



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ**  
**ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ**

Στατιστική μελέτη συστημάτων αποτελούμενων από πολλούς  
agents με τοπικές αλληλεπιδράσεις

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ**

**ΤΟΥ**

**ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Σ. ΧΡΗΣΤΟΥ**

**Επιβλέπων:** Γεώργιος Π. Παπαβασιλόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2009





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ  
ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Στατιστική μελέτη συστημάτων αποτελούμενων από πολλούς  
agents με τοπικές αλληλεπιδράσεις

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ Σ. ΧΡΗΣΤΟΥ

Επιβλέπων: Γεώργιος Π. Παπαβασιλόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 3η Ιουλίου 2009.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....  
Γεώργιος Π. Παπαβασιλόπουλος  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Βασίλειος Μάγκλαρης  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....  
Πέτρος Μαραγκός  
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009

(Υπογραφή)

.....  
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ Σ. ΧΡΗΣΤΟΥ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Παναγιώτης Σ. Χρήστου, 2009

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.



## Περίληψη

Η εργασία αυτή αφορά μια κατηγορία δυναμικών συστημάτων, τα κυτταρικά αυτόματα. Βασικό γνώρισμα των συστημάτων αυτών είναι η πολυπλοκότητά τους. Η πολυπλοκότητα αυτή οφείλεται στον τεράστιο αριθμό οντοτήτων (θα τις ονομάζουμε agents) που αποτελούν το σύστημα, αν και οι κανόνες που καθορίζουν τη συμπεριφορά των agents, και επομένως τη συνολική κατάσταση του συστήματος μπορεί, και είναι συνήθως, πολύ απλοί.

Αφού αναφερθούμε στη πρώτη ενότητα σε εφαρμογές τους σε ποικίλους τομείς, σε πλεονεκτήματα της περιγραφής αυτής των συστημάτων και σε γενικά τους γνώρισματα, θα παρουσιάσουμε στη δεύτερη ενότητα το μοντέλο του Ising. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε με σκοπό να εξηγήσει το φαινόμενο της αυθόρμητης μαγνήτισης στα φερρομαγνητικά υλικά και το πέτυχε, αν και θεωρεί πολύ απλές αλληλεπιδράσεις και μόνο μεταξύ γειτονικών διπόλων. Η απλότητά του οδήγησε και στη χρήση του για την περιγραφή και πολλών άλλων, τελείως διαφορετικών, συστημάτων.

Στην τρίτη ενότητα θα εισάγουμε έναν κανόνα για τις τοπικές αλληλεπιδράσεις των agents, εμπνευσμένο από κοινωνικά δίκτυα, και μέσω των αποτελεσμάτων των προσομοιώσεων θα μας αποκαλυφθεί η πολυπλοκότητα στην οποία αναφερθήκαμε. Ο κανόνας αυτός βασίζεται στη μίμηση –με ορισμένη, σταθερή πιθανότητα- του agent που συγκέντρωσε το μεγαλύτερο κέρδος (μέσω games που ανέπτυξε με τους γείτονές του) την προηγούμενη χρονική στιγμή. Για διάφορες τιμές των παραμέτρων οδηγούμαστε σε διαφορετικές μορφές οργάνωσης. Ως πρώτη παραλλαγή θα χρησιμοποιήσουμε μεταβλητή πιθανότητα μίμησης και θα δούμε πως μέσα από μια διαδικασία μάθησης οι agents καταφέρνουν πάλι να δημιουργήσουν δομές. Έπειτα θα λαμβάνεται υπόψη, αντί του στιγμιαίου, το συνολικά συσσωρευμένο κέρδος. Στην περίπτωση αυτή η τελική κατάσταση έχει μικρή εξάρτηση από τις τιμές των παραμέτρων του συστήματος. Τέλος, θα επιτρέψουμε την συνύπαρξη agents με διαφορετική λογική και θα παρατηρήσουμε πως η εισαγωγή ενός μικρού αριθμού «εγωιστικών» agents αρκεί για την καταστροφή της οργάνωσης.

**Λέξεις κλειδιά:** κυτταρικά αυτόματα, agents με διαφορετική λογική, Prisoner's Dilemma, Ising's model, phase transition

## Abstract

The present work concerns a class of dynamical systems, cellular automata. The basic characteristic of these systems is their complexity. This complexity is due to the enormous number of entities (which are called agents) that constitute the system, although the rules that determine the behavior of the agents, and consequently the total state of the system, are usually very simple.

In the first part, we will present their applications in various areas, the advantages of this kind of description of systems and the general characteristics of cellular automata.

In the second part we will present the Ising model. This model was proposed in order to explain the phenomenon of spontaneous magnetization in ferromagnetic materials and it achieved this, although it considered very simple interactions and only between neighboring dipoles. Its simplicity led also to its use for the description of many other systems.

In the third part we will introduce a rule which determines the local relations in the system, inspired from social networks. This rule is based on the imitation - with certain constant probability- of the agent with the biggest profit (a profit due to games that it is involved in with his neighbors) the previous moment. For various values of the parameters we were led to different forms of organization. As a first variant, we will use variable probability of imitation, and we will see that through a process of learning agents accomplish to create structures. For a second variant, it will be taken into account, the globally accumulated profit. In this case the final configuration has small dependence on the values of the system's parameters. Finally, we will allow for the coexistence of agents with different rationality and we will observe that the introduction of even a small number of "selfish" agents is enough to destroy any kind of structure.

**Keywords:** cellular automata, agents with different rationality, Prisoner's Dilemma, Ising's model, phase transition





## Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή.....	σελ.12
1.1 Κατηγορίες συστημάτων που θα μας απασχολήσουν.....	σελ.12
1.2 Κυτταρικά Αυτόματα.....	σελ.13
1.2.1 Τα κυτταρικά αυτόματα ως δυναμικά συστήματα.....	σελ.15
1.2.1.α Γειτονιά.....	σελ.15
1.2.1.β Χώρος κατάστασης και τοπικός κανόνας..	σελ.16
1.2.1.γ Σύνορο.....	σελ.16
1.3 Κλάσεις cellular automata.....	σελ.17
1.4 Κανόνες που περιέχουν game.....	σελ.17
1.4.1 Prisoner's Dilemma.....	σελ.18
2. Περιγραφή του μοντέλου του Ising για τα φερρομαγνητικά υλικά.....	σελ.20
2.1. Markov Random Fields.....	σελ.20
2.2. Το μοντέλο Ising.....	σελ.21
2.2.1. Περιγραφή του μοντέλου.....	σελ.23
2.2.2. Το μονοδιάστατο μοντέλο Ising.....	σελ.25
2.2.3. Ύπαρξη φάσεων στο 2-D Ising.....	σελ.26
2.2.4. Προσομοιώσεις .....	σελ.27
2.3. Μια εφαρμογή σε αποθορυβοποίηση εικόνων.....	σελ.34
3. Παρουσίαση μερικών κανόνων για συστήματα με κυτταρικά αυτόματα.....	σελ.39
3.1 Κανόνας που βασίζεται στη μίμηση του πιο επιτυχημένου, την προηγούμενη στιγμή, από τους agents στη γειτονιά.....	σελ.39
3.1.1 Μονοδιάστατη περίπτωση.....	σελ.39
3.1.2 Δισδιάστατο πλέγμα.....	σελ.45
3.1.3 Στατιστική μελέτη του κανόνα.....	σελ.59
3.2 Παραλλαγή του κανόνα, όπου τώρα η μίμηση γίνεται με μεταβλητή πιθανότητα.....	σελ.63
3.3 Παραλλαγή του κανόνα, όπου τώρα έχουμε μίμηση του agent με το μεγαλύτερο ως τώρα κέρδος συνολικά.....	σελ.68
3.4 Συνύπαρξη agents με διαφορετική λογική.....	σελ.73
4. Συμπεράσματα και δυνατές επεκτάσεις.....	σελ.79

Παράρτημα.....	σελ.81
Αναφορές.....	σελ.93



# 1. Εισαγωγή

## 1.1 Κατηγορίες συστημάτων που θα μας απασχολήσουν

Πολλά συστήματα, τεχνητά και φυσικά, έχουν τη μορφή δικτύου. Αποτελούνται δηλαδή από πολλές οντότητες ή agents (το τι εννοούμε με τον όρο οντότητες εξαρτάται από το είδος του συστήματος και θα το διευκρινίσουμε παρακάτω), που μπορούμε να τις αντιμετωπίσουμε ως τους κόμβους του δικτύου, και μεταξύ κάποιων από αυτές αναπτύσσονται σχέσεις αλληλεπίδρασης τις οποίες μπορούμε να φανταστούμε ως τις συνδέσεις στο δίκτυο. Τέτοια συστήματα για παράδειγμα είναι:

- Δίκτυα επικοινωνιών και υπολογιστών ([11], [16]). Είναι η πρώτη κατηγορία που έχουμε στο μυαλό μας και με την οποία ψάχνουμε ομοιότητες στα άλλα συστήματα. Ο γράφος (η κατεξοχήν αναπαράσταση ενός δικτύου) περιλαμβάνει τους τηλεπικοινωνιακούς κόμβους (π.χ. routers, υπολογιστές) και οι ακμές προσδιορίζουν τις δυνατές συνδέσεις.
- Κοινωνικά δίκτυα ([9], [17], [23]). Σε αυτά οι οντότητες μπορεί να είναι τα μέλη μιας κοινότητας και με τις ακμές του γράφου του δικτύου μπορούμε να απεικονίσουμε ανάμεσα σε ποια άτομα υπάρχουν σχέσεις π.χ. φιλικές, επαγγελματικές. Βέβαια αντί για κοινωνία ανθρώπων θα μπορούσαμε να έχουμε οποιουδήποτε ζωντανούς οργανισμούς και να απεικονίζουμε με χρήση γράφου τον τρόπο οργάνωσης των διαφόρων ειδών σε ομάδες και τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.
- Οικονομικά δίκτυα. Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν τους ανταγωνισμούς και συνεργασίες που προκύπτουν μεταξύ επιχειρήσεων ή ατόμων. Οι εταιρίες ενός κλάδου αλληλεπιδρούν εντονότερα μεταξύ τους αλλά η επιρροή αυτή επεκτείνεται και σε άλλους τομείς. Τα μέλη μιας κοινωνίας αναπτύσσουν μεταξύ τους εμπορικές σχέσεις (κάποιοι πωλούν, άλλοι αγοράζουν) και, όταν ο αριθμός τους γίνει πολύ μεγάλος, η πολυπλοκότητα αυξάνεται εντυπωσιακά. Οι σχέσεις που καλούμαστε να αναπαραστήσουμε ως γράφο είναι εξαιρετικά πολύπλοκες.
- Φυσικά συστήματα. Τα διάφορα υλικά αποτελούν πολύ μεγάλα δίκτυα στα οποία οι κόμβοι είναι τα μόρια του υλικού. Ανάλογα με τη θερμοκρασία και την πίεση οι δομές που σχηματίζονται αλλάζουν και μεταβάλλεται έτσι ο γράφος του δικτύου.
- Βιολογικά συστήματα. Εδώ οι οντότητες είναι τα διάφορα κύτταρα που αποτελούν έναν οργανισμό ή κάποιο όργανο αυτού π.χ. οι νευρώνες του εγκεφάλου.

Όλα τα παραπάνω συστήματα είναι ιδιαίτερα πολύπλοκα. Και μόνο τις μεμονωμένες οντότητες που τα αποτελούν να κοιτάξουμε, βλέπουμε πως κάθε μια είναι ένα σύστημα που για να το περιγράψουμε πρέπει να αναφερθούμε σε πάρα πολλές παραμέτρους. Ένας router ή ένας υπολογιστής αποτελούν

συστήματα τα οποία για να μελετηθούν πρέπει να διατρέξουμε διάφορα επίπεδα ανάλυσης, και αν περάσουμε και στα κοινωνικά συστήματα με τους ζωντανούς οργανισμούς, τότε η πολυπλοκότητα κάνει το πρόβλημα εξαιρετικά δύσκολο. Στην εργασία αυτή μας ενδιαφέρουν περιπτώσεις δικτύων όπου ο αριθμός των agents είναι πολύ μεγάλος. Για να μπορούμε να μελετήσουμε αυτά τα δίκτυα ξεχνάμε την πολυπλοκότητα κάθε ξεχωριστού κόμβου. Σε καθέναν αντιστοιχούμε μια μεταβλητή, η τιμή της οποίας περιγράφει την κατάστασή του.

Άλλο ένα κοινό γνώρισμα των παραπάνω δικτύων είναι το ότι ανάμεσα στους agents αναπτύσσονται μόνο τοπικές αλληλεπιδράσεις, καθώς θεωρούμε πως καθένας επηρεάζεται μόνο από τους γείτονές του. Η συμπεριφορά του ατόμου προσδιορίζεται από τις σχέσεις του με άτομα του περιβάλλοντός του, το τηλεπικοινωνιακό φορτίο σε ένα κόμβο σχετίζεται με αυτό στους κόμβους με τους οποίους συνδέεται, τα μόρια ενός υλικού ασκούν και δέχονται δυνάμεις από τα γειτονικά τους. Η ύπαρξη μόνο local interactions βέβαια αποτελεί μια υπόθεση, καθώς ενδέχεται να υπάρχουν και δυνάμεις που επηρεάζουν κάθε συνιστώσα του συστήματος. Θα μας απασχολήσουν συστήματα που ο κύριος μηχανισμός εξέλιξης είναι οι τοπικές αλληλεπιδράσεις και οι εξωτερικές τάσεις είναι πολύ ασθενείς ή ανύπαρκτες.

Αν και οι αλληλεπιδράσεις είναι μόνο τοπικές μας ενδιαφέρει η καθολική συμπεριφορά του συστήματος. Για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων εμφανίζονται πολύ ενδιαφέρουσες διατάξεις, και για κάποιες αλλαγές των παραμέτρων έχουμε ριζική αλλαγή στη συμπεριφορά που ονομάζουμε phase transition ([8]). Την global κατάσταση του συστήματος είναι που θέλουμε να περιγράψουμε ποιοτικά και ενδεχομένως να προβλέψουμε. Θα δούμε ότι η πολυπλοκότητα αυτής της κατάστασης για κάποιες περιπτώσεις είναι αξιοθαύμαστη.

Συνοψίζοντας τα χαρακτηριστικά των συστημάτων που θα παρουσιάσουμε είναι ο τεράστιος αριθμός οντοτήτων που το αποτελούν, οντότητες οι οποίες όμως είναι ιδιαίτερα απλές και αλληλεπιδρούν μόνο με τους γείτονές τους με σχετικά απλούς κανόνες, καθώς και η εμφάνιση καθολικής συμπεριφοράς μέσω αυτών των τοπικών σχέσεων. Η πολυπλοκότητα της συνολικής κατάστασης που μπορεί να δημιουργηθεί οφείλεται αποκλειστικά στο πλήθος των agents.

## 1.2 Κυτταρικά αυτόματα

Ένας απλός τρόπος να περιγράψουμε πολύπλοκα, λόγω του αριθμού των agents που τα αποτελούν, συστήματα, είναι τα κυτταρικά αυτόματα (cellular automata) ([1], [2]). Πολύ συνοπτικά μπορούμε να πούμε ότι είναι διακριτά χρονικά και χωρικά συστήματα, στα οποία οι agents αλληλεπιδρούν μόνο με τους γειτονικούς τους και μπορούν να βρεθούν σε καταστάσεις από ένα πεπερασμένο σύνολο. Στον ορισμό τους αναφέρεται συνήθως και το ότι αποτελούν αιτιοκρατικά μοντέλα, ωστόσο οι κανόνες που χρησιμοποιούμε στην παρούσα εργασία είναι στοχαστικοί. Άρα αποτελούν γενίκευση των κλασικών cellular automata.

Η ιστορία των cellular automata ξεκινά τη δεκαετία του '40 με τους John von Neumann και Stanislaw Ulam. Ο von Neumann μελετούσε το πρόβλημα της υλοποίησης συστημάτων που θα μπορούσαν να επιτελούν λειτουργίες αντίστοιχες με τις βιολογικές, όπως την αναπαραγωγή του εαυτού τους. Η αρχική ιδέα ήταν αυτή ενός ρομπότ το οποίο είναι εφοδιασμένο με όλα τα κατάλληλα εξαρτήματα και μπορεί να φτιάξει ένα αντίγραφο του εαυτού του. Σύντομα κατάλαβε ότι η πολυπλοκότητα της ιδέας την έκανε μη υλοποιήσιμη. Τότε ο Ulam του πρότεινε να χρησιμοποιήσει κάποιου είδους αφαίρεση για να περιγράψει το μοντέλο του, όπως ο ίδιος χρησιμοποιούσε απλά πλέγματα για να μελετήσει τους κρυστάλλους. Έτσι δημιουργήθηκε το πρώτο CA.

Τη δεκαετία του '70 ιδιαίτερη διάδοση είχε ένα κυτταρικό αυτόματο γνωστό ως «Το παιχνίδι της ζωής», που δημιουργήθηκε από τον John Conway. Είναι ένα δισδιάστατο κυτταρικό αυτόματο στο οποίο κάθε agent μπορεί να βρεθεί σε δύο καταστάσεις, ζωντανός ή νεκρός. Οι κανόνες που περιγράφουν την εξέλιξή του είναι πολύ απλοί. Αν ένας «ζωντανός» έχει περισσότερους από 3 ή λιγότερους από 2 «ζωντανούς» γείτονες «πεθαίνει». Αν ένας «νεκρός» έχει 3 ακριβώς «ζωντανούς» γείτονες γίνεται και αυτός «ζωντανός». Παρόλη την απλότητα των κανόνων, μπορούν να παρατηρηθούν πολύ ενδιαφέροντα φαινόμενα, με πιο σημαντικό το γεγονός ότι σε ορισμένες περιπτώσεις ορισμένοι agents μοιάζουν να ταξιδεύουν.

Στη δεκαετία του '80 δημοσιεύτηκαν μια σειρά από papers του Stephen Wolfram στα οποία μελετά τα cellular automata και με χρήση απλών κανόνων προκύπτουν ιδιαίτερα ενδιαφέροντα και πολύπλοκα αποτελέσματα. Με τη χρήση του προγράμματος Mathematica, του οποίου είναι ο δημιουργός, κατάφερε να τα ερευνήσει περισσότερο. Τα αποτελέσματα της δουλειάς του παρουσιάζονται και στο βιβλίο του "A New Kind of Science". Ο Wolfram καταλήγει ότι με την χρήση CA μπορούν να περιγραφούν φυσικά φαινόμενα που τα κλασικά Μαθηματικά αδυνατούν να περιγράψουν π.χ. με απλούς κανόνες σε ένα CA μπορούν να σχηματιστούν δομές που μοιάζουν με νιφάδες χιονιού ή με ρίζες ή φύλλωμα δέντρου.

Τα CA μπορούν να θεωρηθούν και ως υπολογιστές, όπου η αρχική διάταξη είναι η είσοδος, οι τοπικοί κανόνες ο αλγόριθμος και η έξοδος είναι η κατάσταση μετά από κάποιο αριθμό επαναλήψεων. CA με αρκετά περίπλοκους κανόνες έχει αποδειχθεί ότι μπορούν να αποτελέσουν universal Turing machines, άρα μπορούν να προσομοιώσουν κάθε σύστημα. Ιδιαίτερα ενδιαφέροντα πάνω στο θέμα είναι η διδακτορική διατριβή του Chris Langton, όπου μελετάται υπό ποιές συνθήκες ένα κυτταρικό αυτόματο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για υπολογισμούς, δηλαδή να μπορεί να αποθηκεύει τοπικά πληροφορίες για όσο χρόνο χρειάζεται, να μεταδίδει πληροφορίες όσο μακριά χρειάζεται και να επεξεργάζεται αυτές τις πληροφορίες ([20]).

## 1.2.1 Τα κυτταρικά αυτόματα ως δυναμικά συστήματα

Τα βασικά χαρακτηριστικά ενός CA ως δυναμικό σύστημα είναι ο χώρος στον οποίο ορίζεται, το σύνολο των καταστάσεων των agents και ο κανόνας που καθορίζει τη μελλοντική κατάσταση από την τωρινή ([13]).

Οι agents βρίσκονται σε διακεκριμένες θέσεις. Συνήθως χρησιμοποιείται ο Ευκλείδειος χώρος  $\mathcal{L}: \mathbb{N}^d$ , όπου  $\mathbb{N}$  το σύνολο των φυσικών αριθμών. Δηλαδή βρίσκονται στις θέσεις ενός πλέγματος, τετραγωνικού συνήθως. Η θέση καθενός ορίζεται από το  $d$  συνιστωσών διάνυσμα  $\vec{p}$ . Στην εργασία αυτή θα αντιμετωπίσουμε μόνο μονοδιάστατους και δισδιάστατους χώρους. Πιο γενικά οι agents μπορεί να είναι τοποθετημένοι στους κόμβους ενός γράφου  $G = (V, E)$  τυχαίου σχήματος.

### 1.2.1.α Γειτονιά

Αφού ορίσαμε το χώρο στον οποίο ορίζονται, πρέπει να ορίσουμε τώρα και τη γειτονιά καθενός, που είναι το σύνολο των agents που η γνώση της κατάστασής τους τη χρονική στιγμή  $t$  αρκεί για τον προσδιορισμό της κατάστασής του την στιγμή  $t+1$ . Θα συμβολίζουμε με  $\mathcal{N}(\vec{p}, r)$  τη γειτονιά ακτίνας  $r$  του agent που βρίσκεται στη θέση  $\vec{p}$ .

Για τη μονοδιάστατη περίπτωση η γειτονιά μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\mathcal{N}(i, r) = \{j \in \mathcal{L}: 0 \leq |i - j| \leq r\}$$

Για την δισδιάστατη περίπτωση τώρα θεωρούμε τις θέσεις  $\vec{p} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{q} = (x_2, y_2)$ . Θυμίζουμε τον ορισμό της Ευκλείδειας νόρμας άπειρο,  $\|\cdot\|: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$\|\vec{p} - \vec{q}\|_\infty = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$$

Με χρήση αυτής της νόρμας ορίζουμε τη γνωστή και ως *γειτονιά Moore*.

$$\mathcal{N}(\vec{p}, r) = \{\vec{q} \in \mathcal{L}: 0 \leq \|\vec{p} - \vec{q}\|_\infty \leq r\}$$

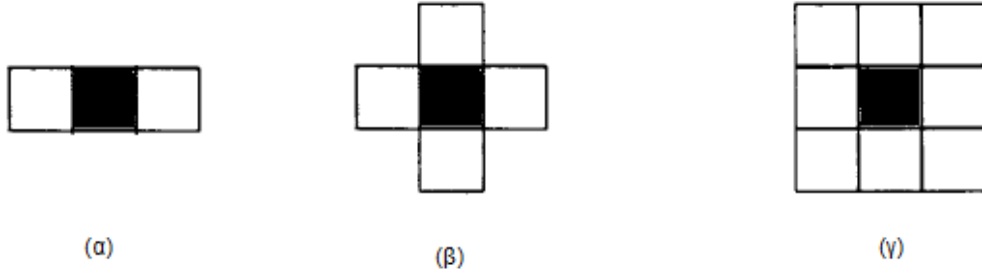
Αν χρησιμοποιήσουμε ως νόρμα την απόσταση Hamming,  $d_H(\vec{p}, \vec{q}) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ , έχουμε τη *γειτονιά von Neumann*:

$$\mathcal{N}(\vec{p}, r) = \{\vec{q} \in \mathcal{L}: 0 \leq d_H(\vec{p}, \vec{q}) \leq r\}$$

Στην περίπτωση γράφου τυχαίου σχήματος γειτονικούς θεωρούμε τους κόμβους που συνδέονται με ακμές, άρα:

$$\mathcal{N}(i, r) = \{j \in G: (i, j) \in E\}$$

Στην εργασία αυτή θεωρούμε μόνο την περίπτωση γειτονιάς ακτίνας 1.



**Εικόνα 1.**(α)Περιοχή ακτίνας 1 σε μονοδιάστατο CA, (β) περιοχή von Neumann ακτίνας 1 και (γ) περιοχή Moore ακτίνας 1

### 1.2.1.β Χώρος κατάστασης και τοπικός κανόνας

Στον agent στη θέση  $\vec{p}$  αντιστοιχεί η συνάρτηση  $s(\vec{p}; t)$  η τιμή της οποίας είναι η κατάσταση του agent τη στιγμή  $t$ . Η  $s$  παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο  $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, k-1\}$ . Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούνται δύο δυνατές καταστάσεις, δηλαδή  $\mathcal{S} = \{0, 1\}$  με το 0 να απεικονίζεται με μαύρο και το 1 με λευκό.

Η ολική κατάσταση του συστήματος τη στιγμή  $t$  προσδιορίζεται από τα ζεύγη:  $\{(\vec{p}, s(\vec{p}; t)), \vec{p} \in \mathcal{L}\}$ .

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη συνάρτηση που περιγράφει τον τοπικό κανόνα αλληλεπίδρασης των agents. Τη συμβολίζουμε με  $f: \mathcal{S}^N \times \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{S}$ , όπου  $\mathcal{W}$  το σύνολο στο οποίο παίρνει τιμές μια τ.μ.  $w$  και  $N$  ο αριθμός των agents σε μια γειτονιά. Ισχύει:

$$s(\vec{p}, t+1) = f(s(\vec{q}_i; t), w), \quad \vec{q}_i \in \mathcal{N}(\vec{p}, r)$$

ω τ.μ. με  $P(w = 1) = a$  και  $P(w = 0) = 1 - a$

Δηλαδή η κατάσταση του agent  $\vec{p}$  τη χρονική στιγμή  $t+1$  εξαρτάται από την κατάσταση των γειτόνων του (σε αυτούς περιλαμβάνεται και ο ίδιος) τη στιγμή  $t$ , και επειδή ο κανόνας μπορεί να είναι και στοχαστικός έχουμε εισάγει και την τ.μ.  $w$ .

### 1.2.1.γ Σύνορο

Αν και συνήθως μας ενδιαφέρει να φανταζόμαστε ότι το πλέγμα στο οποίο βρίσκονται τα CA είναι άπειρο, επειδή το κύριο εργαλείο μελέτης είναι η προσομοίωση σε υπολογιστή, ο οποίος έχει πεπερασμένη μνήμη, σε όλες τις περιπτώσεις θα υπάρχει κάποιο σύνορο όπου και πρέπει να ορίσουμε το τι ακριβώς θα συμβαίνει εκεί. Οι δύο βασικές περιπτώσεις είναι αυτή του *ελεύθερου* και αυτή του *περιοδικού συνόρου*. Στην πρώτη περίπτωση οι θέσεις στο σύνορο δεν έχουν διαφορετική αντιμετώπιση από τις άλλες με τη μόνη διαφορά ότι έχουν λιγότερους γείτονες (π.χ. για πλέγμα 2 διαστάσεων με περιοχή von Neumann τρεις γείτονες και δύο για τα γωνιακά). Στη δεύτερη θεωρούμε πως το πλέγμα σχηματίζει τόρο, οπότε όλοι οι agents έχουν τον ίδιο



αριθμό γειτόνων. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί και μια άλλη κατηγορία συνόρου στο οποίο η κατάσταση στις θέσεις του είναι προκαθορισμένη και δε μεταβάλλεται με βάση τους κανόνες του συστήματος αλλά μόνο επηρεάζει την κατάσταση στις εσωτερικές θέσεις.

### 1.3 Κλάσεις *cellular automata*

Με βάση τη μορφή της συνολικής εικόνας του συστήματος και ανάλογα με το αν αυτή μεταβαίνει σε μόνιμη κατάσταση ή όχι, καθώς και το τι είδους είναι αυτή η μόνιμη κατάσταση ο S.Wolfram πρότεινε των εξής διαχωρισμό σε κλάσεις των CA, με καθεμία να αντιστοιχεί σε διαφορετικό επίπεδο πολυπλοκότητας ([24]):

Class 1: Υπάρχει τελική κατάσταση η οποία είναι ευσταθής και ομογενής. Αυτή η περίπτωση είναι ανάλογη με την ύπαρξη οριακών σημείων σε ένα κλασσικό δυναμικό σύστημα.

Class 2: Δεν έχουμε τελική ομογενή κατάσταση αλλά σχηματίζονται κάποιου είδους χωριστά μοτίβα τα οποία είτε παραμένουν μόνιμα είτε εμφανίζουν περιοδικότητα. Αντίστοιχη είναι η ύπαρξη περιοδικών τροχιών (οριακών κύκλων).

Class 3: Εμφάνιση μη περιοδικής, χαοτικής συμπεριφοράς. (Αν και θεωρητικά, λόγω πεπερασμένου συνολικού αριθμού καταστάσεων, δεν μπορεί να εμφανιστεί το χάος στα συστήματα που μελετάμε)

Class 4: Εμφάνιση ιδιαίτερα ενδιαφερόντων, τοπικών σχηματισμών τα οποία μοιάζουν να μεταβάλλονται συνεχώς χωρίς περιοδικότητες θυμίζοντας χαοτική συμπεριφορά. Ωστόσο δεν είναι χαοτική η συμπεριφορά τους αλλά έχουν μεταβατικό στάδιο με πολύ μεγάλη διάρκεια (transient chaos).

### 1.4 Κανόνες που περιέχουν *game*

Σε πολλά κυτταρικά αυτόματα η εξέλιξη της συνολικής κατάστασης έρχεται ως αποτέλεσμα της προσπάθειας των agents να μεγιστοποιήσουν κάποια συνάρτηση κέρδους (ή να ελαχιστοποιήσουν αντίστοιχα κάποιο κόστος). Στην προσπάθειά τους αυτή είναι πιθανό να έρθουν σε σύγκρουση με τους γειτονικούς agents, με τους οποίους αλληλεπιδρούν, καθώς η ευνοϊκότερη κατάσταση για τον ένα μπορεί να είναι ιδιαίτερα ζημιογόνα για τον άλλο. Αναπτύσσεται επομένως ανταγωνισμός μεταξύ τους και καθένας καλείται να επιλέξει τη βέλτιστη για αυτόν στρατηγική. Άρα μπορούμε να πούμε ότι κάθε agent παίζει ένα *game* εναντίον των γειτόνων του.

Σε κάποιες περιπτώσεις, όπως στα social networks που θα εξετάσουμε παρακάτω, η μόνη δυνατότητα κάθε παίκτη είναι να επιλέξει είτε να

συνεργαστεί είτε να είναι «επιθετικός» (καλός-κακός) στις αλληλεπιδράσεις του με τους άλλους. Αυτό το στοιχείο μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι σε αυτές τις περιπτώσεις η εξέλιξη έρχεται ως αποτέλεσμα διαδοχικών Prisoner's Dilemma που παίζεται μεταξύ κάθε agent και των γειτόνων του. *Αυτό που θέλουμε να μελετήσουμε είναι αν και για ποιές τιμές των παραμέτρων του game μπορούν να αναπτυχθούν οργανωμένες δομές λόγω τοπικών αλληλεπιδράσεων και μόνο (self-organization) και το πόσο ανθεκτικές είναι αυτές σε διάφορες μορφές θορύβου.*

### 1.4.1 Prisoner's Dilemma

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου είναι ίσως το πιο γνωστό πρόβλημα της Θεωρίας Παιγνίων. Περιγράφηκε αρχικά από τους Merrill Flood και Melvin Dresher, που εργάζονταν στη RAND, το 1950. Η ονομασία του οφείλεται στον Albert Tucker και σε μια ιστορία που έφτιαξε για να κάνει πιο ενδιαφέρουσα την περιγραφή του προβλήματος ([7]). Η ιστορία έχει περίπου ως εξής:

*Δύο άτομα συλλαμβάνονται από την αστυνομία για ένα έγκλημα, αλλά καθώς δεν υπάρχουν επαρκή στοιχεία, τους δίνεται η δυνατότητα να ομολογήσουν (να προδώσουν το συνεργό τους) και να μειωθεί η ποινή τους. Αν ο ένας προδώσει και ο άλλος όχι, τότε ο πρώτος θα αφεθεί ελεύθερος και ο δεύτερος θα καταδικαστεί σε 10 χρόνια φυλακή. Αν προδώσουν και οι δύο τότε κάθε ένας θα τιμωρηθεί με 5 χρόνια φυλακή, ενώ αν παραμείνουν σιωπηλοί και οι δύο θα τιμωρηθούν μόνο με 6 μήνες έκαστος. Κανένας δεν γνωρίζει μέχρι να ολοκληρωθεί η διαδικασία τη στάση του άλλου. Πως πρέπει να ενεργήσει κάποιος που θα βρεθεί σε αυτή τη θέση;*

Με ίδιο τρόπο μπορεί να αντιμετωπιστεί κάθε περίπτωση στην οποία έχουμε ανταγωνισμό μεταξύ δύο παιχτών και καθένας μπορεί να αντιδράσει με δύο τρόπους. Είτε να συνεργαστεί («good») είτε να «προδώσει» («bad»). Ανάλογα με τη στάση που θα κρατήσει ο καθένας θα έχει και το αντίστοιχο κέρδος, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα για το game.

Πίνακας για το Prisoner's Dilemma

	good	bad
good	(a,a)	(b,c)
bad	(c,b)	(d,d)

Αν η σχέση των κερδών είναι  $c > a > d > b$ , τότε, αν πρόκειται να παιχτεί μόνο μια παρτίδα, η καλύτερη στρατηγική είναι να είναι κακός. Αν ο αντίπαλός του είναι καλός, τότε κερδίζει a αν είναι κακός και c αν είναι κακός και  $c > a$ . Αν ο αντίπαλός του είναι κακός, τότε αν «προδώσει» κερδίζει d ενώ αν «μείνει σιωπηλός» κερδίζει b και  $d > b$ .

Αυτή η λύση δεν είναι ακριβώς η καλύτερη, από την άποψη ότι με άλλη στρατηγική θα μπορούσαν να πετύχουν μεγαλύτερο κέρδος. Αν είναι καλοί και οι δύο μπορούν να κερδίσουν περισσότερα σε κάποιες περιπτώσεις. Και αυτό το

παράδοξο είναι που κάνει τόσο ενδιαφέρον αυτό το game, παρόλο που είναι πολύ απλό.

Μια επιπλέον συνθήκη που χρησιμοποιείται συνήθως είναι και η:  $2a > c + b$ .  
Αυτή η σχέση περιγράφει το γεγονός ότι το συνολικό κέρδος (άθροισμα των κερδών των παιχτών) είναι μεγαλύτερο αν είναι «καλοί» και οι δύο.

Μια γενίκευση των παραπάνω αποτελεί το λεγόμενο επαναλαμβανόμενο Δίλημμα του Φυλακισμένου, στο οποίο οι παίχτες αλληλεπιδρούν πολλές φορές (πολλές παρτίδες του game) και έχουν τη δυνατότητα να θυμούνται τις προηγούμενες επιλογές του αντιπάλου τους, αλλά δε γνωρίζουν το συνολικό αριθμό βημάτων για τον οποίο θα συνεχιστεί το game. Στην περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει η εύρεση μια βέλτιστης, που θα μεγιστοποιεί δηλαδή το συνολικό κέρδος, στρατηγικής δηλαδή επιλογής αντιμετώπισης ενός αντιπάλου στο επόμενο βήμα με βάση την έως τώρα εξέλιξη.

Για την εύρεση της πιο αποτελεσματικής πολιτικής το 1980 ο Robert Axelrod πραγματοποίησε δύο διαγωνισμούς (οι διάφορες στρατηγικές προσομοιώνονταν σε υπολογιστές). Σε αυτούς συμμετείχαν επιστήμονες από διάφορους κλάδους: βιολόγοι, οικονομολόγοι, μαθηματικοί, κοινωνιολόγοι.

Τα αποτελέσματα των διαγωνισμών έδειξαν πως οι πιο «άπληστες» στρατηγικές δεν ήταν τόσο αποτελεσματικές σε βάθος χρόνου. Η παρατήρηση αυτή ενισχύει την υπόθεση ότι μπορούν να αναπτυχθούν συνεργασίες-συνασπισμοί, οι οποίοι μάλιστα να είναι και αποτελεσματικοί, και πως μέσα από μια εξελικτική διαδικασία όλο και περισσότεροι θα συμμετέχουν σε αυτούς τους συνασπισμούς.

Η πιο αποτελεσματική από όλες τις στρατηγικές αποδείχθηκε ότι ήταν η πιο απλή. Ήταν μια ντετερμινιστική πολιτική που προτάθηκε από τον Anatol Rapoport, ονομάστηκε tit for tat και αποτελούνταν από ελάχιστες γραμμές κώδικα. Σύμφωνα με αυτή στην πρώτη επανάληψη πρέπει να είσαι «καλός». Αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως θετική προδιάθεση απέναντι στον αντίπαλο. Σε κάθε επανάληψη από τη δεύτερη και μετά αντέδρασε όπως ο αντίπαλος στο προηγούμενο βήμα. Η αντιμετώπιση αυτή μπορεί να θεωρηθεί επαναλαμβανόμενη διαδικασία τιμωρίας (αν είναι κακός γίνε και εσύ) και συγχώρεσης (αν γίνει πάλι καλός, κάνε και εσύ το ίδιο).

Όταν όμως ο αριθμός βημάτων στο επαναλαμβανόμενο Prisoner's Dilemma είναι γνωστός εκ των προτέρων, τότε η λογική επιλογή είναι να είσαι «κακός» συνεχώς. Στο τελευταίο βήμα και οι δύο θα είναι κακοί, σε μια προσπάθεια να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους και αφού δεν υπάρχει ο κίνδυνος για μελλοντική τιμωρία. Άρα στο αμέσως προηγούμενο βήμα πάλι η επιλογή θα είναι να είσαι «κακός», αφού ξέρεις ότι σίγουρα θα «τιμωρηθείς» στο τέλος, άρα δεν έχεις να χάσεις τίποτα. Και με τον ίδιο τρόπο κινούμαστε προς τα πίσω για να δείξουμε ότι είναι καλύτερο να είσαι πάντα κακός.

## 2. Περιγραφή του μοντέλου του Ising για τα φερρομαγνητικά υλικά

### 2.1 Markov Random Fields

Τα Markov Random Fields προέκυψαν ως γενίκευση των Markov chains ([4]). Οι τελευταίες είναι στοχαστικές διαδικασίες στις οποίες η πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή να έχει ορισμένη τιμή τη χρονική στιγμή  $t$  είναι πλήρως καθορισμένη αν γνωρίζουμε την τιμή της την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή.

Μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε επομένως ως έναν chain graph από τυχαίες μεταβλητές – κάθε κόμβος του οποίου αντιστοιχεί στην τιμή της διαδικασίας σε διακριτές χρονικές στιγμές – όπου κάθε κόμβος έχει την ιδιότητα ότι είναι ανεξάρτητος από τους άλλους αν είναι καθορισμένος ο αριστερός του γείτονας (παρελθόν). Η πρώτη γενίκευση είναι να αγνοήσουμε την κατευθυντικότητα του χρόνου και να θεωρήσουμε εξάρτηση και από τους δύο του γείτονες.

Τα Markov Random Fields τώρα μπορούν να θεωρηθούν ως οποιοδήποτε σχήματος γράφοι, όπου κάθε κόμβος-τυχαία μεταβλητή εξαρτάται μόνο από τους γείτονές του. Η εξάρτηση δεν είναι πλέον χρονική αλλά χωρική.

