεύνητη περιοχή. Σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει κατά πόσον η έννοια της πολλαπλής συνολοκλήρωσης μπορεί να εφαρμοστεί αποτελεσματικά στην επεξεργασία EEG.

Επιπλέον σκοπός της εργασίας είναι να εκτιμήσει την επίδραση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας 1800MHz στο ηλεκτροεγκεφαλογράφημα του ανθρώπου και να διαπιστώσει τυχόν μεταβολές του EEG που οφείλονται στην ακτινοβολία.

Στο αρχικό κομμάτι της εργασίας θα μελετήσουμε τη φυσιολογία του εγκεφάλου και την ηλεκτρική του φύση, τα προκλητά δυναμικά και το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα. Η μελέτη αυτή είναι απαραίτητη για να κατανοήσουμε την φύση του EEG και τους λόγους για τους οποίους είναι χρήσιμη η επεξεργασία του. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε την πειραματική διάταξη με την οποία έγινε λήψη του EEG.

Το επόμενο κομμάτι της μελέτης αφορά την θεωρία Χρονοσειρών και της έννοιες της στασιμότητας, της ολοκλήρωσης και της συνολοκλήρωσης που θα αναλύσουμε διεξοδικά.

Με χρήση του λογισμικού Matlab, αναπτύξαμε ένα πρόγραμμα που εξετάζει την πολλαπλή συνολοκλήρωση των 15 διαφορετικών καναλιών του EEG. Χρησιμοποιήσαμε δεδομένα EEG ανθρώπων που είτε εκτίθενται σε RF ακτινοβολία, είτε όχι. Πειραματικά, αυτό επιτυγχάνεται λαμβάνοντας το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα με ανοιχτή και κλειστή την κεραία της πηγής ακτινοβολίας. Η λήψη EEG έχει γίνει σε άτομα και των δύο φύλων, έτσι μπορούμε να μελετήσουμε δημογραφικές ομάδες ανδρών και γυναικών χωριστά.

Στη συνέχεια έγινε στατιστική επεξεργασία των αποτελεσμάτων με χρήση του λογισμικού SPSS και παρατίθενται τα αποτελέσματα.

### Λέξεις – Κλειδιά:

Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα (HEΓ), επεξεργασία HEΓ, Προκλητά Δυναμικά, Χρονοσειρές, Στασιμότητα, Ολοκλήρωση, Συνολοκλήρωση, Πολλαπλή Συνολοκλήρωση



## **Abstract**

The diplomatic thesis is involved with the processing of the human electroencephalogram (EEG) based on the Time Series theory. The method of multiple cointegration will be used on available given EEG data.

Time Series theory is mainly used as a tool in the economic sciences and its use in the study of EEG is a relatively new and non-investigated area. The purpose of this study is to examine to what extent the multiple cointegration method can be applied effectively in the processing of the EEG. In addition, the effect of 1800MHz electromagnetic radiation on the human EEG and the detection of possible changes in the EEG which are due to the radiation will be investigated.

The 1<sup>st</sup> phase of this work will involve the study of the physiology of the brain and its electrical nature, the evoked potentials and the EEG per se. This review is deemed necessary in order to understand the nature of the EEG and the reasons why its processing is useful.

The differentiated experimental setting under which the EEGs were recorded and analyzed will be also described. The following part of this study is concerned with the Time Series Theory and meanings of stationarity, integration and cointegration which will be analyzed and scrutinized. With the use of Matlab, a program was developed which detects the possible multiple cointegration of 15 different EEG channels.

The data analyzed was obtained from two recorded EEGs from the same person which was exposed to 1800MHz radiation in one of the two recordings in a single blind fashion. Experimentally this was achieved by recording the EEG with the radiation source power on and off. The EEG recordings were applied to both males and females. As a result, we can study different demographic groups of males and females separately. The statistical analysis of the results was performed using SPSS.

### **Keywords:**

Electroencephalogram (EEG), EEG processing, Evoked Potentials (EP), Time Series, Stationarity, Integration, Cointegration, Multiple Cointegration.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>Περίληψη</b>	<b>5</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</b>	<b>8</b>
<b>Κατάλογος Σχημάτων</b>	<b>9</b>
<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	<b>10</b>
<b>1 Φυσιολογία του Εγκεφάλου</b>	<b>11</b>
1.1 Εισαγωγή	12
1.2 Νευρικά κύτταρα	12
1.3 Δυναμικά μεμβρανών και ροή Ιόντων	15
1.4 Βαθμωτά δυναμικά και δυναμικά δράσης	20
<b>2 Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα</b>	<b>30</b>
2.1 Λειτουργία του Ηλεκτροεγκεφαλογράφου	31
2.2 Καταγραφή Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος	32
2.3 Συστατικά Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος	34
2.4 Τεχνικά Προβλήματα	36
<b>3 Προκλητά Δυναμικά</b>	<b>38</b>
3.1 Βασικές Έννοιες	39
3.2 Διάκριση Προκλητών Δυναμικών	40
3.3 Μέθοδοι απομόνωσης των προκλητών δυναμικών από το EEG	41
3.4 Εξαγωγή του Μέσου Όρου	41
3.5 Χρονικά Διαστήματα των Προκλητών Δυναμικών	43
<b>4 Στοχαστικές Ανελίζεις</b>	<b>46</b>
4.1 Τυχαίες μεταβλητές και πιθανότητες	47
4.2 Στοχαστικές Ανελίζεις	49
4.3 Τυχαία Διανύσματα Λαμβανόμενα από Στοχαστικές Ανελίζεις	50
4.4 Στασιμότητα	51
4.5 Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης και Συμμεταβλητότητας	52
<b>5 Στοιχεία Στατιστικής</b>	<b>55</b>
5.1 Έλεγχος Υποθέσεων	56
5.2 T-Test	56
5.3 Analysis of Variance	58
<b>6 Χρονολογικές Σειρές</b>	<b>74</b>
6.1 Έννοια Χρονολογικής Σειράς	75
6.2 Χρονολογικές σειρές και προβλέψεις	75
6.3 Παραδείγματα Χρονολογικών Σειρών	76
6.4 Καθοριστικά Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών	79
6.5 Στοχαστικά Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών	83
<b>7 Πολλαπλή Συνολοκλήρωση</b>	<b>86</b>
7.1 Στασιμότητα Χρονολογικών Σειρών	87
7.2 Η Έννοια της Ολοκλήρωσης	87
7.3 Έλεγχοι Στασιμότητας	91
7.4 Η Έννοια της Συνολοκλήρωσης	95
7.5 Πολλαπλή Συνολοκλήρωση	99
<b>8 Επεξεργασία Δεδομένων EEG</b>	<b>105</b>
8.1 Πειραματική Διάταξη	106
8.2 Ανάκτηση Δεδομένων	107
8.3 Πρόγραμμα Matlab	111
8.4 Αποτελέσματα	112



### Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1 – Δομή Κυττάρου	12
Σχήμα 2 – Νευρικό κύτταρο με κυρίως σώμα, δενδρίτες, άξονα και απολήξεις του άξονα	13
Σχήμα 3 – Θήκη Μυελίνης	14
Σχήμα 4 – Δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης	15
Σχήμα 5 – Κατανομή φορτίων στη μεμβράνη	16
Σχήμα 6 – Διαφορές συγκέντρωσης ιόντων κατά μήκος της μεμβράνης	17
Σχήμα 7 – Ηλεκτρονική αντλία του ενζύμου Na,K-ATPάση	19
Σχήμα 8 – Δίοδοι ιόντων στη μεμβράνη	20
Σχήμα 9 – Βαθμωτά δυναμικά	21
Σχήμα 10 – Βαθμωτά δυναμικά	22
Σχήμα 11 – Τοπικά ρεύματα	23
Σχήμα 12 – Δυναμικό Δράσης	24
Σχήμα 13 – Κατώφλι, πόλωση και αποπόλωση της μεμβράνης	26
Σχήμα 14 – Απόλυτα και σχετικά ανενεργή περίοδος δράσης	27
Σχήμα 15 – Διάδοση μέσω αλμάτων	28
Σχήμα 16 – Το ηλεκτρόδιο με επαφή δακτυλιδιού	31
Σχήμα 17 – Τυποποιημένες απαγωγές στην επιφάνεια του κεφαλιού, Σύστημα 10-20	32
Σχήμα 18 – Καταγραφή ΗΕΓ	33
Σχήμα 19 – Σχηματικό διάγραμμα ψηφιακού ΗΕΓ με N ηλεκτρόδια μέτρησης.	34
Σχήμα 20 – Καταγραφή ΗΕΓ όπου κυριαρχεί ο α ρυθμός.	35
Σχήμα 21 – Η εξαγωγή του μέσου όρου [8]	42
Σχήμα 22 – Πρώιμα, Μέσα και Ύστερα Προκλητά Δυναμικά	43
Σχήμα 23 – Καθορισμός πλάτους, χρονικού σημείου κορύφωσης και εμβαδού ενός συστατικού του ΠΔ	44
Σχήμα 24 – T3, T6 και T8 είναι οι κορυφώσεις των συστατικών N <sub>100</sub> , P <sub>300</sub> και N <sub>400</sub>	45
Σχήμα 25 – Ένα σύνολο από συναρτήσεις δείγματα	50
Σχήμα 26 – Απεικόνιση της έννοιας της στασιμότητας	52
Σχήμα 27 – Απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης μιας αργά και μιας απότομα ταλαντούμενης στοχαστικής ανέλιξης	54
Σχήμα 28 – Κατανομές $F_{2,12}$ - $F_{8,12}$ και $F_{25,120}$	59
Σχήμα 29 – Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (Δις Δρχ. – Σταθ. Τιμές 1988)	77
Σχήμα 30 – Ιδιωτικές Επενδύσεις (Δις Δρχ. – Σταθ. Τιμές 1988)	77
Σχήμα 31 – Δημόσιες Επενδύσεις ως % του ΑΧΠ	78
Σχήμα 32 – Δημόσιες Δαπάνες	79
Σχήμα 33 – Παράδειγμα Χρονοσειράς που εμφανίζει ανοδική τάση	82
Σχήμα 34 – Παράδειγμα Χρονοσειράς που παρουσιάζει εποχικότητα	82
Σχήμα 35 – Στάσιμη Χρονοσειρά	83
Σχήμα 36 – Διαδικασία τυχαίας χρονολογική σειράς (λευκός θόρυβος)	85
Σχήμα 37 – Διάγραμμα τυχαίας διαδρομής	89
Σχήμα 38 – Σειρά στοχαστικής τάσης $y_t$ και μη στοχαστικής τάσης $x_t$	90
Σχήμα 39 – Διαγράμματα αυτοσυσχέτισης στάσιμης και μη στάσιμης χρονολογικής σειράς	92
Σχήμα 40 – Δύο σειρές που συνολοκληρώνονται και παρουσιάζουν την πορεία τιμών δύο διαφορετικών μετοχών	96

Σχήμα 41 – Χρονοσειρές που παρουσιάζουν την πορεία τιμών δύο διαφορετικών μετοχών και συνολοκληρώνονται ελάχιστα	97
Σχήμα 42	98
Σχήμα 43- Απόσταση ανάμεσα στον Oliver και στην κυρία του όταν το $\alpha$ είναι 0.3	100
Σχήμα 44 – Απόσταση ανάμεσα στον Oliver και την κυρία του όταν το $\alpha$ είναι 0.05	101
Σχήμα 45	102
Σχήμα 46	103
Σχήμα 47 – Η πειραματική διάταξη με 16 ηλεκτρόδια	106
Σχήμα 48 – Female off	108
Σχήμα 49 – Female on	109
Σχήμα 50 – Male off	109
Σχήμα 51 – Male on	110
Σχήμα 52 – Μορφή αρχείου EEG	110
Σχήμα 53 – Αρχείο Εξόδου – Πίνακας Συνολοκλήρωσης	111
Σχήμα 54 – Θέση Ηλεκτροδίων	113
Σχήμα 55 – Τα ηλεκτρόδια 11, 12, 13 και 14 φαίνονται με κόκκινη κουκίδα	114
Σχήμα 56 – Τα ηλεκτρόδια 2, 3, 4 και 5 φαίνονται με κόκκινη κουκίδα.	115
Σχήμα 57 – Τα ηλεκτρόδια 5, 6 και 7 φαίνονται με κόκκινη κουκίδα	116
Σχήμα 58 – Εμφάνιση ηλεκτροδίων στους πίνακες συνολοκλήρωσης για τις τέσσερις διαφορετικές δημογραφικές ομάδες Female off, Female on, Male off και Male on.	121

#### Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 1 – Ρυθμοί Ηλεκτροεγκεφαλογραφικού Σήματος .....	34
Πίνακας 2 – Διάκριση Προκλητών Δυναμικών .....	40
Πίνακας 3 – Μεταβλητότητα, Συμμεταβλητότητα, Συντελεστής Συσχέτισης.....	49
Πίνακας 4 – Παράδειγμα Απονα .....	61
Πίνακας 5 – Ομάδες (Μεταχειρίσεις).....	62
Πίνακας 6 – Πίνακας Απονα για τον πλήρως τυχαίοποιημένο παράγοντα.....	70
Πίνακας 7 – Πίνακας Απονα παραδείγματος .....	71
Πίνακας 8 – Αντιστοίχιση καναλιών 1 έως 15 με τα ηλεκτρόδια του ηλεκτροεγκεφαλογράφου .....	112
Πίνακας 9 – Παράδειγμα εξόδου Independent Samples Test .....	117
Πίνακας 10 – Αποτελέσματα t-test με διαχωρισμό SexID .....	118
Πίνακας 11 – Αποτελέσματα t-test με διαχωρισμό RadID .....	119
Πίνακας 12 – Αποτελέσματα Απονα (SexID) .....	120
Πίνακας 13 – Αποτελέσματα Απονα (RadID).....	121

# **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1**

## **ΦΥΣΙΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΕΓΚΕΦΑΛΟΥ**

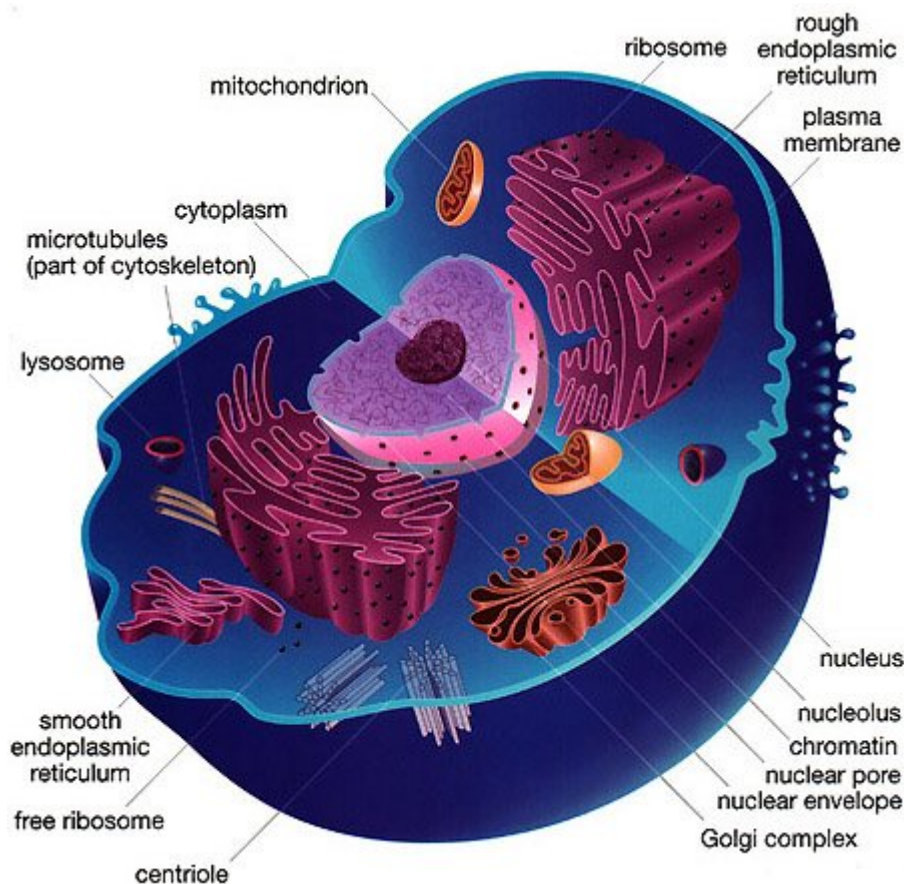
Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε βασικά στοιχεία φυσιολογίας του εγκεφάλου και των εγκεφαλικών κυττάρων. Θα περιγράψουμε τους μηχανισμούς μετάδοσης ηλεκτρικών δυναμικών κατά μήκος της κυτταρικής μεμβράνης και θα κατανοήσουμε την ηλεκτρική φύση των εγκεφαλικών σημάτων.

## 1.1 Εισαγωγή

Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελεί χωρίς αμφιβολία, το πλέον πολύπλοκο δημιούργημα της φύσης. Προϊόν βιολογικής εξέλιξης εκατομμυρίων ετών, αυτή η μικρή μάζα της τάξης του 1.5 Kg εμπεριέχει ένα εξαιρετικά πολυσύνθετο δίκτυο κυττάρων, οι λειτουργίες του οποίου είναι υπεύθυνες για τη δημιουργία των σκέψεων, της μνήμης, τον έλεγχο των δραστηριοτήτων του σώματος και των συναισθημάτων. Αυτό το έργο επιτελείται από τους περίπου  $10^{10}$  νευρώνες εγκεφάλου, οι οποίοι συναντιούνται μεταξύ τους σε  $10^{14}$  ως  $10^{15}$  σημεία. Η συνολική ανωτερότητα του εγκεφάλου, ως προς οποιαδήποτε υπολογιστική μηχανή έχει κατασκευασθεί έως σήμερα είναι προφανής. Η έρευνα για την κατανόηση των μηχανισμών λειτουργίας του αποτελεί ένα τιτάνιο έργο και μέχρι σήμερα το ποσοστό της άγνοιάς μας είναι συντριπτικά μεγαλύτερο από την ποσότητα των γνώσεων που αποκτήθηκαν εδώ και 150 χρόνια. Χωρίς υπερβολή, το πεδίο φαίνεται απέραντο και η πρόοδος των ανακαλύψεων της τελευταίας τριακονταετίας μας ωθεί συνεχώς σε νέες ανεξερεύνητες περιοχές. [1]

## 1.2 Νευρικά κύτταρα

Η απλούστερη δομική μονάδα στην οποία μπορεί να διαιρεθεί ένας οργανισμός και να διατηρεί τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της ζωής ονομάζεται κύτταρο. Μακροσκοπικά, τα δομικά στοιχεία που αποτελούν ένα ευκαρυωτικό κύτταρο είναι η κυτταρική μεμβράνη, το κυτταρόπλασμα και ο πυρήνας.



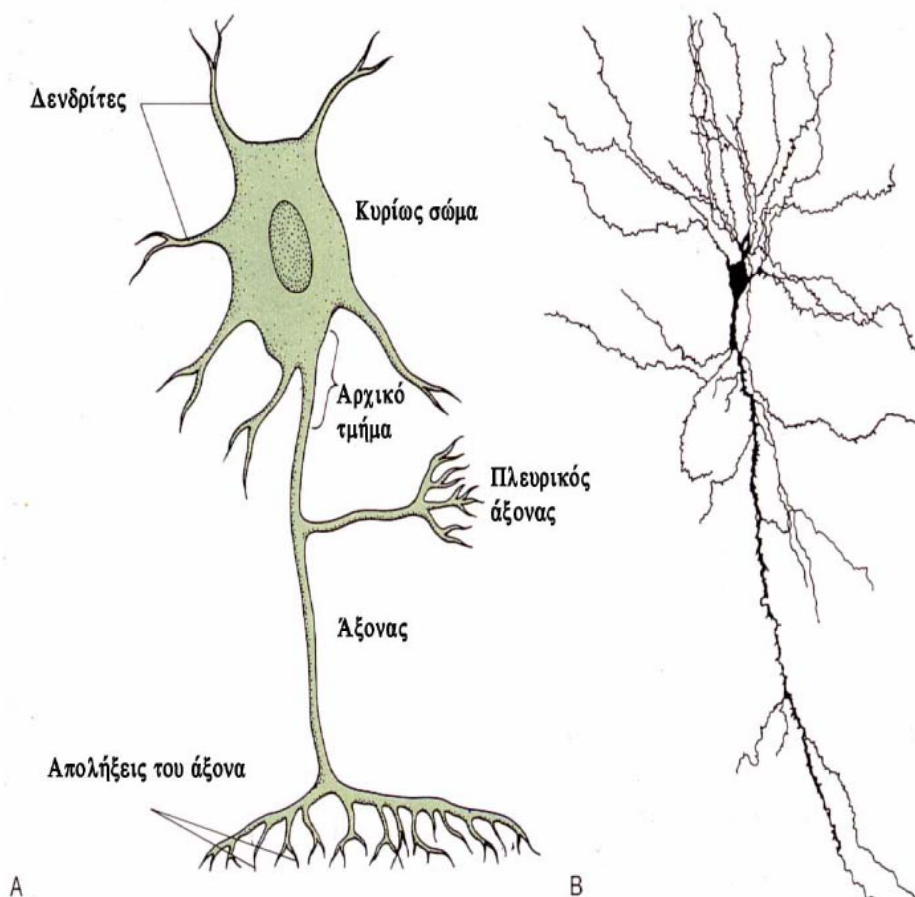
Σχήμα 1 – Δομή Κυττάρου

Η κυτταρική μεμβράνη είναι ένα από τα σημαντικότερα δομικά στοιχεία του κυττάρου. Μία από τις βασικές λειτουργίες της είναι η διατήρηση βαθμίδων συγκεντρώσεων κατά μήκος της μεμβράνης. Αυτό σημαίνει τη δημιουργία και διατήρηση βαθμίδων συγκεντρώσεων ορισμένων χημικών ουσιών κατά μήκος της μεμβράνης. Για παράδειγμα, η κατανομή συγκεντρώσεων του ιόντος  $Ca^{++}$  είναι σημαντική για την λειτουργία του μυός, γιατί η συστολή του μυός συνδέεται με έκκριση  $Ca^{++}$ .

Τα ηλεκτρικά δυναμικά στα βιολογικά συστήματα είναι δυνατόν να δημιουργηθούν από διάφορες πηγές. Μία από αυτές είναι η μεταβολή της συγκέντρωσης των ιόντων κατά μήκος της κυτταρικής μεμβράνης.

Εδώ, θα μας απασχολήσουν τα νευρικά κύτταρα τα οποία αποτελούν τη βασική μονάδα του νευρικού συστήματος. Τα νευρικά κύτταρα παράγουν ηλεκτρικά σήματα που μεταδίδονται από το ένα μέρος του κυττάρου στο άλλο, ενώ ταυτόχρονα εκλύουν βιοχημικές ουσίες (αγγελιοφόρους), προκειμένου να επικοινωνήσουν με άλλα κύτταρα. Οι νευρώνες, αν και παρουσιάζουν ποικιλία μεγεθών και σχημάτων, αποτελούνται από τέσσερα μέρη.

- Το κυρίως σώμα
- Τους δενδρίτες
- Τον άξονα
- Τις απολήξεις του άξονα

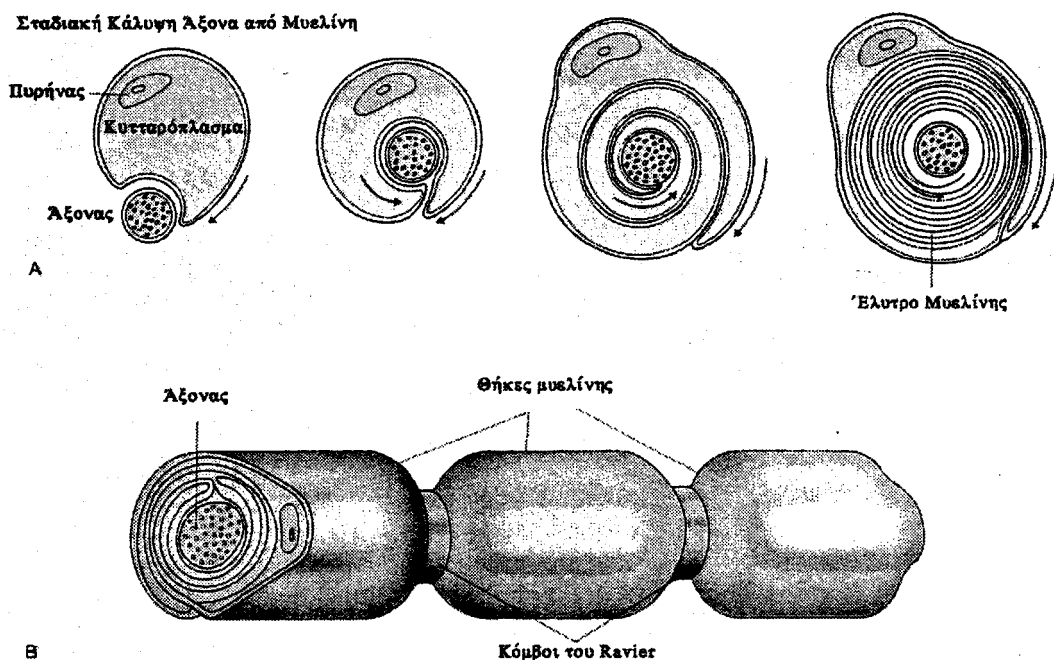


Σχήμα 2 – Νευρικό κύτταρο με κυρίως σώμα, δενδρίτες, άξονα και απολήξεις του άξονα

Οι δενδρίτες σχηματίζουν δομές που διακλαδίζονται από το κυρίως σώμα του κυττάρου προς τα έξω. Οι περισσότερες συνάψεις, τα σημεία δηλαδή τα οποία λαμβάνουν τα σήματα από τους άλλους νευρώνες, βρίσκονται στους δενδρίτες και το κυρίως σώμα του κυττάρου.

Ο άξονας ή νευρική ίνα, αποτελεί μια προέκταση του κυτταρικού σώματος. Το τμήμα του άξονα που βρίσκεται πλησιέστερα στο σώμα του κυττάρου, μαζί με το μέρος του κυττάρου όπου γίνεται η σύνδεση, ονομάζεται αρχικό τμήμα. Από το σημείο αυτό ξεκινούν τα ηλεκτρικά σήματα που διαδίδονται μακριά από το κυρίως σώμα, κατά μήκος του άξονα. Ο άξονας μπορεί επίσης να έχει και άλλες, εγκάρσιες διακλαδώσεις ενώ στις απολήξεις, τόσο του άξονα, όσο και των διακλαδώσεων υπάρχουν περαιτέρω διακλαδώσεις. Όλες οι διακλαδώσεις καταλήγουν σε απολήξεις που είναι υπεύθυνες για τη μεταβίβαση των χημικών σημάτων από τους νευρώνες.

Οι άξονες μερικών νευρώνων καλύπτονται από μυελίνη, μια λιπώδη μεμβρανική θήκη που σχηματίζεται από κύτταρα στήριξης περιελισσόμενα γύρω από τον άξονα, η οποία επιταχύνει τη διέλευση των ηλεκτρικών σημάτων κατά μήκος του άξονα. Μεταξύ δύο θηκών μυελίνης παρεμβάλλεται ένα τμήμα άξονα που παραμένει εκτεθειμένο στο εξωκυττάριο υγρό. Τα μέρη αυτά του άξονα, των οποίων η μεμβράνη είναι εκτεθειμένη στο εξωκυττάριο υγρό, ονομάζονται κόμβοι του Ranvier.



Σχήμα 3 – Θήκη Μυελίνης

Οι νευρώνες, ανάλογα με τη λειτουργία την οποία επιτελούν, διακρίνονται σε προσαγωγούς, απαγωγούς και διανευρώνες. Οι προσαγωγοί νευρώνες μεταφέρουν πληροφορία από τους ιστούς και τα όργανα του κυττάρου στο κεντρικό νευρικό σύστημα, οι απαγωγοί μεταφέρουν ηλεκτρικά σήματα από το κεντρικό νευρικό σύστημα προς τους μύες ή τα κύτταρα αδένων και οι διανευρώνες συνδέουν τους απαγωγούς και προσαγωγούς νευρώνες.

Στα σημεία του κυττάρου που βρίσκονται στη μεγαλύτερη απόσταση από το Κεντρικό Νευρικό Σύστημα, οι προσαγωγοί νευρώνες διαθέτουν υποδοχείς οι οποίοι μπορεί να είναι είτε εξειδικευμένες απολήξεις του νευρώνα είτε ξεχωριστά κύτταρα που όμως συνδέονται στενά με αυτόν. Ο υποδοχείς, ως απόκριση σε διάφορες φυσικές ή

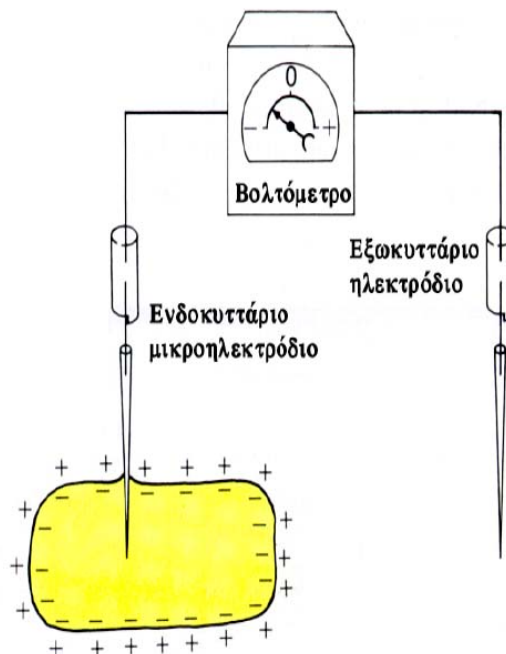
χημικές μεταβολές στο περιβάλλον τους προκαλούν τη δημιουργία ηλεκτρικών σημάτων μέσα στο νευρώνα, ο οποίος με τη σειρά του τα μεταδίδει στον εγκέφαλο ή το νωτιαίο μυελό.

Οι νευρώνες αποτελούν μόνο το 10% των κυττάρων του κεντρικού νευρικού συστήματος. Τα υπόλοιπα κύτταρα ονομάζονται νευρογλοιακά και ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά τους είναι ότι διακλαδίζονται σε πολύ μικρότερο βαθμό σε σχέση με τους νευρώνες. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι νευρώνες να αποτελούν το 50% του όγκου του κεντρικού νευρικού συστήματος.

Ένας τύπος νευρογλοιακών κυττάρων είναι και τα ολιγοδενδρογλοιακά, τα οποία σχηματίζουν τη μυελίνη που καλύπτει τους άξονες των νευρώνων του κεντρικού νευρικού συστήματος. Ένας άλλος τύπος νευρογλοιακών κυττάρων είναι τα αστρογλοιακά, τα οποία επιτελούν πολλαπλές, σημαντικές λειτουργίες. Τα αστρογλοιακά κύτταρα θεωρείται ότι ρυθμίζουν τη σύσταση του εξωκυττάριου υγρού του κεντρικού νευρικού συστήματος, μετακινώντας ιόντα καλίου και νευροδιαβιβαστές από το εξωκυττάριο υγρό προς τις συνάψεις. Θεωρείται επίσης ότι υποστηρίζουν το μεταβολισμό των νευρώνων παρέχοντάς τους για παράδειγμα γλυκόζη και απομακρύνοντας αμμωνία.

### 1.3 Δυναμικά μεμβρανών και ροή Ιόντων

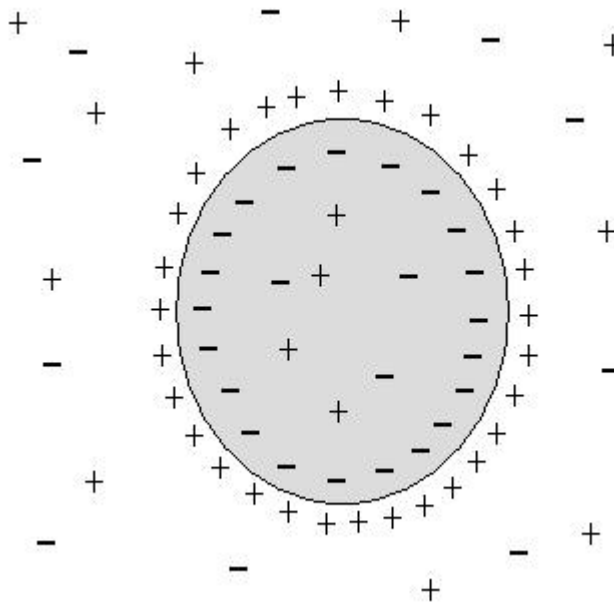
Όλα τα κύτταρα σε συνθήκες ηρεμίας έχουν μια διαφορά δυναμικού κατά μήκος των μεμβρανών, με το εσωτερικό του κυττάρου αρνητικά φορτισμένο ως προς το εξωτερικό. Αυτό ονομάζεται **δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης**. Η τιμή του κυμαίνεται από -5 έως -100 mV, ανάλογα με τον τύπο του κυττάρου. Για τους νευρώνες η τιμή κυμαίνεται από -40 έως -75 mV και μπορεί να μεταβληθεί ταχύτατα από κάποια εξωτερική διέγερση. Η δυνατότητα αυτή των κυττάρων έχει κρίσιμη σημασία για τη λειτουργία τους.



Σχήμα 4 – Δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης

Το δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης οφείλεται στο γεγονός ότι στο εσωτερικό του κυττάρου υπάρχει περίσσεια αρνητικών φορτίων (ιόντων), ενώ στο εξωτερικό περίσσεια θετικών φορτίων. Η περίσσεια αρνητικών ιόντων στο εσωτερικό, έλκεται ηλεκτρικά από τα θετικά ιόντα στο εξωτερικό και αντιστρόφως. Με τον τρόπο αυτό, η περίσσεια ιόντων

συγκεντρώνεται σε ένα λεπτό φλοιό στην εσωτερική και εξωτερική επιφάνεια της μεμβράνης, ενώ ο κύριος όγκος του ενδοκυττάρου και ο κύριος όγκος του εξωκυττάρου υγρού παραμένουν ηλεκτρικώς ουδέτεροι.



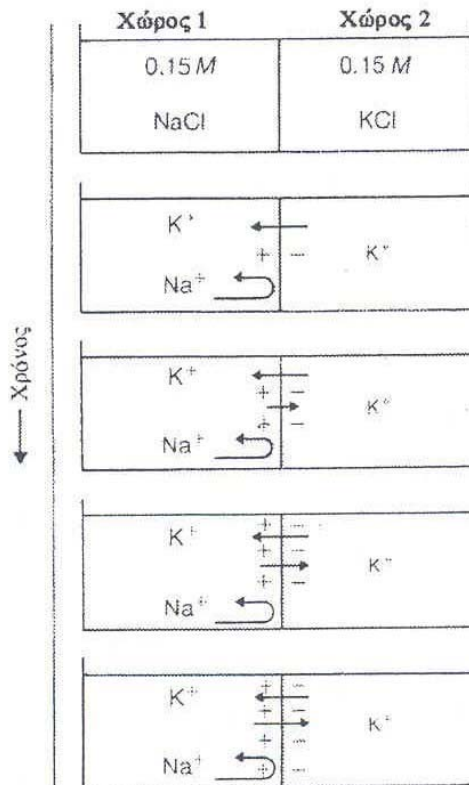
**Σχήμα 5 – Κατανομή φορτίων στη μεμβράνη**

Η τιμή του δυναμικού ηρεμίας καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες:

- Τη διαφορά στη συγκέντρωση ιόντων μεταξύ ενδοκυττάρου και εξωκυττάρου υγρού
- Τη διαπερατότητα της μεμβράνης στα διάφορα ιόντα

Η συγκέντρωση ιόντων  $\text{Na}^+$  και  $\text{Cl}^-$  είναι υψηλότερη στο εξωκυττάριο υγρό ενός νευρικού κυττάρου, ενώ η συγκέντρωση ιόντων  $\text{K}^+$  είναι υψηλότερη στο ενδοκυττάριο υγρό. Για την καλύτερη κατανόηση του τρόπου δημιουργίας δυναμικού της μεμβράνης από τις διαφορές συγκεντρώσεων διαφόρων ιόντων, παρατίθεται το Σχήμα 6 όπου εξετάζεται η περίπτωση μιας μεμβράνης που είναι διαπερατή από ιόντα καλίου αλλά όχι και από ιόντα νατρίου.





Σχήμα 6 – Διαφορές συγκέντρωσης ιόντων κατά μήκος της μεμβράνης

Αρχικά, δεν υπάρχει διαφορά δυναμικού κατά μήκος της μεμβράνης γιατί η συγκέντρωση των μονοσθενών ιόντων στα δύο μέρη είναι ίδια (0,15M), ενώ ο αριθμός των θετικών ιόντων  $\text{Na}^+$  και  $\text{K}^+$ , εξουδετερώνονται από ίσο αριθμό  $\text{Cl}^-$ . Λόγω της οσμωτικής πίεσης και επειδή η μεμβράνη έχει ανοιχτές διόδους ιόντων καλίου, τα ιόντα καλίου θα αρχίσουν να διαχέονται από το χώρο 2 προς το χώρο 1. Σε σύντομο χρονικό διάστημα, ο χώρος 1 θα έχει περίσσεια θετικού φορτίου και ο χώρος 2 θα έχει περίσσεια αρνητικού φορτίου, δηλαδή θα υπάρχει διαφορά δυναμικού κατά μήκος της μεμβράνης.

Αυτή η διαφορά δυναμικού είναι ο δεύτερος παράγοντας που επηρεάζει την κίνηση των ιόντων μέσω της μεμβράνης. Καθώς αυξάνεται το θετικό φορτίο του χώρου 1 και το αρνητικό φορτίο του χώρου 2, η διαφορά δυναμικού της μεμβράνης επηρεάζει την κίνηση των ιόντων καλίου, τα οποία έλκονται από το αρνητικό φορτίο του χώρου 2 και απωθούνται από το θετικό φορτίο του χώρου 1.

Όσο οι δυνάμεις που οφείλονται στη βαθμίδα συγκέντρωσης θα είναι μεγαλύτερες από τις ηλεκτρικές δυνάμεις, τα ιόντα καλίου που κινούνται προς το χώρο 1 θα είναι περισσότερα από αυτά που κινούνται προς το χώρο 2, με αποτέλεσμα να αυξάνεται το δυναμικό της μεμβράνης. Το δυναμικό της μεμβράνης για το οποίο η ηλεκτρική δύναμη για ένα ιόν γίνεται ίση και αντίθετη με τη δύναμη διάχυσης του ιόντος αυτού, ονομάζεται δυναμικό ισορροπίας του ιόντος.

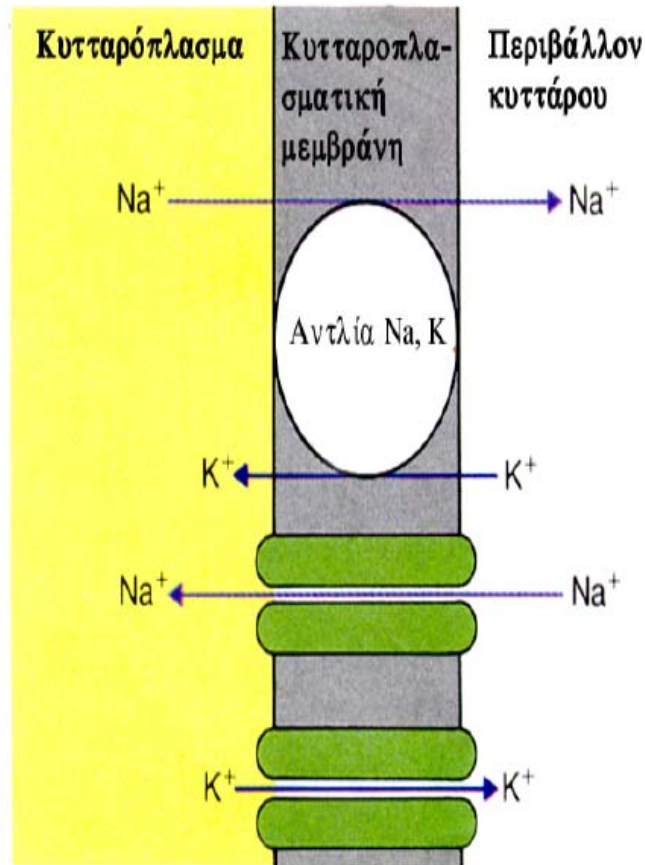
Η τιμή του δυναμικού ισορροπίας για ένα ιόν, εξαρτάται από τη βαθμίδα της συγκέντρωσης του ιόντος μέσω της μεμβράνης. Αν οι συγκεντρώσεις είναι ίσες, η βαθμίδα θα είναι μηδέν και το ισοδύναμο δυναμικό επίσης μηδέν. Όσο υψηλότερη είναι η βαθμίδα συγκέντρωσης, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το δυναμικό ισορροπίας για το ιόν αυτό, αφού απαιτείται μεγαλύτερη ηλεκτρική δύναμη για να εξισορροπηθεί η αντίστοιχη δύναμη διάχυσης. Για τους νευρώνες το δυναμικό ισορροπίας για το  $\text{K}^+$  είναι  $-90 \text{ mV}$  με το εσωτερικό του κυττάρου αρνητικό, ενώ το αντίστοιχο για το  $\text{Na}^+$  είναι  $+60 \text{ mV}$ , θετικό

στο εσωτερικό του κυττάρου. Επομένως, για κάθε ιόν το δυναμικό ισορροπίας έχει διαφορετική τιμή και κατεύθυνση.

Στην περίπτωση ενός νευρικού κυττάρου σε ηρεμία, η συγκέντρωση ιόντων καλίου είναι πολύ μεγαλύτερη στο εσωτερικό του κυττάρου από ότι στο εξωτερικό, ενώ η διαπερατότητα της μεμβράνης του κυττάρου από ιόντα καλίου είναι περίπου 50 με 75 φορές μεγαλύτερη της διαπερατότητας από ιόντα νατρίου. Έτσι, προκαλείται μια διαφορά δυναμικού εξαιτίας κυρίως της διάχυσης των ιόντων καλίου μέσω της μεμβράνης προς το εξωτερικό του κυττάρου. Το δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης που μετριέται πειραματικά, όμως, δεν είναι ίσο με το δυναμικό ισορροπίας των ιόντων καλίου, αφού η μεμβράνη διαθέτει και κάποιες διόδους για τα ιόντα νατρίου. Έτσι, κάποια ιόντα νατρίου διαχέονται στο εσωτερικό του κυττάρου μέσω της μεμβράνης, ακυρώνοντας την επίδραση στο δυναμικό ηρεμίας ενός ισοδύναμου αριθμού ιόντων καλίου που την ίδια στιγμή διαχέονται προς τα έξω.

Επομένως, στην τυπική τιμή του δυναμικού ηρεμίας ενός νευρώνα (-70 mV), ούτε τα ιόντα καλίου, ούτε τα ιόντα νατρίου βρίσκονται στο δυναμικό ισορροπίας τους, οπότε υπάρχει διάχυση ιόντων νατρίου προς το εσωτερικό και ιόντων καλίου προς το εξωτερικό του κυττάρου. Παρόλη όμως της συνεχιζόμενη διάχυση ιόντων νατρίου και καλίου, οι συγκεντρώσεις τους δε μεταβάλλονται, αφού υπάρχουν μηχανισμοί ενεργού μεταφοράς, οι οποίοι χρησιμοποιούν ενέργεια που προέρχεται από το μεταβολισμό του κυττάρου, ώστε να αντλήσουν τα ιόντα νατρίου έξω από το κύτταρο και τα ιόντα καλίου μέσα σε αυτό. Στην πραγματικότητα, τα δύο αυτά είδη ιόντων μεταφέρονται με το ίδιο ένζυμο της μεμβράνης, την Na,K-ATPάση.

Σε ένα κύτταρο που ηρεμεί, ο αριθμός των ιόντων που μετακινούνται από την «αντλία» Na,K-ATPάση είναι ίσος προς τον αριθμό των ιόντων που διαχέονται μέσω της μεμβράνης λόγω οσμωτική πίεσης και/ή ηλεκτρικών δυνάμεων, οπότε οι συγκεντρώσεις ιόντων καλίου και νατρίου στο κύτταρο δεν μεταβάλλονται.



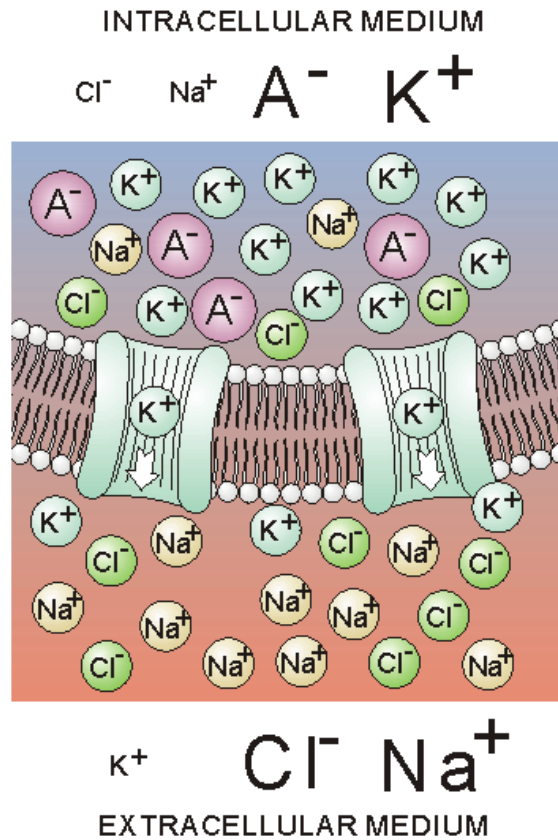
Σχήμα 7 – Ηλεκτρονική αντλία του ενζύμου Na,K-ATPάση

Όσο οι βαθμίδες συγκέντρωσης παραμένουν σταθερές και δε μεταβάλλεται η διαπερατότητα της μεμβράνης ως προς τα διάφορα είδη ιόντων, το δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης παραμένει σταθερό. Αυτή η σταθερότητα όμως δεν εκφράζει κατάσταση ισορροπίας, αλλά μόνιμη κατάσταση, αφού για να διατηρηθεί η κατάσταση αυτή απαιτείται ενέργεια κυτταρικού μεταβολισμού με τη μορφή ιοντικής αντλίας.

Τα παραπάνω περιγράφουν το δυναμικό της μεμβράνης που οφείλεται μόνο στην παθητική μεταφορά ιόντων λόγω βαθμίδων συγκέντρωσης και φορτίου, με τη βαθμίδα συγκέντρωσης να διατηρείται σταθερή μέσω μεμβρανικών αντλιών. Στο δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης, όμως, συνεισφέρει και ένα ακόμα συστατικό που αντανακλά τον άμεσο διαχωρισμό φορτίου και τη δημιουργία μεταφοράς δυναμικού στη μεμβράνη μέσω μεταφοράς ιόντων από το ένζυμο Na,K-ATPάση. Αν το ένζυμο μετέφερε ίσο αριθμό ιόντων Na και K μέσω της μεμβράνης και προς διαφορετικές κατευθύνσεις δε θα συνεισέφερε άμεσα στο διαχωρισμό φορτίων, με αποτέλεσμα ο τελευταίος να οφείλεται μόνο σε διάχυση ιόντων. Στην περίπτωση όμως που δε μεταφέρεται ίσος αριθμός ιόντων και η αντλία πραγματοποιεί άμεσο διαχωρισμό φορτίου, τότε η αντλία ονομάζεται και ηλεκτρογόνος. Το ένζυμο Na,K-ATPάση αποτελεί ηλεκτρογόνο αντλία, αφού μεταφέρει τρία ιόντα νατρίου έξω από το κύτταρο για κάθε δύο ιόντα καλίου που μεταφέρει μέσα σε αυτό.

