



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Κυκλοτρονική Αλληλεπίδραση Διαύλου Γυροτρονίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Γ. Χέλης

Επιβλέπων : Ιωάννης Λ. Βομβορίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα Οκτώβριος 2009



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Κυκλοτρονική Αλληλεπίδραση Διαύλου Γυροτρονίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ιωάννης Γ. Χέλης

Επιβλέπων : Ιωάννης Λ. Βομβορίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 26^η Οκτωβρίου 2009

.....
Ι. Βομβορίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Κ. Χιτζανίδης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
Η. Γλύτσος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα Οκτώβριος 2009

.....
Ιωάννης Γ. Χέλης

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης Χέλης 2009

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Η εργασία αυτή αποσκοπεί στη μελέτη της αλληλεπίδρασης ηλεκτρονικής δέσμης – ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που λαμβάνει χώρα στο δίαυλο του γυροτρονίου. Δύο χαρακτηριστικές γεωμετρίες διαύλου μελετούνται και προτείνεται κατάλληλο μοντέλο αλληλεπίδρασης για την κάθε περίπτωση.

Με την διεθνή προσπάθεια για την έρευνα και κατασκευή του διεθνούς πειραματικού αντιδραστήρα θερμοπυρηνικής σύντηξης (ITER) να εντείνεται, η ανάγκη για μικροκυματική ακτινοβολία υψηλής ισχύος στη χιλιοστομετρική περιοχή γίνεται επιτακτική. Την ανάγκη αυτή έρχεται να καλύψει το γυροτρόνιο που είναι η πλέον κατάλληλη διάταξη παραγωγής μικροκυματικής ισχύος για τη θέρμανση του πλάσματος στους αντιδραστήρες σύντηξης. Έτσι απαιτείται η σχεδίαση αξιόπιστων και αποδοτικών γυροτρονίων για τον τελικό σκοπό παραγωγής ενέργειας από τη σύντηξη σε μεγάλη κλίμακα.

Ένα από τα αδύνατα σημεία του γυροτρονίου αποτελεί ο δίαυλος της δέσμης των ηλεκτρονίων. Σε αυτή την περιοχή του γυροτρονίου αναπτύσσονται παρασιτικές αλληλεπιδράσεις που συνεπάγονται τόσο αυξημένες απώλειες στα τοιχώματα και τους διηλεκτρικούς δακτυλίους του διαύλου όσο και την αλλοίωση των χαρακτηριστικών της δέσμης με συνέπεια την περαιτέρω υποβάθμιση της απόδοσης του συστήματος.

Στην παρούσα εργασία αναπτύσσεται μοντέλο αλληλεπίδρασης προσανατολισμένο για το δίαυλο. Συγκεκριμένα συμπεριλαμβάνονται στις εξισώσεις κίνησης φαινόμενα, που για την αλληλεπίδραση της κοιλότητας συνήθως παραλείπονται χάριν οικονομίας στους υπολογισμούς, όπως όροι πεδίου σημαντικοί μακριά από την αποκοπή, υβριδικόι ρυθμοί καθώς και αξονική ανομοιογένεια μαγνητοστατικού πεδίου. Αγνοείται ως φαινόμενο που δεν ενδιαφέρει άμεσα το δίαυλο ο ανταγωνισμός των ρυθμών και γίνεται θεώρηση της αλληλεπίδρασης όχι μέσω των όρων πηγής αλλά μέσω της ενέργειας.

Οι γεωμετρίες που εξετάζονται είναι τόσο η γεωμετρία σταθερής διατομής κλιμακωτής ακτίνας όσο και η γεωμετρία με διατομή συνεχώς μεταβαλλόμενης ακτίνας. Με κατάλληλη θεώρηση του προβλήματος αντιμετωπίζεται η κάθε γεωμετρία χωριστά. Η μεν πρώτη γεωμετρία της σταθερής διατομής αντιμετωπίζεται με ανάπτυξη του πεδίου σύμφωνα με το θεώρημα Floquet ενώ η δεύτερη γεωμετρία της μεταβαλλόμενης διατομής προσεγγίζεται σύμφωνα με τη μέθοδο WKB.

Για την επίλυση του προβλήματος της γεωμετρίας μεταβαλλόμενης διατομής, αναπτύχθηκε κώδικας για την εύρεση του επιπέδου κορεσμού της αλληλεπίδρασης. Το τελικό σημείο κορεσμού για κάθε ρυθμό ενδιαφέρει να παραμένει χαμηλό στο δίαυλο για τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Επομένως, παρέχεται ένα εργαλείο εκτίμησης του μεγέθους των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων κατά το στάδιο της σχεδίασης του διαύλου.

Λέξεις κλειδιά

Γυροτρόνιο, δίαυλος δέσμης ηλεκτρονίων, κυκλοτρονική αλληλεπίδραση

Abstract

The present diploma thesis is aiming at the investigation of the interaction between electron beam – electromagnetic fields that takes place in a gyrotron's beam tunnel. Two characteristic geometries are investigated and appropriate interaction models are suggested for both cases.

As the international effort for the research and construction of the international experimental fusion reactor (ITER) is growing, the need for microwave radiation of high power in the millimeter range is getting imperative. This need comes to be satisfied by the gyrotron which is the most suitable device for delivering the microwave power needed for plasma heating. As a result, the design of reliable and efficient gyrotrons is required for producing energy by fusion in a large scale.

A weak part of the gyrotron operation is the electron beam tunnel. In this region of the gyrotron, parasitic interactions are developed resulting in raised power losses on the tunnel walls and dielectric rings, as well as in the alteration of the beam properties causing further degradation of the system's efficiency.

In the current dissertation, an appropriate interaction model is suggested, oriented to the beam tunnel interaction. Effects, that are usually ignored in the gyrotron interaction cavity, are assumed in the equation of motion such as field terms that are significant away from cutoff, hybrid modes and axially nonuniform magnetostatic field. Mode competition is ignored as an effect not directly concerning the beam tunnel while the interaction is studied through energy terms and not electrons as source of fields.

Two geometries are studied, the constant cross section as a part of the stepped-radius geometry and the continuously varying radius geometry. The constant cross section geometry is treated by field expansion through Floquet theorem while the varying radius geometry is treated by the WKB method.

For the geometry of varying radius, a computer code has been developed for estimating the saturation level of power conversion in the beam-tunnel. The final power level should remain low in the tunnel for the reasons previously reported. Consequently, a tool is provided for estimating the magnitude of parasitic interactions at the phase of the beam tunnel design.

Keywords

Gyrotron, electron beam tunnel, electron cyclotron interaction

Ευχαριστίες

Με την ευκαιρία αυτή θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Ι.Λ. Βομβορίδη, καθηγητή του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου, για τη δυνατότητα που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο θέμα αλλά και για τις γνώσεις που μου μετέφερε πάνω στην επιστημονική περιοχή των μικροκυματικών πηγών ισχύος.

Ιδιαίτερα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Κ. Αβραμίδη, Διδάκτορα Μηχανικό της Σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών Ε.Μ.Π., για την άριστη συνεργασία και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της παρούσας εργασίας.

Πίνακας Περιεχομένων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	11
1.1 Μικροκυματικές Λυχνίες.....	11
1.2 Δομή Μικροκυματικών Πηγών - Γυροτρονίου.....	12
1.3 Η Αλληλεπίδραση Γυροτρονίου.....	15
1.4 Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας.....	16
1.5 Ο Διάυλος της ηλεκτρονικής δέσμης.....	18
1.5.1 Μαγνητοστατικά φαινόμενα στο διάυλο.....	18
1.5.2 Ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα στο διάυλο.....	19
1.6 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας.....	20
2. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΑΥΛΟΥ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	23
2.1 Αναπαράσταση Πεδίων στο διάυλο.....	23
2.1.1 Ηλεκτρομαγνητικά πεδία.....	23
2.1.2 Μαγνητοστατικό πεδίο.....	26
2.2 Διατύπωση εξισώσεων κίνησης.....	27
2.2.1 Ανάπτυξη εξισώσεων κίνησης.....	27
2.2.2 Υπολογισμός όρων μαγνητοστατικού πεδίου.....	31
2.2.3 Εκφράσεις κατάλληλες για αριθμητικούς υπολογισμούς.....	33
2.3 Περιγραφή Μοντέλου Αλληλεπίδρασης.....	34
2.3.1 Εκφράσεις Ηλεκτρομαγνητικής Ενέργειας.....	34
2.3.2 Εξίσωση ισοζυγίου ενέργειας.....	36
3. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΑΥΛΟΥ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ	37
3.1 Εκφράσεις ηλεκτρομαγνητικών πεδίων.....	37
3.1.1 Εκφράσεις πεδίων σύμφωνα με τη μέθοδο WKB.....	37
3.1.2 Υπολογισμός συντελεστή ανομοιογένειας.....	39
3.2 Διατύπωση εξισώσεων κίνησης.....	41
3.3 Υπολογισμός Ηλεκτρομαγνητικής Ενέργειας.....	43
4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ	44
4.1 Συνοπτική περιγραφή κώδικα αλληλεπίδρασης.....	44
4.2 Έλεγχος του κώδικα αλληλεπίδρασης.....	45
4.3 Χαρακτηριστική περίπτωση διαύλου.....	47
4.4 Δυνατές επεκτάσεις.....	49
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	50
Π.1. Εξισώσεις Κέντρου Περιστροφής Ηλεκτρονίων.....	50
Π.2. Αναλυτικός Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων για την Ηλεκτρομαγνητική Ενέργεια.....	53
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	55

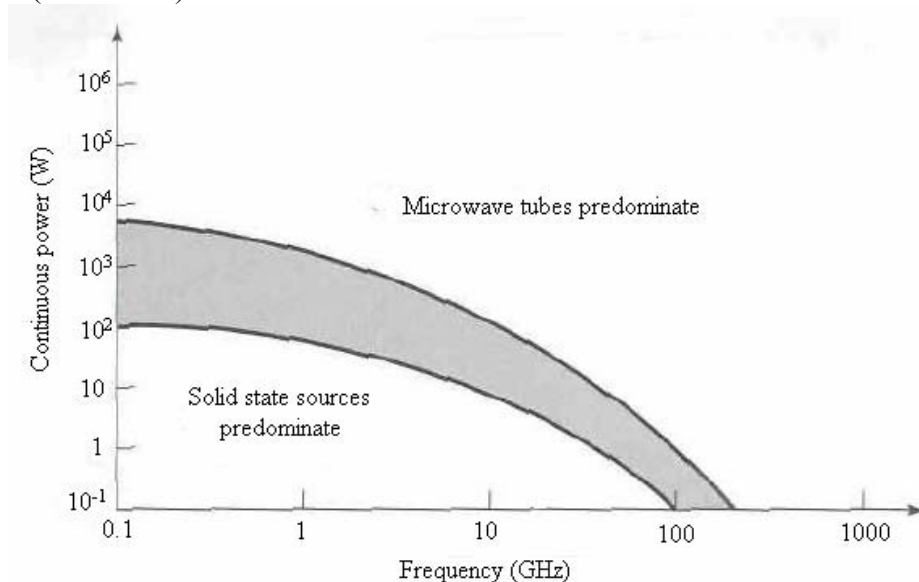
1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία αφορά το γυροτρόνιο. Το γυροτρόνιο αποτελεί διάταξη παραγωγής μικροκυματικής ακτινοβολίας υψηλής ισχύος με κύρια εφαρμογή τη θέρμανση του πλάσματος για την επίτευξη των αντιδράσεων της θερμοπυρηνικής σύντηξης. Σαν διάταξη ανήκει στη γενικότερη κατηγορία των μικροκυματικών πηγών ισχύος, οι οποίες μοιράζονται κοινά επιμέρους στοιχεία και αρχές λειτουργίας.

Στο εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο θα γίνει μια γενικότερη εισαγωγή στη λειτουργία των μικροκυματικών πηγών και των γυροτρονίων καθώς επίσης θα παρουσιασθούν οι στόχοι και οι κατευθύνσεις της εργασίας.

1.1 Μικροκυματικές Λυχνίες

Οι μικροκυματικές λυχνίες αποτελούν τις βασικές συσκευές παραγωγής μικροκυμάτων ισχύος. Η χρήση τους έχει καθιερωθεί σε εφαρμογές που απαιτείται ακτινοβολία μέσης και υψηλής ισχύος στις μικροκυματικές συχνότητες. Τέτοιες εφαρμογές εντοπίζονται στις ασύρματες επικοινωνίες (πομποί υψηλής ισχύος, ραντάρ), στη βιομηχανία (φούρνοι) καθώς και σε εξειδικευμένες εφαρμογές όπως η θερμοπυρηνική σύντηξη και οι επιταχυντές σωματιδίων. Η κατηγορία των συσκευών αυτή, μπορεί να παράξει μικροκυματική ισχύ τάξεις μεγέθους υψηλότερη από τις συμβατικές διατάξεις ημιαγωγικών ενισχυτών και σε αρκετά υψηλότερες συχνότητες. Για το λόγο αυτό κυριαρχούν στις συγκεκριμένες εφαρμογές και συνεχίζεται η ανάπτυξή τους παρά τη μεγάλη βελτίωση των ημιαγωγικών διατάξεων σε όρους ισχύος και συχνότητας που έχει συντελεστεί τα τελευταία χρόνια (εικόνα 1.1).



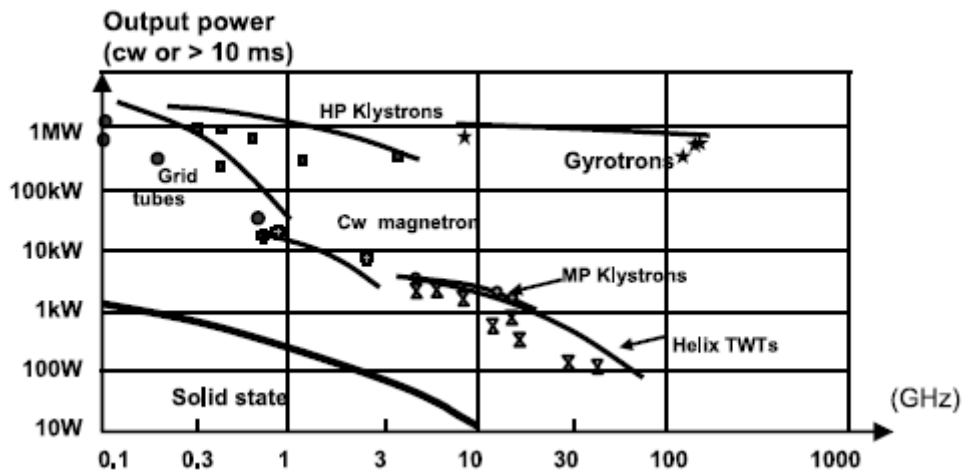
Σχήμα 1.1 (σχήμα 10.35 του [1])

Βασική αρχή λειτουργίας των μικροκυματικών λυχνιών αποτελεί η μετατροπή της ενέργειας μιας ηλεκτρονικής δέσμης σε υψίσυχνη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Η

ηλεκτρονική δέσμη μπορεί να δημιουργηθεί από μία κάθοδο θερμιονικής εκπομπής και η επιτάχυνση της στο επιθυμητό επίπεδο να επιτευχθεί μέσω μιας πηγής υψηλής συνεχούς τάσης. Η μετατροπή σε ηλεκτρομαγνητική ισχύ υψηλής συχνότητας γίνεται μέσω της ύπαρξης κάποιου συντονισμού μεταξύ της κίνησης των ηλεκτρονίων και του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Το είδος του συντονισμού αποτελεί και ένα από τα στοιχεία διάκρισης μεταξύ των διαφόρων τύπων μικροκυματικών λυχνιών.

Οι μικροκυματικές λυχνίες μπορεί να λειτουργούν είτε σαν ενισχυτές είτε σαν ταλαντωτές. Σαν ενισχυτής μια λυχνία λειτουργεί όταν η εξερχόμενη ισχύς προέρχεται από ενίσχυση εισερχόμενου στη διάταξη ασθενούς σήματος ενώ σαν ταλαντωτής θεωρείται όταν η εξερχόμενη ισχύς διεγείρεται από τη στάθμη του θορύβου του ηλεκτροδυναμικού συστήματος χωρίς την εισαγωγή εξωγενούς σήματος. Τα γυροτρόνια αναπτύσσονται πρωτίστως σαν διατάξεις ταλαντωτών.

Παραδείγματα μικροκυματικών λυχνιών αποτελούν τα TWT, Magnetron, Klystron, Free Electron Laser, Maser (Σχήμα 1.2) και φυσικά το γυροτρόνιο το οποίο έχει συγκεντρώσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον για τις ανάγκες τις θερμοπυρηνικής σύντηξης.



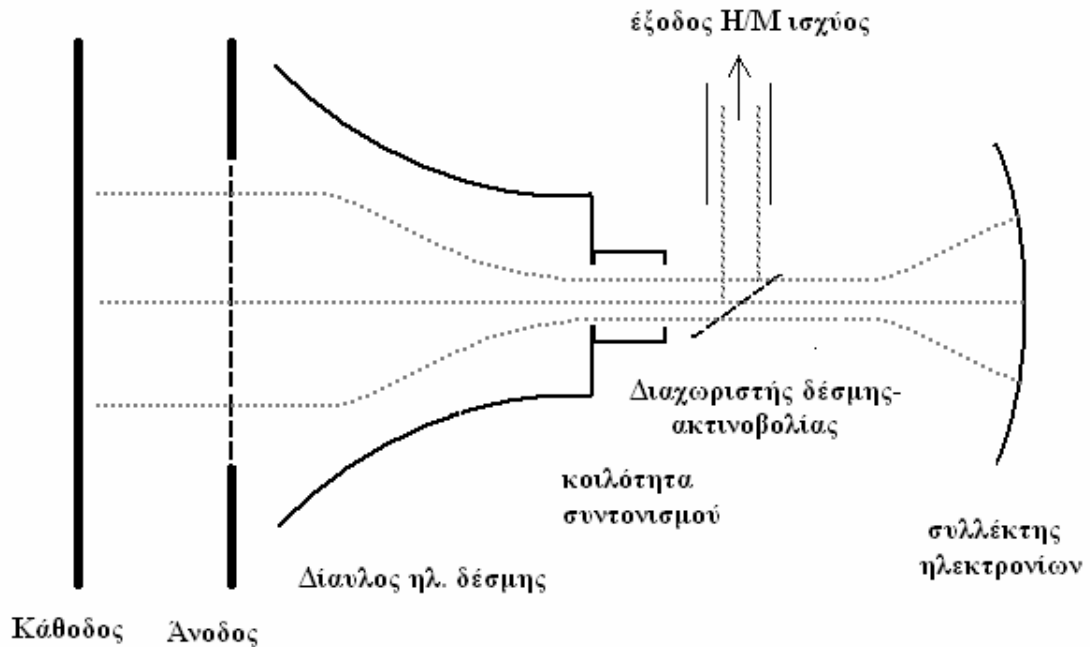
Σχήμα 1.2 (σχήμα 1.1 του [2]): Περιοχές λειτουργίας μικροκυματικών πηγών.

1.2 Δομή Μικροκυματικών Πηγών - Γυροτρονίου

Η δομή των μικροκυματικών πηγών είναι στις περισσότερες διατάξεις κοινή και τα στοιχεία που τις απαρτίζουν έχουν όμοια λειτουργία. Ανάλογα τη διάταξη κάποια επιμέρους στοιχεία μπορεί να παραλείπονται ή να συγχωνεύονται.

