



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Μελέτη επί της Αυτόματης Ανακατασκευής
Θραυσμένων Αντικειμένων
Εφαρμογή
σε Αρχαιολογικά Ευρήματα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αργυρώ Θ. Βαλτάρα

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Ιανουάριος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

**Μελέτη επί της Αυτόματης Ανακατασκευής
Θραυσμένων Αντικειμένων
Εφαρμογή
σε Αρχαιολογικά Ευρήματα**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αργυρώ Θ. Βαλτάρα

Επιβλέπων : Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς
Αναπληρωτής Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 18^η Ιανουαρίου 2011.

.....

Κωνσταντίνος Παπαοδυσσεύς

.....

Ηλίας Κουκούτσης

.....

Βασίλειος Λούμος

Αθήνα, Ιανουάριος 2011

.....
Αργυρώ Θ. Βαλτάρα

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Αργυρώ Θ. Βαλτάρα, 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάται μία μεθοδολογία ανακατασκευής τρισδιάστατων αντικειμένων. Το σύστημα που αναπτύχθηκε με βάση αυτή και μελετήθηκε στην παρούσα διπλωματική εργασία, βασίζεται στη βέλτιστη ταύτιση τμημάτων των τρισδιάστατων αντικειμένων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν θραύσματα τοιχογραφίας που βρέθηκαν σε ανάκτορο στην Τίρυνθα και η τρισδιάστατη πληροφορία τους αποκτήθηκε μέσω σάρωσης από 3D-scanner.

Η μεθοδολογία απορρίπτει ενώσεις μεταξύ θραυσμάτων μέσω τριών απορριπτικών κριτηρίων: υπέρβαση κάποιου μέγιστου εμβαδού μεταξύ των τομών δύο θραυσμάτων, υπέρβαση κάποιας μέγιστης γωνίας μεταξύ των ευθύγραμμων αντιπροσώπων των δύο σε σύγκριση τμημάτων των θραυσμάτων και υπέρβαση κάποιου μέγιστου μήκους αλυσίδας του δεύτερου θραύσματος, σε σύγκριση με το μήκος της πρώτης αλυσίδας. Αυτές οι κρίσιμες τιμές εξαρτώνται από τη φθορά που έχουν υποστεί τα κομμάτια της τοιχογραφίας τόσο κατά τη θραύση τους όσο και από την αποθήκευσή τους. Γι' αυτό το λόγο, αρχικά έγινε αριθμός δοκιμών ώστε να βρούμε τα όρια αυτών των τιμών ώστε το σύστημα να απαντάει με τις ελάχιστες δυνατές πιθανές ενώσεις αλλά να περιλαμβάνεται σε αυτές και η σωστή, εάν υπάρχει.

Τα αποτελέσματα της παρούσης διπλωματικής κατέδειξαν την ισχύ της μεθόδου εικονικής συγκολλήσεως θραυσμένων αντικειμένων, καθώς ελέγχθηκε εάν πέντε το πλήθος κονιάματα ταίριαζαν μεταξύ τους ανά ζεύγη. Οι εικονικές συνενώσεις που προτάθηκαν συμπεριελάμβαναν πάντα την ορθή, δηλαδή αυτή που έγινε δεκτή από τους αρχαιολόγους και τους συντηρητές. Αυτό από μόνο του συνιστά μία σημαντικότερη επιτυχία της μεθοδολογίας και του συστήματος, διότι επιβεβαιώνει ότι το σύστημα μπορεί να περιορίσει δραματικά υπέρ του χρήστη τον αριθμό των πιθανών συνενώσεων που πρέπει να ελέγξει. Πέραν αυτού, το σύστημα σε πολλές περιπτώσεις έδωσε μοναδική λύση την δέουσα.

Λέξεις κλειδιά: 3D-scanning, θραύσματα τοιχογραφίας, Τίρυνθα, αυτόματη ανακατασκευή θραυσμένων αντικειμένων, έλεγχος ανακατασκευής μέσω οπτικοποίησης αποτελεσμάτων

Abstract

In this thesis, a methodology of automatic reconstruction of 3D objects was studied. The system that was developed is based on the perfect matching of segments from a fragmented wall-painting found in Tiryns. The information needed for the analysis and the testing of the system was acquired by a 3D-scanner.

The methodology used rejects possible matches based on three criteria; an existing threshold for the volume between the two fragments, an existing threshold for the angle created by the tested segments of the two fragments and an existing threshold for the maximum length of the second fragment's segment, comparing with the length of the first one. These thresholds are the variation of the ideal case, and their actual values depend on the damage caused to the fragments by various reasons, such as the fragmentation itself or time. Therefore, the system was tested for different values of these parameters in order to find the ones suitable for our application of the methodology on the ancient wall-painting.

The results shown in this thesis proved the power of the methodology of automatic reconstruction of 3D objects, as the output of the system in the case of the five pairs of fragments that were tested for matching, included the perfect matching, as given by the archaeologists and the preservers. This alone constitutes a success for the system, as it proves that it can actually decrease the number of the matches that need to be validated.

Keywords: 3D-scanning, wall-painting fragments, Tiryns, automatic reconstruction of fragmented 3D objects, reconstruction validation through visualization of the results

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή.....	11
1.1	Στόχος της Διπλωματικής.....	11
1.2	Ιστορικά.....	11
2	Μαθηματική Ανάλυση	15
2.1	Εισαγωγή	15
2.2	Το πρόβλημα εκτίμησης της διαφοράς κλίσης των κανονικών στο όριο ∂U διανυσμάτων.....	17
2.3	Μία αυστηρή διατύπωση του προβλήματος με χρήση calculus of variations.....	17
2.4	Μία προτεινόμενη λύση στο πρόβλημα: δύο νέα θεωρήματα	18
2.4.3	Απόδειξη του θεωρήματος 1.....	26
2.4.4	Απόδειξη του θεωρήματος 2.....	32
3	Η μεθοδολογία και το σύστημα.....	41
3.1	Ορισμοί	41
3.2	Σύντομη Περιγραφή	42
3.2	Ένα flowchart του συστήματος.....	44
3.3	Ένα ισχυρό κριτήριο για το αν δύο θραύσματα μπορεί να ταιριάζουν ή όχι	50
3.4	Υπολογισμός εμβαδού μεταξύ αλυσίδων	51
3.4.1	Περίπτωση ισομηκών αλυσίδων	52
3.4.2	H σταθερή αλυσίδα έχει μεγαλύτερο μήκος από την περιστρεφόμενη.....	53
3.4.3	H σταθερή αλυσίδα έχει μικρότερο μήκος από την περιστρεφόμενη.....	54
3.5	Η έξοδος του συστήματος.....	54
4	Οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων.....	57
4.1	Οι έγχρωμες τομές	57
4.2	Περιγραφή του κώδικα της Matlab	57
5	Αποτελέσματα / Συμπεράσματα	61
5.1	Αποτελέσματα.....	61
5.2	Συμπεράσματα.....	64
	Βιβλιογραφία	67

1 Εισαγωγή

1.1 Στόχος της Διπλωματικής

Η παρούσα διπλωματική αποτελεί μία προσπάθεια ελέγχου της μεθοδολογίας και του συστήματος που αναπτύχθηκαν από τους ερευνητές κυρίους Κ. Παπαοδυσσέα, Δ. Αραμπατζή, Μ. Έξαρχο, Θ. Παναγόπουλο, Π. Ρουσόπουλο, Μ. Παναγόπουλο, τμήματα των οποίων πρωτοδημοσιεύθηκαν στα *Journal of Applied Mathematics and Computing*⁽¹⁾, *IEEE Transactions on Signal Processing*⁽²⁾, *IEEE 9th International Conference on Signal Processing*⁽³⁾ και *Pattern Analysis and Machine Intelligence (PAMI)*⁽⁴⁾. Επάνω στο ανεπτυγμένο σύστημα, πραγματοποιήθηκε διεξοδική έρευνα και διόρθωση σφαλμάτων (debugging), έγινε βελτίωση της δόμησης του συστήματος με την ανάπτυξη κατάλληλων συναρτήσεων, καθώς και βελτίωση σημαντικών υπάρχοντων συναρτήσεων. Απώτερος σκοπός της ήταν να ελεγχθεί η δύναμη της μεθοδολογίας και του συστήματος με εφαρμογή του σε θραύσματα μίας τοιχογραφίας της Τίρυνθας, που αποκτήθηκαν μέσω σάρωσης από τρισδιάστατο scanner. Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιήθηκε πρακτικά μέσω της οπτικοποίησης των αποτελεσμάτων του συστήματος για 7 κονιάματα ανά ζεύγη με τη βοήθεια φωτογραφιών των εν λόγω θραυσμάτων.

1.2 Ιστορικά

Η μυκηναϊκή ακρόπολη στην Τίρυνθα, καλύπτει μια περιοχή περίπου 20.000 τετραγωνικών μέτρων. Είναι χτισμένη σ' ένα χαμηλό, βραχώδη λοφίσκο, ο οποίος υψώνεται μόλις 18 μέτρα πάνω από την πεδιάδα του Άργους και στην Μυκηναϊκή περίοδο, βρισκόταν κοντά στη θάλασσα. Ο Heinrich Schliemann, ο οποίος διεξήγαγε τις εκσκαφές της Τροίας και των Μυκηνών, και ο αρχιτέκτων Wilhelm Dörpfeld, ανέσκαψε την ακρόπολη το 1885 και 1886. Σήμερα, οι ανασκαφές στην Τίρυνθα συνεχίζονται υπό τη διεύθυνση του Γερμανικού Αρχαιολογικού Ινστιτούτου.

Το φρούριο ήταν το διοικητικό, οικονομικό και θρησκευτικό κέντρο μιας ευρείας περιοχής κατά τον 14^ο και τον 13^ο αιώνα π.Χ. Η κεντρική εξουσία διατηρούσε αρχεία γραμμένα σε πήλινες πλάκες σε Γραμμική Β, την πρώτη ελληνική γραφή. Η ζωγραφική σε μεγάλη κλίμακα ήταν επίσημη τέχνη, την οποία αναλάμβαναν καλλιτέχνες οι οποίοι δούλευαν για το βασιλιά. Η επίσημη κατοικία του ηγέτη στην κορυφή του φρουρίου ήταν διακοσμημένη με τοιχογραφίες. Γύψος με διακοσμητικές ζωγραφίες κάλυπτε επίσης τα δάπεδα των δύο μεγαλύτερων δωματίων (των μεγάρων). Οι εικόνες ήταν εμπνευσμένες από τη φύση, παρουσίαζαν θρησκευτικές τελετές από τη βασιλική αυλή, καταδείκνυαν σκηνές πολέμου ή κυνηγιού. Σπείρες και γεωμετρικά είτε απλά γραμμικά σχέδια αποτελούσαν, επίσης, κομμάτι των θεμάτων των καλλιτεχνών. Ο καλλιτέχνης της μυκηναϊκής εποχής χρησιμοποιούσε φυσικά γήινα χρώματα, φτιαγμένα κυρίως από οξειδία μετάλλων, τα οποία επίθετε σε υγρή γύψινη επιφάνεια. Λεπτομέρειες προστίθενταν αφού είχε στεγνώσει ο γύψος⁽⁵⁾.