Αναφορικά με το χλώριο, οι μεμβράνες πολλών κυττάρων είναι διαπερατές από τα ιόντα του και δεν περιέχουν αντίστοιχες αντλίες. Έτσι, στα κύτταρα αυτά το δυναμικό της μεμβράνης, το οποίο δημιουργείται από τις αλληλεπιδράσεις που προαναφέρθηκαν, επιδρά στα χλωριόντα. Το αρνητικά φορτισμένο ενδοκυττάριο υγρό προκαλεί κίνηση χλωριόντων προς το εξωτερικό του κυττάρου μέχρι να δημιουργηθεί βαθμίδα συγκέντρωσης. Αυτή η βαθμίδα συγκέντρωσης προκαλεί με τη σειρά της διάχυση χλωριόντων προς το εσωτερικό

του κυττάρου λόγω οσμωτικής πίεσης. Η διάχυση προς το εσωτερικό του κυττάρου είναι ακριβώς αντίθετη με τη διάχυση λόγω ηλεκτρικών δυνάμεων προς το εξωτερικό. Το αποτέλεσμα είναι ότι το δυναμικό ισορροπίας για τα χλωριόντα είναι ίσο με το δυναμικό ηρεμίας και το χλώριο δε συνεισφέρει στο δυναμικό ηρεμίας.



Σχήμα 8 – Δίοδοι ιόντων στη μεμβράνη

#### 1.4 Βαθμωτά δυναμικά και δυναμικά δράσης

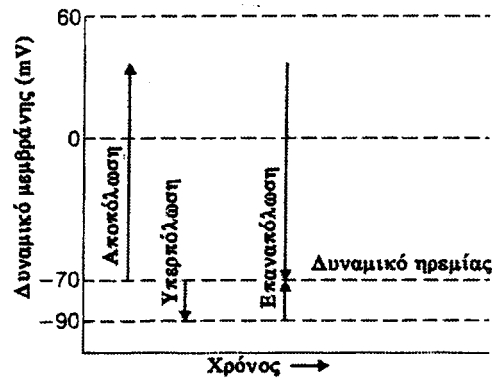
Οι παροδικές μεταβολές στο δυναμικό της μεμβράνης προκαλούν ηλεκτρικά σήματα που μπορούν να αλλάξουν τις λειτουργίες του κυττάρου. Οι αλλαγές αυτές είναι ο πιο σημαντικός τρόπος διαχείρισης και μεταφοράς ερεθισμάτων από τα νευρικά κύτταρα. Τα προαναφερθέντα ηλεκτρικά σήματα μπορούν να εμφανιστούν με δύο μορφές, τα βαθμωτά δυναμικά και τα δυναμικά δράσης, που περιγράφονται αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους.

Μία μεμβράνη ονομάζεται αποπολωμένη όταν το δυναμικό της είναι λιγότερο αρνητικό (δηλαδή πλησιέστερο στο 0) από το δυναμικό ισορροπίας της. Κατά σύμβαση, ο όρος αυτός περιλαμβάνει και καταστάσεις όπου το δυναμικό της μεμβράνης αντιστρέφεται.

Η μεμβράνη ονομάζεται υπερπολωμένη όταν το δυναμικό της είναι περισσότερο αρνητικό από το δυναμικό ισορροπίας, ενώ η διαδικασία κατά την οποία το δυναμικό ισορροπίας μιας μεμβράνης που έχει είτε αποπολωθεί είτε υπερπολωθεί επιστρέφει προς την τιμή ηρεμίας, ονομάζεται επαναπόλωση.

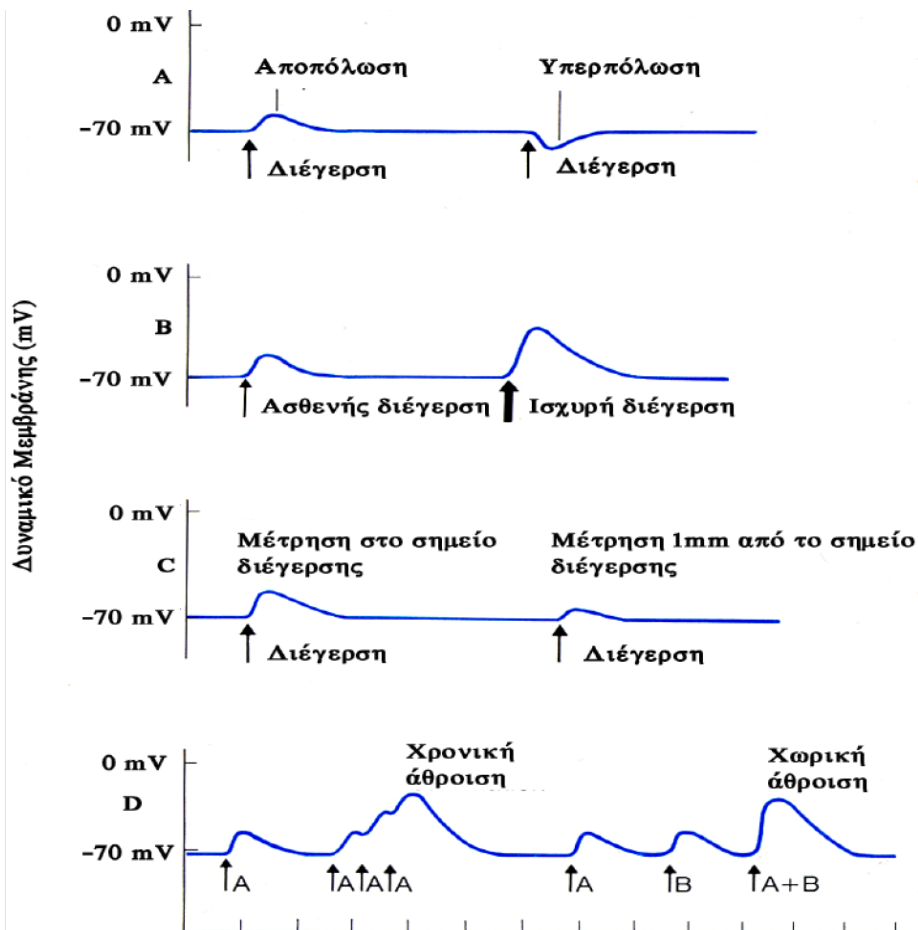
## Βαθμωτά Δυναμικά

Τα βαθμωτά δυναμικά μεταφέρουν ερεθίσματα σε μικρές αποστάσεις. Πρόκειται για μικρές μεταβολές στο δυναμικό της μεμβράνης που περιορίζονται σε μία μικρή περιοχή αυτής και εξασθενούν μετά από 1-2 mm από το σημείο διέγερσης. Τα δυναμικά αυτά παράγονται συνήθως από κάποιο ερέθισμα είτε προς την κατεύθυνση της αποπόλωσης είτε προς την κατεύθυνση της υπερπόλωσης. Ονομάζονται βαθμωτά γιατί το εύρος της αλλαγής του δυναμικού μεταβάλλεται και σχετίζεται με το μέγεθος του ερεθίσματος.



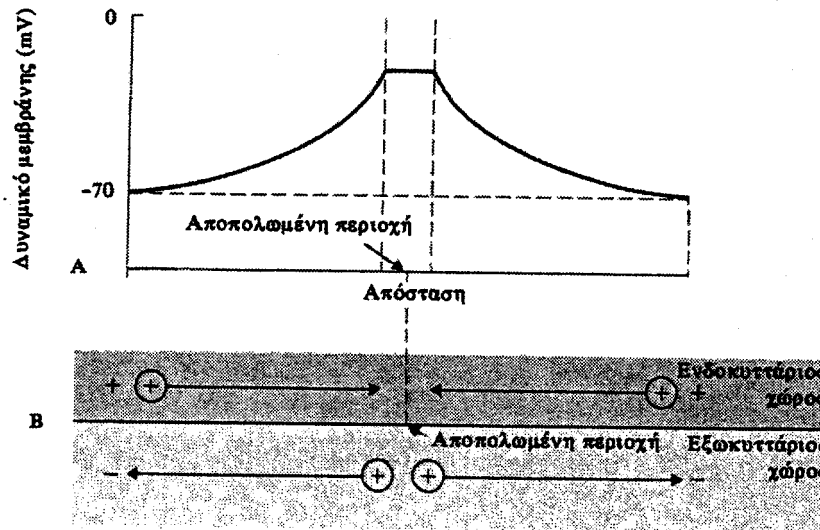
Σχήμα 9 – Βαθμωτά δυναμικά

Όταν δημιουργηθεί ένα βαθμωτό δυναμικό, δημιουργείται ροή φορτίου από το σημείο διέγερσης προς γειτονικές περιοχές της μεμβράνης, που βρίσκονται σε δυναμικό ηρεμίας. Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ρεύμα στο ενδοκυττάριο και εξωκυττάριο χώρο, ανάλογο με την τιμή του βαθμωτού δυναμικού.



Σχήμα 10 – Βαθμωτά δυναμικά

Στο σχήμα 10 μια μικρή περιοχή της μεμβράνης έχει αποπολωθεί από μια διέγερση και επομένως έχει δυναμικό λιγότερο αρνητικό από τις γειτονικές περιοχές. Μέσα στο κύτταρο, τα θετικά φορτία μετακινούνται εκτός της αποπολωμένης περιοχής προς την πλέον αρνητική περιοχή της μεμβράνης, που βρίσκεται σε δυναμικό ηρεμίας. Ταυτόχρονα, τα θετικά φορτία που βρίσκονται στο εξωτερικό, μετακινούνται από την πιο θετική περιοχή του δυναμικού ηρεμίας, προς τη λιγότερο θετική που μόλις δημιουργήθηκε από την αποπόλωση. Αυτό το τοπικό ρεύμα (κίνηση θετικών φορτίων) απομακρύνει τα θετικά φορτία από τις περιοχές που περιβάλλουν τη θέση της αποπόλωσης στο εξωτερικό της μεμβράνης και προσθέτει θετικά φορτία στην περιοχή που περιβάλλει τη θέση αποπόλωσης κατά μήκος του εσωτερικού της μεμβράνης.



Σχήμα 11 – Τοπικά ρεύματα

Τα τοπικά ρεύματα φθίνουν όσο μεγαλώνει η απόσταση από τη θέση που δημιουργήθηκε το δυναμικό, για το λόγο αυτό τα βαθμωτά δυναμικά λειτουργούν ως σήματα μόνον σε πολύ μικρές αποστάσεις. Παρά ταύτα ορισμένοι νευρώνες επικοινωνούν μόνο δια μέσου βαθμωτών δυναμικών.

### Δυναμικά Δράσης

Τα δυναμικά δράσης παρουσιάζουν σημαντικές διαφορές ως προς τα βαθμωτά δυναμικά. Είναι ταχείες μεταβολές του δυναμικού της μεμβράνης οι οποίες μπορεί να διαρκέσουν μόνο 1 ms, κατά τη διάρκεια του οποίου όμως το δυναμικό της μεμβράνης μπορεί να μεταβληθεί μέχρι και κατά 100 mV, από -70 έως 40 mV και μετά να επαναπολωθεί στην τιμή του δυναμικού ηρεμίας. Μόνον οι νευρώνες, οι μύες και ορισμένα κύτταρα των αδένων, έχουν μεμβράνες ικανές να παράγουν δυναμικά δράσης. Αυτές ονομάζονται διεγερσιμες μεμβράνες και η ικανότητά τους να παράγουν δυναμικά δράσης είναι γνωστή ως διεγερσιμότητα. Η μετάδοση των δυναμικών δράσης χρησιμοποιείται από το νευρικό σύστημα για επικοινωνία σε μεγάλες αποστάσεις.

Στις επόμενες παραγράφους αναλύονται ο τρόπος με τον οποίο μία διεγερσιμη μεμβράνη προκαλεί ταχείες μεταβολές στο δυναμικό της, ο τρόπος με τον οποίο ένα ερέθισμα αλληλεπιδρά με μία διεγερσιμη μεμβράνη για να προκαλέσει ένα δυναμικό δράσης και ο μηχανισμός μετάδοσης ενός δυναμικού δράσης κατά μήκος μιας διεγερσιμης μεμβράνης.

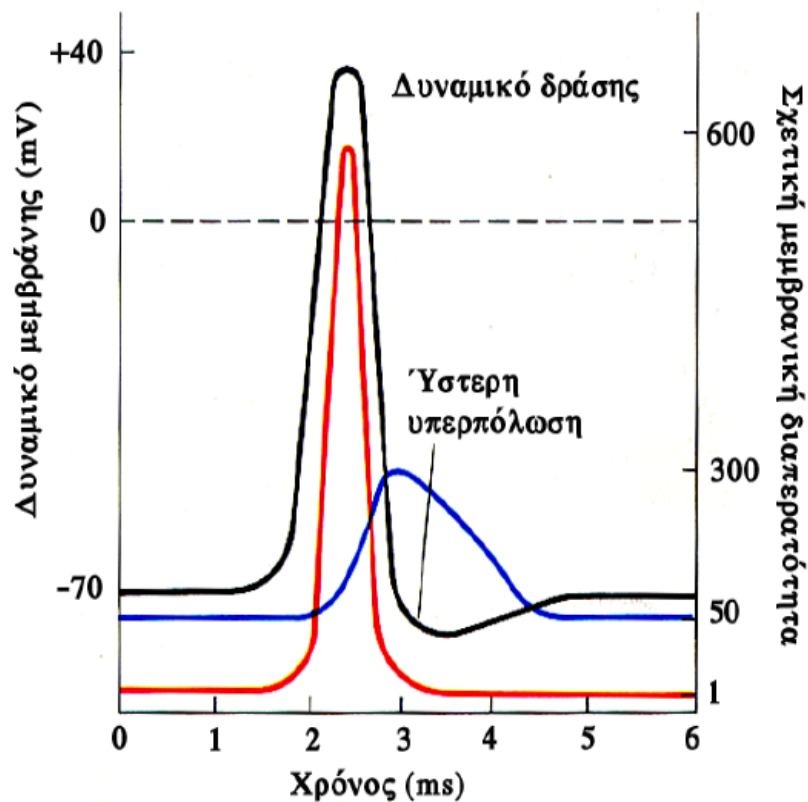
Τα δυναμικά δράσης μπορούν να ερμηνευθούν με τις έννοιες που έχουν ήδη αναπτυχθεί, για να περιγραφούν οι μηχανισμοί δημιουργίας των δυναμικών ηρεμίας. Το μέτρο του δυναμικού ηρεμίας εξαρτάται από τις βαθμίδες συγκέντρωσης και τις διαφορετικές διαπερατότητες σε ιόντα, της μεμβράνης. Αυτή η εξάρτηση ισχύει και για το δυναμικό δράσης το οποίο προκύπτει από μία παροδική αλλαγή στη διαπερατότητα της μεμβράνης σε ιόντα, καθώς οι βαθμίδες των συγκεντρώσεων παραμένουν αμετάβλητες.

Στην κατάσταση ηρεμίας οι ανοιχτές δίοδοι της μεμβράνης είναι κυρίως εκείνες που είναι διαπερατές σε ιόντα καλίου και χλωρίου. Σχεδόν όλες οι δίοδοι νατρίου είναι κλειστές, και το δυναμικό ηρεμίας προσεγγίζει πολύ περισσότερο το δυναμικό ισορροπίας του νατρίου παρά αυτό του καλίου. Κατά τη διάρκεια του δυναμικού δράσης, οι διαπερατότητες της μεμβράνης σε ιόντα νατρίου και καλίου, μεταβάλλονται σημαντικά. Κατά τη φάση αποπόλωσης του δυναμικού δράσης, οι δίοδοι νατρίου ανοίγουν,

αυξάνοντας τη διαπερατότητα της μεμβράνης σε ιόντα νατρίου κατά αρκετές εκατοντάδες φορές.

Κατά τη διάρκεια αυτού του χρονικού διαστήματος, τα θετικά φορτία που εισέρχονται στο κύτταρο με τη μορφή ιόντων νατρίου είναι περισσότερα από αυτά που εξέρχονται με τη μορφή ιόντων καλίου και έτσι το δυναμικό της μεμβράνης γίνεται λιγότερο αρνητικό και τελικά αντιστρέφεται.

Τα δυναμικά δράσης στα νευρικά κύτταρα διαρκούν περίπου 1 ms. Η ραγδαία αυτή επιστροφή του δυναμικού της μεμβράνης στα επίπεδα ηρεμίας οφείλεται κατ' αρχάς στο κλείσιμο των διόδων νατρίου που ήταν ανοιχτοί κατά τη φάση της αποπόλωσης και κατά δεύτερον στο άνοιγμα μιας ειδικής ομάδας διόδων καλίου. Η χρονική σειρά αυτών των δύο γεγονότων φαίνεται στο Σχήμα 12.



Σχήμα 12 – Δυναμικό Δράσης

Το κλείσιμο των διόδων νατρίου από μόνο του, θα αποκαθιστούσε το δυναμικό της μεμβράνης στη στάθμη ηρεμίας αφού η ροή καλίου προς τα έξω θα υπερέβαινε τη ροή νατρίου προς τα μέσα. Όμως, η διαδικασία επιταχύνεται με την ταυτόχρονη αύξηση της διαπερατότητας καλίου. Αυτά τα δύο γεγονότα, δηλαδή το κλείσιμο των διόδων νατρίου και το άνοιγμα διόδων καλίου, δημιουργούν διάχυση καλίου προς το εξωτερικό του κυττάρου, που είναι πολύ μεγαλύτερη από τη διάχυση νατρίου προς τα μέσα, έτσι η μεμβράνη επιστρέφει ταχέως στη στάθμη ηρεμίας.

Στην πραγματικότητα, αφού κλείσουν οι δίοδοι  $\text{Na}^+$ , ορισμένοι δίοδοι  $\text{K}^+$  παραμένουν ακόμα ανοιχτοί, και γενικά υπάρχει υστερη υπερπόλωση του δυναμικού της μεμβράνης (afterhyperpolarization).

Είναι εύλογο να θεωρήσει κάποιος ότι απαιτούνται κινήσεις πολλών ιόντων, για να παραχθούν τόσο μεγάλες μεταβολές στο δυναμικό. Στην πραγματικότητα, μόνον 1 στα 100000 ιόντα  $\text{K}^+$  στο κύτταρο, διαχέονται προς τα έξω, ώστε να φορτιστεί το  $V_m$  στην τιμή



ηρεμίας και περίπου ο ίδιος αριθμός ιόντων  $\text{Na}^+$  εισέρχεται στο κύτταρο, κατά τη διάρκεια του δυναμικού δράσης. Αυτές οι κινήσεις ιόντων είναι τόσο μικρές ώστε παράγουν απειροστές μεταβολές στις ενδοκυττάριας συγκεντρώσεις των ιόντων. Επιπλέον αν αυτός ο μικρός αριθμός ιόντων που διασχίζουν τη μεμβράνη με κάθε δυναμικό δράσης δεν κινούνται ξανά προς τα πίσω, οι βαθμίδες συγκέντρωσης  $\text{Na}^+$  και  $\text{K}^+$  θα εξαφανίζονταν και τα δυναμικά δράσης δεν θα μπορούσαν πλέον να παραχθούν. Η κυτταρική συσσώρευση  $\text{Na}^+$  και η απώλεια  $\text{K}^+$  προλαμβάνονται από τη συνεχή δράση του ενεργού συστήματος μεταφοράς του ενζύμου  $\text{Na,K-ATPάση}$ .

Ο αριθμός των ιόντων που διασχίζουν τη μεμβράνη κατά τη διάρκεια του δυναμικού δράσης είναι τόσο μικρός, ώστε η αντλία δε χρειάζεται να σταματήσει, κατά τη διάρκεια της κίνησης των ιόντων, και ακόμα και αν σταματήσει πειραματικά, χιλιάδες ενεργά δυναμικά θα μπορούσαν να παραχθούν πριν να συμβούν σημαντικές αλλαγές στο δυναμικό ηρεμίας.

Η κίνηση του  $\text{Na}^+$  προς το εσωτερικό του κυττάρου δημιουργεί το αναγκαίο ηλεκτρικό σήμα για να επικοινωνήσουν μεταξύ τους, τα διαφορετικά μέρη του κυττάρου και η άντληση του  $\text{Na}^+$  προς τα έξω αποκαθιστά τη βαθμίδα συγκέντρωσης, με τον τρόπο αυτό το  $\text{Na}^+$  εισέρχεται στο κύτταρο και δημιουργεί νέο σήμα, ως απόκριση σε νέα εξωτερική διέγερση.

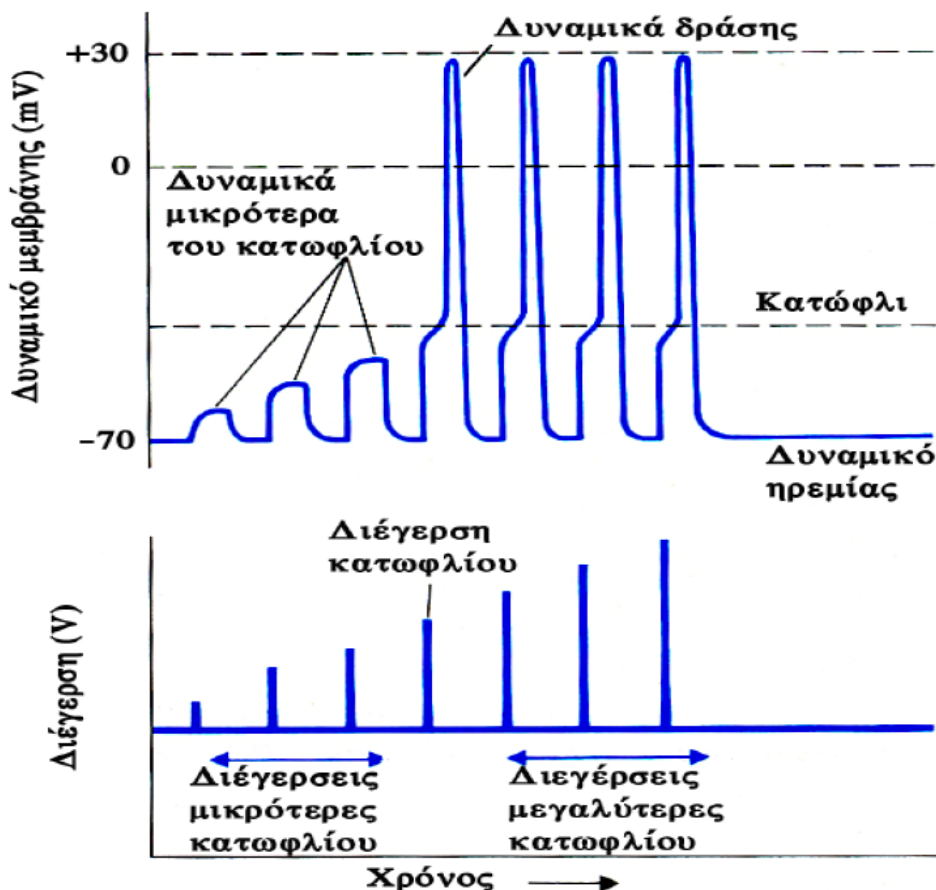
Η μέτρηση των μεταβολών διαπερατότητας αποδεικνύει ότι η διαπερατότητα στο  $\text{Na}^+$  μεταβάλλεται οποτεδήποτε μεταβάλλεται το δυναμικό της μεμβράνης. Ειδικότερα, η υπερπόλωση της μεμβράνης προκαλεί μείωση στη διαπερατότητα  $\text{Na}^+$ , ενώ η αποπόλωση προκαλεί αύξηση στη διαπερατότητα  $\text{Na}^+$ .

Στην πραγματικότητα υπάρχει ένας κύκλος θετικής ανάδρασης, υπεύθυνος για τη φάση ανύψωσης του δυναμικού δράσης: Η αποπόλωση ανοίγει τις διόδους  $\text{Na}^+$ , ώστε αυξάνει η διαπερατότητα της μεμβράνης σε  $\text{Na}^+$ . Το  $\text{Na}^+$  διαχέεται προς τα μέσα. Η προσθήκη θετικού φορτίου στο κύτταρο αποπολώνει περαιτέρω τη μεμβράνη, που με τη σειρά της παράγει ακόμα μεγαλύτερη αύξηση στη διαπερατότητα  $\text{Na}^+$  κ.ο.κ. Οι δίοδοι ιόντων που μπορούν να ανοίγουν ή να κλείνουν με μεταβολές στο δυναμικό της μεμβράνης ονομάζονται δίοδοι ιόντων που είναι ευαίσθητες στο δυναμικό.

### **Κατώφλι**

Τα δυναμικά δράσης παρουσιάζονται μόνον όταν η μεμβράνη αποπολωθεί αρκετά, ώστε η είσοδος ιόντων  $\text{Na}^+$  να υπερβαίνει την έξοδο ιόντων  $\text{K}^+$ , δηλαδή η καθαρή κίνηση θετικού φορτίου να είναι προς τα μέσα. Κατώφλι, ονομάζεται το δυναμικό της μεμβράνης στο οποίο η καθαρή κίνηση ιόντων κατά μήκος της μεμβράνης, αλλάζει για πρώτη φορά από έξω προς τα μέσα και οι αντίστοιχοι διεγέρτες ονομάζονται διεγέρτες κατωφλίου.

Αυτό το κατώφλι είναι  $\sim 15\text{mV}$  αποπολωμένο από το δυναμικό ηρεμίας της μεμβράνης. Έτσι αν το δυναμικό ηρεμίας του νευρώνα είναι  $-70\text{mV}$ , το δυναμικό κατωφλίου θα είναι  $-55\text{mV}$ . Αν η αποπόλωση είναι μικρότερη από την τιμή κατωφλίου, η προς τα έξω κίνηση ιόντων καλίου υπερκαλύπτει την είσοδο ιόντων νατρίου και ο θετικός κύκλος ανάδρασης δεν μπορεί να ξεκινήσει, παρά την αύξηση εισόδου του  $\text{Na}^+$ . Στην περίπτωση αυτή, η μεμβράνη θα επιστρέψει στο επίπεδο ηρεμίας μόλις απομακρυνθεί ο διεγέρτης και δεν δημιουργούνται δυναμικά δράσης. Αυτές οι ασθενείς αποπολώσεις είναι δυναμικά κατώτερα του κατωφλίου. (Σχήμα 13)

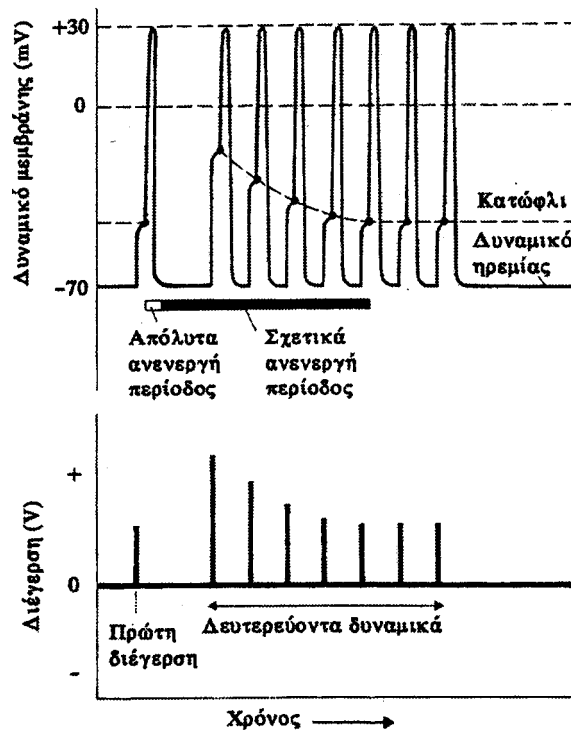


Σχήμα 13 – Κατώφλι, πόλωση και αποπόλωση της μεμβράνης

Επίσης, υπάρχουν διεγέρτες με τιμή μεγαλύτερη του κατώφλιου (suprathreshold stimuli) και τα δυναμικά δράσης που δημιουργούνται έχουν ακριβώς το ίδιο πλάτος με τους διεγέρτες κατώφλιου. Αυτό συμβαίνει γιατί μόλις η τιμή φτάσει την τιμή κατώφλιου το τι συμβαίνει στη μεμβράνη δεν εξαρτάται πλέον από την ένταση της διεγέρσης. Η αποπόλωση συνεχίζεται ως δυναμικό δράσης γιατί λειτουργεί ο θετικής ανάδρασης κύκλος. Τα δυναμικά δράσης ή είναι μέγιστα ή δεν υπάρχουν.

### Περίοδοι Ηρεμίας

Το χρονικό διάστημα που ακολουθεί το πρώτο ενεργό δυναμικό μπορεί να χωριστεί σε δύο υποπεριοχές στις οποίες η συμπεριφορά της μεμβράνης σε ένα δεύτερο ερέθισμα διαφέρει. Στην πρώτη, την απόλυτα ανενεργή περίοδο, ένα δεύτερο ερέθισμα, ανεξάρτητα του πόσο δυνατό είναι, δεν μπορεί να πυροδοτήσει ενεργό δυναμικό. Αυτή η περίοδος διαρκεί ~1msec. Τα επόμενα ~10-15msec χαρακτηρίζουν την **σχετικά ανενεργή περίοδο**, κατά την οποία ένα ερέθισμα είναι δυνατόν να παράγει ένα ενεργό δυναμικό αρκεί να είναι σημαντικά ισχυρότερο από το κατώφλι. Οι μηχανισμοί που είναι υπεύθυνοι για τις ανενεργές περιόδους συνδέονται με τους μηχανισμούς της μεμβράνης που μεταβάλλουν τις διαπερατότητες σε  $\text{Na}^+$  και  $\text{K}^+$ . Η απόλυτα ανενεργή περίοδος αντιστοιχεί στην περίοδο μεταβολών στη διαπερατότητα  $\text{Na}^+$  και η σχετικά ανενεργή περίοδος αντιστοιχεί στην περίοδο που αυξάνεται η διαπερατότητα στο  $\text{K}^+$  (Σχήμα 14).



Σχήμα 14 – Απόλυτα και σχετικά ανενεργή περίοδος δράσης

Η απόλυτη τιμή ηρεμίας περιορίζει τον αριθμό των δυναμικών δράσης που μπορούν να παραχθούν από μια διεγερμένη μεμβράνη, σε ορισμένη χρονική περίοδο. Τα περισσότερα νευρικά κύτταρα αποκρίνονται με συχνότητα έως 100 δυναμικά δράσης ανά δευτερόλεπτο και μερικά μπορούν να παράγουν πολύ υψηλότερες συχνότητες για σύντομες χρονικές περιόδους.

### Διάδοση του Ενεργού Δυναμικού

Αφότου δημιουργηθεί, ένα συγκεκριμένο ενεργό δυναμικό δεν διαδίδεται από μόνο του κατά μήκος της μεμβράνης. Αντίθετα κάθε ενεργό δυναμικό ενεργοποιεί, μέσω δημιουργίας ενός τοπικού ρεύματος, ένα άλλο σε γειτονική περιοχή της μεμβράνης. Η τοπική ροή ρεύματος είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να αποπολώσει τη γειτονική περιοχή της μεμβράνης στο δυναμικό κατωφλίου και να επικρατήσει ο κύκλος θετικής ανάδρασης του νατρίου και να δημιουργηθεί ένα νέο ενεργό δυναμικό σε αυτή τη θέση.

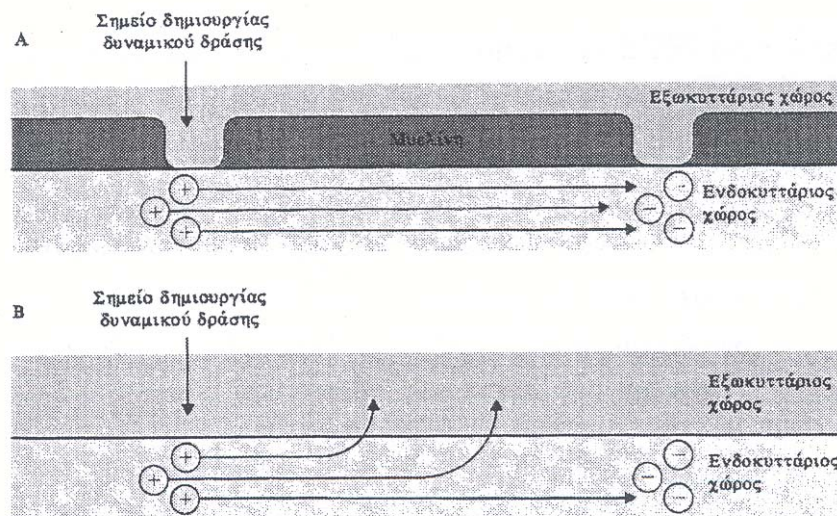
Το νέο ενεργό δυναμικό είναι θεωρητικά ταυτόσημο με αυτό που το προξένησε και παράγει τοπικά ρεύματα από μόνο του, τα οποία αποπολώνουν την περιοχή γύρω από αυτό και δημιουργούν ένα ακόμα ενεργό δυναμικό στη γειτονική περιοχή και αυτό συνεχίζεται κατά μήκος της μεμβράνης. Επομένως, δεν υφίσταται παραμόρφωση καθώς αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται κατά μήκος της μεμβράνης και το ενεργό δυναμικό που φτάνει στο άκρο της μεμβράνης είναι ίδιο σε σχήμα με το αρχικό. Με άλλα λόγια, τα ενεργά δυναμικά δεν εξασθενούν κατά τη διάδοση, όπως τα βαθμωτά δυναμικά.

Λόγω των τοπικών ρευμάτων που υπάρχουν ανάμεσα σε περιοχές διαφορετικού ενεργού δυναμικού, ρέει επίσης φορτίο προς την αρχική θέση διέγερσης από τις νέες διεγερόμενες γειτονικές περιοχές. Όμως, οι περιοχές της μεμβράνης που έχουν μόλις δεχθεί ένα ενεργό δυναμικό είναι ανενεργές και δεν μπορούν να δεχθούν και άλλο. Επομένως, η μόνη διεύθυνση διάδοσης του ενεργού δυναμικού είναι μακριά από τη περιοχή της μεμβράνης, η οποία έχει πρόσφατα υποστεί ενεργό δυναμικό.

Οι διεγερόμενες μεμβράνες είναι ικανές να άγουν ενεργά δυναμικά προς κάθε κατεύθυνση, η δε κατεύθυνση διάδοσης καθορίζεται μάλλον από τη θέση του ερεθίσματος, παρά από κάποια εγγενή ανικανότητα της μεμβράνης να άγει, προς την αντίθετη κατεύθυνση. Για παράδειγμα, το ενεργό δυναμικό σε κύτταρα των σκελετικών μυών ξεκινά κοντά στο μέσον αυτών των κυλινδρικών κυττάρων και διαδίδεται προς τα δύο άκρα, αλλά στα περισσότερα νευρικά κύτταρα, τα ενεργά δυναμικά ξεκινούν στο ένα άκρο του κυττάρου και διαδίδονται προς το άλλο άκρο.

Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το ενεργό δυναμικό κατά μήκος μιας μεμβράνης εξαρτάται από τη διάμετρο της ίνας και από το εάν ή όχι η ίνα έχει θήκη μυελίνης. Όσο μεγαλύτερη η διάμετρος της ίνας, τόσο γρηγορότερη είναι η διάδοση του ενεργού δυναμικού καθώς η μεγαλύτερη ίνα χαρακτηρίζεται από μικρότερη αντίσταση σε τοπικά ρεύματα και γειτονικές περιοχές της μεμβράνης αποκτούν ταχύτερα την τιμή κατωφλίου.

Η μυελίνη, η λιπώδης ουσία που περιβάλλει τους άξονες ορισμένων νευρώνων, είναι ένας μονωτής που καθιστά πιο δύσκολη τη ροή του φορτίου ανάμεσα στα τμήματα του ένδο- και έξω- κυτταρικού υγρού. Τα ενεργά δυναμικά δεν υφίστανται κατά μήκος των τμημάτων της μεμβράνης που προστατεύεται από μυελίνη. Αντίθετα, υφίστανται μόνο όταν το περίβλημα της μυελίνης διακόπτεται στους κόμβους του Ranvier σε τακτά διαστήματα κατά μήκος του άξονα. Επομένως, το ενεργό δυναμικό αναπηδά από έναν κόμβο στον επόμενο καθώς διαδίδεται κατά μήκος μιας ίνας με περίβλημα μυελίνης και για το λόγο αυτό η συγκεκριμένη μέθοδος διάδοσης ονομάζεται διάδοση με άλματα (Σχήμα 15)



Σχήμα 15 – Διάδοση μέσω αλμάτων

Η διάδοση μέσω αλμάτων είναι ταχύτερη, σε σχέση με τη διάδοση σε ίνες που δεν έχουν περίβλημα μυελίνης για την ίδια διάμετρο άξονα, εξαιτίας του ότι λιγότερο φορτίο διαρρέει προς τα έξω, μέσω του τμήματος της μεμβράνης που έχει περίβλημα μυελίνης. Επομένως, περισσότερο φορτίο φτάνει σε μια δεδομένη χρονική στιγμή στον κόμβο, που είναι γειτονικός στον ενεργό κόμβο και ο κόμβος αποπολώνεται γρήγορα και υφίσταται ένα ενεργό δυναμικό συντομότερα, σε σύγκριση με την περίπτωση που δεν υπάρχει μυελίνη.

Οι ταχύτητες μεταφοράς κυμαίνονται από περίπου 0.5m/s για μικρής διαμέτρου ίνες χωρίς περίβλημα μυελίνης, έως περίπου 175m/s για μεγάλης διαμέτρου ίνες με περίβλημα μυελίνης. Για 0.5m/s ένα ενεργό δυναμικό θα ταξιδέψει από το κεφάλι έως τα δάκτυλα του

ποδιού, για ένα άτομο μεσαίου μεγέθους, σε περίπου 4s, ενώ αν έχει ταχύτητα 175m/s η διάρκεια θα είναι 0.01s.

### **Έναρξη των ενεργών δυναμικών**

Στους απαγωγούς νευρώνες, η αρχική αποπόλωση στο κατώφλι επιτυγχάνεται μέσω ενός βαθμωτού δυναμικού που παράγεται στους υποδοχείς των περιφερικών άκρων των νευρώνων, με άλλα λόγια, στα απώτατα άκρα από το κεντρικό νευρικό σύστημα, όπου το νευρικό σύστημα λειτουργικά έρχεται σε επαφή με τον εξωτερικό κόσμο. Σε άλλους νευρώνες, η αποπόλωση στο κατώφλι προέρχεται είτε εξαιτίας ενός βαθμωτού δυναμικού, που δημιουργείται από ένα συναπτικό ερέθισμα στο νευρώνα είτε εξαιτίας αυθόρμητης αλλαγής στο δυναμικό της μεμβράνης του νευρώνα, γνωστό ως δυναμικό βηματοδότη (pacemaker potential). [2]

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

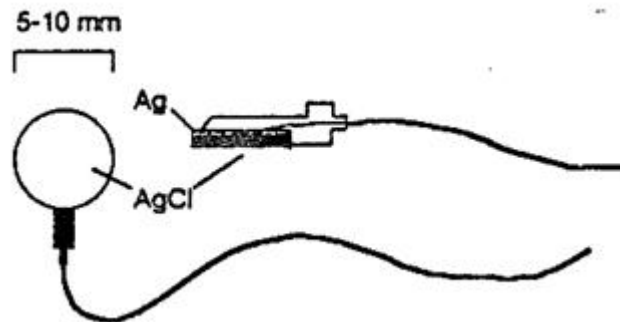
### **ΗΛΕΚΤΡΟΕΓΚΕΦΑΛΟΓΡΑΦΗΜΑ**

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε τις αρχές λειτουργίας του ηλεκτροεγκεφαλογράφου και θα εξετάσουμε την μορφή και την ερμηνεία του ηλεκτροεγκεφαλικού σήματος.

## 2.1 Λειτουργία του Ηλεκτροεγκεφαλογράφου

Η λειτουργία του ηλεκτροεγκεφαλογράφου (ΗΕΓ) στηρίζεται στην καταγραφή των διαφορών δυναμικού, οι οποίες παρουσιάζονται πάνω στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του ανθρώπινου κρανίου, ως αποτέλεσμα της λειτουργίας του εγκεφάλου. Τα μετρούμενα ηλεκτρικά σήματα είναι ασθενή, από περίπου  $1\mu\text{V}$  ως  $100\mu\text{V}$ . Εξαρχής λοιπόν υπάρχει η απαίτηση της όσο το δυνατόν μεγαλύτερης ενίσχυσης των υπό εξέταση σημάτων, και μόνο αυτών, καθώς και της πυκνότερης κάλυψης του κεφαλιού με απαγωγά ηλεκτρόδια. Κατ' αυτόν τον τρόπο αναμένεται ότι θα έχουμε μια ουσιαστική απεικόνιση - αντανάκλαση της εγκεφαλικής δραστηριότητας που θέλουμε να μελετήσουμε.

Το πρώτο στάδιο στην εξαγωγή των σημάτων του ΗΕΓ αποτελούν τα ηλεκτρόδια, οι αισθητήρες του συστήματος, οι οποίοι μετατρέπουν το ρεύμα ιόντων μέσα στο ανθρώπινο σώμα σε ρεύμα ηλεκτρονίων μέσα στα καλώδια, τα οποία μετά οδηγούν αυτό το ρεύμα σε επόμενα στάδια επεξεργασίας. Η επαφή τους με το δέρμα γίνεται μέσω μιας κολλώδους ουσίας ή μέσω ενός μικρού δακτυλιδιού, που από τη μια μεριά προσκολλάται στο δέρμα και από την άλλη στο κυρίως ηλεκτρόδιο.



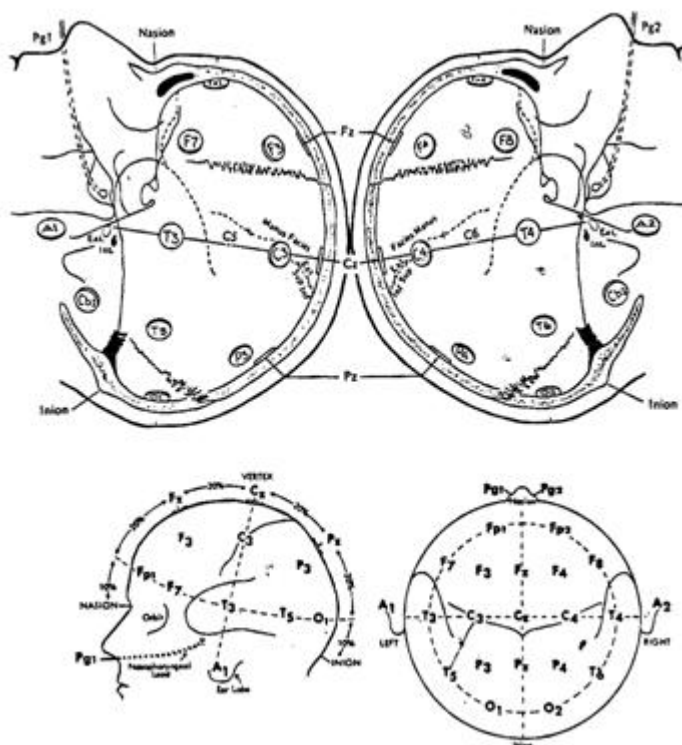
Σχήμα 16 – Το ηλεκτρόδιο με επαφή δακτυλιδιού

Στα σημεία στα οποία θα τοποθετηθούν τα ηλεκτρόδια, το δέρμα πρέπει να καθαριστεί καλά με οινόπνευμα για να επιτύχουμε χαμηλή αντίσταση επαφής, κάτω των  $5\text{k}\Omega$ . Το ηλεκτρόδιο λοιπόν έρχεται σε απ' ευθείας επαφή με τον υποκείμενο ηλεκτρολύτη που χρησιμοποιείται. Έτσι είναι δυνατή η κίνηση ιόντων μέσω του «συνόρου» ηλεκτροδίου - ηλεκτρολύτη μέχρι να επέλθει ισορροπία. Η ισορροπία αυτή είναι συνάρτηση της ιοντικής συγκέντρωσης που υπάρχει στις δύο πλευρές του συνόρου. Δημιουργούνται τελικά δύο φορτισμένα στρώματα στις δύο πλευρές του συνόρου, ένα στη μεταλλική επιφάνεια και ένα πάνω στις υγρές ουσίες γύρω από το ηλεκτρόδιο, εμφανίζοντας έτσι μια διαφορά δυναμικού η οποία εμποδίζει τη συνέχιση της κίνησης των ιόντων, αλλά είναι ταυτοχρόνως ευαίσθητη στις μεταβολές των συγκεντρώσεων των ιόντων. Όταν μέσα στον εγκέφαλο υπάρξει σήμα, δηλ. ροή ιόντων, αυτό θα προκαλέσει μεταβολή της ιοντικής συγκέντρωσης και αυτόματα μεταβολή της διαφοράς δυναμικού των στρωμάτων, άρα και ροή ηλεκτρονίων από την πλευρά του αγωγίμου ηλεκτροδίου. Είναι επιθυμητό η τάση στο «σύνоро» να επηρεάζεται μόνο από ιοντικά ρεύματα του ανθρώπινου κεφαλιού και όχι από θερμοκρασιακές μεταβολές ή μηχανικές μετακινήσεις των ηλεκτροδίων. Αυτό επιτυγχάνεται όταν προσδίδουμε μεγαλύτερη ευχέρεια κινήσεων στα ιόντα της συνοριακής περιοχής. Την απαίτηση αυτή ικανοποιούν ηλεκτρόδια αποτελούμενα από το συνδυασμό ενός μετάλλου με το αντίστοιχο άλας του. Ένα από τα συνηθέστερα ηλεκτρόδια είναι αυτό που κατασκευάζεται από άργυρο (Ag) και χλωριούχο

άργυρο (AgCl) και χρησιμοποιείται με ηλεκτρολύτη που περιέχει κυρίως ανιόντα χλωρίου (Cl<sup>-</sup>).

## 2.2 Καταγραφή Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Για την επιλογή των θέσεων του κάθε ηλεκτροδίου πάνω στο κεφάλι έχουν δημιουργηθεί διάφορα πρότυπα, το δημοφιλέστερο εκ των οποίων είναι το Διεθνές Σύστημα 10-20. Η ονομασία του συστήματος οφείλεται στην επιλογή του 20% της αποστάσεως μεταξύ των δύο αυτιών ως την απόσταση ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε ηλεκτρόδια και επίσης στην επιλογή του 10% της αποστάσεως μεταξύ των δύο αυτιών ως την απόσταση από το αυτί στο κοντινότερο προς αυτό ηλεκτρόδιό του. Κατ' αυτόν τον τρόπο οι θέσεις των ηλεκτροδίων προσαρμόζονται ανάλογα με τις διαστάσεις του κρανίου του εξεταζόμενου.

