ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Ιεραρχική Κατάτμηση 3-Δ Πολυγωνικών Πλεγμάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ιωάννη Σ. Πεχλιβανίδη

Επιβλέπων: Πέτρος Α. Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2010

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

Ιεραρχική Κατάτμηση 3-Δ Πολυγωνικών Πλεγμάτων

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

του

Ιωάννη Σ. Πεχλιβανίδη

Επιβλέπων: Πέτρος Α. Μαραγκός
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή στις 4 Φεβρουαρίου 2010.

.....	.....	.....
Πέτρος Μαραγκός	Ιωάννης Πρατικάκης	Κωνσταντίνος Τζαφέστας
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Ερευνητής Ε.Κ.Ε.Φ.Ε. "Δημόκριτος"	Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Φεβρουάριος 2010.

.....
Ιωάννης Σ. Πεχλιβανίδης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης Σ. Πεχλιβανίδης, 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς το συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν το συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας είναι η ιεραρχική κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων με έμφαση στις μεθόδους μη-γραμμικής μείωσης της διαστασιμότητας (ΜΓΜΔ). Κατόπιν μιας διεξοδικής παρουσίασης των μεθόδων κατάτμησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων της τρέχουσας τεχνολογικής στάθμης (κεφάλαιο 1), παρουσιάζεται λεπτομερώς η υλοποίηση ενός δημοφιλούς αλγορίθμου κατάτμησης ο οποίος είναι αναλλοίωτος στη στάση του μοντέλου (κεφάλαιο 2). Στο πλαίσιο της υλοποίησης του αλγορίθμου μελετήθηκε η εφαρμογή διαφόρων μετασχηματισμών (μεθόδων ΜΓΜΔ) στην κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων. Κατά την παρουσίαση των διαφόρων βημάτων του αλγορίθμου, αναλύονται αδυναμίες του και προτείνονται διάφορες τροποποιήσεις του. Τέλος, σε κάθε βήμα συγκρίνεται ο πρωτότυπος αλγόριθμος με τον τροποποιημένο.

Λέξεις–Κλειδιά

κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων, ιεραρχική κατάτμηση, κατάτμηση αναλλοίωτη στη στάση, μη-γραμμικές μέθοδοι μείωσης διαστασιμότητας, πολυ-διάστατη κλιμάκωση, εξαγωγή χαρακτηριστικών σημείων

Abstract

The present diploma thesis deals with hierarchical segmentation of 3-D meshes with emphasis on non-linear dimensionality reduction (NLDR) methods. After an exhaustive presentation of the state of the art 3-D mesh segmentation methods (chapter 1), an analysis of the implementation of a popular segmentation algorithm is presented, which is pose (bending) invariant (chapter 2). During the implementation of the algorithm, the application of several transforms (NLDR methods) to 3-D mesh segmentation has been studied. While presenting the various steps of the algorithm, its flaws are pinpointed and some modifications are proposed. Finally, at each step, the original algorithm is compared to the modified one.

Keywords

3-D mesh segmentation, hierarchical segmentation, bending invariant segmentation, pose invariant segmentation, non-linear dimensionality reduction methods, multi-dimensional scaling, feature point extraction

Πρόλογος

Λίγα Λόγια Για Την Κατάτμηση 3-Δ Πολυγωνικών Πλεγμάτων

Ας φανταστούμε το *πολυγωνικό πλέγμα* (mesh) μιας τρισδιάστατης (3-Δ) επιφάνειας. Μπορεί να περιγραφεί σαν ένα σύνολο εδρών οι οποίες μοιράζονται ακμές, ή σαν ένα σύνολο κορυφών οι οποίες συνδέονται με γειτονικές κορυφές μέσω ακμών. Τέτοιου είδους πολυγωνικά πλέγματα δεν έχουν σαφή δομή υψηλότερου επιπέδου : ορίζονται απλώς σαν μια συλλογή συνεκτικών πολυγώνων. Ένας τρόπος για να επιβάλλουμε μια υψηλότερου επιπέδου δομή σ' ένα τέτοιου είδους πολυγωνικό πλέγμα, είναι να το διαμερίσουμε σε ένα σύνολο συνεκτικών τμημάτων, τα οποία σχετίζονται με άλλα τμήματα. Προφανώς, τα τμήματα θα πρέπει να αντιπροσωπεύουν την υποκείμενη δομή του ίδιου του αντικειμένου - την *σημασιολογία* των τμημάτων και των υποτμημάτων του αντικειμένου. Ωστόσο, όταν δεν καθορίζεται άλλη δομή πλην της τοπικής συνεκτικότητας των πολυγώνων, οποιοσδήποτε αλγόριθμος αποπειράται να διαμερίσει τέτοιου είδους πολυγωνικά πλέγματα, θα πρέπει να "συμπεράνει" κάποια δομή από το τοπικό σχήμα (πχ γεωμετρία) του ίδιου του πολυγωνικού πλέγματος. Το πρόβλημα διαμέρισης ενός πολυγωνικού πλέγματος μιας 3-Δ επιφάνειας σε *ουσιώδη*, συνεκτικά τμήματα, καλείται : *''πρόβλημα κατάτμησης πολυγωνικού πλέγματος''*. Με τον όρο *''ουσιώδη''* εννοείται πως το σχετικό μέγεθος και η οργάνωση των κατατμηθέντων περιοχών πρέπει να συσχετίζεται με την εκάστοτε εφαρμογή. Το πρόβλημα της κατάτμησης πολυγωνικών πλεγμάτων, μοιάζει πολύ με την κατάτμηση εικόνων στην επεξεργασία εικόνας και στην όραση υπολογιστών. Όπως και το πρόβλημα της κατάτμησης εικόνων, το πρόβλημα της κατάτμησης πολυγωνικών πλεγμάτων δεν είναι *καλώς ορισμένο*. Οι λύσεις συχνά καθορίζονται από την εφαρμογή, και είναι ισχυρά εξαρτώμενες από τον εκάστοτε ορισμό του όρου *''ουσιώδης''*.

Η κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων βρίσκει εφαρμογές σε αλγορίθμους που αφορούν τα γραφικά υπολογιστών και την όραση υπολογιστών. Μερικές από αυτές είναι :

- σχεδίαση με την βοήθεια υπολογιστή (computer-aided design - CAD)
- κατασκευή με την βοήθεια υπολογιστή (computer-aided manufacturing - CAM)
- μηχανική με την βοήθεια υπολογιστή (computer-aided engineering - CAE)
- ψηφιακή ανακασκευή σχημάτων (digital shape reconstruction) : δημιουργία ψηφιακών μοντέλων από φυσικά αντικείμενα
- 3-Δ μοντελοποίηση (3-D modeling) : αναπαράσταση 3-Δ αντικειμένων με μαθηματικά μοντέλα
- 3-Δ μεταμόρφωση (3-D metamorphosis - 3-D morphing - shape morphing) : η σταδιακή αλλαγή από ένα 3-Δ αντικείμενο-πηγή σε ένα 3-Δ αντικείμενο-στόχο
- συμπίεση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων (mesh compression) : περιγραφή της πληροφορίας του 3-Δ μοντέλου με μικρότερο αριθμό στοιχείων
- απλοποίηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων (mesh simplification) : προσέγγιση μεγάλης ανάλυσης πολυγωνικών πλεγμάτων με πλέγματα μικρότερης ανάλυσης
- ανάκτηση 3-Δ αντικειμένων (3-D shape retrieval) : σύγκριση ομοιότητας 3-Δ αντικειμένων (3-D shape matching) από μια βάση δεδομένων με σκοπό την ανάκτηση παρόμοιων 3-Δ αντικειμένων
- εντοπισμός σύγκρουσης (collision detection) : ο έλεγχος για την σύγκρουση (τομή) δύο στερεών
- απεικόνιση υφής (texture mapping) : η προσθήκη υφής σε ένα 3-Δ μοντέλο
- εξαγωγή σκελετού (skeleton extraction) : εξαγωγή ενός ιεραρχικού συνόλου “οστών”, καθένα από τα οποία σχετίζεται με κάποιο μέρος του 3-Δ μοντέλου
- αναγνώριση αντικειμένων (object recognition) : η εύρεση ενός δοθέντος αντικειμένου σε μια σκηνή

- ανάλυση ανθρώπινης κίνησης (human motion analysis)
- συνθετικές ταινίες (animation)
- συστήματα παρακολούθησης (surveillance systems)

Περιεχόμενα

Περίληψη **4**

Abstract **5**

Πρόλογος **6**

Περιεχόμενα **11**

Κατάλογος Σχημάτων **12**

Κατάλογος Πινάκων **14**

1 Σύνοψη Μεθοδολογιών Κατάτμησης **15**
1.1 Εισαγωγή 15
1.2 Ορισμοί 17
1.3 Κατηγοριοποίηση Των Μεθόδων Κατάτμησης 19
1.3.1 Αλγόριθμοι Επέκτασης Περιοχών 20
1.3.1.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες . . . 21
1.3.1.2 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 22
1.3.2 Αλγόριθμοι Μετασχηματισμού Υδατοφράκτη 24
1.3.2.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες . . . 25
1.3.2.2 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 25
1.3.3 Αλγόριθμοι Γράφων Reeb 26
1.3.3.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 27
1.3.4 Αλγόριθμοι Μοντέλων 29
1.3.4.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 29
1.3.5 Αλγόριθμοι Σκελετών 29
1.3.5.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 29
1.3.6 Αλγόριθμοι Συσταδοποίησης 30
1.3.6.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες . . . 30
1.3.6.2 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 31
1.3.7 Αλγόριθμοι Φασματικής Ανάλυσης 33

1.3.7.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 33
1.3.8 Αλγόριθμοι Εξαγωγής Σαφών Συνόρων 35
1.3.8.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 35
1.3.9 Αλγόριθμοι Κρίσιμων Σημείων 37
1.3.9.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 37
1.3.10 Αλγόριθμοι Περιγραφέων Σχήματος Πολ/πλής Κλίμακας 38
1.3.10.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες . . . 38
1.3.11 Αλγόριθμοι Μαρκοβιανών Τυχαίων Πεδίων 39
1.3.11.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα 39
1.3.12 Αλγόριθμοι Απευθείας Κατάτμησης 39
1.3.12.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες . . . 39
1.4 Συμπεράσματα 39

2 Ιεραρχική Κατάτμηση Πλεγμάτων 46
2.1 Σύνοψη Αλγορίθμου 46
2.2 Απλοποίηση 3-Δ Πολυγωνικού Πλέγματος 51
2.2.1 Θεωρητική Περιγραφή 51
2.2.2 Παρατηρήσεις 51
2.3 Έλεγχος Κατατμησιμότητας 53
2.3.1 Θεωρητική Περιγραφή 53
2.3.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης 53
2.4 Αναπαράσταση Αναλλοίωτη Στη Στάση 54
2.4.1 Θεωρητική Περιγραφή 55
2.4.2 Μέθοδοι Μη-Γραμμικής Μείωσης Διαστασιμότητας . . . 57
2.4.2.1 Ανάλυση Πρωτευουσών Συνιστωσών 58
2.4.2.2 Απεικόνιση Διάχυσης 59
2.4.2.3 Χωρική Ευθυγράμμιση Τοπικής Εφαπτομένης 61
2.4.2.4 Τοπικά Γραμμική Ένθεση 62
2.4.2.5 Εσσιανή Τοπικά Γραμμική Ένθεση 63
2.4.2.6 Λαπλασιανή Ιδιο-Απεικόνιση 64
2.4.2.7 Ισομορφική Απεικόνιση 68
2.4.2.8 Ταχεία ΠΔΚ 70
2.4.2.9 Κλασική ΠΔΚ 71
2.4.2.10 ΠΔΚ Ορόσημων 72
2.4.2.11 ΠΔΚ Ελαχίστων Τετραγώνων 74
2.4.3 Λεπτομέρειες Υλοποίησης 74
2.4.4 Παρατηρήσεις 77
2.5 Εντοπισμός Χαρακτηριστικών Σημείων 81
2.5.1 Θεωρητική Περιγραφή 81
2.5.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης 83
2.5.3 Παρατηρήσεις 84

2.6 Εξαγωγή Συνιστώσας Πυρήνα 84
2.6.1 Θεωρητική Περιγραφή 84
2.6.1.1 Σφαιρικός Καθρεφτισμός 84
2.6.1.2 Εξαγωγή Τελικής Συνιστώσας Πυρήνα 87
2.6.1.3 Εξαγωγή Υπόλοιπων Τμημάτων 88
2.6.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης 88
2.6.3 Παρατηρήσεις 93
2.7 Εκλέπτυνση Συνόρων 96
2.7.1 Θεωρητική Περιγραφή 96
2.7.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης 97
2.7.3 Παρατηρήσεις 105
2.8 Εκλέπτυνση 3-Δ Πολυγωνικού Πλέγματος 108
2.8.1 Θεωρητική Περιγραφή 109
2.8.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης 109
2.8.3 Παρατηρήσεις 110
2.9 Αποτελέσματα Αλγορίθμου 111
2.9.1 Παρατηρήσεις 111
2.9.2 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων 150
2.9.2.1 Κατατμήσεις Πρώτου Ιεραρχικού Επιπέδου . . . 150
2.9.2.2 Κατατμήσεις Λοιπών Ιεραρχικών Επιπέδων . . . 152
2.10 Συνολικά Συμπεράσματα 153

Βιβλιογραφία **156**

Ευρετήριο **163**

Γλωσσάρι **164**

Ακρωνύμια **166**

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 3-Δ πλέγματα μοντέλων 16
1.2 Χρωματική αναπαράσταση της συνάρτησης προεξοχής 18
1.3 Δυϊκός γράφος ενός πλέγματος 19
1.4 Επέκταση περιοχών 20
1.5 Αποτελέσματα του αλγορίθμου [70] 22
1.6 Μετασχηματισμός υδατοφράκτη 25
1.7 Διαδικασία κατάτμησης από το [50] 26
1.8 Κλάσεις ισοδυναμίας του γράφου Reeb 27
1.9 Διαδικασία κατάτμησης από το [3] 28
1.10 Κατάτμηση ενός μηχανικού τμήματος από το [31] 32
1.11 Παραδείγματα κατάτμησης από τα [41, 69] 34
1.12 Μέθοδος εξαγωγής σαφών συνόρων από το [37] 36
1.13 Κατάτμηση αντικείμενου από το [6] 38

2.1 Διάγραμμα ροής αλγορίθμου 49
2.2 Μετασχηματισμός ΠΔΚ 50
2.3 Διαδιακασία κατάτμησης από το [30] 50
2.4 Συναίρεση ζεύγους κορυφών κοινής ακμής 51
2.5 Συναίρεση ζεύγους κορυφών μη-κοινής ακμής 52
2.6 Ακολουθία απλοποιήσεων ενός πλέγματος 53
2.7 Μετασχηματισμός ΑΠΣ 58
2.8 Απεικόνιση διάχυσης με $\sigma = 3$ 60
2.9 Απεικόνιση διάχυσης με $\sigma = 0.2$ 60
2.10 Μετασχηματισμός ΧΕΤΕ με Κ=14 61
2.11 Μετασχηματισμός ΤΓΕ με Κ=16 63
2.12 Μετασχηματισμός ΕΤΓΕ με Κ=18 64
2.13 Λαπλασιανός Μ/Σ με Κ=10 66
2.14 Λαπλασιανός Μ/Σ συνεκτικής γειτνίασης 66
2.15 Φασματική προβολή Λαπλασιανού Μ/Σ με Κ=10 67
2.16 Φασματική προβολή Λαπλασιανού Μ/Σ συνεκτικής γειτνίασης 67
2.17 Ισομορφική απείκονιση με Κ=14 (Ευκλείδιες αποστάσεις) . . . 69

2.18 Ισομορφική απείκονιση με K=14 (γεωδαιτικές αποστάσεις) . . 69
2.19 Μετασχηματισμός ταχείας ΠΔΚ (Ευκλείδιες αποστάσεις) 70
2.20 Μετασχηματισμός ταχείας ΠΔΚ (γεωδαιτικές αποστάσεις) . . . 71
2.21 Μετασχηματισμός κλασικής ΠΔΚ (γεωδαιτικές αποστάσεις) . . 72
2.22 Μετασχηματισμός ΠΔΚ ορόσημων (γεωδαιτικές αποστάσεις) . . 73
2.23 Μ/Σ ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ 77
2.24 Μ/Σ ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ 78
2.25 Μ/Σ ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ 79
2.26 Μ/Σ ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ 79
2.27 Μ/Σ ΠΔΚ από το [30] και Μ/Σ ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων . . 80
2.28 Χαρακτηριστικά σημεία 82
2.29 Σφαιρικός καθρεφτισμός σε 2-Δ 86
2.30 Σφαιρικοί καθρεφτισμοί σε 3-Δ 87
2.31 Αρχική συνιστώσα πυρήνα με βάση το [30] 93
2.32 Σύγκριση μεθόδων εξαγωγής αρχικών πυρήνων 94
2.33 Σύγκριση μεθόδων επέκτασης αρχικών πυρήνων 94
2.34 Σύγκριση μεθόδων επέκτασης αρχικών πυρήνων 95
2.35 Μη-εκλεπτυσμένες συνιστώσες 95
2.36 Περιοχή αναζήτησης και ο δυϊκός γράφος της 102
2.37 Διεδρική γωνία προσκείμενων τριγώνων 104
2.38 Εκλεπτυσμένα και μη σύνορα 106
2.39 Περιοχή αναζήτησης 107
2.40 Σύγκριση χωρητικοτήτων 107

Κατάλογος Πινάκων

1.1 Κριτήρια και χαρακτηριστικά μεθολογιών κατάτμησης 42

2.1 Σύγκριση κατατμήσεων πρώτου ιεραρχικού επιπέδου 112
2.2 Σύγκριση κατατμήσεων πολλών ιεραρχικών επιπέδων 123
2.3 Σύγκριση κατατμήσεων - zoom σε λεπτομέρειες 146

Κεφάλαιο 1

Σύνοψη Των Μεθοδολογιών Κατάτμησης 3-Δ Πολυγωνικών Πλεγμάτων [1]

1.1 Εισαγωγή

Η *κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων* αποτελεί καθοριστικό βήμα σε διαδικασίες κατά τις οποίες εκμεταλλευόμαστε την υψηλού επιπέδου σημασιολογία των ακατέργαστων 3-Δ δεδομένων. Αυτή η υψηλού επιπέδου σημασιολογία είναι χρήσιμη σε μια πληθώρα εφαρμογών, παραδείγματα των οποίων αναφέρθηκαν στον πρόλογο.
Συνήθως, ένα φυσικό, 3-Δ αντικείμενο δειγματοληπτείται με ένα σαρωτή laser (laser scanner) και το αποτέλεσμα είναι ένα σύνολο από σημεία τα οποία αντιπροσωπεύουν την επιφάνεια του αντικειμένου. Το σύνολο αυτό τριγωνοποιείται, αποκτώντας με τον τρόπο αυτό μια τοπολογική δομή της επιφάνειας, η οποία καλείται 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα. Ένα 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα (Σχήμα 1.1) περιέχει μη-οργανωμένες πληροφορίες (τρίγωνα, ακμές, σημεία) οι οποίες θα πρέπει να επεξεργαστούν περαιτέρω ώστε να είναι χρήσιμες σε εφαρμογές.
Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι μοντέλων. Ο πρώτος τύπος περιλαμβάνει τα μοντέλα τα οποία αποτελούνται από επιφάνειες γνωστής γεωμετρίας (πχ επίπεδα, σφαίρες, κύλινδροι, επιφάνειες εκ περιστροφής, κτλ). Ο δεύτερος τύπος περιλαμβάνει τα μοντέλα τα οποία αποτελούνται από επιφάνειες ελεύθερης μορφής. Ο τρίτος τύπος είναι ο συνδυασμός του πρώτου και του δεύτερου τύπου. Στο Σχήμα 1.1 δίνονται δύο παραδείγματα 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων : το πρώτο παράδειγμα (εικόνα α) αντιπροσωπεύει ένα μοντέλο του πρώτου τύπου ενώ το δεύτερο παράδειγμα (εικόνα β) αντιπροσωπεύει ένα μοντέλο του

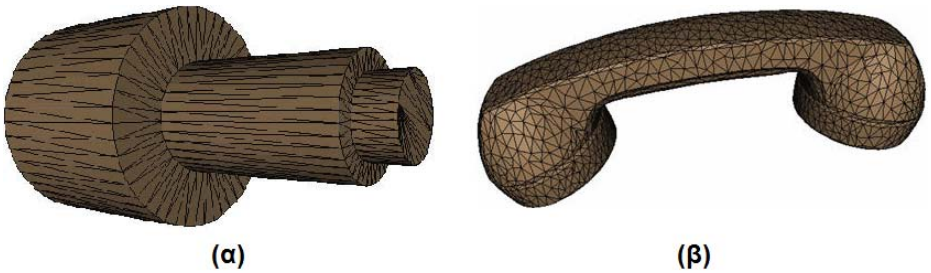
[1] Αυτό το κεφάλαιο έχει βασιστεί σε μεγάλο βαθμό στο [1].

δεύτερου τύπου.

Η κατάτμηση είναι μια διαδικασία που παρέχει την απαραίτητη οργάνωση της πληροφορίας των σημείων χωρίζοντάς τα σε συνεκτικές περιοχές ή τμήματα τα οποία μπορούν να προσεγγιστούν με συνηθισμένες επιφάνειες (πχ επίπεδα, κύλινδροι, κτλ) ή με ογκομετρικά πρωτογενή στοιχεία (πχ υπερελλειψοειδή - super-ellipsoids). Οι αλγόριθμοι για την κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων μπορούν να χωριστούν σε δύο βασικές κατηγορίες :

(i) αλγόριθμοι που βασίζονται σε επιφάνειες (surface-based) : το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα χωρίζεται σε περιοχές οι οποίες αντιπροσωπεύουν διακριτές επιφάνειες του μοντέλου και μπορούν να προσεγγιστούν με διάφορα πρωτογενή στοιχεία όπως επίπεδα, κύλινδροι, σφαίρες, πολυώνυμα, κτλ

(ii) αλγόριθμοι που βασίζονται σε τμήματα (part-based) : το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα χωρίζεται σε ογκομετρικά τμήματα τα οποία μπορούν να προσεγγιστούν με ογκομετρικά πρωτογενή στοιχεία (πχ υπερελλειψοειδή)



Σχήμα 1.1: 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα μοντέλων. (α) Ένα μοντέλο που αποτελείται από επιφάνειες γνωστής γεωμετρίας ; (β) Ένα μοντέλο που αποτελείται από επιφάνειες ελεύθερης μορφής.

Η ποιότητα της κατάτμησης αποτελεί καθοριστικής σημασίας ζήτημα το οποίο είναι άμεσα συνδεδεμένο με την αντίστοιχη εφαρμογή η οποία επιβάλλει συγκεκριμένες απαιτήσεις.
Για τους αλγορίθμους που βασίζονται σε επιφάνειες συνήθως απαιτείται :

(i) τα σύνορα των κατατμημένων περιοχών να είναι ομαλά

(ii) οι εξαγόμενες περιοχές να μπορούν να προσεγγιστούν με ομαλές επιφάνειες

(iii) τα σύνορα όπου συναντιούνται οι περιοχές, να επιτρέπουν στις προσεγγίζουσες επιφάνειες να ικανοποιούν ορισμένους τύπους συνέχειας (όπως C^1 ή C^2)

Για τους αλγορίθμους που βασίζονται σε τμήματα, μια ποικιλία κριτηρίων μπορούν να χρησιμοποιηθούν που να μας δίνουν την δυνατότητα να εξαγάγουμε τα ουσιώδη [2] τμήματα του αντικειμένου. Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο κριτήριο είναι *ο κανόνας των ελαχίστων* (minima rule) ο οποίος εισήχθη στο [26] και αναφέρει πως ένα αντικείμενο κατατμείται από την ανθρώπινη αντίληψη στις κοίλες περιοχές. Το κριτήριο αυτό έχει υιοθετηθεί από πολλούς ερευνητές [30],[31],[37],[38],[41],[49],[50],[69],[70] για την κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων. Η ποιότητα της κατάτμησης είναι επίσης άμεσα εξαρτώμενη από τον τύπο του υπό επεξεργασία μοντέλου. Διαφορετικοί αλγόριθμοι έχουν καλύτερα αποτελέσματα για κάθε τύπο μοντέλου.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζεται μια εξαντλητική σύνοψη των αλγορίθμων κατάτμησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων, με δύο στόχους : από την μια να κατηγοριοποιήσει και να σκιαγραφήσει τους αλγορίθμους αυτούς και από την άλλη να εντοπίσει πλεονεκτήματα και μειονεκτήματά τους.
Το υπόλοιπο του κεφαλαίου αυτού δομείται ως εξής :

- στην Ενότητα 1.2 εισάγεται ένας τυπικός ορισμός της διαδικασίας της κατάτμησης καθώς επίσης και άλλοι ορισμοί που διευκολύνουν την κατανόηση της περιγραφής της εκάστοτε μεθόδου
- στην Ενότητα 1.3 παρουσιάζεται μια ταξινόμηση των διάφορων αλγορίθμων για κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων μαζί με την αντίστοιχη περιγραφή τους
- στην ενότητα 1.4 γίνεται εξαγωγή συμπερασμάτων

1.2 Ορισμοί

Σε αυτήν την ενότητα, εισάγουμε ένα σύνολο ορισμών οι οποίοι είναι κατάλληλοι για την κατανόηση των μεθόδων που θα περιγραφούν.

Έστω S το σύνολο των κορυφών (3-Δ σημείων), ακμών ή εδρών (συνήθως τριγώνων, εν γένει πολυγώνων) του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. *Κατάτμηση*

[2] Ένα ουσιώδες τμήμα (ή συνιστώσα) αναφέρεται σε ένα τμήμα που μπορεί να διαχωριστεί εννοιολογικά από το εναπομένον αντικείμενο [31].

ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος M καλείται η διαμέριση του S σε k-ξένα συνεκτικά σύνολα, ήτοι :

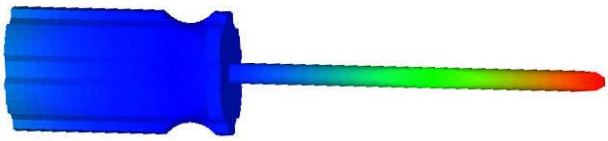
$$\cup_{i=1}^{k} S_i = S, \quad S_i \subset S, \quad S_i \cap S_j = \varnothing, \quad i, j = 1 \ldots k, \quad i \neq j \tag{1.1}$$

Η κατάτμηση ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος εξαρτάται από κριτήρια τα οποία επιβάλλουν ποια στοιχεία του S ανήκουν στο ίδιο τμήμα. Τα κριτήρια αυτά βασίζονται στον αντικειμενικό σκοπό της κατάτμησης, που με την σειρά του εξαρτάται από την εφαρμογή ή από το συγκείμενο. Ωστόσο, φαίνεται πως υπάρχουν κοινές συνιστώσες στους εν γένει αντικειμενικούς σκοπούς πολλών αλγορίθμων κατάτμησης [58, 59].

Μια ευρέως χρησιμοποιούμενη συνάρτηση που εισήχθη στο [25], αντιπροσωπεύει το μέγεθος της προεξοχής σε μια επιφάνεια M. Η συνάρτηση προεξοχής (protrusion function) σε ένα σημείο u της επιφάνειας M, είναι το άθροισμα των αποστάσεών του από όλα τα άλλα σημεία της επιφάνειας και ορίζεται ως :

$$m(u) = \int_{p \in M} g(u, p) \, \mathrm{d}M \tag{1.2}$$

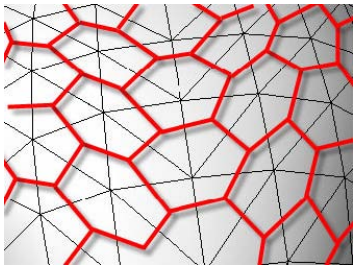
όπου *g(u,p)* η *γεωδαιτική απόσταση* των σημείων *u,p* της επιφάνειας M. Μεγάλες τιμές της συνάρτησης m υποδηλώνουν πως το σημείο u ανήκει σε μια προεξοχή ενώ μικρές τιμές υποδηλώνουν πως το u είναι κοντά στο κέντρο της επιφάνειας (Σχήμα 1.2).



Σχήμα 1.2: Χρωματική αναπαράσταση της συνάρτησης προεξοχής : το μπλε χρώμα υποδηλώνει μικρές τιμές της συνάρτησης m, το κόκκινο χρώμα υποδηλώνει μεγάλες τιμές και το πράσινο ενδιάμεσες τιμές.

Ο *δυϊκός γράφος* (dual graph) ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, είναι ο γράφος του οποίου οι κόμβοι είναι οι τριγωνικές έδρες (του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος), και στον οποίο δυο κόμβοι συνδέονται, αν τα τρίγωνα που αντιπροσωπεύουν, μοιράζονται μια κοινή ακμή. Τα τρίγωνα, τα οποία αντιπροσωπεύουν τους κόμβους του γράφου, θα αναφέρονται ως *δυϊκά τρίγωνα* (Σχήμα 1.3). Για λόγους σαφήνειας, από εδώ και στο εξής, οι περιοχές στις

οποίες κατατμείται το αντικείμενο θα αναφέρονται ως *περιοχές κατάτμησης*. Τα σύνορα όπου συναντώνται οι περιοχές κατάτμησης θα αναφέρονται ως *σύνορα κατάτμησης*.



Σχήμα 1.3: Ο δυϊκός γράφος ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος απεικονισμένος με κόκκινες γραμμές.

1.3 Κατηγοριοποίηση Των Μεθόδων Κατάτμησης

Στην βιβλιογραφία, υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι για κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων. Οι αλγόριθμοι αυτοί μπορούν να ομαδοποιηθούν σε κατηγορίες σύμφωνα με την βασική τους μεθοδολογία. Στην ταξινόμηση που ακολουθεί, έχουν αναγνωριστεί οι ακόλουθες κατηγορίες αλγορίθμων:

(i) επέκτασης περιοχών (region growing)

(ii) μετασχηματισμού υδατοφράκτη (watershed-based)

(iii) γράφων Reeb (Reeb graphs)

(iv) μοντέλων (model-based)

(v) σκελετών (skeleton-based)

(vi) συσταδοποιήσης (clustering)

(vii) φασματικής ανάλυσης (spectral analysis)

(viii) εξαγωγής σαφών συνόρων (explicit boundary extraction)

(ix) κρίσιμων σημείων (critical points-based)

(x) περιγραφέων σχήματος πολλαπλής κλίμακας (multiscale shape descriptors)

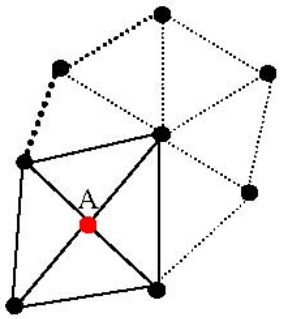
(xi) Μαρκοβιανών τυχαίων πεδίων (Markov random fields)

(xii) απευθείας κατάτμησης (direct segmentation)

Στη συνέχεια δίνεται μια λεπτομερής ανάλυση των προαναφερθέντων κατηγοριών.

1.3.1 Αλγόριθμοι Επέκτασης Περιοχών (Region Growing Algorithms)

Σε αυτήν την τεχνική, οι περιοχές κατάτμησης προκύπτουν από την επέκταση διακεκριμένων στοιχείων - γόνων (σημεία, τρίγωνα, περιοχές). Στην επέκταση περιοχών, εφαρμόζεται ένα σύνολο κανόνων το οποίο είτε επιτρέπει, είτε σταματά την επέκταση. Στην βιβλιογραφία, το σύνολο των κανόνων αυτών ονομάζεται είτε κριτήρια τερματισμού, είτε κριτήρια επέκτασης. Για παράδειγμα, η ετικέτα της περιοχής κατάτμησης του σημείου A στο Σχήμα 1.4 αποδίδεται στους γείτονές του, επεκτείνοντας έτσι την περιοχή κατάτμησης στην οποία ανήκει. Η διαδικασία αυτή κατόπιν επαναλαμβάνεται μέχρις ότου ικανοποιηθεί κάποιο κριτήριο τερματισμού. Σε αυτήν την κατηγορία συγκαταλέγονται αλγόριθμοι που βασίζονται τόσο σε επιφάνειες όσο και σε τμήματα.



Σχήμα 1.4: Το σημείο A “επεκτείνεται” προσθέτοντας τους γείτονές του στην περιοχή κατάτμησης στην οποία ανήκει.

1.3.1.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες

Στο [10] πραγματοποιείται επέκταση περιοχών σε εικόνες εύρους (range images) [3]. Αρχικά τα σημεία ετικετοποιούνται χρησιμοποιώντας την μέση και την Γκαουσιανή (Gaussian) καμπυλότητα. Χρησιμοποιώντας αυτή την ετικετοποίηση, κατασκευάζονται περιοχές - γόνοι στις οποίες θα εφαρμοστεί η επέκταση περιοχών. Η επέκταση περιοχών πραγματοποιείται με την προσαρμογή μεταβλητής τάξης, διμεταβλητών πολυωνύμων στην επεκτεινόμενη περιοχή και με τα γειτονικά σημεία να προστίθενται βάσει της συμβατότητάς τους με το προσεγγίζον πολυώνυμο. Εδώ το κριτήριο τερματισμού ικανοποιείται, όταν η περιοχή δεν μπορεί να επεκταθεί άλλο. Ο αλγόριθμος αργότερα επεκτάθηκε σε 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα [64].

Στο [54] εφαρμόζεται επίσης επέκταση περιοχών σε δεδομένα από εικόνες εύρους τα οποία κατατμούνται σε N περιοχές, οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν με N πολυωνυμικές συναρτήσεις έτσι ώστε :

(i) η απόσταση ανάμεσα σε ένα σημείο της περιοχής και του αντίστοιχου πολυωνύμου να είναι μικρότερη από ένα κατώφλι

(ii) ο συνολικός αριθμός στοιχείων που περιέχονται σε κάθε περιοχή να μεγιστοποιείται

(iii) να μπορεί να εφαρμοστεί συνέχεια τύπου C^1 ή C^2 μεταξύ γειτονικών πολυωνύμων

Η επέκταση περιοχών ξεκινά με μια περιοχή - γόνο στην οποία προσαρμόζεται ένα πολυώνυμο. Η περιοχή αυτή επεκτείνεται σύμφωνα με ένα κριτήριο απόστασης και προσανατολισμού και κατόπιν υπολογίζεται το προσεγγίζον πολυώνυμο της επεκταθείσας περιοχής. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μην είναι δυνατή περαιτέρω επέκταση. Εδώ το κριτήριο τερματισμού ικανοποιείται όταν δεν είναι δυνατή η περαιτέρω επέκταση της περιοχής, εντός κάποιας δεδομένης πολυωνυμικής ανοχής προσαρμογής. Ένα σημαντικό πλεονέκτημα του αλγορίθμου αυτού, είναι πως η προσεγγίζουσα επιφάνεια της κατατμηθείσας περιοχής καθώς και το ίδιο το τμήμα βρίσκονται ταυτόχρονα, προσαρμοζόμενα στους περιορισμούς που έχουν τεθεί από τους συγγραφείς.

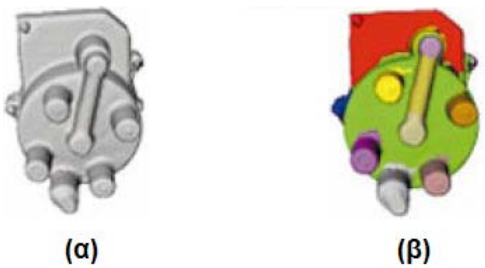
Στο [34] οι κορυφές (του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος) ταξινομούνται, σύμφω-

[3] Εικόνες 2-Δ που απεικονίζουν την απόσταση των σημείων μιας σκηνής από ένα συγκεκριμένο σημείο, συνήθως συσχετισμένο με κάποιο είδος αισθητήρα. Τα pixel των εικόνων αυτών έχουν τιμές που ανταποκρίνονται στην απόσταση, πχ φωτεινότερες τιμές υποδηλώνουν μικρότερη απόσταση ή αντίστροφα (πηγή : www.wikipedia.org).

να με τις απόλυτες τιμές των πρωτευουσών καμπυλοτήτων τους (principal curvatures), σε k-συστάδες χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο k-μέσων (k-means) [4], όπου το k είναι οριζόμενο από τον χρήστη. Επίσης εντοπίζονται οι απότομες ακμές (ακμές των οποίων η διεδρική γωνία [5] των προσπίπτοντων τριγώνων υπερβαίνει ένα κατώφλι) και οι απότομες κορυφές (κορυφές που ανήκουν σε μια απότομη ακμή). Το κριτήριο επέκτασης στην περίπτωση αυτή, προσθέτει στην περιοχή γειτονικά τρίγωνα τα οποία δεν μοιράζονται μια απότομη ακμή και όλες τους οι κορυφές, είτε είναι απότομες είτε ανήκουν στην ίδια συστάδα.

1.3.1.2 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [70] τα σημεία ετικετοποιούνται σύμφωνα με την Γκαουσιανή καμπυλότητά τους. Ακολουθώντας τον κανόνα των ελαχίστων και εφαρμόζοντας κατωφλίωση, τα σημεία μεγάλης αρνητικής Γκαουσιανής καμπυλότητας ετικετοποιούνται ως συνοριακά σημεία. Κατόπιν, επιλέγοντας τυχαία σημεία - γόνους εκ των μη-συνοριακών σημείων εφαρμόζεται επέκταση περιοχών. Εδώ, το κριτήριο επέκτασης δεν προσθέτει γειτονικά σημεία που ανήκουν σε σύνορα ή σημεία που έχουν ήδη προστεθεί στην περιοχή. Αποτελέσματα αυτού του αλγορίθμου φαίνονται στο Σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Αποτελέσματα του αλγορίθμου [70]. (α) 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα από τάπα διανομέα ; (β) Η αντίστοιχη κατάτμηση.

Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι η ευκολία της υλοποίησής της. Ένα από τα μειονεκτήματά της είναι πως το αποτέλεσμα εξαρτάται έντονα από το οριζόμενο από τον χρήστη κατώφλι.

Στο [74] οι περιοχές κατάτμησης εξάγονται με ένα πλημμύρισμα του *δυϊκού*

[4] Αλγόριθμος για την συσταδοποίηση N αντικειμένων σε k διαμερίσματα με βάση κάποια χαρακτηριστικά.

[5] Δοθέντων δύο προσκείμενων τριγώνων, η γωνία μεταξύ των καθέτων στην επιφάνειά τους ονομάζεται διεδρική γωνία.

γράφου. Πιο συγκεκριμένα, η τεχνική ξεκινά από μια διάσχιση των κόμβων του γράφου με αναζήτηση *κατά βάθος* (Depth First Search - DFS) ή με αναζήτηση *κατά πλάτος* (Breadth First Search - BFS). Η διάσχιση αυτή συλλέγει επαυξητικά έδρες (τρίγωνα) εφόσον σχηματίζουν μια κυρτή περιοχή. Εδώ, το κριτήριο τερματισμού ικανοποιείται όταν παραβιάζεται η κυρτότητα. Σε περίπτωση παραβίασης της κυρτότητας, μια νέα περιοχή κατάτμησης δημιουργείται από ένα κόμβο, που ο αλγόριθμος διάσχισης του γράφου δεν έχει ακόμα επισκεφθεί, και η διάσχιση συνεχίζεται. Το κύριο πρόβλημα αυτής της προσέγγισης, είναι η υπερκατάτμηση την οποία οι συγγραφείς αντιμετωπίζουν ευνοώντας την συγχώνευση των μικρότερων περιοχών κατάτμησης με γειτονικές, μεγαλύτερες περιοχές.

Στο [39] χρησιμοποιείται η μέθοδος της επέκτασης περιοχών και το μοντέλο "ανάκτησε-και-επέλεξε" (recover-and-select) ώστε να ανακτηθούν υπερτετραγωνικές επιφάνειες (superquadrics) από δεδομένα (εικόνες) εύρους [6]. Η διαδικασία κατάτμησης αποτελείται από δύο στάδια τα οποία συνδυάζονται επαναληπτικά :

(i) ανάκτηση μοντέλου : Περιοχές - γόνοι αποτελούμενες από σημεία επιλέγονται από την εικόνα εύρους και προσαρμόζονται σε αυτές υπερτετραγωνικές επιφάνειες. Οι περιοχές αυτές επεκτείνονται προσθέτοντας γειτονικά σημεία και μια νέα υπερτετραγωνική επιφάνεια προσαρμόζεται σε κάθε επεκταθείσα περιοχή. Το κριτήριο για την επέκταση του μοντέλου βασίζεται σε ένα μέτρο του μέσου σφάλματος προσαρμογής το οποίο χρησιμοποιεί την ακτινική Ευκλείδια μετρική απόστασης.

(ii) επιλογή μοντέλου : Όπως υπονοεί το όνομά του, επιλέγει εκείνα τα μοντέλα που παράγουν την απλούστερη περιγραφή, ήτοι επιλέγει τον ελάχιστο αριθμό υπερτετραγωνικών επιφανειών οι οποίες περιγράφουν τα δεδομένα, διατηρώντας ταυτόχρονα μικρές τις αποκλίσεις μεταξύ των δεδομένων σημείων και των επιλεχθεισών υπερτετραγωνικών επιφανειών.

Η επανάληψη των σταδίων (i) και (ii) συνεχίζεται μέχρις ότου οι εναπομένουσες υπερτετραγωνικές επιφάνειες ανακτηθούν πλήρως. Πρέπει να σημειωθεί ότι οι περιοχές κατάτμησης που δημιουργούνται κατά την διαδικασία της επέκτασης περιοχών δεν είναι αμοιβαία αποκλειόμενες.

[6] Εικόνες 2-Δ που απεικονίζουν την απόσταση των σημείων μιας σκηνής από ένα συγκεκριμένο σημείο, συνήθως συσχετισμένο με κάποιο είδος αισθητήρα. Τα pixel των εικόνων αυτών έχουν τιμές που ανταποκρίνονται στην απόσταση, πχ φωτεινότερες τιμές υποδηλώνουν μικρότερη απόσταση ή αντίστροφα (πηγή : www.wikipedia.org).

1.3.2 Αλγόριθμοι Μετασχηματισμού Υδατοφράκτη (Watershed Transform Algorithms)

Σε αυτή την κατηγορία, η κατάτμηση επιτυγχάνεται σε αναλογία με τον τρόπο που το νερό γεμίζει μια γεωγραφική επιφάνεια (Σχήμα 1.6). Καθώς το νερό πλημμυρίζει τις κοιλάδες, θα υπάρξουν σημεία όπου οι περιοχές πλημμυρισμού θα συναντηθούν. Τα σημεία αυτά ορίζουν τις γραμμές υδατοφράκτη, οι οποίες διαιρούν την επιφάνεια σε διακεκριμένες περιοχές. Οι πλημμυρισμένες κοιλάδες ονομάζονται κοιλάδες συλλογής υδάτων και αντιπροσωπεύουν περιοχές κατάτμησης.

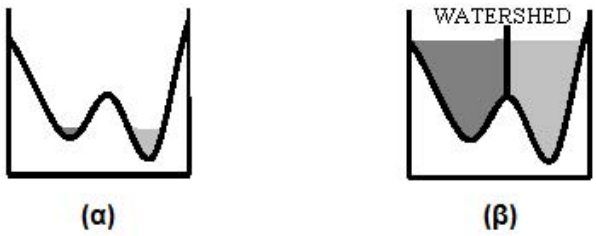
Αρχικά, ο μετασχηματισμός υδατοφράκτη χρησιμοποιήθηκε για κατάτμηση 2-Δ/3-Δ εικόνων [52, 65]. Στο [44] εισάγεται για πρώτη φορά η επέκταση σε 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα. Όταν χρησιμοποιείται με σκοπό την κατάτμηση, ο αλγόριθμος μετασχηματισμού υδατοφράκτη δεν εφαρμόζεται στο πρωτότυπο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, αλλά σε μια μετασχηματισμένη του εκδοχή, η οποία βασίζεται σε μια συνάρτηση υδατοφράκτη $f : \Re^3 \rightarrow \Re$. Η συνάρτηση υδατοφράκτη f καθοδηγεί τις γραμμές υδατοφράκτη να αναγνωρίσουν τις κορυφογραμμές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Υπάρχει ένα προς ένα αντιστοιχία ανάμεσα στα ελάχιστα της f και των κοιλάδων συλλογής υδάτων.

Από αλγοριθμικής άποψης, η εξαγωγή των κοιλάδων συλλογής υδάτων μπορεί να επιτευχθεί με δύο τρόπους :

(i) διάσχιση του πιο απόκρημνου μονοπατιού (steepest path following) : Ένα σημείο στην επιφάνεια ακολουθεί το πιο απόκρημνό του μονοπάτι και ολισθαίνει σε ένα τοπικό ελάχιστο της f. Το σημείο αυτό και το ακολουθούμενο μονοπάτι ανήκουν στην περιοχή κατάτμησης που αντιστοιχεί στο ελάχιστο της κοιλάδας συλλογής υδάτων.

(ii) πλημμύρισμα (flooding) : Ο αλγόριθμος πλημμυρίζει το τοπογραφικό του ανάγλυφο ξεκινώντας από το τοπικό του ελάχιστο.

Ένα από τα κύρια μειονεκτήματα της κατάτμησης με μετασχηματισμό υδατοφράκτη είναι πως τις περισσότερες φορές οδηγεί σε υπερκατάτμηση. Μια λύση για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα είναι η συγχώνευση περιοχών με βάση διάφορα κριτήρια.
Όπως και με την προηγούμενη κατηγορία, αναφέρονται αλγόριθμοι που βασίζονται τόσο σε επιφάνειες όσο και σε τμήματα.



Σχήμα 1.6: Μετασχηματισμός υδατοφράκτη. (α) Αρχικό πλημμύρισμα της γεωγραφικής επιφάνειας ; (β) Γραμμή υδατοφράκτη που αναφαίνεται σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο πλημμυρίσματος.

1.3.2.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες

Η πλειοψηφία των αλγορίθμων χρησιμοποιούν την καμπυλότητα σαν συνάρτηση υδατοφράκτη. Στο [63] χρησιμοποιούνται διάφοροι τύποι καμπυλότητας όπως Γκαουσιανή, μέση (average), απόλυτη (absolute), κτλ. Στο [44] χρησιμοποιείται η τετραγωνική ρίζα της "απόκλισης από την επιπεδότητα" ($D = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$, όπου k_1, k_2, οι πρωτεύουσες καμπυλότητες). Το βασικό μειονέκτημα των παραπάνω προσεγγίσεων είναι πως τα σύνορα κατάτμησης δεν είναι ομαλά καθώς επίσης και το γεγονός πως μπορούν να κατατμήσουν μόνο περιοχές με μεγάλη καμπυλότητα.

Στο [74] χρησιμοποιούνται οι ακμές των τριγώνων για την ολίσθηση προς το ελάχιστο. Με την μέθοδο αυτή, επιτυγχάνεται καλύτερη κατάτμηση, σε περιπτώσεις όπου οι κορυφές του προς κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος δεν είναι αρκετά πυκνές για να ορίσουν τις κοιλάδες συλλογής υδάτων. Εδώ, σαν συνάρτηση υδατοφράκτη χρησιμοποιείται η *διεδρική γωνία* των προσκείμενων στις ακμές τριγώνων. Το κύριο μειονέκτημα αυτής της μεθόδου, είναι πως λόγω της μικρής τοπικής υποστήριξης της διεδρικής γωνίας, είναι επιρρεπής στον θόρυβο, οδηγώντας έτσι σε υπερκατάτμηση.

1.3.2.2 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στα [49, 50] υλοποιείται ένα σχήμα που υποβαθμίζει το πρόβλημα της υπερκατάτμησης. Στο σχήμα αυτό, οι κοιλάδες πλημμυρίζουν μέχρις ενός σημείου το οποίο καθορίζεται με κατωφλίωση και την εφαρμογή 3-Δ μορφολογικών τελεστών [53] στην ελάχιστη καμπυλότητα. Κατόπιν, οι κοιλάδες συνεχίζουν να πλημμυρίζουν, βάσει ενός πλημμυρίζοντος αλγορίθμου υδατοφράκτη που χρησιμοποιεί ως συνάρτηση υδατοφράκτη την κάθετη καμπυλότητα (normal curvature). Η διαδικασία απεικονίζεται στο Σχήμα 1.7 : στην

εικόνα (α) φαίνεται η κατωφλίωση και η εφαρμογή μορφολογικών τελεστών στην ελάχιστη καμπυλότητα (τα σημεία άνω του κατωφλίου σχεδιάζονται με μαύρο ενώ τα σημεία κάτω του κατωφλίου σχεδιάζονται με άσπρο), ενώ στην εικόνα (β) φαίνεται η κατάτμηση του φλιτζανιού. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, τα σύνορα κατάτμησης αυτής της μεθόδου ενδέχεται να μην είναι ομαλά.

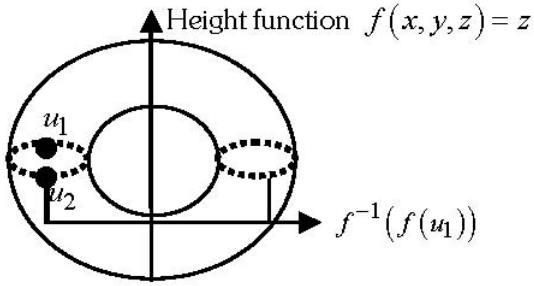
Σχήμα 1.7: Διαδικασία κατάτμησης από το [50]. (α) Ένα μοντέλο φλιτζανιού κατόπιν κατωφλίωσης και εφαρμογής των μορφολογικών τελεστών στην ελάχιστη καμπυλότητα ; (β) Η κατάτμηση του φλιτζανιού απεικονίζεται με τα χρώματα να υποδηλώνουν διαφορετικές περιοχές.

1.3.3 Αλγόριθμοι Γράφων Reeb (Reeb Graph Algorithms)

Σε αυτή την μέθοδο, χρησιμοποιείται για την κατάτμηση μια δομή γράφου που ονομάζεται γράφος Reeb. Έστω $f : M \subseteq \Re^3 \rightarrow \Re$, όπου M μια τρισδιάστατη επιφάνεια. Ο γράφος Reeb της επιφάνειας M είναι ο χώρος πηλίκο [2] της f στο $M \times \Re$ που προκύπτει χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σχέση ισοδυναμίας :

$$(u_1, f(u_1)) \sim (u_2, f(u_2)) \Leftrightarrow \begin{cases} f(u_1) = f(u_2) \\ \& \\ u_1, u_2 \text{ να κείνται στην ίδια} \\ \text{συνεκτική συνιστώσα της} \\ f^{-1}(f(u_1)) \end{cases} \tag{1.3}$$

Αν για παράδειγμα, η f είναι μια συνάρτηση ύψους, η οποία επιστρέφει την συντεταγμένη z ενός σημείου σε μια επιφάνεια M, τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας του γράφου Reeb της επιφάνειας M, είναι οι καμπύλες που είναι κάθετες στην διεύθυνση του ύψους z (Σχήμα 1.8).

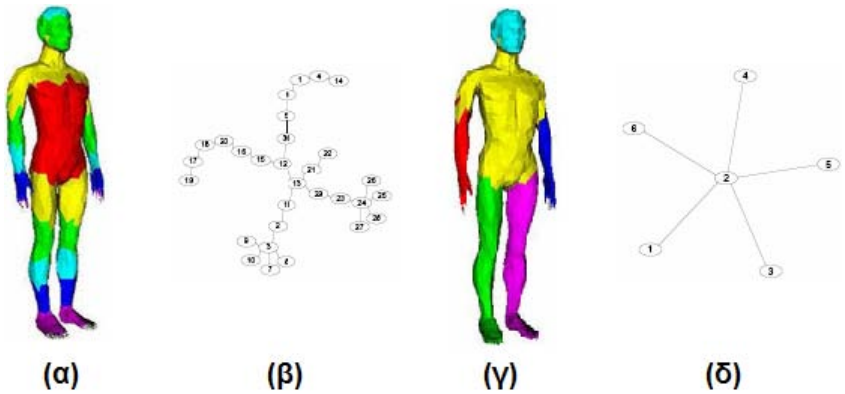


Σχήμα 1.8: Ένα τοροειδές αντικείμενο συσχετισμένο με την συνάρτηση ύψους $f(x, y, z) = z$. Τα σημεία u_1, u_2 του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα, επομένως τα $(u_1, f(u_1))$, $(u_2, f(u_2))$ είναι ισοδύναμα.

