Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής
και Υπολογιστών

Τυποποίηση των Principia Metaphysica σε Isabelle/HOL

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΥΛΙΑΣΗΣ

Επιβλέπων : Νικόλαος Σ. Παπασπύρου
Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009

Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής
και Υπολογιστών

Τυποποίηση των Principia Metaphysica σε Isabelle/HOL

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΥΛΙΑΣΗΣ

Επιβλέπων : Νικόλαος Σ. Παπασπύρου
Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 21η Ιουλίου 2009.

....	....	....
Νικόλαος Παπασπύρου Επίκ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αριστείδης Αραγεώργης Λέκτορας Ε.Μ.Π.	Γεώργιος Κολέτσος Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Ιούλιος 2009

....

Κωνσταντίνος Πουλιάσης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής αυτής εργασίας είναι η κωδικοποίηση και η απόδειξη βασικών θεωρημάτων των Principia Metaphysica στον αποδείκτη Isabelle/HOL. Η τυποποίηση αυτή επιτρέπει έλεγχο ορθότητας των αποδείξεων των Principia Metaphysica και παρέχει ένα χρήσιμο και επεκτάσιμο αποδεικτικό περιβάλλον που μπορεί να χρησιμεύσει στην απόδειξη ολόκληρης της θεωρίας.

Τα Principia Metaphysica (γνωστά και ως Θεωρία Αφηρημένων Αντικειμένων) είναι μία θεωρία τυπικής μεταφυσικής που χρησιμοποιεί τη γλώσσα της μαθηματικής λογικής προκειμένου να παρουσιάσει τα αξιώματα της, να ορίσει μεταφυσικά αντικείμενα και να προχωρήσει σε αποδείξεις για τις ιδιότητες αυτών. Η τυπική γλώσσα της θεωρίας σε συνδυασμό με την ενσωμάτωση της σε αυτόματους αποδείκτες (όπως το Isabelle/HOL) παρέχει τη δυνατότητα για υπολογιστική μεταφυσική και επιστημολογία πραγματώνοντας, σ' ένα βαθμό, την πρόβλεψη του Leibniz για φιλοσοφία ως υπολογιστική διαδικασία.

Παρουσιάζονται η κωδικοποίηση της γλώσσας, των μεταθεωρητικών εννοιών, των βασικών αξιωμάτων καθώς και αποδείξεις βασικών θεωρημάτων των Principia σε Isabelle/HOL, παράλληλα με την πρωτότυπη θεωρία όπως παρουσιάζεται στο [Zalt02].

Λέξεις κλειδιά

Μαθηματική λογική, αποδείκτης θεωρημάτων, φιλοσοφική λογική, Principia Metaphysica, τροπική λογική, κωδικοποίηση γλωσσών, αυτοματοποιημένη απόδειξη, υπολογιστική μεταφυσική.

Abstract

The aim of this diploma project is the encoding of the core language of Principia Metaphysica and proving of its basic theorems in the theorem prover Isabelle/HOL. Such a formalization permits proof-checking in hand-written proofs of Principia Metaphysica and provides a useful and extendable proof environment that can be used in the proof of the whole theory.

Principia Metaphysica (a.k.a. Theory of Abstract Objects) is a theory of formal metaphysics that incorporates the language of mathematical logic in order to represent its axioms and, to define metaphysical objects and reason about them. The formality of its language in combination with its incorporation in an automated theorem prover opens a new space for computational metaphysics and epistemology realizing, in some sense, Leibniz's reckoning that philosophy might turn into a computational process.

We present our encoding of the core language, the metatheory, the axioms, as well as proofs of basic theorems of Principia Metaphysica in Isabelle/HOL in parallel with the original aspects of the theory as it is presented in [Zalt02].

Key words

Mathematical logic, theorem prover, philosophical logic, Principia Metaphysica, modal logic, encoding, automated reasoning, computational metaphysics.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ την οικογένεια μου, τους γονείς μου Σπύρο και Βάσω και τις αδερφές μου Αλίκη και Ντόρια, που βρίσκονταν πάντα στο πλάι μου σε όλη τη διάρκεια της ακαδημαϊκής μου πορείας στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, τον καθηγητή μου κ. Παπασπύρου, αφενός επειδή συμμερίστηκε τις λογικοφιλοσοφικές μου αναζητήσεις και αφετέρου για την στήριξη του και τη γνώση που μου παρείχε απλόχερα όλα αυτά τα χρόνια , τον καθηγητή μου κ. Αραγεώργη που με εισήγαγε στον κόσμο της φιλοσοφίας με τον καλύτερο τρόπο και για την στήριξη του στην ακαδημαϊκή μου πορεία και τον καθηγητή μου κ. Ζάχο για την βοήθεια και την ώθηση στην περαιτέρω ακαδημαϊκή μου πορεία. Ευχαριστώ τον συνάδελφο Νίκο Νικολέρη για όλη την υποστήριξη κατά τη συγγραφή. Ευχαριστώ επίσης τους φίλους, φίλες για τις όμορφες στιγμές των φοιτητικών μου χρόνων, καθώς και όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Τεχνολογίας Λογισμικού του Ε.Μ.Π. για τη βοήθεια και την καλή παρέα.

Κωνσταντίνος Πουλιάσης,

Αθήνα, 15 Ιουλίου 2009.

Η εργασία αυτή είναι επίσης διαθέσιμη ως Τεχνική Αναφορά CSD-SW-TR-4-09, Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Τεχνολογίας Πληροφορικής και Υπολογιστών, Εργαστήριο Τεχνολογίας Λογισμικού, Ιούλιος 2009.

URL: http://www.softlab.ntua.gr/techrep/
FTP: ftp://ftp.softlab.ntua.gr/pub/techrep/

Ever tried. Ever failed. No matter. Try again. Fail again. Fail better.
Samuel Beckett

Περιεχόμενα

Περίληψη 5

Abstract 7

Ευχαριστίες 9

Περιεχόμενα 13

1. Εισαγωγή 15

1.1 Γενικά 15

1.2 Διαρρύθμιση Κεφαλαίων 15

2. Αυτοματοποιημένος Συμπερασμός 17

2.1 Τεχνικές Αυτοματοποιημένου Συμπερασμού 17

2.2 Αποδείκτες Θεωρημάτων 17

2.3 Το Isabelle/HOL 18

3. Principia Metaphysica 19

3.1 Edward Zalta 19

3.2 Φυσική και Μεταφυσική 19

3.3 Σκοπός της Θεωρίας 20

3.3.1 Να περιγράψει την λογική που διέπει την (επιστημονική) σκέψη 20

3.3.2 Να περιγράψει τους νόμους που διέπουν καθολικές οντότητες όπως οι ιδιότητες, οι σχέσεις και προτάσεις 21

3.3.3 Να ταυτοποιήσει τόσο τα θεωρητικά μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις όσο και τα φυσικά μαθηματικά αντικείμενα όπως οι φυσικοί αριθμοί και τα σύνολα 22

3.3.4 Να αναλύσει το διαχωρισμό μεταξύ γεγονότος και φανταστικού και να συστηματοποίησε τις σχέσεις μεταξύ ιστοριών, χαρακτήρων και φανταστικών αντικειμένων 22

3.3.5 Να συστηματοποιήσει την τροπική λογική που διέπει την (επιστημονική) σκέψη για δυνατές καταστάσεις πραγμάτων και τους δυνατούς κόσμους 23

3.3.6 Να αναπτύξει την λογική των προτασιακών στάσεων, να εξηγήσει το πληροφορικό περιεχόμενο των προτάσεων ταυτότητας και να πραγματευτεί, εν γένει, το αντικειμενικό και γνωσιακό περιεχόμενο της φυσικής γλώσσας . . . 24

3.3.7 Να συστηματοποιήσει φιλοσοφικά αντικείμενα που έχουν προταθεί από διάφορους φιλοσόφους . . . 25
3.4 Η διάκριση που διέπει τη Θεωρία . . . 25
3.4.1 Πραγμάτωση και πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική . . . 26
3.4.2 Η κωδικοποίηση επεκτείνει την πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική: Ένα παράδειγμα . . . 26
3.4.3 Δύο ακόμη παραδείγματα . . . 26
3.4.4 Επεκτείνοντας τις ιδέες του Mally . . . 27

4. Η θεωρία και η κωδικοποίηση . . . 29
4.1 Η γλώσσα του PM . . . 29
4.2 Η Λογική του PM . . . 39
4.2.1 Λογικά Αξιώματα, Κανόνες Συμπερασμού, Αποδείξεις . . . 40
4.3 Παράγωγοι Κανόνες . . . 48
4.4 Λογικά Θεωρήματα της PM . . . 53

5. Συμπεράσματα . . . 57

Βιβλιογραφία . . . 61

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενικά

Η τυπική μεταφυσική (*formal metaphysics*), είναι κλάδος της σύγρονης μεταφυσικής όπως την εννοούμε στα πλαίσια της αναλυτικής φιλοσοφικής παράδοσης. Επιχειρεί την τυπική συστηματοποίηση αντικειμένων που φαίνονται να έχουν πρωταρχικό ρόλο στην μεταφυσική μας σκέψη και στον τρόπο με τον οποίο έχουμε γνωσιακή πρόσβαση στον κόσμο. Τέτοια αντικείμενα είναι οι αριθμοί, οι συναρτήσεις, οι ιδιότητες, έννοιες όπως η αιτιότητα, η δυνατότητα κλπ. Η υπολογιστική μεταφυσική χρησιμοποιεί σύγχρονα επιτεύγματα της θεωρίας γλωσσών προγραμματισμού όπως οι αποδείκτες θεωρημάτων (Isabelle/HOL, *Coq*, *Twelf*) για την υπολογιστική αναπαράσταση και επαλήθευση τέτοιων θεωριών.

Η συνάντηση των πεδίων αυτών, πέραν του ότι ελέγχει τα όρια στο πρόταγμα του Λάιμπνιτζ για φιλοσοφία ως υπολογιστική διαδικασία,

- επιτρέπει την επαλήθευση θεωριών της τυπικής μεταφυσικής υπολογιστικά
- παρέχει μια εμπειρική επισκόπηση για το πως αποκτάμε γνωση για "αφηρημένα" αντικείμενα της μεταφυσικής
- εμπλουτίζει το πεδία της γνωσιακής επιστήμης και της τεχνητής νοημοσύνης

Τα Principia Metaphsica (ή PM), γνωστά και ως Θεωρία Αφηρημένων Αντικειμένων, είναι μία θεωρία τυπικής μεταφυσικής. Στα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, τυποποιήσαμε την γλώσσα, τα αξιώματα και την μεταθεωρία της θεωρίας σε Isabelle/HOL και προχωρήσαμε σε αποδείξεις βασικών θεωρημάτων της.

1.2 Διαρρύθμιση Κεφαλαίων

- **Κεφάλαιο 2** Δίνεται μία σύντομη επισκόπηση για τις τεχνικές αυτοματοποιημένου συμπερασμού(*Automated Reasoning*), τους αποδείκτες θεωρημάτων και το Isabelle/HOL.
- **Κεφάλαιο 3** Δίνεται μία εισαγωγή στη *Θεωρία Αφηρημένων Αντικειμένων*. Παρουσιάζονται η προβληματική της και οι βασικές τις έννοιες, όπως ο διαχωρισμός των αντικειμένων σε αφηρημένα και συγκεκριμένα, οι δύο τρόποι κατηγόρησης κλπ. Τέλος, απαριθμούνται και αναλύονται οι σκοποί της.
- **Κεφάλαιο 4** Παρουσιάζεται η τυπική γλώσσα, η μεταθεωρία, τα αξιώματα και θεωρήματα της PM παράλληλα με την κωδικοποίηση τους σε Isabelle/HOL. Επεξηγηματικά σχόλια συνοδεύουν την παρουσιάση της κωδικοποίησης.
- **Κεφάλαιο 5** Παρουσίαζονται τα συμπεράσματα μαζί με μία κριτική επισκόπηση της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Αυτοματοποιημένος Συμπερασμός

2.1 Τεχνικές Αυτοματοποιημένου Συμπερασμού

Οι τεχνικές αυτοματοποιημένου συμπερασμού (*Automated Reasoning*)[Stan], είναι μία υποσχόμενη περιοχή της Επιστήμης Υπολογιστών με σκοπό την αυτοματοποίηση διάφορων αποδεικτικών τρόπων. Σκοπός της είναι η παραγωγή λογισμικού που να επιτρέπει στους υπολογιστές να καταστρώνουν κατά το δυνατόν με πληρότητα αποδείξεις. Ως τέτοια, η περιοχή αυτή συνορεύει με την Τεχνητή Νοημοσύνη αλλά έχει επιπλέον στενούς δεσμούς με την Θεωρητική Πληροφορική και την Φιλοσοφία. Η δημιουργία ενός προγράμματος που υλοποιεί αυτοματοποιημένες αποδεικτικές διαδικασίες σχετίζεται με τη δημιουργία μιας αλγοριθμικής περιγραφής ενός τυπικού λογισμού στον οποίο να μπορούν να αναπαρασταθούν προβλήματα μιας θεωρίας αποδοτικά (*encoding*). Σημαντικές πτυχές της διαδικασίας αυτής αποτελούν:

1. Ο καθορισμός της κλάσης των προς επίλυση προβλημάτων από το πρόγραμμα.
2. Η επιλογή κατάλληλης γλώσσας για την αναπαράσταση της πληροφορίας.
3. Η επιλογή μηχανισμού απαγωγής συμπερασμάτων.
4. Η βελτιστοποίηση των υπολογισμών.

Η πρωταρχική χρήση των υπολογιστών στόχευε στην υποστήριξη απαιτητικών αριθμητικών υπολογισμών χρήσιμων για τους επιστήμονες του κάθε πεδίου. Οι τεχνικές αυτόματοποιημένου συμπερασμού, εκμεταλλεύονται την αύξηση της υπολογιστικής ισχύος στο πεδίο των προβλημάτων συμβολικής αναπαράστασης. Στόχος του αυτοματοποιημένου συμπερασμού είναι η περαιτέρω επέκταση της μηχανιστικής απαγωγής ώστε να παραχθεί λογισμικό κατάλληλο για αναζήτηση αλήθειας μέσω απόδειξης.

2.2 Αποδείκτες Θεωρημάτων

Οι αποδείκτες θεωρημάτων, είναι λογισμικό που υλοποιεί τεχνικές αυτοματοποιημένου συμπερασμού. Χωρίζονται σε διάφορες κατηγορίες με βάση τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- **Εμβέλεια του πεδίου προβλημάτων**
  Με βάση την εμβέλεια την προς αναπαράσταση και απόδειξη των θεωρημάτων, οι αποδείκτες κατηγοριοποιούνται σε ειδικού και γενικού σκοπού. Η επιλογή κατάλληλου αποδείκτη εξαρτάται από τη φύση του προβλήματος. Για αποδείξεις στο σύστημα του πρωτοβάθμιου κατηγορικού λογισμού ενδείκνυται η χρήση ενός αποδείκτη γενικού σκοπού, ενώ έχουν αναπτυχθεί και αποδείκτες ειδικού σκοπού που εξειδικεύονται πιο αποδοτικά σε μικρότερα πεδία όπως π.χ αποδείξεις στο Σύστημα K της τροπικής λογικής.

- **Γλωσσική αναπαράσταση των προβλημάτων**
  Εδώ η κατηγοριοποίηση γίνεται από τους μηχανικούς με βάση τα εξής ερωτήματα

  1. πώς τα προβήματα του πεδίου εμβέλειας θα παρουσιάζονται στον αποδείκτη .
  2. πώς θα γίνεται η αναπαράσταση εσωτερικά στον αποδείκτη .
  3. πώς θα παρουσιάζονται οι ολοκληρωμένες αποδείξεις πίσω στο χρήστη.

  Η επίλυση των παραπάνω προβλημάτων από τον σχεδιαστή του αποδεικτικού συστήματος σχετίζεται άμεσα με την εμβέλεια των προβλημάτων αλλά και τον απαγωγικό λογισμό που έχει επιλεγεί. Ευρέως χρησιμοποιούμενα εργαλεία για την τυποποίηση της γλωσσικής αναπαράστασής προβλημάτων είναι η λογική πρώτης τάξης, ο λάμβδα λογισμός με τύπους και η clausal λογική.

- **Ο απαγωγικός λογισμός που υλοποιείται**
  Η επιλογή του απαγωγικού λογισμού είναι σημαντικό στοιχείο στην σχεδίαση ενός αποδείκτη. Όπως προαναφέραμε, η επιλογή αυτή σχετίζεται άμεσα με τη φύση του πεδίου προβλημάτων προς επίλυση. Αποδείκτες γενικού σκοπού υλοποιούν την πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική και την απλή θεωρία τύπων, αποδείκτες για επαλήθευση προγραμμάτων υλοποιούν τον πρωτοβάθμιο κατηγορηματικό λογισμό, αποδείκτες που χρησιμοποιούνται για την επαλήθευση παράλληλων κατανεμημένων συστημάτων υλοποιούν τροπικές και χρονικές λογικές κλπ.

2.3 Το Isabelle/HOL

Το Isabelle [Isab] είναι ένας αποδείκτης θεωρημάτων γενικού σκοπού. Το framework του Isabelle, επιτρέπει τη γραφή μαθηματικών τύπων σε τυπικές γλώσσες και παρέχει εργαλεία για την αυτόματη απόδειξη προτάσεων στην εκάστοτε θεωρία που αναπαριστούμε. Βασικές εφαρμογές του Isabelle εκτός από την αυτοματοποίηση μαθηματικών αποδείξεων είναι ο έλεγχος ορθότητας υλικού και λογισμικού.

Ως αποδείκτης γενικού σκοπού το Isabelle υλοποιεί μια λογική υπολογιστών συναρτήσεων (*Logic of Computable Functions*) στη γλώσσα προγραμματισμού ML και παρέχει μία μεταλογική, κατάλληλη για την κωδικοποίηση λογικών συστημάτων όπως η πρωτοβάθμια κατηγορηματική, η λογική ανώτερης τάξης(HOL) ή η θεωρία συνόλων Zermelo–Fraenkel. Η βασική αποδεικτική μέθοδος του είναι μία ανώτερης τάξης απαλοιφή (*resolution*) που βασίζεται σε μία ανώτερης τάξης ενοποίηση (*unification*). Το Isabelle παρέχει αποδοτικές διαδικασίες για αυτοματοποίηση των αποδείξεων όπως η μηχανή για την απλοποίηση όρων (*term rewriting*), που λέγεται simplifier, έναν αποδείκτη tableux (classical reasoner) κλπ. Το Isabelle έχει χρησιμοποιηθεί για την τυποποίηση πολλών αποδείξεων από τα μαθηματικά και την επιστήμη των υπολογιστών μεταξύ των οποίων τα θεωρήματα πληρότητας του Gödel, η απόδειξη ορθότητας πρωτοκόλλων και για αποδείξεις στην σημασιολογία γλωσσών προγραμματισμού.

Κεφάλαιο 3

Principia Metaphysica

3.1 Edward Zalta

Ο Edward Zalta είναι φιλόσοφος και ερευνητής στο Metaphysics Research Lab του Center for the Study of Language and Information του Stanford University. Το ερευνητικό του πεδίο περιλαμβάνει, μεταξύ άλλων, τα πεδία της μεταφυσικής, της φιλοσοφίας της γλώσσας, της φιλοσοφικής λογικής και της φιλοσοφίας του νου. Επιπλέον είναι ο βασικός επιμελητής της *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Το έργο του έχει ιδεαλιστικές επιρροές γεγονός που φαίνεται και στα *Principia Metaphysica*[Zalt02], [The].

Συνεχιστής της οντολογίας των Mally και Meinong , ο Zalta στα Principia Metaphysica αναπτύσσει μια φορμαλιστική μεταφυσική που διαπνέεται από την προτεραιότητα των ιδιοτήτων σε σχέση με τις προτάσεις γεγονός που τον διαχωρίζει από πραγματιστικές φιλοσοφικές θεωρήσεις. Ενδεικτικά από το έργο του στην τυπική μεταφυσική είναι τα [Zalt88a], [Zalt83].

3.2 Φυσική και Μεταφυσική

Η *Θεωρία των Αφηρημένων Αντικειμένων* είναι μία θεωρία μεταφυσικής. Σε αντίθεση με τη φυσική επιστήμη που επιχειρεί την συστηματική περιγραφή απλών και σύνθετων φυσικών αντικειμένων, η μεταφυσική - ή τουλάχιστον ένας κλάδος της - επιχειρεί την συστηματοποίηση απλών και σύνθετων αφηρημένων αντικειμένων.

Αφηρημένα είναι τα αντικείμενα (αλλιώς μορφώματα) που προϋποτίθεται στον επιστημονικό λόγο[1]. Στις φυσικές επιστήμες για παράδειγμα προϋποθέτουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε φυσικούς αριθμούς για να απαριθμήσουμε διακριτά αντικείμενα και πραγματικούς αριθμούς για να τα μετρήσουμε ποικιλοτρόπως. Επιπλέον, η επιστημολογία μας προυποθέτει την ύπαρξη φυσικών νόμων, σχέσεων αιτιότητας και καταστάσεων πραγμάτων που υπακούν σε φυσικούς νόμους. Κατά τη χρήση τέτοιων αντικειμένων στην επιστημονική έρευνα, προϋποθέτουμε ότι τα αφηρημένα αντικείμενα "συμπεριφέρονται" κατά συγκεκριμένο τρόπο ακριβώς επειδή φέρουν συγκεκριμένες ιδιότητες και υπακούν ,όπως και τα πραγματικά αντικείμενα και εν γένει κάθε δυνατό αντικείμενο με συγκεκριμένες ιδιότητες , σε συγκεκριμένους νόμους. Η μεταφυσική λοιπόν ερευνά αριθμούς, νόμους, ιδιότητες, δυνατότητες κλπ, ως αυτοτελείς οντότητες, αφού αποτελούν αναπόσπαστο τμήμα του τρόπου με τον οποίον αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο και κάνουμε επιστήμη. Η θεωρία των αφηρημένων αντικειμένων του Zalta επιχειρεί την φορμαλιστική συστηματοποίηση των αντικείμενων αυτών σε αξιωματικό πλαίσιο.

