



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ
CORNISH – FISHER ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ
ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΜΕ ΔΙΕΙΣΔΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ**

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΓΙΑΝΝΟΥΛΑΤΟΣ Ι. ΙΩΑΝΝΗΣ**

Επιβλέπων: Νικόλαος Χατζηαργυρίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ανέστης Αναστασιάδης
Υ.Δ. Ε.Μ.Π

Αθήνα, Ιούλιος 2010



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΙΣΧΥΟΣ

**ΜΕΛΕΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗΣ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ
CORNISH – FISHER ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ
ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ ΜΕ ΔΙΕΙΣΔΥΣΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΑΥΤΟΚΙΝΗΤΩΝ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΓΙΑΝΝΟΥΛΑΤΟΣ Ι. ΙΩΑΝΝΗΣ

Επιβλέπων: Νικόλαος Χατζηαργυρίου
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την

.....
Νικόλαος Χατζηαργυρίου Σταύρος Παπαθανασίου

Καθηγητής Ε.Μ.Π. Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

.....
ΓΙΑΝΝΟΥΛΑΤΟΣ Ι. ΙΩΑΝΝΗΣ

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Γιαννουλάτος Ι. Ιωάννης, 2010

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με την πάροδο των ετών οι ανάγκες για ηλεκτρική ενέργεια αυξάνονται συνεχώς. Ταυτόχρονα, με την επιτακτική ανάγκη για οικολογική συνείδηση και σεβασμό στο περιβάλλον, προωθείται ένα νέο μοντέλο ανάπτυξης που υλοποιείται με χρήση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας στην παραγωγή, καθώς και με χρήση νέων τεχνολογιών στην κατανάλωση, όπως είναι για παράδειγμα οι ηλεκτρικές μεταφορές.

Ο συνδυασμός αυτός, οδηγεί στην ανάγκη για ανάπτυξη και βελτίωση των υφισταμένων συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, καθώς και την δημιουργία νέων, τα οποία θα πρέπει να ικανοποιούν παραμέτρους προσαρμοσμένες στις νέες αυτές ανάγκες. Για να επιτευχθεί ο στόχος αυτός, θα πρέπει να υπάρχει η δυνατότητα ενδελεχούς μελέτης του συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας. Η μελέτη αυτή, είναι ένα δύσκολο έργο των μηχανικών καθώς τα στοιχεία που το αποτελούν, ειδικότερα μετά την εισαγωγή των ανανεώσιμων πηγών, έχουν αποκτήσει στατιστικό χαρακτήρα. Δηλαδή τόσο τα φορτία και οι παραγωγές, όσο και οι ροές ισχύος, μπορούν να χαρακτηριστούν πλέον ως κατανομές και όχι ως σταθερές τιμές.

Η παρούσα διπλωματική εργασία έχει ως στόχο την εμβάθυνση στην μελέτη ροών φορτίου.

Αρχικά αναπτύσσεται η ντετερμινιστική και η πιθανοτική ανάλυση του συστήματος με μεθόδους όπως η αναλυτική μέθοδος της γραμμικοποίησης γύρω από την μέση τιμή και η αριθμητική μέθοδος Monte – Carlo. Επιπλέον, εξετάζεται και χρησιμοποιείται για πρώτη φορά η μέθοδος Cornish – Fisher, η οποία μπορεί να προσομοιώσει με επιτυχία τόσο συνεχείς όσο και διακριτές κατανομές. Η αξία της μεθόδου αυτής γίνεται αντιληπτή όταν απαιτείται η μοντελοποίηση αγνώστων κατανομών.

Στη συνέχεια με τις μεθόδους αυτές, πραγματοποιείται η εξέταση ενός δικτύου ως προς τα χαρακτηριστικά του. Συγκεκριμένα, εξετάζεται το δίκτυο 30 ζυγών της IEEE με ταυτόχρονη λειτουργία αιολικής παραγωγής. Το δίκτυο αυτό προσομοιώνεται στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab, στο οποίο καταγράφεται η παραγωγή και η κατανάλωση του. Έτσι είναι δυνατό να βρεθούν κατανομές που διέπουν τα στοιχεία του, όπως είναι η τάση (μέτρο και γωνία) και η ροή ισχύος στις γραμμές.

Τέλος παρουσιάζεται μια εφαρμογή σε τροποποιημένο σύστημα 14 ζυγών της IEEE, στο οποίο έχουμε εισάγει δυο αιολικά πάρκα, αλλά και σύστημα φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων. Σκοπός της εφαρμογής αυτής είναι η μελέτη της συμβολής του συστήματος φόρτισης, στο δίκτυο.

Λέξεις - κλειδιά: Πιθανοτική ροή φορτίου, Monte-Carlo, Cornish – Fisher, γραμμικοποίηση, κατανομές μεγεθών συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, Gram-Charlier, ηλεκτρικά οχήματα, συσχέτιση συστημάτων

ABSTRACT

As years pass, our needs for energy continuously increase. At the same time the need of ecological sensitivity has promoted a new model for energy systems using wind parks in energy production and new technologies in consumption, as for instance, electric transportation.

The above combination leads in the need of enhancing of our current energy systems, and also the development of new ones that must comply with new norms, which are adapted to the new needs. To meet the target there is the necessity of constant study of the power system, a difficult sector for the engineers due to the statistic character of the variables; meaning that the voltages as well as the power flows can be characterized as distributions instead of constant values.

This diploma thesis aims to study the details of probabilistic load flow.

At first, there is the development of the deterministic and probabilistic analysis of the systems and the development of the analytic method of linearization as well as the usage of numerical Monte-Carlo method. Also Cornish-Fisher method is examined and used for the first time, successfully emulating continuous and discrete variable distributions. This method is of great value when modeling unknown variables.

Continuing, using the above methods there is the study of a network and its variables. Particularly, the study involves the IEEE 30 bus system, which has been modified to include two large wind parks. The network is simulated in Matlab programming environment, which logs its production and consumption of energy. In that way it is possible to find the distributions of its variables, such as voltage and load flow.

Finally there is an demonstration of a 14 bus system, that consists of two wind parks and an electric vehicle charging system. The point of this application is to see how the charging system contributes to the energy system.

Keywords: Probabilistic Load Flow, Monte-Carlo Simulation, Cornish – Fisher, Linearization, Distribution of variables of power electric systems, Gram-Charlier, electric vehicles, correlation

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε κατά το ακαδημαϊκό έτος 2009–2010 στον τομέα Ηλεκτρικής Ισχύος της σχολής Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π.

Αντικείμενο της εργασίας είναι η μελέτη πιθανοτικής ροής φορτίου ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας με διείσδυση ηλεκτρικών αυτοκινήτων. Η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε με την προσομοίωση του συστήματος σε υπολογιστή, με σκοπό τον υπολογισμό των κατανομών που διέπουν τα στοιχεία του.

Υπεύθυνος κατά την εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας ήταν ο Καθηγητής κ. Ν. Χατζηαργυρίου, στον οποίο οφείλω ιδιαίτερες ευχαριστίες για την ανάθεση της.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κ. Ανέστη Αναστασιάδη, υποψήφιο διδάκτορα, για την βοήθεια, την καθοδήγηση και την υποστήριξη που μου παρείχε κατά την εκπόνηση της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την συνάδελφό μου Ελισάβετ Βορέαδη για την πολύτιμη βοήθεια της σε προγράμματα της Matlab. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την υποστήριξη και την συμπαράσταση που μου έδειξαν σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησης της εργασίας.

Αθήνα, Ιούλιος 2010

Γιαννουλάτος Ι. Ιωάννης

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦ1. ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	1
1.1.1. Σκοπός και απαιτήσεις	1
1.1.2. Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.....	1
1.2. ΔΟΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ	2
1.3. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΦΟΡΤΙΟΥ	4
1.4. ΦΟΡΤΙΑ	5
1.5. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ	5
1.5.1. Ροή ισχύος και ενέργειας.....	6
1.5.2. Μηχανισμός φορτίου – συχνότητας	6
1.5.3. Ευστάθεια λειτουργίας συστήματος	6
1.5.4. Άεργος ισχύς και τάσεις συστήματος	7
1.6. ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ	7
1.7. ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΜΕΣΑ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ.....	8

ΚΕΦ2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΩΝ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	9
2.2. ΜΕΛΕΤΗ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ.....	10
2.2.1. Μεταβλητές συστήματος.....	10
2.3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ	11
2.3.1. Μέθοδος Gauss – Seidel.....	12
2.3.2. Μέθοδος Newton – Raphson.....	15
2.3.3. Ταχεία αποζευγμένη μέθοδος ροής φορτίου.....	19

ΚΕΦ3. ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΕΝΑ Σ.Η.Ε.

3.1. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ.....	21
3.1.1. Ιστορική ανάπτυξη του θέματος.....	25
3.2. ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗ ΡΟΗ ΦΟΡΤΙΟΥ	28
3.3. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	30
3.4. ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ.....	36
3.5. ΘΕΩΡΗΣΗ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.....	39
3.6. ΠΟΛΥΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΡΟΗ ΦΟΡΤΙΟΥ	42

ΚΕΦ4. ΕΠΕΚΤΑΣΗ CORNISH – FISHER

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	49
4.2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ.....	50
4.2.1. Υπολογισμός ροπών (Moments)	50
4.2.2. Ορισμός αθροισμάτων (Cumulants)	50
4.2.3. Σχέση μεταξύ ροπών και αθροισμάτων	51

4.2.4. Ιδιότητες αθροισμάτων	52
4.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ CORNISH - FISHER.....	53
4.4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΟΥ.....	59
4.4.1. Ποιοτικά αποτελέσματα	59
4.4.2. Γραφικά αποτελέσματα.....	60
4.5. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ.....	64

ΚΕΦ5. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ 30 ΖΥΓΩΝ ΤΟΥ ΙΕΕΕ

5.1. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ.....	65
5.2. ΣΤΑΔΙΟ 1: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΧΩΡΙΣ ΕΓΧΥΣΗ Α.Π.Ε.....	67
5.3. ΣΤΑΔΙΟ 2: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΕ ΕΓΧΥΣΗ Α.Π.Ε.....	72
5.3.1. Επίλυση Προβλήματος με Δυο κατανομές Γάμμα για Παραγωγές	74
5.3.2. Επίλυση Προβλήματος με Παραγωγές Διακριτή – Γάμμα	82
5.3.3. Επίλυση Προβλήματος με Κατανομές Διακριτή – Γάμμα όπου ο Ζυγός 17 θεωρήθηκε Ζυγός PQ.....	89

ΚΕΦ6. ΜΕΛΕΤΗ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

6.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	93
6.2. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΕΣ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ	93
6.3. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ	95
6.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΔΙΚΤΥΟ 14 ΖΥΓΩΝ ΤΟΥ ΙΕΕΕ.....	98
6.4.1. Ανάλυση Προσομοίωσης.....	99
6.4.2.Συσχέτιση Αιολικής Διείσδυσης και Ηλεκτρικών Οχημάτων σε ένα Σ.Η.Ε	104

ΚΕΦ7. ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1. ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ	109
7.2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ.....	110
7.2.1. Μέθοδος Monte – Carlo.....	110
7.2.2. Μέθοδος Γραμμικοποίησης	111
7.2.3. Στατιστικά Θεωρήματα	111
7.2.4. Μέθοδος Cornish – Fisher	111
7.3. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΟΧΗΜΑΤΑ.....	112
7.4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	113

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	117
-------------------	-----

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

A.1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ	119
A.2. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ	122
A.3. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	127

A.4 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ	131
A.4.1. Διακριτές κατανομές πιθανότητας	131
A.4.2. Συνεχείς κατανομές.....	132
A.4.3. Θεώρημα Κεντρικού Ορίου	136
A.4.4. Θεώρημα Κεντρικής Τιμής	137
A.4.5. Μέση τιμή – Τυπική απόκλιση.....	137
A.5. ΣΥΝΕΛΙΞΕΙΣ.....	137

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

B.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ	141
B.2. ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥΣ	141
B.2.1. Παραγωγή τυχαιών αριθμών.....	141
B.2.2. Ομοιόμορφα κατανομημένοι τυχαιοί αριθμοί.....	143
B.2.3. Παραγωγή τυχαιών αριθμών από δεδομένη συνάρτηση κατανομής.....	145
B.2.4. Παραγωγή τυχαιών αριθμών υπό δέσμευση	149
B.3. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO	150

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ HERMITE

Γ.1. ΓΕΝΙΚΑ	153
Γ.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ	153

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Δ.1. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	155
Δ.2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	158

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε. ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

E.1. ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	159
E.2. ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ	161
E.2.1. Συνέλιξη κανονικής και διακριτής κατανομής.....	165

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ. ΕΠΕΚΤΑΣΗ GRAM – CHARLIER

ΣΤ.1.ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ	171
ΣΤ.1.1.Ορισμός των Ροπών	171
ΣΤ.1.2.Ορισμός των Αθροισμάτων (Cumulants).....	171
ΣΤ.1.3.Σχέση μεταξύ των Ροπών και των Αθροισμάτων	172
ΣΤ.1.4. Ιδιότητες των Αθροισμάτων (Cumulants).....	173
ΣΤ.1.5.Επέκταση Gram-Charlier	175
ΣΤ.2. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ	176

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήμα 1.1: Βασική δομή ενός ΣΗΕ.....	4
Σχήμα 2.1: Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός ζυγού.....	11
Σχήμα 2.2: Τυπικός ζυγός ενός Σ.Η.Ε.....	12
Σχήμα 3.3: Σύνθεση τελικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας.....	47
Σχήμα 3.4: Αντιμετώπιση περιπτώσεων έντονης μη γραμμικότητας.....	48
Σχήμα 4.1: Weibull $a=b=1$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	60
Σχήμα 4.2: Weibull $a=b=2$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	60
Σχήμα 4.3: Weibull $a=2, b=8$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	61
Σχήμα 4.4: Normal $m=0, s=1$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	61
Σχήμα 4.5: Gamma $\kappa=1, \theta=2$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	62
Σχήμα 4.6: Gamma $\kappa=9, \theta=0.5$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	62
Σχήμα 4.7: Beta $a=2, b=5$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	63
Σχήμα 4.8: Binomial $p=0.7, n=40$, Cornish-Fisher, Gram Charlier.....	63
Σχήμα 5.1: Δίκτυο IEEE 30 ζυγών.....	65
Σχήμα 5.2: Τάση – Γωνία ζυγού 10 (στατιστικά θεωρήματα).....	69
Σχήμα 5.3: Τάση – Γωνία ζυγού 10 (γραμμικοποίηση γύρω από την μέση τιμή).....	70
Σχήμα 5.4: Τάση – Γωνία ζυγού 16 (στατιστικά θεωρήματα).....	70
Σχήμα 5.5: Τάση – Γωνία ζυγού 16 (γραμμικοποίηση γύρω από την μέση τιμή).....	70
Σχήμα 5.6: Τάση – Γωνία ζυγού 17 (στατιστικά θεωρήματα).....	71
Σχήμα 5.7: Τάση – Γωνία ζυγού 21 (στατιστικά θεωρήματα).....	71
Σχήμα 5.8: Τάση – Γωνία ζυγού 22 (στατιστικά θεωρήματα).....	71
Σχήμα 5.9: Δίκτυο IEEE 30 ζυγών.....	72
Σχήμα 5.10: Κατανομές για παραγωγή τους ζυγούς 17 και 22.....	74
Σχήμα 5.11: Τάση ζυγού 10 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	75
Σχήμα 5.12: Τάση ζυγού 10 για γραμμικοποίηση.....	75
Σχήμα 5.13: Γωνία ζυγού 10 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	76
Σχήμα 5.14: Γωνία ζυγού 10 για γραμμικοποίηση.....	76
Σχήμα 5.15: Τάση ζυγού 16 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	77
Σχήμα 5.16: Γωνία ζυγού 16 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	77
Σχήμα 5.17: Τάση ζυγού 21 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	78
Σχήμα 5.18: Γωνία ζυγού 21 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	78
Σχήμα 5.19: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 - 22 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	79
Σχήμα 5.20: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 - 22 με γραμμικοποίηση.....	79
Σχήμα 5.21: Ροή ισχύος στη γραμμή 21 - 22 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	80
Σχήμα 5.22: Ροή ισχύος στη γραμμή 21 - 22 με γραμμικοποίηση.....	80
Σχήμα 5.23: Ροή ισχύος στη γραμμή 16 - 17 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	80
Σχήμα 5.24: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 - 17 για Monte – Carlo 1000 σημείων.....	81
Σχήμα 5.25: Κατανομές για παραγωγή τους ζυγούς 17 και 22.....	82

Σχήμα 5.26: Τάση ζυγού 10 (1.000 – 100.000 σημεία)	83
Σχήμα 5.27: Γωνία ζυγού 10 (1.000 – 100.000 σημεία)	83
Σχήμα 5.28: Τάση ζυγού 16 (1.000 – 100.000 σημεία)	84
Σχήμα 5.29: Γωνία ζυγού 16 (1.000 – 100.000 σημεία)	84
Σχήμα 5.30: Τάση ζυγού 21 (1.000 – 100.000 σημεία)	84
Σχήμα 5.31: Γωνία ζυγού 21 (1.000 – 100.000 σημεία)	85
Σχήμα 5.32: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 – 17 (1.000 – 100.000 σημείων)	85
Σχήμα 5.33: Ροή ισχύος στη γραμμή 16 – 17 (1.000 – 100.000 σημείων)	85
Σχήμα 5.34: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 – 22 (1.000 – 100.000 σημείων)	86
Σχήμα 5.35: Ροή ισχύος στη γραμμή 21 – 22 (1.000 – 100.000 σημείων)	86
Σχήμα 5.36: Ροή ισχύος στη γραμμή 17 – 10 (1.000 – 100.000 σημείων)	86
Σχήμα 5.37: Ροή ισχύος στη γραμμή 17 – 16 (1.000 – 100.000 σημείων)	87
Σχήμα 5.38: Ροή ισχύος στη γραμμή 22 – 10 (1.000 – 100.000 σημείων)	87
Σχήμα 5.39: Ροή ισχύος στη γραμμή 22 – 21 (1.000 – 100.000 σημείων)	87
Σχήμα 5.40: Τάση – Γωνία ζυγού 10 (1.000 σημείων)	89
Σχήμα 5.41: Τάση – Γωνία ζυγού 16 (1.000 σημείων)	90
Σχήμα 5.42: Τάση – Γωνία ζυγού 17 (1.000 σημείων)	90
Σχήμα 5.43: Ροή ισχύος στη γραμμή 16 – 17 (1.000 σημείων)	91
Σχήμα 5.44: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 – 17 (1.000 σημείων)	91
Σχήμα 6.1: Στιγμαία κατάσταση φόρτισης οχήματος	94
Σχήμα 6.1: Στιγμαία κατάσταση φόρτισης οχήματος	94
Σχήμα 6.2: Κατανομή αιολικής παραγωγής	100
Σχήμα 6.3: Τοπολογία δικτύου 14 ζυγών	100
Σχήμα 6.4: Ροή ισχύος στη γραμμή 1 – 2	101
Σχήμα 6.5: Ροή ισχύος στη γραμμή 1 – 5	102
Σχήμα 6.6: Ροή ισχύος στη γραμμή 6 – 11	102
Σχήμα 6.7: Ροή ισχύος στη γραμμή 7 – 8	102
Σχήμα 6.8: Ροή ισχύος στη γραμμή 9 – 10	103
Σχήμα 6.9: Τάση στον ζυγό 9	103
Σχήμα 6.10: Τάση στον ζυγό 11	103
Σχήμα 6.11: Κατανομή συσχέτισης για ζυγό για γραμμή 7 – 8	103
Σχήμα 6.12: Ποσοστό θετικής έγχυσης ισχύος προς ζυγό με ηλεκτρικά αυτοκίνητα	103
Σχήμα 6.13: Κατανομή Συνολικής Ισχύος Συστήματος Ηλ. Οχημάτων ζυγού 8	103
Σχήμα A 2.1.: Διωνυμικές κατανομές data 1(με $n = 100$ και $p = 0.5$) και data 2 (με $n = 100$ και $p = 0.4$)	123
Σχήμα A 2.2.: Κανονικές κατανομές data 1(με $\mu = 0$ και $\sigma = 1$) και data 2 (με $\mu = 0$ και $\sigma = 2$)	124
Σχήμα A 2.3.: Κανονικές κατανομές data 1(με $\mu = 0$ και $\sigma = 1$) και data 2 (με $\mu = 3$ και $\sigma = 1$)	125
Σχήμα A 2.4.: Κατανομές Weibull data 1(με $k = 1$) και data 2 (με $k = 2$)	127

Σχήμα Β.2.1. Μέθοδος παραγωγής τυχαίων αριθμών	143
Σχήμα Β.2.2.: Βαθμωτή Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής	148
Σχήμα Ε.2.1. : Συνέλιξη δύο διακριτών κατανομών	163
Σχήμα Ε.2.2.: Διαμοιρασμός μιας διακεκριμένης τιμής	164
Σχήμα Ε.2.3. : Η $f_X(X)$ ως άθροισμα t κανονικών συναρτήσεων	166
Σχήμα Ε.2.4.: Διαμοιρασμός μιας διακριτής τιμής	170

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας 5.1: Στοιχεία ζυγών δικτύου ΙΕΕΕ 30	67
Πίνακας 5.2: Στοιχεία γραμμών δικτύου ΙΕΕΕ 30	68
Πίνακας 5.3: Στοιχεία δικτύου 30 ζυγών με εισαγωγή ΑΠΕ	73
Πίνακας 5.4: Απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεθόδων εξέτασης	82
Πίνακας 5.5: Απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεθόδων εξέτασης (1000 σημείων)	88
Πίνακας 5.6: Απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεθόδων εξέτασης	92
Πίνακας 5.7: Χρόνοι υπολογισμού για εφαρμογή χωρίς χρήση ΑΠΕ	92
Πίνακας 5.8: Χρόνοι υπολογισμού για εφαρμογή με χρήση ΑΠΕ	92
Πίνακας 6.1: Δεδομένα ζυγών δικτύου μελέτης	99
Πίνακας 6.2: Δεδομένα γραμμών δικτύου μελέτης	99
Πίνακας 6.3: Χαρακτηριστικά μεγέθη ενεργού ισχύος Αιολικής παραγωγής και φορτίου Ηλεκτρικών οχημάτων του τροποποιημένου συστήματος 14 – Ζυγών	101

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΥΓΚΡΟΤΗΣΗ ΚΑΙ ΑΡΧΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1.1. Σκοπός και απαιτήσεις

Ο προορισμός ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας (ΣΗΕ) είναι η παροχή ηλεκτρικής ενέργειας σε μια εξυπηρετούμενη περιοχή καταναλώσεως. Το σύστημα πρέπει να έχει μελετηθεί και να ικανοποιεί της ακόλουθες προδιαγραφές:

- a) Πρέπει να παρέχει ηλεκτρική ενέργεια οπουδήποτε υπάρχει ζήτηση.
- b) Η ζήτηση πραγματικής και αέργου ισχύος μεταβάλλεται συνεχώς με το χρόνο, και το σύστημα πρέπει να είναι μπορεί να ικανοποιεί συνεχώς αυτή τη μεταβαλλόμενη ζήτηση.
- c) Η παρεχόμενη ενέργεια πρέπει να ικανοποιεί ορισμένους όρους ποιότητας. Τρεις βασικοί παράγοντες συνιστούν την ποιότητα αυτή: 1) σταθερή συχνότητα, 2) σταθερή τάση, 3) υψηλή αξιοπιστία τροφοδότησης.
- d) Η ενέργεια πρέπει να παρέχεται με τα ελάχιστα οικονομικά και οικολογικά κόστη, ειδικότερα στις μέρες μας που η οικονομία σε συνδυασμό με την προστασία του περιβάλλοντος αποτελούν πρώτη προτεραιότητα.

1.1.2. Παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας

Η ηλεκτρική ενέργεια η οποία παρέχεται στο σύστημα, δεν βρίσκεται σε αυτή τη μορφή στη φύση. Μετασχηματίζεται από άλλες μορφές ενέργειας όπως για παράδειγμα είναι η μηχανική ή η χημική. Το σύνολο της ηλεκτρικής ενέργειας που παρέχεται στον καταναλωτή σήμερα παράγεται κυρίως από θερμοηλεκτρικούς σταθμούς με την καύση ορυκτών καυσίμων (άνθρακας, λιγνίτης, πετρέλαιο, φυσικό αέριο), από υδροηλεκτρικούς σταθμούς με τη ροή ή την πτώση των υδάτων, από πυρηνικούς σταθμούς με την πυρηνική σχάση και τα τελευταία χρόνια με μεγαλύτερη ένταση από σταθμούς ανανεώσιμων πηγών ενέργειας όπως είναι ο άνεμος (αιολική ενέργεια), τα θαλάσσια κύματα, η ηλιακή ενέργεια, η γεωθερμία, η βιομάζα κ.λ.π.

Οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας είναι ο πιο οικολογικός τρόπος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας και τα τελευταία χρόνια όλο και μεγαλύτερα τμήματα

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

παραγωγής βασίζονται σε αυτές. Συνοπτικά οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας εμφανίζονται με τις ακόλουθες μορφές:

A) *Αιολική ενέργεια* η οποία αξιοποιείται μέσω των «Ανεμογεννητριών» οι οποίες μετατρέπουν την κινητική ενέργεια του ανέμου σε ηλεκτρική.

B) *Ηλιακή ενέργεια* η οποία αξιοποιείται είτε μέσω των Φωτοβολταϊκών γεννητριών, οι οποίες μετατρέπουν απ' ευθείας την ηλιακή ενέργεια σε ηλεκτρική είτε με τη συγκέντρωση των ηλιακών ακτινών μέσω ηλιακών συλλεκτών ώστε να επιτευχθούν υψηλές θερμοκρασίες και τελικά η παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.

Γ) *Υδροηλεκτρική ενέργεια* η οποία αξιοποιείται με «Μικρά Υδροηλεκτρικά» και γίνεται συνήθως εκμετάλλευση υδάτινων ρευμάτων, για τα οποία δεν απαιτούνται μεγάλα έργα αποθηκείσεως (φράγματα κ.λπ.).

Δ) *Κυψέλες καυσίμου* η οποίες μετατρέπουν απ' ευθείας τη χημική ενέργεια σε ηλεκτρική, με την χρήση κατάλληλων διατάξεων και ηλεκτρολυτών.

E) *Κινητική ενέργεια* των Θαλάσσιων κυμάτων, γίνεται προσπάθεια να μετατραπεί σε ηλεκτρική, μέσω κατάλληλων διατάξεων όμως παραμένει σε πειραματικό στάδιο.

ΣΤ) *Γεωθερμική ενέργεια* η οποία είναι η θερμότητα εσωτερικών στρωμάτων της γης, στην οποία γίνεται εκμεταλλεύσιμη όταν υπάρχουν κατάλληλες γεωλογικές συνθήκες.

1.2. ΔΟΜΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

Σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας είναι το σύνολο των εγκαταστάσεων και μέσων, τα οποία χρησιμεύουν στην εξυπηρέτηση των αναγκών ενός συνόλου καταναλωτών σε ηλεκτρική ενέργεια [1].

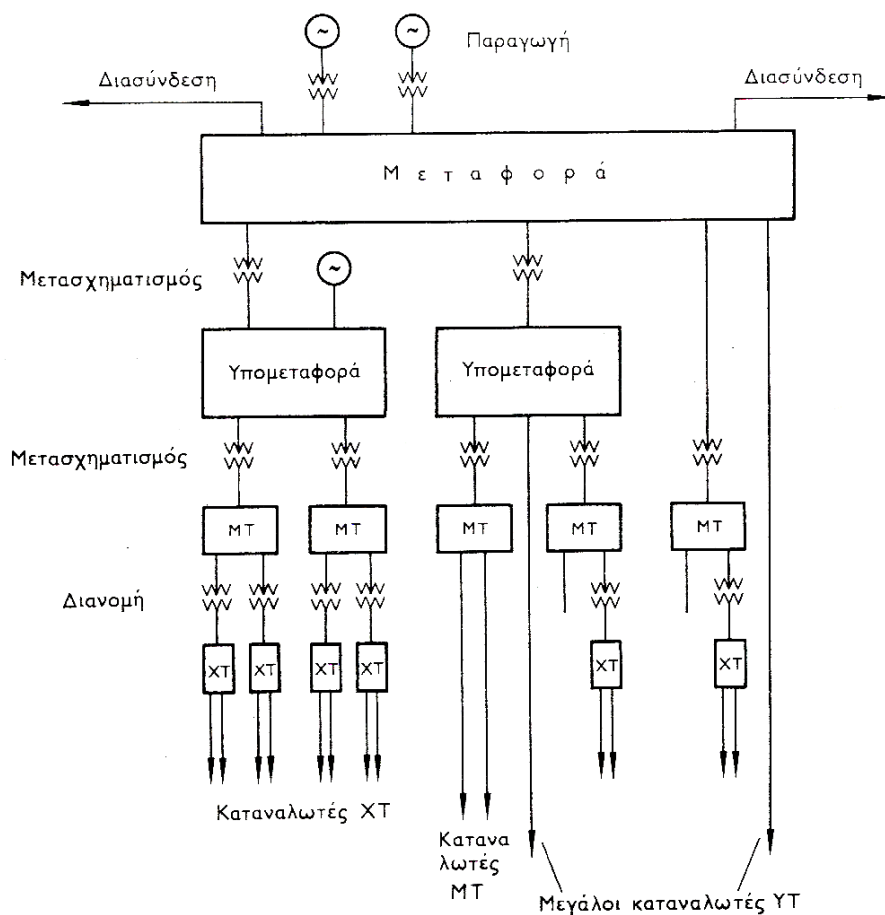
Η δομή του συστήματος έχει πρωτεύουσα σημασία για τη γεωγραφική διαθεσιμότητα της ηλεκτρικής ενέργειας. Η ιδιότητα, η οποία χαρακτηρίζει τη δομή του συστήματος περισσότερο από κάθε άλλη είναι το μέγεθος του συστήματος. Η δομή και η σύνθεση του συστήματος εξαρτώνται κατά κύριο λόγο από το μέγεθος του. Οποσδήποτε όμως ακόμη και το μικρότερο σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας είναι ένα ηλεκτρικό δίκτυο πολύπλοκο.

Δεδομένου ότι η εξυπηρέτηση των αναγκών σε ηλεκτρική ενέργεια ενός συνόλου καταναλωτών προϋποθέτει τις διακεκριμένες φάσεις της παραγωγής, της μεταφοράς και της διανομής, σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας είναι δυνατόν να

διακριθούν τα εξής ειδικότερα συστήματα: το «Σύστημα Παραγωγής», το «Σύστημα Διασυνδέσεως και Μεταφοράς» και το «Σύστημα Διανομής». Το Σύστημα Παραγωγής περιλαμβάνει τους σταθμούς παραγωγής, όπου παράγεται το ηλεκτρικό ρεύμα, μαζί με τους υποσταθμούς ανυψώσεως της τάσης για τη μεταφορά του υπό υψηλή τάση. Το Σύστημα Μεταφοράς περιλαμβάνει τα δίκτυα των γραμμών υψηλής τάσης, τους υποσταθμούς ζεύξεως των δικτύων αυτών, τους υποσταθμούς μετασχηματισμού μεταξύ των διαφόρων τάσεων του δικτύου, και τους υποσταθμούς υποβιβασμού της τάσεως σε μέση τάση προς τροφοδότηση των δικτύων διανομής. Με το σύστημα μεταφοράς, η ηλεκτρική ενέργεια μεταφέρεται από τους σταθμούς παραγωγής προς τις περιοχές καταναλώσεως. Το Σύστημα Διανομής περιλαμβάνει τα δίκτυα διανομής μέσης και χαμηλής τάσεως – μερικές φορές όμως και υψηλής τάσεως – στα οποία δίκτυα υπάγονται και οι υποσταθμοί διανομής μέσω των οποίων η μέση τάση υποβιβάζεται σε χαμηλή τάση. Με τα δίκτυα διανομής η ηλεκτρική ενέργεια διανέμεται στις μικρότερες περιοχές φορτίου, και παρέχεται στους καταναλωτές μέσης κι χαμηλής τάσης.

Ένα σύστημα παραγωγής και μεταφοράς μπορεί να λειτουργεί μεμονωμένο ή διασυνδεδεμένο με ένα ή περισσότερα άλλα γειτονικά συστήματα. Η διασύνδεση γίνεται συνήθως σε επίπεδο εθνικών συστημάτων, και προσφέρει ορισμένα τεχνικά και οικονομικά πλεονεκτήματα στη λειτουργία του κάθε συστήματος.

Η βασική δομή του συστήματος παριστάνεται στο σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Βασική δομή ενός ΣΗΕ

1.3. ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ

Τρία γενικά, αλλά βασικά, χαρακτηριστικά σχεδίασεως και αναφοράς ενός ηλεκτρικού δικτύου είναι η *Τάση*, η *Ισχύς Βραχυκυκλώσεως* και η *Στάθμη Μονώσεως* αυτού. Τάση του δικτύου είναι η μέγιστη τάση λειτουργίας των ηλεκτρικών γραμμών. Ισχύς βραχυκυκλώσεως του δικτύου είναι η συμβατική ισχύς που αντιστοιχεί στη μέγιστη ισχύ, η οποία αποδίδεται στο δίκτυο σε περίπτωση τριφασικού βραχυκυκλώματος μέσα σε αυτό. Η στάθμη μονώσεως του δικτύου αναφέρεται συνήθως στην τιμή της κρουστικής αντοχής αυτού, δηλαδή της διηλεκτρικής αντοχής της μονώσεως του εξοπλισμού των υποσταθμών σε κρουστικές υπερτάσεις τυποποιημένης μορφής.

1.4. ΦΟΡΤΙΑ

Γενικά, ο όρος φορτίο θα αναφέρεται σε μία συσκευή ή συγκρότημα συσκευών που τροφοδοτούνται με ηλεκτρική ενέργεια από το σύστημα. Στην πραγματικότητα οι συσκευές των φορτίων ποικίλουν από μία λάμπα φωτισμού νύκτας λίγων watt ως ένα κινητήρα επαγωγικό πολλών MW. Ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας κατάλληλα σχεδιασμένο μπορεί να παρέχει ενέργεια σε όλα αυτά τα διάφορα φορτία. Τα διάφορα φορτία μπορούν να καταταγούν στις εξής κατηγορίες :

1. Κινητήρες (πάσης φύσεως και τύπου)
2. Συσκευές θερμάνσεως
3. Ηλεκτρικές συσκευές
4. Φωτιστικά σώματα

Από ηλεκτρική άποψη υπάρχουν τεράστιες διαφορές μεταξύ των διαφόρων φορτίων σε ότι αφορά το μέγεθος, τη συμμετρία (μονοφασικό ή τριφασικό), τη σταθερότητα (ως προς το χρόνο, τη συχνότητα και την τάση), και την περίοδο λειτουργίας (συστηματική ή τυχαία λειτουργία).

1.5. ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ

Η λειτουργία ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας πρέπει να είναι καλή και ασφαλής, οι δύο δε αυτές έννοιες χαρακτηρίζουν τις κανονικές συνθήκες λειτουργίας του δικτύου. Ο όρος καλή λειτουργία αφορά περισσότερο τους καταναλωτές, ο δε όρος ασφαλής το σύστημα. Η ηλεκτρική ενέργεια παρέχεται από το ηλεκτρικό σύστημα στους καταναλωτές υπό ορισμένη τάση, της οποίας η τιμή πρέπει να τηρείται μέσα σε προκαθορισμένα συμβατικά όρια. Τα παραδεκτά όρια διακυμάνσεως της παρεχόμενης τάσης στην περιοχή του καταναλωτή είναι $\pm 5\%$ επί της ονομαστικής τιμής της τάσεως, δηλαδή προκειμένου για ΧΤ επί των 230V. Ως καλή λειτουργία του δικτύου, θεωρείται εκείνη κατά την οποία η παροχή προς τους καταναλωτές είναι απρόσκοπτη και η τάση τροφοδοτήσεως τηρείται μέσα στα συμβατικά όρια. Κατά τη λειτουργία του συστήματος οι εγκαταστάσεις του υφίστανται διηλεκτρικές, θερμικές και δυναμικές καταπονήσεις. Η ασφαλής λειτουργία απαιτεί, να μπορούν οι εγκαταστάσεις και ο εξοπλισμός του όλου συστήματος να υφίστανται ακίνδυνα τις ανωτέρω λειτουργικές καταπονήσεις, και οι τελευταίες να τηρούνται μέσα στα προκαθορισμένα για την ασφάλεια του δικτύου όρια.

1.5.1. Ροή Ισχύος και Ενέργειας

Η ισχύς αποτελεί βασικό μέτρο, το οποίο είναι φυσικό σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας να χαρακτηρίζει το μέγεθος και την ικανότητα, τόσο του συστήματος ολόκληρου, όσο και κάθε στοιχείου της εγκαταστάσεως αυτού, όπως επίσης και του καταναλωτή. Η ηλεκτρική ισχύς ισούται γενικώς με το γινόμενο της τάσεως και του ρεύματος. Ενώ όμως στο συνεχές ρεύμα η ισχύς είναι μια και σχετίζεται με την ωμική αντίσταση του κυκλώματος, η ύπαρξη αυτεπαγωγών και χωρητικοτήτων σε ένα ηλεκτρικό σύστημα εναλλασσόμενου ρεύματος δημιουργεί δύο μορφές ισχύος, την ενεργό ή πραγματική ισχύ και την άεργο ισχύ ή ισχύ αντιδράσεως. Η ενεργός ισχύς είναι και η σπουδαιότερη από τις δυο. Για να παραχθεί όμως και να διατεθεί ενεργός ισχύς σε ένα ηλεκτρικό σύστημα εναλλασσομένου ρεύματος, απαιτείται η ταυτόχρονη παραγωγή και διάθεση αντίστοιχης άεργου ισχύος.

1.5.2. Μηχανισμός Φορτίου – Συχνότητας

Τα όρια διακυμάνσεως της συχνότητας πρέπει να είναι πολύ στενά, για διάφορους ειδικούς λόγους, όπως είναι η σημασία της σταθερής ταχύτητας των κινητήρων και των ωρολογιακών μηχανισμών, καθώς και για γενικότερους λόγους όπως ο έλεγχος της όλης λειτουργίας του συστήματος. Ο τελευταίος λόγος είναι και ο σοβαρότερος όλων. Ασυνήθιστες αποκλίσεις της συχνότητας δείχνουν ότι κάποια ανωμαλία συμβαίνει στο σύστημα. Στα σύγχρονα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας η σταθερότητα της συχνότητας διατηρείται υπό κανονικές συνθήκες μέσα σε $\pm 0,05$ Hz [1].

1.5.3. Ευστάθεια Λειτουργίας Συστήματος

Συναφής με την ισορροπία φορτίου – συχνότητας είναι η έννοια της ευστάθειας του συστήματος. Η ευστάθεια είναι μία βασική ιδιότητα, η οποία πρέπει να διέπει τη λειτουργία ενός συστήματος παραγωγής και μεταφοράς και η οποία αποκτά τόσο μεγαλύτερη σπουδαιότητα, όσο πιο εκτεταμένο είναι το σύστημα, ή όσες περισσότερες διασυνδέσεις με γειτονικά συστήματα έχει. Το σύστημα χαρακτηρίζεται σαν ευσταθές, όταν, υφιστάμενο, ενώ λειτουργεί σε ορισμένη μόνιμη κατάσταση, μία διαταραχή από οποιαδήποτε αιτία τείνει να επανέλθει σε μόνιμη κατάσταση λειτουργίας, είτε την αρχική, είτε άλλη. Αντίθετα, εάν αυτό τείνει να μην

επανέλθει πλέον σε κατάσταση μόνιμης λειτουργίας χαρακτηρίζεται σαν ασταθές. Μόνιμη κατάσταση λειτουργίας χαρακτηρίζεται η συνήθης κατάσταση λειτουργίας του συστήματος, κατά την οποία αυτό εκτελεί τον προορισμό του, δηλαδή παράγει, μεταφέρει και διανέμει σε κάθε στιγμή τη ζητούμενη κατά την ίδια στιγμή από την κατανάλωση ισχύ.

1.5.4. Αέργος ισχύς και τάσεις συστήματος

Όπως η σταθερότητα της συχνότητας εξασφαλίζει ότι υπάρχει ισορροπία της ενεργού ισχύος στο σύστημα, έτσι και σταθερές τάσεις ζυγών εξασφαλίζουν ισορροπία μεταξύ παραγόμενης και καταναλισκόμενης αέργου ισχύος.

Για να διατηρηθεί το μέγεθος της τάσης σταθερό σε κάθε ζυγό θα πρέπει οι μεταβολές της αέργου ισχύος να αντισταθμίζονται τοπικά ώστε να μην απαιτείται μεταφορά αέργου ισχύος από τη γραμμή και συνεπώς επίδραση της τάσεως. Η τοπική παραγωγή αέργου ισχύος επιτυγχάνεται με στατούς πυκνωτές σύγχρονους πυκνωτές εν παραλλήλω. Αυτή χρειάζεται επειδή τα φορτία είναι επαγωγικά και υπάρχει η τάση όταν αυξάνουν τα φορτία να πέφτει η τάση των ζυγών. Το αντίθετο συμβαίνει όταν ελαττώνονται τα φορτία π.χ. την νύκτα. Στην περίπτωση αυτή πολλές φορές χρειάζεται αντιστάθμιση των γραμμών με εγκάρσια πηνία. Τέλος, η διατήρηση της τάσεως επιτυγχάνεται, εκτός από τα παραπάνω, με ρύθμιση της στα συστήματα διεγέρσεως των γεννητριών και στους μετασχηματιστές ανυψώσεως και υποβιβασμού.

1.6. ΑΝΩΜΑΛΙΕΣ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Κατά τη λειτουργία ενός συστήματος δημιουργούνται πολλές φορές ανώμαλες συνθήκες, που οφείλονται είτε σε βλάβες αυτού, είτε σε εξωτερικά τυχαία αίτια, ή σε ατμοσφαιρικές επιδράσεις.

Οι ανώμαλες συνθήκες αποτελούν μεταβατικές καταστάσεις λειτουργίας του συστήματος – σε αντίθεση με την κανονική ή μόνιμη κατάσταση – κατά τις οποίες στο σύστημα εκδηλώνονται μεταβατικά φαινόμενα ταχείας ή βραδείας εξελίξεως, αναλόγως της περιπτώσεως. Κατά τα μεταβατικά αυτά φαινόμενα δημιουργούνται ταλαντώσεις τάσεων και εντάσεων στο σύστημα, κατά τις οποίες τα μεγέθη αυτά είναι δυνατόν να αποκτήσουν τιμές επικίνδυνες για την ασφάλεια του συστήματος.

Τα βραχυκυκλώματα αποτελούν τις συνηθέστερες ανωμαλίες ενός ηλεκτρικού δικτύου και οφείλονται είτε σε βλάβες των εγκαταστάσεων, ή του εξοπλισμού αυτού, ή σε επιδράσεις εξωτερικών αιτιών, κυρίως ατμοσφαιρικών.

Όπως τα βραχυκυκλώματα αποτελούν ανώμαλες υπερεντάσεις οι οποίες καταπονούν θερμικά και δυναμικά τους αγωγούς των δικτύων, οι υπερτάσεις αποτελούν ανώμαλες τάσεις, πολλαπλάσιου μεγέθους των τάσεων λειτουργίας, οι οποίες αντίστοιχα καταπονούν διηλεκτρικά τις μονώσεις αυτών. Αυτές διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, αναλόγως προελεύσεως, τις *ατμοσφαιρικές* ή *εξωτερικές* και τις *λειτουργικές* ή *εσωτερικές* υπερτάσεις.

1.7. ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΙ ΜΕΣΑ ΠΡΟΣΤΑΣΙΑΣ

Το σύστημα προστασίας ενός ηλεκτρικού δικτύου είναι το βασικότερο από τα βοηθητικά συστήματα, με τα οποία είναι εφοδιασμένο το δίκτυο και αποσκοπεί στην προστασία του από τις ανώμαλες καταστάσεις, οι οποίες παρουσιάζονται κατά τη λειτουργία του και κυρίως από τα βραχυκυκλώματα.

Κατηγορίες και είδη προστασιών έναντι βραχυκυκλωμάτων υπάρχουν πολλά, από τα οποία αναφέρονται τα βασικότερα: *Προστασία αποστάσεως* (γραμμές μεταφοράς), *Προστασία υπερεντάσεως* (γεννήτριες, μετασχηματιστές, γραμμές διανομής ΜΤ, κ.α.), *Διαφορική προστασία* (μετασχηματιστές, καλώδια, γεννήτριες, ζυγοί), *Προστασία συγκρίσεως φάσεων* (γραμμές μεταφοράς), *Προστασία Buch – holtz* (μετασχηματιστές, κ.α.), *Προστασία υπερθερμάνσεως* (μετασχηματιστές, κ.α.).

Τα κύρια όργανα προστασίας είναι οι *ηλεκτρονόμοι* ή *ρελαί*, οι *διακόπτες ισχύος* ή *αυτόματοι διακόπτες* και οι *ασφάλειες*. Βασικοί τύποι διακοπών ισχύος υψηλής τάσεως είναι οι *διακόπτες: ελαίου, πεπιεσμένου αέρος* και *εξαφθοριούχου θείου*. Επίσης, ένα μέσο προστασίας του δικτύου από τις υπερτάσεις είναι το *αλεξικέραυνο* [1].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΕΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

2.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η δομή και η λειτουργία ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας είναι δυο διαφορετικές πλευρές της τεχνικής των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό γίνεται εύκολα κατανοητό αφού για να εξυπηρετηθεί ο σκοπός ενός συστήματος, που είναι η ικανοποίηση καταναλωτών σε ηλεκτρική ενέργεια, απαιτείται η σωστή λειτουργία του, η οποία εξαρτάται κατά κύριο λόγο από τη δομή του. Από άποψη λειτουργίας του ολοκληρωμένου συστήματος διακρίνουμε τη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας ή κανονική λειτουργία και τη μεταβατική και ασύμμετρη κατάσταση λειτουργίας ή γενικότερα μη κανονική ή ανώμαλη λειτουργία.

Το πρόβλημα των ροών φορτίου συνίσταται στον προσδιορισμό των μεταβλητών του συστήματος (ισχύων, ρευμάτων, τάσεων), σε μια δεδομένη μόνιμη κατάσταση λειτουργίας.

Η μελέτη του κεφαλαίου θα εστιαστεί στην ανάλυση της σταθερής κατάστασης ενός αλληλοσυνδεδεμένου συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας κατά τη διάρκεια μιας κανονικής εφαρμογής. Το σύστημα θεωρείται ότι δουλεύει κάτω από εξισορροπημένες συνθήκες και αναπαρίσταται από ένα μονοφασικό δίκτυο. Το δίκτυο περιέχει εκατοντάδες κόμβους και κλάδους με σύνθετες αντιστάσεις εκφρασμένες σε α.μ. τιμές σε ένα κοινό MVA σύστημα.

Οι εξισώσεις δικτύου μπορούν να διατυπωθούν συστηματικά με διάφορους τρόπους. Πιο συχνά χρησιμοποιείται η μέθοδος τάσεων-κόμβων, η οποία είναι η πιο κατάλληλη για τις περισσότερες αναλύσεις συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Η διατύπωση των εξισώσεων του δικτύου στην μορφή του πίνακα αγωγιμοτήτων καταλήγει σε σύνθετες γραμμικές ταυτόσημες αλγεβρικές εξισώσεις όσον αφορά τα ρεύματα των κόμβων. Όταν τα ρεύματα στους κόμβους είναι συγκεκριμένα, το σύνολο των γραμμικών εξισώσεων μπορεί να επιλυθεί για τις τάσεις των κόμβων.

Παρόλα αυτά, σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας, γνωστές είναι οι ισχύς και πιο σπάνια τα ρεύματα. Γι' αυτό τον λόγο οι εξισώσεις που προκύπτουν για τις ισχύς, γνωστές ως εξισώσεις ροής ισχύος, είναι μη γραμμικές και πρέπει να λυθούν με επαναληπτικές μεθόδους. Η μελέτη της ροής ισχύος, που συχνά αναφέρεται και ως ροή φορτίου, αποτελεί την θεμελίωση της ανάλυσης και του σχεδιασμού των

συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Είναι απαραίτητη για τον σχεδιασμό, την λειτουργία, τον οικονομικό προγραμματισμό και την ανταλλαγή ισχύος μεταξύ των μονάδων.

2.2. ΜΕΛΕΤΗ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ

Η μελέτη των ροών φορτίου συνιστάται στον υπολογισμό των ισχύων και τάσεων σε κάθε κόμβο ενός δικτύου, για δεδομένες συνθήκες [1]. Οι γραμμές παριστάνονται με κυκλώματα- Π, με ανηγμένες παραμέτρους και τα φορτία θεωρούνται συμμετρικά. Εάν τα φορτία μπορούσαν να παρασταθούν με σταθερές σύνθετες αγωγιμότητες, και οι γεννήτριες, σαν πηγές πίσω από αντιστάσεις, θα ήταν δυνατή μία άμεση λύση του προβλήματος.

Γενικά, όμως τα φορτία ορίζονται ως ισχύς πραγματικές και άεργες και οι γεννήτριες επίσης από τις παραγόμενες ισχύς και τις τάσεις ζυγού. Βάσει αυτών των χαρακτηριστικών, ορίζονται για τις μελέτες ροών φορτίου οι ακόλουθοι τρεις χαρακτηριστικοί τύποι ζυγών:

- *Ζυγοί φορτίου*, στους οποίους είναι γνωστές οι ισχύς ζητήσεως, ή φορτίου και άγνωστη η τάση (κατά μέγεθος και γωνία)

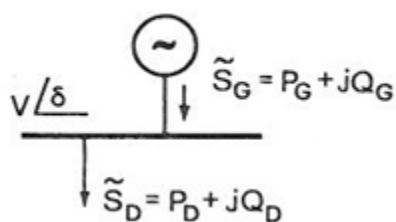
- *Ζυγοί παραγωγής*, όπου είναι γνωστά, η παραγόμενη ενεργός ισχύς και το μέτρο της τάσης και προσδιορίζονται η άεργος ισχύς και η γωνία της τάσης.

- *Ζυγός ταλάντωσης*, ή *ζυγός αναφοράς*, ο οποίος είναι ζυγός παραγωγής, χρησιμοποιούμενος για να αντισταθμίσει τις απώλειες του δικτύου, που δεν είναι γνωστές εξ αρχής και γενικά για άμεση αντιμετώπιση των μεταβολών ισχύος. Στον ζυγό αυτόν επιβάλλεται σταθερή τάση κατά μέτρο και γωνία και προσδιορίζονται οι ισχύς παραγωγής.

Άλλοι συνδυασμοί ζυγών είναι επίσης δυνατόν να προκύψουν κατά περίπτωση.

2.2.1. Μεταβλητές του συστήματος

Θεωρώντας τη γενική περίπτωση ενός ζυγού του συστήματος με παραγωγή και φορτίο, διακρίνουμε τα ακόλουθα 6 μεγέθη (σχήμα 2.1)

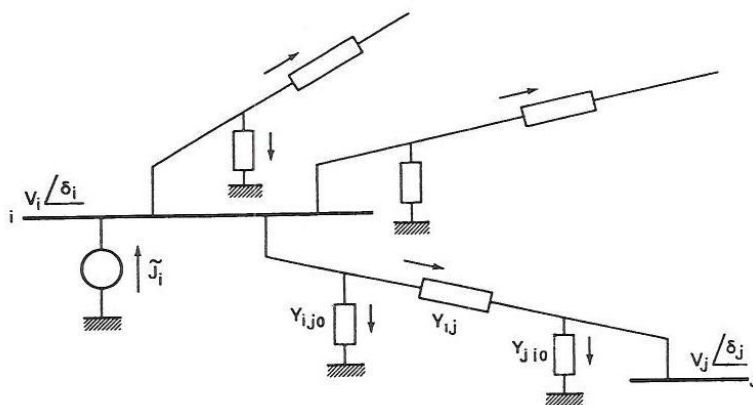


Σχήμα 2.1: Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός ζυγού

- Τα φορτία ή μεταβλητές ζήτησης (P_D , Q_D), τα οποία χαρακτηρίζονται και σαν μεταβλητές διαταραχής. Είναι ανεξάρτητα μεγέθη.
- Οι ισχείς παραγωγής (P_G , Q_G), οι οποίες χαρακτηρίζονται και σαν μεταβλητές ελέγχου.
- Οι τάσεις και οι γωνίες (V , δ), οι οποίες ονομάζονται μεταβλητές καταστάσεως και οι οποίες είναι εξαρτημένες μεταβλητές.

2.3. Εξισώσεις ροών φορτίου

Θεωρούμε έναν τυπικό ζυγό ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2.



Σχήμα 2.2: Τυπικός ζυγός ενός Σ.Η.Ε

Οι γραμμές μεταφοράς παριστάνονται με το ισοδύναμο π μοντέλο, ενώ οι αντιστάσεις έχουν μετατραπεί σε α.μ. τιμές. Η εφαρμογή του νόμου Kirchoff δίνει :

$$I_i = y_{i0}V_i + y_{i1}(V_i - V_1) + y_{i2}(V_i - V_2) + \dots + y_{in}(V_i - V_n) =$$

$$= (y_{i0} + y_{i1} + y_{i2} + \dots + y_{in})V_i - y_{i1}V_1 - y_{i2}V_2 - \dots - y_{in}V_n \quad (2.1)$$

ή

$$I_i = V_i \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j \quad j \neq i \quad (2.2)$$

Για τις ισχύς στο ζυγό i ισχύει:

$$P_i + jQ_i = V_i I_i^* \quad (2.3)$$

ή

$$I_i = \frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \quad (2.4)$$

Αντικαθιστώντας το I_i έχουμε:

$$\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} = V_i \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j \quad j \neq i \quad (2.5)$$

Από την παραπάνω σχέση καταλήγουμε σε ένα σύστημα από αλγεβρικές μη γραμμικές εξισώσεις που πρέπει να λυθούν με επαναληπτικές μεθόδους.

2.3.1. Μέθοδος Gauss – Seidel

Στην μελέτη ροής ισχύος είναι απαραίτητο να λυθούν δυο σύνολα μη γραμμικών εξισώσεων (σχέση 2.5) για δύο άγνωστες μεταβλητές σε κάθε κόμβο. Με την μέθοδο Gauss – Seidel λύνουμε ως προς V_i και έχουμε :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i^{sch} - jQ_i^{sch}}{V_i^{*(k)}} + \sum y_{ij} V_j^{(k)}}{\sum y_{ij}} \quad j \neq i \quad (2.6)$$

όπου y_{ij} είναι η παρούσα αγωγιμότητα σε α.μ. τιμή

P_i^{sch} και Q_i^{sch} είναι η πραγματική και η φαινόμενη ισχύς του δικτύου σε α.μ. τιμές.

Το ρεύμα εισόδου στον ζυγό i θεωρείται θετικό. Για αυτό, για τους ζυγούς στους οποίους έχουμε έγχυση ενεργού και άεργου ισχύος, όπως στους ζυγούς παραγωγής (generators), τα P_i^{sch} και Q_i^{sch} έχουν θετικές τιμές. Για τους ζυγούς φορτίου όπου η ενεργός και η άεργος ισχύς εξέρχονται ή λαμβάνονται, τα P_i^{sch} και Q_i^{sch} έχουν αρνητικές τιμές. Επιλύοντας ως προς P_i και Q_i έχουμε:

$$P_i^{(k+1)} = \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (2.7)$$

$$Q_i^{(k+1)} = - \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} \sum_{j=0}^n y_{ij} - \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (2.8)$$

Τα μη διαγώνια στοιχεία της μήτρας αγωγιμοτήτων Y_{bus} είναι $Y_{ij} = -y_{ij}$ και τα διαγώνια στοιχεία είναι $Y_{ii} = \sum y_{ij}$. Επομένως έχουμε :

$$V_i^{(k+1)} = \frac{\frac{P_i^{sch} - jQ_i^{sch}}{V_i^{*(k)}} - \sum_{j \neq i} Y_{ij} V_j^{(k)}}{Y_{ii}} \quad (2.9)$$

και

$$P_i^{(k+1)} = \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (2.10)$$

$$Q_i^{(k+1)} = - \left\{ V_i^{*(k)} \left[V_i^{(k)} Y_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij} V_j^{(k)} \right] \right\} \quad j \neq i \quad (2.11)$$

όπου το Y_{ii} περιλαμβάνει τις αγωγιμότητες που γειώνονται στον εν λόγω ζυγό i .

Αφού και οι δύο συνιστώσες της τάσης έχουν προσδιοριστεί για τον ζυγό αναφοράς, υπάρχουν $2(n-1)$ εξισώσεις οι οποίες πρέπει να επιλυθούν με επαναληπτικό τρόπο. Υπό κανονικές συνθήκες λειτουργίας, το μέγεθος της τάσης είναι κοντά στο 1 α.μ. ή κοντά στο μέγεθος της τάσης του ζυγού αναφοράς. Το μέγεθος της τάσης στους ζυγούς φορτίου έχει τιμή λίγο μικρότερη από ότι στο ζυγό αναφοράς, εξαρτώμενη από την ζήτηση άεργου ισχύος, ενώ η προγραμματισμένη τάση στο ζυγό παραγωγής έχει τιμή λίγο μεγαλύτερη. Επίσης η γωνία της φάσης στους ζυγούς φορτίου έχει τιμή μικρότερη από την γωνία αναφοράς σύμφωνα με την ζήτηση ενεργού ισχύος, ενώ η γωνία της φάσης στο ζυγό παραγωγής έχει τιμή μεγαλύτερη από την τιμή αναφοράς, εξαρτώμενη από το ποσό της εγχεόμενης ενεργού ισχύος στο ζυγό.

Για τους ζυγούς $P-Q$, οι ενεργές και άεργες ισχύς P_i^{sch} και Q_i^{sch} είναι γνωστές. Αρχίζοντας με μια αρχική εκτίμηση, η σχέση 2.9 επιλύεται για τις

πραγματικές και φανταστικές συνιστώσες της τάσης. Για τους $P - V$ ζυγούς όπου τα P_i^{sch} και $|V_i|$ είναι γνωστά, λύνουμε πρώτα ως προς $Q_i^{(k+1)}$ και στην συνέχεια λύνουμε την 2.9 ως προς $V_i^{(k+1)}$. Ωστόσο, αφού το μέτρο της τάσης $|V_i|$ έχει καθορισθεί, διατηρείται μόνο το φανταστικό μέρος της $V_i^{(k+1)}$, ενώ το πραγματικό μέρος επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιείται:

$$(e_i^{(k+1)})^2 + (f_i^{(k+1)})^2 = |V_i|^2 \quad (2.12)$$

ή

$$e_i^{(k+1)} = \sqrt{|V_i|^2 - (f_i^{(k+1)})^2} \quad (2.13)$$

όπου $e_i^{(k+1)}$ και $f_i^{(k+1)}$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος της τάσης $V_i^{(k+1)}$ στην επαναληπτική διαδικασία.

Ο βαθμός σύγκλισης αυξάνεται χρησιμοποιώντας έναν παράγοντα επιτάχυνσης στην προσεγγιστική λύση που λαμβάνεται μετά από κάθε επανάληψη.

$$V_i^{(k+1)} = V_i^{(k)} + a(V_{i\,cal}^{(k)} - V_i^{(k)}) \quad (2.14)$$

όπου a είναι ο παράγοντας επιτάχυνσης. Η τιμή του εξαρτάται από το σύστημα. Η κλίμακα του 1.3 – 1.7 θεωρείται ικανοποιητική για τυπικά συστήματα.

Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι οι τιμές που προκύπτουν από τις επαναλήψεις για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη των τάσεων των ζυγών να ικανοποιούν μια συγκεκριμένη ακρίβεια.

$$|e_i^{(k+1)} - e_i^{(k)}| \leq \epsilon \quad (2.15)$$

$$|f_i^{(k+1)} - f_i^{(k)}| \leq \epsilon$$

Για να είναι το σφάλμα της ισχύος μικρό και αποδεκτό, πρέπει να υπάρχει ένα όριο και για τις δύο συνιστώσες της τάσης. Μια ακρίβεια τάσης της κλίμακας του 0.00001 ως 0.00005α.μ. είναι ικανοποιητική. Συνεχίζουμε τις επαναλήψεις μέχρι η τιμή του μεγαλύτερου στοιχείου στις στήλες των ΔP και ΔQ να είναι μικρότερη από μια συγκεκριμένη τιμή. Ένα τυπικό σφάλμα έχει τιμή της τάσης του 0.001α.μ. Εάν η λύση συγκλίνει, τότε οι ενεργές και άεργες ισχύς του δικτύου υπολογίζονται από τις σχέσεις 2.10 και 2.11.

2.3.2. Μέθοδος Newton – Raphson

Λόγω του τετραγωνικού βαθμού σύγκλισης η μέθοδος Newton είναι μαθηματικά ανώτερη της μεθόδου Gauss-Seidel και είναι λιγότερο επιρρεπής σε αποκλίσεις λόγω απρόοπτων προβλημάτων. Για μεγάλα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας η μέθοδος Newton–Raphson είναι πιο αποτελεσματική και πρακτική. Ο αριθμός των επαναλήψεων που απαιτείται για να αποκτήσουμε μια λύση, είναι ανεξάρτητος από το μέγεθος του συστήματος, αλλά απαιτείται πιο λειτουργική αξιολόγηση σε κάθε επανάληψη. Αφού στο πρόβλημα ροής ισχύος η ενεργός ισχύς και το μέτρο της τάσης είναι καθορισμένες για τους ζυγούς που ελέγχονται από τις τάσεις, η εξίσωση ροής ισχύος μετασχηματίζεται σε πολική μορφή. Για ένα τυπικό ζυγό του συστήματος που εικονίζεται στο σχήμα 2.2., το ρεύμα που εισέρχεται στο ζυγό i δίνεται από την εξίσωση 2.2. Αυτή η εξίσωση μπορεί να γραφεί ξανά λαμβάνοντας υπόψη την μήτρα αγωγιμοτήτων ως εξής:

$$I_i = \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j \quad (2.16)$$

Όπου στην εξίσωση αυτή, το j περιλαμβάνει το ζυγό i . Σε πολική μορφή η εξίσωση γράφεται:

$$I_i = \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| < \theta_{ij} + \delta_j \quad (2.17)$$

Η μιγαδική ισχύς στο ζυγό i είναι:

$$P_i - jQ_i = V_i^* I_i \quad (2.18)$$

Αντικαθιστώντας από την (2.17) το I_i στην (2.18) έχουμε:

$$P_i - jQ_i = |V_i| < -\delta_i \sum_{j=1}^n |Y_{ij}| |V_j| < \theta_{ij} + \delta_j \quad (2.19)$$

Χωρίζοντας τα πραγματικά και φανταστικά μέρη έχουμε

$$P_i = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.20)$$

$$Q_i = -\sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.21)$$

Οι εξισώσεις 2.20 και 2.21 αποτελούν ένα σύνολο από μη γραμμικές αλγεβρικές εξισώσεις ανεξάρτητων μεταβλητών, όπου οι τιμές των τάσεων είναι σε α.μ. τιμές και

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διεξόδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

γωνίες φάσης σε rad. Έχουμε δύο εξισώσεις για κάθε ζυγό φορτίου, οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις 2.20 και 2.21, και μία εξίσωση για κάθε ζυγό σταθερής τάσης (PV), που δίνεται από την 2.20. Αναπτύσσοντας τις 2.20 και 2.21 σε σειρά Taylor για την αρχική εκτίμηση και παραλείποντας όλους τους όρους μεγαλύτερης τάξης καταλήγουμε στο παρακάτω σύνολο γραμμικών εξισώσεων:

$$\begin{bmatrix} \Delta P_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta P_n^{(k)} \\ \Delta Q_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta Q_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_n^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \hline \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_2^{(k)}}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_n^{(k)}}{\partial |V_n|} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \delta_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta \delta_n^{(k)} \\ \Delta |V_2^{(k)}| \\ \vdots \\ \Delta |V_n^{(k)}| \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, ο ζυγός 1 θεωρείται ο ζυγός αναφοράς. Ο Ιακωβιανός πίνακας δίνει την γραμμική σχέση μεταξύ των μικρών αλλαγών στην γωνία της τάσης $\Delta \delta_i^{(k)}$ και στην τιμή της τάσης $\Delta |V_i^{(k)}|$ με τις αλλαγές στην πραγματική και άεργο ισχύ $\Delta P_i^{(k)}$ και $\Delta Q_i^{(k)}$. Τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα είναι οι μερικές παράγωγοι των εξισώσεων 2.20 και 2.21, υπολογισμένες στα $\Delta \delta_i^{(k)}$ και $\Delta |V_i^{(k)}|$. Σε ποιο σύντομη μορφή μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta \\ \Delta |V| \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Για ζυγούς PV, τα μέτρα των τάσεων είναι γνωστά. Επομένως, αν m ζυγοί του συστήματος είναι ελεγχόμενης τάσης, τότε m εξισώσεις που περιλαμβάνουν τα ΔQ και ΔV και τις αντίστοιχες στήλες του Ιακωβιανού πίνακα, διαγράφονται. Έτσι, υπάρχουν $n - 1$ περιορισμοί πραγματικής ισχύος και $n - 1 - m$ περιορισμοί άεργου ισχύος, και ο Ιακωβιανός πίνακας είναι τάξης $(2n - 2 - m) \times (2n - 2 - m)$. Ο πίνακας J_1 είναι τάξης $(n - 1) \times (n - 1)$, ο πίνακας J_2 είναι τάξης $(n - 1) \times (n - 1 - m)$, ο J_3 τάξης $(n - 1 - m) \times (n - 1)$ και ο J_4 τάξης $(n - 1 - m) \times (n - 1 - m)$.

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_1 είναι :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j \neq i} |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -|V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad j \neq i \quad (2.25)$$

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_2 είναι :

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_i|} = 2 |V_i| |Y_{ii}| \cos \theta_{ii} + \sum_{j \neq i} |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial |V_j|} = |V_i| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad j \neq i \quad (2.27)$$

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_3 είναι :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j \neq i} |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = -|V_i| |V_j| |Y_{ij}| \cos(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad j \neq i \quad (2.29)$$

Τα διαγώνια και μη διαγώνια στοιχεία του πίνακα J_4 είναι :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -2 |V_i| |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} - \sum_{j \neq i} |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_j|} = -|V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad j \neq i \quad (2.31)$$

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Οι όροι $\Delta P_i^{(k)}$ και $\Delta Q_i^{(k)}$ είναι η διαφορά μεταξύ των αρχικών (επιθυμητών ή προγραμματισμένων) και υπολογιζόμενων τιμών, γνωστών σαν υπόλοιπα ισχύος, και δίνονται από:

$$\Delta P_i^{(k)} = P_i^{sch} - P_i^{(k)} \quad (2.32)$$

$$\Delta Q_i^{(k)} = Q_i^{sch} - Q_i^{(k)} \quad (2.33)$$

Οι νέες εκτιμήσεις των τάσεων των ζυγών είναι :

$$\delta_i^{(k+1)} = \delta_i^{(k)} + \Delta \delta_i^{(k)} \quad (2.34)$$

$$|V_i^{(k+1)}| = |V_i^{(k)}| + \Delta |V_i^{(k)}| \quad (2.35)$$

Η διαδικασία για τη λύση των εξισώσεων ροής φορτίου με τη μέθοδο Newton-Raphson είναι η ακόλουθη:

1. Για τους ζυγούς φορτίου, όπου οι ισχύς P_i^{sch} και Q_i^{sch} είναι γνωστές, το μέτρο των τάσεων και οι γωνίες των φάσεων τίθενται ίσες με τις τιμές των ζυγών αναφοράς ή 1.0 και 0.0 αντίστοιχα, δηλαδή $|V_i^{(0)}| = 1.0$ και $\delta_i^{(0)} = 0.0$. Για τους ζυγούς PV, όπου τα $|V_i|$ και P_i^{sch} είναι γνωστά, οι γωνίες των φάσεων τίθενται ίσες με τη φάση του ζυγού αναφοράς ή 0, δηλαδή $\delta_i^{(0)} = 0$.
2. Για ζυγούς φορτίου, οι $P_i^{(k)}$ και $Q_i^{(k)}$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.20) και (2.21), ενώ οι $\Delta P_i^{(k)}$ και $\Delta Q_i^{(k)}$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.32) και (2.33).
3. Για ζυγούς PV, οι $P_i^{(k)}$ και $\Delta P_i^{(k)}$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (2.20) και (2.21) αντίστοιχα.

4. Τα στοιχεία του Ιακωβιανού πίνακα (J_1, J_2, J_3, J_4) υπολογίζονται από τις (2.24) - (2.31).
5. Η γραμμική εξίσωση (2.22) λύνεται απευθείας με τη μέθοδο της τριγωνοποίησης και απαλοιφής Gauss.
6. Τα νέα μέτρα των τάσεων και οι νέες γωνίες φάσεων υπολογίζονται από τις (2.34) και (2.35).
7. Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι οι $\Delta P_i^{(k)}$ και $\Delta Q_i^{(k)}$ να είναι μικρότερες από την προσδιορισμένη ακρίβεια, δηλαδή :

$$|\Delta P_i^{(k)}| \leq \varepsilon \quad (2.36)$$

$$|\Delta Q_i^{(k)}| \leq \varepsilon$$

2.3.3. Ταχεία Αποζευγμένη Μέθοδος Ροής Φορτίου

Οι γραμμές μεταφοράς ενός συστήματος ισχύος έχουν πολύ μεγάλο λόγο X/R . Για ένα τέτοιο σύστημα, οι μεταβολές της πραγματικής ισχύος ΔP είναι λιγότερο ευαίσθητες σε μεταβολές του μέτρου της τάσης και περισσότερο ευαίσθητες σε μεταβολές στη φάση των γωνιών $\Delta\delta$. Ομοίως, η άεργος ισχύς είναι λιγότερο ευαίσθητη σε αλλαγές στη γωνία και είναι σχεδόν ανεξάρτητες σε μεταβολές του μέτρου της τάσης. Επομένως, είναι λογικό οι πίνακες J_2 και J_3 του Ιακωβιανού πίνακα να τίθενται ίσοι με 0. Έτσι, η σχέση (2.23) γίνεται:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta|V| \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

ή

$$\Delta P = J_1 \Delta\delta = \left[\frac{\partial P}{\partial \delta} \right] \Delta\delta \quad (2.38)$$

$$\Delta Q = J_4 \Delta|V| = \left[\frac{\partial Q}{\partial |V|} \right] \Delta|V| \quad (2.39)$$

Οι σχέσεις (2.38) και (2.39) δείχνουν ότι η εξίσωση (2.37) διαχωρίζεται σε δύο αποζευγμένες εξισώσεις που απαιτούν σημαντικά λιγότερο χρόνο για να λυθούν

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

συγκριτικά με το χρόνο που απαιτείται για τη λύση της (2.23). Επιπλέον, μπορεί να γίνει σημαντική απλοποίηση αν εξαλείψουμε την ανάγκη να υπολογιστούν ξανά οι πίνακες J_1 και J_4 κατά τη διάρκεια κάθε επανάληψης. Η διαδικασία αυτή καταλήγει στις αποζευγμένες εξισώσεις ροής φορτίου που αναπτύχθηκαν από τους Stott και Alsac. Τα διαγώνια στοιχεία του J_1 που περιγράφονται από τη σχέση (2.24) μπορούν να γραφτούν ως :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) - |V_i|^2 |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} \quad (2.40)$$

Αντικαθιστώντας τον πρώτο όρο της παραπάνω εξίσωσης με $-Q_i$, όπως προκύπτει από την (2.20), έχουμε :

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -Q_i - |V_i|^2 |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} = -Q_i - |V_i|^2 B_{ii} \quad (2.41)$$

όπου $B_{ii} = |Y_{ii}| \sin \theta_{ii}$ είναι το φανταστικό μέρος των διαγώνιων στοιχείων της μήτρας αγωγιμότητας. B_{ii} είναι το άθροισμα των επιδεκτικότητων όλων των στοιχείων που συνδέονται στο ζυγό i . Σε ένα τυπικό σύστημα ισχύος, για την αυτό-επιδεκτικότητα ισχύει ότι $B_{ii} \gg Q_i$, και επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε την Q_i . Περαιτέρω απλοποίηση πραγματοποιείται με τη θεώρηση ότι $|V_i|^2 \approx |V_i|$ η οποία οδηγεί στην:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = -|V_i| B_{ii} \quad (2.42)$$

Υπό κανονικές συνθήκες, η διαφορά $\delta_j - \delta_i$ είναι αρκετά μικρή. Έτσι, θεωρώντας στη σχέση (2.25) ότι $\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j \approx \theta_{ij}$, τα μη διαγώνια στοιχεία του J_1 προκύπτουν από τη σχέση:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -|V_i| |V_j| B_{ij} \quad (2.43)$$

Περαιτέρω απλοποίηση προκύπτει θεωρώντας ότι $|V_j| \approx 1$:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = -|V_i| B_{ij} \quad (2.44)$$

Ομοίως, τα διαγώνια στοιχεία του J_4 που περιγράφονται από την (2.30) μπορούν να γραφτούν ως:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -|V_i| |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} - \sum_{j=1}^n |V_i| |V_j| |Y_{ij}| \sin(\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j) \quad (2.45)$$

Αντικαθιστώντας τον δεύτερο όρο της παραπάνω εξίσωσης με $-Q_i$, όπως προκύπτει από την (2.21), έχουμε:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -|V_i| |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} + Q_i \quad (2.46)$$

Όπως και προηγουμένως, αφού $B_{ii} = |Y_{ii}| \sin \theta_{ii} \gg Q_i$, το Q_i μπορεί να αμεληθεί και η (2.30) γίνεται:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_i|} = -|V_i| B_{ii} \quad (2.47)$$

Ομοίως, θεωρώντας ότι $\theta_{ij} - \delta_i + \delta_j \approx \theta_{ij}$, η (2.2.31) γίνεται :

$$\frac{\partial Q_i}{\partial |V_j|} = -|V_i| B_{ij} \quad (2.48)$$

Με τις υποθέσεις αυτές, οι εξισώσεις (2.38) και (2.39) παίρνουν την παρακάτω μορφή:

$$\frac{\Delta P}{|V_i|} = -B' \Delta \delta \quad (2.49)$$

$$\frac{\Delta Q}{|V_i|} = -B'' \Delta |V| \quad (2.50)$$

Οι πίνακες B' και B'' είναι τα φανταστικά μέρη της μήτρας αγωγιμότητας Y_{bus} . Αφού τα στοιχεία αυτού του πίνακα είναι σταθερά, πρέπει να τριγωνοποιηθούν και να εισαχθούν μία μόνο φορά στην αρχή της επανάληψης. Η τάξη του πίνακα B' είναι $(n - 1)$. Για ζυγούς PV όπου τα $|V_i|$ και P_i είναι προσδιορισμένα, ενώ το Q_i όχι, η αντίστοιχη γραμμή και στήλη του Y_{bus} απαλείφονται. Έτσι, ο πίνακας B'' έχει τάξη $(n - 1 - m)$, όπου m είναι ο αριθμός των ζυγών PV. Επομένως, στον αλγόριθμο της ταχείας αποζευγμένης μεθόδου ροής φορτίου οι μεταβολές στο μέτρο της τάσης και στη φάση είναι :

$$\Delta \delta = -[B']^{-1} \frac{\Delta P}{|V|} \quad (2.51)$$

$$\Delta |V| = -[B'']^{-1} \frac{\Delta Q}{|V|} \quad (2.52)$$

Η ταχεία αποζευγμένη μέθοδος ροής φορτίου απαιτεί περισσότερες επαναλήψεις από τη μέθοδο Newton - Raphson, αλλά απαιτεί σημαντικά λιγότερο χρόνο για κάθε επανάληψη και η επίλυση της ροής φορτίου πραγματοποιείται πολύ γρήγορα. Η τεχνική αυτή είναι πολύ χρήσιμη στην ανάλυση ενδεχόμενων διαταραχών όπου το πλήθος των διακοπών πρέπει να προσομοιωθεί ή η επίλυση της ροής φορτίου πρέπει να ελεγχθεί on-line.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΡΟΩΝ ΦΟΡΤΙΟΥ ΣΕ ΕΝΑ Σ.Η.Ε.

3.1. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

Η πιθανοτική ροή φορτίου μπορεί να οριστεί ως μία μέθοδος επίλυσης προβλημάτων ροής φορτίου που λαμβάνει υπόψη την αβεβαιότητα και τη στατιστική φύση των δεδομένων μεγεθών, δηλαδή των φορτίων και της παραγωγής. Υπολογίζει τα άγνωστα μεγέθη ως τυχαίες μεταβλητές με μία μέση τιμή, τυπική απόκλιση και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Είναι ένας τρόπος υπολογισμού όλων των πιθανών καταστάσεων του συστήματος, που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές στατιστικές μεταβολές των φορτίων και της παραγωγής μέσω μίας μόνο ανάλυσης ροής φορτίου.

Η αβεβαιότητα αυτή υπάρχει καθώς τόσο τα φορτία, όσο και η παραγωγές παρουσιάζουν στατιστικό χαρακτήρα, που εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη γεωγραφική περιοχή καθώς και από την ώρα ζήτησης. Συνεπώς η αναλυτική επίλυση των ροών φορτίου αδυνατεί να προσεγγίσει πλήρως το ζήτημα καθώς δεν μπορεί να υπάρξει μια ακριβής πρόβλεψη των δεδομένων μεγεθών.

Η αβεβαιότητα της παραγωγής μπορεί να οφείλεται είτε σε προβλεπόμενους παράγοντες όπως λόγω χειρισμού ή συντήρησης είτε σε απρόβλεπτους παράγοντες όπως λόγω βλάβης. Σε περιπτώσεις ανανεώσιμων πηγών πρωτογενούς ενέργειας η αβεβαιότητα οφείλεται στη στοχαστική φύση των καιρικών συνθηκών, όπως για παράδειγμα η αβεβαιότητα της παραγωγής ανεμογεννήτριας οφείλεται στην αβεβαιότητα του ανέμου. Ο βαθμός αβεβαιότητας αυξάνεται όσο απομακρύνεται η χρονική στιγμή της πρόβλεψης από τη χρονική στιγμή της μέτρησης. Κατά τη χρονική στιγμή της μέτρησης η αβεβαιότητα των φορτίων και της παραγωγής οφείλεται αποκλειστικά στο σφάλμα μέτρησης.

Σύμφωνα με την ντετερμινιστική μέθοδο, η επίλυση ροών φορτίου απαιτεί συγκεκριμένες τιμές δεδομένων και τα αποτελέσματα που επιτυγχάνονται (διάνυσμα κατάστασης) αντιστοιχούν αποκλειστικά στο συγκεκριμένο σύστημα δεδομένων (διάνυσμα εισόδου και διάνυσμα ελέγχου). Κάθε αλλαγή των δεδομένων απαιτεί καινούρια επίλυση για τον υπολογισμό της νέας κατάστασης. Για να ληφθούν υπόψη όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί μεταβολής των φορτίων και της παραγωγής απαιτείται η επίλυση υπερβολικά μεγάλου πλήθους ντετερμινιστικών ροών φορτίου.

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Για συστήματα με N ζυγούς και k μόνο διαφορετικές τιμές φορτίων σε κάθε ζυγό απαιτείται η επίλυση k^N ροών φορτίου, π.χ. σε ένα σύστημα $N=100$ ζυγών και $k=4$ διαφορετικών τιμών φορτίου σε κάθε ζυγό απαιτούνται $4^{100} \approx 10^{60}$ ροές φορτίου. Η εκτίμηση τόσο μεγάλου πλήθους αποτελεσμάτων ροής φορτίου για την εύρεση της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και τον σχεδιασμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των ζητούμενων μεγεθών είναι πρακτικά αδύνατη.

Στην πιθανοτική ανάλυση ροής φορτίου, ως δεδομένα θεωρούνται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των φορτίων και της παραγωγής στο σύστημα και ζητείται ο υπολογισμός των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας του μέτρου και των γωνιών των τάσεων, των ενεργών και αέργων ροών ισχύος στις γραμμές του δικτύου, των απωλειών κ.λ.π. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την επίλυση του προβλήματος της πιθανοτικής ροής φορτίου μπορεί να είναι αναλυτικές, αριθμητικές ή συνδυασμός και των δύο. Οι αριθμητικοί μέθοδοι έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι απλές και εφαρμόζονται χωρίς καμία παραδοχή, ενώ οι αναλυτικές επειδή χρησιμοποιούν πιο σύνθετη μοντελοποίηση συνήθως απαιτούν να γίνουν σοβαρές παραδοχές και απλοποιήσεις που έχουν επίδραση στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Η αριθμητική μέθοδος Monte-Carlo συνίσταται στην επαναληπτική διαδικασία της επίλυσης του ίδιου προβλήματος ντετερμινιστικά, με συγκεκριμένες πάντα τιμές δεδομένων σε κάθε επίλυση. Η επιλογή των τιμών των δεδομένων γίνεται τυχαία με βάση την πιθανοτική κατανομή που ακολουθεί το κάθε μέγεθος. Για το σκοπό αυτό απαιτείται μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών μεταξύ 0 και 1 και με κατάλληλο μετασχηματισμό λαμβάνονται οι αντίστοιχοι τυχαίοι αριθμοί των δεδομένων έχοντας υπόψη την πιθανοτική κατανομή που ακολουθεί η κάθε μεταβλητή. Τα διαδοχικά αποτελέσματα που προκύπτουν από την ντετερμινιστική επίλυση ροής φορτίου, αποτελούν πιθανές καταστάσεις του ίδιου συστήματος και συνθέτουν τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των ζητούμενων μεγεθών. Θεωρητικά δεν υπάρχουν περιοριστικές παραδοχές στην μέθοδο Monte-Carlo. Κατά την επίλυση μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι ακριβείς μη γραμμικές εξισώσεις ροής φορτίου, να θεωρηθεί εξάρτηση μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών, καθώς επίσης και διαφορετική τοπολογία δικτύου και διαφορετικές τιμές στις παραμέτρους ελέγχου του συστήματος. Έτσι αποτελεί ένα τρόπο ελέγχου της ακρίβειας και της ορθότητας των παραδοχών των αναλυτικών μεθόδων πιθανοτικής ροής φορτίου που χρησιμοποιούνται. Η ακρίβεια της μεθόδου είναι ανάλογη του αριθμού των διαδοχικών επιλύσεων που θεωρούνται. Συνήθως μια αξιόπιστη ανάλυση απαιτεί μερικές χιλιάδες διαφορετικές επιλύσεις.

Έτσι, το μειονέκτημα της μεθόδου Monte-Carlo είναι το πλήθος των αριθμών που χρειάζεται να επεξεργαστούν για να δοθούν αξιόπιστα αποτελέσματα.

Για να ξεπεραστούν τα πιο πάνω προβλήματα, μπορούν να εφαρμοστούν αναλυτικές μέθοδοι στην επίλυση της πιθανοτικής ροής φορτίου. Η βασικότερη παραδοχή που γίνεται σε όλες τις αναλυτικές μεθόδους είναι η γραμμικότητα των εξισώσεων ροής φορτίου γύρω από κάποιο συγκεκριμένο λειτουργικό σημείο, συνήθως γύρω από την αναμενόμενη τιμή. Η παραδοχή αυτή οδηγεί σε αποτελέσματα ικανοποιητικής ακρίβειας μόνο για την περιοχή γύρω από το συγκεκριμένο λειτουργικό σημείο. Όσο αυξάνεται η αβεβαιότητα των δεδομένων, ή όσο εντονότερη είναι η μη γραμμικότητα των εξισώσεων τόσο η μοντελοποίηση των αναλυτικών μεθόδων γίνεται πολυπλοκότερη για να διατηρήσει ικανοποιητική ακρίβεια των αποτελεσμάτων ιδιαίτερα στα άκρα των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας. Η θεώρηση εξαρτημένων μεταβλητών, η γραμμικοποίηση σε διαφορετικά λειτουργικά σημεία, η μεταβλητή τοπολογία δικτύου και η οικονομική κατανομή των γεννητριών του συστήματος είναι προβλήματα που καθιστούν την μοντελοποίηση των αναλυτικών μεθόδων ακόμη πιο πολύπλοκη. Στις περιπτώσεις αυτές μπορεί να εφαρμοστεί ένας συνδυασμός αναλυτικών και αριθμητικών μεθόδων για να ενσωματώσει κατά το δυνατόν τα πλεονεκτήματα και των δύο μεθόδων και να δώσει αποτελέσματα με ικανοποιητική ακρίβεια και ταχύτητα ταυτόχρονα.

3.1.1. Ιστορική Ανάπτυξη του Θέματος

Η πιθανοτική ή στοχαστική θεώρηση μόνιμων και μεταβατικών καταστάσεων συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας έχει εφαρμοστεί σχετικά πρόσφατα σε προβλήματα ροής φορτίου και βρίσκεται σε εξέλιξη στην αντιμετώπιση προβλημάτων εκτίμησης καταστάσεως, βραχυκυκλωμάτων, ιεράρχησης διαταραχών, υπολογισμού κόστους παραγωγής κλπ.

Η πρώτη επιτυχημένη προσπάθεια αντιμετώπισης του προβλήματος ροής φορτίου με πιθανοτικό τρόπο γίνεται το 1973 από τη Barbara Borkowska. Η μέθοδος βασίζεται στη D.C. ανάλυση ροής φορτίου και τα δεδομένα δίνονται με τη μορφή συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για τα φορτία και την παραγωγή κάθε ζυγού. Οι συναρτήσεις αυτές είναι η κανονική, η διωνυμική και η διακριτή κατανομή. Ο αλγόριθμος που αναπτύχθηκε υπολογίζει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της πραγματικής ροής οποιασδήποτε γραμμής, και του ισοζυγίου ισχύος στο ζυγό αναφοράς του συστήματος. Η βασική υπόθεση που διατυπώνεται για την εφαρμογή

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

συνελικτικών τεχνικών είναι η ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών του προβλήματος.

Το 1974 διατυπώνεται από τους Allan, Borkowska και Grigg η ίδια διατύπωση της πιθανοτικής μεθόδου αλλά με περισσότερη έμφαση στις πρακτικές εφαρμογές της. Πραγματοποιείται εκτεταμένη ανάλυση των αποτελεσμάτων ενός συστήματος 15 ζυγών για να φανεί η τεράστια διαφορά πληροφοριών που αποκτώνται με την πιθανοτική ροή φορτίου σε σχέση με την ντετερμινιστική ανάλυση.

Το 1975 οι Dorazo, Klitin και Sasson αναπτύσσουν με διαφορετικό τρόπο τη στοχαστική ροή φορτίου, όπως την ονόμασαν, χρησιμοποιώντας για τους υπολογισμούς τον πίνακα συμμεταβλητότητας που είχε εφαρμοστεί με αποδοτικό τρόπο στο πρόβλημα εκτίμησης κατάστασης. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο Κεντρικό Οριακό Θεώρημα και θεωρεί ότι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση ροής φορτίου ακολουθούν κανονική κατανομή. Έτσι τα δεδομένα και τα αποτελέσματα αντιπροσωπεύονται μόνο από την αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση τους. Επίσης, στη ίδια διατύπωση παρουσιάζεται μία μέθοδος "περιοριστικών περιοχών", για την αντιμετώπιση του γεγονότος ότι το συνολικό φορτίο ή η παραγωγή σε ένα σύστημα είναι γνωστά με περισσότερη ακρίβεια από εκείνη που αντιστοιχεί στην απλή υπόθεση της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών.

Οι Heydt και Katz το 1975 αναπτύσσουν με στατιστικό τρόπο τη θεωρία των συνδεδεμένων συστημάτων. Η αβεβαιότητα των φορτίων σε συνδυασμό με την πιθανή μη διαθεσιμότητα των μονάδων παραγωγής προκαλούν αβεβαιότητα ως προς το μέγεθος της αλληλεπίδρασης με τα γειτονικά συστήματα. Στη διατύπωση αυτή γίνεται η υπόθεση ότι οι γραμμικοί περιορισμοί της παραγωγής που θεωρούνται, ακολουθούν κανονική κατανομή και χρησιμοποιείται επίλυση με γραμμικό προγραμματισμό.

Το 1976 διατυπώνεται από τους Allan και Shakarchi μία επέκταση της πιθανοτικής D.C. ροής φορτίου σύμφωνα με τη βασική θεμελίωση της Borkowska. Η μέθοδος χρησιμοποιεί δύο ισοδύναμες μεταξύ τους μορφές γραμμικοποίησης των εξισώσεων ροής φορτίου και τα δεδομένα είναι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας πραγματικών και αέργων φορτίων και παραγωγής στους ζυγούς. Ο αλγόριθμος είναι σε θέση να υπολογίζει τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των πραγματικών και αέργων ροών ισχύος, των τάσεων και των αέργων εγχύσεων. Για την πραγματοποίηση των συνελίξεων εφαρμόζονται οι αριθμητικές τεχνικές που δημοσιεύονται τον ίδιο χρόνο.

Τον επόμενο χρόνο, 1977, διατυπώνονται δύο ακόμη μορφές γραμμικοποίησης των εξισώσεων ροής φορτίου από τους Allan και Shakarchi. Οι εξισώσεις γραμμικοποιούνται γύρω από την περιοχή της αναμενόμενης τιμής των δεδομένων και είναι περισσότερο ακριβείς από τις σχέσεις των προηγούμενων γραμμικοποιήσεων γιατί βασίζονται σε λιγότερες υποθέσεις. Η τέταρτη γραμμικοποίηση μάλιστα δεν θεωρεί απόζευξη μεταξύ πραγματικής και άεργου ισχύος.

Το 1977 επίσης, οι ίδιοι συγγραφείς δημοσιεύουν τις εργασίες τους σχετικά με τον τρόπο που μπορεί να υπολογιστεί και να συμπεριληφθεί στην ανάλυση της πιθανοτικής A.C. ροής φορτίου η υπόθεση της γραμμικής θετικής ή αρνητικής εξάρτησης των εγχύσεων ισχύος ενός συστήματος. Στην ανάλυση που ακολουθεί υπογραμμίζεται η επίδραση της εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών στην τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων και στο σχήμα των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας. Η δημοσίευση αυτή αποτελεί επέκταση της εργασίας που προηγήθηκε από τους Allan, Grigg, Newey και Simmons, για την εφαρμογή ολικής ή μερικής συσχέτισης μεταξύ των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών στην πιθανοτική D.C. ανάλυση. Το μοντέλο πιθανοτικής ροής φορτίου με χρήση εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη λειτουργική ανάλυση συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας και στη βραχυπρόθεσμη λήψη αποφάσεων, όπου η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών δεν ισχύει.

Για την πιθανότητα απώλειας γραμμής και γενικότερα μεταβολής στην τοπολογία του συστήματος προτείνονται δύο διατυπώσεις, μία από τον Aboytes το 1977 και η άλλη από τους Allan, Grigg και Prato-Garciato 1978. Η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της ροής σε κάποιο στοιχείο του δικτύου, δίνεται ως άθροισμα με διαφορετικούς συντελεστές βαρύτητας όλων των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των ροών που αντιστοιχούν σε κάθε μία τοπολογία του συστήματος που αναλύεται. Η πρώτη διατύπωση παρουσιάζει ορισμένα μειονεκτήματα, τα οποία επισημαίνονται από τους Leite da Silva, Allan, Soares και Arienti. Αυτά είναι :α) η υπόθεση ότι το άθροισμα όλων των θεωρούμενων τοπολογιών είναι μονάδα, πράγμα που οδηγεί σε εξωπραγματικά αποτελέσματα σε περιπτώσεις όπου το γινόμενο του αριθμού των στοιχείων επί την αβεβαιότητα του κάθε στοιχείου πλησιάζει τη μονάδα, και β) το γεγονός ότι χρησιμοποιείται η υπόθεση της κανονικής κατανομής των αποτελεσμάτων. Στη δεύτερη διατύπωση έχει θεωρηθεί και ορισμένος αριθμός πιθανών διαταραχών δευτέρας τάξεως.

Το 1980 μελετάται από τον Armando Martins Leite da Silva, η αποδοτικότητα υπολογισμού σε χρόνο, μνήμη, ακρίβεια και απλότητα των πιθανοτικών μεθόδων. Διερευνούνται αναλυτικά με χρήση της μη γραμμικής και της γραμμικοποιημένης

μεθόδου Monte Carlo, που βασίζεται στην ανάλυση και αξιολόγηση μεγάλου πλήθους ροών φορτίου, όλες οι προτεινόμενες πιθανοτικές μέθοδοι και διαπιστώνεται η επίδραση της μη γραμμικότητας των εξισώσεων ροής φορτίου στα αποτελέσματα. Αποδεικνύεται έτσι η ανακρίβεια της υπόθεσης ότι οι άγνωστες τυχαίες μεταβλητές ακολουθούν κανονική κατανομή. Παράλληλα, προτείνεται μία νέα μέθοδος ροής φορτίου που παρά το γεγονός ότι χρησιμοποιεί γραμμικοποιημένα πρότυπα λαμβάνει υπόψη την επίδραση της μη γραμμικότητας των εξισώσεων και δημοσιεύεται το 1981. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη δυνατότητα μεταβολής του σημείου γραμμικοποίησης των εξισώσεων έτσι ώστε να υπολογίζονται με μεγαλύτερη ακρίβεια τα άκρα των υπολογιζόμενων συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας. Χρησιμοποιείται επίσης ένας καινούριος αλγόριθμος για την πραγματοποίηση των συνελίξεων, ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier (F.F.T) που εκμεταλλεύεται ορισμένες ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων και ανάγει τη συνέλιξη σε περιορισμένο πολλαπλασιασμό διακριτών τομών στο πεδίο της συχνότητας. Η τεχνική αυτή αποδεικνύεται ότι είναι πολύ πιο γρήγορη και πιο ακριβής από την τεχνική της συμβατικής συνέλιξης που βασίζεται στις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace.

Το 1984 οι A.M. Leite da Silva, Arienti και Allan τελειοποιούν τη πιθανοτική μέθοδο ροής φορτίου που θεωρεί εξάρτηση μεταξύ των δεδομένων εγχύσεων των ζυγών για την εφαρμογή της σε προβλήματα ισοζυγίου ισχύος στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψη οικονομικούς και λειτουργικούς περιορισμούς.

Τέλος το 1985 οι A.M. Leite da Silva, Allan, Soares και Arienti, επεκτείνουν τη διατύπωση των Allan, Grigg και Garcia για τη μεταβλητή τοπολογία του δικτύου έτσι ώστε να εφαρμόζεται στην πιθανοτική A.C. ανάλυση.

3.2. ΠΙΘΑΝΟΤΙΚΗ ΡΟΗ ΦΟΡΤΙΟΥ

Η μελέτη της ροής φορτίου με την αναλυτική μέθοδο απαιτεί, όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα συγκεκριμένες τιμές μεγεθών, όπως είναι οι τάσεις και οι ισχείς. Επειδή όμως τα μεγέθη αυτά είτε είναι φορτία είτε παραγωγές μεταβάλλονται συνεχώς με το χρόνο, η εφαρμογή της αναλυτικής μεθόδου για να ληφθούν υπ όψιν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί φορτίων και παραγωγής απαιτεί ένα μεγάλο πλήθος ντετερμινιστικών εξισώσεων ροής φορτίου. Για παράδειγμα:

Ένα σύστημα με N ζυγούς και K διαφορετικές τιμές φορτίων σε κάθε ζυγό απαιτούνται K^N ροές φορτίου π.χ.

$$\begin{array}{llll} \text{Αν } N = 10 & \text{και} & K = 2 & 2^{10} \approx 10^3 \\ & & K = 4 & 4^{10} \approx 10^6 \\ \text{Αν } N = 100 & \text{και} & K = 2 & 2^{100} \approx 10^{30} \\ & & K = 4 & 4^{100} \approx 10^{60} \end{array}$$

Επειδή η λήψη ενός τόσο μεγάλου δείγματος τιμών είναι πρακτικά αδύνατη, λαμβάνεται ένα μικρότερο δείγμα τιμών, για την εύρεση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης, οι τιμές του εξαρτάται από τον εκάστοτε μελετητή. Συνεπώς το δείγμα δεν μπορεί να είναι αντικειμενικό και αξιόπιστο.

Αντίθετα, η πιθανοτική ροή φορτίου λαμβάνει υπόψη όλους τους δυνατούς συνδυασμούς μεταβολών των φορτίων και της παραγωγής με μία μόνο επίλυση. Η μέθοδος αυτή βασίζεται στη στατιστική θεώρηση των φορτίων και της παραγωγής των οποίων τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας θεωρεί δεδομένες. Σκοπός της πιθανοτικής ροής φορτίου είναι ο υπολογισμός της μέσης τιμής, της τυπικής απόκλισης και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των αγνώστων μεγεθών. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν τη σύνθεση όλων των πιθανών αποτελεσμάτων που αντιστοιχούν στα δεδομένα, και δίνουν απάντηση σε πολλά πρακτικά προβλήματα.

Επιγραμματικά επισημαίνονται τα πλεονεκτήματα – μειονεκτήματα της πιθανοτικής ροής φορτίου σε σχέση με τις ντετερμινιστικές μεθόδους.

Πλεονεκτήματα:

- Αυξημένο πλήθος πληροφοριών για την ικανοποιητική λειτουργία ή τον σχεδιασμό του συστήματος.
- Η εύκολη εκτίμηση των αποτελεσμάτων.
- Η δυνατότητα απεικόνισης των επιθυμητών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας με γραφικές παραστάσεις.
- Η δυνατότητα εξαγωγής των ντετερμινιστικών αποτελεσμάτων μέσω της πιθανοτικής μεθόδου.

Μειονεκτήματα:

- Η αναγκαία γραμμικοποίηση των εξισώσεων ροής φορτίου γύρω από κάποιο σημείο που απέχει πολύ ή λίγο από το λειτουργικό σημείο του συστήματος. Τα αποτελέσματα είναι περισσότερο ακριβή γύρω από αυτό το σημείο και λιγότερο ακριβή όσο απομακρύνονται από αυτό.
- Η αύξηση του αριθμού των δεδομένων σε σχέση με τη ντετερμινιστική μέθοδο και η δυσκολία προσδιορισμού τους με στατιστικές παραμέτρους.

- Το μεγάλο πλήθος σημείων που συνιστά τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των αγνώστων μεγεθών και καθιστά αναγκαία τη χρησιμοποίηση αριθμητικής μεθόδου για την παράστασή τους.

3.3. ΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

Το πρόβλημα της ροής φορτίου μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά από δύο συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων της μορφής:

$$Y = g(X) \quad (3.1)$$

$$Z = h(X) \quad (3.2)$$

όπου: Y το διάνυσμα εισόδου

X το διάνυσμα κατάστασης

Z το διάνυσμα εξόδου

και g, h μη γραμμικές διανυσματικές συναρτήσεις

Το διάνυσμα Y αντιπροσωπεύει τις ενεργές εγχύσεις σε όλους τους ζυγούς (PQ και PV), εκτός του ζυγού αναφοράς και τις άεργες εγχύσεις στους ζυγούς φορτίου (PQ), το διάνυσμα X αντιπροσωπεύει το μέτρο των τάσεων και τις γωνίες των τάσεων και τέλος το διάνυσμα Z αντιπροσωπεύει όλα τα μεγέθη που μπορούν να υπολογιστούν από το διάνυσμα κατάστασης, όπως ενεργές και άεργες ροές ισχύος, απώλειες κ.λ.π..

Στο σημείο αυτό, λόγω των φυσικών δυσκολιών του προβλήματος είναι απαραίτητο να γίνουν ορισμένες παραδοχές:

- Οι τυχαίες μεταβλητές θεωρούνται ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Η τοπολογία του δικτύου θεωρείται σταθερή (με πιθανότητα μονάδα).
- Οι συναρτήσεις g και h πρέπει να γραμμικοποιηθούν γύρω από κάποιο λειτουργικό σημείο, συνήθως την αναμενόμενη τιμή.

Αν Y_o είναι η αναμενόμενη τιμή του διανύσματος των δεδομένων εγχύσεων ισχύος Y (στην περίπτωση μας είναι η μέση τιμή) και το διάνυσμα κατάστασης X_o τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την διανυσματική εξίσωση:

$$Y_o = g(X_o) \quad (3.3)$$

τότε το διάνυσμα X_o μπορεί να προκύψει από την επίλυση μιας ντετερμινιστικής ροής φορτίου όπου τα δεδομένα είναι οι αναμενόμενες τιμές των στοιχείων του διανύσματος Y . Το διάνυσμα X_o είναι μια εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του τυχαίου διανύσματος X (εδώ χρησιμοποιείται η μέση τιμή αυτού που προκύπτει από την Monte – Carlo όταν αυτή υλοποιηθεί για τις μέσες τιμές των κατανομών της ενεργού και αέργου ισχύος). Ομοίως το διάνυσμα Z_o , που ικανοποιεί την διανυσματική εξίσωση:

$$Z_o = h(X_o) \quad (3.4)$$

αποτελεί εκτίμηση της αναμενόμενης τιμής του τυχαίου διανύσματος Z (και πάλι η μέση τιμή αυτού που προκύπτει από την Monte – Carlo).

Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων ροής φορτίου (3.1) και (3.2) γύρω από τα σημεία (X_o, Y_o) και (Z_o, X_o) , δηλαδή γύρω από την αναμενόμενη τιμή, δίνει:

$$Y \approx g(X_o) + J(X - X_o) \quad (3.5)$$

$$Z \approx h(X_o) + K(X - X_o) \quad (3.6)$$

όπου:

$$J = \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{X = X_o} \quad \text{η Ιακωβιανή της } g \text{ στο σημείο } X_o \quad (3.7)$$

και

$$K = \left. \frac{\partial h}{\partial X} \right|_{X = X_o} \quad \text{η Ιακωβιανή της } h \text{ στο σημείο } X_o \quad (3.8)$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.3) και (3.4) στις (3.5) και (3.6) προκύπτει:

$$Y = Y_o + J(X - X_o) \quad (3.9)$$

$$Z = Z_o + K(X - X_o) \quad (3.10)$$

Η επίλυση των εξισώσεων (3.9) και (3.10) ως προς το διάνυσμα κατάστασης και το διάνυσμα εξόδου δίνει:

$$X = X_o + J^{-1}(Y - Y_o) \quad (3.11)$$

$$Z = Z_o + KJ^{-1}(Y - Y_o) \quad (3.12)$$

ή ακόμα $X = X'_o + AY \quad (3.13)$

$$Z = Z'_o + BY \quad (3.14)$$

όπου $A = J^{-1}, X'_o = X_o - AY_o$

$$B = KA, Z'_o = Z_o + BY_o$$

Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός των πινάκων J και K. Ο πρώτος πίνακας αποτελεί τον ιακωβιανό πίνακα που έχει ήδη υπολογιστεί από την σχέση (2.22). Γίνεται επίσης και ο υπολογισμός του πίνακα K ο οποίος αποτελείται από τις παραγώγους του μεγέθους Z ως προς το αρχικό διάνυσμα X.

$$\begin{bmatrix} \Delta Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta Z_1}{\Delta X_1} & \dots & \frac{\Delta Z_1}{\Delta X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\Delta Z_n}{\Delta X_1} & \dots & \frac{\Delta Z_n}{\Delta X_n} \end{bmatrix} \cdot J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \Delta X_n \end{bmatrix}$$

$$(3.15)$$

Συγκεκριμένα η μεταβλητή Z αντιπροσωπεύει την ροή ισχύος πάνω στις γραμμές και το διάνυσμα X το διάνυσμα των άγνωστων μεγεθών γωνιών και τάσεων όπως και στην ιακωβιανή. Άρα ο πίνακας που προκύπτει είναι:

$$\left[\Delta P_{ij} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_{ij}}{\partial \delta_n} \mid \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_2} & \dots & \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_n} \end{bmatrix} \cdot J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_2 & P_{2,o} \\ \vdots & \vdots \\ P_n & P_{n,o} \\ Q_2 & Q_{2,o} \\ \vdots & \vdots \\ Q_n & Q_{n,o} \end{bmatrix}$$

$$(3.16)$$

Για τον υπολογισμό της ροής ισχύος σε μία γραμμή χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$S_{ij} = \tilde{V}_i^* \tilde{I}_{ij} \quad (3.17)$$

Και αφού αναφερόμαστε στην ενεργό ισχύ:

$$P_{ij} = \text{Real}\{S_{ij}\} = \text{Real}\{\tilde{V}_i^* \tilde{I}_{ij}\} \quad (3.18)$$

Με δεδομένο ότι:

$$\tilde{I}_{ij}^* = (\tilde{V}_i^* - a\tilde{V}_j^*) \frac{y^*}{a^2} + \frac{Bc^*}{a^2} \tilde{V}_i^* \quad (3.19)$$

Όπου α: η λήψη του αντίστοιχου μετασχηματιστή

Προκύπτει:

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \text{Real}\{S_{ij}\} = \text{Real}\{\tilde{V}_i^* \tilde{I}_{ij}\} = \\ &= \frac{|\tilde{V}_i|^2}{a^2} \text{Real}\{y^*\} - |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Real}\{y^*\}}{a} + \\ &+ |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Real}\{jy^*\}}{a} - |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \sin \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Real}\{jy^*\}}{a} - \\ &- |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \sin \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Real}\{y^*\}}{a} + \frac{|\tilde{V}_i|^2}{a^2} \text{Real}\{Bc^*\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Αντίστοιχα μπορούν να υπολογιστούν οι παράγωγοι της παραπάνω συνάρτησης ως προς τα μεγέθη που εμφανίζονται.

- Παραγωγή ως προς θ_i

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} &= |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \sin \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Real}\{y^*\}}{a} - \\ &- |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \sin \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Real}\{jy^*\}}{a} - |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Real}\{jy^*\}}{a} - \\ &- |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Real}\{y^*\}}{a} \end{aligned} \quad (3.21)$$

- Παραγωγή ως προς θ_j

$$\begin{aligned} \frac{\theta P_{ij}}{\theta \theta_j} &= |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Re al}\{y^*\}}{a} + \\ &|\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Re al}\{jy^*\}}{a} + |\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \sin \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Re al}\{jy^*\}}{a} - \\ &|\tilde{V}_i| |\tilde{V}_j| \sin \theta_i c \cos \theta_j \frac{\text{Re al}\{y^*\}}{a} \end{aligned} \quad (3.22)$$

- Παραγωγή ως προς $|\tilde{V}_i|$

$$\begin{aligned} \frac{\theta P_{ij}}{\theta |\tilde{V}_i|} &= \frac{2|\tilde{V}_i|}{a^2} \text{Re al}\{y^*\} - |\tilde{V}_j| \cos \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Re al}\{y^*\}}{a} + \\ &|\tilde{V}_j| \cos \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Re al}\{jy^*\}}{a} - |\tilde{V}_j| \sin \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Re al}\{jy^*\}}{a} - \\ &|\tilde{V}_j| \sin \theta_i c \sin \theta_j \frac{\text{Re al}\{y^*\}}{a} + \frac{2|\tilde{V}_i|}{a^2} \text{Re al}\{Bc^*\} \end{aligned} \quad (3.23)$$

- Παραγωγή ως προς $|\tilde{V}_j|$

$$\begin{aligned} \frac{\theta P_{ij}}{\theta |\tilde{V}_j|} &= -|\tilde{V}_i| \cos \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Re al}\{y^*\}}{a} + \\ &|\tilde{V}_i| \cos \theta_i \sin \theta_j \frac{\text{Re al}\{jy^*\}}{a} - |\tilde{V}_i| \sin \theta_i \cos \theta_j \frac{\text{Re al}\{jy^*\}}{a} - \\ &|\tilde{V}_i| \sin \theta_i c \sin \theta_j \frac{\text{Re al}\{y^*\}}{a} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Οι υπόλοιπες παράγωγοι ως προς τα άλλα μεγέθη θα είναι μηδέν. Άρα σε κάθε γραμμή το πολύ τέσσερις όροι θα είναι μη μηδενικοί. Οι αντίστοιχοι παράγωγοι της ροής ισχύος P_{ji} προκύπτουν απλά αν στις παραπάνω παραγωγούς αντικαταστήσουμε το i με το j και αντίστροφα.

Αντίστοιχα προκύπτει και η αναλυτική μορφή της εξίσωσης (3.11) με τον ιακωβιανό πίνακα όπως έχει υπολογιστεί και στο Κεφάλαιο 2.

$$\begin{bmatrix} \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \\ |V_2| \\ \vdots \\ |V_n| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{2,o} \\ \vdots \\ \delta_{n,o} \\ |V_{2,o}| \\ \vdots \\ |V_{n,o}| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial P_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_2}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_2}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_n}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial P_n}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial P_n}{\partial |V_n|} \\ \hline \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_n|} \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_2}{\partial |V_n|} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial |V_n|} \\ \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_2} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial Q_n}{\partial |V_2|} & \dots & \frac{\partial Q_n}{\partial |V_n|} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_2 & P_{2,o} \\ \vdots & \vdots \\ P_n & P_{n,o} \\ Q_2 & Q_{2,o} \\ \vdots & \vdots \\ Q_n & Q_{n,o} \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις (3.13) και (3.14) μπορούν να εκφραστούν στην αναλυτική τους μορφή ως:

$$X_i = X'_{oi} + \sum_{j=1}^m a_{ij} Y_j \quad (3.25)$$

$$Z_i = Z'_{oi} + \sum_{j=1}^m b_{kj} Y_j \quad (3.26)$$

Όπου

$i=1,2,\dots,n$

$k=1,2,\dots,l$

$j=1,2,\dots,m$

n : η διάσταση του διανύσματος κατάστασης X

m : η διάσταση του διανύσματος δεδομένων Y

l : η διάσταση του διανύσματος ζητούμενων Z

a_{ij} : στοιχείο του πίνακα των συντελεστών ευαισθησίας A

b_{kj} : στοιχείο του πίνακα των συντελεστών ευαισθησίας B

Έτσι οι εξισώσεις (3.25) και (3.26) δείχνουν ότι κάθε τυχαία μεταβλητή των διανυσμάτων X και Z εκφράζεται ως αλγεβρικό άθροισμα των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών του διανύσματος Y με συντελεστές βαρύτητας κατάλληλα υπολογισμένους από τους συντελεστές ευαισθησίας. Επομένως οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών των διανυσμάτων X και Z μπορούν να υπολογιστούν από τη μαθηματική συνέλιξη των δεδομένων

συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των φορτίων και της παραγωγής οι οποίες ακολουθούν τις γνωστές κατανομές πιθανότητας.

3.4. ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

Οι προηγούμενες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας συνελίσσονται σύμφωνα με την εξίσωση (Α.17) του Παραρτήματος Α, για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των ζητούμενων μεταβλητών.

Το τυχαίο διάνυσμα Υ αποτελείται από κανονικές και διακριτές κατανομές που αντιπροσωπεύουν τις μεταβολές ή την αβεβαιότητα των φορτίων της παραγωγής στο σύστημα. Η συμβατική μέθοδος για την πραγματοποίηση της συνέλιξης στηρίζεται στον μετασχηματισμό Laplace και υπολογίζει δύο ισοδύναμες κατανομές μία για όλες τις κανονικές κατανομές και μία για όλες τις διακριτές, και κατόπιν συνελίσσει τις δύο αυτές κατανομές μεταξύ τους για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας των ζητούμενων τυχαίων μεταβλητών.

Η ισοδύναμη κανονική κατανομή μπορεί εύκολα να υπολογιστεί από τις αναμενόμενες τιμές και τις τυπικές αποκλίσεις όλων των κανονικών κατανομών:

$$\text{Αν} \quad f_1 = N(\mu_1, \sigma_1) \quad (3.27)$$

$$f_2 = N(\mu_2, \sigma_2) \quad (3.28)$$

$$\text{και} \quad f_n = a_1 f_1 * a_2 f_2 \quad (3.29)$$

όπου μ και σ αντιπροσωπεύουν την αναμενόμενη τιμή και την τυπική απόκλιση αντίστοιχα τότε:

$$f_n = N(\mu_n, \sigma_n) \quad (3.30)$$

$$\text{όπου} \quad \mu_n = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 \quad \text{και} \quad \sigma_n = \sqrt{(a_1 \sigma_1)^2 + (a_2 \sigma_2)^2}$$

Το βασικό πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της ισοδύναμης διακριτής κατανομής λόγω του μεγάλου αριθμού των διακριτών τιμών με τις οποίες παριστάνεται. Για παράδειγμα όταν μια διακριτή συνάρτηση που παριστάνεται με r διακριτές τιμές συνελίσσεται με μία άλλη διακριτή συνάρτηση που παριστάνεται με s διακριτές τιμές, η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα αντιπροσωπεύεται

από (rxs) διακριτές τιμές. Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και γίνεται μη πρακτική όταν ο αριθμός των διακριτών συναρτήσεων στο σύστημα είναι μεγάλος.

$$\text{Αν} \quad f_1(x_1) = \sum_{i=1}^r p_i \delta(x_1 - W_i) \quad (3.31)$$

$$f_2(x_2) = \sum_{j=1}^s p'_j \delta(x_2 - W'_j) \quad (3.32)$$

$$\text{και} \quad f_D(x) = a_1 f_1 * a_2 f_2 \quad (3.33)$$

$$\text{τότε} \quad f_D(x) = \sum_{k=1}^t g_k \delta(x - h_k) \quad (3.34)$$

$$\text{όπου} \quad t = r \times s$$

$$g_k = p_i \cdot p'_j$$

$$\text{και} \quad h_k = a_1 W_i + a_2 W'_j$$

για όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (i,j): $i=1, \dots, r$ και $j=1, \dots, s$.

Το πρόβλημα του μεγάλου αριθμού των διακριτών τιμών της τελικής ισοδύναμης διακριτής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας λύνεται αν καθοριστεί εκ των προτέρων ο επιθυμητός αριθμός N των διακριτών τιμών με τις οποίες θα αντιπροσωπευθεί. Για το σκοπό αυτό προσδιορίζονται τα άκρα της τελικής διακριτής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας και το διάστημα των πιθανών τιμών διαιρείται σε N-1 διαστήματα. Αν κατά τη διάρκεια της συνέλιξης κάποιου διαστήματος από τα προηγούμενα N-1 διαμοιράζεται μεταξύ σταθερών ακραίων σημείων του διαστήματος αντιστρόφως ανάλογα της απόστασης της από αυτά.

Η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που αποτελεί τη συνέλιξη της ισοδύναμης κανονικής κατανομής με την ισοδύναμη διακριτή κατανομή δίνεται από τη σχέση:

$$f_x(x) = f_n(x_n) * f_D(x_D) \quad (3.35)$$

$$\text{και} \quad f_x(x) = \sum_{k=1}^t \frac{g_k}{\sqrt{2\pi\sigma_n}} e^{-\frac{[x-(\mu_n+h_k)]^2}{2\sigma_n^2}} \quad (3.36)$$

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διεξόδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμικός συνδυασμός t κανονικών κατανομών συναρτήσεων με μέση τιμή μ_n+h_k , και τυπική απόκλιση, σ_n η κάθε μία, που συμβάλουν στο άθροισμα ανάλογα με το συντελεστή g_k όπου $k=1,2,\dots,t$, που αποτελεί τις θέσεις των διακριτών τιμών.

Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για να αναπτυχθούν τεχνικές που επιτρέπουν την πραγματοποίηση της συνέλιξης με μεγαλύτερη ακρίβεια και λιγότερο χρόνο υπολογισμού. Η τελευταία τεχνική που εφαρμόζεται στην πιθανοτική ανάλυση ροών φορτίου βασίζεται στον ταχύ μετασχηματισμό Fourier. Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier εκμεταλλεύεται ορισμένες ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων για να δώσει μια γρήγορη και ακριβή παρουσίαση μιας συνάρτησης στο πεδίο της συχνότητας.

Για μια δεδομένη συνεχή απεριοδική συνάρτηση $f(y)$, που ορίζεται στο διάστημα $T=1/f$ δίνεται η μιγαδική συνάρτηση $S(\omega)$ στο πεδίο της συχνότητας.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-j\omega y} dy \quad (3.37)$$

Και ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega y} d\omega \quad (3.38)$$

Όπου $\omega=2\pi f=2\pi/T$

Αν η συνάρτηση $f(y)$ είναι μια διακριτή ή διακριτοποιημένη συνάρτηση με N διακριτές τιμές σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους θα ισχύει:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(y - k\Delta y) \quad (3.39)$$

Και η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier θα δώσει:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(y - k\Delta y) e^{-j\omega y} dy = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k\Delta y} \quad (3.40)$$

Η $S(\omega)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\Delta y} = N\Delta\omega$ και η

παράσταση της με N διακριτά σημεία είναι:

$$S(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k\Delta y} \Rightarrow S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k W^{-nk} \quad (3.41)$$

Όπου $W = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ και $n=0,1,2,\dots,N-1$

Η μαθηματική συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου, μετατρέπεται στο πεδίο της συχνότητας σε απλό πολλαπλασιασμό.

$$\text{Έτσι ισχύει: } f(y) = f_1(y) * f_2(y) \Leftrightarrow S(n) = S_1(n) \cdot S_2(n) \quad (3.42)$$

Αφού πραγματοποιηθεί η συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνει αντίστοιχα την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y)$ με N διακριτά σημεία από την σχέση (3.4.13) όπου:

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) W^{nk} \quad (3.43)$$

Αναλυτικότερα θεωρήματα κατανομών και τεχνικές συνέλιξης αναλύονται στα παραρτήματα Δ και Ε.

3.5. ΘΕΩΡΗΣΗ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στη διατύπωση του προβλήματος της πιθανοτικής ροής φορτίου έγινε η παραδοχή ότι οι τυχαίες μεταβλητές που αντιπροσωπεύουν τα φορτία και την παραγωγή στους ζυγούς του συστήματος είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η παραδοχή αυτή είναι σωστότερη όσο απομακρύνεται η χρονική στιγμή της πρόβλεψης φορτίων από την παρούσα χρονική στιγμή. Στη βραχυπρόθεσμη όμως πρόβλεψη φορτίων και σε εφαρμογές της πιθανοτικής ροής φορτίου στον προγραμματισμό λειτουργίας συστήματος η παραδοχή αυτή ισχύει λιγότερο ή και καθόλου. Στις περιπτώσεις αυτές είναι αναγκαία η θεώρηση εξάρτησης μεταξύ των μεταβλητών όπως αναπτύσσεται πιο κάτω.