1.3.3.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [3] η *συνάρτηση προεξοχής* κβαντίζεται με σκοπό την κατάτμηση. Για παράδειγμα, η κβάντιση (σε 7 στάθμες - bins[7]) της συνάρτησης προεξοχής (ενότητα 1.2) ενός ανθρώπινου μοντέλου φαίνεται στο Σχήμα 1.9 (εικόνα α). Με βάση αυτή την κβάντιση μπορεί να κατασκευαστεί ένας διακριτός γράφος Reeb. Ο αντικειμενικός σκοπός αυτού του αλγορίθμου κατάτμησης είναι να εξαγάγει τις εννοιολογικά ουσιώδεις συνιστώσες. Το πρόβλημα της υπερκατάτμησης αντιμετωπίζεται επιτυχώς απλοποιώντας τον γράφο Reeb. Παρότι εξάγονται οι εννοιολογικά ουσιώδεις συνιστώσες, τα σύνορα μεταξύ των περιοχών δεν βρίσκονται σε κοίλες περιοχές όπως αναμένεται από τον κανόνα των ελαχίστων. Ο αλγόριθμος μπορεί να θεωρηθεί πως βασίζεται σε τμήματα, λόγω της διαδικασίας απλοποίησης του γράφου Reeb η οποία τοποθετεί στην ίδια ομάδα τμήματα με παρόμοια γεωμετρικά χαρακτηριστικά.

[7] Το ιστόγραμμα μιας διακριτής μεταβλητής η οποία μπορεί να λάβει m διαφορετικές τιμές καλείται ιστόγραμμα m-σταθμών (m-bin histogram) (πηγή : www.wikipedia.org).



Σχήμα 1.9: Διαδικασία κατάτμησης από το [3]. (α) Κβαντισμός σε 7 επίπεδα ; (β) Ο διακριτός γράφος Reeb που αντιστοιχεί στην κβάντιση ; (γ) Οι περιοχές κατάτμησης έπειτα από την απλοποίηση του γράφου Reeb ; (δ) Ο απλοποιημένος γράφος.

1.3.4 Αλγόριθμοι Μοντέλων (Model-Based Algorithms)

Σε αυτή την μέθοδο, για τον σκοπό της κατάτμησης κατασκευάζεται ένα μοντέλο της επιφάνειας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

1.3.4.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [67] χρησιμοποιείται για την κατάτμηση, η κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου κατά μήκος της επιφάνειας. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιείται η ιδιότητα πως η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου, είναι πολύ χαμηλή σε περιοχές με βαθιές επιφανειακές κοιλότητες και πολύ υψηλή σε περιοχές με μεγάλη επιφανειακή κυρτότητα. Σύμφωνα με τον κανόνα των ελαχίστων, οι περιοχές κατάτμησης θα κείνται σε περιοχές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος όπου απαντώνται τα ελάχιστα στην πυκνότητα του φορτίου. Ο αλγόριθμος εντοπίζει στο αντικείμενο περιγράμματα όπου υπάρχουν ελάχιστα στην τοπική πυκνότητα φορτίου. Αυτά τα περιγράμματα είναι τα σύνορα κατάτμησης.
Ένα από τα πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι πως χρησιμοποιεί ένα καθολικό χαρακτηρισμό της επιφάνειας για να βρει κοιλότητες ενώ οι περισσότερες από τις υπόλοιπες μεθόδους χρησιμοποιούν τοπικούς χαρακτηρισμούς όπως η καμπυλότητα. Το γεγονός αυτό καθιστά την μέθοδο λιγότερο ευαίσθητη στο θόρυβο. Μειονεκτήματα της μεθόδου είναι πως μπορεί να εντοπίσει μόνο σύνορα κατάτμησης τα οποία περιβάλλονται από κοιλότητες και πως μπορεί να είναι αποτελεσματική, μόνο σε επιφάνειες που δεν περιέχουν άλλες κοίλες περιοχές πλην αυτών που περιλαμβάνουν περιοχές κατάτμησης. Η μέθοδος αυτή δύναται να χρησιμοποιηθεί για να εξάγει τμήματα τα οποία μπορούν να αναπαρασταθούν με ογκομετρικά πρωτογενή στοιχεία χρήσιμα σε εφαρμογές όπως η αναγνώριση αντικειμένων.

1.3.5 Αλγόριθμοι Σκελετών (Skeleton-Based Algorithms)

Σε αυτή την μέθοδο, ο σκελετός του αντικειμένου καθοδηγεί τον αλγόριθμο κατάτμησης.

1.3.5.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [43] ο σκελετός του αντικειμένου κατασκευάζεται πραγματοποιώντας απλοποίηση της επιφάνειας χρησιμοποιώντας την μέθοδο *συναίρεσης ακμών* (edge contraction) [28]. Οι περιοχές κατάτμησης του αντικειμένου εξάγονται χρησιμοποιώντας ένα επίπεδο το οποίο σαρώνει το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα κατά μήκος των σκελετικών ακμών. Η τομή του επιπέδου και του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος αποτελείται από ένα ή περισσότερα πολυγωνικά περιγράμματα. Οι περιοχές κατάτμησης εξάγονται εξετάζοντας τον τρόπο με

τον οποίο μεταβάλλονται τα περιγράμματα αυτά καθώς κινείται το επίπεδο σάρωσης. Για τον σκοπό αυτό, ορίζεται μια παραμετρική γεωμετρική και τοπολογική συνάρτηση για αυτά τα περιγράμματα. Τα περιγράμματα τα οποία περιέχουν κρίσιμα σημεία αυτών των συναρτήσεων υποδηλώνουν σύνορα κατάτμησης.
Ένα μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι πως λόγω της εφαρμογής φίλτρων εξομάλυνσης στις παραμετρικές συναρτήσεις, υπάρχουν περιπτώσεις όπου δομές μικρής κλίμακας εξαφανίζονται.

1.3.6 Αλγόριθμοι Συσταδοποίησης (Clustering Algorithms)

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, η κατάτμηση επιτυγχάνεται είτε με μια προσέγγιση επαναληπτικής συσταδοποίησης κατά την οποία εφαρμόζεται ένας αλγόριθμος k-μέσων, είτε με μια ιεραρχία στοιχείων συστάδας (τριγώνων, σημείων, κτλ) η οποία προσεγγίζεται με ένα πρωτογενές (επίπεδο, σφαίρα, κτλ). Παρομοίως με τις προηγούμενες προσεγγίσεις, υπάρχουν αλγόριθμοι που βασίζονται τόσο σε επιφάνειες όσο και σε τμήματα.

1.3.6.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες

Στο [22] προτείνεται μια μεθοδολογία ιεραρχικής συσταδοποίησης, κατάλληλη για εφαρμογές οι οποίες χρησιμοποιούν 3-Δ μοντέλα με σχεδόν επίπεδες περιοχές κατάτμησης. Συγκεκριμένα, εφαρμόζεται *συναίρεση ακμών* στον *δυϊκό γράφο* του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Το κόστος της συναίρεσης μιας ακμής βασίζεται σε μέτρα επιπεδότητας, πόλωσης προσανατολισμού (orientation bias) και πόλωσης σχήματος (shape bias). Η ακολουθία συναίρεσης ρυθμίζεται από μια ουρά προτεραιότητας η οποία ταξινομεί τις ακμές του δυϊκού γράφου σύμφωνα με το κόστος συναίρεσης. Αυτός ο αλγόριθμος κατάτμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κατάτμηση μοντέλων, κατά την οποία θα πρέπει να εξαχθούν επίπεδες επιφάνειες.

Στο [29] εφαρμόζεται ένας αλγόριθμος συσταδοποίησης παρόμοιος με τον [22] ο οποίος χρησιμοποιείται για να απλοποιήσει την δομή του μοντέλου. Το κόστος συναίρεσης βασίζεται στα ακόλουθα κριτήρια :

(i) μέγεθος του εμβαδού : το εμβαδόν μιας περιοχής θα πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλο σε σχέση με το εμβαδό ενός στοιχείου του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος

(ii) ομαλότητα των συνόρων : το σύνορο μιας περιοχής θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο ομαλό

(iii) επιπεδότητα των περιοχών : κάθε περιοχή θα πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο επίπεδη

Στο [5] χρησιμοποιείται η ίδια ιεραρχική συσταδοποίηση όπως με το [22] για να ταξινομηθούν τα τρίγωνα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σε συστάδες οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν με ένα πρωτογενές επιπέδου, σφαίρας ή κυλίνδρου. Το κόστος *συναίρεσης* μιας *δυϊκής* ακμής είναι το ελάχιστο των σφαλμάτων που προκύπτουν μετά από την εφαρμογή των πρωτογενών επιπέδου, σφαίρας και κυλίνδρου, στα τρίγωνα των συγχωνευμένων περιοχών. Το πρωτογενές που αντιστοιχεί στο ελάχιστο σφάλμα προσαρμογής προσεγγίζει την συστάδα. Ο αλγόριθμος παρέχει μια ιεραρχία περιοχών που προσεγγίζουν επίπεδα, σφαίρες και κυλίνδρους, δίνοντας έτσι μια υψηλού επιπέδου δομή του μοντέλου, χρήσιμη για εφαρμογές σημασιολογικής ερμηνείας. Το μόνο μειονέκτημα του αλγορίθμου είναι πως προσεγγίζει ένα μικρό μόνο εύρος επιφανειών (επίπεδα, σφαίρες, κύλινδροι).

Το [23] βασίζει την τεχνική της ιεραρχικής συσταδοποίησης σε ολισθαίνουσες κινήσεις (slippable motions). Αυτές είναι άκαμπτες κινήσεις (rigid motions) οι οποίες όταν εφαρμόζονται στο σχήμα, ολισθαίνουν την μετασχηματισμένη του εκδοχή επί της στάσιμης χωρίς τον σχηματισμό κενών. Αυτό συμβαίνει όταν η στιγμιαία κίνηση σε κάθε σημείο είναι εφαπτόμενη στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα. Μια κινηματική επιφάνεια, είναι μια επιφάνεια η οποία διαθέτει μια ολισθαίνουσα κίνηση. Μια ολισθαίνουσα συνιστώσα, είναι μια συλλογή κορυφών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος οι οποίες μπορούν να προσεγγιστούν με μια κινηματική επιφάνεια. Ο αλγόριθμος κατατμεί την εισαγόμενη επιφάνεια σε ένα σύνολο ολισθαινουσών συνιστωσών εφαρμόζοντας μια τεχνική ιεραρχικής συσταδοποίησης παρόμοια με αυτή του [22] στο σύνολο των σημείων του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε εφαρμογές μοντέλων με σκοπό την εξαγωγή επιπέδων, σφαιρών, κυλίνδρων, επιφανειών γραμμικής εξώθησης (linear extrusion surfaces), επιφανειών εκ περιστροφής (surfaces of revolution) και ελικοειδών επιφανειών.

1.3.6.2 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [61] χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος k-μέσων για κατάτμηση. Το σχήμα κατάτμησης συσταδοποιεί τρίγωνα και περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα :

(i) υπολογισμός των αποστάσεων μεταξύ κάθε ζεύγους τριγώνων

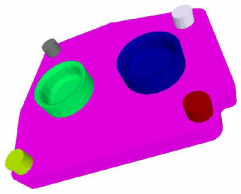
(ii) υπολογισμός των εκπροσώπων των συστάδων τριγώνων

(iii) ανάθεση όλων των υπόλοιπων τριγώνων στον κοντινότερό τους εκπρόσωπο

(iv) αναπροσαρμογή των εκπροσώπων ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ τριγώνων που ανήκουν στην ίδια συστάδα και στον εκπρόσωπό της

Η συνάρτηση απόστασης μεταξύ κάθε ζεύγους προσκείμενων τριγώνων είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα της *γεωδαιτικής απόστασης* των βαρύκεντρων και της *(διεδρικής) γωνίας* των τριγώνων.

Στο [31] χρησιμοποιείται ένας ιεραρχικός ασαφής (fuzzy) αλγόριθμος k-μέσων για κατάτμηση αντικειμένων. Όπως και στο [61], ο αλγόριθμος συσταδοποιεί τρίγωνα με μια συνάρτηση απόστασης η οποία είναι ένα σταθμισμένο άθροισμα της γεωδαιτικής απόστασης των βαρύκεντρων και της γωνίας μεταξύ των τριγώνων. Στην περίπτωση δυαδικής διαμέρισης, ο αλγόριθμος διαμερίζει το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα σε δύο περιοχές κατάτμησης και μια ασαφή περιοχή. Η ασαφής περιοχή περιέχει τρίγωνα τα οποία πρέπει να ανατεθούν σε μια από τις δύο περιοχές κατάτμησης. Η απόφαση αυτή λαμβάνεται με βάση έναν αλγόριθμο min cut (αλγόριθμος ελάχιστης τομής), ο οποίος διαχωρίζει την ασαφή περιοχή σε δυο ζώνες χωριζόμενες από βαθιές κοιλότητες. Ένα παράδειγμα κατάτμησης φαίνεται στο Σχήμα 1.10.



Σχήμα 1.10: Κατάτμηση ενός μηχανικού τμήματος από το [31].

Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι κατατμεί το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα σε ουσιώδεις συνιστώσες και σε βαθιές κοιλότητες, κάτι που συμμορφώνεται με τον κανόνα των ελαχίστων (ενότητα 1.2). Ένα μειονέκτημα είναι πως όταν το σύνορο κατάτμησης δεν περιβάλλεται από κοιλότητα, ο αλγόριθμος min cut ενδέχεται να μην βρει το βέλτιστο σύνορο κατάτμησης.

Με βάση τα προηγούμενα μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως οι μέθοδοι συσταδοποίησης και επέκτασης περιοχών είναι μάλλον παρόμοιες στην φύση τους. Στην προσέγγιση της επαναληπτικής συσταδοποίησης, η κύρια διαφορά είναι πως οι εκπρόσωποι εκλεπτύνονται χρησιμοποιώντας μια συνάρτηση

ελαχιστοποίησης ενώ στην μέθοδο επέκτασης περιοχών τα στοιχεία - γόνοι επιλέγονται μόνο στην αρχή του αλγορίθμου και δεν αλλάζουν. Επίσης, το κριτήριο που αναθέτει ένα στοιχείο του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σε μια περιοχή κατάτμησης, στην προσέγγιση της επαναληπτικής συσταδοποίησης βασίζεται στην απόστασή του από τον εκπρόσωπο ενώ στην προσέγγιση της επέκτασης περιοχών το κριτήριο είναι ανεξάρτητο από τα στοιχεία - γόνους. Στην προσέγγιση της επαναληπτικής συσταδοποίησης, όλα τα στοιχεία μπορούν να θεωρηθούν στοιχεία - γόνοι κατά το πρώτο επίπεδο της ιεραρχίας και κατόπιν συγχωνεύονται στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας σύμφωνα με κάποιο κριτήριο, ενώ στην προσέγγιση της επέκτασης περιοχών, κάποια λιγοστά στοιχεία θεωρούνται στοιχεία - γόνοι, τα οποία στη συνέχεια επεκτείνονται προσθέτοντας στοιχεία που δεν είναι γόνοι σύμφωνα με κάποιο κριτήριο.

1.3.7 Αλγόριθμοι Φασματικής Ανάλυσης (Spectral Analysis Algorithms)

Η μέθοδος της φασματικής ανάλυσης χρησιμοποιεί τις ιδιοτιμές καταλλήλως ορισμένων πινάκων με βάση την συνεκτικότητα του γράφου με σκοπό την κατάτμηση του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

1.3.7.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [41] χρησιμοποιείται φασματική ανάλυση του *δυϊκού γράφου* του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Ορίζεται ένας πίνακας συνάφειας $\mathbf{W}$ με στοιχεία $0 \leq w_{ij} \leq 1$ που υποδηλώνουν την πιθανότητα οι έδρες (τρίγωνα) i,j να συσταδοποιηθούν στην ίδια περιοχή κατάτμησης. Τα στοιχεία αυτά δημιουργούνται χρησιμοποιώντας την συνάρτηση απόστασης που ορίζεται στο [31] και έναν εκθετικό πυρήνα. Αυτός ο τύπος πίνακα έχει χρησιμοποιηθεί επιτυχημένα για συσταδοποίηση (πχ [66]), καθώς ομαδοποιεί στοιχεία μεγάλης συνάφειας. Έτσι, χρησιμοποιώντας τον πίνακα αυτό με αποστάσεις όπως ορίζονται στο [31], μπορεί να επιτευχθεί μια ουσιώδης κατάτμηση. Ακολουθώντας το θεώρημα Πόλωσης [13], και παρομοίως με το [56], κατασκευάζεται ένας πίνακας $\mathbf{V}$, του οποίου οι στήλες είναι τα k μεγαλύτερα ιδιοδιανύσματα [8] του κανονικοποιημένου πίνακα συνάφειας $\mathbf{W}_n$ και καθεμία από τις γραμμές του κανονικοποιείται. Κατόπιν, εφαρμόζεται συσταδοποίηση k-μέσων στα διανύσματα - γραμμές του πίνακα $\mathbf{V}$ χρησιμοποιώντας την συνηθισμένη Ευκλείδια απόσταση. Κάθε ένα από τα παραπάνω συσταδοποιημένα δια-

[8] Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις k μεγαλύτερες ιδιοτιμές (πχ κατά μέτρο, με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος κτλ).

νύσματα, αντιστοιχεί στις έδρες (τρίγωνα) του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, οδηγώντας με τον τρόπο αυτό σε κατάτμηση. Ένα παράδειγμα κατάτμησης φαίνεται στο Σχήμα 1.11 (εικόνα α).
Ένα από τα μειονεκτήματα του αλγορίθμου είναι πως δίνει κυρίως έμφαση στην κοιλότητα. Αυτό σημαίνει πως ενίοτε κατατμούνται ρηχές κοιλότητες καθιστώντας την ποιότητα κατάτμησης κάποιων περιοχών χαμηλή.

Στο [69] χρησιμοποιείται ο ίδιος πίνακας συνάφειας με το [41] για να ταξινομηθούν τα τρίγωνα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σε δύο περιοχές κατάτμησης, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο normalized cut (αλγόριθμος κανονικοποιημένων τομών) [60]. Για να μειωθεί η πολυπλοκότητα, ο πίνακας συνάφειας ορίζεται μερικώς. Συγκεκριμένα, κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις δύο εδρών (τριγώνων) από όλες τις άλλες έδρες. Οι δύο αυτές έδρες ανήκουν σε εννοιολογικά διαφορετικά τμήματα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Τα δύο πρωτεύοντα ιδιοδιανύσματα (leading eigenvectors) [9] αυτού του μερικώς ορισμένου πίνακα συνάφειας εξάγονται με την μέθοδο του Nyström [20] και χρησιμοποιούνται σε ένα αλγόριθμο αναζήτησης γραμμής (line search algorithm) για την εύρεση της πιο προεξέχουσας τομής, η οποία διαμερίζει το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα (σε δύο περιοχές). Ένα παράδειγμα κατάτμησης φαίνεται στο Σχήμα 1.11 (εικόνα β).

Σχήμα 1.11: Παραδείγματα κατάτμησης από τα [41, 69]. (α) Κατάτμηση παιδικού αεροπλάνου χρησιμοποιώντας το [41] ; (β) Κατάτμηση μηχανικού τμήματος χρησιμοποιώντας το [69].

[9] Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις δύο μεγαλύτερες ιδιοτιμές.

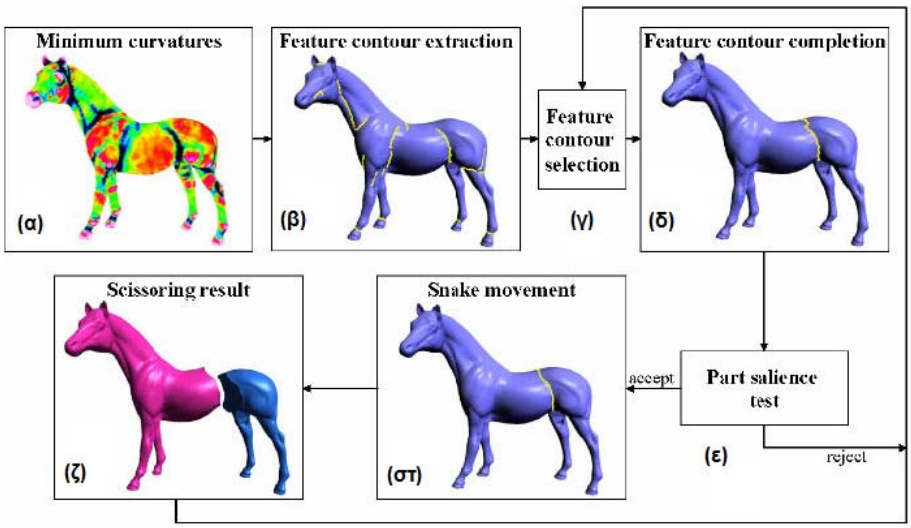
1.3.8 Αλγόριθμοι Εξαγωγής Σαφών Συνόρων (Explicit Boundary Extraction Algorithms)

Σε αυτή την μέθοδο, εξάγονται τα περιγράμματα των συνόρων κατάτμησης.

1.3.8.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στα [37, 38] πραγματοποιείται εξαγωγή σαφών συνόρων κατάτμησης του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Συγκεκριμένα, βρίσκονται περιγράμματα χαρακτηριστικών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος με βάση την ελάχιστη αρνητική καμπυλότητα. Κατόπιν, επιλέγονται κάποια από αυτά τα περιγράμματα τα οποία μετατρέπονται σε κλειστά, και αποτελούν τα σύνορα κατάτμησης. Η επιλογή βασίζεται στην *συνάρτηση προεξοχής* και τα περιγράμματα καθίστανται κλειστά βρίσκοντας το ελάχιστο μονοπάτι στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, χρησιμοποιώντας σαν κόστος ακμής ένα σταθμισμένο συνδυασμό απόστασης, καθέτου, κεντρικότητας και χαρακτηριστικών. Η εγκυρότητα καθενός από τα περιγράμματα ελέγχεται με βάση την προεξοχή της κατατμηθείσας περιοχής ([27]) και εκλεπτύνεται περαιτέρω με χρήση γεωμετρικών φιδιών (geometrical snakes) ([36]). Στο Σχήμα 1.12 απεικονίζεται ολόκληρη η διαδικασία.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα αυτής της μεθόδου είναι πως παράγει ομαλά και κλειστά σύνορα κατάτμησης τα οποία επιπλέον περνούν από έναν έλεγχο προεξοχής. Μερικές φορές ωστόσο, το αποδεκτό περίγραμμα ενδέχεται να μην διαχωρίζει το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα σε ουσιώδεις συνιστώσες, με συνέπεια την ανάγκη ενός χρήστη για να διαχωρίσει το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα χειροκίνητα. Πρέπει να σημειωθεί επίσης, πως απαιτείται το 3-Δ αντικείμενο να είναι αρκούντως δειγματοληπτημένο στις κοιλότητές του, ώστε ο αλγόριθμος να δουλεύει σωστά. Ο αλγόριθμος έχει δείξει την ικανότητά του να κατατμεί αντικείμενα όταν οι γραμμές χαρακτηριστικών περιορίζονται σε αιχμηρές, κοίλες πτυχές.



Σχήμα 1.12: Μέθοδος εξαγωγής σαφών συνόρων από το [37]. (α) Ελάχιστες καμπυλότητες ; (β) Εξαγωγή περιγραμμάτων χαρακτηριστικών ; (γ) Επιλογή περιγραμμάτων χαρακτηριστικών ; (δ) Συμπλήρωση περιγραμμάτων χαρακτηριστικών (κλείσιμο) ; (ε) Έλεγχος προεξοχής τμήματος ; (στ) Κίνηση φιδιού ; (ζ) Αποτέλεσμα ψαλιδίσματος.

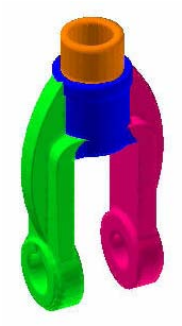
1.3.9 Αλγόριθμοι Κρίσιμων Σημείων (Critical Points-Based Algorithms)

Οι αλγόριθμοι οι οποίοι ακολουθούν αυτήν την μέθοδο χρησιμοποιούν κρίσιμα σημεία, οριζόμενα στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, τα οποία καθοδηγούν την κατάτμηση. Τα κρίσιμα αυτά σημεία είναι προεξέχοντα χαρακτηριστικά του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος και χρησιμοποιούνται για να βοηθήσουν την διαδικασία της κατάτμησης να ξεχωρίσει τις διαφορετικές προεξοχές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

1.3.9.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [30] παρουσιάζεται μια μέθοδος κατάτμησης η οποία βασίζεται σε κρίσιμα σημεία που ορίζονται στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα. Πρώτα, το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα μετασχηματίζεται σε μια αναπαράσταση αναλλοίωτη στη στάση (pose invariant representation) με την μέθοδο της *πολυ-διάστατης κλιμά- κωσης* (ΠΔΚ) (multi-dimensional scaling - MDS) [15]. Στη συνέχεια με βάση την αναπαράσταση αυτή, βρίσκονται τα κρίσιμα σημεία. Τα σημεία αυτά είναι τοπικά μέγιστα της *συνάρτησης προεξοχής*, τα οποία ανήκουν στο *κυρτό κέλυφος* (convex hull) της μετασχηματισμένης αναπαράστασης. Κατόπιν, ορίζεται μια περιβάλλουσα σφαίρα της αναπαράστασης η οποία χρησιμοποιείται για να καθρεφτιστούν τα σημεία της (αναπαράστασης), ούτως ώστε οι κορυφές του κεντρικού τμήματος του αντικειμένου να καταστούν εξωτερικά σημεία της σφαίρας. Το κεντρικό τμήμα του αντικειμένου θα ανήκει πλέον στο κυρτό κέλυφος αυτού του καθρεφτισμού το οποίο θεωρείται ο πυρήνας (core). Έπειτα, εξαγάγονται οι κορυφές του πυρήνα και τα προσπίπτοντα σε αυτές τρίγωνα, απομονώνοντας με τον τρόπο αυτό όλα τα κρίσιμα σημεία (με εξαίρεση αυτών που βρίσκονται κοντά μεταξύ τους). Στο τέλος, η κατάτμηση εκλεπτύνεται περαιτέρω με εφαρμογή ενός αλγορίθμου min cut, ο οποίος τέμνει το αντικείμενο στις κοιλότητές του παρόμοια με το [31]. Ένα παράδειγμα κατάτμησης φαίνεται στο Σχήμα 1.13.

Στο [40] επίσης ορίζονται κρίσιμα σημεία στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, τα οποία καλούνται προεξέχοντες εκπρόσωποι. Οι εκπρόσωποι αυτοί είναι τοπικά μέγιστα της συνάρτησης προεξοχής, ορισμένοι στον *δυϊκό γράφο* του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Κάθε εκπρόσωπος δημιουργεί γεωδαιτικές ζώνες οι οποίες ονομάζονται τοποθεσίες (locales). Οι τοποθεσίες αυτές χρησιμοποιούνται για να ορίσουν μια συνάρτηση συνόρου, η οποία ταυτοποιεί εκείνες τις τοποθεσίες που περιέχουν το σύνορο της προεξοχής. Κατόπιν της ευρέσεως των τοποθεσιών αυτών, χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος min cut του [31] για



Σχήμα 1.13: Κατάτμηση αντικείμενου από το [6].

τον διαχωρισμό της προεξοχής από το υπόλοιπο αντικείμενο.
Ένα πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι πως δύναται να ταυτοποιεί τις προεξοχές ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος ακόμα κι όταν είναι πολύ θορυβώδεις. Μειονέκτημα του αλγορίθμου αποτελεί το γεγονός πως δουλεύει αποτελεσματικά μόνο σε 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα που διαθέτουν προεξοχές. Ο αλγόριθμος αυτός είναι κατάλληλος για την κατάτμηση προεξοχών μοντέλων.

1.3.10 Αλγόριθμοι Περιγραφέων Σχήματος Πολλαπλής Κλίμακας (Multiscale Shape Descriptor Algorithms)

Στην κατηγορία αυτή, χρησιμοποιούνται περιγραφείς σχήματος για να περιγράψουν το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα και να εξαγάγουν συνιστώσες.

1.3.10.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες

Στο [47] το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα κατατμείται με βάση περιγραφείς σχήματος σε διάφορες κλίμακες. Σε κάθε σημείο χρησιμοποιείται ένα σύνολο σφαιρών ακτίνων R_i οι οποίες τέμνονται με το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα M. Ο αριθμός των τομών χαρακτηρίζει το σχήμα της 3-Δ γειτονιάς γύρω από το σημείο σε διάφορες κλίμακες. Αν υπάρχει μια τομή, τότε διαφορετικά χαρακτηριστικά μπορούν να εξαχθούν. Για παράδειγμα το σημείο μπορεί να είναι απόληξη, λάκκος, λόφος ή εμβύθιση. Αν υπάρχουν δυο τομές, τότε το χαρακτηριστικό μπορεί να είναι μέλος, πηγάδι, άρθρωση, κτλ. Αν υπάρχουν τρεις ή περισσότερες τομές, τότε το σημείο καλείται σχίσμα. Κατόπιν της ετικετοποίησης όλων των κορυφών με ένα χαρακτηριστικό σχήματος, χρησιμοποιείται στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα μια τεχνική πλημμυρίσματος με σκοπό την εξαγωγή των περιοχών κατάτμησης που αντιστοιχούν σε ένα χαρακτηρι-

στικό σχήματος για μια δοθείσα κλίμακα. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατάτμηση μοντέλων σε περιοχές χαρακτηριστικών σε διάφορες κλίμακες.

1.3.11 Αλγόριθμοι Μαρκοβιανών Τυχαίων Πεδίων (Markov Random Field Algorithms)

1.3.11.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Τμήματα

Στο [51] χρησιμοποιούνται Μαρκοβιανά τυχαία πεδία για την εξαγωγή της κατάτμησης μιας εικόνας εύρους. Πρώτα, δημιουργείται μια Μαρκοβιανή ιεραρχική διαδικασία με σκοπό την απόκτηση αποθορυβοποιημένων τιμών δεικτών σχήματος [32] στις κορυφές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Κατόπιν, χρησιμοποιούνται Μαρκοβιανά τυχαία πεδία για τη εξαγωγή συναφών κυρτών περιοχών (περιοχών κατάτμησης) οι οποίες διαχωρίζονται από βαθιές κοιλότητες. Η ελαχιστοποίηση που απαιτείται από την διαδικασία, χρησιμοποιεί τους δείκτες σχήματος και την πληροφορία της καμπυλότητας. Ο αλγόριθμος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για εφαρμογές που περιλαμβάνουν αναγνώριση αντικειμένων.

1.3.12 Αλγόριθμοι Απευθείας Κατάτμησης (Direct Segmentation Algorithms)

1.3.12.1 Αλγόριθμοι Που Βασίζονται Σε Επιφάνειες

Στο [9] εισάγεται η μέθοδος απευθείας κατάτμησης κατά την οποία το μοντέλο κατατμείται σε μικρότερες περιοχές όπου τα 3-Δ σημεία που ανήκουν σε απότομες ακμές (1.3.1.1) ή ομαλές ακμές διαφόρων ειδών αγνοούνται. Οι περιοχές αυτές αργότερα προσεγγίζονται με μια ιεραρχία επιφανειών. Η ιεραρχία ξεκινά από απλές επιφάνειες όπως επίπεδα, σφαίρες, κύλινδροι, τόροι, προχωρά σε πιο περίπλοκες όπως επιφάνειες γραμμικής εξώθησης, επιφάνειες εκ περιστροφής, καταλήγοντας σε ομαλές επιφάνειες πολλαπλών περιοχών (που ικανοποιούν τις συνθήκες συνέχειας G^1), οι οποίες υποδιαιρούνται περαιτέρω, μέχρι να βρεθούν απλούστερες επιφάνειες της ιεραρχίας.

1.4 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προτάθηκε μια κατηγοριοποίηση των διαθέσιμων μεθόδων κατάτμησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων με βάση την υποκείμενη θεμελιώδη μεθοδολογία καθώς επίσης και τα ξεχωριστά κριτήρια και χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται στην διαδικασία της κατάτμησης. Επιπλέον,

για κάθε κατηγορία αναφέρθηκαν οι αναπαραστάσεις που χρησιμοποιούνται για τις κατατμηθείσες περιοχές, οι οποίες βασίζονται είτε σε επιφάνειες είτε σε τμήματα. Τα συμπεράσματα που εξάγονται σε αυτό το κεφάλαιο θα αναφερθούν στην συνέχεια για κάθε αναπαράσταση ξεχωριστά.

- Αναπαραστάσεις που βασίζονται σε επιφάνειες :

  - Στην περίπτωση μοντέλων που αποτελούνται από επιφάνειες γνωστής γεωμετρίας, οι αλγόριθμοι κατάτμησης θα πρέπει να είναι σε θέση να κατατμούν την επιφάνεια σε περιοχές γνωστής γεωμετρίας (επίπεδα, σφαίρες, κύλινδροι, κτλ). Με τον τρόπο αυτό, η αποτελεσματικότητα ενός αλγορίθμου κατάτμησης για αυτόν τον τύπο μοντέλων κείται στην ικανότητά του να διακρίνει τις διαφορετικές επιφάνειες που υπάρχουν στο μοντέλο. Η κατάτμηση αυτού του τύπου μοντέλων δίνει επίσης μια άμεση, υψηλού επιπέδου αναπαράσταση στο αντικείμενο, καθώς παρέχει γνώση για τον τύπο των επιφανειών που αντιπροσωπεύουν οι περιοχές. Οι αλγόριθμοι οι οποίοι μπορούν να διαχειριστούν τα μοντέλα αυτού του τύπου αναφέρονται στα [5, 9, 23].

  - Στην περίπτωση μοντέλων που αποτελούνται από επιφάνειες ελεύθερης μορφής, υπάρχει μια ποικιλία τρόπων με τους οποίους ένας αλγόριθμος μπορεί να διαμερίσει ένα 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, καθώς το 3-Δ αντικείμενο αποτελείται από επιφάνειες αυθαίρετης μορφής. Στόχος είναι η εξαγωγή περιοχών οι οποίες μπορούν αργότερα να προσεγγιστούν με παραμετρικές επιφάνειες (πχ [54]).

  - Στην περίπτωση μοντέλων που αποτελούνται τόσο από επιφάνειες ελεύθερης μορφής, όσο και από επιφάνειες γνωστής γεωμετρίας, μπορεί κανείς να προσαρμόσει όλες τις μεθόδους που σχετίζονται με την περίπτωση επιφανειών ελεύθερης μορφής. Όσον αφορά τα προτεινόμενα κριτήρια που τέθηκαν στην εισαγωγή, η σημασία τους εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή. Δεν υπάρχουν μόνο περιπτώσεις στις οποίες είναι επιθυμητό να εξαχθούν ομαλά σύνορα ώστε να επιτευχθεί συνέχεια τύπου C^1 ή C^2 στα σύνορα των προσεγγιζόντων πρωτογενών [54], αλλά και περιπτώσεις στις οποίες στο επίκεντρο βρίσκεται η εξαγωγή των σημείων που ανήκουν σε κάθε περιοχή, αντιμετωπίζοντας την εξαγωγή συνόρων σαν μια μετέπειτα διαδικασία [9].

- Αναπαραστάσεις που βασίζονται σε τμήματα :

  Στις αναπαραστάσεις που βασίζονται σε τμήματα, ο βασικός αντικειμε-

νικός σκοπός είναι να εξαχθούν ογκομετρικά τμήματα. Στην αναπαράσταση αυτού του τύπου, ο τύπος του μοντέλου δεν είναι σημαντικός, καθώς ο αντικειμενικός σκοπός της κατάτμησης δεν είναι η εξαγωγή επιφανειών επί του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος αλλά η εξαγωγή ογκομετρικών τμημάτων με χρήση διαφόρων μεθόδων και κριτηρίων. Από όλους τους αλγορίθμους, οι πιο δημοφιλείς είναι εκείνοι οι οποίοι χρησιμοποιούν τον κανόνα των ελαχίστων για την κατάτμηση του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Επομένως στην περίπτωση αυτή, το μέτρο ποιότητας κείται στην αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου να εφαρμόσει τον κανόνα των ελαχίστων [30],[31],[37],[38],[41],[49],[50],[69],[70]. Το πιο κρίσιμο ζήτημα που έχει να κάνει με τον κανόνα των ελαχίστων είναι ο θόρυβος. Οι περισσότεροι αλγόριθμοι χρησιμοποιούν τις *διεδρικές γωνίες* και τις πρωτεύουσες καμπυλότητες για να εντοπίσουν κοιλότητες, οι οποίες είναι επιρρεπείς στο θόρυβο και μπορούν να τους παραπλανήσουν με αποτέλεσμα να εντοπίσουν λάθος σύνορα κατάτμησης. Επιπλέον, στις αναπαραστάσεις που βασίζονται σε τμήματα, μια καλή διαμέριση επιτυγχάνεται όταν τα σύνορα κατάτμησης είναι πλήρως περιβαλλόμενα από βαθιές κοιλότητες, ειδάλλως, ενδέχεται να προκύψουν παραμορφωμένα σύνορα. Μια εξαίρεση σε αυτό μπορεί να αποτελεί το παράδειγμα των αλγορίθμων [37, 38].

Χάριν σαφήνειας, μέσω του πίνακα 1.1, παρουσιάζονται τα κριτήρια καθώς επίσης και τα χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται για κάθε μέθοδο κατάτμησης που αναλύθηκε στην ενότητα 1.3. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, υπάρχει μεγάλη ποικιλία στα κριτήρια και στα χαρακτηριστικά που χρησιμοποιούνται για την κατάτμηση. Ωστόσο, μπορούν να διακριθούν κάποιες τάσεις σχετικά με την κατάτμηση. Για παράδειγμα η *γεωδαιτικές αποστάσεις* και οι διεδρικές γωνίες χρησιμοποιούνται ευρέως από πολλούς αλγορίθμους. Η *συνάρτηση προεξοχής* είναι και αυτή δημοφιλής στην εξαγωγή ουσιωδών συνιστωσών. Πρωτογενή όπως επίπεδα, σφαίρες, κύλινδροι, κτλ, που προσεγγίζουν τις περιοχές κατάτμησης είναι επίσης δημοφιλή. Τέλος, η πληροφορία της καμπυλότητας αποτελεί θεμελιακό στοιχείο πολλών αλγορίθμων κατάτμησης.
Από την συνολική ανάλυση γίνεται φανερό πως μια επιτυχής διαμέριση εξαρτάται από την εκάστοτε εφαρμογή, η οποία λαμβάνει υπ' όψιν συγκεκριμένες απαιτήσεις. Αυτό σημαίνει πως μια τεχνική κατάτμησης μπορεί να παράγει ουσιώδη αποτελέσματα μόνο αν τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της υποστηρίζουν βέλτιστα όλα τα απαιτούμενα κριτήρια της επιλεχθείσας εφαρμογής. Για το σκοπό αυτό, η σύνοψη αυτή των μεθοδολογιών κατάτμησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων παρέχει στον αναγνώστη ουσιώδεις συμβουλές για την επιλογή χαρακτηριστικών και κριτηρίων, δοθείσας μιας συγκεκριμένης εφαρμογής.

Πίνακας 1.1: Σύνοψη κριτηρίων και χαρακτηριστικών των μεθοδολογιών κατάτμησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων

Μέθοδος	**Αναφορά**	**Χαρακτηριστικά**	**Κριτήρια**
Επέκταση Περιοχών	[10]	μεταβλητής τάξης πολυώνυμα, μέση και γκαουσιανή καμπυλότητα	απόσταση σημείων από την πολυωνυμική επιφάνεια, εκτιμήσεις παραγώγων των σημείων κοντά στην πολυωνυμική επιφάνεια
	[54]	προσεγγίζουσα πολυωνυμική επιφάνεια, κάθετα διανύσματα του νέφους σημείων	απόσταση σημείων από την πολυωνυμική επιφάνεια, κάθετος προσανατολισμός σημείων σε σχέση με την διεύθυνση του άξονα z
	[34]	πρωτεύουσες καμπυλότητες	ένα τρίγωνο προστίθεται σε μια περιοχή με βάση τη συσταδοποίηση των πρωτευουσών καμπυλοτήτων
	[70]	γκαουσιανή καμπυλότητα	τιμή της γκαουσιανής καμπυλότητας πάνω από ένα οριζόμενο από το χρήστη κατώφλι
	[74]	*διεδρική γωνία* προσκείμενων τριγώνων	επικύρωση κυρτότητας με βάση την διεδρική γωνία
	[39]	υπερτετραγωνικές επιφάνειες	μέσο σφάλμα προσαρμογής μεταξύ της επιφάνειας των σημείων και της υπερτετραγωνικής επιφάνειας
	συνέχεια στην επόμενη σελίδα		

Μέθοδος (συνέχεια)	**Αναφορά** (συνέχεια)	**Χαρακτηριστικά** (συνέχεια)	**Κριτήρια** (συνέχεια)	
Μετασχηματισμός Υδατοφράκτη	[44]	απόκλιση από την επιπεδότητα	**συνάρτηση υδατοφράκτη f**	σημεία που ανήκουν στις κοιλάδες συλλογής υδάτων που δημιουργεί η f
	[63]	γκαουσιανή καμπυλότητα, μέση καμπυλότητα, τετραγωνική ρίζα της μέσης τεραγωνικής καμπυλότητας, απόλυτη καμπυλότητα		σημεία που ανήκουν στις κοιλάδες συλλογής υδάτων που δημιουργεί η f
	[49, 50]	ελάχιστη καμπυλότητα, κάθετη καμπυλότητα		σημεία που ανήκουν σε κοιλάδα συλλογής υδάτων αν η ελάχιστη καμπυλότητά τους βρίσκεται πάνω από ένα κατώφλι, επιπλέον σημεία προστίθενται στα τμήματα με βάση την κάθετη καμπυλότητά τους
	[74]	*διεδρικές γωνίες*		ακμές που ανήκουν σε κοιλάδα συλλογής υδάτων που δημιουργεί η f
Γράφοι Reeb	[3]	μέση καμπυλότητα, *συνάρτηση προεξοχής*	συνεκτικότητα διακριτών γράφων Reeb, μέση καμπυλότητα	
Αλγόριθμοι Μοντέλων	[67]	κατανομή πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου	τα συνοριακά σημεία επιλέγονται με βάση τα ελάχιστα της κατανομής πυκνότητας ηλεκτρικού φορτίου	
Αλγόριθμοι Σκελετών	[43]	γεωμετρική και παραμετρική συνάρτηση	τα κρίσιμα σημεία της γεωμετρικής και παραμετρικής συνάρτησης ορίζουν τα σύνορα κατάτμησης	
	συνέχεια στην επόμενη σελίδα			

Μέθοδος (συνέχεια)	**Αναφορά** (συνέχεια)	**Χαρακτηριστικά** (συνέχεια)	**Κριτήρια** (συνέχεια)
Συσταδοποίηση	[22]	κάθετοι επιπέδων και επιφανειών μέτρο μη-κανονικότητας	επιπεδότητα, πόλωση προσανατολισμού, πόλωση συμπαγούς σχήματος
	[29]	εμβαδό και περίμετρος περιοχών, κάθετοι της επιφάνειας	μέγεθος εμβαδού, ομαλότητα συνόρων, επιπεδότητα περιοχών
	[5]	πρωτογενή επιπέδου, σφαίρας και κυλίνδρου	τα σημεία συσταδοποιούνται με βάση την βέλτιστη προσαρμογή τους στα πρωτογενή επιπέδου, σφαίρας και κυλίνδρου
	[23]	ολισθαίνουσες κινήσεις	ο αριθμός και η συμβατότητα των ολισθαινουσών κινήσεων ορίζουν περιοχές κατάτμησης
	[61]	γεωδαιτική απόσταση, διεδρικές γωνίες	τα τρίγωνα συσταδοποιούνται με βάση μια συνάρτηση απόστασης οριζόμενη από ένα σταθμισμένο (από τον χρήστη) άθροισμα *γεωδαιτικών αποστάσεων* και *διεδρικών γωνιών*
	[31]	γεωδαιτική απόσταση, διεδρικές γωνίες	τα τρίγωνα συσταδοποιούνται με βάση μια συνάρτηση απόστασης οριζόμενη από ένα σταθμισμένο (από τον χρήστη) άθροισμα γεωδαιτικών αποστάσεων και διεδρικών γωνιών
Φασματική ανάλυση	[41]	ιδιοτιμές του πίνακα συνάφειας	η συσταδοποίηση των ιδιοτιμών του πίνακα συνάφειας ορίζει την ετικετοποίηση των τριγώνων σε περιοχές κατάτμησης
	[69]	ιδιοτιμές του πίνακα συνάφειας	τα δύο *πρωτεύοντα ιδιοδιανύσματα* του πίνακα συνάφειας ορίζουν μια (δυαδική) διαμέριση του συνόλου των τριγώνων
	συνέχεια στην επόμενη σελίδα		

Μέθοδος (συνέχεια)	**Αναφορά** (συνέχεια)	**Χαρακτηριστικά** (συνέχεια)	**Κριτήρια** (συνέχεια)
Εξαγωγή σαφών συνόρων	[37, 38]	ελάχιστη καμπυλότητα	κεντρικότητα του περιγράμματος, έλεγχος προεξοχής
Κρίσιμα σημεία	[30]	κρίσιμα σημεία, *διεδρικές γωνίες*	κεντρικότητα των σημείων του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος
	[40]	κρίσιμα σημεία, *γεωδαιτική απόσταση*, *συνάρτηση προεξοχής*	οι γεωδαιτικές και γωνιακές αποστάσεις από τα κρίσιμα σημεία του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος ορίζουν ζώνες στις οποίες ανήκουν πιθανά σύνορα κατάτμησης
Περιγραφείς σχήματος πολλαπλής κλίμακας	[47]	ολοκληρωτική γκαουσιανή καμπυλότητα, περιγράμματα παραγόμενα από την τομή σφαίρας με το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα	αριθμός των περιγραμμάτων που παράγονται από την τομή της σφαίρας με την επιφάνεια
Μαρκοβιανά τυχαία πεδία	[51]	δείκτης σχήματος, καμπυλότητα	κυρτότητα
Απευθείας κατάτμηση	[9]	κάθετα διανύσματα, διάφοροι τύποι φίλτρων ξεχωρίζουν τους τύπους των επιφανειών	σημεία του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος ελέγχονται έναντι μιας ακολουθίας επιφανειών υπόθεσης ώστε να καθοριστεί σε ποιον τύπο επιφάνειας ανήκουν

Κεφάλαιο 2

Κατάτμηση 3-Δ Πολυγωνικών Πλεγμάτων Με Χρήση Χαρακτηριστικών Σημείων Και Εξαγωγή Πυρήνα [1]

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η υλοποίηση του αλγορίθμου *κατάτμησης* που περιγράφεται στο [30] συμπεριλαμβανομένων κάποιων τροποποιήσεων - βελτιώσεων.

2.1 Σύνοψη Αλγορίθμου

Δοθέντος ενός προσανατολήσιμου *3-Δ πολυγωνικού πλέγματος* (orientable mesh) [2] S, ο στόχος του αλγορίθμου είναι να το κατατμήσει ιεραρχικά σε ουσιώδη, ξένα (αναφορικά με τις έδρες), συνεκτικά 3-Δ πολυγωνικά υποπλέγματα, των οποίων η ένωση δίνει το S.
Κάθε κόμβος στο ιεραρχικό δέντρο συσχετίζεται με ένα 3-Δ πολυγωνικό υποπλέγμα και η ρίζα με ολόκληρο το S. Για κάθε κόμβο του ιεραρχικού δέντρου, ο αλγόριθμος αποτελείται από τα εξής στάδια :

(i) απλοποίηση 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος :
Εφαρμόζεται σαν βήμα προεπεξεργασίας [46]. Δεν βοηθάει μόνο στην επιτάχυνση του αλγορίθμου όταν εκτελείται σε μεγάλα 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα, αλλά επίσης μειώνει την ευαισθησία του στην παρουσία θορύβου. Το βήμα αυτό εφαρμόζεται μόνο σε περίπτωση που ο αριθμός

[1] Αυτό το κεφάλαιο έχει βασιστεί εν μέρει στο [30].

[2] Ένα 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα καλείται προσανατολήσιμο αν κάθε ζεύγος εδρών που μοιράζονται τουλάχιστον μια ακμή, έχει συνεπείς προσανατολισμούς, ήτοι οι κοινές κορυφές διασχίζονται με αντίθετες κατευθύνσεις.

των εδρών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος είναι μεγαλύτερος από ένα κατώφλι που δίνεται ως είσοδος από τον χρήστη.

(ii) έλεγχος κατατμησιμότητας :
Σε περίπτωση που το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα θεωρείται μη-κατατμήσιμο ο αλγόριθμος τερματίζεται. Αξίζει να σημειωθεί πως το βήμα αυτό εφαρμόζεται τμηματικά και ολοκληρώνεται μετά την εφαρμογή του βήματος (iii), καθώς κάποια από τα κριτήρια κατατμησιμότητας εξαρτώνται από το S_{MDS}. Αυτό γίνεται ώστε σε περίπτωση που το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα κριθεί εξαρχής μη-καταμήσιμο, να αποφευχθεί ο χρονοβόρος υπολογισμός του S_{MDS}.

(iii) αναπαράσταση αναλλοίωτη στη στάση :
Χρησιμοποιείται *ΠΔΚ* για τον μετασχηματισμό του S σε ένα κανονικό 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα S_{MDS}. Οι Ευκλείδιες αποστάσεις μεταξύ σημείων στο S_{MDS} είναι παρόμοιες με τις *γεωδαιτικές αποστάσεις* ανάμεσα στα αντίστοιχα σημεία στο S (Σχήμα 2.2).

(iv) εντοπισμός χαρακτηριστικών σημείων :
Τα χαρακτηριστικά σημεία υπολογίζονται στο S_{MDS} και απεικονίζονται στα αντίστοιχά τους στο S όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3 (εικόνα α).

(v) εξαγωγή συνιστώσας πυρήνα :
Η συνιστώσα του πυρήνα εξάγεται με *σφαιρικό καθρεφτισμό* όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3 (εικόνα β).

(vi) κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος :
Ο αλγόριθμος υπολογίζει τα υπόλοιπα τμήματα, καθένα από τα οποία αντιπροσωπεύει τουλάχιστον ένα χαρακτηριστικό σημείο όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3 (εικόνα γ).

