



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Μορφολογία, Ενεργές
Καμπύλες σε γράφους και
υλοποιήσεις με Γραφοτομές.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ:

ΔΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ Κ. ΚΙΜΩΝΑ

Επιβλέπων: Μαραγκός Πέτρος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΕΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Μορφολογία, Ενεργές Καμπύλες σε γράφους και υλοποιήσεις με Γραφοτομές.

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ:

ΔΡΑΚΟΠΟΥΛΟΥ Κ. ΚΙΜΩΝΑ

Επιβλέπων: Μαραγκός Πέτρος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 21η Ιουλίου 2009.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Μαραγκός Πέτρος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Θεολόγου Μιχαήλ
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Παπαβασιλόπουλος Γεώργιος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009

.....
Δρακόπουλος Κ. Κίμων
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών
Ε.Μ.Π.

Copyright ©Δρακόπουλος Κ. Κίμων, 2009 Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα. Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Η διπλωματική αυτή εργασία αποτελεί το τελευταίο στάδιο των σπουδών μου στο Εθνικό Μετσόβειο Πολυτεχνείο, το οποίο εκτός από τα πέντε παραγωγικά και καθοριστικά χρόνια που μου προσέφερε, μου έδωσε και το βήμα για να πετύχω τα επόμενα όνειρα για τη ζωή μου.

Κατά τη διάρκεια των σπουδών μου είχα την τιμή να έρθω σε επαφή με ανθρώπους που με ενέπνευσαν και με βελτίωσαν ως προσωπικότητα αλλά και ως σπουδαστή. Από όλους θα ήθελα να ξεχωρίσω τον καθηγητή μου, κ.Πέτρο Μαραγκό, επιβλέποντα της παρούσας εργασίας, για όλα όσα μου προσέφερε: ιδέες, γνώσεις, αναφορές, κίνητρα, υπομονή αλλά κυρίως πρότυπα σχετικά με το πώς οφείλει να είναι ένας ολοκληρωμένος επιστήμονας, ερευνητής, καθηγητής και άνθρωπος. Εύχομαι, λοιπόν, στο μέλλον, να έχω την τιμή και την τύχη να καθοδηγούμαι και να συνεργάζομαι με τέτοιους ανθρώπους και τελικά να πλησιάσω, από μακριά, το επίπεδό τους.

Κίμων.

Περίληψη

Η αναγκαιότητα επεξεργασίας πληροφοριών είναι δεδομένη. Ιδιαίτερα στην εποχή μας, που ο όγκος της πληροφορίας αυξάνεται καθημερινά και η σημασία της επεξεργασίας της γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη. Μέχρι πριν από κάποια χρόνια η διαδικασία της αυτοματοποιημένης επεξεργασίας μεγάλου όγκου δεδομένων λάμβανε χώρα μόνο στην επεξεργασία εικόνων, όπου οι υπολογιστικοί περιορισμοί και η απαιτητικότητα της εφαρμογής οδήγησαν στην ανάπτυξη πλούσιας θεωρίας και αποτελεσματικών τεχνικών. Επομένως, δεδομένης της μακροχρόνιας εξέλιξης και βελτίωσης της ερευνητικής μελέτης στον τομέα της επεξεργασίας εικόνων δεν υπάρχει μεγαλύτερη πηγή γνώσης και εμπειρίας, αν θέλει κανείς να επεκταθεί σε νέες περιοχές και να καλύψει τις σύγχρονες ανάγκες.

Λόγω της πολυμορφίας του τρόπου παρουσίασης και αναπαράστασης της πληροφορίας στις μέρες μας, καλούμαστε να αναπτύξουμε μεθόδους σε όσο το δυνατό πιο αφαιρετικές και γενικές δομές με όσο το δυνατό λιγότερους περιορισμούς σχετικά με την μοντελοποίηση. Μεγάλο μέρος των σύγχρονων αναγκών, εφαρμογών και διαδικασιών μπορεί να παρασταθεί σε γράφους, που αποτελούν την πλέον αφαιρετική και γενική δομή. Έτσι, λοιπόν, κρίνεται σκόπιμη η ανάπτυξη μεθόδων για την απευθείας επεξεργασία της πληροφορίας στον τόπο ορισμού της, τον γράφο, ο οποίος αποκτά όλο και μεγαλύτερες διαστάσεις και επεκτείνεται σε τόσο μεγάλο βαθμό που προσεγγίζει το όριο του συνεχούς.

Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με την πληθώρα, όπως αναφέρθηκε, θεωριών και τεχνικών στο πεδίο της Όρασης Υπολογιστών οδηγεί φυσικά στην προσπάθεια επέκτασης των παραπάνω στις νέες απαιτήσεις της μη κανονικής-τυχαίας δομής της αναπαράστασης. Ακριβώς αυτός είναι και ο σκοπός της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας, η επέκταση, δηλαδή, υπάρχοντων αλγορίθμων σε γράφους.

Συγκεκριμένα, οι συνεισφορές της εργασίας αυτής σχετίζονται αφενός με την επέκταση του κλασσικού γεωδαιτικού μοντέλου με επιπεδοσύνολα σε γράφους προσεγγίζοντας μετά από συγκεκριμένη συλλογιστική τους συνεχείς όρους στη διακριτή μη κανονική περίπτωση και αφετέρου με την γενίκευση ενός αλγορίθμου υλοποίησης της γεωδαιτικής θεωρίας σχεδιασμένου αποκλειστικά για ορθοκανονικά πλέγματα στην αφηρημένη γενική περίπτωση του γράφου. Ταυτόχρονα, παρουσιάζονται και τα αντίστοιχα στοιχεία υποβάθρου των αντίστοιχων τεχνικών καθώς και ένας γραφοθεωρητικός αλγόριθμος σχεδιασμένος εξ' αρχής για εφαρμογή σε δεδομένα αδιάφορης - μη κανονικής «χωρικής» δομής.

Abstract

The necessity of information processing cannot be denied. Especially nowadays, the vast amount of information increases exponentially and the importance of processing is getting increasing attention. Until a few years ago, procedures of automatically processing huge amounts of data used to be dealt only by Computer Vision oriented Scientists where the computational restrictions and the demanding applications led to the development of significant theoretical results and efficient techniques. Thus, given the extensive experience and the constant improvement of research on image processing there does not exist a richer source of knowledge and experience for someone seeking to expand to new areas and fulfill modern needs. Diversity of the representation and aspects of information nowadays, requires from the scientists to develop methods as general and subtractive as possible with the minimum number of constraints regarding modeling and processing. The biggest portion of today's needs, applications and procedures can be modeled on graphs, structures that constitute the most general structure there exists. Consequently, there is an urgent need for the development of methods for processing information where it is 'born', on a graph, whose dimension is growing fast and expands in such a degree that approaches the continuous space.

The above, combined with the abundance, as mentioned of theories and techniques of Computer Vision has led naturally to the effort of expanding the prior work to the new demands of non-normal/random structure of representation. Exactly this is the goal of this thesis, that is the expansion of existing algorithms on graphs.

Specifically, the contribution of this thesis relate firstly with the expansion of the classical geodesic model implemented with level sets on graphs approximating, given a strict reasoning, the continuous terms to the discrete non canonical case and secondly with the generalization of an algorithm which implements the geodesic theory, which has been designed originally for the rectangular grid, to the general graph case. Simultaneously, the necessary background knowledge is presented together with a graph-theoretic algorithm designed originally to be applied on graph data.

keywords: geodesic active contours-random walk segmentation-graph morphology-graph cuts-geocuts-vector calculus on graphs-graph segmentation-geocuts on graphs-digital curvature estimation-partial difference equations on graphs-energy minimization on graphs

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	10
1.1	Αναγκαιότητα επεξεργασίας δεδομένων σε γράφους	10
1.2	Υπάρχουσα έρευνα-Κεντρική Ιδέα	12
2	Προσεγγιστικές γεωδαιτικές καμπύλες σε γράφους	14
2.1	Ενεργές Καμπύλες - Συνεχής περίπτωση	14
2.1.1	Εισαγωγικά στοιχεία	14
2.1.2	Ενεργές καμπύλες που βασίζονται στην ελαχιστοποίηση ενέργειας	15
2.1.3	Το γεωδαιτικό μοντέλο	17
2.1.4	Εξαγωγή εξισώσεων κίνησης με Euler-Lagrange	18
2.1.5	Υλοποίηση με επιπεδοσύνολα	20
2.2	Ενεργές καμπύλες σε γράφους	23
2.2.1	Κίνηση σταθερής ταχύτητας	25
2.2.2	Μια προσπάθεια για την εξαγωγή εξισώσεων διαφορών για την κίνηση σταθερής ταχύτητας	27
2.2.3	Μορφολογικοί τελεστές σε γράφους	28
2.2.4	Εξαγωγή εξίσωσης διαφορών σταθερής ταχύτητας	34
2.2.5	Προσέγγιση γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε γράφους μέσω επιπεδοσυνόλων	37
2.2.6	Παραδείγματα υλοποίησης	47
2.2.7	Σημεία μελλοντικής έρευνας	54
3	Ανίχνευση σε γράφους με τυχαίους περιπάτους	55
3.1	Ποιοτική περιγραφή του αλγορίθμου	55
3.2	Αναλυτική παρουσίαση του αλγορίθμου	56
3.2.1	Καθορισμός των βαρών	58
3.2.2	Πρόβλημα Dirichlet	58
3.2.3	Αναλογία με τα κυκλώματα	60
3.2.4	Παραδείγματα υλοποίησης	60
3.3	Σχολιασμός αλγορίθμου	67

4 Γεωδαιτικές καμπύλες με γραφοτομές	69
4.1 Η θεωρία των γραφοτομών	69
4.1.1 Συμβολισμός -Προκαταρκτικά στοιχεία	69
4.1.2 Το πρόβλημα της ελάχιστης τομής / μέγιστης ροής . . .	70
4.1.3 Γραφοτομές για την δυαδική βελτιστοποίηση	71
4.1.4 Οι γραφοτομές ως υπερεπιφάνειες -σύνδεση με τις γεω- δαιτικές καμπύλες	73
4.2 Γεωτομές -Επεκταμένες γεωτομές σε γράφους	75
4.2.1 Ολοκληρωτική γεωμετρία και εξισώσεις τύπου Crofton .	76
4.2.2 Σύγκριση κλασσικού μετρικού μονοπατιού -μετρικού γραφοτομών.	78
4.2.3 Γεωτομές σε ορθοκανονικό επίπεδο πλέγμα	79
4.3 Γεωτομές σε γράφους	82
4.4 Μία ολοκληρωτική λύση στην προσέγγιση των Μ.Δ.Ε. που περι- γράφουν την εξέλιξη των γεωδαιτικών καμπυλών μέσω γεωτομών.	90
4.4.1 Απόσταση μεταξύ καμπυλών	90
4.4.2 Ενσωμάτωση γεωτομών- επεκταμένων γεωτομών	92
4.4.3 Υλοποίηση αλγορίθμου	93
5 Εφαρμογή σε μετεωρολογικά δεδομένα / Συμπεράσματα	96
5.1 Κατάτμηση μετεωρολογικών δεδομένων	96
5.2 Παρατηρήσεις - σχόλια	96

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Αναγκαιότητα επεξεργασίας δεδομένων σε γράφους

'Knowing a great deal is not the same as being smart; intelligence is not information alone but also judgment, the manner in which information is collected and used'

Carl Sagan

Η έννοια της πληροφορίας έχει αποκτήσει καθοριστική σημασία στη σημερινή εποχή. Ταυτόχρονα, η εξέλιξη νέων εφαρμογών, συστημάτων και μεθόδων καθώς και η δραματική αύξηση της πολυπλοκότητας και των διαστάσεων των υπαρχόντων οδηγεί στην αναγκαιότητα επεξεργασίας ολοένα και μεγαλύτερου όγκου δεδομένων για την εξαγωγή συμπερασμάτων. Κρίνεται, λοιπόν, απαραίτητη η ανάπτυξη αλγορίθμων και μεθόδων, που δεν απαιτούν την παρέμβαση του ανθρώπινου παράγοντα, για την αυτοματοποιημένη, συστηματική και αποτελεσματική επεξεργασία των εν λόγω πληροφοριών.

Επιπλέον, η πολυμορφία του πεδίου εφαρμογών και προέλευσης του όγκου των πληροφοριών καθιστά αδύνατη τη μοντελοποίησή τους με συστηματικό και «κανονικό» τρόπο καθώς, παραδεχόμενοι την κανονικότητα, αφήνουμε ανεκμετάλλετες σημαντικές ιδιαιτερότητες ή επηρεάζομαστε δυσμενώς από τις αδυναμίες της εκάστοτε εφαρμογής. Αν και θα αναλύσουμε ορισμένες περιπτώσεις στη συνέχεια, δίνουμε ένα παράδειγμα των παραπάνω. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση, όπου έχουμε συγκεντρωμένα τα στοιχεία της μέσης βροχόπτωσης

για μια χρονική περίοδο σε ένα σύνολο μετεωρολογικών σταθμών σε μια ήπειρο. Φυσικά, οι θέσεις δεν είναι (και είναι αδύνατο να είναι) κατανοημένες με κανονικό τρόπο, για παράδειγμα πάνω σε ένα ορθοκανονικό πλέγμα. Κάνοντας όμως μια τέτοια παραδοχή ή τροποποίηση θα έπρεπε να επιστρατεύσουμε τεχνικές και προσεγγίσεις (για παράδειγμα παρεμβολή των ενδιάμεσων τιμών στα σημεία του πλέγματος όπου δεν έχουμε πληροφορία) οι οποίες εισάγουν σφάλματα και πολυπλοκότητα που θα μπορούσαν να αποφευχθούν.

Για όλους τους παραπάνω λόγους, καθίσταται αναγκαία η εξαγωγή τεχνικών επεξεργασίας δεδομένων που ορίζονται σε όσο το δυνατό πιο αφαιρετικές δομές οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να εξειδικευτούν με βάση τις εκάστοτε ανάγκες. Τέτοιου τύπου δομές, οι οποίες εξυπηρετούν όλο το φάσμα των εφαρμογών που μπορούμε να θεωρήσουμε, είναι οι γράφοι, οι μαθηματικές δομές δηλαδή που μοντελοποιούν τις σχέσεις κατά ζεύγη μεταξύ αντικειμένων από κάποια συγκεκριμένη συλλογή. Κάθε γράφος, με βάση τον προηγούμενο ορισμό είναι ένα σύνολο κόμβων που συνδέονται μεταξύ τους από ένα σύνολο ακμών. Αναφερόμενοι στο προηγούμενο παράδειγμα των μετεωρολογικών σταθμών μπορούμε να φανταστούμε ένα γράφο, του οποίου οι κόμβοι είναι οι μετεωρολογικοί σταθμοί από τους οποίους συγκεντρώνουμε τις μετρήσεις της βροχόπτωσης, ενώ τις ακμές μπορούμε, στη συγκεκριμένη εφαρμογή, να τις ορίσουμε εμείς ώστε να εξυπηρετούν την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας της επεξεργασίας.

Η σημασία των παραπάνω γίνεται εντονότερη αν αναλογιστούμε την ευρύτητα των εφαρμογών:

- Το πρώτο παράδειγμα δικτύων με τεράστιο όγκο δεδομένων, εξαιρετικά μεγάλο αριθμό κόμβων και εμφανή την ανάγκη αυτοματοποιημένης επεξεργασίας της πληροφορίας είναι τα **Δίκτυα Υπολογιστών** και ειδικότερα το **Διαδίκτυο**. Κάθε διεύθυνση δικτύου, κάθε τερματικός χρήστης ακόμα και κάθε υποδίκτυο παράγει κίνηση δεδομένων η οποία, αφού ποσοτικοποιηθεί, μπορεί να υποστεί επεξεργασία με αποτέλεσμα την ανίχνευση, για παράδειγμα, περιοχών με εντονότερη ή χαμηλότερη κίνηση, συμπέρασμα ουσιαστικό για τους διαχειριστές ή τους παρόχους των δικτύων.
- Ένας ραγδαία αναπτυσσόμενος τομέας εφαρμογών με εξαιρετικά μεγάλη ανάγκη για ταχεία και αποτελεσματική επεξεργασία των δεδομένων που παράγονται είναι τα **Τηλεπικοινωνιακά Δίκτυα**. Χαρακτηριστικό παράδειγμα, ένα δίκτυο Κινητών Τηλεπικοινωνιών, όπου ο διαχειριστής του δικτύου αντλεί πληροφορίες από κάθε σταθμό βάσης (BSC) σχετικά με διάφορα μεγέθη, όπως για παράδειγμα το φορτίο που εξυπηρετεί σε κάθε χρονική στιγμή, το μέσο φορτίο που εξυπηρετεί ανά διάφορες χρονικές περιόδους, από κάθε κέντρο μεταγωγής κινητών υπηρεσιών (MSC) τον

αριθμό των μεταπομπών από και προς κάθε κυψέλη, οι οποίες είναι, βέβαια, τοπικά προσδιορισμένες και πολλά άλλα μεγέθη χρήσιμα για την ομάλη λειτουργία και τη βελτιστοποίηση του δικτύου.

- Τις τελευταίες δεκαετίες έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση σε ένα νέο τύπο δικτύων τα λεγόμενα **Κοινωνικά Δίκτυα (Social Networks)**. Ένα κοινωνικό δίκτυο είναι μια δομή που αποτελείται από κόμβους (οι οποίοι μπορούν να αναπαριστούν άτομα, οργανισμούς, ομάδες) που συνδέονται με κάποιου είδους σχέση όπως φιλία, αξίες, ιδέες, συγγένεια, πεποιθήσεις, οικονομικές δεσοληψίες. Οι σχέσεις αυτές μπορούν, αντίστοιχα, να μοντελοποιηθούν από κάποια ποσοτικοποιημένη τιμή σε κάθε κόμβο του δικτύου αυτού (π.χ εκλογικό ποσοστό πολιτικών κομμάτων σε κάθε εκλογικό κέντρο) και να υποστούν επεξεργασία με ιδιαίτερα ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

1.2 Υπάρχουσα έρευνα-Κεντρική Ιδέα

Ένα από τα παραδοσιακά αντικείμενα της Όρασης Υπολογιστών είναι η ανίχνευση αντικειμένων σε εικόνες. Για το σκοπό αυτό έχει αναπτυχθεί πληθώρα τεχνικών και θεωριών με πλούσιες επεκτάσεις και εξαιρετική θεωρητική θεμελίωση. Σχετικά πρόσφατα, με αντικείμενο και πάλι εφαρμογές στο ίδιο πεδίο, ξεκίνησε η προσέγγιση των προβλημάτων αυτών με γραφοθεωρητικές μεθόδους. Τόσο όμως αυτές όσο και οι καθαρά παραδοσιακές μπορούν να επεκταθούν όπως θα δούμε στην παρούσα μελέτη, σε εφαρμογές ολοκληρωτικά διαφορετικές από αυτές για τις οποίες σχεδιάστηκαν για την επεξεργασία δηλαδή αφηρημένων δεδομένων σε τυχαίους γράφους. Ειδική περίπτωση παραμένει φυσικά το ορθοκανονικό πλέγμα στο οποίο είναι ορισμένη μια συνάρτηση φωτεινότητας, αλλά με τις παρούσες επεκτάσεις δεν συντρέχει κανένας απολύτως λόγος να περιοριστούμε στην κανονικότητα και επαναληψιμότητα της δομής της κλασικής εικόνας.

Στο κεφάλαιο 2 αφού γίνει μια πλήρης παρουσίαση της θεωρίας και της εξέλιξης των κλασικών γεωδαιτικών καμπυλών στο συνεχή χώρο και αφού εξαχθούν οι εξισώσεις της υλοποίησής τους με επιπεδοσύνολα, μελετάται η δυνατότητα της επέκτασης της μεθόδου απευθείας σε γράφους προσεγγίζοντας κατάλληλα τους όρους των κλασικών εξισώσεων εξέλιξης. Για την εξαγωγή ορισμένων εκ των προσεγγίσεων επιστρατεύεται η θεωρία της μορφολογίας γράφων με τελικό αποτέλεσμα μια συνολική εξίσωση διαφορών η οποία μπορεί απευθείας να χρησιμοποιηθεί για την ανίχνευση αντικειμένων πάνω σε γράφους.

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται μία άμεσα υλοποιήσιμη τεχνική ανίχνευσης αντικειμένων σε εικόνες, σύμφωνα με την οποία όμως, το υπό μελέτη πρόβλημα

είναι απευθείας ορισμένο σε γράφους. Συγκεκριμένα πρόκειται για ένα πρόβλημα πολλαπλής κατηγοριοποίησης και ανάθεσης «ετικετών» στους κόμβους με βάση την «εγγύτητά» τους ως προς ορισμένους από το χρήστη κόμβους με γνωστή ταυτότητα.

Στο κεφάλαιο 4 μετά από μία σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των γραφοτομών, την πλέον ανεπτυγμένη γραφοθεωρητική τεχνική στα θέματα που μελετούμε με εξαιρετική επεκτασιμότητα και προσαρμοσιμότητα σε παραδοσιακά προβλήματα λόγω της γενικότητας της εφαρμογής της (συνδυαστική βελτιστοποίηση). Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε σε γράφους μια ιδέα που έχει αναπτυχθεί για εικόνες σε πρθοκανονικό πλέγμα και υλοποιεί με αρκετά, για τα δεδομένα της διακριτής φύσης των προβλημάτων, μεγάλη ακρίβεια τη θεωρία των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών.

Τέλος στο συντομότερο κεφάλαιο 5 δίνεται παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω τεχνικών σε πραγματικά μετεωρολογικά δεδομένα.

Κεφάλαιο 2

Προσεγγιστικές γεωδαιτικές καμπύλες σε γράφους

2.1 Ενεργές Καμπύλες - Συνεχής περίπτωση

2.1.1 Εισαγωγικά στοιχεία

Από την πρωτότυπη δουλειά των Kass, Witkin και Terzopoulos [1] ιδιαίτερη ερευνητική έμφαση έχει δοθεί στα μοντέλα ενεργών καμπυλών (γνωστά και ως «φίδια») για την ανίχνευση περιγραμμάτων και τον τεμαχισμό σε εικόνες. Η κλασική προσέγγιση βασίζεται στην σταδιακή αλλοίωση του σχήματος και της τοπολογίας μιας αρχικής καμπύλης προς το σύνορο του αντικειμένου που θέλουμε να ανιχνευθεί. Αυτή η μεταβολή της μορφής της καμπύλης προκύπτει από την ελαχιστοποίηση ενός συναρτησιακού που σχεδιάζεται ώστε το εκάστοτε τοπικό ελάχιστο να επιτυγχάνεται στο σύνορο του αντικειμένου-στόχου. Το συναρτησιακό ενέργειας που αναφέρθηκε, αποτελείται ουσιαστικά από δύο όρους, εκ των οποίων ο ένας ελέγχει την ομαλότητα της καμπύλης, ενώ ο άλλος έλκει την καμπύλη προς το επιθυμητό σύνορο.

Η ακριβής ελαχιστοποίηση του εν λόγω συναρτησιακού δεν επιτρέπει αλλαγές στην τοπολογία της εξελισσόμενης καμπύλης και, επομένως, η τοπολογία της τελικής καμπύλης, η οποία και ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό, θα είναι όμοια με της αρχικής, με εξαίρεση κάποιες εξειδικευμένες τακτικές και ευριστικές ([2], [3], [4]) όπου ανιχνεύονται εκ των προτέρων πιθανές τοπολογικές μεταβολές. Το μειονέκτημα αυτό δημιουργεί πρόβλημα, όταν ένας άγνωστος αριθμός αντικειμένων θα πρέπει να ανιχνευθεί ταυτόχρονα.

Σχετικά πρόσφατα, νέα γεωμετρικά μοντέλα για τις ενεργές καμπύλες, εμπνευσμένα από την καινοτομική μεθοδολογία των επιπεδοσυνόλων για

την εξέλιξη καμπυλών (τεζτλατινΟσηρ&Σετηαν 1988), προτάθηκαν ταυτόχρονα από τους Malladi, Sethian [6] και Caselles et al. [5] βασισμένα στη θεωρία της εξέλιξης καμπυλών και των γεωμετρικών ροών. Σε αυτά τα νέα μοντέλα ενεργών καμπυλών, η καμπύλη αλλάζει μορφή υπό την επίδραση μιας ταχύτητας η οποία περιλαμβάνει επίσης δύο όρους, έναν που σχετίζεται με την κανονικότητα της καμπύλης και έναν που συρρικνώνει ή διαστέλλει την καμπύλη προς το επιθυμητό σύνορο. Το τελικό μοντέλο δίνεται από μια έκφραση γεωμετρικής ροής (Μερική Διαφορική Εξίσωση) που βασίζεται στην κίνηση υπό την επίδραση της καμπυλότητας της ίδιας της καμπύλης. Με τον τρόπο αυτό, περισσότερα αντικείμενα ενδιαφέροντος μπορούν να ανιχνευθούν ταυτόχρονα χωρίς την επιστράτευση εξειδικευμένων μεθοδολογιών.

Όπως θα συζητήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια ξεκινώντας από την κλασική ενεργειακή προσέγγιση μπορούμε να καταλήξουμε στο ισοδύναμο πρόβλημα της εύρεσης μιας γεωδαιτικής καμπύλης σε ένα χώρο Riemann με μετρικό ορισμένο με βάση την εικόνα. Επομένως, η ανίχνευση των αντικειμένων ανάγεται στην εύρεση της καμπύλης εκείνης που ελαχιστοποιεί ένα σταθμισμένο μήκος και η οποία, αν στη συνέχεια ενσωματωθεί σε μια τρισδιάστατη συνάρτηση ως επιπεδοσύνολο, θα οδηγήσει στο προαναφερθέν μοντέλο γεωμετρικής ροής.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σύνδεση μεταξύ της των κλασικών - βασισμένων σε ελαχιστοποίηση ενέργειας - ενεργών καμπυλών και των ελαχίστου μήκους καμπυλών σε ένα χώρο Riemann που συνάγεται από την εικόνα και θα εξάγουμε τη Μερική Διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση των ενεργών καμπυλών και βελτιώνει τα προγενέστερα μοντέλα.

2.1.2 Ενεργές καμπύλες που βασίζονται στην ελαχιστοποίηση ενέργειας

Έστω $C(q) : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ μια παραμετροποιημένη επίπεδη καμπύλη και έστω $I : [0, a] \times [0, b] \rightarrow \mathbf{R}^+$ η εικόνα από την οποία επιθυμούμε να εξάγουμε τα αντικείμενα. Η κλασική ενεργειακή προσέγγιση [1] σχετίζει την εκάστοτε καμπύλη C με το ενεργειακό:

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)| dq + \beta \int_0^1 |C''(q)| dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(C(q))| dq \quad a, b, l \geq 0 \quad (2.1)$$

Οι πρώτοι δύο όροι ελέγχουν την ομαλότητα της καμπύλης ενώ ο τρίτος όρος είναι υπεύθυνος για την έλξη της καμπύλης προς το αντικείμενο. Η επίλυση του προβλήματος αφορά στην εύρεση της καμπύλης εκείνης η οποία τοπικά ή ολικά ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησιακό. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, η ίδια η μορφή του συναρτησιακού δεν επιτρέπει την ανίχνευση περισσότερων από ένα αντικειμένων, καθώς η ελαχιστοποίηση θα λάβει χώρα

σε μια καμπύλη η οποία, λόγω των όρων ομαλότητας, θα προσιδιάζει περισσότερο με μια συνεκτική κάλυψη του χώρου των επιμέρους αντικειμένων. Ένα ακόμα ζήτημα, το οποίο τίθεται, σχετίζεται με την επιλογή των παραμέτρων που παρουσιάζονται στην παραπάνω έκφραση (2.1) .

Εξετάζουμε ειδικά την περίπτωση για την οποία $\beta = 0$, χαλαρώνοντας έτσι την απαίτησή μας σχετικά με την ομαλότητα της καμπύλης. Η παραδοχή αυτή γίνεται πρώτον, επειδή μέσω αυτής θα οδηγηθούμε στη σύνδεση με το γεωδαιτικό μοντέλο και δεύτερον, γιατί η παρουσία μόνο του πρώτου όρου, ο οποίος, όπως θα φανεί, συνδέεται άμεσα με την κίνηση υπό την επίδραση της ίδιας καμπυλότητας, αρκεί για να εξασφαλίσει αρκετά ομαλό αποτέλεσμα([7],[8],[9]). Με τον τρόπο αυτό η εξίσωση (2.1) ανάγεται στην:

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla I(C(q))| dq \quad a, l \geq 0 \quad (2.2)$$

Η παραπάνω σχέση πρέπει να εμπλουτιστεί περαιτέρω με τον εξής τρόπο: Έστω $g : [0 + \infty] \rightarrow \mathbf{R}^+$ μια αυστηρά φθίνουσα συνάρτηση με $g(r) \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$ η οποία θα αντικαταστήσει τον τρίτο όρο ώστε να δώσει μεγαλύτερη έμφαση στις ακμές με τον εξής τρόπο:

$$E(C) = \alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|) dq \quad a, l \geq 0 \quad (2.3)$$

Στο σημείο αυτό γίνεται ιδιαίτερα εμφανής η αδυναμία της μεθόδου που προκαλείται από την παραμετροποίηση της καμπύλης η οποία δεν σχετίζεται ούτε με τη γεωμετρία της καμπύλης, ούτε με τις προς ανίχνευση ακμές, αλλά παρ' όλα αυτά επηρεάζει ουσιαστικά την έκφραση του συναρτησιακού. Για του λόγου το αληθές, αν ορίσουμε μια νέα παραμετροποίηση της καμπύλης μέσω της $q = z(r)$ $z : [c, d] \rightarrow [0, 1]$ θα έχουμε:

$$\int_0^1 |C'(q)|^2 dq = \int_c^d |(C \circ z)'(r)|^2 (z'(r))^{-1} dr$$

$$\int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|) dq = \int_c^d g(|\nabla I(C \circ z(r)(q))|) dq$$

δηλαδή η ενέργεια αλλάζει ανάλογα με την παραμετροποίηση, μειονέκτημα, το οποίο πρέπει να λυθεί με τη νέα προσέγγιση.

2.1.3 Το γεωδαιτικό μοντέλο

Στόχος αυτής της παραγράφου είναι η σκιαγράφηση της απόδειξης σχετικά με το ότι η καμπύλη η οποία ελαχιστοποιεί το παραπάνω συναρτησιακό ενέργειας μπορεί να εκφραστεί ως μια γεωδαιτική καμπύλη σε ένα χώρο Riemann που ορίζεται από την εικόνα. Με τον όρο γεωδαιτική καμπύλη εννοούμε τη σύνδεση δύο σημείων με ελάχιστη, τοπικά απόσταση ως προς κάποιο μετρικό.

Αν ορίσουμε :

$$U(C) := -\lambda g(|\nabla I(C \circ z(r)(q))|) \quad (2.4)$$

και θέσουμε $a = m/2$ θα έχουμε:

$$E(C) = \int_0^1 L(C(q)) dq, \quad (2.5)$$

όπου

$$L(C) = \frac{m}{2}|C'|^2 - U(C)$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να επικαλεστούμε δύο ενδιαφέροντα σημεία του [10] απ'όπου προκύπτει ότι: η Hamiltonian του προβλήματος είναι

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(C) \quad p := mC'^2$$

και το εξής θεώρημα:

Mauertuis' Principle 1 Οι καμπύλες $C(q)$ στον Ευκλείδιο χώρο οι οποίες είναι οριακές(με την έννοια της ελαχιστοποίησησης) ως προς τη Hamiltonian $H = \frac{p^2}{2m} + U(C) \quad p := mC'^2$ και έχουν δεδομένο επίπεδο ενέργειας (ισχύει η διατήρηση της ενέργειας) είναι γεωδαιτικές με μη φυσική παράμετρο ως προς το νέο μετρικό:

$$g_{ij} = 2m(E_0 - U(C))\delta_{ij} \quad (2.6)$$

Μέσω των παραπάνω λοιπόν μπορούμε να εξηγήσουμε πώς και με ποιες προϋποθέσεις ένα πρόβλημα ελαχιστοποίησης ενέργειας ισοδυναμεί με την εύρεση μιας γεωδαιτικής καμπύλης σε ένα χώρο Riemann δηλαδή τότε η επίλυση του αρχικού προβλήματος είναι μια καμπύλη ελάχιστης «βαρυτικής απόστασης» μεταξύ δύο σημείων. Η απόσταση πλέον, όπως την αναφέρουμε, είναι με βάση το νέο ορισμένο μετρικό g_{ij} .

Επομένως μπορούμε να πούμε ότι το αρχικό μας πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το

$$E = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}C'_iC'_j} dq = \int_0^1 \sqrt{g_{11}C_1'^2 + 2g_{12}C_1'C_2' + g_{22}C_2'^2} dq \quad (2.7)$$

όπου g_{ij} προκύπτει από την εξίσωση (2.6)

Βλέπουμε λοιπόν ότι στο νέο μας πρόβλημα υπάρχει μια παράμετρος, η ενέργεια E_0 , της οποίας η «απροσδιοριστία» αναπαριστά την ελευθερία επιλογής των παραμέτρων λ/α και της παραμετροποίησης της καμπύλης. Μια φυσική επιλογή της ενέργειας E_0 όπως εξηγείται στο [11] είναι η $E_0=0$ με αποτέλεσμα $g_{ij} = 2m\lambda g(|\nabla I(C(q))|)^2 \delta_{ij}$, γεγονός που οδηγεί στη γραφή της (2.7) ως εξής:

$$E = \int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|) |C'(q)| dq \quad (2.8)$$

Δεδομένου ότι $|C'(q)|dq = ds$ η (2.8) γράφεται:

$$\begin{aligned} L_R &= \int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|) |C'(q)| dq \\ &= \int_0^{L(C)} g(|\nabla I(C(q))|) ds \end{aligned} \quad (2.9)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω εξίσωση με τον κλασσικό Ευκλείδιο ορισμό του μήκους μιας καμπύλης $L = \int ds$ παρατηρούμε ότι το νέο μετρικό προκύπτει, αν αναθέσουμε σε κάθε στοιχειώδες μήκος ds ένα βάρος που προκύπτει από την εικόνα. Η ελαχιστοποίηση του παραπάνω συναρτησιακού L_R θα γίνει με τη μέθοδο της πλέον απότομης κατάβασης (steepest descent) και τις εξισώσεις Euler-Lagrange.