Markov Random Fields μπορούν να οριστούν τόσο για διακριτές όσο και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες επίσης μπορεί να είναι συνεχείς και ως προς το χώρο. Στην εργασία αυτή μας ενδιαφέρουν μόνο περιπτώσεις όπου οι τυχαίες μεταβλητές παίρνουν διακριτές τιμές και είναι διακριτές στο χώρο π.χ. κόμβοι ενός γράφου ή σημεία πλέγματος.

Έστω τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  που παίρνουν τιμές σε ένα διακριτό σύνολο  $S$  και έστω γράφος  $G = (V, E)$  όπου οι κόμβοι του  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  αντιστοιχούν στις τυχαίες μεταβλητές  $X_i$ . Το σύνολο των τιμών των τ.μ. αποτελούν τη συνολική κατάσταση  $\omega$  του συστήματος. Οι διάφορες δυνατές διατάξεις της  $\omega$ , καθώς και πότε αυτές προκύπτουν, είναι ένα από τα ενδιαφέροντα ερωτήματα που μας απασχολούν στη μελέτη των MRFs.

Οι τ.μ. ορίζουν ένα Markov Random Field αν για κάθε  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$  ισχύει η ιδιότητα :

$$\Pr(X_i = x_i | X_j = x_j, j \in V \setminus i) = \Pr(X_i = x_i | X_j = x_j, j \in N(i)) \quad (\text{ιδιότητα Markov})$$

όπου  $N(i) = \{j \in V | (i, j) \in E\}$ , η γειτονιά του  $i$ .

Ορίζουμε ως ενέργεια του σχηματισμού  $\omega$  (δηλαδή μιας πιθανής διάταξης των τ.μ.):

$$U(\omega) = - \sum_{i \in V} V_i(\omega)$$

Όπου οι συναρτήσεις  $V_i$  ονομάζονται δυναμικά των κόμβων του γράφου.

Μπορούμε τώρα να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σχηματισμό  $\omega$  μια πιθανότητα που εξαρτάται από την ενέργειά του:

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-U(\omega)}$$

Με  $Z = \sum_{\omega \in \mathcal{S}^n} e^{-U(\omega)}$  μια σταθερά κανονικοποίησης.

Υπάρχει μια σύνδεση μεταξύ των random fields που ορίζονται με τον παραπάνω τρόπο (από δυναμικά) και των Markov Random Fields, όταν χρησιμοποιήσουμε τα επονομαζόμενα nearest neighbor potential. Στην περίπτωση αυτή οι τιμές των συναρτήσεων δυναμικού  $V_i$  εξαρτώνται μόνο από τον κόμβο  $i$  και τους γείτονές του, δηλαδή:

$$V_i(\omega) = f(i, j_1, j_2, \dots, j_N), \text{ με } j_1, j_2, \dots, j_N \in N(i)$$

Όταν τα δυναμικά είναι nearest neighbor potential τότε η  $P$  που ορίσαμε παραπάνω έχει την ιδιότητα Markov. Και αντίστροφα αν η  $P$  είναι ο νόμος σε ένα Markov random field, τότε μπορούμε να ορίσουμε την canonical ενέργεια  $U(\omega) = -(\log P(\omega) - \log P(\bar{0}))$ , όπου  $\bar{0}$  μια διάταξη που την ορίζουμε ως διάταξη μηδενικής ενέργειας.

Τότε το δυναμικό:

$$V_i(\omega) = \sum_{B \in N(i)} -\mathbf{1}^{|N(i)-B|} U(\omega_B),$$

όπου  $\omega^B$  είναι η διάταξη που έχει τις ίδιες τιμές με το  $\omega$  στο  $B$  αλλά 0 αλλού, είναι nearest neighbor potential.

## 2.2 Το μοντέλο Ising

Η ανάπτυξη των MRF σχετίζεται και με θέματα που άπτονται της στατιστικής φυσικής. Ιδιαίτερη ώθηση στην ανάπτυξή τους έδωσε η μελέτη του αποκαλούμενου μοντέλου Ising ([12], [19]). Το όνομά του οφείλεται στο Γερμανό φυσικό Ernst Ising που το μελέτησε στα πλαίσια της διδακτορική του διατριβής. Με τη χρήση του μοντέλου αυτού επιθυμούσε να εξηγήσει τη συμπεριφορά των φερρομαγνητικών υλικών. Τα αποτελέσματα του περιέχονται σε ένα paper που δημοσιεύτηκε το 1925 (Beitrag sur Theorie des Ferromagnetismus). Εκεί ο Ising αναφέρει πως πρώτος το μοντέλο αυτό το πρότεινε ο Wilhelm Lenz το 1920, ο οποίος ήταν και ο επιβλέπων το διδακτορικό του καθηγητής.

Αρχικά το μοντέλο αυτό περιφρονήθηκε από τους επιστήμονες. Αυτό οφείλεται κατά κύριο λόγο στη λανθασμένη προσπάθεια από τον ίδιο τον Ising να γενικεύσει το μοντέλο του σε δύο και τρεις διαστάσεις. Θεωρήθηκε ότι ήταν μια υπεραπλουστευμένη αναπαράσταση των διαμοριακών δυνάμεων κάτι που εμπόδιζε την αντιστοιχία του με τα παρατηρούμενα στον πραγματικό κόσμο φαινόμενα.

Ο Heisenberg στηριζόμενος στην αποτυχία του Ising εισήγαγε το δικό του μοντέλο για την ερμηνεία της συμπεριφοράς των φερρομαγνητικών υλικών που θεωρεί πολύ πιο σύνθετες αλληλεπιδράσεις μεταξύ των διπόλων. Έτσι

παρατηρήθηκε το παράδοξο φαινόμενο να αναπτυχθεί και να μελετηθεί αρχικά το πιο σύνθετο μοντέλο και μετά να γίνει επιστροφή στο απλούστερο μοντέλο.

Με το πέρασμα των χρόνων εντοπίστηκε το λάθος του Ising και με αρχικά απλά προσεγγιστικά επιχειρήματα αποδείχθηκε ότι στο 2- και 3-διάστατο μοντέλο μπορούμε να έχουμε φαινόμενα phase transitions και αυθόρμητης μαγνήτισης κάτω από μια κρίσιμη θερμοκρασία  $T_c$ .

Το πιο σημαντικό όμως βήμα στη μελέτη του Ising ήταν η ακριβής επίλυση του δισδιάστατου μοντέλου από τον Lars Onsager το 1942, επίλυση ιδιαίτερα δύσκολη τεχνικά. Με τον τρόπο αυτό αποδείχθηκε η ύπαρξη phase transitions για το δισδιάστατο μοντέλο και υπολογίστηκε με ακρίβεια η κρίσιμη θερμοκρασία στην οποία αυτές παρατηρούνται.



Ernst Ising



Lars Onsager

## 2.2.1 Περιγραφή του μοντέλου

Θεωρούμε μια ακολουθία  $n$  σημείων  $0, 1, 2, \dots, n-1$  πάνω σε μια ευθεία. Σε κάθε θέση βρίσκεται τοποθετημένο ένα δίπολο με spin που κάθε χρονική στιγμή μπορεί να πάρει μια από τις τιμές «πάνω» ή «κάτω».



Εικόνα 2. Μονοδιάστατο μοντέλο Ising

Σκοπός είναι να αντιστοιχίσουμε πιθανότητες σε όλες τις δυνατές διατάξεις spin, να ορίσουμε δηλαδή το random field.

Ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  αποτελείται από όλες τις ακολουθίες

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1})$$

Όπου  $\omega_i = +$  ή  $-$  που αντιστοιχεί σε spin πάνω και κάτω.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις συναρτήσεις spin  $\sigma_i$  που παίρνουν τις τιμές

$$\sigma_i = \begin{cases} +1, & \text{αν } \omega_i = + \\ -1, & \text{αν } \omega_i = - \end{cases}$$

Ο Ising έκανε την υπόθεση ότι μόνο γειτονικά δίπολα αλληλεπιδρούν ασκώντας δυνάμεις το ένα στο άλλο. Με το σκεπτικό αυτό σε κάθε διάταξη αντιστοίχισε μια συνάρτηση ενέργειας της μορφής:

$$U = -J \sum_{i,j} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) - mH \sum_i \sigma_i(\omega)$$

Ο πρώτος όρος σχετίζεται με την αλληλεπίδραση γειτονικών spin. Ο παράγοντας  $J$  είναι χαρακτηριστικός του υλικού και καθορίζει την ένταση της αλληλεπίδρασης αυτής. Αν  $J > 0$  τα spin τείνουν να προσανατολιστούν ομόρροπα (φερρομαγνητικά υλικά, που είναι η περίπτωση που απασχόλησε των Ising και την οποία θα παρουσιάσουμε), ενώ αν  $J < 0$  ευνοείται η δημιουργία ζευγών με αντίθετα spin (αντιφερρομαγνητικά υλικά).

Ο δεύτερος όρος έχει να κάνει με την επίδραση ενός εξωτερικά επιβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου στον προσανατολισμό των διπόλων. Το  $m$  είναι χαρακτηριστικό του υλικού και  $H$  είναι η ένταση του πεδίου. Λόγω του όρου αυτού τα spin τείνουν να γίνουν ομόρροπα του  $H$ .

Η μορφή αυτή της ενέργειας δικαιολογεί και την δυνατότητα, με κατάλληλες προσαρμογές, να χρησιμοποιήσουμε αυτό το μοντέλο για την μελέτη πολλών και εκ πρώτης όψεως τελείως διαφορετικών συστημάτων. Στις διάφορες θέσεις αντί για spin θα μπορούσαμε να έχουμε μόρια αερίου (δύο είδη και να παρατηρούμε την διάταξή τους) ή μόρια και σπές ενός στερεού. Ακόμα γενικότερα θα μπορούσε να αναπαραστήσει κοινωνικά ή και βιολογικά συστήματα. Σε κάθε θέση βρίσκεται ένας agent που αλληλεπιδρά με τους γείτονές του. Αυτός μπορεί να είναι ένα άτομο και η κατάστασή του να αφορά τη στάση του σε ένα θέμα π.χ. εκλογές-voter model, πληθυσμοί ζώων (κυνηγοί-θηράματα), οι συμμετέχοντες σε μια αγορά. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το Ising είναι το πρώτο κυτταρικό αυτόματο. Πέρα από των ανταγωνισμό των agents και σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να θεωρήσουμε μια εξωτερική δύναμη ανάλογη του μαγνητικού πεδίου, η οποία τώρα θα παριστά μια γενική τάση, μια επιβαλλόμενη κατεύθυνση. Μας ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις όπου αυτή η τάση είναι ασθενής, καθώς θέλουμε να εστιάσουμε σε φαινόμενα αυτοοργάνωσης χωρίς παρουσία ισχυρού εξωτερικού ελέγχου.

Αν και μπορεί να προκαλεί ενστάσεις η χρησιμοποίηση της ίδιας μορφής δυνάμεων για μια τόσο ευρεία κατηγορία συστημάτων αυτό που φαίνεται στην πράξη είναι ότι δεν έχει τόσο σημασία η ακριβής μορφή των αλληλεπιδράσεων και επιπλέον με αυτές τις απλοποιήσεις το μοντέλο αυτό μας επιτρέπει να παρατηρήσουμε και σε κάποιες περιπτώσεις να εξηγήσουμε φαινόμενα όπως η δημιουργία και διάδοση κάποιας μορφής οργάνωσης, εστιάζοντας στα βασικά γνωρίσματα και αμελώντας λεπτομέρειας που δυσχεραίνουν ιδιαίτερα την ανάλυση.

Κατά τα γνωστά αν όλα τα spin προσανατολιστούν ομόρροπα μεταξύ τους και με το πεδίο τότε δεν θα παρατηρήσουμε καμία αλλαγή από εδώ και πέρα (ευσταθής κατάσταση ισορροπίας). Ωστόσο αυτή η παραδοχή είναι κάπως απλουστευτική. Λόγω θερμικών διαταραχών κάποια spin θα αλλάξουν προσανατολισμό. Άρα όλες οι διατάξεις  $\omega$  είναι δυνατό να παρατηρηθούν. Σε κάθε μια από αυτές ο Ising αντιστοιχίσει μια πιθανότητα που εξαρτάται μόνο από την ενέργειά της:

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U(\omega)}{kT}}$$

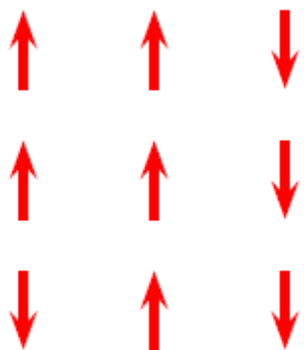
όπου η  $Z$  είναι μια σταθερά κανονικοποίησης που ονομάζεται partition function

$$Z = \sum_{\omega} e^{-\frac{U(\omega)}{kT}}$$



Ο υπολογισμός της είναι αρκετά επίπονος ιδιαίτερα για το δισδιάστατο πρόβλημα (αυτή είναι η συνάρτηση που υπολόγισε για το δισδιάστατο πρόβλημα, χωρίς προσεγγίσεις, ο Onsager). Μπορεί να φαίνεται όχι ιδιαίτερα σημαντική, αυτό που έχει κυρίως ενδιαφέρον είναι η σύγκριση των πιθανοτήτων διαφορετικών καταστάσεων, οπότε η σταθερά αυτή απαλείφεται, ωστόσο αν την υπολογίσουμε έχουμε πλήρως προσδιορισμένο το μοντέλο μας.

Πολύ εύκολα το μοντέλο επεκτείνεται στις δύο διαστάσεις. Τώρα τα δίπολα βρίσκονται τοποθετημένα στις θέσεις ενός τετραγωνικού πλέγματος. Η ενέργεια και η πιθανότητα κάθε διάταξης ορίζονται με τον ίδιο τρόπο, με τη μόνη διαφορά ότι κάθε σημείο έχει τέσσερις γείτονες, αυτούς που βρίσκονται στην Neumann γειτονιά του ακτίνας 1, εκτός αν βρίσκεται στο σύνορο οπότε έχει 2 ή 3.



Εικόνα 3. Δισδιάστατο μοντέλο Ising

## 2.2.2 Το μονοδιάστατο μοντέλο Ising

Έστω  $n_+(\omega)$  και  $n_-(\omega)$  ο αριθμός των θετικών και αρνητικών spin αντίστοιχα. Η συνολική μαγνήτιση του υλικού ορίζεται ως το μέγεθος:

$$M(\omega) = n_+(\omega) - n_-(\omega)$$

Ο Ising μελέτησε αν υπάρχει η δυνατότητα, απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και για αρκούντως χαμηλές θερμοκρασίες, ακόμα και αν ξεκινήσουμε από τυχαίο προσανατολισμό των spins, να οδηγηθούμε σε μια κατάσταση χαμηλότερης ενέργειας με τα περισσότερα spin προς τα πάνω ή προς τα κάτω.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μαγνήτιση σε αυτή την περίπτωση θα είχε δύο κορυφές. Αυτό είναι που ονομάζουμε αυθόρμητος μαγνητισμός, αφού ο προσανατολισμός επήλθε χωρίς την επιβολή πεδίου.

Αντίθετα με ότι περίμενε απέδειξε ότι στο μονοδιάστατο μοντέλο δεν είναι δυνατόν να παρατηρηθεί αυθόρμητη μαγνήτιση για οσοδήποτε χαμηλή θερμοκρασία. Η καμπύλη της  $M$  θα έχει την μορφή Gauss με ένα μέγιστο και πιθανότερη τιμή το 0.

Προσπάθησε έπειτα να επεκτείνει τα ευρήματά του και στο δισδιάστατο μοντέλο. Έκανε την υπόθεση ότι η ένταση της αλληλεπίδρασης είναι διαφορετική στην οριζόντια ( $J_1$ ) και κατακόρυφη συνιστώσα ( $J_2$ ). Υπέθεσε

επίσης ότι  $J_2 \rightarrow \infty$ . Με την υπόθεση αυτή οδηγήθηκε στο συμπέρασμα ότι όλες οι γραμμές θα έχουν τον ίδιο προσανατολισμό και επομένως κάθε μια μπορούσε να μελετηθεί με το μονοδιάστατο μοντέλο κάτι που οδηγούσε πάλι σε κατανομή με ένα μέγιστο, άρα αδυναμία ύπαρξης μαγνήτισης. Έτσι κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το μοντέλο του ήταν υπεραπλουστευμένο για να εξηγήσει το φαινόμενο αυτό.

Με την άνοδο των ναζί στην εξουσία ο Ising αναγκάστηκε να εγκαταλείψει τη Γερμανία το 1939. Εν τω μεταξύ άλλοι ερευνητές, διορθώνοντας τη λανθασμένη του υπόθεση έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για το μοντέλο του. Ο Ising, αποκομμένος για πολλά χρόνια από την επιστημονική κοινότητα, ενημερώθηκε για την ιδιαίτερη αποδοχή που είχε μόνο μετά την άφιξή του στις ΗΠΑ το 1947. Ωστόσο δεν έκανε καμία άλλη δημοσίευση.

### 2.2.3 Ύπαρξη φάσεων στο 2-D Ising

Η βασική διαφορά του μονοδιάστατου από το δισδιάστατο μοντέλο έχει να κάνει με την εξάρτηση από το σύνορο των spins που βρίσκονται μακριά από αυτό. Για το μονοδιάστατο, από τη θεωρία των Markov chains, ισχύει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sigma_n = 1 | \sigma_0 = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\sigma_n = 1 | \sigma_0 = -1)$$

Άρα οι τιμές των spin μακριά από το σύνορο δεν εξαρτώνται από αυτό. Η ιδιότητα αυτή δεν επεκτείνεται στις δύο διαστάσεις.

Μάλιστα η επίδραση του συνόρου είναι σημαντική όσο μακριά αν βρισκόμαστε από αυτό. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε θετικά spin στο σύνορο, σε μια θέση στο εσωτερικό οσοδήποτε μακριά η πιθανότητα το αντίστοιχο spin να είναι +1 μπορεί να γίνει μεγαλύτερη του 2/3 (για χαμηλές θερμοκρασίες). Αποδεικνύεται μάλιστα ότι για τιμές της θερμοκρασίας μικρότερες από μια κρίσιμη τιμή η επίδραση του συνόρου διατηρείται, ενώ για μεγαλύτερες θερμοκρασίες αυτή η επίδραση χάνεται. Παρατηρούμε επομένως μια αλλαγή φάσης.

Αν θεωρήσουμε θετικά spin στο σύνορο η probability measure που προκύπτει συμβολίζεται με  $P_+$  και αντίστοιχα με  $P_-$  αν έχουμε αρνητικά spin στο σύνορο. Για θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης και απουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου, οι δύο αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν σε τελείως διαφορετική συμπεριφορά, γι' αυτό και χαρακτηρίζονται ως δύο φάσεις και η μετάβαση από τη μία στην άλλη ως phase transition.

Εκτός από την περίπτωση θετικού ή αρνητικού συνόρου μπορεί να έχουμε και το λεγόμενο ελεύθερο σύνορο ή περιοδικό σύνορο. Στην πρώτη περίπτωση τα σημεία του συνόρου δεν έχουν καμία διαφορά από τα εσωτερικά παρά μόνο το ότι έχουν λιγότερους γείτονες (3 και 2 για τα γωνιακά). Το περιοδικό σύνορο το παίρνουμε όταν θεωρήσουμε ότι οι πλευρές του πλέγματος ενώνονται σχηματίζοντας τόρο. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις συνόρων η πιθανότητα να παρατηρήσω συγκεκριμένη διάταξη δίνεται από τη σχέση  $P = \frac{1}{2}P_+ + \frac{1}{2}P_-$ .

Αυτό σημαίνει πως αν πάρουμε μια αρκετά μεγάλη περιοχή τότε με πιθανότητα 1/2 η πυκνότητα των + spin θα είναι όπως προβλέπεται από την  $P_+$  δηλαδή

μεγαλύτερη από 0.5, ενώ με πιθανότητα 1/2 θα είναι μικρότερη από 0.5 (όπως προβλέπεται από την  $P_{\pm}$ ). Άρα κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία (οπότε οι δύο φάσεις διαφέρουν) περιμένουμε να υπάρχουν περισσότερα spin πάνω ή κάτω, κάτι που σημαίνει αυθόρμητη μαγνήτιση του υλικού.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει παρουσία εξωτερικού πεδίου. Αν το πεδίο έχει την κατεύθυνση των θετικών spin τότε καθώς τείνει στο μηδέν η κατανομή των spin θα καθορίζεται από την  $P_{+}$ . Αν τώρα το πεδίο τείνει στο μηδέν από αρνητικές τιμές τότε η κατανομή θα είναι η  $P_{-}$ . Άρα με τη χρήση ενός πολύ μικρού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου και για  $T < T_c$  μπορούμε να δημιουργήσουμε μόνιμο μαγνήτη κάτι που δεν μπορεί να γίνει για  $T > T_c$ .

Το λάθος του Ising ήταν ότι θεώρησε ότι η αλληλεπίδραση κατά την κατακόρυφη διεύθυνση τείνει στο άπειρο ( $J_2 \rightarrow \infty$ ) οπότε μελέτησε μόνο μια οριακή περίπτωση. Αποδείχτηκε πως στην περίπτωση αυτή  $T_c \rightarrow 0$ , οπότε δεν μπορεί να μετατραπεί το υλικό σε μόνιμο μαγνήτη απουσία ισχυρού εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

## 2.2.4 Προσομοιώσεις

Όπως εξηγήσαμε, στο μοντέλο Ising το σύστημα μπορεί να βρεθεί σε ένα πολύ μεγάλο αριθμό καταστάσεων ( $2^{n^2}$  για τετραγωνικό πλέγμα με  $n \times n$  θέσεις) σε κάθε μια από τις οποίες αντιστοιχεί ορισμένη πιθανότητα εξαρτώμενη από την ενέργειά της. Προτιμώνται –έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα– καταστάσεις με χαμηλότερη ενέργεια.

Ένας τρόπος να υλοποιήσουμε την κατάσταση αυτή και να προσομοιώσουμε επομένως το μοντέλο είναι να θεωρήσουμε πως η μετάβαση μπορεί να γίνει μόνο από μια κατάσταση σε μια άλλη αν και μόνο αν διαφέρουν σε λίγες θέσεις τα spin τους. Αλλαγή κατάστασης θα πραγματοποιηθεί είτε αν η νέα κατάσταση έχει χαμηλότερη ενέργεια είτε αν έχει μεγαλύτερη με ορισμένη πιθανότητα που εξαρτάται εκθετικά από τη διαφορά των ενεργειών (ώστε να διατηρήσουμε το στοχαστικό χαρακτήρα του μοντέλου).

Με τον τρόπο αυτό δουλεύει ο αλγόριθμος του Metropolis ([21]) (μια κατηγορία προσομοιώσεων Monte Carlo) που θα χρησιμοποιήσουμε.

Όπως έχουμε πει, η πιθανότητα να βρίσκεται το σύστημα στην κατάσταση  $\omega$  είναι (όταν το εξωτερικό πεδίο είναι 0):

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U(\omega)}{kT}} = \frac{1}{Z} e^{\frac{J}{kT} \sum_{i,j} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega)}$$

Όμως εύκολα προκύπτει ότι:

$$\sum_{i,j} \sigma_i(\omega) \sigma_j(\omega) = n_e(\omega) - n_o(\omega) = N_{tot} - 2n_o(\omega)$$

όπου  $n_o$ ,  $n_e$  και  $N_{tot} = n_o + n_e$  ο αριθμός των ζευγών αντίθετων γειτονικών spin, ο αριθμός των ζευγών ίδιων spin και ο ολικός αριθμός ζευγών αντίστοιχα.

Τώρα η πιθανότητα της κατάστασης  $\omega$  μπορεί να γραφεί:

$$P(\omega) = \frac{1}{Z} e^{-2bn_o(\omega)}$$

με τη  $Z'$  να είναι μια νέα σταθερά κανονικοποίησης και  $b=J/(kT)$ .

Αν θεωρήσουμε τώρα μια άλλη κατάσταση  $\omega'$  έχουμε:

$$\frac{P(\omega')}{P(\omega)} = e^{-2b(n_o(\omega')-n_o(\omega))} = e^{2b(n_o(\omega)-n_o(\omega'))}$$

και αν η  $\omega'$  διαφέρει από την  $\omega$  μόνο στο spin στη θέση  $(i^*, j^*)$  θα ισχύει:

$$\frac{P(\omega')}{P(\omega)} = e^{2b(n_o(i^*, j^*)-n_e(i^*, j^*))}$$

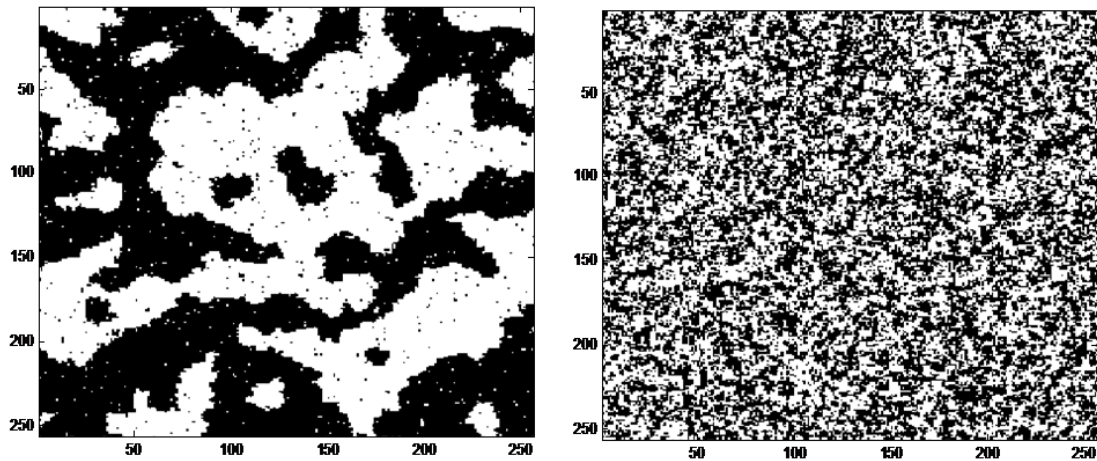
όπου  $n_o(i^*, j^*)$ ,  $n_e(i^*, j^*)$  ο αριθμός των αντίθετων και των ίδιων γειτόνων αντίστοιχα με το spin στη θέση  $(i^*, j^*)$ .

Άρα ο τρόπος με τον οποίο θα εναλλάσσονται οι καταστάσεις είναι ο εξής:

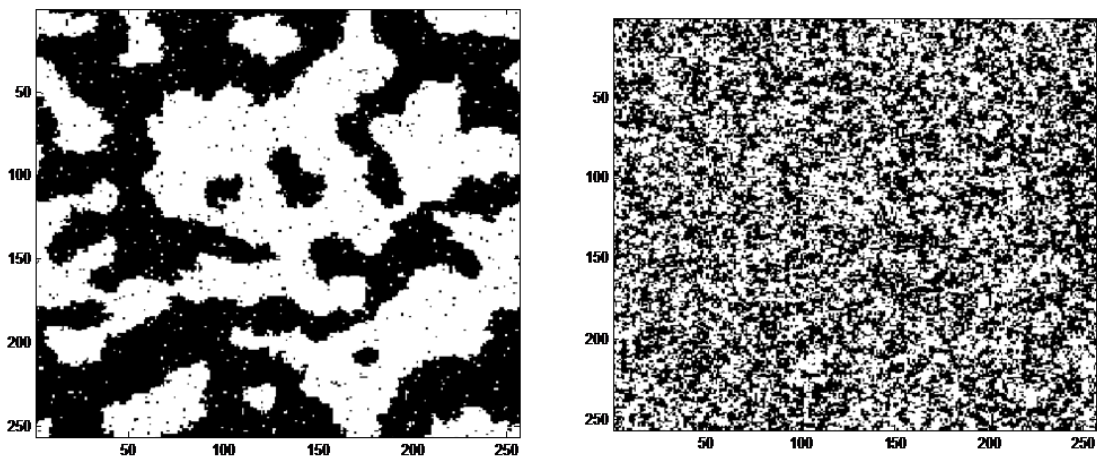
1. Ξεκινάμε με μια τυχαία διάταξη  $\omega$  από spin.
2. Θεωρούμε τη διάταξη  $\omega'$  που διαφέρει από την  $\omega$  στο πρόσημο του spin σε μια τυχαία θέση  $(i^*, j^*)$ .
3. Αν η νέα κατάσταση έχει μικρότερη ενέργεια, αυτή γίνεται η νέα κατάσταση του συστήματος (οι καταστάσεις χαμηλότερης ενέργειας είναι προτιμώμενες σύμφωνα με τη στατιστική φυσική)
4. Αν η  $\omega'$  έχει μεγαλύτερη ενέργεια τότε αυτή γίνεται η νέα κατάσταση του συστήματος με πιθανότητα  $e^{-(U(\omega')-U(\omega))/kT} = e^{2b(n_o(i^*, j^*)-n_e(i^*, j^*))}$ . Αυτό σημαίνει πως για υψηλές θερμοκρασίες μπορούμε να κινηθούμε και πως υψηλότερες ενεργειακά καταστάσεις (λόγω θερμικών διαταραχών), με πιο πιθανά να είναι άλματα προς καταστάσεις που διαφέρουν λίγο από την τρέχουσα. Το φαινόμενο αυτό θα είναι πιο έντονο για θερμοκρασίες μεγαλύτερης της κρίσιμης, ενώ για μικρότερες τέτοιες αλλαγές δεν είναι πιθανές γι' αυτό οδηγείται το σύστημα στις «οργανωμένες» καταστάσεις που θα δούμε στις προσομοιώσεις.
5. Επιστρέφουμε στο βήμα 2 και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για ικανοποιητικό αριθμό φορών.

Ένα σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι χρησιμοποιεί για να αποφανθεί ποια θα είναι η νέα κατάσταση μόνο λόγο πιθανοτήτων, άρα απαλείφονται οι σταθερές τις οποίες και δε χρειάζεται να υπολογίσουμε.

Σε όλες τις προσομοιώσεις η αρχική κατάσταση των spin είναι τυχαία. Έχουμε 50% θετικά και 50% αρνητικά spin ομοιόμορφα κατανεμημένα στο πλέγμα. Σε πρώτη φάση πραγματοποιήσα προσομοιώσεις, για ελεύθερο και για περιοδικό σύνορο, για τιμές της σταθεράς  $b=J/(kT)$  μεγαλύτερες και μικρότερες της κρίσιμης. Η κρίσιμη τιμή έχει προσδιοριστεί θεωρητικά και είναι 0.88.



**Εικόνα 4.** Πλέγμα 256x256 σημείων, ελεύθερο σύνορο, αποτελέσματα μετά από 10,000,000 επαναλήψεις, αριστερά  $b=1.2$  (πάνω από την κρίσιμη τιμή, οπότε μπορούμε να παρατηρήσουμε την οργάνωση σε μεγάλες ομάδες ίδιου προσανατολισμού των spins), δεξιά  $=0.6$  (κάτω από την κρίσιμη τιμή, δε δημιουργείται καμία οργάνωση, έχουμε τυχαίο προσανατολισμό των spins, άρα αποτελεί διαφορετική φάση από την προηγούμενη περίπτωση)



**Εικόνα 5.** Πλέγμα 256x256 σημείων, περιοδικό σύνορο, αποτελέσματα μετά από 10,000,000 επαναλήψεις, αριστερά  $b=1.2$ , δεξιά  $=0.6$

Είναι προφανής η μεγάλη διαφορά στη συμπεριφορά του συστήματος για διαφορετικές θερμοκρασίες. Για τη χαμηλή θερμοκρασία (μεγάλο  $b$ ) μετά από αρκετές επαναλήψεις σχηματίζονται μεγάλες περιοχές μόνο με ομόρροπα spins, άρα πράγματι παρατηρείται μαγνήτιση του υλικού. Φυσικά υπάρχουν και μεμονωμένα spin με αντίθετο πρόσημο και σε αυτές τις μεγάλες περιοχές τα οποία οφείλονται στο στοχαστικό χαρακτήρα του μοντέλου και αντιστοιχούν σε μεταβάσεις σε υψηλότερες ενεργειακά καταστάσεις λόγω θερμικών διαταραχών. Για μεγάλες θερμοκρασίες δεν παρατηρείται καμία ποιοτική διαφορά καθόλη τη διάρκεια της προσομοίωσης. Η τελική κατάσταση δεν εμφανίζει καμία διαφορά από την τυχαία αρχική. Επίσης, πρέπει να παρατηρήσουμε, ότι στη περίπτωση του περιοδικού συνόρου υπάρχει συμφωνία των spin στην πάνω πλευρά του πλέγματος με τα αντίστοιχα του κάτω με τα οποία ανήκουν στην ίδια γειτονιά και αντίστοιχα για τα πλευρικά.

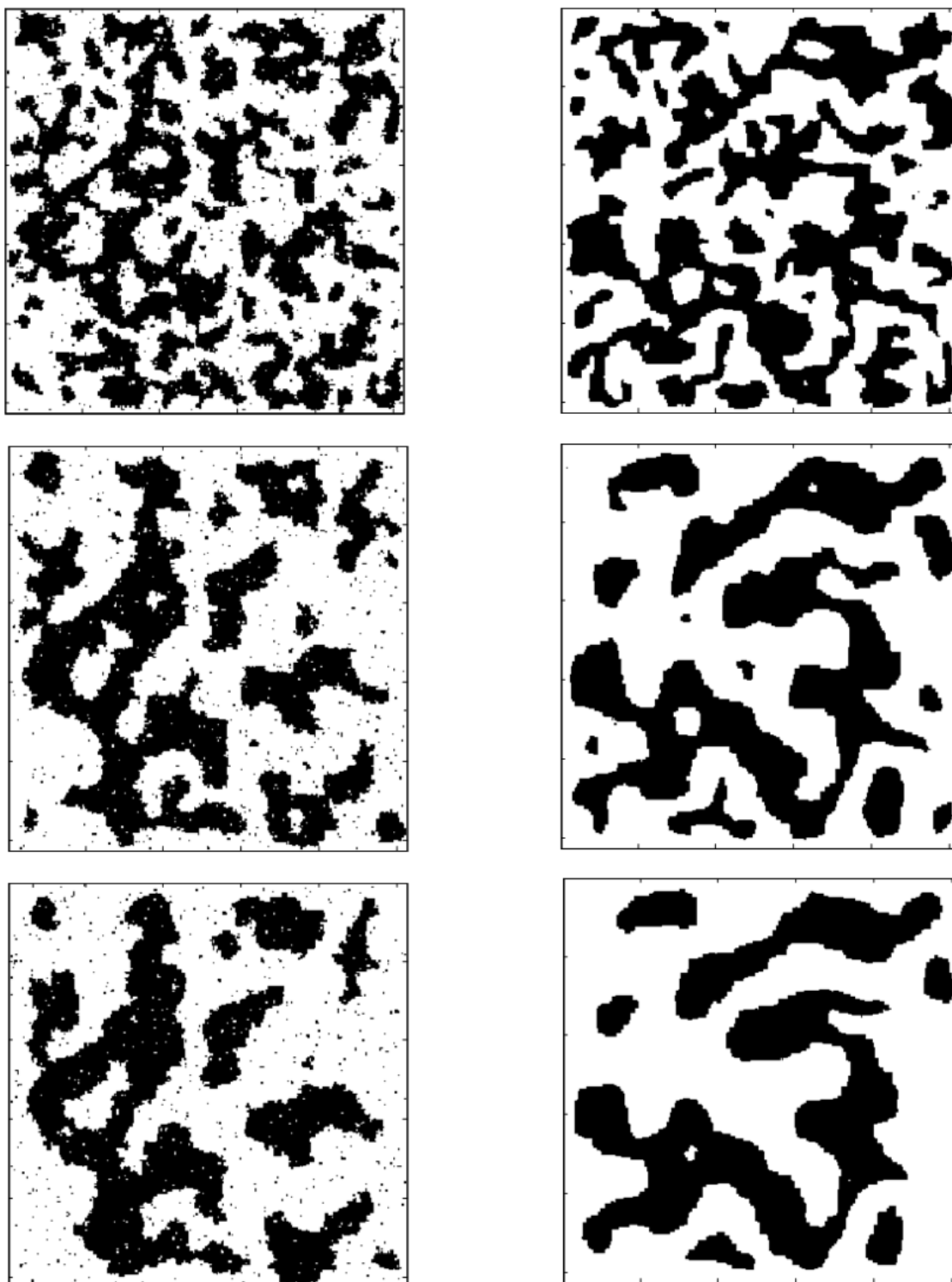
Στη συνέχεια πραγματοποιήσα προσομοιώσεις για την περίπτωση που στο σύνορο υπάρχουν spin τα οποία είναι μόνιμα θετικά. Οι προσομοιώσεις έγιναν

για θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης. Γι'αυτές τις θερμοκρασίες η επίδραση του συνόρου είναι εμφανής και σε σημεία του πλέγματος που βρίσκονται πολύ μακριά από αυτό. Για μεγάλες θερμοκρασίες αυτή η ιδιότητα του συνόρου χάνεται.

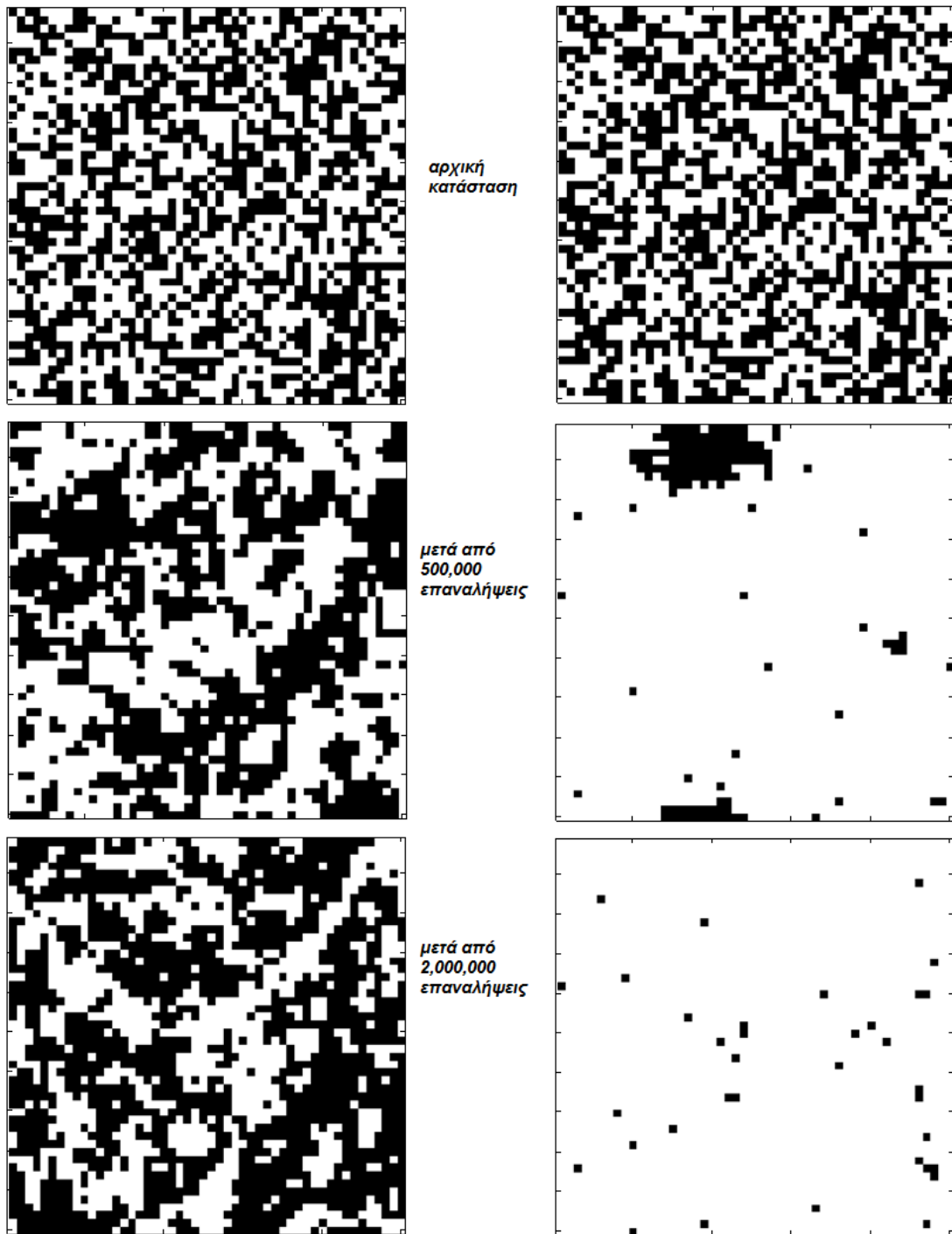
Παρατηρούμε πως στην περίπτωση αυτή τα spin στα εσωτερικά σημεία του πλέγματος, υπό την επίδραση του συνόρου, προσανατολίζονται στην πλειοψηφία στη θετική κατεύθυνση. Οι περιοχές με αρνητικά spin συνεχώς συρρικνώνονται. Το φαινόμενο αυτό είναι πιο έντονο για τις μεγαλύτερες τιμές της παραμέτρου  $b$ .

