



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Αριθμητική μελέτη της επίδρασης της τοποθέτησης
τερματικής συσκευής κινητών επικοινωνιών στην
απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από το
κεφάλι του χρήστη**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Ι. Περάκης

**Επιβλέπουσα : Κωνσταντίνα Σ. Νικήτα
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π**

Αθήνα, Ιανουάριος 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕΤΑΔΟΣΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ

**Αριθμητική μελέτη της επίδρασης της τοποθέτησης
τερματικής συσκευής κινητών επικοινωνιών στην
απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από το
κεφάλι του χρήστη**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Γεώργιος Ι.Περάκης

Επιβλέπουσα : Κωνσταντίνα Σ. Νικήτα
Καθηγήτρια Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 16^η Ιανουαρίου 2009.

.....
Κ. Νικήτα
Καθηγήτρια ΕΜΠ

.....
Ν. Ουζούνoglou
Καθηγητής Ε.Μ.Π

.....
Φ. Κωνσταντίνου
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιανουάριος 2009

.....
Γεώργιος Ι. Περάκης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γεώργιος Ι. Περάκης
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Πληθώρα μελετών έχουν δημοσιευθεί με στόχο την αποτίμηση της απορροφούμενης ηλεκτρομαγνητικής ισχύος από το κεφάλι ενός χρήστη, εξαιτίας της έκθεσής του στο κοντινό πεδίο κεραίας κινητής τερματικής συσκευής. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα δημοσιευμένα αποτελέσματα μελετών συχνά διαφέρουν και κάποιες φορές είναι αντικρουόμενα. Εκτός του προφανούς λόγου της χρησιμοποίησης διαφορετικών μοντέλων κεφαλιού και κινητών τερματικών συσκευών από την εκάστοτε ερευνητική ομάδα, ένας άλλος λόγος για αυτήν την διαφοροποίηση είναι η έλλειψη προτυποποίησης όσον αφορά στην τοποθέτηση του θεωρούμενου κάθε φορά μοντέλου κινητής τερματικής συσκευής, σε σχέση με το μοντέλο κεφαλιού που χρησιμοποιείται. Τα πρότυπα EN 50361-2001 και IEEE 1528-2003 ορίζουν τέσσερις τυπικές τοποθετήσεις για το προτυποποιημένο μοντέλο κεφαλιού SAM (Specific Anthropomorphic Mannequin). Το 2005, οι ορισμοί αυτοί επεκτάθηκαν ώστε να είναι εφαρμόσιμοι σε ανατομικά μοντέλα κεφαλιών τα οποία έχουν εξαχθεί από δεδομένα μαγνητικής τομογραφίας. Ο τρόπος τοποθέτησης της τερματικής συσκευής βασίζεται σε συγκεκριμένα ανατομικά χαρακτηριστικά του κεφαλιού.

Σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εφαρμογή της προτυποποιημένης τοποθέτησης της κινητής τερματικής συσκευής σε δεδομένο ανατομικό μοντέλο κεφαλιού και η συγκριτική παρουσίαση των αποτελεσμάτων δοσιμετρίας. Το μοντέλο κινητής τερματικής συσκευής έχει αναπτυχθεί από το Εργαστήριο Βιοϊατρικών Προσομοιώσεων και Απεικονιστικής Τεχνολογίας του Ε.Μ.Π. και το ανατομικό μοντέλο κεφαλιού ενήλικα έχει αναπτυχθεί από ερευνητική ομάδα του πανεπιστημίου του Μπράντφορντ. Έχουν επιλεγεί τρεις τοποθετήσεις της κινητής συσκευής: απλή (κατακόρυφη) τοποθέτηση, με κλίση ως προς την παρειά και με κλίση ως προς την κατακόρυφο. Στο πλαίσιο της εργασίας, έχει αναπτυχθεί λογισμικό, με δυνατότητα γενίκευσης, το οποίο ελέγχει και εκτελεί την περιστροφή του μοντέλου του κεφαλιού και τοποθετεί την κινητή τερματική συσκευή στις θέσεις που προβλέπονται από τους ορισμούς με ημιαυτόματο τρόπο. Οι ηλεκτρομαγνητικές προσομοιώσεις εκτελέστηκαν με χρήση του προγράμματος XFDTD για τον υπολογισμό του Ρυθμού Ειδικής Απορρόφησης (SAR-Specific Absorption Rate) και την αποτίμηση της κατανομής της απορροφούμενης ισχύος. Στη συνέχεια γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων και εξάγονται συμπεράσματα τα οποία πρέπει να επαληθευτούν με χρήση διαφορετικών μοντέλων κεφαλιού και κινητής τερματικής συσκευής.

Λέξεις κλειδιά: Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης Ενέργειας (SAR), Μοντέλο SAM, Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (FDTD), Ανατομικά Μοντέλα Κεφαλιών, Γεωμετρικός Μετασχηματισμός, Μεταφορά, Περιστροφή, Τοποθέτηση ‘cheek’, Τοποθέτηση ‘tilted’

Abstract

Plethora of published studies assess the absorbed electromagnetic power in the user's head, due to its exposure to the antenna near field of the mobile handset. According to the literature, published results often differ and sometimes are even contradictory, due to the use of different head and mobile handset models. Apart from this obvious reason, the differences are due to the lack of a well-established and accepted framework for handset positioning with respect to the user's head. The EN 50361-2001 and IEEE 1528-2003 standards define four typical positions for the standardized head model SAM (Specific Anthropomorphic Mannequin). In 2005, these definitions were extended in order to become applicable to anatomical, MRI-based head models. The definition is solely based on anatomical characteristics of the head.

The aim of this diploma thesis was to implement the various standardized ways of mobile handset positioning in the proximity of a given anatomical head model and to comparatively assess the obtained dosimetry results. The used mobile handset model was developed by the Biomedical Simulations and Imaging Laboratory (BIOSIM-NTUA) and the anatomical adult head model was developed at Bradford University. Three positions were studied: simple (vertical) 'cheek' and 'tilt'. In the frame of this thesis, an in-house developed software, with ability of generalization, that checks and rotates the head model, places the mobile handset at the studied positions in a semi-automatic way. The commercial software package XFDTD was used in order to compute the SAR values (Specific Absorption Rate-SAR), to assess the absorbed power distribution and the total absorbed power by the head model.

Keywords: Specific Absorption Rate (SAR), Specific Anthropomorphic Mannequin (SAM), Finite Difference Time Domain (FDTD), Anatomic Head Model, Geometrical Transformation, Translation, 'Cheek' position, 'Tilted' position

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την Καθηγήτρια ΕΜΠ Κωνσταντίνα Νικήτα για την ανάθεση της εργασίας αυτής, αλλά και για τις πολύτιμες συμβουλές και διορθώσεις της. Της εύχομαι καλή συνέχεια στο δύσκολο, επίπονο, αλλά και ευχάριστο εκπαιδευτικό της έργο.

Επιπρόσθετα, θα ήθελα να ευχαριστήσω την υποψήφια Διδάκτορα ΕΜΠ Μαρία Χριστοπούλου, για τη σημαντικότετη βοήθειά της, τις διορθώσεις της και την εποικοδομητική ανταλλαγή επιστημονικών απόψεων καθ' όλη τη διάρκεια της εργασίας. Της εύχομαι όταν ξαναδιαβάσει το εισαγωγικό αυτό κείμενο, να είναι Διδάκτωρ ΕΜΠ.

Επίσης, θεωρώ ότι επιβάλλεται να ευχαριστήσω τον καθηγητή ΕΜΠ Σωτήρη Καρανάσιο για τις επιβεβαιώσεις του σχετικά με την ορθότητα μέρους των μαθηματικών θεωρήσεων που παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία.

Τελειώνοντας, δεδομένου ότι το τελευταίο κομμάτι αυτού του πονήματος γράφτηκε σε μία περίοδο γενικότερης αναταραχής στην Ελλάδα, αισθάνομαι την ανάγκη να το αφιερώσω, σε όλους όσους αγωνίστηκαν, αγωνίζονται και θα αγωνίζονται με τον δικό τους τρόπο, για μία καλύτερη παιδεία και για μία καλύτερη δημοκρατία.

Γ. Ι. Περάκης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1:

Εισαγωγή

1.1 Τα ραδιοκύματα	14
1.2 Έκθεση σε ακτινοβολία ραδιοσυχνοτήτων	15
1.3 Ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης (Specific Absorption Rate-SAR)	18
1.4 Όρια αποδεκτής έκθεσης	19
1.5 Τρόποι εκτίμησης SAR με αποκλειστική χρήση λογισμικού ηλεκτρομαγνητικής προσομοίωσης	19
1.6 Ομοιώματα/μοντέλα ανθρώπινων κεφαλιών	21
1.6.1 Το μοντέλο SAM	21
1.6.2 Τα ανατομικά αριθμητικά μοντέλα	22
1.7 Τοποθέτηση της κινητής τερματικής συσκευής σε σχέση με το κεφάλι	23
1.8 Σκοπός της εργασίας	25
1.9 Διάρθρωση των επόμενων κεφαλαίων	25

Κεφάλαιο 2:

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου- Finite difference time domain method (FDTD)

2.1 Εισαγωγή	30
2.2 Βασικές αρχές της μεθόδου πεπερασμένων διαφορών (Finite Difference Method-FDM)	30
2.3 Ευστάθεια των λύσεων με χρήση της μεθόδου FD	36
2.4 Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain-FDTD method)	37
2.4.1 Ο Αλγόριθμος του Yee	38
2.4.2 Ακρίβεια και Ευστάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου	45
2.4.3. Οριακές Συνθήκες Απορρόφησης (Absorbing Boundary Conditions) για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου	45
2.4.3.1. Οριακές συνθήκες Liao	46
2.4.4. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου	47

Κεφάλαιο 3:

Εισαγωγή στο λογισμικό προσομοίωσης XFDTD

3.1 Εισαγωγή	49
3.2. Η χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (FDTD) στο λογισμικό XFDTD	50
3.3 Βασικά βήματα σε έναν υπολογισμό XFDTD	52
3.4 Εισαγωγή στο περιβάλλον του XFDTD	53
3.5. Εισαγωγή και επεξεργασία της γεωμετρίας	54
3.5.1. Η περιοχή απεικόνισης	54

3.5.2. Αντικείμενα πλέγματος (mesh objects)	58
3.5.3. Η ετικέτα Mesh	59
3.6. Ηλεκτρομαγνητικές πηγές και Διεγέρσεις	60
3.7. Οριακές συνθήκες απορρόφησης	62

Κεφάλαιο 4:

Καθορισμός θέσης της τερματικής συσκευής σε σχέση με ανατομικά μοντέλα κεφαλιού

4.1. Εισαγωγή	64
4.2. Ο ορισμός των σημείων αναφοράς και των επιπέδων αναφοράς για τα ανατομικά μοντέλα κεφαλιού	66
4.3. Η αρχική τοποθέτηση του κινητού και οι αναγκαίες περιστροφές του κεφαλιού	79
4.4. Οι περιστροφές στο πρόγραμμα XFDTD	86
4.5. Κατάλληλες περιστροφές διανύσματος	89

Κεφάλαιο 5:

Τοποθέτηση της κινητής τερματικής συσκευής στο λογισμικό XFDTD

5.1. Εισαγωγή	106
5.2. Εισαγωγή του μοντέλου του κεφαλιού, ως ένα αρχείο .mesh στο λογισμικό XFDTD	107
5.3. Ρύθμιση των παραμέτρων του πλέγματος	108
5.4. Απεικόνιση του μοντέλου του κεφαλιού-εύρεση των κατάλληλων σημείων και επιπέδων	110
5.5. Δημιουργία νέου αντικειμένου πλέγματος	120
5.6. Περιστροφή του αντικειμένου πλέγματος	121
5.7. Εισαγωγή του μοντέλου κινητής τερματικής συσκευής στο λογισμικό XFDTD	122
5.8. Μεταφορά της κινητής τερματικής συσκευής	123
5.9. Τελική δημιουργία αρχείου πλέγματος	124

Κεφάλαιο 6:

Αποτελέσματα ηλεκτρομαγνητικών προσομοιώσεων

6.1 Εισαγωγή	126
6.2 Δημιουργία αρχείου project-προετοιμασία εκτέλεσης προσομοιώσεων	127
6.3 Ευστάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου στο λογισμικό XFDTD	128
6.4 Εκτέλεση και αποτελέσματα των προσομοιώσεων	128
6.5 Γραφική παρουσίαση αποτελεσμάτων-Κατανομές τοπικού SAR	128
6.5.1 “Cheek” position	128
6.5.2 “Tilt” position	131
6.5.3 Απλή τοποθέτηση της κινητής τερματικής συσκευής	134
6.5.4 Σύνοψη των αποτελεσμάτων	136

6.6 Συμπεράσματα	137
------------------	-----

Κεφάλαιο 7:

<i>Προτάσεις για μελλοντική εργασία</i>	140
---	-----

Παράρτημα 1:

Διανυσματικός Λογισμός-Το επίπεδο

Π.1.1 Εισαγωγή	143
Π.1.2. Αρχικές Συμβάσεις	144
Π.1.3.Εφαρμοστά διανύσματα - Ελεύθερα διανύσματα	144
Π.1.4. Πράξεις διανυσμάτων	147
Π.1.5. Συνεπίπεδα-Γραμμικώς εξαρτημένα- Γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα	148
Π.1.6. Βάσεις διανυσμάτων-Συνιστώσες	149
Π.1.7. Συστήματα συντεταγμένων-Αναλυτική περιγραφή των διανυσμάτων	149
Π.1.8. Προσανατολισμός συστήματος συντεταγμένων	150
Π.1.9. Εσωτερικό γινόμενο-Διευθύνοντα συνημίτονα	153
Π.1.10. Εξωτερικό γινόμενο– Μικτό γινόμενο-Δισεξωτερικό γινόμενο	154
Π.1.11. Το επίπεδο	155
Π.1.12. Επίλογος	156

Παράρτημα 2:

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Π.2.1 Εισαγωγή	159
Π.2.2 Η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού-Συμβάσεις	160
Π.2.3 Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί δύο διαστάσεων	162
Π.2.3.1 Μεταφορά (Translation)	162
Π.2.3.2 Περιστροφή (Rotation)	163
Π.2.4 Ορθογώνιοι πίνακες	165
Π.2.5 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στις τρεις διαστάσεις	165
Π.2.5.1 Μεταφορά (Translation)	166
Π.2.5.2 Περιστροφή (Rotation)	167
Π.2.5.3 Σύνθεση Μετασχηματισμών στις τρεις διαστάσεις	168
Π.2.6 Ευκλείδειοι Μετασχηματισμοί	171
Π.2.7. Χρήση ελεύθερων διανυσμάτων για εύρεση των κατάλληλων ευκλείδειων μετασχηματισμών	172
Π.2.8 Παθητικοί και ενεργητικοί μετασχηματισμοί	172

Παράρτημα 3:

<i>Συναρτήσεις Matlab</i>	177
---------------------------	-----

Κεφάλαιο *1*

Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο, έχει ως στόχο να εισαγάγει τον αναγνώστη σε έννοιες απαραίτητες για την κατανόηση του περιεχομένου και του σκοπού της διπλωματικής εργασίας.

Καταρχάς, για την κατανόηση αυτού του κεφαλαίου, αλλά και της υπόλοιπης εργασίας, προϋποτίθεται ότι ο αναγνώστης έχει κάποιες στοιχειώδεις γνώσεις ευκλείδειας γεωμετρίας και γραμμικής άλγεβρας και λίγο βαθύτερες γνώσεις διαφορικού λογισμού και ηλεκτρομαγνητικής θεωρίας.

1.1. Τα ραδιοκύματα

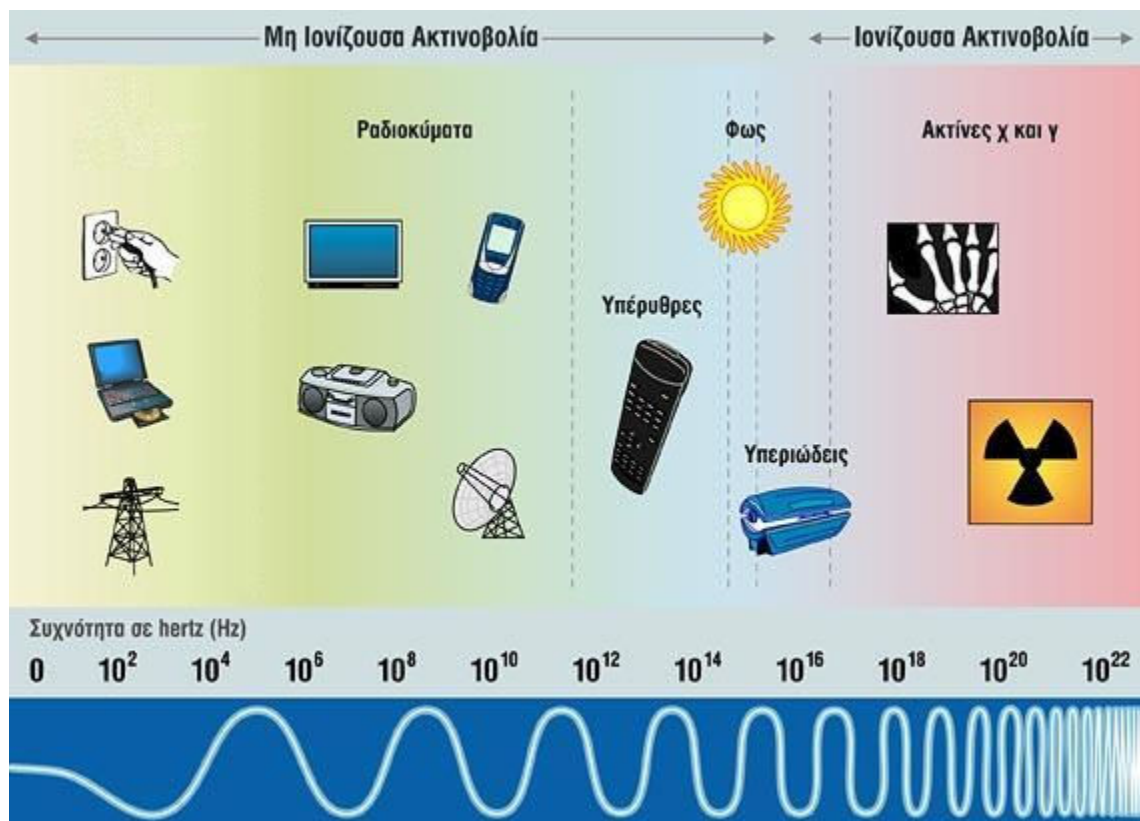
Με τον όρο ραδιοκύματα (radio waves) αποκαλούνται οι ηλεκτρομαγνητικές ταλαντώσεις που έχουν συχνότητα ταλάντωσης μεταξύ των 3Hz και 300GHz [1]. Επιβάλλεται να τονιστεί, ότι ο ορισμός αυτός δεν έχει αυστηρό χαρακτήρα. Τα ραδιοκύματα, χρησιμοποιούνται στις ασύρματες επικοινωνίες, τη ραδιοφωνία, την

τηλεόραση, την αναγνώριση ραδιοσυχνοτήτων (RFID-Radio Frequencies Identification) [2] και σε εκατοντάδες άλλες εφαρμογές. Τα ραδιοκύματα που έχουν συχνότητα ταλάντωσης μεταξύ των 300MHz και 300GHz [3] αποκαλούνται μικροκύματα (microwaves), χρησιμοποιούνται στις κινητές τηλεπικοινωνίες και σε πλήθος άλλων εφαρμογών (π.χ. φούρνοι μικροκυμάτων, ασύρματες μικροκυματικές ζεύξεις). Κάποιοι θεωρούν τις μικροκυματικές συχνότητες ως ξεχωριστή κατηγορία και όχι ως υποσύνολο των ραδιοσυχνοτήτων. Σε κάθε περίπτωση, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα φυσικά διέπονται από τους ίδιους νόμους [4].

1.2. Έκθεση σε ακτινοβολία ραδιοσυχνοτήτων

Τις τελευταίες δεκαετίες, έχουν επέλθει εκπληκτικές αλλαγές στο τομέα των ασυρμάτων επικοινωνιών, με αποτέλεσμα τη διαρκώς αυξανόμενη χρήση συσκευών που λειτουργούν στην περιοχή των ραδιοσυχνοτήτων, η οποία έχει αυξήσει με τη σειρά της την έκθεση σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα ραδιοσυχνοτήτων (ραδιοκύματα).

Το σύνολο όλων των ηλεκτρομαγνητικών συχνοτήτων ονομάζεται *ηλεκτρομαγνητικό φάσμα*. [5], [6] (Εικόνα 1.1).



Εικόνα 1.1: Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα.

Το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα χωρίζεται σε διάφορες περιοχές (ζώνες συχνοτήτων) χωρίς όμως τα όρια μεταξύ των περιοχών να είναι σαφή. Οι ζώνες που φαίνονται στον Πίνακα 1.1, αντιπροσωπεύουν τα επίσημα ονόματα που έχουν δοθεί για τις ζώνες του

ηλεκτρομαγνητικού φάσματος από την *ITU* (International Telecommunication Union) [1], [7]-[12].

Πίνακας 1.1: Διαχωρισμός του φάσματος συχνοτήτων (για ορισμένες εφαρμογές-χρήσεις οι συχνότητες πιθανόν να αφορούν μόνο την Ελλάδα και με βάση την τελευταία αναθεώρηση)

Ζώνη Συχνότητας	Ονομασία	Εφαρμογές-Χρήσεις
3-30 Hz	ELF (Extremely low frequency)	Μπορούν να ακουστούν από το ανθρώπινο αυτί όταν μετατραπούν σε ήχο (20 Hz-...),ανίχνευση υποβρυχίων
30-300 Hz	SLF (Super low frequency)	Μπορούν να ακουστούν από το ανθρώπινο αυτί όταν μετατραπούν σε ήχο, συνήθης συχνότητα δικτύων ηλεκτροδότησης (60 Hz Β.Αμερική,50 Hz Ευρώπη), επικοινωνία μεταξύ υποβρυχίων
300 Hz-3000Hz	ULF (Ultra low frequency)	Μπορούν να ακουστούν από το ανθρώπινο αυτί όταν μετατραπούν σε ήχο, επικοινωνία μέσα σε ορυχεία
3 – 30 kHz	VLF (Very Low Frequency)	Μπορούν να ακουστούν από το ανθρώπινο αυτί όταν μετατραπούν σε ήχο (...-20 kHz), Ιατρικά Εμφυτεύματα Ναυτιλιακές επικοινωνίες, Στρατιωτικές εφαρμογές κ.α.
30 – 300 kHz	LF (Low Frequency)	Ναυτιλιακές επικοινωνίες Στρατιωτικές εφαρμογές Ιατρικά εμφυτεύματα Εφαρμογές ραδιοερασιτέχνη Ραδιοφωνία Ναυτιλιακοί ραδιοφάροι κ.α.
300 – 3000 kHz	MF (Medium Frequency)	Ναυτιλιακοί ραδιοφάροι Ιατρικά Εμφυτεύματα Εφαρμογές ραδιοεπισύμανσης Ραδιοφωνία AM κ.α.
3 – 30 MHz	HF (High Frequency)	Στρατιωτικές εφαρμογές Αεροναυτικές επικοινωνίες, Ραδιοφωνία Ναυτιλιακές επικοινωνίες Εφαρμογές ερασιτέχνη και ερασιτέχνη μέσω δορυφόρου Ναυτιλιακές εφαρμογές Πληροφορίες ναυτιλιακής

		<p>ασφάλειας</p> <p>Κίνηση και κλήση τηλεφωνίας έκτακτης ανάγκης</p> <p>Κίνηση τηλετυπίας έκτακτης ανάγκης</p> <p>Ερασιτεχνικές εφαρμογές</p> <p>Δορυφορικές εφαρμογές ερασιτέχνη,</p> <p>Αμυντικά συστήματα-Ασύρματα μικρόφωνα (29.7-30.005 MHz) κ.α.</p>
30 – 300 MHz	VHF (Very High Frequency)	<p>Ραδιοφωνία FM</p> <p>Συσκευές μικρής εμβέλειας</p> <p>Ασύρματες Ακουστικές Εφαρμογές (Wireless Audio Applications)</p> <p>Δορυφόροι χαμηλής τροχιάς κ.α</p>
300 – 3000 MHz	UHF (Ultra High Frequency)	<p>Μετεωρολογικές εφαρμογές</p> <p>Κινητές επικοινωνίες (κινητή τηλεφωνία)</p> <p>Κινητές δορυφορικές εφαρμογές</p> <p>Υπηρεσίες επίγειων ευρυζωνικών ηλεκτρονικών επικοινωνιών</p> <p>Αμυντικά συστήματα</p> <p>Σταθερές ραδιοζεύξεις</p> <p>Πολιτικά δορυφορικά συστήματα, Ραδιοαστρονομία κ.α.</p>
3 – 30 GHz	SHF (Super High Frequency)	<p>Αερομεταφερόμενα ραντάρ</p> <p>Επίγειοι σταθμοί</p> <p>Σταθερές-Κινητές ραδιοζεύξεις</p> <p>Καθορισμός θέσης</p> <p>Ραντάρ καιρού</p> <p>Αμυντικά Συστήματα</p> <p>Εφαρμογές Ραδιοερασιτέχνη</p> <p>Ραντάρ(γενικότερα) κ.α.</p>
30 – 300 GHz	EHF (Extremely High Frequency)	<p>Ραδιοζεύξεις</p> <p>Τηλεματικά συστήματα οδικών μεταφορών</p> <p>Πειραματικές επικοινωνίες ευρείας ζώνης</p> <p>Μελλοντικά εμπορικά συστήματα ευρείας ζώνης κ.α.</p>

Στην Ελλάδα, ο Εθνικός Κανονισμός Κατανομής Ζωνών Συχνοτήτων (ΕΚΚΖΣ) περιέχει τις διατάξεις που εφαρμόζονται σε μόνιμες εκχωρήσεις, σε περίοδο ειρήνης, στην Ελληνική Επικράτεια για τη χρήση του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος από 9kHz μέχρι 400GHz. Ο ΕΚΚΖΣ αναθεωρείται διαρκώς από το υπουργείο μεταφορών και επικοινωνιών. Στον πίνακα 1.1 περιλαμβάνονται κάποια στοιχεία από την πιο πρόσφατη αναθεώρησή του (24 Σεπτεμβρίου 2008).

Παρόλο που, όπως διαφαίνεται από τα παραπάνω, τα όρια της περιοχής RF (δηλαδή της περιοχής των ραδιοσυχνοτήτων) του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, δεν είναι αυστηρά καθορισμένα, αυτό που είναι αποδεκτό από το σύνολο του επιστημονικού κόσμου, είναι ότι η ακτινοβολία στην περιοχή των ραδιοσυχνοτήτων του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, είναι *μη ιονίζουσα*

Γενικότερα, η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία χωρίζεται σε δύο μεγάλες κατηγορίες: την *ιονίζουσα* και τη *μη ιονίζουσα* ακτινοβολία (εικόνα 1.1). Ιονίζουσα, ονομάζεται η ακτινοβολία που μεταφέρει κβαντική ενέργεια, ικανή να προκαλέσει *ιονισμό* -φαινόμενο κατά το οποίο ένα αρχικά ουδέτερο μόριο ή άτομο μετατρέπεται σε ιόν. Η ιονίζουσα ακτινοβολία μπορεί να προκαλέσει καρκινογεννητικά φαινόμενα στα βιολογικά συστήματα, προκαλώντας ενδεχόμενες αλλοιώσεις στο DNA των κυττάρων [13]. Μη ιονίζουσα, ονομάζεται η ακτινοβολία που μεταφέρει σχετικά μικρή κβαντική ενέργεια η οποία αντιθέτως με αυτή της ιονίζουσας ακτινοβολίας, δεν είναι ικανή να προκαλέσει ιονισμό σε άτομα ή μόρια [14], [15], αλλά μπορεί να προκαλέσει θερμικές επιδράσεις στα κύτταρα των οργανισμών, άλλοτε ευεργετικές και άλλοτε επιβλαβείς για την λειτουργία τους. Σε αντίθεση με την ιονίζουσα ακτινοβολία, η μη ιονίζουσα ακτινοβολία, δε διαθέτει την απαραίτητη ενέργεια για να μπορέσει να προκαλέσει καρκινογεννητικά φαινόμενα στα βιολογικά συστήματα.

Πρακτικά, η μη ιονίζουσα περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος, θεωρείται ότι εκτείνεται περίπου ως τη συχνότητα $8 \times 10^{14} \text{ Hz} = 800 \text{ THz} = 800000 \text{ GHz}$ [3]. Η περιοχή του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος με συχνότητα υψηλότερη από τη συχνότητα $8 \times 10^{14} \text{ Hz} = 800 \text{ THz}$, χαρακτηρίζεται ως ιονίζουσα (μικρό μέρος της υπεριώδους ακτινοβολίας, ακτίνες X, ακτίνες γ, κοσμική ακτινοβολία).

Δεδομένης της πολύχρονης χρήσης των ραδιοσυχνοτήτων από τον άνθρωπο, υπάρχει ανησυχία σχετικά με την έκθεσή του σε ακτινοβολία ραδιοσυχνοτήτων τις τελευταίες δεκαετίες [16]. Για αυτό το λόγο, έχουν θεσπιστεί σχετικά πρότυπα, βασιζόμενα στην τρέχουσα επιστημονική γνώση και από τα οποία καθορίζεται η «ασφαλής» χρήση ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στην περιοχή των ραδιοσυχνοτήτων [17]. Για τον καθορισμό των ορίων ασφαλούς έκθεσης σε πεδία ραδιοσυχνοτήτων, χρησιμοποιείται ο ορισμός του Ρυθμού Ειδικής Απορρόφησης (Specific Absorption Rate-SAR).

1.3. Ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης (Specific Absorption Rate-SAR)

Η ηλεκτρομαγνητική παράμετρος δοσιμετρίας SAR (Specific Absorption Rate- Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης) ορίζεται σύμφωνα με το Ινστιτούτο Ηλεκτρολόγων και Ηλεκτρονικών Μηχανικών (Institute of Electrical and Electronics Engineers – IEEE) ως εξής [18], [19]:

«Ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης ορίζεται ως η χρονική παράγωγος της στοιχειώδους ενέργειας (dW) απορροφημένης από μία στοιχειώδη μάζα (dm), η οποία περιέχεται σε ένα στοιχειώδη όγκο (dV) δεδομένης πυκνότητας ρ ». Δηλαδή:

$$SAR = \frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{dm} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dW}{\rho dV} \right) \quad [W / kg] \quad (1.1)$$

Για ηλεκτρομαγνητικά πεδία που μεταβάλλονται αρμονικά σε σχέση με το χρόνο [20], ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης εκφράζεται ως εξής:

$$SAR = \frac{\sigma}{2\rho} |\bar{E}|^2 \quad [W / kg] \quad (1.2)$$

όπου $\sigma [Si / m]$ είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του ιστού και $\rho [kg / m^3]$ η πυκνότητα μάζας του ιστού ενώ $|\bar{E}| [V / m]$ είναι το μέτρο της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί ως:

$$SAR = \frac{\sigma}{\rho} |\bar{E}|^2 \quad [W / kg] \quad (1.3), \text{ αν χρησιμοποιηθεί η ενεργός τιμή του μέτρου}$$

της εντάσεως του ηλεκτρικού πεδίου.

Ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης ενδέχεται να αναφέρεται σε ένα εντοπισμένο σημείο ενός ιστού, ή ως μέσος όρος σε μία συγκεκριμένη μάζα (1g ή 10g) [18]. Περισσότερες πληροφορίες μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης σε πλήθος βιβλίων και επιστημονικών κειμένων.

1.4. Όρια αποδεκτής έκθεσης

Διάφοροι οργανισμοί έχουν θέσει τα αποδεκτά όρια έκθεσης σε ακτινοβολία ραδιοσυχνοτήτων καθορίζοντας ανώτερες επιτρεπτές τιμές του Ρυθμού Ειδικής Απορρόφησης (Specific Absorption Rate-SAR). Τα όρια αυτά καθορίζονται για έκθεση ολόκληρου του σώματος, μέρους του σώματος (για παράδειγμα του κεφαλιού και του κορμού του σώματος), των άνω και κάτω άκρων, των καρπών ακόμα και των αстраγάλων [17].

Στην Ευρώπη, τα ανώτερα επιτρεπτά όρια για το SAR στο κεφάλι είναι 2 και 10 W / kg όσον αφορά την έκθεση του κοινού και την επαγγελματική έκθεση αντίστοιχα. Αυτές οι τιμές έχουν υπολογιστεί ως μέσος όρος του SAR σε ιστό μάζας 10 γραμμαρίων. Για ιστό μάζας 1 γραμμαρίου ισχύουν τα ίδια όρια σύμφωνα με πρόσφατη αναθεώρηση. Οι τιμές αυτές αναφέρονται σε ένα μεγάλο εύρος ραδιοσυχνοτήτων (100kHz – 6GHz) [18]. Τα ανώτερα επιτρεπτά όρια για την Ευρώπη καθορίζονται στο πρότυπο EN 50360 [16].

1.5. Τρόποι εκτίμησης SAR με αποκλειστική χρήση λογισμικού ηλεκτρομαγνητικής προσομοίωσης

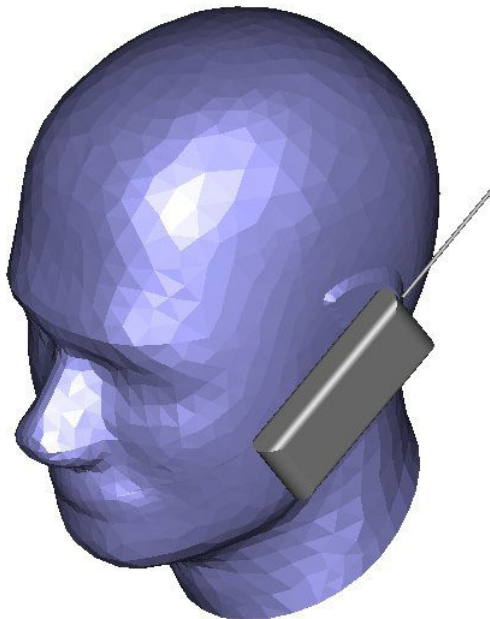
Ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης (SAR) μπορεί να μετρηθεί με χρήση «ομοιωμάτων» κεφαλιών που έχουν πραγματική υλική υπόσταση και κινητών που κυκλοφορούν στο εμπόριο ή είναι κατασκευασμένα για αποκλειστικά ερευνητικούς σκοπούς.

Ένας άλλος τρόπος υπολογισμού του SAR, είναι με αποκλειστική χρήση λογισμικού ηλεκτρομαγνητικής προσομοίωσης, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι χρησιμοποιούνται μοντέλα κεφαλιών ή κινητών που δεν έχουν πραγματική υλική υπόσταση. Η εποπτική τους αναπαράσταση γίνεται με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή (Computer Aided Design).

Για να κατανοήσει ο αναγνώστης τη διαφορά, πρέπει να λάβει υπόψη ότι η Εικόνα 1.2 [16] αντιστοιχεί σε πειραματική μέτρηση του SAR ενώ η Εικόνα 1.3 [16] αντιστοιχεί σε υπολογιστική προσομοίωση: και το κεφάλι και το κινητό έχουν σχεδιαστεί με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.



Εικόνα 1.2: Ομοίωμα κεφαλιού και κινητό.



Εικόνα 1.3: Μοντέλα κεφαλιού και κινητού.

Πάντως, όσον αφορά στη μέτρηση του SAR, είτε χρησιμοποιούνται ομοιώματα κεφαλιού είτε μοντέλα κεφαλιού επιβάλλεται για ευνόητους λόγους το μοντέλο (ή ομοίωμα) του

κεφαλιού να καλύπτει τη δυσμενέστερη περίπτωση έκθεσης (worst case exposure) στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

1.6. Ομοιώματα/μοντέλα ανθρώπινων κεφαλιών

1.6.1. Το μοντέλο SAM

Οι κατασκευαστές των κινητών τερματικών συσκευών υποχρεούνται να χρησιμοποιούν ως αναφορά ένα ομοίωμα ανθρώπινου κεφαλιού ενηλίκου που ονομάζεται Specific Anthropomorphic Mannequin (SAM) [17] (εικόνα 1.4).



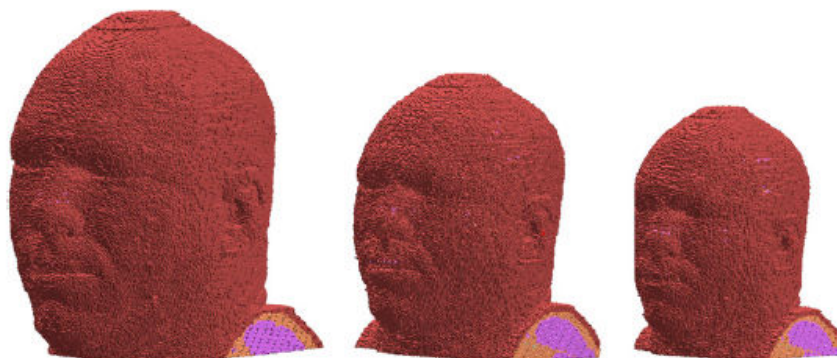
Εικόνα 1.4: Το ομοίωμα SAM.

Η δημιουργία του SAM, βασίστηκε σε μία έρευνα που έγινε πάνω σε προσωπικό του αμερικανικού στρατού και αναπαριστά ένα κεφάλι ανδρός. Το πρώτο βήμα για τη δημιουργία του μοντέλου αυτού ήταν η κατασκευή ενός τρισδιάστατου ομοιώματος κεφαλιού-το οποίο θα λέγεται στο εξής *ομοίωμα SAM*- που βασίστηκε σε διαστάσεις και σχήμα από επιλεγμένα μέλη του αμερικανικού στρατού ενώ εσωτερικά αποτελείτο από διηλεκτρικό υλικό μικρών απωλειών. Τα δεδομένα για την κατασκευή του ομοιώματος αυτού, εισήχθησαν με κατάλληλο τρόπο σε έναν υπολογιστή δημιουργώντας ένα αρχείο CAD (Computer Aided Design). Με βάση αυτό το SAM-CAD αρχείο δημιουργήθηκε ένα μοντέλο κεφαλιού που θα ονομάζεται στο εξής *μοντέλο SAM* [19].

Έκτοτε, έχουν κατασκευαστεί πολλά ομοιώματα και μοντέλα που βασίστηκαν στο αρχικό SAM και αποκαλούνται πολλές φορές και αυτά SAM με την έννοια ότι είναι πιστά αντίγραφα αυτού. Αντίστοιχα, έχει κατασκευαστεί και χρησιμοποιείται στη βιβλιογραφία το αριθμητικό μοντέλο SAM το οποίο αποτελεί αντίγραφο του πειραματικού μοντέλου SAM και χρησιμοποιείται για αριθμητικές προσομοιώσεις ηλεκτρομαγνητικής δοσιμετρίας. Το ομοίωμα και κατά συνέπεια το μοντέλο SAM κατασκευάστηκε με σκοπό να καλύπτεται η δυσμενέστερη περίπτωση έκθεσης σε ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

1.6.2. Τα ανατομικά αριθμητικά μοντέλα

Κάποια από τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση του ανθρώπινου κεφαλιού και είναι βασισμένα στην ανθρώπινη ανατομία (ανατομικά μοντέλα), προέρχονται από το *Πρόγραμμα του Ορατού Ανθρώπου (Visible Human Project-VHP)* [21] και λέγονται VHP μοντέλα. Παραδείγματα τέτοιων μοντέλων είναι τα αριθμητικά μοντέλα *VHAD*, *VH10YS*, *VH5YS* [22]. Το *VHAD* είναι ένα μοντέλο κεφαλιού ενηλίκου, το *VH10YS* είναι ένα μοντέλο κεφαλιού ενός δεκάχρονου παιδιού που δημιουργήθηκε από το *VHAD*, ενώ το *VH5YS* είναι και αυτό ένα μοντέλο κεφαλιού ενός πεντάχρονου παιδιού που δημιουργήθηκε και αυτό από το μοντέλο *VHAD* (Εικόνα 1.5).



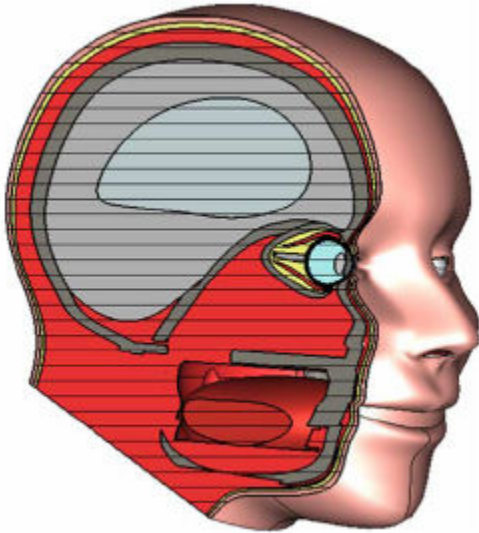
Εικόνα 1.5: Παραδείγματα VHP μοντέλων: Από αριστερά προς τα δεξιά απεικονίζονται το *VHAD*, το *VH10YS*, και το *VH5YS* μοντέλο.

Τα ανατομικά μοντέλα, κατασκευάζονται με τρισδιάστατη αναπαράσταση των δεδομένων εγκάρσιων τομών κεφαλιών εθελοντών, οι οποίες προέρχονται από *Απεικόνιση Μαγνητικού Συντονισμού (MRI-Magnetic Resonance Imaging)* [23]. Για τους σκοπούς της εργασίας αυτής, θα αποκαλούνται MRI-based μοντέλα. Υπάρχουν αρκετά μοντέλα κεφαλιού που έχουν δημιουργηθεί με χρήση της δυνατότητας της 3-D απεικόνισης που προσφέρει η μαγνητική τομογραφία (MRI-based μοντέλα) [22]. Για παράδειγμα, το *FEM40Y-CE* μοντέλο, το οποίο έχει δημιουργηθεί με τη χρήση MRI εικόνων οι οποίες πάρθηκαν από μία ευρωπαϊά 40χρονη γυναίκα εθελόντρια. Τα MRI δεδομένα αποτελούνται από 121 διαφορετικές τομές, ενώ διακρίνονται 15 διαφορετικοί ιστοί (Εικόνα 1.6).



Εικόνα 1.6: Το μοντέλο *FEM40Y-CE*.

Τέλος, πολλά ανατομικά μοντέλα σχεδιάζονται εξ' αρχής με την βοήθεια CAD λογισμικού που λαμβάνει υπόψη την ανθρώπινη ανατομία, χωρίς να γίνεται χρήση δεδομένων που προέρχονται από πραγματικό ανθρώπινο κεφάλι. Τα μοντέλα αυτά ονομάζονται CAD-based μοντέλα [20] (Εικόνα 1.7).



Εικόνα 1.7: CAD-based μοντέλο.

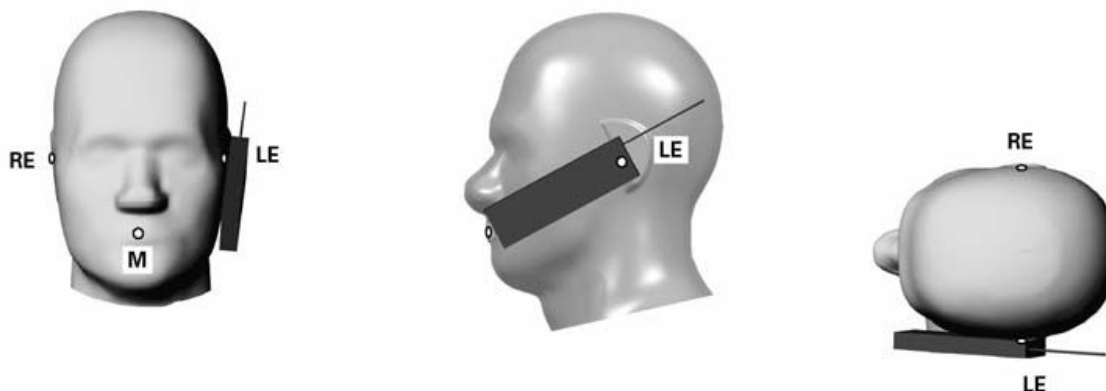
1.7. Τοποθέτηση της κινητής τερματικής συσκευής σε σχέση με το κεφάλι

Από τις σχεδόν άπειρες πιθανές τοποθετήσεις ενός δεδομένου κινητού τηλεφώνου σε σχέση με το ομοίωμα SAM στα πρότυπα EN 50361-2001 και IEEE 1528-2003 [19], αποφασίστηκε να επιλέγονται τέσσερις συγκεκριμένες τοποθετήσεις [19]:

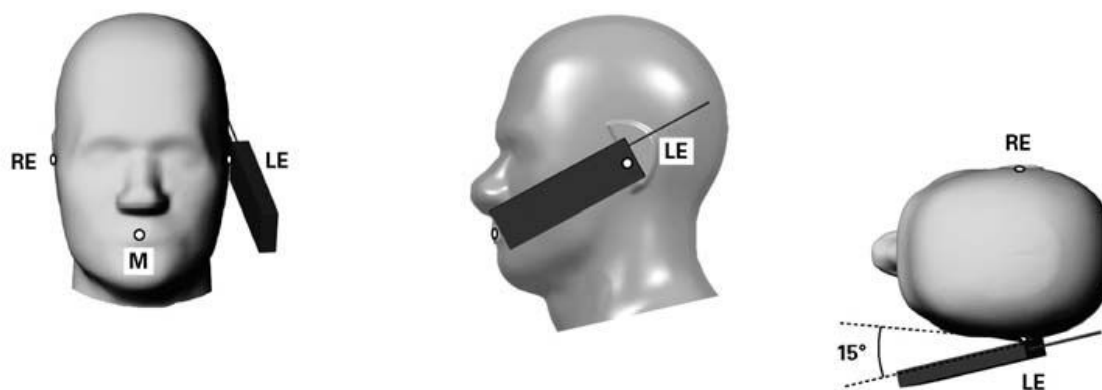
- α) Right tilt(ή tilted) position
- β) Right cheek(ή cheeked) position
- γ) Left tilt(ή tilted) position
- δ) Left cheek(ή cheeked) position

Αυτές οι τέσσερις τοποθετήσεις επιλέχτηκαν από ένα εύρος τοποθετήσεων που προσομοιώνουν φυσιολογικές τοποθετήσεις του κινητού τηλεφώνου, με στόχο να παρέχουν τη χειρότερη περίπτωση έκθεσης για την πλειοψηφία των χρηστών [22]. Μία από αυτές αναμένεται να αντιπροσωπεύει τη δυσμενέστερη («των δυσμενέστερων») περίπτωση για τη πλειοψηφία των χρηστών [22].

Ο ορισμός για την “right tilted” τοποθέτηση ενός κινητού τηλεφώνου σε σχέση με το μοντέλο SAM που δίνεται στο [19] είναι τέτοιος ώστε αν δοθεί η ίδια κινητή τερματική συσκευή σε δύο τυχαίες και ανεξάρτητες ερευνητικές ομάδες, να τοποθετηθεί η κινητή τερματική συσκευή στην ίδια θέση, σε σχέση με το ομοίωμα SAM και από τις δύο αυτές ερευνητικές ομάδες. Ομοίως δίνονται και οι ορισμοί για τις “right cheeked”, “left tilted”, “left cheeked” τοποθετήσεις του κινητού τηλεφώνου. Αντίστοιχοι είναι φυσικά οι ορισμοί για το μοντέλο SAM (Εικόνες 1.8 και 1.9).



Εικόνα 1.8: Left cheek (ή cheeked) position.



Εικόνα 1.9: Left tilt (ή tilted) position.

Λόγω της πληθώρας διαφορετικών MRI-based κεφαλιών, είναι αδύνατον να επεκταθούν οι ορισμοί αυτοί σε οποιοδήποτε μοντέλο κεφαλιού. Για αυτό και η τοποθέτηση των κινητών τηλεφώνων σε ανατομικά μοντέλα, είναι πολύπλοκη διαδικασία που δε μπορεί να βασιστεί στους παραπάνω ορισμούς που δίνονται με βάση το SAM και η οποία μέχρι το έτος 2005 δεν είχε προτυποποιηθεί.

Το έτος 2005 [22] δόθηκαν τέσσερις ορισμοί αντίστοιχοι με αυτούς που είχαν δοθεί για το μοντέλο SAM, για ανατομικά μοντέλα κεφαλιών που βασιζόταν σε συγκεκριμένα ανατομικά χαρακτηριστικά του εκάστοτε μοντέλου ανατομικού κεφαλιού. Απώτερος στόχος των συγγραφέων του επιστημονικού άρθρου [22] δεν ήταν μόνο ο καθορισμός μίας δεδομένης προτυποποίησης που προτάθηκε για να ακολουθείται από τούδε και στο εξής αλλά και η χρησιμοποίηση αυτής της προτυποποίησης για να ελεγχθεί κατά πόσο καλύπτει το μοντέλο SAM τη χειρότερη περίπτωση έκθεσης συγκρινόμενο με 14 άλλα ανατομικά μοντέλα. Οι ορισμοί που δίνονται στο [22] είναι τέτοιοι ώστε αν δοθεί το ίδιο μοντέλο κινητής τερματικής συσκευής και το ίδιο ανατομικό μοντέλο σε δύο τυχαίες και ανεξάρτητες ερευνητικές ομάδες, να τοποθετηθεί το μοντέλο της κινητής τερματικής συσκευής στην ίδια θέση, σε σχέση με το ανατομικό μοντέλο και από τις δύο αυτές ερευνητικές ομάδες. Έτσι θα υπάρχει στο εξής μία προτυποποίηση για να συγκρίνονται αποτελέσματα διαφορετικών ερευνητικών ομάδων.

1.8. Σκοπός της εργασίας

Στην εργασία αυτή πραγματοποιήθηκε μία σειρά από ηλεκτρομαγνητικές προσομοιώσεις στις οποίες χρησιμοποιήθηκε ένα MRI-based μοντέλο που είχε κατασκευαστεί από ερευνητική ομάδα του πανεπιστημίου του Bradford και ένα μοντέλο κινητής τερματικής συσκευής που είχε σχεδιαστεί από ερευνητική ομάδα του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου. Οι ηλεκτρομαγνητικές προσομοιώσεις έγιναν με στόχο να μετρηθεί ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης, και να γίνει σύγκριση μεταξύ των τριών διαφορετικών τοποθετήσεων του μοντέλου της κινητής τερματικής συσκευής σε σχέση με το μοντέλο του κεφαλιού.

Για τις δύο από τις τρεις αυτές διαφορετικές τοποθετήσεις, ακολουθήθηκε η προτυποποίηση που προτάθηκε από τους συγγραφείς του άρθρου [22]. Για το σκοπό αυτό, αναπτύχθηκε ένας ημιαυτόματος τρόπος εισαγωγής και περιστροφής του μοντέλου του κεφαλιού καθώς και εισαγωγής και μεταφοράς του μοντέλου του κινητού σε κατάλληλο πρόγραμμα ηλεκτρομαγνητικών προσομοιώσεων. Ο τρόπος αυτός είναι αρκετά γενικός ενώ επιπρόσθετα, παρουσιάζονται στην εργασία στοιχεία για διάφορες πιθανές αναγκαίες εξειδικεύσεις του. Η τρίτη τοποθέτηση του κινητού τηλεφώνου ήταν αρκετά απλή αλλά ακόμα και εκεί, ακολουθήθηκε μία αλγοριθμική διαδικασία.

1.9. Διάρθρωση της εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας, δίνονται βασικά θεωρητικά στοιχεία για τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain-FDTD) που χρησιμοποιείται συνήθως για την επίλυση των εξισώσεων στροβιλισμού του Maxwell στο πεδίο του χρόνου.

Στο Κεφάλαιο 3, δίδονται επιλεγμένα πρακτικά στοιχεία που αφορούν στο πρόγραμμα XFDTD που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία για τις ηλεκτρομαγνητικές προσομοιώσεις.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζεται ο ορισμός που δίνεται στο [22] και πώς αυτός μπορεί να εφαρμοστεί στην παρούσα εργασία αλλά και σε ένα γενικότερο πλαίσιο.

Στο Κεφάλαιο 5 εφαρμόζεται στο πρόγραμμα XFDTD η θεωρία του Κεφαλαίου 4 και περιγράφονται αναλυτικά τα βήματα που ακολουθήθηκαν. Η δομή του Κεφαλαίου ακολουθεί τη δομή του λογισμικού που αναπτύχθηκε στο πλαίσιο της εργασίας για την ανάπτυξη ημιαυτόματου τρόπου τοποθέτησης της κινητής τερματικής συσκευής σύμφωνα με τους ορισμούς της βιβλιογραφίας.

Στο Κεφάλαιο 6 εκτελούνται οι προσομοιώσεις παρουσιάζονται και συγκρίνονται τα αποτελέσματα για τρεις διαφορετικές τοποθετήσεις του μοντέλου του κινητού τηλεφώνου.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζονται κάποιες προτάσεις για μελλοντικές εργασίες που θα μπορούσαν να βασιστούν στο θεωρητικό και πρακτικό υπόβαθρο που παρέχει η εργασία αυτή.

Η εργασία υποστηρίζεται από τρία παραρτήματα.. Το Παράρτημα 1 χρησιμεύει στο να υπενθυμιστούν στον αναγνώστη κάποιες πιθανότατα ήδη γνωστές μαθηματικές έννοιες που αποτελούν αντικείμενο της επιστήμης της Αναλυτικής και Διανυσματικής Γεωμετρίας αλλά χρησιμοποιούνται επίσης με κάποια ίσως διαφορετική προσέγγιση, στην επιστήμη των Γραφικών με Υπολογιστές (Computer Graphics) και σε πολλές άλλες

επιστήμες. Στο Παράρτημα 2 παρουσιάζονται έννοιες που αποτελούν και αυτές αντικείμενο των δύο προαναφερθεισών επιστημών και είναι αυτές στις οποίες βασίστηκε κατά κύριο λόγο η παρούσα εργασία. Στο Παράρτημα 3 παρουσιάζεται ο κώδικας σε γλώσσα Matlab που χρησιμοποιήθηκε για τις πρακτικές ανάγκες της παρούσας εργασίας. Έγινε προσπάθεια να ακολουθηθεί η λογική του δομημένου προγραμματισμού και να αντιμετωπίζονται πιθανά σφάλματα του προγράμματος με χρήση εξαιρέσεων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/Radio_frequency
- [2] <http://www.avonwood.co.uk/>
- [3] Δημήτρης Κουτσούρης και Κωνσταντίνα Νικήτα, “Εργαστήριο Βιοιατρικής τεχνολογίας”, Εκδόσεις ΕΜΠ
- [4] Νικόλαος Κ. Ουζούνoglou , “Εισαγωγή στα Μικροκύματα”, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα 1994
- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Electromagnetic_spectrum
- [6] http://www.hermes-program.gr/gr/emrinfo_basic.html
- [7] <http://www.vlf.it/frequency/bands.html>
- [8] Χρήστος Καψάλης και Παναγιώτης Κωττής , “ΚΕΡΑΙΕΣ ΑΣΥΡΜΑΤΕΣ ΖΕΥΞΕΙΣ”, Εκδόσεις Τζιόλα, 2005.
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Audio_frequency
- [10] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/Hbase/sound/earsens.html>
- [11] Κ. Βουρνάς, Γ.Κονταξής, “Εισαγωγή στα συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας”, Εκδόσεις ΕΜΠ, Αθήνα 2001
- [12] www.yme.gr (επίσημη ιστοσελίδα Υπουργείου Μεταφορών και Επικοινωνιών)
- [13] Άννυ Λουίζη, “Επίδραση της μη ιοντίζουσας ηλιακής ακτινοβολίας: Είδη ακτινοβολιών”, ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΗΜΕΡΙΔΑΣ: ΕΠΙΔΡΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΣΤΗΝ ΥΓΕΙΑ: ΜΥΘΟΙ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑ, 2005
- [14] http://en.wikipedia.org/wiki/Non-ionizing_radiation
- [15] http://www.epa.gov/radiation/understand/ionize_nonionize.html
- [16] www.handheld.com, “RF Exposure: SAR Standards and Test Methods”
- [17] Jafar Keshvari, “EMERGING WIRELESS MOBILE TECHNOLOGIES, MEASUREMENT & COMPUTATIONAL RF COMPLIANCE ASSESSMENT”, EMF Research and Standards, Nokia, 2006

- [18] Β.Τρίαντος, Β.Τσακανίκας “Συγκριτική Εκτίμηση της Απορρόφησης Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας κατά τη Χρήση Τερματικών Συσκευών Κινητών Επικοινωνιών από Παιδιά και Ενήλικες με Χρήση της Μεθόδου FDTD”, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2005.
- [19] IEEE Std 1528™-2003, “IEEE Recommended Practice for Determining the Peak Spatial-Average Specific Absorption Rate (SAR) in the Human Head from Wireless Communications Devices: Measurement Techniques”, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2003
- [20] Concettina Buccella, Valerio De Santis and Mauro Feliziani, “Prediction of Temperature Increase in Human Eyes Due to RF Sources”, 2007
- [21] M.J. Ackerman, “Visible Human Project: From Data to Knowledge”, U.S. National Library of Medicine, Bethesda, MD, USA
- [22] Wolfgang Kainz, Andreas Christ, Tocher Kellom, Seth Seidman, Neviana Nikoloski, Brian Beard and Niels Kuster, “Dosimetric comparison of the specific anthropomorphic mannequin (SAM) to 14 anatomical head models using a novel definition for the mobile phone positioning”, *Phys. Med. Biol.*, 50, pp. 3423–3445, July 2005
- [23] Δημήτρης Κουτσούρης, Κωνσταντίνα Νικήτα, Σωτήρης Παυλόπουλος, “Ιατρικά Απεικονιστικά Συστήματα”, Εκδόσεις Τζιόλα, 2004

Κεφάλαιο 2

**Η μέθοδος των πεπερασμένων
διαφορών- finite difference
method(FDM) – η μέθοδος των
πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του
χρόνου-finite difference time domain
method (FDTD)**

2.1. Εισαγωγή

Τα ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα που συναντώνται στην πράξη, δεν μπορούν συνήθως να επιλυθούν με τις γνωστές αναλυτικές μεθόδους επίλυσης, όπως για παράδειγμα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών. Αυτό συμβαίνει επειδή τις περισσότερες φορές, οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που συναντώνται στην πράξη, δεν είναι γραμμικές και είναι αδύνατον να γραμμικοποιηθούν χωρίς να επηρεαστεί σοβαρά το τελικό αποτέλεσμα. Επιπρόσθετα, στις περισσότερες των περιπτώσεων, η περιοχή μέσα στην οποία επιθυμείται να επιλυθεί το πρόβλημα είναι πολύπλοκη, ενώ οι οριακές συνθήκες είναι μικτού τύπου ή μεταβάλλονται με το χρόνο. Τέλος, πολλές φορές το υλικό μέσο είναι *ανομοιογενές ή ανισοτροπικό*. Οποτεδήποτε λοιπόν παρουσιάζονται προβλήματα με τέτοια πολυπλοκότητα, πρέπει να επιστρατευτούν αριθμητικές μέθοδοι για την επίλυσή τους. Από όλες τις αριθμητικές μεθόδους που είναι διαθέσιμες για την εύρεση της λύσης μερικών διαφορικών εξισώσεων, αυτές που εφαρμόζονται περισσότερο, είναι εκείνες που κάνουν χρήση των *πεπερασμένων διαφορών (finite differences)* [1].

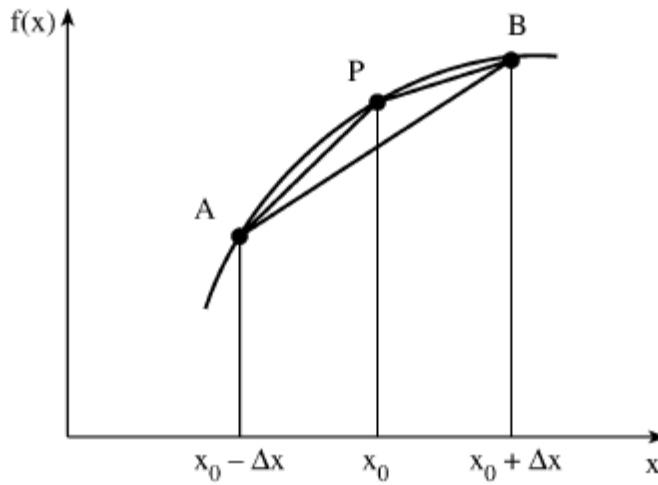
Η μέθοδος των *πεπερασμένων διαφορών-finite difference method(FDM)*- εισήχθη από τον A.Thom το 1920 με την ονομασία «η μέθοδος των τετραγώνων». Χρησιμοποιώντας αυτήν τη μέθοδο ο Thom έλυσε μη γραμμικές εξισώσεις υδροδυναμικής. Από τότε, η μέθοδος χρησιμοποιείται ευρύτατα στην επίλυση διαφόρων τύπων προβλημάτων. Οι τεχνικές των πεπερασμένων διαφορών βασίζονται σε προσεγγίσεις τέτοιες, ώστε να γίνεται αποδεκτή χωρίς μεγάλο σφάλμα η αντικατάσταση διαφορικών εξισώσεων από εξισώσεις πεπερασμένων διαφορών. Αυτές οι *προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών (finite difference approximations)* βρίσκονται σε αλγεβρική μορφή: Συσχετίζουν την τιμή της εξαρτώμενης μεταβλητής σε ένα σημείο της περιοχής μέσα στην οποία επιδιώκεται να επιλυθεί το πρόβλημα, με τις τιμές της ίδιας μεταβλητής σε κάποια από τα γειτονικά σε αυτό σημεία. Η διαδικασία λοιπόν για την εύρεση της λύσης ενός προβλήματος, με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, περιλαμβάνει βασικά τρία βήματα:

- α) Χωρισμός της περιοχής μέσα στην οποία επιθυμείται να βρεθεί η λύση του προβλήματος, σε ένα *πλέγμα (grid)* από *σημεία (nodes)*.
- β) Προσέγγιση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης από μία ισοδύναμη εξίσωση πεπερασμένων διαφορών που συσχετίζει την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής σε ένα σημείο μέσα στην περιοχή που ενδιαφέρει, με τις τιμές της μεταβλητής αυτής στα γειτονικά σημεία.
- γ) Επίλυση των εξισώσεων διαφορών, λαμβάνοντας υπόψη τις οριακές ή τις αρχικές συνθήκες [1].

2.2. Βασικές αρχές της μεθόδου FDM

Στην ενότητα αυτή, θα μελετηθεί ο τρόπος με τον οποίο λαμβάνονται, προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών, από μία δοθείσα διαφορική εξίσωση.

Ας θεωρηθεί μία συνάρτηση $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, με $D_f \subseteq \mathbb{R}$ και $x_0 \in D_f$. Μέρος της γραφικής παράστασης της f, C_f , απεικονίζεται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 2.1: Τμήμα της γραφικής παράστασης της f γύρω από το σημείο $P(x_0, f(x_0))$.

όπου $\Delta x > 0$ και $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x] \subset D_f$. Θεωρείται ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Η παράγωγος ή κλίση της συνάρτησης f στο x_0 ή ισοδύναμα ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $P(x_0, f(x_0))$, $f'(x_0)$ [2,3], μπορεί να προσεγγιστεί με τρεις τρόπους:

α) Με χρήση του ευθύγραμμου τμήματος PB:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.1) \text{ (forward-difference formula)}$$

β) Με χρήση του ευθύγραμμου τμήματος AP:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.2) \text{ (backward-difference formula)}$$

γ) Με χρήση του ευθύγραμμου τμήματος AB:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.3) \text{ (central-difference formula)-(προσέγγιση}$$

κεντρικής διαφοράς).

Επίσης, μπορεί να προσεγγιστεί η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης f υποθέτοντας ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος $[x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ - στο σημείο x_0 , ως εξής [1]:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{f'(x_0 + \Delta x / 2) - f'(x_0 - \Delta x / 2)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.4)$$

Ο παραπάνω τρόπος προσέγγισης της πρώτης και της δεύτερης παραγώγου της συνάρτησης f στο σημείο x_0 , είναι κάπως διαισθητικός. Μία πιο γενική προσέγγιση, χρησιμοποιεί τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor [5]:

Έστω ότι η συνάρτηση f είναι απείρως παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$. Τότε σύμφωνα με τον τύπο του Taylor, για κάθε $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_{n,x_0}(x)$$

με

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \text{ όπου } \xi \text{ μεταξύ } x \text{ και } x_0.$$

Θεωρείται ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,x_0}(x) = 0$. Αυτό, ισοδύναμα, σημαίνει ότι η σειρά Taylor

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$ συγκλίνει και έχει άθροισμα την $f(x)$. Δηλαδή για κάθε $x \in [x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x]$ ισχύει ότι:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (2.5).$$

Για $x = x_0 + \Delta x$ η (2.5) δίνει:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.6)$$

και για $x = x_0 - \Delta x$, δίνει:

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.7)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (2.6), (2.7), λαμβάνεται:

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{2} (\Delta x)^4 f^{(4)}(x_0) + \dots$$

Επομένως:

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + O(\Delta x)^4 \quad (2.8)$$

όπου το $O(\Delta x)^4$ είναι το σφάλμα που εισάγεται λόγω της αποκοπής των σειρών.

Από την (2.8), λαμβάνεται:

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (2.9)$$

Αν υποθεθεί ότι το σφάλμα $O(\Delta x)^2$ είναι αμελητέο, λαμβάνεται η (2.4):

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Αν τώρα αφαιρεθεί η (2.7) από την (2.6):

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2\Delta x f''(x_0) + \frac{1}{3}(\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots$$

Επομένως:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x) = 2\Delta x f''(x_0) + O(\Delta x)^3 \quad (2.10)$$

όπου το $O(\Delta x)^3$ είναι το σφάλμα που εισάγεται λόγω της αποκοπής των σειρών. Αν υποτεθεί και εδώ ότι το σφάλμα αυτό είναι αμελητέο, λαμβάνεται η (2.3):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

Από την (2.10) :

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (2.11).$$

Αν θεωρηθεί και εδώ ότι το σφάλμα $O(\Delta x)^2$ είναι αμελητέο, λαμβάνεται η (2.3):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Από τις (2.9), (2.11) φαίνεται ότι το σφάλμα στις προσεγγίσεις (2.3) και (2.4) είναι $O(\Delta x)^2$.

Αντιθέτως, από τις εξισώσεις (2.6), (2.7) λαμβάνονται:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + O(\Delta x)^2 \quad (2.12)$$

και:

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + O(\Delta x)^2 \quad (2.13)$$

όπου το $O(\Delta x)^2$, είναι το σφάλμα που εισάγεται λόγω της αποκοπής των σειρών.

Από τις (2.12), (2.13) συμπεραίνεται ότι:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.14)$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.15).$$

Από τις (2.14), (2.15) αν θεωρηθεί ότι το σφάλμα $O(\Delta x)$ είναι αμελητέο, λαμβάνονται οι προσεγγίσεις (2.1) και (2.2):

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Συνεπώς, από τις (2.14) (2.15), φαίνεται ότι στις προσεγγίσεις (2.1) και (2.2) παρουσιάζεται σφάλμα $O(\Delta x)$. Επομένως είναι προτιμότερη η χρησιμοποίηση της προσέγγισης (2.3) που παρουσιάζει σφάλμα $O(\Delta x)^2$ από τη χρησιμοποίηση των προσεγγίσεων (2.1) και (2.2).

Μπορούν να ληφθούν ακόμα καλύτερες προσεγγίσεις πεπερασμένων διαφορών, αν χρησιμοποιηθούν ακόμα περισσότεροι όροι από τα αναπτύγματα σε σειρές Taylor. Αν μπορούσαν θεωρητικά να ληφθούν όλοι οι όροι, θα επιτυγχάνονταν απόλυτη ακρίβεια. Δυστυχώς όμως όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, για πρακτικούς λόγους, αποκόπτονται κάθε φορά οι άπειρες σειρές Taylor. Αυτό εισάγει ένα σφάλμα που υπάρχει αναγκαστικά σε όλες τις λύσεις προβλημάτων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών [1].