Θα ήταν λάθος να θεωρήσουμε ότι μία θεωρία που ερευνά αφηρημένα αντικείμενα είναι ασύμβατη με θεωρίες των φυσικών επιστημών που προϋποθέτουν ότι οι μόνες υπαρκτές οντότητες είναι αυτές που

[1] Ο συνήθης χαρακτηρισμός των αφηρημένων αντικειμένων έχει ως εξής: ένα αντικείμενο θεωρείται αφηρημένο αν και μόνο αν δεν βρίσκεται στο χώρο και το χρόνο και είναι αιτιακά αδρανές. Παρά το γεγονός, όμως, ότι η φυσική επιστήμη ασχολείται με αιτιακές σχέσεις μεταξύ οντοτήτων εντός του χωροχρονικού πλαισίου, πολλοί φιλόσοφοι ισχυρίζονται ότι η ύπαρξη αφηρημένων αντικειμένων προϋποτίθεται από την αλήθεια φυσικών θεωριών

υπακούν σε αληθείς φυσικές θεωρίες. Μπορούμε να θεωρήσουμε τα αφηρημένα αντικείμενα ως δυνατά ή πραγματικά μορφώματα ιδιοτήτων, δηλαδή σύνολα ιδιοτήτων που ικανοποιούν συγκεκριμένες προδιαγραφές. Μπορούμε παραδείγματος χάριν, να σκεφτούμε τον αριθμό π ως πρότυπο ιδιοτήτων που ικανοποιούν την πρόταση 'Σύμφωνα με τα αξιώματα της πραγματικής ανάλυσης, ο αριθμός π έχει την ιδιότητα F' (όπου "F" μεταβλητή με πεδίο το σύνολο των ιδιοτήτων). Υπάρχουν άπειρες ιδιότητες που ικανοποιούν αυτήν την πρόταση (και αντίστοιχα άπειρες που δεν την ικανοποιούν). Η θεωρία των αφηρημένων αντικείμενων θεμελιώνει αντικείμενα από τις ιδιότητες αυτές. Έτσι, τα αφηρημένα αντικείμενα δεν είναι ακατανόητες "μαγικές" οντότητες αλλά δυνατά και πραγματικά μορφώματα ιδιοτήτων που εμφανίζονται στις φυσικές θεωρίες και, εν γένει, στον επιστημονικό λόγο.

3.3 Σκοπός της Θεωρίας

Οι αντικειμενικοί σκοποί της θεωρίας των αφηρημένων αντικειμένων του Zalta είναι:

- Να περιγράψει την λογική που διέπει την (επιστημονική) σκέψη επεκτείνοντας την κλασική προτασιακή, κατηγορηματική και τροπική λογική.
- Να περιγράψει τους νόμους που διέπουν καθολικές οντότητες όπως οι ιδιότητες, οι σχέσεις και προτάσεις.
- Να ταυτοποιήσει τόσο τα θεωρητικά μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις όσο και τα φυσικά μαθηματικά αντικείμενα όπως οι φυσικοί αριθμοί και τα σύνολα.
- Να αναλύσει το διαχωρισμό μεταξύ γεγονότος και φανταστικού και να συστηματοποιήσει τις σχέσεις μεταξύ ιστοριών, χαρακτήρων και φανταστικών αντικειμένων.
- Να συστηματοποιήσει την τροπική λογική που διέπει την (επιστημονική) σκέψη για τις δυνατές καταστάσεις πραγμάτων και τους δυνατούς κόσμους. .
- Να θεμελιώσει φιλοσοφικά αντικείμενα που έχουν προταθεί από άλλους φιλοσόφους όπως οι Ιδέες του Πλάτωνα, οι μονάδες του Λάιμπνιτς, τα μη υπαρκτά αντικείμενα του Meinong, οι σημασίες του Frege κλπ.

3.3.1 Να περιγράψει την λογική που διέπει την (επιστημονική) σκέψη

Είτε είμαστε φυσικοί επιστήμονες είτε κριτικοί του πολιτισμού, είτε θεολόγοι οι σκέψεις μας έχουν κοινή λογική δομή και ανεξαρτήτως του θέματος για το οποίο επιχειρηματολογεί κάποιος , ένας ορθός συλλογισμός έχει την ίδια μορφή. Για παράδειγμα οι σκέψεις που εκφράζονται στις παρακάτω προτάσεις έχουν παρόμοια δομή. :

Η Λάρισα είναι μικρότερη από την Αθήνα.

Ο Γιώργος αγαπά την Μαίρη

3 > 2.

Ο Αχιλλέας πολέμησε τον Έκτορα.

Κάθε πρόταση έχει την ίδια λογική δομή: (1) η πρώτη και η τελευταία λέξη είναι ονόματα που αναφέρονται σε αντικείμενα, (2) οι λέξεις μεταξύ τους συναποτελούν κατηγόρημα που αναπαριστά μία σχέση, (3) όλη η πρόταση είναι μια βεβαίωση ότι τα αντικείμενα που υποδηλώνονται ικανοποιούν την σχέση που υποδηλώνεται. Η τρίτη πρόταση για παράδειγμα βεβαιώνει ότι το αντικείμενο που υποδηλώνεται με το όνομα '3' βρίσκεται σε σχέση μεγαλύτερο ή ίσο με το αντικείμενο που δηλώνεται με το όνομα '2'. Εν γένει , η σκέψη που εκφράζεται σε κάθε παράδειγμα έχει την εξής λογική δομή: τα αντικείμενα x και y (μ΄ αυτή την σειρά) ικανοποιούν την σχέση R. Η τυποποίηση τέτοιων προτάσεων γίνεται ως εξής : 'Rxy'. Προφανώς, υπάρχουν και σχέσεις τριών θέσεων όπως οι παρακάτω.

Ο x δίνει το y στον z.

Ο x βρίσκεται μεταξύ y και z.

Ο x διδάσκει το μάθημα y στο z

Η τυποποίηση τέτοιων προτάσεων γίνεται ως εξής : 'Rxyz'.

Επιπλέον, υπάρχουν σχέσεις μίας θέσης που καλούνται ιδιότητες.

Η x είναι πόλη

Ο x αγαπά την Μαίρη

$3 > x$.

Ο x είναι πρώτος

Ο x έχει μάζα

Σε κάθε περίπτωση, το κατηγόρημα υποδηλώνει μία ιδιότητα που άλλα αντικείμενα ικανοποιούν και άλλα όχι. Κάποιοι αριθμοί ικανοποιούν την ιδιότητα 'είναι πρώτος', κάποιοι πάλι όχι. Τέλος, κάποιες από τις προτάσεις έχουν μορφή ταυτότητας. Στις προτάσεις αυτές δηλώνεται ότι δύο πράγματα ταυτίζονται.

$2 + 3 = 5$

Ο Σούπερμαν είναι ο Κλαρκ Κεντ.

Ο κεραυνός είναι ηλεκτρική εκκένωση.

$F = ma$

Στα πρώτα δύο παραδείγματα, ένα συγκεκριμένο αντικείμενο ταυτίζεται με ένα άλλο. Το τρίτο παράδειγμα, εκφράζει έναν φυσικό νόμο: η ασκούμενη δύναμη σ' ένα σώμα ισούται με το γινόμενο της μάζας του επί την επιτάχυνση του.

Η θεωρία των αφηρημένων αντικείμενων επεκτείνει την κλασική προτασιακή και την κατηγορηματική λογική αυτών των προτάσεων υπό το πρίσμα ότι οι σκέψεις μπορούν να αναλυθούν με όρους αντικειμένων που σχετίζονται με άλλα αντικείμενα, είτε με όρους αντικειμένων που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες, είτε με όρους ταυτότητας αντικειμένων, είτε με συνδυασμό των παραπάνω.

3.3.2 Να περιγράψει τους νόμους που διέπουν καθολικές οντότητες όπως οι ιδιότητες, οι σχέσεις και προτάσεις

Όταν αναπτύσσουμε, επιστημονικές ή μη, θεωρίες ή προβαίνουμε σε ισχυρισμούς σχετικά με τον κόσμο, κατατάσσουμε τα αντικείμενα σε ομάδες με βάση τις ομοιότητες τους. Λέμε , παραδείγματος χάριν ότι, τα σωματίδια x και y, παρότι είναι διαφορετικά , είναι και τα δύο ηλεκτρόνια ή ότι οι w και z, παρότι διαφορετικά πρόσωπα, είναι και οι δύο άνθρωποι ή ότι οι αριθμοί 2 και 7, παρότι διαφορετικοί, είναι και οι δύο πρώτοι. Πολλοί φιλόσοφοι και λογικοί (ξεκινώντας από τον Πλάτωνα) εξήγησαν τις κατηγοριοποιήσεις αυτές θεωρώντας ότι, σε κάθε περίπτωση, υπάρχει κάποια ιδιότητα την οποία μοιράζονται τα ζεύγη αντικειμένων. Στην πρώτη περίπτωση, οι w και z ικανοποιούν την ιδιότητα 'είναι homo sapiens', στη δεύτερη περίπτωση οι 2 και 7 ικανοποιούν την ιδιότητα 'είναι πρώτος' κλπ.

Στα Principia Metaphysica οι ιδιότητες αντιμετωπίζονται ως αυθύπαρκτες οντότητες. Αποτελούν κατά κάποιο τρόπο το κοινό χαρακτηριστικό που μπορούν να μοιράζονται διαφορετικά αντικείμενα.. Ο Πλάτων τις αποκαλούσε 'Ιδέες'. Οι ιδιότητες περιγράφονται από κατηγορήματα όπως 'είναι άνθρωπος', 'είναι ηλεκτρόνιο' και 'είναι πρώτος αριθμός', αλλά ενώ τα κατηγορήματα αποτελούν γλωσσικές εκφράσεις , οι ιδιότητες στις οποίες αναφέρονται είναι κάτι πιο αφηρημένο. Σκοπός της θεωρίας αφηρημένων αντικειμένων είναι η ανάπτυξη μίας θεωρίας κατηγοριών που απαντά σε ερωτήματα όπως "Κάτω από ποίες συνθήκες υπάρχουν ιδιότητες;" ,"Δηλώνει πάντα ένα κατηγόρημα μία ιδιότητα;" " Τα κατηγορήματα αποτυχημένων θεωριών όπως 'είναι φλωγιστόν' δηλώνουν ιδιότητες;" " Πότε δύο ιδιότητες ταυτίζονται;" κλπ.

3.3.3 Να ταυτοποιήσει τόσο τα θεωρητικά μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις όσο και τα φυσικά μαθηματικά αντικείμενα όπως οι φυσικοί αριθμοί και τα σύνολα

Τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ακόμα ένα είδος αντικειμένων που προϋποτίθεται στην επιστημονική σκέψη, αλλά δεν αποτελούν τμήμα του υλικού κόσμου. Τα μαθηματικά αντικείμενα , ωστόσο, παίζουν σημαντικό ρόλο στην επιστήμη· είναι μάλλον αδύνατο να κάνουμε επιστήμη χωρίς αυτά. Όταν αντιμετωπίζουμε τα μαθηματικά αντικείμενα όμως ως αυθύπαρκτες οντότητες, εγείρονται ποικίλα ερωτήματα. "Τί είναι αυτά;", "Ποια αντικείμενα είναι τέτοια;", "Περιγράφει κάθε συνεπής μαθηματική θεωρία ένα 'βασίλειο' αφηρημένων αντικειμένων;" "Τι γνώση μπορεί να έχουμε για τα αντικείμενα αυτά ενώ δεν αποτελούν μέρος του υλικού κόσμου;"

Τρίτος σκοπός της θεωρίας των αφηρημένων αντικείμενων είναι το να πει κάτι ακριβές για τα μαθηματικά αντικείμενα και να αναπτύξει συστηματικά την σχέση μεταξύ μαθηματικών θεωριών.

3.3.4 Να αναλύσει το διαχωρισμό μεταξύ γεγονότος και φανταστικού και να συστηματοποίησε τις σχέσεις μεταξύ ιστοριών, χαρακτήρων και φανταστικών αντικειμένων

Έχουμε διάφορες αληθείς πεποιθήσεις για αντικείμενα που ανήκουν στη σφαίρα της φαντασίας. Προκύπτει όμως το ερώτημα: Αν τέτοια αντικείμενα δεν υπάρχουν πως μπορούμε να έχουμε πεποιθήσεις σχετικά μ' αυτά; Ακολουθούν μερικά παραδείγματα πεποιθήσεων σχετικά με φανταστικά αντικείμενα.

- Ιστορικά γεγονότα:
  - Οι αρχαίοι Έλληνες πίστευαν στο Δία.
  - Ο Σέρλοκ Χολμς ακόμα εμπνέει τους εγκληματολόγους.
  - Ομάδες επιστημόνων έχουν ψάξει το τέρας του Λοχ Νες, αλλά αφού δεν υπάρχει, κανείς δεν το βρήκε.
- Κριτική της λογοτεχνίας:
  - Κάποιοι λογοτεχνικοί χαρακτήρες είναι ενδιαφέροντες γιατί ενώ βρίσκονται σε καταστάσεις στις οποίες μοιάζουν να επιλέγουν ταυτότητα, αποδεικνύεται τελικά ότι η επιλογή τους ήταν προκαθορισμένη από παράγοντες πέραν του δικού τους ελέγχου
- Αναφορές σε δικές μας εμπειρίες:
  - Ο Γιώργος κάνει σκέψεις για πράγματα που ποτέ δεν θα συμβούν.
  - Η Μαίρη τρόμαξε πολύ με το τέρας που είδε στο όνειρό της

Επιπλέον επιχειρηματολογούμε με έγκυρο τρόπο για μη υπαρκτά αντικείμενα:

> *Ο Αύγουστος πίστευε στο Δία. Ο Δίας είναι ένας μυθικός χαρακτήρας. Οι μυθικοί χαρακτήρες δεν υπάρχουν. Άρα, ο Αύγουστος πίστευε σε κάτι που δεν υπάρχει.*

Σκοπός της θεωρίας είναι να αναλύσει τέτοιες σκέψεις και συμπερασμούς. Αυτό απαιτεί έναν ορισμό της έννοιας της ιστορίας και του φανταστικού χαρακτήρα καθώς και τον καθορισμό των συνθηκών υπό τις οποίες μία πρόταση είναι αληθής σε μία ιστορία. Ο απλούστερος τρόπος να προχωρήσει κάποιος είναι να θεωρήσει ονόματα όπως "Δίας", ως ονόματα αφηρημένων αντικείμενων. Στόχος της θεωρίας είναι να πει κάτι ακριβές για το καθεστώς των αντικειμένων που υποδηλώνονται με τέτοια ονόματα[2].

3.3.5 Να συστηματοποιήσει την τροπική λογική που διέπει την (επιστημονική) σκέψη για δυνατές καταστάσεις πραγμάτων και τους δυνατούς κόσμους

Πολλές φορές σκεφτόμαστε εναλλακτικές καταστάσεις πραγμάτων που είναι δυνατές αλλά δεν έχουν ακόμα πραγματωθεί. Οι δυνατές καταστάσεις πραγμάτων διαφέρουν από τις φανταστικές αφηγήσεις. Οι φανταστικές αφηγήσεις απέχουν πολύ από το να είναι πλήρεις, ενώ τα δυνατά αντικείμενα είναι καθορισμένα με κάθε λεπτομέρεια (Υπάρχει μη αριθμήσιμο πλήθος ερωτημάτων για τον Sherlock Holmes, που μένουν αναπάντητα από τον Conan Doyle. Ο Sherlock Holmes, ως λογοτεχνικός χαρακτήρας, είναι ακαθόριστος ως προς αυτές τις λεπτομέρειες . Ως τέτοιος, δεν είναι δυνατό αντικείμενο). Η κατανόηση του τι είναι δυνατό και τι αναγκαίο προέρχεται από εκείνες τις πεποιθήσεις μας τα που έχουν την ακόλουθη μορφή:

- Είναι δυνατόν να...
- Δεν είναι δυνατόν να...
- Είναι αναγκαίο να...
- Δεν είναι αναγκαίο να...

Για παράδειγμα, είναι δυνατόν να ταξιδέψουν άνθρωποι στον Άρη· δεν είναι δυνατόν να ισχύει ότι 'Κάθε άνθρωπος είναι θνητός' και 'Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος' να είναι αληθής και ότι 'Ο Σωκράτης είναι θνητός ' να είναι ψευδής. Είναι κατ' ανάγκην αληθές ότι : "είτε βρέχει είτε δεν βρέχει εδώ και τώρα". Οι λογικοί ενδιαφέρονται για τις έννοιες της δυνατότητας και της αναγκαιότητας γιατί επιτρέπουν το χαρακτηρισμό των απαγωγών σε έγκυρες και μη έγκυρες: σε μία έγκυρη απαγωγή είναι αδύνατο οι προκείμενες να είναι αληθείς και το συμπέρασμα ψευδές.

Οι σύνδεσμοι 'είναι δυνατόν να' και 'είναι αναγκαίο να' ονομάζονται τροπικοί τελεστές. Οι λογική των τροπικών τελεστών μελετήθηκε συστηματικά πρώτα από τον Αριστοτέλη, αλλά η μελέτη της τροπικής λογικής άνθισε τον 20ο αιώνα. Ο Αριστοτέλης όρισε την αναγκαιότητα και τη δυνατότητα ως αλληλομεταφράσιμες έννοιες. Μία κατάσταση πραγμάτων 'p' είναι δυνατή αν και μόνον αν η άρνησή της 'όχι-p' δεν είναι αναγκαία. Αντίστοιχα, μία κατάσταση πραγμάτων είναι απαραίτητη αν και μόνον αν η άρνηση της δεν είναι δυνατή.

Επιπλέον, συμβολή του Αριστοτέλη στην τροπική λογική ήταν να δείξει ότι αν δύο γεγονότα p και q είναι δυνατά αυτό δεν σημαίνει ότι η σύζευξή τους 'p και q' είναι δυνατή. Αντίστοιχα, η πρόταση

[2] Ας σημειωθεί ότι η κλασική πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική, με την συνήθη σημασιολογία και θεωρία απόδειξης, είναι ακατάλληλη για γλώσσες που περιέχουν ονόματα φανταστικών αντικειμένων. Και τούτο γιατί κάθε χρήση ενός ονόματος (ατομικής σταθεράς) δεσμεύει σε έναν υπαρκτικό ισχυρισμό: η '$H\alpha$'(π.χ. 'Ο Πήγασος είναι φτερωτό άλογο') συνεπάγεται την "$\exists x\,(Gx\ x = \alpha)$"('Υπάρχει μια οντότητα που είναι φτερωτό άλογο και είναι ο Πήγασος')

'Απαραίτητα, p ή q' δεν σημαίνει 'αναγκαία p' ή 'αναγκαία q'. Είναι αναγκαίο, παραδείγματος χάριν, ότι 'είτε βρέχει είτε δεν βρέχει αλλά από αυτήν την πρόταση δεν ακολουθεί η 'αναγκαία βρέχει' ή 'αναγκαία δεν βρέχει'. Αυτό το συμπέρασμα της τροπικής λογικής έχει επαληθευτεί από πρόσφατες τεχνικές στις οποίες η πρόταση 'αναγκαία p' ερμηνεύεται ως : η p είναι αληθής σε κάθε δυνατό κόσμο. Μ ' αυτήν την ερμηνεία γίνεται κατανοητό πως από το γεγονός ότι η 'p ή όχι-p' είναι αληθής σε κάθε δυνατό κόσμο δεν παίρνουμε αναγκαία ότι είτε η p είναι αληθής σε κάθε κόσμο είτε ότι η όχι-p είναι αληθής σε κάθε δυνατό κόσμο.

Πέμπτος σκοπός της θεωρίας των αφηρημένων αντικείμενων είναι να τυποποιήσει τις έννοιες της δυνατότητας και της αναγκαιότητας βασιζόμενη στο σύστημα $S5$ της τροπικής λογικής.