Οι προσομοιώσεις στις οποίες αναφερθήκαμε ως τώρα έγιναν σε πλέγμα  $256 \times 256$  σημείων. Πραγματοποίησα επίσης και μια σειρά προσομοιώσεων σε πλέγμα  $50 \times 50$  σημεία. Ο σημαντικά μικρότερος αριθμός σημείων επιτρέπει την ευκολότερη παρατήρηση των φαινομένων για τα οποία μιλήσαμε. Πράγματι στην περίπτωση που θα χρησιμοποιήσω περιοδικό σύνορο βλέπουμε πως αρκετά γρήγορα τα spin προσανατολίζονται ομόρροπα. Συμβάλλουν επομένως δημιουργώντας μαγνήτιση. Επομένως επαληθεύουμε την πρόβλεψη της θεωρίας πως για θερμοκρασίες μικρότερες τις κρίσιμες μπορεί να δημιουργηθεί αυθόρμητα μόνιμος μαγνήτης.

Στην περίπτωση τώρα που χρησιμοποιήσω σύνορο με μισά μόνιμα θετικά και μισά μόνιμα αρνητικά spin, τότε βλέπω πως θα δημιουργηθούν δύο περιοχές. Στην κοντινότερη στο θετικό σύνορο θα έχουμε θετικά spin και στην πλησιέστερη στο αρνητικό τα αρνητικά. Είναι επομένως ξεκάθαρη η επίδραση του συνόρου στα εσωτερικά, ακόμα και απομακρυσμένα, σημεία.

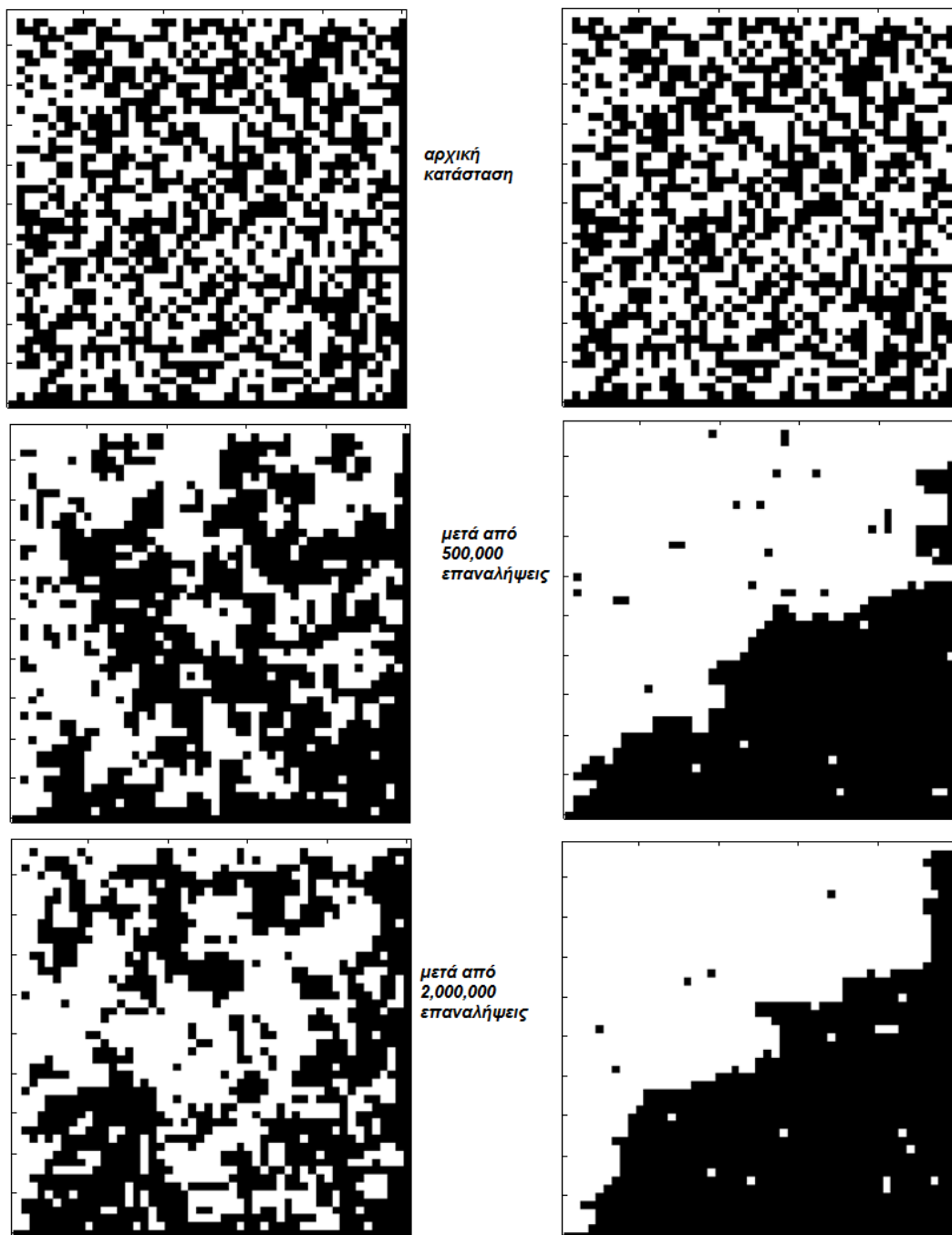


**Εικόνα 6.** Πλέγμα 256x256 σημείων, θετικά spins στο σύνορο, πρώτη γραμμή κατάσταση μετά από 2,000,000 επαναλήψεις, δεύτερη μετά από 6,000,000 και τρίτη μετά από 10,000,000 επαναλήψεις, αριστερή στήλη  $b=1.2$ , δεξιά  $b=3$ . Και στις δύο περιπτώσεις, αφού αντιστοιχούν σε θερμοκρασίες μικρότερες της κρίσιμης, είναι ξεκάθαρη η εμφάνιση μαγνήτισης (δημιουργία μεγάλων περιοχών με ομόροπα spins)



**Εικόνα 7.** Πλέγμα 50x50 σημείων, περιοδικό σύνορο, αριστερή στήλη  $b=0.7$ , δεξιά  $b=1.2$ . Στην περίπτωση αυτή, λόγω του μικρότερου αριθμού σημείων, είναι ιδιαίτερα εμφανές πως οι καταστάσεις πάνω και κάτω από την κρίσιμη θερμοκρασία αντιστοιχούν σε διαφορετικές φάσεις. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε τυχαίο προσανατολισμό, ενώ στη δεύτερη όλα τα spin προσανατολίζονται ομόρροπα.





**Εικόνα 8.** Πλέγμα 50x50 σημείων, θετικά spin στο αριστερό και το πάνω σύνορο και αρνητικά κάτω και δεξιά, αριστερή στήλη  $b=0.7$ , δεξιά  $b=1.2$ . Είναι ξεκάθαρη η επίδραση του συνόρου στα εσωτερικά σημεία στην περίπτωση  $b > b_c$ .

## 2.3 Μια εφαρμογή σε αποθρομβοποίηση εικόνων

Από την παρατήρηση των παραπάνω προσομοιώσεων προκύπτει ότι, για τιμές της παραμέτρου  $b$  μεγαλύτερες της κρίσιμης, δημιουργούνται μεγάλες περιοχές του ίδιου χρώματος με λείες καμπύλες για σύνορο. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στη σκέψη ότι θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο τύπος για την πιθανότητα των διαφόρων διατάξεων που χρησιμοποιείται στο Ising για το καθαρισμό ασπρόμαυρων εικόνων. Ο θόρυβος που θα θεωρήσουμε έχει κατανομή Gauss με μηδενική μέση τιμή, γνωστή διακύμανση και οι τιμές του για διαφορετικά pixels είναι ανεξάρτητες. Τέτοιες μέθοδοι δεν χρησιμοποιούνται πλέον ιδιαίτερα στην επεξεργασία εικόνων, καθώς θεωρούνται ως μη αποτελεσματικές, ωστόσο κρίναμε ενδιαφέρον να παρουσιάσουμε και αυτή την εφαρμογή, έστω και μόνο για να δείξουμε μια χρήση του μοντέλου του Ising τελείως ξένη προς τον αρχικό του προορισμό ([15]).

Έστω  $h$  η αρχική εικόνα, διαστάσεων  $M \times N$  pixels, με  $\mathbf{h}(i, j) \in \{1, -1\}$ ,  $(i, j) \in M \times N$  η τιμή του pixel στη θέση  $(i, j)$ , όπου το 1 αντιστοιχεί στο λευκό και το -1 στο μαύρο. Η θορυβώδης εικόνα, που είναι και αυτή που θα έχουμε στη διάθεσή μας, ισούται με:

$$\mathbf{y}(i, j) = \mathbf{h}(i, j) + \mathbf{n}(i, j)$$

όπου  $\mathbf{n}(i, j) \sim N(0, \sigma^2)$  τα ανεξάρτητα δείγματα του θορύβου.

Η δεσμευμένη πιθανότητα για το  $\mathbf{y}$ , όταν ξέρουμε το  $\mathbf{h}$ , ακολουθεί την κατανομή:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{y}|\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = \prod_{i,j} \mathbf{f}_{\mathbf{y}(i,j)|\mathbf{h}(i,j)} =$$

**σταθ.**  $\exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i,j} (\mathbf{x}(i, j) - \mathbf{h}(i, j))^2 \right\}$

Η εκ των προτέρων πιθανότητα για το  $\mathbf{h}$  θεωρούμε πως είναι αυτή ενός μοντέλου Ising. Άρα, όπως έχουμε δείξει, θα ισχύει:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{h}} \sim e^{-2bd}$$

όπου  $d$  είναι ο συνολικός αριθμός των ζευγών γειτονικών spin με αντίθετο πρόσημο και  $b = J/(kT)$  παράμετρος που πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα για να έχουμε όσο καλύτερο αποτέλεσμα γίνεται. Για τιμές του κοντά στο μηδέν δεν επιτυγχάνεται καθόλου ομαλοποίηση της εικόνας, ενώ καθώς θα αυξάνει όλο μεγαλύτερες περιοχές του ίδιου χρώματος θα σχηματίζονται. Σκοπός είναι να βρούμε την τιμή εκείνη για την οποία και απαλείφεται ο θόρυβος, αλλά διατηρείται και η δομή της εικόνας.

Θα θεωρήσουμε ότι η πραγματική εικόνα  $\mathbf{h}$  είναι εκείνη για την οποία μεγιστοποιείται η a posteriori πιθανότητα:

$$\mathbf{p}(\mathbf{h}|\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{p}(\mathbf{y}|\mathbf{h})\mathbf{p}(\mathbf{h})}{\mathbf{p}(\mathbf{y})}$$

Για να απαλείψουμε την  $\mathbf{p}(\mathbf{y})$  θα πάρουμε λόγο.

Αν η  $\mathbf{h}'$  είναι μια εικόνα που διαφέρει από την  $\mathbf{h}$  μόνο στην τιμή του pixel  $(i^*, j^*)$  θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{f_{y|h'} f'_h}{f_{y|h} f_h} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ \sum_{i,j} (y_{i,j} - h'_{i,j})^2 - \sum_{i,j} (y_{i,j} - h_{i,j})^2 \right] \right\} \exp\{-2b(d' - d)\} \\
&= \exp \left\{ \frac{-2y_{i^*j^*} h_{i^*j^*}}{\sigma^2} \right\} \exp\{-2b(d_{i^*j^*}' - d_{i^*j^*})\} \\
&= \exp \left\{ \frac{-2y_{i^*j^*} h_{i^*j^*}}{\sigma^2} \right\} \exp\{2b(d_{i^*j^*} - a_{i^*j^*})\}
\end{aligned}$$

όπου  $a_{i^*j^*}, d_{i^*j^*}$  ο αριθμός των γειτονικών του  $(i^*, j^*)$  pixels με τα οποία έχει την ίδια τιμή και διαφορετική (άρα αντίθετη) αντίστοιχα.

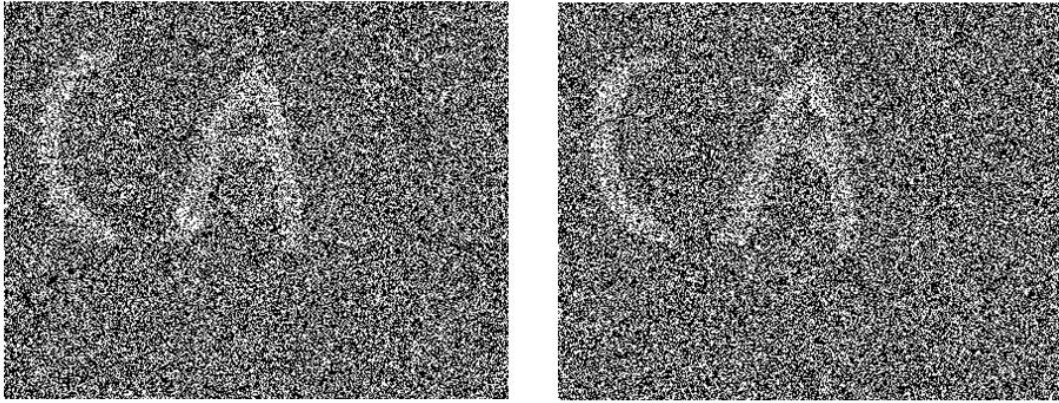
Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τον αλγόριθμο Metropolis. Τα βήματα είναι τα ακόλουθα:

1. Αρχικά κάνουμε μια εκτίμηση για την  $h$ . Δύο πιθανές αρχικές εκτιμήσεις είναι είτε όλα τα pixels λευκά είτε αυτή που προκύπτει από την θορυβώδη εικόνα με απλή κατωφλίωση παίρνοντας ως κατώφλι την μέση τιμή. Επειδή δεν παρατηρήθηκαν σημαντικές διαφορές στο αποτέλεσμα παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα με αρχική εκτίμηση μια λευκή εικόνα ( $h(i, j) = +1, \forall (i, j) \in M \times N$ ).
2. Επιλέγουμε τυχαία ένα pixel (έστω στη θέση  $(i^*, j^*)$ ) και αλλάζουμε την τιμή του οπότε προκύπτει η εκτίμηση  $h'$ .
3. Η νέα εκτίμηση (για την εικόνα μας) είναι η  $h'$  με πιθανότητα  $\alpha(h'|h)$  και η ίδια η  $h$  με πιθανότητα  $1-\alpha(h'|h)$ , όπου  $\alpha(h'|h) = \min \left( 1, \frac{f_{y|h'} f'_h}{f_{y|h} f_h} \right)$
4. Επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για μεγάλο αριθμό βημάτων, ώστε να πάρουμε ικανοποιητικό αποτέλεσμα.

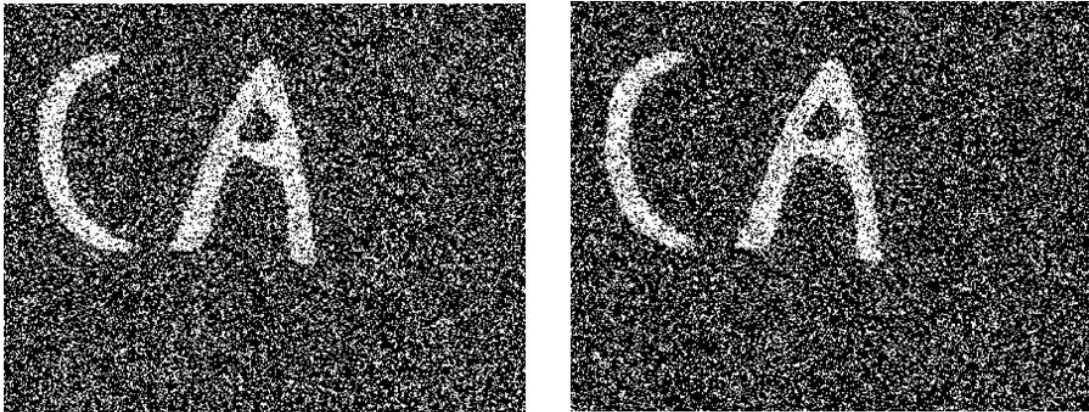
Μια βελτίωση στον παραπάνω αλγόριθμο είναι να τον επαναλάβουμε πολλές φορές για την ίδια εικόνα και σε κάθε pixel να δώσουμε την τιμή εκείνη την οποία είχε στις περισσότερες προσομοιώσεις. Με τον τρόπο αυτό αποτρέπουμε την εμφάνιση μεμονωμένων pixel με αντίθετο χρώμα από αυτό της ευρύτερης περιοχής τους, κάτι που οφείλεται στον στοχαστικό χαρακτήρα του μοντέλου.



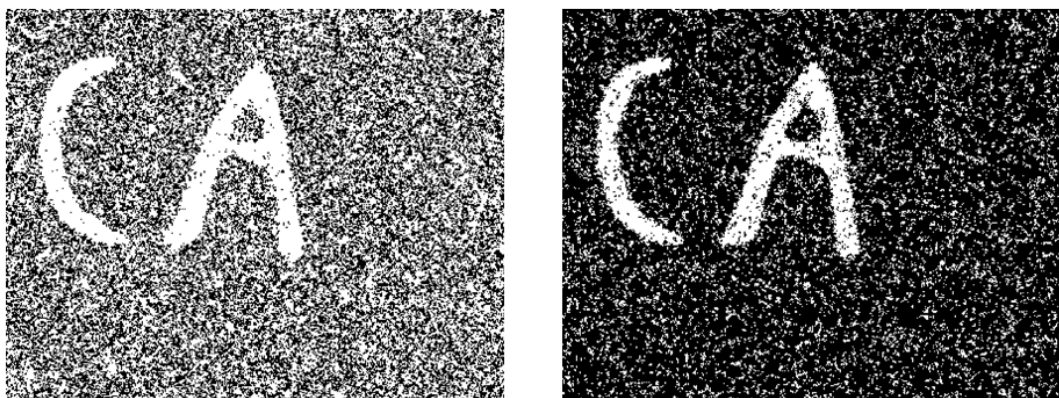
**Εικόνα 9.** Αρχική εικόνα και θορυβώδες αντίγραφο της (θόρυβος που ακολουθεί κατανομή Gauss με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση  $\sigma=2$ )



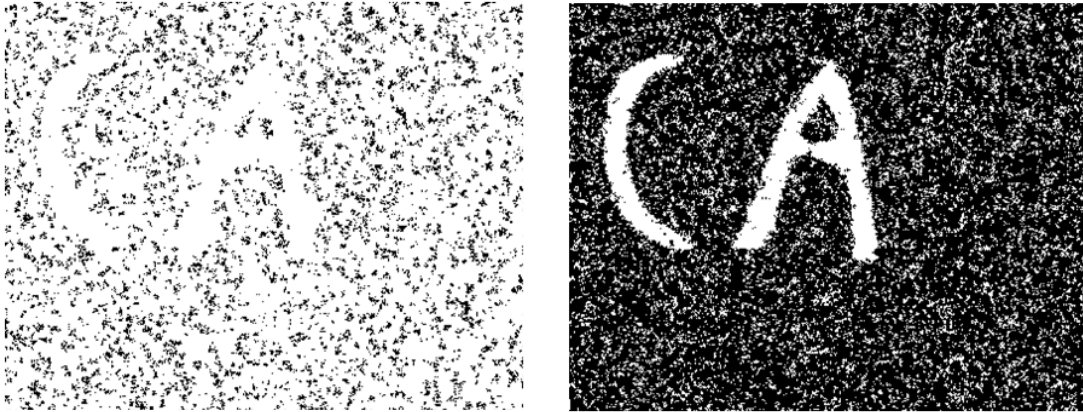
**Εικόνα 10.**  $b=0$  (χωρίς υπόθεση a priori κατανομής όπως στο Ising), αριστερά 2,000,000 επαναλήψεις, δεξιά 10,000,000 επαναλήψεις



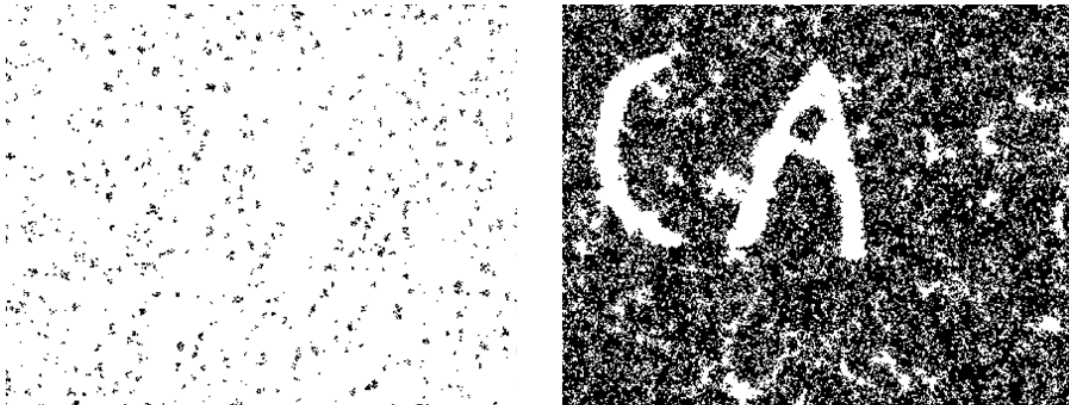
**Εικόνα 11.**  $b=0.5$ , αριστερά 2,000,000 επαναλήψεις, δεξιά 10,000,000 επαναλήψεις



**Εικόνα 12.**  $b=1.2$ , αριστερά 2,000,000 επαναλήψεις, δεξιά 10,000,000 επαναλήψεις



Εικόνα 13.  $b=1.7$ , αριστερά 2,000,000 επαναλήψεις, δεξιά 10,000,000 επαναλήψεις

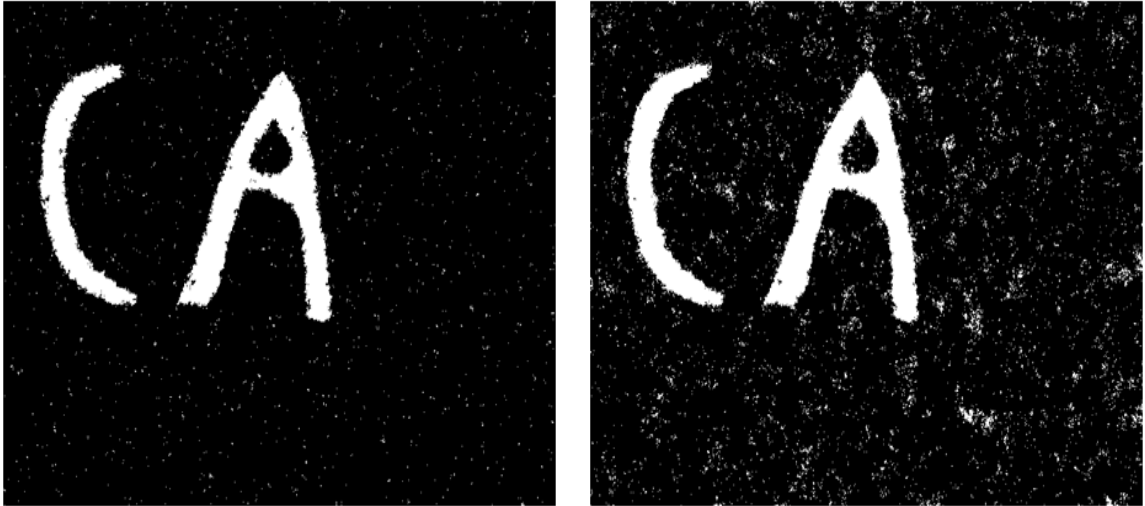


Εικόνα 14.  $b=2$ , αριστερά 2,000,000 επαναλήψεις, δεξιά 10,000,000 επαναλήψεις

Παρατηρούμε πως για την τιμή της παραμέτρου  $b=0$ , που είναι ισοδύναμο με το να θεωρήσουμε ότι κάθε σχηματισμός είναι το ίδιο πιθανός (με πιθανότητα  $2^{-MN}$ ) το αποτέλεσμα δεν είναι καθόλου ικανοποιητικό. Δεν επιτυγχάνεται καθόλου καθαρισμός της εικόνας.

Καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου παίρνουμε εικόνες με όλο και λιγότερο θόρυβο. Μάλιστα για την τιμή  $b=1.7$  είχαμε το καλύτερο αποτέλεσμα. Ωστόσο αν εξακολουθήσουμε να αυξάνουμε την τιμή παρατηρούμε πως το αποτέλεσμα χαλάει. Σχηματίζονται όλο και μεγαλύτερες περιοχές, που σχετίζονται με την εμφάνιση μαγνήτισης στο Ising, και αλλοιώνεται η δομή της εικόνας.

Αν εφαρμόσουμε τώρα πολλές φορές των αλγόριθμο τα αποτελέσματα βελτιώνονται ακόμα περισσότερο.



Εικόνα 14. Μέση τιμή 10 επαναλήψεων του αλγορίθμου, αριστερά  $b=1.7$  και δεξιά  $b=2$

### 3. Παρουσίαση μερικών κανόνων για συστήματα με κυτταρικά αυτόματα

#### 3.1 Κανόνας που βασίζεται στη μίμηση του πιο επιτυχημένου, την προηγούμενη χρονική στιγμή, από τους agents στη γειτονιά

Σε αυτή την ενότητα θα αναλύσουμε έναν κανόνα εμπνευσμένο από πραγματικά κοινωνικά συστήματα. Στα συστήματα αυτά αναπτύσσεται ανταγωνισμός μεταξύ των διαφόρων ατόμων-agents, καθώς όλοι προσπαθούν να πετύχουν το καλύτερο για τον εαυτό τους. Στην προσπάθειά τους αυτή θα βρεθούν αντιμέτωποι με όσους agents αλληλεπιδρούν, καθώς τα συμφέροντά τους ενδέχεται να συγκρούονται. Τον ανταγωνισμό αυτό που δημιουργείται μπορούμε, όπως έχουμε ήδη πει, να τον εισάγουμε στον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται τα κυτταρικά αυτόματα ως ένα game με ζευγάρι αντιπάλων κάθε ζεύγος γειτονικών agents. Στην απλή περίπτωση όπου το μόνο που μας ενδιαφέρει είναι η πολιτική που επιλέγει καθένας για να ανταπεξέλθει στον ανταγωνισμό και επίσης είναι διαθέσιμες μόνο δύο πολιτικές, με κάθε μια να αντιστοιχεί σε διαφορετικά κέρδη, μπορούμε και συνηθίζεται να επιλέξουμε το Prisoner's Dilemma για την περιγραφή του ανταγωνισμού. Ανάλογα με την τακτική που επιλέγει κάθε παίχτης θα τον χαρακτηρίζουμε «καλό» ή «κακό», συνεργάσιμο ή επιθετικό, «εγωιστή» ή «με ομαδικό πνεύμα», κατά αντιστοιχία με την κλασική διατύπωση του game.

Σε δίκτυα με ανταγωνισμό με την πάροδο του χρόνου κάποιοι agents αποδεικνύονται πιο επιτυχημένοι. Σε πρώτη φάση ένας λογικός κανόνας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η μίμηση του «καλύτερου», όπως προέκυψε μετά από διαδοχικά Prisoner's Dilemma με κέρδη a,b,c,d όπως τα εξηγήσαμε στην εισαγωγή, από όλη τη γειτονιά του. Ο κανόνας αυτός έχει ομοιότητες με την ύπαρξη αρχηγών σε ομάδες ζώων των οποίων οι ασθενέστεροι ακολουθούν. Στον κανόνα μας βέβαια ο μηχανισμός που χρησιμοποιείται εξαλείφει τις διαφορές και δεν επιτρέπει τη διατήρηση ενός μόνο ισχυρού, οι άλλοι θα τον μιμηθούν και η διαφορά τους θα εξαλειφθεί. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η δημιουργία δομών, αντιστοιχών με κοινότητες, για διάφορες τιμές των παραμέτρων.

##### 3.1.1 Μονοδιάστατη περίπτωση

Οι agents είναι τοποθετημένοι στις  $n$  θέσεις μονοδιάστατου πλέγματος (λωρίδα). Στη γειτονιά καθενός περιλαμβάνονται οι άμεσα διπλανοί του εξ αριστερών και εκ δεξιών, δηλ.:

$$N(i) = \begin{cases} \{i-1, i+1\}, & \text{αν } 1 < i < n \\ \{n, 2\}, & \text{αν } i = 1 \\ \{n-1, 1\}, & \text{αν } i = n \end{cases}$$

Θεωρούμε περιοδικό σύνορο (ενώνονται οι άκρες της λωρίδας), οπότε οι θέσεις  $n$  και  $1$  είναι γειτονικές.

Ας περιγράψουμε τώρα λεπτομερώς τον κανόνα με βάση των οποίου εξελίσσεται το σύστημα.

Κάθε κύτταρο  $i$  μπορεί να βρεθεί σε δύο δυνατές καταστάσεις  $s_i$ , 1 («καλός»-λευκό στις προσομοιώσεις) ή 0 («κακός»-μαύρο).

Κάθε χρονική στιγμή υπολογίζεται το κέρδος κάθε agent από τη σχέση:

$$J_t(i) = \sum_{k \in N} j_t(i, k)$$

όπου

$$j_t(i, k) = \begin{cases} a, & \text{αν } s_t(i) = 1 = s_t(k) \\ b, & \text{αν } s_t(i) = 1, s_t(k) = 0 \\ c, & \text{αν } s_t(i) = 0, s_t(k) = 1 \\ d, & \text{αν } s_t(i) = s_t(k) = 0 \end{cases}$$

Οι τιμές των παραμέτρων  $a$  και  $d$  θα είναι σταθερές για όλες τις προσομοιώσεις στις τιμές,  $a=1$  και  $d=0$ . Ενδιαφερόμαστε για την αλλαγή στην συμπεριφορά ως συνάρτηση των  $b$  και  $c$ .

Αφού υπολογιστεί το κέρδος σε κάθε θέση του πλέγματος, υπολογίζεται η νέα κατάσταση κάθε agent ως συνάρτηση των κερδών του ιδίου και των γειτόνων του από τη σχέση:

$$s_{t+1}(i) = r \cdot s_t(k) + (1 - r) \cdot s_t(i),$$

$$P(r = 1) = p, P(r = 0) = 1 - p$$

Όπου:

$$k: J_t(k) = \max\{J_t(j), j \in N(i) \cup i\}$$

Δηλαδή, η νέα κατάσταση ενός agent είναι με πιθανότητα  $p$  ίδια με την κατάσταση του agent της γειτονιάς του με το μέγιστο κέρδος την προηγούμενη στιγμή και με πιθανότητα  $1-p$  η τωρινή κατάσταση του ιδίου.

Στην πραγματικότητα η γειτονιά δεν είναι ακτίνας 1, αφού για να έχουμε καθορισμένη την πιθανότητα η μελλοντική κατάσταση του agent να έχει δεδομένη τιμή, πρέπει να γνωρίζουμε την τωρινή κατάσταση των γειτόνων του σε ακτίνα 2. Αυτό συμβαίνει γιατί την κατάστασή του καθορίζει όχι η κατάσταση των γειτόνων του σε ακτίνα 1 αλλά το κέρδος τους, για τον υπολογισμό του οποίου είναι απαραίτητη και γνώση της κατάστασης των γειτόνων αυτών.

Θα περάσουμε τώρα στο στάδιο της παρουσίας των προσομοιώσεων του κυτταρικού αυτόματου για διάφορες τιμές των  $b$  και  $c$ .

Στη πρώτη σειρά προσομοιώσεων η αρχική συνθήκη είναι ένας λευκός (κατάσταση 1) agent στη μέση και όλοι οι άλλοι μαύροι. Θέλουμε να δούμε αν θα καταφέρει να επιβιώσει ή και να «επιβάλλει» την κατάστασή του και σε άλλους, ή αν απλά θα εξαφανιστεί. Με βάση αυτή τη συμπεριφορά διακρίναμε τέσσερις ποιοτικά διαφορετικές καταστάσεις, χαρακτηριστικές περιπτώσεις των οποίων παρουσιάζουμε παρακάτω.

- Ομογενής κατάσταση με ύπαρξη μόνο μαύρων pixels: Σε αυτή την περίπτωση αντιστοιχεί η προσομοίωση με  $b=0.4$  και  $c=1.1$ , και γενικά

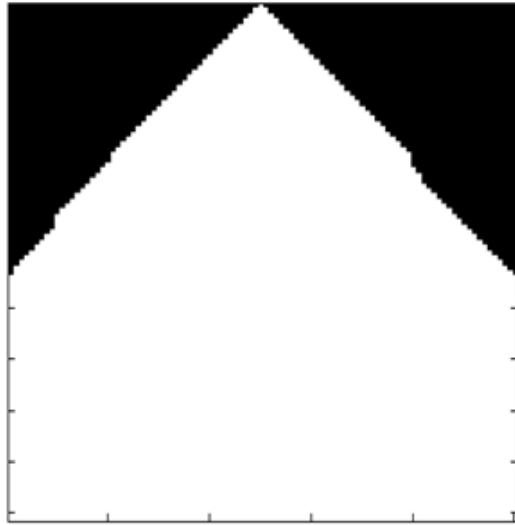


παρατηρείται αν  $c > 2b$ . Σε κάθε βήμα οι δύο γείτονες σε κατάσταση 0 του κεντρικού λευκού έχουν μεγαλύτερο κέρδος ( $c$  ο καθένας από αυτούς, ενώ ο λευκός κερδίζει  $2b$ ). Επομένως σε κάθε βήμα η πιθανότητα ο αρχικά λευκός να μιμηθεί τους γείτονές του και να γίνει και αυτός «κακός» είναι  $p$ . Η τιμή που έχω επιλέξει για την  $p$  είναι 0.9, άρα πρακτικά μέσα σε λίγα βήματα θα μεταβούμε στην ομογενή κατάσταση. Η πιθανότητα να παραμείνει η κατάσταση ίδια με την αρχική για  $k$  βήματα, που σημαίνει ότι σε κάθε βήμα ο «καλός» θα προτιμά να μη μιμηθεί, είναι  $(1-p)^k$ , που τείνει στο 0 για  $k \rightarrow \infty$ . Από τη στιγμή που θα βρεθούμε σε ομογενή κατάσταση σύμφωνα με τον κανόνα μας δεν μπορεί να αλλάξει η κατάσταση αυτή (κατάσταση ισορροπίας).

- Περιοδική λύση με περίοδο 2: Το αποτέλεσμα αυτό παρατηρήθηκε μόνο στη ντετερμινιστική περίπτωση ( $p=1$ ). Στην περίπτωση του στοχαστικού, ακόμα και για την πολύ μεγάλη πιθανότητα  $p=0.9$  μίμησης του ισχυρού, η περιοδικότητα εμφανίζεται μόνο ως μεταβατικό φαινόμενο. Στη μόνιμη κατάσταση έχουμε ομογενή κατάσταση με μόνο «κακούς» agents. Άρα δεν διαφέρει εντέλει από την πρώτη δυνατότητα. Γενικά παρατηρείται για τιμές των παραμέτρων  $b + 1 < c < 2b$ , η οποία για να μπορεί να ικανοποιηθεί πρέπει να ισχύει επίσης  $b > 1$ . Η συνθήκη  $c < 2b$  μας εξασφαλίζει ότι οι γείτονές του θα μιμηθούν τον απομονωμένο λευκό, και η  $b + 1 < c$  οδηγεί τους λευκούς πλέον γείτονες του κεντρικού στην κατάσταση 0 πάλι.
- Ομογενής κατάσταση με ύπαρξη μόνο λευκών: Λόγω του μηχανισμού μίμησης, η κατάσταση του πιο επιτυχημένου λευκού στο μέσο «διαδίδεται» και προς τις δύο κατευθύνσεις. Δεν υπάρχει απόλυτη συμμετρία λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα του μοντέλου. Παρατηρείται για τιμές των παραμέτρων  $c < 2b$  και  $c < b + 1$  (παρουσιάζουμε την περίπτωση  $b=0.8, c=1.5$ ).
- Μόνιμη κατάσταση με agents και από τα δύο είδη: Εμφανίζεται σε περίπτωση ισοπαλίας (ο agent έχει ίδιο κέρδος με τους γείτονές του). Αν  $c = 2b$  η αρχική κατάσταση παραμένει αμετάβλητη. Αν  $c = b + 1$  και  $c < 2b$  στη μόνιμη κατάσταση έχουμε τρεις λευκούς στο κέντρο και οι υπόλοιποι μαύροι. Στη δεύτερη περίπτωση αυτή αντιστοιχεί η προσομοίωση με  $b=1.2$  και  $c=1.2$ . Τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτουν με τη σύμβαση ότι, σε περίπτωση ισοπαλίας ο agent διατηρεί την κατάστασή του. Όταν χρησιμοποιήσουμε την σύμβαση, σε περίπτωση ισοπαλίας να μιμείται τον αριστερό του γείτονα, εμφανίζεται μη περιοδική λύση. Δημιουργείται ένα «κύμα» που μεταδίδεται προς τα δεξιά, κάθε νέα κατάσταση είναι απλώς δεξιά ολίσθηση της προηγούμενης. Η περιοδικότητα –ποιοτικά μόνο μπορεί να εμφανιστεί, αφού λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα του μοντέλου δεν μπορούμε σε αυτή την περίπτωση να πετύχουμε ακριβή αναπαραγωγή μιας κατάστασης- αν εμφανιστεί οφείλεται στο πεπερασμένο μέγεθος του πλέγματος.