Μία από τις πιο σημαντικές τοιχογραφίες που έχουν διασωθεί από την Ηπειρωτική Ελλάδα, είναι η επονομαζόμενη Μυκηναία, η οποία βρίσκεται στο Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο της Αθήνας (inv. no 11670). Προέρχεται από ένα οίκημα της Ύστερης Ελλαδικής ΙΙΙ (13^{ος} αιώνας π.Χ.), κοντά στα τείχη, στην περιοχή του κέντρου θρησκευτικής λατρείας στις Μυκήνες. Πιθανολογείται ότι η τοιχογραφία έπεσε από το 2^ο όροφο του κτιρίου, το οποίο ο υπεύθυνος της ανασκαφής, Γ. Μυλωνάς, αναγνωρίζει ως του σπίτι του Αρχιερέα ⁽⁶⁾.

Το επιβλητικό πρόσωπο, με τα αμυγδαλωτά μάτια και το κομψό προφίλ, έχει μία σκεπτική έκφραση η οποία αποκαλύπτει την επισημότητα της στιγμής. Η φιγούρα έχει αποδοθεί σε αυτή μίας θεάς η οποία δέχεται τις προσφορές των πιστών. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι ένα περιδέραιο, το οποίο κρατάει σφιχτά στο δεξί της χέρι. Εναλλακτικά, μπορεί να είναι η βέλτιστα διατηρημένη φιγούρα από μία πομπή ανθρώπων, οι οποίοι φέρουν προσφορές σε κάποια θεά ⁽⁵⁾.

Τα θραύσματα της τοιχογραφίας που χρησιμοποιούνται σε αυτήν την εργασία βρίσκονται στην Προϊστορική Συλλογή του Εθνικού Αρχαιολογικού Μουσείου της Αθήνας (inv. nos 1596, 1655, 1668, 5881-3). Προέρχονται από ανασκαφές στο μυκηναϊκό παλάτι της Τίρυνθας που πραγματοποιήθηκαν με επικεφαλής τον Η. Schliemann το 1885-1886 ⁽⁷⁾ και το Γερμανικό Αρχαιολογικό Ινστιτούτο το 1909-1910 ⁽⁸⁾. Παρουσιάζουν μία ποικιλία διακοσμητικών μοτίβων, συμπεριλαμβανομένων σπειρών, σχημάτων ροζέτας και περίτεχνων αφηρημένων σχεδίων και τοποθετούνται χρονικά ανάμεσα στον 14^ο και τον 13^ο αιώνα π.Χ. Μερικά από αυτά, με πάχος γύψου 2,5cm, ανήκουν στο δάπεδο του μικρότερου μεγάρου ^{(7), (8)}.

Ένα ερευνητικό έργο που βρίσκεται σε εξέλιξη αυτή την περίοδο αφορά τη συντήρηση και τη μελέτη όλων των θραυσμάτων της τοιχογραφίας από την Τίρυνθα, τα οποία βρίσκονται είτε στην Αθήνα είτε στο Ναύπλιο και πραγματοποιείται από το Πανεπιστήμιο του Heidelberg (Prof. J. Maran), σε συνεργασία με το Εθνικό Αρχαιολογικό Μουσείο (Δρ. Λ. Παπάζογλου-Μανιουδάκη) και το Μουσείο του Ναυπλίου (Δρ. Α. Παπαδημητρίου).



Εικόνα 1 "Μυκηναία": Η πιο καλά διατηρημένη τοιχογραφία της Ηπειρωτικής Ελλάδας

Μέσω της μεθοδολογίας και του συστήματος που θα περιγράψουμε και θα ελέγξουμε στην παρούσα εργασία, στόχος μας είναι να μπορέσουμε να ενώσουμε τα θραύσματα της τοιχογραφίας που βρέθηκαν στην Τίρυνθα ώστε να επανενωθεί μία τοιχογραφία αντίστοιχης ομορφιάς και σημασίας.

2 Μαθηματική Ανάλυση

2.1 Εισαγωγή

Στη μέθοδο που θα περιγράψουμε παρακάτω, σχετικά με το ταίριασμα θραυσμένων αντικειμένων, θα δούμε ότι πέρα από το διαισθητικό τομέα, χρησιμοποιούμε και άλλα κριτήρια για τον αποκλεισμό πιθανών ενώσεων. Αυτά τα κριτήρια, πηγάζουν από δύο θεωρήματα τα οποία θα διατυπωθούν παρακάτω.

Έστω δύο φράγματα για τα οποία πρέπει να αποφανθούμε αν ταιριάζουν και αν ναι, πού ταιριάζουν, χρησιμοποιώντας όλη την τρισδιάστατη πληροφορία. Λίγες προσπάθειες έχουν γίνει μέχρι τώρα για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα. Οι δημιουργοί του συστήματος που μελετούμε έχουν αναπτύξει μία καινοτόμα μεθοδολογία, η οποία έχει επιτύχει την συναρμολόγηση θραυσμένων αρχαιολογικών και όχι μόνο αντικειμένων. Ένα πρώτο, αυθαίρετα επιλεγμένο θραύσμα, το οποίο θα ονομάζουμε «σταθερό» (fixed), τοποθετείται σε ένα σύστημα αναφοράς, έτσι ώστε ο κεντρικός άξονάς του να συμπίπτει με τον z-άξονα. Έπειτα, θεωρείται μήκος σύγκρισης το οποίο μετράται σε rixels, έστω L_C . Αρχικά, θεωρείται μία ομάδα από L_C συνεχόμενα rixels, ξεκινώντας από το πρώτο rixel της καμπύλης περιγράμματος C_F της επίπεδης επιφάνειας του θραύσματος. Αυτή η ομάδα rixel περιγράμματος ονομάζεται «σταθερή αλυσίδα» και συμβολίζεται σαν Γ_F , όπου το F συμβολίζει το (fixed) «σταθερός».

Ακολούθως, τοποθετούμε το δεύτερο θραύσμα στο ίδιο Καρτεσιανό σύστημα, και πάλι έτσι ώστε ο κεντρικός του άξονας να είναι παράλληλος στον z-άξονα και οι άνω επίπεδες επιφάνειες των δύο θραυσμάτων να βρίσκονται στο ίδιο, κάθετο στον z-άξονα επίπεδο. Το δεύτερο θραύσμα έχει τυχαίο προσανατολισμό γύρω από τον κεντρικό του άξονα καθώς και τυχαία θέση. Έχουμε, προηγουμένως, παράξει όλες τις περιστραμμένες εκδοχές του θραύσματος.

Σε αυτό το σημείο, κάθε περιστραμμένη εκδοχή του δεύτερου θραύσματος μετατοπίζεται παράλληλα ώστε να πλησιάσει το σταθερό θραύσμα. Δημιουργούμε μία περιστρεφόμενη αλυσίδα Γ_R η οποία «κινείται» επί του C_R ανθρωπολογικά και η οποία αρχίζει στο rixel M και τελειώνει στο σημείο τομής της barrier επιφάνειας με την καμπύλη C_R , εάν υπάρχει. Όπως προχωράμε επί της C_R , αυξάνοντας το μήκος της Γ_R , αν ο αριθμός των rixel της αλυσίδας ξεπερνάει κάποιο κατώφλι L_{EX} , τότε κρατάμε μία σημαία και απορρίπτουμε το ταίριασμα σε αυτήν τη θέση. Επιπροσθέτως, αν τα θραύσματα επικαλύπτονται στην τωρινή τους διάταξη, τότε, μεταφέρουμε το περιστρεφόμενο θραύσμα παράλληλα προς την barrier επιφάνεια και προς το xy-επίπεδο, μέχρι να εξαλειφθεί η επικάλυψη.

Εν συνεχεία, ορίζουμε τους όρους “fixed escarpment” και “rotated escarpment” (σταθερό και περιστρεφόμενο πέτασμα, αντίστοιχα). Για αυτή τη διαδικασία, ορίζουμε πρώτα την “αρχική barrier επιφάνεια” B_S , ως το επίπεδο που περνάει από το πρώτο σημείο της σταθερής αλυσίδας, το οποίο είναι παράλληλο στην “τελική barrier επιφάνεια” B_T . Κατόπιν, ορίζουμε το fixed escarpment E_F , ως την παράπλευρη επιφάνεια του σταθερού θραύσματος που

περικλείεται από την άνω διατομή του θραύσματος, την κάτω διατομή του θραύσματος καθώς και από την αρχική και την τελική barrier line. Παρομοίως, ορίζουμε το rotated escarpment E_R , ως την παράπλευρη επιφάνεια του περιστρεφόμενου θραύσματος, που περικλείεται από τις δικές του άνω και κάτω διατομές και την αρχική και την τελική barrier line (βλ. Σχήμα 1).

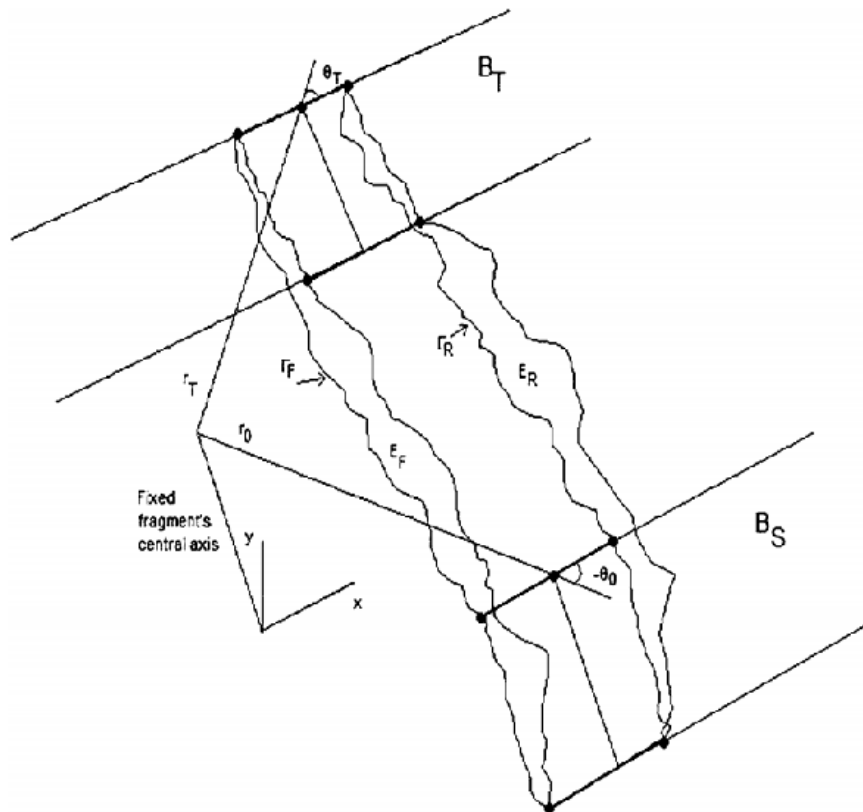
Έστω δύο οποιαδήποτε θραύσματα A,B και όλα τα υπάρχοντα σχετικά ζεύγη:

(α) σταθερών και περιστρεφόμενων αλυσίδων Γ_F, Γ_R ,

(β) fixed και rotated escarpments E_F, E_R , και

(γ) αρχικών και τελικών barrier lines B_S, B_T .

