ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ,
ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τυπωμένες μικροταινιακές διατάξεις με κυλινδρικό διηλεκτρικό υπόστρωμα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρυσόστομος Β. Νανάκος

Επιβλέπων : Ιωάννης Τσαλαμέγκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2010

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ, ΗΛΕΚΤΡΟΟΠΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΩΝ ΥΛΙΚΩΝ

Σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από τυπωμένες μικροταινιακές διατάξεις με κυλινδρικό διηλεκτρικό υπόστρωμα

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Χρυσόστομος Β. Νανάκος

Επιβλέπων : Ιωάννης Τσαλαμέγκας
Καθηγητής Ε.Μ.Π

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 31η Σεπτεμβρίου 2010.

.....	.....	.....
Ιωάννης Τσαλαμέγκας	Ιωάννης Ρουμελιώτης	Ηλίας Γλύτσης
Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π	Καθηγητής Ε.Μ.Π

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2010

(Υπογραφή)

.....
Χρυσόστομος Β. Νανάκος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Χρυσόστομος Β. Νανάκος, 2010
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Η παρούσα εργασία αφιερώνεται στην οικογένειά μου.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετάται η σκέδαση επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος από μικροταινιακή γραμμή με κυλινδρικό διηλεκτρικό υπόστρωμα. Το συναφές πρόβλημα οριακών συνθηκών διατυπώνεται μέσω ενός συστήματος 2x2 ιδιόμορφων ολοκληρωτικών – ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων ως προς αγνώστους τη διαμήκη και την εγκάρσια συνιστώσα του επαγόμενου στην ταινία επιφανειακού ρεύματος. Η κατάστρωση των εξισώσεων γίνεται με συνδυασμένη εφαρμογή της τεχνικής των συναρτήσεων Green και του θεωρήματος της αντιστοιχίας.

Η επίλυση των εξισώσεων γίνεται στα πλαίσια της μεθόδου Nyström. Η επιτυχής εφαρμογή της μεθόδου αυτής προϋποθέτει την απομόνωση του ιδιόμορφου μέρους των πυρήνων σε κλειστή μορφή. Αυτό γίνεται με την αφαίρεση κατάλληλων ασυμπτωτικών όρων.

Η αποτελεσματικότητα της μεθόδου καταδεικνύεται με λεπτομερείς συγκρίσεις με προϋπάρχοντα αποτελέσματα και εκτενείς πίνακες και διαγράμματα που αποκαλύπτουν την ταχεία σύγκλιση της μεθόδου.

Λέξεις Κλειδιά

Σκέδαση, μέθοδος Nyström, αγώγιμη τυπωμένη ταινιογραμμή

Abstract

The subject of the present diploma thesis is aiming at the investigation of the scattering of plane electromagnetic waves by a conductive strip printed on a dielectric cylinder of infinite length. This boundary value problem is solved via a 2x2 system of integral – integrodifferential equations with unknown's the induced current density of the conductive strip. The equations are developed with the combined use of the Green's function and the reciprocity theorem.

The numerical solution of the integral equations is carried out by using the Nyström method. The successful application of this method prerequisites the isolation of the singular part from the kernels in closed form. This is achieved with the subtraction of appropriate asymptotic terms.

The correctness and accuracy of the method is demonstrated by detailed comparison with previously published results.

Keywords

Scattering, Nyström method, conductive printed strip

Ευχαριστήριο Σημείωμα

Ολοκληρώνοντας την εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας και τις προπτυχιακές μου σπουδές στη Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Ε.Μ.Π θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες σε όλους όσους υπήρξαν στήριγμα σε αυτή μου την προσπάθεια.

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον Καθηγητή Ε.Μ.Π κ. Ιωάννη Λ. Τσαλαμέγκα για την επίβλεψη της παρούσας εργασίας, αλλά και για το σπουδαίο διδακτικό του έργο και την βοήθεια του καθ' όλη τη διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου για τη συμπαράστασή της σε όλες μου τις προσπάθειες, αλλά και όσους από τους καθηγητές μου στο Ε.Μ.Π συνέβαλαν στη διαμόρφωση του γνωστικού μου υποβάθρου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή 16
1.1. Γενικευμένο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης 17
1.2. Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας 19
Κεφάλαιο 2. Κατάστρωση του προβλήματος οριακών συνθηκών 21
2.1. Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο 21
2.2. Το πεδίο διεγέρσεως 23
2.3. Το πεδίο σκεδάσεως 25
2.4. Συναρτήσεις Green 25
2.5. Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του πεδίου σκεδάσεως 29
2.6. Ολοκληρωτικές εξισώσεις του προβλήματος 29
2.7. Μετασχηματισμός των πυρήνων – Απομόνωση των ιδιομορφιών 30
2.8. Τελική μορφή του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων 37
2.9. Διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων 38
2.10. Υπολογισμός του πεδίου σκεδάσεως 41
2.11. Μακράν σκεδαζόμενο πεδίο 41
2.12. Υπολογισμός της ενεργού διατομής σκέδασης 42
Κεφάλαιο 3. Αριθμητικά αποτελέσματα & Έλεγχοι ορθότητας 46
3.1. Σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου 46
3.2. Συγκρίσεις και έλεγχοι ορθότητας 50
3.3. Άλλα αριθμητικά αποτελέσματα 56
Κεφάλαιο 4. Συμπεράσματα 75
Παράρτημα Α: Συντελεστές Ασυμπτωτικών Εκφράσεων 76
Παράρτημα Β: Βασικά Ολοκληρώματα 76
Βιβλιογραφία – Αναφορές 80

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

Η σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων αποτελεί σημαντικό πεδίο έρευνας στον υπολογιστικό ηλεκτρομαγνητισμό. Προβλήματα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης εμφανίζονται σε πλήθος εφαρμογών όπως για παράδειγμα στην ανάλυση κεραιών, κυματοδηγών και οπτικών διατάξεων, στη σχεδίαση διατάξεων ραδιοεντοπισμού, στην ιατρική κ.α.

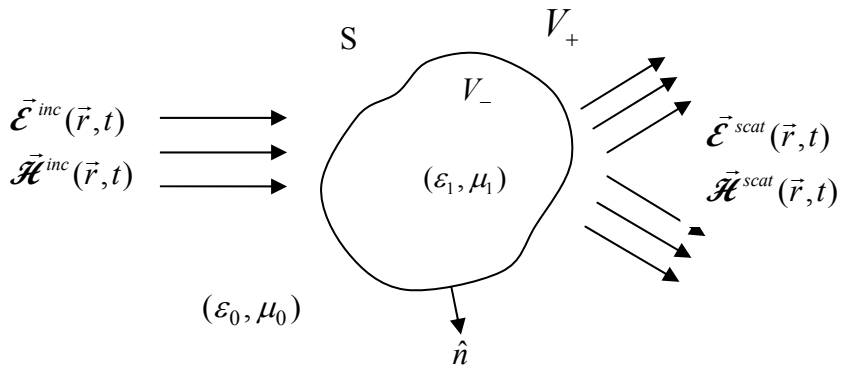
Φαινόμενα σκέδασης λαμβάνουν χώρα κατά την διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε μέσα και διατάξεις με ασυνέχειες. Η μελέτη ενός προβλήματος σκέδασης γίνεται με την διατύπωση του προβλήματος οριακών συνθηκών και έχει στόχο την εύρεση των δευτερογενών ηλεκτρομαγνητικών πεδίων (πεδίων σκέδασης) σε κάθε διακριτή περιοχή του χώρου, δεδομένου του πρωτογενούς (προσπίπτοντος) ηλεκτρομαγνητικού πεδίου.

Η κατάστρωση του προβλήματος οριακών συνθηκών στηρίζεται στην εφαρμογή των εξισώσεων Maxwell για κάθε περιοχή του χώρου, καθώς και των οριακών συνθηκών στις διαχωριστικές επιφάνειες μεταξύ γειτονικών περιοχών. Συνήθως τα εμπλεκόμενα μέσα θεωρούνται ως απλά (ομοιογενή, γραμμικά, ισοτροπικά). Η παρουσία, ενίοτε, γενικευμένων μέσων (ανομοιογενών, ανισοτροπικών, μη γραμμικών, κ.λ.π.) σε μια διάταξη οδηγεί σε μαθηματικές περιπλοκές, οι οποίες αυξάνουν σημαντικά τον βαθμό δυσκολίας του προβλήματος.

Η ακριβής αναλυτική επίλυση τέτοιων προβλημάτων οριακών συνθηκών είναι δυνατή μόνο για μια ολιγομελή κατηγορία κανονικών γεωμετρικών διατάξεων. Για περισσότερο πολύπλοκες διατάξεις, η επιτυχής αντιμετώπιση θα πρέπει αναγκαστικά να στηριχθεί είτε σε καθαρά αριθμητικές είτε σε υβριδικές μεθόδους του υπολογιστικού ηλεκτρομαγνητισμού.

1.1. Γενικευμένο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης

Στο Σχ.1.1 αναπαρίσταται το γενικευμένο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης. Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $(\vec{\mathcal{E}}^{inc}, \vec{\mathcal{H}}^{inc})$ αλληλεπιδρά με τον σκεδαστή που καταλαμβάνει την περιοχή V_- του χώρου. Το συνολικό πεδίο στην περιοχή $V_+ = \Re^3 \setminus V_-$ είναι ίσο με το άθροισμα του προσπίπτοντος και του σκεδαζόμενου πεδίου, δηλαδή $(\vec{\mathcal{E}}^{total}, \vec{\mathcal{H}}^{total}) = (\vec{\mathcal{E}}^{inc} + \vec{\mathcal{E}}^{scat}, \vec{\mathcal{H}}^{inc} + \vec{\mathcal{H}}^{scat})$. Το ζητούμενο είναι ο προσδιορισμός του αγνώστου πεδίου σκεδάσεως, καθώς και του πεδίου στο εσωτερικό V_- του σκεδαστή.



Σχήμα 1.1: Το γενικευμένο πρόβλημα ηλεκτρομαγνητικής σκέδασης

Για τον προσδιορισμό των άγνωστων πεδίων θα πρέπει να επιλυθούν οι εξισώσεις Maxwell:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t)}{\partial t}$$
$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t)}{\partial t} \qquad (1)$$

όπου $\vec{\mathcal{J}}$ είναι η χωρική πυκνότητα των επιβαλλομένων ρευματικών πηγών στο σημείο του χώρου $\vec{r}$ την χρονική στιγμή t, $\vec{\mathcal{D}}$ το διάνυσμα της διηλεκτρικής μετατόπισης και $\vec{\mathcal{B}}$ το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής. Οι παραπάνω σχέσεις συμπληρώνονται:

1) με τις συντακτικές σχέσεις, οι οποίες για απλά διηλεκτρικά μέσα $(\varepsilon, \mu, \sigma)$ έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{D}}(\vec{r},t) &= \varepsilon(\vec{r})\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) \\ \vec{\mathcal{B}}(\vec{r},t) &= \mu(\vec{r})\vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) \\ \vec{\mathcal{J}}_c &= \sigma\vec{\mathcal{E}} \end{aligned} \tag{2}$$

όπου $\vec{\mathcal{J}}_c$ είναι η χωρική πυκνότητα του ρεύματος αγωγιμότητας.

2) με τις οριακές συνθήκες για τις εφαπτομενικές στην S συνιστώσες του πεδίου,

$$\begin{aligned} \hat{n}\times(\vec{\mathcal{E}}^{+} - \vec{\mathcal{E}}^{-}) &= 0 \\ \hat{n}\times(\vec{\mathcal{H}}^{+} - \vec{\mathcal{H}}^{-}) &= \vec{\mathcal{K}} \end{aligned} \tag{3}$$

και $\vec{\mathcal{K}}$ είναι η επιφανειακή πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος στα σημεία της S.

Για απεριόριστες (ανοικτές) διατάξεις θα πρέπει επιπλέον να διασφαλιστεί η ισχύς της συνθήκης στο άπειρο, γνωστής ως συνθήκη ακτινοβολίας (ή συνθήκη του Sommerfeld) [1],[2].

Υπό το πρίσμα των (2), οι (1) αποτελούν πρώτης τάξεως σύστημα συνεζευγμένων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, ως προς αγνώστους τα $\vec{E}$ και $\vec{H}$. Σχετική απλοποίηση μπορεί να γίνει με απαλοιφή του ενός από τα δύο άγνωστα μεγέθη, όπως εξηγείται στις [1],[2]. Προκύπτουν τότε οι παρακάτω, δευτέρας τάξεως, γενικευμένες κυματικές εξισώσεις:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t)}{\partial t} + \frac{\nabla \rho(\vec{r},t)}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)}{\partial t} = -\nabla \times \vec{\mathcal{J}}(\vec{r},t) \tag{4}$$

Θεωρώντας ότι, όπως συμβαίνει με το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε παρακάτω, οι πρωτογενείς (επιβαλλόμενες) πηγές βρίσκονται στο άπειρο και ότι το μέσο δεν έχει απώλειες (οπότε $\vec{\mathcal{J}} = 0$, $\rho = 0$ και $\sigma = 0$) καταλήγουμε στις ομογενείς κυματικές εξισώσεις:

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t) - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

Στην ημιτονική μόνιμη κατάσταση, υποθέτοντας αρμονική χρονική μεταβολή $e^{+j\omega t}$ των πηγών (άρα του πεδίου), οι (5) ανάγονται στις διανυσματικές εξισώσεις Helmholtz.

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{E}(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \vec{\mathrm{H}}(\vec{r}) + \omega^2 \mu\varepsilon \vec{\mathrm{H}}(\vec{r}) = 0 \tag{6}$$

1.2. Αντικείμενο της διπλωματικής εργασίας

Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε το πρόβλημα της σκέδασης επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από ένα άπειρο διηλεκτρικό κύλινδρο στην επιφάνεια του οποίου βρίσκεται τυπωμένη μια τέλεια αγώγιμη, απείρως λεπτή ταινιογραμμή που έχει άπειρο μήκος. Όπως είναι ευνόητο, η παρουσία της ταινιογραμμής μας προσπορίζει έναν

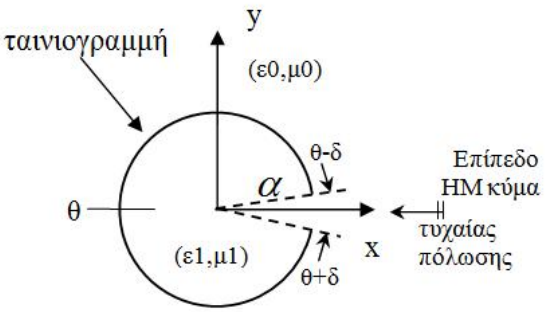
ακόμα βαθμό ελευθερίας για τον έλεγχο της ενεργού διατομής σκέδασης του βασικού κυλινδρικού διηλεκτρικού σκεδαστή. Εναλλακτικά, η ίδια αυτή διάταξη μπορεί να θεωρηθεί ως ένας κυλινδρικός μεταλλικός κυματοδηγός, η επιφάνεια του οποίου φέρει σχισμή απείρου μήκους.

Η κατάστρωση του προβλήματος οριακών συνθηκών γίνεται στο δεύτερο κεφάλαιο μέσω ενός 2×2 συστήματος συνεζευγμένων ιδιόμορφων ολοκληρωτικών – ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων πρώτου είδους, με άγνωστους τις δυο συνιστώσες της ρευματικής πυκνότητας που επάγονται στην μικροταινία. Η διακριτοποίηση του συστήματος αυτού γίνεται με εφαρμογή της μεθόδου Nyström (MN). Εγγενές χαρακτηριστικό της MN είναι η απλότητα των εκφράσεων των στοιχείων του προκύπτοντος γραμμικού αλγεβρικού συστήματος. Προϋπόθεση για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου είναι ο επιτυχής διαχωρισμός των πυρήνων σε ιδιόμορφα και σε ομαλά μέρη.

Αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στο τρίτο κεφάλαιο. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται σε εξαντλητικές συγκρίσεις με προϋπάρχοντα αποτελέσματα, ώστε να καταδειχθεί η ορθότητα, ακρίβεια και ταχύτητα σύγκλισης της μεθόδου.

Κεφάλαιο 2. Κατάστρωση του προβλήματος οριακών συνθηκών

Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο Σχ 2.1 σε τομή στο επίπεδο xy. Η τελείως αγώγιμη και απείρως λεπτή ταινιογραμμή έχει γωνιακό εύρος 2δ και εκτείνεται στην επιφάνεια $(\rho = \alpha, \theta - \delta \le \varphi \le \theta + \delta)$. Η κυλινδρική περιοχή $0 \le \rho \le \alpha$ (περιοχή 1) πληρούται με ομογενές ισοτροπικό υλικό (ε_1,μ_1) και περιβάλλεται από αέρα (ε_0,μ_0) (περιοχή 0). Η διάταξη εκτείνεται ομοιόμορφα και απεριόριστα κατά μήκος του άξονα z.



Σχήμα 2.1: Αγώγιμη ταινιογραμμή τυπωμένη στην επιφάνεια διηλεκτρικού κυλίνδρου.

#

#

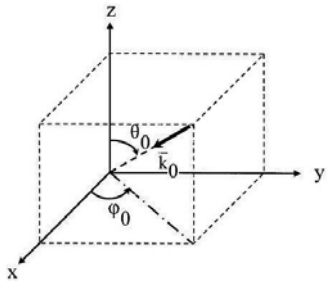
2.1. Το προσπίπτον ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Θεωρούμε ότι στην τυχούσα κατεύθυνση,

$$\vec{k}_0(k_0,\theta_0,\varphi_0) = k_0 \sin\theta_0 \cos\varphi_0 \hat{x} + k_0 \sin\theta_0 \sin\varphi_0 \hat{y} + k_0 \cos\theta_0 \hat{z} = k_\rho \hat{\rho} + \beta \hat{z}$$

$$(k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}\ ,\ k_\rho = k_c = k_0 \sin\theta_0)$$

που δείχνει το Σχ.2.2, προσπίπτει επίπεδο ηλεκτρομαγνητικό κύμα



Σχήμα 2.2: Το κυματοδιάνυσμα $\vec{k}_0$ σχηματίζει γωνία θ_0 με τον άξονα των z, τον άξονα του κυλίνδρου, και η προβολή του στο xy-επίπεδο σχηματίζει γωνία φ_0 με τον άξονα x.

$$\vec{E}^{inc} = \hat{z}E_z^{inc} + \vec{E}_t^{inc} \ ,\vec{H}^{inc} = \hat{z}H_z^{inc} + \vec{H}_t^{inc} \ ,$$

με[1]

$$E_z^{inc} = E_0 \exp(j\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) = E_0 \exp(jk_x \cdot x + jk_y \cdot y)\exp(j\beta \cdot z) =$$
$$= E_0 \exp(jk_{c0} \cdot \rho\cos(\varphi - \varphi_0))\exp(j\beta \cdot z)$$

$$H_z^{inc} = H_0 \exp(j\vec{k}_0 \cdot \vec{r}) = H_0 \exp(jk_x \cdot x + jk_y \cdot y)\exp(j\beta \cdot z) =$$
$$= H_0 \exp(jk_{c0} \cdot \rho\cos(\varphi - \varphi_0))\exp(j\beta \cdot z)$$

Συναρτήσει των E_z^{inc}, H_z^{inc} οι εγκάρσιες συνιστώσες $\vec{E}_t^{inc}$,$\vec{H}_t^{inc}$ του πεδίου δίνονται από τις σχέσεις:

$$jk_\rho^2 \vec{E}_t^{inc} = -\beta \ \nabla_t E_z^{inc} - \omega\mu\hat{z} \times \nabla_t H_z^{inc} \qquad (1)$$
$$jk_\rho^2 \vec{H}_t^{inc} = -\beta \ \nabla_t H_z^{inc} + \omega\varepsilon\hat{z} \times \nabla_t E_z^{inc} \qquad (2)$$

Η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος είναι τυχαία, καθοριζόμενη από τις τιμές των E_0, H_0.