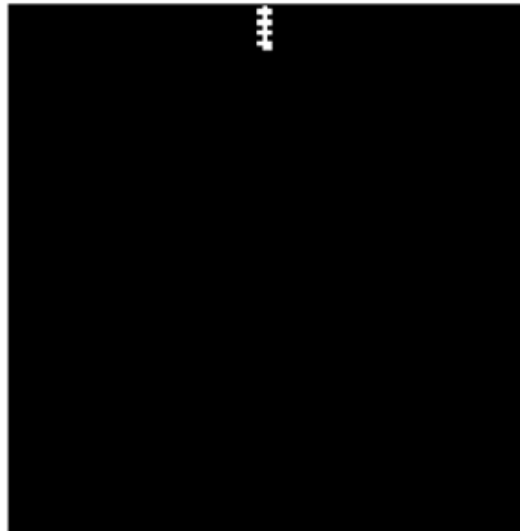
$b=0.4, c=1.1$



$b=0.8, c=1.5$

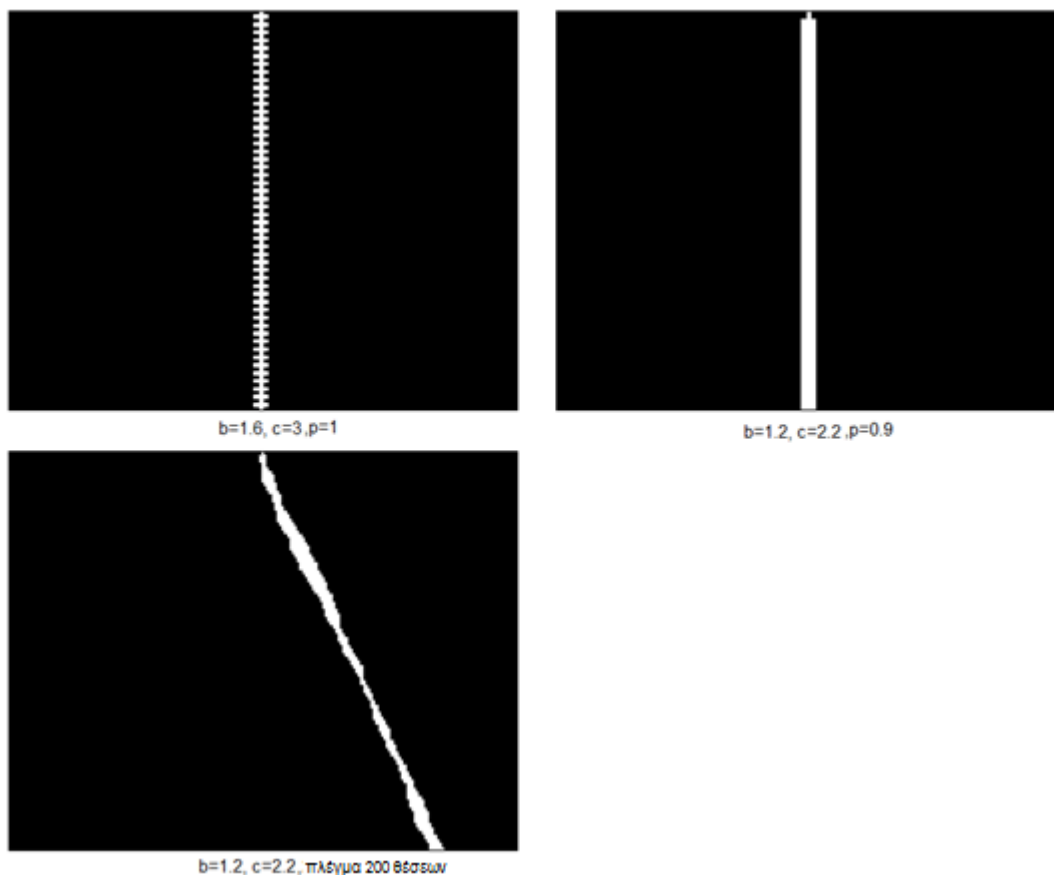


$b=1.2, c=2.2$



$b=1.6, c=3$

**Εικόνα 15.** Πλέγμα 100 θέσεων με πιθανότητα μίμησης του πιο πετυχημένου ίση με  $p=0.9$ . Αρχικά υπάρχει μόνο ένας agent σε κατάσταση 1 που βρίσκεται στο μέσο. Παρουσιάζονται 100 επαναλήψεις. Στις τρεις περιπτώσεις έχουμε μετάβαση σε ομογενή ευσταθή κατάσταση (κλάση I κατά Wolfram), ενώ στην τέταρτη κάθε κατάσταση είναι μια ολίσθηση προς τα δεξιά της προηγούμενης

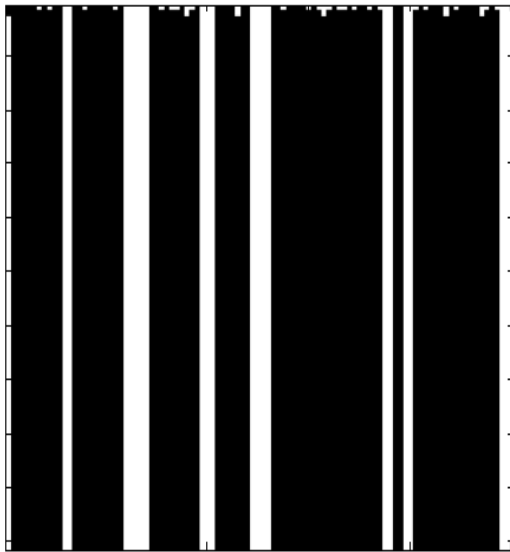


**Εικόνα 16.** Στην αιτιοκρατική περίπτωση παρατηρούμε την εμφάνιση περιοδικότητας 1 (κάτι που δεν μπορεί να εμφανιστεί στην αντίστοιχη στοχαστική) και στην στοχαστική περίπτωση με  $b=1.2$  και  $c=2.2$  έχουμε εμφάνιση μόνιμης κατάστασης με συνύπαρξη λευκών και μαύρων (η μετάβαση στη μόνιμη κατάσταση γίνεται σε λίγα βήματα)

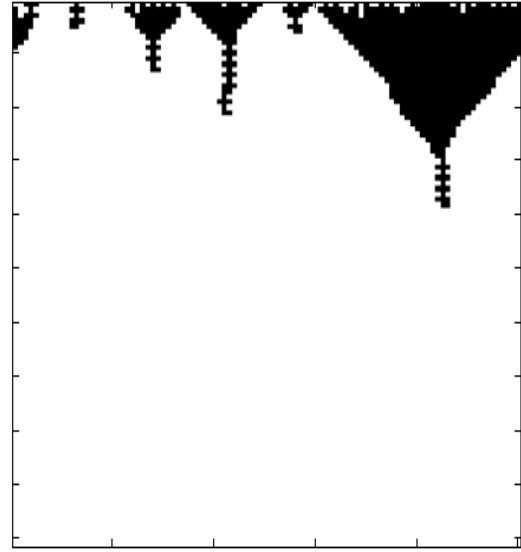
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα προσομοιώσεων χρήσης του κανόνα με random κατάσταση αρχικά (50% σε κατάσταση 1, 50% σε 0). Στη μόνιμη κατάσταση διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- Ύπαρξη agents και των δύο χρωμάτων (πρώτη εικόνα παρακάτω με  $b=0.1$ ,  $c=1.1$ ): Σχηματίζονται γειτονιές της τάξεως των 10 pixels με agents του ίδιου χρώματος. Η μεταβατική κατάσταση διαρκεί μόνο μερικά βήματα (λιγότερα από 10). Οι προσομοιώσεις που παρουσιάζονται έγιναν σε πλέγμα 100 θέσεων. Πραγματοποιήθηκαν και άλλες για ένα μεγάλο εύρος διαστάσεων του πλέγματος, χωρίς ωστόσο να παρατηρηθεί ποιοτική διαφορά στο αποτέλεσμα.
- Μόνιμη κατάσταση με μόνο μαύρα: Τέτοιες είναι οι περιπτώσεις  $b=0.5$ ,  $c=1.2$  και  $b=1.7$ ,  $c=3$ . Στη δεύτερη εμφανίζεται παροδικά, κατά τη διάρκεια του μεταβατικού φαινομένου, περιοδικότητα 2, η οποία δεν μπορεί να διατηρηθεί λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα του κανόνα.
- Μόνιμη κατάσταση με μόνο λευκά (περίπτωση με  $b=0.3$ ,  $c=1.1$ ): Ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων το μεταβατικό στάδιο έχει διάρκεια που ποικίλει. Μπορεί να σχηματιστούν επίσης παροδικές

περιοδικότητες που ο στοχαστικός χαρακτήρας του μοντέλου δεν τους επιτρέπει να διατηρηθούν. Στο αντίστοιχο ντετερμινιστικό παρουσιάζονται και περιοδικές, με περίοδο 2, λύσεις.



$b=0.1, c=1.1$



$b=0.3, c=1.1$



$b=0.5, c=2$



$b=1.7, c=3$

**Εικόνα 17.** Πλέγμα 100 θέσεων, 100 επαναλήψεις, πιθανότητα μίμησης του καλύτερου  $p=0.9$ , τυχαίες αρχικές συνθήκες (50% σε κατάσταση 1, 50% σε κατάσταση 0)

Οι προσομοιώσεις που παρουσιάστηκαν έγιναν σε πλέγμα 100 θέσεων. Πραγματοποιήθηκαν και άλλες για ένα μεγάλο εύρος διαστάσεων του πλέγματος, χωρίς ωστόσο να παρατηρηθεί ποιοτική διαφορά στο αποτέλεσμα.

### 3.1.2 Δισδιάστατο πλέγμα

Στην περίπτωση δισδιάστατου πλέγματος η γειτονιά που θα θεωρήσουμε για κάθε agent θα είναι Neumann περιοχή ακτίνας 1. Το συνολικό κέρδος καθενός είναι το άθροισμα των κερδών του από τα game που αναπτύσσονται μεταξύ του ιδίου και καθενός από τους γείτονές του. Η επόμενη κατάστασή του είναι η κατάσταση του πιο επιτυχημένου στο προηγούμενο βήμα γείτονά του.

Ο κανόνας που χρησιμοποιούμε είναι πολύ απλός και αυτό στη μονοδιάστατη περίπτωση οδήγησε σε πολύ απλή συμπεριφορά. Παρόλο το στοχαστικό χαρακτήρα του μοντέλου είχαμε πολύ γρήγορα μετάβαση στη μόνιμη κατάσταση, η οποία επιπλέον δεν είχε κάποια πολυπλοκότητα. Όταν περάσουμε σε πλέγμα δύο διαστάσεων τα πράγματα γίνονται πολύ πιο ενδιαφέροντα. Έχουμε πολύ πλούσια συμπεριφορά ανάλογα και με την τιμή των διαφόρων παραμέτρων.

Οι προσομοιώσεις που παρουσιάζονται παρακάτω πραγματοποιήθηκαν για σταθερή τιμή των παραμέτρων  $a$  και  $d$  ( $a=1, d=0$ , το κέρδος όταν και οι δύο παίχτες είναι καλοί και όταν και οι δύο είναι κακοί αντίστοιχα). Μεταβάλλονται οι  $c, b$  (κέρδος «κακού» όταν αντιμετωπίζει «καλό» και αντίστροφα), καθώς και η πιθανότητα  $p$  με την οποία ο agent μιμείται τον πιο επιτυχημένο (διαφορετικά μένει στην ίδια κατάσταση).

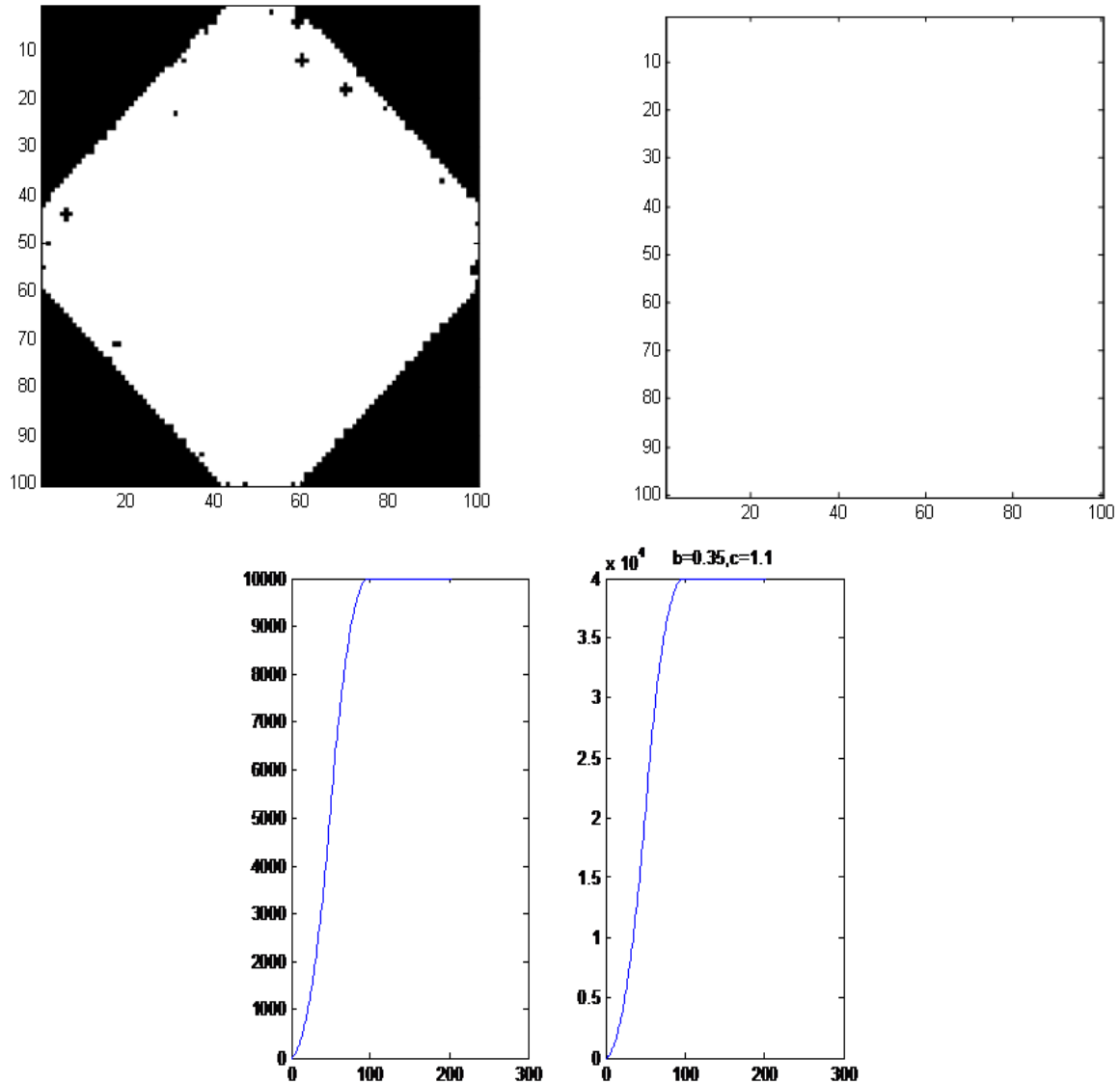
Στο μονοδιάστατο μοντέλο δεν πήραμε κάποιο περιορισμό για τις παραμέτρους και πραγματοποιήσαμε προσομοιώσεις για ένα μεγάλο εύρος τιμών. Εδώ οι παράμετροι θα ικανοποιούν τους εξής περιορισμούς, τους οποίους εισάγουμε για να διατηρηθεί η αντιστοιχία με το κλασικό Prisoner's Dilemma και το μοντέλο μας να ανταποκρίνεται σε κάποιου είδους κοινωνικό δίκτυο, όπου δημιουργείται ανταγωνισμός μεταξύ των διαφόρων ατόμων και υπάρχει ο μηχανισμός της μίμησης:

- $c > a$ : Που σημαίνει πως έχω μεγαλύτερο κέρδος αν στον ανταγωνισμό μου με έναν «καλό» έχω συμπεριφορά «κακού» από ότι όταν είμαι και εγώ «καλός»
- $b < a$ : Αυτό σημαίνει ότι το κέρδος μου, όταν συμπεριφέρομαι ως «καλός», είναι μεγαλύτερο όταν και ο γείτονας μου έχει την ίδια συμπεριφορά από ότι όταν διαφέρει.
- $2a > c + b$ : Αυτός ο περιορισμός εισάγετε για να δημιουργήσει μια ώθηση των agents προς «αλτρουιστική» συμπεριφορά, καθώς αν όλοι συμπεριφέρονται έτσι το συνολικό κέρδος θα είναι μεγαλύτερο. Το τελευταίο αυτό περιορισμό δεν θα τον τηρούμε πάντα.

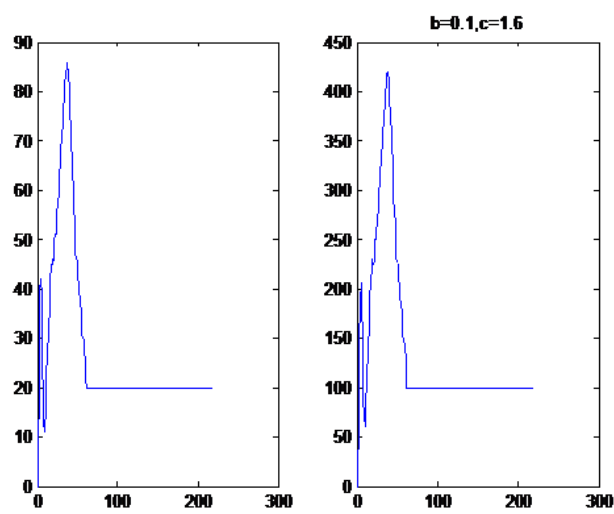
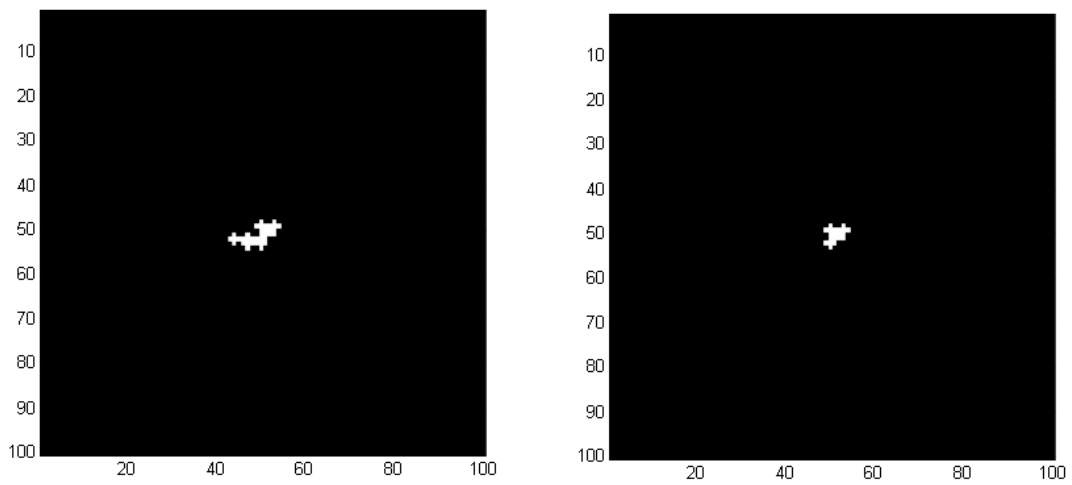
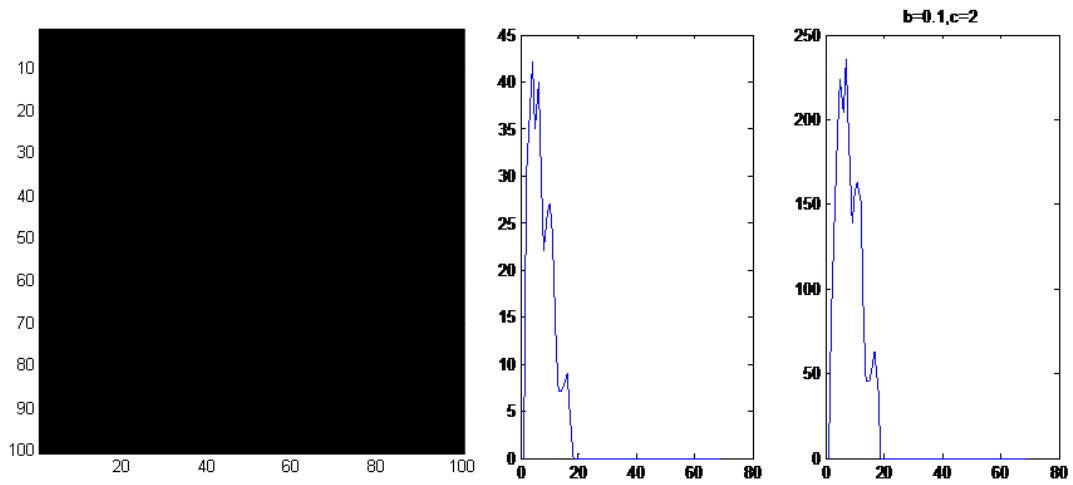
### Προσομοιώσεις με αρχικές συνθήκες μια ομάδα «καλών» στο κέντρο

Η πρώτη σειρά προσομοιώσεων πραγματοποιήθηκε για πλέγμα  $100 \times 100$  θέσεων και τιμή τις πιθανότητας μίμησης του καλύτερου γείτονα  $p=0.9$ . Αρχικά όλα τα pixels, με εξαίρεση μια τετραγωνική κοινότητα  $4 \times 4$  στο κέντρο, είναι

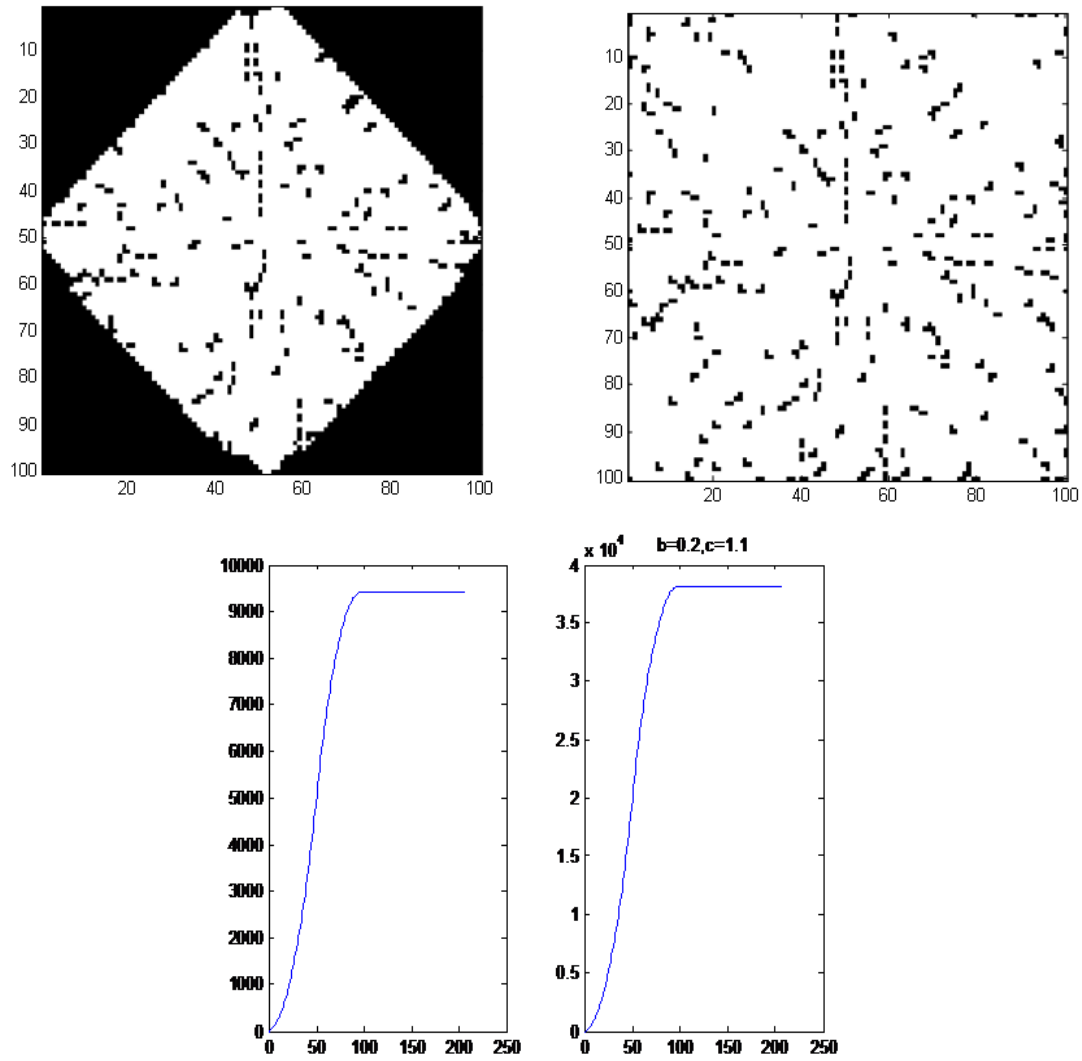
μαύρα. Σκοπός είναι να εντοπίσουμε αν και για ποιές τιμές των παραμέτρων είναι δυνατό αυτή η κοινότητα να επιβιώσει ή και να επεκταθεί, καθώς και οι δομές αυτές που επιτρέπουν την επιβίωσή της. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα και η «πολυπλοκότητα» της τελικής κατάστασης.



**Εικόνα 18.** Αρχικά έχουμε μια ομάδα 16 λευκών στο κέντρο. Οι τιμές των παραμέτρων είναι  $b=0.35$ ,  $c=1.1$ . Παρατηρούμε πως η γειτονιά των λευκών συνεχώς επεκτείνεται, ωστόσο έχουμε μόνιμη, ομογενή κατάσταση. Το συνολικό κέρδος είναι το μέγιστο δυνατό και η εξέλιξη του έχει μορφή ίδια με αυτή του αριθμού των λευκών.



**Εικόνα 19.** Και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις έχουμε εμφάνιση μόνιμη κατάστασης με πλειοψηφία μαύρους agents (στην πρώτη έχουμε ομογενή κατάσταση, ενώ στη δεύτερη μια μικρή κοινότητα λευκών καταφέρνει να επιβιώσει)



**Εικόνα 20.** Η αρχική κοινότητα των λευκών συνεχώς επεκτείνεται, ωστόσο δεν καταλαμβάνει όλο το πλέγμα καθώς και στη μόνιμη κατάσταση υπάρχουν και ορισμένοι μεμονωμένοι μαύροι. Το κέρδος είναι κοντά στο μέγιστο δυνατό

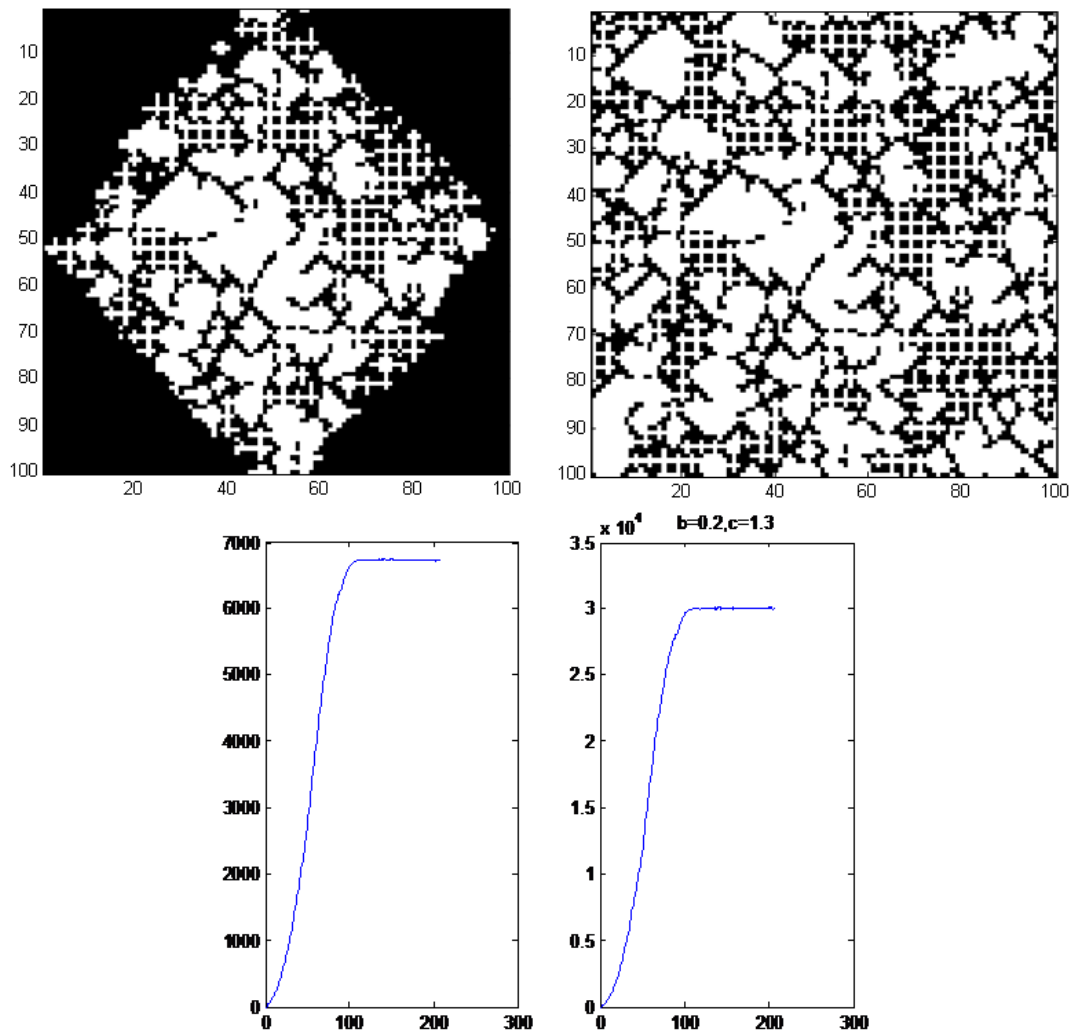
Σε καθεμιά από τις παραπάνω τετράδες εικόνων οι δύο εικόνες της πρώτης σειράς αντιστοιχούν σε απεικονίσεις του συστήματος μετά από 50 (αριστερά) και 200 (δεξιά) επαναλήψεις, ενώ τα διαγράμματα αντιστοιχούν στο συνολικό αριθμό των λευκών agents (αριστερά) και το συνολικό κέρδος-άθροισμα κερδών κάθε θέσης (δεξιά) ως συναρτήσεις του χρόνου.

Το κοινό όλων των παραπάνω περιπτώσεων είναι ότι, από κάποιο βήμα στην προσομοίωση και μετά, η εξέλιξη του συστήματος «παγώνει», μεταβαίνουμε δηλαδή σε μια κατάσταση ισορροπίας. Η κατάσταση αυτή βέβαια είναι πολύ διαφορετική για τις διάφορες περιπτώσεις. Στην πρώτη και τη δεύτερη έχουμε ομογενή κατάσταση με μόνο λευκούς και μόνο μαύρους αντίστοιχα. Οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, όμως είναι οι άλλες δύο. Στην τρίτη περίπτωση σχηματίζεται μια συνεκτική περιοχή από λευκούς agents που καταφέρνει να επιβιώσει περικυκλωμένη από αντιπάλους. Ο αριθμός των agents που περιέχει η κοινότητα αυτή στη μόνιμη κατάσταση είναι όσοι περίπου και οι αρχικά λευκοί. Κατά τη μεταβατική περίοδο, όμως, παρατηρούμε μια απότομη μεγάλη αύξησης του αριθμού αυτού που ακολουθείται από μια απότομη πτώση. Σε αυτήν όπως



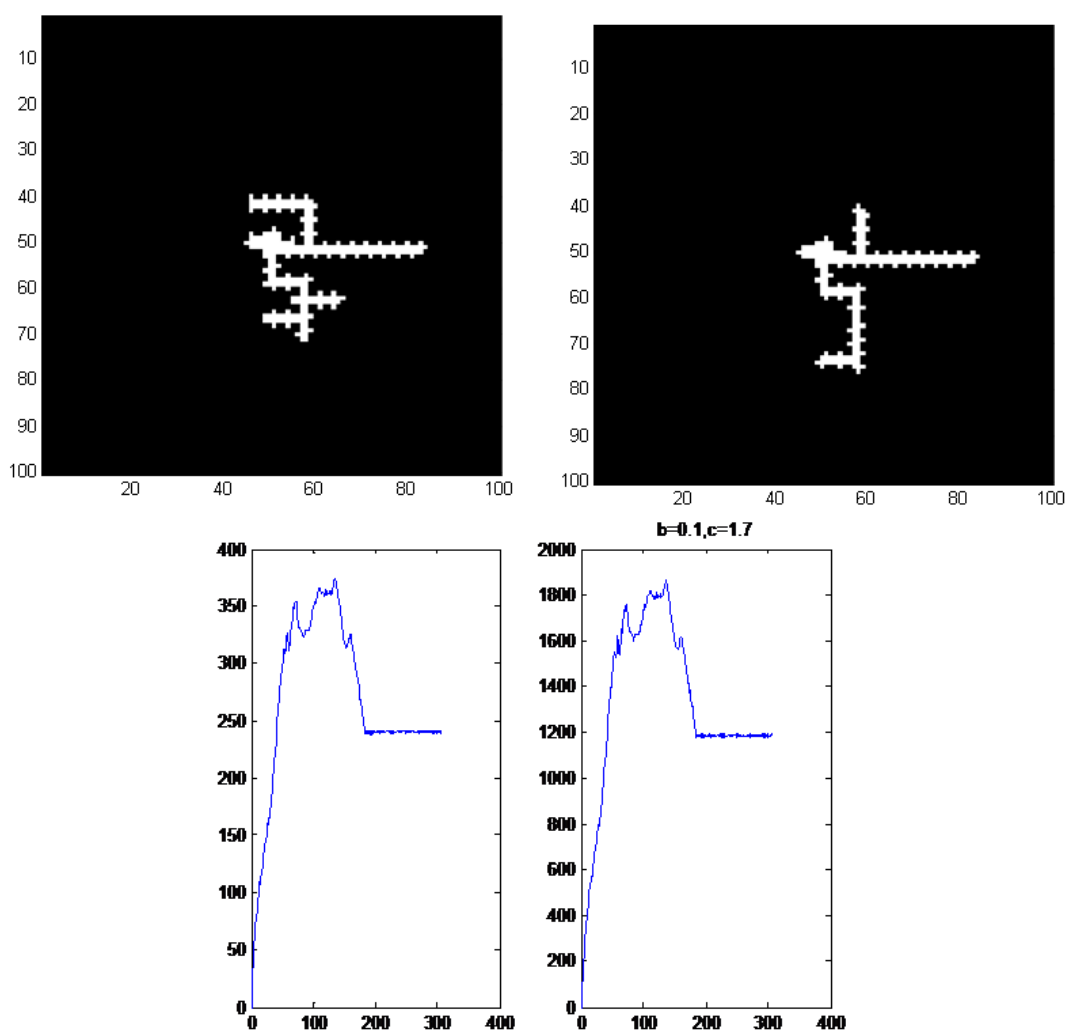
και στη δεύτερη περίπτωση έχουμε μεγάλη υπερύψωση, όσον αφορά των αριθμών των agents ενός είδους. Στη τέταρτη περίπτωση στη μόνιμη κατάσταση έχουμε στη πλειοψηφία λευκούς (80%). Η αύξηση του αριθμού τους κατά τη μεταβατική περίοδο είναι ομαλή (τουλάχιστον σε μεγάλη κλίμακα, γιατί λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα του μοντέλου θα υπάρχουν πριν τη μόνιμη κατάσταση μικρές αυξομειώσεις).

Επειδή όπως έχουμε πει το μοντέλο αυτό περιγράφει τον ανταγωνισμό ανάμεσα στους agents θα μπορούσε να αντιστοιχεί σε κάποιο οικονομικό ή κοινωνικό μοντέλο. Τότε οι παραπάνω περιπτώσεις, όπου οδηγούμαστε σε ισορροπία μετά από σύντομο μεταβατικό στάδιο, θα ήταν βέβαια επιθυμητές, αν το δούμε από την πλευρά ενός social engineer (γενικά, από το απλούστερο έως το πιο πολύπλοκο σύστημα, επιθυμούμε να υπάρχει απλή συμπεριφορά στη μόνιμη κατάσταση και όχι χαοτικά φαινόμενα), ωστόσο δεν ανταποκρίνονται σε κάποιο πραγματικό σύστημα. Για άλλες τιμές των παραμέτρων παίρνουμε τελείως διαφορετική συμπεριφορά, όπως φαίνεται από τα επόμενα αποτελέσματα.



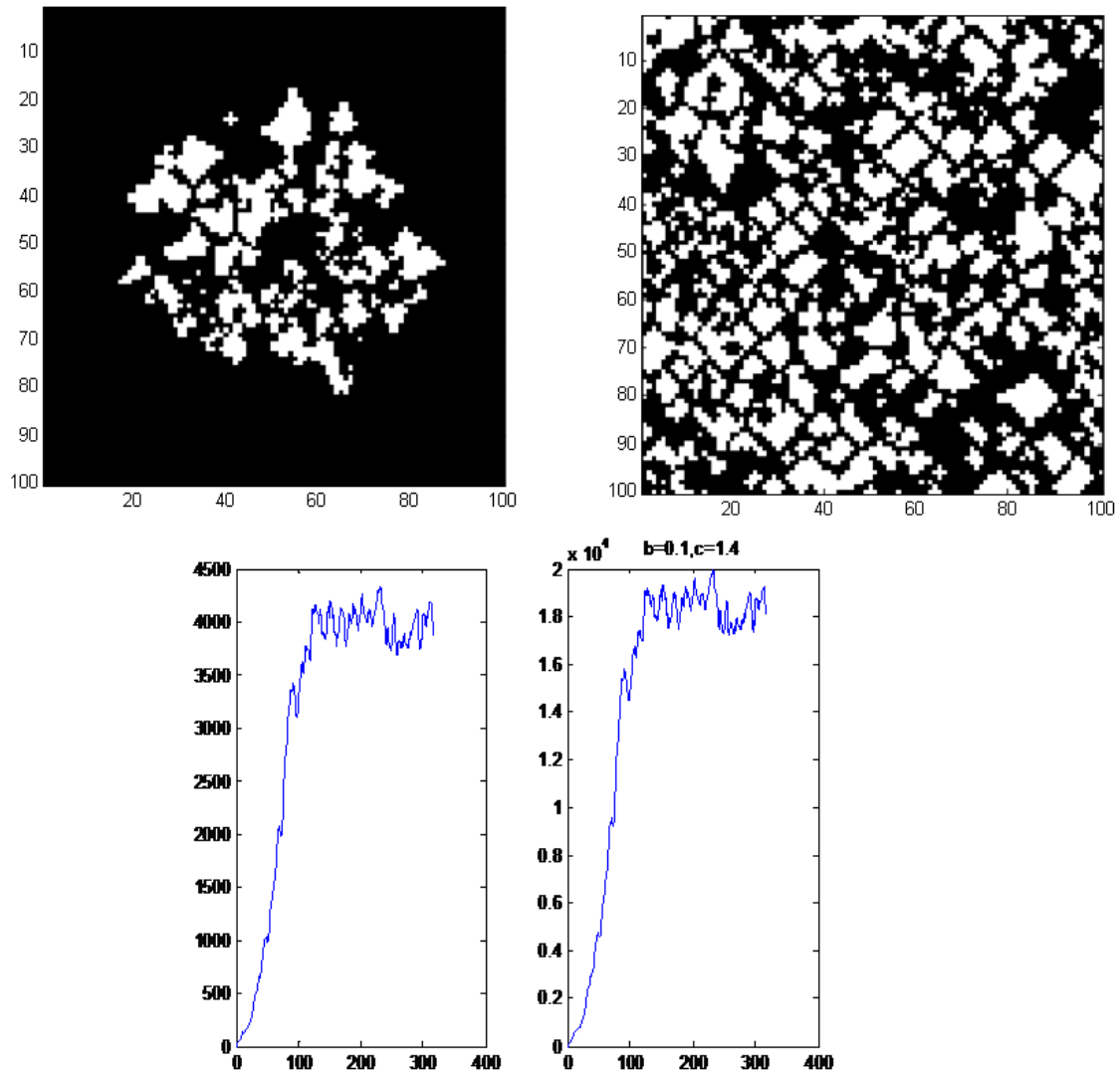
**Εικόνα 21.** Σε αυτή την περίπτωση ( $b=0.2, c=1.3$ ) δημιουργούνται ενδιαφέρουσες δομές. Έχουμε δημιουργία μεγάλων περιοχών με λευκούς (σα να οργανώνονται έτσι, ώστε να καταφέρουν να επιβιώσουν) στα σύνορα των οποίων υπάρχουν μαύροι.