Έπειτα, έστω U η κλειστή περιοχή που ορίζεται από (α) το fixed και το rotated escarpment E_F, E_R , (β) την αρχική και την τελική barrier line του ίδιου ζεύγους B_S, B_T , (γ) το κοινό άνω επίπεδο των δύο θραυσμάτων C και (δ) το κάτω επίπεδο, D, του A ή του B, το οποίο είναι κοντινότερο στο κοινό άνω επίπεδο C. Η οριακή επιφάνεια ∂U του χωρίου U, επομένως, ορίζεται ως $\partial U = E_F \cup E_R \cup B_S \cup B_T \cup C \cup D$. Υπολογίζουμε τον όγκο V του χωρίου U. Αν το V είναι μικρότερο από ένα προκαθορισμένο κατώφλι V_M , τότε θεωρούμε τη συγκεκριμένη θέση σαν πιθανό ταίριασμα των δύο θραυσμάτων A,B. Αυτό αποτελεί ένα πρώτο κριτήριο ταυρίσματος των θραυσμάτων A,B.



Σχήμα 1

2.2 Το πρόβλημα εκτίμησης της διαφοράς κλίσης των κανονικών στο όριο ∂U διανυσμάτων.

Έστω ότι σε μία συγκεκριμένη θέση, τα θραύσματα A και B ταιριάζουν τέλεια, με την έννοια ότι ο όγκος V είναι 0, ή, με άλλα λόγια, τα escarpments E_F, E_R συμπίπτουν. Σε αυτήν την ιδανική περίπτωση, σε όλα τα σημεία των escarpments, τα μοναδιαία, κανονικά προς τα πετάσματα διανύσματα n_F και n_R είναι αντίθετα. Αφού, στην πραγματικότητα, πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας την παρουσία αναπόφευκτων κενών μεταξύ των ταιριασμένων θραυσμάτων, εξ' αιτίας της διαδικασίας που προκάλεσε τη θραύση του αρχικού αντικειμένου ή/και εξαιτίας πιθανής φθοράς, θα συναντήσουμε σίγουρα αποκλίσεις από την ιδανική περίπτωση. Παρ' όλα αυτά, μία αντίστοιχη συνθήκη πρέπει να ισχύει πάντα: Στην πραγματικότητα, κάποιος μπορεί διαισθητικά να περιμένει πως αν υπάρχει μία σημαντική γενικά διαποίκιση των μοναδιαίων κανονικών διανυσμάτων \hat{n} σε όλη τη συνοριακή επιφάνεια του χωρίου U , τότε ο όγκος V δεν μπορεί να είναι ικανοποιητικά μικρός. Με άλλα λόγια, σε αυτήν την περίπτωση, το προαναφερθέν πρώτο κριτήριο δεν μπορεί να ικανοποιηθεί. Μία αυστηρή διατύπωση αυτού του διαισθητικού ισχυρισμού περιγράφεται παρακάτω.

Έστω ότι τα θραύσματα A και B είναι τοποθετημένα όπως περιγράφεται παραπάνω και έστω, επίσης, ότι ο όγκος V είναι μικρότερος από τη "χειρίστη" αποδεκτή τιμή του V_M . Τότε, κάτω από αυτούς τους περιορισμούς, εκτιμούμε τη μέγιστη αποδεκτή τιμή του ολοκληρώματος των γωνιών των μοναδιαίων, κανονικών στο ∂U , διανυσμάτων.

2.3 Μία αυστηρή διατύπωση του προβλήματος με χρήση calculus of variations.

Το ολοκλήρωμα των γωνιών εκφράζεται μέσω της ποσότητας $\mu = \oint_{\partial U} \arctan \left(\frac{n^j}{n^i} \right) dS$. Συνεπώς, το υπό συζήτηση πρόβλημα εκφράζεται ως εξής: να βρεθούν τα ακρότατα της ποσότητας μ δεδομένου ότι $0 \leq V \leq V_M$. Μπορούμε να διατυπώσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα Lagrange

$$\iint_{E_R} f \left(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, u, v \right) dudv = \mu - \lambda(V - V_M)$$

όπου u, v είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές της επιφάνειας ∂U , $\mathbf{x}(u, v)$ είναι το διάνυσμα θέσης ενός συνοριακού σημείου της ∂U , $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}$ οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι του \mathbf{x} . Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση της επιφάνειας E_R (του rotated escarpment) που ορίζεται από τις επιφάνειες των barrier-planes B_S, B_T και C, D τέτοια ώστε:

$$\delta \iint_{E_R} f\left(\mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v}, u, v\right) dudv = 0$$

2.4 Μία προτεινόμενη λύση στο πρόβλημα: δύο νέα θεωρήματα

2.4.1 Βήμα 1: Διατύπωση ενός κατάλληλου ολοκληρώματος Lagrange

Λόγω του περιεχομένου του υπό εξέταση προβλήματος, είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε θ και z τις ανεξάρτητες μεταβλητές της επιφάνειας ∂U , παρόλο που η ανάλυση που ακολουθεί μπορεί εύκολα να επεκταθεί στη γενική περίπτωση μεταβλητών συννοριακών επιφανειών u και v . Στην πραγματικότητα, έστω $\mathbf{x}(r, \theta, z)$ το διάνυσμα θέσης ενός συννοριακού σημείου που βρίσκεται στο ∂U σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Με αυτήν την επιλογή, το r και μέσω αυτού και το \mathbf{x} είναι συναρτήσεις του θ και του z .

Προφανώς,

$$\mathbf{x}(\theta, z) = r(\theta, z) \cos(\theta) \hat{i} + r(\theta, z) \sin(\theta) \hat{j} + z \hat{k}$$

Σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ο όγκος V του χωρίου U είναι $V = \int_U dx dy dz$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Stokes παίρνουμε το ολοκλήρωμα του όγκου

$$V = \frac{1}{3} \int_{\partial U} \mathbf{x}(\theta, z) \cdot \mathbf{n}(\theta, z) d\theta dz$$

Αλλά

$$\mathbf{x}_\theta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} = (r_\theta \cos(\theta) - r \sin(\theta), r_\theta \sin(\theta) + r \cos(\theta), 0)$$

και

$$\mathbf{x}_z = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = (r_z \cos(\theta), r_z \sin(\theta), 1)$$

Συνεπώς, ένα κανονικό διάνυσμα του ∂U είναι

$$\mathbf{n} = \mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_z = (r \cos(\theta) + r_\theta \sin(\theta), -r_\theta \cos(\theta) + r \sin(\theta), -rr_z)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = r \cos(\theta)(r \cos(\theta) + r_\theta \sin(\theta)) + r \sin(\theta)(r \sin(\theta) - r_\theta \cos(\theta)) - z r r_z = r^2 - z r r_z$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις ο όγκος που περικλείεται από τα E_R , B_S , B_T και το χυ-επίπεδο γράφεται:

$$V = \frac{1}{3} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} [r(\theta, z)^2 - zr(\theta, z)r_z(\theta, z)] d\theta dz \quad (1)$$

Δεδομένων των απαιτήσεων του προβλήματος, μπορούμε να ξεχωρίσουμε δύο περιπτώσεις των συνθηκών του συνόρου και δύο αντίστοιχα προβλήματα. Η λύση σε αυτά τα προβλήματα οδηγούν στα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 1: Έστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- (α) $V \leq V_M$, όπου το V_M είναι μία σταθερά,
- (β) οι barrier επιφάνειες $B_S \subset \partial U$, $B_T \subset \partial U$ είναι σταθερά δοσμένα επίπεδα,
- (γ) το fixed escarpment E_F , η άνω και η κάτω καμπύλες, καθώς και η αρχική καμπύλη του rotated escarpment E_R είναι επίσης γνωστά, και
- (δ) η αρχική και η τελική γωνία θ_0 και θ_T είναι σταθερές.

Τότε, τα ακρότατα του μ κάτω από αυτές τις συνθήκες συσχετίζονται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\left| \frac{\mu}{\Delta\theta\Delta z} - \frac{1}{2} \frac{\theta_T^2 - \theta_0^2}{\Delta\theta} - \frac{\Delta z}{6V_M} (\Delta R - r_0^2) \right| \leq |\Delta\Lambda|$$

Οι ποσότητες ΔR , $\Delta\Lambda$ ορίζονται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\Delta R = \frac{1}{\Delta\theta\Delta z} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, S)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta$$

$$\Delta\Lambda = \frac{1}{\Delta\theta} \ln\left(\frac{r_T}{r_0}\right)$$

ενώ $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$, $\Delta z = T - S$, $r_T = r(\theta_T, z)$ και $r_0 = r(\theta_0, z)$.

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα 1 είναι να βρεθεί το rotated escarpment που κάνει το μ ακρότατο όταν $V \leq V_M$ για σταθερές και δοσμένες οριακές συνθήκες. Σε αυτήν την περίπτωση, το ολοκλήρωμα Lagrange γίνεται:

$$\int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} f(r, r_\theta, r_z, \theta, z) d\theta dz$$

$$= \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} \arctan(\varphi) d\theta dz - \frac{\lambda}{3} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} [r(\theta, z)^2 - zr(\theta, z)r_z(\theta, z)] d\theta dz + \lambda V_M$$

όπου
$$\varphi = \frac{r \sin(\theta) - r_\theta \cos(\theta)}{r_\theta \sin(\theta) + r \cos(\theta)}$$

Θεώρημα 2: Έστω ότι ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

- (α) το V είναι σταθερό,
- (β) οι barrier επιφάνειες $B_S \subset \partial U$, $B_T \subset \partial U$ είναι σταθερά δοσμένα επίπεδα,
- (γ) το fixed escarpment E_F , καθώς και η άνω καμπύλη του rotated escarpment E_R είναι επίσης γνωστά.