Ας θεωρηθεί τώρα μία συνάρτηση τεσσάρων μεταβλητών-οι τρεις καρτεσιανές

συντεταγμένες και ο χρόνος-έστω $\varphi: B \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, B ανοικτό [4], η οποία παραγωγίζεται μερικώς ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή για κάθε $(\vec{r}, t) = (x, y, z, t) \in B$. Τότε, σε αντιστοιχία με τις εξισώσεις (2.1), (2.2), (2.3) θα ισχύουν οι παρακάτω προσεγγίσεις για κάθε $(\vec{r}, t) \in B$ [6]:

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} \simeq \frac{\varphi(\vec{r}, t + \Delta t) - \varphi(\vec{r}, t)}{\Delta t} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} \simeq \frac{\varphi(\vec{r}, t) - \varphi(\vec{r}, t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial t} \simeq \frac{\varphi(\vec{r}, t + \Delta t) - \varphi(\vec{r}, t - \Delta t)}{2\Delta t} \quad (2.18)$$

με $\Delta t > 0$.

Ομοίως, μπορεί να προσεγγιστεί η χωρική παράγωγος της συνάρτησης π.χ. ως προς x :

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial x} \simeq \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z, t) - \varphi(x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial x} \simeq \frac{\varphi(x, y, z, t) - \varphi(x - \Delta x, y, z, t)}{\Delta x} \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \varphi(x, y, z, t)}{\partial x} \simeq \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z, t) - \varphi(x - \Delta x, y, z, t)}{2\Delta x} \quad (2.21)$$

Για την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης ως προς x -αν θεωρηθεί ότι αυτή ορίζεται σε κάθε σημείο $(\vec{r}, t) \in B$, σε αντιστοιχία με τη σχέση (2.4), λαμβάνεται:

$$\frac{\partial^2 \varphi(x, y, z, t)}{\partial x^2} \simeq \frac{\varphi(x + \Delta x, y, z, t) - 2\varphi(x, y, z, t) + \varphi(x - \Delta x, y, z, t)}{(\Delta x)^2} \quad (2.22).$$

Για να εφαρμοστεί, ως παράδειγμα, η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών, προκειμένου να βρεθεί η λύση κάποιας εξίσωσης, μίας συνάρτησης $\Phi: B \rightarrow \mathbb{R}$, με $B = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > -e, t > -e\}$ και $e > 0$, για κάθε $(x, t) \in A$ με $A = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, t \geq 0\}$, θεωρείται το πρώτο τεταρτημόριο του καρτεσιανού επιπέδου $x-t$, το οποίο χωρίζεται σε ίσα μεταξύ τους ορθογώνια πλευρών $\Delta x, \Delta t$. Οι συντεταγμένες κάθε σημείου P , του πλέγματος που δημιουργείται, (x, t) , μπορούν να είναι της μορφής [1]:

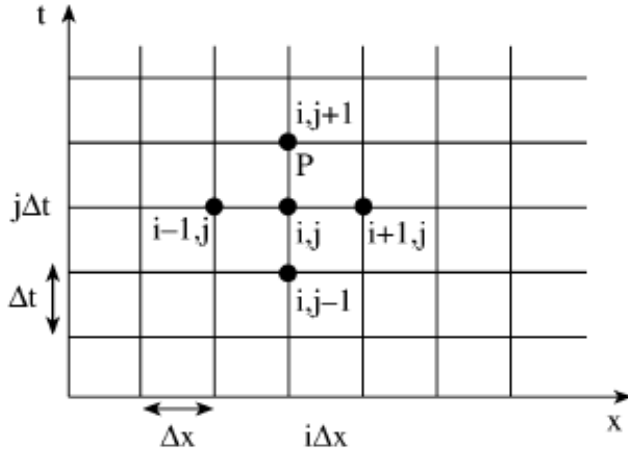
$$x = i\Delta x, i = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = j\Delta t, j = 0, 1, 2, \dots$$

Έτσι, η τιμή της συνάρτησης Φ στο σημείο P γράφεται ως [1]:

$$\Phi_P = \Phi(i\Delta x, j\Delta t) = \Phi(i, j)$$

Τα παραπάνω απεικονίζονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Σχήμα 2.2: Πλέγμα πεπερασμένων διαφορών για δύο ανεξάρτητες μεταβλητές x, t .

Επομένως, αν υποθεθεί ότι ορίζονται οι συναρτήσεις $\Phi|_x, \Phi|_t, \Phi|_{xx}, \Phi|_{tt}$ για κάθε $(x, t) \in B$, η παράγωγος της συνάρτησης Φ ως προς x στο σημείο $P(i\Delta x, j\Delta t)$ προσεγγίζεται-με βάση τη σχέση (2.21)-ως εξής:

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right|_{(i\Delta x, j\Delta t)} \simeq \frac{\Phi(i\Delta x + \Delta x, j\Delta t) - \Phi(i\Delta x - \Delta x, j\Delta t)}{2\Delta x} \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\Phi_x|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i-1, j)}{2\Delta x}.$$

Με βάση τις σχέσεις (2.19), (2.20), αντίστοιχα, ως εξής:

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right|_{(i\Delta x, j\Delta t)} \simeq \frac{\Phi(i\Delta x + \Delta x, j\Delta t) - \Phi(i\Delta x, j\Delta t)}{\Delta x} \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\Phi_x|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1, j) - \Phi(i, j)}{\Delta x} \text{ και}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} \right|_{(i\Delta x, j\Delta t)} \simeq \frac{\Phi(i\Delta x, j\Delta t) - \Phi(i\Delta x - \Delta x, j\Delta t)}{\Delta x} \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\Phi_x|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i, j) - \Phi(i-1, j)}{\Delta x}$$

Η δεύτερη παράγωγος ως προς x της συνάρτησης Φ στο σημείο $P(i\Delta x, j\Delta t)$ προσεγγίζεται με βάση τη σχέση (2.22) ως εξής:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi(x, t)}{\partial x^2} \right|_{(i\Delta x, j\Delta t)} \simeq \frac{\Phi(i\Delta x + \Delta x, j\Delta t) - 2\Phi(i\Delta x, j\Delta t) + \Phi(i\Delta x - \Delta x, j\Delta t)}{(\Delta x)^2} \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\Phi_{xx}|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \quad (2.23)$$

Ομοίως όσον αφορά τη μεταβλητή t :

$$\Phi_t|_{i,j} \simeq \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j-1)}{2\Delta t},$$

$$\Phi_t|_{i,j} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{\Delta t} \quad (2.24),$$

$$\Phi_t|_{i,j} \approx \frac{\Phi(i, j) - \Phi(i, j-1)}{\Delta t}$$

και:

$$\Phi_{tt}|_{i,j} \approx \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{(\Delta t)^2}$$

Ας θεωρηθεί τώρα μία απλή μερική διαφορική εξίσωση:

$$k \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (2.25) \quad \text{με } k \in \mathbb{R} \quad \text{μία σταθερά και } (x, t) \in A \quad \text{με αρχική συνθήκη}$$

$$\Phi(x, 0) = f(x) \quad \text{και οριακές συνθήκες: } \Phi(0, t) = \alpha, \Phi(L, t) = \beta$$

Με βάση της (2.23), (2.24), η ισοδύναμη με την εξίσωση (2.25), προσέγγιση περασμένων διαφορών είναι η:

$$k \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \quad (2.26).$$

$$\text{Έστω } r = \frac{\Delta t}{k(\Delta x)^2} \quad (2.27)$$

Τότε η εξίσωση (2.26) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\Phi(i, j+1) = r\Phi(i+1, j) + (1-2r)\Phi(i, j) + r\Phi(i-1, j) \quad (2.28).$$

Οι τιμές της Φ για $t = \Delta t$, μπορούν να υπολογιστούν με βάση τις οριακές και τις αρχικές συνθήκες. Αφού υπολογιστούν αυτές οι τιμές, με βάση αυτές, υπολογίζονται οι τιμές της συνάρτησης για $t = 2\Delta t$ κ.ο.κ..

Για να εξασφαλιστεί η *ευστάθεια* της λύσης ή να μειωθούν τα λάθη, πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά η τιμή του r . Μπορεί να αποδειχθεί ότι η εξίσωση (2.28) είναι έγκυρη αν ισχύει $0 < r \leq 1/2$ [1].

Τελειώνοντας με την παρούσα ενότητα, πρέπει να τονιστεί ότι ο παραπάνω τρόπος υπολογισμού της λύσης για την εξίσωση (2.25)-και γενικά για παραβολικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, δηλαδή της μορφής

$$a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + d \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \Phi = g \quad \text{με } b^2 - 4ac = 0 \text{ -δεν είναι ο μοναδικός.}$$

Άλλοι τρεις τρόποι-για τον έναν γίνεται εκτενής και για τους άλλους δύο απλή αναφορά-υπολογισμού της λύσης παραβολικών μερικών διαφορικών εξισώσεων με χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών, δίνονται στο [1], από όπου μπορεί ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης να βρει ακόμα περισσότερες βιβλιογραφικές πηγές. Γενικά η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών αναλύεται σε πληθώρα επιστημονικών βιβλίων που σχετίζονται με την επιστήμη των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

2.3. Ευστάθεια των λύσεων με χρήση της μεθόδου FD

Για να μελετηθεί η ευστάθεια των λύσεων με χρήση της μεθόδου FD, ορίζεται ένα

σφάλμα ε^n το οποίο εμφανίζεται στο n -οστό χρονικό βήμα, υποθέτοντας ότι υπάρχει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Ορίζεται η «ενίσχυση» αυτού του σφάλματος, στο χρονικό βήμα $n+1$ ως [1]:

$$\varepsilon^{n+1} = g\varepsilon^n \quad (2.29).$$

Αν υπάρχουν παραπάνω από μία ανεξάρτητες μεταβλητές, η εξίσωση (2.29) παίρνει τη μορφή:

$$[\varepsilon]^{n+1} = [G][\varepsilon]^n \quad (2.30)$$

Για να είναι η λύση ευσταθής πρέπει να ισχύει [1]:

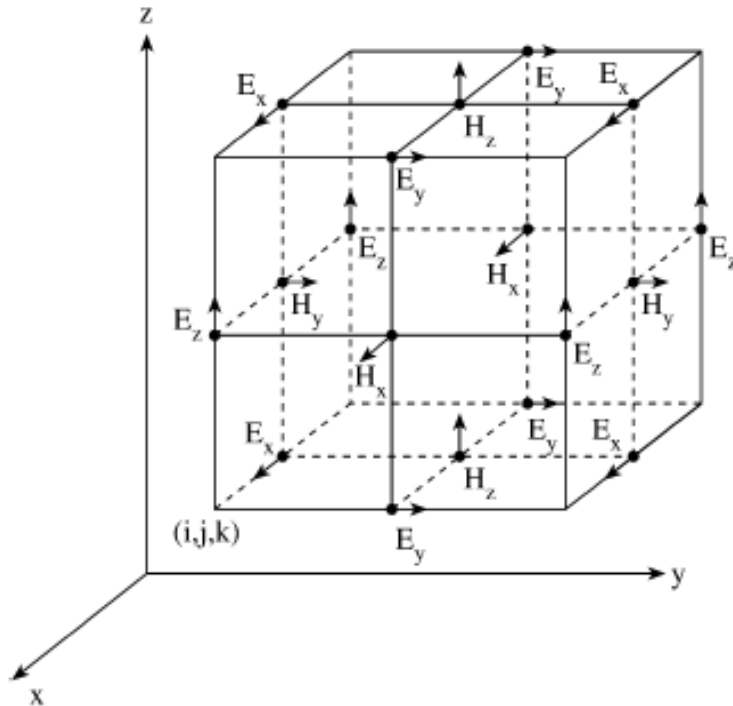
$$\|G\| \leq 1 \quad (2.31)$$

Ο έλεγχος για το κατά πόσο οι εξισώσεις διαφορών οι οποίες έχουν θεωρηθεί στη θέση των μερικών διαφορικών εξισώσεων που ενδιαφέρουν, είναι ευσταθείς, μπορεί να γίνει με τη μέθοδο Von-Neumann [1,6] και με χρήση των (2.30), (2.31). Για παράδειγμα, η απόδειξη του γεγονότος ότι η εξίσωση (2.28) είναι έγκυρη αν ισχύει $0 < r \leq 1/2$, γίνεται με χρήση της μεθόδου Von-Neumann και των (2.30), (2.31).

2.4. Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain-FDTD method)

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain-FDTD) χρησιμοποιείται συνήθως για την επίλυση των εξισώσεων στροβιλισμού του Maxwell στο πεδίο του χρόνου [1], αλλά και κυματικών εξισώσεων [6] και βασίζεται στη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Εισήχθη από τον Yee το 1966 και αργότερα αναπτύχθηκε περαιτέρω από τον Taflov και από άλλους [1]. Παρόλο όμως που υπάρχει από την δεκαετία του 1960, τα τελευταία χρόνια έχει γίνει εξαιρετικά δημοφιλής, εξαιτίας της συνεχούς αυξανόμενης επίδοσης των υπολογιστικών συστημάτων [7].

Η εφαρμογή της μεθόδου σε διανυσματικές εξισώσεις, όπως οι εξισώσεις του Maxwell, γίνεται σύμφωνα με τον αλγόριθμο του Yee [6]. Στη συγκεκριμένη περίπτωση της επίλυσης των χρονικά εξαρτώμενων εξισώσεων στροβιλισμού του Maxwell, η μέθοδος FDTD χρησιμοποιεί ως άγνωστα διακριτά μεγέθη την ένταση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου ως συνάρτηση του χώρου και του χρόνου. Ο συνεχής χωροχρόνος του προβλήματος μετατρέπεται σε διακριτό, ενώ οι μερικές διαφορικές εξισώσεις του αρχικού προβλήματος μετατρέπονται σε εξισώσεις διαφορών [6]. Ο χώρος διακριτοποιείται σε κυβικά «κελιά», των οποίων οι ακμές πρέπει να είναι μικρές σε σχέση με το χρησιμοποιούμενο μήκος κύματος [8]. Παρακάτω θα αναλυθεί πόσο μικρές πρέπει να είναι συσχετιζόμενες με το μήκος κύματος. Οι συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου 'τοποθετούνται' στις ακμές του «κελιού». Οι μαγνητικές συνιστώσες 'τοποθετούνται' έτσι ώστε να ξεκινούν από τα μέσα των πλευρών του «κελιού» [1]. Κάθε τέτοιο στοιχειώδες κελί ονομάζεται κελί του Yee [1]. Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται το κελί του Yee και η τοποθέτηση των συνιστωσών της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου:



Σχήμα 2.3: Θέση των διανυσμάτων της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στο κελί του Yee.

2.4.1. Ο αλγόριθμος του Yee

Ένα υλικό μέσο μέσα στο οποίο υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία, χαρακτηρίζεται από τις παραμέτρους σ , ϵ και μ [1]. Αυτές οι παράμετροι ονομάζονται όπως είναι γνωστό :
 μ μαγνητική διαπερατότητα [H/m],
 ϵ διηλεκτρική επιτρεπτότητα [F/m],
 σ ηλεκτρική αγωγιμότητα [S/m] [8].

Το μέσο ονομάζεται γραμμικό, αν τα σ , ϵ και μ είναι ανεξάρτητα από τα \vec{E} , \vec{H} . Διαφορετικά ονομάζεται μη γραμμικό. Αν τα σ , ϵ και μ δεν είναι συναρτήσεις των χωρικών μεταβλητών ονομάζεται ομογενές, διαφορετικά ονομάζεται μη ομογενές. Λέγεται επίσης ότι το υλικό μέσο είναι ισοτροπικό αν τα σ , ϵ και μ δεν εξαρτώνται από την κατεύθυνση, ενώ διαφορετικά λέγεται ανισοτροπικό [1]. Αν τα σ , ϵ και μ εξαρτώνται από την κατεύθυνση παίρνουν τη μορφή πινάκων 3x3.

Σε ένα υλικό μέσο που παρουσιάζει ηλεκτρικές και μαγνητικές απώλειες, οι εξισώσεις του Maxwell, γράφονται ως εξής [1]:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_v \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.33)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J}_m \quad (2.34)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_e + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.35)$$

όπου:

$\rho_v [C / m^3]$ η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου,

$\vec{D} [C / m^2]$ η πυκνότητα ηλεκτρικής ροής,

$\vec{B} [T]$ η πυκνότητα μαγνητικής ροής,

$\vec{E} [V / m]$ η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου,

$\vec{H} [A / m]$ η ένταση του μαγνητικού πεδίου,

$\vec{J}_m [V / m^2]$ η χωρική πυκνότητα του μαγνητικού ρεύματος, που εκφράζει τις μαγνητικές απώλειες [8] και

$\vec{J}_e [A / m^2]$ η χωρική πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος, που εκφράζει τις ηλεκτρικές απώλειες [8].

Ακόμα, σε περίπτωση που το μέσο είναι ιστροπικό, ισχύουν :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (2.36)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.37)$$

$$\vec{J}_e = \sigma \vec{E} \quad (2.38)$$

$$\vec{J}_m = \sigma^* \vec{H} \quad (2.39)$$

όπου:

μ μαγνητική διαπερατότητα [H/m],

ε διηλεκτρική επιτρεπτότητα [F/m],

σ ηλεκτρική αγωγιμότητα [S/m],

σ^* ισοδύναμη ειδική μαγνητική αντίσταση [Ω/m]. [1]

Πρέπει να σημειωθεί ότι μέσα σε μία περιοχή του χώρου, στην οποία υπάρχουν ηλεκτρομαγνητικά πεδία Maxwell, αυτά τα πεδία θεωρείται ότι:

α) για κάθε σημείο της περιοχής και για κάθε χρονική στιγμή μπορούν να πάρουν μία και μόνο μία τιμή

β) είναι φραγμένες συναρτήσεις και

γ) είναι συνεχείς συναρτήσεις του χώρου και του χρόνου με συνεχείς παραγώγους [1].

Σε ένα γραμμικό και ιστροπικό μέσο, που δεν παρουσιάζει μαγνητικές απώλειες οι εξισώσεις στροβιλισμού του Maxwell (2.34-2.35) μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.40)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.41)$$

Ισοδύναμα, οι δύο παραπάνω διανυσματικές εξισώσεις δίνουν το εξής σύστημα έξι βαθμωτών εξισώσεων, στις καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\
\frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right), \\
\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right), \\
\frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right)
\end{aligned}$$

Ακολουθώντας τον συμβολισμό του Yee, συμβολίζεται -όπως έγινε προηγουμένως για τις δύο διαστάσεις - ένα τυχαίο σημείο M στο τρισδιάστατο πλέγμα ως:

$$M(i, j, k) \equiv M(i\Delta x, j\Delta x, k\Delta z)$$

και ο τύπος οποιασδήποτε συνάρτησης του χώρου και του χρόνου στο σημείο M συμβολίζεται ως: $F^n(i, j, k) \equiv F(i\delta, j\delta, k\delta, n\Delta t)$

όπου $\delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z > 0$ είναι το μήκος της ακμής του κάθε κελιού, δηλαδή το βήμα του χώρου και όπου $\Delta t > 0$ είναι το χρονικό βήμα, ενώ φυσικά τα i, j, k, n είναι ακέραιοι [1].

Αν χρησιμοποιηθούν προσεγγίσεις, όπως αυτές για τη δύο μεταβλητών συνάρτηση Φ , λαμβάνεται [1]:

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial x} = \frac{F^n(i+1/2, j, k) - F^n(i-1/2, j, k)}{\delta} + O(\delta^2) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial F^n(i, j, k)}{\partial t} = \frac{F^{n+1/2}(i, j, k) - F^{n-1/2}(i, j, k)}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (2.41)$$

Κατά την εφαρμογή της εξίσωσης (2.40) σε όλες τις μερικές παραγώγους των ηλεκτρικών ή μαγνητικών συνιστωσών ως προς x, y, z , ο Yee τοποθέτησε τις συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου σε ένα μοναδιαίο κελί ενός πλέγματος-που αποτελείται από πολλά τέτοια κελιά-, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.3 [1]. Επίσης, όπως φαίνεται από την εξίσωση (2.41), για την εφαρμογή της εξίσωσης αυτής, οι πεδιακές συνιστώσες υπολογίζονται ανά μισά χρονικά βήματα [1].

Με τη χρησιμοποίηση των εξισώσεων (2.40) και (2.41), προσεγγίζεται-αμελώντας τα σφάλματα-το σύστημα των έξι παραπάνω βαθμωτών εξισώσεων Maxwell με τις παρακάτω εξισώσεις διαφορών:

$$\begin{aligned}
H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) &= H_x^{n-1/2}(i, j+1/2, k+1/2) \\
&+ \frac{\delta t}{\mu(i, j+1/2, k+1/2)} \delta \left[E_y^n(i, j+1/2, k+1) - E_y^n(i, j+1/2, k) \right. \\
&\left. + E_z^n(i, j, k+1/2) - E_z^n(i, j+1, k+1/2) \right], \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) &= H_y^{n-1/2}(i+1/2, j, k+1/2) \\
&+ \frac{\delta t}{\mu(i, j+1/2, k+1/2)} \delta \left[E_z^n(i+1, j, k+1/2) - E_z^n(i, j, k+1/2) \right. \\
&\left. + E_x^n(i+1/2, j, k) - E_x^n(i+1/2, j, k+1) \right], \tag{2.43}
\end{aligned}$$

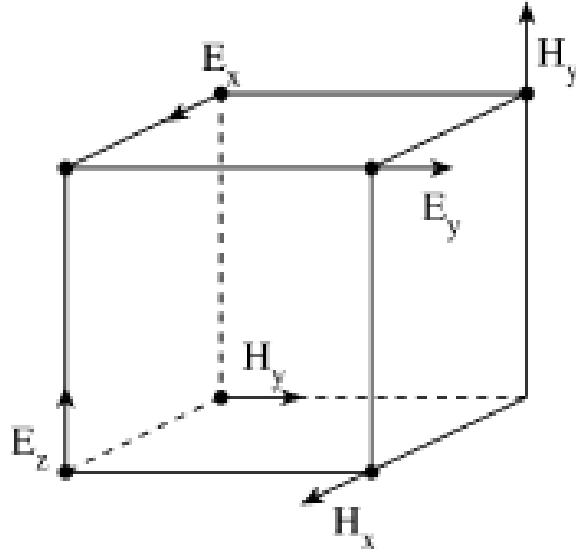
$$\begin{aligned}
H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) &= H_z^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2, k) \\
&+ \frac{\delta t}{\mu(i+1/2, j+1/2, k)} \delta \left[E_x^n(i+1/2, j+1, k) - E_x^n(i+1/2, j, k) \right. \\
&\left. + E_y^n(i, j+1/2, k) - E_y^n(i+1, j+1/2, k) \right], \tag{2.44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) &= \left(1 - \frac{\sigma(i+1/2, j, k)}{\varepsilon(i+1/2, j, k)} \right) \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) + \\
&+ \frac{\delta t}{\varepsilon(i+1/2, j, k)} \delta \left[H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) - \right. \\
&\left. - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j-1/2, k) + H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k-1/2) - \right. \\
&\left. - H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) \right], \tag{2.45}
\end{aligned}$$

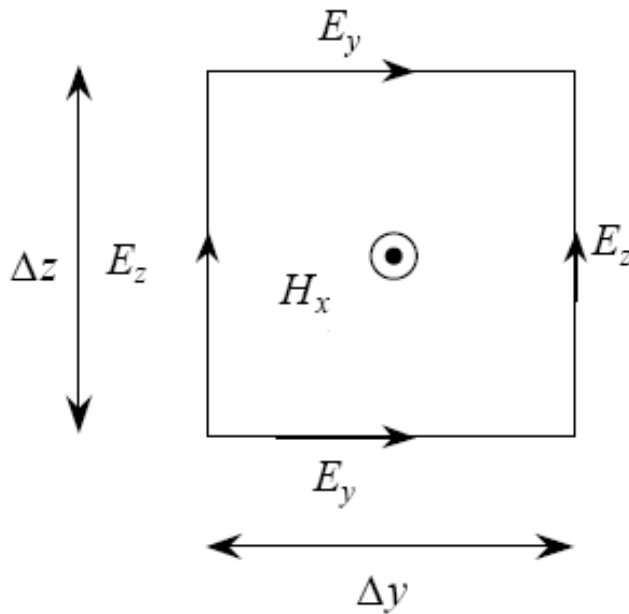
$$\begin{aligned}
E_y^{n+1}(i, j+1/2, k) &= \left(1 - \frac{\sigma(i, j+1/2, k) \delta t}{\varepsilon(i, j+1/2, k)} \right) \cdot E_y^n(i, j+1/2, k) + \\
&+ \frac{\delta t}{\varepsilon(i+1/2, j, k)} \delta \left[H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) - \right. \\
&\left. - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k-1/2) + H_z^{n+1/2}(i-1/2, j+1, k) - \right. \\
&\left. - H_z^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2, k) \right], \tag{2.46}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, j, k+1/2) = & \left(1 - \frac{\sigma(i, j, k+1/2)\delta t}{\varepsilon(i, j, k+1/2)} \right) \cdot E_z^n(i, j, k+1/2) + \\
& + \frac{\delta t}{\varepsilon(i, j, k+1/2)} \delta \left[H_y^{n+1/2}(i+1/2, j, k+1/2) - \right. \\
& - H_y^{n+1/2}(i-1/2, j, k+1/2) + H_x^{n+1/2}(i, j-1/2, k+1/2) - \\
& \left. - H_x^{n+1/2}(i, j+1/2, k+1/2) \right]
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Από τις εξισώσεις αυτές και από την τοποθέτηση των διανυσμάτων στο κελί του Yee φαίνεται ότι οι συνιστώσες της έντασης του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου περιπλέκονται μέσα στο κελί και ότι, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, υπολογίζονται ανά μισά χρονικά διαστήματα. Και οι έξι πεδιακές συνιστώσες μπορούν να τοποθετηθούν σε ένα τέταρτο του μοναδιαίου κελιού, όπως φαίνεται από το σχήμα 2.4. Το σχήμα 2.5 δείχνει τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των συνιστωσών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου πάνω σε ένα επίπεδο. Κάτι τέτοιο είναι χρήσιμο κατά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών [1]. Το σχήμα αυτό αφορά στην εξίσωση (2.42).



Σχήμα 2.4: Οι σχετικές θέσεις μεταξύ των πεδιακών συνιστωσών σε ένα τέταρτο ενός μοναδιαίου κελιού.



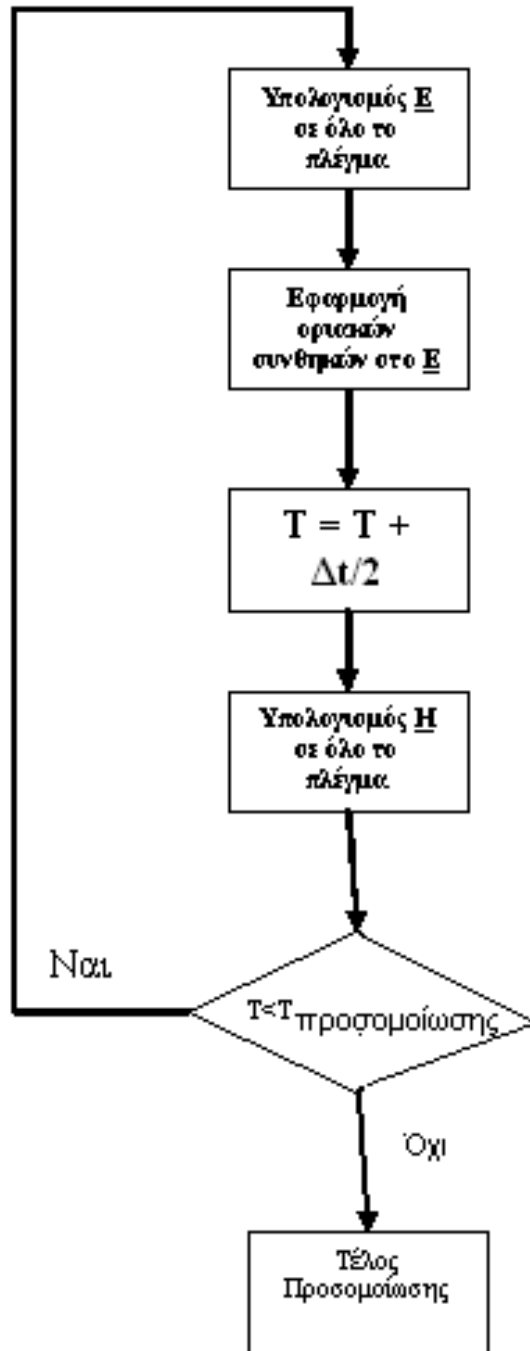
Σχήμα 2.5: Οι σχετικές θέσεις μεταξύ των πεδιακών συνιστωσών πάνω σε ένα επίπεδο.

Για να μετατρέψει κανείς το σύστημα των εξισώσεων (2.42),(2.43),(2.44),(2.45),(2.46) και (2.47) σε κώδικα στον υπολογιστή πρέπει να λάβει υπόψη ότι μέσα στο ίδιο χρονικό βήμα πρώτα υπολογίζονται κάποιες συνιστώσες και στη συνέχεια με βάση αυτές υπολογίζονται κάποιες άλλες συνιστώσες [1].

Στην πραγματικότητα, οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίζονται σε ακέραιες τιμές των χρονικών βημάτων ενώ οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου υπολογίζονται στη μέση των χρονικών βημάτων.

Επιπρόσθετα πρέπει να επισημανθεί ότι επιβάλλεται σε κάθε περίπτωση να γίνεται εφαρμογή των κατάλληλων οριακών και αρχικών συνθηκών. Για να επιλυθεί επιτυχώς το σύστημα των εξισώσεων (2.42),(2.43),(2.44),(2.45),(2.46) και (2.47) είναι αναγκαία η χρησιμοποίηση αρχικών και οριακών συνθηκών, διαφορετικά δε θα είναι δυνατή η λύση του προβλήματος.

Ο αλγόριθμος του Yee που βασίζεται στο σύστημα των εξισώσεων διαφορών (2.42),(2.43),(2.44),(2.45),(2.46) και (2.47) παρουσιάζεται σχηματικά στο λογικό διάγραμμα που απεικονίζεται στην επόμενη σελίδα [8]:



Σχήμα 2.6: Λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου του Yee.

Όπως φαίνεται από το παραπάνω λογικό διάγραμμα του αλγορίθμου, πρώτα υπολογίζονται οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου, στη συνέχεια, μετά την εφαρμογή των οριακών συνθηκών για το ηλεκτρικό πεδίο, ο χρόνος αυξάνεται κατά μισό χρονικό βήμα και ο κύκλος τελειώνει με τον υπολογισμό των μαγνητικών συνιστωσών [8].

2.4.2 Ακρίβεια και Ευστάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου

Για να εξασφαλιστεί η ακρίβεια των υπολογισθέντων από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου αποτελεσμάτων πρέπει να εξασφαλιστεί ότι το μήκος της ακμής του κάθε στοιχειώδους κελιού (αν θεωρηθούν κυβικά κελιά- $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$) είναι μικρότερο σε σχέση με το ελάχιστο μήκος κύματος που χρησιμοποιείται ή έστω ίσο με το μήκος κύματος αυτό διαιρούμενου διά του 10. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να υπάρχουν 10 ή παραπάνω κελιά ανά ελάχιστο μήκος κύματος. Δηλαδή: $\delta \leq \frac{\lambda_{\min}}{10}$ (2.48α)

Επίσης για να εξασφαλιστεί η ευστάθεια της μεθόδου ,πρέπει να ισχύει η εξής σχέση:

$$u_{\max} \Delta t \leq \left[\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right]^{-1/2} \quad (2.48\beta)$$

όπου u_{\max} είναι η μέγιστη ταχύτητα φάσης κύματος(ή κυματική φασική ταχύτητα) μέσα στο μοντέλο. Αφού συνήθως χρησιμοποιούνται κυβικά κελιά, ισχύει: $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$. Έτσι, η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$\frac{u_{\max} \Delta t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

,όπου n είναι ο αριθμός των διαστάσεων του χώρου. Στην συνήθης περίπτωση ισχύει $n = 3$ και επομένως η ευστάθεια του αλγορίθμου εξασφαλίζεται αν ισχύει:

$$\frac{u_{\max} \Delta t}{\delta} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.48\gamma)$$

Στην πράξη, είναι προτιμότερο να επιλέγεται ο λόγος $\frac{\Delta t}{\delta}$ όσο πιο μεγάλος γίνεται αλλά πάντα να είναι τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η παραπάνω σχέση.

2.4.3. Οριακές Συνθήκες Απορρόφησης (Absorbing Boundary Conditions) για τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου

Σε ένα τρισδιάστατο πλέγμα από κελιά, τα πεδία σε κάθε κελί εξαρτώνται από αυτά των γειτονικών κελιών. Εξαιτίας όμως περιορισμών όσον αφορά την υπολογιστική μνήμη, το πλέγμα πρέπει να είναι πεπερασμένο και συνεπώς είναι απαραίτητο να εφαρμόζονται κατάλληλες οριακές συνθήκες στα εξωτερικά όρια του πλέγματος ώστε να προσομοιώνεται η έκταση του πλέγματος μέχρι το άπειρο [7].

Αν λοιπόν τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα απορροφούνται πλήρως στα όρια του πλέγματος, το πλέγμα θα φαίνεται σαν να εκτείνεται στο άπειρο. Επομένως οι οριακές συνθήκες απορρόφησης είναι πολύ σημαντικές για την ακρίβεια των υπολογισμών και πρέπει να γίνεται σωστή χρήση αυτών. Οι οριακές συνθήκες απορρόφησης που χρησιμοποιήθηκαν κατά τις προσομοιώσεις στην εργασία αυτή είναι οι οριακές συνθήκες απορρόφησης του Liao. Υπάρχουν και άλλοι τύποι οριακών συνθηκών απορρόφησης, όπως για παράδειγμα αυτοί του Mur και οι οριακές συνθήκες PML (Perfect Matched

Layer). Χρησιμοποιήθηκαν όμως οι οριακές συνθήκες απορρόφησης του Liao, επειδή είναι πιο συμφέρουσες αποδοτικά σε σύγκριση με αυτές του Mur [7]. Επίσης, παρόλο που οι οριακές συνθήκες PML προσφέρουν καλύτερη απορρόφηση των ανακλάσεων, είναι πιο περίπλοκες στην εφαρμογή τους και απαιτούν μεγάλη υπολογιστική μνήμη [7]. Περισσότερες λεπτομέρειες για τις οριακές συνθήκες απορρόφησης PML, Mur μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στα [1], [8].

2.4.3.1. Οριακές συνθήκες Liao

Ένα επίπεδο κύμα που ταξιδεύει με γωνία θ ως προς τον άξονα x , έχει τη μορφή $u(ct - x \cos \theta)$, οπότε ένα αυθαίρετο κύμα μπορεί να γραφεί με υπέρθεση ως εξής:

$$\varphi(x, t) = \sum_i u_i(ct - x \cos \theta_i)$$

Επειδή είναι $\varphi(x - c\Delta t / \cos \theta, t) = \varphi(x, t + \Delta t)$, λαμβάνεται:

$$\varphi(x, t + \Delta t) = \sum_i u_i(c(t + \Delta t) - x \cos \theta_i \pm ac\Delta t \cos \theta_i) = \sum_i u_i(n_i + \varepsilon_i) \quad (2.49)$$

όπου $n_i = ct - (x - ac\Delta t) \cos \theta_i$, $\varepsilon_i = c\Delta t(1 - a \cos \theta_i)$

Αν τώρα οριστεί ο τελεστής Δ ώστε:

$$\Delta u(n + \varepsilon) = u(n + \varepsilon) - u(n)$$

τότε:

$$u(n + \varepsilon) = \sum_{m=1}^N \Delta^{m-1} u(n) + \Delta^N u(n + \varepsilon) \quad \text{και μπορεί να γραφεί αν αγνοηθεί ο όρος } N\text{-στης}$$

τάξης:

$$u(n + \varepsilon) \approx \sum_{m=1}^N \Delta^{m-1} u(n)$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση αυτή στον τύπο (2.49) λαμβάνεται:

$$\varphi(x, t + \Delta t) = \sum_{j=1}^N (-1)^{j+1} C_j^N \varphi(x - jac\Delta t, t - (j-1)\Delta t) \quad (2.50)$$

$$\text{όπου } C_j^N = \frac{N!}{j!(N-j)!}$$

Η σχέση (2.50) είναι η οριακή συνθήκη απορρόφησης που εκφράζει την $\varphi(x, t + \Delta t)$ στο σύνορο σε συνάρτηση με τις τιμές της σε προηγούμενες χρονικές στιγμές και σε εσωτερικά σημεία του άξονα x . Με όμοιο τρόπο προκύπτουν οριακές συνθήκες απορρόφησης για τις τιμές κάθε συνιστώσας των εντάσεων του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου στα σύνορα μίας τρισδιάστατης περιοχής ως συνάρτηση των τιμών των συνιστωσών σε προηγούμενες χρονικές στιγμές και στα εσωτερικά σημεία του τρισδιάστατου χώρου. Αυτές οι οριακές συνθήκες απορρόφησης χρησιμοποιούνται για την επίλυση των εξισώσεων (2.42)-(2.47).

2.4.4. Πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου έχει περισσότερα πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλες μεθόδους μοντελοποίησης:

α) Ένα από τα πλεονεκτήματα της μεθόδου, είναι ότι είναι σχετικά εύκολο να κατανοήσει κανείς τη φιλοσοφία με βάση την οποία λειτουργεί [1].

Επιπρόσθετα:

β) Παρέχει τη δυνατότητα επίλυσης προβλημάτων σε ευρεία περιοχή συχνοτήτων [8]. Γενικά είναι πιο εύκολο να εξαχθούν αποτελέσματα στο πεδίο της συχνότητας μέσου του πεδίου του χρόνου αν εμπλέκονται πολλές συχνότητες, στο πρόβλημα [1].

γ) Είναι απλός ο χειρισμός πολύπλοκων και ανομοιογενών υλικών με απώλειες γιατί η αγωγιμότητα (σ), η διηλεκτρική σταθερά (ϵ_r), η μαγνητική διαπερατότητα (μ),-ακόμα και η ισοδύναμη μαγνητική αντίσταση- μπορούν να είναι διαφορετικές για κάθε σημείο του πλέγματος [1].

δ) Τέλος, ο αλγόριθμος του Yee δεν απαιτεί τον σχηματισμό ολοκληρωτικών εξισώσεων [1] ενώ ακόμα και σχετικά πολύπλοκα προβλήματα μπορούν να αντιμετωπισθούν χωρίς την ανάγκη αντιστροφής μεγάλων πινάκων [1], [8]. Αυτό το τελευταίο επιτρέπει τη μελέτη ομοιωμάτων του ανθρωπίνου σώματος που αποτελούνται από εκατομμύρια κυβικά στοιχεία [8].

Όπως κάθε τεχνική μοντελοποίησης έτσι και η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου, έχει εκτός από πλεονεκτήματα και διάφορα μειονεκτήματα:

Καταρχάς:

α) η ανάγκη διακριτοποίησης του χρόνου και του χώρου που περιβάλλει ο σκεδαστής αυξάνει κατά πολύ το υπολογιστικό κόστος για την επίλυση του προβλήματος αφού αυξάνεται ο αριθμός των απαραίτητων κυβικών στοιχείων με αποτέλεσμα η μέθοδος να απαιτεί σημαντικό υπολογιστικό χρόνο για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων [8].

Ακόμη:

β) Η μέθοδος αυτή υπολογίζει την ένταση του μαγνητικού και του ηλεκτρικού πεδίου στο υπολογιστικό πλέγμα. Προκειμένου όμως να γίνει εφικτή, από υπολογιστικής άποψης, η υλοποίηση της μεθόδου, πρέπει να περιοριστεί το υπολογιστικό πλέγμα. Αυτό γίνεται με την εισαγωγή κατάλληλων συνοριακών συνθηκών στον υπολογιστικό χώρο. Απαιτείται μεγάλη προσοχή έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθούν τα σφάλματα από την εισαγωγή αυτών των συνοριακών συνθηκών, τα οποία μπορεί να αποτελέσουν μειονέκτημα της μεθόδου.

Άλλο ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι ότι:

γ) εφόσον τα υπολογιστικά πλέγματα έχουν ορθογωνικό σχήμα, εισάγονται πρόσθετα σφάλματα στην περίπτωση που υπάρχουν στο υπολογιστικό πλέγμα σκεδαστές με κυλινδρικές ή σφαιρικές επιφάνειες και γενικά σκεδαστές με καμπύλα τμήματα [1].

Τέλος, όπως συμβαίνει σε όλους τους αλγόριθμους πεπερασμένων διαφορών, έτσι και σε αυτή την περίπτωση:

δ) τα πεδία υπολογίζονται μόνο στα σημεία του πλέγματος και όχι σε όλο το χώρο ενδιαφέροντος [1].

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Matthew N. O. Sadiku, “Numerical Techniques in Electromagnetics”, Second Edition, CRC Press LLC, 2001
- [2] Δημήτρης Κοζιώκος - Γιώργος Πρέσβης, “Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Δ΄ ΔΕΣΜΗΣ, 2^{ος} ΤΟΜΟΣ”, 2^η έκδοση, ΕΚΔΟΤΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ-ΟΡΟΣΗΜΟ, Αθήνα 1998
- [3] MURRAY R. SPIEGEL, “ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ”, Εκδόσεις ΕΣΠΙ, Νέα Υόρκη 1963 (Μετάφραση από Αγγλικά στα Ελληνικά)
- [4] Ν.ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ Σ.ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ Α.ΦΕΛΛΟΥΡΗΣ, “ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών “, Έκδοση Έκτη, Αθήνα 2003
- [5] Ε.ΓΑΛΑΝΗΣ, ”Εισαγωγή στην ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ”, Έκδοση 3η, Αθήνα
- [6] Κωνσταντίνα Νικήτα και Νικόλαος Ουζούνογλου, Σημειώσεις για το μεταπτυχιακό μάθημα “Βιοηλεκτρομαγνητισμός”.
- [7] Remcom,” xfdtd 6 - fdtd for professionals - Reference Manual”, Version 6.0, Remcom, 2003
- [8] Β.Τρίαντος, Β.Τσακανίκας “Συγκριτική Εκτίμηση της Απορρόφησης Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας κατά τη Χρήση Τερματικών Συσκευών Κινητών Επικοινωνιών από Παιδιά και Ενήλικες με Χρήση της Μεθόδου FDTD”, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2005

Κεφάλαιο 3

Εισαγωγή στο λογισμικό προσομοίωσης XFDTD

3.1. Εισαγωγή

Το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία για τις προσομοιώσεις, ονομάζεται XFDTD και πιο συγκεκριμένα χρησιμοποιήθηκε η έκδοση 6.0 του προγράμματος αυτού. Το εν λόγω πρόγραμμα χρησιμοποιείται για την επίλυση/προσομοίωση ηλεκτρομαγνητικών προβλημάτων με βάση τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου (Finite Difference Time Domain Method).

Το συγκριμένο κεφάλαιο δεν έχει ως στόχο να αντικαταστήσει το [1] που είναι το

εγχειρίδιο αναφοράς (Reference Manual) για χρήση του XFDTD 6.0. Έχει ως στόχο να βοηθήσει τον αναγνώστη έτσι ώστε αυτός να κατανοήσει τις κύριες λειτουργίες του προγράμματος XFDTD και να γνωρίσει μέρος του γραφικού του περιβάλλοντος.

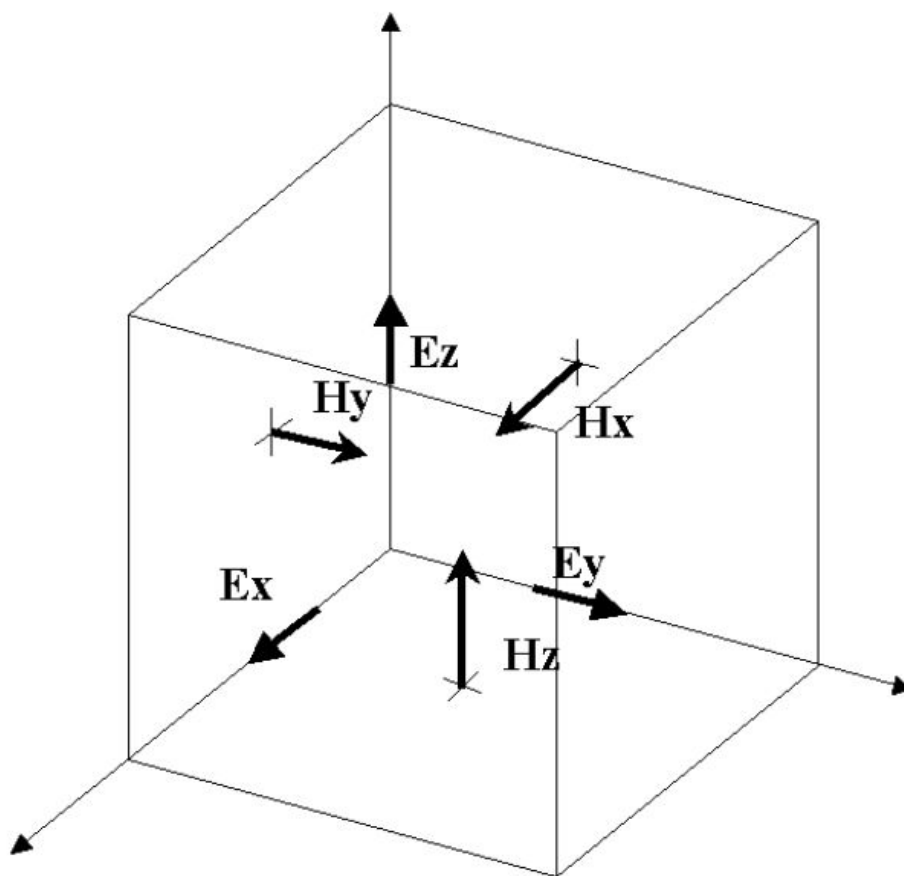
Το πρόγραμμα XFDTD, κάνει χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου η οποία όπως αναφέρθηκε στο Κεφάλαιο 2 χρησιμοποιείται κυρίως για την επίλυση των εξισώσεων στροβιλισμού του Maxwell στο πεδίο του χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι ο υπολογισμός των τιμών του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, γίνεται σε διακριτά βήματα στο χρόνο.

Ο κύριος λόγος για τον οποίο το πρόγραμμα XFDTD χρησιμοποιεί τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου είναι το γεγονός ότι καθώς ο αριθμός των αγνώστων που εμφανίζονται στο πρόβλημα αυξάνει, η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου ξεπερνά αισθητά σε απόδοση άλλες μεθόδους. Επιπρόσθετα, έχει αναγνωριστεί ως η καταλληλότερη μέθοδος για την εκτέλεση ηλεκτρομαγνητικών προσομοιώσεων που σχετίζονται με τη μελέτη των βιολογικών επιδράσεων από τη χρήση ασύρματων συσκευών. Τέλος, η μέθοδος FDTD παρέχει αποτελέσματα μεγάλης ακρίβειας στην περίπτωση προβλημάτων διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών πεδίων μέσα σε βιολογικούς ιστούς [1].

3.2. Η χρήση της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (FDTD) στο λογισμικό XFDTD

Η μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου αναλύθηκε στο κεφάλαιο 2., εδώ απλώς θα γίνει αναφορά μεταξύ άλλων και σε πρακτικά ζητήματα που αφορούν τη μέθοδο όταν αυτή χρησιμοποιείται με το πρόγραμμα XFDTD.

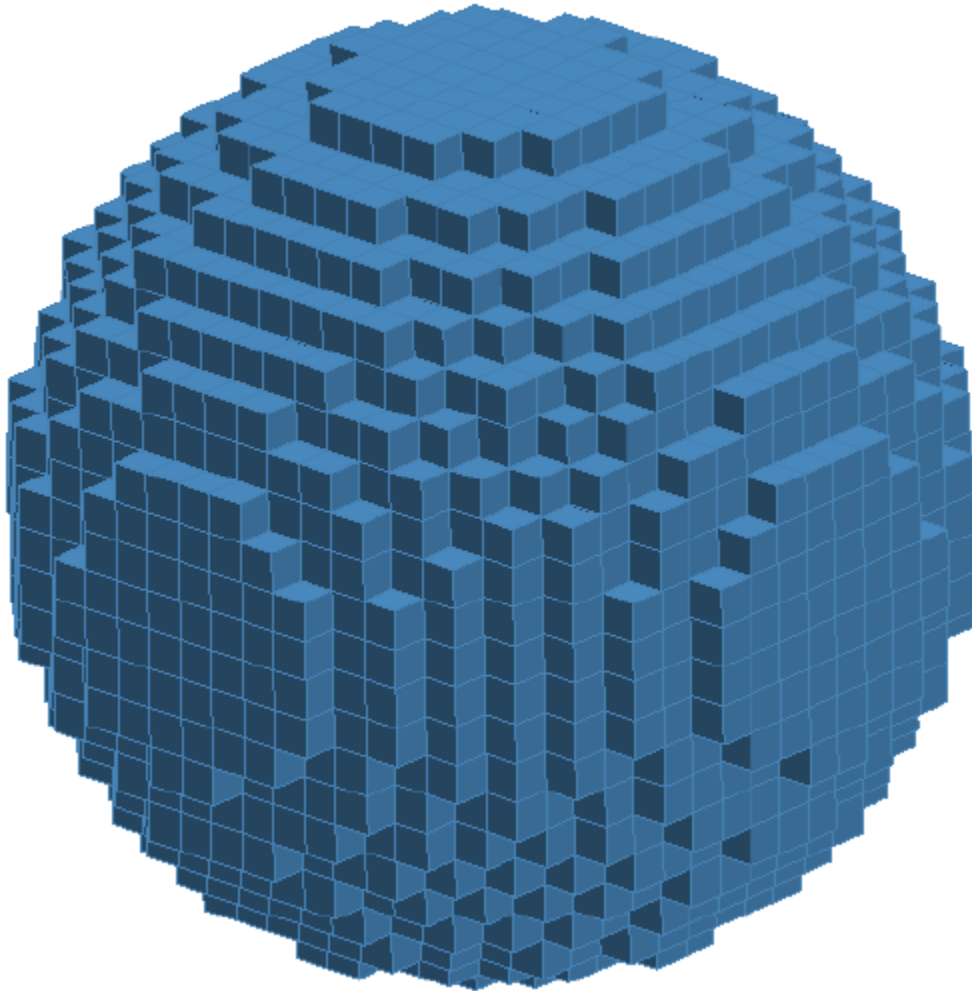
Όταν συνδυαστούν πολλά κελιά FDTD (δηλαδή κελιά του Yee) για να δημιουργήσουν ένα τρισδιάστατο σχήμα, τότε το αποτέλεσμα είναι ένα FDTD πλέγμα (FDTD grid ή FDTD mesh). Κάθε κελί εφάπτεται με τα γειτονικά του, έτσι ώστε να θεωρείται, κατά σύμβαση, πως κάθε κελί έχει τρεις ηλεκτρικές συνιστώσες που ξεκινούν από ένα κοινό κόμβο συσχετιζόμενο με αυτό. Οι ηλεκτρικές συνιστώσες στις άλλες εννέα ακμές του κελιού ανήκουν στα γειτονικά κελιά. Κάθε κελί θα έχει επίσης τρεις μαγνητικές συνιστώσες με αρχή τις πλευρές του γειτονικού κελιού στον κοινό κόμβο των ηλεκτρικών συνιστωσών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.1 [2].



Σχήμα 3.1: Το στοιχειώδες κελί του Yee, όπως αυτό χρησιμοποιείται από το πρόγραμμα XFDTD.

Μέσα στο πλέγμα, μπορούν να προστεθούν υλικά όπως αγωγοί και διηλεκτρικά υλικά αλλάζοντας τις εξισώσεις υπολογισμού των πεδίων σε συγκεκριμένα σημεία. Για παράδειγμα, για να προστεθεί ένα κομμάτι τέλει αγωγίμου σύρματος στην κορυφή A ενός κελιού, η τιμή του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο A μπορεί να τεθεί ίση με μηδέν, δεδομένου ότι το πεδίο μέσα σε ένα τέλει αγωγό είναι μηδέν. Θέτοντας σε πολλά συνεχόμενα συνευθειακά σημεία του πλέγματος την τιμή του ηλεκτρικού πεδίου ίση με μηδέν, λαμβάνεται ένας τέλει αγωγός κάποιου επιθυμητού μήκους.

Συσχετίζοντας πολλές ακμές κελιών με διάφορα υλικά-δίνοντας κατά κάποιο τρόπο τιμές στις παραμέτρους $\epsilon, \mu, \sigma, \sigma^*$ (ενότητα 2.4.1) μπορεί να σχηματιστεί μια γεωμετρική κατασκευή μέσα στο πλέγμα FDTD όπως αυτή η σφαίρα από διηλεκτρικό υλικό που απεικονίζεται στην Εικόνα 3.1. Σε αυτήν την εικόνα, κάθε μικρό κουτί αναπαριστά ένα κελί FDTD.



Εικόνα 3.1: Μία σφαίρα από διηλεκτρικό όπως έχει «πλεγματοποιηθεί» μέσα στο FDTD πλέγμα.

3.3. Βασικά βήματα σε έναν υπολογισμό XFDTD

Ένα ολοκληρωμένο αρχείο το οποίο περιέχει την κατάλληλη πληροφορία για τη διεξαγωγή της προσομοίωσης στο πρόγραμμα XFDTD αναφέρεται ως project. Κάθε project έχει ένα «αρχείο γεωμετρίας»-«geometry file» (κατάληξη .id)-με την περιγραφή της δομής ή της συσκευής που πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στην προσομοίωση και ένα αρχείο παραμέτρων που περιλαμβάνει τις εισόδους (inputs) και τις εξόδους (outputs/results) του προγράμματος [1].

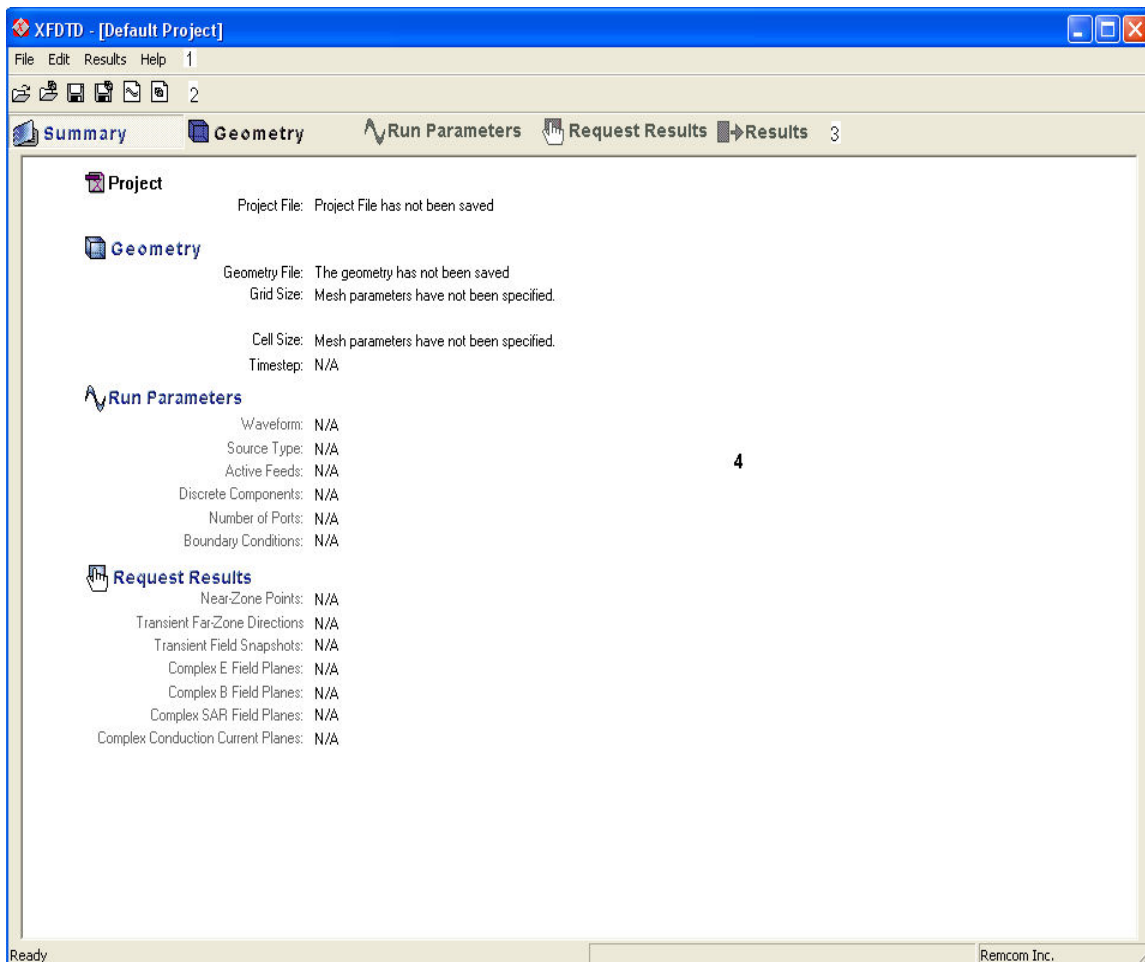
Στις περισσότερες περιπτώσεις, ένα XFDTD project ξεκινά με τη δημιουργία της κατάλληλης γεωμετρίας [1]. Όταν εισαχθούν ή κατασκευαστούν μέσα από το πρόγραμμα όλα τα αντικείμενα που περιγράφουν τη γεωμετρία, μπορεί τότε να δημιουργηθεί το FDTD πλέγμα [1]. Για να εκτελέσει το πρόγραμμα τους διάφορους υπολογισμούς, χρησιμοποιεί το FDTD πλέγμα ως υπολογιστικό πλέγμα (computational grid).

Μόλις τελειώσει το πρώτο βήμα της εισαγωγής ή κατασκευής της γεωμετρίας και της κατασκευής του πλέγματος, πρέπει να οριστούν οι επιθυμητές είσοδοι για τους

υπολογισμούς [1]. Η πηγή της διέγερσης μπορεί να είναι πηγή ρεύματος ή τάσης -μεταξύ άλλων- και πρέπει να τοποθετηθεί σε κατάλληλο σημείο του υπολογιστικού πλέγματος. Το σήμα εισόδου μπορεί να είναι διαφορετικών κυματομορφών, αλλά στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε μόνο ημιτονοειδής πηγή. Οι διάφοροι παράμετροι της κυματομορφής εισόδου, δύνανται να οριστούν από τον χρήστη. Έπειτα από την προσομοίωση, ο χρήστης μπορεί να λάβει τα δεδομένα εξόδου μέσα από το γραφικό περιβάλλον του προγράμματος. Πάντως, πολλά από τα δεδομένα εξόδου μπορούν να αποθηκευτούν από το πρόγραμμα XFDTD είτε αυτόματα είτε μετά από επιθυμία του χρήστη, προκειμένου να έχει αργότερα πρόσβαση σε αυτά. Επίσης είναι δυνατόν να γίνει και «μεταεπεξεργασία» σε κάποια από τα αποθηκευμένα αποτελέσματα.

3.4 Εισαγωγή στο περιβάλλον του XFDTD

Με την εκκίνηση του προγράμματος XFDTD εμφανίζεται ένα παράθυρο, όπως αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 3.2:




Εικόνα 3.2: Το παράθυρο που εμφανίζεται αμέσως μετά την εκκίνηση του προγράμματος.

Υπάρχουν 4 περιοχές (Εικόνα 3.2) στις οποίες υποδιαιρείται το παράθυρο:

- Η περιοχή 1(menu bar [1])
- Η περιοχή 2(tool bar [1])
- Η περιοχή 3(window tabs [1])-(ετικέτες παραθύρου)
- Η περιοχή 4(work area [1])-(περιοχή εργασίας)



Μόλις ξεκινήσει το πρόγραμμα, στην περιοχή εργασίας δίνονται περιληπτικά, κάποιες λεπτομέρειες που αφορούν το τρέχον project: το όνομα του project, το σχετικό αρχείο γεωμετρίας, ρυθμίσεις που αφορούν τις εισόδους και τις εξόδους, ρυθμίσεις που αφορούν το υπολογιστικό πλέγμα κ.α. Στην Εικόνα 2 επειδή δεν έχει δημιουργηθεί project, δεν είναι διαθέσιμες οι ρυθμίσεις εφόσον δεν έχουν καθοριστεί ακόμη.

Μέσα από το αρχικό παράθυρο μπορεί κανείς να προσπελάσει το παράθυρο στο οποίο δημιουργείται ή εισάγεται η γεωμετρία (Geometry window)-(παράθυρο Γεωμετρίας), επιλέγοντας την αντίστοιχη ετικέτα παραθύρου (window tab):  **Geometry**. Μέσα από αυτό το παράθυρο γεωμετρίας μπορεί να εισαχθεί ή να δημιουργηθεί η γεωμετρία, να γίνει επεξεργασία αυτής και να δημιουργηθεί το υπολογιστικό πλέγμα. Για να γίνουν προσβάσιμα τα υπόλοιπα δύο από τα τρία παράθυρα (Run parameters, Request Results) πρέπει να δημιουργηθεί η γεωμετρία και να κατασκευαστεί το υπολογιστικό πλέγμα. Το παράθυρο Run Parameters(Παράμετροι Εκτέλεσης) χρησιμοποιείται για τον καθορισμό της διέγερσης. Το παράθυρο Request Results (Επιθυμητά Αποτελέσματα), για τον καθορισμό των προς αποθήκευση δεδομένων και των εξόδων. Για να γίνει προσβάσιμο το παράθυρο Results (Αποτελέσματα) πρέπει να οριστούν οι εισοδοί και οι εξοδοί και να αποθηκευτούν σε ένα αρχείο project (.fdtd). Αφού αποθηκευτεί το project, γίνεται ενεργή η ετικέτα Results και μπορούν να εκτελεστούν οι υπολογισμοί. Έπειτα από τους υπολογισμούς, τα δεδομένα εξόδου και τα εργαλεία για την μεταεπεξεργασία των αποτελεσμάτων είναι διαθέσιμα από το παράθυρο Results [1].

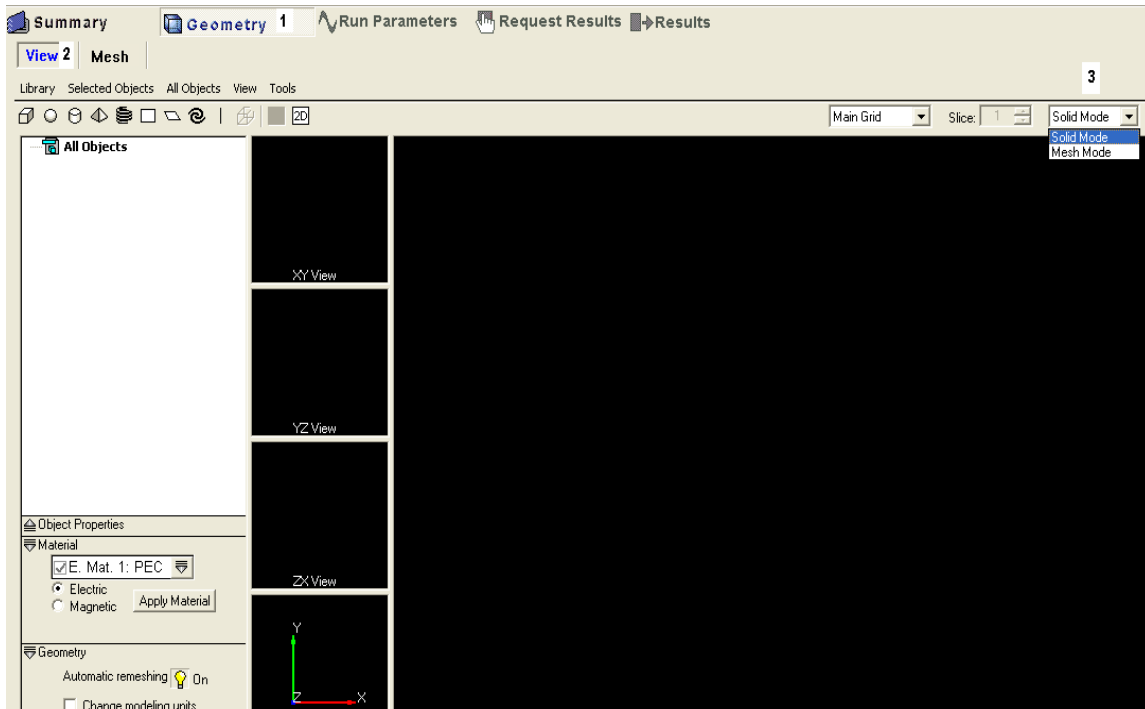
3.5. Εισαγωγή και επεξεργασία της γεωμετρίας

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω , το πρώτο βήμα σε μία προσομοίωση με το πρόγραμμα XFDTD είναι η δημιουργία της κατάλληλης γεωμετρίας, που αποτελεί την αναπαράσταση του πραγματικού αντικειμένου που ενδιαφέρει, στο πρόγραμμα [1]. Υπάρχουν διάφορα εργαλεία για να ορίσει κανείς και να επεξεργαστεί μία γεωμετρία στο πρόγραμμα XFDTD και για να δημιουργήσει μετά το αρχείο «mesh» που χρησιμοποιείται για τους διάφορους υπολογισμούς [1]. Στην παρούσα ενότητα θα γίνει αναφορά σε κάποια από αυτά.

3.5.1. Η περιοχή απεικόνισης

Αν ένας χρήστης είναι μέσα στο περιβάλλον του προγράμματος και ‘κάνει’ διαδοχικά «αριστερό κλικ» στις ετικέτες  **Geometry** και  **View** (η ετικέτα View είναι επιλεγμένη κατά σύμβαση, αφού επιλεγεί η ετικέτα Geometry), θα εμφανιστεί ένα παράθυρο όπως αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 3.3. Το παράθυρο αυτό, δεν είναι ακριβώς αυτό που αναφέρθηκε στην παράγραφο 3.4 ως παράθυρο Γεωμετρίας (Geometry window), αλλά περιέχει το μεγαλύτερο μέρος αυτού και κάποιες πρόσθετες ετικέτες. Με εναλλαγή της επιλογής Solid Mode σε Mesh Mode και αντίστροφα, απεικονίζονται δύο είδη «απεικονίσεων» που υπάρχουν στο πρόγραμμα XFDTD (Εικόνα 3.3): η «απεικόνιση του

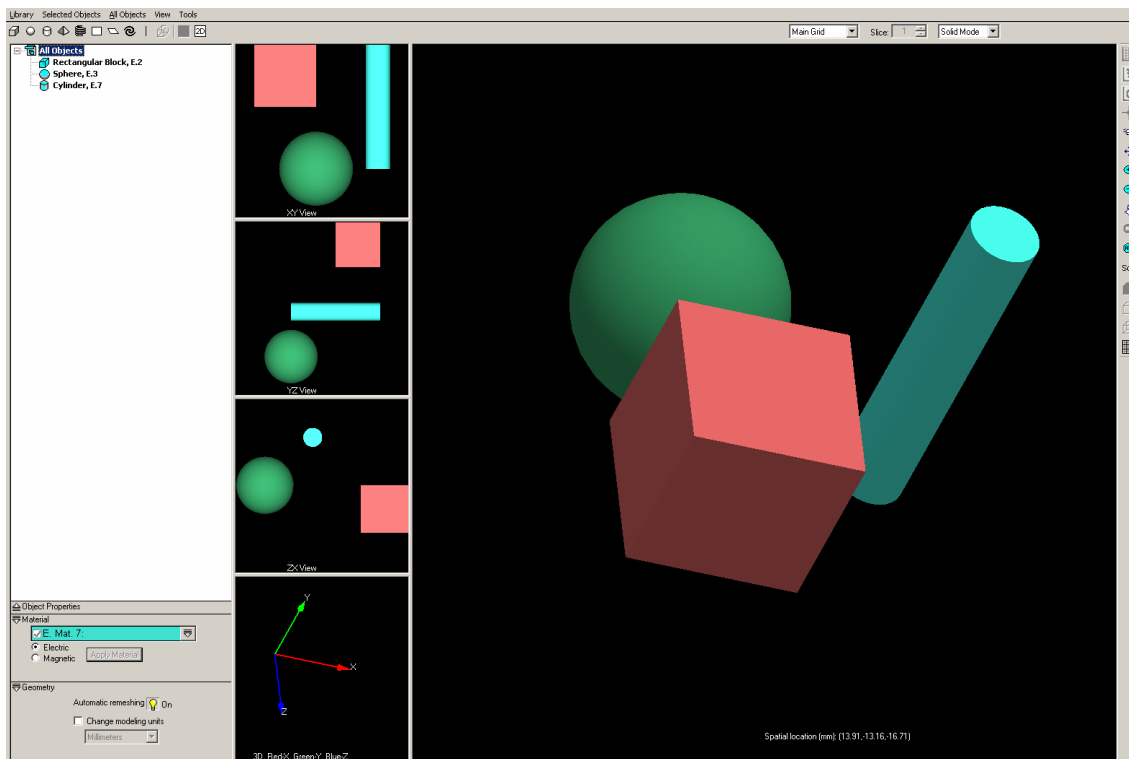
στερεού» (solid mode) και η «απεικόνιση του πλέγματος» (mesh mode).