[1] Για χρονική εξάρτηση exp(+jωt), η οποία παραλείπεται εδώ και παντού παρακάτω

2.2. Το πεδίο διεγέρσεως

Ως πεδίο διεγέρσεως ορίζουμε το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο $[\vec{E}^{exc}(\rho,\phi),\vec{H}^{exc}(\rho,\phi)]e^{j\beta z}$, που διεγείρεται από το προσπίπτον κύμα παρουσία του κυλίνδρου αλλά απουσία της ταινιογραμμής. Το πεδίο καθορίζεται πλήρως από τις διαμήκεις συνιστώσες του, οι οποίες ικανοποιούν την ομογενή εξίσωση Helmholtz και επομένως έχουν τη μορφή

$$\begin{pmatrix} E_{z0}^{exc}(\rho,\varphi) \\ \mathrm{H}_{z0}^{exc}(\rho,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ H_0 \end{pmatrix} e^{jk_{c0}\rho\cos(\varphi-\varphi_0)} + k_{c0}^2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} j^n H_n^{(2)}(k_{c0}\rho) e^{jn(\varphi-\varphi_0)} \tag{3a}$$

$$\begin{pmatrix} E_{z1}^{exc}(\rho,\varphi) \\ \mathrm{H}_{z1}^{exc}(\rho,\varphi) \end{pmatrix} = k_{c1}^2 \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} j^n J_n(k_{c1}\rho) e^{jn(\varphi-\varphi_0)} \tag{3b}$$

όπου $k_{ci}^2 = k_i^2 - \beta^2 = \omega^2\varepsilon_i\mu_i - \beta^2$ (i=0,1), $H_n^{(2)}(x)$ είναι η δευτέρου είδους συνάρτηση Hankel τάξεως n και $\mathrm{J}_n(x)$ η συνάρτηση Bessel τάξεως n. Συναρτήσει των διαμήκων συνιστωσών, οι εγκάρσιες συνιστώσες του πεδίου διεγέρσεως δίνονται από σχέσεις της μορφής (1,2)

Οι συντελεστές ανάπτυξης a_n, b_n, c_n, d_n υπολογίζονται ικανοποιώντας τις παρακάτω οριακές συνθήκες:

$$E_{z0}^{exc}(a,\varphi) = E_{z1}^{exc}(a,\varphi) \ , \ E_{\varphi 0}^{exc}(a,\varphi) = E_{\varphi 1}^{exc}(a,\varphi) \tag{4a}$$

$$\mathrm{H}_{z0}^{exc}(a,\varphi) = \mathrm{H}_{z1}^{exc}(a,\varphi) \ , \ \mathrm{H}_{\varphi 0}^{exc}(a,\varphi) = \mathrm{H}_{\varphi 1}^{exc}(a,\varphi) \tag{4b}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη καθεμιάς των (4) με $e^{-jN\phi}$ ($N = 0, \pm 1, \pm 2, ...$), ολοκληρώνοντας ως προς ϕ από $\phi = 0$ ως $\phi = 2\pi$ και χρησιμοποιώντας 1) την σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $\{e^{jn\phi}\}$ και 2) την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$J_n(z) = \frac{j^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{jz\cos\theta} \cos(n\theta) d\theta \tag{5}$$

της συναρτήσεως Bessel, καταλήγουμε στο παρακάτω γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων:

$$k_{c0}^2 H_n^{(2)}(k_{c0}a)a_n - k_{c0}^2 J_n(k_{c1}a)c_n = -E_0 J_n(k_{c0}a) \tag{6a}$$

$$k_{c0}^2 H_n^{(2)}(k_{c0}a)b_n - k_{c0}^2 J_n(k_{c1}a)d_n = -H_0 J_n(k_{c0}a) \tag{6b}$$

$$\begin{aligned} &\frac{-\beta n}{a} H_n^{(2)}(k_{c0}a)a_n + j\omega\mu_0 k_{c0} H_n'^{(2)}(k_{c0}a)b_n + \frac{\beta n}{a} J_n(k_{c1}a)c_n - j\omega\mu_1 k_{c1} J_n'(k_{c1}a)d_n = \\ &= \frac{\beta n E_0}{a k_{c0}^2} J_n(k_{c0}a) - \frac{j\omega\mu_0 H_0}{k_{c0}} J_n'(k_{c0}a) \end{aligned} \tag{6c}$$

$$\begin{aligned} &-j\omega\varepsilon_0 k_{c0} H_n'^{(2)}(k_{c0}a)a_n - \frac{\beta n}{a} H_n^{(2)}(k_{c0}a)b_n + j\omega\varepsilon_1 k_{c1} J_n'(k_{c1}a)c_n + \frac{\beta n}{a} J_n(k_{c1}a)d_n = \\ &= \frac{j\omega\varepsilon_0 E_0}{k_{c0}} J_n'(k_{c0}a) + \frac{\beta n H_0}{\alpha k_{c0}^2} J_n(k_{c0}a) \end{aligned} \tag{6d}$$

Με επίλυση των (6) μπορούν να βρεθούν για τους συντελεστές a_n, b_n, c_n, d_n κλειστές εκφράσεις, τις οποίες παραλείπουμε.

2.3. Το πεδίο σκεδάσεως

Το πεδίο σκεδάσεως ορίζεται ως η διαφορά

$$[\vec{E}^{scat}(\vec{\rho}),\vec{\mathrm{H}}^{scat}(\vec{\rho})]e^{j\beta z} = [\vec{E}^{total}(\vec{\rho}) - \vec{E}^{exc}(\vec{\rho}),\vec{\mathrm{H}}^{total}(\vec{\rho}) - \vec{\mathrm{H}}^{exc}(\vec{\rho})]e^{j\beta z}$$

του πεδίου διεγέρσεως από το ολικό πεδίο $[\vec{E}^{total}(\vec{\rho}),\vec{\mathrm{H}}^{total}(\vec{\rho})]e^{j\beta z}$ στη διάταξη του Σχ.2.1.

Πηγή του σκεδαζόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι η επαγόμενη στην αγώγιμη ταινία επιφανειακή ρευματική κατανομή

$$\vec{J}(\varphi) = \hat{r}\times[\vec{H}^{tot}(a+,\varphi) - \vec{H}^{tot}(a-,\varphi)]e^{j\beta z} = [\hat{z}J_z(\varphi) + \hat{\varphi}J_\varphi(\varphi)]e^{j\beta z} \qquad (7)$$

2.4. Συναρτήσεις Green

Θεωρούμε τις παρακάτω απέραντες ως προς z γραμμικές πηγές

$$\vec{J}_a = \hat{z}I_e\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')e^{-j\beta z} \quad (I_e = 1A)$$

$$\vec{M}_a = \hat{z}I_m\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}')e^{-j\beta z} \quad (I_m = 1V)$$

τοποθετημένες στη θέση (ρ',φ') στην περιοχή 1 του διηλεκτρικού κυλίνδρου, απουσία της αγώγιμης ταινίας και απουσία οποιασδήποτε άλλης πρωτογενούς διεγέρσεως. Από τις πηγές αυτές διεγείρονται στη θέση (ρ,φ) της περιοχής i (i=0,1) τα πεδία

$$I_e[\vec{\mathrm{E}}_i^J(\vec{\rho},\vec{\rho}'),\vec{H}_i^J(\vec{\rho},\vec{\rho}')]e^{-j\beta z}, \quad I_m[\vec{\mathrm{E}}_i^M(\vec{\rho},\vec{\rho}'),\vec{H}_i^M(\vec{\rho},\vec{\rho}')]e^{-j\beta z}$$

των οποίων οι z συνιστώσες ικανοποιούν τις εξισώσεις

$$(\nabla^2 + k_{c0}^2)\mathrm{E}_{z0}^J(\rho,\varphi;\rho',\varphi') = 0 \tag{8a}$$

$$(\nabla^2 + k_{c0}^2)\mathrm{E}_{z0}^M(\rho,\varphi;\rho',\varphi') = 0 \tag{8b}$$

$$(\nabla^2 + k_{c1}^2)\mathrm{E}_{z1}^J(\rho,\varphi;\rho',\varphi') = \frac{jk_{c1}^2}{\omega\varepsilon_1}\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}') \tag{8c}$$

$$(\nabla^2 + k_{c0}^2)H_{z0}^M(\rho,\varphi;\rho',\varphi') = 0 \tag{8d}$$

$$(\nabla^2 + k_{c0}^2)H_{z0}^J(\rho,\varphi';\rho',\varphi') = 0 \tag{8e}$$

$$(\nabla^2 + k_{c1}^2)H_{z1}^M(\rho,\varphi;\rho',\varphi') = \frac{jk_{c1}^2}{\omega\mu_1}\delta(\vec{\rho}-\vec{\rho}') \tag{8f}$$

Οι εγκάρσιες συνιστώσες των πεδίων αυτών μπορούν να βρεθούν από τις διαμήκεις με χρήση σχέσεων της μορφής (1,2) (με –β στη θέση του β, λόγω της μορφής $e^{-j\beta z}$ που υποτέθηκε για την εξάρτηση των $\vec{J}_a$ και $\vec{M}_a$ από το z).

Με την τεχνική χωρισμού των μεταβλητών από τις (8) προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{z0}^J \\ H_{z0}^J \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \begin{pmatrix} a_n^J \\ b_n^J \end{pmatrix} H_n^{(2)}(k_{c0}\rho) J_n(k_{c1}\rho') e^{jn(\varphi-\varphi')} \tag{9a}$$

$$\begin{pmatrix} E_{z0}^M \\ H_{z0}^M \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \begin{pmatrix} a_n^M \\ b_n^M \end{pmatrix} H_n^{(2)}(k_{c0}\rho) J_n(k_{c1}\rho') e^{jn(\varphi-\varphi')} \tag{9b}$$

$$\begin{pmatrix} E_{z1}^M \\ H_{z1}^J \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \begin{pmatrix} c_n^M \\ d_n^J \end{pmatrix} J_n(k_{c1}\rho) J_n(k_{c1}\rho') e^{jn(\varphi-\varphi')} \tag{9c}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_{z1}^J \\ H_{z1}^M \end{pmatrix} = -\frac{k_{c1}^2}{4\omega} \begin{pmatrix} 1/\varepsilon_1 \\ 1/\mu_1 \end{pmatrix} \mathrm{H}_0^{(2)}(k_{c1}|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|) + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \begin{pmatrix} c_n^J \\ d_n^M \end{pmatrix} H_n^{(2)}(k_{c0}\rho) J_n(k_{c1}\rho') e^{jn(\varphi-\varphi')} \tag{9d}$$

Ο όρος $\mathrm{H}_0^{(2)}(k_{c1}|\vec{\rho}-\vec{\rho}'|)$ στην (9d) επέχει θέση μερικής λύσεως των (8c) και (8f) αντίστοιχα. Για τον όρο αυτόν ισχύει το προσθετικό θεώρημα [1]

$$\mathrm{H}_0^{(2)}(k_{c1}\left|\vec{\rho}-\vec{\rho}'\right|)=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} H_n^{(2)}(k_{c1}\rho')J_n(k_{c1}\rho)e^{jn(\varphi-\varphi')}, \rho\le\rho' \\ \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} H_n^{(2)}(k_{c1}\rho)J_n(k_{c1}\rho')e^{jn(\varphi-\varphi')}, \rho\ge\rho'\end{cases} \tag{10}$$

Οι άγνωστοι συντελεστές a_n^J, b_n^J, c_n^J, d_n^J θα βρεθούν με εφαρμογή των συνθηκών συνεχείας

$$E_{z0}^J(a,\phi;\rho',\phi')=E_{z1}^J(a,\phi;\rho',\phi'),\, H_{z0}^J(a,\phi;\rho',\phi')=H_{z1}^J(a,\phi;\rho',\phi') \tag{11a},$$

$$E_{\phi 0}^J(a,\phi;\rho',\phi')=E_{\phi 1}^J(a,\phi;\rho',\phi'),\; H_{\phi 0}^J(a,\phi;\rho',\phi')=H_{\phi 1}^J(a,\phi;\rho',\phi') \tag{11b},$$

ως εξής: Αντικαθιστούμε την έκφραση του προσθετικού θεωρήματος στην (9d). Ακολούθως πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη καθεμιάς των (9) με $e^{-jN\phi}$ ($N=0,\pm1,\pm2,...$) και ολοκληρώνουμε ως προς ϕ από $\phi=0$ ως $\phi=2\pi$ χρησιμοποιώντας την σχέση ορθογωνιότητας των συναρτήσεων $\{e^{jn\phi}\}$ καθώς και την (5). Τελικό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων:

$$H_n^{(2)}(k_{c0}a)\begin{pmatrix}c_n^J\\ d_n^J\end{pmatrix}-J_n(k_{c1}a)\begin{pmatrix}a_n^J\\ b_n^J\end{pmatrix}=-J_n(k_{c1}a)\begin{pmatrix}k_{c1}^2/(4\omega\varepsilon_1)\\ 0\end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\widehat{U}_0^H\begin{pmatrix}c_n^J\\ d_n^J\end{pmatrix}-\widehat{U}_1^J\begin{pmatrix}a_n^J\\ b_n^J\end{pmatrix}=-\widehat{U}_0^J\begin{pmatrix}k_{c1}^2/(4\omega\varepsilon_1)\\ 0\end{pmatrix} \tag{13}$$

όπου

$$\widehat{U}_0^H = \begin{pmatrix} \frac{-\beta n}{ak_{c0}^2} H_n^{(2)}(k_{c0}a) & -\frac{j\omega\mu_0}{k_{c0}} H_n^{(2)'}(k_{ci}a) \\ \frac{j\omega\varepsilon_0}{k_{c0}} H_n^{(2)'}(k_{ci}a) & \frac{-\beta n}{ak_{c0}^2} H_n^{(2)}(k_{c0}a) \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$\widehat{U}_i^J = \begin{pmatrix} \frac{-\beta n}{\alpha k_{ci}^2} J_n(k_{ci}a) & -\frac{j\omega\mu_i}{k_{ci}} J_n^{'}(k_{ci}a) \\ \frac{j\omega\varepsilon_i}{k_{ci}} J_n^{'}(k_{ci}a) & \frac{-\beta n}{ak_{ci}^2} J_n(k_{ci}a) \end{pmatrix} \quad (i = 0,1) \tag{15}$$

(Οι όροι $H_n^{(2)'}(\cdot)$ και $J_n^{'}(\cdot)$ παριστάνουν τις παραγώγους των $H_n^{(2)}(\cdot)$ και $J_n(\cdot)$ ως προς το όρισμά τους).

Κατά τον ίδιο τρόπο, οι συντελεστές a_n^M , b_n^M ,c_n^M , d_n^M θα βρεθούν με εφαρμογή των συνθηκών συνεχείας

$$E_{z0}^M(a,\phi;\rho',\phi') = E_{z1}^M(a,\phi;\rho',\phi'), \quad H_{z0}^M(a,\phi;\rho',\phi') = H_{z1}^M(a,\phi;\rho',\phi') \tag{16}$$

$$E_{\phi 0}^M(a,\phi;\rho',\phi') = E_{\phi 1}^M(a,\phi;\rho',\phi'), \quad H_{\phi 0}^M(a,\phi;\rho',\phi') = H_{\phi 1}^M(a,\phi;\rho',\phi') \tag{17}$$

Τελικό αποτέλεσμα είναι το παρακάτω γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων:

$$H_n^{(2)}(k_{c0}a)\begin{pmatrix} c_n^M \\ d_n^M \end{pmatrix} - J_n(k_{c1}a)\begin{pmatrix} a_n^M \\ b_n^M \end{pmatrix} = -J_n(k_{c1}a)\begin{pmatrix} 0 \\ k_{c1}^2/(4\omega\mu_1) \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$\widehat{U}_0^H\begin{pmatrix} c_n^M \\ d_n^M \end{pmatrix} - \widehat{U}_1^J\begin{pmatrix} a_n^M \\ b_n^M \end{pmatrix} = -\widehat{U}_0^J\begin{pmatrix} 0 \\ k_{c1}^2/(4\omega\mu_1) \end{pmatrix} \tag{19}$$

2.5. Ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις του πεδίου σκεδάσεως

Εφαρμογή του θεωρήματος της αμοιβαιότητας [1],[2], $\left\langle \vec{J}_a, \vec{J} \right\rangle = \left\langle \vec{J}, \vec{J}_a \right\rangle$,δίνει:

$$E_z^{scat}(\vec{\rho}') = a\int_C [J_z(\varphi)\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;\rho',\varphi') + J_\varphi(\varphi)\mathrm{E}_\varphi^J(a,\varphi;\rho',\varphi')]d\varphi \tag{20}$$

όπου $C = \{\theta - \delta \le \varphi \le \theta + \delta\}$ είναι το κυκλικό τόξο που καταλαμβάνει η μικροταινία.

Ομοίως εφαρμόζοντας το θεώρημα της αμοιβαιότητας $\left\langle \vec{M}_a, \vec{J} \right\rangle = \left\langle \vec{J}, \vec{M}_a \right\rangle$

παίρνουμε:

$$-H_z^{scat}(\vec{\rho}') = a\int_C [J_z(\varphi)\mathrm{E}_z^M(a,\varphi;\rho',\varphi') + J_\varphi(\varphi)\mathrm{E}_\varphi^M(a,\varphi;\rho',\varphi')]d\varphi \tag{21}$$

Οι (20) και (21) αποτελούν τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των $E_z^{scat}(\vec{\rho})$ και $H_z^{scat}(\vec{\rho})$. Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των εγκαρσίων συνιστωσών προκύπτουν από αυτές με παραγωγίσεις με τη βοήθεια σχέσεων της μορφής (1,2). Για παράδειγμα,

$$E_{\phi 1}^{scat}(\rho',\phi') = \frac{j\beta}{k_{c1}^2}\frac{\partial}{\partial\phi'}E_{z1}^{scat}(\rho',\phi') + \frac{j\omega\mu_1}{k_{c1}^2}\frac{\partial}{\partial\rho'}H_{z1}^{scat}(\rho',\phi') \tag{22}$$

2.6. Ολοκληρωτικές εξισώσεις του προβλήματος

Με εφαρμογή των συνθηκών μηδενισμού των εφαπτομενικών συνθηκών του ολικού πεδίου στα σημεία της ταινιογραμμής,

$$E_z^{tot}(a,\varphi') = 0 \Rightarrow E_z^{scat}(a,\varphi') + E_z^{inc}(a,\varphi') = 0 \qquad (\theta - \delta \le \varphi' \le \theta + \delta)$$

$$E_\phi^{tot}(a,\varphi') = 0 \Rightarrow E_\phi^{scat}(a,\varphi') + E_\phi^{inc}(a,\varphi') = 0 \qquad (\theta - \delta \le \varphi' \le \theta + \delta),$$

από τις (21,22) προκύπτουν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις

$$-E_z^{inc}(a,\varphi') = a\int_C J_z(\varphi)\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi')d\varphi + a\int_C J_\varphi(\varphi)\mathrm{E}_\varphi^J(a,\varphi;a,\varphi')d\varphi \tag{23}$$

$$-E_\phi^{inc}(a,\varphi') = \frac{j\beta a}{k_{c1}^2}\frac{\partial}{\partial\phi'}\int_C [J_z(\varphi)\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi') + J_\varphi(\varphi)\mathrm{E}_\varphi^J(a,\varphi;a,\varphi')]d\varphi +$$

$$-\frac{j\omega\mu_1 a}{k_{c1}^2}\frac{\partial}{\partial\rho'}\int_C [J_z(\varphi)\mathrm{E}_z^M(a,\varphi;a,\varphi') + J_\varphi(\varphi)\mathrm{E}_\varphi^M(a,\varphi;a,\varphi')]d\varphi \tag{24}$$

οι οποίες ισχύουν για $\theta-\delta \le \varphi' \le \theta+\delta$. Στις (23,24),

$$\mathrm{E}_\varphi^J(a,\varphi;a,\varphi') = \frac{-j\beta}{ak_{c1}^2}\frac{\partial \mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi')}{\partial\varphi} + \frac{j\omega\mu_1}{k_{c1}^2}\frac{\partial H_z^J(a,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho}$$

$$\mathrm{E}_\varphi^M(a,\varphi;a,\varphi') = \frac{-j\beta}{ak_{c1}^2}\frac{\partial \mathrm{E}_z^M(a,\varphi;a,\varphi')}{\partial\varphi} + \frac{j\omega\mu_1}{k_{c1}^2}\frac{\partial H_z^M(a,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho}$$

Όπως θα φανεί παρακάτω η εξίσωση (23) είναι ιδιόμορφη ολοκληρωτική ενώ η (24) είναι ιδιόμορφη ολοκληρωτικοδιαφορική. Στους πυρήνες της (24) εμπεριέχονται επίσης υπερ-ιδιόμορφοι όροι. Ο χειρισμός των ιδιομορφιών των πυρήνων αποτελεί σημαντικό μέρος της λύσεως που θα δώσουμε στη συνέχεια.

