



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Αξιολόγηση Μετοχών Με Τη Μέθοδο Της Αποτίμησης Χαρτοφυλακίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθανάσιος Π. Βοϊλής

Επιβλέπων: Ιωάννης Ψαρράς

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

Αξιολόγηση Μετοχών Με Τη Μέθοδο Της Αποτίμησης Χαρτοφυλακίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αθανάσιος Π. Βοϊλής

Επιβλέπων: Ιωάννης Ψαρράς

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 19^η Οκτωβρίου 2009

.....
Ιωάννης Ψαρράς

.....
Βασίλειος Ασημακόπουλος

.....
Δημήτριος Ασκούνης

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Οκτώβριος 2009

.....
Αθανάσιος Π. Βοϊλής
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών
Ε.Μ.Π.

Copyright © Αθανάσιος Π. Βοϊλής, 2009
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ο σκοπός της διπλωματικής εργασίας ήταν η αξιολόγηση μετοχών με βάση τη μέθοδο αποτίμησης χαρτοφυλακίων. Η διατριβή αρχίζει με μια ανασκόπηση της θεωρίας χαρτοφυλακίου του Markowitz στο κεφάλαιο 1 και μια ευρεία μαθηματική άποψη της θεωρίας αυτής στο κεφάλαιο 2. Εξηγείται η θεωρία του αποδοτικού συνόλου και υπολογίζονται βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Βλέπουμε τι συμβαίνει όταν ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο προστίθεται στο μοντέλο και γίνεται ανάλυση ευαισθησίας. Το κεφάλαιο 3 εισάγει μια πρώτη αρχή ασφάλειας, ένα άλλο μοντέλο για τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων που εξετάζει τις πιθανότητες ελλείμματος. Μια πιθανότητα ελλείμματος είναι η πιθανότητα όπου η απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι χαμηλότερη από μια προκαθορισμένη αξία. Η υπόθεση των επιστροφών των κανονικά διανεμημένων χαρτοφυλακίων γίνεται σε αυτό το κεφάλαιο. Το κεφάλαιο 4 συζητά την οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών. Βλέπουμε τι συμβαίνει με την ασφάλεια του πρώτου μοντέλου εάν χρησιμοποιείται μια ελλειπτική κατανομή, αντί μιας κανονικής κατανομής, όπως η λειτουργία πυκνότητας για τις αποδόσεις. Το ευρέως χρησιμοποιούμενο μέτρο κινδύνου, η *αξία του κινδύνου* (VaR) συζητείται στο κεφάλαιο 5, και προκύπτουν τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια εξετάζοντας αυτό το άλλο μέτρο κινδύνου. Συζητούνται επίσης τόσο οι περιπτώσεις με όσο και χωρίς ελεύθερου κινδύνου ενεργητικά στοιχεία. Το κεφάλαιο 6 θεσπίζει τα μέτρα απόδοσης EVA (Economic Value Added) και RAROC (Risk Adjusted Return On Capital), και τα εντάσσει στα προηγούμενα μοντέλα. Δύο προτάσεις από την εξέταση της αβεβαιότητας στην εισαγωγή των παραμέτρων δίνονται στο κεφάλαιο 7. Εδώ χρησιμοποιείται η τεχνική SOCP για την επίλυση των προβλημάτων. Το κεφάλαιο 8 ολοκληρώνει αυτή τη διατριβή με συμπεράσματα και συστάσεις για μελλοντική έρευνα. Στο δεύτερο-πειραματικό μέρος της διατριβής παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της θεωρίας χαρτοφυλακίου του Markowitz χρησιμοποιώντας πραγματικά δεδομένα. Για την ακρίβεια γίνεται έλεγχος για τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από μετοχές του χρηματιστηρίου αξιών του Λονδίνου. Δημιουργούνται 25 χαρτοφυλάκια αποτελούμενα από τους 4 βασικούς τομείς βιομηχανιών και εξετάζεται η προφητική ικανότητα του μοντέλου μας. Στη συνέχεια γίνεται μια ανάλυση μικρού δείγματος στην οποία θα εξετάσω την ακρίβεια της πρόβλεψής των αναλυτών, των οποίων κύριος σκοπός της ανάπτυξης των εκθέσεων τους είναι να προβλεφθεί ο μελλοντικός δείκτης μετοχής που θα έχει η υπό εξέταση εταιρία. Το δείγμα μας αποτελείται από τις 5 μεγαλύτερες εταιρίες από πλευράς κεφαλαιοποίησης αγοράς του χρηματιστηρίου αξιών του Λονδίνου.

Λέξεις κλειδιά

αποδοτικό σύνολο, βέλτιστα χαρτοφυλάκια, ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, πρώτη αρχή ασφάλειας, ελλειπτική κατανομή, VaR, EVA, RAROC, τεχνική SOCP

ABSTRACT

The objective of this dissertation was the evaluation of the stock through the use of portfolio evaluation method. The project commences with a review of the Markowitz portfolio theory in the first chapter and with a broad mathematical view of the theory of Markowitz in chapter 2. The theory of the efficient set is explained and optimal portfolios are calculated. We see what happens when a risk-free asset is added to the model and a sensitivity analysis is done. Chapter 3 introduces a safety first principle, another model for portfolio optimization which deals with shortfall probabilities. A shortfall probability is the chance that the return of the portfolio will be lower than a predetermined value. The assumption of normally distributed portfolio returns is made in this chapter. Chapter 4 discusses the family of elliptical distributions. We see what happens with the safety first model if an elliptical distribution, instead of a normal distribution, is used as the density function for returns. The widely used risk measure Value at Risk (VaR) is discussed in chapter 5, and optimal portfolios considering this other risk measure are derived. Both the case with and without risk-free asset are discussed. Chapter 6 introduces the performance measures EVA (Economic Value Added) and RAROC (Risk Adjusted Return On Capital), and implements these in the previous models. Two proposals of dealing with uncertainty in the input parameters are given in chapter 7. Here, the technique of second order cone programming (SOCP) is used for solving the problems. Chapter 8 concludes this thesis with a concluding example and recommendations for future research. In the following chapter, results from the application of real data on Markowitz's portfolio theory are being presented. More specifically, checks are being performed on the optimal portfolios that consist of equity of the London Stock Exchange. About 25 portfolios are put together consisting of the 4 primary sectors of industry and the ability of our model to derive accurate predictions is examined. Thereafter, an analysis of a small sample, in which the accuracy of the analysts' prediction is determined is carried out their main aim of analyzing their reports is to predict the future bond equity index that will be owned by the company being examined. Our sample consists of the top 5 companies in terms of capitalization at the London Stock Exchange.

Key Words

efficient frontier, optimal portfolios, risk free asset, safety first, elliptic distribution, VaR, EVA, RAROC, technical SOCP

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή ΣΕΛ 017

Κεφάλαιο 1: (Θεωρία χαρτοφυλακίου του Markowitz) ΣΕΛ 019

1.1: Αναμενόμενοι ρυθμοί απόδοσης ΣΕΛ 021

1.2: Διακύμανση των αποδόσεων για ένα χαρτοφυλάκιο ΣΕΛ 023

1.3: Σταθερή απόκλιση ενός χαρτοφυλακίου ΣΕΛ 030

1.4: Χαρτοφυλάκιο με 3 στοιχεία ΣΕΛ 041

1.5: Θέματα εκτιμητικής προσέγγισης ΣΕΛ 042

1.6: Όριο απόδοσης ΣΕΛ 043

1.7: Όριο απόδοσης και χρησιμότητα επενδυτή ΣΕΛ 045

Κεφάλαιο 2: (Ευρεία μαθηματική προσέγγιση της θεωρίας χαρτοφυλακίων του Markowitz) ΣΕΛ 047

2.1: Αποδοτικά σύνορα ΣΕΛ 047

2.2: Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς ΣΕΛ 051

2.3: Εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο ΣΕΛ 053

2.4: Βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ΣΕΛ 055

2.5: Προσθήκη ενός ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου ΣΕΛ 059

2.5.1: Γραμμή κεφαλαιαγορών & χαρτοφυλάκιο αγοράς..... ΣΕΛ 059

2.5.2 Βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ΣΕΛ 063

2.6: Ανάλυση ευαισθησίας ΣΕΛ 066

Κεφάλαιο 3: Μία άλλη προσέγγιση για τον κίνδυνο: πρώτα η Ασφάλεια..... ΣΕΛ 069

3.1: Μοντέλα «πρώτης ασφάλειας»	ΣΕΛ069
3.2: Κριτήριο Telsers	ΣΕΛ 070
3.2.1: Μοντελοποίηση	ΣΕΛ 070
3.2.2: Διαισθητική λύση	ΣΕΛ 071
3.2.3: Αναλυτική λύση	ΣΕΛ 073
3.3: Με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 073
3.3.1: Διαισθητική λύση	ΣΕΛ 073
3.3.2: Αναλυτική λύση	ΣΕΛ 076
Κεφάλαιο 4: (Ελλειπτικές κατανομές).....	ΣΕΛ 077
4.1: Εισαγωγή	ΣΕΛ 077
4.2: Μερικά παραδείγματα των ελλειπτικών κατανομών	ΣΕΛ 079
4.2.1: Κανονική οικογένεια - κατανομή	ΣΕΛ 079
4.2.2: Οικογένεια – κατανομή student-t	ΣΕΛ 081
4.2.3: Οικογένεια Λαπλάς (Laplace)	ΣΕΛ 082
4.2.4: Λογιστική οικογένεια	ΣΕΛ 083
4.2.5: Διαφορές και ομοιότητες	ΣΕΛ 085
4.3: Ανάλυση μέσου-διασποράς	ΣΕΛ 087
4.4: Telser και ελλειπτικά διανεμημένες αποδόσεις	ΣΕΛ 089
Κεφάλαιο 5: Βελτιστοποίηση βασισμένη στην αξία κινδύνου – ρίσκου (VaR).....	ΣΕΛ 093
5.1: Αποδοτικά σύνορα VaR	ΣΕΛ 093
5.2: Προσθήκη του ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου..	ΣΕΛ 099
5.3: Βέλιστα χαρτοφυλάκια	ΣΕΛ 101
5.3.1: Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου	ΣΕΛ 101
5.3.2: Εφαπτομενικό VaR χαρτοφυλάκιο	ΣΕΛ 102
5.3.3: Telser	ΣΕΛ 104
5.3.4: Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 106

Κεφάλαιο 6: Μεγιστοποίηση των μέτρων απόδοσης EVA και RAROC.....	ΣΕΛ 109
6.1: EVA και RAROC	ΣΕΛ 109
6.2: Νέα μοντέλα Telser	ΣΕΛ 110
6.2.1: EVA με το διατιθέμενο κεφάλαιο	ΣΕΛ 110
6.2.2: EVA με το καταναλωμένο κεφάλαιο	ΣΕΛ 112
6.2.3: RAROC με το διατιθέμενο κεφάλαιο	ΣΕΛ 116
6.2.4: RAROC με το καταναλωμένο κεφάλαιο	ΣΕΛ 116
6.2.5: Σύγκριση EVA-RAROC	ΣΕΛ 118
6.3: Μοντέλα με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 120
6.3.1: EVA	ΣΕΛ 120
6.3.2: RAROC	ΣΕΛ 122
 Κεφάλαιο 7: Μοντέλο αβεβαιότητας των παραμέτρων εισαγωγής	ΣΕΛ 125
7.1: Επισκόπηση	ΣΕΛ 125
7.2: Σύνολα αβεβαιότητας	ΣΕΛ 126
7.3: Δεύτερη διαταγή προγραμματισμός κώνων (SOCP)	ΣΕΛ 127
7.4: Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων και SOCP	ΣΕΛ 129
7.4.1: Markowitz	ΣΕΛ 129
7.4.2: Telser	ΣΕΛ 130
7.5: Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων με την αβεβαιότητα	ΣΕΛ 130
7.5.1: Markowitz	ΣΕΛ 131
7.5.2: Telser	ΣΕΛ 133
7.6: Μια πιο ρεαλιστικότερη προσέγγιση	ΣΕΛ 134
7.6.1: Markowitz	ΣΕΛ 135
7.6.2: Telser	ΣΕΛ 136

Κεφάλαιο 8: Συμπέρασμα.....	ΣΕΛ 137
8.1: Συμπέρασμα	ΣΕΛ 137
8.2: Μελλοντική έρευνα	ΣΕΛ 137

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Πρακτική εφαρμογή θεωρητικού κομματιού	ΣΕΛ 139
Ανάλυση μικρού δείγματος	ΣΕΛ 145
Αναφορές:	ΣΕΛ 161

ΠΙΝΑΚΕΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΩΝ

ΣΧΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Σχήμα 2.1: Τα αποδοτικά σύνορα	ΣΕΛ 050
Σχήμα 2.2: Το ελάχιστο χαρτοφυλάκιο διαφοράς	ΣΕΛ 052
Σχήμα 2.3: Το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο	ΣΕΛ 054
Σχήμα 2.4: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο	ΣΕΛ 057
Σχήμα 2.5: Η γραμμή χαρτοφυλακίων αγοράς και κεφαλαιαγορών ...	ΣΕΛ 060
Σχήμα 2.6: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο	ΣΕΛ 064

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σχήμα 3.1: Η εφικτή περιοχή A και το βέλτιστο σημείο Telser	ΣΕΛ 072
Σχήμα 3.2: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 074

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Σχήμα 4.1: Οριακή και διμεταβλητή τυποποιημένη κανονική συνάρτηση πυκνότητας	ΣΕΛ 080
Σχήμα 4.2: Οριακές και διμεταβλητές συναρτήσεις πυκνότητας σπουδαστή-T	ΣΕΛ 082
Σχήμα 4.3: Οριακές και διμεταβλητές συναρτήσεις πυκνότητας Λαπλάς	ΣΕΛ 083
Σχήμα 4.4: Οριακές και διμεταβλητές λογιστικές συναρτήσεις πυκνότητας	ΣΕΛ 084
Σχήμα 4.5: Σύγκριση τεσσάρων ελλειπτικών κατανομών	ΣΕΛ 085
Σχήμα 4.6: Διεύρυνση της δεξιάς ουράς	ΣΕΛ 086

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σχήμα 5.1: Καθορισμός της αξίας σε κίνδυνο	ΣΕΛ 094
--	---------

Σχήμα 5.2: Τα αποδοτικά σύνορα σε πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης και το πλαίσιο μέσου-VaR	ΣΕΛ 098
Σχήμα 5.3: Γραφική σχέση των αποδοτικών συνόρων σε πλαίσιο μέσης-σταθερής απόκλισης και πλαίσιο μέσου-VaR	ΣΕΛ 099
Σχήμα 5.4: Γραφική σχέση του CML σε πλαίσιο μέσης-σταθερής απόκλισης και πλαίσιο μέσου-VaR	ΣΕΛ 100
Σχήμα 5.5: Το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου	ΣΕΛ 102
Σχήμα 5.6: Το ελάχιστο VaR χαρτοφυλάκιο	ΣΕΛ 104
Σχήμα 5.7: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser	ΣΕΛ 105
Σχήμα 5.8: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 106

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Σχήμα 6.1: Βέλτιστο " EVA με διατιθέμενο κεφάλαιο" χαρτοφυλάκιο ..	ΣΕΛ 111
Σχήμα 6.2: Κινώντας την EVA-γραμμή με το μεγάλο r_{cap}	ΣΕΛ 112
Σχήμα 6.3: Κίνηση της EVA-γραμμής με το μικρό r_{cap}	ΣΕΛ 113
Σχήμα 6.4: Το εφαπτομενικό σημείο είναι το σημείο Telser	ΣΕΛ 114
Σχήμα 6.5: Μεγιστοποίηση της κλίσης της γραμμής RAROC	ΣΕΛ 117
Σχήμα 6.6: Η κατάσταση εάν η εφαπτομενική αξία κινδύνου υπερβαίνει το VaR_c	ΣΕΛ 118
Σχήμα 6.7: Λύσεις μεγιστοποίησης του μέτρου απόδοσης EVA με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 121
Σχήμα 6.8: Λύσεις μεγιστοποίησης RAROC με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο	ΣΕΛ 122

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Σχήμα 7.1: Ο τυποποιημένος δεύτερος κώνος διαταγής	ΣΕΛ 128
--	---------

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

ΠΙΝΑΚΑΣ 0.1	ΣΕΛ 017
-------------------	---------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1	ΣΕΛ 021
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2	ΣΕΛ 021
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3	ΣΕΛ 022
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4	ΣΕΛ 024
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5	ΣΕΛ 024
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.6	ΣΕΛ 025
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.7	ΣΕΛ 027
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.8	ΣΕΛ 028
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.9	ΣΕΛ 029
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.10	ΣΕΛ 034
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.11	ΣΕΛ 037
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.12	ΣΕΛ 038
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.13	ΣΕΛ 040
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.14	ΣΕΛ 044
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.15	ΣΕΛ 044
ΠΙΝΑΚΑΣ 1.16	ΣΕΛ 046

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Πίνακας 4.1: Οι διακυμάνσεις k_a για μερικές ελλειπτικές κατανομές ...	ΣΕΛ 091
--	---------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Πίνακας 6.1: Επισκόπηση των μέτρων απόδοσης EVA και RAROC ..	ΣΕΛ 110
--	---------

Εισαγωγή

Αυτή η διατριβή αναφέρεται στη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων. Αλλά τι είναι ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο; Εξετάστε το ακόλουθο παράδειγμα: Υποθέστε ότι είστε σε μία χαρτοπαικτική λέσχη στην οποία υπάρχουν δύο παιχνίδια που μπορούν να παιχτούν. Στο πρώτο παιχνίδι, υπάρχει μια πιθανότητα 5% νίκης 1000 ευρώ και μια πιθανότητα 95% να μην κερδιθεί τίποτα. Το δεύτερο παιχνίδι έχει επίσης μια πιθανότητα νίκης 5 τοις εκατό, αλλά θα κερδίσετε 5000 ευρώ. Αντίθετα, εάν χάνετε, θα πρέπει να πληρώσετε στη χαρτοπαικτική λέσχη 200 ευρώ. Τα γεγονότα είναι στον πίνακα κατωτέρω.

game I	game II
5%: +1000 euro	5%: +5000 euro
95%: 0 euro	95%: -200 euro

Πίνακας 0.1: Το παιχνίδι χαρτοπαικτικών λεσχών

Έχετε την άδεια να παίξετε το παιχνίδι αυτό μόνο μία φορά. Ποιο παιχνίδι θα επιλέξετε;

Οι περισσότεροι άνθρωποι θα επιλέξουν το παιχνίδι I. Είναι ενδιαφέρον να δούμε ότι η αναμενόμενη απόδοση για το πρώτο παιχνίδι είναι $(0.05 * 1000) + (0.95 * 0) = 50$, ενώ η αναμενόμενη απόδοση για το παιχνίδι II είναι $(0.05 * 5000) + (0.95 * (-200)) = 60$. Εξετάζοντας την αναμενόμενη απόδοση, είναι λογικότερο να επιλεγεί το δεύτερο παιχνίδι! Εντούτοις, παρά αυτό το στατιστικό γεγονός, το παιχνίδι I είναι το δημοφιλέστερο. Η εξήγηση είναι ότι το παιχνίδι II εμφανίζεται να είναι πιο επικίνδυνο από το παιχνίδι I. Αλλά τι είναι κίνδυνος - ρίσκο; Ο κίνδυνος μπορεί να καθοριστεί από πολλές απόψεις, και για κάθε πρόσωπο αυτός ο καθορισμός του κινδύνου μπορεί να είναι διαφορετικός. Εντούτοις, οι περισσότεροι άνθρωποι έχουν ένα πράγμα από κοινού: όλοι είναι αντίθετοι στον κίνδυνο - ρίσκο.

Ένας αντίθετος στον κίνδυνο επενδυτής δεν επιθυμεί να αναλάβει το ρίσκο – διατρέξει τον κίνδυνο. Εάν μπορεί να επιλέξει μεταξύ δύο επενδύσεων με την ίδια αναμενόμενη απόδοση, θα επιλέξει τη λιγότερο επικίνδυνη.

Το αντίθετο ενός επενδυτή αντίθετου στο ρίσκο είναι ένας επενδυτής που «αγαπά» το ρίσκο. Εάν επενδυτής που αγαπά τον κίνδυνο μπορεί να επιλέξει μεταξύ δύο επενδύσεων με την ίδια αναμενόμενη απόδοση, θα επιλέξει την πιο επικίνδυνη. Αυτό φαίνεται λιγάκι περίεργο, αλλά εξετάστε παραδείγματος χάριν ένα πρόσωπο που χρειάζεται απελπισμένα 5000 ευρώ. Θα θελήσει έντονα να πάρει το επικίνδυνο παιχνίδι II και είναι πρόθυμος να διατρέξει περισσότερο κίνδυνο για να επιτύχει το στόχο του. Αν και η συμπεριφορά αυτή της αγάπης στον κίνδυνο είναι ένας κοινός τύπος επενδυτικής στρατηγικής, τα μοντέλα σε αυτήν την διατριβή υποθέτουν ότι κάθε επενδυτής δεν επιθυμεί να διατρέξει περισσότερο κίνδυνο από τον απαραίτητο, και είναι έτσι αντίθετος στο ρίσκο.

Ας επιστρέψουμε στο παράδειγμα. Είπαμε ότι το παιχνίδι II είναι το πιο επικίνδυνο παιχνίδι. Αυτό φαίνεται εύλογο, αλλά δεν έχουμε καθορίσει τι είναι ο κίνδυνος - ρίσκο. Όπως δηλώνεται πριν, μπορεί να καθοριστεί από πολλές απόψεις. Υποθέστε τον παίκτη A που δίνει τον ακόλουθο ορισμό του κινδύνου: *Όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα απώλειας χρημάτων, τόσο πιο επικίνδυνη είναι η επένδυση.* Στην περίπτωση του, το παιχνίδι I είναι ελεύθερο κινδύνου, επειδή δεν χάνονται ποτέ τα χρήματα μας, και το παιχνίδι II είναι πλήρες κινδύνου, επειδή υπάρχει μια πιθανότητα 95% να χαθεί κάτι. Ο παίκτης B χρησιμοποιεί έναν άλλο ορισμό: *Όσο μεγαλύτερη διασπορά υπάρχει στις εκβάσεις της επένδυσης, τόσο πιο επικίνδυνη είναι η επένδυση αυτή.* Η διασπορά μπορεί να μετρηθεί από τη σταθερή απόκλιση. Όσο υψηλότερη η διασπορά, τόσο περισσότερο οι εκβάσεις αναμένονται να διαφέρουν από την αναμενόμενη αξία.

Εξετάζοντας το παράδειγμα, το παιχνίδι I έχει μια διασπορά

$$\text{stdev}(I) = \sqrt{0.05 \times (1000 - 50)^2 + 0.95 \times (0 - 50)^2} = 218$$

ενώ στο παιχνίδι II η διασπορά του μπορεί να γραφτεί

$$\text{stdev}(II) = \sqrt{0.05 \times (5000 - 60)^2 + 0.95 \times (-200 - 60)^2} = 1133$$

Έτσι η διασπορά του παιχνιδιού II είναι περισσότερες από πέντε φορές υψηλότερη από τη διασπορά του παιχνιδιού I, και γι' αυτό ο παίκτης B θα επιλέξει να παίξει το πρώτο παιχνίδι, παρά τη χαμηλότερη αναμενόμενη απόδοση.

Στη θεωρία της βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων, το μέτρο κινδύνου της σταθερής απόκλισης είναι πολύ δημοφιλές. Το 1952 Harry Markowitz έγραψε μία θεωρία (paper) για τη σύγχρονη θεωρία χαρτοφυλακίων, όπου εξήγησε μια μέθοδο βελτιστοποίησης για τους επενδυτές που είναι αντίθετοι στον κίνδυνο. Κέρδισε το βραβείο Νόμπελ για την εργασία του το 1990. Η ανάλυση μέσου-διασποράς (η διασπορά είναι το τετράγωνο της σταθερής απόκλισης) χρησιμοποιείται σε πολλά έγγραφα από τότε. Η βασική σκέψη βρίσκει τον καλύτερο συνδυασμό μέσου όρου (αναμενόμενη απόδοση) και διασποράς (κίνδυνος - ρίσκο) για κάθε επενδυτή.

Αυτή η διατριβή προσπαθεί να υπερβεί τη θεωρία του Markowitz. Οι επεκτάσεις αυτής της θεωρίας γίνονται για να καταστήσουν τη βελτιστοποίηση των χαρτοφυλακίων πιο εφαρμόσιμη στις τρέχουσες ανάγκες, παραδείγματος χάριν, μιας τράπεζας. Αυτή η διατριβή δίνει μια ευρεία μαθηματική επισκόπηση των πιθανών προτύπων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη βελτιστοποίηση των χαρτοφυλακίων.

Κεφάλαιο 1

ΘΕΩΡΙΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ ΤΟΥ MARKOWITZ

Στις αρχές του 1960 η επενδυτική κοινότητα μιλούσε για το ρίσκο αλλά δεν υπήρχε συγκεκριμένη μονάδα μέτρησης για αυτόν τον όρο. Για να χτίσουν όμως ένα μοντέλο χαρτοφυλακίου, οι επενδυτές έπρεπε να ποσοτικοποιήσουν τη μεταβλητή του ρίσκου. Το βασικό μοντέλο χαρτοφυλακίου αναπτύχθηκε από τον Χάρη Μάρκοβιτς ο οποίος έβγαλε το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης για ένα χαρτοφυλάκιο ενεργητικών στοιχείων και το αναμενόμενο μέτρο ρίσκου. Ο Μάρκοβιτς έδειξε ότι η διακύμανση του ποσοστού απόδοσης ήταν ένα χρήσιμο μέτρο του ρίσκου του χαρτοφυλακίου υπό ένα λογικό πακέτο υποθέσεων και έβγαλε την σχέση για τον υπολογισμό της διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου. Αυτή η σχέση διακύμανσης του χαρτοφυλακίου όχι μόνο ανέδειξε τη σημασία της διαφοροποίησης των επενδύσεων ούτως ώστε να μειωθεί το συνολικό ρίσκο ενός χαρτοφυλακίου, αλλά επίσης έδειξε το πως να τις διαφοροποιούμε αποτελεσματικά. Το μοντέλο του Μάρκοβιτς βασίζεται σε αρκετές παραδοχές σχετικά με τη συμπεριφορά του επενδυτή:

- 1) Οι επενδυτές θεωρούν κάθε εναλλακτική επένδυση ότι αντιπροσωπεύεται από μία πιθανοτική κατανομή προσδοκώμενων αποδόσεων κατά τη διάρκεια μιας περιόδου κτήσεως.
- 2) Οι επενδυτές μεγιστοποιούν μια προσδοκώμενη μονοπερίοδη χρησιμότητα και οι καμπύλες χρησιμότητας δείχνουν μειούμενη οριακή χρησιμότητα του πλούτου.
- 3) Οι επενδυτές εκτιμούν το ρίσκο του χαρτοφυλακίου στη βάση της διακύμανσης των αναμενόμενων αποδόσεων.
- 4) Οι επενδυτές βασίζονται στις αποφάσεις τους μόνο στην αναμενόμενη απόδοση και το ρίσκο οπότε οι καμπύλες χρησιμότητας είναι συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης και της αναμενόμενης διακύμανσης (ή σταθερής απόκλισης) μόνο των αποδόσεων.
- 5) Για ένα δοθέν επίπεδο ρίσκου οι επενδυτές προτιμούν υψηλότερες αποδόσεις από χαμηλότερες. Παρομοίως για ένα δοθέν επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης οι επενδυτές προτιμούν την επένδυση με το λιγότερο ρίσκο.

Υπό αυτές τις παραδοχές, ένα μόνο στοιχείο ενεργητικού ή ένα χαρτοφυλάκιο από ενεργητικά στοιχεία θεωρείται ότι είναι αποδοτικό αν κανένα άλλο ενεργητικό στοιχείο ή χαρτοφυλάκιο ενεργητικών στοιχείων δεν προσφέρει

υψηλότερες αναμενόμενες αποδόσεις με το ίδιο (ή λιγότερο) ρίσκο με την ίδια (ή υψηλότερη) αναμενόμενη απόδοση.

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΙΣΚΟΥ

Μια από τις πιο γνωστές μεθόδους μέτρησης του ρίσκου είναι η διακύμανση ή η σταθερή απόκλιση της αναμενόμενης απόδοσης. Είναι ένα στατιστικό μέτρο τις διασποράς των αποδόσεων γύρω από την αναμενόμενη αξία όπου μια μεγαλύτερη διακύμανση ή σταθερή απόκλιση φανερώνει μεγαλύτερη διασπορά. Η ιδέα είναι ότι όσο πιο διεσπαρμένες είναι οι αναμενόμενες αποδόσεις, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα για τις μελλοντικές αποδόσεις.

Μία άλλη μέθοδος μέτρησης του ρίσκου είναι το εύρος απόδοσης. Θεωρείται ότι ένα μεγαλύτερο εύρος των αναμενόμενων αποδόσεων, από τη χαμηλότερη στην υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση, σημαίνει μεγαλύτερη αβεβαιότητα και ρίσκο όσον αφορά τις μελλοντικές αναμενόμενες αποδόσεις.

Αντί να χρησιμοποιούμε μεθόδους μέτρησης που αναλύουν όλες τις αποκλίσεις από τις προσδοκίες, κάποιιο παρατηρητές πιστεύουν ότι οι επενδυτές θα πρέπει να ασχολούνται μόνο με τις αποδόσεις κατώτερες των προσδοκιών, το οποίο εννοεί μόνο αποκλίσεις κάτω από τη μέση τιμή. Η μέθοδος μέτρησης η οποία λαμβάνει υπ' όψιν μόνο τις αποκλίσεις κάτω από τη μέση τιμή είναι η ημιδιακύμανση. Μία επέκταση της μεθόδου μέτρησης της ημιδιακύμανσης υπολογίζει μόνο τις αναμενόμενες αρνητικές αποδόσεις ή αποδόσεις κάτω από τις αποδόσεις κάποιων συγκεκριμένων ενεργητικών στοιχείων όπως τα T-bills (λογαριασμοί T), ο πληθωρισμός ή μια συγκριτική μέτρηση επιδόσεων. Αυτές οι μέθοδοι μέτρησης ρίσκου υποθέτουν ότι οι επενδυτές θέλουν να ελαχιστοποιήσουν τη ζημία των αποδόσεων μικρότερων από κάποιο στοχευόμενο ρυθμό. Παραδεχόμενοι ότι οι επενδυτές θα επιθυμούσαν αποδόσεις πάνω από κάποιο στοχευόμενο ρυθμό, οι αποδοχές πάνω από ένα στοχευόμενο ρυθμό δεν υπολογίζονται όταν καταμετράμε το ρίσκο.

Παρόλο που υπάρχουν πολυάριθμες πιθανές μέθοδοι μέτρησης ρίσκου θα χρησιμοποιήσουμε τη διακύμανση ή τη σταθερή απόκλιση των αποδόσεων επειδή αυτή η μέθοδος μέτρησης είναι διαισθητική, είναι μία σωστή και ευρέως αποδεκτή μέθοδος μέτρησης ρίσκου και έχει χρησιμοποιηθεί στα περισσότερα θεωρητικά μοντέλα κοστολόγησης ενεργητικών στοιχείων.

1.1 ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟΙ ΡΥΘΜΟΙ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Υπολογίζουμε τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης για μια συγκεκριμένη επένδυση όπως στον πίνακα 1.1. Η αναμενόμενη απόδοση για ένα ξεχωριστό ενεργητικό στοιχείο με ρίσκο με το σετ των πιθανών αποδόσεων και η αποδοχή των διαφορετικών πιθανοτήτων που χρησιμοποιήθηκαν στο παράδειγμα θα ήταν 10.3%.

Ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης για ένα χαρτοφυλάκιο επενδύσεων είναι απλά η ζυγισμένη μέση τιμή των αναμενόμενων ρυθμών απόδοσης για τις συγκεκριμένες επενδύσεις στο χαρτοφυλάκιο. Τα ζυγισμένα βάρη είναι το ποσοστό της συνολικής αξίας για την κάθε ξεχωριστή επένδυση.

Probability	Possible Rate of Return (percent)	Expected Return (percent)
0.35	0.08	0.0280
0.30	0.10	0.0300
0.20	0.12	0.0240
0.15	0.14	0.0210
		<u>E(R) = 0.1030</u>

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.1

Weight (w_i) (percent of portfolio)	Expected Security Return (R_i)	Expected Portfolio Return ($w_i \times R_i$)
0.20	0.10	0.0200
0.30	0.11	0.0330
0.30	0.12	0.0360
0.20	0.13	0.0260
		<u>E(R_{port}) = 0.1150</u>

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.2

Ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης για ένα υποθετικό χαρτοφυλάκιο με 4 επισφαλή ενεργητικά στοιχεία φαίνεται στον πίνακα 1.2. Η αναμενόμενη απόδοση για αυτό το χαρτοφυλάκιο επενδύσεων θα ήταν 11.5%. Η επίδραση της πρόσθεσης ή απόρριψης κάποιων επενδύσεων από το χαρτοφυλάκιο θα ήταν εύκολο να βρεθεί, θα χρησιμοποιούσαμε τα νέα βάρη που βασίζονται στην αξία και τις αναμενόμενες αποδόσεις καθεμιάς από τις επενδύσεις. Μπορούμε να γενικεύσουμε τον υπολογισμό της αναμενόμενης απόδοσης για το χαρτοφυλάκιο $E(R_{port})$ ως εξής

$$E(R_{port}) = \sum_{i=1}^n w_i R_i \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.1}$$

Όπου : W_i = το βάρος ενός ξεχωριστού ενεργητικού στοιχείου του χαρτοφυλακίου ή το ποσοστό του χαρτοφυλακίου στο ενεργητικό στοιχείο i

R_i = ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης για το ενεργητικό στοιχείο i

ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (ΣΤΑΘΕΡΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ) ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΓΙΑ ΜΙΑ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗ ΕΠΕΝΔΥΣΗ

Όπως σημειώθηκε, θα χρησιμοποιούμε τη διακύμανση ή τη σταθερή απόκλιση των αποδόσεων σαν μέθοδο μέτρησης του ρίσκου. Επομένως σε αυτό το σημείο θα δείξουμε πως να υπολογίζουμε την σταθερή απόκλιση αποδόσεων για μία συγκεκριμένη επένδυση. Παρακάτω, αφού συζητηθούν κάποιες άλλες έννοιες στατιστικής, θα εξετάσουμε τον καθορισμό της σταθερής απόκλισης για ένα χαρτοφυλάκιο επενδύσεων.

Η διακύμανση, ή η σταθερή απόκλιση, είναι μια μέθοδος μέτρησης της ποικιλίας των πιθανών ρυθμών απόδοσης R_i από τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης E_{R_i} ως ακολούθως:

$$\text{Variance} = \sigma^2 = \sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_i \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.2}$$

Όπου : P_i = η πιθανότητα του πιθανού ρυθμού απόδοσης R_i

$$\text{Standard Deviation} = \sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_i} \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.3}$$

Ο υπολογισμός της διακύμανσης και της σταθερής απόκλισης των αποδόσεων για το συγκεκριμένο επισφαλές ενεργητικό στοιχείο του πίνακα 1.1 παρουσιάζεται στον πίνακα 1.3

Possible Rate of Return (R_i)	Expected Return $E(R_i)$	$R_i - E(R_i)$	$[R_i - E(R_i)]^2$	P_i	$[R_i - E(R_i)]^2 P_i$
0.08	0.103	-0.023	0.0005	0.35	0.000185
0.10	0.103	-0.003	0.0000	0.30	0.000003
0.12	0.103	0.017	0.0003	0.20	0.000058
0.14	0.103	0.037	0.0014	0.15	0.000205
					<u>0.000451</u>

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.3

1.2 ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ (ΣΤΑΘΕΡΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ) ΤΩΝ ΑΠΟΔΟΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΝΑ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ

Δύο βασικές έννοιες στη στατιστική η συνδιακύμανση και η συσχέτιση πρέπει να κατανοηθούν πριν να συζητήσουμε για τη σχέση της διακύμανσης του ρυθμού απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου.

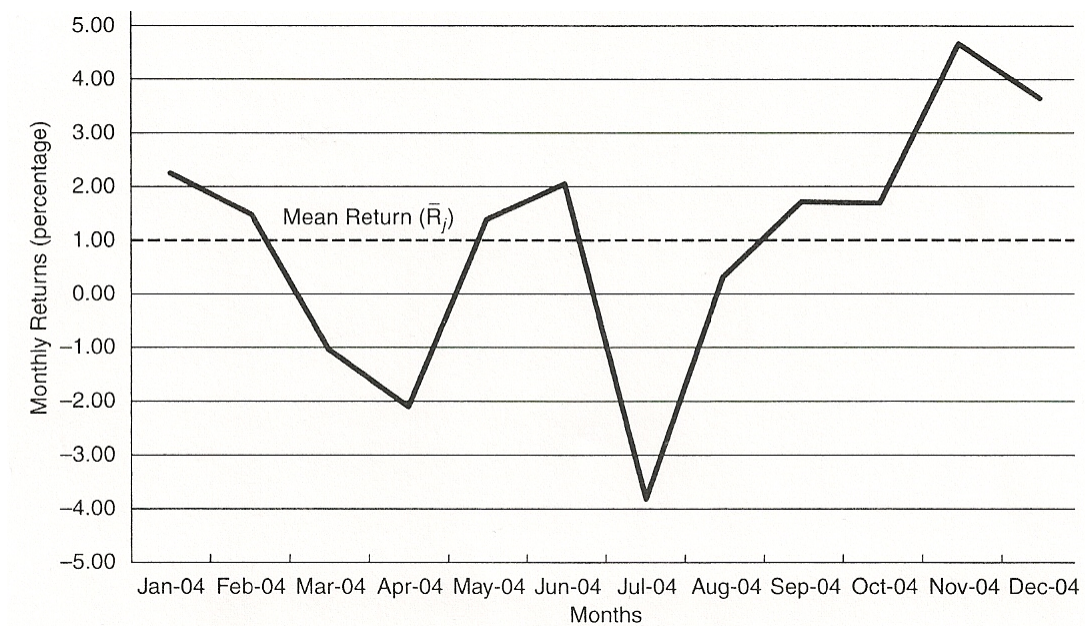
Συνδιακύμανση των αποδόσεων

Σε αυτή την υποενότητα θα συζητήσουμε τι προσδοκία να μετρηθεί η συνδιακύμανση των αποδόσεων, θα δώσουμε τη σχέση για να την υπολογίσουμε και θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα υπολογισμού της. Η συνδιακύμανση είναι ένα μέτρο του βαθμού στον οποίο δύο μεταβλητές κινούνται μαζί σχετικά με την ξεχωριστή μέση αξία τους μέσα σε κάποιο χρονικό διάστημα. Στην ανάλυση χαρτοφυλακίου συνήθως μας απασχολεί η συνδιακύμανση των ρυθμών απόδοσης, παρά οι τιμές ή κάποια άλλη μεταβλητή. Μία θετική συνδιακύμανση σημαίνει ότι οι ρυθμοί απόδοσης για 2 επενδύσεις τείνουν να κινηθούν προς την ίδια κατεύθυνση σε σχέση με τις ξεχωριστές μέσες τιμές τους κατά τη διάρκεια της ίδιας χρονικής περιόδου. Σε αντίθεση μία αρνητική συνδιακύμανση φανερώνει ότι οι ρυθμοί απόδοσης και για τις 2 επενδύσεις τείνουν να κινηθούν σε διαφορετικές κατευθύνσεις σχετικά με τις μέσες τιμές τους κατά τη διάρκεια ορισμένων χρονικών περιόδων. Το μέγεθος της συνδιακύμανσης εξαρτάται από τις διακυμάνσεις των ξεχωριστών αποδόσεων όπως και από την σχέση μεταξύ των αποδόσεων.

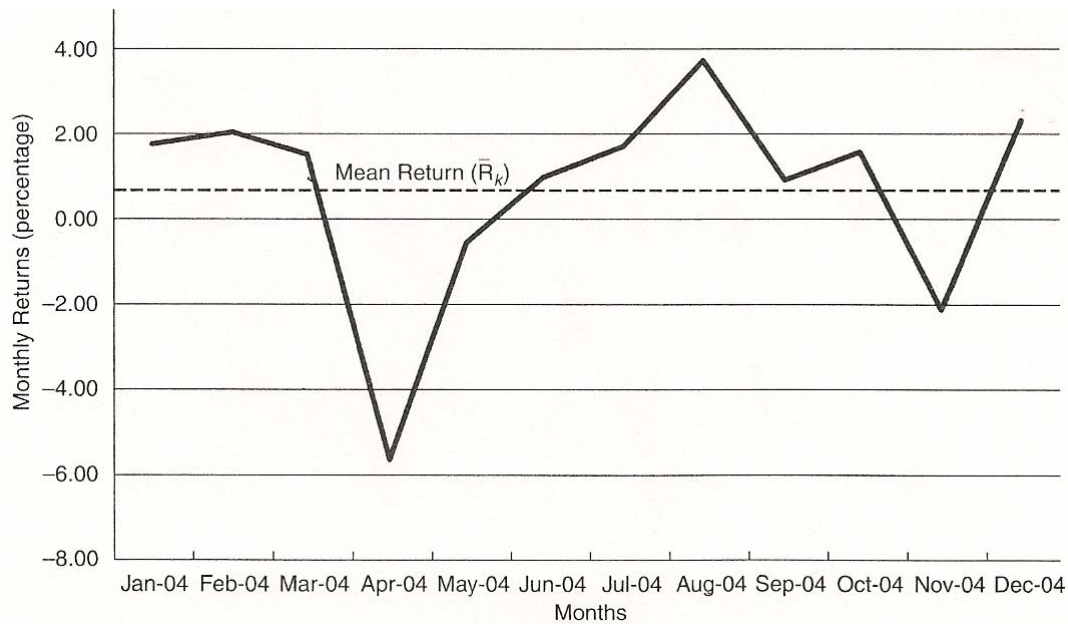
Ο πίνακας 1.4 περιέχει τις μηνιαίες τιμές κλεισίματος των δεικτών για τις αμερικάνικες μετοχές (όπως μετρήθηκε από τον δείκτη Wilshire5000) και ομόλογα (όπως μετρήθηκε από τη Lehman Brothers Treasury Bond Index) και οι δύο δείκτες είναι δείκτες ολικής απόδοσης - που σημαίνει ότι ο δείκτης των μετοχών περιλαμβάνει πληρωτέα μερίσματα και ο δείκτης ομολόγων περιλαμβάνει αυξανόμενο ενδιαφέρον. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αυτά τα δεδομένα για να υπολογίσουμε τους μηνιαίους ρυθμούς απόδοσης για αυτά τα 2 ενεργητικά στοιχεία κατά το 2004. Οι πίνακες 1.5 και 1.6 εμπεριέχουν ένα χρονικό γράφημα των μηνιαίων ρυθμών απόδοσης για τα 2 ενεργητικά στοιχεία κατά τη διάρκεια του 2004.

Date	WILSHIRE 5000 INDEX	LEHMAN BROTHERS TREASURY BONDS
	Monthly Rate of Return (%)	Monthly Rate of Return (%)
Jan-04	2.23	1.77
Feb-04	1.46	2.00
Mar-04	-1.07	1.50
Apr-04	-2.13	-5.59
May-04	1.38	-0.54
Jun-04	2.08	0.95
Jul-04	-3.82	1.73
Aug-04	0.33	3.74
Sep-04	1.78	0.84
Oct-04	1.71	1.51
Nov-04	4.68	-2.19
Dec-04	3.63	2.31
	Mean = 1.02	Mean = 0.67

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.4



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.5



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.6

Παρόλο που οι ρυθμοί απόδοσης για τα 2 στοιχεία κινούνται μαζί για κάποιους μήνες, σε άλλους μήνες κινούνται σε αντίθετη κατεύθυνση. Η στατιστική της συνδιακύμανσης μας δίνει ένα απόλυτο μέτρο του πως κινήθηκαν κατά τη διάρκεια του χρόνου. Για 2 στοιχεία i και j ορίζουμε τη συνδιακύμανση των ρυθμών απόδοσης ως

$$\text{Cov}_{ij} = E \{ [R_i - E(R_i)] [R_j - E(R_j)] \} \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.4}$$

Όταν εφαρμόζουμε τη σχέση στους μηνιαίους ρυθμούς απόδοσης για τον δείκτη Wilshire5000 και τον δείκτη ομολόγων κατά τη διάρκεια του 2004 γίνεται

$$\frac{1}{11} \sum_{i=1}^{12} [R_i - \bar{R}_i] [R_j - \bar{R}_j]$$

Σημειωτέων ότι όταν εφαρμόζουμε τη σχέση 1.4 σε πραγματικά δειγματοληπτικά δεδομένα, χρησιμοποιούμε μια δειγματοληπτική μέση τιμή σαν μία εκτίμηση της προσδοκώμενης απόδοσης και διαιρούμε τις αξίες με $(n-1)$ αντί με n για να αποφύγουμε στατιστικές προκαταλήψεις.

Αν οι ρυθμοί απόδοσης για ένα στοιχείο είναι πάνω από (κάτω από) το μέσο ρυθμό απόδοσης για μία συγκεκριμένη περίοδο και οι αποδόσεις για το άλλο στοιχείο είναι εξίσου πάνω από (κάτω από) τον μέσο ρυθμό απόδοσης για την ίδια περίοδο, τότε το προϊόν αυτών των αποκλίσεων είναι θετικό. Αν αυτό συμβαίνει συστηματικά, η συνδιακύμανση των αποδόσεων μεταξύ αυτών των

2 στοιχείων θα αποκτά κάποια μεγάλη θετική τιμή. Αν παρόλα αυτά ο ρυθμός απόδοσης για ένα από τα αξιόγραφα είναι πάνω από τη μέση απόδοση ενώ η απόδοση ενός άλλου αξιόγραφου είναι κάτω από τη μέση απόδοση τότε το προϊόν θα είναι αρνητικό. Αν αυτή η αντίθετη κίνηση συμβαίνει συστηματικά, η συνδιακύμανση μεταξύ των ρυθμών απόδοσης για τα 2 στοιχεία θα είναι μια μεγάλη αρνητική τιμή.

Ο πίνακας 1.7 περιέχει τους μηνιαίους ρυθμούς απόδοσης κατά το 2004 για τον δείκτη Wilshire5000 και για τον δείκτη ομολόγων, όπως υπολογίστηκαν στον πίνακα 1.4. Ένας μπορεί να περίμενε ότι οι αποδόσεις των 2 δεικτών ενεργητικών στοιχείων θα έχουν σχετικά χαμηλή συνδιακύμανση εξαιτίας των διαφορών στην φύση αυτών των στοιχείων. Ο αριθμητικός μέσος των μηνιαίων αποδόσεων ήταν

$$(\bar{R}_i) = \frac{1}{11} \sum_{i=1}^{12} R_{it} = 1.02$$

Και

$$(\bar{R}_j) = \frac{1}{11} \sum_{j=1}^{12} R_{jt} = 0.67$$

Στρογγυλοποιήσαμε όλους τους αριθμούς στο πλησιέστερο εκατοστό του 1%, για να υπάρξουν πολύ μικρά σφάλματα στρογγυλοποίησης. Η μέση μηνιαία απόδοση ήταν 1,02 % για τον Wilshire5000 και 0.67% για τα ομόλογα. Τα αποτελέσματα του πίνακα 1.7 δείχνουν ότι η συνδιακύμανση μεταξύ των ρυθμών απόδοσης για αυτά τα 2 στοιχεία ήταν

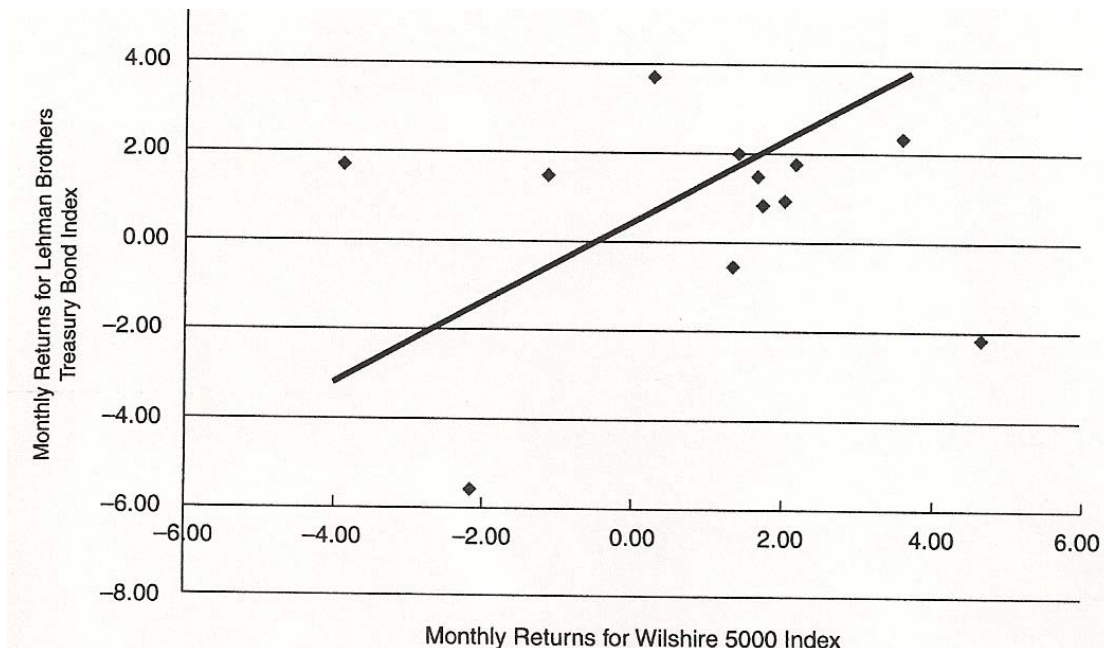
$$\begin{aligned} \text{Cov}_{ij} &= \frac{1}{11} \times 7.00 \\ &= 0.637 \end{aligned}$$

Η ερμηνεία ενός αριθμού όπως 0.637 είναι δύσκολη, είναι υψηλά ή χαμηλά για διακύμανση? Γνωρίζουμε ότι η σχέση μεταξύ των 2 στοιχείων είναι γενικά θετική, αλλά δεν είναι δυνατόν να είμαστε πιο συγκεκριμένοι. Ο πίνακας 1.8 περιέχει ένα γράφημα διασποράς με ζεύγη τιμών R_{it} και R_{jt} σχεδιασμένα μεταξύ τους. Αυτό το γράφημα επιδεικνύει την γραμμική φύση και δύναμη της σχέσης. Δεν είναι έκπληξη το γεγονός ότι η σχέση κατά τη διάρκεια του 2004 δεν ήταν πολύ δυνατή, καθώς κατά τη διάρκεια 5 μηνών τα 2 στοιχεία μετακινήθηκαν αντίθετα το ένα από το άλλο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η ολική συνδιακύμανση να έχει μια συνολική θετική τιμή.

Date	WILSHIRE 5000 (R_i)	LEHMAN TREASURY BOND INDEX (R_j)	WILSHIRE 5000 $R_i - \bar{R}_i$	LEHMAN TREASURY BOND INDEX $R_j - \bar{R}_j$	$\left[\frac{WILSHIRE 5000}{R_i - \bar{R}_i} \times \frac{LEHMAN TREASURY}{R_j - \bar{R}_j} \right]$
Jan-04	2.23	1.77	1.21	1.30	1.57
Feb-04	1.48	2.30	1.44	1.34	0.99
Mar-04	-1.07	1.50	-2.08	0.93	-1.74
Apr-04	-2.13	-5.38	-3.15	-6.26	15.73
May-04	1.33	-0.54	0.35	-1.27	-1.48
Jun-04	2.08	0.85	1.30	0.28	0.37
Jul-04	-1.82	1.73	-4.34	1.85	-5.15
Aug-04	0.33	1.74	-3.38	3.37	-2.12
Sep-04	1.78	8.36	3.76	0.11	0.11
Oct-04	1.37	1.31	0.69	0.94	0.58
Nov-04	4.63	-2.13	3.66	-2.66	-12.46
Dec-04	3.83	2.11	2.81	1.64	4.38
	Var = 1.22	0.67			Sum = 1.00

$Cov_{ij} = 7.0811 = 0.631$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.7



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.8

ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ

Η συνδιακύμανση επηρεάζεται από την μεταβλητότητα των δύο δεικτών απόδοσης. Επομένως ένας αριθμός όπως το 0.637 στο παράδειγμά μας μπορεί να δείξει μία αδύναμη θετική σχέση εάν οι 2 δείκτες ήταν ασταθείς αλλά θα έδειχναν μία ισχυρή θετική σχέση εφόσον οι 2 δείκτες ήταν σταθεροί. Προφανώς θέλουμε να εκφράσουμε το μέτρο της συνδιακύμανσης ως μία σταθερά. Αυτό το κάνουμε λαμβάνοντας υπ' όψιν την μεταβλητότητα των 2 δεικτών απόδοσης ως εξής:

$$r_{ij} = \frac{\text{Cov}_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.5}$$

Όπου r_{ij} = συντελεστής συσχέτισμού αποδόσεων

σ_i = η σταθερά απόκλιση του R_{it}

σ_j = σταθερά απόκλισης του R_{jt}

Εκφράζοντας τη συνδιακύμανση μέσω της σταθεράς που προκύπτει από το γινόμενο των σταθερών αποκλίσεων αποκτάμε τον συντελεστή συσχέτισμού r_{ij} το οποίο μπορεί να κυμαίνεται μεταξύ του -1 και του +1. Η τιμή του +1 φανερώνει μία τέλεια θετική γραμμική σχέση μεταξύ του R_i και του R_j εννοώντας ότι οι αποδόσεις για τα 2 στοιχεία κινούνται μαζί με ένα απολύτως

γραμμικό τρόπο. Η τιμή του -1 φανερώνει μια τέλεια αρνητική σχέση μεταξύ των 2 δεικτών απόδοσης όπου όταν ο ρυθμός απόδοσης ενός στοιχείου είναι πάνω από τη μέση τιμή τότε ο ρυθμός απόδοσης του άλλου στοιχείου θα βρίσκεται κατά ένα συγκρίσιμο ποσό κάτω από τη μέση του τιμή.

Για να υπολογίσουμε την σταθεροποιημένη μέθοδο μέτρησης της σχέσης χρειάζεται να υπολογίσουμε τη σταθερή απόκλιση για τους 2 δείκτες απόδοσης. Ήδη έχουμε τις τιμές για $(R_{it} - \bar{R}_i)$ και $(R_{jt} - \bar{R}_j)$ στον πίνακα 1.7. μπορούμε να τετραγωνίσουμε καθεμία από αυτές τις τιμές και να τις αθροίσουμε όπως φαίνεται στον πίνακα 1.9 για να υπολογίσουμε την διακύμανση της κάθε σειράς απόδοσης, ξανά διαιρούμε με (n-1) για να αποφύγουμε στατιστικές προκαταλήψεις.