Τότε τα ακρότατα του μ κάτω από αυτές τις συνθήκες συσχετίζονται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\frac{\lambda L^2}{24} z_S \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \Phi_-(\theta_B) d\theta_B \leq \mu \leq \frac{\lambda L^2}{24} z_S \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \Phi_+(\theta_B) d\theta_B$$

όπου οι συναρτήσεις

$$\Phi_+(\theta_B) = p(\theta_B) \frac{\theta_B^2 + 1 + p(\theta_B) \ln(p(\theta_B)) + 2\theta_B \left(\tan(\theta_B) - \theta_B p(\theta_B) - \frac{\lambda L^2}{8} p(\theta_B)^2 \right)}{\exp\left(\frac{\lambda L^2}{36} \tan(\theta_B)(2 + p(\theta_B))\right)}$$

$$\Phi_-(\theta_B) = p(\theta_B) \frac{\theta_B^2 + 1 - p(\theta_B) \ln(p(\theta_B)) + 2\theta_B \left(\tan(\theta_B) - \theta_B p(\theta_B) - \frac{\lambda L^2}{8} p(\theta_B)^2 \right)}{\exp\left(\frac{\lambda L^2}{36} \tan(\theta_B)(2 + p(\theta_B))\right)}$$

$$p(\theta_B) = 1 + \tan^2(\theta_B)$$

Ο πολλαπλασιαστής Lagrange λ δίνεται από την εξίσωση

$$\lambda = \left[\frac{1}{r(\theta_B(S))^2} \right]_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \frac{SL^2}{24V_M}$$

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα 2 είναι να βρεθεί το rotated escarpment ώστε το μ να παίρνει την ακρότατη τιμή του όταν $V=V_M$ και η μόνη δοσμένη οριακή συνθήκη είναι η περιστρεφόμενη αλυσίδα. Συνεπώς, το αντίστοιχο ολοκλήρωμα Lagrange για το πρόβλημα 2 γίνεται

$$\begin{aligned} & \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} f(r, r_\theta, r_z, \theta, z) d\theta dz \\ &= \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \arctan(\varphi) d\theta dz - \frac{\lambda}{3} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} [r(\theta, z)^2 - zr(\theta, z)r_z(\theta, z)] d\theta dz \\ &+ \lambda V_M \end{aligned}$$

όπου

$$\varphi = \frac{r \sin(\theta) - r_\theta \cos(\theta)}{r_\theta \sin(\theta) + r \cos(\theta)} .$$

2.4.2 Βήμα 2: Διατύπωση των εξισώσεων Euler-Lagrange

Λαμβάνοντας υπ' όψιν την απόκλιση του $r(\theta, z)$ από την ιδανική συνάρτηση $r_0(\theta, z)$ γράφουμε: $r(\theta, z) = r_0(\theta, z) + \epsilon \eta(\theta, z)$, με μερικές παραγώγους $r_\theta = r_{0\theta} + \epsilon \eta_\theta$, $r_z = r_{0z} + \epsilon \eta_z$. Τότε, η πρώτη τάξεως απόκλιση του ολοκληρώματος της συνάρτησης Lagrange γράφεται ως εξής:

$$I(\epsilon) = \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} f(r, r_\theta, r_z) d\theta dz \Rightarrow \delta I(\epsilon) = \delta \epsilon \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial f}{\partial r} \eta + \frac{\partial f}{\partial r_\theta} \eta_\theta + \frac{\partial f}{\partial r_z} \eta_z d\theta dz$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta I(\epsilon)}{\delta \epsilon} &= \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \left[\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \right] \right] \eta d\theta dz + \int_S^T \left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \eta \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz \\ &+ \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \eta \right] d\theta dz \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τον τρίτο όρο της απόκλισης του $I(\epsilon)$ ορίζουμε

$$S(z) = \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial f}{\partial r_z} \eta d\theta \Rightarrow S'(z) = \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \eta \right] d\theta + \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \theta'(z) \eta \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)}$$

$$\int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \eta \right] d\theta = \left[\int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial f}{\partial r_z} \eta d\theta \right]_S^T - \int_S^T \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \theta'(z) \eta \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz$$

Τώρα, η απόκλιση $I(\epsilon)$ γράφεται

$$\begin{aligned} \frac{\delta I(\epsilon)}{\delta \epsilon} = & \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \left[\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \right] \right] \eta d\theta dz + \int_S^T \left[\left(\frac{\partial f}{\partial r_\theta} - \frac{\partial f}{\partial r_z} \theta'(z) \right) \eta \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz \\ & + \left[\int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial f}{\partial r_z} \eta d\theta \right]_S^T \end{aligned}$$

Λόγω της τυχαιότητας της $\eta(\theta, z)$, παίρνουμε την εξίσωση Euler-Lagrange

$$\frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \right] \quad (2)$$

και τις ακόλουθες περιπτώσεις για τις οριακές συνθήκες:

A1. Όταν $r(\theta_0(z), z) = r(\theta_0(z))$ ή/και $r(\theta_T(z))$ είναι ελεύθερες

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} - \frac{\partial f}{\partial r_z} \theta'(z) \right]_{\theta=\theta_0(z), \theta_T(z)} = 0$$

A2. Όταν $r(\theta_0(z))$ ή/και $r(\theta_T(z))$ είναι δοσμένη/ες συνάρτηση/συναρτήσεις

$$[\eta(\theta, z)]_{\theta=\theta_0(z), \theta_T(z)} = 0$$

B1. Όταν $r(\theta, S)$ ή/και $r(\theta, T)$ είναι ελεύθερα

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \right]_{z=S, T} = 0$$

B2. Όταν $r(\theta, S)$ ή/και $r(\theta, T)$ είναι δοσμένη/ες συνάρτηση/συναρτήσεις

$$[\eta(\theta, z)]_{z=S, T} = 0$$

- Οι οριακές συνθήκες που παράγονται από τους περιορισμούς του προβλήματος 1 είναι:

$$[f]_{\theta=\theta_0} = 0 \quad (3)$$

η οποία συνεπάγεται από τις γνωστή αρχική καμπύλη του rotated escarpment E_R .

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right]_{\theta=\theta_0(z)} = 0, \quad \left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right]_{\theta=\theta_T(z)} = 0 \quad (4)$$

η οποία συνεπάγεται από το γεγονός ότι το E_R ξεκινάει και τελειώνει στα barrier planes B_S, B_T αντίστοιχα.

Η σαφής έκφραση της συνάρτησης Lagrange για το πρόβλημα 1 είναι

$$f(r, r_\theta, r_z, \theta, z) = \arctan(\varphi) - \frac{\lambda}{3} r(r - zr_z) + \lambda \frac{V_M}{\Delta\theta\Delta z}$$

όπου $\Delta\theta = \theta_T - \theta_0$ και $\Delta z = T - S$. (βλ. Σχήμα 1).

- Οι οριακές συνθήκες που προκύπτουν από τους περιορισμούς του προβλήματος 2 είναι:

$$[f]_{z=S} = 0 \quad (5)$$

η οποία συνεπάγεται από τη δοσμένη καμπύλη του rotated escarpment E_R πάνω στην επίπεδη επιφάνεια C.

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_z} \right]_{z=T} = 0 \quad (6)$$

η οποία συνεπάγεται από το γεγονός ότι το E_R τελειώνει στο κάτω επίπεδο D.

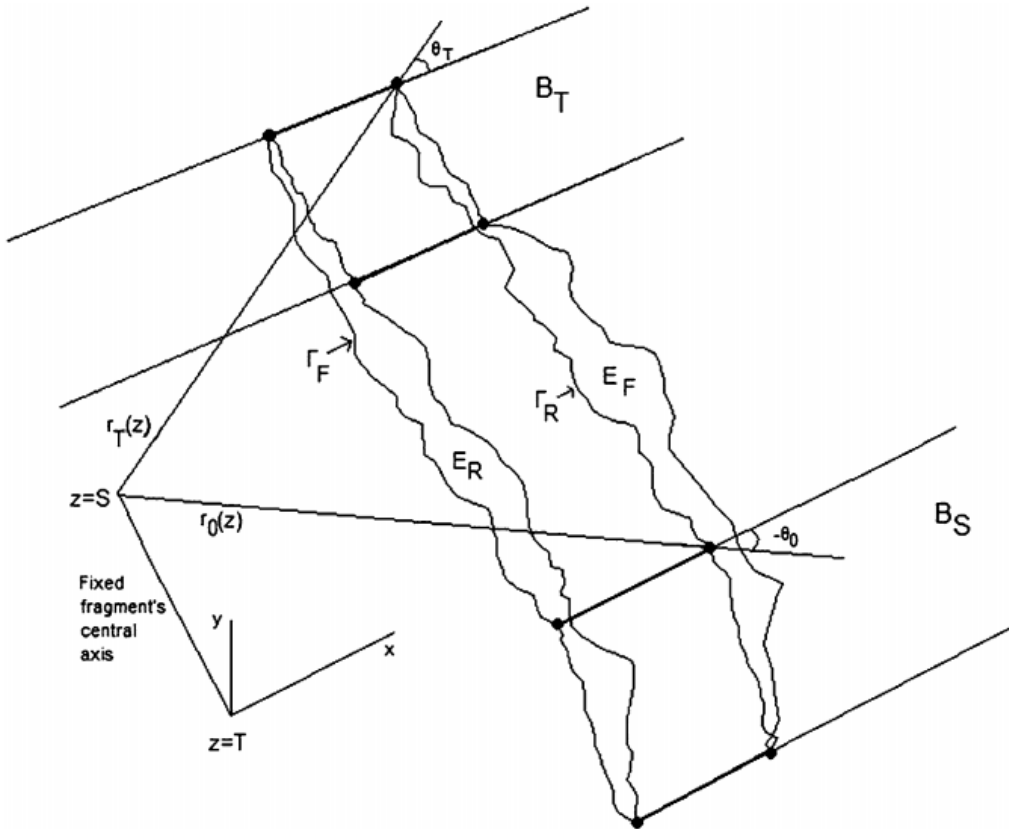
$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} - \frac{\partial f}{\partial r_z} \theta'(z) \right]_{\theta=\theta_0(z), \theta_T(z)} = 0 \quad (7)$$

η οποία συνεπάγεται από το γεγονός ότι το E_R αρχίζει και τελειώνει στα barrier planes B_S , B_T αντίστοιχα.

Η σαφής έκφραση της συνάρτησης Lagrange για το πρόβλημα 2 είναι:

$$f(r, r_\theta, r_z, \theta, z) = \arctan(\varphi) - \frac{\lambda}{3} r(r - zr_z) + \lambda \frac{V_M}{\int_S^T \Delta\theta dz}$$

όπου $\Delta\theta(z) = \theta_T(z) - \theta_0(z)$ και $\Delta z = T - S$. (βλ. Σχήμα 2).