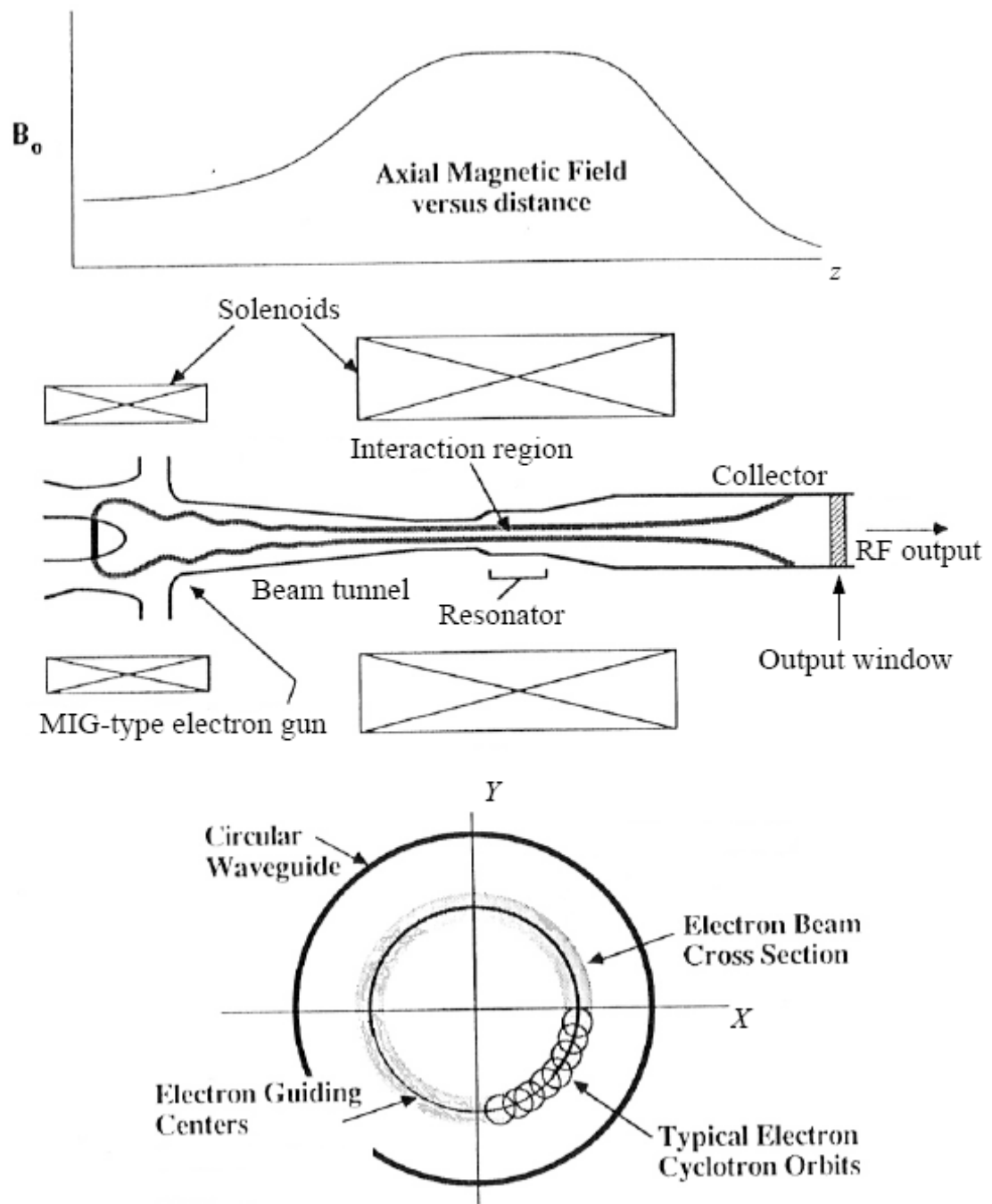
Η διάρθρωση μιας μικροκυματικής πηγής (σχήμα 1.3) ξεκινά από την κάθοδο. Από εκεί με θερμιονική εκπομπή αποσπώνται τα ηλεκτρόνια τα οποία επιταχύνονται και σχηματίζουν την ηλεκτρονική δέσμη. Η επιτάχυνση προκαλείται από το αρνητικό δυναμικό που βρίσκεται η κάθοδος σε σχέση με μια γειωμένη άνοδο που ακολουθεί. Έπειτα τα ηλεκτρόνια, πάντα σε συνθήκες κενού, οδηγούνται μέσω ενός στατικού πεδίου κατά μήκος του διαύλου της ηλεκτρονικής δέσμης. Στο διάυλο συνήθως, προσαρμόζεται η διατομή της δέσμης στις διαστάσεις που απαιτούνται από το ηλεκτροδυναμικό σύστημα. Το τελευταίο

αποτελείται συνήθως από τμήμα κυματοδηγού, κοιλότητα ή σύστημα κοιλότητων στο οποίο λαμβάνει χώρα ο συντονισμός και η μετατροπή της ενέργειας από κινητική ενέργεια ηλεκτρονίων σε ηλεκτρομαγνητική. Έπειτα μέσω του διαχωριστή δέσμης-μικροκυμάτων που συνήθως αποτελείται από σύστημα κατόπτρων διαχωρίζεται από τα ηλεκτρόνια η ωφέλιμη μικροκυματική ισχύς και οδηγείται στο παράθυρο εξόδου των μικροκυμάτων. Τέλος τα ηλεκτρόνια προσκρούουν στο συλλέκτη όπου μέρος της εναπομένουσας ισχύος τους μπορεί να ανακτηθεί με εφαρμογή αρνητικού δυναμικού.



Σχήμα 1.3: Γενική δομή των μικροκυματικών λυχνιών.

Στο γυροτρόνιο το σύστημα καθόδου-ανόδου είναι συνήθως τύπου M.I.G. (magnetron injection gun) το οποίο παράγει δακτυλιοειδή δέσμη αφού η επιφάνεια εκπομπής είναι καμπύλη κωνική με κυλινδρική συμμετρία. Ένα ισχυρό μαγνητοστατικό πεδίο αναγκάζει τα ηλεκτρόνια να ακολουθήσουν ελικοειδή τροχιά κατά μήκος των δυναμικών γραμμών του και να εισέλθουν στον επιμήκη διάυλο. Ο επιμήκης διάυλος είναι απαραίτητος για την ήπια μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου σε αυτόν και συνεπώς για την ομαλή εστίαση της δέσμης. Αφού η δέσμη οδεύσει στο διάυλο και λάβει την τελική της διατομή, εισέρχεται στην ηλεκτρομαγνητική κοιλότητα. Η τελευταία στο γυροτρόνιο αποτελείται συνήθως από τμήματα κυλινδρικού κυματοδηγού. Παραλλαγές της κοιλότητας αλληλεπίδρασης όπως ομοαξονική γεωμετρία κοιλότητας ή σύστημα κατόπτρων συναντάται στα ομοαξονικά και οπτικά γυροτρόνια αντίστοιχα. Αξίζει να σημειωθεί πως για τα γυροτρόνια μεγάλης ισχύος που προορίζονται για τη θερμοπυρηνική σύντηξη η έξοδος της ωφέλιμης ισχύος γίνεται εγκάρσια στην όδευση της δέσμης και το διηλεκτρικό παράθυρο των μικροκυμάτων αποτελείται από συνθετικό αδάμαντα χαμηλής απορρόφησης και υψηλής ανθεκτικότητας. Η δομή του συμβατικού γυροτρονίου [3], η μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου στον άξονά του καθώς και οι τυπικές τροχίες των ηλεκτρονίων παρουσιάζονται στο σχήμα 1.4.

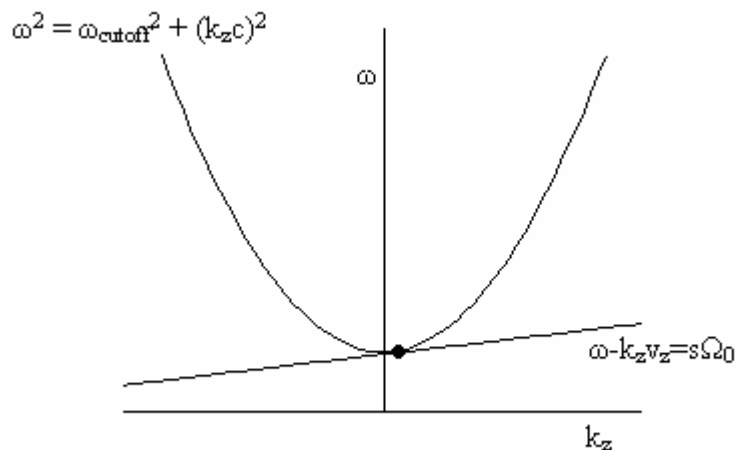


Σχήμα 1.4: (σχήμα 4.1 του [3]): Δομή του γυροτρονίου.

1.3 Η Αλληλεπίδραση Γυροτρονίου

Το γυροτρόνιο ανήκει στις λυχνίες γρήγορου κύματος και ειδικότερα στις γυροδιατάξεις. Γρήγορου κύματος θεωρείται αφού η φασική ταχύτητα του κύματος στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα είναι μεγαλύτερη του φωτός. Έτσι για την ικανοποίηση της συνθήκης συντονισμού, καθώς η ταχύτητα του σωματιδίου δεν μπορεί να ξεπεράσει αυτή του φωτός, απαιτείται εισαγωγή περιοδικότητας στην κίνηση των ηλεκτρονίων της δέσμης. Η απαραίτητη περιοδικότητα εισάγεται μέσω του διαμήκους μαγνητοστατικού πεδίου και της κυκλοτρονικής κίνησης που αυτό συνεπάγεται έτσι ώστε η εγκάρσια ταλάντωση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων να επιτρέπει το συντονισμό με το γρήγορο κύμα. Η χρήση του μαγνητοστατικού πεδίου και της κυκλοτρονικής κίνησης για το συντονισμό συγκαταλέγει το γυροτρόνιο στην κατηγορία των γυροδιατάξεων.

Το είδος του συντονισμού που λαμβάνει χώρα στο γυροτρόνιο καλείται κυκλοτρονικός συντονισμός. Όπως θα δούμε παρακάτω ο μηχανισμός μεταφοράς της ενέργειας στα γυροτρόνια είναι ένα καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο.



Σχήμα 1.5: Σχέση διασποράς και σημείο συντονισμού για την αλληλεπίδραση γυροτρονίου.

Η συνθήκη συντονισμού για την αλληλεπίδραση του γυροτρονίου είναι η εξής:

$$\omega \approx s \frac{\Omega_0}{\gamma}, \quad (1.3.1)$$

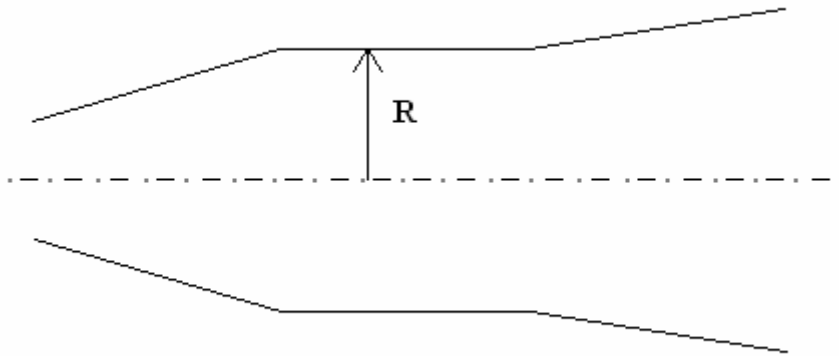
όπου ω η συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, $\frac{\Omega_0}{\gamma}$ η σχετικιστική κυκλοτρονική συχνότητα και s ακέραιος που χαρακτηρίζει την τάξη της αρμονικής αλληλεπίδρασης ($s=1$ για τη θεμελιώδη). Η σχέση αυτή προέρχεται από τη γενικότερη συνθήκη συντονισμού για τις γυροδιατάξεις:

$$\omega - k_z v_z \approx s \frac{\Omega_0}{\gamma}, \quad (1.3.2)$$

αφού αμεληθεί η μετατόπιση Doppler $k_z v_z$. Η τελευταία αμελείται μιας και η αλληλεπίδραση γυροτρονίου προϋποθέτει κύμα που βρίσκεται κοντά στην αποκοπή ($\omega \gg k_z c$) για την περιοχή του ηλεκτροδυναμικού συστήματος όπου πραγματοποιείται η αλληλεπίδραση. Επίσης η αλληλεπίδραση γυροτρονίου λαμβάνει χώρα με ήπια σχετικιστική δέσμη ($V_b < 100$ kV) μιας και τότε ο σχετικιστικός παράγοντας γ είναι κοντά

στη μονάδα και δεν μεταβάλλεται σημαντικά από την απώλεια ενέργειας των ηλεκτρονίων. Έτσι διατηρείται η συνθήκη συντονισμού που εξαρτάται από το γ και επιπλέον λόγω της μικρής τιμής του, χρειαζόμαστε μικρότερο μαγνητοστατικό πεδίο για δεδομένη συχνότητα λειτουργίας. Το σχήμα 1.5 δείχνει τη σχέση διασποράς σε ένα κυματοδηγό, τη συνθήκη συντονισμού και το σημείο όπου λαμβάνει χώρα η αλληλεπίδραση γυροτρονίου.

Η δομή του ηλεκτροδυναμικού συστήματος στο συμβατικό γυροτρόνιο αποτελείται συνήθως από τρία μέρη κυματοδηγού όπως στο σχήμα 1.6. Στο κεντρικό κομμάτι η ακτίνα είναι σταθερή και εκεί συμβαίνει η κυρίως αλληλεπίδραση μεταξύ ηλεκτρονίων και κύματος. Το κομμάτι κυματοδηγού προς το διάυλο έχει μειούμενη ακτίνα προς αυτόν ώστε το κύμα στην περιοχή αυτή να είναι στην αποκοπή και να μη διαδίδεται προς το διάυλο. Αντίθετα το τρίτο κομμάτι έχει αυξανόμενη ακτίνα ώστε το κύμα να διαδίδεται ελεύθερα προς την έξοδο της διάταξης.



Σχήμα 1.6: Σχήμα κοιλότητας αλληλεπίδρασης γυροτρονίου

Λόγω της απαίτησης λειτουργίας κοντά στην αποκοπή ευνοείται η χρήση κυμάτων TE. Οι ρυθμοί TE παρουσιάζουν σε σχέση με τους ρυθμούς TM ισχυρότερο εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο το οποίο έχει και τον κύριο λόγο στον μηχανισμό μετατροπής της ενέργειας. Μάλιστα στα μοντέλα αλληλεπίδρασης για την κοιλότητα συντονισμού, συνήθίζεται να αμελείται η δράση του εγκάρσιου μαγνητικού πεδίου καθώς στους ρυθμούς TE κοντά στην αποκοπή το εγκάρσιο μαγνητικό πεδίο είναι αρκετά ασθενέστερο από το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο.

1.4 Μηχανισμός μεταφοράς ενέργειας

Ο μηχανισμός μεταφοράς της ενέργειας από τα ηλεκτρόνια στα πεδία οφείλεται στη σχετικότητα και ειδικότερα στην εξάρτηση της κυκλοτρονικής συχνότητας των ηλεκτρονίων από την ενέργειά τους. Για να επιτευχθεί συνολική μεταφορά ενέργειας απαιτείται εκτός από τη συνθήκη συντονισμού (1.3.2) και ένας μηχανισμός συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων σε ευνοϊκή περιοχή φάσεων στο φασικό χώρο.

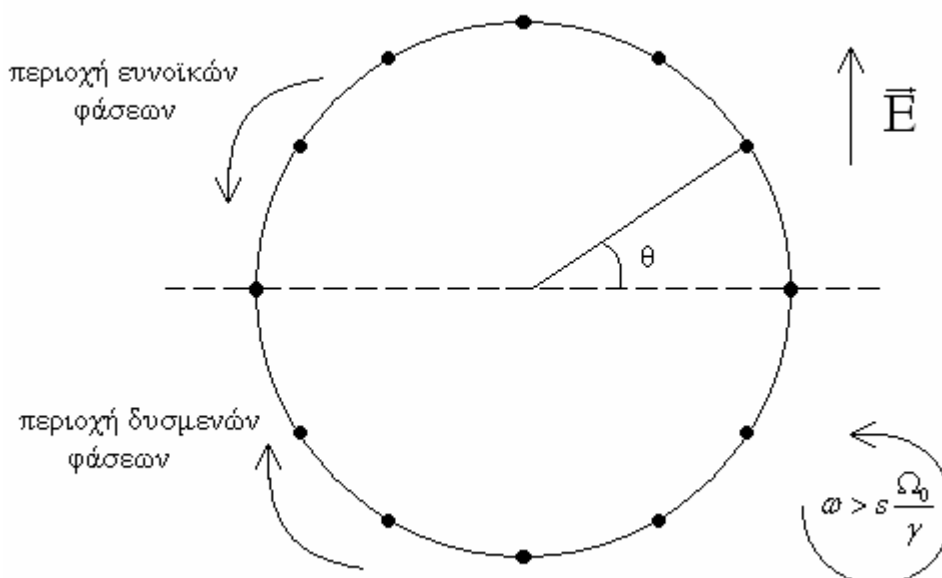
Πιο αναλυτικά, τα ηλεκτρόνια αφού βρίσκονται σε συντονισμό με το κύμα αισθάνονται το εγκάρσιο ηλεκτρικό πεδίο του κύματος περίπου σταθερό ως προς την εγκάρσια ταχύτητα τους. Η κατεύθυνση μεταφοράς της ενέργειας καθορίζεται για κάθε ηλεκτρόνιο από το πρόσημο της ποσότητας:

$$\frac{dW}{dt} = -e \cdot \mathbf{E}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{\perp} \quad (1.4.1)$$

δηλαδή από το εσωτερικό γινόμενο της ηλεκτρικής δύναμης με την ταχύτητα, που δίνει την μετατρεπόμενη ισχύ. Επομένως θετικό πρόσημο της 1.4.1 συνεπάγεται κέρδος ενέργειας για τα ηλεκτρόνια (δυσμενής φάση) ενώ αρνητικό πρόσημο απώλεια ενέργειας για τα ηλεκτρόνια και ενίσχυση του πεδίου (ευνοϊκή φάση). Λόγω των τυχαίων αρχικών φάσεων της ταχύτητας σε σχέση με το κύμα, τα μισά ηλεκτρόνια θα κερδίζουν ενέργεια ενώ τα υπόλοιπα μισά θα χάνουν ισόποση ενέργεια με αποτέλεσμα μηδενική συνολική μετατροπή ενέργειας.

Στο σημείο αυτό υπεισέρχεται ο μηχανισμός συγκέντρωσης των ηλεκτρονίων στην περιοχή των ευνοϊκών φάσεων (bunching). Συγκεκριμένα αν στη συνθήκη συντονισμού 1.3.1 επιλέξουμε $\omega > s \frac{\Omega_0}{\gamma}$, δηλαδή την κυκλοτρονική συχνότητα ελαφρώς μικρότερη από

τη συχνότητα του κύματος, τότε η φάση του κύματος τείνει να προσπεράσει την φάση της ταχύτητας των ηλεκτρονίων και η σχετική φάση μεταξύ τους τείνει να μεταβάλλεται συνεχώς. Όμως στην περίπτωση αυτή τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο (σχήμα 1.7) της περιοχής των ευνοϊκών φάσεων θα χάσουν ενέργεια με συνέπεια την μείωση του σχετικιστικού παράγοντα γ και την αύξηση της κυκλοτρονικής τους συχνότητας. Η αύξηση αυτή της κυκλοτρονικής συχνότητας θα αντισταθμίσει τη μικρή καθυστέρηση της φάσης της ταχύτητας σε σχέση με το κύμα και τα ηλεκτρόνια της ευνοϊκής φάσης θα έχουν την τάση να παραμείνουν σε συντονισμό. Αντίθετα τα ηλεκτρόνια που βρίσκονται στην περιοχή των δυσμενών φάσεων θα κερδίσουν ενέργεια και η κυκλοτρονική συχνότητα γι' αυτά θα μειωθεί. Έτσι θα απομακρυνθούν περισσότερο από το συντονισμό και η φάση του κύματος θα προσπερνά την φάση της ταχύτητας, με συνέπεια ηλεκτρόνια από τη δυσμενή περιοχή φάσεων να προσπεραστούν από το κύμα και να βρεθούν στην περιοχή των ευνοϊκών φάσεων. Έτσι έχουμε έναν μηχανισμό που τείνει να συγκεντρώσει τα ηλεκτρόνια στην περιοχή των ευνοϊκών φάσεων τα οποία θα δώσουν μια θετική συνολική μεταφορά ενέργειας (net energy transfer) από τα ηλεκτρόνια στο κύμα.



Σχήμα 1.7: Φασικός χώρος ταχυτήτων ηλεκτρονίων και μηχανισμός συγκέντρωσης

Ο μηχανισμός που αναλύθηκε είναι γνωστός ως σχετικιστική αξιμουθιακή ομαδοποίηση (relativistic azimuthal bunching) και όπως αναφέρθηκε πρόκειται για ένα καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο παρά τον ήπιο σχετικιστικά χαρακτήρα της ηλεκτρονικής δέσμης. Υπάρχουν και άλλοι μηχανισμοί που ομαδοποιούν τα ηλεκτρόνια όπως η αξονική σχετικιστική ομαδοποίηση που οφείλεται στην διατήρηση της αξονική ορμής $\gamma m_{e\nu_{\parallel}}$ ή το φαινόμενο Weibel που είναι ένα μη σχετικιστικό φαινόμενο και οφείλεται στην επίδραση των εγκάρσιων μαγνητικών συνιστωσών του κύματος. Και οι δύο προαναφερθέντες μηχανισμοί στο γυροτρόνιο είναι αμελητέοι λόγω της αμελητέας μετατόπισης Doppler αφενός και τη λειτουργία του κύματος κοντά στην αποκοπή αφετέρου.

1.5 Ο Δίαυλος της ηλεκτρονικής δέσμης

1.5.1 Μαγνητοστατικά φαινόμενα στο διάυλο

Ο διάυλος της ηλεκτρονικής δέσμης όπως προαναφέραμε οδηγεί τα ηλεκτρόνια από το σύστημα καθόδου-άνόδου στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα. Οι τροχιές των ηλεκτρονίων στο διάυλο καθορίζονται από το μαγνητοστατικό πεδίο της διάταξης το οποίο αυξάνεται κατά μήκος του διαύλου και παίρνει τη μέγιστη τιμή του ακριβώς στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα. Η μεταβολή του μαγνητικού πεδίου οφείλει να είναι ήπια ώστε η κίνηση των ηλεκτρονίων κατά μήκος αυτού να μπορεί να θεωρηθεί αδιαβατική. Έτσι ο διάυλος σχεδιάζεται επιμήκης με την ακτίνα των τοιχωμάτων του να ακολουθεί τις μεταβολές του μαγνητικού πεδίου το οποίο επιβάλλει τις τροχιές των σωματιδίων και κατ' επέκταση τα χαρακτηριστικά της δέσμης.

Λόγω της διαμήκους ήπιας ανομοιογένειας του μαγνητοστατικού πεδίου και της αύξησης αυτού προς την κοιλότητα αλληλεπίδρασης, τα ηλεκτρόνια κατ' αρχάς ακολουθούν τις δυναμικές γραμμές του πεδίου οι οποίες συγκλίνουν προς την κοιλότητα της αλληλεπίδρασης. Έτσι η δακτυλιοειδής δέσμη υφίσταται μαγνητική συμπίεση και η ακτίνα της μειώνεται σύμφωνα με τη σχέση: $R_e \sim \frac{1}{\sqrt{B_z(z)}}$ [4]. Με τον τρόπο αυτό

επιτυγχάνεται η αυξημένη πυκνότητα ρεύματος που απαιτείται για την υψηλή επίδοση της αλληλεπίδρασης αφού η κάθοδος μπορεί να δώσει περιορισμένη πυκνότητα ρεύματος δέσμης. Επίσης με τον τρόπο αυτό η τελική ακτίνα της δέσμης στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα, επιλέγεται ώστε να βελτιστοποιεί την αλληλεπίδραση, με βάση τη σχεδίαση της κοιλότητας και το εγκάρσιο προφίλ του επιλεγμένου για την αλληλεπίδραση ρυθμού.