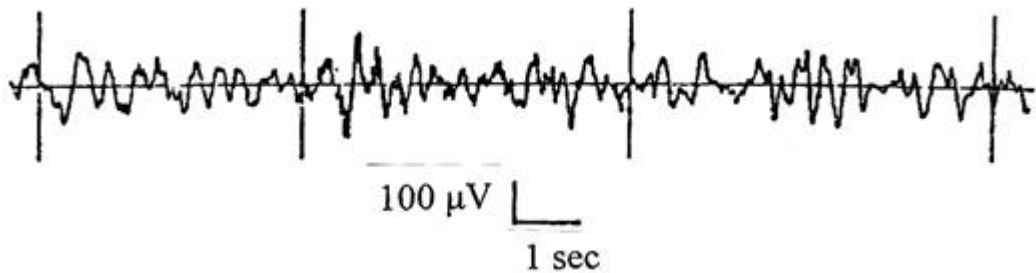


Σχήμα 17 – Τοποποιημένες απαγωγές στην επιφάνεια του κεφαλιού, Σύστημα 10-20

Το κάθε σήμα το οποίο ενισχύεται στον ΗΕΓ είναι η διαφορά μεταξύ των δυναμικών που ανά πάσα στιγμή παρουσιάζουν δύο ηλεκτρόδια μεταξύ τους (Σχήμα 18). Ηλεκτρόδια τα οποία βρίσκονται «πάνω» από εγκεφαλικές περιοχές, οι οποίες ενδεχομένως θα παρουσιάσουν δραστηριότητα, λέγεται ότι αντιστοιχούν σε ενεργά σημεία. Αντίθετα, ηλεκτρόδια τοποθετημένα πάνω από περιοχές που θεωρείται ότι δεν έχουν σχέση με εγκεφαλική λειτουργία, λέγεται ότι αντιστοιχούν σε ανενεργά σημεία. Τέτοια σημεία π.χ. είναι το αυτί, ή τα ενωμένα με αγωγίμο δρόμο δύο αυτιά, σημεία του λαιμού κ.ά. Όταν το μετρούμενο σήμα προκύπτει ως διαφορά δυναμικού δύο ηλεκτροδίων ενεργών περιοχών, τότε, σύμφωνα με την ορολογία του ΗΕΓ, έχουμε «διπολική» μέτρηση. Διπολικές μετρήσεις για 15 ως 30 ηλεκτρόδια είναι η κοινή μεθοδολογία σε κλινικές νευρολογικές εξετάσεις ΗΕΓ. Αυτή η μέθοδος προσφέρει το πλεονέκτημα ότι απορρίπτει τυχόν



παράσιτα τα οποία είναι κοινά στα δύο ηλεκτρόδια. Στην περίπτωση της ψυχοφυσιολογικής έρευνας όμως, συνήθως το μετρούμενο σήμα προκύπτει ως διαφορά δυναμικού ενός ηλεκτροδίου ενεργής περιοχής και ενός ηλεκτροδίου ανενεργής περιοχής, οπότε έχουμε «μονοπολική» μέτρηση. Το ηλεκτρόδιο ανενεργής περιοχής είναι κοινό για όλες τις μετρήσεις και αποτελεί το σημείο αναφοράς, το οποίο κανονικά δεν θα πρέπει να επηρεάζεται από εγκεφαλικά ρεύματα. Επιζητούμε κατ' αυτόν τον τρόπο να έχουμε μια ολοκληρωμένη και ταυτόχρονη, από όλα τα ηλεκτρόδια ενεργών περιοχών, πληροφόρηση σχετικά με κάθε εγκεφαλικό ρεύμα ιόντων το οποίο φτάνει στην εξωτερική δερματική επιφάνεια του κεφαλιού.

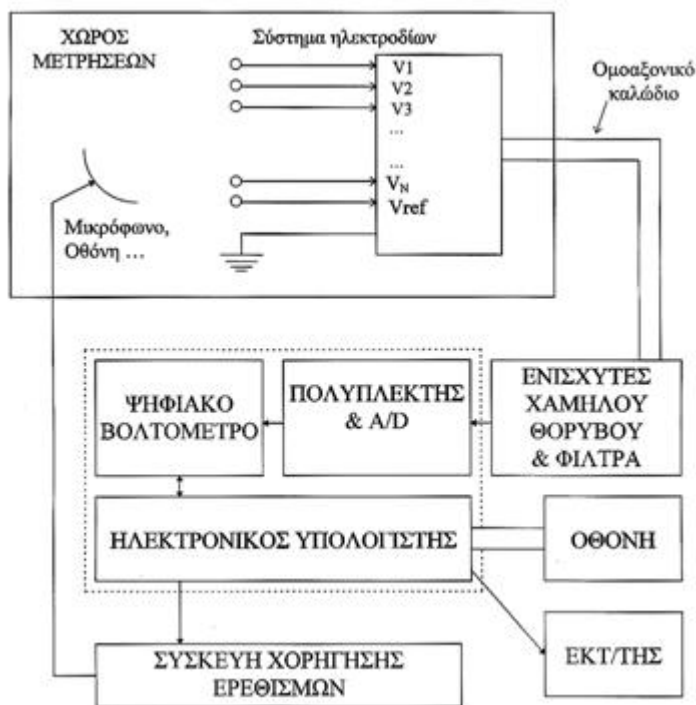


Σχήμα 18 – Καταγραφή ΗΕΓ

Οι διαφορές δυναμικού που επιλέγουμε εντέλει να μετρήσουμε, οδηγούνται στο τμήμα της ενισχυτικής διάταξης του ΗΕΓ, η οποία περιέχει και διατάξεις φιλτραρίσματος. Εκεί κάθε ανιχνεύσιμο σήμα ενισχύεται ώστε να μπορεί να μετρηθεί με ευχέρεια. Συντελεστές ενίσχυσης της τάξης του  $10^5$  είναι συνηθισμένοι. Η πρώτη βαθμίδα ενίσχυσης, οι προενισχυτές, πρέπει να αποτελείται από ενισχυτές χαμηλού θορύβου. Συγκεκριμένα, αν σκοπεύουμε να μετρήσουμε σήματα της τάξης του  $1\mu\text{V}$  πρέπει η προενισχυτική διάταξη να έχει επίπεδο εσωτερικού θορύβου τουλάχιστον μια τάξη μεγέθους μικρότερη, άρα της τάξης των εκατοντάδων  $\text{nV}$ . Επιπλέον, χρησιμοποιούνται κυκλώματα με συνδυασμούς διαφορικών ενισχυτών, ώστε ο λόγος απόρριψης κοινού σήματος (common mode rejection ratio - CMRR) να είναι στο επίπεδο των 120 db. Κατόπιν τα αναλογικά σήματα είτε οδηγούνται σε καταγραφική συσκευή και αποτυπώνονται σε χαρτί, σε συμβατικά συστήματα ΗΕΓ, είτε, όπως συνήθίζεται στα πιο εξελιγμένα συστήματα, μέσω συσκευής πολυπλεξίας οδηγούνται στον μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό σήμα (A/D), όπου ως ψηφιακά πλέον σήματα καταμετρώνται σε ηλεκτρονικό βολτόμετρο. Στη συνέχεια, ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής λαμβάνει τα ψηφιακά δεδομένα των μετρήσεων, οπότε υπάρχει η δυνατότητα για ψηφιακή επεξεργασία και απεικόνιση του σήματος, είτε κατά τη διάρκεια των μετρήσεων (εντός γραμμής - on line), είτε σε υστερότερο χρόνο εφόσον αποθηκευτεί το σήμα στο δίσκο του υπολογιστή (εκτός γραμμής - off line).

Σε σύγχρονα συστήματα πολλές φορές οι λειτουργίες της πολύπλεξης, αναλογικοψηφιακής μετατροπής και μέτρησης εκτελούνται από ειδικές κάρτες ανάκτησης σήματος (Data Acquisition) εγκατεστημένες στον ηλεκτρονικό υπολογιστή, σε συνδυασμό με το αντίστοιχο λογισμικό ελέγχου της κάρτας και ψηφιακής επεξεργασίας του σήματος (Σχήμα 19). Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής μπορεί να ελέγχει και μια συσκευή χορήγησης ερεθισμών. Στην περίπτωση αυτή μπορούν να υλοποιηθούν ολοκληρωμένες κλινικές και εργαστηριακές μετρήσεις, οι οποίες περιλαμβάνουν ελεγχόμενες δοκιμασίες προς τον εξεταζόμενο με χορήγηση π.χ. συγκεκριμένων ήχων, λέξεων, αριθμών, εικόνων κ.λπ. Είναι τότε δυνατός ο συγχρονισμός της χορήγησης των ερεθισμών με την καταγραφή των δυναμικών που προκύπτουν ως αποτέλεσμα του ερεθισμού (προκλητά δυναμικά).

Τελειώνοντας θα πρέπει να τονίσουμε ότι για τη σωστή λειτουργία κάθε συσκευής μέτρησης βιοσημάτων, αλλά ακόμη περισσότερο για την περίπτωση του ΗΕΓ όπου τα μετρούμενα σήματα είναι της τάξεως των  $\mu\text{V}$ , η γείωση όλων των τμημάτων του συστήματος θα πρέπει να είναι κοινή για να μην δημιουργούνται βρόχοι μεταξύ διαφορετικών γειώσεων που εισάγουν σφάλματα.



Σχήμα 19 – Σχηματικό διάγραμμα ψηφιακού ΗΕΓ με N ηλεκτρόδια μέτρησης.

Ο χώρος των μετρήσεων, ιδίως στην περίπτωση προκλητών δυναμικών, πρέπει να είναι προστατευμένος από ηλεκτρομαγνητικές παρεμβολές. Πολύ συχνά ο πολυπλέκτης, ο αναλογικοψηφιακός μετατροπέας και το ψηφιακό βολτόμετρο είναι ενσωματωμένα ως κάρτα στον Ηλεκτρονικό Υπολογιστή.

### 2.3 Συστατικά Ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος

Πίνακας 1 – Ρυθμοί Ηλεκτροεγκεφαλογραφικού Σήματος

Ρυθμός	Περιοχή Συχνοτήτων	Πλάτος (σε $\mu\text{V}$ )
Δέλτα	0,5-3,5	Εως 100-200
Θήτα	4-7,5	< 30
Άλφα	8-12	30-50
Αργός Βήτα	13-19	< 20
Ταχύς Βήτα	20-30	< 20

Η μελέτη του ΗΕΓ βασίζεται στη διάκριση, στις καταγραφές δυναμικού ως συνάρτηση του χρόνου, της ύπαρξης ή μη συγκεκριμένων κυματομορφών, των λεγόμενων ρυθμών, κύριο χαρακτηριστικό των οποίων είναι οι συχνότητες των αρμονικών από τις οποίες αποτελούνται, δηλ. το φασματικό τους περιεχόμενο. Η κατηγοριοποίηση με βάση τη συχνότητα είναι φυσικά προσεγγιστική. Δεν πρέπει να λησμονούμε ότι ο μεγαλύτερος όγκος της έρευνας στο ΗΕΓ είχε επιτελεστεί όταν δεν ήταν διαδεδομένη η χρήση ψηφιακών υπολογιστών και οι παρατηρήσεις βασίζονταν στις καταγραφές των δυναμικών πάνω στο βαθμονομημένο καταγραφικό χαρτί. Καθώς η τεχνολογία επιτρέπει ακριβέστερη διερεύνηση των σημάτων, οι κατηγορίες καθορίζονται σαφέστερα. Οι κυριότεροι ρυθμοί είναι οι άλφα, βήτα, θήτα και δέλτα [3].

Η εμφάνιση των ρυθμών έχει συνδυαστεί με διάφορα επίπεδα εγρήγορσης, χαλάρωσης, ύπνου κ.λπ. Για παράδειγμα, ο α ρυθμός (Σχήμα 20) εμφανίζεται σε περίπου 75% των ενηλίκων. Το κλείσιμο (αντίστοιχα άνοιγμα) των ματιών προκαλεί αύξηση (αντίστοιχα μείωση) του α ρυθμού. Αντίθετα, μείωση της δραστηριότητας α έχει συσχετισθεί με αισθητηριακό ερεθισμό ή πνευματική δραστηριότητα. Ο ρυθμός αυτός πήρε το όνομα α γιατί ήταν ο πρώτος ο οποίος μελετήθηκε. Ο β ρυθμός, ο δεύτερος ο οποίος μελετήθηκε, είναι ο κυρίαρχος ρυθμός που εμφανίζεται κατά τη φάση πλήρους εγρήγορσης ενός φυσιολογικού ατόμου. Ο ρυθμός δέλτα συσχετίζεται με τον ύπνο στον φυσιολογικό άνθρωπο και είναι επίσης κύριος ρυθμός στα νεογέννητα έως το δεύτερο έτος της ηλικίας. Ο ρυθμός θήτα φαίνεται να συνδέεται με μηχανισμούς καταστολής, είτε στην είσοδο σε φάση χαλάρωσης, είτε σε συνδυασμό με τον β ρυθμό σε φάσεις αυξημένης προσοχής.



**Σχήμα 20 – Καταγραφή ΗΕΓ όπου κυριαρχεί ο α ρυθμός.**

Η χρήση του ΗΕΓ στη Νευρολογία είναι ευρύτατη, καθώς αποτελεί μια μέθοδο φθηνή, ανώδυνη και απλή στην εφαρμογή της. Από τη μελέτη του ΗΕΓ μπορούν να εξαχθούν εξαιρετικά χρήσιμα συμπεράσματα για τη σωστή εξέλιξη του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος ενός ανθρώπου από τη γέννησή του έως την ενηλικίωση. Επίσης, το ΗΕΓ μπορεί να δώσει χρήσιμα στοιχεία στην περίπτωση εγκεφαλοπαθειών (π.χ. νόσο Jacobs - Kreutzfeldt, Alzheimer), τόσο για τη βαρύτητα της νόσου, όσο και για την υποβοήθηση της διάγνωσης και της πρόγνωσης. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει επίσης η μελέτη του ΗΕΓ στην περίπτωση της επιληψίας, όπου εμφανίζονται «αιχμές» και «βραχεία κύματα» (spikes and short waves - SSW) υψηλής συχνότητας, με διάρκεια από 20-70msec και 70-200msec αντιστοίχως. Η εντόπιση αυτών των ανωμαλιών στο καταγραφόμενο σήμα διευκολύνεται σήμερα πολύ με τη χρήση ψηφιακών τεχνικών επεξεργασίας. Το ΗΕΓ μελετάται ακόμη στις περιπτώσεις κρανιοεγκεφαλικών κακώσεων, κώματος κ.ά. Τέλος, το ΗΕΓ αποτελεί το κύριο μέσο στη μελέτη του ύπνου. [4]

## 2.4 Τεχνικά Προβλήματα

Οι διαφορές δυναμικού που καταγράφει το ΗΕΓ μετριοούνται σε  $\mu\text{V}$ . Είναι δηλαδή περίπου 100 φορές μικρότερες και από εκείνες που καταγράφει το ΗΚΓ (Ηλεκτροκαρδιογράφημα). Επειδή τα σήματα του ΗΕΓ είναι τόσο ασθενή, είναι πολύ ευάλωτα. Η κυματομορφή του ΗΕΓ παραμορφώνεται εύκολα λόγω παρεμβολής και προσθήκης ξένων (μη εγκεφαλικών) σημάτων που μπορεί να είναι πολύ ψηλότερα από εκείνα που θέλουμε να καταγράψουμε. Για να αποφύγουμε, ή τουλάχιστον να περιορίσουμε, την παραγωγή και υπέρθεση στο ΗΕΓ τέτοιων παρασιτικών σημάτων, πρέπει να γνωρίσουμε τις παρακάτω κύριες πηγές τους.

Παράσιτα Ηλεκτροδίων. Αυτά είναι συνήθως τα ενοχλητικότερα από τα ανεπιθύμητα σήματα. Αν κινηθεί ο ασθενής ή αν κινηθούν τα καλώδια που συνδέουν τα ηλεκτρόδια του με το μηχάνημα, διαταράσσεται η ηλεκτροχημική ισορροπία μεταξύ ηλεκτροδίων και δέρματος, εκεί δηλαδή που μετατρέπεται το ρεύμα ιόντων (στον ασθενή) σε ρεύμα ηλεκτρονίων (στα ηλεκτρόδια και στα σύρματα). Έτσι, μπορεί να παραχθούν αλλαγές δυναμικού που αποτελούν σήματα για το μηχάνημα. Αυτά ενισχύονται μαζί με τα ανεπιθύμητα σήματα και αλλάζουν το ΗΕΓ. Αν ο ασθενής ιδρώνει, ο ιδρώτας θα επηρεάσει επίσης την ισορροπία κάτω από τα ηλεκτρόδια. Έτσι θα εμφανισθούν μεγάλες, αλλά βραδείας μεταβολής, αλλαγές δυναμικού. Δηλαδή επηρεάζουν τη γραμμή βάσης του ΗΕΓ.

Δυναμικά από την καρδιά και τα μάτια. Η λειτουργία της καρδιάς παράγει δυναμικά στο δέρμα. Αυτό βέβαια ισχύει και για το δέρμα της κεφαλής. Ευτυχώς η απόσταση μεταξύ καρδιάς και κεφαλής είναι μεγάλη. Έτσι το σήμα που παίρνουν τα ηλεκτρόδια είναι πολύ μικρό, όταν μάλιστα είναι μικρή και η απόσταση μεταξύ των ηλεκτροδίων. Όταν είναι σημαντικό το καρδιακό σήμα δίνει στο ΗΕΓ οξείες αιχμές (αποκλίσεις της γραφίδας) με την περιοδικότητα της καρδιάς (ανά 0.8 sec). Η παρεμβολή που προκαλείται στο ΗΕΓ όταν υπάρχει εμφυτευμένος βηματοδότης της καρδιάς είναι ισχυρότερη και δεν μπορεί να εξαλειφθεί. Η διαφορά μεταξύ του πρόσθιου και του οπίσθιου τμήματος του ματιού είναι αρκετά mV. Αυτό το δίπολο δίνει ρεύματα δια των ιστών και δυναμικά στο δέρμα της κεφαλής, που αλλάζουν, όταν κινούνται τα μάτια του εξεταζόμενου.

Ηλεκτρική και μαγνητική παρεμβολή από γειτονικά ρεύματα. Έστω ότι ένα ηλεκτροφόρο καλώδιο (220 V, 50 Hz) περνά σε μικρή απόσταση από τον ασθενή. Το μονωμένο σώμα του ασθενούς, επειδή βρίσκεται μέσα στο ηλεκτρικό πεδίο, θα αποκτήσει ένα δυναμικό μεταξύ του δυναμικού του σύρματος και εκείνου της γης. Αυτό το εναλλασσόμενο δυναμικό του σώματος μπορεί να φθάνει σε υψηλότερες τιμές σε σχέση με τα δυναμικά του ΗΕΓ. Εξ άλλου, μέρος από το χωρητικό ρεύμα που διαρρέει από το σύρμα προς τη γη περνά δια μέσου του σώματος του ασθενούς. Έτσι δημιουργεί διαφορές δυναμικού ( $V=I \cdot R$ ) μεταξύ των θέσεων του δέρματος που φέρουν τα ηλεκτρόδια. Αυτά τα δυναμικά αποτελούν για το μηχάνημα σήματα που υπερτίθενται στο ΗΕΓ. Αν το παραπάνω καλώδιο διαρρέεται από ρεύμα έντασης  $i$ , δημιουργεί στον γύρω του χώρο και μαγνητικό πεδίο (νόμος Biot - Savart). Αν  $\Phi$  είναι η ροή του μαγνητικού πεδίου που περνά μέσα από ένα βρόχο, σχηματιζόμενο από τα καλώδια σύνδεσης του ασθενούς με τον ΗΕΓ, θα επαχθεί στον βρόχο τάση  $v = -d\Phi/dt$ . Σε αντίθεση με τις ηλεκτρικές, οι μαγνητικές παρεμβολές προκαλούν ασθενή παράσιτα. Η κάθε γραμμή έχει συνήθως δύο σύρματα που σε κάθε στιγμή διαρρέονται από ίσα ρεύματα αντίθετης φοράς. Επειδή τα σύρματα είναι παράλληλα και έχουν μικρή απόσταση μεταξύ τους, τα μαγνητικά πεδία τους σχεδόν αλληλοεξουδετερώνονται. Η κατάσταση διαφέρει αν το εργαστήριο γειτνιάζει προς κάποιον υποσταθμό της ΔΕΗ. Τότε, τα υψηλά ρεύματα και οι πολλές στροφές (σπείρες) των πηνίων των μετασχηματιστών δημιουργούν ισχυρά μαγνητικά πεδία που επάγουν ανάλογα σήματα στους βρόχους των καλωδίων ασθενούς και οργάνου.

Παρεμβολή από πεδία υψηλής (ραδιοφωνικής) συχνότητας. Κάθε σύρμα διαρρέομενο από υψίσυχνο ρεύμα εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικά κύματα, που διαδίδονται σε μεγάλες αποστάσεις. Η πηγή αυτών των κυμάτων μπορεί να είναι η κεραία ενός ραδιοφωνικού σταθμού ή ο σπινθήρας που παράγεται κατά τη διακοπή κάποιου ηλεκτρικού ρεύματος. Αυτά τα μεταβατικά κύματα, φεύγοντας από τον ηλεκτρικό διακόπτη και ταξιδεύοντας κατά μήκος της τροφοδοτικής γραμμής, μπορούν να φθάσουν και να δημιουργήσουν ενοχλητική παρεμβολή στο μετρητικό μας όργανο. Τα πεδία ραδιοφωνικής συχνότητας που προέρχονται από ραδιοφωνικούς και τηλεοπτικούς πομπούς έχουν μικρή ένταση (λίγα mV ανά μέτρο μήκους στον αέρα). Έτσι τα παράσιτά τους εξαλείφονται εύκολα με βαθυπερατό φίλτρο, δεδομένου ότι τα βιοδυναμικά που θέλουμε να καταγράψουμε δεν περιέχουν υψίσυχνες συνιστώσες.

### **Μείωση των ανεπιθύμητων παρεμβολών.**

Η κατασκευή θωρακισμένου δωματίου (ελεύθερου ηλεκτρικών και υψίσυχνων πεδίων) είναι δαπανηρή. Το θυρόφυλλο πρέπει να είναι χάλκινο και να έχει περιμετρικά καλές ηλεκτρικές επαφές με το επίσης αγωγίμο πλαίσιο του (την κάσα του). Επειδή τα παράθυρα δεν θωρακίζονται αποτελεσματικά, πρέπει να αποφεύγονται. Οι τοίχοι, το δάπεδο και η οροφή πρέπει να έχουν αγωγή και γειωμένα πλέγματα. Ευτυχώς, στις περισσότερες περιπτώσεις δεν είναι αναγκαία η κατασκευή θωρακισμένου δωματίου. Η προσεκτική χρήση και η σωστή κατασκευή των ηλεκτροφυσιολογικών οργάνων αρκούν για να ελαττώσουν ικανοποιητικά τις παρεμβολές. Μερικές πρακτικές συμβουλές είναι:

1. Το μηχάνημα πρέπει να είναι πάντα γειωμένο.
2. Τα καλώδια των συνδέσεων ασθενούς – μηχανήματος και το καλώδιο τροφοδοσίας του μηχανήματος πρέπει να είναι προστατευμένα με μη αγωγίμο περίβλημα. Αυτή η προστασία αφαιρεί σχεδόν όλη την παρεμβολή ηλεκτρικών πεδίων.
3. Οι λαμπτήρες φθορισμού προκαλούν σημαντική ηλεκτρική παρεμβολή μέχρι απόσταση 2m. Στην ΗΕΓ ο ασθενής δεν πρέπει να είναι κοντά σε λαμπτήρες φθορισμού. Οι λαμπτήρες πυρακτώσεως είναι πολύ προτιμώτεροι.
4. Τα ηλεκτροφόρα τροφοδοτικά καλώδια δεν πρέπει να γειτνιάζουν ούτε στον ασθενή ούτε στα καλώδια συνδέσεως ασθενούς – οργάνου. Το μαγνητικό τους πεδίο επάγει παρεμβολές.
5. Ο μετρούμενος ασθενής πρέπει να είναι μακριά από οποιονδήποτε μετασχηματιστή, ακόμα και από εκείνον που τυχόν περιέχεται στο όργανο. Άρα ο ασθενής δεν πρέπει να βρίσκεται δίπλα στο όργανο.
6. Φθαρμένα καλώδια και κακοτοποθετημένα ηλεκτρόδια είναι οι συνηθέστερες πηγές παρεμβολής.
7. Τα ηλεκτροφόρα καλώδια κατά την κατασκευή του εργαστηρίου, πρέπει να εγκατασταθούν μέσα σε μεταλλικούς γειωμένους και όχι σε πλαστικούς σωλήνες.
8. Γενικά η απόσταση είναι αποτελεσματική και φθηνή προστασία. Κάθε παρεμβολή μειώνεται αυξάνοντας την απόσταση της θέσης μέτρησης από την πηγή της παρεμβολής. [5]

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

### **ΠΡΟΚΛΗΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ**

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα προκλητά δυναμικά του εγκεφάλου. Θα εξετάσουμε τις διαφορετικές κατηγορίες προκλητών δυναμικών, τις δυσκολίες μέτρησής τους καθώς και την ιδιαίτερη σημασία τους στην ψυχιατρική και τη νευρολογία.

### 3.1 Βασικές Έννοιες

Τα δυναμικά που καταγράφονται από την επιφάνεια του εγκεφάλου όταν ο οργανισμός εκτίθενται σε διακεκριμένους ερεθισμούς, ονομάζονται προκλητά δυναμικά (Evoked Potentials). Οι ερεθισμοί μπορεί να είναι ακουστικοί (μιλάμε για ακουστικά προκλητά δυναμικά), οπτικοί (μιλάμε για οπτικά προκλητά δυναμικά) ή σωματοαισθητικοί ερεθισμοί (μιλάμε για σωματοαισθητικά προκλητά δυναμικά).

Τα προκλητά δυναμικά τείνουν να είναι μικρά σε πλάτος, κυμαινόμενα από 1  $\mu$ Volt (ή και λιγότερο) έως λίγα  $\mu$ V, έναντι των δεκάδων  $\mu$ V του EEG. Κατά κανόνα επικαλύπτονται τα συγκεκριμένα δυναμικά από το συμβατικό Ηλεκτροεγκεφαλογράφημα και απαιτούνται κατάλληλες διαδικασίες καταγραφής, ώστε να αναγνωρισθούν και να αποτιμηθούν.

Το μέγεθός τους (πλάτος), η κατεύθυνσή τους-θετική ή αρνητική-και ο λανθάνων χρόνος τους ως προς το εκλυτικό ερέθισμα συναρτώνται με παραμέτρους:

- Το εκλυτικό ερέθισμα
- Την ακεραιότητα και τη λειτουργική επίδοση των συνδέσεων της περιφέρειας με το Κεντρικό Νευρικό Σύστημα
- Τις ψυχολογικές πτυχές του συστήματος επεξεργασίας πληροφοριών του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος

Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης νευροψυχολογικής - ηλεκτροφυσιολογικής μεθόδου σε σχέση με τις άλλες μεθόδους απεικόνισης του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος στηρίζεται στο γεγονός ότι με τα προκλητά δυναμικά καταγράφουμε την επεξεργασία του συγκεκριμένου ερεθίσματος σε εύρος χρόνου που κυμαίνεται από χιλιοστά του δευτερολέπτου (ms) έως μερικά δευτερόλεπτα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχουμε μια πλήρη αξιολόγηση σε πραγματικό χρόνο για τις αλλαγές στη νευρωνική δραστηριότητα που παρατηρούνται κατά τη διάρκεια των γνωστικών διεργασιών. Τα Γνωστικά Προκλητά Δυναμικά αποτελούν μία αξιόπιστη μέθοδο για την αξιολόγηση νευρολογικών, μαθησιακών και ψυχικών διαταραχών ή/και διαταραχών της προσωπικότητας.

Έχουν μελετηθεί σε ασθενείς με νευρολογικές διαταραχές (που εντοπίζονται συνήθως στον έλεγχο των αισθήσεων και κυρίως της όρασης και της ακοής) από τις αρχές της δεκαετίας του 1950. Στην κλινική πράξη, όμως, άρχισαν να χρησιμοποιούνται από τις αρχές της δεκαετίας του 1970 οπότε καθορίστηκε και η διαγνωστική τους χρησιμότητα. Χρησιμοποιούνται ευρέως στην κλινική πράξη γιατί παρέχουν αντικειμενικά αποτελέσματα και εκτιμήσεις για τη λειτουργία των αισθητηριακών συστημάτων και οδών. Η μεγάλη χρησιμότητα των προκλητών δυναμικών (Evoked Potentials-EPs) βασίζεται στην ικανότητά τους:

α) να περιγράφουν και να αποδεικνύουν τη μη φυσιολογική λειτουργία των αισθητηριακών συστημάτων όταν το ιστορικό του ατόμου ή οι νευρολογικές, νευροψυχολογικές, ακουστικές και οφθαλμολογικές εξετάσεις δεν είναι σαφείς.

β) να αποκαλύπτουν τις δυσλειτουργίες στα αισθητηριακά συστήματα όταν τα πρόδρομα συμπτώματα μας οδηγούν στην υπόθεση κάποιας απομυελινωτικής νόσου και να αποκλείουν δυσλειτουργίες σε κάποια άλλη περιοχή του κεντρικού νευρικού συστήματος.

γ) να διασαφηνίζουν την πορεία της νόσου σύμφωνα με τις ανατομικές βλάβες που έχει προκαλέσει.

δ) να ελέγχουν με ακρίβεια και αντικειμενικότητα κάθε φορά τις αλλαγές στην κατάσταση του ασθενή.

Τα προκλητά δυναμικά λειτουργούν πολλές φορές ως προέκταση μιας κλινικής εξέτασης παρέχοντας τα απαιτούμενα αριθμητικά δεδομένα του ποσοστού δυσλειτουργίας και απεικονίζοντας την πορεία της διαταραχής.

Γενικά στην κλινική πράξη για τη διάγνωση νευρολογικών παθήσεων, για την αξιολόγηση των αισθητηριακών διαταραχών καθώς και τη νευροψυχολογική αξιολόγηση ατόμων με μαθησιακές δυσκολίες, δυσλεξία, και ψυχιατρικές διαταραχές χρησιμοποιούνται τα προκλητά δυναμικά με χαμηλό εύρος και βραχεία διάρκεια όπως είναι τα οπτικά προκλητά δυναμικά (VEPs) και τα ακουστικά προκλητά δυναμικά.

Τα εγκεφαλικά προκλητά δυναμικά αναγνωρίζονται πλέον σαν αξιόπιστες δοκιμασίες για την αποτίμηση επιλεγμένων φαινομένων της ηλεκτροφυσιολογικής δραστηριότητας του Κεντρικού Νευρικού Συστήματος (ΚΝΣ). Συμβάλλουν αποφασιστικά τόσο στην συνεπή προσέγγιση και μεταχείριση βασικών φαινομένων της λειτουργίας του ΚΝΣ, όπως: Πρόσληψη, επιλογή, αποκωδικοποίηση, αποταμίευση παραγωγή ή απόδοση «πληροφοριών», όσο και στην αντιμετώπιση διαγνωστικών και θεραπευτικών ζητημάτων της ψυχιατρικής.

### 3.2 Διάκριση Προκλητών Δυναμικών

Τα εγκεφαλικά προκλητά δυναμικά διακρίνονται σε εξωγενείς συντελεστές και ενδογενείς συντελεστές. Βασικά χαρακτηριστικά τους περιγράφονται παρακάτω:

Πίνακας 2 – Διάκριση Προκλητών Δυναμικών

<b>ΕΞΩΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ</b>	<b>ΕΝΔΟΓΕΝΕΙΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ</b>
1. Ακολουθούν το ερέθισμα με πολύ μικρό λανθάνοντα χρόνο.	Εμφανίζονται περίπου 100m/sec μετά το ερέθισμα.
2. Σχετίζονται άμεσα με τη φύση του εκλυτικού ερεθίσματος και την ακεραιότητα των αισθητικών οδών.	Κατά κανόνα δεν σχετίζονται με τη φύση του εκλυτικού ερεθίσματος.
3. Είναι ανεξάρτητα από την κατάσταση εγρήγορσης.	Εξαρτώνται από την κατάσταση εγρήγορσης του ατόμου και κυρίως από τη σημασία που έχει το εκλυτικό γεγονός για τον οργανισμό τη δεδομένη στιγμή .



Για τη διεξαγωγή της μελέτης των κυματομορφών των προκλητών δυναμικών βασισόμαστε κυρίως στα συστατικά (components) των προκλητών δυναμικών. Τα συστατικά είναι τμήματα του συνολικού σήματος, που καθορίζονται με βάση τρεις παράγοντες: τις κορυφώσεις (αρνητικές ή θετικές) του πλάτους του δυναμικού (amplitude), τη χρονική στιγμή στην οποία κατά προσέγγιση λαμβάνει χώρα η κορύφωση (latency period) και το χρονικό εύρος το οποίο καταλαμβάνει η κυματομορφή που περιέχει τη συγκεκριμένη κορύφωση. Το πλάτος του συστατικού συνήθως μετράται με αναφορά την ισοηλεκτρική γραμμή (= 0 Volts) ή το επίπεδο δυναμικού στην έναρξη της διαδικασίας μέτρησης ή κάποια άλλη προγενέστερη κορύφωση. Οι χρόνοι εμφάνισης των συστατικών μετρώνται έχοντας ως έναρξη τη χρονική στιγμή που λαμβάνει χώρα το ερέθισμα που προκαλεί τη συνολική κυματομορφή των δυναμικών.

### 3.3 Μέθοδοι απομόνωσης των προκλητών δυναμικών από το EEG

Η μέτρηση των προκλητών δυναμικών γίνεται με την ίδια διάταξη που χρησιμοποιείται για το EEG. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, το πλάτος του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος (περί τα 50μV) που καταγράφεται όταν ο εξεταζόμενος βρίσκεται σε ηρεμία είναι μεγαλύτερο από το πλάτος των προκλητών δυναμικών (0.1 ως 20μV). Επίσης κατά τη διάρκεια μιας μέτρησης εγκεφαλικού σήματος λειτουργούν εκτός των εγκεφαλικών περιοχών που δέχονται και επεξεργάζονται το ερέθισμα, και άλλες εγκεφαλικές περιοχές οι οποίες σχετίζονται με τη γενικότερη λειτουργία του οργανισμού. Κατά συνέπεια το σήμα που σχετίζεται με την αντίδραση του εγκεφάλου στο ερέθισμα είναι κρυμμένο μέσα στο συνολικό σήμα που καταγράφεται. Το κομμάτι του σήματος που δεν αφορά στην εγκεφαλική επεξεργασία του ερεθίσματος θεωρείται θόρυβος, ο οποίος μάλιστα είναι πιο ισχυρός από το σήμα που επιθυμούμε να μελετήσουμε. Το πρόβλημα αυτό αντιμετωπίζεται χρησιμοποιώντας τις εξής μεθόδους:

- Χρησιμοποιούνται ενισχυτές μεγάλης ευαισθησίας
- Οι χώροι μέτρησης των σημάτων είναι απομονωμένοι από εξωτερικά ηλεκτρικά πεδία, όπως αυτά που δημιουργούν οι ενσύρματες ή ασύρματες ηλεκτρικές συσκευές, γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας κ.α. Η προτιμώμενη λύση είναι η μέτρηση να γίνεται σε ηλεκτρομαγνητικά θωρακισμένο δωμάτιο ή σε ανηχοϊκό θάλαμο
- Εύρεση μέσου όρου (signal averaging) [7]

### 3.4 Εξαγωγή του Μέσου Όρου

Το προτυποποιημένο πείραμα, κατά τη διάρκεια του οποίου χορηγείται το εκλυτικό ερέθισμα, επαναλαμβάνεται αρκετές φορές. Έστω η συνολική μετρηθείσα κυματομορφή δυναμικού  $r_i(t)$  κατά την διάρκεια της  $i$  επανάληψης του πειράματος. Το συνολικό αυτό σήμα μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελείται από δύο τμήματα, το επιθυμητό σήμα  $s_i(t)$  και τον θόρυβο  $n_i(t)$  που αντιπροσωπεύει το εξελισσόμενο «συμβατικό» ΗΕΓ και όλες τις υπόλοιπες πηγές εξωεγκεφαλικού θορύβου. Είναι λοιπόν:

$$r_i(t) = s_i(t) + n_i(t) \quad i = 1, \dots, N$$

όπου  $N$  ο αριθμός των επαναλήψεων. Αν υπερθέσουμε τις διάφορες καταγραφές και λάβουμε το μέσο όρο τους θα έχουμε:

$$E(r_i(t)) = \frac{\sum_{i=1}^N r_i(t)}{N} = \frac{1}{N} \left( \sum_{i=1}^N s_i(t) + \sum_{i=1}^N n_i(t) \right)$$

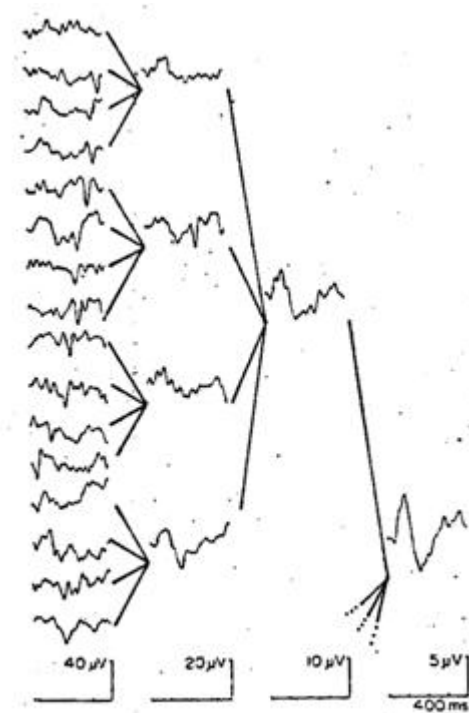
Υποθέτοντας ότι κάθε φορά το ΠΔ το σχετιζόμενο με το εκλυτικό γεγονός αναπαράγεται πανομοιότυπα θα είναι

$$s_i(t) = s_j(t) = s(t) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$$

Αντιθέτως ο θόρυβος, εφόσον δεν σχετίζεται με το εκλυτικό γεγονός, μπορεί να θεωρηθεί ασυσχέτιστη τυχαία διαδικασία από πείραμα σε πείραμα, με αποτέλεσμα το άθροισμα των  $n_i(t)$  να είναι μηδενικό. Συνεπώς έχουμε:

$$E(r_i(t)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) + \frac{1}{N} \cdot 0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(t) = \frac{1}{N} \cdot N \cdot s(t) \Rightarrow E(r_i(t)) = s(t)$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορεί το επιθυμητό σήμα Βιοματικών Δυναμικών (ΒΔ) να «αναδυθεί» από το θόρυβο.



Σχήμα 21 – Η εξαγωγή του μέσου όρου [8]

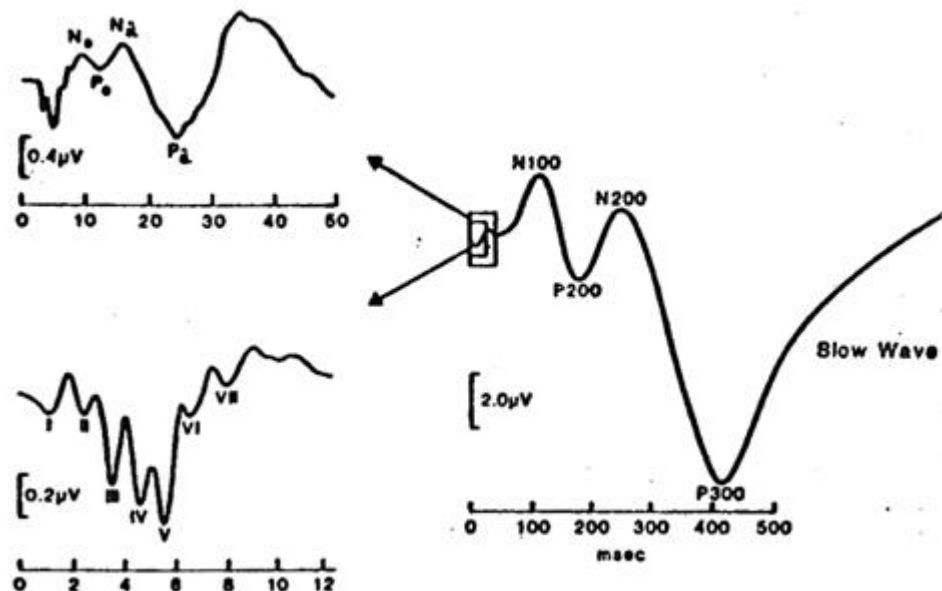
Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται ευρύτατα, παρουσιάζει όμως περιορισμούς. Για παράδειγμα, μεταβολές στο επίπεδο της κόπωσης, της προσαρμογής, της εξοικείωσης, του βαθμού ή της κατεύθυνσης της προσοχής του εξεταζόμενου επηρεάζουν τα ΒΔ, τόσο στην ένταση όσο και στο χρόνο. Το φαινόμενο μάλιστα είναι εντονότερο για τα ενδογενή δυναμικά. Υπάρχει λοιπόν περιορισμός στον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων του πειράματος ( $20 < N < 50$ ) και επιβάλλεται ο έλεγχος της κατάστασης του εξεταζόμενου. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται όταν ο χρόνος μεταξύ των πειραμάτων είναι μικρός και ο

θόρυβος από πείραμα σε πείραμα εμφανίζει υψηλή συσχέτιση. Αυτό συμβαίνει σε περίπτωση ύπαρξης «ρυθμικού» θορύβου, π.χ. σήμα α ρυθμού του συμβατικού ΗΕΓ. Τότε το ανεπιθύμητο σήμα έχει φασματική κατανομή ισχύος γύρω από κάποιο περιορισμένο εύρος συχνοτήτων, κοντά στις συχνότητες του ΒΔ. Λόγω δε της υψηλής συσχέτισης του θορύβου μεταξύ πειραμάτων, με τη διαδικασία εξαγωγής του μέσου όρου, αυτός ενισχύεται αντί να μειωθεί. Για την αποφυγή του ανεπιθύμητου αυτού φαινομένου χρησιμοποιείται απεριοδικός χρονισμός των αλληπάλληλων πειραμάτων.

Ακόμη και όταν το πρότυπο του σταθερού σήματος και του ασυσχέτιστου θορύβου ισχύει, προβλήματα μπορεί να προκύψουν όταν το επιθυμητό σήμα διαφέρει ως προς τη χρονική του εξέλιξη από πείραμα σε πείραμα. Τότε ο μέσος όρος έχει απωλέσει μεγάλο ποσοστό της πληροφορίας σχετικά με το ΒΔ, ως προς τις κορυφώσεις κυρίως. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται τεχνικές, οι οποίες προσεγγίζουν σε κάθε καμπύλη δυναμικού το χρονικό διάστημα το οποίο καταλαμβάνει το επιθυμητό σήμα. Κατόπιν οι καμπύλες μετατοπίζονται χρονικά ώστε το ΒΔ το οποίο μας ενδιαφέρει να συμπίπτει κατά το δυνατόν σε όλες, οπότε ο μέσος όρος θα περιέχει τη μέγιστη δυνατή πληροφορία. [5]

### 3.5 Χρονικά Διαστήματα των Προκλητών Δυναμικών

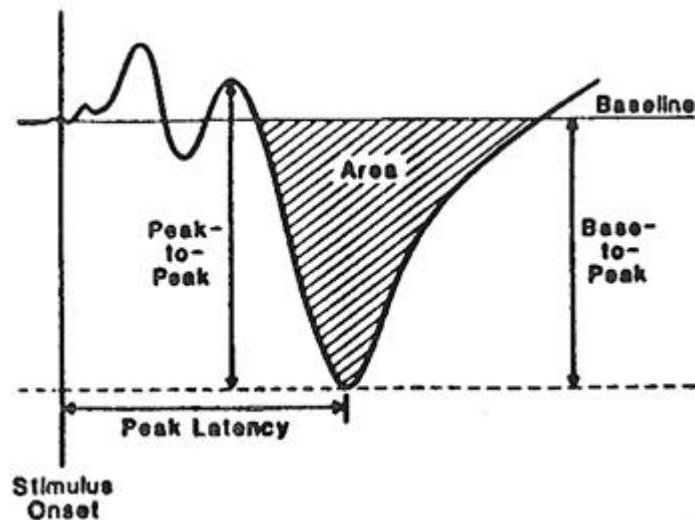
Τα ΠΔ μπορούν επίσης να χαρακτηριστούν σε σχέση με το χρόνο εμφάνισής τους μετά από το εκλυτικό γεγονός (λανθάνων χρόνος). Στην περίπτωση των ακουστικών προκλητών δυναμικών υπάρχει π.χ. η διάκριση σε πρώιμα (early, fast), μέσα (middle) και αργά ή ύστερα (late) δυναμικά, που αντιστοιχούν περίπου στα χρονικά διαστήματα 2 ως 12 msec, 12 ως 50 msec και 50 ως 800 msec από τη στιγμή που χορηγείται ο εξωτερικός ερεθισμός.



Σχήμα 22 – Πρώιμα, Μέσα και Ύστερα Προκλητά Δυναμικά

Επιπλέον, μπορούμε να χωρίσουμε τα ΠΔ σε ενδογενή και εξωγενή. Τα εξωγενή σχετίζονται άμεσα με τη φύση του εκλυτικού ερεθίσματος δηλ. την ένταση, τη συχνότητά του κ.τ.λ. και την ακεραιότητα των αισθητικών οδών. Τα ενδογενή ΠΔ εξαρτώνται ουσιαστικά από την ψυχολογική κατάσταση του ατόμου και τα ψυχολογικά γνωρίσματα του απλού ή συμπλόκου ερεθίσματος, π.χ. αν το ερέθισμα είναι γνωστό ή άγνωστο, αν προκαλεί δυσφορία ή ευχαρίστηση, αν είναι σημασιολογικά ορθό ή λάθος, ενδιαφέρον ή

αδιάφορο κ.ο.κ.. Ο λανθάνων χρόνος εμφάνισής τους σε σχέση με το εκλυτικό ερέθισμα βρίσκεται συνήθως ανάμεσα στα 100 και 500 msec.