Οι λόγοι της συσχέτισης μεταξύ των φορτίων και της παραγωγής μπορεί να οφείλονται σε διάφορους παράγοντες όπως:

- *Συσχέτιση φορτίου-φορτίου:* Τα φορτία που βρίσκονται σε γειτονικούς ζυγούς έχουν την τάση να αυξάνονται ή να μειώνονται με τον ίδιο τρόπο. Έχουν δηλαδή οι γειτονικοί ζυγοί κάποιο βαθμό συσχέτισης που οφείλεται σε κοινούς παράγοντες, όπως καιρικές συνθήκες (θερμοκρασία, βροχή, άνεμος, ηλιοφάνεια κ.λ.π.), κοινωνικές συνήθειες της περιοχής (ώρες εργασίας, αθλητικά γεγονότα, αγροτικές ασχολίες, τηλεοπτικά προγράμματα κ.λ.π.). Όταν τα φορτία σε δύο ή περισσότερους ζυγούς αυξάνονται και μειώνονται μαζί υπάρχει θετική συσχέτιση, ενώ όταν ένα φορτίο αυξάνεται και κάποιο άλλο μειώνεται υπάρχει αρνητική συσχέτιση.
- *Συσχέτιση παραγωγής-παραγωγής:* Συνήθως σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας που αποτελείται από πολλές ομάδες γεννητριών είναι επιθυμητό η παραγωγή μιας συγκεκριμένης περιοχής ή η συνολική παραγωγή του

συστήματος να διατηρείται σταθερή. Έτσι, όταν η παραγωγή μιας γεννήτριας μειωθεί για διάφορους λόγους, θα πρέπει η παραγωγή των άλλων γεννητριών να αυξηθεί μέσα στα επιτρεπόμενα όρια για την παραλαβή του φορτίου. Η συσχέτιση αυτή επομένως είναι αρνητική. Η παραγωγή επίσης των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας ακολουθεί τις μεταβολές του ανέμου ή της ηλιοφάνειας και σε γειτονικούς ζυγούς η συσχέτιση είναι θετική.

- *Συσχέτιση παραγωγής-φορτίου:* Η παραγωγή μιας περιοχής σε ένα σύστημα είναι προγραμματισμένη να καλύψει το φορτίο της περιοχής, και συνήθως η ηλεκτρική ενέργεια παράγεται τη στιγμή που χρειάζεται. Η συσχέτιση που υπάρχει επομένως μεταξύ παραγωγής και φορτίου είναι θετική δηλαδή όταν το φορτίο αυξάνεται ή μειώνεται, αυξάνεται ή μειώνεται αντίστοιχα και η παραγωγή.

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y . Η συνδιασπορά των δύο αυτών τυχαίων μεταβλητών ορίζεται από τη σχέση:

$$n_{xy} = E\{(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\} = E\{XY\} - \mu_x \mu_y \quad (3.44)$$

όπου $E\{*\}$ παριστάνει την αναμενόμενη τιμή.

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε:

$$E\{XY\} = E\{X\}E\{Y\} = \mu_x \mu_y \text{ και } n_{xy} = 0 \quad (3.45)$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ολικά γραμμικά εξαρτημένες θα ισχύει:

$$Y = aX + b \quad (3.46)$$

$$\text{και } \mu_y = a\mu_x + b \quad (3.47)$$

$$\text{Επίσης, } \sigma_x^2 = E\{(X - \mu_x)^2\} = E\{X^2\} - \mu_x^2 \quad (3.48)$$

και

$$\sigma_y^2 = E\{(Y - \mu_y)^2\} = E\{(aX + b - a\mu_x - b)^2\} = a^2 E\{(X - \mu_x)^2\} = a^2 \sigma_x^2 \quad (3.49)$$

$$\text{Άρα } \sigma_y = +a\sigma_x \text{ για θετική συσχέτιση } (\alpha > 0) \quad (3.50)$$

$$\sigma_y = -a\sigma_x \text{ για αρνητική συσχέτιση } (\alpha < 0) \quad (3.51)$$

Σύμφωνα με τις πιο πάνω εξισώσεις για την περίπτωση της ολικής γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών X και Y με διαδοχικές αντικαταστάσεις θα ισχύει:

$$E\{XY\} = E\{aX^2 + bX\} = aE\{X^2\} + b\mu_x = a\sigma_x^2 + a\mu_x^2 + b\mu_x = a\sigma_x^2 + \mu_x \mu_y \quad (3.52)$$

$$\text{και } n_{xy} = a\sigma_x^2 \quad (3.53)$$

Άρα $n_{xy} = +\sigma_x \sigma_y$ για θετική συσχέτιση ($\alpha > 0$) (3.54)

$$n_{xy} = -\sigma_x \sigma_y \quad \text{για αρνητική συσχέτιση} \quad (\alpha < 0) \quad (3.55)$$

Γενικά για την συνδιασπορά ισχύει:

$$-\sigma_x \sigma_y \leq n_{xy} \leq +\sigma_x \sigma_y \quad (3.56)$$

Ο συντελεστής συσχέτισεως δίνει το βαθμό της γραμμικής εξάρτησης μεταξύ των δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y και ορίζεται από τη σχέση:

$$\gamma_{xy} = \frac{n_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.57)$$

Είναι αδιάστατος αριθμός και γενικά ισχύει:

$$-1 \leq \gamma_{xy} \leq 1 \quad (3.58)$$

Όταν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε $\gamma_{xy} = 0$. Όταν είναι ολικά θετικά συσχετισμένες, τότε $\gamma_{xy} = 1$ και όταν είναι ολικά αρνητικά συσχετισμένες $\gamma_{xy} = -1$.

Αν η θεώρηση της ολικής γραμμικής εξάρτησης δεν ισχύει μεταξύ των μεταβλητών X και Y όπως δίνεται στην εξίσωση (3.46), τότε μπορεί να θεωρηθεί μερική γραμμική εξάρτηση όπως αναπτύσσεται πιο κάτω:

Η τυχαία μεταβλητή Y μπορεί να χωριστεί σε δύο τυχαίες μεταβλητές Y' και Y'' έτσι ώστε $Y = Y' + Y''$ όπου Y' ολικά γραμμικά εξαρτημένη με την τυχαία μεταβλητή X και ακολουθεί την εξίσωση (3.46), και Y'' ανεξάρτητη τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή που αντιπροσωπεύει με την τυπική της απόκλιση τις τυχαίες μεταβολές γύρω από την τιμή Y' .

Έτσι η εξίσωση (3.46) γίνεται:

$$Y = aX + b + Y'' \quad (3.59)$$

Σύμφωνα με την πιο πάνω ανάλυση για να συμπεριληφθούν εξαρτημένες μεταβλητές στην πιθανοτική ροή φορτίου, θεωρείται ότι η κάθε ομάδα εξαρτημένων μεταβλητών είναι ανεξάρτητη από όλες τις άλλες ομάδες εξαρτημένων μεταβλητών και επίσης ανεξάρτητη από όλες τις άλλες ανεξάρτητες μεταβλητές συμπεριλαμβανομένων και των πρόσθετων μεταβλητών Y'' για την θεώρηση μη γραμμικής εξάρτησης.

Στον υπολογισμό της ισοδύναμης κανονικής κατανομής που δίνεται στη σχέση (3.47) όταν οι τυχαίες μεταβλητές θεωρηθούν ολικά γραμμικά εξαρτημένες η ισοδύναμη αναμενόμενη τιμή μ_n δίνεται πάλι από την σχέση:

$$\mu_n = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 \quad (3.60)$$

Ενώ η ισοδύναμη τυπική απόκλιση σ_n θα δίνεται τώρα από τη σχέση:

$$\sigma_n = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 \quad \text{για ολική θετική συσχέτιση} \quad (3.61)$$

και $\sigma_n = a_1\sigma_1 - a_2\sigma_2 \quad \text{για ολική αρνητική συσχέτιση} \quad (3.62)$

Ας σημειωθεί ότι γενικά ισχύει:

$$\sigma_1 - \sigma_2 < \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} < \sigma_1 + \sigma_2 \quad (3.63)$$

Είναι επομένως εμφανής η επίδραση της θεώρησης εξαρτημένων μεταβλητών στο εύρος της αβεβαιότητας των τελικών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας.

Έστω ότι στο διάνυσμα δεδομένων Y υπάρχει γραμμική εξάρτηση μεταξύ του μ -ιστού και του ν -ιστού στοιχείου, της μορφής:

$$Y_\mu = aY_\nu + b + Y_\mu'' \quad (3.64)$$

Όπου a και b παράμετροι της γραμμικής εξάρτησης. Τότε οι εξισώσεις της πιθανοτικής ροής φορτίου (3.58) και (3.59) στην αναλυτική τους μορφή μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής:

$$X_i = X_{oi}'' + \sum_{j=1}^m a'_{ij} Y_j + a_{i\mu} Y_\mu'' \quad (3.65)$$

$$Z_i = Z_{oi}'' + \sum_{j=1}^m b'_{kj} Y_j + b_{k\mu} Y_\mu'' \quad (3.66)$$

Όπου $a'_{ij} = a_{ij}$, $b'_{kj} = b_{kj}$ για $j \neq \mu, \nu$

$$a'_{i\mu} = b'_{k\mu} = 0$$

$$a'_{i\nu} = a_{i\nu} + a a_{i\mu}, \quad b'_{k\nu} = b_{k\nu} + a b_{k\mu}$$

$$X_{oi}'' = X'_{oi} + a_{i\mu} b, \quad Z_{ok}'' = Z'_{ok} + b_{k\mu} b$$

Έτσι, για τη θεώρηση γραμμικών εξαρτημένων μεταβλητών στην πιθανοτική ανάλυση ροών φορτίου απαιτείται απλώς η τροποποίηση των ήδη υπολογισμένων συντελεστών ευαισθησίας για την περίπτωση των ανεξάρτητων μεταβλητών, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.65) και (3.66).

3.6. ΠΟΛΥΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΡΟΗ ΦΟΡΤΙΟΥ

Στην πιθανοτική ροή φορτίου, όπως αναφέρθηκε παραπάνω απαιτείται γραμμικοποίηση των εξισώσεων ροής φορτίου γύρω από κάποιο λειτουργικό σημείο. Το σημείο αυτό είναι συνήθως σε περιοχή γύρω από την αναμενόμενη τιμή. Η διαδικασία αυτή έχει το μειονέκτημα ότι δίνει ακριβή αποτελέσματα γύρω από αυτό το

σημείο ενώ τα άκρα των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας υπολογίζονται με τόσο μικρότερη ακρίβεια όσο μεγαλύτερη είναι η απόστασή τους από το σημείο γραμμικοποίησης. Ταυτόχρονα όσο πιο έντονη είναι η μη γραμμική μορφή των εξισώσεων όπως π.χ. στον υπολογισμό των αέργων συναρτήσεων πιθανότητας τόσο μικρότερη είναι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων.

Υπάρχουν όμως πολλές περιπτώσεις που ενδιαφέρει η ακρίβεια των ακραίων τιμών για την εξαγωγή πρακτικών συμπερασμάτων. Για παράδειγμα η πιθανότητα η τάση σε κάποιο ζυγό να ξεπεράσει τα επιθυμητά λειτουργικά της όρια ή η πιθανότητα άεργης υπερφορτίσεως κάποιας γεννήτριας ή ακόμα η πιθανότητα η ροή ισχύος σε μια γραμμή να ξεπεράσει το επιτρεπόμενο όριο φόρτισής της.

Για το λόγο αυτό εφαρμόζεται η πολυγραμμικοποίηση, η οποία είναι η πιθανοτική ροή φορτίου με πολλαπλά σημεία γραμμικοποίησης, και παρέχει τη δυνατότητα αλλαγής του σημείου γραμμικοποίησης των εξισώσεων ροής φορτίου σε όλη την έκταση των πιθανών τιμών που μπορεί να λάβουν οι μεταβλητές τους συστήματος. Έτσι διαπιστώνετε η επίδραση της μη γραμμικότητας των εξισώσεων ροής φορτίου στα αποτελέσματα.

Έστω ότι ζητείται η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του στοιχείου X_i του διανύσματος X γνωρίζοντας ότι τα στοιχεία του διανύσματος Y παίρνουν τιμές σε δεδομένα διαστήματα. Ο υπολογισμός αυτός απαιτεί την ανακυκλωτική επίλυση του συστήματος γραμμικών εξισώσεων (3.11) και (3.12), θεωρώντας ως πρώτο σημείο γραμμικοποίησης το (Y_0, X_0) . Κάθε στοιχείο X_i του διανύσματος κατάστασης X δίνεται ως:

$$X_i = X_{0i} + \sum_{j=1}^m a_{ij} (Y_j - Y_{0j}) \quad (3.67)$$

όπου a_{ij} στοιχείο του πίνακα συντελεστών ευαισθησίας A .

Το διάνυσμα Y_L που παράγει τη μέγιστη τιμή X_i αποτελείται από τις μέγιστες τιμές των εγχύσεων αν ο συντελεστής ευαισθησίας a_{ij} είναι θετικός ενώ αν είναι αρνητικός από τις ελάχιστες τιμές των εγχύσεων. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στις ακραίες τιμές των διακριτών ή διωνυμικών κατανομών που χρησιμοποιούνται για την παράσταση των εγχύσεων. Οι τιμές των κανονικών κατανομών εκτείνονται θεωρητικά ως το $\pm\infty$ και έτσι για τον υπολογισμό του διανύσματος Y_L απαιτείται κατάλληλη αποκοπή όλων των κανονικών κατανομών. Η αποκοπή αυτή της κάθε κανονικής κατανομής οφείλει να γίνει έτσι ώστε:

- να αποκοπεί το ίδιο ποσοστό πιθανών τιμών από την κάθε μια κανονική κατανομή που συμμετέχει στη συνέλιξη, και

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

- η τελική ισοδύναμη κανονική κατανομή να εκτείνεται στο διάστημα $\pm 3\sigma_n$ γύρω από την αναμενόμενη τιμή.

Έτσι αν η κάθε κανονική κατανομή j εκτείνεται στο διάστημα $\pm \alpha \sigma_j$ γύρω από την αναμενόμενη τιμή της, όπου α κατάλληλος συντελεστής αποκοπής θα πρέπει να ισχύει:

$$\alpha \alpha_1 \sigma_1 + \alpha \alpha_2 \sigma_2 + \dots + \alpha \alpha_r \sigma_r = 3\sigma_n \quad (3.68)$$

και:

$$\alpha = \frac{3\sigma_n}{\sum_{j=1}^r \sigma_j} = 3 \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^r \sigma_j^2}{\sum_{j=1}^r \sigma_j}} \quad (3.69)$$

όπου r ο αριθμός των κανονικών κατανομών που συνελίσσονται, $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_r$ οι τυπικές αποκλίσεις και α_j οι συντελεστές ευαισθησίας.

Επειδή οι συντελεστές ευαισθησίας ανανεώνονται σε κάθε ανακύκλωση πρέπει να ανανεώνεται και ο συντελεστής α και όταν η διαδικασία συγκλίνει, τείνει σε μία σταθερή τιμή, που γενικά είναι μικρότερη ή ίση του τρία.

Έτσι, μετά τον υπολογισμό του διανύσματος Y_L η μέγιστη τιμή X_i του μέγιστου διανύσματος κατάστασης X_M , δίνεται από την αναλυτική σχέση:

$$X_{i(\max)} = X_{oi} + \sum_{j=1}^m a_{ij} (Y_{Lj} - Y_{oi}) \quad (3.70)$$

και το διάνυσμα X_M σε μητρική μορφή ως εξής:

$$X_M = X_O + A(Y_L - Y_O) \quad (3.71)$$

Το σημείο (X_M, Y_L) δεν ικανοποιεί την εξίσωση ροής φορτίου (3.1) και έτσι υπολογίζεται ένα καινούριο διάνυσμα Y_M τέτοιο ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση:

$$Y_M = g(X_M) \quad (3.72)$$

Το νέο σημείο (X_M, Y_M) χρησιμοποιείται ως δεύτερο σημείο γραμμικοποίησης των εξισώσεων ροής φορτίου και η όλη διαδικασία επαναλαμβάνεται και προσδιορίζεται το ανανεωμένο διάνυσμα X_M , μέχρι να επέλθει σύγκλιση.

Όμοια υπολογίζεται και η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή του διανύσματος Z των ζητούμενων μεταβλητών, γραμμικοποιώντας τις εξισώσεις ροής φορτίου (3.1) και (3.2) γύρω από το σημείο (Y_M, X_M, Z_M) και επιλύοντας ανακυκλωτικά την εξίσωση (3.12):

$$Z_i = Z_{Mi} + \sum_{j=1}^m b_{ij} (Y_j - Y_{Mj}) \quad (3.73)$$

όπου b_{ij} στοιχείο του πίνακα των συντελεστών ευαισθησίας B .

Όπως έχει αναφερθεί το διάνυσμα Y_L αποτελείται από τις ακραίες τιμές (μέγιστες ή ελάχιστες) των δεδομένων μεταβλητών (εγχύσεων), ανάλογα με το πρόσημο των συντελεστών ευαισθησίας. Όταν ο βαθμός μη γραμμικότητας των εξισώσεων ροής φορτίου δεν είναι μεγάλος, οι συντελεστές ευαισθησίας δεν αλλάζουν πρόσημο κατά την διάρκεια της διαδικασίας σύγκλισης. Αυτό σημαίνει ότι η ανακυκλωτική διαδικασία συγκλίνει στη μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή, χρησιμοποιώντας συνεχώς τα ίδια ακραία σημεία στο διάνυσμα Y_L σε κάθε ανακύκλωση.

Σε ορισμένες περιπτώσεις όμως, κυρίως σε μερικές τάσεις και άεργες ροές ισχύος, όπου ο βαθμός μη γραμμικότητας των εξισώσεων ροής φορτίου είναι πολύ μεγάλος, είναι πιθανό ο συντελεστής ευαισθησίας που αντιστοιχεί σε κάποιο στοιχείο Y_j του διανύσματος Y_L να αλλάζει πρόσημο από μία ανακύκλωση στην άλλη. Στις περιπτώσεις αυτές δεν είναι δυνατό να προσδιοριστεί ποια ακραία τιμή συντελεί στην μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή της μεταβλητής X_j ή Z_i που ζητείται ο υπολογισμός της.

Έτσι για να ξεπεραστούν τα πιο πάνω προβλήματα κατά τη διαδικασία σύγκλισης οι συντελεστές ευαισθησίας που αλλάζουν πρόσημο σταθεροποιούνται μετά από δύο ή τρεις ανακυκλώσεις σε μια ενδιάμεση τιμή και η διαδικασία σύγκλισης συνεχίζεται κανονικά. Αυτό σημαίνει ότι όχι μόνο οι ακραίες τιμές των στοιχείων του διανύσματος δεδομένων συντελούν στην μέγιστη (ή ελάχιστη) τιμή της μεταβλητής που ζητείται ο υπολογισμός της, αλλά επίσης και κάποιες ενδιάμεσες τιμές, ιδιαίτερα σε περιοχές με έντονη μη γραμμικότητα.

Σύμφωνα με την πιο πάνω αναλυτική μέθοδο πιθανοτικής ροής φορτίου των άκρων, μπορούν να προσδιοριστούν και ενδιάμεσα σημεία γραμμικοποίησης των εξισώσεων ροής φορτίου, μεταξύ Y_{Oj} και Y_{j-max} ή μεταξύ Y_{j-min} και Y_{Oj} , αν θεωρηθεί κατάλληλη ποσοστιαία αποκοπή των διαστημάτων των δεδομένων μεταβλητών Y_j όπως δίνεται στις εξισώσεις που ακολουθούν:

$$Y'_{j-max} = Y_{Oj}(1 - \beta) + \beta Y_{j-max} \quad (3.74)$$

$$Y'_{j-min} = Y_{Oj}(\beta - 1) - \beta Y_{j-min} \quad (3.75)$$

όπου β κατάλληλος συντελεστής αποκοπής ανηγμένος στη μονάδα.

Έτσι για $\beta = 1$ συμμετέχει στην πιθανοτική ροή φορτίου των άκρων ολόκληρο το αρχικό διάστημα και πετυχαίνετε γραμμικοποίηση στις ακραίες τιμές (μέγιστο ή ελάχιστο), ανάλογα με την πλευρά που επιλέγεται κάθε φορά, ενώ για $\beta = 0$ αποκόπτεται ολόκληρο το αρχικό διάστημα και πετυχαίνετε γραμμικοποίηση γύρω από την αναμενόμενη τιμή.

Η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ζητούμενων μεγεθών προκύπτει από τον κατάλληλο συνδυασμό των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας που υπολογίζονται για τα διάφορα σημεία γραμμικοποίησης και που η κάθε μία είναι περισσότερο ακριβής γύρω από το δικό της σημείο γραμμικοποίησης. Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στα σημεία προσαρμογής των συναρτήσεων μεταξύ τους καθώς και στην απαίτηση της αθροιστικής πιθανότητας της τελικής συνάρτησης να παραμένει μονάδα.

Με αυτό τον τρόπο, η σύνθεση της τελικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας γίνεται όπως φαίνεται στο σχήμα 3.3, για την περίπτωση των $N = 5$ σημείων γραμμικοποίησης, όπου:

- Η συνάρτηση που προκύπτει από την αναμενόμενη τιμή ισχύει μεταξύ των σημείων P_1 και P_2 .
- Η συνάρτηση που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση γύρω από το 50% της μέγιστης τιμής ισχύει μεταξύ των σημείων P_2 και P_4 .
- Η συνάρτηση που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση γύρω από το 50% της ελάχιστης τιμής ισχύει μεταξύ των σημείων P_1 και P_3 .
- Η συνάρτηση που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση γύρω από τη μέγιστη τιμή ισχύει πάνω από το σημείο P_4 και τέλος
- Η συνάρτηση που προκύπτει από τη γραμμικοποίηση γύρω από τη ελάχιστη τιμή ισχύει πάνω από το σημείο P_3 .

και:

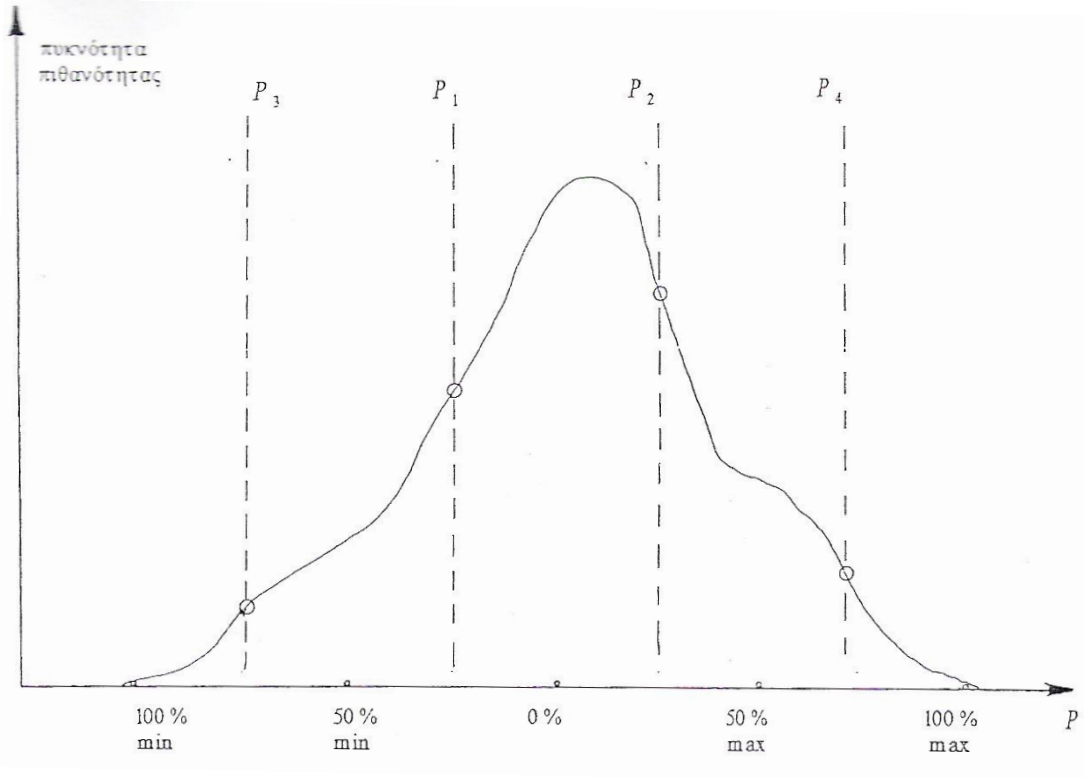
$$P_1 = \frac{P(0\%) + P_{min}(50\%)}{2}$$

$$P_2 = \frac{P(0\%) + P_{max}(50\%)}{2}$$

(3.76)

$$P_3 = \frac{P_{min}(50\%) + P_{min}(100\%)}{2}$$

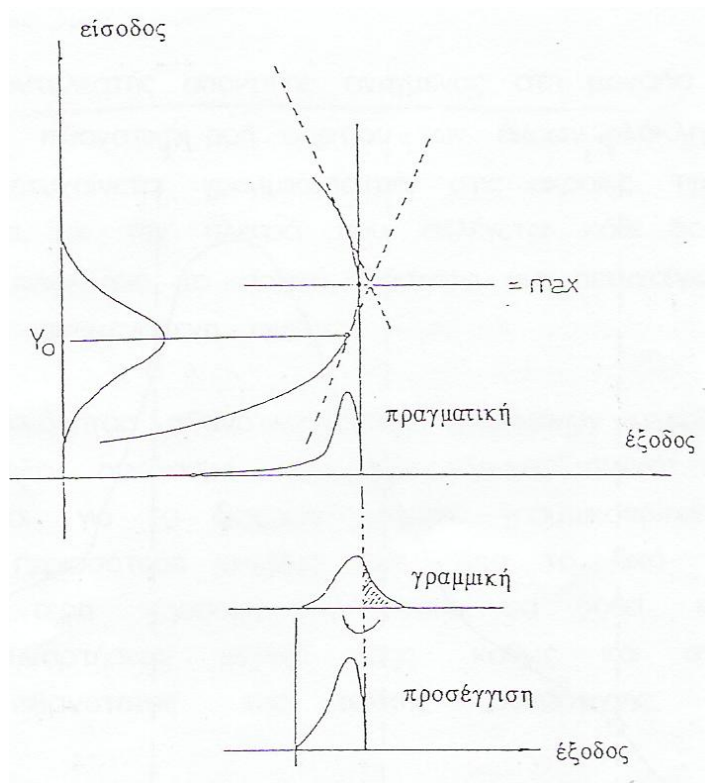
$$P_4 = \frac{P_{max}(50\%) + P_{max}(100\%)}{2}$$



Σχήμα 3.3: Σύνθεση τελικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

Συνεπώς, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας κάποιας μεταβλητής του διανύσματος εξόδου παρουσιάζει έντονη μη γραμμικότητα αν η μέγιστη ή ελάχιστη τιμή της δίνεται για αποκοπή 50% ή ακόμα περισσότερο για αποκοπή 0%.

Στις περιπτώσεις αυτές για να προσδιοριστεί μια προσεγγιστική λύση ακολουθείται η τεχνική της αντιστροφής που παρουσιάζεται παραστατικά στο σχήμα 3.4. Έτσι, αν κατά την διαδικασία σύγκλισης σε κάποιο από τα σημεία γραμμικοποίησης, που θεωρείται για παράδειγμα ότι δίνεται με αποκοπή των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των μεταβλητών εισόδου στο 50%, παρατηρηθεί συνεχιζόμενη αλλαγή πρόσημου κάποιων συντελεστών ευαισθησίας, τότε κατά τη σύνθεση της τελικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας οι τιμές της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας που προσδιορίζονται γύρω από αυτό το σημείο αντιστρέφονται όπως φαίνεται στο σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Αντιμετώπιση περιπτώσεων έντονης μη γραμμικότητας

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΠΕΚΤΑΣΗ CORNISH - FISHER

4.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κατά τον σχεδιασμό των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας, απαιτείται ο υπολογισμός της ισχύος που ρέει ανάμεσα στους ζυγούς. Το ζήτημα αυτό μπορεί να επιλυθεί ντετερμινιστικά, μια διαδικασία που απαιτεί ακριβείς τιμές για τα φορτία, την παραγωγή και τις γενικότερες μεταβλητές του συστήματος.

Τα τελευταία χρόνια υπάρχει μεγάλη εξάπλωση της διεσπαρμένης παραγωγής, η οποία εισέρχεται στα συστήματα ηλεκτρικής ενέργειας. Η παραγωγή αυτή έχει αυξήσει σε μεγάλο βαθμό την αβεβαιότητα σε ένα δίκτυο. Αυτό γιατί η διεσπαρμένη παραγωγή, όπως για παράδειγμα ένα αιολικό πάρκο, δεν ακολουθεί συγκεκριμένες κατανομές για την περιγραφή των παραμέτρων του, αλλά τυχαίες.

Συνεπώς η εφαρμογή των ντετερμινιστικών μεθόδων θα απαιτούσε συμβατικούς υπολογισμούς με τυχαίες τιμές για φορτία, παραγωγές και λοιπές μεταβλητές, κάτι το οποίο και λόγω της υπολογιστικής πολυπλοκότητας των μεθόδων, δείχνει μη πρακτικό. Η πιθανοτική ροή φορτίου από την άλλη, μπορεί να προσεγγίσει καλύτερα το πρόβλημα ροής των συστημάτων.

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο, παρουσιάζεται η επέκταση μιας μαθηματικής μεθόδου προσέγγισης, η οποία μπορεί να προσεγγίσει με καλά αποτελέσματα την ροή φορτίου σε ένα δίκτυο.

Η μέθοδος αυτή παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Cornish και Fisher το 1958 [14] αλλά χρησιμοποιήθηκε και από πολλούς άλλους για την μελέτη τόσο ενεργειακών όσο και οικονομικών θεμάτων ([8], [9], [10], [11], [12], [15]).

Η μέθοδος αυτή για την υλοποίηση της χρησιμοποιεί την θεωρία των αθροισμάτων (cumulants) σε συνδυασμό με γνωστά στατιστικά μεγέθη και κατανομές. Η βασική αρχή της είναι παρόμοια με την επέκταση Gram – Charlier [6].

Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής (cdf) αλλά και της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (pdf) ροών ισχύος σε συστήματα, με μικρή υπολογιστική διαδικασία. Το γεγονός αυτό οφείλεται στις ιδιότητες των αθροισμάτων, τα οποία θα παρουσιαστούν παρακάτω. Η μέθοδος αυτή παρουσιάζει πολύ καλή προσέγγιση στη μέθοδο Monte Carlo ([5]), την οποία χρησιμοποιούμε ως αναφορά σε τέτοιες περιπτώσεις. Συνεπώς με μια τέτοια μέθοδο, που συνδυάζει καλά αποτελέσματα και μικρή διαδικασία υπολογισμού, ο σχεδιασμός

των συστημάτων μπορεί να απλουστευθεί αρκετά αφού μπορούν να προσεγγιστούν οι παράμετροι αυτών με μεγαλύτερη ευκολία και ακρίβεια σε σχέση με τη χρήση άλλων μεθόδων.

4.2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

4.2.1. Υπολογισμός ροπών (Moments)

Εάν, για έναν θετικό ακέραιο αριθμό u , η συνάρτηση x^u είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $F(x)$ τότε το ολοκλήρωμα αυτής από $(-\infty, +\infty)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\alpha_u = E(\xi^u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^u dF(x) \quad (4.1)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό καλείται η ροπή τάξης u ή u -οστή ροπή της κατανομής. Οι ροπές γύρω από το μέσο όρο m , καλούνται κεντρικές ροπές (central moments):

$$\mu_u = E[(\xi - m)^u] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^u dF(x) \quad (4.2)$$

Στην περίπτωση μιας γραμμικής συνάρτησης $\eta = c\xi + b$, η u -οστή ροπή της μεταβλητής η δίνεται από την έκφραση :

$$\alpha'_u = E[(c\xi + b)^u] = c^u \alpha_u + \binom{u}{1} c^{u-1} b \alpha_{u-1} + \dots + b^u \quad (4.3)$$

4.2.2. Ορισμός των Αθροισμάτων (Cumulants)

Λαμβάνουμε μια συνάρτηση της μορφής $e^{it\xi}$, η οποία είναι μια συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t , και καλείται χαρακτηριστική συνάρτηση της μεταβλητής ξ . Η μέση τιμή της συνάρτησης αυτής θα γραφτεί ως:

$$\varphi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \quad (4.4)$$

Εάν η k -οστή ροπή της κατανομής αυτής υπάρχει, η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί με σειρές MacLaurin για μικρές τιμές του t :

$$\varphi(t) = 1 + \sum_1^k \frac{\alpha_v}{v!} (it)^v + o(t^k) \quad (4.5)$$

$$\log \varphi(t) = \sum_1^k \frac{\kappa_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (4.6)$$

Οι συντελεστές κ_ν εισήχθησαν από τον Thiele και καλούνται ημι-σταθερές ή αθροίσματα της κατανομής.

Τα αθροίσματα κ'_ν μιας γραμμικής συνάρτησης $\eta = a\xi + b$ λαμβάνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\log [e^{bit} \varphi(at)] = \sum_1^k \frac{\kappa'_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (4.7)$$

Επομένως:

$$\kappa'_1 = a\kappa_1 + b \quad \text{και} \quad \kappa'_\nu = a^\nu \kappa_\nu \quad \text{για} \quad \nu > 1 \quad (4.8)$$

4.2.3. Σχέση μεταξύ των Ροπών και των Αθροισμάτων

Για να παρασταθεί η σχέση μεταξύ των ροπών και των αθροισμάτων αντικαθιστούμε την έκφραση της $\varphi(t)$ από την (4.5) στην (4.6). Έτσι:

$$\log \left(1 + \sum_1^k \frac{\alpha_\nu}{\nu!} (it)^\nu \right) = \sum_1^k \frac{\kappa_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (4.9)$$

Διαπιστώνεται δηλαδή ότι τα αθροίσματα κ_n είναι πολυώνυμα των ροπών a_1, \dots, a_n , και αντίστροφα.

Η σχέση των αθροισμάτων ως προς τις ροπές μπορεί να γραφεί ως:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \alpha_1 = m \\ \kappa_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 \\ \kappa_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \\ \kappa_4 &= \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4 \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Όπου με m δηλώνεται η μέση τιμή.

Τα αθροίσματα κ_ν μπορούν να γραφούν και σε σχέση με τις κεντρικές ροπές μ_ν . Η σχέση αυτή είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= m \\ \kappa_2 &= \mu_2 = \sigma^2 \\ \kappa_3 &= \mu_3 \\ \kappa_4 &= \mu_4 - 3\mu_2^2 \\ \kappa_5 &= \mu_5 - 10\mu_2\mu_3 \\ \kappa_6 &= \mu_6 - 15\mu_2\mu_4 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3 \\ &\dots \end{aligned} \quad (4.11)$$

όπου σ η τυπική απόκλιση.

Αντίστροφα:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= \kappa_2 = \sigma^2 \\ \mu_3 &= \kappa_3 \\ \mu_4 &= \kappa_4 + 3\kappa_2^2 \\ \mu_5 &= \kappa_5 + 10\kappa_2\kappa_3 \\ \mu_6 &= \kappa_6 + 15\kappa_2\kappa_4 + 10\kappa_3^2 + 15\kappa_2^3 \\ &\dots\end{aligned}\tag{4.12}$$

4.2.4. Ιδιότητες των Αθροισμάτων

Έστω ξ και η είναι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με γνωστή τη συνάρτηση αθροιστικής πυκνότητας πιθανότητας F_1 και F_2 . Η αθροιστική συνάρτηση $F(x)$ του αθροίσματος των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών δίνεται από :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-z) dF_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x-z) dF_1(z)\tag{4.13}$$

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x)\tag{4.14}$$

Για το άθροισμα $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, η ανεξάρτητων μεταβλητών, η αθροιστική συνάρτηση θα είναι:

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) * \dots * F_n(x)\tag{4.15}$$

Έστω $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ και $\varphi(t)$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των ξ , η και $\xi+\eta$ αντίστοιχα. Τότε:

$$\varphi(t) = E[e^{it(\xi+\eta)}] = E[e^{it\xi}] * E[e^{it\eta}] = \varphi_1(t) * \varphi_2(t)\tag{4.16}$$

Εάν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές με χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(t)$ του αθροίσματος $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ θα είναι:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) * \varphi_2(t) * \dots * \varphi_n(t)\tag{4.17}$$

Το θεώρημα πολλαπλασιασμού για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις δίνει:

$$\log \varphi(t) = \log \varphi_1(t) + \log \varphi_2(t) + \dots + \log \varphi_n(t) \quad (4.18)$$

Επομένως:

$$\kappa_v = \kappa_v^1 + \kappa_v^2 + \dots + \kappa_v^n \quad (4.19)$$

Σύμφωνα με την (4.11) παρατηρούμε ότι:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

4.3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ CORNISH – FISHER

Για να επιτευχθεί ικανοποιητική προσέγγιση σημείων μια τυχαίας μεταβλητής με άγνωστη κατανομή χρησιμοποιείται η τεχνική συναρτήσεων. Η γενική τεχνική των συναρτήσεων αυτών έχει ως στόχο τη δημιουργία της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (cdf), μιας άγνωστης τυχαίας μεταβλητής, μέσα από μια σειρά από όρους οι οποίοι βασίζονται σε μια αρχική κατανομή που χρησιμοποιείται ως βάση.

Στην τεχνική αυτή, η χρήση ολόκληρης της κατανομής βάσης μπορεί να δώσει ακριβώς τα σημεία της επιθυμητής κατανομής. Παρόλα αυτά, η χρήση και μόνο μερικών όρων αυτής μπορεί να δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα. Η κατανομή βάσης η οποία συνήθως χρησιμοποιείται είναι η κανονική κατανομή και συγκεκριμένα η κανονική $N(0,1)$ κατανομή με μέση τιμή $\mu=0$ και τυπική απόκλιση $\sigma=1$. Μπορούν όμως, να χρησιμοποιηθούν και άλλες κατανομές, όπως η Γάμμα.

Τέτοιες τεχνικές μπορούν να βρεθούν με περισσότερες λεπτομέρειες στα Elderton – Johnson [16], Johnson – Kotz [17] και Ord [18]. Στην ενότητα αυτή θα συζητηθεί μόνο η περίπτωση της επέκτασης Cornish – Fisher.

Ο σκοπός της γενικευμένης επέκτασης της Cornish – Fisher είναι να προσεγγίσει μια επιθυμητή τυχαία κατανομή με τη χρήση ήδη γνωστών κατανομών [9]. Πιο συγκεκριμένα αν ονομάσουμε F μια τυχαία άγνωστη κατανομή τότε ο σκοπός της επέκτασης αυτής είναι να προσεγγίσουμε μια ποσότητα a (quantile- a) της F κατανομής αναλύοντας την σε όρους της ήδη γνωστής κατανομής Φ . Ουσιαστικά σκοπός είναι η προσέγγιση της αλυσωτής συνάρτησης $F^{-1} \circ \Phi$. Η ανάπτυξη της συνάρτησης $F^{-1} \circ \Phi$ σε παράγωγα των F και Φ είναι το θεώρημα αντιστροφής του Lagrange (Whittaker and Watson; 1920, p.133). Αυτό δείχνει ότι αν μια συνάρτηση $s \rightarrow t$ μπορεί να οριστεί από την εξίσωση

$$t = c + s \cdot h(t) \quad (4.20)$$

για κάποια σταθερή c , και με h μια αναλυτική συνάρτηση στο σημείο $t = c$, τότε κάθε αναλυτική συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρές στο όριο του $s = 0$ (δηλ. $t = c$) ως εξής:

$$f(t) = f(c) + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{s^r}{r!} D^{r-1}[f' \cdot h^r](c) \quad (4.21),$$

όπου ο όρος D συμβολίζει τον παράγοντα διαφορίσης. Για μια δοσμένη πιθανότητα θεωρώ πιθανότητα $c := a$, $f := \Phi^{-1}$ και $h := (\Phi - F) \circ \Phi^{-1}$. Τότε από την παραπάνω συνάρτηση προκύπτει ότι:

$$\Phi^{-1}(t) = \Phi^{-1}(a) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{s^r}{r!} D^{r-1}[(F - \Phi)^r / \phi \circ \Phi^{-1}](a) \quad (4.22)$$

Αν στην εξίσωση (4.20) αντικαταστήσουμε $s = 1$ τότε προκύπτει ότι $\Phi^{-1}(t) = F^{-1}(a)$. Επιπρόσθετα αν για απλοποίηση θεωρήσω $x := F^{-1}(a)$ και $z := \Phi^{-1}(a)$ τότε η συνάρτηση (4.22) μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$x = z + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} D^{r-1}[(F - \Phi)^r / \phi \circ \Phi^{-1}](\Phi(z)) \quad (4.23)$$

Συνεχίζοντας την απλοποίηση, με $a := (F - \Phi) / \phi$ η προηγούμενη συνάρτηση γράφεται ως εξής:

$$x = z + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} D_{(r-1)}[a^r](z) \quad (4.24)$$

όπου $D_{(r)} = (D + \frac{\phi'}{\phi})(D + 2\frac{\phi'}{\phi}) \dots (D + r\frac{\phi'}{\phi})$ με $D_{(0)}$ να αποτελεί τον ταυτοτικό παράγοντα.

Η συνάρτηση (4.24) εκφράζει τη σχέση ανάμεσα σε μια ποσότητα x της κατανομής F σε όρους μια ποσότητας z μιας κατανομής Φ . Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τη γενικευμένη επέκταση Cornish – Fisher.

Ένα πολύ σημαντικό βήμα στην επέκταση αυτή είναι η επιλογή μιας συγκεκριμένης συνάρτησης Φ για το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα, καθώς και η ανάπτυξη μια σειράς για την συνάρτηση a . Η κλασσική συνάρτηση *Cornish – Fisher* σαν συνάρτηση βάσης Φ χρησιμοποιεί την κανονική $N(0,1)$ κατανομή.

Η συνάρτηση a , αναπτύσσεται σε σειρά *Gram – Charlier* [6] με τους όρους της να αναδιατάσσονται όπως θα εξηγηθεί παρακάτω.

Η βασική ιδέα με τη χρήση της σειράς *Gram – Charlier* είναι η ανάπτυξη του λόγου των γενέτειρων συναρτήσεων του V ($M(t) = Ee^{tV}$) και της κανονικής $N(0,1)$ κατανομής ($e^{-t^2/2}$) σε δυναμοσειρές σε περιοχή του μηδενός:

$$M(t)e^{-t^2/2} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \quad (4.25)$$

Στην παραπάνω σχέση, c_k είναι οι συντελεστές *Gram – Charlier*. Με τη χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier μπορεί αντίστοιχα να προκύψει η μορφή της σειράς της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (pdf):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (-1)^k \phi^{(k)}(x) \quad (4.26)$$

καθώς και της συνάρτησης κατανομής (cdf):

$$F(x) = \Phi(x) - \sum_{k=1}^{\infty} c_k (-1)^{k-1} \phi^{(k-1)}(x) \quad (4.27)$$

Με ϕ και Φ τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και κατανομής αντίστοιχα της $N(0,1)$ κανονικής κατανομής. Τα παράγωγα της κανονικής κατανομής είναι:

$$(-1)^k \phi^{(k)}(x) = \phi(x) H_k(x)$$

όπου H_k είναι τα πολυώνυμα Hermite [Παράρτημα Γ].

Οι συντελεστές *Gram – Charlier* μπορούν να μετατραπούν σε συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f(x)/\phi(x)$ όπου μπορεί να γραφεί ότι:

$$f(x)/\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k H_k(x) \quad (4.28)$$

Σε όρους της γενικευμένης επέκτασης Cornish – Fisher (4.23), η σχέση (2.27) γίνεται:

$$a(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} c_k H_{k-1}(z) \quad (4.29)$$

Συνδέοντας το αποτέλεσμα αυτό με την εξίσωση (4.23), παίρνουμε ένα άπειρο άθροισμα όρων, οι οποίοι συμπίπτουν με τους όρους της κλασσικής συνάρτησης Cornish – Fisher. Ο τρόπος με τον οποίο οι όροι αυτοί αναδιατάσσονται προκύπτει από το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Αν υποθεθεί ότι η τυχαία μεταβλητή V έχει κανονικοποιηθεί (κεντρικές ροπές $\kappa_1 = 0$ $\kappa_2 = 1$) και θεωρηθεί ότι το κανονικοποιημένο άθροισμα ανεξάρτητων τυχαίων

μεταβλητών V_i με κατανομή F , $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n V_i$ τότε η ροπογεννήτρια της μεταβλητής

S_n είναι:

$$M_n(t) = M(t/\sqrt{n})^n = e^{t^2/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k n^{-k/2} \right)^n \quad (4.30)$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται ότι κ-οστός Gram-Charlier συντελεστής $c_k(n)$ της μεταβλητής S_n είναι μια πολυωνυμική σχέση του όρου $n^{-1/2}$ περιλαμβάνοντας τους συντελεστές c_i μέχρι $i = k$.

Αν οι όροι της κανονικής Cornish-Fisher συνάρτησης

$$x = z + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \frac{1}{r!} D_{(r-1)} \left[\left(- \sum_{k=1}^{\infty} c_k H_{k-1}(z) \right)^r \right] (z) \quad (4.31)$$

ταξινομηθούν κατά δυνάμεις του όρου $n^{-1/2}$, η κλασική σειρά Cornish-Fisher μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$x = z + \sum_{k=1}^{\infty} n^{-k/2} \xi_k(z) \quad (4.32)$$

όπου $\xi_k(z)$ είναι το σύνολο όλων των όρων της κ-οστής δύναμης του $n^{-1/2}$.

Η άμεση έκφραση των όρων ξ_k σε όρους των αθροισμάτων κ_r είναι μια δύσκολη διαδικασία. Για το λόγο αυτό ο Lee ανέπτυξε μια επαναληπτική μέθοδο για το κ-οστό ξ_k στην επέκταση Cornish – Fisher, η οποία εφαρμόζεται στον αλγόριθμο AS269 [19].

Σύμφωνα με αυτή:

$$\xi_k(H) = a_k H^{*(k+1)} - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{k} (\xi_{k-j}(H) - \xi_{k-j}) * (\xi_j - a_j H^{*(j+1)}) * H \quad (4.33)$$

Όπου $a_k = \frac{\kappa_{k+2}}{(k+2)!}$ και $\xi_k(H)$ είναι μια πολυωνυμική σχέση των πολυωνύμων

Hermite (H).

Απλουστεύοντας την παραπάνω ανάλυση, μπορούμε να πούμε πως όταν η άγνωστη τυχαία μεταβλητή $\{F_n\}$, μπορεί να χαρακτηριστεί σαν μια ακολουθία από συναρτήσεις κατανομής με παράμετρο το n , και οι οποίες με την αύξηση του n προσεγγίζουν την κανονική κατανομή Φ , τότε για $\{L\} = \{l_r = \kappa_r - \delta_r, r = 1, 2, \dots\}$, και $\delta_r = 1$ αν $r=2$, αλλιώς $\delta_r = 0$ μπορεί να γραφεί το ακόλουθο [12]:

$$F(x) \approx \Phi(x) - \varphi(x) \sum_{r=1}^{\infty} M_r(x, L) \quad (4.34)$$

Οι παρακάτω δυο σχέσεις δείχνουν την σχέση της γνωστής ως προς την άγνωστη κατανομή και αντίστροφα.

$$z = \Phi^{-1}[F(x)] \approx x - \sum_{r=1}^{\infty} N_r(x, L) \quad (4.35)$$

$$x = F_n^{-1}[\Phi(z)] \approx z + \sum_{r=1}^{\infty} P_r(z, L) \quad (4.36)$$

Όπου η Φ είναι η συνάρτηση κατανομής (cdf) της τυχαίας μεταβλητής που χρησιμοποιείται ως βάση και φ αντίστοιχα είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της. Η ποσότητα z δηλώνει την τυχαία μεταβλητή της Φ , ενώ η ποσότητα x την μεταβλητή της κατανομής F . Στην βιβλιογραφία οι εξισώσεις (4.34) και (4.36) αναφέρονται ως Edgeworth και Cornish - Fisher συναρτήσεις. Αντίθετα η εξίσωση (4.35) αναφέρεται σαν αντίστροφη συνάρτηση Cornish – Fisher.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας αν χρησιμοποιήσουμε την γενικευμένη μεταβλητή $x_s = \frac{x - \mu}{\sigma}$ τότε η τιμή των l_1 και l_2 γίνεται ίση με το μηδέν και οι συναρτήσεις (4.34) - (4.36) γράφονται πάλι, σε συνάρτηση του x_s και των αθροισμάτων $K = \kappa_r$, $r > 2$, με αποτέλεσμα τα πολυώνυμα να παρουσιάσουν μεγάλη απλοποίηση. Χρησιμοποιούμε τα τέσσερα πρώτα πολυώνυμα της Edgeworth Cornish – Fisher.

Έτσι και τέσσερα πολυώνυμα $M_r(x, K)$ γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned} M_1(x, K) &= \frac{1}{6} h_2 \kappa_3 \\ M_2(x, K) &= \frac{1}{24} h_3 \kappa_4 + \frac{1}{72} h_5 \kappa_3^2 \\ M_3(x, K) &= \frac{1}{120} h_4 \kappa_5 + \frac{1}{144} h_6 \kappa_3 \kappa_4 + \frac{1}{1296} h_8 \kappa_3^3 \\ M_4(x, K) &= \frac{1}{720} h_5 \kappa_6 + \frac{1}{5760} h_7 (5 \kappa_4^2 + 8 \kappa_3 \kappa_5) + \frac{1}{1728} h_9 \kappa_3^2 \kappa_4 + \frac{1}{31104} h_{11} \kappa_3^4 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Στις συναρτήσεις αυτές τα h_j είναι τα πολυώνυμα Hermite j -στης τάξης τα οποία

εκφράζονται ως $h_j = (-1)^j \varphi(x) \frac{d^j \varphi(x)}{dx^j}$.

Αντίστοιχα τα τέσσερα πρώτα πολυώνυμα της αντίστροφης συνάρτησης Cornish – Fisher (4.35) γράφονται ως εξής:

$$N_1(x, K) = \frac{1}{6} \kappa_3 (x^2 - 1) \quad (4.38)$$

$$N_2(x, K) = \frac{1}{24} \kappa_4 (x^3 - 3x) - \frac{1}{36} \kappa_3^2 (4x^3 - 7x)$$

$$N_3(x, K) = \frac{1}{120} \kappa_5 (x^4 - 6x^2 + 3) - \frac{1}{144} \kappa_3 \kappa_4 (11x^4 - 42x^2 + 15) + \frac{1}{648} \kappa_3^3 (69x^4 - 187x^2 + 52)$$

$$N_4(x, K) = \frac{1}{720} \kappa_6 (x^5 - 10x^3 + 15x) - \frac{1}{384} \kappa_4^2 (5x^5 - 32x^3 + 35x) - \frac{1}{360} \kappa_3 \kappa_5 (7x^5 - 48x^3 + 51x) \\ + \frac{1}{864} \kappa_3^2 \kappa_4 (111x^5 - 547x^3 + 456x) - \frac{1}{7776} \kappa_3^4 (948x^5 - 3628x^3 + 2473x)$$

Τέλος τα τέσσερα πολυώνυμα $P_i(u, K)$ που εμφανίζονται στην συνάρτηση (4.36) μπορούν να εκφραστούν ως εξής:

$$P_1(z, K) = \frac{1}{6} \kappa_3 (z^2 - 1)$$

$$P_2(z, K) = \frac{1}{24} \kappa_4 (z^3 - 3z) - \frac{1}{36} \kappa_3^2 (2z^3 - 5z) \quad (4.39)$$

$$P_3(z, K) = \frac{1}{120} \kappa_5 (z^4 - 6z^2 + 3) - \frac{1}{24} \kappa_3 \kappa_4 (z^4 - 5z^2 + 2) + \frac{1}{324} \kappa_3^3 (12z^4 - 53z^2 + 17)$$

$$P_4(z, K) = \frac{1}{720} \kappa_6 (z^5 - 10z^3 + 15z) - \frac{1}{384} \kappa_4^2 (3z^5 - 24z^3 + 29z) + \frac{1}{180} \kappa_3 \kappa_5 (2z^5 - 17z^3 + 21z) \\ + \frac{1}{288} \kappa_3^2 \kappa_4 (14z^5 - 103z^3 + 107z) - \frac{1}{7776} \kappa_3^4 (252z^5 - 1688z^3 + 1511z)$$

Οι μορφές αυτές είναι ισοδύναμες.

Η τελική μορφή της απλοποιημένης συνάρτησης που χρησιμοποιείται στην επέκταση αυτή με την χρήση των πέντε πρώτων αθροισμάτων γράφεται ως εξής [11]:

$$\begin{aligned}
x = & z + \frac{1}{6}(z^2 - 1)\kappa_3 + \frac{1}{24}(z^3 - 3z)\kappa_4 - \frac{1}{36}(2z^3 - 5z)\kappa_3^2 + \frac{1}{120}(z^4 - 6z^2 + 3)\kappa_5 \\
& - \frac{1}{24}(z^4 - 5z^2 + 2)\kappa_3\kappa_4 + \frac{1}{324}(12z^4 - 53z^2 + 17)\kappa_3^3 - \frac{1}{384}(3z^5 - 24z^3 + 29z)\kappa_4^2 \\
& + \frac{1}{288}(14z^5 - 103z^3 + 107z)\kappa_3^2\kappa_4 - \frac{1}{7776}(252z^5 - 1688z^3 + 1511z)\kappa_3^4 + \dots
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Όπου όπως αναφέραμε z είναι η τυχαία μεταβλητή της $N(0,1)$ κανονικής κατανομής, $\kappa_i \{i=1,2,\dots\}$ είναι τα αθροίσματα (cumulants) της επιθυμητής κατανομής.

Η επιθυμητή μεταβλητή που προκύπτει από παραπάνω προσέγγιση είναι η:

$$y = \kappa_1 + \sqrt{\kappa_2} \cdot x \tag{4.41}$$

Οι Cornish και Fisher δίνουν μέχρι και όρους μέχρι και το όγδοο cumulant στην επέκτασή τους.

Στις τεχνικές επέκτασης, η σύγκλιση είναι γρήγορη όταν η επιθυμητή κατανομή είναι παρόμοιας μορφής με την κατανομή βάσης. Παρόλα αυτά μεγαλύτεροι όροι μπορούν να χαλάσουν την σύγκλιση αυτή.

4.4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΜΕΘΟΔΟΥ

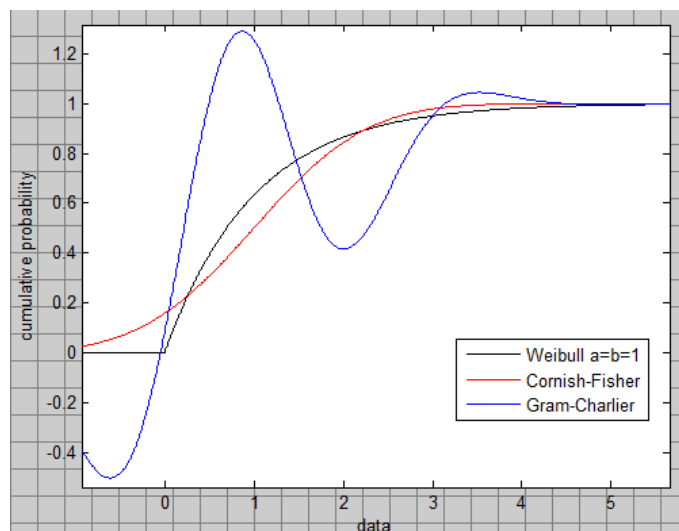
4.4.1 Ποιοτικά αποτελέσματα

Παρατηρώντας την συνάρτηση Cornish-Fisher μπορούμε άμεσα να εξάγουμε κάποια ποιοτικά χαρακτηριστικά.

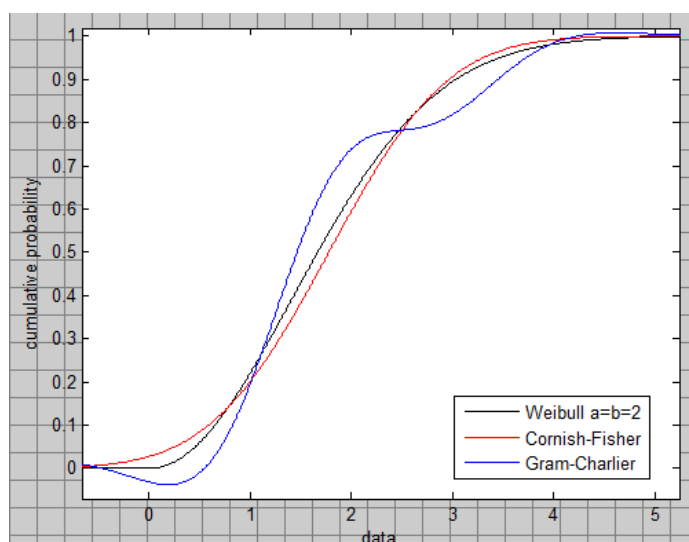
- Αν F_m είναι μια ακολουθία κατανομών που συγκλίνουν στην κανονική κατανομή Φ , η μέθοδος Cornish-Fisher παρουσιάζει καλύτερη προσέγγιση (ασυμπτωτική για $m \rightarrow \infty$) από ότι η κανονική προσέγγιση.
- Οι προσεγγίσιμες συναρτήσεις \tilde{F} και $\tilde{F}^{-1} \circ \Phi$ δεν είναι απαραίτητα μονότονες.
- Η μέθοδος Cornish-Fisher κατά τη σύγκλιση της γίνεται όλο και λιγότερο αξιόπιστη για τιμές των quantiles $a \rightarrow 0$ ή $a \rightarrow 1$. Δηλαδή η προσέγγιση της συνάρτησης \tilde{F} παρουσιάζει «λάθος» συμπεριφορά στα άκρα (στην «ουρά»).
- Η μέθοδος Cornish-Fisher δεν είναι απαραίτητο να συγκλίνει αυξάνοντας το όριο προσέγγισης k , για μια συνάρτηση κατανομής F .

4.4.2 Γραφικά αποτελέσματα

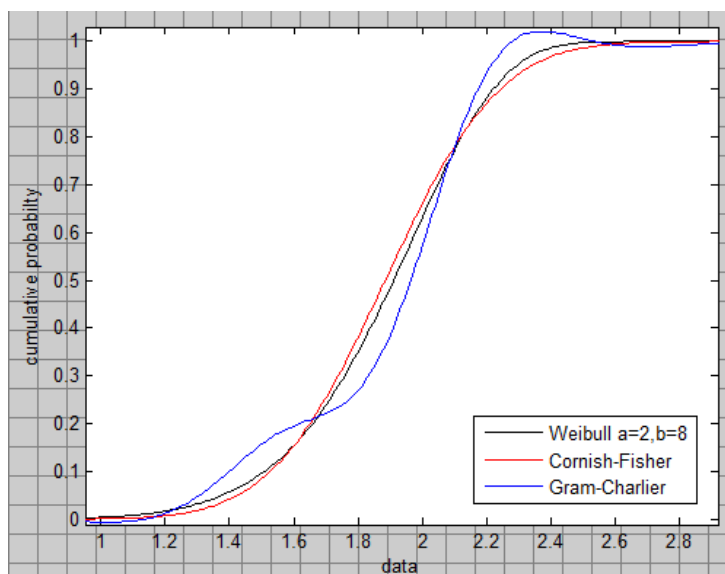
Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται κάποια γραφικά παραδείγματα της προσέγγισης γνωστών κατανομών με την μέθοδο Cornish – Fisher καθώς και η σύγκριση της με την μέθοδο Gram – Charlier.