Εκτός της μαγνητικής συμπίεσης της δέσμης, η εγκάρσια συνιστώσα του μαγνητοστατικού πεδίου η οποία επιβάλλεται από την μεταβαλλόμενη αξονικά διαμήκη συνιστώσα και το νόμο του Gauss, προκαλεί επίσης μεταβολή στις ορμές των ηλεκτρονίων.

Συγκεκριμένα στις τροχιές που ακολουθούν τα ηλεκτρόνια η ποσότητα $\frac{p_{\perp}^2(z)}{B_z(z)}$ αποτελεί

αδιαβατική σταθερά της κίνησης [4]. Έτσι καθώς αυξάνεται το μαγνητοστατικό πεδίο προς το ηλεκτροδυναμικό σύστημα η εγκάρσια ορμή των ηλεκτρονίων αυξάνεται εις βάρος της διαμήκους ορμής αφού η συνολική κινητική ενέργεια διατηρείται. Η μεταβολή αυτή είναι επιθυμητή ως ένα βαθμό μιας και μόνο η κινητική ενέργεια της εγκάρσιας ορμής είναι διαθέσιμη για μετατροπή στην αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Σε κάθε περίπτωση η διαμήκης ορμή των ηλεκτρονίων δεν θα πρέπει να μηδενιστεί γιατί τότε τα ηλεκτρόνια υφίστανται μαγνητική ανάκλαση και επιστρέφουν προς την άνοδο παρεμποδίζοντας τη δέσμη. Η ανάγκη αποκλεισμού του ενδεχομένου μαγνητικής ανάκλασης σε συνδυασμό με τις

διασπορές στις ταχύτητες που υπάρχουν λόγω πρακτικών περιορισμών, περιορίζουν τη δυνατή αύξηση της μέσης εγκάρσιας ορμής του πληθυσμού των ηλεκτρονίων και ο λόγος των ορμών $a = \frac{u_{\perp}}{u_{\parallel}}$ που μπορεί να επιτευχθεί πρακτικά, φτάνει έως και την τιμή 1.5.

1.5.2 Ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα στο δίαυλο

Εκτός από την ωφέλιμη μαγνητοστατική επίδραση πάνω στη δέσμη, στο δίαυλο του γυροτρονίου υπάρχουν και παρασιτικές ηλεκτρομαγνητικές δράσεις που δημιουργούν προβλήματα στην όλη λειτουργία της διάταξης. Η κατασκευή του διαύλου με μεταλλικά τοιχώματα που είναι απαραίτητη για τη μηχανική σταθερότητα και διατήρηση του κενού της συνολικής διάταξης, ευνοεί μέσα στο δίαυλο την συντήρηση ηλεκτρομαγνητικών πεδίων αρχικά στη στάθμη του θορύβου. Τα πεδία αυτά αλληλεπιδρούν με τα ηλεκτρόνια και αναπτύσσονται αστάθειες στην ηλεκτρονική δέσμη. Οι αστάθειες αυτές επηρεάζουν τα χαρακτηριστικά της δέσμης που με την αλλοίωσή τους επιδρούν αρνητικά στην απόδοση της κύριας αλληλεπίδρασης που λαμβάνει χώρα στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα.

Η κυριότερη αστάθεια που λαμβάνει χώρα στο δίαυλο του γυροτρονίου είναι ο ίδιος μηχανισμός τον οποίο εκμεταλλευόμαστε στο ηλεκτροδυναμικό σύστημα για την μεταφορά της ενέργειας από τη δέσμη στα πεδία και καλείται αστάθεια ηλεκτρονικού κυκλοτρονικού μείζερ (ECMI electron cyclotron maser instability). Ο μηχανισμός αυτός παρουσία του μαγνητοστατικού πεδίου και με την ίδια σχέση συντονισμού ενδέχεται να διεγείρει από τη στάθμη του θορύβου ρυθμούς οι οποίοι μπορούν να απορροφούν από τη δέσμη αξιόλογα ποσά ισχύος και να διαταράσσουν τις ιδιότητές της. Ως διαφορετικής φύσεως αστάθειες που μπορούν να αναπτυχθούν στο δίαυλο αλλά σε χαμηλότερο βαθμό αναφέρονται η αστάθεια Bernstein και η αστάθεια Langmuir.

Το αποτέλεσμα των ασταθειών αυτών στην ποιότητα της ηλεκτρονικής δέσμης είναι δυσμενές. Ο πληθυσμός των ηλεκτρονίων όταν φτάνει στην κοιλότητα αλληλεπίδρασης χαρακτηρίζεται πλέον από ενέργεια η οποία δεν καθορίζεται αυστηρά από την τάση μεταξύ ανόδου καθόδου αλλά έχει μια διασπορά που το μέγεθός της εξαρτάται από την ένταση των παρασιτικών αυτών αλληλεπιδράσεων. Επιπλέον διασπορές στις ταχύτητες των σωματιδίων προστιθέμενες στις ήδη υπάρχουσες διασπορές που επιβάλλουν πρακτικοί λόγοι στη λειτουργία του συστήματος καθόδου-ανόδου, υποβαθμίζουν περαιτέρω την ποιότητα της δέσμης. Η επίδραση αυτών των διασπορών στη λειτουργία της κύριας αλληλεπίδρασης μπορεί να είναι σημαντική και η πτώση των χαρακτηριστικών απόδοσης και επίδοσης της όλης διάταξης απαγορευτική. Ιδιαίτερα για τα αναπτυσσόμενα γυροτρόνια για τους σκοπούς της θερμοπυρηνικής σύντηξης η μεγάλη ισχύς εξόδου και η υψηλή απόδοση της συσκευής είναι καταλυτικές για την επιτυχία του όλου εγχειρήματος.

Η μέγιστη δυνατή μονοενεργητικότητα πρωτίστως και η μικρή διασπορά των ταχυτήτων των ηλεκτρονίων δευτερευόντως, είναι απαραίτητες για τη σωστή και με βάση τη σχεδίαση λειτουργία της κοιλότητας συντονισμού. Οι διασπορές στην ενέργεια των ηλεκτρονίων επηρεάζουν σημαντικά την απόδοση του γυροτρονίου αφού ο σχετικιστικός παράγοντας γ υπεισέρχεται στη σχέση συντονισμού 1.3.1. Διαφορές μεταξύ των αναμενόμενων θεωρητικά αποτελεσμάτων και της επίδοσης των πειραματικών υλοποιήσεων γυροτρονίων συχνά αποδίδονται στην επίδραση αυτού του είδους των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων. Επιπλέον ζήτημα για τις παρασιτικές αυτές αλληλεπιδράσεις αποτελεί η μετατρέπόμενη ισχύς αυτών που προκαλεί απώλειες υπό τη μορφή θερμότητας. Η επιπλέον θερμότητα πρέπει να απομακρυνθεί από το σύστημα ψύξης και η συνολική απόδοση λόγω των πρόσθετων απωλειών υποβαθμίζεται περαιτέρω.

Για την αντιμετώπιση του προβλήματος η μέθοδος που χρησιμοποιείται είναι η εισαγωγή στο δίαυλο διηλεκτρικών δαχτυλιδιών με απώλειες. Τα διηλεκτρικά αυτά,

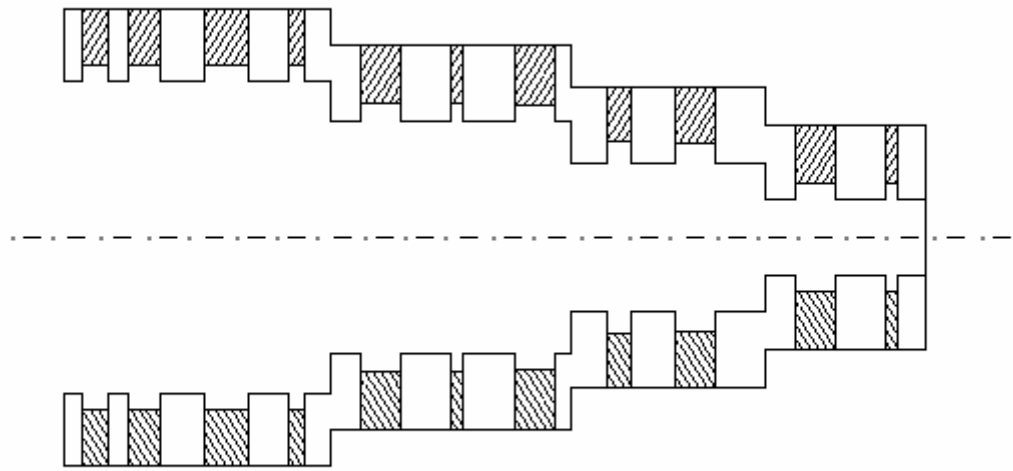
συνήθως με βάση το SiC (κεραμικά), με επιτρεπτότητα της τάξης του 10, ικανές απώλειες και αυξημένη θερμική αγωγιμότητα μειώνουν σημαντικά το συντελεστή ποιότητας του διαύλου. Έτσι η διέγερση των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων περιορίζεται σε χαμηλά επίπεδα ισχύος και παραμένουν μειωμένες οι διασπορές των χαρακτηριστικών της δέσμης. Με τον τρόπο αυτό δυσχεραίνεται η περίπτωση το μεγαλύτερο μέρος των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων να επηρεάσουν σημαντικά τη δέσμη, όμως παραμένει η πιθανότητα κάποιος ρυθμός λόγω ισχυρής αλληλεπίδρασης να διεγερθεί σε ανεπιθύμητο επίπεδο και να δημιουργήσει υπολογίσιμες διασπορές στη δέσμη. Επομένως θα ήταν χρήσιμο να είναι γνωστό κατά το στάδιο της σχεδίασης το επίπεδο της ισχύος κορεσμού πέρα από τη γραμμική περιοχή, που μπορεί να φτάσει ένας παρασιτικός ρυθμός για κάποια γεωμετρία διαύλου ώστε να εκτιμηθούν οι διασπορές και να αξιολογηθεί η σχεδίαση του διαύλου.

Οι συνήθεις γεωμετρίες διαύλου απαντώνται σε δύο τύπους. Ο πρώτος τύπος γεωμετρίας αποτελείται από μέρη κυλινδρικού κυματοδηγού σταθερής διατομής αλλά κλιμακωτής ακτίνας. Ο δεύτερος τύπος έχει συνεχώς μεταβαλλόμενη εγκάρσια διατομή με μειούμενη ακτίνα. Σχηματική αναπαράσταση σε τομή, δύο απλουστευμένων τέτοιων γεωμετριών παρουσιάζεται στο σχήμα 1.8 όπου το διηλεκτρικό υλικό αναπαρίσταται με πλάγια διαγράμμιση. Παρατηρείται στο σχήμα ότι η εσωτερική ακτίνα των διηλεκτρικών δακτυλίων είναι μεγαλύτερη από το μεταλλικό σώμα του διαύλου για λόγους προστασίας του διηλεκτρικού από διαφεύγοντα ηλεκτρόνια της δέσμης. Ανάλογες γεωμετρίες με εσωτερικό ομοαξονικό στέλεχος συναντάμε στα ομοαξονικά γυροτρόνια.

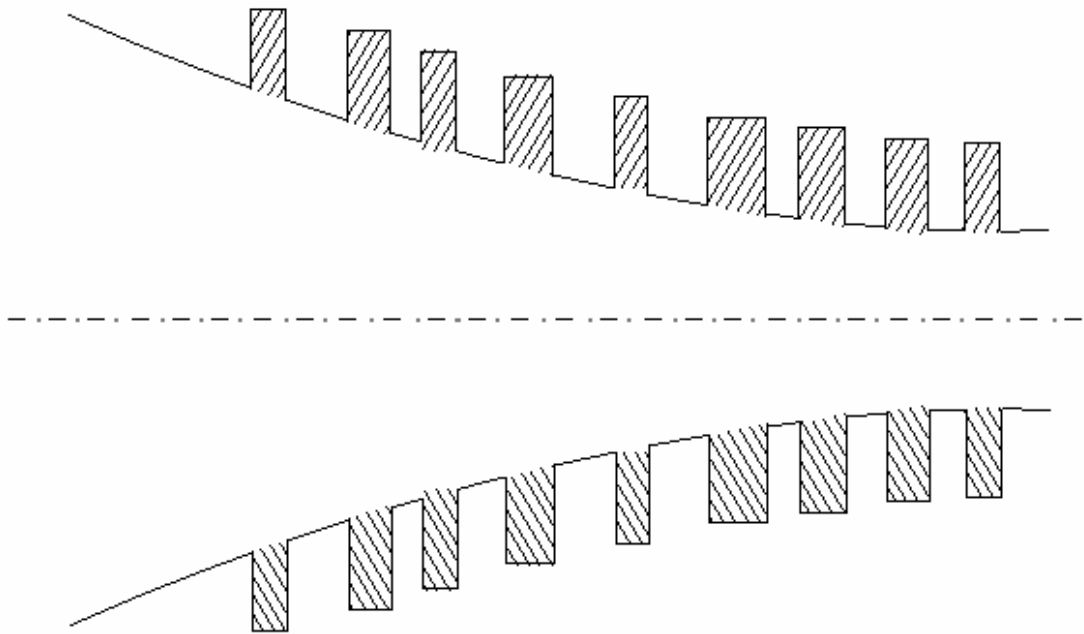
1.6 Σκοπός της διπλωματικής εργασίας

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας αποτελεί η ανάπτυξη μοντέλου αλληλεπίδρασης προσανατολισμένο για την αλληλεπίδραση στο δίαυλο του γυροτρονίου. Το μοντέλο αυτό στηρίζεται στο μοντέλο αλληλεπίδρασης που αναπτύχθηκε για την κοιλότητα αλληλεπίδρασης στο [5] βελτιωμένο μεν και συμπεριλαμβανόν φαινόμενα που παρουσιάζονται εντονότερα στο δίαυλο, απλουστευμένο δε και περιορισμένο σε ζητήματα που αφορούν μόνο τον δίαυλο. Οι δύο συνήθεις γεωμετρίες διαύλου εξετάζονται ξεχωριστά και κατάλληλες παραδοχές υιοθετούνται για την κάθε μία. Κατόπιν επιχειρείται προσομοίωση του μοντέλου στον υπολογιστή με λήψη συγκεκριμένων αποτελεσμάτων καθώς και εξαγωγή συμπερασμάτων από τις προσομοιώσεις.

Όσο αναφορά τις εξισώσεις κίνησης του μοντέλου, είναι σε μεγάλο βαθμό πλήρεις. Έτσι, σε σχέση με τα μοντέλα που προορίζονται για το ηλεκτροδυναμικού σύστημα, οι εξισώσεις κίνησης περιέχουν επιπλέον και άλλους όρους. Ειδικότερα γίνεται θεώρηση υβριδικών ρυθμών αργού ή γρήγορου κύματος μιας και στο δίαυλο υποστηρίζονται και αργά κύματα λόγω των διηλεκτρικών δακτυλίων. Επίσης υπάρχουν οι όροι που οφείλονται στο εγκάρσιο υψίσυχνο μαγνητικό πεδίο οι οποίοι καθώς είναι αμελητέοι κοντά στην αποκοπή μπορεί να αμελούνται στην αλληλεπίδραση του γυροτρονίου. Γίνεται φανερό επομένως ότι το μοντέλο μπορεί να χειριστεί όλες τις αλληλεπιδράσεις που βασίζονται στον κυκλοτρονικό συντονισμό και όχι μόνο την αλληλεπίδραση γυροτρονίου. Τέλος υπάρχουν και οι όροι που οφείλονται στην αξονική ανομοιογένεια του μαγνητοστατικού πεδίου. Στην κοιλότητα συντονισμού το μαγνητικό πεδίο είναι σε αρκετά καλή προσέγγιση ομογενές σε αντίθεση με το δίαυλο όπου η αξονική ανομοιογένεια είναι αυτή που εισάγεται με σκοπό να προσαρμόσει τις διαστάσεις και τα χαρακτηριστικά της δέσμης. Συνοψίζοντας, όσο



(α)



(β)

Σχήμα 1.8: Απλοποιημένες γεωμετρίες διαύλου ηλεκτρονικής δέσμης. Με διαγράμμιση αναπαρίσταται το διηλεκτρικό υλικό.

αναφορά τις εξισώσεις κίνησης το μοντέλο είναι πλήρες εκτός της αναπαράστασης του μαγνητοστατικού πεδίου. Για το τελευταίο κρατούνται πεπερασμένοι όροι της ανάπτυξής του σε σειρά, οι οποίοι μάλιστα για την ήπια ανομοιογένεια που χαρακτηρίζει το διάυλο κρίνονται ως υπεραρκετοί.

Σχετικά με τη γενικότερη θεώρηση του μοντέλου και τις απλουστεύσεις οι οποίες έχουν γίνει, αναφέρουμε τα εξής: Κατ' αρχάς στο μοντέλο, θεωρείται αλληλεπίδραση με έναν ρυθμό και μόνο. Ο ανταγωνισμός των ρυθμών, που ενδιαφέρει στην κοιλότητα σημαντικά για την αποφυγή διέγερσης παρασιτικών ρυθμών, εδώ αγνοείται. Η επιλογή μας αυτή έχει να κάνει με το γεγονός ότι η διέγερση πολλών ρυθμών ταυτόχρονα, κυρίως ανταγωνιστικά μπορεί να λειτουργήσει εις βάρος της διέγερσης του εκάστοτε υπό εξέταση ρυθμού. Έτσι έχουμε μία ασφαλή προς τα επάνω εκτίμηση του τελικού επιπέδου διέγερσης της παρασιτικής αλληλεπίδρασης. Οι επικίνδunami άλλωστε ρυθμοί για διέγερση από το θόρυβο μπορούν να δοθούν από κώδικες που υπάρχουν και δίνουν τη σχέση διασποράς των ρυθμών στη γραμμική περιοχή. Μια άλλη σημαντική απλούστευση αποτελεί η θεώρηση ότι η δέσμη με την αλληλεπίδραση δεν επηρεάζει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο παρά μόνο στο πλάτος του. Στην πραγματικότητα η δέσμη εκτός από το πλάτος μεταβάλλει επίσης τη χωρική δομή του ρυθμού και μοντέλα που περιλαμβάνουν το συγκεκριμένο φαινόμενο χαρακτηρίζονται ως αυτοσυνεπή. Αγνοείται ακόμα και η επίδραση στη συχνότητα του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που επιβάλλει η δέσμη (frequency pulling). Κατόπιν των προηγούμενων απλουστεύσεων η αλληλεπίδραση δέσμης-πεδίου θεωρείται στη βάση της διατήρησης της ενέργειας και της μετατροπής από κινητική ενέργεια σωματιδίου σε ηλεκτρομαγνητική ενέργεια πεδίου και δεν βασίζεται στις άμεσες εξισώσεις διαμόρφωσης και ακτινοβολίας της δέσμης. Οι παραπάνω παραδοχές εκτιμάται ότι θα επηρεάσουν το τελικό αποτέλεσμα ως προς την ακρίβεια των αποτελεσμάτων. Παρ' όλα αυτά στο διάυλο για το αποτέλεσμα του τελικού επιπέδου διέγερσης ενός ρυθμού και την αξιολόγηση των τελικών διασπορών δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια παρά μία εκτίμηση ακόμα και τάξης μεγέθους για το τελικό επίπεδο κορεσμού ενός παρασιτικού ρυθμού.

Ως ολοκληρωμένο μοντέλο αλληλεπίδρασης το παρόν μοντέλο κρίνεται ως απλό για ένα αρκετά σύνθετο κομμάτι όπως ο διάυλος. Παρ' όλα αυτά, τα φαινόμενα που καλείται να προσομοιώσει είναι αδιάφορα ως προς τις λεπτομέρειες τους. Η παρούσα εργασία ως έχει, πέρα από τα άμεσα αποτελέσματα και συμπεράσματα που μπορεί να δώσει, δύναται επίσης να προσφέρει ιδέες ή και άμεσες αναλυτικές εκφράσεις (π.χ επιπλέον όροι) σε πληρέστερα μοντέλα που ίσως αναπτυχθούν αν κριθεί αναγκαίο. Μπορεί επίσης και η ίδια να αποτελέσει βάση περαιτέρω ανάπτυξης και μελλοντικής δουλειάς σε επίπεδο πέρα από τα στενά πλαίσια μιας διπλωματικής εργασίας. Σε κάθε περίπτωση φιλοδοξεί να δώσει μια πρώτη βασική προσέγγιση στην προσπάθεια επίτευξης των στόχων που θέτει.

Μετά το εισαγωγικό αυτό κεφάλαιο η δομή της εργασίας έχει ως εξής: Στο 2^ο κεφάλαιο αναπτύσσεται το μοντέλο αλληλεπίδρασης για τον διάυλο σταθερής διατομής. Εκφράζονται τα πεδία, διατυπώνονται οι εξισώσεις κίνησης και περιγράφεται το μοντέλο αλληλεπίδρασης. Στο 3^ο κεφάλαιο το μοντέλο προσαρμόζεται στην περίπτωση διαύλου μεταβαλλόμενης διατομής. Συνοπτικά αποτελέσματα και συμπεράσματα από τις προσομοιώσεις παρουσιάζονται στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας.

2. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΑΥΛΟΥ ΣΤΑΘΕΡΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύσσεται το μοντέλο αλληλεπίδρασης προσαρμοσμένο στο δίαυλο σταθερής διατομής. Αρχικά διατυπώνονται τα ηλεκτρομαγνητικά και το μαγνητοστατικό πεδίο του διαύλου. Στη συνέχεια αναπτύσσονται οι εξισώσεις κίνησης και εκφράζονται σε μορφή κατάλληλη για αριθμητικό υπολογισμό. Τέλος υπολογίζεται η ηλεκτρομαγνητική ενέργεια στο δίαυλο, απαραίτητη για την τελική εξίσωση ισοζυγίου της ενέργειας.

2.1 Αναπαράσταση Πεδίων στο δίαυλο

2.1.1 Ηλεκτρομαγνητικά πεδία

Για την αναπαράσταση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων θεωρούμε μέρος διαύλου κυλινδρικού σχήματος σταθερής διατομής μήκους L . Η διάταξή μας μπορεί να περιέχει διηλεκτρικούς δακτυλίους ή και ομοαξονικό στέλεχος. Σε μια τέτοια διάταξη η γενική μορφή των κυμάτων που υποστηρίζονται είναι υβριδικόι ρυθμοί γρήγορου ή αργού κύματος.

Όσο αναφορά την εξάρτηση κατά μήκος του άξονα, θεωρούμε πως η διάταξη μας επαναλαμβάνεται πολλές φορές και τα πεδία αναπτύσσονται κατά το θεώρημα Floquet [6]. Έτσι οι φασιδέτες των αξονικών συνιστωσών των πεδίων είναι:

$$E_z = V(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (2.1.1)$$
$$H_z = V(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (\alpha)$$
$$H_z = V(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (\beta)$$

όπου $k_{//n} = k + n \frac{2\pi}{L}$ η σταθερά διάδοσης της κάθε Bloch συνιστώσας. Με την συγκεκριμένη ανάπτυξη μπορεί να εξετασθεί κάθε αξονικό προφίλ πεδίου που μπορούμε να υποθέσουμε. Στην πραγματικότητα το αξονικό προφίλ του πεδίου που εξαρτάται από την ιδιαίτερη γεωμετρία του διαύλου και των δακτυλίων μπορεί να προκύψει από αριθμητική επίλυση του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος όπως στο [7]. Ο φορμαλισμός για τα πεδία που υιοθετούμε ακολουθεί αυτόν του [7] και τα αποτελέσματά του μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα στον προσδιορισμό των συντελεστών A_n , B_n .

Στις παραπάνω εκφράσεις για τα πεδία, η συνάρτηση $V(t)$ συμβολίζει το πλάτος των πεδίων το οποίο υποθέτουμε ότι μεταβάλλεται με το χρόνο καθώς τα ηλεκτρόνια ανταλλάσσουν την ενέργεια τους με τα πεδία. Θεωρούμε ότι η επίδραση της δέσμης αφορά μόνο το πλάτος των πεδίων και όχι τη χωρική δομή ή τη συχνότητα τους. A_n , B_n είναι συντελεστές που προκύπτουν από την ανάπτυξη των πεδίων σύμφωνα με το θεώρημα του

Floquet. Όλα τα πεδιακά μεγέθη που αναφέρονται είναι phasors και υποτίθεται η εξάρτηση $e^{+j\omega t}$. Τέλος η συνάρτηση $F_{mn}(R)$ περιγράφει το εγκάρσιο προφίλ του ρυθμού [7]:

$$F_{mn}(R) = \begin{cases} J_{-m}(k_{\perp n}R) + (C_n Y_{-m}(k_{\perp n}R)), & k_{\perp n}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_{//n}^2 & \text{γρήγορα κύματα} \\ I_{-m}(k'_{\perp n}R) + (D_n K_{-m}(k'_{\perp n}R)), & k_{\perp n}'^2 = k_{//n}^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 & \text{αργά κύματα} \end{cases} \quad (2.1.2)$$

όπου $J_m(x)$, $Y_m(x)$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους ενώ I_m , K_m οι αντίστοιχες τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel. Για το συμβατικό γυροτρόνιο χωρίς ομοαξονικό στέλεχος έχουμε $C_n = D_n = 0$.

Οι υπόλοιπες συνιστώσες των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων υπολογίζονται από τις διαμήκεις συνιστώσες και τις εξισώσεις Maxwell. Υποθέτωντας αργή χρονική μεταβολή της συνάρτησης $V(t)$ σε σχέση με τη συχνότητα των πεδίων μπορούμε να θεωρήσουμε: $\frac{\partial V(t)}{\partial t} \ll \omega$. Πράγματι η σταθερά χρόνου της μεταβολής της ενέργειας λόγω

αλληλεπίδρασης είναι Q/ω επομένως ο χαρακτηριστικός χρόνος μεταβολής των πεδίων $Q/2\omega$ είναι πολύ μεγαλύτερος από την περίοδο του κύματος για τις πρακτικές τιμές του Q που ενδιαφέρουν ($Q \sim 100-1000$). Άλλωστε οι πολύ μικρές τιμές του συντελεστή ποιότητας Q συνεπάγονται μεγάλες απώλειες με περιορισμένη αλληλεπίδραση και δεν ενδιαφέρουν.

Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (4.135) του [8], για τα γρήγορα κύματα παίρνουμε τις εγκάρσιες συνιστώσες των πεδίων:

$$E_R = -V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}^2} \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{\omega\mu_0}{k_{\perp n}^2} \frac{m}{R} F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (2.1.3)$$

(α)

$$E_\Phi = -V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{k_{//n}}{k_{\perp n}^2} \frac{m}{R} F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} + V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp n}^2} \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (β)$$

$$H_R = V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\omega\varepsilon_0 m}{k_{\perp n}^2 R} F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}^2} \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (γ)$$

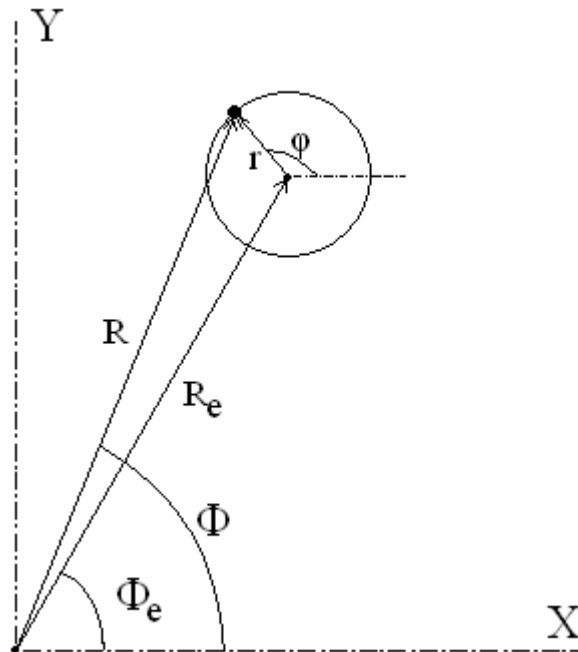
$$H_\Phi = -V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_{\perp n}^2} \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{k_{//n}}{k_{\perp n}^2} \frac{m}{R} F_{mn}(R) e^{-jm\Phi} e^{-jk_{//n}z} \quad (δ)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις δίνουν τις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου συναρτήσει των κυλινδρικών συντεταγμένων R, Φ, z και είναι κατάλληλες για τον υπολογισμό της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας μέσα στο δίαυλο. Τα ηλεκτρόνια όπως γνωρίζουμε λόγω του μαγνητοστατικού πεδίου κινούνται σε κυκλικές τροχιές ακτίνας r με τα κέντρα περιστροφής τους να είναι δακτυλιοειδώς κατανομημένα στη διατομή του διαύλου. Έτσι για τις εξισώσεις κίνησης εξυπηρετούν, όπως θα φανεί στη συνέχεια, εκφράσεις των πεδίων μετασχηματισμένες στο σύστημα του κέντρου περιστροφής των ηλεκτρονίων. Για το λόγο αυτό αναπτύσσουμε τις πεδιακές εκφράσεις σύμφωνα με το θεώρημα Graf (9.1.79 του [9]).

Η εφαρμογή του θεωρήματος Graf δίνει τη σχέση:

$$F_{mn}e^{-jm\Phi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e)J_l(k_{\perp n}r)(-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} \quad (2.1.4)$$

Στην παραπάνω σχέση οι συντεταγμένες (R, Φ) του κυλινδρικού συστήματος μετασχηματίζονται στις συντεταγμένες (r, φ) του τοπικού συστήματος περιστροφής του ηλεκτρονίου με κέντρο περιστροφής (R_e, Φ_e) (σχήμα 2.1.1).



Σχήμα 2.1: Συντεταγμένες κέντρου περιστροφής (R_e, Φ_e) και τοπικό σύστημα (r, φ)

Οι διαμήκεις συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στη θέση των ηλεκτρονίων λαμβάνονται άμεσα από τις σχέσεις 2.1.1 και 2.1.4:

$$E_z = V(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e)J_l(k_{\perp n}r)(-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\parallel n}z} \quad (\alpha)$$

$$H_z = V(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e)J_l(k_{\perp n}r)(-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\parallel n}z} \quad (\beta)$$

Οι ανάλογες εκφράσεις για τις εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μπορούν να ληφθούν από εκ νέου εφαρμογή των σχέσεων 4.135 του [8] στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων ή με εφαρμογή του θεωρήματος Graf ξεχωριστά σε κάθε μία από τις 2.1.2. Σε κάθε περίπτωση αυτές έχουν ως εξής:

(2.1.6)

$$E_r = -V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{jk_{\perp n}}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J_l'(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{\omega\mu_0}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} \quad (\alpha)$$

$$E_\varphi = -V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{k_{\perp n}}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} + V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J_l'(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} \quad (\beta)$$

$$H_r = V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\omega\varepsilon_0}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{jk_{\perp n}}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J_l'(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} \quad (\gamma)$$

$$H_\varphi = -V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J_l'(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{k_{\perp n}}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{\perp n} z} \quad (\delta)$$

Οι παραπάνω εκφράσεις θα χρησιμοποιηθούν για τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης.

2.1.2 Μαγνητοστατικό πεδίο

Για την αναπαράσταση του μαγνητοστατικού πεδίου θα θεωρήσουμε γνωστή τη συνάρτηση της διαμήκουσ συνιστώσας του πάνω στον άξονα z : $B_z(R=0, z)=B_0(z)$. Θεωρούμε πως το μαγνητοστατικό πεδίο έχει κυλινδρική συμμετρία και συνεπώς πάνω στον άξονα έχει μόνο διαμήκη συνιστώσα. Για τις τιμές του πεδίου εκτός του άξονα θα χρησιμοποιήσουμε την ανάπτυξη σε σειρά με βάση τις τιμές του πεδίου πάνω στον άξονα [4]. Συνεπώς με διαδοχικές εφαρμογές των νόμων του Gauss και Ampere (απουσία πυκνότητας ρεύματος) έχουμε την εξής ανάπτυξη σε σειρά (6.19 και 6.20 του [10]):

(2.1.7)

$$B_z(R, \Phi, z) = B_0(z) - \frac{R^2}{4} B_0''(z) + \frac{R^4}{64} B_0^{(4)}(z) - \dots + (-1)^{\nu} \frac{R^{2\nu}}{2^{2\nu} (\nu!)^2} B_0^{(2\nu)}(z) \quad (\alpha)$$

$$B_R(R, \Phi, z) = -\frac{R}{2} B_0'(z) + \frac{R^3}{16} B_0^{(3)}(z) - \dots + (-1)^{\nu} \frac{R^{2\nu-1}}{2^{2\nu-1} \nu! (\nu-1)!} B_0^{(2\nu-1)}(z) \quad (\beta)$$

Με την υπόθεση της κυλινδρικής συμμετρίας του μαγνητοστατικού πεδίου έχουμε τις παραπάνω πλήρεις εκφράσεις. Ανάλογα με την ηπιότητα της ανομοιογένειας μπορούμε να

κρατήσουμε και τους αντίστοιχους πεπερασμένους όρους από την παραπάνω σειρά με κριτήριο την αμελητέα τιμή του επόμενου όρου σε σχέση με το συνολικό άθροισμα.

Όπως και στην περίπτωση της αναπαράστασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου οι παραπάνω σχέσεις εκφράζουν το πεδίο υπολογισμένο στις συντεταγμένες (R, Φ, z) και όχι στις τοπικές συντεταγμένες (r, φ, z) γύρω από το κέντρο περιστροφής. Για να μετατρέψουμε τις συντεταγμένες από το κεντρικό κυλινδρικό σύστημα στο τοπικό κυλινδρικό σύστημα και με αναφορά στο σχήμα 2.1 λαμβάνουμε τη σχέση:

$$\hat{\mathbf{R}} = \hat{\mathbf{r}} \cos(\varphi - \Phi) - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin(\varphi - \Phi) \quad (2.1.8)$$

Επομένως στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων οι εκφράσεις για το μαγνητοστατικό πεδίο γίνονται:

$$B_r = B_R \cos(\varphi - \Phi) \quad (\alpha) \quad (2.1.9)$$

$$B_\varphi = -B_R \sin(\varphi - \Phi) \quad (\beta)$$

Στις παραπάνω σχέσεις φαίνεται ότι οι συντεταγμένες του κεντρικού συστήματος R, Φ έχουν παραμείνει στις εκφράσεις όμως όπως θα δούμε παρακάτω, στην επεξεργασία των εξισώσεων κίνησης θα χειρισθούμε τους όρους του μαγνητοστατικού πεδίου με ειδικό τρόπο και οι συντεταγμένες θα απαλειφθούν.

2.2 Διατύπωση εξισώσεων κίνησης

2.2.1 Ανάπτυξη εξισώσεων κίνησης

Οι εξισώσεις κίνησης θα διατυπωθούν στο τοπικό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το κέντρο περιστροφής των ηλεκτρονίων. Μιας και στην κίνηση των ηλεκτρονίων κυριαρχεί η κυκλοτρονική κίνηση εκφράζουμε την ταχύτητα των ηλεκτρονίων σε πολική μορφή: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + v_{||} \hat{\mathbf{z}}$ όπου $\mathbf{v}_\perp = v_\perp \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + v_\perp \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$. (2.2.1)

Ξεκινώντας από τη δύναμη Lorentz: $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E}_{\text{RF}} + \mathbf{v} \times (\mathbf{B} + \mu_0 \mathbf{H}_{\text{RF}}))$ αναλύουμε στις εγκάρσιες συνιστώσες:

$$(2.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = & -\frac{e}{mc} \left[\hat{\mathbf{x}} \left(E_x + \mu_0 H_z v_\perp \sin \theta - \mu_0 H_y v_{||} + B_z v_\perp \sin \theta - B_r \sin \varphi v_{||} \right) \right. \\ & + \hat{\mathbf{y}} \left(E_y - \mu_0 H_z v_\perp \cos \theta + \mu_0 H_x v_{||} - B_z v_\perp \cos \theta + B_r \cos \varphi v_{||} \right) \\ & \left. + \hat{\mathbf{z}} \left(E_z + \mu_0 H_y v_\perp \cos \theta - \mu_0 H_x v_\perp \sin \theta + B_r \sin \varphi v_\perp \cos \theta - B_r \cos \varphi v_\perp \sin \theta \right) \right] \end{aligned}$$

όπου $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{mc}$ η αδιάστατη σχετικιστική ορμή. Οι εντάσεις της ηλεκτρικής και μαγνητικής συνιστώσας του υπίσυχνου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου συμβολίζονται με \mathbf{E} και \mathbf{H} αντίστοιχα ενώ με \mathbf{B} συμβολίζουμε τη μαγνητική επαγωγή του μαγνητοστατικού πεδίου.

Για να μετατρέψουμε την 2.2.2 από τις καρτεσιανές συνιστώσες στις αντίστοιχες πολικές με τη βοήθεια της 2.2.1 έχουμε την παρακάτω σχέση:

$$\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} = \frac{d}{dt}(u_\perp \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + u_\perp \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) = \frac{du_\perp}{dt}(\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}) + u_\perp \frac{d\theta}{dt}(-\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}) \quad (2.2.3)$$

Επομένως πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την 2.2.1 με $\cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}$ για το μέτρο της αδιάστατης ορμής u_\perp και με $-\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}$ για τη γωνία της ορμής θ παίρνουμε τις εκφράσεις για τις πολικές συνιστώσες. Χρησιμοποιούμε επίσης τις διανυσματικές σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}} &= \hat{\mathbf{r}} \cos \varphi - \hat{\boldsymbol{\phi}} \sin \varphi \\ \hat{\mathbf{y}} &= \hat{\mathbf{r}} \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{\phi}} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

για τη μετατροπή των πεδιακών καρτεσιανών συνιστωσών στις αντίστοιχες κυλινδρικές στις οποίες έχουμε εκφράσει τα πεδία (2.1.5, 2.1.6). Έτσι μετά από αρκετές πράξεις λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{du_\perp}{dt} &= -\frac{e}{mc} [E_r \cos(\varphi - \theta) + E_\varphi \sin(\theta - \varphi) + \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\parallel} H_r \sin(\theta - \varphi) \\ &\quad - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\parallel} H_\varphi \cos(\varphi - \theta) + \frac{c}{\gamma} u_{\parallel} B_r \sin(\theta - \varphi) - \frac{c}{\gamma} u_{\parallel} B_\varphi \cos(\varphi - \theta)] \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} u_\perp \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{e}{mc} [E_r \sin(\varphi - \theta) + E_\varphi \cos(\varphi - \theta) - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_\perp H_z - \frac{c}{\gamma} u_\perp B_z \\ &\quad + \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\parallel} H_r \cos(\theta - \varphi) + \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\parallel} H_\varphi \sin(\theta - \varphi) + \frac{c}{\gamma} u_{\parallel} B_r \cos(\theta - \varphi) + \frac{c}{\gamma} u_{\parallel} B_\varphi \sin(\theta - \varphi)] \end{aligned} \quad (\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{du_{\parallel}}{dt} &= -\frac{e}{mc} [E_z + \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_\perp H_r \sin(\varphi - \theta) + \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_\perp H_\varphi \cos(\varphi - \theta) \\ &\quad + \frac{c}{\gamma} u_\perp B_r \sin(\varphi - \theta) + \frac{c}{\gamma} u_\perp B_\varphi \cos(\varphi - \theta)] \end{aligned} \quad (\gamma)$$

Γνωρίζουμε ότι στις εξισώσεις κίνησης επικρατούν οι όροι του μαγνητοστατικού πεδίου μιας και αυτό παραμένει πολύ υψηλότερο από τις τιμές που μπορεί να φτάσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Έτσι θεωρώντας ότι η κυκλοτρονική κίνηση διατηρείται, με πολύ καλή προσέγγιση μπορούμε να εισάγουμε τη σχέση: $\theta \cong \varphi + \frac{\pi}{2}$. (2.2.6)

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο 2.1.6 στις 2.1.5 και εφαρμόζοντας τη σχέση 2.2.6 έχουμε:

(2.2.7.α)

$$\begin{aligned}
\frac{du_{\perp}}{dt} = & -\frac{e}{mc}[-V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{k_{//n}}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}]] \\
& + V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}] \\
& + \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{//} \operatorname{Re}[V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\omega\epsilon_0}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t} \\
& - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}] \\
& + \frac{c}{\gamma} u_{//} B_r]
\end{aligned}$$

(2.2.7.β)

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} - \frac{eB_z}{m\gamma} = & -\frac{e}{mcu_{\perp}}[V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi + j(l-m)\Phi_e - jk_{//n}z + j\omega t}]] \\
& + V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{\omega\mu_0}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}] \\
& - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\perp} V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}] \\
& - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{//} \operatorname{Re}[V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{j\omega\epsilon_0}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t} \\
& + V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{k_{//n}}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}] \\
& + \frac{c}{\gamma} u_{//} B_{\varphi}]
\end{aligned}$$

(2.2.7.γ)

$$\begin{aligned}
\frac{du_{//}}{dt} = & -\frac{e}{mc}[V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}]] \\
& - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\perp} \operatorname{Re}[V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\omega\epsilon_0}{k_{\perp n}^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t} \\
& - V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{-jl\varphi} e^{j(l-m)\Phi_e} e^{-jk_{//n}z} e^{j\omega t}] \\
& - \frac{c}{\gamma} u_{\perp} B_r]
\end{aligned}$$

Για να κρατήσουμε από τις παραπάνω πλήρεις εκφράσεις μόνο τους όρους που είναι σε συντονισμό, εφαρμόζουμε την προσέγγιση αργής χρονικής κλίμακας. Με τον τρόπο αυτό εξετάζουμε τη συνολική μεταφορά ενέργειας μεταξύ ηλεκτρονίων-πεδίων σε χαρακτηριστικούς χρόνους αρκετά μεγαλύτερους της κυκλοτρονικής περιόδου καθώς οι γρήγορες μεταβολές λόγω των όρων εκτός συντονισμού δεν έχουν συνολικό αποτέλεσμα.

