ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τυποποίηση και Τερματισμός στο λ-λογισμό

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΚΚΙΝΗΣ

Επιβλέπων: Γεώργιος Κολέτσος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2010

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Τυποποίηση και Τερματισμός στο λ-λογισμό

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΚΟΚΚΙΝΗΣ

Επιβλέπων: Γεώργιος Κολέτσος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 8η Νοεμβρίου 2010

....	....	....
Γεώργιος Κολέτσος	Νικόλαος Παπασπύρου	Ευστάθιος Ζάχος
Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.	Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Νοέμβριος 2010

....
Ιωάννης Κοκκίνης
Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Ιωάννης Κοκκίνης 2010.
Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσης εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσοβίου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής μου εργασίας, κ. Γιώργο Κολέτσο, για την καθοδήγηση και την βοήθειά του σε κάθε φάση της δημιουργία της. Ακόμα θα ήθελα να ευχαριστήσω τους υπόλοιπους καθηγητές μου και ιδιαιτέρως τον κ. Ν. Παπασπύρου για όλα όσα μου προσέφεραν στα χρόνια των σπουδών μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τα μέλη της οικογένειάς μου για τη διαρκή τους στήριξη, χωρίς την οποία η επιτυχής περάτωση των σπουδών μου θα ήταν αδύνατη. Τέλος θέλω να ευχαριστήσω τους φίλους και συναδέλφους μου για τα όμορφα φοιτητικά χρόνια που περάσαμε μαζί.

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας είναι να δείξουμε πώς η τυποποίηση (απόδωση τύπων) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ισχυρό εργαλείο για την απόδειξη θεωρημάτων στο λ-λογισμό, τα οποία σχετίζονται κυρίως με την κανονικοποίηση. Ως σύστημα τυποποίησης χρησιμοποιείται συνήθως το σύστημα τύπων τομής $\mathcal{D}$, το οποίο παρουσιάζει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα κάθε όρος που τυποποιείται σε αυτό να είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Για να δείξουμε όμως ότι η χρήση των τύπων τομής δεν είναι πάντοτε απαραίτητη καταλήγουμε σε μερικά συμπεράσματα και με τη χρήση τυποποίησης στο λ-λογισμό με απλούς τύπους. Τα περιεχόμενα των κεφαλαίων έχουν ως εξής:

Κεφάλαιο 1 Καθαρός λάμβδα λογισμός. Αναφερόμαστε, χωρίς να εμβαθύνουμε πολύ, σε έννοιες όπως οι ελεύθερες μεταβλητές, οι υποόροι η β-αναγωγή και η ισχυρή κανονικοποίηση.

Κεφάλαιο 2 Τύποι. Αναφερόμαστε στη χρησιμότητα των τύπων στον προγραμματισμό και εισάγουμε τα δύο συστήματα τύπων με τα οποία θα ασχοληθούμε: λάμβδα λογισμός με απλούς τύπους και σύστημα $\mathcal{D}$.

Κεφάλαιο 3 Αναπτύξεις. Εξηγούμε την έννοια της ανάπτυξης. Αποδεικύνουμε το θεώρημα των πεπερασμενων αναπτύξεων και βλέπουμε πώς αυτό μπορεί να μας οδηγήσει σε μια ικανή συνθήκη ισχυρής κανονικοποίησης.

Κεφάλαιο 4 Η ιδιότητα Church-Rosser. Με χρήση της μεθόδου της αναγωγιμότητας (reducibility method) αποδεικνύουμε την ισχύ της ιδιότητας Church-Rosser για τους τυποποιήσιμους όρους στο σύστημα $\mathcal{D}$, ύστερα αποδεικνύουμε την ισχύ της ιδιότητας Church-Rosser για τις αναπτύξεις και τέλος αποδεικνύουμε το θεώρημα Church-Rosser για τον καθαρό λάμβδα λογισμό.

Κεφάλαιο 5 Το Ω-θεώρημα. Παρουσιάζουμε μια απόδειξη του Ω-θεωρήματος με χρήση τυποποποίησης στο σύστημα $\mathcal{D}$.

Κεφάλαιο 6 Ανοιχτά προβλήματα. Δίνουμε κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα σε τομείς που σχετίζονται με το αντικείμενο της παρούσης εργασίας.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Καθαρός λάμβδα λογισμός

Ο λ-λογισμός, προτάθηκε από τον Alonzo Church τη δεκαετία του 1930, ως ένα τυπικό σύστημα για την αναπαράσταση συναρτήσεων, το οποίο θα βοηθούσε στην έρευνα για τα θεμέλια των μαθηματικών. Μετά την απόδειξη της ασυνέπειας του αρχικού συστήματος(παράδοξο των Kleene-Rosser[1]) ο Church δημοσίευσε στο [4] το σύστημα το οποίο είναι γνωστό σήμερα ως καθαρός λ-λογισμός ή λ-λογισμός χωρίς τύπους (θα το συμβολίζουμε και ως λ). Τελικά αποδείχθηκε ότι όλες οι αναδρομικές συναρτήσεις μπορούν να αναπαρασταθούν στο σύστημα λ. Ο λ-λογισμός έχει βρει πολλές εφαρμογές στη *λογική*, στη *θεωρία υπολογισμού* και στη *θεωρία των γλωσσών προγραμματισμού*. Οι συναρτήσεις και τα ορίσματά τους - αντίστοιχα τα προγράμματα και η είσοδός τους - αναπαρίστανται στο λ-λογισμό ως όροι. Το σύνολο Λ των λ-όρων ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

Ορισμός 1.1 (Σύνολο $\boldsymbol{\Lambda}$). Έστω $V = \{x_1, x_2, \dots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο μεταβλητών.

- $x \in V \Longrightarrow x \in \Lambda$
- $x \in V \ \wedge \ M \in \Lambda \Longrightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda$ (λ-αφαίρεση πάνω στον M)
- $M \in \Lambda \ \wedge \ N \in \Lambda \Longrightarrow (MN) \in \Lambda$ (εφαρμογή του M στον N) [2]

Με άλλα λόγια κάθε λ-όρος μπορεί να είναι είτε μια μεταβλητή, είτε μια λ-αφαίρεση, είτε μια εφαρμογή. Αυτή η παρατήρηση για την επαγωγική κατασκευή των λ-όρων θα μας φανεί πολύ χρήσιμη στη συνέχεια για ορισμούς συνόλων, αποδείξεις θεωρημάτων κτλ. σχετικά με το λ-λογισμό. Παραδείγματα όρων είναι $I = (\lambda x.x)$, $K = (\lambda x.(\lambda y.x))$ και $S = (\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xz)(yz)))))$. Μια σημαντική παρατήρηση, που θα βοηθήσει στην κατανόηση της διαφοράς του καθαρού λ-λογισμού με τον λ-λογισμό με τύπους, είναι ότι στον λ κάθε όρος μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιονδήποτε όρο. Για παράδειγμα οι II, xx, SSK είναι έγκυροι λ-όροι. Όπως θα δούμε στη συνέχεια όλοι οι προηγούμενοι όροι

[1] έστω ο όρος $M = \lambda x.\neg(xx)$. Ισχύει ότι $MM =_\beta \neg MM$, το οποίο είναι αντίθεση. Βέβαια στο σύστημα που θα παρουσιάσουμε εμείς δεν συμπεριλαμβάνεται ο τελεστής $\neg$, οπότε αυτή η λογική ασυνέπεια δεν θα μας απασχολήσει άλλο

[2] στο υπόλοιπό κείμενο θα χρησιμοποιούμε τους πεζούς λατινικούς χαρακτήρες $(x,\, y,\, z,\, a,\, \dots)$ για να αναφερόμαστε σε στοιχεία του συνόλου V και τυς κεφαλαίους λατινικούς χαρακτήρες $(X,\, Y,\, Z,\, A,\, \dots)$ για να αναφερόμαστε σε στοιχεία του συνόλου Λ

δεν τυποποιούνται - άρα δεν είναι έγκυροι - σε όλα τα συστήματα τυποποίησης. Για απλότητα θεωρούμε ότι $(\lambda x.M) = \lambda x.M$ και ότι $\lambda x_1 x_2 x_3 \ldots x_n.M = \lambda x_1.\lambda x_2.\lambda x_3. \ldots \lambda x_n.M$. Η εφαρμογή είναι αριστερά προσεταιριστική, δηλαδή $M_1 M_2 M_3 \ldots M_n = (((M_1 M_2) M_3) \ldots M_n)$. Έτσι ο όρος S μπορεί να γραφεί και ως $\lambda xyz.(xz(yz))$. Ο τελεστής λ δεσμεύει τη μεταβλητή που τον ακολουθεί. Επομένως κάθε εμφάνιση μεταβλητής που βρίσκεται στην εμβέλεια ενός τελεστή λ θα καλείται **δεσμευμένη**, διαφορετικά θα καλείται **ελεύθερη**. Το σύνολο των ελεύθερων μεταβλητών του όρου P θα συμβολίζεται με $FV(P)$. Αν $FV(P) = \emptyset$ τότε ο P θα λέγεται **κλειστός όρος**.Οι δεσμευμένες μεταβλητές είναι βουβές, δηλαδή δρουν όπως οι δείκτες στα αθροίσματα ή στα γινόμενα. Επομένως το όνομά τους δεν είναι σημαντικό. Έτσι θα λέμε ότι δύο όροι P, Q είναι **α-ισοδύναμοι** (συμβολισμός $P \equiv_\alpha Q$) αν ταυτίζονται συντακτικά, εκτός από τα ονόματα των δεσμευμένων μεταβλητών τους. Για παράδειγμα $\lambda x.xx \equiv_\alpha \lambda z.zz$. Στα επόμενα θα γράφουμε $\equiv$ αντί για $\equiv_\alpha$, αν δε δημιουργείται σύγχυση. Η **σύμβαση των μεταβλητών** του Barendregt επιβάλει ότι σε έναν όρο όλες οι ελεύθερες μεταβλητές έχουν διαφορετικά ονόματα από τις δεσμευμένες.

Έστω όροι $P, Q_1, \ldots, Q_n$. Ο όρος $P[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n]$ θα προκύπτει από τον P με "ταυτόχρονη" αντικατάσταση όλων των *ελεύθερων* εμφανίσεων των x_i από τους όρους Q_i αντίστοιχα. Για παράδειγμα $((\lambda x.xyy)xyz)[x := ww, y := x] = (\lambda d.dxx)(ww)xz$ (ακολουθώντας τη σύμβαση των μεταβλητών αλλάξαμε το x μετά το λ με d για να αποφύγουμε τη λανθασμένη δέσμευση μιας ελεύθερης μεταβλητής).

Ορισμός 1.2 (Σύνολο υποόρων). Έστω όρος P. Το σύνολο των υποόρων του P, $SubTerms(P)$, ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- $P \equiv x, x \in V \Longrightarrow SubTerms(P) = x$
- $P \equiv P_1 P_2 \Longrightarrow SubTerms(P) = SubTerms(P_1) \cup SubTerms(P_2)$
- $P \equiv \lambda x.Q \Longrightarrow SubTerms(P) = SubTerms(Q) \cup \{P\}$

Ορισμός 1.3 (μέγεθος όρου). Έστω $P \in \Lambda$. Το μέγεθος του P (συμβολισμός $\|P\|$) ορίζεται με επαγωγή στην κατασκευή του P ως εξής:

- $P \equiv x \Longrightarrow \|P\| = 1$
- $P \equiv \lambda x.Q \Longrightarrow \|P\| = 1 + \|Q\|$
- $P \equiv P_1 P_2 \Longrightarrow \|P\| = \|P_1\| + \|P_2\| + 1$ Με άλλα λόγια το μέγεθος ενός όρου ισούται με το πλήθος των μεταβλητών, των λ-αφαιρέσεων και εφαρμογών σε αυτόν.

Ορισμός 1.4. Με $\|P\|_x$ συμβολίζουμε το **πλήθος των ελεύθερων εμφανίσεων** της μεταβλητής x στον όρο P. Δηλαδή ισχύει:

- $P \equiv y \Longrightarrow \|P\|_x = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$
- $P \equiv P_1 P_2 \Longrightarrow \|P\|_x = \|P_1\|_x + \|P_2\|_x$
- $P \equiv \lambda y.Q \Longrightarrow \|P\|_x = \|Q\|_x$ (λόγω της σύμβασης των μεταβλητών υποθέτουμε ότι $x \neq y$)

Έστω f μια συνάρτηση, η οποία αναπαρίσταται από τον λ-όρο F και έστω x το όρισμά της, το οποίο αναπαρίσταται από τον λ-όρο X. Το $f(x)$ θα αναπαρίσταται από τον όρο FX (εφαρμογή της συνάρτησης F πάνω στο όρισμά της X) - αντίστοιχη αναπαράσταση θα έχουμε και για ένα πρόγραμμα με την είσοδό του. Για να αναπαραστήσουμε στο λ - λογισμό τον υπολογισμό του $f(x)$ δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.5 (λ-συμβατότητα). Μια διμελής σχέση $\longrightarrow_R$ πάνω στο σύνολο Λ ονομάζεται λ-συμβατή αν είναι ανακλαστική και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες[3]:

- $A \longrightarrow_R B \Longrightarrow \lambda x.A \longrightarrow_R \lambda x.B$
- $A \longrightarrow_R B \wedge C \longrightarrow_R D \in \Lambda \Longrightarrow AC \longrightarrow_R BD$

Ορισμός 1.6 (β-αναγωγή). Ορίζουμε τη σχέση $\longrightarrow_\beta$ πάνω στο σύνολο Λ ως εξής:

- $P \longrightarrow_\beta Q \Longrightarrow \lambda x.P \longrightarrow_\beta \lambda x.Q$
- $P \longrightarrow_\beta Q \Longrightarrow PW \longrightarrow_\beta QR$
- $(\lambda x.P)Q \longrightarrow_\beta P[x := Q]$
- $P \longrightarrow_\beta Q \Longrightarrow WP \longrightarrow_\beta RQ$

Κάθε όρος της μορφής $(\lambda x.P)Q$ θα ονομάζεται **redex** , ενώ το $P[x := Q]$ θα ονομάζεται το αντίστοιχο **contractum** του. Κάθε όρος που δεν περιέχει ως υπο-όρο κάποιο redex θα ονομάζεται **κανονική μορφή** (**normal form**). Η σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι η ελάχιστη μεταβατική λ-συμβατή σχέση που περιέχει την $\longrightarrow_\beta$. Η σχέση $=_\beta$ είναι η αντίστοιχη σχέση ισοδυναμίας. Έτσι αν για δύο όρους P, Q ισχύει $P \twoheadrightarrow_\beta Q$ θα υπάρχει μία ακολουθία όρων $P_1, P_2, ..., P_n$, με $P_1 \longrightarrow_\beta P_2 \longrightarrow_\beta P_3 \longrightarrow_\beta \ldots P_n, P_1 = P$ και $P_n = Q$. Κάθε ακολουθία όπως την προηγούμενη, θα την ονομάζουμε ακολουθία β-αναγωγών από τον όρο P. Επομένως αν ο όρος P αντιστοιχεί σε κάποιο πρόγραμμα, οι εμφανίσεις redexes μέσα στον όρο P θα αντιστοιχούν σε κάποιους υπολογισμούς που πρέπει να γίνουν μέσα στο πρόγραμμα (π.χ. κλήσεις συναρτήσεων, αποτίμηση ορισμάτων τελεστών κτλ.). Η ακολουθία β-αναγωγών από τον όρο P αντιστοιχεί στην εκτέλεση αυτών των υπολογισμών - η οποία μπορεί να γίνει φυσικά με ποικίλους τρόπους (π.χ. από αριστερά προς τα δεξιά, από μέσα προς τα έξω, πρόθυμα, lazy) όπως και στις γλώσσες προγραμματισμού. Κάθε ακολουθία β- αναγωγών που ξεκινά από μία κανονική μορφή θα έχει υποχρεωτικά μηδενικό μήκος, αφού οι κανονικές μορφές δεν περιέχουν redex. Επομένςως οι κανονικές μορφές αντιστοιχούν σε προγράμματα, στα οποία δεν μπορεί να γίνει κανένας υπολογισμός. Αν ξεκινώντας από έναν όρο P μπορούμε να καταλήξουμε, μέσω κάποιας ακολουθίας β-αναγωγών, σε έναν όρο U ο οποίος είναι σε κανονική μορφή, τότε ο όρος P ονομάζεται **ασθενώς κανονικοποιήσιμος** (**weakly normalizable**) ή απλώς **κανονικοποιήσιμος** (**normalizable**) και ο U κανονική μορφή του P. Όπως θα δούμε στα επόμενα (λήμμα 4.3.4) κάθε κανονικοποιήσιμος όρος έχει μοναδική κανονική μορφή. Κάθε ακολουθία β-αναγωγών που καταλήγει σε κανονική μορφή λέμε ότι τερματίζει. Αν κάθε ακολουθία β-αναγωγών που ξεκινά από τον όρο P τερματίζει, λέμε ότι ο όρος P είναι **ισχυρά κανονικοποιήσιμος** (**strongly normalizable**). Επομένως μπορούμε να ορίσουμε τα παρακάτω σύνολα όρων.

[3] στο υπόλοιπο κείμενο αντί για $(P, Q) \in \longrightarrow_R$ θα γράφουμε $P \longrightarrow_R Q$

Ορισμός 1.7.
- $NF = \{M \in \Lambda |$ το M είναι κανονική μορφή$\}$
- $WN = \{M \in \Lambda |$ το M έχει κανονική μορφή$\}$
- $SN = \{M \in \Lambda |$ κάθε ακολουθία β-αναγωγών με αρχή το M τερματίζει $\}$

Προφανώς ισχύει ότι $NF \subseteq SN \subseteq WN \subseteq \Lambda$. Για παράδειγμα $I \in NF$ και $KIS \in SN$. Θέτουμε $\omega = \lambda x.xx$ και $\Omega = \omega\omega$. Το μοναδικό redex που περιέχει ο όρος Ω είναι το ίδιο το Ω, οπότε ισχύει ότι κάθε ακολουθία β-αναγωγών που ξεκινάει από το Ω είναι της μορφής $\Omega \longrightarrow_\beta \Omega \longrightarrow_\beta \Omega \longrightarrow_\beta \ldots$. Οπότε $\Omega \notin SN$. Ακόμα $(\lambda x.z)\Omega \in WN \setminus SN$, αφού $(\lambda x.z)\Omega \longrightarrow_\beta z$ αλλά και $(\lambda x.z)\Omega \longrightarrow_\beta (\lambda x.z)\Omega \longrightarrow_\beta (\lambda x.z)\Omega \longrightarrow_\beta \ldots$.