Σχήμα 23 – Καθορισμός πλάτους, χρονικού σημείου κορύφωσης και εμβαδού ενός συστατικού του ΠΔ

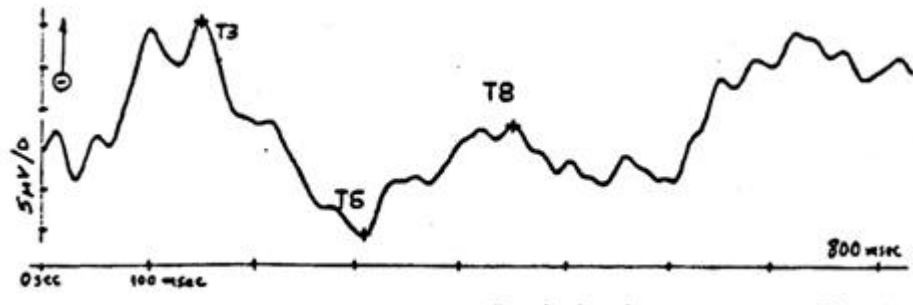
Τα συστατικά που εμφανίζονται πριν από τα 100 msec συνήθως ανήκουν στα εξωγενή δυναμικά, για κάθε είδους ερεθισμό που εκλύει το ΠΔ. Όπως προαναφέρθηκε σχετίζονται με την ακεραιότητα των αισθητικών οδών και γι' αυτό έχουν μεγάλο ενδιαφέρον και κλινικές εφαρμογές στη Νευρολογία. Χρησιμοποιούνται στη διάγνωση νευρολογικών νόσων, π.χ. απομυελινικές ασθένειες, εγκεφαλικοί όγκοι κ.ά., ειδικότερα δε, τα ακουστικά δυναμικά σε ασθένειες σχετιζόμενες με τον οπίσθιο κρανιακό βόθρο και τα οπτικά ΠΔ μόνιμου καταστάσεως στη σκλήρυνση κατά πλάκας. Επίσης, τα ακουστικά ΠΔ επιτρέπουν τη μη επεμβατική διάγνωση ελαττωμάτων ακοής από μη συνεργάσιμα άτομα. Τέλος, τα σωματοαισθητικά δυναμικά χρησιμοποιούνται ευρέως σε νευρολογικές επεμβάσεις για τον έλεγχο των αντίστοιχων αισθητικών οδών και τις εγκεφαλικές απολήξεις τους.

Τα ενδογενή ΠΔ συμπίπτουν εν πολλοίς με τα πέραν των 70 msec μετρούμενα δυναμικά. Αυτά τα δυναμικά έχουν άμεση σχέση με τα διάφορα στάδια νοητικής επεξεργασίας των εξωτερικών ερεθισμών στο Κεντρικό Νευρικό Σύστημα. Μέσω της μελέτης των δυναμικών αυτών, τόσο στο φαινομενολογικό επίπεδο όσο και στο βαθύτερο αιτιακό επίπεδο, κατακτά η ιατρική έρευνα νέες γνώσεις σε σχέση με τις εξαιρετικά πολύπλοκες και «δυσπρόσιτες» γνωσιακές διαδικασίες του ανθρώπινου εγκεφάλου.

Τα πιο σημαντικά για την ψυχιατρική έρευνα ενδογενή συστατικά των ΠΔ είναι:

α)  $N_{100}$ : Πρόκειται για την αρνητική κορύφωση του μετρούμενου δυναμικού 90 ως 150 msec μετά την παροχή του εκλυτικού ερεθίσματος. Έχει συνδεθεί με τη λειτουργία της προσοχής και της επιλογής πληροφοριών.

β)  $P_{300}$ : Περιγράφει τη θετική κορύφωση του μετρούμενου δυναμικού από 220 ως 500 msec μετά το ερέθισμα. Θεωρείται ότι αποτελείται από δύο υποσυστατικά: το  $P_{300a}$  ( $P_{3a}$ ), που εκφράζει την εκούσια αντίδραση προσανατολισμού, και το  $P_{300b}$  ( $P_{3b}$ ), το οποίο εμφανίζεται στο χρονικό διάστημα 300 ως 500 msec και θεωρείται μέτρο των ελεγχόμενων, σκόπιμων, διαδικασιών επεξεργασίας ερεθισμάτων. [9]



Σχήμα 24 – T3, T6 και T8 είναι οι κορυφώσεις των συστατικών N<sub>100</sub>, P<sub>300</sub> και N<sub>400</sub>

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### **ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ**

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μία εισαγωγή στη στοχαστικότητα και τις στοχαστικές ανελίξεις. Οι έννοιες αυτές είναι απαραίτητες για την κατανόηση και μελέτη των χρονοσειρών. Θα εισάγουμε ακόμα τις έννοιες της στασιμότητας, της συσχέτισης και της συμμεταβλητότητας.

#### 4.1 Τυχαίες μεταβλητές και πιθανότητες

Με τον όρο ντετερμινιστικά σήματα εννοούμε την κατηγορία των σημάτων που μπορούν να μοντελοποιηθούν σαν πλήρως καθορισμένες συναρτήσεις του χρόνου. Υπάρχει, ωστόσο, μια άλλη σημαντική κατηγορία σημάτων που είναι γνωστά σαν τυχαία σήματα (random signals), παραδείγματα των οποίων μπορούν να συναντηθούν σε πολλές εκφάνσεις της καθημερινότητας. Λέμε ότι ένα σήμα είναι τυχαίο εάν δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε την ακριβή τιμή του προκαταβολικά. Θεωρείστε, για παράδειγμα, ένα ασυρματικό σύστημα επικοινωνιών. Το λαμβανόμενο σήμα σε ένα τέτοιο σύστημα συνήθως αποτελείται από μία συνιστώσα σήματος πληροφορίας, μια συνιστώσα τυχαία παρεμβολής και από το θόρυβο δέκτη. Η συνιστώσα σήματος πληροφορίας μπορεί να παριστάνει, για παράδειγμα, σήμα φωνής που συνήθως αποτελείται από τυχαία εμφανιζόμενες εκρήξεις ενέργειας με τυχαία διάρκεια. Η συνιστώσα παρεμβολής παριστάνει εξωτερικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα παραγόμενα από άλλα τηλεπικοινωνιακά συστήματα και τον ηλεκτρισμό της ατμόσφαιρας. Μια σημαντική πηγή θορύβου είναι ο θερμικός θόρυβος που προκαλείται από την τυχαία κίνηση των ηλεκτρονίων στους αγωγούς και στις διατάξεις στην είσοδο του δέκτη. Βρίσκουμε λοιπόν ότι το λαμβανόμενο σήμα είναι πλήρως τυχαίας φύσης.

Αν και δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε την ακριβή τιμή ενός τυχαίου σήματος προκαταβολικά, ωστόσο, μπορεί τούτο να περιγραφεί χρησιμοποιώντας τις στατιστικές του ιδιότητες όπως είναι η μέση ισχύς του τυχαίου σήματος ή η φασματική κατανομή αυτής της μέσης τιμής της ισχύος.

Για να μελετήσουμε περαιτέρω τις τυχαίες μεταβλητές, είναι βολικό να σκεφτόμαστε ότι ένα πείραμα και οι πιθανές εκβάσεις του ορίζουν ένα χώρο και τα σημεία του. Σε κάθε στοιχειώδη δυνατή έκβαση του πειράματος μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα σημείο που ονομάζεται δείγμα (sample point) συμβολιζόμενο με  $s$ . Το σύνολο των δειγμάτων  $\{s\}$ , που αντιστοιχεί στο σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων του πειράματος, ονομάζεται χώρος δειγμάτων (sample space), συμβολιζόμενος με  $S$ . Ένα γεγονός μπορεί να αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό δείγμα ή ένα σύνολο δειγμάτων.

Είναι συνηθισμένο, ιδιαίτερα όταν χρησιμοποιούμε τη γλώσσα του χώρου δειγμάτων, να θεωρούμε την έκβαση ενός πειράματος σαν μία μεταβλητή που μπορεί να περιφέρεται στο σύνολο των δειγμάτων και της οποίας η τιμή καθορίζεται από το πείραμα. Μία συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ένας χώρος δειγμάτων και της οποίας το πεδίο τιμών είναι κάποιο σύνολο πραγματικών αριθμών ονομάζεται τυχαία μεταβλητή του πειράματος. Έτσι, όταν η έκβαση του πειράματος είναι  $s$ , η τυχαία μεταβλητή συμβολίζεται σαν  $X(s)$  ή απλά  $X$ .

Συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής ή απλά συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X$  είναι η συνάρτηση  $F_X(x)$  εκείνη για την οποία ισχύει

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Όπου  $P(X \leq x)$  η πιθανότητα του γεγονότος  $X \leq x$ . Η συνάρτηση  $F_X(x)$  είναι μια μονότονη μη φθίνουσα συνάρτηση του  $x$  και είναι φραγμένη μεταξύ μηδέν και ένα. Η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συμβολίζεται με  $f_X(x)$ . Το όνομα συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας προέρχεται από το ότι η πιθανότητα του γεγονότος  $x_1 \leq X \leq x_2$  ισούται με:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$$

Επειδή  $F_X(\infty)=1$  που αντιστοιχεί στην πιθανότητα ενός βέβαιου γεγονότος και  $F_X(-\infty)=0$  που αντιστοιχεί στην πιθανότητα ενός αδύνατου γεγονότος:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$ . Ορίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F_{X,Y}(x,y)$  σαν την πιθανότητα να είναι η τυχαία μεταβλητή  $X$  μικρότερη ή ίση από μία καθορισμένη τιμή  $x$  και η τυχαία μεταβλητή  $Y$  μικρότερη ή ίση από μία καθορισμένη τιμή  $y$ . Οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  μπορεί να είναι δύο χωριστές μονοδιάστατες τυχαίες μεταβλητές ή οι συνιστώσες μια δισδιάστατης τυχαίας μεταβλητής. Σε κάθε περίπτωση, ο συνδυασμένος χώρος δειγμάτων είναι το επίπεδο  $xy$ . Η από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F_{X,Y}(x,y)$  είναι η πιθανότητα ότι η έκβαση ενός πειράματος θα καταλήξει σε ένα δείγμα που θα βρίσκεται μέσα στο τεταρτημόριο  $(-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y)$  του συνδυασμένου χώρου δειγμάτων. Δηλαδή,

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq Y)$$

Υποθέστε ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F_{X,Y}(x,y)$  είναι συνεχής παντού και ότι η μερική παράγωγος

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Υπάρχει και είναι συνεχής παντού. Καλούμε τη συνάρτηση  $f_{X,Y}(x,y)$  από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$ . Η από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F_{X,Y}(x,y)$  είναι μονότονη και μη φθίνουσα συνάρτηση και του  $x$  και του  $y$ . Συνεπώς, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f_{X,Y}(x,y)$  είναι πάντα μη αρνητική. Ακόμη, ο συνολικός όγκος κάτω από τη γραφική παράσταση της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας πρέπει να είναι μονάδα.

Η μέση τιμή (mean value) ή αναμενόμενη τιμή (expected value) της τυχαίας μεταβλητής  $X$  ορίζεται από:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

Όπου το  $E$  συμβολίζει τον τελεστή προσδοκίας (expectation operator). Δηλαδή, η μέση τιμή εντοπίζει το κέντρο βάρους της περιοχής κάτω από την καμπύλη της πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής  $X$ . Όμοια, η αναμενόμενη τιμή μιας συνάρτησης  $g(X)$  ορίζεται από:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

Ενώ οι από κοινού ροπές δύο τυχαίων μεταβλητών  $X$  και  $Y$  ορίζονται ως:



$$E[X^j Y^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^j y^k f_{X,Y}(x,y) dx dy$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν τα εξής μεγέθη που σχετίζονται με τις τυχαίες μεταβλητές X και Y

**Πίνακας 3 – Μεταβλητότητα, Συμμεταβλητότητα, Συντελεστής Συσχέτισης**

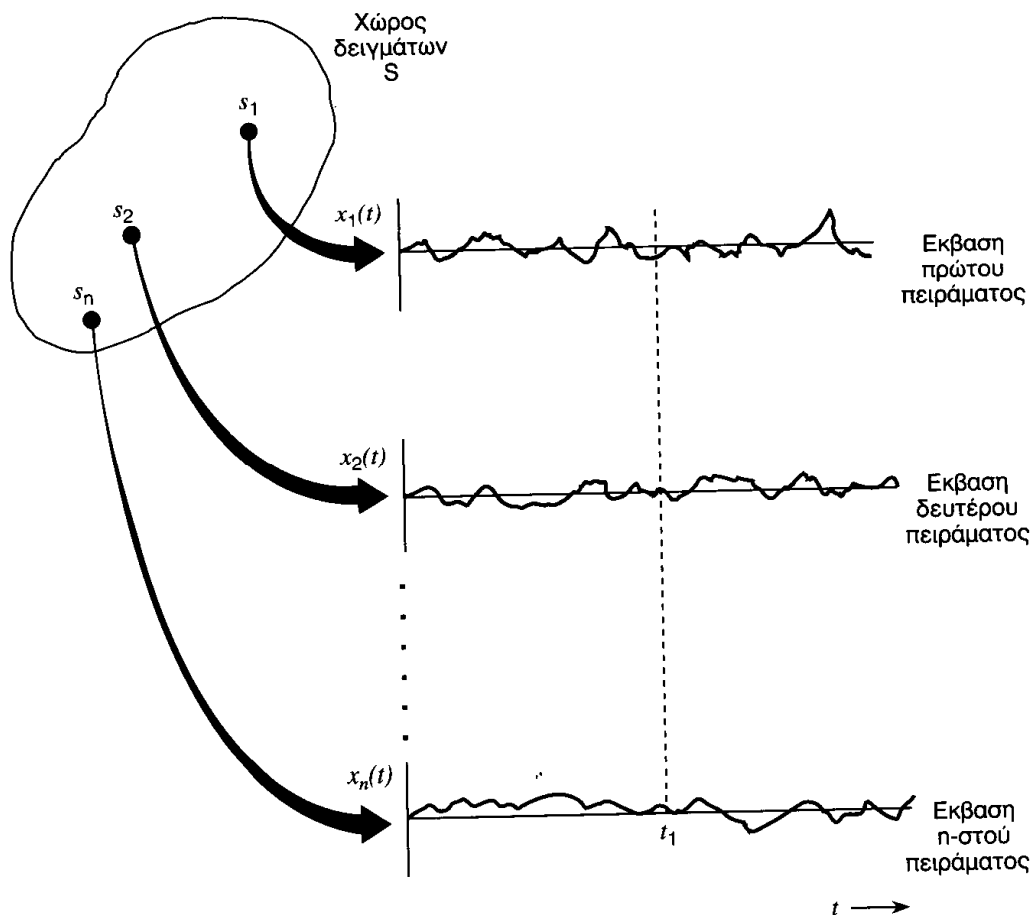
Μεταβλητότητα (variance)	$Var[X] = E[(X - \mu)^2]$
Συμμεταβλητότητα (covariance)	$Cov[XY] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$
Συντελεστής Συσχέτισης (correlation coefficient)	$\rho = \frac{Cov[XY]}{\sigma_X \sigma_Y}$

Λέμε ότι δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ασυσχέτιστες (uncorrelated) αν και μόνο αν η συμμεταβλητότητά τους είναι μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν  $Cov[XY]=0$ .

#### 4.2 Στοχαστικές Ανελιξίες

Ένα βασικό μέλημα στη στατιστική ανάλυση των συστημάτων είναι ο χαρακτηρισμός τυχαίων σημάτων όπως τα σήματα φωνής, σήματα τηλεόρασης, σήματα τηλεγραφίας, ψηφιακά δεδομένα και ηλεκτρικός θόρυβος. Αυτά τα τυχαία σήματα έχουν δύο ιδιότητες: πρώτον, τα σήματα είναι χρονικές συναρτήσεις, που ορίζονται σε κάποιο διάστημα παρατήρησης και δεύτερον, τα σήματα είναι τυχαία με την έννοια ότι πριν τη διενέργεια ενός πειράματος δεν είναι δυνατό να περιγράψουμε ακριβώς τις κυματομορφές που θα παρατηρηθούν. Συνεπώς, περιγράφοντας τυχαία σήματα βρίσκουμε ότι κάθε δείγμα στο χώρο δειγμάτων μας είναι μια χρονική συνάρτηση. Για παράδειγμα, μελετώντας τις διακυμάνσεις στην έξοδο ενός τρανζίστορ, μπορούμε να θεωρήσουμε σαν νοητό μοντέλο του προβλήματός μας την ταυτόχρονη παρατήρηση ενός άπειρα μεγάλου αριθμού ομοίων τρανζίστορ. Η έξοδος (μετρούμενη σαν χρονική συνάρτηση) ενός συγκεκριμένου τρανζίστορ της συλλογής είναι τότε ένα δείγμα στο χώρο δειγμάτων μας. Ο χώρος δειγμάτων ή το σύνολο που περιλαμβάνει τις χρονικές συναρτήσεις ονομάζεται τυχαία διαδικασία ή στοχαστική ανέλιξη (random or stochastic process). Σαν σημαντικό μέρος αυτής της έννοιας, θεωρούμε την ύπαρξη συνάρτησης κατανομής που ορίζεται σε μια κατάλληλη κατηγορία συνόλων στο χώρο δειγμάτων, έτσι ώστε να μπορούμε να μιλάμε με βεβαιότητα για την πιθανότητα των διάφορων γεγονότων. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια στοχαστική ανέλιξη σαν ένα σύνολο χρονικών συναρτήσεων μαζί με ένα πιθανοτικό κανόνα που αποδίδει μια πιθανότητα σε κάθε σημαντικό γεγονός συνδεδεμένο με την παρατήρηση μίας από αυτές τις συναρτήσεις.

Θεωρείστε μια στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  που παριστάνεται από το σύνολο των συναρτήσεων δειγμάτων (sample functions)  $\{x_j(t)\}$ ,  $j=1,2,\dots,n$  όπως απεικονίζονται στο Σχήμα 25.



Σχήμα 25 – Ένα σύνολο από συναρτήσεις δείγματα

Η συνάρτηση δείγμα ή κυματομορφή  $x_1(t)$  με πιθανότητα εμφάνισης  $P(s_1)$  αντιστοιχεί στο δείγμα  $s_1$  του χώρου δειγμάτων  $S$  και ούτω καθ' εξής για τις άλλες συναρτήσεις δείγματα  $x_2(t), \dots, x_n(t)$ . Τώρα υποθέστε ότι παρατηρούμε το σύνολο των κυματομορφών  $\{x_j(t)\}$ ,  $j=1,2,\dots,n$  ταυτόχρονα σε κάποια χρονική στιγμή  $t=t_1$ , όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Καθώς κάθε δείγμα  $s_j$  του χώρου δειγμάτων  $S$  έχει συνδεδεμένο με αυτό έναν αριθμό  $x_j(t_1)$  και μια πιθανότητα  $P(s_j)$ , βρίσκουμε ότι το προκύπτον σύνολο αριθμών  $\{x_j(t_1)\}$ ,  $j=1,2,\dots,n$  αποτελεί μια τυχαία μεταβλητή (random variable). Συμβολίζουμε αυτήν την τυχαία μεταβλητή με  $X(t_1)$ . Παρατηρώντας το δοσμένο σύνολο κυματομορφών ταυτόχρονα σε μία δεύτερη χρονική στιγμή, ας πούμε  $t_2$ , λαμβάνουμε ένα διαφορετικό σύνολο αριθμών, συνεπώς μία διαφορετική τυχαία μεταβλητή  $X(t_2)$ . Πράγματι, το σύνολο των κυματομορφών  $\{x_j(t)\}$  ορίζει μία διαφορετική τυχαία μεταβλητή για κάθε επιλογή της στιγμής παρατήρησης. Η διαφορά μεταξύ μιας τυχαίας μεταβλητής και μιας στοχαστικής ανέλιξης είναι ότι για μια τυχαία μεταβλητή η έκβαση ενός πειράματος απεικονίζεται με έναν αριθμό, ενώ για μια στοχαστική ανέλιξη η έκβαση απεικονίζεται με μία κυματομορφή που είναι χρονική συνάρτηση.

### 4.3 Τυχαία Διανύσματα Λαμβανόμενα από Στοχαστικές Ανελίξεις

Εξ' ορισμού, μία στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  σημαίνει την ύπαρξη ενός άπειρου αριθμού τυχαίων μεταβλητών, μίας για κάθε τιμή του  $t$  στο διάστημα  $-\infty < t < \infty$ . Έτσι μπορούμε να μιλάμε για τη συνάρτηση κατανομής  $F_{X(t_1)}(x_1)$  της τυχαίας μεταβλητής  $X(t_1)$  που λαμβάνεται από την παρατήρηση της στοχαστικής ανέλιξης  $X(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_1$ .

Γενικότερα, για κ χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots, t_k$  ορίζουμε τις κ τυχαίες μεταβλητές  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)$ , αντίστοιχα και εκφράζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής (joint distribution function) τους σαν την πιθανότητα του συνδυασμένου γεγονότος  $X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k$  όπως φαίνεται από:

$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_k) \leq x_k)$$

Για απλούστευση του συμβολισμού, γράφουμε αυτή την από κοινού συνάρτηση κατανομής απλά σαν  $F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$  όπου το τυχαίο διάνυσμα (random vector)  $\mathbf{X}(t)$  ισούται με:

$$\hat{X}(t) = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \\ \vdots \\ X(t_k) \end{bmatrix}$$

Και το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  ισούται με:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Όπου  $\hat{\cdot}$  σηματοδοτεί διάνυσμα. Για ένα συγκεκριμένο δείγμα  $s_j$ , οι συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος  $\mathbf{X}(t)$  παριστάνουν τις τιμές των συναρτήσεων δειγμάτων  $x_j(t)$  που παρατηρούνται τις χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Παρατηρούμε ακόμη ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής  $F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$  εξαρτάται από τη στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  και το σύνολο των τιμών  $\{t_j\}$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ .

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος  $\mathbf{X}(t)$  ισούται με:

$$f_{\hat{X}(t)}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_k} F_{\hat{X}(t)}(\hat{\mathbf{x}})$$

Αυτή η συνάρτηση είναι πάντα μη αρνητική, με συνολικό όγκο ένα.

#### 4.4 Στασιμότητα

Θεωρείστε ένα σύνολο χρονικών στιγμών  $t_1, t_2, \dots, t_k$  στο διάστημα ορισμού της στοχαστικής ανέλιξης  $X(t)$ . Ένας πλήρης χαρακτηρισμός της στοχαστικής ανέλιξης  $X(t)$  μας επιτρέπει να καθορίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $F_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x})$ . Η στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  λέγεται ότι είναι αυστηρά στάσιμη (strictly stationary) ή στάσιμη με τη στενή έννοια (stationary in the strict sense) αν η προαναφερθείσα από

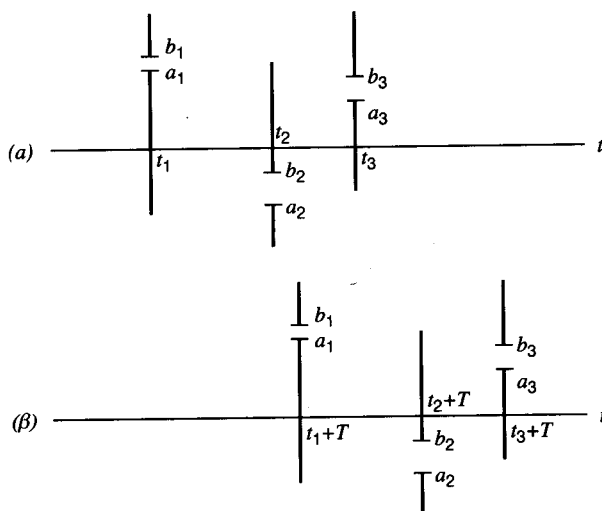
κοινού συναρτησης πυκνότητας πιθανότητας παραμένει αμετάβλητη σε μετατοπίσεις της αρχής του χρόνου, δηλαδή αν ισχύει η ισότητα:

$$f_{X(t)}(\mathbf{x})=f_{X(t+T)}(\mathbf{x})$$

για κάθε πεπερασμένο σύνολο χρονικών στιγμών  $\{t_j\}$ ,  $j=1,2,\dots,k$  και για κάθε χρονική μετατόπιση  $T$  και διάνυσμα  $\mathbf{x}$ . Οι συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος  $\mathbf{X}(t)$  λαμβάνονται παρατηρώντας τη στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  τις χρονικές στιγμές  $t_1, t_2, \dots, t_k$ . Αντίστοιχα, οι συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος  $\mathbf{X}(t+T)$  λαμβάνονται παρατηρώντας τη στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  τις χρονικές στιγμές  $t_1+T, t_2+T, \dots, t_k+T$ , όπου  $T$  είναι η χρονική μετατόπιση.

Οι στάσιμες ανελιξεις είναι πολύ μεγάλης σημασίας για τουλάχιστον δύο λόγους. Πρώτον, συναντιούνται συχνά στην πράξη ή προσεγγίζονται με μεγάλο βαθμό ακρίβειας. Στην πραγματικότητα, από πρακτική άποψη, δεν είναι απαραίτητο μια στοχαστική ανέλιξη να είναι στάσιμη σε όλες τις χρονικές στιγμές, αλλά μόνο σε κάποιο διάστημα παρατήρησης που είναι αρκετό για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Δεύτερον, πολλές από τις σημαντικές ιδιότητες των στάσιμων ανελιξεων που συνήθως συναντιούνται περιγράφονται από πρώτες και δεύτερες ροπές. Κατά συνέπεια, είναι σχετικά εύκολο να αναπτυχθεί μια απλή αλλά χρήσιμη θεωρία για να περιγράψει αυτές τις ανελιξεις. Οι στοχαστικές ανελιξεις που δεν είναι στάσιμες καλούνται μη στάσιμες (non-stationary).

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μια στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  που είναι γνωστόν ότι είναι αυστηρά στάσιμη. Μια επίπτωση της στασιμότητας είναι ότι η πιθανότητα ένα σύνολο συναρτήσεων δειγμάτων αυτής της διαδικασίας να διέρχεται μέσα από τα παράθυρα του σχήματος 26(α) είναι ίση με την πιθανότητα ένα σύνολο συναρτήσεων δειγμάτων να διέρχεται μέσα από τα αντίστοιχα χρονικά μετατοπισμένα παράθυρα του σχήματος 26(β).



I

Σχήμα 26 – Απεικόνιση της έννοιας της στασιμότητας

#### 4.5 Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης και Συμμεταβλητότητας

Σε πολλές πρακτικές περιπτώσεις βρίσκουμε ότι δεν είναι δυνατό να καθορίσουμε (μέσω κατάλληλων μετρήσεων ας πούμε) τη συνάρτηση κατανομής μιας στοχαστικής ανέλιξης. Έτσι πρέπει να ικανοποιηθούμε με μια μερική περιγραφή (partial description) της κατανομής της ανέλιξης. Συνήθως χρησιμοποιούνται οι μέσες τιμές και οι συναρτήσεις συσχέτισης και συμμεταβλητότητας της στοχαστικής ανέλιξης ώστε να δίνουν μια χονδρική, αλλά ωστόσο χρήσιμη περιγραφή της κατανομής.

Θεωρείστε μια πραγματική στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$ . Ορίζουμε τη μέση τιμή (mean) της ανέλιξης  $X(t)$  σαν:

$$m_x(t_k) = E[X(t_k)]$$

Όπου το  $E$  συμβολίζει τον τελεστή προσδοκίας και το  $X(t_k)$  την τυχαία μεταβλητή που λαμβάνεται παρατηρώντας τη στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  τη χρονική στιγμή  $t_k$ . Συμβολίζοντας τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής της τυχαίας μεταβλητής σαν  $f_{X(t_k)}(x)$  μπορούμε να γράψουμε:

$$m_x(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t_k)}(x) dx$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function) της στοχαστικής ανέλιξης  $X(t)$  σαν συνάρτηση των δύο χρονικών μεταβλητών  $t_k$  και  $t_i$ , όπως φαίνεται από:

$$R_X(t_k, t_i) = E[X(t_k)X(t_i)]$$

Όπου  $X(t_k)$  και  $X(t_i)$  είναι τυχαίες μεταβλητές που λαμβάνονται παρατηρώντας τη στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  τις χρονικές στιγμές  $t_k$  και  $t_i$  αντίστοιχα. Συμβολίζοντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτών των δύο τυχαίων μεταβλητών με  $f_{X(t_k), X(t_i)}(x, y)$  μπορούμε να γράψουμε:

$$R(t_k, t_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{X(t_k), X(t_i)}(x, y) dx dy$$

Η συνάρτηση αυτομεταβλητότητας (autocovariance function) της στοχαστικής ανελιξης  $X(t)$  ορίζεται σαν:

$$K_X(t_k, t_i) = E[(X(t_k) - m_X(t_k))(X(t_i) - m_X(t_i))]$$

Εάν η στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  έχει μηδενική μέση τιμή, τότε  $K_X(t_k, t_i) = R_X(t_k, t_i)$ . Σε αντίθετη περίπτωση είναι άνισες. Για μια αυστηρά στάσιμη ανέλιξη και οι τρεις ποσότητες που περιγράφονται παραπάνω παίρνουν απλούστερες μορφές. Ιδιαίτερα, βρίσκουμε ότι η μέση τιμή της στοχαστικής ανέλιξης είναι μία σταθερά  $m_x$  οπότε μπορούμε να γράψουμε:

$$m_x(t_k) = m_x, \text{ για όλα τα } t_k$$

Ακόμη, βρίσκουμε ότι τόσο η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης όσο και η συνάρτηση αυτομεταβλητότητας εξαρτώνται μόνο από τη χρονική διαφορά (time difference)  $t_k - t_i$  όπως φαίνεται από:

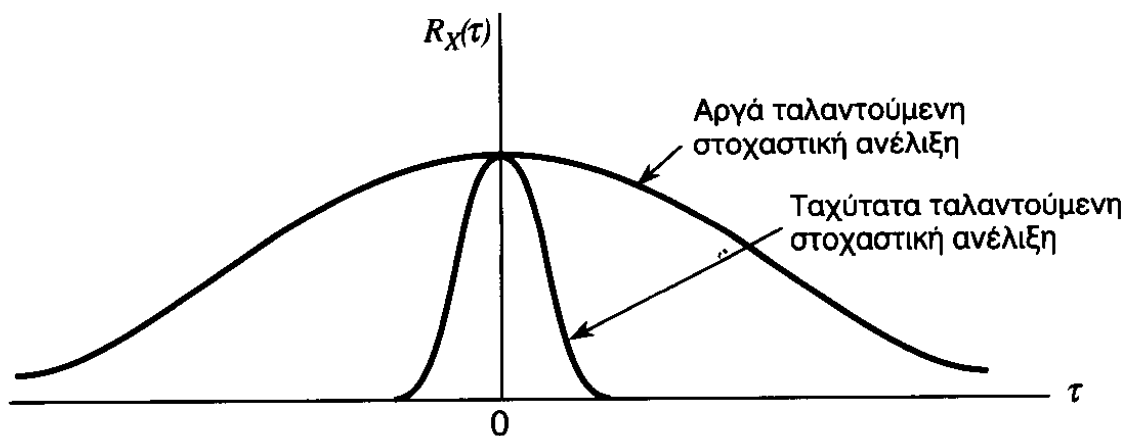
$$R_X(t_k, t_i) = R_X(t_k - t_i)$$

$$K_X(t_k, t_i) = K_X(t_k - t_i)$$

Οι παραπάνω συνθήκες δεν είναι επαρκείς για να εγγυηθούν ότι η στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  είναι αυστηρά στάσιμη. Ωστόσο, μία στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  που δεν είναι αυστηρά στάσιμη, αλλά για την οποία ισχύουν οι συνθήκες αυτές, λέγεται ότι είναι ευρείας έννοιας στάσιμη ή στάσιμη με την ευρεία έννοια. Έτσι, η στασιμότητα ευρείας έννοιας αντιπροσωπεύει μια ασθενή μορφή στασιμότητας στο ότι όλες οι αυστηρά στάσιμες ανελιξεις είναι επίσης στάσιμες με την ευρεία έννοια, αλλά το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές. Για απλούστευση του συμβολισμού, ορίζουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης μιας στάσιμης ανέλιξης  $X(t)$  σαν:

$$R_X(\tau) = E[X(t + \tau)X(t)]$$

Η φυσική σημασία της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης  $R_X(\tau)$  είναι ότι παρέχει ένα μέσο για την περιγραφή της αλληλοεξάρτησης των δύο τυχαίων μεταβλητών που λαμβάνονται παρατηρώντας μια στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$  ανά χρονικές στιγμές που απέχουν κατά  $\tau$  δευτερόλεπτα. Είναι συνεπώς φανερό ότι όσο ταχύτερα μεταβάλλεται χρονικά η στοχαστική ανέλιξη  $X(t)$ , τόσο ταχύτερα μειώνεται η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $R_X(\tau)$  από το μέγιστό της  $R_X(0)$  καθώς το  $\tau$  αυξάνει, όπως απεικονίζεται στο σχήμα 4.3. [10]



Σχήμα 27 – Απεικόνιση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης μιας αργά και μιας απότομα ταλαντούμενης στοχαστικής ανέλιξης

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

### **ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε στα εργαλεία της στατιστικής που μας είναι απαραίτητα για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την ανάλυση του EEG με βάση την πολλαπλή συνολοκλήρωση. Θα περιγράψουμε τον έλεγχο υποθέσεων και θα αναλύσουμε τους ελέγχους t-test και Analysis of Variance (Anova).

## 5.1 Έλεγχος Υποθέσεων

Ο έλεγχος υποθέσεων αποτελεί εργαλείο της στατιστικής επιστήμης. Πρέπει να αποφανθούμε αν μία υπόθεση είναι δεκτή ή αν αυτή απορρίπτεται. Το βασικό πρόβλημα έχει ως εξής:

Σε κάποιο πληθυσμό, μία παράμετρος  $\theta$  έχει την τιμή  $\theta_0$ . Κάποια στιγμή, επιδρούμε με κάποιο τρόπο σ' όλα τα στοιχεία του πληθυσμού. Το ερώτημα είναι αν η παράμετρος  $\theta$  εξακολουθεί (μετά την επίδραση) να έχει την τιμή  $\theta_0$  ή αν είναι  $\theta \neq \theta_0$ . Έτσι έχουμε τις υποθέσεις:

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_a: \theta \neq \theta_0$$

Όπου  $H_0$  είναι το όνομα της πρώτης υπόθεσης, η οποία αναφέρεται στην κατάσταση του πληθυσμού πριν την επίδραση και  $H_a$  είναι το όνομα της δεύτερης υπόθεσης, η οποία αναφέρεται στην κατάσταση μετά την επίδραση. Η υπόθεση  $H_0$  ονομάζεται μηδενική υπόθεση ενώ η υπόθεση  $H_a$  ονομάζεται εναλλακτική υπόθεση.

Ο έλεγχος υποθέσεων γίνεται χρησιμοποιώντας κάποιο δείγμα από τον πληθυσμό. Προκαθορίζεται επίσης κάποια στάθμη σημαντικότητας  $\alpha$ . Το  $\alpha$  ονομάζεται και επίπεδο σημαντικότητας. [18]

## 5.2 T-Test

Μεταξύ των συνηθέστερα χρησιμοποιούμενων στατιστικών δοκιμασιών σημαντικότητας (significance tests), που εφαρμόζονται σε μικρές ομάδες δεδομένων (πληθυσμιακά δείγματα), είναι η σειρά των δοκιμασιών Student. Μια από αυτές τις δοκιμασίες πραγματοποιεί σύγκριση δύο μέσων τιμών και χρησιμοποιείται σε πλήθος περιπτώσεων. Σαν t-test ονομάζουμε γενικά οποιονδήποτε έλεγχο υποθέσεων στον οποίο το στατιστικό ακολουθεί την κατανομή Student.

Το αποτέλεσμα αυτών των δοκιμασιών είναι η αποδοχή ή η απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης  $H_0$ . Η μηδενική υπόθεση γενικά δηλώνει ότι: "Οι διαφορές, αποκλίσεις ή έκτροπα αποτελέσματα οφείλονται αποκλειστικά σε τυχαία και όχι σε συστηματικά σφάλματα". Η εναλλακτική υπόθεση  $H_a$  δηλώνει το ακριβώς αντίθετο. Για το t-test μηδενική υπόθεση είναι η ισότητα των μέσων τιμών δύο διαφορετικών δειγμάτων πληθυσμού. Η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι οι μέσες τιμές διαφέρουν σημαντικά. Εσφαλμένη απόρριψη της  $H_0$  ενώ ισχύει συνιστά σφάλμα 1ου είδους, ενώ εσφαλμένη αποδοχή της  $H_0$  ενώ δεν ισχύει συνιστά σφάλμα 2ου είδους. Όλες οι δοκιμασίες σημαντικότητας παρέχουν αποτελέσματα σε προκαθορισμένη στάθμη εμπιστοσύνης % (confidence level, CL%). Οι πλέον χρησιμοποιούμενες στάθμες εμπιστοσύνης είναι 90%, 95% και 99%, με πλέον συνηθισμένη το 95%.

CL 95% σημαίνει ότι: Σε περίπτωση απόρριψης της  $H_0$ , είμαστε σίγουροι ότι κάναμε το σωστό στο 95% ή περισσότερο των περιπτώσεων. Με άλλα λόγια, διακινδυνεύουμε μια πιθανότητα όχι μεγαλύτερη από  $(100-95)/100 = 0,05$  να κάνουμε σφάλμα 1ου είδους.

Μπορούμε να αυξήσουμε ή να μειώσουμε τη στάθμη εμπιστοσύνης μιας δοκιμασίας σημαντικότητας, αλλά θα πρέπει να λάβουμε υπόψη τους ακόλουθους κινδύνους:

- Ελαττώνοντας τη CL π.χ. στο 90% (κάνοντας πιο εύκολη την απόρριψη της  $H_0$ ) προφανώς αυξάνουμε την πιθανότητα σφάλματος 1ου είδους.



- Αυξάνοντας τη CL π.χ. στο 99% (κάνοντας δυσκολότερη την απόρριψη της  $H_0$ ) προφανώς αυξάνουμε την πιθανότητα σφάλματος 2ου είδους.
- Μια CL 95% γενικά θεωρείται ως ένας καλός συγκερασμός μεταξύ αυτών των δύο διαφορετικών κινδύνων.
- Η δοκιμασία t του Student για τη σύγκριση δύο μέσων τιμών προϋποθέτει τα εξής:
- Η πληθυσμιακή κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων είναι κανονική κατά Gauss
- Οι τυπικές αποκλίσεις μεταξύ των δύο πληθυσμιακών δειγμάτων δεν διαφέρουν σημαντικά.

Οι δύο μέσες τιμές και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις υπολογίζονται με βάση τις ακόλουθες γνωστές εξισώσεις ( $n_A$  και  $n_B$  είναι ο αριθμός των δεδομένων στις ομάδες A και B, αντίστοιχα):

$$\bar{x}_A = \sum_{i=1}^{n_A} x_i / n_A \quad \bar{x}_B = \sum_{i=1}^{n_B} x_i / n_B$$

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_A} (\bar{x}_A - x_i)^2}{n_A - 1}} \quad S_B = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_B} (\bar{x}_B - x_i)^2}{n_B - 1}}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η εκ συνένωσης τυπική απόκλιση  $S_{AB}$ :

$$S_{AB} = \sqrt{\frac{(n_A - 1)S_A^2 + (n_B - 1)S_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

Τελικά υπολογίζεται το στατιστικό στοιχείο t-πειραματικό  $t_{\text{exp}}$ :

$$t_{\text{exp}} = \frac{|\bar{x}_A - \bar{x}_B|}{S_{AB} \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}}}$$

Η τιμή του  $t_{\text{exp}}$  συγκρίνεται με την κρίσιμη θεωρητική τιμή  $t_{\text{th}}$  που αντιστοιχεί στους δεδομένους βαθμούς ελευθερίας N (εδώ είναι  $N = n_A + n_B - 2$ ) και στην επιλεγμένη στάθμη εμπιστοσύνης. Πίνακες κρίσιμων τιμών t βρίσκονται σε όλα τα βιβλία στατιστικής. Εάν  $t_{\text{exp}} > t_{\text{th}}$  η  $H_0$  απορρίπτεται, ειδάλλως η  $H_0$  γίνεται αποδεκτή. [16]

### 5.3 Analysis of Variance

#### Εισαγωγή

Η ανάλυση της διακύμανσης (Analysis of Variance – ANOVA) είναι μία στατιστική μέθοδος με την οποία η μεταβλητότητα που υπάρχει σ' ένα σύνολο δεδομένων διασπάται στις επιμέρους συνιστώσες της με στόχο την κατανόηση της σημαντικότητας των διαφορετικών πηγών προέλευσής της. Η ανάπτυξη της μεθοδολογίας οφείλεται στον θεμελιωτή της σύγχρονης στατιστικής επιστήμης, άγγλο στατιστικό Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962). Στην πραγματικότητα η ANOVA περιλαμβάνει μία ομάδα στατιστικών μεθόδων καταλλήλων για την ανάλυση δεδομένων που προκύπτουν από πειραματικούς σχεδιασμούς.

Τα δεδομένα ενός δείγματος ανάλογα με την προέλευσή τους διακρίνονται σε παρατηρήσεις (observational sampling) ή σε πειραματικά (designed sampling). Στην πρώτη κατηγορία ο στατιστικός ερευνητής απλά παρατηρεί τις τιμές που εμφανίζονται χωρίς να έχει δυνατότητα επέμβασης στις αντίστοιχες μεταβλητές. Αντίθετα στη δεύτερη κατηγορία ο στατιστικός ερευνητής προσπαθεί να ελέγξει τα επίπεδα μιάς η περισσότερων ανεξάρτητων (independent) μεταβλητών προκειμένου να προσδιορίσει την επίδραση που έχουν πάνω στην υπό μελέτη μεταβλητή που καλείται εξαρτημένη (dependent) ή απόκριση (response). Για παράδειγμα, απόκριση μπορεί να είναι η βαθμολογία στην εξέταση του μαθήματος της στατιστικής, ο όγκος των πωλήσεων μιάς επιχείρησης ή το συνολικό εισόδημα μιάς οικογένειας κατά τη διάρκεια του έτους.

Στόχος κάθε στατιστικού πειράματος είναι ο προσδιορισμός της επίδρασης μιάς η περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών πάνω στην απόκριση. Οι μεταβλητές αυτές αναφέρονται συνήθως σαν παράγοντες (factors) και μπορεί να είναι είτε ποσοτικές είτε ποιοτικές. Για παράδειγμα θα ήταν ενδιαφέρον να διερευνήσουμε την επίδραση που έχει ο ποιοτικός παράγων “φύλο” στη βαθμολογία της στατιστικής ή ο ποσοτικός παράγων “πλήθος καταστημάτων πώλησης” στον όγκο των πωλήσεων. Σε άλλες πάλι περιπτώσεις ενδεχομένως να ενδιαφερόμαστε για την επίδραση που έχουν πάνω στην απόκριση περισσότερες της μιάς ανεξάρτητες μεταβλητές όπως ο ποσοτικός παράγων “πλήθος εργαζομένων” και ο ποιοτικός παράγων “πόλη διαμονής” πάνω στο οικογενειακό εισόδημα.

Οι τιμές του παράγοντα που προσδιορίζονται στο πείραμα λέγονται επίπεδα (levels). Για παράδειγμα τα επίπεδα για τον ποιοτικό παράγοντα φύλο είναι “αρσενικό” - “θηλυκό”, ενώ για τον ποσοτικό παράγοντα πλήθος καταστημάτων πώλησης είναι “θετικός ακέραιος”. Σε ένα πείραμα με ένα παράγοντα οι μεταχειρίσεις (treatments) του πειράματος είναι τα επίπεδα του παράγοντα. Για παράδειγμα αν στο πείραμα βαθμολογία της στατιστικής μας ενδιαφέρει η επίδραση του παράγοντα “φύλο” τότε οι μεταχειρίσεις του πειράματος είναι αρσενικό – θηλυκό. Σε ένα πείραμα με δύο η περισσότερους παράγοντες οι μεταχειρίσεις είναι οι συνδυασμοί παραγόντων-επιπέδων. Για παράδειγμα αν μας ενδιαφέρει η επίδραση των παραγόντων “φύλο”, “ηλικία” στη βαθμολογία της στατιστικής, τότε οι μεταχειρίσεις είναι οι συνδυασμοί των επιπέδων φύλου και ηλικίας π.χ. (αρσενικό, 21), (θηλυκό, 19).

#### Γέννηση της κατανομής F

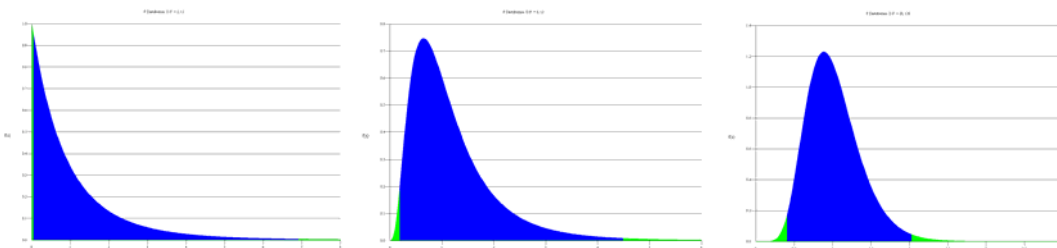
Αν  $Y_1$  και  $Y_2$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την κατανομή  $\chi^2$  με βαθμούς ελευθερίας  $n_1$  και  $n_2$  αντίστοιχα, τότε το κλάσμα

$$W = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$$

είναι τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μία κατανομή την οποία μελέτησε και ανέπτυξε ο Sir R.A.Fisher και η οποία προς τιμή του συμβολίζεται με  $F$ . Ο Fisher στην προσπάθειά του να μελετήσει τις διαφορές στην παραγωγή της σοδειάς ανέπτυξε τη νέα κατανομή σαν λόγο δύο ανεξαρτητών  $\chi^2$ . Η κατανομή αυτή χαρακτηρίζεται από δύο βαθμούς ελευθερίας,  $n_1$  για τον αριθμητή και  $n_2$  για τον παρονομαστή γι' αυτό γράφουμε  $F_{n_1, n_2}$ . Επειδή η τυχαία μεταβλητή  $\chi^2$  είναι πάντα θετική, το ίδιο θα ισχύει και για την  $F$ . Η οικογένεια των κατανομών  $F_{n_1, n_2}$  είναι μονόκορφη και ασύμμετρη προς τα δεξιά, όπως προκύπτει από το Σχήμα 28, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} \frac{x^{\frac{n_1-2}{2}}}{\left(1 + \frac{n_1 x}{n_2}\right)^{\frac{n_1+n_2}{2}}}, \quad 0 < x < \infty,$$

όπου  $\Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ , είναι η συνάρτηση Γάμα.



Σχήμα 28 – Κατανομές  $F_{2,12}$  -  $F_{8,12}$  και  $F_{25,120}$

Μία αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη της κατανομής  $F$  είναι ότι τα δείγματα θα πρέπει να ακολουθούν την κανονική κατανομή. Εν τούτοις σε περιπτώσεις που η δειγματικές κατανομές αποκλίνουν από την κανονική, η δοκιμασία  $F$  μένει σχετικά ανεπηρέαστη, εφ' όσον οι δύο πληθυσμοί είναι τουλάχιστον μονόκορφοι και τα μεγέθη των δειγμάτων είναι παρόμοια. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις η δοκιμασία που βασίζεται στην κατανομή  $F$  χαρακτηρίζεται σαν εύρωστη (robust).