2.7. Μετασχηματισμός των πυρήνων – Απομόνωση των ιδιομορφιών

A. Μετασχηματισμός της $\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi')$

Με χρήση του προσθετικού θεωρήματος η $\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi')$ γράφεται διαδοχικά ως εξής:

$$\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi') = -\frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(k_{c1}a)J_n(k_{c1}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^J J_n k_{c1}a)J_n k_{c1}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} \overset{a_n^J = a_{-n}^J}{=} .$$

$$= [a_0^J J_0(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_0(k_{c1}a)]J_0(k_{c1}a) +$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}[a_n^J J_n(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_n(k_{c1}a)]J_n(k_{c1}a)\cos[n(\varphi-\varphi')] \qquad (25)$$

Η ασυμπτωτική έκφραση της παράστασης

$$[a_n^J J_n(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_n(k_{c1}a)]J_n(k_{c1}a)$$

για μεγάλες τάξεις ή μικρά ορίσματα θα έχει τη μορφή

$$\frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \frac{A_3}{n^3} + \cdots$$

Οι εκφράσεις των δυο πρώτων συντελεστών A_1 και A_2 δίνονται στο Παράρτημα Α.

Λόγω του όρου $\frac{A_1}{n}$, αμέσως συνάγεται ότι η σειρά που εκφράζει την $\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi')$ συγκλίνει υπό συνθήκες, ενώ οι παράγωγοι της E_z^J που εμπλέκονται στους πυρήνες των ολοκληρωτικών εξισώσεων αποκλίνουν. Συνεπώς, η έκφραση (25) είναι πρακτικά άχρηστη. Η δυσκολία αυτή αίρεται ως εξής:

Από τον γενικό όρο της σειράς (25) αφαιρούμε την κ-τάξεως ασυμπτωτική του έκφραση για μεγάλα n (ή για μικρά ορίσματα) και ξαναπροσθέτουμε την ασυμπτωτική μορφή της σειράς. Προκύπτει έτσι η έκφραση

$$\mathrm{E}_z^J(a,\varphi;a,\varphi') = [a_0^J J_0(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_0(k_{c1}a)]J_0(k_{c1}a) + S_a(\varphi-\varphi') + S_a^{asym}(\varphi-\varphi') \qquad (26)$$

όπου

$$S_a(\varphi-\varphi') = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[a_n^J J_n(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_n(k_{c1}a)]J_n(k_{c1}a) - \sum_{m=1}^{k}\frac{A_m}{n^m}\right\}\cos[n(\varphi-\varphi')] \tag{27}$$

και

$$S_a^{asym}(\varphi-\varphi') = 2\sum_{m=1}^{k}A_m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[n(\varphi-\varphi')]}{n^m} = 2\sum_{m=1}^{k}A_m S_m(\varphi-\varphi') \tag{28}$$

Στην (28),

$$S_m(\varphi-\varphi') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[n(\varphi-\varphi')]}{n^m}$$

είναι η πολυλογαριθμική συνάρτηση, η οποία μπορεί να υπολογισθεί με την επιθυμητή ακρίβεια για οποιαδήποτε τιμή του ορίσματός της. (Βλέπ. σχετικά σχόλια παρακάτω). Προφανώς, η $S_a(\varphi-\varphi')$ συγκλίνει ως n^{-k-1} , δηλαδή όσο γρήγορα θέλουμε, με κατάλληλη επιλογή του πλήθους k των ασυμπτωτικών όρων.

Με αλλαγή μεταβλητών

$\varphi = \theta + \delta t$, φ'=θ+δτ (-1 ≤ t,τ ≤ 1)

παίρνουμε

$$\mathrm{E}_z^J(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau) = [a_0^J J_0(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_0(k_{c1}a)]J_0(k_{c1}a) + S_a(\delta\,|\,t-\tau\,|) +$$
$$+2\sum_{m=1}^{k}A_m S_m[\delta(t-\tau)] \tag{29}$$

Σημείωση: Είναι γνωστό, [3], ότι για τις άρτιες τιμές του ακεραίου m η συνάρτηση S_m είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση δίχως ιδιομορφίες. Αντίθετα για περιττές τιμές του m η S_m περιέχει μια λογαριθμική ιδιομορφία. Μπορούμε λοιπόν για περιττές τιμές του m να γράψουμε την S_m ως

$$S_{2m+1}[\delta(t-\tau)] = \Gamma_{2m+1}(t-\tau) + \gamma_{2m+1}(t-\tau)^{2m}\ln\left|t-\tau\right| \tag{30a}$$

$$\gamma_{2m+1} = -(-1)^m \frac{\delta^{2m}}{(2m)!},\ \text{m=0,1,2,3,}\ldots$$

όπου $\Gamma_m(\cdot)$ είναι ομαλή συνάρτηση του ορίσματός της.

Με αντικατάσταση από την (30a) στην (29), καταλήγουμε στη μορφή.

$$\mathrm{E}_z^J(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau) = K^{zz}(t-\tau) + \Lambda^{zz}(t-\tau)\ln\left|t-\tau\right|$$

όπου

$$\Lambda^{zz}(t-\tau) = 2\sum_{m=1,3,5,\ldots}^{k} A_m \gamma_m (t-\tau)^{m-1} \tag{30b}$$

$$K^{zz}(t-\tau) = [a_0^J J_0(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\varepsilon_1}\mathrm{H}_0(k_{c1}a)]J_0(k_{c1}a) + 2S_a(\delta\,|\,t-\tau\,|) + 2\sum_{m=2,4,\ldots}^{k} A_m S_m[\delta(t-\tau)] +$$

$$+2\sum_{m=2,4,\ldots}^{k} A_m \Gamma_m[(t-\tau)] \tag{30c}$$

Όπως προαναφέρθηκε, η απειροσειρά $S_a(\delta\,|\,t-\tau\,|)$ συγκλίνει ως $1/n^{k+1}$, δηλαδή όσο γρήγορα θέλουμε με κατάλληλη επιλογή της παραμέτρου k.

B. Μετασχηματισμός της $\left.\dfrac{\partial H_z^J(\rho,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho}\right|_{\rho=\alpha}$

Την ίδια πορεία και μεθοδολογία ακολουθούμε και για τον μετασχηματισμό των υπόλοιπων πυρήνων.

Η $H_z^J(\vec{\rho},\vec{\rho}')$ γράφεται διαδοχικά ως

$$H_z^J(\vec{\rho},\vec{\rho}') = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n^J J_n(k_{c1}\rho)J_n(k_{c1}\rho')e^{jn(\varphi-\varphi')} \overset{b_n^J=-b_{-n}^J}{=}$$

$$= b_0^J J_0(k_{c1}\rho)J_0(k_{c1}\rho') + 2j\sum_{n=1}^{\infty} b_n^J J_n(k_{c1}\rho)J_n(k_{c1}\rho')\sin[n(\varphi-\varphi')]$$

οπότε

$$\left.\frac{\partial H_z^J(\rho,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = b_0^J k_{c1} J_0'(k_{c1}\alpha) J_0(k_{c1}\alpha) + 2jk_{c1}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^J J_n'(k_{c1}\alpha) J_n(k_{c1}\alpha)\sin[n\delta(t-\tau)]$$

Η ασυμπτωτική έκφραση της παράστασης

$b_n^J J_n'(k_{c1}\alpha) J_n(k_{c1}\alpha)$

για μεγάλα n ή μικρά ορίσματα είναι

$$n\left(\frac{B_1}{n}+\frac{B_2}{n^2}+\frac{B_3}{n^3}+\cdots\right)$$

με τα B_1 , B_2 να δίνονται στο Παράρτημα Α.

Αφαιρώντας και προσθέτοντας ξανά την k τάξεως ασυμπτωτική έκφραση της σειράς και θέτοντας $\varphi = \theta + \delta t$, φ'=θ+δτ $(-1 \le t,\tau \le 1)$, καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$\left.\frac{\partial H_z^J(\rho,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau)}{\partial\rho}\right|_{\rho=a} = b_0^J k_{c1} J_0'(k_{c1}a) J_0(k_{c1}a) + jk_{c1} S_b[\delta(t-\tau)] -$$
$$-\frac{2jk_{c1}}{\delta}\frac{d}{dt}\sum_{m=1}^{k} B_m S_m[\delta(t-\tau)] \qquad (31a)$$

όπου

$$S_b = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{b_n^J J_n'(k_{c1}\alpha) J_n(k_{c1}\alpha) - n\sum_{m=1}^{k}\frac{B_m}{n^m}\right\}\sin[n\delta(t-\tau)]$$

Συνδυάζοντας τις (30) και (31) προκύπτει

$$\mathrm{E}_{\varphi}^{J}(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau)=K^{z\varphi}(t-\tau)+\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{z\varphi}(t-\tau)\ln\left|(t-\tau)\right|]$$

με

$$K^{z\varphi}(t-\tau)=-\frac{j\beta}{ak_{c1}^{2}}S_{c}[\delta(t-\tau)]-$$
$$-\frac{2j\beta}{a\delta k_{c1}^{2}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{k}A_{m}\frac{dS_{m}[\delta(t-\tau)]}{dt}-\frac{2j\beta}{a\delta k_{c1}^{2}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}A_{m}\frac{d\Gamma_{m}[(t-\tau)]}{dt}+\frac{j\omega\mu_{1}}{k_{c1}}b_{0}^{J}J_{0}'(k_{c1}a)J_{0}(k_{c1}a)-$$
$$-\frac{\omega\mu_{1}}{k_{c1}}S_{b}[\delta(t-\tau)]+\frac{2\omega\mu_{1}}{k_{c1}}\sum_{m=2,4,\ldots}^{k}B_{m}\frac{dS_{m}[\delta(t-\tau)]}{dt}+\frac{2\omega\mu_{1}}{k_{c1}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}B_{m}\frac{d\Gamma_{m}[(t-\tau)]}{dt} \qquad (31b)$$

$$\Lambda^{z\varphi}(t-\tau)=\frac{2j\beta}{a\delta k_{c1}^{2}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}A_{m}\gamma_{m}(t-\tau)^{m-1}-\frac{2\omega\mu_{1}}{\delta k_{c1}}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}B_{m}\gamma_{m}(t-\tau)^{m-1} \qquad (31c)$$

και

$$S_{c}[\delta(t-\tau)]=-\frac{1}{\delta}\frac{dS_{a}[\delta(t-\tau)]}{dt}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[a_{n}^{J}J_{n}(k_{c1}a)-\frac{k_{c1}^{2}}{4\omega\varepsilon_{1}}\mathrm{H}_{n}(k_{c1}a)]J_{n}(k_{c1}a)-\sum_{m=1}^{k}\frac{A_{m}}{n^{m}}\right\}n\sin[n\delta(t-\tau)]$$

Γ. Μετασχηματισμός των $\left.\frac{\partial\mathrm{E}_{z}^{M}(\rho,\varphi;\rho',\varphi')}{\partial\rho'}\right|_{\rho=\alpha}$ και $\left.\frac{\partial^{2}H_{z}^{J}(\rho,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho\partial\rho'}\right|_{\rho=\rho'=\alpha}$

Ο μετασχηματισμός των $\frac{\partial\mathrm{E}_{z}^{M}(a,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho'}$ και

$\frac{\partial^{2}H_{z}^{J}(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau)}{\partial\rho\partial\rho'}=\frac{\partial^{2}H_{z}^{J}(\rho,\varphi;a,\varphi')}{\partial\rho\partial\rho'}$ σε μορφή πρόσφορη γίνεται με τον ίδιο τρόπο. Τα τελικά αποτελέσματα είναι

$$\frac{\partial\mathrm{E}_{z}^{M}(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau)}{\partial\rho'}=K^{\varphi z}(t-\tau)+\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{\varphi z}(t-\tau)\ln\left|(t-\tau)\right|] \qquad (32)$$

με

$$K^{\varphi z}(t-\tau)=a_0^M k_{c1}J_0'(k_{c1}a)J_0(k_{c1}a)-\frac{2j}{\delta}\sum_{m=2,4,\ldots}^{k}C_m\frac{dS_m[\delta(t-\tau)]}{dt}$$

$$-\frac{2j}{\delta}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}B_m\frac{d\Gamma_m[(t-\tau)]}{dt}+2j\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n^M k_{c1}J_n'(k_{c1}a)J_n(k_{c1}a)-n\sum_{m=1}^{k}\frac{C_m}{n^m}\right\}\sin[n\delta(t-\tau)]$$

$$\Lambda^{\varphi z}(t-\tau)=\frac{2j}{\delta}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}C_m\gamma_m(t-\tau)^{m-1}$$

$$\frac{\partial^2 H_z^J(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau)}{\partial\rho\partial\rho'}=k_{c1}^2[b_0^M J_0'(k_{c1}a)-\frac{k_{c1}^2}{4\omega\mu_1}\mathrm{H}_0'(k_{c1}a)]J_0'(k_{c1}a)+$$

$$+2k_{c1}^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[b_n^M J_n'(k_{c1}a)-\frac{k_{c1}^2}{4\omega\mu_1}\mathrm{H}_n'(k_{c1}a)\right]J_n'(k_{c1}a)-n^2\sum_{m=1}^{k}\frac{D_m}{n^m}\right\}\cos[n\delta(t-\tau)]-$$

$$-\frac{2k_{c1}^2}{\delta^2}\sum_{m=2,4,\ldots}^{k}D_m\frac{d^2S_m[\delta(t-\tau)]}{dt^2}-\frac{2k_{c1}^2}{\delta^2}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}D_m\frac{d^2\Gamma_m[(t-\tau)]}{dt^2}$$
$$-\frac{2k_{c1}^2}{\delta^2}\frac{d^2}{d\tau^2}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k}D_m\gamma_m(t-\tau)^{m-1}\ln\left|(t-\tau)\right| \qquad (33)$$

όπου

C_m και D_m $(m=1,2,\ldots)$ είναι οι συντελεστές των ασυμπτωτικών εκφράσεων

$$n(\frac{C_1}{n}+\frac{C_2}{n^2}+\frac{C_3}{n^3}+\cdots)$$

$$n^2(\frac{D_1}{n}+\frac{D_2}{n^2}+\frac{D_3}{n^3}+\cdots)$$

των παραστάσεων

$$a_n^M k_{c1}J_n'(k_{c1}a)J_n(k_{c1}a)$$

$$\left[b_n^M J_n'(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\mu_1} \mathrm{H}_n'(k_{c1}a) \right] J_n'(k_{c1}a)$$

αντίστοιχα.

Συνδυάζοντας τις (32) και (33) προκύπτει η έκφραση

$$\frac{\partial \mathrm{E}_\varphi^M(a,\theta+\delta t;\alpha,\theta+\delta\tau)}{\partial\rho'} = K^{\varphi\varphi}(t-\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2}[\Lambda^{\varphi\varphi}(t-\tau)\ln|(t-\tau)|] \tag{34}$$

με

$$K^{\varphi\varphi}(t-\tau) = \frac{2\beta}{ak_{c1}^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n^M k_{c1} J_n'(k_{c1}a) J_n(k_{c1}a) - n\sum_{m=1}^{k}\frac{C_m}{n^m}\right\}(n)\cos[n\delta(t-\tau)] -$$
$$-\frac{2\beta}{a\delta^2 k_{c1}^2}\sum_{m=2,4,\ldots}^{k} C_m \frac{d^2 S_m[\delta(t-\tau)]}{dt^2} - \frac{2\beta}{a\delta^2 k_{c1}^2}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k} B_m \frac{d^2\Gamma_m[(t-\tau)]}{dt^2} +$$
$$+ j\omega\mu_1[b_0^M J_0'(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\mu_1}\mathrm{H}_0'(k_{c1}a)]J_0'(k_{c1}a) +$$
$$+2j\omega\mu_1\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[b_n^M J_n'(k_{c1}a) - \frac{k_{c1}^2}{4\omega\mu_1}\mathrm{H}_n'(k_{c1}a)\right]J_n'(k_{c1}a) - n^2\sum_{m=1}^{k}\frac{D_m}{n^m}\right\}\cos[n\delta(t-\tau)] -$$
$$-\frac{2j\omega\mu_1}{\delta^2}\sum_{m=2,4,\ldots}^{k} D_m \frac{d^2 S_m[\delta(t-\tau)]}{dt^2} - \frac{2j\omega\mu_1}{\delta^2}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k} D_m \frac{d^2\Gamma_m[(t-\tau)]}{dt^2}$$

$$\Lambda^{\varphi\varphi}(t-\tau) = \frac{j\beta}{a\delta k_{c1}^2}\Lambda^{\varphi z}(t-\tau) - \frac{2j\omega\mu_1}{\delta^2}\frac{d^2}{d\tau^2}\sum_{m=1,3,\ldots}^{k} D_m \gamma_m (t-\tau)^{m-1}$$

2.8. Τελική μορφή του συστήματος των ολοκληρωτικών εξισώσεων

Με τη βοήθεια των (30b,30c,31b,31c)-(32,34) το σύστημα των (23) και (24) παίρνει τη μορφή

$$-E_z^{inc}(a,\theta+\delta\tau)=a\int_C J_z(\varphi)[K^{zz}(t-\tau)+\Lambda^{zz}(t-\tau)\ln|t-\tau|]d\varphi+$$

$$+a\int_C J_\varphi(\varphi)[K^{z\varphi}(t-\tau)+\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{z\varphi}(t-\tau)\ln|(t-\tau)|]]d\varphi \tag{35}$$

$$-E_\phi^{inc}(a,\varphi'=\theta+\delta\tau)=\frac{j\beta a}{k_{c1}^2}\frac{\partial}{\partial\phi'}\int_C[J_z(\varphi)[K^{zz}(t-\tau)+\Lambda^{zz}(t-\tau)\ln|t-\tau|]+$$

$$J_\varphi(\varphi)[K^{z\varphi}(t-\tau)+\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{z\varphi}(t-\tau)\ln|(t-\tau)|]]d\varphi+$$

$$-\frac{j\omega\mu_1 a}{k_{c1}^2}\int_C[J_z(\varphi)[K^{\varphi z}(t-\tau)+\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{\varphi z}(t-\tau)\ln|(t-\tau)|]\ ]+$$

$$J_\varphi(\varphi)[K^{\varphi\varphi}(t-\tau)+\frac{d^2}{d\tau^2}[\Lambda^{\varphi\varphi}(t-\tau)\ln|(t-\tau)|]]]d\varphi \tag{36}$$

2.9. Διακριτοποίηση των ολοκληρωτικών εξισώσεων

Για την αριθμητική επίλυση των ολοκληρωτικών εξισώσεων θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο Nyström. Τα άγνωστα ρεύματα θα αναζητηθούν υπό τη μορφή

$$J_z[\varphi(t)]=\frac{F_1(t)}{\sqrt{1-t^2}} \tag{37}$$

$$J_\varphi[\varphi(t)]=\sqrt{1-t^2}F_2(t) \tag{38}$$

όπου $t=\dfrac{\varphi-\theta}{\delta}$. Μέσω των παραγόντων $\sqrt{1-t^2}$ και $1/\sqrt{1-t^2}$ οι συνθήκες των άκρων στην αγώγιμη ταινία λαμβάνονται πλήρως υπόψη.