2.1.4 Εξαγωγή εξισώσεων κίνησης με Euler-Lagrange

Έστω το συναρτησιακό:

$$L_R(C) = \int_0^1 g(C(t, q)) |C_q(t, q)| dq$$

και έστω μια μικρή διαταραχή C μιας αρχικής καμπύλης C_0 :

$$\begin{aligned} C &: (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow (R)^2 \\ &(t, q) \rightarrow C(t, q) \\ &C(0, q) \equiv C_0 \end{aligned}$$

Τότε:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}L_R(C(t)) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}g(C(t, q))|C_q(t, q)| dq + \int_0^1 g(C(t, q))\frac{d}{dt}|C_q(t, q)| dq \\
 &= \int_0^1 (\nabla g(C(t, q)) \cdot C_t(t, q))|C(t, q)|dq + \int_0^1 g(C(t, q))(\vec{T}(t, q) * C_{tq}(t, q)) dq \\
 &= \int_0^1 (\nabla g(C(t, q)) \cdot C_t(t, q))|C(t, q)|dq - \int_0^1 (g(C(t, q))\vec{T}(t, q))_q * C_t(t, q) dq \\
 &= \int_0^1 [(\nabla g(C(t, q)) \cdot C_t(t, q)|C_q(t, q)| - (\nabla g(C(t, q)) \cdot C_q(t, q)) \\
 &\quad (\vec{T}(t, q) * C_t(t, q)) - g(C(t, q))\vec{T}_q(t, q) \cdot C_t(t, q)] dq \\
 &= \int_0^1 [(\nabla g(C(t, q)) \cdot C_t(t, q) - (\nabla g(C(t, q)) \cdot C_s(t, q)) \\
 &\quad (\vec{T}(t, q) \cdot C_t(t, q))|C_q(t, q)| - g(C(t, q))\vec{T}_q(t, q) \cdot C_t(t, q)] dq
 \end{aligned}$$

Στην παραπάνω αλληλουχία χρησιμοποιείται παραγοντική ολοκλήρωση και εκμετάλλευση του γεγονότος ότι η καμπύλη είναι κλειστή. Αλλάζοντας την παραμετροποίηση και μετατρέποντάς την ως προς το μήκος της καμπύλης, αφαιρώντας για λόγους απλότητας τα ορίσματα (t, s) και δεδομένου ότι, $\vec{T}_q = \vec{T}_s|C_q|$ θα έχουμε :

$$\frac{d}{dt}L_R(C(t)) = \int_0^{L(C(t))} [\nabla g(C) - (\nabla g(C) - (\nabla g(C)\vec{T})\vec{T} - g(C)\vec{T}_s)] \cdot C_t ds$$

Αν θέσουμε $t = t_0$:

$$\frac{d}{dt}L_R(C(t))|_{t=t_0} = \int_0^{L(C_0)} [\nabla g(C_0) - (\nabla g(C_0) - (\nabla g(C_0)\vec{T})\vec{T} - g(C_0)\vec{T}_s)] \cdot C_t(0) ds \quad (2.10)$$

Από τον ορισμό όμως της καμπυλότητας ισχύει ότι:

$$\vec{T}_s = \kappa \vec{N}, \quad \vec{N} \perp C \quad (2.11)$$

Συνδυάζοντας τις (2.10) και(2.11) προκύπτει:

$$\frac{d}{dt}L_R(C(t))|_{t=t_0} = \int_0^{L(C_0)} [\nabla g(C_0) - (\nabla g(C_0) \cdot \vec{T})\vec{T} - g(C_0)\kappa(\vec{N})]C_t(0) ds \quad (2.12)$$

$$= \int_0^{L(C_0)} [(\nabla g(C_0) \cdot \vec{N})\vec{N} - g(C_0)\kappa\vec{N}]C_t(0) ds \quad (2.13)$$

Η παραπάνω έκφραση δίνει την παράγωγο Gateaux και, σύμφωνα με τη μεθοδολογία της πλέον απότομης κατάβασης, προκειμένου να συνδέσουμε την αρχική καμπύλη με ένα τοπικό ελάχιστο του συναρτησιακού, θα πρέπει να λύσουμε την εξίσωση εξέλιξης:

$$C_t = g(C) \cdot \kappa \cdot \vec{N} - (\nabla g(C) \cdot \vec{N}) \cdot \vec{N} \quad (2.14)$$

2.1.5 Υλοποίηση με επιπεδοσύνολα

Η υλοποίηση της μεθοδολογίας των γεωδαιτικών καμπυλών με επιπεδοσύνολα ξεκίνησε από τους Osher και Sethian ([12],[13]). Με βάση αυτή την προσέγγιση η καμπύλη θεωρείται επιπεδοσύνολο μιας συνάρτησης $u : [a, b] \times [0b] \rightarrow (R)$. Με άλλα λόγια η καμπύλη C ταυτίζεται με τα σημεία για τα οποία ισχύει $u = const$. Είναι προφανές ότι το συντριπτικό πλεονέκτημα της ιδέας αυτής είναι τόσο η ανεξαρτησία από την παραμετροποίηση της καμπύλης, η οποία, όπως είδαμε, δημιουργεί μεγάλη αυθαιρεσία, αλλά κυρίως είναι τοπολογικά «ελεύθερο» σε σχέση με την αρχική καμπύλη καθώς η περιορισμένη τοπολογία του μηδενικού επιπεδοσυνόλου δεν επηρεάζει την τοπολογία της συνάρτησης u ([12],[13]).

Συνεπώς από την εξίσωση (2.14) μπορούμε να οδηγηθούμε στην Μερική Διαφορική Εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της συνάρτησης u . Ας θεωρήσουμε αρχικά ότι η καμπύλη κινείται με βάση την:

$$\vec{C}_t = \beta \vec{N}$$

Ας θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση u είναι αρνητική στο εσωτερικό της καμπύλης u και αρνητική στο εξωτερικό (για παράδειγμα μια προσημασμένη συνάρτηση απόστασης). Επίσης ορίζουμε το μηδενικό επιπεδοσύνολο ως:

$$\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : u(x, y, t) = 0\}$$

Στόχος είναι να βρεθεί ο νόμος εξέλιξης της u ώστε η καμπύλη $C(t)$ να παραμένει το μηδενικό επιπεδοσύνολο $\Gamma(t)$. Παραγωγίζοντας, λοιπόν, τον παραπάνω ορισμό λαμβάνουμε

$$\nabla u \cdot C_t + u_t = 0$$

Ταυτόχρονα όμως ισχύει :

$$\frac{\nabla u}{|\nabla u|} = -\vec{N}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι :

$$u_t = \beta |\nabla u| \quad (2.15)$$

Γενικεύοντας πολύ απλά την (2.15) για το πρόβλημα των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών (2.14) καταλήγουμε στην εξής Μερική Διαφορική Εξίσωση:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| \cdot \operatorname{div} \left(g(I) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ &= g(I) |\nabla u| \cdot \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \nabla g(I) \cdot \nabla u \\ &= g(I) |\nabla u| \kappa + \nabla g(I) \cdot \nabla u \end{aligned} \quad (2.16)$$

Κατά την εξαγωγή της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιήθηκε ότι:

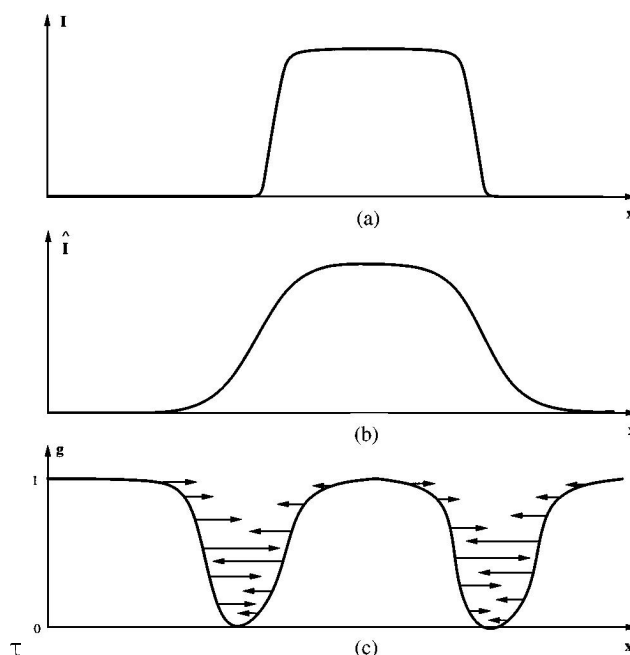
$$\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (2.17)$$

Από πολλούς συγγραφείς ([14],[15],[11],[16],[17]) προτείνεται μια περαιτέρω τροποποίηση της τελευταίας εξίσωσης ως εξής

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(I) |\nabla u| (\kappa + c) + \nabla g(I) \cdot \nabla u, \quad c \geq 0 \quad (2.18)$$

Ας αναλύσουμε τους όρους που προέκυψαν ξεχωριστά:

- Ο όρος $g(I) |\nabla u| \kappa$ αντιστοιχεί σε κίνηση της καμπύλης, $\vec{C}_t = \kappa \vec{N}$, η οποία αντιστοιχεί στην «Ευκλίδεια ροή θερμότητας» και εξασφαλίζει την ομαλότητα της καμπύλης καθώς και την πορεία προς συρρίκνωση. Εδώ μάλιστα επιβεβαιώνεται η υπόθεση που έγινε στην προηγούμενη παράγραφο, όπου θεωρήθηκε αρκετός ο ένας μόνο όρος ομαλότητας ($\beta = 0$).
- Ο όρος $c \times g(I) |\nabla u|$ αντιστοιχεί σε κίνηση της καμπύλης $\vec{C}_t = c \vec{N}$ και ονομάζεται δύναμη μπαλονιού. Η δύναμη αυτή τείνει να διαστειλεί την καμπύλη και έγινε εμφανής η αναγκαιότητά της, λόγω της αδυναμίας του αρχικού μοντέλου να εντοπίσει μη συνεκτικά χωρία ξεκινώντας από συνεκτικές καμπύλες. Συμπερασματικά, λοιπόν, οι δύο πρώτοι όροι αντιστοιχούν στην εσωτερική ενέργεια του πρωταρχικού μοντέλου.
- Ο όρος $\nabla g(I) \cdot \nabla u$ σχετίζεται με την εικόνα και είναι γνωστός και ως δύναμη ελατηρίου. Αυτός έλκει την καμπύλη προς το όριο των αντικειμένων και δίνει σταθερότητα στο μοντέλο καθώς, χωρίς αυτόν, η εξέλιξη θα σταματούσε μόνο όταν $\gamma=0$. Κάτι τέτοιο όμως συμβαίνει μόνο σε μια ιδανική ακμή. Χαρακτηριστική απεικόνιση του ρόλου του όρου αυτού γίνεται στην εικόνα 2.1.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρική απεικόνιση της δύναμης ελατηρίου. (α) Η αρχική εικόνα με ακμές (β) Η εξομάλυνση της αρχικής εικόνας (γ) Η δύναμη επαναφοράς που οδηγεί την καμπύλη στις κοιλιάδες. Η εικόνα ελήφθη από το [11]

Τέλος ιδιαίτερη σημασία έχει η επιλογή της συνάρτησης ανίχνευσης ακμών g . Έως τώρα, ο μοναδικός περιορισμός είναι να είναι η g μία φθίνουσα συνάρτηση με $g(r) \rightarrow 0$ καθώς $r \rightarrow \infty$. Διάφορες εκδοχές έχουν προταθεί από τους συγγραφείς με χαρακτηριστικές περιπτώσεις τις εξής:

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla I_\sigma|^p} \quad (2.19)$$

που προτάθηκε από τους Caselles και Malladi και:

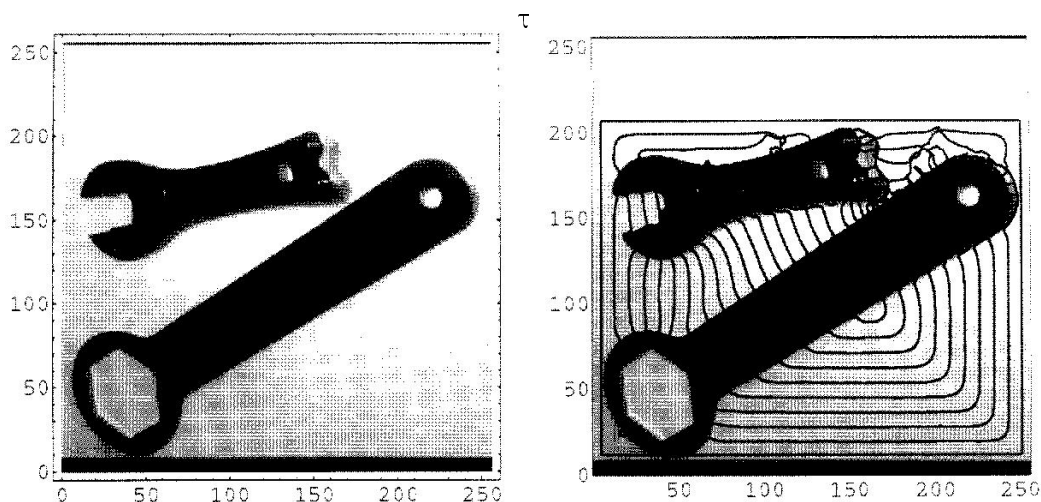
$$g = \frac{1}{\left(1 + \frac{|\nabla I_\sigma|^2}{\lambda^2}\right)} \quad (2.20)$$

από τους Perona και Malik. Στις παραπάνω εξισώσεις

$$I_\sigma = I * G_\sigma \quad (2.21)$$

$$G_\sigma = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.22)$$

όπου με $*$ συμβολίζουμε τη συνέλιξη.



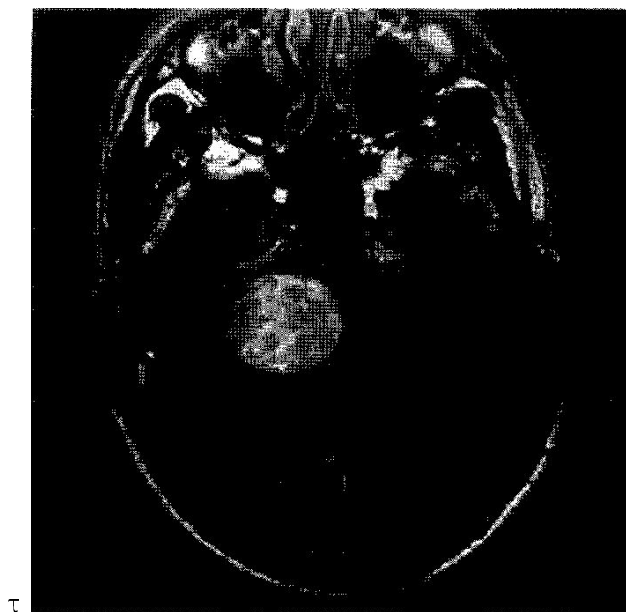
Σχήμα 2.2: Απλή εφαρμογή της μεθοδολογίας των ενεργών καμπυλών και απόδειξη της ανοχής της μεθόδου των επιπεδοσυνόλων σε αλλαγές στην τοπολογία

Στις παρακάτω εικόνες παρουσιάζεται έμπρακτα η αποτελεσματικότητα της μεθόδου και τα πλεονεκτήματα που παρουσιάζει, όπως για παράδειγμα, η ανοχή σε τοπολογικές αλλαγές και στο θόρυβο. Η αρχική εικόνα απεικονίζεται στο αριστερό τμήμα της εικόνας ενώ η τελική θέση της ενεργού καμπύλης στο δεξιό.

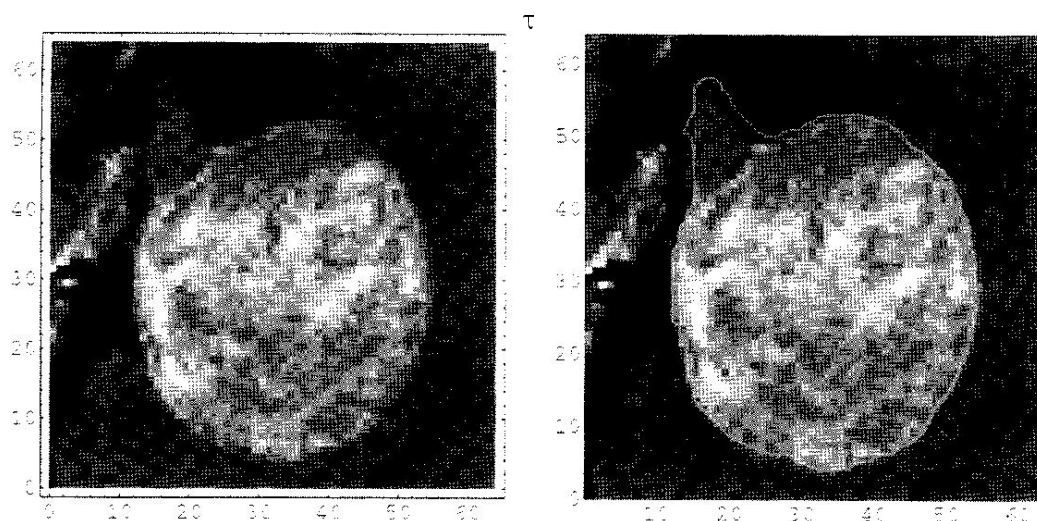
2.2 Ενεργές καμπύλες σε γράφους

Τα εξαιρετικά αποτελέσματα της μεθοδολογίας των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών ως επιπεδοσύνολα, στην ανίχνευση ακμών και αντικειμένων, η ανοχή σε τοπολογικές μεταβολές σε σχέση με την αρχικοποίηση του προβλήματος αλλά και η γενικότητα της εξαγωγής των αντιστοίχων εξισώσεων, που διέπουν την εξέλιξή τους, μας οδήγησαν στην προσπάθεια εφαρμογής των παραπάνω ιδεών σε αυθαίρετες δομές δεδομένων, σε γράφους. Αναζητούμε λοιπόν τρόπους αντιστοίχισης των μεγεθών και των τελεστών της συνεχούς περίπτωσης ή της εξαντηλητικά μελετημένης περίπτωσης του ορθοκανονικού πλέγματος ([18]) με τη γενική περίπτωση δεδομένων ορισμένων σε τυχαίους μη κανονικούς γράφους.

Αρχικά θα μελετήσουμε την προσέγγιση της κίνησης υπό σταθερή ταχύτητα εισάγοντας ορισμένα στοιχεία σχετικά με μορφολογικούς τελεστές σε γράφους και συγκρίνοντας με τις αντίστοιχες περιπτώσεις στη συνεχή ή ορθοκανονική περίπτωση. Με τον τρόπο αυτό θα καταλήξουμε σε μια πρώτη μορφή της εξίσωσης διαφορών που θα διέπει την εξέλιξη των επιπεδοσυνόλων σε γράφους.



Σχήμα 2.3: Αρχική εικόνα MRI στην οποία πρέπει να εντοπιστεί ο όγκος. Χαρακτηριστικό είναι ότι ο συγκεκριμένος όγκος, γνωστός και ως ακουστικό νευρίνωμα, έχει μια τριγωνική προέκταση στο πάνω αριστερό τμήμα του



Σχήμα 2.4: Ανίχνευση του όγκου της εικόνας 2.3 με τη μέθοδο των γεωδαιτικών ενεργών καμπηλών. Χαρακτηριστικό είναι μάλιστα ότι, παρά τη διαφορά της μεταβολής της φωτεινότητας, κατά μήκος της ακμής λόγω του όρου $\nabla g \cdot \nabla I$ ανιχνεύεται και το τριγωνικό τμήμα.

Στη συνέχεια, θα προσεγγίσουμε και τα υπόλοιπα μεγέθη που συμμετέχουν στην (2.18) ώστε να καταλήξουμε σε μία συνολική εξίσωση διαφορών την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε για την ανίχνευση περιοχών (clusters) σε γράφους.

2.2.1 Κίνηση σταθερής ταχύτητας

Μερική διαφορική εξίσωση για dilation-erosion

Τα παρακάτω προέρχονται από το [19]

Αρχικά ας θυμηθούμε τον ορισμό του dilation ενός συνόλου X από ένα δομικό στοιχείο B :

$$X \oplus B = \bigcup_{y \in B} X_{+y} \quad (2.23)$$

Αν αντικαταστήσουμε το σύνολο X με το σήμα $f(x)$ και την ένωση \bigcup με το supremum \vee θα λάβουμε τον τελεστή:

$$(f \oplus B)(x) = \bigvee_{y \in B} f(x - y) \quad (2.24)$$

Στο σημείο αυτό ας ορίσουμε το επιπεδοσύνολο $X_v(f)$ μιας συνάρτησης $f : E \rightarrow R$:

$$X_v(f) = \{u \in E : f(u) \geq v\}, \quad -\infty \leq v \leq \infty \quad (2.25)$$

Με βάση τους δύο παραπάνω ορισμούς αποδεικνύονται τα εξής συμπεράσματα:

Ο τελεστής (2.23) παράγει μέσω της μέσω της υπέρθεσης κατωφλίου τον τελεστή (2.25)

$$\begin{aligned} \sup\{v : x \in X_v(f) \oplus B\} &= \sup\{v : B_{+x} \cap X_v(f) \neq \emptyset\} \\ \sup\{v : \exists b \in B \text{ s.t. } f(x - b) \geq v\} &= \sup\{f(x - b), b \in B\} = (f \oplus B)(x) \end{aligned}$$

$$X_v(f) \oplus B = X_v(f \oplus B)$$

$$X = X_v(f) \oplus B = \{x + b : f(x) \geq r, b \in B\} = \{z : f(z - b) \geq r, \text{ για κάποιο } b \in B\}$$

$$Y = X_v(f \oplus B) = \{z : f \oplus B(z) \geq r\} = \{z : \bigvee_{b \in B} \{f(z - b)\} \geq r\}$$

Προφανώς αν $z \in X$ τότε και $z \in Y$, δηλαδή $Q \subseteq Y$. Από την άλλη εάν $z \in Y$ τότε προκειμένου $z \in X$ πρέπει είτε το B να είναι πεπερασμένο είτε η φ

να είναι άνω ημισυνεχής συνάρτηση και το B συμπαγές. Ο πρώτος περιορισμός καλύπτει όλες τις περιπτώσεις που θα συναντήσουμε σε αυτή τη μελέτη.

Με βάση τα παραπάνω μπορεί να προκύψει η Μερική Διαφορική Εξίσωση που διέπει την πολλαπλής κλίμακας dilation ή erosion ενός σήματος(Brockett&Maragos[20]). Για να ορίσουμε την πολλαπλής κλίμακας dilation ή erosion ορίζουμε την $k_s(x) := sk(x/s), s > 0$, όπου $k(x)$ η δομική συνάρτηση και s η παράμετρος της κλίμακας. Με βάση αυτό τον ορισμό προκύπτει ότι και το χωρίο στο οποίο η $k_s(x)$ ορίζεται, θα είναι μια κλιμακωμένη έκδοση του αντίστοιχου της $k(x)$. Με άλλα λόγια :

$$Spt(k_s) = sSpt(k) = sB = \{sb : b \in B\}$$

Επομένως η αντίστοιχη πολλαπλής κλίμακας dilation μπορεί να οριστεί ως :

$$\delta(x, s) = (f \oplus k_s)(x) = \bigvee_{a \in sB} \{f(x - a) + sk(a/s)\} \quad (2.26)$$

Αυτό που μας ενδιαφέρει για την ανάλυσή μας είναι η παράγωγος της (2.26) ως προς την κλίμακα:

$$\frac{\partial \delta}{\partial s}(x, s) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\delta(x, s + r) - \delta(x, s)}{r}$$

Λόγω όμως της κυρτότητας του B (Matheron, 1975) προκύπτει το συμπέρασμα ότι $\delta(x, s + r) = \delta(x, s) \oplus k_r(x)$, με αποτέλεσμα:

$$\frac{\partial \delta}{\partial s}(x, s) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{a \in rB} \{\delta(x + a, s) + rk(a/r)\} - \delta(x, s)}{r} \quad (2.27)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου θεωρούμε $B = \{(a, b) : a^2 + b^2 \leq 1\}$ (disk) τότε (Brockett&Maragos[20]) ισχύει:

$$\frac{\partial \delta}{\partial s}(x, s) = \|\nabla \delta\|_2 = \sqrt{\left|\frac{\partial \delta}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial \delta}{\partial y}\right|^2} \quad (2.28)$$

Αν θυμηθούμε την εξίσωση (2.18) και ξεχωρίσουμε τον όρο που αντιστοιχεί στην κίνηση με σταθερή ταχύτητα, θα δούμε ότι η αντίστοιχη Μ.Δ.Ε. θα είναι :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u|$$

Αν συγκρίνουμε την τελευταία με την (2.28), τότε βλέπουμε ότι η κίνηση υπό σταθερή ταχύτητα ισοδυναμεί με το dilation του συνόρου της αρχικής καμπύλης

με δίσκο ακτίνας ίσης με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα dt . Το συμπέρασμα αυτό είναι εξαιρετικά σημαντικό για τη μελέτη μας καθώς μας εξασφαλίζει ότι, αν καταλήξουμε σε μια εξίσωση διαφορών που να προσεγγίζει το dilation της καμπύλης στο γράφο μας, τότε η ίδια θα περιγράφει και την κίνηση σταθερής ταχύτητας της ίδιας καμπύλης. Τίθεται όμως το θέμα της μορφολογίας και των μορφολογικών τελεστών σε γράφους. Σημαντική μελέτη σε αυτά τα θέματα και την οποία θα παρουσιάσουμε αργότερα έχει γίνει από τους Vincent και Heijmans ([21],[22]).Προς το παρόν θα εξετάσουμε μία προσπάθεια που έχει ήδη πραγματοποιηθεί :[26].

2.2.2 Μια προσπάθεια για την εξαγωγή εξισώσεων διαφορών για την κίνηση σταθερής ταχύτητας

Μία πρώτη προσέγγιση έγινε από τους Ta, Elmoataz και Lezoray. Συνοπτικά περιγράφουμε την ιδέα τους. Τα παρακάτω ορίζονται σε ένα γράφο $G = (V, E)$ (παραλείπουμε τα βάρη)που αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ και ένα σύνολο ακμών $E \subseteq V \times V$. Μία ακμή που συνδέει τους κόμβους u, v θα συμβολίζεται uv . Ταυτόχρονα ορίζουμε μια συνάρτηση $f : V \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία σε κάθε κόμβο $u \in V$ αναθέτει την τιμή $f(u)$.

Αρχικά ορίστηκαν ορισμένες κατευθυντικές παράγωγοι της f στον κόμβο u κατά μήκος της uv ως:

$$\frac{\partial f}{\partial uv} \Big|_u = f(v) - f(u)$$

Ταυτόχρονα ορίζονται :

$$\partial_v^+ f(u) = \max(0, f(v) - f(u))$$

$$\partial_v^- f(u) = \min(0, f(v) - f(u))$$

Στη συνέχεια, ορίζονται ορισμένοι τελεστές κλίσης:

$$\nabla_w f(u) = (\partial_v f(u) : c \sim u)'$$

και

$$\nabla_w^\pm f(u) = (\partial^\pm f(u) : c \sim u)'$$

(με το σύμβολο \sim ορίζουμε τη σχέση γειτνίασης)

Με αντίστοιχο τρόπο ορίστηκε το μέτρο των παραπάνω τελεστών ως προς τη νόρμα p :

$$|\nabla_w^\pm f(u)|_p = \left[\sum_{u \sim v} |(\partial^\pm f(u))|^p \right]^{1/p}$$

Στη συνέχεια, αφού συμβολιστεί με A^- και A^+ το εσωτερικό και το εξωτερικό αντίστοιχα ενός συνόλου A , δηλαδή $A^+ = \{u \in A^c : \exists v \in A, u \sim v\}$ και $A^- = \{u \in A : \exists v \in A^c, u \sim v\}$. Ακολούθως ορίζονται τα επιπεδοσύνολα της f ως $A^k = \{v \in V : f(v) \geq k\}$.

Τέλος, αφού αποδειχθεί ότι ο τελεστής $|\nabla_w f^k(u)|_p$ ανάγεται τελικά στον $|\nabla_w^+ f^k(u)|_p$ και με τον ισχυρισμό ότι $\partial_t f^k(u) = |\nabla^+ f^k|_p$, συνεπάγεται, αφού γενικευθεί η προηγούμενη για όλα τα επιπεδοσύνολα, μια εξίσωση διαφορών που διέπει το dilation σε γράφους ως:

$$\delta_{p,t}(f) := \partial_t f = |\nabla^+ f|_p$$

Τα αποτελέσματα της εξίσωσης αυτής σε εικόνες, για τις οποίες και εξαρχής σχεδιάστηκε αυτή η μεθοδολογία, είναι εξαιρετικά. Στις εικόνες όμως έχουμε την πολυτέλεια της κανονικότητας ως προς τη μορφολογία. Με άλλα λόγια, μπορούμε να «είμαστε σίγουροι» για τη θέση των γειτόνων κάθε κόμβου και τις μεταξύ τους αποστάσεις. Με αυτή την προϋπόθεση ο ορισμός που δίνεται για την κλίση μιας συνάρτησης, μιμητικός της συνεχούς περίπτωσης, στερείται φυσικής σημασίας, καθώς σε μη κανονικό περιβάλλον, π.χ. σε έναν τυχαίο γράφο, δε δίνει την κατεύθυνση μέγιστης μεταβολής της συνάρτησης. Από την άλλη, με μια συλλογιστική αντίστοιχη της εξαγωγής της έκφρασης της κλίσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, και κοινό βήμα διαταραχής προς όλες τις κατευθύνσεις (πράγμα που δεν ισχύει σε τυχαίο γράφο) η παραπάνω έκφραση είναι εξαιρετική προσέγγιση με αξιοσημείωτα αποτελέσματα στην επεξεργασία εικόνας.

Για όλους τους παραπάνω λόγους, προκειμένου να καταλήξουμε σε μία όσο το δυνατό ακριβέστερη και ουσιαστικότερη έκφραση για την κίνηση σταθερής ταχύτητας μιας καμπύλης πάνω σε γράφους, πρέπει να εξετάσουμε τους μορφολογικούς τελεστές σε γράφους «εκ γενετής» και σταδιακά να καταλήξουμε στην επιθυμητή εξίσωση διαφορών.

2.2.3 Μορφολογικοί τελεστές σε γράφους

Η μαθηματική μορφολογία είναι μια συνολοθεωρητική προσέγγιση που αναπτύχθηκε αρχικά για την ανάλυση και την επεξεργασία εικόνας. Θεωρεί τις εικόνες ως σύνολα στο χωρίο όπου ορίζονται και τις χειρίζεται ως τελεστές σε σύνολα. Αντικείμενο είναι η ποσοτική περιγραφή των γεωμετρικών δομών και σε αντίθεση με άλλες προσεγγίσεις (π.χ Fourier) που δίνουν δευτερεύουσα σημασία στις χωρικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων που αποτελούν την εικόνα και δεν δίνουν πληροφορίες για τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά (π.χ σχήμα), η μαθηματική μορφολογία χρησιμοποιεί μικρά, καλά ορισμένα δομικά στοιχεία για την εξαγωγή γεωμετρικών χαρακτηριστικών. Ταυτόχρονα, ενώ η μαθηματική

μορφολογία αναπτύχθηκε αρχικά για δυαδικές εικόνες γενικεύθηκε, τελικά, σε οποιοδήποτε πλήρες πλέγμα ([23],[24],[25]).

Τα παραπάνω στοιχεία καθώς και το γεγονός ότι ο χώρος των συναρτήσεων, που ορίζονται πάνω σε ένα γράφο, του οποίου οι κόμβοι χαρακτηρίζονται από μία τιμή, ισοδυναμεί με μία ειδική μορφή πλέγματος (lattice), επιτρέπουν την εφαρμογή μορφολογικών τελεστών σε γράφους. Η διαφορά είναι ότι σε αυτή την περίπτωση το δομικό στοιχείο είναι ένας δομικός γράφος, μικρός και απλός σε σχέση με αυτόν που εφαρμόζεται. Αυτή είναι και η κύρια διαφορά με την Ευκλείδεια περίπτωση, όπου το δομικό στοιχείο είναι ένα σύνολο στοιχείων χωρίς εσωτερική δομή.

Στη μορφολογία γράφων ξεχωριστοί κόμβοι ενός γράφου σχετίζονται μεταξύ τους, αν και μόνο εάν ανήκουν σε μια τοπική θέση (ταίριαγμα) του δομικού στοιχείου. Επομένως, η ποικιλία των σχέσεων γειτονίας μεταξύ των κόμβων ενός γράφου ορίζουν μια μεγάλη συλλογή μορφολογικών μετασχηματισμών, πολλοί από τους οποίους έχουν προφανή γεωμετρική ερμηνεία (dilation, erosion, opening, closing, skeleton) κάποιους από τους οποίους θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Αρχικά υπενθυμίζουμε τον ορισμό ενός πλήρους πλέγματος:

Πλήρες Πλέγμα 1 Ένα πλήρες πλέγμα αποτελείται από ένα σύνολο L και μια σχέση μερικής διάταξης \leq με τις ακόλουθες ιδιότητες. Για κάθε συλλογή $X_i \in L, i \in I$ υπάρχουν δύο στοιχεία \underline{X}, \bar{X} τέτοια ώστε:

1. για κάθε $i \in I$ ισχύει $\underline{X} \leq X_i \leq \bar{X}$
2. $X_i \leq Y$ για κάθε $i \in I$ συνεπάγεται $\bar{X} \leq Y$ για κάθε $Y \in L$
3. $Z \leq X_i$ για κάθε $i \in I$ συνεπάγεται $Z \leq \underline{X}$, για κάθε $Z \in L$

Τα \underline{X}, \bar{X} ονομάζονται *infimum* και *supremum* της συλλογής X_i

Ο παραπάνω ορισμός δόθηκε, για να συνάγουμε ότι τα παρακάτω δύο παραδείγματα είναι πλήρη πλέγματα:

- Το δυναμοσύνολο $P(V)$ ενός συνόλου V με τη σχέση του υποσυνόλου ως σχέση διάταξης και την ένωση και την τομή ως supremum και infimum αντίστοιχα.
- Ο χώρος των συναρτήσεων που απεικονίζουν κάποιο χώρο V σε ένα σύνολο G διακριτών τιμών. Η μοναδική απαίτηση είναι το G να είναι ένα πλήρες πλέγμα. Αυτός ο χώρος των συναρτήσεων, που συμβολίζεται και ως G^V , είναι πλήρες πλέγμα με σχέση μερικής διάταξης την $f \leq g$ if $f(x) \leq g(x) \forall x \in G$ ενώ το supremum και infimum προκύπτουν από το σημείο προς σημείο μέγιστο και ελάχιστο.