3.3.6 Να αναπτύξει την λογική των προτασιακών στάσεων, να εξηγήσει το πληροφορικό περιεχόμενο των προτάσεων ταυτότητας και να πραγματευτεί, εν γένει, το αντικειμενικό και γνωσιακό περιεχόμενο της φυσικής γλώσσας

Ο Frege συνέβαλε σημαντικά στην φιλοσοφία της γλώσσας σημειώνοντας ότι το νόημα μιας πρότασης δεν εξαντλείται στις αναφορές των όρων που περιέχει [Freg48]. Έστω μία πρόταση της μορφής '$a = b$'. Μία πρόταση τέτοιας μορφής είναι αληθής αν και μόνον αν το αντικείμενο που δηλώνεται με το όνομα 'a' ταυτίζεται (είναι το ίδιο) μ ' αυτό που δηλώνει το όνομα 'b'. Η πρόταση 'Κλαρκ Κεντ = Σούπερμαν' είναι αληθής αν και μόνον αν το αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται το όνομα 'Κλαρκ Κεντ' είναι το ίδιο μ' αυτό στο οποίο αναφέρεται το όνομα 'Σούπερμαν'. Αφού υπάρχει μόνο ένας υπερήρωας με το όνομα 'Σούπερμαν' που μεταμορφώνεται σε 'Κλαρκ Κεντ' πρόταση είναι αληθές με μία απλοϊκή θεώρηση. Ο Frege επισήμανε ότι με μία τέτοια θεώρηση, η προηγούμενη πρόταση δεν διαφέρει ως προς τις συνθήκες αλήθειας σε σχέση με την πρόταση 'Κλαρκ Κεντ = Κλαρκ Κεντ'. Ο Frege επισήμανε ότι οι δύο αυτές προτάσεις δεν μπορούν να έχουν το ίδιο νόημα αφού, η πρόταση 'Κλαρκ Κέντ = Κλαρκ Κεντ' είναι *a priori αληθής* και κενή πληροφοριακού περιεχομένου, ενώ για την πρόταση 'Κλαρκ Κεντ $=$ Σούπερμαν' δεν συμβαίνει το ίδιο. Κανείς δεν μπορεί με απλή επισκόπηση να πει 'Κλαρκ Κεντ $=$ Σούπερμαν'.

Η εκτίμηση αληθοτιμής τέτοιων προτάσεων σχετίζεται με την γνώση, την πίστη, την επιθυμία του κάθε ατόμου σε σχέση με κάποια πρόταση ή, αλλιώς, την προτασιακή του στάση(*propositional attitude*) απέναντι σε μία πρόταση . Όταν περιγράφουμε την ψυχολογική στάση κάποιου ατόμου ως προς μια πρόταση, χρησιμοποιούμε προτάσεις όπως:

Ο x πιστεύει ότι p

Ο x επιθυμεί να p

Ο x επιδιώκει p

Ο x ανακάλυψε ότι p

Ο x γνωρίζει ότι p

Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα της εκτίμησης αληθοτιμής ισοτήτων όπως η 'Κλαρκ Κεντ $=$ Σούπερμαν' σχετίζεται με την ψυχολογική/ γνωσιακή στάση κάποιου ως προς μία ή περισσότερες προτάσεις. Έστω 'n' ένα όνομα που εμφανίζεται στην αληθή πρόταση S, και έστω η ισότητα '$n = m$' αληθής, τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το όνομα 'm' με το 'n' στην S χωρίς να επηρεάσουμε την αλήθεια της S. Έστω, παραδείγματος χάριν, S η πρόταση 'Ο Οδυσσέας Ελύτης ήταν ποιητής', έστω n το όνομα 'Οδυσσέας Ελύτης' και έστω 'm' το όνομα 'Οδυσσέας Αλεπουδέλης'. Τότε αφού η ισότητα 'Οδυσσέας Ελύτης $=$ Οδυσσέας Αλεπουδέλης' είναι αληθής, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το όνομα 'Οδυσσέας Αλεπουδέλης' με το όνομα 'Οδυσσέας Ελύτης' χωρίς να επηρεάσουμε την αλήθεια της πρότασης. Πράγματι, η πρόταση 'ο Οδυσσέας Αλεπουδέλης ήταν συγγραφέας' είναι αληθής. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, όταν λέμε κάτι αληθές για ένα αντικείμενο, τότε ακόμα και αν αλλάξουμε το όνομα του μέσα στην αληθή πρόταση, συνεχίζουμε να λέμε κάτι αληθές για το ίδιο αντικείμενο. Ακολουθώντας την ίδια αρχή, έστω 'S' η πρόταση 'Ο Σούπερμαν πετάει' , με 'n' το όνομα 'Σούπερμαν' και 'm' το όνομα 'Κλαρκ Κεντ', τότε δοθέντος ότι 'Σούπερμαν = Κλαρκ Κεντ', μπορούμε να πούμε ότι η πρόταση 'ο Κλαρκ Κεντ πετάει' είναι αληθής.

Έστω, όμως, S η ακόλουθη πρόταση:

a. Η Λόις Λέιν πιστεύει ότι ο Σούπερμαν πετάει.

Αν αντικαταστήσουμε το όνομα 'Σούπερμαν' με το όνομα 'Κλαρκ Κεντ' εδώ, προκύπτει η (b):

b. Η Λόις Λέιν πιστεύει ότι ο Κλαρκ Κεντ πετάει.

Η (b) είναι προφανώς ψευδής. Η Λόις Λέιν δεν έχει τέτοια πίστη. Οπότε η αρχή της αντικατάστασης παρουσιάζει προβλήματα.

Προκειμένου να λύσει το πρόβλημα, ο Frege υποστήριξε ότι τα ονόματα εκτός από υποδηλωτικό/αναφορικό έχουν και άλλου τύπου νόημα, που το ονόμασε "σημασία". Μπορούμε εναλλακτικά να λέμε την "σημασία" που φέρει ένα όνομα "γνωσιακό περιεχόμενο" σε αντίθεση με το "αντικειμενικό' περιεχόμενο που υποδηλώνει. Έκτος σκοπός της θεωρίας αφηρημένων αντικείμενων είναι να συστηματοποιήσει τις προτασιακές αναφορές με βάση τη διάκριση στο περιεχόμενο επιτρέποντας στο "γνωσιακό περιεχόμενο' των προτάσεων να επηρεάζει την λογική τους ανάλυση.

3.3.7 Να συστηματοποιήσει φιλοσοφικά αντικείμενα που έχουν προταθεί από διάφορους φιλοσόφους

Ανά τους αιώνες, οι φιλόσοφοι ορίζουν αφηρημένα αντικείμενα. Ο Πλάτων μίλησε για Ιδέες, ο Λάιμπνιτς για μονάδες και πολλαπλούς κόσμους, ο Frege μίλησε για σημασίες, έννοιες, και εκτάσεις εννοιών, ο Meinong μίλησε για μη υπαρκτά αντικείμενα, ο Husserl για νοήματα, ο πρώιμος Wittgenstein για καταστάσεις πραγμάτων κλπ. Για μία συστηματική πραγμάτευση αυτών των αντικειμένων, είναι απαραίτητο να οριστούν επακριβώς, να δειχθεί ότι υπάρχουν αντικείμενα που υπάγονται σ' αυτόν τον ορισμό και να ότι τα αντικείμενα αυτά υπακούουν στις αρχές που συνδέονται μ' αυτού του τύπου τα αντικείμενα. Παραδείγματος χάριν , θα πρέπει κάποιος να ορίσει το αντικείμενο πιθανός κόσμος, να δείξει ότι υπάρχουν τέτοια αντικείμενα και ότι υπακούν στις αρχές τροπικότητας. Η κατασκευή τέτοιον ορισμών είναι ένας από τους σκοπούς τις θεωρίας.

3.4 Η διάκριση που διέπει τη Θεωρία

Η θεωρία βασίζεται στην ιδέα του Ernst Mally για διάκριση μεταξύ της πραγμάτωσης (*απείκασμα σε πλατωνικούς όρους*) μίας ιδιότητας και της κωδικοποίησης της[Mall12]. Αυτή η διάκριση μεταξύ δύο τρόπων κατηγόρησης (*modes of predication*) παρουσιάζεται φορμαλιστικά ως εξής: 'Fx' (το x πραγματώνει την F) και 'xF ' (το x κωδικοποιεί την F). Η φόρμουλα 'Fx' αντιπροσωπεύει τον κλασικό τρόπο κατηγόρησης και χρησιμοποιείται για την ανάλυση προτάσεων όπως 'Ο Χέγκελ ήταν φιλόσοφος', "Ο Ομπάμα είναι πρόεδρος". Η συμβολή του Mally στην λογική ήταν η ιδέα του ότι δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε προτάσεις για αφηρημένα, ενδεχομένως φανταστικά, αντικείμενα με τον ίδιο τρόπο που μιλάμε για φυσικά αντικείμενα. Οι προτάσεις 'Ο Σέρλοκ Χολμς είναι ντετέκτιβ' , 'Ο Πήγασος έχει φτερά', ο 'Κόρτο Μαλτέζε είναι ναυτικός' δεν μπορούν να αναπαρασταθούν με τον τύπο 'Fx' (μόνα τα πραγματικά αντικείμενα πραγματώνουν(*exemplify*) κατηγορίες όπως 'είναι ντετέκτιβ', 'έχει φτερά', 'είναι ναυτικός'). Ο Mally, γι' αυτό τον λόγο, υποστήριξε έναν δεύτερο τρόπο κατηγόρησης που να επιτρέπει μια έννοια 'είναι' και 'έχει' για αφηρημένα αντικείμενα. Εισήγαγε την έννοια 'το x κωδικοποιεί την F' ως καταλληλότερη για την λογική ανάλυση προτάσεων σχετικών με φανταστικά ή αφηρημένα αντικείμενα. Έτσι, ενώ ο πραγματικός ντετέκτιβ Πίνκερτον πραγματώνει την ιδιότητα 'είναι ντετέκτιβ ('Dp') , ο Σέρλοκ Χολμς κωδικοποιεί την ίδια ιδιότητα ('hD'). Η ιδέα του Mally επεκτείνεται σε αφηρημένα αντικείμενα, όπως αριθμοί, σύνολα, δυνατοί κόσμοι. Η ιδέα της κωδικοποίησης παρέχει την δυνατότητα για εξατομίκευση αφηρημένων αντικειμένων παρόλο που αυτά δεν έχουν χωροχρονική διάσταση. Οι ιδιότητες που κωδικοποιεί ένα αντικείμενο είναι μέρος της εσώτερης φύσης του και έχουν μεγαλύτερη σημασία από τις ιδιότητες που μπορεί να πραγματώνει.

3.4.1 Πραγμάτωση και πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική

Η διάκριση του Mally, όπως προαναφέραμε, παρουσιάζεται στη θεωρία ως διάκριση στους τύπους 'Fx' ('ο x πραγματώνει την F')και 'xF' ('ο x κωδικοποιεί την F'). Ο τύπος 'Fx' είναι γνωστός από την πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική όπου, τον χρησιμοποιούμε για την αναπαράσταση προτάσεων όπως 'Ο Γιάννης είναι χαρούμενος'. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, υποθέτουμε ότι το κατηγόρημα 'F' δηλώνει ιδιότητα και ότι ο όρος 'x' δηλώνει αντικείμενο. Ο συμβολισμός 'Fx' εκφράζει το γεγονός ότι το 'x' είναι παράδειγμα της F(x *exemplifies* F). Η πραγμάτωση, ως τρόπος κατηγόρησης, μπορεί να γενικευτεί για περισσότερα αντικείμενα σε σχέσεις με περισσότερες θέσεις, 'Rxy'. Παραδείγματα τέτοιων προτάσεων είναι 'Ο Γιάννης αγαπά την Μαρία', ('Ljm'), 'ο Ομπάμα συνάντησε τον Πούτιν' ('Mp'), κλπ. Αντίστοιχα, τα αντικείμενα x, y, και z πραγματώνουν την σχέση τριών θέσεων R, και γράφουμε '$Rxyz$'.

3.4.2 Η κωδικοποίηση επεκτείνει την πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική: Ένα παράδειγμα

Η θεωρία αφηρημένων αντικειμένων επεκτείνει την κλασσική πρωτοβάθμια κατηγορηματική λογική προσθέτοντας την λογική της κωδικοποίησης. Λέμε ότι ένα αφηρημένο αντικείμενο κωδικοποιεί την ιδιότητα F και γράφουμε συμβολικά 'xF'. Αυτός ο τρόπος κατηγόρησης είναι πιο κατάλληλος για κατηγορήματα που αποδίδονται σε αφηρημένα ή φανταστικά αντικείμενα. Χρησιμοποιούμε για παράδειγμα την ιδιότητα 'είναι ντετέκτιβ, για να χαρακτηρίσουμε τον Σέρλοκ Χολμς και να τα τον διαχωρίσουμε από άλλους φανταστικούς χαρακτήρες. Ο Χολμς, όμως, δεν πραγματώνει την ιδιότητα 'είναι ντετέκτιβ. Ο Mally θεωρούσε ότι για να πραγματώνει ένα αντικείμενο ιδιότητες όπως 'είναι ντετέκτιβ πρέπει να έχει χωροχρονική υπόσταση, σώμα, σχήμα, μάζα κλπ. Τίποτα απ' αυτά δεν ισχύει για το Χολμς. Ο Mally θα ανέλυε την πρόταση 'ο Χολμς είναι ντετέκτιβ' ως: ο Χολμς κωδικοποιεί την ιδιότητα 'είναι ντετέκτιβ'. Φορμαλιστικά , γράφουμε 'hD' αντί για 'Dh'. Η ίδια ανάλυση ισχύει και για άλλες ιδιότητες αναφορικά με το Χολμς όπως 'ζει στο Λονδίνο', 'εξιχνιάζει εγκλήματα', 'έχει φίλο το Γουάτσον' κλπ, και εν γένει για όλες τις ιδιότητες που καθορίζουν το Χολμς ως αντικείμενο και τον διαφοροποιούν από άλλα αφηρημένα αντικείμενα. Επιπλέον, όμως, ο Χολμς , πραγματώνει ιδιότητες όπως: 'είναι απαύγασμα της σκέψης του Κόναν Ντόυλ', πραγματώνει την ιδιότητα 'είναι φανταστικός', την ιδιότητα 'δεν είναι ντετέκτιβ (αφού είναι αφηρημένο αντικείμενο), κλπ.

Η λογική της κωδικοποίησης επεκτείνει την πρωτοβάθμια λογική γιατί είναι συνεπής με, και προϋποθέτει, όλους τους νόμους της κλασικής λογικής. Παραδείγματος χάριν, προϋποθέτει ότι, για κάθε αντικείμενο x και κάθε ιδιότητα F, το x είτε πραγματώνει την F είτε την άρνηση της F. Ωστόσο, αυτή η αρχή δεν διέπει την κωδικοποίηση. Για παράδειγμα, δεν γνωρίζουμε αν ο Χολμς έχει ελιά στο δεξί του πόδι. Έτσι, στη θεωρία επιτρέπεται ο Χολμς μην κωδικοποιεί την ιδιότητα ' έχει ελιά στο δεξί πόδι' αλλά επίσης να μην κωδικοποιεί ούτε την ιδιότητα και την ιδιότητα ' δεν έχει ελιά στο δεξί πόδι'. Κατ' αυτό τον τρόπο η Λογική της Κωδικοποίησης επεκτείνει και διατηρεί την κλασική λογική πρώτου βαθμού.

3.4.3 Δύο ακόμη παραδείγματα

Ένας ακόμη τρόπος να εξετάσουμε την έννοια της κωδικοποίησης είναι να σκεφτούμε το περιεχόμενο φανταστικών εικόνων που μπορεί να έχουμε. Έστω η εικόνα που έχω για τον νεαρό Μαρξ. Στη δική μου εικόνα ο νεαρός Μαρξ είχε μούσι, θαύμαζε το Χέγκελ και δούλευε ως συντάκτης σε εφημερίδα. Η ιδιότητα ‘θαυμάζει το Χέγκελ’ είναι απαραίτητη για την νοητική εικόνα που έχω για τον νεαρό Μαρξ – χωρίς αυτήν το νοητικό της περιεχόμενο αλλάζει. Παρόλο που το νοητικό περιεχόμενο δεν πραγματώνει αυτήν την ιδιότητα (ως αφηρημένο αντικείμενο), μπορούμε να πούμε ότι η εικόνα που έχω για τον νεαρό Μαρξ κωδικοποιεί την ιδιότητα ‘θαυμάζει το Χέγκελ’. Όταν ονειρευόμαστε ένα τέρας , δεν υπάρχει κάποιο αντικείμενο που να πραγματώνει την ιδιότητα ’είναι τέρας’. Παρόλα αυτά, μπορούμε να περιγράψουμε την εμπειρία μας επακριβώς λέγοντας ότι είδαμε κάποιου είδους αντικείμενο και ότι αυτό το αντικείμενο ήταν, κατά κάποιο τρόπο τέρας. Μπορούμε να εκφράσουμε την τρομακτική εμπειρία μας, χρησιμοποιώντας την κωδικοποίηση. Εν γένει, προτάσεις της φυσικής γλώσσας της μορφής ‘το x είναι F ’ είναι αμφίσημες. Μπορούν να γραφτούν τυπικά με δύο τρόπους είτε ‘Fx’ (το x πραγματώνει την F) είτε ως ‘xF’ (το x κωδικοποιεί την F).

3.4.4 Επεκτείνοντας τις ιδέες του Mally

Οι ιδέες του Mally μπορούν να επεκταθούν σε κάθε αφηρημένο αντικείμενο Ενώ η ταυτότητα ενός συνήθους αντικειμένου στοιχειοθετείται στη θέση του στο χωροχρόνο, η ταυτότητα ενός αφηρημένου αντικειμένου στοιχειοθετείται διαφορετικά, αφού τα αφηρημένα αντικείμενα δεν έχουν χωροχρονική διάσταση. Η κωδικοποίηση παρέχει τα μέσα με τα οποία ένα αφηρημένο αντικείμενο στοιχειοθετείται με βάση τις ιδιότητες που κωδικοποιεί. Η θεωρία βεβαιώνει ότι για κάθε σύνολο ιδιοτήτων υπάρχει ένα αφηρημένο αντικείμενο που την κωδικοποιεί. Μερικά παραδείγματα:

- Μπορούμε να σκεφτούμε τους φυσικούς αριθμούς ως αφηρημένα αντικείμενα τα οποία κωδικοποιούν απλά τις ιδιότητες που τους αποδίδονται στην αριθμητική Peano. Με αυτό το σύνολο ιδιοτήτων συλλαμβάνουμε και ταυτοποιούμε τους φυσικούς αριθμούς, και έτσι η θεωρία αντιμετωπίζει τις ιδιότητες αυτές ως τις ιδιότητες που αυτοί οι αριθμοί κωδικοποιούν.

- Μπορούμε να σκεφτούμε κάθε αντικείμενο x μίας θεωρίας T ως αφηρημένο αντικείμενο που κωδικοποιεί μόνο τις ιδιότητες που του δίνονται από τη θεωρία T.

- Μπορούμε να σκεφτούμε τους δυνατούς κόσμους ως αφηρημένα αντικείμενα. Ο πραγματικός κόσμος για παράδειγμα ταυτίζεται ταυτίζεται με το αφηρημένο αντικείμενο που κωδικοποιεί ακριβώς όλες τις ιδιότητες της μορφής ‘είναι τέτοιο ώστε να ισχύει p’, όπου p αληθής πρόταση.

.

Κεφάλαιο 4

Η θεωρία και η κωδικοποίηση

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη Θεωρία Αφηρημένων Αντικειμένων παράλληλα με την κωδικοποίηση της σε Isabelle/HOL. Η Θεωρία Αφηρημένων Αντικειμένων, γνωστή και ως Principia Metaphysica (στο εξής PM), είναι μία φορμαλιστική θεωρία που επεκτείνει την γλώσσα της τροπικής λογικής (συγκεκριμένα του τροπικού συστήματος $S5$ [Hugh96]) για να συμπεριλάβει αφηρημένα αντικείμενα και να εκφράσει δύο διαφορετικούς τρόπους κατηγόρησης όπως περιγράψαμε στο 3.4. Θα παρουσιάσουμε τη γλώσσα της θεωρίας, τα αξιώματα, την μεταθεωρία και βασικά θεωρήματα μαζί με την κωδικοποίηση τους σε Isabelle/HOL..

4.1 Η γλώσσα του PM

PM (1) Ορισμός *Τύποι και όροι.*
Ένας *τύπος* (*formula*) μπορεί να είναι ατομικός ή σύνθετος. Ένας *όρος* μπορεί να είναι απλός όρος ή σύνθετος όρος. .

PM (2) Ορισμός *Απλοί όροι.*
Οι *απλοί* όροι της γλώσσας είναι:

1. Ονόματα αντικειμένων: $a, b, c, \ldots$
2. Μεταβλητές αντικειμένων: $x, y, z \ldots$
3. Σχεσιακά n-θέσια ονόματα ($n \geq 0$): $P^n, Q^n, R^n, \ldots$
4. Σχεσιακές n-θέσιες μεταβλητές ($n \geq 0$): $F^n, G^n, H^n, \ldots$

Χρησιμοποιούμε τα $p, q, r, \cdots$ ως συντομεύσεις για 0-θέσιες σχεσιακές μεταβλητές. Όταν $n = 0$, λέμε ότι τα σχεσιακά ονόματα υποδηλώνουν, και οι σχεσιακές μεταβλητές έχουν ως πεδίο, *προτάσεις*Έτσι οι μεταβλητές p, q, r αναφέρονται σε προτάσεις Όταν $n = 1$, λέμε ότι τα σχεσιακά ονόματα δηλώνουν, και οι σχεσιακές μεταβλητές αναφέρονται σε, *ιδιότητες*.