Παρατήρηση. *Μια εύλογη απορία του αναγνώστη είναι ποια από τα σύνολα NF, WN, SN είναι αναδρομικά και ποια όχι. Ένας όρος είναι κανονική μορφή ανν δεν περιέχει κάποιο redex ως υποόρο, πράγμα το οποίο μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα με συντακτική ανάλυση(parsing). Επομένως το σύνολο NF είναι αναδρομικό. Η μη επιλυσιμότητα του* Halting Problem *επιτάσσει ότι τα σύνολα WN και SN δεν μπορούν να είναι αναδρομικά. Και πράγματι αυτό συμβαίνει. Για την απόδειξη της μη επιλυσιμότητας του WN δείτε το [9] σελ. 39, ενώ για μια απόδειξη της μη επιλυσιμότητας του SN δείτε το [9] σελ. 202. Τα προηγούμενα αποτελέσματα προκύπτουν και από ένα γενικότερο θεώρημα, το οποίο είναι το ανάλογο του θεωρήματος του Rice για το λ-λογισμό. Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος μπορεί να βρεθεί στο [2], θεώρημα 2.2.15.*

Λήμμα 1.8. Έστω P, Q, $Q' \in \Lambda$ με $Q \twoheadrightarrow_\beta Q'$. Τότε ισχύει ότι:

$$P[x := Q] \twoheadrightarrow_\beta P[x := Q']$$

Απόδειξη. Με απλή επαγωγή στον P. □

Λήμμα 1.9. Έστω P, P', $Q \in \Lambda$ με $P \twoheadrightarrow_\beta P'$. Τότε ισχύει ότι:

$$P[x := Q] \twoheadrightarrow_\beta P'[x := Q]$$

Απόδειξη. Προφανώς αρκεί να το δείξουμε για $P \longrightarrow_\beta P'$. Θα το κάνουμε με επαγωγή στην κατασκευή της προηγούμενης β-αναγωγής. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $P \equiv (\lambda y.Z)W$ και $P' \equiv Z[y := W]$. Λόγω της σύμβασης των μεταβλητών υποθέτουμε ότι $x \neq y$ και $y \notin FV(Q)$. Ισχύει ότι $P'[x := Q] = Z[y := W][x := Q] = Z[x := Q, y := W[x := Q]]$. Ακόμα $P[x := Q] = (\lambda y.Z[x := Q])W[x := Q] \longrightarrow_\beta Z[x := Q][y := W[x := Q]] = Z[x := Q, y := W[x := Q]] = P'$. □

Λήμμα 1.10. Έστω $P, P', Q, Q' \in \Lambda$ με $P \twoheadrightarrow_\beta P'$ και $Q \twoheadrightarrow_\beta Q'$. Τότε ισχύει ότι $P[x := Q] \twoheadrightarrow_\beta P'[x := Q']$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 1.8 έχουμε ότι $P[x := Q] \twoheadrightarrow_\beta P[x := Q']$ και από το λήμμα 1.9 ότι $P[x := Q'] \twoheadrightarrow_\beta P'[x := Q']$. Το ζητούμενο έπεται από τη μεταβατική ιδιότητα της σχέσης $\twoheadrightarrow_\beta$. □

Λήμμα 1.11. Έστω $P \in \Lambda$. Ο P μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στην παρακάτω μορφή:

$$\lambda x_1 x_2 \ldots x_n.QP_1 \ldots P_m$$

με $x_i \in V\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, $P_i \in \Lambda\,(1 \leqslant i \leqslant m), m, n \geqslant 0$ και Q να είναι μεταβλητή ή redex.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον P.

- $P \equiv x \Longrightarrow$ ο P είναι ήδη στη ζητούμενη μορφή με $Q \equiv x$ και $m = n = 0$
- $P \equiv \lambda x.P' \Longrightarrow$ από επαγωγική υπόθεση (ε.υ.) $\exists n', m' : P' \equiv \lambda x_1 x_2 \ldots x_{n'}.QP_1 \ldots P_{m'}$ οπότε $P \equiv \lambda x x_1 x_2 \ldots x_{n'}.QP_1 \ldots P_{m'}$ και ο P είναι στην επιθυμητή μορφή με $n = n' + 1$ και $m = m'$
- $P \equiv P'P'' \Longrightarrow$ αν ο P' είναι λ-αφαίρεση τότε ο P είναι στην επιθυμητή μορφή με $n = m = 0$ και τον όρο Q να είναι redex. Αν ο P' δεν είναι αφαίρεση τότε θα είναι στην παραπάνω μορφή με $n = 0$ δηλαδή θα ισχύει ότι $P' = QP_1 \ldots P_m$ άρα $P = QP_1 \ldots P_m P''$ άρα και ο P είναι στην επιθυμητή μορφή □

Ο όρος Q στην παραπάνω μορφή ονομάζεται **redex κεφαλής**. Αν ένας όρος P μπορεί να γραφεί στην παραπάνω μορφή με τον όρο Q να είναι μεταβλητή τότε λέμε ότι ο όρος P είναι σε **κανονική μορφή κεφαλής**.

Κεφάλαιο 2

Λάμβδα λογισμός με τύπους

Ο κύριος λόγος για τον οποίο χρησιμοποιούνται οι τύποι στην Πληροφορική είναι η ασφάλεια στον προγραμματισμό, όπως ακριβώς οι μονάδες μέτρησης δίνουν ασφάλεια στις πράξεις μεταξύ φυσικών ποσοτήτων, αποτρέποντάς μας από το να προσθέσουμε $2\,Ampere$ με $3\,Volt$. Σε μια γλώσσα όπως η C ή η Java ο προγραμματιστής δηλώνοντας ότι ένα αντικείμενο έχει κάποιο τύπο, περιορίζει αμέσως τη χρήση του σε συγκεκριμένες θέσεις στον κώδικα - εκεί όπου επιτρέπεται (από τους τελεστές, τις συναρτήσεις και γενικότερα τη σημασιολογία της γλώσσας) η χρήση αντικειμένων αυτού του τύπου. Ο μεταγλωττιστής μπορεί, με τη βοήθεια των τύπων, να ανιχνεύσει σημασιολογικά λάθη, όπως την πρόσθεση ενός αριθμού σε ένα string (αν αυτό δεν επιτρέπεται από τη γλώσσα προγραμματισμού) ή την κλήση μιας συνάρτησης με όρισμα ακέραιο ενώ αυτή περιμένει όρισμα έναν πραγματικό αριθμό (αν η γλώσσα δεν υποστηρίζει πολυμορφισμό τύπων). Εκτός αυτού με τη βοήθεια της τυποποίησης είναι εύκολο να ανιχνευθεί ότι μία έκφραση έχει τύπο σταθεράς και έτσι η αποτίμησή της να γίνει κατά το χρόνο μεταγλώττισης, μειώνοντας το χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος.

Οι τύποι στο λ-λογισμό εισήχθησαν από τον Haskell Curry το 1934 και από τον Alonzo Church το 1940. Έτσι έχουμε τα διάφορα συστήματα τύπων με τις εκδόσεις τους à la Curry και à la Church. Η κύρια διαφορά τους είναι ότι στα συστήματα à la Church οι τύποι των μεταβλητών δηλώνονται ρητά μαζί με τους όρους ενώ στα συστήματα à la Curry αυτό δε συμβαίνει. Ένα σύστημα τύπων à la Church λειτουργεί όπως το σύστημα τύπων μιας γλώσσας προγραμματισμού σαν τη C, όπου ο προγραμματιστής χρειάζεται να δηλώνει τον τύπο κάθε μεταβλητής που θα χρησιμοποιήσει. Αντίθετα ένα σύστημα τύπων à la Curry μοιάζει με το σύστημα τύπων μιας γλώσσας σαν την ML, όπου ο προγραμματιστής δε χρειάζεται να δηλώνει τους τύπους των μεταβλητών και αφήνεται στο μεταγλωττιστή να τους συμπεράνει. Τα δύο συστήματα τύπων με τα οποία θα ασχοληθούμε στο παρόν κείμενο, θα τα θεωρήσουμε με τις εκδόσεις τους à la Curry[1]. Όπως συμβαίνει και στον προγραμματισμό, οι τύποι δίνουν ασφάλεια στο λ-λογισμό χρησιμεύοντας στην απόδοση ιδιοτήτων σε όρους. Για παράδειγμα αποδεικνύεται, όπως θα δούμε στη συνέχεια, ότι αν ένας όρος τυποποιείται σε κάποια συστήματα τυποποίησης τότε είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Επομένως ένας εναλλακτικός τρόπος για την απόδειξη της ιδιότητας της

[1]για μια εισαγωγή στα συστήματα τύπων δείτε το [2]

ισχυρής κανονικοποίησης (αντίστοιχα κάποιας άλλης ιδιότητας) μπορεί να είναι η απόδειξη της ιδιότητας της τυποποίησης σε κάποιο σύστημα.

Στο λ-λογισμό με τύπους, οι τύποι μπορούν να θεωρηθούν ως ετικέτες στα στοιχεία του συνόλου Λ, οι οποίες προέρχονται από ένα σύνολο τύπων, έστω T. Για να προχωρήσουμε στην τυποποίηση των στοιχείων του συνόλου Λ χρειαζόμαστε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 2.1 (**Περιβάλλον τύπων**). Κάθε σύνολο $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \ldots, x_n : \tau_n\}$[2] με $x_i \in V, \tau_i \in T$ και $i \neq j \implies x_i \neq x_j$ για $1 \leqslant i \leqslant n$ και $1 \leqslant j \leqslant n$ θα λέγεται **περιβάλλον** ή **βάση**.

Ο συμβολισμός $x_i : \tau_i$ σημαίνει ότι ανατίθεται στη μεταβλητή x_i ο τύπος τ_i. Επομένως ένα περιβάλλον τύπων αποτελείται από αναθέσεις τύπων σε μεταβλητές. Ορίζουμε ως πεδίο ορισμού του περιβάλλοντος $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \ldots, x_n : \tau_n\}$ το σύνολο $dom(\Gamma) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε το Γ ως συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\Gamma(x_i) = \tau_i$. Το $\Gamma \cup \{\, x : \tau \,\}$ θα συμβολίζεται και ως $\Gamma, x : \tau$ (αν όμως $x \notin dom(\Gamma)$).

Ορισμός 2.2. Αν V_0 είναι ένα σύνολο μεταβλητών θα ισχύει ότι: $\Gamma \restriction V_0 = \{x_i : \tau_i \,|\, x_i \in V_0\}$. Το $\Gamma \restriction V_0$ θα λέγεται **περιορισμός** του Γ στο σύνολο V_0.

Το προγραμματιστικό ανάλογο του περιβάλλοντος τυποποίησης είναι η ρητή δήλωση του τύπου των μεταβλητών μέσα στον κώδικα γλωσσσών όπως η C, η Pascal ή η Java. Στο υπόλοιπο κείμενο όταν γράφουμε $\Gamma \vdash M : \sigma$ θα εννοούμε ότι ο όρος $M \in \Lambda$ παίρνει τον τύπο $\sigma \in T$ μέσα στο περιβάλλον τυποποίησης Γ. Σε αυτήν την περίπτωση ο όρος M θα καλείται **τυποποιήσιμος**. Αυτό που διαφέρει στα συστήματα τυποποίησης είναι οι κανόνες με τους οποίους μπορούμε να καταλήξουμε στην τυποποίηση ενός όρου καθώς και οι κατασκευαστές τύπων, δηλαδή τελεστές με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάζουμε σύνθετους τύπους από απλούστερους. Ο πιο σημαντικός κατασκευαστής τύπων, τον οποίο περιέχουν όλα τα συστήματα τυποποίησης είναι το $\rightarrow$. Η χρήση του έγκειται στην κατασκευή του τύπου των συναρτήσεων. Έτσι αν μια συνάρτηση f αντιστοιχίζει στοιχεία τύπου σ σε στοιχεία τύπου τ, ο τύπος της f θα είναι $\sigma \rightarrow \tau$.[3] Για παράδειγμα ο όρος I θα έχει τύπο $\sigma \rightarrow \sigma$ (αφού όπως πρέπει να έχει γίνει κατανοητό ο όρος I αναπαριστά την ταυτοτική συνάρτηση στο λ-λογισμό). Έτσι, αφού όπως είπαμε στην εισαγωγή το $f(x)$ αναπαρίσταται στο λ-λογισμό από το FX, αν ο όρος F έχει τύπο $A \rightarrow B$ ο όρος X θα πρέπει να έχει τύπο A. Είδαμε λοιπόν το πιο απλό αλλά και πιο βασικό παράδειγμα ελέγχου ορθής τυποποίησης, το οποίο ισχύει σχεδόν όπως το παρουσιάσαμε σε όλα τα συστήματα τύπων που έχουν προταθεί για το λ-λογισμό. Εμείς θα περιοριστούμε σε μια μικρή αναφορά στο λ-λογισμό με απλούς τύπους και σε μια εκτενέστερη αναφορά σε ένα σύστημα τύπων τομής γνωστό ως σύστημα $\mathcal{D}$.

Αναφέρουμε ακόμα τρεις ενδιαφέρουσες ιδιότητες των συστημάτων τυποποίησης:

[2]στο υπόλοιπο κείμενο θα συμβολίζουμε τα στοιχεία του συνόλου T(ανεξάρτητα από το σε ποιο σύστημα θα αναφερόμαστε) με τους πεζούς ελληνικούς χαρακτήρες $(\sigma, \tau, \alpha, \ldots)$

[3]ο τελεστής $\rightarrow$ είναι δεξιά προσεταιριστικός. Δηλαδή $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow \sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n = (\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow \ldots \rightarrow (\sigma_{n-1} \rightarrow \sigma_n)))$

Ορισμός 2.3 (**subject reduction**). Ένα σύστημα τύπων ικανοποιεί την ιδιότητα subjexct reduction αν ισχύει ότι:

$$\Gamma \vdash M : \sigma \wedge M \twoheadrightarrow_\beta N \Longrightarrow \Gamma \vdash N : \sigma$$

Με άλλα λόγια ένα σύστημα τύπων που ικανοποιεί την προηγούμενη ιδιότητα είναι κλειστό ως προς την σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$. Η αντίστροφη ιδιότητα της subject reduction είναι η παρακάτω.

Ορισμός 2.4 (**subject expansion**). Ένα σύστημα τύπων ικανοποιεί την ιδιότητα subjexct expansion αν ισχύει ότι:

$$\Gamma \vdash N : \sigma \wedge M \twoheadrightarrow_\beta N \Longrightarrow \Gamma \vdash M : \sigma$$

Αν ένα σύστημα ικανοποιεί και τις δύο παραπάνω ιδιότητες τότε έχουμε την ιδιότητα:

Ορισμός 2.5 (**subject conversion**). Ένα σύστημα τύπων ικανοποιεί την ιδιότητα subjexct conversion αν ισχύει ότι:

$$\Gamma \vdash M : \sigma \wedge M =_\beta N \Longrightarrow \Gamma \vdash N : \sigma$$

2.1 Λάμβδα λογισμός με απλούς τύπους

Στο υπόλοιπο του κειμένου θα αναφερόμαστε στο σύστημα του λ-λογισμού με απλούς τύπους με το σύμβολο $\lambda_\rightarrow$. Αρχικά θα ορίσουμε το σύνολο των τύπων για το $\lambda_\rightarrow$, το $T_\rightarrow$.

Ορισμός 2.1.1 (**Σύνολο $T_\rightarrow$**). Έστω $U_\rightarrow = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Τα στοιχεία του συνόλου $U_\rightarrow$ θα ονομάζονται **μεταβλητές τύπων** ή **ατομικοί τύποι**. Το σύνολο των τύπων $T_\rightarrow$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- $\tau \in U_\rightarrow \Longrightarrow \tau \in T_\rightarrow$
- $\tau \in T_\rightarrow \wedge \sigma \in T_\rightarrow \Longrightarrow \tau \rightarrow \sigma \in T_\rightarrow$

Σε συμβολισμό **Backus-Naur** μπορούμε να γράψουμε:

$$T_\rightarrow ::= U_\rightarrow | T_\rightarrow \rightarrow T_\rightarrow$$

Τώρα μπορούμε να προχωρήσουμε στον ορισμό των κανόνων απαγωγής του $\lambda_\rightarrow$, με τη βοήθεια των οποίων θα μπορέσουμε να τυποποιήσουμε όρους του συνόλου Λ.

Ορισμός 2.1.2. Κανόνες απαγωγής για το $\lambda_\rightarrow$:

$$(1) \qquad \Gamma, x : \sigma \vdash_\rightarrow x : \sigma \qquad \text{(αξίωμα)}$$

$$(2) \qquad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash_\rightarrow M : \tau}{\Gamma \vdash_\rightarrow \lambda x.M : \sigma \rightarrow \tau} \qquad (\rightarrow\text{-εισαγωγή})$$

$$(3) \qquad \frac{\Gamma \vdash_\rightarrow M : \sigma \rightarrow \tau \qquad \Gamma \vdash_\rightarrow N : \sigma}{\Gamma \vdash_\rightarrow MN : \tau} \qquad (\rightarrow\text{-απαλοιφή})$$

Αν δεν δημιουργείται σύγχυση θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\vdash$ αντί για το $\vdash_{\rightarrow}$. Η διαδοχική εφαρμογή των κανόνων του ορισμού 2.1.2 η οποία θα μας δώσει το $\Gamma \vdash M : \sigma$ ονομάζεται **τυποποίηση** του M. Αν $\Gamma = \varnothing$ τότε θα γράφουμε $\vdash M : \sigma$.

Παράδειγμα 2.1.3. Δίνουμε δύο παραδείγματα τυποποίησης όρων:

1. Ισχύει ότι $\vdash \lambda x.\lambda y.x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$ διότι : $\dfrac{\dfrac{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \sigma}{x : \sigma \vdash \lambda y.x : \tau \rightarrow \sigma}}{\vdash \lambda x.\lambda y.x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma}$.

2. Ισχύει ότι $z : \alpha \vdash \lambda x.z : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \alpha$ διότι : $\dfrac{z : \alpha, x : \sigma \rightarrow \tau \vdash z : \alpha}{z : \alpha \vdash \lambda x.z : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \alpha}$.

Ισχύει το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 2.1.4. Έστω $\Gamma \vdash M : \sigma$:

1. $\Gamma \subseteq \Gamma' \Longrightarrow \Gamma' \vdash M : \sigma$ (εξασθένηση του περιβάλλοντος)

2. $FV(M) \subseteq \Gamma$

3. $\Gamma \restriction FV(M) \vdash M : \sigma$ (για τη σημασία του $\restriction$ δείτε τον ορισμό 2.2)

Απόδειξη. Με απλή επαγωγή στην τυποποίηση του M. □

Από το προηγούμενο λήμμα καταλαβαίνουμε ότι αρκεί να αναθέσουμε τύπους στις ελεύθερες μεταβλητές του όρου M για να τον τυποποιήσουμε. Επομένως αν ένας κλειστός όρος τυποποιείται, αυτό θα συμβαίνει σε κενό περιβάλλον τυποποίησης.

Δίνουμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 2.1.5 (Δημιουργίας). Έστω $\Gamma \vdash M : \sigma$. Τότε:

1. $M \equiv x \Longrightarrow x : \sigma \in \Gamma$

2. $M \equiv \lambda x.N \Longrightarrow \exists \rho, \tau \in T_{\rightarrow} \,:\, \sigma = \tau \rightarrow \rho \,\wedge\, \Gamma, x : \tau \vdash N : \rho$

3. $M \equiv M_1 M_2 \Longrightarrow \exists \tau \in T_{\rightarrow} \,:\, \dfrac{\Gamma \vdash M_1 : \tau \rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash M_2 : \tau}{\Gamma \vdash M : \sigma}$

Απόδειξη. Με απλή επαγωγή στην κατασκευή του M χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1.4 και την παρατήρηση ότι αν ένας όρος είναι της μορφής 1 (αντ. 2,3) στο λήμμα 2.1.5, τότε για την τυποποίησή του θα πρέπει να έχει χρησιμοποιηθεί υποχρεωτικά ο κανόνας 1(αντ. 2,3) του ορισμού 2.1.2. □

Λήμμα 2.1.6.

$$\Gamma \vdash M : \sigma \Longrightarrow \forall N \in SubTerms(M)\, \exists \tau : \Gamma \vdash N : \tau$$

Απόδειξη. Με απλή επαγωγή στην κατασκευή του M χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1.4 και το λήμμα της Δημιουργίας. □

Λήμμα 2.1.7. Έστω $M, N \in \Lambda \wedge \sigma, \tau \in T_{\rightarrow}$. Τότε:

$$\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma \wedge \Gamma \vdash N : \tau \Longrightarrow \Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$$

Απόδειξη. Με απλή επαγωγή στην τυποποίηση του M χρησιμοποιώντας το λήμμα της Δημιουργίας. □

Λήμμα 2.1.8. Το $\lambda_{\rightarrow}$ ικανοποιεί την ιδιότητα **subject reduction**.