Στο σημείο αυτό πρέπει να δώσουμε τους εξής ορισμούς:

Erosion- σε Πλήρες πλέγμα 1 Μια απεικόνιση $\delta : L \rightarrow L$ ονομάζεται *dilation*, αν $\delta(\bigvee_{i \in I} X_i) = \bigvee_{i \in I} \delta(X_i)$ για κάθε συλλογή $X_i \in L, i \in I$. Μια απεικόνιση $\epsilon : L \rightarrow L$ ονομάζεται *erosion*, αν $\epsilon(\bigwedge_{i \in I} X_i) = \bigwedge_{i \in I} \epsilon(X_i)$ για κάθε συλλογή $X_i \in L, i \in I$.

Μία σημαντική σχέση μεταξύ των dilation και erosion είναι η εξής: Έστω δ και ϵ δύο απεικονίσεις σε ένα πλήρες πλέγμα L . Το ζεύγος (δ, ϵ) ονομάζεται adjunction αν

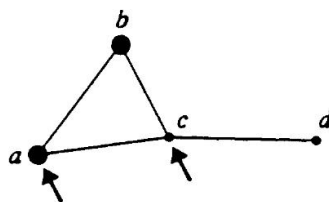
$$\delta(x) \leq Y \Leftrightarrow X \leq \epsilon(Y)$$

Αποδεικνύεται ότι, αρκεί να δειχθεί ότι δύο απεικονίσεις δ, ϵ είναι adjunction τότε η δ είναι dilation και η ϵ erosion αντίστοιχα, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό. Αρκεί λοιπόν να ορίσουμε στο πεδίο εργασίας μας κατάλληλους ορισμούς των αντίστοιχων απεικονίσεων και στη συνέχεια να δείξουμε ότι αποτελούν adjunction.

Από εδώ και μέχρι το τέλος της παρούσας παραγράφου με τον όρο γράφος θα εννοούμε έναν μη κατευθυνόμενο και χωρίς πολλαπλές ακμές γράφο. Συμβολίζουμε το σύνολο των ακμών με $V = V(G)$ και το σύνολο των κόμβων με $E = E(G)$ και γράφουμε $G = (V, E)$. Μία ακμή μεταξύ των v, w συμβολίζεται με (v, w) . Επίσης, συμβολίζουμε με $L_n(G) := (f|G)$ το σύνολο των συναρτήσεων από το χώρο V στο σύνολο των τιμών $\{0, 1, \dots, n - 1\}$. Οι ορισμοί που έχουν δοθεί αφορούν τους επίπεδους $L_2(G)$ δυαδικούς γράφους, όπου προφανώς ισχύει $L(G) := L_2(G) = P(V)$. Αφού παρουσιάσουμε τους ορισμούς με βάση το [21], θα τους επεκτείνουμε σε πολυεπίπεδους γράφους με ιδέες παρόμοιες με αυτές των επίπεδων τελεστών που παρουσιάστηκαν στην συνεχή περίπτωση.

Δομικό στοιχείο-Δομικός γράφος 1 Δομικός γράφος A είναι ένας γράφος $G_A = (V_A, E_A)$ με δύο μη κενά υποσύνολα $B_A, R_A \subseteq V_A$ που ονομάζονται βλαστοί και ρίζες, αντίστοιχα. Παράδειγμα ενός δομικού στοιχείου δίνεται στο σχήμα 2.5.

Στη συνέχεια πρέπει να συζητηθεί πώς θα οριστεί η γειτονιά ενός σημείου $N_A(v|G)$. Αρχικά, θα το συζητήσουμε ποιοτικά και στη συνέχεια θα δοθεί φορμαλιστικός ορισμός. Έστω v ένας κόμβος του G . Δεδομένου ενός δομικού γράφου G_A μπορούμε να «ταιριάξουμε» το G_A με κάποιον υπογράφο του G ο οποίος περιλαμβάνει το v και με τέτοιο τρόπο ώστε ο v να είναι ρίζα του G_A . Τότε όλοι οι κόμβοι του G , οι οποίοι αντιστοιχούν σε βλαστούς του G_A , περιλαμβάνονται στη γειτονιά του v . Σε αντιστοιχία με τη συνεχή περίπτωση,



Σχήμα 2.5: Παράδειγμα ενός δομικού γράφου με τέσσερις κόμβους a, b, c, d και τέσσερις ακμές. Οι βλαστοί επισημαίνονται με μαύρες παχιές τελείες ενώ οι ρίζες με βέλη.

όπου χρησιμοποιούνται μικρά σύνολα ως δομικά στοιχεία οι ρίζες αντιστοιχούν στα κέντρα των δομικών συνόλων, ενώ οι βλαστοί σε όλα τα σημεία του δομικού συνόλου. Η μεγάλη διαφορά από την κλασσική μορφολογία είναι ότι στην περίπτωση των γράφων η δομή της γειτονιάς διαφέρει από κόμβο σε κόμβο και συνεπώς τα δομικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται πρέπει να υπολογίζουν τη δομή κοντά σε κάθε κόμβο. Μετά από αυτή τη συζήτηση μπορούμε να δώσουμε έναν φορμαλιστικό ορισμό της γειτονιάς μαζί με ένα παράδειγμα.

Γειτονιά 1 Έστω G_A ένας δομικός γράφος. Έστω θ ένας ομομορφισμός από το G_A στο G . Τέλος έστω $v \in V$. Ονομάζουμε το θ ενσωμάτωση του A στο G στον κόμβο v εάν $v \in \theta(R_A)$. Τότε:

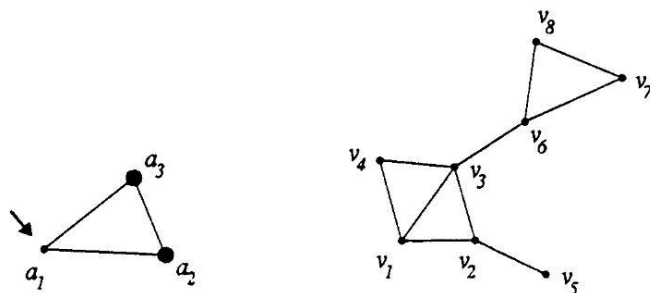
$$N_A(v, G) = \bigcup \{ \theta(B_A) : \theta \text{ είναι ενσωμάτωση του } A \text{ στο } G \text{ στον κόμβο } v \}$$

Έχουμε λοιπόν πλέον διαθέσιμα όλα τα εργαλεία ώστε να ορίσουμε τους μορφολογικούς τελεστές σε γράφους. Έστω λοιπόν A το χωρίο ορισμού του δομικού γράφου και N_A η αντίστοιχη συνάρτηση γειτνίασης σε ένα γράφο G . Οι τελεστές dilation και erosion θα ορίζονται αντίστοιχα:

$$\delta_A(X|G) = \bigcup_{v \in X} N_A(v, G) \tag{2.29}$$

$$\epsilon_A(X|G) = \{ v \in V : N_A(v, G) \subseteq X \} \tag{2.30}$$

Για να κλείσει αυτό το ζήτημα των ορισμών και να ελεγχθεί η ορθότητά τους, θα πρέπει να δείξουμε ότι ικανοποιούν το γενικό ορισμό. Όπως αναφέραμε, συζητούμε προς το παρόν για δυαδικούς γράφους οι οποίοι αποτελούν πλήρες πλέγμα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι με τους παραπάνω ορισμούς οι τελεστές dilation και erosion αποτελούν adjunction.



Σχήμα 2.6: Στην εικόνα παρατηρούμε ότι το δομικό στοιχείο μπορεί να ενσωματωθεί στο v_1 με τέσσερις τρόπους (1) $a_1 \rightarrow v_1, a_2 \rightarrow v_2, a_3 \rightarrow v_3$ (2) $a_1 \rightarrow v_1, a_2 \rightarrow v_3, a_3 \rightarrow v_2$ (3) $a_1 \rightarrow v_1, a_2 \rightarrow v_3, a_3 \rightarrow v_4$ (4) $a_1 \rightarrow v_1, a_2 \rightarrow v_4, a_3 \rightarrow v_3$. Επομένως $N_A(v_1, G) = \{v_2, v_3, v_4\}, N_A(v_5, G) = \emptyset$

Απόδειξη:

Έστω αρχικά $\delta_A(X, G) \subseteq Y$.

Τότε:

$$\forall s \in \delta_A(X, G) \Rightarrow s \in Y$$

Εάν λοιπόν $x \in X$ τότε $\forall k \in N_A(x, G)$, ισχύει ότι:

$$k \in \delta_A(x, G) \Rightarrow k \in Y$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι :

$$N_A(x, G) \subseteq Y \text{ ανν } R_A \subseteq B_A$$

Άρα

$$\delta_A(x, G) \subseteq Y \text{ ανν } R_A \subseteq B_A$$

Αντίστοιχα εάν

$$X \subseteq \epsilon_A(Y, G)$$

Τότε:

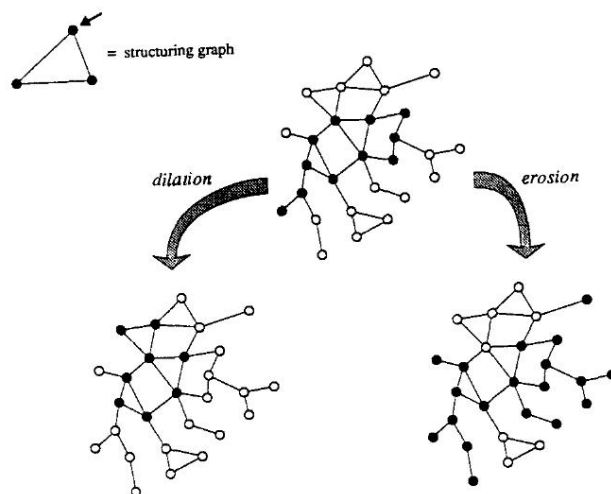
$$\forall x \in X \Rightarrow x \in \epsilon_A(Y, G) \Rightarrow N_A(x, G) \subseteq Y$$

Εάν λοιπόν $g \in \delta_A(X, G)$ τότε

$$\exists l \in X \text{ τέτοιο ώστε } g \in N_A(l, G)$$

Όμως

$$N_A(l, G) \subseteq Y \text{ αφού } l \in X$$



Σχήμα 2.7: Παράδειγμα erosion,dilation

Άρα

$$g \in Y \quad \text{και} \quad \delta_A(X, G) \subseteq Y$$

Παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω ορισμών δίνεται στο σχήμα 2.7.

Καταλήξαμε λοιπόν στο αποτέλεσμα ότι οι τελεστές αυτοί είναι καλά ορισμένοι. Ας δούμε τώρα πώς επεκτείνονται οι παραπάνω ιδέες σε πολυεπίπεδους γράφους. Κάθε πολυεπίπεδος γράφος $(f|G) \in L_n(G)$ αντιστοιχεί με ένα μοναδικό τρόπο στην ακολουθία $(X_1(f)|G), (X_2(f)|G), \dots, (X_{n-1}(f)|G)$ ή αντίστοιχα σε μία φθίνουσα με την έννοια του υποσυνόλου ακολουθία :

$$X_i(f) = \{v \in V : f(v) \geq i\}$$

Η αντίστροφη διαδικασία ανακατασκευής θα δίνεται από την:

$$f(v) = \max_{i=1, \dots, n-1} \{i : \exists v \in X_i(f)\}$$

Άρα λοιπόν από τον τελεστή συνόλων μπορούμε να καταλήξουμε στον επίπεδο τελεστή :

$$\psi(f|G)(v) = \max_{i=1, \dots, n-1} \{i : \exists v \in \psi(X_i(f)|G)\}$$

Χρησιμοποιώντας τους τελεστές επιπέδων γράφων που μόλις ορίσαμε μπορούμε να καταλήξουμε στους επίπεδους τελεστές που θα δίνονται από τις σχέσεις:

$$\delta_A(f, G)(v) = \sup\{f(w) : w \in N_A(v|G)\} \quad (2.31)$$

$$\epsilon_A(f, G)(v) = \inf\{f(w) : w \in N_A(v|G)\} \quad (2.32)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned}\delta_A(f, G)(v) &= \max\{i : v \in \delta_A(X_i(f), G)\} \\ &= \max\{i : \exists n \in X_i(f) \text{ τέτοιο ώστε } v \in N_A(n, G)\} \\ &= \max\{i : \exists n, f(n) \geq i \text{ και } v \in N_A(n, G)\} \\ &= \sup\{f(w) : w \in N_{\hat{A}}(v|G)\}\end{aligned}$$

όπου \hat{A} είναι «αντίστροφος του» A με την έννοια ότι $G_A = G_{\hat{A}}$, $Buds_A = Roots_{\hat{A}}$, $Roots_A = Buds_{\hat{A}}$.

Αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\epsilon_A(f, G)(v) &= \max\{i : v \in \epsilon_A(X_i(f), G)\} \\ &= \max\{i : N_A(v, G) \subseteq X_i\} \\ &= \max\{i : \forall k \in N_A(v, G) \Rightarrow f(k) \geq i\} \\ &= \inf\{f(w) : w \in N_A(v|G)\}\end{aligned}$$

Μένει τέλος να δείξουμε ότι ισχύει:

$$X_v(f) \oplus B = X_v(f \oplus B)^1$$

Απόδειξη

$$X = X_v(f) \oplus B = \bigcup_{x \in X_v(f)} N_B(x, G) = \bigcup_{x: f(x) > v} N_B(x, G)$$

$$Y = X_v(f \oplus B) = \{u : (f \oplus B)(u) > v\} = \{u : \max w \in N_B(u, G) > v\}$$

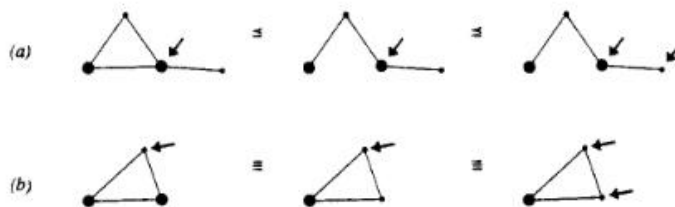
Προφανώς η ισότητα ισχύει για πεπερασμένο B , που εξαντλεί και τις περιπτώσεις που μελετούμε.

2.2.4 Εξαγωγή εξίσωσης διαφορών σταθερής ταχύτητας

Από το σημείο αυτό και έπειτα υιοθετούμε τους εξής συμβολισμούς για το επίπεδο dilation :

$$f \oplus A = \delta_A(f, G)(v) = \sup\{f(w) : w \in N_A(v|G)\}$$

¹ $f \oplus A = \delta_A(f, G)(v) = \sup\{f(w) : w \in N_A(v|G)\}$ και $f \ominus A = \epsilon_A(f, G)(v) = \inf\{f(w) : w \in N_A(v|G)\}$



Σχήμα 2.8: Παράδειγμα μερικής διάταξης και ισότητας

$$f \ominus A = \epsilon_A(f, G)(v) = \inf\{f(w) : w \in N_A(v|G)\}$$

Στο σημείο αυτό πρέπει να εισάγουμε την έννοια της κλίμακας ως προς την οποία και θα προκύψει η τελική εξίσωση. Το βασικό μειονέκτημα στην περίπτωση μας, το οποίο έχει αναφερθεί συνοπτικά προηγουμένως, είναι η τυχαία γεωμετρία και μορφολογία του γράφου. Στη συνεχή περίπτωση το δομικό στοιχείο των μορφολογικών τελεστών δεν έχει εσωτερική δομή, καθορίζεται μονάχα από το σύνορό του και μπορεί κανείς να είναι βέβαιος ότι θα «ταιριάζει» σε κάθε σημείο του χώρου όπου εφαρμόζεται ο συγκεκριμένος μορφολογικός τελεστής. Από την άλλη στην περίπτωση των γράφων το κάθε δομικό στοιχείο έχει δομή που χαρακτηρίζεται από επιλεκτικότητα με την έννοια των επιλογών ενσωμάτωσης σε περισσότερες ή λιγότερες διατάξεις γράφων που αξίζει μάλιστα να αναφερθεί ότι αποτελεί και τη σχέση μερικής διάταξης στο πλέγμα των δομικών γράφων([21]). Το γεγονός αυτό δημιουργεί μια διαφοροποίηση του ορισμού της κλιμακωμένης συνάρτησης, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Η μερική διάταξη στο χώρο των δομικών γράφων ορίζεται ως εξής: $A_1 \leq A_2$ εάν $N_{A_1}(v, G) \subseteq N_{A_2}(v, G) \quad \forall G$ και $v \in V(G)$ και λέμε ότι το A_1 είναι περισσότερο επιλεκτικό από το A_2 . Παράδειγμα του ορισμού δίνεται στο σχήμα 2.8.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι, με οποιοδήποτε τρόπο κι αν ορίσουμε την κλιμακωτή έκδοση ενός πρωταρχικού δομικού στοιχείου B, τότε αυτή θα είναι πιο επιλεκτική από τον πρωταρχικό, δεδομένου ότι διατηρεί τη δομή του, με αποτέλεσμα, όσο η κλίμακα αυξάνεται, η επιλεκτικότητα να γίνεται εξαιρετικά μεγάλη και οι αντίστοιχες γειτονιές εξαιρετικά λιγότερες.

Απόδειξη:

Για να προχωρήσουμε στην απόδειξη πρέπει να ορίσουμε ένα συγκεκριμένο φορμαλισμό για την απεικόνιση της κλιμακωμένης έκδοσης του δομικού γράφου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ 36

Ο αλγόριθμος κατασκευής του σε επάλληλες κλίμακες θα έχει ως εξής. Σε κάθε βλαστό του δομικού γράφου της κλίμακας $n - 1$ αντιστοιχούμε τις ρίζες του απλού δομικού γράφου B . Με άλλα λόγια :

$$Buds_{B_n B} = \{Buds_{B_{(n-1)B}} \cup \{b_{ij}^n\}\}, \quad \forall i \in Buds_{B_{(n-1)B}} j = 1 : |Buds_B|$$

όπου:

i : ο κόμβος βλαστός της προηγούμενης κλίμακας όπου προσαρτήθηκε το δομικό στοιχείο

j : αντιπροσωπεύει την αρίθμηση των βυδς στον βασικό δομικό γράφο

n : η κλίμακα κατά την οποία προστέθηκε το εν λόγω στοιχείο

Επίδειξη του παραπάνω φορμαλισμού δίνεται στο σχήμα 2.9.

Αρκεί να δειχθεί ότι $\forall v \in V, N_{(n+1)B}(v, G) \subseteq N_{nB}(v, G) \oplus B$.

Πράγματι, έστω $a \in N_{(n+1)B}(v, G)$.

$$\Rightarrow \exists \text{ embedding } \theta_1 \text{ of } (n+1)B \text{ into } G \text{ on } v$$

Επομένως $\exists k, l, m$ τέτοια ώστε $a = \theta_1(b_{lm}^k)$. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1. Εάν $k = n$ τότε αποδεικνύεται άμεσα το ζητούμενο καθώς $a \in N_{nB}$ ενώ όπως απαιτήσαμε προηγουμένως $Roots_B \subseteq Buds_B$.
2. Εάν $k = n + 1$ τότε, αναζητώ ενσωμάτωση θ τέτοια ώστε να υπάρχει κάποιο $r \in V$ ώστε $r = \theta(b_{ij}^g)$ ενώ ταυτόχρονα $a \in N_B(r, G)$. Πράγματι αν ορίσουμε

$$\theta := \theta_1(b_{ed}^u) \quad \forall u \leq n$$

και

$$r = \theta_1(b_{ql}^n)$$

ικανοποιούνται οι απαιτήσεις μας και ισχύει το ζητούμενο.

Τα παραπάνω μας οδηγούν στην παράκαμψη αυτής της ιδιαιτερότητας και να **ορίσουμε** την κλίμακα ως εξής: Για κάθε $v \in V = V(G)$ αν

$$\phi_r(v) = (f \oplus rB)(v)$$

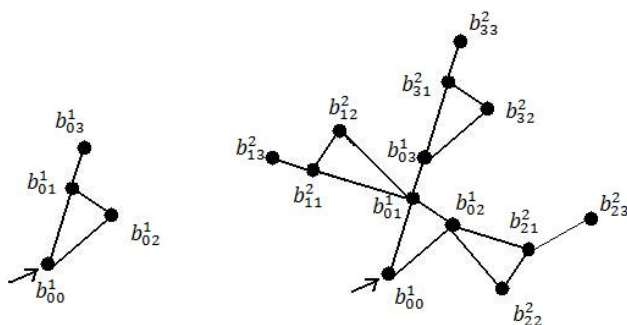
Τότε:

$$\phi_{(r+1)}(v) = ((f \oplus B) \oplus (B))(v)$$

Με τον τρόπο αυτό , χρησιμοποιώντας την (2.31)θα πάρουμε τελικά:

$$\phi_{(r+1)}(v) - \phi_r(v) = ((f \oplus rB) \oplus (B))(v) - f \oplus rB(v) = \max_{w \in N_B(v, G)} \{\phi(w) - \phi(v)\} \quad (2.33)$$

Συμπερασματικά, συνοψίζουμε τη διαδικασία για την εξέλιξη καμπυλών σε ένα γράφο με σταθερή ταχύτητα : Ορίζουμε την αρχική καμπύλη. Ορίζουμε ως



Σχήμα 2.9: Στην εικόνα βλέπουμε το πρωταρχικό δομικό στοιχείο και μια λογική εκδοχή της κλιμακωμένης εκδοχής του κατά δύο. Ο κανόνας είναι ότι σε κάθε βλαστό του στοιχείου προσθέτουμε ένα νέο αντίγραφο αυτού. Ξεκάθαρα η επιλεκτικότητα του $2B$ είναι μεγαλύτερη και $N_{2B}(v, G) \subseteq N_B(v, G)$. Το γεγονός όμως αυτό δεν υφίσταται στη συνεχή περίπτωση.

ϕ ο μια προσημασμένη συνάρτηση απόστασης η οποία ενσωματώνει την αρχική καμπύλη ως μηδενικό επιπεδοσύνολο. Εξελίσσουμε την ϕ με το νόμο (2.33). Το μέτωπο της καμπύλης στην κλίμακα r θα είναι το μηδενικό επιπεδοσύνολο της ϕ_r .

Παρακάτω, στα σχήματα 2.10, 2.11, 2.12 δίνονται παραδείγματα υλοποίησης του παραπάνω αλγορίθμου.

2.2.5 Προσέγγιση γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών σε γράφους μέσω επιπεδοσυνόλων

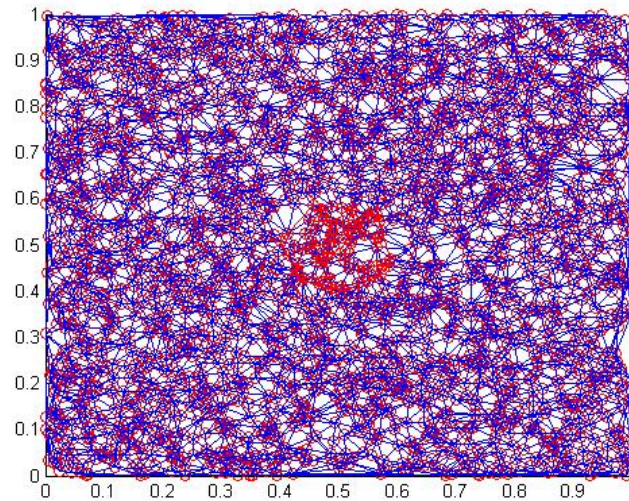
Ας υπενθυμίσουμε στο σημείο αυτό τη γενική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη της συνάρτησης που υλοποιεί τις γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες ((2.18):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(I)|\nabla u|(\kappa + c) + \nabla g(I) \cdot \nabla u, \quad c \geq 0$$

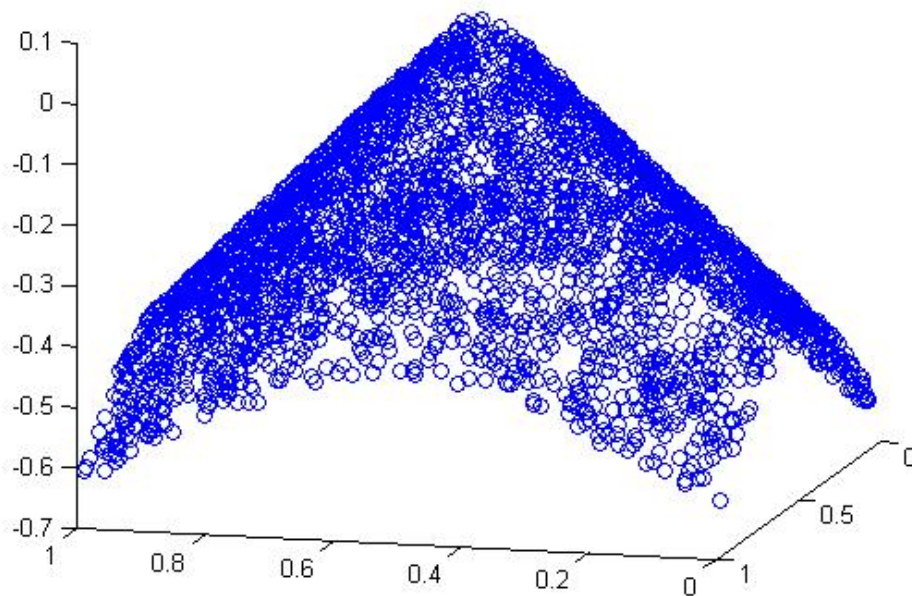
Αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι η εξίσωση διαφορών που περιγράφει την κίνηση σταθερής ταχύτητας θα δίνεται από την (2.33). Ταυτόχρονα, όπως συζητήσαμε στη συνεχή εκδοχή, ο όρος που αντιστοιχεί στην κίνηση σταθερής ταχύτητας του μοντέλου των επιπεδοσυνόλων είναι :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u|$$

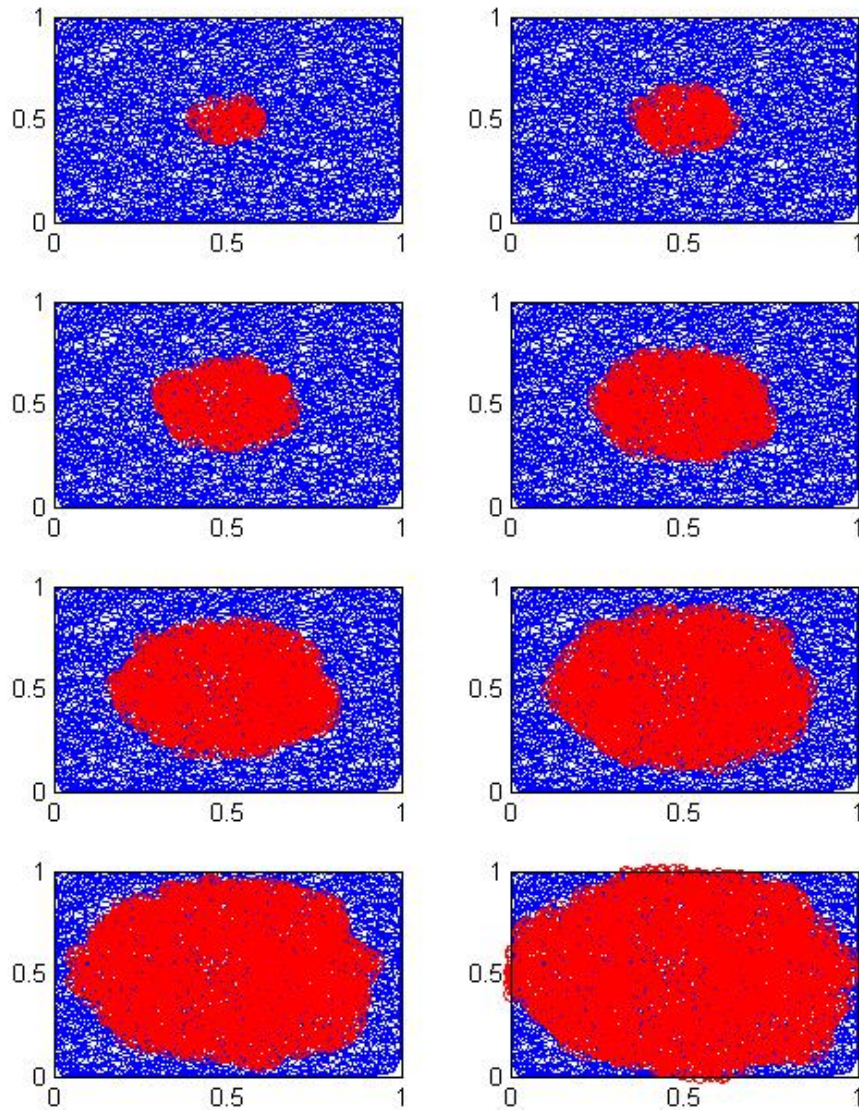
Επομένως στην συνολική προσέγγισή μας μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον όρο $|(\nabla u)(v)|$ με τον $\max_{w \in N_B(v, G)} \{\phi(w) - \phi(v)\}$. Επομένως, προκειμένου



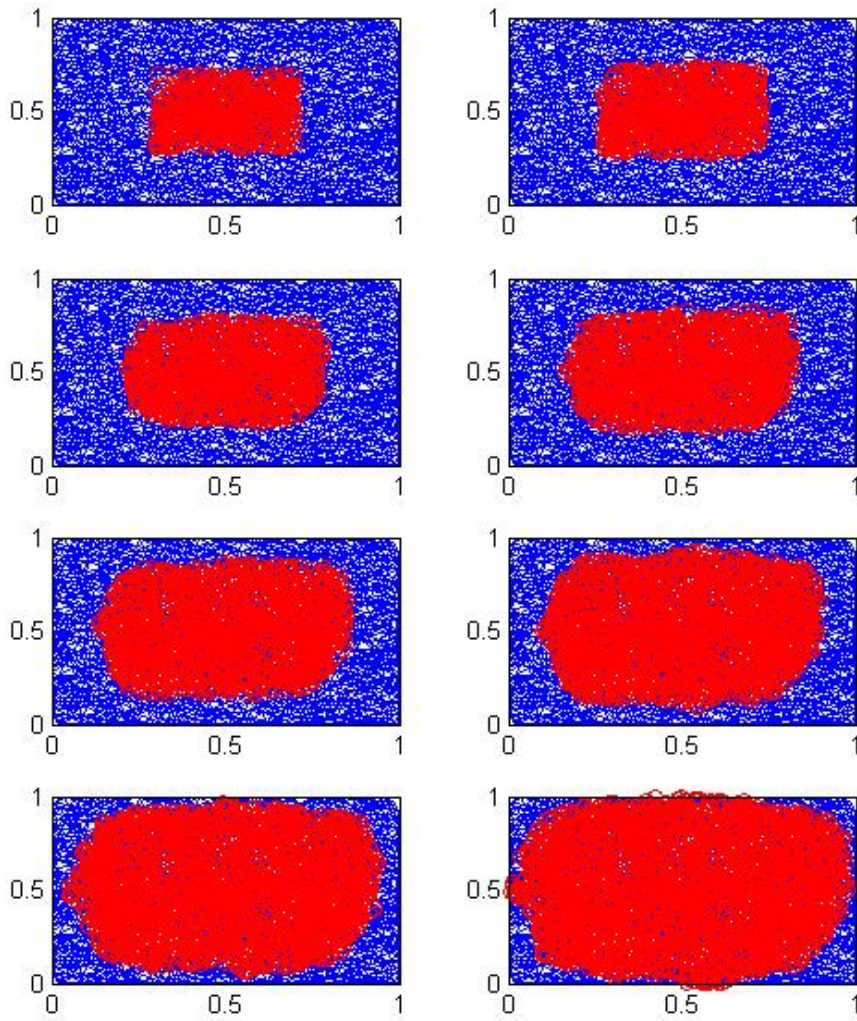
Σχήμα 2.10: Ένα στιγμιότυπο του τυχαίου γράφου όπου εργαζόμαστε



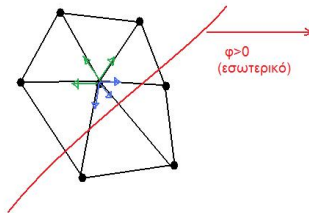
Σχήμα 2.11: Η προσημασμένη συνάρτηση απόστασης από την αρχική καμπύλη



Σχήμα 2.12: Μορφολογικό dilation υλοποιημένο σε γράφους με αρχική καμπύλη έναν κύκλο.



Σχήμα 2.13: Μορφολογικό dilation υλοποιημένο σε γράφους με αρχική καμπύλη διαφορετικής γεωμετρίας (στο παράδειγμά μας τεράγωνο).



Σχήμα 2.14: Υπολογισμός κατεύθυνσης μέγιστης αύξησης

να πετύχουμε το στόχο μας, δηλαδή να εξάγουμε μια εξίσωση διαφορών που να υλοποιεί συνολικά τις γεωδαιτικές καμπύλες, πρέπει να υλοποιήσουμε σε γράφους και τους υπόλοιπους τελεστές που συμμετέχουν στην (2.18).

Προσέγγιση της κλίσης μιας συνάρτησης ορισμένης σε γράφους

Για να καταλήξουμε σε μια προσέγγιση, πρέπει αρχικά να θυμηθούμε τον ορισμό της κλίσης μιας συνάρτησης ϕ .

Κλίση 1 Στη διανυσματική ανάλυση, κλίση ενός βαθμωτού πεδίου ϕ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που κατεύχεται σε κάθε σημείο στην κατεύθυνση της μέγιστης αύξησης του βαθμωτού πεδίου και του οποίου το μέτρο είναι ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής του.

Επομένως, μπορούμε να ακολουθήσουμε ακριβώς αυτόν τον ορισμό και να τον μεταφέρουμε στην περίπτωσή μας. Ιδιαίτερα ενθαρρυντικό στοιχείο που συνηγορεί υπέρ αυτής της προσέγγισης είναι το γεγονός της αντιστοιχίας του όρου $|(\nabla u)(v)|$ με τον όρο $\max_{w \in N_B(v,G)} \{\phi(w) - \phi(v)\}$, που αναπαριστά ακριβώς τον ορισμό. Άρα λοιπόν θα θέσουμε:

$$|\nabla \phi|(u) = \max_{w \in N_B(v,G)} \{|\phi(w) - \phi(u)|\}$$

και ως κατεύθυνση αυτή της μέγιστης αύξησης.