Στις (35)-(36) απαντώνται ολοκληρώματα της μορφής

$$I_a(t)=\int_{-1}^{1}f(t,\tau)\frac{F_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau \tag{39}$$

$$I_b(t)=\int_{-1}^{1}f(t,\tau)\sqrt{1-\tau^2}F_2(\tau)d\tau \tag{40}$$

$$I_c(t) = \int_{-1}^{1} f(t,\tau)\frac{F_1(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\ln|t-\tau|\,d\tau \tag{41}$$

$$I_d(t) = \int_{-1}^{1} f(t,\tau)\sqrt{1-\tau^2}\,F_2(\tau)\ln|t-\tau|\,d\tau \tag{42}$$

όπου $f(t,\tau)$ είναι ομαλή συνάρτηση των ορισμάτων της. Απαντώνται επίσης η πρώτη παράγωγος των $I_c(t)$ και $I_d(t)$ καθώς και η δεύτερη παράγωγος της $I_d(t)$.

Ο υπολογισμός των $I_a(t)$ και $I_b(t)$ μπορεί να γίνει αποτελεσματικά με τη μέθοδο της αριθμητικής ολοκλήρωσης Gauss-Chebyshev [4]:

$$I_a(t) = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{L} F_1(t_n)f(t,t_n) \tag{43}$$

$$I_b(t) = \frac{\pi}{L+1}\sum_{n=1}^{L}(1-\chi_n^2)F_2(\chi_n)f(t,\chi_n) \tag{44}$$

όπου

$$\mathrm{t}_n = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2L} \tag{45}$$

και

$$\chi_n = \cos\frac{n\pi}{L+1} \tag{46}$$

Ο ακέραιος L επιλέγεται όσο μεγάλος χρειάζεται ώστε να εξασφαλιστεί η απαιτούμενη ακρίβεια των υπολογισμών.

Τα ολοκληρώματα $I_c(t)$ και $I_d(t)$ είναι ιδιόμορφα και ο υπολογισμός τους επεξηγείται στην [8].

Μετά τον αριθμητικό υπολογισμό των εμπλεκομένων ολοκληρωμάτων, αντικαθιστούμε τις εκφράσεις τους στις (35)-(36) και εν συνεχεία αντικαθιστούμε την μεταβλητή t διαδοχικά στην μεν (35) με $t=t_m$ στη δε (36) με $t=\chi_m$, m=1,2,…,L

Προκύπτει έτσι το 2Lx2L γραμμικό αλγεβρικό σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{n=1}^{L}[F_1(t_n)A_{mn} + F_2(\chi_n)B_{mn}] = -E_z^{exc}(a,\theta+\delta t_m) \tag{47}$$

$$\sum_{n=1}^{L}[F_1(t_n)C_{mn} + F_2(\chi_n)D_{mn}] = -\frac{k_{c1}^2}{\delta}E_\varphi^{exc}(a,\theta+\delta\chi_m) \tag{48}$$

όπου

$$A_{mn} = \frac{\alpha\delta\pi}{L}K^{zz}(t_n-t_m) + \frac{\alpha\delta}{L}\Lambda^{zz}(t_n-t_m)\sigma(t_n,t_m) \tag{49}$$

$$B_{mn} = \frac{\alpha\delta\pi}{L+1}(1-x_n^2)K^{z\varphi}(x_n-t_m) + \frac{\alpha\delta}{L+1}(1-x_n^2)\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{z\varphi}(x_n-t)\sigma(x_n,t)]\Big|_{t=t_m} \tag{50}$$

$$C_{mn} = \frac{j\beta\pi}{L}Q(t_n-t_m) + \frac{j\beta}{L}\frac{d}{d\tau}[\Phi(t_n-\tau)\sigma(t_n,t)]\Big|_{t=t_m} - \frac{j\omega\mu_1 a\pi}{L}K^{\varphi z}(t_n-t_m) -$$
$$-\frac{j\omega\mu_1 a}{L}\frac{d}{d\tau}[\Lambda^{\varphi z}(t_n-t)\sigma(t_n,t)]\Big|_{t=t_m} \tag{51}$$

$$D_{mn} = \frac{j\beta\pi}{L+1}(1-x_n^2)W(x_n-\tau_m) + \frac{j\beta}{L+1}(1-x_n^2)\frac{d^2}{d\tau^2}[Z(x_n-t)\delta(x_n,t)]\Big|_{t=t_m} - \frac{j\omega\mu_1 a\pi}{L+1}(1-x_n^2)K^{\varphi\varphi}(x_n-t_m) -$$
$$-\frac{j\omega\mu_1 a}{L+1}(1-x_n^2)\frac{d^2}{d\tau^2}[\Lambda^{\varphi\varphi}(x_n-t)\delta(x_n,t)]\Big|_{t=t_m} \tag{52}$$

Οι εκφράσεις των συναρτήσεων $\sigma(t,\tau)$ και $\delta(t,\tau)$ δίνονται στο Παράρτημα Β.

Συναρτήσει των $\{F_1(t_n\},F_2(\chi_n)\}$ τα άγνωστα ρεύματα μπορούν να βρεθούν σε οποιαδήποτε θέση από τους τύπους παρεμβολής

$$J_z[t] \cong \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sum_{N=0}^{L-1}\frac{2-\delta_{N0}}{L}\sum_{n=1}^{L}F_1(t_n)T_N(t_n)T_N(t) \tag{53}$$

$$J_\varphi[t] \cong \sqrt{1-t^2}\sum_{N=0}^{L-1}\frac{2}{L+1}\sum_{n=1}^{L}(1-x_n^2)F_2(x_n)U_N(x_n)U_N(t) \tag{54}$$

όπου $T_N(t)$ και $U_N(t)$ είναι τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου και δευτέρου είδους, αντίστοιχα.

2.10. Υπολογισμός του πεδίου σκεδάσεως

Για την z-συνιστώσα του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, με αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Gauss-Chebyshev προκύπτει

$$E_z^{scat}(\rho',\varphi') = \frac{a\delta\pi}{L}\sum_{n=1}^{L} F_1(t_n)\,{}^{J}E_z(a,\theta+\delta t_n;\rho',\varphi') + \\ + \frac{a\delta\pi}{L+1}\sum_{n=1}^{L} F_2(x_n)(1-x_n^2)\,{}^{J}E_\varphi(a,\theta+\delta x_n;\rho',\varphi') \tag{55}$$

$$-H_z^{scat}(\rho',\varphi') = \frac{a\delta\pi}{L}\sum_{n=1}^{L} F_1(t_n)\,{}^{M}E_z(a,\theta+\delta t_n;\rho',\varphi') + \\ + \frac{a\delta\pi}{L+1}\sum_{n=1}^{L} F_2(x_n)(1-x_n^2)\,{}^{M}E_\varphi(a,\theta+\delta x_n;\rho',\varphi') \tag{56}$$

Οι υπόλοιπες συνιστώσες του σκεδαζόμενου πεδίου βρίσκονται από τις E_z^{scat} και τις H_z^{scat} με παραγώγιση.

2.11. Μακράν σκεδαζόμενο πεδίο

Για $k_0\rho' \gg 1$ οι z – συνιστώσες του μακράν σκεδαζόμενου πεδίου έχουν την μορφή $E_z^{scat} = \frac{e^{-jk_c\rho}}{\sqrt{\rho}} e_z(\varphi), \mathrm{H}_z^{scat} = \frac{e^{-jk_c\rho}}{\sqrt{\rho}} h_z(\varphi)$ όπου οι z-συνιστώσες βρίσκονται από τις (23),(24) αν στις εκφράσεις των ${}^{J}E_z$, ${}^{J}E_\varphi$, ${}^{M}\mathrm{H}_z$, ${}^{M}\mathrm{H}_\varphi$ οι Hankel αντικατασταθούν με τις ασυμπτωτικές τους εκφράσεις για μεγάλα ορίσματα. Οπότε

$$^{J}E_z = e^{-jk_{c0}\rho}\sqrt{\frac{2j}{\pi k_{c0}\rho}}\left(-\frac{k_{c0}^2}{4\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} j^n J_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{Jff} j^n H_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')}\right) \tag{57}$$

$$^{J}E_\varphi = e^{-jk_{c0}\rho}\sqrt{\frac{2j}{\pi k_{c0}\rho}}\left(-\frac{j\beta}{\alpha k_{c0}^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} jna_n^{Jff} j^n H_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} + \frac{j\omega\mu_0}{k_{c0}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_n^{Jff} j^n H_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')}\right) \tag{58}$$

$$^{M}\mathrm{H}_z = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_n^{Mff} j^n e^{-jk_{c0}\rho}\sqrt{\frac{2j}{\pi k_{c0}\rho}} H_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} \tag{59}$$

$$^{M}\mathrm{H}_\varphi = e^{-jk_{c0}\rho}\sqrt{\frac{2j}{\pi k_{c0}\rho}}\left(-\frac{j\beta}{\alpha k_{c0}^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} jna_n^{Mff} j^n H_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} + \frac{j\omega\mu_0}{k_{c0}}\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} b_n^{Mff} j^n H_n'(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')} - \right.$$
$$\left. -\frac{\beta}{4\omega\varepsilon_0 a}\sum_{n=-\infty}^{\infty} nj^n J_n(k_{c0}a)e^{jn(\varphi-\varphi')}\right) \tag{60}$$

2.12. Υπολογισμός της ενεργού διατομής σκέδασης

Η ενεργός διατομή σκέδασης (RCS) της διάταξης είναι μια πάρα πολύ σημαντική παράμετρος και ορίζεται ως

$$\sigma_t = \frac{P_{scat}}{\left|\vec{N}^{inc}\right|} = \frac{2k_0 Z_0}{\left|\vec{E}^{inc}\right|\left|\vec{k}_0^*\right|}P_{scat} = \frac{2Z_0\sin^2\theta_0}{\mathrm{E}_0^2 + \mathrm{Z}_0^2\mathrm{H}_0^2}P_{scat}$$

όπου $\vec{\mathrm{N}}^{inc} = \frac{1}{2}\vec{E}^{inc}\times\vec{H}^{inc} = \frac{1}{2k_0 Z_0}\vec{E}^{inc}\times\vec{k}_0^*\times\vec{E}^{*inc} = \frac{1}{2k_0 Z_0}\left|\vec{E}^{inc}\right|^2\vec{k}_0^*$, είναι το διάνυσμα Poynting του προσπίπτοντος κύματος και P_{scat} η σκεδαζόμενη ισχύς ανά μονάδα μήκους του άξονα z, (όπου και $\left|\vec{E}^{inc}\right|^2 = \frac{k_0^2(\mathrm{E}_0^2 + \mathrm{Z}_0^2\mathrm{H}_0^2)}{k_{c0}^2}, k_{c0}^2 = k_0^2\sin^2\theta_0$), που δίνεται από την σχέση:

$$P_{scat} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\iint_S \vec{E}^{scat} \bullet \vec{J}^*\right\} = -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_C \vec{E}^{scat}(\rho = a,\varphi) \bullet \vec{J}^*(\varphi) a d\varphi\right\} =$$

$$= -\frac{a}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_C \left[E_z^{scat}(\rho = a,\varphi)J_z^*(\varphi) + E_\varphi^{scat}(\rho = a,\varphi)J_\varphi^*(\varphi)\right] d\varphi\right\}$$

Όμως στην αγώγιμη ταινία ισχύει:

$$\begin{aligned} E_z^{scat}(\rho = a,\varphi) &= -E_z^{exc}(\rho = a,\varphi) \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,\varphi \in C \\ E_\varphi^{scat}(\rho = a,\varphi) &= -E_\varphi^{exc}(\rho = a,\varphi) \end{aligned}$$

Συνεπώς:

$$P_{scat} = \frac{a}{2}\mathrm{Re}\left\{\int_C \left[E_z^{exc}(\rho = a,\varphi)J_z^*(\varphi) + E_\varphi^{exc}(\rho = a,\varphi)J_\varphi^*(\varphi)\right] d\varphi\right\} =$$

$$= \frac{a\delta}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{N=0}^{L-1} a_N^* \int_{-1}^{1} \frac{E_z^{exc}(a,\theta+\delta t)}{\sqrt{1-t^2}} T_N^*(t) + \sum_{N=0}^{L-1} b_N^* \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\, E_\varphi^{exc}(a,\theta+\delta t) U_N^*(t)\right\} =$$

$$= \frac{a\delta}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{N=0}^{L-1} a_N^* \left(\sum_{n=1}^{L} \frac{\pi}{L} E_z^{exc}(a,\theta+\delta t_n) T_N^*(t_n)\right) + \sum_{N=0}^{L-1} b_N^* \left(\sum_{n=1}^{L} \frac{\pi}{L+1}(1-x_n^2) E_\varphi^{exc}(a,\theta+\delta x_n) U_N^*(x_n)\right)\right\}$$

Το τελικό αποτέλεσμα για την P_{scat} είναι

$$P_{scat} = \frac{a\delta}{2}\mathrm{Re}\left\{\sum_{N=0}^{L-1} a_N^* \tilde{a}_N + b_N^* \tilde{b}_N\right\}$$

$$a_N = \frac{\hat{\varepsilon}_N}{L}\sum_{n=1}^{L} F_1(t_n)T_N(t_n)$$

$$b_N = \frac{2}{L+1}\sum_{n=1}^{L}(1-x_n^2)F_2(x_n)U_N(x_n),$$

$$\tilde{a}_N = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{L} E_z^{exc}(a,\theta+\delta t_n)T_N^*(t_n)$$

$$\tilde{b}_N = \frac{\pi}{L+1}\sum_{n=1}^{L} E_\varphi^{exc}(a,\theta+\delta x_n)U_N^*(x_n)$$

Στη συνέχεια θα μας απασχολήσει το πλάτος σκέδασης της διάταξης. Το πλάτος σκέδασης ορίζεται ως η επιφάνεια η οποία απορροφά ισχύ, όταν σκεδαστεί ισοτροπικά ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα και παράγει στον δέκτη πυκνότητα ισχύος η οποία είναι ίση με την πυκνότητα ισχύος που σκεδάστηκε από τον πραγματικό στόχο. Για ένα δισδιάστατο στόχο η παράμετρος σκέδασης αναφέρεται ως πλάτος σκέδασης (SW) ή διαφορετικά ως ενεργός διατομή σκέδασης ανά μονάδα μήκους. Ισχύει:

$$\sigma_{2-D} = \lim_{\rho\to\infty}\left[2\pi\rho\frac{\left|\vec{E}^{scat}\right|^2}{\left|\vec{E}^{inc}\right|^2}\right]$$

όπου ρ' είναι το σημείο παρατήρησης από τον στόχο, $\left|\vec{E}^{scat}\right|^2, \left|\vec{E}^{inc}\right|^2$ το τετράγωνο των μέτρων του σκεδαζόμενου και του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου.

Το πλάτος σκέδασης (SW) έχει την παρακάτω μορφή:

$$\sigma_{2-D}(\theta,\delta,\varphi') = \left[\frac{k_{c0}^4 \left| \vec{E}_z^{scat} \right|^2 + \omega^2 \mu_0^2 \left| \frac{\partial \ \mathrm{H}_z^{scat}}{\partial \rho'} \right|^2 + \beta^2 \left| \frac{\partial \ \mathrm{E}_z^{scat}}{\partial \rho'} \right|^2}{E_0^2 + Z_0^2 H_0^2} \right] \frac{4}{k_{c0}^5} \sin^2 \theta_0$$

Παρατηρούμε ότι το πλάτος σκέδασης της διάταξης είναι συνάρτηση της γωνίας θ της διάταξης, του ανοίγματος της μικροταινίας το οποίο εξαρτάται από την γωνία δ καθώς και από την γωνία παρατήρησης.

Κεφάλαιο 3. Αριθμητικά αποτελέσματα & Έλεγχοι ορθότητας

3.1. Σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου

Ο υπολογισμός των στοιχείων του πίνακα, (A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}), που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικός. Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε τη σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου ως προς την τάξη 2Lx2L του συστήματος. Αυτό γίνεται στον Πίνακα I, στον Πίνακα II και στον Πίνακα III, όπου δίνουμε το μέτρο της κανονικοποιημένης πυκνότητας του ρεύματος $|J_z(\varphi)|Z_0$ και $|J_\varphi(\varphi)|$ για διάφορες τιμές του L στην περίπτωση του TM^z, TE^z προσπίπτοντος κύματος αντίστοιχα καθώς και για πλάγια πρόσπτωση. Οι τιμές των παραμέτρων που χρησιμοποιήθηκαν σημειώνονται στους πίνακες. Η ταχύτητα σύγκλισης φαίνεται σαφέστερα στα Σχ.1 και Σχ.2, στα οποία απεικονίζεται το σχετικό σφάλμα, $\left|\frac{(J_z - J_z^{asym})}{J_z^{asym}}\right|$ και $\left|\frac{(J_\varphi - J_\varphi^{asym})}{J_\varphi^{asym}}\right|$ ως συνάρτηση του L. J_z^{asym} και J_φ^{asym} είναι η τιμή στην οποία «κάθεται» η J_z και J_φ για αρκετά μεγάλα L. Η τιμή αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως η ακριβής τιμή. Τα σχήματα αποκαλύπτουν ότι η σύγκλιση είναι εκθετική.

Τα τελικά αποτελέσματα του Πίνακα I συμφωνούν στα 5 πρώτα σημαντικά ψηφία με αυτά της [7], πράγμα που δείχνει ότι η σύγκλιση της μεθόδου μας είναι ταχεία και ευσταθής.