Μερικές φορές υπάρχει η ανάγκη να συγκρίνουμε δύο διακυμάνσεις και για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε το κλάσμα  $\sigma_1^2 / \sigma_2^2$ . Αν οι διακυμάνσεις είναι ίσες τότε ο λόγος τους θα είναι 1. Συνήθως όμως στην πράξη οι διακυμάνσεις των πληθυσμών είναι άγνωστες, οπότε οι συγκρίσεις γίνονται με βάση τις δειγματικές διακυμάνσεις. Για παράδειγμα αν  $s_1^2$  και  $s_2^2$  είναι οι δειγματικές διακυμάνσεις από δύο δείγματα με  $n_1$  και  $n_2$  παρατηρήσεις αντίστοιχα που ακολουθούν την κανονική κατανομή, τότε το κλάσμα

$$VR = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2}$$

(λόγος δύο  $\chi^2$ ) ακολουθεί την κατανομή  $F$ . Κάτω από την υπόθεση

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

το στατιστικό

$$VR = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

ακολουθεί την κατανομή  $F_{(n_1-1),(n_2-1)}$ . Αν τα δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό η από πληθυσμούς με ίσες διακυμάνσεις, τότε το  $VR$  θα πρέπει να είναι κοντά στο 1. Η κατανομή  $F$  προσδιορίζει τα όρια της ανοχής μας για το πόσο μεγάλο η μικρό θα πρέπει να είναι το κλάσμα  $VR$  προκειμένου να συμπεράνουμε ότι οι δειγματικές διακυμάνσεις διαφέρουν σημαντικά.

Τα άνω  $\alpha$  εκατοστιαία σημεία της κατανομής  $F_{n_1, n_2}$  συμβολίζονται με  $F_{n_1, n_2, \alpha}$  και δίνονται από στατιστικούς πίνακες. Οι βαθμοί ελευθερίας για τον αριθμητή εμφανίζονται πάνω από τις στήλες, ενώ οι βαθμοί ελευθερίας για τον παρονομαστή εμφανίζονται δίπλα από τις γραμμές. Επειδή η κατανομή  $F$  δεν είναι συμμετρική, προκειμένου να υπολογίσουμε τα κάτω  $\alpha$  εκατοστιαία σημεία της χρησιμοποιούμε την αντίστροφη ιδιότητα της  $F$ . Σύμφωνα με την ιδιότητα αυτή η τιμή της κάτω ουράς προκύπτει από την αντίστοιχη της άνω ουράς σύμφωνα με τη σχέση

$$F_{n_1, n_2, \text{κάτω } \alpha} = \frac{1}{F_{n_2, n_1, \text{άνω } \alpha}}$$

όπου θα πρέπει να προσέξουμε την αντιστροφή των βαθμών ελευθερίας. Για παράδειγμα

$$F_{8,12, \text{κάτω } 0.05} = \frac{1}{F_{12,8, \text{άνω } 0.05}} = \frac{1}{3.28} = 0.305.$$

### Ανάλυση διακύμανσης κατά ένα παράγοντα

Στην απλούστερη μορφή της η ANOVA μας δίνει τη δυνατότητα να δοκιμάσουμε την υπόθεση ότι οι μέσες τιμές διαφόρων πληθυσμών είναι ίσες. Κάτω από το πλαίσιο αυτό μπορούμε να θεωρήσουμε την ANOVA σαν προέκταση της δοκιμασίας  $t$  για την σύγκριση των μέσων τιμών δύο πληθυσμών. Υπάρχουν όμως δύο λόγοι για τους οποίους χρησιμοποιούμε την ANOVA έναντι της δοκιμασίας  $t$ . Ο ένας είναι η συντομότερη διαδικασία ανάλυσης και ο δεύτερος (και πιο σημαντικός) η ακρίβεια της διάγνωσης. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι έχουμε να συγκρίνουμε τις μέσες τιμές για 5 πληθυσμούς, τότε θα πρέπει να κάνουμε

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$$

διαφορετικές ζευγαρωτές δοκιμασίες  $t$ . Στη συνέχεια και προκειμένου να αποδεχθούμε την μηδενική υπόθεση

$H_0$ : Δεν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των 5 πληθυσμών

θα πρέπει να αποδεχθούμε και τις 10 ζευγαρωτές δοκιμασίες  $t$ . Αν το επίπεδο σημαντικότητας κάθε ζευγαρωτής δοκιμασίας είναι  $\alpha = 0.05$ , τότε η πιθανότητα να αποδεχθούμε και τις 10 δοκιμασίες είναι  $(0.95)^{10} = 0.5987$ . Συνεπώς η πιθανότητα να απορρίψουμε τουλάχιστον μία ζευγαρωτή δοκιμασία (και επομένως την  $H_0$ ) θα είναι  $1 - 0.5987 = 0.4013$  που σημαίνει ότι με τις 10 δοκιμασίες  $t$  υποπίπτουμε σε σφάλμα τύπου I στις 40.13% των περιπτώσεων.

Από τους υπάρχοντες πειραματικούς σχεδιασμούς ο απλούστερος είναι εκείνος που χαρακτηρίζεται από την ανάλυση της διακύμανσης κατά ένα παράγοντα (one factor ANOVA) και καλείται πλήρως τυχαιοποιημένος σχεδιασμός (completely randomized design).

### Παράδειγμα

Μία βιομηχανία αυτοκινήτων έχει κατασκευάσει ένα πρωτοποριακό μοντέλο αυτοκινήτου το οποίο χαρακτηρίζεται από διάφορα πλεονεκτήματα σε σχέση με τα άλλα μοντέλα του ανταγωνισμού στην κατηγορία του, όπως άνεση στη διαχείριση, καλύτερη ποιότητα κατασκευής και χαμηλότερη τιμή πώλησης. Η διεύθυνση του τμήματος μάρκετινγκ προκειμένου να αποφασίσει για τον τρόπο προώθησης του νέου προϊόντος σχεδίασε ένα πείραμα σε τρεις διαφορετικές περιοχές. Στην πρώτη περιοχή η διαφήμιση έγινε με έμφαση στην άνεση που χαρακτηρίζει το αυτοκίνητο, στη δεύτερη περιοχή δόθηκε έμφαση στην ποιότητα κατασκευής και στην τρίτη δόθηκε έμφαση στην τιμή πώλησης. Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται οι μηνιαίες πωλήσεις του αυτοκινήτου ανά περιοχή και για τους επόμενους πέντε μήνες.

Πίνακας 4 – Παράδειγμα Anova

Μήνας	Περιοχή 1 (Άνεση)	Περιοχή 2 (Ποιότητα)	Περιοχή 3 (Τιμή)	
1	86	90	82	
2	79	76	68	
3	81	88	73	
4	70	82	71	
5	84	89	81	
Σύνολο	400	425	375	1200
Μέσος Όρος	80	85	75	80

Ο διευθυντής του τμήματος μάρκετινγκ ενδιαφέρεται να μάθει αν υπάρχουν διαφορές στις πωλήσεις που προέκυψαν από τις τρεις διαφημιστικές στρατηγικές.

Η θεωρητική ανάλυση των δεδομένων του παραδείγματος βασίζεται στα παρακάτω βήματα:

**(α) Προσδιορισμός του μοντέλου**

Στη γενική περίπτωση υποθέτουμε ότι έχουμε  $k$  ομάδες με  $n_j$  παρατηρήσεις ανά ομάδα για  $j = 1, \dots, k$ . Τα δεδομένα του δείγματος μπορούν να ταξινομηθούν σε ένα πίνακα της μορφής

**Πίνακας 5 – Ομάδες (Μεταχειρίσεις)**

	1	2	3		$k$	
	$X_{11}$	$X_{12}$	$X_{13}$	...	$X_{1k}$	
	$X_{21}$	$X_{22}$	$X_{23}$	...	$X_{2k}$	
	$X_{31}$	$X_{32}$	$X_{33}$	...	$X_{3k}$	
	.	.	.	...	.	
	.	.	.	...	.	
	.	.	.	...	.	
	$X_{n_11}$	$X_{n_22}$	$X_{n_33}$	...	$X_{n_kk}$	
Σύνολα	$T_{n_11}$	$T_{n_22}$	$T_{n_33}$	...	$T_{n_kk}$	$T_{n_1n_j}$
Μέσοι Όροι	$\bar{X}_{n_11}$	$\bar{X}_{n_22}$	$\bar{X}_{n_33}$		$\bar{X}_{n_kk}$	$\bar{X}_{n_1n_j}$

Διάταξη παρατηρήσεων του πλήρως τυχαιοποιημένου σχεδιασμού

όπου  $X_{ij}$  είναι η  $i$  παρατήρηση της  $j$  ομάδας

$$T_{n_jj} = \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$

Είναι το άθροισμα των παρατηρήσεων της  $j$  στήλης.

$$\bar{X}_{n_jj} = \frac{T_{n_jj}}{n_j}$$

Είναι ο αριθμητικός μέσος της  $j$  στήλης.

$$T_{n_1n_j} = \sum_{j=1}^k T_{n_jj} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}$$

Είναι το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων.

$$\overline{X}_{n_i n_j} = \frac{T_{n_i n_j}}{N}$$

Είναι ο αριθμητικός μέσος όλων των παρατηρήσεων και  $N = \sum_{j=1}^k n_j$ .

Υποθέτουμε ότι για την  $j$  ομάδα οι παρατηρήσεις  $X_{ij}$  έχουν την μορφή

$$X_{ij} = \mu_j + e_{ij} \quad (1)$$

όπου  $\mu_j$  είναι ο μέσος όρος του πληθυσμού της  $j$  ομάδας και  $e_{ij}$  είναι το σφάλμα (error), για  $i=1, \dots, n_j$  και  $j=1, \dots, k$ . Με τον όρο σφάλμα δεν εννοούμε κάποια λανθασμένη μέτρηση ή εκτίμηση αλλά τη μη ελεγχόμενη διακύμανση που υπάρχει στον πληθυσμό. Λύνοντας την (1) ως προς  $e_{ij}$  έχουμε

$$e_{ij} = X_{ij} - \mu_j \quad (2)$$

Ο καθολικός μέσος όρος (grand mean)  $\mu$  όλων των παρατηρήσεων είναι

$$\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mu_j \quad (3)$$

Με την ίδια λογική που το  $X_{ij}$  διαφέρει από το  $\mu_j$  μπορούμε να υποθέσουμε ότι το  $\mu_j$  διαφέρει από το  $\mu$  κατά ένα ποσό

$$\tau_j = \mu_j - \mu \quad (4)$$

που εκφράζει την επίδραση (effect) του γεγονότος ότι το  $\mu_j$  υπολογίστηκε από τις παρατηρήσεις της  $j$  ομάδας. Από τη σχέση (4) έχουμε ότι

$$\mu_j = \mu + \tau_j \quad (5)$$

Συνδυάζοντας την (1) με την (5) παίρνουμε την τελική έκφραση

$$X_{ij} = \mu + \tau_j + e_{ij} \quad (6)$$

για  $i=1, \dots, n_j$  και  $j=1, \dots, k$ . Συνοψίζοντας από την (6) προκύπτει ότι η παρατήρηση  $X_{ij}$  είναι άθροισμα τριών ποσοτήτων, του καθολικού μέσου, της επίδρασης της ομάδας (μεταχείρισης) και του σφάλματος. Για το λόγο αυτό το μοντέλο (6) λέγεται προσθετικό (additive). Στο παράδειγμα έχουμε  $k=3$  ομάδες με πλήθος παρατηρήσεων  $n=5$  σε κάθε ομάδα έτσι ώστε το συνολικό πλήθος των παρατηρήσεων είναι  $N = k \cdot n = 3 \cdot 5 = 15$ .

### Υποθέσεις του μοντέλου

Οι υποθέσεις που διέπουν το μοντέλο (6) είναι:

1. Οι παρατηρήσεις  $X_{ij}$  κάθε ομάδας αποτελούν  $k$  ανεξάρτητα δείγματα από αντίστοιχους πληθυσμούς.
2. Καθένας από τους  $k$  πληθυσμούς ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu_j$  και κοινή διακύμανση  $\sigma^2$ , για  $j=1, \dots, k$ .
3. Οι επιδράσεις των ομάδων (μεταχειρίσεων)  $\tau_j$  είναι σταθεροί αριθμοί που ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{j=1}^k \tau_j = 0.$$

Από τη σχέση (2) και τις υποθέσεις 1-3 προκύπτει ότι τα σφάλματα  $e_{ij}$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση  $\sigma^2$ .

### Δοκιμασία υποθέσεων

Μπορούμε τώρα να δοκιμάσουμε την μηδενική υπόθεση ότι όλες οι ομάδες (μεταχειρίσεις) έχουν ίσες μέσες τιμές

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

με εναλλακτική:

$$H_1 : \text{όλα τα } \mu_j \text{ δεν είναι ίσα}$$

Όταν οι μέσες τιμές των πληθυσμών είναι ίσες, τότε οι επιδράσεις  $\tau_j$  των μεταχειρίσεων είναι μηδέν. Κατά συνέπεια οι ισοδύναμες υποθέσεις που μπορούμε να δοκιμάσουμε είναι:

$$H_0 : \tau_j = 0, j = 1, \dots, k$$

με εναλλακτική:

$$H_1 : \text{όλα τα } \tau_j \text{ δεν είναι μηδέν}$$

Για το παραπάνω παράδειγμα θα δοκιμάσουμε τις υποθέσεις

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

με εναλλακτική:

$$H_1 : \text{όλα τα } \mu_j \text{ δεν είναι ίσα.}$$



## Υπολογισμός των αθροισμάτων των τετραγώνων

Στην αρχή του κεφαλαίου ορίσαμε την ANOVA σαν μία διαδικασία κατά την οποία η ολική μεταβλητότητα που υπάρχει στα δεδομένα διασπάται σε επιμέρους συνιστώσες που οφείλονται σε διαφορετικές πηγές προέλευσης. Ο όρος μεταβλητότητα αναφέρεται στο άθροισμα των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από την μέση τιμή τους που για συντομία καλείται άθροισμα τετραγώνων (Sum of Squares –  $SS$ ).

Το ολικό άθροισμα των τετραγώνων:

Αρχικά υπολογίζουμε το ολικό άθροισμα τετραγώνων (total sum of squares -  $SS_{total}$ ) των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τον καθολικό μέσο

$$SS_{total} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_j})^2 \quad (7)$$

όπου με το  $\sum_{i=1}^{n_j}$  αθροίζουμε τις τετραγωνισμένες αποκλίσεις μέσα σε κάθε ομάδα, ενώ με το  $\sum_{j=1}^k$  αθροίζουμε τα αποτελέσματα των  $k$  ομάδων. Στην πραγματικότητα το  $SS_{total}$  αντιστοιχεί στον αριθμητή που υπάρχει στον τύπο υπολογισμού της δειγματικής διακύμανσης

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N - 1}$$

ενός τυχαίου δείγματος με  $N$  παρατηρήσεις. Στο παράδειγμα που δόθηκε, από την (7) έχουμε

$$SS_{total} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_j})^2 = (86-80)^2 + (79-80)^2 + \dots + (71-80)^2 + (81-80)^2 = 698$$

Στη συνέχεια θα διασπάσουμε το  $SS_{total}$  στις επιμέρους συνιστώσες του χρησιμοποιώντας την ισοδύναμη έκφραση

$$\begin{aligned}
SS_{total} &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} \left[ (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj}) + (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j}) \right]^2 \\
&= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})(\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j}) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j})^2
\end{aligned}
\tag{8}$$

Ο μεσαίος όρος της (8) γράφεται:

$$2 \sum_{j=1}^k (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj}) \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j})$$

απ' όπου προκύπτει ότι είναι ίσος με μηδέν διότι

$$\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj}) = 0$$

Τελικά η (8) γίνεται

$$SS_{total} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j})^2$$

η ισοδύναμα

$$SS_{total} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2 + \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j})^2 \tag{9}$$

Στην περίπτωση που το πλήθος των παρατηρήσεων είναι το ίδιο με  $n$  για όλες τις ομάδες (όπως στο παράδειγμα που δόθηκε) η (9) γίνεται

$$SS_{total} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2 + n \sum_{j=1}^k (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_i n_j})^2$$

### Το άθροισμα των τετραγώνων μέσα στις ομάδες

Το πρώτο άθροισμα στο δεξιό πλευρό της (9) υπολογίζει αρχικά το άθροισμα των τετραγωνισμένων αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τον μέσο κάθε ομάδας και κατόπιν αθροίζει τα επιμέρους αποτελέσματα για όλες τις ομάδες. Το τελικό αποτέλεσμα λέγεται άθροισμα τετραγώνων μέσα στις ομάδες (within groups sum of squares -  $SS_{within}$ )

$$SS_{within} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2 \quad (10)$$

Για το παράδειγμα που δόθηκε πριν από την (10) έχουμε:

$$SS_{within} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2 = (86-80)^2 + (79-80)^2 + \dots + (71-75)^2 + (81-75)^2 = 448$$

### Το άθροισμα των τετραγώνων μεταξύ των ομάδων

Το δεύτερο άθροισμα στο δεξιό πλευρό της (9) υπολογίζει αρχικά για κάθε ομάδα την τετραγωνισμένη απόκλιση του μέσου της ομάδας από τον καθολικό μέσο και κατόπιν πολλαπλασιάζει το αποτέλεσμα με το πλήθος των παρατηρήσεων της ομάδας. Τα επιμέρους αποτελέσματα αθροίζονται για όλες τις ομάδες και το τελικό αποτέλεσμα λέγεται άθροισμα τετραγώνων μεταξύ ομάδων (between groups sum of squares -  $SS_{between}$ )

$$SS_{between} = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n;n_j})^2$$

και στην περίπτωση που όλες οι ομάδες έχουν  $n$  παρατηρήσεις προκύπτει

$$SS_{between} = n \sum_{j=1}^k (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n;n_j})^2 \quad (11)$$

Για το δοσμένο παράδειγμα από την (11) έχουμε

$$SS_{between} = n \sum_{j=1}^k (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n;n_j})^2 = 5(80-80)^2 + 5(85-80)^2 + 5(75-80)^2 = 250$$

Συνοψίζοντας τα αριθμητικά αποτελέσματα παίρνουμε ότι

$$SS_{total} = SS_{within} + SS_{between}$$

### Ο πίνακας ανάλυσης της διακύμανσης

Από τα αθροίσματα των τετραγώνων που υπολογίσαμε μπορούμε τώρα να πάρουμε δύο εκτιμητές της πληθυσμιακής διακύμανσης  $\sigma^2$ . Αποδεικνύεται ότι όταν οι πληθυσμιακές μέσες τιμές των ομάδων είναι ίσες, τότε τα  $SS_{within}$  και  $SS_{between}$  όταν διαιρεθούν με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας δίνουν αμερόληπτους εκτιμητές για το  $\sigma^2$ .

### Ο πρώτος εκτιμητής του $\sigma^2$ :

Μέσα σε κάθε ομάδα το μέσο τετράγωνο (mean square)

$$MS_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2}{n_j - 1}$$

δίνει ένα αμερόληπτο εκτιμητή για την διακύμανση της ομάδας. Κάτω από την υπόθεση ότι οι διακυμάνσεις είναι ίσες μπορούμε να συγχωνεύσουμε τους  $k$  εκτιμητές και να πάρουμε ένα εκτιμητή για την διακύμανση μέσα στις ομάδες (within groups variance) σύμφωνα με τον τύπο του μέσου τετραγώνου

$$MS_{within} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_jj})^2}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)} \quad (12)$$

Στο παράδειγμα που δόθηκε ο τύπος (12) δίνει

$$MS_{within} = \frac{448}{12} = 37.33$$

### Ο δεύτερος εκτιμητής του $\sigma^2$

Ο δεύτερος εκτιμητής του  $\sigma^2$  προκύπτει από τον γνωστό τύπο για την διακύμανση του δειγματικού μέσου ενός δείγματος με  $n$  παρατηρήσεις

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\sigma^2 = n\sigma_{\bar{X}}^2$$

Ένας αμερόληπτος εκτιμητής του  $\sigma_{\bar{X}}^2$  που είναι η διακύμανση μεταξύ των ομάδων (between groups variance) προκύπτει από το μέσο τετράγωνο

$$MS_{\bar{X}} = \frac{\sum_{j=1}^k (\bar{X}_{n_jj} - \bar{X}_{n_jn_j})^2}{k - 1}$$

συνεπώς στην ειδική περίπτωση που όλες οι ομάδες (μεταχειρίσεις) έχουν  $n$  παρατηρήσεις ένας αμερόληπτος εκτιμητής για το  $\sigma^2$  είναι

$$MS_{between} = \frac{n \sum_{j=1}^k (\bar{X}_{n_j j} - \bar{X}_{n_j n_j})^2}{k-1} \quad (13)$$

Στη γενική περίπτωση που το πλήθος των παρατηρήσεων των ομάδων δεν είναι ίδιο, ο αμερόληπτος εκτιμητής για το  $\sigma^2$  έχει τη μορφή

$$MS_{between} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_{n_j j} - \bar{X}_{n_j n_j})^2}{k-1}$$

Στο παράδειγμα, ο τύπος (13) δίνει

$$MS_{between} = \frac{250}{2} = 125.$$

### Ο λόγος των διακυμάνσεων

Όταν η μηδενική υπόθεση  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  είναι αληθινή, τότε αναμένεται οι δύο εκτιμητές του  $\sigma^2$  να είναι περίπου ίσοι. Όταν η μηδενική υπόθεση δεν ισχύει, έτσι ώστε οι μέσες τιμές των πληθυσμών να διαφέρουν, τότε αναμένεται το  $MS_{between}$  να είναι μεγαλύτερο από το  $MS_{within}$ . Για το λόγο αυτό και προκειμένου να συγκρίνουμε τους δύο εκτιμητές του  $\sigma^2$  υπολογίζουμε το λόγο των διακυμάνσεων (Variance Ratio -  $VR$ )

$$VR = \frac{MS_{between}}{MS_{within}}$$

Όταν οι δύο εκτιμητές είναι περίπου ίσοι το  $VR$  είναι κοντά στο 1 και το γεγονός αυτό αποτελεί κριτήριο αποδοχής της  $H_0$ . Στην περίπτωση που το  $MS_{between}$  είναι μεγαλύτερο από το  $MS_{within}$  τότε το  $VR$  είναι μεγαλύτερο από το 1 και το γεγονός αυτό είναι το κριτήριο απόρριψης της  $H_0$ .

Στο δοσμένο παράδειγμα, από τα προηγούμενα αποτελέσματα έχουμε

$$VR = \frac{MS_{between}}{MS_{within}} = \frac{125}{37.33} = 3.35.$$

## Η δοκιμασία F

Είναι γνωστό ότι η ύπαρξη του τυχαίου σφάλματος που οφείλεται στη δειγματοληψία δεν επιτρέπει στα  $MS_{\text{between}}$  και  $MS_{\text{within}}$  να είναι ίσα ακόμη και στην περίπτωση που η μηδενική υπόθεση  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  είναι αληθινή. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να έχουμε ένα μέτρο ανοχής για το πόσο μεγάλη θα πρέπει να είναι η παρατηρούμενη διαφορά προκειμένου να συμπεράνουμε ότι δεν οφείλεται μόνο σε τυχαίο σφάλμα. Απάντηση στο ερώτημα αυτό μας δίνει η κατανομή δειγματοληψίας του λόγου των διακυμάνσεων

$$VR = \frac{MS_{\text{between}}}{MS_{\text{within}}}$$

Επειδή το  $VR$  είναι λόγος δύο  $\chi^2$  τυχαίων μεταβλητών, από τα προηγούμενα προκύπτει ότι ακολουθεί την κατανομή  $F$  με βαθμούς ελευθερίας αριθμητή  $(k-1)$  και βαθμούς ελευθερίας παρονομαστή

$$\sum_{j=1}^k (n_j - 1) = \sum_{j=1}^k n_j - k = N - k.$$

Από τη στιγμή που θα προσδιορίσουμε και το επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  τότε η κρίσιμη τιμή του  $F$  προσδιορίζει τις περιοχές αποδοχής και απόρριψης της δοκιμασίας. Οι απαιτούμενοι υπολογισμοί συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα ANOVA.

**Πίνακας 6 – Πίνακας Ανοβα για τον πλήρως τυχαιοποιημένο παράγοντα**

Πηγή Προέλευσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο τετράγωνο	Λόγος διακυμάνσεων
Μεταξύ ομάδων	$SS_{\text{between}} = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_{n_j j} - \bar{X}_{n, n_j})^2$	$k - 1$	$MS_{\text{between}} = \frac{\sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_{n_j j} - \bar{X}_{n, n_j})^2}{k - 1}$	$VR = \frac{MS_{\text{between}}}{MS_{\text{within}}}$
Μέσα στις ομάδες	$SS_{\text{within}} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_j j})^2$	$N - k$	$MS_{\text{within}} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n_j j})^2}{\sum_{j=1}^k (n_j - 1)}$	
Σύνολο	$SS_{\text{total}} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_{n, n_j})^2$	$N - 1$		

## Η απόφαση

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$  το  $VR$  ακολουθεί την κατανομή  $F$  με βαθμούς ελευθερίας αριθμητή  $(k-1)$  και βαθμούς ελευθερίας παρονομαστή  $(N-k)$ . Για συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  και προκειμένου να πάρουμε μία απόφαση συγκρίνουμε την υπολογισμένη τιμή  $VR$  με την κρίσιμη τιμή της κατανομής  $F_{(k-1),(N-k),\alpha}$ . Όταν

$$VR > F_{(k-1),(N-k),\alpha}$$

δεν μπορούμε να αποδεχθούμε την  $H_0$  με βάση τα δεδομένα του δείγματος, όπου  $F_{(k-1),(N-k),\alpha}$  είναι το  $(1-\alpha)100$  εκατοστιαίο σημείο της κατανομής  $F_{(k-1),(N-k)}$  για το οποίο ισχύει

$$P(F_{(k-1),(N-k)} > F_{(k-1),(N-k),\alpha}) = \alpha$$

Στο παράδειγμα, για επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 0.05$  έχουμε ότι

$$VR = 3.35 < 3.88 = F_{2,12,0.95}$$

έτσι ώστε δεν μπορούμε να απορρίψουμε την  $H_0$  με βάση τα δεδομένα του δείγματος, που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν διαφορές στις πωλήσεις που προέκυψαν από τις τρεις διαφημιστικές στρατηγικές.

Πίνακας 7 – Πίνακας Ανονα παραδείγματος

Πηγή προέλευσης	Άθροισμα τετραγώνων	Βαθμοί Ελευθερίας	Μέσο τετράγωνο	Λόγος διακυμάνσεων
Μεταξύ Ομάδων	250	$3-1=2$	$\frac{250}{2}=125$	$\frac{127}{37.33}=3.35$
Μέσα στις Ομάδες	448	$15-3=12$	$\frac{448}{12}=37.33$	
Σύνολο	698	$15-1=14$		

Η διακύμανση που υπάρχει στα δεδομένα του παραδείγματος μεταξύ των ομάδων (στηλών) ερμηνεύεται από το γεγονός ότι οι ομάδες ενδεχομένως να προέρχονται από διαφορετικούς πληθυσμούς. Η διακύμανση μέσα στις ομάδες είναι η εναπομένουσα διακύμανση (residual variance) που μένει ανερμήνευτη. Συνεπώς:

$$VR = \frac{\text{ερμηνευμένη διακύμανση}}{\text{ανερμήνευτη διακύμανση}}$$

Το γεγονός αυτό μας παροτρύνει να αναπτύξουμε διαδικασίες προκειμένου να ενδυναμώσουμε τη δοκιμασία  $F$ . Αν για παράδειγμα ένα σημαντικό ποσοστό της ανερμήνευτης διακύμανσης οφείλεται σε υπάρχουσες διαφορές στις γραμμές, τότε

απομονώνοντας την διακύμανση αυτή θα είχε σαν αποτέλεσμα την μείωση του παρονομαστή στο  $VR$ . Με τον τρόπο αυτό προκύπτει ένα μεγαλύτερο  $VR$  το οποίο ενδυναμώνει τη δοκιμασία για την ύπαρξη διαφορών μεταξύ των στηλών. Συνεπώς η ικανότητα προσδιορισμού κατά πόσο ένας παράγοντας (στήλες) είναι σημαντικός μπορεί να ενισχυθεί με την εισαγωγή και ενός δευτέρου παράγοντα (γραμμές) προκειμένου να ερμηνευθεί η εναπομένουσα διακύμανση. Έτσι έχουμε την ανάλυση διακύμανσης κατά δύο παράγοντες (two way ANOVA). Ο αντίστοιχος πειραματικός σχεδιασμός που προκύπτει λέγεται τυχαιοποιημένος κατά ομάδες (randomized block design). [17]





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια εισαγωγή στην έννοια των χρονολογικών σειρών και θα εξεταστούν διαγραμματικά μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα. Θα εξεταστεί ο σκοπός των χρονοσειρών στη διενέργεια της πρόβλεψης και θα περιγραφούν ορισμένα καθοριστικά και στοχαστικά υποδείγματα χρονολογικών σειρών.

## 6.1 Έννοια Χρονολογικής Σειράς

Μια χρονολογική σειρά (time-series) είναι ένα σύνολο παρατηρήσεων μιας μεταβλητής οι οποίες έχουν ληφθεί σε ίσα χρονικά διαστήματα. Αν συμβολίσουμε τη μεταβλητή με  $Y$  και δηλώσουμε με τον υποδείκτη  $t$  τη χρονική περίοδο που ελήφθη (έτος, μήνα, ημέρα, εβδομάδα, ώρα, κ.α.), τότε η ακολουθία των τιμών αυτών αποτελεί ένα δείγμα  $N$  παρατηρήσεων της χρονολογικής σειράς.

Απαραίτητη προϋπόθεση για τη μελέτη των χρονολογικών σειρών είναι η ύπαρξη δεδομένων (data). Υπάρχουν πολλά δεδομένα χρονολογικών σειρών τόσο στα οικονομικά και στις κοινωνικές επιστήμες, όσο και σε άλλους κλάδους της επιστήμης όπως στη φυσική, στη μηχανική, στην ιατρική, στη μετεωρολογία και πολλούς άλλους. Μερικά παραδείγματα είναι η σειρά των μηνιαίων πωλήσεων μιας επιχείρησης, η σειρά των τιμών ενός προϊόντος ανά τρίμηνο, ο αριθμός γεννήσεων κάθε έτους, η ημερίσια αξία των μετοχών και άλλα.

Τα δεδομένα μπορεί να προέλθουν από μετρήσεις που έγιναν σε τακτά χρονικά διαστήματα και συγκεντρώνονται από στατιστικές και άλλες υπηρεσίες. Η χρονική διάταξη των τιμών μιας χρονολογικής σειράς είναι βασική γι' αυτό και απαιτούνται ειδικές μέθοδοι ανάλυσής τους.

Βασικό χαρακτηριστικό κάθε χρονολογικής σειράς είναι η εξάρτηση μεταξύ των διαδοχικών τιμών της. Η φύση της αλληλεξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των παρατηρήσεων μιας σειράς είναι το αντικείμενο μελέτης και ανάλυσης του κλάδου των χρονολογικών σειρών. Η ανάλυση αυτή διακρίνεται σε δύο κυρίως μέρη. Το πρώτο περιλαμβάνει την ανάλυση των ιδιοτήτων της χρονολογικής σειράς προκειμένου να προσδιορίσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά που διέπουν τη συμπεριφορά της. Αυτό γίνεται τόσο με την ανάλυση του χρόνου όσο και με τη φασματική ανάλυση (spectral analysis).

Το δεύτερο μέρος ασχολείται κυρίως με τα υποδείγματα χρονολογικών σειρών (time-series models). Η διαδικασία κατασκευής υποδειγμάτων χρονολογικών σειρών αποτελεί μια προσπάθεια αναπαραγωγής της στοχαστικής διαδικασίας που πιθανόν να έχει δημιουργήσει τις δεδομένες παρατηρήσεις. Μια τέτοια προσπάθεια δεν είναι βεβαίως εύκολη όσο μεγάλο κι αν είναι το δείγμα παρατηρήσεων της χρονολογικής σειράς που μελετάμε. Οι διαδικασίες αυτές μπορεί να είναι τόσο πολύπλοκες ώστε να απαιτούνται σύνθετα μαθηματικά υποδείγματα που είναι δύσκολο να αναλυθούν.

## 6.2 Χρονολογικές σειρές και προβλέψεις

Αντικειμενικός σκοπός της μελέτης των χρονολογικών σειρών είναι η χρησιμοποίησή τους στη διενέργεια προβλέψεων. Η πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών μιας μεταβλητής μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους που διαφέρουν ως προς την πολυπλοκότητα, την ταχύτητα και το κόστος υπολογισμού τους, τη διαθεσιμότητα των απαραίτητων δεδομένων και άλλων παραγόντων κατά περίπτωση. Στην παράγραφο αυτή αναφέρονται περιληπτικά μερικές από τις πιο διαδεδομένες μεθόδους πρόβλεψης.

Γενικά οι **μέθοδοι πρόβλεψης (forecast methods)** μπορούν να διαχωριστούν σε **υποκειμενικές ή ποιοτικές (subjective or qualitative)** και σε **αντικειμενικές ή ποσοτικές (objective or quantitative)**. Οι υποκειμενικές προβλέψεις γίνονται συνήθως από έμπειρους επιστήμονες αναλυτές, οι οποίοι χρησιμοποιούν κυρίως την προσωπική τους εμπειρία ή την κρίση παρά τις μαθηματικές-στατιστικές μεθόδους (ή τουλάχιστον όχι μόνο αυτές). Ας σημειωθεί ότι οι προβλέψεις αυτές σε αρκετές περιπτώσεις αποδεικνύονται ικανοποιητικές. Οι μέθοδοι αυτές στηρίζονται κυρίως σε ποιοτικά δεδομένα γι' αυτό και δεν μπορούν να αναπαραχθούν από κάποιον άλλον. Μια τέτοια μέθοδος αρκετά διαδεδομένη στο χώρο των επιχειρήσεων και της αγοράς είναι η μέθοδος

των Δελφών που βασίζεται σε συγκέντρωση πληροφοριών από ειδικές ομάδες εμπειρογνομόνων.

Αντίθετα οι **αντικειμενικές μέθοδοι πρόβλεψης** στηρίζονται σε κάποιο μαθηματικό ή στατιστικό υπόδειγμα ή γενικά σ' ένα συγκεκριμένο κανόνα (model-based forecasts) και σε ποσοτικά δεδομένα. Γι' αυτό και μόλις προσδιοριστεί το υπόδειγμα ή ο κανόνας τότε η πρόβλεψη ενός μεγέθους μπορεί να αναπαραχθεί από οποιονδήποτε ερευνητή αν φυσικά χρησιμοποιηθεί το ίδιο δείγμα παρατηρήσεων.

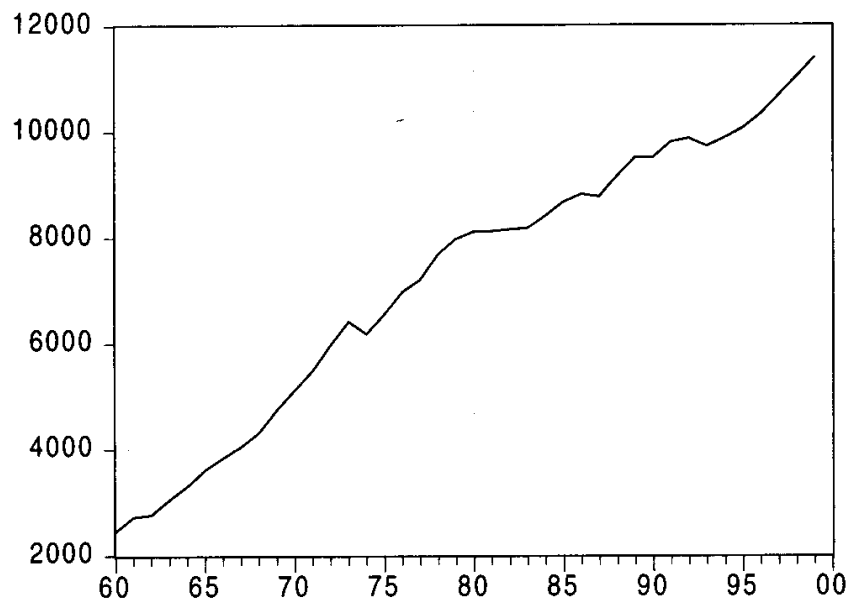
### 6.3 Παραδείγματα Χρονολογικών Σειρών

Η περιγραφική ανάλυση μιας χρονολογικής σειράς είναι πάντα χρήσιμη και πρέπει να προηγείται οποιασδήποτε άλλης στατιστικής ανάλυσης. Στην παράγραφο αυτή δίνονται κάποια παραδείγματα χρονολογικών σειρών από την ελληνική οικονομία.

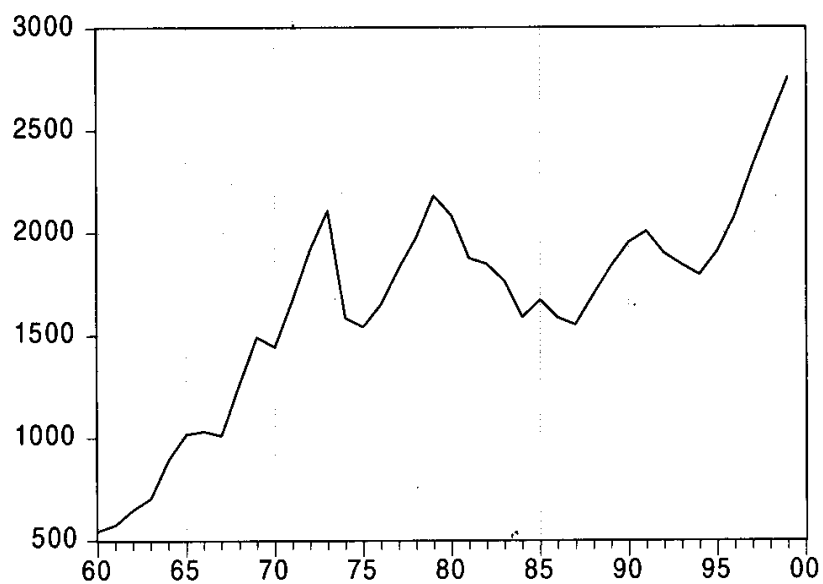
Η απεικόνιση μιας χρονολογικής σειράς ως προς το χρόνο ονομάζεται **χρονοδιάγραμμα (time-plot)**. Η μελέτη του χρονοδιαγράμματος μιας χρονολογικής σειράς είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον προσδιορισμό βασικών χαρακτηριστικών της σειράς όπως την ύπαρξη τάσης, εποχικότητας ή άλλων κυμάνσεων.

Οι χρονολογικές σειρές που παρουσιάζονται στα σχήματα 29 – 32 αφορούν βασικά μακρο-οικονομικά μεγέθη της ελληνικής οικονομίας όπως το Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν, τις Ιδιωτικές και Δημόσιες Επενδύσεις καθώς και τις Δημόσιες Δαπάνες. Τα στοιχεία αυτά έχουν προέλθει από δημοσιεύματα της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας της Ελλάδας.

Το σχήμα 29 δείχνει την πορεία του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος (ΑΧΠ) της Ελλάδας, σε σταθερές τιμές 1988, σε όλη την περίοδο 1960-1999. Η πορεία αυτή είναι γενικά ανοδική με μικρές περιόδους μείωσης. Αυτή η εικόνα είναι χαρακτηριστική μιας σειράς που παρουσιάζει έντονα ανοδική τάση (trend) η οποία την κάνει μη στάσιμη (non-stationary). Πρόκειται δηλαδή για μια σειρά της οποίας ο μέσος ή και η διακύμανση μεταβάλλονται μέσα στη δειγματική περίοδο με αποτέλεσμα η κατανομή της να μην είναι σταθερή. Για τη διενέργεια προβλέψεων με μια τέτοια σειρά, θα πρέπει πρώτα να μετατρέψουμε τη σειρά σε στάσιμη και με βάση τα χαρακτηριστικά της μέσα στη δειγματική περίοδο να επιλέξουμε την κατάλληλη μορφή υποδείγματος που εξηγεί καλύτερα τα δεδομένα. Στη συνέχεια εκτιμούμε το επιλεγμένο υπόδειγμα και με βάση αυτό κάνουμε προβλέψεις στο μέλλον.



Σχήμα 29 – Ακαθάριστο Εγχώριο Προϊόν (Δις Δρχ. – Σταθ. Τιμές 1988)

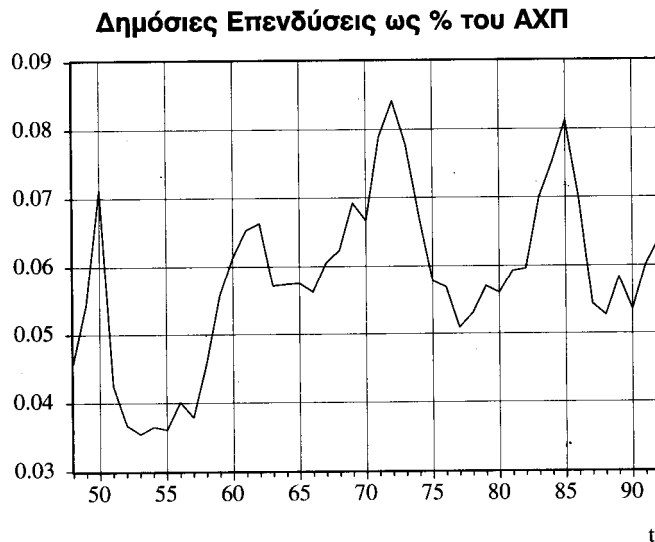


Σχήμα 30 – Ιδιωτικές Επενδύσεις (Δις Δρχ. – Σταθ. Τιμές 1988)

Το σχήμα 30 δείχνει την πορεία των ιδιωτικών επενδύσεων στην Ελλάδα σε σταθερές τιμές του έτους 1988. Η πορεία αυτή είναι επίσης ανοδική, αλλά όχι τόσο ομαλή όσο αυτή του Ακαθάριστου Εγχώριου Προϊόντος στο προηγούμενο διάγραμμα. Όπως παρατηρούμε στη διάρκεια της δεκαετίας του 1970 υπάρχουν έντονες αυξομειώσεις (διακυμάνσεις) στις ιδιωτικές επενδύσεις σε αντίθεση με την προηγούμενη δεκαετία όπου παρατηρείται μια ομαλότητα. Στην αλλαγή αυτής της πορείας συνετέλεσαν κυρίως οι πετρελαϊκές κρίσεις των ετών 1974 και 1979, οι οποίες επηρέασαν αρνητικά το επενδυτικό κλίμα και οδήγησαν σε πληθωριστικές πιέσεις και υψηλά επιτόκια. Στις δεκαετίες του '80 και του '90 σπουδαίο ρόλο στην πτώση της επενδυτικής δραστηριότητας έπαιξαν τα

προγράμματα λιτότητας για την καταπολέμηση του πληθωρισμού και των δημοσίων ελλειμμάτων.

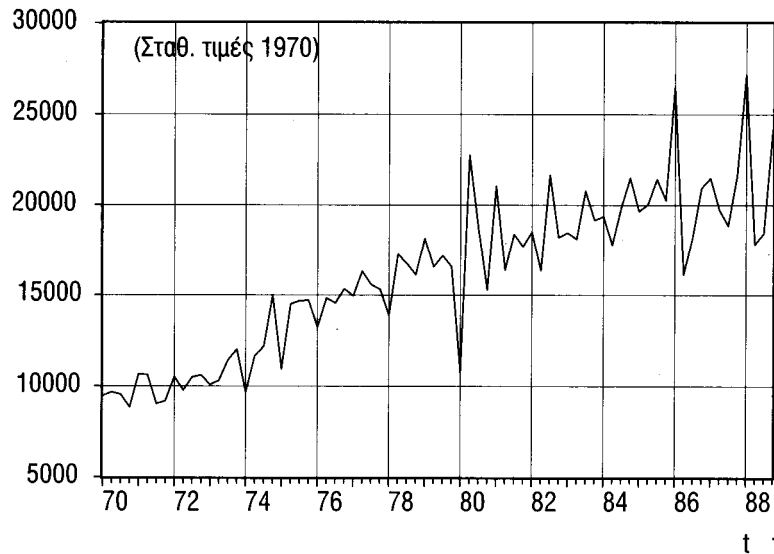
Το Σχήμα 31 παρουσιάζει τις δημόσιες επενδύσεις ως ποσοστό του ΑΧΠ. Το ποσοστό αυτό χαρακτηρίζεται από συνεχείς αυξομειώσεις γύρω από ένα σταθερό μέσο επίπεδο που κυμαίνεται στο 6% περίπου του ΑΧΠ. Η σειρά αυτή δεν φαίνεται να έχει σημαντική τάση αλλά πολύ πιθανόν να μην έχει σταθερή διακύμανση σ' όλη την περίοδο. Επομένως πάλι χρειάζεται ο έλεγχος στασιμότητας της σειράς.



Σχήμα 31 – Δημόσιες Επενδύσεις ως % του ΑΧΠ

Το Σχήμα 32 απεικονίζει τη σειρά των δημοσίων δαπανών σε σταθερές τιμές του 1970 με τριμηνιαία στοιχεία της περιόδου 1970-1988. Στα στοιχεία αυτά εμφανίζεται κάποιο εποχικό πρότυπο. Οι τιμές του α' και γ' τριμήνου κάθε έτους είναι αυξημένες σε σχέση με τα άλλα τρίμηνα. Παράλληλα η σειρά έχει διαχρονικά μια αυξητική πορεία και άρα εμφανίζει σημαντική τάση. Η ύπαρξη τόσο της εποχικότητας όσο και της τάσης σε μια χρονολογική σειρά αποτελεί παράγοντα μη στασιμότητας και πρέπει να λαμβάνεται υπόψη κατά την ταυτοποίηση του υποδείγματος.

## Δημόσιες Δαπάνες



Σχήμα 32 – Δημόσιες Δαπάνες

### 6.4 Καθοριστικά Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών

#### Ειδικά μαθηματικά Υποδείγματα

Έστω ότι διαθέτουμε  $N$  παρατηρήσεις μιας χρονολογικής σειράς  $Y$ , δηλαδή  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  και από αυτές ζητούμε να προσδιορίσουμε την πρόβλεψη για  $h$  χρονικές περιόδους

μετά το χρόνο  $N$  της πιο πρόσφατης τιμής της  $Y$ , έστω  $\hat{Y}_{N+h}$ . Αυτή θα είναι μια συνάρτηση των προηγούμενων τιμών της σειράς που είναι διαθέσιμες, δηλαδή

$$\hat{Y}_{N+h} = f(Y_1, Y_2, \dots, Y_N)$$

Η απλούστερη μέθοδος πρόβλεψης της τιμής της  $Y$  για την επόμενη περίοδο είναι το λεγόμενο «απλοϊκό υπόδειγμα» :

$$\hat{Y}_{N+1} = Y_N$$

Όπου προβλέπουμε ότι δεν θα υπάρξει καμία μεταβολή και άρα η προβλεπόμενη τιμή της  $Y$  ισούται με την τελευταία διαθέσιμη (πιο πρόσφατη).

Μια παραλλαγή αυτού του υποδείγματος είναι να δεχθούμε ότι η πρόβλεψη της αμέσως επόμενης τιμής της  $Y$  θα είναι ίση με την πιο πρόσφατη τιμή αυξημένη κατά τη διαφορά της από την αμέσως προηγούμενή της:

$$\hat{Y}_{N+h} = Y_N + (Y_N - Y_{N-1})$$

Επειδή όμως οι μέθοδοι αυτοί στηρίζονται μόνο στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις, τα αποτελέσματά τους είναι συνήθως ανακριβή.