Από την άλλη πρέπει να συζητηθεί ο τρόπος υπολογισμού της κατεύθυνσης μέγιστης αύξησης του πεδίου ϕ που ορίζεται στους κόμβους $v \in V = V(G)$. Αναφορά για τη συζήτηση αυτή μπορεί να αποτελέσει το σχήμα 2.14.

Βλέπουμε λοιπόν ότι, θα ήταν απερίσκεπτο να επιλέξουμε τη μία μόνο ακμή uw , η οποία ενδεχομένως να καταδεικνύει την μέγιστη αύξηση, δεδομένου ότι αγνοούμε την πληροφορία όλων των υπόλοιπων ακμών. Για το λόγο αυτό, μπορούμε να υπολογίσουμε την κατεύθυνση μέγιστης αύξησης ως ένα βαρυντικό μέσο όλων των κατευθύνσεων του κόμβου u και των γειτόνων του και

βάρη ανάλογα της συνεισφοράς της κάθε κατεύθυνσης στη μέγιστη αύξηση. Συγκεκριμένα, στην υλοποίηση την οποία θα παρουσιάσουμε στο τέλος της παραγράφου χρησιμοποιείται η εξίσωση:

$$\vec{n} = \frac{\sum_{w \in N_B(v,G)} (f(w) - f(v)) \left(\frac{p(\vec{w}) - p(\vec{v})}{|p(\vec{w}) - p(\vec{v})|} \right)}{\left| \sum_{w \in N_B(v,G)} (f(w) - f(v)) \left(\frac{p(\vec{w}) - p(\vec{v})}{|p(\vec{w}) - p(\vec{v})|} \right) \right|}$$

Σε ορισμένες εφαρμογές λόγω εξαιρετικής μη κανονικότητας του γράφου και των αποστάσεων μεταξύ των γειτόνων, πρέπει να μπορεί να δοθεί η δυνατότητα να ελέγξουμε τα βάρη και να μειώσουμε τη επίδραση των «μη μέγιστων» κατευθύνσεων. Για το λόγο αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση:

$$\vec{n} = \frac{\sum_{w \in N_B(v,G)} ((-sign(f(w) - f(v))) \frac{1}{\|f(w) - f(v)\| - \max_{w \in N_B(v,G)} (\|f(w) - f(v)\|) + \epsilon}) \left(\frac{p(\vec{w}) - p(\vec{v})}{|p(\vec{w}) - p(\vec{v})|} \right)}{\left| \sum_{w \in N_B(v,G)} ((-sign(f(w) - f(v))) \left(\frac{1}{\|f(w) - f(v)\| - \max_{w \in N_B(v,G)} (\|f(w) - f(v)\|) + \epsilon} \right)) \left(\frac{p(\vec{w}) - p(\vec{v})}{|p(\vec{w}) - p(\vec{v})|} \right) \right|}$$

όπου η παράμετρος ϵ είναι αδιάφορη, εφόσον γίνεται τελικά κανονικοποίηση, ενώ μπορούμε να ρυθμίσουμε την παράμετρο ρ , για να αυξομειώσουμε την επίδραση, όπως αναφέραμε, των «μη μέγιστων» κατευθύνσεων.

Στο σχήμα 2.15 βλέπουμε το διανυσματικό πεδίο της κλίσης της συνάρτησης $\exp(-\frac{|p(\vec{v}) - p(\vec{v})|}{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2})$ υπολογισμένο με την πρώτη μέθοδο. Λόγω της κανονικότητας του υπό μελέτη γράφου τα αποτελέσματα είναι αντίστοιχα και για τη δεύτερη εκδοχή.

Προσέγγιση της καμπυλότητας των καμπυλών

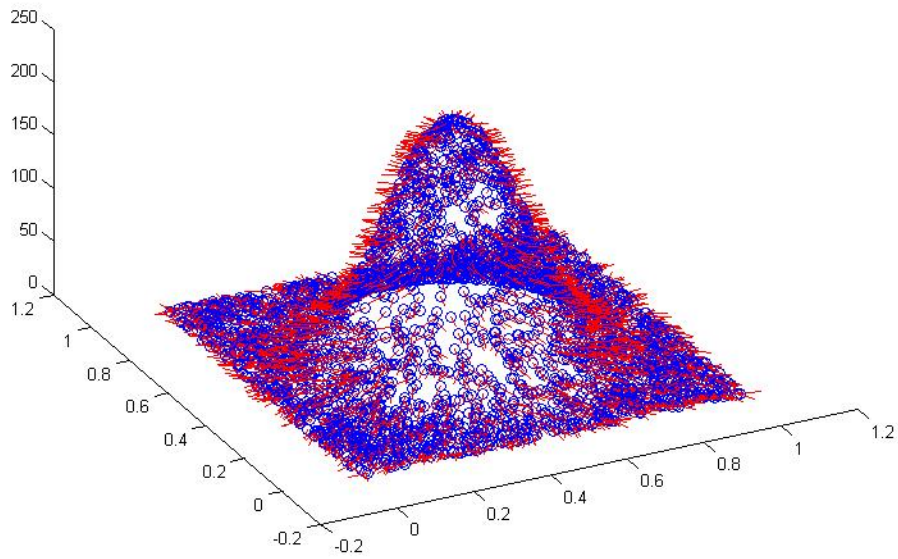
Πολλές μέθοδοι έχουν αναπτυχθεί για την προσέγγιση της καμπυλότητας καμπυλών που ορίζονται από σημεία τα οποία δεν ακολουθούν κάποια κανονική διάταξη. Για να ξεκινήσουμε μία σύντομη παρουσίασή τους πρέπει αρχικά να δώσουμε έναν τυπικό ορισμό.

Καμπυλότητα 1 Έστω $\gamma(s)$ μια επίπεδη καμπύλη παραμετροποιημένη ως προς το μήκος της. Τότε :

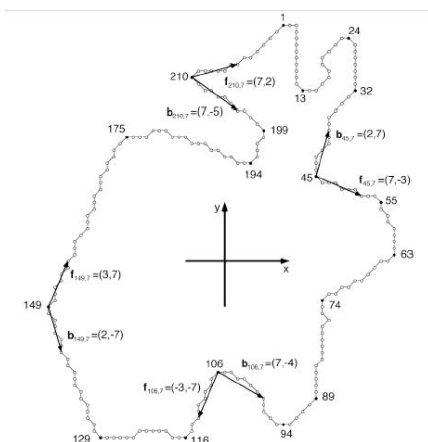
$$\kappa(s) = \left\| \frac{d^2 \gamma(s)}{ds^2} \right\|$$

Με αφορμή λοιπόν αυτό τον ορισμό έχουν αναπτυχθεί διάφορες μεθοδολογίες υπολογισμού της σε τυχαία σημεία ως εξής:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ43



Σχήμα 2.15: Το διανυσματικό πεδίο της κλίσης της συνάρτησης $\exp(-\frac{|\vec{p}(\vec{v})-\vec{p}_0|}{2*\pi*\sigma^2})$ υπολογισμένο με την πρώτη μέθοδο



Σχήμα 2.16: Παράδειγμα υπολογισμού των αναγκαίων μεγεθών για το γεωμετρικό υπολογισμό της καμπυλότητας

1. Μεθοδολογίες βασισμένες στη μεταβολή της γωνίας του εφαπτόμενου διανύσματος και άλλων παραγώγων κατά μήκος της καμπύλης

Έστω $\rho = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ τα σημεία που ορίζουν την καμπύλη στο επίπεδο. Έστω, επίσης, $p_i = (x_i, \psi_i)$ Σε κάθε σημείο ορίζουμε:

$$\vec{f}_{i,k} = p_i - p_{i+k} \pmod{m} = (x_{i,k}^+, y_{i,k}^+)$$

$$\vec{b}_{i,k} = p_i - p_{i-k} \pmod{m} = (x_{i,k}^-, y_{i,k}^-)$$

Τα αντίστοιχα μεγέθη φαίνονται στο σχήμα 2.16. Οι σημαντικότεροι αλγόριθμοι σε αυτή την κατηγορία είναι οι εξής:

- *H.Freeman and L.S Davis, 1977 [27]* Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο προσεγγίζονται οι μεταβολές της γωνίας της εφαπτομένης σε κάθε σημείο της καμπύλης ως εξής: Υπολογίζεται αρχικά το μέγεθος :

$$\theta_{i,k} = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y_{i,k}^-}{x_{i,k}^-}\right), & \text{εάν } |x_{i,k}^-| \geq |y_{i,k}^-| \\ \cot^{-1}\left(\frac{x_{i,k}^-}{y_{i,k}^-}\right) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και στη συνέχεια η προσέγγιση της καμπυλότητας προκύπτει από τις μερικές διαφορές:

$$\delta_{i,k} = \theta_{i+1,k} - \theta_{i-1,l}$$

- *S.Hennmann and R.Klette [28]* Αυτός ο αλγόριθμος υπολογίζει αρχικά από μια ορισμένη γειτονιά, σε αντίθετη φορά με αυτή της διαγραφής, το μέγιστο μήκος

$$l_b = \sqrt{(x_{i-b} - x_i)^2 + (y_{i-b} - y_i)^2}$$

και το αντίστοιχο μέγεθος l_f σε μια γειτονιά, προς την φορά της διαγραφής της καμπύλης. Αφού υπολογιστούν τα μεγέθη:

$$\theta_b = \tan^{-1} \left(\frac{|x_{i-b} - x_i|}{|y_{i-b} - y_i|} \right) \quad \theta_f = \tan^{-1} \left(\frac{|x_{i-f} - x_i|}{|y_{i-f} - y_i|} \right)$$

τότε η εκτίμηση της καμπυλότητας δίνεται από την:

$$E_i = \frac{\delta_f}{2\lambda_f} + \frac{\delta_b}{2\lambda_f}$$

όπου

$$\begin{aligned} \delta_f &= |\theta_f - \theta_i| \\ \delta_b &= |\theta_b - \theta_i| \\ \theta &= \frac{\delta_f + \delta_b}{2} \end{aligned}$$

2. Μεθοδολογίες βασισμένες στον υπολογισμό της ακτίνας του εγγεγραμμένου στην καμπύλη κύκλου

S.Hennmann and R.Klette [28] Ο αλγόριθμος αυτός υπολογίζει το μέγιστο μήκος σε μια γειτονιά κάθε σημείου και ορίζει την «εσωτερική» και την «εξωτερική» ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου ως:

$$I_i = [(l_i - 1/2)^2 - 1/4] O_i = [(l_i + 1/2)^2 - 1/4] \quad (2.34)$$

και επιστρέφει την καμπυλότητα ως

$$E_i = \frac{2}{I_i + O_i}$$

Παρά όλα αυτά, στη δική μας περίπτωση οι παραπάνω τεχνικές, αν και θα έδιναν πολύ καλά αποτελέσματα, έχουν ορισμένα μειονεκτήματα:

- Εξαρτώνται από την παραμετροποίηση της καμπύλης, καθώς απαιτούν τα σημεία που αποτελούν την καμπύλη να τοποθετηθούν σε σειρά εγγύτητας, γεγονός που απαιτεί μεγάλη υπολογιστική δαπάνη ιδιαίτερα, αν πολλαπλασιαστεί, όπως θα δούμε στη συνέχεια, με τον αριθμό των επιπεδοσυνόλων.

- Αν χρησιμοποιηθούν στην εφαρμογή μας, θα πρέπει να εφαρμοστούν σε όλες τις καμπύλες όλων των επιπέδων. Από την άλλη εάν αποφασίσουμε να υποστούμε το τμήμα αυτό, λόγω της υλοποίησης, η συνολική συνάρτηση που ενσωματώνει τις καμπύλες όλων των επιπέδων θα έχει εξαιρετικά μεγάλο εύρος τιμών με αποτέλεσμα, το σύνορο κάθε επιπεδοσύνολου να αποτελείται από όλο και λιγότερα σημεία, γεγονός που μειώνει την ακρίβεια της προσέγγισης των αλγορίθμων.
- Τέλος, αγνοώντας την πληροφορία που μας δίνεται μέσω της υλοποίησης με επιπεδοσύνολα, αγνοούμε το πλεόνασμα της πληροφορίας που μας παρέχεται από το «περιβάλλον» της κάθε καμπύλης.

Λαμβάνοντας όλα τα παραπάνω υπόψη οδηγούμαστε στην ιδέα της προσέγγισης της καμπυλότητας μέσω της σχέσης (2.17) η οποία υπενθυμίζεται εδώ χάριν ευκολίας:

$$\kappa = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

Από την άλλη ο όρος $\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ έχει ήδη προσεγγιστεί στις σχέσεις (2.2.5) και (2.2.5).

Υπολογισμός της απόκλισης διανυσματικού πεδίου σε γράφους

Για να μπορέσουμε να καταλήξουμε σε μία έκφραση για την τιμή της απόκλισης του εκάστοτε διανυσματικού πεδίου σε κάθε σημείο του γράφου, πρέπει πρώτα να θυμηθούμε τον ορισμό της απόκλισης σε δύο διαστάσεις:

Απόκλιση 1 Αν F διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο επίπεδο, τότε

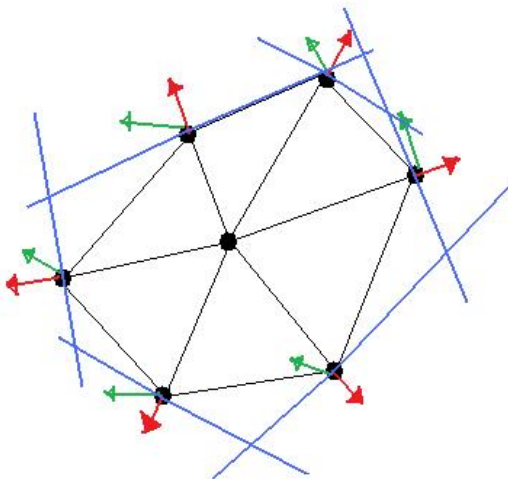
$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\int_{L(S)} \vec{F} \cdot \vec{n} dl}{S}$$

όπου S μία περιοχή στο \mathbf{R}^2 και $L(S)$ το μήκος της.

Τα μέχρι τώρα δεδομένα μας παρέχουν τα διανύσματα σε κάθε γειτονικό κόμβο κάθε κόμβου. Επομένως, αν εξετάσουμε το σχήμα, μπορούμε να λάβουμε μια εξαιρετικά καλή προσέγγιση για την απόκλιση :

$$\operatorname{div}(\vec{f})(v) = \frac{\sum_{w \in N_B(v,G)} \vec{f}_w \cdot \vec{n}_w \cdot L_w}{\phi(L_i)} \forall i \in N_B(v, G)$$

όπου ϕ μια γραμμική συνάρτηση των L_i .



Σχήμα 2.17: Υπολογισμός της απόκλισης. Με πράσινο χρώμα συμβολίζεται η τιμή του διανυσματικού πεδίου \vec{f}_i σε κάθε κόμβο, με κόκκινο το διάνυσμα θέσης ως προς τον κεντρικό κόμβο \vec{n}_i , ενώ με μπλε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα L_i με τις τομές τους.

Η παραπάνω είναι μια καλά ορισμένη μέθοδος υπολογισμού της απόκλισης. Μπορεί περαιτέρω να απλουστευθεί, αν θεωρήσουμε μια σχετική ομοιομορφία στα μήκη L_i οπότε και λαμβάνουμε :

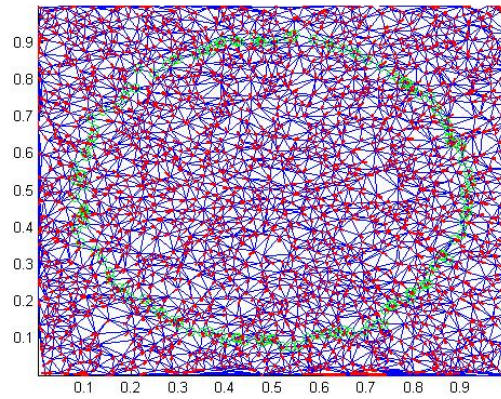
$$\text{div}(\vec{f})(v) \propto \sum_{w \in N_B(v, G)} \vec{f}_w \cdot \vec{n}_w$$

Στο σχήμα 2.18 βλέπουμε το διανυσματικό πεδίο στο γράφο καθώς και τον «κύκλο» κατά μήκος του οποίου θα υπολογίσουμε την καμπυλότητα. Στο σχήμα 2.19 φαίνεται το αποτέλεσμα της μεθόδου μας.

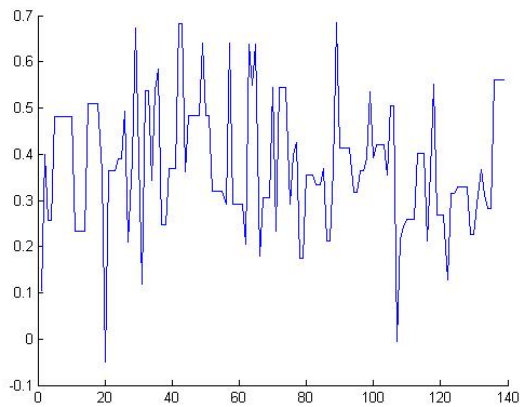
2.2.6 Παραδείγματα υλοποίησης

Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται η παρουσίαση του αλγορίθμου για την ανίχνευση αντικειμένων σε γράφους μέσω μιας προσεγγιστικής μορφής της μεθόδου των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών με επιπεδοσύνολα. Στα σχήματα 2.20-2.25 φαίνεται η εκτέλεση του αλγορίθμου για τον εντοπισμό ενός και τριών αντικειμένων αντίστοιχα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ48

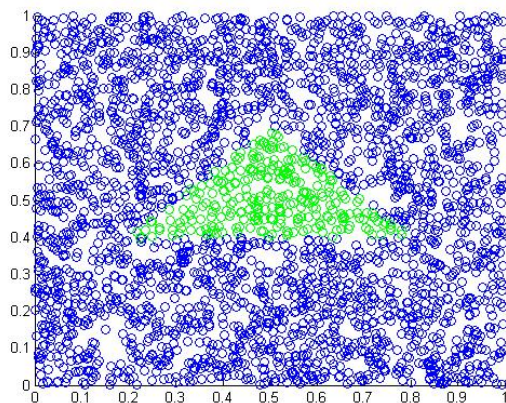


Σχήμα 2.18: Το διανυσματικό πεδίο στο γράφο καθώς και ο «κύκλος» κατά μήκος του οποίου υπολογίζουμε την καμπυλότητα

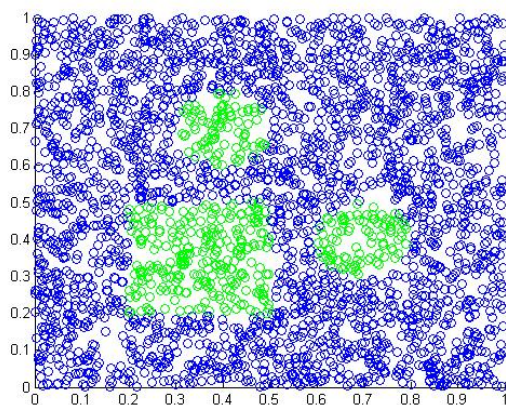


Σχήμα 2.19: Η καμπυλότητα κατά μήκος του κύκλου του σχήματος 2.18. Παρατηρούμε ότι παραμένει σταθερά θετική με ελεγχόμενες αναμενόμενες αυξομειώσεις. Ας μην ξεχνάμε ότι πάνω στο γράφο το σχήμα δεν είναι γεωμετρικός κύκλος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ49

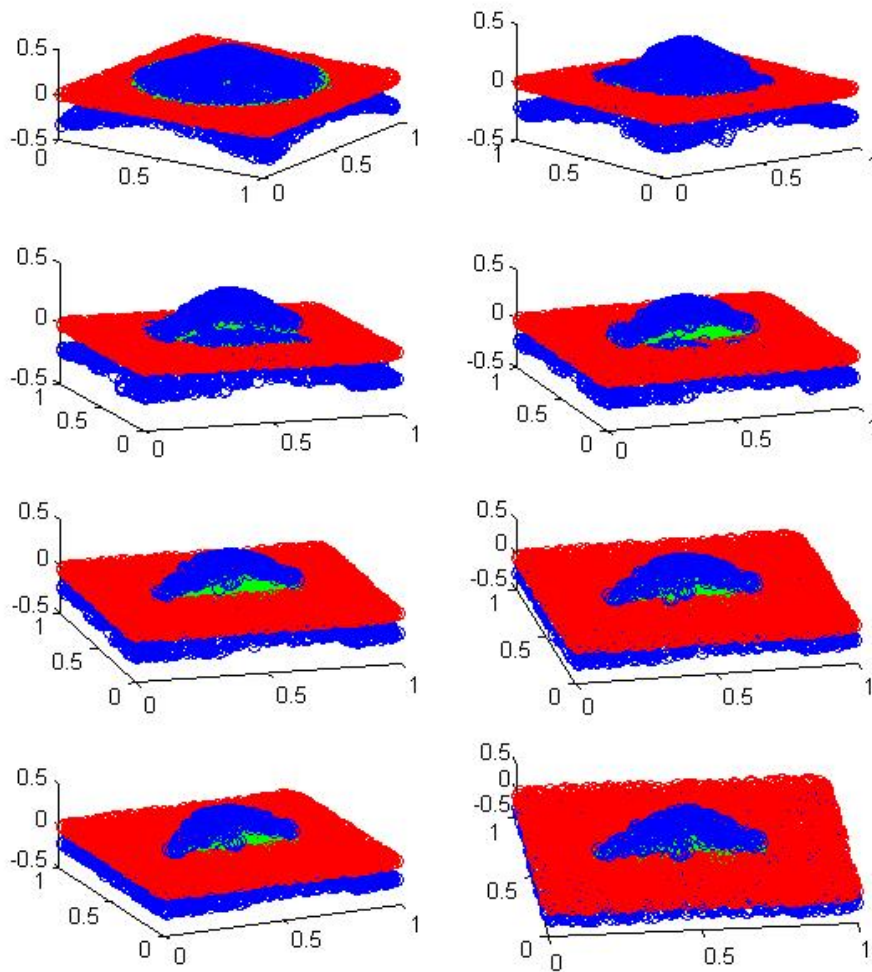


Σχήμα 2.20: Το πρώτο πεδίο εφαρμογής για τον αλγόριθμό μας θα είναι η εύρεση μιας μόνο περιοχής.

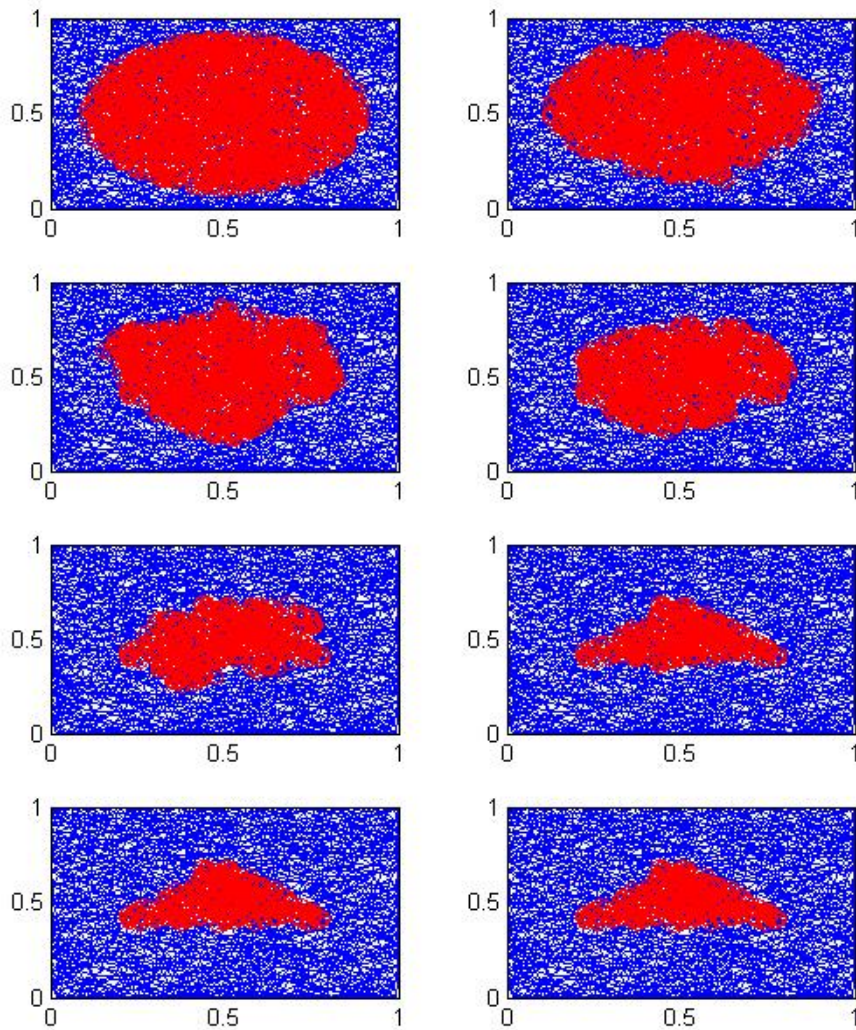


Σχήμα 2.21: Για να εξετάσουμε την δυνατότητα αλλαγής της τοπολογίας σημειώνουμε στη δεύτερη περίπτωση τρεις περιοχές

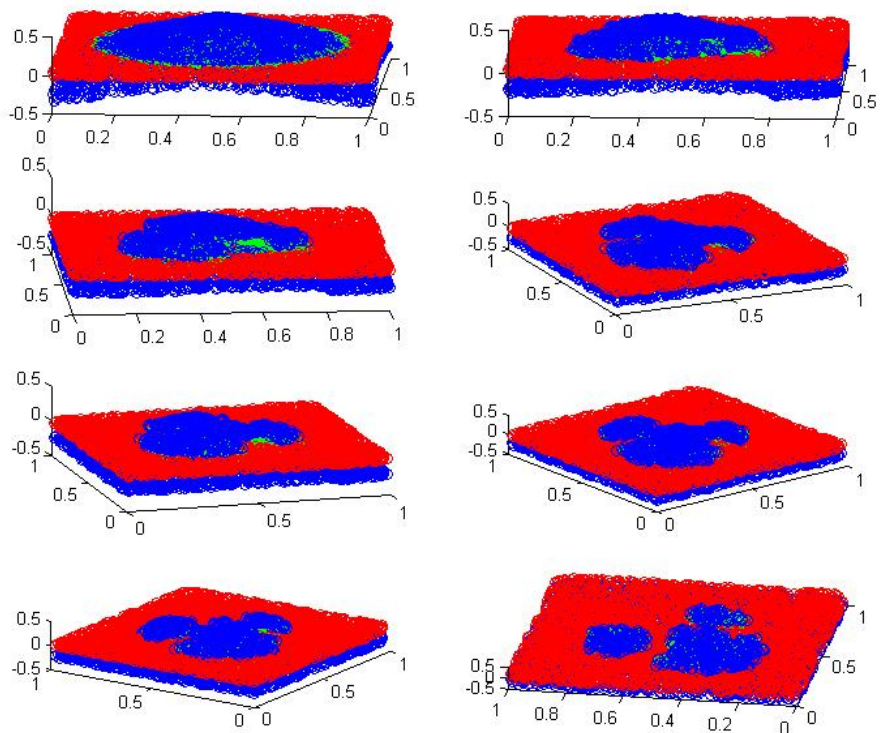
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ50



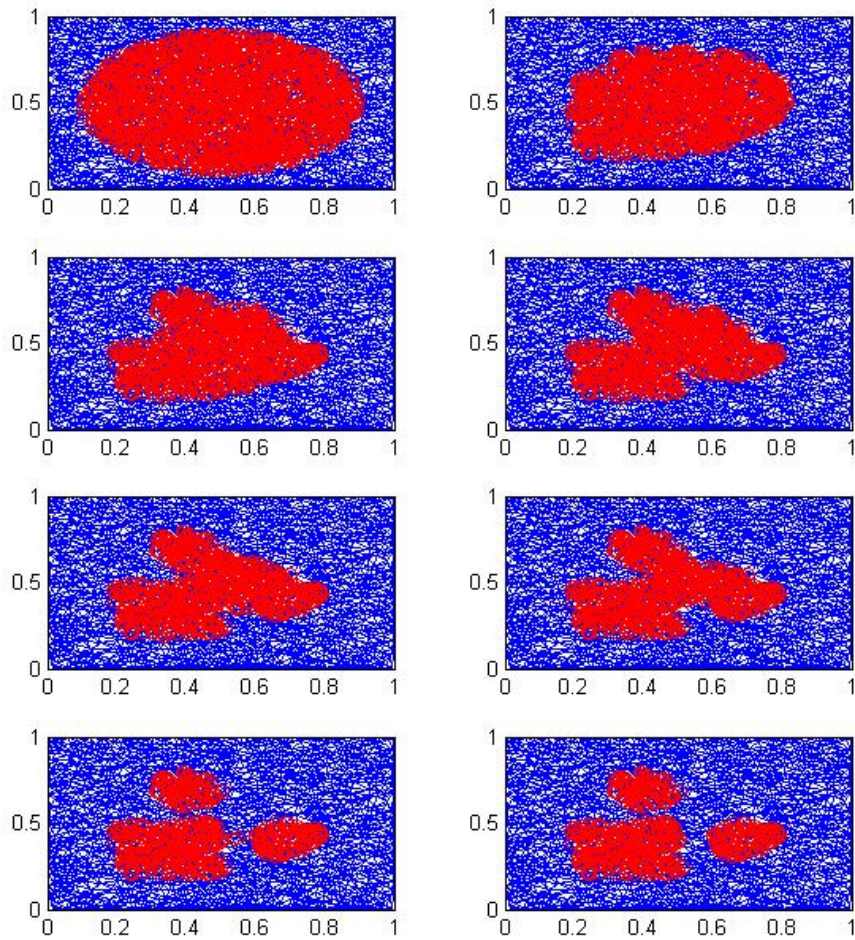
Σχήμα 2.22: Παρατηρούμε την εξέλιξη της τρισδιάστατης συνάρτησης που ενσωματώνει την καμπύλη ενδιαφέροντος. Με κόκκινο σημειώνεται το μηδενικό επίπεδο ενώ με πράσινο η προβολή της συνάρτησης στο μηδενικό επίπεδο.



Σχήμα 2.23: Ο αλγόριθμός μας βρίσκει την περιοχή με επιτυχία 99%. Σημειώνεται η εξαιρετική συμπεριφορά στις γωνίες.



Σχήμα 2.24: Παρατηρούμε την εξέλιξη της τρισδιάστασης συνάρτησης που ενσωματώνει την καμπύλη ενδιαφέροντος. Με κόκκινο σημειώνεται το μηδενικό επίπεδο ενώ με πράσινο η προβολή της συνάρτησης στο μηδενικό επίπεδο.



Σχήμα 2.25: Ο αλγόριθμος ανταποκρίνεται και στον εντοπισμό τριών περιοχών με επιτυχία 98.5%. Σημειώνεται η αλλαγή της τοπολογίας.

2.2.7 Σημεία μελλοντικής έρευνας

Τα αποτελέσματα της προσέγγισης που έγινε για την εφαρμογή των ενεργών γεωδαιτικών καμπυλών σε γράφους είναι ενθαρρυντικά τόσο λόγω της ταχύτητας εκτέλεσης όσο και λόγω της ακρίβειας του αποτελέσματος. Παρ' όλα αυτά υπάρχει χώρος για περαιτέρω μελέτη του προβλήματος από θεωρητικής και πρακτικής σκοπιάς:

- Ενδιαφέρουσα αρχικά, θα είναι η μελέτη της σταθερότητας και της σύγκλισης του αλγορίθμου στη γενική περίπτωση και για τυχαίο δομικό γράφο B.
- Οι παραπάνω εφαρμογές έδωσαν πολύ καλά αποτελέσματα με τη χρήση του πλέον απλού δομικού στοιχείου της μιας ακμής. Θα έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον η μελέτη της επιλογής ειδικών δομικών στοιχείων για τη μελέτη συγκεκριμένων γεωμετρικών χαρακτηριστικών σε συνδυασμό με τη θεωρία της μορφολογίας γράφων (H.J.Heijmans)
- Αν και η απαιτούμενη υπολογιστική δαπάνη και ο αναγκαίος αριθμός επαναλήψεων μέχρι την άφιξη στο σημείο ελαχίστου είναι μικρός, όσο ο αριθμός των κόμβων αυξάνεται, αυξάνεται και η πολυπλοκότητα. Για το λόγο αυτό ενδιαφέρον παρουσιάζει ενδεχόμενη βελτίωση της μεθόδου με τεχνικές αντίστοιχες με αυτές που έχουν αναπτυχθεί στη συνεχή περίπτωση (fast marching methods (Tsitsiklis-Sethian [30],[30],[31]))

Κεφάλαιο 3

Ανίχνευση σε γράφους με τυχαίους περιπάτους

Το παρόν κεφάλαιο αφιερώνεται στην παρουσίαση ενός αλγορίθμου που σχεδιάστηκε και υλοποιήθηκε από τον συγγραφέα του με στόχο την κατάτμηση αντικειμένων σε εικόνες με χρήση της θεωρίας των τυχαίων περιπάτων σε γράφους. Η παρουσίαση βασίζεται στα [32] και [33]. Η μέθοδος έχει υλοποιηθεί για εικόνες, μένει λοιπόν να την εκφράσουμε και να την υλοποιήσουμε σε γράφους.

3.1 Ποιοτική περιγραφή του αλγορίθμου

Ο αλγόριθμος που περιγράφουμε απαιτεί από το χρήστη να ορίσει K συγκεκριμένα σημεία αναφοράς (seeds), τα οποία σηματοδοτούν περιοχές που ανήκουν σε K διαφορετικά αντικείμενα. Κάθε σημείο αναφοράς ορίζει μια περιοχή στην οποία αποδίδεται μια συγκεκριμένη ετικέτα. Ο αλγόριθμος κατηγοριοποιεί κάθε κόμβο ο οποίος δεν έχει ονομαστεί από το χρήστη, απαντώντας στην ερώτηση : *Δεδομένου ενός τυχαίου περιπατητή, ο οποίος ξεκινά από αυτό τον κόμβο, ποια είναι η πιθανότητα να φτάσει πρώτα σε καθένα από τα K σημεία αναφοράς;* Το εντυπωσιακό της ιδέας αυτής είναι ότι τελικά η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα μπορεί να δοθεί ακριβώς χωρίς μάλιστα να γίνει προσομοίωση του τυχαίου περιπάτου στο γράφο. Πραγματοποιώντας αυτό τον υπολογισμό, αναθέτουμε ένα διάνυσμα μεγέθους K σε κάθε κόμβο το οποίο και ορίζει την πιθανότητα με την οποία ένας τυχαίος περιπατητής, ξεκινώντας από τον εν λόγω κόμβο, φθάνει πρώτα σε καθένα από τα K σημεία αναφοράς. Η τελική ανίχνευση θα πραγματοποιηθεί από αυτά τα διανύσματα επιλέγοντας για κάθε κόμβο τον πιο πιθανό προορισμό του τυχαίου περιπατητή.