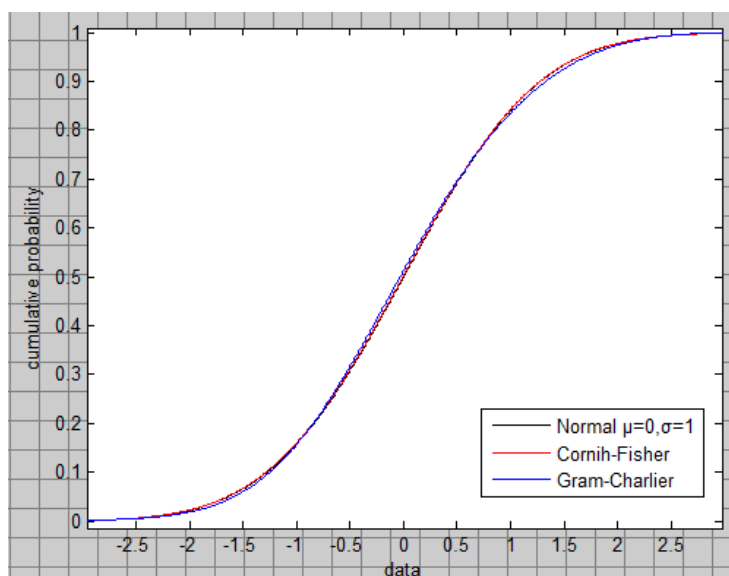
Σχήμα4.1: Weibull a=b=1, Cornish-Fisher, Gram Charlier



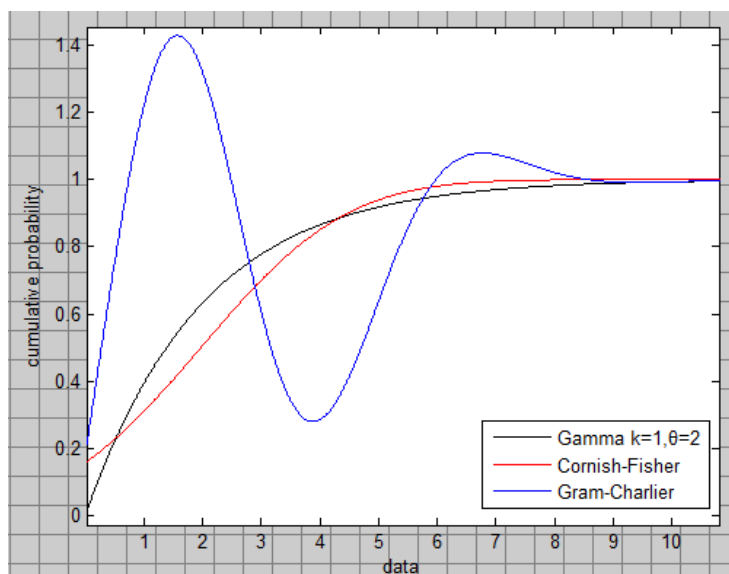
Σχήμα4.2: Weibull a=b=2, Cornish-Fisher, Gram Charlier



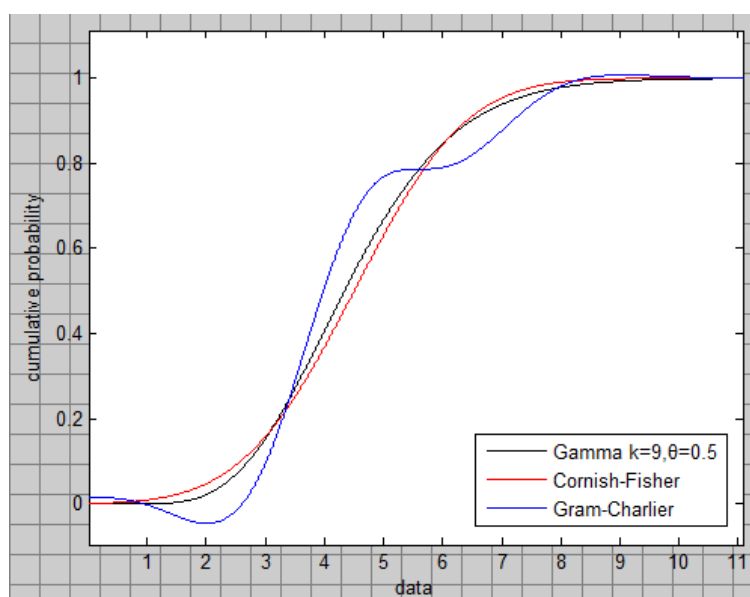
Σχήμα4.3: Weibull $a=2, b=8$, Cornish-Fisher, Gram Charlier



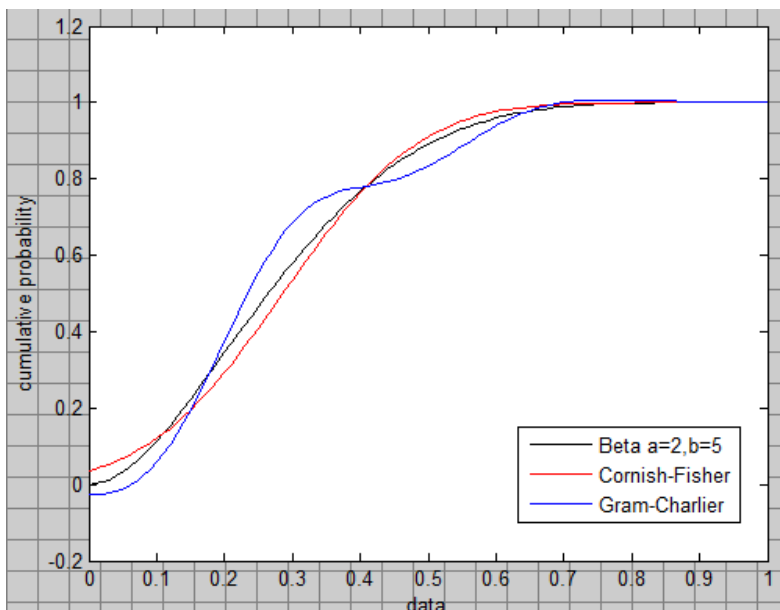
Σχήμα4.4: Normal $m=0, s=1$, Cornish-Fisher, Gram Charlier



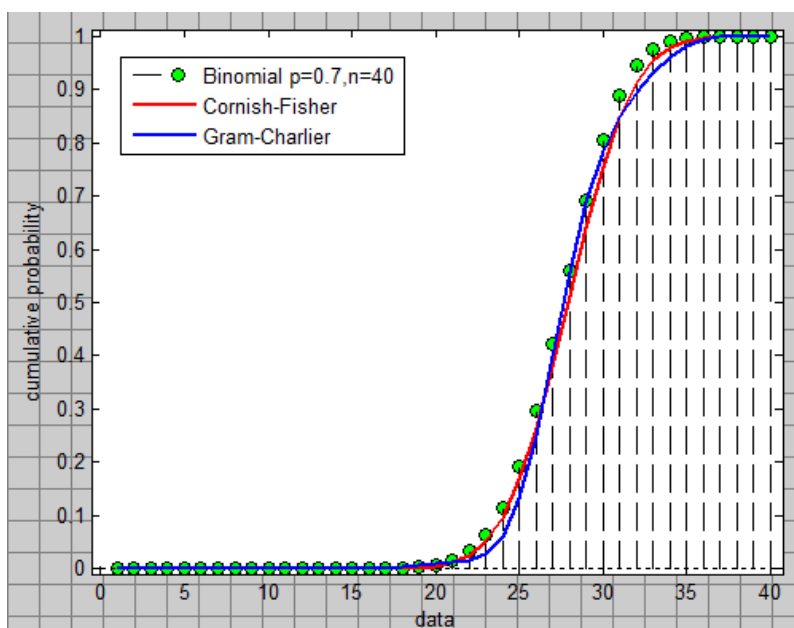
Σχήμα4.5: Gamma $\kappa=1, \theta=2$, Cornish-Fisher, Gram Charlier



Σχήμα4.6: Gamma $\kappa=9, \theta=0.5$, Cornish-Fisher, Gram Charlier



Σχήμα4.7: Beta a=2,b=5, Cornish-Fisher, Gram Charlier



Σχήμα4.8: Binomial p=0.7,n=40, Cornish-Fisher, Gram Charlier

4.5 ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Η επέκταση Cornish – Fisher, όπως αναφέρθηκε και στην παραπάνω ανάλυση, χρησιμοποιείται για να δημιουργηθεί μια ολοκληρωμένη και συγκεκριμένη κατανομή μια άγνωστης τυχαίας μεταβλητής.

Παρακάτω φαίνεται με απλά βήματα η διαδικασία με την οποία υλοποιείται η Cornish – Fisher για οποιαδήποτε κατανομή, με κατανομή βάσης την κανονική $N(0,1)$ κατανομή.

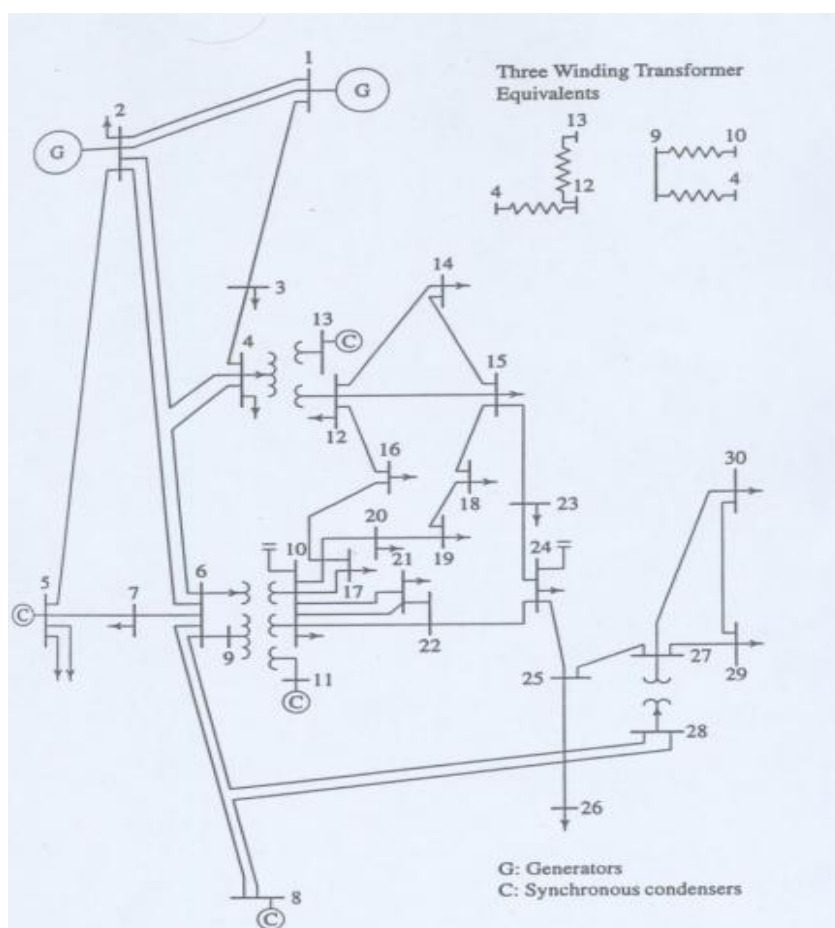
1. Υπολογίζονται οι ροπές της άγνωστης τυχαίας μεταβλητής από τις σχέσεις (4.1) και (4.2).
2. Υπολογίζονται τα αθροίσματα της άγνωστης τυχαίας μεταβλητής, συναρτήσει των ροπών της, από τη σχέση (4.11).
3. Λαμβάνεται ένα πλήθος δειγμάτων που ακολουθούν την κανονική κατανομή $N(0,1)$. Όσο μεγαλύτερο το πλήθος τόσο καλύτερη η μορφή της επιθυμητής καμπύλης.
4. Αντικαθίστανται τα παραπάνω στην τελική μορφή της εξίσωσης Cornish – Fisher, που δίνεται στη σχέση (4.40).
5. Το επιθυμητό αποτέλεσμα λαμβάνεται από τη σχέση (4.41).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ 30 ΖΥΓΩΝ ΤΟΥ IEEE

5.1. ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε τα στοιχεία ενός δικτύου με τη χρήση της πιθανοτικής ροής φορτίου. Συγκεκριμένα το δίκτυο που θα μελετήσουμε είναι το τροποποιημένο δίκτυο των 30 ζυγών της IEEE. Θα εξετάσουμε τις τάσεις και τις γωνίες κάποιων ζυγών καθώς και τη ροή ισχύος ανάμεσα σε αυτούς. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η αρχική τοπολογία του δικτύου (επίπεδα τάσης 230kV και 138kV, ισχύς βάσης 100MVA).



Σχήμα 5.1: Δίκτυο IEEE 30 ζυγών

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Η μελέτη αυτή θα χωριστεί σε δυο στάδια. Στο πρώτο στάδιο θα μελετηθεί το δίκτυο όπως φαίνεται στο σχήμα. Στο δεύτερο στάδιο, στο δίκτυο αυτό θα εισάγουμε δυο αιολικές παραγωγές μεγάλης έγχυσης ενέργειας, οι οποίες θα τοποθετηθούν στους ζυγούς 17 και 22 και κατόπιν θα γίνει η εξέταση των αντίστοιχων στοιχείων.

Ο βασικός σκοπός της εφαρμογής αυτής είναι να μελετήσουμε το δίκτυο χωρίς αλλά και κατά την λειτουργία των αιολικών παραγωγών, για να μπορέσουμε να εξετάσουμε και να αξιολογήσουμε την επίδραση τους στο δίκτυο.

Στο *στάδιο 1* που αναπτύσσεται παρακάτω γίνεται η μελέτη του δικτύου χωρίς ΑΠΕ ενώ στο *στάδιο 2* με εφαρμογή των ΑΠΕ. Και στα δυο αυτά στάδια παρουσιάζουν ενδιαφέρον κατά πρώτο λόγο οι ζυγοί 17 και 22, στους οποίους γίνεται η σύνδεση των ΑΠΕ. Μεγάλο ενδιαφέρον όμως παρουσιάζουν και οι ζυγοί 10, 16, 17 οι οποίοι έχουν άμεση σύνδεση με τους ζυγούς των ΑΠΕ. Οπότε η μελέτη αυτή επικεντρώνεται σε αυτούς τους πέντε ζυγούς.

Κατά την μελέτη αυτή χρησιμοποιήθηκε το μαθηματικό πρόγραμμα Matlab. Με την χρήση αυτού εφαρμόστηκε η μέθοδος Monte–Carlo [Παράρτημα Β], [5]. Η μέθοδος Monte-Carlo είναι μία επαναληπτική μέθοδος όπου δίνονται διαφορετικές τιμές σε μία μεταβλητή και προκύπτουν οι μεταβολές στις μεταβλητές που εξετάζουμε.

Στη συνέχεια χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της γραμμικοποίησης στην οποία, η συνέλιξη αντικαθιστά τις επαναλήψεις που πραγματοποιεί η μέθοδος Monte-Carlo καθώς πραγματοποιεί όλους τους πιθανούς συνδυασμούς μεταξύ των μεταβλητών μας (των πιθανών φορτίων στο σύστημα) κάτι που είναι πρακτικώς αδύνατο να γίνει με την Monte-Carlo λόγω της αυξημένης πολυπλοκότητας και του τεράστιου αριθμού των επαναλήψεων. Η μέθοδος εφαρμόστηκε γύρω από τη μέση τιμή που προέκυψε από τη Monte-Carlo για τιμές φορτίων ίσες με τις μέσες τιμές των κατανομών που χρησιμοποιήθηκαν. Όπως και στη Monte-Carlo παράγονται οι τιμές των κανονικών κατανομών και στη συνέχεια αυτές συνελίσσονται σύμφωνα με τον τύπο (A-17) του Παραρτήματος Α όπου οι συντελεστές a_i προκύπτουν από τους τύπους (3.15) και (3.16) αντίστοιχα εάν πρόκειται για το διάνυσμα των γωνιών και των τάσεων ή εάν πρόκειται για το διάνυσμα των ροών ισχύων στις γραμμές. Από τις συνελίξεις προκύπτουν οι κατανομές των μεταβλητών που αναφέραμε.

Τέλος, επειδή στην εφαρμογή χρησιμοποιούνται κατά κύριο λόγο κανονικές κατανομές και προκειμένου να ελέγξουμε την ορθότητα των προγραμμάτων της γραμμικοποίησης υλοποιήθηκαν σε Matlab τα στατιστικά θεωρήματα που αναφέρονται στο παράρτημα Δ. Με τη βοήθεια αυτών (εφόσον οι κατανομές που χρησιμοποιούνται στο σύστημα είναι κανονικές) λαμβάνουμε την θεωρητικώς

αναμενόμενη κατανομή των μεταβλητών που εξετάζουμε προκειμένου να διερευνήσουμε την ακρίβεια των προγραμμάτων που χρησιμοποιήθηκαν καθώς και το μέγεθος του σφάλματος που προκύπτει από την Monte-Carlo ανάλογα τον αριθμό των επαναλήψεων.

5.2. ΣΤΑΔΙΟ 1: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΧΩΡΙΣ ΕΓΧΥΣΗ Α.Π.Ε

Το δίκτυο με τους 30 ζυγούς φαίνεται στο παραπάνω σχήμα. Τα δεδομένα των ζυγών και των γραμμών του παρουσιάζονται στον πίνακα 1 και πίνακα 2 αντίστοιχα.

Πίνακας 5.1: Στοιχεία ζυγών δικτύου IEEE 30

```
basemva = 100; accuracy = 0.001; maxiter = 10;
```

```
% IEEE 30-BUS TEST SYSTEM (American Electric Power)
% Bus Bus Voltage Angle ---Load--- ----Generator-- Injected
% No code Mag. Degree MW Mvar MW Mvar Qmin Qmax Mvar
busdata=[1 1 1.06 0.0 0.0 0.0 150 0.0 0 0 0
2 2 1.043 0.0 21.70 12.7 40.0 0.0 -40 50 0
3 0 1.0 0.0 2.4 1.2 0.0 0.0 0 0 0
4 0 1.06 0.0 7.6 1.6 0.0 0.0 0 0 0
5 2 1.01 0.0 94.2 19.0 50 0.0 -40 40 0
6 0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0 0 0
7 0 1.0 0.0 22.8 10.9 0.0 0.0 0 0 0
8 2 1.01 0.0 30.0 30.0 60 0.0 -10 60 0
9 0 1.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0 0 0
10 0 1.0 0.0 5.8 2.0 0.0 0.0 -6 24 19
11 2 1.082 0.0 0.0 0.0 100 0.0 0 0 0
12 0 1.0 0 11.2 7.5 0 0 0 0 0
13 2 1.071 0 0.0 0.0 80 0 -6 24 0
14 0 1 0 6.2 1.6 0 0 0 0 0
15 0 1 0 8.2 2.5 0 0 0 0 0
16 0 1 0 3.5 1.8 0 0 0 0 0
17 0 1 0 9.0 5.8 0 0 0 0 0
18 0 1 0 3.2 0.9 0 0 0 0 0
19 0 1 0 9.5 3.4 0 0 0 0 0
20 0 1 0 2.2 0.7 0 0 0 0 0
21 0 1 0 17.5 11.2 0 0 0 0 0
22 0 1 0 0 0.0 0 0 0 0 0
23 0 1 0 3.2 1.6 0 0 0 0 0
24 0 1 0 8.7 6.7 0 0 0 0 4.3
25 0 1 0 0 0.0 0 0 0 0 0
26 0 1 0 3.5 2.3 0 0 0 0 0
27 0 1 0 0 0.0 0 0 0 0 0
28 0 1 0 0 0.0 0 0 0 0 0
29 0 1 0 2.4 0.9 0 0 0 0 0
30 0 1 0 10.6 1.9 0 0 0 0 0];
```

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Πίνακας 5.2: Στοιχεία γραμμών δικτύου IEEE 30

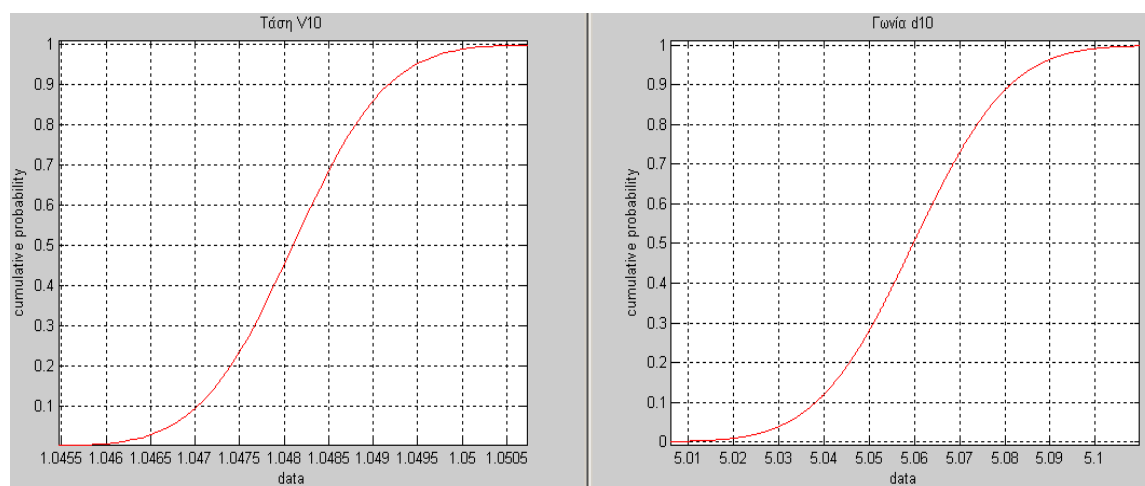
%	Line code					
%	Bus	bus	R	X	1/2 B	= 1 for lines
%	nl	nr	p.u.	p.u.	p.u.	> 1 or < 1 tr.tap at bus
nl						
linedata=[1	2	0.0192	0.0575	0.02640	1
	1	3	0.0452	0.1852	0.02040	1
	2	4	0.0570	0.1737	0.01840	1
	3	4	0.0132	0.0379	0.00420	1
	2	5	0.0472	0.1983	0.02090	1
	2	6	0.0581	0.1763	0.01870	1
	4	6	0.0119	0.0414	0.00450	1
	5	7	0.0460	0.1160	0.01020	1
	6	7	0.0267	0.0820	0.00850	1
	6	8	0.0120	0.0420	0.00450	1
	6	9	0.0	0.2080	0.0	0.978
	6	10	0	.5560	0	0.969
	9	11	0	.2080	0	1
	9	10	0	.1100	0	1
	4	12	0	.2560	0	0.932
	12	13	0	.1400	0	1
	12	14	.1231	.2559	0	1
	12	15	.0662	.1304	0	1
	12	16	.0945	.1987	0	1
	14	15	.2210	.1997	0	1
	16	17	.0824	.1923	0	1
	15	18	.1073	.2185	0	1
	18	19	.0639	.1292	0	1
	19	20	.0340	.0680	0	1
	10	20	.0936	.2090	0	1
	10	17	.0324	.0845	0	1
	10	21	.0348	.0749	0	1
	10	22	.0727	.1499	0	1
	21	22	.0116	.0236	0	1
	15	23	.1000	.2020	0	1
	22	24	.1150	.1790	0	1
	23	24	.1320	.2700	0	1
	24	25	.1885	.3292	0	1
	25	26	.2544	.3800	0	1
	25	27	.1093	.2087	0	1
	28	27	0	.3960	0	0.968
	27	29	.2198	.4153	0	1
	27	30	.3202	.6027	0	1
	29	30	.2399	.4533	0	1
	8	28	.0636	.2000	0.0214	1
	6	28	.0169	.0599	0.065	1];

Η υλοποίηση της εφαρμογής αυτής όπως αναφέρθηκε έγινε στο προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab.

Οι ζυγοί οι οποίοι παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, είναι οι ζυγοί 17 και 22, στους οποίους θα εισάγουμε παρακάτω την αιολική παραγωγή. Ο ζυγός 17 συνδέεται άμεσα με τους ζυγούς 10 και 16, και ο ζυγός 22 συνδέεται άμεσα με τους ζυγούς 10 και 21, κάτι που φαίνεται και από τις τιμές του πίνακα 5.2. Για να μπορέσουμε να εξετάσουμε την επίδραση των ΑΠΕ, σε πρώτη φάση θα ελέγξουμε τις γωνίες και τις τάσεις πριν χωρίς τις παραγωγές των αιολικών.

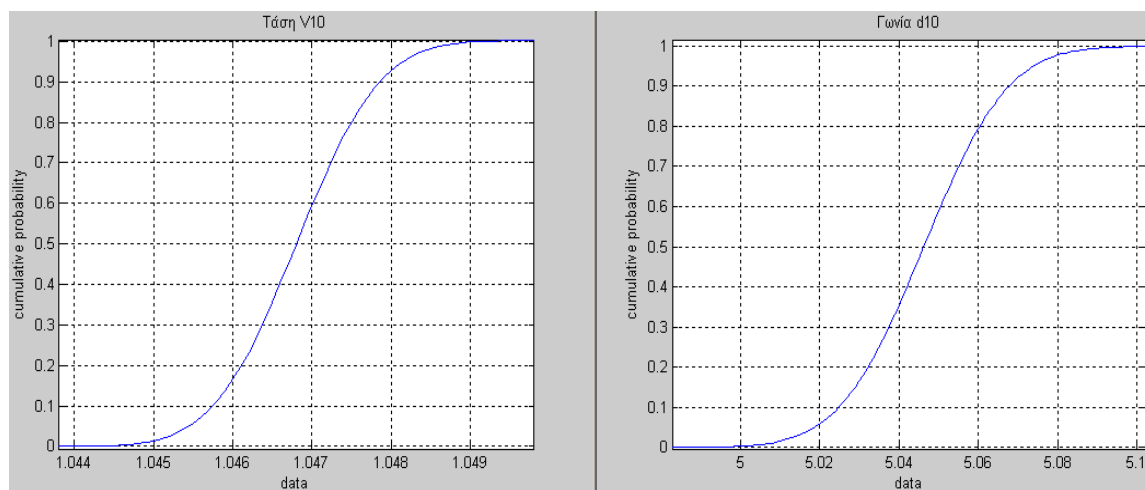
Τα μεγέθη αυτά υπολογίστηκαν με στατιστικά θεωρήματα καθώς και με την μέθοδο της γραμμικοποίησης γύρω από τη μέση τιμή. Για να είναι ορθά τα αποτελέσματα μας υποθέσαμε ότι οι παραγωγές και τα φορτία ακολουθούν την κανονική κατανομή. Ενδεικτικά οι δύο μέθοδοι παρουσιάζονται για σύγκριση στα μεγέθη του ζυγού 10. Τα υπόλοιπα μεγέθη παρουσιάζονται με την μέθοδο των στατιστικών θεωρημάτων.

Έτσι έχουμε τα διαγράμματα:

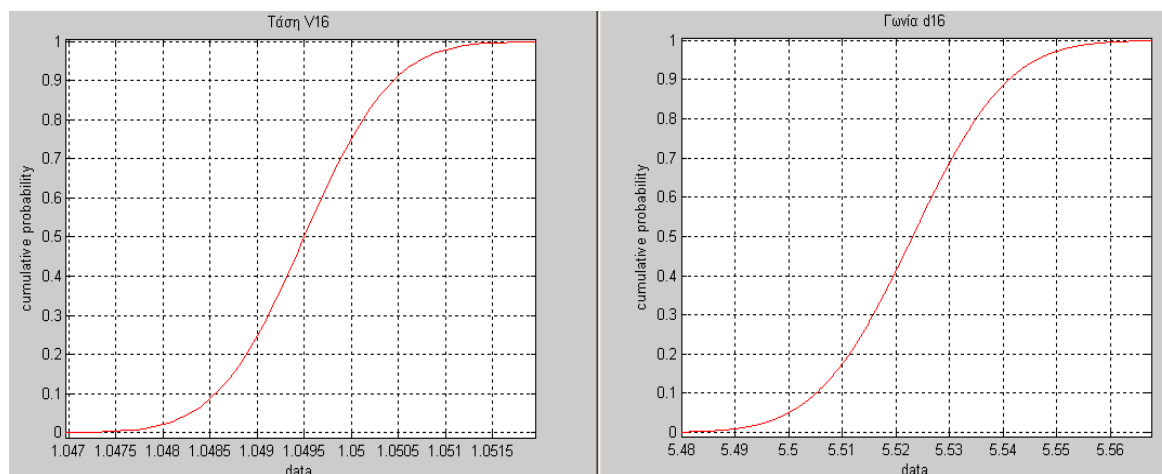


Σχήμα 5.2: Τάση – Γωνία ζυγού 10 (στατιστικά θεωρήματα)

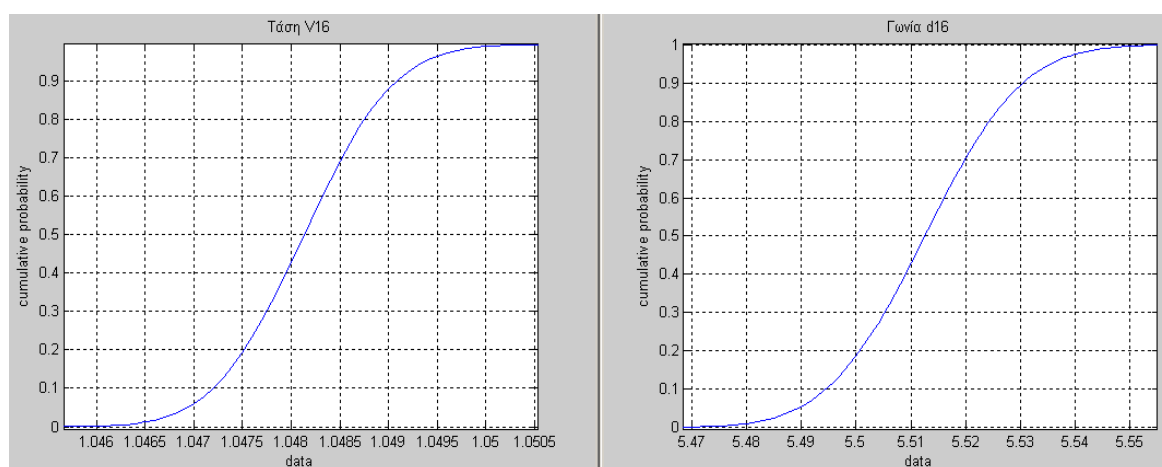
Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων



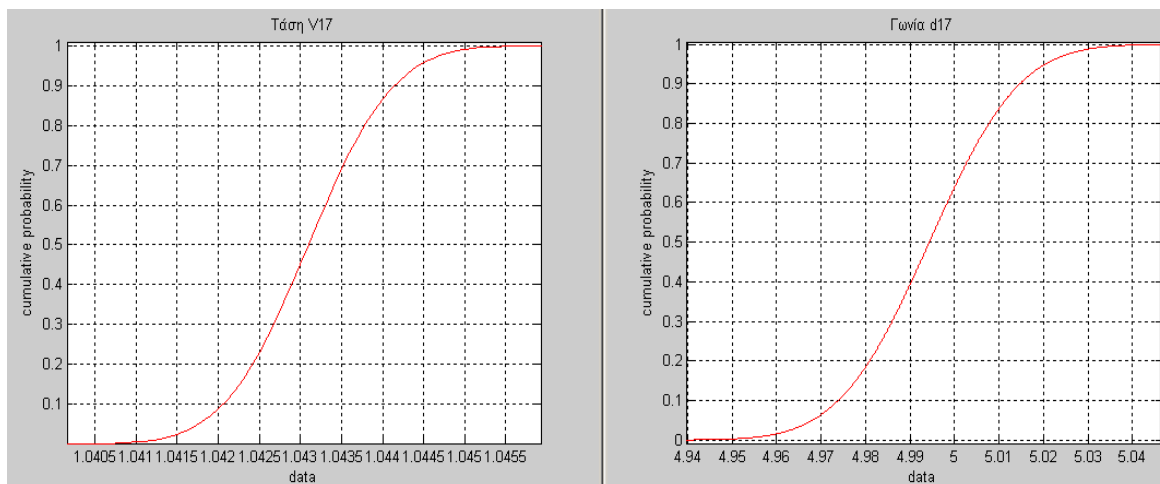
Σχήμα 5.3: Τάση – Γωνία ζυγού 10 (γραμμικοποίηση γύρω από την μέση τιμή)



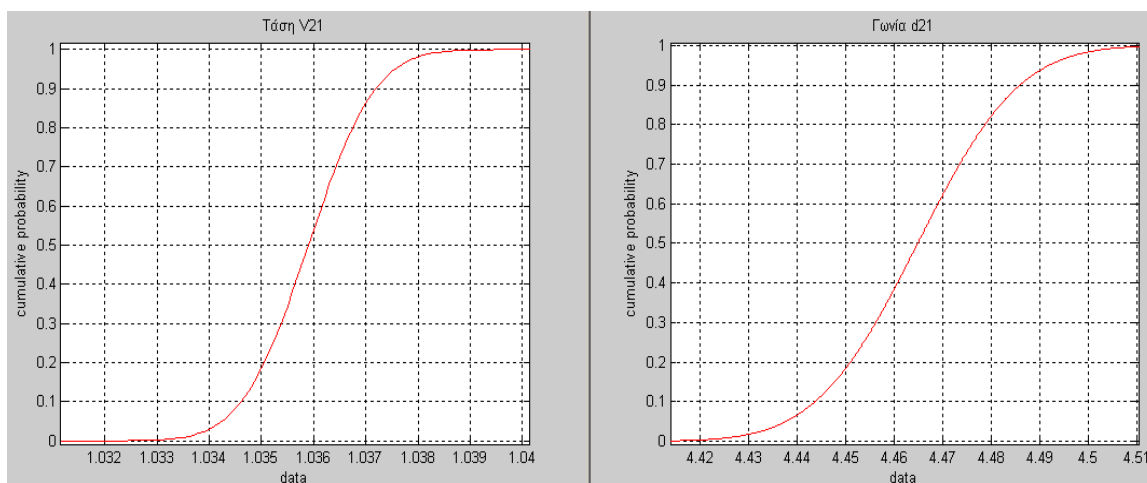
Σχήμα 5.4: Τάση – Γωνία ζυγού 16 (στατιστικά θεωρήματα)



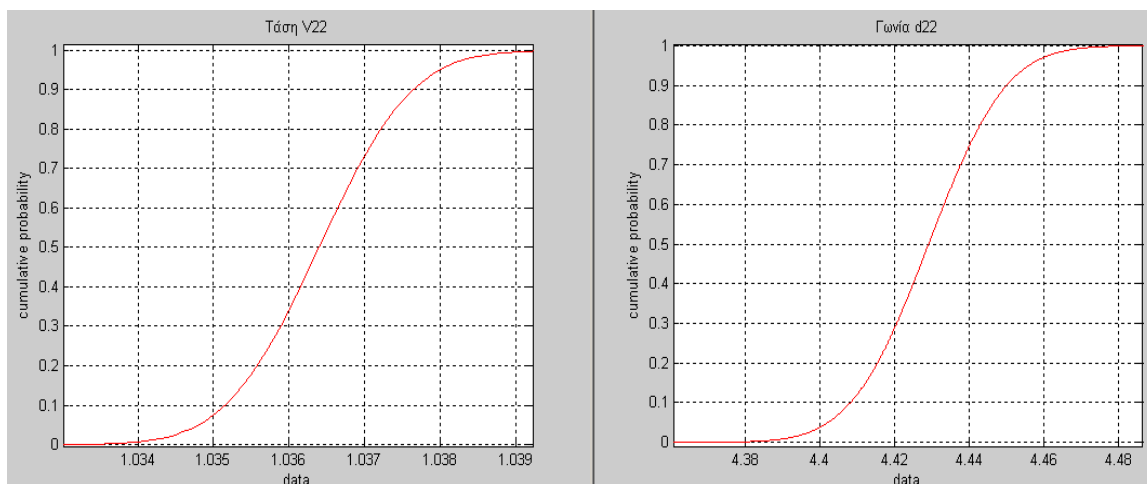
Σχήμα 5.5: Τάση – Γωνία ζυγού 16 (γραμμικοποίηση γύρω από την μέση τιμή)



Σχήμα 5.6: Τάση – Γωνία ζυγού 17 (στατιστικά θεωρήματα)



Σχήμα 5.7: Τάση – Γωνία ζυγού 21 (στατιστικά θεωρήματα)



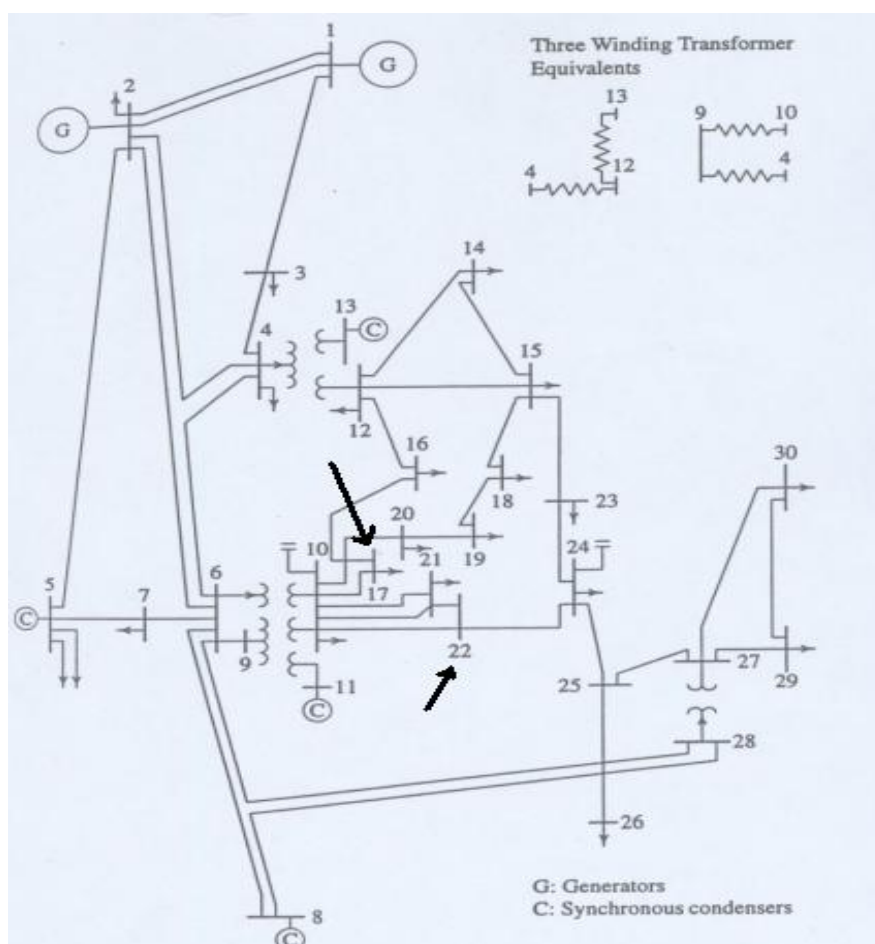
Σχήμα 5.8: Τάση – Γωνία ζυγού 22 (στατιστικά θεωρήματα)

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Σημειώνεται πως ο μέσος χρόνος εξαγωγής καθενός από τα διαγράμματα των στατιστικών μεθόδων είναι 1second, ενώ η λύση με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης διαρκεί περίπου 30seconds.

5.3. ΣΤΑΔΙΟ 2: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ ΜΕ ΕΓΧΥΣΗ Α.Π.Ε

Το δίκτυο των 30 ζυγών τροποποιείται με τέτοιο τρόπο ώστε στους ζυγούς 17 και 22 να εισαχθούν δυο αιολικά πάρκα με εγκατεστημένη ισχύ P_n και αναμενόμενη ισχύ P . Η αναμενόμενη ισχύς στους ζυγούς 17 και 22 είναι 300MW και 200MW αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.9. Τα δεδομένα των ζυγών μετά την τροποποίηση φαίνονται στον πίνακα 5.3, ενώ τα δεδομένα των γραμμών παραμένουν ίδια με αυτά του πίνακα 5.2.



Σχήμα5.9: Δίκτυο IEEE 30 ζυγών

Πίνακας 5.3: Στοιχεία δικτύου 30 ζυγών με εισαγωγή ΑΠΕ

basemva = 100; accuracy = 0.001; maxiter = 10;

```

%      IEEE 30-BUS TEST SYSTEM (American Electric Power)
%      Bus Bus Voltage Angle ---Load---- ----Generator-- Injected
%      No  code Mag. Degree MW Mvar MW Mvar Qmin Qmax Mvar
busdata=[1  1  1.06  0.0  0.0  0.0  150  0.0  0  0  0
          2  2  1.043  0.0  21.70  12.7  40.0  0.0 -40  50  0
          3  0  1.0  0.0  2.4  1.2  0.0  0.0  0  0  0
          4  0  1.06  0.0  7.6  1.6  0.0  0.0  0  0  0
          5  2  1.01  0.0  94.2  19.0  50  0.0 -40  40  0
          6  0  1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0  0  0
          7  0  1.0  0.0  22.8  10.9  0.0  0.0  0  0  0
          8  2  1.01  0.0  30.0  30.0  60  0.0 -10  60  0
          9  0  1.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0.0  0  0  0
         10  0  1.0  0.0  5.8  2.0  0.0  0.0 -6  24  19
         11  2  1.082  0.0  0.0  0.0  100  0.0  0  0  0
         12  0  1.0  0  11.2  7.5  0  0  0  0  0
         13  2  1.071  0  0  0.0  80  0  -6  24  0
         14  0  1  0  6.2  1.6  0  0  0  0  0
         15  0  1  0  8.2  2.5  0  0  0  0  0
         16  0  1  0  3.5  1.8  0  0  0  0  0
         17  2  1  0  9.0  5.8  300  0  0  0  0
         18  0  1  0  3.2  0.9  0  0  0  0  0
         19  0  1  0  9.5  3.4  0  0  0  0  0
         20  0  1  0  2.2  0.7  0  0  0  0  0
         21  0  1  0  17.5  11.2  0  0  0  0  0
         22  2  1  0  0  0.0  200  0  0  0  0
         23  0  1  0  3.2  1.6  0  0  0  0  0
         24  0  1  0  8.7  6.7  0  0  0  0  4.3
         25  0  1  0  0  0.0  0  0  0  0  0
         26  0  1  0  3.5  2.3  0  0  0  0  0
         27  0  1  0  0  0.0  0  0  0  0  0
         28  0  1  0  0  0.0  0  0  0  0  0
         29  0  1  0  2.4  0.9  0  0  0  0  0
         30  0  1  0  10.6  1.9  0  0  0  0  0];

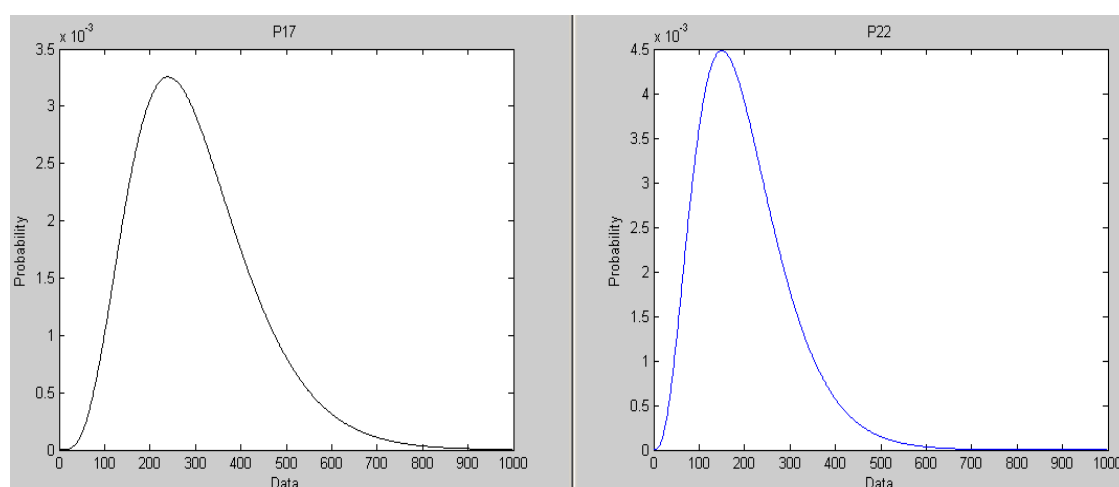
```

Για την μελέτη του δικτύου με έγχυση αιολικής ενέργειας, χρησιμοποιήθηκε η επαναληπτική μέθοδος Monte – Carlo για 1000 και 100.000 σημεία, η οποία χρησιμοποιήθηκε και ως αναφορά. Το πρόβλημα διαχωρίστηκε ακόμα περισσότερο, όσον αφορά τις αιολικές παραγωγές. Συγκεκριμένα στη μια περίπτωση οι ζυγοί 17 και 22 μοντελοποιήθηκαν με κατανομή Γάμμα 1000 σημείων η καθεμιά, μέσης τιμής 300MW και 200MW αντίστοιχα, τιμές οι οποίες αντιπροσωπεύουν τις αναμενόμενες τιμές της ενεργού ισχύος. Στην δεύτερη περίπτωση, η παραγωγή του ζυγού 17 παραστάθηκε με διακριτή κατανομή πέντε σημείων, και ταυτόχρονα η παραγωγή του ζυγού 22 με κατανομή Γάμμα όπως και πριν με μέσες τιμές 300MW και 200MW αντίστοιχα.

Εκτός από τη μέθοδο Monte – Carlo το πρόβλημα εκφράστηκε και με τις πιθανοτικές μεθόδους Gram – Charlier και Cornish – Fisher για να ελεγχθεί η ακρίβειά τους με έμφαση στην μέθοδο Cornish – Fisher.

5.3.1. Επίλυση προβλήματος με δυο κατανομές Γάμμα για παραγωγές

Στην περίπτωση αυτή, οι αιολικές παραγωγές στους ζυγούς 17 και 22 ακολουθούν την κατανομή Γάμμα 1000 σημείων με μέσες τιμές 300MW και 200MW. Οι κατανομές αυτές φαίνονται στα σχήματα 5.3α και 5.3β.



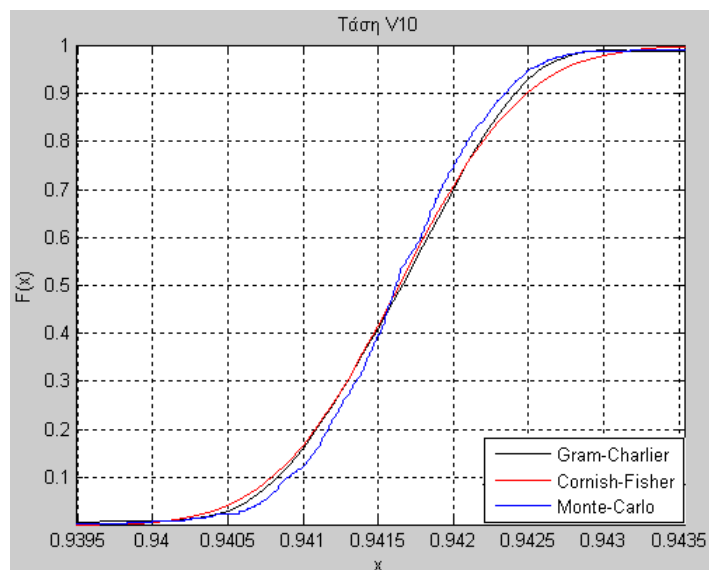
α. Ζυγός 17 (Γάμμα)

β. Ζυγός 22 (Γάμμα)

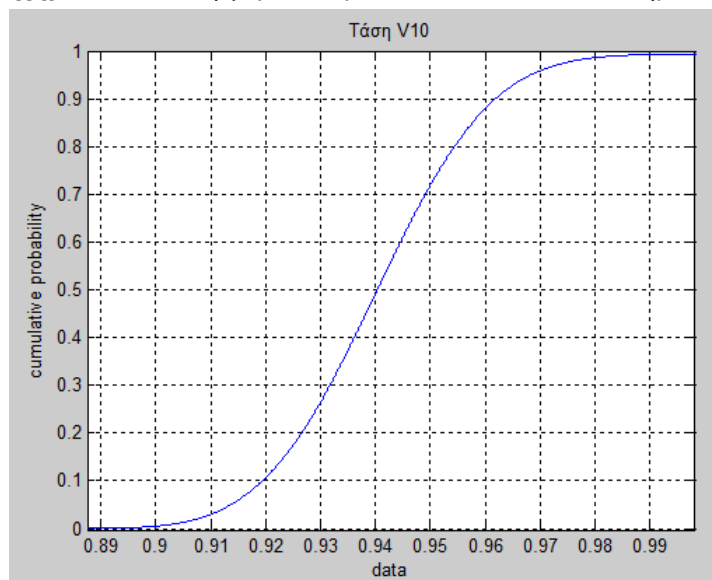
Σχήμα 5.10: Κατανομές για παραγωγή τους ζυγούς 17 και 22

Οι ζυγοί που μας ενδιαφέρουν, όπως αναφέρθηκε, είναι οι ζυγοί 10, 16, 17, 21 και 22 στους οποίους μελετάμε την τάση και την γωνία. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στα ακόλουθα σχήματα σε μορφή αθροιστικής κατανομής (cdf) για επίλυση με Monte – Carlo, Gram – Charlier και Cornish - Fisher . Ενδεικτικά για σύγκριση, στον ζυγό 10 παρατίθενται και τα αποτελέσματα μετά από λύση της μεθόδου γραμμικοποίησης.

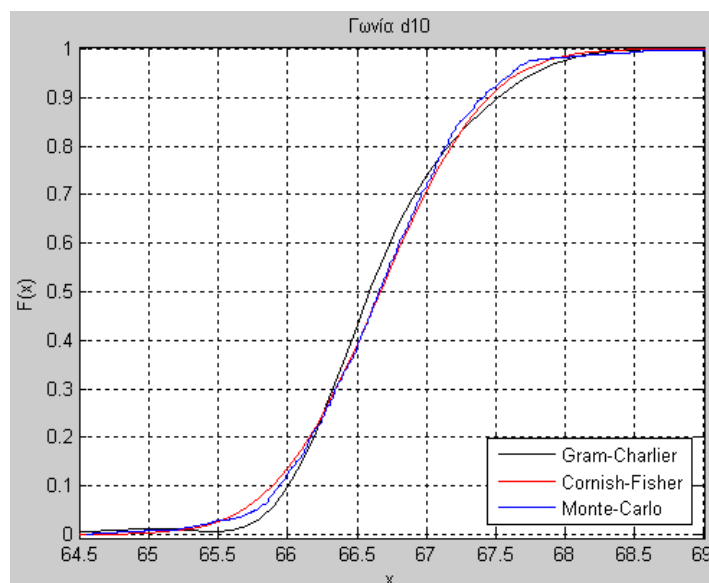
ΖΥΓΟΣ 10



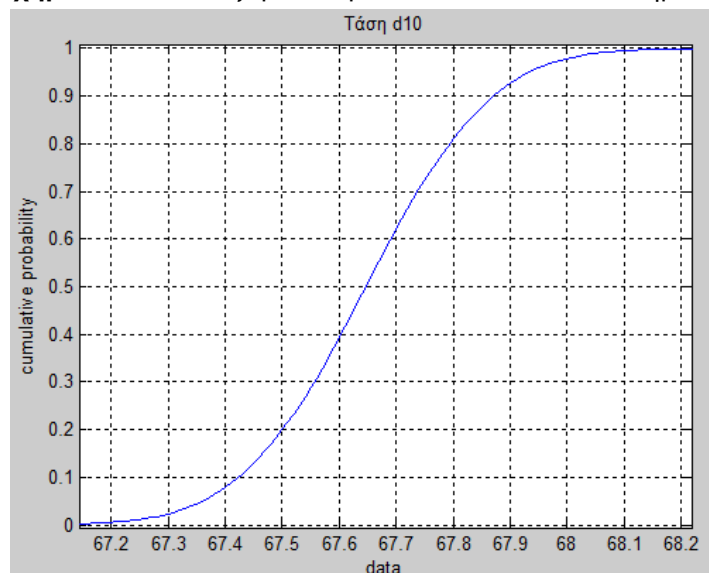
Σχήμα 5.11: Τάση ζυγού 10 για Monte – Carlo 1000 σημείων



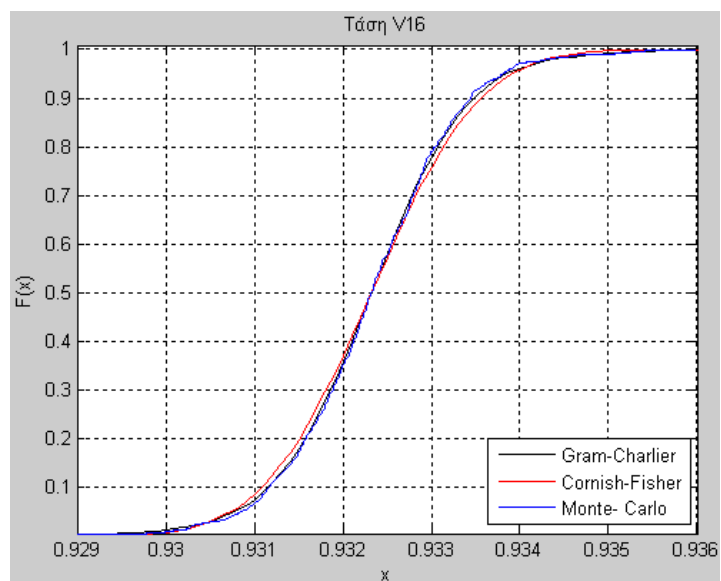
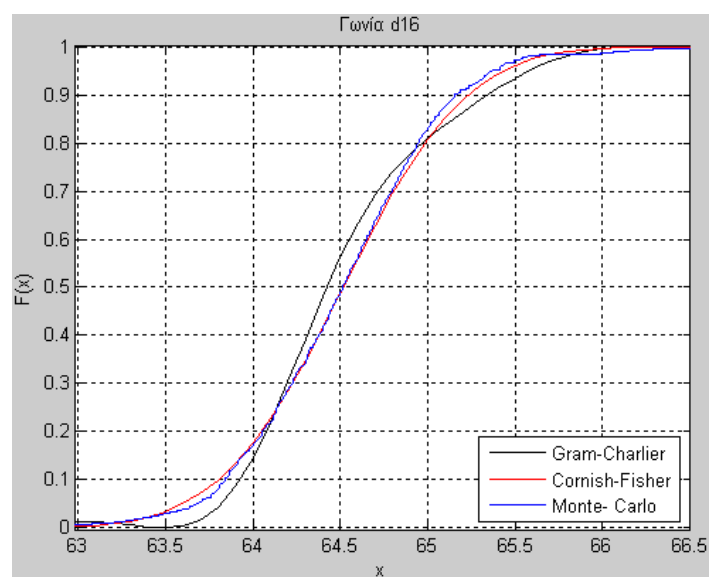
Σχήμα 5.12: Τάση ζυγού 10 για γραμμικοποίηση



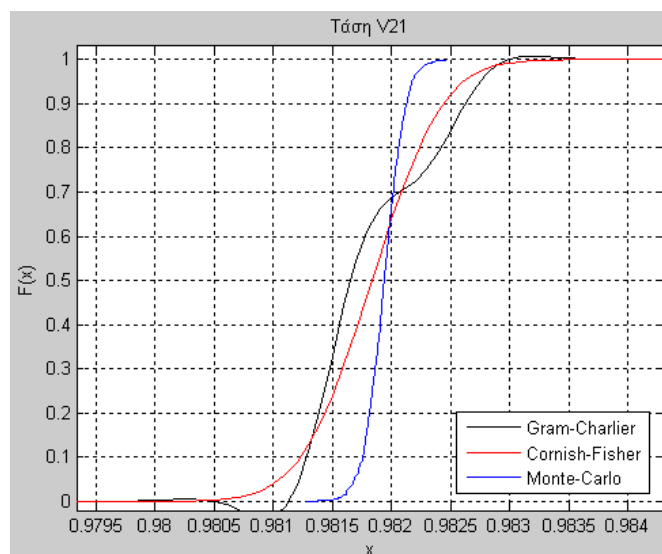
Σχήμα 5.13: Γωνία ζυγού 10 για Monte – Carlo 1000 σημείων



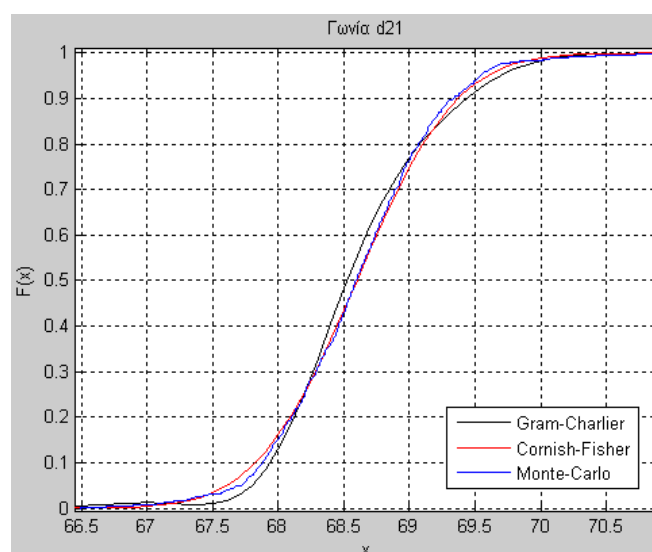
Σχήμα 5.14: Γωνία ζυγού 10 για γραμμικοποίηση

ΖΥΓΟΣ 16**Σχήμα 5.15:** Τάση ζυγού 16 για Monte – Carlo 1000 σημείων**Σχήμα 5.16:** Γωνία ζυγού 16 για Monte – Carlo 1000 σημείων

ΖΥΓΟΣ 21



Σχήμα 5.17: Τάση ζυγού 21 για Monte – Carlo 1000 σημείων



Σχήμα 5.18: Γωνία ζυγού 21 για Monte – Carlo 1000 σημείων

Όπως είναι αναμενόμενο, οι τιμές της γραμμικοποίησης έχουν αποκλίσεις από αυτές της Monte – Carlo. Αυτό οφείλονται στο γεγονός ότι η γραμμικοποίηση γίνεται γύρω από την μέση τιμή, οπότε η ακρίβεια αυξάνει γύρω από αυτήν ενώ ελαττώνεται στα άκρα.

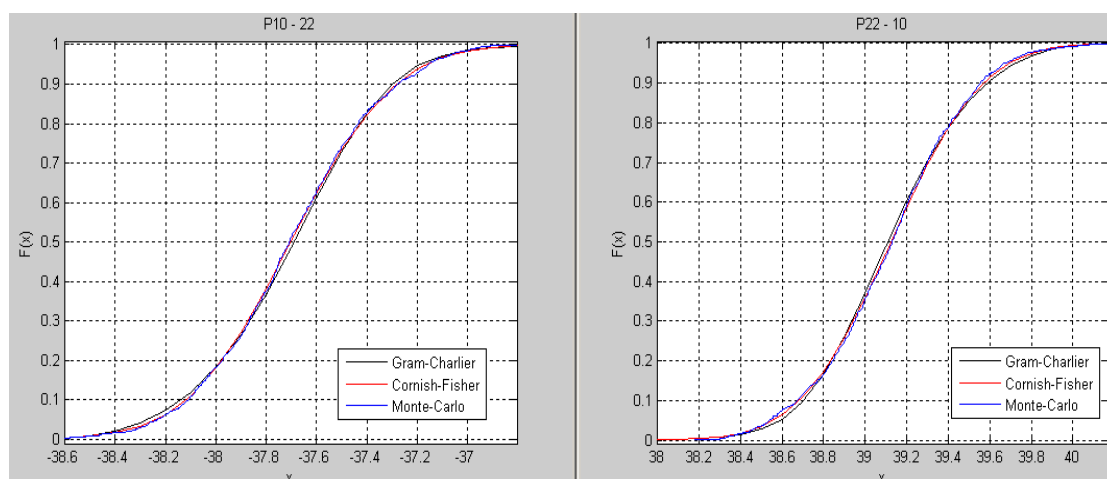
Σημειώνουμε σε αυτό το σημείο ότι η τάση στους ζυγούς 17 και 22 είναι στην περίπτωση αυτή ίση με 1 α.μ (ζυγοί παραγωγής) καθώς και ότι η γωνία αυτών παραμένει σταθερή με το στάδιο 1.

Για να μελετηθεί ένα δίκτυο όμως είναι απαραίτητη η εξέταση και των ρών ισχύος του. Στο εδάφιο αυτό γίνεται εξέταση των ρών στις γραμμές 16 – 17, 10 – 17, 10 – 22 και 21 – 22 και προς τις δυο κατευθύνσεις.