Απόδειξη. Προφανώς αρκεί να το δείξουμε για $M \longrightarrow_{\beta} N$. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $M \equiv (\lambda x.P)Q$ και $N \equiv P[x := Q]$. Από το λήμμα της δημιουργίας έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}&\Gamma \vdash M : \sigma \implies \Gamma \vdash (\lambda x.P)Q : \sigma \implies \\ &\exists \tau \in T_{\rightarrow} : \Gamma \vdash \lambda x.P : \tau \rightarrow \sigma \land \Gamma \vdash Q : \tau \implies \\ &\Gamma, x : \tau \vdash P : \sigma \land \Gamma \vdash Q : \tau\end{aligned}$$

Επομένως από το λήμμα 2.1.7 έχουμε:

$$\Gamma \vdash P[x := Q] : \sigma \implies \Gamma \vdash N : \sigma$$ □

Το $\lambda_{\rightarrow}$ δεν ικανοποιεί την ιδιότητα **subject expansion**. Πράγματι ισχύει ότι $(\lambda x.z)\Omega \longrightarrow_{\beta} z \ \land \ z : \tau \vdash z : \tau$. Όμως το Ω δεν τυποποιείται στο $\lambda_{\rightarrow}$, άρα ούτε και το $(\lambda x.z)\Omega$.

Τέλος, δίνουμε το σημαντικότερο θεώρημα αυτής της ενότητας:

Θεώρημα 2.1.9 (Ισχυρής κανονικοποίησης). Έστω ότι υπάρχει περιβάλλον Γ και $\sigma \in T_{\rightarrow} : \Gamma \vdash M : \sigma$. Τότε $M \in SN$.

Απόδειξη. Για μια απόδειξη του θεωρήματος δείτε το [12], παράγραφος 5.2. □

Το αντίστροφο του θεωρήματος της ισχυρής κανονικοποίησης δεν ισχύει. Για παράδειγμα έστω ότι υπάρχει περιβάλλον Γ και $\sigma \in T_{\rightarrow} : \Gamma \vdash xx : \sigma$. Από λήμμα της δημιουργίας όμως έχουμε ότι $\exists \tau : \Gamma \vdash x : \tau \rightarrow \sigma \land \Gamma \vdash x : \tau$. Ακόμα από το ίδιο λήμμα, αφού $x \in V$ θα πρέπει $x : \tau, x : \tau \rightarrow \sigma \in V$. Επειδή κάθε μεταβλητή πρέπει να εμφανίζεται μόνο μια φορά στο περιβάλλον θα ισχύει $\tau \rightarrow \sigma = \tau$. Όμως δεν υπάρχει κανένα $\tau \in T_{\rightarrow}$ που να ικανοποιεί την προηγούμενη εξίσωση αφού το μέγεθος του τύπου στο αριστερό μέλος είναι καθαρά μεγαλύτερο από το μέγεθος του τύπου στο δεξί μέλος(ο $\tau \rightarrow \sigma$ έχει ένα $\rightarrow$ περισσότερο από τον τ). Άρα ο xx δεν τυποποιείται στο $\lambda_{\rightarrow}$. Όμως ισχύει ότι $xx \in NF$.

2.2 Τύποι τομής

Το γεγονός ότι πολλοί όροι δεν μπορούν να τυποποιηθούν στο σύστημα $\lambda_{\rightarrow}$ παρ'όλο που είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι μας δημιουργεί την ανάγκη εισαγωγής νέων συστημάτων τυποποίησης. Η κύρια αδυναμία του $\lambda_{\rightarrow}$ είναι ότι σε κάθε όρο μπορεί να αποδοθεί μόνον ένας τύπος για κάθε τυποποίησή του. Για παράδειγμα με την τυποποίηση $\dfrac{x : \sigma \vdash x : \sigma}{\vdash \lambda x.x : \sigma \rightarrow \sigma}$ έχουμε $\vdash \lambda x.x : \sigma \rightarrow \sigma$. Ενώ με την τυποποίηση $\dfrac{x : \tau \rightarrow \tau \vdash x : \tau \rightarrow \tau}{\vdash \lambda x.x : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau \rightarrow \tau}$ έχουμε $\vdash \lambda x.x : (\tau \rightarrow \tau) \rightarrow \tau \rightarrow \tau$. Δηλαδή παρ'όλο που ένας όρος μπορεί να πάρει αρκετούς τύπους στο $\lambda_{\rightarrow}$ είναι αδύνατο να του δοθούν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους τύποι ταυτόχρονα(δηλαδή με την ίδια τυποποίηση). Αν συνέβαινε αυτό θα μπορούσαμε να τυποποιήσουμε αρκετά περισσότερους όρους. Για παράδειγμα αν μπορούσαμε να δώσουμε στο x τους τύπους $\sigma \to \tau$ και σ τότε το xx θα έπαιρνε τον τύπο τ. Αυτή η ιδέα, δηλαδή να μπορούν να δοθούν σε έναν όρο περισσότεροι του ενός τύποι, ονομάζεται *πολυμορφισμός τύπων*. Ένας τρόπος να υλοποιηθεί αυτή η ιδέα είναι με τη χρήση του καθολικού ποσοδείκτη ως κατασκευαστή τύπων. Για παράδειγμα θα μπορούσαμε να δηλώσουμε ότι ο όρος $\lambda x.x$ παίρνει τους τύπους $\sigma \to \sigma$ και $(\tau \to \tau) \to \tau \to \tau$ (και φυσικά πολύ περισσότερους) γράφοντας $\vdash \lambda x.x : \forall \sigma.(\sigma \to \sigma)$. Αυτό το είδος του πολυμορφισμού ονομάζεται **παραμετρικός πολυμορφισμός**.Η ιδέα αυτή οδήγησε στην εισαγωγή συστημάτων τυποποίησης όπως το σύστημα $\mathcal{F}$ (Girard-Reynolds). Το κύριο χαρακτηριστικό αυτών των συστημάτων είναι ότι οι διαφορετικοί τύποι που δίνονται σε έναν όρο συνδέονται με κάποια σχέση ισοδυναμίας. Για παράδειγμα ο τύπος $(\tau \to \tau) \to \tau \to \tau$ μπορεί να προκύψει από τον $(\sigma \to \sigma)$ με αντικατάσταση του σ από το $\tau \to \tau$. Αντίθετα στα συστήματα τύπων τομής είναι δυνατόν σε κάθε όρο να αποδοθούν δύο εντελώς διαφορετικοί τύποι. Όμως παρ'όλο που αυτή η ιδέα δίνει μεγαλύτερη εκφραστικότητα στο σύστημα τύπων και είναι πολύ χρήσιμη στο λ-λογισμό δεν φαίνεται ότι κάποιο σύστημα τύπων τομής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση για την ανάπτυξη κάποιας γλώσσας προγραμματισμού (αντίθετα το σύστημα $\mathcal{F}$ αποτέλεσε τη βάση για συναρτησιακές γλώσσες όπως η ML και Haskell).

Τα συστήματα τύπων τομής προτάθηκαν και αναπτύχθηκαν από τους Barendregt, Coppo, Dezani-Ciancaglini και Venneri τη δεκαετία του 1980. Εμείς θα ασχοληθούμε με ένα σύστημα τύπων τομής γνωστό ως **σύστημα $\mathcal{D}$**. Το σύστημα $\mathcal{D}$ προκύπτει από το $\lambda_{\to}$ με προσθήκη μόνο του $\cap$ ως κατασκευαστή τύπων(γι'αυτό το λόγο ανήκει στην κατηγορία των συστημάτων τύπων τομής). Επομένως ο ορισμός του συνόλου των τύπων, έστω $T_{\mathcal{D}}$, για το σύστημα $\mathcal{D}$ έχει ως εξής:

Ορισμός 2.2.1 (**Σύνολο $T_{\mathcal{D}}$**). Έστω $U_{\mathcal{D}} = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Τα στοιχεία του συνόλου $U_{\mathcal{D}}$ θα ονομάζονται **μεταβλητές τύπων** ή **ατομικοί τύποι**. Το σύνολο των τύπων $T_{\mathcal{D}}$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- $\tau \in U_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \tau \in T_{\mathcal{D}}$
- $\tau \in T_{\mathcal{D}} \wedge \sigma \in T_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \tau \to \sigma \in T_{\mathcal{D}}$
- $\tau \in T_{\mathcal{D}} \wedge \sigma \in T_{\mathcal{D}} \Longrightarrow \tau \cap \sigma \in T_{\mathcal{D}}$

Σε συμβολισμό **Backus-Naur** μπορούμε να γράψουμε:

$$T_{\mathcal{D}} ::= U_{\mathcal{D}} | T_{\mathcal{D}} \to T_{\mathcal{D}} | T_{\mathcal{D}} \cap T_{\mathcal{D}}$$

Οι κανόνες απαγωγής του συστήματος $\mathcal{D}$ προκύπτουν από τους αντίστοιχους του $\lambda_{\to}$(δείτε τον ορισμό 2.1.2) με μερικές προσθήκες που αφορούν τον τελεστή $\cap$.

Ορισμός 2.2.2. Κανόνες απαγωγής για το σύστημα $\mathcal{D}$:

$$(1) \qquad \Gamma, x:\sigma \vdash_{\mathcal{D}} x:\sigma \qquad \text{(αξίωμα)}$$

$$(2) \qquad \frac{\Gamma, x:\sigma \vdash_{\mathcal{D}} M:\tau}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} \lambda x.M:\sigma \to \tau} \qquad (\to\text{-εισαγωγή})$$

$$(3) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} N:\sigma}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} MN:\tau} \qquad (\to\text{-απαλοιφή})$$

$$(4) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\sigma \qquad \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\tau}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\tau \cap \sigma} \qquad (\cap\text{-εισαγωγή})$$

$$(5) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\sigma \cap \tau}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\sigma} \quad (\cap_1\text{-ελάττωση}) \qquad \frac{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\sigma \cap \tau}{\Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M:\tau} \quad (\cap_2\text{-ελάττωση})$$

Όπου δε δημιουργείται σύγχυση θα χρησιμοποιούμε το $\vdash$ αντί του $\vdash_{\mathcal{D}}$. Το λήμμα 2.1.4 ισχύει και για το σύστημα $\mathcal{D}$.

Ορισμός 2.2.3 (Πρώτοι τύποι). Έστω $\sigma \in T_{\mathcal{D}}$ το οποίο δεν είναι τομή δύο άλλον τύπων. Το σ θα καλείται **πρώτος τύπος**. Δηλαδή ένας πρώτος τύπος θα είναι είτε μία μεταβλητή είτε ένας σύνθετος τύπος έτσι ώστε ο τελευταίος τελεστής που θα έχει χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του να είναι ο $\to$.

Κάθε τύπος $\sigma \in T_{\mathcal{D}}$ αναλύεται σε τομή πρώτων τύπων. Αυτοί οι τύποι ονομάζονται **πρώτοι παράγοντες** του σ.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε το λήμμα της δημιουργίας για το σύστημα $\mathcal{D}$ το οποίο διαφέρει αρκετά από το αντίστοιχο λήμμα για το $\lambda_{\to}$ (2.1.5).

Λήμμα 2.2.4 (Δημιουργίας). Έστω σ πρώτος τύπος και έστω ότι $\Gamma \vdash M:\sigma$. Τότε:

1. $M \equiv x \Longrightarrow x:\sigma \in \Gamma$
2. $M \equiv \lambda x.N \Longrightarrow \exists \rho, \tau \in T_{\mathcal{D}} \,:\, \sigma = \tau \to \rho \,\wedge\, \Gamma, x:\tau \vdash N:\rho$
3. $M \equiv M_1 M_2 \Longrightarrow \exists \sigma_1, \sigma_2 \in T_{\mathcal{D}}$ έτσι ώστε ο σ να είναι πρώτος παράγοντας του σ_2 και $\dfrac{\Gamma \vdash M_1:\sigma_1 \to \sigma_2 \qquad \Gamma \vdash M_2:\sigma_1}{\Gamma \vdash M:\sigma_2}$

Απόδειξη. Στο δέντρο της τυποποίησης του M επιλέγουμε τον υψηλότερο κόμβο της μορφής $\Gamma \vdash M:\sigma'$ έτσι ώστε ο σ να είναι πρώτος παράγοντας του σ'. Τότε ανάλογα με τη μορφή του M θα πρέπει να έχει χρησιμοποιηθεί ένας από τους κανόνες $(1)-(3)$ του ορισμού 2.2.2 οπότε το καταλήγουμε εύκολα στο ζητούμενο. □

Παρατήρηση. *Αν ο σ δεν είναι πρώτος τύπος μπορούμε, χρησιμοποιώντας τον κανόνα (5) του ορισμού 2.2.2, να εφαρμόσουμε το λήμμα της δημιουργίας για κάθε έναν από τους πρώτους παράγοντες του σ.*

Λήμμα 2.2.5. Έστω ότι οι όροι P_i $(1 \leqslant i \leqslant n$ και $n \geqslant 1)$ είναι τυποποιήσιμοι στο σύστημα $\mathcal{D}$. Τότε το ίδιο ισχύει και για τον όρο $xP_1P_2 \ldots P_n$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας - χρησιμοποιώντας ίσως και την ιδιότητα της εξασθένησης του περιβάλλοντος - μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Gamma_i, x:\sigma_i \vdash P_i:\tau_i$. Τότε όμως μπορούμε να ενώσουμε τα Γ_i σε ένα νέο περιβάλλον Γ και να προσθέσουμε στη μεταβλητή x τον τύπο $\tau_1 \to \tau_2 \ldots \to \tau_n \to \tau$ έτσι ώστε να πάρουμε $\Gamma, x : \cap_{i=1}^{n}\sigma_i \cap (\tau_1 \to \tau_2 \ldots \to \tau_n \to \tau) \vdash P_i : \tau_i$. Τότε όμως εφαρμόζοντας n φορές τον κανόνα →-απαλοιφή μπορούμε να πάρουμε $\Gamma, x : \cap_{i=1}^{n}\sigma_i \vdash xP_1 \ldots P_n : \tau$. □

Τα λήμματα 2.1.6, 2.1.7 και 2.1.8 ισχύουν και για το σύστημα $\mathcal{D}$. Ακόμα η ιδιότητα subject expansion δεν ισχύει στο σύστημα $\mathcal{D}$ (για να το δείξουμε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο αντιπαράδειγμα όπως στο $\lambda_{\to}$).

Λήμμα 2.2.6. Έστω περιβάλλον Γ, μεταβλητές $x_1, \ldots, x_k$, όροι $M, N_1, \ldots, N_k$ και έστω ότι ισχύει πως $\Gamma \vdash M[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k] : \tau$ και $\Gamma \vdash N_i : \sigma_i \, (1 \leqslant i \leqslant k)$. Τότε θα ισχύει και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του M. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο τ είναι πρώτος τύπος. Αν δεν είναι μπορούμε χρησιμοποιώντας τον κανόνα $\cap$-απαλοιφή να εφαρμόσουμε την παρακάτω ανάλυση για κάθε έναν από τους πρώτους παράγοντες του τ και ύστερα, από τον κανόνα $\cap$-εισαγωγή να περάσουμε το αποτέλεσμα στον ίδιο τον τ.

- $M \equiv x \Longrightarrow \begin{cases} x \not\equiv x_i \, (1 \leqslant i \leqslant k) \Longrightarrow M[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k] = x \Longrightarrow \\ \Gamma \vdash x : \tau \Longrightarrow \Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots x_k : \sigma_k \vdash M : \tau \\ \\ \exists i : x \equiv x_i \Longrightarrow \tau = \sigma_i \\ \text{και το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα} \end{cases}$

- $M \equiv \lambda x.N \Longrightarrow$ από τη σύμβαση των μεταβλητών μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \not\equiv x_i \, (1 \leqslant i \leqslant k)$. Έχουμε ότι $\Gamma \vdash M[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k] : \tau \Longrightarrow \Gamma \vdash \lambda x.(N[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k]) : \tau$. Από το λήμμα της Δημιουργίας - αφού ο τ είναι πρώτος τύπος - θα υπάρχουν ρ, σ τέτοιοι ώστε $\tau = \rho \to \sigma \wedge \Gamma, x : \rho \vdash N[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k] : \sigma$. Η ε.υ. εφαρμόζεται στον N οπότε θα έχουμε $\Gamma, x : \rho, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash N : \sigma$. Και εφαρμόζοντας τον κανόνα →-εισαγωγή θα έχουμε $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash \lambda x.N : \rho \to \sigma \Longrightarrow \Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$

- $M \equiv PQ \Longrightarrow$ από το λήμμα της Δημιουργίας - αφού ο τ είναι πρώτος τύπος - θα υπάρχουν τύποι σ, τ' τέτοιοι ώστε $\Gamma \vdash P[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k] : \sigma \to \tau'$ και $\Gamma \vdash Q[x_1 := N_1, \ldots, x_k := N_k] : \sigma$ και ο τ να είναι πρώτος παράγοντας του τ'. Όμως από ε.υ. θα ισχύει ότι $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash P : \sigma \to \tau'$ και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash Q : \sigma$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα →-απαλοιφή έχουμε ότι $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash PQ : \tau'$ και αφού ο τ είναι πρώτος παράγοντας του τ' θα έχουμε και $\Gamma, x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_k \vdash M : \tau$. □

Το αποτέλεσμα που κάνει το σύστημα $\mathcal{D}$ εξαιρετικά ενδιαφέρον είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 2.2.7.

$$(\exists \sigma \in T_{\mathcal{D}} \text{ και περιβάλλον } \Gamma : \Gamma \vdash_{\mathcal{D}} M : \sigma) \Longleftrightarrow M \in SN$$

Απόδειξη. Δείτε το [9] σελ. 69-70. □

Από το θεώρημα αυτό συμπεραίνουμε ότι το πρόβλημα της τυποποίησης ενός δοσμένου όρου στο σύστημα $\mathcal{D}$ είναι μη επιλύσιμο. Όμως το σημαντικότερο αποτέλεσμα που παίρνουμε από το προηγούμενο θεώρημα είναι ότι έχουμε μία διαφορετική, ισοδύναμη περιγραφή του συνόλου SN. Αυτή η ιδιότητα θα μας χρησιμεύσει για να αποδείξουμε σημαντικά αποτελέσματα με τη μέθοδο της τυποποίησης, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 3

Αναπτύξεις

Έστω $P \in \Lambda$. *Redex* στον P καλούμε κάθε υποόρο της μορφής $(\lambda x.W)Q$. Επομένως ένα redex εντός του P προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τον υποπόρο του P της μορφής $(\lambda x.W)Q$ μαζί με την θέση του εντός του P. Για παράδειγμα στον όρο $(\lambda x.x)y(\lambda x.x)y$ το redex $(\lambda x.x)y$ εμφανίζεται 2 φορές, οπότε για τον σαφή προσδιορισμό του χρειάζεται επιπλέον ένας δείκτης θέσης. Παρ'όλα αυτά στην παρακάτω ανάλυση αυτοί οι δείκτες δε μας είναι απαραίτητοι οπότε δεν θα τους ορίσουμε.

Ορισμός 3.1. Έστω $P \in \Lambda$. Ορίζουμε το σύνολο των redexes του P, $Red(P)$, ως εξής:

- $P \equiv x \Longrightarrow Red(P) = \varnothing$
- $P \equiv \lambda x.Q \Longrightarrow Red(P) = Red(Q)$
- $P \equiv P_1 P_2$ και ο P_1 είναι λ-αφαίρεση $\Longrightarrow Red(P) = Red(Q) \cup P$
- $P \equiv P_1 P_2$ και ο P_1 *δεν* είναι λ-αφαίρεση $\Longrightarrow Red(P) = Red(Q)$

Θεωρούμε μια νέα μεταβλητή την οποία συμβολίζουμε με c. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 3.2 (Σύνολο $\boldsymbol{\Lambda(c)}$). Το σύνολο $\Lambda(c)$ είναι το ελάχιστο σύνολο με τις παρακάτω ιδιότητες:

- $x \in V \wedge x \neq c \Longrightarrow x \in \Lambda(c)$
- $x \in V \wedge x \neq c \wedge P \in \Lambda(c) \Longrightarrow \lambda x.P \in \Lambda(c)$
- $P \in \Lambda(c) \wedge Q \in \Lambda(c) \Longrightarrow cPQ \in \Lambda(c)$
- $P \in \Lambda(c) \wedge Q \in \Lambda(c)$ και το P είναι λ-αφαίρεση $\Longrightarrow PQ \in \Lambda(c)$

Παρατηρούμε ότι οι όροι στο $\Lambda(c)$ σχηματίζονται περίπου όπως στο Λ με μόνη διαφορά πως δεν επιτρέπουμε εφαρμογές όρων σε άλλους όρους, εκτός αν ο όρος που εφαρμόζεται είναι η μεταβλητή c ή αν δημιουργείται κάποιο *redex*. Ακόμα παρατηρούμε ότι υπάρχουν όροι του Λ, οι οποίοι δεν ανήκουν στο $\Lambda(c)$ (πχ. c, c, ccx, $\lambda x.yc$, xyz).