Εικόνα 3.3: Απεικόνιση της ετικέτας **Geometry** (1), της ετικέτας **View** (2) και του μενού που αναδύεται (3), επιλέγοντας το μαύρο βέλος στο πλαίσιο **Solid Mode**.

Αρχικά, χρησιμοποιείται η απεικόνιση του στερεού στην οποία όλα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά σχεδιάζονται ως τρισδιάστατα αντικείμενα. Η απεικόνιση του πλέγματος είναι εμφανής μόνο αφού δημιουργηθεί ένα XFDTD πλέγμα. Η απεικόνιση του πλέγματος δείχνει το πραγματικό FDTD πλέγμα που χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς [1].

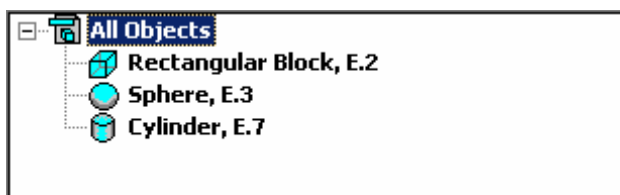
Στην Εικόνα 3.4, φαίνεται το παράθυρο γεωμετρίας, στην κύρια περιοχή του οποίου - *main display area* ή *viewing area* - περιοχή απεικόνισης [1]-απεικονίζεται μία τρισδιάστατη γραφική αναπαράσταση τριών αντικειμένων, μίας συγκεκριμένης γεωμετρίας στερεού (solid geometry [1]).



Εικόνα 3.4: Το παράθυρο της γεωμετρίας στο οποίο απεικονίζονται κάποια στερεά αντικείμενα.

Δίπλα στο δεξί άκρο της περιοχής απεικόνισης υπάρχει ένα μενού από όπου ο χρήστης μπορεί να επιλέξει διάφορα εργαλεία (tools), τα οποία χρησιμοποιούνται για την αλλαγή της εικόνας που εμφανίζεται στην περιοχή απεικόνισης. Από αυτά τα εργαλεία, αναφέρονται ενδεικτικά το *εργαλείο εκτέλεσης τροχιάς* (orbit tool) () που χρησιμοποιείται για την περιστροφή των αντικειμένων, μαζί με το σύστημα συντεταγμένων όπως αυτές εφαρμόζονται στην περιοχή απεικόνισης. Κάτω από το εργαλείο τροχιάς υπάρχει το *pan tool* () που χρησιμοποιείται για τη «μεταφορά» της εικόνας της περιοχής απεικόνισης. Αναφέρεται ότι υπάρχει και η δυνατότητα να παρατηρήσει ο χρήστης τα αντικείμενα από πολύ κοντινή ή μακρινή απόσταση (, ) Τέλος, ο χρήστης μπορεί να ακυρώσει ό,τι έχει γίνει με χρήση των εργαλείων , , , με χρήση του εργαλείου .

Πάνω αριστερά στην Εικόνα 3.4, απεικονίζεται το λεγόμενο *δέντρο αντικειμένων* (object tree) το οποίο απεικονίζεται και στην Εικόνα 3.5 σε μεγέθυνση:




Εικόνα 3.5: Το δέντρο αντικειμένων.





Το δέντρο αυτό απεικονίζει τη σχέση μεταξύ των αντικειμένων που υπάρχουν στο χώρο της προσομοίωσης και δημιουργούν την τρέχουσα κάθε φορά γεωμετρία του προβλήματος. Παρατηρείται ότι υπάρχει μία ιεραρχία στο δέντρο αυτό. Κάποια αντικείμενα (είτε είναι αντικείμενα πλέγματος είτε αντικείμενα γεωμετρίας) βρίσκονται πιο ψηλά από άλλα σε αυτήν την ιεραρχία. Όταν δημιουργείται το πλέγμα-“meshing”, τα αντικείμενα που βρίσκονται πιο ψηλά στην ιεραρχία υπερισχύουν έναντι των άλλων. Αυτό θα φανεί και στην πράξη, στο Κεφάλαιο 5.

Στην Εικόνα 3.6, απεικονίζεται το μεγαλύτερο μέρος του παραθύρου γεωμετρίας, πριν γίνει εισαγωγή ή κατασκευή κάποιου αντικειμένου. Μπορεί να θεωρηθεί ότι η περιοχή απεικόνισης αντιπροσωπεύει ένα συγκεκριμένο τρισδιάστατο πλέγμα από σημεία. Τα σημεία αυτά απέχουν κάποια απόσταση μεταξύ τους. Αν αφαιρεθεί ο κέρσορας του ποντικιού μέσα σε αυτή την αρχικά μαύρη περιοχή, τότε αυτός θα δείχνει σε κάποιο σημείο του πλέγματος. Οι συντεταγμένες αυτού του σημείου, σε σχέση με ένα σταθερό σημείο O , το οποίο θεωρείται ως αρχή ενός δεξιόστροφου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, φαίνονται δίπλα στην επιγραφή **Spatial location (mm)**. Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται, είναι κατά σύμβαση τα χιλιοστά (mm). Αν ο χρήστης επιθυμεί, μπορεί να τις αλλάξει. Αριστερά από την περιοχή απεικόνισης υπάρχουν τέσσερις μικρότερες περιοχές-Εικόνα 3.6 Αν έχει απλά εισαχθεί ή δημιουργηθεί μία γεωμετρία στερεού, χωρίς να έχει δημιουργηθεί το υπολογιστικό πλέγμα, τότε η περιοχή 2-XY View- απεικονίζει αυτό που θα έβλεπε υποθετικά ένας παρατηρητής, αν βρισκόταν σε ένα επίπεδο με εξίσωση $z = z_0$ “πάνω” από το αντικείμενο και κατευθυνόταν προς τα αρνητικά z . Οι περιοχές 3 και 4-YZ View και ZX View- απεικονίζουν αντίστοιχες τομές του χώρου του προβλήματος.



Εικόνα 3.6: Απεικόνιση μέρους του παραθύρου γεωμετρίας.

Η μικρή περιοχή με τον αριθμό 5 στην Εικόνα 3.6 απεικονίζει τον προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων του προγράμματος που αντιπροσωπεύει τις περιστροφές που έχουν γίνει στη κύρια περιοχή του παραθύρου, με χρήση του εργαλείου εκτέλεσης τροχιάς: . Κάνοντας ο χρήστης αριστερό «κλικ» μέσα στην περιοχή 5 μπορεί να έχει μία τρισδιάστατη απεικόνιση του προβλήματος.

Εφόσον εισάγει ο χρήστης ένα ή περισσότερα αντικείμενα σε ποικίλα σχήματα, είτε από κάποιο αρχείο είτε τα δημιουργήσει απευθείας στο πρόγραμμα, σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να περιστρέψει αυτά τα αντικείμενα () , ή να τα μετακινήσει () , να τα παρατηρήσει από πολύ κοντινή ή μακρινή απόσταση (, ) , να τα ονομάσει-μετονομάσει, να τα μεγεθύνει, να τα μικρύνει, να εισάγει διάφορα υλικά σε αυτά, και γενικά να τα επεξεργαστεί. Τα υλικά που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει δεν περιορίζονται μόνο σε αυτά που περιέχονται στο πρόγραμμα. Καταρχάς, υπάρχει η δυνατότητα να προσομοιωθεί ο ελεύθερος χώρος. Μπορεί επιπλέον να προσομοιωθεί μία μεγάλη ποικιλία, από ηλεκτρικά και μαγνητικά υλικά. Συγκεκριμένα ,μπορούν να προσομοιωθούν τέλεια αγωγίμα ηλεκτρικά και μαγνητικά υλικά και μάλιστα οι υπολογισμοί με αυτά τα υλικά να είναι σχετικά απλοί [1]. Με το πρόγραμμα XFDTD μπορεί ο χρήστης να προσομοιώσει διηλεκτρικά και μαγνητικά υλικά των οποίων οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες δεν εξαρτώνται από τη συχνότητα, αλλά και υλικά μέσα που έχουν ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες εξαρτώμενες από τη συχνότητα, χαρακτηρίζονται δηλαδή από το φαινόμενο της διασποράς (dispersive materials [1]). Γενικά ο χρήστης μπορεί να προσομοιώσει υλικά σχεδόν με οποιοσδήποτε ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες (ηλεκτρική αγωγιμότητα, διηλεκτρική σταθερά, μαγνητική διαπερατότητα κα) αυτός επιθυμεί. Όλα αυτά μπορούν να γίνουν μέσα από το παράθυρο Geometry->View.

Αφού εισάγει ο χρήστης την επιθυμητή γεωμετρία αντικειμένων στο πρόγραμμα και τα κατάλληλα υλικά, δημιουργεί με τους κατάλληλους χειρισμούς το αντίστοιχο πλέγμα. Σε κάποιες περιπτώσεις ίσως χρειαστεί να κάνει ο χρήστης κάποιες αλλαγές στο πλέγμα που δημιουργείται από το πρόγραμμα. Οι παράμετροι πάντως που σχετίζονται με τη δημιουργία του πλέγματος (πχ. ορισμός του μήκους της ακμής του κελιού) ορίζονται από τον χρήστη, μέσα από την ετικέτα *Mesh*.

3.5.2. Αντικείμενα πλέγματος (mesh objects)

Πρέπει να επισημανθεί ότι στο πρόγραμμα XFDTD χρησιμοποιούνται κυρίως δύο ειδών «αντικείμενα» (objects), το «αντικείμενο γεωμετρίας» (geometry object) και το «αντικείμενο πλέγματος» (mesh object). Τα γεωμετρικά σχήματα στην Εικόνα 3.4, είναι παραδείγματα αντικειμένων γεωμετρίας. Πολλές φορές όμως χρειάζεται να εισαχθεί ένα αντικείμενο πλέγματος στο πρόγραμμά μας ή και να δημιουργηθεί ένα, μέσα από το πρόγραμμα.

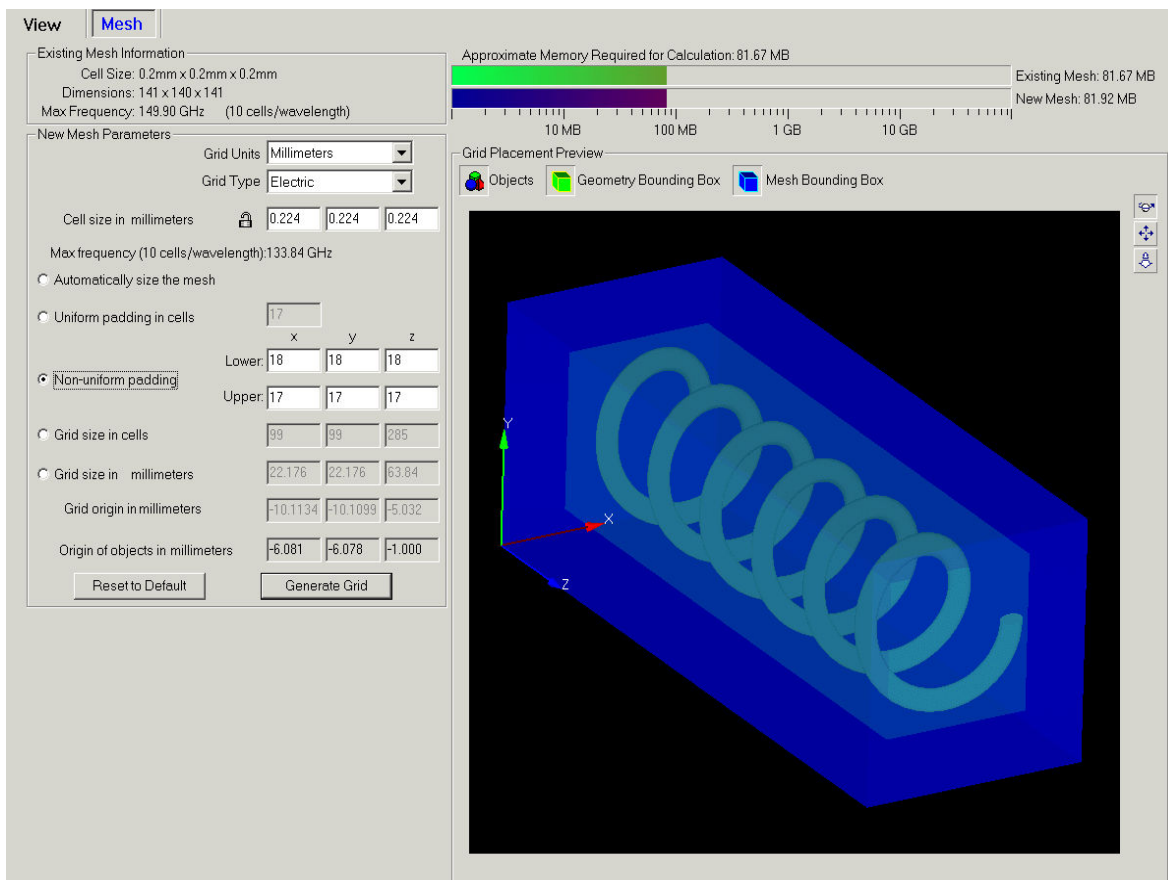
Τα αντικείμενα πλέγματος αποθηκεύονται ξεχωριστά από το κύριο υπολογιστικό πλέγμα. Αποθηκεύονται σε εξωτερικά αρχεία με την κατάληξη .mesh. Αυτά τα αρχεία mesh περιέχουν ορισμούς υλικών, την περιγραφή του XFDTD πλέγματος του αντικειμένου και άλλες πληροφορίες που αφορούν στο πλέγμα. Ένα αντικείμενο πλέγματος μπορεί να δημιουργηθεί με τρεις διαφορετικούς τρόπους (βλ. σελίδα 5-27 του [1]). Αναφέρονται οι εξής δύο που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία:

- α) Φόρτωση των δεδομένων που αφορούν το πλέγμα, από ένα ήδη υπάρχον αρχείο πλέγματος με κατάληξη .mesh.
β) Δημιουργία ενός αρχείου mesh από ένα ήδη υπάρχον αρχείο mesh [1].

Πληροφοριακά, αναφέρεται ότι ο χρήστης του προγράμματος μπορεί να εκτελέσει με τα αντικείμενα πλέγματος σχεδόν ό,τι λειτουργίες μπορεί να εκτελέσει με τα αντικείμενα γεωμετρίας, αλλά συνήθως με περισσότερη δυσκολία.

3.5.3. Η ετικέτα Mesh

Η ετικέτα Mesh (*Mesh tab*) είναι το διασυνδεδετικό στοιχείο μεταξύ μίας δεδομένης γεωμετρίας και του τελικού πλέγματος στο χώρο. Είναι η δεύτερη επιλογή που είναι διαθέσιμη αν ενεργοποιηθεί η ετικέτα Geometry (η πρώτη είναι η ετικέτα View). Εδώ μπορεί κανείς να ρυθμίσει το μέγεθος του κάθε κελιού, να καθορίσει τις διαστάσεις του πλέγματος και να προσαρμόσει τη μνήμη που θα χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα για τους υπολογισμούς με βάση αυτήν που είναι διαθέσιμη από το σύστημα. Παρακάτω (Εικόνα 3.7) απεικονίζεται ένα στιγμιότυπο του παραθύρου που εμφανίζεται αν «κάνουμε κλικ» στην ετικέτα mesh.



Εικόνα 3.7: Το παράθυρο που εμφανίζεται με την ενεργοποίηση της ετικέτας Mesh.

Πάνω αριστερά, στην Εικόνα 3.7, στο πλαίσιο Existing Mesh Information, φαίνεται το μέγεθος του κελιού, οι διαστάσεις του χώρου και η μέγιστη συχνότητα που μπορεί κανείς

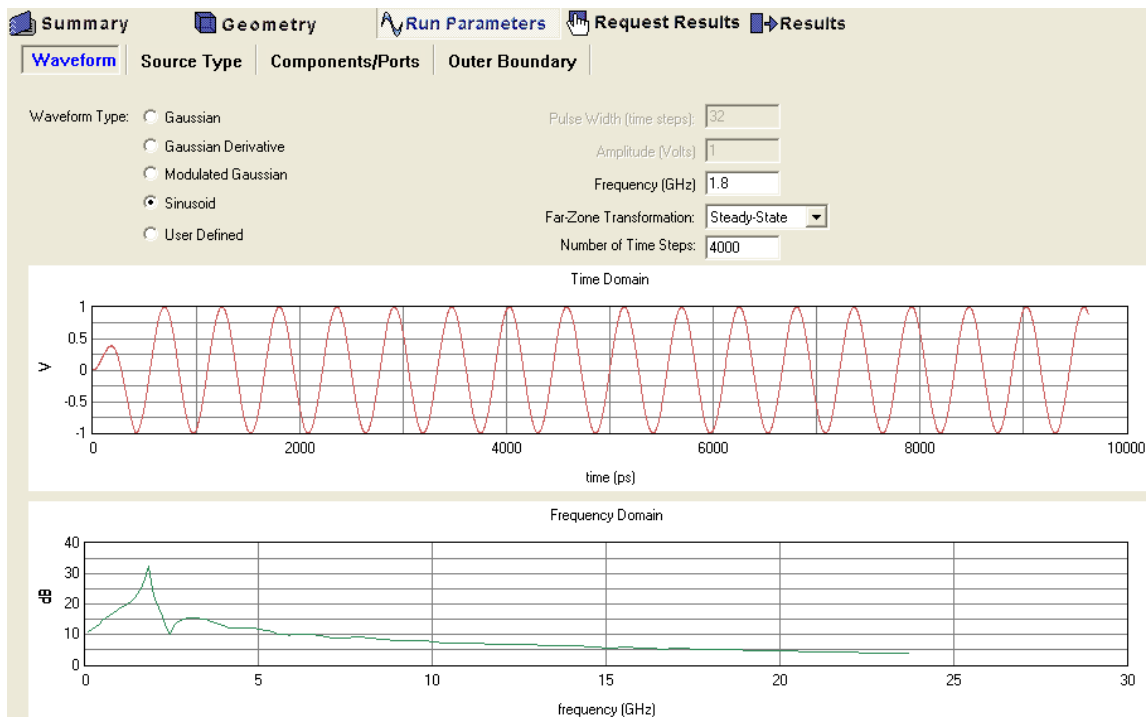
να έχει. Η μέγιστη συχνότητα στο πλαίσιο Existing Mesh Information αναφέρεται στον ελεύθερο χώρο. Αν υπάρχουν υλικά στο πρόβλημά, όπως συμβαίνει τις περισσότερες φορές, η πραγματική μέγιστη συχνότητα θα είναι μικρότερη από αυτήν. Κατά συνέπεια χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στον προσδιορισμό της μέγιστης συχνότητας που μπορεί να υποστηριχθεί προκειμένου η ακρίβεια της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου να είναι ικανοποιητική.

Πάνω δεξιά, στο πλαίσιο Grid Placement Preview υπάρχουν τρία «κουμπιά» (Objects, Geometry Bounding Box, Mesh Bounding Box). Τα δύο Bounding Boxes μπορούν να θεωρηθούν μεγάλα άυλα κελιά-«κουτιά». Μέσα στο Geometry Bounding Box βρίσκεται το αντικείμενο ή τα αντικείμενα ενώ το Mesh Bounding Box είναι ολόκληρο το υπολογιστικό πλέγμα. Τα όρια του κουτιού αυτού, είναι τα όρια του υπολογιστικού πλέγματος.

Κάτω από το πλαίσιο Existing Mesh Information υπάρχει το πλαίσιο New Mesh Parameters που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό των παραμέτρων που αφορούν το FDTD πλέγμα. Μέσα από αυτό μπορεί ο χρήστης να καθορίσει το μέγεθος του κελιού, τις μονάδες μέτρησης, τον τύπο (ηλεκτρικό ή μαγνητικό πλέγμα) και το μέγεθος του πλέγματος καθώς και τον τρόπο με τον οποίο γίνεται το «γέμισμα» (“padding”) με επιπλέον κελιά από αυτά που βρίσκονται μέσα στα όρια του Geometry Bounding Box για την αποφυγή ανακλάσεων. Το μέγεθος του κελιού μπορεί να αλλάζει αυτόματα από το πρόγραμμα, για αυτό, αν ο χρήστης θέλει να το διατηρήσει σταθερό πρέπει να «κάνει κλικ» στο εικονίδιο με το λουκέτο. Όπως φαίνεται και από την Εικόνα 3.7, υπάρχουν πέντε διαφορετικοί τρόποι για να καθοριστούν οι διαστάσεις του FDTD χώρου του προβλήματος. Αφού έχουν καθοριστεί όλες οι παράμετροι, επιλέγοντας το “Generate Mesh”, ο χρήστης δίνει την εντολή στο πρόγραμμα XFDTD να ξεκινήσει τη δημιουργία του πλέγματος. Μόλις δημιουργηθεί το πλέγμα, μπορεί κανείς να το δει επιλέγοντας την ετικέτα View και μετά “Mesh Mode”.

3.6. Ηλεκτρομαγνητικές πηγές και Διεγέρσεις

Έπειτα από τη δημιουργία της γεωμετρίας και του πλέγματος, το επόμενο βήμα είναι ο καθορισμός της διέγερσης. Η μορφή της διέγερσης εξαρτάται από την εφαρμογή. Επιλέγοντας την ετικέτα Run Parameters και μετά την ετικέτα Waveform μπορεί ο χρήστης να καθορίσει τον τύπο της κυματομορφής που θέλει να χρησιμοποιήσει. Όπως φαίνεται στην Εικόνα 3.8 για τις μετρήσεις που εκτελέστηκαν κατά την παρούσα εργασία επιλέχθηκε ημιτονοειδής είσοδος σε 1.8 GHz συχνότητα και έξοδος στη μόνιμη κατάσταση. (Δεν έγινε πάντως επιλογή του ίδιου αριθμού βημάτων με αυτόν που φαίνεται στην εικόνα). Άλλες δυνατότητες που έχει ο χρήστης είναι η επιλογή διέγερσης με μορφή παλμού Gauss η οποία είναι δυνατόν να χαρακτηρίζεται από διάφορες παραμέτρους αλλά και η χρησιμοποίηση κυματομορφής σχεδόν εξ’ ολοκλήρου ορισμένης από το χρήστη (User Defined).

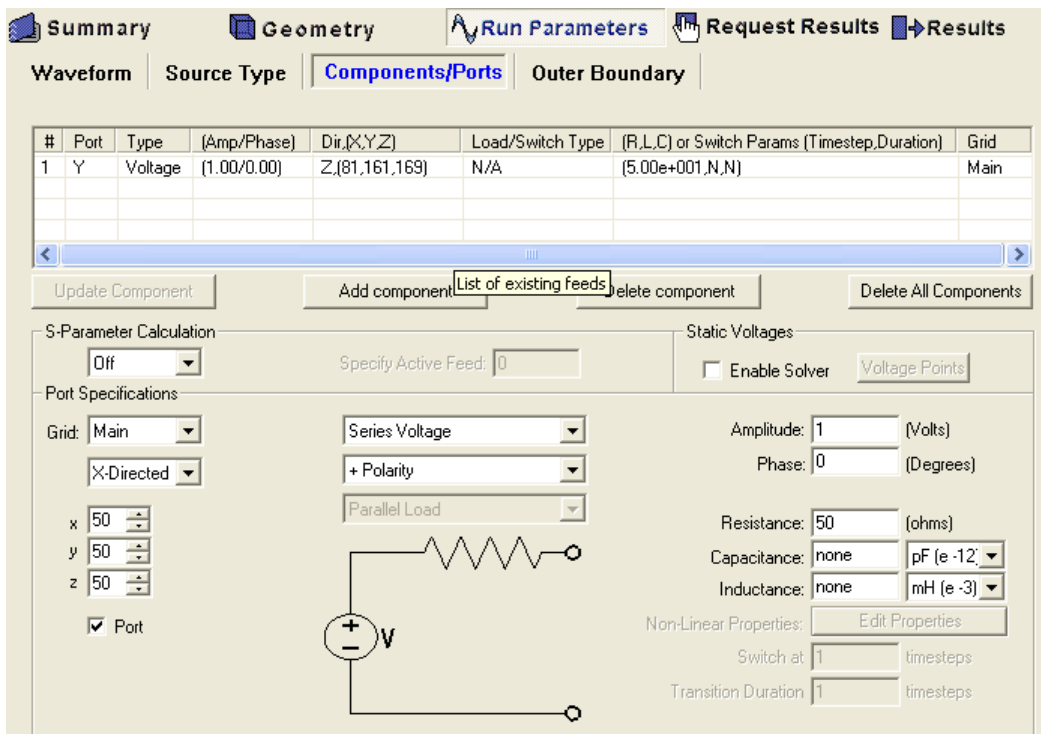


Εικόνα 3.8: Παράδειγμα καθορισμού τύπου κυματομορφής.

Υπάρχουν τρεις κύριες επιλογές για τη μορφή της εισόδου στο πρόγραμμα XFDTD. Για να καθορίσει κανείς τη μορφή εισόδου που επιθυμεί, πρέπει να επιλέξει στην ετικέτα Run Parameters την ετικέτα Source Type. Όταν χρησιμοποιείται ως είσοδο μία πηγή τάσης ή ρεύματος, πρέπει να επιλεγεί η επιλογή Discrete Sources, η οποία είναι και η κατά σύμβαση επιλογή. Μία discrete source («διακριτή πηγή») είναι μία ακμή ενός κελιού πάνω στην οποία το ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει με την προσθήκη κάποιου τύπου κυματομορφής εισόδου. Όταν επιλεγεί μία διακριτή πηγή, μπορούν να προστεθούν πηγές τάσης και ρεύματος από την ετικέτα Components/Ports. Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή όσον αφορά στην σωστή τοποθέτηση των πηγών τάσης ή ρεύματος.

Στην Εικόνα 3.9, απεικονίζεται μία περίπτωση όπου έχει γίνει εισαγωγή μίας πηγής τάσης (Type:Voltage) στο σημείο (81,161,169) και κατά τη διεύθυνση z. Το πλάτος της πηγής είναι 1 volt και η φάση της 0 μοίρες. Πρέπει να επισημανθεί ότι ο καθορισμός του σημείου στο οποίο εισάγεται η πηγή γίνεται με χρησιμοποίηση κελιών και όχι χιλιοστών ως συντεταγμένων. Για παράδειγμα αν χρησιμοποιούνται κυβικά κελιά, το σημείο στο οποίο έγινε η εισαγωγή είναι το σημείο $(81 * \text{μήκος_ακμής_κελιού}, 161 * \text{μήκος_ακμής_κελιού}, 169 * \text{μήκος_ακμής_κελιού})$

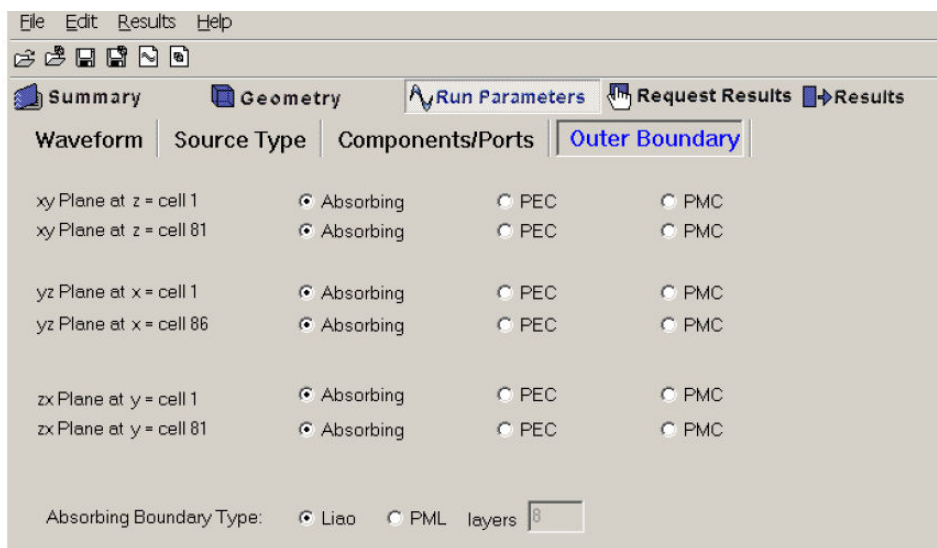
Οι δύο άλλες δυνατές επιλογές για τη μορφή της εισόδου δε χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία αυτή. Παρόλα αυτά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [1].



Εικόνα 3.9: Παράδειγμα τοποθέτησης πηγών διεγέρσεων

3.7. Οριακές συνθήκες απορρόφησης

Από τις οριακές συνθήκες που είναι διαθέσιμες προς χρησιμοποίηση από το πρόγραμμα, χρησιμοποιήθηκαν οι οριακές συνθήκες απορρόφησης Liao. Αυτές οι οριακές συνθήκες διασφαλίζουν ότι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα διαδίδονται έξω από τα όρια της υπολογιστικής περιοχής χωρίς να ανακλώνται. Ο χρήστης μπορεί να καθορίσει τις οριακές συνθήκες που χρησιμοποιεί το πρόγραμμα μέσω των ετικετών Run Parameters->Outer boundary (Εικόνα 3.10) [1].



Εικόνα 3.10: Παράδειγμα καθορισμού οριακών συνθηκών απορρόφησης.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Remcom, “xfdtd 6 - fdtd for professionals - Reference Manual”, Version 6.0, Remcom, 2003.

[2] Β.Τρίαντος, Β.Τσακανίκας “Συγκριτική Εκτίμηση της Απορρόφησης Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας κατά τη Χρήση Τερματικών Συσκευών Κινητών Επικοινωνιών από Παιδιά και Ενήλικες με Χρήση της Μεθόδου FDTD”, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2005.

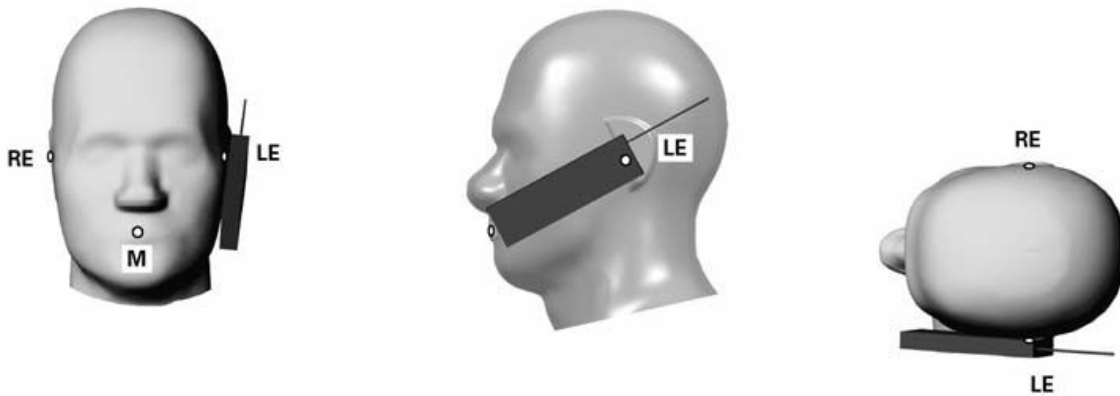
Κεφάλαιο 4

Καθορισμός τοποθέτησης της κινητής τερματικής συσκευής σε σχέση με ανατομικά μοντέλα κεφαλιών.

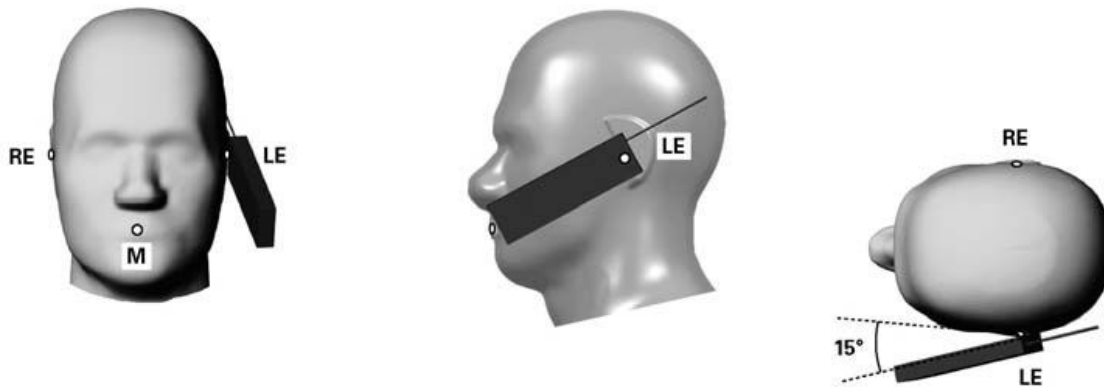
4.1. Εισαγωγή

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζεται ο ορισμός της “right cheek” (Κεφάλαιο 1) τοποθέτησης των κινητών τηλεφώνων σε σχέση με ανατομικά μοντέλα κεφαλιών για τις ανάγκες αριθμητικής μελέτης προσομοίωσης. Αυτός ο ορισμός, ο οποίος αναφέρεται στο [1] (έγινε απλή αναφορά και στο Κεφάλαιο 1), προτείνεται από τους συγγραφείς του άρθρου αυτού για να ακολουθείται ως προτυποποίηση προκειμένου να είναι δυνατή η

σύγκριση των αποτελεσμάτων διαφορετικών μελετών οι οποίες χρησιμοποιούν διαφορετικά ανατομικά μοντέλα. Προτείνεται δηλαδή, να τοποθετείται το εκάστοτε μοντέλο κινητού σε μία συγκεκριμένη θέση σε σχέση με το εκάστοτε ανατομικό μοντέλο κεφαλιού, έτσι ώστε να είναι δυνατή η σύγκριση μεταξύ των αποτελεσμάτων ηλεκτρομαγνητικών προσομοιώσεων που εκτελούνται από διαφορετικές ερευνητικές ομάδες για τις ίδιες συνθήκες έκθεσης. Ο ορισμός αυτός είναι σύμφωνος με τον ορισμό της “right cheek position”(Ενότητα 1.7) που έχει οριστεί στα πρότυπα EN 50361-2001 και IEEE 1528-2003 [2] με βάση το μοντέλο SAM (Κεφάλαιο 1). Έχουν γίνει φυσικά οι απαραίτητες μετατροπές κυρίως λόγω του γεγονότος ότι το εξωτερικό μέρος του αυτιού (pinna =outer ear) είναι επίπεδο και καθορισμένο στο μοντέλο SAM σε αντίθεση με την ποικιλία και την ανομοιότητα που παρουσιάζεται μεταξύ των εξωτερικών μερών του αυτιού στα διάφορα ανατομικά μοντέλα [1].Από τον ορισμό αυτό μπορούν εύκολα να εξαχθούν και οι υπόλοιποι τρεις ορισμοί που αντιστοιχούν στους υπόλοιπους τρεις που δίδονται στο [2] (Ενότητα 1.7,Εικόνα 4.1α,Εικόνα 4.1β) .



Εικόνα 4.1α: Left cheek position στο μοντέλο SAM.



Εικόνα 4.1β: Left tilted position στο μοντέλο SAM.

4.2. Ο ορισμός των σημείων αναφοράς και των επιπέδων αναφοράς για τα ανατομικά μοντέλα κεφαλιών

Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται στο [1] η «σωστή» τοποθέτηση του κινητού τηλεφώνου σε σχέση με το κεφάλι (με το εκάστοτε ανατομικό μοντέλο κεφαλιού που χρησιμοποιείται) βασίζεται στη χρησιμοποίηση κάποιων σημείων του κεφαλιού, τα σημεία του οποίου θεωρούνται στην παρούσα εργασία ότι είναι στοιχεία ενός σημειακού χώρου (affine space), έστω \mathcal{U} (βλ. ενότητα Π.2.2 στο Παράρτημα 2). Με βάση αυτά που αναφέρονται στο Παράρτημα 2, οι έννοιες της ευκλείδειας γεωμετρίας έχουν ερμηνεία και σε αυτόν τον υποθετικό χώρο \mathcal{U} .

Για να τοποθετηθεί στη «σωστή» θέση το κινητό σε σχέση με το κεφάλι (ή πιο ορθά το κεφάλι σε σχέση με το κινητό) με βάση το [1], πρέπει αρχικά να οριστεί αυτό που αναφέρεται στο [1] ως *επίπεδο αναφοράς (reference plane)*. Ο ορισμός αυτού του επιπέδου, βασίζεται σε ανατομικά χαρακτηριστικά του εκάστοτε μοντέλου κεφαλιού [1]. Δεν αρκεί όμως, φυσικά, ο ορισμός του επιπέδου αναφοράς για να καθορίσει κανείς τη θέση του κινητού τηλεφώνου σε σχέση με το μοντέλο κεφαλιού που χρησιμοποιείται. Τα επίπεδα και οι ευθείες που χρειάζονται για τον καθορισμό της θέσης του κινητού τερματικού, βασίζονται σε δύο σύνολα σημείων που ανήκουν στο κεφάλι [1]:

1) Το πρώτο σύνολο σημείων του κεφαλιού που χρησιμοποιείται για τον ορισμό του επιπέδου αναφοράς, και όχι μόνο, αποτελείται από τα 3 παρακάτω σημεία:

- Το σημείο EECL (entrance to ear canal left)-θα συμβολίζεται για συντομία ως σημείο L .
- Το σημείο EECR (entrance to ear canal right)-θα συμβολίζεται για συντομία ως σημείο R .
- Το σημείο M (mouth point).

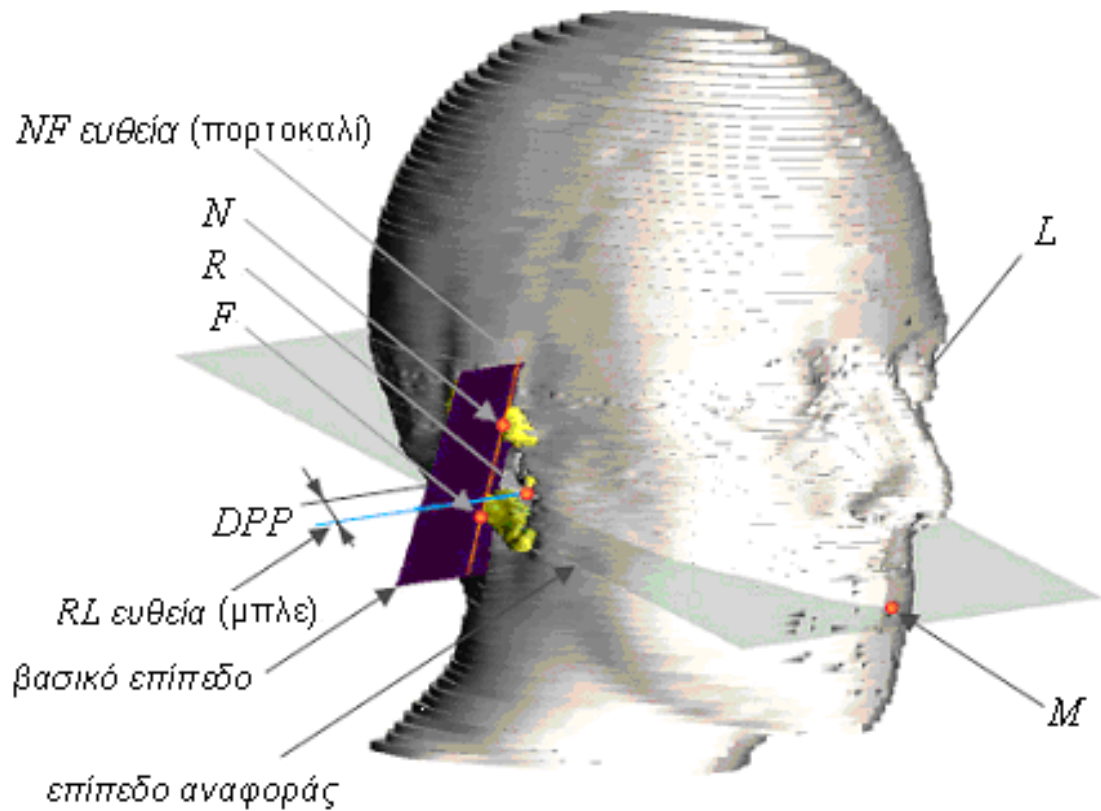
Το σημείο EECL είναι το σημείο εισόδου στο κανάλι του αριστερού αυτιού. Το σημείο EECR είναι το σημείο εισόδου στο κανάλι του δεξιού αυτιού. Το σημείο M είναι το σημείο εισόδου του στόματος.

2) Το δεύτερο σύνολο σημείων αποτελείται από:

- Το σημείο N .
- Το σημείο F .
- Το σημείο T .

Παρακάτω θα φανεί πώς ορίζονται τα σημεία N , F , T .

Στην Εικόνα 4.2 που ακολουθεί, απεικονίζονται το πρώτο και το δεύτερο σύνολο σημείων (με εξαίρεση το σημείο T) αλλά και κάποιοι γεωμετρικοί τόποι (στον \mathcal{U}) που θα οριστούν στη συνέχεια:



Εικόνα 4.2: Ένα μοντέλο κεφαλιού με ορισμένα χαρακτηριστικά σημεία και γεωμετρικούς τόπους (στον \mathcal{U}) που χρησιμοποιούνται για την τοποθέτηση του κινητού τηλεφώνου.

Ας θεωρηθεί ένα τυχαίο σταθερό σημείο $O \in \mathcal{U}$ ως αρχή ενός τυχαίου, σταθερού δεξιόστροφου ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων στον \mathcal{U} (βλ. Παραρτήματα 1 και 2). Το σημείο αυτό έχει συντεταγμένες $(0, 0, 0)$.

Έστω ότι τα σημεία L, R και M του κεφαλιού, έχουν συντεταγμένες $L(x_L, y_L, z_L), R(x_R, y_R, z_R), M(x_M, y_M, z_M)$ αντίστοιχα. Έστω $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{o_L}, \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{o_R}, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{o_M}$ τα διανύσματα θέσης των σημείων L, R, M αντίστοιχα. Ισχύουν:

$$\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{o_L} = x_L \hat{x} + y_L \hat{y} + z_L \hat{z}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{o_R} = x_R \hat{x} + y_R \hat{y} + z_R \hat{z}$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{o_M} = x_M \hat{x} + y_M \hat{y} + z_M \hat{z}$$

Με βάση το πρώτο σύνολο σημείων, που αποτελείται από τα τρία σημεία L, R, M , τα οποία προφανώς δεν είναι συνευθειακά, είναι δυνατόν όπως ειπώθηκε να οριστεί το επίπεδο αναφοράς με τον εξής τρόπο:

Έστω το (ελεύθερο) διάνυσμα $\overrightarrow{l_r} = \overrightarrow{LR}$. Ισχύει:

$$\vec{l}_R = \vec{o}_R - \vec{o}_L = (x_R - x_L)\hat{x} + (y_R - y_L)\hat{y} + (z_R - z_L)\hat{z}.$$

Επίσης για το (ελεύθερο) διάνυσμα $\vec{l}_M = \vec{LM}$, ισχύει:

$$\vec{l}_M = \vec{o}_M - \vec{o}_L = (x_M - x_L)\hat{x} + (y_M - y_L)\hat{y} + (z_M - z_L)\hat{z}.$$

Τα δύο αυτά διανύσματα είναι μη συγγραμμικά και παράλληλα προς το επίπεδο αναφοράς. Επιπρόσθετα, όπως σημειώθηκε παραπάνω, το επίπεδο αναφοράς διέρχεται από το σημείο $L(x_L, y_L, z_L)$. Είναι δυνατόν επομένως να οριστεί με μοναδικό τρόπο το επίπεδο αναφοράς με βάση όσα παρουσιάζονται στο Π.1.11, χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\vec{l}_{RM} = \vec{l}_R \times \vec{l}_M$, που είναι κάθετο στο επίπεδο αναφοράς και έχει συγκεκριμένες συνιστώσες για τις δεδομένες συντεταγμένες των σημείων L, R, M (σχέση π.1.12 για

$$\vec{\alpha} = \vec{l}_R = (x_R - x_L)\hat{x} + (y_R - y_L)\hat{y} + (z_R - z_L)\hat{z}$$

$$\vec{\beta} = \vec{l}_M = (x_M - x_L)\hat{x} + (y_M - y_L)\hat{y} + (z_M - z_L)\hat{z},$$

και το σημείο $L(x_L, y_L, z_L)$, και να βρεθεί και η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου αυτού. Με βάση αυτήν την εξίσωση είναι δυνατό να μοντελοποιηθεί το επίπεδο αναφοράς στο πρόγραμμα XFDTD με τρόπο που θα φανεί στο Κεφάλαιο 5.

Επομένως μέχρι στιγμής έχει οριστεί το επίπεδο αναφοράς, με μοναδικό (φυσικά) τρόπο από τα τρία μη συνευθειακά σημεία L, R, M . Ένας άλλος χρήσιμος ορισμός, είναι αυτός της *RL ευθείας*, που συμβολίζεται ως *EEC-line* στο [1] και η οποία ορίζεται από τα σημεία R και L .

Έπειτα από τον ορισμό του επιπέδου αναφοράς και της *RL ευθείας*, πρέπει με βάση το [1] να βρεθεί η απόσταση *DPP*. Η απόσταση αυτή, υπολογίζεται από τον τύπο [1]:

$$DPP = 15mm \times \left\{ \frac{|EECL - M| + |EECR - M|}{2 \times 145.5mm} \right\}$$

Στο [1], συμβολίζονται με $|EECL - M|$ και $|EECR - M|$ οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων L, M και L, R αντίστοιχα. Στην παρούσα εργασία συμβολίζονται με $d(L, M)$ και $d(R, M)$ αντίστοιχα. Αυτές οι αποστάσεις, μπορούν να υπολογιστούν, επειδή είναι γνωστές οι συντεταγμένες των σημείων L, R, M , σύμφωνα με τη σχέση π.1.4 για $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = L(x_L, y_L, z_L), B(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = M(x_M, y_M, z_M)$

και $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = R(x_R, y_R, z_R), B(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = M(x_M, y_M, z_M)$. Επομένως μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση *DPP*, που για τους υιοθετημένους σε αυτήν την εργασία συμβολισμούς, παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$DPP = 15mm \times \left\{ \frac{d(L, M) + d(R, M)}{2 \times 145.5mm} \right\}$$

όπου πρέπει να τονιστεί ότι όλες οι αποστάσεις είναι απαραίτητο να είναι δοσμένες σε χιλιοστά (mm). Γενικά στο χώρο \mathcal{U} τα μέτρα των διανυσμάτων και κατά συνέπεια οι αποστάσεις, θεωρούνται δοσμένα σε «φανταστικά» χιλιοστά.

Η απόσταση *DPP* πρέπει να υπολογιστεί επειδή είναι απαραίτητη για την εύρεση της εξίσωσης του *βασικού επιπέδου (pivot plane)* [1] που είναι το επόμενο επίπεδο που πρέπει να οριστεί για να επιτευχθεί εν τέλει η «σωστή» τοποθέτηση του κινητού σε σχέση με το κεφάλι.

Η RL ευθεία που ενώνει τα σημεία L, R , ανήκει στο επίπεδο αναφοράς, εφόσον τα σημεία L, R ανήκουν και τα δύο στο επίπεδο αναφοράς. Η ευθεία αυτή χωρίζει το επίπεδο αναφοράς σε δυο ημιεπίπεδα. Ένα που περιέχει το M και ένα που δεν το περιέχει. Έστω (π_1) και (π_2) τα δύο αυτά ημιεπίπεδα αντίστοιχα. Έστω (Π) το (μοναδικό) επίπεδο που:

- α) είναι κάθετο στο επίπεδο αναφοράς και
- β) περιέχει την RL ευθεία.

Σύμφωνα με το [1], το βασικό επίπεδο ορίζεται ως το επίπεδο το οποίο:

- α) είναι κάθετο στο επίπεδο αναφοράς
- β) είναι παράλληλο στην RL ευθεία
- γ) απέχει από την RL ευθεία απόσταση DPP και βρίσκεται «πίσω» από τη γραμμή αυτή (Εικόνα 4.3)

Ένας ισοδύναμος ορισμός, που δίνεται στην παρούσα εργασία, είναι ο παρακάτω: Το βασικό επίπεδο ορίζεται ως το επίπεδο το οποίο:

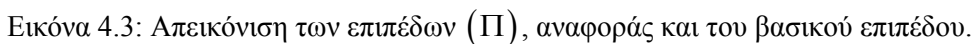
- α) είναι κάθετο στο επίπεδο αναφοράς
- β) είναι παράλληλο στην RL ευθεία
- γ) απέχει από την RL ευθεία απόσταση DPP και
- δ) τέμνει το ημιεπίπεδο (π_2) .

Δηλαδή το βασικό επίπεδο είναι παράλληλο στο (Π) , απέχει από αυτό απόσταση DPP και τέμνει το ημιεπίπεδο (π_2) (Εικόνα 4.3).

Το βασικό επίπεδο είναι παράλληλο στο διάνυσμα \overrightarrow{LR} , εφόσον είναι παράλληλο στην RL ευθεία. Επίσης, είναι παράλληλο στο διάνυσμα $\overrightarrow{l_{RM}} = \overrightarrow{l_R} \times \overrightarrow{l_M}$, επειδή το $\overrightarrow{l_{RM}}$ είναι κάθετο στο επίπεδο αναφοράς (Εικόνα 4.3). Το εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{l_R}, \overrightarrow{l_{RM}}$ (τα οποία είναι μη συγγραμμικά) είναι ένα διάνυσμα $\vec{l} = \overrightarrow{l_R} \times \overrightarrow{l_{RM}}$ που είναι κάθετο στο βασικό επίπεδο. Αφού όμως το βασικό επίπεδο είναι παράλληλο στο (Π) , τότε κάθε διάνυσμα που είναι κάθετο στο (Π) , θα είναι κάθετο και στο βασικό επίπεδο και σε όλα γενικά τα επίπεδα που είναι παράλληλα στο (Π) . Έτσι, με χρήση του διανύσματος

$$\vec{l} = \overrightarrow{l_R} \times (\overrightarrow{l_R} \times \overrightarrow{l_M}) \quad (4.1)$$

,είναι δυνατόν να οριστεί κάθε ένα από όλα αυτά τα παράλληλα επίπεδα, αν είναι γνωστή και η γεωμετρική τοποθέτηση ενός σημείου του καθενός (Εικόνα 4.3).



Για την εύρεση ενός σημείου του βασικού επιπέδου μπορεί να χρησιμοποιηθεί το σημείο R . Για να βρεθεί η *προβολή* του σημείου R πάνω στο επίπεδο (π) που είναι παράλληλο στο (Π) και απέχει από αυτό απόσταση DPP (υπάρχουν δύο τέτοια επίπεδα), πρέπει να σχεδιαστεί νοητά η ευθεία που περνάει από το R και είναι κάθετη στο (π) .

Το σημείο στο οποίο αυτή η κάθετη τέμνει το επίπεδο (π) , είναι ένα σημείο— έστω K - που ανήκει στο (π) . Έστω $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{o_K}$ το διάνυσμα θέσης του σημείου K . Προσοχή πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι το σημείο K αντιπροσωπεύει δύο σημεία του χώρου \mathcal{U} .

Το μέτρο του διανύσματος \overrightarrow{RK} , είναι ίσο με την απόσταση DPP , δηλαδή $|\overrightarrow{RK}| = DPP$ (4.2).

Το διάνυσμα $\overrightarrow{r_K} = \overrightarrow{RK}$ (4.3) είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα \vec{l} , εφόσον το (π) είναι παράλληλο στο (Π) . Αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι (σχέση π.1.2 για $\vec{\alpha} = \overrightarrow{r_K}, \vec{\beta} = \vec{l}$)

υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^*$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{r_K} = \lambda \vec{l}$ (4.4).

Η (4.2) με χρήση της (4.3) και της (4.4), γίνεται:

$$DPP = |\lambda \vec{l}| = |\lambda| |\vec{l}| \Leftrightarrow$$

$$\lambda = \frac{DPP}{|\vec{l}|} \text{ ή } \lambda = -\frac{DPP}{|\vec{l}|}$$

Η (4.4), εφόσον $\overrightarrow{RK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OR}$ γράφεται και ως:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{r_K} = \lambda \vec{l} &\Leftrightarrow \overrightarrow{o_K} - \overrightarrow{o_R} = \lambda \vec{l} \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{o_K} &= \overrightarrow{o_R} + \lambda \vec{l} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Η τελευταία σχέση δίνει τη θέση του K . Το K ανήκει στο επίπεδο (π) , το οποίο μπορεί να είναι ή:

α) το επίπεδο που είναι στο παράλληλο στο (Π) , απέχει από αυτό απόσταση DPP και τέμνει το ημιεπίπεδο (π_1) ή

β) το επίπεδο που είναι παράλληλο στο παράλληλο στο (Π) , απέχει από αυτό απόσταση DPP και τέμνει το ημιεπίπεδο (π_2) (βασικό επίπεδο), ανάλογα με το αν το $\overrightarrow{r_K} = \lambda \vec{l}$ είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το \vec{l} .

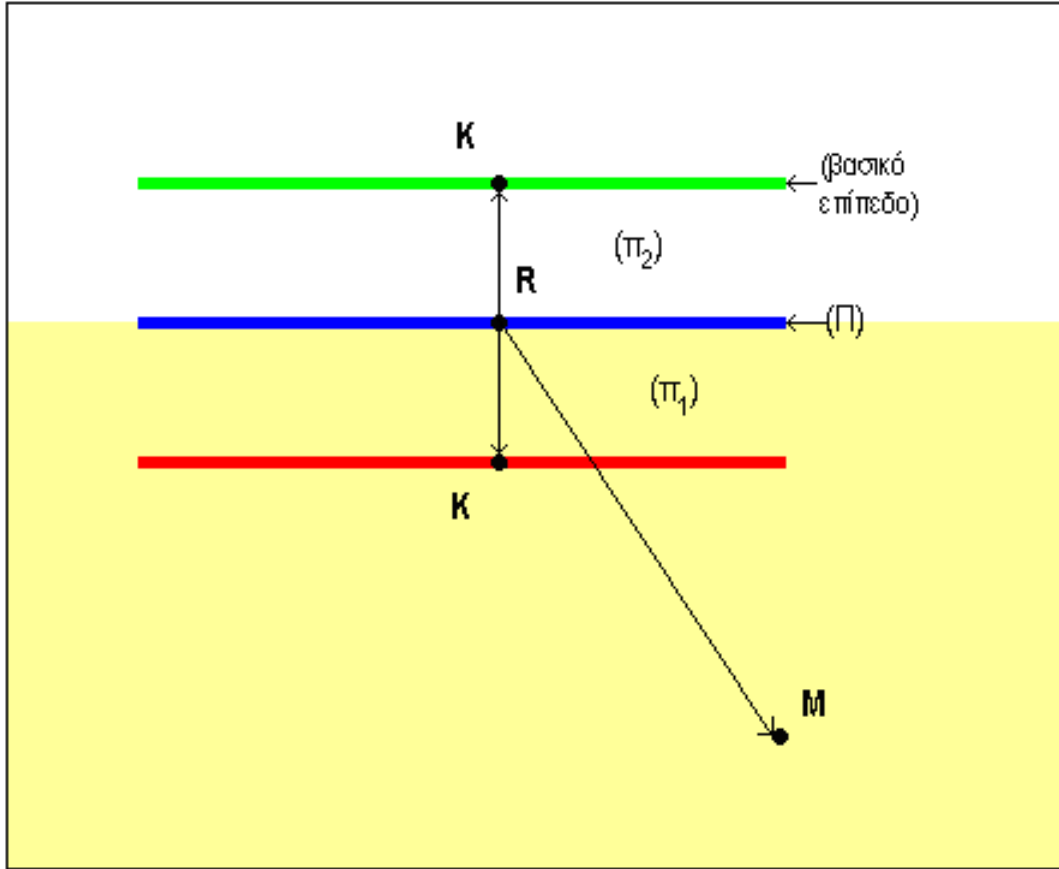
Για να οριστεί το βασικό επίπεδο, πρέπει να βρεθεί το K και οι συντεταγμένες του, στην περίπτωση που το (π) είναι το βασικό επίπεδο.

Το πρόβλημα απεικονίζεται στο Σχήμα 4.1, στην επόμενη σελίδα.

Έστω τώρα ότι εκλέγεται ένα λ (ή το θετικό ή το αρνητικό):

$$\left(\lambda = \frac{DPP}{|\vec{l}|} \text{ ή } \lambda = -\frac{DPP}{|\vec{l}|} \right)$$

Η εκλογή ενός λ υποδηλώνει την επιλογή ενός και μόνο εκ των δύο σημείων που αντιπροσωπεύονται από το μεταβλητό σημείο K . Το σημείο αυτό, έστω K , είναι ένα συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου αναφοράς.



Σχήμα 4.1: Η απεικόνιση του προβλήματος εύρεσης ενός κατάλληλου σημείου για τον ορισμό του βασικού επιπέδου, πάνω στο επίπεδο αναφοράς.

Αν υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{r}_K = \overrightarrow{RK}$, $\vec{r}_M = \overrightarrow{RM}$, $\vec{r}_K \cdot \vec{r}_M = \lambda \vec{l} \cdot \vec{r}_M$, τότε, αν αυτό είναι θετικό, η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων θα είναι $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι το K θα βρίσκεται πάνω στο ημιεπίπεδο (π_1) . Διαφορετικά, αν το εσωτερικό γινόμενο είναι αρνητικό, τότε το K θα βρίσκεται στον πάνω στο ημιεπίπεδο (π_2) (Σχήμα 4.1).

Είναι επιθυμητό όπως σημειώθηκε, να βρεθεί το K και οι συντεταγμένες του, στην περίπτωση που το (π) είναι το βασικό επίπεδο. Επομένως:

A) Αν το $\lambda \vec{l} \cdot \vec{r}_M$ είναι αρνητικό, τότε έχει επιλεγεί η κατάλληλη τιμή του λ και άρα το κατάλληλο σημείο K και

B) Αν το $\lambda \vec{l} \cdot \vec{r}_M$ είναι θετικό, τότε έχει επιλεγεί η λάθος τιμή για το λ και θα πρέπει να επιλεγεί η άλλη τιμή.

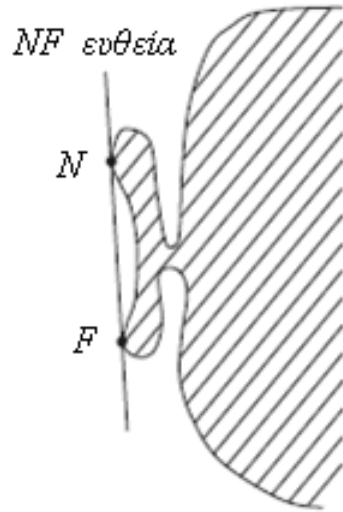
Σε κάθε περίπτωση θα ισχύει $\vec{o}_K = \vec{o}_R + \lambda \vec{l}$ από όπου υπολογίζονται, επιλέγοντας το κατάλληλο λ , οι συντεταγμένες του $K = K$.

Για την εύρεση ενός σημείου του βασικού επιπέδου, με βάση τον παραπάνω τρόπο, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου αναφοράς και να υπολογιζόταν οι συντεταγμένες της προβολής του σημείου αυτού. Η αλήθεια πάντως είναι ότι η επιλογή του σημείου R δεν ήταν τυχαία. Το σημείο K ξαναχρησιμοποιείται παρακάτω, επομένως είναι ούτως ή άλλως αναγκαία η εύρεση των συντεταγμένων του. Επιπρόσθετα, η επιλογή του R κάνει τον αναγνώστη να υποψιαστεί ότι η τοποθέτηση του κινητού τηλεφώνου θα είναι σε “right position” [1], [2], δηλαδή στη δεξιά μεριά του κεφαλιού ως προς τον χρήστη. Αν αντιθέτως είναι επιθυμητό το κινητό τηλέφωνο να τοποθετηθεί σε “left position”, θα έπρεπε καθαρά για λόγους διευκόλυνσης, να βρεθεί η προβολή του σημείου L πάνω στο βασικό επίπεδο.

Συνοψίζοντας, θεωρούνται γνωστές πλέον οι συντεταγμένες ενός σημείου του βασικού επιπέδου-του K -και οι συνιστώσες ενός διανύσματος κάθετου στο βασικό επίπεδο, του \vec{l} , οπότε είναι δυνατόν να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του βασικού επιπέδου (ενότητα Π.1.11).

Είναι απαραίτητο να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του βασικού επιπέδου, έτσι ώστε να μπορέσει ο χρήστης του προγράμματος XFDTD να μοντελοποιήσει με τη βοήθεια του προγράμματος XFDTD-(λεπτομέρειες στο Κεφάλαιο 5) το βασικό επίπεδο, προκειμένου να βρεθούν εποπτικά, τα σημεία N, F , που ορίζουν την NF ευθεία (NF -line) [1].

Τα σημεία N, F είναι σημεία του βασικού επιπέδου και ορίζονται σύμφωνα με το [1] ως τα εξωτερικά σημεία της τομής του βασικού επιπέδου και του εξωτερικού μέρους του αυτιού (Σχήμα 4.2).



Σχήμα 4.2: Η NF ευθεία.

Στην παρούσα εργασία τα σημεία N, F έχουν οριστεί με έναν στην πραγματικότητα ισοδύναμο, αλλά πιο αυστηρά δοσμένο ορισμό και ο οποίος είναι τέτοιος ώστε να μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα στο πρόγραμμα XFDTD. Αναφερόμαστε όμως σε “right position” αλλά ο ορισμός επεκτείνεται πολύ εύκολα για την περίπτωση της “left position”.

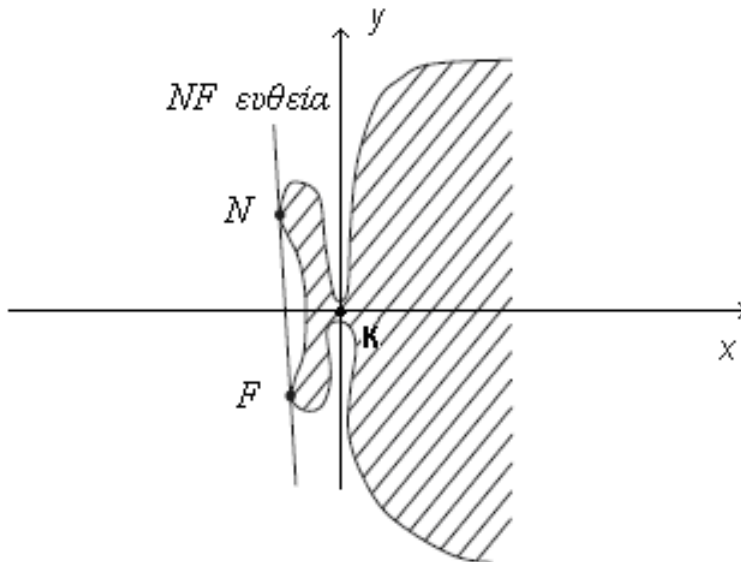
Πάντως, πριν δοθεί αυτός ο ορισμός, σημειώνεται ότι μπορούν να δοθούν όχι ένας αλλά πολλοί ισοδύναμοι ορισμοί για την εύρεση των σημείων N , F .

Για παράδειγμα:

Ας θεωρηθεί ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων πάνω στο βασικό επίπεδο και τέτοιο ώστε:

α) η αρχή των αξόνων ορίζεται από την προβολή του R πάνω στο βασικό επίπεδο, δηλαδή το «σωστό» σημείο K . (Για αυτό το λόγο για την περίπτωση της left position είναι προτιμότερο να επιλεγεί το L στην παραπάνω διαδικασία)

β) Ο y άξονας είναι κάθετος στο επίπεδο αναφοράς και το πέρας του διανύσματος \hat{y} βρίσκεται στον ημιχώρο που ορίζεται από τα μάτια και το επίπεδο αναφοράς. Ο x άξονας ορίζεται από την τομή του επιπέδου αναφοράς και του βασικού επιπέδου και το πέρας του διανύσματος \hat{x} δείχνει προς το εσωτερικό του κεφαλιού:



Σχήμα 4.3: Η NF ευθεία και ο σχεδιασμός του κατάλληλου για τον καθορισμό της, συστήματος συντεταγμένων πάνω στο βασικό επίπεδο.

γ) Το σημείο N ορίζεται ως το σημείο του κεφαλιού που ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο και έχει το μικρότερο x , ενώ το σημείο F ορίζεται ως το σημείο του κεφαλιού που ανήκει στο τρίτο τεταρτημόριο και έχει το μικρότερο x . Με αυτούς τους ορισμούς, τα σημεία N , F ορίζονται μονοσήμαντα σε φυσιολογικά κεφάλια. Αν, παρόλα αυτά, τύχει να υπάρχουν πάνω από δύο σημεία του κεφαλιού στο δεύτερο ή στο τρίτο τεταρτημόριο που να έχουν το μικρότερο x , τότε και για τα δύο τεταρτημόρια (ξεχωριστά) πρέπει να επιλεγεί το σημείο του κεφαλιού του οποίου η απόλυτη τιμή της y συντεταγμένης είναι η ελάχιστη.

Ένας άλλος ισοδύναμος ορισμός (αυτός χρησιμοποιείται στην παρούσα εργασία) είναι ο εξής:

Ai) Σχεδιασμός του επιπέδου, έστω (Π_2) , που ορίζεται από το $R(x_R, y_R, z_R)$ και το διάνυσμα $\vec{r}_L = \overrightarrow{RL} = -\vec{l}_R$ (4.6). Αυτός ο σχεδιασμός γίνεται με τη βοήθεια του προγράμματος XFDTD και προς τούτο χρησιμοποιείται η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (Π_2) (βλ. ενότητα Π.1.11). Οι συνιστώσες του διανύσματος \vec{r}_L θεωρούνται γνωστές, αφού βάση της σχέσης (4.6) είναι οι αντίθετες από τις γνωστές συνιστώσες του \vec{l}_R . Εξάλλου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το διάνυσμα \vec{l}_R .

Aii) Για την περίπτωση της “left position” το επίπεδο (Π_2) ορίζεται από το $L(x_L, y_L, z_L)$ και μπορεί να χρησιμοποιηθεί το ίδιο διάνυσμα ή το αντίθετό του $(\vec{r}_L$ ή $\vec{l}_R)$.

Bi) Η προβολή του R πάνω στο βασικό επίπεδο, δηλαδή το «σωστό» σημείο K , ανήκει στο (Π_2) και το K ανήκει επίσης στο επίπεδο αναφοράς. Στη συνέχεια θα αποδειχθεί ότι το σημείο K ανήκει στο (Π_2) :

Το K , ανήκει στο (Π_2) αν και μόνο αν $\vec{r}_K \cdot \vec{r}_L = 0$.

Πράγματι, ισχύει :

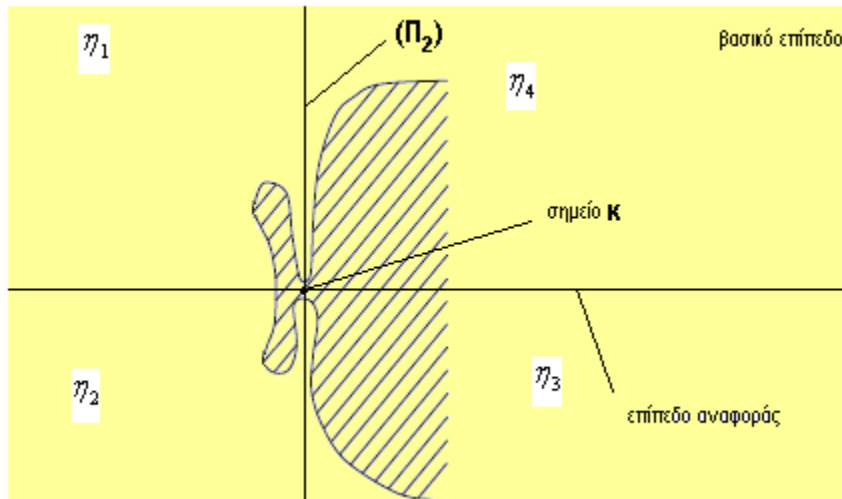
$$\begin{aligned} \vec{r}_K \cdot \vec{r}_L &\stackrel{(4.4)}{=} (\lambda \vec{l}) \cdot \vec{r}_L \stackrel{(4.1)}{=} \lambda \vec{l} \cdot \vec{r}_L = \\ &= \lambda (\vec{l}_R \times (\vec{l}_R \times \vec{l}_M)) \cdot \vec{r}_L \stackrel{(4.6)}{=} \\ &= -\lambda \vec{l}_R \cdot (\vec{l}_R \times (\vec{l}_R \times \vec{l}_M)) = \\ &= -\lambda \vec{l}_R \cdot ((\vec{l}_R \cdot \vec{l}_M) \vec{l}_R - (\vec{l}_R \cdot \vec{l}_R) \vec{l}_M) = \\ &= -\lambda (\vec{l}_R \cdot \vec{l}_M) \vec{l}_R \cdot \vec{l}_R + \lambda \vec{l}_R \cdot \vec{l}_M (\vec{l}_R \cdot \vec{l}_R) = 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $\vec{l}_R \times (\vec{l}_R \times \vec{l}_M) = (\vec{l}_R \cdot \vec{l}_M) \vec{l}_R - (\vec{l}_R \cdot \vec{l}_R) \vec{l}_M$ (βλ. σχέση π.1.13).