Επιπλέον το όνομα $E!$ είναι διακεκριμένο:

Διακεκριμένο 1 θέσιο σχεσιακό όνομα: $E!$

Προς το παρόν, μπορούμε να σκεφτούμε ότι το κατηγόρημα $E!$ υποδηλώνει την ιδιότητα 'είναι συγκεκριμένο αντικείμενο'. Όπως θα δούμε, τα 'αφηρημένα' αντικείμενα θα οριστούν ως εκείνα που δεν μπορούν να είναι συγκεκριμένα (χωροχρονικά) αντικείμενα.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Το βασικό σύστημα τύπων στην κωδικοποίηση μας φαίνεται παρακάτω. Ο τύπος(*type*) `frm` αντιστοχεί στους τύπους (*formulae*), ο τύπος `trm` αντιστοιχεί στους όρους, ενώ οι τύποι των όρων είναι αντικείμενα `ind` ή σχέσεις `rel nat`:

```
typedecl trm
typedecl frm

datatype pmt =
    ind
  | rel nat
```

Τα ονόματα των όρων κατασκευάζονται σε Isabelle/HOL ως εξής:

```
  nam :: string ⇒ pmt ⇒ trm
```

```
constdefs name :: trm ⇒ pmt ⇒ bool
  name α t ≡ ∃s. α = nam s t
```

Το διακεκριμένο όνομα ιδιότητας $E!$ εισάγεται ως εξής:

```
defs
  pmErel_def: pmErel ≡ nam ''E!'' (rel 1)
```

Σημειώνουμε ότι οι λογικοί τελεστες και οι ποσοδείκτες που χρησιμοποιούνται στους ορισμούς είναι σύμβολα της λογικής τους Isabelle/HOL. Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα αυτά μεταθεωρητικά και δεν πρέπει να ταυτίζονται με την λογική των PM τα οποία κωδικοποιούνται παρακάτω. Σε εκφράσεις όπου υπάρχει αμφισημία, οι γλώσσικες εκφράσεις του PM τοποθετούνται μεταξύ (| |).

PM (3) Ορισμός *Ατομικοί τύποι.*
Έστω Π^n κάποια n-θέσια σχέση $\mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_n$ όροι αντικειμένων. Μπορούμε να ορίσουμε τους ατομικούς τύπους της πραγμάτωσης (*atomic exemplification*) και της κωδικοποίησης (*atomic encoding*) ως εξής:

1. Ατομικοί Τύποι Πραγμάτωσης ($n \geq 0$): $\Pi^n \mu_1 \ldots \mu_n$
   - (διαβάζουμε : τα αντικείμενα $\mu_1 \ldots \mu_n$ *πραγματώνουν* την σχέση Π^n)
2. Ατομικοί Τύποι Κωδικοποίησης: $\mu\Pi^1$
   - (διαβάζουμε : το αντικείμενο μ *κωδικοποιεί* την ιδιότητα Π^1

Από δω και πέρα, σταματάμε να αναφέρουμε ρητά τον αριθμό-όρισμα των κατηγορημάτων αφού υπονοείται από τον αριθμό των ατομικών όρων που το συνοδεύουν. Μπορούμε να σκεφτούμε τύπους όπως οι Fx και xF ως εκφράσεις δύο τρόπων κατηγόρησης Σημειώνουμε επιπλέον ότι οι για $n = 0$ οι απλές μεταβλητές $F^0, G^0, \ldots$ είναι ατομικοί τύποι πραγμάτωσης. Συνεπώς, αφού όπως προαναφέραμε χρησιμοποιούμε τα $p, q, r, \ldots$ ως συντομεύσεις για 0-θέσιες σχεσιακές μεταβλητές (‘$F^0, G^0, \ldots$’), οι εκφράσεις $p, q, \ldots$ είναι ταυτόχρονα και μεταβλητές και τύποι.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Η κωδικοποίηση σε Isabelle/HOL των τύπων πραγμάτωσης και κωδικοποίησης φαίνεται παρακάτω. Η κωδικοποιήση (`pmEnc`) (για συντομογραφία έχει οριστεί στο συντακτικό το σύμβολο `$`) όρίζεται ώς 2-θέσια συνάρτηση με ορίσματα όρους (`trm`),που επιστρέφει τύπο `frm`. Η πραγμάτωση (`pmExm`)(σε συντομογραφία ⌑) όρίζεται ώς 2-θέσια συνάρτηση με έναν όρο (`trm`) και μία λίστα όρων (`trm list`). Γράφουμε `x$F` για την κωδικοποίηση της F από το αντικείμενο x και π.χ `F⌑⟦x y z⟧` (ή συντακτικά ισοδύναμα όπως έχουμε ορίσει `F·x·y·z`) για την πραγμάτωση της 3-θέσιας σχέσης F απο τα x, y, z. Σημειώνουμε ότι εδώ παρουσιάζονται απλά οι τύποι των συναρτήσεων που υλοποιούν τους δύο τρόπους κατηγόρησης. Καμία αναφορά στον καλό σχηματισμό των τύπων αυτών δεν έχει γίνει (συγκεκριμένα π.χ για την κωδικοποιήση, ότι δέχεται έναν όρο αντικείμενο και ένα μονοθέσιο κατηγόρημα). Οι περιορισμοί καλού σχηματισμού προστίθενται στην συνέχεια.

```
pmExm :: trm ⇒ trm list ⇒ frm
pmEnc :: trm ⇒ trm ⇒ frm
```

PM (4) Ορισμός *Σύνθετοι Τύποι και Σύνθετοι όροι*
Έστω α, β μεταβλητές με πεδίο αυτό των μεταβλητών. Ορίζουμε τους παρακάτω σύνθετους τύπους και όρους:

1. Σύνθετοι Τύποι: $(\neg\varphi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall\alpha(\varphi)$, $(\Box\varphi)$, $(\mathcal{A}\varphi)$
2. Σύνθετοι Ατομικοί Όροι: $\iota\nu(\varphi)$, για κάθε τύπο φ και ν κάποια ατομική μεταβλητή που μπορεί να εμφανίζεται ή όχι στο φ.
3. Σύνθετοι Σχεσιακοί Όροι n θέσεων: $[\lambda\nu_1\nu_2\ldots\varphi]$, όπου $n \geq 0$, οι ν_i μεταβλητές αντικειμένων που μπορεί να εμφανίζονται ή να μην εμφανίζονται ελεύθερες στη φ, και η φ δεν περιέχει κωδικοποίηση ως υποτύπο[1]

Αμελούμε τις παρενθέσεις όταν δεν υπάρχει αμφισημία. Διαβάζουμε το $\neg\varphi$ ως 'δεν ισχύει ότι φ', το $\varphi \to \psi$ ως 'αν φ, τότε ψ', το $\forall\alpha\varphi$ ως 'κάθε α είναι τέτοιο ώστε φ', το $\Box\varphi$ ως 'κατ' ανάγκην φ', και το $\mathcal{A}\varphi$ ως 'πράγματι ισχύει φ'. Ένα λ-κατηγόρημα όπως το $[\lambda\nu_1\nu_2\ldots\varphi]$ είναι μία σύνθετη σχέση n θέσεων και διαβάζεται 'είναι $x_1\ldots x_n$ τέτοια ώστε φ'. Ο όρος $\iota\nu(\varphi)$ είναι μία *οριστική περιγραφή* (definite description) και διαβάζεται 'το αντικείμενο για το οποίο ισχύει φ'.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Οι σύνθετοι τύποι και όροι κωδικοποιούνται σε Isabelle/HOL ως εξής:

- Σύνθετοι Τύποι : Λογικοί Τελεστές

  ```
  consts
    pmNot :: frm ⇒ frm
    pmImp :: frm ⇒ frm ⇒ frm
    pmAll :: pmt ⇒ (trm ⇒ frm) ⇒ frm
    pmBox :: frm ⇒ frm
    pmAct :: frm ⇒ frm
  ```

- Σύνθετοι Όροι: Οριστικές Περιγραφές
  Οι οριστικές περιγραφές ορίζονται ως εξής:

  ```
  consts
    pmThe :: (trm ⇒ frm) ⇒ trm
  ```

- Σύνθετοι Όροι: λάμδα
  Ο κατασκευαστής λάμδα όρων `pmLam` έχει όρισμα με τύπο `func`.(*ψευδολάμδα*)

  ```
  datatype func =
      fgrn frm
    | fpar trm ⇒ func

  consts
    pmLam :: func ⇒ trm
  ```

Αξίζει να σημειωθεί ότι ενώ σε μία πρώτη προέγγιση, η ταύτιση των λάμδα όρων της PM με τα λάμδα του Isabelle/HOL (στο εξής θα συμβολίζονται με το πρόθεμα '%') φαίνεται εύλογη αν τηρήσουμε τους περιοσριμούς ως προς τους τύπους που εμφανίζονται στο σώμα των λαμβδα (να μήν περιέχουν κωδικοποιήση). Φαίνεται λογικό να ταυτίσουμε ευθέως την λάμδα αφαίρεση που παρέχει το Isabelle/HOL με την αντίστοιχη του PM. Σ' αυτήν την περίπτωση, θα είχαμε π.χ, το λάμδα όρο `να` αναπαριστά ένα 2-θέσιο λ -κατηγόρημα. Μία τέτοια "ρηχή" κωδικοποιήση των λάμδα όρων αντιμετωπίζει το εξής πρόβλημα. Στο HOAS (*Higher Order Abstract Syntax*), τύποι όπως, π.χ, ο

[1] βλέπε το **PM (7)**

```
( %y. (| ¬ R·y· (ι x. G ·x)|))z
```

και ο

```
(| ¬ R·z· (ι x. G · x)|)
```

ταυτίζονται (λόγω *Curry-ing*) ενώ δεν ταυτίζονται στο PM (βλέπε PM (20)). Έτσι, σε μία τέτοια "ρηχή" κωδικοποίηση των λάμδα θα ανταλλάσονταν σε εκφράσεις δημιουργώντας ασυνέπειες.

Προκειμένου να ελέγξουμε την β-αναγωγή όπως παρουσιάζεται στο PM (λ-*μετατροπή*) αλλά και για να διατηρήσουμε 0-θέσια λ-κατηγορήματα όπως επιβάλλεται απο τη γλώσσα της λογικής του PM επιλέγουμε την 'βαθιά' κωδικοποίηση που παρουσιάζεται εδώ. Ενθυλακώνουμε τα Isabelle/HOL λαμβδα στον τύπο `func`. Η κατασκευή λάμδα όρων γίνεται π.χ.

```
pmLam (fpar (%z. (fpar (%y. fgrn (| ¬ R·y· (ι x. G· x)|)))))
```

ή συντομευμένα (με πιό ευανάγνωστη σύνταξη):

```
(| λz y. ¬ R·y· (ι x. G · x)|)
```

Η "βαθιά" κωδικοποίηση επιτρέπει να έχουμε 0-θέσια λ-κατηγορήματα που κατασκευάζονται ως εξής:

```
pmLam (fgrn (| F·y|))
```

ή συντομευμένα (με πιό ευανάγνωστη σύνταξη):

```
(|λ . F·y |)
```

Με αυτόν τον τρόπο η κωδικοποίηση μας περιλαμβάνει εκφράσεις όπως 'ό,τι το x είναι (πραγματώνει την) F'.

Τα Isabelle λάμδα όπως το `( %y. (| ¬ R·y· (ι x. G ·x)|))` (με τύπο `'a ⇒ frm`), αν και δεν είναι όροι της κωδικοποιημένης θεωρίας και διακρίνονται από τα κωδικοποιημένα λάμδα, έχουν σημαντική μεταθεωρητικη αξία. Χρησιμοποιούνται μεταθεωρητικά για την αντικατάσταση(*substitution*) μεταβλητών απο όρους μέσα σε τύπους(`frm`) του PM. Η αντικατάσταση που περιγράφεται στην PM, πραγματοποιείται ουσιαστικά με β-αναγωγή σε Isabelle/HOL λάμδα απαλάσσοντας μας από το να δημιουργήσουμε μεταθεωρητικές συναρτήσεις αντικατάστασης(*substitution functions*) όρων σε τύπους του κωδικοποιημένου PM. Η χρήση αυτή παρουσιάζεται με ένα παράδειγμα.

Οπως αποδεικνύουμε παρακάτω(PM (28)), ισχύει ο κανόνας της Καθολικής Αντικατάστασης ή Απαλοιφής του Καθολικού Ποσοδείκτη (*Universal Instantiation*) που παρουσιάζεται εδώ χωρίς απόδειξη κωδικοποιημένος σε Isabelle/HOL:

```
theorem Universal_In_Rule:
  assumes name τ t
  shows $Γ;∀ α: t. φ α ⊢* φ τ
```

Ένα στιγμιότυπο του κανόνα αυτού είναι προφανώς:

```
theorem Universal_In_Rule_Usage:
  assumes name P (rel 1)
  shows ; ∀F: (rel 1). x$F ⊢* x$P
using prems Universal_In_Rule by auto
```

όπου δείχνεται ότι για το όνομα ιδιότητας `P` και με την προκείμενη ότι `∀F: (rel 1). x$F` αποδεικνύεται ότι `x$P`.

Για την πραγμάτοποιήση της (τετριμμενης) αυτής απόδειξης, η μέθοδος `auto`, μεταξύ άλλων πραγματοποιεί ενοποίηση της μεταβλητής φ με το (μεταθεωρητικό) Isabelle λάμδα `(%F. (| x$F |) )` την ενοποίηση της τ με το όνομα `P`, και την εφαρμογή `((%F. (| x$F |) ) P)`. Βλέπουμε ότι, σε αντίθεση με τους κωδικοποιημένους λ όρους της θεωρίας- αντικείμενο PM (*object theory*), τα μεταθεωρητικά Isabelle/HOL λάμδα περιέχουν στο σώμα τους τύπους που μπορεί να έχουν κωδικοποίηση ως υποτύπο. Με αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται η αντικατάσταση (*substitution*) *και* σε αυτό το υποσύνολο τύπων της θεωρίας-αντικείμενο. Εκτός απο την χρήση των μεταθεωρητικών λάμδα και της μεταθεωρητικής β-αναγωγής για αντικατάσταση, θα δούμε παρακάτω πως τα Isabelle λαμδα χρησιμευουν για την κωδικοποίηση της αρχής της λ-μετατροπής δηλαδή της πραγμάτωσης (*exemplification*) σε καλοσχηματισμένους (το σώμα τους δεν έχει κωδικοποίηση ως υποτύπο) λάμδα όρους που δεν περιέχουν περιγραφές.

PM (5) Ορισμός *Συμβάσεις στο συμβολισμό*
Χρησιμοποιούμε τους συνήθεις ορισμούς για τους λογικούς συνδέσμους [Mend97] $\varphi \wedge \psi$ (‘φ και ψ’), $\varphi \vee \psi$ (‘φ ή ψ’), $\varphi \equiv \psi$ (‘φ αν και μόνον αν ψ’), $\exists \alpha \varphi$ (‘υπάρχει α τέτοιο ώστε φ’), και $\Diamond \varphi$ (‘είναι δυνατόν φ’). Έστω τ μεταβλητή όρων (δηλαδή το τ μπορεί να είναι όνομα ή μεταβλητή αντικειμένου, σχεσιακό όνομα ή σχεσιακή μεταβλητή,οριστική περιγραφή, και λ-κατηγόρημα. Ακολουθούμε τον συνήθη ορισμό για τις *ελεύθερες μεταβλητές* και τον συνήθη ορισμό της *αντικαταστασιμότητας*[Mend97] του όρου τ,για την μεταβλητή α. Με βάση αυτές τις έννοιες, η φ^{τ}_{α} είναι το αποτέλεσμα της αντικατάστασης της α από τον όρο τ στον τύπο φ. Αντίστοιχα, η έκφραση $\varphi^{x_1,\ldots,x_n}_{y_1,\ldots,y_n}$ είναι το αποτέλεσμα της αντικατάστασης των x_i από τα y_i παντού στον τύπο φ. Επιπλέον χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\varphi(\alpha, \beta)$ για να αναπαραστήσουμε την αντικατάσταση μία ή περισσοτέρων εμφανίσεων της α από τη β στον φ. Τέλος, αν ο τ είναι είτε οριστική περιγραφή είτε ένας σύνθετος όρος στον εμφανίζεται οριστική περιγραφή λέμε ότι ο τ *περιέχει* οριστική περιγραφή, αλλιώς λέμε ότι ο τ είναι *ελεύθερος από περιγραφές*(*free of definite descriptions*).

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Κωδικοποιούμε τους παράγωγους λογικούς τελεστές σε Isabelle/HOL:

```
consts
  pmAnd :: frm ⇒ frm ⇒ frm
  pmOr  :: frm ⇒ frm ⇒ frm
  pmEqu :: frm ⇒ frm ⇒ frm
  pmEx  :: pmt ⇒ (trm ⇒ frm) ⇒ frm
  pmDia :: frm ⇒ frm
```

```
defs
  pmAnd_def:  (| p ∧ q |) ≡ (| ¬(p ⟶ ¬q) |)
  pmOr_def:   (| p ∨ q |) ≡ (| ¬p ⟶ q |)
  pmEqu_def:  (| p ≡ q |) ≡ (| (p ⟶ q) ∧ (q ⟶ p) |)
  pmEx_def:   pmEx t φ  ≡ (| ¬(∀x : t. ¬(φ x)) |)
  pmDia_def:  (| ◇p |)    ≡ (| ¬□(¬p) |)
```

PM (6) Σημείωση *Παραδείγματα τύπων και όρων*

- Παραδείγματα ατομικών τύπων πραγμάτωσης κωδικοποίησης:

$$Rxy, R\alpha\beta, Fx, S\alpha\beta x, xF, \alpha P$$

- Παραδείγματα σύνθετων τύπων με απλούς όρους:

$$\neg Rxy, R\alpha\beta \rightarrow Fx, xF \wedge \neg Fx$$

- Παραδείγματα ατομικών τύπων με σύνθετους όρους:

$$F\iota x(Px \wedge Qx)$$

$$\iota x(\neg\Diamond E!x \wedge \forall F(xF \equiv F\alpha))G$$

$$[\lambda x Px \wedge Qx]\alpha$$

$$[\lambda x \neg\Diamond E!x]\iota x(\neg\Diamond E!x \wedge \forall F(xF \equiv \neg F\alpha))$$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Οι αντίστοιχοι όροι και τύποι κωδικοποιούνται σε Isabelle/HOL ως εξής:

- `R·x·y`, `R·α·β`, `S·α·β·x`, `x$F`, `α$P`
- `¬R·x·y`, `R·α·β ⟶ F·x`, `x$F∧¬F·x`
- `F· (ι x. (P·x ∧ Q·x))`
  `(ι x. (¬◊E!·x ∧ (∀F: (rel 1). (x$F ≡ ¬ F·α))))$G`
  `(λx. P·x ∧ Q·x)· α`
  `(ι x. (¬◊E!·x ∧ (∀F: (rel 1). (x$F ≡ ¬ F·α))))$G`
  `(λx. ¬◊E!·x)· (ι x. (¬◊E!·x ∧ (∀F: (rel 1). (x$F ≡ ¬ F·α))))`

PM (7) Σημείωση *Η ιδέα του υποτύπου*
Οι τύποι που εμφανίζονται σε λ-κατηγορήματα δεν πρέπει να περιέχουν υποτύπους κωδικοποίησης. Ορίζουμε αναδρομικά την ιδέα του *υποτύπου* ακολούθως:

(a) Ο φ είναι υποτύπος του φ,

(b) αν φ τύπος της μορφής $\neg\psi$, $\psi \rightarrow \chi$, $\forall\alpha\psi$, ή $\mathcal{A}\psi$, τότε οι τύποι ψ και χ είναι υποτύποι του φ, και

(c) αν ψ είναι υποτύπος του φ, και χ υποτύπος του ψ, τότε ο χ είναι υποτύπος του φ.

Μπορούμε να αναφερόμαστε στους τύπους που δεν περιέχουν υποτύπους κωδικοποίησης (*encoding subformulas*) με τον όρο 'προτασιακοί τύποι' αφού τέτοιοι τύποι μπορούν να μετατραπούν με 0 θέσια λ αφαίρεση σε όρους $[\lambda\varphi]$, που δηλώνουν *προτάσεις*. Σημειώνουμε ότι *οριστικές περιγραφές* που συνοδεύονται από τύπους κωδικοποίησης *μπορούν* να εμφανίζονται σε 'προτασιακούς τύπους'. Για παράδειγμα, ο '$F\iota x(xQ)$' είναι προτασιακός τύπος αφού δεν περιέχει υποτύπους κωδικοποίησης- είναι ατομικός τύπος πραγμάτωσης με σύνθετο όρο (την οριστική περιγραφή $\iota x(xQ)$).

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Ορίζουμε επαγωγικά σε Isabelle/HOL το μεταθεωρητικό κατηγόρημα 'δεν περιέχει κωδικοποίηση ως υποτύπο' (`free_desc`) που εφαρμόζεται σε τύπους (`frm`) της κωδικοποιημένης PM. Επιπλέον και με τη βοήθεια αυτού το 'δεν περιέχει κωδικοποίηση ως υποτύπο στο σώμα του' που ορίζεται για τα ψευδολάμδα (`func`). Με το δεύτερο, μπορούμε να απαιτήσουμε τα λάμδα (`pmLam`) που κατασκευάζονται να μην περιέχουν κωδικοποίηση. Σημειώνεται ότι τα λογικά σύμβολα που βρίσκονται εκτός ⦇ ⦈ είναι σύμβολα του Isabelle/HOL που χρησιμοποιούνται στις προκείμενες μεταθεωρητικά, και δεν πρέπει να συγχέονται με τα αντίστοιχα της κωδικοποίησης.

```
inductive free_enc :: frm ⇒ bool
where
  fe_exm[intro!]: free_enc ⦇ F¤l ⦈

| fe_not[intro!]: ⟦ free_enc φ ⟧ ⟹ free_enc ⦇ ¬φ ⦈

| fe_imp[intro!]: ⟦ free_enc φ; free_enc ψ ⟧ ⟹ free_enc ⦇ φ ⟶ ψ ⦈

| fe_all[intro!]: ⟦ ∀s. free_enc (φ (nam s t)) ⟧ ⟹
                   free_enc (pmAll t φ)

| fe_box[intro!]: ⟦ free_enc φ ⟧ ⟹ free_enc ⦇ □φ ⦈

| fe_act[intro!]: ⟦ free_enc φ ⟧ ⟹ free_enc ⦇ A φ ⦈

inductive free_enc_fun :: func ⇒ bool
where
  fe_fgrn[intro!]: ⟦ free_enc φ ⟧ ⟹ free_enc_fun (fgrn φ)

| fe_fpar[intro!]: ⟦ ∀s. free_enc_fun (f (nam s ind)) ⟧ ⟹
                    free_enc_fun (fpar f)
```

Σημειώνουμε ότι ο έλεγχος για το αν ένα ψευδολάμδα περιέχει κωδικοποίηση `free_enc` ανάγεται, με βάση τον τελευταίο επαγωγικό ορισμό, στο άν ο “ψευδοτύπος” `frgn` φ [2] κατασκευάζεται απο τύπο που έχει κωδικοποίηση ως υποτύπο του.