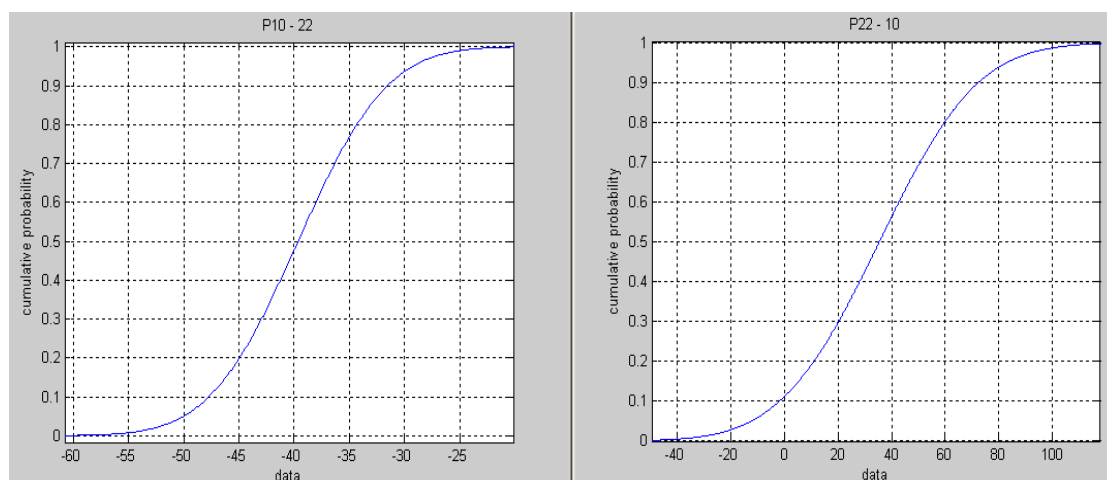
Το πρόβλημα της ροής φορτίου εκτός από την μέθοδο Monte – Carlo που εφαρμόζεται στην ενότητα αυτή, επιλύθηκε μια με την μέθοδο της γραμμικοποίησης γύρω από την μέση τιμή, για να μπορέσουμε να κάνουμε την σύγκριση.

Τα αποτελέσματα της Monte – Carlo για τις γραμμές που εξετάζουμε παρουσιάζονται πλήρως στα επόμενα διαγράμματα ενώ ενδεικτικά για τις γραμμές 10 – 22 και 21 – 22, παρουσιάζονται και τα αποτελέσματα της γραμμικοποίησης.

Οι αποκλίσεις είναι εύκολα αντιληπτές από τα σχήματα.

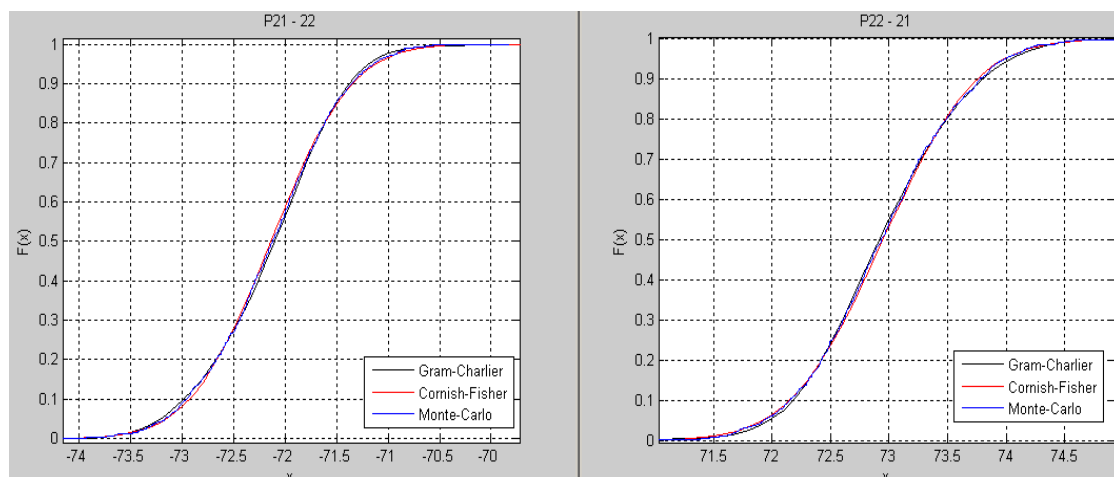


Σχήμα 5.19: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 - 22 για Monte – Carlo 1000 σημείων

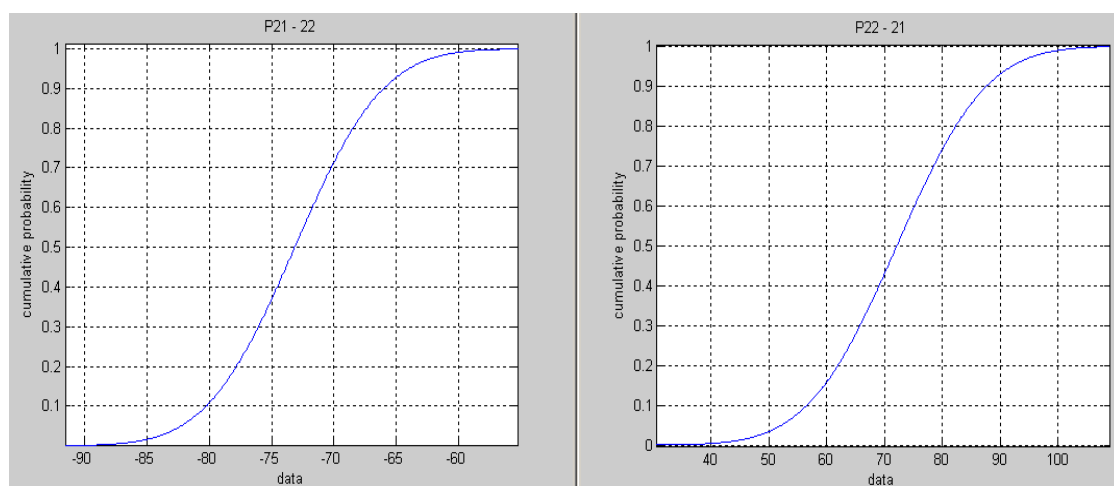


Σχήμα 5.20: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 - 22 με γραμμικοποίηση

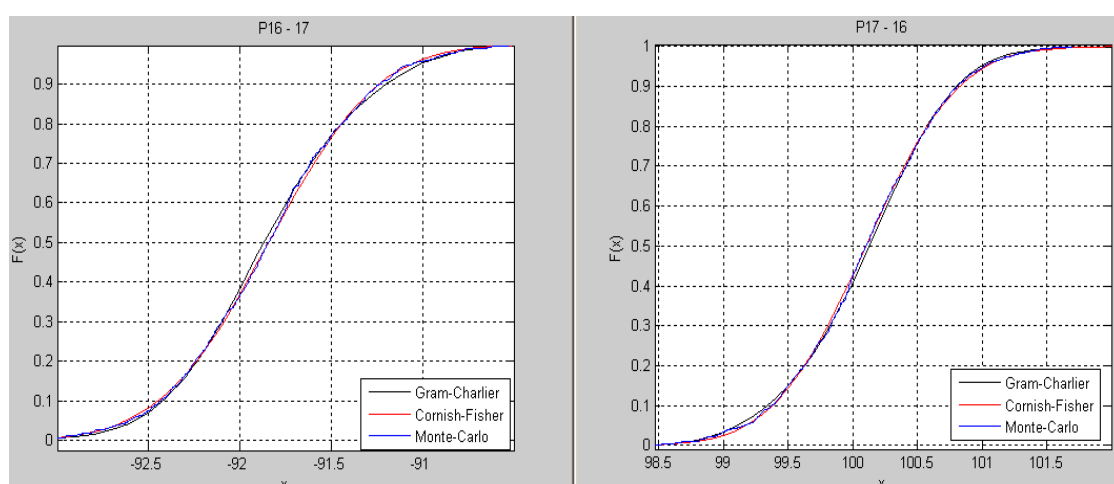
Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων



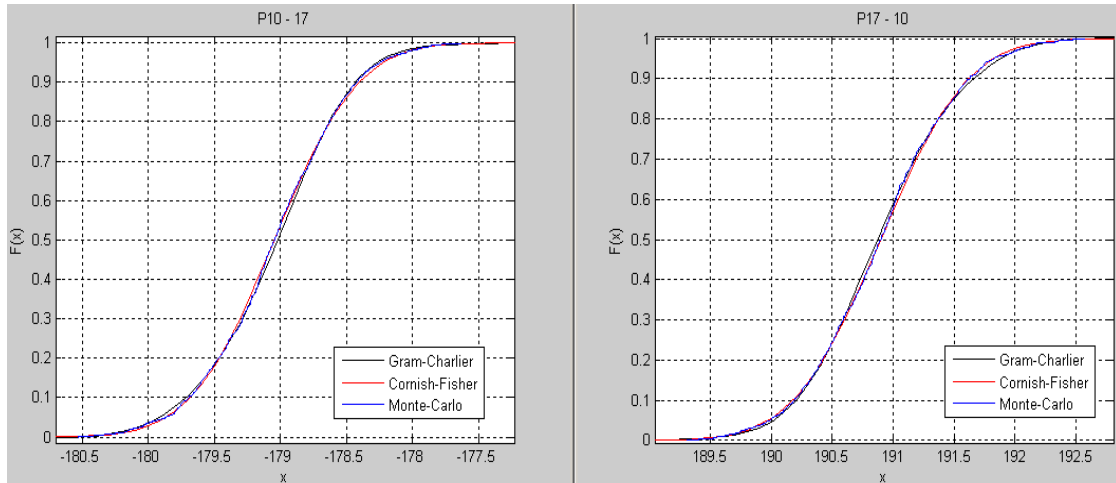
Σχήμα 5.21: Ροή ισχύος στη γραμμή 21 - 22 για Monte – Carlo 1000 σημείων



Σχήμα 5.22: Ροή ισχύος στη γραμμή 21 - 22 με γραμμικοποίηση



Σχήμα 5.23: Ροή ισχύος στη γραμμή 16 - 17 για Monte – Carlo 1000 σημείων



Σχήμα 5.24: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 - 17 για Monte – Carlo 1000 σημείων

Ο συνολικός χρόνος υπολογισμού της μεθόδου Monte – Carlo ήταν 372,6139 seconds. Επιπλέον ο μέσος χρόνος εξαγωγής καθενός από τα παραπάνω διαγράμματα για τις τρεις καμπύλες ταυτόχρονα με δεδομένες τις τιμές της Monte – Carlo ήταν 15 seconds.

Για να μπορούμε να έχουμε και μια ποσοτική σύγκριση των μεθόδων παραθέτουμε τα απόλυτα και σχετικά σφάλματα. Στον πίνακα 5.4 φαίνονται τα σφάλματα αυτά τα οποία εξετάστηκαν στο 90% των τιμών.

Τα σφάλματα του πίνακα 5.4 υπολογίστηκαν για το 90% των τιμών της κάθε μεθόδου. Συγκεκριμένα οι τύποι που χρησιμοποιήθηκαν για τα σχετικά και τα απόλυτα σφάλματα είναι ο ακόλουθος:

$$\text{Σχετικό σφάλμα:} \quad e_i = \left| \frac{p_{90,i}^{CoFi} - p_{90,i}^{MC}}{p_{90,i}^{MC}} \right| \quad (5.1)$$

$$\text{Απόλυτο σφάλμα:} \quad e_i = (p_{90,i}^{CoFi} - p_{90,i}^{MC}), \quad (5.2)$$

όπου $p_{90,i}^{CoFi}$ και $p_{90,i}^{MC}$ είναι οι τιμές στο 90% με την μέθοδο Cornish – Fisher και Monte – Carlo των μεγεθών που εξετάζουμε. Αντίστοιχα το υπολογίζονται τα σφάλματα και με την μέθοδο Gram – Charlier.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε το σχετικό σφάλμα για όλο το δίκτυο τότε χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$e_i = \frac{1}{N_B} \sum_{i=1}^{N_B} \left| \frac{p_{90,i}^{CoFi} - p_{90,i}^{MC}}{p_{90,i}^{MC}} \right| \cdot 100, \quad (5.3)$$

όπου $i=1,2,\dots,N_B$ είναι οι κλάδοι του δικτύου.

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

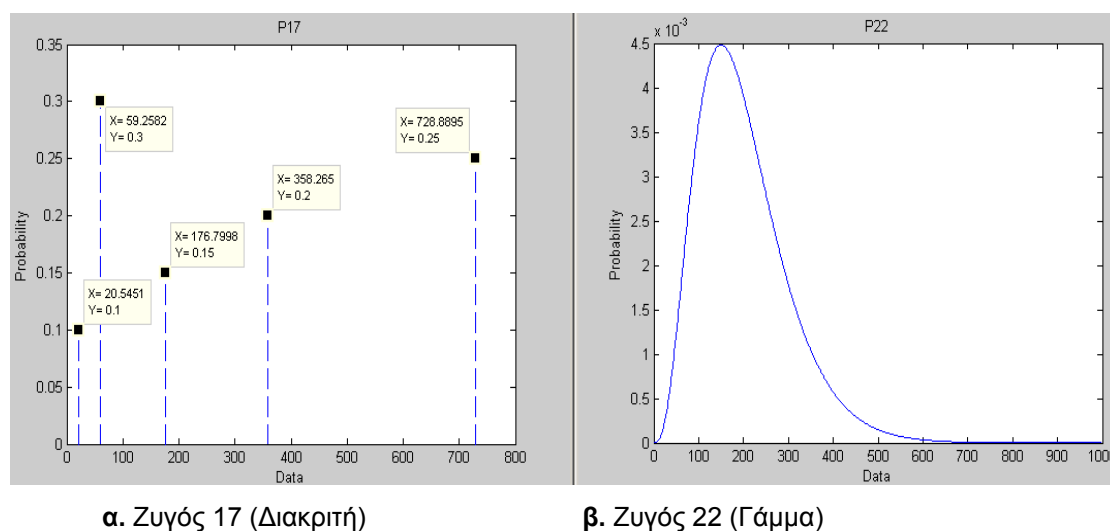
Πίνακας 5.4: Απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεθόδων εξέτασης

Monte - Carlo	Cornish – Fisher (στο 90%)		Gram – Charlier (στο 90%)	
	Απόλυτο σφάλμα (MW)	Σχετικό σφάλμα (%)	Απόλυτο σφάλμα (MW)	Σχετικό σφάλμα (%)
Τάση V10	0,0002	0,0213	0,0001	0,0106
Τάση V16	0,0002	0,0214	0,0001	0,0107
Τάση V21	0,0003	0,0305	0,0005	0,0509
Γωνία d10	0,0400	0,0593	0,1100	0,1632
Γωνία d16	0,0800	0,1230	0,2000	0,3069
Γωνία d21	0,0400	0,0577	0,1000	0,1442
Ροή 16 – 17	-0,0100	0,0109	0,0300	0,0329
Ροή 10 – 17	0,0090	0,0050	-0,0300	0,0168
Ροή 10 – 22	-0,0038	0,0103	-0,0240	0,0640
Ροή 21 – 22	0,0060	0,0084	-0,0310	0,0430
Ροή 17 – 16	0,0150	0,0148	-0,0155	0,0153
Ροή 17 – 10	0,0080	0,0042	0,0310	0,0161
Ροή 22 – 10	0,0130	0,0328	0,0330	0,0834
Ροή 22 – 21	-0,0160	0,0216	0,0270	0,0366

5.3.2. Επίλυση προβλήματος με παραγωγές Διακριτή – Γάμμα

Στην περίπτωση αυτή έγινε μια διαφοροποίηση στην μοντελοποίηση της παραγωγής των ΑΠΕ. Συγκεκριμένα υποθέσαμε πως στον ζυγό 17 έχουμε διακριτή παραγωγή με πέντε σημεία μέσης τιμής 300MW και στον ζυγό 22 παρέμεινε η κατανομή Γάμμα της προηγούμενης εφαρμογής μέσης τιμής 200MW.

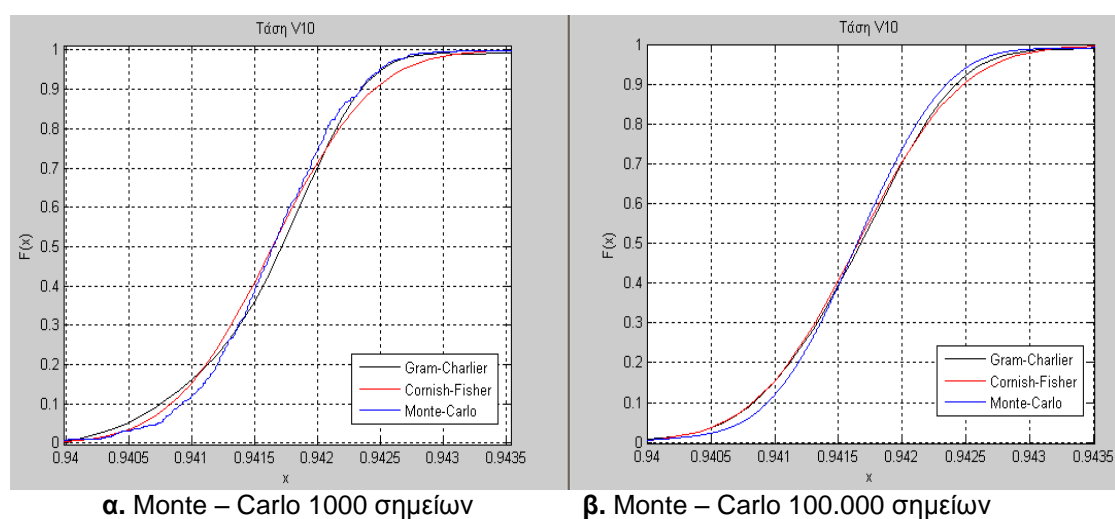
Τα διαγράμματα των κατανομών είναι τα 5.14α και 5.14β.



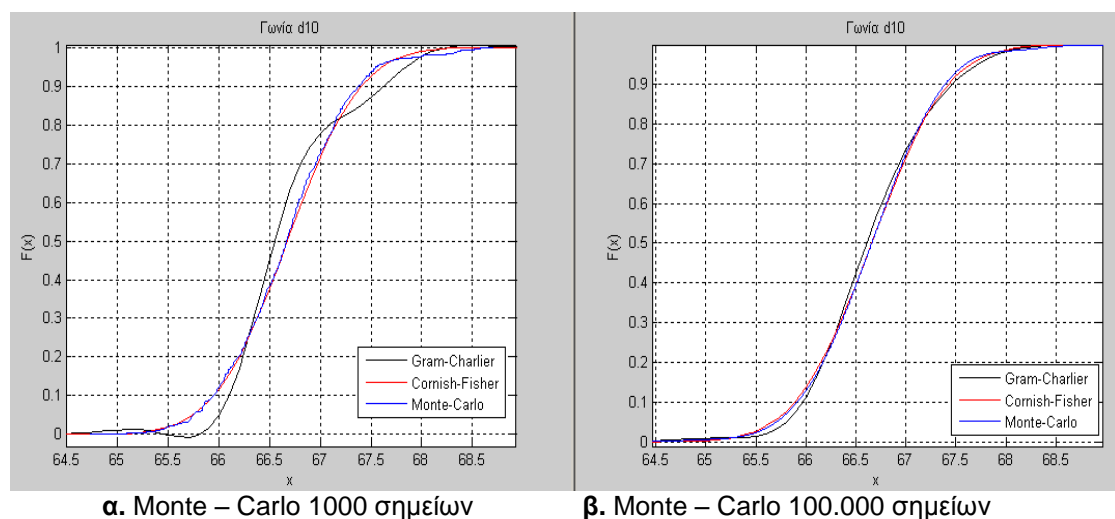
Σχήμα 5.25: Κατανομές για παραγωγή τους ζυγούς 17 και 22

Στην εξέταση αυτής της περίπτωσης, εφαρμόστηκε η μέθοδος Monte – Carlo για 1000 και 100.000 σημεία για να μπορέσουμε να εξετάσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τα αποτελέσματά μας. Ο χρόνος υπολογισμού της μεθόδου Monte – Carlo 1000 σημείων ήταν 1.151,42 seconds ενώ για τα 100.000 σημεία ήταν 40.830,56 seconds. Χρόνος δηλαδή καθόλου αμελητέος.

Στα διαγράμματα που ακολουθούν παρατίθενται οι μεταβλητές με τις μεθόδους Monte – Carlo, Cornish- Fisher και Gram – Charlier. Ο μέσος χρόνος εξαγωγής του καθενός από τα παρακάτω διαγράμματα δεδομένες τις τιμές ήταν 10 seconds. Για καλύτερη εποπτεία τοποθετούνται σε παράθεση τα διαγράμματα των και 1000 και 100000 επαναλήψεων για τα αντίστοιχα μεγέθη.

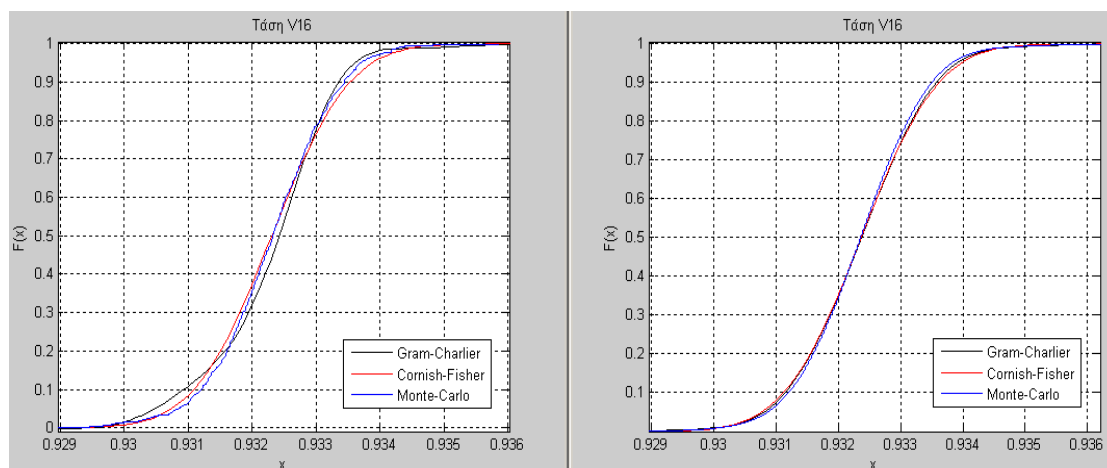


Σχήμα 5.26: Τάση ζυγού 10 (1.000 – 100.000 σημείων)



Σχήμα 5.27: Γωνία ζυγού 10 (1.000 – 100.000 σημείων)

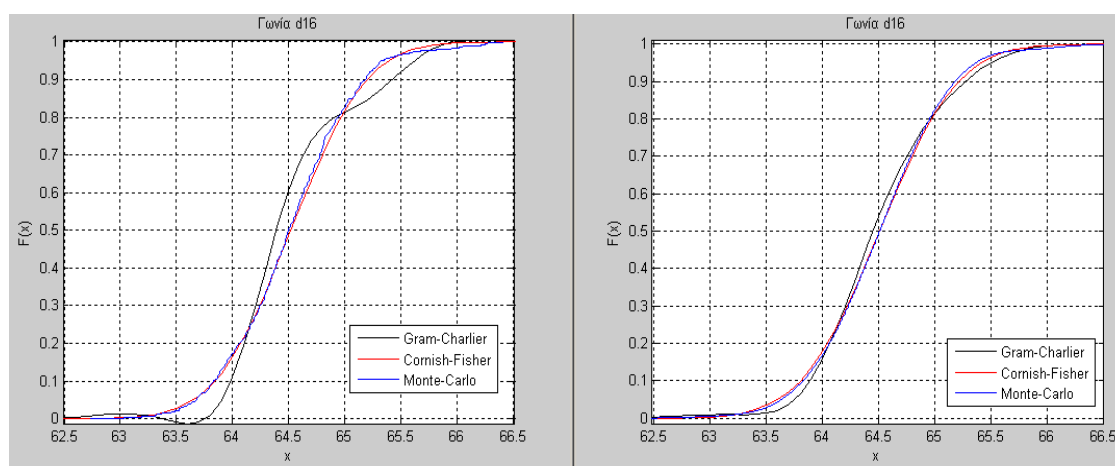
Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

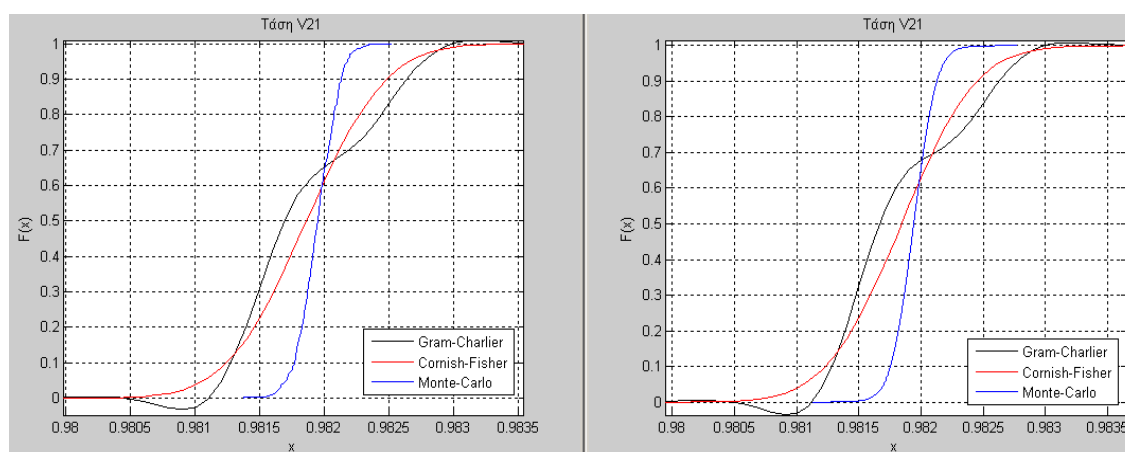
Σχήμα 5.28: Τάση ζυγού 16 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

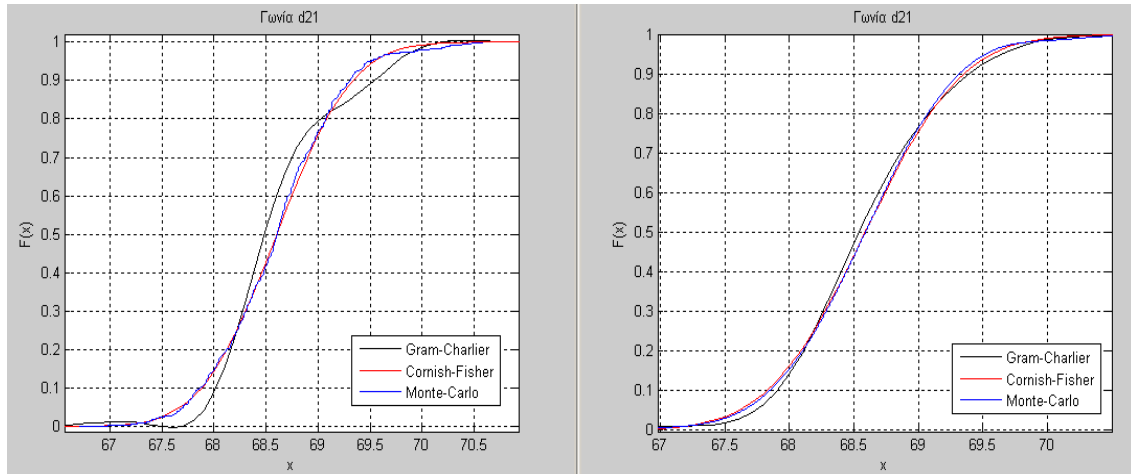
Σχήμα 5.29: Γωνία ζυγού 16 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

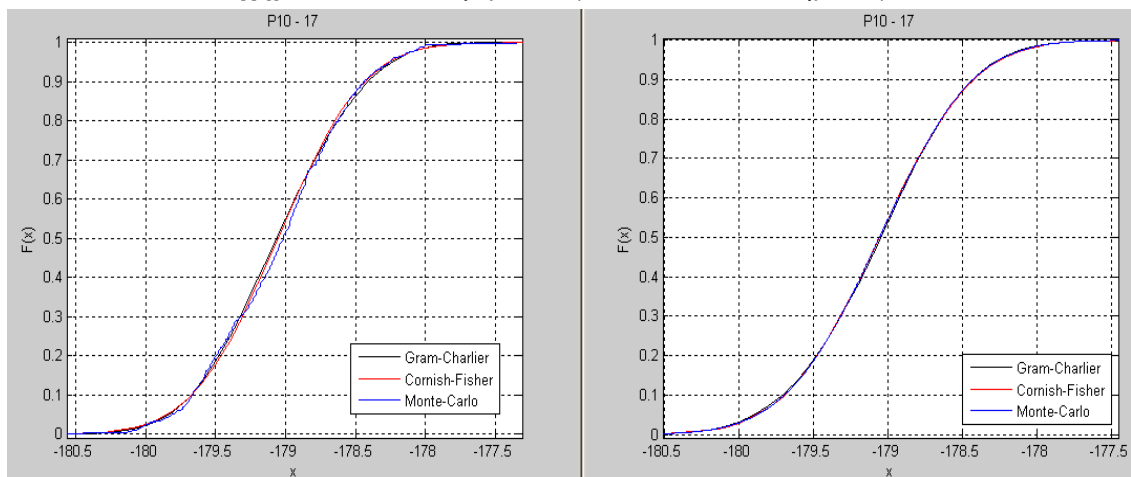
β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

Σχήμα 5.30: Τάση ζυγού 21 (1.000 – 100.000 σημείων)



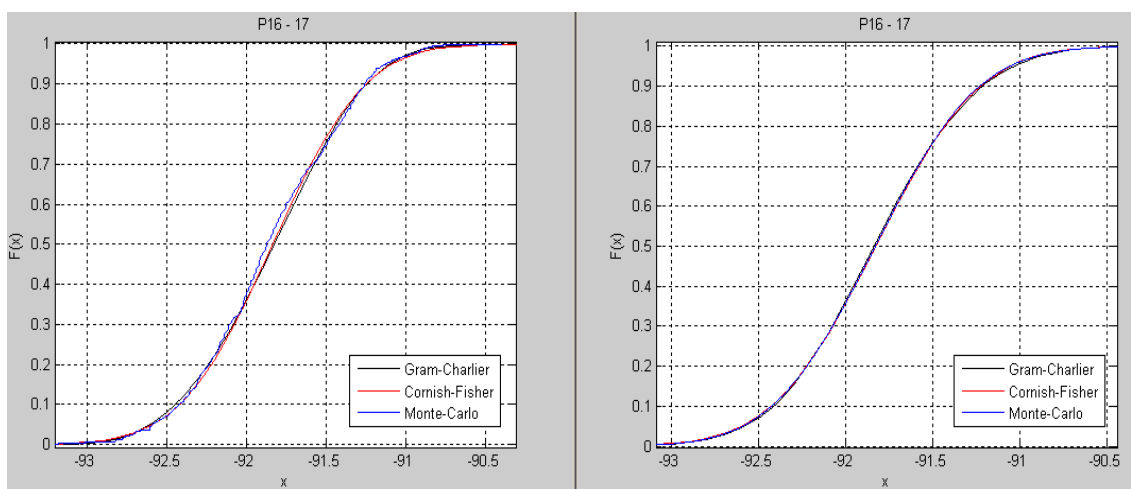
α. Monte – Carlo 1000 σημείων β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

Σχήμα 5.31: Γωνία ζυγού 21 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

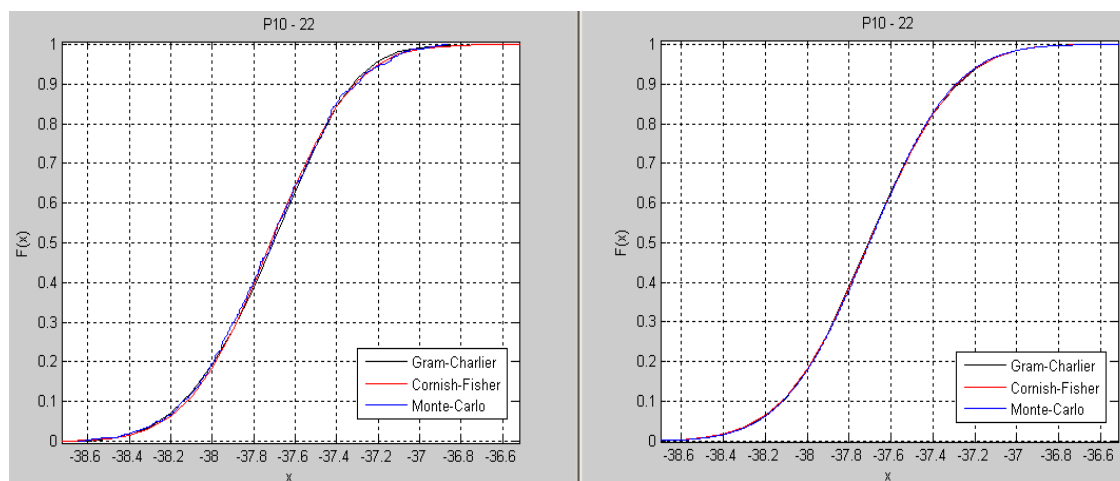
Σχήμα 5.32: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 – 17 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

Σχήμα 5.33: Ροή ισχύος στη γραμμή 16 – 17 (1.000 – 100.000 σημείων)

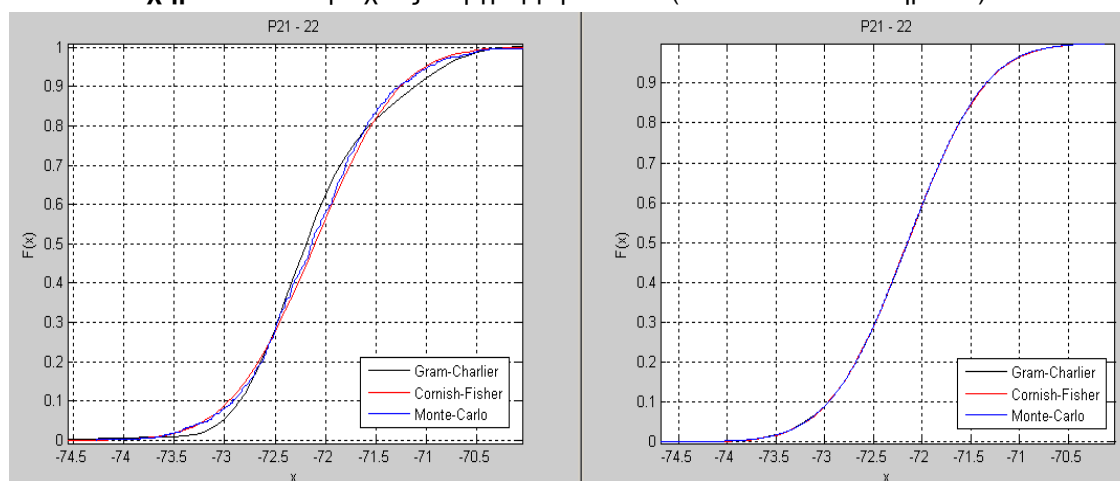
Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

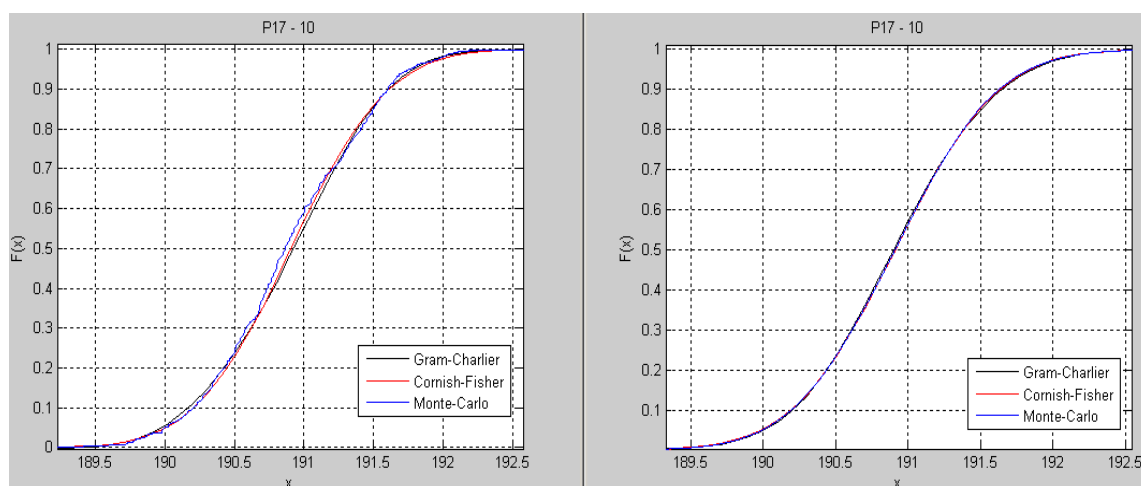
Σχήμα 5.34: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 – 22 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

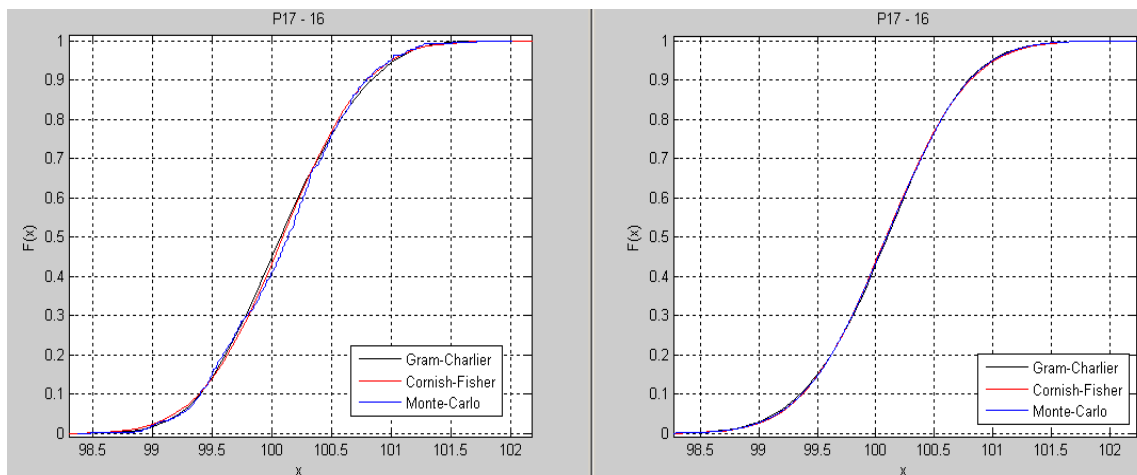
Σχήμα 5.35: Ροή ισχύος στη γραμμή 21 – 22 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

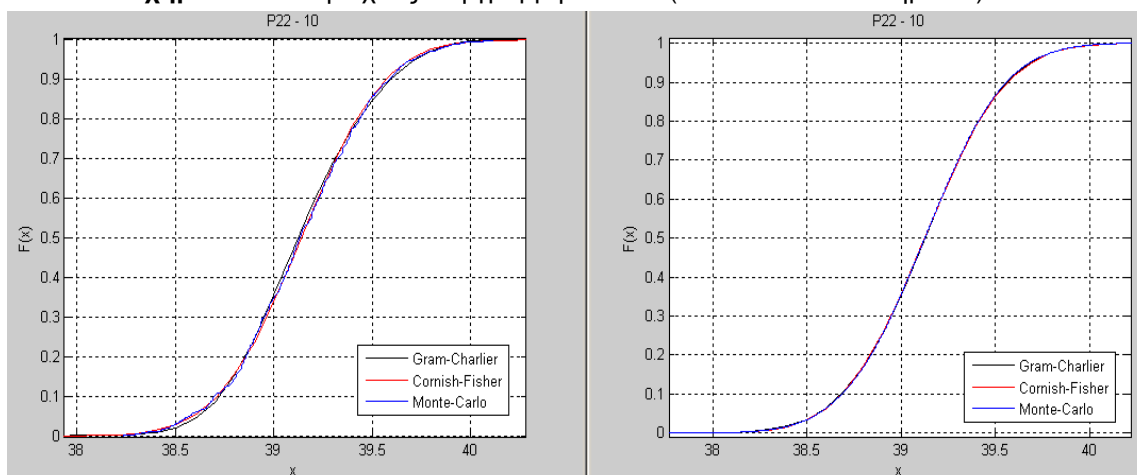
Σχήμα 5.36: Ροή ισχύος στη γραμμή 17 – 10 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

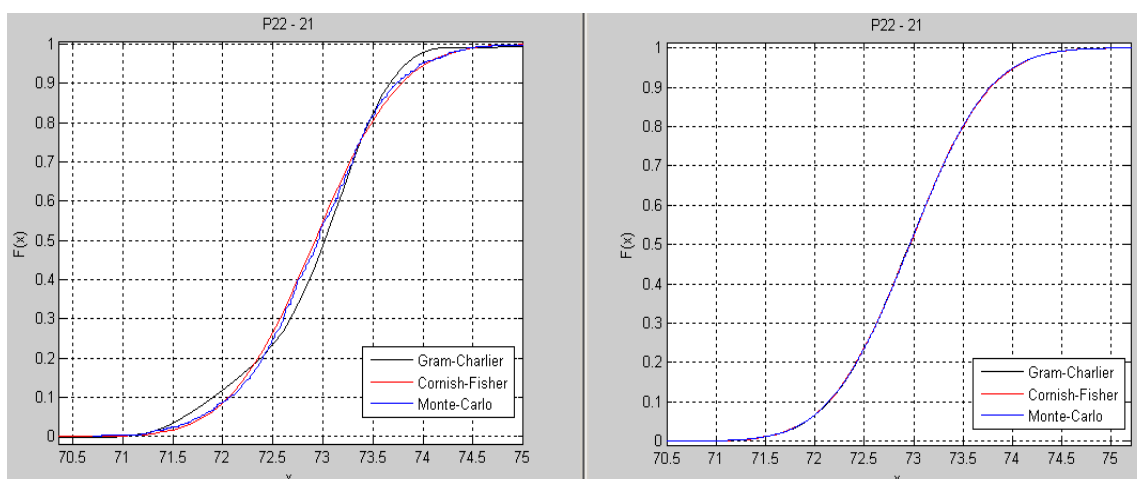
Σχήμα 5.37: Ροή ισχύος στη γραμμή 17 – 16 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

Σχήμα 5.38: Ροή ισχύος στη γραμμή 22 – 10 (1.000 – 100.000 σημείων)



α. Monte – Carlo 1000 σημείων

β. Monte – Carlo 100.000 σημείων

Σχήμα 5.39: Ροή ισχύος στη γραμμή 22 – 21 (1.000 – 100.000 σημείων)

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση με τις δυο Γάμμα κατανομές για να μπορούμε να έχουμε και μια ποσοτική σύγκριση των μεθόδων παραθέτουμε τα απόλυτα και σχετικά σφάλματα. Στον πίνακα 5.4 φαίνονται τα σφάλματα αυτά τα οποία εξετάστηκαν στο 90% των τιμών για την εφαρμογή των 1000 σημείων.

Πίνακας 5.5: Απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεθόδων εξέτασης (1000 σημείων)

Monte - Carlo	Cornish – Fisher (στο 90%)		Gram – Charlier (στο 90%)	
	Απόλυτο σφάλμα (MW)	Σχετικό σφάλμα (%)	Απόλυτο σφάλμα (MW)	Σχετικό σφάλμα (%)
Τάση V10	0,00020	0,0210	0,0001	0,0106
Τάση V16	0,0002	0,0214	0,0001	0,0107
Τάση V21	0,0004	0,0407	0,0005	0,0509
Γωνία d10	0,0200	0,0297	0,2500	0,3710
Γωνία d16	0,0200	0,0306	0,2700	0,4140
Γωνία d21	0,0200	0,0297	0,2700	0,3890
Ροή 16 – 17	0,0080	0,0087	0,0100	0,0109
Ροή 10 – 17	0,0030	0,0017	0,0230	0,0129
Ροή 10 – 22	0,0070	0,0188	0,0180	0,0482
Ροή 21 – 22	0,0100	0,0140	0,1500	0,2100
Ροή 17 – 16	0,0050	0,0050	0,0600	0,0595
Ροή 17 – 10	0,0050	0,0026	0,0150	0,0078
Ροή 22 – 10	-0,0100	0,0266	0,0120	0,0303
Ροή 22 – 21	0,0800	0,1080	0,1200	0,1630

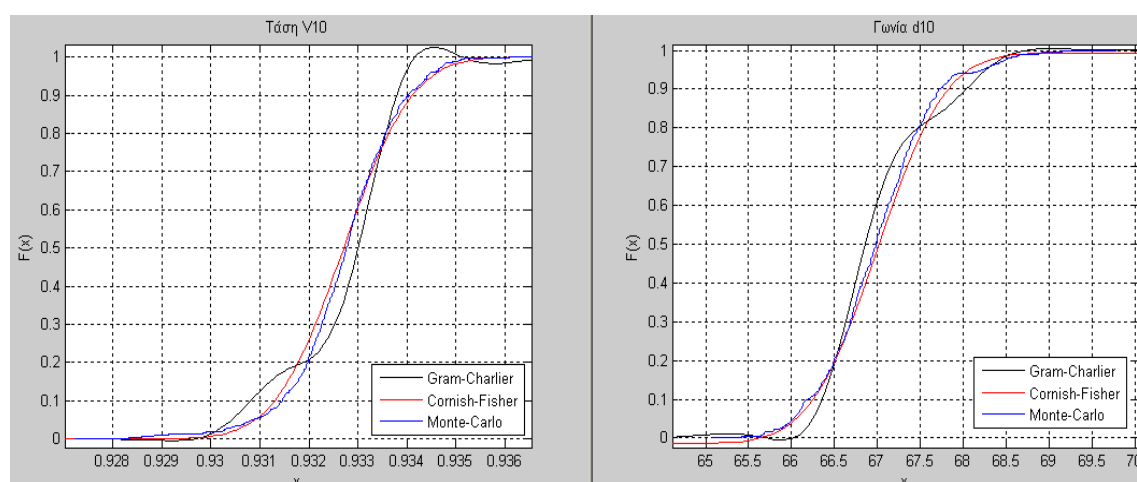
5.3.3. Επίλυση προβλήματος με κατανομές Διακριτή – Γάμμα όπου ο ζυγός 17 θεωρήθηκε ζυγός PQ

Στην ενότητα αυτή, θεωρήσαμε ότι ο ζυγός 17, με την δεδομένη διακριτή κατανομή όπως αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.25α χαρακτηρίζεται ως ζυγός φορτίου (PQ) και όχι ως ζυγός παραγωγής. Ο ζυγός 22 παραμένει ζυγός παραγωγής με την δεδομένη κατανομή Γάμμα που φαίνεται στο σχήμα 5.25β.

Η εξέταση αυτή γίνεται για να δούμε πόσο επηρεάζονται τα μεγέθη που σχετίζονται με τον ζυγό 17 από το χαρακτηρισμό του και μόνο. Συγκεκριμένα, παρακάτω, φαίνονται τα γραφικά αποτελέσματα του ζυγού 17 καθώς και των ζυγών 10 και 16 που συνδέονται άμεσα με αυτόν.

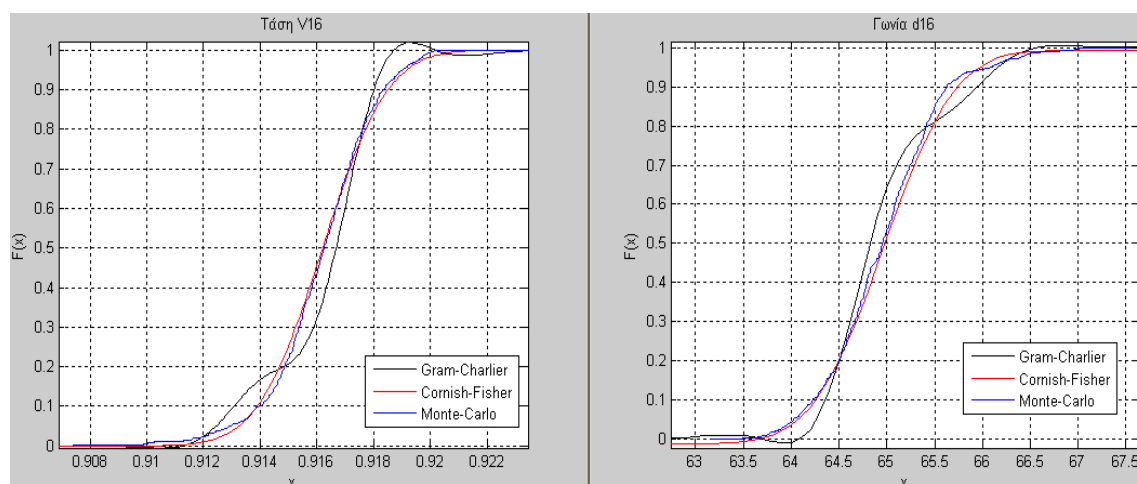
Η εξέταση της περίπτωσης αυτής προσομοιώθηκε με την μέθοδο Monte – Carlo 1000 σημείων καθώς επίσης και με τις πιθανοτικές μεθόδους Cornish – Fisher και Gram – Charlier.

Ο χρόνος υπολογισμού της Monte – Carlo διήρκεσε 1.323,9373 seconds. Ο μέσος χρόνος εξαγωγής του καθενός από τα παρακάτω διαγράμματα είναι 10 seconds.

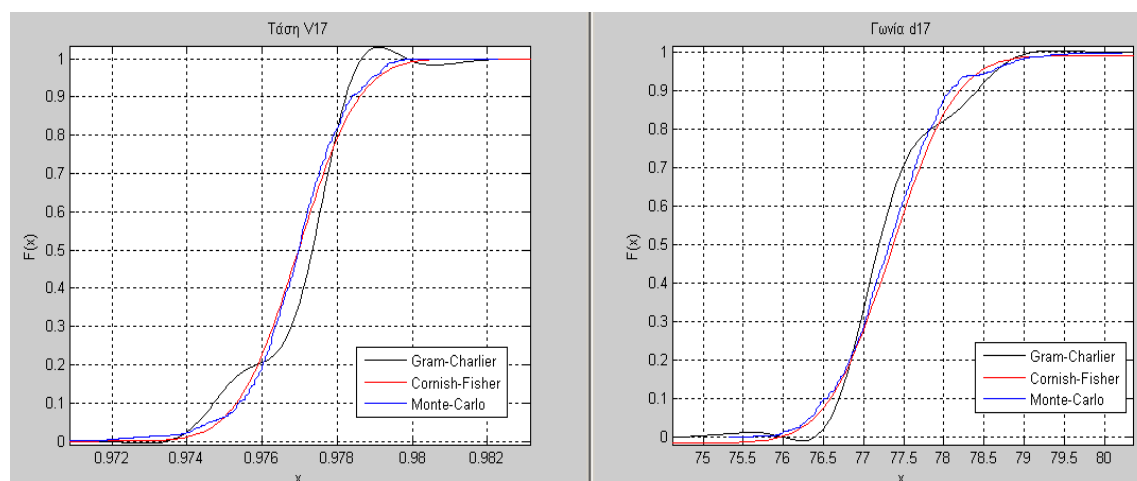


Σχήμα 5.40: Τάση – Γωνία ζυγού 10 (1.000 σημείων)

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

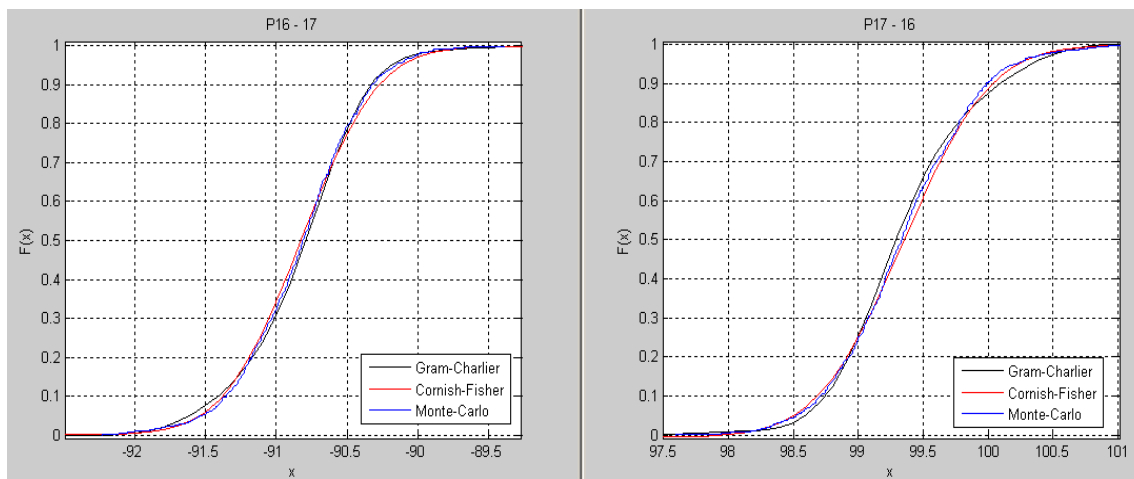


Σχήμα 5.41: Τάση – Γωνία ζυγού 16 (1.000 σημείων)

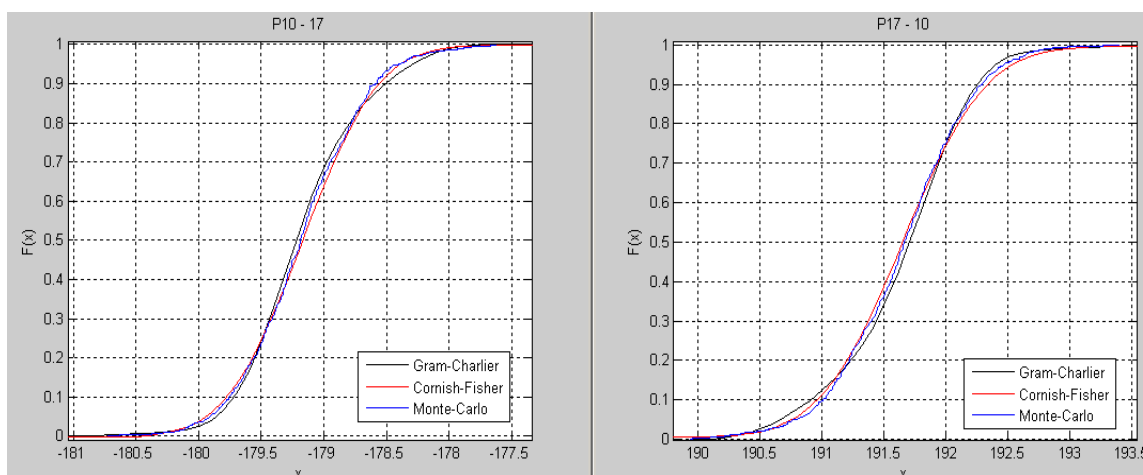


Σχήμα 5.42: Τάση – Γωνία ζυγού 17 (1.000 σημείων)

Ενδεικτικά παρουσιάζονται και οι ροές ισχύος και προς τις δυο κατευθύνσεις, στις γραμμές 16 – 17 και 10 – 17, καθώς φαίνεται ότι παρουσιάζουν κάποιες αποκλίσεις από τις αντίστοιχες της ενότητας 5.3.2.



Σχήμα 5.43: Ροή ισχύος στη γραμμή 16 – 17 (1.000 σημείων)



Σχήμα 5.44: Ροή ισχύος στη γραμμή 10 – 17 (1.000 σημείων)

Στον πίνακα 5.5 φαίνονται και τα σφάλματα των μεθόδων Cornish – Fisher και Gram – Charlier σε σχέση με την Monte – Carlo στο 90% των τιμών της περίπτωσης αυτής.

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Πίνακας 5.6: Απόλυτα και σχετικά σφάλματα μεθόδων εξέτασης

Monte - Carlo	Cornish – Fisher (στο 90%)		Gram – Charlier (στο 90%)	
	Απόλυτο σφάλμα (MW)	Σχετικό σφάλμα (%)	Απόλυτο σφάλμα (MW)	Σχετικό σφάλμα (%)
Τάση V10	0,0001	0,0107	-0,0002	0,0214
Τάση V16	0,0002	0,0218	-0,0003	0,0327
Τάση V17	0,0002	0,0204	-0,0002	0,0204
Γωνία d10	0,1	0,1476	0,33	0,487
Γωνία d16	0,12	0,183	0,32	0,473
Γωνία d17	0,12	0,1537	0,32	0,409
Ροή 16 – 17	0,05	0,0553	-0,01	0,011
Ροή 10 – 17	0,02	0,0112	0,07	0,0392
Ροή 17 – 16	0,05	0,05	0,11	0,11
Ροή 17 – 10	0,05	0,026	-0,03	0,015

Στις μελέτες εφαρμογών ροής φορτίου ο χρόνος υπολογισμού διαδραματίζει σημαντικό ρόλο, καθώς με βάση τον χρόνο χαρακτηρίζουμε μια λύση ως αποδοτική. Αυτό γίνεται αντιληπτό στη μελέτη μεγάλων και πολύπλοκων δικτύων, όπου η διαδικασία υπολογισμού γίνεται αρκετά σύνθετη. Στους πίνακες 5.7 και 5.8 παρουσιάζουμε συγκεντρωμένα αποτελέσματα των μέσων χρόνων υπολογισμού για κάθε εφαρμογή και μέθοδο.

Πίνακας 5.7: Χρόνοι υπολογισμού για εφαρμογή χωρίς χρήση ΑΠΕ

Εφαρμογή χωρίς χρήση ΑΠΕ	
Μέθοδος	Χρόνος (seconds)
Στατιστικά θεωρήματα	1,42
Γραμμικοποίηση	10.55

Πίνακας 5.8: Χρόνοι υπολογισμού για εφαρμογή με χρήση ΑΠΕ

Εφαρμογή με χρήση ΑΠΕ				
	Γάμμα – Γάμμα (1000 σημείων)	Διακριτή – Γάμμα (1000 σημείων)	Διακριτή – Γάμμα (100.000 σημείων)	Διακριτή – Γάμμα και ζυγός 17 PQ (1000 σημείων)
Μέθοδος	Χρόνοι (seconds)			
Monte – Carlo	372,6139	1.151,42	40.830,56	1.323,9373
Cornish– Fisher	2,8	3,4	3,2	2,8
Gram – Charlier	2,1	4,9	8,2	8,1
Γραμμικοποίησης	19,1	21,2	26,2	22,1

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΜΕΛΕΤΗ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ ΜΕ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

6.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα τελευταία χρόνια η ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών καθώς και η στροφή της επιστήμης σε λύσεις με περιβαλλοντολογική μέριμνα, οδήγησαν στην επιθυμία ανάπτυξης ηλεκτροκίνητων μεταφορών. Η είσοδος λοιπόν των ηλεκτρικών οχημάτων (EV) στην αγορά θέτει νέα ζητήματα στα συστήματα ενέργειας καθώς αυτά θα πρέπει να διαχειριστούν το νέο αυτό φορτίο.

Έως τώρα δεν υπάρχει ένας καθορισμένος τρόπος μοντελοποίησης του συστήματος τροφοδότησης ηλεκτρικών οχημάτων, το οποίο να μπορεί να ενσωματωθεί σε μεθόδους επίλυσης ροή φορτίου. Στην ενότητα αυτή θα γίνει μια προσέγγιση στο πρόβλημα αυτό.