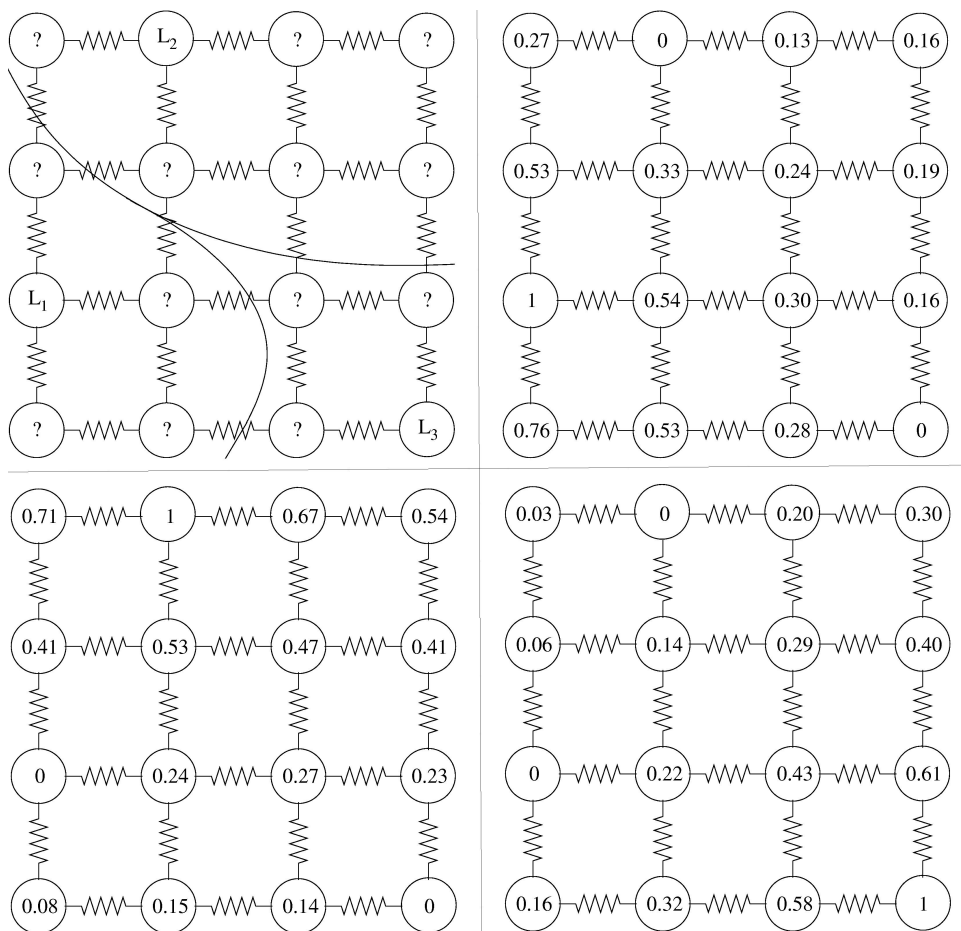
Σε κάθε ακμή του γράφου ανατίθεται ένα πραγματικό βάρος που αντιστοιχεί

στην πιθανότητα ένας τυχαίος περιπατητής να διέλθει από αυτή την ακμή (για παράδειγμα, το μηδενικό βάρος σημαίνει ότι ο τυχαίος περιπατητής δεν πρόκειται να διέλθει από τη συγκεκριμένη ακμή). Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος αξιοποιεί ορισμένα θεμελιώδη θεωρητικά αποτελέσματα που καθιστούν δυνατή και την αποδοτική υλοποίησή του. Αρχικά, στα [35] και [36] αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα ένας τυχαίος περιπατητής να φτάσει ένα σημείο αναφοράς ταυτίζεται ακριβώς με την επίλυση του προβλήματος Dirichlet [37] με οριακές συνθήκες στα σημεία αναφοράς. Ταυτόχρονα, η ανάπτυξη μιας διακριτής προσέγγισης για τις εξισώσεις του Maxwell από τον Branin, επέτρεψε την έκφραση της λύσης του προβλήματος Dirichlet σε όρους ηλεκτρικών δυναμικών στους κόμβους ενός κυκλωματικού γράφου, με τις αντιστάσεις να παίζουν το ρόλο των αντίστροφων βαρών και τις οριακές συνθήκες να ορίζονται από πηγές τάσης.

Με άλλα λόγια, μπορεί κανείς να υπολογίσει την πιθανότητα x_i^s ένας τυχαίος περιπατητής που ξεκινά από τον κόμβο v_i να φτάσει πρώτα στο σημείο αναφοράς με την ετικέτα s λύνοντας ένα πρόβλημα θεωρίας κυκλωμάτων που να αντιστοιχεί στο αντίστοιχο πρόβλημα Dirichlet. Περιγραφικά, γειώνουμε όλους τους ορισμένους από το χρήστη κόμβους με ετικέτα διαφορετική του s και δίνουμε τάση μόνο στα ορισμένα στοιχεία με δείκτη s . Υπολογίζουμε τα δυναμικά σε κάθε κόμβο από τη λύση ενός αραιού συστήματος εξισώσεων οι οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια. Έτσι λοιπόν, ενεργοποιώντας διαδοχικά τους κόμβους που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ετικέτες και υπολογίζοντας τα αντίστοιχα δυναμικά καταλήγουμε στο διάγραμμα πιθανοτήτων, το οποίο αναφέραμε προηγουμένως και με βάση το οποίο θα λάβουμε τελικά την απόφαση της κατηγοριοποίησης. Χαρακτηριστικό είναι το σχήμα 3.1.

3.2 Αναλυτική παρουσίαση του αλγορίθμου

Αρχικά, όπως έγινε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ας ορίσουμε τους συμβολισμούς και τα μεγέθη τα οποία χρησιμοποιούμε: Ένας γράφος ορίζεται από το ζεύγος $G = (V, E)$ με κόμβους $v \in V$ και ακμές $e \in E \subseteq V \times V$. Μία ακμή e η οποία ενώνει τους κόμβους v_i και v_j συμβολίζεται με e_{ij} . Με τον όρο βάρος μιας ακμής εννοούμε το θετικό πραγματικό αριθμό $w(e_{ij}) = w_{ij}$. Ο βαθμός ενός κόμβου ορίζεται ως $d_i = \sum_{v_{e_{ij}}} w_{ij}$. Υποθέτουμε τέλος ότι ο γράφος μας είναι συνδεδεμένος, δηλαδή υπάρχει μονοπάτι από κάθε κόμβο σε οποιονδήποτε άλλο και μη κατευθυνόμενος, δηλαδή $w_{ij} = w_{ji}$.



Σχήμα 3.1: Ο αλγόριθμος των τυχαίων περιπάτων. Πάνω αριστερά φαίνεται ο γράφος και οι σωστές περιοχές με τις ετικέτες L_1, L_2, L_3, L_4 . Στα επόμενα σχήματα φαίνονται οι πιθανότητες από κάθε κόμβο ένας τυχαίος περιπατητής να φτάνει στην πηγή τάσης, όπως αυτές προκύπτουν από κυκλωματική επίλυση.

3.2.1 Καθορισμός των βαρών

Προκειμένου να αναπαραστήσουμε τη δομή των δεδομένων μας σε κάθε κόμβο, πρέπει κανείς να ορίσει μια συνάρτηση η οποία απεικονίζει τις μεταβολές των τιμών από κόμβο σε κόμβο σε βάρη ακμών w_{ij} . Πολλές τέτοιες απεικονίσεις έχουν προταθεί, συνιστάται όμως από τον εμπνευστή του αλγορίθμου η χρήση των βαρών :

$$w_{ij} = \exp(-\beta(f(v_i) - f(v_j)))$$

όπου $f(v_i)$ η τιμή που ανατίθεται σε κάθε κόμβο, β ελεύθερη παράμετρος για τον τονισμό ή μη των διαφορών μεταξύ των τιμών γειτονικών κόμβων. Σε περίπτωση που οι τιμές είναι διανυσματικές, ο όρος $(f(v_i) - f(v_j))$ αντικαθίσταται από τον $\|(f(v_i) - f(v_j))\|$.

3.2.2 Πρόβλημα Dirichlet

Στα [35] και [36] μετά από μια επίπονη διαδικασία προκύπτει το συμπέρασμα ότι η πιθανότητα ένας τυχαίος περιπατητής να φτάσει από έναν κόμβο σε έναν καθορισμένο ταυτίζεται με τη λύση του προβλήματος Dirichlet. Για να συνεχίσουμε πρέπει να γίνει υπενθύμιση ορισμένων βασικών στοιχείων του τελευταίου.

Το **Dirichlet ολοκλήρωμα**, ορίζεται ως :

$$D[u] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega$$

Αρμονική είναι μία συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την εξίσωση **Laplace**:

$$\nabla^2 u = 0$$

Το πρόβλημα εύρεσης μιας αρμονικής συνάρτησης υπό δεδομένες οριακές συνθήκες αποτελεί το πρόβλημα Dirichlet και ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση του ολοκληρώματος (3.2.2) καθώς η εξίσωση Laplace ισούται με την Euler-Lagrange του (3.2.2).

Στη συνέχεια ορίζουμε δύο σημαντικούς πίνακες:

Λαπλασιανός πίνακας ορίζεται ως:

$$L_{ij} = \begin{cases} d_i & \text{εάν } i = j \\ -w_{ij} & \text{εάν } e_{ij} \in E \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ο **πίνακας πρόσπτωσης** ορίζεται ως:

$$A_{e_{ij}v_k} = \begin{cases} +1 & \text{εάν } i = k \\ -1 & \text{εάν } j = k \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

για κάθε κόμβο v_k και ακμή e_{ij} , με τυχαία απόδοση προσανατολισμού στις ακμές. Σημαντική σημείωση στο σημείο αυτό είναι ότι στο κλασικό άρθρο [38] οι πίνακες A και A' συνδέονται με τους τελεστές της κλίσης και της απόκλισης αντίστοιχα.

Ορίζουμε επίσης ως C το διαγώνιο πίνακα με στοιχεία τα βάρη των ακμών. Όπως και στη συνεχή περίπτωση, η ιστροπική Λαπλασιανή είναι η σύνθεση της κλίσης και της απόκλισης έτσι, και με βάση αυτές τις υποθέσεις, ισχύει $L = A'A$. Ο διαγώνιος πίνακας ορίζει ουσιαστικά ένα νέο μετρικό και, με την έννοια αυτή, σε έναν πίνακα με βάρη, η Λαπλασιανή θα ορίζεται με τον τελεστή Laplacian-Beltrami από τη σχέση $L = A'CA$. Με τους ορισμούς αυτούς μπορεί κανείς να δείξει πώς να βρει κανείς την αρμονική εκείνη συνάρτηση η οποία βρίσκει τις πιθανότητες - δυναμικά στους μη ορισμένους από το χρήστη κόμβους. Το ανάλογο του ολοκληρώματος (3.2.2) είναι το :

$$D[x] = \frac{1}{2}(Ax)'C(Ax) = \frac{1}{2}x'Lx = \frac{1}{2} \sum_{e_{ij} \in E} w_{ij}(x_i - x_j)^2 \quad (3.1)$$

Μπορούμε να χωρίσουμε τους κόμβους σε δύο ομάδες V_M, V_U όπου η V_M περιλαμβάνει τους κόμβους τους ορισμένους από το χρήστη ενώ η V_U τους υπόλοιπους. Σε αυτή την περίπτωση η (3.1) γίνεται:

$$D[x_U] = \frac{1}{2}[x'_M x'_U] \begin{bmatrix} L_M B \\ B' L_U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_M \\ x_U \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$= \frac{1}{2}(x'_M L_M x_M + 2x'_U B' x_M + x'_U L_U x_U) \quad (3.3)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x_U βρίσκουμε τα οριακά σημεία(δεδομένου ότι η ο Λαπλασιανός πίνακας είναι θετικά ορισμένος και άρα τα οριακά σημεία ελαχιστοποιούν το συναρτησιακό):

$$L_U x_U = -B' x_M$$

το οποίο είναι ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με $|V_U|$ αγνώστους. Δεδομένου ότι ο γράφος είναι συνδεδεμένος τότε το σύστημα έχει καλά ορισμένη λύση.

Αν στη συνέχεια συμβολίσουμε την πιθανότητα που σχετίζεται με τον κόμβο v_i και την ετικέτα s ως x_i^s και το σύνολο των ετικετών ως απεικόνιση $Q(v_j) = s \quad \forall v_j \in V_M, s \in \mathbf{Z}, 0 < s < K$, για κάθε ετικέτα s ορίζουμε το $\|V_M\| \times 1$ διάνυσμα στον κόμβο $v_j \in V_M$ ως:

$$m_j^s = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{εάν } Q(v_j) = s \\ 0 & \text{εάν } Q(v_j) \neq s \end{array} \right\}$$

Άρα λοιπόν η λύση του προβλήματος θα είναι:

$$L_U x^s = -B' m^s$$

για μοναδική ετικέτα ή αντίστοιχα:

$$L_U Q^s = -B' M$$

για όλες τις ετικέτες, όπου ο X έχει K στήλες από κάθε x^s και ο M έχει K κολώνες από κάθε m^s .

3.2.3 Αναλογία με τα κυκλώματα

Η προαναφερθείσα συσχέτιση μεταξύ των τυχαίων περιπάτων και των κυκλωμάτων γίνεται εμφανής στο σημείο αυτό, αν παρατηρήσει κανείς ότι η λύση της (3.2.2) μπορεί να δοθεί από μια κυκλωματική επίλυση ως εξής. Αν θεωρήσουμε τους τρεις θεμελιώδεις νόμους των κυκλωμάτων (Νόμος ρευμάτων Kirchoff, Νόμος του Ohm και Νόμος τάσεων Kirchoff) οι οποίοι γράφονται στη μορφή:

$$A'z = f \quad (N.P.K) \quad (3.4)$$

$$Cp = z \quad (N.Ohm) \quad (3.5)$$

$$p = Ax + b \quad (N.T.K) \quad (3.6)$$

για ένα διάνυσμα ρευμάτων ακμών z , πηγές ρευμάτων f , πηγές τάσεων b και διαφορές δυναμικού p . Οι τρεις τελευταίες εξισώσεις μπορούν να συνδυαστούν στο γραμμικό σύστημα:

$$A'CAx + A'Cb = f \quad (3.7)$$

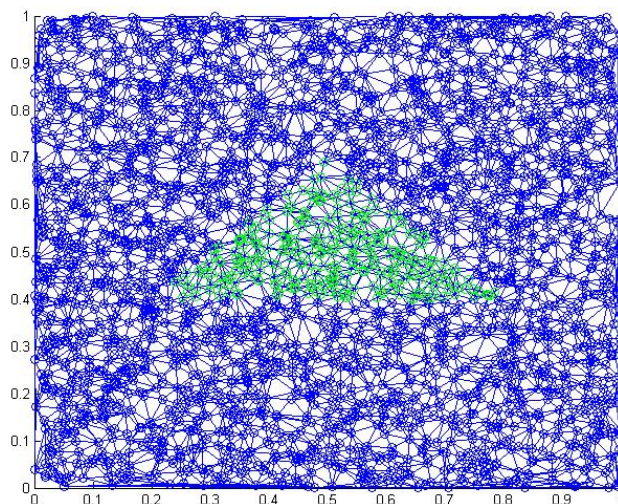
$$Lx = f - A'Cb \quad (3.8)$$

το οποίο ισοδυναμεί με την (3.2.2) στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν πηγές ρευμάτων ($f = 0$).

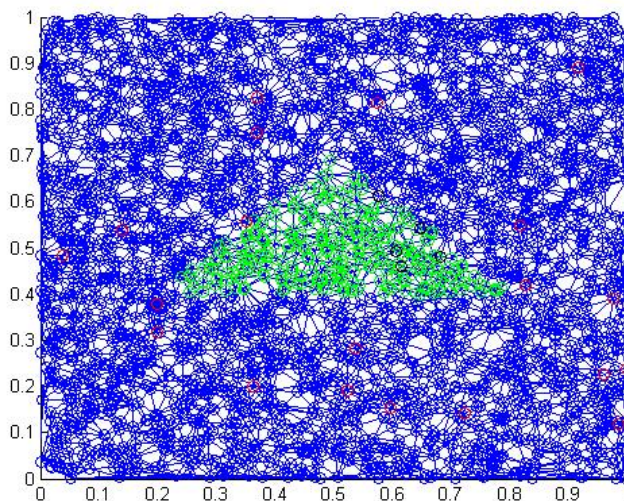
3.2.4 Παραδείγματα υλοποίησης

Στα σχήματα 3.2-3.13 φαίνεται η υλοποίηση της μεθόδου που μόλις περιγράφηκε.

Στη συνέχεια δοκιμάζουμε την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου για περισσότερο ασαφή όρια. Συγκεκριμένα φιλτράρουμε γκαουσιανά πάνω στο γράφο την περίπτωση των τριών περιοχών.

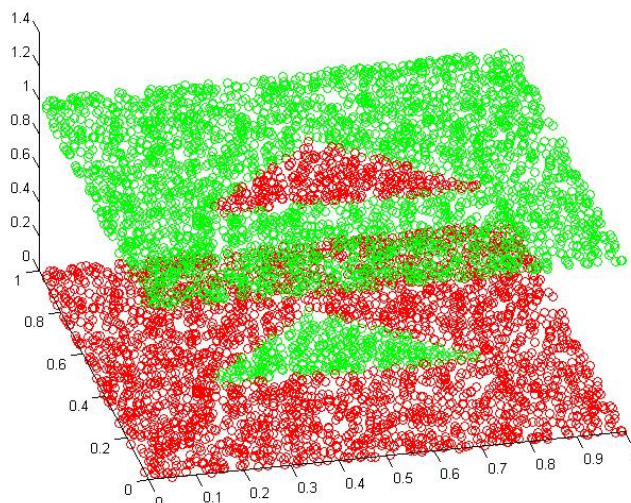


Σχήμα 3.2: Αρχικά εξετάζουμε τον αλγόριθμο για την περίπτωση της μιας περιοχής

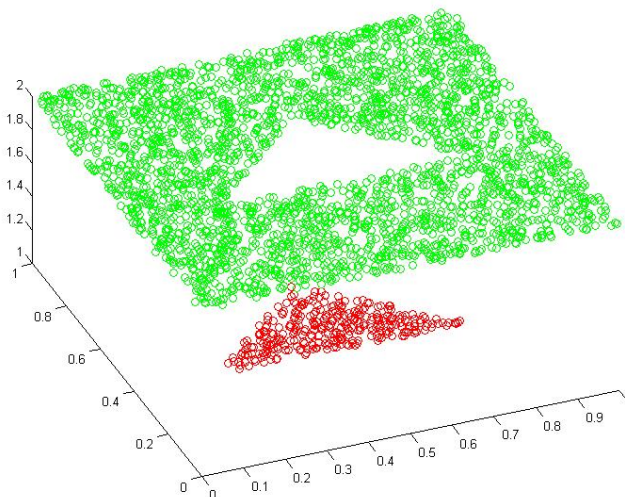


Σχήμα 3.3: Ο χρήστης ορίζει συγκεκριμένα σημεία μέσα σε κάθε περιοχή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ ΜΕ ΤΥΧΑΙΟΥΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥΣ 62

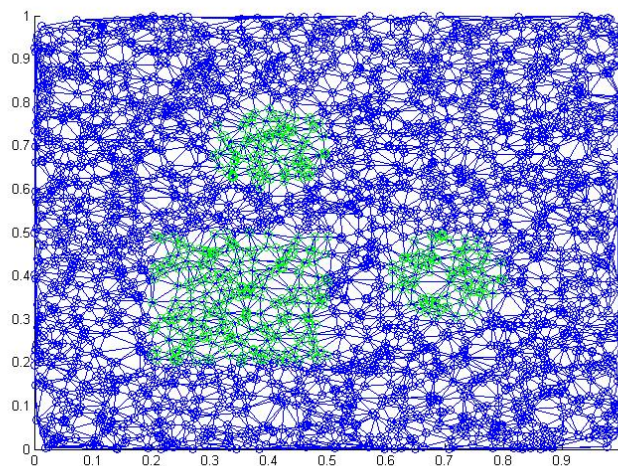


Σχήμα 3.4: Οι πιθανότητες για κάθε σημείο, ο τυχαίος περιπατητής να φτάσει πρώτα από το εν λόγω σημείο σε καθένα από τα ορισμένα από το χρήστη σημεία. Με κάθε χρώμα αντιστοιχίζονται οι πιθανότητες για τα διαφορετικές ετικέτες.

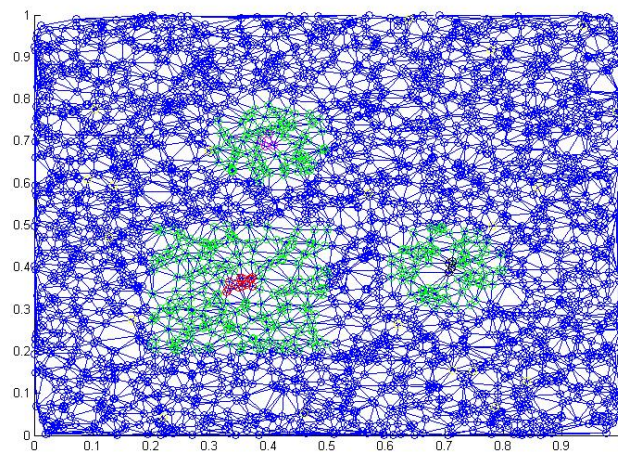


Σχήμα 3.5: Το αποτέλεσμα μετά την κατωφλιοποίηση. Χωρισμός του γράφου σε ετικέτες με επιτυχία 100%.

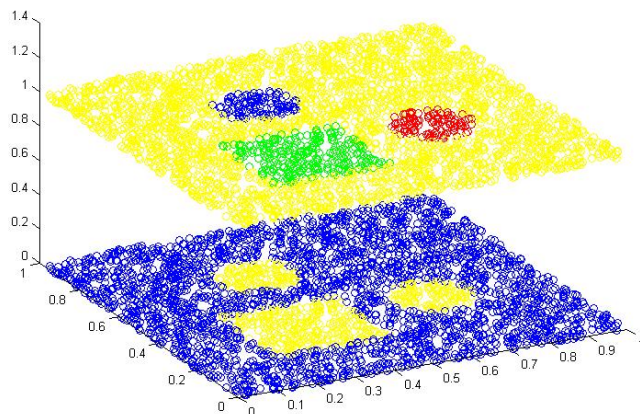
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ ΜΕ ΤΥΧΑΙΟΥΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥΣ 63



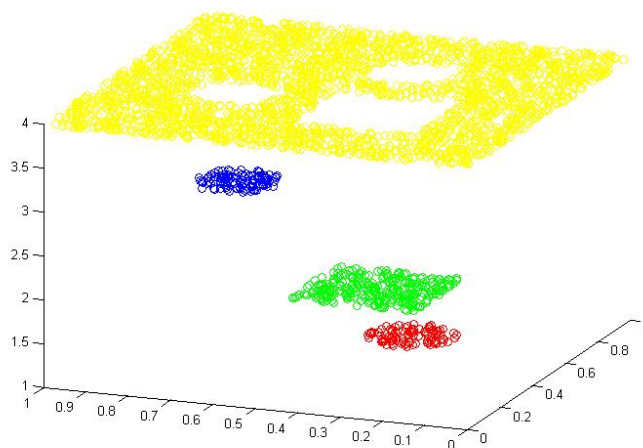
Σχήμα 3.6: Εξετάζουμε, στη συνέχεια την περίπτωση όπου ο αλγόριθμος πρέπει να εντοπίσει 3 περιοχές.



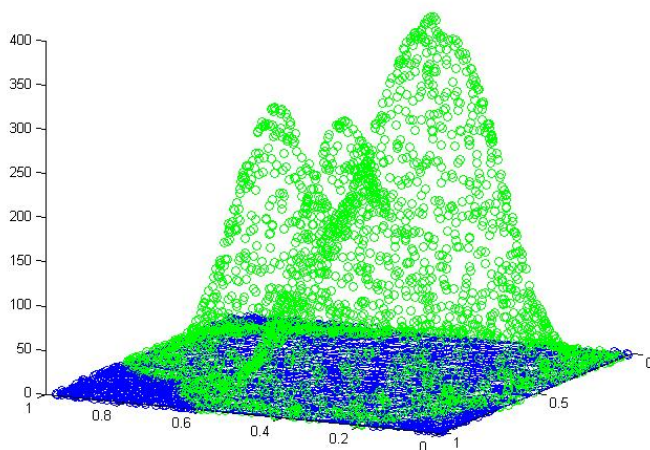
Σχήμα 3.7: Ο χρήστης ορίζει συγκεκριμένα σημεία μέσα σε κάθε αντικείμενο.



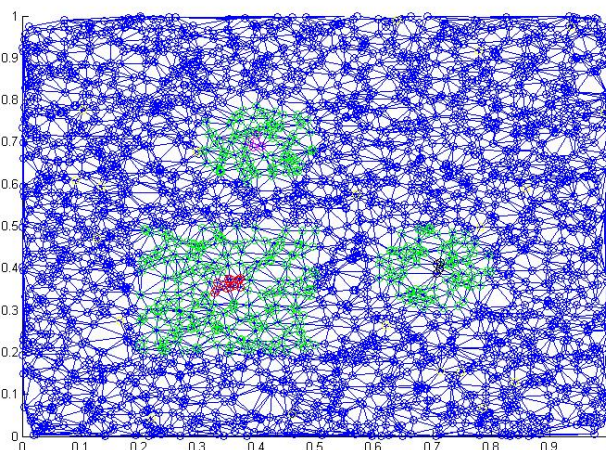
Σχήμα 3.8: Οι πιθανότητες για κάθε σημείο, ο τυχαίος περιπατητής να φτάσει πρώτα από το εν λόγω σημείο σε καθένα από τα ορισμένα από το χρήστη σημεία. Με κάθε χρώμα αντιστοιχίζονται οι πιθανότητες για τα διαφορετικές ετικέτες.



Σχήμα 3.9: Το αποτέλεσμα μετά την κατωφλιοποίηση. Χωρισμός του γράφου σε ετικέτες με επιτυχία 100%.

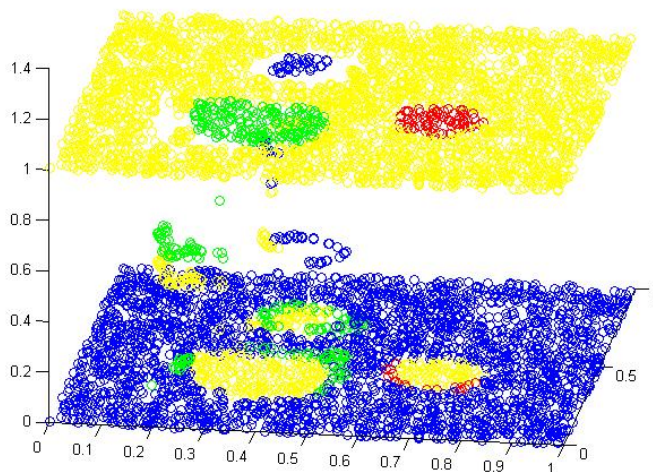


Σχήμα 3.10: Στη συνέχεια δοκιμάζουμε την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου για περισσότερο ασαφή όρια. Συγκεκριμένα γιλτράρουμε γκαουσιανά πάνω στο γράφο την περίπτωση των τριών περιοχών.

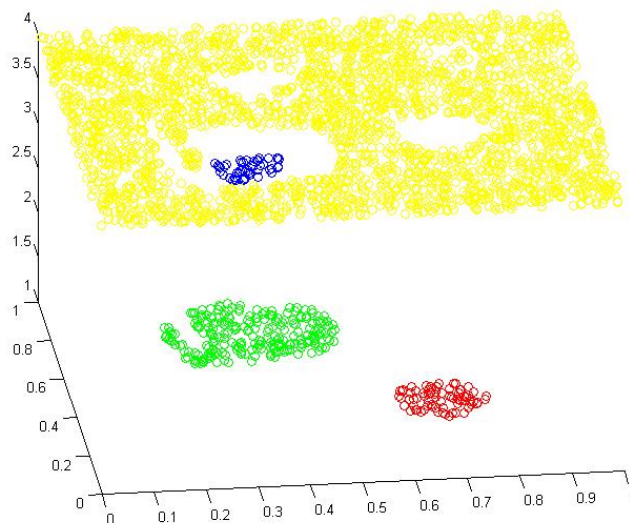


Σχήμα 3.11: Ο χρήστης ορίζει συγκεκριμένα σημεία μέσα σε κάθε περιοχή.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ ΜΕ ΤΥΧΑΙΟΥΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥΣ 66



Σχήμα 3.12: Οι πιθανότητες για κάθε σημείο, ο τυχαίος περιπατητής να φτάσει πρώτα από το εν λόγω σημείο σε καθένα από τα ορισμένα από το χρήστη σημεία. Με κάθε χρώμα αντιστοιχίζονται οι πιθανότητες για τα διαφορετικές ετικέτες.



Σχήμα 3.13: Το αποτέλεσμα μετά την κατωφλιοποίηση. Χωρισμός του γράφου σε ετικέτες με επιτυχία 89%.

3.3 Σχολιασμός αλγορίθμου

Με αφορμή την εφαρμογή της κατάτμησης σε εικόνες πολλοί αλγόριθμοι έχουν αναπτυχθεί. Τελευταία, αρκετοί από αυτούς βασίζονται σε εφαρμογή τεχνικών, μοντελοποίηση του υπό μελέτη αντικειμένου σε γράφους και επίλυση του ισοδύναμου προβλήματος με γραφοθεωρητικές τεχνικές. Στην κατηγορία αυτή ανήκει ο αλγόριθμος που μόλις εξετάσαμε και στο εδάφιο αυτό θα αντιπαραβάλουμε με άλλους αντίστοιχους.

Κύριος αντιπρόσωπος και πρωτοποριακός αλγόριθμος σε αυτά τα θέματα είναι ο αλγόριθμος των γραφοτομών [39],[40], τον οποίο θα αναλύσουμε σε βάθος στο επόμενο κεφάλαιο αλλά θα περιγράψουμε πολύ συνοπτικά στο παρόν, για να γίνει εφικτή η αντιπαραβολή. Περιληπτικά, ο αλγόριθμος των γραφοτομών, στο πρωταρχικό του επίπεδο (θα δούμε στη συνέχεια ότι στον αλγόριθμο έχουν προστεθεί εντυπωσιακές επεκτάσεις), απέναντι στον οποίο ο Grady, L. θέτει τον δικό του, ο χρήστης καλείται να καθορίσει σημεία στο φόντο και στα αντικείμενα και στη συνέχεια, αφού οριστούν κατάλληλα βάρη σε έναν αφαιρετικό γράφο ανεξάρτητο του υπό κατάτμηση αντικειμένου, εφαρμόζεται κάποιος από τους διαθέσιμους αλγορίθμους μέγιστης ροής - ελάχιστης τομής.

Ο αλγόριθμος αυτός έχει εξαιρετικά αποτελέσματα στη γενική περίπτωση, παρουσιάζει όμως αδυναμία λόγω του γεγονότος ότι επιστρέφει την ελάχιστη γραφοτομή μεταξύ των ορισμένων από το χρήστη σημείων, με αποτέλεσμα συχνά απλώς να επιστρέφει την γραφοτομή που απομονώνει τα εν λόγω σημεία έναρξης από την υπόλοιπη εικόνα-στόχο, ιδιαίτερα, όταν ο αριθμός των ορισμένων από το χρήστη σημείων είναι μικρός. Το γεγονός αυτό έχει ως συνέπεια να αναγκάζεται ο χρήστης να προσθέτει όλο και περισσότερα σημεία αναφοράς, προκειμένου να γίνει ικανοποιητική κατάτμηση. Ο αλγόριθμος που περιγράψαμε στο παρόν κεφάλαιο δεν υποφέρει από τέτοιου είδους μειονεκτήματα στο πεδίο των απλών περιοχών με ξεκάθαρα σύνορα.

Από την άλλη, ο παρόν αλγόριθμος, λόγω του περιορισμένου θεωρητικού υποβάθρου και της καλής λειτουργίας μόνο σε περιοχές με ξεκάθαρα σύνορα, στερείται της δυνατότητας επέκτασης, σε αντίθεση με αυτόν των γραφοτομών, όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Σε σύγκριση με τον αλγόριθμο των γεωδαιτικών καμπυλών σε γράφους, τόσο ο αλγόριθμος του τυχαίου περιπατητή όσο και αυτός των γραφοτομών, όπως αρχικά αναπτύχθηκε, παρουσιάζουν το μειονέκτημα της αναγκαιότητας παρέμβασης του χρήστη για την υπόδειξη των διαφορετικών περιοχών του αντικειμένου υπό μελέτη. Αντίθετα, ο γεωδαιτικός αλγόριθμος απαιτεί απλά την αρχικοποίηση της καμπύλης σε μια περιοχή που να περιλαμβάνει όλα τα αντικείμενα που πρέπει να εντοπιστούν (ακόμα και αν αυτή είναι ολόκληρο το πεδίο αναζήτησης) και αυτόματα θα ξεχωρίσει τα αντικείμενα ενδιαφέροντος.

Συμπερασματικά λοιπόν, ο αλγόριθμος του τυχαίου περιπατητή, αν και δίνει

*ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΣΕ ΓΡΑΦΟΥΣ ΜΕ ΤΥΧΑΙΟΥΣ ΠΕΡΙΠΑΤΟΥΣ*68

αρκετά καλά αποτελέσματα στη γενική περίπτωση, υποφέρει όμως από τη μη δυνατότητα επέκτασης σε βελτιωμένες εφαρμογές με συνέπεια την αναγκαία εξάρτηση του από το χρήστη, πρόβλημα το οποίο, όπως θα μελετήσουμε, λύθηκε στην περίπτωση των γραφοτομών.