(vii) εκλέπτυνση συνόρων :
Τα σύνορα μεταξύ των τμημάτων, τα οποία βρέθηκαν στο προηγούμενο στάδιο, εκλεπτύνονται. Ο στόχος είναι να βρεθούν τα σύνορα που βρίσκονται κατά μήκος των (φυσικών) διαχωριστικών ορίων του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

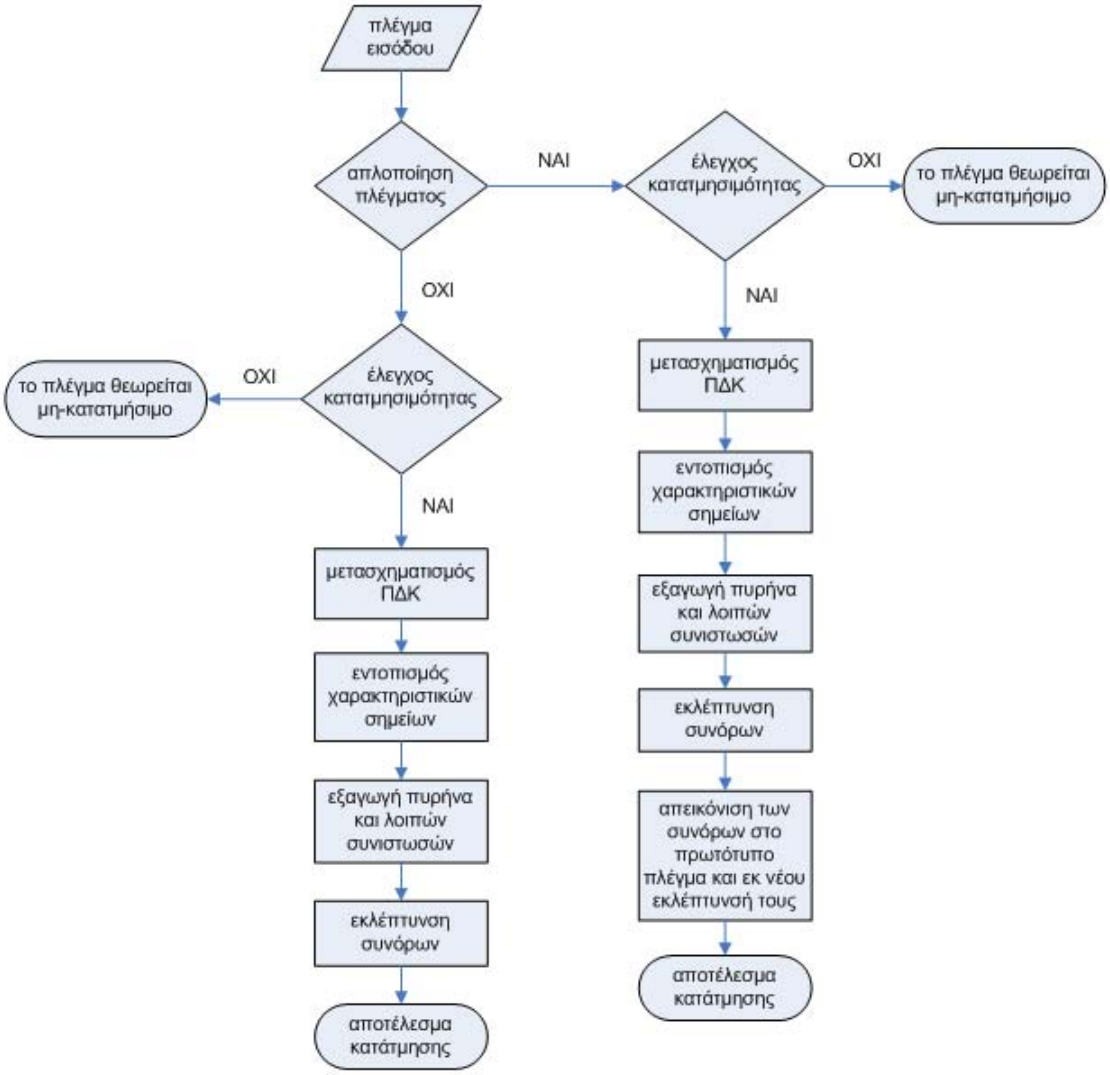
(viii) εκλέπτυνση 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος [3] :
Κατόπιν της κατάτμησης του απλοποιημένου (χαμηλής ανάλυσης) 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος του βήματος (i), πραγματοποιείται απεικόνισή

[3] Το βήμα αυτό εφαρμόζεται μόνο σε περίπτωση που το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα που έχει δοθεί ως είσοδος έχει απλοποιηθεί στο βήμα (i).

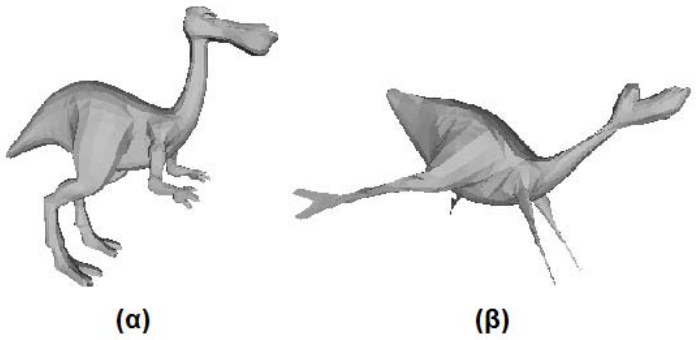
του στο αρχικό, υψηλής ανάλυσης 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα (πλέγμα εισόδου), και τα σύνορα εκλεπτύνονται ξανά, παρόμοια με το βήμα (vii).

Στη συνέχεια δίνεται το διάγραμμα ροής (flow diagram) του αλγορίθμου. Ο αλγόριθμος που περιγράφεται από το διάγραμμα αυτό εφαρμόζεται (αναδρομικά) για κάθε κόμβο του ιεραρχικού δέντρου κατάτμησης (ενότητα 2.1).
Στις ενότητες που ακολουθούν περιγράφονται αναλυτικά τα βήματα του αλγορίθμου περιλαμβάνοντας τις εξής υπο-ενότητες :

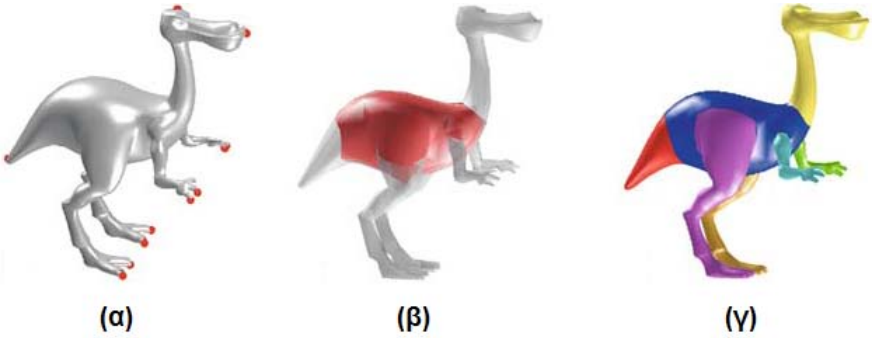
- θεωρητική περιγραφή (από τους συγγραφείς του [30])
- λεπτομέρειες υλοποίησης (η υλοποίση του εκάστοτε βήματος δεν ακολουθεί πάντα πιστά την θεωρητική περιγραφή)
- παρατηρήσεις



Σχήμα 2.1: Διάγραμμα ροής αλγορίθμου.



Σχήμα 2.2: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός *ΠΔΚ*.

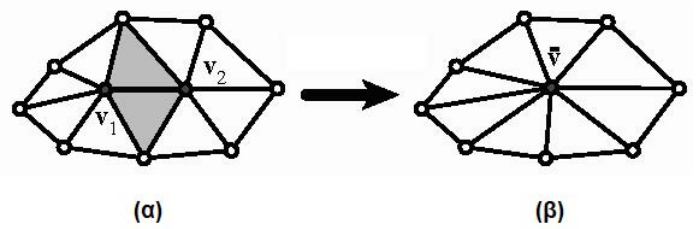


Σχήμα 2.3: (α) Χαρακτηριστικά σημεία ; (β) Πυρήνας ; (γ) Κατάτμηση ; (από το [30]).

2.2 Απλοποίηση 3-Δ Πολυγωνικού Πλέγματος

2.2.1 Θεωρητική Περιγραφή

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο αλγόριθμος απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων περιγράφεται στο [46]. Δεδομένου ότι η απλοποίηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων δεν αποτελεί ουσιώδες τμήμα του αλγορίθμου κατάτμησης, αλλά αποτελεί μια παράπλευρη διαδικασία για την επιτάχυνσή του, δεν θα δοθούν πολλές λεπτομέρειες. Αξίζει να αναφέρει κανείς μόνο την βασική λειτουργία του αλγορίθμου απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων, η οποία ονομάζεται *επαναληπτική συναίρεση ζευγών κορυφών* (iterative contraction of vertex pairs). Η συναίρεση ενός ζεύγους κορυφών, η οποία συμβολίζεται με $(v_1, v_2) \rightarrow \bar{v}$, μετακινεί τις κορυφές v_1 και v_2 στη νέα θέση $\bar{v}$, συνδέει όλες τις προσπίπτουσες ακμές τους στην v_1 και διαγράφει την v_2. Κατόπιν, αφαιρούνται όσες τυχόν ακμές ή έδρες έχουν εκφυλιστεί. Πρέπει να τονιστεί πως εφαρμόζεται γενική συναίρεση ζευγών κορυφών, ήτοι, δεν απαιτείται το ζεύγος των κορυφών v_1,v_2 να ανήκει σε κοινή ακμή. Αν το ζεύγος (v_1, v_2) είναι ακμή, τότε μία ή περισσότερες έδρες θα αφαιρεθούν (Σχήμα 2.4). Ειδάλλως, δύο προηγούμενα ξεχωριστοί τομείς του μοντέλου θα ενωθούν στο $\bar{v}$ (Σχήμα 2.5).

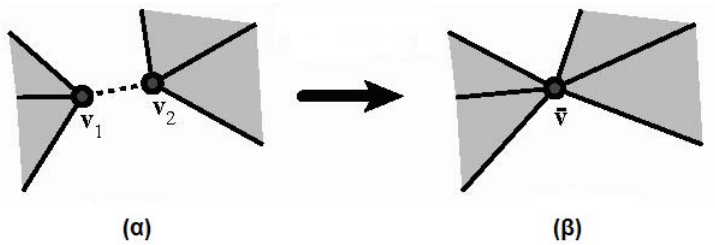


Σχήμα 2.4: Συναίρεση ζεύγους κορυφών που ανήκουν σε κοινή ακμή. (α) Πριν την συναίρεση ; (β) Μετά την συναίρεση ; (από το [46]).

2.2.2 Παρατηρήσεις

- Η υλοποίηση του αλγορίθμου που έχει χρησιμοποιηθεί, είναι αυτή του ίδιου του συγγραφέα του [46], η οποία είναι διαθέσιμη στην προσωπική του ιστοσελίδα `http://mgarland.org/` σαν ένα πακέτο λογισμικού με το όνομα qslim (χρησιμοποιήθηκε η έκδοση 2.1).

- Πέρα από το απλοποιημένο μοντέλο, ο αλγόριθμος παράγει ένα αρχείο με το ιστορικό απλοποίησης του μοντέλου (ήτοι τα ζεύγη κορυφών που

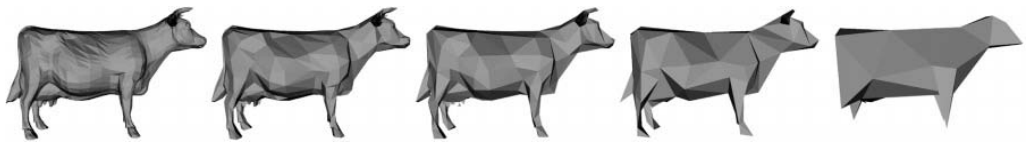


Σχήμα 2.5: Συναίρεση ζεύγους κορυφών που δεν ανήκουν σε κοινή ακμή. (α) Πριν την συναίρεση ; (β) Μετά την συναίρεση ; (από το [46]).

έχουν συναιρεθεί) ώστε να είναι δυνατή η απεικόνιση της κατάτμησης του απλοποιημένου μοντέλου πίσω στο αρχικό.

- Στο Σχήμα 2.6 φαίνεται μια ακολουθία απλοποίησης ενός μοντέλου. Το αρχικό μοντέλο στα αριστερά διαθέτει 5,084 έδρες. Οι απλοποιήσεις προς τα δεξιά, διαθέτουν 994, 532, 248 και 64 έδρες αντίστοιχα. Σημειώνεται πως χαρακτηριστικά όπως τα κέρατα και οι οπλές συνεχίζουν να υπάρχουν κατά τις διάφορες απλοποιήσεις. Μόνο σε πάρα πολύ χαμηλά επίπεδα λεπτομέρειας αρχίζουν να χάνονται.

- Ο αλγόριθμος απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων μπορεί να επηρεάσει αρνητικά την κατάτμηση. Από δύο απλοποιημένες εκδοχές του ίδιου μοντέλου με διαφορετικό αριθμό τριγώνων, ενδέχεται να προκύψουν διαφορετικά αποτελέσματα κατάτμησης (τόσο αναφορικά με τα σύνορα όσο και με τα τμήματα). Επιφάνειες σχεδόν επίπεδες, ενδέχεται να προσεγγιστούν με πολύ μικρό αριθμό τριγώνων μεγάλης επιφάνειας (πχ το κάθισμα μιας καρέκλας) κάτι το οποίο καθιστά γειτονικές (αναφορικά με τις κορυφές) μη-κοντινές (γεωδαιτικά) περιοχές και έχει αρνητικό αντίκτυπο στον υπολογισμό του πυρήνα του μοντέλου (και συνεπώς στο τελικό αποτέλεσμα της κατάτμησης). Τέλος είναι λογικό, καθώς μειώνεται ο αριθμός των τριγώνων του απλοποιημένου μοντέλου, δομές μικρής κλίμακας βαθμιαία να χάνονται και συνεπώς να μην ανιχνεύονται ούτε στο αρχικό μοντέλο.



Σχήμα 2.6: Ακολουθία απλοποιήσεων ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος που έχει παραχθεί με τον αλγόριθμο απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων (από το [46]).

2.3 Έλεγχος Κατατμησιμότητας

Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιείται για να εξακριβωθεί κατά πόσο μια περιοχή θεωρείται κατατμήσιμη. Με τον τρόπο αυτό αποτρέπονται καταστάσεις κατά τις οποίες αντικείμενα χωρίς προεξέχουσες συνιστώσες (ήτοι σχεδόν κυρτά αντικείμενα) κατατμούνται περαιτέρω. Για παράδειγμα, ένας κύβος, μια σφαίρα ή ένας κώνος δεν κατατμούνται, αφού καθένα από αυτά θεωρείται εννοιολογικά ένα ενιαίο τμήμα.
Όπως φάνηκε όμως μέσα από τα διάφορα πειράματα, ενίοτε δεν είναι δυνατή η συνέχεια του αλγορίθμου κατάτμησης ακόμα και αν το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα θεωρείται τυπικά κατατμήσιμο.

2.3.1 Θεωρητική Περιγραφή

Σύμφωνα με το [30] η ιεραρχική κατάτμηση συνεχίζεται εφόσον συντρέχουν οι ακόλουθες συνθήκες :

1. το τρέχον τμήμα S_i διαθέτει χαρακτηριστικά σημεία
2. ο λόγος μεταξύ του αριθμού των κορυφών που περιέχονται στο *κυρτό κέλυφος* του S_i και του συνολικού αριθμού των κορυφών είναι σχετικά μικρός (τυπικά 0.5)
3. ο λόγος μεταξύ του αριθμού των κορυφών που περιέχονται στο κυρτό κέλυφος του $S_{i_{MDS}}$ και του συνολικού αριθμού των κορυφών είναι σχετικά μικρός (τυπικά 0.5)

2.3.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης

Πριν από τον έλεγχο των παραπάνω συνθηκών, γίνονται κάποιοι επιπρόσθετοι έλεγχοι τόσο στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα που δίνεται ως είσοδος, όσο και στο απλοποιημένο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα. Σε περίπτωση αποτυχί-

ας κάποιου ελέγχου, ο αλγόριθμος κατάτμησης τερματίζεται για το εν λόγω υπο-πλέγμα. Η διαδικασία ελέγχου των 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων περιλαμβάνει τα εξής βήματα :

- έλεγχος του κατά πόσο ανήκουν όλες οι κορυφές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σε τουλάχιστον ένα τρίγωνο
- έλεγχος για εκφυλισμένα τρίγωνα (τρίγωνα που δεν αποτελούνται από 3 διαφορετικές κορυφές)
- έλεγχος συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος με όρους κορυφών (με χρήση του *πίνακα γειτνίασης*)
- έλεγχος συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος με όρους τριγώνων (με χρήση του *δυϊκού γράφου*)

Τα παραπάνω βήματα κρίθηκαν απαραίτητα, καθώς σε περίπτωση μη-συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός των *γεωδαιτικών του αποστάσεων*. Η μη-συνεκτικότητα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος μπορεί να παρατηρηθεί είτε εξαρχής, λόγω ενός κακού μοντέλου εισόδου, είτε κατά την απλοποίηση του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος εισόδου, είτε σε ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας, λόγω του αλγορίθμου min cut.
Στη συνέχεια ελέγχεται η συνθήκη 2 και εφόσον ικανοποιείται, υπολογίζεται ο μετασχηματισμός *ΠΔΚ* του S_i και ελέγχονται διαδοχικά οι συνθήκες 1 και 3.

2.4 Αναπαράσταση Αναλλοίωτη Στη Στάση [4]

Η ΠΔΚ είναι μια τεχνική για την ανάλυση δεδομένων ομοιότητας ή ανομοιότητας επί ενός συνόλου αντικειμένων. Η τεχνική ΠΔΚ αποπειράται να μοντελοποιήσει αυτά τα δεδομένα σαν αποστάσεις μεταξύ σημείων σε ένα γεωμετρικό χώρο (Ευκλείδιο χώρο m-διαστάσεων). Ο κύριος λόγος γι' αυτό, είναι η επίτευξη μιας γραφικής απεικόνισης της δομής των δεδομένων. Για τον σκοπό της κατάτμησης, ως δεδομένα ανομοιότητας χρησιμοποιούνται οι γεωδαιτικές αποστάσεις μεταξύ των κορυφών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Όσο περισσότερο ανόμοια είναι δύο αντικείμενα (κορυφές), τόσο μεγαλύτερη θα είναι η απόσταση μεταξύ τους στο χώρο. Για την καλύτερη κατανόηση του πως λειτουργεί η τεχνική ΠΔΚ, θα δοθεί ένα παράδειγμα.
Ας υποθέσουμε πως μας δίνεται ένας χάρτης που δείχνει τις τοποθεσίες διαφόρων πόλεων μιας χώρας, και μας ζητείται να κατασκευάσουμε ένα πίνακα

[4] Αυτή η ενότητα έχει βασιστεί εν μέρει στα [11, 33].

των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων αυτών. Κάθε είσοδος του πίνακα μπορεί να συμπληρωθεί πολύ εύκολα μετρώντας με κανόνα την απόσταση μεταξύ των εκάστοτε πόλεων και κατόπιν μετατρέποντας την απόσταση σε πραγματική, με χρήση της κλίμακας του χάρτη.
Ας φανταστούμε τώρα το αντίστροφο πρόβλημα, όπου μας δίνεται ο πίνακας των αποστάσεων μεταξύ των πόλεων και μας ζητείται η σχεδίαση του χάρτη, δηλαδή με άλλα λόγια μας ζητείται η εύρεση συντεταγμένων για κάθε πόλη. Ουσιαστικά, η τεχνική *ΠΔΚ* λύνει το αντίστροφο αυτό πρόβλημα, το οποίο όμως στην πραγματικότητα είναι πολύ πιο πολύπλοκο, καθώς τα δεδομένα περιέχουν σφάλμα (θόρυβο) και δεν είναι γνωστή η κατάλληλη διάσταση της απεικόνισης των δεδομένων (στη γενική περίπτωση εφαρμογής της ΠΔΚ) εκ των προτέρων.
Στο βήμα αυτό λοιπόν του αλγορίθμου, δίνουμε σαν είσοδο μια εκτίμηση των *γεωδαιτικών αποστάσεων* μεταξύ των κορυφών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος (που περιέχουν κάποιο σφάλμα) και λαμβάνουμε σαν έξοδο 3-Δ συντεταγμένες των κορυφών αυτών. Η 3-Δ απεικόνιση αυτή έχει το χαρακτηριστικό της μετατροπής των γεωδαιτικών αποστάσεων του αρχικού 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, σε Ευκλείδιες στο μετασχηματισμένο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα. Με τον τρόπο αυτό, το μετασχηματισμένο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα "τεντώνεται" και προκύπτει μια αναπαράσταση *αναλλοίωτη στη στάση*. Οι τεχνικές ΠΔΚ διαφοροποιούνται (μεταξύ άλλων) με βάση την συνάρτηση σφάλματος (μεταξύ των δεδομένων ομοιότητας / ανομοιότητας και των συντεταγμένων που παράγονται ως έξοδος) που ελαχιστοποιούν. Ένα παράδειγμα απεικόνισης ΠΔΚ φαίνεται στο Σχήμα 2.2.

2.4.1 Θεωρητική Περιγραφή

Σύμφωνα με το [30], ως μέτρο ανομοιότητας των κορυφών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, χρησιμοποιείται η μεταξύ τους γεωδαιτική απόσταση, ήτοι, η απόσταση κατά μήκος της επιφάνειας επί της οποίας εδρεύουν τα σημεία. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο λόγος για το (γεωδαιτικό) μετασχηματισμό ΠΔΚ του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος είναι το γεγονός ότι αποτελεί μια *αναλλοίωτη στη στάση* αναπαράσταση. Σύμφωνα με το [18], η κάμψη έχει ελάσσονα επίδραση στις γεωδαιτικές αποστάσεις. Η ιδιότητα αυτή απεικονίζεται στο Σχήμα 2.2, όπου η ουρά, τα χέρια και τα πόδια του μοντέλου "τεντώνονται".
Δοθέντος ενός συνόλου κορυφών $\{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, ο πίνακας ανομοιοτήτων ορίζεται ως $\{\delta_{ij} = \Gamma\Delta A\,(u_i, u_j)\}$, $1 \leq i \leq n$. Οι γεωδαιτικές αποστάσεις (*ΓΔΑ*) μπορούν να υπολογιστούν αποδοτικά με βάση το [57].
Υπάρχουν δύο βασικές κατηγορίες μεθόδων ΠΔΚ :

- μετρική *ΠΔΚ* (metric MDS) : αποπειράται να διατηρήσει τις αποστάσεις και τις αναλογίες μεταξύ των ανομοιοτήτων
- μη-μετρική ΠΔΚ (non-metric MDS) : διατηρεί μόνο την τάξη (<,>) μεταξύ των ανομοιοτήτων, παρά τις ακριβείς αποστάσεις και αναλογίες

Σύμφωνα με το [30], η μετρική ΠΔΚ θεωρείται πολύ περιοριστική. Καλύτερα αποτελέσματα, τόσο οπτικά όσο και αναφορικά με την συνάρτηση σφάλματος (βλέπε παρακάτω), επιτυγχάνονται με χρήση μη-μετρικής ΠΔΚ.
Οι *συναρτήσεις stress* (stress functions) χρησιμοποιούνται για να μετρήσουν το βαθμό ανταπόκρισης των αποστάσεων μεταξύ των κορυφών. Έστω δ_{ij} η *γεωδαιτική απόσταση* μεταξύ των κορυφών u_i,u_j επί του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος S και d_{ij} η Ευκλείδια απόσταση μεταξύ των αντίστοιχων σημείων στο χώρο ΠΔΚ. Χρησιμοποιείται η ακόλουθη συνάρτηση σφάλματος :

$$F_s = \frac{\sum_{i<j} \left(f\left(\delta_{ij}\right) - d_{ij} \right)^2}{\sum_{i<j} d_{ij}^2} \tag{2.1}$$

Ο αλγόριθμος ΠΔΚ αποπειράται να βελτιστοποιήσει την παραπάνω συνάρτηση stress ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των αποστάσεων μεταξύ των βελτίστως κλιμακωμένων δεδομένων $f\left(\delta_{ij}\right)$ και των d_{ij}, όπου f είναι μια βέλτιστη μονότονη συνάρτηση των ανομοιοτήτων.
Η βελτιστοποίηση αυτή εξελίσσεται ως εξής. Κατά το στάδιο αρχικοποίησης, ο αλγόριθμος βρίσκει μια αρχική διευθέτηση των σημείων στον m-διάστατο χώρο ΠΔΚ. Αυτό μπορεί να γίνει είτε με τυχαία δειγματοληψία από μια κανονική κατανομή, είτε χρησιμοποιώντας τη λύση της μετρικής ΠΔΚ. Επιλέγεται η δεύτερη εκδοχή, η οποία προκύπτει με *διάσπαση ιδιοτιμών* (eigenvalue decomposition) [11].
Κατόπιν, ο αλγόριθμος επαναλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα μέχρι η συνάρτηση stress να γίνει αρκούντως μικρή :

(i) υπολογισμός των Ευκλείδιων αποστάσεων d_{ij} μεταξύ των σημείων στο χώρο ΠΔΚ

(ii) υπολογισμός της βέλτιστης μονότονης συνάρτησης των ανομοιοτήτων, f, χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο *pool adjacent violators* [7], ώστε να βρεθούν οι βελτίστως κλιμακωμένες ανομοιότητες

(iii) εκ νέου απεικόνιση κάθε κορυφής σε ένα σημείο στο χώρο ΠΔΚ ελαχιστοποιώντας την εξίσωση (2.1)

Ο αλγόριθμος ΠΔΚ μπορεί να απεικονίσει τις κορυφές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σε οποιοδήποτε m-διάστατο Ευκλείδιο χώρο. Στην προκειμένη

περίπτωση, αντικειμενικός σκοπός είναι το "τέντωμα" των συνιστωσών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, διατηρώντας ταυτόχρονα το γενικό σχήμα του. Απεικονίζοντας τις κορυφές στην αρχική διάσταση ($m = 3$), ο σκοπός αυτός επιτυγχάνεται. Αντίθετα, η απεικόνιση στο χώρο $\mathbb{R}^2$ προκαλεί απώλεια πληροφορίας, ενώ στο χώρο $\mathbb{R}^m$, $m > 3$, πάρα πολλές κορυφές απεικονίζονται στο *κυρτό κέλυφος*, αλλοιώνοντας με τον τρόπο αυτό το γενικό σχήμα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

2.4.2 Μέθοδοι Μη-Γραμμικής Μείωσης Διαστασιμότητας

Είναι σημαντικό να σημειώσει κανείς πως η μέθοδος *ΠΔΚ* ανήκει στις μεθόδους μη-γραμμικής μείωσης διαστασιμότητας (ΜΓΜΔ) (non-linear dimensionality reduction methods - NLDR methods). Οι μέθοδοι αυτές, έχουν σαν γενικό στόχο την αποκάλυψη της υποκείμενης βασικής δομής των δεδομένων (πχ τον κύκλο για ένα κύλινδρο, ή την ευθεία για μια ελικοειδή καμπύλη). Κατά κάποιο τρόπο, είναι σαν κάποιος να έχει "τσαλακώσει" ή "μπλέξει" τα δεδομένα, και οι μη-γραμμικοί αυτοί μετασχηματισμοί προσπαθούν να τα ξεδιπλώσουν (πχ σαν να προσπαθούμε να ισιώσουμε ένα τσαλακωμένο φύλλο χαρτί). Στο πλαίσιο αυτό, διευρενήθηκε η "επέκταση" [5] κάποιων δημοφιλών μεθόδων ΜΓΜΔ [6] σε 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα :

- Ανάλυση Πρωτευουσών Συνιστωσών (Principal Component Analysis - PCA)
- Απεικόνιση Διάχυσης (Diffusion Map)
- Χωρική Ευθυγράμμιση Τοπικής Εφαπτομένης (Local Tangent Space Alignment - LTSA)
- Τοπικά Γραμμική Ένθεση (Locally Linear Embedding - LLE)
- Εσσιανή Τοπικά Γραμμική Ένθεση (Hessian LLE)

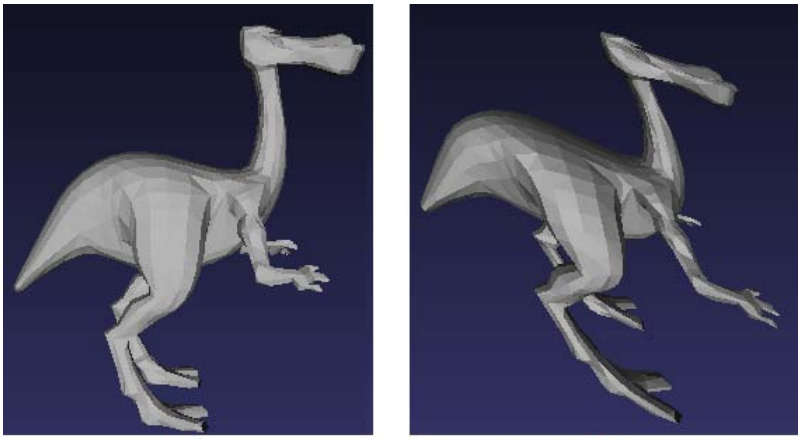
[5] Στο πλαίσιο της επέκτασης αυτής έγιναν κάποιοι πειραματισμοί. Έτσι σε όσους αλγόριθμους χρησιμοποιούνται Ευκλείδιες αποστάσεις, δοκιμάστηκαν εναλλακτικά οι *γεωδαιτικές*. Ακόμα σε όσες μεθόδους χρησιμοποιείται ως παράμετρος ο αριθμός γειτονικών σημείων Κ, χρησιμοποιήθηκε εναλλακτικά η συνεκτικότητα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, ήτοι μια κορυφή διαθέτει τόσους γείτονες όσες και οι κορυφές με τις οποίες γειτονεύει, βάσει των πολυγώνων του 3-Δ πλέγματος. Τέλος, για καθεμία από τις μεθόδους που χρησιμοποιούν διάσπαση ιδιοτιμών, διερευνήθηκε το κατά πόσο διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις (πχ με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων 2-4 αντί των 1-3).

[6] Πηγή για αυτή την μικρή μελέτη αποτέλεσαν οι προσωπικές ιστοσελίδες των Todd Wittman (http://www.math.ucla.edu/~wittman/mani/index.html) και Gabriel Peyré (http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/) .

- Λαπλασιανή Ιδιο-Απεικόνιση (Laplacian Eigenmap)
- Ισομορφική Απεικόνιση (Isomap)
- Ταχεία Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση (Fast Multi-Dimensional Scaling - MDS)
- Κλασική Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση (Classic MDS)
- Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση Ορόσημων (Landmark MDS)
- Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Square MDS)

2.4.2.1 Ανάλυση Πρωτευουσών Συνιστωσών (Principal Component Analysis)

Ο αλγόριθμος αυτός αποτελεί υλοποίηση της κλασικής μεθόδου ανάλυσης πρωτευουσών συνιστωσών (ΑΠΣ). Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού αυτού φαίνεται στο Σχήμα 2.7. Ο αλγόριθμος δέχεται ως παράμετρο τον αριθμό των ιδιοτιμών / ιδιοδιανυσμάτων (ήτοι την διάσταση της απεικόνισης). Όπως φαίνεται στο σχήμα αυτό, ο μετασχηματισμός ΑΠΣ αποτελεί μια πεπλάτυνση του αρχικού μοντέλου και δεν δείχνει να έχει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον αναφορικά με την κατάτμηση. Αξίζει να σημειωθεί πως, σε αντίθεση με άλλες μεθόδους (πχ Λαπλασιανή ιδιο-απεικόνιση) δεν παρουσιάζει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις (πχ με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων 2-4 αντί των 1-3).



(α) (β)

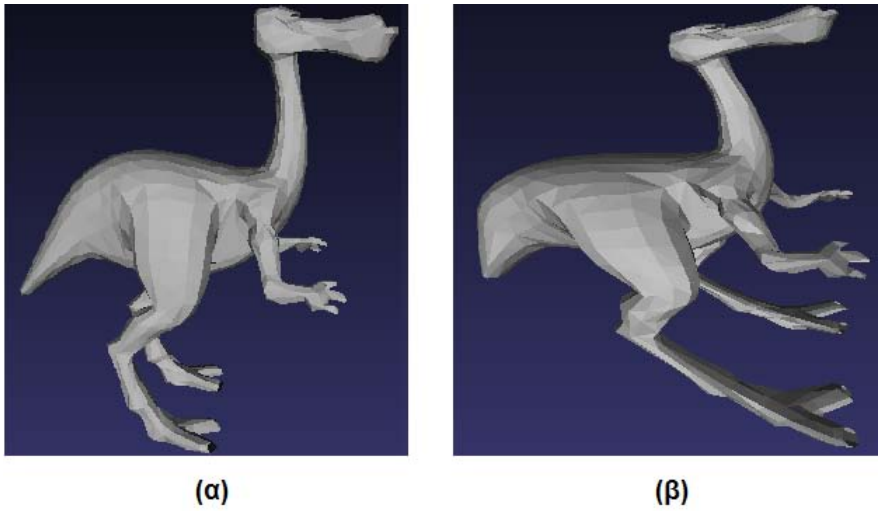
Σχήμα 2.7: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΑΠΣ.

2.4.2.2 Απεικόνιση Διάχυσης (Diffusion Map)

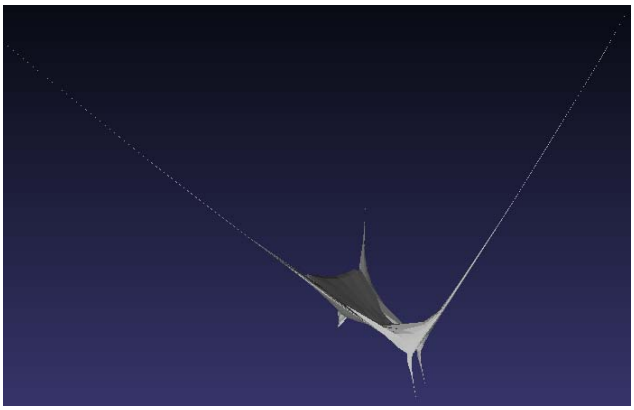
Ο αλγόριθμος απεικόνισης διάχυσης περιγράφεται στο [48] και η υλοποίησή του είναι διαθέσιμη από τους ίδιους τους συγγραφείς του.
Η απεικόνιση διάχυσης χρησιμοποιεί ένα Γκαουσιανό πυρήνα πλάτους σ για να κατασκευάσει ένα γράφο με βάρη και κανονικοποιεί τον τελεστή με παράμετρο α. Όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος σ, τόσο μεγαλύτερο βάρος θα ασκήσουν απομακρυσμένα σημεία στο γράφο με βάρη. Η παράμετρος α ελέγχει την κανονικοποίηση που χρησιμοποιείται από την απεικόνιση διάχυσης :

- με $\alpha = 0$ χρησιμοποιείται η Λαπλασιανή μήτρα γράφου
- με $\alpha = 0.5$ χρησιμοποιείται ο Fokker-Plank propagator
- με $\alpha = 1$ χρησιμοποιείται ο τελεστής Laplace-Beltrami

Κάποια παραδείγματα της απεικόνισης διάχυσης φαίνονται στα σχήματα 2.8, 2.9. Αξίζει να σημειωθεί πως η παράμετρος α δεν δείχνει να επηρεάζει το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού. Ο μετασχηματισμός όμως δείχνει να επηρεάζεται δραματικά από την παράμετρο σ όπως φαίνεται στα σχήματα. Για $\sigma = 0.2$ (Σχήμα 2.9) παρατηρούμε μεν πως οι προεξοχές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος έχουν διαχωριστεί και "τεντωθεί", όμως τα πίσω πόδια έχουν τεντωθεί προς τα πάνω. Για $\sigma \geq 3$ (Σχήμα 2.8) η απεικόνιση είναι αντίστοιχη με το μετασχηματισμό ΑΠΣ. Για αυξανόμενες τιμές της παραμέτρου $0.2 < \sigma < 3$ το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα μεταμορφώνεται σταδιακά μέχρι να λάβει την τελική του πεπλατυσμένη μορφή, όντας ενίοτε διδιάστατο, με τις προεξοχές του να καταρρέουν η μια πάνω στην άλλη.
Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί τις Ευκλείδιες αποστάσεις μεταξύ των σημείων του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Χρησιμοποιώντας πειραματικά *γεωδαιτικές αποστάσεις*, παρατηρήθηκε πως ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει (αποτυχία υπολογισμού των ιδιοτιμών). Τέλος, η απεικόνιση διάχυσης παρουσιάζει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις (πχ με χρήση των ιδιοδιανυσμάτων 2-4 αντί των 1-3), η οποία όμως δεν παρουσιάζει χρηστικό ενδιαφέρον (η υψηλότερης διάστασης απεικόνιση είναι μια αναδιπλωμένη, παραμορφωμένη εκδοχή του αρχικού μοντέλου με τις προεξοχές να εξακολουθούν να διαχωρίζονται).
Η μεγάλη ευαισθησία του μετασχηματισμού στην παράμετρο σ και η αδυναμία επιλογής μιας ενιαίας τιμής για την παράμετρο σ που να λειτουργεί το ίδιο αποτελεσματικά για όλα τα μοντέλα, καθιστούν την απεικόνιση διάχυσης ασταθή και ακατάλληλη για τους σκοπούς της κατάτμησης.



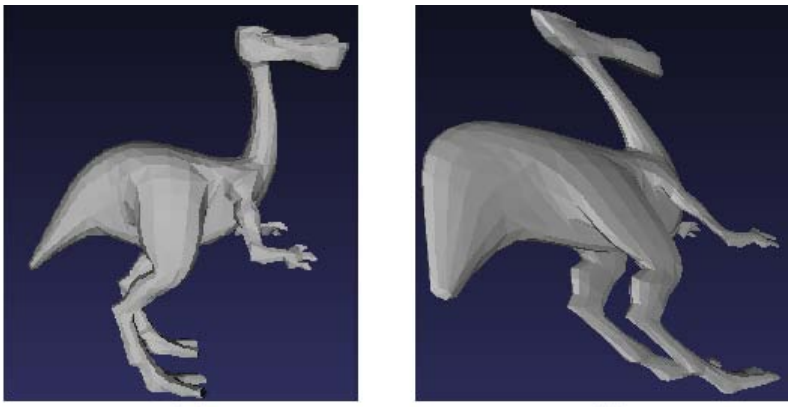
Σχήμα 2.8: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Απεικόνιση διάχυσης με $\sigma = 3$.



Σχήμα 2.9: Απεικόνιση διάχυσης με $\sigma = 0.2$.

2.4.2.3 Χωρική Ευθυγράμμιση Τοπικής Εφαπτομένης (Local Tangent Space Alignment)

Ο αλγόριθμος χωρικής ευθυγράμμισης τοπικής εφαπτομένης (ΧΕΤΕ) περιγράφεται στο [71] και η υλοποίησή του είναι διαθέσιμη από τους ίδιους τους συγγραφείς του.
Ο μετασχηματισμός αυτός χρησιμοποιεί τους Κ [7] κοντινότερους γείτονες (Κ κοντινότερα γειτονικά σημεία) για να δημιουργήσει ένα γράφο και να προσεγγίσει τους τοπικούς εφαπτόμενους χώρους για κάθε γειτονιά. Αν η παράμετρος Κ είναι πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή, ενδέχεται η τοπική γεωμετρία να μην ερμηνευθεί σωστά από τον αλγόριθμο.
Ένα παράδειγμα εκτέλεσης του αλγορίθμου φαίνεται στο Σχήμα 2.10. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, δεν παρουσιάζει κάποιο ιδιαίτερο ενδιαφέρον αναφορικά με την κατάτμηση. Αξίζει να σημειωθεί πως ο αλγόριθμος είναι δραματικά ευαίσθητος στην παράμετρο Κ (αριθμός γειτονικών σημείων). Ο μετασχηματισμός μοιάζει σαν να συμπιέζει το μοντέλο κατά ένα επίπεδο, το οποίο διαφέρει ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου Κ. Ο μετασχηματισμός αυτός δεν δείχνει να έχει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις, ενώ η χρήση της συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος (για τον καθορισμό των γειτόνων) έναντι ενός σταθερού αριθμού γειτόνων Κ δεν παρουσίασε ενδιαφέρον.



(α) (β)

Σχήμα 2.10: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΧΕΤΕ με Κ=14.

[7] Θα πρέπει να σημειωθεί πως οι μέθοδοι *ΜΓΜΔ* δοκιμάζονται στα απλοποιημένα μοντέλα (δεν γίνεται να δοκιμαστούν στα αρχικά, λόγω περιορισμών μνήμης του υπολογιστή) και συνεπώς οι "κοντινότεροι" γείτονες μπορεί στην πραγματικότητα να είναι απομακρυσμένοι, ανάλογα με το βαθμό απλοποίησης. Σε κάθε περίπτωση πάντως, θα πρέπει να σημειωθεί η (ενδεχομένως) αρνητική επίδραση της απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων στο αποτέλεσμα των εκάστοτε μετασχηματισμών.

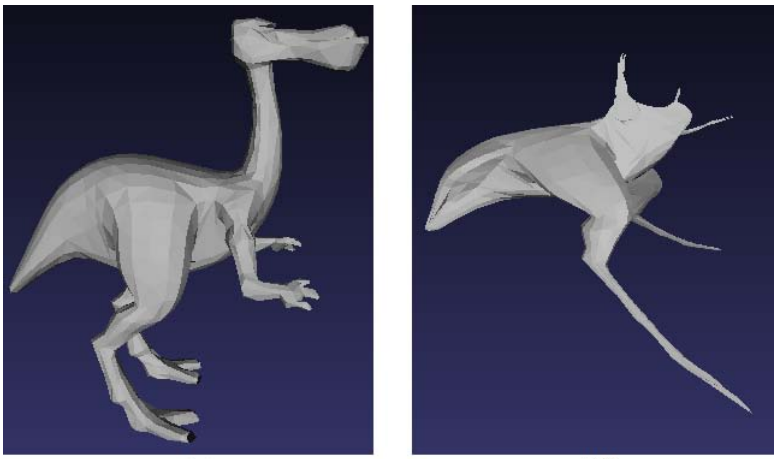
2.4.2.4 Τοπικά Γραμμική Ένθεση (Locally Linear Embedding)

Ο αλγόριθμος τοπικά γραμμικής ένθεσης (ΤΓΕ) περιγράφεται στο [55] και η υλοποίησή του είναι διαθέσιμη από τους ίδιους τους συγγραφείς του.
Ο μετασχηματισμός αυτός κατασκευάζει ένα γράφο από τους K κοντινότερους γείτονες, υπολογίζει τα βάρη του γράφου υποθέτοντας πως οι γειτονιές των σημείων είναι τοπικά επίπεδες και λαμβάνει τα d (d=4) μεγαλύτερα ιδιοδιανύσματα [8]. Αν η παράμετρος K είναι πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή, ενδέχεται η τοπική γεωμετρία να μην ερμηνευθεί σωστά από τον αλγόριθμο.
Ο μετασχηματισμός ΤΓΕ έχει χρησιμοποιηθεί στο [45] μεταξύ άλλων, για κατάτμηση ανθρωποειδών μοντέλων. Όπως αναφέρεται στο [45], αποτελεί μια μορφή Λαπλασιανής ένθεσης (η οποία όπως θα σημειωθεί παρακάτω έχει και αυτή χρησιμοποιηθεί για κατάτμηση ανθρωποειδών μοντέλων).
Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού φαίνεται στο Σχήμα 2.11. Μπορεί να παρατηρήσει κανείς πως τα χέρια και το κεφάλι έχουν (κατά κάποιο τρόπο) σμικρυνθεί. Ουσιαστικά μέρος αυτών των προεξοχών έχει απεικονιστεί στον κορμό του μοντέλου. Εντούτοις, οι προεξοχές του μοντέλου έχουν διαχωριστεί. Όμως δεν συμβαίνει το ίδιο για μοντέλα με περισσότερες προεξοχές (πχ ένα έντομο), όπου κάποιες προεξοχές ενώνονται με άλλες. Αυτό είναι ένα εγγενές πρόβλημα των Λαπλασιανών μετασχηματισμών όπως περιγράφεται στο [4] (ο αριθμός των διαστάσεων που απαιτούνται για το διαχωρισμό των προεξοχών ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σχετίζεται με τον αριθμό των προεξοχών). Αξίζει επίσης να σημειωθεί η κακή συμπεριφορά του αλγορίθμου σε μη-ανθρωποειδή μοντέλα (πχ μια καρέκλα). Τέλος πρέπει να αναφερθεί πως ο μετασχηματισμός του ίδιου μοντέλου σε διαφορετική στάση ενίοτε διαφέρει (και επομένως η απεικόνιση δεν είναι αναλλοίωτη στη στάση).
Ο μετασχηματισμός ΤΓΕ διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις (όπως και όλοι οι Λαπλασιανοί μετασχηματισμοί) : προεξοχές που ενώνονταν διαχωρίζονται ενώ άλλες που ήταν διαχωρισμένες ενώνονται, λόγω του περιορισμού απεικόνισης σε τρεις διαστάσεις. Ακόμα, δομές που παρατηρούνται σε χαμηλότερες διαστάσεις, επαναλαμβάνονται σε υψηλότερες. Επίσης, δεν ήταν δυνατόν να εφαρμοστεί ορισμός των γειτόνων με βάση την συνεκτικότητα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, λόγω της φύσης του αλγορίθμου που απαιτεί ένα σταθερό αριθμό γειτόνων για κάθε σημείο [9].
Συμπερασματικά λοιπόν, ο μετασχηματισμός παρουσιάζει ενδιαφέρον για την κατάτμηση, όμως για μοντέλα με περιορισμένο αριθμό αριθμό προεξοχών όπως τα ανθρωποειδή. Ωστόσο, παραμένει το πρόβλημα επιλογής του κα-

[8] Επειδή το πρώτο ιδιοδιάνυσμα είναι σταθερό, πρέπει να χρησιμοποιηθούν τα ιδιοδιανύσματα 2-4. Αν χρησιμοποιηθούν τα 1-3 η απεικόνιση θα είναι διδιάστατη.

[9] Επειδή υπάρχουν κορυφές που ανήκουν σε ένα μόνο τρίγωνο, ο αριθμός των γειτόνων θα περιοριζόταν σε 2, κάτι το οποίο δεν έχει νόημα.

τάλληλου αριθμού γειτόνων K, καθώς δεν υπάρχει μια ενιαία τιμή για την παράμετρο που να παρουσιάζει το ίδιο καλά αποτελέσματα για διαφορετικά μοντέλα.



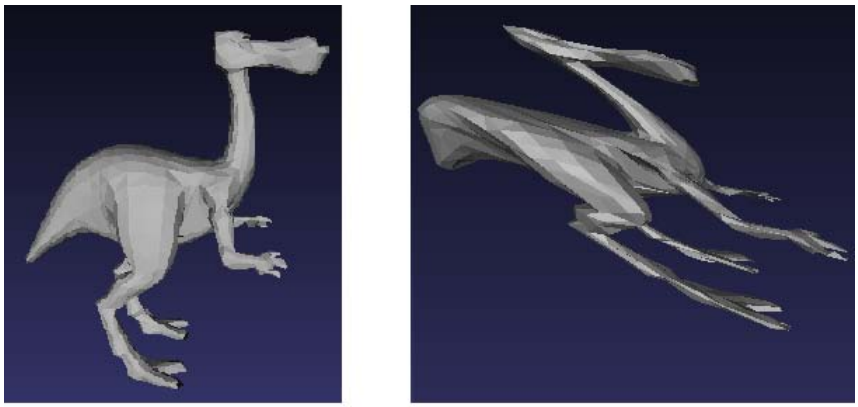
(α) (β)

Σχήμα 2.11: (α) Αρχικό μοντέλο ; Μετασχηματισμός ΤΓΕ με K=16.

2.4.2.5 Εσσιανή Τοπικά Γραμμική Ένθεση (Hessian Locally Linear Embedding)

Ο αλγόριθμος Εσσιανής τοπικά γραμμικής ένθεσης (ΕΤΓΕ) περιγράφεται στο [17] και η υλοποίησή του είναι διαθέσιμη από τους ίδιους τους συγγραφείς του.
Η μέθοδος ΕΤΓΕ προσαρμόζει τα βάρη στην ΤΓΕ ώστε να ελαχιστοποιήσει τον Εσσιανό τελεστή. Όπως και η ΤΓΕ, απαιτεί προσεκτική επιλογή της παραμέτρου K (αριθμός γειτόνων) : αν η παράμετρος K είναι πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή, ενδέχεται η τοπική γεωμετρία να μην ερμηνευθεί σωστά από τον αλγόριθμο. Το βασικό (θεωρητικό) πλεονέκτημα της Εσσιανής ΤΓΕ είναι πως είναι η μόνη μέθοδος σχεδιασμένη για μη-κυρτά σύνολα δεδομένων (αν και ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει σε ορισμένα σύνολα δεδομένων).
Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού φαίνεται στο Σχήμα 2.12. Όπως, μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ο μετασχηματισμός δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, ενώ έχει χειρότερη συμπεριφορά σε μοντέλα με περισσότερες προεξοχές. Ο μετασχηματισμός ΕΤΓΕ δεν διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις και εξαρτάται έντονα από την παράμετρο K. Επιπλέον, δεν ήταν δυνατόν να εφαρμοστεί ορισμός των γειτόνων με βάση την συνεκτικότητα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, λόγω της φύσης του αλγορίθμου που απαιτεί

ένα σταθερό αριθμό γειτόνων για κάθε σημείο [10].
Συμπερασματικά λοιπόν, ο μετασχηματισμός δεν δείχνει να έχει ενδιαφέρον αναφορικά με την κατάτμηση.



(α) (β)

Σχήμα 2.12: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΕΤΓΕ με K=18.

2.4.2.6 Λαπλασιανή Ιδιο-Απεικόνιση (Laplacian Eigenmap)

Ο αλγόριθμος Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης περιγράφεται στο [8] και η υλοποίησή του είναι διαθέσιμη από τους ίδιους τους συγγραφείς του.
Η μέθοδος Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης κατασκευάζει ένα γράφο από τους K κοντινότερους γείτονες, υπολογίζει τα βάρη του ώστε να ελαχιστοποιήσει την νόρμα της βαθμίδας (gradient) ως προς τα ελάχιστα τετράγωνα, και λαμβάνει τα d (d=4) μεγαλύτερα ιδιοδιανύσματα [11]. Αν η παράμετρος K είναι πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή, ενδέχεται η τοπική γεωμετρία να μην ερμηνευθεί σωστά από τον αλγόριθμο.
Η Λαπλασιανές ιδιο-απεικονίσεις έχουν χρησιμοποιηθεί με διάφορες μορφές για τον σκοπό της κατάτμησης [4, 42]. Στα Σχήματα 2.13 , 2.14 φαίνονται παραδείγματα του μετασχηματισμού με K=10 και με γειτνίαση βάσει της συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, ενώ στα σχήματα 2.15, 2.16 απεικονίζονται οι *φασματικές προβολές* [42] των μετασχηματισμών αυτών. Από τα προαναφερθέντα σχήματα μπορούμε να παρατηρήσουμε την παρόμοια

[10] Επειδή υπάρχουν κορυφές που ανήκουν σε ένα μόνο τρίγωνο, ο αριθμός των γειτόνων θα περιοριζόταν σε 2, κάτι το οποίο δεν έχει νόημα.

[11] Επειδή το πρώτο ιδιοδιάνυσμα είναι σταθερό, πρέπει να χρησιμοποιηθούν τα ιδιοδιανύσματα 2-4. Αν χρησιμοποιηθούν τα 1-3 η απεικόνιση θα είναι διδιάστατη.

δομή των παραλλαγών της Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης. Το κεφάλι, τα χέρια και τα πόδια απεικονίζονται σε μεγάλες, διαχωριζόμενες προεξοχές, ενώ η ουρά σε μια μικρή προεξοχή. Τα πίσω πόδια στρέφονται προς τα πάνω και η ουρά προς τα κάτω. Αυτό οφείλεται στην ιδιότητα της Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης να απομακρύνει κατά το δυνατόν τις προεξοχές μεταξύ τους [4].

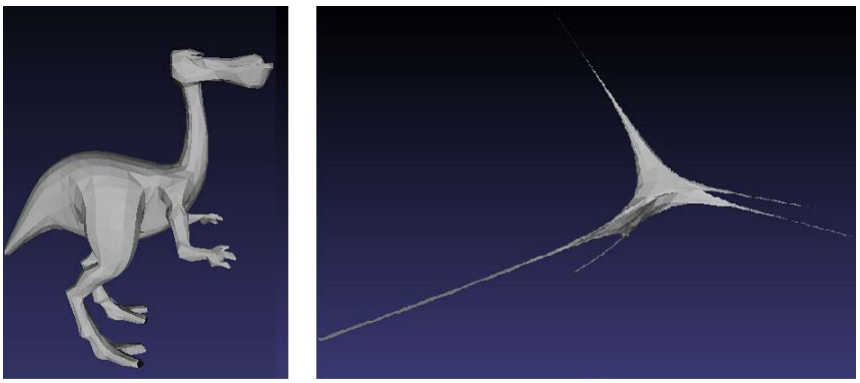
Όμως τα αποτελέσματα δεν είναι το ίδιο καλά για μοντέλα με περισσότερες προεξοχές (πχ ένα έντομο), όπου κάποιες προεξοχές ενώνονται με άλλες. Αυτό είναι ένα εγγενές πρόβλημα των Λαπλασιανών μετασχηματισμών όπως περιγράφεται στο [4] (ο αριθμός των διαστάσεων που απαιτούνται για το διαχωρισμό των προεξοχών ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος σχετίζεται με τον αριθμό των προεξοχών). Αξίζει επίσης να σημειωθεί η κακή συμπεριφορά του αλγορίθμου σε μη-ανθρωποειδή μοντέλα (πχ μια καρέκλα). Τέλος πρέπει να αναφερθεί πως ο μετασχηματισμός του ίδιου μοντέλου σε διαφορετική στάση ενίοτε διαφέρει (και επομένως η απεικόνιση δεν είναι αναλλοίωτη στη στάση).