Λήμμα 3.3. Έστω $P, Q \in \Lambda(c)$ και $x \in V, x \neq c$. Τότε $P[x := Q] \in \Lambda(c)$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του P. □

Λήμμα 3.4. Το σύνολο $\Lambda(c)$ είναι κλειστό ως προς τη σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$.

Απόδειξη. Έστω $P \in \Lambda(c)$ και $P \twoheadrightarrow_\beta Q$. Πρέπει να δείξουμε ότι και $Q \in \Lambda(c)$. Θα το κάνουμε με επαγωγή στην κατασκευή του P. Προφανώς αρκεί να το δείξουμε μόνο για τη σχέση $\longrightarrow_\beta$. Οι περιπτώσεις που ο P είναι μεταβλητή, λ-αφαίρεση ή εφαρμογή της μεταβλητής c σε δύο άλλους όρους είναι τετριμμένες. Αν $P \equiv (\lambda x.P_1)P_2$ τότε $Q \equiv P_1[x := P_2]$ και $P_1,\ P_2 \in \Lambda(c)$. Οπότε από το λήμμα 3.3 $Q \in \Lambda$. □

Λήμμα 3.5. Έστω $P \in \Lambda(c)$ και Γ ένα περιβάλλον τέτοιο ώστε $FV(P) \subseteq dom(\Gamma)$ και $c \notin dom(\Gamma)$. Τότε υπάρχουν δύο τύποι, έστω σ και τ, του συστήματος $\mathcal{D}$ τέτοιοι ώστε $\Gamma, c : \sigma \vdash P : \tau$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του P.

- $P \equiv x \Longrightarrow$ αφού $x \in FV(P)$ θα πρέπει να υπάρχει $\rho \in T_{\mathcal{D}}$ τέτοιο ώστε $x : \rho \in \Gamma$. Άρα $\tau = \rho$ και για σ μπορούμε να επιλέξουμε οποιοδήποτε τύπο.

- $P \equiv \lambda x.Q \Longrightarrow$ από ε.υ. $\exists \sigma',\ \tau' : \Gamma, c : \sigma' \vdash Q : \tau'$. Αν $x \in FV(Q)$ τότε θα υπάρχει ρ τέτοιο ώστε $x : \rho \in \Gamma$, διαφορετικά επιλέγουμε εμείς ένα ρ και θέτουμε $x : \rho$. Σε κάθε περίπτωση (χρησιμοποιώντας ίσως και την ιδιότητα της εξασθένησης του περιβάλλοντος) θα ισχύει ότι $\Gamma, c : \sigma' \vdash \lambda x.Q : \rho \to \tau'$. Άρα το ζητούμενο τ είναι το $\rho \to \tau'$ και το ζητούμενο σ το σ'.

- $P \equiv cP_1P_2 \Longrightarrow$ επειδή $FV(P_i) \subseteq FV(P),\ 1 \leqslant i \leqslant 2$ από ε.υ. θα έχουμε ότι: $\exists \sigma_1,\ \sigma_2,\ \tau_1,\ \tau_2 : \Gamma, c : \sigma_1 \vdash P_1 : \tau_1 \wedge \Gamma, c : \sigma_2 \vdash P_2 : \tau_2$. Έστω $\rho \in T_{\mathcal{D}}$ και $\Delta = \Gamma, c : \sigma_1 \cap \sigma_2 \cap (\tau_1 \to \tau_2 \to \rho)$. Από το λήμμα 2.2.2 και την εξασθένηση του περιβάλλοντος θα έχουμε $\Delta \vdash c : \tau_1 \to \tau_2 \to \rho,\ \Delta \vdash P_1 : \tau_1$ και $\Delta \vdash P_2 : \tau_2$. Εφαρμόζοντας δύο φορές την ιδιότητα (3) του λήμματος 2.2.2 έχουμε ότι $\Delta \vdash cP_1P_2 : \rho$. Οπότε το ζητούμενο τ είναι το ρ και το ζητούμενο σ είναι το $\tau_1 \to \tau_2 \to \rho$.

- $P \equiv (\lambda x.P_1)P_2 \Longrightarrow$ από ε.υ. θα έχουμε ότι: $\exists \sigma_1,\ \sigma_2,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \rho : \Gamma, x : \rho, c : \sigma_1 \vdash P_1 : \tau_1 \wedge \Gamma, c : \sigma_2 \vdash P_2 : \tau_2$ (υποθέσαμε ότι από τη σύμβαση των μεταβλητών $x \notin dom(\Gamma)$). Όμως στο $\Lambda(c)$ είναι αδύνατο μία μεταβλητή διαφορετική από το c να εφαρμόζεται πάνω σε κάποιους όρους. Οπότε το ρ είναι ένας αυθαίρετος τύπος. Άρα μπορούμε να θέσουμε $\rho = \tau_2$. Οπότε θα έχουμε $\Gamma, c : \sigma_1 \vdash \lambda x.P_1 : \tau_2 \to \tau_1$ και $\Gamma, c : \sigma_1 \cap \sigma_2 \vdash (\lambda x.P_1)P_2 : \tau_1$. Άρα $\sigma = \sigma_1 \cap \sigma_2$ και $\tau = \tau_1$. □

Λήμμα 3.6. Κάθε όρος στο $\Lambda(c)$ είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος.

Απόδειξη. Με το λήμμα 3.5 αποδείξαμε ότι κάθε όρος στο $\Lambda(c)$ είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$. Οπότε το επιθυμητό αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από το θεώρημα 2.2.7. □

Ορισμός 3.7. Θεωρούμε μία αντιστοίχηση από το $\Lambda(c)$ στο Λ. Η αντιστοίχηση αυτή απεικονίζει το $P \in \Lambda(c)$ στο $|P|$ ως εξής:

- $P \equiv x \wedge x \neq c \Longrightarrow |P| = x$

- $P \equiv \lambda x.Q \wedge x \neq c \Longrightarrow |P| = \lambda x.|Q|$

- $P \equiv cP_1P_2 \Longrightarrow |P| = |P_1||P_2|$
- $P \equiv (\lambda x.P_1)P_2 \Longrightarrow |P| = (\lambda x.|P_1|)|P_2|$

Η απεικόνιση $|\cdot|$ ουσιαστικά "διαγράφει" όλες τις εμφανίσεις της μεταβλητής c στο όρισμά της.

Λήμμα 3.8. Στο σύνολο $\Lambda(c)$ ισχύουν τα παρακάτω:

- Έστω $T \in \Lambda(c)$ και $T' = |T|$. Κάθε redex R στον T αντιστοιχίζεται με μοναδικό τρόπο στο redex $R' = |R|$ στον T'. Το R' θα καλείται **εικόνα** του R.
- Έστω $T, U \in \Lambda(c)$, $x \neq c$ και $T' = |T|$, $U' = |U|$. Τότε $T[x := U] = T'[x := U']$.
- Έστω $T \in \Lambda(c)$, $T' = |T|$, R ένα redex του T και $R' = |R|$ η εικόνα του R στον T'. Τότε η εικόνα, μέσω της $|\cdot|$, του όρου που προκύπτει από την αναγωγή του R στον T ταυτίζεται με τον όρο που προκύπτει από την αναγωγή του R' στον T'.

Απόδειξη. Όλες οι ιδιότητες αποδεικνύονται με απλή επαγωγή στην κατασκευή του T. □

Λήμμα 3.9. Έστω $P \in \Lambda$ και $\mathcal{R}$ ένα σύνολο από redexes στον P. Υπάρχει ένας μοναδικός όρος $Q \in \Lambda(c)$ τέτοιος ώστε $P = |Q|$ και το σύνολο $\mathcal{R}$ είναι το σύνολο των εικόνων όλων των redexes του Q. Ο Q θα καλείται **αντιπρόσωπος** του διατεταγμένου ζεύγους $(P, \mathcal{R})$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του P.

- $P \equiv x$. Τότε προφανώς $\mathcal{R} = \varnothing$, οπότε επιλέγουμε $Q = x$. Ισχύει ότι $P = |Q|$ και αφού δεν υπάρχουν redexes ούτε στον P ούτε στον Q το ζητούμενο ικανοποιείται τετριμμένα.
- $P \equiv \lambda x.P'$. Έστω Q' ο αντιπρόσωπος του $(P', \mathcal{R})$. Θέτουμε $Q = \lambda x.Q'$. Ισχύει ότι $|Q| = |\lambda x.Q'| = \lambda x.|Q'| = \lambda x.P' = P$. Ακόμα αφού $Red(P) = Red(P')$, $Red(Q) = Red(Q')$ και οι εικόνες όλων των redexes στον Q' βρίσκονται στον P', άρα και στον P, το ίδιο θα ισχύει και για τις εικόνες όλων των redexes στον Q.
- $P \equiv P_1P_2$. Έστω $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ τα υποσύνολα του $\mathcal{R}$ που αντιστοιχούν στους P_1, P_2. Έστω ακόμα Q_1, Q_2 οι αντιπρόσωποι των $(P_1, \mathcal{R}_1)$, $(P_2, \mathcal{R}_2)$ αντίστοιχα. Αν $P \notin \mathcal{R}$ επιλέγουμε $Q = cP_1P_2$. Διαφορετικά επιλέγουμε $Q = P_1P_2$. Εύκολα αποδεικνύουμε σε κάθε περίπτωση ότι ισχύει το ζητούμενο. □

Η μεταβλητή c χρησιμοποιείται για να μαρκάρουμε τα "ανεπιθύμητα" redexes και να "εξουδετερώσουμε" τις εφαρμογές με τέτοιο τρόπο ώστε να μην προκύψουν νέα redexes μετά από β-αναγωγές. Τα ίδια αποτελέσματα μπορούμε να πετύχουμε υπογραμμίζοντας τα "επιθυμητά" redexes, όπως για παράδειγμα γίνεται στο [12] ή στο [1] αντί για τη χρήση της μεταβλητής c.

Ορισμός 3.10. Έστω $P \in \Lambda$, $\mathcal{R}$ ένα σύνολο από redexes του P και r_0 ένα redex του P. Ορίζουμε το σύνολο των **υπολοίπων** του $\mathcal{R}$ ως προς το r_0 (συμβ. $\mathcal{R}'$) ως εξής: έστω Q ο αντιπρόσωπος του $(P, \mathcal{R} \cup \{r_0\})$ και έστω r_0' το redex του Q του οποίου η εικόνα είναι το r_0. Έστω Q' ο όρος ο οποίος προκύπτει από τον Q όταν ανάγουμε το r_0' και P' ο όρος ο οποίος προκύπτει από τον P όταν ανάγουμε το r_0. Το σύνολο $\mathcal{R}'$ ορίζεται ως το σύνολο των redexes του P' τα οποία είναι εικόνες όλων των redexes του Q'.

Παρατήρηση 3.11. *Στον ορισμό 3.10 το σύνολο $\mathcal{R}'$ δεν εξαρτάται μόνο από τους P και P', αλλά και από το r_0. Για παράδειγμα έστω $P = (\lambda x.x)((\lambda x.x)x)$, $P' = (\lambda x.x)x$, $r_0 = P$ και $r_1 = P'$. Είναι σαφές ότι ο P' προκύπτει από τον P με αναγωγή είτε του redex r_0 είτε του redex r_1. Όμως το σύνολο $\{r_0\}$ δεν έχει κανένα υπόλοιπο ως προς το r_0 ενώ έχει ένα υπόλοιπο ως προς το r_1.*

Έστω $P \in \Lambda$. Μια ακολουθία β-αναγωγών, B, από τον P αποτελείται από μια πεπερασμένη ακολουθία όρων $(P_0 = P)$, $P_1, \ldots, P_n$. Η ακολουθία B αντιστοιχεί και σε μια ακολουθία από redexes $r_0, \ldots, r_{n-1}$ έτσι ώστε $r_i \in P_i$ και ο P_{i+1} να προκύπτει από τον P_i ανάγοντας το redex r_i ($0 \leqslant i < n$). Θα λέμε ότι η ακολουθία B οδηγεί στον P_n ή ότι ο όρος P_n είναι το **αποτέλεσμα** της B.

Έστω τώρα $\mathcal{R}$ ένα σύνολο από redexes του P. Θα ορίσουμε το σύνολο των υπολοίπων του $\mathcal{R}$ στον P_n ως προς την ακολουθία B με επαγωγή στο n. Ο ορισμός 3.10 καλύπτει την περίπτωση $n = 1$. Για $n > 1$ έστω $\mathcal{R}_{n-1}$ το σύνολο των υπολοίπων του $\mathcal{R}$ στον P_{n-1} και έστω r_{n-1} το redex του P_{n-1} το οποίο μας οδηγεί στον P_n. Το ζητούμενο σύνολο υπολοίπων είναι το σύνολο των υπολοίπων του $\mathcal{R}_{n-1}$ στον P_n ως προς το redex r_{n-1}.

Ορισμός 3.12. Έστω $P \in \Lambda$ και $\mathcal{R}$ ένα σύνολο από redexes του P. Μία **ανάπτυξη** (**development**) του $(P, \mathcal{R})$ είναι μία ακολουθία β-αναγωγών από τον P , έστω D, έτσι ώστε τα αντίστοιχα redexes $r_0, \ldots, r_{n-1}$ να ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες: $r_0 \in \mathcal{R}$ και το r_i ανήκει στα υπόλοιπα του $\mathcal{R}$ ως προς την ακολουθία αναγωγών $r_0, r_1, \ldots, r_{i-1}$ $(1 \leqslant i < n)$. Συμβολικά μπορούμε να γράφουμε $(P, \mathcal{R}) \longrightarrow_d (P_n, \mathcal{R}_n)$ ή απλώς $(P, \mathcal{R}) \longrightarrow_d P_n$ (το $\mathcal{R}_n$ είναι το σύνολο των υπολοίπων του $\mathcal{R}$ στον P_n ως προς την D), οπότε εμμέσως ορίζουμε και τη σχέση $\longrightarrow_d$. Εναλλακτικά μπορούμε να γράφουμε και $P \overset{\mathcal{R}}{\longrightarrow}_d P_n$. Το n θα ονομάζεται **μήκος** της ανάπτυξης.Η ανάπτυξη λέγεται **πλήρης** αν το $\mathcal{R}$ δεν έχει υπόλοιπα στον P_n ως προς την D.

Το επόμενο θεώρημα αποδεικνύει ότι το μήκος κάθε ανάπτυξης του $(P, \mathcal{R})$ είναι φραγμένο.

Ορισμός 3.13 (Θεώρημα Πεπερασμένων Αναπτύξεων). Έστω $P \in \Lambda$ και $\mathcal{R}$ ένα σύνολο από redexes του P. Τότε:

1. Υπάρχει φυσικός αριθμός N έτσι ώστε το μήκος κάθε ανάπτυξης του $(P, \mathcal{R})$ να είναι μικρότερο του N.

2. Κάθε ανάπτυξη του $(P, \mathcal{R})$ μπορεί να επεκταθεί σε μία *πλήρη* ανάπτυξη.

Απόδειξη. Όπως είπαμε κάθε ανάπτυξη του $(P, \mathcal{R})$ αποτελείται από μία πεπερασμένη ακολουθία όρων $(P_0 = P)$, $P_1, \ldots, P_n$, έστω D, μαζί με μια ακολουθία από redexes $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$. Έστω $\mathcal{R}_i$ τα υπόλοιπα του $\mathcal{R}$ ως προς την ακολουθία redexes $r_0, \ldots, r_{i-1}$ $(1 < i \leqslant n)$ και $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}$. Έστω P_i' ο αντιπρόσωπος του $(P_i, \mathcal{R}_i)$, $(0 \leqslant i \leqslant n)$. Έστω r_0' το redex του P_0' του οποίου η εικόνα στον P είναι το r_0. Αν ανάγουμε το r_0' στον P_0' θα πάρουμε τον όρο P_1', ο οποίος από την κατασκευή του θα είναι ο αντιπρόσωπος του $(P_1, \mathcal{R}_1)$. Έτσι ορίζουμε μία ακολουθία όρων $(P_0' = P')$, P_1', $\ldots$, P_n', έστω $B(D)$ έτσι ώστε ο P_i' να είναι ο αντιπρόσωπος του $(P_i, \mathcal{R}_i)$ και εξ'ορισμού να ισχύει ότι το σύνολο των redexes στον P_i' είναι το σύνολο των υπολοίπων του $\mathcal{R}$ ως προς την ακολουθία $r_0, \ldots, r_{i-1}\, (1 < i \leqslant n)$. Έτσι έχουμε μιά σαφή $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ των ακολουθιών D και $B(D)$. Ακόμα το μήκος της D ισούται με το μήκος της $B(D)$. Όμως από το λήμμα 3.6 έχουμε ότι κάθε όρος στο $\Lambda(c)$ είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Άρα κάθε ακολουθία β-αναγωγών που ξεκινάει από τον αντιπρόσωπο του $(P, \mathcal{R})$, άρα και η $B(D)$, τερματίζει. Άρα μπορούμε να θέσουμε ως N το μήκος της μεγαλύτερης τέτοιας ακολουθίας και έτσι αποδείξαμε το 1. Όμως κάθε ακολουθία β-αναγωγών από τον P' μπορεί να επεκταθεί έτσι ώστε να φτάσει στην κανονική μορφή του P'. Αντίστοιχα κάθε ανάπτυξη του $(P, \mathcal{R})$ μπορεί να επεκταθεί ώστε να γίνει πλήρης. Έτσι έχουμε και το 2. □

Με διαφορετικά λόγια το θεώρημα των πεπερασμένων αναπτύξεων μας λέει το εξής: έστω ότι έχουμε έναν όρο P και ότι επιλέγουμε ένα σύνολο από redexes του P, έστω $\mathcal{R}$. Αν, ξεκινώντας από κάποιο στοιχείο του $\mathcal{R}$, ανάγουμε μόνο redexes του $\mathcal{R}$ και υπόλοιπά τους στον P κάποια στιγμή αυτά τα redexes (δηλαδή τα στοιχεία του $\mathcal{R}$ και τα υπόλοιπά τους μετά από μερικές αναγωγές) θα "εξαλειφθούν" από τον P. Αυτό μπορούμε να το μεταφράσουμε σε μια ικανή συνθήκη ισχυρής κανονικοποίησης ως εξής: έστω ότι επιλέγουμε ως $\mathcal{R}$ όλα τα redexes που υπάρχουν στον P και ως r_0 (αρχικό redex) ένα στοιχείο του $\mathcal{R}$. Από την προηγούμενη παρατήρησή μας έχουμε ότι μετά από μερικές β-αναγωγές τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{R}$ και τα υπόλοιπά τους ως προς το r_0 θα εξαλειφθούν από κάθε ακολουθία β-αναγωγών από τον P. Επομένως αν σε κανένα όρο κάθε ακολουθίας β-αναγωγών από τον P δε δημιουργούνται "νέα" redexes (χαρακτηρίζουμε ένα redex ως νέο αν δεν ανήκει στο $\mathcal{R}$ ή στα υπόλοιπά του ως προς το r_0), μετά από μερικές β-αναγωγές θα προκύψει ένας όρος ο οποίος δεν θα έχει καθόλου redexes, δηλαδή μία κανονική μορφή. Το παρακάτω λήμμα (προέρχεται από το [11]) μας επιτρέπει να κάνουμε πιο "απτή" τη συνθήκη ισχυρής κανονικοποίησης που μόλις διατυπώσαμε.