Κεφάλαιο 4

Γεωδαιτικές καμπύλες με γραφοτομές

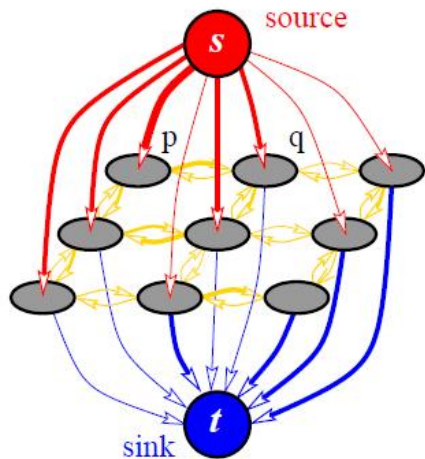
Οι γεωδαιτικές ενεργές καμπύλες καθώς και η μέθοδος των γραφοτομών είναι δύο κλασσικές μέθοδοι κατάτμησης και ανίχνευσης αντικειμένων. Επομένως, τα αποτελέσματα θα ήταν εντυπωσιακά αν συνδύαζε κανείς τα πλεονεκτήματα των τεχνικών αυτών. Η γενική ιδέα είναι ότι κάθε τομή σε ένα γράφο μπορεί να ενσωματωθεί σε ένα συνεχή χώρο ως σύνορο χωρίου. Η αντίστοιχη τεχνική έχει αναπτυχθεί για την απλή περίπτωση του κλασσικού πλέγματος, ενώ στην παρούσα μελέτη θα επεκταθεί στη γενική περίπτωση του μη κανονικού τυχαίου γράφου.

Υπάρχουν δύο ενδιαφέρουσες συνέπειες της ενοποίησης αυτής. Πρώτον, η τεχνική των γραφοτομών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αποτελεσματική εύρεση ολικά ελαχίστων γεωδαιτικών καμπυλών υπό ένα εξαγόμενο από την εικόνα Riemann μετρικό για ένα σύνολο οριακών συνθηκών, και δεύτερον η βαθιά μελέτη των ιδιοτήτων των γεωδαιτικών καμπυλών μπορεί να μας εξασφαλίσει θεωρητικά και πρακτικά την καλή συμπεριφορά του αποτελέσματος, δεδομένης της ορθότητας της υλοποίησης.

4.1 Η θεωρία των γραφοτομών

4.1.1 Συμβολισμός -Προκαταρκτικά στοιχεία

Έστω $G = (V, E)$ ένας γράφος με κόμβους V και ένα σύνολο από κατευθυνόμενες ακμές E που τους ενώνουν. Οι κόμβοι $V = \{s, t\} \cup P$ περιλαμβάνουν δύο ειδικούς τερματικούς κόμβους, οι οποίοι ονομάζονται *πηγή*, s και *καταβόθρα*, t και ένα σύνολο μη τερματικών κόμβων P . Ιδιαίτερα κατατοπιστικό το σχήμα 4.1 από το [41].



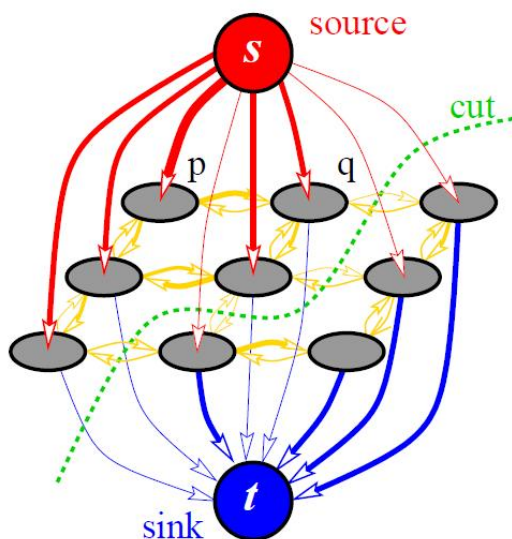
Σχήμα 4.1: Τερματικοί και μη τερματικοί κόμβοι στην τεχνική των γραφοτομών. Οι s σύνδεσμοι δίνονται με κόκκινο ενώ οι t -σύνδεσμοι με μπλέ.

Κάθε ακμή του γράφου αντιστοιχίζεται σε ένα βάρος - κόστος $w(i, j) > 0$, και δεν απαιτούμε να ισχύει $w_{ij} = w_{ji}$. Μια ακμή θα ονομάζεται t -σύνδεσμος, αν συνδέει ένα μη τερματικό κόμβο στο P με έναν τερματικό, ενώ μια ακμή θα ονομάζεται s -σύνδεσμος, αν ενώνει δύο μη τερματικούς κόμβους. Το σύνολο όλων των κατευθυνόμενων n -συνδέσμων θα συμβολίζεται με N . Έτσι, λοιπόν, το σύνολο των ακμών του γράφου θα είναι $E = N \cup \{(s, p), (p, t) \mid p \in P\}$.

4.1.2 Το πρόβλημα της ελάχιστης τομής / μέγιστης ροής

Τομή C θα ονομάζουμε μια διαμέριση των κόμβων σε ένα γράφο σε δύο διαφορετικά σύνολα $S, T, S \cap T = \emptyset$, έτσι ώστε $s \in S$ και $t \in T$. Το σχήμα 4.2 δείχνει ένα παράδειγμα τομής. Το κόστος της τομής $C = \{S, T\}$ ισούται με το άθροισμα των βαρών των «συνοριακών» ακμών $(p, q), p \in S$ και $q \in T$. Αν (p, q) μία «συνοριακή γραμμή», λέμε ότι η C «κόβει» την ακμή (p, q) . Το πρόβλημα της ελάχιστης τομής είναι η εύρεση της τομής εκείνης που έχει το ελάχιστο κόστος ανάμεσα σε όλες τις τομές.

Στο σημείο αυτό παραθέτουμε ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης, σύμφωνα με το οποίο το πρόβλημα της ελάχιστης τομής μπορεί να λυθεί βρίσκοντας τη μέγιστη ροή από την πηγή s στην καταβόθρα t . Το θεώρημα των Ford, Fulkerson [42] αποδεικνύει ότι η



Σχήμα 4.2: Παράδειγμα γραφοτομής.

μέγιστη ροή σε ένα γράφο οδηγεί σε κορεσμό ορισμένες μόνο ακμές οι οποίες και ορίζουν δύο ανεξάρτητα σύνολα στο γράφο $S, T, S \cap T = \emptyset$ που αντιστοιχούν στην ελάχιστη τομή.

4.1.3 Γραφοτομές για την δυαδική βελτιστοποίηση

Σε αυτό το εδάφιο θα επικεντρωθούμε στις γραφοτομές ως εργαλείο δυαδικής βελτιστοποίησης. Στην ουσία, η μεθοδολογία των γραφοτομών είναι εγγενώς δυαδικές τεχνικές και γι' αυτό το λόγο τα δυαδικά προβλήματα συνιστούν το κατεξοχήν αντικείμενό τους. Για να κατανοήσουμε ακριβώς τη μέθοδο και να γενικεύσουμε, στην πορεία, με φυσικό τρόπο, μπορούμε να ξεκινήσουμε με ένα απλό παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε ένα γράφο, οι τιμές του οποίου σε κάθε κόμβο έχουν αλλοιωθεί υπό την παρουσία κάποιου θορύβου και ο στόχος μας είναι η επαναφορά όσο το δυνατό της αρχικής εικόνας. Έστω επίσης ότι συζητούμε για δυαδική περίπτωση, όπου κάθε κόμβος μπορεί να έχει μόνο μία από δύο τιμές. Για την ακρίβεια, η πηγή s θα αντιπροσωπεύει την τιμή 0, ενώ η καταβόθρα t την τιμή 1. Έστω ότι $f(p)$ η τιμή της εν λόγω συνάρτησης στον κόμβο p . Ταυτόχρονα ας θεωρήσουμε ότι $D_p(l)$ η τιμωρία για την ανάθεση στον κόμβο p της τιμής $l \in \{0, 1\}$. Διαισθητικά, αν $f(p) = 1$, αναμενόμενο είναι $D_p(1) \leq D_p(0)$. Προκειμένου να ενσωματώσουμε στο πρόβλημά μας αυτούς τους περιορισμούς, θα ορίσουμε σε κάθε κόμβο δύο t -συνδέσμους για κάθε

κόμβο που τον συνδέουν με καθέναν από τους τερματικούς.

Στη συνέχεια θα πρέπει να εισάγουμε ορισμένους κανονικοποιητικούς περιορισμούς, οι οποίοι βοηθούν να επαναφέρουμε τις πραγματικές τιμές. Για παράδειγμα, μπορεί να απαιτήσει κανείς χωρική ομοιομορφία μεταξύ γειτονικών κόμβων με την ελαχιστοποίηση απότομων μεταβολών - ασυνεχειών μεταξύ των κόμβων. Μοντελοποιούμε τη νέα αυτή κατηγορία περιορισμών με n -συνδέσμους μεταξύ των κόμβων και αναθέτουμε βάρη στους συνδέσμους αυτούς ομαλοποιητικές παραμέτρους που ωθούν την ελάχιστη γραφοτομή να κόψει όσο το δυνατό λιγότερους n -συνδέσμους. Ας μην ξεχνάμε ότι μία γραφοτομή C είναι ένας δυαδικός διαχωρισμός μεταξύ δύο συνόλων S και T και μπορεί ισοδύναμα να εκφραστεί ως δυαδική ανάθεση τιμών $f_p \in \{0, 1\}$ στους κόμβους, ανάλογα με το σύνολο όπου ανήκουν.

Ας θεωρήσουμε τώρα το κόστος της κάθε γραφοτομής $C = \{S, T\}$. Αυτό το κόστος περιλαμβάνει βάρη δύο διαφορετικών ακμών: των t -συνδέσμων και των n -συνδέσμων που κόβει. Πρέπει εδώ να τονίσουμε ότι κάθε γραφοτομή κόβει ακριβώς έναν t -σύνδεσμο ανά κόμβο, συγκεκριμένα τον t σύνδεσμο (p, t) , εάν ο κόμβος p ανήκει στην s ομάδα, (S) ενώ τον t σύνδεσμο (p, s) , εάν ο κόμβος p ανήκει στην t ομάδα (T). Επομένως ο κάθε κόμβος συνεισφέρει είτε $D_p(0)$ είτε $D_p(1)$ ως προς τους t -συνδέσμους, ανάλογα με την τιμή που του προσδίδεται. Ταυτόχρονα, το συνολικό κόστος της γραφοτομής θα περιλαμβάνει και τα βάρη ορισμένων n -συνδέσμων $(p, q) \in N$. Θα έχουμε λοιπόν τελικά:

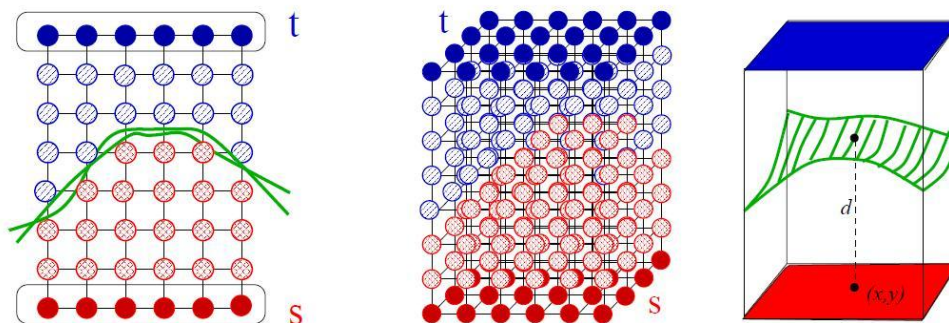
$$|C| = \sum_{p \in P} D_p(f_p) + \sum_{\substack{(p,q) \in N \\ p \in S, q \in T}} w(p, q)$$

ορίζοντας με τον τρόπο αυτό την ενέργεια της αντίστοιχης απόδοσης τιμών :

$$E(f) = |C| = \sum_{p \in P} D_p(f_p) + \lambda \sum_{(p,q) \in N} I(f_p = 0, f_q = 1),$$

όπου η συνάρτηση I παίρνει την τιμή 1 μόνο, εάν το όρισμά της είναι αληθές. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι στη γενική περίπτωση προβλημάτων εκτός των άλλων, θα πρέπει να ρυθμίσουμε μια ισορροπία ανάμεσα στην τιμωρία κατηγοριοποίησης και στην κανονικότητα μεταξύ των δεδομένων (παράμετρος λ). Η σημασία αυτής της ισορροπίας θα γίνει εμφανής και στη δική μας υλοποίηση αργότερα στη μελέτη μας.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να επεκταθούμε στη γενική περίπτωση της δυαδικής ελαχιστοποίησης ενέργειας με γραφοτομές. Στη γενική περίπτωση, όλη η δυσκολία του προβλήματος συγκεντρώνεται στην κατασκευή του αντίστοιχου γράφου, ο οποίος να αντιπροσωπεύει ορθά το συναρτησιακό το οποίο επιθυμούμε να ελαχιστοποιήσουμε. Αν, λοιπόν, αποδώσει κανείς τιμωρίες $D_p(l)$ σε



Σχήμα 4.3: Μια $s-t$ γραφοτομή, που αντιστοιχεί σε δυαδικό διαμερισμό, μπορεί να εκληφθεί ως υπερεπιφάνεια στον αντίστοιχο χώρο

κάθε κόμβο και κόστη $V_{pq}(f_p, f_q)$ κανονικότητας, τότε το αντίστοιχο πρόβλημα μέγιστης ροής - ελάχιστων τομών θα ελαχιστοποιήσει το συναρτησιακό:

$$|C| = \sum_{p \in P} D_p(f_p) + \sum_{\substack{(p,q) \in N \\ p \in S, q \in T}} V_{pq}(f_p, f_q)$$

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι: Μπορεί να βρεθεί **ολικά** ελάχιστη κατηγοριοποίηση f χρησιμοποιώντας κατασκευή βασισμένη σε γραφοτομές; Οι Kolmogorov και Zabih στο εξαιρετικό [43] αποδεικνύουν ότι, για τη δυαδική περίπτωση, η μέθοδος των γραφοτομών μπορεί να βρει το ολικό ελάχιστο του παραπάνω προβλήματος, αν και μόνο εάν:

$$V_{pq}(0, 0) + V_{pq}(1, 1) \leq V_{pq}(0, 1) + V_{pq}(1, 0)$$

4.1.4 Οι γραφοτομές ως υπερεπιφάνειες -σύνδεση με τις γεωδαιτικές καμπύλες

Στο εδάφιο αυτό, στόχος μας είναι να αναδείξουμε τις τοπολογικές ιδιότητες των γραφοτομών που ωθούν την αξιοποίησή τους σε συνδυασμό με τη θεωρία των γεωδαιτικών καμπυλών. Ας μελετήσουμε τα παραδείγματα της εικόνας 4.3 και ας υποθέσουμε ότι οι t σύνδεσμοι μπορούν να έχουν μόνο δύο τιμές βάρους: άπειρο ή μηδέν. Με άλλα λόγια μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όσοι κόμβοι είναι συνδεδεμένοι με κάποιον τερματικό τότε λειτουργούν και αυτοί ως τερματικοί γεγονός που εισάγει αναγκαίες οριακές συνθήκες για τις γραφοτομές. Οι υπόλοιποι κόμβοι συνδέονται με τους τερματικούς μονάχα μέσω n -links.

Θεωρούμε, λοιπόν, ότι μία τομή χωρίζει το γράφο μας σε δύο περιοχές κάθε μία από τις οποίες θα περιέχει τους τερματικούς κόμβους διαφορετικού είδους.

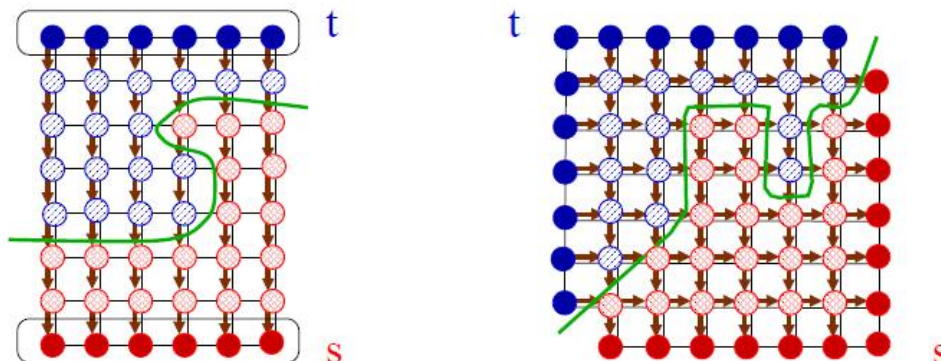
Ορίζεται, λοιπόν, ένα σύνορο μεταξύ των περιοχών \mathcal{R}_i , που οριοθετεί μια διαχωριστική υπερεπιφάνεια (πράσινο χρώμα στο σχήμα 4.3). Φυσικά μεταξύ των συνοριακών σημείων μπορούν να οριστούν περισσότερες από μία υπερεπιφάνειες, γεγονός που εισάγει σφάλματα αλλά μπορούν πολύ καλά να αντιπροσωπευθούν από μία, η οποία συνήθως είναι η ομαλότερη όλων.

Άρα λοιπόν, όπως προτείνεται στο [44] από τους Boykov και Kolmogorov την ιδέα των οποίων θα επεκτείνουμε σε γενικότερη εφαρμογή στην παρούσα μελέτη, μπορεί κανείς να ορίσει ένα κόστος ή εμβαδό της αντίστοιχης υπερεπιφάνειας (μήκος καμπύλης για την περίπτωση που θα εξετάσουμε) βασισμένο στο κόστος της αντίστοιχης γραφοτομής. Αυτό εισάγει την έννοια του μετρικού-τομής και μεταβάλλοντας κανείς τα κόστη των n -συνδέσμων στους κόμβους του γράφου μπορεί να επηρεάσει τα αντίστοιχα κόστη-μέτρα των επιφανειών που διέρχονται κοντά στον εν λόγω κόμβο. Αν μάλιστα κανείς καθορίσει τις τιμές αυτές των βαρών των n - συνδέσμων, με βάση τη γεωδαιτική θεωρία, μπορεί να συνδυάσει την ευρωστία της υλοποίησης με γραφοτομές με την αποτελεσματικότητα των γεωδαιτικών ενεργών καμπυλών.

Η παραπάνω ιδέα μπορεί να εφαρμοστεί, δεδομένου ότι οι υπό μελέτη υπερεπιφάνειες έχουν ορισμένες τοπολογικές ιδιότητες. Και μόνο ο όρος «διαχωριστικές» υπερεπιφάνειες υπονοεί ότι πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες οριακές συνθήκες με την έννοια ότι οφείλουν να διαχωρίζουν τις πηγές από τις καταβόθρες. Αν θεωρήσουμε, για παράδειγμα, ότι οι γράφοι μας είναι *συνδεδεμένοι*, τότε δεν μπορεί παρά οι περιοχές που ορίζουν οι γραφοτομές να είναι το μέγιστο δύο: μία που περιλαμβάνει τις πηγές και μία τις καταβόθρες. Στην περίπτωση που η ελάχιστη τομή ορίζει τρεις ή περισσότερες περιοχές τότε όρισιμες από τις περιοχές που θα προκύψουν θα πρέπει να μην περιέχουν ούτε πηγές ούτε καταβόθρες (ας θυμηθούμε ότι οι t -σύνδεσμοι έχουν μόνο μηδενικό ή άπειρο βάρος). Στην περίπτωση αυτή η συγκεκριμένη γραφοτομή δεν μπορεί να είναι ελάχιστη καθώς η γραφοτομή που αντιστοιχεί στην επανασύνδεση των περιοχών αυτών με το γράφο έχει φυσικά μικρότερο κόστος (δεν προστίθεται το κόστος των αντίστοιχων t -συνδέσμων).

Η παραπάνω συλλογιστική μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, τόσο ο ορισμός των βαρών των n -συνδέσμων όσο και η διάταξη πηγών και καταβόθρων, μας επιτρέπει να ρυθμίσουμε την τοπολογία των αντίστοιχων υπερεπιφανειών και να επιτρέψουμε ή μη τοπολογικές αλλαγές. Χαρακτηριστικό το σχήμα 4.4

Συγκεκριμένα τώρα, για την περίπτωσή μας, οι Boykov και Kolmogorov στο [44], με το οποίο θα ασχοληθούμε στην επόμενη παράγραφο, αποδεικνύουν ότι κανονικά πλέγματα μπορούν να δημιουργήσουν μετρικά γραφοτομών που προσεγγίζουν καλά οποιοδήποτε συνεχές μετρικό Riemann με αρκετά μικρό σφάλμα. Χρησιμοποιώντας ισχυρά αποτελέσματα της ολοκληρωτικής γεωμετρίας μπορούμε να κατασκευάσουμε βάρη για τους n -συνδέσμους σε κάθε κόμβο p που εξαρτώνται από την επιλογή του θετικά ορισμένου πίνακα $D(p)$ που ορίζει



Σχήμα 4.4: Η επιλογή οριακών συνθηκών (sources-sinks) και βαρών n -συνδέσμων επηρεάζουν την επιτρεπτή τοπολογία των γραφοτομών. Για παράδειγμα, οι απείρου βάρους n σύνδεσμοι σημειωμένοι με καφέ χρώμα στο αριστερό σχήμα δεν επιτρέπουν το δίπλωμα της καμπύλης ανάμεσά τους. Αντίστοιχα η γραφοτομή στο σχήμα δεξιά δεν είναι εφικτή, καθώς και πάλι οι σύνδεσμοι με καφέ χρώμα είναι απείρου κόστους.

το τοπικό μετρικό-απόσταση κοντά στο σημείο αυτό.

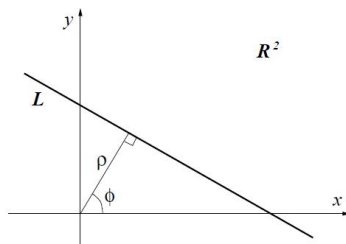
4.2 Γεωτομές -Επεκταμένες γεωτομές σε γράφους

Υπενθυμίζουμε από το κεφάλαιο 2 τη σχέση (2.9) η οποία και συμπυκνώνει το γεωδαιτικό μοντέλο, ορίζοντας το «μήκος» της καμπύλης, το οποίο και ελαχιστοποιούμε.

$$E(C) = \int_0^{|C|_E} g(|\nabla I(C(s))|) ds \tag{4.1}$$

όπου η παράμετρος s επιλέγεται ειδικά να είναι το Ευκλείδιο μήκος τόξου, $|C|$ το ευκλείδιο μήκος της καμπύλης και g μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση η οποία συγκλίνει στο μηδέν στο άπειρο.

Το πρόβλημα, από μία άλλη οπτική, μπορεί να το δει κανείς ως πρόβλημα εύρεσης τοπικών γεωδαιτικών σε έναν χώρο με Riemann μετρικό που εξάγεται από την τιμή του κάθε κόμβου. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο **γεωδαιτικό** εννοούμε τη γενίκευση της παραδοσιακής ευθείας σε καμπυλωμένους



Σχήμα 4.5: Οι κανονικές παράμετροι μιας ευθείας : $\rho \geq 0$ και $0 \leq \phi \leq 2\pi$, οι πολικές συντεταγμένες της τομής της ευθείας με την κάθετο από την αρχή των αξόνων στην ευθεία.

χώρους, δηλαδή, δεδομένου ενός μη Ευκλείδειου μετρικού, την ελάχιστη (τοπικά) απόσταση μεταξύ δύο σημείων. Το μήκος της καμπύλης στον Riemann χώρο θα είναι :

$$|C|_R = \int_0^{|C|_E} \sqrt{\tau'_s D(C(s)) \tau_s} ds \quad (4.2)$$

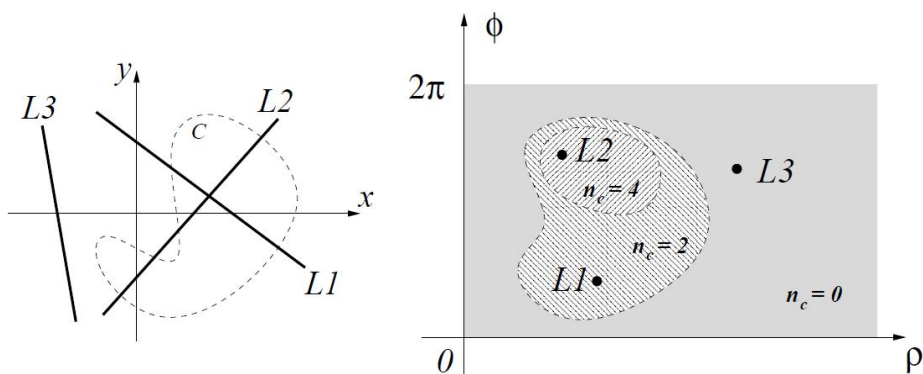
όπου ο θετικά ορισμένος πίνακας $D(\cdot)$ καθορίζει το τοπικό μετρικό Riemann σε κάθε κόμβο ενώ τ_s είναι το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπύλη. Στην πραγματικότητα, η ενέργεια της σχέσης (4.1) προκύπτει από την (4.2) αν χρησιμοποιήσουμε το ιστροπικό μετρικό Riemann:

$$D(\cdot) = \mathbf{diag}(g(|\nabla I(\cdot)|))$$

Μία πρώτη προσέγγιση για την ελαχιστοποίηση του παραπάνω μήκους και την εύρεση ελάχιστων γεωδαιτικών έγινε στο [45] από τον Cohen και κατέληξε σε έναν αλγόριθμο συντομότερης διαδρομής. Αντίστοιχα, η προσέγγιση που θα μελετήσουμε καταλήγει σε μια λύση με γραφοτόμες.

4.2.1 Ολοκληρωτική γεωμετρία και εξισώσεις τύπου Crofton

Στο παρόν εδάφιο θα εξετάσουμε μία κλασσική Cauchy-Crofton εξίσωση η οποία είναι καθοριστικής σημασίας για τη θεωρία των γραφοτομών και των επεκταμένων γραφοτομών που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια. Η εξίσωση αυτή σχετίζεται με το μήκος μιας καμπύλης στο επίπεδο R^2 με ένα μέτρο του συνόλου των ευθειών που την τέμνουν. Στο παρόν θα γίνει μια συνοπτική αναφορά. Για περισσότερες λεπτομέρειες μπορεί να ανατρέξει κανείς στα [46] και [47].



Σχήμα 4.6: Κάθε ευθεία καθορίζεται από τις κανονικές της παραμέτρους (ρ, ϕ) στο χώρο Λ . Κάθε καμπύλη ορίζει στο χώρο αυτό μια συνάρτηση n_c η οποία και ορίζει τον αριθμό των τομών με τη C .

Ας θεωρήσουμε μια ευθεία $L(\rho, \phi)$ στο R^2 που ορίζεται από τις παραμέτρους της (ρ, ϕ) (Σχήμα 4.5) Ταυτόχρονα, έστω $\Lambda = \{(\rho, \phi) : \rho \geq 0, \phi \in [0, \pi]\}$ το σύνολο που περιγράφει όλες τις ευθείες στο χώρο και το μέτρο Lebesgue στο χώρο αυτό, $d\Lambda \propto d\rho \cdot d\phi$. Αντίστοιχα το Lebesgue μέτρο ενός υποσυνόλου X του συνόλου των ευθειών θα είναι $\int_X d\Lambda$.

Η περίφημη εξίσωση Cauchy Crofton σχετίζει το Ευκλείδιο μήκος μιας καμπύλης C με το μέτρο των ευθειών που την τέμνουν ως εξής:

$$\int n_c d\Lambda = 2|C|_\epsilon$$

Η συνάρτηση n_c δείχνει τον αριθμό που κάθε ευθεία (ρ, ϕ) τέμνει την καμπύλη C (Σχήμα 4.6). Σαν απλή εφαρμογή αναφέρουμε ότι για συνεκτικές καμπύλες, η εξίσωση Cauchy-Crofton ανάγεται στην

$$\int_{\Lambda_C} d\Lambda = |C|_\epsilon$$

δηλαδή το μήκος μιας συνεκτικής καμπύλης ισούται με το μέτρο Lebesgue του συνόλου των ευθειών που την τέμνουν.

4.2.2 Σύγκριση κλασσικού μετρικού μονοπατιού - μετρικού γραφοτομών.

Ο πλέον φυσικός ορισμός του μήκους μιας διαδρομής p_{AB} που ενώνει δύο κόμβους A, B , ορισμένης σε ένα γράφο με βάρη θα ήταν:

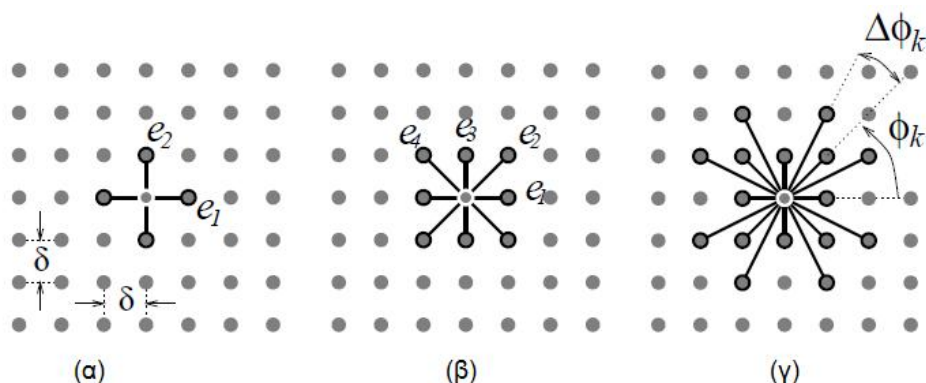
$$|p_{AB}| = \sum_{e \in AB} w_e$$

Η ελάχιστη αυτή απόσταση μεταξύ δύο κόμβων θα μπορούσε να υπολογιστεί στην απλούστερη περίπτωση με αλγορίθμους τύπου Dijkstra. Τέτοιου τύπου αποστάσεις ονομάζονται *αποστάσεις μονοπατιού*. Από την άλλη, το αποτέλεσμα σε τέτοιου τύπου μέτρα αποστάσεων επηρεάζεται τόσο από την επιλογή των γειτόνων όσο και από τα βάρη των ακμών, γεγονός που μπορεί να αλλοιώσει σημαντικά το αποτέλεσμα. Στην περίπτωση του ορθοκανονικού πλέγματος που μελετάται από τον εμπνευστή των γεωτομών Boykov ([44]) η διαφορά δεν είναι τόσο σημαντική, καθώς μπορεί πολύ καλά το μήκος μιας καμπύλης να προσεγγιστεί από το άθροισμα των αποστάσεων χαρακτηριστικών σημείων πάνω της. Δεν μπορούμε όμως να πούμε το ίδιο στη δική μας περίπτωση, όπου η μη κανονικότητα των θέσεων και των αποστάσεων δίνει τέτοια ελευθερία στην κίνηση της καμπύλης μεταξύ γνωστών σημείων ώστε το σφάλμα της χρήσης τέτοιων μέτρων μήκους καμπύλης να είναι εξαιρετικά μεγάλο.

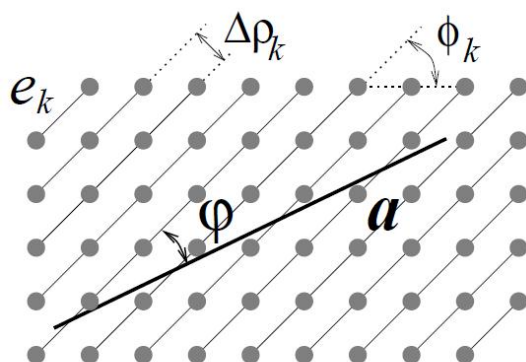
Για το λόγο αυτό εισάγεται ένα νέο μέτρο μήκους, το *μέτρο τομών*, το οποίο υπό την ευρεία έννοια είναι δυικό προς το μέτρο μονοπατιού. Βασικό πλεονέκτημα πέραν της ακρίβειας είναι η δυνατότητα επέκτασης των ιδεών αυτών σε υπερεπιφάνειες N -διαστάσεων με τις αντίστοιχες τροποποιήσεις. Η βασική ιδέα σχετίζεται με την παρατήρηση ότι μια γραφοτομή σε ένα ορθοκανονικό γράφο $G = (V, E)$ ενσωματωμένο στον R^n μπορεί να θεωρηθεί κλειστή καμπύλη (υπερεπιφάνεια) της οποίας το μήκος (επιφάνεια) μπορεί να οριστεί για κάθε γραφοτομή $C \subseteq V$ ως

$$|C|_G = \sum_{e \in C} w_e$$

η οποία είναι απλώς η έκφραση του κόστους της γραφοτομής από την απλή συνδυαστική βελτιστοποίηση. Λόγω της γεωμετρικής φύσης του παραπάνω ορισμού ως μήκος της αντίστοιχης καμπύλης C μπορούμε να συζητάμε για μετρικές ιδιότητες των γραφοτομών. Αν και οπτικά φαίνεται και πάλι εξάρτηση από τη γειτονιά του κάθε σημείου και από τα αντίστοιχα βάρη των ακμών, υπενθυμίζουμε ότι στη μεθοδολογία των γραφοτομών κατασκευάζουμε εξ αρχής ένα νέο γράφο όπου τους n και t συνδέσμους αναθέτουμε τα βάρη ανάλογα με την εφαρμογή. Παρακάτω θα δούμε την κατασκευή των βαρών για ορθοκανονικό πλέγμα αρχικά και στη γενική περίπτωση αργότερα.



Σχήμα 4.7: Παραδείγματα γειτονιών και διατάξεων σε ορθοκανονικό πλέγμα.



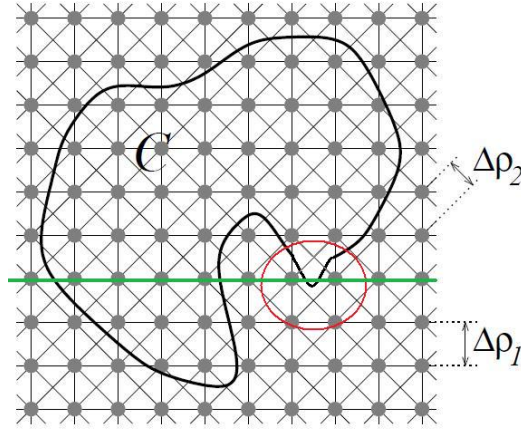
Σχήμα 4.8: Οικογένεια καμπυλών και ελάχιστες αποστάσεις.