Ο μετασχηματισμός Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις : προεξοχές που ενώνονταν διαχωρίζονται ενώ άλλες που ήταν διαχωρισμένες ενώνονται, λόγω του περιορισμού απεικόνισης σε τρεις διαστάσεις. Ακόμα, δομές που παρατηρούνται σε χαμηλότερες διαστάσεις, επαναλαμβάνονται σε υψηλότερες. Αξίζει επίσης να σημειωθεί η ευαισθησία του αλγορίθμου στην παράμετρο K.

Συμπερασματικά λοιπόν, ο μετασχηματισμός παρουσιάζει ενδιαφέρον για την κατάτμηση, όμως για μοντέλα με περιορισμένο αριθμό αριθμό προεξοχών όπως τα ανθρωποειδή. Ωστόσο, παραμένει το πρόβλημα επιλογής του κατάλληλου αριθμού γειτόνων K, καθώς δεν υπάρχει μια ενιαία τιμή για την παράμετρο που να παρουσιάζει το ίδιο καλά αποτελέσματα για διαφορετικά μοντέλα, αν και εδώ μπορεί να εφαρμοστεί γειτνίαση βάσει της συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

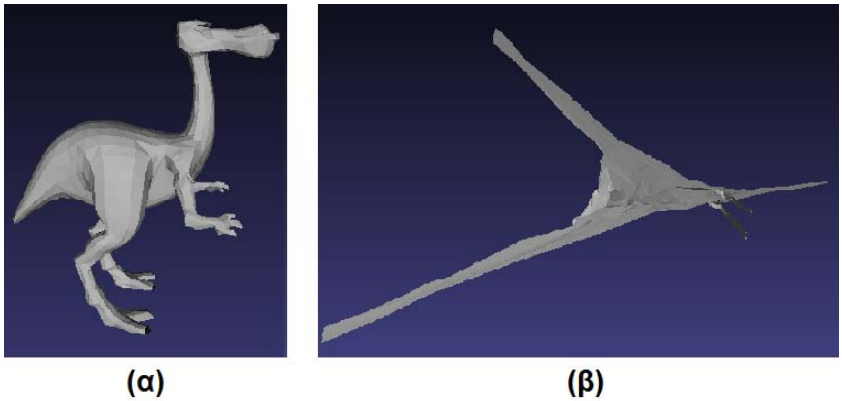
(α) (β)

Σχήμα 2.13: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Λαπλασιανή ιδιο-απεικόνιση με K=10.

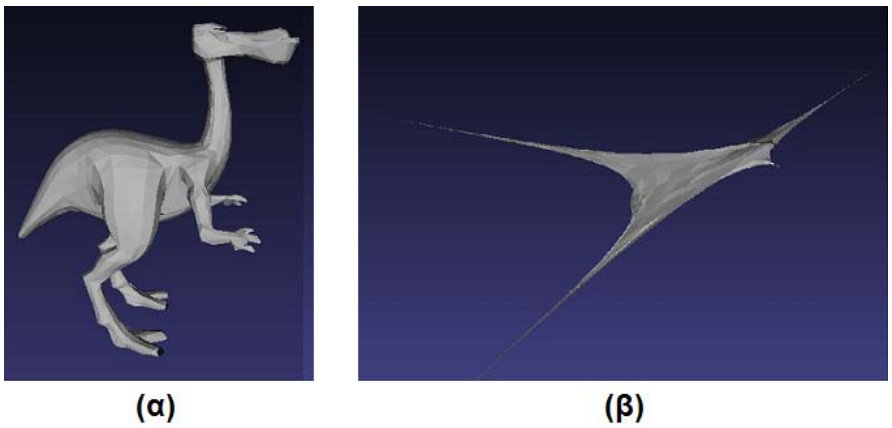


(α) (β)

Σχήμα 2.14: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Λαπλασιανή ιδιο-απεικόνιση με γειτνίαση βάσει της συνεκτικότητας του μοντέλου.



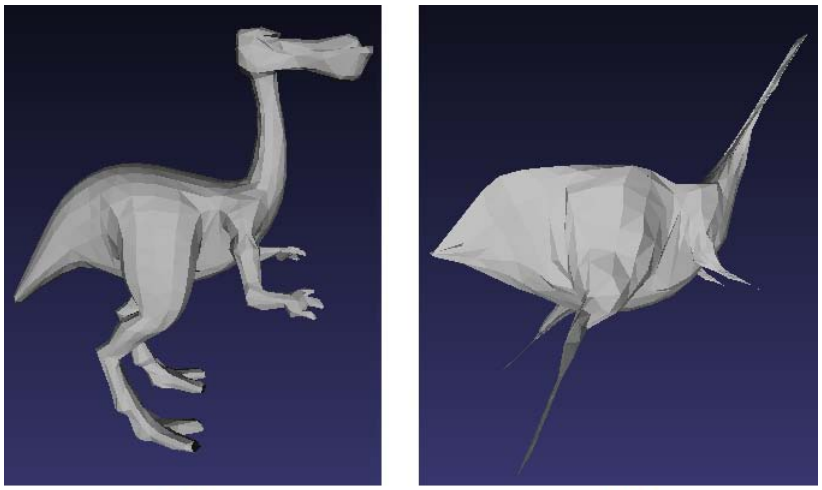
Σχήμα 2.15: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Φασματική προβολή της Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης με K=10.



Σχήμα 2.16: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Φασματική προβολή της Λαπλασιανής ιδιο-απεικόνισης με γειτνίαση βάσει της συνεκτικότητας του μοντέλου.

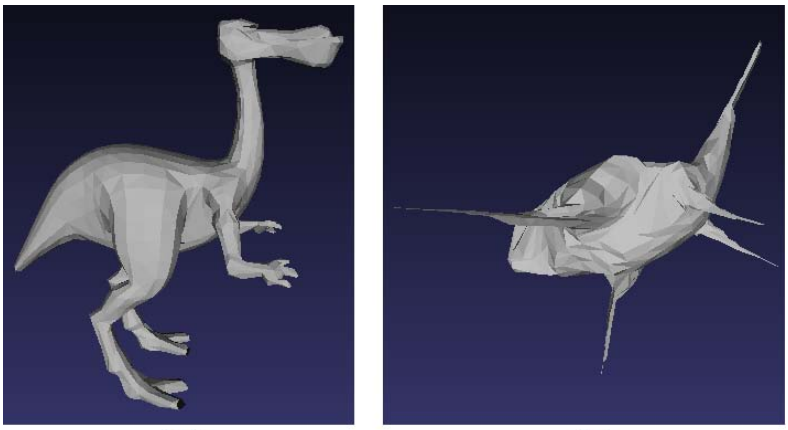
2.4.2.7 Ισομορφική Απεικόνιση (Isomap)

Ο αλγόριθμος ισομορφικής απεικόνισης περιγράφεται στο [62] και η υλοποίησή του είναι διαθέσιμη από τους ίδιους τους συγγραφείς του.
Η μέθοδος ισομορφικής απεικόνισης κατασκευάζει ένα γράφο από τους K κοντινότερους γείτονες και κατόπιν εφαρμόζει *ΠΔΚ*. Αν η παράμετρος K είναι πολύ μεγάλη ή πολύ μικρή, ενδέχεται η τοπική γεωμετρία να μην ερμηνευθεί σωστά από τον αλγόριθμο.
Δύο παραδείγματα του μετασχηματισμού φαίνονται στα Σχήματα 2.17 , 2.18. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, και οι δυο παραλλαγές του μετασχηματισμού (με Ευκλείδιες και *γεωδαιτικές αποστάσεις*) έχουν σχεδόν ταυτόσημη απεικόνιση. Αυτό ισχύει για διάφορα είδη μοντέλων. Μια διαφορά των δύο παραλλαγών που αξίζει να σημειωθεί, είναι πως στην περίπτωση χρήσης γεωδαιτικών αποστάσεων, οι κυρτές περιοχές (πχ ο κορμός του ζώου) τείνουν να γίνουν επίπεδες (συμπιέζονται). Ένα μειονέκτημα του μετασχηματισμού που μπορεί να παρατηρήσει κανείς, είναι το γεγονός πως διάφορα χαρακτηριστικά του μοντέλου (κεφάλι, δάχτυλα, ουρά) σχεδόν εξαφανίζονται.
Ο αλγόριθμος δεν δείχνει να είναι ευαίσθητος στην παράμετρο K (σε ένα εύρος τιμών $10 \leq K \leq 18$) και συνεπώς είναι ευσταθής. Είναι όμως και αρκετά αργός (η ταχύτητα εκτέλεσης εξαρτάται από την παράμετρο K). Πρέπει επίσης να σημειωθεί πως ο αλγόριθμος απέτυχε στην περίπτωση μη-ανθρωποειδούς μοντέλου (καρέκλα). Γενικότερα όμως, είναι προφανές πως η ισομορφική απεικόνιση παρουσιάζει ενδιαφέρον για την κατάτμηση αφού απεικονίζει το εισαγόμενο μοντέλο σε μια μορφή αναλλοίωτη στη στάση. Ο μετασχηματισμός ισομορφικής απεικόνισης δεν διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις.



(α) (β)

Σχήμα 2.17: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Ισομορφική απείκονιση με K=14 (Ευκλείδιες αποστάσεις).

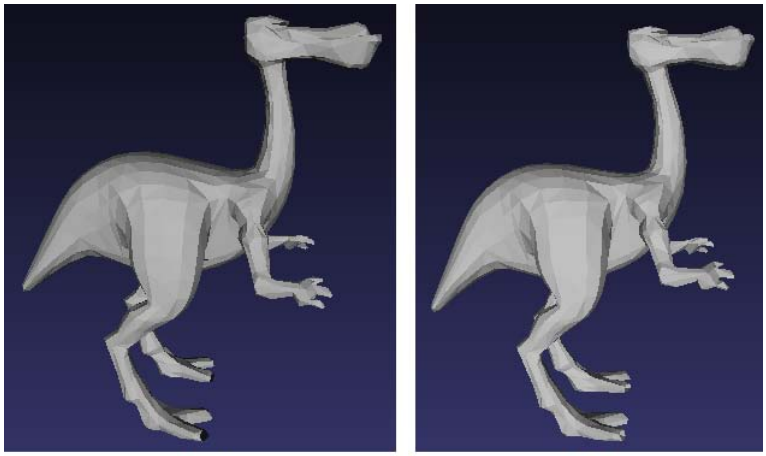


(α) (β)

Σχήμα 2.18: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Ισομορφική απείκονιση με K=14 (*γεωδαιτικές αποστάσεις*).

2.4.2.8 Ταχεία Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση (Fast Multi-Dimensional Scaling)

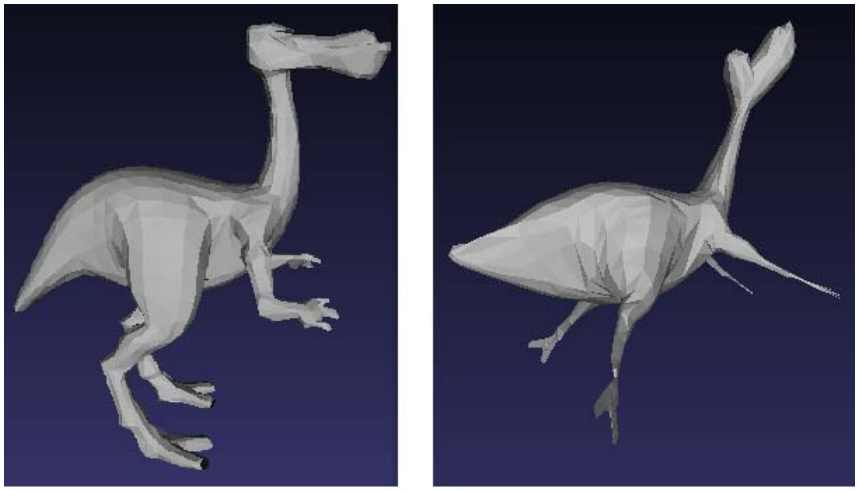
Η μέθοδος ταχείας *ΠΔΚ* εκτελείται επαναληπτικά, συγκλίνοντας σε μια λύση υπό ένα σταθερό ρυθμό εκμάθησης. Η υλοποίησή της έχει γίνει από τον Michael D. Lee [12] και αργότερα βελτιώθηκε από τον Paul Tiesinga. Μια σύντομη περιγραφή του αλγορίθμου μπορεί να βρει κανείς στο [35].
Δύο παραδείγματα της μεθόδου φαίνονται στα Σχήματα 2.19 , 2.20. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, η χρήση Ευκλείδιων αποστάσεων αφήνει το μοντέλο αμετάβλητο. Η χρήση *γεωδαιτικών αποστάσεων* όμως παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς μετασχηματίζει το μοντέλο σε μια μορφή αναλλοίωτη στη στάση. Αξίζει να σημειωθεί πως ο μετασχηματισμός είχε πολύ καλά αποτελέσματα ακόμα και σε μοντέλα (πχ καρέκλα) που άλλες μέθοδοι (ισομορφική απεικόνιση) απέτυχαν. Ακόμα σε αντίθεση με την ισομορφική απεικόνιση, τα διάφορα χαρακτηριστικά του μοντέλου (κεφάλι, δάχτυλα, ουρά) διατηρούνται σε ικανοποιητικό βαθμό. Ο μετασχηματισμός ταχείας ΠΔΚ διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις, χωρίς όμως να είναι χρήσιμη για τους σκοπούς της κατάτμησης.



(α) (β)

Σχήμα 2.19: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ταχείας ΠΔΚ (Ευκλείδιες αποστάσεις).

[12] Η προσωπική σελίδα του Michael D. Lee είναι (http://www.socsci.uci.edu/~mdlee/). Στην σελίδα αυτή είναι διαθέσιμες διάφορες μέθοδοι ΠΔΚ οι οποίες όμως είτε δεν συγκλίνουν είτε είναι πολύ αργές στην εκτέλεσή τους. Όσες ήταν δυνατόν να δοκιμαστούν δεν έδωσαν κάποιο αποτέλεσμα διαφορετικό από αυτά που αναφέρονται στο κείμενο αυτό.

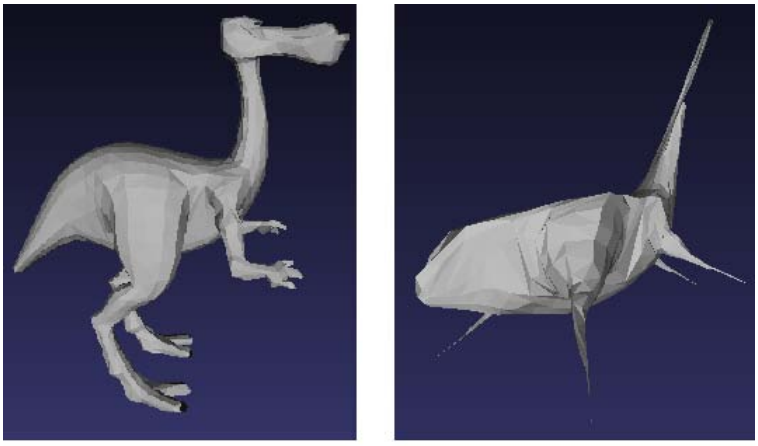


(α) (β)

Σχήμα 2.20: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ταχείας ΠΔΚ (γεωδαιτικές αποστάσεις).

2.4.2.9 Κλασική Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση (Classic Multi-Dimensional Scaling)

Η μέθοδος της κλασικής *ΠΔΚ* περιγράφεται αναλυτικά στα [11, 15]. Η υλοποίησή της είναι πολύ απλή και μπορεί να την βρει κανείς στο [73]. Όπως και στην ταχεία ΠΔΚ, η χρήση Ευκλείδιων αποστάσεων αφήνει το μοντέλο αμετάβλητο. Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού με χρήση *γεωδαιτικών αποστάσεων* φαίνεται στο Σχήμα 2.21. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ο μετασχηματισμός είναι σχεδόν ταυτόσημος με την ισομορφική απεικόνιση (ιδιαίτερα με χρήση γεωδαιτικών αποστάσεων). Έτσι και στην περίπτωση αυτή, τα χαρακτηριστικά του μοντέλου (κεφάλι, δάχτυλα, ουρά) εξαφανίζονται. Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος της κλασικής ΠΔΚ παρουσιάζει ενδιαφέρον, καθώς μετασχηματίζει το μοντέλο σε μια μορφή αναλλοίωτη στη στάση. Αξίζει να σημειωθεί πως ο μετασχηματισμός είχε πολύ καλά αποτελέσματα ακόμα και σε μοντέλα (πχ καρέκλα) που άλλες μέθοδοι (ισομορφική απεικόνιση) απέτυχαν. Ο μετασχηματισμός κλασικής ΠΔΚ διαθέτει δομή σε υψηλότερες διαστάσεις, χωρίς όμως να είναι χρήσιμη για τους σκοπούς της κατάτμησης.



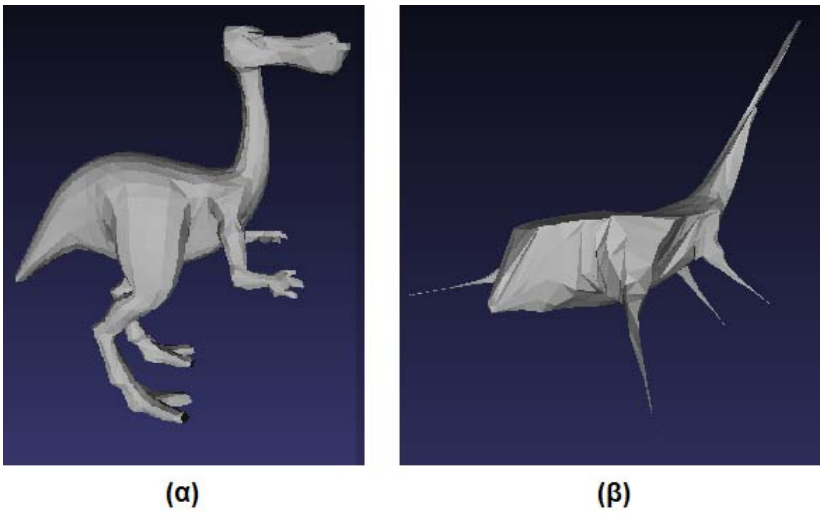
(α) (β)

Σχήμα 2.21: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός κλασικής ΠΔΚ (*γεωδαιτικές αποστάσεις*).

2.4.2.10 Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση Ορόσημων (Landmark Multi-Dimensional Scaling)

Η μέθοδος της *ΠΔΚ* ορόσημων περιγράφεται αναλυτικά στο [16]. Η υλοποίησή της έχει γίνει από τον Gabriel Peyré [13] . Ουσιαστικά αποτελεί μια αποδοτική προσέγγιση της κλασικής ΠΔΚ. Ένα παράδειγμα του μετασχηματισμού φαίνεται στο Σχήμα 2.22. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, ο μετασχηματισμός ΠΔΚ ορόσημων μοιάζει αρκετά με τους μετασχηματισμούς κλασικής ΠΔΚ και ισομορφικής απεικόνισης, εξαφανίζοντας διάφορα χαρακτηριστικά του μοντέλου (κεφάλι, δάχτυλα, ουρά). Παρ' όλα αυτά, η μέθοδος της ΠΔΚ ορόσημων παρουσιάζει ενδιαφέρον, καθώς μετασχηματίζει το μοντέλο σε μια μορφή αναλλοίωτη στη στάση. Αξίζει να σημειωθεί πως ο μετασχηματισμός είχε πολύ καλά αποτελέσματα ακόμα και σε μοντέλα (πχ καρέκλα) που άλλες μέθοδοι (ισομορφική απεικόνιση) απέτυχαν. Ο μετασχηματισμός ΠΔΚ ορόσημων, δεν παρουσιάζει ευαισθησία στον αριθμό των ορόσημων.

[13] Η προσωπική ιστοσελίδα του Gabriel Peyré είναι http://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/.



Σχήμα 2.22: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΠΔΚ ορόσημων με 150 ορόσημα (*γεωδαιτικές αποστάσεις*).

2.4.2.11 Πολυ-Διάστατη Κλιμάκωση Ελαχίστων Τετραγώνων (Least Square Multi-Dimensional Scaling)

Η μέθοδος *ΠΔΚ* ελαχίστων τετραγώνων περιγράφεται αναλυτικά στο [11], ενώ μια σύντομη περιγραφή συνοδευόμενη από μια σύνοψη των μαθηματικών τύπων της μπορεί να βρει κανείς στο [18]. Η μέθοδος αυτή θα περιγραφεί στην επόμενη ενότητα με μεγαλύτερη λεπτομέρεια σε σχέση με τις προηγούμενες, καθώς είναι αυτή που επιλέχθηκε ως η πιο κατάλληλη για τον μετασχηματισμό των 3-Δ μοντέλων σε μια μορφή αναλλοίωτη στη στάση.

2.4.3 Λεπτομέρειες Υλοποίησης[14]

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η μέθοδος για τον μετασχηματισμό των 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων σε μια μορφή αναλλοίωτη στη στάση που τελικά επιλέχθηκε είναι η ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων. Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού αυτού είναι παρόμοιο με αυτό που περιγράφεται στο [30] όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.27, παρόλο που η ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων ανήκει στην μετρική ΠΔΚ, ενώ η ΠΔΚ που περιγράφεται στο [30] ανήκει στην μη-μετρική ΠΔΚ.
Η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων είναι μια καθιερωμένη προσέγγιση βελτιστοποίησης για την επίλυση του προβλήματος ελαχιστοποίησης του κόστους που ορίζεται από την *συνάρτηση stress* (2.2) :

$$Stress(X) = \frac{\sum_{i<j} w_{ij} \left(\delta_{ij} - d_{ij}(X)\right)^2}{\sum_{i<j} \delta_{ij}^2} \tag{2.2}$$

όπου X οι συντεταγμένες του μετασχηματισμένου μοντέλου στον Ευκλείδιο χώρο $\Re^m$ (m=3), δ_{ij} οι *γεωδαιτικές αποστάσεις* (ένα μέτρο ανομοιότητας στη γενική περίπτωση) μεταξύ των σημείων i , j, $d_{ij}(X)$ οι Ευκλείδιες αποστάσεις μεταξύ των σημείων i , j και w_{ij} κάποιοι συντελεστές στάθμισης.
Το πρόβλημα είναι πως δεν υπάρχει απλός τρόπος να εκφράσει κανείς σε κλειστή μορφή την πρώτη παράγωγο αυτού του μη-γραμμικού συναρτησιακού. Μια απλή, ωστόσο ισχυρή στρατηγική ελαχιστοποίησης είναι η αρχή ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης με την μέθοδο *iterative majorization* (επαναληπτική "μειζονοποίηση"). Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται στον αλγόριθμο SAMCOF (Scaling by Maximizing a Convex Function - κλιμάκωση μέσω μεγιστοποίησης μιας κυρτής συνάρτησης) για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης stress. Η βασική ιδέα είναι να φράξει κανείς την συνάρτηση stress $S(X)$ επαναληπτικά με μια απλή συνάρτηση $\hat{S}(X, Z)$, όπου Z είναι μια πιθανή λύση, $\hat{S}(X, Z) \geq S(X)$ για $X \neq Z$ και $\hat{S}(Z, Z) = S(Z)$.
Στη συνέχεια ακολουθεί μια μικρή μαθηματική περιγραφή του αλγορίθμου

[14] Αυτό η υπο-ενότητα έχει βασιστεί εν μέρει στο [18].

SAMCOF.

Ελαχιστοποίηση της *συνάρτησης stress* (2.2) ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση του ακόλουθου συναρτησιακού :

$$S(X) = \sum_{i<j} w_{ij} \left(\delta_{ij} - d_{ij}(X)\right)^2 = \eta_\delta^2 + \eta(X)^2 - 2 \cdot \rho(X) \tag{2.3}$$

όπου :

$$\begin{aligned}
\eta_\delta^2 &= \sum_{i<j} w_{ij} \cdot \delta_{ij}^2 \\
\eta(X)^2 &= \sum_{i<j} w_{ij} \cdot d_{ij}(X)^2 \\
\rho(X) &= \sum_{i<j} w_{ij} \cdot \delta_{ij} \cdot d_{ij}(X) \\
d_{ij}(X) &= \left(\sum_{\alpha=1}^{m} (x_{i\alpha} - x_{j\alpha})^2 \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα *Cauchy-Schwartz* και βασικές αλγεβρικές πράξεις, μπορεί να δειχθεί ότι η συνάρτηση stress φράσσεται από την ακόλουθη τετραγωνική συνάρτηση του X :

$$S(X) \leq \eta_\delta^2 + tr\left(X^T V X\right) - 2tr\left(X^T B(Z) Z\right) = \tau(X, Z)$$

όπου $tr()$ η συνάρτηση *ίχνος πίνακα*.
Τα στοιχεία του πίνακα $B(Z)$ δίνονται από τους τύπους :

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \begin{cases} -\dfrac{w_{ij}\delta_{ij}}{d_{ij}(Z)}, & \text{αν } i \neq j \text{ και } d_{ij}(Z) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } i \neq j \text{ και } d_{ij}(Z) = 0 \end{cases} \\
b_{ii} &= -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} b_{ij}
\end{aligned}$$

Τα στοιχεία του πίνακα V δίνονται από τους τύπους :

$$\begin{aligned}
V_{ij} &= \sum_{i<j} w_{ij} A_{ij} \\
A_{ij} &= (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T
\end{aligned}$$

όπου e_i είναι η i-οστή στήλη του μοναδιαίου πίνακα και συνεπώς ο πίνακας A_{ij} είναι $n \times n$ (όπου n ο αριθμός των κορυφών του μοντέλου).

Το ελάχιστο της συνάρτησης $\tau(X, Z)$ μπορεί να εξαχθεί θέτοντας την παράγωγο του $\tau(X, Z)$ ίση με μηδέν οπότε η ζητούμενη λύση προκύπτει :

$$X_i = V^+ B(Z) Z \tag{2.4}$$

Εδώ, ο πίνακας V^+ είναι ο Moore-Penrose αντίστροφος του πίνακα V. Αποδεικνύεται ότι αν όλα τα βάρη τεθούν ίσα με την μονάδα ($w_{ij} = 1$), τότε η εξίσωση (2.4) γίνεται :

$$X_i = n^{-1} B(Z) Z \tag{2.5}$$

Ο αλγόριθμος SAMCOF για την *ΠΔΚ* ελαχίστων τετραγώνων, μπορεί να συνοψιστεί στα εξής βήματα :

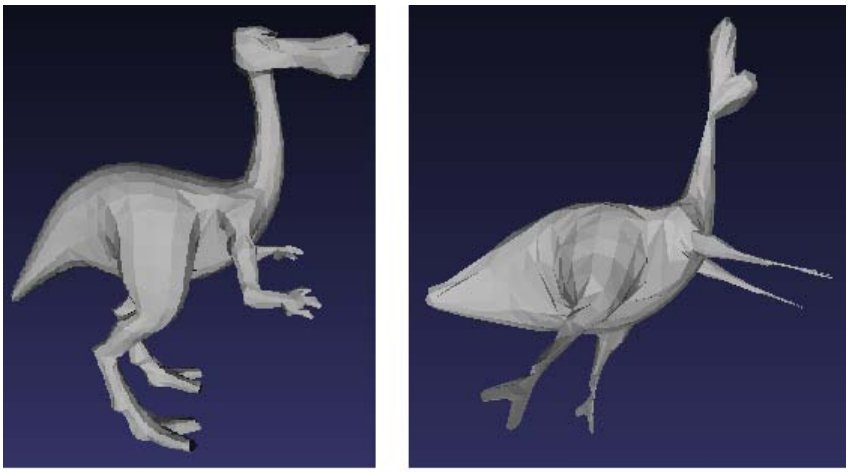
1. Θέτουμε $Z = X_0$ και $i = 0$, όπου X_0 είναι μια (μη) τυχαία αρχική διευθέτηση των σημείων
2. Υπολογίζουμε την *συνάρτηση stress* $S(X_0)$ (εξίσωση (2.3))
3. Θέτουμε $i = i + 1$
4. Υπολογίζουμε την επόμενη λύση X_i με βάση την εξίσωση (2.4) ή (2.5)
5. Αν $S(X_i) - S(X_{i-1}) < \epsilon$, τερματισμός του αλγορίθμου
6. Θέτουμε $Z = X_i$ και πηγαίνουμε στο βήμα 3

Σύμφωνα με το βήμα 1 της παραπάνω σύνοψης του αλγορίθμου SAMCOF, απαιτείται μια αρχική, (μη) τυχαία διευθέτηση των σημείων. Για το σκοπό αυτό μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι μέθοδοι *ΜΓΜΔ*. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις προαναφερθείσες μεθόδους ΜΓΜΔ, κρίθηκε πως οι καταλληλότερες υποψήφιες είναι οι εξής :

- η ισομορφική απεικόνιση
- η ταχεία ΠΔΚ
- η κλασική ΠΔΚ [15]
- η ΠΔΚ ορόσημων

[15] Η κλασική ΠΔΚ χρησιμοποιείται σαν αρχικοποίηση αλγορίθμου ΠΔΚ και στο [30].

Πρέπει να σημειωθεί πως όταν καθεμία από τις παραπάνω μεθόδους, λειτουργεί σωστά, δίνει μια ικανοποιητική αρχική διευθέτηση των σημείων για τον αλγόριθμο SAMCOF. Επιπλέον, αν και οι τέσσερις μέθοδοι δεν έχουν μεταξύ τους ταυτόσημη απεικόνιση, το αποτέλεσμα του αλγορίθμου SAMCOF είναι σχεδόν ταυτόσημο χρησιμοποιώντας οποιαδήποτε από τις αρχικές διευθετήσεις.
Όπως έχει αναφερθεί στα προηγούμενα, η ισομορφική απεικόνιση είναι πιο αργή σε σχέση με τις άλλες μεθόδους και ενίοτε αποτυγχάνει (μοντέλο καρέκλας). Για το λόγο αυτό τελικά απορρίφθηκε.
Ο αλγόριθμος SAMCOF δεν δίνει πάντα το ίδιο αποτέλεσμα (για το ίδιο μοντέλο), ανεξάρτητα από την αρχική διευθέτηση των σημείων. Ενίοτε το μετασχηματισμένο μοντέλο έχει κάποιο μέρος του περιστραμένο ή καθρεπτισμένο. Ένα παράδειγμα αυτής της περιστροφής φαίνεται στο Σχήμα 2.23 όπου το κεφάλι έχει περιστραφεί σε σχέση με την φυσιολογική του θέση (Σχήμα 2.27).



(α) (β)

Σχήμα 2.23: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ.

2.4.4 Παρατηρήσεις

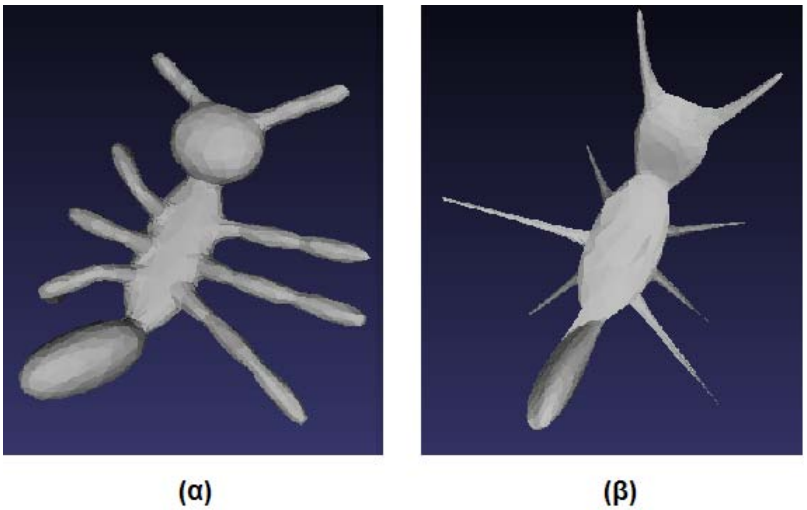
- Στα Σχήματα 2.24, 2.25, 2.26 φαίνονται κάποια αντιπροσωπευτικά μοντέλα και οι μετασχηματισμοί τους. Στο Σχήμα 2.27 φαίνεται μια σύγκριση του μετασχηματισμού *ΠΔΚ* που περιγράφεται στο [30] και του μετασχηματισμού ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων. Όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς, αν και οι μετασχηματισμοί δεν χρησιμοποιούν την ίδια

συνάρτηση stress (εξισώσεις (2.1), (2.2)), είναι σχεδόν ταυτόσημοι.

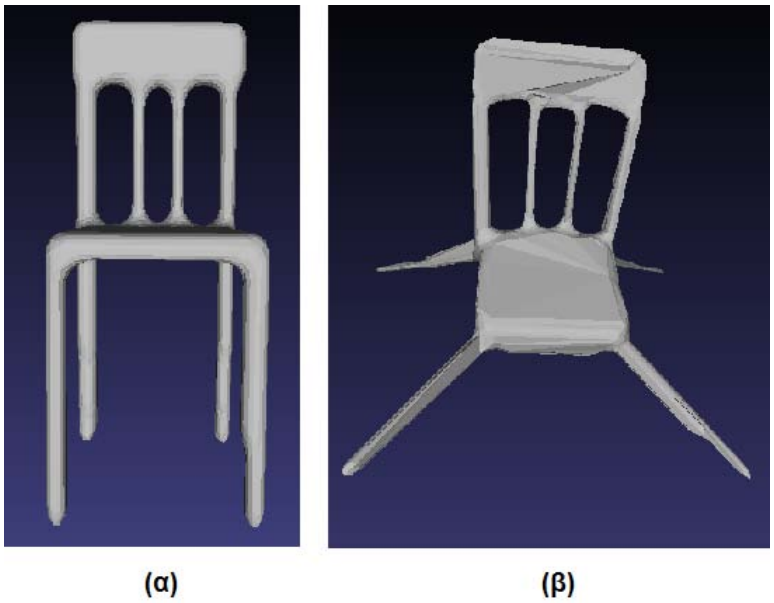
- Στο [18] μπορεί να βρει κανείς μια σύγκριση της κλασικής *ΠΔΚ*, της ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων, και μιας ταχείας ΠΔΚ που περιγράφεται στο [19] (δεν είναι η ταχεία ΠΔΚ που περιγράφηκε στα προηγούμενα). Το συμπέρασμα της σύγκρισης είναι η ανωτερότητα της ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων, και η μεγαλύτερη όμως (χρονική) πολυπλοκότητά της.

(α) (β)

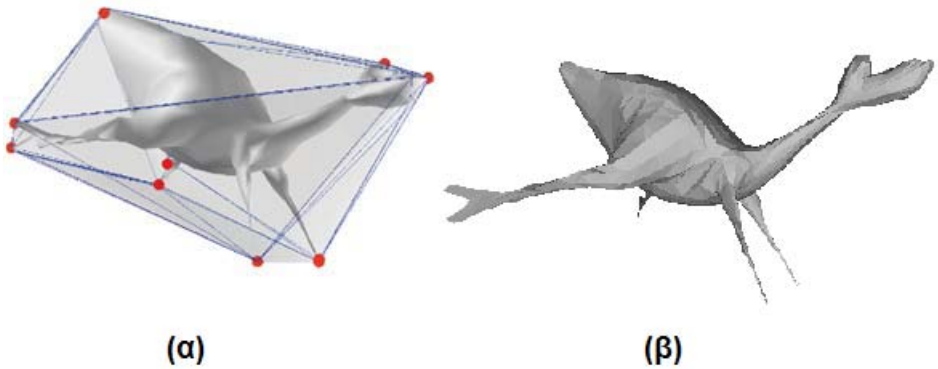
Σχήμα 2.24: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ.



Σχήμα 2.25: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός *ΠΔΚ* ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ.



Σχήμα 2.26: (α) Αρχικό μοντέλο ; (β) Μετασχηματισμός ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ.



Σχήμα 2.27: (α) Μετασχηματισμός *ΠΔΚ* από το [30] ; (β) Μετασχηματισμός ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων με αρχικοποίηση ταχείας ΠΔΚ.

2.5 Εντοπισμός Χαρακτηριστικών Σημείων

Στην ενότητα αυτή ορίζονται τα προεξέχοντα χαρακτηριστικά σημεία και περιγράφεται ένας αλγόριθμος για την εύρεσή τους. Ο προτεινόμενος αλγόριθμος δεν απαιτεί προηγούμενη γνώση σχετικά με τον αριθμό των χαρακτηριστικών σημείων, ούτε άλλες παραμέτρους οριζόμενες από χρήστη.

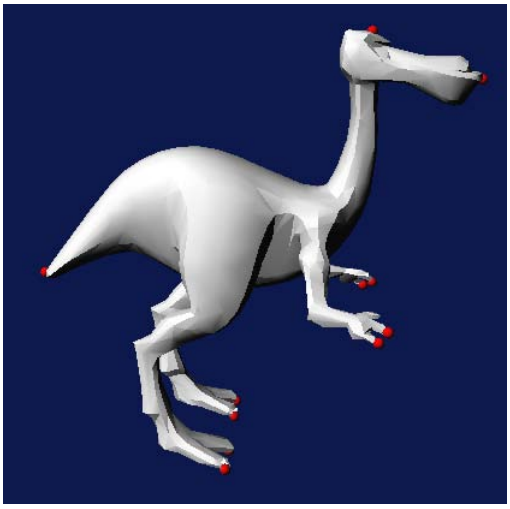
2.5.1 Θεωρητική Περιγραφή

Διαισθητικά, τα χαρακτηριστικά σημεία θα βρίσκονται στις άκρες των προεξεχουσών συνιστωσών ενός δοθέντος μοντέλου. Ένα παράδειγμα εντοπισμού χαρακτηριστικών σημείων φαίνεται στο Σχήμα 2.28. Συγκρίνοντας τα Σχήματα 2.28 και 2.3 (στο Σχήμα 2.3 φαίνονται και τα χαρακτηριστικά σημεία με βάση το [30]) μπορεί να διαπιστώσει κανείς πως ουσιαστικά οι αλγόριθμοι *ΠΔΚ* του [30] και της ΠΔΚ ελαχίστων τετραγώνων δεν διαφέρουν στο αποτέλεσμα, αφού τα χαρακτηριστικά σημεία που τελικά εντοπίζονται είναι ακριβώς τα ίδια.
Σημειώνεται πως τα χαρακτηριστικά σημεία θα πρέπει να είναι αμετάβλητα στη στάση του μοντέλου.

Στον παρόντα αλγόριθμο, τα χαρακτηριστικά σημεία χρησιμοποιούνται τόσο για να εδραιώσουν την θέση των τμημάτων, όσο και για να καθοριστεί αν η διαδικασία κατάτμησης θα πρέπει να τερματιστεί.
Στα [68, 72] τα τοπικά μέγιστα (τοπικά ακραία σημεία) της συνάρτησης μέσης *γεωδαιτικής απόστασης* [25] ορίζουν τα *κρίσιμα σημεία*. Το φιλτράρισμα των σημείων αυτών είναι απαραίτητο, λόγω της παρουσίας πολλών χαρακτηριστικών μικρής κλίμακας, απαιτώντας με τον τρόπο αυτό, ένα κατώφλι οριζόμενο από τον χρήστη.
Στον προτεινόμενο αλγόριθμο, οι οριζόμενες από το χρήστη παράμετροι αποφεύγονται χρησιμοποιώντας μια καθολική και μια τοπική συνθήκη.
Για τον τυπικό ορισμό των κορυφών που βρίσκονται στις άκρες των συνιστωσών του εκάστοτε μοντέλου, απαιτείται οι κορυφές να ικανοποιούν τις συνθήκες που περιγράφονται παρακάτω.
$\forall \upsilon \in S$, έστω N_υ το σύνολο των γειτονικών κορυφών της κορυφής υ. Έστω ακόμα $\Gamma\Delta A\left(\upsilon_i, \upsilon_j\right)$ η γεωδαιτική απόσταση μεταξύ των κορυφών υ_i και υ_j του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος S. Η τοπική συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί ένα χαρακτηριστικό σημείο είναι η ακόλουθη :

$$\sum_{\upsilon_i \in S} \Gamma\Delta A\left(\upsilon, \upsilon_i\right) > \sum_{\upsilon_i \in S} \Gamma\Delta A\left(\upsilon_n, \upsilon_i\right), \forall \upsilon_n \in N_\upsilon \tag{2.6}$$

Με άλλα λόγια, μια κορυφή βρίσκεται στην άκρη μιας συνιστώσας αν είναι



Σχήμα 2.28: Χαρακτηριστικά σημεία.

τοπικό μέγιστο του συναρτησιακού του αθροίσματος της *γεωδαιτικής απόστασης* (ουσιαστικά το συναρτησιακό αυτό είναι η *συνάρτηση προεξοχής*).
Αν και η παραπάνω συνθήκη καταφέρνει να εξάγει ένα σύνολο σημείων το οποίο περιέχει τα προεξέχοντα χαρακτηριστικά σημεία, ενδέχεται να περιέχει επίσης πολλά επιπρόσθετα σημεία, τα οποία δεν είναι προεξέχοντα χαρακτηριστικά σημεία, εξαιτίας της παρουσίας θορύβου. Για το λόγο αυτό, προστίθεται μια καθολική συνθήκη, η οποία φιλτράρει αυτόματα το σύνολο αυτών των σημείων. Πρέπει να σημειωθεί πως στο S_{MDS} οι ακραίες κορυφές, τείνουν να εξέχουν προς μια κατεύθυνση. Αυτό συμβαίνει γιατί ο μετασχηματισμός *ΠΔΚ* "τεντώνει" τις αναδιπλωμένες συνιστώσες ενός μοντέλου. Η παρατήρηση αυτή οδηγεί στην δεύτερη προϋπόθεση : *ένα χαρακτηριστικό σημείο θα πρέπει να κείται στο κυρτό κέλυφος του* S_{MDS}.

Ορισμός 1. *Χαρακτηριστικό σημείο:* Μια κορυφή ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος είναι χαρακτηριστικό σημείο, αν ικανοποιεί την συνθήκη (2.6) και κείται στο κυρτό κέλυφος του S_{MDS}.

Ο παραπάνω ορισμός, αποτελεί ουσιαστικά και έναν αλγόριθμο για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών σημείων των 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων.
Δοθέντος ενός 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος S και της μετασχηματισμένης εκδοχής του S_{MDS}, τα βήματα του αλγορίθμου υπολογισμού των χαρακτηριστικών του σημείων είναι τα εξής :

- υπολογισμός του κυρτού κελύφους του S_{MDS}

- εύρεση των κορυφών του *κυρτού κελύφους* που ικανοποιούν την εξίσωση (2.6)
- απεικόνιση των κορυφών στις αντίστοιχες κορυφές του S

2.5.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης

Για τον υπολογισμό των χαρακτηριστικών σημείων έχει χρησιμοποιηθεί αυτούσιος ο αλγόριθμος που περιγράφηκε στην υπο-ενότητα 2.5.1. Αξίζει ωστόσο να σημειωθούν οι ακόλουθες παρατηρήσεις :

- για τον υπολογισμό του κυρτού κελύφους του S_{MDS} έχει χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση του MATLAB ® convhulln()
- ως γειτονιά μιας κορυφής v έχει χρησιμοποιηθεί η γειτονιά *2-δακτυλίων* (2-ring neighborhood)[16] ώστε να αποφευχθεί η εσφαλμένη ανίχνευση *κουτινών* χαρακτηριστικών σημείων και να καταστεί ο αλγόριθμος πιο εύρωστος
- σε περίπτωση αναδρομικής (ιεραρχικής) κατάτμησης, οι κορυφές των κατατμημένων περιοχών (ήτοι οι τομές του προηγούμενου επιπέδου ιεραρχικής κατάτμησης) αποκλείονται από το σύνολο των (υποψήφιων) χαρακτηριστικών σημείων του τρέχοντος ιεραρχικού επιπέδου, ώστε να αποφευχθεί η υπερκατάτμηση [17]
- κορυφές που ανιχνεύονται από την διαδιακασία εξαγωγής (αρχικού) πυρήνα (ενότητα 2.6) και έχουν ήδη ανιχνευθεί και ως χαρακτηριστικά σημεία αποκλείονται από το σύνολο των χαρακτηριστικών σημείων [18]
- σε περίπτωση μηδενικού αριθμού χαρακτηριστικών σημείων (είτε εξαρχής είτε κατόπιν αποκλεισμού εσφαλμένων χαρακτηριστικών σημείων) προφανώς το τμήμα (3-Δ πολυγωνικό υπο-πλέγμα) θεωρείται μη-κατατμήσιμο και ο αλγόριθμος κατάτμησης τερματίζεται (για τον τρέχοντα κόμβο του ιεραρχικού δέντρου κατάτμησης)

[16] Ως *γειτονιά ενός δακτυλίου* μιας κορυφής v, θεωρούνται οι γειτονικές κορυφές της με βάση την συνεκτικότητα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος (ήτοι τα πολύγωνα του πλέγματος). Ως *γειτονιά 2-δακτυλίων* μιας κορυφής v, θεωρείται η ένωση των εξής δύο συνόλων κορυφών : των γειτόνων ενός δακτυλίου v_n της κορυφής v και της γειτονιάς ενός δακτυλίου των κορυφών v_n.

[17] Αυτό αποτελεί μια προσθήκη στον αλγόριθμο για την ανίχνευση χαρακτηριστικών που περιγράφεται στο [30].

[18] Αυτό αποτελεί μια προσθήκη στον αλγόριθμο για την ανίχνευση χαρακτηριστικών που περιγράφεται στο [30] η οποία εφαρμόστηκε για τον αποκλεισμό εσφαλμένων χαρακτηριστικών σημείων.

2.5.3 Παρατηρήσεις

Λόγω του τρόπου με τον οποίο ανιχνεύονται τα χαρακτηριστικά σημεία (μέσω του *κυρτού κελύφους* του S_{MDS}), για ένα δεδομένο επίπεδο ιεραρχίας, δεν εντοπίζονται κάποια *κοντινά* χαρακτηριστικά σημεία μικρότερης κλίμακας που αντιστοιχούν σε ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας (πχ όλα τα δάκτυλα σε ένα χέρι όταν έχουμε σαν είσοδο ένα ανθρωποειδές μοντέλο). Το γεγονός αυτό όμως, βοηθά στην ιεραρχική κατάτμηση : στο πρώτο επίπεδο ιεραρχίας (πχ σε ένα ανθρωποειδές μοντέλο) ως ξεχωριστό μέρος κατατμείται ολόκληρο το χέρι και σε επόμενα επίπεδα ιεραρχίας διαχωρίζονται τα δάκτυλα ως ξεχωριστά μέρη. Ουσιαστικά με τον τρόπο αυτό ανιχνεύονται χαρακτηριστικά σημεία παρόμοιας κλίμακας (αντίστοιχης με το ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης).

2.6 Εξαγωγή Συνιστώσας Πυρήνα

Μόλις εξαχθούν τα χαρακτηριστικά σημεία του 3-Δ πολυγωνικού πλέγμα τος, χρησιμοποιούνται για να καθοδηγήσουν την κατάτμηση. Το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα κατατμείται στην συνιστώσα πυρήνα και στις προεξέχουσες συνιστώσες του. Κάθε προεξέχουσα συνιστώσα ορίζεται από ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά σημεία.
Ο αλγόριθμος κατάτμησης αποτελείται από τρία βασικά βήματα :

- σφαιρικός καθρεφτισμός του S_{MDS} - εξαγωγή αρχικής συνιστώσας πυρήνα του S
- επέκταση της αρχικής συνιστώσας πυρήνα του S - εξαγωγή της τελικής συνιστώσας πυρήνα του S
- εξαγωγή των υπόλοιπων τμημάτων του S

Τα παραπάνω βήματα περιγράφονται λεπτομερώς στη συνέχεια.

2.6.1 Θεωρητική Περιγραφή

2.6.1.1 Σφαιρικός Καθρεφτισμός (Εξαγωγή Αρχικής Συνιστώσας Πυρήνα)

Όπως έχει ήδη σημειωθεί, τα προεξέχοντα χαρακτηριστικά σημεία του S_{MDS} τείνουν να είναι ακραία σε κάποια κατεύθυνση, ενώ οι κορυφές της συνιστώσας πυρήνα τείνουν να είναι πιο κοντά στο κέντρο του S_{MDS} (Σχήμα 2.3). Αξίζει να σημειωθεί πως αυτό ισχύει τόσο όταν τα χαρακτηριστικά

σημεία βρίσκονται σε κυρτές περιοχές στο αρχικό μοντέλο S (πχ τα δάκτυλα σε ένα ανθρωποειδές μοντέλο), όσο και όταν τα χαρακτηριστικά σημεία βρίσκονται σε κοίλες περιοχές στο αρχικό μοντέλο S (πχ τα μάτια σε ένα ανθρωποειδές μοντέλο).
Ο σφαιρικός καθρεφτισμός στοχεύει στο να αντιστρέψει αυτή την κατάσταση, ούτως ώστε οι κορυφές του πυρήνα να καταστούν εξωτερικές και να μπορούν να εξαχθούν εύκολα. Για το σκοπό αυτό, υπολογίζεται μια περιβάλλουσα σφαίρα και οι κορυφές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος S_{MDS} "καθρεφτίζονται".
Έστω C και R (θα οριστούν παρακάτω), το κέντρο και η ακτίνα της περιβάλλουσας σφαίρας (η οποία δεν είναι απαραίτητο να είναι η ελάχιστη περιβάλλουσα σφαίρα). Χρησιμοποιώντας την σφαίρα σαν καθρέφτη, κάθε κορυφή v μετασχηματίζεται στην εικόνα της έξω από την σφαίρα, σύμφωνα με την ακόλουθη εξίσωση :

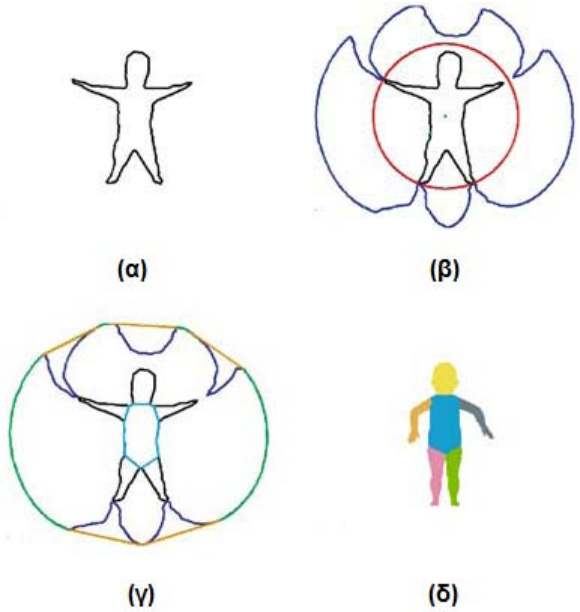
$$v_{mirror} = v + 2 \cdot (R - \|v - C\|) \cdot \frac{(v - C)}{\|v - C\|} \tag{2.7}$$

Με αυτόν τον τρόπο, η εικόνα των κορυφών του πυρήνα κείται στο *κυρτό κέλυφος* των καθρεφτισμένων κορυφών, ενώ οι κορυφές των χαρακτηριστικών σημείων καθίστανται εσωτερικές (του κυρτού κελύφους).
Η διαδικασία απεικονίζεται σε 2-Δ στο Σχήμα 2.29. Τα καθρεφτισμένα άκρα και το κεφάλι είναι πιο κοντά στο κέντρο, ενώ ο καθρεφτισμένος πυρήνας του αντικειμένου κείται στο κυρτό κέλυφος.
Απομένει προς αποσαφήνιση ο υπολογισμός των C και R. Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να υπολογίσει κανείς το κέντρο C. Στον παρόντα αλγόριθμο το κέντρο C προσεγγίζεται *στο πρώτο επίπεδο ιεραρχίας* με το κέντρο μάζας ενός υποσυνόλου των κορυφών του S_{MDS}, οι οποίες πληρούν δύο προϋποθέσεις :

- *κάθε κορυφή σε αυτό το υποσύνολο θα πρέπει να βρίσκεται μακριά από όλα τα χαρακτηριστικά σημεία*
- *για κάθε κορυφή αυτού του υποσυνόλου, ο λόγος μεταξύ της μέγιστης απόστασης και της ελάχιστης απόστασης από τα χαρακτηριστικά σημεία πρέπει να είναι μικρός*

Με τον τρόπο αυτό, το υπολογιζόμενο κέντρο C βρίσκεται σχεδόν πάντα στο εσωτερικό της συνιστώσας πυρήνα του S_{MDS}.
Στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας, το C υπολογίζεται ως το κέντρο της τομής μεταξύ του προς κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικού υποπλέγματος και του πυρήνα του γονικού κόμβου (στο δέντρο της ιεραρχικής κατάτμησης - ενότητα 2.1).
Η ακτίνα R της περιβάλλουσας σφαίρας υπολογίζεται μετρώντας την μέγιστη

απόσταση του κέντρου C από τις κορυφές του S_{MDS} : $R = \max_{v} \|v - C\|$.
Στο Σχήμα 2.30 απεικονίζονται τα αποτελέσματα του σφαιρικού καθρεφτισμού σε διάφορα 3-Δ πολυγωνικά πλέγματα.