### Υποδείγματα Κινητών Μέσων Όρων

Πολύ συχνά εφαρμόζουμε τη γνωστή διαδικασία των κινητών μέσων όρων όπου η προβλεπόμενη τιμή της  $Y$  κατά την αμέσως επόμενη χρονική περίοδο ισούται με τον μέσο αριθμητικό όρο των  $N$  πιο πρόσφατων τιμών της  $Y$ , δηλαδή:

$$\hat{Y}_{N+1} = (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N) / N$$

Κάθε φορά που προστίθεται μια παρατήρηση στο δείγμα, παραλείπεται η πιο παλιά έτσι ώστε να έχουμε σταθερή περίοδο υπολογισμού του μέσου, γι' αυτό και ονομάζεται κινητός. Βέβαια, στην περίπτωση αυτή η πρόβλεψη διαμορφώνεται παίρνοντας κλάσμα ίσο προς  $1/N$  από κάθε τιμή της  $Y$  που εμπίπτει στην τελευταία περίοδο προσαρμογής. Ο τρόπος αυτός είναι αποτελεσματικός αν η χρονολογική σειρά δεν περιέχει τάση ή κύκλους. Διαφορετικά απαιτείται προσαρμογή ή εφαρμογή άλλης μεθόδου.

### Κινητοί Μέσοι Όροι Εκθετικής Στάθμισης

Ο απλός κινητός μέσος  $N$  παρατηρήσεων δίνει τόση σημασία στην πιο πρόσφατη παρατήρηση της  $Y$  όση και στην πιο παλιά. Αυτό βέβαια δεν είναι πάντα σωστό, γι' αυτό χρησιμοποιούνται συστήματα στάθμισης που δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στις πρόσφατες τιμές της  $Y$ .

Μια τέτοια περίπτωση είναι η μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης (exponential smoothing) σύμφωνα με την οποία η πρόβλεψη προκύπτει σαν ένας σταθμικός μέσος όρος όλων των προηγούμενων τιμών της σειράς με σταθμίσεις που φθίνουν γεωμετρικά (εκθετικά):

$$\hat{Y}_{t+1} = aY_t + a(1-a)Y_{t-1} + a(1-a)^2Y_{t-2} + a(1-a)^3Y_{t-3} + \dots$$

$$0 < a < 1$$

Αν ξαναγράψουμε την παραπάνω εξίσωση για μια περίοδο πριν, την πολλαπλασιάσουμε με  $(1-a)$  και την αφαιρέσουμε από την αρχική θα λάβουμε

$$\hat{Y}_{t+1} = aY_t + (1-a)\hat{Y}_t \Rightarrow$$

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + a(Y_t - \hat{Y}_t)$$

$$0 < a < 1$$

Όπου η πρόβλεψη για μια περίοδο στο μέλλον,  $\hat{Y}_{t+1}$  δίνεται από ένα σταθμικό μέσο όρο μεταξύ της πιο πρόσφατης παρατήρησης της σειράς,  $Y_t$  και της πρόβλεψης της περιόδου  $t$ . Η σταθερά στάθμισης  $a$  ονομάζεται παράμετρος εξομάλυνσης και αντανακλά το βαθμό εξομάλυνσης που θέλουμε να πετύχουμε με τη μέθοδο αυτή. Μικρές τιμές της  $a$  οδηγούν σε μεγαλύτερη εξομάλυνση καθόσον δίνουν μεγαλύτερη στάθμιση στις



παλαιότερες τιμές και έτσι τυχόν μεγάλες διακυμάνσεις στις πρόσφατες παρατηρήσεις της σειράς δεν θα επηρεάσουν σημαντικά την πρόβλεψη.

Ο αλγόριθμος της εκθετικής εξομάλυνσης είναι πολύ εύχρηστος καθόσον για την αναθεώρησή του δεν απαιτεί την αποθήκευση όλων των προηγούμενων τιμών της σειράς παρά μόνο τις πιο πρόσφατες. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται ευρύτατα για προβλέψεις μεγεθών ρουτίνας όπου απαιτούνται αλγόριθμοι μεγάλης ταχύτητας και χαμηλού κόστους για την πραγματοποίησή τους. Για παράδειγμα, μεγάλη εφαρμογή έχει η μέθοδος αυτή στο χώρο της βιομηχανικής παραγωγής και οργάνωσης όπου πρέπει να γίνονται προβλέψεις χιλιάδων προϊόντων όσον αφορά το σχεδιασμό της παραγωγής, των πωλήσεων και των αποθεμάτων τους σε μεγάλη συχνότητα.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην πράξη σπανίως εφαρμόζεται η απλή μέθοδος εκθετικής εξομάλυνσης που περιγράψαμε προηγούμενα για τους βασικούς λόγους ότι δεν λαμβάνει υπόψη του την τάση ή/και τις εποχικές επιδράσεις. Εντούτοις, έχουν διατυπωθεί στη βιβλιογραφία μέθοδοι όπως αυτές των Holt-Winters και Brown οι οποίες παρέχουν τους κατάλληλους αλγόριθμους εκθετικής εξομάλυνσης και είναι ενσωματωμένες σε όλα σχεδόν τα στατιστικά πακέτα για προβλέψεις.

### **Υποδείγματα Τάσης**

Η τάση (trend) ορίζεται ως η συστηματική κίνηση μιας σειράς προς ορισμένη κατεύθυνση. Αυτή η κίνηση μπορεί να οριστεί με τη μεταβλητή του χρόνου  $t$  που αυξάνει κατά μια μονάδα από περίοδο σε περίοδο. Έτσι για τον προσδιορισμό των προβλέψεων χρησιμοποιείται μια συνάρτηση του χρόνου ( $t$ ), που ερμηνεύει πλήρως τα ιστορικά δεδομένα της χρονολογικής σειράς  $Y$

$$Y_{t+h} = f(t)$$

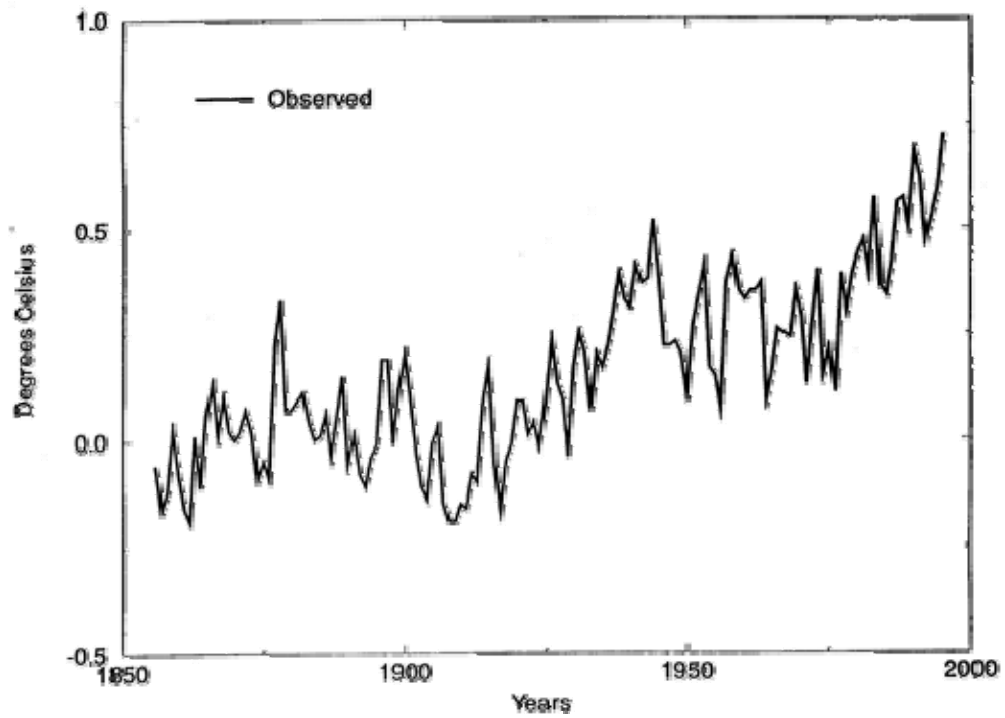
Το  $f(t)$  είναι μια γραμμική ή πολυωνυμική συνάρτηση του χρόνου που εκτιμάται από μια παλινδρόμηση με γνωστές μεθόδους. Ακόμα, η συνάρτηση  $f(t)$  μπορεί να λάβει και άλλες μαθηματικές μορφές όπως είναι οι εκθετικές συναρτήσεις.

Τέτοιου είδους υποδείγματα, ενώ ερμηνεύουν χωρίς σφάλμα τα ιστορικά δεδομένα της  $Y$ , όταν χρησιμοποιηθούν για προβλέψεις σε αρκετά απομακρυσμένο χρόνο στο μέλλον δίνουν παράλογες τιμές. Αυτό οφείλεται στο ότι οι απομακρυσμένες προβλέψεις απαιτούν υψηλές τιμές του χρόνου  $t$ , με αποτέλεσμα οι όροι των πολυωνύμων με τις μεγαλύτερες δυνάμεις να κυριαρχούν εξουδετερώνοντας τη συμβολή των όρων με τις χαμηλότερες δυνάμεις.

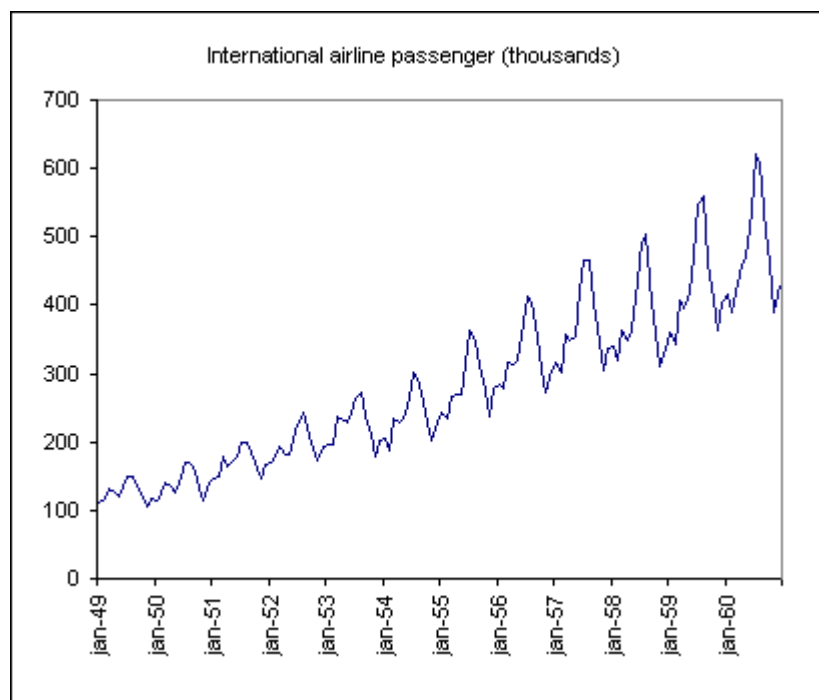
Παρά τις αδυναμίες τους, τέτοιου είδους υποδείγματα είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν για προβλέψεις αν αυτές είναι βραχυχρόνιες. Αν βέβαια η  $Y$  ακολουθεί με απόλυτη ακρίβεια ορισμένο μαθηματικό νόμο, τον οποίο εκφράζει η μαθηματική συνάρτηση  $f(t)$ , η πρόβλεψη θα είναι αλάνθαστη. Τέτοιες μεταβλητές ωστόσο δύσκολα υπάρχουν στον πραγματικό κόσμο.

### **Υποδείγματα Διαχωρισμού σε Επιμέρους Συνιστώσες**

Τέλος, αναφέρεται η μέθοδος διαχωρισμού μιας σειράς σε επιμέρους συνιστώσες (decomposition method). Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή μια χρονολογική σειρά μπορεί να διαχωριστεί σε τέσσερις επιμέρους συνιστώσες: την τάση, την εποχικότητα, τους κύκλους και μια ακανόνιστη συνιστώσα που δεν μπορεί να ερμηνευτεί. Με την μέθοδο αυτή πρώτα προβαίνουμε σε ανάλυση κάθε μιας συνιστώσας χωριστά και στη συνέχεια, με βάση τις εκτιμήσεις που λαμβάνουμε, συνθέτουμε τη σειρά προκειμένου να κάνουμε προβλέψεις.

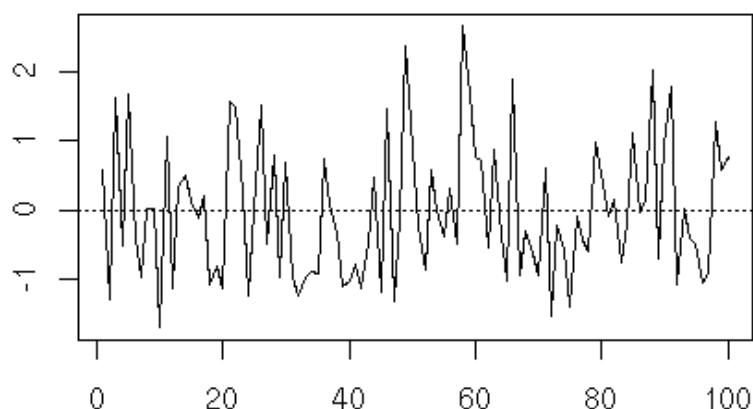


Σχήμα 33 – Παράδειγμα Χρονοσειράς που εμφανίζει ανοδική τάση



Σχήμα 34 – Παράδειγμα Χρονοσειράς που παρουσιάζει εποχικότητα

## Gaussian iid noise



Σχήμα 35 – Στάσιμη Χρονοσειρά

Το βασικό ερώτημα που γεννιέται από την παραπάνω ανάλυση είναι ποια μέθοδο να ακολουθήσει κανείς προκειμένου να επιτύχει τις πιο άριστες προβλέψεις για τα μεγέθη που τον ενδιαφέρουν. Στην πράξη η εφαρμογή της κατάλληλης μεθόδου είναι κυρίως θέμα επιλογής και προτεραιοτήτων που θέτει ο κάθε ερευνητής.

Σε οποιαδήποτε άσκηση πρόβλεψης μιας δεδομένης χρονολογικής σειράς, θα πρέπει να σταθμίζεται το κόστος της συγκεκριμένης μεθόδου πρόβλεψης με τα αναμενόμενα οφέλη. Έτσι αν τα οφέλη από τη χρησιμοποίηση μιας σύνθετης μεθόδου είναι υψηλά λόγω αυξημένης ακρίβειας των προβλέψεων τότε αντισταθμίζεται το υψηλότερο κόστος της μεθόδου. Αν όμως τα οφέλη είναι οριακά τότε είναι πολλές φορές προτιμότερο να επιλέγεται η απλούστερη αλλά και οικονομικότερη μέθοδος.

Όσο πιο απλός είναι ένας αλγόριθμος πρόβλεψης, τόσο πιο εύκολα και γρήγορα μπορεί κανείς να «παράγει» προβλέψεις, πράγμα που διευκολύνει όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός μεταβλητών για πρόβλεψη και υψηλό κόστος διατήρησης και συγκέντρωσης πληροφοριών. Η ακρίβεια όμως τέτοιων προβλέψεων θα είναι περιορισμένη σε αντίθεση με αυτές που προκύπτουν από πιο σύνθετες μεθόδους.

### 6.5 Στοχαστικά Υποδείγματα Χρονολογικών Σειρών

Σε αντίθεση με τα καθοριστικά υποδείγματα, τα στοχαστικά υποδείγματα (stochastic models) βασίζονται στην ιδέα ότι μια χρονολογική σειρά της οποίας οι διαδοχικές τιμές συσχετίζονται σε μεγάλο βαθμό, μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει παραχθεί από μια στοχαστική διαδικασία (stochastic process). Οι τιμές αυτές αποτελούν ένα σύνολο διατεταγμένων στο χρόνο τυχαίων μεταβλητών που εξελίσσονται διαχρονικά σύμφωνα με ορισμένο νόμο πιθανότητας. Έτσι, μια χρονολογική σειρά  $N$  διαδοχικών παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_N$  θεωρείται σαν ένα σύνολο από κοινού κατανομημένων τυχαίων μεταβλητών που αποτελεί μια συγκεκριμένη πραγματοποίηση (realization) της στοχαστικής διαδικασίας.

Στα περισσότερα προβλήματα στατιστικής προσπαθούμε να εκτιμήσουμε τις ιδιότητες του πληθυσμού από το δείγμα. Στις χρονολογικές σειρές όμως δεν μπορούμε να έχουμε περισσότερες από μία παρατηρήσεις για κάθε μια τυχαία μεταβλητή σε συγκεκριμένο χρόνο. Μπορούμε όμως να θεωρήσουμε τις εκ παρατηρήσεως τιμές της χρονολογικής σειράς (observed time series) ως ένα δείγμα πραγματοποιήσεων από έναν άπειρο πληθυσμό τέτοιων δειγμάτων, τα οποία θα μπορούσαν να είχαν παραχθεί από την ίδια στοχαστική διαδικασία. Η έννοια του πληθυσμού της κλασικής Στατιστικής

αντιστοιχεί στην έννοια της στοχαστικής διαδικασίας, ενώ η έννοια του δείγματος στην έννοια της παρατηρούμενης (ή πραγματοποιούμενης σειράς).

Η ανάλυση χρονολογικών σειρών αποσκοπεί στο να κατασκευάσει ένα υπόδειγμα, το οποίο, σύμφωνα με τη θεωρία πιθανοτήτων, έχει παρόμοιες ιδιότητες με αυτές του μηχανισμού που παράγει τη σχετική στοχαστική διαδικασία. Ένας τρόπος περιγραφής της στοχαστικής διαδικασίας είναι να καθορίσουμε την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ακολουθίας των παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_N$ . Έτσι, αν ήταν γνωστή η κατανομή πιθανότητας, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε με συγκεκριμένη πιθανότητα κάποια πιθανή μελλοντική τιμή της χρονολογικής σειράς. Εντούτοις στην πράξη είναι αδύνατη η πλήρης εξειδίκευση της κατανομής πιθανότητας, γι' αυτό και περιοριζόμαστε στην περιγραφή της στοχαστικής διαδικασίας με απλά υποδείγματα, που υποθέτουμε ότι εξηγούν τη στοχαστικότητα της χρονολογικής σειράς σε ικανοποιητικό βαθμό.

Ένα απλό παράδειγμα μιας στοχαστικής χρονολογικής σειράς  $y_t$  είναι να θεωρήσουμε ότι οι διαδοχικές μεταβολές των τιμών της είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο το μηδέν, δηλαδή υπακούουν στο υπόδειγμα

$$y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t$$

Όπου  $E(\varepsilon_t) = 0$  και  $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$  για  $t \neq s$ . Μια τέτοια διαδικασία θα μπορούσε να είχε προέλθει από διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος όπου το κεφάλι παίρνει την τιμή +1 και τα γράμματα -1, δηλαδή

$$u_t = \begin{bmatrix} +1 & \text{με πιθανότητα} & 1/2 \\ -1 & \text{με πιθανότητα} & 1/2 \end{bmatrix}$$

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουμε στην ανάλυση χρονολογικών σειρών βρίσκονται στην επιλογή του πιο κατάλληλου υποδείγματος για να περιγράψουμε τη δεδομένη χρονολογική σειρά. Η διαδικασία που ακολουθείτε συνήθως είναι η εξέταση της δομής των ιστορικών δεδομένων της χρονολογικής σειράς με συγκεκριμένα στατιστικά μέτρα.

Τέλος, οι χρονολογικές σειρές διακρίνονται σε στάσιμες (stationary) και μη στάσιμες (non-stationary) σειρές. Αν τα χαρακτηριστικά της στοχαστικής διαδικασίας μεταβάλλονται διαχρονικά, τότε η διαδικασία αυτή είναι μη στάσιμη και είναι πολύ δύσκολο να παρατηρήσουμε τη χρονολογική σειρά με κάποιο αλγεβρικό υπόδειγμα. Αν όμως η στοχαστική διαδικασία παραμένει σε ισορροπία διαχρονικά γύρω από ένα σταθερό μέσο επίπεδο, τότε μπορούμε να αναλύσουμε τη διαδικασία μέσω ενός υποδείγματος με σταθερούς συντελεστές που μπορούν να εκτιμηθούν με βάση τα ιστορικά δεδομένα και να τα χρησιμοποιήσουμε για την πραγματοποίηση προβλέψεων. Γι' αυτό και εξετάζουμε μόνο την κατηγορία των στάσιμων χρονολογικών σειρών.

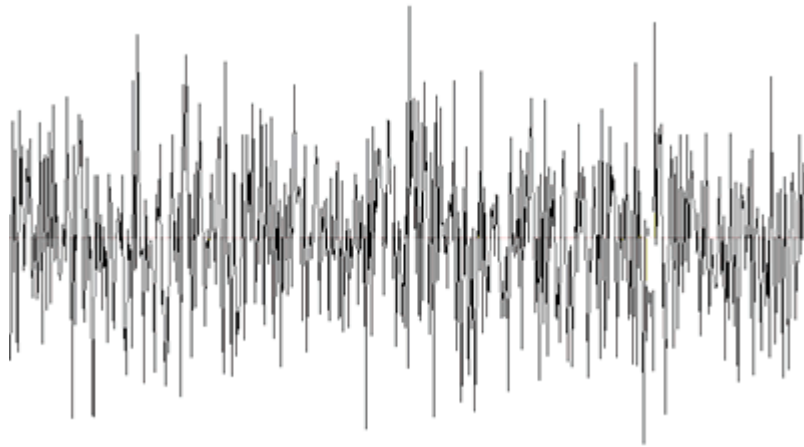
### **Τυχαία Χρονολογική Σειρά**

Το απλούστερο δυνατό σχήμα χρονολογικής σειράς είναι αυτό της τυχαίας μεταβλητής ή αλλιώς του ονομαζόμενου λευκού θορύβου (white noise). Μια σειρά είναι τυχαίος θόρυβος αν στην ουσία δεν έχει κανένα ευκρινές σχήμα ή πρότυπο. Αν συμβολίσουμε με  $\varepsilon_t$  μια τέτοια σειρά, τότε θα λέμε ότι είναι λευκός θόρυβος αν έχει σταθερό μέσο (συνήθως μηδέν), σταθερή διακύμανση και οι τιμές της δεν αυτοσυσχετίζονται. Πιο συγκεκριμένα, η υπόθεση του λευκού θορύβου συνεπάγεται για όλα τα  $t$  τα εξής:

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_t) &= 0 \\ \gamma_0 &= E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 \\ \gamma_k &= E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0 \end{aligned}$$

Επομένως, μια τέτοια σειρά είναι πάντα στάσιμη και επιπλέον έχει μηδενικούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης. Για παράδειγμα, οι τυχεροί αριθμοί της κλήρωσης του ΠΡΟ-ΠΟ ή του ΛΟΤΤΟ καταγραφόμενοι ανά εβδομάδα ή μήνα αποτελούν σειρές λευκού θορύβου. Γι' αυτές τις περιπτώσεις οι προηγούμενες τιμές της σειράς δεν βοηθούν καθόλου στην πρόβλεψη των μελλοντικών τυχερών αριθμών. Έτσι είναι αδύνατη και η πρόβλεψη όταν έχουμε να κάνουμε με τέτοιες τυχαίες σειρές.

Αν και στην πράξη δεν εμφανίζονται πολύ συχνά σειρές λευκού θορύβου, εντούτοις πολλές άλλες σειρές μπορούν εύκολα να μετατραπούν σε λευκό θόρυβο. [6]



**Σχήμα 36 – Διαδικασία τυχαίας χρονολογική σειράς (λευκός θόρυβος)**

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7**

### **ΠΟΛΛΑΠΛΗ ΣΥΝΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ**

Στο κεφάλαιο αυτό αναλύονται οι έννοιες της στασιμότητας, της ολοκλήρωσης, της συνολοκλήρωσης και της πολλαπλής συνολοκλήρωσης των χρονολογικών σειρών.

## 7.1 Στασιμότητα Χρονολογικών Σειρών

Μια στοχαστική διαδικασία χαρακτηρίζεται ως στάσιμη όταν οι στατιστικές της ιδιότητες δεν επηρεάζονται από μια μεταβολή στην αρχή του χρόνου. Δηλαδή, οι στατιστικές ιδιότητες των  $N$  παρατηρήσεων με αρχή  $t$  ( $y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+N+1}$ ) είναι οι ίδιες με τις στατιστικές ιδιότητες των  $N$  παρατηρήσεων με αρχή την περίοδο  $t+k$  ( $y_{t+k}, y_{t+k+1}, \dots, y_{t+k+N+1}$ ).

Γενικά, μια χρονολογική σειρά θα είναι στάσιμη αν ο μέσος και η διακύμανσή της δεν μεταβάλλονται με το χρόνο και η συνδιακύμανση μεταξύ των τιμών της σε δύο χρονικά σημεία εξαρτάται μόνο από την απόσταση ανάμεσα σ' αυτά τα χρονικά σημεία και όχι από τον ίδιο το χρόνο. Μαθηματικά, αν η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη, τότε για όλα τα  $t$  θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} E(y_t) &= m_y \\ \text{var}(y_t) &= E[y_t - E(y_t)]^2 = \sigma_y \\ \text{cov}(y_t, y_{t+k}) &= \text{cov}(y_{t+m}, y_{t+m+k}) = \gamma_k \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες συνθήκες υποδηλώνουν σταθερό μέσο και σταθερή διακύμανση. Η τρίτη δηλώνει ότι η συνδιακύμανση μεταξύ δύο οποιωνδήποτε τιμών της  $y_t$  που απέχουν  $k$  περιόδους (αυτοσυνδιακύμανση) είναι συνάρτηση μόνο του  $k$ , δηλαδή της χρονικής υστέρησης ή προήγησης των δύο αυτών τιμών.

Αν μια χρονολογική σειρά είναι στάσιμη, τότε έχει σταθερή κατανομή πυκνότητας πιθανότητας  $f(y_t)$  για κάθε  $t$  και επομένως μια εκτίμηση του μέσου  $m_y$  και της διακύμανσης  $\sigma_y^2$  μπορεί να ληφθεί χρησιμοποιώντας το μέσο και τη διακύμανση αντίστοιχα του δείγματος των παρατηρήσεων της χρονολογικής σειράς, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t \\ \sigma_y^2 &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 \end{aligned}$$

Οι περισσότερες όμως χρονολογικές σειρές στα οικονομικά και τη διοίκηση επιχειρήσεων είναι μη στάσιμες καθόσον περιέχουν τάση, εποχικότητα και κυκλικές κυμάνσεις. Επειδή η ανάλυση των μη στάσιμων χρονολογικών σειρών είναι πολύ δύσκολη, μπορεί κανείς να μετατρέψει μια μη στάσιμη χρονολογική σειρά σε στάσιμη με κατάλληλες τεχνικές και μετά να εφαρμόσει τις μεθόδους ανάλυσης στάσιμων χρονολογικών σειρών που είναι πολύ απλούστερες. Για παράδειγμα, πολλές χρονολογικές σειρές μετατρέπονται εύκολα σε στάσιμες, αφαιρώντας την τάση ή παίρνοντας διαδοχικά πρώτες διαφορές στα δεδομένα στοιχεία. Για τον έλεγχο της στασιμότητας μιας χρονολογικής σειράς έχουν αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία διάφορα στατιστικά κριτήρια.

## 7.2 Η Έννοια της Ολοκλήρωσης

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση, μια χρονολογική σειρά χαρακτηρίζεται ως στάσιμη αν τα στατιστικά χαρακτηριστικά της δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Έτσι, σε μια στάσιμη σειρά ο μέσος όρος, η διακύμανση και οι αυτοσυνδιακυμάνσεις των τιμών της θα είναι σταθερά μεγέθη ανεξάρτητα από το χρόνο. Δεν επηρεάζονται δηλαδή από το χρόνο μέτρησης του αν για παράδειγμα, έγιναν στο διάστημα 1970 ως 1980 ή στο

διάστημα 1980 ως 1990. Αυτό επιτρέπει τα παρατηρούμενα δεδομένα  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  να θεωρούνται ως ένα δείγμα παρατηρήσεων της  $Y_t$  που έχει παραχθεί από τον ίδιο δημιουργό μηχανισμό και έτσι να μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού. Πολλές από τις χρονολογικές σειρές δεν είναι στάσιμες καθώς μεγεθύνονται ή μειώνονται μακροχρόνια. Αυτό υποδηλώνει ότι οι σειρές αυτές δεν έχουν ένα σταθερό μακροχρόνιο μέσο, καθώς τείνουν να απομακρύνονται συνεχώς από ένα οποιοδήποτε δεδομένο αρχικό επίπεδο. Για την περαιτέρω στατιστική ανάλυση τέτοιων μη στάσιμων σειρών απαιτείται προηγουμένως η μετατροπή τους σε στάσιμες.

Με την έννοια της στασιμότητας σχετίζεται ο βαθμός ολοκλήρωσης μιας σειράς. Μια σειρά λέγεται ότι είναι ολοκληρωμένη πρώτης τάξης (Integrated of order one) και συμβολίζεται ως  $I(1)$  αν μετατρέπεται σε στάσιμη παίρνοντας πρώτες διαφορές.

Οι πρώτες διαφορές σε μία σειρά παρατηρήσεων  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  μιας χρονολογικής σειράς ορίζονται ως:

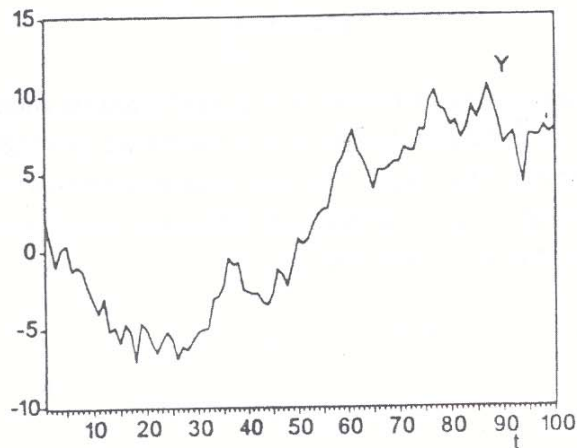
$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1} = (1 - L)Y_t$$

Όπου  $L$  ο τελεστής υστέρησης για τον οποίο ισχύει  $LY_t = Y_{t-1}$

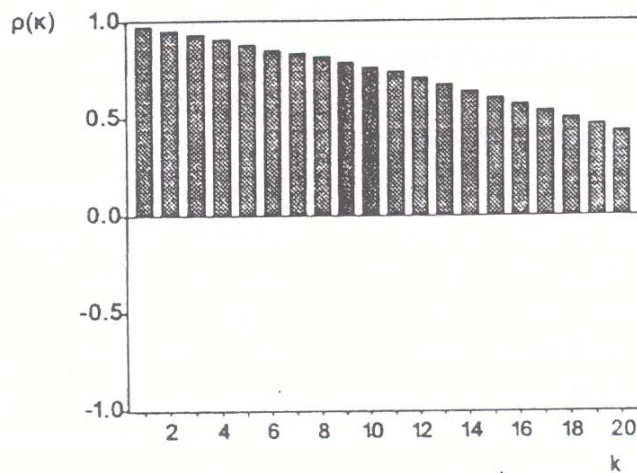
Κατά τον ίδιο τρόπο, μια σειρά είναι ολοκληρωμένη  $d$  τάξεως  $I(d)$  αν μετατρέπεται σε στάσιμη παίρνοντας διαφορές  $d$  τάξεως. Ο όρος ολοκληρωμένη σειρά προκύπτει από το γεγονός ότι η μη στάσιμη σειρά μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των τιμών ή αλλιώς το ολοκλήρωμα μιας στάσιμης σειράς. Το διάγραμμα μιας  $I(d)$  σειράς δείχνει μεγάλες διακυμάνσεις με τις τιμές της να μην επιστρέφουν σε προηγούμενα επίπεδα παρά μόνο σε σπάνιες περιπτώσεις, όπως το σχήμα 37 της τυχαίας διαδρομής. Έτσι, δεν είναι δυνατόν να ορισθεί ο μέσος όρος ή η διακύμανση της σειράς χωρίς να προσδιορισθεί η σχετική χρονική περίοδος.



(α) Υπόδειγμα τυχαίας διαδρομής



(β) Συνάρτηση αυτοσχέτισης τυχαίας διαδρομής



Σχήμα 37 – Διάγραμμα τυχαίας διαδρομής

Από την άλλη μεριά, μια  $I(0)$  σειρά δεν παρουσιάζει καμία συστηματική κίνηση αλλά χαρακτηρίζεται από σταθερές διαταραχές γύρω από μια καλά καθορισμένη τιμή, όπως δείχνει και το Σχήμα 36 του λευκού θορύβου. Φαίνεται ότι αρκετές οικονομικές χρονολογικές σειρές όπως η κατανάλωση, το εισόδημα, η προσφορά χρήματος και ο πληθωρισμός είναι πράγματι  $I(1)$ .

Γενικά, με τον έλεγχο στασιμότητας εξετάζουμε αν η μεταβλητή, έστω  $Y_t$  είναι στάσιμη. Αν η υπόθεση της στασιμότητας απορριφθεί, τότε σχηματίζονται οι πρώτες διαφορές  $\Delta Y_t$  και εξετάζεται η στασιμότητα της μεταβλητής των διαφορών. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι να προκύψει στάσιμη σειρά μετά έστω από  $d$  διαφορές, οπότε πρόκειται για μια ολοκληρωμένη  $I(d)$  σειρά. Η διαδικασία λήψης διαφορών για την επίτευξη της στασιμότητας έχει καθιερωθεί να αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως στασιμότητα διαφορών (difference stationarity).

Εκτός από τη διαδικασία των διαφορών, η επίτευξη της στασιμότητας μπορεί να επέλθει και με αφαίρεση της τάσης από τα στοιχεία της δεδομένης σειράς. Στην περίπτωση αυτή, γίνεται καταρχάς εκτίμηση της τάσης που προσαρμόζεται καλύτερα στα δεδομένα με

το κατάλληλο υπόδειγμα και στη συνέχεια λαμβάνουμε τις αποκλίσεις της σειράς από την εκτιμημένη τάση της, δηλαδή από τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης. Η διαδικασία αυτή επίτευξης στασιμότητας με τη μέθοδο της παλινδρόμησης υποδειγμάτων τάσης και χρησιμοποίησης των καταλοίπων για τη στάσιμη σειρά είναι γνωστή ως στασιμότητα τάσης (trend stationarity). Ένα εύλογο ερώτημα που προκύπτει είναι ποια από τις δύο διαδικασίες πρέπει να ακολουθήσει ένας ερευνητής προκειμένου να μετατρέψει μια μη στάσιμη σειρά σε στάσιμη. Το ερώτημα αυτό είναι ιδιαίτερα σημαντικό δεδομένου ότι η επιλογή της μιας ή της άλλης διαδικασίας υποδηλώνει διαφορετικά χαρακτηριστικά για τη συμπεριφορά της υπό εξέταση χρονολογικής σειράς.

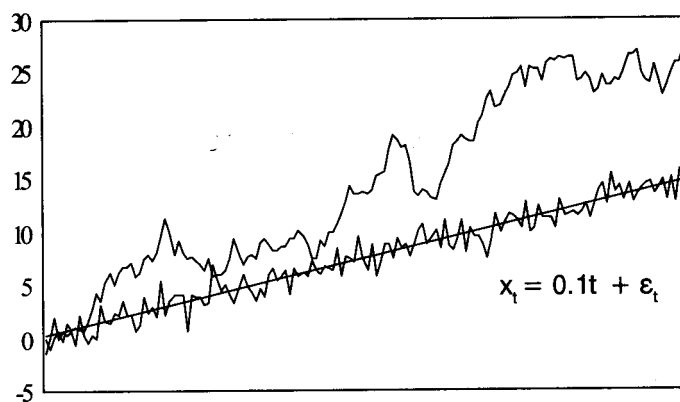
Πράγματι, η πρώτη διαδικασία, δηλαδή αυτή της στασιμότητας διαφορών, υποδηλώνει ότι η τάση που κάνει τη σειρά μη στάσιμη είναι στοχαστικής μορφής (stochastic trend), ενώ η διαδικασία αφαίρεσης της τάσης από τα στοιχεία υποδηλώνει ότι η τάση είναι προσδιορισμένη (deterministic trend), δηλαδή μη στοχαστικής μορφής. Οι δύο αυτές μορφές συνεπάγονται ουσιαστικές διαφορές, οι οποίες έχουν να κάνουν κατά κύριο λόγο με τις επιπτώσεις που ασκούν οι βραχυχρόνιες τυχαίες διαταραχές (shocks) στη μακροχρόνια πορεία τους. Έτσι, η πρώτη μορφή τάσης συνεπάγεται ότι μια τυχαία διαταραχή θα έχει μόνιμες επιπτώσεις στο μακροχρόνιο επίπεδο της χρονολογική σειράς, ενώ η δεύτερη μορφή τάσης συνεπάγεται παροδικές μόνο επιπτώσεις.

Ανάλογα λοιπόν με τη φύση της χρονολογικής σειράς επιβάλλεται και η κατάλληλη μέθοδος για την μετατροπή της σειράς σε στάσιμη. Η μη χρησιμοποίηση της κατάλληλης μεθόδου για την επίτευξη στασιμότητας συνεπάγεται λανθασμένα συμπεράσματα. Επομένως είναι ιδιαίτερα σημαντικό το θέμα της σωστής επιλογής της καταλληλότερης μεθόδου απαλοιφής της τάσης των σειρών. Με βάση την παραπάνω διάκριση, ορίζουμε δύο κατηγορίες μη στάσιμων χρονολογικών σειρών:

- Στάσιμες κατόπιν αφαίρεσης της τάσης (trend stationary)
- Στάσιμες κατόπιν λήψης διαφορών (difference stationary)

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι χρονολογικές σειρές που μετατρέπονται σε στάσιμες κατόπιν αφαίρεσης της τάσης τους με βάση τη διαδικασία παλινδρόμησης. Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν οι χρονολογικές σειρές που γίνονται στάσιμες κατόπιν λήψης διαφορών.

**Σειρά στοχαστικής τάσης  $y_t$  και μη στοχαστικής τάσης  $x_t$**



**Σχήμα 38 – Σειρά στοχαστικής τάσης  $y_t$  και μη στοχαστικής τάσης  $x_t$**

### 7.3 Έλεγχοι Στασιμότητας

Από την παραπάνω ανάλυση καταλαβαίνουμε ότι ο έλεγχος της στασιμότητας μιας χρονολογικής σειράς είναι καθοριστικής σημασίας τόσο για την περαιτέρω ανάλυσή τους όσο και για να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα της αφαίρεσης της τάσης. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ορισμένα στατιστικά κριτήρια για τον έλεγχο της στασιμότητας μιας χρονολογικής σειράς.

#### Συνάρτηση αυτοσυσχέτισης και έλεγχος στασιμότητας

Αν η χρονολογική σειρά είναι στάσιμη, τότε η διακύμανση δεν μεταβάλλεται με το χρόνο και άρα  $\text{var}(y_t) = \text{var}(y_{t+k}) = \sigma_y^2$  οπότε ο συντελεστής συσχέτισης απλοποιείται ως εξής:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t+k})}{\sqrt{\text{var}(y_t)}\sqrt{\text{var}(y_{t+k})}} = \frac{\text{cov}(y_t, y_{t+k})}{\text{var}(y_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

Οι παραπάνω σχέση αναφέρεται στις θεωρητικές τιμές των αυτοσυνδιακυμάνσεων και των συντελεστών αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας  $y_t$ . Στην πράξη όμως χρησιμοποιούμε ένα πεπερασμένο δείγμα παρατηρήσεων  $y_1, y_2, \dots, y_N$  από το οποίο λαμβάνουμε εκτιμήσεις των αληθινών στον πληθυσμό αυτοσυνδιακυμάνσεων και αυτοσυσχετίσεων. Έτσι, συμβολίζοντας με  $\bar{y}$  το μέσο του δείγματος των  $N$  παρατηρήσεων, ορίζουμε την αυτοσυνδιακύμανση και τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης δείγματος ως:

$$\gamma_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})$$
$$\rho_k = \frac{\sum_{t=1}^{N-k} (y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2}$$

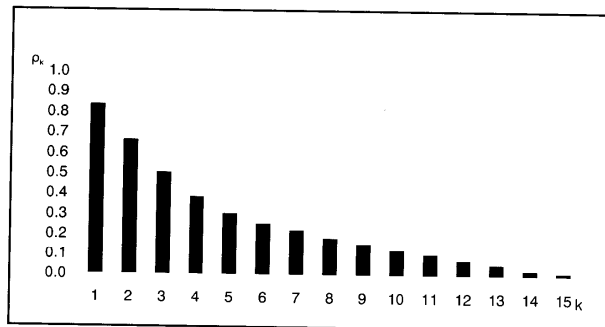
Οι εκτιμήσεις των  $\rho_k$  με βάση την παραπάνω σχέση αποτελούν τους δειγματικούς συντελεστές αυτοσυσχέτισης (sample autocorrelation coefficients).

Αν ο αριθμός των παρατηρήσεων της χρονολογικής σειράς είναι μεγάλος, τότε η εκτιμηθείσα συνάρτηση αυτοσυσχέτισης  $\rho_k$  θα πλησιάζει προσεγγιστικά την αληθινή αυτοσυσχέτιση. Αν δύο παρατηρήσεις που απέχουν  $k$  χρονικές περιόδους έχουν μεγάλη σχέση μεταξύ τους (δηλαδή οι τιμές τους πλησιάζουν πολύ), τότε η τιμή του  $\rho_k$  θα είναι κοντά στη μονάδα.

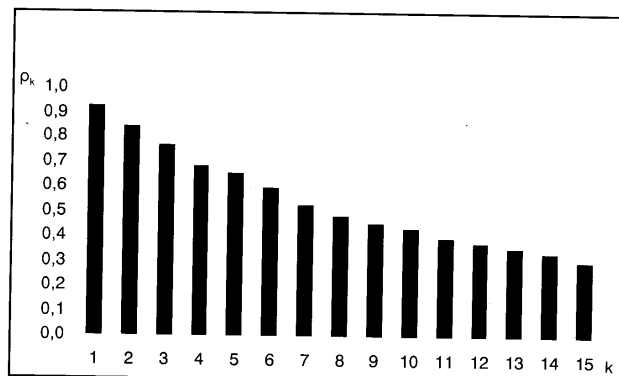
Η συνάρτηση  $\rho_k$  για διάφορες τιμές του  $k$  καλείται συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function). Η διαγραμματική απεικόνιση των τιμών της  $\rho_k$  μας δίνει το διάγραμμα της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (correlogram) και μας βοηθά στο να διαπιστώσουμε αν μια χρονολογική σειρά είναι στάσιμη ή όχι. Έτσι, οι συντελεστές αυτοσυσχέτισης για μια στάσιμη σειρά φθίνουν σχετικά γρήγορα προς το μηδέν καθώς ο αριθμός υστερήσεων  $k$  μεγαλώνει, ενώ δεν συμβαίνει πάντα το ίδιο στις μη στάσιμες σειρές. Στο σχήμα 39 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης δύο χρονολογικών σειρών. Η πρώτη σειρά (α) φαίνεται να είναι στάσιμη, ενώ η δεύτερη (β) χαρακτηρίζεται

από έλλειψη στασιμότητας λόγω της αργής μείωσης των διαδοχικών συντελεστών αυτοσυσχέτισης  $\rho_k$ .

(α) Στάσιμη Χρονολογική σειρά



(β) Μη στάσιμη χρονολογική σειρά



Σχήμα 39 – Διαγράμματα αυτοσυσχέτισης στάσιμης και μη στάσιμης χρονολογικής σειράς

Η εξέταση των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης ανήκει στην κατηγορία των περιγραφικών στατιστικών κριτηρίων για τον έλεγχο της στασιμότητας των χρονολογικών σειρών. [6]

### Έλεγχος Durbin-Watson

Πρόκειται για έναν έλεγχο της ανεξαρτησίας των καταλοίπων που προκύπτουν σε μια εξίσωση παλινδρόμησης. Επειδή στα περισσότερα προβλήματα παλινδρόμησης χρονοσειρών προκύπτουν δεδομένα με θετική αυτοσυσχέτιση, ο έλεγχος Durbin-Watson εξετάζει την υπόθεση:

$$H_0: \rho=0$$

$$H_1: \rho>0$$

Το στατιστικό είναι:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

Όπου  $y_i$  και  $\hat{y}_i$  είναι τα παρατηρήσιμα δεδομένα και η πρόβλεψη από την παλινδρόμηση αντίστοιχα. Έχουν υπολογιστεί ανώτατα και κατώτατα όρια  $d_L$  και  $d_U$  για το  $d$  έτσι ώστε:

- Εάν  $d < d_L$  απορρίπτεται η υπόθεση  $H_0 : \rho = 0$
- Εάν  $d > d_U$  δεν απορρίπτεται η υπόθεση  $H_0 : \rho = 0$
- Εάν  $d_L < d < d_U$  δεν προκύπτει συμπέρασμα.

Αν η τιμή του στατιστικού των Durbin Watson υπερβαίνει την κριτική τιμή των πινάκων, τότε συνάγεται το συμπέρασμα ότι η μεταβλητή  $Y$  είναι στάσιμη. [11]

### Έλεγχοι Μοναδιαίας Ρίζας

Ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας εξετάζει τη στασιμότητα μίας χρονολογικής σειράς χρησιμοποιώντας ένα αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα. Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος είναι:

$$Y_t = \delta + \alpha_1 Y_{t-1} + \alpha_2 Y_{t-2} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

όπου οι παράμετροι  $\delta, \alpha_1, \dots, \alpha_p$  είναι σταθερές και  $\varepsilon_t$  μετρά τα τυχαία σφάλματα τα οποία θεωρούνται λευκός θόρυβος, δηλαδή ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέσο το μηδέν και σταθερή διακύμανση. Πρόκειται για ένα υπόδειγμα παλινδρόμησης όπου η εξαρτημένη μεταβλητή  $Y_t$  δεν παλινδρομείται σε ανεξάρτητες μεταβλητές, αλλά στις προηγούμενες τιμές της ίδιας της μεταβλητής  $Y_t$ . Γι' αυτό και ονομάζεται αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα (autoregressive model) τάξεως  $p$  και συμβολίζεται ως  $AR(p)$ . Η γενική μορφή ενός αυτοπαλίνδρομου υποδείγματος  $p$  τάξεως μπορεί να εκφραστεί σε όρους του τελεστή υστέρησης ως:

$$(1 - \alpha_1 L - \dots - \alpha_p L^p) y_t = \varepsilon_t$$

Όπου το  $y_t$  εκφράζεται σε αποκλίσεις από τους μέσους και  $y_t = Y_t - \mu$ . Οι συνθήκες στασιμότητας για το  $AR(p)$  υπόδειγμα προσδιορίζονται από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$X^p - \alpha_1 X^{p-1} - \dots - \alpha_p = 0$$

Έτσι, για να είναι στάσιμο ένα  $AR(p)$  υπόδειγμα θα πρέπει οι ρίζες της παραπάνω χαρακτηριστικής εξίσωσης να είναι όλες μικρότερες της μονάδας σε απόλυτες τιμές ή αλλιώς να βρίσκονται όλες μέσα στο μοναδιαίο κύκλο, εξού και οι έλεγχοι μοναδιαίας

ρίζας. Οι πιο συνηθισμένοι έλεγχοι μοναδιαίας ρίζας είναι ο έλεγχος των Dickey-Fuller και ο έλεγχος των Phillips-Perron.