Η παραπάνω συμπεριφορά είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα αν τη δούμε από κοινωνική άποψη. Μέσω του μηχανισμού της μίμησης οι πιο αδύναμοι λευκοί (αφού κερδίζουν λιγότερα στις αλληλεπιδράσεις με τους μαύρους) καταφέρνουν να επιβιώσουν σχηματίζοντας μεγάλες κοινότητες στα σύνορα των οποίων συγκεντρώνονται αντίπαλοι agents που επωφελούνται από τη γειτνίαση με τους λευκούς. Δεν δημιουργείται κάποια κατάσταση ισορροπίας (λόγω του στοχαστικότερος), αλλά έχουμε πολύ μικρές διακυμάνσεις.



**Εικόνα 22.** Δημιουργία μιας περιοχής λευκών ιδιαίτερου σχήματος. Στην αντίστοιχη αιτιοκρατική περίπτωση έχουμε συμμετρική επέκταση αυτής της κοινότητας και δημιουργείται ένα σχήμα σαν σταυρός

Η περίπτωση αυτή μοιάζει με την πρώτη με τη διαφορά ότι σχηματίζεται μόνο μια γειτονιά με ιδιαίτερο σχήμα. Η μεταβατική περίοδος έχει μεγάλη διάρκεια και σε αυτήν παρατηρούμε μεγάλες διακυμάνσεις στον αριθμό των λευκών agents.

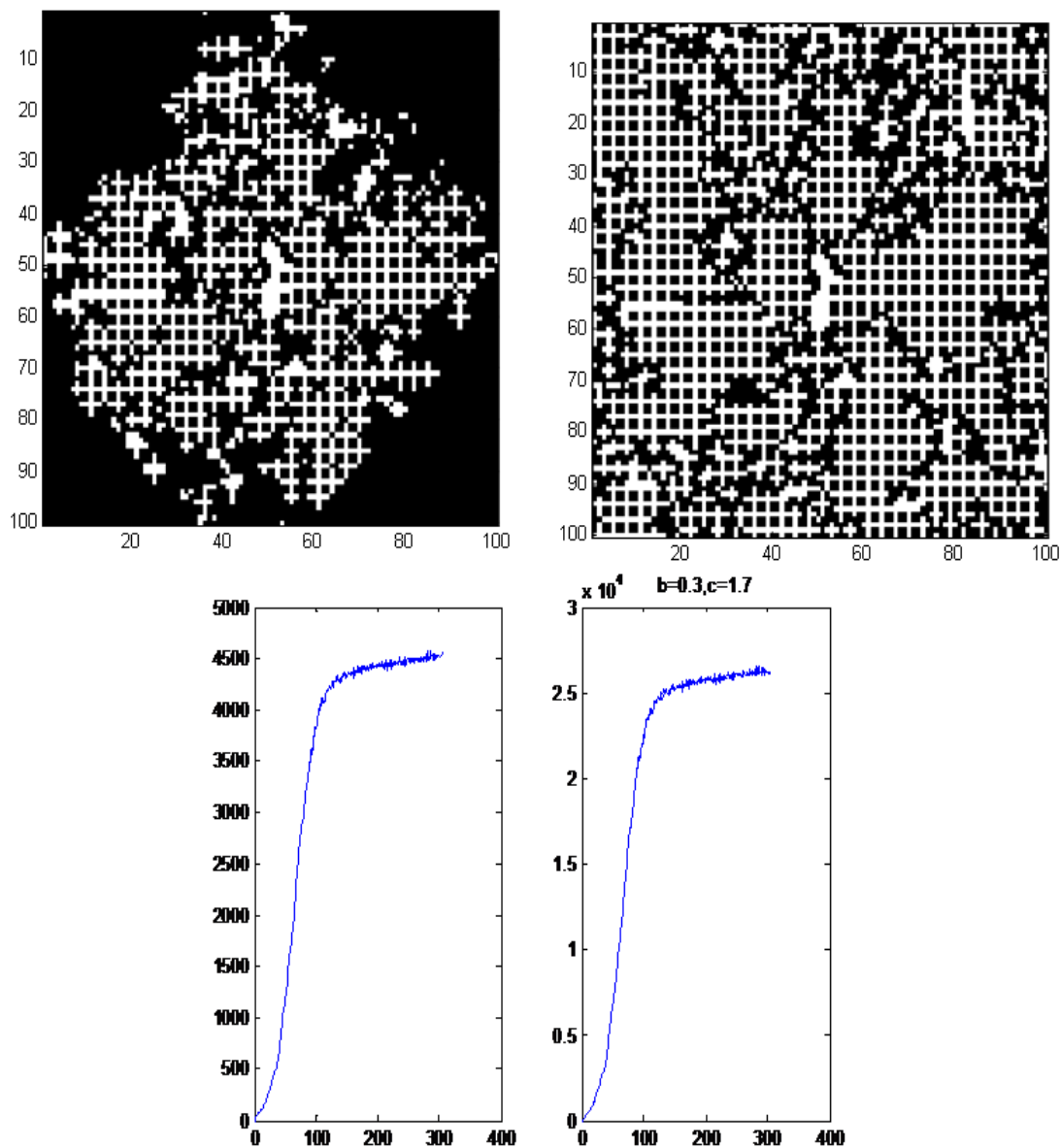


**Εικόνα 23.** Έχουμε πάλι δημιουργία κοινοτήτων αλλά σε αυτή την περίπτωση, όχι μόνο από τους λευκούς, αλλά και από τους μαύρους. Επίσης τώρα δεν έχουμε εμφάνιση μόνιμης κατάστασης, όπως φαίνεται και από τα διαγράμματα του κέρδους και του αριθμού των λευκών agents, το μέγεθος των περιοχών αυτών μεταβάλλεται συνεχώς χωρίς να εμφανίζει κάποια περιοδικότητα

Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα από δύο απόψεις. Πρώτον, με αναφορά στα κοινωνικά μοντέλα, μπορούμε να πούμε πως για αυτή την επιλογή των παραμέτρων ευνοείται ο σχηματισμός κοινοτήτων από agents του ίδιου είδους. Η αρχική κοινότητα εξελίσσεται δημιουργώντας νέες, ενώ ταυτόχρονα και το άλλο είδος οργανώνεται σε κοινότητες.

Δεύτερον δε φτάνουμε σε κατάσταση ισορροπίας, αλλά έχουμε συνεχώς έντονες διακυμάνσεις στον πληθυσμό του κάθε είδους, χωρίς ωστόσο να επηρεάζεται η δομή με βάση τις κοινότητες που είπαμε. Απλώς μεταβάλλεται το μέγεθός τους.

Άρα μπορούμε να πούμε πως δημιουργούνται δομές λόγω της αυτοοργάνωσης των agents, οι οποίες μάλιστα είναι δυναμικές και ανταποκρίνονται, ποιοτικά έστω, στην διαδικασία εξέλιξης μιας κοινωνίας.

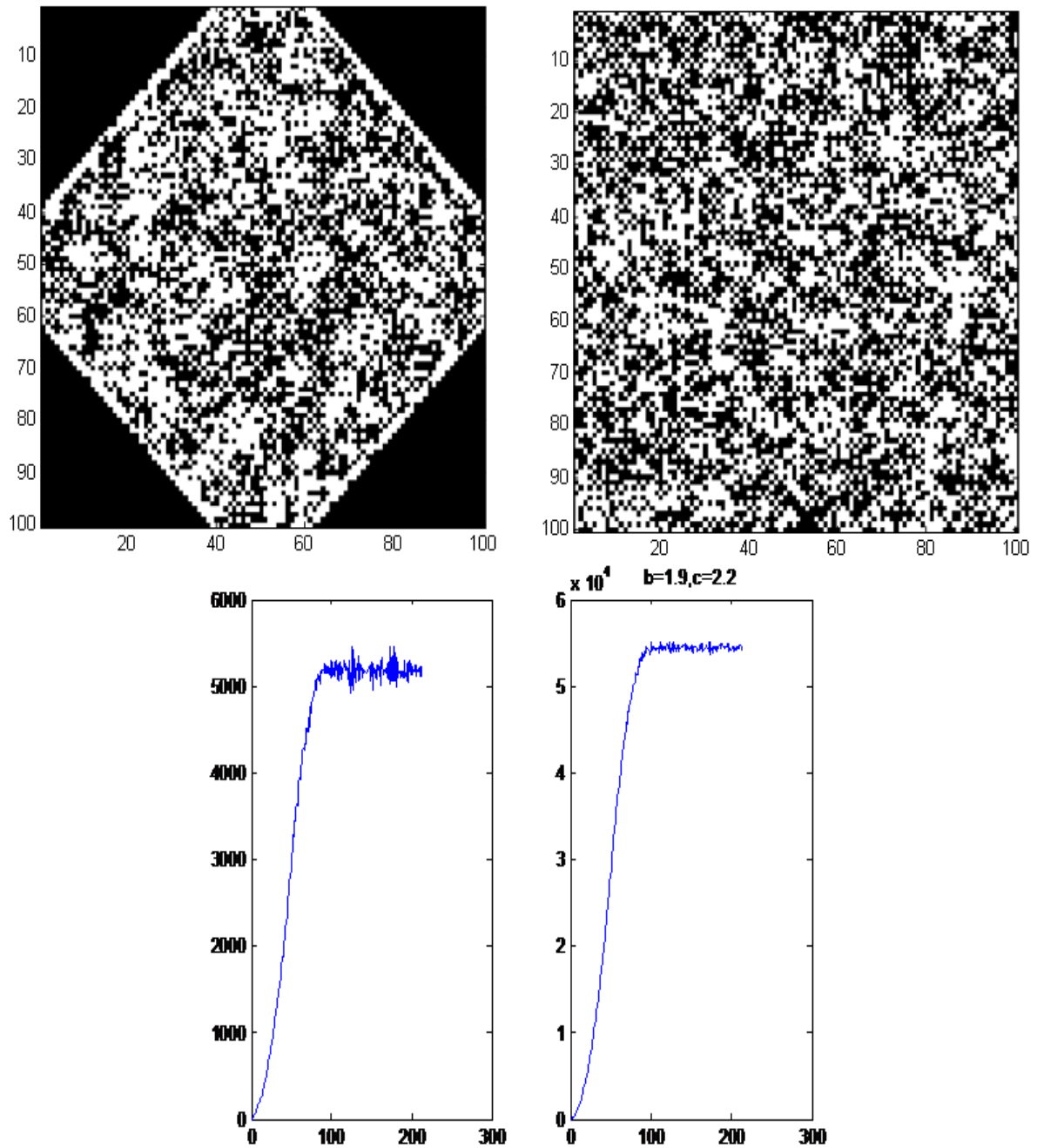


**Εικόνα 24.** Έχουμε δημιουργία μιας σχεδόν συμμετρικής δομή πλέγματος. Μισοί agents λευκοί, μισοί μαύροι. Στην αιτιοκρατική περίπτωση η συμμετρία είναι απόλυτη

Και σε αυτή την περίπτωση αναπτύσσεται κάποιου είδους δομή. Μόνο που τώρα οι κοινότητες που σχηματίζονται είναι μικτές και τείνουν να επεκταθούν καταλαμβάνοντας όλο το χώρο του πλέγματος. Μάλιστα η δομή αυτή οργάνωσης είναι ευσταθής.

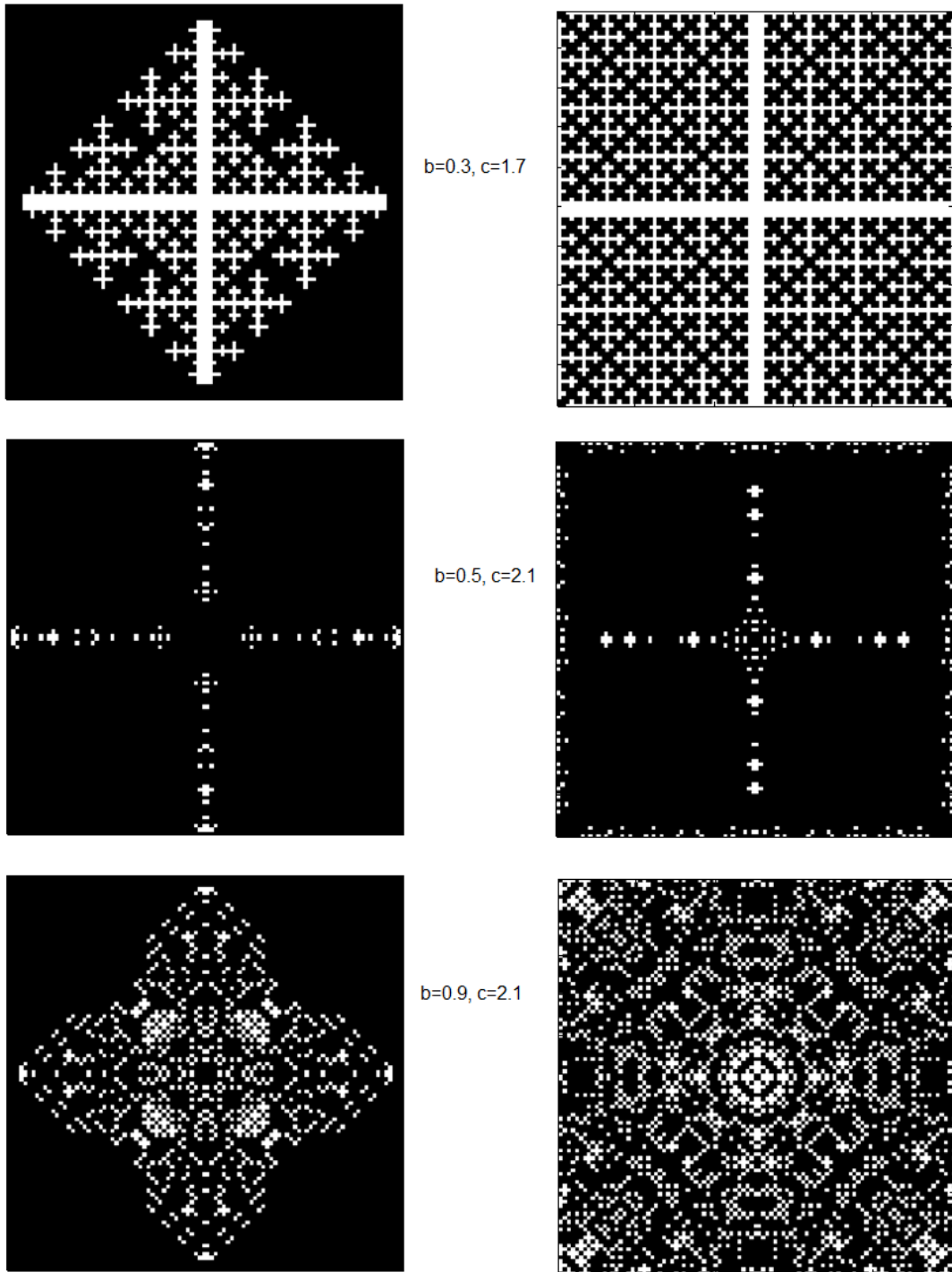
Η τελευταία περίπτωση είναι αυτή στην οποία το σύστημα παρουσιάζει την πιο περίπλοκη δυναμική. Οι agents είναι περίπου μισοί λευκοί-μισοί μαύροι, μετά το μεταβατικό φαινόμενο. Υπάρχουν ωστόσο συνεχώς διακυμάνσεις οι οποίες δεν εμφανίζουν περιοδικότητα. Επίσης η συνολική εικόνα του συστήματος μοιάζει

να είναι τελείως τυχαία. Θα μπορούσαμε να πούμε επομένως πως σε αυτή την περίπτωση παρατηρούμε χαοτική συμπεριφορά στο σύστημα. Βέβαια αυτό δεν είναι σωστό, γιατί αφενός εξ ορισμού το χάος αφορά ντετερμινιστικά συστήματα, ενώ το μοντέλο μας είναι στοχαστικό. Αφετέρου, είναι επίσης χρήσιμο να αναφέρουμε πως, αν και πολλές φορές αναφέρεται ότι η συμπεριφορά ενός συστήματος αποτελούμενου από κυτταρικά αυτόματα (αιτιοκρατικό έστω) είναι χαοτική, αυτό θεωρητικά δεν είναι σωστό. Αν  $m$  είναι οι δυνατές καταστάσεις που μπορεί να βρεθεί ένας agent και το πλέγμα έχει έστω  $n^2$  θέσεις, τότε οι δυνατές καταστάσεις που μπορούν να εμφανιστούν είναι  $m^{n^2}$ , δηλαδή πεπερασμένες. Άρα από ένα σημείο και μετά θα επαναλαμβάνονται οι ίδιες καταστάσεις και το σύστημα θα είναι περιοδικό (λόγω και του αιτιοκρατικού του χαρακτήρα). Αυτή η παρατήρηση αφορά ακόμα και συστήματα με άπειρες δυνατές καταστάσεις που όμως αναπαριστώνται σε υπολογιστή, άρα λόγω περιορισμών στη μνήμη πάλι θα έχουμε κάποια κβάντιση και άρα πεπερασμένες καταστάσεις. Επομένως θεωρητικά δεν μπορούμε να μιλάμε για χάος σε αυτές τις περιπτώσεις. Πρακτικά ωστόσο η περίοδος μπορεί να είναι πάρα πολύ μεγάλη οπότε, καθ' υπέρβαση έστω του ορισμού, μπορούμε να χαρακτηρίσουμε αυτή τη συμπεριφορά ως χαοτική.



**Εικόνα 25.** Η πιο ενδιαφέρουσα, από άποψη δυναμικής του συστήματος, περίπτωση. Η αρχική συμμετρική δομή μετά από ελάχιστα βήματα μετατρέπεται σε μια που μοιάζει τελείως τυχαία. Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε τη συμπεριφορά αυτή χαοτική (παρόλο που σε περιπτώσεις με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων δεν μπορούμε να έχουμε χάος παρά πολύ μεγάλες περιόδους)

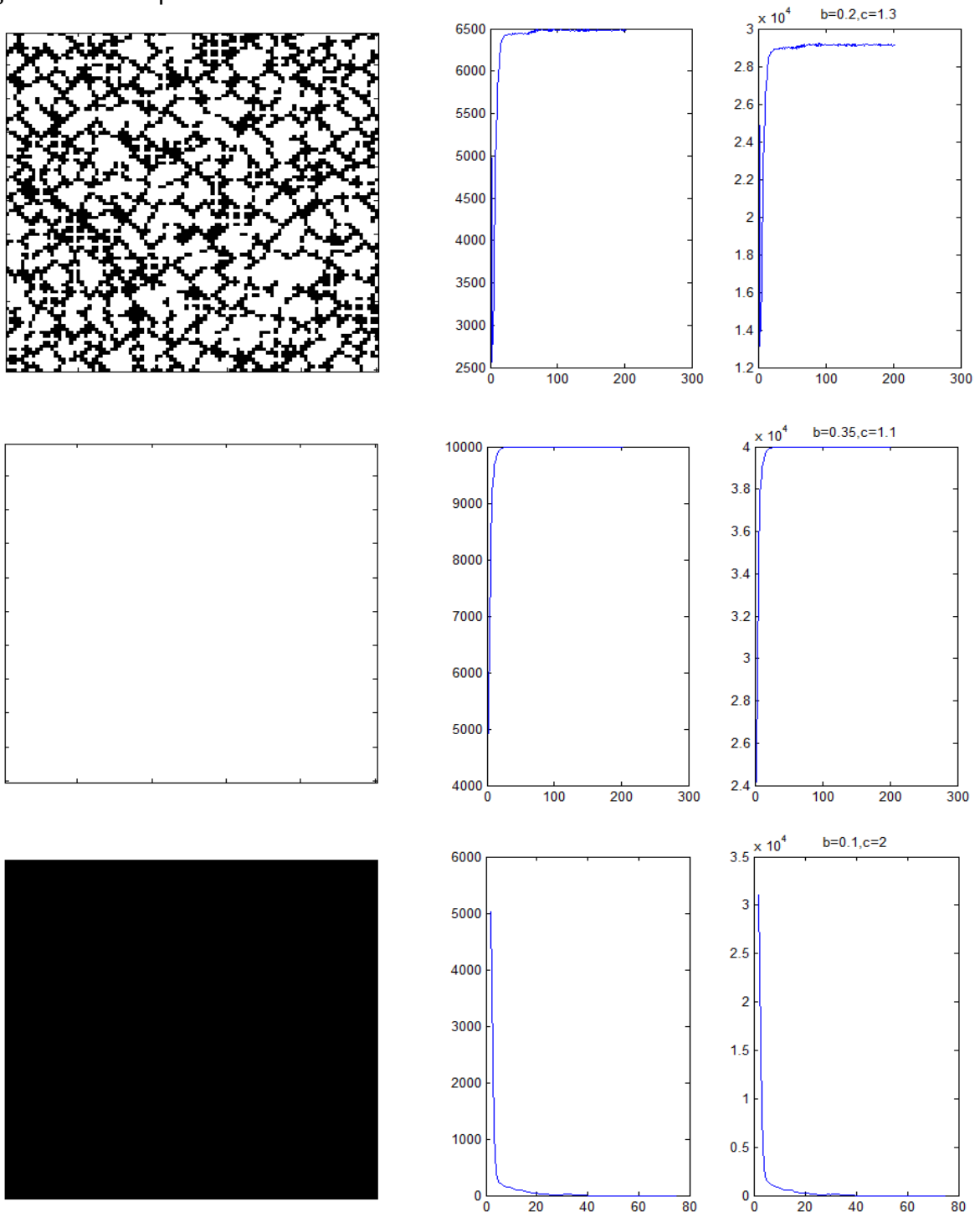
Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μερικά ενδιαφέροντα μοτίβα που προέκυψαν εφαρμόζοντας τον αντίστοιχο ντετερμινιστικό κανόνα ( $p=1$ ).



**Εικόνα 26.** Προσομοιώσεις για  $p=1$ , αριστερή στήλη μετά από 50 βήματα, δεξιά μετά από 200. Στις περιπτώσεις που ο κανόνας μας γίνεται αιτιοκρατικός μπορούν να εμφανιστούν πολύ ενδιαφέροντα συμμετρικά μοτίβα, η πολυπλοκότητα των οποίων ποικίλει με τις τιμές των παραμέτρων.

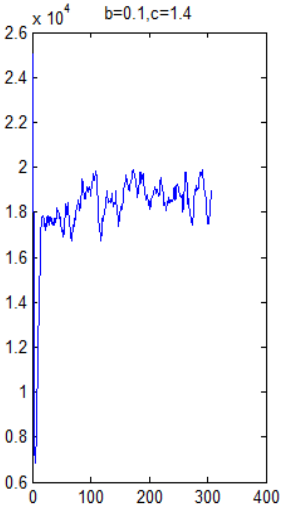
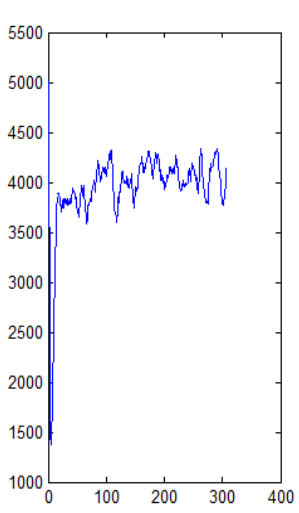
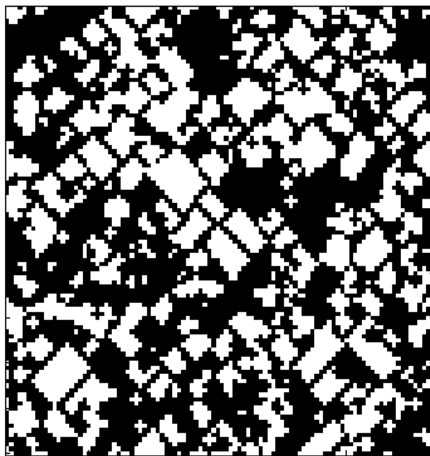
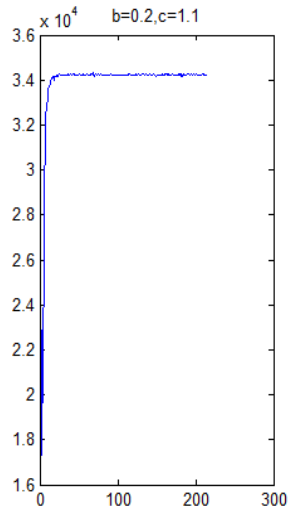
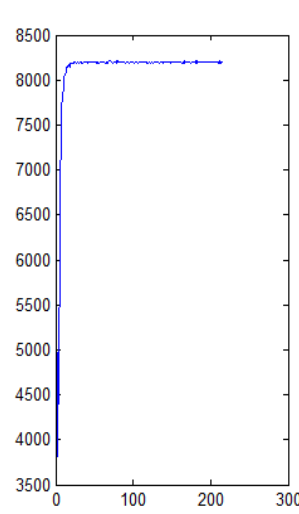
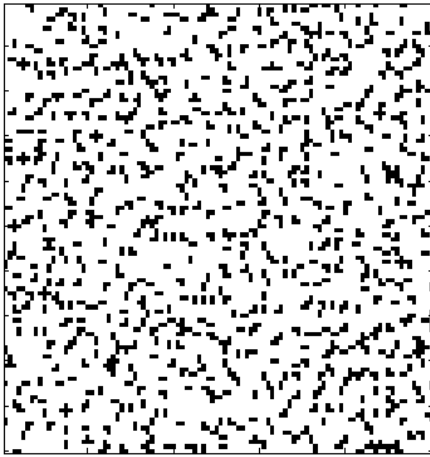
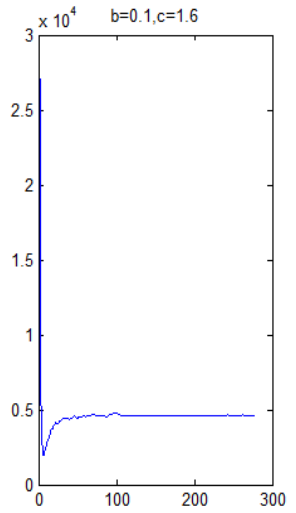
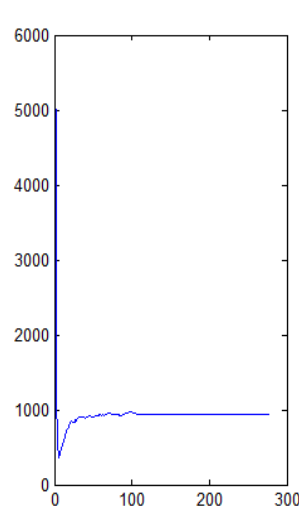
## Τυχαίες αρχικές συνθήκες

Στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε προσομοιώσεις με τυχαίες αρχικές συνθήκες (μισοί agents σε κάθε είδος) σε πλέγμα  $100 \times 100$  και με  $p=0.9$  πάλι. Όπως φαίνεται από τα αποτελέσματα παρακάτω, η συμπεριφορά του συστήματος είναι, για τις ίδιες τιμές των παραμέτρων  $b$  και  $c$ , η ίδια και στην περίπτωση τυχαίων αρχικών συνθηκών και στη περίπτωση ύπαρξης μιας ομάδας λευκών agents στο κέντρο.



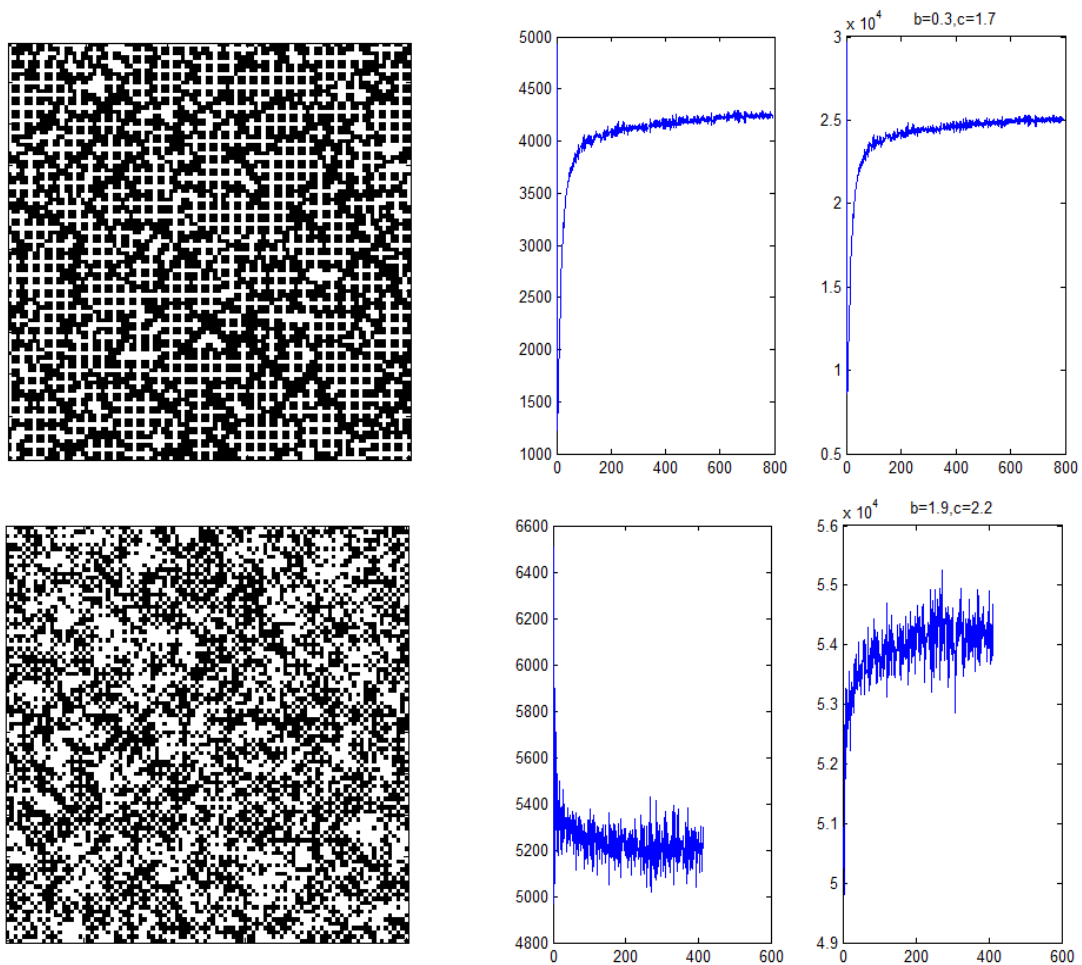
**Εικόνα 27.** Τρεις διαφορετικές τελικές καταστάσεις για τυχαίες αρχικές συνθήκες. Στην πρώτη έχουμε συνύπαρξη λευκών-μαύρων και οι άλλες δύο είναι ομογενείς.





**Εικόνα 28.** Το κοινό των παραπάνω αποτελεσμάτων είναι ότι στην τελική κατάσταση έχουμε συνύπαρξη agents και των δύο ειδών οι οποίοι οργανώνονται σε κοινότητες. Στην πρώτη δημιουργούνται κοινότητες λευκών (ιδιαίτερου σχήματος) και σύντομα έχουμε μετάβαση στην τελική κατάσταση (χωρίς καμία επιπλέον μεταβολή). Στη δεύτερη έχουμε πλειοψηφία λευκών και στην τρίτη σχηματίζονται μεγάλες περιοχές με ομοειδείς agents, το μέγεθος των οποίων μεταβάλλεται συνεχώς (δεν υπάρχει τελική κατάσταση με την αυστηρή έννοια αλλά μόνο ποιοτικά). Και στις τρεις περιπτώσεις η «τελική κατάσταση»

είναι αντίστοιχη με την περίπτωση που είχαμε διαφορετικές αρχικές συνθήκες (κοινότητα λευκών στο κέντρο).



**Εικόνα 29.** Στην πρώτη περίπτωση πολύ σύντομα έχουμε μετάβαση σε μια τελική κατάσταση με διαδοχικούς λευκούς και μαύρους agents. Αν και λόγω της στοχαστικότητας του κανόνα έχουμε συνεχώς μεταβολές, ποιοτικά δεν αλλάζει τίποτα. Η δεύτερη περίπτωση μπορεί, όπως και πριν, να χαρακτηριστεί χαοτική.

Μάλιστα στην περίπτωση τυχαίων συνθηκών, όπως προκύπτει και με παρατήρηση του διαγράμματος του αριθμού των λευκών ως προς το χρόνο, ο αρχικός αριθμός τους (5000) μειώνεται απότομα για κάποια βήματα και μετά ακολουθεί παρόμοια εξελικτική πορεία με την πρώτη περίπτωση αρχικών συνθηκών. Η αρχικά τυχαία δομή δεν επιτρέπει την ανάπτυξη των «καλών» οι οποίοι και συγκεντρώνονται σε μικρές κοινότητες οι οποίες αποτελούν τους πυρήνες από όπου θα ξεκινήσει η δημιουργία των τελικών διατάξεων στο σύστημα.

Όταν έχουμε αιτιοκρατικά κυτταρικά αυτόματα η αρχική κατάσταση επηρεάζει έντονα την εξέλιξη του συστήματος. Για συμμετρικές αρχικές συνθήκες παρατηρούμε τη δημιουργία συμμετρικών patterns, η πολυπλοκότητα των οποίων ποικίλει για τις διάφορες τιμές παραμέτρων. Για τυχαίες αρχικές συνθήκες οι καταστάσεις που παρατηρούνται είναι τελείως διαφορετικές. Στον κανόνα μας έχουμε εισάγει τυχαιότητα επιτρέποντας σε κάθε agent, αφού

αποφασίσει ποιος είναι ο καλύτερος-πιο επιτυχημένος- στη γειτονιά του (αυτή η απόφαση προκύπτει από μια καθαρά ντετερμινιστική διαδικασία, αφού θεωρούμε πως ο καθένας έχει ακριβή γνώση της κατάστασης των γειτόνων του) να ακολουθήσει και αυτός την ίδια συμπεριφορά με κάποια πιθανότητα  $p$  ( $<1$ ). Αυτή η συμπεριφορά, δηλαδή το να ακολουθείται με κάποια πιθανότητα η βέλτιστη απόφαση, συνηθίζεται στη θεωρία παιγνίων και χρησιμοποιείται από τους παίχτες για να εμποδίζουν τους αντιπάλους τους από το να ανακαλύψουν τη στρατηγική τους. Στα συστήματα που μελετάμε η εισαγωγή κάποιας τυχαιότητας έχει και ένα επιπλέον καλό. Αποτρέπει το σύστημα από το να «παγιδευτεί» σε μια ασταθή κατάσταση ισορροπίας στην οποία οδηγήθηκε ενδεχομένως λόγω ιδιαίτερων αρχικών συνθηκών. Η τυχαιότητα αυτή δρα ως διαταραχή στο σύστημα η οποία έχει ως αποτέλεσμα μόνο οι ευσταθείς καταστάσεις να εμφανίζονται μετά την πάροδο των μεταβατικών φαινομένων. Έτσι η συμπεριφορά του συστήματος δεν εξαρτάται –σημαντικά τουλάχιστον– από τις αρχικές συνθήκες. Μπορούμε καταλήγοντας να πούμε ότι η τυχαιότητα αυτή, αν και γενικά μπορεί να προτιμάμε να την αποφεύγουμε για να έχουμε πλήρη γνώση του συστήματος μας, βοηθάει να μας αποκαλυφθεί η δυναμική του.

### 3.1.3 Στατιστική μελέτη του κανόνα

Τα κυτταρικά αυτόματα, παρόλα τα πλεονεκτήματα και την ικανότητά τους να περιγράφουν πολύπλοκα συστήματα με απλούς κανόνες, ή και λόγω αυτής τους της ιδιότητας, εμφανίζουν μεγάλα προβλήματα όσον αφορά την ανάλυσή τους. Βέβαια από τη στιγμή που γνωρίζουμε τον κανόνα που καθορίζει τη συμπεριφορά των agents και την αρχική τους διάταξη έχουμε πλήρως καθορισμένο το σύστημα και τη συμπεριφορά του στο μέλλον. Ωστόσο, λόγω του τεραστίου πλήθους τους, οι υπολογισμοί θα γίνουν στον υπολογιστή. Αυτό δεν είναι καθόλου κακό και μάλιστα χωρίς τους υπολογιστές ελάχιστα πράγματα θα είχαν γίνει στον κλάδο αυτό.

Από την άλλη χρειαζόμαστε κριτήρια με χρήση των οποίων θα προβλέπεται η συμπεριφορά του συστήματος. Δεν μας ενδιαφέρει να εντοπίσουμε την ακριβή κατάσταση του συστήματος, αυτό πολύ πιο εύκολα μπορεί να γίνει με χρήση προσομοιώσεων σε υπολογιστή, αλλά κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά της. Οι ποιοτικές αλλαγές στη συμπεριφορά που παρατηρούνται για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων και για τον ίδιο κανόνα, για παράδειγμα η μετάβαση από μια στατική ή περιοδική κατάσταση σε μια «χαοτική», είναι αυτές που θέλουμε να εξηγήσουμε.

Ας ξεχάσουμε για λίγο τώρα το τι είδους σύστημα (κοινωνικό, οικονομικό) μπορεί να αναπαριστάται και ας σκεφτούμε ότι στις θέσεις του πλέγματος βρίσκονται μόρια. Τα μόρια αυτά αλληλεπιδρούν με τα γειτονικά τους και ανάλογα με τις τιμές που έχουμε επιλέξει για τις παραμέτρους, άλλοτε σχηματίζονται καταστάσεις που μοιάζουν να έχουν οργανωμένη δομή (αυτές θυμίζουν την κρυσταλλική δομή στα στερεά) και άλλοτε καταστάσεις που

μοιάζουν τυχαίες και μεταβάλλονται συνεχώς (μπορούμε να σκεφτούμε ότι τότε το υλικό βρίσκεται σε υγρή ή αέρια φάση). Άρα θα μπορούσαμε να συσχετίσουμε παραμέτρους του συστήματος με κάποιο μέγεθος, το οποίο το σκεφτόμαστε ως τη θερμοκρασία, με αλλαγές του οποίου το σύστημα περνά από τη μια φάση στην άλλη.

Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στο να χρησιμοποιήσουμε στοιχεία της στατιστικής φυσικής και να προσπαθήσουμε να ορίσουμε μεγέθη όπως θερμοκρασία, πίεση, εντροπία, για οποιοδήποτε σύστημα, και με χρήση αυτών των μεγεθών να προβλέψουμε και να αναλύσουμε τη συμπεριφορά και την πολυπλοκότητα των συστημάτων μας.

## Θερμοκρασία

Ας επανέλθουμε τώρα σε ένα κανόνα σαν αυτόν που εξετάσαμε παραπάνω, όπου κάθε agent επιλέγει πολιτική απέναντι στους αντιπάλους του στην προσπάθειά του να μεγιστοποιήσει το κέρδος του, που προκύπτει από τα game που παίζει με τους γείτονές του.

Αν συμβολίσουμε με  $s_i$  την κατάσταση του agent στη θέση  $i$  (θεωρούμε ότι μπορεί να πάρει τιμές 1-καλός και 0-κακός) το κέρδος του σε κάθε βήμα θα είναι:

$$G_i = \sum_{j \in N(i)} \{as_i s_j + bs_i(1 - s_j) + d(1 - s_i)(1 - s_j) + c(1 - s_i)s_j\}$$

Και το συνολικό κέρδος του συστήματος θα είναι το άθροισμα των κερδών των agents:

$$G_{tot} = \sum_i G_i = \sum_{i,j \in N(i)} \{as_i s_j + bs_i(1 - s_j) + d(1 - s_i)(1 - s_j) + c(1 - s_i)s_j\}$$

Αν σκεφτούμε τώρα πως για κάθε ζευγάρι γειτόνων σε κατάσταση 1 και οι δύο κερδίζουμε  $2a$ , για ζευγάρι 0-0 κερδίζουμε  $2d$ , ενώ για 1-0 το κέρδος είναι  $c+b$ , έχουμε:

$$G_{tot} = \sum_{i,j} \{2as_i s_j + 2d(1 - s_i)(1 - s_j) + (b + c)s_i(1 - s_j)\}$$

Όπου τώρα το άθροισμα είναι πάνω από όλα τα ζεύγη  $i,j$  γειτονικών agents (θεωρούμε, όπως και στον κανόνα που παρουσιάσαμε περιοχή Neumann ακτίνας 1). Μετά από πράξεις παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
G_{tot} &= \sum_{i,j} \{2as_i s_j + 2d(1 - s_j - s_i + s_i s_j) + (b + c)(s_i - s_i s_j)\} \\
&= \sum_{i,j} (2a + 2d - c - b)s_i s_j + \sum_i 2(c + b - 4d)s_i \\
&\quad + 2d(\#\alpha\kappa\mu\acute{\omega}\nu)
\end{aligned}$$

$$G_{tot} = 2an_{1-1} + 2dn_{0-0} + (c + b)n_{1-0}$$

Μπορούμε να ορίσουμε την ενέργεια του συστήματος ως μείον το συνολικό κέρδος. Αυτό το κάνουμε για να συσχετίσουμε την επιθυμία μας για μεγιστοποίηση του κέρδους στο σύστημα με την τάση των φυσικών συστημάτων προς τις καταστάσεις χαμηλότερης ενέργειας:

$$U = -J \sum_{i,j} s_i s_j - h \sum_i s_i, \text{ όπου } J = 2a + 2d - c - b \text{ και } h = 2(c + b - 4d)$$

Η ενέργεια αυτή μοιάζει με αυτή στο Ising μοντέλο με τη διαφορά ότι το  $h$  και το  $J$  είναι συσχετισμένα. Θεωρώντας σταθερά τα  $a$  και  $d$  παρατηρούμε πως μεγάλες τιμές για το  $h$  σημαίνει μικρές τιμές για το  $J$ .

Για πολύ μικρές τιμές των  $c$  και  $b$ , ο πρώτος όρος (το  $J$  θα είναι θετικό) θα οδηγήσει σε καταστάσεις με όλους τους agents του ίδιου χρώματος και μάλιστα λευκούς, για να ελαχιστοποιηθεί. Ο δεύτερος πάλι θα ελαχιστοποιείται αν μεγιστοποιηθεί ο αριθμός των λευκών. Άρα σε αυτή την περίπτωση ευνοείται ο σχηματισμός γειτονιών από λευκούς που είτε θα επεκταθούν και θα καλύψουν όλο το πλέγμα, είτε στα σύνορα των γειτονιών αυτών θα μαζευτούν agents του άλλου χρώματος. Σε αυτή την περίπτωση αντιστοιχούν οι δύο πρώτες προσομοιώσεις της παραπάνω παραγράφου.

Για πολύ μεγάλες τιμές τώρα των  $c$  και  $b$  ο πρώτος όρος ευνοεί τη δημιουργία ζευγών από μαύρους agents ή ζεύγη λευκού-μαύρου. Ο δεύτερος ελαχιστοποιείται αν έχουμε πολλούς λευκούς (σε μικτά ζεύγη όμως). Άρα σε αυτή την περίπτωση η δύο όροι ανταγωνίζονται και μπορεί να προκύψουν πολύ πιο πολύπλοκες καταστάσεις ανάλογα και με τη συγκεκριμένη τιμή των παραμέτρων. Σε αυτή την περίπτωση αντιστοιχεί η τελευταία προσομοίωση παραπάνω ( $b=1.9, c=2.2$ ) όπου επικρατούν τα ζεύγη από 0 και 1, και η περίπτωση  $b=0.1, c=2$  όπου έχουμε ομογενή κατάσταση με μόνο 0.

Όταν  $c + b = 2a + 2d = 2$  (αν πάρουμε  $a=1, d=0$  όπως παραπάνω) τότε μένει μόνο ο δεύτερος όρος στη συνάρτηση ενέργειας. Για να ελαχιστοποιηθεί πρέπει να έχουμε όσο το δυνατό περισσότερους λευκούς. Οι περισσότεροι όμως που μπορούμε να έχουμε είναι όσα τα ζεύγη 0-1. Άρα σε αυτή την περίπτωση ευνοείται η δημιουργία ζευγών από agents διαφορετικού χρώματος (προσομοίωση με  $b=0.3, c=1.7$  παραπάνω).

## Εντροπία

Ακολουθώντας την ανάλυση του Ising μπορούμε σε κάθε διάταξη να αντιστοιχίσουμε μια πιθανότητα που σχετίζεται με την ενέργειά της. Αυτή θα έχει τη μορφή:

$$P = \frac{1}{Z} e^{-\frac{U}{kT}}$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την εντροπία του συστήματος:

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{\omega} P(\omega) \ln(P(\omega)) = - \sum_{\omega} \frac{1}{Z} e^{-\frac{U}{kT}} \left( \ln\left(\frac{1}{Z}\right) - \frac{U}{kT} \right) \\ &= \frac{1}{Z} \ln Z \sum_{\omega} \underbrace{e^{-\frac{U}{kT}}}_{\frac{1}{Z}} + \frac{1}{kT} \sum_{\omega} U(\omega) P(\omega) = \ln Z + E\{U(\omega)\} \end{aligned}$$

Σχετίζεται επομένως άμεσα με τη μέση ενέργεια του συστήματος. Κάποιες ποιοτικές παρατηρήσεις που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι για μεγάλες τιμές του κέρδους, οπότε μικρή ενέργεια (πολύ αρνητική), η εντροπία θα είναι μικρή. Καθώς η τελευταία σχετίζεται με την τάξη που επικρατεί στο σύστημα, είναι επομένως ένα μέτρο της πολυπλοκότητάς του, μπορούμε να υποθέσουμε πως οι καταστάσεις αυτές έχουν μικρή αβεβαιότητα. Αυτό επαληθεύεται από τις πρώτες προσομοιώσεις, όπου η χαμηλή ενέργεια οφείλεται στην ύπαρξη σχεδόν κατά αποκλειστικότητα λευκών agents, οπότε αποτελούν πράγματι «απλές» καταστάσεις.

Βέβαια αυτός ο ορισμός της εντροπίας δεν είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός στο παράδειγμά μας. Έτσι στην περίπτωση που υπάρχουν μόνο μαύροι agents, συμμετρική κατάσταση της προηγούμενης και εξίσου απλή, η ενέργεια είναι μεγάλη (μικρό κέρδος). Σε αντίθεση στη τελευταία από της προσομοίωσης, την οποία όπως είπαμε μπορούμε να χαρακτηρίσουμε χαοτική –άρα έχει τη μεγαλύτερη πολυπλοκότητα από όλες τις περιπτώσεις που αντιμετωπίσαμε- η ενέργειά της είναι πολύ μικρή (η μικρότερη από όλες τις περιπτώσεις). Άρα χρειάζεται ένα καλύτερο και πιο σύνθετο μέτρο της πολυπλοκότητας. Ένα τέτοιο θα μπορούσε να είναι η τοπολογική εντροπία ([6], [10]), ωστόσο ο υπολογισμός της ακόμα και στη μονοδιάστατη περίπτωση δεν είναι εφικτός ([13]) –θα πρέπει να βρούμε μέτρα εξίσου αποτελεσματικά αλλά εύκολα υπολογίσιμα-, και δε θα μας απασχολήσει στη παρούσα εργασία.

### 3.2 Παραλλαγή του κανόνα, όπου τώρα η μίμηση γίνεται με μεταβλητή πιθανότητα

Η βασική ιδέα στον τοπικό κανόνα που καθορίζει τη μελλοντική κατάσταση είναι η ίδια, η μίμηση δηλαδή από κάθε agent του γείτονά του που συγκέντρωσε το μεγαλύτερο κέρδος την προηγούμενη χρονική στιγμή. Η πιθανότητα όμως με την οποία θα μιμηθεί την κατάσταση του γείτονά στην ενότητα αυτή

α) μεταβάλλεται σε κάθε βήμα

β) διαφέρει από θέση σε θέση στο πλέγμα και

γ) είναι διαφορετική ανάλογα με το αν η κατάσταση την οποία καλείται να μιμηθεί είναι 0 ή 1.

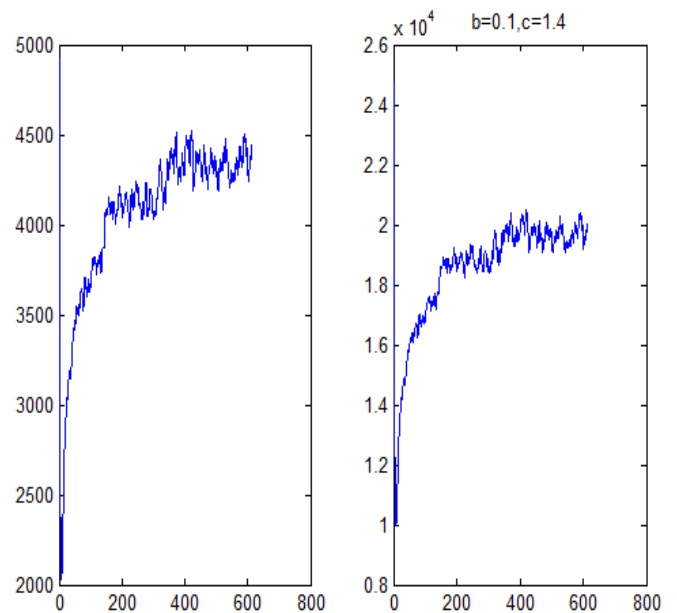
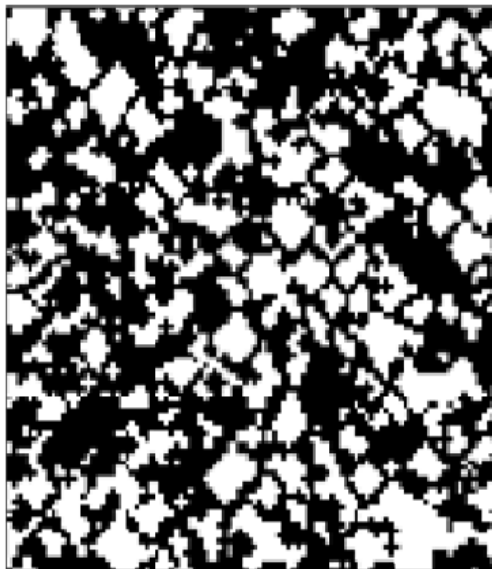
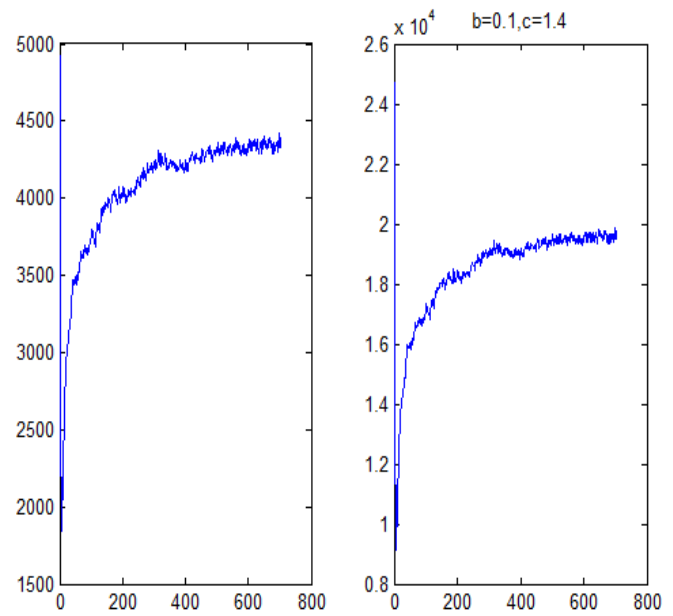
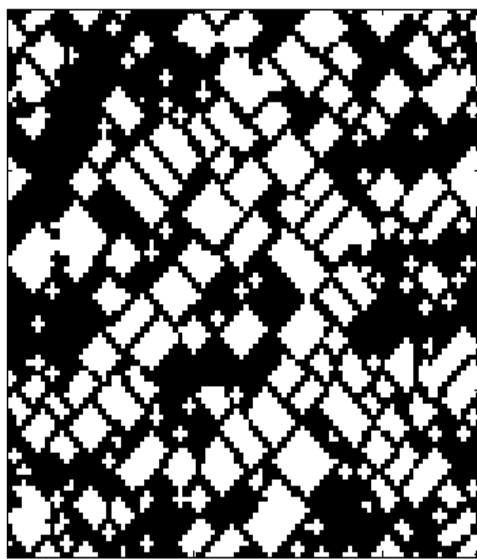
Ας συμβολίσουμε με  $p_{white}(i, j; t)$  και  $p_{black}(i, j; t)$  την πιθανότητα να μιμηθεί στο βήμα  $t$ , ο agent στη θέση  $(i, j)$ , τον πιο επιτυχημένο γείτονά του, όταν αυτός είναι λευκός ή μαύρος αντίστοιχα. Η διαδικασία μέσα από την οποία μεταβάλλονται αυτές οι πιθανότητες είναι η εξής:

- Αν ο πιο επιτυχημένος γείτονας του  $(i, j)$  τη στιγμή  $t$  είναι λευκός τότε:

$$\begin{aligned} p_{white}(i, j; t + 1) &= (1 + \varepsilon_{w1}) \cdot p_{white}(i, j; t) \\ p_{black}(i, j; t + 1) &= \varepsilon_{w2} \cdot p_{black}(i, j; t) \end{aligned}$$

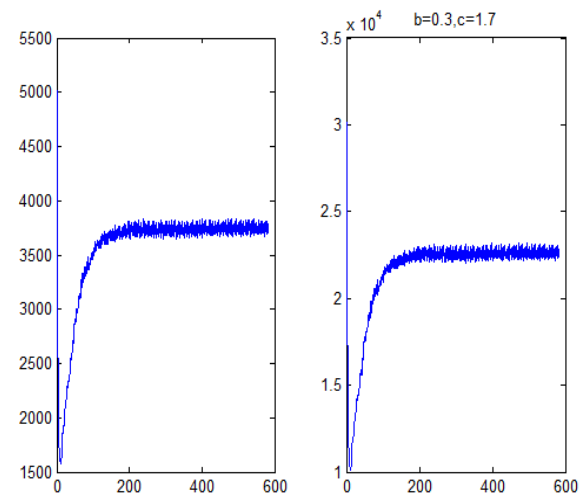
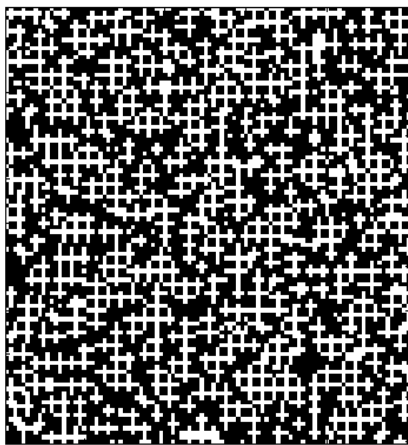
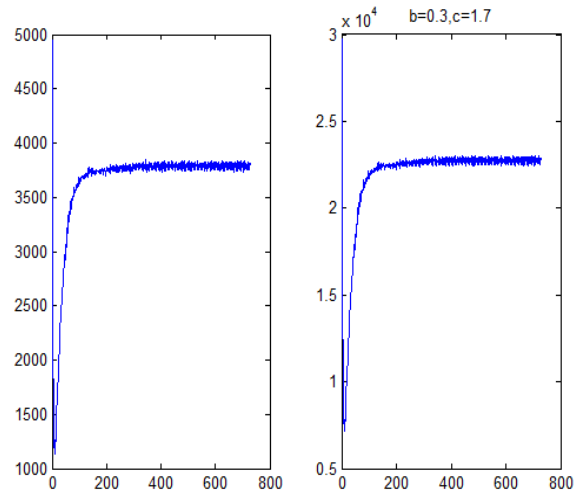
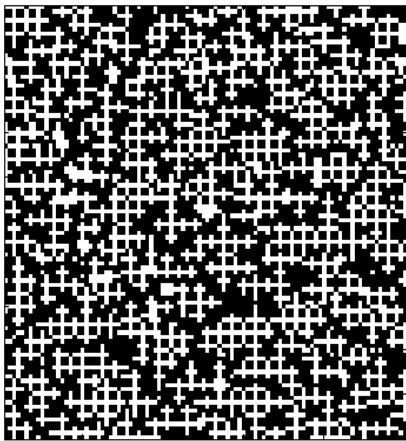
- Αν είναι μαύρος αντίστοιχα έχουμε:

$$\begin{aligned} p_{black}(i, j; t + 1) &= (1 + \varepsilon_{b1}) \cdot p_{black}(i, j; t) \\ p_{white}(i, j; t + 1) &= \varepsilon_{b2} \cdot p_{black}(i, j; t) \end{aligned}$$



**Εικόνα 30.** Αποτελέσματα προσομοιώσεων για  $b=0.1$ ,  $c=1.4$  και  $\epsilon=0.5$  (πρώτη γραμμή) και  $0.05$  (δεύτερη γραμμή). Η αρχική τυχαία συμπεριφορά των agents (μίμηση με πιθανότητα 0.5) βελτιώνεται μέσα από τη διαδικασία μάθησης και δημιουργούνται πάλι οργανωμένες κοινότητες. Ειδικά στην περίπτωση μεγάλου  $\epsilon$ , σχηματίζονται ευδιάκριτες περιοχές και οι μεταβολές από κάποιο βήμα και μετά είναι πολύ μικρές, σε αντίθεση με την περίπτωση σταθερής πιθανότητας μίμησης.





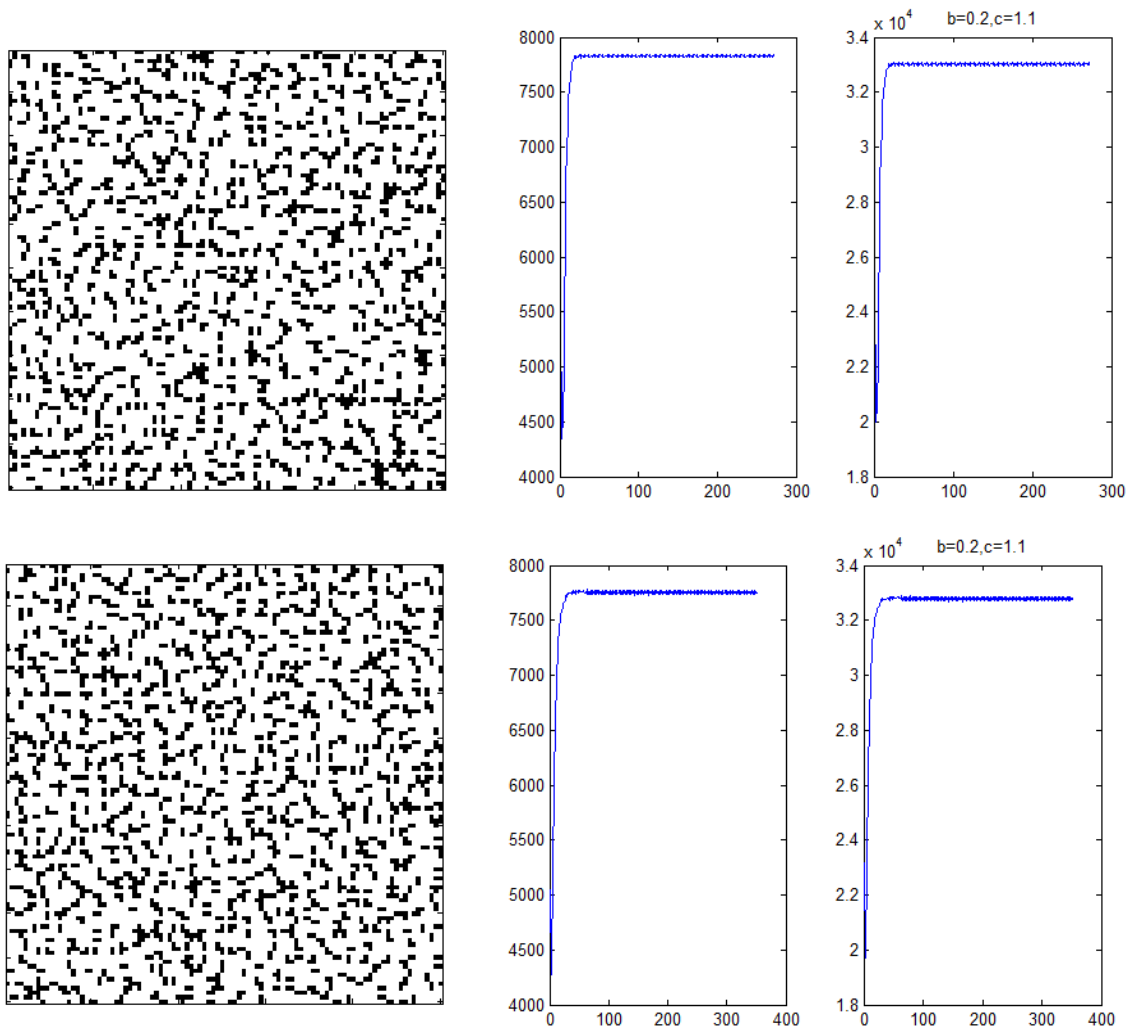
**Εικόνα 31.** Αποτελέσματα προσομοιώσεων για  $b=0.3$ ,  $c=1.7$  και  $\epsilon=0.5$  (πρώτη γραμμή) και  $0.05$  (δεύτερη γραμμή). Παρατηρούμε πως μέσω της διαδικασίας μάθησης επιτυγχάνεται η δημιουργία δομών ίδιων με την περίπτωση που η πιθανότητα μίμησης ήταν εξαρχής μεγάλη (και σταθερή). Στην περίπτωση μεγάλου  $\epsilon$  έχουμε πιο γρήγορη αποκατάσταση ισορροπίας.

Η λογική στην οποία στηρίζεται αυτός ο κανόνας είναι πως με αυτόν τον τρόπο δε θα έχουμε πολύ απότομες μεταβολές της κατάστασης του συστήματος. Ένας agent που έχει βρεθεί πολλές φορές στην κατάσταση 1, όταν θα προκύπτει αυτή ως καλύτερη θα την μιμείται με μεγαλύτερη πιθανότητα και με μικρότερη την κατάσταση 0. Έτσι θα υπάρχει μια τάση να μένει στη κατάσταση που έχει βρεθεί ήδη πολλές φορές. Η διαδικασία αυτή αποτελεί ένα μηχανισμό μάθησης των agents.

Για ευκολία –για να μειώσουμε τη διάσταση του χώρου των παραμέτρων και να μπορεί επομένως να διερευνηθεί- θεωρούμε τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \epsilon_{w1} &= \epsilon \\ \epsilon_{w2} &= 1 - 0.1\epsilon \\ \epsilon_{b1} &= 0.5\epsilon \\ \epsilon_{b2} &= 1 - 0.1\epsilon \end{aligned}$$

και μεταβάλλουμε το  $\varepsilon$ . Η επιλογή των παραμέτρων έγινε έτσι, ώστε να είναι ευκολότερη η μίμηση ενός agent που είναι στην κατάσταση 1 (λευκός).



**Εικόνα 32.** Αποτελέσματα προσομοιώσεων για  $b=0.2, c=1.1$  και  $\varepsilon=0.5$  (πρώτη γραμμή) και  $0.05$  (δεύτερη γραμμή). Έχουμε δημιουργία ίδιας ποιοτικά δομής με την περίπτωση σταθερής πιθανότητας. Ωστόσο τώρα ο συνολικός αριθμός των λευκών και το κέρδος στη μόνιμη κατάσταση είναι μικρότερα.

Όσον αφορά το συνολικό κέρδος του συστήματος δεν παρατηρούμε βελτίωσή του, αντίθετα μάλιστα.

Οι παραπάνω προσομοιώσεις πραγματοποιήθηκαν για αρχικές τιμές των πιθανοτήτων  $p_{white} = p_{black} = 0.5$  για κάθε agent. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $b=0.1, c=1.4$

Όταν  $\varepsilon=0.5$  τότε το κέρδος που επιτυγχάνεται είναι μεγαλύτερο από την περίπτωση με σταθερή πιθανότητα μίμησης. Οι περιοχές που σχηματίζονται είναι μεγαλύτερες και ξεκάθαρα διαχωρισμένες και από μια επανάληψη και μετά δεν μεταβάλλονται έντονα. Όταν  $\varepsilon=0.05$  (μικρή τιμή) τότε δε φαίνεται διαφορά από την περίπτωση σταθερής πιθανότητας. Η μεγάλη αρχικά τυχαιότητα στο σύστημα δεν μπορεί να αντισταθμιστεί, καθώς η βελτίωση μέσω μάθησης σε κάθε βήμα είναι μικρή.

- $b=0.3, c=1.7$

Δεν έχουμε ποιοτική διαφορά από την προηγούμενη περίπτωση. Ο χρόνος όμως μέσα στον οποίο το σύστημα μεταβαίνει σε μια «τελική» ευσταθή κατάσταση (φυσικά υπάρχουν συνεχώς μικρές αλλαγές λόγω του στοχαστικού χαρακτήρα) είναι πολύ μικρότερος, ειδικά στην περίπτωση με μεγάλο  $\varepsilon$ .

- $b=0.2, c=1.1$

Η διαδικασία της μάθησης εδώ δεν αποδίδει. Το συνολικό κέρδος τελικά είναι μικρότερο. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι σε περιπτώσεις όπως η συγκεκριμένη όπου φαίνεται εξαρχής ποιά τάση θα επικρατήσει (πλειοψηφία οι λευκοί) η διαδικασία μεταβολής απλώς καθυστερεί την εξέλιξη.

### 3.1.4 Παραλλαγή του κανόνα, όπου τώρα έχουμε μίμηση του agent με το μεγαλύτερο ως τώρα κέρδος συνολικά

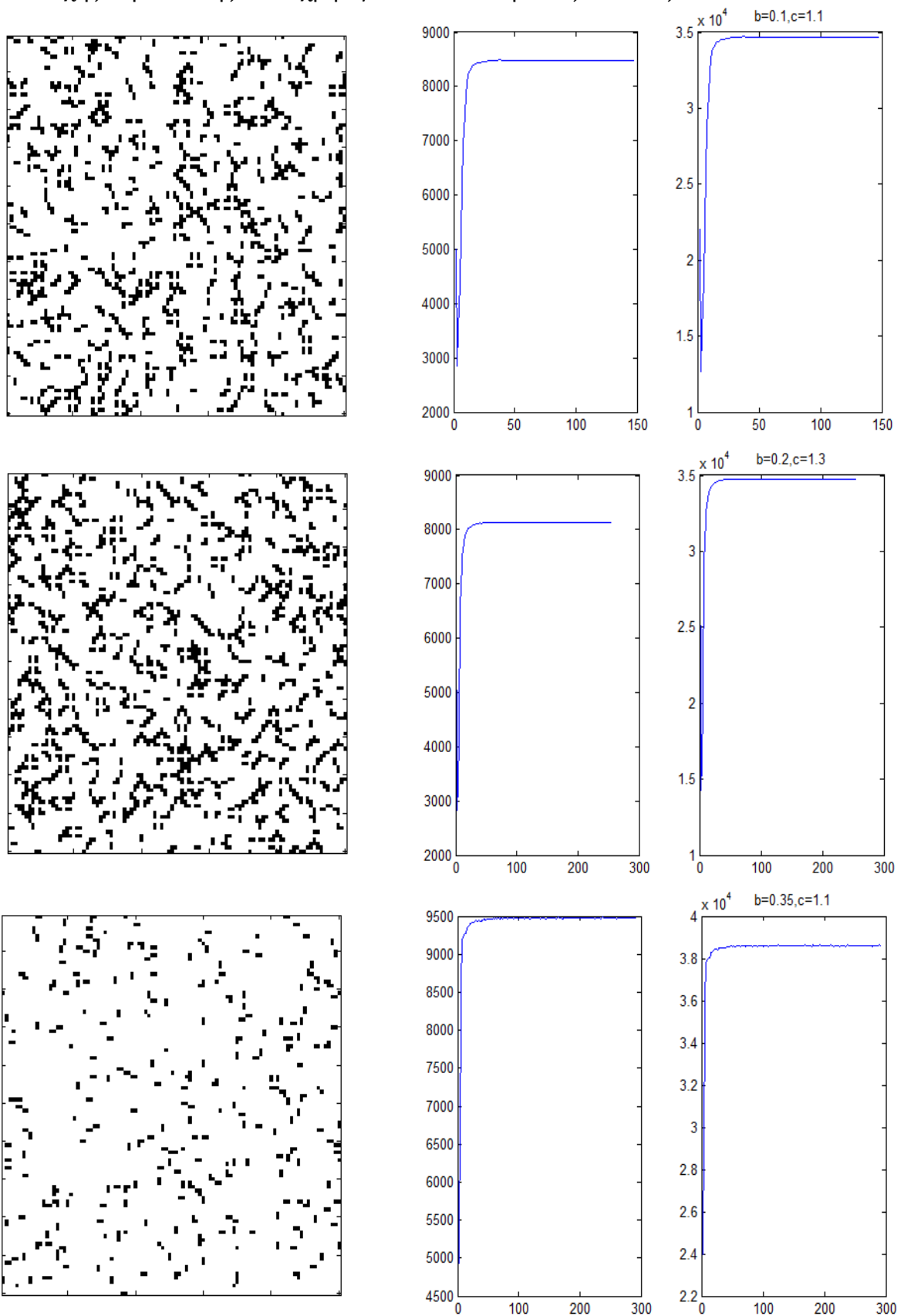
Στα συστήματα που μελετάμε σε αυτή την ενότητα κάθε agent θέλει να μεγιστοποιήσει το κέρδος του μέσα από την αλληλεπίδραση με τους γείτονές του. Ως τώρα η πολιτική που υιοθετήθηκε ήταν να παρακολουθεί ο καθένας τα κέρδη των γειτόνων του σε κάθε βήμα και την επόμενη χρονική στιγμή να μιμείται την κατάσταση του γείτονα του με το μεγαλύτερο κέρδος. Άρα κάθε κατάσταση εξαρτιόταν αποκλειστικά από την κατάσταση στο αμέσως προηγούμενο βήμα. Αυτή η στρατηγική οδήγησε σε διαφορετικές συμπεριφορές για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων  $b$  και  $c$ .

Αν θέσουμε ως κριτήρια για τον χαρακτηρισμό του κανόνα τη σταθερότητα ως προς τη μεταβολή των παραμέτρων, θέλουμε δηλαδή η τελική κατάσταση να είναι ποιοτικά ίδια ανεξαρτήτως των παραμέτρων, και τη μεγιστοποίηση του συνολικού κέρδους του συστήματος (άθροισμα των κερδών όλων των agents στο πλέγμα), μπορούμε να πούμε πως ο κανόνας της προηγούμενης παραγράφου δεν είχε ιδιαίτερα καλή συμπεριφορά. Η τελική κατάσταση έχει έντονη εξάρτηση από τα  $b$  και  $c$  (για τις διάφορες τιμές παρατηρήσαμε καταστάσεις με μόνο λευκούς, μόνο μαύρους, γειτονιές από λευκούς και άλλες από μαύρους, λευκούς στην πλειοψηφία με μικρές ομάδες μαύρων) και το κέρδος διαφέρει αρκετά για τις διάφορες αυτές περιπτώσεις. Στα κριτήρια αυτά οδηγούμαστε από την αντιστοιχία του συστήματός μας με ένα κοινωνικό δίκτυο στην οποία ήδη αναφερθήκαμε. Σε ένα τέτοιο σύστημα επομένως θα επιθυμούσαμε η εξέλιξη να μην εξαρτάται τόσο έντονα από τις παραμέτρους του περιβάλλοντος και το «κέρδος» της κοινότητας να μεγιστοποιείται. Υπό αυτό το πρίσμα μπορούμε να δικαιολογήσουμε και την όχι τόσο ικανοποιητική συμπεριφορά του πρώτου κανόνα.

Ο κανόνας που θα χρησιμοποιήσουμε τώρα διαφοροποιείται ποιοτικά από τον προηγούμενο στο γεγονός ότι για να αποφασιστεί ποια κατάσταση είναι η επόμενη λαμβάνονται υποψιών κατά κάποιο τρόπο όλες οι προηγούμενες. Συγκεκριμένα τώρα ο κάθε agent μιμείται αυτόν που έχει το μεγαλύτερο συσσωρευμένο κέρδος μέχρι αυτή τη στιγμή –άθροισμα κερδών σε κάθε βήμα-. Αυτός ο κανόνας, από κοινωνικής τουλάχιστον άποψης, φαίνεται πιο αξιόπιστος. Το συνολικό κέρδος κάθε κόμβου είναι σχετικά μεγάλο και δεν θα το επηρεάσει έντονα κάποιο μικρό ή αντίθετα κάποιο μεγάλο κέρδος σε ένα βήμα, το οποίο μπορεί να προέκυψε και τυχαία. Η τάση που δημιουργείται είναι να γίνεται μίμηση αυτών οι οποίοι είναι πιο επιτυχημένοι διαχρονικά και όχι όσοι ευκαιριακά έκαναν κάποια επιτυχία.

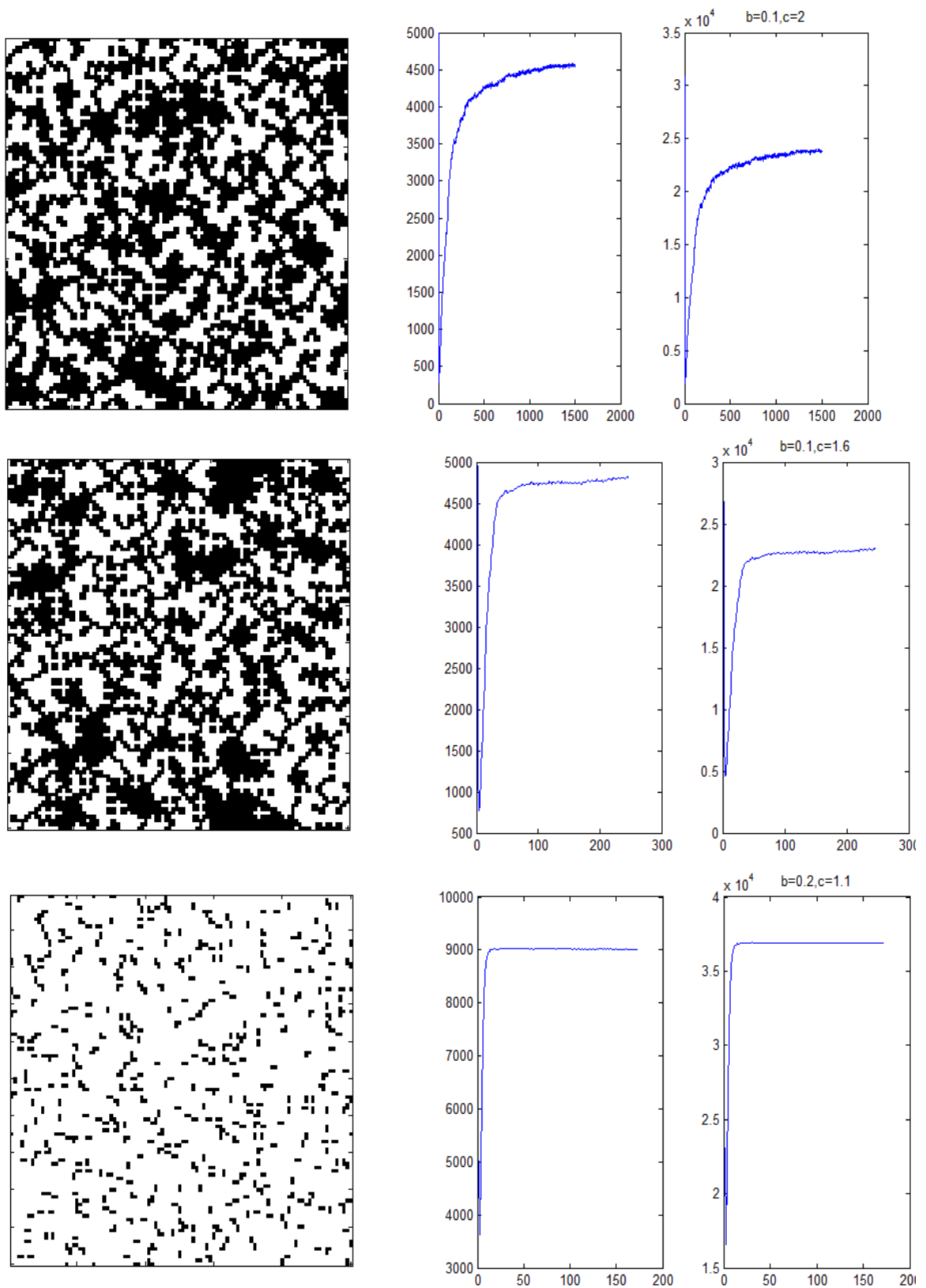
Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα προσομοιώσεων για τιμές των παραμέτρων  $b$  και  $c$  ίδιες με αυτές των προσομοιώσεων του πρώτου κανόνα για να μπορέσουμε να κάνουμε συγκρίσεις. Αυτό που έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον είναι πως τώρα για την πλειοψηφία ζευγών τιμών των παραμέτρων η τελική κατάσταση έχει την ίδια μορφή. Οι περισσότεροι agents είναι στην κατάσταση 1 ενώ πάντα παραμένουν και μερικοί στην κατάσταση 0, μεμονωμένοι ή σε μικρές ομάδες, των οποίων ο αριθμός ποικίλει. Το κέρδος είναι, στις περισσότερες

περιπτώσεις, κοντά στο μέγιστο δυνατό (30000-35000) και μεγαλύτερο της αντίστοιχης περίπτωσης όπου χρησιμοποιείται ο πρώτος κανόνας.