Date	WILSHIRE 5000 INDEX		LEHMAN BROTHERS TREASURY BONDS	
	$R_i - \bar{R}_i$	$(R_i - \bar{R}_i)^2$	$R_j - \bar{R}_j$	$(R_j - \bar{R}_j)^2$
Jan-04	1.21	1.46	1.10	1.21
Feb-04	0.44	0.19	1.34	1.79
Mar-04	-2.09	4.38	0.83	0.69
Apr-04	-3.15	9.93	-6.26	39.17
May-04	0.36	0.13	-1.21	1.47
Jun-04	1.06	1.12	0.28	0.08
Jul-04	-4.84	23.44	1.06	1.13
Aug-04	-0.69	0.48	3.07	9.42
Sep-04	0.76	0.58	0.17	0.03
Oct-04	0.69	0.47	0.84	0.70
Nov-04	3.66	13.38	-2.86	8.18
Dec-04	2.61	6.80	1.64	2.69
	Sum = 62.36		Sum = 66.56	
	Variance _i = 62.36/11 = 5.67		Variance _j = 66.56/11 = 6.05	
	Standard Deviation _i = (5.67) ^{1/2} = 2.38		Standard Deviation _j = (6.05) ^{1/2} = 2.46	

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.9

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{11} 62.36 = 5.67$$

Και

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{11} 66.56 = 6.05$$

Η σταθερή απόκλιση για κάθε δείκτη είναι η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης καθενός, ως εξής:

$$\sigma_i = \sqrt{5.67} = 2.38$$

$$\sigma_j = \sqrt{6.05} = 2.46$$

Οπότε, βασιζόμενοι στην συνδιακύμανση μεταξύ των δύο δεικτών και τις ξεχωριστές σταθερές αποκλίσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή συσχετισμού μεταξύ αποδόσεων για κοινές μετοχές και ομόλογα θησαυροφυλακίου κατά τη διάρκεια του 2004.

$$r_{ij} = \frac{\text{Cov}_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{0.637}{(2.38)(2.46)} = \frac{0.637}{5.8548} = 0.109$$

Είναι φανερό ότι αυτή η σχέση επίσης εννοεί ότι

$$\text{Cov}_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j = (0.109)(2.38)(2.46) = 0.638$$

1.3 ΣΤΑΘΕΡΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΕΝΟΣ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟΥ

Όπως έχει σημειωθεί ένας συσχετισμός στις τάξεις του +1 δείχνει έναν τέλεια θετικό συσχετισμό και μια τιμή του -1 δείχνει ότι οι αποδόσεις κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η τιμή του 0 δείχνει ότι οι αποδόσεις δεν είχαν γραμμική σχέση που σημαίνει ότι ήτανε στατιστικά ασυσχέτιστες. Αυτό δεν σημαίνει ότι είναι ανεξάρτητες. Η τιμή του $r_{ij} = 0, 109$ δεν είναι σημαντικά διαφορετική από το 0. Αυτός ο ασήμαντος θετικός συσχετισμός δεν είναι ασυνήθιστος για μετοχές έναντι ομολόγων για μικρά χρονικά διαστήματα όπως π.χ. ο ένας χρόνος.

Σχέση σταθερής απόκλισης χαρτοφυλακίου

Τώρα που έχουμε συζητήσει τις έννοιες της συνδιακύμανσης και του συσχετισμού, μπορούμε να θεωρήσουμε τη σχέση για τον υπολογισμό της σταθερής απόκλισης των αποδόσεων για ένα χαρτοφυλάκιο στοιχείων, το μέγεθος μέτρησης του ρίσκου για αυτό το χαρτοφυλάκιο. Στον πίνακα 1.2 δείξαμε ότι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου ήταν ο ζυγισμένος μέσος των αναμενόμενων αποδόσεων για τα ξεχωριστά στοιχεία του χαρτοφυλακίου, τα βάρη ήταν το ποσοστό της αξίας του χαρτοφυλακίου. Κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι είναι πιθανό να εκφέρει την σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου με τον ίδιο τρόπο, που είναι, υπολογίζοντας το ζυγισμένο μέσο των σταθερών αποκλίσεων για τα ξεχωριστά στοιχεία. Αυτό θα ήταν λάθος. Ο Μάρκοβιτς έβγαλε μια γενική σχέση για τη σταθερή απόκλιση ενός χαρτοφυλακίου:

$$\sigma_{\text{port}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n w_i w_j \text{Cov}_{ij}}$$

ΤΥΠΟΣ 1.6

Όπου : σ_{port} = η σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου

W_i = τα βάρη ενός στοιχείου του χαρτοφυλακίου, όπου τα βάρη καθορίζονται από την αναλογία της αξίας στο χαρτοφυλάκιο.

σ_i^2 = η διακύμανση των ρυθμών απόδοσης για ένα στοιχείο i .

Cov_{ij} = η συνδιακύμανση μεταξύ των ρυθμών απόδοσης για στοιχεία i και j , όπου $\text{Cov}_{ij} = r_{ij} * \sigma_i * \sigma_j$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι η σταθερή απόκλιση για ένα χαρτοφυλάκιο με στοιχεία είναι μία σχέση του ζυγισμένου μέσου των ξεχωριστών διακυμάνσεων (όπου τα βάρη τετραγωνίζονται) συν τις ζυγισμένες συνδιακυμάνσεις μεταξύ όλων των στοιχείων σε όλο το χαρτοφυλάκιο. Το πολύ σημαντικό σημείο είναι ότι η σταθερή απόκλιση για ένα χαρτοφυλάκιο με ενεργητικά στοιχεία περιλαμβάνει όχι μόνο τις διακύμανσης των ξεχωριστών στοιχείων αλλά επίσης περιλαμβάνει τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ όλων των ζευγών των ξεχωριστών στοιχείων του χαρτοφυλακίου. Επιπλέον μπορεί να αποδειχθεί ότι σε ένα χαρτοφυλάκιο με μεγάλο αριθμό αξιογράφων, αυτή η σχέση περιορίζεται στο άθροισμα των ζυγισμένων συνδιακυμάνσεων.

Επίδραση ενός νέου αξιόγραφου σε ένα χαρτοφυλάκιο.

Παρόλο που στη συζήτηση που ακολουθεί θα λάβουμε υπ' όψιν μας χαρτοφυλάκια με μόνο 2 στοιχεία (επειδή είναι εφικτό να δείξουμε το αποτέλεσμα σε 2 διαστάσεις) θα επιδείξουμε επίσης τους υπολογισμούς για ένα χαρτοφυλάκιο με 3 στοιχεία. Παρόλα αυτά είναι σημαντικό σε αυτό το σημείο να σκεφτούμε τι συμβαίνει σε ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο με πολλά στοιχεία. Πιο συγκεκριμένα τι συμβαίνει στη σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου όταν προσθέτουμε ένα νέο αξιόγραφο σε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο? Όπως αποδεικνύεται από τη σχέση βλέπουμε 2 επιδράσεις. Η πρώτη είναι η ίδια διακύμανση της απόδοσης του στοιχείου και η δεύτερη είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των αποδόσεων αυτού του νέου στοιχείου και των αποδόσεων κάθε άλλου στοιχείου που βρίσκεται ήδη στο χαρτοφυλάκιο. Το σχετικό βάρος αυτών των πολυπληθών συνδιακυμάνσεων είναι αρκετά μεγαλύτερο από τη μοναδική διακύμανση του στοιχείου, όσο πιο πολλά στοιχεία υπάρχουν στο χαρτοφυλάκιο, τόσο πιο πολύ αυτό πλησιάζει στην πραγματικότητα. Αυτό σημαίνει ότι ο σημαντικός παράγοντας που πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας όταν προσθέτουμε μια επένδυση σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει ένα αριθμό από άλλες επενδύσεις, δεν είναι η διακύμανση

του νέου αξιόγραφου, αλλά η μέση συνδιακύμανση του μαζί με όλες τις άλλες επενδύσεις του χαρτοφυλακίου.

Υπολογισμός σταθερής απόκλισης χαρτοφυλακίου

Εξαιτίας των υποθέσεων που χρησιμοποιήθηκαν στην ανάπτυξη του μοντέλου χαρτοφυλακίου του Μάρκοβιτς οποιοδήποτε στοιχείο ή χαρτοφυλάκιο στοιχείων μπορεί να περιγραφεί με 2 χαρακτηριστικά: τον προσδοκώμενο ρυθμό απόδοσης και τη προσδοκώμενη σταθερά απόκλιση των αποδόσεων. Έτσι οι επόμενες αποδείξεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε 2 διαφορετικά στοιχεία, 2 χαρτοφυλάκια στοιχείων ή 2 τάξεις στοιχείων με την ενδεικτική απόδοση – χαρακτηριστικά σταθερής απόκλισης και συντελεστή συσχετισμού.

Ίσο ρίσκο και απόδοση- αλλάζοντας συσχετισμούς

Θεωρείστε πρώτα την υπόθεση στην οποία και τα 2 στοιχεία έχουν την ίδια αναμενόμενη απόδοση και προσδοκώμενη σταθερή απόκλιση της απόδοσης. Σαν παράδειγμα υποθέτουμε ότι :

$$\begin{aligned} E(R_1) &= 0.20, & E(\sigma_1) &= 0.10 \\ E(R_2) &= 0.20, & E(\sigma_2) &= 0.10 \end{aligned}$$

Για να δείξουμε την επίδραση των διαφορετικών συνδιακυμάνσεων, παραδεχόμαστε διαφορετικά επίπεδα συσχετισμού μεταξύ των 2 στοιχείων. Επίσης παραδεχόμαστε ότι τα 2 στοιχεία έχουν ίσα βάρη στο χαρτοφυλάκιο ($W_1=0.5$, $W_2=0.5$) επομένως η μόνη τιμή που αλλάζει σε κάθε παράδειγμα είναι ο συσχετισμός μεταξύ των αποδόσεων για τα 2 στοιχεία.

Τώρα θεωρείστε τους 5 παρακάτω συντελεστές συσχετισμού και τις συνδιακυμάνσεις που προκύπτουν από αυτούς. Αφού $Cov_{ij} = r_{ij} * \sigma_i * \sigma_j$ η συνδιακύμανση θα είναι ίση με $r_{1,2} (0.10)(0.10)$ επειδή η σταθερή απόκλιση και των 2 στοιχείων είναι 0.10

a. For $r_{1,2} = 1.00$,	$Cov_{1,2} = (1.00)(0.10)(0.10) = 0.01$
b. For $r_{1,2} = 0.50$,	$Cov_{1,2} = (0.50)(0.10)(0.10) = 0.005$
c. For $r_{1,2} = 0.00$,	$Cov_{1,2} = (0.00)(0.10)(0.10) = 0.000$
d. For $r_{1,2} = -0.50$,	$Cov_{1,2} = (-0.50)(0.10)(0.10) = -0.005$
e. For $r_{1,2} = -1.00$,	$Cov_{1,2} = (-1.00)(0.10)(0.10) = -0.01$

Τώρα ας δούμε τι συμβαίνει στη σταθερή απόκλιση χαρτοφυλακίου κάτω από αυτές τις 5 συνθήκες .

Όταν εφαρμόζουμε τη γενική σχέση χαρτοφυλακίου από την εξίσωση 7.6 σε ένα χαρτοφυλάκιο με 2 στοιχεία έχουμε

$$\sigma_{\text{port}} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2r_{1,2}\sigma_1\sigma_2}$$

$$\sigma_{\text{port}} = \sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\text{Cov}_{1,2}}$$

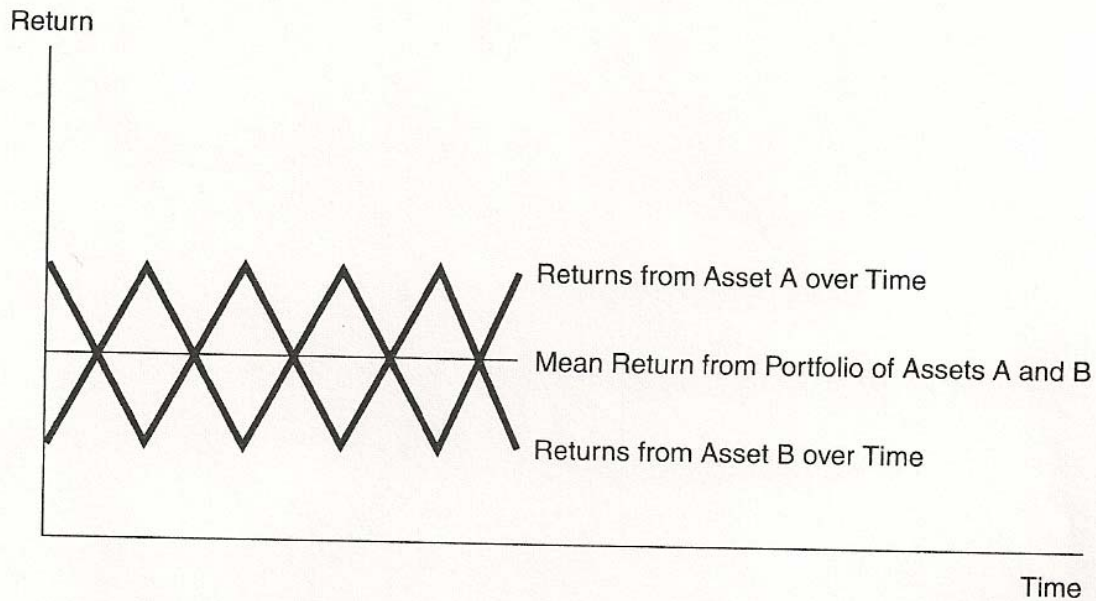
Επομένως στην περίπτωση α έχουμε :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port(a)}} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.01)} \\ &= \sqrt{(0.25)(0.01) + (0.25)(0.01) + 2(0.25)(0.01)} \\ &= \sqrt{0.01} \\ &= 0.10\end{aligned}$$

Σε αυτή την περίπτωση όπου οι αποδόσεις για τα 2 στοιχεία είναι τέλεια θετικά συσχετισμένα, η σταθερή απόκλιση για το χαρτοφυλάκιο είναι ο ζυγισμένος μέσος των ξεχωριστών σταθερών αποκλίσεων. το σημαντικό σημείο είναι ότι δεν έχουμε κανένα αληθινό όφελος από το συνδυασμό των 2 στοιχείων που είναι τέλεια συσχετισμένα. Είναι σαν ένα στοιχείο ήδη επειδή οι αποδόσεις τους κινούνται στην ίδια κατεύθυνση.

Τώρα θεωρήσε περίπτωση β όπου $r_{1,2} = 0.50$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port(b)}} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.005)} \\ &= \sqrt{(0.0025) + (0.0025) + 2(0.25)(0.005)} \\ &= \sqrt{0.0075} \\ &= 0.0866\end{aligned}$$



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.10

Ο μόνος όρος που άλλαξε από την περίπτωση α είναι ο τελευταίος όρος $\text{Cov}_{1,2}$ που άλλαξε από 0.01 σε 0.005. ως αποτέλεσμα, η σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου σημείωσε πτώση κατά 13%, από 0.10 σε 0.0866. σημειωτέων ότι η προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου δεν άλλαξε επειδή απλά είναι ο ζυγισμένος μέσος των ξεχωριστών προσδοκώμενων αποδόσεων. Είναι ίσο με 0.20 και στις 2 περιπτώσεις.

Θα μπορείτε να επιβεβαιώσετε μέσα από τους δικούς σας υπολογισμούς ότι οι σταθερές αποκλίσεις για τα χαρτοφυλάκια C και D είναι ως έχει:

C. 0.0707

D. 0.05

Η τελευταία περίπτωση όπου ο συσχετισμός μεταξύ των 2 στοιχείων είναι -1 παρουσιάζει τα απόλυτα πλεονεκτήματα της διαφοροποίησης των επενδύσεων.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\text{port(e)}} &= \sqrt{(0.5)^2(0.10)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(-0.01)} \\
 &= \sqrt{(0.0050) + (-0.0050)} \\
 &= \sqrt{0} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

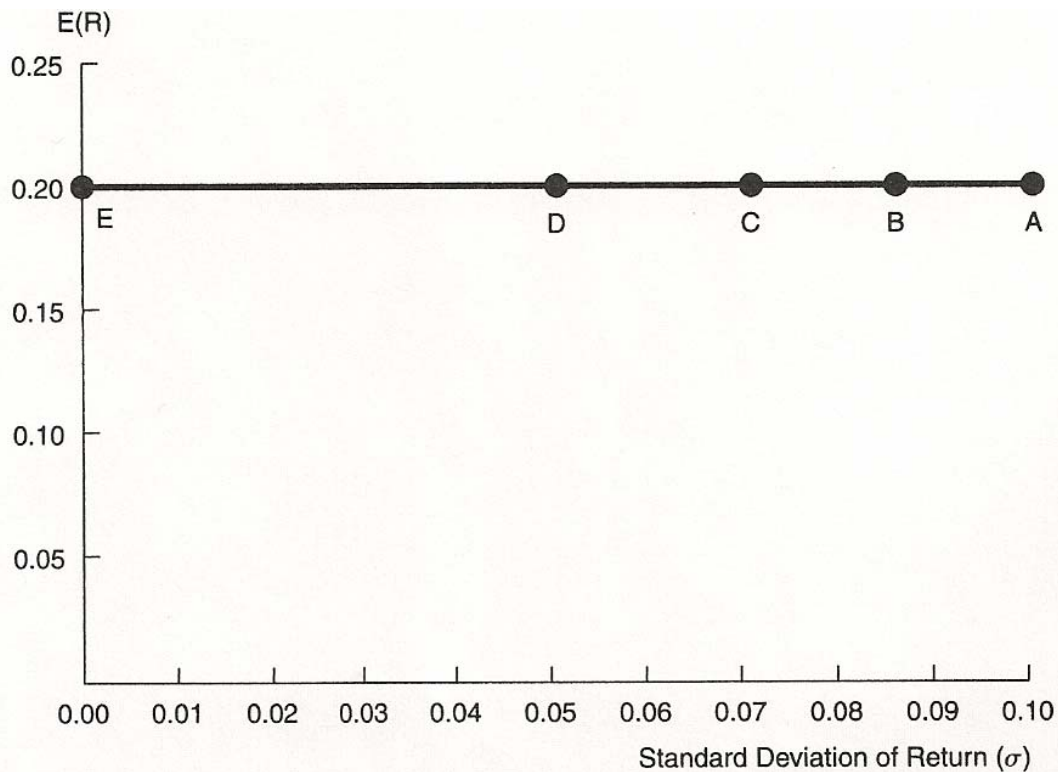
Εδώ, ο αρνητικός όρος συνδιακύμανσης αντισταθμίζει ακριβώς τους ξεχωριστούς όρους διακύμανσης αφήνοντας μια γενική σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου του 0. Αυτό θα ήταν ένα χαρτοφυλάκιο χωρίς καμία επισφάλεια.

Ο πίνακας 1.10 παρουσιάζει ένα γράφημα μιας τέτοιας συμπεριφοράς. Ο τέλειος αρνητικός συσχετισμός δίνει μία μέση συνδυασμένη απόδοση για τα 2 αξιόγραφα σε χρόνο ίσο με το μέσο για κάθε ένα από αυτά, οπότε οι αποδόσεις για το χαρτοφυλάκιο δεν δείχνουν καμία διαφοροποίηση. Οποιοσδήποτε αποδόσεις πάνω και κάτω από το μέσο για κάθε ένα από τα στοιχεία αντισταθμίζονται πλήρως από την απόδοση για το άλλο στοιχείο, οπότε δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση στις συνολικές αποδόσεις – που σημαίνει καθόλου ρίσκο- για το χαρτοφυλάκιο. Έτσι ένα ζεύγος από πλήρως αρνητικά συσχετισμένα στοιχεία παρέχει τα μέγιστα πλεονεκτήματα της διαφοροποίησης των επενδύσεων, μειώνοντας εντελώς το ρίσκο.

Το γράφημα στον πίνακα 1.11 δείχνει τις διαφορές στη σχέση ρίσκου-απόδοσης για τις 5 περιπτώσεις που έχουμε. Όπως σημειώνεται, το μόνο αποτέλεσμα από την αλλαγή του συσχετισμού είναι η αλλαγή στην σταθερή απόκλιση αυτού του χαρτοφυλακίου με τα 2 στοιχεία. Συνδυάζοντας στοιχεία τα οποία δεν είναι πλήρως συσχετισμένα δεν επηρεάζει την προσδοκώμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου, αλλά μειώνει την επισφάλεια του χαρτοφυλακίου (όπως μετρήθηκε με την σταθερή απόκλιση). Όταν επιτέλους φτάνουμε στον απώτερο συνδυασμό του τέλειος αρνητικά συσχετισμού, η επισφάλεια εξαφανίζεται.

Συνδυάζοντας μετοχές με διαφορετικές αποδόσεις και ρίσκο.

Έχουμε δει τι συμβαίνει όταν μόνο ο συντελεστής συσχετισμού (συνδιακύμανση) διαφέρει μεταξύ των στοιχείων. Τώρα παίρνουμε υπ' όψιν μας 2 στοιχεία (ή χαρτοφυλάκια) με διαφορετικούς προσδοκώμενους ρυθμούς απόδοσης και ξεχωριστές σταθερές απόκλισης. Θα δείξουμε τι συμβαίνει όταν μεταβάλλουμε τους συσχετισμούς μεταξύ τους. Θα υποθέσουμε ότι έχουμε 2 στοιχεία με τα ακόλουθα χαρακτηριστικά



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.11

Θα χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο σετ συντελεστών συσχέτισης, αλλά θα πρέπει να επαναυπολογίσουμε τις συνδιακυμάνσεις επειδή αυτή τη φορά οι σταθερές αποκλίσεις των στοιχείων είναι διαφορετικές. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα.

Asset	$E(R_i)$	w_i	σ_i^2	σ_i
1	0.10	0.50	0.0049	0.07
2	0.20	0.50	0.0100	0.10

Case	Correlation Coefficient ($r_{1,2}$)	Covariance ($r_{1,2}\sigma_1\sigma_2$)
a	+1.00	0.0070
b	+0.50	0.0035
c	0.00	0.0000
d	-0.50	-0.0035
e	-1.00	-0.0070

Επειδή υποθέτουμε ότι έχουμε σε όλες τις περιπτώσεις τα ίδια βάρη (0.50 – 0.50) η προσδοκώμενη απόδοση σε κάθε περίπτωση θα είναι.

$$E(R_{\text{port}}) = 0.50 (0.10) + 0.50 (0.20) = 0.15$$

Η σταθερή απόκλιση χαρτοφυλακίου για την περίπτωση (α) θα είναι

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port}(a)} &= \sqrt{(0.5)^2(0.07)^2 + (0.5)^2(0.10)^2 + 2(0.5)(0.5)(0.0070)} \\ &= \sqrt{0.007225} \\ &= 0.085\end{aligned}$$

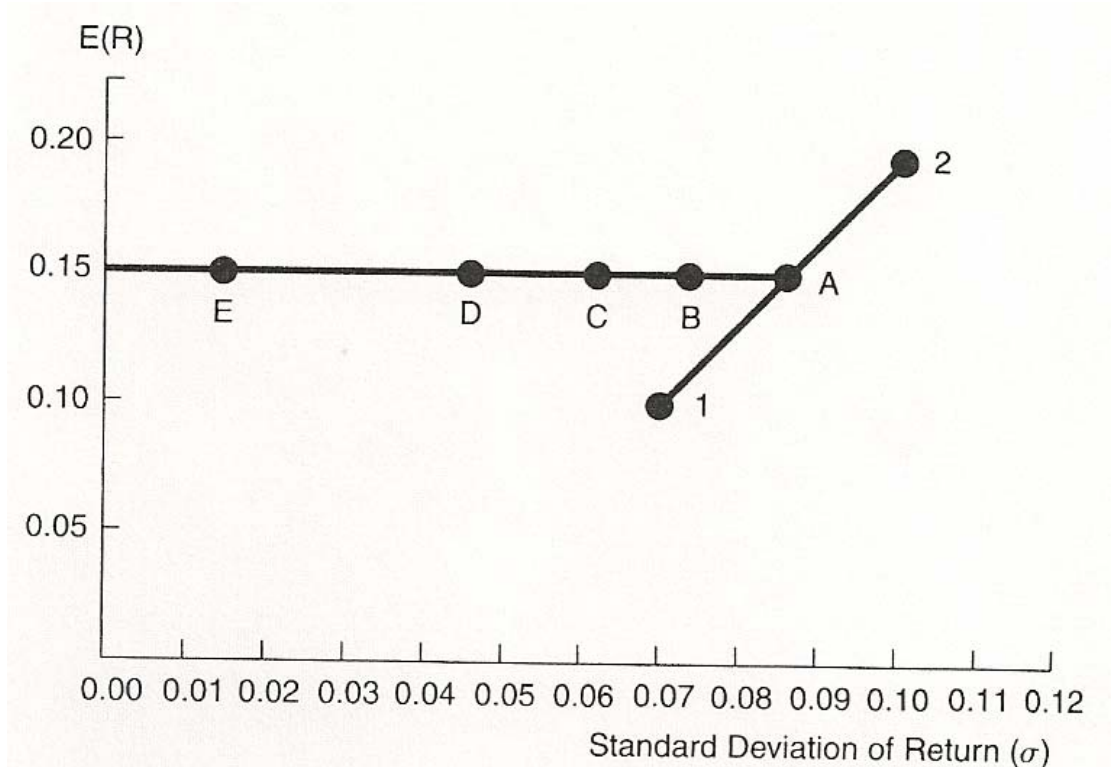
Ξανά με τέλειο θετικό συσχετισμό η σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου είναι ο ζυγισμένος μέσος των σταθερών αποκλίσεων των ξεχωριστών στοιχείων

$$(0.5)(0.07) + (0.5)(0.10) = 0.085$$

Όπως μπορείτε να φανταστείτε αλλάζοντας τα βάρη με τέλειο θετικό συσχετισμό προκαλεί τη σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου να αλλάξει με ένα γραμμικό τρόπο. Αυτό θα είναι ένα σημαντικό σημείο να θυμόμαστε όταν θα συζητήσουμε το μοντέλο κοστολόγησης των στοιχείων κεφαλαίων.

Για τις περιπτώσεις b,c,d και e οι σταθερές αποκλίσεις του χαρτοφυλακίου είναι ως εξής :

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port}(b)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(0.0035)} \\ &= \sqrt{0.005475} \\ &= 0.07399 \\ \sigma_{\text{port}(c)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(0.00)} \\ &= 0.0610 \\ \sigma_{\text{port}(d)} &= \sqrt{(0.001225) + (0.0025) + (0.5)(-0.0035)} \\ &= 0.0444 \\ \sigma_{\text{port}(e)} &= \sqrt{(0.003725) + (0.5)(-0.0070)} \\ &= 0.015\end{aligned}$$



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.12

Σημειωτέων ότι σε αυτό το παράδειγμα με τέλει αρνητικό συσχετισμό η σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου δεν είναι 0. Αυτό συμβαίνει επειδή τα διαφορετικά παραδείγματα έχουν ίσα βάρη, αλλά οι σταθερές απόκλισης των στοιχείων δεν είναι ίσες.

Ο πίνακας 1.12 δείχνει τα αποτελέσματα για 2 ξεχωριστά στοιχεία και το χαρτοφυλάκιο των 2 στοιχείων παραδεχόμενοι ότι οι συντελεστές συσχετισμού ποικίλουν όπως έχει παρουσιαστεί στις περιπτώσεις α έως ε. Όπως πριν, η προσδοκώμενη απόδοση δεν αλλάζει επειδή οι αναλογίες είναι καθορισμένες πάντα στο 0.50 -0.50 οπότε όλα τα χαρτοφυλάκια βρίσκονται πάνω στην οριζόντια γραμμή της απόδοσης $R=0.15$

Διαρκής συσχετισμός με μεταβλητά βάρη

Εάν αλλάζαμε τα βάρη των 2 στοιχείων ενόσω κρατούσαμε το συντελεστή συσχετισμού σταθερό, θα φτάναμε σε ένα σενario συνδυασμών που θα περιέγραφαν μία έλλειψη που θα ξεκινούσε από το στοιχείο 2 θα περνούσε μέσα από το σημείο 0.50-0.50 και θα κατέληγε στο στοιχείο 1. Μπορούμε να το δείξουμε αυτό με την περίπτωση γ στην οποία ο μηδενικός συντελεστής συσχετισμού διευκολύνει τους συσχετισμούς. Ξεκινάμε με 100% στο στοιχείο 2 (περίπτωση f) και αλλάζουμε τα βάρη ως εξής, τελειώνοντας με 100% στο στοιχείο 1 (περίπτωση l):

Case	w_1	w_2	$E(R_i)$
f	0.00	1.00	0.20
g	0.20	0.80	0.18
h	0.40	0.60	0.16
i	0.50	0.50	0.15
j	0.60	0.40	0.14
k	0.80	0.20	0.12
l	1.00	0.00	0.10

Ήδη γνωρίζουμε την σταθερή απόκλιση (σ) για το χαρτοφυλάκιο (i). Στις περιπτώσεις (f,g,h,j,k και l) οι σταθερές αποκλίσεις είναι

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port}(g)} &= \sqrt{(0.20)^2(0.07)^2 + (0.80)^2(0.10)^2 + 2(0.20)(0.80)(0.00)} \\ &= \sqrt{(0.04)(0.0049) + (0.64)(0.01) + (0)} \\ &= \sqrt{0.006596} \\ &= 0.0812\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port}(h)} &= \sqrt{(0.40)^2(0.07)^2 + (0.60)^2(0.10)^2 + 2(0.40)(0.60)(0.00)} \\ &= \sqrt{0.004384} \\ &= 0.0662\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port}(j)} &= \sqrt{(0.60)^2(0.07)^2 + (0.40)^2(0.10)^2 + 2(0.60)(0.40)(0.00)} \\ &= \sqrt{0.003364} \\ &= 0.0580\end{aligned}$$

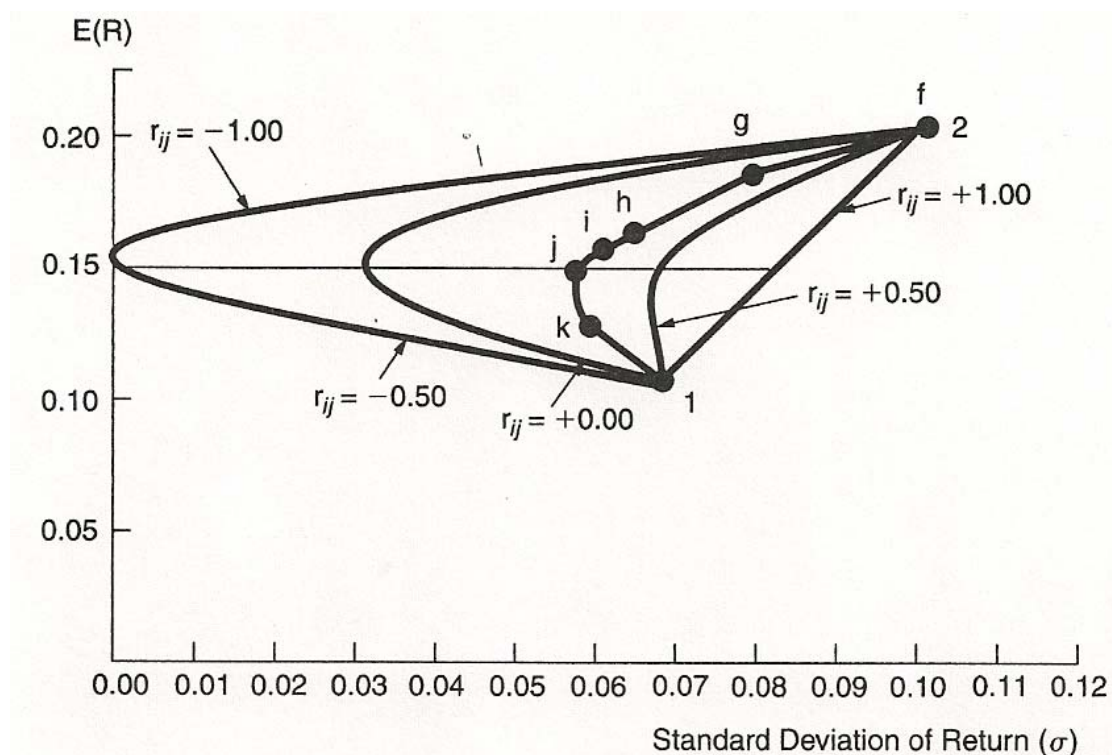
$$\begin{aligned}\sigma_{\text{port}(k)} &= \sqrt{(0.80)^2(0.07)^2 + (0.20)^2(0.10)^2 + 2(0.80)(0.20)(0.00)} \\ &= \sqrt{0.003536} \\ &= 0.0595\end{aligned}$$

Τα διάφορα βάρη με έναν σταθερό συσχετισμό παράγουν τους ακόλουθους συνδυασμούς ρίσκου-απόδοσης

Case	w_1	w_2	$E(R_i)$	$E(\sigma_{port})$
f	0.00	1.00	0.20	0.1000
g	0.20	0.80	0.18	0.0812
h	0.40	0.60	0.16	0.0662
i	0.50	0.50	0.15	0.0610
j	0.60	0.40	0.14	0.0580
k	0.80	0.20	0.12	0.0595
l	1.00	0.00	0.10	0.0700

Ένα γράφημα αυτών των συνδυασμών εμφανίζεται στον πίνακα 1.13. Θα μπορούσαμε να σχηματίσουμε μια ολοκληρωμένη καμπύλη απλώς διαφοροποιώντας τα βάρη κατά μικρές ποσότητες.

Ένα αξιοσημείωτο αποτέλεσμα είναι ότι με χαμηλούς, μηδενικούς ή αρνητικούς συσχετισμούς είναι πιθανόν να εξάγουμε χαρτοφυλάκια που έχουν χαμηλότερο ρίσκο από καθένα μοναδικό στοιχείο. Στο σύνολο των παραδειγμάτων μας όπου $r_{ij} = 0$ αυτό συμβαίνει στις περιπτώσεις h,i,j και K. Αυτή η δυνατότητα να μειώσουμε το ρίσκο είναι η ουσία της διαφοροποίησης των επενδύσεων.



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.13

Όπως φαίνεται στον πίνακα 1.13 παραδεχόμενοι ότι μία κανονική σχέση ρίσκου-απόδοσης όπου τα στοιχεία με το υψηλότερο ρίσκο (μεγαλύτερη

σταθερή απόκλιση αποδόσεων) προσφέρει υψηλούς ρυθμούς απόδοσης, είναι πιθανόν για έναν συντηρητικό επενδυτή να βιώσει και χαμηλότερο ρίσκο αλλά και υψηλότερες αποδόσεις διαφοροποιώντας μέσω ενός υψηλού ρίσκου, υψηλής απόδοσης στοιχείου, παραδεχόμενοι ότι ο συσχετισμός μεταξύ των 2 στοιχείων είναι σχετικά χαμηλός. Ο πίνακας 1.13 δείχνει ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε μηδενικό συσχετισμό ο επενδυτής χαμηλού ρίσκου στο σημείο 1 – που θα είχε απόδοση 10% και ρίσκο 7% - θα μπορούσε να αυξήσει την απόδοση σε 14% και να βιώσει μία πτώση στο ρίσκο στο 5.8%, επενδύοντας (διαφοροποιώντας) 40% του χαρτοφυλακίου στο πιο επισφαλές στοιχείο 2. Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε τα οφέλη της διαφοροποίησης εξαρτώνται οριακά από το συσχετισμό μεταξύ των στοιχείων. Ο πίνακας δείχνει ότι υπάρχει ακόμη και κάποιο όφελος όταν ο συσχετισμός είναι 0.50 αντί για 0.

Ο πίνακας 1.13 επίσης δείχνει ότι η καμπύλη στο γράφημα εξαρτάται από το συσχετισμό μεταξύ των 2 στοιχείων ή χαρτοφυλακίων. Με $R_{ij}=+1$ οι συνδυασμοί βρίσκονται πάνω σε μία γραμμή μεταξύ των 2 στοιχείων. Όταν $R_{ij}=0,50$ η καμπύλη βρίσκεται στα δεξιά της $R_{ij}=0$ καμπύλης, όταν το $R_{ij}= -0.50$ βρίσκεται στα αριστερά της . Τέλος όταν $R_{ij}=-1$ το γράφημα θα αποτελείται από 2 ευθείες γραμμές οι οποίες θα ακουμπούσαν στην κάθετη γραμμή (μηδενικό ρίσκο) με κάποιον συνδυασμό. Είναι πιθανόν να λύσουμε για το καθορισμένο σύνολο των βαρών το οποίο θα έδινε ένα χαρτοφυλάκιο με μηδενικό ρίσκο. Σε αυτή την περίπτωση έχουμε $W_1=0.412$ και $W_2=0.588$.

1.4 ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΜΕ 3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Η αναπαράσταση του τι συμβαίνει με ένα χαρτοφυλάκιο 3 στοιχείων είναι χρήσιμη επειδή δείχνει τη δυναμική των διαδικασιών που λαμβάνουν χώρα σε ένα χαρτοφυλάκιο όταν του προστίθενται στοιχεία ενεργητικού. Επίσης δείχνει την ταχεία αύξηση στους υπολογισμούς που χρειάζονται ο οποίος είναι κ ο λόγος που θα σταματήσουμε στα 3 στοιχεία.

Σε αυτό το παράδειγμα θα συνδυάσουμε 3 τάξεις στοιχείων που συζητήσαμε: μετοχές, ομόλογα και ισοδύναμα μετρητού. Θα παραδεχτούμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά

Asset Classes	$E(R_i)$	$E(\sigma_i)$	w_i
Stocks (S)	0.12	0.20	0.60
Bonds (B)	0.08	0.10	0.30
Cash equivalent (C)	0.04	0.03	0.10

Οι συσχετισμοί είναι

$$r_{S,B} = 0.25; r_{S,C} = -0.08; r_{B,C} = 0.15$$

Δοθέντων των βαρών που ορίστηκαν το $E(R_{port})$ είναι

$$\begin{aligned} E(R_{port}) &= (0.60)(0.12) + (0.30)(0.08) + (0.10)(0.04) \\ &= (0.072 + 0.024 + 0.004) = 0.100 = 10.00\% \end{aligned}$$

Όταν εφαρμόζουμε τη γενικευμένη σχέση από τον τύπο 1.6 στην αναμενόμενη σταθερή απόκλιση ενός χαρτοφυλακίου με 3 στοιχεία έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_{port}^2 &= (w_S^2 \sigma_S^2 + w_B^2 \sigma_B^2 + w_C^2 \sigma_C^2) \\ &\quad + (2w_S w_B \sigma_S \sigma_B r_{S,B} + 2w_S w_C \sigma_S \sigma_C r_{S,C} + 2w_B w_C \sigma_B \sigma_C r_{B,C}) \end{aligned}$$

ΤΥΠΟΣ 1.8

Τα χαρακτηριστικά που έχουν καθοριστεί, η σταθερή απόκλιση αυτού του χαρτοφυλακίου με τα 3 στοιχεία διαφορετικής τάξης θα ήταν

$$\begin{aligned} \sigma_{port}^2 &= [(0.6)^2 (0.20)^2 + (0.3)^2 (0.10)^2 + (0.1)^2 (0.03)^2] \\ &\quad + \{[2(0.6)(0.3)(0.20)(0.10)(0.25)] + [2(0.6)(0.1)(0.20)(0.03)(-0.08)] \\ &\quad + [2(0.3)(0.1)(0.10)(0.03)(0.15)]\} \\ &= [0.015309 + (0.0018) + (-0.0000576) + (0.000027)] \\ &= 0.0170784 \\ \sigma_{port} &= (0.0170784)^{1/2} = 0.1306 = 13.06\% \end{aligned}$$

1.5 ΘΕΜΑΤΑ ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ

Είναι σημαντικό να κρατήσουμε στο μυαλό μας ότι τα αποτελέσματα αυτού του καταμερισμού των στοιχείων στο χαρτοφυλάκιο εξαρτάται από την ακρίβεια των στατιστικών δεδομένων που εισάγουμε. Στη παρούσα κατάσταση, αυτό σημαίνει ότι για κάθε στοιχείο (ή τάξη στοιχείου) το οποίο εξετάζεται για απόκτηση στο χαρτοφυλάκιο, θα πρέπει να εκτιμήσουμε τις προσδοκώμενες αποδόσεις και τη σταθερή απόκλιση. Επίσης θα πρέπει να εκτιμήσουμε στο συντελεστή συσχετισμού μεταξύ του συνόλου των στοιχείων. Ο αριθμός των εκτιμήσεων για τον συσχετισμό μπορεί να είναι μεγάλος – για παράδειγμα για ένα χαρτοφυλάκιο με 100 αξιόγραφα ο αριθμός είναι 4950 (99 + 98 + 97 + ...). Η πιθανή πηγή σφάλματος που προκύπτει από αυτές τις προσεγγίσεις αναφέρεται ως επισφάλεια εκτίμησης.

Μπορούμε να μειώσουμε τον αριθμό των συντελεστών συσχετισμού που πρέπει να εκτιμηθούν παραδεχόμενοι ότι οι αποδόσεις των μετοχών

μπορούν να περιγραφούν από τη σχέση κάθε μετοχής με ένα δείκτη της αγοράς – που σημαίνει ότι έχουμε ένα μοντέλο αγοράς με μονό δείκτη ως ακολούθως.

$$R_i = a_i + b_i R_m + \varepsilon_i \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.9}$$

Όπου b_i = συντελεστής κλίσης που σχετίζει τις αποδόσεις του αξιόγραφου i με τις αποδόσεις για τη συνδυασμένη αγορά μετοχών.

R_m = οι αποδόσεις για τη συνδυασμένη αγορά μετοχών

Αν όλες οι ασφάλειες είναι εξίσου συσχετισμένες με την αγορά και ένας συντελεστής κλίσης b_i εξάγεται για κάθε μια από αυτές μπορεί ναδειχθεί ότι ο συντελεστής συσχετισμού μεταξύ 2 ασφαλειών i και j είναι

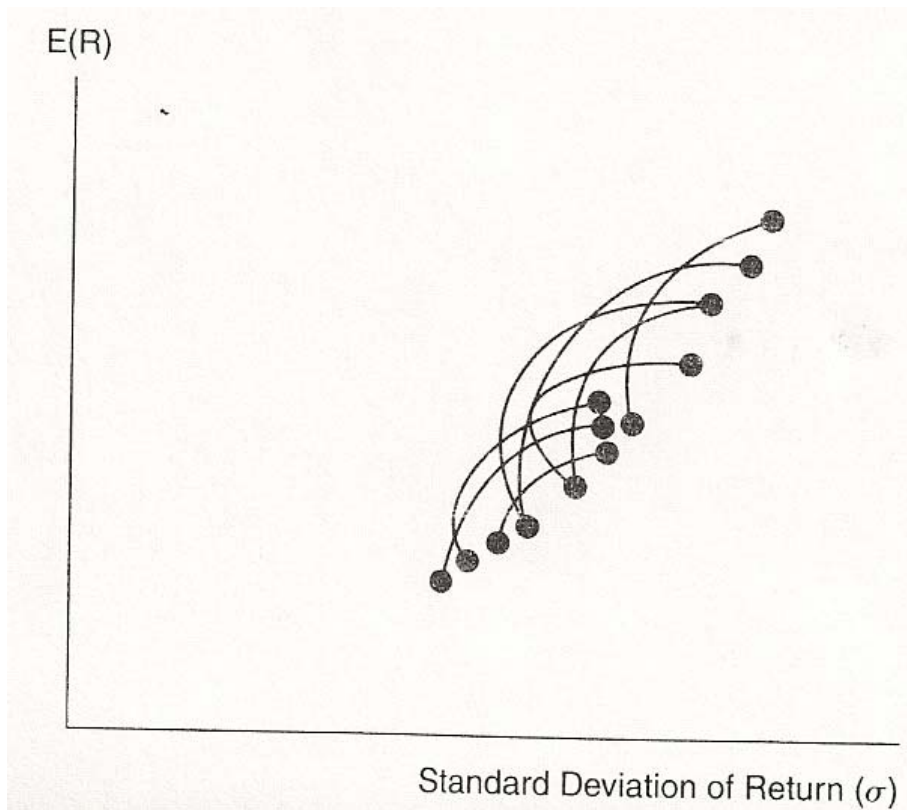
$$r_{ij} = b_i b_j \frac{\sigma_m^2}{\sigma_i \sigma_j} \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.10}$$

Όπου: σ_m^2 = η διακύμανση των αποδόσεων για τη συνδυασμένη αγορά μετοχών

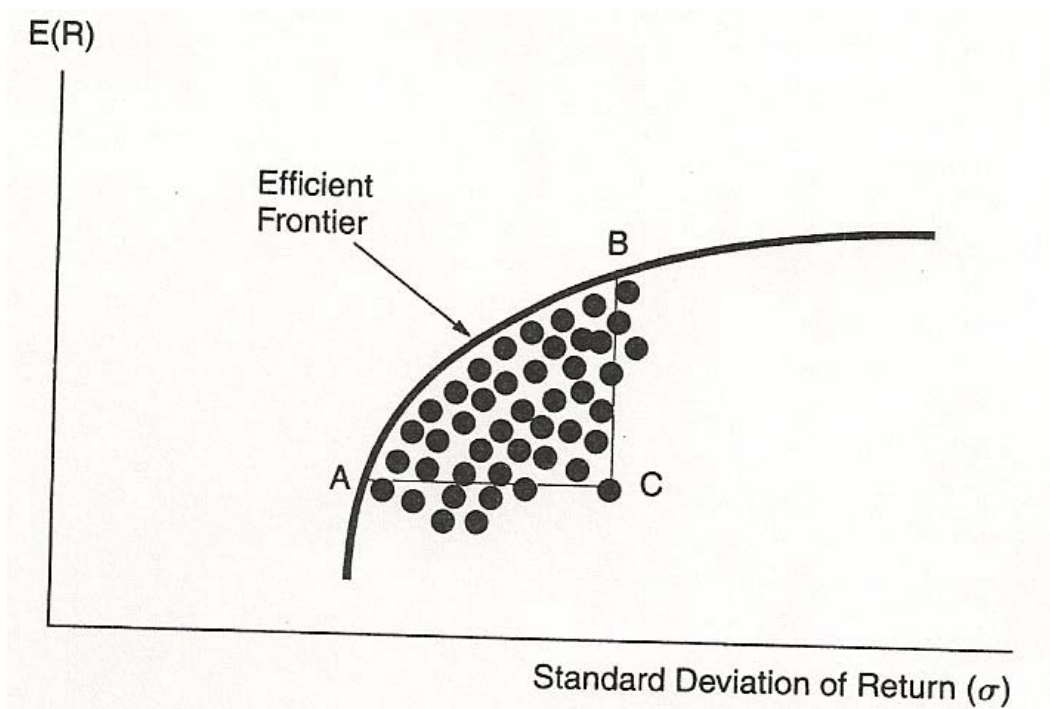
Αυτό μειώνει τον αριθμό των εκτιμήσεων από 4950 σε 100 – που σημαίνει ότι άμα έχουμε εξάγει μία εκτίμηση b_i για κάθε αξιόγραφο μπορούμε να υπολογίσουμε τις εκτιμήσεις συσχετισμού. Είναι σημαντικό να θυμόμαστε ότι αυτό προϋποθέτει ότι το μοντέλο αγοράς μονού δείκτη παρέχει μια καλή εκτίμηση των αποδόσεων των ασφαλειών.

1.6 ΟΡΙΟ ΑΠΟΔΟΣΗΣ

Αν εξετάζαμε διαφορετικούς συνδυασμούς 2 στοιχείων και εξάγαμε τις καμπύλες παραδεχόμενοι όλα τα πιθανά βάρη, θα είχαμε ένα γράφημα όπως αυτό στον πίνακα 1.14. Η καμπύλη η οποία περιέχει τους καλύτερους από όλους αυτούς τους συνδυασμούς αναφέρεται ως όριο απόδοσης (αποδοτικό όριο). Πιο συγκεκριμένα το αποδοτικό όριο αντιπροσωπεύει αυτό το σύνολο των χαρτοφυλακίων που έχουν το μέγιστο ρυθμό απόδοσης για κάθε δοθέν επίπεδο επισφάλειας ή για την ελάχιστη επισφάλεια για κάθε επίπεδο απόδοσης. Ένα παράδειγμα ενός τέτοιου ορίου επιδεικνύεται στον πίνακα 1.15



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.14



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.15

Κάθε χαρτοφυλάκιο που βρίσκεται στο αποδοτικό όριο έχει είτε υψηλότερο ρυθμό απόδοσης για το ίδιο ή χαμηλότερο ρίσκο για έναν ίδιο ρυθμό απόδοσης παρά από κάποιο χαρτοφυλάκιο εντός του ορίου. Έτσι μπορούμε

να πούμε ότι το χαρτοφυλάκιο A στον πίνακα 1.15 κυριαρχεί επί του χαρτοφυλακίου C επειδή έχει ίδιο ρυθμό απόδοσης αλλά σημαντικά λιγότερο ρίσκο. Παρομοίως το χαρτοφυλάκιο B κυριαρχεί επί του χαρτοφυλακίου C επειδή έχει ίδιο ρίσκο αλλά υψηλότερο αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης. Εξαιτίας των ωφελειών τις διαφοροποίηση των επενδύσεων μεταξύ ατελώς συσχετισμένων στοιχείων, θα περιμέναμε ότι το όριο απόδοσης θα αποτελείται από χαρτοφυλάκια επενδύσεων παρά από ξεχωριστά αξιόγραφα. Δύο πιθανές εξαιρέσεις υπάρχουν στα άκρα τα οποία αναπαριστούν το στοιχείο με τη μεγαλύτερη απόδοση και το στοιχείο με το μικρότερο ρίσκο.

Ως επενδυτής θα στοχεύσετε ένα σημείο πάνω στο όριο απόδοσης βασισμένοι στην συνάρτηση χρησιμότητας, η οποία αντανάκλα την συμπεριφορά σας απέναντι στο ρίσκο. Κανένα χαρτοφυλάκιο πάνω στο όριο απόδοσης δεν μπορεί να κυριαρχήσει επί άλλου χαρτοφυλακίου που βρίσκεται στο όριο απόδοσης. Όλα αυτά τα χαρτοφυλάκια έχουν διαφορετική απόδοση και μέτρο επισφάλειας, με προσδοκώμενους ρυθμούς απόδοσης οι οποίοι αυξάνονται με το υψηλότερο ρίσκο.

1.7 ΟΡΙΟ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΕΠΕΝΔΥΤΗ

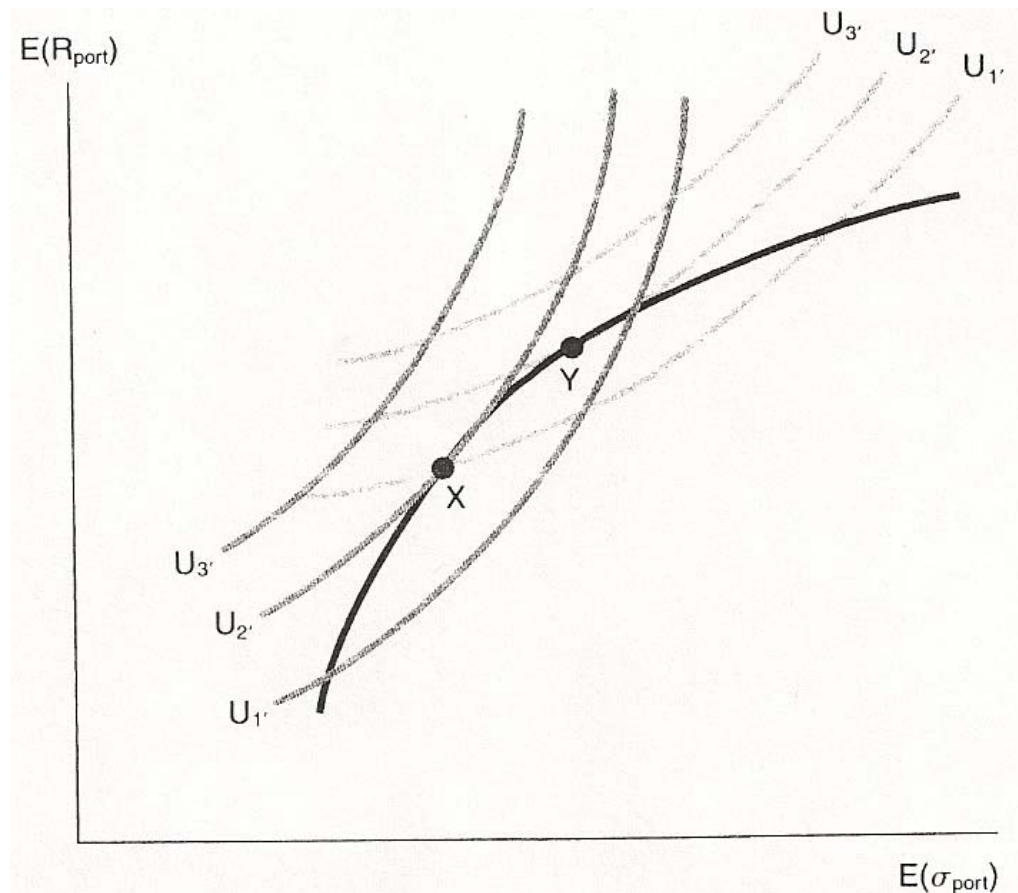
Η καμπύλη στο πίνακα 1.15 δείχνει ότι η κλίση της καμπύλης του ορίου απόδοσης μειώνεται σταθερά καθώς μετακινούμαστε προς τα πάνω. Αυτό δείχνει ότι προθέτοντας ίσες προσαυξήσεις του ρίσκου καθώς ανεβαίνουμε το όριο απόδοσης αυτό μας δίνει μειούμενα διαστήματα της προσδοκώμενης απόδοσης. Για να εκτιμήσουμε την κατάσταση αυτή, υπολογίσουμε την καμπύλη του ορίου απόδοσης ως εξής.

$$\frac{\Delta E(R_{\text{port}})}{\Delta E(\sigma_{\text{port}})} \quad \text{ΤΥΠΟΣ 1.11}$$

Οι καμπύλες χρησιμότητας ενός επενδυτή προσδιορίζουν τα ανταλλάγματα που αυτός ή αυτοί είναι διατεθειμένος να δώσει μεταξύ προσδοκώμενης απόδοσης και ρίσκου. Σε συνάρτηση με το όριο απόδοσης αυτές οι καμπύλες χρησιμότητας καθορίζουν πιο συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο στο όριο απόδοσης ταιριάζει καλύτερα σε έναν επενδυτή. 2 επενδυτές θα επιλέξουν το ίδιο χαρτοφυλάκιο από το αποδοτικό σύνολο μόνο εάν οι καμπύλες χρησιμότητας τους είναι ίδιες.

Ο πίνακας 1.16 δείχνει 2 σετ καμπύλων χρησιμότητας μαζί με ένα όριο απόδοσης των επενδύσεων. Οι καμπύλες που έχουν ονομαστεί u_1, u_2 και u_3 είναι για έναν επενδυτή που αποφεύγει το ρίσκο. Αυτές οι καμπύλες χρησιμότητας είναι σχετικά απότομες φανερώνοντας ότι ο επενδυτής δεν θα ανεχτεί πολύ επιπλέον ρίσκο για να αποκτήσει επιπρόσθετες αποδόσεις. Ο

επενδυτής είναι εξίσου διατεθειμένος έναντι οποιουδήποτε συνδυασμού $E(R)$ και $E(\sigma)$ πάνω στην συγκεκριμένη καμπύλη χρησιμότητας u_1 .



ΠΙΝΑΚΑΣ 1.16

Οι καμπύλες που έχουν ονομαστεί (u_1' , u_2' , u_3'), χαρακτηρίζουν έναν πιο τολμηρό επενδυτή. Ένας τέτοιος επενδυτής είναι πρόθυμος να ανεχτεί λίγο παραπάνω ρίσκο για να έχει λίγο μεγαλύτερη προσδοκώμενη απόδοση.

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο είναι το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο που έχει την υψηλότερη χρησιμότητα για ένα συγκεκριμένο επενδυτή. Βρίσκεται πάνω στο σημείο επαφής μεταξύ του αποδοτικού ορίου και τις καμπύλης u_1 με την υψηλότερη πιθανή χρησιμότητα. Η υψηλότερη χρησιμότητα ενός συντηρητικού επενδυτή βρίσκεται στο σημείο x του πίνακα 1.16 όπου η καμπύλη u_2 μόλις ακουμπάει το όριο απόδοσης. Η υψηλότερη χρησιμότητα ενός πιο τολμηρού επενδυτή βρίσκεται στο σημείο Y το οποίο αντιπροσωπεύει ένα χαρτοφυλάκιο πάνω στο όριο απόδοσης με υψηλότερες προσδοκώμενες αποδόσεις και υψηλότερο ρίσκο από το χαρτοφυλάκιο στο σημείο X .

Κεφάλαιο 2

Ευρεία μαθηματική προσέγγιση της θεωρίας χαρτοφυλακίων του Markowitz

Αυτό το κεφάλαιο είναι όλο για τη θεωρία του Markowitz. Η θεωρία εξηγείται με έναν σύντομο μαθηματικό τρόπο, και υπολογίζονται όλα τα ενδιαφέροντα χαρτοφυλάκια. Παρακαλώ εξετάστε τις αναφορές εάν η θεωρία είναι πάρα πολύ περιληπτική, μια συμπαθητική εισαγωγή της θεωρίας Markowitz μπορεί να βρεθεί παραδείγματος χάριν στους Elton, Gruber (1981) και Blake (1990).