Λήμμα 3.14 (**Αναγκαία συνθήκη για δημιουργία νέων redexes**)**.** Έστω $P \in \Lambda$, $\mathcal{R}$ το σύνολο όλων των redexes του P και $r_0 \in \Lambda$. Αν μετά από την αναγωγή του r_0 προκύψει ένα redex το οποίο δεν ανήκει ούτε στο $\mathcal{R}$ ούτε στα υπόλοιπά του ως προς το r_0 (ένα τέτοιο redex θα ονομάζεται *νέο redex)*) τότε ο όρος P πρέπει να περιέχει υποόρους μίας εκ των παρακάτω μορφών:

1. $(\lambda xy.W)QT$
2. $(\lambda x.W)\lambda y.Q$ με $xV \in SubTerms(W)$ για κάποιο $V \in \Lambda$
3. $(\lambda x.x)(\lambda y.Q)T$

Απόδειξη. Με επαγωγή στον P.

- $P \equiv x \Longrightarrow$ δεν υπάρχουν ούτε μπορούν να δημιουργηθούν redex στον P.
- $P \equiv \lambda x.Z \Longrightarrow$ όποιο νέο redex δημιουργηθεί στον P πρέπει να δημιουργηθεί και στον Z, οπότε το ζητούμενο έπεται από την ε.υ. .

- $P \equiv P_1P_2 \implies$ Έστω ότι ο P_1 είναι αφαίρεση. Δηλαδή $P \equiv (\lambda x.O)P_2$. Εκτός από τις αναγωγές που μπορούν να γίνουν στους όρους O και P_2, για τις οποίες μας καλύπτει η ε.υ., η μόνη περίπτωση να δημιουργηθεί νέο redex από την αναγωγή του ίδιου του P είναι αν η μεταβλητή x εφαρμόζεται σε κάποιον υποόρο του O και ο P_2 είναι λ-αφαίρεση, οπότε έχουμε την περίπτωση 2. Αν P_1 είναι μεταβλητή καλυπτόμαστε από την ε.υ. αφού οι μόνες αναγωγές που μπορούν να γίνουν στον P είναι εντός του P_2. Αν ο P_1 είναι αφαίρεση η μόνη περίπτωση να δημιουργηθεί νέο redex στον P, εκτός των P_1, P_2, είναι αν ο P_1 "μεταμορφωθεί" σε λ-αφαίρεση μετά από κάποιες β-αναγωγές. Μία περίπτωση να γίνει αυτό είναι αν ο P_1 είναι της μορφής $(\lambda xy.W)V$ οπότε μετά από μια β-αναγωγή θα έχουμε $\lambda y.W[x := V]$. Έτσι έχουμε την περίπτωση 1. Μία άλλη περίπτωση για να εμφανιστεί ο τελεστής λ στην αρχή του όρου P_1 είναι αν ο P_1 αποτελείται από εφαρμογή της ταυτοτικής συνάρτησης ($\lambda x.x$) πάνω σε έναν όρο, ο οποίος είναι λ-αφαίρεση. Έτσι έχουμε την περίπτωση 3. $\square$

Έστω $P \in \Lambda$ και έστω $\mathcal{R}$ το σύνολο όλων των redexes του P. Αν σε κανέναν όρο κάθε ανάπτυξης του $(P, \mathcal{R})$ δεν υπάρχουν υποόροι των μορφών 1, 2 και 3 του λήμματος 3.14 τότε ο P είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο αυτή η συνθήκη είναι αρκετά ασθενής.

Κεφάλαιο 4

Η ιδιότητα Church - Rosser

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ακολουθήσουμε κυρίως το [7].

Ορισμός 4.1 (**Ιδιότητα Church-Rosser**). Έστω σύνολο A και έστω $\longrightarrow_R$ μια διμελής σχέση στο A. Λέμε ότι ένα $x \in A$ έχει την ιδιότητα Church-Rosser (CR) ως προς τη σχέση R αν ισχύει ότι (δείτε το σχήμα 4.1):

$$x \longrightarrow_R y \wedge x \longrightarrow_R z \Longrightarrow \exists w : y \longrightarrow_R w \wedge z \longrightarrow_R w$$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "R"] \arrow[dr, "R"'] & \\ y \arrow[dr, dashed, "R"'] & & z \arrow[dl, dashed, "R"] \\ & w & \end{tikzcd}$$

Σχήμα 4.1: Ιδιότητα CR

Θα λέμε ότι το σύνολο B έχει την ιδιότητα CR ως προς τη σχέση $\longrightarrow_R$ αν κάθε $x \in B$ έχει την ιδιότητα CR ως προς τη σχέση $\longrightarrow_R$.

Στο κεφάλαιο αυτό όπου γράφουμε ότι ένας όρος $P \in \Lambda$ έχει την ιδιότητα CR θα εννοούμε ως προς τη σχέση $\longrightarrow_\beta$, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά.

4.1 Η ιδιότητα Church-Rosser για το σύστημα $\mathcal{D}$

Δίνουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $A, B \subseteq \Lambda$ ορίζουμε το παρακάτω σύνολο:

$$A \to B = \{u \in \Lambda | \forall v \in A\, uv \in B\}$$

Ορισμός 4.1.2. **Άμεσο παράγωγο** ενός όρου $W \in \Lambda$ με $W = QP_1 \ldots P_n$ $(n \geqslant 1)$ ονομάζουμε έναν όρο W' με $W' = Q'P'_1 \ldots P'_n$ και $Q \twoheadrightarrow_\beta Q', P_i \twoheadrightarrow_\beta P'_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ (οπότε και $W \twoheadrightarrow_\beta W'$).

Σημειώνουμε πως κάθε όρος είναι άμεσο παράγωγο του εαυτού του και πως αν ο όρος P είναι άμεσο παράγωγο του Q και ο Z του P, τότε ο Z είναι άμεσο παράγωγο και του Q.

Λήμμα 4.1.3. Έστω ότι $P \twoheadrightarrow_\beta Q, P = VV_1 \ldots V_n$ και ότι ο Q δεν είναι άμεσο παράγωγο του P. Τότε ισχύει ότι $\exists P', V', V_1', \ldots, V_n'$ έτσι ώστε ο $P' = (\lambda x.V')V_1' \ldots V_n'$ να είναι άμεσο παράγωγο του P. Δηλαδή θα έχουμε:

$$V \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.V' \,\wedge\, V_i \twoheadrightarrow_\beta V_i'(1 \leqslant i \leqslant n) \,\wedge$$
$$(P = VV_1 \ldots V_n) \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.V')V_1' \ldots V_n' \longrightarrow_\beta V'[x := V_1']V_2' \ldots V_n' \twoheadrightarrow_\beta Q$$

Απόδειξη. Οι μόνες αναγωγές που μπορούν να γίνουν εντός του P είναι οι αναγωγές εντός των όρων V και $V_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ ή η αναγωγή του redex VV_1 - αν ο όρος V είναι (ή γίνει μετά από μερικές αναγωγές) λ-αφαίρεση. Αν όμως γίνουν αναγωγές μόνο εντός των V και V_i ο όρος Q θα πρέπει να είναι άμεσο παράγωγο του P. Άρα θα πρέπει να υπάρχει $V' : V \twoheadrightarrow_\beta \lambda x.V'$ και τα υπόλοιπα έπονται με προφανή τρόπο. □

Ορισμός 4.1.4. Ορίζουμε τα παρακάτω σύνολα:

$$\mathcal{CR} = \{P | P \in \Lambda \,\wedge\, \text{ο } P \text{ έχει την ιδιότητα } CR\}$$
$$\mathcal{CR}_0 = \{P | P \equiv xV_1 \ldots V_n \,\wedge\, V_i \in \mathcal{CR} \ (1 \leqslant i \leqslant n)\}$$

Ορισμός 4.1.5. Έστω $X \subseteq \Lambda$. Το X θα ονομάζεται **κορεσμένο** αν $\forall P, Q, Q_1 \ldots Q_n \in \Lambda$ και $\forall x \in V$ ισχύει ότι:

$$P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \in X \Longrightarrow (\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n \in X$$

Λήμμα 4.1.6. Κάποιες ιδιότητες των κορεσμένων συνόλων:

1. Αν τα $X, Y \subseteq \Lambda$ είναι κορεσμένα τότε και το $X \cap Y$ είναι κορεσμένο.

2. Αν το $Y \subseteq \Lambda$ είναι κορεσμένο τότε και το $X \to Y$ είναι κορεσμένο για κάθε X.

Απόδειξη.

1. $P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \in X \cap Y \Longrightarrow$
   $P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \in X \wedge P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \in Y \Longrightarrow$
   $(\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n \in X \wedge (\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n \in Y \Longrightarrow$
   $(\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n \in X \cap Y$

2. $P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \in X \to Y \Longrightarrow$
   $\forall W \in X \; P[x := Q]Q_1 \ldots Q_nW \in Y \Longrightarrow$
   (το Y είναι κορεσμένο) $\forall W \in X \; (\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_nW \in Y \Longrightarrow$
   $(\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n \in X \to Y$ □

Πρόταση 4.1.7. Το σύνολο $\mathcal{CR}$ είναι κορεσμένο.

Απόδειξη. Έστω ότι $N = P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \in \mathcal{CR}$. Θα δείξουμε ότι το $Z = (\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n$ έχει την ιδιότητα CR. Έστω $V, W \in \Lambda$ με $Z \twoheadrightarrow_\beta V$ και $Z \twoheadrightarrow_\beta W$. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις (δείτε το σχήμα 4.2 για μια διαγραμματική απεικόνηση της απόδειξης του θεωρήματος):

- Ο V είναι άμεσο παράγωγο του Z. Αυτό σημαίνει ότι $\exists P', Q', Q'_1 \ldots Q'_n \in \Lambda$ τέτοια ώστε $P \twoheadrightarrow_\beta P', Q \twoheadrightarrow_\beta Q', Q_1 \twoheadrightarrow_\beta Q'_1, \ldots, Q_n \twoheadrightarrow_\beta Q'_n$ και $V = (\lambda x.P')Q'Q'_1 \ldots Q'_n$. Θέτουμε $V' = P'[x := Q']Q'_1 \ldots Q'_n$. Τότε θα ισχύει ότι $V \longrightarrow_\beta V'$ και από το λήμμα 1.10 $N \twoheadrightarrow_\beta V'$.

- Ο V δεν είναι άμεσο παράγωγο του Z. Τότε από το λήμμα 4.1.3 θα υπάρχουν $P', Q', Q'_1 \ldots Q'_n \in \Lambda$ τέτοια ώστε $P \twoheadrightarrow_\beta P', Q \twoheadrightarrow_\beta Q', Q_1 \twoheadrightarrow_\beta Q'_1, \ldots, Q_n \twoheadrightarrow_\beta Q'_n$ και $Z \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.P')Q'Q'_1 \ldots Q'_n \longrightarrow_\beta P'[x := Q']Q'_1 \ldots Q'_n \twoheadrightarrow_\beta V$. Όμως από το λήμμα 1.10 θα ισχύει και $N \twoheadrightarrow_\beta P'[x := Q']Q'_1 \ldots Q'_n$. Θέτουμε $V' = V$. Άρα ισχύει και $N \twoheadrightarrow_\beta V'$.

Όμοια μπορούμε να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα W' τέτοιο ώστε $W \twoheadrightarrow_\beta W'$ και $N \twoheadrightarrow_\beta W'$. Από την ιδιότητα CR για το N, αφού ισχύει ότι $N \twoheadrightarrow_\beta V'$ και $N \twoheadrightarrow_\beta W'$, θα έχουμε ότι $\exists M : V' \twoheadrightarrow_\beta M$ και $W' \twoheadrightarrow_\beta M$. Όμως από τη μεταβατική ιδιότητα της $\twoheadrightarrow_\beta$ θα ισχύει ότι $V \twoheadrightarrow_\beta M$ και $W \twoheadrightarrow_\beta M$. □

$$\begin{tikzcd}
 & & Z = (\lambda x.P)QQ_1 \ldots Q_n \arrow[dll, two heads, "\beta"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[drr, two heads, "\beta"] & & \\
V \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & & N = P[x := Q]Q_1 \ldots Q_n \arrow[dl, two heads, "\beta"] \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & & W \arrow[dl, two heads, "\beta"] \\
 & V' \arrow[dr, two heads, "\beta"'] & & W' \arrow[dl, two heads, "\beta"] & \\
 & & M & &
\end{tikzcd}$$

Σχήμα 4.2: Διάγραμμα αναγωγών για την απόδειξη της πρότασης 4.1.7

Ορισμός 4.1.8. Ερμηνεία $\mathcal{J}$ ονομάζουμε μία αντιστοίχηση από το σύνολο $U_\mathcal{D}$ (μεταβλητές τύπων του συστήματος $\mathcal{D}$) στα κορεσμένα υποσύνολα του Λ. Η $\mathcal{J}$ αντιστοιχίζει τη μεταβλητή τύπου σ στο σύνολο $[\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$. Επεκτείνουμε την έννοια της ερμηνείας πάνω σε ένα $\sigma \in T_\mathcal{D}$ ως εξής:

- $\sigma \in U_\mathcal{D} \Longrightarrow$ το $[\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$ έχει ήδη οριστεί
- $\sigma = \tau \cap \rho \Longrightarrow [\![\sigma]\!]_\mathcal{J} = [\![\tau]\!]_\mathcal{J} \cap [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$
- $\sigma = \tau \to \rho \Longrightarrow [\![\sigma]\!]_\mathcal{J} = ([\![\tau]\!]_\mathcal{J} \to [\![\rho]\!]_\mathcal{J}) \cap \mathcal{CR}$

Παρατήρηση. *Αντιστοιχίζουμε τους τύπους του συστήματος $\mathcal{D}$ σε κατάλληλα υποσύνολα του Λ για τα οποία θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι υποσύνολα του $\mathcal{CR}$, δηλαδή $\forall \sigma \in T_\mathcal{D}, [\![\sigma]\!]_\mathcal{J} \subseteq \mathcal{CR}$. Συνήθως η ερμηνεία του τύπου $\tau \to \rho$ επιλέγεται να είναι η $[\![\tau]\!]_\mathcal{J} \to [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$. Εμείς αντίθετα επιλέξαμε την $([\![\tau]\!]_\mathcal{J} \to [\![\rho]\!]_\mathcal{J}) \cap \mathcal{CR}$ γιατί διαφορετικά δεν θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $(\mathcal{CR} \to \mathcal{CR}) \subseteq \mathcal{CR}$. Πράγματι έστω $P \in \mathcal{CR} \to \mathcal{CR}$ και έστω $P \twoheadrightarrow_\beta P_1$ και $P \twoheadrightarrow_\beta P_2$.*

Θεωρούμε $x \notin FV(P)$ τότε θα ισχύει ότι $Px \twoheadrightarrow_\beta P_1x$ και $Px \twoheadrightarrow_\beta P_2x$. Επειδή $x \in \mathcal{CR}$ έχουμε ότι $Px \in \mathcal{CR}$, οπότε υπάρχει ένα P_3 τέτοιο ώστε $P_1x \twoheadrightarrow_\beta P_3$ και $P_2x \twoheadrightarrow_\beta P_3$. Αν το P_3 είναι άμεσο παράγωγο του P_1x τότε θα είναι και του P_2x, άρα υπάρχει ένα P_4 τέτοιο ώστε $P_1 \twoheadrightarrow_\beta P_4$ και $P_2 \twoheadrightarrow_\beta P_4$. Οπότε σε αυτήν την περίπτωση $P \in \mathcal{CR}$. Αν όμως το P_3 δεν είναι άμεσο παράγωγο του P_1x, άρα ούτε και του P_2x, είναι αδύνατο να αποδειχθεί ότι ο P έχει την ιδιότητα CR (δείτε σχετικά το [14]).

Πρόταση 4.1.9. Για κάθε ερμηνεία $\mathcal{J}$ και κάθε $\sigma \in T_\mathcal{D}$, το σύνολο $[\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$ είναι κορεσμένο.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του σ.

- $\sigma \in U_\mathcal{D} \Longrightarrow$ το $[\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$ είναι κορεσμένο εξ ορισμού
- $\sigma = \tau \cap \rho \Longrightarrow$ τα $[\![\tau]\!]_\mathcal{J}$, $[\![\rho]\!]_\mathcal{J}$ είναι κορεσμένα από ε.υ. άρα από το λήμμα 4.1.6 το ίδιο θα είναι και το $[\![\tau]\!]_\mathcal{J} \cap [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$
- $\sigma = \tau \rightarrow \rho \Longrightarrow$ τα $[\![\tau]\!]_\mathcal{J}$, $[\![\rho]\!]_\mathcal{J}$ είναι κορεσμένα από ε.υ., άρα από το λήμμα 4.1.6 το ίδιο θα είναι και το $[\![\tau]\!]_\mathcal{J} \rightarrow [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$. Το $\mathcal{CR}$ είναι κορεσμένα από την πρόταση 4.1.7, άρα πάλι από το λήμμα 4.1.6 το $[\![\sigma]\!]_\mathcal{J} = ([\![\tau]\!]_\mathcal{J} \rightarrow [\![\rho]\!]_\mathcal{J}) \cap \mathcal{CR}$ θα είναι επίσης κορεσμένο. □

Λήμμα 4.1.10 (Επάρκειας). Έστω ερμηνεία $\mathcal{J}$ τέτοια ώστε $\forall \sigma \in T_\mathcal{D}\ \mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\sigma]\!]_\mathcal{J} \subseteq \mathcal{CR}$. Έστω ακόμα ότι $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash_\mathcal{D} P : \sigma$. Αν υπάρχουν όροι $Q_i \in [\![\sigma_i]\!]_\mathcal{J}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ τότε ισχύει ότι $P[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in [\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην τυποποίηση του P. Χρησιμοποιούμε την ίδια αρίθμηση με τους κανόνες του ορισμού 2.2.2.

1. $P \equiv x \Longrightarrow$ θα πρέπει να υπάρχει κάποιο i έτσι ώστε $x \equiv x_i$ και $\sigma \equiv \sigma_i$. Επομένως $P[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] = Q_i \in [\![\sigma_i]\!]_\mathcal{J} = [\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$ από υπόθεση.

2. $P \equiv \lambda x.Q \Longrightarrow \exists \tau, \rho \in T_\mathcal{D} : \sigma = \tau \rightarrow \rho \wedge x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n, x : \tau \vdash Q : \rho$. Λόγω της σύμβασης των μεταβλητών μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x \notin FV(Q_i) \wedge x \neq x_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$. Έστω $W \in [\![\tau]\!]_\mathcal{J}$, τότε από ε.υ. θα ισχύει ότι $Q[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n, x := W] = Q[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n][x := W] \in [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$. Όμως αφού το $[\![\rho]\!]_\mathcal{J}$ είναι κορεσμένο (πρόταση 4.1.9) θα ισχύει ότι $(\lambda x.Q)[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n]W \in [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$. Δηλαδή $(\lambda x.Q)[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] = P[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in [\![\tau]\!]_\mathcal{J} \rightarrow [\![\rho]\!]_\mathcal{J}$. Από ε.υ. ισχύει ότι $\mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\tau]\!]_\mathcal{J} \subseteq \mathcal{CR}$. Αν στην προηγούμενη ανάλυση θεσουμε $W = x\,(x \in \mathcal{CR}_0$ άρα και $x \in [\![\tau]\!]_\mathcal{J})$ θα έχουμε ότι $Q[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n, x := x] = Q[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in [\![\tau]\!]_\mathcal{J}$ άρα και $Q[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in \mathcal{CR}$. Οπότε αφού η σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι λ-συμβατή θα ισχύει ότι $(\lambda x.Q)[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in \mathcal{CR}$. Οπότε $P[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in ([\![\tau]\!]_\mathcal{J} \rightarrow [\![\rho]\!]_\mathcal{J}) \cap \mathcal{CR} = [\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$.