Τώρα μπορούμε να εισάγουμε τα μεταθεωρητικά κατηγορήματα ‘καλοσχηματισμένος όρος’, ‘καλοσχηματισμένος τύπος’ και το απαραίτητο στην κωδικοποιήση μας κατηγόρημα, ‘καλοσχηματισμένο ψευδολάμδα’.

```
inductive  wft :: pmt ⇒ trm ⇒ bool
       and  wf  :: frm ⇒ bool
       and  wff :: nat ⇒ func ⇒ bool
where

  wft_nam[intro!]: wft t (nam s t)

| wft_the[intro!]: ⟦ ∀s. wf (φ (nam s ind)) ⟧ ⟹ wft ind ⦇ ι ν. φ ν ⦈

| wft_lam[intro!]: ⟦ wff n f ⟧ ⟹ wft (rel n) (pmLam f)

| wf_exm[intro!]: ⟦ wft (rel n) F; length l = n;
                     ∀α. α ∈ set l ⟶ wft ind α ⟧ ⟹ wf ⦇ F¤l ⦈

| wf_enc[intro!]: ⟦ wft (rel 1) F; wft ind α ⟧ ⟹ wf ⦇ α$F ⦈

| wf_not[intro!]: ⟦ wf φ ⟧ ⟹ wf ⦇ ¬φ ⦈

| wf_imp[intro!]: ⟦ wf φ; wf ψ ⟧ ⟹ wf ⦇ φ ⟶ ψ ⦈

| wf_all[intro!]: ⟦ ∀s. wf (φ (nam s t)) ⟧ ⟹ wf (pmAll t φ)

| wf_box[intro!]: ⟦ wf φ ⟧ ⟹ wf ⦇ □φ ⦈

| wf_act[intro!]: ⟦ wf φ ⟧ ⟹ wf ⦇ A φ ⦈

| wf_fgrn[intro!]: ⟦ wf φ ⟧ ⟹ wff 0 (fgrn φ)
```

[2] μπορούμε να φανταστούμε τους “ψευδοτύπους” της μορφής `fgrn` φ να αντιστοιχούν στα 0-θέσια λαμβδα τις θεωρίας που όπως αναφέραμε είναι ταυτόχρονα και όροι και τύποι. Η διαφορά τους με αυτά είναι ότι μπορούν να περιέχουν κωδικοποίηση ως υποτύπο-έτσι διακαιολογείται και ο όρος *ψευδοτύπος*. Με έλεγχο στους ψευδοτύπους ελέγχουμε αν τα ψευδολάμδα δεν περιέχουν κωδικοποιήση και τα χρησιμοποιούμε στην κατασκευή καλοσχηματισμένων λάμδα όρων

```
| wf_fpar[intro!]: ⟦ ∀s. wff n (f (nam s ind)) ∧
                      free_enc_fun (f (nam s ind)) ⟧ ⟹
                      wff (Suc n) (fpar f)
```

Θα παρουσιάσουμε και θα περιγράψουμε μία αποδείξη που διαφωτίζει τον παραπάνω ορισμό:

```
theorem WF_usage:
  assumes name P (rel 1)
  shows wft ind (|ι x. (λ y. P·y)·x|)
  using  prems
  by auto
end
```

Η πραγματοποίηση της απόδειξης γίνεται από την μέθοδο `auto` ως εξής:

- Ενοποιείται το φ του κανόνα `wft_the` με τον Isabelle/HOL λάμδα όρο `%x. (| (λ y. P·y)·x |)`
- Ελέγχεται η ο καλοσχηματισμός του τύπου `(| (λ y. P·y)·s |)` οπού προκύπτει απο την εφάρμογή του `%x. (| (λ y. P·y)·x |)` σε τυχαίο όνομα `nam s ind` για την ικανοποιήση της προκείμενης του `wft_the`
- Χρησιμοποιείται ο κανόνας `wft_exm`, όπου γίνεται ενοποιήση της `F` με το `(| (λ y. P·y) |)`, η λίστα `l` ενοποεέιται με την λίστα ενός στοιχειου που περιέχει το όνομα `s` και το `n` ενοποιείται με το 1 (μήκος της `l`) για την ικανοποιήση της δεύτερης προκείμενης του `wft_exm`, η τρίτη προκείμενη του κανόνα ικανοποιείται αφού η μονοθέσια λίστα των κατηγορημάτων `l` είναι τυχαίο όνομα (βλέπε κανόνα `wft_nam`). Για την ικανοποιήση της προκείμενης `wft(rel 1)(| (λ y. P·y)|)` ή ισοδύναμα `pmLam (fpar (% y. fgrn (| P·y|) ))`, χρησιμοποιείται ο κανόνας `wft_lam`.
- Στον κανόνα `wft_lam`, γίνεται ενοποίηση της `f` με το ψευδολάμδα `fpar (% y. fgrn (| P·y|) )` και του `n` με το `1`. Για την ικανοποιήση της προκείμενης `wff n f`, χρησιμοποιείται ο κανόνας `wf_fpar`.
- Στον `wf_fpar`, γίνεται ενοποίηση της `f` με το Isabelle/HOL λάμδα `% y. fgrn (| P·y|)` και της `n` με το `0`. Ελέγχεται η προκείμενη `wff 0 fgrn (| P·s|)` για τυχαίο όνομα αντικειμένου `s` που έχει προκύψει με Isabelle/HOL εφαρμογή του `% y. fgrn (| P·y|)` στο `s`. Η δεύτερη προκείμενη είναι αντίστοιχα `free_enc_fun fgrn (| P·s|)`.
- Η πρώτη απο της παραπάνω προκείμενες καταλήγει στον έλεγχο `wf (| P·s|)` που ικανοποιείται μέσω του `wf_emx` για τα ονόματα `name P ( rel 0 )` και `name s ind`, ενώ η δεύτερη στον έλεγχο `free_enc (| P·s|)` που ικανοποιείται μέσω του κανόνα `fe_exm`.

PM (8) Σημείωση *Οριστικές περιγραφές*
Οι *οριστικές περιγραφές* $\iota x\varphi$ είναι σύνθετοι όροι αντικειμένων. Για τις οριστικές περιγραφές ισχύουν τα εξής:

1. Αν κανένα αντικείμενο δεν ικανοποιεί (μοναδικά) τον φ, τότε η περιγραφή $\iota x\varphi$ *αποτυγχάνει να δηλώσει κάτι* (*fails to denote*), και το ίδιο και οποιοσδήποτε όρος περιέχει τον $\iota x\varphi$. Οι ατομικοί τύποι που περιέχουν τέτοιους όρους είναι ψευδείς. Παραδείγματος χάριν, αν ο ιxPx αποτυγχάνει να δηλώσει κάτι, τότε οι ατομικοί τύποι πραγμάτωσης $Q\iota xPx$ και κωδικοποίησης $(\iota xPx)Q$ είναι ψευδείς. Το ίδιο κι ο ατομικός τύπος πραγμάτωσης $[\lambda y Ry\iota xPx]\alpha$. Βέβαια σύνθετοι τύποι, όπως οι $\neg Q\iota xPx$ ή $Q\iota xPx \rightarrow Q\iota xPx$ είναι αληθείς.

2. Οι οριστικές περιγραφές είναι *άκαμπτοι δηλωτές*(*rigid desgnators*)[Russ05][3]. Για παράδειγμα, ακόμα και αν ο ιxPx εμφανίζεται υπό την εμβέλεια ενός *τροπικού τελεστή*(*modal operator*), καταδεικνύει το αντικείμενο που *πραγματικά* πραγματώνει μοναδικά τη ιδιότητα P. Έτσι, ο τύπος $\Box Q\iota xPx$ βεβαιώνει κάτι για το *μοναδικό* αντικείμενο που, στον πραγματικό κόσμο είναι P, συγκεκριμένα, ότι κατ' ανάγκην είναι Q.

PM (9) Ορισμός *Συνήθη και Αφηρημένα Αντικείμενα*
Ορίζουμε την ιδιότητα *είναι σύνηθες*('$O!$') ως εξής:

1. $O! =_{df} [\lambda x\, \Diamond E!x]$

   Με άλλα λόγια, η ιδιότητα *είναι σύνηθες* είναι η ιδιότητα *είναι δυνατόν να έχει χωροχρονική υπόσταση*(πρβλ.**PM (2)**). **Ορίζουμε την ιδιότητα *είναι αφηρημένο*('$A!$') ως εξής:**

2. $A! =_{df} [\lambda x\, \neg\Diamond E!x]$

   Η ιδιότητα *είναι αφηρημένο αντικείμενο* είναι η ιδιότητα *δεν είναι δυνατόν να έχει χωροχρονική υπόσταση*. Τα αφηρημένα αντικείμενα είναι αδύνατον να έχουν χωροχρονική υπόσταση.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Εισάγουμε τους σταθερούς όρους '$O!$' και '$A!$' μαζί με τους ορισμούς τους και αποδεικνύουμε τον καλο σχηματισμό τους.

```
consts
  pmOrd :: trm
  pmAbs :: trm

defs
  Ord_def: (| O! |) ≡ (| λx. ◇E!·x |)
  Abs_def: (| A! |) ≡ (| λx. ¬◇E!·x |)

lemma wft_Ord: wft (rel 1) (| O! |)
  by (auto simp add: pmErel_def)

lemma wft_Abs: wft (rel 1) (| A! |)
  by (auto simp add: pmErel_def)
```

PM (10) Ορισμός *Ταυτότητα$_E$ σε Συνήθη Αντικείμενα*
Λέμε ότι τα αντικείμενα x y πραγματώνουν την σχέση *ταυτότητα$_E$* (*identity$_E$*) ανν το x πραγματώνει την *είναι σύνηθες*, το y πραγματώνει την *είναι σύνηθες*, και απαραίτητα, τα x και y πραγματώνουν τις ίδιες ιδιότητες:

$$x =_E y =_{df} O!x \wedge O!y \wedge \Box\forall F(Fx \equiv Fy)$$

Σημειώνουμε ότι όταν η $[\lambda xy\, x =_E y]$ αναπτυχθεί έχουμε μία καλοσχηματισμένη λ-έκφραση.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Εισάγουμε τον ορισμό της ταυτότητας$_E$ και αποδεικνύουμε τον καλοσχηματισμό του:

```
consts
  pmEqE :: trm

syntax
  _pmEqE :: phr ⇒ phr ⇒ phr (infix =E 50)
```

[3] Άκαμπτος δηλωτής είναι μία γλωσσική έκφραση που υποδηλώνει το ίδιο αντικείμενο σ' όλους τους δυνατούς κόσμους

```
translations
  _pmEqE x y ⇌ pmExm pmEqE [ x, y]

defs
  EqE_def: pmEqE  ≡  ⦇ λx y. O!·x ∧ O!·y ∧ □(∀F: rel 1. F·x ≡ F·y) ⦈

lemma wft_EqE: wft (rel 2) pmEqE
proof-
 have wft (rel (Suc (Suc 0))) pmEqE by (auto simp add: EqE_def pmErel_def)
  also have Suc (Suc 0) = 2 by auto
  finally show ?thesis by auto
qed
```

PM (11) Ορισμός *Ταυτότητα*
Σημειώνουμε ότι το κανονικό σύμβολο της ταυτότητας '=' δεν είναι πρωταρχικό σύμβολο της γλώσσας του PM. Είδαμε την ταυτότητα που περιορίζεται σε συνήθη αντικείμενα. Εδώ, δίνουμε έναν γενικό ορισμό ταυτότητας για αντικείμενα. Ενώ τα συνήθη αντικείμενα x και y ταυτίζονται ανν κατ' ανάγκην πραγματώνουν το ίδιο σύνολο ιδιοτήτων, τα αφηρημένα αντικείμενα x και y ταυτίζονται ανν *κατ' ανάγκην κωδικοποιούν* το ίδιο σύνολο ιδιοτήτων. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τη γενική ταυτότητα '=' ως εξής:

$$x = y =_{df} x =_E y \vee (A!x \wedge A!y \wedge \Box\forall F(xF \equiv yF))$$

Εν αντιθέσει με το σύμβολο '$=_E$' το σύμβολο '=' δεν μπορεί να εμφανιστεί σε λ-κατηγορήματα αφού περιέχει υποτύπο κωδικοποίησης. Έτσι η έκφραση $[\lambda xy\, x = y]$ δεν είναι καλοσχηματισμένη.

PM (12) Ορισμός *Ταυτότητα μεταξύ Σχέσεων*
Εισάγουμε την ταυτότητα για σχέσεις, ιδιότητες και προτάσεις:

1. Δύο ιδιότητες F και G ταυτίζονται ανν κατ' ανάγκην κωδικοποιούνται από τα ίδια αντικείμενα:

$$F = G =_{df} \Box\forall x(xF \equiv xF)$$

2. Οι σχέσεις R^n και G^n (όπου $n > 1$) ταυτίζονται ανν για κάθε δυνατό τρόπο που μπορούμε να εφαρμόσουμε $n-1$ αντικείμενα σ' αυτές, τα $n-1$ αντίστοιχα ζεύγη ιδιοτήτων που προκύπτουν ταυτίζονται σύμφωνα με την (1):

$$\begin{aligned} F^n = G^n =_{df} \forall x_1 \ldots x_n(\; & [\lambda y\, F^n y x_1 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y\, G^n y x_1 \ldots x_{n-1}] \\ & \wedge [\lambda y\, F^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}] = [\lambda y\, G^n x_1 y x_2 \ldots x_{n-1}] \\ & \wedge \ldots \\ & \wedge [\lambda y\, F^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y] = [\lambda y\, F^n x_1 x_2 \ldots x_{n-1} y]) \end{aligned} \tag{4.1}$$

3. Τέλος, οι προτάσεις p και q ταυτίζονται ανν οι ιδιότητες *είναι* y *ώστε* p και *είναι* y *ώστε* q ταυτίζονται:

$$p = q =_{df} [\lambda y\, p] = [\lambda y\, q]$$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Κωδικοποιούμε σε Isabelle/HOL την ταυτότητα μεταξύ αντικειμένων `ind` και μεταξύ σχέσεων `rel n`:

```
primrec
  ⦇ x =[ ind] y ⦈      =  ⦇ x =I y ⦈
  ⦇ F =[ rel n] G ⦈  =  (if n = 1 then ⦇ □(∀x: ind. x$F ≡ x$G) ⦈ else
```

```
                          (if n = 0 then ⦇ (λy. F@) =R (λy. G@) ⦈ else
                            ⦇ F =X[ n - 1, @, @] G ⦈ ))

recdef pmEqX measure ((%(n, l1, l2, F, G). n) ::
                           nat * trm list * trm list * trm * trm ⇒ nat)
  ⦇ F =X[ n, ¤P, ¤L] G ⦈  =  (if n = 0 then
                                ⦇ (λy. F¤P·y¤L) =R (λy. G¤P·y¤L) ⦈
                               else
                                ⦇ (∀x: ind. F =X[ n - 1, ¤P, ·x¤L] G) ∧
                                  (∀x: ind. F =X[ n - 1, ¤P·x, ¤L] G) ⦈ )

consts
  pmEq  :: pmt ⇒ trm ⇒ trm ⇒ frm
  pmEqI :: trm ⇒ trm ⇒ frm
  pmEqR :: trm ⇒ trm ⇒ frm
  pmEqX :: nat * trm list * trm list * trm * trm ⇒ frm


defs
  pmEqI_def:
    ⦇ x =I y ⦈  ≡  ⦇ x =E y ∨ A!·x ∧ A!·y ∧ □(∀F: rel 1. x$F ≡ y$F) ⦈
  pmEqR_def:
    ⦇ F =R G ⦈  ≡  ⦇ □(∀x: ind. x$F ≡ x$G) ⦈
```

4.2 Η Λογική του PM

PM (13) Σημείωση Η ουσία της Λογικής

Παρουσιάζουμε την λογική του PM περιγράφοντας τα λογικά αξιώματα και τους θεμελιώδεις κανόνες. Χρησιμοποιούμε κλασσική τροπική λογική με ποσοδείκτες με κάποιες μετατροπές που απαιτεί η εισαγωγή των οριστικών περιγραφών. Οι οριστικές περιγραφές, όπως προαναφέραμε στο 4.1 έχουν δύο βασικά χαρακτηριστικά : (1) μπορεί να αποτυγχάνουν να υποδηλώσουν κάτι, και (2) είναι άκαμπτοι δηλωτές. Τα δύο αυτά χαρακτηριστικά έχουν τις ακόλουθες συνέπειες:

1. Αφού οι οριστικές περιγραφές μπορεί να αποτυγχάνουν να υποδηλώσουν κάτι, κάθε όρος τ που περιέχει οριστική περιγραφή μπορεί επίσης να αποτυγχάνει. Έτσι το να τοποθετούμε τέτοιους όρους ακόμα και σε καθολικούς ισχυρισμούς (*universal claims*), μπορεί νά μας οδηγήσει από μία αληθή σε μία ψευδή πρόταση.[4]

2. Επιπλέον, αφού οι περιγραφές είναι άκαμπτοι δηλωτές (*rigid designators*), το λογικό αξίωμα που αφορά τις περιγραφές (προβλ. (PM (23))) είναι ενδεχομενικά αληθές*contigent axiom*, και επομένως ο Κάνονας της Αναγκαιότητας (*Rule of Necessitation*) δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε μία πρόταση που εξαρτάται από αυτό το αξίωμα. [5]

   Συνοψίζοντας κάνουμε τις ακόλουθες συμβάσεις. (1) Η θεωρία ποσοδεικτών στο PM τυποποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι κλασσική για όρους που δεν περιέχουν οριστικές περιγραφές, ενώ οι λογική των όρων που περιέχουν οριστικές περιγραφές είναι 'ελεύθερη'. (2) Πρέπει να

[4] Οι ατομικοί τύποι που περιέχουν όρους χωρίς υποδήλωση είναι ψευδείς. Στην κλασσική θεωρία ποσοδεικτών, βέβαια, κάθε όρος μπορεί να αντικατασταθεί σε έναν καθολικό ισχυρισμό, έτσι η κλασική θεωρία ποσοδεικτών μας επιτρέπει να συμπεράνουμε $Q\iota xPx$ από την $\forall xQx$. Στην PM όμως το συμπέρασμα $Q\iota xPx$ είναι ψευδές αν η περιγραφή ιxPx αποτυγχάνει να υποδηλώσει κάτι. Έτσι το αξίωμα που επιτρέπει αντικατάσταση όρων σε οικουμενικούς ισχυρισμούς δεν περιλαμβάνει όρους που περιέχουν οριστικές περιγραφές.

[5] Ως παράδειγμα, έστω ο τύπος που προκύπτει από το λογικό αξίωμα των οριστικών περιγραφών (PM (23)): $G\iota xFx \rightarrow \exists xFx$. Ο Κανόνας της Αναγκαιότητας θα μας επέτρεπε να αποδείξουμε $\Box(G\iota xFx \rightarrow \exists xFx)$. Αλλά αυτός ο ισχυρισμός είναι ψευδής αφού ο όρος ιxFx είναι άκαμπτος δηλωτής, και υπάρχουν δυνατοί κόσμοι στους οποίους: *α')* το αντικείμενο που είναι F στον πραγματικό κόσμο πραγματώνει την G, ενώ *β')* δεν υπάρχει τίποτα που να πραγματώνει την F στον ενδεχομενικό αυτό κόσμο. Ο νόμος των περιγραφών και οι συνέπειες του είναι ενδεχομενικά γεγονότα ενώ οι περιγραφές είναι άκαμπτες, έτσι ο Κανόνας της Αναγκαιότητας δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

τυποποιήσουμε τον Κανόνα της Αναγκαιότητας (*RN*) (PM(32)) με τέτοιο τρόπο ώστε να μην εφαρμόζεται σε καμία παραγωγή που εξαρτάται από το Αξίωμα των Λογικών Περιγραφών. Έτσι αντί να θεωρήσουμε τον *RN* θεμελιώδη(‘από το φ, έχουμε $\Box\varphi$’), θεωρούμε το τροπικό κλείσιμο όλων των αξιωμάτων να ανήκει στο σύνολο των αξιωμάτων της θεωρίας εξαιρώντας όμως το αξίωμα που αφορά τις οριστικές περιγραφές. Έτσι ο Κανόνας της Αναγκαιότητας είναι παραγόμενος κανόνας και προκύπτει με τρόπο που αποκλείει την εφαρμογή του σε τύπους που η απόδειξη τους εξαρτάται από το Αξίωμα των Περιγραφών.