Τα αποδοτικά σύνορα συζητούνται στην παράγραφο 1. Το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη διασπορά, το εφαιπτομενικό χαρτοφυλάκιο και το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί τη βέλτιστη χρησιμότητα εξετάζονται στις παραγράφους 2, 3 και 4. Στην παράγραφο 5 προστίθεται ένα ενεργητικό στοιχείο ελεύθερο-κινδύνου στο μοντέλο, και καθορίζονται οι νέες βέλτιστες πολιτικές. Στην παράγραφο 6 λαμβάνεται μια ανάλυση ευαισθησίας.

2.1 Αποδοτικά σύνορα

Τα αποδοτικά σύνορα είναι η καμπύλη που παρουσιάζει όλα τα αποδοτικά χαρτοφυλάκια σε ένα πλαίσιο κινδύνου-επιστροφής (ρίσκου-απόδοσης). Ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο ορίζεται ως το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση για ένα δεδομένο ποσό κινδύνου-ρίσκου (σταθερή απόκλιση), ή το χαρτοφυλάκιο που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο για μια δεδομένη αναμενόμενη απόδοση.

Ένας επενδυτής θα επενδύει πάντα σε ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο. Εάν επιθυμεί ένα συγκεκριμένο ποσό του κινδύνου, θα ήταν τρελός εάν δεν στόχευε στην υψηλότερη πιθανή αναμενόμενη απόδοση. Όμοια εάν θέλει μία συγκεκριμένη αναμενόμενη απόδοση, θα επιθυμούσε να την επιτύχει με το ελάχιστο πιθανό ποσό ρίσκου. Αυτό συμβαίνει επειδή ο επενδυτής είναι αντίθετος στον κίνδυνο.

Έτσι, για να υπολογίσουμε τα αποδοτικά σύνορα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε το ρίσκο (σταθερή απόκλιση) κάποιας αναμενόμενης απόδοσης. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι η συνάρτηση αυτή που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί, η οποία είναι η σταθερή απόκλιση. Εντούτοις, παίρνουμε τη διαφορά (το τετράγωνο της σταθερής απόκλισης) ως αντικειμενική συνάρτηση, η οποία επιτρέπεται επειδή η σταθερή απόκλιση μπορεί να είναι μόνο θετική. Η αντικειμενική συνάρτηση είναι

$$var(C_{end}) = var(C_0 + R_p) = var(R_p) = var(r^T \theta) = \theta^T \Sigma \theta$$

Υπάρχουν δύο περιορισμοί που πρέπει να ισχύσουν για την ελαχιστοποίηση αυτής της αντικειμενικής συνάρτησης. Κατ' αρχάς, πρέπει να καθοριστεί η αναμενόμενη απόδοση, επειδή ελαχιστοποιούμε τον κίνδυνο λαμβάνοντας υπόψη μας αυτήν την απόδοση. Αυτό το σταθερό χαρτοφυλάκιο σημαίνει ότι καθορίζεται από το μ_p . Ο δεύτερος περιορισμός είναι ότι μπορούμε να επενδύσουμε μόνο το κεφάλαιο που έχουμε αυτήν τη στιγμή, έτσι ποσά που επενδύουμε σε κάθε ενιαίο ενεργητικό στοιχείο πρέπει να προστίθενται επάνω σε αυτό το ποσό C_0 . Αυτό δίνει τους ακόλουθους δύο περιορισμούς:

$$\mu^T \theta = \mu_p \quad \text{and} \quad \bar{1}^T \theta = C_0$$

Ψάχνουμε την πολιτική επένδυσης με την ελάχιστη διασπορά, έτσι πρέπει λύσετε το ακόλουθο πρόβλημα:

$$\text{Min} \{ \theta^T \Sigma \theta \mid A^T \theta = B \}$$

με

$$A = \begin{pmatrix} \mu & \bar{1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lagrange για να λύσουμε αυτό το σύστημα. Παίρνουμε τους ακόλουθους όρους, όπου λ_0 είναι ο πολλαπλασιαστής Lagrange:

$$\begin{cases} 2\Sigma\theta + A\lambda_0 = 0 \\ A^T\theta = B \end{cases} \quad \text{with} \quad \lambda_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Η επίλυση της πρώτης εξίσωσης (2.1) για το θ δίνει, με έναν επαναπροσδιορισμό του διανύσματος $\lambda = -1/2\lambda_0$

$$\theta = \Sigma^{-1} A \lambda$$

Έτσι η δεύτερη εξίσωση (2.1) γίνεται

$$A^T \Sigma^{-1} A \lambda = B \quad \Rightarrow \quad \lambda = (A^T \Sigma^{-1} A)^{-1} B \equiv H^{-1} B$$

όπου $H = (A^T \Sigma^{-1} A)$

και $H^T = (A^T \Sigma^{-1} A)^T = A^T (\Sigma^{-1})^T A = A^T \Sigma^{-1} A = H$

έτσι το H είναι μία συμμετρική (2x2) - μήτρα. Συμπληρώνοντας αυτές τις εκφράσεις στον τύπο διασποράς, παίρνουμε

$$\text{var}(R_p) = \theta^T \Sigma \theta = \theta^T \Sigma \Sigma^{-1} A \lambda = \theta^T A \lambda = (A^T \theta)^T H^{-1} B = B^T H^{-1} B$$

Έχουμε δει ότι το H είναι μία συμμετρική (2 X 2) - μήτρα, υποθέτουμε ότι

$$H \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Rightarrow H^{-1} = \frac{1}{ac - b^2} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Ορίζουμε $d \equiv \det(H) = ac - b^2$. Επειδή $H = (A^T \Sigma^{-1} A)$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} a &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \\ b &= \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu, \\ c &= \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1}, \\ d &= ac - b^2 \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι οι παράμετροι a , c και d είναι θετικές: Επειδή έχουμε υποθέσει ότι η μήτρα συνδιακύμανσης Σ είναι θετικά καθορισμένη, η αντίστροφη μήτρα Σ^{-1} είναι επίσης θετικά καθορισμένη. Αυτό σημαίνει ότι το $x^T \Sigma^{-1} x > 0$ για όλα τα μη μηδενικά ($N \times 1$) διανύσματα x , έτσι είναι σαφές ότι

$$a > 0, \quad c > 0$$

Αλλά επίσης
 $(b\mu - a\bar{1})^T \Sigma^{-1} (b\mu - a\bar{1}) = bba - abb - abb + aac = a(ac - b^2) = ad > 0$
 και επειδή $a > 0$ πρέπει και $d > 0$

Με τον καθορισμό του H η έκφρασή μας για τη διακύμανση γίνεται

$$\begin{aligned} \text{var}(R_p) &= \frac{1}{d} \begin{pmatrix} \mu_p & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_p \\ C_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \end{aligned}$$

Αυτό δίνει την έκφραση για τα αποδοτικά σύνορα σε ένα πλαίσιο κίνδυνου-απόδοσης. Σημειώστε ότι μόνο το άνω-μισό από αυτήν την γραφική παράσταση είναι το αποδοτικό σύνολο, επειδή για χαρτοφυλάκια στο κάτω-μισό μπορούν να επιλεγθούν χαρτοφυλάκια στον ανώτερο όπου για το ίδιο επίπεδο κινδύνου λαμβάνεται περισσότερη απόδοση. Ο τύπος των αποδοτικών συνόρων δίνεται από

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \quad (2.2)$$

Παίρνοντας την τετραγωνική ρίζα αυτού του τύπου δίνεται μια έκφραση για τη σταθερή απόκλιση. Η γραφική παράσταση των αποδοτικών συνόρων

παρουσιάζεται στον επόμενο γράφημα, όπου χρησιμοποιείται το πλαίσιο της μέσης-σταθερής απόκλισης. Αυτοί είναι και οι άξονες που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια.



Σχήμα 2.1: Τα αποδοτικά σύνορα

Αυτό είναι μια παραβολή μέσα στο $(\sigma_p^2 - \mu_p)$ διάστημα. Εντούτοις, από το διάστημα $(\sigma_p - \mu_p)$ χρησιμοποιούμε μόνο τη δεξιά πλευρά της υπερβολής. Αυτό διακρίνεται εύκολα από τα παρακάτω:

$$\sigma_p^2 = \frac{c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2}{d} = \frac{c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + dC_0^2/c + b^2C_0^2/c}{d}$$

έτσι έχουμε, διαιρώντας την αριστερή πλευρά με $1/c$ και τη δεξιά πλευρά με c/c^2

$$\frac{\sigma_p^2}{1/c} = \frac{\mu_p^2 - 2bC_0/c\mu_p + dC_0^2/c^2 + b^2C_0^2/c^2}{d/c^2} = \frac{(\mu_p - bC_0/c)^2}{d/c^2} + C_0^2$$

που είναι ο τύπος για την ακόλουθη υπερβολή

$$\frac{\sigma_p^2}{C_0^2/c} - \frac{(\mu_p - bC_0/c)^2}{dC_0^2/c^2} = 1$$

Οι κλίσεις των δύο ασύμπτωτων είναι $\pm \sqrt{\frac{dC_0^2/c^2}{C_0^2/c}} = \pm \sqrt{\frac{d}{c}}$ και το κέντρο της υπερβολής είναι $(0, \frac{b}{c}C_0)$, έτσι οι ασύμπτωτοι δίνονται από

$$\mu_p = \frac{b}{c}C_0 \pm \sqrt{\frac{d}{c}}\sigma_p$$

Ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την κατανομή χαρτοφυλακίων θ_{EF} που ανήκει στα αποδοτικά σύνορα. Αυτό δίνει τα ποσά που ένας επενδυτής πρέπει να επενδύσει στα ενιαία ενεργητικά στοιχεία για να επιτύχει την αναμενόμενη απόδοση και τον κίνδυνο στα αποδοτικά σύνορα. Έχουμε

$$\begin{aligned}\theta_{EF} &= \Sigma^{-1}A\lambda = \Sigma^{-1}AH^{-1}B = \frac{c\mu_p - bC_0}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\mu_p}{d}\Sigma^{-1}\bar{1} \\ &= \frac{1}{d}\Sigma^{-1}((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_p)\end{aligned}\quad (2.3)$$

Έτσι για κάθε επιθυμητή αξία απόδοσης μ_p χαρτοφυλακίων, τόσο η αντίστοιχη ελάχιστη σταθερή απόκλιση όσο και η αντίστοιχη κατανομή μπορούν να υπολογιστούν, χρησιμοποιώντας τις (2.2) αντίστοιχα (2.3).

2.2 Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς

Υποθέστε ότι ένας επενδυτής επιθυμεί να επενδύσει σε ένα χαρτοφυλάκιο με το λιγότερο ποσό κινδύνου. Αυτός δεν ενδιαφέρεται για την αναμενόμενη απόδοσή του, θέλει μόνο να επενδύσει όλα τα χρήματά του με το χαμηλότερο πιθανό ποσό κινδύνου. Επειδή θα επενδύει πάντα σε ένα αποδοτικό χαρτοφυλάκιο, θα επιλέξει το χαρτοφυλάκιο στα αποδοτικά σύνορα με την ελάχιστη σταθερή απόκλιση. Σε αυτό το σημείο και η διασπορά είναι ελάχιστη. Γι' αυτό αυτό το χαρτοφυλάκιο καλείται *χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς*. Η γραφική ερμηνεία του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς παρουσιάζεται στο επόμενο πλαίσιο. Αυτό το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς μπορεί να υπολογιστεί με την ελαχιστοποίηση της διασποράς υποκείμενης στον απαραίτητο περιορισμό ότι ένας επενδυτής μπορεί μόνο να επενδύσει το ποσό κεφαλαίου που έχει. Αυτό καλείται *περιορισμός προϋπολογισμού*. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης είναι

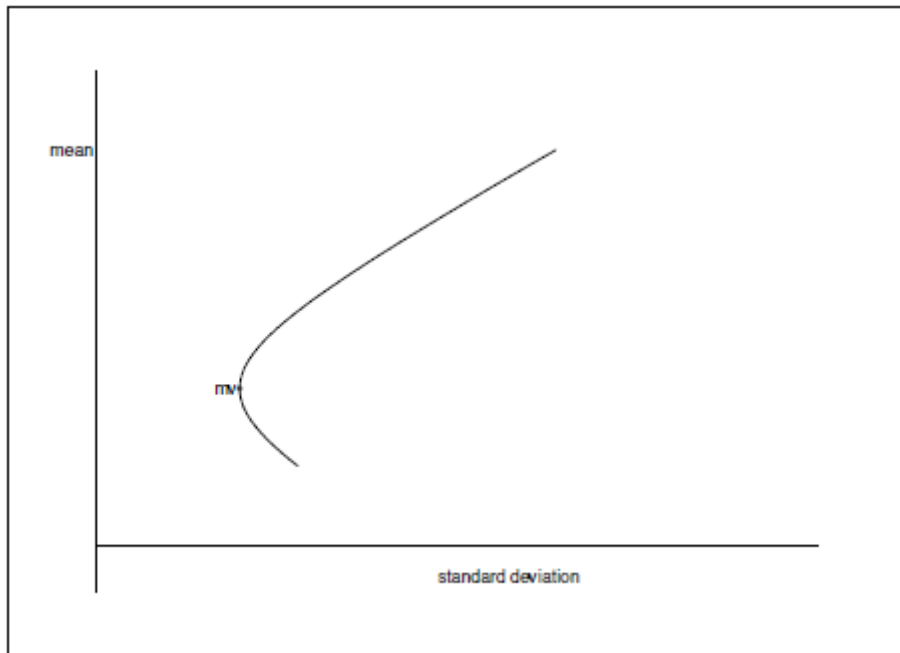
$$\text{Min} \{ \theta^T \Sigma \theta \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \}$$

Χρησιμοποιώντας Lagrange για να λύσουμε αυτό το σύνολο, παίρνουμε

$$\begin{cases} 2\Sigma\theta + \bar{1}\lambda_0 = 0 \\ \bar{1}^T\theta = C_0 \end{cases} \quad \text{όπου } \lambda_0 \text{ σταθερά.} \quad (2.4)$$

Η επίλυση της πρώτης εξίσωσης (2.4) για το θ δίνει, με μια νέα σταθερά $\lambda = -1/2\lambda_0$:

$$\theta = \Sigma^{-1}\bar{1}\lambda$$



Σχήμα 2.2: Το ελάχιστο χαρτοφυλάκιο διαφοράς

Η χρησιμοποίηση αυτής της έκφρασης για το θ στη δεύτερη εξίσωση (2.4) δίνει

$$\bar{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}} \lambda = C_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{C_0}{\bar{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}}} \equiv \frac{C_0}{c}$$

όπου $c = \bar{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}}$ ορίζεται ως το στοιχείο h_{22} στη μήτρα H στο προηγούμενο τμήμα. Συμπληρώνοντας σε αυτήν την έκφραση για το λ την ανωτέρω έκφραση για το θ έχουμε

$$\theta_{mv} = \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}} \frac{C_0}{c} \quad (2.5)$$

τη κατανομή χαρτοφυλακίων όταν ένας επενδυτής επιθυμεί τον ελάχιστο κίνδυνο. Μπορούμε να εκφράσουμε το ποσό κινδύνου στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς με τον υπολογισμό της ελάχιστης διασποράς:

$$\begin{aligned} \sigma_{mv}^2 &= \theta^T \Sigma \theta = \frac{C_0}{c} (\Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}})^T \Sigma \frac{C_0}{c} \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}} = \left(\frac{C_0}{c} \right)^2 \bar{\mathbf{1}}^T (\Sigma^{-1})^T \Sigma \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}} \\ &= \left(\frac{C_0}{c} \right)^2 \bar{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}} = \left(\frac{C_0}{c} \right)^2 c = \frac{C_0^2}{c} \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη απόδοση σε αυτό το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς είναι:

$$\mu_{mv} = \mu^T \theta = \mu^T \Sigma^{-1} \mathbf{1} \frac{C_0}{c} = b \frac{C_0}{c} = \frac{b}{c} C_0$$

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι αυτή η ελάχιστη διασπορά μπορεί επίσης να υπολογιστεί με τον τύπο για τα αποδοτικά σύνορα στο προηγούμενο τμήμα, και έπειτα να το θέσει ίσο με μηδέν. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αυτό δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

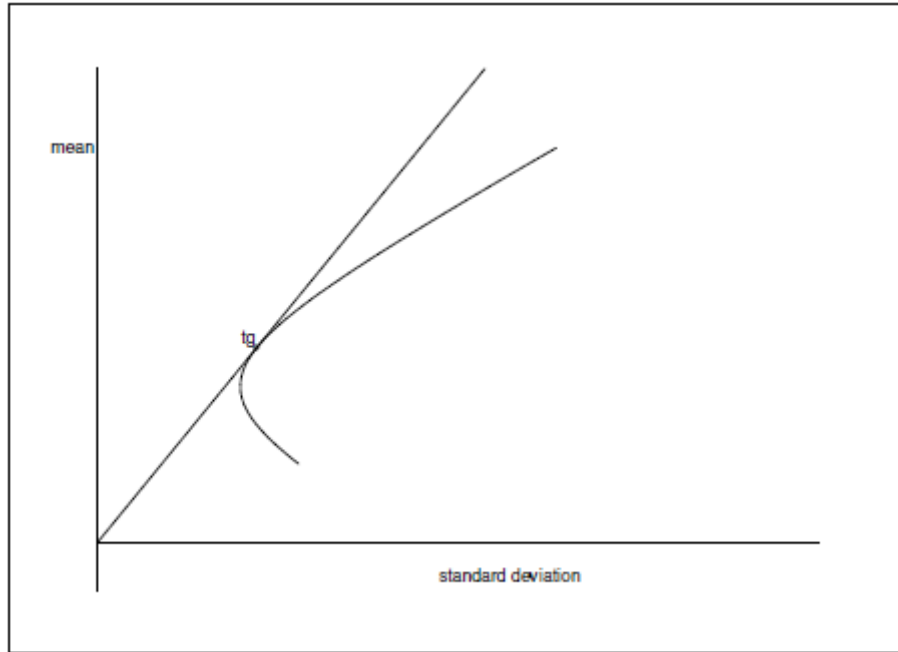
2.3 Εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο

Υποθέστε ότι ένας επενδυτής έχει άλλες προτιμήσεις από το να επενδύσει με το λιγότερο πιθανό κίνδυνο και την επένδυση έτσι στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Ένα παράδειγμα μιας άλλης προτίμησης είναι η επένδυση στο χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη αναλογία Sharpe (Sharpe ratio). Η αναλογία Sharpe ορίζεται ως η αναλογία απόδοσης-κινδύνου, έτσι

Αναλογία Sharpe = μέση απόκλιση / σταθερή απόκλιση

Αντιπροσωπεύει την αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου, έτσι το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη αναλογία Sharpe δίνει την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση ανά μονάδα κινδύνου, και είναι έτσι το περισσότερο αποδοτικό στον κίνδυνο χαρτοφυλάκιο.

Γραφικά, το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη αναλογία Sharpe είναι το σημείο όπου μια γραμμή μέσα από την προέλευση είναι εφαπτόμενη στα αποδοτικά σύνορα, στο πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης, επειδή αυτό το σημείο έχει την ιδιότητα να έχει την υψηλότερη πιθανή αναλογία μέσης-σταθερής απόκλισης. Γι' αυτό το καλούμε εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Δείτε το επόμενο πλαίσιο για τη γραφική παράσταση.



Σχήμα 2.3: Το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο

Για τον υπολογισμό του εφαπτομενικού χαρτοφυλακίου χρειαζόμαστε τον τύπο για τα αποδοτικά σύνορα. Θυμηθείτε ότι δίνεται από τον τύπο:

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Υποθέστε ότι το εφαπτομενικό σημείο έχει τις συντεταγμένες (σ_{tg}, μ_{tg}) . Κατόπιν η (αντίστροφος) κλίση της εφαπτομενικής γραμμής είναι

$$\frac{\Delta\sigma_p}{\Delta\mu_p} = \frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)} - 0}{\mu_{tg} - 0}$$

Η κλίση των αποδοτικών συνόρων στο εφαπτομενικό σημείο είναι απλά η παράγωγος των αποδοτικών συνόρων σε εκείνο το σημείο. Η (αντίστροφος) κλίση είναι

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_p}{\partial\mu_p} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \right)^{-1/2} \frac{1}{d}(2c\mu_p - 2bC_0) \Bigg|_{\mu_p=\mu_{tg}} \\ &= \frac{c\mu_{tg} - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)}} \end{aligned}$$

Στο εφαπτομενικό σημείο οι δύο κλίσεις πρέπει να είναι ίσες, έτσι

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)}}{\mu_{tg}} = \frac{c\mu - bC_0}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tg}^2 - 2bC_0\mu_{tg} + aC_0^2)}}$$

$$\Rightarrow \mu_{tg} = \frac{a}{b}C_0.$$

Η αντιστοιχία σ_{tg} υπολογίζεται με τη αντικατάσταση του μ_{tg} στον αποδοτικό συνοριακό τύπο. Αυτό δίνει

$$\sigma_{tg} = \sqrt{\frac{1}{d}\left(c\frac{a^2}{c^2}C_0^2 - \frac{2ab}{b}C_0^2 + aC_0^2\right)} = \frac{\sqrt{a}}{b}C_0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το εκείνο το $d = ac - b^2$.

Για να πάρουμε θ_{tg} , τη κατανομή των ενεργητικών στοιχείων στο εφαπτομενικό σημείο, χρησιμοποιούμε τον τύπο (2.3), ο οποίος δίνει

$$\theta_{tg} = \frac{c\frac{a}{b}C_0 - bC_0}{d}\Sigma^{-1}\mu + \frac{aC_0 - b\frac{a}{b}C_0}{d}\Sigma^{-1}\bar{1}$$

$$= \Sigma^{-1}\mu\frac{C_0}{b}. \quad (2.6)$$

Έτσι όταν ένας επενδυτής επιθυμεί τη μεγιστοποίηση της αναλογίας Sharpe του χαρτοφυλακίου του, η βέλτιστη κατανομή ενεργητικών στοιχείων είναι η θ_{tg} .

2.4 Βέλτιστο χαρτοφυλάκιο

Μέχρι τώρα, έχουμε δει δύο χαρτοφυλάκια που ένας επενδυτής μπορεί να προτιμήσει. Εάν επιθυμεί το ελάχιστο ποσό ρίσκου παίρνει το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Εάν ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η αναλογία Sharpe του χαρτοφυλακίου, λαμβάνεται το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο.

Η θεωρία Markowitz εντούτοις, υποθέτει ένα διαφορετικό είδος προτίμησης για τον επενδυτή. Λέει ότι ο στόχος των επενδυτών είναι να μεγιστοποιήσουν τη συνάρτηση χρησιμότητάς τους, όπου η χρησιμότητα δίνεται από τον τύπο

$$u = E(C_{end}) - \frac{1}{2}\gamma var(C_{end}). \quad (2.7)$$

Έτσι η χρησιμότητα είναι μια συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης, της διασποράς και μιας νέας παραμέτρου γ . Αυτή η παράμετρος γ καλείται παράμετρος της απόλυτης αποστροφής κινδύνου. Όπως δείχνει το όνομα, είναι ένα μέτρο της αποστροφής κινδύνου των επενδυτών. Μπορεί να είναι διαφορετικό για κάθε επενδυτή, και ακόμη και για έναν επενδυτή μπορεί να αλλάξει με το πέρασ του χρόνου. Όσο μεγαλύτερο είναι το γ , τόσο λιγότερο διακινδυνεύει ο επενδυτής. Είναι δηλαδή περισσότερο επιφυλακτικός απέναντι στο ρίσκο. Αυτό ελέγχεται εύκολα, επειδή μέσα στη συνάρτηση χρησιμότητας (2.7) η παράμετρος που δείχνει τον κίνδυνο, δηλαδή τη διασπορά, γίνεται σημαντικότερη όταν το γ είναι μεγαλύτερο. Και επειδή ένας μεγαλύτερος κίνδυνος οδηγεί σε μια χαμηλότερη χρησιμότητα, ο επενδυτής με το μεγαλύτερο γ είναι περισσότερο αντίθετος στον κίνδυνο από έναν επενδυτή με χαμηλότερο γ . Η παράμετρος της απόλυτης αποστροφής κινδύνου υποτίθεται ότι είναι θετική, επειδή όλοι οι επενδυτές υποτίθεται ότι είναι αντίθετοι στον κίνδυνο. Ένα αρνητικό γ θα υπονοούσε ότι ένας επενδυτής είναι θετικός προς τον κίνδυνο.

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο για έναν επενδυτή είναι το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη χρησιμότητα.

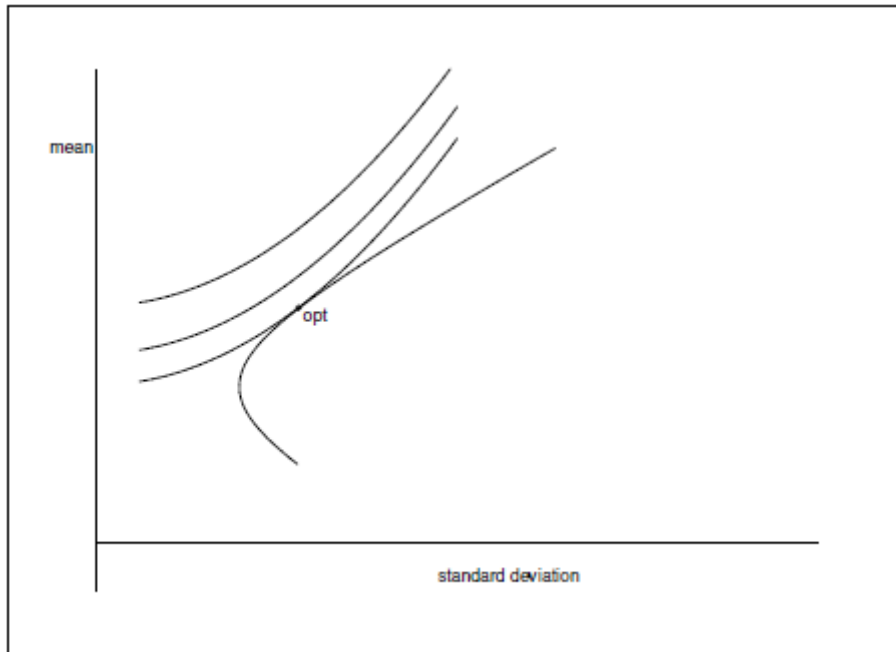
Η συνάρτηση χρησιμότητας (2.7) μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned} E(C_{end}) - \frac{1}{2}\gamma var(C_{end}) &= E(C_0 + R_p) - \frac{1}{2}\gamma var(C_0 + R_p) = C_0 + \mu_p - \frac{1}{2}\gamma var(R_p) \\ &= C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{2}\gamma \sigma_p^2 = C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{2}\gamma \theta^T \Sigma \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Γραφικά, το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη χρησιμότητα δημιουργείται με την μετακίνηση της καμπύλης χρησιμότητας όσο το δυνατόν υψηλότερα. Η καμπύλη χρησιμότητας είναι η καμπύλη που παρουσιάζει τον πιθανό συνδυασμό μέσης και σταθερής απόκλισης που οδηγούν στην ίδια χρησιμότητα. Λόγω της (2.8), έχουμε

$$\mu_p = u - C_0 + \frac{1}{2}\gamma \sigma_p^2$$

η οποία είναι μια παραβολή στο πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης. Το πλαίσιο παρουσιάζει μερικές καμπύλες χρησιμότητας μαζί με το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, και την τομή τους η οποία επιτυγχάνεται στην υψηλότερη πιθανή καμπύλη χρησιμότητας.



Σχήμα 2.4: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο

Προκειμένου να υπολογιστεί το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, πρέπει να μεγιστοποιήσουμε την υποκείμενη χρησιμότητα υπό τον περιορισμό προϋπολογισμών:

$$\text{Max} \left\{ C_0 + \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta \mid \bar{\mathbf{1}}^T \theta = C_0 \right\}$$

Πάλι χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Lagrange για αυτό το σύνολο των εξισώσεων:

$$\begin{cases} \mu - \frac{1}{2} \gamma 2 \Sigma \theta + \bar{\mathbf{1}} \lambda = 0 \\ \bar{\mathbf{1}}^T \theta = C_0 \end{cases} \quad \text{with } \lambda \text{ a constant} \quad (2.9)$$

Η επίλυση της πρώτης εξίσωσης (2.9) για το θ δίνει

$$\mu + \bar{\mathbf{1}} \lambda = \gamma \Sigma \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{\lambda \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}}}{\gamma} \quad (2.10)$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την έκφραση για το θ στη δεύτερη εξίσωση (2.9) παίρνουμε:

$$\bar{\mathbf{1}}^T \left(\frac{\Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{\lambda \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}}}{\gamma} \right) = C_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \frac{\bar{\mathbf{1}}^T \Sigma^{-1} \bar{\mathbf{1}} \lambda}{\gamma} = C_0$$

Εφαρμόζουμε τα στοιχεία b και c της μήτρας H, που καθορίστηκε στα προηγούμενα τμήματα, για να καταστήσουμε αυτήν την έκφραση ευκολότερη, έτσι

$$\frac{b}{\gamma} + \frac{c\lambda}{\gamma} = C_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\gamma C_0 - b}{c}$$

Δεδομένου ότι γνωρίζουμε το λ μπορούμε να τελειοποιήσουμε την έκφραση για το θ που παράγεται στη (2.10):

$$\theta_{opt} = \frac{\Sigma^{-1}\mu}{\gamma} + \frac{\Sigma^{-1}\bar{1}}{\gamma} \left(\frac{\gamma C_0 - b}{c} \right) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} \left(\mu + \bar{1} \left(\frac{\gamma C_0 - b}{c} \right) \right)$$

τα όποια είναι τα ποσά που ένας επενδυτής πρέπει να επενδύσει σε κάθε ενεργητικό στοιχείο εάν επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του. Μπορούμε να απλοποιήσουμε αυτήν την έκφραση με τη χρησιμοποίηση της (2.5) για το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς και της (2.6) για το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Η εκ νέου ρύθμιση αυτών των τύπων δίνει

$$\Sigma^{-1}\bar{1} = \frac{c}{C_0} \theta_{mv} \quad \text{και} \quad \Sigma^{-1}\mu = \frac{b}{C_0} \theta_{tg}$$

Χρησιμοποιούμε αυτές τις εκφράσεις στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο θ_{opt} :

$$\begin{aligned} \theta_{opt} &= \frac{b}{C_0\gamma} \theta_{tg} + \frac{c}{C_0} \left(\frac{C_0 - b/\gamma}{c} \right) \theta_{mv} \\ &= \frac{b}{C_0\gamma} \theta_{tg} + \left(1 - \frac{b}{\gamma C_0} \right) \theta_{mv} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Βλέπουμε ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο είναι ένας συνδυασμός του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς και του εφαπτομενικού χαρτοφυλακίου, όπου μια αναλογία $a = b/\gamma C_0$ επενδύεται στο εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο και μια αναλογία $a-1$ στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς.

Οι αντίστοιχες τιμές για το μ_p και το σ_p^2 είναι

$$\begin{aligned} \mu_{opt} &= \mu^T \theta = \frac{\mu^T \Sigma^{-1} \mu}{\gamma} + \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} \left(\frac{C_0 - b/\gamma}{c} \right) \\ &= \frac{a}{\gamma} + \frac{b}{c} \left(C_0 - \frac{b}{\gamma} \right) = \frac{ac - b^2}{c\gamma} + \frac{b}{c} C_0 = \frac{d}{c\gamma} + \mu_{mv} \end{aligned}$$

Και

$$\sigma_{opt}^2 = \theta^T \Sigma \theta = \frac{ac - b^2 + \gamma^2 C_0^2}{c\gamma^2} = \frac{d}{c\gamma^2} + \sigma_{mv}^2$$

Βλέπουμε ότι ο μέσος όρος και η διασπορά του βέλτιστου χαρτοφυλακίου καθορίζονται από τις τιμές για το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς συν ένα ποσό που εξαρτάται από το συντελεστή της απόλυτης αποστροφής κινδύνου γ .

Όταν ένας επενδυτής είναι απόλυτα αντίθετος στον κίνδυνο, δηλαδή δεν θέλει να διατρέξει οποιοδήποτε κίνδυνο, το γ θα τείνει στο άπειρο και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο θα είναι το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Κατά συνέπεια ένας επενδυτής με μια άπειρη παράμετρο της αποστροφής κινδύνου θα επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Εάν $\gamma = b/C_0$ βλέπει εύκολα (με την αντικατάσταση του στον τύπο βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων) ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο είναι ίδιο με το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο, ή το χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη αναλογία Sharpe. Έτσι τόσο η ελάχιστη διασπορά όσο και η εφαπτομενική αντικειμενική συνάρτηση είναι ειδικές περιπτώσεις της στρατηγικής μεγιστοποίησης χρησιμότητας του Markowitz.

2.5 Προσθήκη ενός ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου

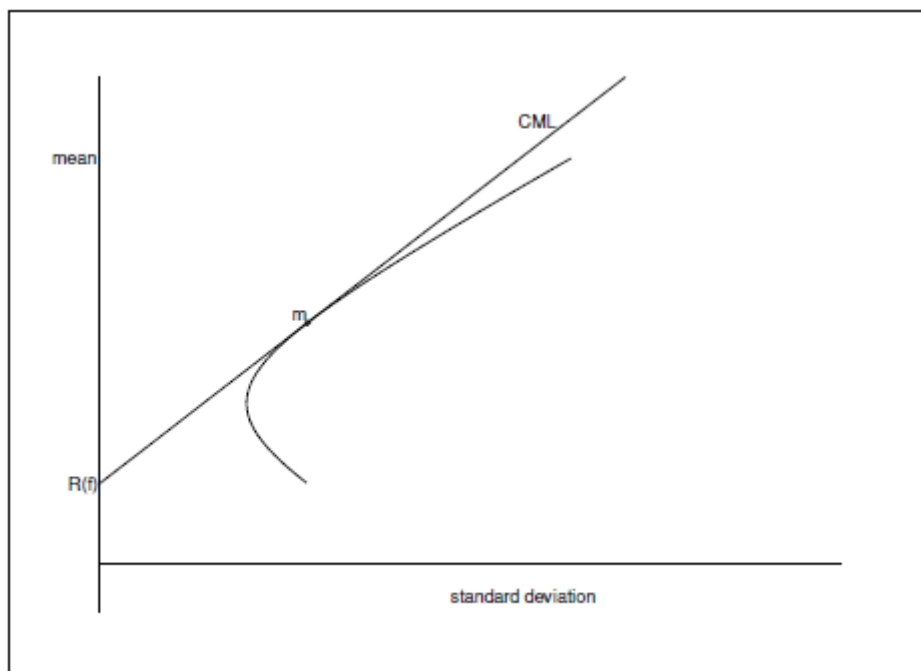
Σε αυτό το τμήμα θα υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής μπορεί επίσης να επιλέξει να επενδύσει σε ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο x_f είναι ένα ενεργητικό στοιχείο με μια (χαμηλή) απόδοση, αλλά χωρίς καθόλου ρίσκο, έτσι $\sigma_f = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η αναμενόμενη απόδοση θα είναι η πραγματοποιημένη απόδοση. Επιπλέον, το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι ασύνδετο με τα επικίνδυνα ενεργητικά στοιχεία, έτσι $\rho_{i,f} = \text{cov}(x_i, x_f) = 0$ για όλα τα επικίνδυνα ενεργητικά στοιχεία i .

Ένας επενδυτής μπορεί τόσο να δανείσει όσο και να δανιστεί στο ποσοστό ελεύθερου κινδύνου. Να δανείσει σημαίνει ότι ένα θετικό ποσό επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο ($\theta_f > 0$), ενώ να δανιστεί ότι το $\theta_f < 0$. Εάν $\theta_f = 0$, έχουμε την ίδια κατάσταση όπως χωρίς το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Παράδειγμα ενός ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου λαμβάνεται συνήθως ένα κρατικό ομόλογο. Δεν είναι απόλυτα ελεύθερο κινδύνου, αλλά πλησιάζει την επιθυμητή σταθερότητα στις αποδόσεις και την αναισθησία σε σχέση με τα επικίνδυνα ενεργητικά στοιχεία.

2.5.1 Γραμμή κεφαλαιαγορών & χαρτοφυλάκιο αγοράς

Τα αποδοτικά σύνορα αλλάζουν όταν περιλαμβάνεται ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Η θεωρία Markowitz (δείτε παραδείγματος χάριν Elton, Gruber (1981)) μας μαθαίνει ότι τα νέα αποδοτικά σύνορα είναι μια ευθεία γραμμή, που αρχίζει στο ελεύθερο κινδύνου σημείο και την εφαπτομένη στα παλαιά αποδοτικά σύνορα. Τα νέα αποδοτικά σύνορα καλούνται γραμμή κεφαλαιαγορών (CML), και αναφερόμαστε ακόμα στα παλαιά σύνορα ως αποδοτικά σύνορα. Το σημείο τομής μεταξύ του CML και των αποδοτικών

συνόρων καλείται χαρτοφυλάκιο αγοράς. Δείτε το παρακάτω πλαίσιο για μια γραφική αντιπροσώπευση.



Σχήμα 2.5: Η γραμμή χαρτοφυλακίων αγοράς και κεφαλαιαγορών

Θα υπολογίσουμε το CML και θα δείξουμε ότι τα νέα αποδοτικά σύνορα είναι πράγματι η ευθεία γραμμή όπως προείπαμε στη θεωρία. Υποθέστε ότι ένα ποσό θ_f επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο και ότι η απόδοση στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι μ_f . Επειδή το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι ασύνδετο με τα επικίνδυνα ενεργητικά στοιχεία έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \quad \text{και} \quad \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f.$$

Οι περιορισμοί προϋπολογισμών αλλάζουν

$$\bar{\mathbf{1}}^T \theta + \theta_f = C_0$$

Τα αποδοτικά σύνορα είναι η ελαχιστοποίηση εάν η διασπορά υπόκειται σε έναν σταθερό μέσο όρο, ή η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης απόδοσης μιας δεδομένης διασποράς. Επειδή ο πρώτος καθορισμός χρησιμοποιήθηκε στο πρώτο τμήμα (για να παραγάγει τα αποδοτικά σύνορα), χρησιμοποιούμε το δεύτερο καθορισμό τώρα. Φυσικά, για τα αποτελέσματα δεν πειράζει ποιος από τους δύο ορισμούς χρησιμοποιείται. Το πρόβλημα είναι

$$\text{Max} \left\{ \begin{array}{l} \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right\}$$

Η χρησιμοποίηση Lagrange για να λύσει αυτό το σύστημα δίνει, μετά από τη παρατήρηση ότι η μεγιστοποίηση $\mu^T \theta + \mu_f \theta_f$ είναι ίδια με την ελαχιστοποίηση $-\mu^T \theta - \mu_f \theta_f$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu + \lambda_1 \bar{1} + 2\lambda_2 \Sigma \theta = 0 & (a) \\ -\mu_f + \lambda_1 = 0 & (b) \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 & (c) \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta & (d) \end{array} \right.$$

Η εξίσωση (b) δίνει $\lambda_1 = \mu_f$, το οποίο αντικαθίσταται στην (a) και έχουμε:

$$-\mu + \mu_f \bar{1} + 2\lambda_2 \Sigma \theta = 0 \iff \theta = \frac{1}{2\lambda_2} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}). \quad (2.12)$$

Χρησιμοποιώντας αυτό στη (d), μπορεί να υπολογιστεί μια έκφραση για το λ_2 . Παίρνουμε

$$\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta = \frac{1}{4\lambda_2^2} (\mu - \mu_f \bar{1})^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) = \frac{1}{4\lambda_2^2} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a).$$

Έτσι

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}{4\sigma_p^2}} = \frac{1}{2\sigma_p} \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$$

Δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τη (c) μέχρι τώρα. Αυτό μας δίνει μια έκφραση για το θ_f :

$$\theta_f = C_0 - \bar{1}^T \theta = C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} \bar{1}^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) = C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f).$$

Αλλά αφ' ετέρου έχουμε για την αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίων μ_p την ακόλουθη έκφραση:

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \mu^T \theta + \mu_f \theta_f = \frac{1}{2\lambda_2} \mu^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) + \mu_f C_0 - \frac{1}{2\lambda_2} (b - c\mu_f) \mu_f \\
&= \frac{1}{2\lambda_2} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) + \mu_f C_0 = \frac{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}{\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}} \sigma_p + \mu_f C_0 \\
&= \left(\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a} \right) \sigma_p + \mu_f C_0 \equiv s\sigma_p + \mu_f C_0. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Αυτά είναι τα αποδοτικά σύνορα όταν προστίθεται το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, ή το CML. Είναι μια ευθεία γραμμή στο πλαίσιο μέσου-

σταθερής απόκλισης με κλίση $\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a} \equiv s$ και κόβει το μέσο-άξονα στο ύψος $\mu_f C_0$. Αυτή είναι η απόδοση όταν ολόκληρο το κεφάλαιο επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο.

Η βέλτιστη κατανομή στο CML δίνεται από

$$\theta_{CML} = \frac{\mu_p - \mu_f C_0}{s^2} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}).$$

Αυτό το αποτέλεσμα επιτυγχάνεται από τη χρησιμοποίηση της (2.12), την έκφραση για το λ_2 και τις εκφράσεις για τα σ_p και μ_p . Το αντίστοιχο ποσό που επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι το μη χρησιμοποιημένο ποσό, το οποίο είναι

$$\theta_{f,CML} = C_0 - \bar{1}^T \theta_{CML} = C_0 - \frac{\mu_p - \mu_f C_0}{s^2} (b - c\mu_f).$$

Το χαρτοφυλάκιο αγοράς πρέπει να είναι το χαρτοφυλάκιο που είναι το σημείο τομής μεταξύ των αποδοτικών συνόρων και του CML. Αυτό είναι το χαρτοφυλάκιο στο CML όπου τίποτα δεν επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Εάν ο επενδυτής πηγαίνει στη αριστερή πλευρά του χαρτοφυλακίου αγοράς, επενδύει μια αναλογία στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Εάν επιλέγει τη δεξιά πλευρά του χαρτοφυλακίου αγοράς, δανείζεται στο ποσοστό ελεύθερου κινδύνου.

Το χαρτοφυλάκιο αγοράς υπολογίζεται με την εξίσωση των αποδοτικών συνόρων στο CML. Πρώτα ξαναγράφουμε το CML (2.13)

$$\sigma_p = \frac{\mu_p - \mu_f C_0}{s}.$$

Κατόπιν η εξίσωση των αποδοτικών συνόρων και του CML δίνει

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2b\mu_p C_0 + aC_0^2)} = \frac{\mu_p - \mu_f C_0}{s}.$$

Αυτή η εξίσωση οδηγεί σε μια λύση, έτσι το χαρτοφυλάκιο αγοράς είναι πράγματι το σημείο τομής μεταξύ των αποδοτικών συνόρων και του CML. Η λύση είναι

$$\mu_m = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0, \quad \sigma_m = \frac{s}{b - c\mu_f} C_0$$

Με $s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$. δεδομένου ότι ξέρουμε τις τιμές για το μέσο όρο και τη διασπορά του χαρτοφυλακίου αγοράς, μπορούμε να υπολογίσουμε, χρησιμοποιώντας τη (2.3), την αξία του θ στο χαρτοφυλάκιο αγοράς:

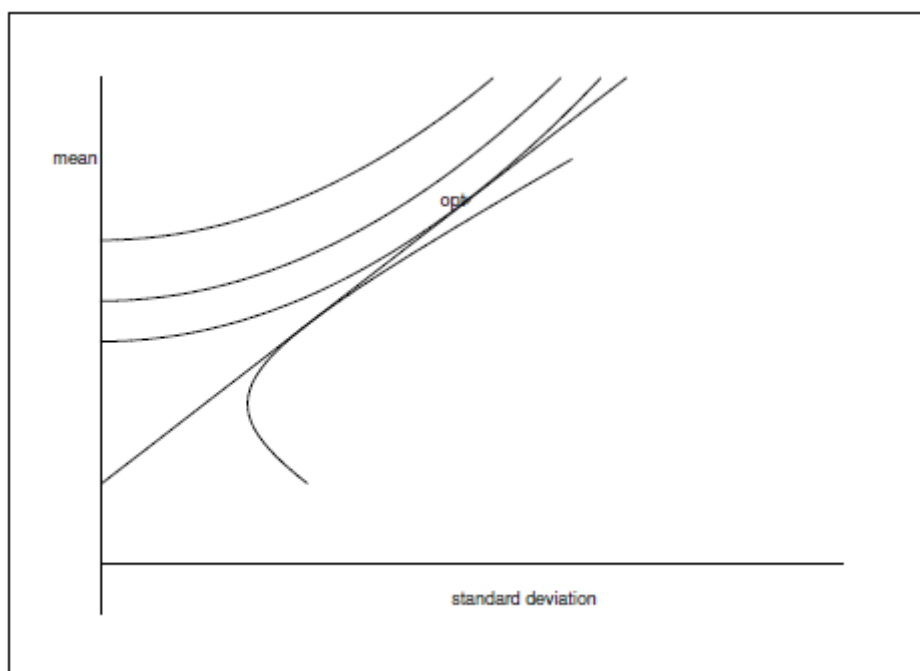
$$\begin{aligned} \theta_m &= \frac{c \left(\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0 \right) - bC_0}{d} \Sigma^{-1} \mu + \frac{aC_0 - b \left(\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0 \right)}{d} \Sigma^{-1} \bar{1} \\ &= \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) \frac{C_0}{b - c\mu_f} \end{aligned}$$

Ένας μικρός υπολογισμός δείχνει ότι ένας επενδυτής με την παράμετρο της απόλυτης αποστροφής κινδύνου $\gamma = \frac{b - c\mu_f}{C_n}$, ο οποίος επιθυμεί να επενδύσει στο βέλτιστο, μεγιστοποιώντας τη χρησιμότητα του, χαρτοφυλάκιο όπως καθορίζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο αγοράς.

Δεδομένου ότι ξέρουμε την κατανομή στο χαρτοφυλάκιο αγοράς θ_m , βλέπουμε ένα ενδιαφέρον γεγονός. Συγκρίνοντας το θ_m με το θ_{CML} βλέπουμε ότι οι κατανομές προτερημάτων διαφέρουν μόνο κατά ένα παράγοντα εξαρτώμενο από το μ_p . Αυτό σημαίνει ότι κάθε χαρτοφυλάκιο στο CML είναι γραμμικός συνδυασμός του χαρτοφυλακίου αγοράς και του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου. Χρησιμοποιούμε αυτή τη σημαντική ιδιότητα στο επόμενο τμήμα.

2.5.2 Βέλτιστο χαρτοφυλάκιο

Η εύρεση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου (ότι είναι το χαρτοφυλάκιο με την υψηλότερη χρησιμότητα) για έναν επενδυτή σημαίνει τον καλύτερο συνδυασμό του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου και του χαρτοφυλακίου αγοράς.



Σχήμα 2.6: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο

Αυτό συμβαίνει επειδή έχουμε δει ότι κάθε χαρτοφυλάκιο στο CML (που είναι τα αποδοτικά σύνορα) είναι ένας συνδυασμός του χαρτοφυλακίου αγοράς και του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου. Το επόμενο πλαίσιο επιδεικνύει πώς βρίσκεται η μέγιστη καμπύλη χρησιμότητας. Υποθέστε ότι μια αναλογία Θ_f θα επενδυθεί στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου και μια αναλογία από Θ_m στο χαρτοφυλάκιο αγοράς. Αυτές είναι αναλογίες $\Theta_f + \Theta_m = 1$. Η απόδοση χαρτοφυλακίων γίνεται

$$R_p = \Theta_f R_f + \Theta_m R_m$$

με

$$\begin{aligned} \text{var}(R_p) &= \Theta_f^2 \text{var}(R_f) + \Theta_m^2 \text{var}(R_m) + 2\Theta_f \Theta_m \text{cov}(R_f, R_m) \\ &= \Theta_m^2 \text{var}(R_m) \equiv \Theta_m^2 \sigma_m^2 \end{aligned}$$

επειδή η διασπορά της απόδοσης στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου είναι μηδέν, και το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου είναι ασύνδετο με κάθε επικίνδυνο χαρτοφυλάκιο. Η συνάρτηση χρησιμότητας είναι

$$E(C_0 + R_p) - \frac{1}{2} \gamma \text{var}(C_0 + R_p) = C_0 + \Theta_f R_f + \Theta_m \mu_m - \frac{1}{2} \gamma \Theta_m^2 \sigma_m^2$$

Θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνάρτηση χρησιμότητας, έτσι το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι

$$Max \{ C_0 + \Theta_f R_f + \Theta_m \mu_m - \frac{1}{2} \gamma \Theta_m^2 \sigma_m^2 \mid \Theta_f + \Theta_m = 1 \}$$

Λύνουμε αυτό το πρόβλημα με τη μέθοδο Lagrange, η οποία δίνει το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων:

$$\begin{cases} \mu_m - \gamma \Theta_m \sigma_m^2 + \lambda = 0 \\ R_f + \lambda = 0 \\ \Theta_f + \Theta_m = 1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Κατ' αρχήν, λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση (2.14) για το λ

$$\lambda = -R_f$$

Και χρησιμοποιώντας την στην πρώτη εξίσωση (2.14), και λύνοντας ως προς Θ_m , έχουμε:

$$\Theta_m = \frac{\mu_m - R_f}{\gamma \sigma_m^2}$$

Με την τρίτη εξίσωση (2.14) μπορούμε να λύσουμε ως προς Θ_f :

$$\Theta_f = 1 - \frac{\mu_m - R_f}{\gamma \sigma_m^2}$$

Εάν χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα για το χαρτοφυλάκιο αγοράς (σ_m και μ_m), τα μέρη γίνονται:

$$\Theta_m = \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0} \quad \text{και} \quad \Theta_f = 1 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0}$$

Αυτά τα αποτελέσματα είναι οι αναλογίες που ένας επενδυτής πρέπει να επενδύσει στο χαρτοφυλάκιο αγοράς και το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο για να πάρει τη μέγιστη χρησιμότητα. Τα συνολικά ποσά που επενδύονται στα επικίνδυνα ενεργητικά στοιχεία είναι

$$\Theta_m \theta_m = \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0} \frac{C_0}{b - c\mu_f} (\Sigma^{-1} \mu - \mu_f \Sigma^{-1} \bar{1}) = \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1})$$

και το συνολικό ποσό που επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι

$$\Theta_f C_0 = \left(1 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma C_0} \right) C_0 = C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma}$$

Έτσι το διάνυσμα των ποσών που ο επενδυτής πρέπει να επενδύσει σε κάθε ιδιαίτερο ενεργητικό στοιχείο είναι

$$\theta_{opt} \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1} (\mu - \mu_f \bar{1}) \\ C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma} \end{pmatrix}$$

Το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο που απαντά στη μέση και στη σταθερή απόκλιση μπορεί να υπολογιστεί με $\mu_{opt} = \mu^T \theta_{opt}$ και $\sigma_{opt}^2 = \theta_{opt}^T \Sigma \theta_{opt}$ έτσι

$$\begin{aligned} \mu_{opt} &= \mu^T \frac{1}{\gamma} (\Sigma^{-1} \mu - \mu_f \Sigma^{-1} \bar{1}) + \mu_f \left(C_0 - \frac{b - c\mu_f}{\gamma} \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} (c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a) + \mu_f C_0 \equiv \frac{1}{\gamma} s^2 + \mu_f C_0 \end{aligned}$$

Και

$$\begin{aligned} \sigma_{opt} &= \sqrt{\left(\frac{1}{\gamma} (\Sigma^{-1} \mu - \mu_f \Sigma^{-1} \bar{1}) \right)^T \Sigma \left(\frac{1}{\gamma} (\Sigma^{-1} \mu - \mu_f \Sigma^{-1} \bar{1}) \right) + 0} \\ &= \frac{1}{\gamma} \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a} \equiv \frac{1}{\gamma} s \end{aligned}$$

2.6 Ανάλυση ευαισθησίας

Σε αυτό το τμήμα περιγράφουμε τι συμβαίνει με τα χαρτοφυλάκια Markowitz όταν υπάρχει αλλαγή των σχετικών παραμέτρων. Οι σχετικές παράμετροι σε αυτό το τμήμα είναι το επενδεδυμένο κεφάλαιο C_0 και η παράμετρος της αποστροφής κινδύνου γ . Όταν προστίθεται ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο εξετάζουμε επίσης το ποσοστό ελεύθερου κινδύνου μ_f . Θα δούμε πώς η βέλτιστη λύση αλλάζει όταν αυτές οι παράμετροι γίνονται διαφορετικές. Αυτό μπορεί να γίνει διαφοροποιώντας τον τύπο κατανομής όσον αφορά την παράμετρο.

Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς: Εάν το C_0 αυξηθεί κατά ένα, η επένδυση σε κάθε ενεργητικό στοιχείο του χαρτοφυλακίου ελάχιστης διασποράς εγείρεται προς το παράγωγο, έτσι με

$$\frac{\partial \theta_{mv}}{\partial C_0} = \frac{\partial \Sigma^{-1} \bar{1} \frac{C_0}{c}}{\partial C_0} = \Sigma^{-1} \bar{1} \frac{1}{c}$$

ο οποίος είναι ανεξάρτητος από την παράμετρο C_0 . Έτσι εάν C_0 πολλαπλασιάζεται με έναν παράγοντα X , η βέλτιστη λύση εγείρει επίσης προς τον παράγοντα X . Με άλλα λόγια, δεν έχει σημασία πόσα χρήματα ένας επενδυτής είναι σε θέση να επενδύσει, αφού οι αναλογίες που επενδύονται σε κάθε ενεργητικό στοιχείο μένουν πάντα ίδιες. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί από το γεγονός ότι τα επενδεδυμένα μέρη δίνονται από

$$\frac{\theta_{mv}}{C_0} = \frac{\Sigma^{-1} \bar{1} \frac{C_0}{c}}{C_0} = \Sigma^{-1} \bar{1} \frac{1}{c}$$

που είναι ανεξάρτητο από το C_0 .

Εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο: Επειδή στον τύπο κατανομής του εφαπτομενικού χαρτοφυλακίου ο παράγοντας C_0 είναι γραμμικά παρών, μπορούμε να διαπιστώσουμε και σε αυτήν την περίπτωση, ότι τα μέρη χαρτοφυλακίων είναι ανεξάρτητα από C_0 . Με άλλα λόγια, η εφαπτομενική κατανομή και το επενδεδυμένο κεφάλαιο C_0 εξαρτώνται γραμμικά η μια από το άλλο.

Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο: Αυτή η γραμμική σχέση δεν υπάρχει όταν εξετάζεται το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Έχουμε δει στη (2.11) ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο (χωρίς το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο) δίνεται από

$$\theta_{opt} = \frac{b}{C_0 \gamma} \theta_{tg} + \left(1 - \frac{b}{\gamma C_0} \right) \theta_{mv}$$

σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς και το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Παρατηρούμε ότι εάν το C_0 κινείται προς το άπειρο, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο κινείται προς το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Έτσι εάν ένας επενδυτής έχει πάρα πολλά χρήματα να επενδύσει, γίνεται περισσότερο αντίθετος στον κίνδυνο και επενδύει ένα μεγαλύτερο ποσό στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Η αναλογία που επενδύει στα εφαπτομενικά χαρτοφυλάκια μειώνεται, αλλά παραμένει ίδια υπό μια απόλυτη έννοια. Εάν $C_0 = b/\gamma$, η κατάσταση αλλάζει εντελώς και όλα είναι επενδύονται στο εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Ένα παράξενο πράγμα συμβαίνει εάν ένας επενδυτής έχει πολύ λίγα χρήματα, έτσι C_0 τείνει στο μηδέν. Για να επιτύχει τη μέγιστη χρησιμότητα, το ποσό που επενδύεται στο εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο πηγαίνει υψηλά μέχρι το άπειρο (με προϋπόθεση $b > 0$), και το ποσό που επενδύεται στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς πηγαίνει στο

μείον άπειρο. Αυτό δεν είναι ένα ρεαλιστικό χαρτοφυλάκιο, έτσι αυτό το βέλτιστο κατά Markowitz χαρτοφυλάκιο δεν φαίνεται υλοποιήσιμο για τις μικρές τιμές C_0 .