Συγκεκριμένα θα προσεγγιστεί ένα μοντέλο το οποίο θα θεωρεί την ζήτηση των ηλεκτρικών οχημάτων (EV) σαν ζυγούς φορτίου (PQ) ένας συστήματος, με στοχαστικά χαρακτηριστικά. Το μοντέλο που θα αναπτυχθεί είναι βασισμένο στην θεωρία των συστημάτων αναμονής. Οι ενεργές και άεργες ισχείς του μοντέλου είναι αναπτυγμένες ως συναρτήσεις του χρόνου φόρτισης, του χρόνου σύνδεσης δηλαδή των οχημάτων στο δίκτυο. Στην περίπτωση αυτή θα μελετηθεί ένα συγκεκριμένο μοντέλο ηλεκτρικών οχημάτων το οποίο είναι το Tesla Roadster EV.

6.2. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ ΜΕΛΕΤΕΣ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ [21]

Είναι γνωστό ότι τα συστήματα άμεσης τροφοδότησης των ηλεκτρικών αυτοκινήτων είναι οι συσσωρευτές (μπαταρίες). Οι συσσωρευτές αυτοί είναι χημικές μονάδες αποθήκευσης, και η φόρτιση / εκφόρτιση τους είναι συνάρτηση του χρόνου.

Στην περίπτωση μας, και συγκεκριμένα για τα οχήματα Tesla Roadster EV, η στιγμιαία κατάσταση της μπαταρίας μπορεί να προσεγγιστεί από τον ακόλουθο τύπο:

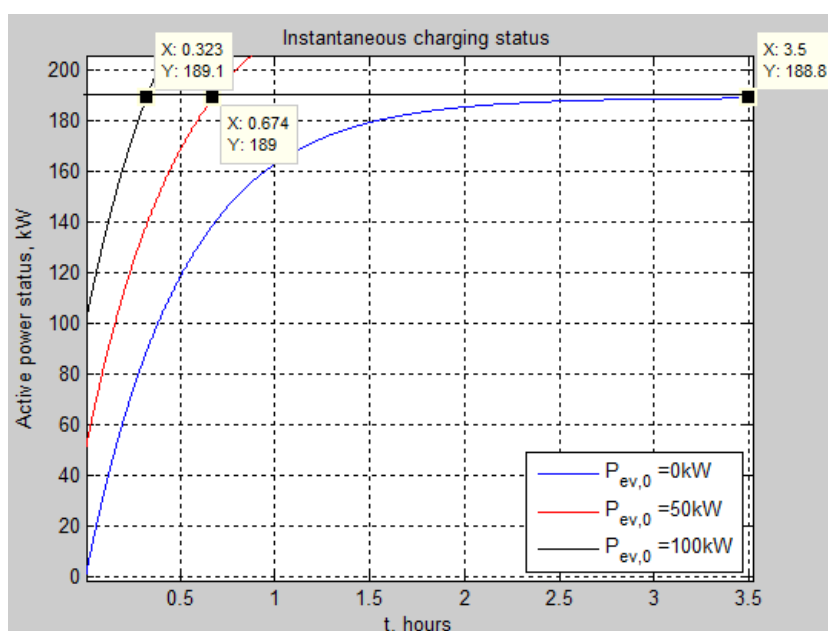
$$P_{EV}(t) = P_{EV,max} \cdot (1 - e^{-at/t_{max}}) + P_{EV,0} \quad (6.1)$$

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Όπου, η κατάσταση της μπαταρίας σε ισχύ συμβολίζεται με $P_{EV,0}$ και μετράται σε kW. Η μέγιστη χωρητικότητα στα οχήματα Tesla Roadster EV είναι $P_{EV,max} = 189kW$ και ο μέγιστος χρόνος φόρτισης είναι $t_{max} = 3,5$ ώρες. Η παράμετρος α υπολογίζεται ως $\alpha = 6,9077$, υποθέτοντας ότι μια πλήρως αποφορτισμένη μπαταρία, δηλαδή για $P_{EV,0} = 0kW$ έχει απορροφήσει το 90% της μέγιστης χωρητικότητας της, σε χρόνο περίπου $t_{max} / 3 = 70$ min

Το σχήμα 6.1 δείχνει την πρόοδο φόρτισης του συστήματος μπαταριών ενός οχήματος Tesla Roadster για τρεις διαφορετικές αρχικές καταστάσεις της μπαταρίας,

$$P_{EV,0} = 0kW , P_{EV,0} = 50kW \text{ και } P_{EV,0} = 100kW .$$



Σχήμα 6.1: Στιγμαία κατάσταση φόρτισης οχήματος

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, όταν η αρχική κατάσταση της μπαταρίας είναι

$P_{EV,0} = 0kW$, τότε το σύστημα χρειάζεται 3,5 ώρες για πλήρη φόρτιση. Αντίστοιχα

για $P_{EV,0} = 50kW$ και $P_{EV,0} = 100kW$ η διάρκεια πλήρους φόρτισης είναι 0,6737 ώρες και 0,3225 ώρες.

Ο χρόνος δηλαδή για να φορτιστεί πλήρως ένα όχημα είναι σχετικός με την κατάσταση ισχύος αυτού την χρονική στιγμή έναρξης της φόρτισης.

Από την σχέση (6.1), αν ένα όχημα χρειάζεται t_c ώρες να φορτιστεί, τότε είναι φανερό ότι:

$$P_{EV,0} = P_{EV,max} \cdot e^{-at_c/t_{max}} \quad (6.2)$$

Ένα διασυνδεδεμένο στο δίκτυο όχημα έχει την δυνατότητα να απορροφά αλλά και να αποδίδει ισχύ στο δίκτυο όταν η περίπτωση το απαιτεί.

Αν υποθεθεί ότι ένα όχημα συνδεδεμένο σε ζυγό απαιτεί t_d ώρες για να φορτιστεί πλήρως τότε σύμφωνα με την σχέση (6.1) η ζήτηση ενεργού ισχύος για το ηλεκτρικό αυτό όχημα από το δίκτυο είναι:

$$P_{EV,dem} = P_{EV,max} \cdot (1 - e^{-a \cdot t_d / t_{max}}) \quad (6.3)$$

Αν υποθεθεί ότι ένα συνδεδεμένο σε ζυγό ηλεκτρικό όχημα απαιτεί $t_s = t_{max} - t_d$ ώρες για να αποφορτιστεί πλήρως, τότε η ενεργός έγχυση του στο δίκτυο είναι:

$$P_{EV,Supply} = P_{EV,max} \cdot e^{-a \cdot t} \cdot e^{a \cdot t_s / t_{max}} \quad (6.4)$$

Η ζήτηση αέργου ισχύος αντίστοιχα και για τις δυο περιπτώσεις δίνεται από τον τύπο:

$$Q_{EV,dem} = 0,0 \quad (6.5)$$

Σημειώνουμε ότι στο κεφάλαιο αυτό, οποιαδήποτε αναφορά σε ηλεκτρικά οχήματα αναφέρεται συγκεκριμένα στα οχήματα Tesla Roadster EV.

6.3. ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΖΗΤΗΣΗΣ ΙΣΧΥΟΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΟΧΗΜΑΤΩΝ

Στη συγκεκριμένη αναφορά, το μοντέλο της ζήτησης ισχύος ηλεκτρικών οχημάτων σε κάθε ζυγό αναπτύσσεται, βασιζόμενο στο μοντέλο εξυπηρέτησης των συστημάτων αναμονής [22].

Στο σύστημα $M/M/n_{max}$, M είναι η εκθετική κατανομή των εισερχόμενων οχημάτων για φόρτιση, με μέση τιμή χρόνου αφίξεων $1/\lambda$, μέση τιμή χρόνου εξυπηρέτησης $1/\mu$, και μέγιστο αριθμό παράλληλων οχημάτων για φόρτιση σε κάθε ζυγό n_{max} (το τελευταίο ονομάζεται και χωρητικότητα φόρτισης το ζυγού).

Υποθέτοντας ότι δεν υπάρχει καθυστέρηση κατά την άφιξη του οχήματος και μέχρι την έναρξη της φόρτισης του, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οριακά ο

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

ρυθμός εισόδου στο ζυγό είναι ίσος με τον ρυθμό εξόδου από αυτόν. Δηλαδή ο ρυθμός ένταξης για φόρτιση ενός οχήματος είναι ίσος με τον ρυθμό φόρτισης ενός οχήματος: $\lambda = \mu$. Έτσι ο ρυθμός εξυπηρέτησης σε κάθε ζυγό είναι:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu \cdot n_{\max}} \approx \frac{1}{n_{\max}}. \quad (6.6)$$

Θεωρούμε ότι $\rho(n)$ είναι η πιθανότητα να βρίσκεται ένα n - EV σύστημα σε διαδικασία φόρτισης σε κάθε ζυγό. Σύμφωνα με το σύστημα αναμονής $M/M/n_{\max}$, η πιθανότητα $\rho(n)$ δίνεται από τη σχέση (6.6).

$$p(n) \approx \frac{\frac{1}{n!}}{\sum_{i=0}^{n_{\max}-1} \frac{1}{i!} + \frac{1}{(1 - \frac{1}{n_{\max}}) \cdot n_{\max}!}} \quad (6.7)$$

όπου $n=0,1,2,\dots,n_{\max}$.

Για να μπορέσουμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό οχημάτων που φορτίζονται ταυτόχρονα σε έναν ζυγό, δημιουργούμε με τυχαίο διακριτό τρόπο ένα αριθμό r ο οποίος μπορεί να δεχτεί τιμές από 0 μέχρι 1. Από το σύνολο αριθμών $[0,1,\dots,n_{\max}]$, θέτουμε n την μικρότερη τιμή η οποία ικανοποιεί την συνθήκη

$$r[0,1] > p(n). \quad (6.8)$$

Ο χρόνος πλήρους φόρτισης, (ή χρόνος εξυπηρέτησης όπως φαίνεται από την οπτική της θεωρίας συστημάτων αναμονής), ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή $\frac{1}{\mu \cdot n_{\max}}$. Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αυτής της κατανομής δίνεται από την σχέση:

$$f(t_c) = \mu \cdot n_{\max} \cdot e^{-\mu \cdot n_{\max} \cdot t_c} \quad (6.9)$$

Για την προσομοίωση του χρόνου φόρτισης t_c καθενός οχήματος i σε κάθε ζυγό, χρησιμοποιούμε πάλι τυχαίες διακριτές τιμές που ανήκουν στο διάστημα $(0,1]$. Έτσι έχουμε:

$$t_{ci} = \begin{cases} t_{\max} & \text{αν } r(0,1) < \mu \cdot n_{\max} \cdot e^{-\mu \cdot n_{\max} \cdot t_{\max}} \\ -\frac{1}{\mu \cdot n_{\max}} \cdot \ln\left(\frac{r(0,1)}{\mu \cdot n_{\max}}\right) & \text{αν } r(0,1) \geq \mu \cdot n_{\max} \cdot e^{-\mu \cdot n_{\max} \cdot t_{\max}} \end{cases} \quad (6.10)$$

Με βάση την ανάπτυξη αυτή, ένα σύστημα από n οχήματα Tesla Roadster απαιτεί από το δίκτυο συνολική ισχύ η οποία δίνεται από την ακόλουθη στοχαστική φόρμουλα:

$$P_{EV,dem} = P_{EV,max} \cdot (n - e^{-6,9077t_{c1}/t_{max}} - e^{-6,9077t_{c2}/t_{max}} - \dots - e^{-6,9077t_{cn}/t_{max}}) \quad (6.11)$$

ενώ η συνολική του ισχύς (εισερχόμενη και αποδιδόμενη από και προς δίκτυο) μπορεί να παρασταθεί από τον ακόλουθο τύπο:

$$P_{EV,total} = P_{EV,max} \cdot (n_d - \sum_{i=1}^{n_d} e^{-a \cdot t_{di}/t_{max}} - e^{-a} \cdot \sum_{i=1}^{n_s} e^{a \cdot t_{di}/t_{max}}) \quad (6.12)$$

Αντίστοιχα, η συνολική ενέργεια (εισερχόμενη / αποδιδόμενη) δίνεται από τον τύπο:

$$E_{EV,total} = \frac{P_{EV,max} \cdot t_{max}}{a} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n_d} \left(\frac{a \cdot t_{di}}{t_{max}} + e^{-a \cdot t_{di}/t_{max}} \right) - n_d - e^{-a} \left(\sum_{i=1}^{n_s} e^{a \cdot t_{si}/t_{max}} - n_s \right) \right], \quad (6.13)$$

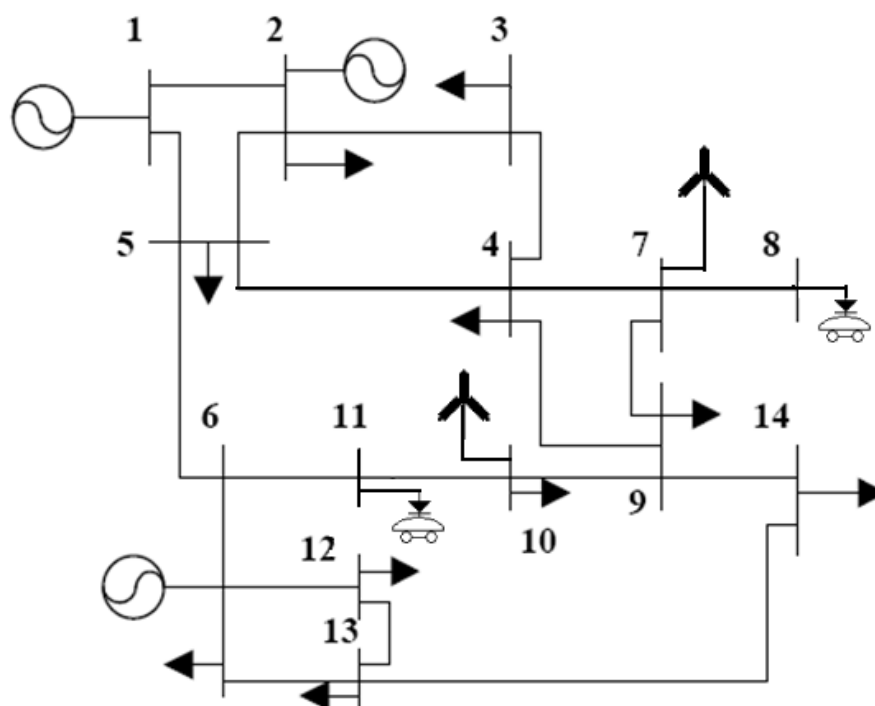
όπου $n_s + n_d = n$.

Εν κατακλείδι, για να υπολογίσουμε την συμβολή ενός συστήματος ηλεκτρικών οχημάτων σε ένα δίκτυο πρέπει να υπολογίσουμε το πλήθος των παράλληλων φορτίσεων n , από τις σχέσεις (6.6) και (6.7), καθώς και τους χρόνους πλήρους φόρτισης t_{ci} από την σχέση (6.9). Η χωρητικότητα φόρτισης n_{max} καθώς και ο μέσος ρυθμός φόρτισης σε κάθε ζυγό μπορούν να προκύψουν από μετρήσεις σε κάθε πραγματικό δίκτυο. Στο εδάφιο αυτό όμως, μεταβλητές όπως αυτές θα τις θεωρήσουμε ως παραμέτρους τις οποίες θα θέσουμε ανάλογα με την εφαρμογή.

6.4. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΕ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΔΙΚΤΥΟ 14 ΖΥΓΩΝ ΤΟΥ IEEE

Ένα σύστημα φόρτιση ηλεκτρικών οχημάτων, όπως εξηγήθηκε και παραπάνω, μπορεί να συνδεθεί σε ένα δίκτυο. Αυτό γίνεται με μοντελοποίηση του συστήματος αυτού ώστε μια δεδομένη κατανομή ζήτησης ισχύος από το δίκτυο να παρουσιάζεται σαν φορτίο του δικτύου. Το βασικό ερώτημα σε αυτή την ανάλυση είναι κατά πόσο ένα σύστημα φόρτισης μπορεί να επηρεάσει ένα δεδομένο δίκτυο.

Στην ενότητα αυτή θα μπορέσουμε να δούμε την συμβολή αυτή σε ένα δίκτυο 14 ζυγών. Το δίκτυο αυτό αποτελεί μια τροποποίηση του δικτύου 14 ζυγών της IEEE. Συγκεκριμένα έχουμε προσθέσει δυο μικρές αιολικές παραγωγές στους ζυγούς 7 και 10 και έχουμε τροποποιήσει τις δεδομένες παραγωγές. Το δίκτυο αυτό φαίνεται στο σχήμα 6.2. Τα δεδομένα των ζυγών και των γραμμών φαίνονται στους πίνακες 6.1 και 6.2 αντίστοιχα.



Σχήμα 6.2: Τοπολογία δικτύου 14 ζυγών

Πίνακας 6.1: Δεδομένα ζυγών δικτύου μελέτης

```

basemva = 100; accuracy = 10^(-10); maxiter = 300;

Bus Bus Voltage Angle ---Load--- Generator---
Injected
No code Mag. Degree MW Mvar MW Mvar Qmin Qmax Mvar

1 1 1.06 0.0 0.0 0.0 0.0 0.0 0 0 0
2 2 1.045 0.0 21.74 0.0 40.04 0.0 0 0 0
3 0 1.01 0.0 94.2 0.0 0.0 0.0 0 0 0
4 0 1.00 0.0 47.8 3.9 0.0 0.0 0 0 0
5 0 1.00 0.0 7.6 1.6 0.0 0.0 0 0 0
6 2 1.07 0.0 11.2 0.0 0.0 0.0 0 0 0
7 2 1.00 0.0 0.0 0.0 2.0 0.0 0 0 0
8 0 1.09 0.0 1.67 0.0 0.0 0.0 0 0 0
9 0 1.00 0.0 29.5 16.6 0.0 0.0 0 0 0
10 2 1.00 0.0 9.0 5.8 2.0 0.0 0 0 0
11 0 1.00 0.0 1.68 0.0 0.0 0.0 0 0 0
12 0 1.00 0.0 6.1 1.6 0.0 0.0 0 0 0
13 0 1.00 0.0 13.5 5.8 0.0 0.0 0 0 0
14 0 1.00 0.0 14.9 5.0 0.0 0.0 0 0 0

```

Πίνακας 6.2: Δεδομένα γραμμών δικτύου μελέτης

```

%
% Line code
% Bus bus R X 1/2 B = 1 for lines
% nl nr p.u. p.u. p.u. > 1 or < 1 tr. tap at
bus nl

1 2 0.01938 0.05917 0.02640 1
1 5 0.05403 0.22304 0.02640 1
2 3 0.04699 0.19797 0.02190 1
2 4 0.05811 0.17632 0.01870 1
2 5 0.05695 0.17388 0.01700 1
3 4 0.06701 0.17103 0.01730 1
4 5 0.01335 0.04211 0.00640 1
4 7 0.0 0.20912 0.0 0.98
4 9 0.0 0.55618 0.0 0.97
5 6 0.0 0.25202 0.0 0.93
6 11 0.09498 0.19890 0.0 1
6 12 0.12291 0.25581 0.0 1
6 13 0.06615 0.13027 0.0 1
7 8 0.0 0.17615 0.0 1
7 9 0.0 0.11001 0.0 1
9 10 0.03181 0.08450 0.0 1
9 14 0.12711 0.27038 0.0 1
10 11 0.08205 0.19207 0.0 1
12 13 0.22092 0.19988 0.0 1
13 14 0.17093 0.34802 0.0 1

```

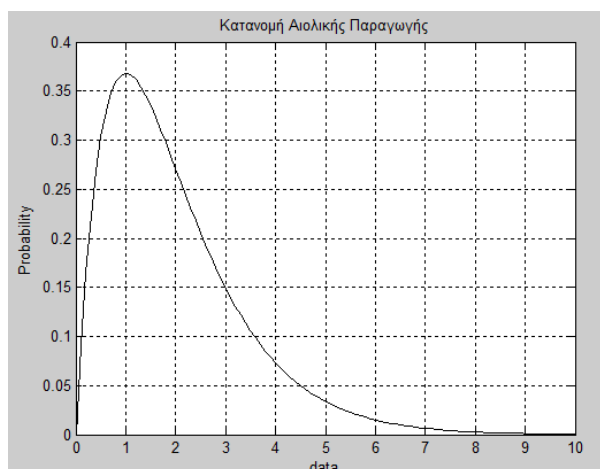
Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Η εφαρμογή χωρίστηκε σε δυο τμήματα. Στο πρώτο έγινε η προσομοίωση του δικτύου όπως παρουσιάζεται στους πίνακες 1 και 2. Στο δεύτερο στάδιο γίνεται η προσομοίωση του δικτύου στο οποίο έχουμε εισάγει πλέον δυο συστήματα φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων στους ζυγούς 8 και 11. Οι δεδομένες τιμές του δικτύου παραμένουν ίδιες. Ο χωρισμός αυτός γίνεται να μπορέσουμε να μελετήσουμε ποσοτικά την συμβολή των ηλεκτρικών οχημάτων στο σύστημα μας, εξετάζοντας συγκεκριμένες παραμέτρους.

6.4.1. Ανάλυση προσομοίωσης

Η προσομοίωση αυτή πραγματοποιήθηκε σε προγραμματιστικό περιβάλλον της Matlab. Συγκεκριμένα για την εξαγωγή αποτελεσμάτων χρησιμοποιήθηκε η αναλυτική μέθοδος Monte – Carlo για 1000 σημεία, η οποία προβλήθηκε επίσης με τις πιθανοτικές μεθόδους Cornish – Fisher και Gram – Charlier.

Οι αιολικές παραγωγές και στις δυο περιπτώσει μοντελοποιούνται με κατανομή Γάμμα 1000 σημείων όπως φαίνεται στο σχήμα 6.3.



Σχήμα 6.3: Κατανομή αιολικής παραγωγής

Για την μοντελοποίηση της ζήτησης ισχύος των ηλεκτρικών οχημάτων χρησιμοποιήθηκε η μελέτη της ενότητας 6.3 για τα οχήματα Tesla Roadsters. Έτσι κατά την μελέτη χρησιμοποιήθηκε ο τύπος (6.12) για την συνολική ισχύ στο σύστημα φόρτισης. Μια πλήρης φόρτιση απαιτεί $t_{max} = 3,5$ ώρες η οποία παρέχεται από προμηθευτές συνόλου 70A και 240V. Συνεπώς το όριο μέγιστης ισχύος υποτέθηκε $P_{max}=16,8kW$. Για τον υπολογισμό του συντελεστή $\alpha=10,137525$ υποθέσαμε ότι μια πλήρως αποφορτισμένη μπαταρία έχει απορροφήσει το 97% της μέγιστης ισχύος της

στο τρίτο κομμάτι του συνολικού χρόνου t_{\max} , $t_{\max} / 3$. Για τους ζυγούς 8 και 11 το σύνολο των οχημάτων που αποφορτίζονται θεωρήθηκε 20% και 25% αντίστοιχα, ενώ ο μέγιστος προσδοκώμενος αριθμός συνδεδεμένων οχημάτων στους ζυγούς αυτούς είναι 120 και 125 αντίστοιχα. Τέλος ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης θεωρήθηκε 2,5 ώρες. [20]

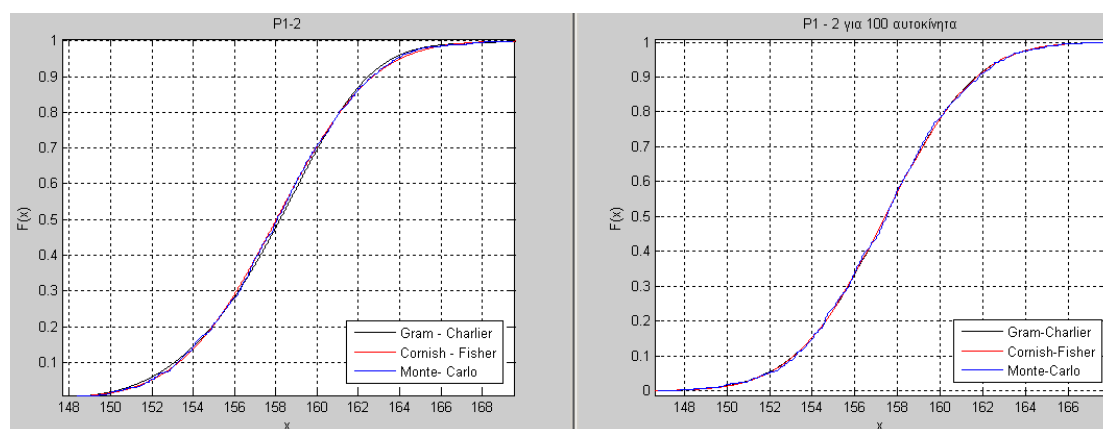
Τέλος στον πίνακα 6.3 φαίνονται οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις των φορτίων για τους ζυγούς των αιολικών και των ηλεκτρικών οχημάτων για εφαρμογή 1000 δειγμάτων και σύνδεση 100 οχημάτων.

Πίνακας 6.3: Χαρακτηριστικά μεγέθη ενεργού ισχύος Αιολικής παραγωγής και φορτίου Ηλεκτρικών οχημάτων του τροποποιημένου συστήματος 14 Ζυγών για 100 οχήματα

Ζυγοί Δικτύου	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
Αιολικό Ζυγού 7	1,1460	0,8463
Ηλ. Οχήματα Ζυγού 8	1,4087	0,1504
Αιολικό Ζυγού 10	1,1006	0,7641
Ηλ. Οχήματα Ζυγού 11	1,2948	0,1836

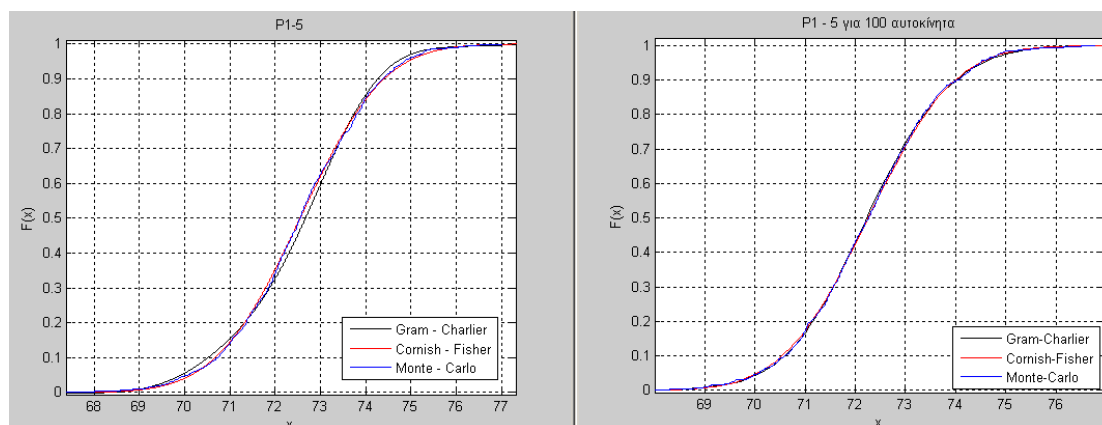
Τα μεγέθη που παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον είναι η ροή ισχύος από τον ζυγό ταλάντωσης (ροές 1 – 2 , 1 – 5) , και οι ροές 6 – 11, 7 – 8, 9 – 10, οι οποίες εμπλέκουν του ζυγούς των αιολικών παραγωγών και τους ζυγούς διασύνδεσης ηλεκτρικών οχημάτων. Οι ροές αυτές είναι πολύ σημαντικές γιατί συγκρίνοντας τις θα μπορούσαμε να διαπιστώσουμε την επίδραση των ηλεκτρικών οχημάτων στην μεταφορά ισχύος και ενέργειας. Επιπλέον ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι μεταβολές στις τάσεις των ζυγών 7, 8, 9, 10, 11.

Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στα διαγράμματα που ακολουθούν και για τις δυο περιπτώσεις. Τα διαγράμματα για τα αντίστοιχα μεγέθη παρουσιάζονται σε παράθεση για καλύτερη σύγκριση.

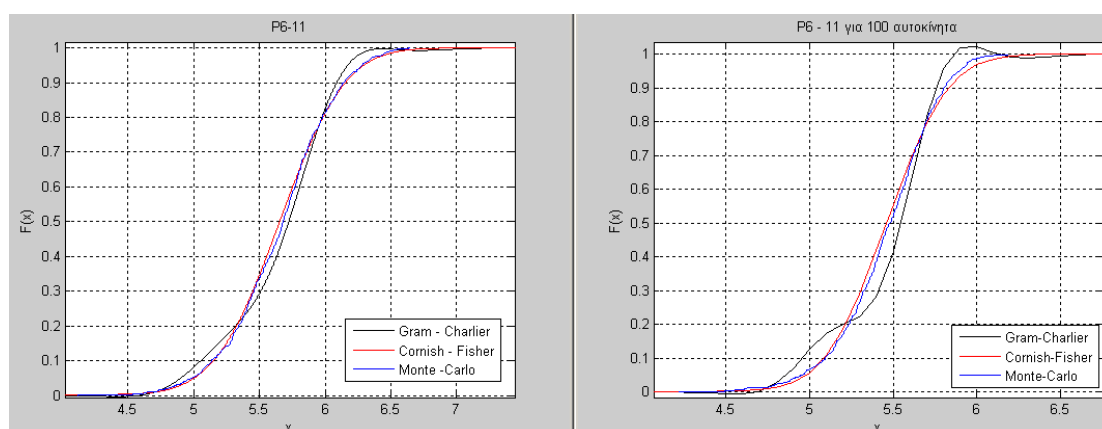


Σχήμα 6.4: Ροή ισχύος στη γραμμή 1 – 2

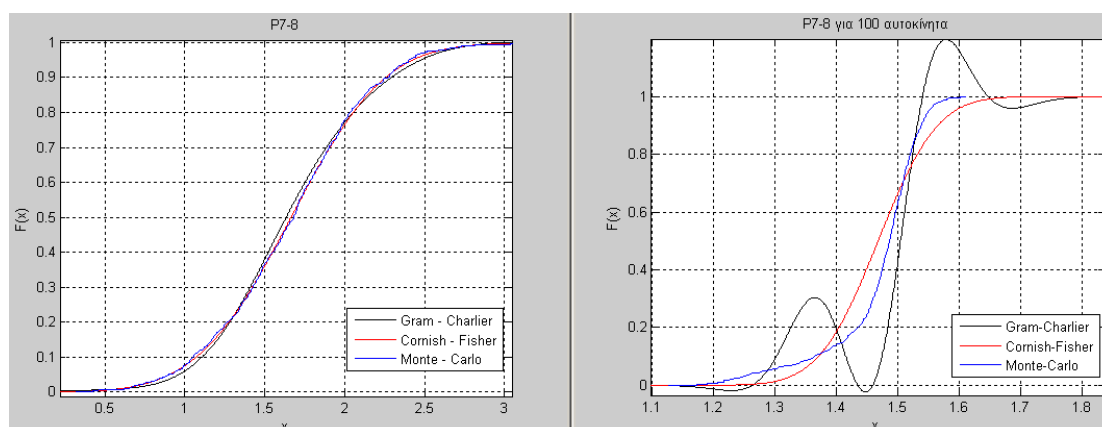
Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων



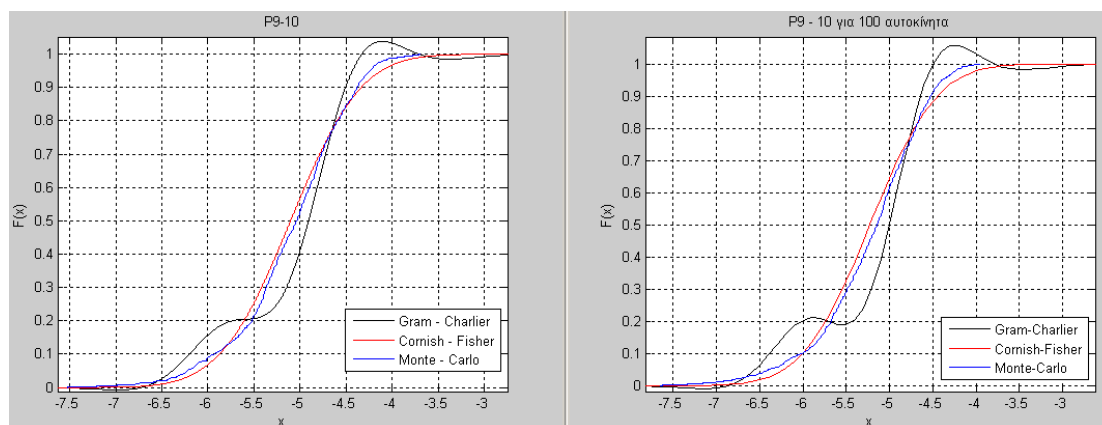
Σχήμα 6.5: Ροή ισχύος στη γραμμή 1 – 5



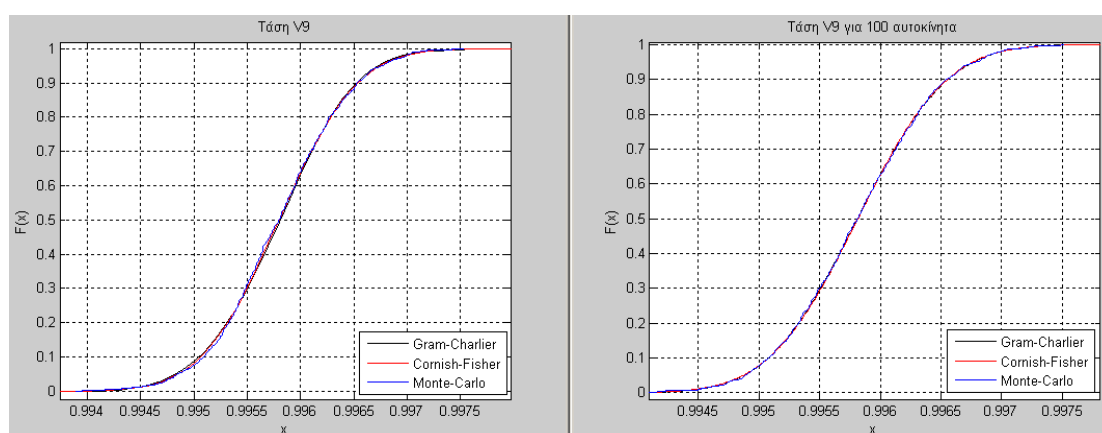
Σχήμα 6.6: Ροή ισχύος στη γραμμή 6 – 11



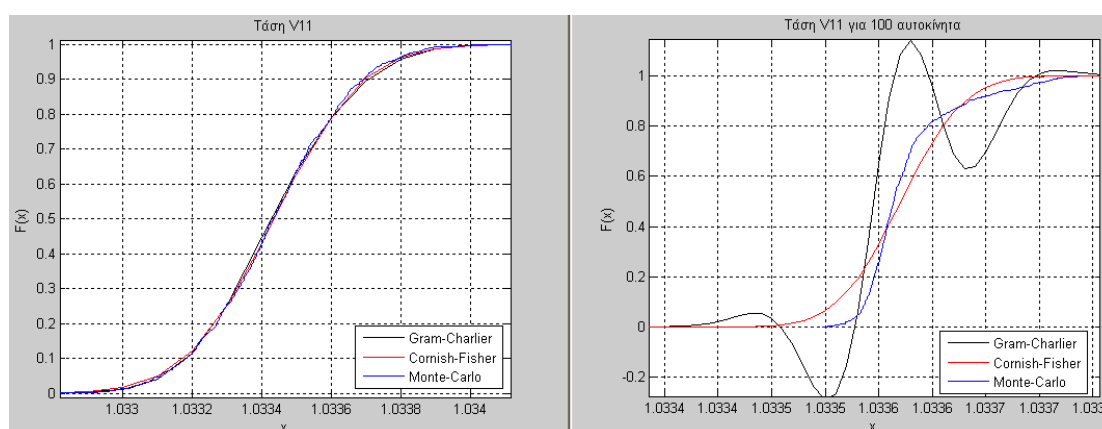
Σχήμα 6.7: Ροή ισχύος στη γραμμή 7 – 8



Σχήμα 6.8: Ροή ισχύος στη γραμμή 9 – 10



Σχήμα 6.9: Τάση στον ζυγό 9



Σχήμα 6.10: Τάση στον ζυγό 11

Από τα ανωτέρω διαγράμματα είναι φανερό ότι μετά την είσοδο των ηλεκτρικών οχημάτων στο δίκτυο μειώνεται η έγχυση ισχύος από την παραγωγή του ζυγού ταλάντωσης. Η μείωση αυτή είναι φυσικά σχετική με το μέγεθος του φορτίου των οχημάτων. Η μεγαλύτερη διαφορά όπως ήταν και αναμενόμενο παρουσιάζεται

στις γραμμές που συνδέονται τα ηλεκτρικά οχήματα. Οι γραμμές αυτές είναι οι 6 -11 και 7 – 8. Παρατίθενται επίσης και οι τάσεις των ζυγών 9 και 11. Ο ζυγός 9 δεν παρουσιάζει πρακτικά καμία αλλαγή. Ενδιαφέρον παρουσιάζει ο ζυγός 11, στον οποίο υπάρχει σύνδεση οχημάτων, η τάση του οποίου αυξάνει. Σημειώνεται ότι οι τάσεις των ζυγών 7, 8 , 10 παρέμειναν σταθερές όπως η τάση 9 και για αυτό το λόγο δεν παρουσιάστηκαν.

6.4.2. Συσχέτιση Αιολικής Διείσδυσης και ηλεκτρικών οχημάτων σε Σ.Η.Ε

Ένα πολύ σημαντικό θέμα στην μελέτη των ηλεκτρικών οχημάτων είναι η συνεισφορά τους σε ένα δίκτυο. Δηλαδή η συσχέτιση που παρουσιάζει το φορτίο τους με τα φορτία των αιολικών παραγωγών του δικτύου. Δηλαδή, κατά τι ποσοστό σε μια θεωρούμενη χρονική διάρκεια, όπως για παράδειγμα στη διάρκεια μιας μέρας, δίνει ενέργεια το αιολικό πάρκο στο σύστημα φόρτισης και αντίστροφα.

Για να μπορέσουμε να καταλάβουμε καλύτερα το θέμα αυτό, αρχικά πρέπει να θεωρήσουμε μια σχέση ανάμεσα στα δυο αυτά φορτία.

Η διείσδυση της αιολικής παραγωγής στο σύστημα φόρτισης των ηλεκτρικών οχημάτων μπορεί να εκφραστεί από την παρακάτω σχέση:

$$P_{w, EV} = \frac{P_{w, capacity}}{P_{EV, peak}} \quad (6.14)$$

όπου $P_{w, capacity}$ είναι η δεδομένη για το σύστημα χωρητικότητα του αιολικού πάρκου και $P_{EV, peak}$ είναι το μέγιστο φορτίο της ζήτησης / προμήθειας των ηλεκτρικών οχημάτων.

Η διείσδυση ενέργειας, που εκφράζει ένα μέτρο της ποσότητας της αιολικής ενέργειας που παράγεται σε ένα διάστημα, συγκρινόμενο με την ζήτηση / προμήθεια των συνδεδεμένων, στο σύστημα, ηλεκτρικών οχημάτων δίνεται από την σχέση:

$$e_{w, EV} = \frac{E_w}{E_{EV, total}} \quad (6.15)$$

Η συσχέτιση των μεγεθών αυτών είναι πολύ σημαντική και αποτελεί μια ένδειξη για το πώς το μέγιστο φορτίο του αιολικού πάρκου σχετίζεται με το μέγιστο

φορτίο ζήτησης / προμήθειας των ηλεκτρικών οχημάτων. Η σχέση αυτή δίνεται στον ακόλουθο τύπο:

$$c_{w, EV} = \frac{\sum_{i=1}^T (P_W(t) - \bar{P}_W) \cdot (P_{EV, total}(t) - \bar{P}_{EV})}{(T-1) \cdot \sigma_{P_W} \cdot \sigma_{P_{EV}}} \quad (6.16)$$

όπου $P_W(t)$ και $P_{EV, total}(t)$ είναι η αιολική παραγωγή και το φορτίο ζήτηση / προμήθειας των διασυνδεδεμένων οχημάτων αντίστοιχα στην επανάληψη $-t$, \bar{P}_W και \bar{P}_{EV} , είναι οι μέσες τιμές των παραπάνω μεγεθών και σ_{P_W} , $\sigma_{P_{EV}}$ είναι οι τυπικές τους αποκλίσεις. Το T δηλώνει τον αριθμό των επαναλήψεων (ουσιαστικά την περίοδο για το κάθε σενάριο).

Τέλος, προσδιορίζουμε την τυχαία μεταβλητή ω , η οποία παρέχει την πιθανότητα του συνδυασμού αιολικού πάρκου – ηλεκτρικών οχημάτων σε μια δεδομένη περίοδο, για παράδειγμα μια μέρα, έχοντας μια δεδομένη συσχέτιση $c_{w, EV}$ και μια δεδομένη διείσδυση $e_{w, EV}$. Αν υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές $c_{w, EV}$ και $e_{w, EV}$ είναι ανεξάρτητες, η μεταβλητή ω δίνεται από την σχέση:

$$f(\omega) = f(c_{w, EV}) \cdot f(e_{w, EV}) \quad (6.17)$$

Στον πίνακα 6.3 όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, παρουσιάζονται η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των ενεργών ισχύων των δυο αιολικών μονάδων και του φορτίου των δυο συστημάτων ηλεκτρικών οχημάτων για το τροποποιημένο σύστημα 14 Ζυγών. Η μεγάλη τυπική απόκλιση στις μονάδες αιολικής παραγωγής, δηλώνει μεγάλη αβεβαιότητα στην διάθεση ανέμου. Αντίθετα, δεν υπάρχει μεγάλη αβεβαιότητα στην ζήτηση / προμήθεια ενεργού ισχύος των ηλεκτρικών οχημάτων.

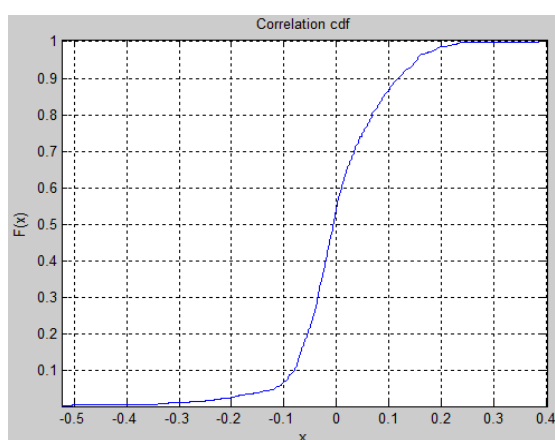
Με βάση την ανάλυση που προηγήθηκε, και τα δεδομένα από την προσομοίωση μπορούμε να δούμε ότι η αιολική παραγωγή στον ζυγό 7 παρέχει ισχύ στα ηλεκτρικά αυτοκίνητα του ζυγού 8 σε ποσοστό 32,4%. Αυτό προκύπτει ως το ποσοστό της θετικής έγχυσης ισχύος προς τον ζυγό 8. Συγκεκριμένα υπάρχει θετική έγχυση σε 304 φορές από ένα πλήθος 1000 επαναλήψεων (δειγμάτων). Συνεπώς, το αιολικό πάρκο των 2MW δεν μπορεί να καλύψει σε ισχύ σε ένα σύστημα 100 συνδεδεμένων οχημάτων Tesla Roadster, αφού η ζήτηση του ζυγού 8 είναι περισσότερες από τις μισές φορές μεγαλύτερη από ότι μπορεί ο ζυγός 7 να καλύψει.

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

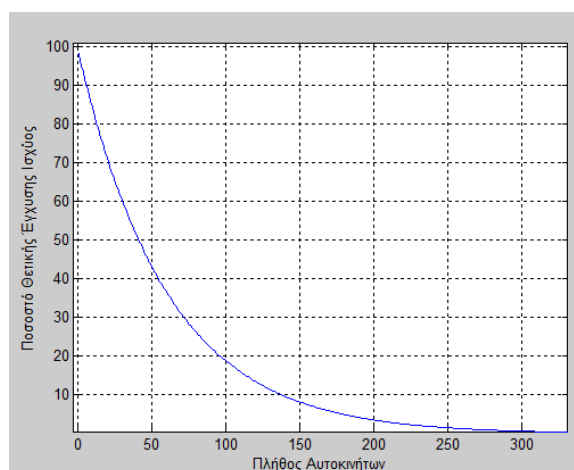
Ύστερα από προσομοιώσεις προκύπτει ότι υπάρχει ένα συγκεκριμένο πλήθος οχημάτων τα οποία δύναται να συνδεθούν στο δίκτυο ώστε να υπάρχει καλύτερη συσχέτιση. Στη περίπτωση που μελετάμε, για τον ζυγό 8, με σύνδεση 15 οχημάτων, το ποσοστό της θετικής έγχυσης ενέργειας είναι 96,5%, είναι δηλαδή ένα πλήθος οχημάτων που ενδείκνυται για την σύνδεση. Όσο αυξάνει το πλήθος των οχημάτων τόσο μειώνεται και το ποσοστό.

Σχέση των δυο αυτών μεγεθών, του ποσοστού δηλαδή θετικής έγχυσης και του πλήθους των αυτοκινήτων φαίνεται αναλυτικά στο σχήμα 6.12.

Ενδεικτικά παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα η κατανομή της συσχέτισης (correlation) για την γραμμή 7-8 του δικτύου 14 ζυγών.

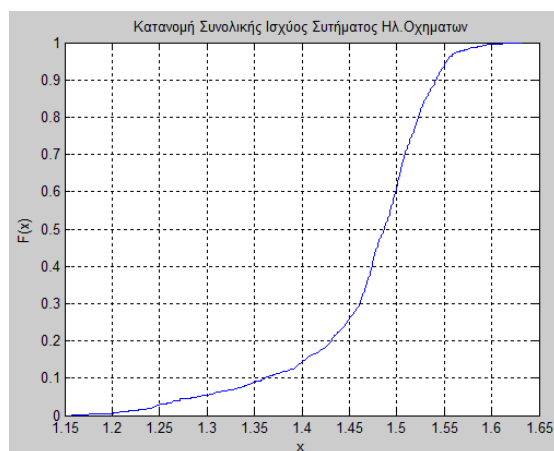


Σχήμα 6.11: Κατανομή συσχέτισης για ζυγό για γραμμή 7 – 8



Σχήμα 6.12: Ποσοστό θετικής έγχυσης ισχύος προς ζυγό με ηλεκτρικά αυτοκίνητα

Τέλος, από την προσομοίωση για τον ζυγό 8, προέκυψε η ακόλουθη μορφή της συνολικής ισχύος ενός συστήματος ηλεκτρικών αυτοκινήτων για 100 συνδεδεμένα οχήματα. Η μορφή αυτή φαίνεται στο σχήμα 6.13.



Σχήμα 6.13: Κατανομή Συνολικής Ισχύος Συστήματος Ηλ. Οχημάτων ζυγού 8

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΠΙΛΟΓΟΣ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1. ΓΕΝΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

Η μελέτη της ροής φορτίου ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας είναι ένα σύνθετο πρόβλημα των συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτό γιατί οι περισσότερες παράμετροι του συστήματος, όπως οι εγχύσεις ισχύος στους ζυγούς, οι παράμετροι των γραμμών αλλά και η ίδια η τοπολογία του συστήματος, είναι μεγέθη τα οποία τα χαρακτηρίζει αβεβαιότητα. Δηλαδή ένα σύστημα παρουσιάζει στατιστικό χαρακτήρα και ως αποτέλεσμα οι παράμετροι του δεν μπορούν να χαρακτηριστούν ως σταθερές αλλά ως τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς, το πρόβλημα της ροής φορτίου πρέπει να μελετηθεί πιθανοτικά, λαμβάνοντας τις παραμέτρους του συστήματος ως κατανομές.

Πάνω στο πρόβλημα της μοντελοποίησης των κατανομών, έχουν γίνει πολλές μελέτες και έχουν προταθεί πολλές μέθοδοι. Στην παρούσα διπλωματική προτείνεται η μέθοδος Cornish – Fisher.

Η μέθοδος Cornish – Fisher είναι μια πολύ εύχρηστη και αποδοτική μέθοδος, η οποία χρησιμοποιώντας τυχαία δεδομένα μπορεί να σχηματίσει συνεχή κατανομή. Η σημασία της μεθόδου εκτιμάται καλύτερα σε περίπτωση διακριτών κατανομών όπου άλλες μέθοδοι, όπως η συνέλιξη, παρουσιάζουν προβλήματα και σε περίπτωση αγνώστων τυχαίων κατανομών μεγάλου πλήθους στοιχείων όπου οι άλλες μέθοδοι απαιτούν πολύ χρόνο.

Για να αποδειχθεί η αποτελεσματικότητα αλλά και η ακρίβεια της μεθόδου έγινε εφαρμογή σε δίκτυο. Συγκεκριμένα, έγινε η μελέτη του δικτύου των 30 ζυγών της IEEE το οποίο τροποποιήθηκε ώστε να περιέχει αιολική παραγωγή. Για την μελέτη των στοιχείων του χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Monte – Carlo για περίπτωση 1.000 και 100.000 σημείων και η μέθοδος της γραμμικοποίησης. Τα αποτελέσματα και των δυο μεθόδων παρουσιάστηκαν με την μέθοδο της Gram – Charlier και Cornish – Fisher. Από τα αποτελέσματα της εφαρμογής παρατηρούμε ότι η μέθοδος Cornish – Fisher έχει πολύ καλή σύγκληση και με δεδομένο τον μικρό χρόνο υπολογισμού που απαιτεί είναι σημαντική η συμβολή της στις μελέτες.

Στη συνέχεια της διπλωματικής παρουσιάστηκε ένα θέμα, νέο στα δεδομένα των συστημάτων ενέργειας. Το θέμα αυτό είναι η σύνδεση συστήματος φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων σε ένα σύστημα και η μελέτη της συσχέτισης των δυο αυτών

συστημάτων. Η μελέτη αυτή έγινε σε ένα τροποποιημένο δίκτυο 14 ζυγών. Η προσομοίωση πραγματοποιήθηκε με τη χρήση της μεθόδου Monte – Carlo για 1.000 σημεία, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάστηκαν με την Cornish – Fisher και την Gram – Charlier.

7.2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζονται στο σύνολο τους οι μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν με σκοπό την εύρεση και αναφορά των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων τους.

7.2.1. Μέθοδος Monte – Carlo

Η μέθοδος Monte – Carlo αποτελεί την πλήρη προσομοίωση του συστήματος. Η μέθοδος αυτή επιλύεται επαναληπτικά και χρησιμοποιεί συγκεκριμένες τιμές για τα δεδομένα της. Σε κάθε επίλυση της μεθόδου έχουμε την ακριβή τιμή κάθε μεγέθους που σχετίζεται με το σύστημα καθώς επιλύονται όλες οι εξισώσεις που το διέπουν. Αυτό αποτελεί και το μεγαλύτερο πλεονέκτημα της.

Από την άλλη πλευρά, η ανάγκη επίλυσης μεγάλου πλήθους εξισώσεων στη μέθοδο Monte-Carlo την καθιστά μη αποδοτική καθώς ο χρόνος υπολογισμού είναι μεγάλος. Το γεγονός αυτό είναι σημαντικό όταν οι επαναλήψεις που απαιτούνται είναι πολλές. Σε αυτήν την περίπτωση εκτελούνται λιγότερες επαναλήψεις με επιλεκτικές τιμές γεγονός που επηρεάζει την ακρίβεια του αποτελέσματος. Η μέθοδος Monte-Carlo, δηλαδή, μπορεί να δώσει αξιόπιστα και γρήγορα αποτελέσματα όταν πρόκειται να επιλύσει απλό σύστημα που απαιτεί λίγες επαναλήψεις. Σε αντίθετη περίπτωση προκειμένου τα αποτελέσματα να είναι άμεσα αξιοποιήσιμα θα πρέπει να μειώσουμε τις επαναλήψεις, άρα και δεδομένα, γεγονός που μειώνει την αξιοπιστία της μεθόδου.

7.2.2. Μέθοδος Γραμμικοποίησης

Στη μέθοδο της γραμμικοποίησης χρησιμοποιείται η συνέλιξη. Έτσι οι κατανομές των επιθυμητών μεγεθών υπολογίζονται από τις υπάρχουσες κατανομές και τις σχέσεις που περιγράφηκαν οι κατανομές αυτές. Με τη συνέλιξη λαμβάνονται υπ όψιν όλα τα δεδομένα που διαθέτουμε και τα αποτελέσματα προκύπτουν σε αρκετά σύντομο χρονικό διάστημα, ειδικά σε σχέση με την μέθοδο Monte – Carlo.

Η μέθοδος της γραμμικοποίησης βασίζεται σε απλούστευση των εξισώσεων που επιλύει η Monte-Carlo μέσω του αναπτύγματος Taylor γεγονός που από μόνο του συνηγορεί σε μείωση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων κυρίως στα άκρα των κατανομών αν η γραμμικοποίηση γίνεται γύρω από τη μέση τιμή. Η συνέλιξη μπορεί να υπολογιστεί με δύο τρόπους, το συνεχή και τον διακριτό. Σε αυτήν την εργασία επιλέχθηκε η διακριτή μέθοδος καθώς το μέγεθος των δεδομένων και η πολυπλοκότητα των εξισώσεων κατέστησαν αδύνατον να χρησιμοποιηθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier για τη συνεχή συνέλιξη των συναρτήσεων των δεδομένων. Η διακριτή συνέλιξη όμως εισήγαγε νέα προβλήματα. Η απόφαση για το μέγεθος του διαστήματος που χωρίζει τις διακριτές τιμές που χρησιμοποιούνται στη συνέλιξη παίζει καθοριστικό ρόλο στην ακρίβεια και την ταχύτητα υλοποίησης της μεθόδου.

7.2.3. Στατιστικά Θεωρήματα

Τα στατιστικά θεωρήματα που παρατίθενται στο Παράρτημα Δ ουσιαστικά αποτελούν την απλοποίηση της μεθόδου της γραμμικοποίησης για τις *κανονικές κατανομές*. Δεν έχουν καμία πρακτική αξία όταν οι κατανομές δεν είναι κανονικές, όπως συμβαίνει στην πραγματικότητα, όμως η υλοποίηση τους στην παρούσα διπλωματική συντέλεσε ώστε να εξακριβώσουμε την ορθότητα των προγραμμάτων που υλοποιήθηκαν κυρίως για τη γραμμικοποίηση όταν χρησιμοποιήθηκαν κανονικές κατανομές.

7.2.4. Μέθοδος Cornish – Fisher

Η μέθοδος Cornish – Fisher είναι μια αριθμητική μέθοδος η οποία μπορεί να υπολογίσει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (pdf) και τη συνάρτηση κατανομής (cdf) ενός μεγέθους. Το μέγεθος αυτό μπορεί να είναι τυχαία κατανομή - συνεχής ή διακριτή- ακόμα και με μικρό αριθμό σημείων. Αυτό φαίνεται και στην εφαρμογή, αφού και κατά την χρήση διακριτών κατανομών η σύγκλιση είναι πολύ

καλή. Η μέθοδος χρησιμοποιεί τις ιδιότητες των αθροισμάτων καθώς και μια γνωστή κατανομή βάσης, συνήθως την κανονική κατανομή, ενώ ταυτόχρονα αποφεύγει την χρήση συνελίξεων, γεγονός που την καθιστά εύχρηστη, γρήγορη και αποδοτική. Το γεγονός αυτό την καθιστά σαν μέθοδο πολύ σημαντική για μελέτες ροών φορτίου, αλλά και γενικότερα σε μελέτες όπου απαιτείται ο σχεδιασμός τυχαίων κατανομών.

Η Cornish – Fisher παρουσιάζει μεγαλύτερη ακρίβεια στο μέσο των τιμών και μικρότερη ακρίβεια στα άκρα. Επίσης μπορεί να χάσει σε ακρίβεια αν σαν κατανομή βάσης χρησιμοποιηθεί κάποια άλλη, από την κανονική $N(0, 1)$ κατανομή.

7.3. ΗΛΕΚΤΡΙΚΑ ΟΧΗΜΑΤΑ

Η σχεδίαση και παραγωγή ηλεκτρικών οχημάτων είναι ένα πολύ σημαντικό μέλημα των αυτοκινητοβιομηχανιών. Το γεγονός αυτό προκύπτει από την στροφή των νέων τεχνολογιών σε οικολογικές και συνάμα αποδοτικές λύσεις. Το πρόβλημα που δημιουργείται είναι ο τρόπος λειτουργίας του συστήματος φόρτισης των ηλεκτρικών οχημάτων και η σύνδεση του σε σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας.

Το ζήτημα αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς ένα σύστημα φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων μπορεί να συσχετίζεται με το σύστημα ενέργειας, με σκοπό την καλύτερη εξυπηρέτηση των φορτίων χωρίς αύξηση της παραγωγής από συμβατικές μονάδες, ειδικότερα σε περιόδους μεγάλης ζήτησης.

Στην συγκεκριμένη διπλωματική έγινε προσομοίωση ενός δικτύου 14 ζυγών με ταυτόχρονη εισαγωγή αιολικής παραγωγής και συστήματος φόρτισης ηλεκτρικών οχημάτων. Από την προσομοίωση αυτή και συγκεκριμένα μελετώντας την έγχυση ενεργού ισχύος από έναν ζυγό αιολικής παραγωγής προς ένα ζυγό με σύνδεση ηλεκτρικών οχημάτων, προέκυψε ότι η σύνδεση των ηλεκτρικών οχημάτων μπορεί να μειώσει την ανάγκη έγχυσης, ανάλογα φυσικά το μέγεθος του φορτίου. Επιπλέον και η συνολική έγχυση ενέργειας στο σύστημα, από την παραγωγή του ζυγού ταλάντωσης μειώνεται. Αυτό είναι πολύ σημαντικό καθώς με την σύνδεση, ενός συγκεκριμένου αριθμού οχημάτων σε κάποιους ζυγούς, μπορεί να έχουμε μεγάλη μείωση στην παραγωγή χωρίς επίπτωση στην εξυπηρέτηση των φορτίων. Ο αριθμός οχημάτων σε κάθε ζυγό προκύπτει ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του ζυγού.

7.4. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την συνολική ανάλυση που παρατέθηκε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι δύσκολο να προταθεί μια συγκεκριμένη μέθοδος για την επίλυση της πιθανοτικής ροής φορτίου που να ικανοποιεί όλες τις περιπτώσεις. Η επιλογή αυτή θα πρέπει να γίνεται ανάλογα με το εκάστοτε σύστημα και τις προϋποθέσεις της μελέτης, δηλαδή, την επιθυμητή ακρίβεια και τον χρόνο που διατίθεται.

Η Monte – Carlo είναι μια αριθμητική μέθοδος που λειτουργεί και δίνει ακριβή αποτελέσματα για κάθε δίκτυο. Ειδικά σε πάρα πολύ μεγάλα συστήματα είναι η μόνη λύση έστω και αν απαιτείται αρκετός χρόνος. Αυτό διότι με τη μέθοδο της γραμμικοποίησης οι συνελίξεις που θα απαιτηθούν ίσως δεν δώσουν ποτέ αποτέλεσμα. Η χρήση της Monte – Carlo σε μικρά συστήματα, με απλές συνδέσεις και λίγα δεδομένα, αποτελεί την ιδανική λύση, καθώς παρέχει ακριβή αποτελέσματα σε μικρό χρόνο. Σε περίπτωση όμως μεγάλου δικτύου και μεγάλου όγκου δεδομένων, στην προσπάθεια να παραβλεφθεί το πρόβλημα των συνελίξεων, προτείνεται η μέθοδος της γραμμικοποίησης με εφαρμογή των Cornish – Fisher και Gram – Charlier. Η γραμμικοποίηση γίνεται γύρω από τη μέση τιμή για μια αρχική εκτίμηση των ζητούμενων μεγεθών και περαιτέρω γραμμικοποίηση σε σημεία των άκρων των κατανομών ώστε να προβλεφθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια η συμπεριφορά του δικτύου στις ακραίες καταστάσεις.