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι: Σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου. TM^z περίπτωση:

$$\delta = 30^o, 60^o, 90^o, 120^o,\ \theta=180^o,\ k_0 a = \pi,\ \varepsilon_r = 2\ ,\ \varphi_0 = 45^o, E_0 = 1, H_0 = 0$$

L	δ=30°	δ=60°	δ=90°	δ=120°
4	0.9157602981378868	2.4907374779871714	2.620841341766429	0.27056242233803502
6	0.8731765376430752	2.4041159161597134	2.233395966131694	1.9354837827533806
10	0.8686014985792245	2.3105875500085644	3.1036841482932203	2.8076080507889047
20	0.8686045968086047	2.3104011649402576	3.1173437831801643	2.575879591294986
40	0.8686047045780965	2.3104042313616744	3.117476922009599	2.5675354916596342
80	0.8686047108410233	2.3104044029341977	3.1174772456089412	2.5675352059349894
120	0.8686047111746207	2.310404411413647	3.117477261817147	2.567535186961739
160	0.8686047112621685	2.310404413296997	3.1174772648671145	2.567535183664454
200	0.8686047112728699	2.310404413605857	3.117477265632634	2.5675351828789665
[7]	0.868612	2.310426	3.117531	2.567470

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ: Σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου. TE^z περίπτωση:

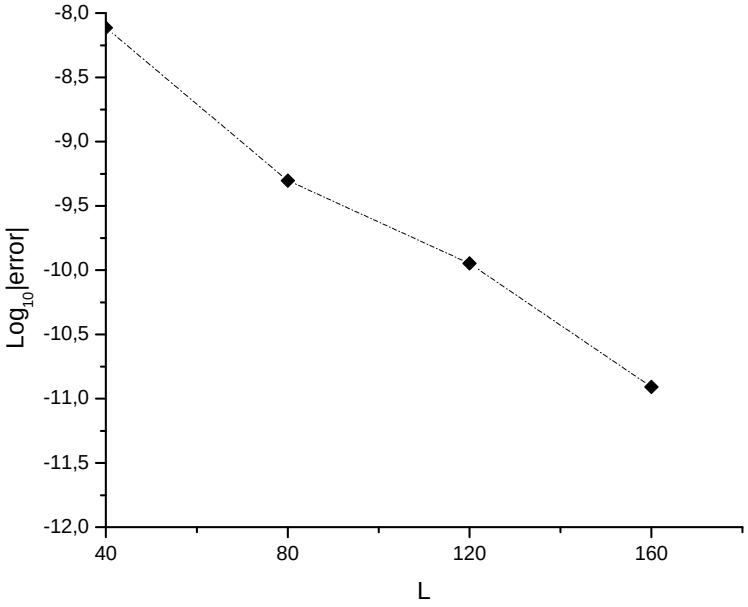
$$\delta = 30^o, 60^o,\ \theta=180^o,\ k_0 a = \pi,\ \varepsilon_r = 2\ ,\ \varphi_0 = 45^o, E_0 = 0, H_0 = 1$$

L	δ=30°	δ=60°
4	2.9476321807653214	2.531861291942198
6	2.760999901283202	4.056709343411603
10	2.7625949560601195	3.7925380488508322
20	2.763976932310134	3.765693313246386
40	2.7643451035699997	3.7640032253555518
80	2.764441380670071	3.763560983950377
120	2.7644596313580942	3.763477134171125
160	2.7644660764555056	3.7634475218852277
200	2.764469074002218	3.763433749281198
240	2.764470707232635	3.7634262451334055

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙΙ: Σύγκλιση της αριθμητικής μεθόδου. Πλάγια πρόσπτωση:

$$\delta = 10^o, 30^o,\ \theta=180^o,\ k_0 a = \pi,\ \varepsilon_r = 2\ ,\ \theta_0 = \varphi_0 = 45^o, E_0 = H_0 = 1$$

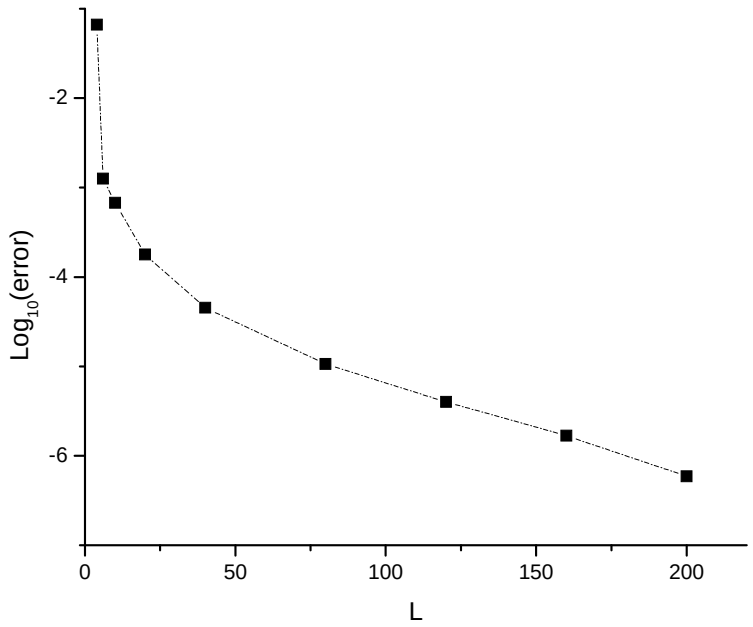
L	δ=10°		δ=30°	
20	3.4611695243425338	0.0030745401800418405	2.9177697028164435	0.007635724454241035
40	3.461175019900446	0.0030746057279609014	2.9183607383910117	0.007636470551000934
80	3.461176472899275	0.0030746230376081977	2.9185163756722505	0.007636666481937704
120	3.4611767489903924	0.00307462632679314 8	2.9185459405529772	0.007636703659625536
160	3.461176846623404	0.0030746274889434 81	2.9185563870166664	0.007636716791198103
200	3.4611768920126775	0.0030746280295528 38	2.9185612467994253	0.007636722898969213
240	3.461176916715138	0.0030746283241355654	2.91856389493999	0.007636726226924999



Σχ.1: Σχετικό σφάλμα συναρτήσει της τάξης του συστήματος.

TM^z περίπτωση:

$$\delta = 30^o,\ \theta=180^o,\ k_0 a = \pi,\ \varepsilon_r = 2\ ,\ \varphi_0 = 45^o, E_0 = 1, H_0 = 0$$



Σχ.2: Σχετικό σφάλμα συναρτήσει της τάξης του συστήματος.

TE^z περίπτωση:

$\delta = 30^o$, $\theta=180^o$, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 2$, $\varphi_0 = 45^o, E_0 = 0, H_0 = 1$

3.2. Συγκρίσεις και έλεγχοι ορθότητας

Για τον έλεγχο της ορθότητας της μεθόδου μας θα πραγματοποιήσουμε συγκρίσεις με αποτελέσματα προηγούμενων εργασιών σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις. Πλήθος αποτελεσμάτων και συγκρίσεων παρουσιάζουμε παρακάτω.

Για την TM^z περίπτωση ο Πίνακας IV δίνει το πλάτος του εγγύς ηλεκτρικού πεδίου για αυξανόμενα L στο σημείο (α,0), όταν $k_0 a = 1, \delta = 175^o, \varepsilon_r = 1, E_0 = 1, \varphi_0 = 0^o$. Τα τελικά αποτελέσματα βρίσκονται σε καλή συμφωνία με αυτά των [5], [7] και με αυτά της [9] στα 14 πρώτα σημαντικά ψηφία.

ΠΙΝΑΚΑΣ IV: $|E_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. TM^z περίπτωση**:**

$$\delta = 175^o,\ \theta=180^o,\ k_0 a = 1,\ \varepsilon_r = 1,\ \varphi_0 = 0^o, E_0 = 1, H_0 = 0$$

L	$\left\|E_z^{total}(a,0)\right\|$
20	0.10317921940517406
40	0.1031808358155157
60	0.10318083584303865
80	0.10318083584303464
120	0.10318083584303443
[7]	0.1031810
[5]	0.1027
[9]	0.103180835843027

Το πλάτος του εγγύς σκεδαζόμενου πεδίου για $k_0 a = 2$ δίνεται στον Πίνακα V (TM^z περίπτωση) όταν η σχισμή έχει πολύ μικρό πλάτος, $\delta = 178.75^o$ και στην δυσμενή αυτή περίπτωση η σύγκλιση είναι ταχεία με τα τελικά αποτελέσματα να βρίσκονται σε καλή συμφωνία με αυτά των [5], [7] και σε άριστη συμφωνία με την [9].

ΠΙΝΑΚΑΣ V: $|E_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. TM^z περίπτωση**:**

$$\delta = 178.75^o,\ \theta=180^o,\ k_0 a = 2,\ \varepsilon_r = 1\ ,\ \varphi_0 = 0^o, E_0 = 1, H_0 = 0$$

L	$\left\|E_z^{total}(a,0)\right\|$
20	0.04651818926131277
40	0.0469747949011723
60	0.04697555964017872
80	0.04697556276288426
120	0.046975562778522786
[7]	0.0469761
[5]	0.0466
[9]	0.0469755627778

Τελική τιμή του πλάτους του εγγύς σκεδαζόμενου πεδίου για διαφορετικές τιμές των δ και k_0a δείχνουμε στον Πίνακα VI και συγκρίνουμε με αντίστοιχα αποτελέσματα από την [7]. Η συμφωνία είναι και πάλι πολύ καλή (7 σημαντικά ψηφία).

ΠΙΝΑΚΑΣ VI: $|E_z|$ για διάφορες τιμές των k_0a και δ. TM^z περίπτωση**:**

$$\theta=180^o,\ \ \varepsilon_r = 1\ ,\ \varphi_0 = 0^o, E_0 = 1, H_0 = 0$$

δ(μοίρες)	k_0a (* L=120)	$\left\|E_z^{total}(a,0)\right\|$	[7]
178.75^o	2	0.046975562778522786	0.0469761
175°	1	0.10318083584303443	0.1031810
175°	π/2	0.15343615013307652	0.1534368
170°	1	0.20927314514344014	0.2092734
165°	1	0.31973020681023007	0.3197305
150°	1	0.6806868283728817	0.6806870

Για την TE^z περίπτωση ο Πίνακας VII και ο Πίνακας VIII δίνει το πλάτος του εγγύς ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου για αυξανόμενα L στο σημείο (α,0), όταν $k_0 a = 1.841184$ και $k_0 a = 5.331440, \delta = 175^o, \varepsilon_r = 1, \mathrm{H}_0 = 1, \mathrm{E}_0 = 0, \varphi_0 = 0^o$. Τα τελικά αποτελέσματα βρίσκονται σε καλή συμφωνία με αυτά των [5], [7] και με αυτά της [9] στα 11 πρώτα σημαντικά ψηφία.

ΠΙΝΑΚΑΣ VII: $\left|E_\varphi / \mathrm{Z}_0\right|, \left|\mathrm{H}_z\right|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. TE^z περίπτωση**:** $\delta = 175^o$, θ=180°, $\mathrm{k}_0 a = 1.841184$, $\varepsilon_r = 1$, $\varphi_0 = 0^o, \mathrm{E}_0 = 0, \mathrm{H}_0 = 1$

L	$\left\|E_\varphi^{total}(a,0) / \mathrm{Z}_0\right\|$	$\left\|H_z^{total}(a,0)\right\|$
20	0.04002770973952683	1.8674242883325138
40	0.03954444497711704	1.8674138559490037
60	0.03954442782877137	1.8674138014064152
80	0.03954442687762803	1.8674137984208794
120	0.03954442673554115	1.8674137979795378
[7]	0.0395444	1.8673
[5]	0.039	1.866
[9]	0.03954442672498	1.867413797954

ΠΙΝΑΚΑΣ VIII: $\left|E_{\varphi} / Z_0\right|, \left|H_z\right|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. TE^z περίπτωση**:** $\delta = 175^o$, $\theta=180^o$, $k_0 a = 5.331440$, $\varepsilon_r = 1$, $\varphi_0 = 0^o, E_0 = 0, H_0 = 1$

L	$\left\|E_{\varphi}^{total}(a,0) / Z_0\right\|$	$\left\|H_z^{total}(a,0)\right\|$
20	0.013908731247823426	2.006332056495765
40	0.04155068243692488	1.9547959623000897
60	0.041541959131905844	1.9547762785260816
80	0.04154155056320624	1.9547752238346994
120	0.0415414941918008	1.9547750706292895
160	0.041541490389296276	1.954775061308343
[7]	0.041541	1.9547
[5]	0.042	1.955
[9]	0.04154149038500	1.954775061516

Τελικές τιμές του πλάτους του εγγύς σκεδαζόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου για διαφορετικές τιμές του k_0a δείχνουμε στον Πίνακα IX και συγκρίνουμε με αντίστοιχα αποτελέσματα από την [7]. Η συμφωνία είναι και πάλι πολύ καλή (6 σημαντικά ψηφία).

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΧ: $\left|E_{\varphi} / Z_0\right|, \left|H_z\right|$ για διάφορες τιμές του k_0a.

TE^z περίπτωση: $\delta = 175^o$, θ=180°, $\varepsilon_r = 1$, $\varphi_0 = 0^o, E_0 = 0, H_0 = 1$

k_0a L=120	$\left\|E_{\varphi}^{total}(a,0) / Z_0\right\|$	$\left\|H_z^{total}(a,0)\right\|$	$\left\|E_{\varphi}^{total}(a,0) / Z_0\right\|$ [7]	$\left\|H_z^{total}(a,0)\right\|$ [7]
1.841184	0.03954442673554115	1.8674137979795378	0.039544508	1.86733514
3.054237	0.06508371142931396	1.9448030081466723	0.065082385	1.920631344
3.831706	0.04041849499450491	1.9441354928507437	0.040418109	1.94417604
4.201190	0.09779941075607863	1.9541623209753467	0.097798856	1.953126017
5.317550	0.1320320004379347	1.983236019831696	0.132033470	1.981365958
5.331440	0.0415414941918008	1.9547750706292895	0.041540962	1.954661368

Για την περίπτωση της πλάγιας πρόσπτωσης ο Πίνακας Χ δίνει το πλάτος του εγγύς ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου για αυξανόμενα L στο σημείο (α,0), όταν $k_0a = 1, \delta = 120^o, \varepsilon_r = 1, H_0 = E_0 = 1, \varphi_0 = \theta_0 = 45^o$.

ΠΙΝΑΚΑΣ Χ: $\left|E_z\right|, \left|E_{\varphi} / Z_0\right|, \left|H_z\right|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος.

Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 120^o$, θ=180°, $k_0a = 1$, $\varepsilon_r = 1$, $\varphi_0 = \theta_0 = 45^o, E_0 = H_0 = 1$

L	$\left\|E_z^{total}(a,0)\right\|$	$\left\|E_{\varphi}^{total}(a,0) / Z_0\right\|$	$\left\|H_z^{total}(a,0)\right\|$
20	0.835898009965664	3.1313514922259325	1.5612740864807328
40	0.8358980099472935	3.131351482695118	1.5612740936794856
60	0.8358980099475508	3.1313514826010667	1.5612740937417573
80	0.8358980099526399	3.131351482589201	1.5612740937492873
120	0.8358980099493122	3.1313514825926974	1.5612740937457623

Παρόμοια μελετούμε στον Πίνακα XI και στον Πίνακα XII το πλάτος του εγγύς σκεδαζόμενου ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου για αυξανόμενα L κάνοντας χρήση διηλεκτρικού φορτίου όταν $k_0 a = 1, \delta = 10^o, 90^o, \varepsilon_r = 2, \mathrm{H}_0 = \mathrm{E}_0 = 1, \varphi_0 = \theta_0 = 45^o$

ΠΙΝΑΚΑΣ XI: $|\mathrm{E}_z|, |E_\varphi / \mathrm{Z}_0|, |\mathrm{H}_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος.

Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 10^o$, θ=180°, $\mathrm{k}_0 a = 1$, $\varepsilon_r = 2$, $\varphi_0 = \theta_0 = 45^o, \mathrm{E}_0 = \mathrm{H}_0 = 1$

L	$\lvert E_z^{total}(a,0)\rvert$	$\lvert E_\varphi^{total}(a,0)/\mathrm{Z}_0\rvert$	$\lvert H_z^{total}(a,0)\rvert$
40	103.4182017837086	0.9113428847824827	1.1131819145394377
60	103.41820172754274	0.9113424237196475	1.1131822022439575
80	103.4182017077421	0.9113422593393533	1.1131823048056348
120	103.41820169335976	0.9113421405075531	1.1131823789425146
160	103.41820168814665	0.9113420985234304	1.1131824051340304

ΠΙΝΑΚΑΣ XII: $|\mathrm{E}_z|, |E_\varphi / \mathrm{Z}_0|, |\mathrm{H}_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος.

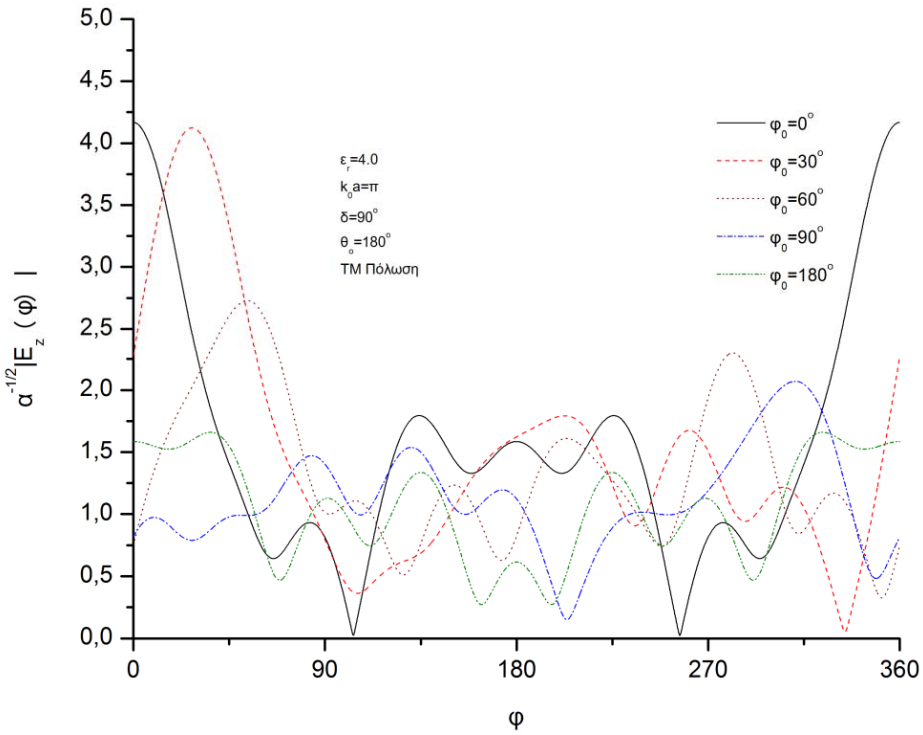
Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $\mathrm{k}_0 a = 1$, $\varepsilon_r = 2$, $\varphi_0 = \theta_0 = 45^o, \mathrm{E}_0 = \mathrm{H}_0 = 1$

L	$\lvert E_z^{total}(a,0)\rvert$	$\lvert E_\varphi^{total}(a,0)/\mathrm{Z}_0\rvert$	$\lvert H_z^{total}(a,0)\rvert$
20	121.7270169	2.0593940	0.5537075
40	121.7243415	2.0551253	0.5577425
60	121.7238230	2.0542952	0.5585241
80	121.7236382	2.0539993	0.5588024
120	121.7235046	2.0537855	0.5590036
140	121.7234760	2.0537397	0.5590466
160	121.7234574	2.0537099	0.5590746

3.3. Άλλα αριθμητικά αποτελέσματα

Τα σχήματα και οι πίνακες που ακολουθούν μελετούν το διάγραμμα ακτινοβολίας του μακράν σκεδαζόμενου πεδίου, το πλάτος του μακράν ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου, την ενεργό διατομή σκέδασης και το πλάτος σκέδασης για τις τρείς περιπτώσεις, TM^z, TE^z και πλάγια πρόσπτωση.

Για την TM^z περίπτωση το διάγραμμα ακτινοβολίας της διατάξεως φαίνεται στο Σχ.1. Στον Πίνακα XIII δίνουμε το πλάτος του μακράν ηλεκτρικού πεδίου με διηλεκτρικό φορτίο και με αέρα. Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με την [7].