Σχήμα 2

Οι μερικές παράγωγοι των δύο συναρτήσεων Lagrange των προβλημάτων, υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{r_{\theta}}{(r_{\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta))^2} \Rightarrow \frac{\partial \arctan(\varphi)}{\partial r} = \frac{r_{\theta}}{r^2 + r_{\theta}^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r_{\theta}} = \frac{-r}{(r_{\theta} \sin(\theta) + r \cos(\theta))^2} \Rightarrow \frac{\partial \arctan(\varphi)}{\partial r_{\theta}} = \frac{-r}{r^2 + r_{\theta}^2}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2) παίρνουμε $\frac{r_{\theta}}{r^2 + r_{\theta}^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{-r}{r^2 + r_{\theta}^2} \right] + \lambda r$, και πολλαπλασιάζοντας επί r έχουμε $\frac{rr_{\theta}}{r^2 + r_{\theta}^2} + r \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{r}{r^2 + r_{\theta}^2} \right] = \lambda r^2$, το οποίο είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{r^2}{r^2 + r_{\theta}^2} \right] = \lambda r^2 \quad (8)$$

- Για μία ρητή έκφραση των οριακών συνθηκών του προβλήματος 1, αντικαθιστούμε στις (4) τις υπολογισμένες μερικές παραγώγους της συνάρτησης Lagrange για να πάρουμε

$$\left[-\frac{r(\theta_B)}{r(\theta_B)^2 + r_{\theta}(\theta_B)^2} \right]_{\theta_B = \theta_0, \theta_T} = 0 \quad (9)$$

- Για μία ρητή έκφραση των οριακών συνθηκών του προβλήματος 2, αντικαθιστούμε στις (6) και (7) τις υπολογισμένες μερικές παραγώγους της συνάρτησης Lagrange για να πάρουμε

$$Tr(\theta, T) = 0 \Rightarrow T = 0 \quad (10)$$

$$\left[-\frac{1}{r(\theta_B(z))^2 + r_{\theta}(\theta_B(z))^2} - \frac{\lambda}{3} z \theta_B'(z) \right]_{\theta_B(z) = \theta_0(z), \theta_T(z)} = 0 \quad (11)$$

Ακολούθως, θα αντιμετωπίσουμε και τα δύο προβλήματα, πρώτα το πρόβλημα 1 και μετά το πρόβλημα 2.

2.4.3 Απόδειξη του θεωρήματος 1

Το θεώρημα 1 αποδεικνύεται λύνοντας το πρόβλημα 1, δηλαδή τη μερική διαφορική εξίσωση (8) με τις οριακές συνθήκες (9) και τις δοσμένες συναρτήσεις $r(\theta_0, z), r(\theta_T, z)$ και $r(\theta, S), r(\theta, T)$.

2.4.3.1 Βήμα A3: Ολοκλήρωση και εκτίμηση του άνω ορίου για το $|\lambda|$

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (8) έχουμε

$$\frac{r^2}{r^2 + r_\theta^2} + c(z) = \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta$$

Παρατηρούμε ότι $0 \leq \frac{r^2}{r^2 + r_\theta^2} \leq 1$, οπότε $c(z) \leq \lambda \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta \leq c(z) + 1 \Rightarrow$

$$\int_S^T c(z) dz \leq \lambda \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz \leq \int_S^T c(z) dz + \Delta z \quad (12)$$

Σε αυτό το σημείο, θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε το μεσαίο ολοκλήρωμα της (12) με τον όγκο V του χωρίου U . Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιώντας την (1) παίρνουμε

$$3V = \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} [r^2 - zrr_z] d\theta dz, \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz = V + \frac{1}{6} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta \quad (13)$$

Αντικαθιστώντας τη (13) στη (12) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \int_S^T c(z) dz \leq \lambda V + \frac{\lambda}{6} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta \leq \frac{1}{2} \int_S^T c(z) dz + \frac{\Delta z}{2} \quad (14)$$

Τώρα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το λ :

Αν $\lambda < 0$, τότε:

$$\begin{aligned} \inf \left(\frac{1}{2} \int_S^T c(z) dz \right) &= \frac{\lambda}{6} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta - \frac{T-S}{2} \\ \sup \left(\frac{1}{2} \int_S^T c(z) dz \right) &= \lambda V_M + \frac{\lambda}{6} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta \\ -\frac{T-S}{2} \leq \lambda V &\leq \lambda V_M + \frac{T-S}{2} \Rightarrow V_M \leq \left| \frac{T-S}{\lambda} \right| \end{aligned}$$

Τώρα, εάν $\lambda > 0$, τότε:

$$\begin{aligned} \inf \left(\frac{1}{2} \int_S^T c(z) dz \right) &= \lambda V_M + \frac{\lambda}{6} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta - \frac{T-S}{2} \\ \sup \left(\frac{1}{2} \int_S^T c(z) dz \right) &= \frac{\lambda}{6} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta \\ \lambda V_M - \frac{T-S}{2} \leq \lambda V &\leq \frac{T-S}{2} \Rightarrow V_M \leq \frac{T-S}{\lambda} \end{aligned}$$

Άρα, σε οποιαδήποτε περίπτωση ισχύει ότι

$$|\lambda| \leq \frac{|\Delta z|}{V_M} \quad (15)$$

Μέχρι τώρα, έχουμε καταφέρει να βρούμε το άνω όριο του $|\lambda|$, εκφρασμένο σε συνάρτηση του μέγιστου επιτρεπόμενου όγκου V_M του U και του Δz . Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το άνω όριο για να υπολογίσουμε ένα άνω όριο για το ολοκλήρωμα των γωνιών.

2.4.3.2 Βήμα A4: Μερικές χρήσιμες ενδιάμεσες ανισότητες

Πρώτα, ορίζουμε $a = \frac{r_\theta}{r}$ στην οποία περίπτωση η συνάρτηση φ γίνεται $\varphi = \frac{\sin(\theta) - a \cos(\theta)}{a \sin(\theta) + \cos(\theta)}$. Έστω $w = \arctan(a)$, τότε $\varphi = \frac{\sin(\theta - w)}{\cos(\theta - w)} = \tan(\theta - w)$, οπότε η συνάρτηση Lagrange γίνεται

$$f = \theta - w - \frac{\lambda}{3} r(r - zr_z) + \lambda \frac{V_M}{\Delta \theta \Delta z} \quad (16)$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο ορισμό του a , η εξίσωση (8) γίνεται $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{1+a^2} \right] = \frac{\lambda}{a} r r_\theta$ και μετά από την παραγωγή του αριστερού όρου και πολλαπλασιασμό της εξίσωσης με a η (8) γίνεται $-\frac{2a^2 \alpha_\theta}{(1+a^2)^2} = \lambda r r_\theta$. Αλλά αυτό γράφεται ισοδύναμα $\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{1+a^2} - \arctan(a) \right] = \lambda r r_\theta$ και μετά από ολοκλήρωση ως προς θ , έχουμε $\frac{a}{1+a^2} - \arctan(a) = \frac{\lambda}{2} r^2 - g(z)$ ή, ισοδύναμα

$$\arctan(a) = \frac{a}{1+a^2} - \frac{\lambda}{2} r^2 + g(z) \quad (17)$$

οπότε οδηγούμαστε στις ανισώσεις

$$-|a| - \frac{\lambda}{2} r^2 + g(z) \leq \arctan(a) \leq |a| - \frac{\lambda}{2} r^2 + g(z)$$

οι οποίες, μετά από ολοκλήρωση, γίνονται

$$-\int_{\theta_0}^{\theta_T} |a| d\theta \leq \int_{\theta_0}^{\theta_T} \arctan(a) d\theta + \frac{\lambda}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta - \Delta \theta g(z) \leq \int_{\theta_0}^{\theta_T} |a| d\theta \quad (18)$$

Παράλληλα, $\int_{\theta_0}^{\theta_T} a d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_T} \frac{r_\theta}{r} d\theta = \ln \left(\frac{r(\theta_T, z)}{r(\theta_0, z)} \right)$.

Επιπλέον, η (8) εισάγει ότι η $|a| = \frac{|r_\theta|}{r}$ είναι μία αυστηρά μονότονη συνάρτηση του θ , το οποίο υποδηλώνει ότι το a διατηρεί το πρόσημό του όσο το θ βρίσκεται μέσα στο $[\theta_0, \theta_T]$.

Οπότε,

$$\int_{\theta_0}^{\theta_T} |a| d\theta = \left| \int_{\theta_0}^{\theta_T} a d\theta \right| = \left| \ln \left(\frac{r(\theta_T, z)}{r(\theta_0, z)} \right) \right| = \Lambda(z)$$

Επομένως, η ανισότητα (18) δίνει

$$\left| \int_{\theta_0}^{\theta_T} \arctan(a) d\theta - \Delta\theta g(z) + \frac{\lambda}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta \right| \leq \Lambda(z) \quad (19)$$

Τώρα, εκφράζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα των γωνιών μ , μέσω του a . Στην πραγματικότητα,

$$\begin{aligned} \mu &= \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} \arctan(\varphi) d\theta dz = \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} \theta - \arctan(a) d\theta dz \\ \mu &= \frac{\theta_T^2 - \theta_0^2}{2} \Delta z - \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} \arctan(a) d\theta dz \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας τη (19) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{\theta_T^2 - \theta_0^2}{2} \Delta z - \mu - \Delta\theta \int_S^T g(z) dz + \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz \right| &\leq \int_S^T \Lambda(z) dz \quad (20) \\ \mu &\geq \frac{\theta_T^2 - \theta_0^2}{2} \Delta z - \Delta\theta \int_S^T g(z) dz - \int_S^T \Lambda(z) dz + \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz \\ \mu &\leq \frac{\theta_T^2 - \theta_0^2}{2} \Delta z - \Delta\theta \int_S^T g(z) dz + \int_S^T \Lambda(z) dz + \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz \end{aligned}$$

2.4.3.3 Βήμα A5: Εκμετάλλευση των οριακών συνθηκών για την εξασφάλιση ενός χρήσιμου ορίου για το ολοκλήρωμα των γωνιών μ

Το τελευταίο βήμα είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος του $g(z)$, $\int_S^T g(z) dz$. Αυτό επιτυγχάνεται με την εκμετάλλευση των οριακών συνθηκών των εξισώσεων Euler-Lagrange.

Πράγματι, η αρχική barrier surface, όπως και η αρχική καμπύλη-φράγμα του περιστρεφόμενου θραύσματος, μπορούν να θεωρηθούν δοσμένα και σταθερά, στην οποία περίπτωση από την εξίσωση (3) ισχύει ότι

$$[f]_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \theta_0 - \arctan(a_0) - \frac{\lambda}{3} r_0 (r_0 - z r_0') = -\lambda \frac{V_M}{\Delta\theta\Delta z}$$

όπου $r_0=r(\theta_0,z)$, $a_0 = \frac{r_0'}{r_0}$, $r_0' = r_\theta(\theta_0, z)$.