4.2.1 Λογικά Αξιώματα, Κανόνες Συμπερασμού, Αποδείξεις

Σε ότι ακολουθεί *θεωρούμε τροπικό κλείσιμο* ενός τύπου φ, τη συμβολοσειρά $\Box^* \varphi$. Κατά σύμβαση, θεωρούμε ότι το τροπικό κλείσιμο ενός σχήματος είναι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης μιας συμβολοσειράς από οσαδήποτε $\Box$ μπροστά από το σχήμα.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Η σύνδεση μεταξύ ενός αξιώματος της κωδικοποιημένης PM και της λογικής του Isabelle/HOL πραγματοποιείται με το μετακατηγόρημα pm. Ορίζουμε pm φ (συντομευμένα $\models\varphi$) να σημαίνει ότι ο φ είναι αξίωμα της PM.

```
consts
  pm :: frm ⇒ bool

syntax
  _pm :: phr ⇒ bool     (⊨ _ [2] 2)
```

Ορίζουμε επιπλέον το τροπικό κλείσιμο ενός τύπου και το συμβολίζουμε με $\models *$:

```
inductive mod_clos :: frm ⇒ frm ⇒ bool (_ ∈ mod′ _clos _)
  where
    mod_clos_box[intro!]:    ⟦ q ∈ mod_clos p ⟧ ⟹ (| □q |) ∈ mod_clos p
  | mod_clos_this[intro!]:   p ∈ mod_clos p

inductive_cases mod_clos_elim:      q ∈ mod_clos p
inductive_cases mod_clos_box_elim: (| □q |) ∈ mod_clos p

consts
  pm_mod_clos :: frm ⇒ bool

syntax
  _pm_mod_clos :: phr ⇒ bool    (⊨* _ [2] 2)

defs
  pm_mod_clos_def:  (⊨* p)  ≡  (∀q. q ∈ mod_clos p ⟶ (⊨ q))
```

Αποδεικνύουμε επίσης χρήσιμα θεωρήματα για το τροπικό κλείσιμο:

```
theorem this_from_modal[simp]:
  assumes ⊨* p
  shows ⊨ p
using prems by (auto simp add: pm_mod_clos_def)

lemma Mod_Clos_Comprehension:
  assumes v ∈ mod_clos (| □p |)
  shows v ∈ mod_clos p
proof –
  { fix x
    assume v ∈ mod_clos (| □p |)
```

```
    and x = (| □p |)
   hence v ∈ mod_clos p using prems by (induct, auto)
  }
  thus ?thesis using prems by auto
qed

lemma Modal2:
  assumes Hyp1: ⊨* p
  shows ⊨* □p
proof (auto simp add: pm_mod_clos_def)
  fix q
  assume q ∈ mod_clos (| □p |)
  show ⊨ q using prems Mod_Clos_Comprehension pm_mod_clos_def by blast
qed
```

PM (14) Αξιώματα και Κανόνες *Προτασιακή λογική*

Η βάση του λογικού συστήματος του PM είναι η κλασική προτασιακή λογική. Έτσι στα αξιώματα περιλαμβάνονται τα τροπικά κλεισίματα των ακόλουθων :

1. $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
2. $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
3. $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \varphi)$

Ο Κανόνας Συμπερασμού είναι ο Modus Ponens (*MP*):

MP: από το φ και το $\varphi \to \psi$, συμπεραίνουμε ψ

Με αυτή τη βάση, μπορούν να παραχθούν όλες οι ταυτολογίες της κλασσικής προτασιακής λογικής.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

Κωδικοποιούμε τα αξιώματα του Hilbert για την κλασική προτασιακή λογική σε Isabelle/HOL και τα δηλώνουμε ως τροπικά :

```
axioms
  Hilbert1[simp]:   ⊨* P ⟶ Q ⟶ P
  Hilbert2[simp]:   ⊨* (P ⟶ Q ⟶ R) ⟶ (P ⟶ Q) ⟶ (P ⟶ R)
  Hilbert3[simp]:   ⊨* (¬P ⟶ ¬Q) ⟶ (¬P ⟶ Q) ⟶ P
```

PM (15) Αξιώματα και Κανόνες *Η Λογική των Ποσοδεικτών*

Μπορούμε να περιγράψουμε την Λογική Ποσοδεικτών της PM ως κλασσική θεωρία ποσοδεικτών που έχει μετατραπεί ώστε να περιλαμβάνει οριστικές περιγραφές (που πιθανώς να στερούνται αναφοράς). Έτσι τα λογικά αξιώματα της Λογικής Ποσοδεικτών είναι το τροπικό κλείσιμο των:

1. $\forall\alpha\varphi \to (\exists\beta\, \beta = \tau \to \varphi^{\tau}_{\alpha})$, όπου η α είναι αντικαταστάσιμη από τον τ
2. $\exists\beta\, \beta = \tau$, για κάθε τ ελεύθερο περιγραφών.
3. $\psi^{\tau}_{\alpha} \to \exists\beta\, \beta = \tau$, όπου τ οποιοσδήποτε όρος που μπορεί να περιέχει οριστικές περιγραφές και ψ^{τ}_{α} οποιοσδήποτε ατομικός τύπος στον οποίο ο τ αντικαθιστά την μεταβλητή α..
4. $\forall\alpha(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall\alpha\psi)$, όπου η α δεν είναι ελεύθερη στην ϕ.

Ο Κανόνας της Γενίκευσης είναι :

GEN: από το φ, συμπεραίνουμε $\forall\alpha\varphi$

Το (1) βεβαιώνει ότι αν ο τ δηλώνει κάτι, τότε μπορεί να αντικατασταθεί σε καθολικές γενικεύσεις. Το (2) βεβαιώνει ότι κάθε όρος που δεν περιέχει περιγραφές δηλώνει κάτι που υπάρχει. Το (3) βεβαιώνει ότι αν ένας όρος τ (που μπορεί να είναι περιγραφή) εμφανίζεται σε έναν ατομικό τύπο, τότε υπάρχει κάτι που είναι τ.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Κωδικοποιούμε τα αξιώματα της λογικής των ποσοδεικτών σε Isabelle/HOL και τα δηλώνουμε ως τροπικά :

axioms

```
  Substitute[simp]:    ⊨* (∀α: t. φ α) ⟶ ((∃β: t. β =[t] τ) ⟶ φ τ)
  Existance1[simp]:    ⟦ free_desc τ ⟧ ⟹ ⊨* ∃β: t. β =[t] τ
  Existance2[simp]:    ⊨* ψ τ ⟶ (∃β: t. β =[t] τ)
  QuantTransf[simp]:   ⊨* (∀α: t. φ ⟶ ψ α) ⟶ φ ⟶ (∀α: t. ψ α)
```

PM (16) Αξιώματα *Η Λογική της Ταυτότητας*
Το σύμβολο της ταυτότητας '$=$' έχει οριστεί τόσο για αντικείμενα όσο και για σχέσεις. Σχετίζουμε αυτό το σύμβολο με τον κλασικό νόμο αντικατάστασης. Συγκεκριμένα, λέμε ότι δύο αντικείμενα ή σχέσεις που ταυτίζονται είναι αλληλοαντικαταστάσιμα σε τύπους. Έτσι αν τα α και β είναι μεταβλητές αντικειμένων ή μεταβλητές σχέσεων, και $\varphi(\alpha,\beta)$ οποιοσδήποτε τύπος α, β στην οποία τα α και β μπορεί να εμφανίζονται ελεύθερα , το τροπικό κλείσιμο των παρακάτω αξιωμάτων είναι υποσύνολο των λογικών αξιωμάτων της PM:

- $\alpha = \beta \rightarrow [\varphi(\alpha,\alpha) \equiv \varphi(\alpha,\beta)]$, όπου το α είναι αντικαταστάσιμο από το β και $\varphi(\alpha,\beta)$ είναι το αποτέλεσμα της αντικατάστασης μίας ή περισσοτέρων εμφανίσεων του α από το β στην $\varphi(\alpha,\alpha)$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
  Identity: ⊨* α =[t] β ⟶ (φ α α ≡ φ α β)
```

PM (17) Αξιώματα *Τροπική Λογική*
Το τροπικό κλείσιμο των αξιωμάτων του $S5$ είναι αξιώματα του λογικού συστήματος:

1. Αξίωμα K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$
2. Αξίωμα T: $\Box\varphi \rightarrow \varphi$
3. Αξίωμα 5: $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$

Ο Κλασσικός κανόνας της αναγκαιότητας (RN) είναι παράγωγος και έχει μετατραπεί ώστε να μην εφαρμόζεται σε τύπους των οποίων η απόδειξη εξαρτάται από ενδεχομενικές προτάσεις. Επιπλέον το τροπικό κλείσιμο των τύπων Barcan (*Barcan Formulas*), ανήκει στο σύνολο των λογικών αξιωμάτων της θεωρίας:[6]

4 $\forall\alpha\Box\varphi \rightarrow \Box\forall\alpha\varphi$, όπου α οποιαδήποτε μεταβλητή (αντικειμένων ή σχέσεων).

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Κωδικοποιούμε την τροπική κλειστότητα των αξιωματων του συστήματος $S5$ σε Isabelle/HOL:

[6] Συνήθως οι τύποι Barcan είναι παράγωγοι σε ένα $S5$ σύστημα τροπικής λογικής όπου όμως ο Κανόνας αναγκαιότητας (RN) είναι θεμελιώδης. Στο παρόν σύστημα, οι τύποι της Barcan ανήκουν στα αξιώματα και η απόδειξη του RN εξαρτάται από αυτούς.

axioms
```
  ModalK:   ⊨* □(φ ⟶ ψ) ⟶ (□φ ⟶ □ψ)
  ModalT:   ⊨* □φ ⟶ φ
  Modal5:   ⊨* ◊φ ⟶ □◊φ
  Barcan:   ⊨* (∀α: t. □(φ α)) ⟶ □(∀α: t. φ α)
```

PM (18) Αξιώματα *Η Λογική των Γεγονότων* [7]
Τα συνήθη, *μη τροπικά*, στιγμιότυπα του παρακάτω αξιώματος είναι αξιώματα του συστήματος:

1. $\mathcal{A}\varphi \equiv \varphi$

Αυτό το αξίωμα είναι κλασική περίπτωση λογικής αλήθειας που δεν είναι απαραίτητη, έτσι το τροπικό κλείσιμο των στιγμιοτύπων του αξιώματος αυτού *δεν* ανήκει στα αξιώματα της θεωρίας[Zalt88b]. Αντίθετα το τροπικό κλείσιμο των στιγμιοτύπων του παρακάτω αξιώματος ανήκει στα αξιώματα του συστήματος:

2 $\mathcal{A}\varphi \rightarrow \Box\mathcal{A}\varphi$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Κωδικοποιούμε τα αξιώματα της λογικής των γεγονότων. Δηλώνοντας το πρώτο ως τροπικό και το δεύτερο ως μη τροπικό:

axioms
```
  Actuality1:  ⊨ A φ ≡ φ
  Actuality2:  ⊨* A φ ⟶ □ A φ
```

PM (19) Αξιώματα *Η Λογική της κωδικοποίησης*
Αν ένα αντικείμενο κωδικοποιεί σε κάποιον δυνατό κόσμο μία ιδιότητα F, τότε την κωδικοποιεί απαραίτητα. Η κωδικοποίηση ενός συνόλου ιδιοτήτων από ένα αντικείμενο είναι άκαμπτη.:

$$\Diamond xF \rightarrow \Box xF$$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

axioms
```
  Encoding: ⊨* ◊ x$F ⟶ □ x$F
```

PM (20) Αξιώματα *Η Λογική των Σύνθετων Κατηγορημάτων*
Έστω $[\lambda v_1 \ldots v_n\, \varphi]$ ένα οποιοδήποτε λ-κατηγόρημα που δεν περιέχει οριστικές περιγραφές, το τροπικό κλείσιμο των ακόλουθων αξιωμάτων είναι λογικά αξιώματα του PM:

1. $[\lambda v_1 \ldots v_n\, \varphi]v_1' \ldots v_n' \equiv \varphi^{v_1' \ldots v_n'}_{v_1 \ldots v_n}$

Αυτή είναι η κλασσική αρχή της λ-Μετατροπής. [8] Δίνουμε μια περίπτωση αυτής της αρχής:

---

[7] Ερμηνεύουμε τον τελεστή πραγματικότητας (*actuality*) ως άκαμπτο. Διαισθητικά, αυτό σημαίνει ότι ο τύπος $\mathcal{A}\varphi$ είναι αληθής αν ο φ είναι αληθής στον πραγματικό κόσμο. Έτσι ακόμα και σε τροπικό πλαίσιο η αλήθεια του $\mathcal{A}\varphi$ εξαρτάται από την αλήθεια του φ στον πραγματικό κόσμο. Αυτό σημαίνει ότι ακόμα και αν η $\mathcal{A}\varphi \equiv \varphi$ είναι λογικά αληθής, δεν είναι απαραίτητα αληθής. Ο $\Box(\mathcal{A}\varphi \rightarrow \varphi)$ θα είναι ψευδής οποτεδήποτε ο φ είναι αληθής στον πραγματικό κόσμο και ψευδής σε κάποιον δυνατό κόσμο, και ο $\varphi \rightarrow \mathcal{A}\varphi)$ θα είναι επίσης ψευδής αν ο τύπος φ είναι αληθής σε κάποιον δυνατό κόσμο και ψευδής στον πραγματικό κόσμο.

[8] Ο περιορισμός ότι ο φ πρέπει να είναι ελεύθερος οριστικών περιγραφών εμποδίζει τις αποτυχημένες δηλώσεις από το να δημιουργούν παράδοξα. Παραδείγματος χάριν, αν ο όρος ιxGx είναι μία περιγραφή που αποτυγχάνει, η ακόλουθη πρόταση είναι ψευδής:

$[\lambda y\, \neg Py]\alpha \equiv \neg P\alpha$

Διαβάζουμε ως εξής: το αντικείμενο α πραγματώνει την ιδιότητα 'είναι τέτοιο ώστε να αποτυγχάνει να πραγματώνει την P' ανν, αποτυγχάνει να πραγματώνει την P.

Άλλα δύο σημαντικά γεγονότα για την ταυτότητα των σχέσεων είναι τα εξής:

2 $[\lambda v_1 \, \ldots \, v_n \Pi^n v_1 \, \ldots \, v_n] = \Pi^n$, όπου '$\Pi^n$' είναι οποιοσδήποτε σχεσιακός όρος n θέσεων και '$\Pi^n v_1 \, \ldots v_n$' είναι ατομικός τύπος πραγμάτωσης που περιέχει της μεταβλητές αντικειμένων $v_1, \ldots, v_n$

3 $[\lambda v_1 \, \ldots \, v_n \, \varphi] = [\lambda v_1{}' \, \ldots \, v_n{}' \, \varphi']$, όπου ο φ' έχει $v_1{}' \, \ldots \, v_n{}'$ εκεί που ο φ έχει $v_1 \, \ldots \, v_n$.

Η (2) μας λέει για παράδειγμα ότι :

$$[\lambda y\, Py] = P$$

Διαβάζουμε : η ιδιότητα 'να είναι τέτοιο ώστε να πραγματώνει την P' ταυτίζεται με την ιδιότητα P.

Η (3) μας λέει ότι η αλλαγή των δεσμευμένων από τον λ τελεστή μεταβλητών, δεν προκαλεί καμία αλλαγή στην ταυτότητα των σχέσεων. Παραδείγματος χάριν:

$$[\lambda y\, Py] = [\lambda x\, Px]$$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

Για την κωδικοποίηση της λογικής των σύνθετων κατηγορημάτων, είναι απαραίτητη η κωδικοποίηση της έννοιας 'δεν περιέχει οριστική περιγραφή', που ορίζουμε επαγωγικα σε Isabelle/HOL. Επιπλέον, υλοποιούμε την συνάρτηση `pmApp` με τύπο (`func ⇒ trm list ⇒ frm`) για την πραγματοποίηση της λ-μετατροπής με λίστα κατηγορημάτων. Η συνάρτηση αυτή εφαρμόζεται στην κωδικοποιήση της λ- μετατροπης ενός λ-κατηγορήματος, εφόσον αυτό δεν περιέχει οριστικές περιγραφές και το αντίστοιχο ψευδολάμδα δεν έχει 'κατασκευαστεί' απο τύπο που περιέχει κωδικοποιήση ως υποτύπο. Με τη συνάρτηση αυτή κάνουμε 'απενθυλάκωση' του ψευδολάμδα για να χρησιμοποιήσουμε την β-αναγωγή του Isabelle/HOL διαδοχικά στην λίστα κατηγορημάτων της λ-μετατροπής της κωδικοποιημένης PM. Βλέπουμε ότι τα Isabelle/HOL λάμδα και η Isabelle/HOL β-αναγωγή χρησιμοποιούνται και στην λ-μετατροπή. Η "ενθυλάλωση" των τύπων που έχουμε πραγματοποιήσει, μας εξασφαλίζει τις απαράιτητες προυποθέσεις για να χειριστούμε έναν λάμδα όρο της PM ως λάμδα του Isabelle/HOL.

Κωδικοποιούμε την έννοια 'όρος χωρίς περιγραφές (`free_desc`)', ως μεταθεωρητικό κατηγόρημα που ορίζεται επαγωγικά ταυτόχρονα (*co-inductively*) με τα κατηγορήματα 'τύπος που δεν περιέχει περιγραφές' (`free_desc_frm`) και 'ψευδο-λάμδα (`func`) χωρίς περιγραφές' (`free_desc_fun`) στους παρακάτω επαγωγικούς (inductive) ορισμούς.

```
inductive free_desc :: trm ⇒  bool
  and free_desc_frm :: frm ⇒ bool
  and free_desc_fun :: func ⇒ bool
where

    fd_nam[ intro!]:         free_desc (nam s t)
```

a $[\lambda y\, \neg Ry\iota xGx]z \equiv \neg Rz\iota xGx$

Ο λόγος για τον οποίο η δεξιά πλευρά της ισοδυναμίας είναι αληθής, είναι το γεγονός ότι η ατομικός τύπος $Rz\iota xGx$ είναι ψευδής λόγω της αποτυχημένης περιγραφής. Η αριστερή πλευρά είναι όμως ψευδής, αφού είναι ένας ατομικός τύπος με ένα αποτυχημένο λ-κατηγόρημα. Σημειώνουμε ότι αν η περιγραφή ιxGx ανάφερει κάτι, μπορούμε να την αντικαταστήσουμε σε οικουμενικούς ισχυρισμούς όπως:

b $\forall u([\lambda y\, \neg Ryu]z \equiv \neg Rzu)$

Η πρόταση (b) είναι απευθείας συνέπεια της λ-Μετατροπής. Έτσι, μπορούμε να παράξουμε μόνο αληθείς προτάσεις όπως η (a).