Σχ.1: Το μακράν σκεδαζόμενο πεδίο για διάφορες τιμές της γωνίας φ_0

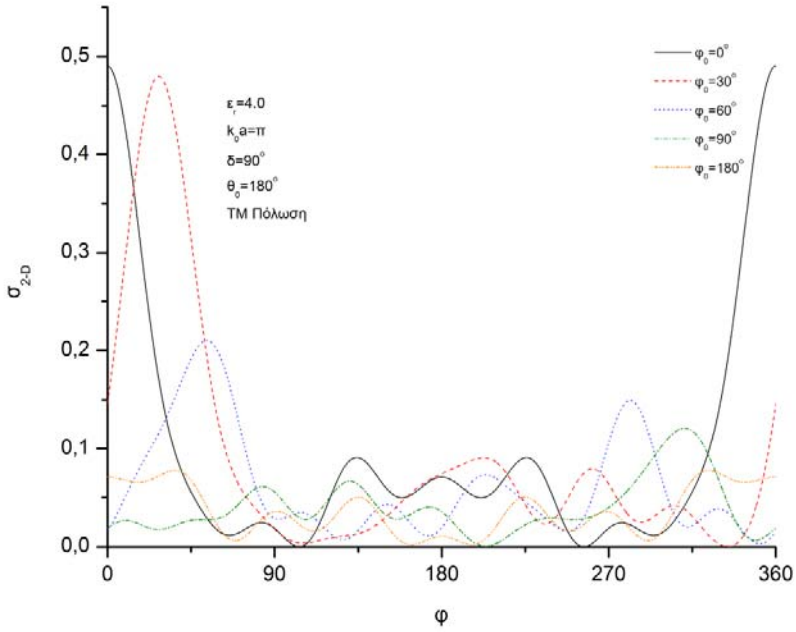
TM^z περίπτωση: $\delta = 90^o$, $\theta=180^o$, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 1, H_0 = 0$

ΠΙΝΑΚΑΣ XIII: $|E_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. TM^z

περίπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varphi_0 = 0^o, E_0 = 1, H_0 = 0$

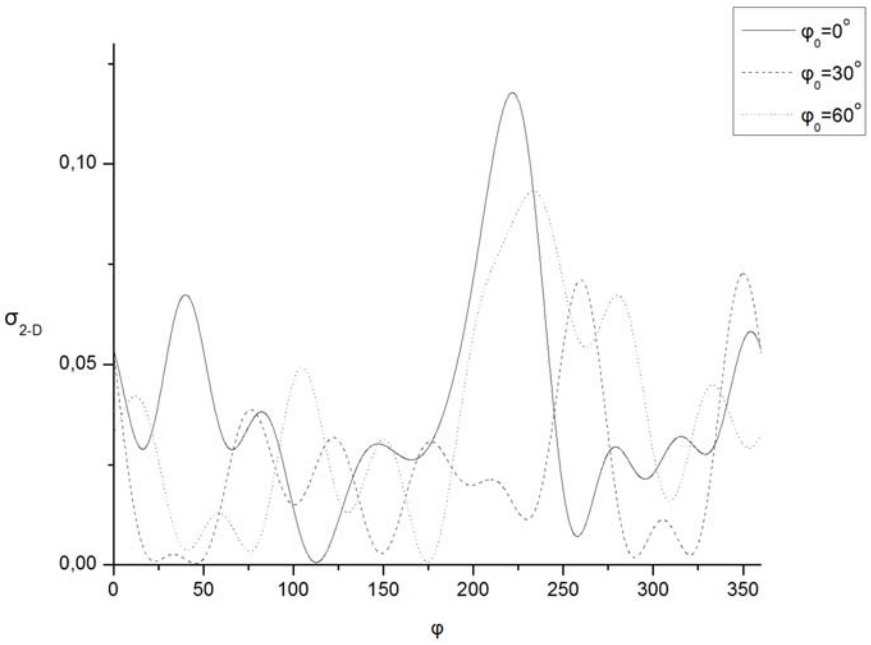
L	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$ για ε_r=4	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$ για ε_r=1
10	18.922734301254632	7.419592137626975
20	18.63796339628238	7.420352775683134
40	18.63696854651786	7.420352776846563
60	18.636918623285187	7.420352776845459
80	18.636910328580104	7.420352776845022
100	18.636908072893483	7.420352776845726
120	18.636907264285213	7.420352776845006
140	18.636906918201824	
160	18.636906750080595	
200	18.63690660993646	

Ανάλογα αποτελέσματα για τον συντελεστή σκέδασης δείχνονται στα παρακάτω σχήματα για διάφορους συνδυασμούς των γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης. Τέλος στο Σχ.6 δείχνουμε την μεταβολή του πλάτους σκέδασης, σ_t με την φ.



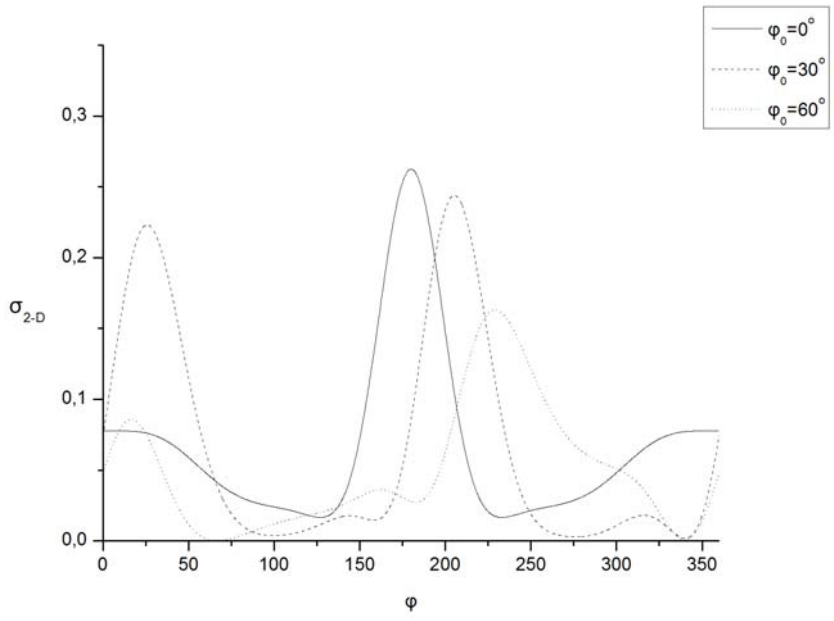
Σχ.2: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TM^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 1, H_0 = 0$



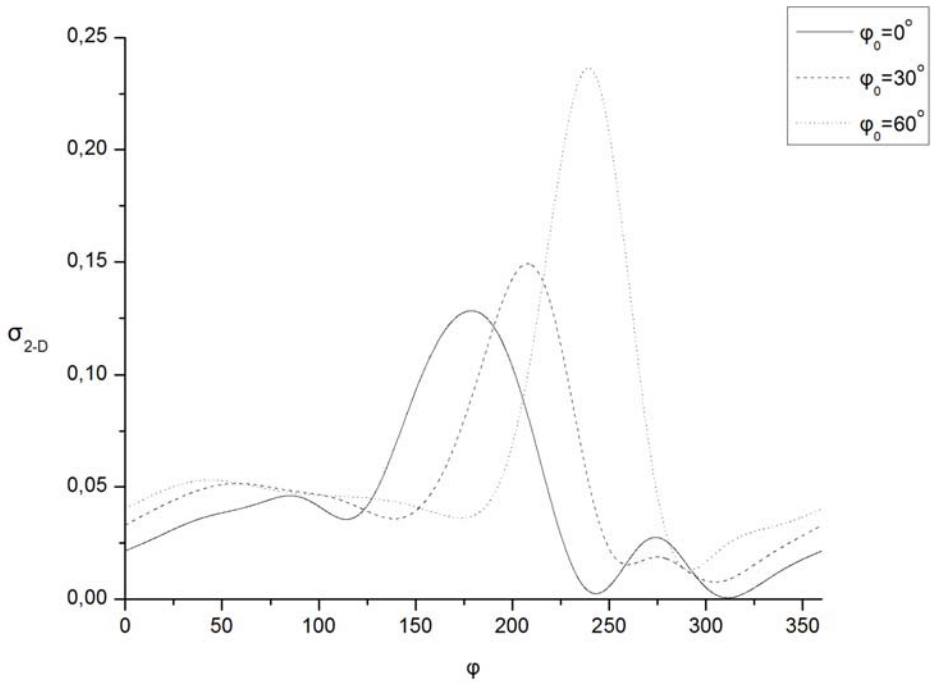
Σχ.3: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TM^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=90°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 1, H_0 = 0$



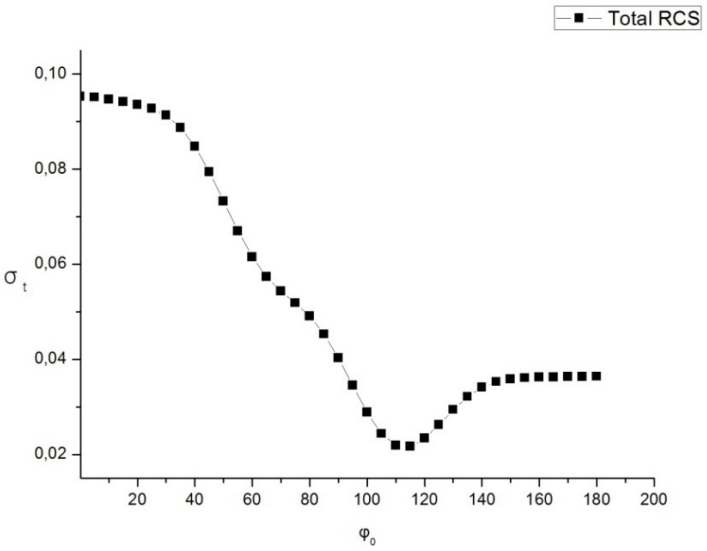
Σχ.4: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TM^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 1$, $E_0 = 1, H_0 = 0$



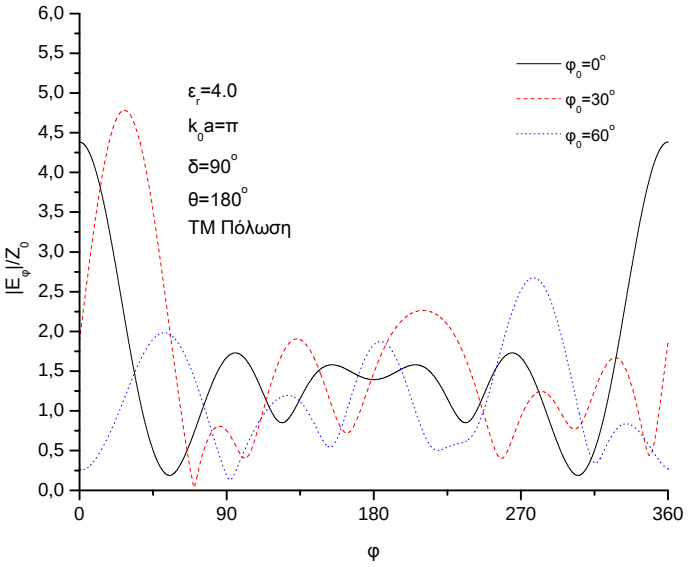
Σχ.5: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TM^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=90°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 1, H_0 = 0$



Σχ. 6: Η συνολική διατομή σκέδασης συναρτήσει της γωνίας φ_0. TM^z περίπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 1, H_0 = 0$

Για την TE^z περίπτωση το διάγραμμα ακτινοβολίας της διατάξεως φαίνεται στο Σχ.7. Στον Πίνακα XIV δίνουμε το πλάτος του μακράν μαγνητικού πεδίου με διηλεκτρικό φορτίο και με αέρα. Τα αποτελέσματα βρίσκονται σε πλήρη συμφωνία με την [7].



Σχ.7: Το μακράν σκεδαζόμενο πεδίο για διάφορες τιμές της γωνίας φ_0

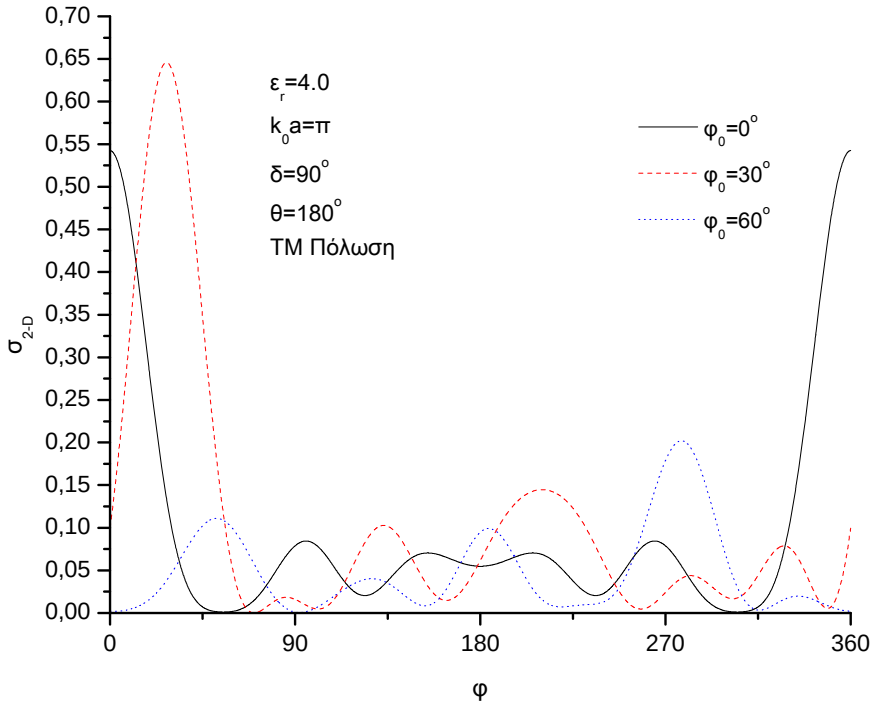
TE^z περίπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 0, H_0 = 1$

ΠΙΝΑΚΑΣ XIV: $\left|H_z\right|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. TE^z

περίπτωση**:** $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varphi_0 = 0^o, E_0 = 0, H_0 = 1^o$

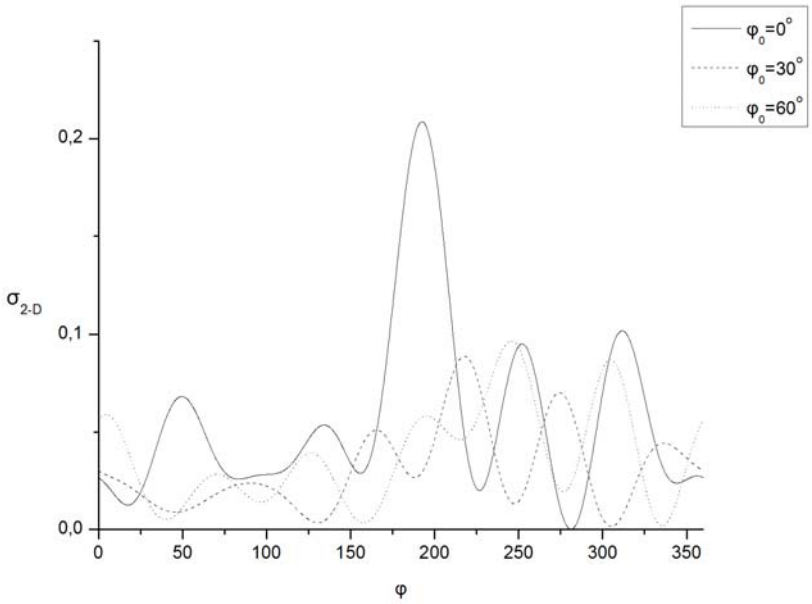
L	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$ για ε_r=4	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$ για ε_r=1
10	21.446297353679103	11.815794617591859
20	19.60299628487522	11.947980218939527
40	19.4540410950919	11.947978559802657
60	19.427504375370855	11.94797854704951
80	19.41820686130019	11.9479785462683
100	19.413889228002873	11.947978546264542
120	19.411536881268255	
140	19.410115045361422	
160	19.409190401403883	
200	19.408100659040496	
240	19.40750732734885	
280	19.407148964376884	
320	19.406916076093463	

Ανάλογα αποτελέσματα για τον συντελεστή σκέδασης δείχνονται στα παρακάτω σχήματα για διάφορους συνδυασμούς των γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης. Τέλος στο Σχ.12 δείχνουμε την μεταβολή του πλάτους σκέδασης, σ_t με την φ.



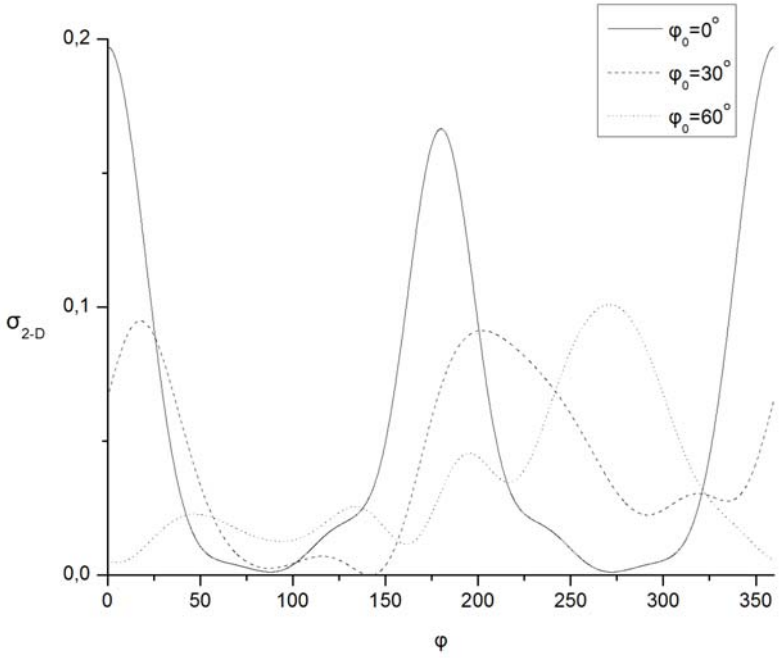
Σχ.8: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TE^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 0, H_0 = 1$



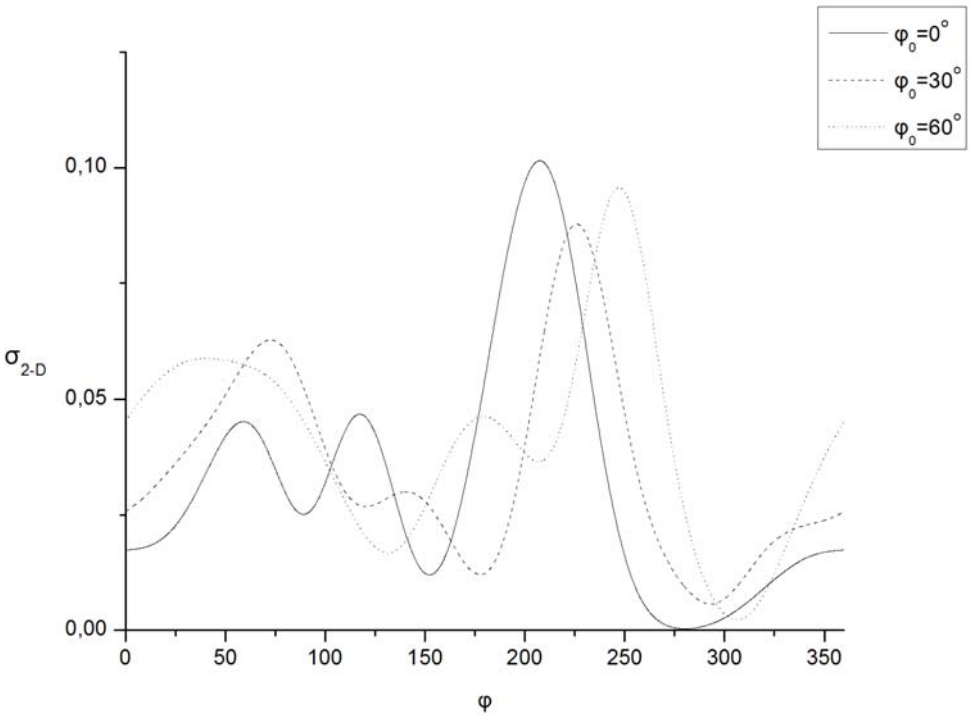
Σχ.9: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TE^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=90°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 0, H_0 = 1$