Bii) Με όμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η προβολή του L πάνω στο βασικό επίπεδο, ανήκει στο (Π_2) (για την περίπτωση “left position”) και στο επίπεδο αναφοράς.

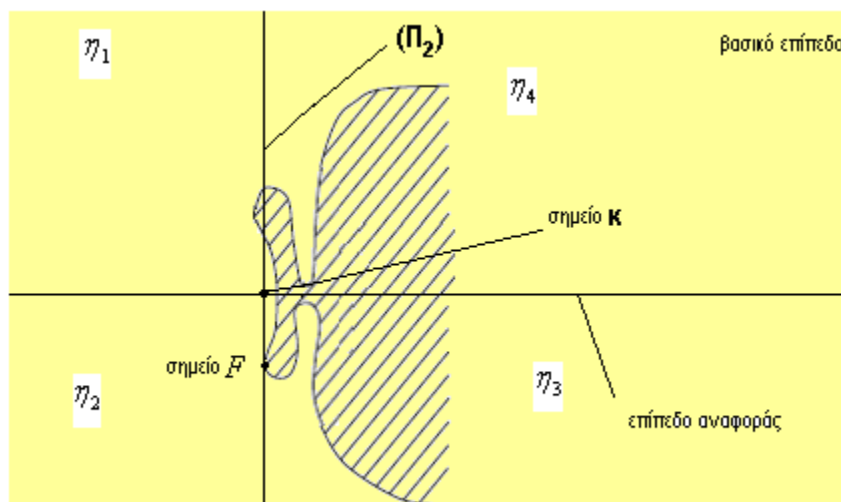
Γ) Αν σχεδιαστούν τα επίπεδα αναφοράς, (Π_2) και το βασικό επίπεδο, τότε μπορούν να οριστούν τα σημεία N και F ως εξής:

- Τα επίπεδα αναφοράς και (Π_2) «κόβουν» το βασικό επίπεδο σε 4 τεταρτημόρια $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, τα οποία απεικονίζονται στο παρακάτω σχήμα:

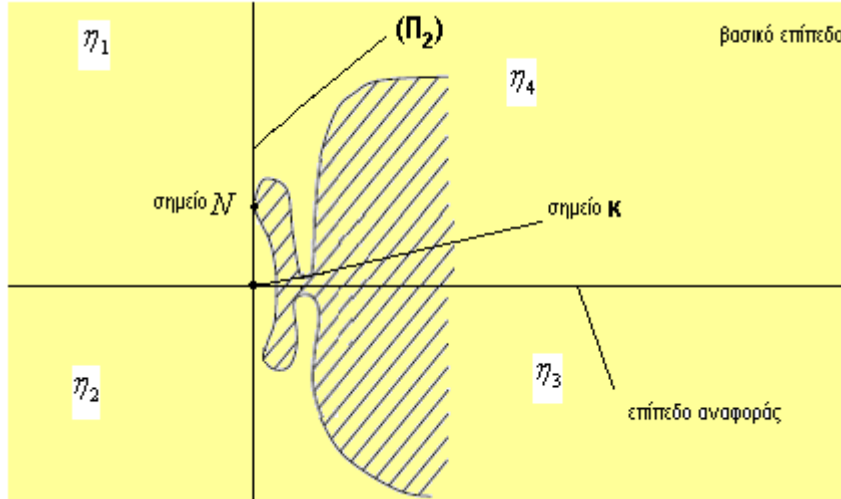


Σχήμα 4.4: Τα τέσσερα τεταρτημόρια στα οποία χωρίζεται το βασικό επίπεδο.

- Θεωρείται ότι μετακινείται διαρκώς το επίπεδο (Π_2) παράλληλα και προς το εξωτερικό μέρος του αυτιού (ή και προς το εσωτερικό, αλλά είναι σχεδόν αδύνατο να χρειαστεί να μεταφερθεί προς το εσωτερικό) μέχρι να συναντήσει το πρώτο τεταρτημόριο (ίσως και τα δύο μαζί) $\eta_i, i = 1 \text{ ή } 2$ το οποίο να μην περιέχει κανένα σημείο του κεφαλιού. Τότε στο (Π_2) θα ανήκει ένα σύνολο σημείων του κεφαλιού.
- Από αυτό το πλήθος σημείων, επιλέγονται αυτά που βρίσκονται σε μικρότερη απόσταση από το επίπεδο αναφοράς και θα είναι ή το N (για το η_1) ή το F (για το η_2) ή το N (για το η_1) και το F (για το η_2)
- Στη συνέχεια, συνεχίζεται η μετακίνηση του επιπέδου αν στο προηγούμενο βήμα είχε επιλεγεί μόνο ένα σημείο, και βρίσκεται ή το N (για το η_1) ή το F (για το η_2) (Σχήματα 4.5α) και 4.5β)).



Σχήμα 4.5α: Εύρεση του F σημείου, θεωρώντας ότι κατά τη μεταφορά του επιπέδου (Π_2) το πρώτο τεταρτημόριο που παύει να περιέχει σημεία του κεφαλιού, είναι το n_2 .



Σχήμα 4.5β: Εύρεση του N σημείου, θεωρώντας ότι στο προηγούμενο «βήμα» της μεταφοράς είχε βρεθεί το σημείο F .

Με τον παραπάνω τρόπο μπορούν να προσδιοριστούν τα σημεία N , F και να βρεθούν οι συντεταγμένες αυτών των σημείων.

Μόλις βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων N , F μπορεί πλέον να οριστεί η NF ευθεία. Η NF ευθεία χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό του *εφαπτόμενου σημείου* (*tangent point* [1]) T και την εύρεση των συντεταγμένων του. Ο γεωμετρικός προσδιορισμός του σημείου T και των συντεταγμένων του, θα εξεταστούν στο Κεφάλαιο 5. Προς το παρόν το σημείο και φυσικά οι συντεταγμένες του, θα θεωρηθούν δεδομένα.

Έστω λοιπόν ότι τα διανύσματα θέσης που αντιστοιχούν στα σημεία $N(x_N, y_N, z_N)$, $F(x_F, y_F, z_F)$, $T(x_T, y_T, z_T)$ είναι τα:

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{o_N} = x_N \hat{x} + y_N \hat{y} + z_N \hat{z}$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{o_F} = x_F \hat{x} + y_F \hat{y} + z_F \hat{z}$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{o_T} = x_T \hat{x} + y_T \hat{y} + z_T \hat{z}$$

Με βάση το δεύτερο αυτό σύνολο σημείων, που αποτελείται από αυτά τα τρία σημεία, τα οποία προφανώς δεν είναι συνευθειακά, μπορεί να οριστεί το *εφαπτόμενο επίπεδο* (*tangent plane*) [1].

Έστω το (ελεύθερο) διάνυσμα $\overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{NF}$ και το (ελεύθερο) διάνυσμα $\overrightarrow{n_T} = \overrightarrow{NT}$.

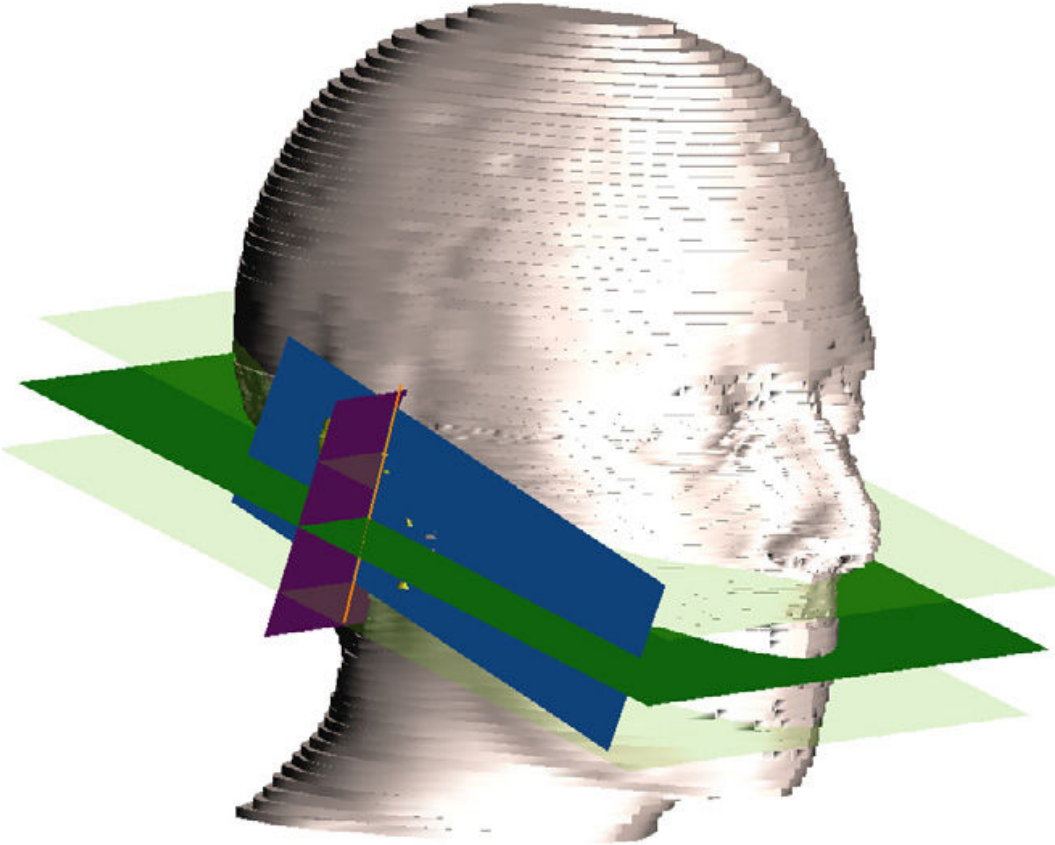
Ισχύουν:

$$\overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{o_F} - \overrightarrow{o_N} = (x_F - x_N) \hat{x} + (y_F - y_N) \hat{y} + (z_F - z_N) \hat{z}$$

$$\overrightarrow{n_T} = \overrightarrow{o_T} - \overrightarrow{o_N} = (x_T - x_N) \hat{x} + (y_T - y_N) \hat{y} + (z_T - z_N) \hat{z}$$

Τα δύο αυτά διανύσματα είναι μη συγγραμμικά και παράλληλα προς το εφαπτόμενο επίπεδο. Επιπρόσθετα, όπως σημειώθηκε παραπάνω, το εφαπτόμενο επίπεδο διέρχεται από το σημείο $N(x_N, y_N, z_N)$. Είναι δυνατόν επομένως να οριστεί με μοναδικό τρόπο το εφαπτόμενο επίπεδο με βάση όσα παρουσιάζονται στο Παράρτημα 1 (ενότητα Π.1.11), χρησιμοποιώντας το διάνυσμα $\vec{n}_{FT} = \vec{n}_F \times \vec{n}_T$, που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο και έχει συγκεκριμένες συνιστώσες για τις δεδομένες συντεταγμένες των σημείων N, F, T , (σχέση π.1.12 για $\vec{\alpha} = \vec{n}_F = (x_F - x_N)\hat{x} + (y_F - y_N)\hat{y} + (z_F - z_N)\hat{z}$ $\vec{\beta} = \vec{n}_T = (x_T - x_N)\hat{x} + (y_T - y_N)\hat{y} + (z_T - z_N)\hat{z}$), και το σημείο $N(x_N, y_N, z_N)$, και να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου αυτού. Αυτό το επίπεδο είναι το κύριο επίπεδο στο οποίο βασίζεται η τοποθέτηση του κινητού τηλεφώνου.

Στην Εικόνα 4.4 απεικονίζονται το εφαπτόμενο επίπεδο (μπλε), το βασικό επίπεδο (μωβ) και το επίπεδο αναφοράς (πράσινο). Υπενθυμίζεται ότι ο τρόπος εύρεσης του σημείου T περιγράφεται στο Κεφάλαιο 5. Σημειώνεται πάντως ότι για την εύρεση του σημείου T χρησιμοποιούνται ως βοηθητικά επίπεδα τα δύο επίπεδα που είναι παράλληλα στο επίπεδο αναφοράς και απέχουν από αυτό μία καθορισμένη απόσταση. Λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο.



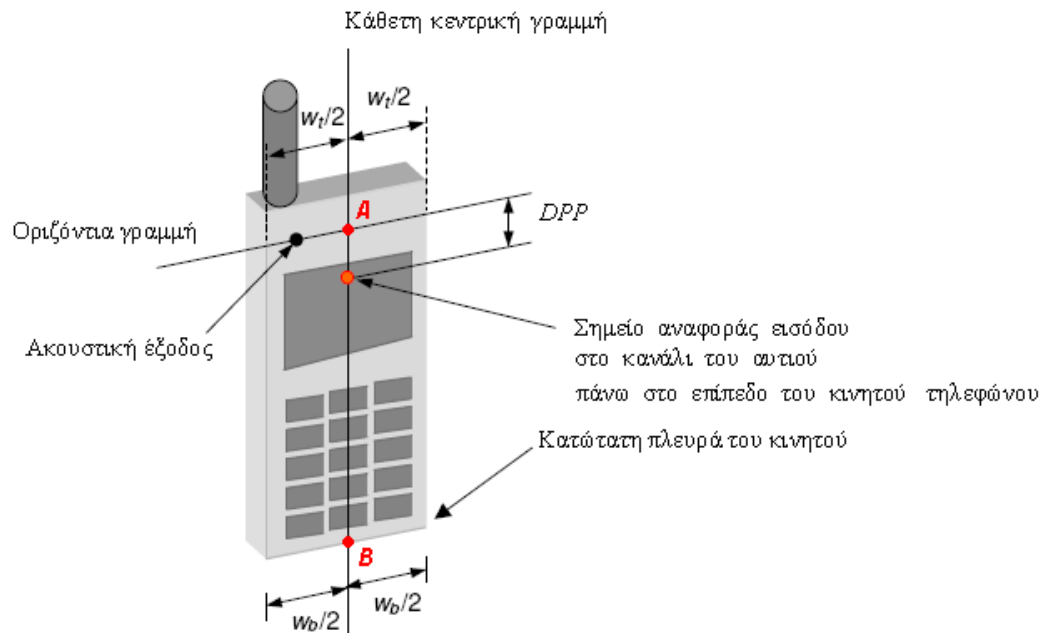
Εικόνα 4.4: Απεικόνιση του βασικού επιπέδου (μωβ), του επιπέδου αναφοράς (πράσινο) και εφαπτόμενου επιπέδου (μπλε). Απεικονίζονται επίσης δύο βοηθητικά επίπεδα για την εύρεση των σημείων N, F . Η εικόνα αναφέρεται όπως είναι ξεκάθαρο σε “right position”.

4.3. Η αρχική τοποθέτηση του κινητού και οι αναγκαίες περιστροφές του κεφαλιού

Στην πρακτική ανάλυση που έγινε για το σχεδιασμό των διαφόρων επιπέδων στο χώρο \mathcal{U} , χρησιμοποιήθηκαν οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στα διάφορα σημεία του κεφαλιού στο σύστημα συντεταγμένων του προγράμματος XFDTD, αφού το μοντέλο κεφαλιού είχε «εισαχθεί» στον χώρο του προγράμματος. Επομένως ο χώρος του προγράμματος ταυτιζόταν με το χώρο \mathcal{U} . Κατά συνέπεια, στην παρακάτω ανάλυση θα θεωρείται ότι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, λαμβάνουν χώρα στο χώρο \mathcal{U} (βλ. Παράρτημα 2).

Τα σημεία N, F, T ορίζουν όπως αναφέρθηκε το εφαπτόμενο επίπεδο. Για τον καθορισμό της θέσης του κινητού τηλεφώνου, πρέπει καταρχάς, το *επίπεδο του τηλεφώνου* να ταυτιστεί με το εφαπτόμενο επίπεδο [1]. Το επίπεδο του τηλεφώνου είναι ένα υποθετικό επίπεδο που σύμφωνα με το [2] ορίζεται μέσω του ορισμού δύο γραμμών πάνω στο κινητό. Πρόκειται για την *κάθετη κεντρική γραμμή* (*vertical center line*) και την *οριζόντια γραμμή* (*horizontal line*) που απεικονίζονται στην Εικόνα 4.5 [1], [2].

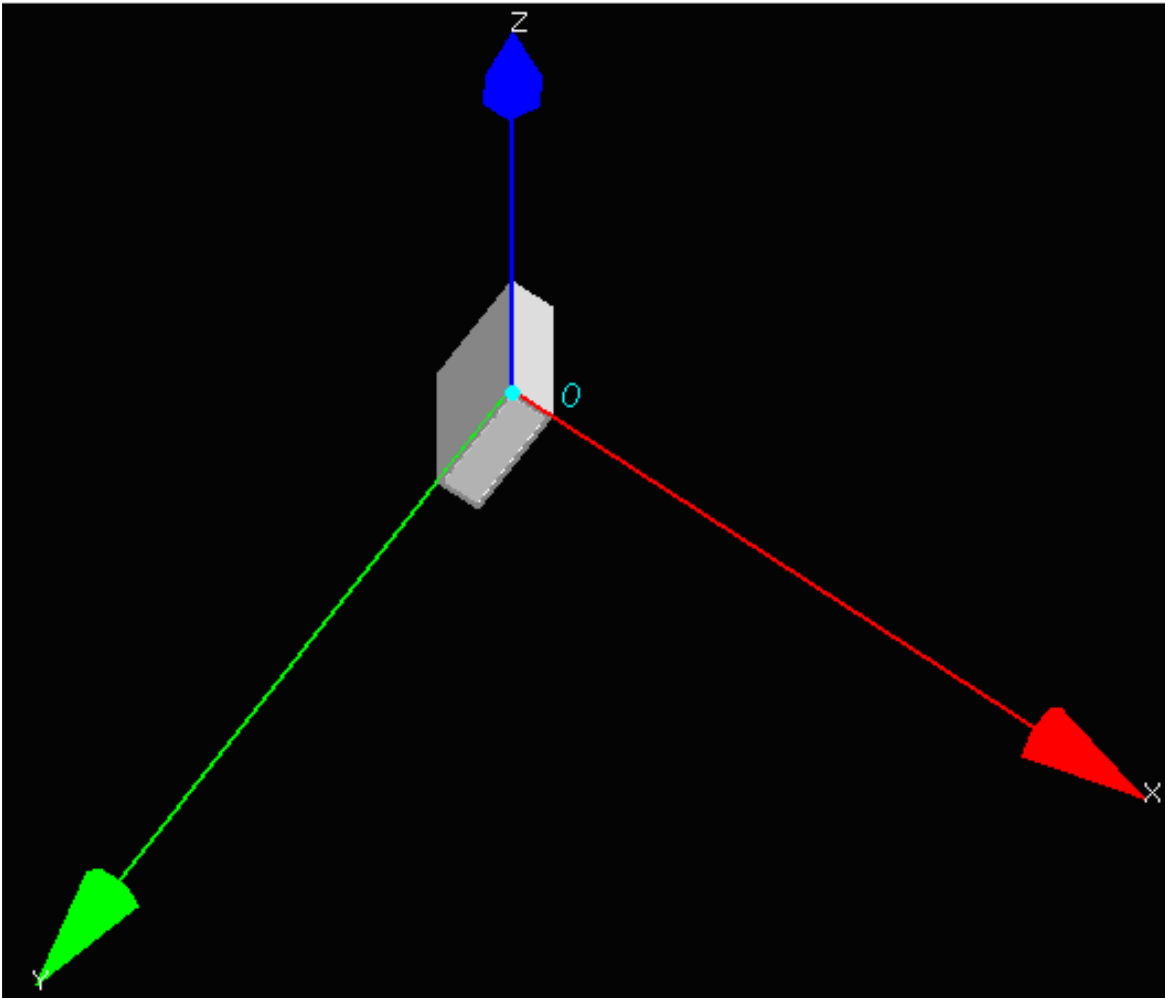
Η κάθετη κεντρική γραμμή διέρχεται από δύο σημεία που βρίσκονται στην μπροστινή πλευρά του τηλεφώνου: το μέσο του πλάτους w_t του κινητού τηλεφώνου στο επίπεδο της *ακουστικής εξόδου* (*acoustic output*) (σημείο A στην Εικόνα 4.5) και το μέσο w_b του πλάτους του κινητού τηλεφώνου στην κατώτατη πλευρά του κινητού (σημείο B στην Εικόνα 4.5). Η οριζόντια γραμμή είναι κάθετη στην κάθετη κεντρική γραμμή και διέρχεται από το κέντρο της ακουστικής εξόδου (Εικόνα 4.5). Οι δύο γραμμές τέμνονται στο σημείο A .



Εικόνα 4.5: Η κάθετη κεντρική γραμμή και η οριζόντια γραμμή από τις οποίες ορίζεται το επίπεδο του τηλεφώνου.

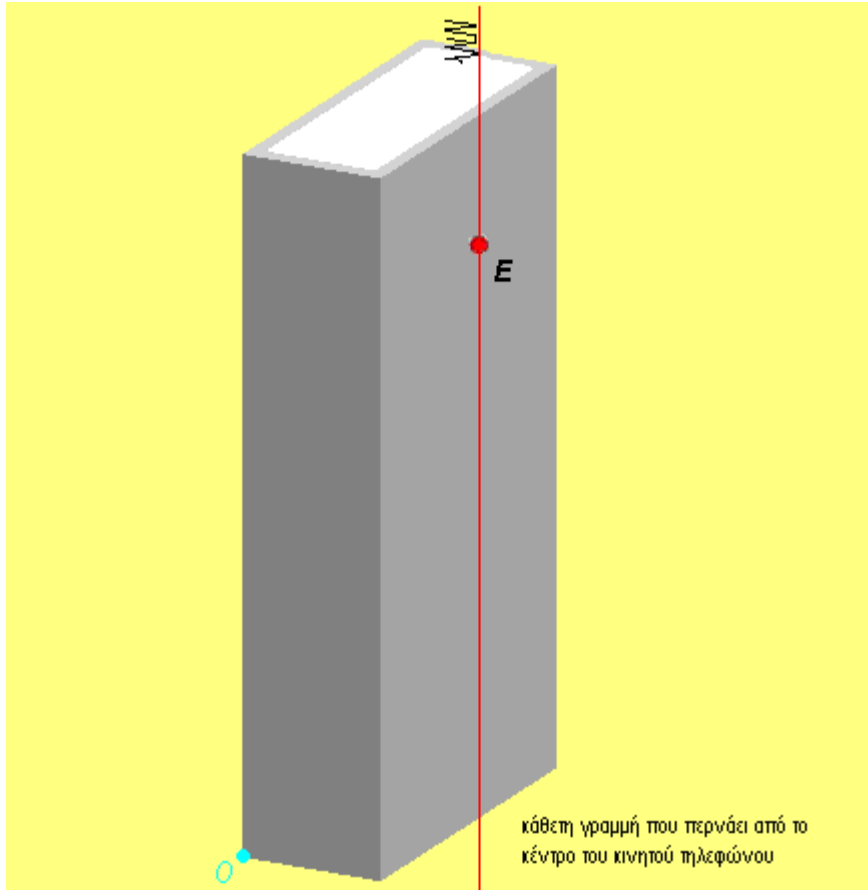
Η ανάγκη ταύτισης του επαπτόμενου επιπέδου, με το επίπεδο του τηλεφώνου, πρακτικά σημαίνει ότι με βάση την τοποθέτηση του μοντέλου κινητού που χρησιμοποιείται σε σχέση με τους άξονες στο πρόγραμμα XFDTD (Εικόνα 4.6) πρέπει αρχικά να εφαρμοστεί στο κεφάλι μία τέτοια ακολουθία γεωμετρικών μετασχηματισμών, ώστε το διάνυσμα \vec{n}_{FT} , να είναι αντίρροπο με το μοναδιαίο διάνυσμα του άξονα των x , δηλαδή, να ισχύει $\vec{n}_{FT} \nearrow \hat{x}$. Έτσι, το επαπτόμενο επίπεδο που είναι κάθετο στο διάνυσμα \vec{n}_{FT} θα είναι παράλληλο στο YZ επίπεδο και κατά συνέπεια παράλληλο και στο επίπεδο του τηλεφώνου. Βέβαια, η παραλληλία αυτή εκφράζεται από την απαίτηση $\vec{n}_{FT} // \hat{x}$. Η ισχυρότερη απαίτηση: $\vec{n}_{FT} \nearrow \hat{x}$ (4.7) χρησιμοποιείται για να υποδηλωθεί ότι πρόκειται για “right position”.

Κατά συνέπεια, μέχρι στιγμής τα επίπεδα του τηλεφώνου και το επαπτόμενο, δεν έχουν ταυτιστεί αλλά έχει γίνει ένα πρώτο βήμα με την «παραλληλοποίησή» τους και ένα δεύτερο με τη συσχέτιση των φορών των διανυσμάτων \vec{n}_{FT}, \hat{x} .



Εικόνα 4.6: Η αρχική τοποθέτηση του κινητού που χρησιμοποιήθηκε [3] σε σχέση με τους άξονες στο πρόγραμμα XFDTD.

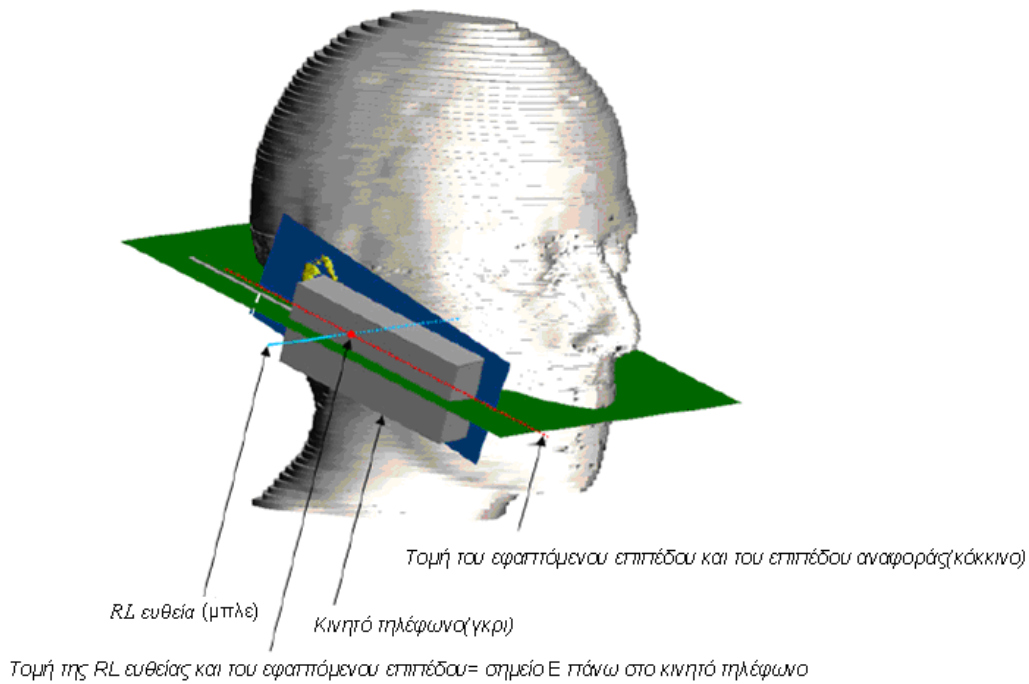
Ας υποθεθεί ότι εφαρμόζεται μία πρώτη ακολουθία μετασχηματισμών και ότι ισχύει πλέον $\vec{n}_{FT} \nearrow \hat{x}$. Τότε επιπρόσθετα, σύμφωνα με το [1] πρέπει η κάθετη κεντρική γραμμή που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6 για το μοντέλο κινητού που χρησιμοποιήθηκε [3] να ταυτιστεί με την τομή του επαπτόμενου επιπέδου και του επιπέδου αναφοράς.



Σχήμα 4.6: Η κάθετη κεντρική γραμμή στο μοντέλο του κινητού τηλεφώνου που χρησιμοποιήθηκε [3].

Καλό θα είναι το σχήμα 4.6 να συγκριθεί με την εικόνα 4.6. Με τη βοήθεια του επισημασμένου σημείου O μπορεί να γίνει εύκολα κατανοητός ο αρχικός προσανατολισμός του μοντέλου της κινητής τερματικής συσκευής στο λογισμικό XFDTD.

Η ταύτιση της κάθετης κεντρικής γραμμής που περνάει από το κέντρο του κινητού τηλεφώνου και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του τηλεφώνου, με την τομή του επαπτόμενου επιπέδου και του επιπέδου αναφοράς, απεικονίζεται στην Εικόνα 4.7.

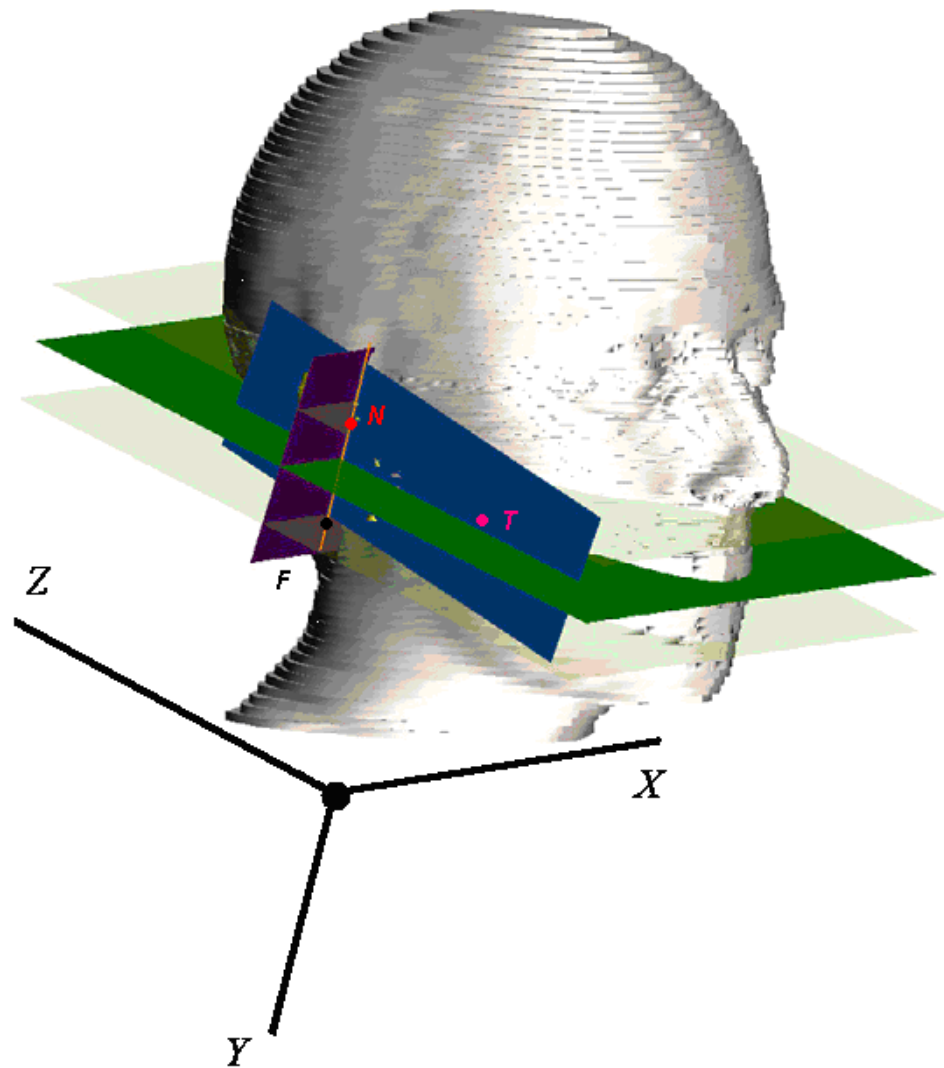


Εικόνα 4.7: Το μοντέλο του κεφαλιού με το επίπεδο αναφοράς (πράσινο), το επαπτόμενο επίπεδο (μπλε) και την τομή του επαπτόμενου επιπέδου με το επίπεδο αναφοράς κατά τη “right position” τοποθέτηση ενός κινητού τηλεφώνου.

Για να μπορεί σε *αρχική φάση*, η κάθετη γραμμή που περνάει από το κέντρο του τηλεφώνου προς τη μεριά της οθόνης και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του τηλεφώνου, να γίνει παράλληλη με την τομή του επαπτόμενου επιπέδου και του επιπέδου αναφοράς (Εικόνα 4.7) και ταυτόχρονα η κεραία του κινητού να βρίσκεται στον ημιχώρο που ορίζεται από τον αυχένα και το επίπεδο αναφοράς (“right position” για το συγκεκριμένο όμως μοντέλο κινητού), πρέπει το διάνυσμα $\vec{n}_F = \vec{NF}$ που είναι παράλληλο στο επαπτόμενο επίπεδο να είναι ομόρροπο του μοναδιαίου διανύσματος του άξονα y . Δηλαδή να ισχύει $\vec{n}_F \nearrow \hat{y}$ (4.8). Προς τούτο, εφαρμόζεται μία δεύτερη ακολουθία γεωμετρικών μετασχηματισμών.

Στη συνέχεια, πρέπει να εξασφαλιστεί, ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις (4.7) και (4.8). Θα έχει έτσι τοποθετηθεί το κεφάλι σε τέτοια θέση, ώστε στη συνέχεια, μόνο με απλές μεταφορές του κεφαλιού, ή του κινητού τηλεφώνου, όταν έχουν και τα δύο εισαχθεί στο πρόγραμμα, να μπορούν να τοποθετηθούν στη σωστή θέση το ένα σε σχέση με το άλλο. Οι μεταφορές αυτές, θα μελετηθούν στο Κεφάλαιο 5.

Το τελικό αποτέλεσμα των παραπάνω μετασχηματισμών (χωρίς τις μεταφορές), απεικονίζεται στην Εικόνα 4.8:



Εικόνα 4.8: Το αποτέλεσμα των περιστροφών του κεφαλιού σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων του προγράμματος XFDTD.

Είναι αναγκαίο να σημειωθεί ότι το μοντέλο κινητού τηλεφώνου που χρησιμοποιείται στο [2] και είναι αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 4.5 διαφέρει από το μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, κατασκευάστηκε στο [3] και είναι αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6.

Η πρώτη ουσιαστική διαφορά είναι ότι το μοντέλο που απεικονίζεται στην Εικόνα 4.5 έχει σε διαφορετική θέση την κεραία του τηλεφώνου σε σχέση με αυτό που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6. Αν χρησιμοποιούνταν πάντως ένα μοντέλο σαν αυτό της Εικόνας 4.5, τότε οι απαιτήσεις που εκφράζονται από τις σχέσεις (4.7), (4.8) θα ήταν οι ίδιες, με την προϋπόθεση ότι και αυτό το κινητό θα είχε τοποθετηθεί με τον τρόπο που απεικονίζεται στην Εικόνα 4.5. Για να κατανοήσει ο αναγνώστης μία δεύτερη και ουσιαστικότερη διαφορά, μπορεί να μελετήσει προσεκτικά την Εικόνα 4.5. Όπως φαίνεται σε αυτήν την εικόνα, το σημείο αναφοράς εισόδου στο κανάλι του αυτιού πάνω στο επίπεδο του κινητού τηλεφώνου (*EEC reference point on the mobile phone* [2]) είναι

ένα μεταβλητό σημείο E πάνω στο επίπεδο του τηλεφώνου, το οποίο εξαρτάται από την απόσταση DPP που είναι γενικά διαφορετική για τα διάφορα ανατομικά μοντέλα. Στην Εικόνα 4.5 φαίνεται ότι το μεταβλητό σημείο E :

α) βρίσκεται πάνω στην κάθετη κεντρική γραμμή

β) απέχει από το σημείο A απόσταση DPP και

γ) βρίσκεται μεταξύ της οριζόντιας γραμμής και της κατώτατης πλευράς του κινητού (δηλαδή μεταξύ των σημείων A, B).

Το μεταβλητό σημείο E κατά την τοποθέτηση του κινητού στη σωστή θέση πρέπει να ταυτιστεί με την τομή της RL ευθείας και του εφαπτόμενου επιπέδου (Εικόνα 4.7). Λεπτομέρειες για το πώς θα γίνει αυτό, θα δοθούν στο Κεφάλαιο 5.

Το αντίστοιχο σημείο-έστω E -στο μοντέλο που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.6, είναι σταθερό πάνω στο επίπεδο του τηλεφώνου. Όπως σημειώθηκε, αυτό το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία. Και σε αυτήν όμως την περίπτωση, το σημείο E κατά την τοποθέτηση του κινητού στη σωστή θέση πρέπει να ταυτιστεί με την τομή της RL ευθείας και του εφαπτόμενου επιπέδου (Εικόνα 4.7).

Τελειώνοντας με την ενότητα αυτή, πρέπει να επισημανθεί ότι γενικότερα και στην περίπτωση χρήσης άλλων μοντέλων κινητού τηλεφώνου ή προγραμμάτων, το επίπεδο του τηλεφώνου όταν αυτό εισάγεται στο εκάστοτε πρόγραμμα μπορεί να μην είναι παράλληλο στο YZ αλλά π.χ. στο XY επίπεδο του συστήματος συντεταγμένων του εκάστοτε προγράμματος.

Επιπρόσθετα, μπορεί να μην επιθυμείται η τοποθέτηση του κινητού τηλεφώνου σε “right position” (tilted ή cheek) αλλά σε “left position”, αν υποτεθεί φυσικά ότι έχουν βρεθεί τα αντίστοιχα N, F . Συγκεκριμένα, αν μελετάται η περίπτωση της “left position” με την ίδια αρχική τοποθέτηση του κινητού (Εικόνα 4.6) σε σχέση με τους άξονες σε ένα γενικότερο πρόγραμμα που χρησιμοποιεί δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (άρα και στο XFDTD) οι αντίστοιχες απαιτήσεις που εκφράζονται από τις σχέσεις (4.7) και (4.8) γίνονται:

$$\vec{n}_{FT} \nearrow \nearrow \hat{x} \quad (4.9)$$

$$\vec{n}_F \nearrow \searrow \hat{y} \quad (4.10)$$

Επίσης, μπορεί για παράδειγμα το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιεί το εκάστοτε πρόγραμμα να είναι αριστερόστροφο.

Η τελευταία ειδικά περίπτωση (αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων), χρήζει εξέχουσας προσοχής. Στον επίλογο του Παραρτήματος 1, γίνεται αναφορά στο γεγονός ότι η μελέτη της διανυσματικής άλγεβρας, μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Αναφέρθηκε χαρακτηριστικά ότι: «Μπορούν να οριστούν οι διάφορες αλγεβρικές πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων με γεωμετρικό τρόπο και να προκύψουν ως θεωρήματα οι αντίστοιχοι τύποι που εκφράζουν τις πράξεις αυτές στη γλώσσα των συνιστωσών. Από την άλλη, μπορούν να οριστούν αρχικά όλες οι πράξεις αποκλειστικά συναρτήσει των συνιστωσών και να ερμηνευτούν ύστερα γεωμετρικά οι λαμβανόμενοι τύποι. Οι μέθοδοι αυτοί είναι ισοδύναμοι με εξαίρεση την περίπτωση του εξωτερικού γινομένου (περισσότερες λεπτομέρειες στο [4]) αλλά προτιμήθηκε να ακολουθηθεί η πρώτη μέθοδος στην παρούσα εργασία που βρίσκεται πιο «κοντά» στην Ευκλείδεια γεωμετρία.». Ο αναγνώστης παραπέμφθηκε στο [4], το γνωστό βιβλίο του Tom

Μ.Αpostol. Κάποιες όμως από τις λεπτομέρειες που αναφέρονται στο [4] θα πρέπει να αναφερθούν και εδώ.

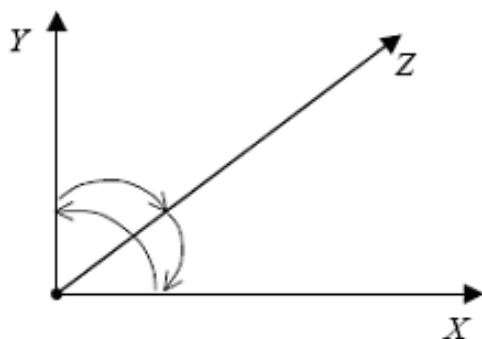
Στο [4] αναφέρεται ότι από αναλυτική άποψη ο τύπος του εξωτερικού γινομένου μπορεί να οριστεί από άλλα αξιώματα ο τύπος του εξωτερικού γινομένου και να είναι ή ο γνωστός τύπος (π.1.12) ή ο τύπος (π.1.12) αλλά αντικαθιστώντας τα + με τα - και το αντίστροφο. Δηλαδή:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}) \times (\beta_1 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \beta_3 \hat{z}) = \\ &= (-\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) \hat{x} + (-\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) \hat{y} + (-\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \hat{z}\end{aligned}$$

, με βάση τους συμβολισμούς που έγιναν στο Παράρτημα 1.

Στη συνέχεια, εκλέγεται ένας από τους δύο αυτούς τύπους. Συνήθως εκλέγεται ο (π.1.12). Οι ρουτίνες που χρησιμοποιήθηκαν για την εύρεση των συνιστωσών των διαφόρων εξωτερικών γινομένων στην παρούσα εργασία βασίζονται στον «σωστό» τύπο (π.1.12).

Ας υποθεθεί λοιπόν ότι έχει εκλεγεί ο τύπος (π.1.12), τότε, η αντίστοιχη γεωμετρική ερμηνεία στην περίπτωση που χρησιμοποιείται αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων (Σχήμα 4.7), δίνεται με τον «κανόνα του αριστερού χεριού» και όχι με τον ευρέως γνωστό κανόνα του δεξιού χεριού.



Σχήμα 4.7: Αριστερόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων.

Υπενθυμίζεται ότι ο χαρακτηρισμός ενός συστήματος συντεταγμένων ως δεξιόστροφου ή ως αριστερόστροφου (ενότητα Π.1.8) έχει βασιστεί σε έννοιες πιο «ισχυρές» και ανεξάρτητες από αυτή του εξωτερικού γινομένου.

Για παράδειγμα, το εξωτερικό γινόμενο $\hat{x} \times \hat{y}$, υπολογίζεται βάσει της (π.1.12) δίδοντας ως γνωστό:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$$

Αυτό το αποτέλεσμα ερμηνεύεται γεωμετρικά μόνο με τον κανόνα του αριστερού χεριού ή έστω της αντίθετης γεωμετρικής ερμηνείας από αυτήν που θα δώσει ο κανόνας του δεξιού χεριού, σε ένα αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Επομένως, αν το σύστημα συντεταγμένων του προγράμματος ήταν αριστερόστροφο και υποθεθεί ότι η αρχική τοποθέτηση ενός άλλου μοντέλου κινητής τερματικής συσκευής ήταν σαν αυτή που φαίνεται στην Εικόνα 4.6 αλλά με τον άξονα Z

να έχει την αντίθετη φορά, τότε η μία αναγκαία συνθήκη δεν θα ήταν η (4.7) αλλά η $\vec{n}_{FT} \nearrow \nearrow \hat{x}$.

Συνοψίζοντας, σε γενικές γραμμές, η διαδικασία περιστροφής του κινητού που περιγράφηκε στην ενότητα αυτή γίνεται αρκετά γενική με τις κατάλληλες μετατροπές. Προϋποθέτει βέβαια ότι το επίπεδο του τηλεφώνου είναι παράλληλο με κάποιο από τα επίπεδα XY , YZ , XZ και ότι η κάθετη γραμμή που περνάει από το κέντρο του τηλεφώνου προς τη μεριά της οθόνης και βρίσκεται πάνω στο επίπεδο του τηλεφώνου είναι παράλληλη με κάποιον από τους κύριους άξονες.

4.4. Οι περιστροφές στο πρόγραμμα XFDTD

Οι περιστροφές μέσα από το πρόγραμμα XFDTD όσον αφορά ένα μοντέλο κεφαλιού που έχει εισαχθεί στο πρόγραμμα σε μορφή αρχείου .mesh (βλ. Κεφάλαιο 3), αναφέρονται σαν “remesh” στο [5] επειδή στην πραγματικότητα δεν είναι περιστροφές.

Σύμφωνα παρόλα αυτά πάντα με το [5], κατά την εφαρμογή της συνάρτησης “remesh” μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζεται ένα δεύτερο σύστημα συντεταγμένων, (έστω Σ_2) με διαφορετικό προσανατολισμό (ο οποίος εξαρτάται από έναν πίνακα 3×3 που εισάγει ο χρήστης στο πρόγραμμα) και με διαφορετική αρχή σε σχέση με το αρχικό σύστημα συντεταγμένων, (έστω Σ_1) και τα δύο θεωρούμενα στο πρόγραμμα XFDTD που είναι ένας αφηρημένος σημειακός χώρος έστω \mathcal{U} (βλ. Παράρτημα 2, ενότητα Π.2.2), τα σημεία του οποίου θεωρούνται στην παρούσα εργασία ότι είναι υπερεσύνολο των σημείων του κεφαλιού και του κινητού, αν θεωρηθούν και τα δύο στο χώρο \mathcal{U} .

Στην παρακάτω ανάλυση, θεωρείται ότι δε γίνεται χρήση ομογενών αλλά κανονικών συντεταγμένων (ενότητα Π.2.5.3), επομένως μελετώνται μόνο οι περιστροφές και δεν μελετώνται οι μεταφορές, αν θεωρηθούν οι μετασχηματισμοί ευκλείδειοι (Παράρτημα 2).

Βάσει της σχέσης (π.2.20.1), ισχύει για $\Phi = \Phi' \in \mathcal{U}$ και $\Sigma = \Sigma_2, \Sigma' = \Sigma_1$:

$$\overline{\Phi'_0^{(\Sigma_1)}} = M_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \cdot \overline{\Phi'_0^{(\Sigma_2)}} \quad (4.11) \text{ και}$$

βάσει της σχέσης (π.2.20.2) για $\Sigma = \Sigma_2, \Phi = \Phi_0 \in \mathcal{U}$:

$$\overline{\Phi'_0^{(\Sigma_2)}} = Q^{\Sigma_2} \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_2)}} \quad (4.12).$$

Από όσα αναφέρονται στο [5] υπονοείται ότι ο χρήστης εισάγει τον πίνακα

$$A = Q^{\Sigma_2} = \left(M_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \right)^{-1} \quad (4.13)$$

(σχέση (π.2.20.3) για $\Sigma = \Sigma_2, \Sigma' = \Sigma_1$).

Επομένως, σύμφωνα και με όσα αναφέρθηκαν στο τέλος της ενότητας Π.2.8, το πρόγραμμα φροντίζει, έτσι ώστε για κάθε $\Phi \in \mathcal{U}$:

$$\overline{\Phi'^{(\Sigma_2)}} = \overline{\Phi^{(\Sigma_1)}} \Leftrightarrow \overline{\Phi'^{(\Sigma_1)}} = \overline{\Phi^{(\Sigma_2)}}.$$

Αν ο χρήστης σκεφτεί με τη λογική του ενεργητικού μετασχηματισμού (Παράρτημα 2) στο χώρο \mathcal{U} , θα περιμένει ότι θα ισχύει για ένα τυχαίο σταθερό $\Phi_0 \in \mathcal{U}$:

$$\overline{\Phi'_0^{(\Sigma_1)}} = A \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_1)}} \text{ και αυτό γιατί θα αντιλαμβάνεται το σύστημα συντεταγμένων } \Sigma_1.$$

Πράγματι, από την (4.11):

$$\begin{aligned}
 \overline{\Phi_0^{(\Sigma_1)}} &= M_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_2)}} \stackrel{(4.12)}{=} \\
 &= M_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \cdot Q^{\Sigma_2} \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_2)}} \stackrel{(*)}{=} \\
 &= M_{\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1} \cdot Q^{\Sigma_2} \cdot M_{\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2} \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_1)}} \stackrel{(4.13)}{=} \\
 &= A^{-1} \cdot A \cdot A \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_1)}} = A \cdot \overline{\Phi_0^{(\Sigma_1)}}
 \end{aligned}$$

όπου στο (*) χρησιμοποιήθηκε η σχέση (π.2.20.1) για $\Phi = \Phi_0 \in \mathcal{U}$ και $\Sigma = \Sigma_1, \Sigma' = \Sigma_2$.

Όσον αφορά λοιπόν στις περιστροφές, το αποτέλεσμα για το χρήστη θα είναι το αναμενόμενο. Το πρόγραμμα δε δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να καθορίσει την αρχή του νέου συστήματος συντεταγμένων Σ_2 , με αποτέλεσμα, κατά την εισαγωγή του πίνακα 3x3 και μετά την εφαρμογή του κατάλληλου μετασχηματισμού, να επιλέγει το πρόγραμμα αυθαίρετα μία νέα αρχή στο χώρο \mathcal{U} η οποία δεν έχει καμία σχέση με την αρχή του συστήματος Σ_1 .

Στο [5] αναφέρεται ότι δεν έχει σημασία ποια ήταν η αρχή του Σ_1 και ποια η αρχή του Σ_2 στο χώρο \mathcal{U} (στον αφηρημένο σημειακό χώρο του προγράμματος). Όμως για πρακτικούς λόγους που σχετίζονται με την εργασία αυτή, εδώ έχει σημασία η απόσταση μεταξύ των αρχών των δύο συστημάτων συντεταγμένων.

Επιπρόσθετα, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η εισαγωγή του πίνακα 3x3 που καθορίζει το προσανατολισμό του συστήματος συντεταγμένων Σ_2 σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων Σ_1 πρέπει να γίνει μία και μόνο φορά, δηλαδή ο χρήστης να εισάγει έναν πίνακα που να εκφράζει μία ακολουθία των κατάλληλων μετασχηματισμών και όχι να εισάγονται «βήμα-βήμα» διάφοροι πίνακες 3x3. Αυτό συμβαίνει γιατί δυστυχώς με την εφαρμογή ενός μετασχηματισμού που εισάγεται ως πίνακας 3x3 στο πρόγραμμα XFDTD το ανατομικό μοντέλο του κεφαλιού θα αλλοιωθεί. Αν τώρα εισαχθούν διαδοχικά πάνω από ένας πίνακες στο πρόγραμμα XFDTD, θα αλλοιώνονται διαδοχικά τα ήδη αλλοιωμένα από τον προηγούμενο «γύρο» μοντέλα κεφαλιών. Κάτι τέτοιο είναι σαφώς ανεπιθύμητο. Συμπερασματικά, επιβάλλεται να εισαχθεί ένας πίνακας 3x3, μία φορά στο πρόγραμμα XFDTD και να εφαρμοστεί στο αρχικό μοντέλο.

Με βάση τα παραπάνω, πρακτικά οι περιστροφές στο πρόγραμμα XFDTD μπορούν να ερμηνευτούν ως εξής:

Θεωρείται ότι το πρόγραμμα εφαρμόζει σε σχέση με το αρχικό σταθερό σύστημα συντεταγμένων Σ_1 :

α) Περιστροφές (ως έναν ενιαίο μετασχηματισμό) με βάση τον πίνακα περιστροφής που εισάγεται (λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο για το πώς γίνεται αυτό στην πράξη). Θεωρείται από το χρήστη ότι οι περιστροφές αυτές γίνονται με τη λογική του ενεργού μετασχηματισμού. Δεν έχει σημασία αν το Σ_1 είναι δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο. Στην προκειμένη περίπτωση πάντως είναι δεξιόστροφο.

β) Μεταφορά που αποκρύπτεται από το χρήστη.

Για να μελετηθούν και μαθηματικά οι παραπάνω δύο προτάσεις:

α) Έστω το σημείο $A(x_A, y_A, z_A)$ του κεφαλιού. Το σημείο $A(x_A, y_A, z_A)$ θα μετακινηθεί από τη θέση (συντεταγμένων) (x_A, y_A, z_A) στη θέση (συντεταγμένων) (x'_A, y'_A, z'_A) , (βλ. σύμβαση στο τέλος της ενότητας Π.2.2) σύμφωνα με έναν πίνακα

περιστροφής: $R = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix}$ και θα ισχύει (Παράρτημα 2):

$$\begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} \quad (4.14).$$

β) Το πρόγραμμα όμως θα εφαρμόσει μία πρόσθετη μεταφορά η οποία θα είναι άγνωστη στο χρήστη. Έτσι, το σημείο $A(x_A, y_A, z_A)$ του κεφαλιού θα μετασχηματιστεί στην πραγματικότητα στο σημείο $A(x''_A, y''_A, z''_A)$ και θα ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x''_A \\ y''_A \\ z''_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

όπου $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ η μεταφορά που αποκρύπτεται από το χρήστη.

Από τις εξισώσεις (4.14) και (4.15) προκύπτει :

$$\begin{bmatrix} x''_A \\ y''_A \\ z''_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_A \\ y'_A \\ z'_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \quad (4.16).$$

Αν επομένως μπορέσει ο χρήστης με κάποιον πρακτικό τρόπο να βρει τις νέες συντεταγμένες $(x''_{A_0}, y''_{A_0}, z''_{A_0})$ (σύμφωνα με το πρόγραμμα) ενός τυχαίου σταθερού σημείου $A_0 \in \mathcal{U}$ του κεφαλιού του οποίου γνωρίζει τις παλαιές συντεταγμένες $(x_{A_0}, y_{A_0}, z_{A_0})$ και υπολογίσει επίσης μέσω της εξίσωσης (4.14) για $A(x_A, y_A, z_A) = A_0(x_{A_0}, y_{A_0}, z_{A_0})$ τις νέες «δικές του» συντεταγμένες $(x'_{A_0}, y'_{A_0}, z'_{A_0})$, τότε θα μπορεί να υπολογίσει μέσω της απλής εξίσωσης (4.16) τη μεταφορά που έχει εφαρμόσει «κρυφά» από αυτόν το πρόγραμμα. Έτσι, θα μπορέσει να βρει, γνωρίζοντας τις «δικές του» συντεταγμένες $(x'_\Gamma, y'_\Gamma, z'_\Gamma)$ για κάθε σημείο Γ που αυτός επιθυμεί και ορίζει μαζί με πολλά άλλα σημεία το κεφάλι, τις συντεταγμένες $(x''_\Gamma, y''_\Gamma, z''_\Gamma)$ που έχει το σημείο αυτό του κεφαλιού στο πρόγραμμα XFDTD μετά την εφαρμογή του μετασχηματισμού.

4.5. Κατάλληλες περιστροφές διανύσματος

Έστω ένα τυχαίο σταθερό σημείο $O \in \mathcal{U}$ το οποίο είναι η αρχή ενός (σταθερού) ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων $\Sigma = \{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.

Θα βρεθεί ποιές μπορούν να είναι οι κατάλληλες περιστροφές, δηλαδή ποιόι μπορούν να είναι οι κατάλληλοι πίνακες περιστροφής έτσι ώστε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}$, να γίνει ομόρροπο με το μοναδιαίο διάνυσμα \hat{i} , όπου ή $\hat{i} = \hat{x}$ ή $\hat{i} = \hat{y}$ ή $\hat{i} = \hat{z}$ ή $\hat{i} = -\hat{x}$ ή $\hat{i} = -\hat{y}$ ή $\hat{i} = -\hat{z}$. Με βάση τη θεωρία του Παραρτήματος 2 γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι αν βρεθούν κάποιοι κατάλληλοι πίνακες περιστροφής, τότε αυτοί δεν θα είναι οι μοναδικοί κατάλληλοι πίνακες.

Σε πρώτη φάση, θα μελετηθούν οι περιπτώσεις όπου ή $\hat{i} = \hat{x}$ ή $\hat{i} = -\hat{x}$ ή $\hat{i} = \hat{z}$ ή $\hat{i} = -\hat{z}$ και το σύστημα συντεταγμένων είναι δεξιόστροφο.

Αρχικά, τοποθετείται η αρχή του ελεύθερου διανύσματος $\vec{\alpha}$ στην αρχή των αξόνων.

Περίπτωση 1) $\alpha_2 \neq 0$ ή $\alpha_3 \neq 0$, δηλαδή τα α_2, α_3 δεν μπορούν να είναι και τα δύο 0.

Περίπτωση 1α) $\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_3 \leq 0$ όπου $\alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_3 \neq 0$.

α) Προβάλλεται το πέρας, έστω σημείο A, του διανύσματος $\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}$ πάνω στο ημιεπίπεδο yOz . Το διάνυσμα-έστω $\vec{\beta}$ - που έχει ως αρχή το O και ως πέρας την προβολή του A-έστω το σημείο B -πάνω στο ημιεπίπεδο yOz , είναι το $\vec{\beta} = 0\hat{x} + \alpha_2\hat{y} + \alpha_3\hat{z}$. Η γωνία $\theta_1 = (\vec{\beta}, \hat{z})$ μεταξύ του $\vec{\beta}$ και του \hat{z} ισούται με τη γωνία που απαιτείται για να περιστραφεί το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ γύρω από τον άξονα x, έτσι ώστε το A να «πέσει» πάνω στο επίπεδο XZ.

Για το $\cos \theta_1$ ισχύει:

$$\cos \theta_1 = \frac{\vec{\beta} \cdot \hat{z}}{|\vec{\beta}|} = \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} = \frac{\alpha_3}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \quad (4.17).$$

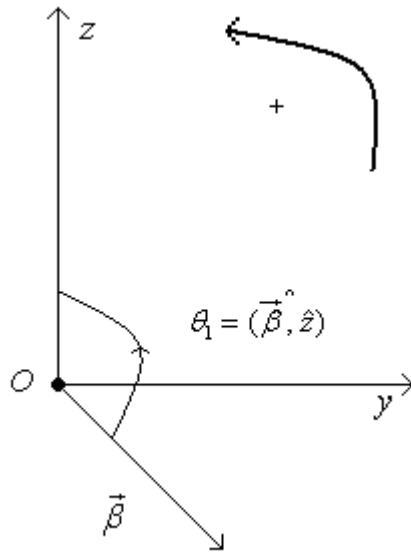
Ισχύει επίσης ότι:

$$\vec{\beta} \times \hat{z} = (0\hat{x} + \alpha_2\hat{y} + \alpha_3\hat{z}) \times \hat{z} = \alpha_2\hat{x} \quad (4.18).$$

Όμως δεδομένου ότι $\pi \geq \left(\theta_1 = (\vec{\beta}, \hat{z}) \right) \geq 0$ (Σχήμα 4.8) από τη σχέση (π.1.9) και τη

(4.18) προκύπτει ότι:

$$\vec{\beta} \times \hat{z} = |\vec{\beta}| \cdot \frac{\alpha_2 \hat{x}}{|\alpha_2|} \cdot \sin \theta_1 \quad (4.19).$$



Σχήμα 4.8: Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\beta} = 0\hat{x} + \alpha_2\hat{y} + \alpha_3\hat{z}$ και \hat{z} .

Από (4.18), (4.19) έπεται:

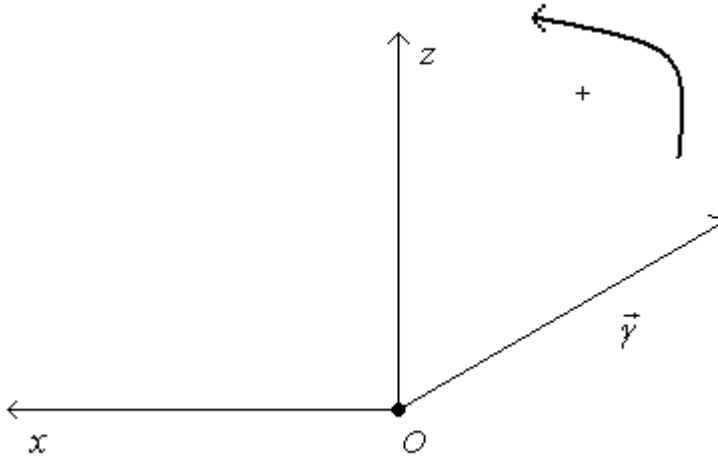
$$\sin \theta_1 = \frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}} \quad (4.20)$$

,εφόσον $|\vec{\beta}| = \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$.

Επομένως για τον πίνακα περιστροφής γύρω από τον άξονα x , θα ισχύει, βάση των σχέσεων (π.2.12.2), (4.17), (4.20) για $\theta = \theta_1$:

$$R_x(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ 0 & +\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} \end{bmatrix} \quad (4.21).$$

Μετά την εφαρμογή της περιστροφής, το διάνυσμα \vec{a} μετασχηματίζεται στο διάνυσμα $\vec{\gamma} = \alpha_1\hat{x} + 0\hat{y} + |\vec{\beta}|\hat{z}$ (4.22) (Σχήμα 4.9).



Σχήμα 4.9: Το διάνυσμα $\vec{\gamma}$

Αυτό μπορεί να επαληθευτεί εύκολα από τον αναγνώστη είτε με πολλαπλασιασμό του

$R_x(\theta_1)$ με το διάνυσμα στήλη: $\vec{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ είτε αν σκεφτεί ότι, επειδή έτσι όπως

εφαρμόστηκε ο μετασχηματισμός, είναι ευκλείδειος μετασχηματισμός (βλ. Παράρτημα 2) (αυτό φαίνεται και από τη σχέση (4.21), όπου ο πίνακας είναι ορθογώνιος), η συνιστώσα α_1 του διανύσματος δεν αλλάζει (στροφή γύρω από τον άξονα x), η συνιστώσα α_2 γίνεται (αν δεν είναι ήδη) 0 (το διάνυσμα «πέφτει» στο επίπεδο XZ) και για να διατηρηθεί το μέτρο του πρέπει η τρίτη συνιστώσα να ισούται με $|\vec{\beta}| = \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$.

Για να ευθυγραμμιστεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ με το \hat{i} , πρέπει να περιστραφεί κατά γωνία $\theta_2 = (\vec{\gamma}, \hat{i})$ γύρω από τον άξονα των y , όπου

$$\cos \theta_2 = \frac{\hat{i} \cdot \vec{\gamma}}{|\vec{\gamma}|} \stackrel{(4.22)}{\Leftrightarrow}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\hat{i} \cdot (\alpha_1 \hat{x} + 0 \hat{y} + |\vec{\beta}| \hat{z})}{|\vec{\gamma}|} \quad (4.23).$$

Ισχύει επίσης ότι:

$$\vec{\gamma} \times \hat{i} \stackrel{(4.22)}{=} (\alpha_1 \hat{x} + 0 \hat{y} + |\vec{\beta}| \hat{z}) \times \hat{i} \Leftrightarrow$$

$$\vec{\gamma} \times \hat{i} = \alpha_1 (\hat{x} \times \hat{i}) + |\vec{\beta}| (\hat{z} \times \hat{i}) \quad (4.24).$$

Διακρίνονται τώρα οι περιπτώσεις:

A) για $\hat{i} = \hat{x}$ η (4.23) γίνεται: $\cos \theta_2 = \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|}$ (4.25)

και η (4.24) γίνεται

$$\vec{\gamma} \times \hat{x} = |\vec{\beta}| \hat{y} \quad (4.26).$$

Όμως, από τη σχέση (π.1.9) για $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}, \vec{\beta} = \hat{x}$ με $\hat{\tau} = \hat{y}$:

$$\vec{\gamma} \times \hat{x} = |\vec{\gamma}| (\sin \theta_2) \hat{y} \quad (4.27).$$

Από (4.26), (4.27) και από το γεγονός ότι η γωνία θ_2 είναι θετική:

$$\sin \theta_2 = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} \Leftrightarrow \sin \theta_2 = \frac{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{|\vec{\gamma}|} \quad (4.28),$$

B) για $\hat{i} = -\hat{x}$, η (4.23) γίνεται $\cos \theta_2 = -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|}$ (4.29)

και η (4.24) γίνεται $-\vec{\gamma} \times \hat{x} = -|\vec{\beta}| \hat{y}$

επομένως τελικά λαμβάνεται, από την παραπάνω σχέση και τη (4.27):

$$\sin \theta_2 = -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} \Leftrightarrow \sin \theta_2 = -\frac{\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}}{|\vec{\gamma}|} \quad (4.30),$$

Γ) για $\hat{i} = \hat{z}$, η (4.23) δίνει: $\cos \theta_2 = \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|}$ (4.31)

και η (4.24) γίνεται:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} \times \hat{z} &= \alpha_1 (\hat{x} \times \hat{z}) + |\vec{\beta}| (\hat{z} \times \hat{z}) \Leftrightarrow \\ \vec{\gamma} \times \hat{z} &= -\alpha_1 \hat{y} \quad (4.32). \end{aligned}$$

Όμως από τη σχέση (π.1.9) για $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}, \vec{\beta} = \hat{z}$ με $\hat{\tau} = \frac{-\alpha_1 \hat{y}}{|\alpha_1|}$:

$$\vec{\gamma} \times \hat{z} = |\vec{\gamma}| (\sin \theta_2) \frac{-\alpha_1 \hat{y}}{|\alpha_1|} \quad (4.33).$$

Εφόσον θεωρείται ότι $\alpha_1 \leq 0$, η (4.23) γίνεται:

$$\vec{\gamma} \times \hat{z} = |\vec{\gamma}| (\sin \theta_2) \hat{y} \quad (4.34)$$

και από το γεγονός ότι η γωνία θ_2 είναι θετική, από (4.32), (4.34) και την ανισότητα $\alpha_1 \leq 0$:

$$\sin \theta_2 = \frac{-\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} \quad (4.35),$$

Δ) για $\hat{i} = -\hat{z}$, η (4.23) γίνεται: $\cos \theta_2 = -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|}$ (4.36)

και η (4.24) γίνεται $-\vec{\gamma} \times \hat{z} = \alpha_1 \hat{y}$

επομένως τελικά λαμβάνεται, από την παραπάνω σχέση και τη (4.27):

$\sin \theta_2 = +\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|}$ (4.37).

Η περιστροφή έγινε γύρω από τον άξονα των y επομένως βάσει της σχέσης (π.2.12.3) για $\theta = \theta_2 = (\vec{\gamma}, \hat{i})$:

Για την περίπτωση Α (4.25), (4.28):

$$R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & 0 & \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & 0 & \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \quad (4.38).$$

Για την περίπτωση Β (4.29), (4.30):

$$R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & 0 & -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & 1 & 0 \\ +\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & 0 & -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \quad (4.39).$$

Για την περίπτωση Γ (4.31), (4.35):

$$R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} +\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & 0 & -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & 1 & 0 \\ +\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & 0 & +\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \quad (4.40).$$

Για την περίπτωση Δ (4.36), (4.37):

$$R_y(\theta_2) = \begin{bmatrix} -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & 0 & +\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & 0 & -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \quad (4.41).$$

Ο τελικός μετασχηματισμός σαν σύνθεση των δύο επιμέρους μετασχηματισμών που εφαρμόστηκαν, εκφράζεται από το γινόμενο $R = R_y(\theta_2) \cdot R_x(\theta_1)$. Ο πίνακας αυτός είναι ορθογώνιος (ενότητα Π.2.4) ως γινόμενο ορθογώνιων πινάκων (αυτή η πρόταση αποδεικνύεται παρακάτω), και για τις περιπτώσεις Α, Β, Γ Δ γίνεται αντίστοιχα:

Α)

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1\alpha_2}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1\alpha_3}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} \end{bmatrix}$$

Β)

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1\alpha_2}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1\alpha_3}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} \end{bmatrix}$$

Γ)

$$R = \begin{bmatrix} \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix}$$

Δ)

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ -\frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix}.$$

Όπως αναφέρθηκε, οι πίνακες αυτοί είναι ορθογώνιοι ως γινόμενα ορθογωνίων πινάκων. Αν επομένως το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του καθενός με το διάνυσμα στήλη

$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ είναι αντίστοιχα για τις 4 περιπτώσεις:

A) $\begin{bmatrix} |\vec{\gamma}| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} -|\vec{\gamma}| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Γ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{\gamma}| \end{bmatrix}$

Δ) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\vec{\gamma}| \end{bmatrix}$

τότε οι τέσσερις αυτοί πίνακες εκφράζουν τέσσερις πιθανούς ευκλείδειους μετασχηματισμούς (Παράρτημα 2). Δεν είναι οι μόνι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί οι οποίοι δίνουν το επιθυμητό κάθε φορά αποτέλεσμα, αλλά σίγουρα οι μετασχηματισμοί που εκφράζονται από αυτούς τους τέσσερις παραπάνω πίνακες δίνουν το επιθυμητό κάθε φορά αποτέλεσμα και εξασφαλίζουν ότι δε θα «αλλοιωθεί» το αντικείμενο στον οποίου τα σημεία θα εφαρμοστούν (Παράρτημα 2).