Η ίδια ανάλυση ισχύει για την παράμετρο της αποστροφής κινδύνου γ . Για έναν πολύ αντίθετο στον κίνδυνο επενδυτή, ώστε να έχει υψηλό γ , η βέλτιστη πολιτική είναι η επένδυση στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς. Εάν $\gamma = b/C_0$, επενδύει τα χρήματά του στο εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Και εάν ο επενδυτής είναι πολύ ριψοκίνδυνος, που σημαίνει ότι το γ είναι κοντά στο μηδέν, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο γίνεται πολύ μεγάλο στο εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο, και πολύ μικρό στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης διασποράς.

Το χαρτοφυλάκιο αγοράς: Η κατανομή στο χαρτοφυλάκιο αγοράς είναι πάλι ανάλογη προς το C_0 , έτσι τα μέρη που επενδύονται σε κάθε ενεργητικό στοιχείο είναι τα ίδια για όλες τις τιμές του C_0 .

Εξετάζοντας το ποσοστό ελεύθερου κινδύνου, βλέπουμε ότι εάν $\mu_f = 0$, το χαρτοφυλάκιο αγοράς είναι ίδιο με το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Εάν το μ_f αυξηθεί κατά b/c , έτσι ώστε ο παρονομαστής να πηγαίνει στο μηδέν, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο απομακρύνεται από το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο κατά μήκος των αποδοτικών συνόρων, και η κατανομή γίνεται

$$\lim_{\mu_f \rightarrow b/c} \frac{C_0}{b - c\mu_f} \Sigma^{-1}(\mu - \mu_f \bar{1}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b}{x} (\theta_{tg} - \theta_{mv})$$

έτσι η κατανομή γίνεται ανάλογη προς $\theta_{tg} - \theta_{mv}$.

Βέλτιστο χαρτοφυλάκιο με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο: Με την εξέταση του τύπου της βέλτιστης κατανομής με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, είναι σαφές ότι η κατανομή του επικίνδυνου μέρους δεν εξαρτάται από το C_0 . Έτσι εάν το C_0 αυξάνει, το ποσό που επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου μέρος αυξάνει, ενώ το (απόλυτο) ποσό που επενδύεται στα επικίνδυνα ενεργητικά στοιχεία μένει ίδιο (ακόμη και σχετικά μειώνεται).

Ένας επενδυτής με μια υψηλή αξία γ (ο οποίος είναι πολύ αντίθετος στον κίνδυνο), επενδύει πολύ στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, ενώ όταν

$\gamma = \frac{b - c\mu_f}{C_0}$, δεν επενδύει τίποτα στο ελεύθερο κινδύνου μέρος και όλα έχουν επενδυθεί στο επικίνδυνο μέρος. Έτσι όταν η παράμετρος της αποστροφής κινδύνου έχει αυτήν την αξία, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο είναι ίδιο με το χαρτοφυλάκιο αγοράς. Εάν το γ τείνει στο μηδέν, ο επενδυτής δανείζεται πολύ στο ποσοστό ελεύθερου κινδύνου (γίνεται πολύ αρνητικό) και επενδύει τα δανεισμένα χρήματα στο επικίνδυνο μέρος.

Κεφάλαιο 3

Μία άλλη προσέγγιση για τον κίνδυνο: πρώτα η Ασφάλεια

Μέχρι τώρα, έχουμε συζητήσει τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων σε ένα πλαίσιο με άξονες τη μέση και τη σταθερή απόκλιση. Είπαμε ότι ο κίνδυνος μπορεί να μετρηθεί από τη σταθερή απόκλιση. Υπάρχει κάποια κριτική ενάντια σε αυτήν την προσέγγιση. Το κύριο επιχείρημα ενάντια σε αυτό είναι ότι η σταθερή απόκλιση είναι μια μέτρηση για την αστάθεια. Ένα χαρτοφυλάκιο με μια υψηλή σταθερή απόκλιση έχει υψηλή αστάθεια, αλλά αυτό σημαίνει ότι ο κίνδυνος μπορεί να αυξηθεί – να πάει προς τα πάνω ή να μειωθεί – να πάει προς τα κάτω. Μερικοί οι άνθρωποι ενδιαφέρονται μόνο για την πιθανότητα ενός καταφωρικού κινδύνου, έτσι πρέπει να δημιουργηθεί ένα άλλο μοντέλο. Ένα από αυτά τα μοντέλα, τα οποία ενδιαφέρονται για τη μείωση του κινδύνου, είναι η αρχή «πρώτα η ασφάλεια» (safety first).

Αυτό το κεφάλαιο δίνει αρχικά μια επισκόπηση μερικών μοντέλων πρώτης ασφάλειας. Το δεύτερο το τμήμα λύνει ένα ιδιαίτερο κριτήριο πρώτης ασφάλειας, το μοντέλο Telser. Το τρίτο το τμήμα προσθέτει ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Το τελευταίο τμήμα περιέχει τις αναφορές.

3.1 Μοντέλα «πρώτης ασφάλειας»

Υπάρχουν τρία βασικά μοντέλα πρώτης ασφάλειας. Αυτά τα μοντέλα γίνονται στη δεκαετία του '50 και στη δεκαετία του '60 και αναπτύσσονται από τους Roy, Kataoka και Telser. Όλοι χειρίζονται ένα κεφάλαιο με όριο C_L . Αυτό είναι το χαμηλότερο ποσό που δεσμεύεται για το ποσό κεφαλαίου στο τέλος της περιόδου C_{end} .

Roy Ο Roy προκαθορίζει το κεφάλαιο ορίου (limit capital). Θέλει να ελαχιστοποιήσει την πιθανότητα ότι το κεφάλαιο στο τέλος της περιόδου παίρνει τιμές χαμηλότερες από το κεφάλαιο ορίου. Έτσι

$$\text{Min} \{P(C_{end} \leq C_L)\}$$

Kataoka Ο Kataoka υιοθετεί μια άλλη μέθοδο. Επιλέγει μια αξία a , αποκαλούμενη πιθανότητα ελλείμματος. Θέλει να μεγιστοποιήσει το χαμηλότερο κεφάλαιο ορίου C_L έτσι ώστε η πιθανότητα το κεφάλαιο στο τέλος της περιόδου να παίρνει χαμηλότερη τιμή από το κεφάλαιο ορίου να είναι a ή μικρότερη:

$$\text{Max} \{ C_L \mid P(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha \}$$

Telser Η τρίτη προσέγγιση πρώτης ασφάλειας είναι από τον Telser. Προκαθορίζει την πιθανότητα ελλείμματος a , αλλά επιλέγει επίσης το κεφάλαιο ορίου C_L . Ο Telser θέλει να μεγιστοποιήσει το αναμενόμενο

κεφάλαιο στο τέλος της περιόδου δεδομένης αυτής της πιθανότητας ελλείμματος κεφαλαίου και κεφαλαίου ορίου:

$$\text{Max} \{ E(C_{end}) \mid P(C_{end} \leq C_L) \leq \alpha \}$$

Στα περαιτέρω τμήματα θα συνεχιστούμε με την προσέγγιση Telser, επειδή αυτή η προσέγγιση είναι η πιο σχετική για Rabobank. Το Rabobank έχει μια σταθερή εκτίμηση, η οποία σημαίνει ότι υπάρχει μια σταθερή πιθανότητα ελλείμματος a . Προς το παρόν, η εκτίμηση για Rabobank είναι AAA, που σημαίνει ότι η πιθανότητα να πάρει την προεπιλογή είναι λιγότερο από 0.01% σε μια ετήσια βάση. Το κεφάλαιο ορίου C_L τότε είναι το ποσό από το κεφάλαιο ένας επενδυτής έχει όταν παίρνει την προεπιλογή, έτσι $C_L = 0$. Βλέπουμε ότι στο Rabobank τόσο το a όσο και το C_L είναι καθορισμένα, έτσι είναι πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο Telsers. Επιπλέον, το κριτήριο Telser είναι διαισθητικά ο λογικότερος τρόπος για να διαλέξει κάποιος το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Αυτό επειδή η πρόθεση των περισσότερων επενδυτών είναι απλά να μεγιστοποιήσουν τις αποδοχές τους, και το κριτήριο Telser έχει αυτό σαν βασική αρχή.

3.2 Κριτήριο Telsers

Αυτό το τμήμα διατυπώνει και λύνει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο όταν χρησιμοποιείται το κριτήριο Telser. Παρουσιάζονται τόσο η διαισθητική όσο και η αναλυτική λύση.

3.2.1 Μοντελοποίηση

Όταν υιοθετούμε τη μέθοδο Telsers, μεγιστοποιούμε την αναμενόμενη απόδοση που υπόκειται σε περιορισμός ότι η πιθανότητα ελλείμματος είναι a ή μικρότερη. Η πιθανότητα ελλείμματος είναι η πιθανότητα ο επενδυτής να χάσει όλα τα επενδεδυμένα χρήματά του, δηλαδή όταν $C_{end} < 0$. Στον τύπο, αυτό γίνεται

$$\text{Max} \{ E(C_0 + R_p) \mid P(C_0 + R_p \leq 0) \leq \alpha \}.$$

Εάν χρησιμοποιούμε τον τύπο $E(C_0 + R_p) = E(C_0) + E(R_p) = C_0 + \mu_p$ και εάν προσθέσουμε τους απαραίτητους περιορισμούς για το άθροισμα των θ_i , $i = 1, 2, 3, \dots, N$ πρέπει να είναι ίσο με το κεφάλαιο έναρξης, και ότι $\mu_p = \mu^T \theta$, το σύνολο εξισώσεων γίνεται

$$\text{Max} \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \end{array} \right. \right\}. \quad (3.1)$$

Αμέσως κάνουμε μια σημαντική υπόθεση. Για να μιλήσουμε για περιορισμός ελλείμματος, υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις διανέμονται κανονικά. Αυτό σημαίνει ότι υποθέτουμε

$$P(R_p \leq X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^k e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \equiv \Phi(k) \quad \text{με} \quad k = \frac{X - \mu_p}{\sigma_p}$$

Με αυτήν την υπόθεση μπορούμε να απλοποιήσουμε τον περιορισμό $P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha$. Αυτό γίνεται

$$\Phi\left(\frac{-C_0 - \mu_p}{\sigma_p}\right) \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{-C_0 - \mu_p}{\sigma_p} \leq k_\alpha$$

$$\mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p.$$

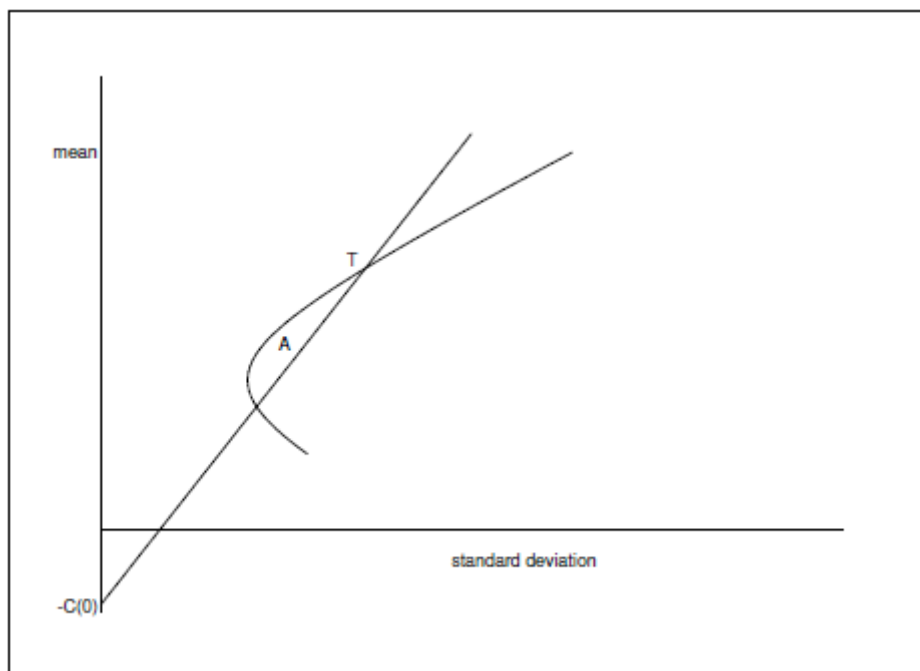
Το οποίο είναι το ανώτερο - ήμισυ της γραμμής που διέρχεται από το $(0, -C_0)$ με κλίση $-k_\alpha$. Αυτή είναι η γραμμή ελλείμματος. Σε αυτόν τον τύπο το k_α είναι η διακύμανση των προτύπων κανονικών κατανομών με πιθανότητα α . Παραδείγματος χάριν, όταν, $\alpha = 0.01$ η αντίστοιχη διακύμανση είναι $k_\alpha = -2.33$. Σημειώστε ότι το k_α είναι αρνητικό για κάθε $\alpha < 0.5$, έτσι ώστε η κλίση της γραμμής ελλείμματος να είναι θετική.

Κατά την αλλαγή του περιορισμού ελλείμματος σε έναν περιορισμό α με παραμέτρους μ_p και σ_p για το μέσο χαρτοφυλάκιο και τη σταθερή απόκλιση χαρτοφυλακίων αντίστοιχα, πρέπει να προσθέσουμε τον περιορισμό για τη σταθερή απόκλιση (διασπορά) $\sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta$ έτσι το σύστημα (3.1) γίνεται

$$\text{Max} \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \sigma_p \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\}. \quad (3.2)$$

3.2.2 Διαισθητική λύση

Ας λύσουμε αρχικά αυτό το σύστημα διαισθητικά. Οι τελευταίοι τρεις περιορισμοί δίνουν το σύνολο αποδοτικών χαρτοφυλακίων, όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί επικίνδυνων ενεργητικών στοιχείων όταν το συνολικό ποσό ξοδεύεται. Σε έναν πλαίσιο (μέσου-σταθερής απόκλισης) αυτό είναι η περιοχή του "εσωτερικού" από τα αποδοτικά σύνορα. Ο πρώτος περιορισμός (3.2) δίνει την περιοχή κάτω από τη γραμμή $\mu_p = -C_0 - k_\alpha \sigma_p$. Όλοι οι περιορισμοί δίνουν μαζί την περιοχή A στον πλαίσιο. Ο στόχος της (3.2) είναι να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση, έτσι πρέπει να βρούμε τη μέγιστη αξία μ_p στην περιοχή A. Είναι σαφές ότι αυτό συμβαίνει στο σημείο T, το οποίο είναι το σημείο τομής των αποδοτικών συνόρων και της γραμμής ελλείμματος.



Σχήμα 3.1: Η εφικτή περιοχή A και το βέλτιστο σημείο Telser

Το σημείο τομής T μπορεί εύκολα να υπολογιστεί, χρησιμοποιώντας τους τύπους για αποδοτικά σύνορα και τη γραμμή ελλείμματος:

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) \quad \text{και} \quad \sigma_p^2 = \left(\frac{-C_0 - \mu_p}{k_\alpha} \right)^2$$

Ο υπολογισμός του σημείου τομής σημαίνει εξίσωση των τύπων του μοντέλου και την επίλυση για το μ_p , το οποίο δίνει

$$\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2) = \left(\frac{-C_0 - \mu_p}{k_\alpha} \right)^2$$

Αυτή η εξίσωση έχει λύση:

$$\mu_T = \frac{bk_\alpha^2 + d + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}}{ck_\alpha^2 - d} C_0 \quad (3.3)$$

Έτσι η διασπορά μπορεί να υπολογιστεί:

$$\sigma_T = \left(\frac{-C_0 - \mu_T}{k_\alpha} \right) = \frac{(c + b)k_\alpha^2 + \sqrt{dk_\alpha^2(a + 2b + c - k_\alpha^2)}}{(d - ck_\alpha^2)k_\alpha} C_0$$

Το διανυσματικό θ_T , τα ποσά που επενδύονται σε κάθε ιδιαίτερο ενεργητικό στοιχείο στο βέλτιστο σημείο Telser, μπορεί να υπολογιστεί με τη

χρησιμοποίηση του τύπου του προηγούμενου κεφαλαίου για χαρτοφυλάκια στα αποδοτικά σύνορα

$$\theta_T = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_T)$$

Στην οποία συμπληρώνουμε την αξία του μ_T , το οποίο δίνει μια μεγάλη έκφραση που δεν είναι χρήσιμο να γραφτεί.

3.2.3 Αναλυτική λύση

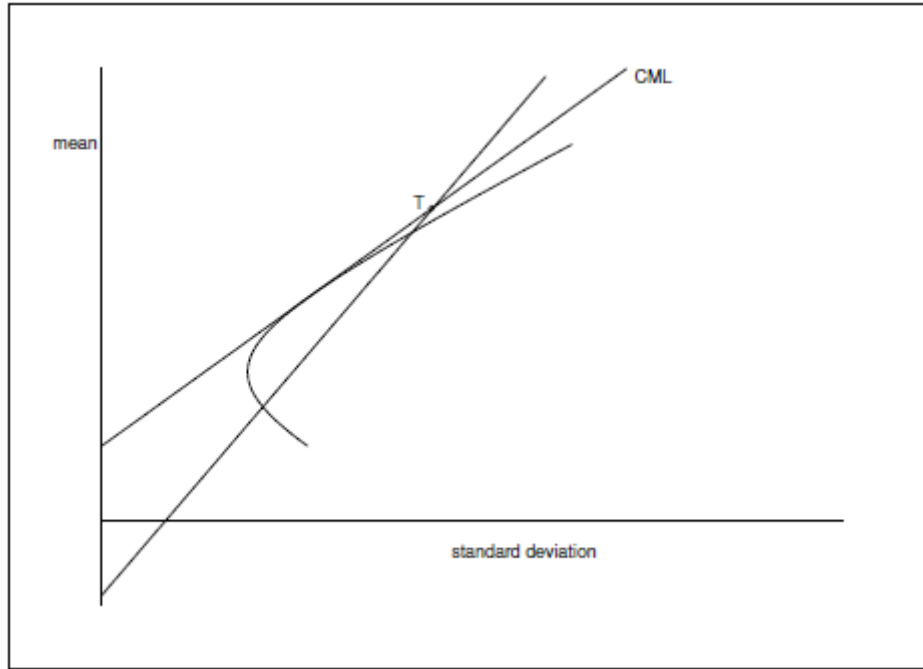
Μετά από αυτήν την διαισθητική προσέγγιση θα χρησιμοποιήσω μια πιο μαθηματική ανάλυση που ελέγχει τα ανωτέρω αποτελέσματα (3.2). Επειδή οι υπολογισμοί είναι αρκετά δύσκολοι, δεν τα παραθέτω εδώ, αλλά μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι τα αποτελέσματα αυτής της αναλυτικότερης προσέγγισης είναι ίδια στα αποτελέσματα ανωτέρω.

3.3 Με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Εάν προσθέτουμε ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, τα αποδοτικά σύνορα αλλάζουν στο CML (η γραμμή που παρουσιάζει γραμμικούς συνδυασμούς του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου και του χαρτοφυλακίου αγοράς). Πάλι, λύνουμε αρχικά αυτό το πρόβλημα διαισθητικά, και συζητάμε έπειτα την αναλυτική λύση.

3.3.1 Διαισθητική λύση

Η επίλυση του συστήματος (3.1) σημαίνει εύρεση της μέγιστης αξίας για το μ_p στην περιοχή κάτω από το CML και επάνω από τη γραμμή ελλείμματος. Αυτή η μέγιστη αξία είναι το σημείο τομής της γραμμής ελλείμματος με το CML, όπως μπορεί να δει στον επόμενο πλαίσιο 3.2.



Σχήμα 3.2: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Για να υπολογίσουμε αυτό το σημείο της τομής, εξισώνουμε τους τύπους και των δύο γραμμών, έτσι

$$\left(\sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}\right) \sigma_p + C_0\mu_f = -C_0 - k_\alpha\sigma_p$$

$$\sigma_T = \frac{-1 - \mu_f}{k_\alpha + \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}} C_0 \equiv \frac{-1 - \mu_f}{s + k_\alpha} C_0$$

όπου καθορίσαμε το $s \equiv \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$, την κλίση του CML. Η αντιστοιχία σημασία μπορεί να βρεθεί με τη χρησιμοποίηση του τύπου σε μια από τις δύο γραμμές. Εδώ χρησιμοποιείται η γραμμή ελλείμματος:

$$\mu_T = -C_0 - k_\alpha\sigma_p = -C_0 - k_\alpha \frac{-1 - \mu_f}{s + k_\alpha} C_0 = \frac{\mu_f k_\alpha - s}{s + k_\alpha} C_0$$

Τώρα θέλουμε να υπολογίσουμε τις αντίστοιχες τιμές για το θ . Επειδή δεν είμαστε στα αποδοτικά σύνορα (όπως στην κατάσταση χωρίς ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο) δεν μπορούμε χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο τύπο. Θυμηθείτε ότι κάθε χαρτοφυλάκιο στο CML είναι ένας γραμμικός συνδυασμός του χαρτοφυλακίου αγοράς και του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου. Υποθέστε ότι επενδύουμε μια αναλογία Θ_m στο χαρτοφυλάκιο αγοράς και μια αναλογία Θ_f στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Επειδή η διασπορά στην απόδοση χαρτοφυλακίων του ελεύθερου κινδύνου

ενεργητικού στοιχείου είναι μηδέν (δεν υπάρχει κανένας κίνδυνος) και η συνδιακύμανση μεταξύ του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου και του χαρτοφυλακίου αγοράς είναι μηδέν (είναι ασύνδετοι), ξέρουμε ότι

$$\mu_T = \Theta_m \mu_m + \Theta_f C_0 \mu_f \quad \text{και} \quad \sigma_T = \Theta_m \sigma_m \quad (3.4)$$

όπως έχουμε δει στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τα μ_m και τα σ_m είναι ο μέσος όρος και σταθερή απόκλιση του χαρτοφυλακίου αγοράς. Οι εκφράσεις αυτές βρίσκονται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Από (3.4) βλέπουμε ότι

$$\Theta_m = \frac{\sigma_T}{\sigma_m}$$

Δεδομένου ότι έχουμε τις εκφράσεις και για το σ_T και το σ_m , μπορούμε να υπολογίσουμε αυτό το μέρος. Το αποτέλεσμα είναι:

$$\Theta_m = \frac{(1 + \mu_f)(c\mu_f - b)}{s(s + k_\alpha)}$$

Εάν χρησιμοποιούμε την άλλη εξίσωση (3.4), μπορούμε να υπολογίσουμε την αναλογία που επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο:

$$\Theta_f = \frac{\mu_T - \Theta_m \mu_m}{C_0 \mu_f}$$

Έχουμε τις εκφράσεις για μ_T , Θ_m και μ_m , έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε αυτήν την αναλογία. Δίνουμε το αποτέλεσμα:

$$\Theta_f = \frac{a + b - (b + c)\mu_f + k_\alpha s}{s(s + k_\alpha)}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε τα αποτελέσματα με την προσθήκη των δύο αναλογιών, η οποία οδηγεί στο

$$\Theta_m + \Theta_f = \frac{(1 + \mu_f)(c\mu_f - b) + a + b - (b + c)\mu_f + k_\alpha s}{s(s + k_\alpha)} = 1$$

έτσι η συνολική αναλογία είναι μια, η οποία πρέπει να συμβεί. Κατόπιν τα συνολικά ποσά που επενδύονται σε κάθε χαρτοφυλάκιο είναι

$$\theta_T \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_m \theta_m \\ \Theta_f C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \mu_f}{s(s + k_\alpha)} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{\mathbf{I}} - \mu) C_0 \\ \frac{a + b - (b + c)\mu_f + k_\alpha s}{s(s + k_\alpha)} C_0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

3.3.2 Αναλυτική λύση

Επίσης κατά προσθήκη ενός ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια αναλυτικότερη προσέγγιση στην επίλυση του προβλήματος και να πάρουμε τα ανωτέρω παραγόμενα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 4

Ελλειπτικές κατανομές

Μέχρι τώρα, έχουμε υποθέσει ότι οι αποδόσεις των ενεργητικών στοιχείων διανέμονται κανονικά. Αυτό έκανε την ανάλυση μέσου-διασποράς απλή, επειδή η πιθανότητα ελλείμματος καθορίζεται εντελώς από την αναμενόμενη απόδοση και τη διασπορά του. Δυστυχώς, δεν είναι ρεαλιστικό να υποθέσει κανείς ότι οι αποδόσεις χαρτοφυλακίων διανέμονται κανονικά. Εμφανίζεται ότι στην πραγματικότητα η κατανομή των αποδόσεων των ενεργητικών στοιχείων έχει παχύτερες ουρές, έτσι μια ασυνήθιστη απόδοση συμβαίνει συχνότερα στην πραγματικότητα από όταν η κανονική κατανομή χρησιμοποιείται για τη διαμόρφωση. Σε αυτό το κεφάλαιο θα εισαγάγω ένα σύνολο κατανομών, τις ελλειπτικές κατανομές, που καλύπτουν τις αποδόσεις ενεργητικών στοιχείων με ρεαλιστικότερο τρόπο από την κανονική κατανομή.

Το πρώτο τμήμα διατυπώνει τις ιδιότητες μιας ελλειπτικής κατανομής. Μερικά παραδείγματα των ελλειπτικών κατανομών παρουσιάζονται στην παράγραφο 2. Η παράγραφος 3 δίνει μια απόδειξη όπου η ανάλυση μέσου-διασποράς ισχύει επίσης για όλες τις ελλειπτικές κατανομές, και αυτό χρησιμοποιείται στην παράγραφο 4 όπου τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια Telser υπολογίζονται εκ νέου για τις ελλειπτικά διανεμημένες αποδόσεις.

4.1 εισαγωγή

Θεωρήστε ένα n -διάστατο διάνυσμα $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. Εάν το X είναι ελλειπτικά διανεμημένο, έχει εξ' ορισμού την ακόλουθη λειτουργία πυκνότητας

$$f_X(x) = c_n |\Omega|^{-1/2} g_n \left[\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Omega^{-1} (x - \mu) \right] \quad (4.1)$$

για κάποιο διάνυσμα-στήλη μ , θετικά ορισμένη μήτρα Ω στηλών ($n \times n$) και για ορισμένες συναρτήσεις $g_n(\cdot)$ αποκαλούμενες γεννήτριες πυκνότητας. $|\cdot|$ σημαίνει απόλυτη τιμή. Εάν η γεννήτρια πυκνότητας δεν εξαρτάται από το n , όπως συχνά παρατηρείται, γράφουμε απλά $g(\cdot)$. Ο όρος

$$\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x) dx < \infty$$

εγγυάται ότι η $g_n(X)$ είναι μια γεννήτρια πυκνότητας (δείτε Landsman and Valdez (2002)). Με την συνθήκη ότι η συνολική πυκνότητα πρέπει να είναι ίση με ένα, μπορεί να υπολογιστεί η σταθερή c_n . Αυτό δίνει

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[\int_0^\infty x^{n/2-1} g_n(x) dx \right]^{-1} \quad (4.2)$$

Το οποίο αποδείχθηκε από τους Landsman και Valdez (2002). Η $\Gamma(\cdot)$ αντιπροσωπεύει τη συνάρτηση γάμμα.

Η χαρακτηριστική συνάρτηση του ελλειπτικά διανεμημένου X έχει τη μορφή

$$\phi_X(t) \equiv E(e^{it^T X}) = e^{it^T \mu} \psi\left(\frac{1}{2} t^T \Omega t\right) \quad (4.3)$$

για κάποιο διάνυσμα-στήλη μ , θετικά ορισμένη μήτρα Ω στηλών ($n \times n$) και κάποια συνάρτηση $\psi(t)$. Η τελευταία συνάρτηση καλείται χαρακτηριστική γεννήτρια. Εάν το n -διάστατο διάνυσμα X είναι ελλειπτικά διανεμημένο γράφουμε $X \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$. Μπορούμε επίσης να καθορίσουμε την ελλειπτική κατανομή από τη συνάρτηση πυκνότητας g_n και να γράψουμε $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$, το οποίο θα χρησιμοποιήσω σε αυτό το κεφάλαιο.

Η οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών έχει μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Για αποδείξεις των ιδιοτήτων αναφέρω το άρθρο Landsman και Valdez (2002).

Εάν

$$\int_0^\infty g_1(x) dx < \infty$$

υπάρχει ο μέσος όρος διανύσματος X . Ο μέσος όρος είναι έπειτα $E(X) = \mu$. Επιπλέον, εάν

$$|\psi'(0)| < \infty$$

η μήτρα συνδιακύμανσης υπάρχει και είναι ίση με $\text{Cov}(X) = -\psi'(0)\Omega$, έτσι εάν η χαρακτηριστική γεννήτρια μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε $\psi'(0) = -1$, η μήτρα συνδιακύμανσης είναι ίση με Ω . Επειδή, με αυτήν την σημείωση, το Ω δεν πρέπει απαραίτητως να είναι η μήτρα συνδιακύμανσης (αλλά είναι ανάλογο προς τη μήτρα συνδιακύμανσης), δεν το γράφουμε ως Σ . Αναφερόμαστε στη Ω σαν μήτρα διασποράς.

Μια άλλη ιδιότητα των ελλειπτικών κατανομών είναι ότι εάν $X \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$, έπεται ότι για μερικές $(\mu \times \nu)$ - μήτρες A και κάποιο μ -διάστατο διάνυσμα στήλη B έχουμε

$$AX + B \sim E_m(A\mu + b, A\Omega A^T, g_m) \quad (4.4)$$

Έτσι οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός ελλειπτικών κατανομών είναι μια άλλη ελλειπτική κατανομή, με την ίδια συνάρτηση γεννητριών πυκνότητας.

Αυτό σημαίνει ότι η οριακή κατανομή οποιουδήποτε συστατικού του X είναι επίσης ελλειπτικά διανεμημένη με την ίδια χαρακτηριστική γεννήτρια. Εάν το X έχει ελλειπτική κατανομή, ώστε το $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$, οι οριακές κατανομές διανέμονται σε $X_k \sim E_n(\mu_k, \omega_k^2, g_1)$, για $k = 1, 2, \dots, n$, όπου ω_k^2 είναι το k ' στοιχείο της διαγωνίου του Ω . Αυτό σημαίνει ότι οι οριακές πυκνότητες μπορούν να γραφούν

$$f_{X_k}(x) = \frac{c_1}{\omega_k} g_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_k}{\omega_k} \right)^2 \right] \quad (4.5)$$

Εάν καθορίζουμε το ποσό $X_{sum} = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \mathbf{1}^T X$, και με τη χρησιμοποίηση της (4.4) έχουμε

$$X_{sum} \sim E_1(\mathbf{1}^T \mu, \mathbf{1}^T \Omega \mathbf{1}, g_1)$$

και με παρόμοιο τρόπο είναι σαφές ότι το σταθμισμένο ποσό $X_{weighted} = \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \dots + \theta_n X_n = \theta^T X$ διανέμεται

$$X_{weighted} \sim E_1(\theta^T \mu, \theta^T \Omega \theta, g_1)$$

4.2 Μερικά παραδείγματα των ελλειπτικών κατανομών

Ας εξετάσουμε μερικές πολύ γνωστές οικογένειες ελλειπτικών κατανομών. Τα παραδείγματα είναι παρουσιασμένα συνοπτικά, μια πιο λεπτομερής προσέγγιση μπορεί να βρεθεί στο άρθρο των Landsman και Valdez (2002). Θα συζητήσουμε την κανονική, τη σπουδαστής-τ (student-t), τη Λαπλάς (Laplace) και τη λογιστική οικογένεια - κατανομή ελλειπτικών κατανομών σε αυτό το τμήμα. Η τελευταία υποενότητα συγκρίνει τις διαφορές ελλειπτικές κατανομές τη μια με την άλλη.

4.2.1 Κανονική οικογένεια - κατανομή

Το πιο γνωστό παράδειγμα μιας ελλειπτικής κατανομής είναι η κανονική οικογένεια. Εάν πάρουμε για το ελλειπτικό διάνυσμα X τη γεννήτρια πυκνότητας

$$g(u) = e^{-u}$$

Το οποίο δεν εξαρτάται από το n , παίρνουμε την κανονική κατανομή. Για να παρουσιάσει αυτό, εμείς υπολογίζουμε το c_n από τον τύπο (4.2). Παίρνουμε

$c_n=(2\pi)^{-n/2}$. Εάν χρησιμοποιούμε την (4.5) και η αξία c_1 , έπεται ότι η οριακή συνάρτηση πυκνότητας X_k δίνεται από

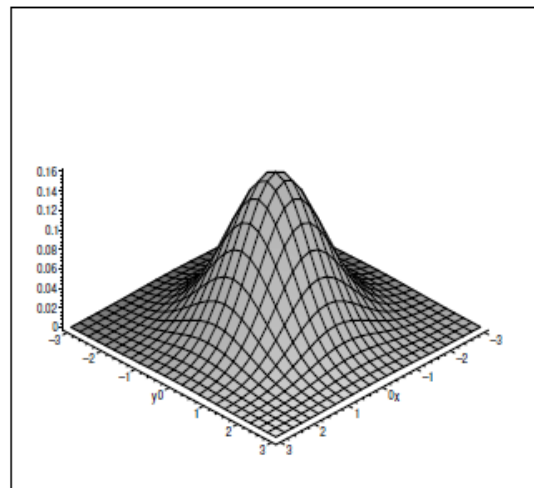
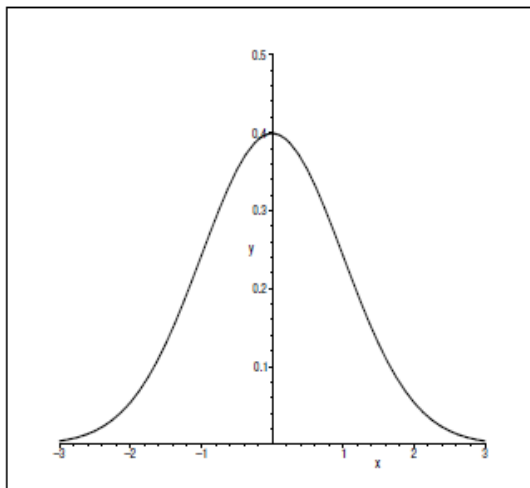
$$f_{X_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_k}{\omega_k}\right)^2}$$

Η οποία είναι η κανονική κατανομή. Έτσι $X_k \sim N(\mu_k, \omega_k^2)$. Η πολλών μεταβλητών πυκνότητα του διανύσματος X δίνεται από τον τύπο (4.1), ο οποίος δίνει

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |\Omega|^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Omega^{-1}(x - \mu)\right]$$

$$f_{X_k}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega_k}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_k}{\omega_k}\right)^2}$$

την πολλών μεταβλητών κανονική συνάρτηση πυκνότητας. Έτσι ένα κανονικά διανεμημένο διάνυσμα είναι μία ειδική περίπτωση ενός ελλειπτικά διανεμημένου διανύσματος. Είναι επίσης γνωστό ότι $E(X) = \mu$ και $\text{Con}(X) \equiv \Sigma = \Omega$. Έπεται ότι $\sigma_k = \omega_k$. Τα επόμενα πλαίσια είναι η οριακή τυποποιημένη κανονική συνάρτηση πυκνότητας και η διμεταβλητή τυποποιημένη κανονική περίπτωση, έτσι $\mu = 0$ και $\Omega = I$, η μήτρα ταυτότητας.



Σχήμα 4.1: Οριακή και διμεταβλητή τυποποιημένη κανονική συνάρτηση πυκνότητας

4.2.2 Οικογένεια – κατανομή student-t

Για τη γεννήτρια πυκνότητας

$$g_n(u) = \left(1 + \frac{2u}{\nu}\right)^{-(n+\nu)/2}$$

το ελλειπτικό διάνυσμα X έχει μια πολλών μεταβλητών student-t κατανομή με n βαθμούς ελευθερίας. Η χρησιμοποίηση της (4.2) μπορεί να δειχθεί ότι

$$c_n = \frac{\Gamma((n + \nu)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{n/2}}$$

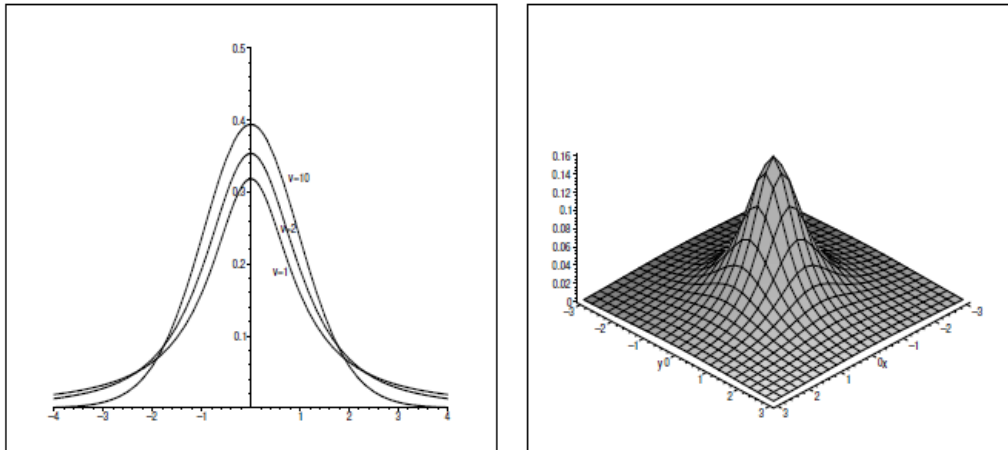
έτσι η πολλών μεταβλητών κατανομή χρησιμοποιώντας την (4.1) είναι,

$$f_X(x) = \frac{\Gamma((n + \nu)/2)}{\Gamma(\nu/2)(\pi\nu)^{n/2}|\Omega|^{1/2}} \left[1 + \frac{1}{\nu}(x - \mu)^T \Omega^{-1}(x - \mu)\right]^{-(n+\nu)/2}$$

Εάν υποθέσουμε $n = 1$, παίρνουμε την οριακή συνάρτηση πυκνότητας X_k , $k = 1, \dots, n$, το οποίο δίνει

$$f_{X_k}(x) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)\sqrt{\pi\nu}} \left[1 + \frac{1}{\nu}x^2\right]^{-(\nu+1)/2}$$

Σε αυτόν τον τύπο πήραμε $\omega_k = 1$ και $\mu_k = 0$. Βλέπουμε ότι αυτή είναι γνωστή συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής student-t με ν βαθμούς ελευθερίας. Η διασπορά ω δεν είναι ίση με τη σταθερή απόκλιση, αλλά όπως αναφέρεται πριν υπάρχει μια γραμμική σχέση. Αποδεικνύεται ότι αυτή η σχέση δίνεται από $\text{Var}(X_k) \equiv \sigma_k^2 = \omega_k^2 \nu/(\nu-2)$ για μια t -διανεμημένη μεταβλητή με ν βαθμούς ελευθερίας. Εάν πάρουμε $\nu = 1$ παίρνουμε τη κατανομή Cauchy. Για $\nu \rightarrow \infty$ παίρνουμε την (τυποποιημένη) κανονική κατανομή. Οι γραφικές παραστάσεις δίνουν κατωτέρω τις συναρτήσεις οριακής πυκνότητας για μερικές τιμές του ν και τη διμεταβλητή περίπτωση για $\nu = 1$



Σχήμα 4.2: Οριακές και διμεταβλητές συναρτήσεις πυκνότητας σπουδαστή-T

4.2.3 Οικογένεια Λαπλάς (Laplace)

Ένα άλλο παράδειγμα μιας ελλειπτικής κατανομής είναι η Λαπλάς (Laplace) ή η διπλά εκθετική κατανομή. Αυτή η κατανομή υπολογίζεται με τη λήψη

$$g(u) = e^{-\sqrt{2u}}$$

σαν γεννήτριας πυκνότητας. Πάλι μπορούμε να υπολογίσουμε το c_n με τη χρησιμοποίηση της (4.2), η οποία δίνει

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[\int_0^\infty x^{n/2-1} e^{-\sqrt{2x}} dx \right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[\int_0^\infty y^{n-2} e^{-y\sqrt{2}} 2y dy \right]^{-1}$$

Όπου χρησιμοποίησαμε την αντικατάσταση $y = \sqrt{x}$. Ο περαιτέρω υπολογισμός δίνει

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[\int_0^\infty 2y^{n-1} e^{-y\sqrt{2}} dy \right]^{-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{(2\pi)^{n/2}} \left[\frac{2\Gamma(n)}{2^{n/2}} \right]^{-1} \\ &= \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}} \end{aligned}$$

Έτσι η πολλών μεταβλητών συνάρτηση πυκνότητας είναι, με τη χρησιμοποίηση (4.1),

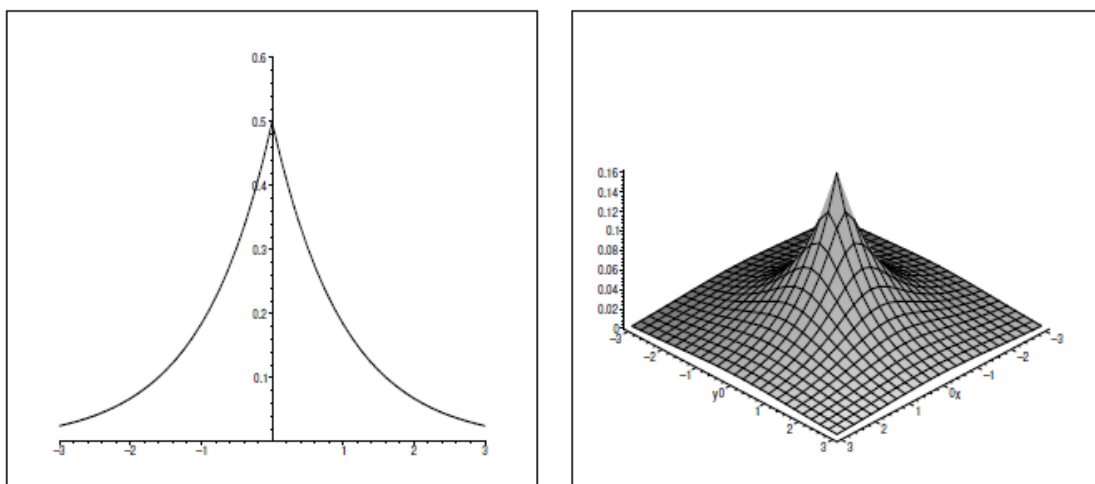
$$f_X(x) = \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}} |\Omega|^{-1/2} \exp \left[- \left((x - \mu)^T \Omega^{-1} (x - \mu) \right)^{1/2} \right]$$

Η όποια είναι η συνάρτηση πυκνότητας της πολλών μεταβλητών κατανομής Λαπλάς. Για $n = 1$ δίνει την οριακή πυκνότητα, η οποία οδηγεί στη

$$f_{X_k}(x) = \frac{\Gamma(1/2)}{2\Gamma(1)\pi^{1/2}\omega_k} \exp \left[-\sqrt{\left(\frac{x - \mu_k}{\omega_k}\right)^2} \right] = \frac{1}{2\omega_k} e^{-|x - \mu_k|/\omega_k}$$

Αυτή είναι η ευρέως γνωστή συνάρτηση πυκνότητας για τη κατανομή Λαπλάς με τις παραμέτρους ω_k και μ_k . Το μέσο $E(X)$ είναι ίσο με μ_k , αλλά παρατηρείται ότι η παράμετρος ω_k δεν πρέπει να είναι η σταθερή απόκλιση, αλλά, όπως δηλώνεται πριν, είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της σταθερής απόκλισης. Στην πραγματικότητα, η διασπορά (το τετράγωνο τις σταθερής απόκλισης) εμφανίζεται να είναι $\text{Var}(X_k) \equiv \sigma_k^2 = 2\omega_k^2$.

Κατωτέρω παρουσιάζεται η οριακή συνάρτηση πυκνότητας (με $\omega_k = 1$ και $\mu_k = 0$) και η διμεταβλητή πυκνότητα Λαπλάς με $\mu = 0$ και Ω η (2×2) -μήτρα.



Σχήμα 4.3: Οριακές και διμεταβλητές συναρτήσεις πυκνότητας Λαπλάς

4.2.4 Λογιστική οικογένεια

Το τελευταίο παράδειγμα ενός μέλους της οικογένειας των ελλειπτικών κατανομών είναι η κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας

$$g(u) = \frac{e^{-\sqrt{2u}}}{(1 + e^{-\sqrt{2u}})^2}$$

Σημειώστε ότι αυτό είναι μια άλλη συνάρτηση πυκνότητας που προτάθηκε από τους Landsman και Valdez, η οποία δεν κάνει χρήση της τετραγωνικής ρίζας. Με τη χρησιμοποίηση της (4.2) μπορούμε να υπολογίσουμε το c_n , η οποία δίνει μετά από πολλούς υπολογισμούς την ακόλουθη έκφραση

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{2\Gamma(n)\pi^{n/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} j^{1-n} \right]^{-1}$$

Η πολλών μεταβλητών συνάρτηση πυκνότητας μπορεί να βρεθεί με τη χρησιμοποίηση της (4.1), η οποία δίνει την πολλών μεταβλητών λογιστική πυκνότητα. Η λήψη $n = 1$ δίνει την οριακή λογιστική πυκνότητα. Χρησιμοποιώντας

$$c_1 = \frac{\Gamma(1/2)}{2\Gamma(1)\pi^{1/2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \right]^{-1} = 1,$$

αυτό δίνει

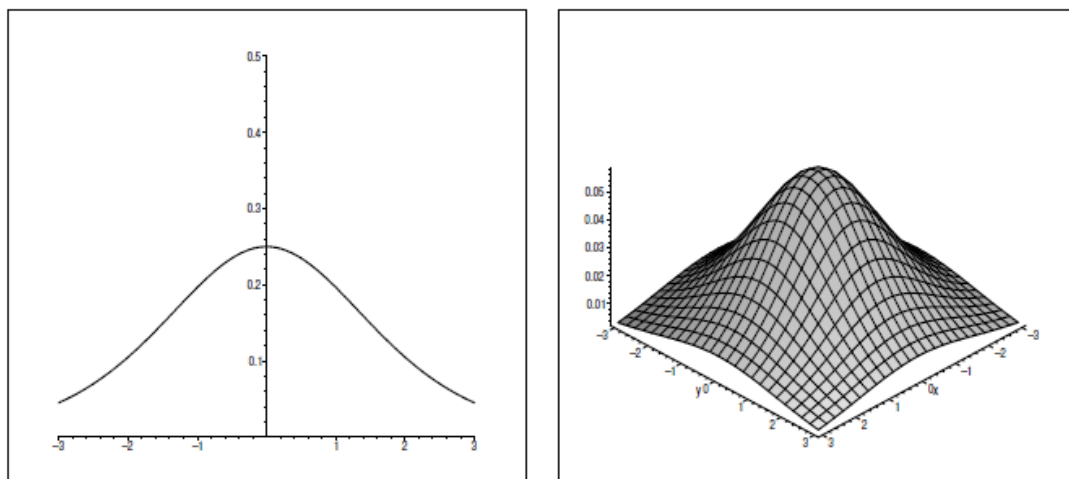
$$f_{X_k}(x) = \frac{1}{\omega_k} \frac{\exp\left(-\left|\frac{x-\mu_k}{\omega_k}\right|\right)}{\left(1 + \exp\left(-\left|\frac{x-\mu_k}{\omega_k}\right|\right)\right)^2} = \frac{1}{\omega_k} \frac{\exp\left(-\frac{x-\mu_k}{\omega_k}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{x-\mu_k}{\omega_k}\right)\right)^2}$$

όπου έχουμε βγάλει την απόλυτη τιμή επειδή η συνάρτηση είναι συμμετρική, το οποίο μπορεί να δειχθεί ως εξής:

$$\frac{e^{-y}}{(1 + e^{-y})^2} = \frac{e^y}{(e^y)^2(1 + e^{-y})^2} = \frac{e^y}{(e^y + 1)^2}$$

Η οριακή κατανομή είναι πράγματι η λογιστική πυκνότητα. Ο μέσος όρος αυτού η οριακή πυκνότητα είναι $E(X_k) = \mu_k$, η σταθερή απόκλιση είναι πάλι ένας γραμμικός συνδυασμός του ω_k . Αποδεικνύεται ότι η διαφορά $\text{Var}(X_k) \equiv \sigma_k^2 = 1/3\pi^2\omega_k^2$.

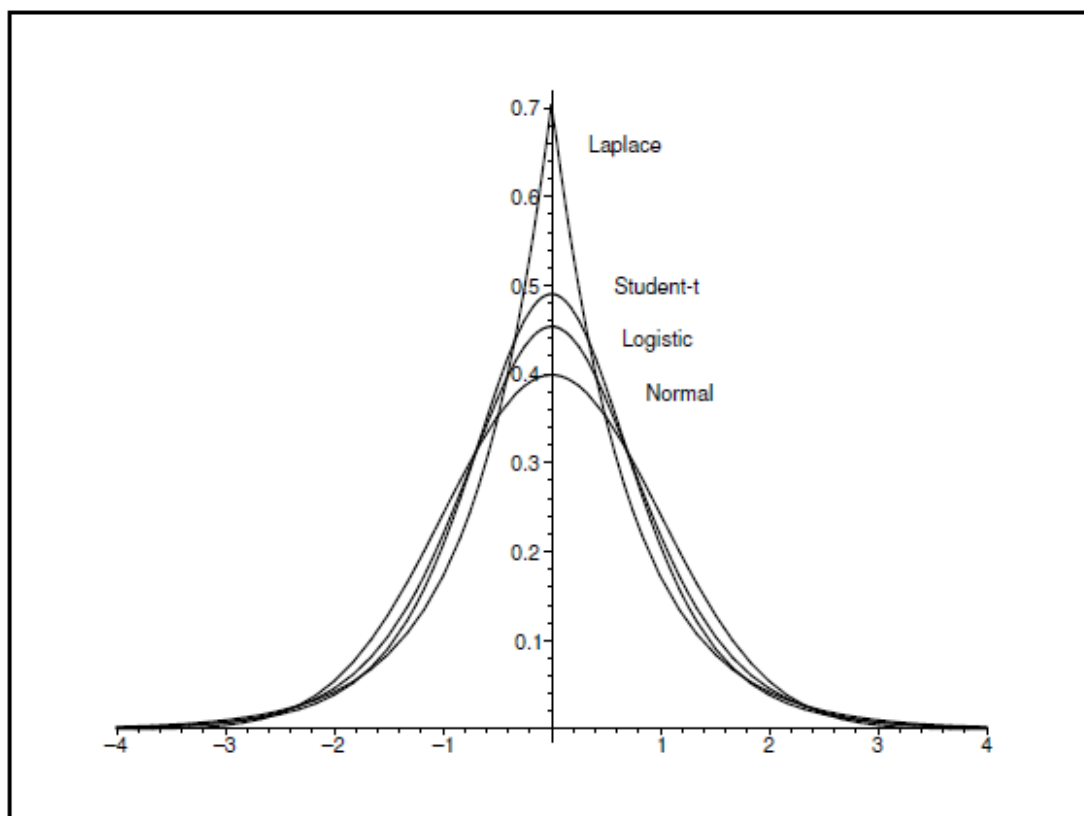
Οι επόμενες γραφικές παραστάσεις παρουσιάζουν την οριακή και διμεταβλητή λογιστική συνάρτηση πυκνότητας με $\omega_k = 1$, $\mu_k = 0$ και $\mu = 0$, $\Omega = I$, η μήτρα ταυτότητας αντίστοιχα.



Σχήμα 4.4: Οριακές και διμεταβλητές λογιστικές συναρτήσεις πυκνότητας

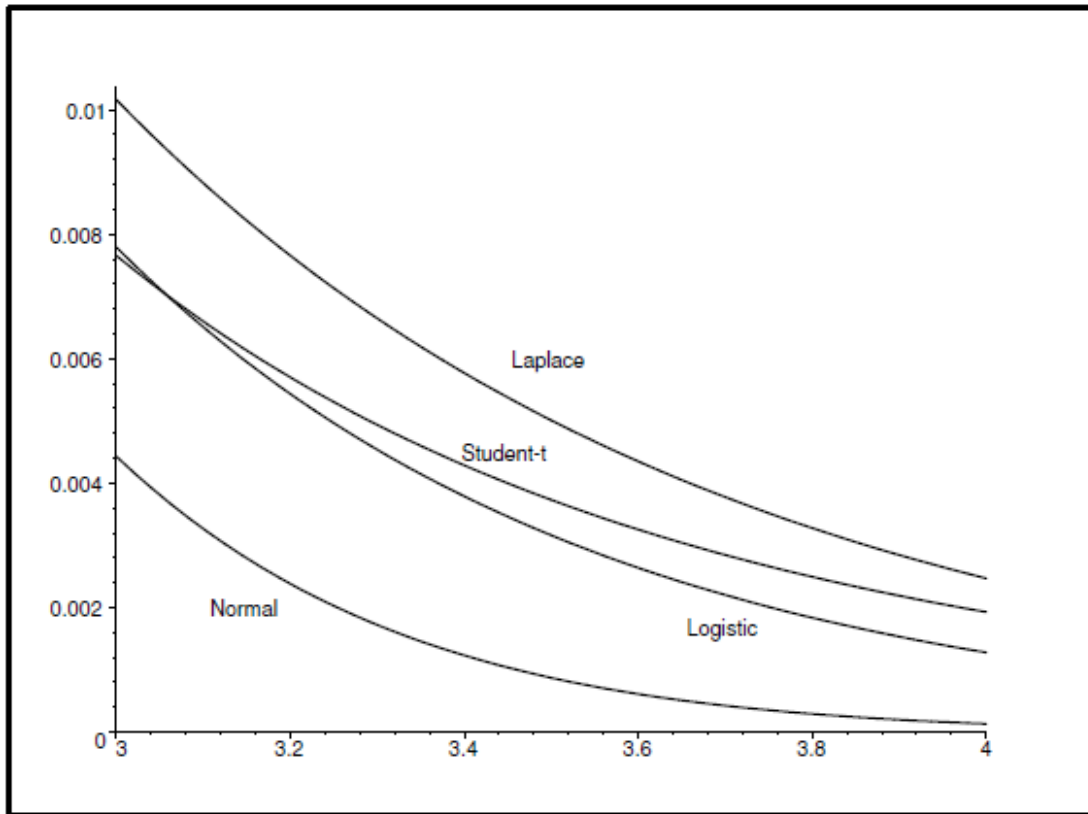
4.2.5 Διαφορές και ομοιότητες

Έχουμε συζητήσει τέσσερα παραδείγματα των ελλειπτικών κατανομών. Υπάρχουν πολλές περισσότερες, όπως η Bessel, η εκθετική δύναμη και η συνάρτηση σταθερού νόμου. Εάν συγκρίνουμε τις τέσσερις συζητημένες ελλειπτικές οικογένειες μπορούμε εύκολα να δούμε τις διαφορές μεταξύ τους. Ειδικά η συμπεριφορά ουρών μπορεί να είναι πολύ διαφορετική, ο οποίος είναι ακριβώς ο λόγος για τον οποίο εξετάζουμε την οικογένεια των ελλειπτικών κατανομών αντί να εξετάζουμε μόνο να την κανονική κατανομή. Στα επόμενα δύο πλαίσια, πήραμε τις παραμέτρους με τέτοιο τρόπο ώστε όλοι οι μέσοι να είναι ίσοι με μηδέν, και όλες τις διασπορές ίσες με 1. Το δεύτερο πλαίσιο είναι μια διεύρυνση της δεξιάς ουράς, έτσι οι διαφορές της ουράς να γίνουν σαφείς



Σχήμα 4.5: Σύγκριση τεσσάρων ελλειπτικών κατανομών

Έχουμε δει ότι η μήτρα διασποράς Ω δεν πρέπει να είναι η ίδια όπως η μήτρα συνδιακύμανσης Σ . Είναι ανάλογες η μία προς την άλλη, όπως αναφέρθηκε στα τέσσερα παραδείγματα στις προηγούμενες υποενότητες. Γενικά μπορούμε να πούμε ότι $\Sigma = -\psi'(0)\Omega$, οπότε $\Omega = (-\psi'(0))^{-1}\Sigma$, το οποίο αναφέρθηκε νωρίτερα στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου. Για τα τέσσερα παραδείγματα που δώσαμε, έχουμε τις ρητές εκφράσεις για τον παράγοντα $-\psi'(0)$, έτσι μπορούμε να πούμε τα ακόλουθα για τη μήτρα διασποράς Ω



Σχήμα 4.6: Διεύρυνση της δεξιάς ουράς

από την άποψη της μήτρας συνδιακύμανσης:

$$\Omega = \begin{cases} \Sigma & \text{normal} \\ \frac{\nu}{\nu-2} \Sigma & \text{student-t}(\nu) \\ \frac{1}{2} \Sigma & \text{Laplace} \\ \frac{3}{\pi^2} \Sigma & \text{logistic} \end{cases}$$

Έτσι τα ακόλουθα ισχύουν για τη διασπορά, από την άποψη της σταθερής απόκλισης του k στοιχείου:

$$\omega_k = \begin{cases} \sigma_k & \text{normal} \\ \sqrt{\frac{\nu}{\nu-2}} \sigma_k & \text{student-t}(\nu) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_k & \text{Laplace} \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma_k & \text{logistic} \end{cases} \quad (4.6)$$

Επειδή εργαζόμαστε στο (μ, σ) - διάστημα, αυτές οι σχέσεις θα πρέπει να μετατραπούν σε σχέσεις με σωστές παραμέτρους. Τις χρησιμοποιήσαμε ήδη

στο προηγούμενο πλαίσιο, για να δημιουργήσουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας με την ίδια μέση και σταθερή απόκλιση.