3. $P \equiv P_1P_2 \Longrightarrow \exists \tau \in T_\mathcal{D}$:
$\dfrac{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash P_1 : \tau \rightarrow \sigma \qquad x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash P_2 : \tau}{x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash P_1P_2 : \sigma}$. Από ε.υ. θα ισχύει ότι $P_1[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in ([\![\tau]\!]_\mathcal{J} \rightarrow [\![\sigma]\!]_\mathcal{J}) \cap \mathcal{CR}$ και $P_2[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in [\![\tau]\!]_\mathcal{J}$. Επειδή όμως $[\![\tau]\!]_\mathcal{J} \subseteq \mathcal{CR}$ θα ισχύει ότι $P_1P_2[x_1 := Q_1, \ldots, x_n := Q_n] \in [\![\sigma]\!]_\mathcal{J}$.

4. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα από την επαγωγική υπόθεση.

5. Το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα από την επαγωγική υπόθεση. □

Λήμμα 4.1.11. $Y \subseteq X \ \wedge \ W \subseteq Z \Longrightarrow X \to W \subseteq Y \to Z$

Απόδειξη. $u \in X \to W \Longrightarrow \forall v \in X \ uv \in W \overset{(Y \subseteq X,\, W \subseteq Z)}{\Longrightarrow} \forall v \in Y \ uv \in Z \Longrightarrow u \in Y \to Z$ □

Λήμμα 4.1.12. $\mathcal{CR}_0 \subseteq \mathcal{CR}$

Απόδειξη. Έστω $P = xP_1 \dots P_n \in \mathcal{CR}_0$ και $P \twoheadrightarrow_\beta P'$, $P \twoheadrightarrow_\beta P''$. Οι μόνες β-αναγωγές που μπορούν να γίνουν στον P μπορούν να γίνουν εντός των όρων $P_1 \dots P_n$. Οπότε οι P', P'' θα είναι άμεσα παράγωγα του P, δηλαδή $P' = xP'_1 \dots P'_n$ και $P'' = xP''_1 \dots P''_n$ με $P_i \twoheadrightarrow_\beta P'_i$ και $P_i \twoheadrightarrow_\beta P''_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Όμως από τον ορισμό του $\mathcal{CR}_0$ οι $P_1 \dots P_n$ έχουν την ιδιότητα CR. Οπότε θα υπάρχουν $P'''_i \ : \ P'_i \twoheadrightarrow_\beta P'''_i \wedge P''_i \twoheadrightarrow_\beta P'''_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Και επειδή η σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι λ-συμβατή έχουμε ότι $P' \twoheadrightarrow_\beta P'''$ και $P'' \twoheadrightarrow_\beta P'''$, δηλαδή $P \in \mathcal{CR}$ (δείτε το διάγραμμα 4.3). □

$$
\begin{tikzcd}
& xP_1P_2\dots P_n \arrow[dl, two heads, "\beta"'] \arrow[dr, two heads, "\beta"] & \\
xP'_1P'_2\dots P'_n \arrow[dr, dashed, two heads, "\beta"] & & xP_1P_2\dots P_n \arrow[dl, dashed, two heads, "\beta"'] \\
& xP'''_1P'''_2\dots P'''_n &
\end{tikzcd}
$$

Σχήμα 4.3: Διάγραμμα αναγωγών για την απόδειξη του λήμματος 4.1.12

Λήμμα 4.1.13. $\mathcal{CR}_0 \subseteq (\mathcal{CR} \to \mathcal{CR}_0)$

Απόδειξη. Έστω $P = xP_1 \dots P_n \in \mathcal{CR}_0$ και $Q \in \mathcal{CR}$. Τότε το $PQ = xP_1 \dots P_nQ$ ανήκει στο $\mathcal{CR}_0$ σύμφωνα με τον ορισμό 4.1.4. Άρα $P \in \mathcal{CR} \to \mathcal{CR}_0$. □

Λήμμα 4.1.14. Έστω ερμηνεία $\mathcal{J}$ τέτοια ώστε $\forall \sigma \in U_{\mathcal{D}} \ : \ \mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$. Τότε θα ισχύει ότι $\forall \sigma \in {}_{\mathcal{D}} \ : \ \mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του $\sigma \in {}_{\mathcal{D}}$.

- $\sigma \in U_{\mathcal{D}} \Longrightarrow$ το ζητούμενο ισχύει από υπόθεση.
- $\sigma = \tau \cap \rho \Longrightarrow$ από ε.υ. $\mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\tau]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$ και $\mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\rho]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$ οπότε προφανώς $\mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\tau]\!]_{\mathcal{J}} \cap [\![\rho]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$.
- $\sigma = \tau \to \rho \Longrightarrow [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} = ([\![\tau]\!]_{\mathcal{J}} \to [\![\rho]\!]_{\mathcal{J}}) \cap \mathcal{CR}$, οπότε προφανώς $[\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$. Από ε.υ. ισχύει ότι $\mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\rho]\!]_{\mathcal{J}}$ και $[\![\tau]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$. Οπότε από το λήμμα 4.1.11 θα ισχύει ότι $\mathcal{CR} \to \mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\tau]\!]_{\mathcal{J}} \to [\![\rho]\!]_{\mathcal{J}}$ και από το λήμμα 4.1.13 θα ισχύει ότι $\mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\tau]\!]_{\mathcal{J}} \to [\![\rho]\!]_{\mathcal{J}} = [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}}$. Ακόμα από το λήμμα 4.1.12 ισχύει ότι $\mathcal{CR}_0 \subseteq \mathcal{CR}$. Άρα $\mathcal{CR}_0[\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}}$. □

Θεώρημα 4.1.15 (**Church-Rosser για το σύστημα $\mathcal{D}$**). Έστω $P \in \Lambda$. Αν ο P είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$ τότε ο P έχει την ιδιότητα CR.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ερμηνεία $\mathcal{J}$ τέτοια ώστε $\forall \sigma \in U_{\mathcal{D}} : \mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$. Τότε από το λήμμα 4.1.14 θα ισχύει ότι $\forall \sigma \in T_{\mathcal{D}} : \mathcal{CR}_0 \subseteq [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$. Έστω $x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n \vdash P : \sigma$ η τυποποίηση του P. Αφού $x_i \in \mathcal{CR}_0$ θα ισχύει ότι $x_i \in [\![\sigma_i]\!]_{\mathcal{J}}$. Οπότε από το λήμμα 4.1.10 θα ισχύει ότι $P[x_1 := x_1, \ldots, x_n := x_n] \in [\![\sigma]\!]_{\mathcal{J}} \subseteq \mathcal{CR}$. Δηλαδή ο P έχει την ιδιότητα CR. □

4.2 Η ιδιότητα Church-Rosser για τις αναπτύξεις

Θα δώσουμε δύο διαφορετικές αποδείξεις για την ισχύ της ιδιότητας CR ως προς την σχέση $\longrightarrow_d$. Η πρώτη σχετίζεται με την τυποποίηση στο σύστημα $\mathcal{D}$ ενώ η δεύτερη με την τυποποίηση στο σύστημα $\lambda_{\rightarrow}$. Για την κατανόηση του περιεχομένου αυτής της ενότητας χρειάζονται οι ορισμοί του κεφαλαίου 3.

Θεώρημα 4.2.1 (**Church-Rosser για αναπτύξεις**). Έστω $P \xrightarrow{\mathcal{F}_1}_d P_1$ και $P \xrightarrow{\mathcal{F}_2}_d P_2$. Τότε υπάρχει ένα σύνολο από redexes του P_1 έστω $\mathcal{F}^1$(αντίστοιχα $\mathcal{F}^2$ για το P_2) και όρος P_3 έτσι ώστε $P_1 \xrightarrow{\mathcal{F}^1}_d P_3$ ($P_2 \xrightarrow{\mathcal{F}^2}_d P_3$ αντίστοιχα).

Απόδειξη. Αφού $P \xrightarrow{\mathcal{F}_1}_d P_1$ τότε υπάρχει ένα σύνολο από redexes του P_1, έστω $\mathcal{F}_1^1$ (αντίστοιχα $\mathcal{F}_2^2$ για τον P_2) έτσι ώστε $(P, \mathcal{F}_1) \longrightarrow_d (P_1, \mathcal{F}_1^1)$ (αντίστοιχα $(P, \mathcal{F}_2) \longrightarrow_d (P_2, \mathcal{F}_2^2)$) και το $\mathcal{F}_1^1$ να είναι το σύνολο των υπολοίπων του $\mathcal{F}_1$ στον P_1 ως προς τον P (αντίστοιχα για το $\mathcal{F}_2^2$ ως προς τον $\mathcal{F}_2$). Θεωρούμε τις αναπτύξεις $(P, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \longrightarrow_d (P_1, \mathcal{F}_1^1 \cup \mathcal{F}_2^1)$ και $(P, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2) \longrightarrow_d (P_2, \mathcal{F}_1^2 \cup \mathcal{F}_2^2)$, όπου $\mathcal{F}_2^1$ είναι τα υπόλοιπα των redexes $\mathcal{F}_2$ στον όρο P_1 και $\mathcal{F}_1^2$ είναι τα υπόλοιπα των redexes $\mathcal{F}_1$ στον όρο P_2 από τις αντίστοιχες αναπτύξεις. Από το λήμμα 3.9 μπορούμε να βρούμε τους μοναδικούς αντιπροσώπους των ζευγών $(P, \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$, $(P_1, \mathcal{F}_1^1 \cup \mathcal{F}_2^1)$ και $(P_2, \mathcal{F}_1^2 \cup \mathcal{F}_2^2)$, έστω T, T_1 και T_2 αντίστοιχα. Φυσικά θα ισχύει ότι $T \twoheadrightarrow_\beta T_1$ και $T \twoheadrightarrow_\beta T_2$. Όμως από το λήμμα 3.5 ο T θα είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$ αφού ανήκει στο $\Lambda(c)$. Άρα από το λήμμα 4.1.15 ο T θα έχει την ιδιότητα CR. Οπότε θα υπάρχει $T_3 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $T_1 \twoheadrightarrow_\beta T_3$ και $T_2 \twoheadrightarrow_\beta T_3$. Από το λήμμα 3.9 θα υπάρχει μοναδικό $P_3 \in \Lambda$ και ένα σύνολο από redexes του P_3, έστω $\mathcal{F}_3$, έτσι ώστε ο T_3 να είναι ο μοναδικός αντιπρόσωπος του ζεύγους $(P_3, \mathcal{F}_3)$. Επομένως τα ζητούμενα σύνολα redexes είναι $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^1 \cup \mathcal{F}_2^1$ και $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}_1^2 \cup \mathcal{F}_2^2$ και ο ζητούμενος όρος ο P_3. □

Είδαμε λοιπόν ότι η ισχύς της ιδιότητας CR για τις αναπτύξεις προκύπτει ως άμεση συνέπεια του θεωρήματος 4.1.15 και του λήμματος 3.9. Τώρα θα δώσουμε μία άλλη απόδειξη του θεωρήματος 4.2.1 χρησιμοποιώντας τυποποίηση στο σύστημα $\lambda_{\rightarrow}$ αντί για το σύστημα $\mathcal{D}$.

Θεώρημα 4.2.2 (**Church-Rosser για το σύστημα $\boldsymbol{\lambda_{\rightarrow}}$**). Έστω $P \in \Lambda$. Αν ο P είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\lambda_{\rightarrow}$ τότε έχει την ιδιότητα CR.

Απόδειξη. Δείτε το [5]. □

Θα δούμε πως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προηγούμενο λήμμα για να αποδείξουμε το θεώρημα 4.2.1. Ως πρώτο βήμα δίνουμε μία προσαρμογή της μεθόδου για το μαρκάρισμα των "ανεπιθύμητων" redexes στους λ-όρους, που αρχικά παρουσιάσαμε στο κεφάλαιο 3. Ο παρακάτω ορισμός είναι το ανάλογο του ορισμού 3.2.

Ορισμός 4.2.3. Έστω $\mathcal{C} = \{c_0, c_1, \dots\}$ ένα σύνολο μεταβλητών ($\mathcal{C} \subset V$). Ορίζουμε το σύνολο $\Lambda(\vec{c})$ επαγωγικά ως εξής:

- $x \in V \setminus \mathcal{C} \Longrightarrow x \in \Lambda(\vec{c})$
- $x \in V \setminus \mathcal{C} \ \wedge \ M \in \Lambda(\vec{c}) \Longrightarrow \lambda x.M \in \Lambda(\vec{c})$
- $M \in \Lambda(\vec{c}) \ \wedge \ N \in \Lambda(\vec{c}) \ \wedge \ c_i \in \mathcal{C} \Longrightarrow c_i MN \in \Lambda(\vec{c})$
- $x \in V \setminus \mathcal{C} \ \wedge \ M \in \Lambda(\vec{c}) \ \wedge \ N \in \Lambda(\vec{c}) \Longrightarrow (\lambda x.M)N \in \Lambda(\vec{c})$

Όπως και για το σύνολο $\Lambda(c)$ παρατηρούμε ότι ισχύει $\Lambda(\vec{c}) \subset \Lambda$. Πράγματι $c_0,\, \lambda c_1.x,\, c_2 M \in \Lambda \setminus \Lambda(\vec{c})$.

Το παρακάτω λήμμα είναι το ανάλογο του 3.5.

Λήμμα 4.2.4. Έστω $P \in \Lambda(\vec{c})$, σύνολο μεταβλητών $\mathcal{C}_0 = \{c_1, \dots, c_n\} \subset \mathcal{C}$ και περιβάλλον Γ έτσι ώστε $FV(P) \subseteq dom(\Gamma)$ και $\mathcal{C}_0 \cap dom(\Gamma) = \varnothing$. Έστω ακόμα ότι κάθε ένα από τα στοιχεία του $\mathcal{C}_0$ εμφανίζεται το πολύ μία φορά στον P. Τότε $\exists \sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n \in T_{\mathcal{D}}$ τέτοια ώστε $\Gamma,\, c_1 : \sigma_1, \dots, c_n : \sigma_n \vdash P : \sigma$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στον P.

- $P \equiv x \ \wedge \ x \notin \mathcal{C}_0 \Longrightarrow$ αφού $x \in dom(\Gamma)$ ο τύπος σ είναι δοσμένος από την υπόθεση, ενώ για $\sigma_i\, (1 \leqslant i \leqslant n)$ μπορούμε να επιλέξουμε όποιους τύπους θέλουμε
- $P \equiv \lambda x.Q \ \wedge \ x \notin \mathcal{C}_0 \Longrightarrow$ από ε.υ. και επειδή $FV(Q) \subseteq FV(P)$ θα υπάρχουν τύποι $c_i (1 \leqslant i \leqslant n)$ τέτοιοι ώστε $\Gamma, x : \tau,\ c_1 : \sigma_1, \dots, c_n : \sigma_n \vdash Q : \sigma$. Οπότε η τυποποίηση του P προκύπτει εύκολα
- $P \equiv c_i P_1 P_2 \ \wedge \ c_i \in \mathcal{C}_0 \Longrightarrow$ από υπόθεση η μεταβλητή c_i δεν μπορεί να εμφανίζεται ούτε στον P_1 ούτε στον P_2. Το ίδιο φυσικά ισχύει για όλα τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{C}_0$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι στον όρο P_1 εμφανίζονται οι μεταβλητές $c_1, \dots, c_{i-1}$ ενώ στον P_2 οι $c_{i+1}, \dots, c_n$. Έτσι από ε.υ. έχουμε ότι υπάρχουν τύποι $\tau_1, \tau_2, \sigma_1, \dots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \sigma_n$ τέτοιοι ώστε $\Gamma, c_1 : \sigma_1, \dots, c_n : \sigma_{i-1} \vdash P_1 : \tau_1 \wedge \Gamma, c_{i+1} : \sigma_1, \dots, c_n : \sigma_n \vdash P_2 : \tau_2$. Το επιθυμητό αποτέλεσμα προκύπτει εύκολα αν θέσουμε $\sigma_i = \tau_1 \to \tau_2 \to \sigma$ και εφαρμόσουμε τον κανόνα $\to$-απαλοιφή δύο φορές
- $P \equiv (\lambda x.P_1)P_2 \Longrightarrow$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup$ όπου $dom(\Gamma_1) = FV(P_1) \setminus \{x\}$ και $dom(\Gamma_2) = FV(P_2)$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να θεωρήσουμε πως στον όρο P_1 εμφανίζονται οι μεταβλητές $c_1, \dots c_i$ και στον P_2 οι $c_{i+1}, \dots c_n$. Έτσι από ε.υ. θα έχουμε $\Gamma_1, x : \tau, c_1 : \sigma_1, \dots, c_i : \sigma_i \vdash P_1 : \tau_1$ και $\Gamma_2, c_{i+1} : \sigma_{i+1}, \dots, c_n : \sigma_n \vdash P_2 : \tau_2$. Από τον ορισμό του $\Lambda(\vec{c})$ γνωρίσουμε ότι μία μεταβλητή είναι αδύνατο να εφαρμοστεί σε κάποιον όρο, οπότε στην πρώτη από τις προηγούμενες δύο τυποποιήσεις το τ (δηλαδή ο τύπος που ανατίθεται στο x) είναι ένας αυθαίρετος τύπος. Οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\tau = \tau_2$. Έτσι έχουμε

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma_1,\, x:\tau_2,\, c_1:\sigma_1,\,\ldots,\,c_i:\sigma_i \vdash P_1:\tau_1}{\Gamma_1,\, c_1:\sigma_1,\,\ldots,\,c_i:\sigma_i \vdash \lambda x.P_1:\tau_2\rightarrow\tau_1} \quad \Gamma_2,\, c_1:\sigma_1,\,\ldots,\,c_n:\sigma_n \vdash P_2:\tau_2}{\Gamma,\, c_1:\sigma_1,\,\ldots,\,c_n:\sigma_n \vdash (\lambda x.P_1)P_2}$$

□

Έτσι αποδείξαμε ότι κάθε όρος στο $\Lambda(\vec{c})$ είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$, άρα ισχυρά κανονικοποιήσιμος, με την προϋπόθεση ότι κάθε στοιχείο του συνόλου $\Lambda(\vec{c})$ εμφανίζεται το πολύ μια φορά σε αυτόν.

Παρατηρούμε ότι αν σε έναν όρο του $\Lambda(\vec{c})$ αντικαταστήσουμε κάθε μεταβλητή $c_i \in \mathcal{C}$ με τη μεταβλητή c παίρνουμε τον αντίστοιχο όρο του $\Lambda(c)$. Αντίστροφα αν σε έναν όρο του $\Lambda(c)$ αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση της μεταβλητής c με μία *διαφορετική* μεταβλητή του συνόλου $\mathcal{C}$ θα πάρουμε έναν αντίστοιχο όρο από το $\Lambda(\vec{c})$. Οπότε τα λήμματα 3.3 και 3.4 θα ισχύουν και για το σύνολο $\Lambda(\vec{c})$. Επίσης το σύνολο των redexes που υπάρχουν σε έναν όρο του $\Lambda(c)$ θα είναι ακριβώς το ίδιο με το σύνολο των redexes που υπάρχουν σε έναν οποιονδήποτε αντίστοιχό του από το $\Lambda(\vec{c})$. Έτσι από το λήμμα 3.9 μπορούμε να αντιστοιχήσουμε σε κάθε ζεύγος $(P, \mathcal{R})$ ($P \in \Lambda$ και $\mathcal{R} \subseteq Red(P)$) έναν (όχι απαραίτητα μοναδικό) όρο του $\Lambda(\vec{c})$. Με βάση αυτές τις αναλογίες το θεώρημα $4.2.1$ μπορεί να αποδειχθεί εύκολα αντικαθιστώντας κάθε όρο του συνόλου $\Lambda(c)$ με έναν αντίστοιχό του από το σύνολο $\Lambda(\vec{c})$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα 4.2.2 αντί για το 4.1.15.