Πράγματι:

A)

$$\begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1\alpha_2}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1\alpha_3}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\vec{\gamma}| \\ 0 \\ \frac{-|\vec{\beta}|^2 \alpha_1 + \alpha_1(\alpha_2)^2 + \alpha_1(\alpha_3)^2}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} |\vec{\gamma}| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

B)

$$\begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1\alpha_2}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1\alpha_3}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -|\vec{\gamma}| \\ 0 \\ \frac{|\vec{\beta}|^2 \alpha_1 - \alpha_1(\alpha_2)^2 - \alpha_1(\alpha_3)^2}{|\vec{\beta}||\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -|\vec{\gamma}| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Γ)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1 |\vec{\beta}|^2 - \alpha_1 (\alpha_2)^2 - \alpha_1 (\alpha_3)^2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \\ 0 \\ |\vec{\gamma}| \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ |\vec{\gamma}| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Δ)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \\ 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \\ -\frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-|\vec{\beta}|^2 \alpha_1 + \alpha_1 (\alpha_2)^2 + \alpha_1 (\alpha_3)^2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \\ 0 \\ -|\vec{\gamma}| \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -|\vec{\gamma}| \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Με βάση τη μορφή των παραπάνω πινάκων, μπορεί ο αναγνώστης να υποψιαστεί ότι ο R για τις περιπτώσεις

Ε) $\hat{i} = \hat{y}$ ΣΤ) $\hat{i} = -\hat{y}$ θα μπορούσε να πάρει την εξής μορφή:

Ε)

$$R = \begin{bmatrix} -\frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\gamma}| |\vec{\beta}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\gamma}| |\vec{\beta}|} \\ \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \end{bmatrix}$$

ΣΤ)

$$R = \begin{bmatrix} \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\gamma}| |\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\gamma}| |\vec{\beta}|} \\ -\frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \\ 0 & -\frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \end{bmatrix}.$$

Αυτοί οι πίνακες είναι ορθογώνιοι και αν ο αναγνώστης εκτελέσει τους πολλαπλασιασμούς $R \cdot \vec{\alpha}$ θα δει ότι πράγματι λαμβάνονται τα επιθυμητά κάθε φορά αποτελέσματα. Επομένως είναι αποδεκτοί.

Αν κάποιος έδινε εξαρχής τους πίνακες των περιπτώσεων Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΣΤ και επιβεβαιωνόταν ότι:

α) αυτοί οι πίνακες είναι ορθογώνιοι

και ότι β) ισχύει ότι ο πολλαπλασιασμός $R \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ δίνει ένα διάνυσμα που είναι ομόρροπο

με το \hat{i} και έχει μέτρο $\sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2}$, τότε σίγουρα αυτοί οι πίνακες θα εξέφραζαν ευκλείδειους μετασχηματισμούς με το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Αν τώρα τεθεί:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_2}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_3}{|\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha_3}{|\vec{\beta}|} & -\frac{\alpha_2}{|\vec{\beta}|} \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} \frac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_2}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} & \frac{\alpha_1 \alpha_3}{|\vec{\beta}| |\vec{\gamma}|} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.42)$$

τότε για τις περιπτώσεις Α, Β, Γ, Δ, Ε και ΣΤ θα ισχύουν:

Α)

$$R = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Β)

$$R = \begin{bmatrix} -A \\ B \\ -C \end{bmatrix}$$

Γ)

$$R = \begin{bmatrix} -C \\ B \\ A \end{bmatrix}$$

Δ)

$$R = \begin{bmatrix} C \\ B \\ -A \end{bmatrix}$$

Ε)

$$R = \begin{bmatrix} C \\ A \\ B \end{bmatrix}$$

ΣΤ)

$$R = \begin{bmatrix} -C \\ -A \\ B \end{bmatrix}$$

Από αυτές τις μορφές των πινάκων είναι πιο ξεκάθαρο ότι οι πίνακες είναι ορθογώνιοι και είναι και πιο εύκολο να δημιουργηθεί μία συνάρτηση σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού που να υπολογίζει τον επιθυμητό κάθε φορά μετασχηματισμό.

Δεν ενδιαφέρει τι γίνεται στις υπόλοιπες υποπεριπτώσεις της περίπτωσης 1 και αυτό γιατί έχουν ήδη βρεθεί κάποιοι μετασχηματισμοί που δίνουν τα επιθυμητά αποτελέσματα για οποιαδήποτε α_2, α_3 τέτοια ώστε να ισχύει $\alpha_2 \neq 0$ ή $\alpha_3 \neq 0$ είτε πρόκειται για δεξιόστροφο είτε για αριστερόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

Περίπτωση 2) $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Για αυτήν την περίπτωση θα επιλεγούν «κατάλληλοι» γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, αφού γίνει ο εξής διαχωρισμός περιπτώσεων:

$$2A) (\hat{i} = \hat{x}) \wedge (\alpha_1 > 0) \vee (\hat{i} = -\hat{x}) \wedge (\alpha_1 < 0)$$

$$2B) (\hat{i} = \hat{x}) \wedge (\alpha_1 < 0) \vee (\hat{i} = -\hat{x}) \wedge (\alpha_1 > 0)$$

$$2Γ) (\hat{i} = \hat{y}) \wedge (\alpha_1 > 0) \vee (\hat{i} = -\hat{y}) \wedge (\alpha_1 < 0)$$

$$2Δ) (\hat{i} = \hat{y}) \wedge (\alpha_1 < 0) \vee (\hat{i} = -\hat{y}) \wedge (\alpha_1 > 0)$$

$$2Ε) (\hat{i} = \hat{z}) \wedge (\alpha_1 > 0) \vee (\hat{i} = -\hat{z}) \wedge (\alpha_1 < 0)$$

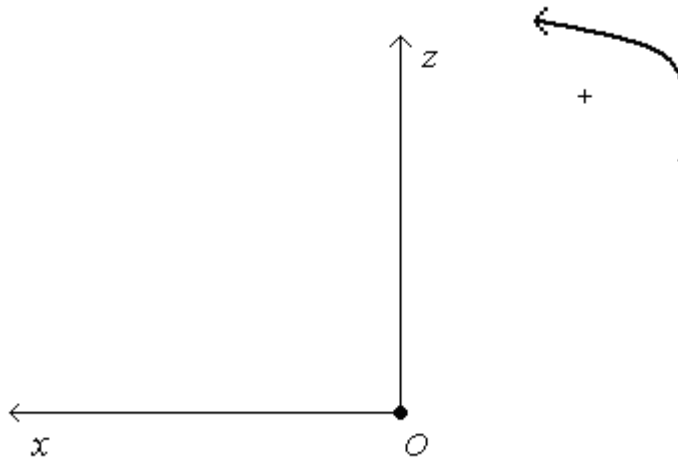
$$2ΣΤ) (\hat{i} = \hat{z}) \wedge (\alpha_1 < 0) \vee (\hat{i} = -\hat{z}) \wedge (\alpha_1 > 0)$$

Για την περίπτωση 2Α, ένας κατάλληλος πίνακας είναι φυσικά ο:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση 2Β, ένας κατάλληλος πίνακας (Σχήμα 4.10) είναι αυτός που αντιστοιχεί σε στροφή $+180^\circ$ γύρω από τον άξονα των y (σχέση (π.2.12.3)) για $\theta = +180^\circ$:

$$R = R_y(180^\circ) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$



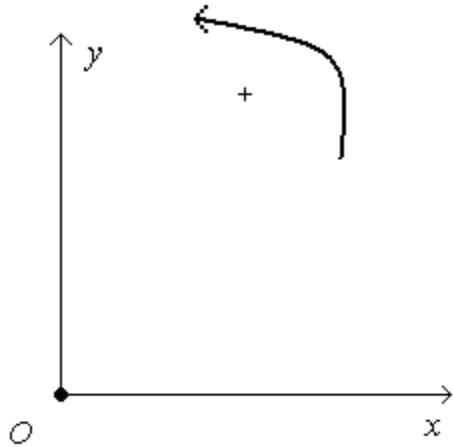
Σχήμα 4.10: Βοηθητικό σχήμα για την εύρεση του κατάλληλου πίνακα για τις περιπτώσεις 2Β, 2Ε, 2ΣΤ.

Για την περίπτωση 2Γ, ένας κατάλληλος πίνακας (Σχήμα 4.11) είναι αυτός που αντιστοιχεί σε στροφή γύρω από τον άξονα z (σχέση (π.2.12.1)) κατά $\theta = 90^\circ$:

$$R = R_z(+90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση 2Δ, ένας κατάλληλος πίνακας (Σχήμα 4.11) είναι αυτός που αντιστοιχεί σε στροφή γύρω από τον άξονα z (σχέση (π.2.12.1)) κατά $\theta = -90^\circ$:

$$R = R_z(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Σχήμα 4.11: Βοηθητικό σχήμα για την εύρεση του κατάλληλου πίνακα για τις περιπτώσεις 2Γ, 2Δ.

Για την περίπτωση 2Ε, ένας κατάλληλος πίνακας (Σχήμα 4.10) είναι αυτός που αντιστοιχεί σε στροφή γύρω από τον άξονα y (σχέση (π.2.12.3)) κατά $\theta = -90^\circ$:

$$R = R_y(-90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Για την περίπτωση 2ΣΤ, ένας κατάλληλος πίνακας (Σχήμα 4.10) είναι αυτός που αντιστοιχεί σε στροφή γύρω από τον άξονα y (σχέση (π.2.12.3)) κατά $\theta = +90^\circ$:

$$R = R_y(+90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αν τεθεί:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ και}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

τότε οι κατάλληλοι τύποι για τις περιπτώσεις 2Α, 2Β, 2Γ, 2Δ, 2Ε, 2ΣΤ είναι αντίστοιχα:

2Α)

$$R = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

2Β)

$$R = \begin{bmatrix} -A \\ B \\ -C \end{bmatrix}$$

2Γ)

$$R = \begin{bmatrix} -B \\ A \\ C \end{bmatrix}$$

2Δ)

$$R = \begin{bmatrix} B \\ -A \\ C \end{bmatrix}$$

2Ε)

$$R = \begin{bmatrix} -C \\ B \\ A \end{bmatrix}$$

2ΣΤ)

$$R = \begin{bmatrix} C \\ B \\ -A \end{bmatrix}$$

Παρακάτω ακολουθεί η απόδειξη της πρότασης που χρησιμοποιήθηκε:
«το γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων έστω A, B είναι και αυτό ορθογώνιος πίνακας».

Είναι σίγουρο ότι αυτή η εύκολη απόδειξη υπάρχει σε κάποια μαθηματικά βιβλία. Θεωρήθηκε όμως ότι ήταν πιο σύντομο να αποδειχθεί αναλυτικά παρά να βρεθεί κάποιο κατάλληλο μαθηματικό εγχειρίδιο και να γίνει παραπομπή σε αυτό.

Υπενθυμίζεται ότι με βάση τα όσα αναλύθηκαν στην ενότητα Π.2.4:
«ένας πίνακας A τύπου $V \times V$ ονομάζεται *ορθογώνιος* αν και μόνο αν $A^{-1} = A^T$. Η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα ως $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$ ».

Επομένως:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T \stackrel{\det B \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$B \cdot (A \cdot B)^T = B \cdot B^T \cdot A^T \stackrel{\det A \neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$A \cdot B (A \cdot B)^T = A \cdot B \cdot B^T \cdot A^T \stackrel{B \cdot B^T = I}{\Leftrightarrow}$$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot I \cdot A^T \Leftrightarrow$$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T = A \cdot A^T \stackrel{A \cdot A^T = I}{\Leftrightarrow}$$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T = I$$

Επίσης από την τελευταία σχέση με ισοδυναμία λαμβάνεται:

$$\left((A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^T \right)^T = I^T \Leftrightarrow$$

$$(A \cdot B)^T \cdot (A \cdot B) = I$$

Επομένως αποδείχθηκε ότι το γινόμενο δύο ορθογωνίων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας. Πάντως ίσως να μην ήταν και τόσο απαραίτητο να αποδειχθεί αυτό, με βάση όσα αναφέρονται στο Παράρτημα 2.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Wolfgang Kainz, Andreas Christ, Tocher Kellom, Seth Seidman, Neviana Nikoloski, Brian Beard and Niels Kuster, “Dosimetric comparison of the specific anthropomorphic mannequin (SAM) to 14 anatomical head models using a novel definition for the mobile phone positioning”, *Physics in Medicine and Biology*, vol. 50, pp. 3423-3445, July 2005
- [2] IEEE Std 1528™-2003, “IEEE Recommended Practice for Determining the Peak Spatial-Average Specific Absorption Rate (SAR) in the Human Head from Wireless Communications Devices: Measurement Techniques”, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2003
- [3] Stavros Koulouridis and Konstantina S. Nikita, “Study of the Coupling Between Human Head and Cellular Phone Helical Antennas”, *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility*, vol. 46, no. 1, pp. 62-70, February 2004.
- [4] TOM M. APOSTOL “ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ”, Εκδόσεις Μ.ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ Α.Ε., Νέα Υόρκη 1961 (Μετάφραση από Αγγλικά στα Ελληνικά)
- [5] Remcom, “xfdtd 6 - fdtd for professionals - Reference Manual”, Version 6.0, Remcom, 2003

Κεφάλαιο 5

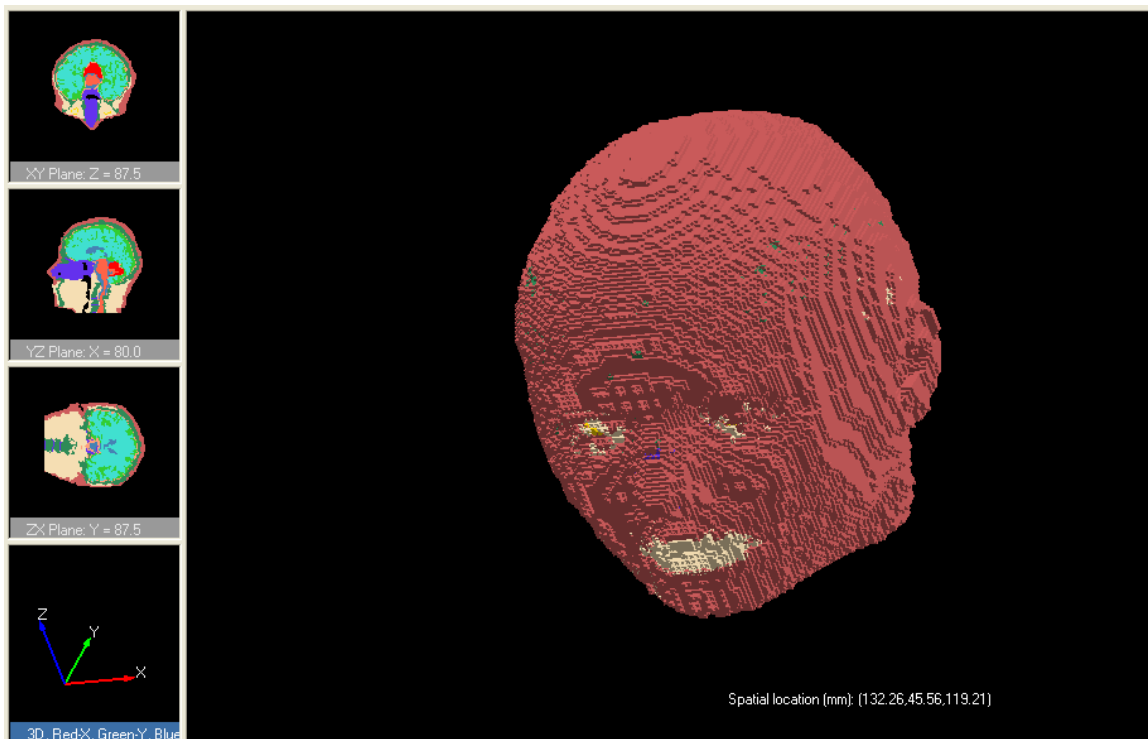
Τοποθέτηση της κινητής τερματικής συσκευής σε σχέση με το αριθμητικό μοντέλο κεφαλιού χρήστη στο πρόγραμμα XFDTD

Σημείωση: Το κεφάλαιο αυτό, αναφέρεται σε καθαρά πρακτικά ζητήματα. Θεωρείται ότι ο αναγνώστης διαθέτει τον απαραίτητο κώδικα των συναρτήσεων που παρατίθενται στο Παράρτημα 3. Επίσης, εκτός φυσικά του προγράμματος XFDTD (έκδοση 6.0), διαθέτει και το πρόγραμμα Matlab R2007b ή κάποια άλλη έκδοση του Matlab συμβατή με αυτήν.

Ο χρήστης μπορεί να ξεκινήσει το παρόν κεφάλαιο με την εκκίνηση της συνάρτησης “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp” η οποία αναφέρεται στη συνέχεια, και της οποίας τον απαραίτητο κώδικα διαθέτει. Η συνάρτηση αυτή, καλεί άλλες συναρτήσεις οι οποίες με τη σειρά τους καλούν άλλες και ου το καθεξής σύμφωνα με την λογική του δομημένου προγραμματισμού (modularity). Ενδείκνυται ο χρήστης αν επιθυμεί, να διαβάσει το κεφάλαιο 5 ενώ εκτελείται ταυτόχρονα η συνάρτηση “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp”.

5.1. Εισαγωγή

Προκειμένου να καθοριστεί η θέση του κινητού τηλεφώνου σε σχέση με το ανατομικό μοντέλο κεφαλιού (anatomical head model) που χρησιμοποιείται, εισάγεται αρχικά το μοντέλο του κεφαλιού ως αρχείο .mesh (Κεφάλαιο 3) στο πρόγραμμα XFDTD. Με συγκεκριμένες ρυθμίσεις στο πρόγραμμα εμφανίζεται στο “Mesh Mode”(βλ. Κεφάλαιο 3), το ανατομικό κεφάλι της Εικόνας 5.1, όπου τα σημεία από τα οποία αποτελείται (σημεία ενός υποθετικού σημειακού χώρου Ώ.- Παράρτημα 2, Κεφάλαιο 4), έχουν το κάθε ένα τις δικές του συντεταγμένες.






Εικόνα 5.1: Το αριθμητικό μοντέλο κεφαλιού που χρησιμοποιήθηκε όπως απεικονίζεται μέσα από το πρόγραμμα XFDTD.

Η διαδικασία τοποθέτησης του μοντέλου κεφαλιού στη σωστή θέση σε σχέση με το μοντέλο του κινητού τηλεφώνου, μέσα από το περιβάλλον του προγράμματος XFDTD αποτελείται από τα παρακάτω βήματα-ενότητες:

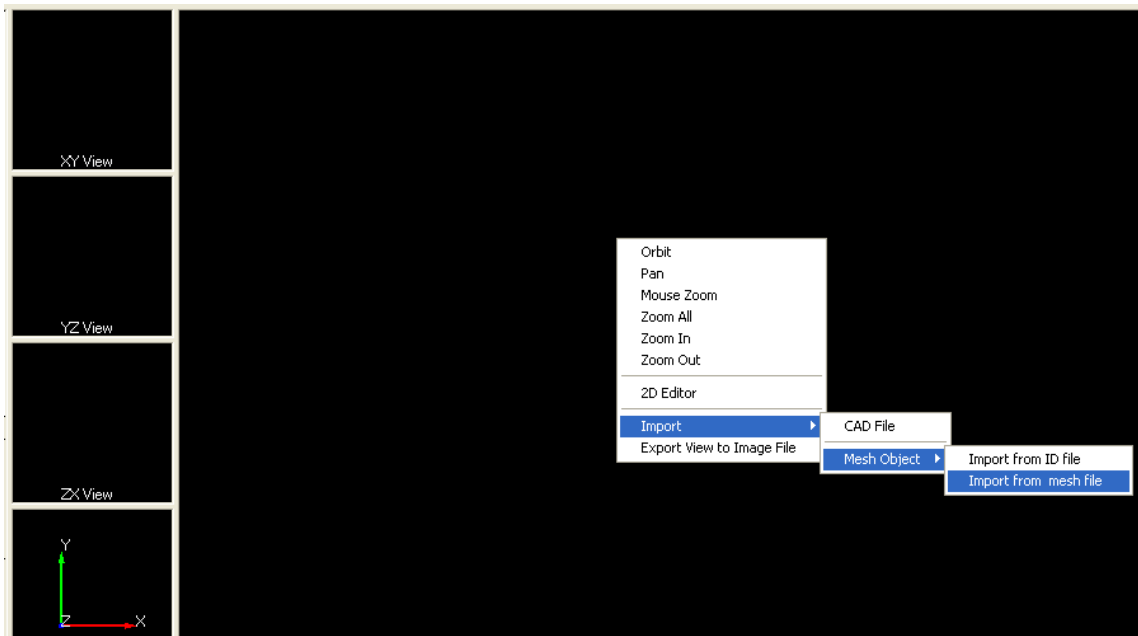
5.2. Εισαγωγή του μοντέλου του κεφαλιού, ως ένα αρχείο .mesh στο λογισμικό XFDTD.

Η εισαγωγή αυτή γίνεται ως εξής:

α) Ο χρήστης πρέπει αρχικά να «ανοίξει» το πρόγραμμα XFDTD 6.0 και στη συνέχεια να ενεργοποιήσει την ετικέτα Geometry ( Geometry). Στο πρόγραμμα κατά σύμβαση είναι ενεργοποιημένη η ετικέτα View () και η αρχική απεικόνιση είναι η απεικόνιση του στερεού ().

β) Αφού τοποθετήσει ο χρήστης τον κέρσορα του ποντικιού μέσα στην περιοχή απεικόνισης, πρέπει να κάνει δεξί «κλικ». Από το αναδυόμενο μενού πρέπει να επιλεγεί “Import->Mesh Object->Import from mesh file” και να επιλεγεί με αριστερό «κλικ» το “Import from mesh file”

Η διαδικασία αυτή απεικονίζεται στην Εικόνα 5.2:



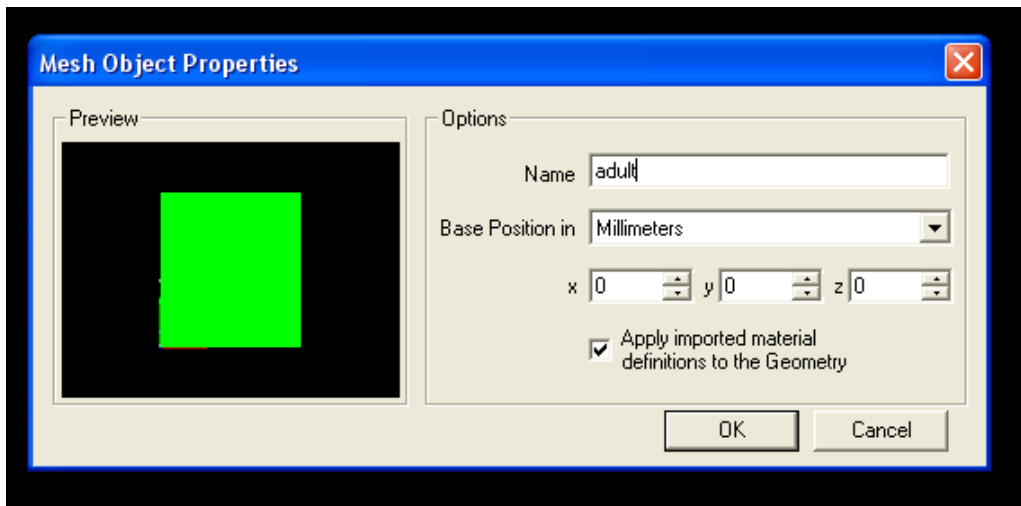
Εικόνα 5.2: Απεικόνιση της διαδικασίας εισαγωγής στο πρόγραμμα XFDTD του ανατομικού μοντέλου κεφαλιού ως ένα αρχείο .mesh.

γ) Εμφανίζεται έτσι ένα παράθυρο μέσω του οποίου μπορεί να βρεθεί το κατάλληλο αρχείο .mesh και με την επιλογή “open”, να γίνει πρόσβαση στο αρχείο αυτό.

δ) Στη συνέχεια ο χρήστης πρέπει να περιμένει μέχρι να εμφανιστεί ένα παράθυρο με την επιγραφή “Mesh Object Properties”. Αφού εμφανιστεί το παράθυρο αυτό, ο χρήστης επιβάλλεται να επιλέξει να τοποθετηθεί το αντικείμενο .mesh (αντικείμενο πλέγματος) στη θέση (0,0,0) και με μονάδες “Millimeters”. Καλύτερα να αποφευχθεί ενδεχόμενη τοποθέτηση σε κάποια άλλη θέση παρόλο που δίνεται αυτή η δυνατότητα από το πρόγραμμα. Επίσης, είναι δυνατό, αν ο χρήστης το επιθυμεί, να δοθεί κάποιο όνομα στο αντικείμενο πλέγματος (με αυτό το όνομα θα εμφανίζεται στο δέντρο αντικειμένων-Κεφάλαιο 3). Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι είναι αναγκαίο να γίνει επιλογή του “Apply imported material definitions to the Geometry”, πριν ο χρήστης επιλέξει “OK”. Με αυτόν

τον τρόπο λαμβάνονται υπόψη οι ηλεκτρομαγνητικές παράμετροι των υλικών που έχουν οριστεί στο αρχείο .mesh.

Τα παραπάνω απεικονίζονται στην Εικόνα 5.3:

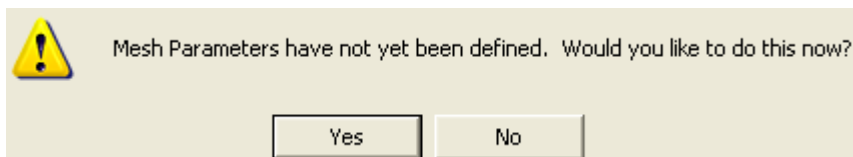


Εικόνα 5.3: Καθορισμός τοποθέτησης του αντικειμένου πλέγματος.

Έχει γίνει πλέον η εισαγωγή του αρχείου .mesh.

5.3. Ρύθμιση των παραμέτρων του πλέγματος

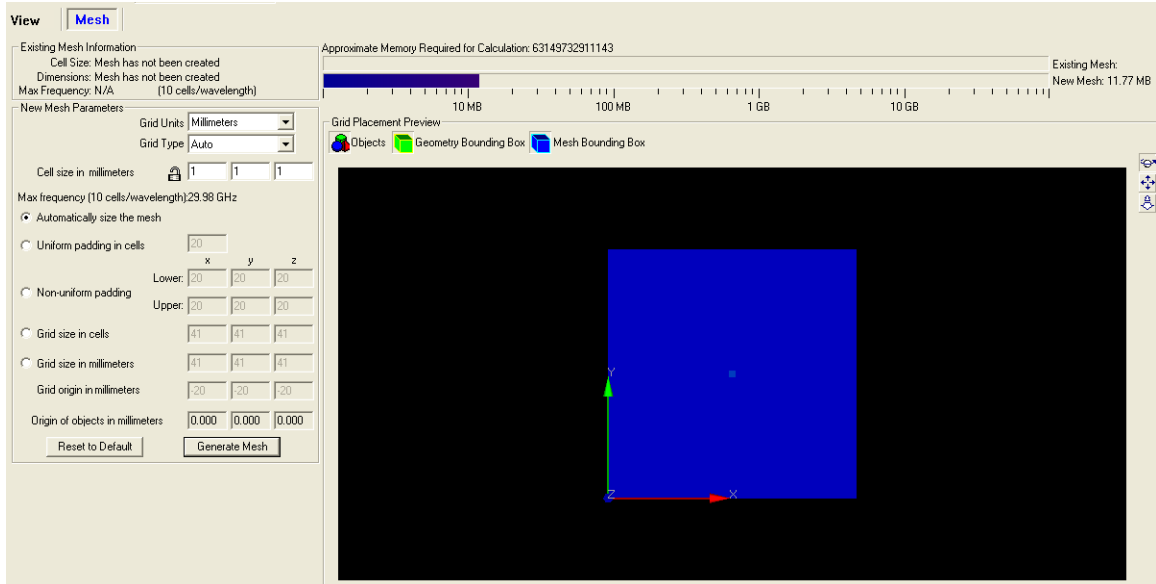
Για να εμφανιστεί το μοντέλο του κεφαλιού, πρέπει να επιλεγεί “Mesh Mode” (απεικόνιση του πλέγματος) (βλ. ενότητα 3.5.1). Μετά την επιλογή “Mesh Mode”, το πρόγραμμα θα εμφανίσει το παρακάτω μήνυμα, αν δεν έχουν ρυθμιστεί οι παράμετροι του πλέγματος:



Εικόνα 5.4: Μήνυμα του προγράμματος XFDTD προς το χρήστη το οποίο εμφανίζεται αν επιλεγεί η απεικόνιση του πλέγματος ενώ δεν έχουν ρυθμιστεί οι παράμετροι του πλέγματος.

Επιλέγοντας “Yes” ο χρήστης «μεταφέρεται» σε ένα παράθυρο το οποίο έχει τη μορφή της Εικόνας 5.5.

Σε περίπτωση που για κάποιον λόγο έχουν ήδη ρυθμιστεί παράμετροι για το πλέγμα, θα εμφανιστεί στο χρήστη κατευθείαν ένα παράθυρο αυτής της μορφής, χωρίς προηγουμένως να του εμφανιστεί το μήνυμα της εικόνας 5.5



Εικόνα 5.5: Το παράθυρο που εμφανίζεται με την ενεργοποίηση της ετικέτας Mesh.

Μέσα από αυτό το παράθυρο είναι δυνατόν-όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα 3.5.3-να ρυθμιστεί το μέγεθος του κάθε κελιού, και να καθοριστούν οι διαστάσεις του πλέγματος. Καλό είναι να επιλεγούν ως μονάδες (Grid Units) τα χιλιοστά-(millimeters). Ο τύπος του πλέγματος (Grid Type) μπορεί να καθοριστεί ως “Auto” αλλά η επιλογή “Electric” είναι καταλληλότερη. Έπειτα, πρέπει να καθοριστούν από το χρήστη οι διαστάσεις του κάθε κελιού (θεωρείται ότι $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \delta$ -ενότητα 2.4.2), αφού λάβει υπόψη τη σχέση (2.48α). Για το συγκεκριμένο πρόβλημα ισχύει βάσει όσων αναφέρονται στο [1] :

$$\lambda_{\min} = \frac{\lambda_{\text{ελεύθερου_χώρου}}}{\sqrt{\epsilon_{r \max}}} \quad (5.1).$$

Στο πρόβλημα που εξετάζεται εδώ,



$$\lambda_{\text{ελεύθερου_χώρου}} = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1800 \text{ MHz}} = \frac{1}{6} \times 10^3 \text{ mm} \text{ και } \epsilon_{r \max} = 68,3.$$

$$\text{Έτσι προκύπτει: } \lambda_{\min} = \frac{1000}{6 \cdot \sqrt{68.3}} \text{ mm}.$$

Λόγω συγκεκριμένου μοντέλου κεφαλιού που χρησιμοποιήθηκε στο πρόβλημα αυτό, είναι επιθυμητό να είναι $\delta = 1.25 \text{ mm}$.

Συνεπώς, για την τιμή του λ_{\min} που βρέθηκε παραπάνω, ισχύει η σχέση (2.48α) επομένως βάση της θεωρίας του Κεφαλαίου 2, έχει εξασφαλιστεί η ακρίβεια των υπολογισθέντων από τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών στο πεδίο του χρόνου αποτελεσμάτων.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα 3.5.3, το μέγεθος του κελιού μπορεί να αλλάζει αυτόματα από το πρόγραμμα, για αυτό, αν ο χρήστης θέλει να το διατηρήσει

σταθερό, πρέπει να ενεργοποιήσει το εικονίδιο με το λουκέτο( → ). Επίσης, επειδή για τις ανάγκες της προσομοίωσης κρίνεται απαραίτητο το «γέμισμα» (“padding”) (βλ. Κεφάλαιο 3) να είναι «ομοιόμορφο», πρέπει να επιλεγεί το “Uniform padding in cells”. Δίπλα από την επιγραφή “Uniform padding in cells” υπάρχει ένα πλαίσιο, το οποίο χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του αριθμού των κελιών που απέχει η κάθε πλευρά του «κουτιού» Geometry Bounding Box από την αντίστοιχη του «κουτιού» Mesh Bounding Box (βλ. Κεφάλαιο 3). Σε αυτό το πλαίσιο, πρέπει από εμπειρικό κανόνα, να εισαχθεί αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του:

$$\left\lceil (\lambda_{ελεύθερου_χώρου} / 4) / \delta \right\rceil =$$







$$= \left\lceil 1000 / (24 * 1.25) \right\rceil = 34$$

Πάντως στην εν λόγω εργασία, για μεγαλύτερη ασφάλεια, εισήχθη στο παραπάνω πλαίσιο ο αριθμός 40.

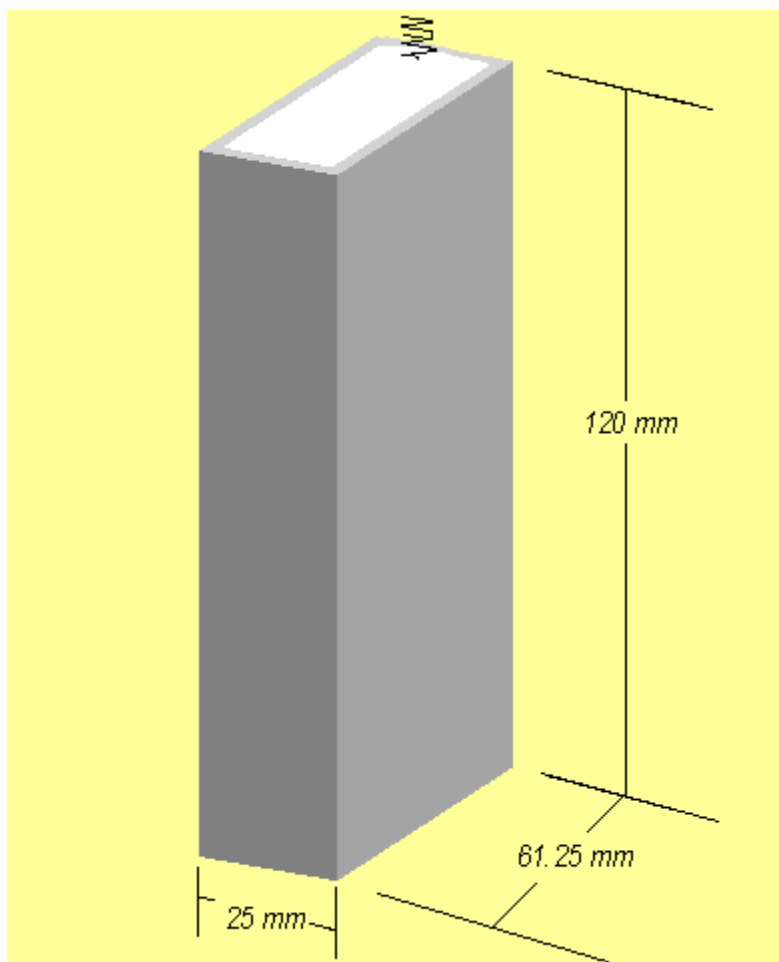
Αφού λοιπόν ο χρήστης κάνει τις κατάλληλες επιλογές πρέπει στη συνέχεια να επιλέξει “Generate Mesh”.

5.4. Απεικόνιση του μοντέλου του κεφαλιού-εύρεση των κατάλληλων σημείων και επιπέδων.

Συνεχίζοντας, επιλέγοντας την ετικέτα View, μπορεί πλέον ο χρήστης να δει μία τομή του κεφαλιού παράλληλη στο-κατά σύμβαση-XY επίπεδο. Κάνοντας κυρίως χρήση των XY, YZ, ZX Views (σε διαφορετικές τομές (slices)) αλλά και της τρισδιάστατης απεικόνισης (βλ. Κεφάλαιο 3) βρίσκει τις συντεταγμένες των σημείων L (EECL), R (EECR) και M (βλ. Κεφάλαιο 4). Χρήσιμα προς αυτό το σκοπό είναι τα εξής εργαλεία που ανήκουν στο μενού το οποίο βρίσκεται στο δεξί άκρο της περιοχής απεικόνισης:

α)  β)  γ)  δ)  ε) , και λιγότερο το στ) .


Οι συντεταγμένες των τριών παραπάνω σημείων πρέπει να εισαχθούν κατά το κάλεσμα μίας συνάρτησης με όνομα “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp” που έχει δημιουργηθεί σε γλώσσα matlab (η οποία πάντως δε δέχεται ορίσματα). Η συνάρτηση αυτή, θα επιστρέψει στο χρήστη μεταξύ άλλων τέσσερα κατάλληλα σημεία για την μοντελοποίηση του επιπέδου αναφοράς, του επιπέδου (Π_2), του βασικού επιπέδου (βλ. Κεφάλαιο 4), και τέλος [2] του άνω και του κάτω επιπέδου αναφοράς (reference plane up (RPU) και reference plane down (RPD)). Υπάρχουν δύο επίπεδα που είναι παράλληλα στο επίπεδο αναφοράς και απέχουν από αυτό απόσταση ίση με το μήκος του κινητού (σε χιλιοστά) διαιρεμένη διά του 2. Το επίπεδο που βρίσκεται στον ημιχώρο που ορίζεται από το λαιμό και το επίπεδο αναφοράς είναι το κάτω επίπεδο αναφοράς και το άλλο είναι το άνω επίπεδο αναφοράς Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζονται οι διαστάσεις του κινητού που χρησιμοποιείται:

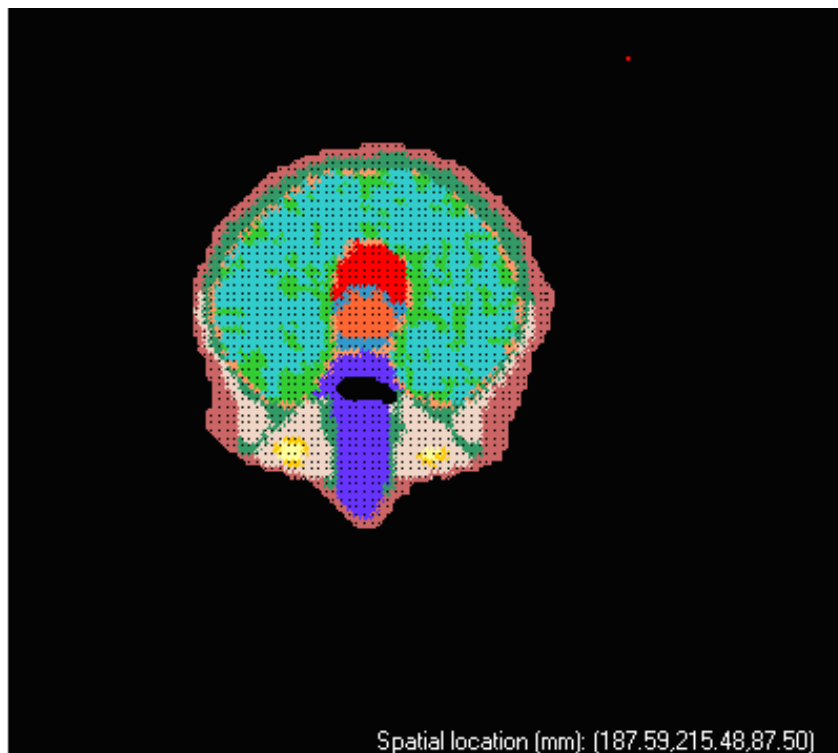


Σχήμα 5.1: Οι διαστάσεις στο μοντέλο του κινητού τηλεφώνου που χρησιμοποιήθηκε.

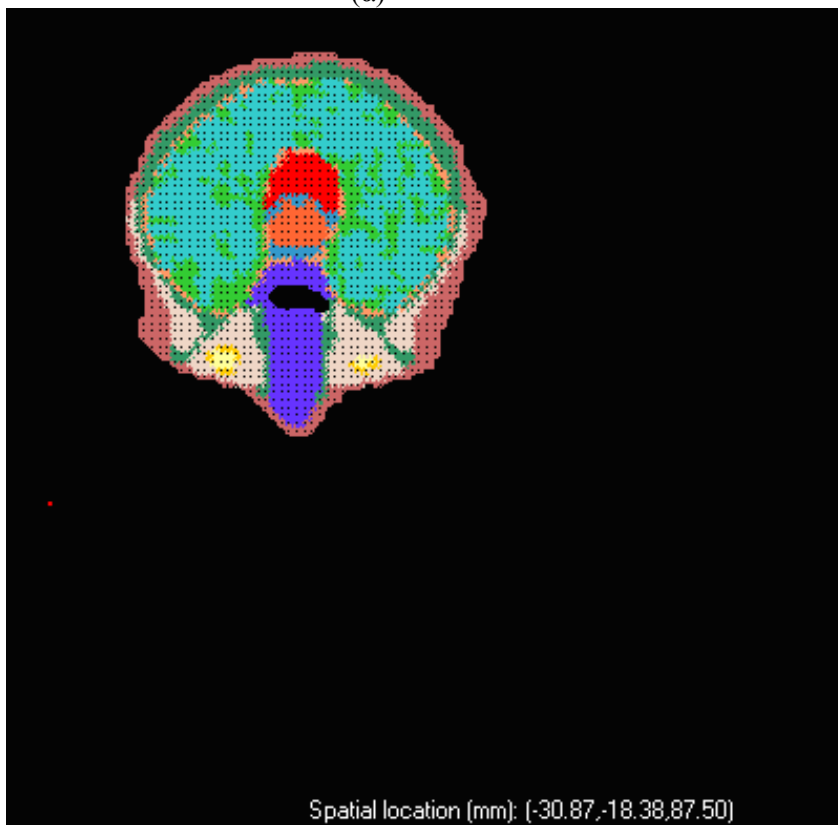
Αρχικά ο χρήστης πρέπει να βρει 2 σημεία— άλλα δύο βρίσκονται αυτόματα από την παραπάνω συνάρτηση-με τη βοήθεια των οποίων θα καθοριστεί μία λεπτή πλάκα, της μορφής *Advance Quadrilateral Plate* [3] που θα μοντελοποιεί το επίπεδο αναφοράς. Για το σκοπό αυτό, είναι χρήσιμες οι τομές του κεφαλιού που είναι παράλληλες σε κάποιο από τα XY, YZ, ZX επίπεδα.

Το ποιες τομές είναι κάθε φορά οι κατάλληλες δίνεται απευθείας κατά την εκτέλεση της συνάρτησης “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp”.

Ως παράδειγμα, ας θεωρηθεί ότι το XY επίπεδο-XY view-είναι το κατάλληλο για την εύρεση δύο σημείων από τα τέσσερα που θα χρησιμοποιηθούν για τη μοντελοποίηση του επιπέδου αναφοράς. Σε κάποια τομή του κεφαλιού που είναι παράλληλη στο XY επίπεδο, στο ύψος ενός Z (γενικά στο ύψος της τρίτης μεταβλητής που λείπει-π.χ. για το ZX επίπεδο στο ύψος ενός Y) που να βρίσκεται περίπου στη μέση του κεφαλιού, πρέπει αφού γίνει χρήση του εργαλείου () να επιλεγούν δύο σημεία τέτοια ώστε να σχηματίζουν υποθετικά μία διαγώνιο, ενός τετραγώνου, το οποίο περιέχει την τομή του κεφαλιού. Στις παρακάτω εικόνες, με τις κόκκινες τελίτσες απεικονίζονται δύο τέτοια σημεία:



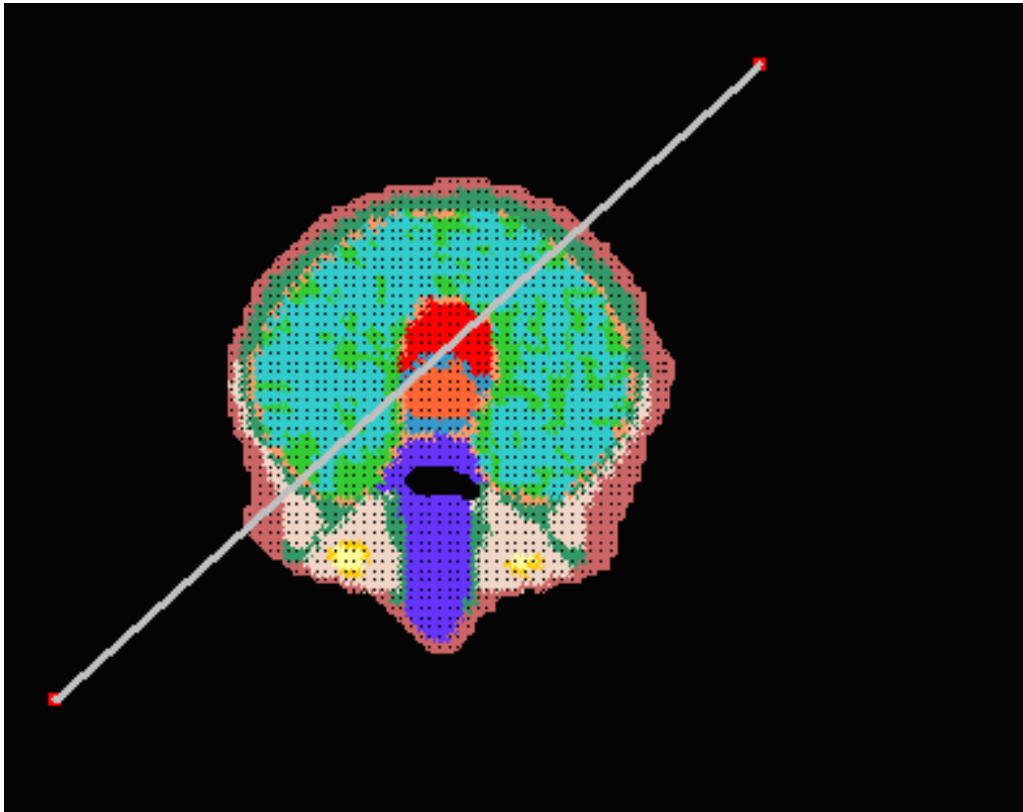
(α)




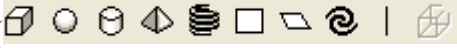
(β)


Εικόνες 5.6 (α), (β): Η επιλογή δύο κατάλληλων σημείων για τη μοντελοποίηση ενός επιπέδου στο πρόγραμμα XFDTD. Τα σημεία απεικονίζονται με κόκκινο χρώμα.

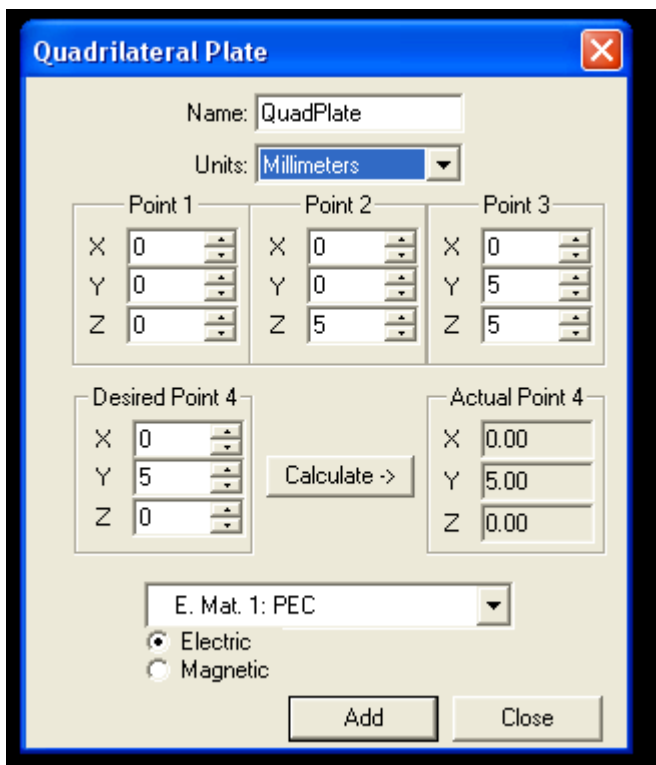
Η υποθετική διαγώνιος που δημιουργείται, φαίνεται στην Εικόνα 5.7:





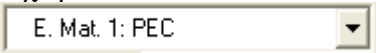
Εικόνα 5.7: Η υποθετική διαγώνιος που δημιουργείται από τα δύο παραπάνω σημεία.

Έχοντας ο χρήστης διαλέξει τα δύο κατάλληλα σημεία (τα οποία σημειώνεται πάλι, θα του ζητηθεί από το πρόγραμμα Matlab να εισάγει αφού κληθεί η συνάρτηση “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp”), επιλέγει το εικονίδιο *Quadrilateral plane* () από τη γραμμή εργαλείων () που βρίσκεται πάνω από το δέντρο αντικειμένων (βλ. Κεφάλαιο 2).

Στο παράθυρο που εμφανίζεται μετά την επιλογή του εικονιδίου  , ο χρήστης επιλέγει “Advanced...”. Με αυτόν τον τρόπο αναδύεται ένα παράθυρο όπως αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 5.8. Από αυτό το παράθυρο εισάγει ο χρήστης τις συντεταγμένες των τεσσάρων κορυφών για την κατασκευή του αντικειμένου Advance Quadrilateral Plate. Το αντικείμενο αυτό είναι όπως αναφέρθηκε μία λεπτή πλάκα σχήματος παραλληλογράμμου που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση του επιπέδου αναφοράς.



Εικόνα 5.8: Το παράθυρο που εμφανίζεται μετά την επιλογή ()->“Advanced...”

Ο χρήστης πρέπει να εισάγει στο πρόγραμμα Matlab στις κατάλληλες θέσεις τις συντεταγμένες των τεσσάρων σημείων με τη σειρά που αυτές εμφανίστηκαν. Δηλαδή στο πλαίσιο Point 1 πρέπει να μουν οι συντεταγμένες του σημείου P1 (ή p1), και ου το καθεξής. Πριν ο χρήστης επιλέξει το (), πρέπει να προσέξει έτσι ώστε το υλικό από το οποίο θα κατασκευαστεί το αντικείμενο Advanced Quadrilateral Plate να έχει τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του ελεύθερου χώρου. Για να το κάνει αυτό επιβάλλεται να επιλέξει το μαύρο βέλος στο πλαίσιο  και από το μενού που θα αναδυθεί να επιλέξει “Add Material”:



Στη συνέχεια από το παράθυρο που θα εμφανιστεί θα επιλέξει το χρώμα του καινούργιου υλικού από το οποίο θα κατασκευαστεί το αντικείμενο που θα εισαχθεί, και έπειτα θα επιλέξει “OK”. Το παράθυρο που θα εμφανιστεί θα πρέπει να τροποποιηθεί πριν ξαναεπιλεγεί “OK” αν δεν είναι ίδιο με αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 5.9 (οι ηλεκτρομαγνητικές παράμετροι που φαίνονται στην εικόνα, είναι αυτές του ελεύθερου


χώρου). Μοναδική εξαίρεση είναι φυσικά η ονομασία του νέου υλικού κάτω από την επιγραφή “Material Name”. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι απαραίτητο οι ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του νέου υλικού να είναι αυτές του ελεύθερου χώρου, εφόσον αργότερα θα σβηστεί αυτό το αντικείμενο, αλλά καλό είναι να ακολουθείται γενικά μία συγκεκριμένη τακτική.

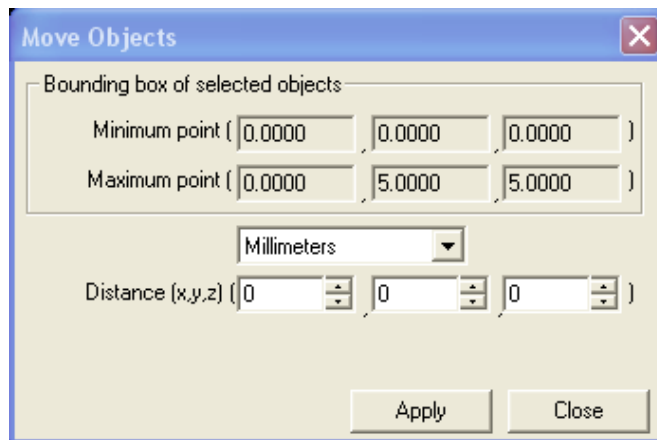
Εικόνα 5.9: Το παράθυρο που εμφανίζεται μετά την επιλογή “Add Material”.

Στη συνέχεια ο χρήστης πρέπει να κατασκευάσει ένα ίδιο αντικείμενο (Advanced Quadrilateral Plate) το οποίο αυτή τη φορά θα προσομοιώνει το επίπεδο (Π_2), με παρόμοια διαδικασία, δίνοντας ως παραμέτρους δύο συντεταγμένες δύο κατάλληλων σημείων με τη βοήθεια των οποίων θα καθοριστεί πού θα τοποθετηθεί στο χώρο του προγράμματος το αντικείμενο της μορφής Advanced Quadrilateral Plate.

Αφού εν τέλει εισαχθεί κατάλληλο αντικείμενο πάνω στο (Π_2), με παρόμοια διαδικασία εισάγεται αντίστοιχα, ένα ίδιο αντικείμενο στο βασικό επίπεδο.

















Στη συνέχεια ο χρήστης, πρέπει-αφού επιλέξει την τρισδιάστατη απεικόνιση-με βάση τον ορισμό των σημείων N και F (βλ. Κεφάλαιο 4), να μεταφέρει διαρκώς το αντικείμενο που αντιστοιχεί στο επίπεδο (Π_2) παράλληλα σε αυτό το επίπεδο,

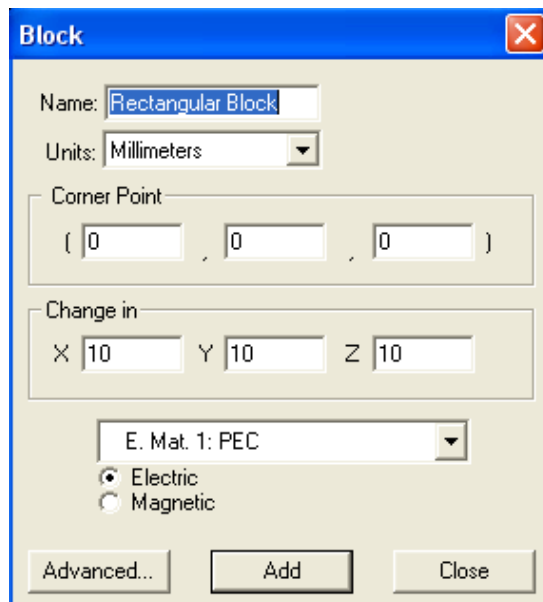
χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα τα εργαλεία: . Για να το κάνει αυτό, πρέπει, αφού επιλέξει το αντικείμενο που αντιπροσωπεύει το επίπεδο (Π_2) από το δέντρο των αντικειμένων, με δεξιά «κλικ» να επιλέξει “Edit” και στη συνέχεια με αριστερό «κλικ» “Move” από το μενού που θα αναδυθεί. Το μενού αυτό απεικονίζεται στην Εικόνα 5.10:




Εικόνα 5.10: Το παράθυρο που χρησιμεύει για τη μεταφορά ενός αντικειμένου που δεν αποτελεί μέρος του τρέχοντος πλέγματος.

Με τις κατάλληλες εισαγωγές δίπλα στην επιγραφή “Distance (x,y,z)” προσέχοντας ώστε οι μονάδες να είναι σε χιλιοστά (Millimeters) ο χρήστης προσθέτει στην ουσία αυτήν την τριάδα των πραγματικών αριθμών που θα εισάγει, στις αντίστοιχες συντεταγμένες κάθε σημείου του αντικειμένου με αποτέλεσμα να μεταφέρεται το αντικείμενο, μοντελοποιώντας διαρκώς επίπεδα πάντα παράλληλα με το επίπεδο που μοντελοποιούσε στην αρχή.


Σταματώντας τη μεταφορά εκεί που πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, επιλέγει το σημείο *N* (κάνοντας ξανά χρήση των εργαλείων , , , , ) και εισάγει σε αυτό το σημείο έναν πολύ μικρό κύβο με ακμή ενός κελιού. Για το σκοπό αυτό, επιλέγει το εικονίδιο *Rectangular Block* () [3] από τη γραμμή εργαλείων: (, , , , , , , , , ). Εμφανίζεται έτσι ένα παράθυρο όμοιο με αυτό της Εικόνας 5.11:




Εικόνα 5.11: Το παράθυρο που αναδύεται μετά την επιλογή του εικονιδίου .

Κάτω από το πλαίσιο Corner Point πρέπει να εισάγει τις συντεταγμένες για το σημείο N και κάτω από το πλαίσιο Change in να εισάγει τις διαστάσεις του κελιού. Έπειτα, αφού δημιουργηθεί ένα νέο υλικό με τις ηλεκτρομαγνητικές ιδιότητες του ελευθέρου χώρου και με ένα εύκολα αναγνωρίσιμο χρώμα σύμφωνα με τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, εισάγεται το νέο αντικείμενο στο δέντρο αντικειμένων.

Στη συνέχεια ο χρήστης πρέπει να μετακινήσει τον κύβο (όπως μετακίνησε τα αντικείμενα Advanced Quadrilateral Plate), μέχρι αυτός να συμπίπτει οπτικά στο κελί του οποίου την μία άκρη θεωρεί ως σημείο N . Για το σκοπό αυτό πρέπει να γίνει χρήση των XY, YZ, ZX Views και της τρισδιάστατης απεικόνισης. Χρήσιμα επίσης είναι τα

εργαλεία . Σημειώνεται πάντως ότι με λίγο προσεκτική χρήση

των εργαλείων  θα βρεθεί από την αρχή το κατάλληλο σημείο N χωρίς να χρειαστεί να γίνει μεταφορά του μικρού κύβου.

Γενικά η ταχύτητα με την οποία θα διενεργηθεί αυτή η διαδικασία, αλλά και όλες που περιγράφονται σε αυτό το κεφάλαιο, εξαρτώνται από την εμπειρία που διαθέτει ο χρήστης.

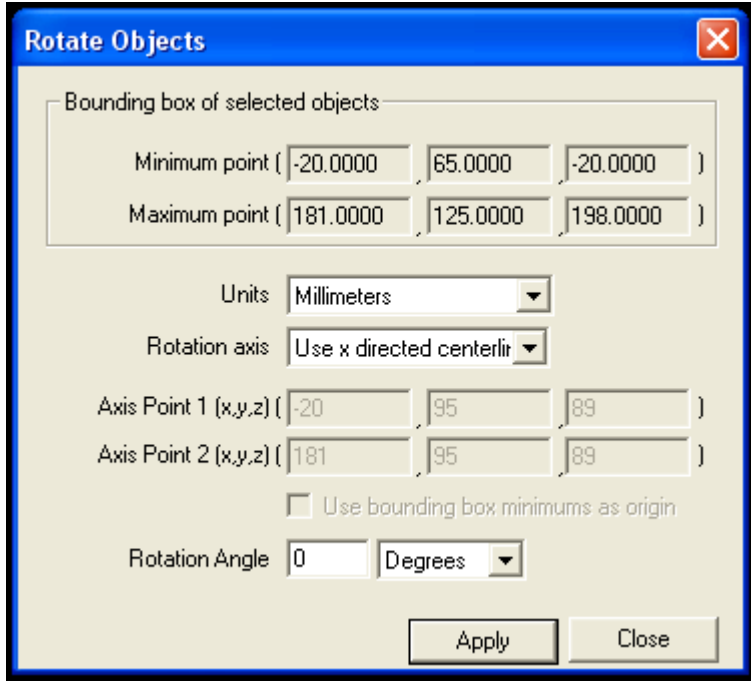
Με βάση τα παραπάνω βρίσκονται οι συντεταγμένες του σημείου N , με ικανοποιητική ακρίβεια. Παρόμοια διαδικασία ακολουθείται και για την εύρεση των συντεταγμένων του σημείου F .

Γνωρίζοντας πλέον ο χρήστης τις συντεταγμένες των σημείων N , F πρέπει να περιστρέψει το αντικείμενο που αντιστοιχεί στο βασικό επίπεδο μέσα από το πρόγραμμα XFDTD και με άξονα περιστροφής την NF ευθεία μέχρι αυτό να τμήσει το μάγουλο κάπου ανάμεσα στο άνω και στο κάτω επίπεδο αναφοράς. Είναι επομένως απαραίτητος και ο σχεδιασμός αυτών των δύο επιπέδων.

Συνεπώς, πριν ξεκινήσει η περιστροφή του βασικού επιπέδου γύρω από την NF ευθεία, πρέπει να εισαχθούν δύο νέα αντικείμενα “Advance Quadrilateral Plates” στο πρόγραμμα, που θα αντιπροσωπεύουν τα άνω και κάτω επίπεδα αναφοράς. Τα σημεία για την κατασκευή αυτών των δύο αντικειμένων, δίνονται αυτομάτως από το πρόγραμμα Matlab. Ο τρόπος κατασκευής και εισαγωγής των αντικειμένων αυτών είναι ακριβώς ο ίδιος με αυτόν που περιγράφηκε και αφορούσε το επίπεδο αναφοράς, το βασικό επίπεδο και το επίπεδο (Π_2).

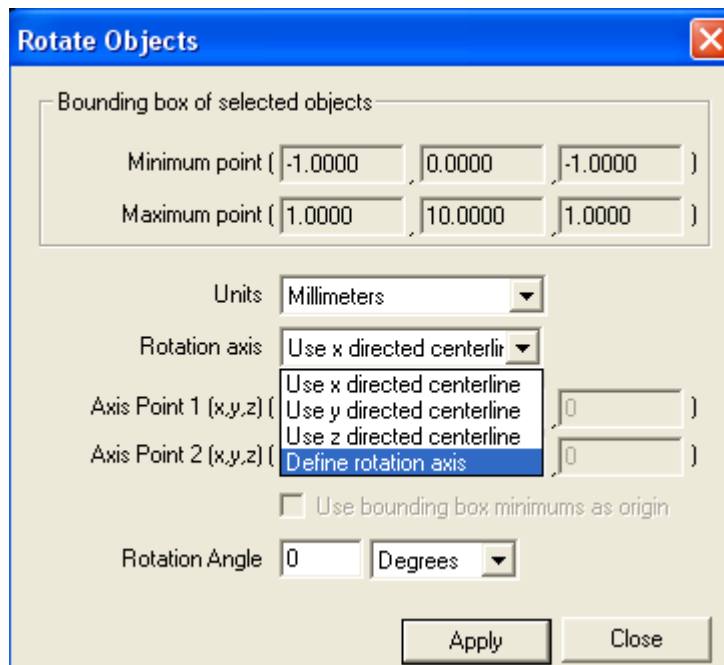
Αφού εισαχθούν αυτά τα δύο αντικείμενα, πρέπει ο χρήστης να κάνει δεξί «κλικ» στο Advanced Quadrilateral Plate που αντιστοιχεί στο βασικό επίπεδο, στο δέντρο αντικειμένων

Στη συνέχεια, με την επιλογή “Edit->Rotate” θα εμφανιστεί στην οθόνη του χρήστη ένα παράθυρο σαν αυτό που απεικονίζεται στην Εικόνα 5.12.



Εικόνα 5.12: Το παράθυρο που χρησιμεύει για τη περιστροφή ενός αντικειμένου που δεν αποτελεί μέρος του τρέχοντος πλέγματος.

Στο παράθυρο αυτό, πρέπει αρχικά να ενεργοποιηθεί η επιλογή “Define Rotation Axis” στην ετικέτα Rotation Axis:



Εικόνα 5.13: Επιλογή ορισμού του άξονα περιστροφής.


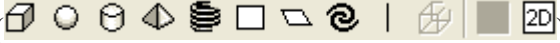

Ως δύο “Axis Points” (σημεία του άξονα περιστροφής) πρέπει να εισαχθούν οι συντεταγμένες των σημείων N , F αντίστοιχα. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να περιστραφεί το αντικείμενο Advanced Quadrilateral Plate γύρω από την ευθεία NF . Στρέφοντας επανειλημμένα υπό διάφορες γωνίες (Rotation Angle) το αντικείμενο αυτό γύρω από την ευθεία NF , προσπαθεί ο χρήστης να βρει το εφαπτόμενο σημείο (tangent point) T . Το εφαπτόμενο σημείο ορίζεται ως εξής: Περιστρέφεται το βασικό επίπεδο (pivot plane) γύρω από τη NF ευθεία μέχρι αυτό να τμήσει το μάγουλο κάπου ανάμεσα στα άνω και κάτω επίπεδα αναφοράς (RPU και RPD αντίστοιχα). Δηλαδή, αρχικά, περιστρέφεται το Advanced Quadrilateral Plate γύρω από την NF ευθεία μέχρι αυτό να τμήσει το μάγουλο. Στη συνέχεια θα συνεχίζονται οι περιστροφές μέχρι να βρεθεί το πρώτο κοινό σημείο του κεφαλιού και του περιστρεφόμενου βασικού επιπέδου που μοντελοποιείται από το αντικείμενο Advanced Quadrilateral Plate και το οποίο είναι ανάμεσα στα άνω και κάτω επίπεδα αναφοράς. Πρέπει να σημειωθεί ότι σε περίπτωση που απενεργοποιηθεί το παράθυρο με την επιγραφή “Rotate Objects” (Εικόνα 5.13) απαιτείται προσοχή έτσι ώστε τα νέα “Axis Points” να είναι ίδια με τα αρχικά (δηλαδή το N και το F).

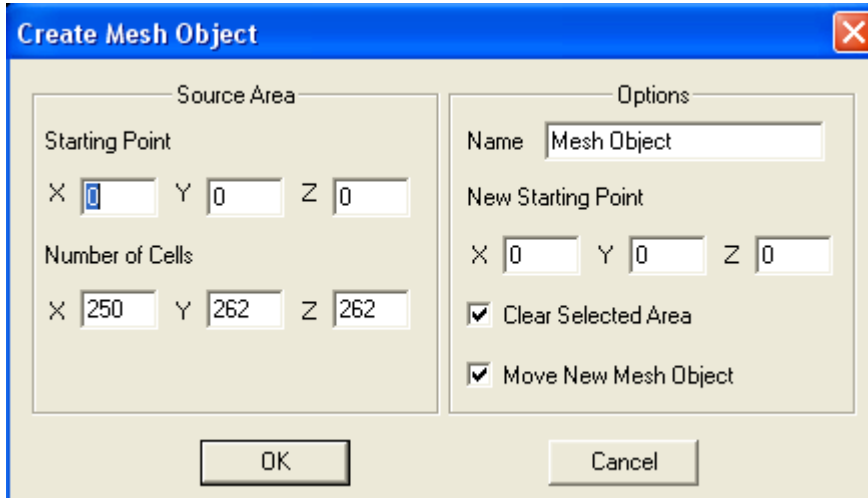
Είναι δυνατόν να επιλεγούν αρχικά μέσω της τρισδιάστατης απεικόνισης κάποιες υποψήφιες συντεταγμένες για το εφαπτόμενο σημείο. Έπειτα, με διαδικασία παρόμοια με αυτήν που ακολουθήθηκε για τα σημεία N , F -με την εισαγωγή ενός πολύ μικρού κύβου με ακμή όσο η ακμή του κελιού-μπορούν να βρεθούν με ικανοποιητική ακρίβεια οι συντεταγμένες του εφαπτόμενου σημείου. Οι συντεταγμένες των σημείων N , F , T εισάγονται από το χρήστη κατά τη διάρκεια εκτέλεσης της ρουτίνας “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp”. Η όλη παραπάνω διαδικασία αναφέρεται στην περίπτωση της “cheek position”.