Σχήμα 2.29: Βήματα σφαιρικού καθρεφτισμού (εξαγωγή αρχικού πυρήνα) σε 2-Δ. (α) ένα σχήμα στο χώρο *ΠΔΚ* (S_{MDS}) ; (β) σφαιρικός καθρεφτισμός : ο κόκκινος κύκλος είναι η περιβάλλουσα σφαίρα. Η μπλε καμπύλη είναι το καθρεφτισμένο σχήμα ; (γ) *κυρτό κέλυφος* του καθρεφτισμένου σχήματος με πράσινο και πορτοκαλί χρώμα. Οι πράσινες καμπύλες είναι τα μέρη της καθρεφτισμένης εικόνας που κείνται στο κυρτό κέλυφος και η κυανή καμπύλη είναι ο πυρήνας ; (δ) ο πυρήνας απεικονισμένος στο S, με κυανό χρώμα. Τα χρώματα αντιπροσωπεύουν συνεκτικές συνιστώσες που δημιουργούνται αφαιρώντας τον πυρήνα ; (από το [30]).

Σχήμα 2.30: Σφαιρικοί καθρεφτισμοί σε 3-Δ (από το [30]).

2.6.1.2 Επέκταση Της Αρχικής Συνιστώσας Πυρήνα (Εξαγωγή Τελικής Συνιστώσας Πυρήνα)

Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη υπο-ενότητα, για την εξαγωγή της αρχικής συνιστώσας πυρήνα, απαιτείται ο υπολογισμός του *κυρτού κελύφους* των καθρεφτισμένων κορυφών. Οι κορυφές που κείνται στο κυρτό κέλυφος, μαζί με τις έδρες (τρίγωνα) που ορίζουν στο S, θεωρούνται η αρχική συνιστώσα πυρήνα. Στις περισσότερες περιπτώσεις, ο αρχικός πυρήνας διαχωρίζει τα χαρακτηριστικά (Σχήμα 2.29). Όταν αυτό δεν ισχύει, η συνιστώσα πυρήνα *επεκτείνεται*.
Η *επέκταση πυρήνα* είναι μια επαναληπτική διαδικασία πρόσθεσης γειτονικών εδρών στον τρέχοντα πυρήνα, μέχρι να ικανοποιηθεί μια εκ των ακολούθων δύο συνθηκών :

- ο τρέχων πυρήνας να διαχωρίσει όλα τα χαρακτηριστικά σημεία, δημιουργώντας έτσι μη-συνεκτικές συνιστώσες οι οποίες ορίζουν τα τμήματα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.3
- η επέκταση πυρήνα να μειώσει την απόσταση του (αρχικού) πυρήνα από το κοντινότερο χαρακτηριστικό σημείο περισσότερο από ένα σταθερό παράγοντα (0.5)

Η δεύτερη συνθήκη ικανοποιείται όταν λιγοστά χαρακτηριστικά σημεία βρίσκονται κοντά μεταξύ τους και συνεπώς δεν μπορούν (και δεν πρέπει) να διαχωριστούν από τον πυρήνα, όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 2.3, όπου κάθε πόδι περιέχει δύο χαρακτηριστικά σημεία.
Στην περίπτωση αυτή, ο αλγόριθμος οπισθοχωρεί στην κατάσταση κατά την οποία έλαβε χώρα ο τελευταίος διαχωρισμός χαρακτηριστικών σημείων και η διαδικασία επέκτασης πυρήνα τερματίζεται. Αυτή η οπισθοχώρηση έχει σαν αποτέλεσμα την συσταδοποίηση χαρακτηριστικών σημείων που αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικά μικρότερης κλίμακας. Αυτά τα χαρακτηριστικά δεν θεωρούνται προεξέχοντα στο τρέχον επίπεδο ιεραρχίας. Για παράδειγμα στο

Σχήμα 2.3, στο πρώτο επίπεδο ιεραρχίας, τα πόδια του ζώου περιέχουν δύο χαρακτηριστικά σημεία (στα δάκτυλα). Ωστόσο, η οπισθοχώρηση έχει σαν αποτέλεσμα την εξαγωγή ολόκληρων των ποδιών σαν μια μεμονωμένες συνιστώσες. Τα δάκτυλα (ως μεμονωμένες συνιστώσες) εξάγονται σε ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας.

2.6.1.3 Εξαγωγή Υπόλοιπων Τμημάτων

Μόλις εξαχθεί η συνιστώσα πυρήνα, τα υπόλοιπα τμήματα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος εξάγονται με "αφαίρεση" της συνιστώσας πυρήνα από το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα (Σχήμα 2.29). Η αφαίρεση αυτή, πραγματοποιείται διασχίζοντας το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα με *BFS*, η οποία ξεκινά από τα χαρακτηριστικά σημεία, και κατατμεί το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα σε συνεκτικές συνιστώσες.
Μια συνεκτική συνιστώσα η οποία περιέχει τουλάχιστον ένα χαρακτηριστικό σημείο, θεωρείται ένα τμήμα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Μια συνεκτική συνιστώσα η οποία δεν περιέχει κανένα χαρακτηριστικό σημείο, ενώνεται με την συνιστώσα πυρήνα.

2.6.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης

- Για τον υπολογισμό του κέντρου C της περιβάλλουσας σφαίρας, ακολουθείται η εξής διαδικασία. Για κάθε κορυφή του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος v_i, αποθηκεύεται η ελάχιστη απόσταση d^i_{min} και ο λόγος της μέγιστης προς την ελάχιστη απόσταση $r_i = \dfrac{d^i_{max}}{d^i_{min}}$ από τα χαρακτηριστικά σημεία. Ακόμα, αποθηκεύονται οι τιμές :

$$
\begin{aligned}
min_d &= \min_i \left\{d^i_{min}\right\} \\
max_d &= \max_i \left\{d^i_{min}\right\} \\
min_r &= \min_i \left\{r_i\right\} \\
max_r &= \max_i \left\{r_i\right\}
\end{aligned}
$$

  Ο χρήστης δίνει σαν είσοδο δύο ποσοστά P_d, P_r για τα d^i_{min}, r_i αντίστοιχα, τα οποία μετατρέπονται στα κατώφλια T_d, T_r , βάσει των τύπων :

$$
\begin{aligned}
T_d &= min_d + (max_d - min_d) \cdot P_d \\
T_r &= min_r + (max_r - min_r) \cdot P_r
\end{aligned}
$$

Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιεί μια κορυφή του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος v_i, για να χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του κέντρου C της περιβάλλουσας σφαίρας είναι οι ακόλουθες :

$$d^i_{min} > T_d$$
$$r_i < T_r$$

Τα παραπάνω εφαρμόζονται για το πρώτο ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης. Για τα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας, το κέντρο C υπολογίζεται ως το κέντρο μάζας των κορυφών που αποτελούν την τομή μεταξύ του προς κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικού υπο-πλέγματος και του πυρήνα του γονικού κόμβου (στο δέντρο της ιεραρχικής κατάτμησης - ενότητα 2.1).

- Για τον υπολογισμό του *κυρτού κελύφους* του "καθρεφτισμένου" S_{MDS} έχει χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση του MATLAB ® convhulln().

- Μόλις εξαχθούν οι κορυφές της αρχικής συνιστώσας πυρήνα, υπολογίζονται και οι έδρες (τρίγωνα) που της αντιστοιχούν. Για να ανήκει ένα τρίγωνο στην αρχική συνιστώσα πυρήνα, θα πρέπει και οι τρεις κορυφές του να ανήκουν σε αυτήν. Στην συνέχεια, υπολογίζεται ένας τροποποιημένος *δυϊκός γράφος* (ενότητα 1.2), στον οποίο δύο τρίγωνα συνδέονται, εφόσον συνδέονται στον κανονικό δυϊκό γράφο και επιπλέον ανήκουν και τα δύο στην αρχική συνιστώσα πυρήνα. Κατόπιν, ο τροποποιημένος δυϊκός γράφος διασχίζεται με *BFS* και λαμβάνεται ως αρχική συνιστώσα πυρήνα η μεγαλύτερη συνεκτική συνιστώσα του τροποποιημένου δυϊκού γράφου.

- Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην υπο-ενότητα 2.5.2, σε περίπτωση που κάποια χαρακτηριστικά σημεία ανήκουν στην αρχική συνιστώσα πυρήνα, προφανώς αποκλείονται από το σύνολο χαρακτηριστικών σημείων (θεωρούνται εσφαλμένα χαρακτηριστικά σημεία). Σε περίπτωση μηδενισμού του αριθμού των χαρακτηριστικών σημείων, το τρέχον 3-Δ πολυγωνικό υπο-πλέγμα θεωρείται μη-κατατμήσιμο και η διαδικασία τερματίζεται (για τον τρέχοντα κόμβο του ιεραρχικού δέντρου κατάτμησης).

- Στα Σχήματα 2.31, 2.32 φαίνονται δυο παραδείγματα εξαγωγής της αρχικής συνιστώσας πυρήνα. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, στο Σχήμα 2.31, η αρχική συνιστώσα πυρήνα εξάγεται ικανοποιητικά, ενώ στο Σχήμα 2.32 (εικόνα α) το αποτέλεσμα δεν είναι καθόλου καλό (ως

αρχικός πυρήνας έχει εξαχθεί μόνο το κάτω μέρος του καθίσματος της καρέκλας και όχι το πάνω) και αποτελεί βασική αιτία για ένα κακό αποτέλεσμα κατάτμησης [19].
Σαν λύση στο πρόβλημα αυτό, δοκιμάστηκε ένας εναλλακτικός τρόπος για την εξαγωγή της αρχικής συνιστώσας πυρήνα : *ο κβαντισμός της συνάρτησης προεξοχής* (ενότητα 1.2) [3, 25]. Σε αδρές γραμμές, η διαδικασία που ακολουθείται είναι η εξής. Οι τιμές της συνάρτησης προεξοχής πολλαπλασιάζονται με ένα σταθερό συντελεστή ώστε να αυξηθεί η μεταξύ τους διακριτότητα. Το διάστημα τιμών μεταξύ της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής της συνάρτησης προεξοχής, κβαντίζεται σε ένα αριθμό σταθμών που δίνεται από το χρήστη ως παράμετρος (έχουν επιλεχθεί 5 στάθμες). Οι κορυφές του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος που ανήκουν στην πρώτη στάθμη κβάντισης (αυτή με την μικρότερη τιμή) αποτελούν την αρχική συνιστώσα πυρήνα. Προφανώς, όσο αυξάνεται ο αριθμός των σταθμών, τόσο μικρότερη θα είναι η αρχική συνιστώσα πυρήνα. Η μέθοδος αυτή δεν έχει πάντα καλύτερα αποτελέσματα από αυτή που περιγράφεται στο [30], όμως παρουσιάζει μεγαλύτερη ευστάθεια και ευρωστία.
Στο Σχήμα 2.32 (δεξιά) φαίνεται ένα παράδειγμα εξαγωγής της αρχικής συνιστώσας πυρήνα με την εναλλακτική αυτή μέθοδο. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, σαν αρχικός πυρήνας έχει εξαχθεί τμήμα τόσο του πάνω όσο και του κάτω μέρους της καρέκλας. Αυτός είναι ένας ικανοποιητικός αρχικός πυρήνας, ο οποίος θα πάρει την τελική μορφή του με την διαδικασία της επέκτασης πυρήνα.
Πρέπει να τονισθεί πως ο κβαντισμός της συνάρτησης προεξοχής σαν διαδικασία εξαγωγής της αρχικής συνιστώσας πυρήνα, έχει νόημα μόνο για το πρώτο ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης (στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας παύει να έχει νόημα η συνάρτηση προεξοχής).

- Για την επέκταση αρχικού πυρήνα χρησιμοποιείται η ακόλουθη διαδικασία. Για κάθε χαρακτηριστικό σημείο $\mathit{X\Sigma}_j$ υπολογίζεται η κοντινότερη (γεωδαιτικά) κορυφή του αρχικού πυρήνα υ_j^{min}. Στη συνέχεια για κάθε κορυφή υ_i που *δεν ανήκει στον αρχικό πυρήνα*, εξετάζεται αν ικανοποιεί την συνθήκη : $\underset{j}{min}\left\{\mathit{\Gamma\Delta A}\left(\upsilon_i, \mathit{X\Sigma}_j\right)\right\} < K \cdot \mathit{\Gamma\Delta A}\left(\mathit{X\Sigma}_j, \upsilon_j^{min}\right)$, όπου $\mathit{\Gamma\Delta A}()$ η συνάρτηση *γεωδαιτικής απόστασης* και K ένα κατώφλι το οποίο σύμφωνα με το [30] τίθεται ίσο με 0.5 . Οι κορυφές που ικανοποιούν

[19] Η αρχική συνιστώσα πυρήνα είναι καθοριστική για το αποτέλεσμα της κατάτμησης καθώς η διαδικασία επέκτασης πυρήνα δεν είναι συνήθως σε θέση να διορθώσει ικανοποιητικά ένα κακό αρχικό πυρήνα.

την παραπάνω συνθήκη ορίζουν ένα σύνολο κορυφών B οι οποίες αν επιλεχθούν κατά την επέκταση πυρήνα, θα σημάνουν το τέλος της διαδικασίας αυτής.
Σε περίπτωση λοιπόν, *μη-διαχωρισμού των χαρακτηριστικών σημείων από τον αρχικό πυρήνα*, εφαρμόζεται η διαδικασία επέκτασης πυρήνα. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τα εξής βήματα :

1. προσθήκη της γειτονιάς 1-δακτυλίου [20] των κορυφών του τρέχοντος πυρήνα στη συνιστώσα πυρήνα
2. σε περίπτωση που κάποια από τις προστιθέμενες κορυφές ανήκει στο σύνολο B η διαδικασία επέκτασης πυρήνα τερματίζεται, και σε περίπτωση μη-διαχωρισμού των χαρακτηριστικών σημείων εφαρμόζεται οπισθοχώρηση (backtracking) στην κατάσταση του πυρήνα κατά την οποία συνέβη ο τελευταίος διαχωρισμός χαρακτηριστικών σημείων
3. αν ο τρέχων πυρήνας διαχωρίζει τα χαρακτηριστικά σημεία, η διαδικασία επέκτασης τερματίζεται χωρίς οπισθοχώρηση

Για την διευρένηση του κατά πόσο ο πυρήνας διαχωρίζει τα χαρακτηριστικά σημεία (και για την εξαγωγή των μη-εκλεπτυσμένων συνιστωσών), ακολουθείται η εξής διαδικασία. Κατασκευάζεται ένας τροποποιημένος *πίνακας γειτνίασης* (με βάση την συνεκτικότητα των κορυφών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος), στον οποίο διαγράφονται οι συνδέσεις των κορυφών που ανήκουν στην συνιστώσα πυρήνα. Στη συνέχεια, ο γράφος που περιγράφεται από τον τροποποιημένο αυτό πίνακα, διασχίζεται με *BFS* ξεκινώντας από τα χαρακτηριστικά σημεία. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτουν συνεκτικές συνιστώσες του γράφου οι οποίες αντιστοιχούν στα τμήματα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος αν αφαιρέσουμε τον πυρήνα. Κάθε συνιστώσα περιέχει ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά σημεία. Αν μια συνιστώσα δεν περιέχει χαρακτηριστικά σημεία, ενώνεται με τον πυρήνα. Αν κάθε συνεκτική συνιστώσα περιέχει ένα χαρακτηριστικό σημείο, τότε αυτό σημαίνει πως ο πυρήνας διαχωρίζει τα χαρακτηριστικά σημεία.

- Σε ένα 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, είτε είναι απλοποιημένο είτε όχι, η κατανομή των πολυγώνων δεν είναι ομοιόμορφη (ανάλογα με την μορφολογία της περιοχής αλλού υπάρχουν πολλά τρίγωνα μικρής επιφάνειας και αλλού λίγα μεγάλης επιφάνειας). Το γεγονός αυτό φέρνει στην

[20] *Ως γειτονιά ενός δακτυλίου* μιας κορυφής v, θεωρούνται οι γειτονικές κορυφές της με βάση την συνεκτικότητα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος (ήτοι τα πολύγωνα του 3-Δ πλέγματος).

επιφάνεια μια αδυναμία του αλγορίθμου επέκτασης πυρήνα που περιγράφεται στο [30]. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο αυτό, ο τερματισμός της επέκτασης πυρήνα είναι καθολικός, με αποτέλεσμα τον ενδεχόμενο μη-διαχωρισμό συνιστωσών όταν η διαδικασία επέκτασης πυρήνα τερματισθεί "πρώιμα" (πχ σε ένα ανθρωποειδές μοντέλο, τον μη-διαχωρισμό των ποδιών λόγω του τερματισμού της επέκτασης πυρήνα από μια κορυφή στο λαιμό του μοντέλου). Η μη-ομοιόμορφη κατανομή πολυγώνων στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα μπορεί να οδηγήσει σε ένα τέτοιο "πρώιμο" τερματισμό της διαδικασίας επέκτασης πυρήνα.
Για την επίλυση αυτού του προβήματος, δοκιμάστηκαν δύο τροποποιήσεις του πρωτότυπου αλγορίθμου για την επέκταση πυρήνα :

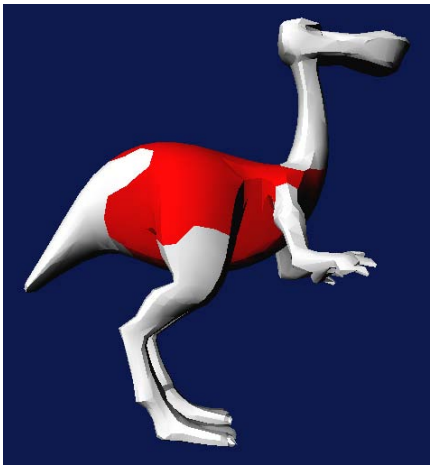
1. *επέκταση πυρήνα με μη-καθολικό τερματισμό* : Ο αλγόριθμος αυτός διαφοροποιείται από τον πρωτότυπο στο εξής. Σε περίπτωση που κάποια από τις (υποψήφιες) προστιθέμενες κορυφές ανήκει στο σύνολο B (βλέπε προηγούμενη παρατήρηση) η διαδικασία επέκτασης πυρήνα δεν τερματίζεται, απλώς δεν προστίθεται η συγκεκριμένη κορυφή στην συνιστώσα πυρήνα. Η διαδικασία συνεχίζεται εφόσον υπάρχουν γειτονικές κορυφές της τρέχουσας συνιστώσας πυρήνα που να μην ανήκουν στο σύνολο B.
2. *μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα* : Ο αλγόριθμος αυτός διαφοροποιείται από αυτόν της επέκτασης πυρήνα με μη-καθολικό τερματισμό στο εξής. Αντί να εφαρμόζεται ενιαία σε όλες τις περιοχές του αρχικού πυρήνα, εφαρμόζεται κατά τμήμα, ήτοι, κάθε σύνορο του αρχικού πυρήνα με κάποιο τμήμα επεκτείνεται (και ενδεχομένως οπισθοχωρεί) ξεχωριστά.

Αξίζει να σημειωθεί πως οι προαναφερθείσες μέθοδοι επέκτασης πυρήνα δεν διαφέρουν σημαντικά στα αποτελέσματα. Είναι προτιμότερη όμως η μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα. Πρέπει επίσης να τονισθεί πως το *καθοριστικό στοιχείο* για την εξαγωγή μιας ποιοτικής συνιστώσας πυρήνα είναι ένας *ικανοποιητικός αρχικός πυρήνας*. Η διαδικασία επέκτασης πυρήνα (σε οποιαδήποτε από τις προαναφερθείσες εκδοχές της) παίζει δευτερεύοντα ρόλο (απαραίτητο παρ' όλα αυτά) και δεν μπορεί από μόνη της, ξεκινώντας με ένα κακό αρχικό πυρήνα να εξάγει ένα ικανοποιητικό τελικό πυρήνα.
Στα Σχήματα 2.33, 2.34 μπορεί να δει κανείς δύο παραδείγματα στα οποία συγκρίνονται ο πρωτότυπος αλγόριθμος για την εξαγωγή του πυρήνα, με την μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα (με κβαντισμό της *συνάρτησης προεξοχής* για την εξαγωγή της αρχικής συνιστώσας πυρήνα).

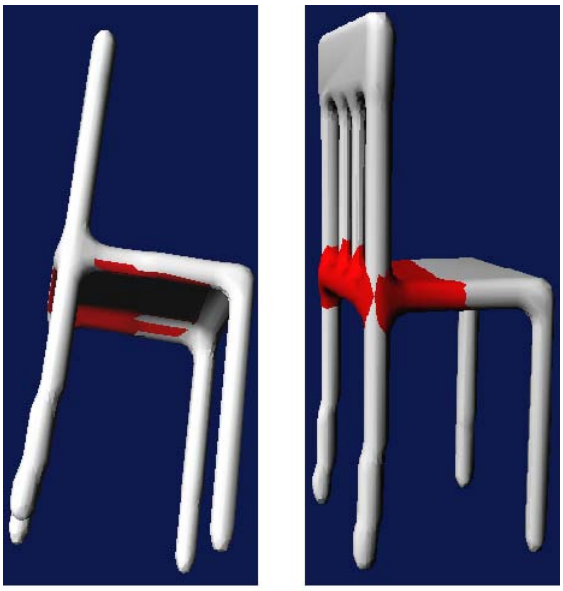
Στα δύο αυτά παραδείγματα, ο πρωτότυπος αλγόριθμος επέκτασης πυρήνα αποτυγχάνει, καθώς οι επίπεδες επιφάνειες των αντικειμένων, αποτελούνται από λιγοστά τρίγωνα μεγάλης επιφάνειας, με αποτέλεσμα τον πρώιμο τερματισμό της διαδικασίας επέκτασης πυρήνα, πριν να διαχωριστούν τα χαρακτηριστικά σημεία. Εντούτοις, καθοριστικό παράγοντα για την αποτυχία του συνολικού αλγορίθμου εξαγωγής πυρήνα αποτελεί η κακή αρχική συνιστώσα πυρήνα.

2.6.3 Παρατηρήσεις

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για την εξαγωγή των υπόλοιπων, μη-εκλεπτυσμένων συνιστωσών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος (όπως και για την διευρένηση του κατά πόσο ο πυρήνας διαχωρίζει τα χαρακτηριστικά σημεία) ακολουθείται η εξής διαδικασία. Κατασκευάζεται ένας τροποποιημένος *πίνακας γειτνίασης* (με βάση την συνεκτικότητα των κορυφών του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος) στον οποίο διαγράφονται οι συνδέσεις των κορυφών που ανήκουν στην συνιστώσα πυρήνα. Στη συνέχεια, ο γράφος που περιγράφεται από τον τροποποιημένο αυτό πίνακα, διασχίζεται με *BFS* ξεκινώντας από τα χαρακτηριστικά σημεία. Με τον τρόπο αυτό, προκύπτουν συνεκτικές συνιστώσες του γράφου οι οποίες αντιστοιχούν στα τμήματα του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος αν αφαιρέσουμε τον πυρήνα. Κάθε συνιστώσα περιέχει ένα ή περισσότερα χαρακτηριστικά σημεία. Αν μια συνιστώσα δεν περιέχει χαρακτηριστικά σημεία, ενώνεται με τον πυρήνα.
Ένα παράδειγμα εξαγωγής μη-εκλεπτυσμένων συνιστωσών φαίνεται στο Σχήμα 2.35.

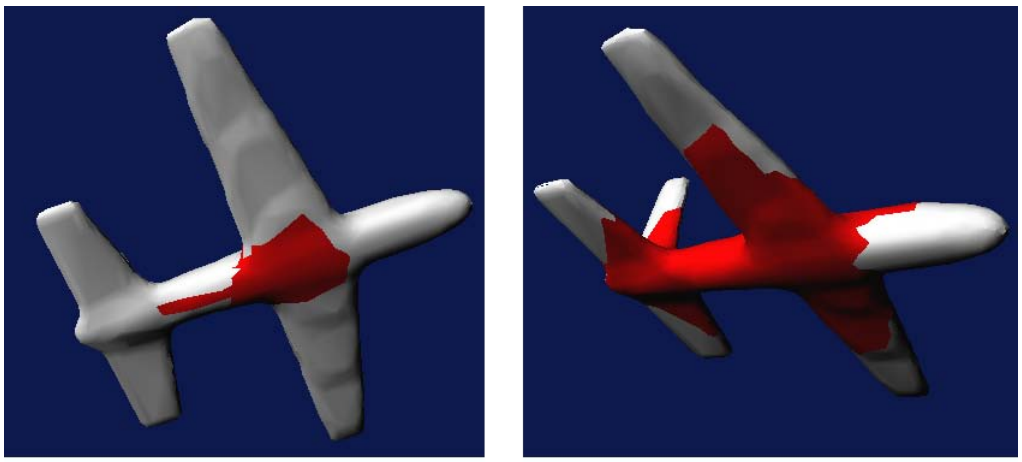


Σχήμα 2.31: Αρχική συνιστώσα πυρήνα με βάση τον αλγόριθμο του [30].



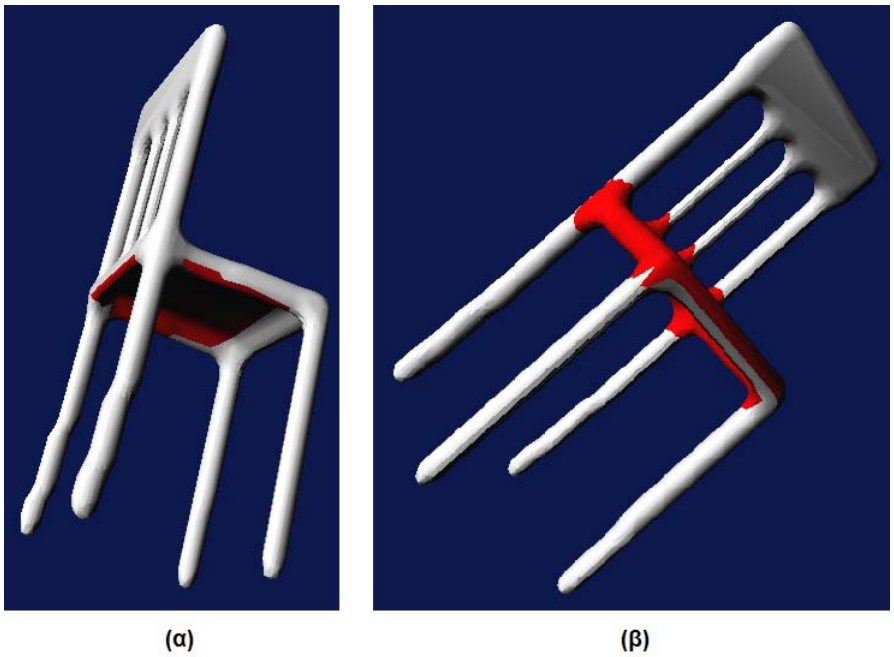
(α) (β)

Σχήμα 2.32: (α) Αρχική συνιστώσα πυρήνα με βάση τον αλγόριθμο του [30] ; (β) Αρχική συνιστώσα πυρήνα με κβαντισμό της *συνάρτησης προεξοχής*.

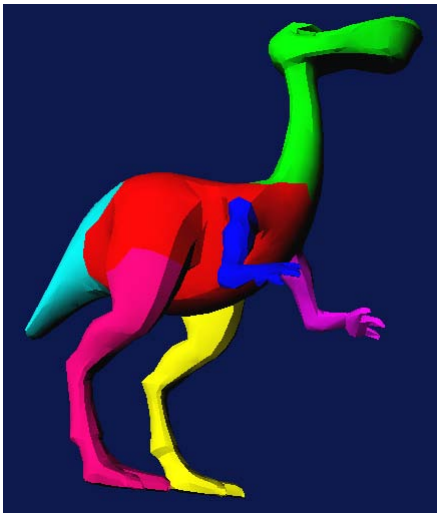


(α) (β)

Σχήμα 2.33: (α) Επεκταθείσα συνιστώσα πυρήνα με βάση τον αλγόριθμο του [30] ; (β) Επεκταθείσα συνιστώσα πυρήνα με κβαντισμό της συνάρτησης προεξοχής και μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα.



Σχήμα 2.34: (α) Επεκταθείσα συνιστώσα πυρήνα με βάση τον αλγόριθμο του [30] ; (β) Επεκταθείσα συνιστώσα πυρήνα με κβαντισμό της *συνάρτησης προεξοχής* και μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα.



Σχήμα 2.35: Μη-εκλεπτυσμένες συνιστώσες με βάση τον αλγόριθμο του [30] (ο πυρήνας έχει σχεδιαστεί με κόκκινο χρώμα).

2.7 Εκλέπτυνση Συνόρων

Κατά το προηγούμενο στάδιο προέκυψε μια κατάτμηση του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, η οποία διαθέτει μη-εκλεπτυσμένα σύνορα μεταξύ των τμημάτων. Το τρέχον στάδιο του αλγορίθμου έχει σαν στόχο την εξομάλυνση αυτών των συνόρων.

2.7.1 Θεωρητική Περιγραφή

Η εξομάλυνση συνόρων στην βιβλιογραφία έχει γίνει βρίσκοντας ελάχιστες τομές [31], υπολογίζοντας ένα μονοπάτι ελαχίστου κόστους με περιορισμούς [21] και με χρήση 3-Δ γεωμετρικών φιδιών (3-D geometrical snakes) [38].
Ο προτεινόμενος αλγόριθμος χρησιμοποιεί ελάχιστες τομές, οι οποίες είναι εύκολες στην υλοποίηση, και εξασφαλίζουν τον διαχωρισμό των δοθέντων συνιστωσών.
Για κάθε μη-εκλεπτυσμένο σύνορο μεταξύ τμημάτων (το οποίο προκύπτει από το προηγούμενο στάδιο του αλγορίθμου), απαιτείται η κατασκευή ενός *γράφου ροής* (flow graph). Για το σκοπό αυτό ορίζεται μια *περιοχή αναζήτησης* (search region) και μια *συνάρτηση χωρητικότητας* (capacity function) στις ακμές του γράφου ροής. Ο *δυϊκός γράφος* (ενότητα 1.2) της περιοχής αναζήτησης, μαζί με δύο επιπλέον κόμβους πηγής και στόχου (source node, target node), ορίζουν τον γράφο ροής. Η υλοποίηση του αλγορίθμου min cut - max flow (αλγόριθμος ελάχιστης τομής - μέγιστης ροής) διαφέρει από αυτή του [31] και στους δύο ορισμούς :

- Η περιοχή αναζήτησης ορίζεται ώστε να περιέχει όλες τις έδρες (τρίγωνα) των οποίων η κοντινότερη *(γεωδαιτική) απόσταση* από το (μη-εκλεπτυσμένο) σύνορο είναι μικρότερη κατά ένα συντελεστή, από την απόσταση του κοντινότερου χαρακτηριστικού σημείου. Ο συντελεστής αυτός είναι μια παράμετρος οριζόμενη απο το χρήστη.

- Η συνάρτηση χωρητικότητας ορίζεται ως ακολούθως. Έστω v_i και v_j κορυφές του γράφου ροής, των οποίων οι δυϊκές έδρες (τρίγωνα) στο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, f_i και f_j, είναι προσκείμενες. Έστω ακόμη :

  - θ_{ij}, η διεδρική γωνία [21] μεταξύ των f_i και f_j
  - $|e_{ij}|$, το μήκος της κοινής ακμής των f_i και f_j

[21] Δοθέντων δύο προσκείμενων τριγώνων, η γωνία μεταξύ των καθέτων στην επιφάνειά τους ονομάζεται διεδρική γωνία.

- $\angle W_{ij} = (1 - (1 - |\cos(\theta_{ij})|) \cdot \Sigma K)^2$, το "γωνιακό" βάρος της διεδρικής γωνίας θ_{ij}. Η μεταβλητή ΣK (συντελεστής κυρτότητας) είναι μικρή για κυρτές γωνίες [22] και 1 για κοίλες γωνίες [23]
- $|\bar{e}|$, η μέση τιμή της μεταβλητής $|e_{ij}|$
- $\angle \bar{W}$, η μέση τιμή της μεταβλητής $\angle W_{ij}$

  Η χωρητικότητα του τόξου (της ακμής) μεταξύ των v_i και v_j ορίζεται ως :

$$C_{ij} = \alpha \cdot \left(\frac{\angle W_{ij}}{\angle \bar{W}} \right) + (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{|e_{ij}|}{|\bar{e}|} \right) \tag{2.8}$$

  όπου $0 \leq \alpha \leq 1$ είναι μια παράμετρος οριζόμενη από το χρήστη.

Δεδομένου ότι η ελάχιστη τομή τείνει να περάσει δια μέσω τόξων με μικρές χωρητικότητες , το (εκλεπτυσμένο) σύνορο θα περάσει δια μέσω κοίλων, μικρού μήκους ακμών [24].

2.7.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης

- Για την εξαγωγή των μη-εκλεπτυσμένων συνόρων ακολουθείται η εξής διαδικασία. Χρησιμοποιώντας τον πυρήνα και τις υπόλοιπες μη-εκλεπτυσμένες συνιστώσες, υπολογίζονται οι κορυφές κάθε συνιστώσας οι οποίες συνορεύουν (βάσει της συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος) με κορυφές του πυρήνα. Οι κορυφές αυτές της συνιστώσας, μαζί με τις γειτονικές κορυφές του πυρήνα, θεωρούνται ως το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο της συνιστώσας αυτής με τον πυρήνα. Για την εύρεση των εδρών που αντιστοιχούν στο κάθε μη-εκλεπτυσμένο σύνορο, εξετάζεται κατά πόσο και οι τρεις κορυφές του κάθε τριγώνου ανήκουν στο μη-εκλεπτυσμένο σύνορο.

  Στη συνέχεια εξετάζεται αν τα μη-εκλεπτυσμένα σύνορα περιέχουν "οπή", αν διαθέτουν δηλαδή μορφή δακτυλίου, καθώς ενίοτε συμβαίνει τα σύνορα που αντιστοιχούν σε χαρακτηριστικά σημεία πολύ μικρής κλίμακας να εκφυλίζονται σε ενιαίες επιφάνειες (οι οποίες μπορεί να περιέχουν κάποια οπή σε όρους κορυφών αλλά όχι σε όρους εδρών).

[22] Μια γωνία καλείται κυρτή όταν είναι το πολύ $180\,^\circ$ και κοίλη όταν είναι μεγαλύτερη από $180\,^\circ$.

[23] Στο [30] ο ορισμός για την μεταβλητή ΣK είναι ο αντίστροφος (ήτοι είναι μικρή για κοίλες γωνίες και 1 για κυρτές γωνίες). Όμως το αποτέλεσμα της εκτέλεσης των πειραμάτων και μια παρατήρηση των ίδιων των συγγραφέων που θα δοθεί στη συνέχεια καταδεικνύουν ότι πρόκειται για κάποιο τυπογραφικό λάθος.

[24] Βάσει του ορισμού του γωνιακού βάρους $\angle W_{ij}$, και της χωρητικότητας C_{ij}, προκύπτει πως για να παίρνει μικρές τιμές η χωρητικότητα C_{ij} στις κοίλες περιοχές (κοίλες *διεδρικές γωνίες*) θα πρέπει η μεταβλητή ΣK να είναι μικρή για κυρτές γωνίες και 1 για κοίλες γωνίες.

Ουσιαστικά εξετάζεται αν υπάρχουν γειτονικά τρίγωνα των συνόρων τα οποία να ανήκουν στην αντίστοιχη συνιστώσα, αλλά όχι στο ίδιο το σύνορο.
Τα "εκφυλισμένα" σύνορα διαγράφονται και οι αντίστοιχες συνιστώσες ενσωματώνονται στον πυρήνα. Στη συνέχεια εξάγονται εκ νέου οι μη-εκλεπτυσμένες συνιστώσες (και τα αντίστοιχα σύνορα). Επίσης τα χαρακτηριστικά σημεία που αντιστοιχούν στις συνιστώσες που ενσωματώθηκαν στον πυρήνα, δεν θεωρούνται πλέον έγκυρα. Προφανώς σε περίπτωση μηδενισμού του αριθμού των έγκυρων χαρακτηριστικών σημείων, η διαδικασία κατάτμησης τερματίζεται για τον τρέχοντα κόμβο του ιεραρχικού δέντρου κατάτμησης.
Ένα παράδειγμα εξαγωγής μη-εκλεπτυσμένων συνόρων φαίνεται στο Σχήμα 2.38.

- Για τον υπολογισμό των περιοχών αναζήτησης *με τον πρωτότυπο αλγόριθμο* ακολουθείται η εξής διαδιακασία. Για κάθε τρίγωνο t_i (χρησιμοποιώντας τις τρεις κορυφές του τριγώνου) υπολογίζεται το κοντινότερο χαρακτηριστικό σημείο $\upsilon_i^{\chi\sigma}$ και η κοντινότερη συνοριακή κορυφή $\upsilon_i^{\sigma\upsilon\nu}$. Το τρίγωνο t_i συμπεριλαμβάνεται στην αντίστοιχη περιοχή αναζήτησης αν ικανοποιεί την συνθήκη :

$$\Gamma\Delta A\left(\upsilon_i^{\sigma\upsilon\nu}, t_i\right) < K \cdot \Gamma\Delta A\left(\upsilon_i^{\chi\sigma}, t_i\right) \tag{2.9}$$

, όπου K ένα κατώφλι με την μορφή ποσοστού και $\Gamma\Delta A()$ η συνάρτηση *γεωδαιτικής απόστασης*.
Ουσιαστικά η παραπάνω συνθήκη επιτρέπει σε ένα τρίγωνο t_i να συμπεριληφθεί σε μια περιοχή αναζήτησης εφόσον βρίσκεται πιο κοντά στο αντίστοιχο σύνορο απ' ότι στο κοντινότερο χαρακτηριστικό σημείο. Προφανώς, *ένα τρίγωνο μπορεί να ανήκει σε περισσότερες από μια περιοχές αναζήτησης*.
Ο παραπάνω αλγόριθμος αποτελεί ουσιαστικά μια διαδικασία επέκτασης του μη-εκλεπτυσμένου συνόρου (αντίστοιχης με την διαδικασία επέκτασης πυρήνα).
Αξίζει να σημειωθεί πως στο τέλος της διαδικασίας, λαμβάνεται η μεγαλύτερη συνεκτική συνιστώσα της περιοχής αναζήτησης μέσω ενός τροποποιημένου *δυϊκού γράφου*, στον οποίο ορίζεται μια ακμή εφόσον δυο τρίγωνα είναι προσκείμενα και ανήκουν αμφότερα στην περιοχή αναζήτησης. Ο τροποποιημένος δυϊκός γράφος διασχίζεται με *BFS*, ξεκινώντας από ένα τρίγωνο το οποίο ανήκει στο αντίστοιχο μη-εκλεπτυσμένο σύνορο.

- Οι πειραματισμοί με διάφορα μοντέλα οδήγησαν στις εξής βελτιώσεις του αλγορίθμου για τον υπολογισμό των περιοχών αναζήτησης :

1. Χρήση διαφορετικού κατωφλίου K (εξίσωση (2.9)) ανάλογα με την πλευρά που βρίσκεται το τρίγωνο το οποίο εξετάζεται αν θα συμπεριληφθεί στην περιοχή αναζήτησης : αν το τρίγωνο βρίσκεται στην περιοχή της συνιστώσας (προεξοχής) την οποία διαχωρίζει το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο από το υπόλοιπο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα χρησιμοποιείται μικρότερο κατώφλι K. Με τον τρόπο αυτό επιτρέπεται μεγαλύτερη επέκταση της περιοχής αναζήτησης προς την κατεύθυνση του πυρήνα σε σχέση με την κατεύθυνση της προεξοχής.
2. Χρήση μόνο των χαρακτηριστικών σημείων που ανήκουν στην ίδια πλευρά που βρίσκεται το τρίγωνο το οποίο εξετάζεται αν θα συμπεριληφθεί στην περιοχή αναζήτησης : αν το τρίγωνο βρίσκεται στην περιοχή της συνιστώσας (προεξοχής) την οποία διαχωρίζει το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο από το υπόλοιπο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα λαμβάνονται υπ' όψιν μόνο τα χαρακτηριστικά σημεία που αντιστοιχούν στην συνιστώσα αυτή, ειδάλλως, λαμβάνονται υπ' όψιν τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά σημεία. Με τον τρόπο αυτό, αποφεύγονται καταστάσεις κατά τις οποίες, η επέκταση ενός συνόρου προς μια πλευρά (πλευρά της προεξοχής / πλευρά του πυρήνα) αποτρέπεται από ένα χαρακτηριστικό σημείο που βρίσκεται στην άλλη πλευρά του συνόρου.

Για την υλοποίηση των παραπάνω βελτιώσεων χρησιμοποιείται μια διαδικασία διαχωρισμού των τριγώνων σε συνοριακά, τρίγωνα προεξοχής και τρίγωνα προς την πλευρά του πυρήνα. Η διαδικασία αυτή *εφαρμόζεται για κάθε μη-εκλεπτυσμένο σύνορο ξεχωριστά*.
Κατασκευάζεται ένας τροποποιημένος *δυϊκός γράφος* στον οποίο ορίζεται μια ακμή εφόσον δυο τρίγωνα είναι προσκείμενα και δεν ανήκουν αμφότερα στο αντίστοιχο μη-εκλεπτυσμένο σύνορο. Ο τροποποιημένος δυϊκός γράφος διασχίζεται με *BFS*, ξεκινώντας από τρίγωνα τα οποία δεν ανήκουν στο μη-εκλεπτυσμένο σύνορο. Τα μη-συνοριακά τρίγωνα μαρκάρονται ως τρίγωνα προεξοχής ή ως τρίγωνα προς την πλευρά του πυρήνα ανάλογα με το αν κατά την διάσχιση του γράφου προέκυψαν τρίγωνα που να ανήκουν στην συνιστώσα πυρήνα ή όχι. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μαρκαριστούν όλα τα μη-συνοριακά τρίγωνα.
Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα αυτής της διαδικασίας, διαχωρίζονται με αντίστοιχο τρόπο και τα χαρακτηριστικά σημεία (ο διαχωρισμός αυτός γίνεται και πάλι ανά σύνορο).

- Όπως αναφέρεται στο [30] για την εκλέπτυνση των μη-εκλεπτυσμένων συνόρων, χρησιμοποιείται ο αλγόριθμος που περιγράφεται στο [31]

χρησιμοποιώντας διαφορετικούς ορισμούς για την περιοχή αναζήτησης και την συνάρτηση χωρητικότητας. Βάσει του αλγορίθμου για την εκλέπτυνση συνόρων που περιγράφεται στο [31], μόλις υπολογιστούν οι περιοχές αναζήτησης, το επόμενο απαραίτητο βήμα είναι ο υπολογισμός των άκρων της κάθε περιοχής. Για το σκοπό αυτό ακολουθείται η εξής διαδικασία. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στα προηγούμενα, η περιοχή αναζήτησης ουσιαστικά αποτελεί μια επέκταση του μη-εκλεπτυσμένου συνόρου. Όσον αφορά λοιπόν τα δυο άκρα μιας περιοχής αναζήτησης, το ένα θα βρίσκεται από την πλευρά της προεξοχής που σχετίζεται με το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο και το άλλο προς την πλευρά του πυρήνα. Για καθένα από τα δύο ζητούμενα άκρα δημιουργούνται δυο κενές λίστες τριγώνων. Ένα τρίγωνο που ανήκει σε μια περιοχή αναζήτησης θεωρείται ότι ανήκει σε κάποιο άκρο της αν *διαθέτει προσκείμενα τρίγωνα τα οποία δεν ανήκουν στην εν λόγω περιοχή αναζήτησης*. Όπως αναφέρθηκε σε προηγούμενη παρατήρηση, για τον υπολογισμό των περιοχών αναζήτησης, έχει χρησιμοποιηθεί μια διαδικασία διαχωρισμού των τριγώνων σε συνοριακά, τρίγωνα προεξοχής και τρίγωνα προς την πλευρά του πυρήνα. Με βάση αυτό το διαχωρισμό, εφόσον ένα τρίγωνο θεωρηθεί πως ανήκει σε κάποιο από τα άκρα της περιοχής, τοποθετείται στην αντίστοιχη λίστα.
Συμπληρωματικά, για λόγους ευρωστίας του αλγορίθμου, χρησιμοποιούνται *προαιρετικά* κάποιες προσθήκες στον παραπάνω αλγόριθμο :

1. σε περίπτωση αναδρομικής εφαρμογής του αλγορίθμου κατάτμησης (υψηλότερα ιεραρχικά επίπεδα), αν μια περιοχή κατάτμησης (τομή) του προηγούμενου ιεραρχικού επιπέδου συμπεριλαμβάνεται σε μια περιοχή αναζήτησης, θεωρείται ότι ανήκει και σε κάποιο από τα άκρα της (το άκρο που αντιστοιχεί στην πλευρά του πυρήνα)
2. αν το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο περιλαμβάνει κάποιο χαρακτηριστικό σημείο (αυτό μπορεί να συμβεί σε υψηλότερα ιεραρχικά επίπεδα), τότε το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο εκλαμβάνεται ως το άκρο της περιοχής αναζήτησης που αντιστοιχεί στην πλευρά της προεξοχής (που σχετίζεται με αυτό)
3. αν μετά από την εκτέλεση των προηγούμενων βημάτων, δεν βρεθούν τρίγωνα που να σχετίζονται με το άκρο της περιοχής αναζήτησης που αντιστοιχεί στην πλευρά της προεξοχής, τότε το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο εκλαμβάνεται ως το άκρο αυτό

Οι παραπάνω προσθήκες έχουν ιδιαίτερη σημασία, στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας, όπου οι περιοχές αναζήτησης είναι

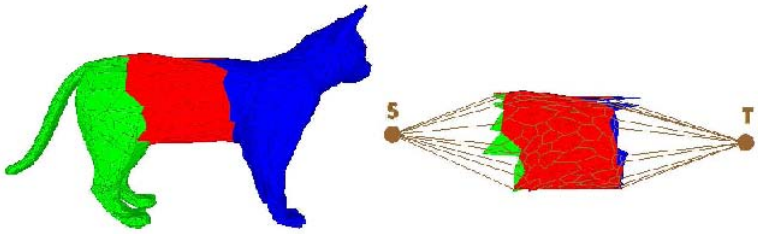
πιο μικρές, και τα άκρα πιο δύσκολο να διαχωριστούν.
Σε περίπτωση που δεν βρεθούν τρίγωνα που να σχετίζονται με κάποιο από τα άκρα, ο αλγόριθμος εκλέπτυνσης συνόρων τερματίζεται (για το συγκεκριμένο σύνορο) και η αντίστοιχη συνιστώσα ενσωματώνεται στον πυρήνα, όπως θα περιγραφεί λεπτομερέστερα παρακάτω.
Στο Σχήμα 2.39 φαίνεται ένα παράδειγμα περιοχής αναζήτησης με βάση τον τροποποιημένο αλγόριθμο για την εύρεση της περιοχής αναζήτησης.

- Σύμφωνα με τον αλγόριθμο που περιγράφεται στο [31], για την εκλέπτυνση συνόρων απαιτείται η κατασκευή του *δυϊκού γράφου* της περιοχής αναζήτησης. Χρησιμοποιούνται δυο επιπλέον κόμβοι μια "*πηγή*" κι ένας "*στόχος*", οι οποίοι συνδέονται με τα άκρα της περιοχής αναζήτησης (βλέπε προηγούμενη παρατήρηση). Ένα παράδειγμα τέτοιου γράφου φαίνεται στο Σχήμα 2.36. Οι χωρητικότητες των ακμών του γράφου υπολογίζονται από τον τύπο (2.8). Το εκλεπτυσμένο σύνορο μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας έναν αλγόριθμο min cut - max flow από τον κόμβο - "*πηγή*" στον κόμβο "*στόχο*". Πρέπει να τονισθεί (όπως άλλωστε αναφέρεται και στο [31]) πως ο δυϊκός γράφος αναζήτησης είναι ένας *μη-κατευθυνόμενος γράφος*. Παρ' όλα αυτά, στο [31] αναφέρονται δυο αλγόριθμοι min cut - max flow [14, 24], οι οποίοι εφαρμόζονται μόνο σε *κατευθυνόμενους* γράφους [25]. Ένας αλγόριθμος min cut - max flow που μπορεί να εφαρμοστεί σε *μη-κατευθυνόμενους* γράφους είναι ο [12] [26]. Το αποτέλεσμα εκτέλεσης του αλγορίθμου min cut - max flow, είναι η *δυαδική ετικετοποίηση* των κόμβων του δυϊκού γράφου και συνεπώς των τριγώνων της περιοχής αναζήτησης. Τα τρίγωνα της περιοχής αναζήτησης τα οποία συνορεύουν με προσκείμενα τρίγωνα διαφορετικής ετικέτας, θεωρούνται συνοριακά. Με τον τρόπο αυτό για κάθε περιοχή αναζήτησης προκύπτει ένας διπλός δακτύλιος τριγώνων, εκ των οποίων ο ένας διαθέτει τρίγωνα της μιας ετικέτας και ο άλλος δακτύλιος της άλλης. Το εκλεπτυσμένο σύνορο αποτελείται από τις κοινές ακμές των δυο δακτυλίων. Για το λόγο αυτό, ο ένας δακτύλιος τριγώνων ενσωματώνεται στην συνιστώσα πυρήνα και ο άλλος στο εξαγόμενο τμήμα (βλέπε επόμενη παρατήρηση).
  Ένα παράδειγμα εξαγωγής εκλεπτυσμένων συνόρων φαίνεται στο Σχή-

[25] Αυτό μπορεί να επιβεβαιωθεί και από την συνάρτηση graphmaxflow() του MATLAB ® η οποία υλοποιεί τους παραπάνω αλγορίθμους και δέχεται ως όρισμα μόνο κατευθυνόμενους γράφους.

[26] Η υλοποίηση του αλγορίθμου σε C++ διατίθεται στην προσωπική σελίδα του συγγραφέα (http://www.cs.ucl.ac.uk/staff/V.Kolmogorov/) , ενώ η βιβλιοθήκη για την εκτέλεσή του σε MATLAB ® διατίθεται από τον Michael (Miki) Rubinstein (http://www.cs.tau.ac.il/~rubinst1/) .

μα 2.38.



(α) (β)

Σχήμα 2.36: (α) Περιοχή αναζήτησης με κόκκινο χρώμα ; (β) Δυϊκός γράφος περιοχής αναζήτησης ; (από το [31]).

- Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ενίοτε είτε δεν είναι δυνατή η εκτέλεση του αλγορίθμου min cut - max flow (λόγω αποτυχίας του υπολογισμού των άκρων της περιοχής αναζήτησης), είτε ο ίδιος ο αλγόριθμος αποτυγχάνει (πχ επειδή η περιοχή αναζήτησης είναι πού μικρή και τα άκρα της είναι εφαπτόμενα). Για το σκοπό αυτό (και όχι μόνο) απαιτείται η διόρθωση - ενημέρωση διάφορων μεταβλητών του αλγορίθμου κατάτμησης για την ορθή εκτέλεσή του.
  Έτσι, με το πέρας της εκτέλεσης του αλγορίθμου κατά την οποία έχουν μαρκαριστεί οι περιοχές αναζήτησης για τις οποίες ο αλγόριθμος είτε δεν εκτελέστηκε είτε απέτυχε, ακολουθείται η εξής διαδικασία. Διαγράφονται τα χαρακτηριστικά σημεία τα οποία ανήκουν στις συνιστώσες των περιοχών αναζήτησης για τις οποίες δεν εκτελέστηκε ή απέτυχε ο αλγόριθμος min cut - max flow .
  Στη συνέχεια ακολοθείται μια διαδικασία διαχωρισμού των τριγώνων σε συνοριακά, τρίγωνα προεξοχής και τρίγωνα προς την πλευρά του πυρήνα, παρόμοια με αυτή που εφαρμόστηκε για τα μη-εκλεπτυσμένα σύνορα. Η διαδικασία αυτή εφαρμόζεται για κάθε εκλεπτυσμένο σύνορο ξεχωριστά.
  Κατασκευάζεται ένας τροποποιημένος *δυϊκός γράφος* στον οποίο ορίζεται μια ακμή εφόσον δυο τρίγωνα είναι προσκείμενα και δεν ανήκουν αμφότερα στο αντίστοιχο εκλεπτυσμένο σύνορο. Ο τροποποιημένος δυϊκός γράφος διασχίζεται με *BFS*, ξεκινώντας από τρίγωνα τα οποία δεν ανήκουν στο εκλεπτυσμένο σύνορο. Τα μη-συνοριακά τρίγωνα μαρκάρονται ως τρίγωνα προεξοχής ή ως τρίγωνα προς την πλευρά του πυρήνα ανάλογα με το αν κατά την διάσχιση του γράφου προέκυψαν τρίγωνα τα οποία γειτονεύουν με τον δακτύλιο του εκλεπτυσμένου συνόρου που αντιστοιχεί στον πυρήνα ή όχι (βλέπε προηγούμενη παρατήρηση). Η

διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να μαρκαριστούν όλα τα μη-συνοριακά τρίγωνα.
Τα τρίγωνα που δεν ανήκουν σύμφωνα με την προηγούμενη διαδικασία σε καμιά προεξοχή, ούτε και σε κάποιο σύνορο, θεωρούνται ως τα τρίγωνα της συνιστώσας πυρήνα. Σε αυτή την συνιστώσα πυρήνα απομένει να προστεθούν τα συνοριακά τρίγωνα που της αντιστοιχούν (όπως έχει ήδη αναφερθεί, τα εκλεπτυσμένα σύνορα είναι διπλοί δακτύλιοι τριγώνων εκ των οποίων ο ένας δακτύλιος ενσωματώνεται στον πυρήνα και ο άλλος στην προσκείμενη συνιστώσα).
Τα χαρακτηριστικά σημεία ξαναελέγχονται και αν κάποιο από αυτά ανήκει στην συνιστώσα πυρήνα δεν θεωρείται πλέον έγκυρο και διαγράφεται.

- Για την εξαγωγή των εκλεπτυσμένων συνιστωσών, ακολουθείται η εξής διαδιακασία. Κάθε τρίγωνο που με την προηγούμενη διαδικασία διαχωρισμού των τριγώνων σε συνοριακά, τρίγωνα προεξοχής και τρίγωνα προς την πλευρά του πυρήνα, θεωρείται τρίγωνο προεξοχής, εντάσσεται στην αντίστοιχη συνιστώσα. Στη συνέχεια τα συνοριακά τρίγωνα (εκλεπτυσμένα σύνορα) τα οποία αποτελούνται από δύο δακτυλίους τριγώνων διαφορετικής ετικέτας, εντάσσονται στις αντίστοιχες συνιστώσες : ένας δακτύλιος στον πυρήνα και ένας στην προσκείμενη συνιστώσα προεξοχής. Τέλος, τα τρίγωνα που απομένουν, θεωρούνται πως ανήκουν στην συνιστώσα πυρήνα.

- Για τον υπολογισμό της παράστασης $\angle W_{i\,j}$ (ενότητα 2.7.1) απαιτείται ο υπολογισμός της *διεδρικής γωνίας* $\theta_{i\,j}$ μεταξύ των προσκείμενων τριγώνων f_i και f_j και η πληροφορία της κυρτότητάς της (ή μη). Για το σκοπό αυτό ακολουθείται η εξής διαδικασία. Έστω τα προσκείμενα τρίγωνα $k_1 \overset{\triangle}{i\,j}, i\,\overset{\triangle}{k_2\,j}$ με κοινή πλευρά $i\,j$ (Σχήμα 2.37). Όπως έχει ήδη αναφερθεί, δοθέντων δύο προσκείμενων τριγώνων, η γωνία $\theta_{i\,j}$ μεταξύ των καθέτων στην επιφάνειά τους (διανυσμάτων) ονομάζεται διεδρική γωνία. Τα κάθετα στην επιφάνεια των τριγώνων $k_1 \overset{\triangle}{i\,j}, i\,\overset{\triangle}{k_2\,j}$ διανύσματα δίνονται από τους τύπους :

$$\vec{s}_{\perp} = \vec{s}_{\perp}^{\,\overset{\triangle}{k_1 i j}} = \vec{i\,j} \times \vec{i\,k_1}$$

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_{\perp}^{\,\overset{\triangle}{i\,k_2\,j}} = \vec{i\,k_2} \times \vec{i\,j}$$

$$\hat{s}_{\perp} = \frac{\vec{s}_{\perp}}{\left\|\vec{s}_{\perp}\right\|}$$

$$\hat{v}_{\perp} = \frac{\vec{v}_{\perp}}{\left\|\vec{v}_{\perp}\right\|}$$

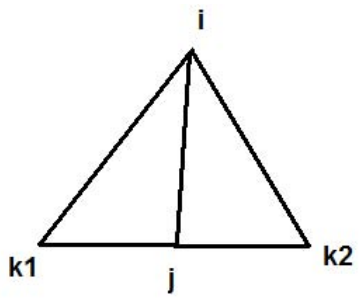
$$\widehat{i\,j} = \frac{\vec{i\,j}}{\left\|\vec{i\,j}\right\|}$$

Η παράσταση $1 - |\cos(\theta_{i\,j})|$ υπολογίζεται από τον τύπο :

$$1 - |\cos(\theta_{i\,j})| = \begin{cases} 0\,, & \text{αν} \quad \vec{s}_{\perp} \cdot \vec{s}_{\perp} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{v}_{\perp} \cdot \vec{v}_{\perp} = 0 \\ 1 - |\hat{s}_{\perp} \cdot \hat{v}_{\perp}|\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Η πληροφορία της κυρτότητας της *διεδρικής γωνίας* $\theta_{i\,j}$ δίνεται από τον τύπο :

$$\theta_{i\,j} = \begin{cases} \text{κυρτή}\,, & \text{αν} \quad \widehat{i\,j} \cdot (\hat{s}_{\perp} \times \hat{v}_{\perp}) \geq 0 \\ \text{κοίλη}\,, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$



Σχήμα 2.37: Υπολογισμός διεδρικής γωνίας προσκείμενων τριγώνων.

- Στα πλαίσια πειραμάτων, δοκιμάστηκε η εξής τροποποίηση της χωρητικότητας του τόξου (της ακμής) μεταξύ των v_i και v_j (*δυϊκά τρίγωνα* f_i, f_j), που δίνεται από τον τύπο (2.8) :

$$C_{ij} = \alpha \cdot \left(\frac{\angle W_{ij}}{\angle \bar{W}} \right) + (1 - \alpha) \cdot \left(\frac{p_{ij}}{\bar{p}} \right) \tag{2.10}$$

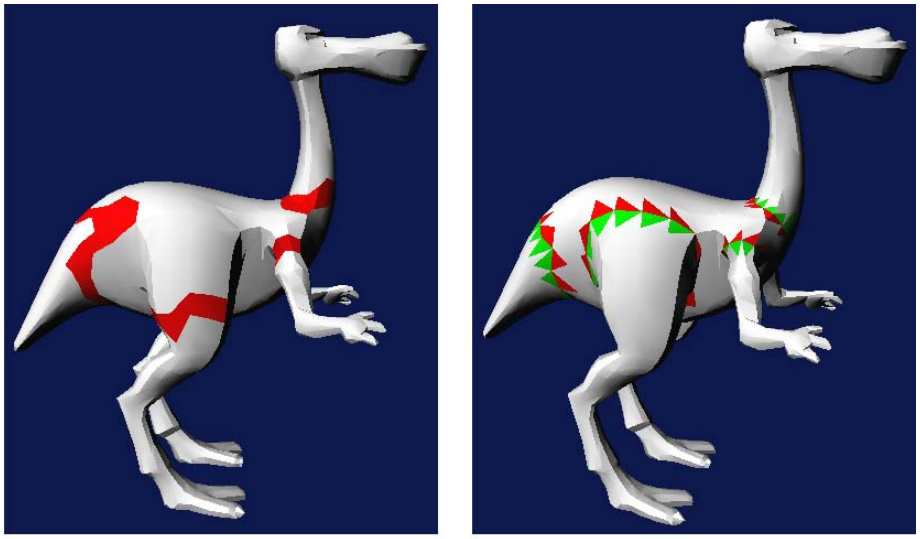
  όπου :

  - ο πρώτος όρος είναι ο ίδιος με την εξίσωση (2.8)
  - $p_{ij} = \sum_{k \in \overset{\triangle}{f_i}, \overset{\triangle}{f_j}} PF(k)$
  - $PF(k) = \sum_{s \in M} \Gamma\Delta\mathrm{A}(k, s)$ (*συνάρτηση προεξοχής*)
  - $\Gamma\Delta\mathrm{A}(k, s)$, η *γεωδαιτική απόσταση* των κορυφών k, s του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος M
  - $|\bar{p}|$, η μέση τιμή της μεταβλητής $|p_{ij}|$
  - $0 \leq \alpha \leq 1$ είναι μια παράμετρος οριζόμενη από το χρήστη

  Η τροποποίηση αυτή έγινε με σκοπό να αποτρέψει τον αλγόριθμο min cut - max flow να "κόψει" το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα σε περιοχές μεγάλης κοιλότητας, που ωστόσο εξέχουν τόσο, ώστε να θεωρούνται μέρος κάποιας συνιστώσας (προφανώς όχι της συνιστώσας πυρήνα). Αυτό μπορεί να συμβεί σε περίπτωση μεγάλης εξάπλωσης της περιοχής αναζήτησης.
  Πρέπει να τονισθεί πως η χρήση της τροποποιημένης αυτής χωρητικότητας έχει νόημα *μόνο στο πρώτο ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης* (στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας παύει να έχει νόημα η συνάρτηση προεξοχής).
  Στο Σχήμα 2.40 παρουσιάζεται η εξαγωγή των εκλεπτυσμένων συνιστωσών με χρήση των χωρητικοτήτων που περιγράφονται από τους τύπους (2.8) , (2.10). Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια. Στο λαιμό και στην ουρά ωστόσο, η γραμμή του συνόρου είναι πιο ομαλή με χρήση της τροποποιημένης χωρητικότητας (τύπος (2.10)).

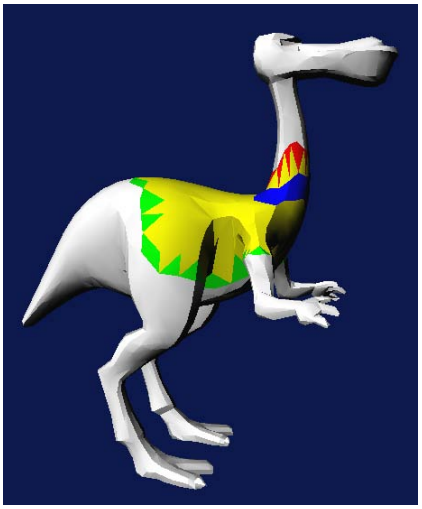
2.7.3 Παρατηρήσεις

- Στο Σχήμα 2.38 φαίνεται ένα παράδειγμα εξαγωγής των εκλεπτυσμένων και μη συνόρων. Όπως μπορεί να παρατηρήσει κανείς στην περιοχή των

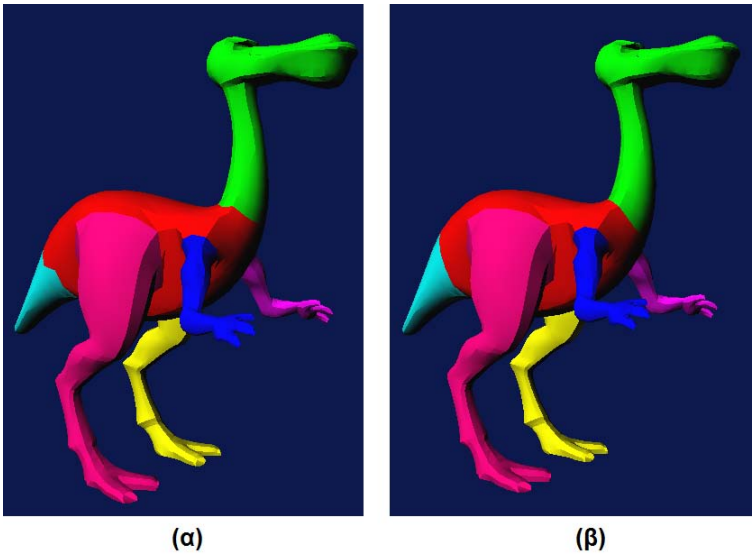


(α) (β)

Σχήμα 2.38: (α) Μη-εκλεπτυσμένα σύνορα με βάση τον αλγόριθμο του [30] (τα μη-εκλεπτυσμένα σύνορα έχουν σχεδιαστεί με κόκκινο χρώμα) ; (β) Εκλεπτυσμένα σύνορα με βάση τον αλγόριθμο του [30] (κάθε εκλεπτυσμένο σύνορο αποτελείται από δύο δακτυλίους : με κόκκινο σχεδιάζονται τα τρίγωνα που πρόκειται να ενσωματωθούν στον πυρήνα και με πράσινο τα τρίγωνα που θα ενσωματωθούν στις λοιπές συνιστώσες). Οι κοινές ακμές των δακτυλίων είναι αυτές που τελικά διαχωρίζουν τις συνιστώσες από τον πυρήνα.



Σχήμα 2.39: Περιοχή αναζήτησης (χρωματισμένη περιοχή) : με κόκκινο και πράσινο σχεδιάζονται τα άκρα της περιοχής που αντιστοιχούν στην πλευρά της προεξοχής και στην πλευρά του πυρήνα αντίστοιχα (σε σχέση με το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο). Με μπλε χρώμα σχεδιάζεται το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο ενώ με κίτρινο χρώμα η υπόλοιπη περιοχή αναζήτησης.



Σχήμα 2.40: Σύγκριση χωρητικοτήτων. (α) Εξαγωγή εκλεπτυσμένων συνιστωσών στο απλοποιημένο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα με βάση την χωρητικότητα του τύπου (2.8); (β) Εξαγωγή εκλεπτυσμένων συνιστωσών στο απλοποιημένο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα με βάση την χωρητικότητα του τύπου (2.10).

ποδιών, είναι προφανής η "μετακίνηση" των εκλεπτυσμένων συνόρων στην σωστή θέση σε σχέση με τα μη-εκλεπτυσμένα σύνορα.

- Για να συμπεριληφθεί ένα τρίγωνο σε μια περιοχή αναζήτησης, αρκεί μια κορυφή του να ικανοποιεί την συνθήκη (2.9). Αυτό γίνεται για την αποφυγή "οπών" στο εσωτερικό της περιοχής αναζήτησης, τριγώνων δηλαδή που βρίσκονται στο εσωτερικό μιας περιοχής αναζήτησης και ωστόσο δεν ανήκουν σε αυτήν.

- Αξίζει να σημειωθεί πως το ίδιο κατώφλι K (εξίσωση (2.9)) οδηγεί σε διαφορετικής κλίμακας επέκταση διαφορετικών περιοχών αναζήτησης. Αυτό οφείλεται στο διαφορετικό μήκος της εκάστοτε προεξοχής, καθώς και στο πόσο κοντά είναι τα χαρακτηριστικά σημεία στα μη-εκλεπτυσμένα σύνορα.
  Ακόμα όμως και σε μια δεδομένη περιοχή αναζήτησης, η επέκταση δεν είναι ομοιόμορφη. Το κατά πόσο ένα τρίγωνο θα συμπεριληφθεί στην περιοχή αναζήτησης, εξαρτάται από το πόσο κοντά βρίσκεται στα χαρακτηριστικά σημεία και στο μη-εκλεπτυσμένο σύνορο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα κάποιες κυρτές περιοχές χωρίς χαρακτηριστικά σημεία (πχ η κοιλιά ενός μοντέλου ζώου) να επεκτείνονται περισσότερο απ' ότι άλλες περισσότερο επίπεδες ή λιγότερο κυρτές (όπως η ράχη ενός μοντέλου ζώου).

- Ενίοτε (ιδιαίτερα στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας), τα εκλεπτυσμένα σύνορα τέμνονται, οδηγώντας σε μια ασάφεια για το πως θα εξαχθούν οι συνιστώσες. Σε περίπτωση που κάποιο τρίγωνο ανήκει σε περισσότερες από μια συνιστώσες προεξοχής, αποδίδεται αυθαίρετα στην πρώτη. Σε περίπτωση που κάποιο τρίγωνο για κάποιο σύνορο αντιστοιχεί σε συνιστώσα προεξοχής και για κάποιο άλλο αντιστοιχεί στη συνιστώσα πυρήνα, αποδίδεται στην συνιστώσα προεξοχής.

2.8 Εκλέπτυνση 3-Δ Πολυγωνικού Πλέγματος

Η παρούσα ενότητα του αλγορίθμου κατάτμησης, εκτελείται μόνο σε περίπτωση που το 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα που έχει δοθεί σαν είσοδος, έχει απλοποιηθεί (σε περίπτωση που ένα 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα διαθέτει εξαρχής μικρό αριθμό τριγώνων, ή στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας, η απλοποίηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων ενδέχεται να μην εφαρμοστεί, αν ο αριθμός των τριγώνων είναι μικρότερος από ένα κατώφλι, οριζόμενο από το χρήστη).

2.8.1 Θεωρητική Περιγραφή

Τα εκλεπτυσμένα σύνορα τα οποία τα οποία υπολογίστηκαν στο προηγούμενο στάδιο, αφορούσαν το απλοποιημένο μοντέλο (ενότητα 2.2). Για τον υπολογισμό των (εκλεπτυσμένων) συνόρων μεταξύ των συνιστωσών του (μεγάλης ανάλυσης) μοντέλου εισόδου, πρέπει εφαρμοστούν τα εξής βήματα :

1. απεικόνιση της συνιστώσας πυρήνα του απλοποιημένου μοντέλου στο αρχικό (μεγάλης ανάλυσης) μοντέλο εισόδου
2. εξαγωγή μη-εκλεπτυσμένων συνόρων στο (μεγάλης ανάλυσης) μοντέλο εισόδου
3. ορισμός περιοχών αναζήτησης στο (μεγάλης ανάλυσης) μοντέλο εισόδου
4. εφαρμογή αλγορίθμου min cut - υπολογισμός εκλεπτυσμένων συνόρων στο (μεγάλης ανάλυσης) μοντέλο εισόδου

2.8.2 Λεπτομέρειες Υλοποίησης

- Για την εξαγωγή της συνιστώσας πυρήνα στο αρχικό μοντέλο ακολουθείται η εξής διαδικασία. Όπως έχει ήδη αναφερθεί στην ενότητα 2.2 κατά την απλοποίηση του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος παράγεται ένα αρχείο με το ιστορικό απλοποίησης του μοντέλου (ήτοι τα ζεύγη κορυφών που έχουν *συναιρεθεί*). Μέσω αυτού του αρχείου γνωρίζουμε σε ποια κορυφή του απλοποιημένου μοντέλου αντιστοιχεί κάθε κορυφή του αρχικού μοντέλου και το αντίστροφο. Βάσει λοιπόν του παραπάνω ιστορικού, οι κορυφές της συνιστώσας πυρήνα του απλοποιημένου μοντέλου απεικονίζονται στο αρχικό μοντέλο. Στη συνέχεια υπολογίζεται η κοντινότερη (με Ευκλείδιες αποστάσεις) κορυφή s του 3-Δ απλοποιημένου πολυγωνικού πλέγματος σε σχέση με το κέντρο της περιβάλλουσας σφαίρας (ενότητα 2.6). Στη συνέχεια η κορυφή s απεικονίζεται στο αρχικό μοντέλο (s_o).
  Κατόπιν, κατασκευάζεται ένας τροποποιημένος *πίνακας γειτνίασης* (για το αρχικό μοντέλο), στον οποίο ορίζεται μια ακμή, εφόσον δυο κορυφές είναι γειτονικές (βάσει της συνεκτικότητας του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος) και ανήκουν αμφότερες στην συνιστώσα πυρήνα. Ο γράφος που περιγράφεται από τον τροποποιημένο αυτό πίνακα, διασχίζεται με *BFS* ξεκινώντας από την κορυφή s_o. Με τον τρόπο αυτό λαμβάνεται η μεγαλύτερη συνεκτική συνιστώσα του πυρήνα (στο αρχικό μοντέλο).

- Για να βρούμε τα χαρακτηριστικά σημεία στο αρχικό μοντέλο, χρησιμοποιούμε και πάλι το ιστορικό απλοποίησης του μοντέλου και κάνουμε

την εξής προσέγγιση : βρίσκουμε ποιες κορυφές του αρχικού 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος έχουν απεικονιστεί στα χαρακτηριστικά σημεία του απλοποιημένου 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος. Οι κορυφές αυτές *θεωρούνται* τα χαρακτηριστικά σημεία του αρχικού 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος [27].

- Τα ακόλουθα βήματα υλοποιούνται για το αρχικό μοντέλο με τον ίδιο τρόπο όπως και για το απλοποιημένο :

  - εξαγωγή μη-εκλεπτυσμένων συνιστωσών και συνόρων
  - ορισμός περιοχών αναζήτησης
  - εφαρμογή του αλγορίθμου min cut
  - διόρθωση μεταβλητών του αλγορίθμου (σε περίπτωση αποτυχίας του αλγορίθμου min cut)
  - εξαγωγή εκλεπτυσμένων συνιστωσών

- Στα παραπάνω βήματα, όπου χρησιμοποιούνται *γεωδαιτικές αποστάσεις*, χρησιμοποιείται η εξής προσέγγιση : ως γεωδαιτική απόσταση μεταξύ δυο κορυφών v_i^o, v_j^o στο αρχικό 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, *λαμβάνεται* η απόσταση των αντίστοιχων κορυφών (με βάση το ιστορικό απλοποίησης του μοντέλου) v_i, v_j στο απλοποιημένο μοντέλο.

2.8.3 Παρατηρήσεις

- Ακόμα και μικρές αλλαγές στα κατώφλια των περιοχών αναζήτησης ή στον αριθμό των τριγώνων του απλοποιημένου μοντέλου, έχουν μεγάλη επίδραση στο τελικό αποτέλεσμα της κατάτμησης, ιδιαίτερα στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας.

- Είναι δυνατόν σε κάποιες ιδιαίτερες περιπτώσεις (μικρές κοίλες περιοχές - πχ μάτια) η εκλεπτυσμένη συνιστώσα του απλοποιημένου μοντέλου να μην περιέχει το αντίστοιχο χαρακτηριστικό σημείο με αποτέλεσμα κατά την απεικόνιση στο αρχικό μοντέλο η συνιστώσα αυτή να χαθεί. Αυτό έχει παρατηρηθεί σε μικρής κλίμακας χαρακτηριστικά στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας.

[27] Δεδομένου ότι σε μια κορυφή του απλοποιημένου 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος αντιστοιχούν πολλές κορυφές του αρχικού 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος, στο αρχικό 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, θα υπάρχει μια ομάδα σημείων για κάθε χαρακτηριστικό σημείο του απλοποιημένου 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

2.9 Αποτελέσματα Αλγορίθμου

Στους πίνακες 2.1, 2.2, 2.3, παρουσιάζεται η σύγκριση των αποτελεσμάτων του πρωτότυπου (αριστερά) και του τροποποιημένου αλγορίθμου (δεξιά). Στον πίνακα 2.1 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για το πρώτο ιεραρχικό επιπέδο. Στον πίνακα 2.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας. Στον πίνακα 2.3 παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα από τον πίνακα 2.2 με zoom σε λεπτομέρειες.

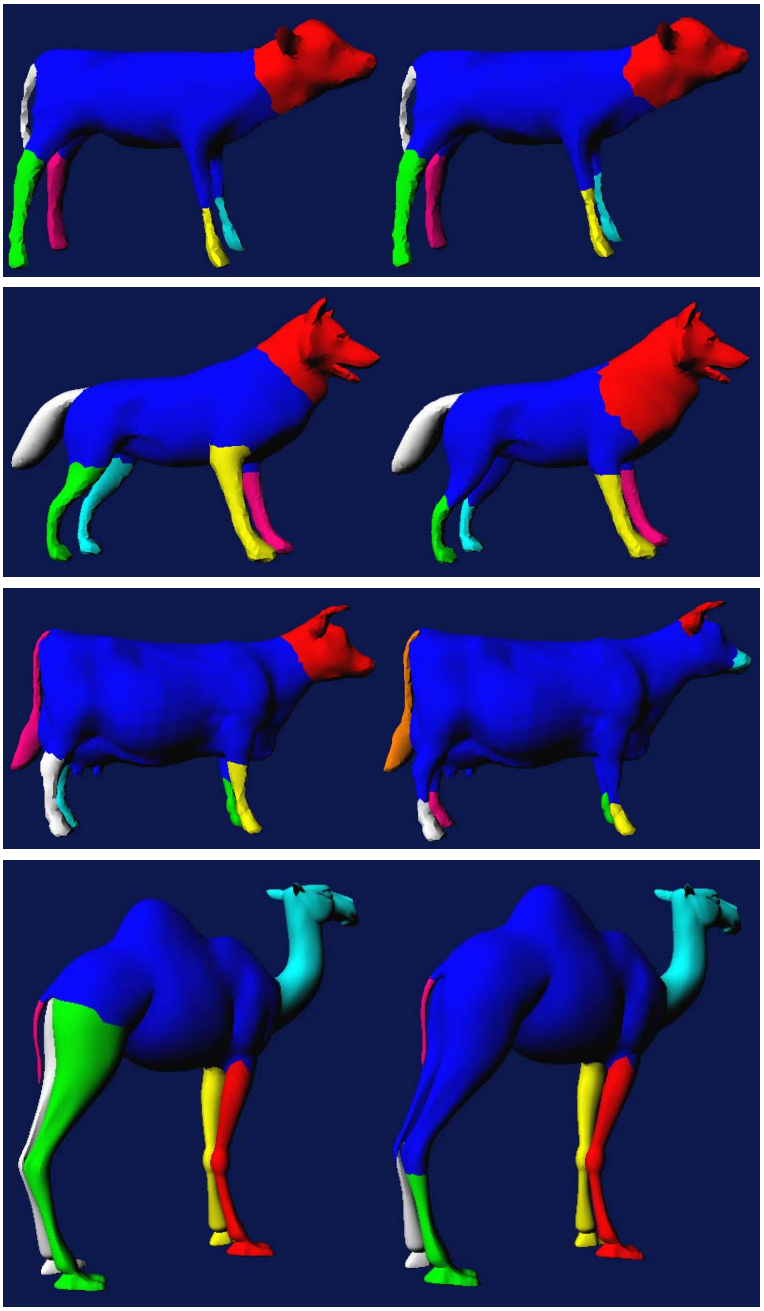
2.9.1 Παρατηρήσεις

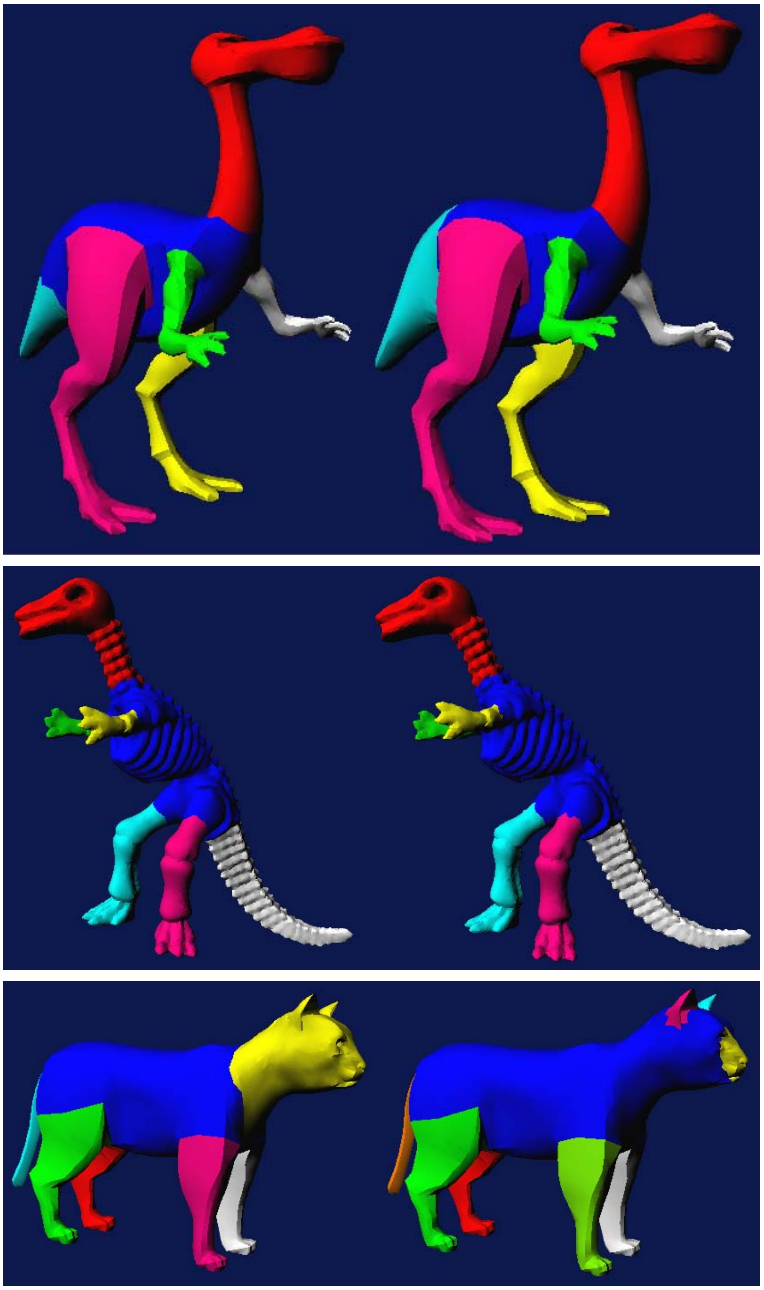
- Έχουν χρησιμοποιηθεί οι ίδιες παράμετροι (κατώφλια) για όλα τα μοντέλα (όχι απαραίτητα όμως ίδιες για τον πρωτότυπο και τον τροποποιημένο αλγόριθμο, ούτε και για όλα τα ιεραρχικά επίπεδα - στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας οι περιοχές αναζήτησης πρέπει να είναι μικρότερες). Αυτό σημαίνει πως για κάποια μοντέλα (μοντέλα ή τμήματα με "μεγάλες" προεξοχές), τα κατώφλια των περιοχών αναζήτησης μπορεί να είναι μικρότερα απ' όσο πρέπει (μικρότερες περιοχές αναζήτησης απ' όσο πρέπει), με αποτέλεσμα μια ενδεχόμενη υπερκατάτμηση, ενώ για κάποια άλλα μεγαλύτερα απ' όσο πρέπει (μοντέλα ή τμήματα με "μικρές" προεξοχές), με αποτέλεσμα η τομή να γίνεται ενδεχομένως σε κάποια γειτονική κοιλότητα. Τα κατώφλια έχουν επιλεχθεί κατόπιν δοκιμών ώστε να δίνουν όσο το δυνατόν καλύτερα αποτελέσματα *στο σύνολο των μοντέλων* και στο σύνολο των ιεραρχικών επιπέδων.

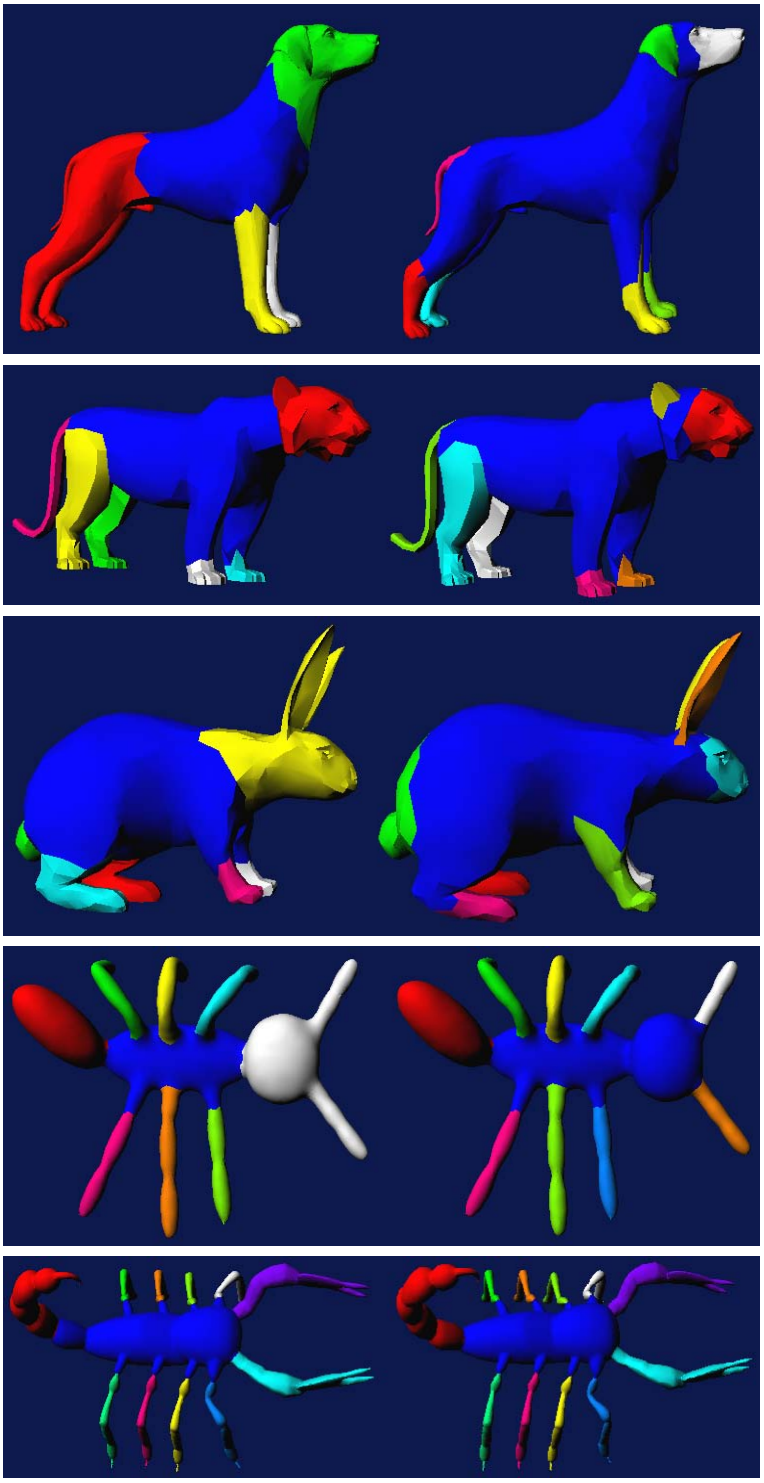
- Στον πίνακα 2.1, τα μοντέλα για τα οποία έχει αποτύχει ο πρωτότυπος αλγόριθμος (λόγω κακής συνιστώσας πυρήνα) έχουν σχεδιαστεί με λευκό χρώμα.

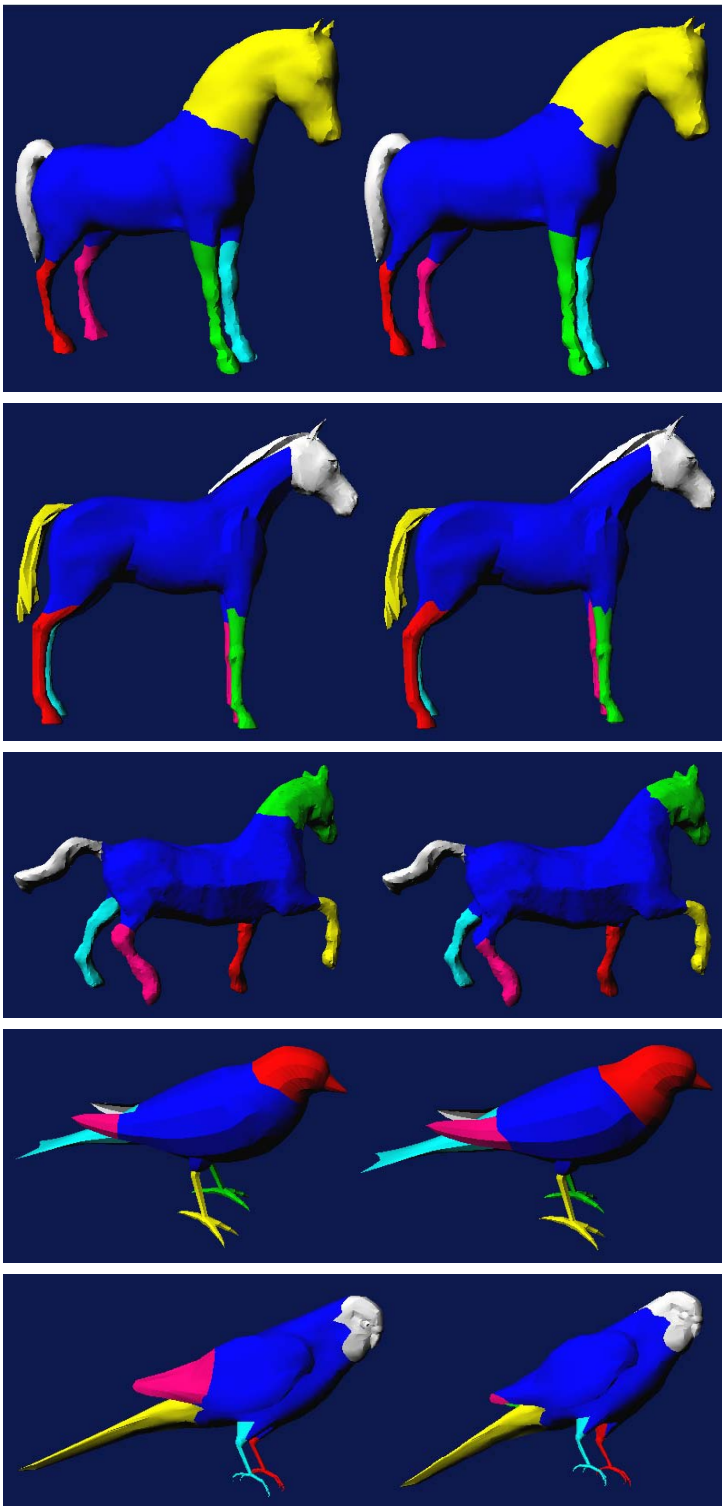
- Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο τροποποιημένος αλγόριθμος εξαγωγής αρχικού πυρήνα (ενότητα 2.6.2) και η τροποποιημένη χωρητικότητα (τύπος (2.10)) εφαρμοζονται *μόνο στο πρώτο ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης* του τροποποιημένου αλγορίθμου.

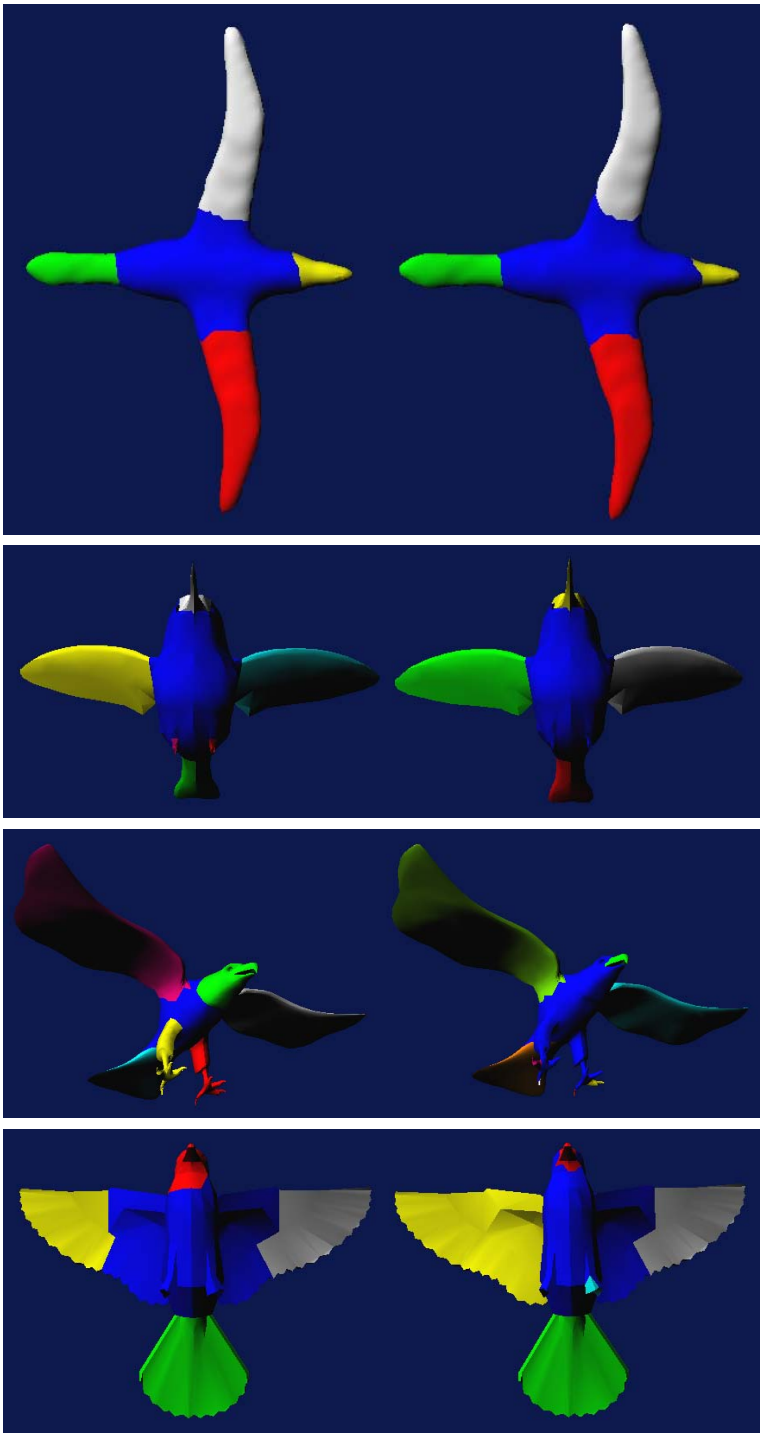
Πίνακας 2.1: Σύγκριση κατατμήσεων πρώτου ιεραρχικού επιπέδου με τον πρωτότυπο (αριστερά) και τον τροποποιημένο (δεξιά) αλγορίθμο