4.3 Ανάλυση μέσου-διασποράς

Σε αυτό το τμήμα θα δείξω ότι η ανάλυση μέσου-διασποράς είναι ένα έγκυρο εργαλείο για τις ελλειπτικές κατανομές. Η βασική σκέψη με την ανάλυση μέσου-διασποράς είναι ότι ο επενδυτής θέλει να ελαχιστοποιήσει τη διασπορά του δεδομένης κάποιας απόδοσης. Εάν μπορεί να επιλέξει μεταξύ των χαρτοφυλακίων με την ίδια αναμενόμενη απόδοση, θα πάρει το χαρτοφυλάκιο με την ελάχιστη διαφορά (διασπορά). Θα δείξω ότι για κάθε ελλειπτική κατανομή, η κατανομή διευκρινίζεται εντελώς από το μέσο όρο και τη διασπορά της. Οι υψηλότερες στιγμές είναι μηδέν ή ανάλογες προς τη πρώτη (μέσος όρος) ή τη δεύτερη (διασπορά) στιγμή.

Υποθέστε ότι ένας επενδυτής έχει ένα χαρτοφυλάκιο θ επικίνδυνων ενεργητικών στοιχείων με απόδοση χαρτοφυλακίων $R_p = r^T \theta = \theta^T r$, και ότι το διάνυσμα των αποδόσεων των ενεργητικών στοιχείων έχει ελλειπτική κατανομή $r \sim E_n(\mu, \Omega, \psi)$, με ψ τη χαρακτηριστική συνάρτηση γεννήτριας όπως στη (4.3), μ ο μέσος όρος και Ω η μήτρα διασποράς. Κατόπιν η απόδοση χαρτοφυλακίων είναι επίσης ελλειπτικά διανεμημένη, δηλαδή $R_p \sim E_1(\theta^T \mu, \theta^T \Omega \theta, \psi)$. Ορίζουμε $\mu_p = \theta^T \mu$ την αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίων και $\omega^2 = \theta^T \Omega \theta$ τη διασπορά από το χαρτοφυλάκιο. Η χαρακτηριστική συνάρτηση R_p γίνεται, με τη χρησιμοποίηση της (4.3),

$$\phi_p(t) = e^{it\mu_p\psi\left(\frac{1}{2}t\omega^2t\right)} = e^{it\mu_p\psi\left(\frac{1}{2}\omega^2t^2\right)}$$

Η k κεντρική στιγμή για το R_p ορίζεται ως

$$E(R_p - \mu_p)^k = \int (X - \mu_p)^k f_p(X) dX \equiv M_k$$

με $f_p(X)$ την ελλειπτική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας R_p . Όπως ξέρουμε, η δεύτερη κεντρική στιγμή $E(R_p - \mu_p)^2$ είναι η διασπορά. Με αυτόν τον καθορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) &= \phi_p(t)e^{-it\mu_p} \equiv Ee^{itR_p}e^{-it\mu_p} = Ee^{it(R_p-\mu_p)} \\
&= \int e^{it(X-\mu_p)} f_p(X)dX = \int \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it(X-\mu_p))^k}{k!} f_p(X)dX \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \int (X-\mu_p)^k f_p(X)dX = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} M_k \\
&= 1 + \frac{it}{1!} M_1 + \frac{i^2 t^2}{2!} M_2 + \frac{i^3 t^3}{3!} M_3 + \dots
\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας και κάνοντας ιδιότητες παραγώγων απλοποιούμε τη συνάρτηση. Έτσι η m^{th} κεντρική στιγμή R_p θα είναι

$$M_m = i^{-m} \left. \frac{d^m}{dt^m} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \right|_{t=0}$$

Το ακόλουθο ισχύει για τη m^{th} παράγωγο με περιττό m .

$$\begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) &= \sum_{l=0}^{m/2} C_{ml} \psi^{(m-l)}\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \omega^{2(m-l)} t^{m-2l} \\ \frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}} \psi\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) &= \sum_{l=0}^{m/2} C_{m+1,l} \psi^{(m+1-l)}\left(\frac{1}{2}\omega^2 t^2\right) \omega^{2(m+1-l)} t^{m+1-2l} \end{cases}$$

όπου C_{ml} είναι σταθερές για όλα τα m, l . Αυτό είναι εύκολο να αποδειχθεί με χρήση της επαγωγής. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα βλέπουμε ότι η m^{th} στιγμή μπορεί να γραφτεί

$$\begin{cases} M_m &= C_m \psi^{(m/2)}(0) \omega^{2(m/2)} = C'_m \omega^m \\ M_{m+1} &= 0 \end{cases}$$

με περιττό m

για C_m, C'_m σταθερές. Χρησιμοποιήσαμε ότι, για περιττό m , τόσο το i^{-m} όσο και το $\psi^{(m/2)}(0)$ είναι οι πραγματικές σταθερές, και αυτοί συμπεριλαμβάνονται στο σταθερό C'_m .

Βλέπουμε ότι όλες οι περιέργες κεντρικές στιγμές είναι μηδέν (αυτό το αποτέλεσμα δεν είναι μια μεγάλη έκπληξη επειδή κάθε οριακή ελλειπτική κατανομή είναι, σύμφωνα με τη (4.5), συμμετρική γύρω από τη μ), και όλες οι ομαλές κεντρικές στιγμές είναι ανάλογες προς ω^m . Επομένως, εάν η συνάρτηση πυκνότητας επιλεχθεί, η κατανομή της απόδοσης χαρτοφυλακίων είναι εντελώς χαρακτηρισμένη μέχρι τις πρώτες δύο στιγμές, ή από το μέσο όρο μ_p και τη διασπορά ω . Οι πρώτες δύο κεντρικές στιγμές είναι

$$M_1 = 0 \quad (\text{so } E(R_p) = \mu_p)$$

$$M_2 = \text{Var}(R_p) = -\psi'(0)\omega^2$$

Σημειώστε ότι εάν $\psi'(0)=-1$, η διασπορά ω είναι ισοδύναμη με τη σταθερή απόκλιση σ_p . Αυτό το έχουμε δει και πριν στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου.

Το αποτέλεσμα αυτής της απόδειξης είναι ότι η ανάλυση Telser που κάναμε με την κανονική κατανομή, μπορεί να επεκταθεί εύκολα σε όλες τις ελλειπτικές κατανομές, τις οποίες και παραθέτω στο επόμενο τμήμα.

4.4 Telser και ελλειπτικά διανεμημένες αποδόσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έχουμε αναπτύξει μια λύση για τη βέλτιστη επένδυση πολιτική με την προσέγγιση του Telser, όπου υποθέσαμε ότι οι αποδόσεις ενεργητικών στοιχείων είναι κανονικά διανεμημένες. Σε αυτό το τμήμα θα κάνουμε το ίδιο πράγμα για τις ελλειπτικά διανεμημένες αποδόσεις.

Υποθέστε ότι οι αποδόσεις ενεργητικών στοιχείων έχουν μια πολλών μεταβλητών ελλειπτική κατανομή. Έτσι

$$r \sim E_n(\mu, \Omega, g_n)$$

με το αναμενόμενο διάνυσμα αποδόσεων μ , Ω τη μήτρα διασποράς και συνάρτηση πυκνότητας τη $g_n(\cdot)$. Ξέρουμε ότι η μήτρα συνδιακύμανσης Σ είναι ανάλογη προς την Ω και καθορίζεται ως $\psi'(0)\Omega$. Προκύπτει από τη θεωρία (4.4) ότι η απόδοση χαρτοφυλακίων διανέμεται ως

$$R_p = r^T \theta = \theta^T r \sim E_1(\theta^T \mu, \theta^T \Omega \theta, g_1)$$

Εάν προσθέσουμε $\mu_p = \theta^T \mu$ και $\omega^2 = \theta^T \Omega \theta$ αυτό δίνει

$$R_p \sim E_1(\mu_p, \omega^2, g_1).$$

Σημειώστε ότι η διασπορά χαρτοφυλακίων καθορίζεται από τη σχέση $\sigma^2 = -\psi'(0)\omega_p^2$. Έπειτα από την (4.1) η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας R_p έχει την ακόλουθη μορφή

$$f_p(x) = \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_p}{\omega_p} \right)^2 \right]$$

με σταθερό c_1 καθορισμένο (από την (4.2)) ως

$$c_1 = \frac{\Gamma(1/2)}{(2\pi)^{1/2}} \left[\int_0^\infty x^{1/2-1} g_1(x) dx \right]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} g_1(x) dx \right]^{-1}$$

Η προσέγγιση βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων του Telser προσπαθεί να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση υπό τον όρο του περιορισμού προϋπολογισμών ότι υπάρχει μια σταθερή πιθανότητα να πάρει την προεπιλογή. Θυμηθείτε ότι ο περιορισμός προϋπολογισμών είναι

$$P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha$$

Δεδομένου ότι R_p διανέμεται ελλειπτικά, μπορούμε να γράψουμε την πιθανότητα ως

$$P(R_p \leq -C_0) = \int_{x=-\infty}^{-C_0} \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_p}{\omega_p} \right)^2 \right] dx$$

Χρησιμοποιήστε την αντικατάσταση

$$z = \frac{x - \mu_p}{\omega_p} \Rightarrow x = z\omega_p + \mu_p \Rightarrow dx = \omega_p dz$$

Το οποίο δίνει

$$P(R_p \leq -C_0) = \int_{z=-\infty}^{\frac{-C_0 - \mu_p}{\omega_p}} \frac{c_1}{\omega_p} g_1 \left[\frac{1}{2} z^2 \right] \omega_p dz = \int_{z=-\infty}^{\frac{-C_0 - \mu_p}{\omega_p}} c_1 g_1 \left[\frac{1}{2} z^2 \right] dz$$

Τελικά καθορίστε k_α ως διακύμανση για το οποίο

$$\int_{z=-\infty}^{k_\alpha} c_1 g_1 \left[\frac{1}{2} z^2 \right] dz = \alpha \quad (4.7)$$

Σημειώστε ότι το k_α εξαρτάται μόνο από τη συνάρτηση πυκνότητας $g(u)$ και την πιθανότητα α . Παραδείγματος χάριν, πάρτε την κανονική κατανομή. Έχουμε δει ότι $g(u) = e^{-u^2/2}$ και $c_1 = 1/\sqrt{2\pi}$. Έτσι για την κανονική κατανομή το k_α για μια πιθανότητα $\alpha = 0.01$ είναι η λύση της

$$\int_{z=-\infty}^{k_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0.01$$

Η λύση είναι $k_{0.01} = -2.33$, το οποίο είναι το ίδιο με την αξία για ομαλοποιημένη διακύμανση k_α για την κανονική κατανομή που καθορίζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Έτσι από τώρα, το k_α αντιπροσωπεύει την τυποποιημένη διασπορά διακύμανσης- α μιας ελλειπτικής κατανομής. Στον κατωτέρω πίνακα,

παρουσιάζονται μερικές διακυμάνσεις k_α για τις προηγουμένως συζητημένες ελλειπτικές κατανομές.

Τώρα μπορούμε να γράψουμε για τον περιορισμό προϋπολογισμών

$$P(R_p \leq -C_0) \leq \alpha \Rightarrow \frac{-C_0 - \mu_p}{\omega_p} \leq k_\alpha \Rightarrow \mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \omega_p$$

με k_α ορισμένο όπως στη (4.7). Επειδή εργαζόμαστε σε ένα $(\mu-\sigma)$ διάστημα, είναι προτιμότερο να εκφράσει η διασπορά ω_p από την άποψη της σταθερής απόκλισης σ_p που χρησιμοποιεί την (4.6) για τις συζητημένες ελλειπτικές κατανομές μας, αυτό δίνει

$$\mu_p \geq -C_0 - k_\alpha \omega_p = \begin{cases} -C_0 - k_\alpha \sigma_p & \text{normal} \\ -C_0 - k_\alpha \sqrt{\frac{\nu-2}{\nu}} \sigma_p & \text{student-t}(\nu) \\ -C_0 - k_\alpha \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_p & \text{Laplace} \\ -C_0 - k_\alpha \frac{\sqrt{3}}{\pi} \sigma_p & \text{logistic} \end{cases}$$

	Normal	Student-t ($\nu = 1$)	Student-t ($\nu = 10$)	Laplace	Logistic
$\alpha = 0.5$	0	0	0	0	0
$\alpha = 0.1$	-1.28	-3.08	-1.37	-1.61	-2.20
$\alpha = 0.01$	-2.33	-31.82	-2.76	-3.91	-4.60
$\alpha = 0.001$	-3.09	-318.3	-4.14	-6.21	-6.91
$\alpha = 0.0001$	-3.72	-3183	-5.69	-8.52	-9.21

Πίνακας 4.1: Οι διακυμάνσεις k_α για μερικές ελλειπτικές κατανομές

Από τώρα και στο εξής θα γράψουμε

$$\mu_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p \quad \text{με} \quad z_\alpha \equiv \frac{k_\alpha \omega_p}{\sigma_p} \quad (4.8)$$

για όλες τις ελλειπτικές κατανομές. Έτσι παραδείγματος χάριν εάν οι αποδόσεις είναι διανεμημένες με βάση τη κατανομή Λαπλάς, τότε $z_\alpha = k_\alpha / \sqrt{2}$. Η διακύμανση z_α μπορεί να ερμηνευθεί δεδομένου ότι η σταθερή απόκλιση τυποποίησε την ελλειπτική διακύμανση, θα αναφερόμαστε στο z_α σαν την τυποποιημένη διακύμανση.

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον καθορισμό, το πρόβλημα Telser-βελτιστοποίησης μπορεί να γραφτεί ως

$$Max \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p \geq -C_0 - z_\alpha \sigma_p \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\} \quad (4.9)$$

Αυτό το σύστημα λύνεται σε ακριβώς τον ίδιο τρόπο όπως κάναμε για τις κανονικά διανεμημένες αποδοχές, με αντικατάσταση της διακύμανσης z_α αντί του k_α . Έτσι η βέλτιστη λύση δίνεται αμέσως με την εξέταση των αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου. Έχουμε για την περίπτωση χωρίς ελεύθερο κίνδυνου ενεργητικό στοιχείο

$$\theta_T = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((a\bar{1} - b\mu)C_0 + (c\mu - b\bar{1})\mu_T)$$

με

$$\mu_T = \frac{bz_\alpha^2 + d + \sqrt{dz_\alpha^2(a + 2b + c - z_\alpha^2)}}{cz_\alpha^2 - d} C_0$$

Εάν προσθέσουμε το ελεύθερο κίνδυνου ενεργητικό στοιχείο, με το ποσοστό απόδοσης μ_f , το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο κατανομής αλλάζει σε

$$\theta_T \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mu_f}{s(s+z_\alpha)} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) C_0 \\ \frac{a+b-(b+c)\mu_f+z_\alpha s}{s(s+z_\alpha)} C_0 \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 5

Βελτιστοποίηση βασισμένη στην αξία κινδύνου – ρίσκου (VaR)

Έχουμε δει ότι η μέθοδος βελτιστοποίησης του Telser δεν είναι βασισμένη στη σταθερή απόκλιση ως μέτρο κινδύνου. Το μέτρο του κινδύνου είναι η πιθανότητα να πάει στην προεπιλογή, $P(R_p \leq -C_0)$. Αυτό το μέτρο κινδύνου είναι μια πρόσθετη περίπτωση του παγκόσμια χρησιμοποιούμενου μέτρου κινδύνου, αξίας σε κίνδυνο (VaR). Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε την αξία κινδύνου, και τη βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων υπό έναν περιορισμό VaR.

Πρώτα θα παραχθούν τα αποδοτικά σύνορα μέσου- VaR, και με και χωρίς ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Η παράγραφος 3 υπολογίζει τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια με έναν VaR -περιορισμό, όπως κάναμε στα πλαίσια Markowitz και Telser.

5.1 Αποδοτικά σύνορα VaR

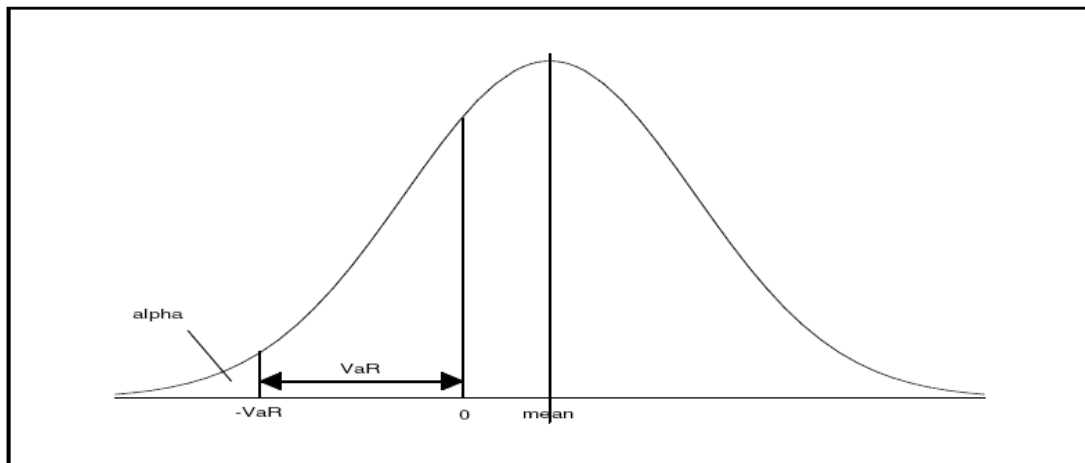
Το VaR σε επίπεδο $1 - \alpha$ ενός χαρτοφυλακίου (VaR_α) καθορίζεται ως

$$P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha$$

Περιφραστικά μπορούμε να πούμε ότι είναι το ελάχιστο ποσό που ένας επενδυτής μπορεί να χάσει (σε δολάρια) με ένα διάστημα εμπιστοσύνης $1 - \alpha$. Όσο μεγαλύτερο το VaR για κάποιο επίπεδο εμπιστοσύνης, τόσο πιο επικίνδυνο είναι το χαρτοφυλάκιο. Έτσι ένας επενδυτής που είναι ακραία αντίθετος στον κίνδυνο θα προτιμήσει μια ακραία χαμηλή μεταβλητή VaR. Το κατωτέρω πλαίσιο παρουσιάζει τη γραφική ερμηνεία του μέτρου κινδύνου VaR.

Εάν πάρουμε το $VaR_\alpha = C_0$ και α η πιθανότητα ελλείμματος, έπειτα ο καθορισμός VaR γίνεται ο περιορισμός ελλείμματος του προηγούμενου κεφαλαίου. Έτσι ο περιορισμός ελλείμματος είναι μια ιδιαίτερη περίπτωση ενός περιορισμού VaR.

Επειδή η αξία κινδύνου είναι το νέο μέτρο κινδύνου μας, αντί της σταθερής απόκλισης, μπορούν να υπολογιστούν νέα αποδοτικά σύνορα, ακριβώς όπως κάναμε στο μέσο-σταθερό πλαίσιο απόκλισης.



Σχήμα 5.1: Καθορισμός της αξίας σε κίνδυνο

Τα αποδοτικά σύνορα δίνουν την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση για κάποια δεδομένη αξία κινδύνου, ή το ελάχιστο VaR για έναν σταθερό μέσο όρο. Εμφανίζεται ότι τα αποδοτικά σύνορα μέσου- VaR είναι τα ίδια με τα αποδοτικά σύνορα μέσης-σταθερής απόκλισης, όταν οι αποδοχές διανέμονται ελλειπτικά, τα οποία και θα παρουσιάσουμε. Για τους υπολογισμούς σε αυτό το κεφάλαιο θα υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις διανέμονται ελλειπτικά.

Όταν γίνεται η ελλειπτική υπόθεση, η αξία κινδύνου μπορεί να γραφτεί ως

$$\begin{aligned}
 P(R_p \leq -VaR_\alpha) = \alpha & \iff P\left(\frac{R_p - \mu_p}{\omega_p} \leq \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\omega_p}\right) = \alpha \\
 \iff \frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{\omega_p} = k_\alpha & \iff VaR_\alpha = -\mu_p - k_\alpha \omega_p
 \end{aligned}$$

Εάν αντικαταστήσουμε την (4.8), η VaR μπορεί να γραφτεί από την άποψη του μέσου όρου και της σταθερής απόκλισης:

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p \quad (5.1)$$

Θυμηθείτε την αρνητική αξία του z_α . Τα αποδοτικά σύνορα αποτελούνται από τα σημεία όπου, για έναν δεδομένο μέσο όρο, το VaR ελαχιστοποιείται. Καθορίζεται επίσης από τα σημεία όπου, για ένα δεδομένο VaR, η μέση απόδοση μεγιστοποιείται. Θα εργαστούμε με τον τελευταίο ορισμό, ο οποίος αντιπροσωπεύεται από τους τύπους:

$$Max \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.2)$$

Ο πρώτος περιορισμός (5.2) μπορεί να μετασχηματιστεί σε

$$(VaR_\alpha + \mu_p)^2 = (-z_\alpha \sigma_p)^2 \iff VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu_p + \mu_p^2 - z_\alpha^2 \sigma_p^2 = 0$$

και εάν αντικαταστήσουμε τους άλλους περιορισμούς παίρνουμε

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \mu \mu^T \theta - z_\alpha^2 \theta^T \Sigma \theta &= 0 \\ \iff VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta &= 0 \end{aligned}$$

όπου η μήτρα Ψ ορίζεται ως

$$\Psi = \mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma$$

Το πρόβλημα μεγιστοποίησης (5.2) τότε γίνεται συντομότερο:

$$Max \left\{ \mu^T \theta \left| \begin{array}{l} VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0 \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\} \quad (5.3)$$

Η μήτρα Ψ είναι συμμετρική, επειδή

$$\Psi^T = (\mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma)^T = (\mu \mu^T)^T - z_\alpha^2 \Sigma^T = \mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma = \Psi$$

Όπως και πριν, καθορίζουμε τις ακόλουθες σταθερές:

$$\begin{aligned} \hat{a} &\equiv \mu^T \Psi^{-1} \mu \\ \hat{b} &\equiv \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Psi^{-1} \mu \\ \hat{c} &\equiv \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} \\ \hat{d} &\equiv \hat{a} \hat{c} - \hat{b}^2 \end{aligned}$$

Η σχέση μεταξύ των σταθερών \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} , και των γνωστών σταθερών των προηγούμενων κεφαλαίων a , b , c , d μπορεί να παραχθεί εύκολα. Τα ακόλουθα ισχύουν για την αντίστροφη μήτρα συνδιακύμανσης

$$\Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \Psi \Psi^{-1} = \Sigma^{-1} (\mu \mu^T - z_\alpha^2 \Sigma) \Psi^{-1} = \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} - z_\alpha^2 \Psi^{-1}$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την έκφραση για το Σ^{-1} έχουμε

$$\begin{cases} a = \mu^T \Sigma^{-1} \mu = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} \mu - z_\alpha^2 \mu^T \Psi^{-1} \mu = a\hat{a} - z_\alpha^2 \hat{a} & = \hat{a}(a - z_\alpha^2) \\ b = \mu^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \mu^T \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} - z_\alpha^2 \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} = a\hat{b} - z_\alpha^2 \hat{b} & = \hat{b}(a - z_\alpha^2) \\ c = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \bar{1} = \bar{1}^T \Sigma^{-1} \mu \mu^T \Psi^{-1} \bar{1} - z_\alpha^2 \bar{1}^T \Psi^{-1} \bar{1} & = \hat{b}\hat{b} - z_\alpha^2 \hat{c} \end{cases}$$

Λύνουμε αυτό το σύστημα για να πάρουμε τις επιθυμητές εκφράσεις για τα \hat{a} , \hat{b} , \hat{c} , \hat{d} , και να παίρνουμε

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{a}{a - z_\alpha^2} \\ \hat{b} = \frac{b}{a - z_\alpha^2} \\ \hat{c} = \frac{cz_\alpha^2 - d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)} \\ \hat{d} = \hat{a}\hat{c} - \hat{b}^2 = \frac{-d}{z_\alpha^2(a - z_\alpha^2)} \end{cases} \quad (5.4)$$

Αργότερα θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα αυτά για να συγκρίνουμε τα παραγόμενα αποτελέσματα με προηγούμενα συμπεράσματα. Λύνουμε το πρόβλημα (5.3) χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Lagrange. Αυτό δίνει το ακόλουθο σύνολο εξισώσεων

$$\begin{cases} \mu + 2\lambda_1 VaR_\alpha \mu + 2\lambda_1 \Psi \theta + \lambda_2 \bar{1} = 0 & (a) \\ VaR_\alpha^2 + 2VaR_\alpha \mu^T \theta + \theta^T \Psi \theta = 0 & (b) \\ \bar{1}^T \theta = C_0 & (c) \end{cases}$$

Η επίλυση της εξίσωσης (α) ως προς θ δίνει, με $\lambda_3 = -1/2\lambda_1$ και $\lambda_4 = -\lambda_2/2\lambda_1$

$$\theta = (\lambda_3 - VaR_\alpha) \Psi^{-1} \mu + \lambda_4 \Psi^{-1} \bar{1} \quad (5.5)$$

Χρησιμοποιώντας το θ αυτό στη (γ), παίρνουμε μια έκφραση για το λ_4 :

$$\begin{aligned} \bar{1}^T \theta &= (\lambda_3 - VaR_\alpha) \hat{b} + \lambda_4 \hat{c} = C_0 \\ \iff \lambda_4 &= \frac{C_0 + \hat{b} VaR_\alpha - \lambda_3 \hat{b}}{\hat{c}} \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του λ_3 προκύπτει από την (β). Μετά από πολλούς υπολογισμούς, παίρνουμε

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{\hat{d}} \left(VaR_\alpha^2 (\hat{d} - \hat{c}) - 2C_0 \hat{b} VaR_\alpha - C_0^2 \right)$$

Έτσι

$$\lambda_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{d}} \left(VaR_\alpha^2 (\hat{d} - \hat{c}) - 2C_0 \hat{b} VaR_\alpha - C_0^2 \right)} \equiv \pm \sqrt{W}$$

Δεδομένου ότι έχουμε τώρα τις τιμές για τα λ_3 και λ_4 , υπολογίζουμε το θ χρησιμοποιώντας την (5.5), το οποίο δίνει

$$\theta = (\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\Psi^{-1}\mu + \frac{1}{\hat{c}}(C_0 + VaR_\alpha\hat{b} \mp \sqrt{W})\Psi^{-1}\bar{1}$$

Έτσι η επιθυμητή έκφραση για το μέσο χαρτοφυλάκιο, ως συνάρτηση της αξίας κινδύνου, είναι

$$\begin{aligned}\mu_p &= \mu^T\theta = (\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha)\hat{a} + \frac{1}{\hat{c}}(C_0 + VaR_\alpha\hat{b} \mp \sqrt{W})\hat{b} \\ &= \frac{\hat{d}}{\hat{c}} \left(\pm\sqrt{W} - VaR_\alpha + \frac{\hat{b}}{\hat{d}}C_0 \right)\end{aligned}\quad (5.6)$$

Η χρησιμοποίηση του σημαδιού του μείον σε αυτήν την έκφραση δίνει τα αποδοτικά σύνορα μέσου-VaR. Για να συγκρίνουν αυτά τα σύνορα με τα αποδοτικά σύνορα μέσου-σταθερής απόκλισης, αναστρέφουμε αρχικά τη συνάρτηση (γράφουμε το VaR ως συνάρτηση του μ_p). Στην (5.6), απομονώνουμε το \sqrt{W} , παίρνουμε τα τετράγωνα και στις δύο πλευρές και λύνουμε την προκείμενη τετραγωνική συνάρτηση για VaR_α . Αυτό δίνει

$$VaR_\alpha = -\mu_p + \sqrt{\frac{1}{\hat{d}} \left((\hat{d} - \hat{c})\mu_p^2 + 2\hat{b}C_0\mu_p - \hat{a}C_0^2 \right)}$$

Το δεύτερο βήμα είναι να αντικατασταθούν οι σταθερές a' , b' , c' , d' με τις σταθερές a , b , c , d . Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση (5.4) για αυτό, και παίρνουμε

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}\quad (5.7)$$

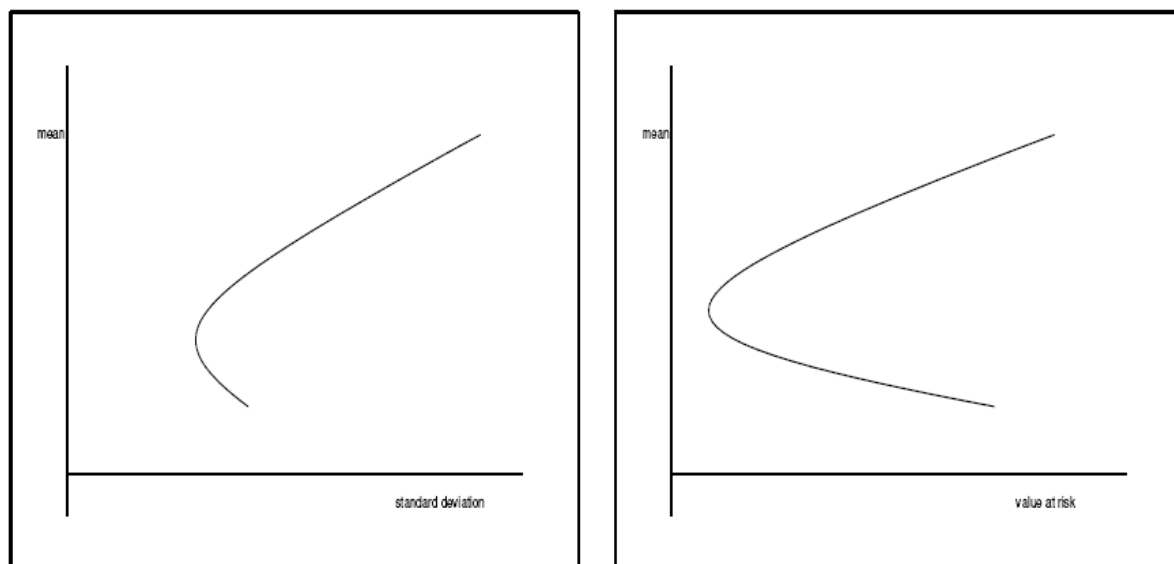
Το τελευταίο βήμα είναι να μετασχηματιστεί αυτή η εξίσωση στο πλαίσιο μέση-σταθερής απόκλισης. Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση (5.1) για το VaR_α και παίρνουμε

$$-\mu_p - z_\alpha\sigma_p = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

όπου το z_α υποτίθεται ότι ήταν αρνητικό. Έτσι τα αποδοτικά σύνορα μέσου-VaR στο πλαίσιο μέσης-σταθερής απόκλισης δίνεται από τη

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}\quad (5.8)$$

Την όποια αναγνωρίζουμε ως τα μέσης-διασποράς αποδοτικά σύνορα! Έτσι το συμπέρασμά μας μπορεί να είναι ότι η ελαχιστοποίηση της διασποράς είναι η ίδια με την ελαχιστοποίηση της αξίας κινδύνου, όταν οι αποδόσεις διανέμονται ελλειπτικά.

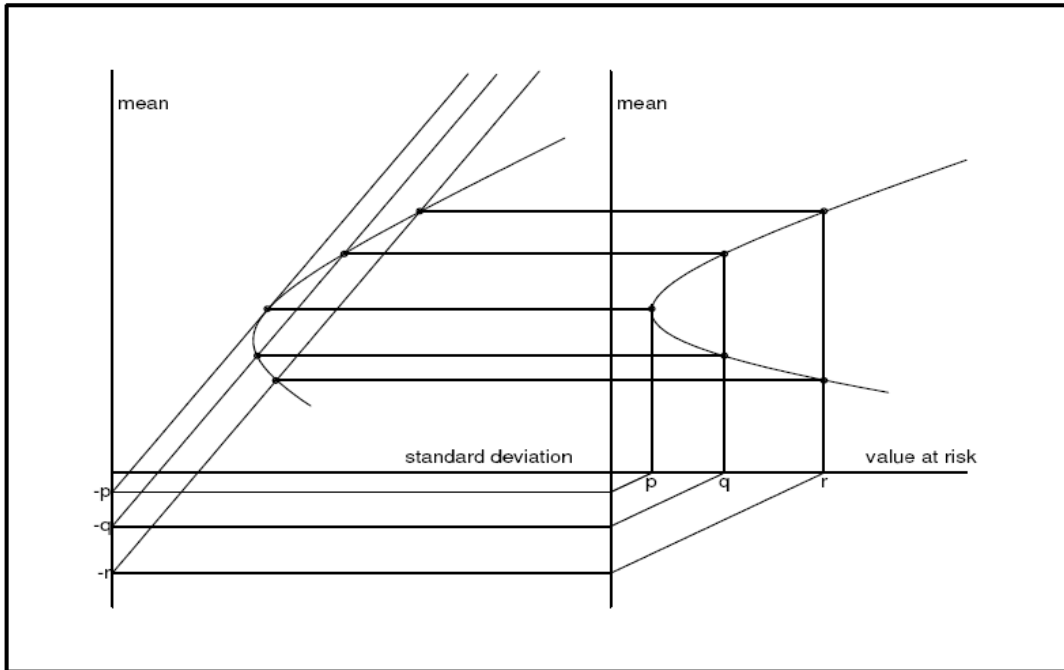


Σχήμα 5.2: Τα αποδοτικά σύνορα σε πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης και το πλαίσιο μέσου-VaR

Τα δύο σύνορα παρουσιάζονται στις προηγούμενες δύο γραφικές παραστάσεις, το αριστερό γράφημα είναι τα αποδοτικά σύνορα σε ένα πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης, ενώ το δεξί γράφημα είναι τα ίδια αποδοτικά σύνορα σε ένα πλαίσιο μέσου-VaR.

Επειδή τα αποδοτικά σύνορα στο μέσο-σταθερής απόκλισης πλαίσιο και τα αποδοτικά σύνορα στο μέσο-VaR είναι τα ίδια, η κατανομή στα σύνορα δίνεται ακόμα (σε όρους μ_p) από τη (2.3).

Έχουμε δει αναλυτικά ποια είναι η σχέση είναι μεταξύ των αποδοτικών συνόρων του μέσου-σταθερού διαστήματος απόκλισης και του διαστήματος μέσου-VaR. Αυτή η σχέση μπορεί επίσης να παρουσιαστεί σε ένα πλαίσιο, όπως παρουσιάζεται κατωτέρω. Η κλίση των γραμμών ελλείμματος στην αριστερή γραφική παράσταση εξαρτάται από τη (ελλειπτική) κατανομή των αποδόσεων και την πιθανότητα ελλείμματος α , αλλά είναι μια σταθερή σταθερά. Οι τιμές p , q , r στην αριστερή γραφική παράσταση είναι παρόμοιες με τις τιμές p , q , r στη δεξιά γραφική παράσταση, έτσι οι διαγώνιες-γραμμές στη δεξιά γραφική παράσταση έχουν κλίση 1.



Σχήμα 5.3: Γραφική σχέση των αποδοτικών συνόρων σε πλαίσιο μέσης-σταθερής απόκλισης και πλαίσιο μέσου-VaR.

5.2 Προσθήκη του ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου

Στο μέσο-σταθερό πλαίσιο απόκλισης, τα αποδοτικά σύνορα αλλάζουν στη γραμμή κεφαλαιαγορών όταν εισάγεται ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Ένας επενδυτής έπειτα θα επενδύσει σε συνδυασμό του χαρτοφυλακίου αγοράς και του ελεύθερο κινδύνου ενεργητικού στοιχείου. Θυμηθείτε ότι το CML δίνεται από

$$\mu_p = s\sigma_p + C_0\mu_f \quad \text{με} \quad s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a} \quad (5.9)$$

Το σταθερό s είναι η κλίση του CML. Η αντιπροσώπευση του CML στο πλαίσιο μέσου-VaR μπορεί να παραχθεί χρησιμοποιώντας την (5.1) ως έκφραση για το σ_p και αντικαθιστώντας αυτό στην (5.9), αυτό δίνει

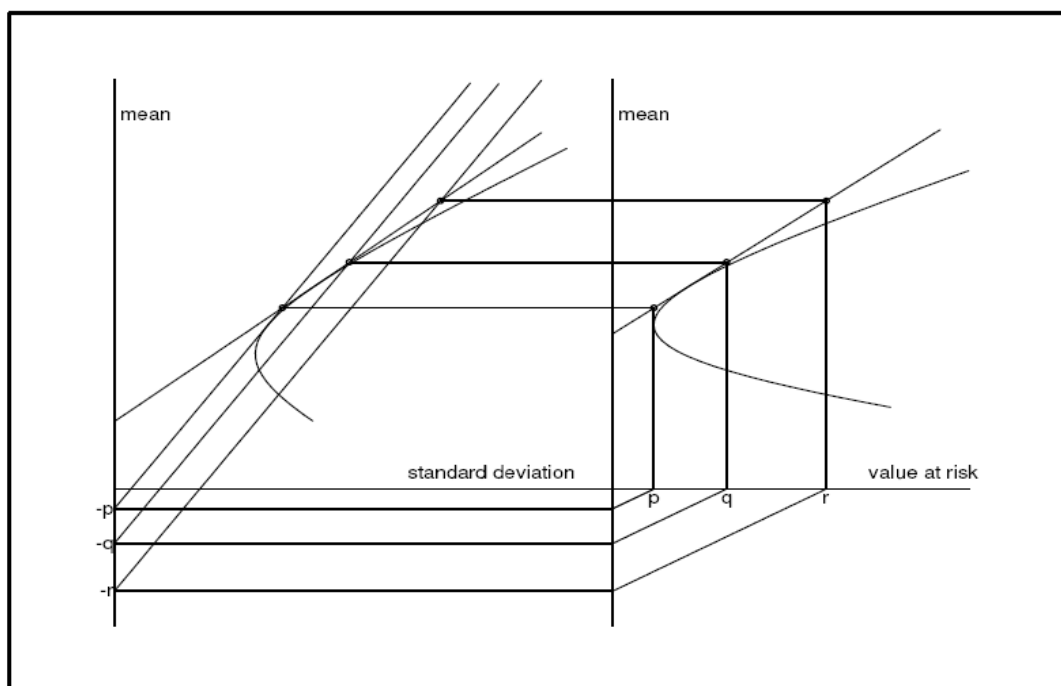
$$\mu_p = s\sigma_p + C_0\mu_f = s \left(\frac{-VaR_\alpha - \mu_p}{z_\alpha} \right) + C_0\mu_f$$

Το όποιο οδηγεί στο CML για το πλαίσιο μέσου-VaR:

$$\mu_p = \frac{-s}{z_\alpha + s} VaR_\alpha + \frac{z_\alpha\mu_f}{z_\alpha + s} C_0 \quad (5.10)$$

Το πλαίσιο κατωτέρω παρουσιάζει τη γραμμή κεφαλαιαγορών για τις δύο τοποθετήσεις. Οι κατασκευασμένες γραμμές επιδεικνύουν πώς οι δύο

γραμμές συσχετίζονται η μια με την άλλη. Το εφαπτομενικό σημείο μεταξύ του CML και των αποδοτικών συνόρων είναι το χαρτοφυλάκιο αγοράς.



Σχήμα 5.4: Γραφική σχέση του CML σε πλαίσιο μέσης-σταθερής απόκλισης και πλαίσιο μέσου-VaR.

Έχουμε δει στο κεφάλαιο Markowitz ότι η μέση απόδοση στο χαρτοφυλάκιο αγοράς είναι $\mu_m = \frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0$. Για να δούμε ποια αξία κινδύνου VaR ανήκει στο χαρτοφυλάκιο αγοράς εξισώνουμε το μ_m με την (5.10) και παίρνουμε

$$\frac{a - b\mu_f}{b - c\mu_f} C_0 = \frac{-s}{z_\alpha + s} VaR_\alpha + \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} C_0$$

Το οποίο οδηγεί σε

$$VaR_m = \frac{b\mu_f - a - z_\alpha s}{b - c\mu_f} C_0$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την αντικατάσταση $s^2 = c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a$. Έτσι (VaR_m, μ_m) είναι το χαρτοφυλάκιο αγοράς στο πλαίσιο μέσου-VaR. Η κατανομή θ_m παραμένει κατανομή που υπολογίζεται στο μέσο-σταθερό τμήμα απόκλισης των χαρτοφυλακίων αγοράς.

5.3 Βέλτιστα χαρτοφυλάκια

Όπως κάναμε στο πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης, μπορούμε να παραγάγουμε διαφορετικά βέλτιστα χαρτοφυλάκια στο πλαίσιο μέσου- VaR. Ένας επενδυτής μπορεί να επιλέξει να επενδύσει στο ελάχιστο σε αξία κινδύνου χαρτοφυλάκιο, το οποίο είναι το χαρτοφυλάκιο που ελαχιστοποιεί τη VaR. Τα ελάχιστα VaR χαρτοφυλάκια διαφέρουν από τα χαρτοφυλάκια ελάχιστης διασποράς, το οποίο μπορεί να φανεί με τη σύγκριση των αποδοτικών συνόρων και στα δύο πλαίσια. Ένα άλλο ενδιαφέρον χαρτοφυλάκιο είναι το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο στο πλαίσιο μέσου-VaR. Αυτό είναι το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί την αναλογία μέσου/ VaR, έτσι δίνει χαρτοφυλάκιο με τη μέγιστη απόδοση ανά μεταβλητές VaR. Κοιτάζοντας σε ένα πλαίσιο Telser, μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser, το οποίο είναι το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί η αναμενόμενη απόδοση, ικανοποιώντας έναν περιορισμό αξίας κινδύνου. Θα το εξετάσουμε αυτό σε ένα πλαίσιο τόσο με όσο και χωρίς ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο.

5.3.1 Χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου

Το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου είναι το χαρτοφυλάκιο που ελαχιστοποιεί την αξία κινδύνου (VaR). Επειδή έχουμε παραγάγει τον τύπο (5.7) ως τα αποδοτικά σύνορα, εμείς θα πρέπει απλά να θέσουμε την παράγωγο αυτής της συνάρτησης ίση με μηδέν και να το λύσουμε ως προς μ_p . Παίρνουμε

$$\frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \mu_p} = -1 - \frac{z_\alpha (c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = 0 \quad (5.11)$$

Η επίλυση αυτού για το μ_p οδηγεί στην ελάχιστη αναμενόμενη VaR απόδοση

$$\mu_{mvr} = \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{c\sqrt{cz_\alpha^2 - d}} \right) C_0$$

Η αντίστοιχη αξία κινδύνου υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση της (5.7):

$$\begin{aligned} VaR_{mvr} &= -\mu_{mvr} - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{mvr}^2 - 2bC_0\mu_{mvr} + aC_0^2)} \\ &= \left(-\frac{b}{c} + \frac{1}{c}\sqrt{cz_\alpha^2 - d} \right) C_0 \end{aligned}$$

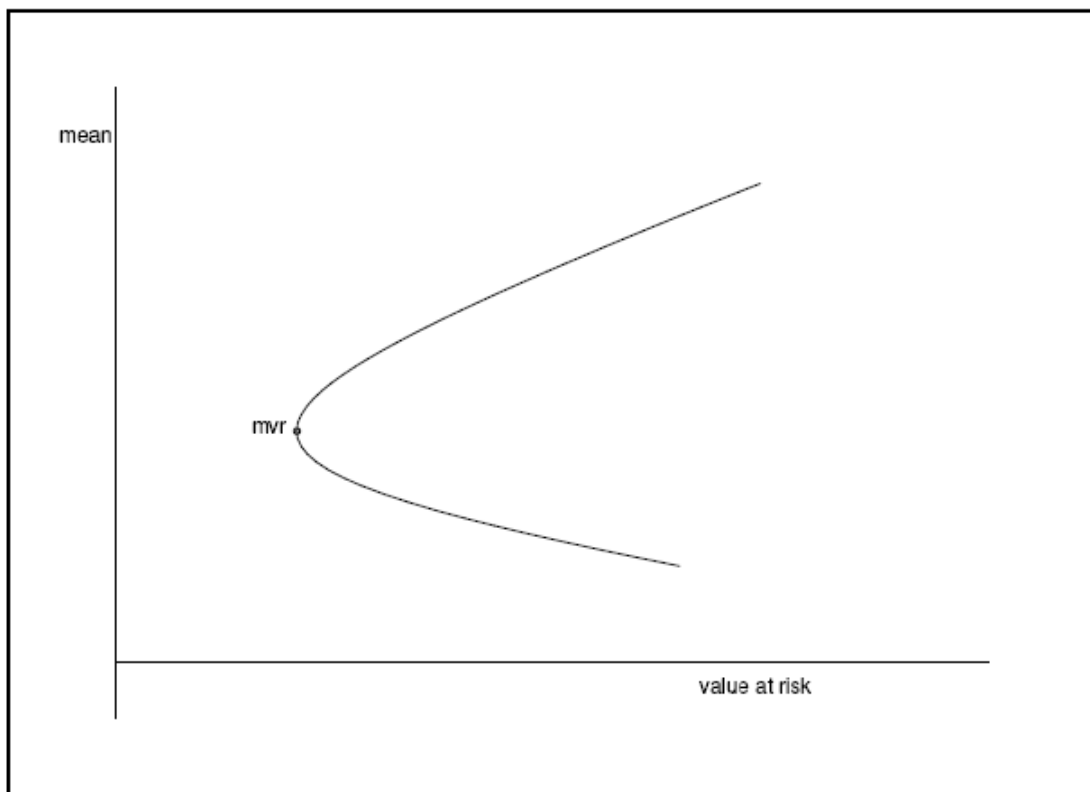
Η ελάχιστη VaR σταθερή απόκλιση είναι

$$\sigma_{mvr} = \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_{mvr}^2 - 2bC_0\mu_{mvr} + aC_0^2)} = \frac{-z_\alpha}{\sqrt{cz_\alpha^2 - d}} C_0$$

Η κατανομή ενεργητικών στοιχείων θ στο χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη (2.3), τη κατανομή στα αποδοτικά σύνορα, τα οποία οδηγούν σε

$$\theta_{mvr} = \frac{1}{c\sqrt{cz_\alpha^2 - d}} \Sigma^{-1} \left((\sqrt{cz_\alpha^2 - d} - b)\bar{1} + c\mu \right) C_0$$

Το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο, το οποίο είναι το πλαίσιο μέσου- VaR



Σχήμα 5.5: Το χαρτοφυλάκιο ελάχιστης αξίας κινδύνου

5.3.2 Εφαπτομενικό VaR χαρτοφυλάκιο

Το εφαπτομενικό VaR χαρτοφυλάκιο είναι το χαρτοφυλάκιο όπου η γραμμή μέσω της προέλευσης είναι εφαπτομένη στα αποδοτικά σύνορα μέσου-VaR. Αντιπροσωπεύει το χαρτοφυλάκιο με μέγιστη αναλογία μέσου/ VaR, έτσι με τη μέγιστη αξία για το μέσο όρο ανά μεταβλητές μονάδων VaR.

Στο εφαπτομενικό VaR χαρτοφυλάκιο, η κλίση της εφαπτόμενης γραμμής πρέπει να είναι ίση με την κλίση των αποδοτικών συνόρων. Έτσι

$$\frac{\Delta VaR_{tvr}}{\Delta \mu_{tvr}} = \left. \frac{\partial VaR_{\alpha}}{\partial \mu_p} \right|_{\mu_p = \mu_{tvr}}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.7), παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση

$$\frac{-\mu_{tvr} - z_{\alpha} \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{tvr}^2 - 2bC_0\mu_{tvr} + aC_0^2)} - 0}{\mu_{tvr} - 0} = -1 - \left. \frac{z_{\alpha}(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} \right|_{\mu_p = \mu_{tvr}}$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης είναι

$$\mu_{tvr} = \frac{a}{b}C_0$$

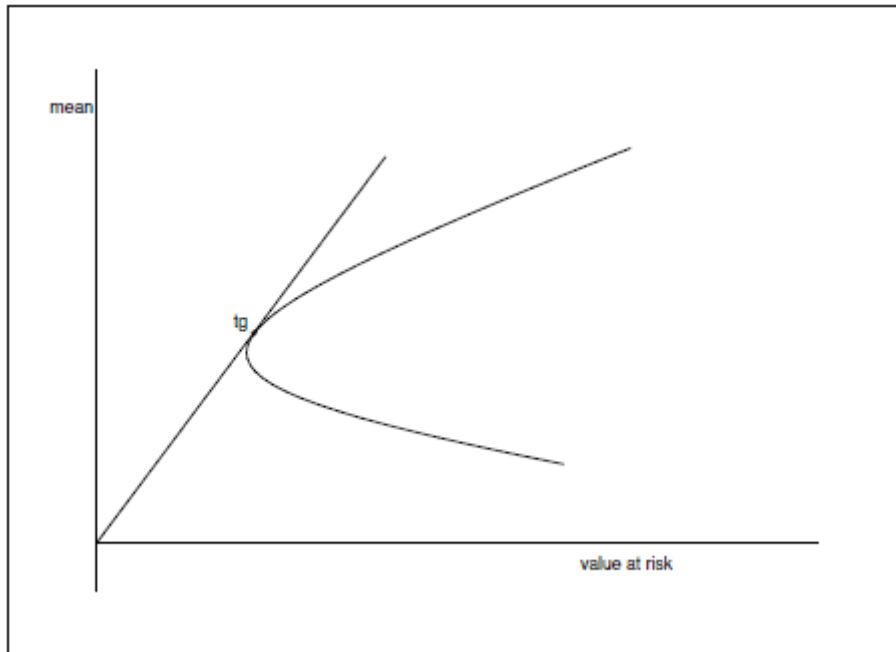
Βλέπουμε ότι αυτό είναι το ίδιο αποτέλεσμα με το εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο στο πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης! Έτσι $\mu_{tvr} = \mu_{tg}$. Παρατηρώντας το αποτέλεσμα καλύτερα, είναι σαφές ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι αρκετά λογικό. Επειδή

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \frac{\mu_p}{VaR_{\alpha}} &= \text{Maximize} \frac{\mu_p}{-\mu_p - z_{\alpha}\sigma_p} = \text{Minimize} \frac{-\mu_p - z_{\alpha}\sigma_p}{\mu_p} \\ &= \text{Minimize} \frac{-z_{\alpha}\sigma_p}{\mu_p} = \text{Maximize} \frac{\mu_p}{\sigma_p} \end{aligned}$$

η μεγιστοποίηση της εφαπτόμενης γραμμής στο πλαίσιο μέσου-VaR και το πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. Η αντιστοιχία για τη VaR είναι

$$VaR_{tg} = -\mu_{tg} - z_{\alpha}\sigma_{tg} = -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_{\alpha})C_0$$

και η κατανομή θ_{tg} είναι η ίδια με την κατανομή με τη μέση-σταθερή απόκλιση εφαπτομενικού χαρτοφυλακίου. Το χαρτοφυλάκιο μοιάζει με τα εξής σε ένα σχήμα γράφημα



Σχήμα 5.6: Το ελάχιστο VaR χαρτοφυλάκιο

5.3.3 Telser

Καθορίσαμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser ως το χαρτοφυλάκιο που μεγιστοποιεί τις αναμενόμενες αποδόσεις υπό έναν περιορισμό ελλείμματος. Επειδή ο περιορισμός ελλείμματος είναι μια ειδική περίπτωση ενός περιορισμού της αξίας κινδύνου, επαναπροσδιορίζουμε τον καθορισμό του βέλτιστου χαρτοφυλακίου Telser. Από τώρα και στο εξής, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser είναι το χαρτοφυλάκιο αυτό που μεγιστοποιεί την αναμενόμενη απόδοση ικανοποιώντας έναν περιορισμό αξίας κινδύνου. Εάν χρειαζόμαστε την «παλιά έκδοση» του χαρτοφυλακίου Telser, παίρνουμε τον καθορισμό $VaR = C_0$. Έτσι το πρόβλημα Telser γίνεται

$$Max \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \end{array} \right. \right\} \quad (5.12)$$

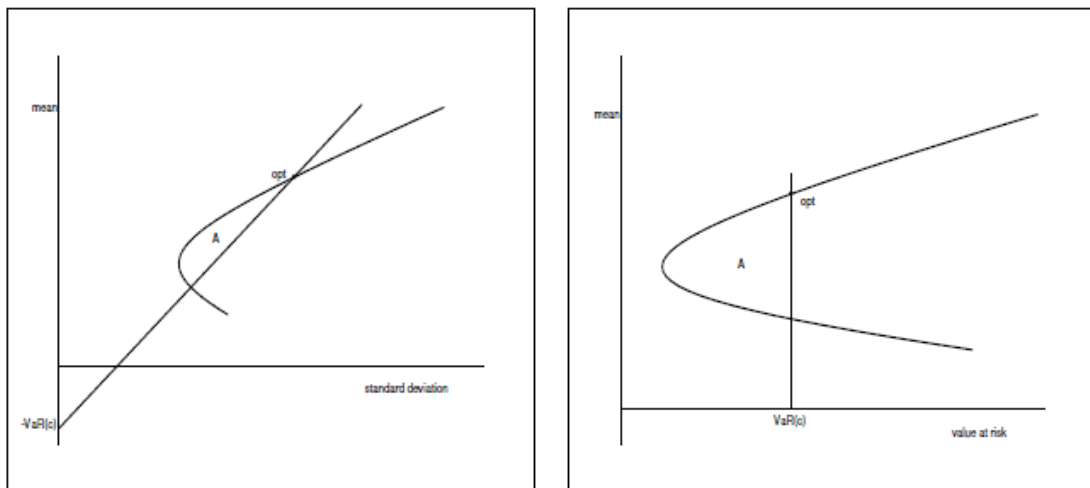
όπου το VaR_c είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη αξία κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Όταν εμείς υποθέσαμε ότι οι αποδόσεις διανέμονται ελλειπτικά, ο πρώτος περιορισμός της (5.12) μπορεί ξαναγράφεται ως (χρησιμοποιώντας την έκφραση (5.1) για το VaR):

$$\begin{aligned} VaR_\alpha \leq VaR_c &\iff VaR_c \geq VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sigma_p \\ &\iff \mu_p \geq -VaR_c - z_\alpha \sigma_p \end{aligned}$$

Έτσι το πρόβλημα βελτιστοποίησης μετατρέπεται σε

$$\text{Max} \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p \geq -VaR_c - z_\alpha \sigma_p \\ \mathbf{1}^T \theta = C_0 \\ \mu_p = \mu^T \theta \\ \sigma_p^2 = \theta^T \Sigma \theta \end{array} \right. \right\} \quad (5.13)$$

Εάν πάρουμε τη μέγιστη επιτρεπόμενη αξία κινδύνου VaR_c ίση με το αρχικό κεφάλαιο, δηλαδή $VaR_c = C_0$, παίρνουμε ακριβώς την «παλιά» διατύπωση όπως περιγράφεται στο κεφάλαιο Πρώτης ασφάλειας. Τα αντίστοιχα γραφήματα για το πρόβλημα (5.13) μοιάζουν με τα ακόλουθα, όπου το βέλτιστο βρίσκεται στην περιοχή A, και το βέλτιστο βρίσκεται στη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση, έτσι στο σημείο opt. Η αριστερή γραφική παράσταση είναι στο διάστημα μέσου-σταθερής απόκλισης, ενώ η δεξιά γραφική παράσταση στο διάστημα μέσου-VaR. Αυτές οι δύο γραφικές παραστάσεις



Σχήμα 5.7: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser

παρουσιάζουν γιατί είναι χρήσιμο να εργαζόμαστε με τα αποδοτικά σύνορα μέσου-VaR. Είναι επειδή ο περιορισμός αξίας κινδύνου γίνεται μια κάθετη γραμμή, με την οποία είναι πολύ ευκολότερο να εργαστούμε. Το βέλτιστο σημείο υπολογίζεται με τη χρησιμοποίηση των αποδοτικών συνόρων μέσου-VaR (5.7) με $VaR_a = VaR_c$, το οποίο δίνει

$$VaR_c = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Λύνοντας αυτό ως προς μ_p έχουμε

$$\mu_{opt} = \frac{bz_\alpha^2 C_0 + dVaR_c - z_\alpha \sqrt{d((a - z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_c C_0 + cVaR_c^2)}}{cz_\alpha^2 - d}$$

Η αντίστοιχη σταθερή απόκλιση είναι

$$\sigma_{opt} = \left(\frac{-VaR_c - \mu_{opt}}{z_\alpha} \right)$$

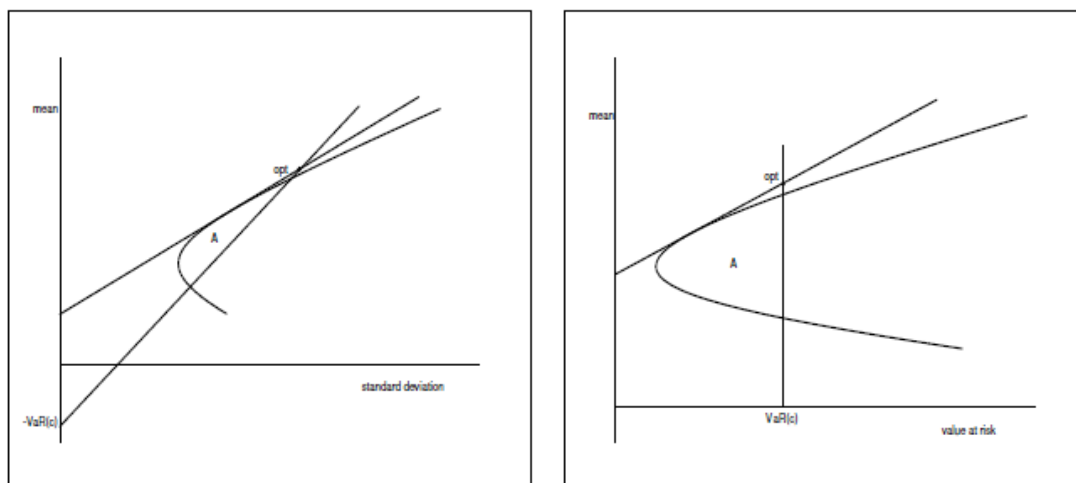
$$= \frac{z_\alpha(bC_0 + cVaR_c) - \sqrt{d((a - z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_cC_0 + cVaR_c^2)}}{d - cz_\alpha^2}$$

και η αξία κινδύνου (VaR) είναι ίση με VaR_c . Η βέλτιστη κατανομή ενεργητικών στοιχείων θ_{opt} βρίσκεται με τη χρησιμοποίηση του γεγονότος ότι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο βρίσκεται στα αποδοτικά σύνορα, έτσι χρησιμοποιώντας τον τύπο (2.3) που βρίσκεται στο κεφάλαιο Markowitz:

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0)$$

5.3.4 Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Εάν προσθέτουμε ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, τα αποδοτικά σύνορα αλλάζουν στο CML. Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι το χαρτοφυλάκιο όπου επιτυγχάνεται η μέγιστη απόδοση, ικανοποιώντας τον περιορισμό VaR. Στα κατωτέρω γραφήματα, ψάχνουμε την υψηλότερη απόδοση στην περιοχή A. Αυτό είναι στο σημείο opt, το σημείο τομής μεταξύ του CML και της γραμμής περιορισμού VaR.