Επιπλέον, γίνεται εμφανές ότι η μέθοδος Cornish – Fisher παρουσιάζει καλύτερη προσέγγιση στις επιθυμητές μεταβλητές από την Gram – Charlier ακόμα και όταν το πλήθος των σημείων είναι μικρό. Αυτό φαίνεται ακόμα καλύτερα στα άκρα μιας κατανομής όπου έτσι και αλλιώς η Gram – Charlier υστερεί σε ακρίβεια. Η ακρίβεια της Cornish – Fisher όμως μπορεί να μειωθεί όταν η υπό εξέταση μεταβλητή παρουσιάζει πολλές διακυμάνσεις στην μορφή της.

Τέλος, κατά την προσομοίωση του δικτύου μετά από την είσοδο των ηλεκτρικών αυτοκινήτων είναι φανερό ότι η έγχυση ισχύος προς ζυγούς σύνδεσης οχημάτων, καθώς και η συνολική έγχυση ισχύος στο σύστημα, μειώνεται ανάλογα το φορτίο και το πλήθος των οχημάτων. Επιπλέον, ύστερα από προσομοιώσεις γίνεται φανερό ότι για κάθε ζυγό όπου επιθυμείται τέτοιου είδους σύνδεση, υπολογίζεται ένα συγκεκριμένο πλήθος οχημάτων για το οποίο η συσχέτιση με το δίκτυο έχει ιδανικότερα αποτελέσματα.

7.5. ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΕΞΕΤΑΣΗ

Όπως ήταν αναμενόμενο, δεν είναι δυνατόν σε μια διπλωματική να λυθούν όλα τα ζητήματα που σχετίζονται με την πιθανοτική ροή φορτίου. Στην παρούσα διπλωματική, προκειμένου να εξακριβωθεί η ορθότητα των χρησιμοποιούμενων προγραμμάτων έγιναν ορισμένες απλουστεύσεις, οι οποίες ίσως θέλουν περισσότερη ανάλυση σε πραγματικά συστήματα. Παρόλα αυτά, με δεδομένη πλέον την ορθότητα των προγραμμάτων, μπορεί το θέμα αυτό να αναπτυχθεί περαιτέρω εισάγοντας περισσότερες παραμέτρους.

Στις προσομοιώσεις που πραγματοποιήθηκαν, οι περισσότερες κατανομές θεωρήθηκαν κανονικές, γεγονός που δεν ανταποκρίνεται στην πραγματικότητα. Οι παράμετροι για κάθε σύστημα περιέχουν κατανομές οι οποίες εξαρτώνται από τις ιδιότητες του συστήματος. Για παράδειγμα, οι αιολικές παραγωγές, όπως και στην παρούσα εργασία, μοντελοποιούνται με κατανομές Γάμμα ή Weibull. Αντίστοιχα, οι κατανομές φορτίων και λοιπών παραγωγών, καθορίζονται ξεχωριστά για κάθε σύστημα. Συνεπώς μια περαιτέρω μελέτη θα ήταν η προσομοίωση συστημάτων με διαφορετικές, ανάλογα το είδος του φορτίου, κατανομές.

Επιπλέον, μια σημαντική παράμετρος η οποία μπορεί να ληφθεί υπ όψιν, είναι η εξάρτηση των μεταβλητών. Για παράδειγμα εξάρτηση των αιολικών παραγωγών μεταξύ τους. Το θέμα αυτό είναι αρκετά πολύπλοκο αφού υπάρχουν πολλά είδη εξάρτησης, που σχετίζονται με τη μορφολογία του συστήματος, την γεωγραφική του θέση, αλλά τα είδη των μεταβλητών. Στην εργασία αυτή οι κατανομές θεωρήθηκαν ανεξάρτητες, γεγονός που είναι σπάνιο για ένα πραγματικό σύστημα. Δεδομένης της εξάρτησης, η συνέλιξη ενδεχομένως δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να υπολογιστούν οι ζητούμενες κατανομές. Η υλοποίηση τέτοιων συναρτήσεων καθίσταται δυσκολότερη καθώς τα μαθηματικά που απαιτούνται για την περιγραφή των εξισώσεων είναι πολύπλοκα.

Επίσης, όσον αφορά τις μεθόδους υπολογισμού, η γραμμικοποίηση γύρω από τη μέση τιμή που υλοποιήθηκε μας παρέχει ακριβή αποτελέσματα γύρω από αυτή την τιμή των κατανομών όπου παρουσιάζονται και οι μεγαλύτερες πιθανότητες εμφάνισης των τιμών. Για να έχουμε όμως πλήρη και ακριβή εικόνα των κατανομών, κυρίως στα άκρα, απαιτείται γραμμικοποίηση γύρω από ενδιάμεσες τιμές των κατανομών. Η τελική κατανομή των ζητούμενων μεγεθών θα προκύψει από όλες τις κατανομές που θα δημιουργηθούν από τις διάφορες γραμμικοποιήσεις.

Η μέθοδος Cornish – Fisher, αναπτύσσεται με κατανομή βάσης την κανονική κατανομή και συγκεκριμένα την $N(0,1)$. Μια ενδιαφέρουσα ανάπτυξη θα ήταν η

μέθοδος αυτή να αναπτυχθεί με διαφορετικές κατανομές βάσης, και να εξεταστεί η σύγκλιση της.

Στην διπλωματική αυτή έγινε μια πρώτη προσέγγιση του θέματος των ηλεκτρικών οχημάτων, η σύνδεση που αυτά έχουν σε ένα σύστημα ηλεκτρικής ενέργειας μέσω του συστήματος φόρτισης τους, καθώς και η συσχέτιση τους με το σύστημα παραγωγής. Το θέμα αυτό είναι ακόμα σε πειραματικό στάδιο και μια περαιτέρω μελέτη του θα ήταν πολύ χρήσιμη για την ανάπτυξη της συγκεκριμένης τεχνολογίας.

Τέλος, μία επέκταση που θα μπορούσε να γίνει είναι να θεωρηθεί ως αβέβαιη παράμετρος και η ίδια η τοπολογία του δικτύου. Γνωρίζουμε ότι γραμμές μεταφοράς, μονάδες παραγωγής ή και άλλα επιμέρους στοιχεία ενός συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας, όπως για παράδειγμα μετασχηματιστές, συχνά τίθενται εκτός λειτουργίας λόγω βλαβών ή προγραμματισμένων διακοπών για συντήρηση, αντικατάσταση κ.λπ.. Συνεπώς, παράλληλα με τα στοιχεία που λαμβάνονται ως τυχαίες μεταβλητές στην παρούσα διπλωματική, υπάρχουν και μερικά ακόμη που ενώ εδώ έχουν θεωρηθεί σταθερά στην πραγματικότητα δεν συμβαίνει κάτι τέτοιο.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1]. Β. Κ. Παπαδιάς, «Ανάλυση Συστήματος Ηλεκτρικής Ενέργειας: Μόνιμη κατάσταση λειτουργίας (τόμος 1)», Αθήνα Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 1985
- [2]. Κ. Βουρνάς, Γ. Κονταξής, «Εισαγωγή στα Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας», Αθήνα Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 2001
- [3]. Στ. Παπαθανασίου, «Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας», Αθήνα Εκδόσεις Ε.Μ.Π, 2008.
- [4]. Μιχ. Π. Παπαδόπουλος, «Παραγωγή Ηλεκτρικής Ενέργειας από Ανανεώσιμες Πηγές», Αθήνα, Εκδόσεις Ε.Μ.Π., 1997
- [5]. Ευάγγελος Ν. Διαλυνάς , Καθηγητής Ε.Μ.Π., «Προσομοίωση Monte-Carlo», Αθήνα, Οκτώβριος 1996.
- [6]. Βορεάδη Α. Ελισάβετ, «Πιθανοτική προσομοίωση συστημάτων ηλεκτρικής ενέργειας», Διπλωματική Εργασία, Αθήνα Ιούλιος 2009. Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών, Τομέας Ηλεκτρικής Ισχύος, Ε.Μ.Π
- [7]. Άνδρου Α. Ευστρατία, «Πιθανοτική Ροή Φορτίου σε Δίκτυο Χαμηλής Τάσης με Διεσπαρμένη Παραγωγή», Διπλωματική Εργασία, Αθήνα 2008, Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών, Τομέας Ηλεκτρικής Ισχύος, ΕΜΠ.
- [8]. Julio Usaola, «Probabilistic load flow in systems with high wind power penetration», Departamento de Ingenieria Eletrica, Univeridad Carlos III de Madrid, August 2008
- [9]. Stefan R. Jaschke, “The Cornish-Fisher-Expansion in the Context of Delta-Gamma-Normal Approximations”, Weierstraß - Institut fur Angewandte Analysis und Stochastik, Mohrenstraße 39, 10117 Berlin, Germany, (stefan@jaschke-net.de), Version 1.41, December 4, 2001
- [10]. G. W. Hill and A. W. Davis, “Generalized Asymptotic Expansions of Cornish – Fisher Type”, The Annals of Mathematical Statistics 1968, Vol. 39, No.4, 1264-1273, C.S.I.R.O , Adelaide
- [11]. Bruce Schmeiser , “Methods for Modeling and Generating Probabilistic Components in Digital Computer Simulation when the Standard Distribution adequate”, Southern Methodistic Univercity
- [12]. Yan-Gang Zhao and Tetsuro Ono, “Third – Moment Standardization for Structural Realiability Analysis”, Journal of Structural Engineering, June 2000.
- [13]. <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

- [14]. Kendall M.G., Stuart A, “The Advanced Theory of Statistics”. Vol. I. Charles Griffin & Co. Ltd., London 1958
- [15]. Usaola J. “Probabilistic load flow with wind production uncertainty using cumulants and Cornish-Fisher expansion.” Proceedings of the 2008 PSCC, Glasgow (UK), July 2008.
- [16]. Elderton W. P. and Johnson N. L., “Systems of Frequency Curves” , Cambridge University press, Cambridge , 1969.
- [17]. Johnson N. L., Kotz S. “Distribution of Statistics: Continuous Univariate Distributions – I “, Wiley, New York , 1970.
- [18]. Ord J. K., “ Families of Frequency Distributions”, Hafner, New York,1972
- [19]. Lee, Y. S. and Lin, T. K., “Correction to algorithm AS269: Higher-order Cornish Fisher expansion”, Applied Statistics 42: {268-269}, (1993).
- [20]. John G. Vlachogiannis, “Probabilistic Constrained Load Flow Considering Integration of Wind Power Generation and Electric Vehicles”, IEEE Transactions on Power Systems, Vol 24, No.4, November 2009.
- [21]. Garcia-Valle, Rodrigo and Vlachogiannis, John G. “Letter to the Editor: Electric Vehicle Demand Model for Load Flow Studies”, Electric Power Components and Systems,37:5,577 — 582
- [22]. Adan, I., and Resing, J., “Queueing theory,” available at: <http://www.win.tue.nl/~iadan/queueing.pdf> , Department of Mathematics and Computing Science, Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 2002.
- [23]. Ανέστης Αναστασιάδης, Υποψήφιος Διδάκτωρ Ε.Μ.Π., “Μέθοδος Gram-Charlier”, Αθήνα, Νοέμβριος 2008

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Α.1. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Ας υποθέσουμε ότι σε κάθε σημείο ενός δειγματοχώρου αντιστοιχούμε έναν αριθμό. Έχουμε έτσι μια συνάρτηση ορισμένη στο δειγματοχώρο. Η συνάρτηση αυτή καλείται τυχαία μεταβλητή ή στοχαστική συνάρτηση και συμβολίζεται συνήθως με ένα κεφάλαιο γράμμα, π.χ. X ή Y .

Εάν μια τυχαία μεταβλητή παίρνει πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο πλήθος τιμών, καλείται απαριθμητή ή *διακριτή* τυχαία μεταβλητή, ενώ εάν παίρνει άπειρο μη αριθμήσιμο πλήθος τιμών, καλείται *συνεχής* τυχαία μεταβλητή.

Έστω μία τυχαία μεταβλητή X , που παίρνει τιμές στο διάστημα (x_{\min}, x_{\max}) και μία συνάρτηση $f_X(x)$ που ορίζεται στο διάστημα (x_{\min}, x_{\max}) που παίρνει πραγματικές τομές. Τότε η $f_X(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X , αν ισχύουν :

$$A) \quad f_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_{\min}, x_{\max}) \quad (A.1)$$

$$B) \quad P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx \quad (A.2)$$

για οποιοδήποτε διάστημα $(x_1, x_2) \subseteq (x_{\min}, x_{\max})$

Από τον προηγούμενο ορισμό προκύπτει ότι :

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} f_X(x) dx = 1 \quad (A.3)$$

Στις περιπτώσεις που η τυχαία μεταβλητή X είναι διακριτή το προηγούμενο ολοκλήρωμα μετατρέπεται σε άθροισμα.

Σε μία τυχαία μεταβλητή X με πυκνότητα πιθανότητας f_X αντιστοιχεί η συνάρτηση κατανομής F_X για την οποία ισχύει :

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{x' \leq x} f(x') & \text{αν } x \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^x f(x') dx' & \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα, παίρνει πραγματικές τιμές και σύμφωνα με τον προηγούμενο ορισμό θα ισχύει :

$$F_x(-\infty) = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$F_x(\infty) = 1$$

$$f_x(x) = \frac{d}{dx} F_x(x) \quad (\text{A.6})$$

Έστω δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y με δεδομένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_x(x)$ και $f_y(y)$ αντίστοιχα. Μία καινούρια μεταβλητή Z δίνεται από τη σχέση :

$$Z = \alpha X + \beta Y \quad (\text{A.8})$$

όπου α και β κατάλληλες σταθερές.

Σκοπός είναι η εύρεση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της καινούριας τυχαίας μεταβλητής Z . Για την πιθανοτική κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Z ισχύει :

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = P(\alpha X + \beta Y \leq z) = \iint_{\alpha X + \beta Y \leq z} f_x(\alpha x) f_y(\beta y) dx dy \quad (\text{A.9})$$

Αφού οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, από την εξίσωση (A.9) προκύπτει :

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(\beta y) \int_{-\infty}^{z-\beta y} f_x(\alpha x) dx dy \quad (\text{A.10})$$

Σύμφωνα με την εξίσωση (A.4) ισχύει :

$$\int_{-\infty}^{z-\beta y} f_x(ax)dx = F_x(ax) = F_x(z - \beta y) \quad (\text{A.11})$$

Αντικαθιστώντας, η (Α 10) μετατρέπεται στην :

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(\beta y)F_x(z - \beta y)dy \quad (\text{A.12})$$

Και βάσει της (Α.7) :

$$f_x(ax) = \frac{d}{d(ax)}F_x(ax) \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \frac{d}{dz}F_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(\beta y) \frac{d}{d(ax)}F_x(z - \beta y) \frac{d(ax)}{dz} dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_y(\beta y)f_x(z - \beta y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(ax)f_y(z - ax)dx \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Η εξίσωση (Α.14) είναι γνωστή ως η μαθηματική συνέλιξη των τυχαίων μεταβλητών αΧ και βΥ

$$f_z(z) = f_x(ax) * f_y(\beta y) \quad (\text{A.15})$$

και δίνει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του γραμμικού συνδυασμού τυχαίων μεταβλητών ανεξάρτητων, μεταξύ τους, με γνωστές τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητάς τους.

Με απλή επέκταση για

$$Z = \sum_{i=1}^r a_i x_i \quad (\text{A.16})$$

ισχύει :

$$f_z(z) = f_1(a_1 x_1) * f_2(a_2 x_2) * \dots * f_i(a_i x_i) * \dots * f_r(a_r x_r) \quad (\text{A.17})$$

A.2. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΡΟΗΣ ΦΟΡΤΙΟΥ

Τα δεδομένα σε ένα πρόβλημα πιθανοτικής ροής φορτίου είναι οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας του φορτίου ή της παραγωγής σε ένα ζυγό PQ ή PV. Οι συναρτήσεις αυτές ακολουθούν τη στατιστική φύση των μεγεθών που προσδιορίζουν. Οι πιο συνηθισμένες κατανομές πιθανότητας στην περιγραφή των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών ενός προγράμματος υπολογισμού ροής φορτίου είναι οι ακόλουθες :

A) Διωνυμική Κατανομή

Σε ένα ζυγό παραγωγής υπάρχει συνήθως μία ομάδα από ανεξάρτητες γεννήτριες. Κάθε γεννήτρια έχει δύο πιθανές καταστάσεις : λειτουργία ή μη λειτουργία. Η συνολική παραγωγή ισχύος στο ζυγό εξαρτάται από τον αριθμό των γεννητριών που βρίσκονται σε λειτουργία. Αν q είναι η πιθανότητα μη λειτουργίας της γεννήτριας (Ρυθμός Μη Προγραμματισμένων Διακοπών P.M.Π.Δ), τότε για μία ομάδα n γεννητριών, η τυχαία μεταβλητή X του αριθμού των γεννητριών που λειτουργούν ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή ή κατανομή Bernulli B(n,p) με παραμέτρους n και p (όπου p = 1-q, η πιθανότητα λειτουργίας της γεννήτριας). Ο συντελεστής q θεωρείται ίδιος για όλη την ομάδα των όμοιων ανεξάρτητων γεννητριών.

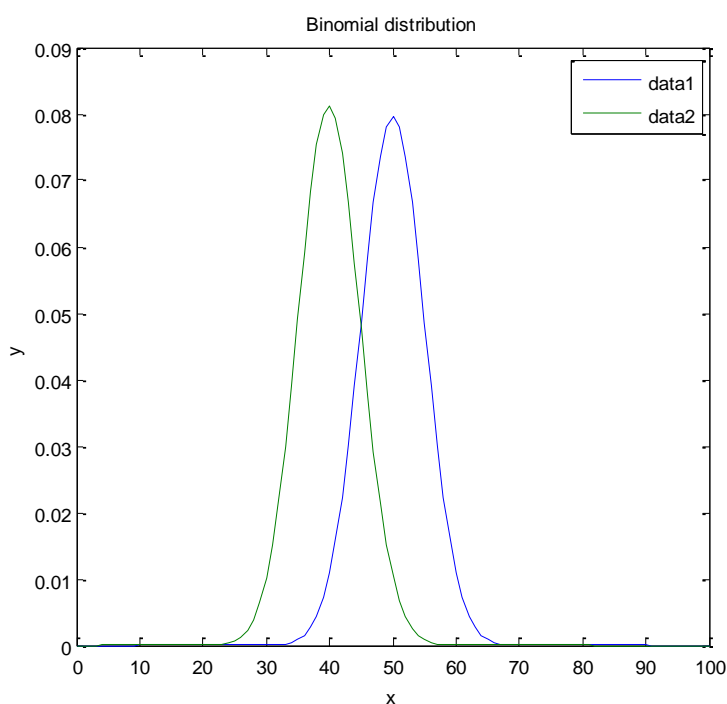
$$P[X = x] = f_x(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\dots,n \quad (\text{A.18})$$

$$\text{όπου } p = 1 - q \quad \text{και} \quad \binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

και είναι διακριτή συνάρτηση.

Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας δίνεται από τη σχέση :

$$F(k) = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad (\text{A.19})$$



Σχήμα Α 2.1.: Διωνυμικές κατανομές data 1 (με $n = 100$ και $p = 0.5$)
και data 2 (με $n = 100$ και $p = 0.4$)

Αν ο άξονας των x των προηγούμενων συναρτήσεων πολλαπλασιαστεί με την παραγωγή S της κάθε μιας γεννήτριας από την ομάδα των όμοιων ανεξάρτητων γεννητριών, τότε οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ή κατανομής της πιθανότητας για την παραγωγή του συγκεκριμένου ζυγού εκφράζονται σε μονάδες ισχύος.

B) Κανονική Κατανομή

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

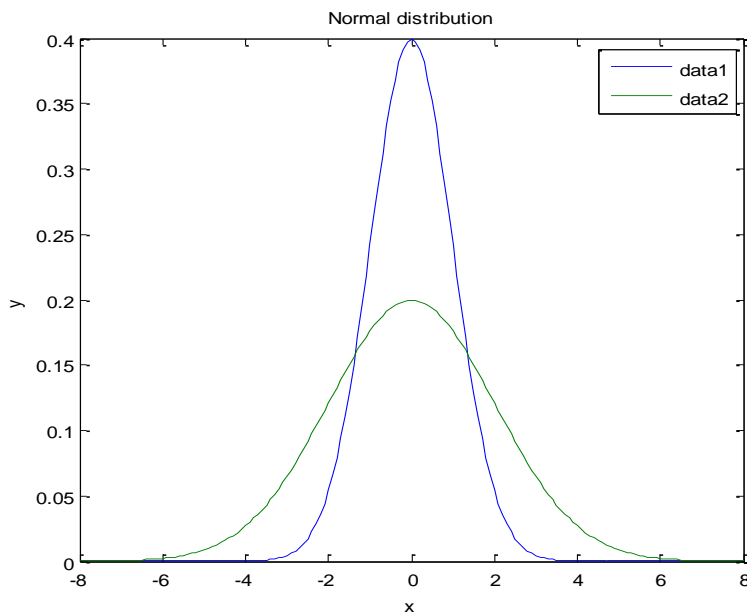
Η πρόβλεψη γενικά της πιθανής τιμής μιας μετρούμενης ποσότητας όπως είναι το φορτίο σε ένα ζυγό PQ καθορίζεται αρκετά ικανοποιητικά από την κανονική κατανομή ιδίως αν πρόκειται για φορτίο οικιακής κατανάλωσης. Οι παράμετροι της κατανομής $N(\mu, \sigma^2)$ είναι η μέση τιμή μ , και η τυπική απόκλιση σ που αντιπροσωπεύει τα σφάλματα πρόβλεψης. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι όσο πιο μεγάλη είναι η τυπική απόκλιση τόσο η παράσταση του φορτίου με την κανονική αυτή κατανομή απέχει από την πραγματικότητα. Σε αυτή την περίπτωση θα πρέπει να αναζητηθούν κατανομές άλλης μορφής.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής x που ακολουθεί κανονική κατανομή δίνεται από τη σχέση :

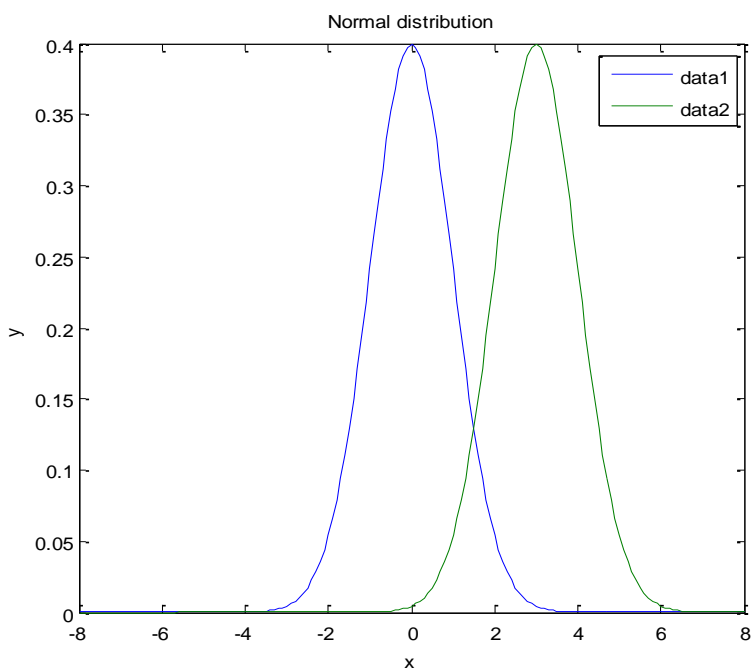
$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad x, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \quad (\text{A.20})$$

Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας δίνεται από τη σχέση :

$$F_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (\text{A.21})$$



Σχήμα A 2.2.: Κανονικές κατανομές data 1 (με $\mu = 0$ και $\sigma = 1$) και data 2 (με $\mu = 0$ και $\sigma = 2$)



Σχήμα Α 2.3.: Κανονικές κατανομές data 1(με $\mu = 0$ και $\sigma = 1$) και data 2 (με $\mu = 3$ και $\sigma = 1$)

Γ) Διακριτή κατανομή

Η κατανομή αυτή χρησιμοποιείται για την παράσταση φορτίων και παραγωγής που δεν μπορούν να αποδοθούν με τη μορφή της διωνυμικής ή της κανονικής κατανομής (αξίζει να σημειωθεί ότι οι πιο συνηθισμένες κατανομές πιθανότητας στην περιγραφή των δεδομένων τυχαίων μεταβλητών ενός προγράμματος υπολογισμού ροής φορτίου είναι η διωνυμική, η κανονική, η διακριτή και η κατανομή Weibull). Αυτό οφείλεται είτε στο ότι έχουν μεγάλη τυπική απόκλιση και ανώμαλες περιοχές, είτε στο ότι οι γεννήτριες σε ένα ζυγό είναι ανόμοιες. Εφαρμόζεται συνήθως σε περιπτώσεις βιομηχανικών φορτίων. Γενικά, κάθε άλλη κατανομή πιθανότητας, οποιαδήποτε και αν είναι η μορφή της, μπορεί να παρασταθεί ως διακριτή. Η προσέγγιση είναι τόσο καλύτερη όσο περισσότερα είναι τα σημεία που συνιστούν τη διακριτή κατανομή.

Η χρήση διακριτών κατανομών παρέχει τη δυνατότητα να μη γίνει ουσιαστικά καμία παραδοχή για το είδος και τη μορφή των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας που θα χρησιμοποιηθούν.

Στις επόμενες σχέσεις δίνονται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της διακριτής κατανομής και στο σχήμα η τυπική μορφή της κατανομής αυτής.

$$f_x(x) = \sum_{i=1}^v p_i \delta(x - W_i) \quad (\text{A.22})$$

$$F_x(x) = \sum_{x' \leq x} \sum_{i=1}^v p_i \delta(x' - W_i)$$

$$\text{όπου } \delta(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{για } \varepsilon = 0 \\ 0 & \text{για } \varepsilon \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

v = αριθμός των διακεκριμένων τιμών

W_i = η θέση κάποιας διακεκριμένης τιμής

και p_i = η αντίστοιχη πιθανότητά της

Όταν τα φορτία ή η παραγωγή είναι γνωστά ακριβώς, ορίζονται μόνο από μια σταθερή τιμή, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην περίπτωση αυτή είτε η διακριτή κατανομή με μία μόνο τιμή έχοντας πιθανότητα μονάδα, είτε η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0$.

Δ) Κατανομή Weibull

Η κατανομή αυτή περιγράφει ικανοποιητικά τη διάρκεια ζωής ορισμένων γεγονότων. Στα Σ.Η.Ε η κατανομή Weibull χρησιμοποιείται για την παράσταση ανανεώσιμων πηγών ενέργειας.

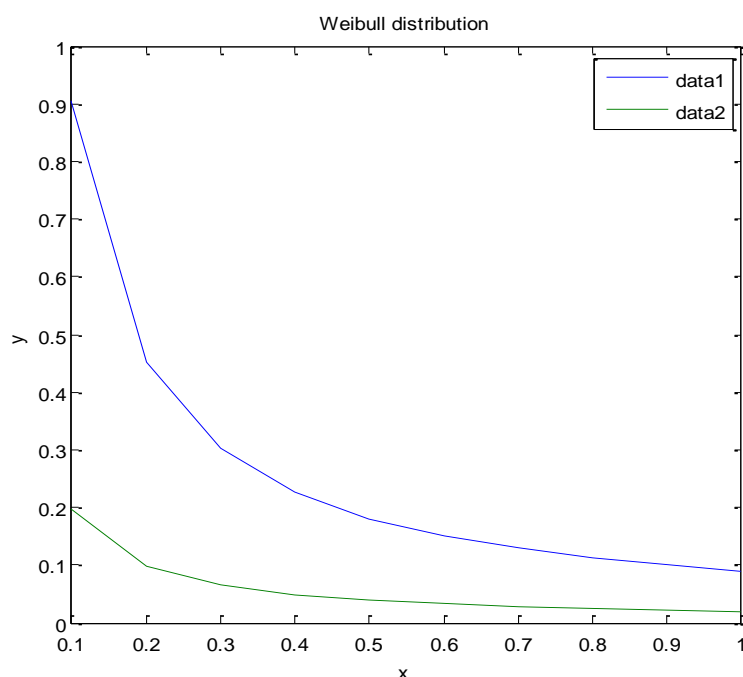
Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής αυτής χαρακτηρίζεται από δύο παραμέτρους k και c και δίνεται από τη σχέση :

$$f_x(x) = \begin{cases} \left(\frac{k}{c}\right) \left(\frac{x}{c}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{c}\right)^k} & , x > 0 \\ 0 & \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

$k, c > 0$

Για $k = 1$ η κατανομή Weibull εκφυλίζεται στην αρνητική εκθετική κατανομή που αποτελεί ειδική περίπτωση της .

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η μορφή της πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Weibull.



Σχήμα Α 2.4.: Κατανομές Weibull data 1(με k = 1) και data 2 (με k = 2)

Σημειώνουμε εδώ ότι η κατανομή αυτή εφαρμόζεται σε ανάλυση συστήματος που διαθέτει παραγωγή ανεμογεννητριών.

A.3. ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΑΓΝΩΣΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

Οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά σχετίζονται κατά κάποιο τρόπο οριακά. Η βασική αυτή πρόταση διατυπώνεται και αποδεικνύεται από το κεντρικό οριακό θεώρημα .

Έστω μία τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί διωνυμική κατανομή με

$$f_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (A.26)$$

για n = 1, 2, ...

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διεξόδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Αν θεωρηθεί η κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και σ^2 τότε :

$$f'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.27})$$

και ισχύει :

$$f_n(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = f'_n(x) \quad (\text{A.28})$$

Για αρκετά μεγάλες τιμές του n , η διωνυμική πυκνότητα πιθανότητας $f_n(x)$ και η κανονική κατανομή $f'_n(x)$ συγκλίνουν στις ίδιες τιμές για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f_n(x)}{f'_n(x)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad (\text{A.29})$$

Η κανονική κατανομή με αυτή την έννοια αποτελεί το όριο πολλών άλλων κατανομών για μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων μιας τυχαίας μεταβλητής,

Έστω οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n που έχουν την ίδια κατανομή πιθανότητας και πεπερασμένη μέση τιμή και τυπική απόκλιση. Τότε για τη μεταβλητή

$$W_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad (\text{A.30})$$

ισχύει

$$P\left(\frac{W_n - \mu_n}{\sigma_n} \leq x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.31})$$

όπου μ_n η μέση τιμή της μεταβλητής W_n
 σ_n η τυπική απόκλιση της μεταβλητής W_n

και

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{A.32})$$

η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας που αντιστοιχεί στην κατανομή $N(0,1)$.

Με βάση το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα έχει διατυπωθεί η άποψη ότι όλες οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας των αγνώστων μεγεθών σε μία πιθανοτική ανάλυση ροών φορτίου ακολουθούν κανονική κατανομή.

Έτσι, τα στοιχεία του διανύσματος κατάστασης X , που αντιπροσωπεύουν γωνίες και τάσεις θεωρείται ότι δίνονται από τη σχέση :

$$X = X_0 + 3 \sigma_X \quad (\text{A.33})$$

Το ίδιο και η πραγματική και άεργος ροή ισχύος μιας γραμμής ή η άεργος έγχυση σε ένα ζυγό παραγωγής, μεγέθη που υπολογίζονται από το διάνυσμα κατάστασης μέσω των γραμμικοποιημένων εξισώσεων ροής φορτίου.

$$Z = K X \quad (\text{A.34})$$

$$Z = Z_0 + 3 \sigma_Z \quad (\text{A.35})$$

Η μέση τιμή X_0 και Z_0 υπολογίζεται από την επίλυση μιας ντετερμινιστικής ροής φορτίου, ενώ οι τιμές των σ_X και σ_Z αποτελούν τα διαγώνια στοιχεία των πινάκων συμμεταβλητότητας $Cov(X)$ και $Cov(Z)$ αντίστοιχα, που ορίζονται ως εξής :

$$Cov(x) = (J^T V^{-1} J)^{-1} \quad (\text{A.36})$$

$$Cov(z) = K (J^T V^{-1} J)^{-1} K^T \quad (\text{A.37})$$

όπου J η ιακωβιανή μήτρα υπολογισμένη στο σημείο X_0 και

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

V ένας διαγώνιος πίνακας που αντιπροσωπεύει τις τυπικές αποκλίσεις των δεδομένων.

Η παραδοχή όμως ότι οι κατανομές πιθανότητας των αγνώστων μεγεθών είναι κανονικές, δεν ευσταθεί για τους εξής λόγους :

α) Η εφαρμογή του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος στην περίπτωση της διωνυμικής κατανομής δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν $n \geq 20$ και ακόμη καλύτερα όταν $p \approx 0.5$. Η παραγωγή σε ένα ζυγό PV όμως ακολουθεί συχνά τη διωνυμική κατανομή της οποίας οι σταθερές δεν ικανοποιούν τις προηγούμενες προϋποθέσεις. Συνήθως ισχύει :

i) $4 \leq n \leq 10$ και

ii) $0.8 \leq p < 1$

β) Η συνέλιξη διακριτών ή άλλης μορφής κατανομών (Weibull), δεν οδηγεί σε κανονική κατανομή, ιδίως σε ένα μικρό σύστημα με λίγους ζυγούς γιατί δεν ικανοποιούνται οι δύο προϋποθέσεις του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος ότι :

i) οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n έχουν την ίδια κατανομή πιθανότητας και

ii) $n \longrightarrow \infty$

γ) Η συμμετοχή κάθε κατανομής στην τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δεν είναι ίδια λόγω των συντελεστών ευαισθησίας.

Έτσι, μπορεί να έχει μεγαλύτερη βαρύτητα στη συνέλιξη μία μη κανονική κατανομή, οπότε η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας διαμορφώνεται από αυτή την κατανομή.

Για τους λόγους αυτούς, η υπόθεση της κανονικής κατανομής των υπολογιζομένων μεγεθών μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα συμπεράσματα και γι' αυτό δεν αρκεί ο υπολογισμός μόνο της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης ενός αγνώστου μεγέθους, αλλά απαιτείται και ο υπολογισμός της συνάρτησης πυκνότητας

πιθανότητάς του. Η πιθανοτική ανάλυση της ροής φορτίου σε πραγματικά συστήματα αποδεικνύει ότι δεν μπορεί να γίνει εκ των προτέρων καμία υπόθεση για τη μορφή των εξαγομένων συναρτήσεων.

A.4 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

A.4.1. Διακριτές κατανομές πιθανότητας

Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή και ας υποθέσουμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι x_1, x_2, x_3, \dots . Διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά. Ας υποθέσουμε ότι οι πιθανότητες να πάρει η μεταβλητή τις τιμές είναι

$$P(X = x_k) = f(x_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (\text{A.38})$$

Ορίζουμε μία συνάρτηση πιθανότητας ή κατανομή πιθανότητας

$$P(X = x) = f(x) \quad (\text{A.39})$$

τέτοια ώστε για $x = x_k$ η (A.39) να δίνει την (A.38), ενώ για άλλες τιμές του x να είναι $f(x) = 0$.

Γενικά η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας, εάν

1. $f(x) \geq 0$

2. $\sum_x f(x) = 1$

όπου το άθροισμα νοείται ως προς όλες τις δυνατές τιμές του x .

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής ή απλά συνάρτηση κατανομής για μία τυχαία μεταβλητή X ορίζεται με τη σχέση :

$$P(X \leq x) = F(x) \quad (\text{A.40})$$

όπου x είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, δηλ. $-\infty < x < +\infty$

Ορισμένες από τις σημαντικότερες διακριτές κατανομές πιθανότητας παρουσιάζονται παρακάτω:

1. Γεωμετρική κατανομή

$$P[X = x] = f_x(x) = \theta(1 - \theta)^{x-1}, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.41})$$

$$E[X] = \frac{1}{\theta}$$

$$\sigma^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{\theta e^{j\omega}}{1 - e^{j\omega}(1 - \theta)}$$

2. Πολυωνυμική κατανομή (Multinomial) :

Έχουμε n τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n

$$P[X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n] = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^n x_i!} \prod_{i=1}^n \theta_i^{x_i} \quad (\text{A.42})$$

όπου x_i είναι θετικοί ακέραιοι $\theta_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n x_i = N$$

$$E[X_i] = N\theta_i$$

$$\sigma_i^2 = N\theta_i(1 - \theta_i)$$

$$\sigma_{ij}^2 = -N\theta_i\theta_j$$

$$\Phi(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = (\theta_1 e^{j\omega_1} + \theta_2 e^{j\omega_2} + \dots + \theta_n e^{j\omega_n})^N$$

3. Κατανομή Poisson :

$$P[X = x] = f_x(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad \lambda > 0, \quad x = 0, 1, \dots \quad (\text{A.43})$$

$$E[X] = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda$$

$$\Phi(\omega) = e^{\lambda(e^{j\omega} - 1)}$$

4. Υπεργεωμετρική κατανομή :

$$P[X = x] = f_x(x) = \frac{\binom{\kappa}{n} \binom{N - \kappa}{n - x}}{\binom{N}{n}} \quad (\text{A.44})$$

$x = 0, 1, 2, \dots, [n, \kappa]$, όπου $[n, \kappa]$ είναι ο μικρότερος από τους n και κ

$$E[X] = \frac{\kappa n}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\kappa(N - \kappa)n(N - n)}{N^2(N - 1)}$$

5. Κατανομή Pascal ή Polya ή αρνητική διωνυμική κατανομή :

$$P[X = x] = \binom{x-1}{n-1} \theta^n (1-\theta)^{x-n} \quad x = n, n+1, n+2, \dots, \quad 0 < \theta < 1$$

$$n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A.45})$$

$$E [X] = n\theta^{-1}$$

$$\sigma^2 = n\theta^{-2}(1-\theta)$$

$$\Phi(\omega) = \theta^n e^{jn\omega} [1 - (1-\theta) \cdot e^{j\omega}]^{-n}$$

A.4.2. Συνεχείς κατανομές

6. Ομοιόμορφη κατανομή :

$$f_x(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \alpha < x < \beta, \quad \alpha < \beta \quad (\text{A.46})$$

$$E [X] = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$$\Phi(\omega) = \frac{e^{j\omega\beta} - e^{j\omega\alpha}}{j\omega(\beta - \alpha)}$$

7. Gamma Κατανομή

$$f_x(x) = \frac{x^\alpha e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha + 1)\beta^{\alpha+1}}, \quad 0 < x < \infty, \quad \alpha > -1, \quad \beta > 0 \quad (\text{A.47})$$

$$E [X] = \beta(\alpha + 1)$$

$$\sigma^2 = \beta^2(\alpha + 1)$$

$$\Phi(\omega) = (1 - j\beta\omega)^{-(\alpha+1)}, \quad \omega < \frac{1}{\beta}$$

8. Εκθετική Κατανομή :

$$f_x(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x > 0 \quad (\text{A.48})$$

$$E[X] = \lambda$$

$$\sigma^2 = \lambda^2$$

$$\Phi(\omega) = (1 - j\omega\lambda)^{-1}$$

9. Βήτα Κατανομή

$$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} x^\alpha (1 - x)^\beta \quad 0 < x < 1, \alpha > -1, \beta > -1 \quad (\text{A.49})$$

$$E[X] = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(\alpha + 1)(\beta + 1)}{(\alpha + \beta + 2)^2(\alpha + \beta + 3)}$$

10. Cauchy Κατανομή

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + (x - b)^2} \quad -\infty < x < +\infty, \quad a > 0, \quad -\infty < b < +\infty \quad (\text{A.50})$$

Η μέση τιμή και η διασπορά δεν ορίζονται.

$$\Phi(\omega) = e^{j\omega b - a|\omega|}$$

11. Chi-Square Κατανομή

$$f(x) = \left[\left(\frac{n}{2} - 1 \right)! \right]^{-1} 2^{-n/2} x^{(n/2)-1} e^{-x/2} \quad x > 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{A.51})$$

$$E(X) = n$$

$$\sigma^2 = 2n$$

$$\Phi(\omega) = (1 - 2j\omega)^{-n/2}$$

12. Erlang Κατανομή

$$f(x) = \frac{\alpha^n x^{n-1} e^{-\alpha x}}{(n-1)!} \quad x > 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (\text{A.52})$$

$$E(X) = n\alpha^{-1}$$

$$\sigma^2 = n\alpha^{-2}$$

$$\Phi(\omega) = \alpha^n (\alpha - j\omega)^{-n}$$

13. Κατανομή Laplace

$$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x-b|} \quad -\infty < x < +\infty, \quad a > 0, \quad -\infty < b < +\infty \quad (\text{A.53})$$

$$E(X) = b$$

$$\sigma^2 = 2a^{-2}$$

$$\Phi(\omega) = a^2 e^{j\omega b} (\alpha^2 + \omega^2)^{-1}$$

14. Λογοκανονική Κατανομή (Log-normal)

$$f(x) = \frac{\exp\{-[\ln(x-a)-b]^2/2\sigma\}}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-a)} \quad x \geq a \quad (\text{A.54})$$

$$\sigma > 0, \quad -\infty < a < +\infty, \quad -\infty < b < +\infty$$

$$E(X) = a + e^{b+0.5\sigma^2}$$

$$\sigma^2 = e^{2b+\sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$$

15. Κατανομή Maxwell

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha^3 x^2 e^{-\alpha^2 x^2/2} \quad x > 0 \quad (\text{A.55})$$

$$E(X) = \sqrt{8/\pi} \alpha^{-1}$$

$$\sigma^2 = (3 - \frac{8}{\pi}) \alpha^{-2}$$

16. Κατανομή Rayleigh

$$f(x) = \frac{x}{\alpha^2} e^{-x^2/2\alpha^2} \quad x > 0 \quad (\text{A.56})$$

$$E(X) = \alpha \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\sigma^2 = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) \alpha^2$$

17. Κανονική κατανομή δύο μεταβλητών

$$f_{xy}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\bar{y}}{\sigma_y} \right)^2 - \frac{2\rho}{\sigma_x\sigma_y} (x-\bar{x})(y-\bar{y}) \right] \right\}$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad \sigma_x > 0, \quad \sigma_y > 0, \quad -1 < \rho < 1 \quad (\text{A.57})$$

$$\Phi_{\omega_x, \omega_y}(\omega_x, \omega_y) = \exp \left[j\omega_x \bar{X} + j\omega_y \bar{Y} - \frac{1}{2} (\omega_x^2 \sigma_x^2 + 2\rho\omega_x\omega_y\sigma_x\sigma_y + \omega_y^2 \sigma_y^2) \right]$$

A.4.3. Θεώρημα Κεντρικού Ορίου

Αν έχουμε δυο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κανονική κατανομή X και Y τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι το άθροισμά τους είναι τυχαία μεταβλητή με κανονική επίσης κατανομή. Αν λοιπόν $X + Y = Z$, τότε η τυχαία μεταβλητή Z έχει και αυτή κανονική κατανομή με διασπορά και μέση τιμή :

$$\sigma_Z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \quad (\text{A.58})$$

$$\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y} \quad (\text{A.59})$$

Αν επεκτείνουμε τα παραπάνω για n ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κανονική κατανομή, θα προκύψει ότι το άθροισμα των τυχαίων μεταβλητών είναι επίσης κανονική κατανομή με

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \quad (\text{A.60})$$

$$\bar{Z} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_n \quad (\text{A.61})$$

A.4.4. Θεώρημα Κεντρικής Τιμής

Το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που δίνεται από τη σχέση $Z = \frac{1}{\sqrt{n}} [X_1 + X_2 + \dots + X_n]$ τείνει σε τυχαία μεταβλητή με κανονική κατανομή, ανεξάρτητα από το είδος των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας (κατανομών) των τυχαίων μεταβλητών X_i .

A.4.5. Μέση τιμή – Τυπική απόκλιση

Οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας αγνώστων μεγεθών (για τη D.C. μέθοδο γωνίες και πραγματικές ροές ισχύος) δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, παρόλα αυτά ενδιαφέρει ο υπολογισμός της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισής τους. Για το σκοπό αυτό υπολογίζεται η μέση τιμή μ και η τυπική απόκλιση σ των κατανομών που δίνονται.

Η τυπική απόκλιση σ αναφέρεται είτε ως απόλυτο μέγεθος σε μονάδες MW ή σε α.μ. είτε ως επί τοις εκατό της μέσης τιμής. Για να υπάρχει ενιαία μορφή υπολογισμών, όλες οι τυπικές αποκλίσεις μετατρέπονται σε α.μ.

A.5. ΣΥΝΕΛΙΞΕΙΣ

Η συνάρτηση πυκνότητας του αθροίσματος $U = X + Y$ δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y με κοινή συνάρτηση πυκνότητας $f(x,y)$ είναι :

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, u-x) dx \quad (\text{A.62})$$

Στην ειδική περίπτωση όπου οι X και Y είναι ανεξάρτητες, έχουμε $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται :

$$g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(u-x) dx \quad (\text{A.63})$$

που καλείται συνέλιξη των f_1 και f_2 και συμβολίζεται με $f_1 * f_2$.

Η συνέλιξη έχει τις παρακάτω αξιοσημείωτες ιδιότητες :

1. $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$
2. $f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3$
3. $f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3$

Οι σχέσεις αυτές δείχνουν ότι ισχύουν η αντιμεταθετική ιδιότητα , η προσεταιριστική ιδιότητα και επιμεριστική ιδιότητα για την πράξη της συνέλιξεως .

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ MONTE CARLO

Β.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προσομοίωση Monte – Carlo ασχολείται με τη δημιουργία ενός πιθανοτικού μοντέλου του συστήματος που μελετάται (χρησιμοποιώντας ένα πρόγραμμα ηλεκτρονικού υπολογιστή). Όταν αναπτυχθεί αυτό το μοντέλο πραγματοποιείται ένας πολύ μεγάλος αριθμός επαναλήψεων της επίλυσης του μοντέλου στον υπολογιστή, ενώ στο τέλος κάθε μίας από τις οποίες καταγράφονται τα αποτελέσματα που ευρίσκονται.

Είναι φανερό λοιπόν ότι η μεθοδολογία Monte – Carlo είναι πάρα πολύ εύκολο να εφαρμοστεί, ιδιαίτερα σε συστήματα που είναι πολύ πολύπλοκα και πολύ μεγάλα για να λυθούν με την αναλυτική μεθοδολογία. Η μεθοδολογία αυτή μπορεί να οδηγήσει σε πολύ ακριβή αποτελέσματα. Παρόλα αυτά, απαιτεί εξαιρετικά μεγάλο χρόνο υπολογιστικής διαδικασίας ειδικά σε μεγάλα και πολύπλοκα συστήματα.

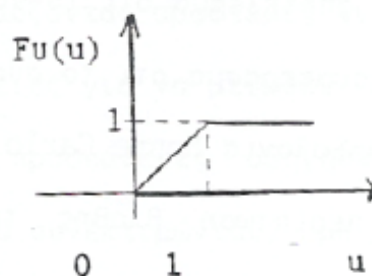
Β.2. ΤΥΧΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΟΥΣ

Β.2.1. Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών

Κάθε προσέγγιση με τη χρήση της μεθόδου Monte-Carlo προϋποθέτει τη δημιουργία των κατάλληλων τιμών των τυχαίων μεταβλητών που θα χρησιμοποιηθούν, σε συμφωνία με την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής που προτείνεται για το μοντέλο. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί συστηματικά για κάθε μεταβλητή που έχουμε, παράγοντας πρώτα ομοιόμορφα κατανεμημένους τυχαίους αριθμούς στο διάστημα από 0 έως 1 και στη συνέχεια, μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών, να παράγεται το αντίστοιχο σύνολο τυχαίων αριθμών με τη δεδομένη συνάρτηση κατανομής. Τα κύρια βήματα της μεθόδου φαίνονται με τη βοήθεια του παραδείγματος:

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση κατανομής $F_U(u)$ της τυποποιημένης ομοιόμορφης μεταβλητής u , η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$F_U(u) = \begin{cases} 0 & \text{για } u < 0 \\ u & \text{για } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{για } u > 1 \end{cases}$$



και ότι αναζητείται η τιμή του x , έτσι ώστε $F_X(x) = u$. Η τιμή της μεταβλητής x βρίσκεται από τον υπολογισμό της αντίστροφης συνάρτησης:

$$x = F_X^{-1}(u) \quad (\text{B.1})$$

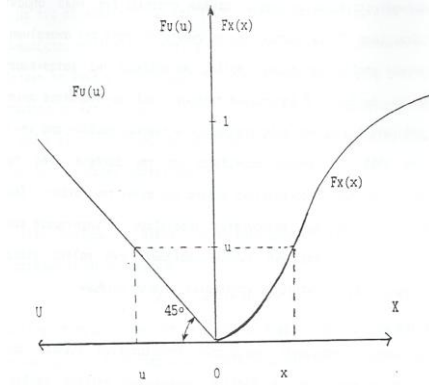
Εάν U είναι μία τιμή της U , η αντίστοιχη τιμή της X που λαμβάνεται θεωρώντας την παραπάνω εξίσωση (B.1) θα έχει την αθροιστική πιθανότητα:

$$P(X \leq x) = P[F_X^{-1}(U) \leq x] = P[U \leq F_X(x)] = F_U[F_X(x)] = F_X(x) \quad (\text{B.2})$$

που σημαίνει ότι εάν (u_1, u_2, \dots, u_n) είναι ένα σύνολο τιμών της U , το αντίστοιχο σύνολο τιμών που λαμβάνεται θεωρώντας την παραπάνω εξίσωση (B.2) είναι:

$$x_i = F_X^{-1}(u_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.3})$$

και θα έχει την επιθυμητή συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Η σχέση μεταξύ των u και x φαίνεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα 5.2.α.



Σχήμα Β.2.1. Μέθοδος παραγωγής τυχαίων αριθμών

B.2.2. Ομοιόμορφα Κατανεμημένοι Τυχαίοι Αριθμοί

Όπως φαίνεται από τη συλλογιστική που οδήγησε στην εξίσωση (B.3), η παραγωγή ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών αποτελεί ένα πολύ σημαντικό βήμα στην προσομοίωση Monte – Carlo. Είναι γνωστό ότι πριν την ανακάλυψη των πρώτων ηλεκτρονικών υπολογιστών έγιναν πολλές προσπάθειες να κατασκευαστούν κατάλογοι τυχαίων αριθμών. Η δημιουργία τέτοιων καταλόγων σταμάτησε οριστικά μετά από τη μνημειώδη δημοσίευση ενός εκατομμυρίου τυχαίων αριθμών από την Rand Corporation το 1955, οι οποίοι παρήχθησαν με τη βοήθεια ενός τροχού ηλεκτρονικής ρουλέτας που κατασκευάστηκε ειδικά για αυτό το σκοπό. Σήμερα, οι κατασκευαστές ηλεκτρονικών υπολογιστών εφοδιάζουν τα μηχανήματά τους με εσωτερικές ρουτίνες για την παραγωγή τυχαίων αριθμών, ενώ πολλές εταιρείες αναπτύξεως λογισμικού έχουν αναπτύξει γεννήτριες τυχαίων αριθμών.

Όλες οι μέθοδοι παραγωγής ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών στηρίζονται σε υπολογισμούς με τη βοήθεια αναδρομικών σχέσεων υπολογισμού υπολοίπων (modulo m) που προκύπτουν από ένα γραμμικό μετασχηματισμό. Η εσωτερική παραγωγή αριθμών που χρησιμοποιείται περισσότερο σήμερα είναι η πολλαπλασιαστική μέθοδος σύγκλισης στην οποία τα υπόλοιπα διαδοχικών δυνάμεων ενός αριθμού x αποτελούν τους διαδοχικούς αριθμούς σε μία σειρά τυχαίων αριθμών, δηλαδή:

$$x_i = x^i \pmod{m} \quad (B.4)$$

Αυτή η μέθοδος είναι δύσκολο να εφαρμοστεί σε πολλούς υπολογιστές, διότι καταλήγει στην ύψωση ενός αριθμού σε μεγάλες δυνάμεις (π.χ. εάν χρειάζονται

100.000 τυχαίοι αριθμοί, ο τελευταίος θα υπολογιστεί ως $x^{100.000} \pmod{m}$. Όμως έχει αποδειχτεί ότι μία ισοδύναμη σχέση είναι η ακόλουθη:

$$x_i = \rho x_{i-1} \pmod{m} \quad (\text{B.5})$$

όπου ρ μια σταθερά. Σε αυτήν την περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί λαμβάνονται από τη σχέση:

$$u_i = x_i / m \quad (\text{B.6})$$

Όταν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί μία γεννήτρια τυχαίων αριθμών όπως αυτή που ορίζεται με τις εξισώσεις (B.2.5) και (B.2.6), πρέπει να προσδιοριστεί η παράμετρος ρ που ονομάζεται πολλαπλασιαστής, η αρχική τιμή x_0 και το υπόλοιπο m . Σήμερα, η συνηθέστερη επιλογή για το m ορίζεται από τη σχέση $m = r^s$, όπου r είναι η βάση του συστήματος αρίθμησης που χρησιμοποιεί ο αντίστοιχος υπολογιστής (συνήθως 2, 10 ή 16) και s είναι το μήκος της λέξης που δέχεται ο υπολογιστής, έτσι ώστε να επιτυγχάνονται ταχύτεροι υπολογισμοί.

Μία άλλη αναδρομική σχέση που συνήθως χρησιμοποιείται για τη δημιουργία τυχαίων αριθμών είναι η ακόλουθη:

$$x_i = (\rho x_{i-1} + b) \pmod{m} \quad (\text{B.7})$$

όπου b είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Είναι φανερό ότι η εξίσωση (B.2.5) είναι μία ειδική περίπτωση αυτής της σχέσης, όταν $b = 0$. Σε δυαδικούς υπολογιστές έχουν χρησιμοποιηθεί οι τιμές $\rho = 129$, $b = 1$ και $m = 2^{35}$.

Στην πραγματικότητα, οι τυχαίοι αριθμοί που παράγονται με τις παραπάνω διαδικασίες, μπορούν να αναπαραχθούν ακριβώς οι ίδιοι και για το λόγο αυτό αποτελούν ένα αιτιοκρατικό σύνολο. Εάν εφαρμοστούν αυστηρά οι ορισμοί, τέτοιοι αριθμοί δεν είναι ακριβώς τυχαίοι και γι' αυτό το λόγο ονομάζονται ψευδό-τυχαίοι αριθμοί. Πάντως, αν και η παραπάνω διαδικασία είναι βέβαια αιτιοκρατική, μπορεί να αποδειχτεί ότι οι αριθμοί που παράγονται χρησιμοποιώντας μεγάλες τιμές του m παρουσιάζονται ομοιόμορφα κατανεμημένοι και στατιστικά ανεξάρτητοι.

Β.2.3. Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών από Δεδομένη Συνάρτηση Κατανομής

Η εφαρμογή της εξίσωσης (B.3) μπορεί να παράγει τυχαίους αριθμούς οι οποίοι είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι και αντιστοιχούν σε μία θεωρούμενη κατανομή. Η εξίσωση (B.3) απαιτεί τον προσδιορισμό της αντίστροφης συνάρτησης από τη συνάρτηση κατανομής, και για το λόγο αυτό, αυτή η μέθοδος είναι γνωστή σαν μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού και μπορεί να εφαρμοστεί πάρα πολύ εύκολα στις περιπτώσεις που η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής έχει μία αναλυτική έκφραση.

Για παράδειγμα, ας υποτεθεί ότι έχει δημιουργηθεί μία σειρά $u_i, i = 1, 2, \dots, n$, ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών. Στη συνέχεια αναφέρονται παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων κατανομής στις οποίες μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού:

A) Εκθετική κατανομή: Η συνάρτηση κατανομής είναι η:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0 \quad (B.8)$$

Θεωρώντας την αντίστροφη αυτής της συνάρτησης μπορούν να παραχθούν εκθετικά κατανεμημένοι τυχαίοι αριθμοί από την εξίσωση:

$$x_i = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - u_i) = -\frac{1}{\lambda} \ln u_i \quad (B.9)$$

όπου στην παραπάνω σχέση χρησιμοποιήθηκε η διαπίστωση πως εάν οι αριθμοί u είναι ομοιόμορφα κατανεμημένοι, ομοιόμορφα κατανεμημένοι θα είναι και οι αριθμοί $1 - u$.

B) Κατανομή Erlang: Μπορεί να αποδειχτεί ότι τα αθροίσματα N ανεξάρτητων τυχαίων αριθμών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέσο (n/λ) και έχουν παράμετρο σχήματος ίση με n . Είναι φανερό, ότι ένας τυχαίος αριθμός που αντιστοιχεί στην κατανομή Erlang προσδιορίζεται από το άθροισμα n εκθετικά κατανεμημένων τυχαίων αριθμών, δηλαδή από τη σχέση:

$$x_i = \sum_{k=1}^n \frac{\ln u_i}{-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \ln \prod_{k=1}^n u_k \quad (B.10)$$

Γ) Κατανομή Ακρότατης Τιμής τύπου I: Η συνάρτηση κατανομής δίνεται από τη σχέση:

$$F_X(x) = \exp[-e^{-\alpha(x-\beta)}] \quad (\text{B.11})$$

όπου β είναι η πιο πιθανή τιμή της X και α είναι η παράμετρος σχήματος. Θεωρώντας την αντίστροφη συνάρτησή της, παράγονται τυχαίοι αριθμοί που ακολουθούν αυτήν την κατανομή, εφαρμόζοντας την ακόλουθη σχέση:

$$x_i = \beta - \frac{1}{\alpha} \ln[\ln(\frac{1}{u})] \quad (\text{B.12})$$

Δ) Κατανομή μέγιστης τιμής: Αν υποθέσουμε ότι $Y_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, όπου X_i είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και πανομοιότυπα κατανεμημένες σύμφωνα με τη συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$. Η συνάρτηση κατανομής των Y_n δίνεται από τη σχέση:

$$F_{Y_n}(y) = [F_X(y)]^n \quad (\text{B.13})$$

Έτσι οι τυχαίοι αριθμοί με κατανομή $F_{Y_n}(y)$ παράγονται από τη σχέση:

$$y_i = F_X^{-1}(u_i^{\frac{1}{n}}) \quad (\text{B.14})$$

Ένας μεγαλύτερος αριθμός παραδειγμάτων με την εφαρμογή γνωστών και ευρέως χρησιμοποιούμενων κατανομών μπορεί να ευρεθεί στη σχετική βιβλιογραφία.

Ένας άλλος τρόπος προσέγγισης του προβλήματος παραγωγής τυχαίων αριθμών, που μπορεί να αποδειχθεί πολύ χρήσιμος σε πολλές πραγματικές εφαρμογές ανάλυσης συστημάτων, είναι η διακριτοποίηση των συνεχών συναρτήσεων κατανομής. Σε τέτοιες περιπτώσεις εφαρμόζονται τεχνικές παραγωγής τυχαίων αριθμών, παρόμοιες με αυτή που περιγράφεται στη συνέχεια.

Στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών η διαδικασία αντιστροφής πρέπει να γίνει αριθμητικά. Έτσι η διαδικασία προσδιορισμού ενός τυχαίου αριθμού από κάποια δεδομένη συνάρτηση κατανομής, μπορεί να γενικευθεί

ως ακολούθως:

Αν u είναι ένας τυχαίος αριθμός από μια τυποποιημένη ομοιόμορφα κατανομή ο αντίστοιχος τυχαίος αριθμός x , επιλεγμένος από ένα σύνολο πιθανών τιμών x_1, x_2, \dots μιας τυχαίας μεταβλητής X είναι αυτός που ικανοποιεί τη σχέση:

$$F_x(x_i - 1) < u \leq F_x(x_i) \quad (B.15)$$

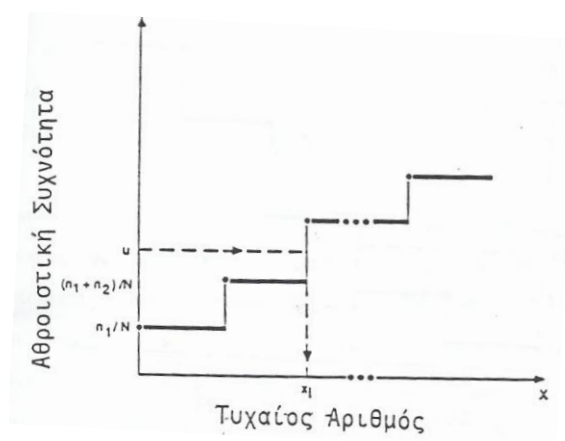
Σε αυτή τη μέθοδο απαιτείται ο υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής για όλες τις πιθανές τιμές της τυχαίας μεταβλητής και στη συνέχεια η επιλογή του κατάλληλου x_i κάθε φορά που παράγεται ένας αριθμός u .

Οι στατιστικές πληροφορίες που είναι διαθέσιμες για πολλές αναλύσεις πρακτικών συστημάτων δίνονται συνήθως σε μια μορφή ιστογραμμάτων. Σε αυτές τις περιπτώσεις οι τυχαίοι αριθμοί που μπορούν να παραχθούν από την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής μπορούν να ληφθούν, χωρίς να χρειάζεται ο υπολογισμός αυτής της ίδιας της συνάρτησης κατανομής. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν J διαστήματα στο ιστόγραμμα με το διάστημα i να έχει n_i παρατηρήσεις. Έστω ακόμα ότι το i διάστημα έχει όρια τις τιμές a_{i-1} και a_i της τυχαίας μεταβλητής X .

Συμβολίζοντας με x_i την αντιπροσωπευτική τιμή της X μέσα σε αυτό το διάστημα [π.χ. $x_i = (a_{i-1} + a_i)/2$], μπορούμε να παραστήσουμε την συνάρτηση κατανομής του X με μια βαθμωτή συνάρτηση αθροιστικής συχνότητας :

$$F_x(x_i) = \begin{cases} 0, & x_i < a_0 \\ \frac{1}{N} \sum_{j=1}^i n_j, & a_0 \leq x_i < a_j \\ 1, & x_i \geq a_j \end{cases} \quad (B.16)$$

όπου N είναι ο συνολικός αριθμός παρατηρήσεων. Η γραφική παράστασή της φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα Β.2.2.: Βαθμωτή Συνάρτηση αθροιστικής κατανομής

Αντικαθιστώντας την παραπάνω συνάρτηση στην εξίσωση (B.15) και πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη επί N λαμβάνουμε:

$$0 < Nu - \sum_{j=1}^{i-1} n_j \leq n_i \quad (\text{B.17})$$

όπου για καλύτερη παρουσίαση και χωρίς μείωση της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι η u έχει σχεδιαστεί στο ανοιχτό διάστημα $(0, 1)$.

Η μέθοδος του αντίστροφου μετασχηματισμού μπορεί να αποδειχθεί χρονοβόρα όταν ο αριθμός των διαστημάτων είναι μεγάλος, ή στην περίπτωση της διωνυμικής κατανομής, όταν η αντίστοιχη παράμετρος n λαμβάνει μεγάλες τιμές. Όμως οι περισσότερο χρησιμοποιούμενες κατανομές σε πολλές αναλύσεις πρακτικών συστημάτων είναι η διωνυμική κατανομή και η κατανομή Poisson. Αυτές οι κατανομές μπορούν σε ορισμένες περιπτώσεις να προσεγγισθούν από αντίστοιχες κανονικές κατανομές. Για $np > 10$ και $p \geq 0.5$ ή $n(1-p) > 10$ και $p < 0.5$ μπορεί να αποδειχθεί ότι μια διωνυμική τυχαία μεταβλητή X προσεγγίζει τη μεταβλητή της κανονικής κατανομής με μέσο $(np, 0.5)$ και διασπορά $(np, 1-p)$. Έτσι, για τον καθορισμό μιας τιμής x από μια διωνυμική κατανομή, μπορεί πρώτα να παραχθεί μια τιμή y από μια κανονική κατανομή $N[np - 0.5, np(1-p)]$ και στη συνέχεια να εξετασθούν οι ακόλουθες συνθήκες :

- i. Αν $y \leq 0$, τότε θέτουμε $x = 0$

- ii. Αν $y \geq n$, τότε θέτουμε $x = n$
- iii. Αν $0 < y < n$, τότε στρογγυλοποιούμε το y στον πλησιέστερο ακέραιο και θέτουμε x ίσο προς αυτόν τον ακέραιο.

Στην περίπτωση της κατανομής Poisson, αν το λ είναι μεγάλο (έστω $\lambda > 10$), μπορεί να θεωρηθεί μια κανονική κατανομή με μέσο $(\lambda - 0.5)$ και διασπορά $\sqrt{\lambda}$. Όπως και στην περίπτωση της διωνυμικής κατανομής, πρώτα παράγουμε μια «κανονική» μεταβλητή y και μετά εξετάζονται τα ακόλουθα :

- i. Αν $y \leq 0$, τότε θέτουμε $x = 0$
- ii. Αν $y > 0$, τότε στρογγυλοποιούμε το y στον πλησιέστερο ακέραιο και θέτουμε x ίσο προς αυτόν τον ακέραιο.

B.2.4. Παραγωγή Τυχαίων Αριθμών υπό Δέσμευση

Μια από τις κύριες δυσκολίες που έχουν σχέση με την εφαρμογή των αναλυτικών μεθόδων σε πιθανοτικές μελέτες συστημάτων είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές συχνά δεν είναι ανεξάρτητες με αποτέλεσμα να πρέπει να χρησιμοποιηθούν οι από κοινού συναρτήσεις κατανομής. Αυτό το γεγονός δημιουργεί επιπρόσθετες δυσκολίες στο ήδη περίπλοκο πρόβλημα και για αυτό το λόγο στην πλειοψηφία των αναλυτικών προσεγγίσεων προϋποτίθεται η ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών. Όμως, η μέθοδος Monte-Carlo έχει τη δυνατότητα να χειρισθεί την από κοινού συνάρτηση κατανομής.

Εάν οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n είναι εξαρτημένες, η από κοινού συνάρτηση κατανομής τους μπορεί να εκφρασθεί σαν:

$$F_{x_1, \dots, x_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{x_1}(x_1)F_{x_2}(x_2 | x_1) \dots F_{x_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (B.18)$$

όπου $F_{x_1}(x_1)$ και $F_{x_k}(x_k | x_1, \dots, x_{k-1})$ είναι η περιθώρια και δεσμευμένη κατανομή των X_1 και X_k αντίστοιχα.

Στην περίπτωση των εξαρτημένων τυχαίων μεταβλητών, οι ζητούμενοι τυχαίοι αριθμοί δεν μπορούν να παράγονται ανεξάρτητα για κάθε μεταβλητή. Αλλά με τη χρήση της κατάλληλης εξίσωσης μπορεί να παραχθεί το ζητούμενο σύνολο των τυχαίων αριθμών με βάση τους ακόλουθους συλλογισμούς:

Ας υποθέσουμε ότι έχει παραχθεί ένα σύνολο ομοιόμορφα κατανεμημένων τυχαίων αριθμών (u_1, u_2, \dots, u_n) . Η τιμή του x_1 μπορεί να καθοριστεί ανεξάρτητα, από τη σχέση :

$$x_1 = F_{x_1}^{-1}(u_1) \quad (\text{B.19})$$

Με αυτήν την τιμή του x_1 , η συνάρτηση $F_{x_2}(x_2 | x_1)$ είναι μία συνάρτηση μόνο του x_2 και συνεπώς μια τιμή x_2 μπορεί να καθοριστεί από τη σχέση :

$$x_2 = F_{x_2}^{-1}(x_2 | x_1) \quad (\text{B.20})$$

Με όμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις τιμές x_1, \dots, x_{n-1} που έχουν ήδη ευρεθεί, μπορεί να προσδιοριστεί η τιμή x_n από τη σχέση :

$$x_n = F_{x_n}^{-1}(u_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (\text{B.21})$$

Με αυτόν τον τρόπο το ζητούμενο σύνολο των εξαρτημένων τυχαίων αριθμών (x_1, x_2, \dots, x_n) μπορεί να προσδιορισθεί από αναδρομικές σχέσεις. Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις η μέθοδος θα είναι ικανοποιητική εάν η περιθώρια και η δεσμευμένη συνάρτηση κατανομής μπορούν να αντιστραφούν αναλυτικά.

B.3. ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ MONTE CARLO

Η προσομοίωση Monte Carlo είναι μια συνθετική διαδικασία δειγματοληψίας που πραγματοποιείται από ψηφιακό υπολογιστή. Σε οποιοδήποτε δειγματοληπτικό πείραμα, η ακρίβεια των αποτελεσμάτων αυξάνεται με τον αριθμό των δειγμάτων, επομένως η ακρίβεια της μεθόδου Monte Carlo θα εξαρτάται από τον αριθμό των προσομοιώσεων. Θεωρούμε λοιπόν, το συγκεκριμένο πρόβλημα υπολογισμού της μέσης τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής Y . Υποθέτουμε ότι παρήγαμε n τιμές y_1, \dots, y_n της Y και υπολογίσαμε την μέση τιμή του δείγματος

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{B.22})$$

Η μέση τιμή του δείγματος είναι μια τυχαία μεταβλητή και πρέπει η διακύμανσή της να είναι όσο το δυνατόν μικρότερη. Η διασπορά της \bar{y} δίνεται ως εξής:

$$E\left[\left(\bar{y} - \mu_Y\right)^2\right] = \frac{\sigma_Y^2}{n} \quad (\text{B.23})$$

όπου μ_Y και σ_Y είναι η μέση τιμή του πληθυσμού και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα.

Παρατηρούμε, ότι το σφάλμα στον υπολογισμό της μέσης τιμής είναι αντιστρόφως ανάλογο του \sqrt{n} , και για να βελτιώσουμε την εκτίμηση κατά ένα παράγοντα της τάξης του 2, θα πρέπει να αυξήσουμε το μέγεθος του δείγματος κατά 4. Ο Shooman (1968) απέδειξε ότι στις μελέτες αξιοπιστίας των συστημάτων, ο απαιτούμενος αριθμός των προσομοιώσεων ώστε να επιτευχθεί ένας δεδομένος βαθμός ακρίβειας, είναι ανεξάρτητος του μεγέθους του συστήματος, αλλά εξαρτάται από το βαθμό αξιοπιστίας του συστήματος που μελετάται. Προσεγγίζοντας την διωνυμική κατανομή με την κανονική, ανέπτυξε την ακόλουθη έκφραση για το εκατοστιαίο σφάλμα:

$$\pm \%error = 200 \sqrt{\frac{1 - p_F}{np_F}} \quad (\text{B.24})$$

όπου p_F είναι η υπολογισθείσα πιθανότητα σφάλματος και n το μέγεθος του δείγματος. Η εξίσωση (B.24) παρέχει μια κλίμακα όπου το ποσοστό του σφάλματος της πιθανότητας αποτυχίας, μπορεί να αναμένεται να βρεθεί στο 95% του χρόνου.

Ο Wang (1989) ερεύνησε την ακρίβεια της προσομοίωσης Monte Carlo για την εκτίμηση του μέσου χρόνου λειτουργίας των μονάδων παραγωγής. Κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι ανωτέρω εκτιμήσεις μπορούν να προσεγγιστούν από κανονικές κατανομές, με τον συντελεστή διακύμανσης να προσεγγίζεται από τον ακόλουθο εμπειρικό τύπο:

$$\delta = 0.007p\sqrt{r} + 0.045 \quad (\text{B.25})$$

όπου p η πιθανότητα σφάλματος σε μια μονάδα και r ο μέσος χρόνος επιδιόρθωσης (σε ώρες). Επίσης, απέδειξε, ότι τα προσεγγιστικά επιθυμητά όρια μπορούν να υπολογιστούν ως εξής:

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Έστω : \bar{X} = η μέση τιμή των n μηνιαίως προσομοιωμένων χρόνων λειτουργίας

S = η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής

Τότε από την εξίσωση (B.25) έχουμε:

$$S = (\bar{X}/\sqrt{n})(0.07\sqrt{r} + 0.045) \quad (B.26)$$

Για ένα σταθμό παραγωγής με m ανεξάρτητες μονάδες, η μέση τιμή της παραγωγής του σταθμού είναι ίση με το άθροισμα όλων των μέσων τιμών όλων των μονάδων του σταθμού, η τυπική απόκλιση είναι ίση με την ρίζα του αθροίσματος των διασπορών, και το 90% των διαστημάτων εμπιστοσύνης του σταθμού παραγωγής μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση (B.26).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ HERMITE

Γ.1. ΓΕΝΙΚΑ

Τα πολυώνυμα Hermite είναι μια κλασσική ορθογώνια πολυωνυμική σειρά που εκτείνεται από το μείον άπειρο ως το συν άπειρο και απεικονίζεται για $n=1,2,\dots$

Γ.2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Έχουμε μια συνάρτηση $\phi(x)$ η οποία αποτελεί την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κανονικής $N(0,1)$ κατανομής:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (\Gamma.1)$$

Αν ορίσουμε το:

$$D = \frac{d}{dx} \quad (\Gamma.2)$$

σαν τις παραγώγους της συνάρτησης $\phi(x)$ ως προς την μεταβλητή x , τότε μπορούμε να γράψουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} D\phi(x) &= -x \cdot \phi(x) \\ D^2\phi(x) &= (x^2 - 1) \cdot \phi(x) \\ D^3\phi(x) &= (3x - x^3) \cdot \phi(x) \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

Μελέτη Πιθανοτικής Ροής Φορτίου με τη Μέθοδο Cornish – Fisher σε Συστήματα Ηλεκτρικής Ενέργειας με Διείσδυση Ηλεκτρικών Αυτοκινήτων

Το αποτέλεσμα αυτό, θα είναι ένα κάποια πολυώνυμα του x πολλαπλασιασμένα με την συνάρτηση $\phi(x)$. Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τα πολυώνυμα Hermite (ή Tchebycheff - Hermite), $H_r(x)$, από την ακόλουθη σχέση:

$$(-D)^r \phi(x) = H_r(x) \cdot \phi(x) \quad (\Gamma.4)$$

Έτσι τα πολυώνυμα $H_r(x)$, είναι πολυώνυμα του x , τάξης r . Αν θέσουμε $H_0=1$, τότε τα δέκα πρώτα πολυώνυμα μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$\begin{aligned} H_0 &= 1 \\ H_1 &= x \\ H_2 &= x^2 - 1 \\ H_3 &= x^3 - 3x \\ H_4 &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ H_5 &= x^5 - 10x^3 + 15x \\ H_6 &= x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 \\ H_7 &= x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x \\ H_8 &= x^8 - 28x^6 + 210x^4 - 420x^2 + 105 \\ H_9 &= x^9 - 36x^7 + 378x^5 - 1260x^3 + 945x \\ H_{10} &= x^{10} - 45x^8 + 630x^6 - 3150x^4 + 4725x^2 - 945 \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

Για τον υπολογισμό παραπάνω όρων της σειράς χρησιμοποιείται η ακόλουθη εξίσωση:

$$H_r(x) = x \cdot H_{r-1}(x) - (r-1)H_{r-2}(x) \quad (\Gamma.6)$$

Τα πολυώνυμα έχουν μια πολύ σημαντική ιδιότητα, η οποία είναι η ακόλουθη:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \phi(x) dx &= 0, m \neq n \\ \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) \phi(x) dx &= n, m = n \end{aligned} \quad (\Gamma.7)$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Δ.1. ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Σε αυτό το παράρτημα παρατίθενται θεωρήματα που συνδέουν κανονικές κατανομές που οι μεταβλητές τους διέπονται από γραμμικές σχέσεις.

Θεώρημα 1^ο : Πολυμεταβλητή Κανονική Κατανομή

Μία n-διάστατη τυχαία μεταβλητή $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ όπου

$$X_1 \approx N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_2 \approx N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$X_3 \approx N(\mu_3, \sigma_3^2)$$

(Δ.1)

.....

....

$$X_n \approx N(\mu_n, \sigma_n^2)$$

ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και Σ :

$$X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \approx N(\mu, \Sigma) \quad (\Delta.2)$$

$$\text{όπου } \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (\Delta.3)$$

Αν $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$: ανεξάρτητες μεταξύ τους τότε:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \quad (\Delta.4)$$

Θεώρημα 2^ο: Κατανομή γραμμικής σχέσης τυχαίων κανονικών κατανομών

Αν (X, Y) ζεύγος πολυμεταβλητών τυχαίων ανεξάρτητων μεταβλητών όπου

$$X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \approx N(\mu, \Sigma) \text{ και } Y = AX + b \text{ και } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \text{ τότε η } Y \text{ ακολουθεί}$$

κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu' = A\mu + b$ και διακύμανση $\Sigma' = A\Sigma A^T$:

$$Y = AX + b \approx N(\mu' = A\mu + b, \Sigma' = A\Sigma A^T) \quad (\Delta.5)$$

Θεώρημα 3^ο : Μέση τιμή και διασπορά τυχαίας ανεξάρτητης μεταβλητής μιας πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής

Αν Y είναι μία πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n) \approx N(\mu_0, \Sigma_0)$ και οι τυχαίες μεταβλητές Y_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους είδαμε από το πρώτο θεώρημα ότι ο πίνακας Σ είναι ένας διαγώνιος πίνακας. Η κάθε μεταβλητή Y_i ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή την αντίστοιχη μέση τιμή του πίνακα των μέσων τιμών της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής και διασπορά το αντίστοιχο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα της διακύμανσης, $Y_i \approx N(\mu_{(0)i}, (\sigma_0)_{ii}^2)$.

Θεώρημα 4^ο : Μέση τιμή και διασπορά τυχαίας εξαρτημένης μεταβλητής μιας πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής

Έστω μία n -διάστατη μεταβλητή $X = (X_1, \dots, X_n)^T$ με τυχαίες εξαρτημένες μεταβλητές που ακολουθούν κανονικές κατανομές τότε σύμφωνα με το 1^ο θεώρημα η πολυμεταβλητή κατανομή ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους μ και Σ : $X = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \approx N(\mu, \Sigma)$

$$\text{όπου } \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \dots \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Έστω τυχαία μεταβλητή $Z_1 = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n + b$ που έχει γραμμική σχέση με τις εξαρτημένες μεταβλητές (X_1, \dots, X_n) , τότε για να ισχύει το 2^ο θεώρημα θα πρέπει να σχηματίσουμε τις βοηθητικές μεταβλητές Z_2, Z_3, \dots, Z_n ώστε να δημιουργηθεί μία πολυμεταβλητή κατανομή:

$$\begin{bmatrix} Z_1 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n + \beta \\ Z_2 = 0X_1 + X_2 + \dots + 0X_n + 0 \\ \vdots \\ Z_n = 0X_1 + 0X_2 + \dots + X_n + 0 \end{bmatrix} \quad (\Delta.6)$$

Οπότε

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\Delta.7)$$

Και σύμφωνα με το 2^ο θεώρημα η πολυμεταβλητή κατανομή Z ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu' = A\mu + b$ και διακύμανση $\Sigma' = A\Sigma A^T$:
 $Z = AX + b \approx N(\mu' = A\mu + b, \Sigma' = A\Sigma A^T)$

Τέλος, σύμφωνα με το 3^ο θεώρημα η κάθε μεταβλητή Z_i ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή την αντίστοιχη μέση τιμή του πίνακα των μέσων τιμών της πολυμεταβλητής κανονικής κατανομής και διασπορά το αντίστοιχο διαγώνιο στοιχείο του πίνακα της διακύμανσης, $Z_i \approx N(\mu'_{(0)i}, (\sigma_0)_{ii}^2)$.

Δ.2. ΘΕΩΡΙΑ ΤΥΧΑΙΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Θεώρημα 1^ο : Διμεταβλητή Κατανομή

Έστω (X, Y) ζεύγος τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x, y)$ και $S = \{(x, y) : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$.

Αν οι συναρτήσεις $u = g(x, y), v = h(x, y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο S και ο μετασχηματισμός που ορίζουν είναι 1-1 με Ιακωβιανή $J(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in S$, τότε το ζεύγος $(U, V) = (g(X, Y), h(X, Y))$ έχει σ.π.π. την

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)|, & (u, v) \in T \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad (\Delta.8)$$

Όπου $T = \{(u, v) = (g(x, y), h(x, y)) : (x, y) \in S\}$.

Και $J(u, v)$ η Ιακωβιανή του αντίστροφου μετασχηματισμού.

Για πολυμεταβλητές κατανομές αποδεικνύονται ομοίως ανάλογα αποτελέσματα.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε

ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΥΝΕΛΙΞΗΣ

Ε.1. ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Έστω οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 που ακολουθούν κανονική κατανομή, με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1(X_1)$ και $f_2(X_2)$

αντίστοιχα. Τότε λόγω της σχέσης $f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ με $x, \mu \in R, \sigma > 0$ ισχύει:

$$f_1(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}} e^{-\frac{(X_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \quad (\text{E.1})$$

$$f_2(X_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} e^{-\frac{(X_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \quad (\text{E.2})$$

Η τυχαία μεταβλητή X_N που δίνεται ως $X_N = a_1X_1 + a_2X_2$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_N(X_N)$

$$f_N(X_N) = f_1(a_1X_1) * f_2(a_2X_2) \quad (\text{E.3})$$

Η τυχαία μεταβλητή a_iX_i ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $a_i\mu_i$ και τυπική απόκλιση $a_i^2\sigma_i^2$, όπου a_i ο συντελεστής ευαισθησίας του ζυγού i .

Ο μετασχηματισμός Laplace μιας συνάρτησης $f(t)$ ορίζεται ως

$$f(S) = L\{f(t)\} := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (\text{E.4})$$

και ισχύει

$$L\{f(t_1) * f(t_2)\} = L\{f(t_1)\} \cdot L\{f(t_2)\} \quad (\text{E.5})$$

Βάσει της ιδιότητας (E.3) η σχέση (E.5) γίνεται :

$$L\{f_N(X_N)\} = L\{f_1(a_1X_1)\} \cdot L\{f_2(a_2X_2)\} \quad (\text{E.6})$$

όπου

$$L\{f_1(a_1X_1)\} = e^{-\left(a_1\mu_1s - \frac{1}{2}a_1^2\sigma_1^2s^2\right)} \quad (\text{E.7})$$

$$L\{f_2(a_2X_2)\} = e^{-\left(a_2\mu_2s - \frac{1}{2}a_2^2\sigma_2^2s^2\right)} \quad (\text{E.8})$$

$$\text{Άρα } L\{f_2(a_2X_2)\} = e^{-\left(a_1\mu_1 + a_2\mu_2\right)s - \frac{1}{2}\left(a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2\right)s^2} = e^{-\left(\mu_Ns - \frac{1}{2}\sigma_N^2s^2\right)} \quad (\text{E.9})$$

$$\text{όπου } \mu_N = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 \quad \text{και} \quad \sigma_N^2 = \alpha_1^2\sigma_1^2 + \alpha_2^2\sigma_2^2 \quad (\text{E.10})$$

Η εξίσωση (E.7) οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_N(X_N)$ της τυχαίας μεταβλητής X_N , που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_N και τυπική απόκλιση σ_N :

$$f_N(X_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_N}} e^{-\frac{(X_N - \mu_N)^2}{2\sigma_N^2}} \quad (\text{E.11})$$

Η συνέλιξη r ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών κανονικής κατανομής δίνεται από τη σχέση (E.10)

$$\text{όπου } \mu_N = \sum_{i=1}^r a_i \mu_i \text{ και } \sigma_N^2 = \sum_{i=1}^r a_i^2 \sigma_i^2 \quad (\text{E.12})$$

E.2. ΣΥΝΕΛΙΞΗ ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Έστω οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X_1 και X_2 που ακολουθούν διακριτή ή διωνυμική κατανομή, με συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $f_1(X_1)$ και $f_2(X_2)$ αντίστοιχα. Η διωνυμική κατανομή αποτελείται από $n+1$ διακριτές τιμές όπου n ο αριθμός των ανεξάρτητων όμοιων γεννητριών. Αφού υπολογιστούν οι τιμές αυτές και οι αντίστοιχες πιθανότητες τους, η διωνυμική κατανομή αντιμετωπίζεται ως διακριτή.

Το βασικό πρόβλημα είναι ο υπολογισμός της ισοδύναμης διακριτής κατανομής λόγω του μεγάλου αριθμού των διακριτών τιμών με τις οποίες παριστάνεται. Για παράδειγμα όταν μια διακριτή συνάρτηση που παριστάνεται με ν διακριτές τιμές συνελίσσεται με μια άλλη διακριτή συνάρτηση που παριστάνεται με ν' διακριτές τιμές η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα αντιπροσωπεύεται από $(\nu \times \nu')$ διακριτές τιμές. Η διαδικασία αυτή είναι χρονοβόρα και γίνεται μη πρακτική όταν ο αριθμός των διακριτών συναρτήσεων στο σύστημα είναι μεγάλος.

Λόγω της σχέσης $f_x(x) = \sum_{i=1}^{\nu} P_i \delta(x - W_i)$ ισχύει :

$$f_1(X_1) = \sum_{i=1}^{\nu} P_i \delta(X_1 - W_i) \quad (\text{E.13})$$

$$f_2(X_2) = \sum_{j=1}^{\nu'} P_j' \delta(X_2 - W_j') \quad (\text{E.14})$$

Η τυχαία μεταβλητή X_D που δίνεται ως

$$X_D = a_1 X_1 + a_2 X_2 \quad (\text{E.15})$$

έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_D(X_D)$

$$f_D(X_D) = f_1(a_1X_1) * f_2(a_2X_2) \quad (E.16)$$

$$\text{όπου } f_1(a_1X_1) = \sum_{i=1}^{\nu} P_i \delta(X_1 - a_1W_i) \text{ και } f_2(a_2X_2) = \sum_{j=1}^{\nu'} P_j' \delta(X_2 - a_2W_j') \quad (E.17)$$

και ισχύει

$$L\{f_D(X_D)\} = L\{f_1(a_1X_1)\} \cdot L\{f_2(a_2X_2)\} \quad (E.18)$$

$$\text{όπου } L\{f_1(a_1X_1)\} = \sum_{i=1}^{\nu} P_i e^{-a_1W_i s} \quad (E.19)$$

$$L\{f_2(a_2X_2)\} = \sum_{j=1}^{\nu'} P_j' e^{-a_2W_j' s} \quad (E.20)$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } L\{f_D(X_D)\} &= (P_1 e^{-a_1W_1 s} + P_2 e^{-a_1W_2 s} + \dots + P_{\nu} e^{-a_1W_{\nu} s}) \\ &\quad \times (P_1' e^{-a_2W_1' s} + P_2' e^{-a_2W_2' s} + \dots + P_{\nu'}' e^{-a_2W_{\nu'}' s}) \\ &= \sum_{k=1}^t G_k e^{-H_k s} \end{aligned} \quad (E.21)$$

$$\text{όπου } t = \nu \times \nu' \quad (E.22)$$

$$G_k = P_i \times P_j' \quad (E.23)$$

$$H_k = a_1W_i + a_2W_j' \quad (E.24)$$

Για όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (i, j)

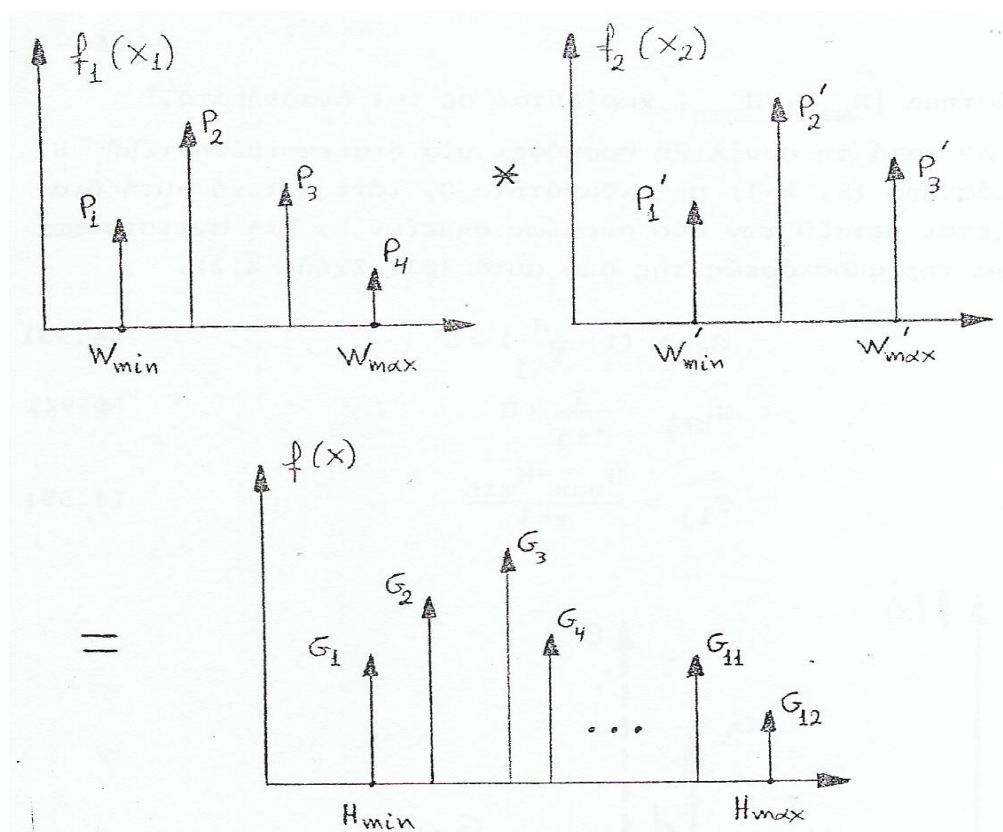
$$i = 1, \dots, \nu \quad j = 1, \dots, \nu'$$

Η εξίσωση (E.21) οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_D(X_D)$ της τυχαίας μεταβλητής X_D , που ακολουθεί διακριτή κατανομή με t διακεκριμένες τιμές.

$$f_D(X_D) = \sum_{k=1}^t G_k \delta(X_D - H_k) \quad (E.25)$$

Η συνέλιξη r ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών διακριτής κατανομής απαιτεί τον υπολογισμό όλων των G_k και των αντίστοιχων H_k για $t = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_k \times \dots \times v_r$ και v_k ο αριθμός των διακεκριμένων τιμών της k διακριτής κατανομής.

Έστω ότι συνελίσσονται 10 διακριτές κατανομές με 4 διακεκριμένες τιμές η κάθε μια. Τότε η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αποτελείται από $4^{10} = 1.048.576$ διακεκριμένες τιμές.



Σχήμα Ε.2.1. : Συνέλιξη δύο διακριτών κατανομών

Δημιουργείται έτσι πρόβλημα μνήμης και χρόνου υπολογισμού που λύνεται αν καθοριστεί εκ των προτέρων ο επιθυμητός αριθμός t των διακεκριμένων τιμών με τις οποίες θα αντιπροσωπευθεί η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Οι τιμές της συνέλιξης δύο διακριτών κατανομών εκτείνονται στο διάστημα

$$|H_{\min}, H_{\max}|$$

$$H_{\min} = W_{\min} + W'_{\min} \tag{E.26}$$

$$H_{\max} = W_{\max} + W'_{\max} \tag{E.27}$$

και

$$W_{min} = \min\{a_1W_1, a_1W_2, \dots, a_1W_v\} \quad (E.28)$$

$$W'_{min} = \min\{a_2W'_1, a_2W'_2, \dots, a_2W'_v\} \quad (E.29)$$

$$W_{max} = \max\{a_1W_1, a_1W_2, \dots, a_1W_v\} \quad (E.30)$$

$$W'_{max} = \max\{a_2W'_1, a_2W'_2, \dots, a_2W'_v\} \quad (E.31)$$

Το διάστημα $|H_{min}, H_{max}|$ χωρίζεται σε $t-1$ διαστήματα.

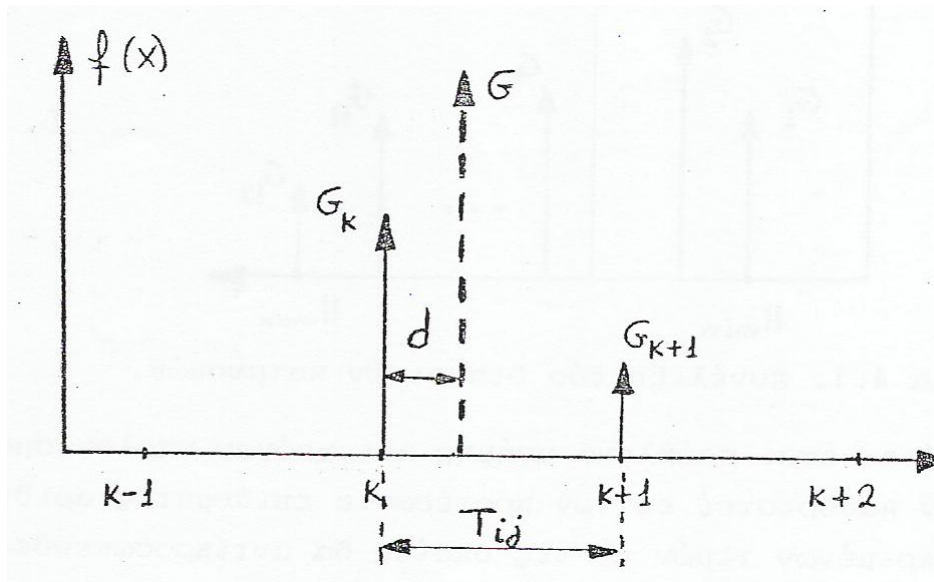
Αν κατά τη συνέλιξη προκύψει μια διακεκριμένη τιμή H στο διάστημα $(k, k+1)$ με πιθανότητα G , τότε η τιμή αυτή διαμοιράζεται μεταξύ των δύο ακραίων σημείων $(k, k+1)$ αντιστρόφως ανάλογα της απόστασής της από αυτά. (Σχήμα E.2.2)

$$G_k = \left(1 - \frac{d}{T_{ij}}\right) \times G \quad (E.32)$$

$$G_{k+1} = \frac{d}{T_{ij}} \times G \quad (E.33)$$

όπου

$$T_{ij} = \frac{H_{max} - H_{min}}{t-1} \quad (E.34)$$



Σχήμα E.2.2.: Διαμοιρασμός μιας διακεκριμένης τιμής

Ε.2.1. Συνέλιξη κανονικής και διακριτής κατανομής

Σύμφωνα με τις δύο προηγούμενες παραγράφους, συνελίσσονται όλες οι τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή δίνοντας τη γενική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_N(X_N)$ κανονικής κατανομής, και όλες οι τυχαίες μεταβλητές που δεν ακολουθούν κανονική κατανομή (διακριτή, διωνυμική, Weibull) δίνοντας τη γενική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_D(X_D)$ διακριτής κατανομής.

Η τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται ως

$$f_X(X) = f_N(X_N) * f_D(X_D) \quad (E.35)$$

Εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Laplace ισχύει

$$L\{f_X(X)\} = L\{f_N(X_N)\} \cdot L\{f_D(X_D)\} \quad (E.36)$$

όπου $L\{f_N(X_N)\}$ δίνεται στη σχέση (E.9)

$L\{f_D(X_D)\}$ δίνεται στη σχέση (E.10)

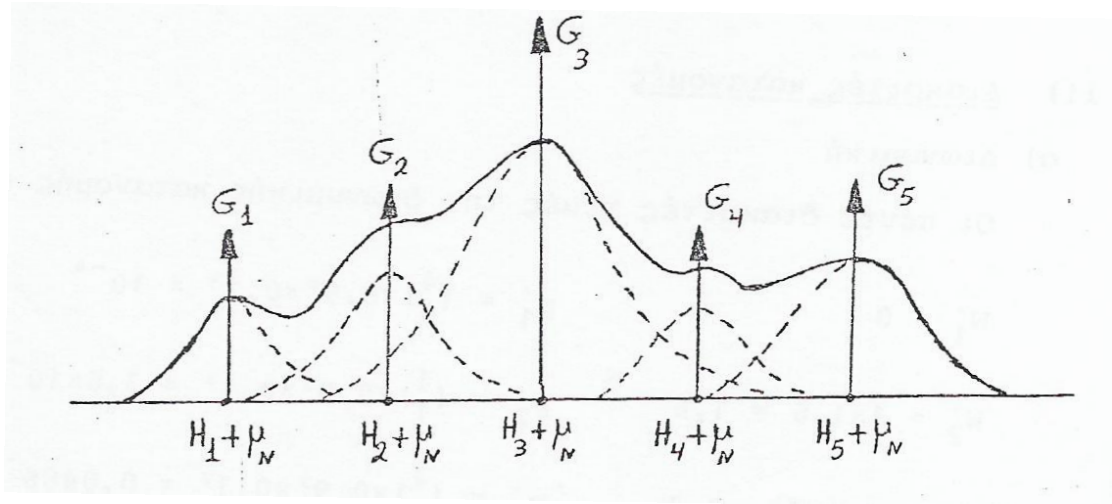
Άρα :

$$L\{f_X(X)\} = \sum_{k=1}^t G_k e^{-|(\mu_N+H_k)s-\frac{1}{2}\sigma_N^2s^2|} \quad (E.37)$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $L\{f_X(X)\}$ οδηγεί στην εξίσωση

$$f_X(X) = \sum_{k=1}^t \frac{G_k}{\sqrt{2\pi\sigma_N^2}} e^{-\frac{|X-(\mu_N+H_k)|^2}{2\sigma_N^2}} \quad (E.38)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμικώς συνδυασμός t κανονικών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας, με μέση τιμή $\mu_N + H_k$, τυπική απόκλιση σ_N , που συμβάλλουν στο άθροισμα ανάλογα με τον συντελεστή G_k όπου $k = 1, 2, \dots, t$.



Σχήμα Ε.2.3. : Η $f_x(X)$ ως άθροισμα t κανονικών συναρτήσεων

Πολλές προσπάθειες έχουν γίνει για να αναπτυχθούν τεχνικές που επιτρέπουν την πραγματοποίηση της συνέλιξης με μεγαλύτερη ακρίβεια και λιγότερο χρόνο υπολογισμού. Η τελευταία τεχνική που εφαρμόζεται στην πιθανοτική ανάλυση ροών φορτίου βασίζεται στον ταχύ μετασχηματισμό Fourier (FFT). Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier εκμεταλλεύεται ορισμένες ιδιότητες των εκθετικών συναρτήσεων για να δώσει μια γρήγορη και ακριβή παρουσίαση μιας συνάρτησης στο πεδίο της συχνότητας.

Για μια δεδομένη συνεχή απειριοδική συνάρτηση $f(y)$, που ορίζεται στο διάστημα $T = 1/f$ δίνεται η μιγαδική συνάρτηση $S(\omega)$ στο πεδίο της συχνότητας

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{-j\omega y} dy \quad (\text{E.39})$$

και ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι :

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega y} d\omega \quad (\text{E.40})$$

όπου $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

Αν η συνάρτηση $f(y)$ είναι μια διακριτή ή διακριτοποιημένη συνάρτηση με N διακριτές τιμές σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους θα ισχύει :

$$f(y) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(y - k\Delta y) \quad (\text{E.41})$$

και η εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier θα δώσει :

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \delta(y - k\Delta y) e^{-j\omega y} dy = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k\Delta y} \quad (\text{E.42})$$

Η $S(\omega)$ είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = \frac{2\pi}{\Delta y} = 2N\Delta\omega$ και η παράστασή της με N διακριτά σημεία είναι :

$$S(n\Delta\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k e^{-j\omega k\Delta y} \Rightarrow S(n) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k W^{-nk} \quad (\text{E.43})$$

όπου $W = e^{j\frac{2\pi}{N}}$ και $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$

Η μαθηματική συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου, μετατρέπεται στο πεδίο της συχνότητας σε απλό πολλαπλασιασμό.

Έτσι ισχύει :

$$f(y) = f_1(y) * f_2(y) \Leftrightarrow S(n) = S_1(n) \cdot S_2(n) \quad (\text{E.44})$$

Αφού πραγματοποιηθεί η συνέλιξη στο πεδίο της συχνότητας, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier δίνει αντίστοιχα την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(y)$ με N διακριτά σημεία από την σχέση (E.41) όπου :

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) W^{nk} \quad (\text{E.45})$$

Ο ταχύς μετασχηματισμός Fourier έχει ως σκοπό τη μείωση των απαιτούμενων μιγαδικών πολλαπλασιασμών και προσθέσεων για τον υπολογισμό των πινάκων $S(n)$ και a_k από τις εξισώσεις (E.42) και (E.45). Κανονικά απαιτείται να πραγματοποιηθούν N^2 μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί και $N(N - 1)$ προσθέσεις. Λόγω της περιοδικότητας της (E.42) ισχύει :

$$W^{-nk} = W^{-nk \bmod N} \quad (\text{E.46})$$

Αν $N = 2^M$, ο αλγόριθμος του ταχέως μετασχηματισμού Fourier είναι μια διαδικασία παραγοντοποίησης του πίνακα $N \times N$ σε M πίνακες διαστάσεων $N \times N$ ο καθένας έτσι ώστε στον κάθε παραγοντοποιημένο πίνακα να ελαχιστοποιείται ο αριθμός των απαιτούμενων μιγαδικών πολλαπλασιασμών και προσθέσεων. Έτσι αποδεικνύεται ότι με τον ταχύ μετασχηματισμό Fourier απαιτούνται συνολικά $NM/2$ μιγαδικοί πολλαπλασιασμοί αντί για N^2 και NM προσθέσεις αντί για $N(N - 1)$. Αν

θεωρηθεί ότι ο απαιτούμενος χρόνος υπολογισμού είναι ανάλογος του αριθμού των πολλαπλασιασμών, τότε η αναλογία στον χρόνο υπολογισμού μεταξύ του συμβατικού και του ταχέως μετασχηματισμού Fourier είναι περίπου $2^N/M$, όπου M ακέραιος αριθμός συνήθως για τις απαιτήσεις της πιθανοτικής ανάλυσης ρών φορτίου.

Ο αλγόριθμος του ταχέως μετασχηματισμού Fourier όπως αναπτύχθηκε πιο πάνω εφαρμόζεται μόνο σε διακριτές ή διακριτοποιημένες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Έτσι, μετά τον υπολογισμό της ισοδύναμης κανονικής κατανομής, απαιτείται η διακριτοποίησή της σύμφωνα με τους παρακάτω κανόνες :

- Η ισοδύναμη κανονική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας αποκόπτεται σε προκαθορισμένο αριθμό τυπικών αποκλίσεων, συνήθως $\pm 3 \times \sigma_n$ που δίνει μια ικανοποιητική απεικόνιση του 99% των πιθανών τιμών της. Ο απαιτούμενος αριθμός διακριτών τιμών για την παράστασή της καθορίζεται στη συνέχεια.
- Η τιμή της πιθανότητας a_k στη θέση $y_k = \frac{y_1+y_2}{2}$ υπολογίζεται από τη σχέση $a_k = P\{y = y_k\} = P\{y \leq y_2\} - P\{y < y_1\}$ έτσι ώστε να αντιστοιχεί στην επιφάνεια της κανονικής κατανομής μεταξύ των σημείων y_1 και y_2 .
- Η τιμή της πιθανότητας a_k διαιρείται με την επιφάνεια της αποκομμένης κανονικής κατανομής μεταξύ των σημείων $y_{min} = y_n - 3 \times \sigma_n$ και $y_{max} = y_n + 3 \times \sigma_n$, έτσι ώστε η αθροιστική πιθανότητα της αποκομμένης και διακριτοποιημένης ισοδύναμης κανονικής συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας να παραμένει μονάδα.
- Λόγω της συμμετρίας της κανονικής κατανομής μπορεί να θεωρηθεί για τους πιο πάνω υπολογισμούς μόνο το μισό τμήμα της.

Μετά την διακριτοποίησή της η ισοδύναμη κανονική κατανομή αντιμετωπίζεται στην συνέλιξη με τον αλγόριθμο του ταχέως μετασχηματισμού Fourier ως μια απλή διακριτή κατανομή με ορισμένο αριθμό διακριτών τιμών.

Η διαδικασία της συνέλιξης πραγματοποιείται διαδοχικά με δύο μόνο συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας σε κάθε βήμα. Αν σε κάποιο βήμα της διαδικασίας η $f_{ij} = f_i(a_i y_i) * f_j(a_j y_j)$ αντιπροσωπεύει την συνέλιξη των συναρτήσεων f_i και f_j που ορίζονται στα διαστήματα T_i και T_j αντίστοιχα, τότε θα ορίζεται στο διάστημα :

$$T_{ij} = |a_i|T_i + |a_j|T_j = [z_{min}, z_{max}] \quad (E.47)$$

όπου

$$z_{min} = \begin{array}{ll} a_i y_{i(\min)} + a_j y_{j(\min)} & a_i > 0, a_j > 0 \\ a_i y_{i(\min)} + a_j y_{j(\max)} & a_i > 0, a_j < 0 \\ a_i y_{i(\max)} + a_j y_{j(\min)} & a_i < 0, a_j > 0 \\ a_i y_{i(\max)} + a_j y_{j(\max)} & a_i < 0, a_j < 0 \end{array}$$

και

$$z_{max} = \begin{array}{ll} a_i y_{i(\max)} + a_j y_{j(\max)} & a_i > 0, a_j > 0 \\ a_i y_{i(\max)} + a_j y_{j(\min)} & a_i > 0, a_j < 0 \\ a_i y_{i(\min)} + a_j y_{j(\max)} & a_i < 0, a_j > 0 \\ a_i y_{i(\min)} + a_j y_{j(\min)} & a_i < 0, a_j < 0 \end{array}$$

Έστω ότι το τελικό διάστημα T που αντιστοιχεί στην τελική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, οφείλει να παρασταθεί με $N = 2^M$ διακριτά σημεία. Τότε ο αριθμός N_{ij} των διακριτών σημείων που απαιτούνται για την παράσταση του διαστήματος T_{ij} της συνέλιξης σε κάποιο βήμα θα δίνεται από τις σχέσεις που ακολουθούν :

$$N'_{ij} = \left(2^M \cdot \frac{T_{ij}}{T} \right) + 1 \quad (E.48)$$

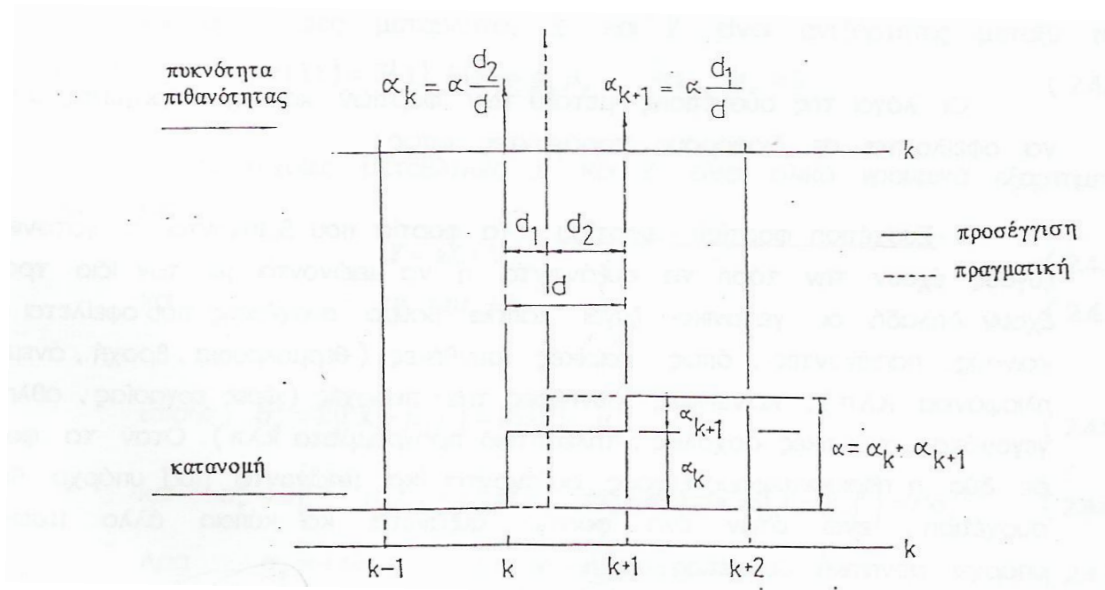
$$M'_{ij} = \log N'_{ij} \quad (E.49)$$

$$M_{ij} = \text{INTEGER}(M'_{ij}) + 1 \quad (E.50)$$

$$N_{ij} = 2^{M_{ij}} \quad (E.51)$$

Στη σχέση (E.48) θεωρείται ένα επιπλέον σημείο για να μην υπάρχει πιθανότητα να χαθεί μέρος της τελευταίας διακριτής τιμής που διαμοιράζεται στα ακραία σημεία του διαστήματος T_{ij} .

Το διάστημα T_{ij} χωρίζεται σε $N_{ij} - 1$ διαστήματα. Αν κατά τη διάρκεια της συνέλιξης προκύψει μια διακριτή τιμή στο διάστημα $k, k + 1$ αντιστρόφως ανάλογα της απόστασής της από αυτά, όπως φαίνεται στο σχήμα E.2.4.



Σχήμα Ε.2.4.: Διαμοίρασμός μιας διακριτής τιμής

Οι συναρτήσεις μαθηματικά μπορούν να συνελιχθούν με οποιαδήποτε σειρά. Από τις σχέσεις όμως (E.48) και (E.41) φαίνεται ότι ο αριθμός των απαιτούμενων διακριτών σημείων για την παράσταση μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας αυξάνεται ανάλογα με τις περιόδους T_i και T_j και η αποδοτικότητα του αλγορίθμου του ταχέως μετασχηματισμού Fourier αυξάνεται όσο ο αριθμός των σημείων είναι μικρότερος. Έτσι είναι πιο αποδοτικό να συνελίσσονται διαδοχικά οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας ανάλογα με το εύρος της περιόδου τους, ξεκινώντας από εκείνες με το μικρότερο εύρος και συνεπώς και τον μικρότερο αριθμό διακριτών σημείων.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ

ΕΠΕΚΤΑΣΗ GRAM - CHARLIER

ΣΤ.1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ

ΣΤ.1.1. Ορισμός των Ροπών

Εάν, για έναν θετικό ακέραιο αριθμό ν , η συνάρτηση X^ν είναι ολοκληρώσιμη ως προς την $F(x)$ τότε το ολοκλήρωμα από $(-\infty, +\infty)$:

$$\alpha_\nu = E(\xi^\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi^\nu dF(\chi) \quad (\text{ΣΤ.1})$$

καλείται η ροπή τάξης ν ή ν -οστή ροπή της κατανομής.

Οι ροπές γύρω από το μέσο όρο m , καλούνται συχνά κεντρικές ροπές:

$$\beta_\nu = E[(\xi - m)^\nu] = \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi - m)^\nu dF(\chi) \quad (\text{ΣΤ.2})$$

Στην περίπτωση μιας γραμμικής συνάρτησης $\eta = c\xi + b$, η ν -οστή ροπή της μεταβλητής η δίνεται από την έκφραση :

$$\alpha'_\nu = E[(c\xi + b)^\nu] = c^\nu \alpha_\nu + \binom{\nu}{1} c^{\nu-1} b \alpha_{\nu-1} + \dots + b^\nu \quad (\text{ΣΤ.3})$$

ΣΤ.1.2. Ορισμός των Αθροισμάτων (Cumulants)

Η μέση τιμή της συνάρτησης $e^{it\xi}$ θα γραφτεί :

$$\varphi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x) \quad (\text{ΣΤ.4})$$

Αυτή είναι μια συνάρτηση της πραγματικής μεταβλητής t , η οποία καλείται χαρακτηριστική συνάρτηση της μεταβλητής ξ .

Εάν η k -οστή ροπή της κατανομής υπάρχει, η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί με σειρές MacLaurin για μικρές τιμές του t :

$$\varphi(t) = 1 + \sum_1^k \frac{\alpha_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (\Sigma\text{T.5})$$

$$\log \varphi(t) = \sum_1^k \frac{\gamma_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (\Sigma\text{T.6})$$

Οι συντελεστές γ_ν εισήχθησαν από τον Thiele και καλούνται ημι-σταθερές ή αθροίσματα της κατανομής.

Τα αθροίσματα γ'_ν μιας γραμμικής συνάρτησης $\eta = ax + b$ λαμβάνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\log [e^{bit} \varphi(at)] = \sum_1^k \frac{\gamma'_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (\Sigma\text{T.7})$$

Επομένως:

$$\gamma'_1 = a\gamma_1 + b \quad \text{και} \quad \gamma'_\nu = a^\nu \gamma_\nu \quad \text{για} \quad \nu > 1 \quad (\Sigma\text{T.8})$$

ΣΤ.1.3. Σχέση μεταξύ των Ροπών και των Αθροισμάτων

Η σχέση μεταξύ των ροπών και των αθροισμάτων μπορεί να παραχθεί με την αντικατάσταση της $\varphi(t)$ από την (ΣΤ.5) στην (ΣΤ.6),

$$\log \left(1 + \sum_1^k \frac{\alpha_\nu}{\nu!} (it)^\nu \right) = \sum_1^k \frac{\gamma_\nu}{\nu!} (it)^\nu + o(t^k) \quad (\Sigma\text{T.9})$$

Βλέπουμε ότι το γ_n είναι ένα πολυώνυμο των a_1, \dots, a_n και αντιστρόφως το a_n είναι ένα πολυώνυμο των $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \alpha_1 = m \\
 \gamma_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 \\
 \gamma_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \\
 \gamma_4 &= \alpha_4 - 3\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4 \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{ΣΤ.10}$$

Όπου με m δηλώνεται η μέση τιμή.

Σε σχέση με τις κεντρικές ροπές β_u , οι εκφράσεις των γ_u παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= m \\
 \gamma_2 &= \beta_2 = \sigma^2 \\
 \gamma_3 &= \beta_3 \\
 \gamma_4 &= \beta_4 - 3\alpha_2^2 \\
 \gamma_5 &= \beta_5 - 10\beta_2\beta_3 \\
 \gamma_6 &= \beta_6 - 15\beta_2\beta_4 - 10\beta_3^2 + 30\beta_2^3 \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{ΣΤ.11}$$

όπου σ η τυπική απόκλιση, ενώ αντίστροφα:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 0 \\
 \beta_2 &= \gamma_2 = \sigma^2 \\
 \beta_3 &= \gamma_3 \\
 \beta_4 &= \gamma_4 + 3\gamma_2^2 \\
 \beta_5 &= \gamma_5 + 10\gamma_2\gamma_3 \\
 \beta_6 &= \gamma_6 + 15\gamma_2\gamma_4 + 10\gamma_3^2 + 15\gamma_2^3 \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{ΣΤ.12}$$

ΣΤ.1.4. Ιδιότητες των Αθροισμάτων (Cumulants)

Έστω ξ και η είναι οι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με γνωστή τη συνάρτηση αθροιστικής πυκνότητας πιθανότητας F_1 και F_2 . Η αθροιστική συνάρτηση $F(x)$ του αθροίσματος των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών δίνεται από :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x-z) dF_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x-z) dF_1(z)
 \tag{ΣΤ.13}$$

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) \quad (\text{ΣΤ.14})$$

Για το άθροισμα $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, η ανεξάρτητων μεταβλητών, η αθροιστική συνάρτηση θα είναι:

$$F(x) = F_1(x) * F_2(x) * \dots * F_n(x) \quad (\text{ΣΤ.15})$$

Έστω $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ και $\varphi(t)$ οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις των ξ , η και $\xi+\eta$ αντίστοιχα. Τότε:

$$\varphi(t) = E[e^{it(\xi+\eta)}] = E[e^{it\xi}] * E[e^{it\eta}] = \varphi_1(t) * \varphi_2(t) \quad (\text{ΣΤ.16})$$

Εάν $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ είναι ανεξάρτητες μεταβλητές με χαρακτηριστικές συναρτήσεις $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(t)$ του αθροίσματος $\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$ θα είναι:

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) * \varphi_2(t) * \dots * \varphi_n(t) \quad (\text{ΣΤ.17})$$

Το θεώρημα πολλαπλασιασμού για τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις δίνει:

$$\log \varphi(t) = \log \varphi_1(t) + \log \varphi_2(t) + \dots + \log \varphi_n(t) \quad (\text{ΣΤ.18})$$

Επομένως:

$$\gamma_v = \gamma_v^1 + \gamma_v^2 + \dots + \gamma_v^n \quad (\text{ΣΤ.19})$$

Σύμφωνα με την (ΣΤ.11), μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι:

$$\begin{aligned} m &= m_1 + m_2 + \dots + m_n \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \end{aligned} \quad (\text{ΣΤ.20})$$

ΣΤ.1.5. Επέκταση Gram-Charlier

Ας θεωρήσουμε μία οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή ξ με μια συνεχή κατανομή με μέση τιμή m και τυπική απόκλιση σ . Για την κανονικοποιημένη μεταβλητή $\frac{\xi - m}{\sigma}$, η αθροιστική συνάρτηση και η συνάρτηση πυκνότητας ορίζονται ως $F(x)$ και $f(x)$ αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την επέκταση Gram-Charlier, οι αθροιστικές συναρτήσεις και συναρτήσεις πυκνότητας μπορούν να γραφτούν ως:

$$F(x) = \phi(x) + \frac{c_1}{1!} \phi'(x) + \frac{c_2}{2!} \phi''(x) + \frac{c_3}{3!} \phi^{(3)}(x) + \dots \quad (\Sigma\text{T.21})$$

$$f(x) = \varphi(x) + \frac{c_1}{1!} \varphi'(x) + \frac{c_2}{2!} \varphi''(x) + \frac{c_3}{3!} \varphi^{(3)}(x) + \dots \quad (\Sigma\text{T.22})$$

όπου $\Phi(x)$ και $\varphi(x)$ αντιπροσωπεύουν την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (CDF) και τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (PDF) της κανονικής κατανομής με $m = 0$ και $\sigma = 1$. Οι c_v είναι οι σταθεροί συντελεστές:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ c_1 &= c_2 = 0 \\ c_3 &= -\frac{\beta_3}{\sigma^3} \\ c_4 &= \frac{\beta_4}{\sigma^4} - 3 \\ c_5 &= -\frac{\beta_5}{\sigma^5} + 10 \frac{\beta_3}{\sigma^3} \\ c_6 &= \frac{\beta_6}{\sigma^6} - 15 \frac{\beta_4}{\sigma^4} + 30 \\ &\dots \end{aligned} \quad (\Sigma\text{T.23})$$

ΣΤ.2. ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Με βάση τις ανωτέρω θεωρίες, η διαδικασία υπολογισμού PDF των ρών γραμμών συνοψίζεται ως εξής:

- 1) Λαμβάνοντας υπόψη την πιθανοτική περιγραφή της παραγωγής και του φορτίου, υπολογίζουμε τις ροπές της εγχεόμενης ενεργού ισχύος σύμφωνα με την (ΣΤ.1).
- 2) Υπολογίζουμε τα αθροίσματα της εγχεόμενης ισχύος από τη σχέση μεταξύ των αθροισμάτων και των ροπών σύμφωνα με την (ΣΤ.10).
- 3) Υπολογίζουμε τις κεντρικές ροπές κάθε γραμμής σύμφωνα με την (ΣΤ.12).
- 4) Υπολογίζουμε τους συντελεστές της επέκτασης Gram-Charlier σύμφωνα με την (ΣΤ.23)
- 5) Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ρών των γραμμών μπορούν προκύψουν τώρα από τις σχέσεις (ΣΤ.21) και (ΣΤ.22) αντίστοιχα.