Για να πάρουμε από τις εξισώσεις κίνησης το μέσο όρο σε μία κυκλοτρονική περίοδο, εφαρμόζουμε τον τελεστή $\langle \dots \rangle \triangleq \frac{1}{T_c} \int_t^{t+T_c} X(t') dt'$. (2.2.8)

Οι όροι που επιβιώνουν από τις εξισώσεις 2.2.7 είναι αυτοί για τους οποίους ισχύει: $\frac{d}{dt}(\omega t - k_{||n}z - l\varphi) = 0$ ή $\omega - k_{||n}v_{||} - l\omega_c = 0$ ή $\omega - kv_{||} - n\frac{2\pi}{L}v_{||} = l\omega_c$. Όμως ισχύει ότι $n\frac{2\pi}{L}v_{||} = n\frac{2\pi}{T_{tr}} \ll \frac{2\pi}{T_c} = \omega_c$ όπου $T_{tr} = \frac{L}{v_{||}}$ ο χρόνος παραμονής των ηλεκτρονίων στο δίαυλο. Η ισχυρή ανισότητα δικαιολογείται από τις πολλές κυκλοτρονικές περιόδους τις οποίες διαρκεί η μετάβαση των ηλεκτρονίων από το δίαυλο και από το γεγονός ότι για πολύ μεγάλα n οι συντελεστές ανάπτυξης A_n, B_n τείνουν στο 0. Έτσι αμελείται ο όρος $n\frac{2\pi}{L}v_{||}$ και αναπαράγεται η γενική συνθήκη συντονισμού 1.3.2. Η εφαρμογή του τελεστή έχει ως συνέπεια από το άθροισμα ως προς l του θεωρήματος Graf να επιβιώσει μόνο ο όρος που ικανοποιεί το συντονισμό. Επισημαίνουμε ότι ο ακέραιος l αναπαριστά τον αριθμό της αρμονικής και ότι το μοντέλο μπορεί να εξετάσει και αρμονικές αλληλεπιδράσεις αν και δευτερεύουσας σημασίας στο δίαυλο.

Για τους παραπάνω λόγους εισάγουμε την αργή μεταβλητή φάσης: $\tilde{\Lambda} = \omega t - kz - l\varphi$ ενώ και οι μεταβλητές $u_{\perp}, u_{||}$ από εδώ και πέρα αναπαριστούν τις αντίστοιχες αργές ποσότητες. Για την απαλοιφή του όρου $e^{j(l-m)\Phi_e}$ ορίζουμε ως νέα μεταβλητή φάσης $\Lambda = \tilde{\Lambda} + j(l-m)\Phi_e$ ενώ η ποσότητα $\frac{d\Phi_e}{dt}$ που προκύπτει αμελείται ως πολύ μικρή (Παράρτημα Ι). Επίσης χρησιμοποιούμε την αξονική θέση z ως ανεξάρτητη μεταβλητή για τις εξισώσεις κίνησης. Εφαρμόζοντας όλα τα προαναφερθέντα παίρνουμε τις παρακάτω εκφράσεις για τις εξισώσεις κίνησης:

(2.2.9.α)

$$\begin{aligned} \frac{du_{\perp}}{dz} = & -\frac{\gamma}{u_{||}V_0} [V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left(1 - \frac{k_{||n}c}{\omega\beta_{||}} \right) \frac{\omega\beta_{||}}{ck_{\perp n}^2} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n}r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & + V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \left(1 - \frac{k_{||n}c\beta_{||}}{\omega} \right) \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp n}} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n}r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & + \frac{c}{\gamma} u_{||} \langle B_r \rangle] \end{aligned}$$

(2.2.9.β)

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dz} - \frac{\gamma}{cu_{||}} (\omega - l\omega_c - kv_{||}) = & \frac{\gamma l}{u_{||}u_{\perp}V_0} [\\ & -V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \left(1 - \frac{k_{||n}c}{\omega\beta_{||}} \right) \frac{j\omega\beta_{||}}{ck_{\perp n}} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n}r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & + V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \left(1 - \frac{k_{||n}c\beta_{||}}{\omega} \right) \frac{\omega\mu_0}{k_{\perp n}^2} \frac{l}{r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n}r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\perp} V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} B_n F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n}r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & + \frac{c}{\gamma} u_{||} \langle B_{\varphi} \rangle] \end{aligned}$$

(2.2.9.γ)

$$\begin{aligned} \frac{du_{//}}{dz} = & -\frac{\gamma}{u_{//}V_0} [V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & -\frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\perp} V(t) \operatorname{Re} \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\omega \varepsilon_0 l}{k_{\perp n}^2 r} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right. \\ & \left. - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l e^{j\Lambda} e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right] \\ & -\frac{c}{\gamma} u_{\perp} \langle B_r \rangle] \end{aligned}$$

όπου $V_0 = \frac{m_e c^2}{e} \cong 511 \text{ kV}$, $\omega_c = \frac{e \langle B_z \rangle}{m_e \gamma}$ η κυκλοτρονική συχνότητα, και $r = \frac{V_0}{c \langle B_z \rangle} u_{\perp}$ η ακτίνα Larmor της κυκλοτρονικής κίνησης.

2.2.2 Υπολογισμός όρων μαγνητοστατικού πεδίου

Για τον υπολογισμό των ποσοτήτων $\langle B_r \rangle$, $\langle B_{\varphi} \rangle$ και $\langle B_z \rangle$ που υπεισέρχονται στις 2.2.9 εφαρμόζουμε τους μέσους όρους ως προς την κυκλοτρονική περίοδο ως εξής:

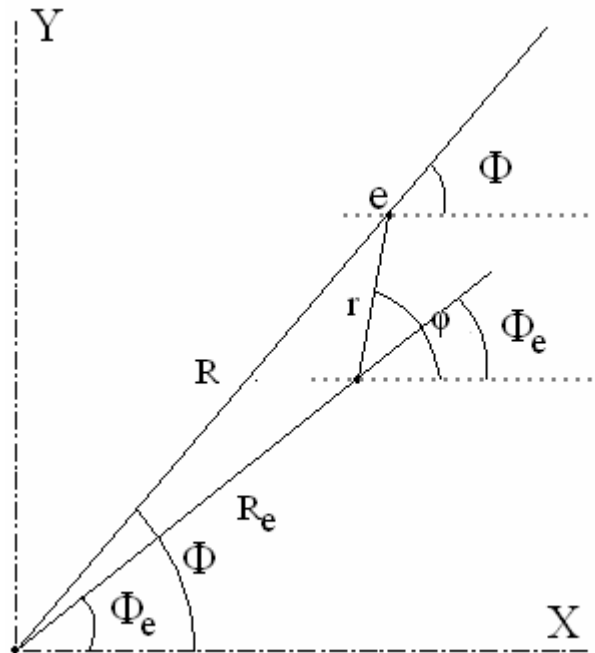
Με τη βοήθεια του σχήματος 2.2 έχουμε τις παρακάτω γεωμετρικές σχέσεις:

(2.2.10)

$$\text{Από νόμο συνημιτόνων: } R^2 = R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e) \quad (\alpha)$$

$$\text{Από νόμο ημιτόνων: } \frac{R}{\sin(\varphi - \Phi_e)} = \frac{R_e}{\sin(\varphi - \Phi)} \quad (\beta)$$

$$R \cos(\varphi - \Phi) = R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r \quad (\gamma)$$



Σχήμα 2.2: Γεωμετρικές σχέσεις συντεταγμένων τοπικού-κεντρικού συστήματος

Αρχικά εξετάζουμε τους 3 πρώτους όρους της 2.1.7 για την κάθε συνιστώσα του τοπικού συστήματος συντεταγμένων:

$$\begin{aligned} \langle B_r \rangle &= \langle B_R \cos(\varphi - \Phi) \rangle = -\frac{1}{2} B_0'(z) \langle R \cos(\varphi - \Phi) \rangle + \frac{1}{16} B_0''(z) \langle R^3 \cos(\varphi - \Phi) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{384} B_0^{(5)}(z) \langle R^5 \cos(\varphi - \Phi) \rangle \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η γωνία φ μεταβάλλεται με την κυκλοτρονική συχνότητα και με χρήση των σχέσεων 2.2.10.α και 2.2.10.γ έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle R \cos(\varphi - \Phi) \rangle &= \langle R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r \rangle = r \\ \langle R^3 \cos(\varphi - \Phi) \rangle &= \langle [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] [R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r] \rangle = r(R_e^2 + r^2) + rR_e^2 \\ \langle R^5 \cos(\varphi - \Phi) \rangle &= \langle [(R_e^2 + r^2)^2 + 4R_e^2 r^2 \cos^2(\varphi - \Phi_e) + 4R_e r(R_e^2 + r^2) \cos(\varphi - \Phi_e)] \\ &\quad \cdot [R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r] \rangle = r(R_e^2 + r^2)^2 + 2R_e^2 r^3 + 2R_e^2 r(R_e^2 + r^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle B_r \rangle &= -\frac{1}{2} r B_0'(z) + \frac{1}{16} [r(R_e^2 + r^2) + rR_e^2] B_0''(z) \\ &\quad - \frac{1}{384} [r(R_e^2 + r^2)^2 + 2R_e^2 r^3 + 2R_e^2 r(R_e^2 + r^2)] B_0^{(5)}(z) \end{aligned} \quad (2.2.11.α)$$

$$\begin{aligned} \langle B_\varphi \rangle &= \langle B_R \sin(\varphi - \Phi) \rangle = -\frac{1}{2} r B_0'(z) \langle R \sin(\varphi - \Phi) \rangle + \frac{1}{16} B_0''(z) \langle R^3 \sin(\varphi - \Phi) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{384} B_0^{(5)}(z) \langle R^5 \sin(\varphi - \Phi) \rangle \end{aligned}$$

Με χρήση των σχέσεων 2.2.10.α και 2.2.10.β έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle R \sin(\varphi - \Phi) \rangle &= \langle R_e \sin(\varphi - \Phi_e) \rangle = 0 \\ \langle R^3 \sin(\varphi - \Phi) \rangle &= \langle [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] R_e \sin(\varphi - \Phi_e) \rangle = \\ &\quad \langle (R_e^2 + r^2) R_e \sin(\varphi - \Phi_e) + R_e^2 r \sin(2(\varphi - \Phi_e)) \rangle = 0 \\ \langle R^5 \sin(\varphi - \Phi) \rangle &= \langle [(R_e^2 + r^2)^2 + 4R_e^2 r^2 \cos^2(\varphi - \Phi_e) + 4R_e r(R_e^2 + r^2) \cos(\varphi - \Phi_e)] \\ &\quad \cdot [R_e \sin(\varphi - \Phi_e)] \rangle = \langle 4R_e^3 r^2 \cos^2(\varphi - \Phi_e) \sin(\varphi - \Phi_e) \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } B_\varphi = 0 \quad (2.2.11.β)$$

$$\langle B_z \rangle = B_0(z) - \frac{\langle R^2 \rangle}{4} B_0'(z) + \frac{\langle R^4 \rangle}{64} B_0^{(4)}(z)$$

$$\langle R^2 \rangle = \langle R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e) \rangle = R_e^2 + r^2$$

$$\langle R^4 \rangle = [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)]^2 = (R_e^2 + r^2)^2 + 2R_e^2 r^2$$

$$\langle B_z \rangle = B_0(z) - \frac{R_e^2 + r^2}{4} B_0''(z) + \frac{(R_e^2 + r^2)^2 + 2R_e^2 r^2}{64} B_0^{(4)}(z) \quad (2.2.11.\gamma)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί για επιπλέον όρους της ανάπτυξης σε σειρά αν και οι όροι που υπολογίστηκαν κρίνονται ως υπεραρκετοί για την ηπιότητα της αξονικής ανομοιογένειας του μαγνητικού πεδίου στο διάλυο.

Η επίδραση του μαγνητοστατικού πεδίου στα κέντρα περιστροφής των ηλεκτρονίων αναλύεται στο Παράρτημα Ι.

2.2.3 Εκφράσεις κατάλληλες για αριθμητικούς υπολογισμούς

Το σύστημα των εξισώσεων 2.2.9 αποτελείται από 3 πραγματικές εξισώσεις. Για επιτάχυνση των υπολογισμών συνηθίζεται στις προσομοιώσεις της αλληλεπίδρασης των γυροτρονίων η μετατροπή σε σύστημα 2 εξισώσεων εκ' των οποίων η μία μιγαδική. Για το λόγο αυτό εισάγουμε τη μιγαδική μεταβλητή $p \triangleq u_{\perp} e^{-j\frac{\Lambda}{l}}$.

Ξεκινώντας από τη σχέση: $\frac{dp}{dz} = \frac{du_{\perp}}{dz} e^{-j\frac{\Lambda}{l}} - j \frac{1}{l} \frac{d\Lambda}{dz} u_{\perp} e^{-j\frac{\Lambda}{l}}$ αντικαθιστώντας τις

2.2.9.α και 2.2.9.β και χρησιμοποιώντας ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel καταλήγουμε στην επιθυμητή μιγαδική εξίσωση. Με τον τρόπο αυτό απαλείφεται ο υπολογισμός του πραγματικού μέρους των όρων του δεξιού μέλους των 2.2.9 και επιτυγχάνεται οικονομία στους υπολογισμούς. Εισάγοντας επίσης την αδιάστατη μεταβλητή $\zeta = \frac{\omega}{lcu_{//0}} z$ οι εξισώσεις

κίνησης γίνονται:

(2.2.12.α)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\zeta} + jp\gamma \left(1 - \frac{l\omega_c}{\omega} - \frac{kv_{//}}{\omega} \right) &= -\frac{\gamma u_{//0}}{V_0 u_{//}} \left[\frac{1}{2} V(t) l \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{k_{//n} c}{\omega \beta_{//}} \right) \frac{\beta_{//}}{k_{\perp n}} F_{(m-l)n}(R_e) (-1)^l \right. \\ &\cdot [A_n e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|} \right)^{l-1} J_{l-1}(k_{\perp n} r) + \left(A_n e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right)^* \left(\frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \right)^{l+1} J_{l+1}(k_{\perp n} r)] \\ &+ \frac{j}{2} V(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{k_{//n} c \beta_{//}}{\omega} \right) \frac{cl\mu_0}{k_{\perp n}} F_{(m-l)n}(R_e) (-1)^l \\ &\cdot [B_n e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|} \right)^{l-1} J_{l-1}(k_{\perp n} r) + \left(B_n e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right)^* \left(\frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \right)^{l+1} J_{l+1}(k_{\perp n} r)] \\ &- \frac{j}{4} \frac{\mu_0 c^3 l}{\omega \gamma^2 \omega_c} |p_{\perp}|^2 V(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} k_{\perp n} F_{(m-l)n}(R_e) (-1)^l (J_{l-1}(k_{\perp n} r) + J_{l+1}(k_{\perp n} r)) \\ &\cdot [B_n e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|} \right)^{l-1} + \left(B_n e^{-jn\frac{2\pi}{L}z} \right)^* \left(\frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \right)^{l+1}] \\ &+ \frac{c^2 l}{\omega \gamma} u_{//} \frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \langle B_r \rangle \end{aligned}$$

(2.2.12.β)

$$\begin{aligned}
\frac{du_{//}}{d\zeta} = & -\frac{\gamma l u_{//0}}{V_0 u_{//}} [V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c}{\omega} A_n F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|}\right)^l e^{-jn\frac{2\pi}{L}z}]] \\
& -\mu_0 c V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \frac{\omega_c \varepsilon_0 l}{k_{\perp n}^2} F_{(m-l)n}(R_e) J_l(k_{\perp n} r) (-1)^l \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|}\right)^l e^{-jn\frac{2\pi}{L}z}]] \\
& -\frac{\mu_0 c^2}{\omega \gamma} V(t) \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \frac{jk_{//n}}{k_{\perp n}} F_{(m-l)n}(R_e) J'_l(k_{\perp n} r) (-1)^l (p_{\perp}^*)^l e^{-jn\frac{2\pi}{L}z}]] \\
& +\frac{c^2}{\omega \gamma} |p_{\perp}| < B_r >]
\end{aligned}$$

2.3 Περιγραφή Μοντέλου Αλληλεπίδρασης

Όπως έχουμε προαναφέρει η θεώρηση της αλληλεπίδρασης θα γίνει με βάση το ισοζύγιο της ενέργειας στη διάταξη. Το επίπεδο της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στον διάυλο θα δίνεται σε κάθε χρονικό βήμα από το ισοζύγιο ενέργειας μεταξύ μετατρεπόμενης ισχύος λόγω δέσμης και απωλειών. Έτσι για την ολοκλήρωση του μοντέλου αλληλεπίδρασης είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας στη διάταξη.

2.3.1 Εκφράσεις Ηλεκτρομαγνητικής Ενέργειας

Για να εξάγουμε τις εκφράσεις της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ξεκινάμε από τις 2.1.1-2.1.3 και τη σχέση:

$$W_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint_V \frac{1}{2} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dV + \frac{1}{2} \mu_0 \iiint_V \frac{1}{2} [\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*] dV \quad (2.3.1)$$

Για την ηλεκτρική ενέργεια αρχικά και χωρίζοντας στις συνιστώσες της έχουμε:

$$W_e = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \left[\iiint_V E_z E_z^* dV + \iiint_V E_R E_R^* dV + \iiint_V E_{\phi} E_{\phi}^* dV \right] = \frac{1}{4} \varepsilon_0 [W_{ez} + W_{eR} + W_{e\phi}]$$

Εφ' όσον για να αναπτύξουμε σύμφωνα με το θεώρημα του Floquet έχουμε θεωρήσει ότι η διάταξή μας επαναλαμβάνεται πολλές φορές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορθογωνιότητας: $\int_0^L e^{-jk_{//n}} e^{jk_{//m}} dz = \int_0^L e^{-j\frac{2\pi}{L}(n-m)} dz = L \cdot \delta_{mn}$. (2.3.2)

Με την παραπάνω σχέση από το γινόμενο των δύο άπειρων αθροισμάτων επιβιώνει το άθροισμα του γινομένου των όρων όμοιας τάξης.

Έτσι σύμφωνα με την 2.3.2 για τις συνιστώσες λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned}
W_{ez} &= \iiint_V |E_z|^2 dV = V^2(t) \iint_S L \sum_n |A_n|^2 F_{mn}^2(R) dS \\
&= V^2(t) 2\pi L \sum_n |A_n|^2 \int_{R_{in}}^{R_{out}} F_{mn}^2(R) R dR = V^2(t) 2\pi L \sum_n |A_n|^2 I_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{e\phi} &= \iiint_V |E_\phi|^2 dV = V^2(t) \iint_S L \sum_n \frac{k_{//n}^2 m^2}{k_{\perp n}^4 R^2} |A_n|^2 F_{mn}^2(R) dS \\
&\quad + V^2(t) \iint_S L \sum_n \frac{\omega^2 \mu_0^2}{k_{\perp n}^4} |B_n|^2 \left(\frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} \right)^2 dS \\
&\quad - V^2(t) \iint_S L \sum_n \frac{k_{//n} \omega \mu_0 m}{k_{\perp n}^4 R} [-jA_n B_n^* + jA_n^* B_n] F_{mn}(R) \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} R dR \\
&= V^2(t) 2\pi L \sum_n \frac{k_{//n}^2}{k_{\perp n}^4} |A_n|^2 I_{2a} + V^2(t) 2\pi L \sum_n \frac{\omega^2 \mu_0^2}{k_{\perp n}^4} |B_n|^2 I_{2\beta} \\
&\quad - V^2(t) 2\pi L \sum_n \frac{k_{//n} \omega \mu_0 m}{k_{\perp n}^4} 2 \operatorname{Re}(-jA_n B_n^*) I_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_{eR} &= \iiint_V |E_R|^2 dV = V^2(t) \iint_S L \sum_n \frac{k_{//n}^2}{k_{\perp n}^4} |A_n|^2 \left(\frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} \right)^2 dS + V^2(t) \iint_S L \sum_n \frac{\omega^2 \mu_0^2 m^2}{k_{\perp n}^4 R^2} |B_n|^2 F_{mn}^2(R) dS \\
&\quad + V^2(t) \iint_S L \sum_n \frac{k_{//n} \omega \mu_0 m}{k_{\perp n}^4 R} [jA_n B_n^* - jA_n^* B_n] F_{mn}(R) \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} R dR \\
&= V^2(t) 2\pi L \sum_n \frac{k_{//n}^2}{k_{\perp n}^4} |A_n|^2 I_{2\beta} + V^2(t) 2\pi L \sum_n \frac{\omega^2 \mu_0^2}{k_{\perp n}^4} |B_n|^2 I_{2a} \\
&\quad + V^2(t) 2\pi L \sum_n \frac{k_{//n} \omega \mu_0 m}{k_{\perp n}^4} 2 \operatorname{Re}(jA_n B_n^*) I_3
\end{aligned}$$

$$\text{όπου } I_{2a} = \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{m^2}{R} F_{mn}^2(R) dR, \quad I_{2\beta} = \int_{R_{in}}^{R_{out}} R \left(\frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} \right)^2 dR, \quad I_3 = \int_{R_{in}}^{R_{out}} F_{mn}(R) \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} dR$$

Οι αναλυτικές εκφράσεις των ολοκληρωμάτων I_1, I_2 και I_3 δίνονται στο παράρτημα II. Εντελώς όμοια με την ηλεκτρική ενέργεια υπολογίζεται και η μαγνητική. Συνδυάζοντας τις συνιστώσες $W_{ez}, W_{eR}, W_{e\phi}$ και τις αντίστοιχες συνιστώσες της αποθηκευμένης μαγνητικής ενέργειας η τελική έκφραση για την ηλεκτρομαγνητική ενέργεια γίνεται:

$$\begin{aligned}
W_{em} &= \frac{1}{2} \pi L V^2(t) \sum_n [I_1 (\epsilon_0 |A_n|^2 + \mu_0 |B_n|^2) + I_2 (\epsilon_0 |A_n|^2 + \mu_0 |B_n|^2) \frac{k_{//n}^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0}{k_{\perp n}^4} \\
&\quad + 4 \frac{k_{//n} \omega \epsilon_0 \mu_0 m}{k_{\perp n}^4} I_3 \operatorname{Re}(jA_n B_n^*)] \quad (2.3.3)
\end{aligned}$$

2.3.2 Εξίσωση ισοζυγίου ενέργειας

Η μετατρεπόμενη ισχύς από τη δέσμη δίνεται σύμφωνα με τη σχέση:

$$P_{\delta} = \frac{mc^2}{e} I_b < \gamma_0 - 1 - (\gamma_{\text{τελ}} - 1) > \quad (2.3.4)$$

όπου I_b το ρεύμα που αντιπροσωπεύει η δέσμη, γ_0 ο σχετικιστικός παράγοντας στην είσοδο της διάταξης ενώ $\gamma_{\text{τελ}}$ η αντίστοιχη τιμή του στην έξοδο της διάταξης. Η μέση τιμή στην 2.3.4 είναι ως προς τις αρχικές φάσεις λ των ηλεκτρονίων με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, 2\pi]$. Η τιμή του $\gamma_{\text{τελ}}$ προκύπτει από ολοκλήρωση των 2.2.12 με αρχικές τιμές τις ποσότητες $u_{\perp 0}, u_{\parallel 0}$ που χαρακτηρίζουν τη δέσμη στην είσοδο της διάταξης και δείγμα τιμών για το λ κατανεμημένο ομοιόμορφα στο $[0, 2\pi]$.