4.2.3 Γεωτομές σε ορθοκανονικό επίπεδο πλέγμα

Έστω ότι όλοι οι κόμβοι βρίσκονται στο R^2 επίπεδο σε ορθοκανονικό πλέγμα με κελιά μήκους δ . Ας υποθέσουμε επίσης ότι όλοι οι κόμβοι έχουν τοπολογικά πανομοιότυπες γειτονιές. Παράδειγμα τέτοιας διάταξης δίνεται στο σχήμα 4.7. Οι γειτονιές σε ένα ορθοκανονικό πλέγμα μπορούν να περιγραφούν από ένα σύνολο :

$$N_G = \{e_k : 1 \leq k \leq n_G\}$$

από διακριτά διανύσματα (σχήμα 4.7), χωρίς να υπολογίζουμε τις κατευθύνσεις. Για παράδειγμα, ορθοκανονικό πλέγμα με γειτονιά 8 γειτόνων περιγράφεται από τέσσερα διανύσματα $N_G = e_1, e_2, e_3, e_4$. Κάνουμε επίσης την υπόθεση ότι τα διανύσματα διατάσσονται με σειρά αυξανόμενης γωνίας ϕ_k ώστε, τελικά $0 = \phi_1 \leq \phi_2 \leq \dots \leq \phi_{n_G} \leq \pi$. Ως μέτρο του e_k λαμβάνουμε το ελάχιστο μήκος διανύσματος που συνδέει δύο κόμβους στην κατεύθυνση ϕ_k .



Σχήμα 4.9: Μετρικό τομής ως Ευκλείδιο μέτρο. Σφάλμα λόγω του ότι ο αριθμός των φορών που η πράσινη γραμμή τέμνει την καμπύλη δεν ισούται με τον αριθμό των αντίστοιχων ακμών όπου αυτή την τέμνει.

Κάθε διάνυσμα $e \in N_G$ παράγει μια γειτονιά ευθειών (Σχήμα 4.8) στο ορθοκανονικό πλέγμα με ελάχιστη απόσταση μεταξύ τους :

$$\Delta\rho_k = \frac{\delta^2}{|e_k|}$$

Συμπερασματικά, κάθε οικογένεια ευθειών e_k χαρακτηρίζεται από την απόσταση $\Delta\rho_k$ και την κατεύθυνση ϕ_k . Τέλος, στον γράφο, τον οποίο κατασκευάζουμε, θα δημιουργούμε μία ακμή μεταξύ κόμβων που ανήκουν στη γειτονιά, όπως την ορίζουμε εμείς (Σχήμα 4.7), και θα της αναθετούμε βάρος που θα είναι κοινό για κάθε κατεύθυνση w_k .

Στο σημείο αυτό, προκειμένου να προσδιορίσουμε τα βάρη w_k θα πρέπει να επικαλεστούμε τα μέσα που μας παρέχει η ολοκληρωτική γεωμετρία και να συνδέσουμε το μετρικό τομής με το Ευκλείδιο, αρχικά, μετρικό στο R^2 . Έστω, λοιπόν, μια καμπύλη C στο χώρο του ορθοκανονικού πλέγματος. Η καμπύλη αυτή ορίζει ένα δυαδικό διαχωρισμό του πλέγματος και, συνεπώς, αποτελεί μια γραφοτομή στον γράφο G . Μπορούμε, λοιπόν, να θεωρήσουμε το μήκος της καμπύλης $|C_G|$ ως το αντίστοιχο μετρικό τομής με τα βάρη επιλεγμένα έτσι ώστε να μας δίνουν το Ευκλείδιο μήκος της. (Σχήμα 4.9)

Σύμφωνα με την εξίσωση Cauchy-Crofton μπορούμε να αναπαραστήσουμε το Ευκλείδιο μήκος της καμπύλης C ως ένα ολοκλήρωμα:

$$|C|_E = \frac{1}{2} \int n_c d\Lambda = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty n_c(\rho, \phi) d\rho d\phi \quad (4.3)$$

όπου επιτρέψαμε στην ακτίνα ρ να πάρει αρνητικές τιμές δεδομένου ότι περιορίσαμε τη ϕ στο διάστημα $[0, \pi]$. Προσεγγίζοντας διακριτά το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορούμε να πάρουμε :

$$|C|_E \simeq \frac{1}{2} \sum_1^{N_G} \left(\sum_i n_c(i, k) \Delta \rho_k \right) \Delta \phi_k = \sum_1^{N_G} n_c(k) \cdot \frac{\delta^2 \Delta \phi_k}{2|e_k|} \quad (4.4)$$

όπου ο δείκτης i αριθμεί τις διαφορετικές ευθείες στην ίδια οικογένεια, $n_c(i, k)$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των φορών που η ευθεία i της k οικογένειας τέμνει την καμπύλη C και $n_c(k)$ ο συνολικός αριθμός των φορών που οι ευθείες της οικογένειας k τέμνουν τη C .

Αν λοιπόν θέσουμε ως βάρη ακμών στον ισοδύναμο γράφο τα :

$$w_k = \frac{\delta^2 \cdot \Delta \phi_k}{2|e_k|}$$

θα έχουμε:

$$|C|_e \approx \sum_{k=1}^{n_G} n_c(k) w_k \approx |C|_G$$

Το σφάλμα προσέγγισης στο αριστερό μέρος της ισότητας οφείλεται στην προσέγγιση του ολοκληρώματος ως μερικό άθροισμα. Όσο μικρότερη η διάσταση του κελιού τόσο μικρότερο το σφάλμα.

Το σφάλμα προσέγγισης στο δεξιό μέρος της ισότητας δημιουργείται όταν ο πραγματικός αριθμός των τομών μεταξύ της καμπύλης και μιας ακμής είναι διαφορετικός από τον αριθμό των ακμών κατά μήκος της καμπύλης που κόβονται από αυτήν. Παράδειγμα τέτοιας περίπτωσης δίνεται στο σχήμα 4.9 σε σημεία όπου οι κυρτώσεις της καμπύλης είναι μικρότερες από τη διάσταση της ακμής. (Σχήμα 4.9)

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα για την περίπτωση Riemann μετρικού. Η αντίστοιχη Cauchy-Crofton εξίσωση σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$\int \frac{\det(D)}{2(u'_L \cdot D \cdot u_L)^{3/2}} n_c d\Lambda = 2|C|_R$$

όπου u_L είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της γραμμής L . Ακολουθώντας ακριβώς την ίδια συλλογιστική, όπως στην Ευκλείδια περίπτωση, οδηγούμαστε στα βάρη:

$$w_k = \frac{\delta^2 \cdot |e_k|^2 \Delta \phi_k \cdot \det(D)}{2(e'_k \cdot D \cdot e_k)^{3/2}} \quad (4.5)$$

στην περίπτωση Riemann μετρικού. Στην ειδική περίπτωση όπου $D = I$ αναγόμεστε στην Ευκλείδια περίπτωση.

Τέλος, στην περίπτωση όπου το Riemann μετρικό ορίζεται ξεχωριστά σε κάθε κόμβο θα έχουμε την έκφραση:

$$w_k = \frac{\delta^2 \cdot |e_k|^2 \Delta \phi_k \cdot \det(D(p))}{2(e'_k \cdot D(p) \cdot e_k)^{3/2}} \quad (4.6)$$

Συνολικά, λοιπόν, ο αλγόριθμος των γραφοτομών είναι συνδυασμός τόσο των παραπάνω θεωρητικών αποτελεσμάτων όσο και του αλγορίθμου κατάτμησης με γραφοτομές ([39]). Η γνώση των βαρών από τις παραπάνω εξισώσεις σε συνδυασμό με τη δυνατότητα ορισμού οριακών συνθηκών σε γράφους ([48]) επιτρέπει τον υπολογισμό της ολικά βέλτιστης γραφοτομής σε γραμμικό χρόνο μέσω μιας σειράς s/t μεθόδων γραφοτομών από την συνδυαστική βελτιστοποίηση.

Σχετικά με την επιλογή του μετρικού Riemann σε κάθε κόμβο p έχουμε δύο επιλογές:

- Χρήση ιστροπικού μετρικού, του οποίου το πλεονέκτημα είναι η ταχύτητα εκτέλεσης λόγω της απλούστευσης των υπολογισμών:

$$D(p) = \text{diag}(g(|\nabla I|), g(|\nabla I|))$$

- Χρήση ανιστροπικού μετρικού με συνέπεια καλύτερης ποιότητας αποτέλεσμα :

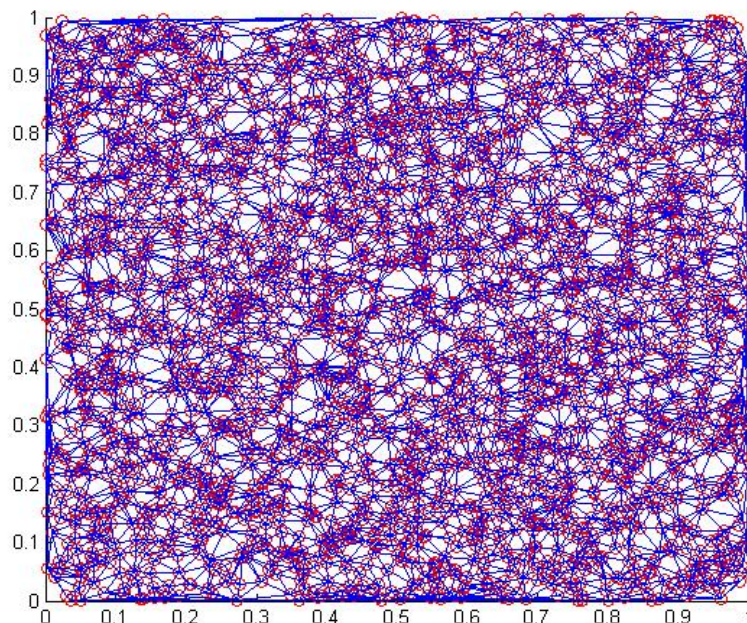
$$D(p) = g(|\nabla I|) \cdot I + (1 - g(|\nabla I|)) \vec{u} \vec{u}$$

όπου $\vec{u} = \frac{\nabla I}{|\nabla I|}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της κλίσης της συνάρτησης I που ορίζεται στους κόμβους.

4.3 Γεωτομές σε γράφους

Λόγω της ιδιαιτερότητας των τυχαίων γράφων και της ποικιλίας των ενδεχόμενων αποστάσεων μεταξύ των γειτόνων, κλασσικά μέτρα καμπυλών, όπως το μέτρο μονοπατιού που περιγράψαμε, δεν θα έχουν καλά αποτελέσματα. Από την άλλη, δεδομένης της ποικιλίας των γειτονιών και της τυχειότητας των ακμών, συλλογιστικές, όπως οι παραπάνω, θα έχουν πολύ καλύτερα αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, ο χώρος (ρ, ϕ) στην περίπτωση ενός γράφου αναμένεται να είναι πολύ πιο πυκνός από τον αντίστοιχο του ορθοκανονικού πλέγματος και, επομένως, η ακρίβεια των εξισώσεων τύπου Cauchy-Crofton θα είναι εξαιρετικά μεγαλύτερη. Ας δούμε τις παραπάνω ιδέες πιο συγκεκριμένα.

Στη σχέση (4.4) έγινε προσέγγιση του ολοκληρώματος με μερικό άθροισμα, δεν έγινε εμφανές όμως πώς προσεγγίστηκε το στοιχειώδες μέτρο Lebesgue (το μέτρο της κάθε ευθείας). Αν παρατηρήσουμε προσεκτικότερα, ο όρος $d\rho d\phi$ αντικαταστάθηκε από τον όρο $\Delta \rho_k \Delta \phi_k$. Στην περίπτωσή μας όμως δεν υπάρχουν



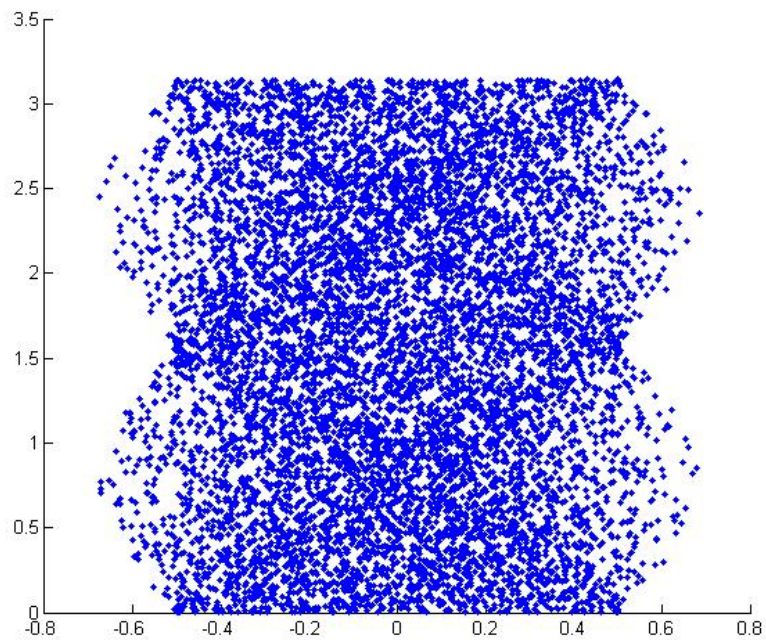
Σχήμα 4.10: Ο τυχαίος γράφος όπου θα βρούμε το χώρο (ρ, φ) των ευθειών

«τακτικές» αποστάσεις μεταξύ των τυχαίων ευθειών ούτε σταθερές αποκλίσεις μεταξύ των διαφορετικών κατευθύνσεων. Επομένως, πώς μπορεί κανείς να προσεγγίσει το ολοκλήρωμα (4.3) τυχαίων ευθειών σε τυχαίες γειτονιές;

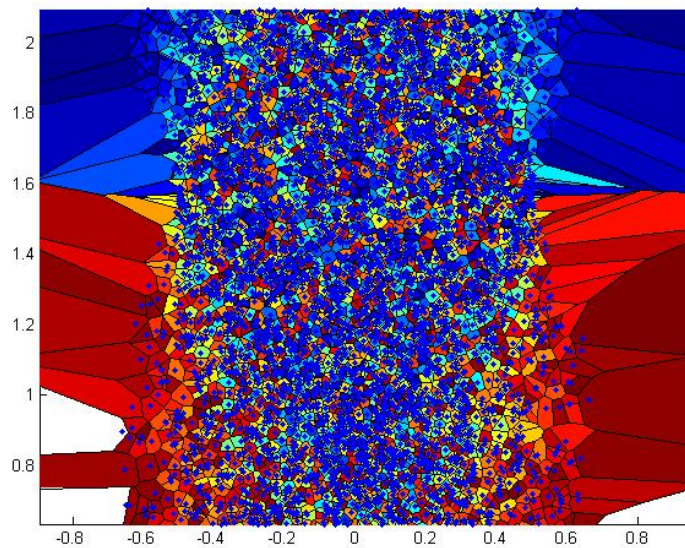
Για να μπορέσουμε να φτάσουμε σε ένα πλήρες αποτέλεσμα πρέπει αρχικά να εξετάσουμε το χώρο των ευθειών (ρ, φ) ενός τυχαίου γράφου. Ένα τέτοιο παράδειγμα φαίνεται στα Σχήματα 4.10 και 4.11 .

Η προσεκτική μελέτη του χώρου των ευθειών αλλά και η ερμηνεία του μέτρου Lebesgue ως πυκνότητα μας οδηγεί στην ιδέα μιας «δίκαιης» διαμέρισης του (ρ, φ) των ευθειών σε περιοχές επιρροής. Με άλλα λόγια κάθε υπαρκτή ευθεία στο γράφο θα αντιπροσωπεύει το σύνολο των ευθειών των οποίων τα στίγματα στο χώρο (ρ, φ) βρίσκονται περισσότερο κοντά σε αυτή. Η σκέψη αυτή μας οδηγεί στα διαγράμματα Voronoi.

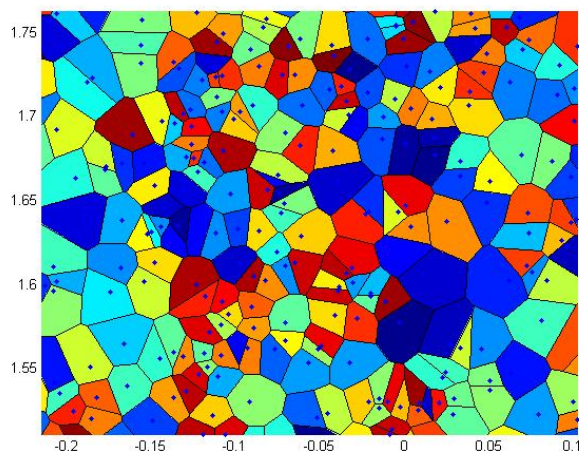
Διαγράμματα Voronoi Διάγραμμα Voronoi είναι μια ειδική μορφή διάσπασης ενός μετρικού χώρου που καθορίζεται από αποστάσεις των σημείων στο μετρικό χώρο από διακριτό σύνολο σημείων. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός συνόλου σημείων S στο επίπεδο, ορίζονται κελιά και αντιστοιχούνται σε κάθε σημείο έτσι ώστε κάθε κελί να περιλαμβάνει όλα τα σημεία του επιπέδου τα οποία βρίσκονται πιο κοντά στο συγκεκριμένο σημείο από ότι σε οποιοδήποτε άλλο.



Σχήμα 4.11: Ο χώρος (ρ, φ) των ευθειών του γράφου του σχήματος 4.10



Σχήμα 4.12: Το διάγραμμα Voronoi του χώρου (ρ, φ) των ευθειών του τυχαίου γράφου.

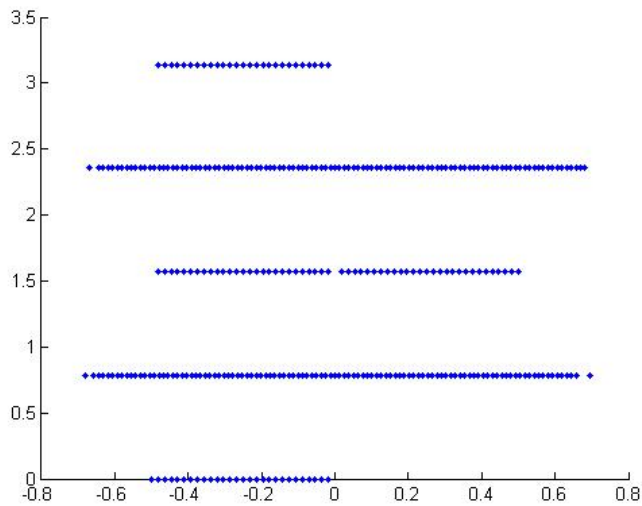


Σχήμα 4.13: Το διάγραμμα Voronoi του χώρου (ρ, φ) των ευθειών του τυχαίου γράφου σε μεγέθυνση. Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη διαμέριση του χώρου (ρ, φ) είναι η πιο δίκαια διαμέριση του χώρου. Τα εμβαδά των χρωματισμένων περιοχών θα παίξουν το ρόλο του μέτρου Lebesgue

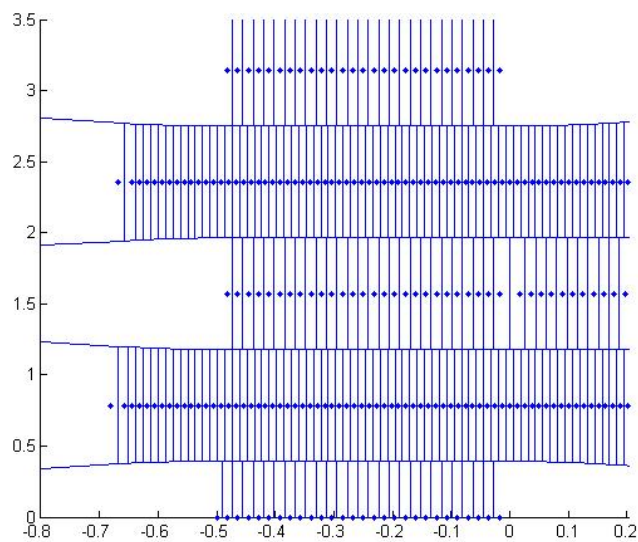
Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η διάσπαση του χώρου (ρ, φ) των ευθειών σε Voronoi κελιά είναι αντιπροσωπευτική της πυκνότητας του χώρου σε κάθε σημείο και το εμβαδό του αντίστοιχου κελιού εξαιρετική προσέγγιση του αντίστοιχου μέτρου Lebesgue. Η παραπάνω ιδέα γίνεται καλύτερα κατανοητή στα σχήματα 4.12 και 4.13 .

Για του λόγου το αληθές ας δούμε τι συμβαίνει στη περίπτωση ορθοκανονικού πλέγματος. Αν παρατηρήσουμε τα σχήματα 4.14, 4.15, 4.16, παρατηρούμε ότι με την προσέγγιση αυτή των κελιών Voronoi ως μονάδα στοιχειώδους επιφάνειας η ορθοκανονική περίπτωση αποτελεί μια ειδική περίπτωση της εφαρμογής.

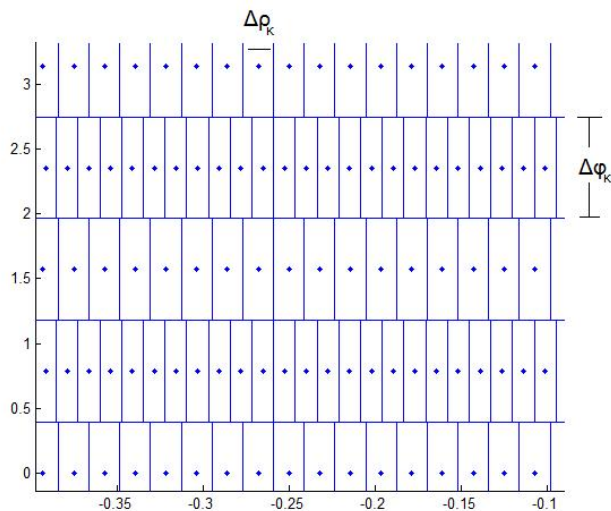
Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί και στην εξαγωγή των βαρών των ακμών του γράφου του ισοδύναμου προβλήματος. Για να γίνει κατανοητή η επιχειρηματολογία, αντιπαραβάλλουμε στο σχήμα 4.17 τις δύο περιπτώσεις. Με βάση λοιπόν το σχήμα παρατηρούμε μια διαφορά που θα μπορούσε να αποτελέσει πηγή τεράστιων λαθών. Στην ορθοκανονική περίπτωση οι ευθείες χωρίζονται σε ομάδες **παραλλήλων ευθειών**. Το γεγονός αυτό εξασφαλίζει ότι, αν η καμπύλη τέμνει μια ακμή p, q συγκεκριμένου προσανατολισμού τότε, δεδομένου ότι όλες οι υπόλοιπες ευθείες εκκινούν από τους κόμβους p, q στη χειρότερη περίπτωση, στο πεδίο αυτής της ακμής μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα τέμνεται από καμία άλλη ευθεία οποιασδήποτε οικογένειας. Με άλλα λόγια, στην ορθοκανονική περίπτωση, στο ισοδύναμο βάρος θα πρέπει να



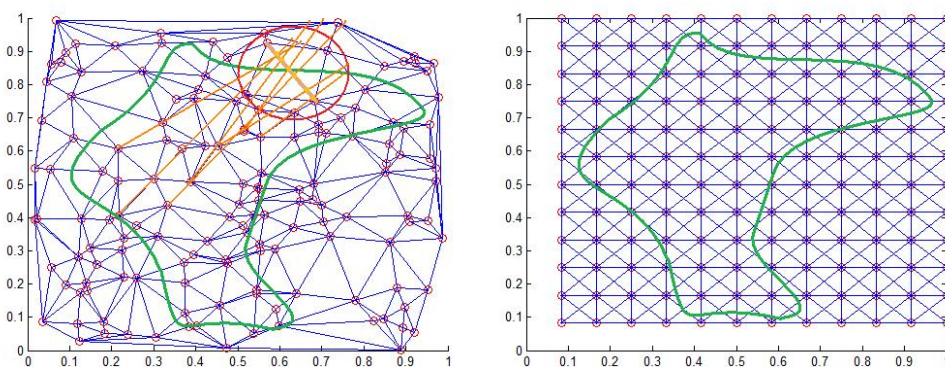
Σχήμα 4.14: Ο χώρος (ρ, φ) των ευθειών του γράφου για ορθοκανονικό πλέγμα



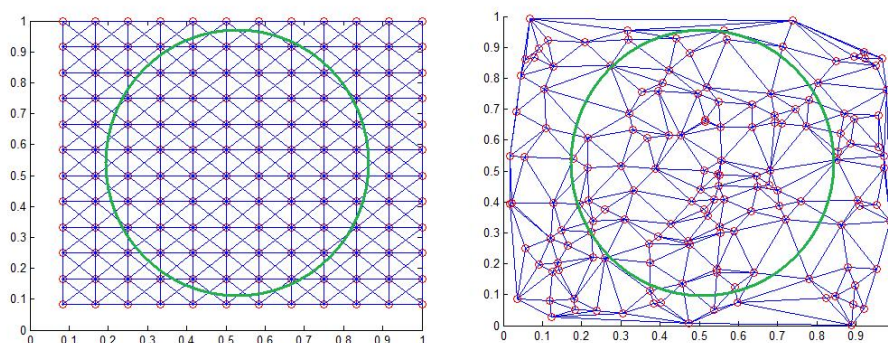
Σχήμα 4.15: Το διάγραμμα Voronoi του χώρου (ρ, φ) του ορθοκανονικού πλέγματος



Σχήμα 4.16: Τα κελιά του διαγράμματος Voronoi στην περίπτωση του ορθοκανονικού πλέγματος είναι ακριβώς τα ορθογώνια στα οποία διαμερίσαμε το χώρο στην ορθοκανονική περίπτωση.



Σχήμα 4.17: Κύρια διαφορά μεταξύ του τυχαίου γράφου και του ορθοκανονικού πλέγματος. Στην περίπτωση του τυχαίου γράφου περισσότερες από μία ευθείες τέμνουν την καμπύλη, ενώ βρίσκεται μεταξύ δύο κόμβων. Κάτι τέτοιο προφανώς δεν συμβαίνει στην ορθοκανονική περίπτωση.



Σχήμα 4.18: περίμετρος κύκλου ακτίνας 0.45 στην ορθοκανονική περίπτωση μετράται ως 2.21 ενώ στην περίπτωση τυχαίου γράφου ως 2.42. Η απόκλιση και των δύο οφείλεται στο μικρό αριθμό κόμβων για λόγους επίδειξης. Όσο οι αποστάσεις των κόμβων μικραίνουν σχετικά με τη μέγιστη διάσταση του σχήματος η ακρίβεια αυξάνεται. Στην οριακή περίπτωση και οι δύο προσεγγίσεις καταλήγουν στο πραγματικό μήκος της καμπύλης.

συνυπολογίσουμε μονάχα τις ευθείες που αντιπροσωπεύει η συγκεκριμένη ακμή στο χώρο (ρ, φ) αναθέτοντας το σταθερό βάρος w_k . Αντίθετα, στην περίπτωση του τυχαίου γράφου παρουσιάζεται το φαινόμενο του σχήματος 4.17. Συγκεκριμένα, τίποτα δεν μας εγγυάται ότι, αν η καμπύλη τέμνεται από την ευθεία που ορίζει η ακμή (p, q) , θα τέμνεται μόνο από αυτή. Συγκεκριμένα, θα τέμνεται από όλες τις υπόλοιπες ευθείες στο γράφο οι οποίες τέμνονται με την \vec{pq} σε σημείο μεταξύ των p και q . Επομένως θα πρέπει να συνυπολογιστεί στο βάρος της ισοδύναμης ακμής η συνεισφορά σε όρους επιφάνειας κελιού Voronoi στο χώρο (ρ, φ) όλων των υπόλοιπων ευθειών. Το γεγονός αυτό, αν και εισάγει μια πολυπλοκότητα στην υλοποίηση, μικρή όμως, καθώς ελέγχεται αλγεβρικά με μικρό κόστος, συνεισφέρει δραματικά στην ακρίβεια. Για του λόγου το αληθές, στο σχήμα 4.18 βλέπουμε το μήκος που μετράται για τον ίδιο κύκλο στην ορθοκανονική και στη γενική περίπτωση για τον ίδιο αριθμό κόμβων.

Συγκεντρωτικά λοιπόν θα έχουμε:

Ευκλείδεια περίπτωση - Κίνηση υπό την επίδραση της καμ-

πυλότητας

$$\begin{aligned} |C|_E &= \frac{1}{2} \int n_c d\Lambda = \frac{1}{2} \int \int_{(\rho, \phi)} n_c(\rho, \phi) d\Lambda = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{|E|} n_c(k) \Delta\Lambda_k \end{aligned}$$

όπου k η αρίθμηση, ανάμεσα σε όλες τις ακμές του γράφου, $\Delta\Lambda_k$ το εμβαδό του αντίστοιχου κελιού Voronoi και $n_c(k)$ ο αριθμός των φορών που η συγκεκριμένη ευθεία τέμνει την καμπύλη C . Έστω $e = pq \in E$ και

$$N_e = \{j \in E : \text{η τομή της } j \text{ και της } e \text{ βρίσκεται ανάμεσα στα } p, q\}$$

Τότε στην ακμή e θα αναθέσουμε το βάρος w_e :

$$w_e = \sum_{j \in N_e} \Delta\Lambda_j + \Delta\Lambda_e \quad (4.7)$$

Γενική περίπτωση σε χώρο Riemann-Γεωδαιτική καμπύλη

$$\begin{aligned} |C|_R &= \frac{1}{2} \int n_c \frac{\det(D)}{(u'_L \cdot D \cdot u_L)^{3/2}} d\Lambda \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{(\rho, \phi)} n_c(\rho, \phi) \frac{\det(D)}{(u'_L \cdot D \cdot u_L)^{3/2}} d\Lambda = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{|E|} n_c(k) \frac{\det(D(p))}{(u'_L \cdot D(p) \cdot u_L)^{3/2}} \Delta\Lambda_k \end{aligned}$$

όπου k η αρίθμηση, ανάμεσα σε όλες τις ακμές του γράφου, $\Delta\Lambda_k$ το εμβαδό του αντίστοιχου κελιού Voronoi, $n_c(k)$ ο αριθμός των φορών που η συγκεκριμένη ευθεία τέμνει την καμπύλη C και p ο κόμβος εκκίνησης της ακμής k ορίζοντας αυθαίρετα μια κατεύθυνση. Έστω $e = pq \in E$ και

$$N_e = \{j \in E : \text{η τομή της } j \text{ και της } e \text{ βρίσκεται ανάμεσα στα } p, q\}$$

Τότε, στην ακμή e θα αναθέσουμε το βάρος w_e όπου:

$$w_e = \sum_{j \in N_e \cup \{e\}} \Delta\Lambda_j \frac{\det(D(p_j))}{(\vec{j}' \cdot D(p_j) \cdot \vec{j})^{3/2}} \quad (4.8)$$

4.4 Μία ολοκληρωτική λύση στην προσέγγιση των Μ.Δ.Ε. που περιγράφουν την εξέλιξη των γεωδαιτικών καμπυλών μέσω γεωτομών.

Αν και οι διακριτοί αλγόριθμοι ελάχιστης τομής μέγιστης ροής στους γράφους μπορούν να χρησιμοποιηθούν αποτελεσματικά για τη βελτιστοποίηση μιας μεγάλης ποικιλίας συναρτησιακών ορισμένων σε καμπύλες, παρέχουν απευθείας τη λύση ολικού ελαχίστου χωρίς να δίνουν λεπτομέρειες για την εξέλιξη. Η εξέλιξη όμως αυτή, ιδιαίτερα στην περίπτωσή μας, μπορεί να κρύβει σημαντικά συμπεράσματα και αποτελέσματα και μόνο πλεονεκτήματα μπορεί να προσφέρει, καθώς, δεδομένου ότι καταλήγουμε στην ίδια λύση μας προσφέρει μια καλή εικόνα των τοπικών ελαχίστων.

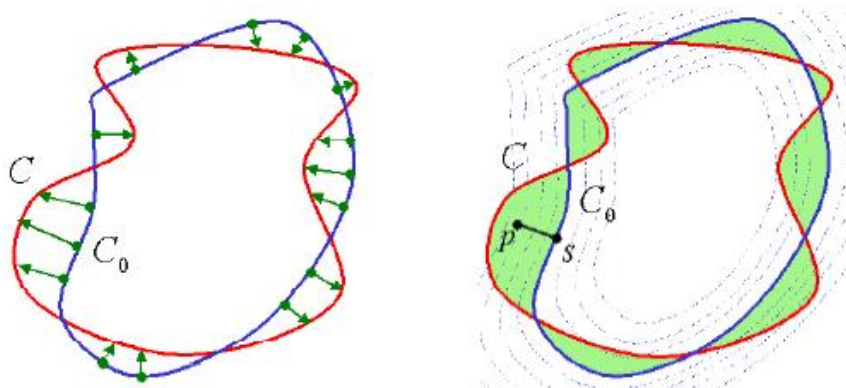
Όπως είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο, η ροή του συναρτησιακού το οποίο ενσωματώνει ως επιπεδοσύνολα τις ενεργές καμπύλες όταν εξελίσσεται υπό τη κλίση του, ισοδυναμεί με την εξέλιξη της αρχικής καμπύλης συνόρου υπό την επίδραση της εξίσωσης Euler-Lagrange ενός συγκεκριμένου συναρτησιακού. Μιμούμενοι, κατά μία έννοια την ιδέα αυτή στο [49] προτείνουν την υλοποίηση της εξέλιξης με χρήση των γεωτομών και επομένως στην μελέτη μας μπορούμε να υλοποιήσουμε το αντίστοιχο σε γράφους με τη μέθοδο των επεκταμένων γεωτομών.

Προκειμένου να υλοποιήσει κανείς την εξέλιξη των καμπυλών, χωρίς να προχωρήσει σε απευθείας ολική ελαχιστοποίηση, θα πρέπει να προσεγγίσει με κάποιο τρόπο την μεταβολή - κλίση της ενέργειας για κάθε εφικτή μεταβολή του συνόρου. Επομένως σε πρώτη φάση πρέπει να βρεθούν τρόποι μέτρησης της απόστασης μεταξύ καμπυλών.