```
| fd_lambda[intro!]:      ⟦ free_desc_fun f ⟧ ⟹ free_desc (pmLam f)

| fd_exm[intro!]:  ⟦ free_desc F; ∀α. α ∈ set l ⟶ free_desc α ⟧ ⟹
                    free_desc_frm ⦇ F⌑l ⦈

| fd_enc_rel[intro!]:
                   ⟦ free_desc Π; free_desc μ ⟧ ⟹
                    free_desc_frm ⦇ μ$Π ⦈

| fd_not[intro!]:  ⟦ free_desc_frm φ ⟧ ⟹ free_desc_frm ⦇ ¬φ ⦈

| fd_imp[intro!]:  ⟦ free_desc_frm φ;free_desc_frm ψ  ⟧ ⟹
                    free_desc_frm ⦇ φ ⟶ ψ ⦈

|fd_all[intro!]:   ⟦ ∀s. free_desc_frm (φ (nam s t)) ⟧ ⟹
                    free_desc_frm (pmAll t φ)

| fd_box[intro!]:  ⟦ free_desc_frm φ ⟧ ⟹ free_desc_frm ⦇ □φ ⦈

| fd_act[intro!]:  ⟦ free_desc_frm φ ⟧ ⟹ free_desc_frm ⦇ A φ ⦈

| fd_fgrn[intro!]: ⟦ free_desc_frm φ ⟧ ⟹ free_desc_fun (fgrn φ)

| fd_fpar[intro!]: ⟦ ∀s. free_desc_fun (f (nam s ind)) ⟧ ⟹
                    free_desc_fun (fpar f)
```

Κωδικοποιούμε την συνάρτηση εφαρμογής:

```
fun pmApp :: func ⇒ trm list ⇒ frm
  where
    pmApp_nil[simp]:  pmApp (fgrn φ) [] = φ
  | pmApp_cons[simp]: pmApp (fpar f) (t # ts) = pmApp (f t) ts
```

Εισάγουμε το τροπικό κλείσιμο των παρακάτω αξιωμάτων στο κωδικοποιημένο λογικό σύστημα :

```
axioms  Beta: ⟦ free_desc (pmLam f); wff n f; length l = n ⟧ ⟹
           ⊨* (pmLam f)⌑l ≡ pmApp f l
  Eta:  ⊨* (λx. F·x) =[rel 1] F
```

Αποδεικνύουμε δύο χρήσιμες περιπτώσεις (*instances*) της αρχής της λ-μετατροπής (*λ-Conversion Principle*) για 1- θέσια και 2-θέσια καλοσχηματισμένσοα λ-κατηγορήματα που δεν περιέχουν περιγραφές:

```
lemma Beta_aux_1:
  assumes F = pmLam (fpar (%x. fgrn (φ x)))
  and free_desc F
  and wft (rel 1) F
  shows ⊨* F·x ≡ φ x
using prems Beta[of fpar (%x. fgrn (φ x)) 1 [x]] by auto

lemma Beta_aux_2:
  assumes F = pmLam (fpar (%x. fpar (%y. fgrn (φ x y))))
  and free_desc F
  and wft (rel 2) F
  shows ⊨* F·x·y ≡ φ x y
using prems Beta[of fpar (%x. fpar (%y. fgrn (φ x y))) 2 [x,y]] by auto
```

PM (21) Σημείωση *λ-Μετατροπή και Αλήθεια*
Παρόλο που είδαμε πως διαβάζονται στιγμιότυπα λ-μετατροπής, υπάρχει ένα σύνολο "άγονων" στιγμιοτύπων με ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Για παράδειγμα:

$$[\lambda\, P\alpha] \equiv P\alpha$$

$$[\lambda\, \forall x(Mx \to Px)] \equiv \forall x(Mx \to Px)$$

Διαβάζουμε ως εξής:

> ‘ (το) ότι ο α πραγματώνει την P είναι αληθές ανν ο α πραγματώνει την P’
>
> ‘(το) ότι ό,τι πραγματώνει την M πραγματώνει την P είναι αληθές ανν ό,τι πραγματώνει την P πραγματώνει την M’

Το αξιοσημείωτο εδώ είναι ότι η αρχή της λ-Μετατροπής, στην περίπτωση των 0-θέσιων λ-κατηγορημάτων, γίνεται αρχή για την αλήθεια προτάσεων.

PM (22) Σημείωση *Η αλήθεια ως 0-Πραγμάτωση*
Εκφράσεις της μορφής $[\lambda\, \varphi]$ είναι ταυτόχρονα και τύποι και σύνθετοι όροι. Ως όροι διαβάζονται απλά ‘(το) ότι φ ’, ως τύποι διαβάζονται ως πλήρεις προτάσεις προσθέτοντας ‘είναι αληθές’. Έτσι λέμε ‘(το) ότι φ είναι αληθές’.

PM (23) Αξιώματα *Η Λογική των Περιγραφών*
Αν το ψ είναι είτε ατομικός τύπος που περιέχει την μεταβλητή αντικειμένων z είτε μία ταυτότητα της μορφής $\tau = z$, τότε τα στιγμιότυπα των ακόλουθων τύπων είναι λογικά αξιώματα:

$$\psi_x^{\iota x \varphi} \equiv \exists x(\varphi \wedge \forall y(\phi_x^y \to y = x) \ \wedge \ \psi_z^x)$$

Αυτό το σύνολο αξιωμάτων συνοψίζει την αναλύση του Russell για τις οριστικές περιγραφές. Δίνουμε έμφαση στο ότι το τροπικό κλείσιμο του αξιώματος δεν περιέχει κατ’ ανάγκην αληθείς προτάσεις και δεν θεωρείται μέρος των λογικών αξιωμάτων της PM.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
axioms
  Descriptors: ⊨ ψ (ι x. φ x) ≡
                    (∃x: t. φ x ∧ (∀ y: t. φ y ⟶ y =[t] x) ∧ ψ x)
```

PM (24) Ορισμός *Παραγωγή και Αποδειξεις*
Ορίζουμε τις παρακάτω έννοιες με τον συνήθη τρόπο:

1. Μία *απόδειξη* (ή *απαγωγή*) του ψ από ένα σύνολο τύπων Γ και τους τύπους $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, είναι μία πεπερασμένη ακολουθία τύπων που καταλήγει σε ψ όπου κάθε μέλος είναι είτε: *1)* λογικό αξίωμα, *2)* ένας από τους τύπους του Γ, *3)* ένα εκ των ϕ_i, ή *4)* έχει παραχθεί από προηγούμενα μέλη της ακολουθίας με εφαρμογή Modus Ponens ή Γενίκευσης (GEN). Μία απόδειξη του ψ χωρίς υποθέσεις είναι μία οποιαδήποτε ακολουθία τύπων που καταλήγει στον ψ της οποίας κάθε μέλος είναι είτε: *1)* λογικό αξίωμα, *2)* έχει παραχθεί από προηγούμενα μέλη της ακολουθίας με εφαρμογή Modus Ponens ή Γενίκευσης (GEN).

2. Γράφουμε $\Gamma, \varphi_1 \ldots \varphi_n \vdash \psi$ για να βεβαιώσουμε ότι υπάρχει μία απόδειξη του ψ από τη θεωρία Γ και τις υποθέσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Γράφουμε $\vdash \psi$ για να βεβαιώσουμε ότι υπάρχει μία απόδειξη του ψ χωρίς υποθέσεις.

3. Όταν ισχύει $\Gamma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, λέμε ότι ο τύπος ψ είναι *θεώρημα* της θεωρίας Γ υπό τις προυποθέσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Όταν $\vdash \psi$ ότι το ψ είναι λογικό θεώρημα.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Εισάγουμε δύο τρόπους παραγωγής αποδείξεων (*proof derivation*) επαγωγικά.

Ορίζουμε ότι ο τύπος φ αποδεικνύεται από το σύνολο Γ, και γράφουμε \$$\Gamma \vdash \varphi$, αν είναι είτε οποιοδήποτε αξίωμα, είτε στοιχείο του Γ, ή παράγεται απο τύπους που παράγονται από το Γ με εφαρμογή Modus Ponens ή Γενίκεσυης.

Ορίζουμε επιπλέον ότι ο τύπος φ αποδεικνύεται από τη θεωρία Γ και το σύνολο Φ απο προκείμενες $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ *τροπικά σε σχέση με το* Γ και γράφουμε \$$\Gamma$; \$$\Phi \vdash^* \varphi$ αν είναι είτε τροπικό αξίωμα, είτε ισχύει\$$\Gamma \vdash \Box\varphi$, είτε είναι στοιχείο του Φ, είτε παράγεται τροπικά από τύπους που παράγονται τροπικά σε σχέση με το Γ με εφαρμογή των κανόνων Modus Ponens ή Γενίκευσης οι οποίοι διατηρούν την τροπικότητα.

Σημειώνουμε ότι στην κωδικοποίηση μας, οι αναλύτικες αλήθειες της θεωρίας αντλούνται με ακολουθιακά της μορφής $\vdash^* \varphi$, όπου τα σύνολα Γ και Φ είναι κενά. Σε τέτοια ακολουθιακά μπορεί να εφαρμοστεί ο Κανόνας της Αναγκαιότητας. Σημειώνουμε επίσης ότι το σύνολο Γ στις αποδείξεις μας είναι πάντα κενό. Σε επόμενα μέρη της θεωρίας όμως προστίθενται στη Γ εξωτερικές υποθέσεις (*auxiliary hypotheses*) που μπορεί να μην είναι όλες αναγκαίες.

Η κωδικοποίηση των παραπάνω αποδεικτικών τρόπων σε Isabelle/HOL, είναι ως εξής :

```
inductive_set Derives :: (frm set * frm) set
where
  drv_axiom[intro]: ⟦ ⊨ φ ⟧ ⟹ (Γ, φ) ∈ Derives

| drv_assum[intro]: ⟦ φ ∈ Γ ⟧ ⟹ (Γ, φ) ∈ Derives

| drv_mp[intro]:    ⟦ (Γ, φ) ∈ Derives; (Γ, (| φ ⟶ ψ |)) ∈ Derives ⟧ ⟹
                                                        (Γ, ψ) ∈ Derives

| drv_gen[intro]:   ⟦ ⋀α. name α  t⟹ (Γ , φ α ) ∈ Derives⟧ ⟹
                                          (Γ,(| ∀α: t. φ α|)) ∈ Derives
```

```
inductive_set Derives_modal :: ((frm set * frm set) * frm) set
where
  drv_axiom_modal[intro]:           ⟦ ⊨* φ ⟧ ⟹ (Σ, φ) ∈ Derives_modal

| drv_assum_modal[intro]:
                                ⟦ φ ∈ Φ  ⟧ ⟹ ((Γ,Φ), φ) ∈ Derives_modal

| drv_assum_theory_modal[intro]:

                 ⟦ (Γ, (|□φ|) ) ∈ Derives ⟧ ⟹ ((Γ,Φ), φ) ∈ Derives_modal

| drv_mp_modal[intro]:

            ⟦ (Σ,φ) ∈ Derives_modal;
                                    (Σ, (| φ ⟶ ψ |)) ∈ Derives_modal ⟧ ⟹
                                                   (Σ,ψ) ∈ Derives_modal

| drv_gen_modal[intro]:

            ⟦ ⋀α. name α  t⟹ (Σ, φ α ) ∈ Derives_modal⟧ ⟹
                                       (Σ,(| ∀α: t. φ α|)) ∈ Derives_modal
```

4.3 Παράγωγοι Κανόνες

PM (25) Παράγωγοι Κανόνες *Κανόνες Παραγωγής*
Αφού ακολουθούμε το σύνηθες αξιωματικό σύστημα προτασιακής λογικής και τους συνήθεις ορισμούς για τους λογικούς τελεστές $\wedge$, $\vee$ και $\equiv$, όλοι οι συνήθεις κανόνες παραγωγής είναι αληθείς στο σύστημα PM.

PM (26) Ορισμός *Εξάρτηση*
Έστω $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ είναι μία απόδειξη του φ από τη θεωρία $\Gamma(\phi_n = \varphi)$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο τύπος ψ ανήκει στο σύνολο Γ. Λέμε τότε ότι (η απόδειξη του) $\varphi_i(1 \leq i \leq n)$ *εξαρτάται από* τον τύπο ψ ανν είτε: *1)* η φ_i είναι η ψ και η αιτιολόγηση της φ_i είναι ότι είναι λογικό αξίωμα ή ανήκει στο Γ ή, *2)* η φ_i έχει παραχθεί από προηγούμενα μέλη της ακολουθίας με MP ή GEN εκ των οπίων τουλάχιστον ένα *εξαρτάται* από την ψ.

PM (27) Παράγωγοι Κανόνες *Απόδειξη υπό Συνθήκη και Απαγωγή σε Άτοπο*
Οι Κανόνες της Απόδειξης υπό Συνθήκη και της Απαγωγής σε Άτοπο εφαρμόζονται στο σύστημα μας:

1. Αν $\Gamma\varphi \vdash \psi$ όπου καμία εφαρμογή Γενίκευσης δεν γίνεται σε κάποιο τύπο που εξαρτάται από την φ και έχει ποσοδεικτούμενη κάποια μεταβλητή που είναι ελεύθερη στην φ, τότε $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.(CP)
2. Αν $\Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi$ και $\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi$, τότε $\Gamma \vdash \varphi$. (RAA)

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL
Παραθέτουμε τις αποδείξεις των δύο κανόνων σε Isabelle/HOL:

```
theorem cp_modal:
  assumes $Γ; $Φ, φ ⊢* ψ
  shows $Γ; $Φ ⊢* φ ⟶ ψ
proof -
  { fix Σ Φ′
    assume #Σ ⊢* ψ and Σ = (Γ, Φ′ ) and Φ′ = Φ ∪ {φ}
    hence $Γ; $Φ⊢* φ ⟶ ψ  proof induct
      case (drv_axiom_modal  ψ _)
      hence $Γ; $Φ ⊢* ψ ⟶ φ ⟶ ψ and $Γ; $Φ ⊢* ψ by auto
      thus ?case by blast
    next
      case (drv_assum_modal  ψ _ _)
      thus ?case
      proof (cases φ= ψ)
        case True
        hence $Γ; ⊢* ψ⟶ψ  using weak_modal[ of {}{}]  id by auto
        thus ?thesis  using True weak_modal by auto

      next
        case False
        hence  ψ  ∈ Φ using prems  by auto
        hence $Γ; $Φ⊢*ψ  by auto
        moreover have $Γ; $Φ⊢* ψ ⟶φ ⟶ ψ  by auto
        ultimately show ?thesis using weak_modal by auto
      qed

    next
      case (drv_assum_theory_modal  _  ψ _ )
      hence $Γ; $Φ⊢*ψ  by auto
      moreover have $Γ; $Φ⊢* ψ⟶φ⟶ ψ        by auto
```

```
      ultimately show  ?case using weak_modal by auto
    next
      case (drv_mp_modal _  p q)
      hence $Γ; $Φ ⊢* (φ ⟶ p ⟶ q) ⟶ (φ ⟶ p) ⟶ (φ ⟶ q)
        and $Γ; $Φ ⊢* φ ⟶ p ⟶ q and $Γ; $Φ ⊢* φ ⟶ p by auto
      thus ?case by auto
    next
      case (drv_gen_modal t _ p )
      hence $Γ; $Φ ⊢* (∀α: t. φ ⟶ p α) ⟶ φ ⟶ (∀α: t. p α)
        and $Γ; $Φ ⊢* ∀α: t. φ ⟶ p α by auto
      thus ?case by auto
    qed
  }
  thus ?thesis using prems by auto
qed
```

```
theorem raa_modal:
  assumes $Γ; $Φ, ¬φ ⊢* ¬ψ
  and  $Γ; $Φ, ¬φ ⊢* ψ
  shows $Γ; $Φ ⊢* φ
proof -
  have $Γ; $Φ  ⊢* (¬φ ⟶ ¬ψ) ⟶ (¬φ ⟶ ψ) ⟶ φ and $Γ; $Φ  ⊢* ¬φ ⟶ ¬ψ
    and $Γ; $Φ  ⊢* ¬φ ⟶ ψ using prems by (auto simp add: cp_modal)
  thus ?thesis by auto
qed
```

PM (28) Παράγωγοι Κανόνες *Καθολική Αντικατάσταση ή Απαλοιφή του Καθολικού Ποσοδείκτη* (*Universal Instantiation*)
Για να δείξουμε ότι η λογική μας είναι κλασσική θεωρία ποσοδεικτών για όρους χωρίς περιγραφές, δείχνουμε ότι αν ο τ είναι ελεύθερος περιγραφών, τότε μπορεί να αντικατασταθεί σε καθολικούς ισχυρισμούς.

- Αν ο τ είναι ελεύθερος περιγραφών και μπορεί να αντικαταστήσει την α, τότε $\forall\alpha\varphi \vdash \varphi^{\tau}_{\alpha}$

Ο κανόνας αυτός μαζί με τον (15.4) και τον Κανόνα της Γενίκευσης, διασφαλίζουν ότι έχουμε ενα σύτημα κλασικής θεωρίας ποσοδεικτών για όρους χωρίς περιγραφές.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
theorem Universal_In_Rule:
  assumes name τ t
  shows $Γ; ∀ α: t. φ α ⊢*  φ τ
proof−
  have $Γ; ∀ α: t. φ α ⊢*  (∀α: t. φ α) ⟶((∃β: t. β =[t] τ) ⟶ φ τ) using
Substitute by auto
  moreover have  $Γ; ∀ α: t. φ α ⊢*∃β: t. β =[t] τ using prems Existance1 by
auto
  moreover have $Γ; ∀ α: t. φ α ⊢* ∀ α: t. φ α by auto
  ultimately show  ?thesis by auto
qed
```

PM (29) Παράγωγοι Κανόνες *Καθολική Γενίκευση* (*Universal Generalization*)
Ο συνήθης κανόνας της Καθολικής Γενίκευσης (UG) αποδεικνύεται στο σύστημα:

- Αν $\Gamma \vdash \varphi$ όπου το σταθερό σύμβολο κ δεν εμφανίζεται στο Γ, τότε αν α είναι μεταβλητή που δεν εμφανίζεται στο ϕ , τότε $\Gamma \vdash \forall\alpha\varphi^{\alpha}_{\kappa}$ όπου ο κ δεν εμφανίζεται.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
 Universal_Gen_Rule:
  assumes ⋀α.  $Γ; $Φ ⊢* φ α
  shows $Γ; $Φ  ⊢* ∀ α: t. φ α
  using prems  drv_gen_modal  by auto
```

PM (30) Παράγωγοι Κανόνες *Υπαρκτική Γενίκευση*(*Existential Generalization*)
Το σύνολο των λογικών θεωρημάτων που περιγράψαμε, επιτρέπει την παραγωγή του Κανόνα της Υπαρκτικής Γενίκευσης (EG), τόσο για περιγραφές όσο και για όρους χωρίς περιγραφές.

1. $\varphi^{\tau}_{\alpha} \vdash \exists \alpha \varphi$, όπου ο τ δεν περιέχει περιγραφές.και μπορεί να αντικαταστήσει την α.
2. $\varphi^{\tau}_{\alpha}, \exists \beta\, \beta = \tau \vdash \exists \alpha \varphi$, δεδομένου ότι η α είναι αντικαταστάσιμη από τον όρο τ.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
theorem  Ex_Gen_1:
  assumes free_desc τ
  shows $Γ ; $Φ, φ τ  ⊢*  ∃ α: t. φ α
proof-
  have $Γ; $Φ, φ τ, ¬( ∃ α: t. φ α) ⊢* ¬ φ τ
  proof-
    have  $Γ ; $Φ, φ τ ,¬ (∃ α: t. φ α)⊢* ∀ α: t. ¬ φ α
    proof-
      have $Γ ; $Φ, ¬ (∃ α: t. φ α)⊢*¬¬   (∀ α: t. ¬ φ α)
        by (auto simp add: pmEx_def)
      hence $Γ ; $Φ, ¬ (∃ α: t. φ α)⊢* (∀ α: t. ¬ φ α)
        using not_not3 by auto
      hence $Γ; $Φ, φ τ ,¬ (∃ α: t. φ α)⊢* ∀ α: t. ¬ φ α
        using weak_modal
        [ of Γ Φ∪ {⦇ ¬ (∃ α: t. φ α)⦈}      _ Γ
          SeqUn' Φ (SeqUn' (SeqOne' ⦇ (φ τ)⦈ ) (SeqOne' ⦇ (¬(∃α : t. φ
α))⦈ ))]
        by auto
      thus ?thesis by auto
    qed
    moreover
    have  A2: $Γ ; $Φ, φ τ ,¬ (∃ α: t. φ α)⊢*  ∃ β: t. β =[t] τ
      using prems Existance1  by auto
    moreover
    have
      A3: $Γ ; $Φ, φ τ ,¬ (∃ α: t. φ α)
      ⊢* (∀ α: t. ¬  φ α ) ⟶  (∃ β: t. β  =[t] τ ) ⟶ ¬  φ  τ
      using Substitute_neg  weak_modal[of {} {}] by auto
    ultimately
    show ?thesis by auto
  qed
  moreover
  have  $Γ ; $Φ,  φ τ, ¬( ∃ α: t. φ α) ⊢* φ τ   by auto
  ultimately
  show  ?thesis
    using raa_modal  by auto
qed
```

```
theorem Ex_Gen_2:
  $Γ ; $Φ, φ τ, ∃ β: t. β =[t] τ  ⊢* ∃ α: t. φ α
proof-
```

```
  have
    $Γ ;$Φ, φ τ,∃β: t. β =[t] τ, ¬( ∃ α: t. φ α)
    ⊢* ¬ φ τ
  proof-
    have
      $Γ ;$Φ, φ τ ,∃ β: t. β =[t] τ,¬ (∃ α: t. φ α)
      ⊢* ∀ α: t. ¬ φ α
    proof-
      have $Γ; $Φ, ¬ (∃ α: t. φ α)⊢*∀ α: t. ¬ φ α
      proof-
        have $Γ ;$Φ, ¬ (∃ α: t. φ α)⊢* ¬ ¬ (∀ α: t. ¬ φ α)      by auto
        thus ?thesis using not_not3
          by auto
      qed
      thus ?thesis
        using
          weak_modal[of Γ SeqUn' Φ (SeqOne' ⦇ (¬(∃α : t. φ α))⦈ )
          ⦇ ∀α : t. ¬φ α⦈ Γ   SeqUn' Φ (SeqUn' (SeqOne' ⦇ (φ τ)⦈ )
           (SeqUn' (SeqOne' ⦇ (∃β : t. β =[t] τ)⦈ ) (SeqOne' ⦇ (¬(∃α :
t. φ α))⦈))))]
        by auto
    qed

    moreover
    have
      $Γ ;$Φ, φ τ, ∃ β: t. β =[t] τ,¬ (∃ α: t. φ α)
      ⊢*  ∃ β: t. β =[t]τ     by auto
    moreover
    have
      $Γ ;$Φ, φ τ, ∃ β: t. β =[t] τ,¬ (∃ α: t. φ α)
      ⊢*  (∀ α: t. ¬  φ α ) ⟶  (∃ β: t. β  =[t] τ ) ⟶ ¬  φ  τ
      using Substitute_neg  using weak_modal[ of {} {}] by auto
    ultimately
    show ?thesis by auto
  qed
  moreover
  have
    $Γ ;$Φ, φ τ, ∃ β: t. β =[t] τ,¬( ∃ α: t. φ α)
    ⊢* φ τ    by auto
  ultimately
  show ?thesis using raa_modal
    by auto
qed
```

PM (31) Παράγωγοι Κανόνες *Υπαρκτική Αντικατάσταση ή Απαλοιφή του Υπαρκτικού Ποσοδείκτη* (*Existential Instantiation*)

Ο συνήθης κανόνας Υπαρκτικής Αντικατάστασης(EI) αποδεινύεται στο σύστημα μας:

- Αν $\Gamma, \varphi^{\kappa}_{\alpha} \vdash \psi$ όπου η σταθερά κ δεν εμφανίζεται στους τύπους φ, ψ, ούτε στο Γ, τότε $\Gamma, \exists\alpha\varphi \vdash \psi$ και η κ δεν εμφανίζεται στο ακολουθιακό.

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
theorem Existential_In_Rule:
  assumes ⋀k. name k t ⟹ $Γ; $Φ,φ k ⊢* ψ
  shows $Γ; $Φ,∃α: t. φ α ⊢*ψ
proof-
  have $Γ; $Φ,¬ ψ ⊢* ∀α: t. ¬ φ α
  proof
```

```
{
  fix k
  assume name k t
  have  $Γ; $Φ ⊢* φ k⟶ψ  using prems cp_modal
    by auto
  hence $Γ; $Φ⊢*¬ ψ  ⟶¬ φ k  sorry
  hence $Γ; $Φ,¬ψ  ⊢*¬ ψ  ⟶¬ φ k
    using weak_modal[of Γ Φ_  Γ SeqUn' Φ (SeqOne'⦇  (¬ψ)⦈ )]
    by auto
  thus $Γ; $Φ,¬ψ  ⊢* ¬ φ k
    by auto
}
qed
hence $Γ; $Φ,¬ ψ ⊢* ¬ (∃ α: t. φ α) sorry
hence $Γ; $Φ ⊢*¬ ψ ⟶ ¬ (∃ α: t. φ α) using cp_modal by auto
hence $Γ; $Φ⊢* ¬ ¬ (∃ α: t. φ α)⟶¬¬ ψ  sorry
hence $Γ; $Φ⊢* (∃ α: t. φ α)⟶ ψ  sorry
hence $Γ; $Φ, (∃ α: t. φ α)⊢* (∃ α: t. φ α)⟶ ψ
  using
    weak_modal[of Γ Φ_  Γ SeqUn' Φ (SeqOne'⦇(∃ α: t. φ α)⦈) ]
  by auto
  thus ?thesis by auto
qed
```

PM (32) Παράγωγοι Κανόνες *Κανόνας της Αναγκαιότητας*(*Rule of Necessiation*)
Έστω *τρόπικό αξίωμα* κάθε αξίωμα ποθ παρουσιάσαμε εκτός των (19.1) και (24). Έστω επιπλέον ο τύπος ψ είναι τροπικός ως προς το σύνολο Γ ανν ο τύπος $\Box\psi$ είναι στοιχείο του Γ. Έτσι ο παρακάτω Κανόνας της Αναγκαιότητας (RN) αποδεικνύεται στο PM:

- Αν $\Gamma \vdash \varphi$, όπου το φ εξαρτάται μόνο από τροπικά αξιώματα και τύπους τροπικούς ως προς το Γ, τότε $\Gamma \vdash \Box\varphi$.