Σχήμα 5.8: Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Για τον υπολογισμό αυτού του σημείου της τομής χρησιμοποιούμε το πλαίσιο μέσου-VaR, επειδή η γραμμή περιορισμού VaR είναι κάθετη. Θυμηθείτε ότι το

CML δίνεται από την (5.10). Το σημείο της τομής είναι στο σημείο όπου $VaR_a = VaR_c$, οπότε

$$\mu_{opt} = \frac{-sVaR_c + C_0 z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s}$$

Η αντίστοιχη σταθερή απόκλιση είναι

$$\sigma_{opt} = \frac{\mu_{opt} + VaR_c}{-z_\alpha} = -\frac{C_0 \mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s}$$

και η αξία κινδύνου VaR είναι VaR_c . Για τον υπολογισμό της βέλτιστης κατανομής ενεργητικών στοιχείων με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, κάνουμε το ίδιο πράγμα όπως κάναμε και πριν στα κεφάλαια Markowitz και Telser. Η βέλτιστη κατανομή αποτελείται από έναν συνδυασμό του χαρτοφυλακίου αγοράς και του ελεύθερου κινδύνου ενεργητικού στοιχείου. Υποθέστε ότι ένα μέρος Θ_m επενδύεται στην χαρτοφυλάκιο αγοράς και ένα μέρος Θ_f στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Το άθροισμα των δύο μερών ισούται με ένα. Επειδή οι αποδόσεις στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο δεν έχουν καθόλου σταθερή απόκλιση, η σταθερή απόκλιση χαρτοφυλακίων του βέλτιστου χαρτοφυλακίου δίνεται από

$$\sigma_{opt} = \sqrt{\Theta_m^2 \sigma_m^2 + \Theta_f^2 \cdot 0} = \Theta_m \sigma_m$$

όπου σ_m είναι η σταθερή απόκλιση στο χαρτοφυλάκιο αγοράς, που παράγεται στο κεφάλαιο Markowitz. Έτσι το μέρος που επενδύεται σε αυτό το χαρτοφυλάκιο αγοράς είναι

$$\Theta_m = \frac{\sigma_{opt}}{\sigma_m} = \frac{-\frac{C_0 \mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s}}{\frac{s}{b - c\mu_f} C_0} = \frac{(C_0 \mu_f + VaR_c)(c\mu_f - b)}{s(z_\alpha + s)C_0}$$

Έτσι το μέρος που επενδύεται στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο είναι

$$\Theta_f = 1 - \Theta_m = \frac{(a - b\mu_f + sz_\alpha)C_0 + VaR_c(b - c\mu_f)}{s(z_\alpha + s)C_0}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το

$$s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$$

Έτσι η βέλτιστη κατανομή με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο γίνεται

$$\theta_{opt} \equiv \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \theta_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Theta_m \theta_m \\ \Theta_f C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{VaR_c + \mu_f C_0}{s(s+z_\alpha)} \Sigma^{-1} (\mu_f \bar{1} - \mu) \\ \frac{(a - b\mu_f + sz_\alpha)C_0 + VaR_c(b - c\mu_f)}{s(z_\alpha + s)} \end{pmatrix}$$

Κεφάλαιο 6

Μεγιστοποίηση των μέτρων απόδοσης EVA και RAROC

Έχουμε μελετήσει τα προβλήματα βελτιστοποίησης με τις διαφορετικές αντικειμενικές συναρτήσεις. Στο πλαίσιο Markowitz, ο στόχος ήταν να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση χρησιμότητας $u = E(R_p) - \frac{1}{2}\gamma var(R_p)$. Αυτή η συνάρτηση εμφανίστηκε να είναι μια κυρτή καμπύλη μέσα στο πλαίσιο μέσου-σταθερής απόκλισης. Στο πλαίσιο Telser ο στόχος ήταν να μεγιστοποιήσει την αναμενόμενη απόδοση $E(R_p)$ υπό τον όρο κάποιου ελλείμματος ή περιορισμού αξίας κινδύνου. Σε αυτό το κεφάλαιο θα συζητήσουμε μερικά μοντέλα, βασισμένα στο κριτήριο Telser, αλλά με άλλες αντικειμενικές συναρτήσεις. Αυτές οι αντικειμενικές συναρτήσεις είναι βασισμένες στο αποκαλούμενο «οικονομικό προστιθέμενης αξίας» (Economic Value Added - EVA) και τον κίνδυνο που ρυθμίζεται από την απόδοση κεφαλαίου (Risk Adjusted Return On Capital - RAROC).

6.1 EVA και RAROC

EVA: η οικονομική προστιθέμενη αξία καθορίζεται ως εξής:

EVA = αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίων - κόστος του κεφαλαίου

Όσο υψηλότερη η EVA, τόσο καλύτερη η απόδοση του επενδυτή. Η αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίων δίνεται από το $E(R_p)$. Αλλά επειδή υπάρχουν δαπάνες για το κεφάλαιο, η αναμενόμενη απόδοση διορθώνεται γιατί αυτές τις δαπάνες. Το κόστος του κεφαλαίου αποτελείται από δύο παραμέτρους. Είναι το κόστος του ποσοστού κεφαλαίου r_{cap} που πολλαπλασιάζετε με το ποσό κεφαλαίου. Υπάρχουν δύο κύρια ρεύματα: μερικοί λένε ότι το ποσό κεφαλαίου είναι το κεφάλαιο δικαιοσύνης επενδυτών C_0 (ή το διατιθέμενο κεφάλαιο), ενώ μερικοί λένε ότι είναι η αξία κινδύνου VaR (ή το καταναλωμένο κεφάλαιο). Σημειώστε ότι η EVA είναι ένα απόλυτο μέτρο απόδοσης, επειδή το συνολικό κόστος του κεφαλαίου αφαιρείται. Έτσι είναι ονομαστικό ποσό, όχι ένα ποσοστό.

RAROC: Υπάρχουν πολυάριθμοι διαφορετικοί ορισμοί του μέτρου απόδοσης RAROC. Ο ορισμός του κινδύνου που ρυθμίζεται από την απόδοση κεφαλαίου που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτήν την διατριβή είναι:

RAROC = αναμενόμενη απόδοση χαρτοφυλακίων / ποσό κεφαλαίου

Όσο υψηλότερο το RAROC, τόσο καλύτερη η απόδοση επενδυτών. Το μέγιστο RAROC δίνει την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση, σχετικά με το ποσό κεφαλαίου, έτσι το RAROC είναι ένα σχετικό μέτρο κινδύνου. Πάλι, το ποσό κεφαλαίου μπορεί να καθοριστεί σαν διατιθέμενο κεφάλαιο C_0 , ή το καταναλωμένο κεφάλαιο VaR. Ο ακόλουθος πίνακας παρουσιάζει τα μέτρα απόδοσης που περιγράφονται ανωτέρω:

	allocated capital	consumed capital
EVA	$E(R_p) - r_{cap}C_0$	$E(R_p) - r_{cap}VaR_\alpha$
RAROC	$\frac{E(R_p)}{C_0}$	$\frac{E(R_p)}{VaR_\alpha}$

Πίνακας 6.1: Επισκόπηση των μέτρων απόδοσης EVA και RAROC

Στα επόμενα τμήματα θα λυθούν τα νέα μοντέλα βασισμένα στα μέτρα απόδοσης EVA και RAROC.

6.2 Νέα μοντέλα Telser

Έχουμε δει τέσσερα νέα μέτρα απόδοσης στον ανωτέρω πίνακα. Αυτά τα τέσσερα μέτρα μπορούν όλα να εφαρμοστούν στο μοντέλο Telser με το περιορισμό αξίας κινδύνου, με τη ρύθμιση τους ως αντικειμενική συνάρτηση. Λύνουμε τα τέσσερα αποκτηθέντα νέα μοντέλα Telser στα επόμενα τέσσερα τμήματα. Το πέμπτο τμήμα συγκρίνει μερικές βέλτιστες λύσεις τη μια με την άλλη.

6.2.1 EVA με το διατιθέμενο κεφάλαιο

Χρησιμοποιώντας τη EVA με το διατιθέμενο κεφάλαιο ως αντικειμενική συνάρτηση, παίρνουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης

$$Max \left\{ E(R_p) - r_{cap}C_0 \left| \begin{array}{l} E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta \\ P(R_p \leq -VaR_c) \leq \alpha \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Επειδή $r_{cap}C_0$ είναι μια σταθερά, και αναδιατύπωση του περιορισμού ελλείμματος, αυτό το πρόβλημα γίνεται

$$Max \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p = \mu^T \theta \\ VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Το οποίο αναγνωρίζουμε ως το πρόβλημα Telser του προηγούμενου κεφαλαίου. Έτσι η λύση δίνεται από

$$\mu_{opt} = \mu_T = \frac{bz_\alpha^2 C_0 + dVaR_c - z_\alpha \sqrt{d((a - z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_c C_0 + cVaR_c^2)}}{cz_\alpha^2 - d} \quad (6.1)$$

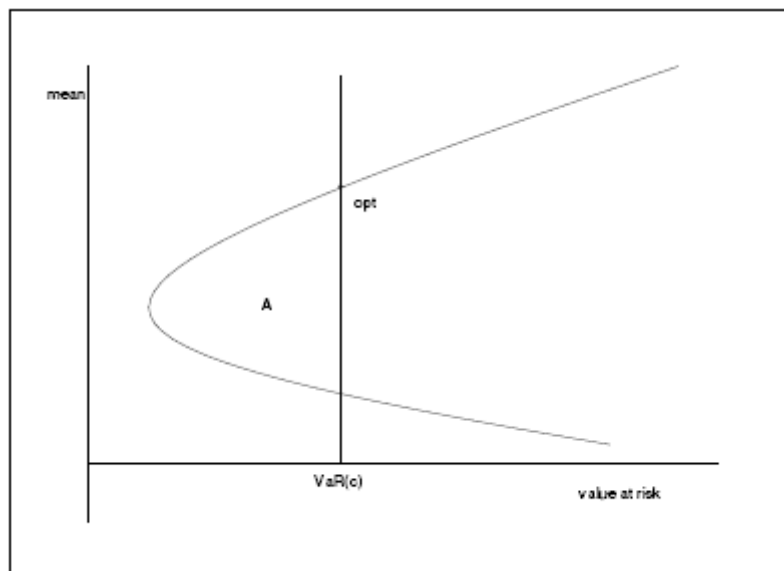
με την αντίστοιχη σταθερή απόκλιση

$$\sigma_{opt} = \sigma_T = \frac{z_\alpha(bC_0 + cVaR_c) - \sqrt{d((a - z_\alpha^2)C_0^2 + 2bVaR_c C_0 + cVaR_c^2)}}{d - cz_\alpha^2} \quad (6.2)$$

και η αξία κινδύνου είναι ίση με VaR_c . Η βέλτιστη κατανομή προτερημάτων θ_{opt} είναι

$$\theta_{opt} = \theta_T = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((c\mu - b\bar{1})\mu_T + (a\bar{1} - b\mu)C_0)$$

Στο διάστημα μέσου- VaR, η γραφική αναπαράσταση μοιάζει με το ακόλουθο.



Σχήμα 6.1: Βέλτιστο "EVA με διατιθέμενο κεφάλαιο" χαρτοφυλάκιο

6.2.2 EVA με το καταναλωμένο κεφάλαιο

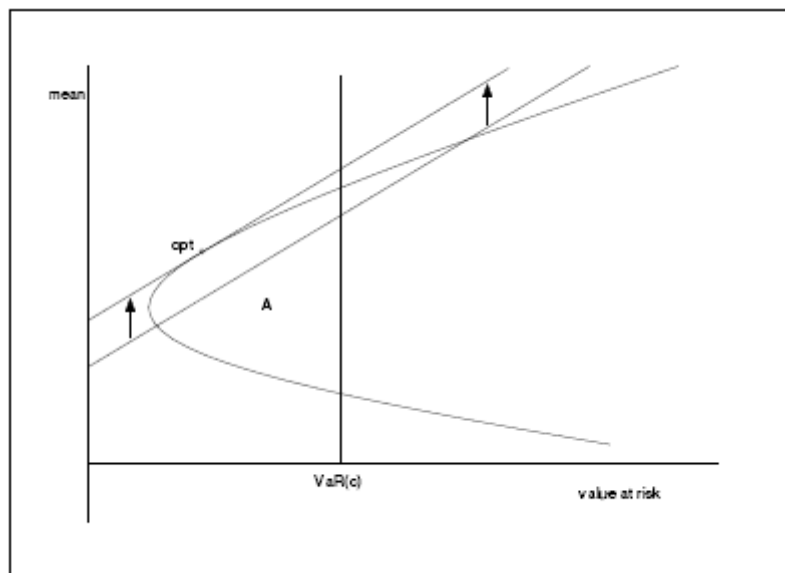
Εάν το καταναλωμένο κεφάλαιο χρησιμοποιείται αντί του διατιθέμενου κεφαλαίου, στην αντικειμενική συνάρτηση EVA, το πρόβλημα βελτιστοποίησης γίνεται

$$\text{Max} \left\{ E(R_p) - r_{cap} VaR_\alpha \mid \begin{array}{l} E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta \\ VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right\}$$

Η αντικειμενική συνάρτηση, $E(R_p) - r_{cap} VaR_\alpha \equiv u$ είναι μια γραμμή στο μέσο-VaR πλαίσιο. Η γραμμή δίνεται από

$$\mu_p = u + r_{cap} VaR_\alpha$$

και η μεγιστοποίηση της EVA σημαίνει μεγιστοποίηση της u , ή μετακίνηση της γραμμής όσο το δυνατόν ψηλότερα στην εφικτή περιοχή A, κρατώντας σταθερό το συντελεστή κλίσεων r_{cap} .

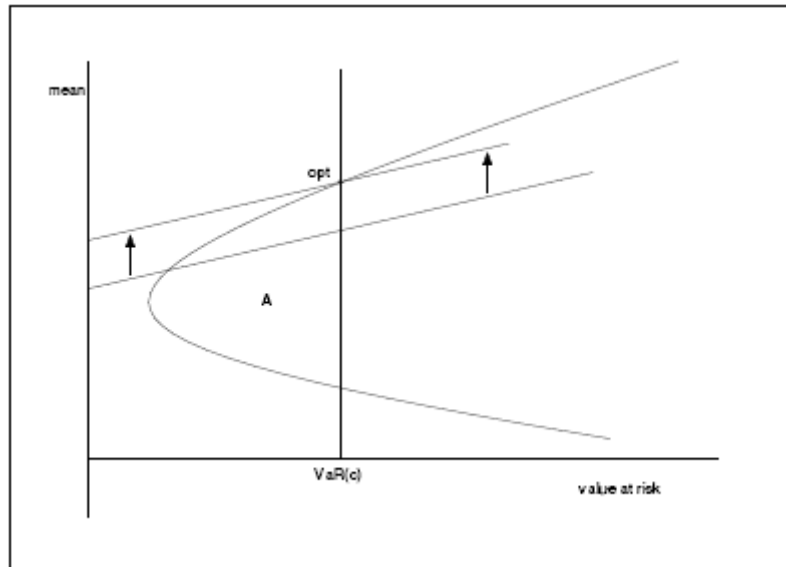


Σχήμα 6.2: Κινώντας την EVA-γραμμή με το μεγάλο r_{cap}

Καλούμε αυτήν την γραμμή EVA-γραμμή. Η εφικτή περιοχή A είναι η περιοχή μεταξύ της γραμμής ελλείμματος και των αποδοτικών συνόρων.

Κινώντας την EVA-γραμμή όσο το δυνατόν ψηλότερα βρίσκουμε το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο opt. Όπως μπορούμε να δούμε στο γράφημα, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο διαφέρει από το σημείο Telser. Σε αυτό το βέλτιστο, η κλίση της EVA-γραμμής (r_{cap}) είναι ίση με την κλίση των αποδοτικών συνόρων. Αλλά αυτό το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο εξαρτάται έντονα από την αξία του r_{cap} , κλίση της EVA-γραμμής.

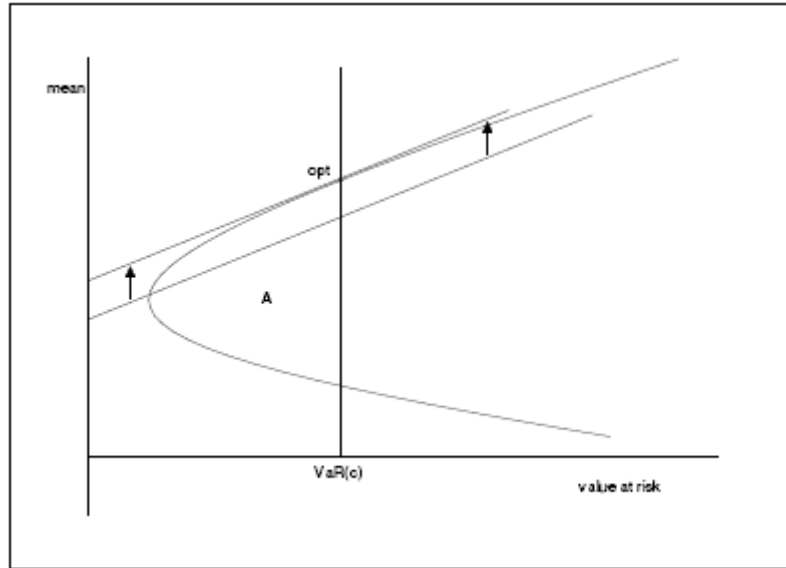
Εάν η κλίση της EVA-γραμμής είναι πολύ μικρότερη (που σημαίνει ότι το r_{cap} είναι πολύ μικρό), μπορούμε να πάρουμε κατωτέρω γράφημα.



Σχήμα 6.3: Κίνηση της EVA-γραμμής με το μικρό r_{cap}

Παρατηρήστε τη διαφορά από την κατάσταση πριν. Επειδή η εφικτή περιοχή, το A είναι οριοθετημένη από τη γραμμή περιορισμού ελλείμματος, η υψηλότερη EVA-γραμμή κόβει τα αποδοτικά σύνορα στο σημείο Telser, και το βέλτιστο δεν είναι στο εφαπτομενικό σημείο των αποδοτικών συνόρων και της Eνα-γραμμής.

Έτσι, η βέλτιστη κατανομή είναι είτε στο σημείο όπου η κλίση της EVA-γραμμής και τα αποδοτικά σύνορα είναι τα ίδια (δείτε το πρώτο σχήμα, στην 1^η περίπτωση) ή στο σημείο Telser (δεύτερο σχήμα, 2^η περίπτωση), και εξαρτάται από την κλίση της EVA-γραμμής, r_{cap} , σε ποια περίπτωση είμαστε. Η κρίσιμη καμπή μεταξύ των δύο περιπτώσεων είναι όπου η EVA-γραμμή είναι εφαπτομένη στα αποδοτικά σύνορα, και το εφαπτομενικό σημείο είναι ακριβώς στο σημείο Telser, το οποίο παρουσιάζεται στο κατωτέρω γράφημα.



Σχήμα 6.4: Το εφαπτομενικό σημείο είναι το σημείο Telser

Θα υπολογίσουμε σε για αξία για του r_{cap} επιτυγχάνεται αυτή η κρίσιμη καμπή. Επομένως πρέπει να εξισώσουμε την κλίση των αποδοτικών συνόρων στο σημείο Telser και τη κλίση της EVA-γραμμής, ή

$$\left. \frac{\partial \mu_p}{\partial VaR_\alpha} \right|_{\mu_p = \mu_T} = r_{cap} \iff \left. \frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \mu_p} \right|_{\mu_p = \mu_T} = \frac{1}{r_{cap}} \quad (6.3)$$

Θυμηθείτε ότι τα αποδοτικά σύνορα (στο διάστημα μέσου-VaR) δίνονται από

$$VaR_\alpha = -\mu_p - z_\alpha \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}$$

Έτσι η παράγωγος του VaR_α όσον αφορά μ_p δίνεται από

$$\frac{\partial VaR_\alpha}{\partial \mu_p} = -1 - \frac{z_\alpha (c\mu_p - bC_0)}{d \sqrt{\frac{1}{d} (c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = \frac{-d\sigma_p - z_\alpha (c\mu_p - bC_0)}{d\sigma_p}$$

Χρησιμοποιώντας την παράγωγο αυτή στην (6.3) και λύνοντας για το r_{cap} , παίρνουμε

$$r_{cap} = \frac{d\sigma_T}{-d\sigma_T - z_\alpha (c\mu_T - bC_0)} \equiv r_{cap}^*$$

όπου μ_T και σ_T είναι ο μέσος και σταθερή απόκλιση στο σημείο Telser, λαμβάνοντας υπόψη τις (6.1) και (6.2) αντίστοιχα. Έτσι έχουμε την περίπτωση 1 εάν $r_{cap} > r_{cap}^*$, και την περίπτωση 2 εάν $r_{cap} \leq r_{cap}^*$.

Θα προσδιορίσουμε τις βέλτιστες τιμές. Το βέλτιστο στην περίπτωση 2 είναι το χαρτοφυλάκιο Telser, το οποίο ήδη υπολογίσαμε. Ας υπολογίσουμε το βέλτιστο στην περίπτωση 1. Στο βέλτιστο (δείτε το πρώτο πλαίσιο), η (αντίστροφος) κλίση του αποδοτικού συνόρου είναι ίση με (το αντίστροφο) το r_{cap} , για τα οποία $r_{cap} > r_{cap}^*$. Έτσι

$$\frac{\partial VaR_{\alpha}}{\partial \mu_p} = \frac{1}{r_{cap}}$$

$$-1 - \frac{z_{\alpha}(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = \frac{1}{r_{cap}} \quad (6.4)$$

Η επίλυση αυτού για μ_p δίνει (μετά από απομόνωση, ύψωμα στο τετράγωνο και επίλυση του δευτεροβάθμιου προβλήματος),

$$\mu_{opt} = \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}} \right) \frac{1}{c} C_0$$

όπου το K είναι μια σταθερά που καθορίζεται από $K = \frac{z_{\alpha} r_{cap}}{r_{cap} + 1}$. Όπου ισχύει ότι $K < 0$. Αυτό το αποτέλεσμα μπορείτε να επιτευχθεί επίσης με την παρατήρηση ότι η (6.4) μπορεί να γραφτεί ως

$$-1 - \frac{1}{r_{cap}} - \frac{z_{\alpha}(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = 0$$

Εάν διαιρούμε αυτό με $(r_{cap} + 1)/r_{cap}$, παίρνουμε

$$-1 - \frac{\frac{z_{\alpha} r_{cap}}{r_{cap} + 1}(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = -1 - \frac{K(c\mu_p - bC_0)}{d\sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_p^2 - 2bC_0\mu_p + aC_0^2)}} = 0$$

Αυτό είναι η ίδια έκφραση με τον τύπο (5.11) στο τμήμα ελάχιστης αξίας κινδύνου VaR, με τη διαφορά ότι το z_{α} αντικαθίσταται από το K . Έτσι η λύση της (6.4) δίνεται από τη λύση μ_{mvr} της (5.11), με αντικατάσταση του z_{α} από το K . Αυτό δίνει τον ίδιο βέλτιστο μέσο όρο.

Η αντιστοιχία σ_{opt} είναι

$$\sigma_{opt} = \sqrt{\frac{1}{d}(c\mu_{opt}^2 - 2bC_0\mu_{opt} + aC_0^2)} = \frac{-K}{\sqrt{cK^2 - d}} C_0$$

και η αξία κινδύνου VaR είναι ίση με

$$VaR_{\alpha} = -\mu_{opt} - z_{\alpha}\sigma_{opt} = \left(-\frac{b}{c} + \frac{cz_{\alpha}K - d}{c\sqrt{cK^2 - d}} \right) C_0$$

όποιος ολοκληρώνει το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο στην περίπτωση 1. Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε το ακόλουθο για το βέλτιστο μ_p όταν ο στόχος είναι να μεγιστοποιηθεί η EVA για το καταναλωμένο κεφάλαιο:

$$\mu_{opt} = \begin{cases} \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}}\right) \frac{1}{c} C_0 & \text{if } r_{cap} > r_{cap}^* \\ \mu_T & \text{if } r_{cap} \leq r_{cap}^* \end{cases} \quad \text{with } K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap} + 1}$$

όπου το μ_T , το μέσο Telser, δίνεται από την (6.1). Η αντίστοιχη βέλτιστη κατανομή θ_{opt} είναι στα αποδοτικά σύνορα:

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0)$$

6.2.3 RAROC με το διατιθέμενο κεφάλαιο

Αφήνουμε την αντικειμενική συνάρτηση βασισμένη στην EVA και εξετάζουμε τη συνάρτηση βασισμένη στη RAROC. Πρώτα βλέπουμε την περίπτωση όπου εξετάζουμε το διατιθέμενο κεφάλαιο. Το πρόβλημα βελτιστοποίησης RAROC γίνεται

$$Max \left\{ \frac{E(R_p)}{C_0} \left| \begin{array}{l} E(R_p) = \mu^T \theta \\ P(R_p \leq -VaR_c) \leq \alpha \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Επειδή C_0 είναι μια σταθερά, και αναδιατύπωση του περιορισμού ελλείμματος, αυτό το πρόβλημα γίνεται

$$Max \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p = \mu^T \theta \\ VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Το οποίο είναι το ίδιο με το πρόβλημα Telser και το πρόβλημα βελτιστοποίησης της EVA με το διατιθέμενο κεφάλαιο. Έτσι οι λύσεις αυτού του προβλήματος είναι οι ίδιες με τις λύσεις στο τμήμα της EVA με διατιθέμενο κεφάλαιο.

6.2.4 RAROC με το καταναλωμένο κεφάλαιο

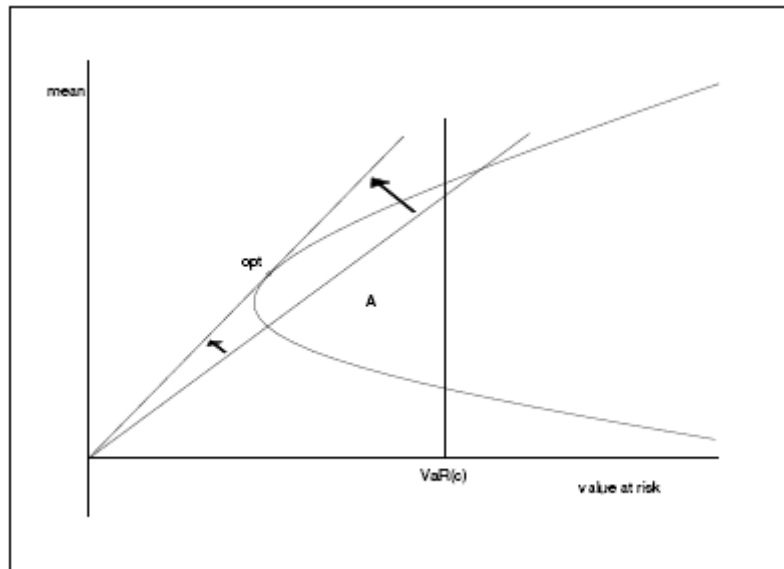
Το πρόβλημα βελτιστοποίησης RAROC όταν εξετάζουμε το καταναλωμένο κεφάλαιο είναι

$$Max \left\{ \frac{E(R_p)}{VaR_\alpha} \left| \begin{array}{l} E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta \\ VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Η αντικειμενικό συνάρτηση $\frac{\mu_p}{\text{VaR}_\alpha} \equiv u$ μπορεί να γραφτεί ως γραμμή RAROC

$$\mu_p = u \text{VaR}_\alpha$$

έτσι μεγιστοποίηση του RAROC αντιστοιχεί με την εύρεση της μέγιστης κλίσης u της γραμμής προέλευσης, η οποία έχει ακόμα την επικάλυψη με την εφικτή περιοχή A.

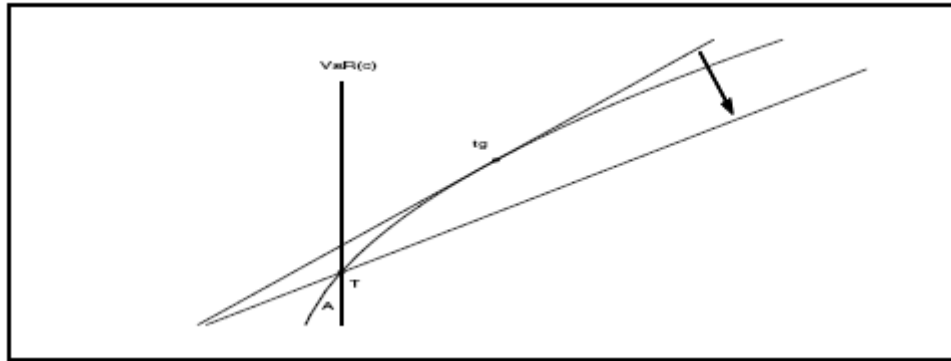


Σχήμα 6.5: Μεγιστοποίηση της κλίσης της γραμμής RAROC.

Βλέπουμε ότι το βέλτιστο είναι το εφαπτομενικό σημείο στο πλαίσιο μέσου-VaR, όπως καθορίζεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Θυμηθείτε ότι αυτό είναι το ίδιο εφαπτομενικό σημείο όπως στο μέσο-σταθερό πλαίσιο απόκλισης. Αυτό σημαίνει ότι

$$\mu_{opt} = \frac{a}{b} C_0, \quad \sigma_{opt} = \frac{\sqrt{a}}{b} C_0, \quad \text{VaR}_\alpha = -\frac{\sqrt{a}}{b} (\sqrt{a} + z_\alpha) C_0$$

Σημειώστε ότι μπορεί να υπάρξει ένα πρόβλημα εάν η εφαπτομενική αξία για το VaR_α , $-\frac{\sqrt{a}}{b} (\sqrt{a} + z_\alpha) C_0$, είναι στη δεξιά πλευρά της γραμμής ελλείμματος VaR_c . Κατόπιν το εφαπτομενικό VaR_α δεν θα είναι στην εφικτή περιοχή A. Κατά συνέπεια πρέπει να μειώσουμε την κλίση της γραμμής RAROC μέχρις ότου αγγίξει την εφικτή περιοχή. Κατόπιν το βέλτιστο κινείται προς το σημείο Telser, όπως μπορούμε να δούμε στο κατωτέρω πλαίσιο. Έτσι μπορούμε να τον συνοψίσουμε ως εξής:



Σχήμα 6.6: Η κατάσταση εάν η εφαπτομενική αξία κινδύνου υπερβαίνει το VaR_c

$$\mu_{opt} = \begin{cases} \mu_T & \text{if } VaR_c < -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0 \\ \mu_{tg} & \text{if } VaR_c \geq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0 \end{cases}$$

και πάλι η αντίστοιχη βέλτιστη κατανομή θ_{opt} είναι στα αποδοτικά σύνορα:

$$\theta_{opt} = \frac{1}{d} \Sigma^{-1} ((c\mu - b\bar{1})\mu_{opt} + (a\bar{1} - b\mu)C_0)$$

6.2.5 Σύγκριση EVA-RAROC

Μια απλή σύγκριση μπορεί να γίνει μεταξύ των μέτρων απόδοσης EVA και RAROC. Ήδη έχουμε δει ότι η EVA είναι ένα ονομαστικό ποσό και RAROC είναι ένα ποσοστό. Αλλά ποια είναι η σχέση μεταξύ των βέλτιστων;

Εάν χρησιμοποιείται το διατιθέμενο κεφάλαιο, τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια είναι τα ίδια επειδή και για τα δύο περιπτώσεις το βέλτιστο είναι το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser. Είναι πιο ενδιαφέρον να εξετάσουμε την περίπτωση όπου χρησιμοποιείται το καταναλωμένο κεφάλαιο. Συζητάμε τέσσερις περιπτώσεις.

Η περίπτωση 1 υποθέτει ότι

$$r_{cap} \leq r_{cap}^* \quad \text{and} \quad VaR_c \leq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

Κατόπιν και στις δύο καταστάσεις το χαρτοφυλάκιο Telser είναι βέλτιστο, έτσι το βέλτιστο με μέτρο απόδοσης EVA είναι το ίδιο με το βέλτιστο με μέτρο απόδοσης RAROC. Γράφουμε $\mu_{opt}^{EVA} = \mu_{opt}^{RAROC}$.

Η περίπτωση 2 αυτό αλλάζει όταν εμφανίζεται η ακόλουθη κατάσταση:

$$r_{cap} \leq r_{cap}^* \quad \text{and} \quad VaR_c > -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

Κατόπιν το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο της EVA παραμένει το βέλτιστο Telser, αλλά για το RAROC η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου αλλάζει στο εφαπτομενικό χαρτοφυλάκιο. Έτσι σε αυτήν την περίπτωση έχουμε $\mu_{opt}^{EVA} > \mu_{opt}^{RAROC}$

Η περίπτωση 3 η τρίτη πιθανή κατάσταση είναι αυτή

$$r_{cap} > r_{cap}^* \quad \text{and} \quad VaR_c \leq -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο με μέτρο απόδοσης EVA είναι μικρότερο από το χαρτοφυλάκιο Telser, όποιο είναι ίσο με το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο RAROC, έτσι $\mu_{opt}^{EVA} < \mu_{opt}^{RAROC}$.

Η περίπτωση 4 η τελευταία περίπτωση είναι όταν εμφανίζονται τα εξής:

$$r_{cap} > r_{cap}^* \quad \text{and} \quad VaR_c > -\frac{\sqrt{a}}{b}(\sqrt{a} + z_\alpha)C_0$$

Τώρα έχουμε ότι

$$\mu_{opt}^{EVA} = \left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}} \right) \frac{1}{c} C_0, \quad \mu_{opt}^{RAROC} = \frac{a}{b} C_0$$

Υπολογίζουμε για ποια αξία του r_{cap} αυτά τα δύο βέλτιστα είναι τα ίδια. Κατόπιν

$$\left(b + \frac{d}{\sqrt{cK^2 - d}} \right) \frac{1}{c} C_0 = \frac{a}{b} C_0$$

Το όποιο οδηγεί στην εύκολη έκφραση

$$K = -\sqrt{a}$$

Επειδή $K = \frac{z_\alpha r_{cap}}{r_{cap} + 1}$, βλέπουμε μετά από έναν μικρό υπολογισμό ότι

$$r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}}$$

Έτσι εάν το κόστος του κύριου ποσοστού είναι ίσο με αυτήν την αξία, έχουμε ότι $\mu_{opt}^{EVA} = \mu_{opt}^{RAROC}$. Εάν η αξία για το r_{cap} είναι μικρότερη, η γραμμή της EVA παίρνει μια μικρότερη κλίση, έτσι ο βέλτιστος μέσος EVA κινείται προς τα δεξιά. Με αντίστοιχο τρόπο, εάν το r_{cap} είναι μεγαλύτερο το βέλτιστο κινείται προς τα αριστερά. Ολοκληρώνοντας μπορούμε να πούμε τα εξής για αυτήν την τέταρτη περίπτωση:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_{opt}^{EVA} < \mu_{opt}^{RAROC} & \text{if } r_{cap} > \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}} \\ \mu_{opt}^{EVA} = \mu_{opt}^{RAROC} & \text{if } r_{cap} = \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}} \\ \mu_{opt}^{EVA} > \mu_{opt}^{RAROC} & \text{if } r_{cap} < \frac{-\sqrt{a}}{z_\alpha + \sqrt{a}} \end{array} \right.$$

Θυμηθείτε ότι σε κάθε περίπτωση θα πρέπει να έχουμε σε αυτήν την κατάσταση $r_{cap} > r_{cap}^*$.

6.3 Μοντέλα με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Όπως με τα περισσότερα μοντέλα, μπορούμε να προσθέσουμε το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο με το σταθερό ποσοστό απόδοσης μ_f . Θυμηθείτε ότι τα αποδοτικά σύνορα αλλάζουν στη γραμμή κεφαλαιαγοράς, η οποία δίνεται από

$$\mu_p = \frac{-s}{z_\alpha + s} VaR_\alpha + \frac{z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s} C_0 \quad \text{with } s = \sqrt{c\mu_f^2 - 2b\mu_f + a}$$

όταν εργαζόμαστε στο διάστημα μέσου-VaR.

6.3.1 EVA

Για τη μεγιστοποίηση του EVA, κατά την εξέταση του διατιθέμενου κεφαλαίου, μπορούμε να εργαστούμε όπως στο προηγούμενο τμήμα χωρίς το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Επειδή το διατιθέμενο κεφάλαιο είναι σταθερό, το πρόβλημα μεγιστοποίησης EVA

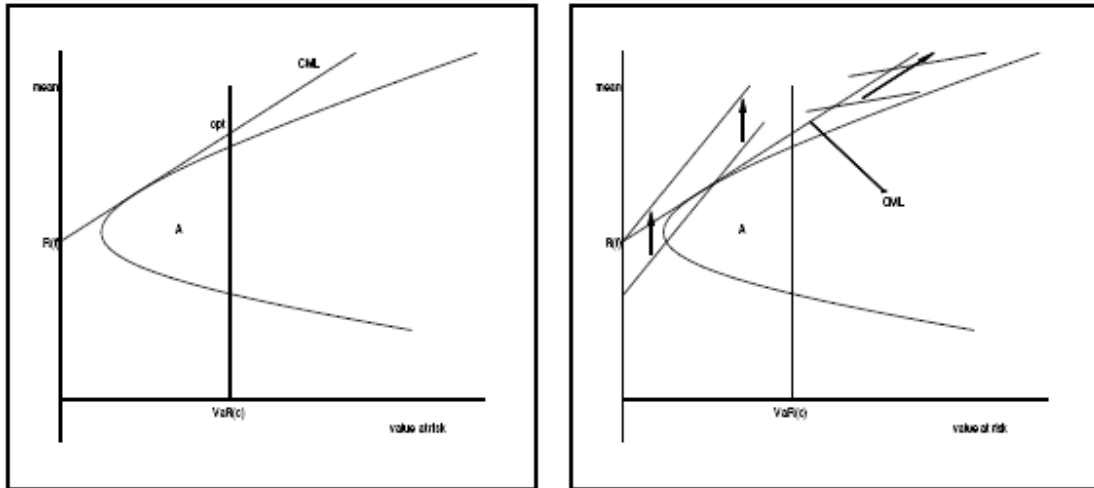
$$Max \left\{ E(R_p) - r_{cap} C_0 \left| \begin{array}{l} E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ P(R_p \leq -VaR_c) \leq \alpha \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Μπορεί να γραφτεί ως

$$Max \left\{ \mu_p \left| \begin{array}{l} \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \bar{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

Του οποίου η λύση είναι ακριβώς το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser, όπως υπολογίσαμε στον προηγούμενο κεφάλαιο. Δείτε επίσης το κάτω αριστερό πλαίσιο για μια γραφική άποψη του προβλήματος και της λύσης. Οι βέλτιστες τιμές είναι

$$\mu_{opt} = \frac{-sVaR_c + C_0 z_\alpha \mu_f}{z_\alpha + s}, \quad \sigma_{opt} = -\frac{C_0 \mu_f + VaR_c}{z_\alpha + s}, \quad VaR_\alpha = VaR_c$$



Σχήμα 6.7: Λύσεις μεγιστοποίησης του μέτρου απόδοσης EVA με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Εάν το μέτρο απόδοσης της EVA εξετάζει το καταναλωμένο κεφάλαιο, το πρόβλημα αλλάζει. Η λύση του προβλήματος

$$Max \left\{ E(R_p) - r_{cap} VaR_\alpha \left\{ \begin{array}{l} E(R_p) = \mu_p = \mu^T \theta + \mu_f \theta_f \\ VaR_\alpha \leq VaR_c \\ \mathbf{1}^T \theta + \theta_f = C_0 \end{array} \right. \right\}$$

πάλι βρίσκει το μέγιστο u στην EVA-γραμμή

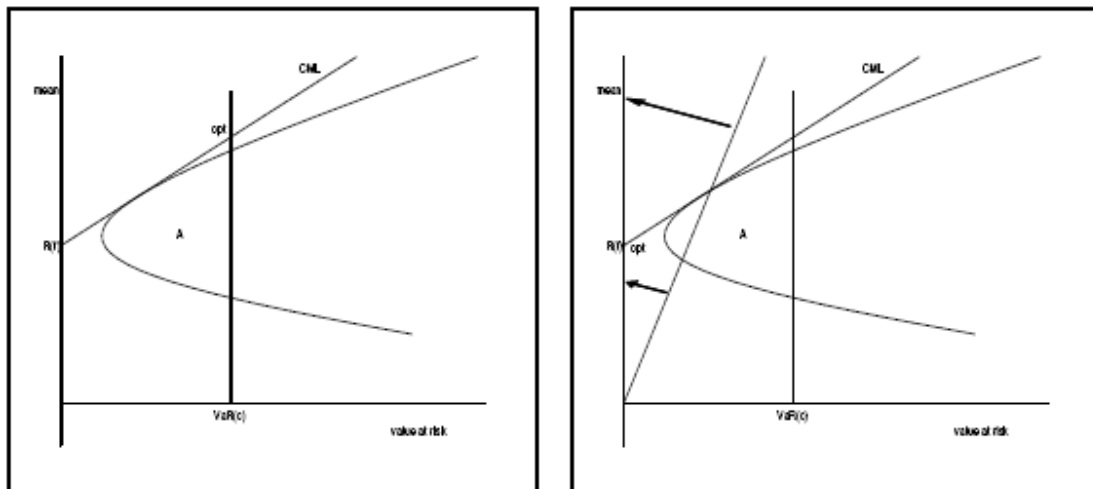
$$\mu_p = u + r_{cap} VaR_\alpha$$

με την κλίση r_{cap} . Αλλά επειδή τα αποδοτικά σύνορα είναι το CML (με την κλίση $\frac{-s}{z_\alpha + s}$ στο διάστημα μέσου-VaR), βλέπουμε στο δεξί πλαίσιο επάνω ότι υπάρχουν τρεις δυνατότητες. Εάν η κλίση της EVA-γραμμής είναι μεγαλύτερη από την κλίση CML, η υψηλότερη EVA-γραμμή ξεκινάει στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, το οποίο θα είναι το βέλτιστο. Εάν η κλίση του CML είναι μεγαλύτερη από την κλίση της Eνα-γραμμής, η EVA-γραμμή θα κινηθεί επάνω μέχρις ότου φθάσει το χαρτοφυλάκιο Telser, το οποίο θα είναι το βέλτιστο. Εάν οι δύο κλίσεις είναι ίδιες, κάθε σημείο στο CML είναι βέλτιστο, εφ' όσον μένει στην αριστερή πλευρά της γραμμής περιορισμού VAR.

Είναι σαφές ότι αυτή η κατάσταση της μεγιστοποίησης της οικονομικής προστιθέμενης αξίας EVA με το καταναλωμένο κεφάλαιο και το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο δεν είναι πραγματικά χρήσιμη, επειδή το βέλτιστο σημείο είναι είτε στο αριστερό τεταρτημόριο (που τα επενδύει όλα στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο) ή είναι το χαρτοφυλάκιο Telser. Κατά συνέπεια όταν υπάρχει ένα ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, το μέτρο απόδοσης EVA δεν είναι μια κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση.

6.3.2 RAROC

Για το πρόβλημα μεγιστοποίησης RAROC με το διατιθέμενο κεφάλαιο και το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, παίρνουμε το ίδιο αποτέλεσμα όπως με το μέτρο απόδοσης της EVA με το διατιθέμενο κεφάλαιο. Επειδή η μεγιστοποίηση του $E(R_p)/C_0$ (με C_0 μια σταθερά) είναι ίδια όπως η μεγιστοποίηση του $E(R_p)$, η εύρεση του βέλτιστου είναι ακριβώς το πρόβλημα Telser με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Έτσι το βέλτιστο σημείο είναι το σημείο στην εφικτή περιοχή με τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση, η οποία είναι το σημείο τομής της CML και της γραμμής περιορισμού VaR. Αυτό παρουσιάζεται στο αριστερό κατωτέρω γράφημα.



Σχήμα 6.8: Λύσεις μεγιστοποίησης RAROC με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο

Εάν εξετάσουμε το καταναλωμένο κεφάλαιο, η λύση είναι διαφορετική. Ξέρουμε ότι η μεγιστοποίηση της αναλογίας $E(R_p)/VaR_a$ σημαίνει εύρεση της μέγιστης κλίσης της γραμμής προέλευσης (την καλούμε RAROC -γραμμή), η οποία βρίσκεται ακόμα στην εφικτή περιοχή. Αλλά, όπως το δεξί ανωτέρω πλαίσιο παρουσιάζει, μπορούμε να περιστρέψουμε τη RAROC -γραμμή μέχρι να φθάσει στο ελεύθερο κινδύνου σημείο. Παρατηρήστε ότι δεν σταματά στο εφαιπτομενικό σημείο, όπως συνέβη στην κατάσταση χωρίς το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο. Επειδή η αξία κινδύνου VaR τείνει στο μηδέν

κατά την κίνηση προς το ελεύθερο κινδύνου σημείο, η αναλογία RAROC τείνει στο άπειρο. Έτσι όταν περιλαμβάνεται το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, το RAROC με καταναλωμένο κεφάλαιο μπορεί να πάει στο άπειρο καθώς όλα θα επενδυθούν στο ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, έτσι το μέτρο απόδοσης αυτό δεν είναι ρεαλιστικό.

Συνοψίζοντας μπορούμε να πούμε ότι, εάν προστίθεται το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο, τόσο το EVA όσο και το μέτρο απόδοσης RAROC δίνει το χαρτοφυλάκιο Telser (με το ελεύθερο κινδύνου ενεργητικό στοιχείο) σαν βέλτιστο χαρτοφυλάκιο, εάν εξετάζουμε το διατιθέμενο κεφάλαιο. Αλλά εάν χρησιμοποιείται το καταναλωμένο κεφάλαιο για τα μέτρα απόδοσης, οι βέλτιστες λύσεις είναι είτε το ελεύθερο κινδύνου χαρτοφυλάκιο είτε το χαρτοφυλάκιο Telser.

Κεφάλαιο 7

Μοντέλο αβεβαιότητας των παραμέτρων εισαγωγής

Αυτό το κεφάλαιο εξετάζει το ρόλο της παραμέτρου αβεβαιότητας στα μοντέλα που έχουμε περιγράψει. Παρουσιάζει τι συμβαίνει όταν οι επιλεγμένες παράμετροι μ και σ δεν είναι ορισμένες. Αυτό, επειδή στην πραγματικότητα, είναι πολύ δύσκολο να υπολογιστούν οι σωστές τιμές αυτών των παραμέτρων και αυτές οι σωστές τιμές αλλάζουν καθημερινά.

7.1 Επισκόπηση

Υπάρχουν διάφορες τεχνικές που προτείνονται στη λογοτεχνία για να χειριστούν αυτήν την παράμετρο αβεβαιότητας. Η βασική σκέψη είναι να μειωθεί η ευαισθησία των βέλτιστων χαρτοφυλακίων στην εισαγωγή αβεβαιότητας. Με άλλα λόγια, εάν οι παράμετροι εισαγωγής μ και σ αλλάζουν κατά ένα μικρό ποσό, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο δεν πρέπει να αλλάξει πολύ.

Οι Frost και Savarino προτείνουν να περιορίσουν τα βάρη χαρτοφυλακίων, έτσι ένα ενιαίο ενεργητικό στοιχείο να μην γίνεται πάρα πολύ σημαντικό για το χαρτοφυλάκιο. Ο Chopra προτείνει τη χρήση ενός εκτιμητή James-Stein για τα μέσα, ενώ οι Black και Litterman προτείνουν την εκτίμηση κατά Bayesian των μέσων και των συνδιακυμάνσεων. Ο Jorion ερεύνησε τις εκτιμήσεις των Bayes και Stein. Υπάρχουν επίσης προσεγγίσεις βασισμένες σε δείγμα είτε σε σενάριο, όπως περιγράφεται στα έγγραφα Michaud και Ziemba. Όλες αυτές οι μέθοδοι μειώνουν την ευαισθησία της κατανομής χαρτοφυλακίων στις παραμέτρους εισαγωγής, αλλά δεν παρέχουν οποιεσδήποτε εγγυήσεις στην απόδοση χαρτοφυλακίων.

Μια πρόταση να διαμορφωθεί η παράμετρος της αβεβαιότητας σε αυτήν την διατριβή είναι η ακόλουθη. Προέκυψε μετά από πολλές συζητήσεις με τους στατιστικούς και οικονομοτεχνικούς μέσα από Rabobank. Καθορίζουμε μια συνάρτηση κατανομής πιθανότητας για τις αβέβαιες παραμέτρους μ και σ , την οποία περιλαμβάνουμε στο πρόβλημα βελτιστοποίησης. Η συνάρτηση, που είναι η αναμενόμενη απόδοση στο πλαίσιο Telser, πρέπει τώρα να ασχοληθεί όχι μόνο με την αβεβαιότητα των αποδόσεων, η οποία δίνεται από τα μ και σ , αλλά και με την αβεβαιότητα αυτών των τελευταίων δύο παραμέτρων. Έτσι οι παράμετροι αβεβαιότητας είναι αβέβαιες, και έτσι δημιουργείται ένα 'δεύτερο στρώμα' αβεβαιότητας. Αυτό πρέπει να οδηγήσει σε μια νέα ταυτόχρονη κατανομή των αποδόσεων χαρτοφυλακίου, που εξαρτάται από τις αποδόσεις των ενεργητικών στοιχείων, το μέσο και τη συνδιακύμανση. Υπάρχουν μερικές δυσκολίες με αυτήν την μέθοδο. Πρώτα οι συναρτήσεις κατανομής μ και σ είναι πολύ δύσκολο να καθοριστούν. Δεύτερον, εάν αυτές οι συναρτήσεις κατανομής καθοριστούν, η νέα ταυτόχρονη συνάρτηση κατανομής είναι ακόμη δυσκολότερο να βρεθεί. Μετά από αυτό, η βελτιστοποίηση πρέπει να είναι εκτελεσμένη με αυτήν την νέα ταυτόχρονη συνάρτηση κατανομής που

πιθανώς να μην είναι ελλειπτική, το οποίο φαίνεται να είναι ένας μάταιος στόχος. Εκτός από αυτό, αυτή η μέθοδος ακόμα δεν παρέχει οποιεσδήποτε εγγυήσεις στην απόδοση χαρτοφυλακίων.

Γι' αυτό, σε όλη αυτήν την διατριβή, θα συζητήσω μια άλλη προσέγγιση. Οι παράμετροι εισαγωγής μ και σ αναμένεται να βρεθούν μέσα σε ένα διάστημα εμπιστοσύνης, και το πρόβλημα βελτιστοποίησης θα λυθεί για το σενάριο της χειρότερης περίπτωσης. Το διάστημα εμπιστοσύνης καλείται σύνολο αβεβαιότητας. Αυτό σημαίνει ότι, παραδείγματος χάριν εάν εργαζόμαστε με ένα περιορισμό αξίας κινδύνου, σε καμία από τις πιθανές καταστάσεις εισαγωγής το χαρτοφυλάκιο VaR δεν θα υπερβεί το όριο VaR. Έτσι ο επενδυτής έχει εγγυημένα μία ορισμένη απόδοση χαρτοφυλακίων, επειδή στη χειρότερη περίπτωση η κατάσταση βελτιστοποιείται. Στη λογοτεχνία αυτή η βελτιστοποίηση εξετάζεται από τους Ben-Tal και Neriowski, και Goldfarb και Iyengar.