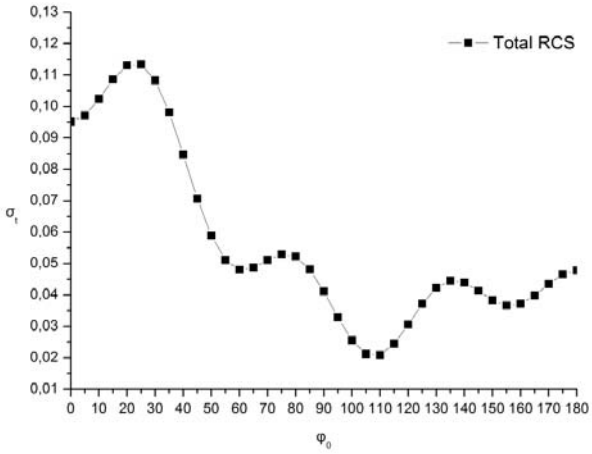
Σχ.10: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TE^z περίπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 1$, $E_0 = 0, H_0 = 1$



Σχ.11: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. TE^z περίπτωση:

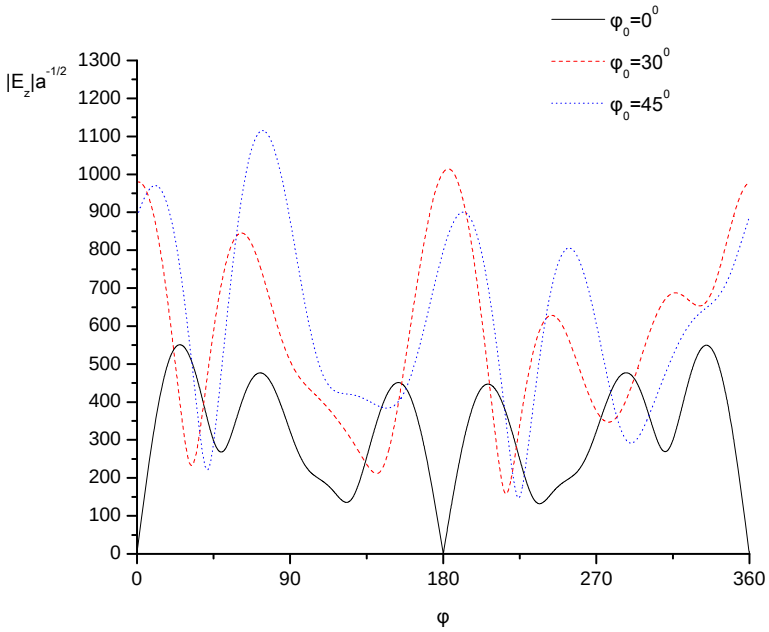
$\delta = 90^o$, θ=90°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 1$, $E_0 = 0, H_0 = 1$



Σχ.12: Η συνολική διατομή σκέδασης συναρτήσει της γωνίας φ_0 . TM^z

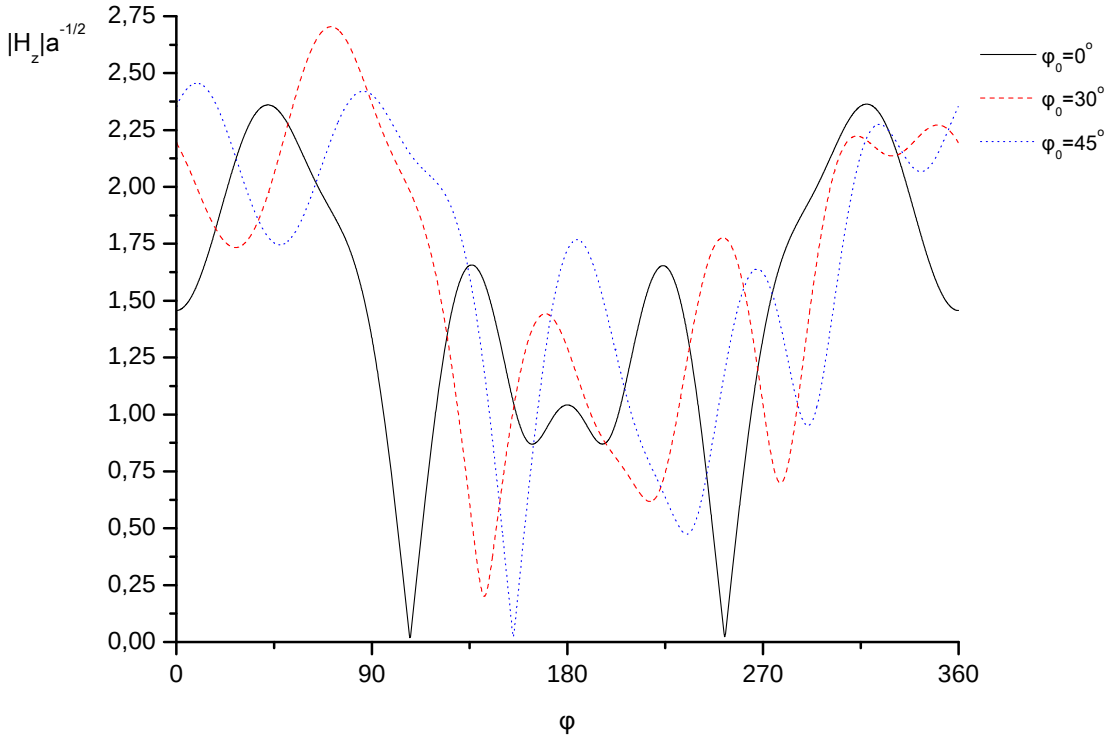
περίπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = 0, H_0 = 1$

Για την πλάγια πρόσπτωση το διάγραμμα ακτινοβολίας της διατάξεως φαίνεται στο Σχ.13και στο Σχ.14. Στον Πίνακα XV δίνουμε το πλάτος του μακράν ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου με διηλεκτρικό φορτίο και με αέρα.



Σχ.13: Το μακράν ηλεκτρικό πεδίο για διάφορες τιμές της γωνίας φ_0

Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = H_0 = 1$



Σχ.14: Το μακράν μαγνητικό πεδίο για διάφορες τιμές της γωνίας φ_0

Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 90^o$, $\theta=180^o$, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = H_0 = 1$

ΠΙΝΑΚΑΣ XIV: $|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi, \varepsilon_r = 4$, $\varphi_0 = 0^o, E_0 = H_0 = 1^o$

L	$\lvert E_z^{total}(\rho,0)\rvert\sqrt{\rho}$	$\lvert H_z^{total}(\rho,0)\rvert\sqrt{\rho}$
10	10.721991046369807	9.26194730787737
20	10.721990155061752	9.26299121523411
40	10.721989875584203	9.263280317592137
60	10.721989820228064	9.263336578210827
80	10.721989800446732	9.263356636614837
100	10.721989791199611	9.26336601260481
120	10.721989786144793	9.263371137172047
160	10.72198978109301	9.263376260411542
180	10.721989779727702	9.263377648715041
200	10.72198977874547	9.263378643609416
240	10.721989777466835	9.263379942214192
280	10.721989776693658	9.263380726904815

Στο σημείο αυτό θα εξετάσουμε την σύγκλιση του μακράν ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου. Επίσης θα εξετάσουμε την εξάρτηση της ταχύτητας της σύγκλισης από τον αριθμό των ασυμπτωτικών όρων που αφαιρούμε για την άρση των ιδιομορφιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ XV: $|E_z|,|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $k_0a=\pi$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=45^o$, $\delta=90^o$,$\theta=180^o$, $\varepsilon_r=1$.

L (m = 9)	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$
40	11.995064147090506	8.558636466997134
60	11.995064147089952	8.55863646593135
80	11.995064147090094	8.55863646586436
100	11.995064147090192	8.558636465863811
200	11.995064147091153	8.558636465863822

ΠΙΝΑΚΑΣ XVI: $|E_z|,|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $k_0a=\pi$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=45^o$, $\delta=90^o$,$\theta=180^o$, $\varepsilon_r=1$.

L (m = 1)	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$
10	12.005143928196059	2.992185247017614
20	11.979498162773893	9.907893469987105
40	11.982994436533277	9.227402793642192
60	11.990645412174961	9.033322958945211
80	11.994967062238025	8.89521181376751
100	11.995063365656579	8.840321625618763
140	11.99506336566044	8.776262694752779
180	11.995063365657424	8.737366985927302
240	11.99506336566128	8.700713224982682
300	11.995063365660322	8.677214031182048

ΠΙΝΑΚΑΣ XVII: $|E_z|,|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $k_0a=\pi$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=45^o$, $\delta=90^o$,$\theta=180^o$, $\varepsilon_r=1$.

L (m = 3)	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$
10	11.990473151873346	8.570813729806359
20	11.994858587074615	8.560066620767522
40	11.995052913570357	8.558795736290701
60	11.995062406822239	8.558684760320284
80	11.995064119201196	8.558637476407881
100	11.995064146872062	8.558636465835667
140	11.995064146872034	8.558636465835658
160	11.995064146872622	8.558636465835646
200	11.995064146872801	8.558636465835665

ΠΙΝΑΚΑΣ XVIII: $|E_z|,|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $k_0a=\pi$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=45^o$, $\delta=90^o$,$\theta=180^o$, $\varepsilon_r=1$.

L (m = 5)	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$
10	11.996277270779627	8.548312652725771
20	11.995062344402303	8.558651900903724
40	11.995064122449776	8.558636946548518
60	11.99506414526299	8.558636531050512
80	11.99506414706852	8.55863646669936
100	11.99506414708939	8.558636465863891
140	11.995064147088144	8.558636465863886
180	11.995064147092043	8.558636465863884

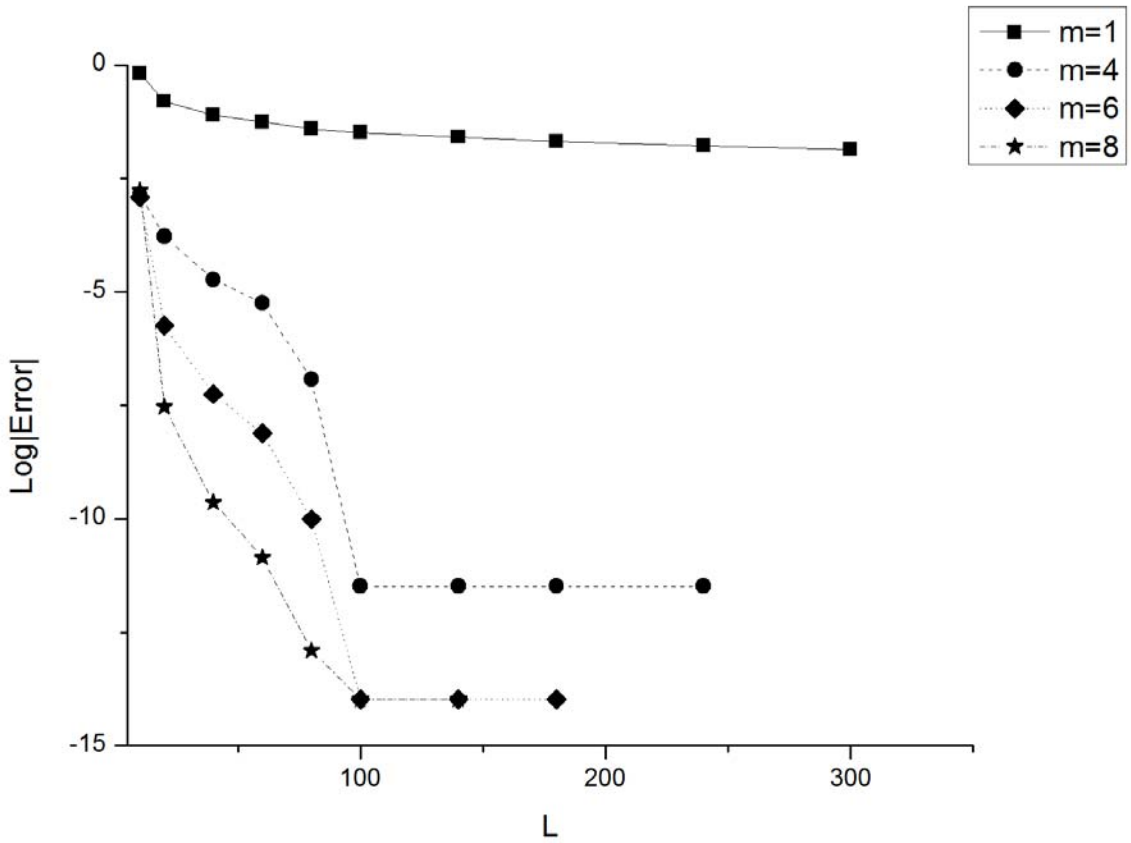
ΠΙΝΑΚΑΣ XIX: $|E_z|,|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $k_0a=\pi$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=45^o$, $\delta=90^o$,$\theta=180^o$, $\varepsilon_r=1$.

L (m = 7)	$\left\|E_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$
10	11.99246885944651	8.543716885062906
20	11.995064122257546	8.558636715743352
40	11.995064147010043	8.558636467840504
60	11.995064147086483	8.558636465982454
80	11.995064147090636	8.55863646586488
100	11.995064147088971	8.55863646586391
140	11.995064147091712	8.558636465863913

ΠΙΝΑΚΑΣ XX: $|H_z|$ για διάφορες τιμές της τάξης του συστήματος. Πλάγια πρόσπτωση: $k_0a=\pi$, $\varphi_0=0$, $\theta_0=45^o$, $\delta=90^o$,$\theta=180^o$, $\varepsilon_r=1$.

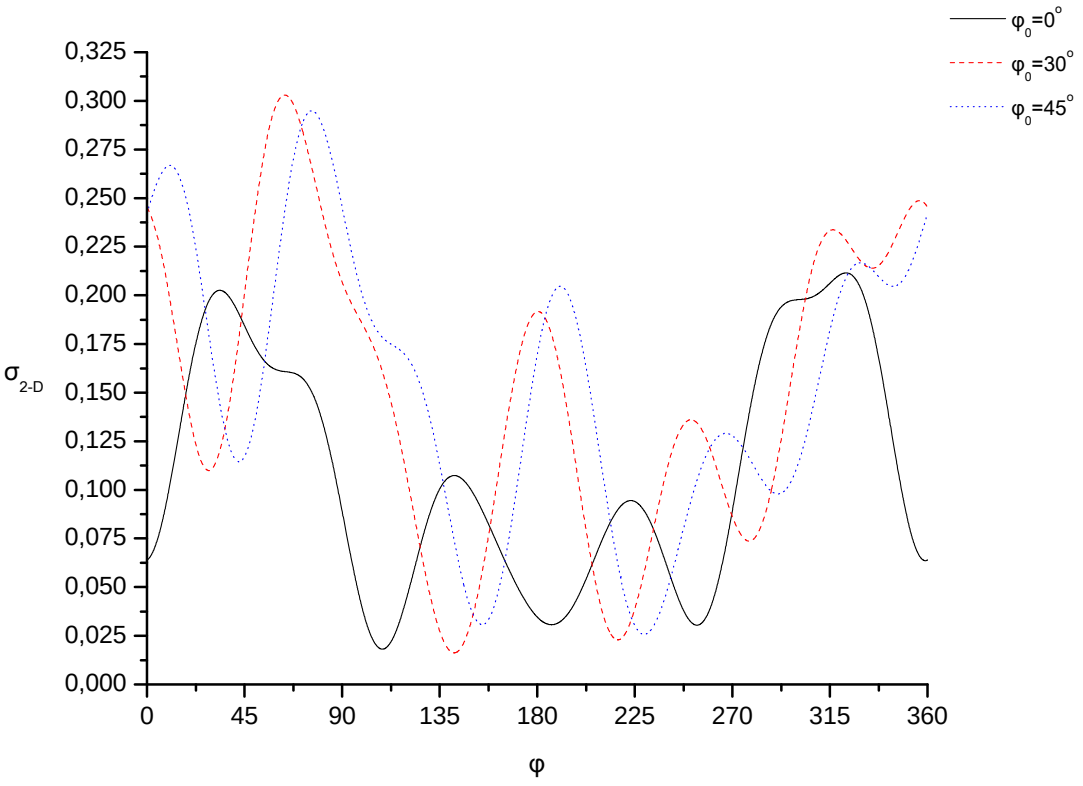
m (L = 100)	$\left\|H_z^{total}(\rho,0)\right\|\sqrt{\rho}$
1	8.840321625618763
2	8.840321625618763
3	8.558636465835667
4	8.558636465835667
5	8.558636465863891
6	8.558636465863891
7	8.558636465863913
8	8.55863646586391
9	8.558636465863811

Ως τελική τιμή του ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου θεωρούμε την τιμή που υπολογίζουμε με την αφαίρεση 9 ασυμπτωτικών όρων. Παρατηρούμε και σε αυτή την περίπτωση ότι η σύγκλιση είναι αργή με την ύπαρξη διηλεκτρικού υποστρώματος και ταχεία δίχως αυτό (με αέρα). Επίσης βλέπουμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των ασυμπτωτικών όρων που αφαιρούμε για την άρση των ιδιομορφιών η σύγκλιση βελτιώνεται με αποτέλεσμα την επίλυση μικρότερης τάξης συστήματος. Στην γραφική παράσταση που ακολουθεί εικονίζεται αυτή η ιδιότητα, με $Log\left|Error\right| = Log\left|(H_z - H_z^{exact}) / H_z^{exact}\right|$



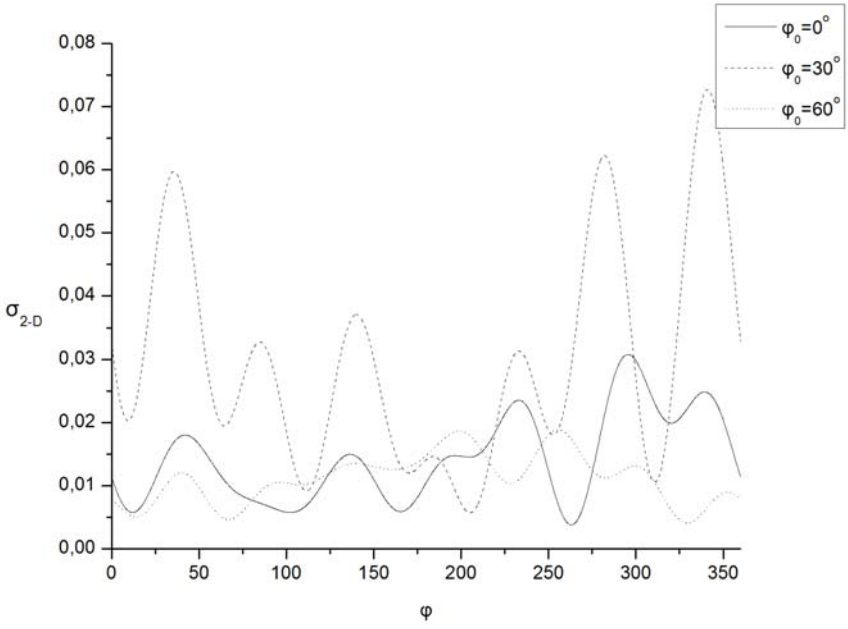
Σχ.15: Η ταχύτητα σύγκλισης εξαρτώμενη από τον αριθμό ασυμπτωτικών όρων (m) που αφαιρούμε για την άρση των ιδιομορφιών.

Ανάλογα αποτελέσματα για τον συντελεστή σκέδασης δείχνονται στα παρακάτω σχήματα για διάφορους συνδυασμούς των γεωμετρικών παραμέτρων της διάταξης. Τέλος στο Σχ.20 δείχνουμε την μεταβολή του πλάτους σκέδασης, σ_t με την φ.