Η εξίσωση ισοζυγίου της ενέργειας στη διάταξη έχει ως εξής:

$$\frac{dW_{em}}{dt} = P_{\delta} - \omega \frac{W_{em}}{Q} \quad (2.3.5)$$

όπου $\omega \frac{W_{em}}{Q}$ οι απώλειες ισχύος της διάταξης. Οι απώλειες αυτές μπορεί να είναι ωμικές, περίθλασης ή διηλεκτρικές απώλειες με τις τελευταίες να κυριαρχούν στο δίαυλο με διηλεκτρική φόρτιση. Λόγω της άγνωστης εκ των προτέρων γεωμετρίας των διηλεκτρικών δακτυλίων και της αδυναμίας αναλυτικού υπολογισμού αποθηκευμένης ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας και απωλειών σε αυτούς, η τιμή του Q στο μοντέλο μας δίνεται εξωτερικά. Η τιμή αυτή αφορά τις απώλειες περίθλασης της εσωτερικής κοιλότητας προς τους θαλάμους του διηλεκτρικού υλικού (οι οποίες στη συνέχεια συνιστούν τις διηλεκτρικές απώλειες) και προς τα ακραία ανοίγματα της διάταξης.

Για την επίλυση της 2.3.5 σε κάθε χρονικό βήμα, που πρέπει να είναι αρκετά μικρότερο από τη σταθερά χρόνου Q/ω , ξεκινώντας από την ενέργεια του θορύβου ($\sim mW$ ισχύς απωλειών) υπολογίζεται το νέο επίπεδο ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας της διάταξης. Έτσι με βάση τη 2.3.3 υπολογίζεται η νέα τιμή της $V(t)$ η οποία χρησιμοποιείται στο επόμενο χρονικό βήμα για την ολοκλήρωση των 2.2.12. Όταν λόγω του κορεσμού το επίπεδο της ενέργειας σταθεροποιηθεί, έχουμε και την μετατρεπόμενη ισχύ της δέσμης στη μόνιμη κατάσταση.

3. ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΔΙΑΥΛΟΥ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΗΣ ΔΙΑΤΟΜΗΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσαρμόσουμε το μοντέλο που αναπτύξαμε στο κεφάλαιο 2 στην περίπτωση που ο διάυλος έχει μεταβαλλόμενη διατομή. Η νέα αυτή προσέγγιση βρίσκει εφαρμογή στη γεωμετρία του διαύλου με συνεχώς μεταβαλλόμενη ακτίνα (Σχήμα 1.8β). Μπορεί επίσης να προσεγγίσει και την περίπτωση της γεωμετρίας κλιμακωτής ακτίνας (Σχήμα 1.8α) όταν η κλιμάκωση είναι πολύ πυκνή. Βασική διαφορά σε σχέση με το κεφάλαιο 2 αποτελεί η θεώρηση των πεδίων στο διάυλο.

3.1 Εκφράσεις ηλεκτρομαγνητικών πεδίων

Στην περίπτωση της γεωμετρίας μεταβλητής ακτίνας το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο στη διάταξη παρουσιάζει αυξημένη περιπλοκότητα. Οι οριακές συνθήκες στα μεταβαλλόμενα τοιχώματα καθιστούν αναγκαία τη σύζευξη μεταξύ ρυθμών TE, TM, ακόμα και απουσία διηλεκτρικού, με σχέση εξαρτώμενη από τη μεταβολή της ακτίνας. Επίσης δεν υπάρχει ακριβής έκφραση αναπαράστασης του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κλειστή μορφή σε αυτού του είδους τη γεωμετρία καθώς η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών αποτυγχάνει. Για τους παραπάνω λόγους θα υιοθετήσουμε κάποιες απλουστεύσεις και προσεγγίσεις προσπαθώντας να κρατήσουμε την ουσία και τη φυσική σημασία της μεταβαλλόμενης διατομής.

Αρχικά θα υιοθετήσουμε την προσέγγιση Vlasov [10]. Η προσέγγιση αυτή δέχεται ότι η εξωτερική ακτίνα της διάταξης (ή και εσωτερική για τα ομοαξονικά γυροτρόνια) μεταβάλλεται αρκετά ήπια ώστε να αμελείται η σύζευξη μεταξύ των ρυθμών TE, TM. Η συγκεκριμένη προσέγγιση εφαρμόζεται επιτυχώς στην περίπτωση της κοιλότητας των γυροτρονίων (σχήμα 1.6) όταν η κλίση της τελευταίας δεν υπερβαίνει τις 5°. Επομένως η διάταξή μας, απουσία διηλεκτρικών δακτυλίων υποστηρίζει ανεξάρτητους ρυθμούς TE, TM. Η γενική θεώρηση υβριδικών ρυθμών για την περίπτωση ύπαρξης διηλεκτρικών δακτυλίων στο μοντέλο παραμένει, με σύζευξη όμως που δεν εξαρτάται από τη μεταβολή της ακτίνας.

Στη συνέχεια θεωρώντας αξονικό προφίλ πεδίου οδεύοντος κύματος, θα επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης των πεδίων σύμφωνα με τη μέθοδο WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin). Η μέθοδος αυτή μπορεί να μας δώσει μια προσεγγιστική αναλυτική έκφραση για το πεδίο μέσα στο διάυλο με μεταβαλλόμενα τοιχώματα.

3.1.1 Εκφράσεις πεδίων σύμφωνα με τη μέθοδο WKB

Για να εφαρμόσουμε τη μέθοδο WKB [11] υποθέτουμε εξάρτηση ως προς z των πεδίων $e^{-j\psi(z)}$. Αντικαθιστώντας στην κυματική εξίσωση, έχουμε τη σχέση:

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + k_0^2 - \left(\frac{d\psi(z)}{dz} \right)^2 - j \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} \right) f_z = 0,$$

όπου $k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ και f_z η ηλεκτρική ή μαγνητική διαμήκης συνιστώσα του

ηλεκτρομαγνητικού πεδίου. Αμελούμε τον όρο $j \frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$ και ορίζουμε τον εγκάρσιο

$$\text{κυματαριθμό: } k_{\perp}^2 \triangleq k_0^2 - \left(\frac{d\psi(z)}{dz} \right)^2, \quad (3.1.1)$$

όπου $k_{\perp} = k_{\perp}(R_{out}(z), R_{in}(z)) = k_{\perp}(z)$ δίνεται από την ικανοποίηση των οριακών συνθηκών για $R=R_{out}(z)$, $R=R_{in}(z)$. Επομένως αν συμβολίσουμε:

$$\frac{d\psi(z)}{dz} = k(z) \Rightarrow \psi(z) = \int_0^z k(z') dz' \quad (3.1.2)$$

τότε η μεταβολή $e^{-j\psi(z)}$ συμβολίζει όδευση κύματος με αξονικά μεταβαλλόμενη σταθερά διάδοσης $k(z)$. Τα όρια ισχύος της προσέγγισης καθορίζονται από το μέγεθος του όρου $\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$ που αμελούμε σε σχέση με τον όρο $k_{\perp}^2(z) \triangleq k_0^2 - k^2(z)$. Στο συμβατικό γυροτρόνιο προκύπτει ότι η προσέγγιση μας εξαρτάται από την ικανοποίηση της συνθήκης:

$$\frac{1}{R_{out}(z)} \frac{dR_{out}(z)}{dz} \ll k(z) \quad (3.1.3)$$

Η παραπάνω συνθήκη υποδεικνύει ότι η μέθοδος αποτυγχάνει πολύ κοντά στην αποκοπή όπου $k(z) \rightarrow 0$. Άλλωστε για καμία διατομή του διαύλου το κύμα δεν πρέπει να περνάει στη περιοχή της αποκοπής μιας και τότε υφίσταται ανάκλαση και η περιγραφή μας αποτυγχάνει. Η λύση 3.1.2 λοιπόν εκφράζει την αδιαβατική προσαρμογή του ρυθμού στην τοπική τιμή της ακτίνας όταν η μεταβολή της τελευταίας είναι ήπια.

Με υπολογισμό του όρου $\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}$ από την 3.1.2 και εκ νέου αντικατάσταση στη κυματική εξίσωση μπορούμε να προσεγγίσουμε τη λύση σε δεύτερη τάξη και με επαναληπτικό τρόπο. Η δεύτερης τάξης προσέγγιση εισάγει στη λύση 1^{ης} τάξης τον πολλαπλασιαστικό συντελεστή $\frac{1}{\sqrt{k(z)}}$. Στη δική μας περίπτωση κρατάμε τη λύση 1^{ης} τάξης

και εισάγουμε τον αδιάστατο πολλαπλασιαστικό συντελεστή $A(z)$. Η τιμή του $A(z)$ θα υπολογιστεί σύμφωνα με τη φυσική σημασία που συνεπάγεται μία διάταξη μεταβλητής διατομής. Θα απαιτήσουμε η ισχύς που οδεύει στη διάταξη να είναι σταθερή σε κάθε διατομή του διαύλου. Ο μαθηματικός φορμαλισμός της παραπάνω φυσικής απαίτησης

$$\text{εκφράζεται ως εξής: } \frac{\partial}{\partial z} \left[\iint_{S(z)} \frac{1}{2} \text{Re} \left[\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \right] dS \right] = 0. \quad (3.1.4)$$

Η παραπάνω φυσική απαίτηση ταιριάζει σε οδεύον κύμα που διαδίδεται κατά μήκος διαύλου χωρίς διηλεκτρικούς δακτυλίους και με αμελητέες ωμικές απώλειες.

Επομένως ξεκινάμε εκφράζοντας τα πεδία σύμφωνα με τις παραπάνω παραδοχές. Αρχικά για τις διαμήκεις συνιστώσες έχουμε:

$$E_z = V(t)A(z)C_e F_m(R) e^{-jm\Phi} e^{-j\psi(z)} \quad (\alpha) \quad (3.1.5)$$

$$H_z = V(t)A(z)C_h F_m(R) e^{-jm\Phi} e^{-j\psi(z)} \quad (\beta)$$

όπου C_e, C_h συντελεστές που εκφράζουν τη σύζευξη των διαμηκών συνιστωσών για υβριδικούς ρυθμούς. Για ανεξάρτητους TE ή TM ρυθμούς θέτουμε αντίστοιχα $C_e = 0$ ή $C_h = 0$.

$$F_m(R) = \begin{cases} J_{-m}(k_{\perp}(z)R) + (C_Y Y_{-m}(k_{\perp}(z)R)), & k_{\perp}^2(z) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k^2(z) \quad \text{γρήγορα κύματα} \\ I_{-m}(k'_{\perp}(z)R) + (C_K K_{-m}(k'_{\perp}(z)R)), & k_{\perp}^2(z) = k^2(z) - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \quad \text{αργά κύματα} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

Σύμφωνα με τη σχέση $\frac{\partial V(t)}{\partial t} \ll \omega$ όπως τεκμηριώθηκε στο κεφάλαιο 2 και τη σχέση $\frac{dA(z)}{dz} \ll k(z)$ που μπορεί να ελεγχθεί μετά τον προσδιορισμό του συντελεστή $A(z)$, εξάγουμε τις εγκάρσιες συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου:

$$E_R = -V(t)A(z)C_e \frac{jk(z)}{k_{\perp}^2(z)} \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} - V(t)A(z)C_h \frac{\omega\mu_0}{k_{\perp}^2(z)} \frac{m}{R} F_m(R) e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} \quad (3.1.7)$$

$$(a)$$

$$E_{\Phi} = -V(t)A(z)C_e \frac{k(z)}{k_{\perp}^2(z)} \frac{m}{R} F_m(R) e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} + V(t)A(z)C_h \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp}^2(z)} \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} \quad (b)$$

$$H_R = V(t)A(z)C_e \frac{\omega\varepsilon_0 m}{k_{\perp}^2(z)R} F_m(R) e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} - V(t)A(z)C_h \frac{jk(z)}{k_{\perp}^2(z)} \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} \quad (c)$$

$$H_{\Phi} = -V(t)A(z)C_e \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_{\perp}^2(z)} \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} - V(t)A(z)C_h \frac{k(z)}{k_{\perp}^2(z)} \frac{m}{R} F_m(R) e^{-jm\Phi} e^{-j\psi} \quad (d)$$

3.1.2 Υπολογισμός συντελεστή ανομοιογένειας

Με βάση τις εκφράσεις 3.1.5-3.1.7 υπολογίζουμε το συντελεστή $A(z)$ που εισάγεται λόγω ανομοιογένειας της διατομής και υπολογίζεται από την 3.1.4.

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = E_R H_\Phi^* - E_\Phi H_R^*$$

$$\begin{aligned} E_R H_\Phi^* &= V^2(t) A^2(z) |C_e|^2 \frac{k(z) \omega \varepsilon_0}{k_\perp^4(z)} \left(\frac{\partial F_m(R)}{\partial R} \right)^2 \\ &\quad + V^2(t) A^2(z) |C_h|^2 \frac{k(z) \omega \mu_0}{k_\perp^4(z)} \frac{m^2}{R^2} F_m^2(R) \\ &\quad + j V^2(t) A^2(z) C_e C_h^* \frac{k^2(z) m}{k_\perp^4(z) R} F_m(R) \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} \\ &\quad - j V^2(t) A^2(z) C_e^* C_h \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{k_\perp^4(z)} \frac{m}{R} F_m(R) \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -E_\Phi H_R^* &= V^2(t) A^2(z) |C_e|^2 \frac{k(z) \omega \varepsilon_0}{k_\perp^4(z)} \frac{m^2}{R^2} F_m^2(R) \\ &\quad + V^2(t) A^2(z) |C_h|^2 \frac{k(z) \omega \mu_0}{k_\perp^4(z)} \left(\frac{\partial F_m(R)}{\partial R} \right)^2 \\ &\quad + j V^2(t) A^2(z) C_e C_h^* \frac{k^2(z) m}{k_\perp^4(z) R} F_m(R) \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} \\ &\quad - j V^2(t) A^2(z) C_e^* C_h \frac{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{k_\perp^4(z)} \frac{m}{R} F_m(R) \frac{\partial F_m(R)}{\partial R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S(z)} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\hat{\mathbf{z}} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \right] dS &= \int_0^{2\pi} \int_{R_{in}(z)}^{R_{out}(z)} \frac{1}{2} \left[E_R H_\Phi^* - E_\Phi H_R^* \right] R dR d\Phi \\ &= \pi V^2(t) A^2(z) |C_e|^2 \frac{k(z) \omega \varepsilon_0}{k_\perp^4(z)} I_2(R_{out}(z), R_{in}(z)) + \pi V^2(t) A^2(z) |C_h|^2 \frac{k(z) \omega \mu_0}{k_\perp^4(z)} I_2(R_{out}(z), R_{in}(z)) \\ &\quad + 2\pi V^2(t) A^2(z) \operatorname{Re}(j C_e C_h^*) \frac{m}{k_\perp^4(z)} \left(k^2(z) + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) I_3(R_{out}(z), R_{in}(z)) \end{aligned}$$

όπου τα I_2 , I_3 δίνονται στο παράρτημα II από τις Π.2.5 και Π.2.6 αντίστοιχα. Επομένως αν επιλέξουμε ως συντελεστή $A(z)$:

$$(3.1.8)$$

$$A(z) = \sqrt{k_\perp^4(z) \pi^{-1} \left[|C_e|^2 k(z) \omega \varepsilon_0 I_2 + |C_h|^2 k(z) \omega \mu_0 I_2 + 2m(k^2(z) + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0) \operatorname{Re}(j C_e C_h^*) I_3 \right]^{-1}}$$

τότε ικανοποιείται η 3.1.4 και η διαδιδόμενη ισχύς κατά μήκος του διαύλου γίνεται σταθερή κατά z και ίση με: $P = V^2(t)$.

3.2 Διατύπωση εξισώσεων κίνησης

Για τη διατύπωση των εξισώσεων κίνησης ακολουθούμε την ίδια διαδρομή με το κεφάλαιο 2. Αρχικά αναπτύσσουμε τις εκφράσεις των πεδίων 3.1.5-3.1.7 σύμφωνα με το θεώρημα Graf. Οι εκφράσεις που προκύπτουν είναι εντελώς ανάλογες με τις 2.1.5-2.1.6 και δεν επαναλαμβάνονται. Οι αντίστοιχες εκφράσεις για το μαγνητοστατικό πεδίο παραμένουν επίσης αναλλοίωτες.

Ξεκινώντας και πάλι από τη δύναμη Lorentz και εργαζόμενοι στο τοπικό σύστημα περιστροφής των ηλεκτρονίων ακολουθούμε τα ίδια βήματα ανάπτυξης των εξισώσεων. Για την εφαρμογή της αργής χρονικής κλίμακας στις εξισώσεις κίνησης, ορίζουμε τώρα ως

αργή μεταβλητή φάσης την ποσότητα: $\tilde{\Lambda} = \omega t - \psi(z) - l\varphi$ και στη συνέχεια $\Lambda = \tilde{\Lambda} + j(l-m)\Phi_e$. Για τη μεταβολή της φάσης Λ έχουμε: $\frac{d\Lambda}{dt} = \omega - \frac{d\psi(z)}{dt} - l\omega_c$
 $= \omega - k(z)\frac{dz}{dt} - l\omega_c$ όπου και πάλι αναπαράγεται η γνωστή σχέση του συντονισμού.

Έτσι σύμφωνα με τα παραπάνω οι εξισώσεις κίνησης παίρνουν τη μορφή:

(3.2.1.α)

$$\begin{aligned} \frac{du_{\perp}}{dz} = & -\frac{\gamma}{u_{\parallel}V_0} [V(t)A(z) \operatorname{Re}[C_e \left(1 - \frac{k(z)c}{\omega\beta_{\parallel}}\right) \frac{\omega\beta_{\parallel}}{ck_{\perp}^2(z)} \frac{l}{r} F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r) (-1)^l e^{j\Lambda}] \\ & + V(t)A(z) \operatorname{Re}[C_h \left(1 - \frac{k(z)c\beta_{\parallel}}{\omega}\right) \frac{j\omega\mu_0}{k_{\perp}(z)} F_{m-l}(R_e) J_l'(k_{\perp}(z)r) (-1)^l e^{j\Lambda}] \\ & + \frac{c}{\gamma} u_{\parallel} \langle B_r \rangle] \end{aligned}$$

(3.2.1.β)

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dz} - \frac{\gamma}{cu_{\parallel}} (\omega - l\omega_c - k(z)v_{\parallel}) = & \frac{\gamma l}{u_{\parallel}u_{\perp}V_0} [\\ & -V(t)A(z) \operatorname{Re}[C_e \left(1 - \frac{k(z)c}{\omega\beta_{\parallel}}\right) \frac{j\omega\beta_{\parallel}}{ck_{\perp}(z)} F_{m-l}(R_e) J_l'(k_{\perp}(z)r) (-1)^l e^{j\Lambda}] \\ & + V(t)A(z) \operatorname{Re}[C_h \left(1 - \frac{k(z)c\beta_{\parallel}}{\omega}\right) \frac{\omega\mu_0}{k_{\perp}^2(z)} \frac{l}{r} F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r) (-1)^l e^{j\Lambda}] \\ & - \frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\perp} V(t)A(z) \operatorname{Re}[C_h F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r) (-1)^l e^{j\Lambda}] \\ & + \frac{c}{\gamma} u_{\parallel} \langle B_{\varphi} \rangle] \end{aligned}$$

(3.2.1.γ)

$$\begin{aligned}
\frac{du_{//}}{dz} = & -\frac{\gamma}{u_{//}V_0} [V(t)A(z) \operatorname{Re}[C_e F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r)(-1)^l e^{jA}]] \\
& -\frac{\mu_0 c}{\gamma} u_{\perp} V(t) A(z) \operatorname{Re}[C_e \frac{\omega \varepsilon_0}{k_{\perp}^2(z)} \frac{l}{r} F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r)(-1)^l e^{jA} \\
& - C_h \frac{jk(z)}{k_{\perp}(z)} F_{m-l}(R_e) J_l'(k_{\perp}(z)r)(-1)^l e^{jA}] \\
& -\frac{c}{\gamma} u_{\perp} \langle B_r \rangle]
\end{aligned}$$

Τέλος όπως και στο κεφάλαιο 2, δίνουμε τις εκφράσεις που θα χρησιμοποιήσουμε στους αριθμητικούς υπολογισμούς αφού εισαχθεί η μιγαδική μεταβλητή $p \triangleq u_{\perp} e^{-j\frac{A}{l}}$.