### Έλεγχος των Dickey Fuller DF

Ο έλεγχος Dickey Fuller εξετάζει την παρουσία μοναδιαίας ρίζας σε ένα αυτοπαλινδρόμο υπόδειγμα. Ένα απλό AR(1) υπόδειγμα είναι:

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

όπου  $y_t$  είναι η χρονολογική σειρά προς έλεγχο,  $\rho$  είναι ένας σταθερός συντελεστής και  $u_t$  ο όρος σφάλματος. Εάν  $|\rho|=1$  τότε υπάρχει μοναδιαία ρίζα. Στην περίπτωση αυτή το υπόδειγμα δεν είναι στάσιμο. Το υπόδειγμα παλινδρόμησης μπορεί να γραφεί και σαν :

$$y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + u_t = \delta y_{t-1} + u_t$$

Ο έλεγχος μοναδιαίας ρίζας  $|\rho|=1$  στο παραπάνω υπόδειγμα είναι ίδιος με το να ελέγξουμε εάν  $\delta=0$  όπου  $\delta=\rho-1$ . Επειδή ο στατιστικός έλεγχος γίνεται στα κατάλοιπα  $u_t$  και όχι στα δεδομένα της χρονοσειράς δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις κριτικές τιμές του t-test, αλλά πρέπει να κατασκευαστεί ένα διαφορετικό στατιστικό  $\tau$  του οποίου οι κρίσιμες τιμές υπάρχουν στο [12]. Υπάρχουν τρεις περιπτώσεις του ελέγχου DF:

Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας με μηδενικό μέσο όρο:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + u_t$$

Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας με μη μηδενικό μέσο όρο:

$$\Delta y_t = a_0 + \delta y_{t-1} + u_t$$

Έλεγχος μοναδιαίας ρίζας με μη μηδενικό μέσο όρο και τάση:

$$\Delta y_t = a_0 + a_1 t + \delta y_{t-1} + u_t$$

Κάθε μία από τις παραπάνω εκδοχές έχει διαφορετικές κριτικές τιμές του στατιστικού που εξαρτάται και από το μέγεθος του δείγματος. Σε κάθε περίπτωση, μηδενική υπόθεση  $H_0$  είναι ότι υπάρχει μοναδιαία ρίζα, δηλαδή  $\delta=0$ . Ο έλεγχος Dickey Fuller δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρός, με την έννοια ότι πολύ συχνά δεν μπορεί να διακρίνει αν υπάρχει πραγματική μοναδιαία ρίζα  $\delta=0$  ή αν το  $\delta$  είναι κοντά στο μηδέν. [12]

### KPSS test

Ο έλεγχος KPSS ελέγχει τη μηδενική υπόθεση ότι μία χρονοσειρά είναι στάσιμη γύρω από μία ντετερμινιστική τάση. Η χρονοσειρά εκφράζεται σαν το άθροισμα μιας ντετερμινιστικής τάσης, μιας τυχαίας διαδρομής και ενός στάσιμου σφάλματος.

$$y_t = \xi t + r_t + \varepsilon_t$$

όπου  $r_t$  είναι η τυχαία διαδρομή  $r_t = r_{t-1} + u_t$  και το  $u_t$  είναι iid(0,  $\sigma_u^2$ ).

Στον έλεγχο KPSS μηδενική υπόθεση  $H_0$  είναι η στασιμότητα της χρονολογικής σειράς ενώ εναλλακτική υπόθεση  $H_1$  είναι η ύπαρξη μοναδιαίας ρίζας. Τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης στην τάση προκύπτουν από την κατασκευή του OLS μοντέλου ελαχίστων τετραγώνων. Ορίζουμε το μερικό άθροισμα των καταλοίπων σαν:

$$S_t = \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$$

Το στατιστικό είναι:

$$KPSS = N^{-2} \sum_{t=1}^N S_t^2 / \hat{\sigma}^2(p)$$

Όπου το  $\hat{\sigma}^2(p)$  είναι μία εκτίμηση της διακύμανσης των καταλοίπων. Απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση όταν το KPSS είναι μεγαλύτερο από τις κριτικές τιμές των πινάκων. [13]

#### 7.4 Η Έννοια της Συνολοκλήρωσης

Στη μελέτη χρονοσειρών, πολύ συχνά διαπιστώνεται μια φαινομενική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών χωρίς να υπάρχει άμεση αιτιολογική σχέση που να τις συνδέει. Έτσι, στο παράδειγμα της κατανάλωσης είναι πιθανόν να βρούμε φαινομενική συσχέτιση των τιμών της με τα επίπεδα της βροχόπτωσης καθότι οι σειρές δεν είναι στάσιμες, αλλά ο ρυθμός με τον οποίο μεγεθύνονται σίγουρα θα διαφέρει καταλήγοντας σε απόκλιση μακροχρόνια. Όταν όμως υπάρχει αιτιολογική σχέση, όπως προσδοκάται να υπάρχει μεταξύ κατανάλωσης και εισοδήματος, οι δύο μεταβλητές δεν θα αποκλίνουν μακροχρόνια παρόλο που και οι δύο μεγεθύνονται, έχουν δηλαδή τάση και άρα είναι μη στάσιμες. Αν για παράδειγμα  $C_t$  είναι η χρονοσειρά της κατανάλωσης και  $Y_t$  η χρονοσειρά του εισοδήματος:

$$C_t = a + bY_t + u_t$$

Παρόλο που η κατανάλωση  $C_t$  και το εισόδημα  $Y_t$  αυξάνονται διαχρονικά, το  $u_t$  που αποτελεί ένα γραμμικό συνδιασμό τους

$$u_t = C_t - a - bY_t$$

θα είναι σταθερό γύρω από το μηδέν. Αν αυτό συμβαίνει τότε λέμε ότι η κατανάλωση και το εισόδημα είναι συνολοκληρωμένες μεταβλητές, με την έννοια ότι υπάρχει μια μακροχρόνια σχέση ισορροπίας μεταξύ τους. Έτσι, το  $u_t$  μπορεί να θεωρηθεί ως η απόκλιση από τη μακροχρόνια ισορροπία τους. Θεωρητικά οι μεταβλητές θα βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας αν  $u_t = 0$ . Συνήθως όμως υπάρχουν αποκλίσεις οι οποίες όταν είναι στάσιμες, τότε πληρούνται οι συνθήκες για τη διατήρηση της κατάστασης ισορροπίας μεταξύ τους. Διαφορετικά, όταν οι μεταβλητές δεν είναι συνολοκληρωμένες, οι αποκλίσεις θα γίνονται όλο και μεγαλύτερες και συνεπώς μακροπρόθεσμα οι μεταβλητές θα απομακρύνονται.

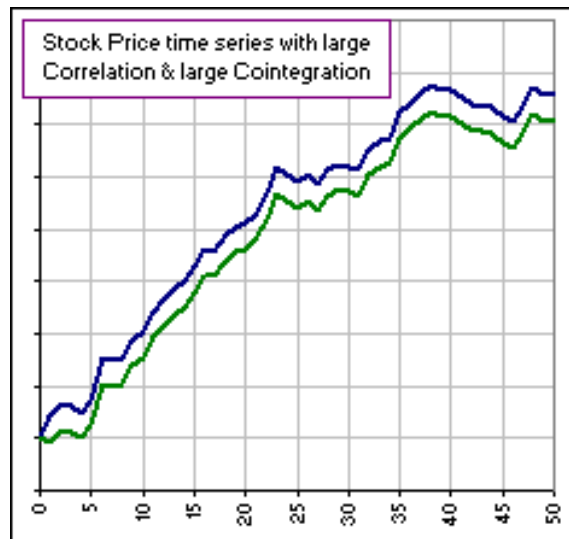
Την έννοια της συνολοκλήρωσης εισήγαγε ο Granger το 1981. Αν έχουμε δύο μη στάσιμες  $I(1)$  μεταβλητές και υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών αυτών που να είναι στάσιμο  $I(0)$ , τότε θα λέμε ότι οι δύο αυτές μεταβλητές συνολοκληρώνονται.

Γενικά, αν δύο χρονολογικές σειρές είναι ολοκληρωμένες  $d$  τάξεως, είναι δηλαδή  $I(d)$  και υπάρχει γραμμικός συνδυασμός μεταξύ τους που να μας δίνει μια ολοκληρωμένη σειρά χαμηλότερης της αρχικής τάξης, έστω  $I(d-b)$ ,  $b > 0$ , τότε σύμφωνα με τους Engel και Granger οι σειρές είναι συνολοκληρωμένες (cointegrated) τάξης  $(d-b)$  και συμβολίζονται ως  $CI(d-b)$ .

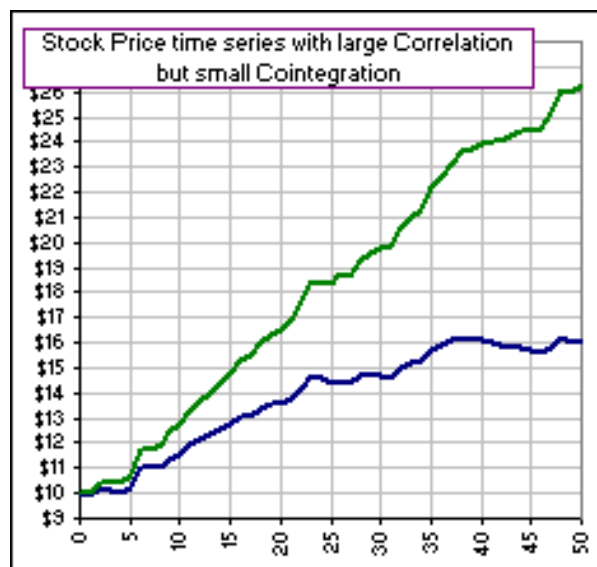
Η θεωρία της συνολοκλήρωσης είναι μια τολμηρή καινοτομία στην Οικονομική Θεωρία και έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον των οικονομολόγων την τελευταία δεκαετία.

## Ορισμός

Δύο χρονολογικές σειρές  $x_t$  και  $y_t$  λέμε ότι συνολοκληρώνονται αν υπάρχει μία σταθερή παράμετρος  $a$  τέτοια ώστε το σφάλμα  $u_t = y_t - ax_t$  είναι στάσιμο. [14]



Σχήμα 40 – Δύο σειρές που συνολοκληρώνονται και παρουσιάζουν την πορεία τιμών δύο διαφορετικών μετοχών





**Σχήμα 41 – Χρονοσειρές που παρουσιάζουν την πορεία τιμών δύο διαφορετικών μετοχών και συνολοκληρώνονται ελάχιστα**

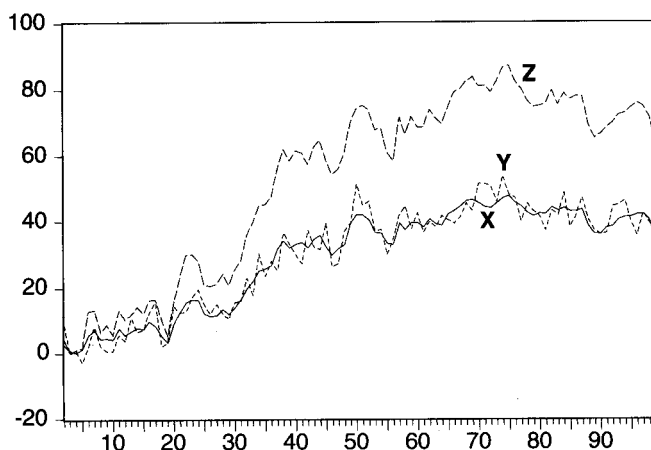
Έστω δύο μεταβλητές  $X_t$  και  $Y_t$  που είναι  $I(1)$ . Αν Παλινδρομώντας την  $Y_t$  στην  $X_t$  τα κατάλοιπα της εξίσωσης  $u_t$  είναι  $I(0)$  τότε οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι συνολοκληρωμένες.

$$u_t = Y_t - \lambda X_t = [1 \quad -\lambda] \cdot \begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix}$$

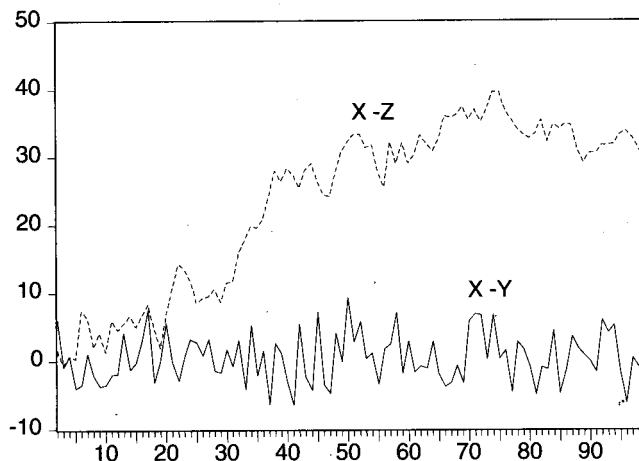
Το  $\lambda$  λέγεται σταθερά της συνολοκλήρωσης ή αλλιώς το διάνυσμα  $[1 \quad -\lambda]$  αποτελεί το διάνυσμα της συνολοκλήρωσης (cointegrating vector).

Γενικεύοντας, ένα διάνυσμα χρονολογικών σειρών  $y_t$  διαστάσεων  $(n \times 1)$  λέγεται συνολοκληρωμένο εάν κάθε χρονολογική σειρά στο  $y_t$  είναι  $I(1)$ , αλλά υπάρχει κάποιος γραμμικός συνδιασμός  $\alpha'y_t$  ο οποίος είναι στάσιμος για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα  $\alpha$  διαστάσεων  $(n \times 1)$ , που αποτελεί και το διάνυσμα της συνολοκλήρωσης. Στο Σχήμα 42 παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές μη στάσιμες χρονολογικές σειρές  $X, Y$  και  $Z$  εκ των οποίων οι δύο πρώτες  $X$  και  $Y$  συνολοκληρώνονται ενώ οι  $Y$  και  $Z$  ή οι  $X$  και  $Z$  δεν συνολοκληρώνονται. Από το σχήμα γίνεται προφανές ότι η διαφορά των σειρών  $X-Y$  είναι στάσιμη, ενώ η διαφορά  $X-Z$  παρουσιάζει ανοδική πορεία, είναι δηλαδή διαχρονικά μη στάσιμη.

### Συνολοκληρωμένες και μη συνολοκληρωμένες σειρές



### Στάσιμες (X-Y) και μη στάσιμες (X-Z) σειρές



Σχήμα 42

Το διάνυσμα της συνολοκλήρωσης είναι μοναδικό μόνο στην περίπτωση των δύο μεταβλητών. Η χρησιμοποίηση σταθεράς στην συνολοκλήρωση της εξίσωσης παλινδρόμησης είναι επιτρεπτή καθώς οποιαδήποτε σταθερά είναι  $I(0)$  και η χρησιμοποίησή της κάνει το μέσο όρο του  $u$  μηδέν.

### Έλεγχοι Συνολοκλήρωσης

Προκειμένου να ελέγξουμε αν δύο ή περισσότερες σειρές συνολοκληρώνονται υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων που μπορούμε να ακολουθήσουμε:

- Η μέθοδος της μιας εξίσωσης και
- Η μέθοδος συστήματος εξισώσεων

Η πρώτη κατηγορία περιλαμβάνει τους αρχικούς ελέγχους συνολοκλήρωσης που πρότειναν οι Engle και Granger (1987). Με τη μέθοδο αυτή ελέγχουμε μια εξίσωση κάθε

φορά για την ύπαρξη ενός διανύσματος συνολοκλήρωσης ανάμεσα σε δύο ή περισσότερες μεταβλητές. Η μέθοδος μιας εξίσωσης των Engle και Granger ονομάζεται και μέθοδος ελέγχου συνολοκλήρωσης βάσει καταλοίπων (residual based test). Αυτό είναι κατανοητό αφού ο έλεγχος συνολοκλήρωσης στηρίζεται στον έλεγχο στασιμότητας των καταλοίπων της εξίσωσης παλινδρόμησης όπως το  $u_t$ . Η μέθοδος αυτή βασίζεται στην εκτίμηση των ελαχίστων τετραγώνων.

Με τη δεύτερη μέθοδο μπορούμε να προσδιορίσουμε το μέγιστο αριθμό των σχέσεων συνολοκλήρωσης που διέπουν τις μεταβλητές.

## 7.5 Πολλαπλή Συνολοκλήρωση

Η συζήτηση μέχρι τώρα έχει επικεντρωθεί στην περίπτωση των δύο μεταβλητών όπου η εξίσωση της συνολοκλήρωσης είναι μοναδική. Είναι φανερό ότι η περίπτωση αυτή είναι υπεραπλουστευμένη γιατί στις σχέσεις μεταξύ μεταβλητών στον πραγματικό κόσμο εμπλέκονται περισσότερες από δύο μεταβλητές. Αυτό αυτόματα αυξάνει την πιθανότητα να υπάρχουν περισσότερα από ένα συνολοκληρωμένα διανύσματα μεταξύ των μεταβλητών οπότε δεν πληρούται η υπόθεση της μοναδικότητας.

Όπως είπαμε και πριν, αν ο γραμμικός συνδυασμός μη στάσιμων τυχαίων μεταβλητών μας δίνει μία στάσιμη σειρά, τότε μπορούμε να πούμε ότι οι συνδυαζόμενες τυχαίες μεταβλητές συνολοκληρώνονται. Έτσι, ένα διάνυσμα χρονολογικών σειρών  $y_t$  λέγεται συνολοκληρωμένο εάν κάθε χρονολογική σειρά στο  $y_t$  είναι I(1), αλλά υπάρχει κάποιος γραμμικός συνδιασμός  $\alpha'y_t$  ο οποίος είναι στάσιμος για κάποιο μη μηδενικό διάνυσμα  $\alpha$  διαστάσεων, που αποτελεί και το διάνυσμα της συνολοκλήρωσης. Η παραπάνω σχέση εκφράζεται με όρους διανυσμάτων σαν:

$$u_t = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n] \cdot \begin{bmatrix} y_t^1 \\ y_t^2 \\ \vdots \\ y_t^n \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια της ανάλυσής μας θα περιγράψουμε ένα χιουμοριστικό παράδειγμα του Aaron Smith και του Robert Harrison για την πολλαπλή συνολοκλήρωση που δίνει μια περιγραφική εικόνα της έννοιας και των προβλημάτων που προκύπτουν στην ανάλυσή της.

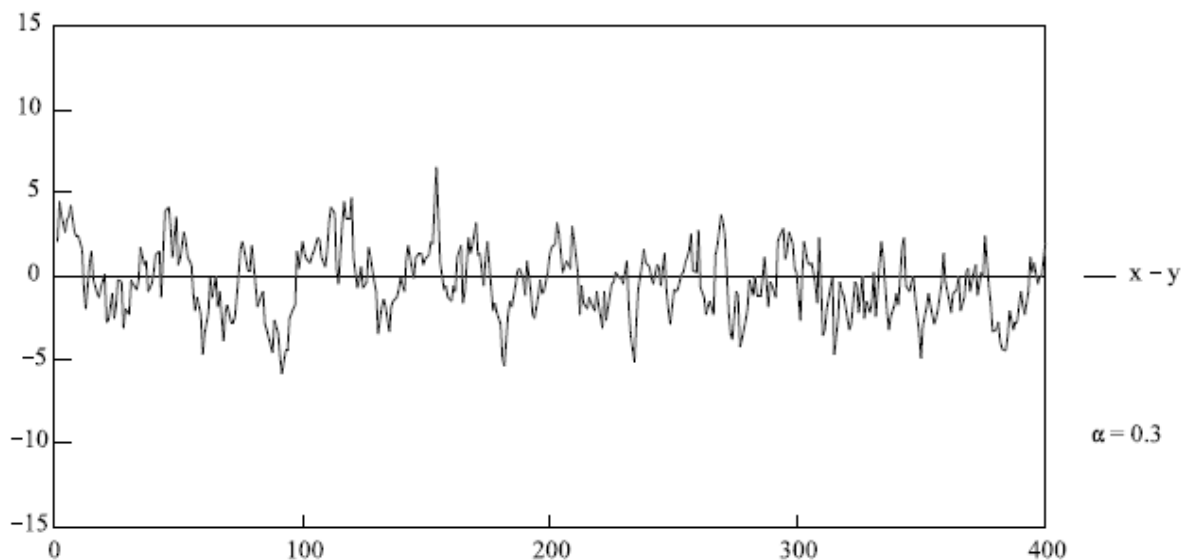
Στην περιγραφή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε σαν παράδειγμα το περπάτημα μιας μεθυσμένης γυναίκας για να περιγράψουμε μια απλή μη στάσιμη διαδικασία. Το σύνολο των βημάτων και η απόσταση  $x_t$  που διανύει ακολουθεί το υπόδειγμα της τυχαίας διαδρομής:

$$x_t - x_{t-1} = u_t$$

Ο σκύλος της, που ανταποκρίνεται στον ήχο της φωνής της κινείται μαιανδρικά ανάλογα με την απόσταση που ακούγεται η φωνή της.

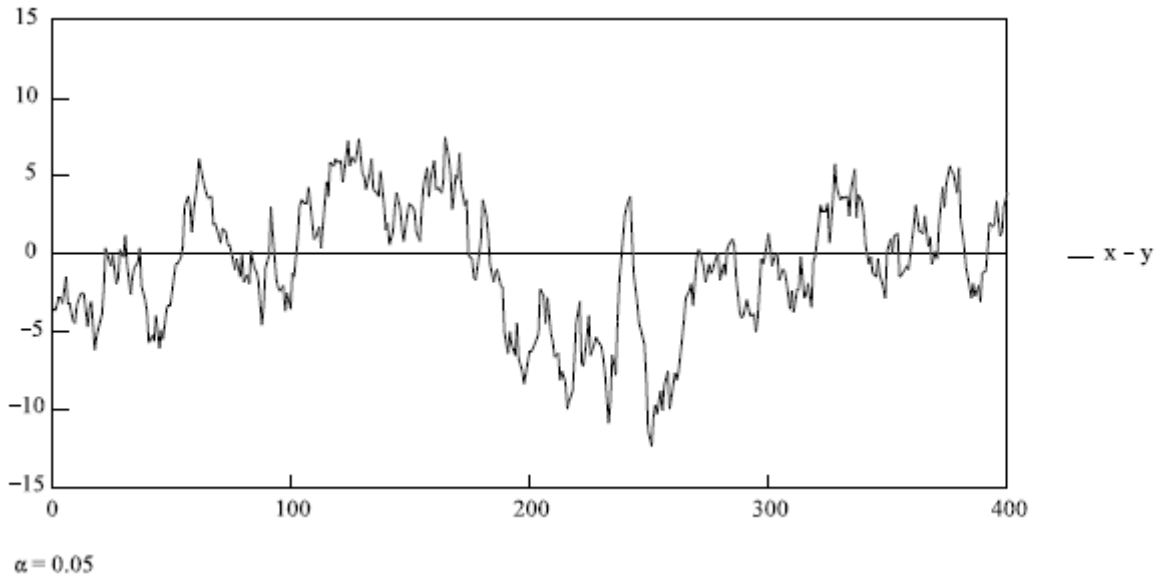
$$y_t - y_{t-1} = -a(y_{t-1} - x_{t-1}) + v_t$$

Ο σκύλος της, του οποίου το όνομα είναι Oliver, προσαρμόζει την απόσταση ανάμεσα στην τωρινή του θέση και την προηγούμενη θέση ( $y_t - y_{t-1}$ ) ανάλογα με την απόστασή του από την κυρία του ( $y_{t-1} - x_{t-1}$ ). Την αναλογία αυτή έχουμε εκφράσει με τον συντελεστή  $\alpha$ . Η αναλογία των ( $y_t - y_{t-1}$ ) και ( $y_{t-1} - x_{t-1}$ ) στην παραπάνω σχέση δείχνει τη σχέση συνολοκλήρωσης που υπάρχει μακροπρόθεσμα ανάμεσα στο βάδισμα του σκύλου και το βάδισμα της κυρίας του. Η σχέση συνολοκλήρωσης είναι μια έκφραση της επιθυμίας του σκύλου να θέλει να βρίσκεται δίπλα στην κυρία του. Εκφραζόμενο μαθηματικά, επιθυμεί  $x_t = y_t$ . Η σχέση αυτή δείχνει το χαρακτηριστικό της «έλξης» που υπάρχει στην έννοια της συνολοκλήρωσης. Τουλάχιστον μία από τις τυχαίες μεταβλητές «έλκεται» από την άλλη έτσι ώστε από τη διαφορά τους ( $y_t - x_t$ ) να προκύπτει μία στάσιμη χρονοσειρά. Στην παραπάνω σχέση, ο σκύλος ανταποκρίνεται στη φωνή της κυρίας του με το να αλλάζει τη θέση του και να κινείται προς αυτήν. Εκτιμά την απόσταση από την κυρία του τη χρονική στιγμή  $t-1$ , μετρώντας την σαν ( $y_{t-1} - x_{t-1}$ ) και υπολογίζει το επόμενο βήμα του ( $y_t - y_{t-1}$ ) έτσι ώστε να μειωθεί αυτή η απόσταση και να μειωθεί το σφάλμα  $v_t$ . Η σχέση αυτή αποτελεί ένα μηχανισμό διόρθωσης λαθών (Error Correction Mechanism, ECM). Η παράμετρος  $\alpha$  παίρνει μια τιμή ανάμεσα στο 0 και το 1. Αν ο Oliver περιφέρεται με μικρή επιθυμία να βρίσκεται κοντά στην κυρία του, τότε το  $\alpha$  παίρνει τιμή κοντά στο μηδέν. Αν περιφέρεται με μεγάλη επιθυμία να βρίσκεται κοντά στην κυρία του, τότε το  $\alpha$  παίρνει τιμή κοντά στο 1. Τα δύο αυτά σενάρια φαίνονται στα σχήματα 43 και 44.



**Σχήμα 43- Απόσταση ανάμεσα στον Oliver και στην κυρία του όταν το  $\alpha$  είναι 0.3**

Το παραπάνω σχήμα μπορεί να ερμηνευτεί σαν την εξέλιξη των βημάτων σε διάρκεια 400 δευτερολέπτων με ταχύτητα του ενός βήματος ανά δευτερόλεπτο. Στο σχήμα 6.7 ( $\alpha=0.3$ ) ο Oliver είναι ιδιαίτερα επιμελής και οι αποστάσεις του με την κυρία του διασταυρώνονται συνεχώς. Ο όρος ( $y_t - x_t$ ) αλλάζει συνεχώς πρόσημο.



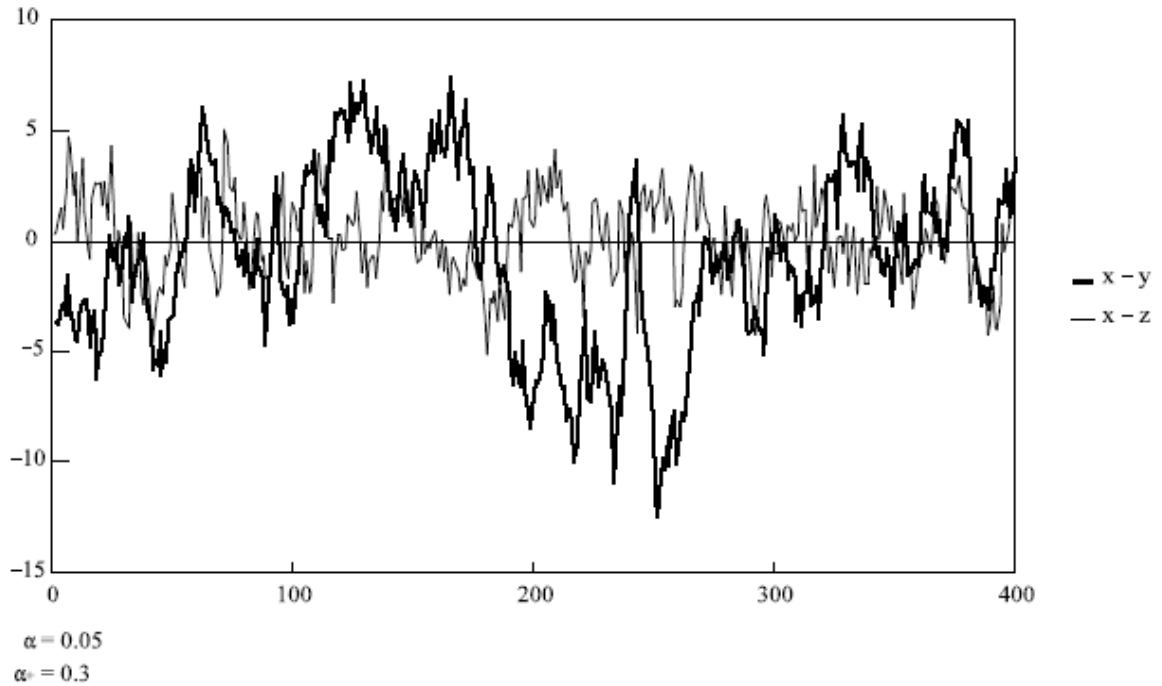
Σχήμα 44 – Απόσταση ανάμεσα στον Oliver και την κυρία του όταν το  $\alpha$  είναι 0.05

Στο Σχήμα 44 ο Oliver δεν είναι ιδιαίτερα επιμελής ( $\alpha=0.05$ ) και η απόσταση ανάμεσα σε αυτόν και την κυρία του μπορεί να πάρει μεγάλες τιμές σε ορισμένες χρονικές στιγμές, παρ' όλο που μακροχρόνια τα μονοπάτια τους συγκλίνουν. Τα μονοπάτια τους διασταυρώνονται λιγότερο συχνά σε σχέση με το Σχήμα 43. Μπορούμε λοιπόν να ερμηνεύσουμε την παράμετρο  $\alpha$  σαν τη δύναμη της έλξης των εξαρτούμενων μεταβλητών.

Θα εισάγουμε τώρα στον παράδειγμά μας και έναν φίλο, τον Kinley, ο οποίος έλκεται από τη φίλη του, αλλά ο Oliver του είναι αδιάφορος. Ο Kinley έλκεται από τη φίλη του και η φύση της έλξης έχει μία στοχαστικότητα όπως:

$$z_t - z_{t-1} = -\alpha^+(z_{t-1} - x_{t-1}) + w_t$$

Εδώ βλέπουμε ότι ο Kinley προσαρμόζει τα βήματά του ( $z_t - z_{t-1}$ ) ώστε να κινείται προς της φίλη του. Η ταχύτητά του ελέγχεται από την παράμετρο  $\alpha^+$ . Και εδώ, αν η παράμετρος  $\alpha^+$  είναι κοντά στο 1 υποδηλώνεται έντονη έλξη των μονοπατιών και το αντίθετο αν το  $\alpha^+$  είναι κοντά στο 0. Τα μονοπάτια και των τριών χαρακτήρων παρουσιάζονται στο σχήμα 45 όπου ο Kinley ακολουθεί επιμελώς τη φίλη του με  $\alpha^+=0.3$  ενώ ο Oliver είναι περισσότερο αδιάφορος με παράμετρο  $\alpha=0.05$ .



Σχήμα 45

Το βάδισμα της κυρίας καθορίζει τα μονοπάτια τόσο του Oliver όσο και του Kinley παρ' όλο που τα δύο τελευταία είναι ανεξάρτητα. Η περιγραφή του παραπάνω παραδείγματος σαν ένα μοντέλο τριών τυχαίων μεταβλητών που συνολοκληρώνονται προϋποθέτει τις εξισώσεις των διαφορών αποστάσεων που έχουμε γράψει παραπάνω. Η φύση του προβλήματος είναι τέτοια ώστε υπάρχουν σχέσεις συνολοκλήρωσης ανάμεσα στις μεταβλητές x-y και x-z, αλλά δεν υπάρχουν κατάλληλοι συντελεστές ώστε το μοντέλο να εκφραστεί σαν μία σχέση παλινδρόμησης των x-y-z σε σύνολο. Αν επεκτείνουμε το παράδειγμα και υποθέσουμε ότι η μεθυσμένη κυρία προσαρμόζει το βάδισμά της στο μονοπάτι του Kinley, τότε η τυχαία μεταβλητή x μπορεί να γίνει :

$$x_t - x_{t-1} = -a^{**}(x_{t-1} - z_{t-1}) + u_t$$

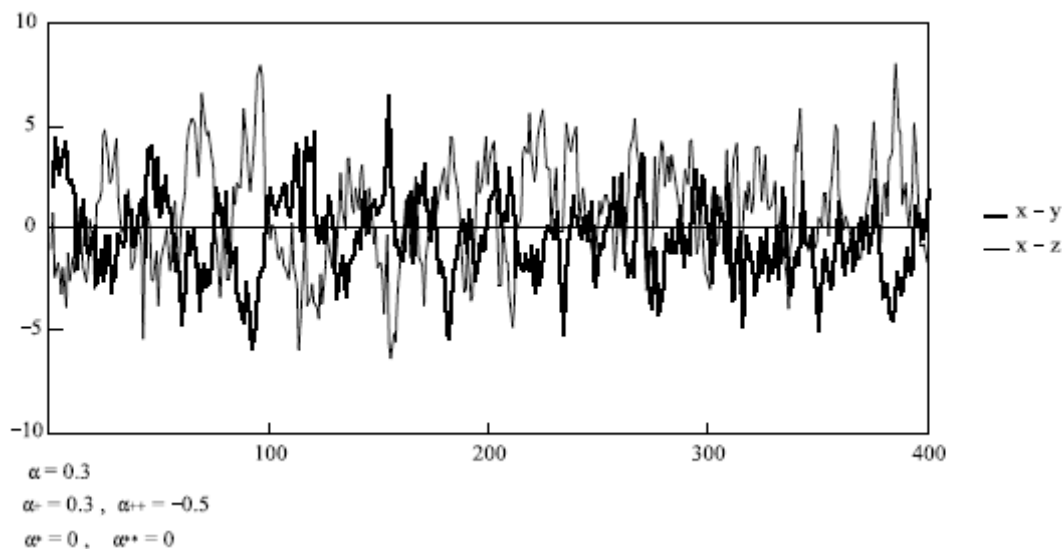
Αν η μεθυσμένη κυρία ανταποκρίνεται στη θέση του Oliver και του Kinley τότε μπορούμε να προσαρμόσουμε τη δική της εξίσωση και να τη γράψουμε έτσι ώστε να περιλαμβάνει και τις δύο πηγές έλξης:

$$x_t - x_{t-1} = -a^+(x_{t-1} - y_{t-1}) - a^{**}(x_{t-1} - z_{t-1}) + u_t$$

Εδώ έχουμε δύο σχέσεις συνολοκλήρωσης που ανταποκρίνονται στην έλξη από τον Oliver και τον Kinley. Οι τιμές  $a^+$  και  $a^{**}$  δείχνουν πόσο έντονη είναι η προσαρμογή στο μονοπάτι του Oliver και το μονοπάτι του Kinley. Μπορούμε να επεκτείνουμε την αλληλεπίδραση ακόμη περισσότερο και να υποθέσουμε ότι Kinley συμπαθεί ή αντιπαθεί τον Oliver γράφοντας:

$$z_t - z_{t-1} = -a^+(z_{t-1} - x_{t-1}) - a^{++}(z_{t-1} - y_{t-1}) + w_t$$

Αν ο Kinley αντιπαθεί τον Oliver, τότε ο  $\alpha^{++}$  είναι αρνητικός. Στο σχήμα 46 φαίνεται αυτή η περίπτωση, όπου ο Kinley μένει κοντά στη φίλη του, αλλά απομακρύνεται από τον Oliver. Οι χρονοσειρές  $y$  και  $z$  είναι συνήθως αντίθετες και η χρονοσειρά  $x$  βρίσκεται ανάμεσά τους.



Σχήμα 46

Παρ' όλο που το παραπάνω σύστημα φαίνεται να περιέχει τρεις σχέσεις συνολοκλήρωσης, στην πραγματικότητα περιέχει μόνο δύο. Η σχέση που γράψαμε ακριβώς από πάνω φαίνεται σαν να εισάγαμε μία τρίτη σχέση συνολοκλήρωσης, στην πραγματικότητα όμως είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των  $(z-x)$  και  $(x-y)$ . Παρά λοιπόν την φαινομενική ύπαρξη τριών σχέσεων συνολοκλήρωσης, οι δύο μόνο είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Ο γραμμικός συνδυασμός αυτός φαίνεται αν γράψουμε την παραπάνω σχέση σαν:

$$z_t - z_{t-1} = -(a^+ + a^{++})(z_{t-1} - x_{t-1}) - a^{++}(x_{t-1} - y_{t-1}) + w_t$$

Με τρεις τυχαίες μεταβλητές δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν παραπάνω από δύο σχέσεις συνολοκλήρωσης.

Μέχρι στιγμής, έχουμε λάβει υπόψιν μας τρεις διαφορετικές εξισώσεις έλξης και από αυτές πήραμε τα αποτελέσματα των χρονοσειρών  $x_t, y_t, z_t$ . Τι θα συνέβαινε όμως αν τα δεδομένα μας ήταν μόνο τα χρονοδιαγράμματα; Στην περίπτωση αυτή θα έπρεπε από την εξέλιξη των  $x_t, y_t, z_t$  να βγάλουμε συμπεράσματα για τις σχέσεις συνολοκλήρωσης. Με απλή παρατήρηση των χρονοσειρών εύκολα συμπεραίνει κανείς την τάση των  $x_t, y_t, z_t$  να παραμένουν κοντά η μία στην άλλη μακροχρόνια. Δεν είναι προφανείς ωστόσο οι σχέσεις εξάρτησης μεταξύ των χρονοσειρών, δηλαδή, ποια χρονοσειρά οδηγεί και ποια έλκεται από αυτήν. Μια εκτίμηση των σχέσεων συνολοκλήρωσης μπορούμε να πάρουμε με απλή παλινδρόμηση. Για τα δεδομένα του Σχήματος 46 η σχέση παλινδρόμησης που προκύπτει είναι :

$$y_t = 0.97x_t + 0.051e_t$$

$$R^2 = 0.98 \quad DF = -8.473 \quad CRDW = 0.62 \quad T = 400$$

Όπου  $T$  είναι το μέγεθος του δείγματος (400 βήματα σε 400 δευτερόλεπτα),  $DF$  είναι το στατιστικό Dickey Fuller,  $CRDW$  είναι το στατιστικό Durbin Watson και  $R^2$  η διακύμανση του σφάλματος  $e_t$ . Το αν η παραπάνω σχέση παλινδρόμησης είναι συνεπής ως προς τη συνολοκλήρωση των χρονοσειρών  $y_t$  και  $x_t$  εξαρτάται από την υπόθεση ότι το σφάλμα  $e_t$  είναι στάσιμο. Τα στατιστικά  $DF$  και  $CRDW$  μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξετάσουμε τη μηδενική υπόθεση ότι το σφάλμα παλινδρόμησης  $e_t$  είναι μη στάσιμο, σε σχέση με την εναλλακτική υπόθεση ότι υπάρχει στασιμότητα. Στο παραπάνω παράδειγμα, για ένα διάστημα εμπιστοσύνης 10% και από τις κριτικές τιμές των  $DF$  και  $CRDW$  προκύπτει η στασιμότητα της χρονοσειράς  $e_t$ .

Ο παρατηρητής τώρα μπορεί να θέλει να εξιχνιάσει τις σχέσεις που υπάρχουν μεταξύ και των τριών χρονοσειρών  $x_t, y_t, z_t$ . Πέραν από τα αποτελέσματα της παλινδρόμησης και των στατιστικών δεδομένων, ουσιαστικής σημασίας είναι και η ποιοτική σχέση που μπορεί να υπάρχει ανάμεσα στην μεθυσμένη κυρία, τον Oliver και τον Kinley. Μια τέτοια ποιοτική αλληλεπίδραση θα ήταν για παράδειγμα το γεγονός ότι η μεθυσμένη κυρία αδιαφορεί για τον Oliver και τον Kinley, ο Oliver ακολουθεί πιστά την κυρία του, ενώ ο Kinley αντιπαθεί τον Oliver και και ταυτόχρονα προσπαθεί να μείνει κοντά στην φίλη του. Η αλληλεπίδραση τέτοιων ποιοτικών αλληλεπιδράσεων με απλή παρατήρηση των χρονοσειρών είναι ανάλογη της δουλειάς ενός ντετέκτιβ. Είναι αντίστοιχη της αναζήτησης ποιοτικών σχέσεων ανάμεσα σε οικονομικές σειρές με απλή παρατήρηση των δεδομένων.

Οι σειρές  $x_t, y_t, z_t$  φαίνονται να εξελίσσονται μαζί με την πάροδο του χρόνου ωστόσο η αναζήτηση των ποιοτικών σχέσεων μεταξύ τους για το πιο πολύπλοκο σύστημα είναι εξαιρετικά δύσκολη. Δυστυχώς, η ανάλυση του συστήματος περισσότερων των δύο μεταβλητών εμφανίζει επιπλοκές σε σχέση με το σύστημα των δύο εξισώσεων. Αυτό συμβαίνει διότι δεν γνωρίζουμε πόσες σχέσεις συνολοκλήρωσης μπορεί να υπάρχουν μεταξύ των μεταβλητών, σε αντίθεση με το σύστημα δύο εξισώσεων, όπου μπορεί να υπάρχει μόνο μία ή καμία σχέση συνολοκλήρωσης. [15]



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8**

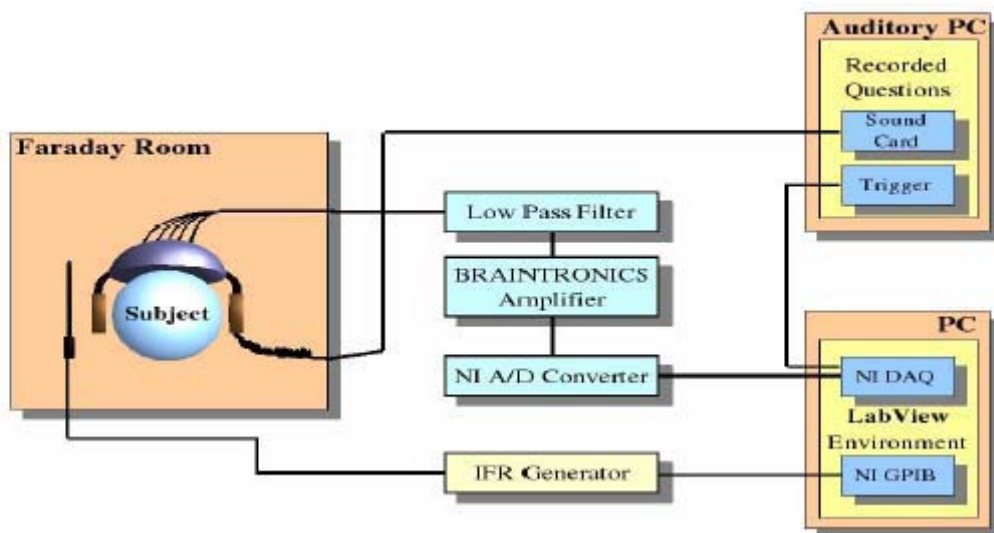
### **ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ EEG**

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τη διαδικασία επεξεργασίας του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος με πολλαπλή συνολοκλήρωση που πραγματοποιήθηκε κατά την εκπόνηση της εργασίας. Θα περιγράψουμε την πειραματική διάταξη βάσει της οποίας έγιναν οι μετρήσεις του σήματος EEG, θα αναλύσουμε τον αλγόριθμο επεξεργασίας πάνω στον οποίο βασίστηκε το πρόγραμμα Matlab που αναπτύχθηκε και στη συνέχεια θα επεξεργαστούμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

## 8.1 Πειραματική Διάταξη

Η πειραματική διάταξη βάσει της οποίας ανακτήθηκαν τα δεδομένα ηλεκτροεγκεφαλογράφηματος προς επεξεργασία περιγράφεται αναλυτικά στο [7]. Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε τα απαραίτητα για την κατανόηση της παρούσας μελέτης.

Η διάταξη του ηλεκτροεγκεφαλογράφου περιλαμβάνει 16 ηλεκτρόδια τα οποία παράγουν το ηλεκτρικό σήμα του εγκεφάλου ερχόμενα σε επαφή με το κεφάλι του εξεταζόμενου και τα οποία καταλήγουν στον προενισχυτή. Δύο ηλεκτρόδια που έρχονται σε επαφή με τους λοβούς των αυτιών και είναι βραχυκυκλωμένα, αποτελούν τη γείωση. Το τμήμα αυτό της διάταξης βρίσκεται μέσα σε κλωβό Faraday, με μόνωση από αλουμίνιο, με σκοπό την ελαχιστοποίηση οποιασδήποτε ηλεκτρομαγνητικής παρεμβολής που θα μπορούσε να επηρεάσει τις μετρήσεις. Στη συνέχεια και εκτός του κλωβού Faraday, τα 16 σήματα οδηγούνται προς ενίσχυση.



Σχήμα 47 – Η πειραματική διάταξη με 16 ηλεκτρόδια

Μετά την ενίσχυση το σήμα εισέρχεται σε ένα βαθυπερατό φίλτρο (low pass filter). Το φίλτρο κόβει συχνότητες άνω των 35 Hz, ώστε να αποφευχθεί παρεμβολή από το δίκτυο παροχής ρεύματος που λειτουργεί στα 50 Hz. Η έξοδος του ενισχυτή οδηγεί σε ένα μετατροπέα αναλογικού σε ψηφιακό σήμα (A/D converter) ο οποίος καταλήγει σε ηλεκτρονικό υπολογιστή που είναι εφοδιασμένος με κάρτα ανάκτησης δεδομένων 16 εισόδων. Μέσω της κάρτας λαμβάνονται τα 16 εγκεφαλικά σήματα και αποθηκεύονται στη μνήμη του υπολογιστή.

Για τη λήψη μετρήσεων υπό την επίδραση ακτινοβολίας χρησιμοποιείται επιπλέον μία γεννήτρια που παράγει σήματα ποικίλων συχνοτήτων, διαμορφώσεων και ισχυών. Η γεννήτρια οδηγεί διπολική κεραία που είναι τοποθετημένη στη δεξιά πλευρά του κεφαλιού του εξεταζόμενου ατόμου σε απόσταση περίπου 20 cm.

Παράλληλα λειτουργεί δεύτερος υπολογιστής ο οποίος παράγει ακουστικά ερεθίσματα και συνδέεται μέσω καλωδίου με τα ακουστικά που φορά ο εξεταζόμενος. Τη στιγμή που ξεκινά η αναπαραγωγή του ακουστικού ερεθίσματος ένα σήμα σκανδαλισμού φεύγει απ' τον εν λόγω υπολογιστή και πυροδοτεί τον άλλο υπολογιστή να λάβει δεδομένα. Η ταυτόχρονη έναρξη του ακουστικού ερεθίσματος και της λήψης δεδομένων είναι

κρίσιμης σημασίας γιατί μόνο τότε τα προκλητά δυναμικά του εγκεφαλικού σήματος που λαμβάνουμε μπορούν να αποδοθούν πράγματι στο ακουστικό ερέθισμα και να βαθμονομηθούν κατάλληλα.