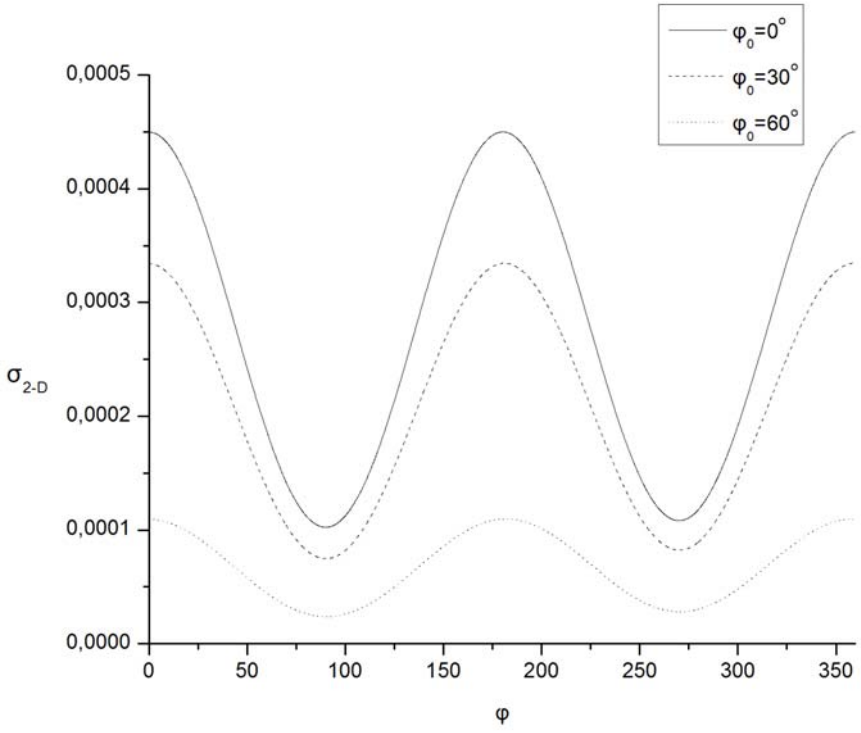
Σχ.16: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. Πλάγια πρόσπτωση:

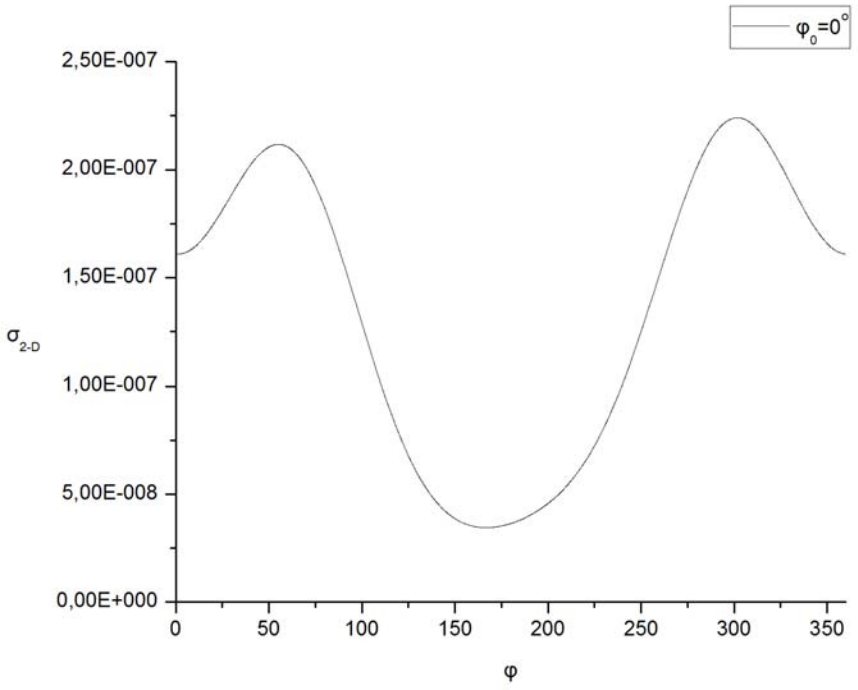
$\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = H_0 = 1$



Σχ.17: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. Πλάγια πρόσπτωση:

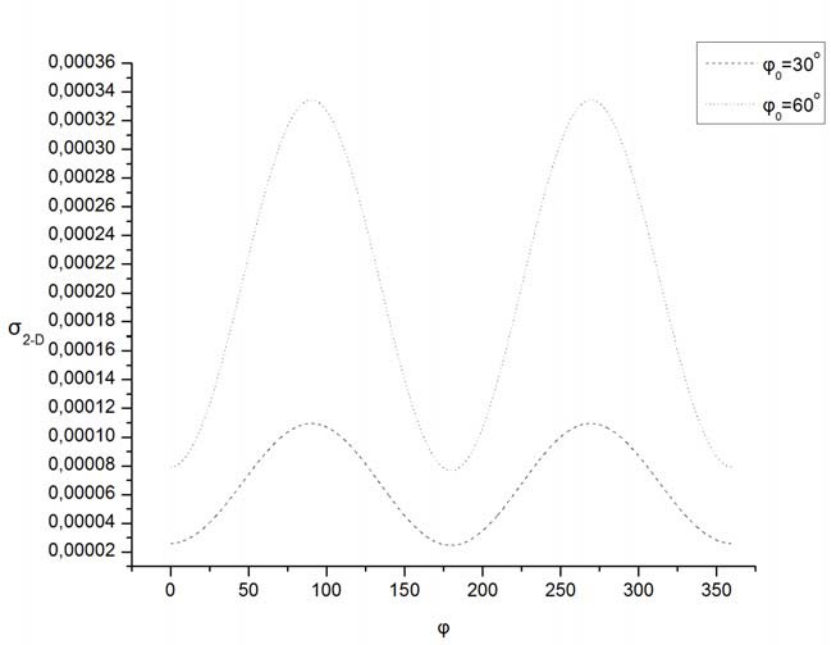
$\delta = 90^o$, $\theta=90^o$, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = H_0 = 1$



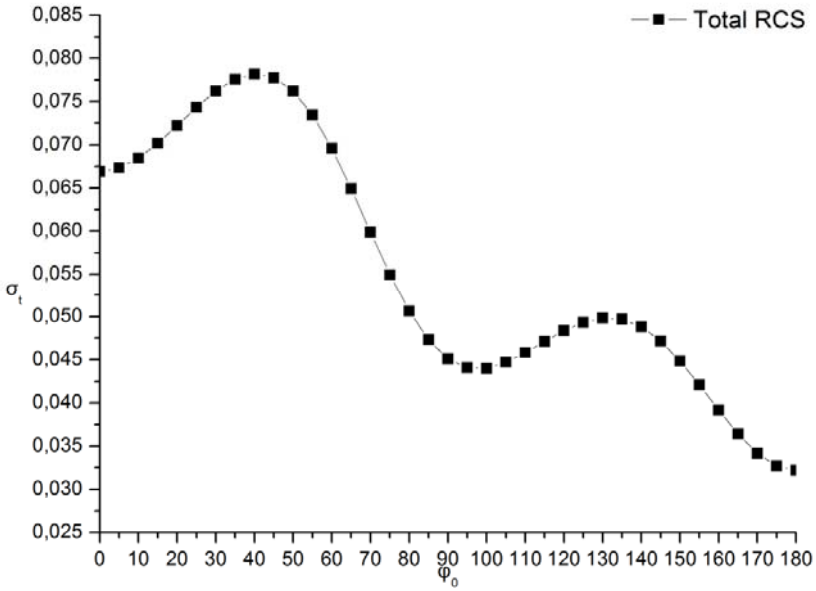


Σχ.18: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. Πλάγια πρόσπτωση:

$\delta = 90^o$, θ=180°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 1$, $E_0 = H_0 = 1$



Σχ.19: Το πλάτος σκέδασης (SW) συναρτήσει της γωνίας φ. Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 90^o$, θ=90°, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 1$, $E_0 = H_0 = 1$



Σχ.20: Η συνολική διατομή σκέδασης συναρτήσει της γωνίας φ_0. Πλάγια πρόσπτωση: $\delta = 90^o$, $\theta=180^o$, $k_0 a = \pi$, $\varepsilon_r = 4$, $E_0 = H_0 = 1$

Κεφάλαιο 4. Συμπεράσματα

Από την μέχρι τώρα ανάλυση των αποτελεσμάτων γίνεται φανερό ότι οι φυσικές και γεωμετρικές παράμετροι που επηρεάζουν τις τιμές και τις κατανομές των αναζητούμενων σε κάθε περίπτωση διεγειρόμενων ρευμάτων είναι το μήκος κύματος, η ακτίνα και η διηλεκτρική σταθερά του κυλινδρικού φορτίου, το μήκος της μικροταινίας, η κατεύθυνση και η πόλωση του προσπίπτοντος κύματος. Η μέθοδος που ακολουθήσαμε για την επίλυση του συστήματος των ολοκληρωτικών – ολοκληρωτικοδιαφορικών εξισώσεων δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα ακόμα και για πολύ μικρές ή πολύ μεγάλες (ως προς το μήκος κύματος) μικροταινίες. Σε ορισμένες περιπτώσεις παρατηρήθηκε η αργή σύγκλιση των αποτελεσμάτων παρουσία διηλεκτρικού φορτίου ή/και μεγάλης μικροταινίας. Είδαμε όμως ότι με την αφαίρεση του κατάλληλου αριθμού ασυμπτωτικών όρων μπορούμε να ξεπεράσουμε αυτή την δυσκολία και να υπολογίσουμε τα επιθυμητά αποτελέσματα με μικρές σχετικά τάξεις συστήματος. Σε όλες τις περιπτώσεις έως τώρα επιβεβαιώσαμε τα αποτελέσματα με ακρίβεια τουλάχιστον 7 σημαντικών ψηφίων κάνοντας εξαντλητικές συγκρίσεις με αποτελέσματα πλήθους άλλων εργασιών. Η ταύτιση αυτή βεβαιώνει κατά τον καλύτερο τρόπο την αξιοπιστία και την ακρίβεια της λύσης μας με την μέθοδο Nyström.

Τέλος, αποδείξαμε τον αρχικό μας ισχυρισμό, ότι η ενεργός διατομή σκέδασης ,RCS , της διάταξης μπορεί να ελεγχθεί εύκολα με την χρήση των κατάλληλων διηλεκτρικών φορτίων ή την περιστροφή της μικροταινίας. Είναι επομένως δυνατό χωρίς να αλλάζουμε καθόλου την κατεύθυνση του προσπίπτοντος κύματος (θ_0, φ_0) να ελέγχουμε την ενεργό διατομή σκέδασης.

Παράρτημα Α: Συντελεστές Ασυμπτωτικών Εκφράσεων

$$A_1 = \frac{i k_{c0}^2 k_{c1}^2 (k_{c1}^2 \mu_0 + k_{c0}^2 \mu_1)\omega}{(2\beta^2 (k_{c0}^2 - k_{c1}^2)^2 \pi - 2\pi (k_{c1}^2 \varepsilon_0 + k_{c0}^2 \varepsilon_1)(k_{c1}^2 \mu_0 + k_{c0}^2 \mu_1)\omega^2)}$$

$A_2 = 0$

$$B_1 = \frac{\beta k_{c0}^2 k_{c1} (-k_{c0}^2 + k_{c1}^2)}{2a\pi(\beta^2 (k_{c0}^2 - k_{c1}^2)^2 - (k_{c1}^2 \varepsilon_0 + k_{c0}^2 \varepsilon_1)(k_{c1}^2 \mu_0 + k_{c0}^2 \mu_1)\omega^2)}$$

$B_2 = 0$

$$C_1 = \frac{\beta k_{c0}^2 (k_{c0} - k_{c1}) k_{c1}^2 (k_{c0} + k_{c1})}{2a\pi(\beta^2 (k_{c0}^2 - k_{c1}^2)^2 - (k_{c1}^2 \varepsilon_0 + k_{c0}^2 \varepsilon_1)(k_{c1}^2 \mu_0 + k_{c0}^2 \mu_1)\omega^2)}$$

$C_2 = 0$

$$D_1 = \frac{i(-\beta^2 (k_{c0}^2 - k_{c1}^2)^2 + k_{c1}^2 (k_{c1}^2 \varepsilon_0 + k_{c0}^2 \varepsilon_1)\mu_0 \omega^2)}{2a^2 \pi \mu_1 \omega(-\beta^2 (k_{c0}^2 - k_{c1}^2)^2 + (k_{c1}^2 \varepsilon_0 + k_{c0}^2 \varepsilon_1)(k_{c1}^2 \mu_0 + k_{c0}^2 \mu_1)\omega^2)}$$

$D_2 = 0$

Παράρτημα Β: Βασικά Ολοκληρώματα

Τα ολοκληρώματα που έχουμε χρησιμοποιήσει κατά την διάρκεια επίλυσης του προβλήματος θα παρουσιαστούν αναλυτικά παρακάτω:

1. $\int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} K(t,\tau)dt.$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο ολοκληρώσεως του Lobatto έχουμε:

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} K(t,\tau)dt = \frac{\pi}{L}\sum_{n=1}^{L} F(t_n)K(t_n,\tau), \text{ όπου } t_n = \cos[\frac{(2n-1)\pi}{2L}]$$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} K(t,\tau) \ln\left|(t-\tau)\right| dt$

Θέτουμε $G(t,\tau) = F(t,\tau)K(t,\tau)$ και υπολογίζουμε την $G(t,\tau)$ κάνοντας χρήση των πολυωνύμων Chebyshev, δηλαδή:

$$G(t,\tau) = \sum_{N=0}^{L-1} c_N(\tau) T_N(t)$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\int_{-1}^{1} \frac{G(t,\tau)}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left|(t-\tau)\right| dt = \sum_{N=0}^{L-1} c_N(\tau) \int_{-1}^{1} \frac{T_N(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left|(t-\tau)\right| dt = \sum_{N=0}^{L-1} c_N(\tau) \xi_N(\tau)$$

όπου $\xi_N(\tau) = \int_{-1}^{1} \frac{T_N(t)}{\sqrt{1-t^2}} \ln\left|(t-\tau)\right| dt = -\pi\delta_{N0} \ln 2 - \frac{\pi}{N} T_N(\tau)$

και για N=0, $\xi_0(\tau) = -\pi \ln 2$

Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας τον όρο $c_N(\tau)$ όπως ακριβώς τον υπολογίσαμε στο κεφάλαιο 2.

$$\int_{-1}^{1} \frac{F(t)}{\sqrt{1-t^2}} K(t,\tau) \ln\left|(t-\tau)\right| dt = \sum_{N=0}^{L-1} \xi_N(\tau) \sum_{n=1}^{L} \frac{\hat{\varepsilon}_N}{L} G(t_n,\tau) T_N(t_n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{L} \frac{1}{L} G(t_n,\tau) \sum_{N=0}^{L-1} \hat{\varepsilon}_N T_N(t_n) \xi_N(\tau) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{L} F(t_n) K(t_n,\tau) \sigma(t_n,\tau)$$

με $\sigma(t_n,\tau) = \sum_{N=0}^{L-1} \hat{\varepsilon}_N T_N(t_n) \xi_N(\tau)$

3. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} F(t) K(t,\tau) dt.$

Εφαρμόζοντας τον δεύτερο τύπο ολοκληρώσεως του Lobatto έχουμε:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,F(t)K(t,\tau)dt=\frac{\pi}{L+1}\sum_{n=1}^{L}F(\hat{t}_n)K(\hat{t}_n,\tau)(1-t_n^2)\text{, όπου } \hat{t}_n=\cos[\frac{n\pi}{L+1}]$$

4. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,F(t)K(t,\tau)\ln\left|(t-\tau)\right|dt.$

Θέτουμε $G(t,\tau)=F(t,\tau)K(t,\tau)$ και παρόμοια όπως πριν μπορούμε να υπολογίσουμε την $G(t,\tau)=\sum_{N=0}^{L-1}d_N(\tau)U_N(t)$

Έχουμε λοιπόν:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,G(t,\tau)\ln\left|(t-\tau)\right|dt=\sum_{N=0}^{L-1}d_N(\tau)\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,U_N(t)\ln\left|(t-\tau)\right|dt=$$
$$\overset{[4]}{=}\sum_{N=0}^{L-1}d_N(\tau)\int_{-1}^{1}\frac{T_N(t)-T_{N+2}(t)}{2\sqrt{1-t^2}}U_N(t)\ln\left|(t-\tau)\right|dt=\sum_{N=0}^{L-1}d_N(\tau)\frac{\xi_N(\tau)-\xi_{N+2}(\tau)}{2}$$

Συνεχίζουμε αντικαθιστώντας τον όρο $d_N(\tau)$ όπως ακριβώς τον υπολογίσαμε στο κεφάλαιο 2. Τότε ισχύει:

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,F(t)K(t,\tau)\ln\left|(t-\tau)\right|dt=\sum_{N=0}^{L-1}\frac{1}{L+1}\sum_{n=1}^{L}(1-t_n^2)U(\hat{t}_n)G(\hat{t}_n,\tau)[\xi_N(\tau)-\xi_{N+2}(\tau)]=$$
$$=\frac{1}{L+1}\sum_{n=1}^{L}(1-t_n^2)G(\hat{t}_n,\tau)\sum_{N=0}^{L-1}U(\hat{t}_n)[\xi_N(\tau)-\xi_{N+2}(\tau)]=$$
$$=\frac{1}{L+1}\sum_{n=1}^{L}(1-t_n^2)F(\hat{t}_n)K(\hat{t}_n,\tau)\delta(\hat{t}_n,\tau)$$

όπου $\delta(\hat{t}_n, \tau) = \sum_{N=0}^{L-1} U(\hat{t}_n)[\xi_N(\tau) - \xi_{N+2}(\tau)],\ \hat{t}_n = \cos[\frac{n\pi}{L+1}]$.

Βιβλιογραφία – Αναφορές

[1] Julius Adams Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill Co., Inc., New York, 1941.

[2] J. Van Bladel, *Electromagnetic Fields,* McGraw-Hill Co., Inc., New York, 1964.

[3] R.E. Collin, *Foundations for microwave engineering*, second edition, IEEE Press, 2001.

[4] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, 9th Edition, Dover Publications, INC, New York, 1970.

[5] Karunaratne, M. D., K. A. Michalski, and C. M. Butler, «TE scattering from a conducting strip loaded dielectric cylinder,» IEE Proc, Pt. H, Vol 132, 375-383, Oct. 1985

[6] Mautz, J. R., and R. F. Harrington, «Electromagnetic penetration into a conducting circular cylinder through a narrow slot, TE case,» JEMWA, Vol 2, No. ¾, 269-293, 1988

[7] Tsalamengas, J. L., «Direct singular integral equation methods in scattering from strip-loaded dielectric cylinders,» JEMWA, Vol 10, 1331-1358, 1996

[8] Tsalamengas, J. L., «Exponentially Converging Nyström's Methods for systems of singular integral equations with applications to open/ closed strip- or slot-loaded 2-d structures,» IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol 54, No. 5, May 2006

[9] Tsalamengas, J. L., «Exponentially converging Nyström's methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part 1: TM-Case» IEEE Transactions on Antennas and Propagation

[10] Βαρδιάμπασης Ιωάννης, «Διάδοση και σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων από μικροσχισμές και μικροταινίες παρουσία κυλινδρικών συνοριακών επιφανειών», Διδακτορική Διατριβή, Σ.Η.Μ.Μ.Υ Ε.Μ.Π, 1996

[11] D. M. Pozar, *Microwave engineering*, second edition, Wiley, 1998.

[12] G.N. Watson, *A Treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press,1922.

[13] Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics,* Wiley, 1989

[14] Tsalamengas, J. L., «Exponentially converging Nyström's methods in scattering from infinite curved smooth strips. Part 2: TE-Case» IEEE Transactions on Antennas and Propagation