(3.2.2.α)

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{d\zeta} + jp\gamma \left(1 - \frac{l\omega_c}{\omega} - \frac{k(z)v_{//}}{\omega} \right) = & -\frac{\gamma u_{//0}}{V_0 u_{//}} \left[\frac{1}{2} V(t) A(z) l \left(1 - \frac{k(z)c}{\omega \beta_{//}} \right) \frac{\beta_{//}}{k_{\perp}(z)} F_{m-l}(R_e) (-1)^l \right. \\
& \cdot [C_e \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|} \right)^{l-1} J_{l-1}(k_{\perp}(z)r) + C_e^* \left(\frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \right)^{l+1} J_{l+1}(k_{\perp}(z)r)] \\
& + \frac{j}{2} V(t) A(z) \left(1 - \frac{k(z)c\beta_{//}}{\omega} \right) \frac{cl\mu_0}{k_{\perp}(z)} F_{m-l}(R_e) (-1)^l \\
& \cdot [C_h \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|} \right)^{l-1} J_{l-1}(k_{\perp}(z)r) + C_h^* \left(\frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \right)^{l+1} J_{l+1}(k_{\perp}(z)r)] \\
& - \frac{j}{4} \frac{\mu_0 c^3 l}{\omega \gamma^2 \omega_c} |p_{\perp}|^2 V(t) A(z) k_{\perp}(z) F_{m-l}(R_e) (-1)^l [J_{l-1}(k_{\perp}(z)r) + J_{l+1}(k_{\perp}(z)r)] \\
& \cdot [C_h \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|} \right)^{l-1} + C_h^* \left(\frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \right)^{l+1}] \\
& + \frac{c^2 l}{\omega \gamma} u_{//} \frac{p_{\perp}}{|p_{\perp}|} \langle B_r \rangle]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{du_{//}}{d\zeta} = & -\frac{\gamma l u_{//0}}{V_0 u_{//}} [V(t) A(z) \operatorname{Re}[\frac{c}{\omega} C_e F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r)(-1)^l \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|}\right)^l] \\
& - \mu_0 c V(t) A(z) \operatorname{Re}[C_e \frac{\omega \varepsilon_0 l}{k_{\perp}^2(z)} F_{m-l}(R_e) J_l(k_{\perp}(z)r)(-1)^l \left(\frac{p_{\perp}^*}{|p_{\perp}|}\right)^l] \\
& - \frac{\mu_0 c^2}{\omega \gamma} V(t) A(z) \operatorname{Re}[C_h \frac{jk(z)}{k_{\perp}(z)} F_{m-l}(R_e) J_l'(k_{\perp}(z)r)(-1)^l (p_{\perp}^*)^l] \\
& + \frac{c^2}{\omega \gamma} |p_{\perp}| < B_r >] \quad (3.2.2.\beta)
\end{aligned}$$

Εκτός από τα μεγέθη $A(z)$, C_e , C_h , $k(z)$, $k_{\perp}(z)$ που ορίσαμε σε αυτό το κεφάλαιο, όλες οι παραπάνω ποσότητες έχουν οριστεί ή υπολογιστεί στο κεφάλαιο 2.

3.3 Υπολογισμός Ηλεκτρομαγνητικής Ενέργειας

Για τον υπολογισμό της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας ξεκινάμε από τον ορισμό $W_{em} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \iiint_V \frac{1}{2} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*] dV + \frac{1}{2} \mu_0 \iiint_V \frac{1}{2} [\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^*] dV$ και από τις εκφράσεις των πεδίων 3.1.5-3.1.7 έχουμε τη σχέση:

$$\begin{aligned}
W_{em} = & \frac{1}{2} \pi V^2(t) \int_0^L A^2(z) [I_1(\varepsilon_0 |C_e|^2 + \mu_0 |C_h|^2) + I_2(\varepsilon_0 |C_e|^2 + \mu_0 |C_h|^2) \frac{k^2(z) + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0}{k_{\perp}^4(z)} \\
& + 4 \frac{k(z) \omega \varepsilon_0 \mu_0 m}{k_{\perp}^4(z)} I_3 \operatorname{Re}(j C_e C_h^*)] dz \quad (3.3.1)
\end{aligned}$$

Λόγω της ανομοιογένειας ως προς τη διατομή και του συντελεστή $A(z)$, η πυκνότητα της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας μεταβάλλεται αξονικά και η συνολική ενέργεια υπολογίζεται από την 3.3.1 ολοκληρώνοντας στο μήκος της διάταξης.

Όσο αναφορά την εξίσωση ισοζυγίου της ενέργειας στη διάταξη και τη θεώρηση της αλληλεπίδρασης ισχύουν ακριβώς όσα περιγράψαμε στην ενότητα 2.3.2 με τη διαφορά χρήσης τώρα των εξισώσεων κίνησης 3.2.2 και ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας 3.3.1.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΩΝ

Στο πλαίσιο συμπλήρωσης της θεωρητικής προσέγγισης των προηγούμενων κεφαλαίων, αναπτύχθηκε κώδικας στο περιβάλλον Matlab που υλοποιεί το μοντέλο που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.

4.1 Συνοπτική περιγραφή κώδικα αλληλεπίδρασης

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε δέχεται εξωτερικά ως εισόδους τα παρακάτω μεγέθη:

Συχνότητα ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	ω
Υπό εξέταση ρυθμός	(m,p)
Συνάρτηση εγκάρσιου προφίλ F	$F_m(R)$
Συνάρτηση μαγνητικού πεδίου στο κέντρο της διάταξης ($R=0$)	$B_0(z)$
Συνάρτηση εξωτερικής και εσωτερικής ακτίνας της διάταξης	$R_{out}(z), R_{in}(z)$
Τάση δέσμης ή αρχική ενέργεια ηλεκτρονίων δέσμης	V_b ή γ_0
Ρεύμα δέσμης	I_b
Αρχικός λόγος ταχυτήτων	α
Μήκος διάταξης	L
Επιλογή ρυθμών TE, TM, υβριδικών	C_e, C_h
Αρχική Ενέργεια/Ισχύς ρυθμού	Για ισχύ θορύβου ~10 mW
Συντελεστής ποιότητας διάταξης	Q
Αριθμός δειγμάτων ηλεκτρονίων	Τυπικά 30

Πίνακας 4.1: Αρχικές εισοδοί κώδικα.

Με βάση τις παραπάνω εισόδους υπολογίζονται τα μεγέθη $k_{\perp}(z)$, $k_{\parallel}(z)$ από την ιδιοτιμή του ρυθμού (m,p) για ρυθμούς TE, TM (εξωτερική είσοδος ιδιοτιμής για υβριδικούς ρυθμούς) και τις συναρτήσεις εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας. Στη συνέχεια υπολογίζεται η αρχική τιμή του πλάτους $V(0)$ από την αρχική τιμή της ενέργειας και τη σχέση 3.3.1.

Έχοντας όλες τις παραμέτρους, σε κάθε χρονικό βήμα επιλύονται αριθμητικά οι εξισώσεις κίνησης 3.2.2 τόσες φορές όσες ο αριθμός δειγμάτων των ηλεκτρονίων με αρχικές συνθήκες τα μεγέθη $u_{\perp 0}$, $u_{\parallel 0}$ (υπολογισμός από το γ_0 και τον αρχικό λόγο ταχυτήτων α) και φάση ομοιόμορφα κατανομημένη στο διάστημα $[0,2\pi]$. Έτσι από τις τιμές των u_{\perp} , u_{\parallel} στο τέλος της διάταξης υπολογίζουμε τη μετατρεπόμενη ισχύ της δέσμης μέσω της σχέσης 2.3.4. Στη συνέχεια από το τρέχον επίπεδο της ενέργειας και τη μετατρεπόμενη ισχύ

παίρνουμε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας $\frac{dW_{em}}{dt}$ (σχέση 2.3.5). Το πρόσημο του ρυθμού μεταβολής της ενέργειας στο πρώτο χρονικό βήμα καθορίζει αν ο υπό εξέταση παρασιτικός ρυθμός διεγείρεται ή όχι για το εκάστοτε επίπεδο αρχικής ενέργειας. Στο επόμενο χρονικό βήμα από την 3.3.1 υπολογίζεται το νέο πλάτος $V(t_1)$ που προκύπτει από τη μεταβολή της ενέργειας $\frac{dW_{em}}{dt}$ και ο αλγόριθμος επαναλαμβάνεται.

Το κριτήριο κορεσμού για την ολοκλήρωση της προσομοίωσης έχει οριστεί σαν μια ελάχιστη διαφορά ενέργειας μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών βημάτων. Προφανώς η ενέργεια δεν μπορεί να υποβιβαστεί κάτω από το επίπεδο του θορύβου και σε τέτοια περίπτωση επίσης η προσομοίωση ολοκληρώνεται. Τέλος όπως έχουμε σχολιάσει το χρονικό βήμα επιλέγεται αρκετά μικρότερο της χρονικής σταθεράς Q/ω για τη σωστή ολοκλήρωση της 2.3.5.

Η έξοδος του κώδικα αποτελείται από τη μετατρεπόμενη ισχύ και το επίπεδο της ενέργειας του πεδίου για όλα τα χρονικά βήματα μέχρι την ολοκλήρωση της προσομοίωσης. Επομένως έχουμε την πληροφορία εάν ο εκάστοτε ρυθμός υπό τις συγκεκριμένες παραμέτρους διεγείρεται και το τελικό επίπεδο κορεσμού του.

4.2 Έλεγχος του κώδικα αλληλεπίδρασης

Η λειτουργία και τα αποτελέσματα του κώδικα που αναπτύξαμε ελέγχθηκαν με βάση τον κώδικα EURIDICE του εργαστηρίου Ηλεκτρονικής Δέσμης, Πλάσματος και μη Γραμμικής Οπτικής του Ε.Μ.Π. Ο κώδικας EURIDICE είναι κώδικας προσομοίωσης της αλληλεπίδρασης στη κοιλότητα των γυροτρονίων.

Περιορίζοντας τον κώδικα EURIDICE σε μονορυθμική λειτουργία και σε σταθερή συχνότητα (παρακάμπτοντας το frequency pulling) και με αξονικό προφίλ οδεύοντος κύματος εκτελέσαμε τις παρακάτω προσομοιώσεις. Αντίστοιχα περιορίσαμε τον κώδικά μας σε ρυθμούς TE, αγνοώντας τους μικρούς όρους κοντά στην αποκοπή και έχοντας σταθερή εξωτερική ακτίνα και ομογενές μαγνητικό πεδίο.

Οι είσοδοι για τους δύο κώδικες είχαν ως εξής:

Συχνότητα ηλεκτρομαγνητικού πεδίου	169.99 GHz
Εξωτερική ακτίνα	29.55 mm
Ακτίνα ηλεκτρονικής δέσμης	10 mm
Μαγνητοστατικό πεδίο	6.86 T
Μήκος διάταξης	16 mm
Συντελεστής ποιότητας Q	1640
Λόγος ταχυτήτων α	1.3

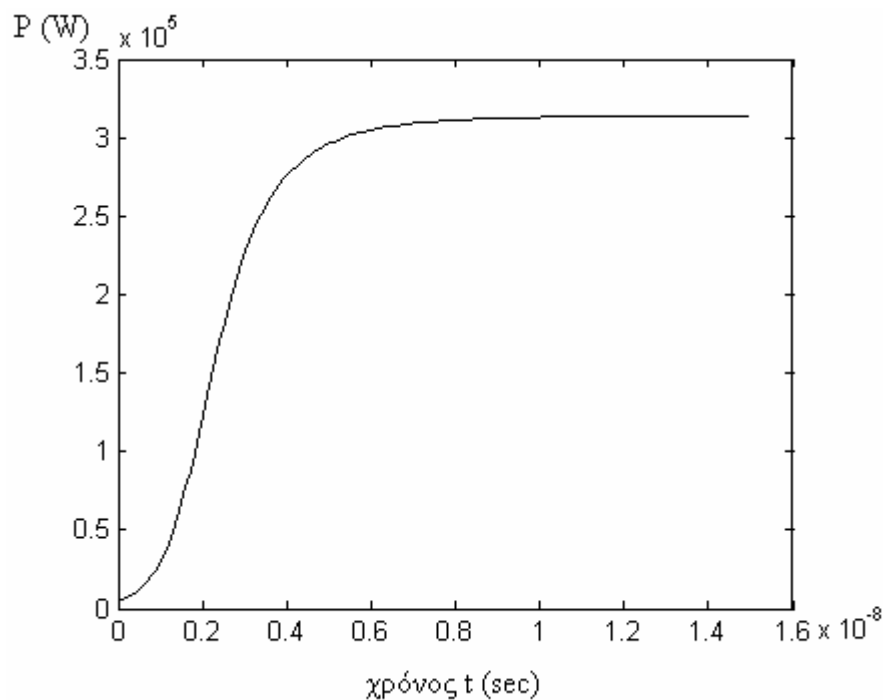
Πίνακας 4.2: Παράμετροι εισόδων προσομοιώσεων ελέγχου

Τα αποτελέσματα ως προς τη μετατρεπόμενη ισχύ κορεσμού της αλληλεπίδρασης για τους δύο κώδικες έχουν ως εξής:

Ρυθμός (<i>m,p</i>)	Τάση δέσμης V_b	Ρεύμα δέσμης I_b	Επίπεδο αρχικής ισχύος	Κώδικας	EURIDICE
(-34,19)	90 kV	80 A	1 MW	1.261 MW	1.278 MW
(+34,19)	80 kV	80 A	1 MW	625 kW	615 kW
(-34,19)	91 kV	80 A	1 MW	1.276 MW	1.294 MW
(-34,19)	80 kV	80 A	1 MW	613 kW	621 kW
(+34,19)	90 kV	80 A	1 MW	1.162 MW	1.152 MW
(+34,19)	77 kV	80 A	1 kW	314 kW	320 kW

Πίνακας 4.3: Αποτελέσματα προσομοιώσεων ελέγχου.

Παρουσιάζουμε ενδεικτικά και τη χαρακτηριστική καμπύλη κορεσμού που έδωσε ο κώδικάς μας για την τελευταία περίπτωση ($V_b=77$ kV):



Σχήμα 4.1: Καμπύλη κορεσμού ισχύος.

Τέλος για μία προσομοίωση δεύτερης αρμονικής για τις ίδιες παραμέτρους αλλά με μαγνητικό πεδίο $B_z=3.43$ T είχαμε τα εξής αποτελέσματα:

Ρυθμός (<i>m,p</i>)	Τάση δέσμης V_b	Ρεύμα δέσμης I_b	Επίπεδο αρχικής ισχύος	Κώδικας	EURIDICE
(+34,19)	85 kV	100 A	1 kW	411 kW	392 kW

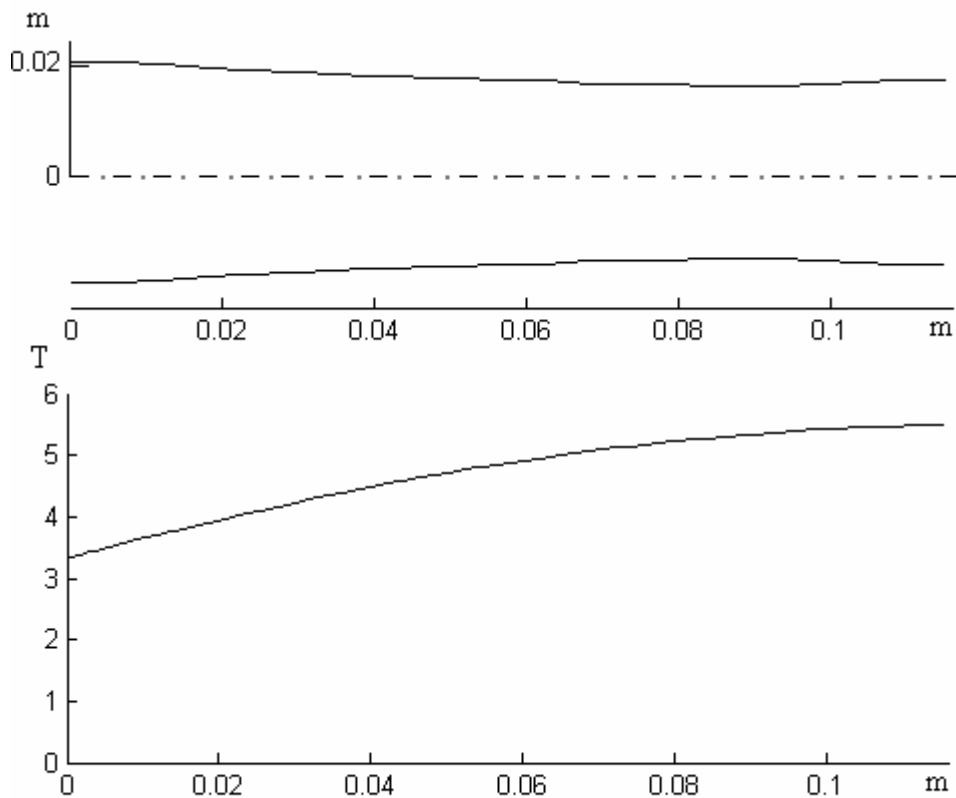
Από τα αποτελέσματα των παραπάνω δοκιμαστικών προσομοιώσεων βλέπουμε ότι ο κώδικάς μας είναι σε πολύ καλή συμφωνία με τον κώδικα EURIDICE. Οι διαφορές της τάξης του 1%–3% που παρατηρούνται είναι αρκετά μικρές και δικαιολογούνται από αριθμητικές διαφοροποιήσεις και τη διαφορετική προσέγγιση θεώρησης των μοντέλων. Άλλωστε όπως έχουμε σχολιάσει ακόμα και η εκτίμηση της τάξης μεγέθους του τελικού

επιπέδου κορεσμού στο διάυλο θα ήταν μια χρήσιμη πληροφορία. Αν και στις δοκιμαστικές προσομοιώσεις δεν συμπεριλήφθησαν τα φαινόμενα που εισάγαμε ειδικά για το διάυλο, τα αποτελέσματα ως προς τις βάσεις του μοντέλου είναι απολύτως θετικά.

4.3 Χαρακτηριστική περίπτωση διαύλου.

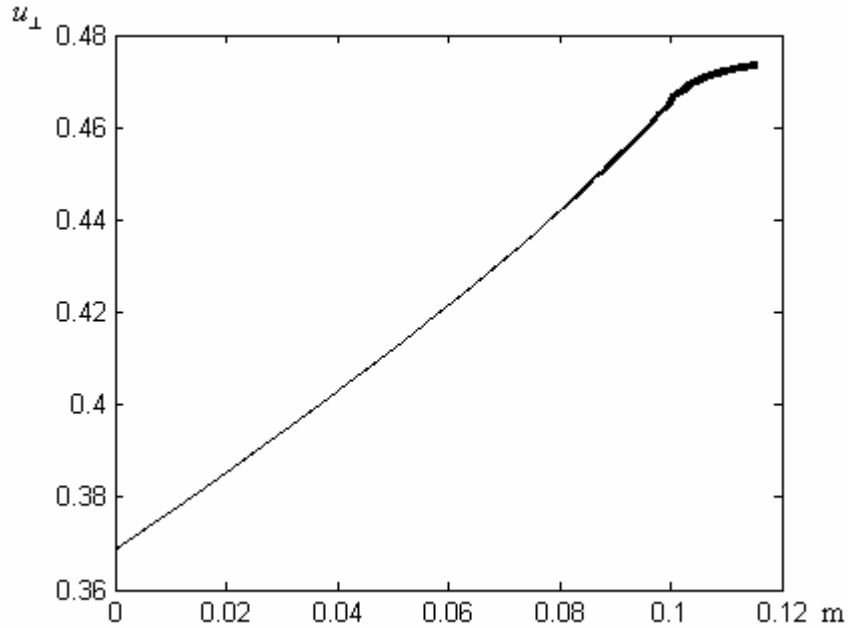
Ο κώδικας δοκιμάστηκε επίσης για τη περίπτωση μίας πραγματικής γεωμετρίας διαύλου. Ο διάυλος που προσομοιώθηκε είναι σχετικός με το διάυλο του γυροτρονίου των 140 GHz για τον stellarator W7-X [12].

Στο παρακάτω σχήμα παρουσιάζονται οι διαστάσεις του διαύλου και η μεταβολή του μαγνητοστατικού πεδίου μέσα σε αυτές. Η γεωμετρία του διαύλου απλοποιήθηκε αγνοώντας τους διηλεκτρικούς δακτυλίους και θεωρώντας τη πυκνή κλιμάκωση της εξωτερικής ακτίνας ως συνεχώς μεταβαλλόμενη.

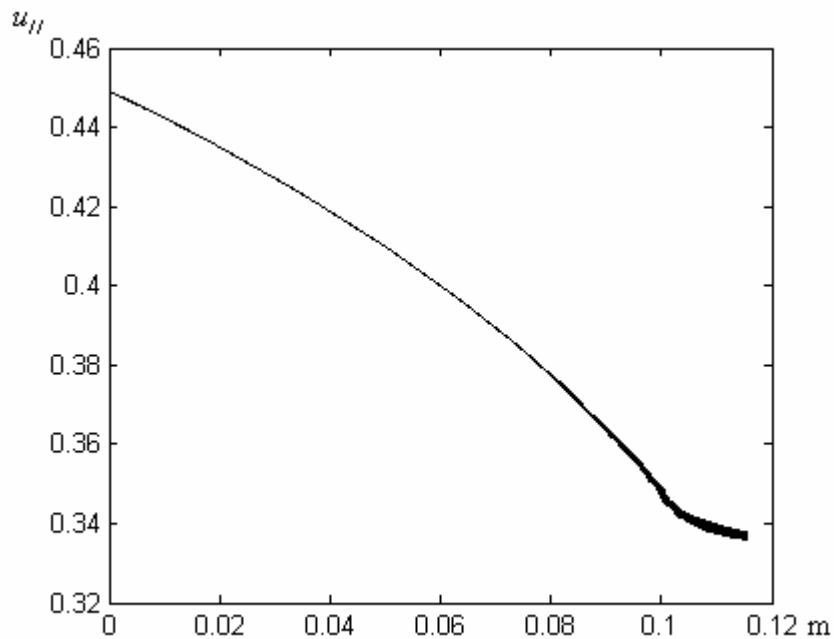


Σχήμα 4.2: Διαστάσεις του διαύλου και μαγνητοστατικό πεδίο.