Αυτός ο κανόνας καταδεικνύει ότι η προτασιακή τροπική λογική του PM είναι $S5$ (5). Συνεπώς ο τροπικός τελεστής '$\Box$' μπορεί να διαβαστεί ως ένας ποσοδείκτης με ένα σταθερό πεδίο που περιλαμβάνει ολους τους δυνατούς κόσμους (όλοι οι δυνατοί κόσμοι είναι προσβάσιμοι).

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

```
theorem Rule_Nec:
    assumes $Γ; ⊢* φ
    shows $Γ; ⊢* □φ
  proof-
    {
    fix Σ
    assume  #Σ ⊢* φ and Σ = (Γ, {})
    hence $Γ; ⊢* □ φ
    proof (induct)
      case  (drv_axiom_modal  φo _ )
      thus ?case using prems Modal2 by auto

    next
      case (drv_assum_modal φo  _ Γo  )
      thus ?case by auto
    next
      case (drv_assum_theory_modal Γo  φo _ )
      thus ?case
      proof-
        have $Γo ⊢ □ φo  using prems by auto
        moreover have $Γo ⊢ □φo⟶ □□φo
```

```
        proof-
          have  ⊢ □φo⟶ □□φo       using 4 Derives_In_Derives_Modal[of {}
{}]   by auto
          thus ?thesis using weak by auto
        qed

        thus ?thesis using prems by auto
      qed
    next
      case (drv_mp_modal Σo  φo ψo )
      thus ?case
      proof-
       have $Γ;⊢*  □(φo ⟶ ψo) ⟶ (□φo ⟶ □ψo)  using ModalK weak_modal
by auto
        thus ?thesis using prems by auto
      qed
    next
      case ( drv_gen_modal t  Σo φo)
      thus ?case
      proof-
        have $Γ; ⊢* ∀α:t. □ φo α using prems by auto
        moreover have $Γ; ⊢* (∀α:t. □φo α)⟶□ (∀α:t. φo α)   using Barcan
by auto
        ultimately show  ?thesis  by auto
      qed
    qed
  }
  thus ?thesis  using prems by auto
qed
```

4.4 Λογικά Θεωρήματα της PM

PM (33) Λογικά Θεωρήματα *Ο Αντίστροφος Τύπος Barcan* (*The Converse Barcan Formula*)

$$\Box\forall\alpha\varphi \rightarrow \forall\alpha\Box\varphi$$

PM (34) Λογικά Θεωρήματα *Η Διαμέριση του Πεδίου των Αντικειμένων*
Καθε αντικείμενο x, είναι είτε σύνηθες είτε αφηρημένο:

1. $O!x \vee A!x$

Επιπλέον, κανένα αντικείμενο δεν είναι ταυτόχρονα σύνηθες και αφηρημένο:

2 $\neg\exists x(O!x \wedge A!x)$

PM (35) Λογικά Θεωρήματα *Ταυτότητα$_E$, Ταυτότητα και Αναγκαιότητα*
1) Αν τα αντικείμενα x και y ταυτίζονται$_E$, τότε ταυτίζονται, *2)* Αν τα αντικείμενα x και y ταυτίζονται$_E$, τότε κατ' ανάγκην ταυτίζονται$_E$:

1. $x =_E y \rightarrow x = y$

2. $x =_E \rightarrow \Box =_E y$

PM (36) Λογικά Θεωρήματα *Η Ταυτότητα$_E$ είναι Κλασική για Συνήθη Αντικείμενα*
Η ταυτότητα$_E$ σχετίζει τα συνήθη αντικείμενα με κλασικό τρόπο:

1. Η $=_E$ είναι σχέση ισοδυναμίας για συνήθη αντικείμενα:

$$O!x \rightarrow x =_E x$$
$$O!x \wedge O!y \rightarrow (x =_E y \rightarrow y =_E x)$$

2. Τα συνήθη αντικείμενα υπακούν στον νόμο του Leibniz για την ταυτότητα των μη διαχωρίσιμων

$$O!x \wedge O!y \rightarrow [\forall F(Fx \equiv Fy) \rightarrow x =_E y]$$

Κωδικοποίηση Isabelle/HOL

Παραθέτουμε ενδεικτικά κάποιες αποδείξεις λογικών θεωρημάτων σε Isabelle/HOL[9].

```
lemma BF:
  shows ⊢* □(∀α: t.  φ α)  ⟶  (∀α: t.  □(φ α))
proof-
  { fix α
    assume name α t
    hence   ; ∀α: t.  φ α ⊢* φ α
      using Universal_In_Rule by auto
    hence ⊢*  (∀α: t.  φ α)  ⟶  φ α
      using cp_modal by auto
    hence ⊢* □((∀α: t.  φ α)  ⟶  φ α)
      using Rule_Nec by auto
    moreover
    { fix φ ψ
      have ⊢* □(φ  ⟶  ψ)  ⟶  (□φ  ⟶  □ψ)
        using ModalK by auto
    }
    ultimately
    have ⊢* □(∀α: t.  φ α)  ⟶  □(φ α)  by auto
  }
  hence ⊢* ∀α: t.  □(∀α: t.  φ α)  ⟶  □(φ α)  by auto
  moreover
  { fix φ ψ
    have ⊢*  (∀α: t.  φ  ⟶  ψ α)  ⟶  φ  ⟶  (∀α: t.  ψ α)
      using QuantTransf by auto
  }
  ultimately
  show ?thesis by auto
qed
```

```
lemma POD:
  shows $Γ; $Φ ⊢* O!·x ∨ A!·x
proof-

  have ⊢* ◇ (E!·x) ∨ ¬ (◇(E!·x)) using PC_1 by auto
  moreover
  { have free_desc ⦇ λx.  ◇E!·x ⦈
      by (auto simp add: pmErel_def)
    moreover
```

[9] σε κάποια σημεία τον αποδείξεων, που αφορούν στοιχειώδη αποδεικτικά βήματα του προτασιακού λογισμού και *μόνο*, χρησιμοποιείται η τεχνική `sorry` η οποία δέχεται μία πρόταση χωρίς απόδειξη. Εν γένει η κωδικοποίηση μας, μένοντας πιστή στο κείμενο του Zalta, αναγκαστικά αντιμετωπίζει τους “περιοσρισμούς” μιας *Hilbert-style* τυποποίησης. Έτσι, συχνά, κανουμε αποδεικτικά βήματα του προτασιακού λογισμού ή εισάγουμε λήμματα απο τον προτασιακό λογισμό με το πρόθεμα `PC`, χωρίς απόδειξη.

```
    have wff (Suc 0) (fpar (%x. fgrn (| ◊E!·x |)))
      by (auto simp add: pmErel_def)
    ultimately
    have ⊢* ((λx. (◊ (E!·x)))·x) ≡ (◊ (E!·x))
      using Beta[of fpar (%x. fgrn (| ◊ (E!·x) |)) _ [x]] by auto
  }
  moreover
  { have free_desc (| λx. ¬ ◊E!·x |)
      by (auto simp add: pmErel_def)
    moreover
   have wff (Suc 0) (fpar (%x. fgrn (|¬ ◊E!·x |)))
     by (auto simp add: pmErel_def)
   ultimately
   have ⊢* ((λx. (¬ ◊ (E!·x)))·x) ≡ (¬ ◊ (E!·x))
     using Beta[of fpar (%x. fgrn (| ¬ ◊ (E!·x) |)) _ [x]] by auto
 }
 ultimately
 have ⊢*  ((λx. (◊ (E!·x)))·x) ∨ ((λx. (¬ ◊ (E!·x)))·x)
   using PC_2 by auto
 hence ⊢* O!·x ∨ A!·x   using Ord_def Abs_def by auto
 thus ?thesis using weak_modal [of {} {}] by auto
qed

lemma POD2:
  shows ⊢* ¬ (∃x: ind. (O!·x ∧ A!·x))
proof-
  have ⋀x . name x ind ⟹ ⊢* ¬ (O!·x ∧ A!·x)
  proof-
    fix x
    assume name x ind
    have ⊢* (¬ O!·x) ∨ (¬ A!·x)
    proof-
      {
        have ⊢* ¬ (◊ (E!·x)) ∨ ¬¬ (◊(E!·x)) using PC_1 by auto
        moreover
        {
          have free_desc (| λx. ◊E!·x |)
            using prems by (auto simp add: pmErel_def)
          moreover
          have wff (Suc 0) (fpar (%x. fgrn (| ◊E!·x |)))
            using prems by (auto simp add: pmErel_def)
          ultimately
          have ⊢*  ((λx. (◊ (E!·x)))·x) ≡  (◊ (E!·x))
            using Beta[of fpar (%x. fgrn (| ◊ (E!·x) |)) _ [x]] by auto
         hence  ⊢* (¬  ((λx. (◊ (E!·x)))·x) ≡ ¬  (◊ (E!·x))) using PC_equiv
by auto
        }
        moreover

        {
          have free_desc (| λx. ¬ ◊E!·x |) using prems
            by (auto simp add: pmErel_def)
          moreover
          have wff (Suc 0) (fpar (%x. fgrn (|¬ ◊E!·x |))) using prems
            by (auto simp add: pmErel_def)
          ultimately
          have ⊢* ((λx. (¬ ◊ (E!·x)))·x) ≡ (¬ ◊ (E!·x))
            using Beta[of fpar (%x. fgrn (| ¬ ◊ (E!·x) |)) _ [x]]
            by auto
          hence  ⊢* (¬ ((λx. ¬ (◊ (E!·x)))·x) ≡ ¬¬   (◊ (E!·x)))
            using PC_equiv
            by auto
        }
```

```
        ultimately
        have ⊢* (¬ (λx. (◊ (E!·x)))·x) ∨ (¬ (λx. (¬ ◊ (E!·x)))·x)
          using PC_2 by auto
        thus ?thesis using Ord_def Abs_def by auto
      }
    qed
    thus ⊢* ¬ (O!·x ∧ A!·x) sorry
  qed
  hence ⊢* ∀x: ind. ¬ (O!·x ∧ A!·x)
    by auto
  hence ⊢*¬¬ (∀x : ind. ¬(O!·x ∧ A!·x))
    sorry
  thus ?thesis by auto
qed


theorem identityE:
  shows ⊢* x =E y ⟶ x =[ind] y
proof-
  have ;x=E y⊢* x=[ind] y
  proof-
    have
      ;x=E y
      ⊢*x =E y ∨ A!·x ∧ A!·y ∧ □(∀F: rel 1. x$F ≡ y$F) sorry
    hence ;x=E y⊢* x=I y by (auto simp add: pmEqI_def)
    thus ?thesis by auto
  qed
  thus ?thesis using cp_modal by auto
qed
```

Κεφάλαιο 5

Συμπεράσματα

Στα πλαίσια της διπλωματικής αυτής εργασίας, παρουσιάσαμε μία τυποποίση της γλώσσας και βασικών θεωρημάτων της Θεωρίας Αφηρημένων Αντικειμένων ή Principia Metaphysica (PM) στο σύστημα υποστήριξης αποδείξεων Isabelle/HOL. Η υλοποίηση της κωδικοποίησης της PM, μπορεί να χρησιμεύσει ως αποδεικτικό περιβάλλον για την επαλήθευση θεωρημάτων της PM. Ένας σύντομος απολογισμός μπορεί να γίνει απαντώντας στα ερωτήματα γιατί επιλέξαμε αυτη θεωρία προς κωδικοποίηση, και ποιά η συμβολή της κωδικοποίησης σε Isabelle/HOL για τη θεωρία και γενικότερα.

Το “προκλητικό” στοιχείο της PM είναι η απόπειρα να αναπαραστήσει με τυποποιημένο τρόπο φιλοσοφικά αντικείμενα που έχουν προταθεί απο φιλοσόφους προκείμενου να αναπτύξουν το φιλοσοφικό τους σύστημα και ιδιαίτερα τις απόψεις τους στην επιστημολογία και τη γνωσιοθεωρία. Εν γένει θεωρούμε ότι αν δεχτούμε ότι οι μεταφυσικές μας υποθέσεις καθορίζονται απο ένα ‘βασίλειο’ τέτοιων αντικειμένων, τότε οποιαδήποτε απόπειρα για τεχνητή νοημοσύνη ή υπολογιστική γνωσιοθεωρία θα πρέπει να περιλαμβάνει μία ανάλογη συμβολικά αναπαραστάσιμη, τυποποιημένη, μεταφυσική θεωρία. Δεχόμενοι δηλαδή ότι ο ανθρώπινος νους έχει γνωσιακή πρόσβαση στον κόσμο που βασίζεται σε τέτοια μορφώματα (αριθμοί, σύνολα, σχέσεις, προτασιακές στάσεις, έννοιες όπως η τροπικότητα κλπ), και αν ο τρόπος που ο Zalta τυποποιεί τα μορφώματα αυτά στην *Θεωρία Αφηρημένων Αντικειμένων* αξιολογείται θετικά, τότε ένας υπολογιστής με “γνώση” της PM είναι γνωσιακά πιο κοντά στον ανθρώπινο νου. Με βάση αυτά, η συμβολική αναπαράσταση της θεωρίας υπολογιστικά έχει αξία για τη γνωσιακή επιστήμη και την τεχνητή νοημοσύνη.

Σε ότι αφορά την κωδικοποίηση, θεωρούμε ότι βασικό πλεονέκτημα της είναι οτι επιτυγχάνει στο να ακολουθήσει πιστά την σύνταξη της PM. Επιπλέον, επιτυγχάνει να εκφράσει όλα τα μεταθεωρητικά κατηγορήματα της γλώσσας για τον έλεγχο των λάμβδα και των οριστικών περιγραφών, καθώς και έννοιες που δεν παρέχονται σε μια ‘ρηχή’ κωδικοποίηση όπως το τροπικό κλεισιμο. Το βάθος της κωδικοποίησης είναι τέτοιο ώστε να αποφεύγει ασυνέπειες μεταξύ της λογικής του HOL, αλλά και να εκμεταλλεύεται τις τεχνικές αυτοματοποιημένου συμπερασμού που παρέχονται. Εν γένει, το αν θα ακολουθηουμε μία ‘βαθία’ ή ‘ρηχή’ κωδικοποίηση ήταν ένα σημαντικό δίλειμμα απο την αρχή της υλοποίησης. Επειδή το HOL περιλαμβάνει μία υλοποίηση της κλασικής προτασιακής λογικής και του κλασικού κατηγορηματικού λογισμού, μία ‘ρηχή’ κωδικοποίση ενέχει τον κίνδυνο να προκύψουν συγκρούσεις μεταξύ της κωδικοποιημένης θεωρίας και της λογικής του HOL. Από την άλλη μία βαθιά κωδικοποίηση, όπως αυτή που επιλέξαμε, είναι δύσκολη στην υλοποίηση και κάνει πιο δύσκολη την αυτοματοποίηση των αποδείξεων. Σ’ αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η υλοποίηση επιδέχεται βελτιστοποίησης.

Σημειώνουμε εδώ, ότι ακολουθώντας πιστά την *Hilbert-style* συστηματοποίηση της θεωρίας, η κωδικοποίηση μας δεν έχει να πει πολλά ως προς το πως, εμπειρικά, ο ανθρώπινος νους αποκτά γνώση για αφηρημένα αντικείμενα. Μια περισσότερο ευρετική και ιντουισιονιστική προσέγγιση στην κωδικοποίηση της PM έχει ακολουθηθεί απο τον ίδιο το Zalta στον αποδείκτη *PROVE9*. Ωστόσο και αυτή η προσέγγιση έχει τους δικούς της περιορισμούς στο να εκφράσει ιδιαιτερότητες της PM όπως π.χ η έννοια τροπικό αξίωμα.

Όσον αφορά επόμενα θεωρήματα της PM θεωρούμε ότι αφού η κωδικοποίηση μας είναι πλήρης και εκφράζει όλα τα μεταθεωρητικά κατηγορήματα της PM, μπορούν να αποδειχτούν. Τέλος, η χρησιμότητα της κωδικοποίησης πέραν της επαλήθευσης αποδείξεων στα πλαίσια της PM, είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για αυτοματοποιημένες αποδείξεις σε πιο 'δημοφιλή' λογικά συστήματα. Με λίγες προσθήκες και περισσότερες περικοπές, η κωδικοποίηση που υλοποιούμε μπορεί να μετατραπεί σε κωδικοποίηση οποιουδήποτε συστήματος τροπικής λογικής με *Hilbert-style* αποδεικτική διαδικασία.

Βιβλιογραφία

[Chel80] Brian F. Chellas, *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, February 1980.

[Ende00] Herbert B. Enderton, *A Mathematical Introduction to Logic, Second Edition*, Academic Press, 2 edition, 2000.

[Freg48] Gottlob Frege, "Sense and Reference", *The Philosophical Review*, vol. 57, no. 3, pp. 209–230, 1948.

[Hugh96] G. E. Hughes and M. J. Cresswell, *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, September 1996.

[Isab] Isabelle, Cambridge University, "What is Isabelle", `http://www.cl.cam.ac.uk/research/hvg/Isabelle/index.html`.

[Jacq90] Dale Jacquette, "Review: [Meinong's Theory of Knowledge.]", *Noûs*, vol. 24, no. 3, pp. 487–492, 1990.

[Mall12] Ernst Mally, *Gegenstandstheoretische Grundlagen der Logik und Logistik*, Barth, Leipzig, 1912.

[Mend97] Elliott Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, Chapman & Hall/CRC, fourth edition, 1997.

[Russ05] Bertrand Russell, "On Denoting", *Mind*, vol. XIV, pp. 479–493, 1905. Also published as ch. 3 in "Analytic Philosophy: An Anthology", A. P. Martinich and D. Sosa (editors), Blackwell Publishing, 2001.

[Stan] Stanford Encyclopedia of Philosophy, Stanford University, "Automated Reasoning", `http://plato.stanford.edu/entries/reasoning-automated/`.

[The] The Metaphysics Research Lab, Stanford University, "The Theory of Abstract Objects", `http://mally.stanford.edu/theory.html`.

[Turi04] Alan M. Turing, *The Essential Turing: Seminal Writings in Computing, Logic, Philosophy, Artificial Intelligence, and Artificial Life plus The Secrets of Enigma*, Oxford University Press, USA, October 2004.

[Zalt83] Edward N. Zalta, *Abstract Objects: An Introduction to Axiomatic Metaphysics*, D. Reidel (Kluwer), Dordrecht, 1983.

[Zalt88a] Edward N. Zalta, *Intensional Logic and the Metaphysics of Intentionality*, A Bradford Book, the MIT Press, Cambridge, MA, 1988.

[Zalt88b] Edward N. Zalta, "Logical and Analytic Truths That Are Not Necessary", *Journal of Philosophy*, vol. 85, pp. 57–74, 1988.

[Zalt02] Edward N. Zalta, "Principia Metaphysica". Draft of a monograph, available from `http://mally.stanford.edu/publications.html#principia`, January 2002.