Τώρα χρησιμοποιώντας την εξίσωση (17) παίρνουμε

$$\arctan(a_0) = \frac{a_0}{1+a_0^2} - \frac{\lambda}{2} r_0^2 + g(z) = \frac{r_0' r_0}{r_0'^2 + r_0^2} - \frac{\lambda}{2} r_0^2 + g(z) \quad (21)$$

$$\int_S^T g(z) dz = \theta_0 \Delta z + \lambda \frac{V_M}{\Delta\theta} + \frac{\lambda}{6} (T r_0(T)^2 - S r_0(S)^2) - \int_S^T \frac{r_0' r_0}{r_0'^2 + r_0^2} dz$$

Όμως η απαίτηση το E_R να ξεκινά στο θ_0 στο barrier plane B_S υποδηλώνει ότι

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right]_{\theta=\theta_0} = 0 \Rightarrow \frac{r(\theta_0, z)}{r(\theta_0, z)^2 + r_\theta(\theta_0, z)^2} = 0$$

Από εδώ, προκύπτει ότι $\frac{1}{r_\theta(\theta_0, z)} \rightarrow 0$, το οποίο σημαίνει ότι το E_R ξεκινά στο B_S έτσι ώστε να εξασφαλίζει ότι το θ_0 παραμένει σταθερό. Σε αυτή την περίπτωση, το ίδιο συμβαίνει για το $r(\theta_0, z) = r_0$. Παρομοίως, απαιτώντας από το E_R να τελειώνει στο θ_T στο barrier plane B_T , παίρνουμε

$$\left[\frac{\partial f}{\partial r_\theta} \right]_{\theta=\theta_T} = 0 \Rightarrow \frac{r(\theta_T, z)}{r(\theta_T, z)^2 + r_\theta(\theta_T, z)^2} = 0$$

Από εδώ, προκύπτει ότι $\frac{1}{r_\theta(\theta_T, z)} \rightarrow 0$, το οποίο σημαίνει ότι το E_R τελειώνει στο B_T έτσι ώστε να εξασφαλίζει ότι το θ_T παραμένει σταθερό όπως και ότι $r(\theta_T, z) = r_T$. Συνοψίζοντας, οι απαιτήσεις εκκίνησης στο B_S και τέλους στο B_T παράγουν τις σχέσεις

$$\frac{1}{r_\theta(\theta_0, z)} \rightarrow 0 \quad (22)$$

$$\frac{1}{r_{\theta}(\theta_T, z)} \rightarrow 0 \quad (23)$$

Η τελική έκφραση του μ : Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (22) και (23) παίρνουμε την απλοποιημένη μορφή της (21)

$$\lim_{\frac{1}{r_0^{\theta}} \rightarrow 0} \frac{r_0^{\theta} r_0}{r_0^{\theta^2} + r_0^2} = 0 \Rightarrow \int_S^T g(z) dz = \theta_0 \Delta z + \lambda \frac{V_M}{\Delta \theta} + \frac{\lambda}{6} r_0^2 \Delta z$$

και για το $\Lambda(z)$

$$\Lambda(z) = \left| \ln \left(\frac{r(\theta_T, z)}{r(\theta_0, z)} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{r_T}{r_0} \right) \right|$$

Τώρα τα όρια του μ εκφράζονται ως εξής:

$$\frac{\mu}{\Delta \theta \Delta z} \geq -\frac{1}{\Delta \theta} \left| \ln \left(\frac{r_T}{r_0} \right) \right| + \frac{\Delta(\theta^2)}{2\Delta \theta} - \frac{\lambda V_M}{\Delta \theta \Delta z} - \theta_0 - \frac{\lambda}{6} r_0^2 + \frac{\lambda}{2\Delta \theta \Delta z} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz$$

$$\frac{\mu}{\Delta \theta \Delta z} \leq \frac{1}{\Delta \theta} \left| \ln \left(\frac{r_T}{r_0} \right) \right| + \frac{\Delta(\theta^2)}{2\Delta \theta} - \frac{\lambda V_M}{\Delta \theta \Delta z} - \theta_0 - \frac{\lambda}{6} r_0^2 + \frac{\lambda}{2\Delta \theta \Delta z} \int_S^T \int_{\theta_0}^{\theta_T} r^2 d\theta dz$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (13) στις παραπάνω ανισώσεις και αφήνοντας το λ να πάρει τις ακρότατες τιμές που παίρνουμε από την ανίσωση (15), $\lambda = \frac{\Delta z}{V_M}$, στην οποία περίπτωση ισχύει $V=V_M$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mu}{\Delta \theta \Delta z} \right]_{\lambda = \frac{\Delta z}{V_M}} &\leq \frac{1}{\Delta \theta} \left| \ln \left(\frac{r_T}{r_0} \right) \right| + \frac{\Delta(\theta^2)}{2\Delta \theta} - \theta_0 \\ &+ \frac{\Delta z}{6V_M} \left[-r_0^2 + \frac{1}{\Delta \theta \Delta z} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta \right] \end{aligned}$$

$$\left[\frac{\mu}{\Delta\theta\Delta z} \right]_{\lambda=\frac{\Delta z}{V_M}} \leq -\frac{1}{\Delta\theta} \left| \ln \left(\frac{r_T}{r_0} \right) \right| + \frac{\Delta(\theta^2)}{2\Delta\theta} - \theta_0$$

$$+ \frac{\Delta z}{6V_M} \left[-r_0^2 + \frac{1}{\Delta\theta\Delta z} \int_{\theta_0}^{\theta_T} (Tr(\theta, T)^2 - Sr(\theta, S)^2) d\theta \right]$$

2.4.4 Απόδειξη του θεωρήματος 2

Το θεώρημα 2 αποδεικνύεται λύνοντας το πρόβλημα 2, και ιδιαίτερα τη μερική διαφορική εξίσωση (8) με τις οριακές συνθήκες (10), (11) και τη δοσμένη συνάρτηση $r(\theta, S)$.

2.4.4.1 Βήμα Β3: Υπολογισμός του ολοκληρώματος όγκου

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (8) παίρνουμε $\left[\frac{r^2}{r^2+r_\theta^2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} = \lambda \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta$.

Σε αυτό το σημείο, θα προσπαθήσουμε να συσχετίσουμε αυτό το ολοκλήρωμα με τον όγκο V του χωρίου U . Στην πραγματικότητα, χρησιμοποιώντας την (1), παίρνουμε ότι

$$3V = \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} [r^2 - zrr_z] d\theta dz \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$\frac{1}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz = V + \frac{1}{6} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} (zr^2) d\theta dz \quad (24)$$

Για να υπολογίσουμε το $\int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} (zr^2) d\theta dz$ ορίζουμε $S(z) = \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} zr^2 d\theta$ το οποίο σημαίνει ότι

$$S'(z) = \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} (zr^2) d\theta + [zr^2\theta'(z)]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)}$$

Τέλος, υπολογίζουμε

$$\int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} \frac{\partial}{\partial z} (zr^2) d\theta dz = \left[\int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} zr^2 d\theta \right]_S^T - \int_S^T [zr^2\theta'(z)]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες (11) παίρνουμε

$$-\int_S^T [zr^2\theta'(z)]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz = \frac{3}{\lambda} \int_S^T \left[\frac{r^2}{r^2 + r_\theta^2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz$$

Αν ακόμη λάβουμε υπ' όψιν μας την (8) τότε έχουμε

$$\frac{3}{\lambda} \int_S^T \left[\frac{r^2}{r^2 + r_\theta^2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz = 3 \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz$$

Και τελικά ξαναγράφουμε την (24)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz &= V + \frac{1}{6} \left[\int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} zr^2 d\theta \right]_S^T + 3 \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz \\ \Rightarrow V &= \frac{1}{6} \left(\int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} Sr(\theta, T)^2 d\theta - \int_{\theta_0(T)}^{\theta_T(T)} Tr(\theta, T)^2 d\theta \right) \end{aligned} \quad (25)$$

Χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες (10) στο κάτω επίπεδο D η (25) γίνεται

$$V = \frac{1}{6} \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} Sr(\theta, T)^2 d\theta \quad (26)$$

2.4.4.2 Βήμα B4: Μία πρώτη έκφραση των άνω και κάτω ορίων του μ

Συνεχίζοντας όπως και στο 2.4.3.2 παίρνουμε τα όρια του μ

$$\left| \int_S^T \left[\frac{\theta_B^2}{2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz - \mu - \int_S^T \Delta\theta g(z) dz + \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz \right| \leq \int_S^T \Lambda(z) dz \quad (27)$$

$$\mu \geq \int_S^T \left[\frac{\theta_B^2}{2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz - \int_S^T \Delta\theta g(z) dz + \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz - \int_S^T \Lambda(z) dz$$

$$\mu \leq \int_S^T \left[\frac{\theta_B^2}{2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz - \int_S^T \Delta\theta g(z) dz + \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz + \int_S^T \Lambda(z) dz$$

2.4.4.3 Βήμα B5: Εκμετάλλευση των οριακών συνθηκών για να αποκτήσουμε χρήσιμα και υπολογίσιμα όρια για το ολοκλήρωμα των γωνιών μ .

Το τελευταίο βήμα είναι η αποτίμηση των ολοκληρωμάτων που παίρνουν μέρος στα όρια του μ (27). Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια των οριακών συνθηκών του Προβλήματος 2. Χρησιμοποιούμε τις (11) των οριακών καμπυλών $r(\theta_B(z))$ στα επίπεδα B_S, B_T όπου ο δείκτης B του $\theta_B(z)$ μπορεί να αντικατασταθεί είτε με 0 ή με T .

Αφού τα B_S, B_T είναι επίπεδα παράλληλα προς τον z -άξονα, η εξίσωσή τους είναι $Ax+By=D$ για οποιοδήποτε z . Αντικαθιστώντας με κυλινδρικές συντεταγμένες παίρνουμε $r(A\cos(\theta_B) + B\sin(\theta_B)) = D$ και επομένως $r\cos(\theta_B - w_B) = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2}}$ όπου $w_B = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$. Αφού ο προσανατολισμός του συστήματος αναφοράς είναι τυχαίος, έστω ότι τα επίπεδα B_S, B_T είναι κάθετα στον x -άξονα, το οποίο ισοδύναμα σημαίνει $A=0$.

Συνεπώς, η x συντεταγμένη στο $\theta_B(z)$ γίνεται,

$$x(\theta_B(z), z) = r(\theta_B(z))\cos(\theta_B(z)) = \frac{D}{B} = x_B \quad (28)$$

το οποίο είναι σταθερό και ίσο με το δοσμένο $x_B = r(\theta_B(S))\cos(\theta_B(S))$.