Εξετάζοντας επικίνδυνες για ανάπτυξη παρασιτικών ρυθμών περιοχές συχνοτήτων για τον ρυθμό TE (0,13) ενδεικτικά παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για την εγκάρσια και παράλληλη αδιάστατη ορμή 30 ηλεκτρονίων.



Σχήμα 4.3: Αδιάστατη εγκάρσια ορμή των ηλεκτρονίων.



Σχήμα 4.3: Αδιάστατη παράλληλη ορμή των ηλεκτρονίων.

Στα παραπάνω διαγράμματα όπως περιμέναμε λόγω της ανομοιογένειας του μαγνητοστατικού πεδίου και επειδή $\frac{dB_0}{dz} > 0$ η εγκάρσια ορμή θα αυξάνεται εις βάρος της παράλληλης ορμής. Το ενδιαφέρον στοιχείο των παραπάνω διαγραμμάτων είναι η διασπορά που παρατηρείται στις ορμές προς το τέλος της διάταξης λόγω αλληλεπίδρασης. Η συγκεκριμένη αλληλεπίδραση δεν ήταν ισχυρή ώστε να υπερνικήσει τις απώλειες και να διεγείρει το ρυθμό πέρα από τη στάθμη των 100W απ' όπου ξεκινήσαμε αλλά παρατηρούμε ήδη υπολογίσιμες διασπορές. Επίσης από τα παραπάνω διαγράμματα

επιβεβαιώνεται ότι η αλληλεπίδραση λαμβάνει χώρα μόνο σε ένα μικρό μέρος του διαύλου αφού το μαγνητοστατικό πεδίο που απαιτεί η συνθήκη συντονισμού μεταβάλλεται σημαντικά κατά μήκος του διαύλου.

4.4 Δυνατές επεκτάσεις

Όπως παρουσιάσαμε, ο κώδικας που αναπτύχθηκε μπορεί να δώσει άμεσα αποτελέσματα για επικίνδυνους για διέγερση ρυθμούς στη περίπτωση της γεωμετρίας με συνεχώς μεταβαλλόμενη ακτίνα. Ιδιαίτερα χρήσιμη θα ήταν και η υλοποίηση του μοντέλου του κεφαλαίου 2 για τη γεωμετρία σταθερής ακτίνας. Πιθανή υλοποίηση του μοντέλου και ζεύξη του με κώδικα επίλυσης του ηλεκτρομαγνητικού προβλήματος προσδιορισμού των συντελεστών A_n , B_n όπως στο [7] θα έδινε χρήσιμα αποτελέσματα μιας και η αναπαράσταση του πεδίου θα ήταν αρκετά αξιόπιστη περιλαμβάνοντας όλες τις συνιστώσες Bloch του πεδίου και όχι μόνο τον όρο ενός οδεύοντος κύματος όπως στο κεφάλαιο 3.

Γενικά όμως πέρα από τα άμεσα αποτελέσματα, θα μπορούσε να γίνει διερεύνηση στα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του διαύλου, με σκοπό την εξαγωγή συμπερασμάτων για την επίδραση των παραμέτρων στη διέγερση των παρασιτικών αλληλεπιδράσεων. Τέτοιου είδους συμπεράσματα θα ήταν εξαιρετικά χρήσιμα για την εξαγωγή κανόνων σχεδίασης μελλοντικών υλοποιήσεων διαύλων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

Εξισώσεις Κέντρου Περιστροφής Ηλεκτρονίων

Στις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων όπως αυτές εκφράστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια υπεισέρχεται η ακτίνα του κέντρου περιστροφής R_e . Επίσης θεωρήσαμε ότι η γωνία του κέντρου περιστροφής παραμένει αμετάβλητη κατά τη διέλευση των ηλεκτρονίων από το δίαυλο. Παρακάτω δείχνουμε τη διαδικασία εύρεσης των συντεταγμένων των κέντρων περιστροφής.

Αρχικά θεωρούμε πως το υψίσυχο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο της διάταξης δεν επηρεάζει τα κέντρα περιστροφής της κίνησης. Πράγματι λόγω του ότι το μαγνητοστατικό πεδίο είναι αρκετά μεγαλύτερο από τις τιμές που μπορεί να φτάσει το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το τελευταίο δεν λαμβάνεται υπ' όψιν στις εκφράσεις για την κίνηση των κέντρων περιστροφής. Συνεπώς ξεκινάμε με τις εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων υπό την παρουσία μόνο του μαγνητοστατικού πεδίου όπως εκφράζεται από τις 2.1.7-2.1.9. Λόγω της ήπιας σχετικιστικά δέσμης οι εξισώσεις κίνησης εκφράζονται κλασσικά:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{e}{m}(v_y B_z - v_z B_y) \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m}(-v_x B_z + v_z B_x)\end{aligned}\tag{Π.1.1}$$

Από την ανάπτυξη του μαγνητοστατικού πεδίου 2.1.7 θα κρατήσουμε δύο όρους. Έτσι με τη βοήθεια και των 2.1.9 έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\frac{e}{m}(v_y B_0 - v_y \frac{1}{4} R^2 B_0'' + v_z \frac{1}{2} R B_0' \cos(\varphi - \Phi) \sin(\varphi) - v_z \frac{1}{2} R B_0' \sin(\varphi - \Phi) \cos(\varphi) \\ &\quad - v_z \frac{1}{16} R^3 B_0^{(3)} \cos(\varphi - \Phi) \sin(\varphi) + v_z \frac{1}{16} R^3 B_0^{(3)} \sin(\varphi - \Phi) \cos(\varphi))\end{aligned}\tag{Π.1.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{dv_y}{dt} &= -\frac{e}{m}(-v_x B_0 + v_x \frac{1}{4} R^2 B_0'' - v_z \frac{1}{2} R B_0' \cos(\varphi - \Phi) \cos(\varphi) - v_z \frac{1}{2} R B_0' \sin(\varphi - \Phi) \sin(\varphi) \\ &\quad + v_z \frac{1}{16} R^3 B_0^{(3)} \cos(\varphi - \Phi) \cos(\varphi) + v_z \frac{1}{16} R^3 B_0^{(3)} \sin(\varphi - \Phi) \sin(\varphi))\end{aligned}$$

Γνωρίζοντας ότι η κυκλοτρονική κίνηση διατηρείται, χωρίζουμε την ταχύτητα σε ταλαντούμενη ταχύτητα λόγω κυκλοτρονικής κίνησης και ταχύτητα ολίσθησης:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{\perp} \cos \theta + V_{ex} \\ v_y &= v_{\perp} \sin \theta + V_{ey}\end{aligned}\tag{Π.1.3}$$

Αντικαθιστούμε στις Π.1.2 και παίρνουμε το μέσο όρο ως προς μία κυκλοτρονική περίοδο για να απαλειφθούν οι ταλαντούμενες συνιστώσες που αφορούν την κυκλοτρονική κίνηση:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{ex}}{dt} &= -\frac{e}{m}(V_{ey}B_0 - V_{ey}\frac{1}{4}(R_e^2 + r^2)B_0' - v_{\perp}\frac{1}{4}R_e r \cos(\Phi_e)B_0'' \\
&+ v_z\frac{1}{4}R_e \sin(\Phi_e)B_0' + v_z\frac{1}{4}R_e \sin(\Phi_e)B_0' - v_z\frac{1}{32}R_e(R_e^2 + r^2)\sin(\Phi_e)B_0^{(3)} \\
&- v_z\frac{1}{32}R_e(R_e^2 + r^2)\sin(\Phi_e)B_0^{(3)} - v_z\frac{1}{16}R_e r^2 \sin(\Phi_e)B_0^{(3)}
\end{aligned}
\tag{Π.1.4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_{ey}}{dt} &= -\frac{e}{m}(-V_{ex}B_0 + V_{ex}\frac{1}{4}(R_e^2 + r^2)B_0' - v_{\perp}\frac{1}{4}R_e r \sin(\Phi_e)B_0'' \\
&- v_z\frac{1}{4}R_e \cos(\Phi_e)B_0' - v_z\frac{1}{4}R_e \cos(\Phi_e)B_0' + v_z\frac{1}{32}R_e(R_e^2 + r^2)\cos(\Phi_e)B_0^{(3)} \\
&+ v_z\frac{1}{32}R_e(R_e^2 + r^2)\cos(\Phi_e)B_0^{(3)} + v_z\frac{1}{16}R_e r^2 \cos(\Phi_e)B_0^{(3)}
\end{aligned}$$

Για την εξαγωγή των παραπάνω εκφράσεων χρησιμοποιήθηκαν οι παρακάτω σχέσεις που βασίζονται στις 2.2.10:

$$\begin{aligned}
\langle R^2 \sin \theta \rangle &= \langle R^2 \cos \varphi \rangle = \langle \cos \varphi [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] \rangle \\
&= R_e r \cos \Phi_e \\
\langle R^2 \cos \theta \rangle &= -\langle R^2 \sin \varphi \rangle = -\langle \sin \varphi [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] \rangle \\
&= -R_e r \sin \Phi_e \\
\langle R \cos(\varphi - \Phi) \sin \varphi \rangle &= \langle (R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} R_e \sin \Phi_e \\
\langle R \sin(\varphi - \Phi) \cos \varphi \rangle &= R_e \langle \cos \varphi \sin(\varphi - \Phi_e) \rangle = -\frac{1}{2} R_e \sin \Phi_e \\
\langle R \cos(\varphi - \Phi) \cos \varphi \rangle &= \langle (R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r) \cos \varphi \rangle = \frac{1}{2} R_e \cos \Phi_e \\
\langle R \sin(\varphi - \Phi) \sin \varphi \rangle &= R_e \langle \sin(\varphi - \Phi_e) \sin \varphi \rangle = \frac{1}{2} R_e \cos \Phi_e \\
\langle R^3 \cos(\varphi - \Phi) \sin \varphi \rangle &= \langle [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] [(R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r) \sin \varphi] \rangle \\
&= \frac{1}{2} R_e (R_e^2 + r^2) \sin \Phi_e + R_e r^2 \sin \Phi_e = \frac{1}{2} R_e (R_e^2 + 3r^2) \sin \Phi_e \\
\langle R^3 \sin(\varphi - \Phi) \cos \varphi \rangle &= R_e \langle [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] \sin(\varphi - \Phi_e) \cos \varphi \rangle \\
&= -\frac{1}{2} R_e (R_e^2 + r^2) \sin \Phi_e
\end{aligned}
\tag{Π.1.5}$$

$$\begin{aligned}
\langle R^3 \cos(\varphi - \Phi) \cos \varphi \rangle &= \langle [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] [(R_e \cos(\varphi - \Phi_e) + r) \cos \varphi] \rangle \\
&= \frac{1}{2} R_e (R_e^2 + r^2) \cos \Phi_e + R_e r^2 \cos \Phi_e = \frac{1}{2} R_e (R_e^2 + 3r^2) \cos \Phi_e \\
\langle R^3 \sin(\varphi - \Phi) \sin \varphi \rangle &= R_e \langle [R_e^2 + r^2 + 2R_e r \cos(\varphi - \Phi_e)] \sin(\varphi - \Phi_e) \sin \varphi \rangle \\
&= \frac{1}{2} R_e (R_e^2 + r^2) \cos \Phi_e
\end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων Π.1.4 εκφράζεται σαν λύση του ομογενούς συν μία ειδική λύση. Η λύση του ομογενούς εκφράζει ταλαντούμενη ταχύτητα V_e όπως ακριβώς και η κυκλοτρονική κίνηση την οποία είχαμε διαχωρίσει. Έτσι η λύση που δίνει την ολίσθηση του κέντρου περιστροφής είναι η ειδική λύση της Π.1.4. Εύκολα η λύση αυτή είναι:

$$\mathbf{V}_e = V_r \hat{\mathbf{R}} + V_\phi \hat{\Phi} = \frac{-\frac{1}{2} v_z B_0'(z) R_e + \frac{1}{16} v_z B_0'' R_e (R_e^2 + 2r^2)}{B_0 - \frac{1}{4} (R_e^2 + r^2) B_0''} \hat{\mathbf{R}} + \frac{\frac{1}{4} v_\perp B_0'' R_e r}{B_0 - \frac{1}{4} (R_e^2 + r^2) B_0''} \hat{\Phi} \quad (\text{Π.1.6})$$

όπου έγινε χρήση των σχέσεων:

$$\begin{aligned}
V_R &= V_{ex} \cos \Phi_e + V_{ey} \sin \Phi_e \\
V_\phi &= -V_{ex} \sin \Phi_e + V_{ey} \cos \Phi_e
\end{aligned} \quad (\text{Π.1.7})$$

Από την Π.1.6 κρατώντας μόνο τον όρο πρώτης τάξης αναπαράγεται η σχέση:

$$\frac{dR_e}{dt} = -\frac{1}{2} v_z B_0'(z) R_e \text{ που αν ολοκληρωθεί δίνει τη σχέση } R_e(z) \sim \frac{1}{\sqrt{B_0(z)}} \text{ της μαγνητικής}$$

συμπίεσης [8]. Επομένως ανάλογα την ηπιότητα της αξονικής ανομοιογένειας και την ακρίβεια που θέλουμε να πετύχουμε χρησιμοποιούμε και επιπλέον όρους.

Για τη V_ϕ παρατηρούμε ότι είναι ανάλογη τόσο της ακτίνας Larmor r όσο και του B_0'' το οποίο είναι αρκετά μικρό για την ήπια ανομοιογένεια στο διάλυο. Έτσι μπορούμε να αμελήσουμε τη αζιμουθιακή ολίσθηση των κέντρων περιστροφής των ηλεκτρονίων. Επίσης αγνοείται σαν αμελητέα και η αζιμουθιακή ολίσθηση $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ που προκύπτει από τη δράση του ηλεκτρικού πεδίου λόγω του χωρικού φορτίου της δέσμης και του αξονικού μαγνητοστατικού πεδίου (Παράρτημα IV του [4]).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

Αναλυτικός Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων για την Ηλεκτρομαγνητική Ενέργεια.

Παρακάτω υπολογίζουμε τις αναλυτικές εκφράσεις των ολοκληρώσεων στην ακτινική διεύθυνση που προκύπτουν από τον υπολογισμό της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας.

Αρχικά για το I_3 ολοκλήρωμα ο υπολογισμός είναι άμεσος:

$$I_3 = \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} F_{mn}(R) dR = \frac{1}{2} [F_{mn}^2(R_{out}) - F_{mn}^2(R_{in})] \quad (\text{Π.2.1})$$

Για το I_1 τώρα, από το [13] (5.11.11) έχουμε:

$$I_1 = \int_{R_{in}}^{R_{out}} F_{mn}^2(R) R dR = \frac{R_{out}^2}{2} [F_{mn}^2(R_{out}) - F_{(m+1)n}(R_{out}) F_{(m-1)n}(R_{out})] - \frac{R_{in}^2}{2} [F_{mn}^2(R_{in}) - F_{(m+1)n}(R_{in}) F_{(m-1)n}(R_{in})] \quad (\text{Π.2.2})$$

όπου η $F_{mn}(R)$ μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός είτε απλών είτε τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel.

Τέλος για το I_2 έχουμε: (Π.2.3)

$$\begin{aligned} I_2 = I_{2\alpha} + I_{2\beta} &= \int_{R_{in}}^{R_{out}} \frac{m^2}{R} F_{mn}^2(R) dR + \int_{R_{in}}^{R_{out}} R \left(\frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial R} \right)^2 dR \\ &= \frac{k_{\perp n}^2}{4} \int_{R_{in}}^{R_{out}} \left[\left(\frac{2mF_{mn}(R)}{k_{\perp n} R} \right)^2 + \left(2 \frac{\partial F_{mn}(R)}{\partial (k_{\perp n} R)} \right)^2 \right] R dR \\ &= \frac{k_{\perp n}^2}{4} \int_{R_{in}}^{R_{out}} \left[\left(F_{(m+1)n}(R) \pm F_{(m-1)n}(R) \right)^2 + \left(F_{(m+1)n}(R) \mp F_{(m-1)n}(R) \right)^2 \right] R dR \\ &= \frac{1}{2} k_{\perp n}^2 \int_{R_{in}}^{R_{out}} R F_{(m+1)n}^2(R) dR + \frac{1}{2} k_{\perp n}^2 \int_{R_{in}}^{R_{out}} R F_{(m-1)n}^2(R) dR \\ &= R_{out}^2 \frac{k_{\perp n}^2}{4} \left[F_{(m+1)n}^2(R_{out}) + F_{(m-1)n}^2(R_{out}) - F_{(m+2)n}(R_{out}) F_{mn}(R_{out}) - F_{(m-2)n}(R_{out}) F_{mn}(R_{out}) \right] \\ &\quad - R_{in}^2 \frac{k_{\perp n}^2}{4} \left[F_{(m+1)n}^2(R_{in}) + F_{(m-1)n}^2(R_{in}) - F_{(m+2)n}(R_{in}) F_{mn}(R_{in}) - F_{(m-2)n}(R_{in}) F_{mn}(R_{in}) \right] \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η Π.2.2 και η διάκριση των περιπτώσεων γίνεται για απλές ή τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel που καταλήγουν όμως στο ίδιο τελικό αποτέλεσμα.

Επαναλαμβάνουμε τώρα τις παραπάνω αναλυτικές εκφράσεις των ολοκληρωμάτων σύμφωνα με το φορμαλισμό του κεφαλαίου 3:

$$I_1 = \frac{R_{out}^2(z)}{2} \left[F_m^2(R_{out}(z)) - F_{m+1}(R_{out}(z))F_{m-1}(R_{out}(z)) \right] \\ - \frac{R_{in}^2(z)}{2} \left[F_m^2(R_{in}(z)) - F_{m+1}(R_{in}(z))F_{m-1}(R_{in}(z)) \right] \quad (\text{Π.2.4})$$

$$I_2 = R_{out}^2(z) \frac{k_{\perp}^2(z)}{4} \left[F_{m+1}^2(R_{out}(z)) + F_{m-1}^2(R_{out}(z)) \right. \\ \left. - F_{m+2}(R_{out}(z))F_m(R_{out}(z)) - F_{m-2}(R_{out}(z))F_m(R_{out}(z)) \right] \\ - R_{in}^2(z) \frac{k_{\perp}^2(z)}{4} \left[F_{m+1}^2(R_{in}(z)) + F_{m-1}^2(R_{in}(z)) \right. \\ \left. - F_{m+2}(R_{in}(z))F_m(R_{in}(z)) - F_{m-2}(R_{in}(z))F_m(R_{in}(z)) \right] \quad (\text{Π.2.5})$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \left[F_m^2(R_{out}(z)) - F_m^2(R_{in}(z)) \right] \quad (\text{Π.2.6})$$

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

- [1] D. M. Pozar, *Microwave engineering*, second edition, Wiley, 1998.
- [2] J. A. Eichmeier and M. K. Thumm, *Vacuum Electronics Components and Devices*, Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [3] V.L. Granatstein and I. Alexeff Eds., *High-Power Microwave Sources*, Boston-London: Artech House, 1987.
- [4] Ι. Α. Βομβορίδης, *Μικροκυματικές Πηγές Ισχύος*, Ιούλιος 2002, κεφ. 1-3.
- [5] Κ.Α. Αβραμίδης, “Σχεδίαση και προσομοίωση ομοαξονικών Γυροτρονίων”, Διδακτορική Διατριβή, Σ.Η.Μ.Μ.Υ Ε.Μ.Π., Μάρτιος 2006.
- [6] R.E. Collin, *Foundations for microwave engineering*, second edition, IEEE Press, 2001.
- [7] D. Dimitropoulou, I.G. Tigelis, G. Tombras and G. Alexakis, “Calculation of the beam-tunnel spectrum”, Association EURATOM-Hellenic Republic, Annual Progress Report 2000 Annex III.
- [8] Ν. Κ. Ουζούνογλου, “Εισαγωγή στα Μικροκύματα”, Β’ έκδοση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 1994.
- [9] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 9th Edition, Dover Publications, INC, New York, 1970.
- [10] M. V. Kartikeyan, E. Borie, and M. Thumm, *Gyrotrons – High Power Microwave and Millimeter Wave Technology*, Springer-Verlag, 2004.
- [11] K.F. Riley, M.P. Hobson and S.J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Third Edition, Cambridge University Press, 2006.
- [12] G. Dammertz, S. Alberti, D. Bariou, P. Brand, H. Braune, V. Erckmann, G. Gantenbein, E. Giguet, R. Heidinger, J.P. Hogge, W. Kasperek, H.P. Laqua, C. Liévin, W. Leonhardt, G. Michel, G. Müller, G. Neffe, B. Piosczyk, M. Schmid and M. Thumm, “140 GHz high-power gyrotron development for the stellarator W7-X”, *Fusion Engineering and Design*, Volume 74, Issues 1-4, November 2005, Pages 217-221.
- [13] G.N. Watson, *A Treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, 1922.