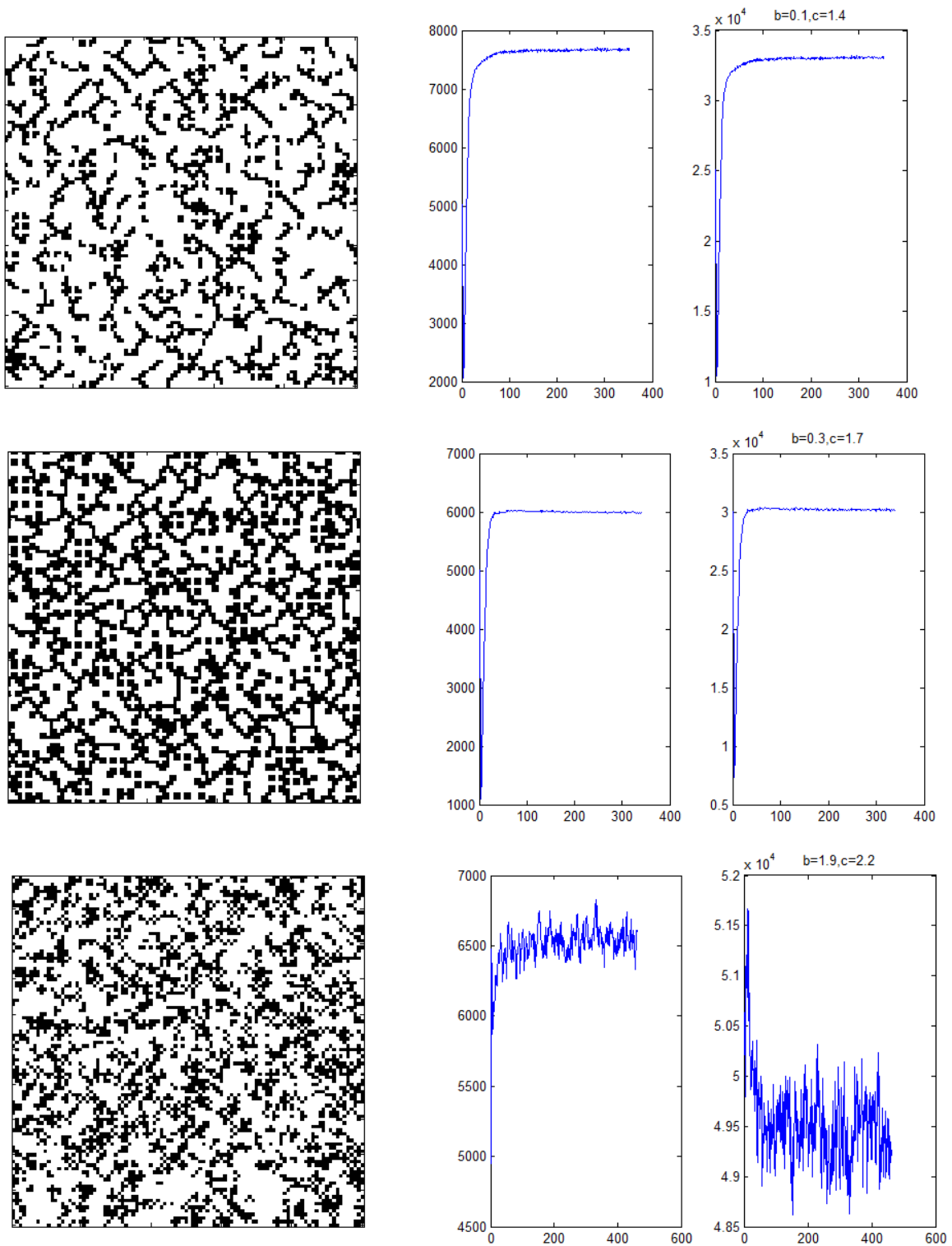
**Εικόνα 33.** Και στις τρεις παραπάνω περιπτώσεις, ενώ αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές των παραμέτρων  $b$  και  $c$ , μετά από ένα σύντομο μεταβατικό στάδιο έχουμε εμφάνιση ίδιας ποιοτικά μόνιμης

κατάστασης (πλειοψηφία λευκών με λίγους μεμονωμένους μαύρους). Αυτή η συμπεριφορά είναι αντίθετη με τον πρώτο κανόνα, όπου είχαμε έντονη εξάρτηση από τις παραμέτρους.



**Εικόνα 34.** Στις δύο πρώτες περιπτώσεις παρατηρούμε μια κατάσταση όπου συνυπάρχουν λευκοί και μαύροι σε αριθμητική ισορροπία. Στις αντίστοιχες περιπτώσεις στον αρχικό κανόνα για αυτές τις

παραμέτρους στην τελική κατάσταση είχαμε σχεδόν αποκλειστικά agents ενός είδους (μαύρους). Άρα με αυτή την παραλλαγή που εισάγαμε φαίνεται να υπάρχει κάποια προτίμηση στους «καλούς» agents.



**Εικόνα 35.** Στις δύο πρώτες περιπτώσεις παρατηρούμε πάλι την κατάσταση που φαίνεται να χαρακτηρίζει αυτήν την παραλλαγή του κανόνα. Η τρίτη –αυτή την οποία είχαμε χαρακτηρίσει χαοτική στον αρχικό κανόνα- είναι η μόνη που δεν επηρεάζεται από την αλλαγή του κανόνα, καθώς παραμένει χαοτική.

Σε καθεμία από τις παραπάνω τριάδες το αριστερό σχήμα είναι η κατάσταση του συστήματος μετά από 200 βήματα, το μεσαίο είναι το διάγραμμα του

αριθμού των λευκών agents και το άλλο το κέρδος του συστήματος-ως  
άθροισμα των κερδών των agents στο δεδομένο βήμα- σε κάθε επανάληψη.



### 3.4 Συνύπαρξη agents με διαφορετική λογική

Στον κανόνα για τον οποίο αρχίσαμε να μιλάμε στην αρχή της παραγράφου οι διάφορες οντότητες που αποτελούν το σύστημα συμπεριφέρονται με τον ίδιο τρόπο. Παρατηρούν το κέρδος κάθε γείτονά τους την τρέχουσα χρονική στιγμή και στο επόμενο βήμα η κατάσταση τους είναι αυτή του γείτονά τους με το μεγαλύτερο κέρδος. Όλοι επομένως αντιμετωπίζουν τους γείτονές τους με την ίδια πολιτική, όλες οι τοπικές αλληλεπιδράσεις βασίζονται στην ίδια λογική.

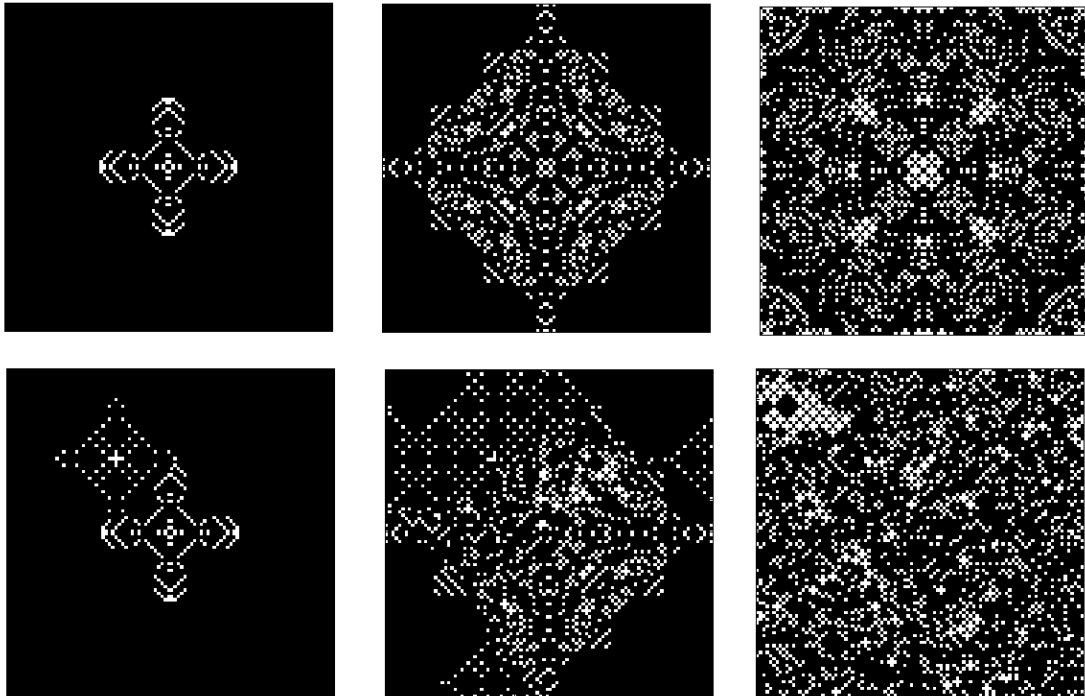
Μια ενδιαφέρουσα διαφοροποίηση είναι η ύπαρξη agents οι οποίοι συμπεριφέρονται διαφορετικά από τους προηγούμενους. Και λέγοντας διαφορετικά εννοούμε ότι η λογική τους στο σύστημα είναι διαφορετική. Σε ένα κοινωνικό σύστημα, για να επανέλθουμε στην αναλογία που χρησιμοποιούμε συχνά, δεν έχουν όλοι ούτε τα ίδια κίνητρα ούτε τους ίδιους στόχους. Κάποιοι ενδιαφέρονται για το κοινό καλό, ενώ άλλοι μόνο για το προσωπικό τους κέρδος ή και επιθυμούν να βλάψουν τους γείτονές τους.

Το πως επηρεάζεται η συμπεριφορά ενός δικτύου από κυτταρικά αυτόματα κάτω από τις συνθήκες που περιγράψαμε είναι ένα ερώτημα που δεν έχει διερευνηθεί πολύ. Γι' αυτό θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια εικόνα του τι μπορεί να συμβεί μέσα από ένα παράδειγμα. Το σενάριο έχει ως εξής. Η πλειοψηφία συμπεριφέρεται όπως πριν (μίμηση του ποιο επιτυχημένου), ωστόσο υπάρχουν κάποιοι -οι ίδιοι σε κάθε βήμα- που συμπεριφέρονται τελείως εγωιστικά. Η κατάστασή τους την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι τέτοια ώστε να μεγιστοποιήσουν το κέρδος τους με βάση την τωρινή κατάσταση των γειτόνων τους. Όπως θα δούμε από τις προσομοιώσεις παρακάτω η διαφοροποίηση αυτή επιφέρει και ποιοτικές αλλαγές στις διατάξεις που παρατηρούνται αλλά και μεταβολή του ολικού κέρδους του συστήματος.

Θα δούμε πρώτα πως επιδρά η ύπαρξη ενός μόνο agent διαφορετικής λογικής για την περίπτωση όπου αρχικά έχουμε μόνο μια ομάδα λευκών στο κέντρο και οι υπόλοιποι είναι μαύροι και επίσης το μοντέλο είναι καθαρά ντετερμινιστικό ( $p=1$ ).

Παρατηρούμε πως ακόμα και ένας agent επαρκεί για να δώσει μια τελείως διαφορετική εικόνα. Αρχικά την εξέλιξη μπορούμε να την περιγράψουμε ως δύο κύματα με διαφορετικές πηγές. Το πρώτο οφείλεται στη αρχικές συνθήκες και επεκτείνεται από το κέντρο προς τα άκρα έχοντας την ίδια ακριβώς μορφή -μέχρι να συναντηθεί με το δεύτερο- με την περίπτωση όπου όλοι είναι της ίδιας λογικής. Το δεύτερο οφείλεται στον agent διαφορετικής πολιτικής και ξεκινά από τη θέση του. Όταν τα κύματα συναντηθούν συμβάλλουν δημιουργώντας μια τελείως διαφορετική κατάσταση που μοιάζει τυχαία-στοχαστική. Ο ένας επομένως agent κατάφερε, όχι μόνο να χαλάσει τοπικά τη συμμετρία, κάτι που ήταν αυτονόητο ότι θα γίνει, αλλά να επηρεάσει τους agents σε όλο το πλέγμα οδηγώντας σε τελείως διαφορετική συμπεριφορά. Είναι μια από τις περιπτώσεις όπου φαίνεται ξεκάθαρα ότι μικρές αλλαγές στις τοπικές αλληλεπιδράσεις έχουν μεγάλη επιρροή στην καθολική κατάσταση του συστήματος. Μικρές αλλαγές σε κάθε agent αθροιζόμενες οδηγούν σε τεράστιες αλλαγές. Άρα τουλάχιστον, από τις πρώτες προσομοιώσεις, φαίνεται ο μηχανισμός της μίμησης να μην είναι

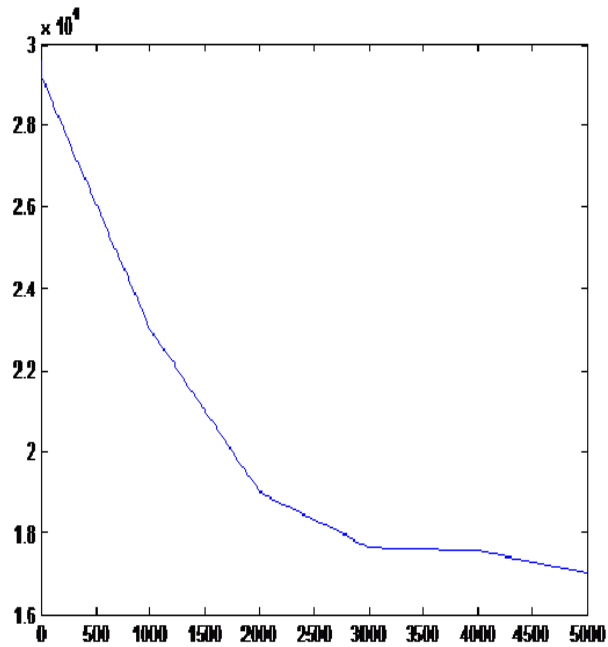
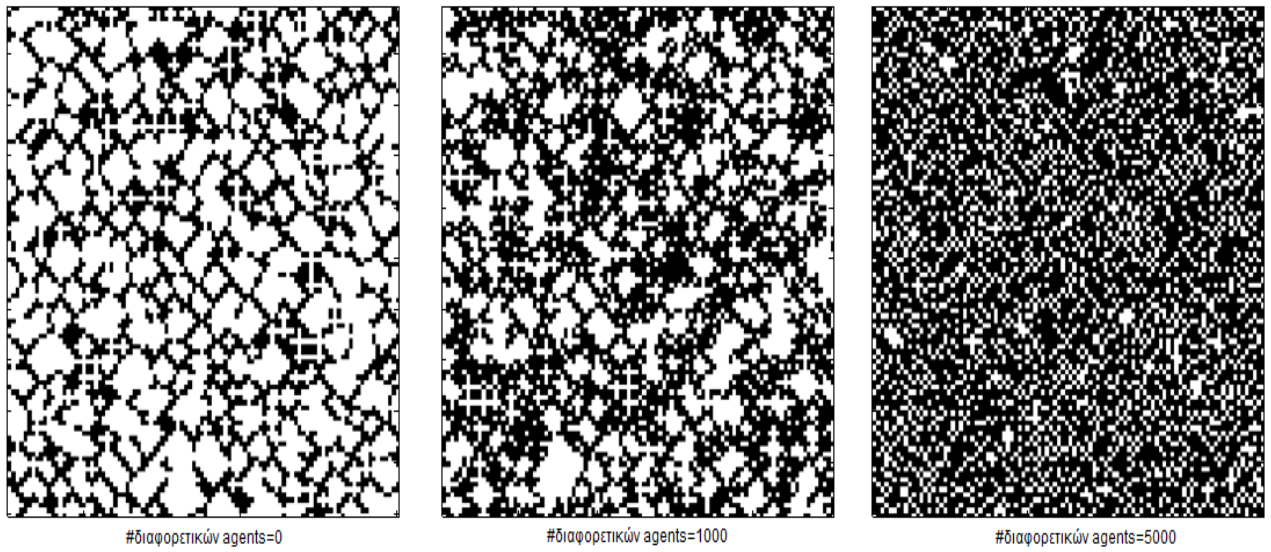
ιδιαίτερα αποτελεσματικός για την ομαλή ανάπτυξη κοινωνιών. Αρκεί πολύ λίγα «κακόβουλα» μέλη για να ανατραπούν οι όποιες δομές αναπτύσσονταν χωρίς αυτά.



**Εικόνα 36.** Πλέγμα 100x100,  $p=1$  (ντετερμινιστικός κανόνας),  $b=0.9$  και  $c=2.2$ . Αρχικές συνθήκες 16 λευκοί στο κέντρο. Στην πάνω σειρά όλοι οι agents έχουν την ίδια λογική όσον αφορά την επιλογή κατάστασης, ενώ στην κάτω ένας, σε τυχαία θέση, έχει διαφορετική συμπεριφορά. Στην πρώτη στήλη βλέπουμε την διάταξη μετά από 20 επαναλήψεις, στη δεύτερη μετά από 50 και στην τρίτη μετά από 150. Η ύπαρξη μόνο ενός «διαφορετικού» agent αρκεί για να ανατρέψει την οργάνωση σε όλο το πλέγμα.

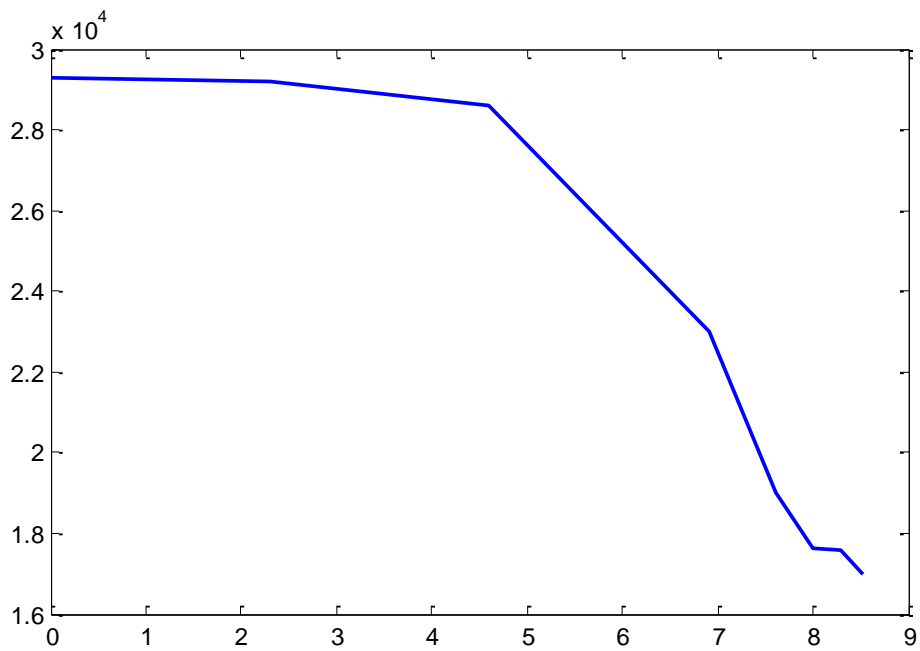
Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε προσομοιώσεις που κάναμε για τυχαίες αρχικές συνθήκες, για τον στοχαστικό κανόνα με  $p=0.9$  και για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $b$  και  $c$  αλλά και του αριθμού των agents με διαφορετικό rationality.

Αρχικά ας δούμε το πρώτο σετ αποτελεσμάτων (για  $b=0.2$ ,  $c=1.3$ ). Αν όλοι ακολουθούν τη στρατηγική μίμησης του καλύτερου, τότε οργανώνονται σε μεγάλες περιοχές με λευκούς, τα σύνορα των οποίων οριοθετούν μικρές ομάδες μαύρων. Αν προσθέσουμε τώρα και agents άλλης λογικής, που προσπαθούν να μεγιστοποιήσουν μόνο το κέρδος τους, βλέπουμε ότι καθώς αυξάνει ο αριθμός τους οι γειτονιές των λευκών συρρικνώνονται συνεχώς. Μάλιστα από ένα σημείο και μετά η τελική κατάσταση έχει αλλάξει τελείως και ποιοτικά. Παρατηρούμε μόνο απομονωμένους λευκούς. Το συνολικό κέρδος μειώνεται με την αύξηση των «εγωιστών». Μέχρι και τους 1000 (10% του συνόλου) η μείωση είναι αργή, αλλά μετά έχουμε πολύ απότομη πτώση.

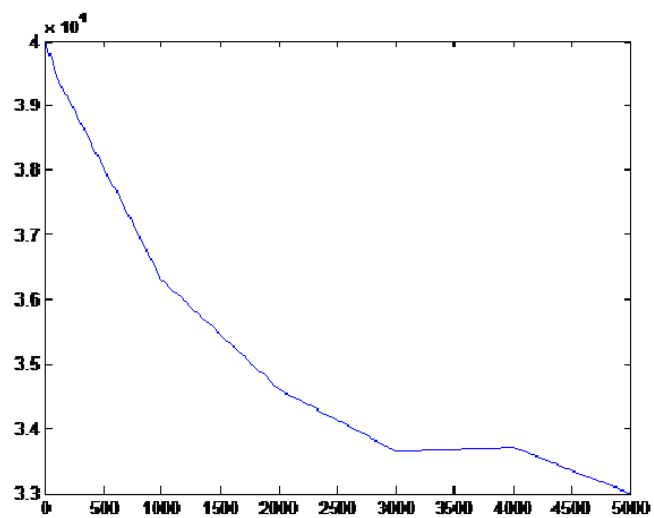
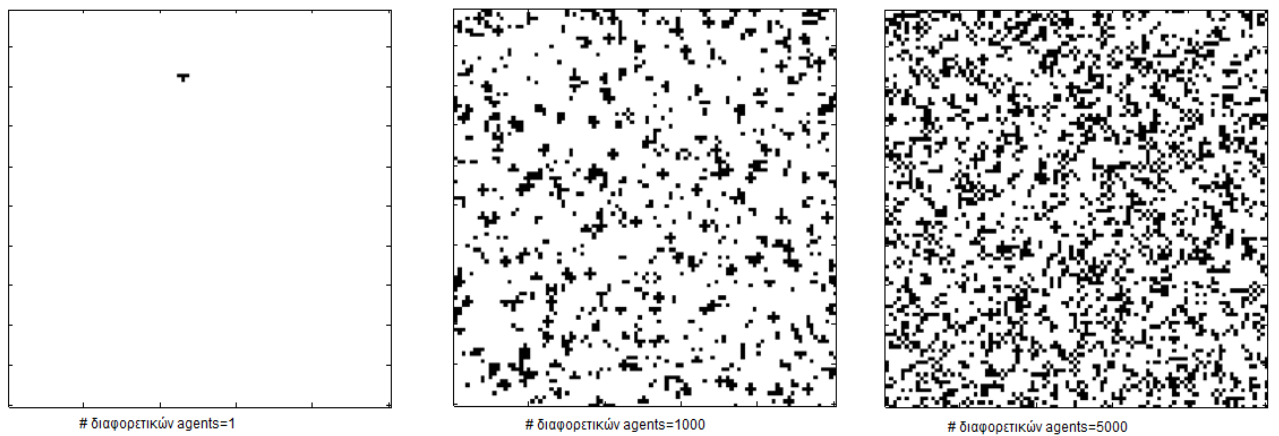


$b=0.2$  και  $c=1.3$

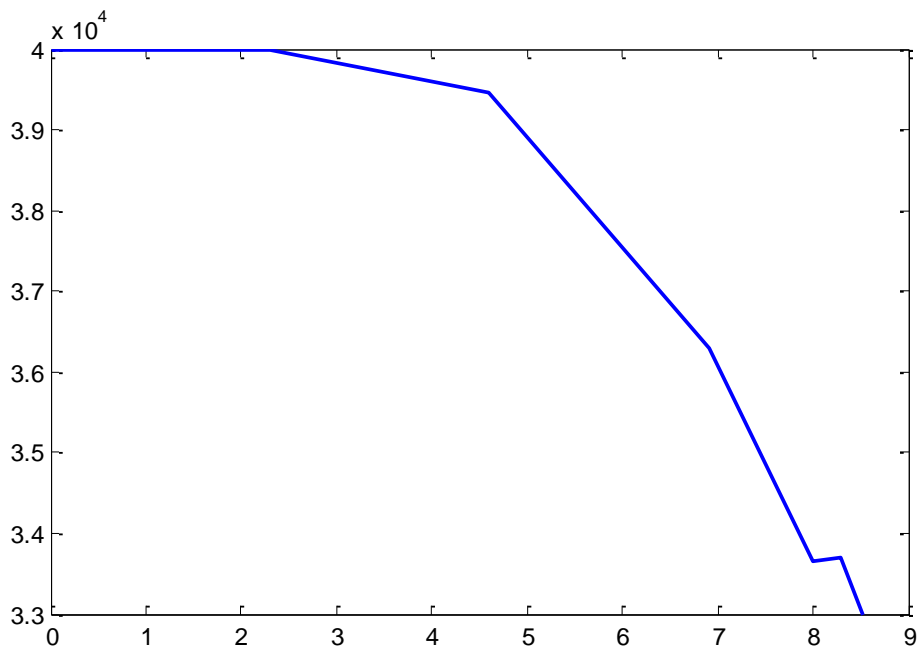
**Εικόνα 37.** Στη πρώτη σειρά βλέπουμε την κατάσταση του συστήματος μετά από 200 βήματα, για 0, 1000 και 500 με τη σειρά, διαφορετικούς agents. Βλέπουμε επίσης το διάγραμμα του συνολικού κέρδους (άθροισμα κερδών των agents) του συστήματος στο 200οστο βήμα ως συνάρτηση του αριθμού των agents με διαφορετική λογική. Καθώς αυξάνει ο αριθμός των «διαφορετικών» agents οι περιοχές των λευκών συρρικνώνονται συνεχώς.



**Εικόνα 38.** Διάγραμμα(για  $b=0.2$  και  $c=1.3$ ) του συνολικού κέρδους στο 200οστο βήμα ως προς το  $\ln(n)$ , όπου  $n$  το πλήθος των agents με διαφορετική λογική. Είναι εμφανής η απότομη πτώση του συνολικού κέρδους όταν ο αριθμός των «εγωιστικών» agents ξεπεράσει τους 1000 (το 10% των συνολικών)



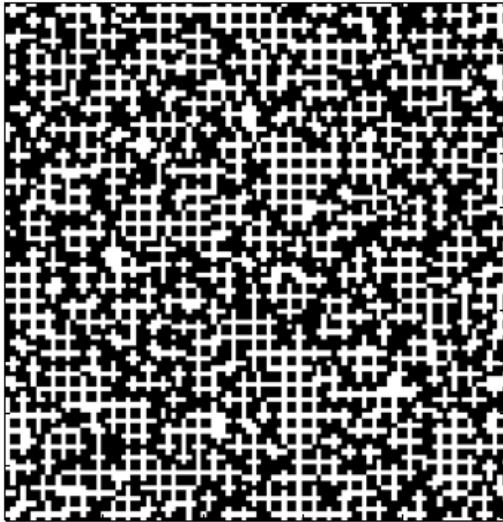
**Εικόνα 39.**  $b=0.35$  και  $c=1.1$ . Σε αυτή την περίπτωση η μείωση του συνολικού κέρδους είναι πολύ μικρότερη



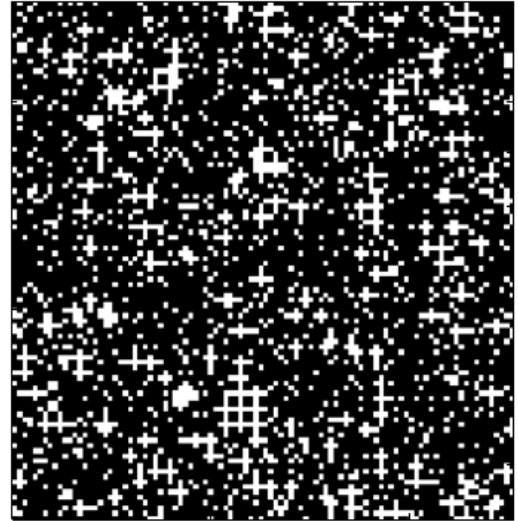
**Εικόνα 40.** Διάγραμμα (για  $b=0.35$  και  $c=1.1$ ) του συνολικού κέρδους στο 200οστο βήμα ως προς το  $\ln(n)$ , όπου  $n$  το πλήθος των agents με διαφορετική λογική. Η απότομη πτώση αρχίζει για ποσοστό των «εγωιστών» μικρότερο του 10%, ωστόσο είναι συνολικά μικρότερη από την προηγούμενη περίπτωση

Στην περίπτωση  $b=0.35$  και  $c=1.1$  διαφορά στην τελική κατάσταση του συστήματος δεν διαφέρει ιδιαίτερα, ποιοτικά τουλάχιστον, όσο και αν αυξήσουμε τον αριθμό των εγωιστικών agents. Χωρίς αυτούς το σύστημα οδηγείται σε μόνιμη κατάσταση μέγιστου κέρδους για το σύστημα (όλοι σε κατάσταση 1). Αν προσθέσουμε και agents με διαφορετικό rationality τότε φυσικά στην τελική κατάσταση θα υπάρχουν και μαύροι, στις περιοχές που τοποθετούνται αυτοί, ωστόσο αυτό δεν καταφέρνουν να επιβληθούν. Παραμένουν σε μικρές ομάδες και στην πλειοψηφία τους οι agents μένουν λευκοί. Το συνολικό κέρδος εμφανίζει πάλι μείωση αλλά πολύ μικρότερη από την προηγούμενη περίπτωση.

Στην τελευταία περίπτωση έχουμε  $b=0.3$  και  $c=1.7$ . Αν όλοι ακολουθούν την ίδια πολιτική τότε η τελική κατάσταση μοιάζει με πλέγμα με εναλλαγές μαύρων και λευκών. Αν αλλάξουμε τη λογική μερικών τότε η δομή αυτή καταστρέφεται. Οδηγούμαστε σε καταστάσεις με περίπου ίσο αριθμό agents σε κάθε κατάσταση. Από βήμα σε βήμα βέβαια η ακριβής αναλογία μεταβάλλεται έντονα και επίσης το σύστημα δε δείχνει να οδηγείται σε μόνιμη κατάσταση με την αυστηρή έννοια. Μένει σε μια κατάσταση που αλλάζει έντονα από επανάληψη σε επανάληψη αλλά όχι ποιοτικά. Είναι μια κατάσταση που μοιάζει τελείως απρόβλεπτη. Άρα η εισαγωγή των διαφορετικών agents οδήγησε σε καταστροφή των δομών που αναπτύσσονταν.



# διαφορετικών agents=0



# διαφορετικών agents=1000



# διαφορετικών agents =5000

**Εικόνα 41.**  $b=0.3$  και  $c=1.7$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε ριζική αλλαγή στην συμπεριφορά του συστήματος, όταν ο αριθμός των «εγωιστών» είναι τουλάχιστον 10%. Αρχικά –μόνο με agents της ίδιας λογικής-, όπως έχουμε πει, είχαμε εμφάνιση μόνιμης κατάστασης με τη χαρακτηριστική μορφή της πρώτης από τις παραπάνω εικόνες. Όταν προσθέσουμε και agents διαφορετικής λογικής, η δομή αυτή καταστρέφεται και η εξέλιξη του συστήματος μοιάζει τυχαία.

Γενικά αυτό που παρατηρούμε είναι ότι με την πολιτική της μίμησης και μόνο δεν μπορούν να διατηρηθούν οι δομές που δημιουργούνται υπό κανονικές συνθήκες στο σύστημα, καθώς αρκεί ένα ποσοστό της τάξης του 10% των agents να έχει διαφορετικά κίνητρα για να καταστραφεί η όποια οργάνωση. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι δημιουργούνται συγκρούσεις ανάμεσα στους agents διαφορετικής νοοτροπίας.

## 5. Συμπεράσματα και δυνατές επεκτάσεις

Στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε και μελετήσαμε μέσω εκτεταμένων προσομοιώσεων σε ηλεκτρονικό υπολογιστή έναν κανόνα στοχαστικού χαρακτήρα, που καθορίζει την αλληλεπίδραση των agents σε ένα σύστημα από κυτταρικά αυτόματα. Στην αρχική μορφή του κανόνα κάθε agent αποφασίζει σε κάθε βήμα να μιμηθεί με ορισμένη σταθερή πιθανότητα τον γείτονά του που συγκεντρώνει την τρέχουσα στιγμή το μεγαλύτερο κέρδος. Το κέρδος αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα διαδοχικών Prisoner's Dilemma όλων των γειτονικών agents. Πραγματοποιήθηκαν προσομοιώσεις για διάφορες τιμές των παραμέτρων του game και προέκυψε μια μεγάλη ποικιλία αποτελεσμάτων. Παρατηρήθηκαν από ομογενείς, ευσταθείς μόνιμες καταστάσεις μέχρι συμπεριφορά που θα μπορούσε να χαρακτηριστεί χαοτική. Το πιο ενδιαφέρον είναι ότι για δεδομένη τιμή των παραμέτρων η τελική κατάσταση είναι ποιοτικά η ίδια και για τους δύο τύπους αρχικών συνθηκών που χρησιμοποιήσαμε, κάτι που διαφοροποιεί σημαντικά τον κανόνα αυτό από αντίστοιχους αιτιοκρατικούς ([22]).

Μια ενδιαφέρουσα επέκταση αυτού του κανόνα θα ήταν η εισαγωγή περιορισμών στην επικοινωνία των agents. Για παράδειγμα, αντί για πλήρη γνώση της κατάστασης και του κέρδους των γειτόνων του, θα μπορούσε να είναι διαθέσιμη μόνο μια μέτρηση της κατάστασης αυτής, η οποία θα περιέχει θόρυβο ή και θα έχει και κάποια χρονική καθυστέρηση. Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί απλώς να οφείλονται στο μέσο επικοινωνίας, μπορεί ωστόσο να εισάγονται και από τον ίδιο τον agent σε μια προσπάθεια να αποκρύψει την στρατηγική του.

Ως μια πρώτη παραλλαγή επιτρέψαμε η πιθανότητα μίμησης να είναι μεταβλητή. Αρχικά η συμπεριφορά των agents είναι τυχαία. Αποφασίζουν είτε να μιμηθούν τον πιο επιτυχημένο, είτε να παραμείνουν στην ίδια κατάσταση με την ίδια πιθανότητα. Μέσα από μια διαδικασία μάθησης, με βελτίωση της πιθανότητας μίμησης ανάλογα με τα προηγούμενα αποτελέσματα, παρατηρούμε πως επιτυγχάνετε πάλι η δημιουργία οργάνωσης, όπως και στην περίπτωση που η πιθανότητα μίμησης ήταν υψηλή εξ αρχής. Η περίπτωση αυτή πρέπει να μελετηθεί περισσότερο και για μεγαλύτερη περιοχή του χώρου των παραμέτρων. Μια ενδιαφέρουσα διαφοροποίηση θα ήταν να θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα μίμησης, από έναν agent ενός γείτονά του, βελτιώνεται ανάλογα με το αν αυτή η κατάσταση έχει αποδειχτεί για τον ίδιο επικερδής στο παρελθόν.

Στη συνέχεια αλλάξαμε το κριτήριο για το χαρακτηρισμό του πιο επιτυχημένου και χρησιμοποιήσαμε το κέρδος που έχει συγκεντρώσει μέχρι την τρέχουσα χρονική στιγμή. Το αποτέλεσμα ήταν ιδιαίτερα ενδιαφέρον, καθώς για όλες σχεδόν τις επιλογές παραμέτρων, αντί της πλούσιας συμπεριφοράς της πρώτης περίπτωσης, παρατηρήσαμε την ίδια ποιοτικά τελική κατάσταση. Με την παραλλαγή αυτή θέλαμε να δούμε τις διαφορές στη συμπεριφορά του συστήματος, όταν λαμβάνεται υπόψη μόνο η προηγούμενη κατάστασή του σε σχέση με όταν υπολογίζεται η συνολική προϊστορία του συστήματος. Θα ήταν

σημαντικό να διερευνηθεί η επίδραση που έχει στο σύστημα η πλήρης γνώση από τους agents των προηγούμενων καταστάσεων στις οποίες έχουν βρεθεί.

Η τελική επέκταση που πραγματοποιήσαμε αφορά τη συνύπαρξη στο πλέγμα agents με διαφορετική λογική, που αποφασίζουν δηλαδή για την κατάστασή τους με βάση διαφορετικά κριτήρια. Προέκυψε πως η εισαγωγή έστω και μικρού αριθμού «εγωιστικών» agents αρκεί για να μειώσει σημαντικά το συνολικό κέρδος και σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμα και αυτοί οι λίγοι, μπορούν να καταστρέψουν τις δομές που σχηματίζονταν χωρίς την παρουσία τους, οδηγώντας το σύστημα σε τυχαία συμπεριφορά. Όταν ο αριθμός τους αυξηθεί πολύ καταστρέφονται οι δομές σε όλες τις περιπτώσεις. Θα είχε ενδιαφέρον να επιτρέψουμε στους agents να μιμούνται αντί την κατάσταση (0-κακός, 1-καλός) του πιο επιτυχημένου, την στρατηγική-λογική του (απόφαση με βάση τον πιο επιτυχημένο ή εγωιστική συμπεριφορά) και να παρατηρήσουμε ποια θα είναι σε κάθε περίπτωση η λογική που θα επικρατήσει τελικά.

Γενικότερα, η στατιστική μελέτη κανόνων σαν αυτόν που παρουσιάσαμε θα μπορούσε να προσανατολιστεί στην προσπάθεια να βρεθούν κατάλληλα μέτρα για τον χαρακτηρισμό και την πρόβλεψη της συμπεριφοράς του συστήματος. Τέτοια μέτρα, όπως ήδη αναφέραμε, μπορεί να είναι αντίστοιχα με τα μεγέθη της Στατιστικής Φυσικής (πίεση, θερμοκρασία, εντροπία). Τέτοιες επεκτάσεις υπάρχουν, όπως για παράδειγμα η Τοπολογική Εντροπία που μπορεί να εφαρμοστεί σε ευρεία κατηγορία συστημάτων (και αιτιοκρατικά) και αποτελεί ένα καλό μέτρο για τον χαρακτηρισμό της πολυπλοκότητας, ωστόσο η υπολογισμός της με βάση τον ακριβή ορισμό είναι ιδιαίτερα δύσκολος.