4.3 Η ιδιότητα Church-Rosser για τον καθαρό λάμβδα λογισμό

Η απόδειξη της ιδιότητας Church-Rosser για το λ-λογισμό χωρίς τύπους είναι περισσότερο γνωστή ως *θεώρημα Church-Rosser*. Η πρώτη απόδειξη γι' αυτή την ιδιότητα δόθηκε από τους Alonzo Church και John Barkley Rosser Sr. το 1936 στο [3]. Ακολούθησαν αρκετές ακόμα (δείτε για παράδειγμα το [1], σελίδες 26-29 ή το [9], σελίδες 20-22). Η απόδειξη που δίνουμε εδώ προκύπτει ως άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Church-Rosser για τις αναπτύξεις (4.2.1).

Ορισμός 4.3.1 (1-αναγωγή). Ορίζουμε μία διμελή σχέση στο σύνολο Λ την οποία ονομάζουμε 1-αναγωγή και τη συμβολίζουμε με $\longrightarrow_1$ ως εξής:

$$P \longrightarrow_1 Q \Longleftrightarrow \exists \mathcal{R}, \mathcal{F} : (P, \mathcal{R}) \longrightarrow_d (Q, \mathcal{F})$$

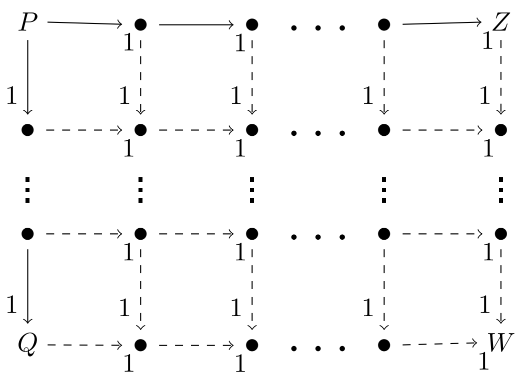
Λήμμα 4.3.2. Η σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$ είναι το μεταβατικό κλείσιμο της $\longrightarrow_1$.

Απόδειξη. Έστω $P \twoheadrightarrow_\beta Q \Longleftrightarrow P \equiv P_1 \longrightarrow_\beta P_2 \longrightarrow_\beta \ldots \longrightarrow_\beta P_n \equiv Q$. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο n. Αν $n = 0$ τότε $P \equiv Q$ και το ζητούμενο είναι προφανές. Αν το ζητούμενο ισχύει για όλους τους φυσικούς μέχρι το $n-1$ τότε από ε.υ. θα έχουμε $P_1 \longrightarrow_1 P_2 \longrightarrow_1 \ldots \longrightarrow_1 P_{n-1}$. Έστω r το redex του P_{n-1} το οποίο όταν αναχθεί μας δίνει τον όρο P_n. Τότε όμως ισχύει $(P_{n-1}, \{r\}) \longrightarrow_d (P_n, \emptyset)$, δηλαδή $P_{n-1} \longrightarrow_1 P_n$. □

Τονίζουμε πως στο προηγούμενο λήμμα είναι απαραίτητο να πάρουμε το μεταβατικό κλείσιμο της σχέσης $\longrightarrow_1$ γιατί στη β-αναγωγή επιτρέπεται να ανάγουμε νέα redexes ενώ στις αναπτύξεις όχι. Με άλλα λόγια αυτό που δηλώνει το προηγούμενο λήμμα είναι ότι κάθε ακολουθία β-αναγωγών είναι ισοδύναμη με μία ακολουθία αναπτύξεων με ακριβώς τα ίδια άκρα.

Θεώρημα 4.3.3 (**Church-Rosser**). Το σύνολο Λ έχει την ιδιότητα CR.

Απόδειξη. Ουσιαστικά πρέπει να δείξουμε ότι: $\forall P, Q, Z \in \Lambda\, (P \twoheadrightarrow_\beta Q \wedge P \twoheadrightarrow_\beta Z \Longrightarrow \exists W \in \Lambda : Q \twoheadrightarrow_\beta W \;\wedge\; Z \twoheadrightarrow_\beta W)$. Αυτό όμως προκύπτει άμεσα από το λήμμα 4.3.2 και το θεώρημα $4.2.1$, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.4(με συνεχείς γραμμές συμβολίζουμε τις αναγωγές που ήδη υπάρχουν, ενώ με διακεκομένη αυτές που αποδεικνύουμε ότι υπάρχουν με χρήση της ιδιότητας CR για τις αναπτύξεις). □



Σχήμα 4.4: Διάγραμμα αναγωγών για την απόδειξη του θεωρήματος 4.3.3

Δίνουμε μία πολύ σημαντική συνέπεια του θεωρήματος Church-Rosser.

Λήμμα 4.3.4 (**Μοναδικότητα Κανονικής Μορφής**). Κάθε κανονικοποιήσιμος όρος έχει μοναδική κανονική μορφή.

Απόδειξη. Έστω $M \in WN$ και $N_1, N_2 \in NF$ έτσι ώστε $M \twoheadrightarrow_\beta N_1$, $M \twoheadrightarrow_\beta N_2$ και $N_1 \neq N_2$. Από το θεώρημα 4.3.3 θα υπάρχει N_3 τέτοιο ώστε $N_1 \twoheadrightarrow_\beta N_3$ και $N_2 \twoheadrightarrow_\beta N_3$. Όμως επειδή μία κανονική μορφή μπορεί να ανάγεται μόνο στον εαυτό της θα ισχύει ότι $N_1 \equiv N_3 \equiv N_3$. □

Κεφάλαιο 5

Το Ω-θεώρημα

Στη σελίδα 11 αναφερθήκαμε στον όρο $\Omega = \omega\omega$ με $\omega = \lambda x.xx$, ο οποίος είναι το πιο γνωστό παράδειγμα όρου, ο οποίος είναι αρχή μιας άπειρης ακολουθίας β-αναγωγών. Πράγματι μια ακολουθία β-αναγωγών με αρχή το Ω είναι η $\Omega \longrightarrow_\beta \Omega \longrightarrow_\beta \ldots$. Θέτουμε $W = \lambda y.a(yy)$. Ένας άλλος όρος, ο οποίος αποτελεί αφετηρία άπειρης ακολουθίας β-αναγωγών είναι ο WW. Εύκολα βλέπουμε ότι $W \longrightarrow_\beta a(WW) \longrightarrow_\beta aa(WW) \longrightarrow_\beta \ldots$. Θέτουμε $Y = \lambda xy.y(xx)y$. Ισχύει ότι $YY \longrightarrow_\beta \lambda y.y(YY)y \longrightarrow_\beta \lambda y.y(\lambda y.y(YY)y)y \longrightarrow_\beta \ldots$. Οπότε και ο YY[1] αποτελεί αφετηρία μιας άπειρης ακολουθίας β-αναγωγών. Αν αναζητήσουμε και άλλους όρους από τους οποίους ξεκινούν άπειρες ακολουθίες β-αναγωγών θα παρατηρήσουμε ότι όλοι έχουν ένα κοινό χαρακτηριστικό : δύο ανεξάρτητες λ-αφαιρέσεις με τη δεσμευμένη μεταβλητή να εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές στην εμβέλεια του τελεστή λ (κάθε τέτοια αφαίρεση θα την αποκαλούμε **διπλασιαστική αφαίρεση**). Χωρίς ιδιαίτερη ανάλυση μπορούμε να δούμε ότι κάθε όρος από τον οποίο ξεκινάει άπειρη ακολουθία ανγωγών θα έπρεπε να έχει τουλάχιστον μία διπλασιαστική αφαίρεση - διαφορετικά κάθε αναγωγή ενός redex της μορφής $(\lambda x.P)Q$ θα μείωνε το μέγεθος του όρου (αφού στο contractum θα υπήρχε μία λιγότερη αφαίρεση από το redex και ο όρος Q θα εμφανιζόταν το πολύ μία φορά) με αποτέλεσμα κάποια στιγμή να οδηγηθούμε σε κανονική μορφή. Το ενδιαφέρον όμως - και φυσικά όχι προφανές να αποδειχθεί - είναι ότι κάθε όρος που είναι αρχή μιας ατέρμονης ακολουθίας αναγωγών έχει *τουλάχιστον δύο* ανεξάρτητες διπλασιαστικές αφαιρέσεις (στα επόμενα θα ορίσουμε τη διπλασιαστική αφαίρεση με σαφήνεια). Αυτό το αποτέλεσμα είναι γνωστό ως Ω-θεώρημα και αποδείχθηκε πρώτη φορά από τον M. H. Sørensen στο [13]. Η μέθοδος που ακολούθησε ο Sørensen είναι συνοπτικά η εξής: όρισε μία μετρική πάνω στο μέγεθος των λ-όρων και απέδειξε ότι αν ένας όρος δεν περιέχει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες διπλασιαστικές αφαιρέσεις το μέγεθός του μειώνεται σε κάθε ακολουθία β-αναγωγών που ξεκινά από αυτόν, οπότε αυτός ο όρος είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Εδώ θα παρουσιάσουμε την απόδειξη που βρίσκεται στο [8], δηλαδή θα δείξουμε πως κάθε όρος που δεν περιέχει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες διπλασιαστικές αφαιρέσεις είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$ άρα από το θεώρημα 2.2.7 ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιούμε προέρχεται από τα [8, 12].

[1] ο όρος YY είναι ο τελεστής σταθερού σημείουτου Turing

Ορισμός 5.1. Ορίζουμε μία διμελή σχέση πάνω στο σύνολο Λ την οποία θα συμβολίζουμε με $\trianglelefteq$ ως εξής:

- $x \in V \Longrightarrow x \trianglelefteq x$
- $P \trianglelefteq Q \Longrightarrow \lambda x.P \trianglelefteq \lambda x.Q$
- $P \trianglelefteq Q \;\wedge\; x \notin FV(P) \Longrightarrow P \trianglelefteq \lambda x.Q$
- $P \trianglelefteq Q \Longrightarrow P \trianglelefteq QZ \;\wedge\; P \trianglelefteq ZQ$
- $P \trianglelefteq Q \;\wedge\; W \trianglelefteq Z \Longrightarrow PW \trianglelefteq QZ$

Το $P \trianglelefteq Q$ θα το διαβάζουμε ως "ο P είναι **substring** του Q".

Παράδειγμα 5.2.

- $x \trianglelefteq xy$
- $x \ntrianglelefteq \lambda x.xzy$
- $\omega \trianglelefteq \lambda v.vzyv$
- $\omega \ntrianglelefteq x\lambda x.xz$
- $\Omega \trianglelefteq YY$, όπου $Y = \lambda x.\lambda y.y(xx)y$
- $\lambda x.xy \ntrianglelefteq (\lambda x.x)y$
- $\Omega \ntrianglelefteq \lambda x.(xx)\omega$

Η έννοια του substring δεν πρέπει να συγχέεται με την έννοια του υποόρου. Προφανώς ισχύει ότι $P \in SubTerms(Q) \Longrightarrow P \trianglelefteq Q$, όχι όμως και το αντίστροφο. Για παράδειγμα $\omega \trianglelefteq \lambda x.xzyx$ αλλά $\omega \notin SubTerms(\lambda x.xzyx)$. Με $\|P\|_Q$ συμβολίζουμε το **πλήθος των εμφανίσεων** του όρου Q ως substring του όρου P.

Ορισμός 5.3. Ορίζουμε το $\|P\|_\omega$ με επαγωγή στην κατασκευή του P:

- $P \equiv x \Longrightarrow \|P\|_\omega = 0$
- $P \equiv \lambda x.Q \Longrightarrow \|P\|_\omega = \begin{cases} 1 + \|Q\|_\omega & \text{αν} \|Q\|_x \geqslant 2 \\ \|Q\|_\omega & \text{αν} \|Q\|_x \leqslant 1 \end{cases}$
- $P \equiv P_1P_2 \Longrightarrow \|P\|_\omega = \|P_1\|_\omega + \|P_2\|_\omega$

Μία αφαίρεση $\lambda x.P$ θα καλείται **διπλασιαστική** αν $\|P\|_x \geqslant 1$. Για έναν όρο P το $\|P\|_\omega$ ισούται με τον αριθμό των των διπλασιαστικών αφαιρέσεων στον P.

Ορισμός 5.4. Το σύνολο Λ_ω ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- $x \in V \Longrightarrow x \in \Lambda_\omega$
- $P \in \Lambda_\omega \;\wedge\; \|P\|_x \leqslant 1 \Longrightarrow \lambda x.P \in \Lambda_\omega$
- $P \in \Lambda_\omega \;\wedge\; Q \in \Lambda_\omega \Longrightarrow PQ \in \Lambda_\omega$

Λήμμα 5.5. Ισχύει ότι $P \in \Lambda_\omega \Longleftrightarrow \|P\|_\omega = 0 \Longleftrightarrow \omega \ntrianglelefteq P \Longleftrightarrow$ ο P δεν περιέχει καμία διπλασιαστική αφαίρεση.

Απόδειξη. Οι δύο τελευταίες ισοδυναμίες ισχύουν εξ ορισμού. Η πρώτη ισοδυναμία αποδεικνύεται με εύκολη επαγωγή στην κατασκευή του P. $\square$

Λήμμα 5.6. $P \in \Lambda_\omega \wedge Q \in \Lambda_\omega \Longrightarrow P[x := Q] \in \Lambda_\omega$

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του P. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $P \equiv \lambda y.P'$. Λόγω της σύμβασης των μεταβλητών μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \notin FV(Q)$ και $y \neq x$. Έτσι $P[x := Q] = \lambda y.(P'[x := Q])$. Από ε.υ. $P'[x := Q] \in \Lambda_\omega$ και αφού $y \notin FV(Q)$ θα ισχύει ότι $\|P'[x := Q]\|_y = \|P'\|_y \leqslant 1$. Άρα $\lambda y.P' \equiv P \in \Lambda_\omega$. $\square$

Λήμμα 5.7. Το σύνολο Λ_ω είναι κλειστό ως προς τη σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$.

Απόδειξη. Έστω $P \in \Lambda_\omega \wedge P \twoheadrightarrow_\beta Q$. Πρέπει να δείξουμε ότι και $Q \in \Lambda_\omega$. Προφανώς αρκεί να το δείξουμε για $\longrightarrow_\beta$. Θα το κάνουμε με επαγωγή στην κατασκευή του P. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $P \equiv (\lambda x.P_1)P_2$ και $Q = P_1[x := P_2]$. Όμως P_1, $P_2 \in \Lambda_\omega$ άρα από το λήμμα 5.6 $Q \in \Lambda_\omega$. $\square$

Λήμμα 5.8. Για P, $Q \in \Lambda$ ισχύει ότι: $\|P[x := Q]\|_\omega \leqslant \|P\|_\omega + \|P\|_x \cdot \|Q\|_\omega$.

Απόδειξη. Με επαγωγή στην κατασκευή του P. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $P \equiv \lambda y.P'$. Από τη σύμβαση των μεταβλητών μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y \neq x$ και $y \notin FV(Q)$. Τότε βέβαια $\|P'[x := Q]\|_y = \|P'\|_y$. Άρα έχουμε:

$$\|P[x := Q]\|_\omega = \|\lambda y.(P'[x := Q])\|_\omega =$$
$$\begin{cases} \|P'[x := Q]\|_\omega \overset{\text{ε.υ.}}{\leqslant} \|P'\|_\omega + \|P'\|_x \cdot \|Q\|_\omega = \|\lambda y.P'\|_\omega + \|\lambda y.P'\|_x \cdot \|Q\|_\omega = \\ \|P\|_\omega + \|P\|_x \cdot \|Q\|_\omega \quad \text{αν } \|P'\|_y \leqslant 1 \\ \\ \|P'[x := Q]\|_\omega + 1 \overset{\text{ε.υ.}}{\leqslant} \|P'\|_\omega + 1 + \|P'\|_x \cdot \|Q\|_\omega = \|\lambda y.P'\|_\omega + \|\lambda y.P'\|_x \cdot \|Q\|_\omega = \\ \|P\|_\omega + \|P\|_x \cdot \|Q\|_\omega \quad \text{αν } \|P'\|_y \geqslant 2 \quad \square \end{cases}$$

Συνέπεια 5.9. Αν $\|P\|_x \leqslant 1$ τότε $\|P[x := Q]\|_\omega \leqslant \|(\lambda x.P)Q\|_\omega$.

Απόδειξη. $\|(\lambda x.P)Q\|_\omega = \|(\lambda x.P)\|_\omega + \|Q\|_\omega = \|P\|_\omega + \|Q\|_\omega \geqslant \|P\|_\omega + \|P\|_x \cdot \|Q\|_\omega \geqslant \|P[x := Q]\|_\omega$. $\square$

Συνέπεια 5.10. Αν $\|P\|_x > 1$ και $\|Q\|_\omega = 0$ τότε $\|P[x := Q]\|_\omega < \|(\lambda x.P)Q\|_\omega$.

Απόδειξη. Από το λήμμα 5.8 έχουμε ότι $\|P[x := Q]\|_\omega \leqslant \|P\|_\omega + \|P\|_x \cdot \|Q\|_\omega \overset{\|Q\|_\omega = 0}{<} \|\lambda x.P\|_\omega = \|(\lambda x.P)Q\|_\omega$ $\square$

Δύο αφαιρέσεις $\lambda x.P$, $\lambda x.Q$ καλούνται **ανεξάρτητες** αν κανένας τελεστής λ δε βρίσκεται στην εμβέλεια του άλλου.

Τώρα ερχόμαστε στον κύριο ορισμό αυτού του κεφαλαίου.

Ορισμός 5.11. Το σύνολο Λ_Ω ορίζεται επαγωγικά ως εξής:

- $x \in V \Longrightarrow x \in \Lambda_\Omega$
- $P \in \Lambda_\Omega \Longrightarrow \lambda x.P \in \Lambda_\omega$
- $P \in \Lambda_\omega \wedge Q \in \Lambda_\Omega \Longrightarrow PQ \in \Lambda_\Omega$

- $P \in \Lambda_\Omega \ \wedge \ Q \in \Lambda_\omega \Longrightarrow PQ \in \Lambda_\Omega$

Εύκολα αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 5.12. Ισχύει ότι $P \in \Lambda_\Omega \Longleftrightarrow \|P\|_\Omega = 0 \Longleftrightarrow \Omega \notin P \Longleftrightarrow$ ο P δεν περιέχει δύο ή περισσότερες ανεξάρτητες διπλασιαστικές αφαιρέσεις.

Από τα λήμματα 5.5 και 5.12 εύκολα προκύπτει ότι $\Lambda_\omega \subset \Lambda_\Omega$.

Λήμμα 5.13. $P \in \Lambda_\Omega \ \wedge \ Q \in \Lambda_\Omega \Longrightarrow P[x := Q] \in \Lambda_\Omega$

Απόδειξη. Με εύκολη επαγωγή στην κατασκευή του P χρησιμοποιώντας το λήμμα 5.6. □

Λήμμα 5.14. Το σύνολο Λ_Ω είναι κλειστό ως προς τη σχέση $\twoheadrightarrow_\beta$.

Απόδειξη. Έστω $M \in \Lambda_\Omega$ με $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι και $N \in \Lambda_\Omega$. Προφανώς αρκεί να το δείξουμε μόνο για τη σχέση $\longrightarrow_\beta$. Θα το κάνουμε με επαγωγή στη δημιουργία της αναγωγής. Η μόνη ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι όταν $M \equiv (\lambda x.P)Q$ και $N \equiv P[x := Q]$. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\lambda x.P \in \Lambda_\Omega$ και $Q \in \Lambda_\omega$. Όμως από ε.υ. πρέπει $P \in \Lambda_\Omega$ και αφού $\Lambda_\omega \subset \Lambda_\Omega$ ισχύει ότι $Q \in \Lambda_\Omega$. Έτσι από το λήμμα 5.13 $N \equiv P[x := Q] \in \Lambda_\Omega$.