4.4.1 Απόσταση μεταξύ καμπυλών

Υπάρχουν διάφορα μετρικά με τα οποία μπορεί κανείς να προσεγγίσει τις μεταβολές μεταξύ διαφορετικών συνόρων. Στην πραγματικότητα πολύ μικρή έκταση έχει δοθεί στο ζήτημα της επιλογής του μετρικού στο χώρο των καμπυλών το οποίο πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Θεωρείται σχεδόν αυτονόητη η χρήση L_2 εσωτερικού γινομένου.

Για να εξάγουμε μια «βολική» για τη διαμόρφωση του προβλήματός μας έκφραση της απόστασης δύο καμπυλών, υπενθυμίζουμε αρχικά ότι η κίνηση μιας καμπύλης C περιγράφεται από ένα διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων $v = \frac{dC}{dt}$ όπου το διάνυσμα της ταχύτητας ορίζεται για κάθε σημείο στο κάθε σύνορο. Χρησιμοποιώντας Ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο και την κλασική L_2 νόρμα το



Σχήμα 4.19: Η απόσταση μεταξύ δύο καμπυλών. Αριστερά η διαφορική οπτική γωνία ενώ δεξιά η ολοκληρωτική

μέτρο για την μεταβολή του συνόρου μπορεί να εκφραστεί ως :

$$\left| \frac{dC}{dt} \right|^2 = \int_C |v|^2 ds = \left\langle \frac{dC}{dt}, \frac{dC}{dt} \right\rangle.$$

Από την άλλη, λόγω της αναγκαιότητας επιστράτευσης αριθμητικών τροποποιήσεων για τη σταθερότητα σε περίπτωση διαφορίσεων ([18]), μπορεί κανείς να αναπαραστήσει την κίνηση της καμπύλης από ισοδύναμα ολοκληρωτικά μέτρα της μεταβολής των συνόρων. Συγκεκριμένα, αναζητούμε ένα μετρικό απόσταση το οποίο να είναι σύμφωνο με τη μέτρηση της μεταβολής των συνόρων στη διαφορική περίπτωση. Με άλλα λόγια αρκεί να ισχύει:

$$dist(C, C_0) = \langle d\vec{C}, d\vec{C} \rangle + o(|dC|^2), C \rightarrow C_0 \quad (4.9)$$

όπου $d\vec{C} = C - C_0$ είναι πεδίο διανυσμάτων που ορίζονται στην καμπύλη C_0 και τα συνδέουν με τα αντίστοιχα στην καμπύλη C . Όπως φαίνεται και στο σχήμα, η ολοκληρωτική προσέγγιση του ίδιου μεγέθους υπολογίζει την απόσταση:

$$dist(C, C_0) = 2 \int_{\Delta C} do(p) dp \quad (4.10)$$

όπου $do(p)$ η απόσταση από το p στο κοντινότερο σημείο στη C_0 και ΔC είναι η περιοχή μεταξύ των δύο καμπυλών.

Η εξέλιξη μιας καμπύλης υπό την αρνητική κλίση ενός οποιουδήποτε συναρτησιακού (gradient descent) μπορεί διαισθητικά να γίνει αντιληπτή ως μια

διαδοχή απειροστών βημάτων όπου κάθε βήμα επιτυγχάνει τη μέγιστη δυνατή μεταβολή (μείωση) της ενέργειας της καμπύλης -συνόρου ανάμεσα σε όλα τα βήματα του ίδιου μεγέθους. Ισοδυναμεί λοιπόν με το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\min_{C:dist(C,C_t)=\epsilon} F(C)$$

για κάποια απειροστά μικρή τιμή $\epsilon \geq 0$. Ισοδύναμα, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange μπορούμε να διατυπώσουμε το ισοδύναμο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς:

$$\min_C F(C) + \lambda dist(C, C_0)$$

για κάποια αυθαίρετα μεγάλη τιμή του λ , προς το παρόν ασυσχέτιστη με το dt ή το ϵ . Αποδεικνύεται στο [49] ότι τελικά η οικογένεια των καμπυλών C_t ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση:

$$E_t(C) = F(C) + \frac{1}{2(t - t_0)} dist(C, C_0) \quad (4.11)$$

4.4.2 Ενσωμάτωση γεωτομών-επεκταμένων γεωτομών

Όπως αναφέρθηκε, η θεωρία των γεωτομών αναπτύχθηκε με στόχο την άμεση ολική ελαχιστοποίηση του δημιουργούμενου συναρτησιακού μέσα από μία σειρά βημάτων δυαδικής διαμέρισης με αλγορίθμους ελάχιστης τομής - μέγιστης ροής και επιβολή αυστηρών οριακών συνθηκών. Μπορεί λοιπόν να αναρωτηθεί κανείς πώς μπορούν να ενσωματωθούν οι ιδέες των γεωτομών και των επεκταμένων γεωτομών σε αυτό το πλαίσιο. Το πρώτο βήμα παραμένει αναλλοίωτο, δηλαδή κατασκευάζουμε ένα γράφο, στου οποίου τις ακμές αναθέτουμε τα αντίστοιχα βάρη (Σχέσεις (4.5),(4.6),(4.7),(4.8)) ώστε οι γραφοτομές που θα προκύψουν να προσεγγίζουν το συναρτησιακό $F(C)$ το οποίο θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε.

Στην περίπτωση μας, προκειμένου να ελαχιστοποιήσουμε το συναρτησιακό $E_t(C)$ της σχέσης (4.11), θα πρέπει να προσεγγίσουμε τους όρους $F(C)$ και $dist(C, C_0)$ με ένα διακριτό μετρικό γραφοτομών. Παρατηρούμε όμως ότι ο όρος $F(C)$, μπορεί απευθείας να προσεγγισθεί με την τεχνική των επεκταμένων γεωτομών. Τι συμβαίνει όμως με τον όρο $dist(C, C_0)$;

Αν ξαναγράψουμε την (4.10) ως εξής:

$$dist(C, C_0) = -2 \int_{int(C_0)} do(p)dp + 2 \int_{int(C)} do(p)dp$$

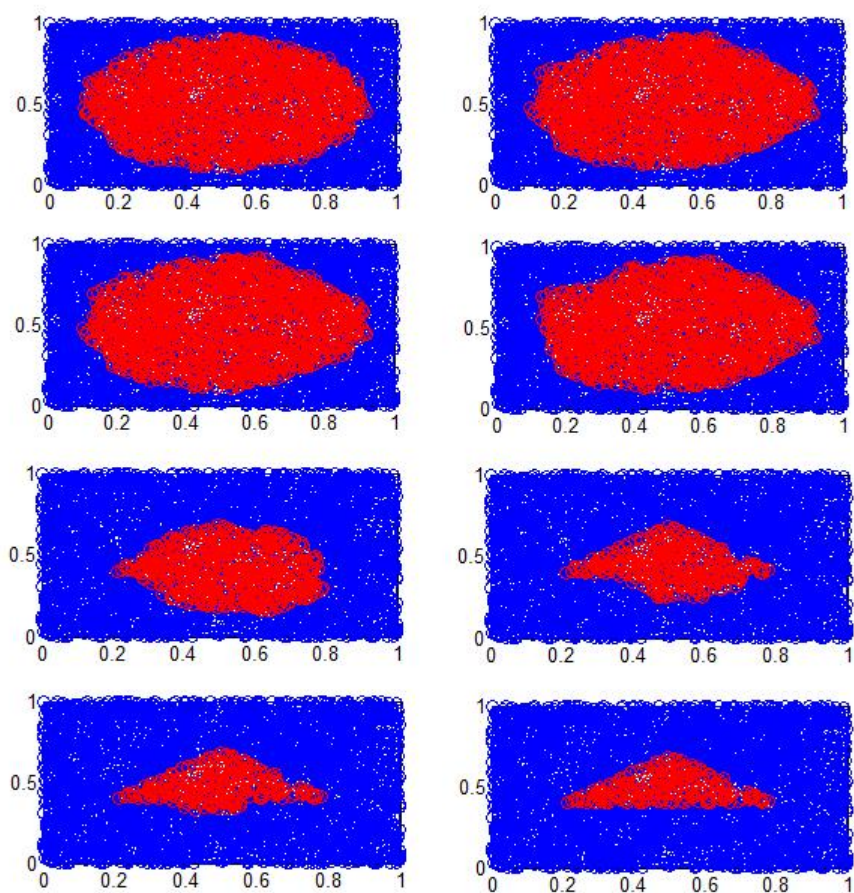
όπου $do(p)$ είναι η προσημασμένη συνάρτηση απόστασης, παρατηρούμε ότι ο πρώτος όρος είναι σταθερός, εφόσον η C είναι αυτή που μεταβάλλεται. Από

την άλλη ο δεύτερος όρος θέτει έναν τοπικό περιορισμό, ο οποίος κατά την πρωταρχική θεωρία των γραφοτομών μπορεί να υλοποιηθεί ως t σύνδεσμος. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε ότι η πηγή s αντιπροσωπεύει την παρουσία στο εσωτερικό του εξελισσόμενου χωρίου, ενώ η καταβόθρα t αντιπροσωπεύει την παρουσία στο εξωτερικό του, τότε $D_s(p) = \frac{do(p)}{2dt}$ ενώ $D_t(p) = 0$. Υπολογίζοντας, λοιπόν, συνολικά το κόστος της γραφοτομής θα έχουμε:

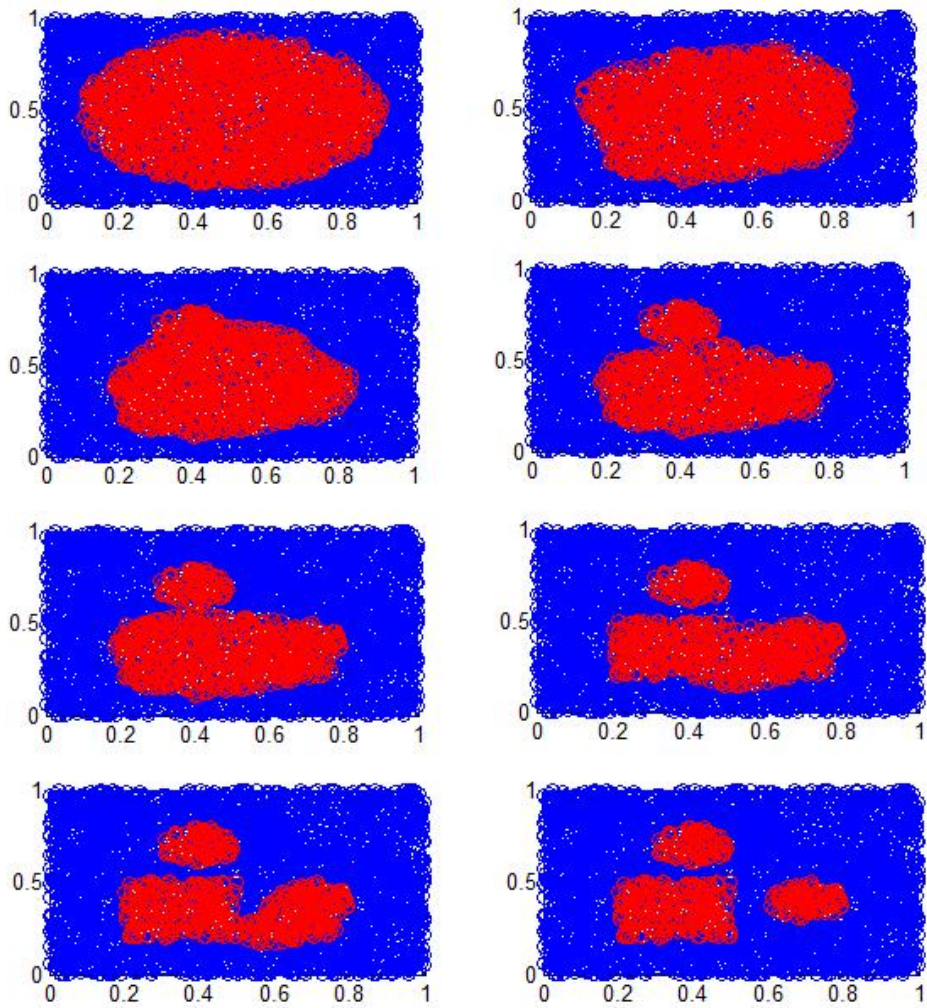
$$|C| = \sum_{p \in P} D_p(f_p) + \sum_{\substack{(p,q) \in N \\ p \in S, q \in T}} w(p,q) = F(C) + \frac{dist(C, C_0)}{2dt}$$

4.4.3 Υλοποίηση αλγορίθμου

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε την εκτέλεση του αλγορίθμου για τις δύο εκδοχές που παρουσιάστηκαν και στα προηγούμενα κεφάλαια. Σημειώνεται ότι ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτούνται είναι εξαιρετικά μεγάλος και τα στιγμιότυπα που απεικονίζονται απέχουν πολύ μεταξύ τους.



Σχήμα 4.20: Ο αλγόριθμος των επεκταμένων γεωτομών για την ανίχνευση μιας περιοχής.



Σχήμα 4.21: Ο αλγόριθμος των επεκταμένων γεωτομών για την ανίχνευση τριών περιοχών.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογή σε μετεωρολογικά δεδομένα / Συμπεράσματα

5.1 Κατάτμηση μετεωρολογικών δεδομένων

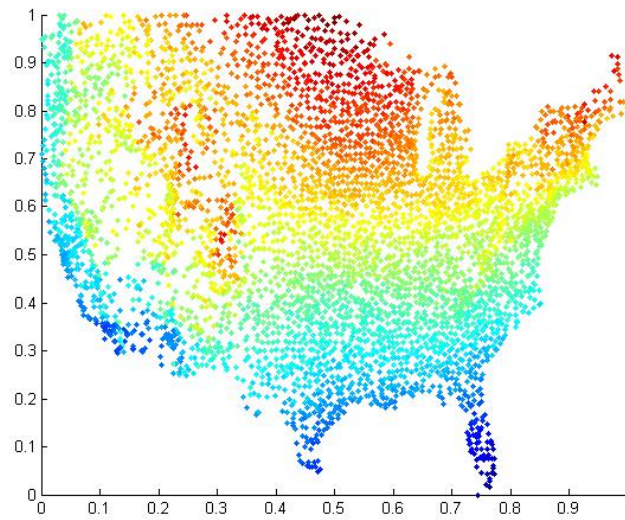
Από την ευγενική παραχώρηση δεδομένων βροχόπτωσης από την εθνική επιτροπή ωκεανών και ατμόσφαιρας του υπουργείου εμπορίου των Η.Π.Α., δεδομένων βροχόπτωσης για 4612 πόλεις των Η.Π.Α. Τα στοιχεία απεικονίζονται στο σχήμα 5.1.

Αρχικά θα προχωρήσουμε σε επιβλεπόμενο χωρισμό σε περιοχές για να δούμε τις ξεκάθαρες περιοχές που προκύπτουν. Αυτό, φυσικά θα γίνει με τον αλγόριθμο του τυχαίου περπατητή (Σχήματα 5.2-5.5). Στη συνέχεια θα δούμε τα αποτελέσματα της αυτόματης τμηματοποίησης (Σχήματα 5.6-5.8).

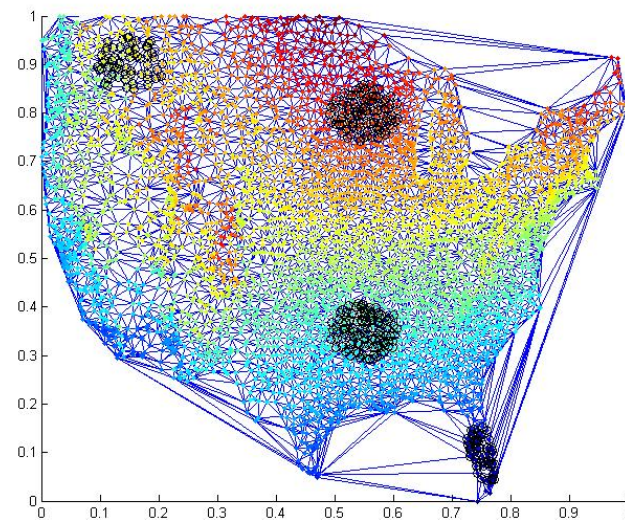
5.2 Παρατηρήσεις - σχόλια

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν τρεις διαφορετικοί αλγόριθμοι που αφορούν στον εντοπισμό περιοχών σε γράφους. Καθένας από αυτούς χαρακτηρίζεται από μειονεκτήματα και ανάγκη για περεταίρω βελτίωση και μελέτη.

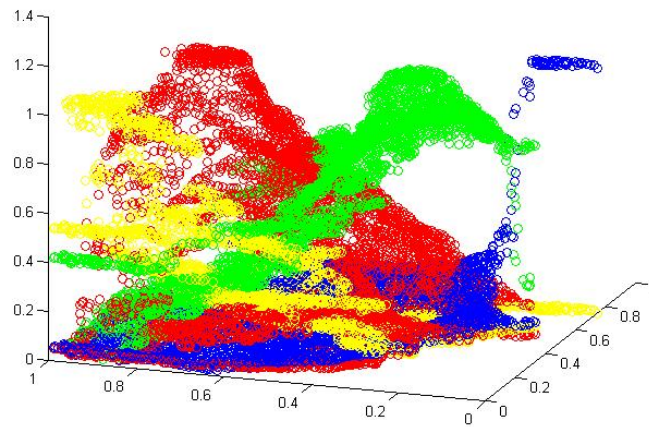
- Αρχικά, ο αλγόριθμος του κεφαλαίου 2, χαρακτηρίζεται από πολύ γρήγορη σύγκλιση στις περιοχές ενδιαφέροντος. Ταυτόχρονα, επιδέχεται βελτιώσεις σχετικά με την προσέγγιση των διαφόρων τελεστών σε γράφους, με τον υπολογισμό της καμπυλότητας με μεγαλύτερη ακρίβεια καθώς και όπως αναφέρθηκε με τη χρήση εξειδικευμένων δομικών γράφων ανάλογα με την εφαρμογή. Ταυτόχρονα, κρίνεται σκόπιμο να μελετηθεί ενδεχόμενη εφαρμογή τεχνικών επιτάχυνσης του αλγορίθμου.



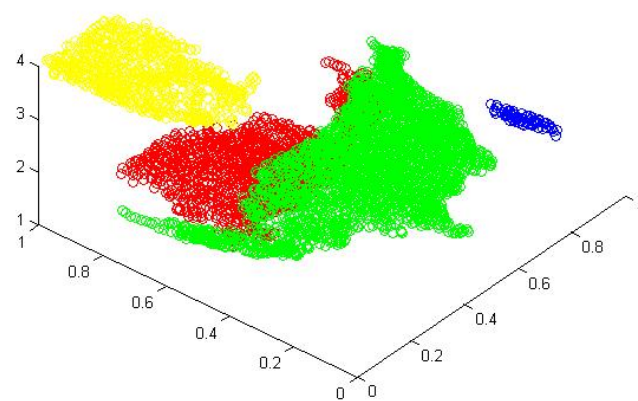
Σχήμα 5.1: Βροχόπτωση σε πόλεις των Η.Π.Α.



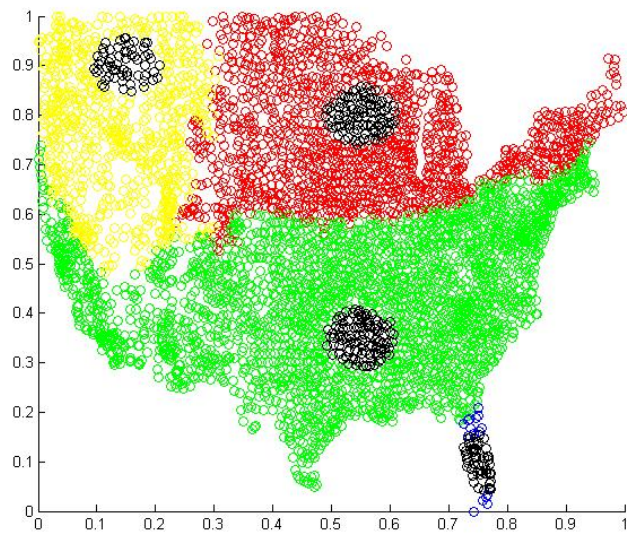
Σχήμα 5.2: Σημεία ορισμένα από το χρήστη



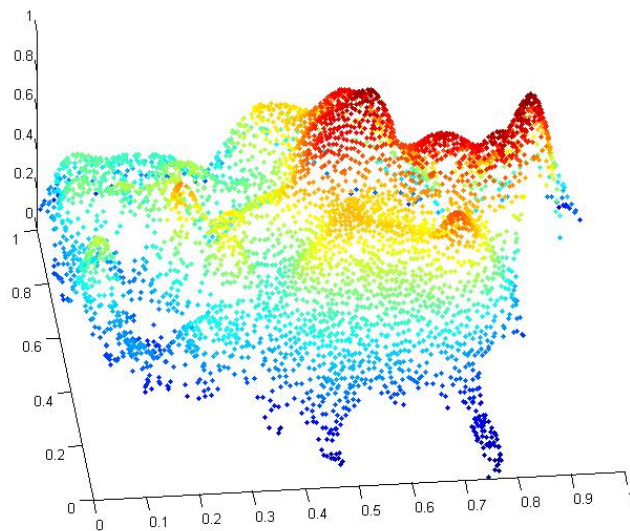
Σχήμα 5.3: Η κατανομή των πιθανοτήτων



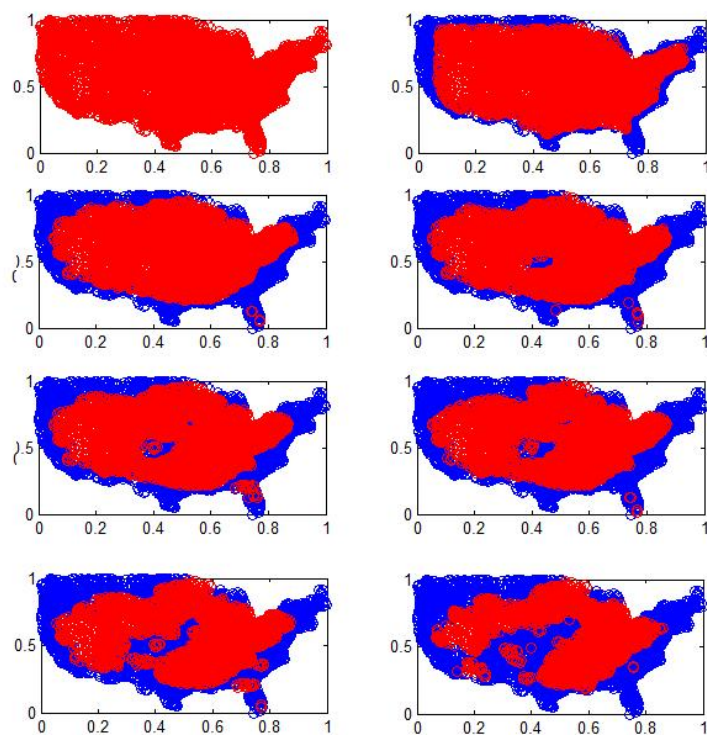
Σχήμα 5.4: Χωρισμός σε ετικέτες



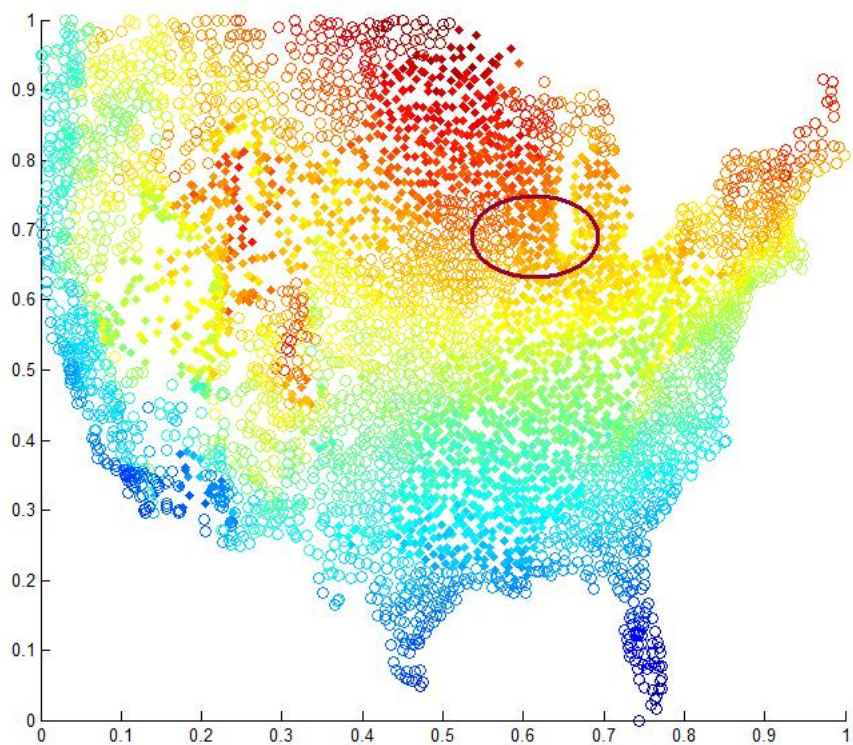
Σχήμα 5.5: Χωρισμός σε περιοχές



Σχήμα 5.6: Η «φιλτραρισμένη» έκδοση της βροχόπτωσης.



Σχήμα 5.7: Εκτέλεση αλγορίθμου



Σχήμα 5.8: Χωρισμός σε περιοχές. Το αποτέλεσμα φαίνεται να αποτελείται από μία περιοχή, όμως οι συνδέσεις στο σημείο με κύκλο οφείλονται σε μια πολύ τοπική ομοιογένεια και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι ουσιαστικά παράγονται δύο περιοχές.

- Σχετικά με τον αλγόριθμο του τυχαίου περιπατητή, το προφανές του μειονέκτημα είναι ότι απαιτεί την επέμβαση του χρήστη και την επισήμανση συγκεκριμένων σημείων στις ξεχωριστές περιοχές του γράφου. Ταυτόχρονα, το πεδίο εφαρμογής και η επεκτασιμότητα του αλγορίθμου μπορεί να χαρακτηριστεί αρκετά περιορισμένη, σε αντίθεση με τον «ανταγωνιστικό» αλγόριθμο των γραφοτομών ο οποίος βρίσκει εφαρμογή σε πολλά πεδία πέραν αυτού για το οποίο σχεδιάστηκε. Από την άλλη η καλή ποιότητα του αποτελέσματος, καθορίζεται από την καλή ποιότητα του μαρκαρίσματος από το χρήστη.
- Ο αλγόριθμος των επεκταμένων γεωτομών χαρακτηρίζεται από πολύ καλή θεωρητική υποστήριξη, τόσο όσον αφορά την υλοποίηση (δυαδικές γραφοτομές) αλλά και την ακρίβεια των προσεγγίσεων (μετρικό τομή για γεωδαιτικό καμπύλης). Από την άλλη όμως, κρίνεται απαραίτητη η μελέτη της μεθόδου σχετικά με την ευστάθεια καθώς η εξέλιξη της επηρεάζεται εξαιρετικά από την αρχική καμπύλη καθώς και από την ομαλότητα της εξέλιξης των πολλαπλασιαστών που καθορίζουν τον περιορισμό της απόστασης των καμπυλών.

Βιβλιογραφία

- [1] Kass, M., Witkin, A., and Terzopoulos, D. 1988. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331.
- [2] Leitner and Cinquin, 1991. Dynamic segmentation: Detecting complex topology 3D objects. *Proc. of Eng. in Medicine and Biology Society*, Orlando, Florida.
- [3] McInerney, T. and Terzopoulos, D. 1995. Topologically adaptable snakes. *Proc. ICCV*, Cambridge.
- [4] Szeliski, R., Tonnesen, D., and Terzopoulos, D. 1993. Modeling surfaces of arbitrary topology with dynamic particles. *Proc.CVPR*, pp. 82–87.
- [5] Caselles, V., Catta, F., Coll, T., and Dibos, F. 1993. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66:1–31.
- [6] Malladi, R., Sethian, J.A., and Vemuri, B.C. A fast level set based algorithm for topology independent shape modeling. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, special issue on Topology and Geometry, A. Rosenfeld and Y. Kong. (Eds.)
- [7] Alvarez, L., Guichard, F., Lions, P.L., and Morel, J.M. 1993. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mechanics*, 123
- [8] Sapiro, G. and Tannenbaum, A. 1993a. Affine invariant scale-space. *International Journal of Computer Vision*, 11(1):25-44.
- [9] Sapiro, G. and Tannenbaum, A. 1993b. On invariant curve evolution and image analysis. *Indiana University Mathematics Journal*, 42(3).
- [10] Dubrovin, B.A., Fomenko, A.T., and Novikov, S.P. 1984. *Modern Geometry-Methods and Applications I*, Springer-Verlag: New York.

- [11] Vicent Caselles and Ron Kimmel and Guillermo Sapiro, Geodesic Active contours, International Journal of Computer Vision, 1995
- [12] Osher, S.J. and Sethian, J.A. 1988. Fronts propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton- Jacobi formulations. Journal of Computational Physics, 79:12-49.
- [13] Sethian, J.A. 1989. A review of recent numerical algorithms for hypersurfaces moving with curvature dependent flows. J. Differential Geometry, 31:131-161.
- [14] Caselles, V., Catta, F., Coll, T., and Dibos, F. 1993. A geometric model for active contours. Numerische Mathematik, 66:1-31.
- [15] Caselles, V. and Sbert, C. 1994. What is the best causal scale-space for 3D images? Technical Report, Department of Math. and Comp. Sciences, University of Illes Balears, 07071 Palma de Mallorca, Spain.
- [16] Malladi, R., Sethian, J.A., and Vemuri, B.C. 1994. Evolutionary fronts for topology independent shape modeling and recovery. Proc. of the 3rd ECCV, Stockholm, Sweden, pp. 3-13.
- [17] Malladi, R., Sethian, J.A., and Vemuri, B.C. 1995. Shape modeling with front propagation: A level set approach. IEEE Trans. on PAMI, 17:158-175.
- [18] Sethian, J.A., Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science (Cambridge ... on Applied and Computational Mathematics)
- [19] Μαραγκός Π., Ανάλυση εικόνων και Όραση Υπολογιστών , Αθήνα, 2005
- [20] Brockett, R. and Maragos, P. Evolution Equations for Continuous Scale Morphology. In Proc. IEEE Int'l Conf. acoust, Speech, Signal Processing (San Francisco, CA, 1992)
- [21] H.J.A Heijmans, P.Nacken, A.Toet, L.Vincent , Graph Morphology, Journal of Visual Communication and Image Representation, Vol 3, March 1992
- [22] L.Vincent Graphs and Mathematical Morphology , Signal Processing 16, 1989

- [23] J. Serra Image Analysis and Mathematical Morphology , Academic Press London , 1982
- [24] J.A.M.Heijmans, C.Ronse The algebraic basis of Mathematical Morphology PartI dilations and erosions , Computer Vision Graphics Image Processing 1990, 245-295
- [25] J.A.M.Heijmans, C.Ronse The algebraic basis of Mathematical Morphology PartI openings and closings , Computer Vision Graphics Image Processing 1990, 245-295
- [26] Vinh-Thong Ta, Abderrahim Elmoataz and Olivier Lezoray, Partial Difference Equations on graphs for Mathematical Morphology operators over images and manifolds.
- [27] Freeman, H. and Davis, L. S., A Corner-Finding Algorithm for Chain-Coded Curves, IEEE Trans. Comput., 1977
- [28] Hermann, S. and R. Klette: Multigrid analysis of curvature estimators. In Proc. Image and Vision Computing New Zealand, pages 108-112, 2003
- [29] Sethian "Level set methods and fast marching methods" , 1999
- [30] Fast geodesic active contours , Goldenberg, R. Kimmel, R. Rivlin, E. Rudzsky, M. , Image Processing, IEEE Transactions , Oct 2001
- [31] J. N. Tsitsiklis, "Efficient Algorithms for Globally Optimal Trajectories", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 40, No. 9, September 1995, pp. 1528-1538
- [32] 'Space-Variant Machine Vision - A Graph Theoretic Approach', Leo Grady, http://eslab.bu.edu/publications/publications.php#grady2004space_phd
- [33] Leo Grady, Random Walks for Image Segmentation, IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, VOL. 28, NO. 11, NOV. 2006 1
- [34] <http://cns.bu.edu/grady/#reports>
- [35] S. Kakutani, "Markov processes and the Dirichlet problem," Proc. Jap. Acad., vol. 21, pp. 227-233, 1945.
- [36] P. Doyle and L. Snell, Random walks and electric networks, ser. Carus mathematical monographs. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1984, no. 22.

- [37] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*. John Wiley and Sons, 1989, vol. 2.
- [38] F. H. Branin, Jr., "The algebraic-topological basis for network analogies and the vector calculus," in *Generalized Networks, Proceedings*, Brooklyn, N.Y., April 1966, pp. 453-491
- [39] Y. Boykov and M.-P. Jolly, "Interactive graph cuts for optimal boundary and region segmentation of objects in N-D images," in *Proc. of ICCV 2001*, 2001, pp. 105-112.
- [40] Y. Boykov and V. Kolmogorov, "An experimental comparison of min-cut/ max-flow algorithms for energy minimization in vision," *IEEE PAMI*, vol. 26, no. 9, pp. 1124-1137, Sept. 2004.
- [41] *Graph Cuts in Vision and Graphics: Theories and Applications*. Yuri Boykov and Olga Veksler. In *Handbook of Mathematical Models in Computer Vision*, edited by Nikos Paragios, Yunmei Chen and Olivier Faugeras. Springer, 2006.
- [42] L. Ford and D. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [43] V. Kolmogorov and R. Zabih. What energy functions can be minimized via graph cuts. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2):147- 159, February 2004.
- [44] . Boykov and V. Kolmogorov. Computing geodesics and minimal surfaces via graph cuts. In *International Conference on Computer Vision*, volume I, pages 26-33, 2003.
- [45] L. D. Cohen and R. Kimmel. Global minimum for active contour models: A minimal path approach. *International Journal of Computer Vision*, 24(1):57-78, 1997.
- [46] M. P. D. Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc., 1976
- [47] L. A. Santalo. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, 1979 (first printing 1976).
- [48] Y. Boykov and M.P. Jolly. Interactive graph cuts for optimal boundary & region segmentation of objects in N-D images. In *International Conference on Computer Vision*, volume I, pages 105-112, July 2001.

- [49] Yuri Boykov, Vladimir Kolmogorov, Daniel Cremers, and Andrew Delong, An Integral Solution to Surface Evolution PDEs via Geo-Cuts, European Conference on Computer Vision, May 2006, LNCS 3953 vol. III, p. 409