Θεωρείται ότι το εφαπτόμενο σημείο και κατά συνέπεια το εφαπτόμενο επίπεδο είναι διαφορετικό όταν πρόκειται για τοποθέτηση του κινητού σε “tilted position”. Αφού βρεθεί το εφαπτόμενο σημείο για τη “cheek position”, πρέπει να γίνει μία επιπρόσθετη περιστροφή κατά +15 μοίρες ή κατά -15 μοίρες. Ποια περιστροφή είναι η κατάλληλη επαφίεται στο χρήστη και στην εκάστοτε εφαρμογή. Για παράδειγμα αν ο χρήστης διαπιστώσει ότι η περιστροφή των +15 μοιρών δεν είναι η κατάλληλη, τότε σίγουρα η κατάλληλη πλέον περιστροφή είναι -30 μοίρες. Αντιθέτως, αν ο χρήστης διαπιστώσει ότι η περιστροφή των -15 μοιρών δεν είναι η κατάλληλη, τότε σίγουρα η κατάλληλη πλέον περιστροφή είναι +30 μοίρες. Μετά από αυτές τις περιστροφές, το βασικό επίπεδο θα ορίζεται από τα σημεία N , F και από ένα οποιοδήποτε σημείο του αντικειμένου Advanced Quadrilateral Plate που μοντελοποιεί το (περιστρεμμένο) βασικό επίπεδο. Κατά προτίμηση όμως, καλό θα είναι ο χρήστης να επιλέξει ένα σημείο του αντικειμένου που βρίσκεται ανάμεσα στο άνω και κάτω επίπεδο αναφοράς και μακριά από τα σημεία N , F . Θεωρητικά πάντως δεν ενδιαφέρει πού βρίσκεται το εφαπτόμενο σημείο, αλλά ενδιαφέρει να ανήκει στο επίπεδο. Με παρόμοια λογική, δεν ενδιέφερε το –παλαιό (“cheek position”)- εφαπτόμενο σημείο. Θα μπορούσε να γίνει χρήση οποιουδήποτε σημείου του αντικειμένου, διαφορετικού φυσικά από τα N, F σημεία, το οποίο πάντως για πρακτικούς λόγους θα έπρεπε να μην βρίσκεται στο επίπεδο αλλά να είναι και αυτό σχετικά μακριά από τα σημεία N, F . Δηλαδή το εφαπτόμενο σημείο βρίσκεται όχι απαραίτητα για να γίνει το τρίτο σημείο από το οποίο θα οριστεί το εφαπτόμενο επίπεδο, αλλά για να καθοριστεί ποιο περιστρεμμένο γύρω από την NF ευθεία βασικό επίπεδο, είναι το εφαπτόμενο επίπεδο. Αφού αποφασιστεί ποιο σημείο πρέπει να θεωρηθεί ως εφαπτόμενο σημείο (ανάλογα και με το αν πρόκειται για “tilted position” ή “cheek

position”), εισάγονται οι συντεταγμένες των σημείων N , F , T από το χρήστη στην ρουτίνα “refer_pivot_P2_tr_peristrofi_tr” και τέλος επιλέγονται οι περιστροφές που εκφράζονται από τις σχέσεις (4.7), (4.8) ή (4.9), (4.10) (right ή left position αντίστοιχα). Στη συνέχεια, πρέπει να σβηστούν όλα τα αντικείμενα στο δέντρο αντικειμένων με εξαίρεση το μοντέλο του κεφαλιού.

5.5. Δημιουργία νέου αντικειμένου πλέγματος

Στη συνέχεια, επιβάλλεται να κατασκευαστεί ένα αντικείμενο τύπου Rectangular Block () από τη γραμμή εργαλείων: () με ακμή όσο η ακμή του κελιού και το ένα άκρο του να είναι το σημείο L για τις περιπτώσεις “right titled position” και “right cheek position” που εξετάζονται σε αυτήν την εργασία (ή το σημείο R για τις περιπτώσεις “left titled position” και “left cheek position”). Ο κύβος () που θα εισαχθεί στα σημεία πρέπει να είναι κατασκευασμένος από υλικό με ιδιότητες όπως αυτές του ελεύθερου χώρου. Εδώ αυτό κρίνεται απαραίτητο. Έπειτα κάνοντας δεξί «κλικ» στο αντικείμενο πλέγματος που αντιπροσωπεύει το κεφάλι, στο δέντρο αντικειμένων ο χρήστης το τοποθετεί με την επιλογή “Reorder in list->Move To Top” πάνω από τα άλλα αντικείμενα. Στη συνέχεια είναι αναγκαίο να ξαναγίνει “Generate mesh” με τις ίδιες παραμέτρους που είχαν εισαχθεί προηγουμένως. Μετά από αυτό, ο χρήστης είναι αναγκαίο να επιλέξει “View” και στη συνέχεια “Tools->Mesh Object->Create from this Mesh”. Έπειτα από αυτές τις ενέργειες, θα εμφανιστεί ένα παράθυρο όπως το παρακάτω:



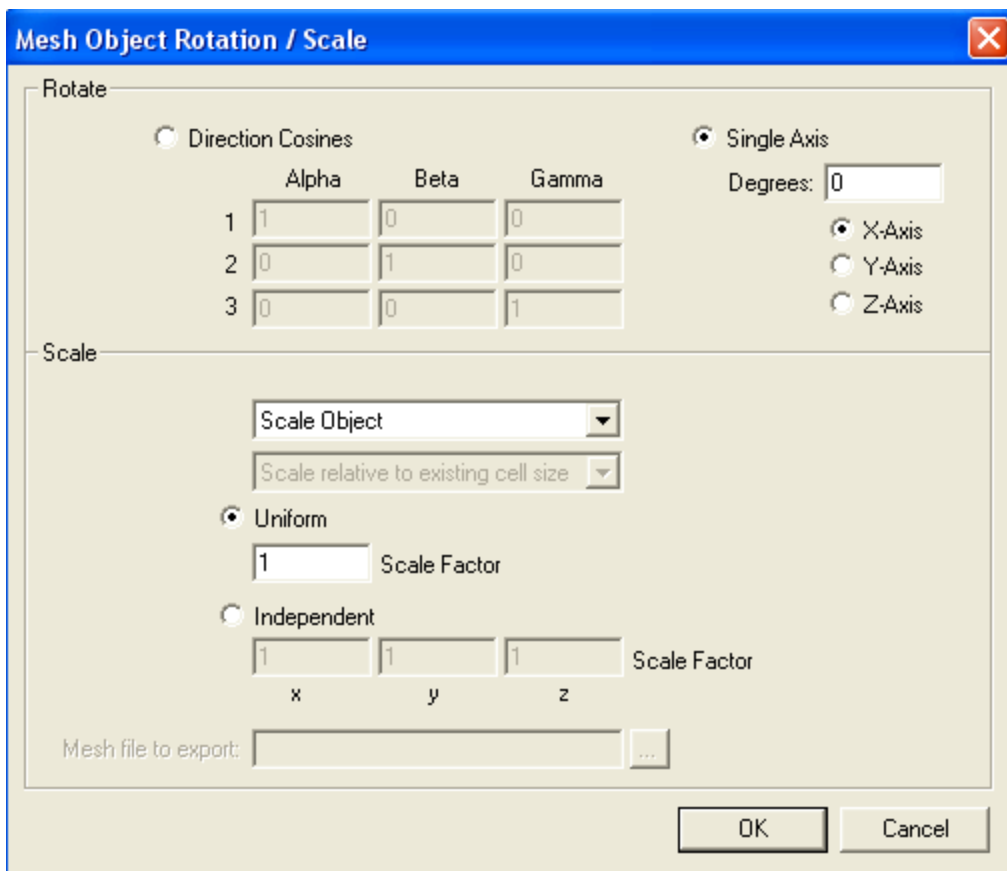
Εικόνα 5.14: Το παράθυρο δημιουργίας ενός νέου αντικειμένου πλέγματος.

Ο χρήστης επιλέγει “OK” χωρίς να αλλάξει καμία από τις ρυθμίσεις. Μπορεί μόνο αν επιθυμεί να ονοματίσει το καινούργιο αντικείμενο .mesh που θα προστεθεί στο δέντρο αντικειμένων. Μετά από αυτή την ενέργεια, το νέο αντικείμενο πλέγματος θα εμφανιστεί στην κορυφή του δέντρου αντικειμένων. Στη συνέχεια πρέπει να σβηστούν τα αντικείμενα από τα οποία προήλθε αυτό το αντικείμενο πλέγματος-το αντικείμενο Rectangular Block και το προηγούμενο μοντέλο κεφαλιού (δεξί «κλικ» στο δέντρο αντικειμένων και επιλογή “Delete”)-και να γίνει ξανά “Generate mesh” με τις ίδιες

παραμέτρους που είχαν εισαχθεί προηγουμένως με εξαίρεση τον αριθμό των κελιών δίπλα στην επιγραφή “Uniform padding in cells” όπου σε αυτήν την περίπτωση πρέπει να εισαχθούν 1 με 2 κελιά για πρακτικούς λόγους.

5.6. Περιστροφή του αντικειμένου πλέγματος

Στο μοναδικό πλέον αντικείμενο πλέγματος που υπάρχει στο δέντρο αντικειμένων γίνεται η εφαρμογή των κατάλληλων περιστροφών. Συγκεκριμένα, αφού επιλεγεί με αριστερό «κλικ» το αντικείμενο αυτό στο δέντρο αντικειμένων, ο χρήστης πρέπει να κάνει δεξί «κλικ» πάνω του και να επιλέξει από το αναδυόμενο μενού “Mesh Object->Remesh/Rotate/Scale”. Θα εμφανιστεί το παράθυρο που απεικονίζεται στην Εικόνα 5.15.



Εικόνα 5.15: Το παράθυρο που χρησιμεύει για τη περιστροφή ενός αντικειμένου πλέγματος.

Κάνοντας «κλικ» στον άσπρο κύκλο δίπλα στην επιγραφή “Direction Cosines” ο χρήστης εισάγει τον πίνακα μετασχηματισμού R που προκύπτει, κατά το κάλεσμα της συνάρτησης “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp”.

Μετά την εφαρμογή του γεωμετρικού μετασχηματισμού επαναλαμβάνεται το “Generate mesh” με τον αριθμό των κελιών δίπλα στην επιγραφή “Uniform padding in cells” να είναι ίσος με $40 + (1 \text{ ή } 2)$.

Στο σημείο αυτό ή και από ποιο πριν θα αναρωτηθεί(θα έχει αναρωτηθεί) πιθανότατα ο αναγνώστης, γιατί γίνεται περιστροφή του μοντέλου κεφαλιού και όχι του

μοντέλου κινητού. Η απάντηση δεν είναι η προφανής «το ίδιο κάνει, δεν έχει πρακτικά καμία διαφορά».

Σύμφωνα με το [3] η λειτουργία “remesh” σχεδιάστηκε για να εφαρμόζεται με μικρά σφάλματα σε σχετικά μεγάλα αντικείμενα πλέγματος με καμπυλοειδή μορφή όπως το μοντέλο κεφαλιού που χρησιμοποιήθηκε. Τα αποτελέσματα για άλλων ειδών αντικείμενα πλέγματος όπως επίπεδες επιφάνειες, λεπτά σύρματα ή ορθογώνια παραλληλεπίπεδα σαν το μοντέλο κινητό που χρησιμοποιήθηκε, είναι πολύ λιγότερο ακριβή. Συνοψίζοντας, αν περιστραφεί το κεφάλι, θα αλλοιωθεί λιγότερο από την αντίστοιχη αλλοίωση που θα υφίστατο το κινητό για την αντίστοιχη περιστροφή

5.7. Εισαγωγή του μοντέλου κινητής τερματικής συσκευής στο λογισμικό XFDTD

Για την εισαγωγή του κινητού ως ένα αρχείο .mesh στο πρόγραμμα, είναι αναγκαίο να ακολουθηθεί μία παρόμοια διαδικασία με αυτή που ακολουθήθηκε για την εισαγωγή του κεφαλιού.

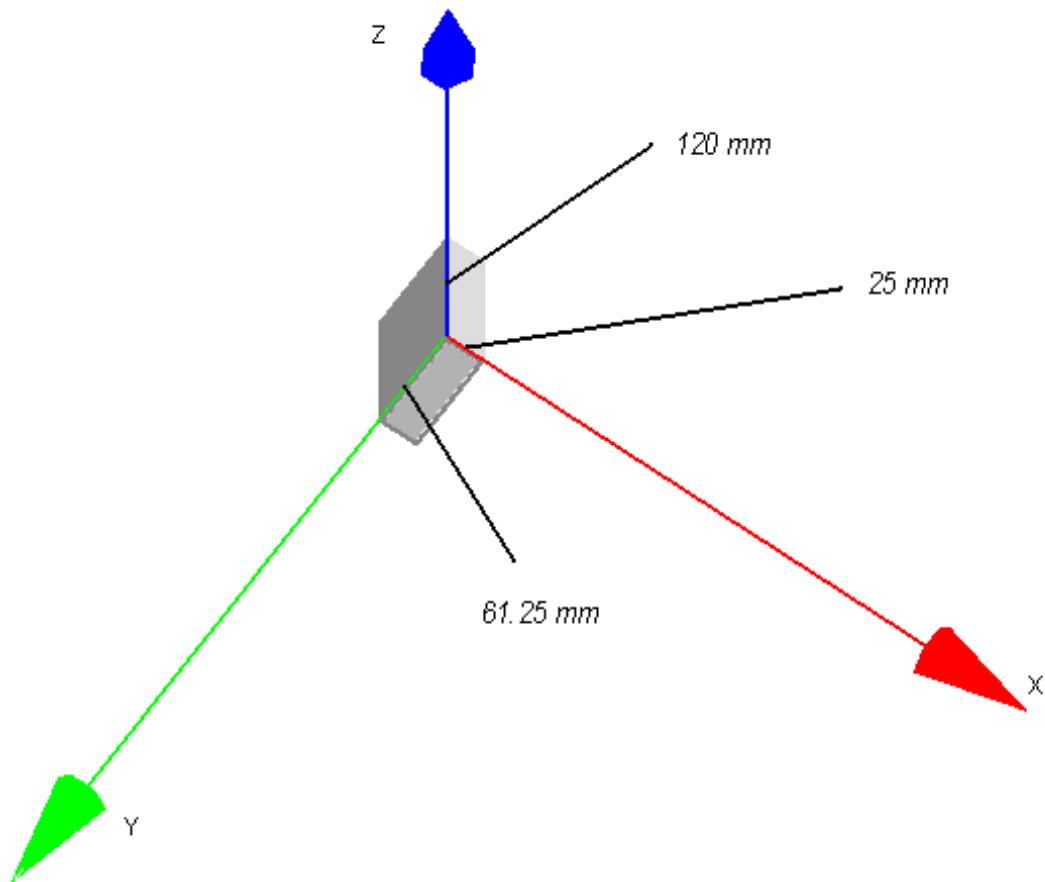
Συγκεκριμένα, ο χρήστης εισάγει το κινητό στη θέση (0,0,0) και με μονάδες “millimeters”. Έπειτα, πρέπει πιθανόν να μεταφέρει το κινητό (κάνοντας διπλό αριστερό «κλικ» στο σχετικό αντικείμενο στο δέντρο αντικειμένων κλπ.) μέχρι αυτό να ξεχωρίσει εντελώς από το κεφάλι. Στη συνέχεια, «διαβάζει» με βάση το αντικείμενο Rectangular Block που είχε εισάγει (κατά προτίμηση) στο L ή R και το οποίο συμπεριέλαβε στο νέο αντικείμενο πλέγματος .mesh, ποιες είναι οι νέες συντεταγμένες του σημείου R ή L και N στο πρόγραμμα, μετά τους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς. Με βάση τις παλιές (πριν την περιστροφή) συντεταγμένες τις οποίες ο χρήστης εισάγει κατά το κάλεσμα της συνάρτησης “refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp”, υπολογίζεται από τη συνάρτηση αυτή το

διάνυσμα-στήλη $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ (βλ. σχέση 4.16) που όπως έχει τονιστεί είναι ίδιο για όλα τα

σημεία. Έτσι υπολογίζονται και οι συντεταγμένες του σημείου N —έστω (n_1, n_2, n_3) —στο πρόγραμμα. Έστω επίσης (r_1, r_2, r_3) οι συντεταγμένες του σημείου R στο πρόγραμμα που υπολογίζονται και αυτές με χρήση της ίδιας συνάρτησης.

Πρέπει να επισημανθεί ότι είναι απαραίτητο το μοντέλο του κινητού ως ένα αρχείο .mesh να βρίσκεται πάνω από το μοντέλο του κεφαλιού στο δέντρο των αντικειμένων. Το γεγονός αυτό, αντιπροσωπεύει την ρεαλιστική κατάσταση της μεγαλύτερης σκληρότητας των υλικών από τα οποία είναι φτιαγμένο το κινητό σε σχέση με τη σκληρότητα του δέρματος στα σημεία επαφής του χρήστη με το κινητό, που έχει ως αποτέλεσμα την πίεση του αυτιού.

Στην παρακάτω εικόνα απεικονίζεται το μοντέλο του κινητού αφού αυτό έχει εισαχθεί στο πρόγραμμα XFDTD και φαίνονται και οι διαστάσεις του.



Εικόνα 5.16: Το μοντέλο του κινητού αφού αυτό έχει εισαχθεί στο πρόγραμμα XFDTD με τις διαστάσεις του.

5.8. Μεταφορά της κινητής τερματικής συσκευής

Μετά από τους παραπάνω υπολογισμούς ο χρήστης πρέπει να επιλέξει το κινητό από το δέντρο των αντικειμένων (με διπλό «κλικ»), και αφού επιλύσει ως προς α , β , γ τις παρακάτω εξισώσεις (στην ουσία εφαρμόζεται μεταφορά μέσα από το πρόγραμμα):

$$r_1 = \text{πλάτος_κινητού} + \alpha$$

$$r_2 = \text{μήκος_κινητού} / 2 + \beta$$

$$r_3 = \text{ύψος_σημείου_E} + \gamma$$

όπου για το μοντέλο κινητού που χρησιμοποιήθηκε (Εικόνα 5.16) είναι:

$$\text{πλάτος_κινητού} = 25\text{mm}$$

$$\text{μήκος_κινητού} = 61.25\text{mm}$$

$$\text{ύψος_σημείου_E} = 90\text{mm}$$

κάνοντας αριστερό «κλικ» στο αρχείο .mesh του κεφαλιού στο δέντρο αντικειμένων, τοποθετεί σε νέα θέση το κινητό, προσθέτοντας τα α , β , γ στις 3 συντεταγμένες x, y, z αντίστοιχα. Προσοχή πρέπει να δοθεί στο να είναι οι μονάδες πάντα σε χιλιοστά.

Αφού τοποθετηθεί στην επιδιωκόμενη θέση το κινητό γίνεται για τελευταία φορά “Generate Mesh” κρατώντας τις προηγούμενες παραμέτρους. (42 κελιά).

Σημειώνεται ότι αν στο κινητό, το σημείο E ήταν ένα μεταβλητό σημείο (Κεφάλαιο 4) τότε θα ήταν:

$\psi_{\text{σημείου}_E} = \psi_{\text{ακουστικής}_\text{εξόδου} - DPP}$ όπου η απόσταση DPP εξαρτάται από το εκάστοτε χρησιμοποιούμενο ανατομικό μοντέλο κεφαλιού (Κεφάλαιο 4).

5.9. Τελική δημιουργία αρχείου πλέγματος

Ως επόμενο βήμα, μπορεί να εκτελεστεί η προσομοίωση και να δημιουργηθεί ένα αρχείο project (Κεφάλαιο 3) με βάση τη θεωρία τις οδηγίες του Κεφαλαίου 6.

Εναλλακτικά, μπορεί δημιουργηθεί από τα παραπάνω δύο μοντέλα (κινητό και κεφάλι στη σωστή θέση το ένα σε σχέση με το άλλο) ένα νέο αρχείο .mesh από τα δύο μοντέλα (κινητό και κεφάλι στη σωστή θέση το ένα σε σχέση με το άλλο) με τον ίδιο τρόπο που δημιουργήθηκε ένα όμοιο αρχείο από το αρχικό κεφάλι και το Rectangular Block (+1-2) στο “Uniform padding in cells”).

Στη συνέχεια από το κύριο μενού του προγράμματος πρέπει να γίνει αποθήκευση της γεωμετρίας: File->Geometry->Save as... και να δοθεί ένα όνομα ως αρχείο γεωμετρίας. Έπειτα θα ζητηθεί από το πρόγραμμα να αποθηκευτεί και το αρχείο .mesh που δημιουργήθηκε.

Αυτό το αντικείμενο πλέγματος που αποθηκεύεται στο αρχείο .mesh, μπορεί μετά να εισαχθεί με τη γνωστή πλέον διαδικασία στο πρόγραμμα XFDTD και να εισάγεται γενικά όποτε επιθυμείται να γίνει μία νέα προσομοίωση.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Β.Τρίαντος, Β.Τσακανίκας “Συγκριτική Εκτίμηση της Απορρόφησης Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας κατά τη Χρήση Τερματικών Συσκευών Κινητών Επικοινωνιών από Παιδιά και Ενήλικες με Χρήση της Μεθόδου FDTD”, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2005.
- [2] Wolfgang Kainz, Andreas Christ, Tocher Kellom, Seth Seidman, Neviana Nikoloski, Brian Beard and Niels Kuster, “Dosimetric comparison of the specific anthropomorphic mannequin (SAM) to 14 anatomical head models using a novel definition for the mobile phone positioning”, *Physics in Medicine and Biology*, vol. 50, pp. 3423-3445, July 2005
- [3] Remcom, “xfdd 6 - fdd for professionals - Reference Manual”, Version 6.0, Remcom, 2003

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα των προσομοιώσεων με το πρόγραμμα XFDTD

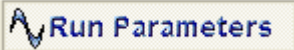
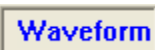
6.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφονται τα βήματα εκτέλεσης των ηλεκτρομαγνητικών προσομοιώσεων και γίνεται σχολιασμός των αποτελεσμάτων και σύγκρισή τους. Οι προσομοιώσεις που εκτελέστηκαν σε αυτήν την εργασία, εκτελέστηκαν με απώτερο σκοπό να μετρηθεί η ηλεκτρομαγνητική παράμετρος SAR (Specific Absorption Rate-Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης).



Γενικά, το πρόγραμμα XFDTD εκτός από τη δυνατότητα υπολογισμού της μέγιστης τοπικής τιμής του SAR, παρέχει τη δυνατότητα υπολογισμού τοπικών και

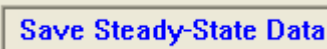
μέσων τιμών του SAR σε μάζα αναφοράς συγκεκριμένων ιστών 1 ή 10 γραμμαρίων. Βρίσκεται έτσι ο μέσος όρος του SAR ανά 1 ή 10 γραμμάρια συγκεκριμένου ιστού. Ο αλγόριθμος υπολογισμού της μάζας αναφοράς ακολουθεί το πρότυπο [1].

6.2 Δημιουργία αρχείου project-προετοιμασία εκτέλεσης προσομοιώσεων

Συνεχίζοντας τη διαδικασία που περιγράφηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο χρήστης πρέπει να επιλέξει μέσω των ετικετών  και  ημιτονοειδή (Sinusoid) τύπο κυματομορφής (Waveform Type) με συχνότητα 1.8 GHz για τη συγκεκριμένη προσομοίωση, στη μόνιμη κατάσταση (Steady State), όπως φαίνεται στην εικόνα 3.8 αλλά με αριθμό βημάτων το πολύ 7000. Τουλάχιστον τόσα βήματα χρησιμοποιήθηκαν στη συγκεκριμένη εργασία. Πιθανόν να χρειάζονταν λιγότερα. Δεν υπάρχει σύμφωνα με το [2] μία γενική μέθοδος για να εξασφαλιστεί ότι η προσομοίωση θα φτάσει στην ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση. Ο πιο σίγουρος τρόπος είναι οι δοκιμές και η χρήση κάποιων γραφικών παραστάσεων από τις οποίες μπορεί να παρατηρηθεί αν και κατά πόσο έχει επιτευχθεί κατάσταση που προσομοιώνει με αρκετή ακρίβεια την ημιτονοειδή μόνιμη κατάσταση. Για περισσότερες πληροφορίες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στο [2].

Όταν στη συνέχεια ο χρήστης επιλέξει File->Project->Save as θα του ζητηθεί από το πρόγραμμα να προσθέσει της κατάλληλες πηγές τάσης ή πηγές ρεύματος (ίσως επιπρόσθετα του ζητηθεί πιο πριν να αποθηκεύσει το αρχείο γεωμετρίας και το αρχείο του πλέγματος). Ο χρήστης θα πρέπει με βάση τη θεωρία της ενότητας 3.6 να προσθέσει «διακριτή πηγή» στη διεύθυνση που αυτός επιθυμεί (X-Directed, Y-Directed ή Z-Directed) με τρόπο ώστε η «διακριτή πηγή» να είναι η ακμή ενός κελιού που αποτελεί τη βάση της κεραίας του κινητού τηλεφώνου. Κατά τα άλλα, οι ρυθμίσεις όσον αφορά το πλάτος και τη φάση της πηγής, είναι αυτές που απεικονίζονται στην εικόνα 3.9. ή όπως εν τέλει ο χρήστης επιθυμεί. Από τις οριακές συνθήκες που είναι διαθέσιμες προς χρησιμοποίηση από το πρόγραμμα, προτιμήθηκαν στις συγκεκριμένες προσομοιώσεις, οι οριακές συνθήκες απορρόφησης Liao (εικόνα 3.10).


Από τις ετικέτες  και  επιλέγεται να υπολογιστούν πηγές πεδίων που αντιστοιχούν στη διεύθυνση στην οποία τοποθετήθηκε η διακριτή πηγή της κεραίας του κινητού και στο πλαίσιο Location εισάγεται η θέση σε κελιά της βάσης της διακριτής πηγής της κεραίας του κινητού.

Από την ετικέτα  επιλέγεται η ηλεκτρομαγνητική παράμετρος που επιθυμείται να μετρηθεί και σε ποια επίπεδα. Στις συγκεκριμένες προσομοιώσεις επελέγησαν “XY” “SAR”, “Add All Planes” και “Unaveraged” καθώς επίσης και “ZX” “SAR”, “Add All Planes”, “Unaveraged”, “1 g Average”, “10 g Average”.

Τελειώνοντας, ο χρήστης οφείλει να επιλέξει να αποθηκευτεί ξανά το αρχείο project, το οποίο έχει υποστεί ορισμένες τροποποιήσεις.




6.3 Ευστάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο λογισμικό XFDTD


Στην ενότητα 2.4.2 είχε γίνει αναφορά στην ακρίβεια και στην ευστάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου. Πρακτικά, η ακρίβεια της μεθόδου όπως εφαρμόζεται στο πρόγραμμα XFDTD εξετάστηκε στην ενότητα 5.3. Ο οξυδερκής αναγνώστης ίσως να παρατήρησε ότι δεν έγινε αναφορά στην ευστάθεια της μεθόδου όπως εφαρμόζεται στο πρόγραμμα XFDTD. Η αλήθεια είναι ότι (με αφαιρετική θεώρηση) το πρόγραμμα εξασφαλίζει την ευστάθεια του αλγορίθμου επιλέγοντας μόνο του το κατάλληλο Δt . Πάντως είναι γεγονός ότι αφού εκτελεστούν τα παραπάνω βήματα

είναι δυνατόν με χρήση της ετικέτας  **Summary** να δει ο χρήστης ποιο είναι το Δt που επέλεξε το πρόγραμμα. Στη συνέχεια, μπορεί φυσικά να ελέγξει αν ισχύει η σχέση (2.48γ). Στη συγκεκριμένη περίπτωση πρέπει να ελέγξει αν ισχύει η σχέση (2.48γ) με $\delta = 1.25\text{mm}$ και $u_{\max} = 3 \times 10^8 [\text{m/s}]$ όπου ως μέγιστη φασική ταχύτητα είναι η ταχύτητα το φωτός στο κενό. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν υφίσταται το φαινόμενο της διασποράς επομένως η ομαδική ταχύτητα ισούται με τη φασική [3], [4], [5].

Στην προκειμένη περίπτωση όπου είναι $\Delta t = 2.407\text{ps}$ δεν είναι δύσκολο να επαληθευτεί η ευστάθεια της μεθόδου των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου.

6.4 Εκτέλεση και αποτελέσματα των προσομοιώσεων

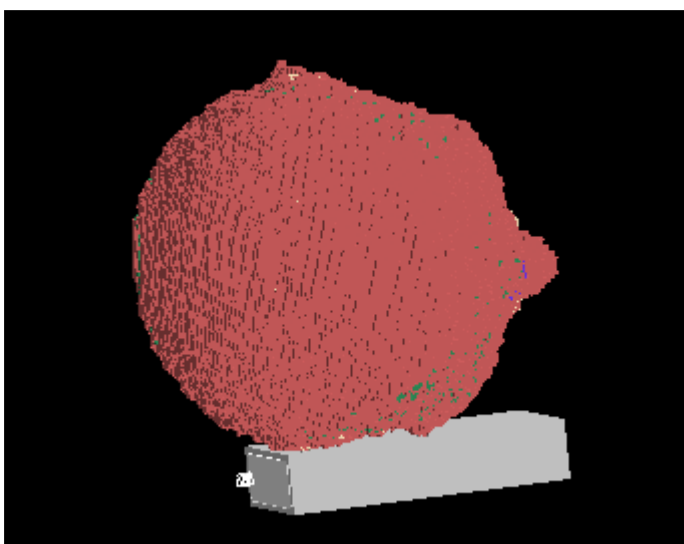
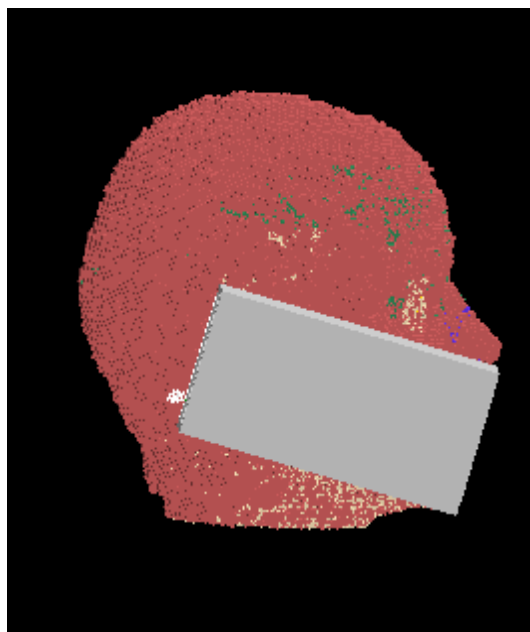
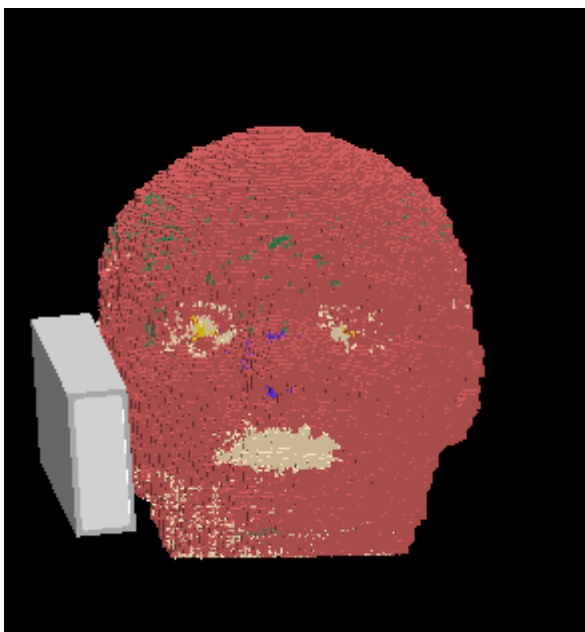
Από τις ετικέτες  **Results**,  **Run Calculation** και με την επιλογή “Calculate” μπορεί να ξεκινήσει πλέον να εκτελείται η προσομοίωση. Όταν τελειώσει η εκτέλεση της προσομοίωσης, η οποία σημειωτέον πιθανότατα θα διαρκέσει κάποιες ώρες, λαμβάνονται τα επιθυμητά αποτελέσματα με χρήση της ετικέτας  **SAR Statistics**

και του  **View Statistics** όπου και γίνεται κανονικοποίηση των τιμών με βάση μία τιμή ισχύος $0,125\text{W}$ που αφορά συχνότητα $1,8\text{GHz}$ [5]. Πιο συγκεκριμένα, έγιναν τρεις διαφορετικές προσομοιώσεις και για να είναι εφικτή η σύγκριση των αποτελεσμάτων έγινε κανονικοποίηση ως προς τη μέγιστη τοπική τιμή του SAR που υπολογίστηκε ($6.7219 [\text{W} / \text{kg}]$).

6.5 Γραφική παρουσίαση των αποτελεσμάτων-Κατανομές τοπικού SAR

6.5.1 “Cheek” position

Στις τρεις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 6.1α, Εικόνα 6.1β, Εικόνα 6.1γ) απεικονίζεται η right cheek (ή cheeked) position όπως φαίνεται μέσα από το πρόγραμμα XFDTD.



Εικόνες 6.1α, 6.1β, 6.1γ: Right cheek position όπως φαίνεται μέσα από το πρόγραμμα XFDTD.

Τα στατιστικά αποτελέσματα για τον Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης (SAR) φαίνονται στην Εικόνα 6.2:

SAR Statistics

Maximum SAR (W/kg):

2.2843e+000

Maximum SAR Position (x,y,z)

(71,134,140)

Average SAR in exposed Object

1.5430e-002

Maximum 1 g Average SAR (W/kg):

1.0533e+000

Maximum 1 g Average SAR Position (x,y,z):

(70,135,137)

Maximum 10 g Average SAR (W/kg):

4.4895e-001

Maximum 10 g Average SAR Position (x,y,z):

(74,137,136)

Computed Input Power (W):

1.1904e-003

Scaled Input Power (W):

0.125

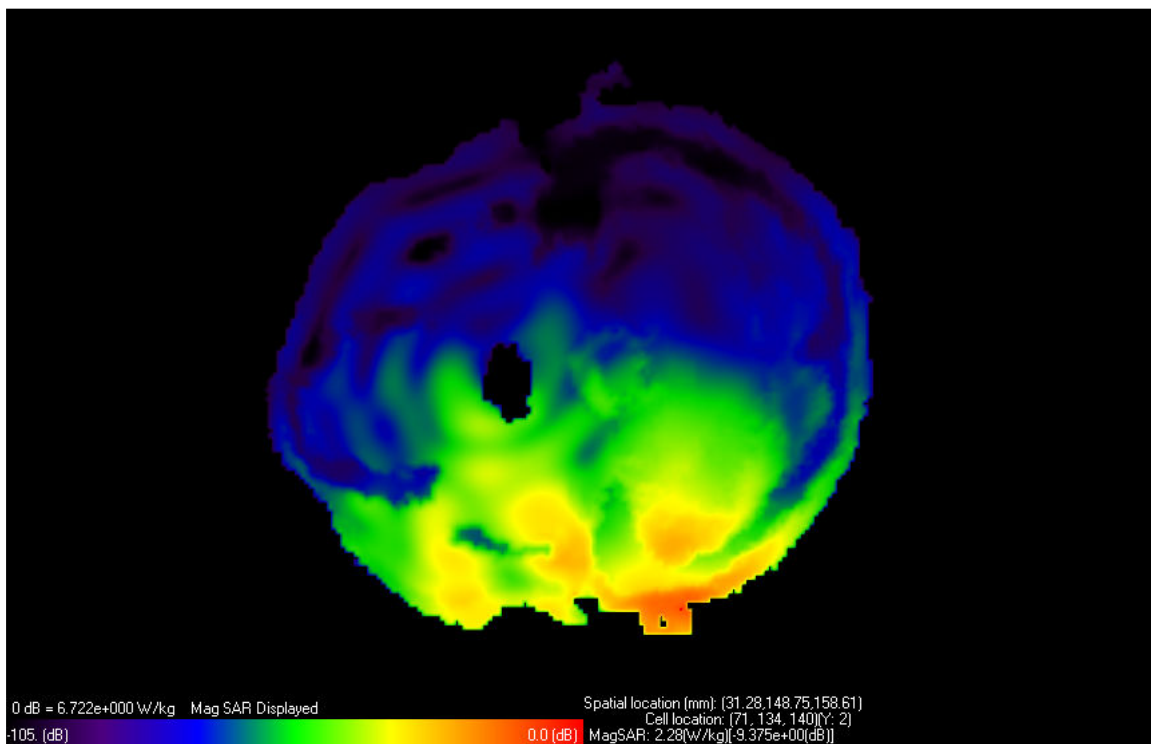
Main

OK

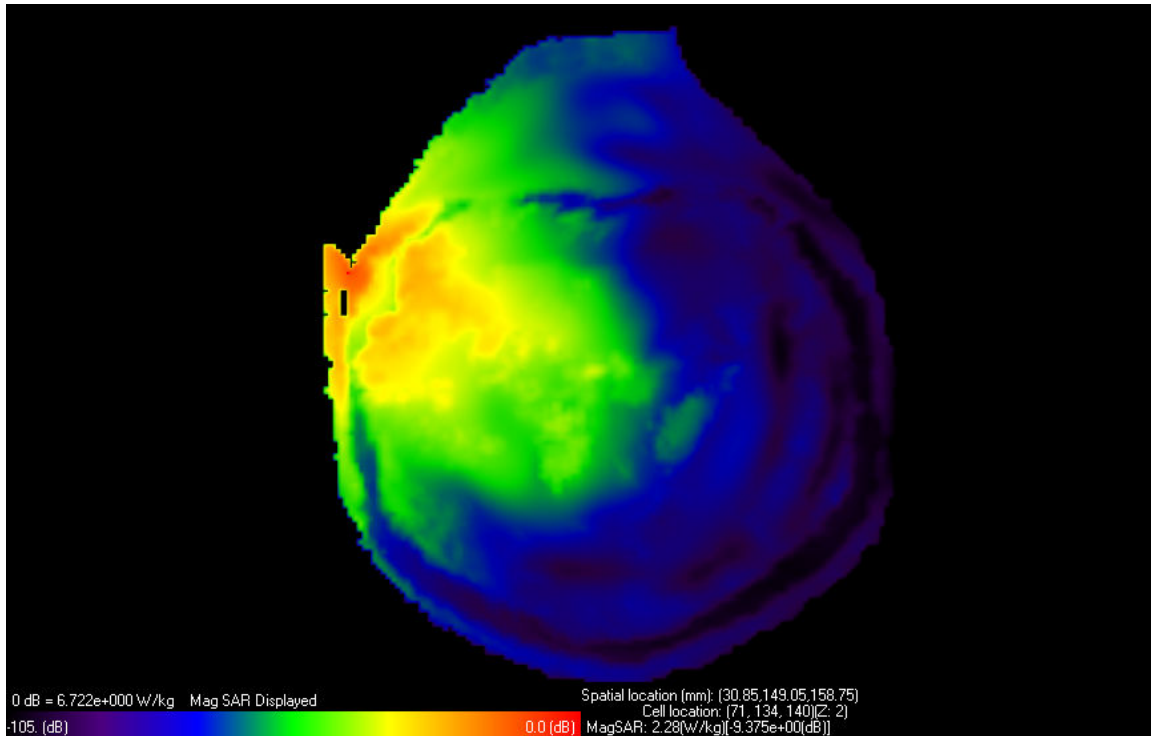
Cancel

Εικόνα 6.2: Στατιστικά για το Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης.

Παρακάτω παρουσιάζεται η γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR στις τομές $Y=134$ και $Z=140$ (με κανονικοποίηση όσον αφορά το SAR, στην τιμή $6.7219[W/kg]$) (Εικόνες 6.3, 6.4):



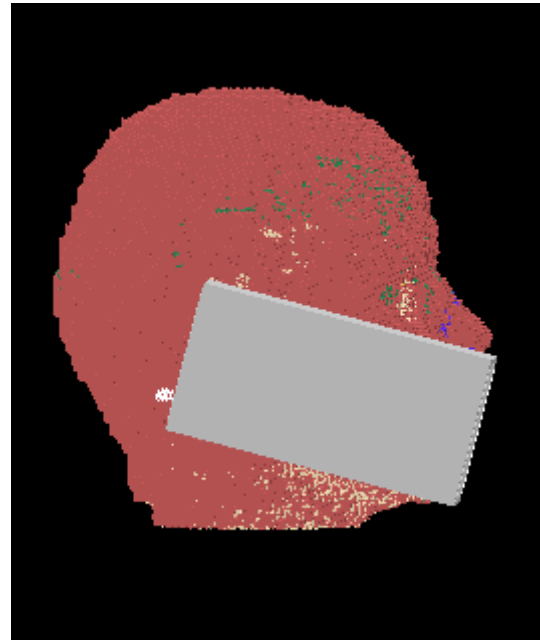
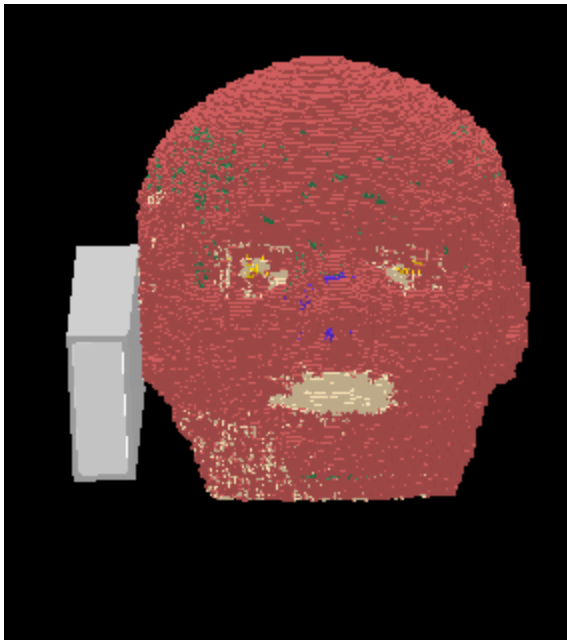
Εικόνα 6.3: Γραφική αναπαράσταση της κατανομής SAR στην τομή $Y=134$.

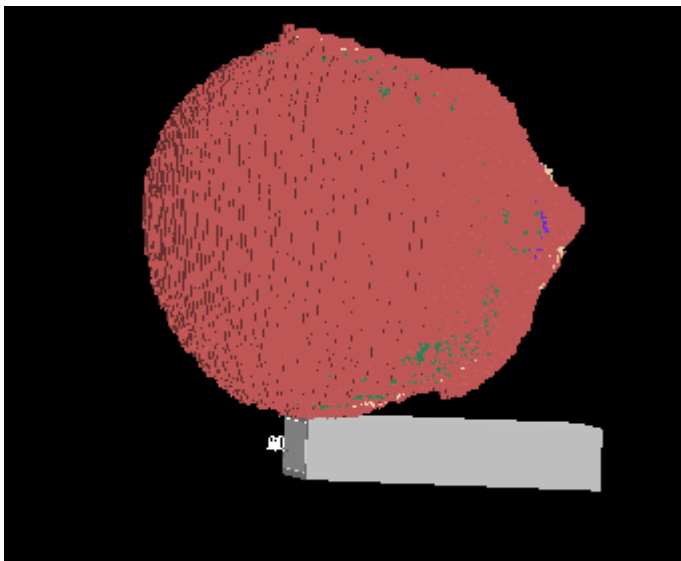


Εικόνα 6.4: Γραφική αναπαράσταση της κατανομής SAR στην τομή Z=140.

6.5.2 “Tilt” position

Στις τρεις παρακάτω εικόνες (Εικόνα 6.5α, Εικόνα 6.5β, Εικόνα 6.5γ) απεικονίζεται η right tilt (ή tilted) position όπως φαίνεται μέσα από το πρόγραμμα XFDTD.





Εικόνες 6.5α, 6.5β, 6.5γ: Right tilted position όπως φαίνεται μέσα από το πρόγραμμα XFDTD.

Τα στατιστικά αποτελέσματα για τον Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης (SAR) φαίνονται στην Εικόνα 6.6:

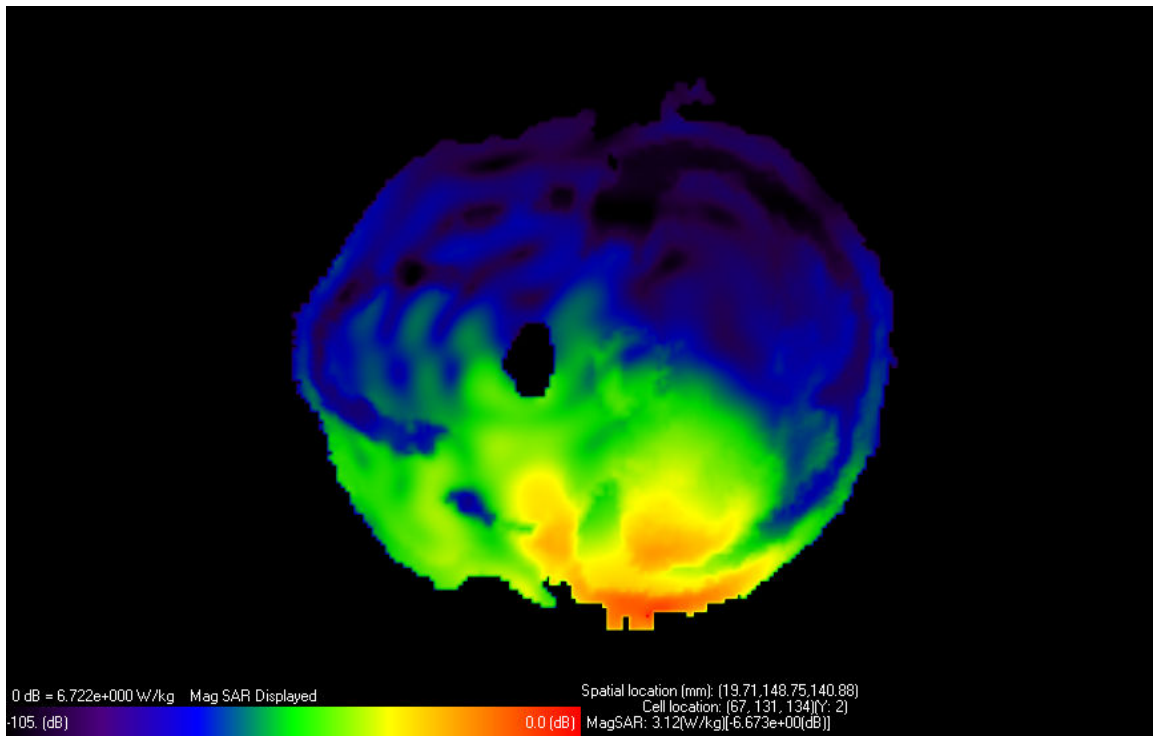
Field	Value
Maximum SAR (W/kg):	3.1177e+000
Maximum SAR Position (x,y,z):	(67,131,134)
Average SAR in exposed Object:	1.7105e-002
Maximum 1 g Average SAR (W/kg):	1.1628e+000
Maximum 1 g Average SAR Position (x,y,z):	(68,132,130)
Maximum 10 g Average SAR (W/kg):	5.3225e-001
Maximum 10 g Average SAR Position (x,y,z):	(72,134,131)
Computed Input Power (W):	1.1724e-003
Scaled Input Power (W):	0.125

Main [dropdown arrow]

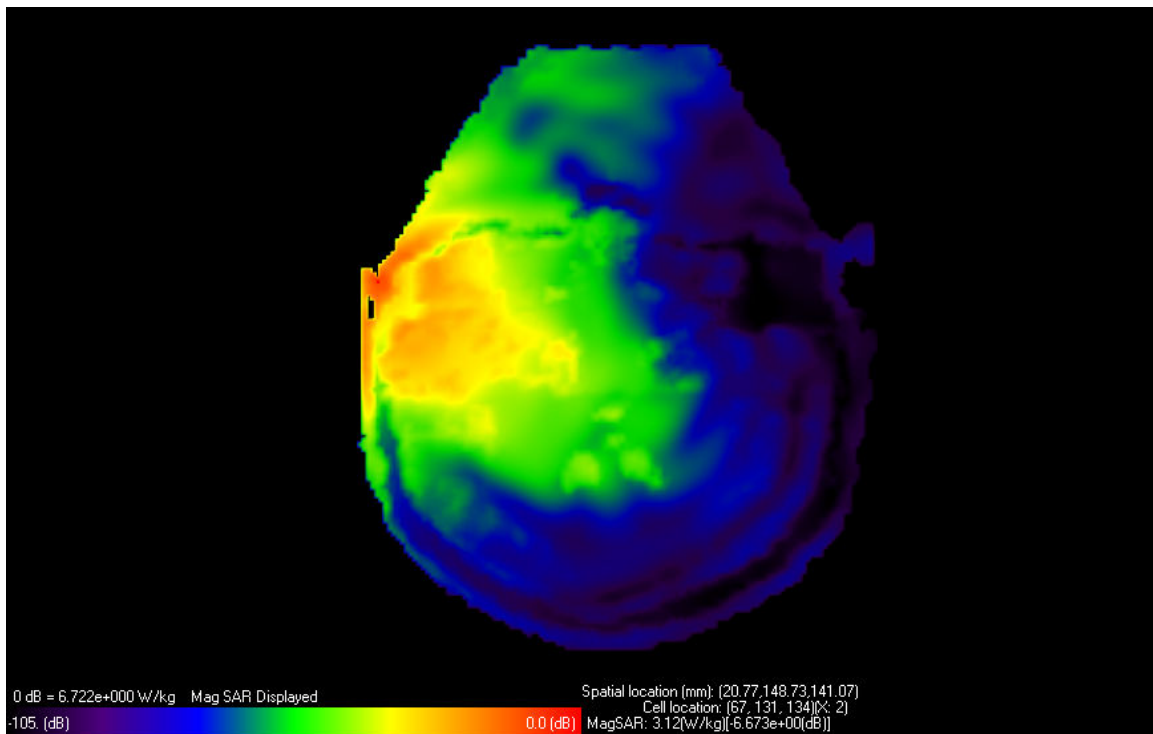
OK Cancel

Εικόνα 6.6: Στατιστικά για τον Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης (SAR).

Παρακάτω αναπαρίστανται γραφικά οι κατανομές SAR στις τομές $Y=131$ και $Z=134$ (με κανονικοποίηση όσον αφορά το SAR, στην τιμή $6.7219 [W / kg]$):



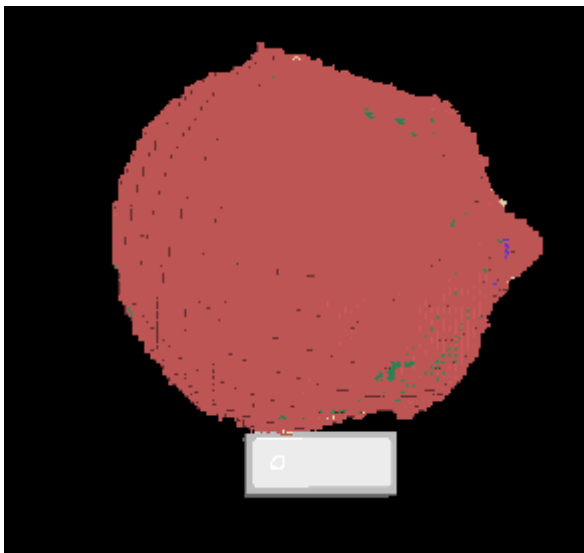
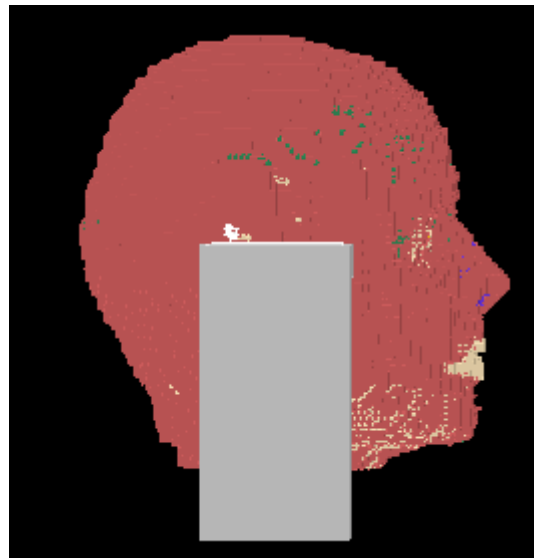
Εικόνα 6.7: Γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR στην τομή Y=131.



Εικόνα 6.8: Γραφική αναπαράσταση των αποτελεσμάτων στην τομή Z=134.

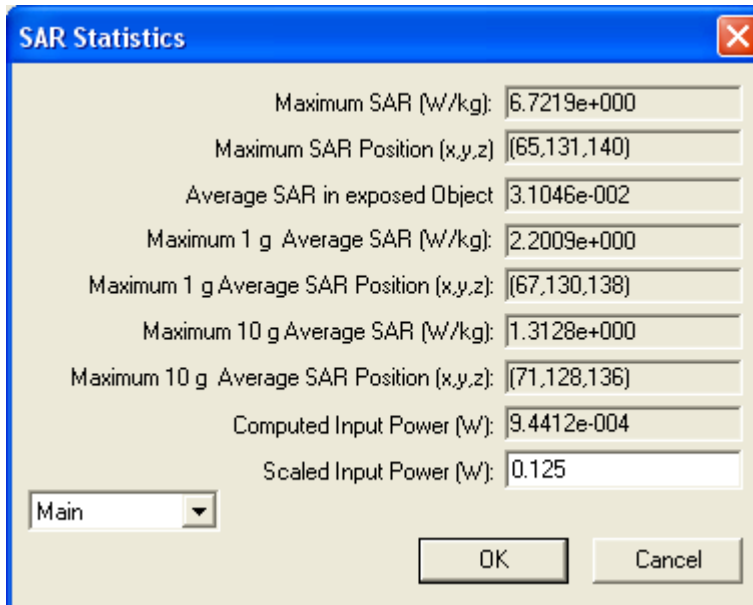
6.5.3 Απλή τοποθέτηση του κινητού

Αυτός ο τρόπος τοποθέτησης του κινητού είναι αρκετά απλός. Δεν γίνεται καμία περιστροφή και απλά γίνεται εισαγωγή του μοντέλου του κεφαλιού στο πρόγραμμα, εισαγωγή του μοντέλου του κινητού στο πρόγραμμα με παράλληλη φυσικά ρύθμιση των παραμέτρων του πλέγματος και χρησιμοποιείται η εξίσωση της ενότητας 5.8 με τις συντεταγμένες των σημείων R και N πριν την περιστροφή. Δηλαδή τις συντεταγμένες που έχουν τα σημεία R και N με το που εισάγεται το κεφάλι, οι οποίες σημειωτέον, αν χρησιμοποιηθούν ίδιες παράμετροι πλέγματος με τις δύο παραπάνω περιπτώσεις θα είναι οι ίδιες. Παράλληλα έχει υλοποιηθεί συμπίεση του αυτιού κατά 1-3 mm η οποία είναι αποδεκτή από τη βιβλιογραφία [6].



Εικόνες 6.9α, 6.9β, 6.9γ: Η απλή τοποθέτηση του κινητού όπως φαίνεται μέσα από το πρόγραμμα XFDTD.

Τα στατιστικά που αφορούν το Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης (SAR) για αυτήν την περίπτωση, είναι τα εξής:

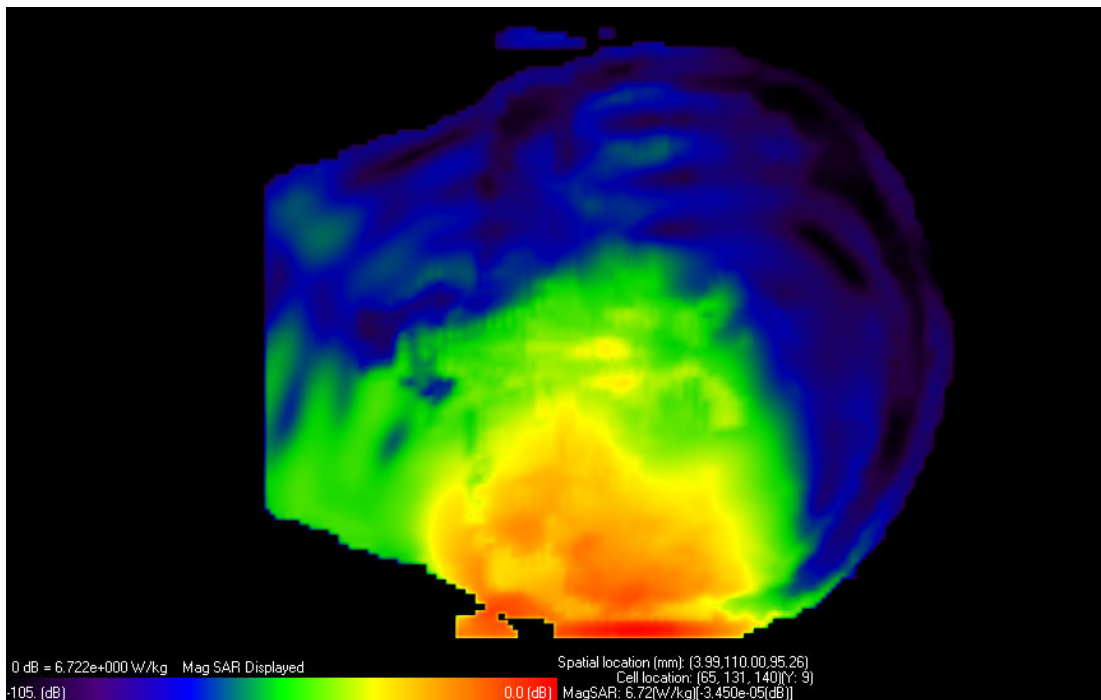


Field	Value
Maximum SAR (W/kg):	6.7219e+000
Maximum SAR Position (x,y,z):	(65,131,140)
Average SAR in exposed Object:	3.1046e-002
Maximum 1 g Average SAR (W/kg):	2.2009e+000
Maximum 1 g Average SAR Position (x,y,z):	(67,130,138)
Maximum 10 g Average SAR (W/kg):	1.3128e+000
Maximum 10 g Average SAR Position (x,y,z):	(71,128,136)
Computed Input Power (W):	9.4412e-004
Scaled Input Power (W):	0.125

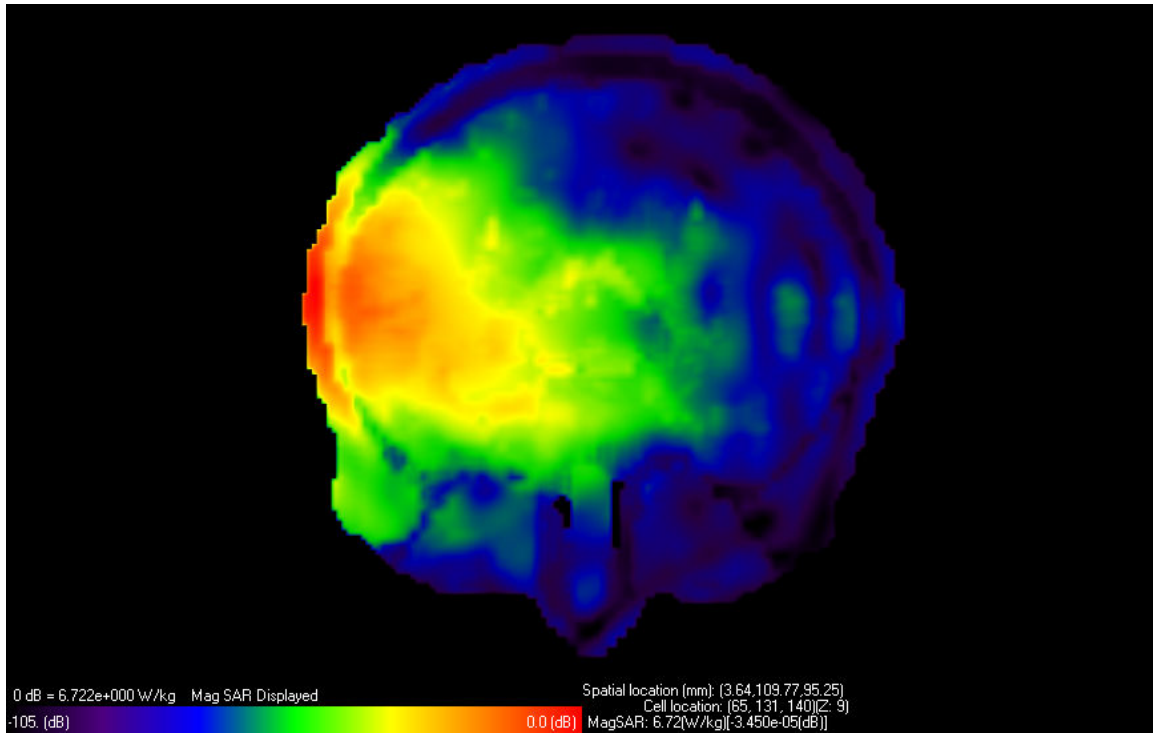
Εικόνα 6.10: Στατιστικά για τον Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης (SAR).

Είναι φανερό από τα παραπάνω στατιστικά αποτελέσματα, ότι η μέγιστη τιμή $6.7219 [W/kg]$ αφορά αυτήν την περίπτωση.

Εν συνεχεία, δίνεται μία γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR στις τομές $Y=131$ και $Z=140$:



Εικόνα 6.11:Γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR στην τομή $Y=131$.



Εικόνα 6.12: Γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR στην τομή Z=140.

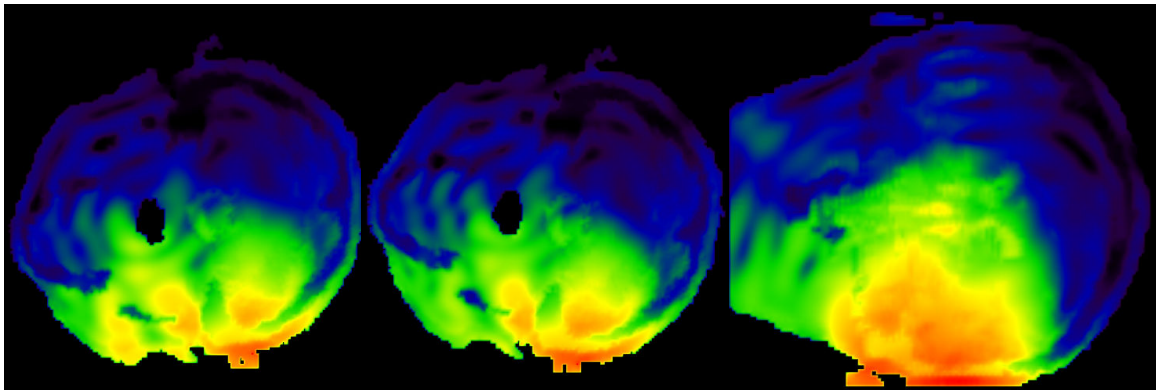
6.5.4 Σύνοψη των αποτελεσμάτων

Στην ενότητα αυτή συνοψίζονται τα αποτελέσματα των ενοτήτων 6.5.1, 6.5.2, 6.5.3. Αρχικά, συνοψίζονται τα στατιστικά αποτελέσματα για το Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης:

Πίνακας 6.1: Σύνοψη των στατιστικών αποτελεσμάτων για το SAR

Περίπτωση	Cheek position	Tilt position	Απλή τοποθέτηση
Peak local SAR (W/kg)	2.28	3.12	6.72
Averaged SAR (W/kg)	0.015	0.017	0.031
Peak spatial SAR _{1g} (W/kg)	1.05	1.16	2.20
Peak spatial SAR _{10g} (W/kg)	0.45	0.53	1.31

Παρακάτω, παρουσιάζεται μία σύνοψη των γραφικών αναπαραστάσεων των αποτελεσμάτων για τις Y τομές και στη συνέχεια για τις Z τομές:

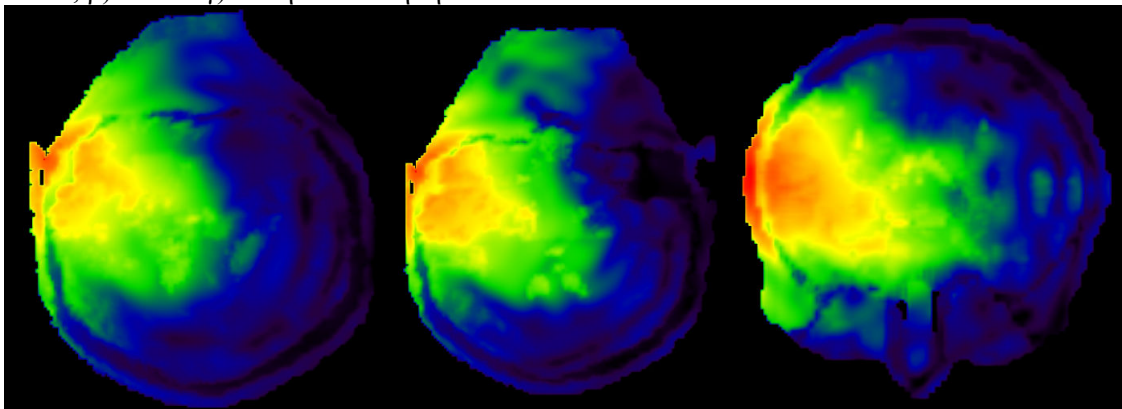


α

β

γ

Εικόνα 6.13: Συνοπτική γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR για τις Y τομές σε α) cheek, β) tilt και γ) απλή τοποθέτηση



α

β

γ

Εικόνα 6.14: Συνοπτική γραφική αναπαράσταση των κατανομών SAR για τις Z τομές σε α) cheek, β) tilt και γ) απλή τοποθέτηση

Επιβάλλεται να επισημανθεί ότι οι Y και οι Z τομές στην περίπτωση της απλής τοποθέτησης του κινητού δεν «ταιριάζουν» με τις αντίστοιχες των δύο άλλων περιπτώσεων, κάτι το οποίο έχει να κάνει με το γεγονός ότι η τοποθέτηση του κινητού σε σχέση με το κεφάλι είναι εντελώς διαφορετική στην περίπτωση της απλής τοποθέτησης (υπενθυμίζεται στον αναγνώστη ότι στην απλή τοποθέτηση του κινητού δεν έγινε περιστροφή του κεφαλιού).

6.6 Συμπεράσματα

Πριν γίνει εξαγωγή των όποιων συμπερασμάτων, επιβάλλεται να γίνουν κάποιες θεωρήσεις και να επισημανθούν ορισμένα πράγματα:

- Όπως σημειώνεται στο [2] αλλά και από τη θεωρία των κεφαλαίων 4, 5 το μοντέλο του κεφαλιού αλλοιώνεται όταν υφίσταται περιστροφή μέσα από το πρόγραμμα XFDTD. Παρόλα αυτά επειδή επετεύχθη να γίνει η περιστροφή μόνο μία φορά και στο αρχικό αντικείμενο πλέγματος-κεφάλι, θεωρείται ότι η αλλοίωση είναι αμελητέα. Έτσι, θεωρείται ότι το μοντέλο του κεφαλιού είναι το ίδιο και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις.

- Και οι 3 τοποθετήσεις βασίστηκαν στη σχέση που δίδεται στην ενότητα 5.8, αλλά με διαφορετική θεώρηση των συντεταγμένων των σημείων N και R .
- Η συχνότητα που χρησιμοποιήθηκε ήταν η ίδια ($1.8GHz$), η ισχύς που χρησιμοποιήθηκε για την κανονικοποίηση ήταν η ίδια ($0,125W$) και γενικά οι ρυθμίσεις ήταν οι ίδιες και στις τρεις προσομοιώσεις. Μόνο ο τρόπος τοποθέτησης του κινητού άλλαζε.
- Ζητείται να γίνει αποδεκτή μία αυθαίρετη και όχι απολύτως σωστή γενίκευση των συμπερασμάτων, καθότι το σίγουρο είναι μόνο ότι τα συμπεράσματα ισχύουν για συγκεκριμένο τύπο κεφαλιού, συγκεκριμένο τύπο κινητού, συγκεκριμένες τοποθετήσεις κ.ο.κ.
- Γενικά για την εξαγωγή των συμπερασμάτων και τις συγκρίσεις είναι προτιμότερο να χρησιμοποιείται η μέγιστη τιμή του μέσου SAR σε μάζα 10 γραμμαρίων και να μην λαμβάνονται υπόψη οι τοπικές τιμές. Με αυτόν τον τρόπο, ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα καθότι κάποιες υψηλές τιμές του τοπικού SAR δεν είναι πάντα αντιπροσωπευτικές.