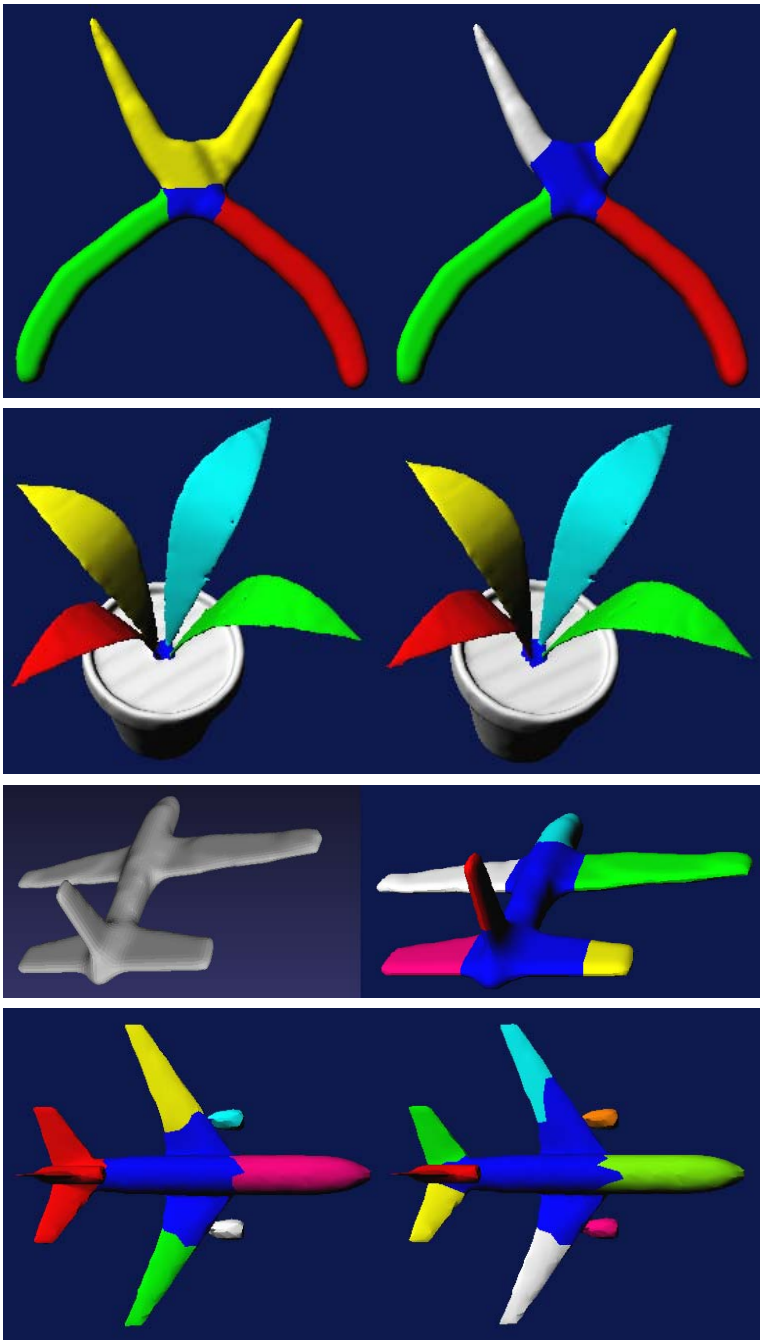


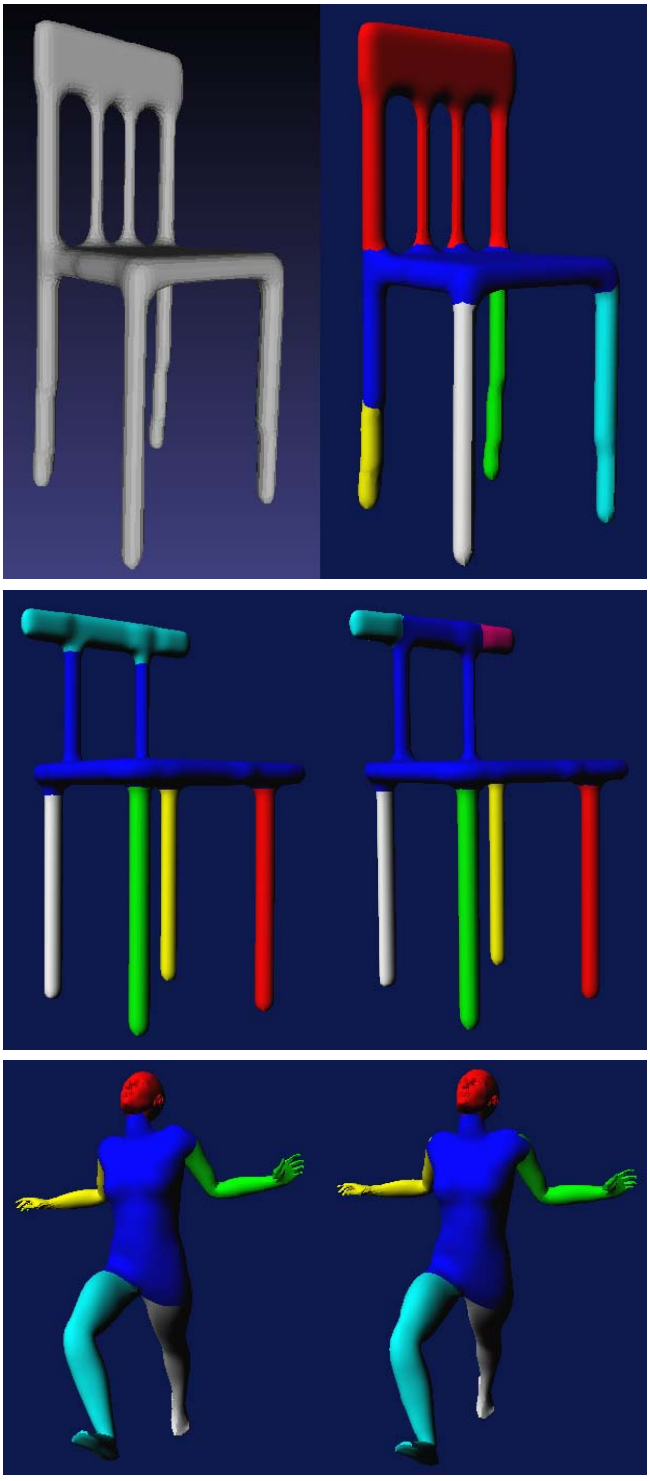


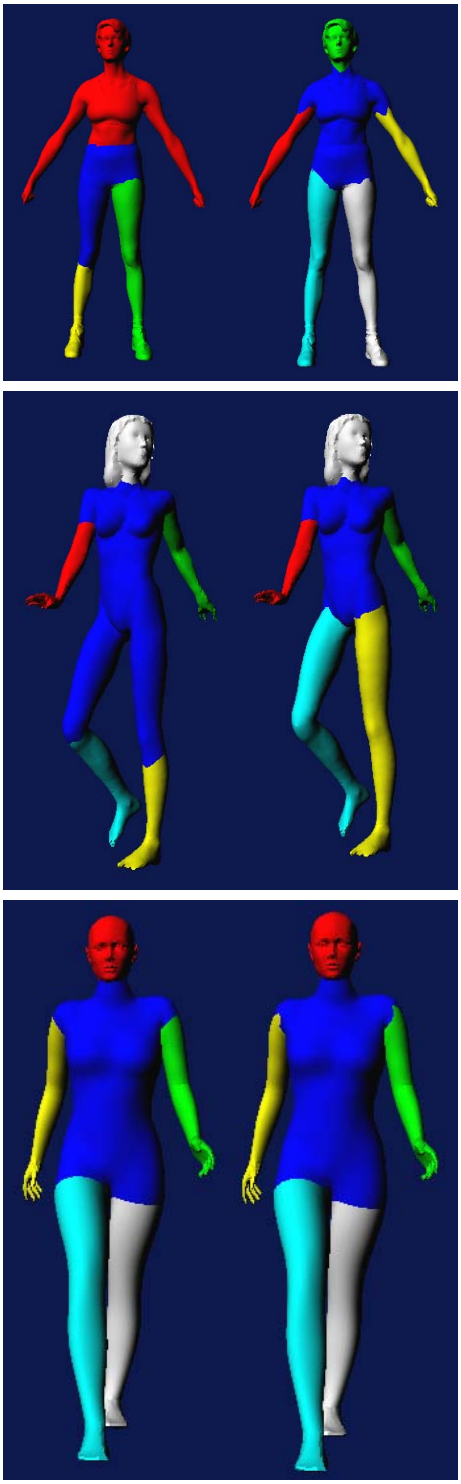


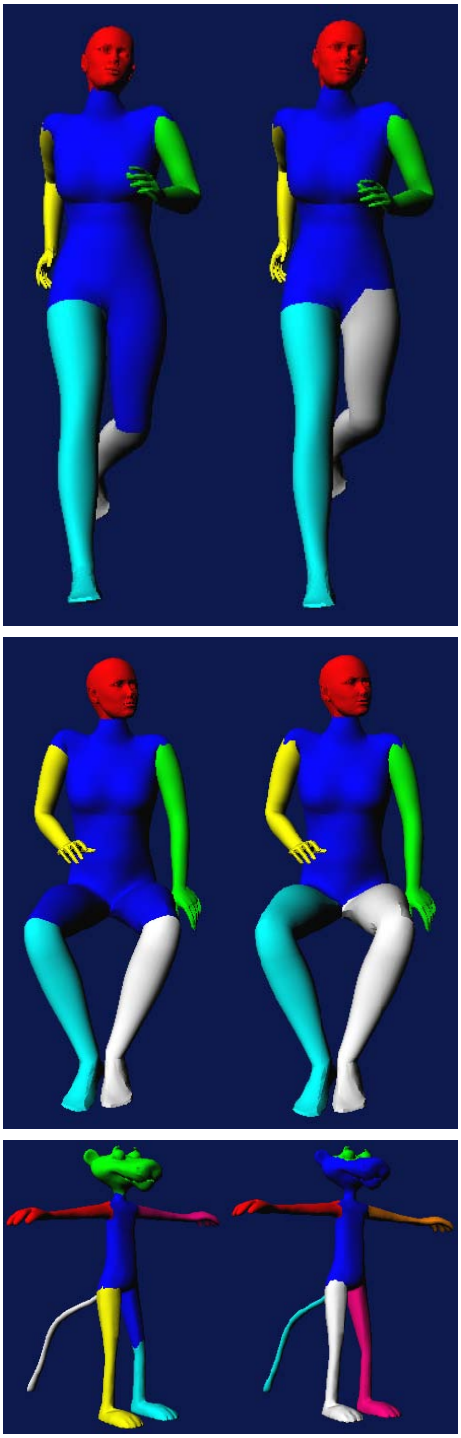


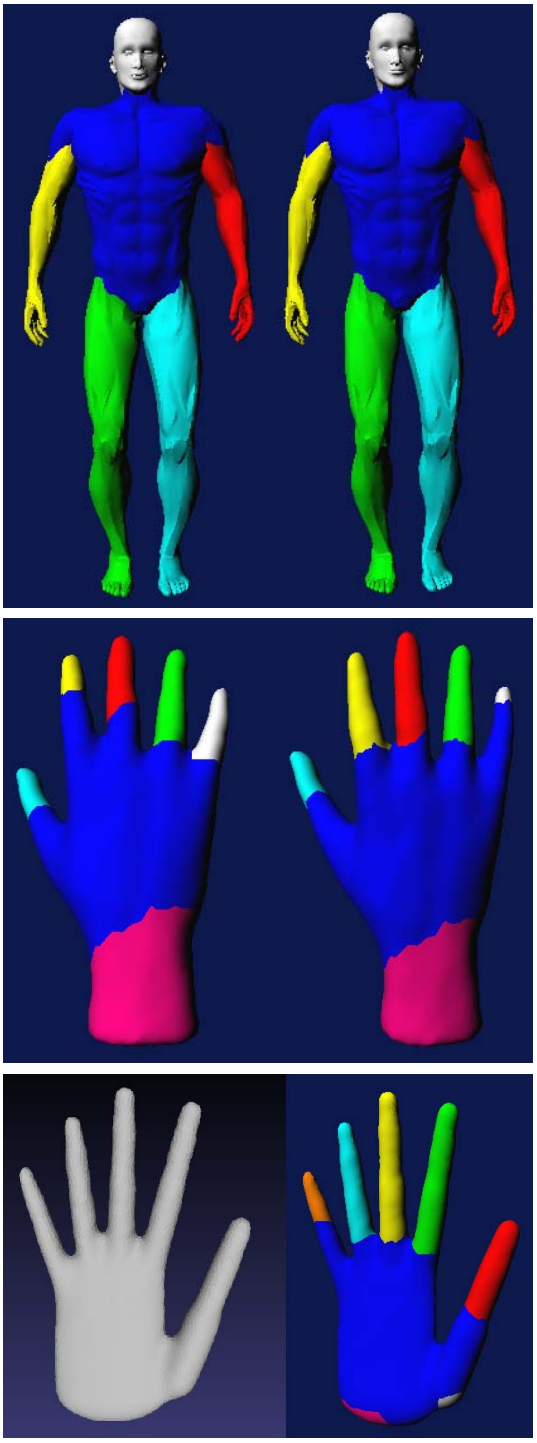


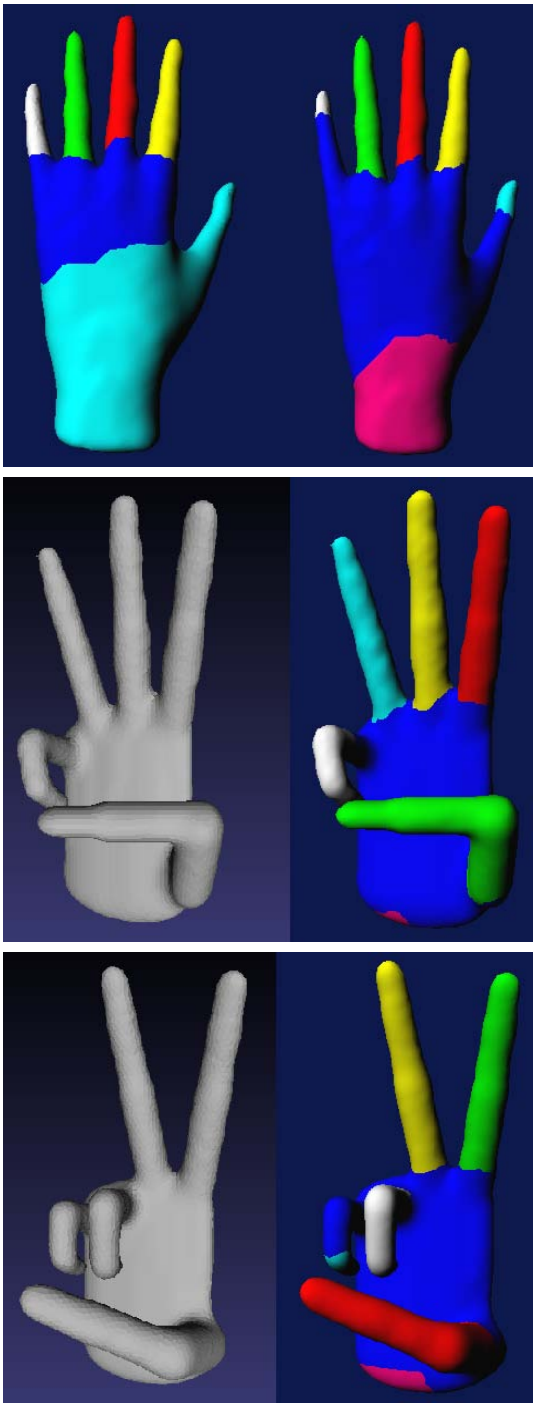




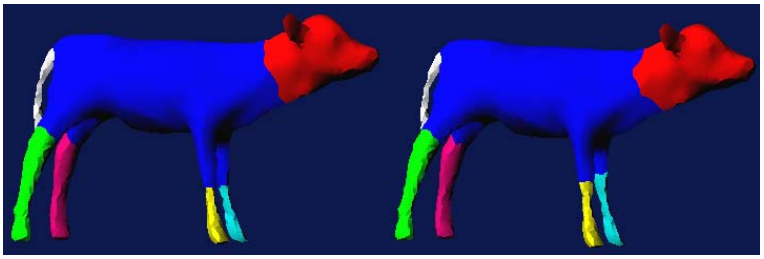




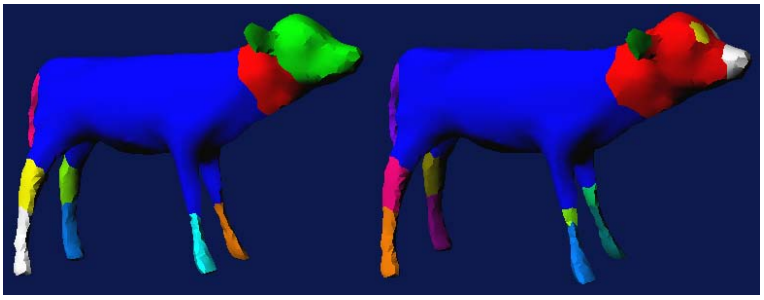




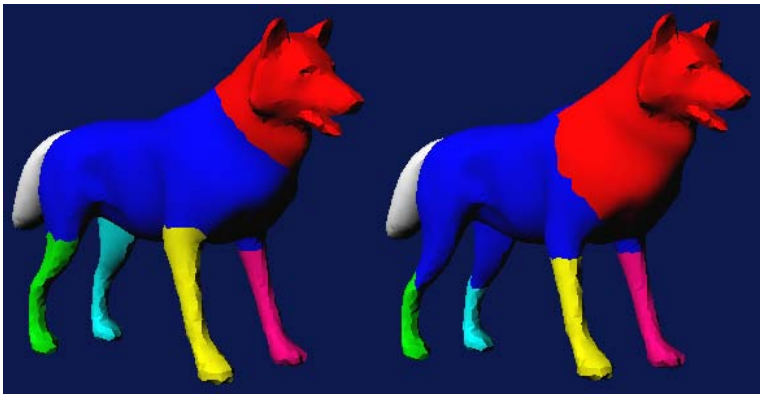
Πίνακας 2.2: Σύγκριση κατατμήσεων πολλών ιεραρχικών επιπέδων με τον πρωτότυπο (αριστερά) και τον τροποποιημένο (δεξιά) αλγορίθμο



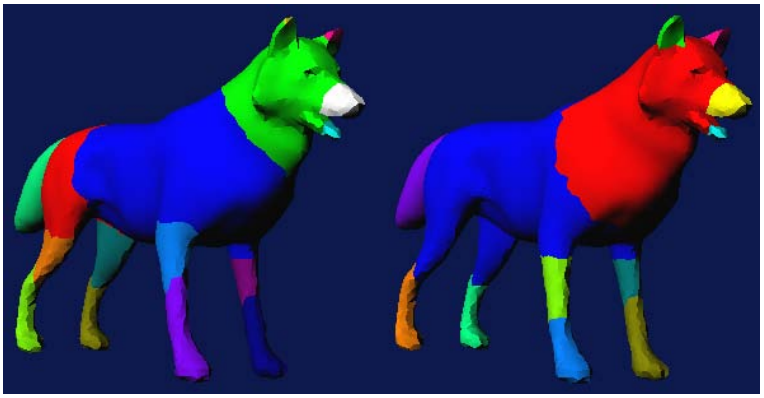
1° ιεραρχικό επίπεδο



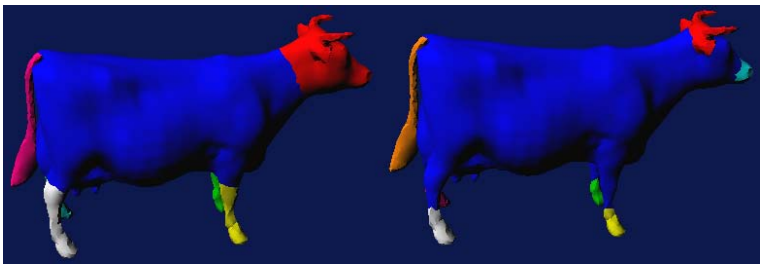
2° ιεραρχικό επίπεδο



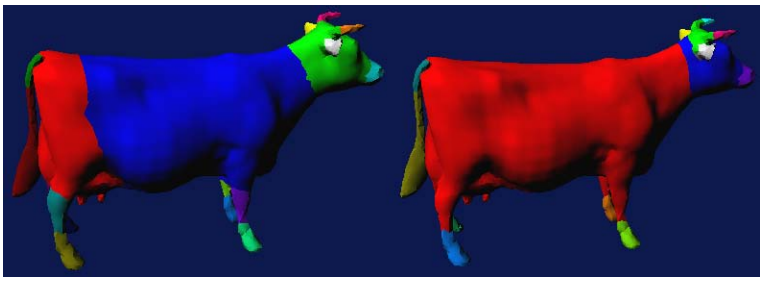
1° ιεραρχικό επίπεδο



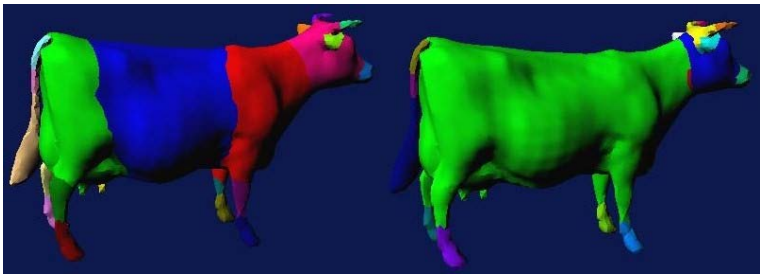
2° ιεραρχικό επίπεδο



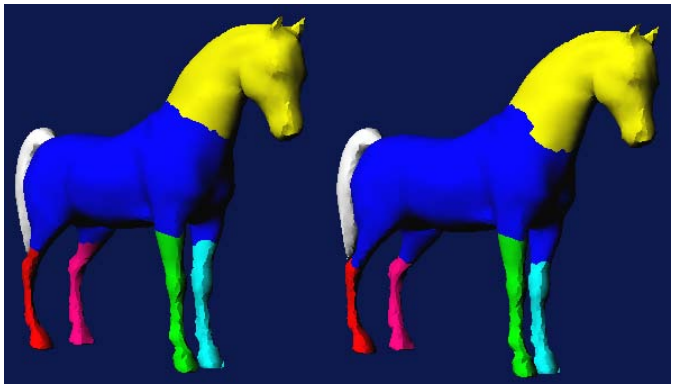
1° ιεραρχικό επίπεδο



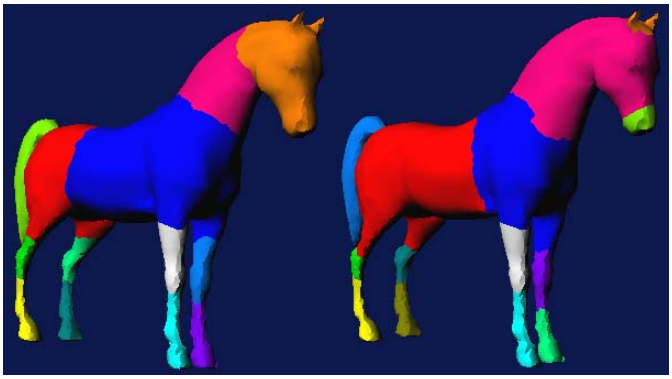
2° ιεραρχικό επίπεδο



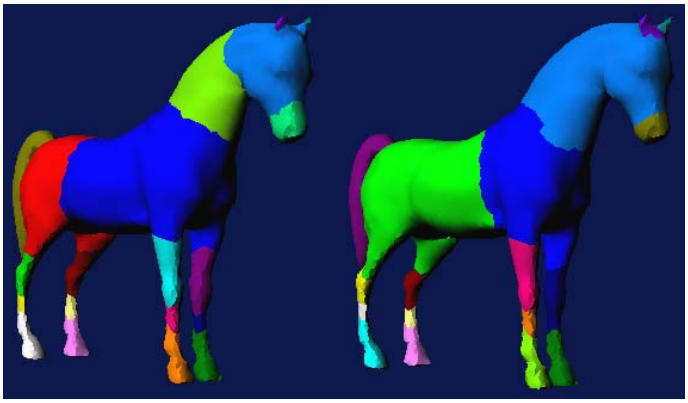
3ο ιεραρχικό επίπεδο



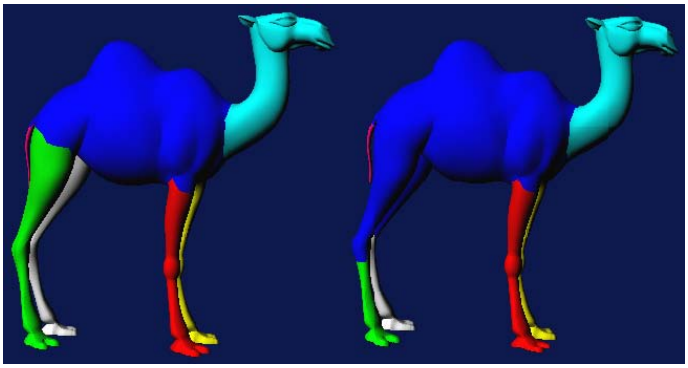
1ο ιεραρχικό επίπεδο



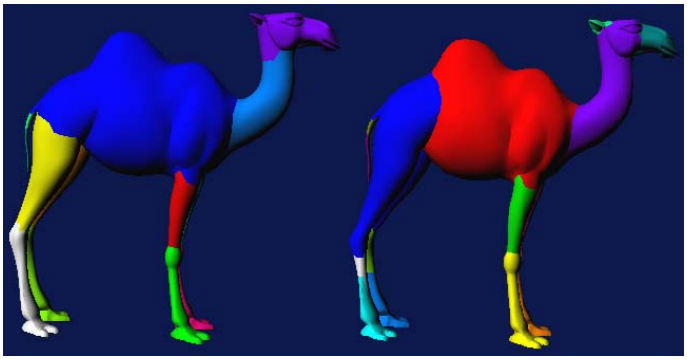
2ο ιεραρχικό επίπεδο



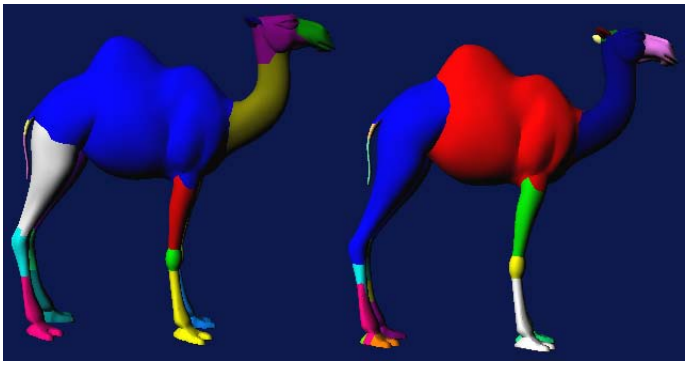
3ο ιεραρχικό επίπεδο



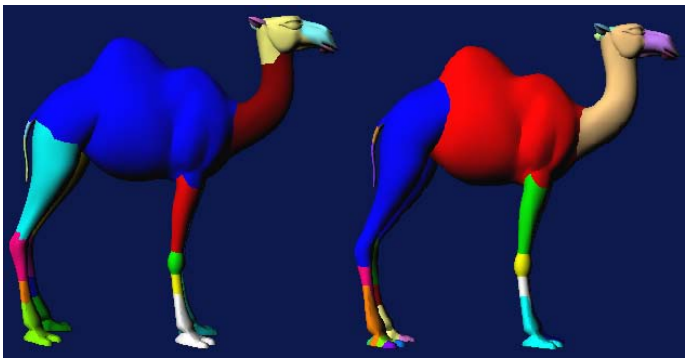
1ο ιεραρχικό επίπεδο



2ο ιεραρχικό επίπεδο

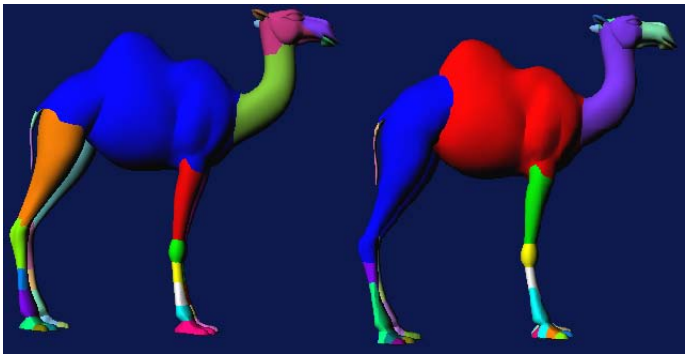


3ο ιεραρχικό επίπεδο

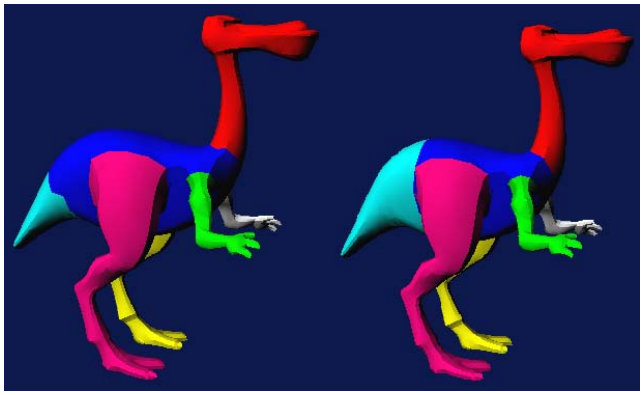


4ο ιεραρχικό επίπεδο

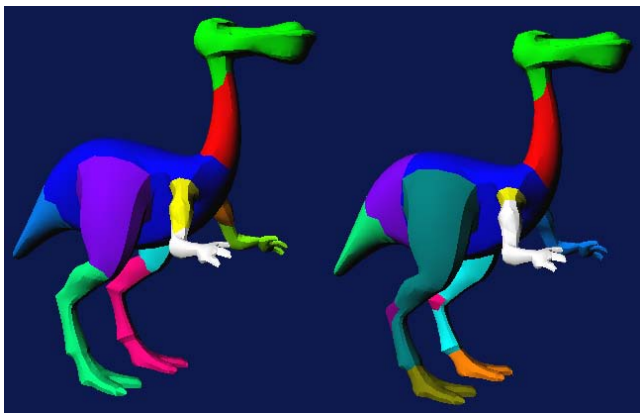
5ο ιεραρχικό επίπεδο



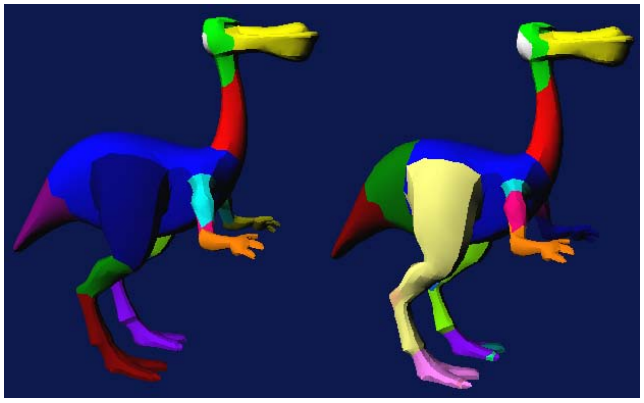
6ο ιεραρχικό επίπεδο



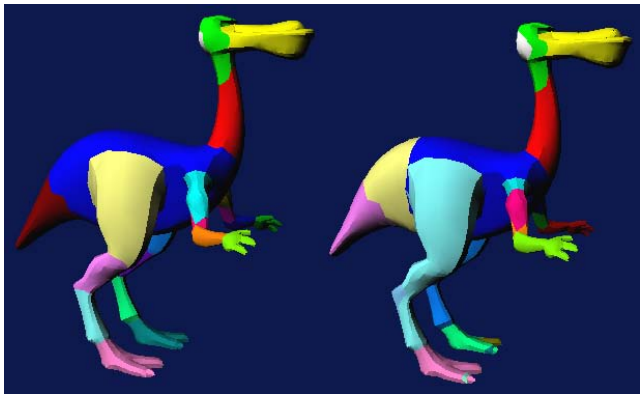
1ο ιεραρχικό επίπεδο



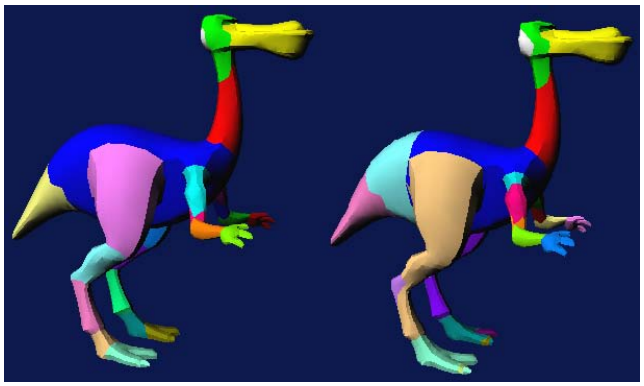
2ο ιεραρχικό επίπεδο



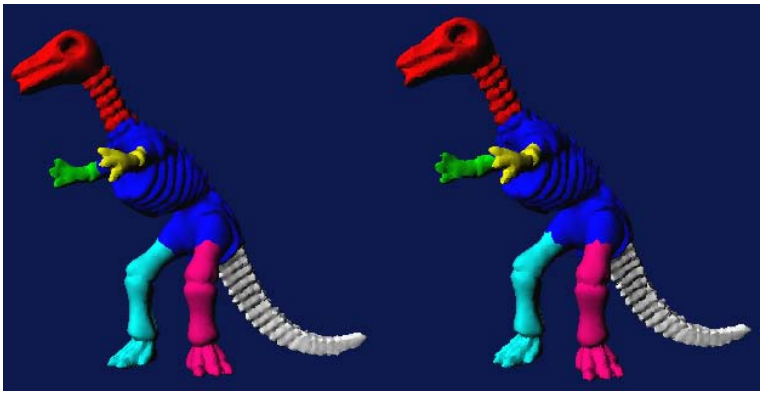
3ο ιεραρχικό επίπεδο



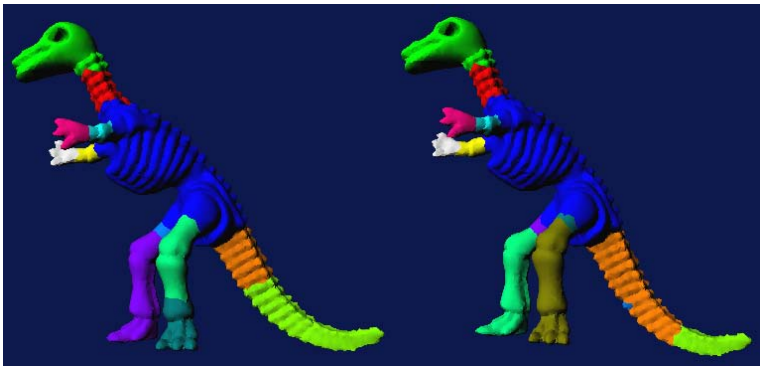
4ο ιεραρχικό επίπεδο



5ο ιεραρχικό επίπεδο



1ο ιεραρχικό επίπεδο

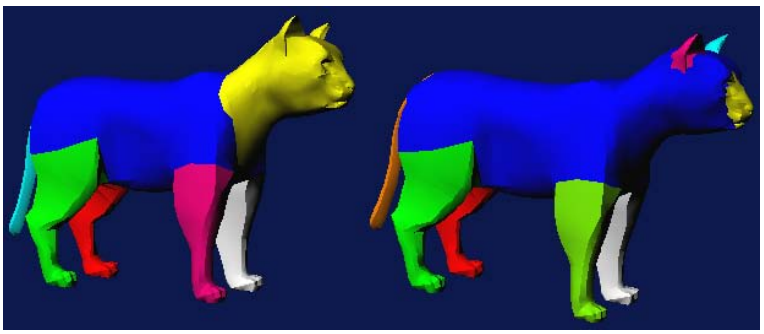


2ο ιεραρχικό επίπεδο

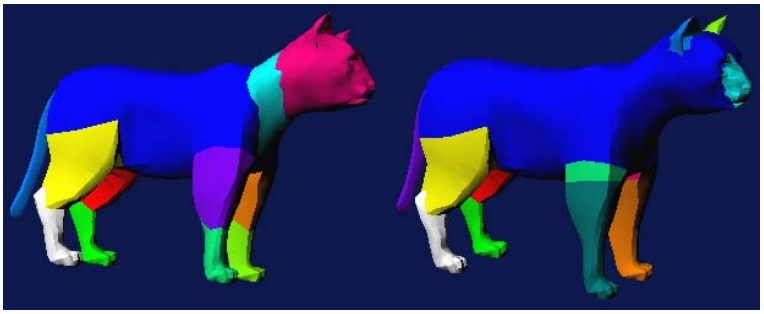
3ο ιεραρχικό επίπεδο

4ο ιεραρχικό επίπεδο

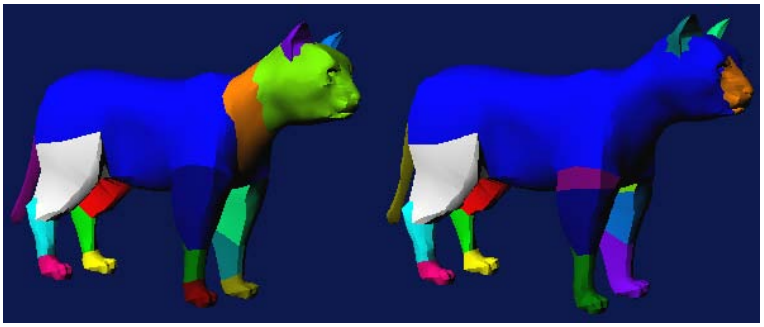
5ο ιεραρχικό επίπεδο



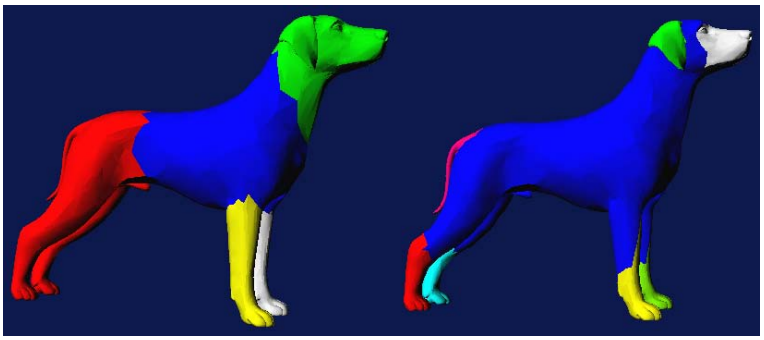
1ο ιεραρχικό επίπεδο



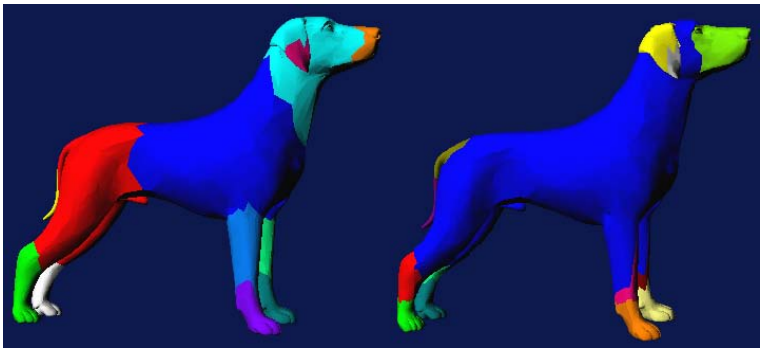
2° ιεραρχικό επίπεδο



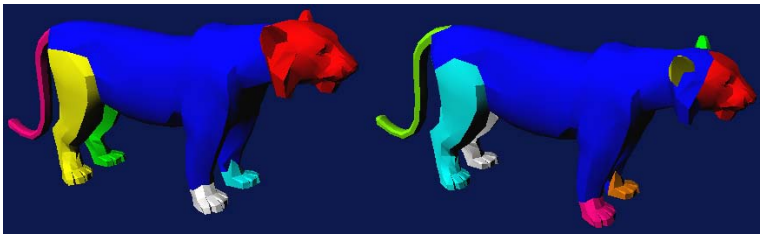
3° ιεραρχικό επίπεδο



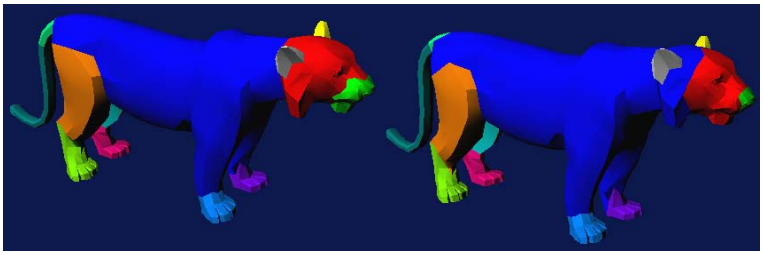
1° ιεραρχικό επίπεδο



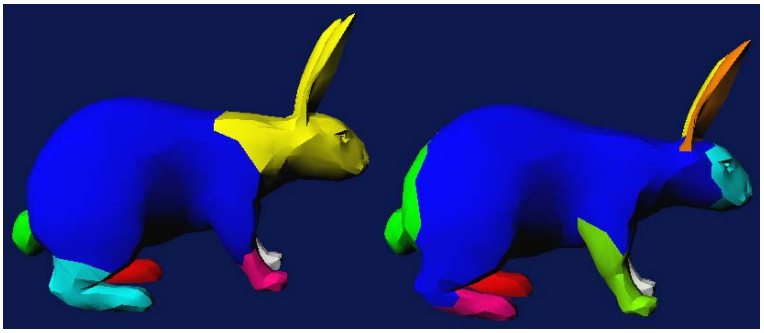
2ο ιεραρχικό επίπεδο



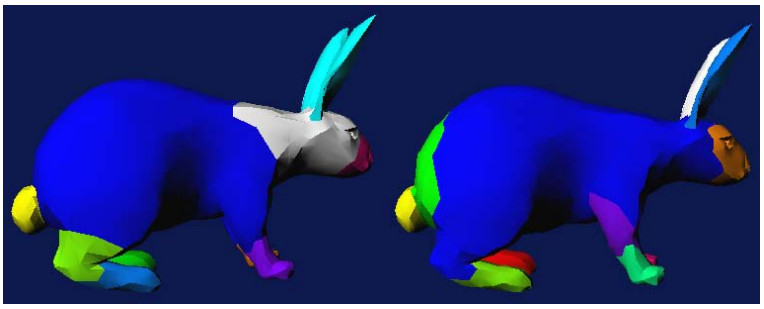
1ο ιεραρχικό επίπεδο



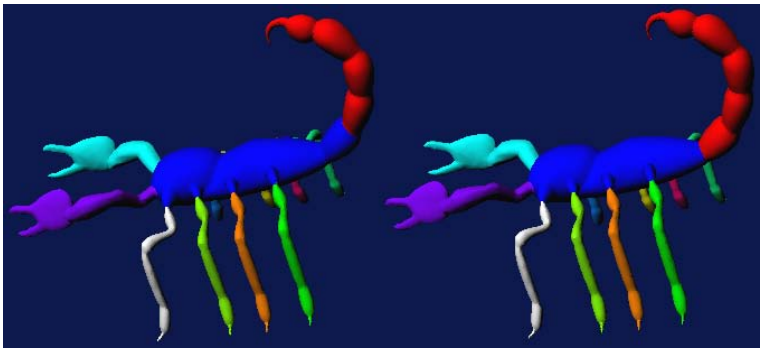
2ο ιεραρχικό επίπεδο



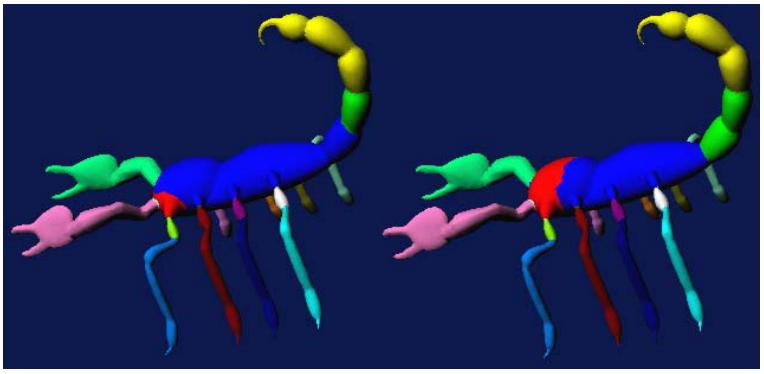
1ο ιεραρχικό επίπεδο



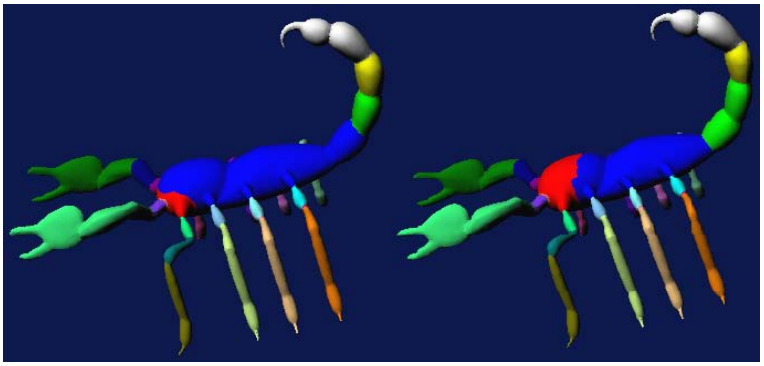
2ο ιεραρχικό επίπεδο



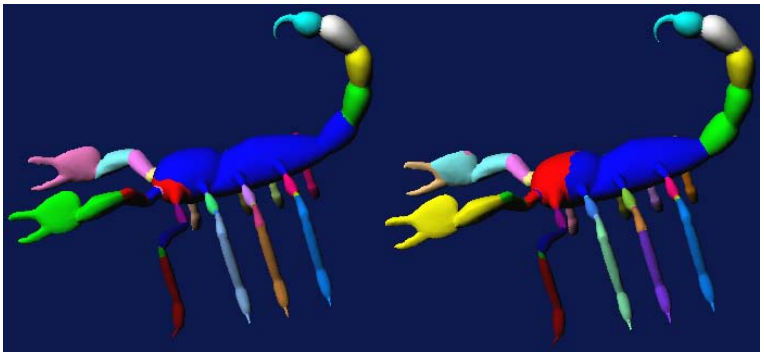
1ο ιεραρχικό επίπεδο



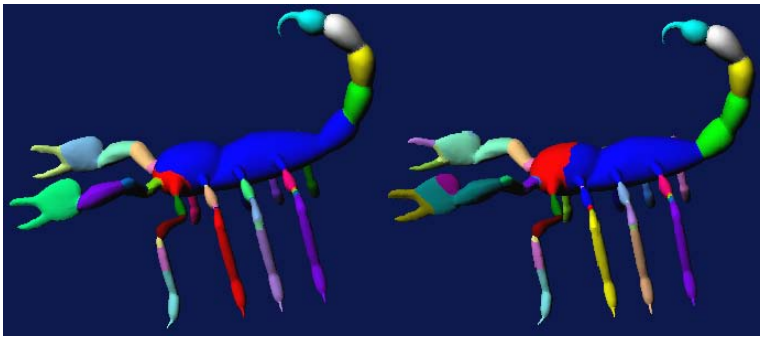
2° ιεραρχικό επίπεδο



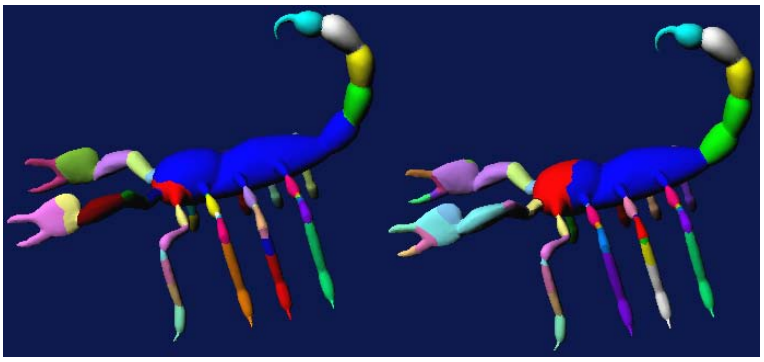
3° ιεραρχικό επίπεδο



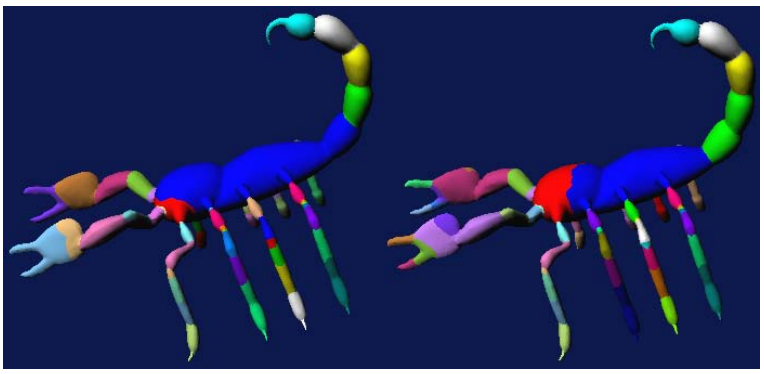
4° ιεραρχικό επίπεδο



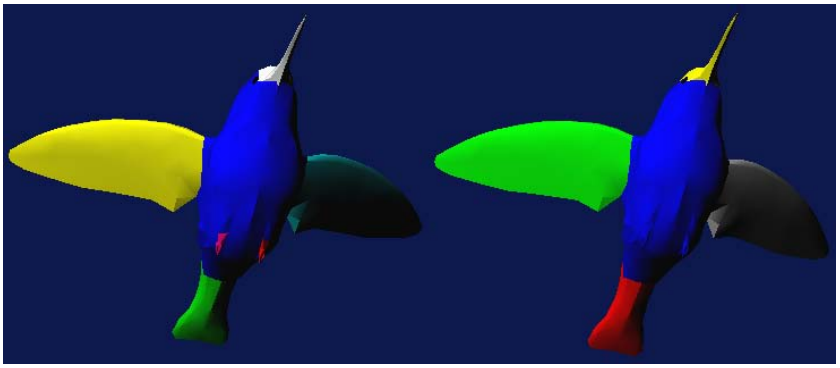
5ο ιεραρχικό επίπεδο



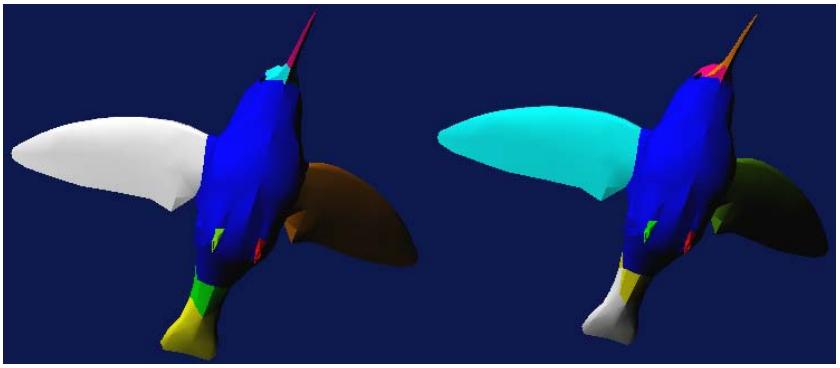
6ο ιεραρχικό επίπεδο



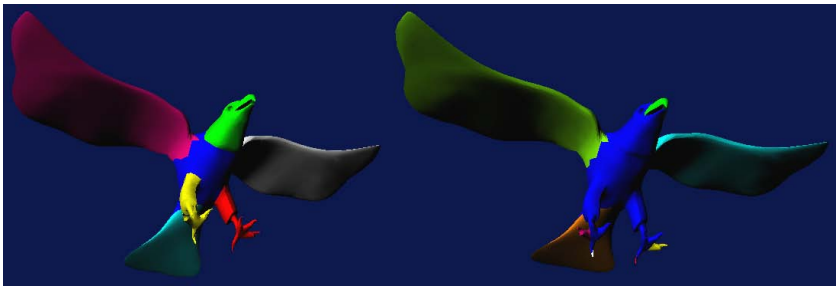
7ο ιεραρχικό επίπεδο



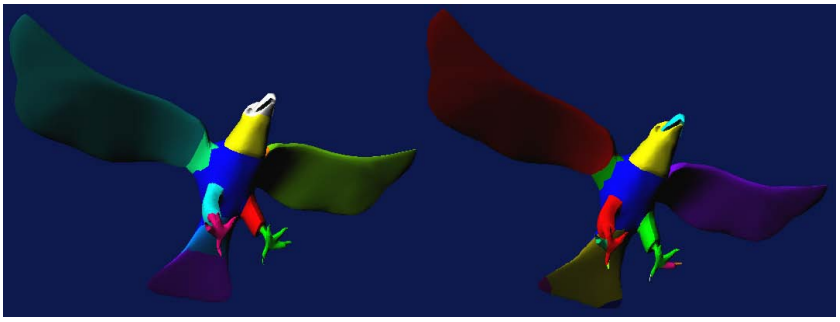
1ο ιεραρχικό επίπεδο



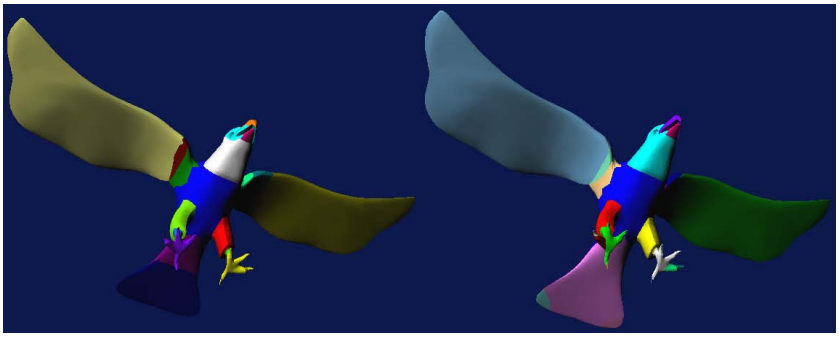
2ο ιεραρχικό επίπεδο



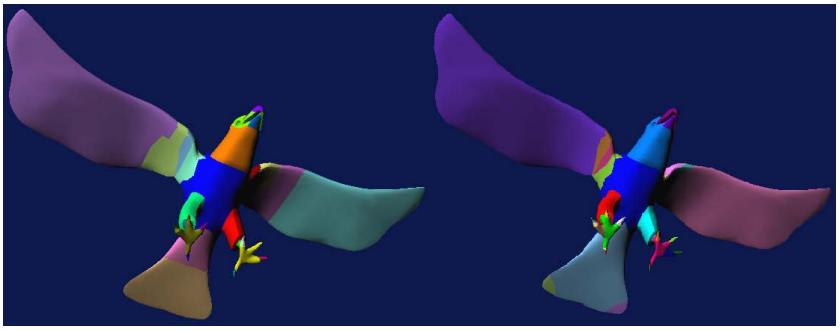
1ο ιεραρχικό επίπεδο



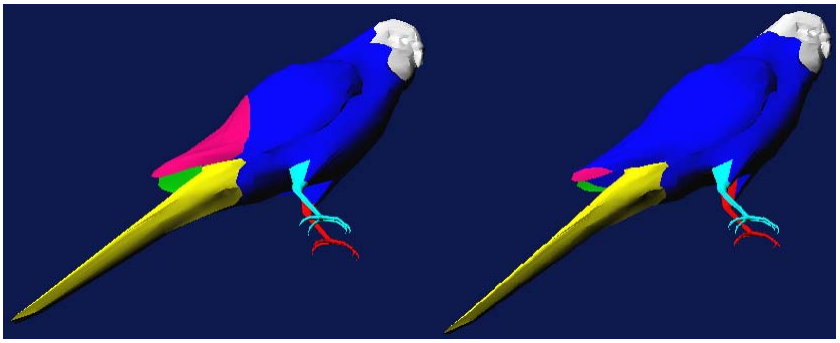
2° ιεραρχικό επίπεδο



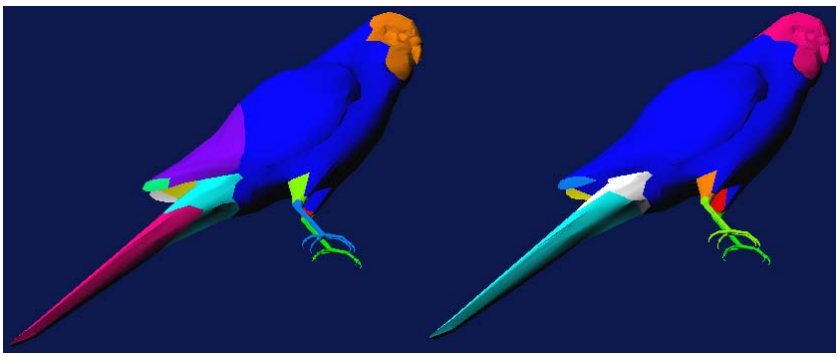
3° ιεραρχικό επίπεδο



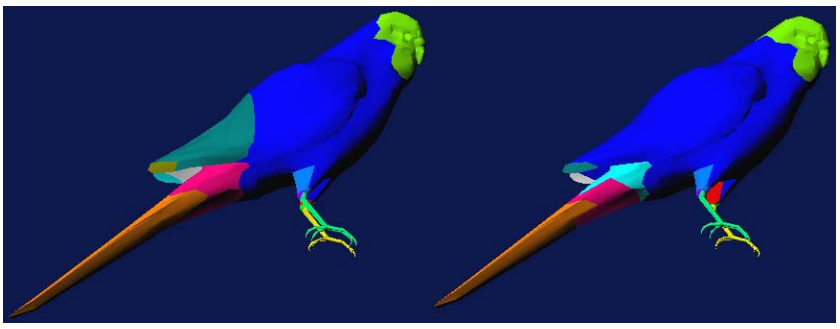
4° ιεραρχικό επίπεδο



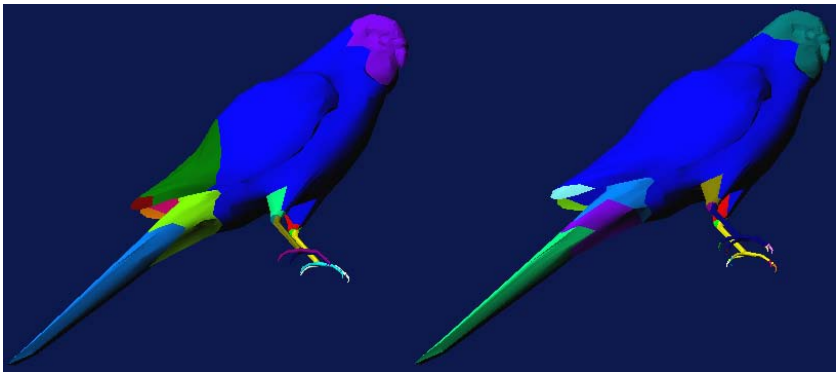
1° ιεραρχικό επίπεδο



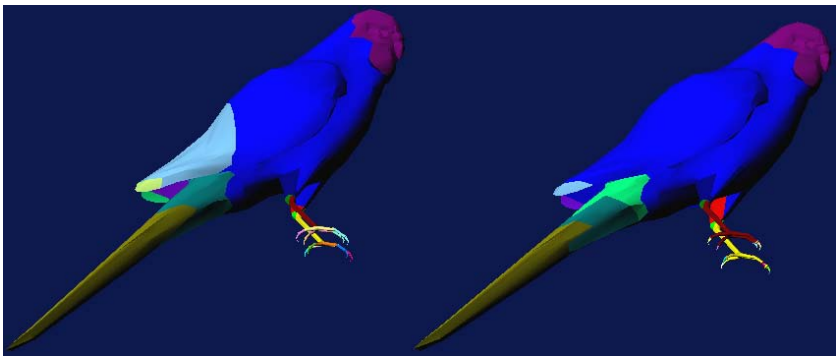
2° ιεραρχικό επίπεδο



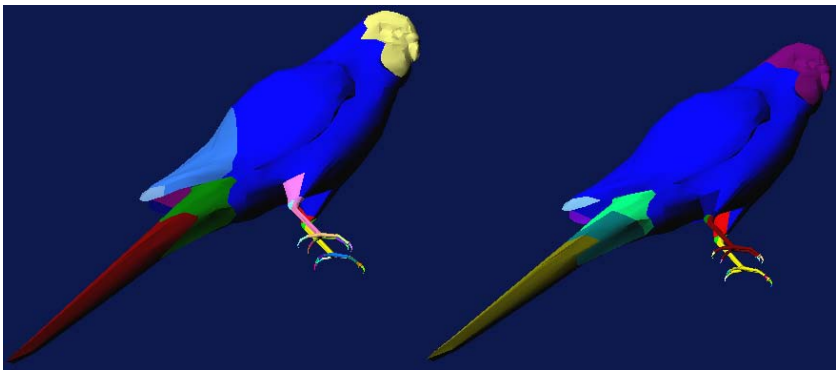
3° ιεραρχικό επίπεδο



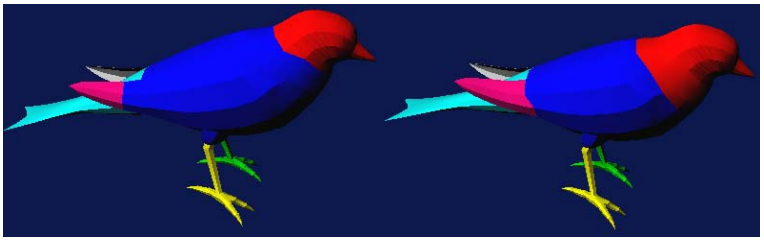
4ο ιεραρχικό επίπεδο



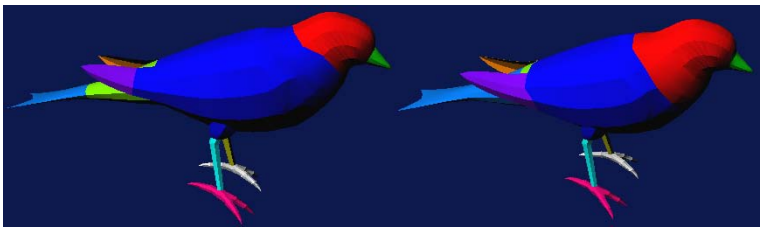
5ο ιεραρχικό επίπεδο



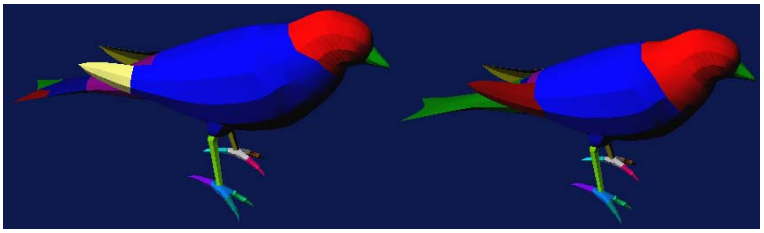
6ο ιεραρχικό επίπεδο
(μόνο πρωτότυπος αλγόριθμος - αριστερά)