7.2 Σύνολα αβεβαιότητας

Υποθέστε έναν επενδυτή που δεν ξέρει τις ακριβείς τιμές για το μέσο διάνυσμα απόδοσης και τη μήτρα συνδιακύμανσης, αλλά ότι ξέρει ένα ορισμένο διάστημα όπου οι παράμετροι μπορούν να βρεθούν. Τα διαστήματα είναι οριοθετημένα από μια χαμηλότερη τιμή και μία ανώτερη τιμή, έτσι μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mu_i^L &\leq \mu_i \leq \mu_i^U & \forall i \\ \sigma_{ij}^L &\leq \sigma_{ij} \leq \sigma_{ij}^U & \forall i, j\end{aligned}$$

Αντί της χρησιμοποίησης της ανωτέρω σημείωσης θα χρησιμοποιήσουμε $\mu_i^0 = (\mu_i^L + \mu_i^U)/2$, $\beta_i = (\mu_i^U - \mu_i^L)/2$, $\sigma_{ij}^0 = (\sigma_{ij}^L + \sigma_{ij}^U)/2$ και $\delta_{ij} = (\sigma_{ij}^U - \sigma_{ij}^L)/2$, τα εξής:

$$\begin{aligned}\mu_i^0 - \beta_i &\leq \mu_i \leq \mu_i^0 + \beta_i & \forall i \\ \sigma_{ij}^0 - \delta_{ij} &\leq \sigma_{ij} \leq \sigma_{ij}^0 + \delta_{ij} & \forall i, j\end{aligned}$$

Έτσι τα σύνολα αβεβαιότητας του μέσου όρου επιστρέφουν S_m και η συνδιακύμανση S_v μπορεί να είναι γραφτεί ως

$$S_m = \{\mu : \mu^0 - \beta \leq \mu \leq \mu^0 + \beta, \beta \geq 0\} \quad (7.1)$$

$$S_v = \{\Sigma : \Sigma^0 - \Delta \leq \Sigma \leq \Sigma^0 + \Delta, \Delta \geq 0\} \quad (7.2)$$

Αυτά είναι τα σύνολα αβεβαιότητας που θα χρησιμοποιήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο.

7.3 Δεύτερη διαταγή προγραμματισμός κώνων (SOCP)

Οι βέλτιστες τιμές για τα χαρτοφυλάκια Markowitz και Telser (χωρίς παράμετρο αβεβαιότητας) στα προηγούμενα κεφάλαια ήταν ρητές εκφράσεις, αποκτηθείσες με τη χρησιμοποίηση είτε τις μεθόδου Lagrange είτε των όρων Kuhn-Tucker. Μέχρι τώρα, δεν είναι δυνατό να βρεθεί μια ρητή έκφραση για τις βέλτιστες τιμές όταν εξετάζουμε τη χειρότερη περίπτωση εκβάσεων για τις παραμέτρους αβεβαιότητας. Αντ' αυτού, είμαστε σε θέση να περιορίσουμε τα προβλήματα σε ένα δεύτερο πρόβλημα κώνων διαταγής (SOCP), το οποίο μπορεί να λυθεί γρήγορα χρησιμοποιώντας έναν υπολογιστή. Ένα SOCP είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης από την ακόλουθη μορφή:

$$\text{Min} \{ f^T x \mid \|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i, \quad i = 1, \dots, N \} \quad (7.3)$$

όπου το $\|\cdot\|$ είναι ο τυποποιημένος Ευκλείδειος κανόνας, έτσι $\|u\| = \sqrt{u^T u}$ για το διανυσματικό u . Τα διανύσματα f , x και c είναι η διαστάσεων, ενώ το x είναι η μεταβλητή απόφασης. Υπάρχουν N περιορισμοί.

Ο δεύτερος προγραμματισμός κώνων διαταγής είναι μια κατηγορία προβλήματος που βρίσκεται μεταξύ γραμμικού προγραμματισμού και semidefinite προγραμματισμού (SDP). Το SOCPs μπορεί να λυθεί πολύ πιο αποτελεσματικά από SDPs, έτσι είναι προτιμότερο εάν ένα SDP μπορεί να γραφτεί ως SOCP.

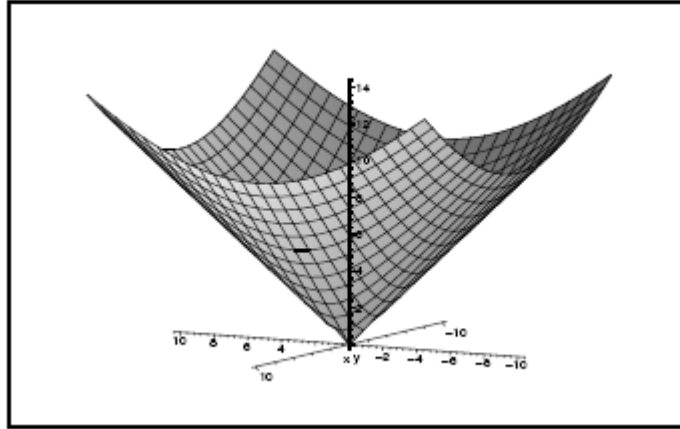
Οι περιορισμοί στην (7.3) καλούνται δεύτερους περιορισμούς κώνων διαταγής. Αυτό έχει ο ακόλουθος λόγος. Σημειώστε ότι ο τυποποιημένος δεύτερος κώνος διαταγής της διάστασης k ορίζεται ως

$$C_k = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ t \end{pmatrix} \right\} \quad \text{with} \quad \|u\| \leq t \quad (7.4)$$

όπου το u είναι $(k-1)$ -διάστατο διάνυσμα και το t είναι κλιμακωτό. Παραδείγματος χάριν, τρισδιάστατο διάστημα ($k = 3$) έχουμε ότι ο τύπος για τα μοντέλα ο δεύτερος κώνος διαταγής είναι

$$z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$$

όποιος έχει την ακόλουθη γραφική παράσταση:



Σχήμα 7.1: Ο τυποποιημένος δεύτερος κώνος διαταγής

Τώρα υποθέστε ότι έχουμε το ακόλουθο σύνολο σημείων

$$\begin{pmatrix} A_i \\ c_i^T \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix}$$

με το A_i μια $(k - 1) \times n$ -μήτρα, c_i και b_i διανύσματα n και $(k - 1)$ διαστάσεων αντίστοιχα, και d_i κλιμακωτό. Όταν αυτό το σύνολο σημείων βρίσκεται στον τυποποιημένο κώνο της διάστασης

$$\begin{pmatrix} A_i \\ c_i^T \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_i \\ d_i \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_k \iff \begin{pmatrix} A_i x + b_i \\ c_i^T x + d_i \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_k$$

και λόγω της (7.4) πρέπει να έχουμε

$$\|A_i x + b_i\| \leq c_i^T x + d_i$$

όποιος είναι ο δεύτερος περιορισμός κώνων διαταγής στην (7.3).

Ένα SOCP περιλαμβάνει την οικογένεια των γραμμικών προγραμμάτων, τα οποία μπορούν να βρεθούν παίρνοντας το A_i ως μηδενική μήτρα και το b_i ως μηδενικό διάνυσμα, έτσι οι μετατροπές περιορισμού στο γραμμικό περιορισμό $0 \leq c_i^T x + d_i$. Το SOCP περιλαμβάνει πολλά περισσότερα προβλήματα βελτιστοποίησης, όπως τα τετραγωνικά προγράμματα, τα προβλήματα με τους υπερβολικούς περιορισμούς και τα προβλήματα που περιλαμβάνουν τα ποσά και τα μέγιστα των κανόνων.

Για την επίλυση του SOCP, υπάρχουν μερικές διαθέσιμες εσωτερικές μέθοδοι σημείου. Αυτές οι μέθοδοι εφαρμόζονται στο λογισμικό υπολογιστών όπως οι SEDUMI και SDPT3. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε τη συσκευασία SEDUMI, η οποία χρησιμοποιεί τη δυνατότητα του MATLAB, για να λύσουμε τα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουμε στα επόμενα τμήματα. Για την παραγωγή της εφαρμογής SEDUMI σε MATLAB ευκολότερα χρησιμοποιούμε το πρόγραμμα Yalmip.

7.4 Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων και SOCP

Σε αυτήν την διατριβή έχουμε βελτιστοποιήσει το χαρτοφυλάκιο Markowitz και το χαρτοφυλάκιο Telser με ένα περιορισμό αξίας κινδύνου. Χρησιμοποιήσαμε τις τεχνικές Lagrange και Kuhn-Tucker για να πάρουμε μια ρητή έκφραση για τα βέλτιστα χαρτοφυλάκια. Αλλά αυτοί τα προβλήματα μπορούν επίσης να γραφτούν ως SOCP.

7.4.1 Markowitz

Θυμηθείτε ότι το πρόβλημα βελτιστοποίησης Markowitz είναι

$$\text{Max} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta \mid \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \right\}$$

με τη θετική παράμετρο αποστροφής κινδύνου γ . Μπορούμε να ξαναγράψουμε αυτό ως

$$\text{Min} \left\{ \theta^T \Sigma \theta - \frac{2}{\gamma} \mu^T \theta \mid \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \right\}$$

και με την παρατήρηση των ακόλουθων (προσθέτουμε και αφαιρούμε ίδιο το σταθερό και ύστερα από εκτέλεση των πράξεων)

$$\begin{aligned} & \theta^T \Sigma \theta - \frac{2}{\gamma} \mu^T \theta \\ &= \left(\Sigma^{1/2} \theta \right)^T \left(\Sigma^{1/2} \theta \right) - \frac{1}{\gamma} \theta^T \Sigma^{1/2} \Sigma^{-1/2} \mu - \frac{1}{\gamma} \mu^T \Sigma^{-1/2} \Sigma^{1/2} \theta \\ & \quad + \left(\frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right)^T \left(\frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right) - \left(\frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right)^T \left(\frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right) \\ &= \left(\Sigma^{1/2} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right)^T \left(\Sigma^{1/2} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right) - \frac{1}{\gamma^2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu \\ &= \left\| \Sigma^{1/2} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right\|^2 - \frac{a}{\gamma^2} \end{aligned}$$

μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης ως

$$\text{Min} \left\{ \left\| \Sigma^{1/2} \theta - \frac{1}{\gamma} \Sigma^{-1/2} \mu \right\|^2 - \frac{a}{\gamma^2} \mid \bar{\Gamma}^T \theta = C_0 \right\}$$

Επειδή, σε ένα SOCP, πρέπει να έχουμε μια γραμμική αντικειμενική συνάρτηση, προσθέτουμε μια μεταβλητή t για να επιτύχει αυτό, το οποίο δίνει έναν πρόσθετο περιορισμό. Το αποτέλεσμα είναι

$$\text{Min} \left\{ t \mid \begin{array}{l} \|\Sigma^{1/2}\theta - \frac{1}{\gamma}\Sigma^{-1/2}\mu\| \leq t \\ 0 = \bar{I}^T\theta - C_0 \end{array} \right\}$$

Το όποιο είναι το SOCP της μορφής (7.3) που ανήκει στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Markowitz.

7.4.2 Telser

Κάνουμε το ίδιο πράγμα με το πρόβλημα βελτιστοποίησης Telser. Έχουμε παρουσιάσει πριν ότι το πρόβλημα Telser με τις ελλειπτικά διανεμημένες αποδόσεις, τη μέγιστη αξία σε κίνδυνο VaR_c (που υπονοεί τον περιορισμό $P(R_p \leq -\text{VaR}) \leq \alpha$) και αντίστοιχη (αρνητική) διακύμανση z_α μπορεί να γραφτεί ως

$$\text{Max} \left\{ \mu^T\theta \mid \begin{array}{l} \mu^T\theta \geq -\text{VaR}_c - z_\alpha\sqrt{\theta^T\Sigma\theta} \\ \bar{I}^T\theta = C_0 \end{array} \right\}$$

Το όποιο είναι εύκολο να μετασχηματιστεί σε ένα SOCP. Εάν χρησιμοποιούμε ότι $\sqrt{\theta^T\Sigma\theta} = \|\Sigma^{1/2}\theta\|$ παίρνουμε

$$\text{Min} \left\{ -\mu^T\theta \mid \begin{array}{l} \|\Sigma^{1/2}\theta\| \leq \frac{1}{-z_\alpha}\mu^T\theta + \frac{1}{-z_\alpha}\text{VaR}_c \\ 0 = \bar{I}^T\theta - C_0 \end{array} \right\}$$

7.5 Βελτιστοποίηση χαρτοφυλακίων με την αβεβαιότητα

Ας εξετάσουμε το πρόβλημα βελτιστοποίησης με τα σύνολα αβεβαιότητας για τα μ και σ , όπως περιγράφεται στις (7.1) και (7.2) αντίστοιχα. Έχουμε εξηγήσει ότι η αβεβαιότητα θα αντιμετωπιστεί με την αξιολόγηση του «στη χειρότερη περίπτωση σεναρίου». Αλλά τι είναι η χειρότερη περίπτωση αναμονής αποδόσεων και της συνδιακύμανσης; Εάν δεν επιτρέπεται καμία «σύντομη» πώληση (short sale, δηλ. κανένας δανεισμός), είναι φανερό ότι η αναμενόμενη χειρότερη περίπτωση απόδοσης είναι η ελάχιστη αναμενόμενη απόδοση, που είναι το χαμηλότερο σύνολο μ - β . Αλλά σε αυτήν την διατριβή επιτρέπουμε τις σύντομες πωλήσεις (δανεισμός), έτσι αυτό δεν είναι ικανοποιητικό. Εάν ένας επενδυτής κάνει short sailing σε ένα ενεργητικό στοιχείο, η αναμενόμενη χειρότερη περίπτωση απόδοσης για εκείνο το ενεργητικό στοιχείο είναι η υψηλότερη πιθανή απόδοση, επειδή αυτό κοστίζει στον επενδυτή τα περισσότερα χρήματα. Κατόπιν πρέπει να ασχοληθούμε με την υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση για αυτό το ενεργητικό στοιχείο, ή το ανώτερο σύνολο $\mu_i + \beta_i$. Για οι συνδιακυμάνσεις που μπορούμε να

χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο συλλογισμό. Ολοκληρώνοντας μπορούμε να πούμε ότι αυτό εξαρτάται από την πολιτική επένδυσης εάν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ανώτερο ή το χαμηλότερο σύνορο τόσο για την αναμενόμενη απόδοση όσο και για τη μήτρα συνδιακύμανσης.

7.5.1 Markowitz

Το πρόβλημα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων του Markowitz στο σενάριο χειρότερης περίπτωσης είναι

$$Max_{\theta} \left\{ \min_{\mu, \Sigma} [\mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

όπου γ είναι η παράμετρος της αποστροφής κινδύνου. Επειδή $\gamma > 0$ μπορούμε να γράψουμε το πρόβλημα ως

$$Max_{\theta} \left\{ \min_{\mu} [\mu^T \theta] - \frac{1}{2} \gamma \max_{\Sigma} [\theta^T \Sigma \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\} \quad (7.5)$$

Αρχικά, βρίσκουμε μια έκφραση για την ελάχιστη αναμενόμενη απόδοση:

$$\begin{aligned} \min_{\mu} [\mu^T \theta] &= \min_{\mu} \sum_i \mu_i \theta_i = \sum_{i: \theta_i < 0} (\mu_i^0 + \beta_i) \theta_i + \sum_{i: \theta_i \geq 0} (\mu_i^0 - \beta_i) \theta_i \\ &= \sum_i \mu_i^0 \theta_i + \sum_{i: \theta_i < 0} \beta_i \theta_i - \sum_{i: \theta_i \geq 0} \beta_i \theta_i = \sum_i (\mu_i^0 \theta_i - \beta_i |\theta_i|) \\ &= (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| \end{aligned} \quad (7.6)$$

Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο πράγμα με τη μέγιστη διασπορά. Αυτό δίνει

$$\begin{aligned} \max_{\Sigma} [\theta^T \Sigma \theta] &= \max_{\Sigma} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \\ &= \sum_{i,j: \theta_i \theta_j < 0} (\sigma_{ij}^0 - \delta_{ij}) \theta_i \theta_j + \sum_{i,j: \theta_i \theta_j \geq 0} (\sigma_{ij}^0 + \delta_{ij}) \theta_i \theta_j \\ &= \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 \theta_i \theta_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |\theta_i \theta_j| = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^0 \theta_i \theta_j + \sum_{i,j} \delta_{ij} |\theta_i| |\theta_j| \\ &= \theta^T \Sigma^0 \theta + |\theta|^T \Delta |\theta| \end{aligned} \quad (7.7)$$

Με αυτό το αποτέλεσμα το πρόβλημα βελτιστοποίησης (7.5) γίνεται ένα λίγο απλούστερο:

$$Max_{\theta} \left\{ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma^0 \theta - \frac{1}{2} \gamma |\theta|^T \Delta |\theta| \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Αυτό το πρόβλημα είναι ένα SOCP, έτσι μπορεί να λυθεί με έναν αποδοτικό τρόπο. Προσθέτουμε δύο μεταβλητές ρ και τ στην αντικειμενική συνάρτηση και παίρνουμε

$$\text{Max}_{\theta, \rho, \tau} \left\{ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| - \frac{1}{2} \gamma \rho - \frac{1}{2} \gamma \tau \left| \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \rho \geq \theta^T \Sigma^0 \theta \\ \tau \geq |\theta|^T \Delta |\theta| \end{array} \right. \right\}$$

Σημειώστε ότι για οποιαδήποτε θετικά ορισμένο A, διάνυσμα x και θετικό κλιμακωτό y μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} x^T A x \leq y &\Leftrightarrow 4x^T A x \leq 4y \Leftrightarrow 4x^T A x - 2y + y^2 + 1 \leq 2y + y^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow 4x^T A^{1/2} A^{1/2} x + (1 - y)^2 \leq (1 + y)^2 \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} 2A^{1/2} x \\ 1 - y \end{pmatrix} \right\| \leq (1 + y) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό, μπορούμε να ξαναγράψουμε δύο περιορισμούς και να πάρουμε το ακόλουθο

$$\text{Max}_{\theta, \rho, \tau} \left\{ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| - \frac{1}{2} \gamma (\rho + \tau) \left| \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^0)^{1/2} \theta \\ 1 - \rho \end{pmatrix} \right\| \leq 1 + \rho \\ \left\| \begin{pmatrix} 2\Delta^{1/2} |\theta| \\ 1 - \tau \end{pmatrix} \right\| \leq 1 + \tau \end{array} \right. \right\}$$

που είναι σχεδόν ένα SOCP όπως στην (7.3). Το μόνο πρόβλημα είναι η απόλυτη τιμή του θ . Μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $|\theta|$ από ένα νέο n-διάστατο διάνυσμα η και προσθέτοντας τους περιορισμούς $\eta_i \geq \theta_i$ και $\eta_i \leq -\theta_i$ για όλα τα i , το οποίο εγγυάται $\eta_i \geq |\theta_i|$. Ένας άλλος τρόπος να δουλέψουμε την απόλυτη τιμή αντικαθιστώντας τα θ και $|\theta|$ με $\theta = \theta^+ + \theta^-$ και $|\theta| = \theta^+ + \theta^-$ αντίστοιχα και να προσθέσουμε τους περιορισμούς $\theta_i^- \leq 0$ για όλα τα i . Χρησιμοποιούμε τον πρώτο μετασχηματισμό, ο οποίος οδηγεί στη ακόλουθη SOCP:

$$\text{Min}_{\theta, \rho, \tau, \eta} \left\{ -(\mu^0)^T \theta + \beta^T \eta + \frac{1}{2} \gamma (\rho + \tau) \left| \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^0)^{1/2} \theta \\ 1 - \rho \end{pmatrix} \right\| \leq 1 + \rho \\ \left\| \begin{pmatrix} 2\Delta^{1/2} \eta \\ 1 - \tau \end{pmatrix} \right\| \leq 1 + \tau \\ \eta_i \geq \theta_i \quad \text{for all } i \\ \eta_i \geq -\theta_i \quad \text{for all } i \end{array} \right. \right\}$$

Αυτή είναι η διατύπωση του προβλήματος βελτιστοποίησης Markowitz ως SOCP. Όπως δηλώσαμε πριν, αυτό μπορεί να είναι λυθεί με τη χρήση ενός υπολογιστή.

7.5.2 Telser

Στο σενάριο χειρότερης περίπτωσης, το πρόβλημα βελτιστοποίησης Telser με τον περιορισμό VaR γίνεται

$$\text{Max}_{\theta} \left\{ \min_{\mu} [\mu^T \theta] \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \max_{\mu, \Sigma} [P(R_p \leq -VaR_c)] \leq \alpha \end{array} \right\}$$

Δεδομένου ότι για το μέσο όρο έχουμε

$$\min_{\mu} [\mu^T \theta] = (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta|$$

και για τον περιορισμό VaR

$$\begin{aligned} \max_{\mu, \Sigma} [P(R_p \leq -VaR_c)] \leq \alpha &\iff \max_{\mu, \Sigma} \frac{-VaR_c - \mu^T \theta}{\sqrt{\theta^T \Sigma \theta}} \leq z_{\alpha} \\ \iff \frac{-VaR_c - \min_{\mu} \mu^T \theta}{\max_{\Sigma} \sqrt{\theta^T \Sigma \theta}} \leq z_{\alpha} &\iff -\min_{\mu} \mu^T \theta - z_{\alpha} \max_{\Sigma} \sqrt{\theta^T \Sigma \theta} \leq VaR_c \end{aligned}$$

Ο όποιος μπορεί να μετασχηματιστεί σε

$$\begin{aligned} -(\mu^0)^T \theta + \beta^T |\theta| - z_{\alpha} \sqrt{\theta^T \Sigma^0 \theta + |\theta|^T \Delta |\theta|} &\leq VaR_c \\ \iff -z_{\alpha} \left\| \begin{pmatrix} \|(\Sigma^0)^{1/2} \theta\| \\ \|\Delta^{1/2} |\theta|\| \end{pmatrix} \right\| &\leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| + VaR_c \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$\text{Max}_{\theta} \left\{ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ -z_{\alpha} \left\| \begin{pmatrix} \|(\Sigma^0)^{1/2} \theta\| \\ \|\Delta^{1/2} |\theta|\| \end{pmatrix} \right\| \leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| + VaR_c \end{array} \right\}$$

Για να το κάνουμε ένα SOCP εισάγουμε τις νέες μεταβλητές ρ και τ , έτσι το πρόβλημα γίνεται

$$\text{Max}_{\theta, \rho, \tau} \left\{ (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ -z_{\alpha} \left\| \begin{pmatrix} \rho \\ \tau \end{pmatrix} \right\| \leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T |\theta| + VaR_c \\ \|(\Sigma^0)^{1/2} \theta\| \leq \rho \\ \|\Delta^{1/2} |\theta|\| \leq \tau \end{array} \right\}$$

Το τελευταίο βήμα είναι η εισαγωγή της νέας μεταβλητής η για να αφαιρέσει τις παραμέτρους απόλυτης αξίας. Αυτό μας δίνει το SOCP

$$\text{Min}_{\theta, \rho, \tau, \eta} \left\{ \begin{array}{l} -(\mu^0)^T \theta + \beta^T \eta \\ \bar{1}^T \theta = C_0 \\ -z_\alpha \left\| \begin{pmatrix} \rho \\ \tau \end{pmatrix} \right\| \leq (\mu^0)^T \theta - \beta^T \eta + VaR_c \\ \|(\Sigma^0)^{1/2} \theta\| \leq \rho \\ \|\Delta^{1/2} \eta\| \leq \tau \\ \eta_i \geq \theta_i \text{ for all } i \\ \eta_i \geq -\theta_i \text{ for all } i \end{array} \right.$$

7.6 Μια πιο ρεαλιστικότερη προσέγγιση

Η προσέγγιση που περιγράφεται ανωτέρω είναι μια πολύ συντηρητική προσέγγιση. Ο κύριος λόγος για αυτό είναι ο καθορισμός του στη χειρότερη περίπτωση χαρτοφυλακίου διασποράς $((\sigma_p^2)^{wc})$ που χρησιμοποιήσαμε. Κατά την παραγωγή αυτής της στη χειρότερη περίπτωση διασποράς χαρτοφυλακίων (7.7), πήραμε για κάθε στοιχείο σ_{ij} της μήτρας συνδιακύμανσης το στοιχείο της χειρότερης περίπτωσης. Στους τύπους:

$$(\sigma_p^2)^{wc} = (\theta^T \Sigma \theta)^{wc} = \sum_{i,j} \sigma_{ij}^{wc} \theta_i \theta_j$$

Αυτό σημαίνει ότι η στη χειρότερη περίπτωση μήτρα συνδιακύμανσης Σ^{wc} μπορεί να αντιπροσωπευθεί από

$$\Sigma^{wc} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{wc} & \sigma_{12}^{wc} & \cdots & \sigma_{1n}^{wc} \\ \sigma_{21}^{wc} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1}^{wc} & \cdots & & \sigma_{nn}^{wc} \end{pmatrix}$$

Αλλά είναι πιθανό ότι αυτή η πρόσθετη περίπτωση θα εμφανιστεί; Η απάντηση είναι όχι. Γι' αυτό η ιδιαίτερη «στη χειρότερη περίπτωση» μήτρα συνδιακύμανσης αποτελείται από τις συνδιακυμάνσεις οι όποιες δεν ανήκουν η μία στην άλλη. Οι συνδιακυμάνσεις λαμβάνονται από διαφορετικές μήτρες συνδιακύμανσης, και έτσι ο συσχετισμός μεταξύ των συνδιακυμάνσεων είναι διαταραγμένος.

Γι' αυτό είναι περισσότερο λογικό να συνθέσουμε τη στη χειρότερη περίπτωση διασπορά χαρτοφυλακίων ως ακολούθως:

$$(\sigma_p^2)^{wc} = (\theta^T \Sigma \theta)^{wc} = \left(\sum_{i,j} \sigma_{ij} \theta_i \theta_j \right)^{wc}$$

Έτσι η στη χειρότερη περίπτωση μήτρα συνδιακύμανσης δίνεται από

$$\Sigma^{wc} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \sigma_{n1} & \cdots & & \sigma_{nn} \end{pmatrix}^{wc}$$

Υποθέστε ότι ένας επενδυτής ξέρει (παραδείγματος χάριν από τη μελέτη του παρελθόντος) ότι υπάρχουν m πιθανές μήτρες συνδιακύμανσης $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \dots, \Sigma^m$. Κατόπιν η στη χειρότερη περίπτωση μήτρα συνδιακύμανσης κατά την πρώτη έννοια είναι η μήτρα που αποτελείται από όλα τα στη χειρότερη περίπτωση στοιχεία σ_{ij}^k για όλο το $i, j = 1, \dots, n$ και $k = 1, \dots, m$. Η στη χειρότερη περίπτωση μήτρα συνδιακύμανσης κατά τη δεύτερη έννοια είναι η στη χειρότερη περίπτωση μήτρα Σ^k για το όλο $k = 1, \dots, m$.

Σε αυτήν την νέα κατάσταση δεν διαμορφώνουμε την παράμετρο αβεβαιότητας στο μ . Αυτό είναι επειδή σύμφωνα με τους εμπειρογνώμονες μέσα σε Rabobank η αβεβαιότητα στις συνδιακυμάνσεις είναι σημαντικότερη από την αβεβαιότητα στο μέσο. Επιπλέον η αβεβαιότητα στο μ είναι πολύ δύσκολο να μετρηθεί.

7.6.1 Markowitz

Αυτός ο νέος τρόπος μοντελοποίησης της αβεβαιότητας μπορεί να εφαρμοστεί στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο του Markowitz. Υποθέστε ότι υπάρχουν m πιθανές μήτρες συνδιακύμανσης $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3, \dots, \Sigma^m$ και ότι το μέσο διάνυσμα είναι ορισμένο. Κατόπιν το πρόβλημα Markowitz γίνεται

$$\text{Max}_{\theta} \left\{ \min_{\mu, \Sigma} [\mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \theta^T \Sigma \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\}$$

Και μετασχηματίζεται σε

$$\begin{aligned} & \text{Max}_{\theta} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \max_k [\theta^T \Sigma^k \theta] \mid \bar{1}^T \theta = C_0 \right\} \\ \Leftrightarrow & \text{Max}_{\theta} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \rho \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \rho \geq \max_k [\theta^T \Sigma^k \theta] \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \text{Max}_{\theta} \left\{ \mu^T \theta - \frac{1}{2} \gamma \rho \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \rho \geq \theta^T \Sigma^k \theta \text{ for all } k \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow & \text{Min}_{\theta} \left\{ -\mu^T \theta + \frac{1}{2} \gamma \rho \mid \begin{array}{l} \bar{1}^T \theta = C_0 \\ \left\| \begin{pmatrix} 2(\Sigma^k)^{1/2} \theta \\ 1 - \rho \end{pmatrix} \right\| \leq 1 + \rho \text{ for all } k \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Αυτό είναι ένα SOCP. Σημειώστε ότι αυτή η έκφραση είναι απλούστερη από την προηγούμενη δημιουργημένη έκδοση του αβέβαιου προβλήματος Markowitz.

7.6.2 Telser

Για το πρόβλημα Telser με τον περιορισμό VaR μπορούμε να κάνουμε το ίδιο πράγμα. Ο περιορισμός VaR είναι

$$\begin{aligned}
 \max_{\Sigma} [P(R_p \leq -VaR_c)] \leq \alpha &\iff \max_k \frac{-VaR_c - \mu^T \theta}{\sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta}} \leq z_{\alpha} \\
 \iff \frac{-VaR_c - \mu^T \theta}{\max_k \sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta}} \leq z_{\alpha} &\iff -z_{\alpha} \max_k \sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta} \leq \mu^T \theta + VaR_c \\
 &\iff -z_{\alpha} \sqrt{\theta^T \Sigma^k \theta} \leq \mu^T \theta + VaR_c \quad \text{for all } k \\
 &\iff -z_{\alpha} \|(\Sigma^k)^{1/2} \theta\| \leq \mu^T \theta + VaR_c \quad \text{for all } k
 \end{aligned}$$

Έτσι το πρόβλημα βελτιστοποίησης Telser γίνεται

$$\text{Min}_{\theta} \left\{ \begin{array}{l} -\mu^T \theta \\ \text{I}^T \theta = C_0 \\ -z_{\alpha} \|(\Sigma^k)^{1/2} \theta\| \leq \mu^T \theta + VaR_c \quad \text{for all } k \end{array} \right\}$$

Αυτό είναι η μια άλλη έκδοση του αβέβαιου προβλήματος βελτιστοποίησης Telser.

Κεφάλαιο 8

8.1 Συμπέρασμα

Αυτή η διατριβή παρουσιάζει τα αποτελέσματα μιας μελέτης στα διαφορετικά μοντέλα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίων με έναν μαθηματικό τρόπο. Αρχίζει με τη θεωρία Markowitz, η οποία επεκτείνεται μέσα στη διατριβή σε μερικά διαφορετικά μοντέλα Telser βασισμένα σε έναν σε περιορισμό αξίας κινδύνου. Κάθε μοντέλο Telser λειτουργεί όχι μόνο με κανονικά διανεμημένες αποδόσεις, αλλά και με κάθε κατανομή από την ελλειπτική οικογένεια. Εάν ένας επενδυτής προτιμά να μεγιστοποιήσει τη EVA ή RAROC του, αυτό δεν είναι πρόβλημα και το υπάρχον πλαίσιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Τέλος, μια πρόταση γίνεται για τη διαμόρφωση της αβεβαιότητας στις παραμέτρους εισαγωγής, οι οποίες μπορούν να λυθούν χρησιμοποιώντας τη δεύτερη διαταγή προγραμματισμού κώνων.

8.2 Μελλοντική έρευνα

Αυτή η διατριβή δίνει μια ευρεία επισκόπηση των πιθανών μοντέλων βελτιστοποίησης. Αν και, μελέτησα μόνο την περίπτωση μιας-περιόδου. Είναι ενδιαφέρον να μελετηθεί η περίπτωση πολλών-περιόδων και να δει κανείς τι συμβαίνει με τις βέλτιστες λύσεις εάν είναι επιλεγμένος ένας μακρύτερος ορίζοντας. Φαίνεται ότι εάν μια βέλτιστη λύση εξαρτάται γραμμικά από το επενδυμένο κεφάλαιο C_0 , τα βέλτιστα επενδυμένα μέρη δεν αλλάζουν έτσι η βέλτιστη λύση πολλών-περιόδων είναι η μυωπική μιας-περιόδου μια. Αυτό συμβαίνει για τα περισσότερα από τα συζητημένα χαρτοφυλάκια. Εντούτοις, τόσο το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Markowitz όσο και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο Telser με τον περιορισμό αξίας κινδύνου δεν ικανοποιούν αυτήν την ιδιότητα, και το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο πολλών-περιόδων δεν είναι απαραίτητο να είναι το μυωπικό βέλτιστο.

Φάνηκε ότι ο αποδοτικότερος τρόπος είναι η εισαγωγή της αβεβαιότητας στις παραμέτρους εισαγωγής. Μπορώ να φανταστώ ότι τα αποτελέσματα μπορούν να βελτιωθούν με την εξέταση αυτού του θέματος με έναν πιο στατιστικό τρόπο, παραδείγματος χάριν με τους εκτιμητές Bayes-Stein.

Η τελευταία σύστασή μου για τη μελλοντική έρευνα αν είναι δυνατή είτε όχι η επίλυση του προβλήματος SOCP σε ένα περιβάλλον του Excel. Το MATLAB παραμένει ακόμη πιο αποδοτικό. Για έναν μαθηματικό αυτό δεν είναι πρόβλημα, αλλά εάν ένα πρόγραμμα υπολογιστών πρέπει να γραφτεί για έναν έμπορο που επενδύει σε τίτλους και πρέπει να ξέρει σε μερικά δευτερόλεπτα τι συμβαίνει με τον κίνδυνο χαρτοφυλακίων του εάν κάνει να αγοράσει, το περιβάλλον MATLAB δεν είναι αρκετά φιλικό προς το χρήστη.

ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Εισαγωγή

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων 50 ετών έχει σημειωθεί πολλή μεγάλη πρόοδος στον τομέα της διαμόρφωσης κινδύνου. Το Μοντέλο Αξιολόγησης Χαρτοφυλακίου έχει εξηγήσει εδώ και αρκετό καιρό στον σοβαρότερο παράγοντα που καθορίζει το σχηματισμό πορτοφολιών που είναι το κέρδος, το οποίο οι ακαδημαϊκοί και οι επαγγελματίες λαμβάνουν υπόψη τους κατά οικοδόμηση ενός μοντέλου. Δεδομένου ότι η τεχνολογία έχει προχωρήσει, περιπλοκότερα μοντέλα έχουν χτιστεί, μοντέλα που λαμβάνουν υπόψη τους περισσότερους του ενός απλού παράγοντα και βοηθούν τους επενδυτές να προβλέψουν τις αποδόσεις ακριβέστερα. Ο στόχος αυτού του τμήματος είναι η δημιουργία ενός μοντέλου αξιολόγησης κινδύνου και η δυνατότητα εφαρμογής του. Το ακόλουθο τμήμα θα διαιρεθεί σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος, θα παρασχεθεί μια σύντομη εξήγηση της επιλογής στοιχείων και της δημιουργίας χαρτοφυλακίων. Επιπλέον, θα περιληφθούν μερικά συνοψισμένα στατιστικά στοιχεία τόσο των χαρτοφυλακίων όσο και των παραγόντων τιμολόγησης. Στο δεύτερο μέρος θα παρουσιαστεί η στατιστική ανάλυση του εξετασμένου μοντέλου, καθώς επίσης και η εξέταση της επεξηγηματικής δύναμής της.

I. Ανάλυση στοιχείων

I. Επιλογή στοιχείων και δημιουργία χαρτοφυλακίων

Το εξετασμένο μοντέλου αποτελείται από τις αποδόσεις των μετοχών της βρετανικής αγοράς. Για να είναι πιο συγκεκριμένο, επιλέχθηκαν τέσσερις τομείς των βιομηχανιών: υπηρεσίες κατανάλωσης, καταναλωτικά αγαθά, χρηματοοικονομικός τομέας και τομέας των βιομηχανιών. Η εξεταζόμενη περίοδος αρχίζει τον Ιανουαρίου 1987 και τελειώνει το Δεκεμβρίου 2006. Ο λόγος για τον οποίο επιλέγεται μια είκοσι ετών περίοδος δειγμάτων είναι επειδή αυτή τη φορά το διάστημα θεωρείται αρκετά μεγάλο, προκειμένου να περιληφθούν τόσο οι φάσεις ύφεσης της οικονομίας όσο και οι φάσεις ανάπτυξης φάσεις στην οικονομία. Από το διάστημα αυτής της περιόδου, οι μηνιαίες αποδόσεις των εταιριών που χρησιμοποιούνται στις επιλεγμένες βιομηχανίες επιλέγονται.

	<i>Summarised Statistics</i>				
<i>Tested Assets</i>	<i>Mean</i>	<i>St.Deviation</i>	<i>Range</i>	<i>Minimum</i>	<i>Maximum</i>
<i>Portfolio#1</i>	-0.006	-0.008	-1.281	0.314	-0.967
<i>Portfolio#2</i>	-0.007	-0.005	-0.576	0.243	-0.333
<i>Portfolio#3</i>	-0.008	-0.005	-0.586	0.201	-0.385
<i>Portfolio#4</i>	-0.009	-0.005	-0.471	0.164	-0.307
<i>Portfolio#5</i>	-0.004	-0.005	-0.570	0.273	-0.297
<i>Portfolio#6</i>	-0.007	-0.003	-0.411	0.235	-0.176
<i>Portfolio#7</i>	-0.013	-0.005	-1.038	0.195	-0.843
<i>Portfolio#8</i>	-0.009	-0.003	-0.397	0.214	-0.183
<i>Portfolio#9</i>	-0.012	-0.004	-0.485	0.178	-0.307
<i>Portfolio#10</i>	-0.008	-0.005	-0.576	0.243	-0.333
<i>Portfolio#11</i>	-0.014	-0.003	-0.540	0.271	-0.269
<i>Portfolio#12</i>	-0.015	-0.003	-0.375	0.146	-0.229
<i>Portfolio#13</i>	-0.012	-0.004	-0.506	0.276	-0.23
<i>Portfolio#14</i>	-0.012	-0.004	-0.393	0.218	-0.174
<i>Portfolio#15</i>	-0.012	-0.004	-0.455	0.251	-0.205
<i>Portfolio#16</i>	-0.015	-0.003	-0.381	0.212	-0.169
<i>Portfolio#17</i>	-0.015	-0.003	-0.368	0.173	-0.195
<i>Portfolio#18</i>	-0.014	-0.003	-0.417	0.256	-0.161
<i>Portfolio#19</i>	-0.013	-0.003	-0.395	0.253	-0.141
<i>Portfolio#20</i>	-0.014	-0.004	-0.48	0.233	-0.247
<i>Portfolio#21</i>	-0.015	-0.003	-0.31	0.165	-0.146
<i>Portfolio#22</i>	-0.014	-0.004	-0.462	0.302	-0.16
<i>Portfolio#23</i>	-0.015	-0.003	-0.424	0.257	-0.167
<i>Portfolio#24</i>	-0.014	-0.003	-0.446	0.274	-0.172
<i>Portfolio#25</i>	-0.017	-0.004	-0.479	0.287	-0.192

Πίνακας 1: Συνοψισμένες στατιστικές χαρτοφυλακίων

Προκειμένου να ληφθούν τα χαρτοφυλάκιά μας, χρησιμοποιούμε μια διαδικασία ταξινόμησης παρόμοια με τη διαδικασία που οι Fama and French (1992) έχουν ακολουθήσει στη δημιουργία των χαρτοφυλακίων τους. Παρόμοια με τους Fama and French οι δύο μεταβλητές που χρησιμοποιούμε ως δείκτες είναι η κεφαλαιοποίηση αγοράς και τα βήτα. Εφαρμόζουμε τη διπλής κατεύθυνσης ταξινόμηση με τη δημιουργία αρχικά πέντε χαρτοφυλακίων βάσει της κεφαλαιοποίησης αγοράς και των β (betas) και αφετέρου με τη δημιουργία πέντε χαρτοφυλακίων για κάθε ένα από τα χαρτοφυλάκια μεγέθους, χρησιμοποιώντας ως πληρεξούσιο τα βήτα, τα οποία λήφθηκαν από μια πενταετή περίοδο προτού να αρχίσει η περίοδος των δειγμάτων μας. Τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας ήταν η δημιουργία των είκοσι πέντε χαρτοφυλακίων, των οποίων τα συνοψισμένα στατιστικά παρέχονται στον πίνακα 1.

II. Μακροοικονομικοί παράγοντες

Οι Chen, Roll και Ross (1986) στο έγγραφό τους εξετάζουν ποιοι μακροοικονομικοί παράγοντες ανταμείβονται στα χρηματιστήρια. Ο σκοπός αυτής της μελέτης ήταν να εξεταστεί το γεγονός ότι η σχέση μεταξύ των χρηματοοικονομικών αγορών και της μακρο-οικονομίας είναι εξ ολοκλήρου σε μια κατεύθυνση. Εξέτασαν μια ευρεία ποικιλία των παραγόντων και κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι η διάδοση μεταξύ των μακροχρόνιων και βραχυχρόνιων επιτοκίων, του αναμενόμενου και απροσδόκητου πληθωρισμού, της βιομηχανικής παραγωγής και της διαφοράς μεταξύ των ομολόγων υψηλής και χαμηλής απόδοσης, έχουν σημαντική επιρροή στις αποδόσεις αποθεμάτων.

Δεδομένου ότι το εξετασμένο μοντέλο πρέπει να περιλάβει τους μακροοικονομικούς παράγοντες, επιλέγουμε να περιλάβουμε στο πρότυπό μας τους ακόλουθους τρεις παράγοντες: α) η απόδοση κέρδους ,μεγαλύτερου από του χαρτοφυλακίου της αγοράς, β) η διαφορά μεταξύ των ομολόγων υψηλής και χαμηλής απόδοσης και γ) ο απροσδόκητος πληθωρισμός. Χρησιμοποιούμε τις αποδόσεις του δείκτη FTSE 100 σαν παράδειγμα για τις αποδόσεις αγοράς. Προκειμένου να υπολογιστεί η δομή όρου χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο:

$$TS = LGB_t - STB_{t-1}$$

όπου LGB σημαίνει το δέκα ετών βρετανικό κρατικό ομόλογο και STB το τριών μηνών βρετανικό κρατικό ομόλογο. Προκειμένου να υπολογιστεί η απροσδόκητη μεταβολή του πληθωρισμού χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο:

$$UI_t = I_t - I_{t-1}$$

Χρησιμοποιούμε την αλλαγή στον πληθωρισμό, ως πληρεξούσιο για τον απροσδόκητο πληθωρισμό επειδή ήμαστε ανίκανοι να βρούμε τα αναμενόμενα μηνιαία ποσοστά πληθωρισμού. Ο πίνακας 2 εκθέτει τις συνοψισμένες στατιστικές όσον αφορά εκείνους τους παράγοντες τιμολόγησης.

	<i>Summarised Statistics</i>				
<i>Pricing Factors</i>	<i>Average</i>	<i>St. Dev.</i>	<i>Range</i>	<i>Minimum</i>	<i>Maximum</i>
<i>Market</i>	-0.039	0.003	0.390	-0.313	0.077
<i>Structure</i>	0.004	0.001	0.065	-0.029	0.036
<i>Inflation</i>	0.003	0.022	3.100	-1.800	1.300

Πίνακας 2: Συνοψισμένες στατιστικές παραγόντων τιμολόγησης

II. Ανάλυση προτύπου-μοντέλου

I. Μοντέλο

Θα ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία Fama-MacBeth. Δεδομένου ότι το δείγμα μας αποτελείται από τις μηνιαίες αποδόσεις 20 ετών (240 μηνιαίες αποδόσεις), θέτουμε σα χρονικό όριο τα δύο έτη. Καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της περιόδου τρέχουμε την ακόλουθη χρονοσειρά παλινδρόμησης, για κάθε χαρτοφυλάκιο, προκειμένου να ληφθούν οι βήτα εκτιμήσεις:

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i^{mrkt} MRKT + \beta_i^{struct} STRUCT + \beta_i^{INFLA} INFLA + \varepsilon_{i,t}$$

Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι, τρέχουμε την οπισθοδρόμηση 19 χρονικών σειρών για κάθε δοκιμασμένο χαρτοφυλάκιο. Τα μέσα αποτελέσματα από αυτήν την διαδικασία παρουσιάζονται στον πίνακα 3.

Δεδομένου ότι μπορούμε να παρατηρήσουμε στον πίνακα 3, το ρυθμισμένο R^2 ποικίλλει από 21% σε 42% υπονοώντας ότι οι αποδόσεις δεν εξηγούνται καλά από τους τρεις παράγοντες. Φαίνεται ότι εκείνοι οι τρεις παράγοντες δεν μπορούν «να πιάσουν» όλη την παραλλαγή των επιστροφών. Αυτό είναι λογικό, δεδομένου ότι στην πρακτική, ο αριθμός παραγόντων που χρησιμοποιούνται είναι αρκετά μεγαλύτερος από τρεις.

Επιπλέον, οι T-στατιστικές υπονοούν ότι μόνο οι υπερβολικές αποδόσεις αγοράς συνδέονται ελαφρώς με τις πραγματοποιημένες αποδόσεις. Φαίνεται ότι και η δομή όρου παραγόντων και ο απροσδόκητος πληθωρισμός δεν συνδέονται έντονα με τα χαρτοφυλάκια που πραγματοποίησαν τις αποδόσεις.

		Pricing Factors			
Tested Assets			<i>Market</i>	<i>Structure</i>	<i>Inflation</i>
<i>Portfolio#1</i>	<i>Coefficients</i>	-0.341	0.527	8.230	2.740
	<i>t-statistics</i>	(-0.117)	(1.173)	(0.097)	(0.007)
	<i>Adjusted R²</i>	0.214			
<i>Portfolio#2</i>	<i>Coefficients</i>	-0.066	0.576	1.021	-0.443
	<i>t-statistics</i>	(0.189)	(2.056)	(-0.177)	(0.035)
	<i>Adjusted R²</i>	0.283			
<i>Portfolio#3</i>	<i>Coefficients</i>	-0.124	0.371	3.380	1.346
	<i>t-statistics</i>	(0.061)	(1.387)	(-0.052)	(0.377)
	<i>Adjusted R²</i>	0.213			
<i>Portfolio#4</i>	<i>Coefficients</i>	-0.222	0.439	5.505	-0.703

	<i>t-statistics</i>	(0.067)	(1.660)	(-0.039)	(0.034)
	<i>Adjusted R²</i>	0.277			
<i>Portfolio#5</i>	<i>Coefficients</i>	-0.224	0.314	3.476	-4.887
	<i>t-statistics</i>	(-0.213)	(1.185)	(0.210)	(-0.652)
	<i>Adjusted R²</i>	0.218			
<i>Portfolio#6</i>	<i>Coefficients</i>	-0.108	0.326	2.510	-1.048
	<i>t-statistics</i>	(0.133)	(1.682)	(-0.124)	(-0.434)
	<i>Adjusted R²</i>	0.259			
<i>Portfolio#7</i>	<i>Coefficients</i>	-0.270	0.450	7.153	1.040
	<i>t-statistics</i>	(0.036)	(1.541)	(0.009)	(0.268)
	<i>Adjusted R²</i>	0.232			
<i>Portfolio#8</i>	<i>Coefficients</i>	-0.118	0.482	0.668	-0.871
	<i>t-statistics</i>	(0.022)	(2.329)	(-0.008)	(-0.271)
	<i>Adjusted R²</i>	0.306			
<i>Portfolio#9</i>	<i>Coefficients</i>	0.045	0.376	-1.820	-1.497
	<i>t-statistics</i>	(0.388)	(1.764)	(-0.342)	(0.050)
	<i>Adjusted R²</i>	0.275			
<i>Portfolio#10</i>	<i>Coefficients</i>	-0.069	0.573	1,178	-0,371
	<i>t-statistics</i>	(0.197)	(2.045)	(-0,185)	(0,057)
	<i>Adjusted R²</i>	0.285			
<i>Portfolio#11</i>	<i>Coefficients</i>	-0.023	0.441	0,029	0,436
	<i>t-statistics</i>	(0.015)	(2.963)	(0,051)	(0,034)
	<i>Adjusted R²</i>	0.339			
<i>Portfolio#12</i>	<i>Coefficients</i>	0,05	0.473	-1,656	0,173
	<i>t-statistics</i>	(0,178)	(2.795)	(-0,108)	(0,091)
	<i>Adjusted R²</i>	0.352			
<i>Portfolio#13</i>	<i>Coefficients</i>	0.079	0.370	-1.745	-0.292
	<i>t-statistics</i>	(0.302)	(2.007)	(-0.252)	(-0.037)
	<i>Adjusted R²</i>	0,270			
<i>Portfolio#14</i>	<i>Coefficients</i>	-0.040	0.481	0.244	-0.789
	<i>t-statistics</i>	0.182	2.563	-0.145	-0.165
	<i>Adjusted R²</i>	0.340			
<i>Portfolio#15</i>	<i>Coefficients</i>	0.005	0.520	-0.747	-1.149
	<i>t-statistics</i>	(0.328)	(2.487)	(-0.296)	(-0.301)
	<i>Adjusted R²</i>	0.346			
<i>Portfolio#16</i>	<i>Coefficients</i>	-0.081	0.558	1.241	-0.207
	<i>t-statistics</i>	(0.302)	(2.927)	(-0.225)	(0.020)
	<i>Adjusted R²</i>	0.358			
<i>Portfolio#17</i>	<i>Coefficients</i>	0.014	0.423	-0.581	-0.370
	<i>t-statistics</i>	(0.296)	(2.423)	(-0.201)	(-0.055)
	<i>Adjusted R²</i>	0.310			
<i>Portfolio#18</i>	<i>Coefficients</i>	0.052	0.449	-2.012	-0,683
	<i>t-statistics</i>	(0.134)	(3.470)	(-0.051)	(-0,140)
	<i>Adjusted R²</i>	0.382			
<i>Portfolio#19</i>	<i>Coefficients</i>	0.046	0.455	-1.545	-0,377
	<i>t-statistics</i>	(0.179)	(3.339)	(-0.111)	(-0,150)
	<i>Adjusted R²</i>	0.392			
<i>Portfolio#20</i>	<i>Coefficients</i>	-0.059	0.560	2.007	-0,63605
	<i>t-statistics</i>	(0.210)	(2.892)	(-0.156)	(-0,067)

	<i>Adjusted R²</i>	0.356			
<i>Portfolio#21</i>	<i>Coefficients</i>	0.008	0.505	-0.818	-0,283
	<i>t-statistics</i>	(0.146)	(4.209)	(-0.048)	(-0,009)
	<i>Adjusted R²</i>	0.402			
<i>Portfolio#22</i>	<i>Coefficients</i>	0.085	0.479	-2.970	-0.645
	<i>t-statistics</i>	(0.129)	(3.665)	(-0.049)	(-0.100)
	<i>Adjusted R²</i>	0.392			
<i>Portfolio#23</i>	<i>Coeficcients</i>	0.099	0,482	-3.516	-1.217
	<i>t-statistics</i>	(0.159)	(4.530)	(-0.068)	(-0.239)
	<i>Adjusted R²</i>	0.418			
<i>Portfolio#24</i>	<i>Coefficients</i>	-0.010	0.552	-0.799	-0.467
	<i>t-statistics</i>	(0.100)	(4.717)	(-0.021)	(0.003)
	<i>Adjusted R²</i>	0.426			
<i>Portfolio#25</i>	<i>Coefficients</i>	0.037	0.563	-2.169	-0.623
	<i>t-statistics</i>	(0.262)	(3.472)	(-0.196)	(-0.095)
	<i>Adjusted R²</i>	0.371			

Πίνακας 3: Μέσα αποτελέσματα των οπισθοδρομήσεων χρονικής σειράς

Μετά από τη συλλογή των βήτα από την πρώτη παλινδρόμηση χρονικών σειρών, χρησιμοποιείται η ακόλουθη παλινδρόμηση με διαστρωματικά δεδομένα (cross section regression):

$$E(R_i) = \alpha + \lambda^{markt} \beta_i^{markt} + \lambda^{struct} \beta_i^{struct} + \lambda^{inf la} \beta_i^{inf la} + \varepsilon_i$$

Τρέχουμε 19 παλινδρομήσεις χρονικής σειράς, μια παλινδρόμηση στο τέλος κάθε περιόδου δύο ετών. Παλινδρομήσαμε τις μέσες αποδόσεις κάθε χαρτοφυλακίου για το έτος στο οποίο η δύο ετών περίοδος τελείωσε ενάντια στα βήτα που λήφθηκαν από την οπισθοδρομηση χρονικής σειράς για ίδια περίοδο. Τα μέσα αποτελέσματα αυτής της παλινδρόμησης παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

		<i>Pricing Factors</i>		
	α	λ^{markt}	λ^{struct}	$\lambda^{inf la}$
<i>Average Premium</i>	0.0076	0.00401	-0.00065	-0.00014
<i>t-statistic</i>	-0.066	-2.093	0.644	2.092
<i>Adjusted R²</i>	0,491			

Πίνακας 4: Μέσα αποτελέσματα των παλινδρομήσεων

Τα αποτελέσματα των cross sectional παλινδρομήσεων δείχνουν ότι η απόδοση κέρδους ,μεγαλύτερου από του χαρτοφυλακίου της αγοράς και ο απροσδόκητος πληθωρισμός δίνουν απόδοση σημαντικά

διαφορετική από μηδέν, δεδομένου ότι οι t-στατιστικές είναι μεγαλύτερες από 2. Το προσαρμοσμένο R^2 είναι ίσο με 49% υπονοώντας ότι η ισχύς του μοντέλου είναι συγκρατημένα χαμηλή.

Συζήτηση-συμπέρασμα

Μετά από της ολοκλήρωση της πρότυπης ανάλυσή μας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η προφητική δυνατότητα του μοντέλου μας είναι χαμηλή. Για να είναι το πρότυπό μας χρήσιμο και αποτελεσματικό, οι διάφοροι αναλυτές θα πρέπει να προσθέσουν περισσότερους παράγοντες από όσους χρησιμοποιήσαμε εμείς στην ανάλυσή μας. Πιο συγκεκριμένα, για να είναι οι αποδόσεις πλήρως προβλεπόμενες, περισσότεροι παράγοντες πρέπει να περιληφθούν, έτσι ώστε τα αποτελέσματα όλων των άλλων παραγόντων, που χρησιμοποιήσαμε ως τώρα, να συνυπολογίζονται στην τελική πρόβλεψη.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΙΚΡΟΥ ΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αφού έχω αναλύσει και εξετάσει θεωρητικά μερικές από τις ευρύτατα χρησιμοποιημένα προσεγγίσεις και τα μοντέλα στη λογοτεχνία αξιολόγησης, σε αυτό το τμήμα η πρακτική συσκευή αυτών των προτύπων θα εξεταστεί. Επιπλέον, έχοντας κατά νου ότι η πρόβλεψη αποδοχών του αναλυτή διαδραματίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στη βασισμένη στο LID αξιολόγηση δικαιοσύνης, ως καθοριστικό παράγοντα του όρου άλλες πληροφορίες, θα εξετάσω την ακρίβεια της πρόβλεψής τους. Προκειμένου να το κάνουμε αυτό θα εξετάσουμε ένα μικρό δείγμα των εκθέσεων αναλυτών που προετοιμάζονται από τους επαγγελματίες και χρησιμοποιούν μερικά από τα ευρύτατα εφαρμοσμένα θεωρητικά αναπτυγμένα μοντέλα αξιολόγησης. Αυτές οι εκθέσεις θεωρούνται ένας άλλος μέσος όρος μεταφοράς των πληροφοριών από τα μέλη μιας επιχείρησης στους ξένους, εκτός από τις οικονομικές δηλώσεις. Ο κύριος σκοπός της ανάπτυξης αυτών των εκθέσεων είναι να προβλεφθεί ο μελλοντικός δείκτης μετοχής που θα έχει η υπό εξέταση εταιρία.