Με βάση τα παραπάνω εξάγονται τα εξής συμπεράσματα:

1. Σύμφωνα με τα όρια που έχουν αναφερθεί στην ενότητα 1.4 για τη μέγιστη τιμή του μέσου SAR σε μάζα 10 γραμμαρίων, σε καμία περίπτωση δεν έχει γίνει υπέρβαση των ορίων αυτών. Παρόλα αυτά η χειρότερη περίπτωση είναι η απλή τοποθέτηση του κινητού ($1,31280[W/kg]$). Ακολουθεί η tilted position ($0,53225[W/kg]$) και η λιγότερο δυσμενής περίπτωση βρίσκεται να είναι η cheeked position ($0,44895[W/kg]$).
2. Από το 1, προκύπτει το συμπέρασμα ότι γενικά έχει σημασία η τοποθέτηση του κινητού. Πάντως, αφού η χειρότερη περίπτωση φαίνεται να είναι η απλή περίπτωση τοποθέτησης ίσως θα μπορούσε να γίνει εξαγωγή αποτελεσμάτων με βάση αυτήν την περίπτωση. Αν δεν γίνεται υπέρβαση των ορίων σε αυτήν την περίπτωση, τότε πιθανότατα δεν θα γίνεται ούτε στις άλλες δύο «κανονικές» τοποθετήσεις. Από την άλλη όμως πρέπει να τονιστεί ότι η απλή τοποθέτηση του κινητού δεν εκφράζει σε καμία περίπτωση κάποια ρεαλιστική κατάσταση. Επομένως, θα μπορούσε κανείς να θεωρήσει ότι θα πρέπει να μελετώνται μόνο οι δύο «κανονικές» τοποθετήσεις (άλλες δύο από την αριστερή πλευρά), για να υπάρχει άλλωστε και συμφωνία με τα πρότυπα που έχει θέσει η IEEE (Κεφάλαιο 1, Κεφάλαιο 4). Βέβαια, το συμπέρασμα για τη δυσμενέστερη περίπτωση της απλής τοποθέτησης οφείλει να επιβεβαιωθεί με περισσότερες προσομοιώσεις χρησιμοποιώντας πληθώρα κεφαλιών και κινητών τηλεφώνων ώστε να είναι λογική μία ενδεχόμενη γενίκευσή του.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] C95.3.2002, “Recommended Practice for Measurements and Computations with Respect to Human Exposure to Radio Frequency Electromagnetic Fields, 100kHz to 300GHz”, IEEE Standards and Coordinating Committee 28 on Non-Ionizing Radiation Hazards, April 2002.
- [2] Remcom,” xfdtd 6 - fdtd for professionals - Reference Manual”, Version 6.0, Remcom, 2003
- [3] Joseph A. Edminister, “Electromagnetics”, Second Edition, McGraw-Hill, New York 1993
- [4] Halliday.Resnick, “Φυσική, Μέρος Β”, Εκδόσεις Πνευματικός, Νέα Υόρκη 1976 (Μετάφραση από Αγγλικά στα Ελληνικά)
- [5] H.J. Pain, “Φυσική των ταλαντώσεων και των κυμάτων”, τρίτη έκδοση, Λονδίνο 1983
- [6] Wolfgang Kainz, Andreas Christ, Tocher Kellom, Seth Seidman, Neviana Nikoloski, Brian Beard and Niels Kuster, “Dosimetric comparison of the specific anthropomorphic mannequin (SAM) to 14 anatomical head models using a novel definition for the mobile phone positioning”, *Physics in Medicine and Biology*, vol. 50, pp. 3423-3445, July 2005

Κεφάλαιο 7

Προτάσεις για μελλοντική εργασία

Πολλές ιδέες για μελλοντικές εργασίες μπορούν να βασιστούν στη θεωρία που παρουσιάστηκε σε αυτήν την εργασία και στα αποτελέσματα που ελήφθησαν .

Ενδεικτικά, προτείνεται να κατασκευαστούν νέα μοντέλα κινητών τερματικών με ακουστική έξοδο (Κεφάλαιο 4, 5) προκειμένου να υπάρχει απόλυτη συμφωνία με το [1] στο οποίο δίνεται ο ορισμός της πιο αντιπροσωπευτικής τοποθέτησης των κινητών τηλεφώνων σε σχέση με ανατομικά μοντέλα κεφαλιών που υιοθετήθηκε στην εργασία αυτή.

Επίσης με κατάλληλα μοντέλα κεφαλιού τα οποία εκτίθενται στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία μοντέλων κινητού τηλεφώνου θα μπορούσε να μετρηθεί ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης για την περίπτωση παιδικών κεφαλιών και για τις συγκεκριμένες τέσσερις τοποθετήσεις που περιγράφονται στο πρότυπο 1528-2003 της

IEEE (Κεφάλαιο 1) και χρησιμοποιήθηκαν (οι δύο από αυτές) σε αυτήν την εργασία. Η κατασκευή ενός μοντέλου παιδικού κεφαλιού μπορεί να γίνει με βάση το μοντέλο κεφαλιού ενηλίκου και με μία διαδικασία που περιγράφεται στο [3] ή εναλλακτικά μπορούν να χρησιμοποιηθούν MRI-based μοντέλα κεφαλιού παιδιών διαφόρων ηλικιών.

Επίσης, θα μπορούσε εκτός από το Ρυθμό Ειδικής Απορρόφησης (SAR) να μετρηθεί η θερμοκρασιακή αύξηση σε ευαίσθητα σημεία του κεφαλιού, εξαιτίας της χρήσης του κινητού τηλεφώνου, όπως για παράδειγμα στον οφθαλμό, με χρήση της βιοθερμικής εξίσωσης [2]. Σε αυτές τις περιπτώσεις, θα ήταν προτιμότερη η χρήση CAD μοντέλων κεφαλιού τα οποία έχουν συνήθως μεγαλύτερη ανάλυση από τα ανατομικά μοντέλα, επιτρέποντας με αυτό τον τρόπο τη θεώρηση περισσότερων ιστών. Τα VHP ανατομικά μοντέλα και τα MRI ανατομικά μοντέλα (όπως αυτό που χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία) έχουν πολύ μικρή ανάλυση (1-2mm) η οποία δεν είναι αρκετή για την σωστή μοντελοποίηση του ανθρώπινου οφθαλμού. Από κάποια αποτελέσματα ηλεκτρομαγνητικών προσομοιώσεων σε βιολογικούς ιστούς, όπως αυτά που δημοσιεύονται στο [2], συνάγεται το συμπέρασμα ότι επιβάλλεται πλέον, όσον αφορά τα ευαίσθητα όργανα του ανθρώπινου σώματος (όπως τα μάτια), να μελετάται επιπρόσθετα η θερμοκρασιακή αύξηση που προέρχεται από τη έκθεση στην ακτινοβολία της κεραίας του κινητού τηλεφώνου και όχι μόνο ο Ρυθμός Ειδικής Απορρόφησης (SAR).

Θα μπορούσαν επιπρόσθετα, να εκτελεστούν προσομοιώσεις, κατά τις οποίες το κινητό τηλέφωνο να τοποθετείται στην πιο αντιπροσωπευτική θέση όσον αφορά άλλες καταστάσεις, όπως για παράδειγμα την κατάσταση «ανοικτής ακρόασης». Πιθανόν η κατάσταση «ανοικτής ακρόασης» να έχει δυσμενέστερες επιπτώσεις από τις συνήθειες τοποθετήσεις σχετικά με την απορρόφηση ακτινοβολίας από το ανθρώπινο κεφάλι, και ιδιαίτερα από ευαίσθητους ιστούς με χαμηλή ικανότητα θερμορύθμισης. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η ακουστική έξοδος για την «ανοικτή ακρόαση» βρίσκεται στο πίσω μέρος του κινητού με αποτέλεσμα κατά τη διάρκεια μίας τέτοιας χρήσης του κινητού, να μην παρεμβάλλεται κάποιο επίπεδο που να αποτρέπει την ακτινοβολία να κατευθυνθεί προς το χρήστη.

Αξίζει να αναφερθεί επίσης ότι θα ήταν δυνατό να μελετηθούν και οι άλλες δύο τοποθετήσεις “left cheeked position” και “left tilted position”, που δεν χρησιμοποιήθηκαν σε αυτές τις προσομοιώσεις, αν και στην πραγματικότητα χρειάζονται ελάχιστες αλλαγές στις συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν και η επαρκής θεωρία για κάτι τέτοιο περιλαμβάνεται σε αυτήν την εργασία.

Το τελικό συμπέρασμα από αυτήν την εργασία είναι ότι θα πρέπει σε όλες τις ηλεκτρομαγνητικές προσομοιώσεις από τούδε και στο εξής, να τοποθετείται το κινητό σε μία ή παραπάνω από τις τέσσερις αντιπροσωπευτικές τοποθετήσεις που παρουσιάζονται στο πρότυπο IEEE 1528-2003 [4] και οι δύο εκ των οποίων χρησιμοποιήθηκαν εδώ.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Wolfgang Kainz, Andreas Christ, Tocher Kellom, Seth Seidman, Neviana Nikoloski, Brian Beard and Niels Kuster, “Dosimetric comparison of the specific anthropomorphic mannequin (SAM) to 14 anatomical head models using a novel definition for the mobile phone positioning”, *Physics in Medicine and Biology*, vol. 50, pp. 3423-3445, July 2005
- [2] Concettina Buccella, Valerio De Santis and Mauro Feliziani, “Prediction of Temperature Increase in Human Eyes Due to RF Sources”, 2007
- [3] Β.Τρίαντος, Β.Τσακανίκας, “Συγκριτική Εκτίμηση της Απορρόφησης Ηλεκτρομαγνητικής Ακτινοβολίας κατά τη Χρήση Τερματικών Συσκευών Κινητών Επικοινωνιών από Παιδιά και Ενήλικες με Χρήση της Μεθόδου FDTD”, Διπλωματική Εργασία, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Ε.Μ.Π., 2005.
- [4] IEEE Std 1528™-2003, “IEEE Recommended Practice for Determining the Peak Spatial-Average Specific Absorption Rate (SAR) in the Human Head from Wireless Communications Devices: Measurement Techniques”, The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 2003

Παράρτημα *1*

Διανυσματικός Λογισμός-Το επίπεδο

Π.1.1. Εισαγωγή

Το συγκεκριμένο παράρτημα κρίθηκε σκόπιμο να συμπεριληφθεί στην παρούσα εργασία προκειμένου να υπενθυμιστούν στον αναγνώστη κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες με τις περισσότερες από τις οποίες είναι πιθανότατα ήδη εξοικειωμένος. Εκτός τούτου, στο κύριο μέρος της εργασίας γίνονται συχνά αναφορές στον παρόν παράρτημα. Έτσι ο αναγνώστης που δε γνωρίζει ή δε θυμάται κάποιο μαθηματικό τύπο που αναφέρεται στο κύριο κείμενο, μπορεί να ανατρέχει στο παράρτημα αυτό. Οι μαθηματικές έννοιες που εισάγονται αποτελούν αντικείμενο της επιστήμης της Αναλυτικής και Διανυσματικής

Γεωμετρίας αλλά χρησιμοποιούνται και στην επιστήμη των Γραφικών με Υπολογιστές (Computer Graphics) και φυσικά σε πλήθος άλλων επιστημών.

Π.1.2. Αρχικές Συμβάσεις

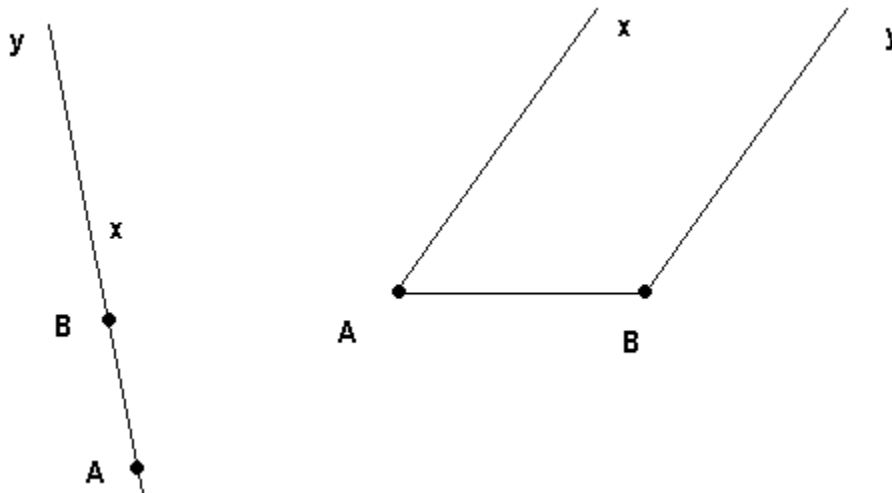
Ας θεωρηθεί ότι συμβολίζεται με E ο τρισδιάστατος Ευκλείδειος χώρος σημείων [1], δηλαδή ο συνήθης χώρος των σημείων της «εποπτείας» μας μαζί με την Ευκλείδεια Γεωμετρία του [2]. Ο E ονομάζεται και *εποπτικός χώρος* σύμφωνα με το [2]. Τα αντικείμενα που παρίστανται στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο σημείων μπορούν να οριστούν ως σύνολα σημείων του E [1].

Τα στοιχεία του συνόλου E , δηλαδή τα σημεία του E , θα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα της λατινικής αλφαβήτου (δε θα χρησιμοποιείται όμως το γράμμα O). Έτσι π.χ. το C είναι ένα συγκεκριμένο στοιχείο-σημείο του E όπως π.χ. ο αριθμός 32,67 είναι συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου \mathbb{R} . Βέβαια το σύνολο των γραμμάτων της λατινικής αλφαβήτου είναι πεπερασμένο ενώ το σύνολο των σημείων του E είναι άπειρο. Παρόλα αυτά θα υιοθετηθεί αυτός ο συμβολισμός. Ένα τυχαίο (μεταβλητό) σημείο του E θα συμβολίζεται με κεφαλαία γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου. Έτσι π.χ. το γράμμα Γ μπορεί να αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε σημείο του E , όπως π.χ. η μεταβλητή x μπορεί να αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε αριθμό του συνόλου \mathbb{R} . Ένα τυχαίο σταθερό σημείο του συνόλου E συμβολίζεται με ένα ελληνικό γράμμα και ένα θ ως κάτω δείκτη (π.χ. A_θ) (όπως για παράδειγμα συμβολίζουμε συνήθως με x_0 ένα τυχαίο σταθερό αριθμό του \mathbb{R}) ή με το λατινικό γράμμα O .

Για να κατανοήσει ο αναγνώστης γιατί γίνονται οι παραπάνω συμβάσεις, μπορεί να φανταστεί έναν παρατηρητή να σχεδιάζει σε έναν πίνακα ένα τρίγωνο και να ονομάζει με A , B και C τις τρεις κορυφές του. Ο χώρος στον οποίο δουλεύει ο παρατηρητής αυτός είναι κατά κάποιο τρόπο ο *δυσδιάστατος Ευκλείδειος χώρος σημείων* (στην πραγματικότητα δουλεύει σε ένα affine plane [3]). Αν θεωρηθεί ότι τα γράμματα A και B μπορούν να αντιπροσωπεύουν το καθένα, οποιοδήποτε σημείο του πίνακα, τότε το ευθύγραμμο τμήμα AB θα αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον πίνακα, ενώ το ευθύγραμμο τμήμα AB για τον παρατηρητή είναι ένα και μοναδικό-η μία πλευρά του τριγώνου.

Π.1.3. Εφαρμοστά διανύσματα - Ελεύθερα διανύσματα

Δύο ευθείες έχουν την *ίδια διεύθυνση*, αν και μόνο αν είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Το σύνολο δ όλων των παραλλήλων ευθειών προς μία δεδομένη ευθεία (ε) λέγεται *διεύθυνση* της ευθείας (ε). Συνήθως όμως η διεύθυνση περιγράφεται από ένα στοιχείο του συνόλου αυτού. Διεύθυνση μίας ημιευθείας Ax ή ενός ευθυγράμμου τμήματος AB με A διαφορετικό του B , λέγεται η διεύθυνση της ευθείας στην οποία ανήκει. Έστω το σύνολο των ημιευθειών με μία ορισμένη διεύθυνση. Δύο οποιεσδήποτε ημιευθείες Ax, By του συνόλου αυτού, έχουν την *ίδια φορά*, αν και μόνο αν: ή α) ανήκουν στην ίδια ευθεία και η μία περιέχει την άλλη ή β) ανήκουν σε δύο διαφορετικές ευθείες και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή το ευθύγραμμο τμήμα AB (σχήμα Π.1.1):



Σχήμα Π.1.1: Φορά ημιευθειών

Διαφορετικά λέγεται ότι οι ημιευθείες έχουν *αντίθετη φορά*. Το σύνολο φ όλων των ημιευθειών που έχουν την ίδια φορά προς μία δεδομένη ημιευθεία A_0x λέγεται *φορά της ημιευθείας* A_0x . Συνήθως όμως η φορά δίνεται μέσω μίας ημιευθείας του συνόλου αυτού [2].

Όπως είναι γνωστό, κάθε διατεταγμένο ζευγάρι (A, B) σημείων του E , ορίζει ένα ευθύγραμμο τμήμα με καθορισμένη αρχή A και πέρας B . Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται *εφαρμοστό διάνυσμα* με αρχή το A και πέρας το B και συμβολίζεται ως \overline{AB} . *Διεύθυνση* και *φορά* του εφαρμοστού διανύσματος \overline{AB} , με A διαφορετικό του B , ονομάζεται η διεύθυνση και η φορά αντίστοιχα της ημιευθείας AB . Η ευθεία που περιέχει το ευθύγραμμο τμήμα AB λέγεται *φορέας* του εφαρμοστού διανύσματος \overline{AB} . Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , ως προς μία μονάδα μήκους, λέγεται *μέτρο* του εφαρμοστού διανύσματος \overline{AB} ως προς τη μονάδα αυτή και συμβολίζεται με $|\overline{AB}|$.

Αναφέρεται επίσης ότι για κάθε σημείο $A \in E$, το εφαρμοστό διάνυσμα \overline{AA} λέγεται *μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα* στο A [2]. Ως φορέας του μηδενικού εφαρμοστού διανύσματος στο A μπορεί να θεωρηθεί οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το A . Δεν ορίζεται τέλος διεύθυνση και φορά για το μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα σε οποιοδήποτε σημείο, ενώ ως μέτρο του θεωρείται το 0 και γράφεται π.χ. $|\overline{AA}| = 0$ [4].

Το σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων σε ένα τυχαίο σταθερό σημείο O του E συμβολίζεται με D_O .

Έστω ένα τυχαίο σταθερό σημείο O του E . Σε κάθε σημείο P του E αντιστοιχεί ακριβώς ένα στοιχείο του D_O , το \overline{OP} . Αντιστρόφως, σε κάθε στοιχείο του D_O αντιστοιχεί ακριβώς ένα σημείο του E , το πέρας αυτού του στοιχείου-εφαρμοστού διανύσματος. Στο σημείο O αντιστοιχεί το μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα \overline{OO} . Υπάρχει επομένως μία αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση η οποία σε κάθε σημείο P του E

αντιστοιχίζει το εφαρμοστό διάνυσμα \overrightarrow{OP} του D_0 και αντιστρόφως. Το εφαρμοστό διάνυσμα \overrightarrow{OP} λέγεται *διάνυσμα θέσης* του σημείου $P \in E$.

Δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα που έχουν την ίδια διεύθυνση λέγονται *συγγραμμικά* αν και μόνο αν βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία ή *παράλληλα* αν και μόνο αν βρίσκονται πάνω σε παράλληλες ευθείες. Αν δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα, τότε και μόνο τότε γράφεται $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Δύο οποιαδήποτε παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται *ομόρροπα* αντίστοιχα *αντίρροπα*, αν και μόνο αν οι ημιευθείες $AB, \Gamma\Delta$ έχουν την ίδια, αντίστοιχα αντίθετη, φορά. Δηλαδή δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ομόρροπα-αντίστοιχα αντίρροπα- αν και μόνο αν έχουν την ίδια-αντίστοιχα αντίθετη- φορά. Αν οι διευθύνσεις δύο οποιοδήποτε μη μηδενικών εφαρμοστών διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι κάθετες, τότε και μόνο τότε, τα διανύσματα λέγονται *κάθετα* και το γεγονός αυτό συμβολίζεται με: $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ [2].

Δύο μη μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται *ισοδύναμα*, αν και μόνο αν είναι ομόρροπα και έχουν ίδιο μέτρο. Το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα προς ένα τυχαίο σταθερό μη μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{A_0B_0}$ ονομάζεται *ελεύθερο διάνυσμα* και το $\overrightarrow{A_0B_0}$ είναι ένας *αντιπρόσωπος* του ελεύθερου διανύσματος. Το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα D και τα (σταθερά) στοιχεία του με μικρά γράμματα της αγγλικής αλφαβήτου (με βέλος από πάνω) π.χ. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (δε θα χρησιμοποιείται όμως το \vec{o}). Ένα τυχαίο (μεταβλητό) στοιχείο του D θα συμβολίζεται με μικρά γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου (και βέλη από πάνω) π.χ. $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Ένα τυχαίο σταθερό στοιχείο του D θα συμβολίζεται με ένα ελληνικό γράμμα και ένα 0 ως κάτω δείκτη χωρίς να παραλείπεται φυσικά το βέλος π.χ. $\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0, \vec{\gamma}_0$ ή με \vec{o} .

Ορισμένες φορές θα παριστάνεται ένα ελεύθερο διάνυσμα με έναν οποιοδήποτε αντιπρόσωπό του. Επίσης κάποιες φορές όταν χρησιμοποιείται ένα τυχαίο σταθερό μη μηδενικό εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{OB_0}$ και μέσω αυτού ορίζεται το αντίστοιχο ελεύθερο διάνυσμα, αυτό το τελευταίο θα συμβολίζεται με \vec{o}_{B_0} . Έτσι π.χ. τα \vec{l}_R, \vec{o}_L είναι στοιχεία του D .

Θεωρείται ότι τα μηδενικά εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}$ κλπ., με αρχή τα διάφορα σημεία του E είναι ισοδύναμα και επομένως αυτά και μόνο αυτά ορίζουν ένα ελεύθερο διάνυσμα που ονομάζεται *μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα* και συμβολίζεται με $\vec{0}$ [2]. *Διεύθυνση, φορά και μέτρο* ενός μη μηδενικού ελεύθερου διανύσματος ονομάζεται η διεύθυνση, φορά και το μέτρο αντίστοιχα ενός οποιουδήποτε αντιπροσώπου του. Δεν ορίζεται διεύθυνση και φορά για το μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα [4]. Επίσης το μέτρο του μηδενικού διανύσματος ορίζεται να είναι 0 [4]. Το μέτρο κάθε ελεύθερου διανύσματος \vec{a} συμβολίζεται με $|\vec{a}|$.

Δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά ελεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$ λέγονται *συγγραμμικά*, αν και μόνο αν έχουν την ίδια διεύθυνση, δηλαδή δύο οποιοδήποτε

αντιπρόσωποι τους είναι συγγραμμικά ή παράλληλα εφαρμοστά διανύσματα και γράφεται $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$.

Δύο οποιαδήποτε μη μηδενικά ελεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$ λέγονται *κάθετα*, αν και μόνο αν έχουν κάθετες διευθύνσεις, δηλαδή δύο οποιοιδήποτε αντιπρόσωποι τους είναι κάθετα εφαρμοστά διανύσματα και γράφεται $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

Στο εξής θα θεωρείται ότι η έννοια διάνυσμα ταυτίζεται με την έννοια ελεύθερο διάνυσμα.

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι ο χώρος D , δηλαδή το σύνολο των ελεύθερων διανυσμάτων του εποπτικού χώρου, είναι αυτό που αναφέρεται σε κάποια βιβλία [1] ως *τριδιάστατος διανυσματικός Ευκλείδειος χώρος* [1].

Π.1.4. Πράξεις διανυσμάτων

Στο σύνολο D των ελεύθερων διανυσμάτων ορίζεται το *άθροισμα* $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ δύο οποιοδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ως εξής:

Αν $O \in E$, ένα τυχαίο σταθερό σημείο, τότε ορίζονται τα σημεία A και Γ έτσι ώστε $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma} = \vec{\beta}$. Το ελεύθερο διάνυσμα που ορίζει το $\vec{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του $O \in E$ (επομένως είναι το ίδιο για κάθε $O \in E$) και λέγεται *άθροισμα των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$* . Γράφεται $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{OA} + \vec{A\Gamma}$ [2].

Στο σύνολο D ορίζεται και το *γινόμενο* $\lambda \vec{\alpha}$ κάθε διανύσματος $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ επί οποιοδήποτε αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ως το διάνυσμα που έχει την ίδια διεύθυνση (συγγραμμικό) με το $\vec{\alpha}$ και είναι: α) ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$, β) αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και έχει μέτρο $|\lambda \vec{\alpha}| = |\lambda| |\vec{\alpha}|$. Αν το $\vec{\alpha}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα ή αν $\lambda = 0$ ορίζεται $\lambda \vec{0} = \vec{0}$ και $0 \vec{\alpha} = \vec{0}$. Το διάνυσμα $(-1) \vec{\alpha}$ ονομάζεται *αντίθετο* του $\vec{\alpha}$ και συμβολίζεται με $-\vec{\alpha}$.

Προφανώς αν \vec{AB} είναι ένας αντιπρόσωπος του τυχαίου ελεύθερου διανύσματος $\vec{\alpha}$, τότε το \vec{BA} είναι ένας αντιπρόσωπος του $-\vec{\alpha}$. Έτσι σύμφωνα με τη σύμβαση που έγινε για τον συμβολισμό στο Π.1.3. («ορισμένες φορές θα παριστάνεται ένα ελεύθερο διάνυσμα με έναν οποιοδήποτε αντιπρόσωπό του»), μπορεί να γραφτεί: $\vec{AB} = -\vec{BA} \Leftrightarrow \vec{BA} = -\vec{AB}$ [2].

Αν A, B, Γ, Δ είναι (τυχαία) σημεία του E , τότε, από τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων, έπεται αμέσως ότι:

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{A\Delta}$$

$$\vec{B\Gamma} = \vec{BA} + \vec{A\Gamma} = \vec{A\Gamma} - \vec{AB}$$

Επίσης, από τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων, του πολλαπλασιασμού διανύσματος επί πραγματικό αριθμό και με τη βοήθεια της στοιχειώδους Ευκλείδειας Γεωμετρίας αποδεικνύονται εύκολα οι ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
\vec{\alpha} + \vec{\beta} &= \vec{\beta} + \vec{\alpha} \\
(\kappa + \lambda)\vec{\alpha} &= \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\alpha} \\
\vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} \\
(\kappa\lambda)\vec{\alpha} &= \kappa(\lambda\vec{\alpha}) \\
\vec{\alpha} + \vec{0} &= \vec{\alpha} \\
1\vec{\alpha} &= \vec{\alpha} \\
\vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) &= \vec{0} \\
\kappa(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) &= \kappa\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta} \\
\text{για κάθε } \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in D \text{ και για κάθε } \kappa, \lambda \in \mathbb{R} & [2].
\end{aligned}
\tag{π.1.1.}$$

Π.1.5. Συνεπίπεδα-Γραμμικώς εξαρτημένα-Γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

Αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda \neq 0, \mu \neq 0$ με $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$ [2] ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \neq 0$ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$ (π.1.2.).

Τρία οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα λέγονται *συνεπίπεδα* αν και μόνο αν οι διευθύνσεις τους είναι παράλληλες προς το ίδιο επίπεδο (π). Αποδεικνύεται εύκολα ότι τρία οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ , όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε: $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$ [2].

Όταν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, αντίστοιχα τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, συνδέονται με μία σχέση της μορφής $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$, αντίστοιχα $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0}$, χωρίς όλοι οι συντελεστές κ, λ , αντίστοιχα κ, λ, μ , να είναι μηδέν, τότε και μόνο τότε λέγονται *γραμμικώς εξαρτημένα*. Διαφορετικά λέγονται *γραμμικώς ανεξάρτητα* [2].

Από τα παραπάνω προκύπτουν εύκολα τα εξής:

i) Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν και μόνο όταν είναι συγγραμμικά. Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ισοδύναμα μη συγγραμμικά, αν και μόνο αν: $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa = \lambda = 0$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Αν τρία οποιαδήποτε μη μηδενικά διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και μόνο τότε είναι συνεπίπεδα. Τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ισοδύναμα μη συνεπίπεδα, αν και μόνο αν $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow \kappa = \lambda = \mu = 0$ με $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Π.1.6. Βάσεις διανυσμάτων-Συνιστώσες

Έστω δύο μη συγγραμμικά-γραμμικώς ανεξάρτητα- διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ που είναι συνεπίπεδο με αυτά, υπάρχουν μονοσήμαντα καθορισμένοι αριθμοί $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\vec{\delta} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}$. Το σύνολο $B = \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}\}$ αυτών των δύο μη συγγραμμικών διανυσμάτων λέγεται *βάση* του «δισδιάστατου διανυσματικού Ευκλείδειου χώρου».

Έστω τρία μη συνεπίπεδα-γραμμικώς ανεξάρτητα- διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$. Τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι για κάθε διάνυσμα $\vec{\delta}$ υπάρχουν μονοσήμαντα καθορισμένοι αριθμοί $\kappa, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\vec{\delta} = \kappa \vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta} + \mu \vec{\gamma}$ (π.1.3.).

Το σύνολο $B = \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ των τριών μη συνεπιπέδων διανυσμάτων λέγεται *βάση* του D [2]. Οι αριθμοί στη σχέση (π.1.3.) λέγονται *συνιστώσες* του διανύσματος $\vec{\delta}$ ως προς τη βάση $B = \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ [2].

Αν τα (τυχαία) διανύσματα $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, μίας βάσης $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι ανά δύο ορθογώνια, τότε και μόνο τότε η βάση λέγεται *ορθογώνια*. Αν επιπρόσθετα τα διανύσματα είναι και *μοναδιαία*, δηλαδή $|\vec{e}_i| = 1, i = 1, 2, 3$, τότε και μόνο τότε η βάση λέγεται *ορθοκανονική* [2].

Π.1.7. Συστήματα συντεταγμένων-Αναλυτική περιγραφή των διανυσμάτων

Σημειώθηκε παραπάνω ότι όταν δοθεί ένα τυχαίο σταθερό σημείο O του χώρου E , τότε σε κάθε σημείο P αντιστοιχεί ακριβώς ένα (εφαρμοστό αλλά και ελεύθερο) διάνυσμα, το διάνυσμα θέσης $\vec{O_P} = \vec{OP}$ του P . Αν επιπλέον δοθεί και μία τυχαία σταθερή βάση διανυσμάτων $B = \{\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0, \vec{\gamma}_0\}$, τότε στο διάνυσμα $\vec{O_P}$ αντιστοιχεί μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών, οι συνιστώσες του (x, y, z) , έτσι ώστε $\vec{O_P} = x\vec{\alpha}_0 + y\vec{\beta}_0 + z\vec{\gamma}_0$. Επομένως όταν δοθεί ένα τυχαίο σταθερό σημείο O και η τυχαία σταθερή βάση B τότε σε κάθε σημείο P του εποπτικού χώρου αντιστοιχεί μία και μόνο μία διατεταγμένη τριάδα αριθμών $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και το αντίστροφο. Σε κάθε διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο του εποπτικού χώρου. Οι αριθμοί στην τριάδα αυτή, που θεωρούνται και οι συνιστώσες του διανύσματος $\vec{O_P} = \vec{OP}$, ονομάζονται *συντεταγμένες* του σημείου P ως προς το *σύστημα συντεταγμένων* που αποτελείται από το σημείο O και τη βάση $B = \{\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0, \vec{\gamma}_0\}$ ή ισοδύναμα το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0, \vec{\gamma}_0\}$ [2]. Γράφεται $P(x, y, z)$ για κάθε σημείο P με συντεταγμένες (x, y, z) και $P(\vec{O_P})$ για κάθε σημείο P με διάνυσμα θέσης $\vec{O_P}$. Οι φορείς των εφαρμοστών στο σημείο O διανυσμάτων που εκπροσωπούν τα διανύσματα της

βάσης $B = \{\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0, \vec{\gamma}_0\}$ λέγονται άξονες του συστήματος συντεταγμένων και συμβολίζονται με x', y', z' και αντίστοιχα [2]. Ως θετική φορά των αξόνων θεωρείται η φορά των αντίστοιχων διανυσμάτων. Με Ox, Oy, Oz ή με X, Y, Z , συμβολίζονται αντίστοιχα οι ημιευθείες με τη θετική φορά (θετικοί ημιάξονες). Το επίπεδο των Ox, Oy συμβολίζεται με xOy ή με XY . Αντίστοιχα συμβολίζονται με yOz (ή YZ) και με xOz (ή XZ) τα άλλα δύο επίπεδα.

Αν η βάση $B = \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\}$ του συστήματος συντεταγμένων είναι ορθοκανονική, τότε το σύστημα συντεταγμένων λέγεται *ορθογώνιο* [2]. Ένα ορθογώνιο σύστημα συμβολίζεται συνήθως ως $Oxyz$ και η βάση του ως $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Όλο το σύστημα συντεταγμένων συμβολίζεται ως $\{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ όπου εδώ με $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ συμβολίζονται κατ' εξαίρεση τυχαία σταθερά κάθε φορά μοναδιαία διανύσματα.

Σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, για το διάνυσμα θέσης $\vec{o}_p = \vec{OP}$ οποιουδήποτε σημείου P του χώρου E ισχύει:

$$\begin{aligned} |\vec{o}_p| &= |\vec{OP}| = \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

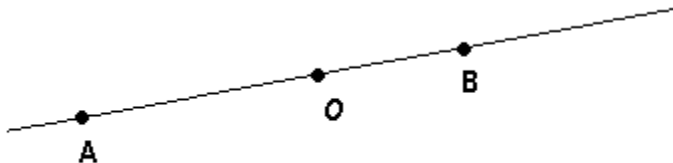
Οποιοδήποτε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι διάνυσμα θέσης ακριβώς ενός σημείου $A(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ και άρα το μέτρο του (σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$) είναι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$. Αν $\vec{o}_A = \vec{OA}, \vec{o}_B = \vec{OB}$ είναι τα διανύσματα θέσης δύο σημείων A και B αντίστοιχα, τότε η απόσταση $d(A, B)$ των δύο αυτών σημείων είναι $d(A, B) = |\vec{AB}| = |\vec{o}_B - \vec{o}_A|$. Αν $B(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, τότε:

$$\vec{o}_B - \vec{o}_A = (\beta_1 - \alpha_1)\hat{x} + (\beta_2 - \alpha_2)\hat{y} + (\beta_3 - \alpha_3)\hat{z} \text{ και άρα:}$$

$$d(A, B) = \sqrt{(\beta_1 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \alpha_2)^2 + (\beta_3 - \alpha_3)^2} \quad (\pi.1.4.).$$

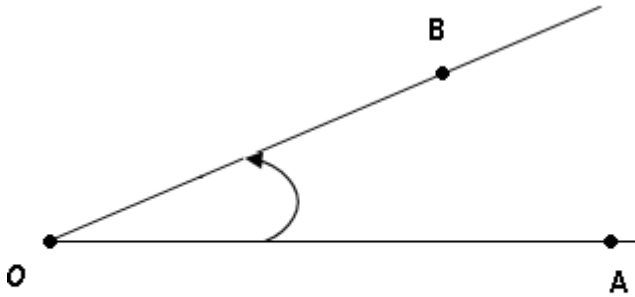
Π.1.8. Προσανατολισμός συστήματος συντεταγμένων

Έστω O ένα τυχαίο σταθερό σημείο του E και A, B δύο σημεία που δεν μπορούν να αντιπροσωπεύουν το ίδιο σταθερό σημείο του E , ούτε το O . Αν οι δύο ημιευθείες OA, OB δεν είναι *αντικείμενες* (βλ. σχήμα Π.1.2), τότε ορίζουν ένα επίπεδο.

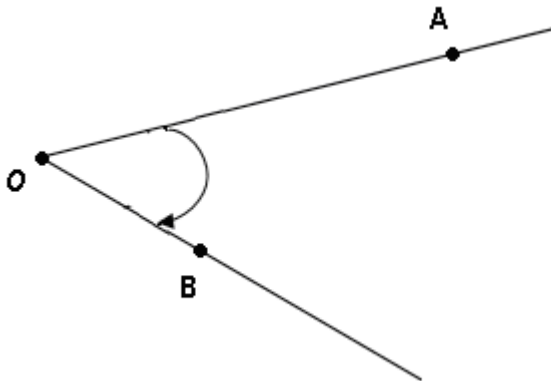


Σχήμα Π.1.2: Αντικείμενες ημιευθείες

Ας φανταστεί ο αναγνώστης ότι επιλέγει να βρίσκεται ως παρατηρητής στο ένα από τα δύο μέρη (ημιχώροι) στα οποία το επίπεδο χωρίζει τον χώρο E . Ορίζεται τότε ως προς αυτόν μία μοναδική *κυρτή* γωνία της οποίας οι πλευρές θεωρούνται διατεταγμένες με πρώτη την OA και δεύτερη την OB . Η γωνία αυτή λέγεται *προσανατολισμένη* και συμβολίζεται με $\hat{A\hat{O}B}$. Ας υποθεθεί ότι η ημιευθεία OA στρέφεται περί το O διαγράφοντας το *εσωτερικό* της γωνίας, μέχρι να συμπίψει με την OB . Αν για να συμβεί αυτό, η φορά της περιστροφής είναι αντίθετη από τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, η γωνία λέγεται *θετική* (σχήμα Π.1.3). Διαφορετικά λέγεται *αρνητική* (σχήμα Π.1.4).



Σχήμα Π.1.3: Θετική γωνία



Σχήμα Π.1.4: Αρνητική γωνία

Η αλγεβρική τιμή της $\theta = \hat{A\hat{O}B}$ ορίζεται ως η αλγεβρική τιμή του αντίστοιχου τόξου ενός προσανατολισμένου κύκλου με κέντρο το O . Θεωρείται ότι η γωνία που σχηματίζουν δύο αντικείμενες ημιευθείες είναι θετική. Έτσι για την αλγεβρική τιμή της προσανατολισμένης γωνίας θ , ισχύει: $-\pi < \theta \leq \pi$.

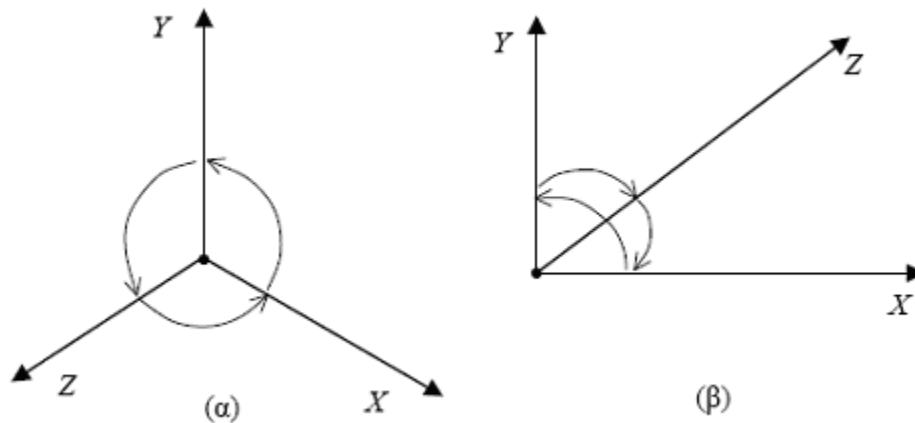
Ως γωνία δύο οποιονδήποτε μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ορίζεται η γωνία των ημιευθειών OA και OB με $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ και O τυχαίο σταθερό σημείο του

χώρου E . Προφανώς ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του O , επομένως ισχύει για κάθε $O \in E$. Δεν ορίζεται γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων αν και μόνο αν τουλάχιστον το ένα από τα δύο είναι το μηδενικό.

Έστω ένα σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ στο επίπεδο. Τα διανύσματα $\vec{OA} = \vec{e}_1, \vec{OB} = \vec{e}_2$ δεν είναι συγγραμμικά και άρα $\angle AOB \neq 0$. Το σύστημα λέγεται *δεξιόστροφο* αν και μόνο αν $\angle AOB > 0$. Αν $\angle AOB < 0$, τότε και μόνο τότε, το σύστημα λέγεται *αριστερόστροφο* [2]. Προφανώς ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του O , επομένως ισχύει για κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Έστω $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ ένα σύστημα συντεταγμένων στον εποπτικό χώρο E . Το σύστημα αυτό λέγεται *δεξιόστροφο* (αντίστοιχα *αριστερόστροφο*) αν και μόνο αν το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ του επιπέδου φαίνεται από το πέρασ του \vec{e}_3 ως δεξιόστροφο (αντίστοιχα αριστερόστροφο) [2]. Και εδώ, ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της επιλογής του O , επομένως ισχύει για κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται ένα δεξιόστροφο και ένα αριστερόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων.



Σχήμα Π.1.5: (α) Δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων, (β) αριστερόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων.

Μία βάση διανυσμάτων $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ του χώρου D λέγεται *δεξιόστροφη*, αντιστοίχως *αριστερόστροφη*, αν και μόνο αν για κάθε σημείο O του E το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι δεξιόστροφο, αντιστοίχως αριστερόστροφο.

Λέγεται, τέλος, ότι ο εποπτικός χώρος E είναι *θετικά* ή *αρνητικά προσανατολισμένος*, αν και μόνο αν το σύστημα συντεταγμένων που έχει επιλεγεί είναι δεξιόστροφο ή αριστερόστροφο αντίστοιχα [2].

Π.1.9. Εσωτερικό γινόμενο-Διευθύνοντα συνημίτονα

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$. Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι και τα δύο μη μηδενικά, τότε και μόνο τότε, το εσωτερικό γινόμενό τους $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ορίζεται ως ο πραγματικός αριθμός:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cos(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \quad (\pi.1.5.).$$

Αν ένα τουλάχιστον από τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε και μόνο τότε, ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Είναι φανερό ότι ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \vee \vec{\beta} = \vec{0} \vee \vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$. Αποδεικνύονται πολύ εύκολα οι παρακάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} \\ (l\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} &= l(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \\ (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} &= \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} + \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \quad (\pi.1.6.) \end{aligned}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} \geq 0 \text{ και}$$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0}$$

για κάθε $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in D$, και για κάθε $l \in \mathbb{R}$ [2].

Αν η $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ είναι μία ορθοκανονική βάση, τότε:

$$\begin{aligned} \hat{x} \cdot \hat{y} &= \hat{y} \cdot \hat{z} = \hat{z} \cdot \hat{x} = 0 \\ \hat{x} \cdot \hat{x} &= \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 \end{aligned} \quad (\pi.1.7.)$$

Άρα αν θεωρηθούν δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$ με

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}$$

$$\vec{\beta} = \beta_1 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \beta_3 \hat{z}$$

τότε με βάση τις σχέσεις (π.1.6.) [2]:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} &= (\alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}) \cdot (\beta_1 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \beta_3 \hat{z}) = \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 \end{aligned}$$

Έστω $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ μία ορθοκανονική βάση του D και $\vec{\alpha} \in D$ με $\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}$.

Αν τεθούν $\theta_x = (\vec{\alpha}, \hat{x})$, $\theta_y = (\vec{\alpha}, \hat{y})$, $\theta_z = (\vec{\alpha}, \hat{z})$ τότε

$$\alpha_1 = \vec{\alpha} \cdot \hat{x} = |\vec{\alpha}| \cos \theta_x$$

$$\alpha_2 = \vec{\alpha} \cdot \hat{y} = |\vec{\alpha}| \cos \theta_y$$

$$\alpha_3 = \vec{\alpha} \cdot \hat{z} = |\vec{\alpha}| \cos \theta_z$$

Άρα:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} &= |\vec{\alpha}| \cos \theta_x \hat{x} + |\vec{\alpha}| \cos \theta_y \hat{y} + |\vec{\alpha}| \cos \theta_z \hat{z} = \\ &= |\vec{\alpha}| (\cos \theta_x \hat{x} + \cos \theta_y \hat{y} + \cos \theta_z \hat{z})\end{aligned}$$

Προφανώς το διάνυσμα $\cos \theta_x \hat{x} + \cos \theta_y \hat{y} + \cos \theta_z \hat{z} = \frac{\vec{\alpha}}{|\vec{\alpha}|} = \hat{\alpha}$ είναι μοναδιαίο και

ομόρροπο προς το $\vec{\alpha}$. Άρα:

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (\text{π.1.8.})$$

Οι αριθμοί $\cos \theta_x, \cos \theta_y, \cos \theta_z$ λέγονται *συννημίτονα διεύθυνσης* ή *διευθύνοντα συννημίτονα* του διανύσματος $\vec{\alpha}$ ως προς τη βάση $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ [2].

Π.1.10. Εξωτερικό γινόμενο– Μικτό γινόμενο–Δισεξωτερικό γινόμενο

Το εξωτερικό γινόμενο δύο οποιονδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$ είναι ένα διάνυσμα που συμβολίζεται με $\vec{\alpha} \times \vec{\beta} \in D$ και ορίζεται ως εξής:

α) Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά, τότε το μέτρο, η διεύθυνση και η φορά του $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ ορίζονται αντίστοιχα από τις σχέσεις:

$$\text{i)} \quad |\vec{\alpha} \times \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$$

$$\text{ii)} \quad (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}, (\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \perp \vec{\beta}$$

iii) Η βάση $\{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha} \times \vec{\beta}\}$ είναι δεξιόστροφη.

$$\beta) \vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \vee \vec{\beta} = \vec{0} \vee \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$$

Αν τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά, τότε και μόνο τότε μπορεί να γραφτεί:

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \sin(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \cdot \hat{\tau}, \text{ με } 0 \leq (\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \leq \pi \quad (\text{π.1.9.})$$

όπου $\hat{\tau}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που έχει τη φορά του $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ με βάση τα αii) και αiii) [5].

Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in D$ και για κάθε $l \in \mathbb{R}$ ισχύουν:

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = -\vec{\beta} \times \vec{\alpha} \quad (.1.10.1.)$$

$$(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \times \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \times \vec{\gamma} + \vec{\beta} \times \vec{\gamma}$$

$$\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \times \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \vec{\gamma}$$

$$(l\vec{\alpha}) \times \vec{\beta} = \vec{\alpha} \times (l\vec{\beta}) = l(\vec{\alpha} \times \vec{\beta}) \quad (\text{π.1.10.2.})$$

Επίσης αν $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$, είναι μία *δεξιόστροφη* ορθοκανονική βάση, τότε:

$$\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \vec{0} \quad (\text{π.1.11.1.})$$

$$\text{και } \hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y} \quad (\text{π.1.11.2.})$$

οπότε αν ως προς τη βάση αυτή, θεωρηθούν δύο οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$ με

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}$$

$$\vec{\beta} = \beta_1 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \beta_3 \hat{z}$$

ισχύει:

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} \times \vec{\beta} &= (\alpha_1 \hat{x} + \alpha_2 \hat{y} + \alpha_3 \hat{z}) \times (\beta_1 \hat{x} + \beta_2 \hat{y} + \beta_3 \hat{z}) = \\ &= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \hat{x} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \hat{y} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{π.1.12.})$$

Αυτή είναι η έκφραση του εξωτερικού γινομένου δύο οποιονδήποτε διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in D$ ως προς μία δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση.

Το *μικτό γινόμενο* τριών μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in D$ είναι ένας πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma})$ και ορίζεται από τη σχέση: $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι τρία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in D$ είναι συνεπίπεδα (γραμμικώς εξαρτημένα) αν και μόνο αν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}) = 0$ [2].

Το *δισεξωτερικό* γινόμενο τριών οποιονδήποτε μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in D$ ορίζεται ως το διάνυσμα $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$. Μπορεί να αποδειχθεί [2] ότι [2,6]: $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$ (π.1.13.).

Π.1.11. Το επίπεδο

Ένα επίπεδο ορίζεται:

- α) από ένα σημείο του και από μία διεύθυνση κάθετη σε αυτό ή
- β) από ένα σημείο του και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα παράλληλα προς αυτό ή
- γ) από δύο (διαφορετικά σημεία) του A, B και ένα (μη μηδενικό) διάνυσμα \vec{v} που είναι παράλληλο προς αυτό, αλλά όχι συγγραμμικό με το \overrightarrow{AB} ή τέλος
- δ) από τρία σημεία του A, B, Γ που δεν είναι συνευθειακά (δεν βρίσκονται δηλαδή πάνω στην ίδια ευθεία). Οι περιπτώσεις (γ) και (δ) ανάγονται άμεσα στην περίπτωση (β). Για το λόγο αυτό θα εξεταστούν μόνο οι περιπτώσεις (α), (β) [2].

Έστω ένα τυχαίο, σταθερό σημείο O του εποπτικού χώρου.

- α) Το επίπεδο (π) διέρχεται από το τυχαίο σταθερό σημείο $P_0(\vec{o}_{P_0})$ και είναι κάθετο στο τυχαίο σταθερό διάνυσμα $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$.

Έστω $K_0(\vec{o}_{K_0})$ ένα τυχαίο σταθερό σημείο του επιπέδου, διαφορετικό του $P_0(\vec{o}_{P_0})$. Το τυχαίο σταθερό σημείο $K_0(\vec{o}_{K_0})$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $\overrightarrow{K_0 P_0} \perp \vec{v}_0$. Δηλαδή, το τυχαίο σταθερό σημείο $K_0(\vec{o}_{K_0})$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $(\vec{o}_{K_0} - \vec{o}_{P_0}) \cdot \vec{v}_0 = \vec{0}$. Επομένως κάθε σημείο $K(\vec{o}_K) \neq P_0(\vec{o}_{P_0})$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $(\vec{o}_K - \vec{o}_{P_0}) \cdot \vec{v}_0 = \vec{0}$. Για $K(\vec{o}_K) = P_0(\vec{o}_{P_0})$ ισχύει η παραπάνω εξίσωση. Συνεπώς κάθε σημείο $K(\vec{o}_K)$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $(\vec{o}_K - \vec{o}_{P_0}) \cdot \vec{v}_0 = \vec{0}$

(π.1.14.). Η εξίσωση (π.1.14.) λέγεται *διανυσματική εξίσωση* του επιπέδου (π) [2]. Αν θεωρηθεί ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ ως προς το οποίο π.χ. ισχύουν

$\vec{\nu}_0 = A\hat{x} + B\hat{y} + \Gamma\hat{z}$, $\vec{o}_K = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ και $\vec{o}_{p_0} = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$ τότε η εξίσωση (π.1.14.) γράφεται ισοδύναμα:

$$(x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)\Gamma = 0 \Leftrightarrow \quad (\pi.1.15.)$$

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$$

με $\Delta = -(Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0)$ και $|A| + |B| + |\Gamma| \neq 0$.

Η εξίσωση (π.1.15.) λέγεται *καρτεσιανή εξίσωση* του επιπέδου [2] και ικανοποιείται από εκείνες και μόνο τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z) που αντιστοιχούν στις συντεταγμένες των σημείων του επιπέδου. Το $|A| + |B| + |\Gamma| \neq 0$ απλά σημαίνει ότι $\vec{\nu}_0 \neq \vec{0}$.

β) Το επίπεδο (π) διέρχεται από το τυχαίο σταθερό σημείο $P_0(\vec{o}_{p_0})$ και είναι παράλληλο προς τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0$.

Έστω $K_0(\vec{o}_{K_0})$ ένα τυχαίο σταθερό σημείο του επιπέδου, διαφορετικό του $P_0(\vec{o}_{p_0})$. Το σημείο $K_0(\vec{o}_{K_0})$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν τα $(\vec{o}_{K_0} - \vec{o}_{p_0}), \vec{\alpha}_0, \vec{\beta}_0$ είναι συνεπίεδα. Ισοδύναμα, το τυχαίο σταθερό σημείο $K_0(\vec{o}_{K_0})$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $(\vec{o}_{K_0} - \vec{o}_{p_0}) \cdot (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}_0) = \vec{0}$ (βλ. Π.1.10., μικτό γινόμενο). Επομένως κάθε σημείο $K(\vec{o}_K) \neq P_0(\vec{o}_{p_0})$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $(\vec{o}_K - \vec{o}_{p_0}) \cdot (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}_0) = \vec{0}$. Για $K(\vec{o}_K) = P_0(\vec{o}_{p_0})$ ισχύει η παραπάνω εξίσωση. Συνεπώς κάθε σημείο $K(\vec{o}_K)$ ανήκει στο επίπεδο (π) αν και μόνο αν $(\vec{o}_K - \vec{o}_{p_0}) \cdot (\vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}_0) = \vec{0}$

(π.1.16.). Τελειώνοντας, αξίζει να σημειωθεί ότι η εξίσωση (π.1.14.) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση (π.1.16.), αν θεωρηθεί ότι $\vec{\nu}_0 \equiv \vec{\alpha}_0 \times \vec{\beta}_0$.

Π.1.12. Επίλογος

Προς αποφυγή παρεξηγήσεων πρέπει να τονιστεί ότι η μελέτη της διανυσματικής άλγεβρας, μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Μπορούν να οριστούν οι διάφορες αλγεβρικές πράξεις μεταξύ των διανυσμάτων με γεωμετρικό τρόπο και να προκύψουν ως θεωρήματα οι αντίστοιχοι τύποι που εκφράζουν τις πράξεις αυτές στη γλώσσα των συνιστωσών. Από την άλλη, μπορούν να οριστούν αρχικά όλες οι πράξεις αποκλειστικά συναρτήσει των συνιστωσών και να ερμηνευτούν ύστερα γεωμετρικά οι λαμβανόμενοι τύποι. Οι μέθοδοι αυτοί είναι ισοδύναμοι (με εξαίρεση την περίπτωση του εξωτερικού

γινομένου) αλλά προτιμήθηκε να ακολουθηθεί η πρώτη μέθοδος στην παρούσα εργασία που βρίσκεται πιο «κοντά» στην Ευκλείδεια γεωμετρία.

Αξίζει να αναφερθεί τέλος ότι υπάρχει και ένας άλλος τρόπος προσπέλασης της διανυσματικής άλγεβρας, ο λεγόμενος αφηρημένος ή αξιωματικός τρόπος κατά τον οποίο δε γίνεται καμία απόπειρα περιγραφής της φύσης ενός διανύσματος. Αντί αυτού, τόσο τα διανύσματα όσο και ορισμένες από τις παραπάνω διανυσματικές πράξεις (η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός) θεωρούνται σαν μη προσδιοριζόμενες έννοιες για τις οποίες το μόνο που είναι γνωστό είναι ότι ικανοποιούν ένα ορισμένο σύνολο από αξιώματα. Μία τέτοια *αλγεβρική δομή* ονομάζεται *διανυσματικός χώρος* [2].

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] Θ.Θεοχάρης, Α.Μπεμ, "ΓΡΑΦΙΚΑ-ΑΡΧΕΣ & ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ", ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, ΑΘΗΝΑ 1999
- [2] Ν.ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ, Σ.ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ, "ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ", Έκδοση 2^η, ΑΘΗΝΑ 2002
- [3] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner & J.F. Hughes, "Computer Graphics, Principles and Practice", Second Edition, Addison-Wesley, 1993
- [4] ΤΟΜ Μ.ΑΡΟΣΤΟΛ "ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ", Εκδόσεις Μ.ΠΕΧΛΙΒΑΝΙΔΗΣ & ΣΙΑ Α.Ε., Νέα Υόρκη 1961 (Μετάφραση από Αγγλικά στα Ελληνικά)
- [5] MURRAY R.SPIEGEL, "ADVANCED CALCULUS", 37th printing, McGraw-Hill, 1998
- [6] ΓΡ.ΦΟΥΝΤΑΣ, "ΜΕΓΑΛΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ", ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ ΓΡ.ΦΟΥΝΤΑΣ, Αθήνα

Παράρτημα 2

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Π.2.1. Εισαγωγή

Το δεύτερο αυτό παράρτημα είναι πολύ σημαντικό καθότι η επίτευξη του στόχου της εργασίας αυτής έγινε μέσω μαθηματικών εννοιών και σχέσεων που αναφέρονται εδώ.

Στο κύριο μέρος της εργασίας, γίνονται συχνά αναφορές στο παρόν παράρτημα. Οι μαθηματικές έννοιες που εισάγονται εδώ, αποτελούν αντικείμενο της επιστήμης της Αναλυτικής και Διανυσματικής Γεωμετρίας αλλά εφαρμόζονται κατά κόρον στην επιστήμη των Γραφικών με Υπολογιστές (Computer Graphics).

Π.2.2. Η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού-Συμβάσεις

Μία αντιστοιχία $f: E \rightarrow E$ από το σύνολο των σημείων του εποπτικού χώρου E στο σύνολο των σημείων του εποπτικού χώρου E , ονομάζεται *γεωμετρικός μετασχηματισμός*. Αν δοθεί ένα τυχαίο σταθερό σημείο $O \in E$ ως αρχή, τότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός f ορίζεται ισοδύναμα από την απεικόνιση του διανύσματος θέσης $\vec{O_P} = \vec{OP}$ κάθε σημείου $P \in E$ στο διάνυσμα θέσης $\vec{O_{P'}} = \vec{OP'}$ της εικόνας του P , $P' \equiv f(P) \in E$ [1].

Πιο γενικά, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός μπορεί να θεωρηθεί ως μία αντιστοιχία $f: (\Omega \subseteq E) \rightarrow E$ από ένα υποσύνολο των σημείων του εποπτικού χώρου στο σύνολο των σημείων του εποπτικού χώρου.

Όπως σημειώθηκε στο παράρτημα 1, τα αντικείμενα που παρίστανται στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο σημείων (δηλαδή στον εποπτικό χώρο) μπορούν να οριστούν ως σύνολα σημείων του εποπτικού χώρου E .

Ένα σημείο του E , είναι κατά κάποιο τρόπο ένα αντικείμενο μηδενικής διάστασης και το οποίο σε αυτήν την περίπτωση θεωρείται ως σημείο-αντικείμενο [2]. Ορίζεται δηλαδή από ένα σύνολο του E που περιέχει ένα και μόνο στοιχείο, τον ίδιο του τον εαυτό.

Αν ο γεωμετρικός μετασχηματισμός εφαρμοστεί σε ένα σύνολο σημείων του E από τα οποία ορίζεται ένα αντικείμενο, τότε είναι αυτό που λέγεται *μετατόπιση* με την έννοια ότι αρχικά το αντικείμενο ορίζεται από ένα γεωμετρικό τόπο του E (γεωμετρικός τόπος ονομάζεται ένα σύνολο σημείων του E που ικανοποιούν μία κοινή γεωμετρική ιδιότητα) και στη συνέχεια, μετά την εφαρμογή του γεωμετρικού μετασχηματισμού, ορίζεται από έναν άλλο γεωμετρικό τόπο του E .

Οι κινήσεις (όσον αφορά την αρχική και την τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) μπορούν να θεωρηθούν ως απλοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που μετασχηματίζουν κάθε αντικείμενο F στο ίσο του αντικείμενο F' , και που όπως είναι γνωστό διατηρούν αναλλοίωτα τα μήκη και τις γωνίες των αντικειμένων-σχημάτων.

Αν ένα αντικείμενο μετακινείται στο εποπτικό χώρο, αυτό σημαίνει ότι ορίζεται διαρκώς από διαφορετικά σύνολα σημείων του E , ότι δηλαδή μετατοπίζεται διαρκώς. Μπορεί να θεωρηθεί ότι τα σημεία που είναι σταθερά ως προς το αντικείμενο μετακινούνται στον εποπτικό χώρο και το σύνολο αυτών των σημείων ταυτίζεται διαρκώς με διαφορετικά υποσύνολα του E καθώς το αντικείμενο μετακινείται στο χώρο. Άρα η κίνηση, είναι μία διαρκής αντιστοιχία από ένα υποσύνολο του E σε κάποιο (διαφορετικό, εκτός αν το αντικείμενο είναι ακίνητο, δηλαδή δεν υπάρχει κίνηση) υποσύνολο του E .

Οι κινήσεις, (όσον αφορά την αρχική και τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) δεν είναι φυσικά οι μόνοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί. Για παράδειγμα, οι μετασχηματισμοί που διατηρούν τη μορφή των σωμάτων, αλλά πιθανόν να μεταβάλλουν τις διαστάσεις τους, λέγονται *μετασχηματισμοί ομοιότητας*. Κάθε σχήμα F το μετασχηματίζει ο μετασχηματισμός ομοιότητας στο όμοιο του σχήμα F' που είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του αρχικού. Όλες οι διαστάσεις του σχήματος F' είναι ίσες με τις αντίστοιχες διαστάσεις του σχήματος F πολλαπλασιασμένες με τον ίδιο αριθμό. Άλλο παράδειγμα μετασχηματισμών είναι οι *συσχετισμένοι ή ομοιοπαράλληλοι*

μετασχηματισμοί (*affine transformations*). Αν ένα τετράγωνο μετασχηματιστεί σε ένα ρόμβο, τότε πρόκειται για συσχετισμένο μετασχηματισμό. Ενώ οι κινήσεις (αρχική και τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) δεν αλλοιώνουν τα μήκη και τις γωνίες των αντικειμένων-σχημάτων, οι μετασχηματισμοί ομοιότητας αλλοιώνουν τα μήκη κατά μία συγκεκριμένη βέβαια σταθερά. Οι συσχετισμένοι μετασχηματισμοί δεν διατηρούν τα μήκη ούτε τις γωνίες, απλά διατηρούν την παραλληλία των γραμμών. Αν ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός εκφράζει κίνηση (αρχική και τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) τότε είναι και μετασχηματισμός ομοιότητας. Αν ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι μετασχηματισμός ομοιότητας, τότε είναι και συσχετισμένος μετασχηματισμός. Τα αντίστροφα δεν ισχύουν. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης στα [3]-[5] και γενικότερα σε πληθώρα βιβλίων που αναφέρονται στα Γραφικά με Υπολογιστές.

Οι κινήσεις (υπενθυμίζεται: όσον αφορά την αρχική και τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) αναφέρονται στα Γραφικά με Υπολογιστές σαν "Euclidean transformations" [6] (ευκλείδειοι μετασχηματισμοί) ή "*rigid body transformations*" [4] επειδή το γεγονός ότι διατηρούν αναλλοίωτα τα μήκη και τις γωνίες έχει σαν αποτέλεσμα να μην αλλοιώνουν το μετασχηματιζόμενο αντικείμενο. Στη συνέχεια θα μελετηθούν μόνο ευκλείδειοι μετασχηματισμοί, δηλαδή γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που εκφράζουν κίνηση (αρχική και τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) στον εποπτικό χώρο.

Στα γραφικά με υπολογιστές, ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός μελετάται ως μία αντιστοιχία $f: D_f \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Εδώ, η έννοια του γεωμετρικού μετασχηματισμού είναι πολύ πιο αφηρημένη σε σχέση με την αντίστοιχη έννοια της γεωμετρίας. Δεν υπάρχουν πραγματικά αντικείμενα, υπάρχουν μοντέλα που αναπαριστούν φανταστικά ή πραγματικά αντικείμενα.

Στην εργασία αυτή, θεωρείται ότι ένα μοντέλο ορίζεται σαν ένα σύνολο σημείων που ανήκει σε ένα χώρο \mathcal{U} ο οποίος είναι ένας νέος σημειακός ή ομοιοπαράλληλικός χώρος (*affine space* [1], [4]) και στον οποίο έχει νόημα η ευκλείδεια γεωμετρία. Στο χώρο αυτό μπορούν να οριστούν εφαρμοσμένα και ελεύθερα διανύσματα σε αντιστοιχία με τον εποπτικό χώρο και να επεκταθούν γενικά όλες οι διανυσματικές λειτουργίες που ορίστηκαν εκεί (Παράρτημα 1). Είναι ένας χώρος σαν τον εποπτικό χώρο ο οποίος όμως στην πραγματικότητα δεν υφίσταται.

Ας θεωρηθεί τώρα ένα τυχαίο σταθερό σύστημα συντεταγμένων $\{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ στον \mathcal{U} με $O \in \mathcal{U}$ και το σύνολο $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ να αποτελεί τη βάση ενός τριδιάστατου διανυσματικού χώρου που σχετίζεται με τον \mathcal{U} ([1], [3], [4]). Τότε, σε κάθε σημείο του \mathcal{U} θα αντιστοιχεί μία και μόνο μία διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών που όλες μαζί θα αποτελούν ένα σύνολο $\Psi \subseteq \mathbb{R}^3$. Και φυσικά το αντίστροφο. Σε κάθε διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών που θα ανήκει στο $\Psi \subseteq \mathbb{R}^3$, θα αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο του \mathcal{U} (βλ. Παράρτημα 1, σε αντιστοιχία με τον εποπτικό χώρο E).

Με αυτήν την έννοια, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός στο χώρο \mathcal{U} θα θεωρείται σαν μία αντιστοιχία $f: \Psi \rightarrow \mathbb{R}^3$. Όταν ισχύει $\Psi = \mathbb{R}^3$ ο μετασχηματισμός λέγεται παθητικός, αλλιώς λέγεται ενεργητικός.

Επειδή λοιπόν στο εξής κάθε σημείο του \mathcal{U} θα ταυτίζεται με μία μοναδική διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών του Ψ , θα αναφέρεται ως *θέση συντεταγμένων* (coordinate positions) ή αν αυτό δεν προκαλεί σύγχυση απλά ως *θέση*. Δηλαδή ως *θέση* ή ως *θέση συντεταγμένων* θα αναφέρεται μία διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών του Ψ .

Τα σημεία του \mathcal{U} , θα αναφέρονται ως *σημεία* και θα συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα της λατινικής αλφαβήτου. Έτσι π.χ. το C είναι ένα συγκεκριμένο σημείο. Ένα τυχαίο (δηλαδή μεταβλητό, όχι μετακινούμενο) σημείο, θα συμβολίζεται με κεφαλαία γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου. Έτσι π.χ. το γράμμα Γ μπορεί να αντιπροσωπεύει οποιοδήποτε σημείο του \mathcal{U} . Παρόμοιες συμβάσεις έχουν γίνει στο Παράρτημα 1 για τα σημεία του εποπτικού χώρου E και υιοθετούνται και στο κύριο μέρος της εργασίας.

Στο εξής τέλος, όταν αναφέρεται ότι το σημείο P μετακινείται από τη θέση (συντεταγμένων) (x, y, z) στη θέση (συντεταγμένων) (x', y', z') , θα υπονοείται ότι η διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών $(x, y, z) \in \Psi$ αντιστοιχίζεται με βάση τον τύπο κάποιου γεωμετρικού μετασχηματισμού, στη διατεταγμένη τριάδα πραγματικών αριθμών $(x', y', z') \in \Psi' \subseteq \mathbb{R}^3$. Το σημείο P αρχικά θα γράφεται ως $P(x, y, z)$ και στο τέλος ως $P(x', y', z')$.

Π.2.3. Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί δύο διαστάσεων

Π.2.3.1. Μεταφορά (Translation)

Ας θεωρηθεί ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων (δεξιόστροφο) σε ένα «κομμένο» επίπεδο που θεωρείται ότι αποτελεί το χώρο \mathcal{U} .

Μπορούν να μετακινηθούν σημεία πάνω σε αυτό το επίπεδο από τις θέσεις συντεταγμένων που κατέχουν σε νέες θέσεις συντεταγμένων, με τη προσθήκη κάποιων αριθμών στις συντεταγμένες των αρχικών θέσεων. Για κάθε σημείο P , το οποίο επιδιώκεται να μετακινηθεί κατά d_x μονάδες παράλληλα στον x άξονα και κατά d_y μονάδες παράλληλα στον y άξονα, από τη θέση (x, y) στη θέση (x', y') του επιπέδου, μπορεί να γραφεί [4]:

$$x' = x + d_x \text{ και } y' = y + d_y \quad (\pi.2.1) \text{ ή ισοδύναμα:}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \quad (\pi.2.2)$$

Αν οριστούν τα διανύσματα-στήλες

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \bar{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \bar{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \quad (\pi.2.3)$$

τότε η (π.2.1) μπορεί να εκφραστεί ως εξής [4]:

$$\bar{P} = \bar{P}' + \bar{T} \quad (\pi.2.4)$$

Είναι δυνατόν το αντικείμενο που ενδιαφέρει να «μετακινηθεί» στο χώρο \mathcal{U} κατά $\bar{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$, με μετακίνηση κάθε σημείου P του αντικείμενου κατά το ίδιο $\bar{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix}$. Σε αυτήν την περίπτωση ο μετασχηματισμός που εκφράζεται από την εξίσωση (π.2.2) θεωρούμενος σαν απεικόνιση $\Psi \rightarrow \mathbb{R}^2$ ονομάζεται *μεταφορά (translation)*.