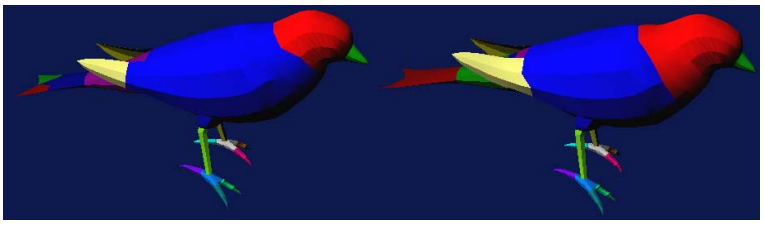
1° ιεραρχικό επίπεδο



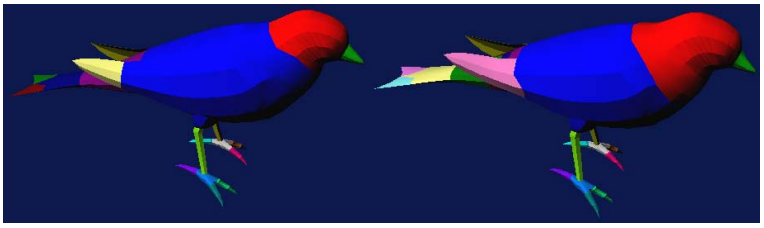
2° ιεραρχικό επίπεδο



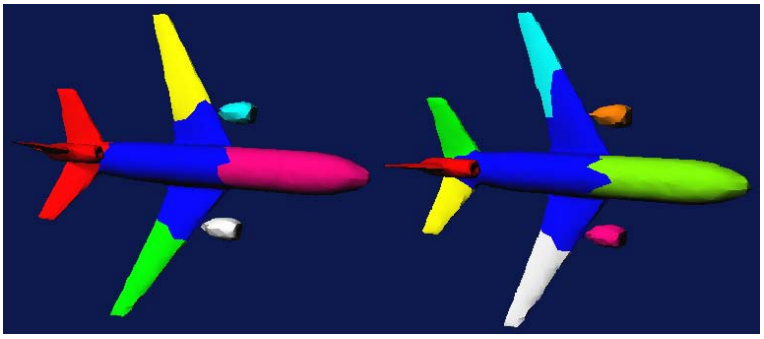
3° ιεραρχικό επίπεδο



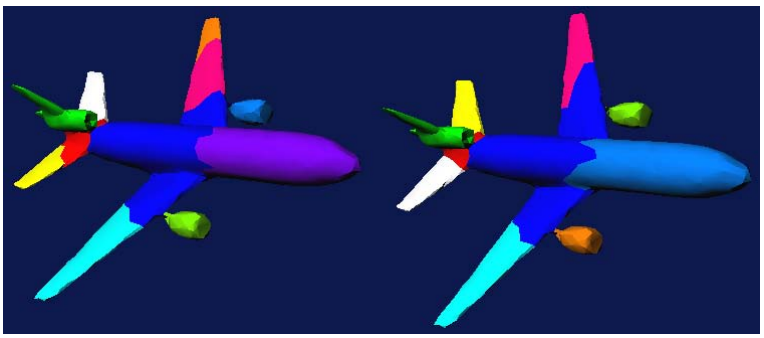
4° ιεραρχικό επίπεδο
(μόνο τροποποιημένος αλγόριθμος - δεξιά)



5° ιεραρχικό επίπεδο
(μόνο τροποποιημένος αλγόριθμος - δεξιά)

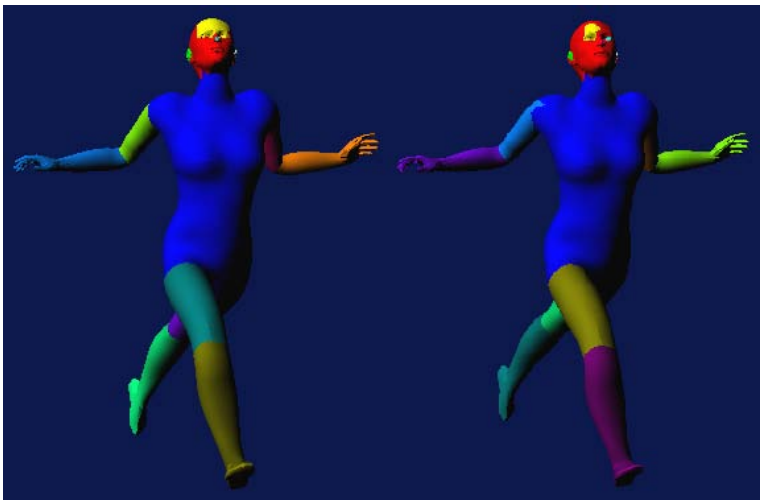


1° ιεραρχικό επίπεδο



2° ιεραρχικό επίπεδο

1° ιεραρχικό επίπεδο



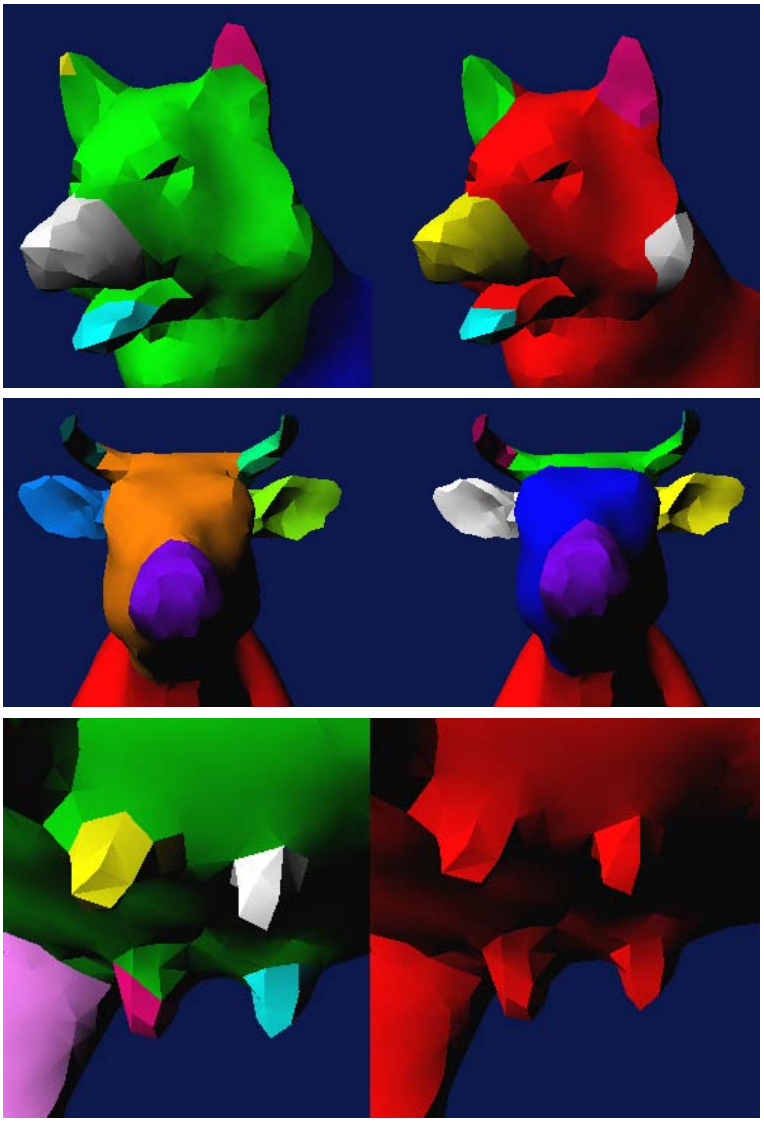
2° ιεραρχικό επίπεδο

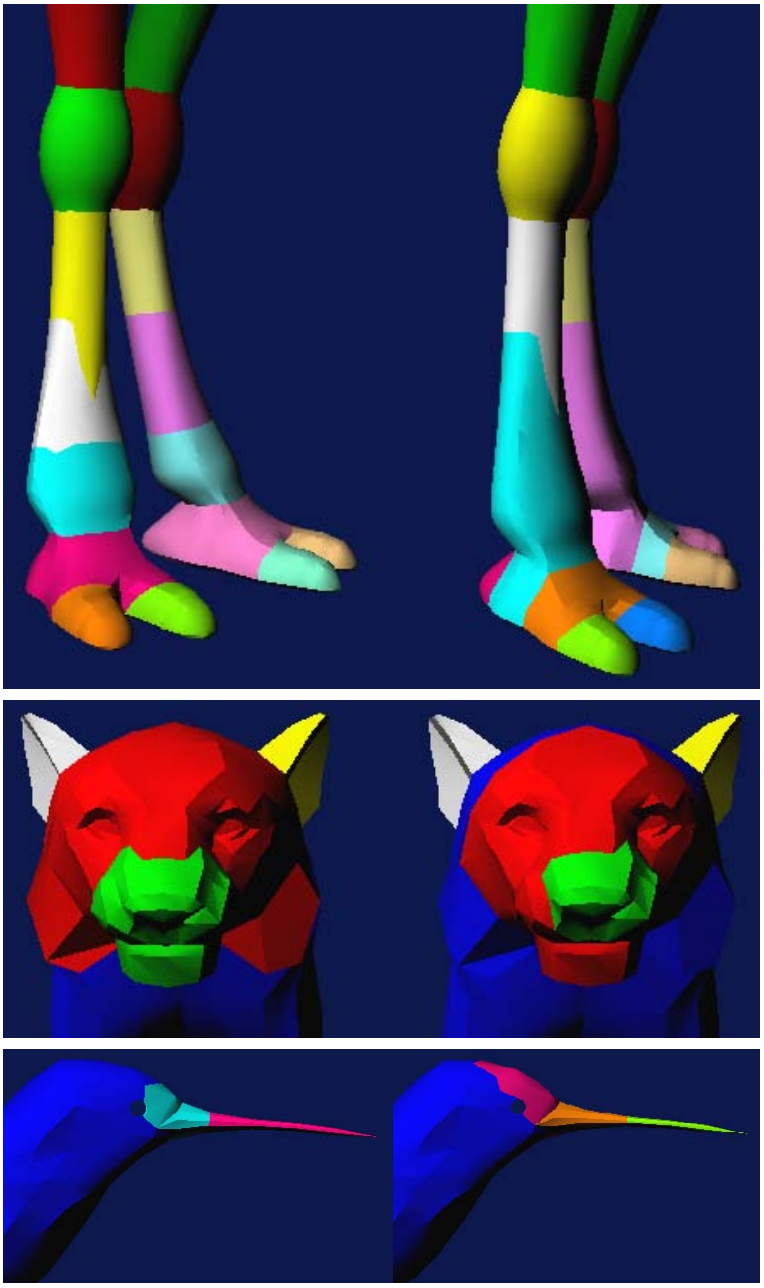
3° ιεραρχικό επίπεδο

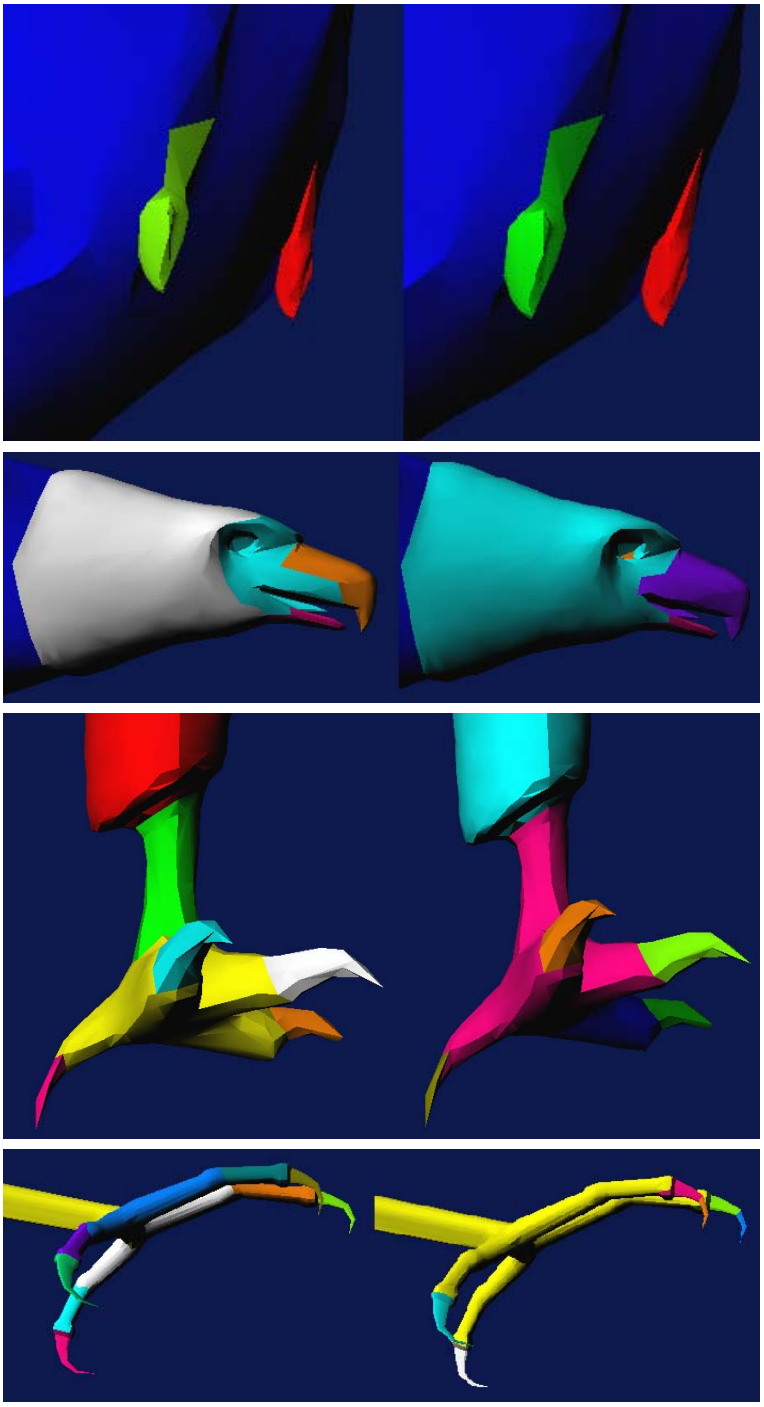
4° ιεραρχικό επίπεδο

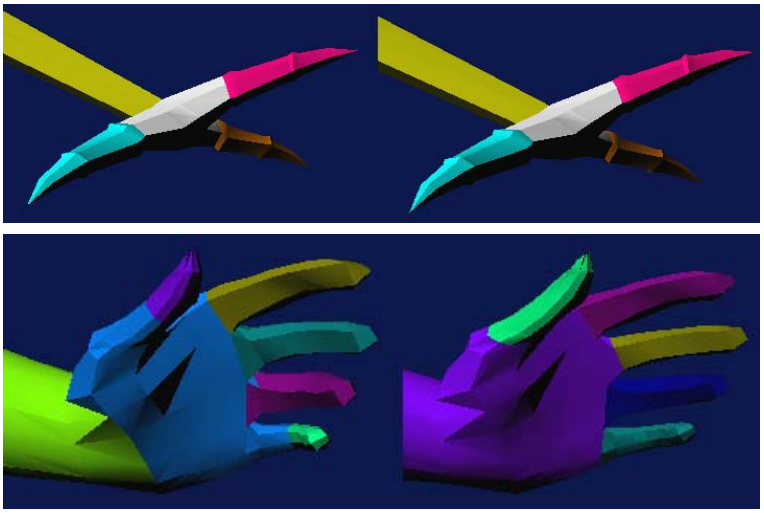
5° ιεραρχικό επίπεδο

Πίνακας 2.3: Σύγκριση κατατμήσεων του πρωτότυπου (αριστερά) και του τροποποιημένου (δεξιά) αλγορίθμου με zoom σε λεπτομέρειες









2.9.2 Σχολιασμός Αποτελεσμάτων

Στις υπο-ενότητες που ακολουθούν, συγκρίνονται και σχολιάζονται τα αποτελέσματα μεταξύ του πρωτότυπου και του τροποποιημένου αλγορίθμου, για τα διάφορα ιεραρχικά επίπεδα.

2.9.2.1 Κατατμήσεις Πρώτου Ιεραρχικού Επιπέδου

Στον πίνακα 2.1 μπορούμε να παρατηρήσουμε αποτελέσματα κατάτμησης του πρώτου ιεραρχικού επιπέδου σε μια ποικιλία μοντέλων. Σε κάθε εικόνα συγκρίνονται η υλοποίηση του [30] χωρίς (κατά το δυνατόν) τροποποιήσεις (αριστερά), με την τροποποιημένη εκδοχή της (δεξιά).
Η τροποποιημένη εκδοχή της υλοποίησης περιλαμβάνει :

- εξαγωγή του αρχικού πυρήνα με κβαντισμό της *συνάρτησης προεξοχής*
- εξαγωγή της τελικής συνιστώσας πυρήνα με μη-ομοιόμορφη επέκταση του αρχικού πυρήνα
- χρήση μόνο των χαρακτηριστικών σημείων που βρίσκονται προς την πλευρά της περιοχής αναζήτησης που επεκτείνεται κάθε φορά (πλευρά πυρήνα / πλευρά προεξοχής)

- χρήση διαφορετικών κατωφλίων για την επέκταση της περιοχής αναζήτησης προς την πλευρά πυρήνα και την πλευρά προεξοχής (η τροποποίηση αυτή αποδείχτηκε απαραίτητη και στην πρωτότυπη εκδοχή της υλοποίησης)

- χρήση της χωρητικότητας με βάση τον τύπο (2.10) για την εφαρμογή του αλγορίθμου min cut

- Όσον αφορά την αρχική συνιστώσα πυρήνα, η εξαγωγή της με κβαντισμό της *συνάρτησης προεξοχής*, είναι μια πολύ πιο απλή (υπολογιστικά) διαδικασία (απαιτεί τον υπολογισμό των *γεωδαιτικών αποστάσεων*, δεν απαιτεί όμως τον μετασχηματισμό *ΠΔΚ*), η οποία φαίνεται να είναι πιο ευσταθής και εύρωστη. Όπως έχει τονισθεί στην ενότητα 2.6, η διαδικασία επέκτασης πυρήνα συνήθως δεν μπορεί να διορθώσει μια κακή αρχική συνιστώσα πυρήνα. Τα μοντέλα του πίνακα 2.1 που δεν έχουν χρωματιστεί αποτελούν τέτοιες περιπτώσεις (μοντέλο αεροπλάνου, μοντέλο καρέκλας και μοντέλο χεριού). Στο μοντέλο σκορπιού φαίνεται μια περίπτωση που η επέκταση πυρήνα διόρθωσε ένα κακό αρχικό πυρήνα.

- Όσον αφορά την τελική συνιστώσα πυρήνα, μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής. Σε πολλές περιπτώσεις η πρωτότυπη και η τροποποιημένη εκδοχή της διαδικασίας επέκτασης πυρήνα δεν διαφέρουν ως προς το αποτέλεσμα (πχ μοντέλο μυρμηγκιού, σκορπιού). Υπάρχουν περιπτώσεις που φαίνεται η αδυναμία του πρωτότυπου αλγορίθμου επέκτασης πυρήνα. Για παράδειγμα, στα ανθρωποειδή μοντέλα συχνά τα πόδια δεν διαχωρίζονται σωστά (τομή στο γόνατο), λόγω περιττής επέκτασης της συνιστώσας πυρήνα προς την σχετική προεξοχή. Αντίθετα, ενίοτε λόγω πρώιμου τερματισμού της διαδικασίας επέκτασης πυρήνα, ο κορμός δεν εξάγεται σωστά (μοντέλο γυναίκας, μοντέλο σκυλιού). Όμως και η προτεινόμενη μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα μερικές φορές οδηγεί σε μεγαλύτερη επέκταση από αυτήν που χρειάζεται (η οποία όμως είναι πιο εύλογη σε σχέση με την περιττή επέκταση του πυρήνα - πρωτότυπος αλγορίθμος - προς το γόνατο στα ανθρωποειδή μοντέλα, καθώς διαχωρίζει κοντινά χαρακτηριστικά σημεία). Τα μοντέλα της αγελάδας (κεφάλι), της καμήλας (πόδια), του πάνθηρα (μάτια) και της καρέκλας (πλάτη) αποτελούν τέτοιες περιπτώσεις.

- Αναφορικά με τις χωρητικότητες, αυτό που μπορεί να πει κανείς είναι πως σε γενικές γραμμές τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν πολύ. Υπάρχουν περιπτώσεις που τα αποτελέσματα διαφοροποιούνται όπως στην περίπτωση του μοντέλου μοσχαριού (λαιμός) και στο μοντέλο λύκου

(λαιμός). Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο σε άλλες περιοχές (πχ πόδια των μοντέλων ζώων). Ένας ενδεχόμενος λόγος για το φαινόμενο αυτό, είναι πως οι *γεωδαιτικές αποστάσεις* έχουν υπολογιστεί για το απλοποιημένο μοντέλο και χρησιμοποιούνται προσεγγιστικά και στο πρωτότυπο (με βάση το ιστορικό απλοποίησης του μοντέλου) κάτι που εισάγει σφάλμα στον υπολογισμό της *συνάρτησης προεξοχής* των κορυφών του πρωτότυπου μοντέλου (ο αλγόριθμος απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων επηρεάζει με διαφορετικό τρόπο διαφορετικές περιοχές - άλλες απλοποιούνται περισσότερο και άλλες λιγότερο). Πρέπει επίσης να σημειωθεί πως μεγαλύτερο βάρος έχει δοθεί στον κοινό όρο των δύο χωρητικοτήτων (εξισώσεις (2.8) και (2.10)).

- Όσον αφορά την ιδιότητα του αναλλοίωτου στη στάση, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως ο τροποποιημένος αλγόριθμος δίνει σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα για μοντέλα διαφορετικής στάσης (ανθρωποειδές μοντέλο). Ακόμα παρατηρούμε πως το σύνολο των ανθρωποειδών μοντέλων έχει κατατμηθεί με ένα συνεπή τρόπο, όπως και το σύνολο των μοντέλων ζώων (τουλάχιστον όσον αφορά τον τροποποιημένο αλγόριθμο).

2.9.2.2 Κατατμήσεις Ιεραρχικών Επιπέδων Μεγαλύτερης Λεπτομέρειας

Στον πίνακα 2.2 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας. Στον πίνακα 2.3 παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα από τον πίνακα 2.2 με zoom σε λεπτομέρειες.
Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ο τροποποιημένος αλγόριθμος εξαγωγής αρχικού πυρήνα (ενότητα 2.6.2) και η τροποποιημένη χωρητικότητα (τύπος (2.10)) εφαρμόζονται μόνο στο πρώτο ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης του τροποποιημένου αλγορίθμου. Έτσι αυτό που διαφέρει στα ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας, είναι τα ελαφρώς διαφορετικά τμήματα (λόγω της διαφοροποίησης των τελικών εκλεπτυσμένων συνόρων από το προηγούμενο ιεραρχικό επίπεδο) και η διαδικασία επέκτασης του αρχικού πυρήνα.
Εδώ, τα αποτελέσματα των αλγορίθμων είναι παρόμοια. Οι προεξοχές, ανάλογα με το μήκος και το πόσο ανώμαλη είναι η επιφάνειά τους ενίοτε υπερκατατμούνται. Δύσκολες περιοχές όπως τα μάτια και η μύτη (ανθρωποειδή μοντέλα), είτε δεν διαχωρίζονται ικανοποιητικά είτε δεν ανιχνεύονται καθόλου. Αυτό έχει να κάνει με το πόσο καλή είναι η ανάλυση του μοντέλου για το εν λόγω χαρακτηριστικό. Χαρακτηριστικά όπως η μουσούδα, τα αυτιά, τα δάκτυλα, τα νύχια και το ράμφος εντοπίζονται και κατατμούνται ικανοποιητικά.

2.10 Συνολικά Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία είχε ως αντικείμενο την ιεραρχική κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων με έμφαση στις μεθόδους *ΜΓΜΔ*. Στο κεφάλαιο 1 δόθηκε μια διεξοδική παρουσίαση των μεθόδων κατάτμησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων της τρέχουσας τεχνολογικής στάθμης. Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάστηκε λεπτομερώς η υλοποίηση ενός δημοφιλούς αλγορίθμου κατάτμησης ο οποίος είναι αναλλοίωτος στη στάση του μοντέλου. Στο πλαίσιο της υλοποίησης του αλγορίθμου μελετήθηκε η εφαρμογή διαφόρων μεθόδων ΜΓΜΔ στην κατάτμηση 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων. Επίσης κατά την παρουσίαση των διαφόρων βημάτων του αλγορίθμου, αναλύθηκαν οι αδυναμίες του πρωτότυπου αλγορίθμου και προτάθηκαν οι εξής τροποποιήσεις :

- εξαγωγή του αρχικού πυρήνα με κβαντισμό της *συνάρτησης προεξοχής*
- εξαγωγή της τελικής συνιστώσας πυρήνα με μη-ομοιόμορφη επέκταση του αρχικού πυρήνα
- χρήση μόνο των χαρακτηριστικών σημείων που βρίσκονται προς την πλευρά της περιοχής αναζήτησης που επεκτείνεται κάθε φορά (πλευρά πυρήνα / πλευρά προεξοχής)
- χρήση διαφορετικών κατωφλίων για την επέκταση της περιοχής αναζήτησης προς την πλευρά πυρήνα και την πλευρά προεξοχής
- χρήση τροποποιημένης χωρητικότητας για την εφαρμογή του αλγορίθμου min cut (τύπος (2.10))
- αποκλεισμός των τομών από υποψήφια χαρακτηριστικά σημεία (ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας)

Τέλος, σε κάθε βήμα συγκρίθηκε ο πρωτότυπος αλγόριθμος με τον τροποποιημένο.

- Όσον αφορά τις μεθόδους ΜΓΜΔ, η Λαπλασιανή ιδιο-απεικόνιση και η τοπικά γραμμική ένθεση κρίθηκαν κατάλληλες για την κατάτμηση ανθρωποειδών μοντέλων (μοντέλων με περιορισμένο αριθμό προεξοχών). Η ισομομορφική απεικόνιση και η *ΠΔΚ* σε όλες τις εκδοχές της, διαθέτουν την ιδιότητα του αναλλοίωτου στη στάση και κρίθηκαν πιο γενικές μέθοδοι, κατάλληλες για την κατάτμηση οποιασδήποτε κατηγορίας μοντέλων.

- Η εξαγωγή του αρχικού πυρήνα με κβαντισμό της *συνάρτηση προεξοχής* αποτελεί υπολογιστικά απλούστερη και πιο ευσταθή διαδικασία με πιο εύρωστα αποτελέσματα σε σχέση με τον πρωτότυπο αλγόριθμο εξαγωγής πυρήνα (σφαιρικός καθρεφτισμός). Υπήρξαν μοντέλα, για τα οποία ο σφαιρικός καθρεφτισμός έδωσε ένα μη-ικανοποιητικό αποτέλεσμα το οποίο στη συνέχεια δεν ήταν δυνατόν να διορθωθεί από την διαδικασία επέκτασης πυρήνα, οδηγώντας έτσι σε αποτυχία τον αλγόριθμο κατάτμησης.

- Η μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα αντιμετωπίζει τον ενίοτε πρώιμο τερματισμό της πρωτότυπης διαδικασίας επέκτασης πυρήνα, και αποτρέπει την περιττή του επέκταση προς μια προεξοχή, όταν δεν συνεπάγεται περαιτέρω διαχωρισμό χαρακτηριστικών σημείων. Παρ' όλα αυτά, μερικές φορές, η μη-ομοιόμορφη επέκταση πυρήνα, δίνει ως αποτέλεσμα ένα πυρήνα πιο εκτεταμένο απ' όσο χρειάζεται (για το πρώτο ιεραρχικό επίπεδο), σε κάθε περίπτωση όμως το αποτέλεσμα θεωρείται αποδεκτό.

- Η χρήση μόνο των χαρακτηριστικών σημείων που βρίσκονται προς την πλευρά της περιοχής αναζήτησης που επεκτείνεται κάθε φορά (πλευρά πυρήνα / πλευρά προεξοχής) έχει σκοπό την αποφυγή καταστάσεων κατά τις οποίες, η επέκταση ενός συνόρου προς μια πλευρά αποτρέπεται από ένα χαρακτηριστικό σημείο που βρίσκεται στην άλλη πλευρά του συνόρου (αυτό μπορεί να συμβεί αν δυο κοντινά χαρακτηριστικά σημεία διαχωρίζονται από το μη-εκλεπτυσμένο σύνορο).

- Η χρήση διαφορετικών κατωφλίων για την επέκταση της περιοχής αναζήτησης προς την πλευρά πυρήνα και την πλευρά προεξοχής, επιτρέπει την μεγαλύτερη επέκτασή της προς την κατεύθυνση του πυρήνα σε σχέση με την κατεύθυνση της προεξοχής.

- Η χρήση της τροποποιημένης χωρητικότητας για την εφαρμογή του αλγορίθμου min cut (τύπος (2.10)) αποτέλεσε ένα πειραματισμό, ο οποίος δεν έδειξε να διαφοροποιείται ιδιαίτερα από την πρωτότυπη χωρητικότητα, εκτός από κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις (πχ λαιμός ζώων). Επίσης παρατηρήθηκε και ένα αποτέλεσμα μη-αναμενόμενο μεν, αποδεκτό δε, ιδιαίτερα στις περιοχές των ποδιών των μοντέλων ζώων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, αυτό έχει εν μέρει να κάνει με το γεγονός πως οι *γεωδαιτικές αποστάσεις* υπολογίζονται για τις κορυφές του απλοποιημένου 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος και κατόπιν χρησιμοποιούνται προσεγγιστικά και για τις κορυφές του πρωτότυπου 3-Δ πολυγωνικού

πλέγματος. Λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός, πως τα τρίγωνα του πρωτότυπου 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος δεν απλοποιούνται ομοιόμορφα από τον αλγόριθμο απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων αλλά με βάση την επιφάνεια της κάθε περιοχής, το φαινόμενο αυτό εξηγείται σε ένα βαθμό.

- Ο αποκλεισμός των τομών από υποψήφια χαρακτηριστικά σημεία (για ιεραρχικά επίπεδα μεγαλύτερης λεπτομέρειας), έγινε με σκοπό την αποτροπή της υπερκατάτμησης του 3-Δ πολυγωνικού πλέγματος.

- Τα αποτελέσματα που προέκυψαν (πίνακες 2.1, 2.2, 2.3) θεωρούνται ικανοποιητικά, τόσο για το πρώτο ιεραρχικό επίπεδο κατάτμησης, όσο και για τα ιεραρχικά επίπεδα κατάτμησης μεγαλύτερης λεπτομέρειας. Τα χαρακτηριστικά μικρότερης κλίμακας, (μουσούδα, αυτιά, δάκτυλα, νύχια, ράμφος) εντοπίστηκαν και κατατμήθηκαν σωστά, με εξαίρεση τα μάτια και την μύτη στα ανθρωποειδή μοντέλα, κάτι που οφείλεται σε μεγάλο βαθμό, στην κακή ανάλυση των μοντέλων στις συγκεκριμένες περιοχές.

- Ο υπολογισμός των *γεωδαιτικών αποστάσεων* αποτελεί μια υπολογιστικά πολύπλοκη και χρονοβόρα διαδικασία (ενίοτε απαγορευτική) και η διαδικασία απλοποίησης 3-Δ πολυγωνικών πλεγμάτων έχει ενίοτε ως αρνητική επίπτωση την εξαφάνιση δομών μικρής κλίμακας, ο οποίες κατόπιν δεν ανιχνεύονται ούτε στο πρωτότυπο 3-Δ πολυγωνικό πλέγμα. Παρ' όλα αυτά, ο αλγόριθμος κατάτμησης που υλοποιήθηκε είναι από τους ελάχιστους που διαθέτουν την ιδιότητα του αναλλοίωτου στη στάση, καθώς και την ιδιότητα της ιεραρχικότητας.

Βιβλιογραφία

[1] A. Agathos, I. Pratikakis, S. Perantonis και P. Azariadis N. Sapidis. 3d mesh segmentation methodologies for cad applications. *Computer-Aided Design and Applications*, 4(6):827–841, 2007.

[2] S. Andreadakis. *Linear Algebra*. Symmetria Editions, 1989.

[3] G. Antini, Berretti S., Bimbo, A.Del και P. Pala. 3d mesh partitioning for retrieval by parts applications. *IEEE International Conference on Multimedia and Expo (ICME'05)*, 6(6):1210–1213, Ιούλιος 2005.

[4] Sundaresan A. και Chellappa R. Model-driven segmentation of articulating humans in laplacian eigenspace. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 30(10):1771–1785, 2008.

[5] M. Attene, B. Falcidieno και M. Spagnuolo. Hierarchical mesh segmentation based on fitting primitives. *The Visual Computer*, 22(3):181–193, Μάρτιος 2006.

[6] M. Attene, Katz S., M. Mortara, G. Patane, M. Spagnuolo και A. Tal. Mesh segmentation - a comparative study. *International Conference on Shape Modeling and Applications (SMI06)*, 2006.

[7] R. Barlow, D. Bartholomew, J. Bremner και H. Brunk. *Statistical Inference Under Order Restrictions*. Wiley, New York, 1972.

[8] M. Belkin και P. Niyogi. Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation. *Neural Computation*, 15(6):1373–1396, 2003.

[9] P. Benko και T. Varady. Direct segmentation of smooth, multiple point regions. *Geometric Modeling and Processing*, σελίδες 169–178, 2002.

[10] P. J. Besl και R. Jain. Segmentation through variable-order surface fitting. *IEEE PAMI*, 10(2):167–192, 1988.

[11] I. Borg και P. Groenen. *Modern Multi-dimensional Scaling: Theory and Applications*. Springer, 2005.

[12] Yuri Boykov και Vladimir Kolmogorov. An experimental comparison of min-cut/max-flow algorithms for energy minimization in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(9):1124–1137, 2004.

[13] M. Brand και K. Huang. A unifying theorem for spectral embedding and clustering. *Proceedings of the Ninth International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics*, 2003.

[14] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest και Clifford Stein. *Introduction to Algorithms (2nd ed.)*. MIT Press and McGraw-Hill, 2001.

[15] M. Cox και T. Cox. *Multidimensional Scaling*. Chapman and Hall, 1994.

[16] V.de Silva και J.B. Tenenbaum. Sparse multidimensional scaling using landmark points. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ., Stanford University, 2004.

[17] D. L. Donoho και C. Grimes. Hessian eigenmaps: new locally linear embedding techniques for high-dimensional data. *PNAS*, 100(10):5591–5596, 2003.

[18] A. Elad και R. Kimmel. On bending invariant signatures for surfaces. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 25(10):1285–1295, 2003.

[19] C. Faloutsos και K.D. Lin. A fast algorithm for indexing, data- mining and visualisation of traditional and multimedia datasets. *ACM SIGMOD*, σελίδες 163–174, 1995.

[20] C. Fowlkes, S. Belongie, F. Chung και J. Malik. Spectral grouping using the Nyström method. *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 26(2):214–225, 2004.

[21] T. Funkhouser, M. Kazhdan, P. Shilane, P. Min, W. Kiefer, S. Tal, A. Rusinkiewicz και D. Dobkin. Modeling by example. *ACM Trans. Graph. (SIGGRAPH)*, 23(3):652–663, 2004.

[22] M. Garland, A. Willmott και P. S. Heckbert. Hierarchical face clustering on polygonal surfaces. *Symposium on Interactive 3D Graphics*, σελίδες 49–58, 2001.

[23] N. Gelfand και L. J. Guibas. Shape segmentation using local slippage analysis. *Eurographics Symposium on Geometric Processing (SGP)*, σελίδες 214–223, 2004.

[24] Andrew V. Goldberg και Robert E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM (JACM)*, 35(4):921–940, 1988.

[25] M. Hilaga, Y. Shinagawa, T. Komura και T. L. Kunii. Topology matching for full automatic similarity estimation of 3d. *Proceedings of SIGGRAPH, Computer Graphics Proceedings*, σελίδες 203–212, 2001.

[26] D. Hoffman και W. Richards. Parts of recognition. *Cognition 18*, σελίδες 65–96, 1984.

[27] D. Hoffman και M. Singh. Salience of visual parts. *Cognition 63*, σελίδες 29–78, 1997.

[28] H. Hoppe. Progressive meshes. *ACM SIGGRAPH*, σελίδες 99–108, 1996.

[29] K. Inoue, I. Takayuki, Atsushi Y., F. Tomotake και S. Kenji. Face clustering of a large-scale cad model for surface mesh generation. *Computer-Aided Design*, 33:251–261, 2001.

[30] S. Katz, G. Leifman και A. Tal. Mesh segmentation using feature point and core extraction. *The Visual Computer*, 21(8-10):649–658, 2005.

[31] S. Katz και A. Tal. Hierarchical mesh decomposition using fuzzy clustering and cuts. *ACM Trans. on Graphics*, 22(3):954–961, 2003.

[32] A. J. Koenderink, J. J.and van Doorn. Surface shape and curvature scales. *Image and Vision Computing*, 10:557–565, 1992.

[33] Joseph B. Kruskal και Myron Wish. *Multidimensional Scaling*. Sage Publications, 1981.

[34] G. Lavoue, F. Dupont και A. Baskurt. Curvature tensor based triangle mesh segmentation with boundary rectification. *IEEE Computer Graphics International (CGI''2004)*, 10-17, 2004.

[35] M.D. Lee. Algorithms for representing similarity data. Τεχνική Αναφορά υπ. αρίθμ., Defence Science and Technology Organisation Research Report, 1999.

[36] Y. Lee και S. Lee. Geometric snakes for triangular meshes. *Computer Graphics Forum (Eurographics 2002)*, 21(3):229–238, 2002.

[37] Y. Lee, S. Lee, A. Shamir, D. Cohen-Or και Seidel H.P. Mesh scissoring with minima rule and part salience. *Computer-Aided Geometric Design*, 22(5):444–465, 2005.

[38] Y. Lee, S. Lee, A. Shamir, D. Cohen-Or και H.P. Seidel. Intelligent mesh scissoring using 3d snakes. *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, σελίδες 279–287, 2004.

[39] A. Leonardis, A. Jaklic και F. Solina. Superquadrics for segmenting and modeling range data. *IEEE PAMI*, 19(11):1289–1295, 1997.

[40] H. S. Lin, H. M. Liao και J. Lin. Visual salience-guided mesh decomposition. *IEEE Int. Workshop on Multimedia Signal Processing*, σελίδες 331–334, 2004.

[41] R. Liu και H. Zhang. Segmentation of 3d meshes through spectral clustering. *Pacific Conference on Computer Graphics and Applications*, σελίδες 298–305, 2004.

[42] Rong Liu και Hao Zhang. Mesh segmentation via spectral embedding and contour analysis. *EUROGRAPHICS*, 26(3), 2007.

[43] X. Li, T. W. Toon και Z. Huang. Decomposing polygon meshes for interactive applications. *SI3D*, 35-42, 2001.

[44] A. P. Mangan και R. T. Whitaker. Partitioning 3d surface meshes using watershed segmentation. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 5(4):308–321, 1999.

[45] Diana Mateus, Fabio Cuzzolin, David Knossow, Radu Horaud και Edmond Boyer. Coherent laplacian 3d protrusion segmentation. Στο *CVPR '08: Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2008.

[46] Garland M. και Heckbert P. Surface simplification using quadric error metrics. *Proceedings of SIGGRAPH 1997*, σελίδες 209–216, 1997.

[47] M. Mortara, G. Patane, M. Spagnuolo, B. Falcidieno και J. Rossignac. Blowing bubbles for multi-scale analysis and decomposition of triangle meshes. *Algorithmica*, 38(2):227–248, 2003.

[48] Boaz Nadler, Stephane Lafon, Ronald R. Coifman και Ioannis G. Kevrekidis. Diffusion maps, spectral clustering and reaction coordinates of dynamical systems. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 21:113–127, 2006.

[49] D. Page, M. Abidi, A. Koschan και Y. Zhang. Object representation using the minima rule and superquadrics for under vehicle inspection. *In Proc. of 1st IEEE Latin American Conf. on Robotics and Automation*, σελίδες 91–97, 2003.

[50] D. L. Page, A. Koschan και M. Abidi. Perception-based 3d triangle mesh segmentation using fast marching watersheds. *In Proc. of Computer Vision and Pattern Recognition*, σελίδες 27–32, 2003.

[51] A. Pichler, R. B. Fisher και M. Vincze. Decomposition of range images using markov random fields. *ICIP*, σελίδες 1205–1208, 2004.

[52] I. Pratikakis. *Watershed-driven image segmentation*. Διδακτορική Διατριβή , Vrije Universiteit Brussel (VUB), 1998.

[53] C. Rossl, L. Kobbelt και H.P. Seidel. Extraction of feature lines on tri-angulated surfaces using morphological operators. *In Proc. of the AAAI Symposium on Smart Graphics*, σελίδες 71–75, 2000.

[54] N. Sapidis και P. Besl. Direct construction of polynomial surfaces from dense range images through region growing. *ACM Trans. on Graphics*, 14(2):171–200, 1995.

[55] L. K. Saul και S. T. Roweis. Think globally, fit locally: Unsupervised learning of low dimensional manifolds. *Journal of Machine Learning Research*, 4:119–155, 2003.

[56] G. L. Scott και H. C. Longuet-Higgins. Feature grouping by relocalisation of eigenvectors of the proxmity matrix. *BMVC*, σελίδες 103–108, 1990.

[57] J. Sethian και R. Kimmel. Computing geodesic paths on manifolds. *Proc. of Natl. Acad. Sci.*, 95(15):8431–8435, 1998.

[58] A. Shamir. A formulation of boundary mesh segmentation, in proc. of 2nd international symposium on 3d data processing. *Visualization, and Transmission*, σελίδες 51–56, 2004.

[59] A. Shamir. Segmentation and shape extraction of 3d boundary meshes. *Eurographics 2006 - State of the Art Reports*, σελίδες 137–149, 2006.

[60] J. Shi και J. Malik. Normalized cuts and image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 22(8):888–905, 2000.

[61] S. Shlafman, A. Tal και S. Katz. Metamorphosis of polyhedral surfaces using decomposition. *Eurographics*, σελίδες 219–228, 2002.

[62] J.B. Tenenbaum, V.de Silva και J. C. Langford. A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction. *Science*, 290:2319–2323, 2000.

[63] Pulla, S. and Razdan, A. and Farin, G. Improved curvature estimation for watershed segmentation of 3-dimensional meshes. Απρίλιος 2001.

[64] M. Vieira και K. Shimada. Surface mesh segmentation and smooth surface extraction through region growing. *Computer-Aided Geometric Design*, 22(8):771–792, 2005.

[65] L. Vincent και P. Soille. Watershed in digital spaces, an efficient algorithm based on immersion simulations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6):583–598, 1991.

[66] Y. Weiss. Segmentation using eigenvectors: A unifying view. *Proceedings IEEE International Conference on Computer Vision*, σελίδες 975–982, 1999.

[67] K. Wu και M. D. Levine. 3d part segmentation using simulated electrical charge distributions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, σελίδες 1223–1235, 1997.

[68] E. Zhang, K. Mischaikow και G. Turk. Feature-based surface parameterization and texture mapping. *ACM Trans. Graph.*, 24(1):1–27, 2005.

[69] H. Zhang και R. Liu. Mesh segmentation via recursive and visually salient spectral cuts. *Vision, Modelling, and Visualization (VMV)*, σελίδες 429–436, 2005.

[70] Y. Zhang, J. Paik, A. Koschan και M. A. Abidi. A simple and efficient algorithm for part decomposition of 3d triangulated models based on

curvature analysis. *Proc. Intl. Conf. on Image Processing*, σελίδες 273–276, 2002.

[71] Zhenyue Zhang και Hongyuan Zha. Principal manifolds and nonlinear dimension reduction via tangent space alignment. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 26(1):313–338, 2004.

[72] Y. Zhou και Z. Huang. Decomposing polygon meshes by means of critical points. *International Conference on Multimedia Modeling*, σελίδες 187–195, 2004.

[73] G. Zigelman, R. Kimmel και N. Kiryati. Texture mapping using surface flattening via multidimensional scaling. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 8(2):198–207, 2002.

[74] E. Zuckerberger, A. Tal και S. Shlafman. Polyhedral surface decomposition with applications. *Computers Graphics*, 26(5):733–743, 2002.

Ευρετήριο

BFS, 23, 88, 89, 91, 93, 98, 99, 102, 109
3-Δ πολυγωνικό πλέγμα, 15–19, 21, 24, 25, 27, 29–35, 37–41, 45–48, 51–57, 59, 61–65, 81–86, 88–93, 96, 97, 99, 105, 107–110, 152–155

διεδρική γωνία, 22, 25, 32, 41–45, 96, 97, 103, 104
δυϊκά τρίγωνα, 18, 96, 105
δυϊκός γράφος, 18, 19, 23, 30, 33, 37, 54, 89, 96, 98, 99, 101, 102

γεωδαιτική απόσταση, 18, 32, 41, 44, 45, 47, 54–57, 59, 68, 70, 71, 74, 81, 82, 90, 96, 98, 105, 110, 151, 152, 154
γράφος ροής, 96

κατάτμηση, 15–27, 29–35, 37–41, 43–48, 51–54, 58, 59, 61, 62, 64, 65, 68, 70, 71, 81, 83–85, 88–90, 96, 98, 100, 102, 105, 108, 110, 111, 150, 152–155
κυρτό κέλυφος, 37, 53, 57, 82–87, 89

ΜΓΜΔ, 57, 61, 76, 153

πολυ-διάστατη κλιμάκωση, 37, 47, 54–58, 68, 70–74, 76–78, 81, 82, 151, 153
προσανατολήσιμο πλέγμα, 46
πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα, 34, 44

χαρακτηριστικό σημείο, 47, 53, 81–85, 87–91, 93, 96–100, 102, 103, 108–110, 150, 151, 153–155
χωρητικότητα, 96, 97, 100, 101, 105, 111, 151–154

συνάρτηση stress, 56, 74–76, 78
συνάρτηση προεξοχής, 18, 27, 35, 37, 41, 43, 82, 90, 92, 105, 150–154
συναίρεση ακμών, 12, 29–31, 51, 52, 109

Γλωσσάρι

3-Δ πολυγωνικό πλέγμα (mesh) : ένα τριγωνοποιημένο (πολυγωνοποιημένο) 3-Δ σύνολο σημείων το οποίο διαθέτει τοπολογική δομή και περιγράφει την επιφάνεια ενός αντικειμένου.

ίχνος πίνακα (matrix trace) : το ίχνος ενός τετραγωνικού πίνακα, ορίζεται ως το άθροισμα των στοιχείων της κυρίας διαγωνίου (η διαγώνιος από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά).

γεωδαιτική απόσταση (geodesic distance) : η ελάχιστη απόσταση κατά μήκος της επιφάνειας επί της οποίας εδρεύουν δύο σημεία.

διάσχιση με αναζήτηση κατά βάθος (depth first search traversal) : αλγόριθμος διάσχισης γράφων, ο οποίος ξεκινά από ένα κόμβο και επισκέπτεται όσο το δυνατόν περισσότερο απομακρυσμένους κόμβους κατά μήκος ενός κλάδου πριν να οπισθοχωρήσει.

διάσχιση με αναζήτηση κατά πλάτος (breadth first search traversal) : αλγόριθμος διάσχισης γράφων, ο οποίος ξεκινά από ένα κόμβο, επισκέπτεται τους γειτονικούς του, κατόπιν για καθένα από τους γεινικούς αυτούς κόμβους επισκέπτεται τους γειτονικούς τους που δεν έχει ήδη επισκεφθεί και συνεχίζει μέχρι να επισκεφθεί όλους τους κόμβους.

διεδρική γωνία (dihedral angle) : δοθέντων δύο προσκείμενων τριγώνων, η γωνία μεταξύ των καθέτων στην επιφάνειά τους ονομάζεται διεδρική γωνία.

δυϊκός γράφος (dual graph) : ο γράφος του οποίου οι κόμβοι είναι οι τριγωνικές έδρες (του πολυγωνικού πλέγματος), και στον οποίο δυο κόμβοι συνδέονται, αν τα τρίγωνα που αντιπροσωπεύουν, μοιράζονται μια κοινή ακμή.

κατάτμηση (segmentation) : η διαμέριση ενός πολυγωνικού πλέγματος μιας 3-Δ επιφάνειας σε ουσιώδη, συνεκτικά τμήματα.

κυρτό κέλυφος (convex hull) : το ελάχιστο κυρτό σύνολο που περιέχει ένα σύνολο σημείων X σ' ένα πραγματικό διανυσματικό χώρο V.

πίνακας γειτνίασης (adjacency matrix) : $n \times n$ πίνακας που χρησιμεύει στην αναπαράσταση της γειτνίασης των n κορυφών ενός γράφου με την σύμβαση πως η είσοδος $a_{i\,j}$ είναι 1 εάν οι κορυφές $i\,,j$ είναι γειτονικές, ειδάλλως είναι μηδενική.

πολυ-διάστατη κλιμάκωση (multi-dimensional scaling) : τεχνική για την ανάλυση δεδομένων ομοιότητας ή ανομοιότητας επί ενός συνόλου αντικειμένων η οποία αποπειράται να μοντελοποιήσει αυτά τα δεδομένα σαν αποστάσεις μεταξύ σημείων σε ένα γεωμετρικό χώρο (Ευκλείδιο χώρο μ-διαστάσεων), με σκοπό την επίτευξη μιας γραφικής απεικόνισης της δομής των δεδομένων.

πρωτεύον ιδιοδιάνυσμα (leading eigenvector) : το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην μεγαλύτερη ιδιοτιμή (πχ κατά μέτρο, με το μεγαλύτερο πραγματικό μέρος κτλ).

συνάρτηση stress (stress function) : συνάρτηση σφάλματος η οποία μετρά το βαθμό ανταπόκρισης μεταξύ των δεδομένων ανομοιότητας ενός συνόλου αντικειμένων $\delta_{i\,j}$ ($f\,(\delta_{i\,j})$ στη γενική περίπτωση) και των Ευκλείδιων αποστάσεων $d_{i\,j}$ μεταξύ της απεικονισμένης εκδοχής των αντικειμένων που προκύπτει από την πολυ-διάστατη κλιμάκωση.

συνάρτηση προεξοχής (protrusion function) : συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το μέγεθος της προεξοχής ενός συνόλου σημείων που ανήκουν σε μια επιφάνεια.

συναίρεση ακμών (edge contraction) : βασική λειτουργία ορισμένων αλγορίθμων απλοποίησης πολυγωνικών πλεγμάτων η οποία συμβολίζεται με $(\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2) \rightarrow \bar{\mathrm{v}}$, μετακινεί τις κορυφές v_1 και v_2 (οι οποίες δεν είναι απαραίτητο να ανήκουν σε κοινή ακμή) στη νέα θέση $\bar{\mathrm{v}}$, συνδέει όλες τις προσπίπτουσες ακμές τους στην v_1 και διαγράφει την v_2.

Ακρωνύμια

BFS breadth first search.

ΜΓΜΔ μη-γραμμική(ς) μείωση(ς) διαστασιμότητας.

ΠΔΚ πολυ-διάστατη κλιμάκωση.