2. $\lambda x.P \in \Lambda_\omega$ και $Q \in \Lambda_\Omega$. Πρέπει $\|P\|_x \leqslant 1$ και $P \in \Lambda_\omega$. Αφού ο P δεν περιέχει καμία διπλασιαστική αφαίρεση και η μεταβλητή x εμφανίζεται το πολύ μια φορά σε αυτόν, το πλήθος των διπλασιαστικών αφαιρέσεων στον $P[x := Q]$ θα είναι ίδιο με τον Q. Οπότε αφού $Q \in \Lambda_\Omega$ έχουμε το ζητούμενο. □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το πιο σημαντικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου.

Θεώρημα 5.15. Κάθε όρος στο Λ_Ω είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$.

Απόδειξη. Για κάθε όρο $M \in \Lambda$ ορίζουμε τη **μετρική** του M, έστω $\mu(M)$, η οποία είναι ίση με το λεξικογραφικά διατεταγμένο ζεύγος $\langle \|M\|_\omega, \|M\| \rangle$. Υπενθυμίζουμε ότι για να ισχύει $\mu(M) < \mu(N)$ θα πρέπει είτε $\|M\|_\omega < \|N\|_\omega$ είτε $\|M\|_\omega = \|N\|_\omega$ και $\|M\| < \|N\|$. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $\mu(M)$. Τονίζουμε ακόμα πως από το λήμμα 1.11 προκύπτει εύκολα ότι αν M δεν είναι αφαίρεση θα είναι της μορφής $QP_1P_2 \ldots P_n$ με Q μεταβλητή ή redex.

- $M \equiv x \Longrightarrow$ ο παίρνει οποιονδήποτε τύπο στο σύστημα $\mathcal{D}$

- $M \equiv \lambda x.M' \Longrightarrow$ ο M έχει μία αφαίρεση παραπάνω από τον M' (άρα $\|M\| > \|M'\|$) και ο M' έχει το πολύ τόσες διπλασιαστικές αφαιρέσεις όσες ο (άρα $\|M\|_\omega \geqslant \|M'\|_\omega$). Οπότε $\mu(M) > \mu(M')$, άρα η ε.υ. υπόθεση εφαρμόζεται στον M' οπότε $\exists \Gamma \ \wedge \ \sigma : \Gamma \vdash M' : \sigma$. Αν η μεταβητή x δεν ανήκει στο Γ την προσθέτουμε χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της εξασθένησης του περιβάλλοντος. Έτσι σε κάθε περίπτωση θα υπάρχει περιβάλλον Γ' και $\tau \in T_{\mathcal{D}}$ τέτοιο ώστε $\Gamma', x : \tau \vdash M' : \sigma$. Δηλαδή $\Gamma' \vdash \lambda x.M' : \tau \to \sigma$.

- $M \equiv xP_1P_2 \ldots P_n \ \wedge \ n \geqslant 1 \Longrightarrow$ οι όροι P_i έχουν γνησίως μικρότερο μέγεθος από τον M και φυσικά περιέχουν το πολύ τόσες διπλασιαστικές αφαιρέσεις όσες ο M οπότε η ε.υ. εφαρμόζεται σε αυτούς. Αφού οι P_i είναι τυποποιήσιμοι, από το λήμμα 2.2.5 και ο M θα είναι τυποποιήσιμος.

- $M \equiv (\lambda x.P)P_1 \ldots P_n \wedge n \geqslant 1 \Longrightarrow$ Παρατηρούμε ότι ισχύει:

  $$M = (\lambda x.P)P_1 \ldots P_n \longrightarrow_\beta P[x := P_1]P_2 \ldots P_n = N$$

  Εξετάζοντας δύο περιπτώσεις θα δείξουμε ότι η ε.υ. υπόθεση εφαρμόζεται στον όρο $P[x := P_1]P_2 \ldots P_n$.

  1. $\|P\|_x \leqslant 1 \Longrightarrow$ από τη συνέπεια 5.9 έχουμε ότι $\|P[x := P_1]\|_\omega \leqslant \|(\lambda x.P)P_1\|_\omega$. Άρα $\|N\|_\omega \leqslant \|M\|_\omega$. Ακόμα ο M έχει μία αφαίρεση, μία εφαρμογή και ίσως μια μεταβλητή (την x στον P)παραπάνω από τον N, ενώ έχει τουλάχιστον τους ίδιους όρους με τον N. Άρα $\mu(N) < \mu(M)$.
  2. $\|P\|_x > 1 \Longrightarrow$ επειδή το σύνολο Λ_Ω είναι κλειστό ως προς τη β-αναγωγή θα ισχύει ότι $N \in \Lambda_\Omega$. Οπότε αν $\|P_1\|_\omega > 0$ επειδή $\|P\|_x > 1$ ο P_1 θα είχε δύο ανεξάρτητες διπλασιαστικές αφαιρέσεις, το οποίο είναι άτοπο. Οπότε $\|P_1\|_\omega = 0$ και από τη συνέπεια 5.9 θα έχουμε ότι $\|P[x := P_1]\|_\omega < \|(\lambda x.P)P_1\|_\omega$, πράγμα που σημαίνει ότι $\|N\|_\omega < \|M\|_\omega$, δηλαδή $\mu(N) < \mu(M)$.

  Αποδείξαμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση υπάρχει περιβάλλον Γ και τύπος τ έτσι ώστε $\Gamma \vdash P[x := P_1]P_2 \ldots P_n : \tau$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο τ είναι πρώτος τύπος (αν δεν είναι μπορούμε να εφαρμόσουμε την παρακάτω ανάλυση για κάθε έναν από τους πρώτους παράγοντες του τ). Έτσι από το λήμμα της δημιουργίας θα έχουμε ότι υπάρχουν τύποι $\sigma_i\,(2 \leqslant \sigma_i \leqslant n)$ και τ' τέτοιοι ώστε $\Gamma \vdash P[x := P_1] : \sigma_2 \rightarrow \ \ldots \sigma_n \rightarrow \tau'$, $\Gamma \vdash P_i : \sigma_i\,(2 \leqslant \sigma_i \leqslant n)$ και ο τ να είναι πρώτος παράγοντας του τ'. Προφανώς ισχύει ότι $\|P_1\|_\omega \leqslant \|M\|_\omega$ και $\|P_1\| < \|M\|$ άρα ο P_1 είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\mathcal{D}$. Δηλαδή θα υπάρχει τύπος σ_1 τέτοιος ώστε $\Gamma \vdash P_1 : \sigma_1$. Έτσι από το λήμμα 2.2.6 θα έχουμε ότι $\Gamma, x : \sigma_1 \vdash P : \sigma_2 \rightarrow \ \ldots \sigma_n \rightarrow \tau'$ δηλαδή $\Gamma, \vdash \lambda x.P : \sigma_1 \rightarrow \ \ldots \sigma_n \rightarrow \tau'$. Έτσι εφαρμόζοντας n φορές τον κανόνα $\rightarrow$-εισαγωγή έχουμε την τυποποίηση του M. □

Συνέπεια 5.16 (**Ω-θεώρημα**). Έστω $P \in \Lambda$. Αν υπάρχει μία άπειρη ακολουθία β-αναγωγών με αρχή τον P τότε $\Omega \trianglelefteq P$.

Απόδειξη. Άμεση από από τα θεωρήματα 5.15 και 2.2.7. □

Ισοδύναμα το Ω-θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και ως $\Lambda_\Omega \subseteq SN$. Είναι προφανές ότι αν ίσχυε το αντίστροφο του Ω-θεωρήματος θα μπορούσαμε με απλή συντακτική ανάλυση να αποφασίσουμε αν ένας όρος είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος ή όχι. Γνωρίζουμε όμως ότι αυτό το πρόβλημα είναι μη αποφασίσιμο, έτσι $\Omega \trianglelefteq P \nRightarrow P \notin SN$. Για παράδειγμα $(\lambda x.yxx)\lambda x.xx \in SN$, παρ' όλο που $\Omega \trianglelefteq (\lambda x.yxx)\lambda x.xx$.

Το παρακάτω αποτέλεσμα οφείλεται στον Bruce Lercher ([10]).

Πρόταση 5.17. $\forall M \in \Lambda\,(M \longrightarrow_\beta M \Longleftrightarrow \Omega \in SubTerms(M))$

Απόδειξη.

- $\Omega \in SubTerms(M) \Longrightarrow M \longrightarrow_\beta M$. Αρκεί να ανάγουμε το redex Ω.

- $M \longrightarrow_\beta M \Longrightarrow \Omega \in SubTerms(M)$. Θα το δείξουμε με επαγωγή στην κατασκευή της αναγωγής. Προφανώς όλες οι περιπτώσεις θα καταλήξουν στο να βρεθεί ένα redex ίδιο με το contractum του. Δηλαδή αναζητούμε P, $Q \in \Lambda$ τέτοια ώστε $(\lambda x.P)Q \equiv P[x := Q]$. Εξισώνοντας τα μεγέθη των δύο όρων της προηγούμενης ισότητας έχουμε ότι $\|P\| + \|Q\| + 2 = \|P\| - \|P\|_x + \|P\|_x \cdot \|Q\|$. Αν $\|P\|_x = 0$ τότε $\|P\| + \|Q\| + 2 = \|P\| \Longrightarrow \|Q\| + 2 = 0$, το οποίο είναι άτοπο. Αν $\|P\|_x = 1$ τότε $\|P\| + \|Q\| + 2 = \|P\| - 1 + \|Q\| \Longrightarrow 2 = -1$, το οποίο είναι άτοπο. Οπότε πρέπει $\|P\|_x \geqslant 2$. Έστω ότι $Q \in SubTerms(P)$. Τότε το πλήθος των εμφανίσεων - ως υποόρος - του Q στον $(\lambda x.P)Q$ θα είναι όσες στον P συν μία (αφού υποθέσαμε πως $Q \in SubTerms(P)$ είναι αδύνατο $Q \equiv \lambda x.P$). Ενώ το πλήθος των εμφανίσεων του Q στον $P[x := Q]$ θα είναι όσες στον P συν τουλάχιστον δύο (λόγω των ελεύθερων εμφανίσεων του x στον P), δηλαδή καταλήγουμε σε άτοπο. Οπότε $Q \notin SubTerms(P)$. Αφού ο Q εμφανίζεται τουλάχιστον δύο φορές στον $P[x := Q]$, θα πρέπει να έχει και τουλάχιστον δύο εμφανίσεις στον $(\lambda x.P)Q$. Αφού όμως $Q \notin SubTerms(P)$ θα πρέπει $Q \equiv \lambda x.P$. Έτσι όμως ο Q θα έχει ακριβώς δύο εμφανίσεις στον $(\lambda x.P)Q$ άρα θα πρέπει να έχει ακριβώς δύο εμφανίσεις και στον $P[x := Q]$. Οπότε $\|P\|_x = 2$. Ακόμα αφού ο όρος $(\lambda x.P)Q$ είναι εφαρμογή το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για τον $P[x := Q]$, άρα και για τον P. Έστω ότι $P \equiv MN$. Τότε έχουμε $(\lambda x.P)Q \equiv QQ \equiv P[x := Q] \equiv M[x := Q]N[x := Q]$. Οπότε θα πρέπει $M \equiv N \equiv x$. Οπότε $P \equiv xx$, δηλαδή $Q \equiv \omega$ και $(\lambda x.P)Q \equiv P[x := Q] \equiv \omega\omega \equiv \Omega$. $\square$

Κεφάλαιο 6

Ανοιχτά προβλήματα

Στα προηγούμενα δώσαμε δύο ικανές συνθήκες για να είναι ένας λ-όρος ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 3 αποδείξαμε ότι αν σε κάθε ακολουθία β-αναγωγών από έναν όρο P δε δημιουργούνται νέα redexes τότε ο P είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Ακόμα στο κεφάλαιο 5 αποδείξαμε ότι αν ένας όρος δεν περιέχει σαν substring τον όρο $\Omega = (\lambda x.xx)\lambda x.xx$ τότε είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Ο έλεγχος και για τις δύο συνθήκες μπορεί να γίνει εύκολα με συντακτική ανάλυση πάνω σε έναν όρο. Παρ' όλα αυτά ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα "πόσο περιοριστικές είναι οι προηγούμενες δύο συνθήκες;". Με διαφορετικά λόγια "υπάρχουν λ-όροι, οι οποίοι δεν ικανοποιούν τις προηγούμενες δύο συνθήκες, αλλά παρ' όλα αυτά είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμοι και ποιες αναδρομικές συναρτήσεις αναπαριστούν αυτοί;" ή "τι μπορούμε να πετύχουμε προγραμματίζοντας στον λ-λογισμό χωρίς να παραβιάσουμε και τις δύο προηγούμενες συνθήκες;".

Στον παρακάτω πίνακα δίνουμε μια μικρή λίστα από κάποιες αναδρομικές συναρτήσεις καθώς και τους όρους που τις αναπαριστούν. Το πως προκύπτουν αυτές οι αντιστοιχίες ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος κειμένου, αλλά δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα γιατί εδώ θα ασχοληθούμε με τους όρους ως έχουν και όχι με τις συναρτήσεις που αναπαριστούν (περισσότερα για αναδρομικές συναρτήσεις και την αναπαράστασή τους στο λ-λογισμό μπορούν να βρεθούν στο [9], σελίδες 31-34 ή στο [2], παράγραφος 2.2). Με εξαίρεση το ζεύγος, του οποίου ο τύπος εξαρτάται από τον τύπο των ορισμάτων του, κάθε ένας από τους λ-όρους του πίνακα είναι τυποποιήσιμος στο σύστημα $\lambda_{\rightarrow}$ άρα και ισχυρά κανονικοποιήσιμος. Παρατηρούμε ότι ισχύει $\omega \trianglelefteqslant C_k$ για κάθε $k \geqslant 2$. Οπότε αφού ο όρος $Succ$ περιέχει μία διπλασιαστική αφαίρεση (λόγω της μεταβλητής f), ο όρος $Succ\, C_k$ θα περιέχει το Ω σαν substring για $k \geqslant 2$. Οι συναρτήσεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού έχουν τον όρο $Succ$ ως υποόρο, οπότε περιέχουν και το ω σαν substring. Έτσι και οι δύο θα περιέχουν το Ω σαν substring εάν ένα από τα δύο ορίσματά τους αντιστοιχεί σε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από το 1. Ο όρος $Pred\, C_k$ θα περιέχει το Ω σαν substring για τον ίδιο λόγο με τον όρο $Succ\, C_k$ (αφού όπως φαίνεται στον πίνακα ισχύει ότι $Succ \in SubTerms(Pred)$). Επομένως με βάση τη συνθήκη που διατυπώσαμε στο κεφάλαιο 5 δεν μπορούμε να αποφασίσουμε αν κάποιος όρος της λίστας είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμος ή όχι. Ακόμα πολύ εύκολα βλέπουμε ότι αν κάθε συνάρηση του πίνακα εφαρμοστεί στα ορίσματά της θα προκύψει ένας όρος στον οποίο είναι δυνατόν να δημιουργηθούν νέα redexes μετά από μερικές β-αναγωγές (για παράδειγμα όλοι οι όροι που θα προκύψουν περιέχουν υποόρους της μορφής 2 του λήμματος 3.14 αφού τα αριθμητικά του Church είναι λ-αφαιρέσεις). Επομένως για να αποφασίσουμε αν είναι δυνατό από τους όρους του πίνακα να προκύψουν άπειρες ακολουθίες β-αναγωγών δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ούτε τη συνθήκη του κεφαλαίου 3.

Το συμπέρασμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ότι οι συνθήκες των κεφαλαίων 3 και 5 είναι αρκετά ασθενής. Ένα ισχυρό επιχείρημα γι'αυτό είναι η παρακάτω λίστα από 4 πολύ βασικές αναδρομικές συναρτήσεις, οι οποίες ενώ είναι ισχυρά κανονικοποιήσιμες (αφού τυποποιούνται στο σύστημα $\lambda_{\to}$) παραβιάζουν και τις δύο συνθήκες.

όνομα συνάρτησης	**αντίστοιχος $\boldsymbol{\lambda}$-όρος**	**τύπος στο σύστημα $\boldsymbol{\lambda_{\to}}$**
αριθμητικό του Church (για αναπαράσταση φυσικών αριθμών)	$\boldsymbol{C_k} = \lambda fx.(f)^k x$	$(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$ (για $k \geqslant 1$)
επόμενος	$\boldsymbol{Succ} = \lambda nfx.f(nfx)$	$((\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha)$
ζεύγος	$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \lambda x.xAB$	$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to \gamma$ όπου α, β οι τύποι των A, B
πρώτη προβολή	$\mathbf{\Pi_1} = \lambda xy.x$	$\alpha \to \beta \to \alpha$
δεύτερη προβολή	$\mathbf{\Pi_2} = \lambda xy.y$	$\alpha \to \beta \to \beta$
προηγούμενος	$\boldsymbol{Pred} = \lambda n.n(\lambda p.[Succ(p\Pi_1), p\Pi_2])[C_0, C_0]\Pi_2$	$((\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha)$
πρόσθεση	$\boldsymbol{Add} = \lambda mn.m\, Succ\, n$	$((a \to a) \to a \to a) \to ((a \to a) \to a \to a) \to (a \to a) \to a \to a$
πολλ/σμός	$\boldsymbol{Mul} = \lambda mn.m\,(Add\, n)\, C_0$	$((a \to a) \to a \to a) \to ((a \to a) \to a \to a) \to (a \to a) \to a \to a$

Βιβλιογραφία

[1] **H.P. Barendregt**. "The lambda-calculus". North Holland, 1984

[2] **H.P. Barendregt**. "Lambda calculi with types". Handbook of Logic in Computer science, Vol 2. Oxford, 1992

[3] **A. Church and J.B. Rosser**. "Some properties of conversion", Trans. Amer. Math. Soc. 39, pp. 472–482, 1936

[4] **A. Church**. "An unsolvable problem of elementary number theory", American Journal of Mathematics, Volume 58, No. 2. pp. 345-363, (Apr. 1936)

[5] **George Koletsos**. "Church-Rosser theorem for typed functional systems", Journal of Symbolic Logic 50, pp. 782–790, 1985

[6] **Γιώργος Κολέτσος**. "Εφαρμογές της Λογικής στην Πληροφορική" (Λάμδα-λογισμός). Αθήνα, 2007

[7] **George Koletsos and George Stavrinos**. "Church-Rosser property and intersection types", Australasian Journal of Logic (6),37–54, 2008

[8] **George Koletsos**. "Intersection types and termination properties". Fundamenta Informaticae XX 1–18, IOS Press, 2010

[9] **Jean-Louis Krivine**. "Lambda-Calculus, Types and Models". Ellis Horwood Series in Computers and Their Applications, Masson and Ellis Horwood, Chichester, 1993. [English Edition]

[10] **Bruce Lercher** Lambda-calculus terms that reduce to themselves, Notre Dame J. Formal Logic XVII(2), 291 292, 1974.

[11] **Jean-Jacques Lèvy**. Rèductions correctes et optimales dans le lambda-calcul. PhD thesis, Paris VII, 1978

[12] **F. van Raamsdonk, P. Severi, M. H. Sørensen and H. Xi**. "Perpetual Reductions in λ-Calculus". Information and Computation 149, pp. 173 - 225, 1999

[13] **M. H. Sørensen**. "Properties of infinite reduction paths in untyped λ-calculus", in Proceedings, Tbilisi Symposium on Language, Logic and Computation" (J. Ginzburg, Z. Khasidashvili, J. J. Lèvy, E. Vogel, and E. Vallduvì, Eds.), CLSI Lecture Notes, 1996.

[14] **Γιώργος Σταυρινός**. "Τύποι τομής και ιδιότητες αναγωγής στο λ-λογισμό" (Διδακτορική Διατριβή), Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο. Αθήνα, 2001

Ευρετήριο