Π.2.3.2. Περιστροφή (Rotation)

Ας θεωρηθεί και πάλι ένα (δεξιόστροφο) καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε ένα επίπεδο που αποτελεί το σημειακό χώρο \mathcal{U} .

Η *περιστροφή (rotation)* του σημείου $P(x, y)$ γύρω από την αρχή των αξόνων κατά μία γωνία θ έχει ως αποτέλεσμα αυτό το σημείο να μετακινηθεί στη θέση (x', y') του «κομμένου» επιπέδου και ορίζεται μαθηματικά από τις σχέσεις [4], [5]:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (\pi.2.5)$$

Σε μορφή πινάκων μπορεί να γραφτεί:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\pi.2.6)$$

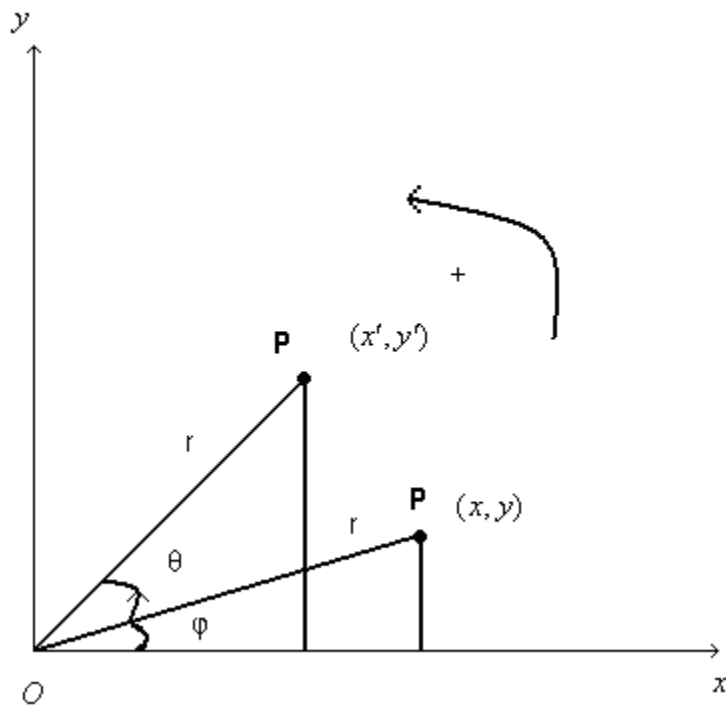
ή ισοδύναμα με βάση την (π.2.3) [4]:

$$\bar{P}' = R(\theta) \cdot \bar{P} \quad (\pi.2.7)$$

όπου

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\pi.2.8)$$

Το σύστημα των εξισώσεων (π.2.5) μπορεί να εξαχθεί από το σχήμα Π.2.1 όπου απεικονίζεται μία περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων κατά μία γωνία θ .



Σχήμα Π.2.1: Περιστροφή του σημείου P γύρω από την αρχή των αξόνων κατά μία γωνία θ που έχει ως αποτέλεσμα αυτό το σημείο να μετακινηθεί από τη θέση (x, y) στη θέση (x', y') του επιπέδου.

Επειδή η περιστροφή γίνεται γύρω από την αρχή των αξόνων, οι αποστάσεις των θέσεων (x, y) και (x', y') του επιπέδου από την αρχή των αξόνων που συμβολίζονται με r στο σχήμα, είναι ίσες. Χρησιμοποιώντας απλή τριγωνομετρία, είναι φανερό ότι ισχύουν:

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi \quad (\pi.2.9)$$

και

$$x' = r \cdot \cos(\theta + \varphi) = r \cos \varphi \cos \theta - r \sin \varphi \sin \theta \quad (\pi.2.10)$$

$$y' = r \cdot \sin(\theta + \varphi) = r \cos \varphi \sin \theta + r \sin \varphi \cos \theta$$

Οι σχέσεις (π.2.9) και (π.2.10) ισχύουν για κάθε $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$.

Αν αντικατασταθεί η (π.2.9) στην (π.2.10), λαμβάνεται η (π.2.5) ή ισοδύναμα η (π.2.6).

Όπως και στην περίπτωση της μεταφοράς, μπορεί να περιστραφεί ένα αντικείμενο γύρω από την αρχή των αξόνων σύμφωνα με έναν πίνακα

$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ με περιστροφή κάθε σημείου του αντικείμενου σύμφωνα με τον

ίδιο πίνακα $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$.

Γενικά με τον όρο περιστροφή (rotation) υποδηλώνεται ο μετασχηματισμός που εκφράζεται από την εξίσωση (π.2.6) για συγκεκριμένο θ , αν θεωρηθεί σαν απεικόνιση $\Psi \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι μπορεί να περιστραφεί ένα αντικείμενο γύρω από ένα οποιοδήποτε σημείο του \mathbb{U} αν περιστραφεί κάθε σημείο του αντικείμενου γύρω από

αυτό το σημείο κατά μία συγκεκριμένη φυσικά γωνία. Δε θα γίνει καμία αναφορά σε αυτό το τελευταίο. Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στα [3]-[5].

Π.2.4. Ορθογώνιοι πίνακες

Μπορούν, για τον πίνακα της σχέσης (Π.2.8), να θεωρηθούν τα διανύσματα-γραμμές του πίνακα [3]:

$$\vec{r}_1 = \cos \theta \hat{x} - \sin \theta \hat{y}, \vec{r}_2 = \sin \theta \hat{x} + \cos \theta \hat{y}$$

Τότε ισχύει:

α) $|\vec{r}_1| = 1, |\vec{r}_2| = 1$ και β) $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = 0$ δηλαδή τα διανύσματα αυτά είναι μοναδιαία και μεταξύ τους κάθετα. Αυτές οι δύο ιδιότητες είναι αληθείς αν θεωρηθούν και τα διανύσματα-στήλες του πίνακα. Επίσης γ) η ορίζουσα αυτού του πίνακα έχει τιμή 1. Με βάση τις ιδιότητες α και β (η ιδιότητα γ απορρέει από αυτές), ο πίνακας ονομάζεται *ορθογώνιος*.

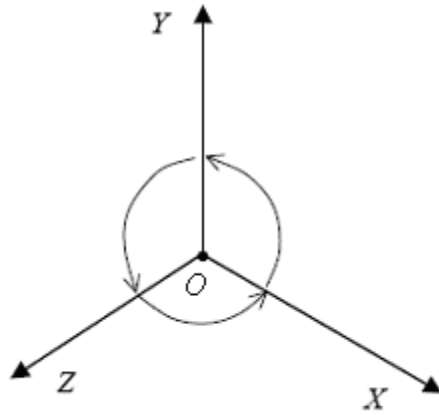
Γενικά στα μαθηματικά ένας πίνακας A τύπου $N \times N$ ονομάζεται *ορθογώνιος* αν και μόνο αν $A^{-1} = A^T$. Η σχέση αυτή γράφεται ισοδύναμα ως $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$.

Ένας πίνακας A τύπου $N \times N$ είναι *ορθογώνιος* αν και μόνο αν τα διανύσματα στήλες (ή γραμμές) του είναι μοναδιαία και ανά δύο ορθογώνια. Αυτή η μαθηματική πρόταση χρησιμοποιείται τις περισσότερες φορές στα γραφικά σαν ορισμός του ορθογώνιου πίνακα. Όπως και να 'χει, οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες. Επίσης, αν ο A είναι ένας $N \times N$ ορθογώνιος πίνακας τότε ο A^T είναι ορθογώνιος και η ορίζουσά του $\det A$ ισούται με 1 [1].

Οι ορθογώνιοι πίνακες κατέχουν σημαντικό ρόλο στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς, για λόγους που θα φανούν στα επόμενα.

Π.2.5. Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί στις τρεις διαστάσεις.

Ας θεωρηθεί ένα δεδομένο δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, $B = \{O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ στο \mathcal{U} (σχήμα Π.2.2).



Σχήμα Π.2.2: Δεξιόστροφο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τριών διαστάσεων

Π.2.5.1. Μεταφορά (Translation)

Μπορούν να μετακινηθούν σημεία στον \mathcal{U} από τις θέσεις συντεταγμένων που κατέχουν σε νέες θέσεις συντεταγμένων, με τη προσθήκη κάποιων αριθμών στις συντεταγμένες των αρχικών θέσεων. Για κάθε σημείο P , το οποίο επιδιώκεται να μετακινηθεί κατά d_x μονάδες παράλληλα στον x άξονα και κατά d_y μονάδες παράλληλα στον y άξονα και κατά d_z μονάδες παράλληλα στον z άξονα από τη θέση (x, y, z) στη θέση (x', y', z') του χώρου, μπορεί να γραφτεί:

$x' = x + d_x$, $y' = y + d_y$ και $z' = z + d_z$ ή ισοδύναμα:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \quad (\pi.2.11).$$

Αν οριστούν όπως και στην περίπτωση των δύο διαστάσεων τα διανύσματα-στήλες

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \bar{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \bar{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

τότε η (π.2.11) μπορεί να εκφραστεί ως εξής [3]:

$$\bar{P} = \bar{P}' + \bar{T}.$$

Μπορεί να «μετακινηθεί» ένα αντικείμενο κατά $\bar{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$ με μετακίνηση κάθε σημείου

P του αντικείμενου κατά το ίδιο $\bar{T} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$. Σε αυτή την περίπτωση ο μετασχηματισμός

που εκφράζεται από την εξίσωση (π.2.11) θεωρούμενος σαν απεικόνιση $\Psi \rightarrow \mathbb{R}^3$ ονομάζεται *μεταφορά (translation)* σε αντιστοιχία με τη μεταφορά που περιγράφηκε στις δύο διαστάσεις.

Π.2.5.2. Περιστροφή (Rotation)

Γενικά για να οριστεί μία *περιστροφή (rotation)* ενός αντικειμένου στον χώρο \mathcal{U} , πρέπει να θεωρηθεί ένας άξονας περιστροφής, γύρω από τον οποίο πρόκειται να περιστραφεί το αντικείμενο και μία γωνία περιστροφής [5]. Για την περίπτωση των δύο διαστάσεων ο – κατά κάποιον τρόπο– άξονας περιστροφής είναι πάντα κάθετος στο επίπεδο xy . Στην περίπτωση των τριών διαστάσεων, ο άξονας περιστροφής μπορεί να έχει οποιοδήποτε προσανατολισμό στο χώρο \mathcal{U} . Στο συγκεκριμένο παράρτημα γίνεται αναφορά μόνο για την περιστροφή γύρω από τους άξονες x, y, z . Περισσότερες λεπτομέρειες μπορούν να βρεθούν στα [3]-[5].

Η *δισδιάστατη περιστροφή (2-D rotation)* που εκφράζεται από το σύστημα (π.2.6) είναι μία *τρισδιάστατη περιστροφή (3-D rotation)* γύρω από τον άξονα των z η οποία εκφράζεται ως [3], [5]:

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\pi.2.12.1).$$

Η εξίσωση (π.2.12.1) προκύπτει στην ουσία από το σύστημα των εξισώσεων [5]

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

$$z' = z$$

που είναι το σύστημα των εξισώσεων (π.2.6) με μία πρόσθετη εξίσωση.

Με όμοιο σκεπτικό, ο πίνακας που εκφράζει περιστροφή γύρω από τον άξονα των x είναι [3], [6]:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\pi.2.12.2)$$

και ο πίνακας που εκφράζει περιστροφή γύρω από τον άξονα των y είναι [3], [6]:

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\pi.2.12.3)$$

Όπως και στην περίπτωση των δύο διαστάσεων, μπορεί να περιστραφεί ένα αντικείμενο γύρω από έναν από τους τρεις κύριους άξονες σύμφωνα με έναν πίνακα $R(\theta)$ με περιστροφή κάθε σημείου του αντικείμενου σύμφωνα με τον ίδιο πίνακα $R(\theta)$ γύρω από τον άξονα.

Γενικά με τον όρο *περιστροφή (rotation)* στις τρεις διαστάσεις υποδηλώνεται ο μετασχηματισμός που εκφράζεται με κάποιον από τους παραπάνω πίνακες για συγκεκριμένο θ , αν θεωρηθεί σαν απεικόνιση $\Psi \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Π.2.5.3. Σύνθεση Μετασχηματισμών στις τρεις διαστάσεις

Μία διαδοχική σειρά περιστροφών και μεταφορών μπορεί να εκφραστεί ενιαία ως ένας πίνακας αν χρησιμοποιηθούν οι *ομογενείς συντεταγμένες* [3]-[5]. Κάνοντας χρήση των ομογενών συντεταγμένων στην ουσία εισάγεται σε κάθε σημείο του \mathcal{U} μία τέταρτη συντεταγμένη w , η οποία όπως πρέπει να είναι διαφορετική του μηδενός. Επειδή υπάρχουν άπειρες τέτοιες αναπαράστασεις του ίδιου σημείου του \mathcal{U} , χρησιμοποιείται συνήθως η ονομαζόμενη *βασική παράσταση* [3] με $w=1$. Έτσι θεωρείται ότι κάθε σημείο $P(x, y, z)$ έχει τις ομογενείς συντεταγμένες $(x, y, z, 1)$.

Με χρήση των ομογενών συντεταγμένων, μπορεί να εκφραστεί η (π.2.11) ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi.2.13)$$

που στην ουσία δίνει το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} x' = x + d_x \\ y' = y + d_y \\ z' = z + d_z \\ 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + d_x \\ y' = y + d_y \\ z' = z + d_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

Δηλαδή η (π.2.13) με την (π.2.11) είναι ισοδύναμες.

Φαίνεται επομένως ότι με τη χρήση των ομογενών συντεταγμένων μπορεί να εκφραστεί όχι μόνο η περιστροφή, αλλά και η μεταφορά ως πίνακας. Γενικά αν χρησιμοποιηθούν ομογενείς συντεταγμένες, τότε κάθε συσχετισμένος μετασχηματισμός (Π.2.2) μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια πινάκων ως αντιστοιχία $\Psi \subseteq \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ [4].

Έτσι, κάνοντας χρήση της προσεταιριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού πινάκων μπορεί να παραστηθεί μία ακολουθία μετασχηματισμών με έναν μόνο πίνακα, και να γίνει *σύνθεση μετασχηματισμών*. Η σύνθεση των μετασχηματισμών είναι πολύ αποδοτική, γιατί αντί να

εκτελούνται διαδοχικές σειρές μεμονωμένων μετασχηματισμών πάνω στα συγκεκριμένα σημεία ενός αντικειμένου, εφαρμόζεται σε αυτά ένας συνολικός μετασχηματισμός [3].

Αν εφαρμοστούν διαδοχικοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί πάνω σε ένα σημείο $P(x, y, z)$, η σύνθεση αυτών των γεωμετρικών μετασχηματισμών θα περιγράφεται από το γινόμενο των αντίστοιχων πινάκων.

Για παράδειγμα, ας θεωρηθεί το σημείο $P(x, y, z)$.

α) Έστω ότι μετακινείται από τη θέση (x, y, z) , στη θέση (x', y', z') του χώρου με $x' = x + d_x$, $y' = y + d_y$ και $z' = z + d_z$.

Με χρήση ομογενών συντεταγμένων η μεταφορά αυτή εκφράζεται ως:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\pi.2.14).$$

β) Αν μετακινηθεί τώρα το σημείο $P(x', y', z')$ από τη θέση (x', y', z') , στη θέση (x'', y'', z'') του χώρου με $x'' = x' + d'_x$, $y'' = y' + d'_y$ και $z'' = z' + d'_z$, θα ισχύει:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d'_x \\ 0 & 1 & 0 & d'_y \\ 0 & 0 & 1 & d'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{(\pi.2.14)}{=} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d'_x \\ 0 & 1 & 0 & d'_y \\ 0 & 0 & 1 & d'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= T(d'_x, d'_y, d'_z) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= T(d'_x, d'_y, d'_z) \cdot T(d_x, d_y, d_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x + d'_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y + d'_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z + d'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{με } T(d'_x, d'_y, d'_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d'_x \\ 0 & 1 & 0 & d'_y \\ 0 & 0 & 1 & d'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ και } T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Η συνολική μεταφορά θα εκφράζεται από τον πίνακα:

$$T(d_x + d'_x, d_y + d'_y, d_z + d'_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x + d'_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y + d'_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z + d'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι ισχύει:

$$T(d_x + d'_x, d_y + d'_y, d_z + d'_z) = T(d'_x, d'_y, d'_z) \cdot T(d_x, d_y, d_z) = \\ = T(d_x, d_y, d_z) \cdot T(d'_x, d'_y, d'_z)$$

δηλαδή δεν ενδιαφέρει η σειρά με την οποία γίνονται δύο διαδοχικές μεταφορές.

Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα, ότι δεν ενδιαφέρει ούτε η σειρά με την οποία γίνονται δύο διαδοχικές περιστροφές [4] γύρω όμως από τον ίδιο άξονα.

Μία όμως μεταφορά με μία περιστροφή δεν μπορούν γενικά να εναλλαχθούν. Δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση έχει σημασία η σειρά με την οποία γίνονται. Αυτό είναι μία γενική παρατήρηση που μπορεί να ερμηνευτεί από το γεγονός ότι γενικά ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι πράξη αντιμεταθετική.

Σημειώνεται ότι οι πίνακες που εκφράζουν τις περιστροφές γύρω από τους άξονες, γράφονται σε ομογενείς συνταγμένες ως:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Γενικά, για την περίπτωση περιστροφών και μεταφορών, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός υποδηλώνεται με έναν πίνακα 4x4:

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{π.2.15}), \quad \text{όπου ο άνω αριστερός } 3 \times 3 \text{ πίνακας}$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \text{ αντιστοιχεί στις περιστροφές ενώ ο } 3 \times 1 \text{ πίνακας } \bar{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \text{ δίνει τη}$$

συνολική μεταφορά.

Π.2.6. Ευκλείδειοι Μετασχηματισμοί

Ένας μετασχηματισμός, ο οποίος εκφράζει διαδοχικές περιστροφές και μεταφορές, είναι ευκλείδειος μετασχηματισμός, δηλαδή είναι κίνηση (αναφερόμαστε στην αρχική και την τελική τοποθέτηση του αντικειμένου) όπως είναι λογικό και σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην αρχή του παραρτήματος. Βέβαια εδώ θεωρείται ότι γίνεται στον \mathcal{U} .

Ένας πίνακας μετασχηματισμού 4x4 όπου άνω αριστερός 3x3 πίνακας είναι ορθογώνιος εκφράζει έναν ευκλείδειο μετασχηματισμό που όπως έχει ήδη τονιστεί διατηρεί αναλλοίωτα τα μήκη και τις γωνίες γεγονός το οποίο έχει ως αποτέλεσμα να μην αλλοιώνεται το μετασχηματιζόμενο αντικείμενο [3],[4]. Οποιαδήποτε λοιπόν ακολουθία από μεταφορές και περιστροφές δημιουργεί έναν πίνακα αυτής της μορφής.

Δηλαδή η σχέση

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{όπου ο πίνακας } M \text{ είναι ο πίνακας της σχέσης (π.2.15), εκφράζει}$$

ευκλείδειο μετασχηματισμό.

Επειδή τώρα η παραπάνω σχέση, που μπορεί με χρήση της (π.2.15) να γραφτεί ως:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι ισοδύναμη με τη σχέση

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \bar{T} \quad (\text{π.2.16}) \quad \text{όπου} \quad \bar{T} = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix},$$

συνάγεται το συμπέρασμα ότι οποιοδήποτε μετασχηματισμοί γράφονται με μία σχέση της μορφής αυτής με τον πίνακα 3x3 να είναι ορθογώνιος, είναι και αυτοί ευκλείδειοι μετασχηματισμοί.

Π.2.7. Χρήση ελεύθερων διανυσμάτων για εύρεση των κατάλληλων ευκλείδειων μετασχηματισμών

Αδιαφορώντας για τις μεταφορές, μπορούν να εφαρμοστούν ευκλείδειοι μετασχηματισμοί (μόνο περιστροφές) σε ελεύθερα διανύσματα που τοποθετούνται στην αρχή των αξόνων του \mathcal{U} .

Αυτοί οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί θα έχουν τη μορφή ορθογώνιων πινάκων 3x3. Μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτοί γεωμετρικοί μετασχηματισμοί εφαρμόζονται σε κάθε σημείο του διανύσματος. Δηλαδή να θεωρηθεί το ελεύθερο διάνυσμα σαν ένα αντικείμενο που αποτελείται από πολλά σημεία. Μπορεί ακόμα να θεωρηθεί ότι εφαρμόζονται στο πέρας του διανύσματος.

Όπως και να χει, το αποτέλεσμα από την περιστροφή θα είναι ένας ορθογώνιος πίνακας 3x3 που θα μπορεί να πολλαπλασιαστεί με κάθε σημείο ενός αντικειμένου (για την ακρίβεια με το διάνυσμα-στήλη των συντεταγμένων του) και να περιστραφεί με αυτόν τον τρόπο το αντικείμενο στον \mathcal{U} . Αυτή η θεώρηση χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία, δηλαδή έγινε περιστροφή διανυσμάτων και όχι σημείων.

Π.2.8. Παθητικοί και ενεργητικοί μετασχηματισμοί.

Μετά την εφαρμογή ενός μετασχηματισμού, το αντικείμενο που ορίζεται σαν ένα σύνολο σημείων που ανήκει στον \mathcal{U} αντιστοιχίζεται σε ένα διαφορετικό από το αρχικό υποσύνολο $\Psi' \in \mathbb{R}^3$ και ορίζεται πλέον από το αντίστοιχο σύνολο σημείων του \mathcal{U} . Ο μετασχηματισμός αυτός που γίνεται στο χώρο \mathcal{U} ονομάζεται *ενεργητικός* και εφαρμόζεται σε ένα υποσύνολο του \mathcal{U} .

Μπορεί ισοδύναμα να θεωρηθεί ότι *μετασχηματίζεται* το αρχικό σύστημα των συντεταγμένων Σ στο χώρο \mathcal{U} , σε ένα διαφορετικό σύστημα συντεταγμένων Σ' στο χώρο

Ό Αυτή η περίπτωση αναφέρεται σαν παθητικός μετασχηματισμός που είναι ένας μετασχηματισμός που εφαρμόζεται σε όλο το \mathcal{U} .

Δηλαδή, όπως αναφέρθηκε στο Π.2.2. αν θεωρηθεί, ο γεωμετρικός μετασχηματισμός στο χώρο \mathcal{U} σαν μία αντιστοιχία $f: \Psi \rightarrow \mathbb{R}^3$, τότε όταν ισχύει $\Psi = \mathbb{R}^3$ ο μετασχηματισμός λέγεται παθητικός, αλλιώς λέγεται ενεργητικός. Στις ενότητες Π.2.2. έως και Π.2.7. έγινε αναφορά σε ενεργητικούς μετασχηματισμούς. Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθούν οι παθητικοί μετασχηματισμοί.

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρεται π.χ. ότι η θέση $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων Σ , αντιστοιχίζεται στη θέση $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ σε σχέση με το σύστημα συντεταγμένων Σ' . Η αρχική θέση είναι συντεταγμένες του Σ και η τελική συντεταγμένες του Σ' .

Για να μελετηθεί από καθαρά μαθηματική σκοπιά αυτή η θεώρηση ας θεωρηθεί το ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\Sigma = (O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ στο χώρο \mathcal{U} και το σύστημα συντεταγμένων $\Sigma' = (O', \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$, στον ίδιο χώρο όπου O, O' δύο σημεία του χώρου \mathcal{U} . Έστω ότι τα διανύσματα του Σ' εκφράζονται στη βάση των διανυσμάτων του Σ με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}\bar{x}' &= a_1 \hat{x} + a_2 \hat{y} + a_3 \hat{z} \\ \bar{y}' &= b_1 \hat{x} + b_2 \hat{y} + b_3 \hat{z} \\ \bar{z}' &= c_1 \hat{x} + c_2 \hat{y} + c_3 \hat{z}\end{aligned} \quad (\pi.2.18)$$

όπου οι αριθμοί a_1, a_2, a_3 είναι οι συνιστώσες του διανύσματος \bar{x}' αυτού ως προς τη βάση $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ και αντίστοιχα οι αριθμοί b_1, b_2, b_3 και c_1, c_2, c_3 οι συνιστώσες των διανυσμάτων \bar{y}', \bar{z}' ως προς τη βάση $B = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$.

Για το διάνυσμα θέσης $\vec{O_P} = \overrightarrow{OP}$ ενός τυχαίου σημείου $P \in \mathcal{U}$ ως προς την αρχή O ισχύει:

$$\vec{O_P} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad (\pi.2.19.1)$$

Για το διάνυσμα θέσης $\vec{O'_P} = \overrightarrow{O'P}$ του ίδιου σημείου $P \in \mathcal{U}$ ως προς την αρχή O' ισχύει:

$$\vec{O'_P} = x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}' \quad (\pi.2.19.2)$$

Επίσης, θεωρώντας ότι:

$$\vec{O'_O} = \overrightarrow{O'O} = x'_O \bar{x}' + y'_O \bar{y}' + z'_O \bar{z}'$$

ισχύει:

$$\begin{aligned}\vec{O_P} &= \vec{O'_P} - \vec{O'_O} = \\ &= x'\bar{x}' + y'\bar{y}' + z'\bar{z}' - x'_O \bar{x}' - y'_O \bar{y}' - z'_O \bar{z}' = \\ &= (x' - x'_O)\bar{x}' + (y' - y'_O)\bar{y}' + (z' - z'_O)\bar{z}'\end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}
\vec{O_p} &= (x' - x'_O)\vec{x}' + (y' - y'_O)\vec{y}' + (z' - z'_O)\vec{z}' = \\
&= (x' - x'_O)(a_1\hat{x} + a_2\hat{y} + a_3\hat{z}) + \\
&+ (y' - y'_O)(b_1\hat{x} + b_2\hat{y} + b_3\hat{z}) + \\
&+ (z' - z'_O)(c_1\hat{x} + c_2\hat{y} + c_3\hat{z}) = \\
&= (x'a_1 + y'b_1 + z'c_1 - x'_Oa_1 - y'_Ob_1 - z'_Oc_1)\hat{x} + \\
&+ (x'a_2 + y'b_2 + z'c_2 - x'_Oa_2 - y'_Ob_2 - z'_Oc_2)\hat{y} + \\
&+ (x'a_3 + y'b_3 + z'c_3 - x'_Oa_3 - y'_Ob_3 - z'_Oc_3)\hat{z}
\end{aligned}$$

Από την παραπάνω σχέση και την (π.2.19.1) εξάγεται το εξής σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned}
x &= x'a_1 + y'b_1 + z'c_1 - x'_Oa_1 - y'_Ob_1 - z'_Oc_1 \\
y &= x'a_2 + y'b_2 + z'c_2 - x'_Oa_2 - y'_Ob_2 - z'_Oc_2 \\
z &= x'a_3 + y'b_3 + z'c_3 - x'_Oa_3 - y'_Ob_3 - z'_Oc_3
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα σε μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_O \\ y'_O \\ z'_O \end{bmatrix}$$

Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα, ότι ο πίνακας $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος [1]

επομένως το παραπάνω σύστημα εξισώσεων γίνεται:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x'_O \\ y'_O \\ z'_O \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'_O \\ y'_O \\ z'_O \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα σε ομογενείς συντεταγμένες:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x'_O \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & y'_O \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & z'_O \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $M_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x'_o \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & y'_o \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & z'_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ x'_o & y'_o & z'_o & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ είναι ο πίνακας που

μετασχηματίζει το σύστημα συντεταγμένων Σ στο σύστημα συντεταγμένων Σ' , δηλαδή αντιστοιχίζει τη θέση $(x, y, z, 1)$ του συστήματος συντεταγμένων Σ θεωρώντας ομογενείς συντεταγμένες, στη θέση $(x', y', z', 1)$ συστήματος συντεταγμένων Σ' . Εκφράζει δηλαδή παθητικό γεωμετρικό μετασχηματισμό. Ο πίνακας

$$M_{\Sigma' \rightarrow \Sigma} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 \\ x'_o & y'_o & z'_o & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & x'_o \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & y'_o \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & z'_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

μετασχηματίζει το σύστημα συντεταγμένων Σ' στο σύστημα συντεταγμένων Σ , δηλαδή αντιστοιχίζει τη θέση $(x', y', z', 1)$ του συστήματος συντεταγμένων Σ' , στη θέση $(x, y, z, 1)$ του συστήματος συντεταγμένων Σ . Εκφράζει και αυτός παθητικό γεωμετρικό μετασχηματισμό.

Ας συμβολιστεί τώρα με $\overline{\Phi^{(\Sigma)}}$ η θέση (τετράδα συντεταγμένων-χρήση ομογενών συντεταγμένων) του τυχαίου σημείου $\Phi \in \mathcal{U}$ σε σχέση με το τυχαίο σύστημα συντεταγμένων Σ και με $\overline{\Phi^{(\Sigma')}}$ η θέση (τετράδα συντεταγμένων-χρήση ομογενών συντεταγμένων) του ίδιου σημείου $\Phi \in \mathcal{U}$ σε σχέση με το τυχαίο σύστημα συντεταγμένων Σ' . Ένας συγκεκριμένος πίνακας μετασχηματισμού στο τυχαίο σύστημα συντεταγμένων Σ (στο χώρο \mathcal{U}) θα συμβολίζεται με Q^Σ και θα εκφράζει ενεργητικό μετασχηματισμό, με την έννοια ότι θα εφαρμόζεται ως πίνακας στο υποσύνολο Ψ του \mathbb{R}^3 . Μέσω αυτού του ενεργητικού μετασχηματισμού θα αντιστοιχίζεται η τετράδα $\overline{\Phi^{(\Sigma)}}$ στην τετράδα $\overline{\Phi'^{(\Sigma)}}$ που θα είναι η νέα θέση του σημείου $\Phi \in \mathcal{U}$ στο Σ .

Από την παραπάνω ανάλυση γίνεται αντιληπτό ότι:

$$\overline{\Phi^{(\Sigma')}} = M_{\Sigma \rightarrow \Sigma'} \cdot \overline{\Phi^{(\Sigma)}} \quad (\pi.2.20.1)$$

$$\text{και: } \overline{\Phi'^{(\Sigma)}} = Q^\Sigma \cdot \overline{\Phi^{(\Sigma)}} \quad (\pi.2.20.2)$$

Γενικά αποδεικνύεται, ότι ένας συγκεκριμένος μετασχηματισμός (θεωρούμενος σαν πίνακας), Q^Σ που αντιστοιχίζει τη τυχαία θέση $\overline{\Phi^{(\Sigma)}} \in \Psi$ στη θέση $\overline{\Phi'^{(\Sigma)}} \in \Psi$ είναι ο αντίστροφος του αντίστοιχου παθητικού μετασχηματισμού $M_{\Sigma \rightarrow \Sigma'}$ που χρειάζεται για να μετασχηματιστεί το σύστημα συντεταγμένων Σ σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων Σ' προκειμένου να ισχύει: $\overline{\Phi'^{(\Sigma)}} = \overline{\Phi^{(\Sigma')}} [4]$. Δηλαδή $Q^\Sigma = (M_{\Sigma \rightarrow \Sigma'})^{-1}$ (π.2.20.3).

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Ν. ΚΑΔΙΑΝΑΚΗΣ, Σ. ΚΑΡΑΝΑΣΙΟΣ, "ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ", Έκδοση 2^η, ΑΘΗΝΑ 2002

[2] [http://en.wikipedia.org/wiki/Point_\(geometry\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Point_(geometry))

[3] Θ. Θεοχάρης, Α. Μπεμ, "ΓΡΑΦΙΚΑ-ΑΡΧΕΣ & ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ", ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ, ΑΘΗΝΑ 1999

[4] J.D. Foley, A. van Dam, S.K. Feiner & J.F. Hughes, "Computer Graphics, Principles and Practice", Second Edition, Addison-Wesley, 1993

[5] DONALD HEARN, M. PAULINE BAKER, "COMPUTER GRAPHICS", Prentice-Hall International Editions, 1986

[6] <http://www.css.tayloru.edu/~btoll/s99/424/res/mtu/Notes/geometry/geo-tran.htm>

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Active_and_passive_transformation

Παράρτημα 3

Συναρτήσεις Matlab

refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp. m

```
function refer_pivot_P2_tp_peristrofi_tp

%αρχικά θέτουμε το διάνυσμα RLXRM να είναι ίσο με το μηδέν(τα σημεία
%R,L,M είναι συννευθειακά) έτσι ώστε
%να επαναλαμβάνεται η εισαγωγή των συντεταγμένων των σημείων
% καθώςον ισχύει αυτό

RLXRM=0;

while (RLXRM==0)

fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου L σε χιλιοστά(mm):\n
Εισάγετε μία-μία τις συντεταγμένες διαχωρίζοντάς τες με <Enter> \n και
προσέξτε ώστε να είναι πραγματικοί αριθμοί:\n');

xl=eisagwgh_sintetagmenhs_x;
yl=eisagwgh_sintetagmenhs_y;
zl=eisagwgh_sintetagmenhs_z;

fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου R σε χιλιοστά(mm):\n
Εισάγετε μία-μία τις συντεταγμένες διαχωρίζοντάς τες με <Enter> \n και
προσέξτε ώστε να είναι πραγματικοί αριθμοί:\n');

xr=eisagwgh_sintetagmenhs_x;
yr=eisagwgh_sintetagmenhs_y;
zr=eisagwgh_sintetagmenhs_z;

fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου M σε χιλιοστά(mm):\n
Εισάγετε μία-μία τις συντεταγμένες διαχωρίζοντάς τες με <Enter> \n και
προσέξτε ώστε να είναι πραγματικοί αριθμοί:\n');

xm=eisagwgh_sintetagmenhs_x;
ym=eisagwgh_sintetagmenhs_y;
zm=eisagwgh_sintetagmenhs_z;

OL=[xl,yl,zl];%το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο L-δηλαδή
%στο σημείο EECL
clear xl yl zl; %δεν τα χρειαζόμαστε πια
OR=[xr,yr,zr];%το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο R-δηλαδή
%στο σημείο EECL
clear xr yr zr; %δεν τα χρειαζόμαστε πια

OM=[xm,ym,zm];%το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο M.

clear xm ym zm; %δεν τα χρειαζόμαστε πια

%εύρεση των συντεταγμένων του διανύσματος με αρχή το R και τέλος το L-
%θα χρειαστεί για αργότερα
RL=OL-OR;%το θεωρούμε ως ελεύθερο διάνυσμα

%εύρεση των συντεταγμένων του διανύσματος με αρχή το R και τέλος το M-
%θα χρειαστεί για αργότερα
```

```
RM=OM-OR;
```

```
RLXRM=cross(RL,RM);
```

```
%Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων RL και RM,  
%τα οποία τα θεωρούμε σαν ελεύθερα διανύσματα που προφανώς είναι μη  
%συγγραμμικά και μη μηδενικά (άρα το εξωτερικό τους γινόμενο δεν  
%μπορεί να ισούται με το μηδενικό διάνυσμα).  
%Με το διάνυσμα RLXRM και ένα σημείο του reference plane π.χ το R  
%έχουμε πλέον ορίσει με μοναδικό τρόπο το reference plane.
```

```
if(RLXRM==0)
```

```
    fprintf('\nΚάνατε λάθος στην εισαγωγή των συντεταγμένων.\nΤα σημεία  
R,L,M δεν μπορούν να είναι συνευθειακά!!!!\n');
```

```
    fprintf('Ξαναδώστε τις συντεταγμένες!!!:\n\n');
```

```
%Αν τα σημεία R,L,M είναι συνευθειακά τότε  
% επαναλαμβάνεται η εισαγωγή των συντεταγμένων των σημείων ,αλλά πριν  
%από αυτό τυπώνεται το παραπάνω μήνυμα
```

```
end
```

```
end
```

```
%εύρεση 4 κατάλληλων σημείων για το reference plane
```

```
fprintf('\n\n Εύρεση τεσσάρων κατάλληλων σημείων για τη μοντελοποίηση  
του επιπέδου αναφοράς:');
```

```
m=poio_view(RLXRM(1,1),RLXRM(1,2),RLXRM(1,3));
```

```
[P1 P2 P3
```

```
P4]=euresi_4_katallhlwn_shmeiwn(RLXRM(1,1),RLXRM(1,2),RLXRM(1,3),OR(1,1),  
,OR(1,2),OR(1,3),m)
```

```
%εύρεση 4 κατάλληλων σημείων για το Π2
```

```
fprintf('\nΕύρεση τεσσάρων κατάλληλων σημείων για τη μοντελοποίηση  
του επιπέδου Π2:');
```

```
m=poio_view(RL(1,1),RL(1,2),RL(1,3));
```

```
[p1 p2 p3
```

```
p4]=euresi_4_katallhlwn_shmeiwn(RL(1,1),RL(1,2),RL(1,3),OR(1,1),OR(1,2),  
,OR(1,3),m)
```

```
%εύρεση της απόστασης DPP με βάση το paper
```

```
%Στο paper συμβολίζονται ως |EECL-M|,|EECR-M| οι αποστάσεις
```

```
%μεταξύ των σημείων EECL,M και EECR,M αντίστοιχα.Αυτές
```

```
%οι αποστάσεις είναι τα μέτρα των διανυσμάτων ML και RM
```

```
%Αν το AB είναι ένα διάνυσμα, τότε το norm(AB) επιστρέφει
```

```
%το μέτρο του διανύσματος AB, δηλαδή την απόσταση μεταξύ των σημείων
```

```
%A,B.
```

```
%Με βάση τον τύπο που υπάρχει στο paper στη σελίδα 3428,έχουμε:
```

```

DPP=(15*(norm(OL-OM)+norm(RM)))/(2*145.5);

%H απόσταση DPP υπολογίσθηκε επειδή είναι απαραίτητη για
%την εύρεση της εξίσωσης του pivot plane και κατά συνέπεια των
%τεσσάρων κατάλληλων σημείων για το pivot plane
%III)Εύρεση της εξίσωσης του pivot plane

%το RLX(RLXLM)
RLX_RLXRM=cross(RL,RLXRM);

%pairnw th thetikh timh gia to l
l=(DPP/(norm(RLX_RLXRM)));

RK=l*RLX_RLXRM;%=LK

a=dot(RK,RM);

if (a<0)

    OK=OR + l*(RLX_RLXRM);
else
    OK=OR - l*(RLX_RLXRM);
end

%βρίσκω έτσι τις συντεταγμένες του σημείου K

%Mπορώ πλέον να βρω την εξίσωση του pivot plane.

%,είναι αναγκαία
%η εύρεση εξίσωσης για το pivot plane,προκειμένου
%μέσω αυτής να βρει ο χρήστης τα κατάλληλα σημεία
%για να εισάγει ένα αντικείμενο τύπου "Advance Quadrilateral Plate"
%πάνω στο κεφάλι, κάτι το οποίο
%θα τον βοηθήσει να βρει τα σημεία N και F με βάση το paper.

%εύρεση 4 κατάλληλων σημείων για το pivot plane

fprintf('\nΕύρεση τεσσάρων κατάλληλων σημείων για τη μοντελοποίηση
του βασικού επιπέδου:');

m=poio_view(RLX_RLXRM(1,1),RLX_RLXRM(1,2),RLX_RLXRM(1,3));

[p1 p2 p3
p4]=euresi_4_katallhlwn_shmeiwn(RLX_RLXRM(1,1),RLX_RLXRM(1,2),RLX_RLXRM
(1,3),OK(1,1),OK(1,2),OK(1,3),m)

%για την σχεδίαση των επιπέδων RPU και RPD

fprintf('\nΕύρεση τεσσάρων κατάλληλων σημείων για τη μοντελοποίηση
των βοηθητικών επιπέδων:');

w=mhkos_kinhtou; %στη μεταβλητή αυτή αποθηκεύεται το μήκος του
%κινητού

```

```

w=(w/2); %διαιρούμε το μήκος διά του 2

l=(w/(norm(RLXRM)));

% σημεία για τον ορισμό του ενός επιπέδου
fprintf('\nΣημεία για τον ορισμό του ενός επιπέδου που απέχει απόσταση
(μήκος κινητού)/2 από το επίπεδο αναφοράς(σε χιλιοστά οι συντεταγμένες)
:\n');

p1 =P1 + l*(RLXRM);
p2 =P2 + l*(RLXRM);
p3 =P3 + l*(RLXRM);
p4 =P4 + l*(RLXRM);

p1
fprintf('\n');
p2
fprintf('\n');
p3
fprintf('\n');
p4
fprintf('\n');

%σημεία για τον ορισμό του άλλου επιπέδου

fprintf('\nΣημεία για τον ορισμό του άλλου επιπέδου που απέχει απόσταση
(μήκος κινητού)/2 από το επίπεδο αναφοράς(σε χιλιοστά οι συντεταγμένες)
:\n');

p1 =P1 - l*(RLXRM);
p2 =P2 - l*(RLXRM);
p3 =P3 - l*(RLXRM);
p4 =P4 - l*(RLXRM);

p1
fprintf('\n');
p2
fprintf('\n');
p3
fprintf('\n');
p4
fprintf('\n');

fprintf('\nΣτη συνέχεια,πρέπει να δώσετε τις συντεταγμένες(σε χιλιοστά)
των σημείων N,F,T έτσι ώστε');
fprintf('\nνα βρεθεί ο πίνακας περιστροφής R που πρέπει να εισαχθεί
στο πρόγραμμα:');
fprintf('\nκαι οι νέες(μετά την περιστροφή) συντεταγμένες του σημείου
N(σε χιλιοστά):\n');

[R ON]=peristrofh_tangent_plane;

fprintf('\nΟ πίνακας περιστροφής που πρέπει να εισαχθεί στο πρόγραμμα
XFDTD είναι ο:\n');
R

```

```

s=se_poio_shmeio_to_kuvo;

if(s=='R')

    OSOLD=(OR)';
elseif(s=='L')
    OSOLD=(OL)';
elseif(s=='M')
    OSOLD=(OM)';
end

%σε ποια θέση πρέπει να βρίσκεται το σημείο στο οποίο εισήχθη η σφαίρα
%με βάση τα μαθηματικά

OSNEWMY=R*(OSOLD);

[Xo_o Yo_o
Zo_o]=euresh_metaforas_sto_programma(OSNEWMY(1,1),OSNEWMY(2,1),OSNEWMY(
3,1));

fprintf('\nΤο σημείο N στο πρόγραμμα, έχει την εξής x συντεταγμένη: ');

%n1
x_N_program=ON(1,1) + Xo_o

fprintf('\nΤο σημείο R στο πρόγραμμα, έχει τις εξής y και z
συντεταγμένες: ');

if(s=='R')
    %r2
    y_R_program=OSNEWMY(2,1) + Yo_o

    %r3
    z_R_program= OSNEWMY(3,1) + Zo_o
else
    OSOLD=(OR)';
    OSNEWMY=R*(OSOLD);
    %r2
    y_R_program=OSNEWMY(2,1) + Yo_o

    %r3
    z_R_program= OSNEWMY(3,1) + Zo_o

end

End

```

eisagwgh_sintetagmenhs_x.m

```
function m1=eisagwgh_sintetagmenhs_x

while(1>0)

    try
        m1=input('Δώστε την πρώτη συντεταγμένη του σημείου (x) και πατήστε  
<Enter>:');
    catch
        %αν προκαλέσει η εισαγωγή κάποιο σφάλμα,"ζητάς" από το  
πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
        continue
    end
    m2=(isempty(m1));
    if(m2==1 )
        %αν εισάγει ο χρήστης την κενή λίστα(πατώντας κατευθείαν  
<Enter>) ζητάς από το πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
        continue
    end
    m2=ischar(m1);
    if(m2==1 )
        continue    %πχ αν εισάγει 's'
    end

    m2= isreal(m1);
    if(m2==1 )
        break    %μόνο αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν  
είναι κενός, δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει μόνο πραγματικά  
στοιχεία,θα "σπάσει" ο ατέρμωνας βρόχος
    end

end

end
```

eisagwgh_sintetagmenhs_y.m

```
function m1=eisagwgh_sintetagmenhs_y

while(1>0)
    try
        m1=input('Δώστε την δεύτερη συντεταγμένη του σημείου (y) και  
πατήστε <Enter>:'); % Η χρήση του %s για την κατασκευή μίας ενιαίας  
%συνάρτησης "eisagwgh_sintetagmenhs" δημιουργούσε  
%προβλήματα
    catch
        %αν προκαλέσει η εισαγωγή κάποιο σφάλμα,"ζητάς" από το  
%πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
        continue
    end
    m2=(isempty(m1));
    if(m2==1 )
        %αν εισάγει ο χρήστης την κενή λίστα(πατώντας κατευθείαν  
%<Enter>) ζητάς από το πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
        continue
    end
    m2=ischar(m1);
    if(m2==1 )

        continue %μόνο αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν  
%είναι κενός,δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει μόνο πραγματικά  
%στοιχεία,θα "σπάσει" ο ατέρμωνας βρόχος
    end

    m2= isreal(m1);
    if(m2==1 )
        break %μόνο αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν  
%είναι κενός,δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει μόνο πραγματικά  
%στοιχεία,θα "σπάσει" ο ατέρμωνας βρόχος
    end
end
end
```


eisagwgh_sintetagmenhs_z.m

```
function m1=eisagwgh_sintetagmenhs_z

while(1>0)
    try
        m1=input('Δώστε την τρίτη συντεταγμένη του σημείου (z) και πατήστε  
<Enter> :');
    catch
        %αν προκαλέσει η εισαγωγή κάποιο σφάλμα,"ζητάς" από το  
%πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
        continue
    end
    m2=(isempty(m1));
    if(m2==1 )
        %αν εισάγει ο χρήστης την κενή λίστα(πατώντας κατευθείαν  
%<Enter>) ζητάς από το πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
        continue
    end
    m2=ischar(m1);
    if(m2==1 )

        continue %μόνο αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν  
%είναι κενός,δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει μόνο πραγματικά  
%στοιχεία,θα "σπάσει" ο ατέρμωνας βρόχος
    end

    m2= isreal(m1);
    if(m2==1 )
        break %μόνο αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν  
%είναι κενός,δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει μόνο πραγματικά  
%στοιχεία,θα "σπάσει" ο ατέρμωνας βρόχος
    end
end
end
```

poio_view.m

```
function m=poio_view(n1,n2,n3)

%τα τρία μοναδιαία διανύσματα
x=[1 0 0];
y=[0 1 0];
z=[0 0 1];

n=[n1 n2 n3];

% στην ουσία κάνω τις πράξεις x*n,y*n,z*n,-x*n,-y*n,-z*n
%Αν το x*n είναι αρνητικό,τότε το -x*n είναι θετικό και αντίστροφα.
%Αν το y*n είναι αρνητικό,τότε το -y*n είναι θετικό και αντίστροφα.
%Αν το z*n είναι αρνητικό,τότε το -z*n είναι θετικό και αντίστροφα.

%Το max(max(x*n, -x*n),max(y*n,-y*n),max(z*n,-
%z*n))==max(abs(x*n),abs(y*n),abs(z*n))
%θα καθορίσει ποιό από τα XY,YZ,ZX επίπεδα θα χρησιμοποιηθεί για
%τον καθορισμό του επιπέδου που θέλουμε
%και αυτό γιατί αν π.χ
% max(max(x*n, -x*n),max(y*n, -y*n),max(z*n, -z*n))==max(x*n, -
%x*n)=abs(x*n)
%τότε η γωνία μεταξύ του επιπέδου YZ και του προς σχεδιασμό επιπέδου
%θα είναι μικρότερη από τη γωνία μεταξύ του XY και του προς σχεδιασμό
%επιπέδου και του ZX και του προς σχεδιασμό επιπέδου.
eswteriko1=dot(x,n);
eswteriko2=dot(y,n);
eswteriko3=dot(z,n);

eswteriko1=abs(eswteriko1);

eswteriko2=abs(eswteriko2);

eswteriko3=abs(eswteriko3);

%η συνάρτηση max δε δέχεται τρία ορίσματα,για
%αυτό πρέπει πρώτα να βρούμε το μέγιστο από δύο εσωτερικά γινόμενα
%να το κρατήσουμε και μετά να το συγκρίνουμε με το τρίτο εσωτερικό
%γινόμενο για να βρούμε στο τέλος το μέγιστο εσωτερικό γινόμενο
eswteriko=max(eswteriko1,eswteriko2);

eswteriko=max(eswteriko3,eswteriko);

if(eswteriko == eswteriko1)

fprintf('\n Η τομή YZ (YZ view) είναι χρήσιμη για τον "καθορισμό" του
επιπέδου.\n');
m='x';
fprintf('Κατά συνέπεια πρέπει να δώσετε τις y και z συντεταγμένες δύο
κατάλληλων σημείων:\n');
elseif(eswteriko == eswteriko2)

fprintf('\n Η τομή ZX (ZX view) είναι χρήσιμη για τον "καθορισμό" του
επιπέδου.\n');
m='y';
```

```

fprintf('Κατά συνέπεια πρέπει να δώσετε τις x και z συντεταγμένες δύο
κατάλληλων σημείων:\n');

else
    fprintf('\n Η τομή XY(XY view) είναι χρήσιμη για τον "καθορισμό"
του επιπέδου.\n');
    m='z';
    fprintf('Κατά συνέπεια πρέπει να δώσετε τις x και y συντεταγμένες
δύο κατάλληλων σημείων:\n');
end

end

```

euresi_4_katallhlwn_shmeiwn.m

```
function [A1 A2 A3 A4] =euresi_4_katallhlwn_shmeiwn(a,b,c,xk,yk,zk,m)
%euresi 4 katallhlwn shmeiwn gia to reference plane

%fprintf('\nΩς προς ποια μεταβλητή θέλετε να λυθεί η εξίσωση του
επιπέδου;\n');
%m='a';
%while(1>0) %δεν μπορώ να βάλω εδώ τον έλεγχο m~='x' && m~='y' &&
m~='z' γιατί ενώ χρειάζομαι
%να "πιάσω" την εξαίρεση 2, δε θα μπορώ μετά το while
% try
% m=input('Δώστε ή 'x' ή 'y' ή 'z' και πατήστε
<Enter>.\nΠροσέξτε έτσι ώστε να συμπεριλάβετε τα ' ' :\n');
% catch
%εξαίρεση 1
% continue
% end
%l=(isempty(m));
% if(l==1 )
% m='a';
% continue
% end
% l= (ischar(m));
% if(l==0 )
% m='a';
% continue
% end
% if(l==1)
% try
% l=(m~='x' && m~='y' && m~='z' );
% catch
%εξαίρεση 2 % υπάρχουν περιπτώσεις εισαγωγής που
%χρειάζονται αυτήν την εξαίρεση, όπως για παράδειγμα ' ' ' ' ' ' ' '
%(8 "αυτάκια")
% continue
% end
% if (l==0)
% break % αν δεν έχει "χτυπήσει" λάθος στο από πάνω και
l==0
%αν l==0
% end
%αν l==1
% end
%end

%εισαγωγή και εύρεση κατάλληλων σημείων
fprintf('Πριν την εισαγωγή των συντεταγμένων των σημείων μην ξεχάσετε
να χρησιμοποιήσετε το εργαλείο All\ηπου ανήκει στο μενού το οποίο
βρίσκεται στο δεξί άκρο της περιοχής απεικόνισης');

if(m=='x')%periptwsi 1 m='x'
[y1 z1] = eisagwgh_shmeiwn(m);
x='x';
A1=euresi_shmeiou_epipedou (x,y1,z1,a,b,c,xk,yk,zk);
[y2 z2] = eisagwgh_shmeiwn(m);
```

```

        A3=euresi_shmeiou_epipedou (x,y2,z2,a,b,c,xk,yk,zk);

        A2=euresi_shmeiou_epipedou (x,y1,z2,a,b,c,xk,yk,zk);

        A4=euresi_shmeiou_epipedou (x,y2,z1,a,b,c,xk,yk,zk);
    end

    %periptwsi 2 m='y'

    if(m=='y')
        [x1 z1] = eisagwgh_shmeiwn(m) ; %gia epilisi ws pros y gia to prwto
        shmeio
        y='y';
        A1=euresi_shmeiou_epipedou (x1,y,z1,a,b,c,xk,yk,zk);

        [x2 z2] = eisagwgh_shmeiwn(m) ; %gia epilisi ws pros y gia to deuthero
        shmeio

        A3=euresi_shmeiou_epipedou (x2,y,z2,a,b,c,xk,yk,zk);

        A2=euresi_shmeiou_epipedou (x1,y,z2,a,b,c,xk,yk,zk);

        A4=euresi_shmeiou_epipedou (x2,y,z1,a,b,c,xk,yk,zk);

    end

    %periptwsi 3 m='z'

    if(m=='z')
        [x1 y1]= eisagwgh_shmeiwn(m); %gia epilisi ws pros z gia to prwto
        shmeio
        z='z';
        A1=euresi_shmeiou_epipedou (x1,y1,z,a,b,c,xk,yk,zk);
        [x2 y2]= eisagwgh_shmeiwn(m); %gia epilisi ws pros z gia to
        deuthero shmeio

        A3=euresi_shmeiou_epipedou (x2,y2,z,a,b,c,xk,yk,zk);

        A2=euresi_shmeiou_epipedou (x1,y2,z,a,b,c,xk,yk,zk);

        A4=euresi_shmeiou_epipedou (x2,y1,z,a,b,c,xk,yk,zk);

    end

    %τέλος εισαγωγής σημείων

```

eisagwgh_shmeiwn.m

```
function [a, b] = eisagwgh_shmeiwn(m)

%.Epanalamvanetai mexri ta y,z na einai pragmatikoi arithmoi.
if(m=='x')
    while(1>0)
        try
            a=input('\nΔώστε την τιμή του y(σε χιλιοστά) και πατήστε
<Enter>:');
        catch
            continue
        end
        m=(isempty(a));
        if(m==1 )
            continue
        end
        m=(ischar(a));

        if(m==1 )

            continue
        end

        m= (isreal(a));

        if(m==1 )
            break
        end
        end

        while(1>0)
            try
                b=input('\nΔώστε την τιμή του z(σε χιλιοστά) και πατήστε
<Enter>:');
            catch
                continue
            end
            m=(isempty(b));
            if(m==1 )
                continue
            end
            m=(ischar(b));

            if(m==1 )

                continue
            end

            m= (isreal(b));

            if(m==1 )
                break
            end
            end
```

```

        end

end

%telos tis periptwsis opou m='x'

if(m=='y')

%.Epanalamvanetai mexri ta x,z na einai arithmoi.
    while(1>0)
        try
            a=input('\nΔώστε την τιμή του x(σε χιλιοστά) και πατήστε
<Enter>::');
            catch
                continue
            end
            m=(isempty(a));
            if(m==1 )
                continue
            end
            m=(ischar(a));

            if(m==1 )

                continue
            end
            m= (isreal(a));

            if(m==1 )
                break
            end
        end

        while(1>0)
            try
                b=input('\nΔώστε την τιμή του z(σε χιλιοστά) και πατήστε
<Enter>::');
                catch
                    continue
                end
                m=(isempty(b));
                if(m==1 )
                    continue
                end
                m=(ischar(b));

                if(m==1 )

                    continue
                end
                m= (isreal(b));

                if(m==1 )
                    break
                end
            end

```

```

        end

end

%telos tis periptwsis opou m='y'

if(m=='z')

%Epanalamvanetai mexri ta x,y na einai arithmoi.
    while(1>0)
        try
            a=input('\nΔώστε την τιμή του x(σε χιλιοστά) και πατήστε
<Enter>::');
            catch
                continue
            end
            m=(isempty(a));
            if(m==1 )
                continue
            end
            m= (ischar(a));

            if(m==1 )
                continue
            end
            m= (isreal(a));

            if(m==1 )
                break
            end

        end

        while(1>0)
            try
                b=input('\nΔώστε την τιμή του y(σε χιλιοστά) και πατήστε
<Enter>::');
                catch
                    continue
                end
                m=(isempty(b));
                if(m==1 )
                    continue
                end
                m= (ischar(b));

                if(m==1 )
                    continue
                end
                m= (isreal(b));

                if(m==1 )

```



```
        break
    end

    end

end
%telos tis periptwsis opou m=='z'
end
```

euresi_shmeiou_epipedou.m

```
function A =euresi_shmeiou_epipedou (x1,y1,z1,a,b,c,xk,yk,zk)
%η συνάρτηση αυτή προσδιορίζει ένα σημείο με τις δύο του συντεταγμένες
%σταθερές και την τρίτη να προσδιορίζεται μέσω της εξίσωσης του
%επιπέδου που είναι κάθετο στο διάνυσμα (a,b,c) και περνά από το σημείο
%(xk,yk,zk) αντικαθιστώντας το αρχικό σημείο σε αυτή.

n=[a b c];
OK=[xk yk zk];

realdot = @(u, v) u*transpose(v);

d = realdot(n,-OK); %εύρεση του Δ στην εξίσωση ax+by+cz+Δ=0 με χρήση
του σημείου K(xk,yk,zk)

if x1=='x' %αν η μεταβλητή είναι το x
    if a==0 %αν a =0
        x2=xk;
        y2=y1;
        z2=z1;
    else %τότε αν a διαφορετικό του 0
        x2=(1/a)*(-b*y1-c*z1-d);
        y2=y1;
        z2=z1;
    end
elseif y1=='y'
    if b==0
        x2=x1;
        y2=yk;
        z2=z1;
    else
        x2=x1;
        y2=(1/b)*(-a*x1-c*z1-d);
        z2=z1;
    end
elseif z1=='z'
    if c==0
        x2=x1;
        y2=y1;
        z2=zk;
    else
        x2=x1;
        y2=y1;
        z2=(1/c)*(-a*x1-b*y1-d);
    end
end

A=[x2 y2 z2]; %το σημείο που θέλουμε

end
```

peristrofh_tangent_plane.m

```
function [R ON]=peristrofh_tangent_plane

NFXNT=0;

while (NFXNT==0)

fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου N σε  
χιλιοστά(mm):\nΕισάγετε μία-μία τις συντεταγμένες διαχωρίζοντάς τες με  
<Enter> \nκαι προσέξτε ώστε να είναι πραγματικοί αριθμοί:\n');

xn=eisagwgh_sintetagmenhs_x;
yn=eisagwgh_sintetagmenhs_y;
zn=eisagwgh_sintetagmenhs_z;

fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου F σε  
χιλιοστά(mm):\nΕισάγετε μία-μία τις συντεταγμένες διαχωρίζοντάς τες με  
<Enter>\n και προσέξτε ώστε να είναι πραγματικοί αριθμοί:\n');

xf=eisagwgh_sintetagmenhs_x;
yf=eisagwgh_sintetagmenhs_y;
zf=eisagwgh_sintetagmenhs_z;

fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες του σημείου T σε  
χιλιοστά(mm):\nΕισάγετε μία-μία τις συντεταγμένες διαχωρίζοντάς τες με  
<Enter>\n και προσέξτε ώστε να είναι πραγματικοί αριθμοί:\n');

xt=eisagwgh_sintetagmenhs_x;
yt=eisagwgh_sintetagmenhs_y;
zt=eisagwgh_sintetagmenhs_z;

%I)Εύρεση εξίσωσης tangent plane
%Αφού έχει βρεθεί η NF line, σύμφωνα με το paper, έχει γίνει περιστροφή  
%του pivot plate-σαν quadrilateral plate - γύρω από την NF line  
%προκειμένου να βρεθεί το Tangent Point T.
%Έχω έτσι τις συντεταγμένες των σημείων N,F,T.
ON=[xn
    yn
    zn];%το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο N

clear xn yn zn

OF=[xf
    yf
    zf];%το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο F
clear xf yf zf

OT=[xt
    yt
    zt];%το διάνυσμα θέσης που αντιστοιχεί στο σημείο T(Tangent Point)

%πρώτα υπολογίζω το NFXNT, δηλαδή, το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  
%NF και NT
```

```

NFXNT=cross (OF-ON,OT-ON);
%NF=OF-ON=NO+OF
%NT=OT-ON=NO+OT
if (NFXNT==0)
    fprintf('\nΚάνατε λάθος στην εισαγωγή των συντεταγμένων.Τα σημεία
N,F,T δεν μπορούν να είναι συνευθειακά!!!!\n');
    fprintf('\nΞαναδώστε τις συντεταγμένες!!!:\n\n');
else
    break
end

end

fprintf('\n\nΓια το διάνυσμα nFXnT:\n');

s1=ws_pros_poiio_dianysma_thes_na_einai_omorropo;

G1=peristrofi_dianismatos (NFXNT(1,1),NFXNT(2,1),NFXNT(3,1),s1);

ON=G1*ON;%νέα θέση του σημείου N
OF=G1*OF;%νέα θέση του σημείου F
OT=G1*OT;%νέα θέση του σημείου T

%νέο διάνυσμα NF
NF=OF-ON;

fprintf('\nΓια το διάνυσμα nF:\n');

s2=ws_pros_poiio_dianysma_thes_na_einai_omorropo;

G2=peristrofi_dianismatos (NF(1,1),NF(2,1),NF(3,1),s2);

R=G2*G1;

ON=G2*ON;%νέα θέση του σημείου N
OF=G2*OF;%νέα θέση του σημείου F
OT=G2*OT;%νέα θέση του σημείου T

if (xt>0)
    %νέο διάνυσμα NFXNT
    NFXNT=cross (OF-ON,OT-ON);
    G1=peristrofi_dianismatos (NFXNT(1,1),NFXNT(2,1),NFXNT(3,1),s1);

    ON=G1*ON;%νέα θέση του σημείου N
    OF=G1*OF;%νέα θέση του σημείου F
    OT=G1*OT;%νέα θέση του σημείου T

```

```

R=G1*R;
end

if (xt<0)
%νέο διάνυσμα NF
NF=OF-ON;

G2=peristrofi_dianismatos(NF(1,1),NF(2,1),NF(3,1),s2);

ON=G2*ON;%νέα θέση του σημείου N
OF=G2*OF;%νέα θέση του σημείου F
OT=G2*OT;%νέα θέση του σημείου T

R=G2*R;
end

NF=OF-ON
NFXNT=cross(OF-ON,OT-ON)
end

```

ws_pros_poiio_dianysma_thes_na_einai_omorropo.m

```
function m= ws_pros_poiio_dianysma_thes_na_einai_omorropo

fprintf('Ως προς ποια διάνυσμα θέλετε να γίνει ομόρροπο το διάνυσμά  
αυτό;\n');
m='a';
while(1>0) %atermon vroxos.Xreiazetai wposdhpote break gia na  
leitoyrghsei
    try
        m=input('Δώστε ή ''+x'' ή ''+y'' ή ''+z'' ή ''-x'' ή ''-y'' ή ''-  
z''\nκαι πατήστε <Enter>.\nΠροσέξτε έτσι ώστε να συμπεριλάβετε τα ''  
'' :');
    catch
        continue
    end
    l=(isempty(m));
    if(l==1 )
        m='a';
        continue
    end
    l= (ischar(m));
    if(l==0 )
        m='a';
        continue
    end
    if(l==1)
        try
            l=(strcmp(m,'+x') || strcmp(m,'-x') || strcmp(m,'+y') ||  
strcmp(m,'-y') || strcmp(m,'+z') || strcmp(m,'-z'));
        catch
            continue
        end
        if (l==1)
            break
        else
            continue
        end
    end
end
end
end
```

peristrofi_dianismatos.m

```
function R =peristrofi_dianismatos(a1,a2,a3,s)

c=[a1 a2 a3];
c=norm(c);

if c~=0

b=norm([0 a2 a3]);

if b~=0

    A=[a1/c a2/c a3/c]; %3,41
    B=[0 a3/b -(a2/b)]; %3,41
    C=[-(b/c) (a1*a2)/(b*c) (a1*a3)/(b*c) ]; %3.41

    if (strcmp(s,'+x'))
        R=[A
            B
            C ];
    elseif (strcmp(s,'-x'))
        R=[-A
            B
            -C ];
    elseif (strcmp(s,'+z'))
        R=[-C
            B
            A ];
    elseif (strcmp(s,'-z'))
        R=[C
            B
            -A ];
    elseif (strcmp(s,'+y'))
        R=[C
            A
            B ];
    elseif (strcmp(s,'-y'))
        R=[-C
            -A
            B ];
    end

elseif b==0

    if(strcmp(s,'+x'))
        s=1;
    elseif (strcmp(s,'-x'))
        s=-1;
    elseif (strcmp(s,'+y'))
        s=2;
    elseif (strcmp(s,'-y'))
        s=-2;
```

```

        elseif (strcmp(s,'+z'))
            s=3;
        elseif (strcmp(s,'-z'))
            s=-3;
    end

    A=[1  0  0];
    B=[0  1  0];
    C=[0  0  1];

    if ((s==1 && a1>0) || (s==-1 && a1<0))

        R=[A
            B
            C ];
    elseif ((s==1 && a1<0) || (s==-1 && a1>0))
        R=[-A
            B
            -C ];
    end

    if ((s==3 && a1>0) || (s==-3 && a1<0))
        R=[-C
            B
            A ];
    elseif ((s==3 && a1<0) || (s==-3 && a1>0))
        R=[C
            B
            -A ];
    end

    if ((s==2 && a1>0) || (s==-2 && a1<0))
        R=[-B
            A
            C ];
    elseif ((s==2 && a1<0) || (s==-2 && a1>0))
        R=[B
            -A
            C];
    end

end
elseif c==0
    R=[1 0 0
        0 1 0
        0 0 1];
end
end
end

```


se_poio_shmeio_to_kuvo.m

```
function m= se_poio_shmeio_to_kuvo

fprintf('Σε ποιό σημείο αποφασίσατε να εισάγετε το αντικείμενο  
Rectangular Block πριν κάνετε meshing;')

m='a';
while(1>0) %atermon vroxos.Xreiazetai wposdhpote break gia na  
leitoyrghsei
    try
        m=input('\nΔώστε ή 'R' ή 'L' ή 'M' και πατήστε  
<Enter>.\nΠροσέξτε έτσι ώστε να συμπεριλάβετε τα ' ' ': \n');
    catch
        fprintf('λάθος εισαγωγή δεδομένων!!'); %exairesi 1
    end
    l=(isempty(m));
    if(l==1 )
        m='a';
        continue
    end
    l= (ischar(m));
    if(l==0 )
        m='a';
        continue
    end
    if(l==1)
        try
            l=(m~='R' && m~='L' && m~='M' );
        catch
            fprintf('λάθος εισαγωγή δεδομένων!!'); %exairesi 2
        end
        if (l==1)
            continue
        else
            break
        end
    end
end
end
end
```

euresh_metaforas_sto_programma.m

```
function [Xo_o Yo_o  
Zo_o]=euresh_metaforas_sto_programma(Xosnewmy,Yosnewmy,Zosnewmy)  
  
fprintf('Δώστε τις συντεταγμένες(σε χιλιοστά) που έχει το σημείο στο  
κέντρο του οποίου\ν εισάγατε το αντικείμενο Rectangular Block, στο  
πρόγραμμα μετά την περιστροφή:\n');  
  
xpr=eisagwgh_sintetagmenhs_x;  
ypr=eisagwgh_sintetagmenhs_y;  
zpr=eisagwgh_sintetagmenhs_z;  
  
Xo_o=xpr-Xosnewmy;  
Yo_o=ypr-Yosnewmy;  
Zo_o=zpr-Zosnewmy;  
  
end
```

mhkos_kinhrou.m

```
function m1=mhkos_kinhrou

while(1>0)
    try
        m1=input('\nΕισάγετε το μήκος του κινητού(σε χιλιοστά(mm)):\n');
        %αν ο χρήστης εισάγει ένα σύμβολο του αλφαβήτου, χωρίς "αυτάκια"
        %π.χ s, τότε αυτομάτως η συνάρτηση του ξαναζητά εισαγωγή
        catch
            %αν προκαλέσει η εισαγωγή κάποιο σφάλμα, "ζητάς" από το
            πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
            continue
        end
        m2=(isempty(m1));
        if(m2==1 )
            %αν εισάγει ο χρήστης την κενή λίστα(πατώντας κατευθείαν
            <Enter>) ζητάς από το πρόγραμμα να το αντιμετωπίσει έτσι
            continue
        end
        m2=ischar(m1);
        if(m2==1 )

            continue % αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν είναι
            κενός, δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει χαρακτήρα, συνεχίζει ο βρόχος
            end

        m2= isreal(m1);
        if(m2==1 && m2>0 )
            break %μόνο αν ο "πίνακας" που έχει εισάγει ο χρήστης δεν
            είναι κενός, δεν έχει προκαλέσει σφάλμα και έχει μόνο θετικά πραγματικά
            στοιχεία, θα "σπάσει" ο ατέρμωνας βρόχος
            end
        end
end
end
```