Τώρα η (7) γράφεται

$$-\frac{1}{1+\tan^2(\theta_B(z))} - \frac{\lambda}{3} z x_B^2 \frac{\theta_B'(z)}{\cos^2(\theta_B(z))} = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{z} + \frac{\lambda}{3} x_B^2 \frac{\theta_B'(z)}{\cos^4(\theta_B(z))} = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{z}{S}\right) + \frac{\lambda}{3} x_B^2 \int_{\theta_B(S)}^{\theta_B(z)} \frac{d\theta_B}{\cos^4(\theta_B)} = 0$$

Αλλά μπορούμε να υπολογίσουμε

$$\int_{\theta_B(S)}^{\theta_B(z)} \frac{d\theta_B}{\cos^4(\theta_B)} = \left[\tan(\theta_B) \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\theta_B) \right) \right]_{\theta_B(S)}^{\theta_B(z)}$$

Άρα η συνάρτηση $\tan(\theta_B(z))$ μπορεί να βρεθεί λύνοντας την εξίσωση

$$\ln\left(\frac{z}{S}\right) - A(\theta_B(S)) + \frac{\lambda}{3} x_B^2 \tan(\theta_B) + \frac{\lambda}{9} x_B^2 \tan^3(\theta_B) = 0 \quad (30)$$

Όπου η συνάρτηση $A(\theta_B)$ δίνεται από τον τύπο

$$A(\theta_B) = \frac{\lambda}{3} x_B^2 \tan(\theta_B) \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\theta_B) \right)$$

Οπότε, γράφοντας τη (17) στα barrier planes παίρνουμε την έκφραση του $g(z)$

$$g(z) = \theta_B - \frac{\tan(\theta_B)}{1 + \tan^2(\theta_B)} + \frac{\lambda}{2} x_B^2 (1 + \tan^2(\theta_B)) \quad (31)$$

Τώρα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την (30) για να πάρουμε μία χρήσιμη έκφραση για το ολοκλήρωμα $\int_S^T g(z) \Delta\theta(z) dz$ χρησιμοποιώντας την (31):

Πρώτα θα εκφράσουμε το dz μέσω του $d\theta_B$ χρησιμοποιώντας την (29)

$$dz = -\frac{\lambda}{3} z x_B^2 \left(1 + \tan^2(\theta_B(z)) \right)^2 d\theta_B$$

κι έπειτα θα λύσουμε την (30) ως προς z

$$\begin{aligned} z &= S \frac{\exp\left(\frac{\lambda}{3} x_B^2 \tan(\theta_B^S) \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\theta_B^S) \right)\right)}{\exp\left(\frac{\lambda}{3} x_B^2 \tan(\theta_B) \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\theta_B) \right)\right)} \\ &= z_S \exp\left(-\frac{\lambda}{3} x_B^2 \tan(\theta_B) \left(1 + \frac{1}{3} \tan^2(\theta_B) \right)\right) \end{aligned}$$

Και τώρα ορίζουμε

$$p(\theta_B) = 1 + \tan^2(\theta_B) = \frac{r_B^2}{x_B^2} \quad (32)$$

και συνεπώς παίρνουμε

$$dz = -\frac{\lambda}{3} z_S x_B^2 p^2 \exp\left(-\frac{\lambda}{9} x_B^2 (p+2) \tan(\theta_B)\right) d\theta_B \quad (33)$$

Έτσι, η έκφραση για το διαφορικό $g(z)\theta_B dz$ γίνεται

$$g(z)\theta_B dz = \frac{\lambda x_B^2 z_S}{3} \theta_B \left[\frac{p \tan(\theta_B) - p^2 \left(\theta_B + \frac{\lambda}{2} x_B^2 p\right)}{\exp\left(\frac{\lambda x_B^2}{9} (p+2) \tan(\theta_B)\right)} \right] d\theta_B$$

Τώρα, ορίζοντας τη συνάρτηση

$$F(\theta_B) = \theta_B \frac{p \tan(\theta_B) - p^2 \left(\theta_B + \frac{\lambda}{2} x_B^2 p\right)}{\exp\left(\frac{\lambda x_B^2}{9} (p+2) \tan(\theta_B)\right)} \quad (34)$$

το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_S^T g(z) \Delta\theta(z) dz$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου:

$$\int_S^T g(z) \Delta\theta(z) dz = \frac{\lambda z_S}{3} \left[x_B^2 \int_{\theta_B(S)}^{\theta_B(T)} F(\theta_B) d\theta_B \right]_{\theta_B=\theta_0}^{\theta_B=\theta_T} \quad (35)$$

Ο αρχικός όρος $\theta_B(S)$ δίνεται από την οριακή συνθήκη της δοσμένης $r(\theta, S)$. Αλλά το $\theta_B(T)$ πρέπει να υπολογιστεί με τη χρήση της οριακής συνθήκης (6) η οποία θέτει την τελική τιμή του z , $T=0$ και συνεπώς $\lim_{z \rightarrow 0} \ln\left(\frac{z}{S}\right) = A(\theta_B(S)) - A(\theta_B(T))$. Η τελευταία έκφραση υποδηλώνει επίσης ότι $\theta_B(T) \rightarrow \pi/2$.

Ως εκ τούτου, η (35) γίνεται

$$\int_S^T g(z) \Delta\theta(z) dz = \frac{\lambda z_S}{3} \left[x_B^2 \int_{\theta_B(S)}^{\pi/2} F(\theta_B) d\theta_B \right]_{\theta_B=\theta_0}^{\theta_B=\theta_T} \quad (36)$$

Θεωρώντας ίσες αποστάσεις των barrier planes από τον z-άξονα ισχύει ότι $|x_0| = |x_T| = \frac{L}{2}$. Έτσι καταλήγουμε στην τελική έκφραση του I_1

$$I_1 = \frac{\lambda z_S}{12} L^2 \int_{\theta_T(S)}^{\theta_0(S)} F(\theta_B) d\theta_B \quad (37)$$

όπου η συνάρτηση $F(\theta_B)$ αναδιατυπώνεται

$$F(\theta_B) = p\theta_B \frac{\tan(\theta_B) - p\theta_B + \frac{\lambda L^2}{8} p^2}{\exp\left(\frac{\lambda L^2}{36} (p+2) \tan(\theta_B)\right)} \quad (38)$$

Θα ξαναγράψουμε τώρα τη συνάρτηση $\Lambda(z)$ μέσω του ορισμού (32)

$$\Lambda(z) = \left| \ln \left(\frac{r(\theta_T(z))}{r(\theta_0(z))} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \ln \left(\frac{x_0 p(\theta_T(z))}{x_T p(\theta_0(z))} \right) \right| = \left| \ln \left(\frac{p(\theta_T(z))}{p(\theta_0(z))} \right) \right| \quad (39)$$

Τώρα, το ολοκλήρωμα I_2 του $\Lambda(z)$ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την (33) στο I_2 :

$$\int_S^T \Lambda(z) dz = \frac{\lambda z_S}{24} L^2 \left[\int_{\theta_B(S)}^{\pi/2} p^2 \ln(p) \exp\left(-\frac{\lambda L^2}{36} (p+2) \tan(\theta_B)\right) d\theta_B \right]_{\theta_B=\theta_0(S)}^{\theta_B=\theta_T(S)}$$

$$I_2 = \frac{\lambda z_S}{24} L^2 \left| \int_{\theta_T(S)}^{\theta_0(S)} p^2 \ln(p) \exp\left(-\frac{\lambda L^2}{36} (p+2) \tan(\theta_B)\right) d\theta_B \right| \quad (40)$$

Ο επόμενος όρος των ορίων του μ που θα υπολογιστεί είναι το ολοκλήρωμα $I_3 = \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz$. Χρησιμοποιούμε την εξίσωση Euler-Lagrange (8), η οποία μετά από ολοκλήρωση ως προς θ δίνει

$$\left[\frac{r^2}{r^2 + r_\theta^2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} = \lambda \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz = \frac{1}{2} \int_S^T \left[\frac{r(\theta_B)^2}{r(\theta_B)^2 + r_\theta(\theta_B)^2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz$$

και χρησιμοποιώντας την (11) μαζί με τον ορισμό (22) παίρνουμε

$$\frac{\lambda}{2} \int_S^T \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta dz = \frac{1}{2} \int_S^T \left[\frac{1}{p(\theta_B)} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz \quad (41)$$

Το ολοκλήρωμα $\int_S^T \left[\frac{1}{p(\theta_B)} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz$ μπορεί να υπολογιστεί με χρήση της σχέσης (33)

$$\int_S^T \left[\frac{1}{p(\theta_B)} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz = -\frac{\lambda L^2}{24} z_S \left[\int_{\theta_B(s)}^{\pi/2} p \exp \left(-\frac{\lambda L^2}{36} (p+2) \tan(\theta_B) \right) d\theta_B \right]_{\theta_B=\theta_0}^{\theta_B=\theta_T}$$

Τελικά, το ολοκλήρωμα I_3 υπολογίζεται από τον τύπο

$$I_3 = \frac{\lambda L^2}{24} z_S \int_{\theta_0(s)}^{\theta_T(s)} p \exp \left(-\frac{\lambda L^2}{36} (p+2) \tan(\theta_B) \right) d\theta_B \quad (42)$$

Ο τελευταίος όρος των ορίων του μ που μένει να εκτιμηθεί είναι το ολοκλήρωμα $I_4 = \int_S^T \left[\frac{\theta_B^2}{2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} dz$, το οποίο, χρησιμοποιώντας την (33), εκφράζεται μέσω του τύπου

$$I_4 = -\frac{\lambda L^2}{24} z_S \left[\int_{\theta_B(s)}^{\pi/2} \theta_B^2 p^2 \exp \left(-\frac{\lambda L^2}{36} (p+2) \tan(\theta_B) \right) d\theta_B \right]_{\theta_B=\theta_0}^{\theta_B=\theta_T}$$

ή ισοδύναμα μέσω του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I_4 = \frac{\lambda L^2}{24} z_S \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \theta_B^2 p^2 \exp\left(-\frac{\lambda L^2}{36}(p+2)\tan(\theta_B)\right) d\theta_B \quad (43)$$

Τελικά, πρέπει να υπολογίσουμε τον παράγοντα λ χρησιμοποιώντας την εξίσωση Euler-Lagrange (8) μαζί με την (11) στα barrier planes και το αποτέλεσμα (28):

$$\left[\frac{1}{1 + \tan^2(\theta_B)} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} = \lambda \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta$$

Αντικαθιστώντας το $r(\theta_B(z))^2 = \frac{L^2}{4\cos^2(\theta_B)} = \frac{L^2}{4}(1 + \tan^2(\theta_B))$ στην παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\left[\frac{L^2}{4r(\theta_B(z))^2} \right]_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} = \lambda \int_{\theta_0(z)}^{\theta_T(z)} r^2 d\theta \quad (44)$$

Γράφοντας την (44) στην άνω επίπεδη επιφάνεια C, το λ μπορεί να υπολογιστεί μέσω του τύπου

$$\lambda = \left[\frac{1}{r(\theta_B(S))^2} \right]_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \frac{L^2}{4 \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} r(\theta, S)^2 d\theta} \quad (45)$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (26) και θεωρώντας ότι ο όγκος που εσωκλείεται από το E_R είναι ίσος με το V_M , η (45) γίνεται:

$$\lambda = \left[\frac{1}{r(\theta_B(S))^2} \right]_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \frac{SL^2}{24V_M} \quad (46)$$

Η τελική έκφραση του μ : Χρησιμοποιώντας τις εκφράσεις (37), (40), (42), (43) των ολοκληρωμάτων που διαμορφώνουν τα όρια του μ και τον τύπο (46) για τον πολλαπλασιαστή λ παίρνουμε το τελικό όριο για το μ

$$\frac{\lambda L^2}{24} z_S \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \Phi_-(\theta_B) d\theta_B \leq \mu \leq \frac{\lambda L^2}{24} z_S \int_{\theta_0(S)}^{\theta_T(S)} \Phi_+(\theta_B) d\theta_B$$

όπου οι συναρτήσεις $\Phi_-(\theta_B)$, $\Phi_+(\theta_B)$ ορίζονται από τους τύπους

$$\Phi_+(\theta_B) = p \frac{\theta_B^2 + 1 + \operatorname{sgn}(\Delta\theta(S))p \ln p + 2\theta_B \left(\tan(\theta_B) - \theta_B p - \frac{\lambda L^2}{8} p^2 \right)}{\exp\left(\frac{\lambda L^2}{36} (p+2)\tan(\theta_B)\right)}$$

$$\Phi_-(\theta_B) = p \frac{\theta_B^2 + 1 - \operatorname{sgn}(\Delta\theta(S))p \ln p + 2\theta_B \left(\tan(\theta_B) - \theta_B p - \frac{\lambda L^2}{8} p^2 \right)}{\exp\left(\frac{\lambda L^2}{36} (p+2)\tan(\theta_B)\right)}$$

3 Η μεθοδολογία και το σύστημα

3.1 Ορισμοί

Έχω ένα fragment (θραύσμα) στο χώρο R^3 .