ΚΙΝΗΤΡΟ

Δεδομένου ότι η τέχνη της πρόβλεψης εξελίχθηκε κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών μια σημαντική ερώτηση παρέμεινε αναπάντητη.

Αυτή η ερώτηση που αφορούσε την πρόβλεψη του δείκτη της μετοχής είναι εάν ο αναλυτής τείνει να υπερεκτιμήσει ή να υποτιμήσει τις συστάσεις αξιολόγησής του με έναν συστηματικό τρόπο. Δεδομένου ότι η τέχνη της πρόβλεψης εξελίχθηκε κατά τη διάρκεια των προηγούμενων δεκαετιών μια σημαντική ερώτηση παρέμεινε αναπάντητη. Αυτή η ερώτηση που αφορούσε την πρόβλεψη δείκτη μετοχής είναι εάν ο αναλυτής τείνει να υπερεκτιμήσει ή να υποτιμήσει τις συστάσεις αξιολόγησής τους με έναν συστηματικό τρόπο. Προκειμένου να προσπαθήσει να απαντήσει σε αυτήν την ερώτηση ο κύριος σκοπός αυτού του τμήματος θα είναι να εξετάσει εάν υπάρχει μια προκατάληψη στις προβλέψεις και τις εκτιμήσεις του αναλυτή. Η κύρια υπόθεσή μας θα είναι να βρει εάν υπάρχει μια συστηματική διαφορά μεταξύ των πραγματικών τιμών και των τιμών προβλέψεων.

H_0 : Η πρόβλεψη δείκτη μετοχής των αναλυτών δεν διαφέρει από τους πραγματικούς δείκτες μετοχής

H_1 : Η πρόβλεψη δείκτη μετοχής των αναλυτών διαφέρει από τους πραγματικούς δείκτες μετοχής

Εάν διαπιστώσουμε ότι υπάρχει μια συστηματική διαφορά μεταξύ του πραγματικού και προβλεπόμενου δείκτη μετοχής, κατόπιν θα προχωρήσουμε στη δεύτερη ερώτηση της υπόθεσής μας. Το περιεχόμενο της δεύτερης υποθετικής ερώτησης θα είναι να εξεταστεί εάν οι αναλυτές υπερεκτιμούν πράγματι σκόπιμα τις συστάσεις αξιολόγησής τους ή η απόκλιση της προβλεπόμενης τιμής από την πραγματική οφείλεται σε άλλους παράγοντες που δεν συσχετίζονται με τις υπό εξέταση εταιρίες, αλλά έχουν επιπτώσεις σε ολόκληρη τη βιομηχανία. Με άλλα λόγια αυτό που πρόκειται να εξεταστεί θα είναι η επίδραση που μερικοί μακρο-παράγοντες θα ασκήσουν στην τελική έκβαση αξιολόγησης των αναλυτών.

H_0 : Η απόκλιση της πρόβλεψης δείκτη μετοχής προκαλείται λόγω των αναλυτών πέρα από την αισιοδοξία

H_1 : Η απόκλιση της πρόβλεψης δείκτη μετοχής δεν προκαλείται λόγω των αναλυτών πέρα από την αισιοδοξία

Σαν αρχικό δείκτη της αισιοδοξίας θα εξετάσω τη χρήση των απλούστερων προτύπων αξιολόγησης όπως τη βασισμένη στα πολλαπλάσια προσέγγιση, όταν μια θεμελιώδης ανάλυση είναι καταλληλότερη να εκτελείται, προκειμένου να αξιολογηθεί σωστά η επιχείρηση. Επιπλέον ως ένα άλλο στοιχείο της αισιοδοξίας θα θεωρηθεί χρήση των προτύπων που δεν είναι κατάλληλα για τις εταιρίες που ανήκουν στις συγκεκριμένες βιομηχανίες. Πολλές εταιρίες παραδείγματος χάριν χαρακτηρίζονται από τα υψηλά άυλα ενεργητικά στοιχεία, έχουν ανταγωνιστικά πλεονεκτήματα ή λειτουργούν σε διάφορες βιομηχανίες. Όλα αυτά τα ζητήματα απαιτούν θεμελιώδη μοντέλα έτσι ώστε η αξιολόγηση να εκτελείται σωστά.

Επιπλέον, θα εξετάσω μερικά άλλους μέσους που μπορεί να προκαλούν την υπερεκτίμηση των συστάσεων αξιολογήσεων. Ιδιαίτερα θα εξετάσω εάν οι τράπεζες επενδύσεων που διευθύνουν την αξιολόγηση έχουν οποιαδήποτε σύγκρουση συμφερόντων με τις εταιρίες που αυτοί αξιολογούν.

Μια προγενέστερη μελέτη που πραγματοποιήθηκε από τους Lin και McNichols [1997], εξέτασε τη δυνατότητα της ευνοϊκής σύστασης για επένδυση από τις τράπεζες επενδύσεων που οι υπάλληλοι έχουν σχέσεις χρηματοδότησης με την υπό εξέταση εταιρία. Διαπίστωσαν ότι αυτοί οι αναλυτές τείνουν να εκδώσουν περισσότερες ευνοϊκές συστάσεις από τις συστάσεις που διευθύνθηκαν από τους υπόλοιπους αναλυτές, οι οποίοι δεν είχαν σχέσεις με την υπό εξέταση εταιρία. Τα συμπεράσματα αυτής της έρευνας ήταν σύμφωνα με τα αποτελέσματα μιας προηγούμενης έρευνας που πραγματοποιήθηκε από Dugar και Nathan (1995).

Πριν ασχοληθούμε με τον έλεγχο των υποθέσεων, θα ήταν χρήσιμο να εξηγήσουμε πώς εμφανίστηκε η διαδικασία επιλογής δειγμάτων και να δώσει μερικά γενικά χαρακτηριστικά του δείγματος. Επιπλέον, όπως αναφέρθηκε πριν το μικρό δείγμα που επιλέγεται μας επιτρέπτε σε να εξετάσουμε σε βάθος τις εκθέσεις των αναλυτών και να αναγνωρίσουμε μερικά κοινά χαρακτηριστικά γνωρίσματα που οι αναλυτές προσθέτουν στις εκθέσεις τους.

Επιλογή δειγμάτων

Αρχικά, όλα τα στοιχεία μας θα ληφθούν από την INVESTEXT PLUS. Αυτή η υπηρεσία είναι μία από τις ευρέως αναγνωρισμένες και καλά αποκηρυγμένες βάσεις δεδομένων και χρησιμοποιείται στο μέγιστο βαθμό από τους ακαδημαϊκούς και τους επαγγελματίες. Επιπλέον, η INVESTEXT PLUS περιέχει μια σειρά των εκθέσεων αναλυτών που προετοιμάζονται από διάφορες τράπεζες επενδύσεων και για πολλές επιχειρήσεις από όλες τις βιομηχανίες.

Το δείγμα που θα μας επιτρέψει να εξετάσουμε την υπόθεσή μας θα κατασκευαστεί από τις πέντε μεγαλύτερες απεριθμημένες επιχειρήσεις στην ανταλλαγή αποθεμάτων του Λονδίνου και θα ακολουθηθεί μια ανάλυση χρονικής σειράς προκειμένου να εξεταστεί αποτελεσματικότερα η υπόθεσή μας. Η διαίσθηση πίσω από την ανάλυση χρονικής σειράς είναι ότι προκειμένου να προσδιοριστούν οι πιθανές προκαταλήψεις στις συστάσεις αναλυτών, είναι ουσιαστικό να εξεταστεί κάθε μια από τις υπό εξέταση εταιρίες, για πέντε επακόλουθα έτη. Επιπλέον, για κάθε εταιρία θα εξεταστούν μόνο οι εκθέσεις που προετοιμάζονται από μια τράπεζα επενδύσεων. Αυτή η διαδικασία θα μας επιτρέψει να προσδιορίσουμε τις πιθανές τάσεις που θα

ακολουθήσει ο αναλυτής. Επιπλέον, έχοντας κατά νου ότι τα τελευταία πέντε έτη έχουν εμφανιστεί πολλοί μακροοικονομικοί παράγοντες, που μπορεί να επηρεάσουν την ακρίβεια των προτύπων, θα ήταν ενδιαφέρον να εξεταστούν οι αλλαγές στη διαδικασία αξιολόγησης που διευθύνθηκε από κάθε τράπεζα επενδύσεων.

Πιο συγκεκριμένα, η ταξινόμηση που θα μας επιτρέψει να λάβουμε τις πέντε μεγαλύτερες επιχειρήσεις θα γίνει με βάση το βαθμό κεφαλαιοποίησης των εταιριών στην αγορά. Ο σκοπός αυτού του κριτηρίου ταξινόμησης είναι ότι μόνο οι μεγαλύτερες εταιρίες από την άποψη της κεφαλαιοποίησης αγοράς θα μπορούν να επηρεάσουν τους περισσότερους αναλυτές για να βρουν μια αισιόδοξη τιμή στόχων και επομένως να δώσουν μια θετική σύσταση για τις εξετασμένες εταιρίες. Αν και, ένα σημαντικό πρόβλημα είναι το γεγονός ότι το μέγεθος του επιλεγμένου δείγματος είναι πολύ μικρό και αυτό μπορεί να μην μας επιτρέψει τη γενίκευση των συμπερασμάτων μας. Επιπλέον, έχοντας κατά νου ότι ο αριθμός επιχειρήσεων, που είναι ταξινομημένες σε κάθε βιομηχανία και το χρηματιστηριακό γραφείο που εκτιμά αυτές τις εταιρίες, είναι εξαιρετικά μεγάλο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι μόνο σε μερικές πολύ χαλαρές περιπτώσεις το μικρό δείγμα μας μπορεί να γενικευτεί και να μας επιτρέψει να συναγάγουμε μερικά συμπεράσματα.

Προκειμένου να περιοριστεί το μέγεθος αυτής της προκατάληψης θα κατασκευαστεί μια υπόθεση που θα επιτρέψει στο δείγμα μας να παρέχει ακριβέστερα αποτελέσματα. Υποθέτοντας ότι οι πέντε μεγαλύτερες τράπεζες επενδύσεων από την άποψη του μεγέθους αγοράς και κυρίαρχες στη χρηματιστική αγορά συμβουλών, θα προετοιμάσουν τις πιο οικονομικές εκθέσεις, είναι λογικό να υποθέτει κανείς ότι όταν αξιολογούν εταιρίες με παρόμοια ανάπτυξη και από την ίδια βιομηχανία θα χρησιμοποιούν τα ίδια μοντέλα. Προκειμένου να ληφθούν οι πέντε μεγαλύτερες επιχειρήσεις θα χρησιμοποιήσουμε ως κλειδί ταξινόμησης πάλι τη κεφαλαιοποίηση αγοράς. Πριν κάνουμε αυτό είναι ουσιαστικό να γίνει η ακόλουθη διευκρίνιση. Οι τράπεζες επενδύσεων είναι χωρισμένες σε δύο κατηγορίες: τα οικονομικά συγκροτήματα επιχειρήσεων και οι ανεξάρτητες τράπεζες επενδύσεων. Η κύρια διαφορά μεταξύ των δύο κατηγοριών είναι το γεγονός ότι η πρώτη συνδυάζει τις εμπορικές και τραπεζικές εργασίες επένδυσης ενώ η τελευταία δεν συνδέεται με τις Εμπορικές τράπεζες. Έχοντας αυτόν τον χωρισμό στο μυαλό ταξινομώ τις επιχειρήσεις σύμφωνα με την κατηγορία στην οποία ανήκουν. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις πέντε μεγαλύτερες επιχειρήσεις στον οικονομικό συμβουλευτικό τομέα. Ένα σημαντικό ζήτημα είναι ότι η Investext Plus δεν περιείχε τις εκθέσεις των αναλυτών από τη JP Morgan και τη Morgan Stanley, δύο εταιρίες που έχουν το μεγαλύτερο μερίδιο από την άποψη της κεφαλαιοποίησης αγοράς, έτσι επέλεξα τις εκθέσεις από τις πέντε τράπεζες που έχουν τη μεγαλύτερη τιμή εμπορίου μετά από τις δύο πρόσφατα αναφερθείσες εταιρίες.

Company Name	Median MV	Type of Investment Bank
CITIGROUP INC	259,242.60	Financial Conglomerates
HSBC	214,588.20	Financial Conglomerates
ABN AMBRO HOLDING NV	87,325.41	Financial Conglomerates
CREDIT SUISSE GROUP	76,726.16	Financial Conglomerates
DEUTSCHE BANK AG	73,442.13	Financial Conglomerates

Δεδομένου ότι το δείγμα μου αποτελείται από τις πέντε μεγαλύτερες απαριθμημένες επιχειρήσεις στο Χρηματιστήριο Αξιών του Λονδίνου και αυτές οι εταιρίες θα εξεταστούν για πέντε έτη ήταν ουσιαστικό να υπολογίσει η μέση κεφαλαιοποίηση αγοράς για τις τράπεζες επενδύσεων για το υπό εξέταση χρονικό διάστημα προκειμένου να εγγραφεί ότι οι τράπεζες επενδύσεων διατηρούν τη θέση τους στην αγορά.

Ένα άλλο κριτήριο ταξινόμησης που ακολουθήθηκε εκτός από την ταξινόμηση από τη κεφαλαιοποίηση αγοράς είναι το γεγονός ότι και οι πέντε αυτές επιχειρήσεις συμμετείχαν σε μια σημαντική συγχώνευση και απόκτηση. Για να είμαι πιο συγκεκριμένος, ανέτρεξα για τις εταιρίες που έχουν συγχωνευτεί, κατά τη διάρκεια, ή πολύ κοντά, της πενταετούς υπό εξέταση περιόδου. Ο ακόλουθος πίνακας δίνει μερικές λεπτομέρειες για τις επιχειρήσεις και τις συγχωνεύσεις στις οποίες έχουν συμμετάσχει.

Year	Purchaser	Purchased	Formed Company	Transaction Value
2000	Vodafone	Mannesmann	Vodafone Group PLC	
2000	Glaxo Wellcome	Smith-Kline	GSK	
2004	Tesco	Group Adminstore	TESCO TLC	
1997	Guinness PLC	Grand Metropolitan	Diageo	
2003	BA0	Ente Tabacchi Italian	BAT	

Η διαίσθηση πίσω από την επιλογή αυτού του πρόσθετου κριτηρίου είναι να τεκμηριώσει εάν οι αναλυτές κατορθώνουν να συλλάβουν τη δημιουργημένη αξία ύστερα από τη συγχώνευση των επιχειρήσεων δεδομένου ότι η διαδικασία αξιολόγησης σε τέτοιες περιστάσεις είναι εξαιρετικά περίπλοκη. Επιπλέον, δεδομένου ότι έχω επηρεαστεί από τα συμπεράσματα του Tascor (1998), που εξέτασε 43 πρόσφατες συγχωνεύσεις και αποκτήσεις και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι ίδιες τεχνικές αξιολόγησης χρησιμοποιούνται

για τις ίδιες βιομηχανίες, χρησιμοποιώντας τα προτιμημένα μοντέλα αξιολόγησης, η πρόθεσή μου θα είναι να εξετάσει εάν οι αναλυτές κατορθώνουν να συλλάβουν την αληθινή αξία της συγχώνευσης χρησιμοποιώντας την κατάλληλη προσέγγιση αξιολόγησης.

Αν και, πριν εξεταστούν οι συγκεκριμένες ερωτήσεις που αναφέρθηκαν πριν, θα εξετάσουμε μια επίδειξη των χαρακτηριστικών δειγμάτων και μια εξέταση των κύριων σημείων που διαδραματίζουν έναν σημαντικό ρόλο στην ανάλυσή μου προκειμένου να βοηθηθεί ο αναγνώστης να γίνουν καλύτερα κατανοητές οι τάσεις που ακολουθούν οι αναλυτές και για να του επιτρέψουν να υπολογίσει τα πιθανά λάθη που διευθύνουν.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΔΕΙΓΜΑΤΩΝ

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως το δείγμα μου αποτελείται από τις πέντε μεγαλύτερες απαριθμημένες επιχειρήσεις και εξετάζεται για πέντε διαδοχικά έτη. Το χρονικό διάστημα που εμφανίζεται η ταξινόμηση, από την άποψη της τιμής εμπορίου, ήταν το έτος 2004. Ο ακόλουθος πίνακας εισάγει αυτές τις επιχειρήσεις και δείχνει τη βιομηχανία στην οποία λειτουργούν.

Company name	Market Value	Operating Industries	SIC Code
VODAFONE GROUP PLC	92581000	Mobile communications	6575
GLAXOSMITHKLINE PLC	71703690	Pharmaceuticals	4570
TESCO PLC	24819890	Food Drug Retailers	5330
DIAGEO PLC	22363350	Beverages	3530
BRITISH AMERICAN TOBACCO PLC	19204760	Tobacco	3780

Προκειμένου να εξετάσω ότι οι οντότητες στις οποίες θα στραφώ διατηρούν την κυρίαρχη θέση τους κατά τη διάρκεια του υπό εξέταση χρονικού διαστήματος, μεταφόρτωσα από Thomson one banker για τα έτη 2001 - 2005 την κεφαλαιοποίηση αγοράς των υπό εξέταση εταιριών και εξέτασα τη θέση τους κατά τη διάρκεια των πέντε ετών. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τη μέση κεφαλαιοποίηση αγοράς της επιχείρησης και η τελευταία στήλη παρουσιάζει τη θέση που λαμβάνει κάθε επιχείρηση σε κάθε ένα από τα πέντε έτη.

Year	Vodafone	GLAXOSMITHKLINE PLC	DIAGEO PLC	TESCO PLC	BRITISH AMERICAN TOBACCO PLC	Average market capitalization
2001	1	2	3	5	5	
2002	1	2	3	6	5	
2003	1	2	3	4	7	
2004	1	2	4	4	5	
2005	2	1	7	4	6	

Όπως μπορούμε να δούμε όλες οι πέντε επιχειρήσεις παραμένουν στις κορυφαίες πέντε εταιρίες σε επίπεδο της τιμής εμπορίου. Στη συνέχεια, εξασφαλίζοντας τη θέση αγοράς των επιχειρήσεων, θα αρχίσουμε τώρα την κύρια υπόθεσή μας. Σαν κύριο σημείο της υπόθεσης που πρόκειται να εξεταστεί είναι εάν υπάρχει απόκλιση μεταξύ των προβλέψεων των αναλυτών και του πραγματικού δείκτη μετοχής, αυτό είναι ουσιαστικά να εξεταστούν τα μοντέλα που οι αναλυτές χρησιμοποιούν προκειμένου να αξιολογήσουν τις εταιρίες. Θα ήταν χρήσιμο να αναπαραχθεί η ταξινόμηση που οι Demirakos και λοιποί (2004) ακολούθησαν στο έγγραφό τους. Πιο συγκεκριμένα χώρισαν τα μοντέλα αξιολόγησης σε δύο κατηγορίες, μίας περιόδου και πολλών περιόδων μοντέλα. Αυτή η ταξινόμηση θα με βοηθήσει να προσδιορίσω τις τάσεις που ο αναλυτής ακολούθησε για τα τελευταία πέντε έτη για κάθε επιχείρηση που αξιολόγησε. Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τον αριθμό που κάθε μοντέλο εμφανίστηκε στις εκθέσεις των αναλυτών.

Applied Valuation Techniques									
Industry	Single-period models						Multi-period Models		
	<i>P/E</i>	<i>P/BV</i>	<i>P/CF</i>	<i>EV/EBITDA</i>	<i>EV/SALES</i>	<i>OTHER</i>	<i>DCF</i>	<i>RIVM</i>	<i>OTHER</i>
<i>Vodafone</i>	4	0	0	5	0	0	5	0	0
<i>GSK</i>	5	0	0	0	0	0	5	0	0
<i>Tesco</i>	5	0	0	5	1	0	0	0	0
<i>Diageo</i>	2	0	0	5	0	0	2	0	0
<i>BAT</i>	4	0	0	2	0	0	0	0	0
<i>Overall</i>									

Πρέπει να δηλωθεί ότι για κάθε υπό εξέταση επιχείρηση τα αποτελέσματα είναι συνολικά και για τα πέντε έτη περιόδου. Για καλύτερους επεξηγηματικούς λόγους είναι διευκρινισμένο το ποσοστό της χρήσης κάθε μοντέλου για κάθε επιχείρηση και το ποσοστό της γενικής χρήσης των προτύπων σχετικά με ολόκληρο το δείγμα. Αυτό που είναι αξιοπρόσεκτο είναι το γεγονός ότι ο αναλυτής δεν χρησιμοποίησε το μοντέλο αξιολόγησης υπόλοιπων αποδοχών σε καμία έκθεση του δείγματος. Αυτό είναι αναμφισβήτητα μια ένδειξη της αισιοδοξίας στις συστάσεις αναλυτών, δεδομένου ότι δεν χρησιμοποιούν ένα από τα καλύτερα αναπτυγμένα μοντέλα που λαμβάνει υπόψη διάφορους παράγοντες που τα άλλα μοντέλα αγνοούν.

Για να είναι πιο συγκεκριμένη όπως ο Penman σημείωσε, τα μοντέλα ταμειακής ροής έκπτωσης και τα μοντέλα ελεύθερης ταμειακής ροής έχουν μια σημαντική ανεπάρκεια επειδή και τα δύο αυτά τα μοντέλα στρέφονται στην προστιθέμενη αξία και όχι στην αξία που δημιουργείται. Μπορούμε να δούμε ότι στο δείγμα μας οι αναλυτές χρησιμοποιούν εξίσου τα μοντέλα μίας και πολλών περιόδων, με την ακόλουθη διευκρινιστική σκέψη: φαίνεται ότι χρησιμοποιούν μόνο τις μεθόδους DCF και FCF για τα πολυπερίοδα μοντέλα. Συνεπώς, παρουσιάζουν συγκεκριμένη προτίμηση στην αναλογία E/P και EV/EBITDA για τα μονοπερίοδα μοντέλα αξιολόγησης.

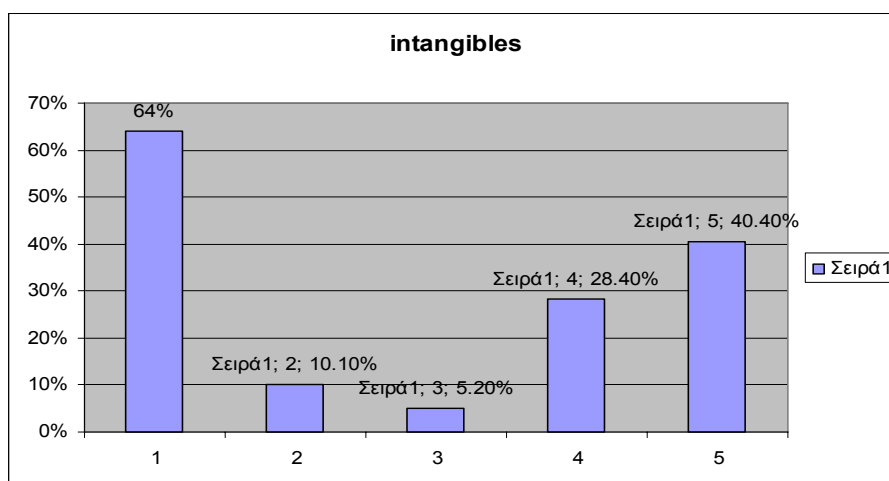
Οι ανωτέρω παρατηρήσεις δείχνουν ότι οι αναλυτές χρησιμοποιούν τα συγκεκριμένα μοντέλα αξιολόγησης και οι αποφάσεις τους δεν είναι βασισμένες στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά κάθε εταιρίας αλλά στη δυνατότητά τους χρησιμοποίησης των ιδιαίτερων προτύπων. Αυτή η δήλωση υποστηρίζεται από το γεγονός ότι όπως αναφέρθηκε προηγουμένως δεν έλαβαν υπόψη τους τη σημαντική ανεπάρκεια που έχουν τα μοντέλα FCF. Αυτή η ανεπάρκεια είναι ότι η ελεύθερη ταμειακή ροή δεν είναι ένα μέτρο της προστιθέμενης αξίας όπως ο Paleru (εγχειρίδιο) δείχνει.

Έχοντας εξετάσει τη διαδικασία που οι αναλυτές ακολουθούν στην DCF προσέγγισή τους, παρατήρησα ότι δεν χρησιμοποιούν τη λογιστική αύξησης έτσι ώστε η πιθανή ανεπάρκεια στην ελεύθερη ταμειακή ροή να διορθώνεται. Μια βαθύτερη εξέταση των εκθέσεων αποκάλυψε ότι για τις επιχειρήσεις όπου οι αναλυτές χρησιμοποίησαν την προσέγγιση αξιολόγησης DCF, δεν παρήγαγαν τις αποδοχές που μετρά σωστά την προστιθέμενη αξία. Ιδιαίτερα, δεν χρησιμοποίησαν τη λογιστική αύξησης για τις δύο πιο κοινές περιπτώσεις στην κακή τοποθέτηση της αξίας, τις αποδοχές που λαμβάνονται από τους πελάτες και την ενσωμάτωση των επενδύσεων στα εισοδήματα. Αυτά τα συμπεράσματα είναι σύμφωνα με τα συμπεράσματα του Penman (εγχειρίδιο).

Μερικά άλλα σημεία που θα μπορούσαν να τονιστούν, είναι η χρήση της τεχνικής που βασίζεται στη συγκριτική αξιολόγηση των άυλων περιουσιακών στοιχείων της υπό εξέταση εταιρίας με παρόμοιες επιχειρήσεις που έχουν επίσης πολλά άυλα περιουσιακά στοιχεία. Ο ακόλουθος πίνακας δηλώνει μερικά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά για τις υπό εξέταση εταιρίες.

Company name	Industry	Intangibles	Total Assets	R&D	NSIC
VODAFONE PLC	Mobile communications	93,622,000	146,164,000	171,000	2
GSM PLC	Pharmaceuticals	2,142,000	21,041,000	2,839,000	2
TESCO PLC	Food Drug Retailers	965,000	18,534,000	2,067,881	2
DIAGEO PLC	Beverages	4,012,000	14,085,000	.	5
B.A.T PLC	Tobacco	7,135,000	17,625,000	11000	2

Μπορούμε να δούμε ότι κάθε βιομηχανία έχει τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της. Εάν εξετάσουμε το ποσοστό των συνολικών ενεργητικών στοιχείων που κρατούν τα άυλα αγαθά για κάθε εταιρία, θα καταλάβουμε ότι η Vodafone που παραδείγματος χάριν ανήκει στη βιομηχανία κινητής τηλεφωνίας-επικοινωνίας έχει τα υψηλότερα άυλα αγαθά σχετικά με τα συνολικά ενεργητικά στοιχεία της. Αυτή η παρατήρηση συμφωνεί με τη θεωρία ότι η βιομηχανία κινητής επικοινωνίας χαρακτηρίζεται από τα υψηλά άυλα ενεργητικά στοιχεία και ο ανταγωνισμός μεταξύ των εταιριών που αναπτύσσουν δραστηριότητες στη βιομηχανία αυτή είναι άγριος και οι επιχειρήσεις επιδιώκουν για ένα ανταγωνιστικό πλεονέκτημα που θα τους διαφοροποιήσει από τους ανταγωνιστές τους. Αντίθετα, η Tesco PLC δεν είναι βασισμένη στα άυλα ενεργητικά στοιχεία, κάτι που είναι λογικό, καθώς η βιομηχανία στην οποία λειτουργεί χαρακτηρίζεται από τα απτά ενεργητικά στοιχεία. Ο ακόλουθος αριθμός επιδεικνύει το ποσοστό των άυλων αγαθών σχετικά με τα συνολικά ενεργητικά στοιχεία που έχει η κάθε εταιρία.



Η χρησιμοποίηση επομένως της βασισμένης στα πολλαπλάσια προσέγγισης για τις επιχειρήσεις που χαρακτηρίζονται από υψηλά άυλα αγαθά μπορεί να οδηγήσει σε μια ανακριβή αξιολόγηση. Όπως οι Lie and Lie (2002) παρατήρησαν, οι επιχειρήσεις με την υψηλότερη άυλη αξία επιδεικνύουν τα μεγαλύτερα λάθη αξιολόγησης όταν οι αναλυτές τις αξιολογούν με τη μέθοδο της συγκριτικής αξιολόγησης . Στην περίπτωση μας αυτό συμβαίνει με τη VODAFONE PLC.

Όπως μπορούμε να δούμε στις περισσότερες περιπτώσεις οι προβλέψεις του αναλυτή υπερεκτιμήθηκαν, δεδομένου ότι σε 17 από τις 25 περιπτώσεις το λάθος αξιολόγησης της προβλεπόμενης τιμής σχετικά με τον πραγματικό ήταν θετικό. Επιπλέον οι 8 υπόλοιπες περιπτώσεις των αποκλίσεων περιείχαν ένα αρνητικό λάθος αξιολόγησης, δείχνοντας ότι υπήρξε μια απόκλιση μεταξύ της προβλεπόμενης και πραγματικής τιμής. Προκειμένου να υπάρξει μια γενική εικόνα των 25 παρατηρούμενων δεικτών μετοχής και των λαθών αξιολόγησης που εμφανίστηκαν, θα συνοψίσω τις περιγραφικές στατιστικές των λαθών αξιολόγησης στον επόμενο πίνακα.

Company	Mean	Median	STD	Min	Max
Overall	0.158411	0.071429	0.052942	-0.15625	0.744305
Vodafone	0.222479	0.237903	0.155801	-0.11272	0.744305
Tesco	0.002973	-0.1162	0.101061	-0.15625	0.371572
GlaxoSmithKline	0.243373	0.176471	0.127179	-0.04697	0.688425
Diageo	0.165295	0.039838	0.112192	-0.06152	0.533743
BAT	0.157938	0.086691	0.10934	-0.02713	0.586207

Άλλο ένα μέτρο που θα μας επιτρέψει να εξετάσουμε πόσο ακριβής ήταν οι προβλέψεις των αναλυτών, είναι η σύγκριση του προβλεπόμενου EPS και του πραγματικού EPS. Το κέρδος ανά μετοχή θεωρείται ως ένα σημαντικό μέτρο της απόδοσης και κατά τη διάρκεια των τελευταίων ετών οι ρυθμιστές διεθνών προτύπων έχουν συνεργαστεί για να συμφωνήσουν σε μια κοινά αποδεκτή προσέγγιση στο κέρδος ανά μετοχή. Αυτό οδήγησε στην έκδοση του FRS22 στη Μεγάλη Βρετανία και του IAS 33 για την υπόλοιπη Ευρώπη. Το FRS22 απαίτησε την κοινοποίηση τόσο του βασικού όσο και του πλήρως αραιωμένου κέρδους ανά μετοχή. Προκειμένου να συγκριθεί το πραγματικό και το προβλεπόμενο EPS θα λάβω το πραγματικό EPS από τις οικονομικές δηλώσεις και θα τροποποιήσω τον αριθμό κέρδους ανά μετοχή όταν

απαιτείται προκειμένου η σύγκριση μεταξύ των δύο αριθμών να είναι αποτελεσματική.

Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις διαφορές μεταξύ των πραγματικών και προβλεπόμενων αριθμών EPS. Οι μεγαλύτερες διαφορές εμφανίστηκαν για την GSK για τα έτη 2003, 2004 και 2005. Μια εξήγηση αυτής της απόκλισης να είναι το γεγονός ότι οι αναλυτές είχαν προβλέψει από το 2003 ότι η νέα σωλήνωση που κατασκευάζει η επιχείρηση θα έδινε μελλοντικά οφέλη στην εταιρία και επομένως θα οδηγούσε σε μια δευτερεύουσα άνοδο στις μακροπρόθεσμες πωλήσεις του αναλυτή και την πρόβλεψη EPS. Αυτό που συνέβη στην πραγματικότητα ήταν διαφορετικό από τις προβλέψεις των αναλυτών, δεδομένου ότι η σωλήνωση δεν προχώρησε όπως ανέμεναν οι αναλυτές.

Γενικά, η ακρίβεια, των EPS που πρόβλεψαν οι αναλυτές, ήταν μέτρια δεδομένου ότι στις περισσότερες περιπτώσεις κατορθώνουν να προβλέψουν με ακρίβεια τα EPS.

Company	Year	2001	2002	2003	2004	2005
Vodafone	Forecast		4.8	2.6	9.19	10.33
	Actual		3.5	6.81	9.1	10.41
	Dif		1.3	-4.21	0.09	-0.08
Tesco	Forecst	11.2	12.12	13.6	15.99	
	Actual	11.29	12.14	13.98	16.39	
	Dif	-0.09	-0.02	-0.38	-0.4	
GSK	Forecst		82	89	74.40	81.00
	Actual		n/a	85.1	79.70	85.70
	Dif		n/a	3.9	-5.3	-4.7
Diageo	Forecst		42.8	51.8	49.87	47.54
	Actual		43.6	49.03	48.18	49.06
	Dif		-0.8	2.77	1.69	-1.52
BAT	Forecst		65.4	68.7	73.7	81.2
	Actual		66.5	n/a	71.6	86
	Dif		-1.1	n/a	2.1	-4.8

Μια εξήγηση της διασποράς μεταξύ των πραγματικών και προβλεπόμενων τιμών μπορεί να είναι η φύση των υποθέσεων που οι αναλυτές έκαναν όταν άρχισαν να αξιολογούν τις επιχειρήσεις. Θα ήταν χρήσιμο να εξετάσουμε τι είδους υποθέσεις έκαναν οι αναλυτές προκειμένου να βελτιωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων τους. Επιπλέον αυτές οι υποθέσεις θα μας επιτρέψουν να καταλάβουμε εάν οι αναλυτές κατορθώνουν πράγματι να συλλάβουν τη μελλοντική τιμή των εταιριών και να ενημερώσουν επαρκώς τους επενδυτές για τη μελλοντική αποδοτικότητα και τη θέση της επιχείρησης στην αγορά. Όπως παρουσιάζεται στον ακόλουθο πίνακα χώρισα τις υποθέσεις που έκαναν οι αναλυτές σε μακροοικονομικές και μικροοικονομικές.

Αξίζει να αναφερθεί ότι για τα 36 τοις εκατό της υπόθεσης αύξησης του R&D το 20 τοις εκατό διευθύνεται από τους αναλυτές που εκτιμούν την εταιρία GlaxoSmithKline. Αυτός είναι ο λόγος που ο σημαντικότερος αριθμός λογιστικής που μπορεί καθορίζει τη μελλοντική αποδοτικότητα της εταιρίας είναι το R&D.

Επιπλέον, οι αναλυτές βασίζονται στις συστάσεις τιμών στόχων τους σε διάφορες μακροοικονομικές υποθέσεις όπως ο πληθωρισμός και συγκεκριμένα γεγονότα έτους. Σε αυτές τις υποθέσεις οι διάφορες αποκλίσεις από τις αρχικές προβλέψεις μπορεί να εμφανιστούν και επομένως να έχουν επιπτώσεις στην τελική έκβασή τους.

Type of Assumption	Percentage
Macroeconomic	
Inflation	
Olympic Games 2004	12%
Deflation	10%
Euro 2004	12%
Industry Competition	40%
Global Peace/Instability	40%

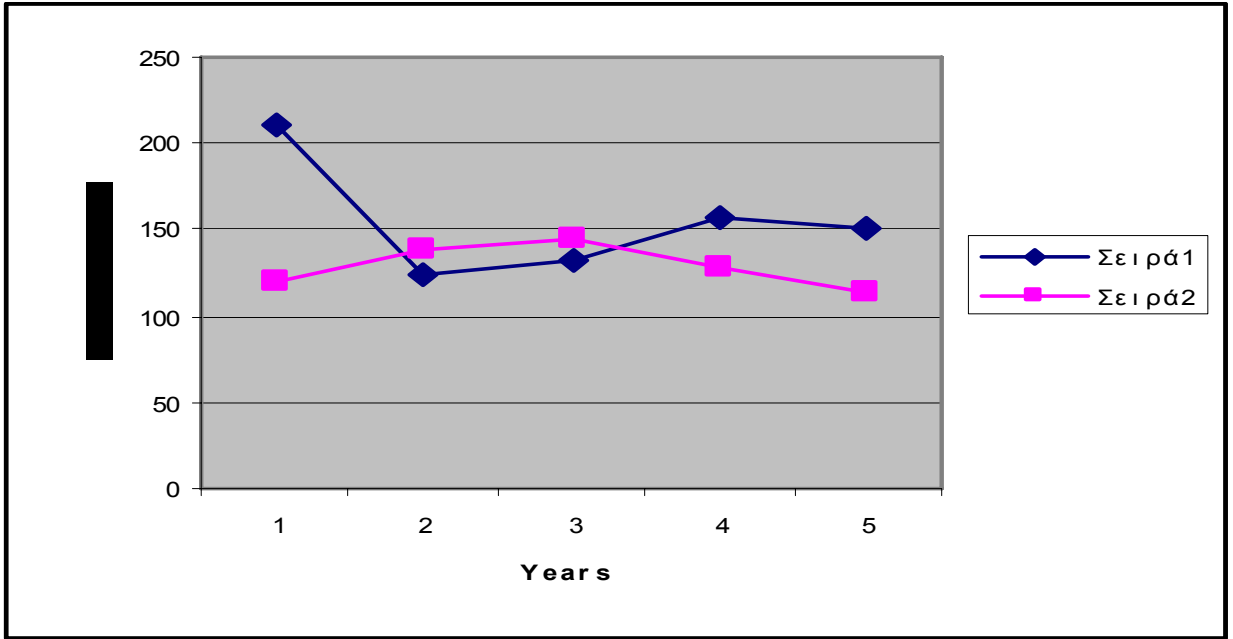
Microeconomic	Sales Growth	32%
	Constant WACC	20%
	Debt Leverage	20%
	R&D Growth	36%
	M&A	20%
	Product Growth	20%
	Revenue Growth	20%

Έχοντας ήδη απαντήσει στην πρώτη ερώτηση υπόθεσης μπορούμε τώρα να κινηθούμε προς την εξέταση της δεύτερης υπόθεσής μου. Δεδομένου ότι το περιεχόμενο της δεύτερης ερώτησης υπόθεσης είναι να εξετάσει εάν η απόκλιση των προβλεπόμενων τιμών σχετικά με τις πραγματικές οφείλεται στην εμπιστοσύνη που αναβλύζει από τη θέση των επιχειρήσεων αυτών στην αγορά, θα προσπαθήσω να βρω μερικά χαρακτηριστικά που θα δείξουν τα στοιχεία της αισιοδοξίας στις προβλέψεις των αναλυτών.

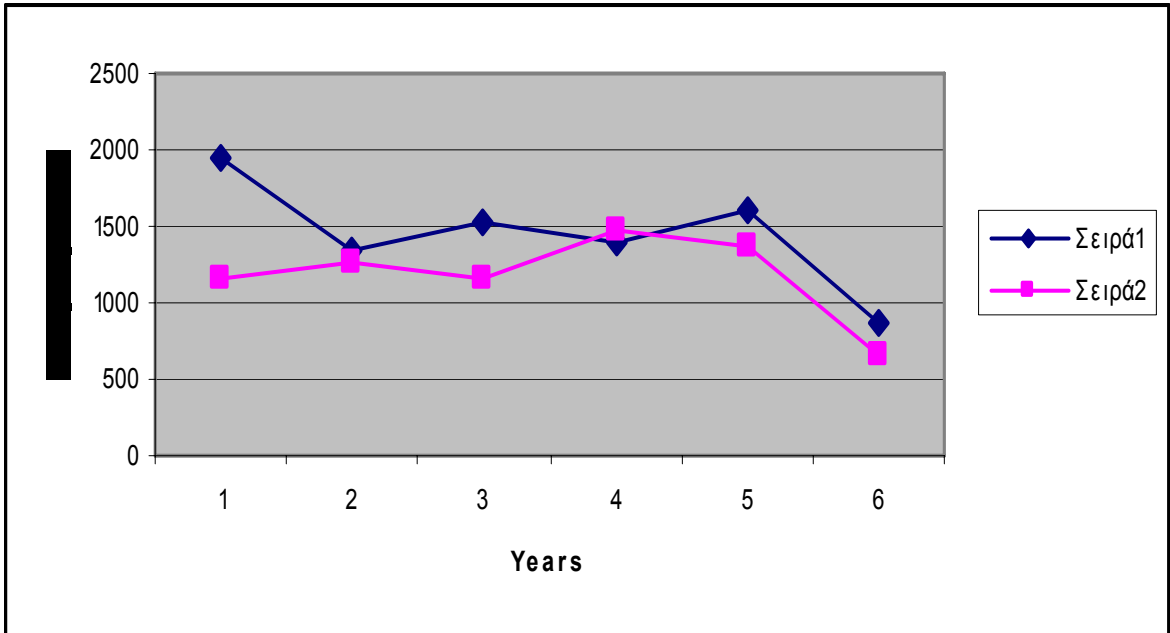
ΠΗΓΕΣ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ

Ο καλύτερος τρόπος να προσδιορίσει εάν η απόκλιση μεταξύ της πραγματικής και της προβλεπόμενης τιμής προκαλείται λόγω της υπεραισιοδοξίας των αναλυτών, είναι να εξεταστεί ο πραγματικός δείκτης μετοχής εναντίον της προβλεπόμενης και μέσης αύξησης αποδοχών σχετικά με το πραγματικό ποσοστό αύξησης όπως έκαναν οι Chorga και λοιποί (1998).

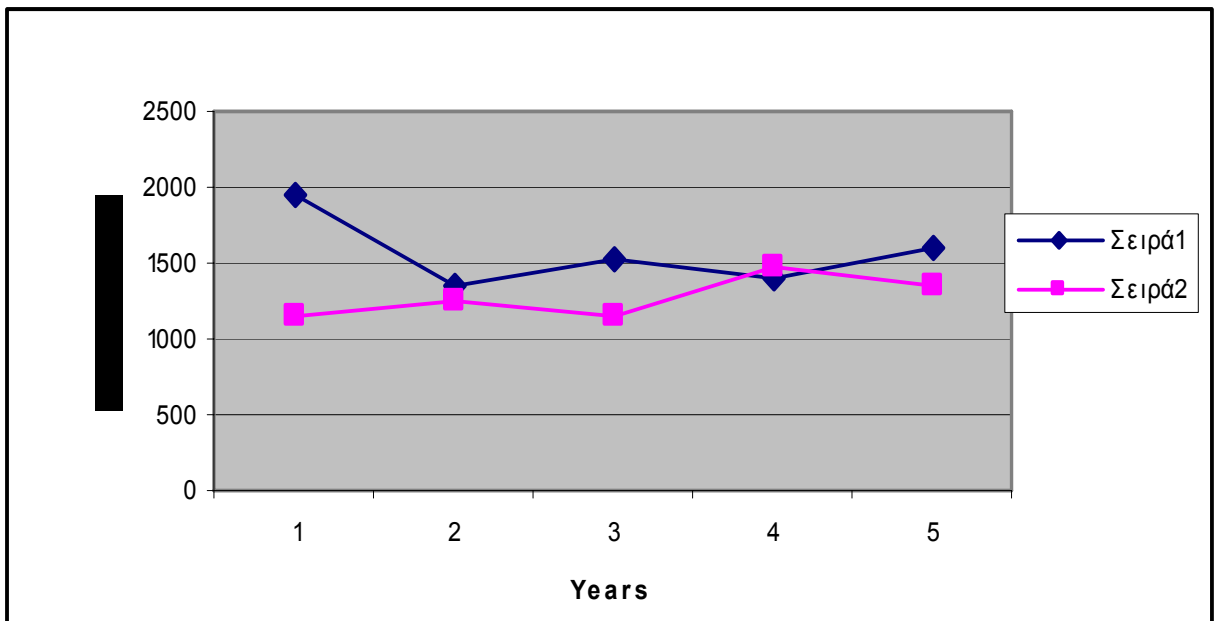
Αρχικά, θα δείξω στα επόμενα γραφήματα τις προβλεπόμενες τιμές σχετικά με τις πραγματικές τιμές.



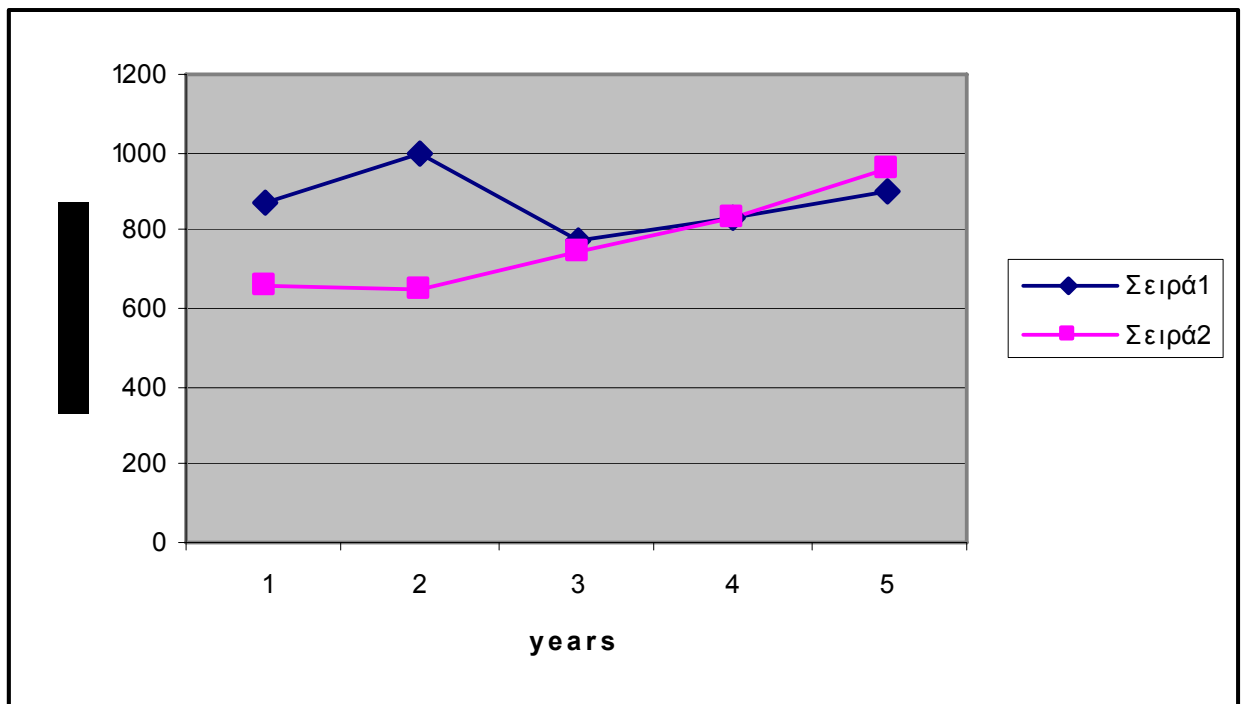
~VODAFONE~



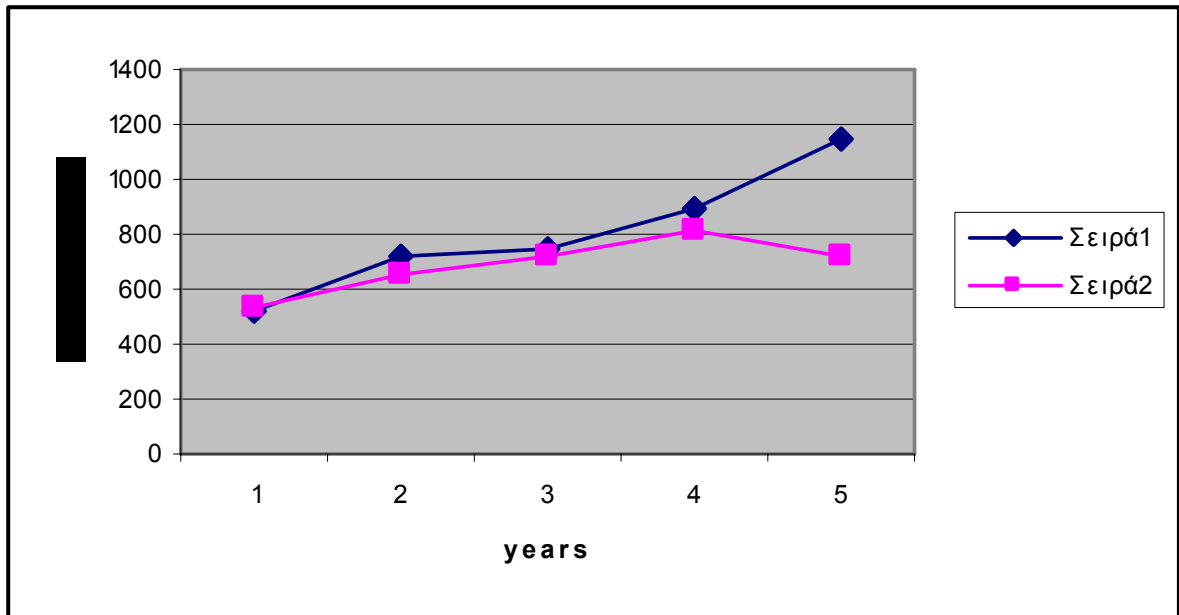
~Tesco~



~GSK~



~Diageo~



~BAT~

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από τα προηγούμενα γραφήματα, οι προβλεπόμενες τιμές στόχων είναι αρκετά αισιόδοξες, ειδικά στην πρόβλεψη του πρώτου έτους. Επιπλέον με την πάροδο των ετών μπορούμε να παρατηρήσουμε μια πτώση στη διασπορά μεταξύ της πραγματικής και προβλεπόμενης τιμής. Αυτή η πτώση μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι οι αναλυτές συλλέγουν τις πρόσθετες πληροφορίες που τους οδηγήσουν στο να αναθεωρήσουν τις εκτιμήσεις τους. Τα ίδια συμπεράσματα συνήχθησαν επίσης από τον Chorra (1998) αλλά για τις προβλέψεις EPS και όχι για τις προβλέψεις τιμών στόχων. Παρακινούμενος από την ανάλυση του Chorra (1998) θα εκτελέσω επίσης μια παρόμοια εξέταση των EPS προβλέψεων.

Συμπέρασμα

Έχοντας απορρίψει τον αντίκτυπο διάφορων μακρο-παραγόντων στην έκβαση αξιολόγησης που διευθύνθηκε από τους αναλυτές, μπορώ να υποθέσω ότι η απόκλιση μεταξύ της προβλεπόμενης και της πραγματικής τιμής προκαλείται λόγω της υπεραισιοδοξίας των προβλέψεων των αναλυτών.

Αναφορές

Κεφάλαιο 2

- Ait-Sahalia, Brandt [2001] "Variable Selection for Portfolio Choice" Journal of Finance no.4
- Blake [1990] Financial Market Analysis
- Campbell, Lo, MacKinlay [1997] The Econometrics of Financial Markets
- Copeland, Weston [1983] Financial Theory and Corporate Policy
- Elton, Gruber [1981] Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
- Markowitz [1952] "Portfolio Selection" Journal of Finance no.7
- Rudolf [1994] Algorithms for Portfolio Optimization and Portfolio Insurance 2

Κεφάλαιο 3

- Elton, Gruber [1981] Modern Portfolio Theory and Investment Analysis
- Kataoka [1963] "A Stochastic Programming Model" Econometrica 31
- Roy [1952] "Safety-first and the Holding of Assets" Econometrics 20
- Telser [1955] "Safety-first and Hedging" Review of Economic Studies 23

Κεφάλαιο 4

- Billio, Casarin, Toniolo [2002] Extreme Returns in a Shortfall Risk Framework
- Embrechts, McNeil, Straumann [1999] Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls
- Frahm, Junker, Szimayer [2002] Elliptical Copulas: Applicability and Limitations
- Hodoshima [2001] The Effects on Nonnormality on the Market Model in the Class of Elliptical Distributions
- Hult, Lindskog [2001] Multivariate Extremes, Aggregation and Dependence in Elliptical Distributions
- Ingersoll [1987] Theory of Financial Decision Making
- Landsman, Valdez [2002] Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions
- Lindskog [2000] Linear Correlation Estimation
- Owen, Rabinovitch [1983] "On the class of Elliptical Distributions and their applications to the Theory of Portfolio Choice" The Journal of Finance Vol.38, No.3
- Rice [1995] Mathematical Statistics and Data Analysis

- Telser [1955] "Safety-First and Hedging" Review of Economic Studies 23
- Valdez, Chernih [2003] Wang's Capital Allocation Formula for Elliptically-Contoured Distributions

Κεφάλαιο 5

- Artzner, Delbaen, Eber, Heath [1998] Coherent Measures of Risk
- Carroll, Perry, Yang, Ho [2001] "A New Approach to Component VaR" Journal of Risk 3
- Di Clemente [2003] The Empirical Value-at-Risk/Expected Return Frontier: a Useful Tool of Market Risk Managing
- Frei, McNeil [2002] VaR and Expected Shortfall in Portfolios of Dependent Credit Risks: Conceptual and Practical Insights
- De Giorgi [2002] A Note on Portfolio Selection under Various Risk Measure
- Huisman, Koedijk, Pownall [1999] Asset Allocation in a Value-at-Risk Framework
- Hurlimann [2001] An alternative Approach to Portfolio Selection
- Lucas [1998] Nut, Gebruik, en Beperkingen van Value-at-Risk voor Risicomanagement
- Lucas [1997] A Note on Optimal Estimation from a Risk Management Perspective under Possibly Mis-specified Tail Behavior
- Tasche [2000] Risk Contributions and Performance Measurement

Κεφάλαιο 6

- Baud, Frachot, Igigabel, Martineau, Roncalli [1999] An Analysis Framework for Bank Capital Allocation
- Bralver, Kuritzkes [19??] "Risk Adjusted Performance Measurement in the Trading Room" Journal of Applied Corporate Finance
- Jameson [2001] "Between Raroc and a Hard Place" ERisk.com
- Punjabi [1998] "Many Happy Returns" Risk Magazine June
- Rabobank Nederland [2003] Economic Capital from a Conceptual Point of View. Internal Memo.
- Smithson [2001] "Allocating and Optimising Capital" Risk Magazine June
- Wilson [1992] "Raroc Remodelled" Risk Magazine September 86

Κεφάλαιο 7

- Alizadeh, Goldfarb [2002] Second-order Cone Programming
 - Anderson, Roos, Terlaky [2000] Notes on Duality in Second Order and p-order Cone Optimization
 - Ben-Tal, Nemirovski, Roos [2001] Robust Solutions of Uncertain Quadratic and Conic-quadratic Problems
 - Black, Litterman [1990] "Asset Allocation: Combining Investor Views with Market Equilibrium: Technical Report" Fixed Income Research
 - Chopra [1993] Improving Optimization
 - Frost, Savarino [1988] "For Better Performance: Constrain Portfolio Weights" Journal of Portfolio Management
 - Fukushima, Yamashita [2001] Multiperiod Portfolio Selection with Second-order Cone Constraints
 - Goldfarb [2002] The Simplex Method for Conic Programming
 - Goldfarb, Iyengar [2003] "Robust Portfolio Selection Problems" Mathematics of Operations Research 1
 - Goldfarb, Iyengar [2002] Robust Convex Quadratically Constrained Programs
 - Halld_orsson, Tutuntu [2002] An Interior-point Method for a Class of Saddle-point Problems
 - Jorion [1986] "Bayes-Stein Estimation for Portfolio Analysis" Journal of Financial and Quantitative Analysis Vol.21, No.3
 - Krishnan [2002] Lecture Notes about Topics in Nonlinear Programming
 - Lobo [2000] Robust and Convex Optimization with Applications in Finance
 - Lobo, Vandenberghe, Boyd, Lebret [1998] Applications of Second-order Cone Programming
 - Michaud [1998] Efficient Asset Management: A Practical Guide to Stock Portfolio Management and Asset Allocation
 - Marnix Engels [2003] portfolio optimization
 - Lofberg YALMIP 2.4 <http://www.control.isy.liu.se/johanl/yalmip.html>
 - Sturm SEDUMI 1.05 <http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html>
 - Tutuntu, Koenig [2003] Robust Asset Allocation
 - Vanderbei, Yurttan [1998] Using LOQO to Solve Second-order Cone Programming Problems
 - Yildirim [2001] On Sensitivity Analysis in Conic Programming Ziemba, Mulvey [1998] Worldwide Asset and Liability Modelling
-