Μετά την υλοποίηση της διάταξης ακολούθησαν λεπτομερείς δοκιμές. Λειτουργήσε με είσοδο συγκεκριμένα σήματα (ημιτονοειδή σήματα διαφόρων συχνοτήτων και πλατών) τα οποία ελέγχθηκαν με τη βοήθεια παλμογράφου και επιβεβαιώθηκε η ακριβής αναπαράσταση και αποθήκευσή τους από τα υλοποιηθέντα συστήματα. Επαληθεύτηκε το σημείο κόρου του ενισχυτή καθώς και ο πλήρης συγχρονισμός λήψης δεδομένων και έναρξης αναπαραγωγής ηχητικού μηνύματος και έγιναν έλεγχοι ηλεκτρομαγνητικής συμβατότητας.

Μετά την ολοκλήρωση της πειραματικής διάταξης ακολούθησε η χρησιμοποίησή της με σκοπό τη μελέτη της επίδρασης της ακτινοβολίας στα εγκεφαλικά σήματα. Η ακτινοβολία ήταν στα 1800 MHz με μέση ισχύ 128 mW. Έλαβαν μέρος 20 άτομα (10 άνδρες και 10 γυναίκες). Χρησιμοποιήθηκε μονοχρωματική ακτινοβολία με σκοπό την αποφυγή προβλημάτων παρεμβολών που πιθανώς να παρουσιάζονταν αν χρησιμοποιείτο διαμορφωμένο σήμα. Το φίλτρο στα 35Hz εξασφαλίζει ότι στο καταγεγραμμένο σήμα δεν υπάρχει συνιστώσα του σήματος ακτινοβολίας.

Το δείγμα ήταν ομογενές ως προς την ηλικία και το μορφωτικό επίπεδο ενώ ήταν όλοι δεξιόχειρες και δεν είχαν προβλήματα ακοής. Ο κάθε εξεταζόμενος υποβλήθηκε στο ακουστικό test Wechsler δύο φορές, τη μία με ακτινοβολία και την άλλη με χωρίς. Μεταξύ των δύο επισκέψεων μεσολάβησε χρόνος δύο εβδομάδων ενώ η σειρά με την οποία εκτίθετο ο εξεταζόμενος στο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ήταν τυχαία. Επίσης ο εξεταζόμενος δεν είχε γνώση της ύπαρξης ή μη της ακτινοβολίας για την αποφυγή φαινομένων αυθυποβολής.

## 8.2 Ανάκτηση Δεδομένων

Τα δεδομένα που αποθηκεύονται είναι εγκεφαλικά σήματα διάρκειας 1.5sec το καθένα και η αποθήκευση γίνεται κάθε φορά που ο χρήστης δίνει εντολή να ακούσει ο εξεταζόμενος ένα ηχητικό σήμα. Με βάση τη συχνότητα δειγματοληψίας (1 kHz) η κάθε σειρά δεδομένων αποτελείται από 1500 τιμές εκ των οποίων οι πρώτες 500 (0.5 sec) είναι εγκεφαλικό σήμα πριν την έναρξη του ηχητικού μηνύματος και οι οποίες βρίσκονται σε buffer πριν την τελική αποθήκευσή τους ενώ οι επόμενες 1000 καταγράφονται μετά την έναρξη του ηχητικού μηνύματος. Άρα το σήμα που αποθηκεύεται είναι αρχικά EEG (500 τιμές) και έπειτα (1000 τιμές) ακολουθούν τα προκλητά δυναμικά.

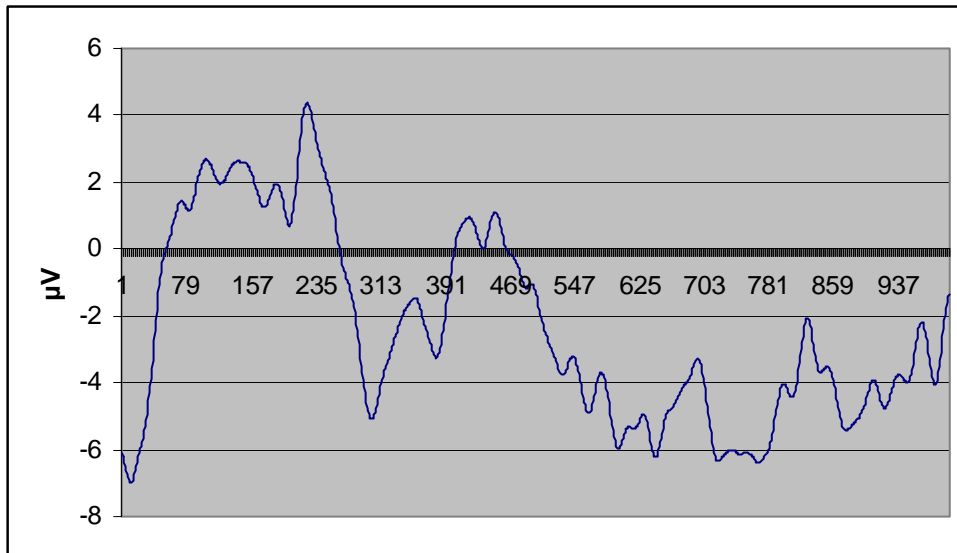
Στην παρούσα μελέτη θα περιοριστούμε στις 1000 τιμές του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος στις οποίες ακολουθούν τα προκλητά δυναμικά. Σύμφωνα και με την παραπάνω ανάλυση, από τη διεξαγωγή του πειράματος προκύπτουν τέσσερις δημογραφικές ομάδες ηλεκτροεγκεφαλογραφημάτων όπου περιέχονται 10 ηλεκτροεγκεφαλογραφικά σήματα στην κάθε μία. Οι τέσσερις αυτές ομάδες είναι:

- Female off
- Female on
- Male off
- Male on

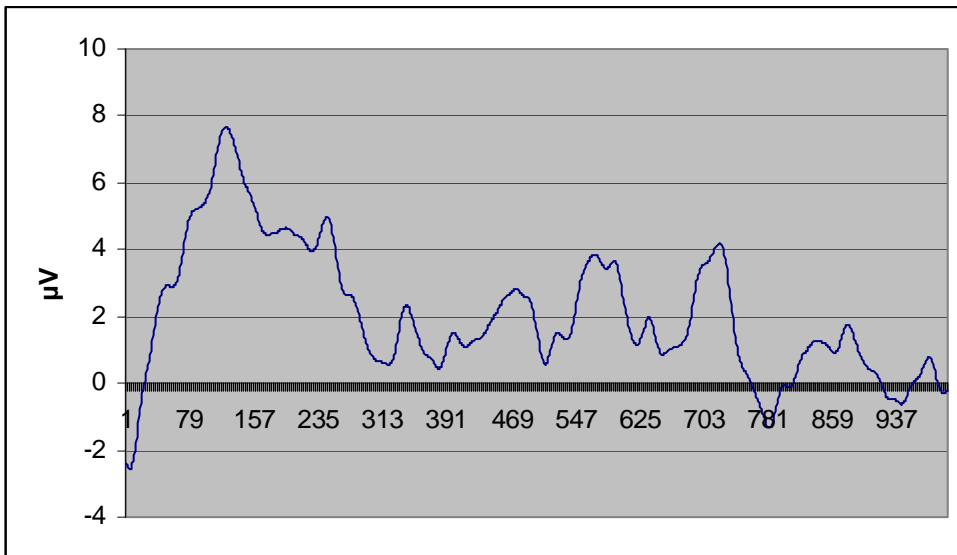
Η ομάδα Female off περιέχει 10 διαφορετικά ηλεκτροεγκεφαλογραφικά σήματα που ελήφθησαν από 10 διαφορετικές γυναίκες χωρίς την παρουσία ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας κατά τη διεξαγωγή της μέτρησης. Η ομάδα Female on περιλαμβάνει τα

ηλεκτροεγκεφαλογραφικά σήματα των ίδιων γυναικών με την παρουσία ακτινοβολίας. Ομοίως για τις δημογραφικές ομάδες Male off και Male on που περιλαμβάνουν άνδρες.

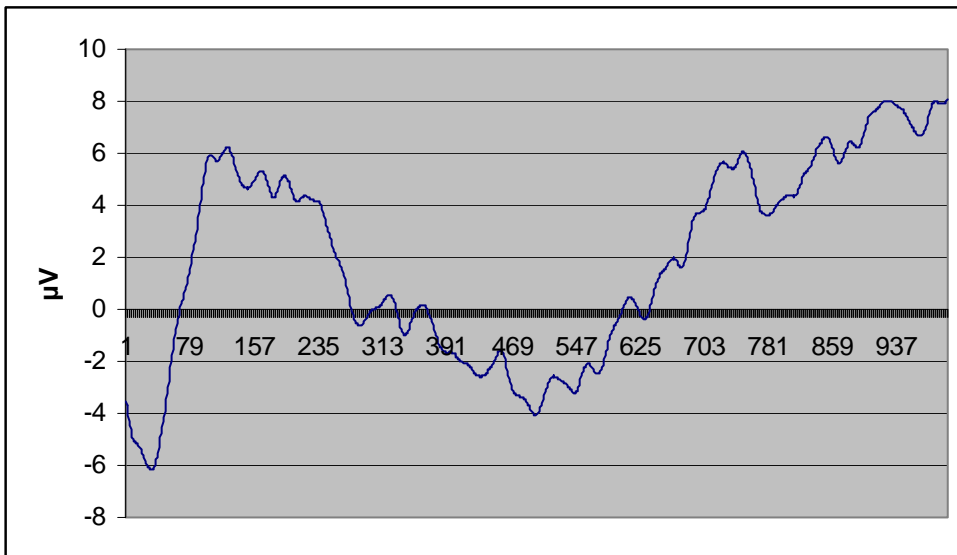
Τα αρχικά δεδομένα που καταγράφονται αποθηκεύονται σε αρχεία xls. Για την περαιτέρω επεξεργασία τους όμως απαιτείται κάποιος μετασχηματισμός. Αρχικά γίνεται η αφαίρεση της ενίσχυσης για να έρθει το σήμα σε πραγματική κλίμακα. Επίσης οι τιμές ανάγονται σε  $\mu\text{V}$  και πολλαπλασιάζονται με το -1 έτσι ώστε να είναι σε μορφή με την οποία συνηθίζουν να εργάζονται οι ψυχίατροι. Έπειτα για κάθε άτομο και κάθε επίσκεψή του (για κάθε αρχείο δηλαδή) υπολογίζεται ο μέσος όρος των σημάτων EEG δηλαδή η μέση τιμή 52x500 τιμών (ερωτήσεις/τιμές) καθώς και ο μέσος όρος των 100 τελευταίων τιμών EEG για όλες τις ερωτήσεις (52x100 τιμές). Ο πρώτος μέσος όρος αφαιρείται από τις τιμές EEG και ο δεύτερος από τις τιμές ERP. Έπειτα υπολογίζεται ο μέσος όρος των 52 επαναλήψεων για κάθε άτομο και κάθε επίσκεψή του, με σκοπό να αποβληθεί ο θόρυβος και να αναδυθεί το πραγματικό εγκεφαλικό σήμα όπως περιγράψαμε στις τεχνικές μέσου όρου στο κεφάλαιο 3. Μετά από αυτή την επεξεργασία προκύπτουν τα δεδομένα του πειράματος. Στα επόμενα σχήματα φαίνεται το ηλεκτροεγκεφαλογράφημα του πρώτου ηλεκτροδίου ενός δείγματος από κάθε μία από τις δημογραφικές ομάδες Female off, Female on, Male off και Male on που προκύπτει με τον παραπάνω μετασχηματισμό.



Σχήμα 48 – Female off



**Σχήμα 49 – Female on**



**Σχήμα 50 – Male off**



### 8.3 Πρόγραμμα Matlab

Ο σκοπός της παρούσας μελέτης είναι διπλός. Αρχικά, επιθυμούμε να εξετάσουμε την εφαρμογή της πολλαπλής συνολοκλήρωσης στην επεξεργασία ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος και να δούμε αν προκύπτουν ενδιαφέροντα συμπεράσματα από τα αποτελέσματα της επεξεργασίας. Μέσα από αυτή τη διαδικασία θα προσπαθήσουμε ακόμα να εξετάσουμε αν η παρουσία ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας επηρεάζει την μορφή του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος.

Για το σκοπό αυτό αναπτύχθηκε ένα πρόγραμμα σε Matlab το οποίο εξετάζει αν συνολοκληρώνονται τα 15 διανύσματα ηλεκτροδίων καθενός από τα 40 αρχεία ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος. Η υλοποίησή του έγινε σε 5 διαφορετικά αρχεία συναρτήσεων συνολικής έκτασης 600 γραμμών κώδικα. Ο αλγόριθμος επεξεργασίας έχει ως εξής:

- Κάθε ηλεκτρόδιο δίνει ένα σήμα εξόδου που αναπαρίσταται από ένα διάνυσμα 1000 στοιχείων.
- Εξετάζεται η στασιμότητα κάθε διανύσματος με χρήση του KPSS test
- Εάν ένα διάνυσμα δεν είναι στάσιμο, παίρνονται οι πρώτες διαφορές μέχρι να επιτευχθεί στασιμότητα. Από τη διαδικασία αυτή προκύπτουν στάσιμες χρονοσειρές οι οποίες είναι  $I(d_1)$ ,  $I(d_2)$ , ...  $I(d_{15})$ . Ο δείκτης  $d_i$  δείχνει την τάξη ολοκλήρωσης.
- Για κάθε ομάδα ηλεκτροδίων που έχουν την ίδια τάξη ολοκλήρωσης γίνεται εξέταση της πολλαπλής συνολοκλήρωσης.
- Η εξέταση της πολλαπλής συνολοκλήρωσης που αναφέρθηκε παραπάνω έχει ως εξής: Για την ομάδα ηλεκτροδίων που έχουν την ίδια τάξη ολοκλήρωσης γίνεται παλινδρόμηση OLS από την οποία προκύπτει το διάνυσμα συνολοκλήρωσης και το διάνυσμα  $u_t$  των καταλοίπων. Αν το  $u_t$  είναι στάσιμο, τότε οι σειρές συνολοκληρώνονται.
- Η παραπάνω διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλους τους πιθανούς συνδυασμούς ηλεκτροδίων της ίδιας ομάδας. Ο αλγόριθμος σταματά όταν βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή ομάδα ηλεκτροδίων που συνολοκληρώνονται.
- Η ίδια διαδικασία επαναλαμβάνεται και για τις υπόλοιπες ομάδες διαφορετικής τάξης ολοκλήρωσης.
- Η έξοδος δίνεται σε πίνακες της μορφής του σχήματος 53

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0	10	11	12	13	14	15
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
4	3	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
5	4	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
6	5	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
7	6	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
8	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	10	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1
12	11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1
13	12	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
14	13	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1
15	14	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
16	15	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
17																
18																
19																
20																
21																
22																
23																

Σχήμα 53 – Αρχείο Εξόδου – Πίνακας Συνολοκλήρωσης

Στο παραπάνω αρχείο εξόδου θα αναφερόμαστε ως εξής ως πίνακα συνολοκλήρωσης. Η ερμηνεία του έχει ως εξής. Οι άσσοι στον πίνακα σημαίνουν επίτευξη συνολοκλήρωσης ενώ τα μηδενικά σημαίνουν ότι δεν ανιχνεύτηκε συνολοκλήρωση. Έτσι, η πρώτη σειρά του παραπάνω αρχείου σημαίνει ότι το ηλεκτρόδιο 1 βρέθηκε ότι συνολοκληρώνεται με τα ηλεκτρόδια 10, 11, 12, 13, 14 και 15 σε μία σχέση παλινδρόμησης του τύπου:

$$S_1 = \bar{a}' \cdot \begin{bmatrix} S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \end{bmatrix}$$

Όπου  $S_i$  είναι το σήμα του  $i$  ηλεκτροδίου και  $\bar{a}$  είναι το διάνυσμα συνολοκλήρωσης. Αντιστοίχα, η δεύτερη σειρά του αρχείου εξόδου σημαίνει ότι το ηλεκτρόδιο 2 βρέθηκε ότι συνολοκληρώνεται με τα ηλεκτρόδια 10, 11, 12, 13, 14 και 15 σε μία σχέση παλινδρόμησης:

$$S_2 = \bar{a}' \cdot \begin{bmatrix} S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \end{bmatrix}$$

Ομοίως και για τις υπόλοιπες σειρές του αρχείου εξόδου.

#### 8.4 Αποτελέσματα

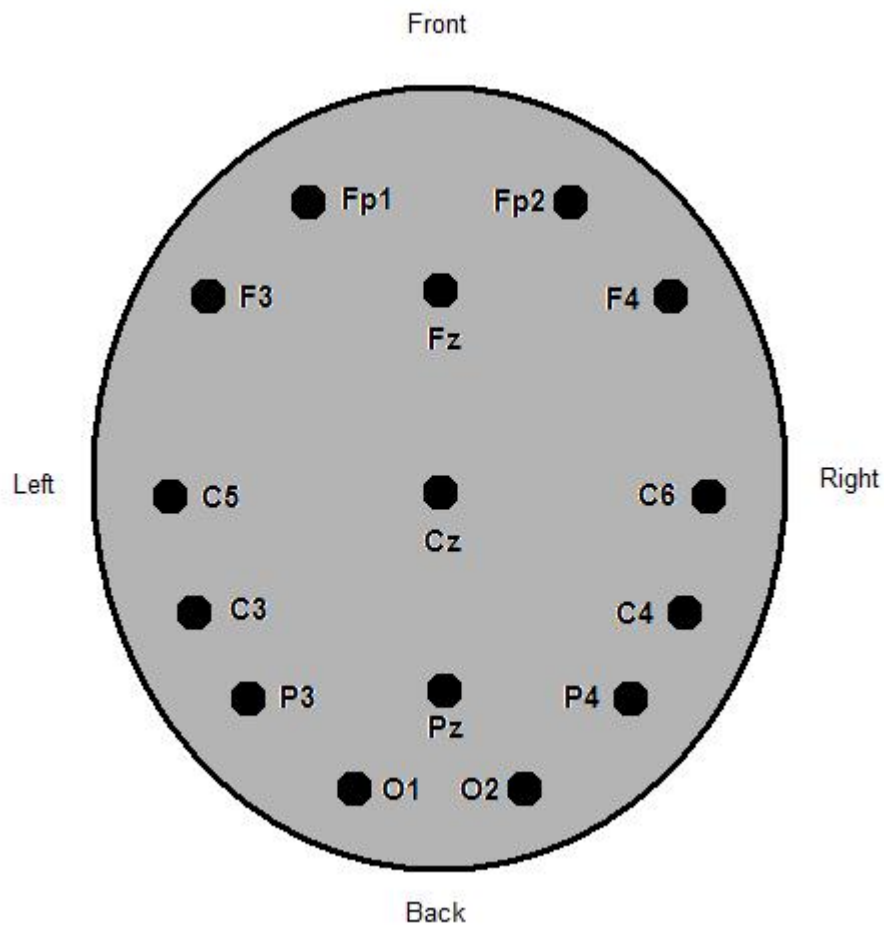
Η αντιστοίχιση των ηλεκτροδίων 1 έως 15 με τα ηλεκτρόδια του EEG και τη θέση τους στο κρανίο είναι:

**Πίνακας 8 – Αντιστοίχιση καναλιών 1 έως 15 με τα ηλεκτρόδια του ηλεκτροεγκεφαλογράφου**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Fp1	F3	C5	C3	Fp2	F4	C6	C4	O1	O2	P4	P3	Pz	Cz	Fz

Η θέση τους στο κρανίο φαίνεται στο σχήμα 54



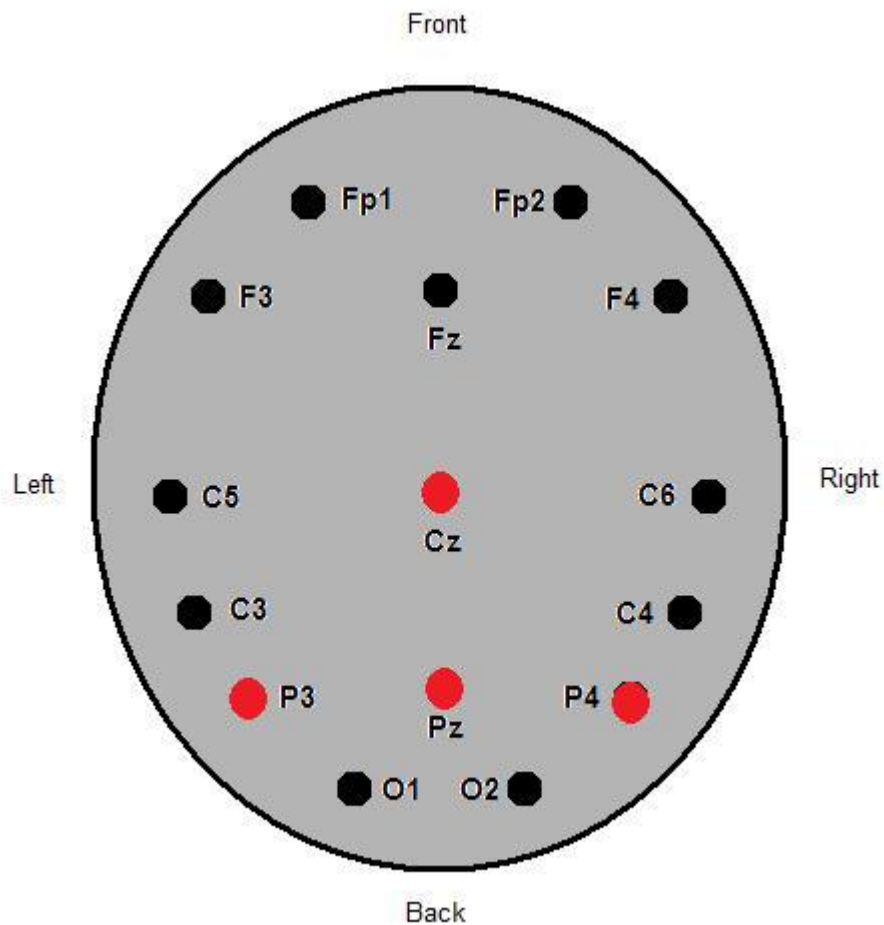


**Σχήμα 54 – Θέση Ηλεκτροδίων**

Από την έξοδο του προγράμματος επεξεργασίας των EEG προέκυψε ότι συγκεκριμένες ομάδες ηλεκτροδίων συνολοκληρώνονται ιδιαίτερα συχνά. Με παρατήρηση των δεδομένων εξόδου και χωρίς στατιστική επεξεργασία προέκυψαν τα εξής:

### **Female off**

Για το σύνολο των σημάτων που ανήκουν στην ομάδα Female off παρατηρήσαμε ότι σε όλα τα δείγματα του πληθυσμού Female off στους πίνακες συνολοκλήρωσης εμφανίστηκαν τα ηλεκτρόδια 11, 12, 13 και 14. Η τοποθέτηση των ηλεκτροδίων κατά τη διάρκεια της μέτρησης του ηλεκτροεγκεφαλογραφήματος φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



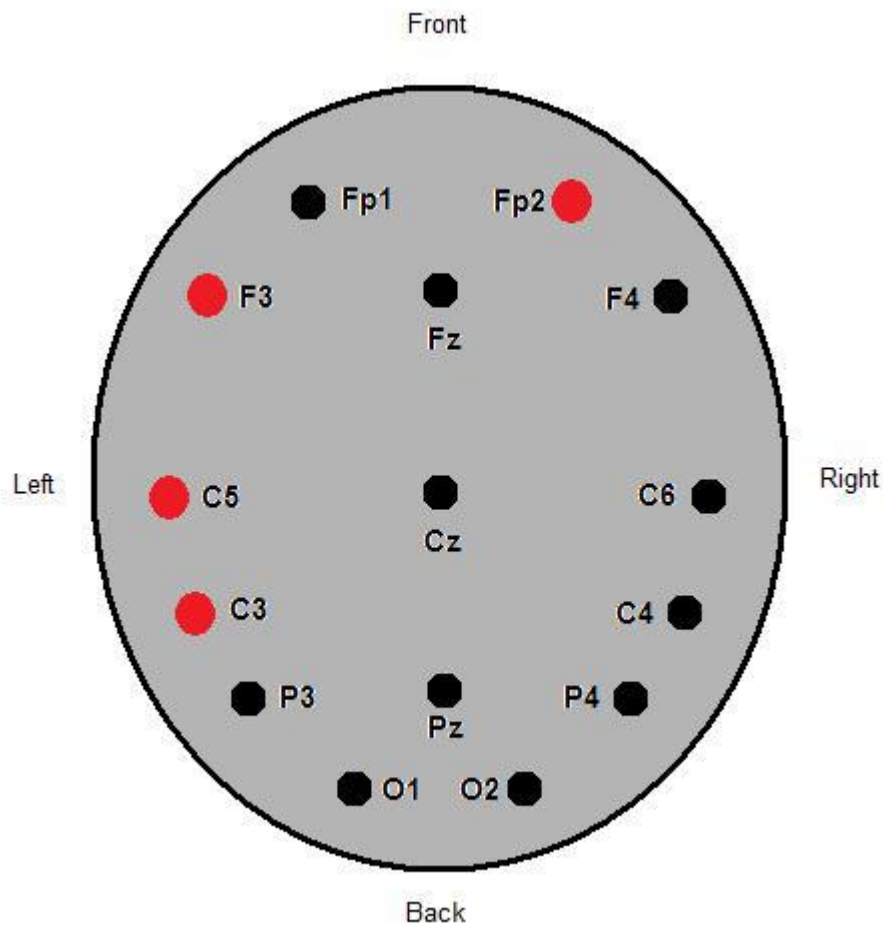
Σχήμα 55 – Τα ηλεκτρόδια 11, 12, 13 και 14 φαίνονται με κόκκινη κουκίδα

### **Female on**

Για την ομάδα Female on δεν παρατηρήθηκε κάποιο πλήθος ηλεκτροδίων που να παρουσιάζεται ότι συνολοκληρώνεται συχνά.

### **Male off**

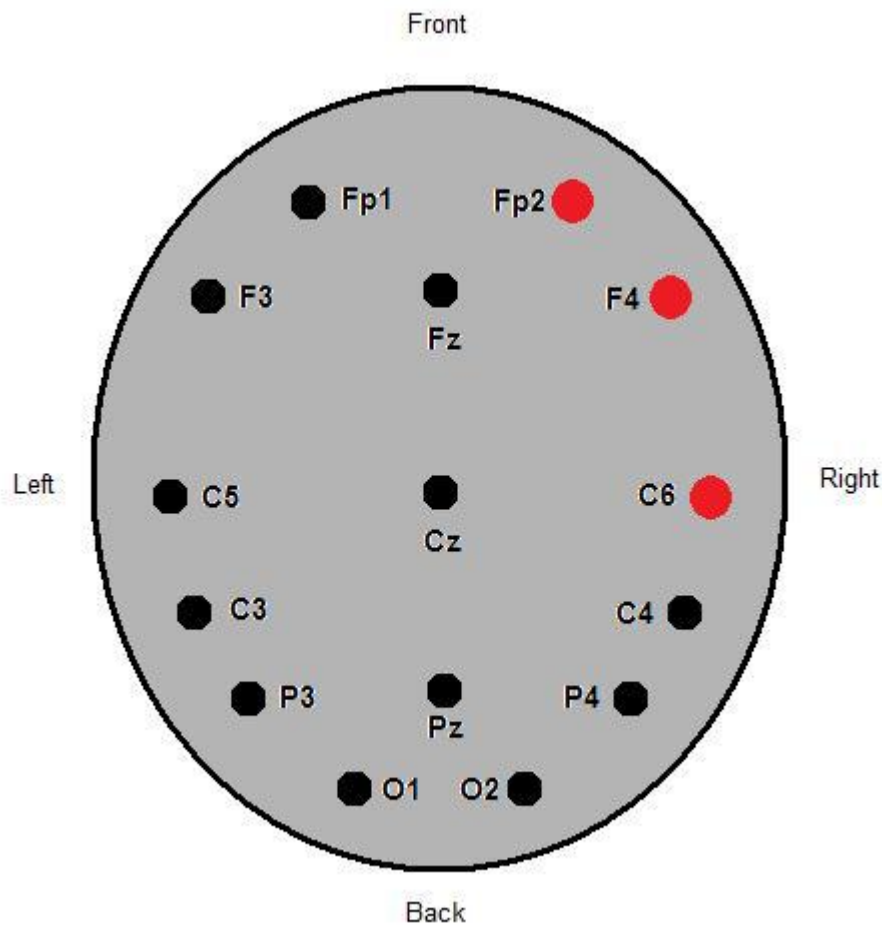
Για το σύνολο των σημάτων που ανήκουν στην ομάδα Male off παρατηρήσαμε ότι σε όλα τα δείγματα του πληθυσμού εμφανίστηκαν στους πίνακες συνολοκλήρωσης τα ηλεκτρόδια 2, 3, 4 και 5 η τοποθέτηση των οποίων φαίνεται στο σχήμα 56.



Σχήμα 56 – Τα ηλεκτρόδια 2, 3, 4 και 5 φαίνονται με κόκκινη κουκίδα.

### Male on

Για το σύνολο των σημάτων που ανήκουν στην ομάδα Male on παρατηρήσαμε ότι σε όλα τα δείγματα του πληθυσμού εμφανίστηκαν στους πίνακες συνολοκλήρωσης τα ηλεκτρόδια 5, 6 και 7 η τοποθέτηση των οποίων φαίνεται στο σχήμα 57.



Σχήμα 57 – Τα ηλεκτρόδια 5, 6 και 7 φαίνονται με κόκκινη κουκίδα

## 8.5 Επεξεργασία Αποτελεσμάτων

Τα αρχεία εξόδου που προέκυψαν από την επεξεργασία των σημάτων EEG αναλύσαμε στη συνέχεια με χρήση του λογισμικού SPSS. Η στατιστική ανάλυση έγινε με χρήση των ελέγχων t-test και Anova.

### Αποτελέσματα t-test

Για την επεξεργασία των αποτελεσμάτων με χρήση του ελέγχου t-test εξετάσαμε στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα αποτελέσματα συνολοκλήρωσης μεταξύ ανδρών και γυναικών (male – female) και μεταξύ ύπαρξης και μη ύπαρξης ακτινοβολίας (on – off). Για την σύγκριση ομάδων όπου ο διαχωρισμός έγινε με βάση το φύλο, για κάθε αρχείο εξόδου από τα 40 συνολικά (όπως περιγράφονται στην ενότητα 7.2) η έξοδος του SPSS έδινε έναν πίνακα της μορφής που φαίνεται παρακάτω:

Πίνακας 9 – Παράδειγμα εξόδου Independent Samples Test

Sex ID		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means								
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference			
									Lower	Upper		
0	ch2	.000	1.000	Equal variances assumed	-0.866	18	.398	-0.200	.231	-0.685	.285	
	Equal variances not assumed			-0.866	18.000	.398	-0.200	.231	-0.685	.285		
	ch3	.375	.548	Equal variances assumed	-0.429	18	.673	-0.100	.233	-0.590	.390	
	Equal variances not assumed			-0.429	17.993	.673	-0.100	.233	-0.590	.390		
	ch4	.000	1.000	Equal variances assumed	.000	18	1.000	.000	.231	-0.485	.485	
	Equal variances not assumed			.000	18.000	1.000	.000	.231	-0.485	.485		
					Equal variances not assumed	-0.600	16.691	.557	-0.100	.167	-0.452	.252
	1	ch2	.000	1.000	Equal variances assumed	.000	18	1.000	.000	.231	-0.485	.485
		Equal variances not assumed			.000	18.000	1.000	.000	.231	-0.485	.485	
		ch3	.375	.548	Equal variances assumed	-0.429	18	.673	-0.100	.233	-0.590	.390
		Equal variances not assumed			-0.429	17.993	.673	-0.100	.233	-0.590	.390	
		ch4	.375	.548	Equal variances assumed	-0.429	18	.673	-0.100	.233	-0.590	.390
Equal variances not assumed		-0.429			17.993	.673	-0.100	.233	-0.590	.390		
					Equal variances not assumed	-0.493	17.677	.628	-0.100	.203	-0.527	.327

Από τον παραπάνω πίνακα λείπουν ορισμένες γραμμές δεδομένων. Τον έχουμε παραθέσει ενδεικτικά προς επίδειξη. Επεξεργαστήκαμε έναν τέτοιο πίνακα για κάθε ένα από τα αρχεία εξόδου. Αναζητούμε τα κανάλια εκείνα για τα οποία η στάθμη σημαντικότητας (Significance) είναι μικρότερη του 0.05. Ο διαχωρισμός με βάση το φύλο φαίνεται στη στήλη SexID με τις τιμές 0 και 1 να αναφέρονται σε άνδρες και γυναίκες αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι ο έλεγχος t-test έκανε διαχωρισμό των αρχείων ανάμεσα σε άνδρες και γυναίκες. Για τους άνδρες μόνο, εξέτασε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στους πίνακες συνολοκλήρωσης για EEG με και χωρίς ακτινοβολία. Ομοίως για τις γυναίκες. Τα τελικά συμπεράσματα είναι:

**Πίνακας 10 – Αποτελέσματα t-test με διαχωρισμό SexID**

Channel i	Channel j	SexID	Significance	
1	13	1	EVA	0.025
			EVNA	0.037
2	12	1	EVA	0.025
			EVNA	0.035
5	12	1	EVA	0.018
			EVNA	0.02
6	12	1	EVA	0.025
			EVNA	0.037
6	13	1	EVA	0.008
			EVNA	0.015
6	14	1	EVA	0.025
			EVNA	0.037
7	12	1	EVA	0.025
			EVNA	0.037
11	12	1	EVA	0.002
			EVNA	0.005
11	14	1	EVA	0.025
			EVNA	0.037
11	13	1	EVA	0.008
			EVNA	0.015

Τα αρχικά EVA και EVNA σημαίνουν Equal Variances Assumed και Equal Variances Not Assumed αντίστοιχα. Η πρώτη στήλη, channel i, αναφέρεται στο διάνυσμα  $S_i$  που χρησιμοποιήθηκε σαν εξαρτημένη μεταβλητή στη σχέση παλινδρόμησης. Η δεύτερη στήλη, channel j, αφορά διάνυσμα που εμφανίστηκε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή  $S_j$  στη σχέση παλινδρόμησης. Το  $S_j$  δεν είναι απαραίτητα το μοναδικό διάνυσμα που εμφανίστηκε στην ομάδα συνολοκλήρωσης του  $S_i$ . Η μαθηματική σχέση που περιγράφει τα παραπάνω είναι:

$$S_i = \bar{a}' \cdot \begin{bmatrix} S' \\ S'' \\ \vdots \\ S_j \\ \vdots \\ S' \dots ' \end{bmatrix} + u_i$$

Όπου  $\bar{a}'$  είναι το ανάστροφο διάνυσμα συνολοκλήρωσης και  $S'$  έως  $S'^{i'}$  διανύσματα άλλων ηλεκτροδίων που εμφανίστηκαν στη σχέση συνολοκλήρωσης. Το διάνυσμα  $u_i$  είναι τα κατάλοιπα της παλινδρόμησης για τα οποία έχει προκύψει στασιμότητα. Η ερμηνεία του παραπάνω πίνακα έχει ως εξής: Τα channel i και channel j δεν είχαν την ίδια παρουσία στους πίνακες συνολοκλήρωσης εξόδου (που περιγράφονται στην παράγραφο 8.3) για τις γυναίκες με και χωρίς παρουσία ακτινοβολίας. Τα channel i και channel j εμφανίστηκαν πολύ συχνότερα για τις γυναίκες χωρίς παρουσία ακτινοβολίας (Female off) παρά στις γυναίκες με παρουσία ακτινοβολίας (Female on).

Η ίδια μελέτη έγινε με διάκριση αυτή τη φορά την ύπαρξη ή όχι ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Τα τελικά συμπεράσματα είναι:

**Πίνακας 11 – Αποτελέσματα t-test με διαχωρισμό RadID**

Channel i	Channel j	RadID	Significance	Συχνότερη Εμφάνιση M/F	
2	10	1	EVA	0.008	M
			EVNA	0.015	
4	10	1	EVA	0.008	M
			EVNA	0.015	
4	11	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
5	10	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
5	11	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
5	12	1	EVA	0.018	M
			EVNA	0.02	
6	1	0	EVA	0.005	F
			EVNA	0.005	
6	2	0	EVA	0.005	F
			EVNA	0.005	
6	3	0	EVA	0.024	F
			EVNA	0.024	
6	4	0	EVA	0.024	F
			EVNA	0.024	
6	7	0	EVA	0.024	F
			EVNA	0.024	
6	10	1	EVA	0.002	M
			EVNA	0.005	
6	13	1	EVA	0.008	M
			EVNA	0.015	
6	15	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
7	10	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
7	15	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
8	10	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
9	11	0	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
9	13	0	EVA	0.025	M

			EVNA	0.037	
9	12	1	EVA	0.002	M
			EVNA	0.005	
10	8	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
10	11	1	EVA	0.008	M
			EVNA	0.015	
10	13	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
10	15	1	EVA	0.008	M
			EVNA	0.015	
11	15	1	EVA	0.025	M
			EVNA	0.037	
11	13	1	EVA	0.008	M
			EVNA	0.015	
12	11	1	EVA	0.018	M
			EVNA	0.02	

Η ερμηνεία και αυτού του πίνακα είναι ίδια, μόνο που εδώ αναφερόμαστε σε στατιστικά σημαντικές διαφορές ανάμεσα σε EEG με και χωρίς την παρουσία ακτινοβολίας. Ο διαχωρισμός εδώ γίνεται με κριτήριο την ύπαρξη ή όχι ακτινοβολίας η σύγκριση γίνεται ανάμεσα στα αρχεία Female off – Male off και Female on – Male on. Η στήλη RadID δηλώνει την καταγραφή του EEG παρουσία ή όχι ακτινοβολίας με τιμές 1 και 0 αντίστοιχα. Η στήλη «Συχνότερη εμφάνιση M/F» δηλώνει αν το ζεύγος  $i, j$  παρατηρήθηκε συχνότερα στους άνδρες ή στις γυναίκες. Για παράδειγμα, η πρώτη σειρά σημαίνει ότι η εμφάνιση των καναλιών 2 και 10 παρουσίασε σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις γυναίκες παρουσία ακτινοβολίας (Female on) και τους άντρες παρουσία ακτινοβολίας (Male on). Τα κανάλια 2 και 10 εμφανίστηκαν στους πίνακες συνολοκλήρωσης με μεγαλύτερη συχνότητα στους άνδρες (Male on), παρά στις γυναίκες (Female on).

### Αποτελέσματα Ανοva

Επεξεργασία των αποτελεσμάτων έγινε και με τον έλεγχο Ανοva. Για κάθε αρχείο εξόδου και για κάθε ηλεκτρόδιο σαν ανεξάρτητη μεταβλητή ελέγξαμε την έξοδο του SPSS για Significance < 0.05. Τα αποτελέσματα είναι:

Πίνακας 12 – Αποτελέσματα Ανοva (SexID)

Channel i	Sex ID		Significance	Συχνότερη εμφάνιση M/F
	Channel j			
1	12		0.043	F
1	14		0.043	F
2	15		0.041	M
4	9		0.044	M
5	15		0.019	M
6	1		0.022	F
6	2		0.025	F
6	3		0.027	F
6	7		0.029	F
6	10		0.005	M
7	15		0.007	M
9	11		0.039	M



9	12	0.005	M
9	13	0.003	M
10	11	0.015	M
10	13	0.039	M
11	13	0.005	M

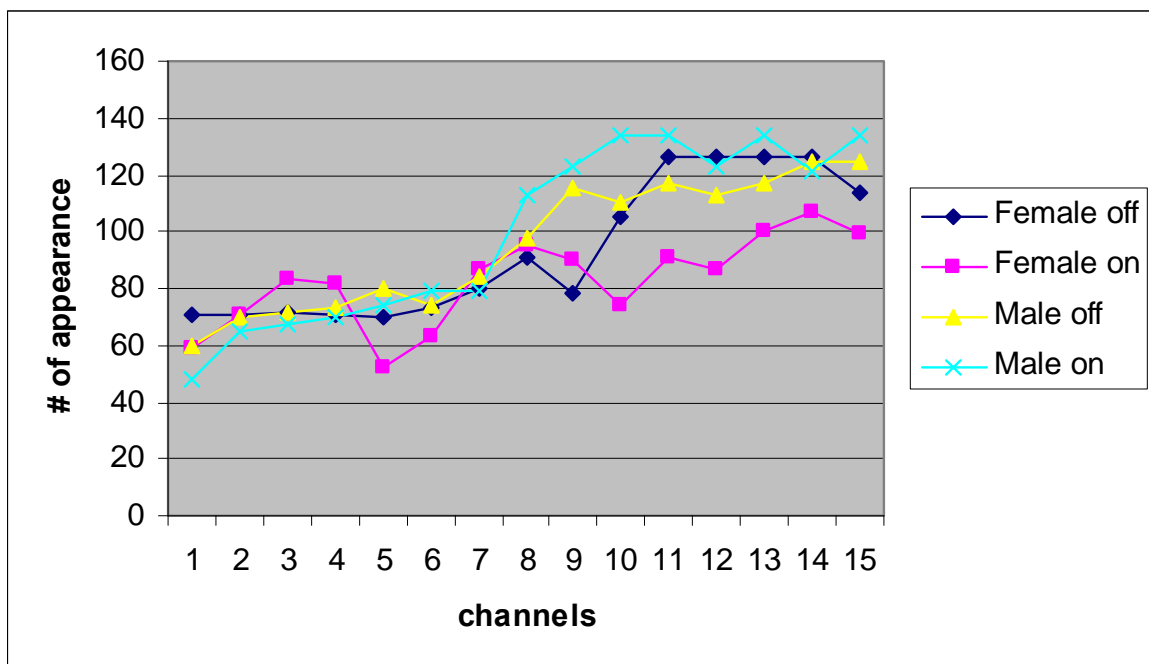
Για αυτόν τον έλεγχο, η σύγκριση αφορά όλα τα αρχεία εξόδου και τα αποτελέσματα αφορούν την ύπαρξη Significance<0.05 με κριτήριο το φύλο (Sex ID).

**Πίνακας 13 – Αποτελέσματα Ανοva (RadID)**

Channel i	Rad ID Channel j	Significance
11	12	0.039
11	13	0.005

Ομοίως, ο έλεγχος έγινε για όλα τα αρχεία εξόδου με κριτήριο σύγκρισης την ύπαρξη ή όχι ακτινοβολίας. Τα ζευγάρια 11-12 και 11-13 εμφανίστηκαν με μεγαλύτερη συχνότητα παρουσία ακτινοβολίας.

Στο επόμενο διάγραμμα φαίνεται πόσες φορές εμφανίστηκε κάθε κανάλι στους πίνακες συνολοκλήρωσης για τις τέσσερις διαφορετικές ομάδες Female off, Female on, Male off και Male on.



**Σχήμα 58 – Εμφάνιση ηλεκτροδίων στους πίνακες συνολοκλήρωσης για τις τέσσερις διαφορετικές δημογραφικές ομάδες Female off, Female on, Male off και Male on.**

Το παραπάνω διάγραμμα αποτελεί όπως βλέπουμε και μία ποιοτική απεικόνιση των αποτελεσμάτων της στατιστικής επεξεργασίας που προηγήθηκε, αφού δείχνει την ιδιαίτερη συχνότητα εμφάνισης των καναλιών 10 έως 15 στους πίνακες συνολοκλήρωσης.

## Βιβλιογραφία

1. Βεντούρας Ε. (Αθήνα 1994) **Ανάπτυξη Τεχνητής Τομογραφικής Απεικόνισης και Εξομοίωση με χρήση Τεχνητών Νευρωνικών Δικτύων των Ενδοκρανιακών Πηγών Βιοματικής Ηλεκτρικής Δραστηριότητας** Διδακτορική Διατριβή ΕΜΠ
2. Διδώ Γιόβα (Αθήνα 2004) **Εισαγωγή στη Βιοϊατρική και Κυτταρική Μηχανική** Τυπογραφική Μονάδα Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου
3. Brown A.G. (London 1991) **Nerve Cells and Nervous Systems, An introduction to Neuroscience** Springer-Verlag
4. Δ. Κουτσούρης, Σ. Παυλόπουλος, Α. Πρέντζα (2003) **Εισαγωγή στη Βιοϊατρική Τεχνολογία και Ανάλυση Ιατρικών Σημάτων** Εκδόσεις Τζιόλα
5. Δημήτρης Κουτσούρης, Διδώ Γιόβα (Αθήνα 2006) **Μετρήσεις και έλεγχοι στη Βιοϊατρική Τεχνολογία** Τυπογραφική Μονάδα Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου
6. Σοφία Δημέλη (2002) **Σύγχρονες Μέθοδοι Ανάλυσης Χρονολογικών Σειρών** Εκδόσεις Κριτική
7. Ελένη Νάνου (Αθήνα 2007) **Ανάπτυξη Μεθοδολογίας Μελέτης και Αξιολόγησης της Επίδρασης Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας στα Ηλεκτρικά Σήματα του Εγκεφάλου** Διδακτορική Διατριβή ΕΜΠ
8. M. Fabiani, G. Gratton, M. Coles (2000) **Event-related potentials: Methods, theory and applications. Handbook of psychophysiology** Cambridge University Press
9. U. Mitzdorf (Amsterdam 1991) **Psychological sources of evoked potentials** Event Related Brain Research (EEG suppl. 42)
10. Simon Haykin (Αθήνα 1995) **Συστήματα Επικοινωνίας** Εκδόσεις Παπασωτηρίου
11. D.C. Montgomery, E.A. Peck, G.G. Vining (2001) **Introduction to Linear Regression Analysis 3<sup>rd</sup> Edition** New York: John Wiley & Sons
12. David A. Dickey, Wayne A. Fuller (1981) **Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root** Econometrica, Vol. 49, No 4
13. Kwiatkowski, D., P. C. B. Phillips, P. Schmidt and Y. Shin, (1992) **Testing the Null Hypothesis of Stationary Against the Alternative of a Unit Root** Journal of Econometrics, 54
14. Bent E. Sorensen (1997) **Cointegration** Economics 266, Spring
15. Aaron Smith, Robert Harrison, **A Drunk, Her Dog and a Boyfriend: An Illustration of Multiple Cointegration and Error Correction**, Lectures in the Department of Economics at the University of Canterbury.

16. Κωσταντίνος Ε. Ευσταθίου (2003) **Δοκιμασία του t-test: Σύγκριση δύο μέσων τιμών** Ανάλυση Δεδομένων – Χημειομετρία, Εκπαιδευτικές Εφαρμογές, Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

17. Ιωάννης Ι. Γεροντίδης (2008) **Ανάλυση της Διακύμανσης** Διαλέξεις στο μάθημα «Στατιστική Επιχειρήσεων», Τμήμα Διαχείρισης Πληροφοριών ΑΤΕΙ/ΚΑΒ-ΔΠ

18. Γ. Κοκολάκης, Ι. Σπηλιώτης (1999) **Εισαγωγή στη θεωρία πιθανοτήτων και στατιστική** Εκδόσεις Συμεών