## Παράρτημα

### Κώδικες παραγράφου 2

```
%Ising using Metropolis algorithm (free
boundary)
close all
clear all
%=====
%build the GUI
%define the plot button
plotbutton=icontrol('style','pushbutton',...
'string','Run', ...
'fontsize',12, ...
'position',[120,400,50,20], ...
'callback','run=1;');

%define the stop button
erasebutton=icontrol('style','pushbutton',.
..
'string','Stop', ...
'fontsize',12, ...
'position',[220,400,50,20], ...
'callback','freeze=1;');

%define the Quit button
quitbutton=icontrol('style','pushbutton',...
'string','Quit', ...
'fontsize',12, ...
'position',[320,400,50,20], ...
'callback','stop=1;close;');

number = uicontrol('style','text', ...
'string','0', ...
'fontsize',12, ...
'position',[10,400,100,20]);

%=====
n=50; %size n*n
b=2;

%initialize the arrays
z = zeros(n,n);
cells = z;
rand('state',3)
cells = (rand(n,n))<.5 ;

%build an image and display it
imh = image(cat(3,cells,cells,cells));
set(imh, 'erasemode', 'none')
axis equal
axis tight

%index definition for cell update
x = 2:n-1;
y = 2:n-1;

%Main event loop
stop= 0; %wait for a quit button push
run = 0; %wait for a draw
freeze = 0; %wait for a freeze
show = 0;

while (stop==0)

if (run==1)
for i=1:10000
%selection of random site to change its spin
ix = ceil( n * rand(1) );
iy = ceil( n * rand(1) );
an = cells(ix,iy);
%computation of disagreeing and agreeing
neighbors
if (ix<n)&(ix>1)&(iy<n)&(iy>1) %interior
sites
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy-1)-
an) + abs(cells(ix,iy+1)-an);
a=4-d;
elseif (ix==1)&(iy<n)&(iy>1)
%boundary sites
d = abs(cells(ix,iy-1)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an) + abs(cells(ix+1,iy)-
an);
a=3-d;
elseif (ix==n)&(iy<n)&(iy>1)
d = abs(cells(ix,iy-1)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an) + abs(cells(ix-1,iy)-
an);
a=3-d;
elseif (iy==1)&(ix<n)&(ix>1)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy+1)-
an);
a=3-d;
elseif (iy==n)&(ix<n)&(ix>1)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy-1)-
an);
a=3-d;
elseif (ix==1)&(iy==1) %corner sites
d = abs(cells(ix+1,iy)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an);
a=2-d;
elseif (ix==1)&(iy==n)
d = abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy-
1)-an);
a=2-d;
```

```

elseif(ix==n)&(iy==1)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an);
a=2-d;
elseif (ix==n)&(iy==n)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy-
1)-an);
a=2-d;
end

if ( rand(1) < exp( b*(d-a) ) )
cells(ix,iy) = ~cells(ix,iy);
end

end

%draw the new image
set(imh, 'cdata', cat(3,cells,cells,cells) )
%update the step number display
stepnumber = 10000 +
str2num(get(number,'string'));
set(number,'string',num2str(stepnumber))
end

if (freeze==1)
run = 0;
freeze = 0;
end
drawnow
end

```

### Κώδικας 1. Προσομοίωση Ising με free boundary

```

%Ising using Metropolis algorithm (periodic
boundary)
close all
clear all

%=====
%build the GUI
%define the plot button
plotbutton=uicontrol('style','pushbutton',...
'string','Run', ...
'fontsize',12, ...
'position',[120,400,50,20], ...
'callback', 'run=1;');

%define the stop button
erasebutton=uicontrol('style','pushbutton',.
..
'string','Stop', ...
'fontsize',12, ...
'position',[220,400,50,20], ...
'callback','freeze=1;');

%define the Quit button
quitbutton=uicontrol('style','pushbutton',...
'string','Quit', ...
'fontsize',12, ...
'position',[320,400,50,20], ...
'callback','stop=1;close;');

number = uicontrol('style','text', ...
'string','0', ...
'fontsize',12, ...
'position',[10,400,100,20]);

%=====
n=200; %size n*n
b=1.2;

%initialize the arrays
z = zeros(n,n);
cells = z;
rand('state',3)
cells = (rand(n,n))<.5 ;

%build an image and display it
imh = image(cat(3,cells,cells,cells));
set(imh, 'erasemode', 'none')
axis equal
axis tight

%index definition for cell update
x = 2:n-1;
y = 2:n-1;

%Main event loop
stop= 0; %wait for a quit button push
run = 0; %wait for a draw
freeze = 0; %wait for a freeze
show = 0;

while (stop==0)

if (run==1)
for i=1:10000
%selection of random site to change its
spin
ix = ceil( n * rand(1) );
iy = ceil( n * rand(1) );
an = cells(ix,iy);
%computation of disagreeing and
agreeing neighbors
if (ix<n)&(ix>1)&(iy<n)&(iy>1)
%interior sites
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy-1)-
an) + abs(cells(ix,iy+1)-an);
a = 4-d;

```

```

elseif (ix==1)&(iy<n)&(iy>1)
%boundary sites
d = abs(cells(ix,iy-1)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an) + abs(cells(ix+1,iy)-
an) + abs(cells(n,iy)-an);
a = 4-d;
elseif (ix==n)&(iy<n)&(iy>1)
d = abs(cells(ix,iy-1)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an) + abs(cells(ix-1,iy)-
an) + abs(cells(1,iy)-an);
a = 4-d;
elseif (iy==1)&(ix<n)&(ix>1)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy+1)-
an) + abs(cells(ix,n)-an);
a = 4-d;
elseif (iy==n)&(ix<n)&(ix>1)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix+1,iy)-an) + abs(cells(ix,iy-1)-
an) + abs(cells(ix,1)-an);
a = 4-d;
elseif (ix==1)&(iy==1) %corner sites
d = abs(cells(ix+1,iy)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an) + abs(cells(ix,n)-an)
+ abs(cells(n,iy)-an);
a = 4-d;
elseif (ix==1)&(iy==n)
d = abs(cells(ix+1,iy)-an) +
abs(cells(ix,iy-1)-an) + abs(cells(ix,1)-an)
+ abs(cells(n,iy)-an);
a = 4-d;
elseif(ix==n)&(iy==1)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix,iy+1)-an) + abs(cells(1,iy)-an)
+ abs(cells(n,iy)-an);
a = 4-d;
elseif (ix==n)&(iy==n)
d = abs(cells(ix-1,iy)-an) +
abs(cells(ix,iy-1)-an) + abs(cells(ix,1)-an)
+ abs(cells(n,iy)-an);
a = 4-d;
end

if ( rand(1) < exp( b*(d-a) ) )
cells(ix,iy) = ~cells(ix,iy);
end

end
%draw the new image
set(imh, 'cdata', cat(3,cells,cells,cells) )
%update the step number display
stepnumber = 10000 +
str2num(get(number,'string'));

set(number,'string',num2str(stepnumber))

end

if (freeze==1)
run = 0;
freeze = 0;
end

drawnow

end

```

## Κώδικας 2. Προσομοίωση Ising με periodic boundary

```

%Denoising using Ising Model
clear all
close all
disp('Denoising using Ising Model')

%initial picture
im = imread('C:/picture.bmp');
im = double(im);
im = 2.*( im-mean(mean(im)))> 0)-1;
%transformation to picture with +1 or -1
on every site
[k,l] = size(im);
%additive Gaussian noise (mean value 0,
variance sigma)
sigma = 4;
n = sigma*(randn(k,l));
%noisy picture
y = im + n;
figure(1);

subplot(1,2,1);imshow(im);
subplot(1,2,2);imshow(y);
drawnow;

b = 1.2; %b=J/(kT), Ising's Model
parameter
h = ones(k,l); %white picture as initial
estimation
%h = 2.*(y > mean(mean(y)))-1;% initial
estimation using threshold
show = 2000000; %display every 2000000
iterations
figure(2);hfig =
imagesc(h);set(gca,'Visible','off');colormap
gray;drawnow;

for i=1:2000000
%selection of random site to change its spin
ix = ceil( k * rand(1) );
iy = ceil( l * rand(1) );

```

```

    an = h(ix,iy);
    %computation of disagreeing and
agreeing neighbors
    if (ix<k)&(ix>1)&(iy<l)&(iy>1)
    %interior sites
        d = abs(h(ix-1,iy)-an) +
abs(h(ix+1,iy)-an) + abs(h(ix,iy-1)-an) +
abs(h(ix,iy+1)-an);
        a = 4-d;
    elseif (ix==1)&(iy<l)&(iy>1)
    %boundary sites
        d = abs(h(ix,iy-1)-an) +
abs(h(ix,iy+1)-an) + abs(h(ix+1,iy)-an);
        a = 3-d;
    elseif (ix==k)&(iy<l)&(iy>1)
        d = abs(h(ix,iy-1)-an) +
abs(h(ix,iy+1)-an) + abs(h(ix-1,iy)-an);
        a = 3-d;
    elseif (iy==1)&(ix<k)&(ix>1)
        d = abs(h(ix-1,iy)-an) +
abs(h(ix+1,iy)-an) + abs(h(ix,iy+1)-an);
        a = 3-d;
    elseif (iy==l)&(ix<k)&(ix>1)
        d = abs(h(ix-1,iy)-an) +
abs(h(ix+1,iy)-an) + abs(h(ix,iy-1)-an);
        a = 3-d;
    elseif (ix==1)&(iy==1) %corner sites
        d = abs(h(ix+1,iy)-an) +
abs(h(ix,iy+1)-an);
        a = 2-d;
    elseif (ix==1)&(iy==l)
        d = abs(h(ix+1,iy)-an) + abs(h(ix,iy-
1)-an);
        a = 2-d;
    elseif (ix==k)&(iy==1)
        d = abs(h(ix-1,iy)-an) +
abs(h(ix,iy+1)-an);
        a = 2-d;
    elseif (ix==k)&(iy==l)
        d = abs(h(ix-1,iy)-an) + abs(h(ix,iy-
1)-an);
        a = 2-d;
    end

    alpha = exp(-
2*y(ix,iy)*an)*exp(2*b*(d-a));
    if ( rand(1) < alpha )
        h(ix,iy) = -h(ix,iy);
    end

    if ( mod(i,show)==0 )
        set(hfig,'CData',h);
    end
end

```

### Κώδικας 3. Αποθρομβοποίηση με χρήση του Ising

#### Κώδικες παραγράφου 3

```

%My_CA_1 1-D
%imitation of the best with probability p
%in every step all agents are getting
informed
%Neumann neighborhood, periodic
boundary
%1 indicates a cooperative agent, 0 a
defector
clf
clear all
%=====
%CA setup
n=100;
%prisoners dilemma parameters
a=1;
b=1;
c=2.1;
d=0;
%probability of imitating the best agent
pim=0.9;

randn('state', sum(100*clock))

%initialize the arrays
z = zeros(1,n);
cells = z;
cellsnew = z;
sum1 = z;
sum2 = z;
%set a few cells to one
cells = (rand(1,n))<.5 ;
%cells(n/2)=1;
cellsi(1,:) = cells;

for it=1:100 %number of iterations
for i=1:n
    if (i>1)&&(i<n)
        sum1(i) = cells(i-1) + cells(i+1);%sum
of 1 in the neighborhood
        sum2(i) = 2-sum1(i);% sum of 0 in the
neighborhood
    elseif (i==1)

```

```

sum1(1) = cells(n) + cells(2);
sum2(1) = 2-sum1(1);
else
sum1(n) = cells(n-1) + cells(1);
sum2(n) = 2-sum1(n);
end
p(i) =
(a*sum1(i)+b*sum2(i))*(cells(i)==1) +
(c*sum1(i)+d*sum2(i))*(cells(i)==0);%Pr
isoner's Dilemma gain
end

for i=1:n
if (i>1)&&(i<n)
[A,k] = max( [p(i-1) p(i) p(i+1)] );
imax = i+k-2;
elseif (i==1)
[A,k] = max( [p(n) p(i) p(i+1)] );
switch k
case 1
imax = n;
case 2
imax = i;
case 3
imax = i+1;
end
else
[A,k] = max( [p(i-1) p(i) p(1)] );
switch k
case 1
imax = i-1;
case 2
imax = i;
case 3
imax = 1;
end
end

r = ( rand(1)<pim );
cellsnew(i) = r*cells(imax) + (1-
r)*cells(i);
end
cells = cellsnew;
cellsi(it+1,:) = cells;
end

%build an image and display it
set(0, 'DefaultAxesFontSize', 12);
figure(1);imagesc(cellsi);colormap(gray);ax
is tight;title(['b=' num2str(b) ',c='
num2str(c)])
drawnow

```

#### Κώδικας 4. Μονοδιάστατο μοντέλο για τον κανόνα με μίμηση του πιο επιτυχημένου

```

%My_CA_1
%imitation of the best with probability p
%in every step all agents are getting
informed
%Neumann neighborhood, periodic
boundary
%1 indicates a cooperative agent, 0 a
defector
clf
clear all

%=====
%build the GUI
%define the plot button
plotbutton=uicontrol('style','pushbutton',...
'string','Run', ...
'fontsize',12, ...
'position',[100,400,50,20], ...
'callback','run=1;');

%define the stop button
erasebutton=uicontrol('style','pushbutton',.
..
'string','Stop', ...
'fontsize',12, ...
'position',[200,400,50,20], ...
'callback','freeze=1;');

%define the Quit button
quitbutton=uicontrol('style','pushbutton',...
'string','Quit', ...
'fontsize',12, ...
'position',[300,400,50,20], ...
'callback','stop=1;close;');

number = uicontrol('style','text', ...
'string','1', ...
'fontsize',12, ...
'position',[20,400,50,20]);

%=====
%CA setup

n=100;
%prisoners dilemma parameters
a=1;
b=0.1;
c=1.7;
d=0;
%probability of imitating the best agent
pim=1.1;

```

```

%initialize the arrays
z = zeros(n,n);
cells = z;
cellsnew = z;
sum1 = z;
sum2 = z;
%set a few cells to one
cells = (rand(n,n))<.5 ;
%cells(n/2-1:n/2+2,n/2-1:n/2+2)=1;

%build an image and display it
imh = image(cat(3,cells,cells,cells));
set(imh, 'erasemode', 'none')
axis equal
axis tight

%definition of neighborhood
x = 2:n-1;
y = 2:n-1;
%Main event loop
stop= 0; %wait for a quit button push
run = 0; %wait for a draw
freeze = 0; %wait for a freeze

while (stop==0)

    if (run==1)
        sum1(x,y) = cells(x,y-1)+ cells(x,y+1)
+ cells(x-1, y) + cells(x+1,y); %sum of 1 in
the neighborhood
        sum2(x,y) = 4-sum1(x,y); %sum of 0 in
the neighborhood
        sum1(1,y) = cells(1,y-1)+ cells(1,y+1)
+ cells(n, y) + cells(2,y);
        sum2(1,y) = 4-sum1(1,y);
        sum1(n,y) = cells(n,y-1)+ cells(n,y+1)
+ cells(n-1, y) + cells(1,y);
        sum2(n,y) = 4-sum1(n,y);
        sum1(x,1) = cells(x,n)+ cells(x,2) +
cells(x-1, 1) + cells(x+1,1);
        sum2(x,1) = 4-sum1(x,1);
        sum1(x,n) = cells(x,n-1)+ cells(x,1) +
cells(x-1, n) + cells(x+1,n);
        sum2(x,n) = 4-sum1(x,n);
        sum1(1,1) = cells(1,2)+ cells(2,1) +
cells(1, n) + cells(n,1);
        sum2(1,1) = 4-sum1(1,1);
        sum1(n,n) = cells(n,n-1)+ cells(n,1) +
cells(n-1, n) + cells(1,n);
        sum2(n,n) = 4-sum1(n,n);
        sum1(1,n) = cells(1,n-1)+ cells(1,1) +
cells(2,n) + cells(n,n);
        sum2(1,n) = 4-sum1(1,n);
        sum1(n,1) = cells(n,2)+ cells(n,n) +
cells(1,1) + cells(n-1,1);
        sum2(n,1) = 4-sum1(n,1);
        % The CA rule

```

```

p = (a*sum1+b*sum2).*(cells==1) +
(c*sum1+d*sum2).*(cells==0);%Prisoner'
s Dilemma gain

```

```

%imitation of the best neighbor
for i=1:n
    for j=1:n
        if (i>1)&&(i<n)&&(j>1)&&(j<n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,j-1) p(i,j+1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,1,i,j,n);
        elseif (i==1)&&(j>1)&&(j<n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,2,i,j,n);
        elseif (i==n)&&(j>1)&&(j<n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i-1,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,3,i,j,n);
        elseif (j==1)&&(i>1)&&(i<n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,n) p(i,j+1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,4,i,j,n);
        elseif (j==n)&&(i>1)&&(i<n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,j-1) p(i,1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,5,i,j,n);
        elseif (i==1)&&(j==1)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,n) p(i,j+1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,6,i,j,n);
        elseif (i==1)&&(j==n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,j-1) p(i,1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,7,i,j,n);
        elseif (i==n)&&(j==1)
            [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,n)
p(i-1,j) p(i,j+1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,8,i,j,n);
        elseif (i==n)&&(j==n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,j-1)
p(i-1,j) p(i,1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,9,i,j,n);
        end
        r = ( rand(1)<pim );
        cellsnew(i,j) = r*cells(imax,jmax) +
(1-r)*cells(i,j);
    end
end
cells = cellsnew;

```

```

%draw the new image
set(imh, 'cdata', cat(3,cells,cells,cells) )
%update the step number display
stepnumber = 1 +
str2num(get(number,'string'));

set(number,'string',num2str(stepnumber))

numOfwhite(stepnumber) =
sum(sum(cells));%number of white agents
totalGain(stepnumber) = sum(sum(p));
end

```

```

if (freeze==1)
    run = 0;
    freeze = 0;
end

```

```

drawnow %need this in the loop for
controls to work

```

```

end

```

### Κώδικας 5. Δισδιάστατο μοντέλο για τον κανόνα με μίμηση του πιο επιτυχημένου

```

%My_CA_var_prod
%imitation of the best with varying probability p
%in every step all agents are getting informed
%Neumann neighborhood, periodic boundary
%1 indicates a cooperative agent, 0 a defector
clf
clear all

```

```

%=====
%=====

```

```

%build the GUI
%define the plot button
plotbutton=uicontrol('style','pushbutton',...
    'string','Run', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[100,400,50,20], ...
    'callback','run=1;');

```

```

%define the stop button
erasebutton=uicontrol('style','pushbutton',...
    'string','Stop', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[200,400,50,20], ...
    'callback','freeze=1;');

```

```

%define the Quit button
quitbutton=uicontrol('style','pushbutton',...
    'string','Quit', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[300,400,50,20], ...
    'callback','stop=1;close;');

```

```

number = uicontrol('style','text', ...
    'string','1', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[20,400,50,20]);

```

```

%=====
%=====

```

```

%CA setup
n=100;
%prisoners dilemma parameters
a=1;
b=0.1;
c=1.4;

```

```

d=0;

```

```

eps=0.05;
%probability of imitating the best agent
pwhite=0.5*ones(n,n); %if he is white
epsw1 = eps ;
epsw2 =1-0.1*eps ;

```

```

pblack=0.5*ones(n,n); %if he is black
epsb1 = 0.5*eps ;
epsb2 =1-0.1*eps;

```

```

%initialize the arrays

```

```

z = zeros(n,n);
cells = z;
cellsnew = z;
sum1 = z;
sum2 = z;
%set a few cells to one
cells = (rand(n,n))<.5 ;
%cells(n/2-1:n/2+2,n/2-1:n/2+2)=1;

```

```

%build an image and display it
imh = image(cat(3,cells,cells,cells));
set(imh, 'erasemode', 'none')
axis equal
axis tight

```

```

%definition of neighborhood
x = 2:n-1;
y = 2:n-1;
%Main event loop
stop= 0; %wait for a quit button push
run = 0; %wait for a draw
freeze = 0; %wait for a freeze

```

```

while (stop==0)

```

```

    if (run==1)
        sum1(x,y) = cells(x,y-1)+ cells(x,y+1) +
        cells(x-1,y) + cells(x+1,y); %sum of 1 in the
        neighborhood
        sum2(x,y) = 4-sum1(x,y); %sum of 0 in the
        neighborhood
        sum1(1,y) = cells(1,y-1)+ cells(1,y+1) +
        cells(n,y) + cells(2,y);
        sum2(1,y) = 4-sum1(1,y);
    end
end

```

```

sum1(n,y) = cells(n,y-1)+ cells(n,y+1) +
cells(n-1, y) + cells(1,y);
sum2(n,y) = 4-sum1(n,y);
sum1(x,1) = cells(x,n)+ cells(x,2) + cells(x-
1, 1) + cells(x+1,1);
sum2(x,1) = 4-sum1(x,1);
sum1(x,n) = cells(x,n-1)+ cells(x,1) +
cells(x-1, n) + cells(x+1,n);
sum2(x,n) = 4-sum1(x,n);
sum1(1,1) = cells(1,2)+ cells(2,1) + cells(1,
n) + cells(n,1);
sum2(1,1) = 4-sum1(1,1);
sum1(n,n) = cells(n,n-1)+ cells(n,1) +
cells(n-1, n) + cells(1,n);
sum2(n,n) = 4-sum1(n,n);
sum1(1,n) = cells(1,n-1)+ cells(1,1) +
cells(2,n) + cells(n,n);
sum2(1,n) = 4-sum1(1,n);
sum1(n,1) = cells(n,2)+ cells(n,n) +
cells(1,1) + cells(n-1,1);
sum2(n,1) = 4-sum1(n,1);
% The CA rule
p = (a*sum1+b*sum2).*(cells==1) +
(c*sum1+d*sum2).*(cells==0);%Prisoner's
Dilemma gain

%imitation of the best neighbor
for i=1:n
for j=1:n
if (i>1)&&(i<n)&&(j>1)&&(j<n)
[A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-1,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,1,i,j,n);
elseif (i==1)&&(j>1)&&(j<n)
[A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j) p(i,j-
1) p(i,j+1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,2,i,j,n);
elseif (i==n)&&(j>1)&&(j<n)
[A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i-1,j) p(i,j-
1) p(i,j+1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,3,i,j,n);
elseif (j==1)&&(i>1)&&(i<n)
[A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-1,j)
p(i,n) p(i,j+1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,4,i,j,n);
elseif (j==n)&&(i>1)&&(i<n)
[A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-1,j)
p(i,j-1) p(i,1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,5,i,j,n);
elseif (i==1)&&(j==1)
[A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,n) p(i,j+1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,6,i,j,n);
elseif (i==1)&&(j==n)
[A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j) p(i,j-
1) p(i,1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,7,i,j,n);
elseif (i==n)&&(j==1)
[A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,n) p(i-1,j)
p(i,j+1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,8,i,j,n);
elseif (i==n)&&(j==n)
[A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,j-1) p(i-
1,j) p(i,1)]);
[imax,jmax] = maxindices(k,9,i,j,n);
end

if ( cells(imax,jmax)==1 )
r = ( rand(1)<pwhite(i,j) );
cellsnew(i,j) = r*cells(imax,jmax) +
(1-r)*cells(i,j);
pwhite(i,j) = pwhite(i,j)*(1+epsw1);
pblack(i,j) = pblack(i,j)*epsw2;
else
r = ( rand(1)<pblack(i,j) );
cellsnew(i,j) = r*cells(imax,jmax) +
(1-r)*cells(i,j);
pblack(i,j) = pblack(i,j)*(1+epsb1);
pwhite(i,j) = pwhite(i,j)*epsb2;
end
end
end
cells = cellsnew;
%draw the new image
set(imh, 'cdata', cat(3,cells,cells,cells) )
%update the step number display
stepnumber = 1 +
str2num(get(number,'string'));
set(number,'string',num2str(stepnumber))

numOfwhite(stepnumber) =
sum(sum(cells));%number of white agents
totalGain(stepnumber) = sum(sum(p));
end

if (freeze==1)
run = 0;
freeze = 0;
end

drawnow %need this in the loop for controls
to work

end

```

## Κώδικας 6. Παραλλαγή με μεταβλητή πιθανότητα

```

%My_CA_2
%imitation of the best with probability p
%best we call the agent with th greater sum
of gains until now
%in every step all agents are getting
informed

```

```

%Neumann neighborhood, periodic
boundary
%1 indicates a cooperative agent, 0 a
defector
clf
clear all

```



```

%=====
%build the GUI
%define the plot button
plotbutton=icontrol('style','pushbutton',...
    'string','Run', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[100,400,50,20], ...
    'callback','run=1;');

%define the stop button
erasebutton=icontrol('style','pushbutton',.
..
    'string','Stop', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[200,400,50,20], ...
    'callback','freeze=1;');

%define the Quit button
quitbutton=icontrol('style','pushbutton',...
    'string','Quit', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[300,400,50,20], ...
    'callback','stop=1;close;');

number = uicontrol('style','text', ...
    'string','1', ...
    'fontsize',12, ...
    'position',[20,400,50,20]);

%=====
%CA setup

n=100;
%prisoners dilemma parameters
a=1;
b=1.9;
c=2.2;
d=0;
%probability of imitating the best agent
pim=0.9;

%initialize the arrays
z = zeros(n,n);
cells = z;
cellsnew = z;
sum1 = z;
sum2 = z;
p = z;
%set a few cells to one
cells = (rand(n,n))<.5;
%cells(n/2-1:n/2+2,n/2-1:n/2+2)=1;

%build an image and display it
imh = image(cat(3,cells,cells,cells));
set(imh, 'erasemode', 'none')

```

```

axis equal
axis tight

%definition of neighborhood
x = 2:n-1;
y = 2:n-1;
%Main event loop
stop= 0; %wait for a quit button push
run = 0; %wait for a draw
freeze = 0; %wait for a freeze

while (stop==0)

    if (run==1)
        sum1(x,y) = cells(x,y-1)+ cells(x,y+1)
        + cells(x-1, y) + cells(x+1,y); %sum of 1 in
        the neighborhood
        sum2(x,y) = 4-sum1(x,y); %sum of 0 in
        the neighborhood
        sum1(1,y) = cells(1,y-1)+ cells(1,y+1)
        + cells(n, y) + cells(2,y);
        sum2(1,y) = 4-sum1(1,y);
        sum1(n,y) = cells(n,y-1)+ cells(n,y+1)
        + cells(n-1, y) + cells(1,y);
        sum2(n,y) = 4-sum1(n,y);
        sum1(x,1) = cells(x,n)+ cells(x,2) +
        cells(x-1, 1) + cells(x+1,1);
        sum2(x,1) = 4-sum1(x,1);
        sum1(x,n) = cells(x,n-1)+ cells(x,1) +
        cells(x-1, n) + cells(x+1,n);
        sum2(x,n) = 4-sum1(x,n);
        sum1(1,1) = cells(1,2)+ cells(2,1) +
        cells(1, n) + cells(n,1);
        sum2(1,1) = 4-sum1(1,1);
        sum1(n,n) = cells(n,n-1)+ cells(n,1) +
        cells(n-1, n) + cells(1,n);
        sum2(n,n) = 4-sum1(n,n);
        sum1(1,n) = cells(1,n-1)+ cells(1,1) +
        cells(2,n) + cells(n,n);
        sum2(1,n) = 4-sum1(1,n);
        sum1(n,1) = cells(n,2)+ cells(n,n) +
        cells(1,1) + cells(n-1,1);
        sum2(n,1) = 4-sum1(n,1);
        % The CA rule
        pt = (a*sum1+b*sum2).*(cells==1) +
        (c*sum1+d*sum2).*(cells==0);%Prisoner'
        s Dilemma gain at t step
        p = p + pt;%sum of gains until t step

        %imitation of the best neighbor
        for i=1:n
            for j=1:n
                if (i>1)&&(i<n)&&(j>1)&&(j<n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
                    1,j) p(i,j-1) p(i,j+1)]);
                    [imax,jmax] =
                    maxindices(k,1,i,j,n);
                elseif (i==1)&&(j>1)&&(j<n)

```

```

        [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,2,i,j,n);
        elseif (i==n)&&(j>1)&&(j<n)
        [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i-1,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,3,i,j,n);
        elseif (j==1)&&(i>1)&&(i<n)
        [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,n) p(i,j+1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,4,i,j,n);
        elseif (j==n)&&(i>1)&&(i<n)
        [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,j-1) p(i,1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,5,i,j,n);
        elseif (i==1)&&(j==1)
        [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,n) p(i,j+1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,6,i,j,n);
        elseif (i==1)&&(j==n)
        [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,j-1) p(i,1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,7,i,j,n);
        elseif (i==n)&&(j==1)
        [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,n)
p(i-1,j) p(i,j+1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,8,i,j,n);
        elseif (i==n)&&(j==n)

```

```

        [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,j-1)
p(i-1,j) p(i,1)]);
        [imax,jmax] =
maxindices(k,9,i,j,n);
        end
        r = (rand(1)<pim );
        cellsnew(i,j) = r*cells(imax,jmax) +
(1-r)*cells(i,j);
        end
        end
        cells = cellsnew;
        %draw the new image
        set(imh, 'cdata', cat(3,cells,cells,cells) )
        %update the step number display
        stepnumber = 1 +
str2num(get(number, 'string'));

set(number, 'string', num2str(stepnumber))

        numofwhite(stepnumber) =
sum(sum(cells)); %number of white agents
        totalGain(stepnumber) =
sum(sum(pt));
        end

        if (freeze==1)
            run = 0;
            freeze = 0;
        end

        drawnow %need this in the loop for
controls to work
    end
end

```

## Κώδικας 7. Παραλλαγή με υπολογισμό συνολικού κέρδους μέχρι το τρέχον βήμα

```

%My_CA_3
%imitation of the best with probability p
%in every step all agents are getting
informed
%some agents try to increase their gain
%Neumann neighborhood, periodic
boundary
%1 indicates a cooperative agent, 0 a
defector
clf
clear all

%=====
%build the GUI
%define the plot button
plotbutton=icontrol('style','pushbutton',...
'string','Run', ...
'fontsize',12, ...
'position',[100,400,50,20], ...

```

```

'callback','run=1;');

%define the stop button
erasebutton=icontrol('style','pushbutton',...
..
'string','Stop', ...
'fontsize',12, ...
'position',[200,400,50,20], ...
'callback','freeze=1;');

%define the Quit button
quitbutton=icontrol('style','pushbutton',...
'string','Quit', ...
'fontsize',12, ...
'position',[300,400,50,20], ...
'callback','stop=1;close;');

number = uicontrol('style','text', ...
'string','1', ...
'fontsize',12, ...

```

```

'position',[20,400,50,20]);

%=====
%CA setup

n=100;
mp = 1000;%number of agents with
different rationality
%prisoners dilemma parameters
a=1;
b=0.2;
c=1.3;
d=0;
%probability of imitating the best agent
pim=0.9;

%initialize the arrays
z = zeros(n,n);
cells = z;
cellsnew = z;
sum1 = z;
sum2 = z;
%set a few cells to one
cells = (rand(n,n))<.5 ;
%cells(n/2-1:n/2+2,n/2-1:n/2+2)=1;

%determine agents with different
rationality
for mn=1:mp
    e(mn)=ceil( n*rand(1) );m(mn)=ceil(
n*rand(1) );
end

%build an image and display it
imh = image(cat(3,cells,cells,cells));
set(imh, 'erasemode', 'none')
axis equal
axis tight

%definition of neighborhood
x = 2:n-1;
y = 2:n-1;
%Main event loop
stop= 0; %wait for a quit button push
run = 0; %wait for a draw
freeze = 0; %wait for a freeze

while (stop==0)

    if (run==1)
        sum1(x,y) = cells(x,y-1)+ cells(x,y+1)
+ cells(x-1, y) + cells(x+1,y); %sum of 1 in
the neighborhood
        sum2(x,y) = 4-sum1(x,y); %sum of 0 in
the neighborhood
        sum1(1,y) = cells(1,y-1)+ cells(1,y+1)
+ cells(n, y) + cells(2,y);
        sum2(1,y) = 4-sum1(1,y);
        sum1(n,y) = cells(n,y-1)+ cells(n,y+1)
+ cells(n-1, y) + cells(1,y);
        sum2(n,y) = 4-sum1(n,y);
        sum1(x,1) = cells(x,n)+ cells(x,2) +
cells(x-1, 1) + cells(x+1,1);
        sum2(x,1) = 4-sum1(x,1);
        sum1(x,n) = cells(x,n-1)+ cells(x,1) +
cells(x-1, n) + cells(x+1,n);
        sum2(x,n) = 4-sum1(x,n);
        sum1(1,1) = cells(1,2)+ cells(2,1) +
cells(1, n) + cells(n,1);
        sum2(1,1) = 4-sum1(1,1);
        sum1(n,n) = cells(n,n-1)+ cells(n,1) +
cells(n-1, n) + cells(1,n);
        sum2(n,n) = 4-sum1(n,n);
        sum1(1,n) = cells(1,n-1)+ cells(1,1) +
cells(2,n) + cells(n,n);
        sum2(1,n) = 4-sum1(1,n);
        sum1(n,1) = cells(n,2)+ cells(n,n) +
cells(1,1) + cells(n-1,1);
        sum2(n,1) = 4-sum1(n,1);
        % The CA rule
        p = (a*sum1+b*sum2).*(cells==1) +
(c*sum1+d*sum2).*(cells==0);%Prisoner'
s Dilemma gain

        %imitation of the best neighbor
        for i=1:n
            for j=1:n
                if (i>1)&&(i<n)&&(j>1)&&(j<n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,j-1) p(i,j+1)]);
                    [imax,jmax] =
maxindices(k,1,i,j,n);
                elseif (i==1)&&(j>1)&&(j<n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
                    [imax,jmax] =
maxindices(k,2,i,j,n);
                elseif (i==n)&&(j>1)&&(j<n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i-1,j)
p(i,j-1) p(i,j+1)]);
                    [imax,jmax] =
maxindices(k,3,i,j,n);
                elseif (j==1)&&(i>1)&&(i<n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,n) p(i,j+1)]);
                    [imax,jmax] =
maxindices(k,4,i,j,n);
                elseif (j==n)&&(i>1)&&(i<n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(i-
1,j) p(i,j-1) p(i,1)]);
                    [imax,jmax] =
maxindices(k,5,i,j,n);
                elseif (i==1)&&(j==1)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,n) p(i,j+1)]);

```

```

        [imax,jmax] =
maxindices(k,6,i,j,n);
        elseif (i==1)&&(j==n)
            [A,k] = max([p(i,j) p(i+1,j) p(n,j)
p(i,j-1) p(i,1)]);
            [imax,jmax] =
maxindices(k,7,i,j,n);
            elseif (i==n)&&(j==1)
                [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,n)
p(i-1,j) p(i,j+1)]);
                [imax,jmax] =
maxindices(k,8,i,j,n);
                elseif (i==n)&&(j==n)
                    [A,k] = max([p(i,j) p(1,j) p(i,j-1)
p(i-1,j) p(i,1)]);
                    [imax,jmax] =
maxindices(k,9,i,j,n);
                    end
                    r = (rand(1)<pim);
                    cellsnew(i,j) = r*cells(imax,jmax) +
(1-r)*cells(i,j);
                    end
                end

        for q=1:mp
            cellsnew(e(q),m(q)) = ( (
a*sum1(e(q),m(q))+b*sum2(e(q),m(q)) )
> (
c*sum1(e(q),m(q))+d*sum2(e(q),m(q)) )
);
            end

% for q=1:mp
% cellsnew(e(q),m(q)) =
(rand(1)<0.2);
% end

        cells = cellsnew;
        p = (a*sum1+b*sum2).*(cells==1) +
(c*sum1+d*sum2).*(cells==0);%Prisoner'
s Dilemma gain
        %draw the new image
        set(imh, 'cdata', cat(3,cells,cells,cells) )
        %update the step number display
        stepnumber = 1 +
str2num(get(number, 'string'));

        set(number, 'string', num2str(stepnumber))

        numofwhite(stepnumber) =
sum(sum(cells));%number of white agents
        totalGain(stepnumber) = sum(sum(p));
        end

        if (freeze==1)
            run = 0;
            freeze = 0;
        end

        drawnow %need this in the loop for
controls to work
    end
end

```

### Κώδικας 8. Συνύπαρξη agents με διαφορετική λογική

## Αναφορές

### Βιβλία

- [1] Boccaro N., Modeling Complex Systems (New York: Springer-Verlag 2004)
- [2] Hasselblatt B., Katok A., A First Course in Dynamics: with a Panorama of Recent Developments (New York: Cambridge University Press 1993)
- [3] Huang K., Introduction to Statistical Physics (New York: Taylor & Francis 2001)
- [4] Kindermann R., Snell J.R., Markov Random Fields and Their Applications, Contemporary Mathematics, Vol. 1 (Providence, R.I. : American Mathematical Society 1980)
- [5] Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J., Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences, Cambridge Nonlinear science Series, 12 (New York: Cambridge University Press 2001)
- [6] Pollicott M., Yuri M., Dynamical Systems and Ergodic Theory, London Mathematical Society Student Texts, 40 (New York: Cambridge University Press 1998)
- [7] Poundstone W., Prisoner's Dilemma (New York: Anchor Books 1992)
- [8] Sornette D., Critical Phenomena in Natural Sciences: Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder (Germany: Springer-Verlag 2003)
- [9] Τζίμας Α., Swarm Intelligence: Επισκόπηση και Εφαρμογές (Διπλωματική Εργασία, 2003)

### Papers

- [10] Adler R.L., Conheim A.G., McAndrew M.H., Topological Entropy, Transactions of American mathematical Society, Vol. 114, pp. 61-85 (1965)
- [11] Baras J., Jiang T., Purkayastha P., Constrained Coalitional Games and Networks of Autonomous Agents, ISCCSP 2008, pp. 972-979, Malta
- [12] Brush S., History of the Lenz-Ising Model, Reviews of Modern Physics, Vol. 39, No. 4, pp. 883-893 (1967)
- [13] D'amico M., Manzini G., Margara L., On Computing the entropy of cellular automata, Theoretical Computer Science 290, 1629-1646 (2003)
- [14] Eckmann J.P., Ruelle D., Ergodic theory of chaos and strange attractors, Reviews of Modern Physics, Vol. 57, No. 3, Part I (The American Physical Society 1985)

- [15]Fox C., Nicholls G.K., Exact MAP states and expectations from perfect sampling
- [16]Hatzopoulos V., Jensen H.J., The prisoners dilemma on a stochastic non-growth network evolution model
- [17]Helbing D., Yu W., The outbreak of cooperation among success-driven individuals under noisy conditions, PNAS, Vol. 106, No. 10, 3680-3685 (2009)
- [18]Ito M., Osato N., Nasu M., Linear Cellular Automata over  $Z_m$ , Journal of Computer and System Sciences, 27, 125-140 (1983)
- [19]Kochanski M.S., On the two- and three-dimensional Ising-Onsager problem in presence of magnetic field, Acta Physica Polonica B, Vol. 28, pp. 1071-1085 (1997)
- [20]Langton C.G., Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent of computation, Physica D, Vol. 42, 12-37 (North-Holland 1990)
- [21]Metropolis N., Rosenbluth A., Rosenbluth M., Teller A., Equation of State Calculations by Fast Computing Machines, The Journal of Chemical Physics, Vol. 21, No. 6 (1953)
- [22]Somarakis C., Papavassilopoulos G.P., Udwardia F.E., Nonlinear Dynamics of a New Cellular Automata Model, 22<sup>nd</sup> European Conference on Modelling and Simulation, pp. 164-170 (2008)
- [23]Suzuki J., Kaneko K., Imitation games, Physica D, Vol. 75, 328-342 (1994)
- [24]Wolfram S., Universality and complexity in cellular automata, Physica D, 1-35 (1984)