Θεωρώ πάνω επιφάνεια το λείο επίπεδο (αυτό που έχει την πληροφορία). Περιστρέφω και μετατοπίζω το fragment στην αρχή των αξόνων έτσι ώστε το κάθετο διάνυσμα στην πάνω αυτή επιφάνεια να είναι παράλληλο στον z-άξονα. Θέλουμε να βρούμε το βέλτιστο ταίριασμα στο χώρο με ένα άλλο fragment. Αυτό συμβαίνει όταν ο όγκος ανάμεσα σε συνεκτικά υποσύνολα των παράπλευρων επιφανειών των δύο fragments είναι ελάχιστος, ιδανικά 0.

Αρχικά, ορίζουμε σημείο επαφής.

Προκειμένου να ελέγξουμε κάθε πιθανό ταίριασμα και μην έχοντας κάποια γνώση για το πού έχει γίνει η θραύση, ξεκινάμε από ένα σημείο (σημείο επαφής) και για τα δύο fragments. Το πρώτο σημείο και για τα δύο fragments είναι το πάνω αριστερά στο xy επίπεδο (μέγιστο y, ελάχιστο x). Στη συνέχεια με στροφή βήματος θ έως και περιστροφή 360° ελέγχουμε εξαντλητικά όλα τα σημεία του ενός fragment με το πρώτο σημείο του άλλου. Η ίδια διαδικασία θα επαναληφθεί για όλα τα σημεία του πρώτου fragment ώστε όλα τα σημεία να έχουν ελεγχθεί με όλα.

Ορίζουμε μήκος σύγκρισης

Ορίζουμε default μήκος σύγκρισης για να γίνει ο έλεγχος για όλα τα fragments. Αν δεν προκύψει κανένα ταίριασμα, θα το ελαττώσουμε, ενώ αν προκύψει θα το αυξάνουμε κατά ένα συνεχώς, κάνοντας την ίδια διαδικασία μέχρι να χαλάσει το ταίριασμα. Έτσι προκύπτει και η μέγιστη επιφάνεια ταιριάσματος.

Ορισμός «πετάσματος» escarpment

Πρέπει να ορίσουμε το χώρο του οποίου τον όγκο ελέγχουμε. Έχοντας τις πάνω επιφάνειες των δύο fragment στο ίδιο επίπεδο (στο ίδιο z), έχουμε το άνω όριο του χώρου μας. Το παράλληλο με αυτό κάτω επίπεδο ορίζεται από το ελάχιστο από τα δύο ύψη των δύο fragments. Έστω A το σημείο επαφής και B το πέρας του μήκους σύγκρισης. Χρησιμοποιώντας το σημείο επαφής που επιλέξαμε και για μήκος ίσο με το μήκος σύγκρισης εντοπίζουμε δύο ευθύγραμμα τμήματα παράλληλα προς το z τα οποία είναι τα άκρα του πετάσματος του πρώτου fragment. Ορίζουμε τα επίπεδα που είναι παράλληλα προς το z και κάθετα στο A και στο B αντίστοιχα.

Initial barrier plane = A

Terminal Barrier plane = B

Χώριο Ω

Τα δύο barrier planes, η παράπλευρος επιφάνεια του fixed θραύσματος μεταξύ των barrier planes (την οποία ονομάζουμε fixed escarpment ή σταθερό πέτασμα) και οι άνω και κάτω επιφάνειες ορίζουν το χώρο σύγκρισης. Μέσα σε αυτό τον χώρο Ω θα αρχίσει να περιστρέφεται και να μετατοπίζεται το περιστρεφόμενο θραύσμα (rotated fragment).

3.2 Σύντομη Περιγραφή

Όπως έχει προαναφερθεί, το σύστημα που αναπτύχθηκε έχει ως στόχο την ανακατασκευή θραυσμένων τοιχογραφιών, με την έννοια της εύρεσης πιθανών κολλήσεων μεταξύ των διαφόρων κομματιών.

Σαν είσοδο το σύστημα δέχεται τις τομές δύο θραυσμάτων σε μορφή txt αρχείων. Οι τομές παράγονται σαν εικόνες από ένα τρισδιάστατο scanner. Οι εικόνες αυτές, μετά από κατάλληλη επεξεργασία, η οποία ξεφεύγει από τα πλαίσια της παρούσης εργασίας, μετατρέπονται σε αρχεία txt τα οποία αποτελούνται από πίνακες με μοναδικά στοιχεία τα 1 και 0. 1 όπου υπάρχει κονίαμα και 0 όπου δεν υπάρχει.

Με λίγα λόγια, το σύστημα ελέγχει για όλα τα σημεία του περιγράμματος του πρώτου θραύσματος αν μία αλυσίδα των σημείων αυτών με μήκος σταθερό και δοσμένο, "ταιριάζει" ή όχι με την αντίστοιχη αλυσίδα σημείων περιγράμματος του δεύτερου θραύσματος. Τι περιλαμβάνει ο όρος "ταιριάζω" για τις αλυσίδες των δύο θραυσμάτων θα περιγραφεί παρακάτω. Η διαδικασία αυτή γίνεται εξαντλητικά, το οποίο σημαίνει ότι ο έλεγχος γίνεται για κάθε πιθανή αλυσίδα του πρώτου θραύσματος με όλες τις αλυσίδες του δεύτερου.

Το ένα θραύσμα παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια του ελέγχου (σταθερό θραύσμα) ενώ το δεύτερο περιστρέφεται συνολικά κατά 360° (περιστρεφόμενο θραύσμα), με σταθερό βήμα περιστροφής, το οποίο για τις δικές μας δοκιμές ήταν 1° , ώστε να ελεγχθούν όλες οι πιθανές θέσεις. Για κάθε μία γωνία περιστροφής, σαρώνονται τα περιγράμματα και των δύο θραυσμάτων ώστε κάθε σημείο περιγράμματος του σταθερού θραύσματος ή, όπως θα το ονομάζουμε διαφορετικά, του θραύσματος αναφοράς, να ελεγχθεί με κάθε σημείο του περιστρεφόμενου θραύσματος ή διαφορετικά, του τρέχοντος θραύσματος.

Πιο αναλυτικά, έχοντας ορίσει το πρώτο ζεύγος σημείων επαφής στα δύο θραύσματα μετατοπίζουμε το περιστρεφόμενο θραύσμα ώστε τα δύο σημεία να συμπέσουν. Σε αυτήν τη θέση ελέγχουμε την επικάλυψη των δύο θραυσμάτων. Ιδανικά αυτή πρέπει να είναι 0. Στην

πράξη επιτρέπουμε ένα πολύ μικρό ποσοστό επικάλυψης λόγω των ατελειών της διαδικασίας 3D-scanning.

Αριθμούμε τα περιγράμματα όλων των fragments με τρόπο μοναδικό (αυτόματα μέσω κώδικα). Ξεκινάμε με ζεύγος σημείων επαφής το 1 του σταθερού θραύσματος με το 1 του περιστρεφόμενου θραύσματος (1-1). Αφού βρούμε τη βέλτιστη επικάλυψη και κάνουμε όλη τη διαδικασία συνεχίζουμε επιλέγοντας ως ζεύγος σημείων επαφής το 1 του σταθερού θραύσματος με το 2 του περιστρεφόμενου θραύσματος (1-2) και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία. Αυτό γίνεται μέχρι και το (1-v2).

Στη συνέχεια ελέγχουμε:

(2-1), (2-2), ... ,(2-v2)

...

(v1-1), (v1-2), ... , (v1-v2)

Η μέθοδος που έχει αναπτυχθεί απορρίπτει πιθανά ταιριάσματα με τρία διαφορετικά κριτήρια:

- Υπάρχει ένα μέγιστο εμβαδόν το οποίο δεχόμαστε ότι μπορεί να υπάρχει μεταξύ των δύο αλυσίδων των τομών οι οποίες ταιριάζουν. Ακόμη υπάρχει, όπως προαναφέρθηκε, και ένα κατώφλι επικάλυψης.
- Γίνεται έλεγχος της γεωμετρίας των θραυσμάτων, δηλαδή, αν η καμπυλότητές τους είναι αρκετά διαφορετικές ώστε να είναι πιθανόν να δώσουν κόλληση.
- Θεωρώ ότι τα μήκη των αλυσίδων δεν μπορούν να έχουν πολύ μεγάλη διαφορά, διαφορετικά, η πιθανότητα να ταιριάζουν είναι ελάχιστη. Με το θεώρημα που αναπτύχθηκε στο κεφάλαιο 2, μπορούμε να βρούμε το διάστημα μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το μήκος της περιστρεφόμενης αλυσίδας ώστε να είναι δυνατό να ταιριάζει με τη σταθερή αλυσίδα.

Αν δύο αλυσίδες περάσουν τον έλεγχο και των τριών αυτών κριτηρίων, οι δύο αλυσίδες λέμε ότι "ταιριάζουν". Οι έλεγχοι αυτοί γίνονται στην άνω τομή του κονιάματος, δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι γίνονται στο κομμάτι του κονιάματος που υπάρχει η τοιχογραφία. Αν δύο αλυσίδες λοιπόν, "ταιριάζουν", προχωράμε στον έλεγχο των ίδιων κριτηρίων για τις αντίστοιχες αλυσίδες των παρακάτω τομών του θραύσματος.

Πραγματική κόλληση δίνει το σύστημα αν για δύο αλυσίδες, περαστούν με επιτυχία όλοι οι έλεγχοι για όλες τις τομές του κονιάματος.

3.2 Ένα flowchart του συστήματος

Βήμα 1: Διάβασμα και επεξεργασία πρώτης εικόνας

Διάβασμα της πρώτης εικόνας.

Επέκταση της εικόνας που παίρνουμε από το τρισδιάστατο scanner.

Καθαρισμός εικόνας με μάσκα 3x3.

Καθαρισμός εικόνας με μάσκα 7x7.

Καθαρισμός εικόνας 4 pixels, δηλαδή, αν ανάμεσα σε 2 άσπρα pixel (τομής) έχω 2 μαύρα (υπόβαθρου) τότε κάνω το περικλειόμενο υπόβαθρο τομή, και δεικνύω αντίστροφα.

Καθαρισμός εικόνας 3 pixels, δηλαδή, αν ανάμεσα σε 2 άσπρα pixel (τομής) έχω 1 μαύρο (υπόβαθρου) τότε κάνω το περικλειόμενο υπόβαθρο τομή, και δεικνύω αντίστροφα.

Βήμα 2: Εύρεση περιγράμματος

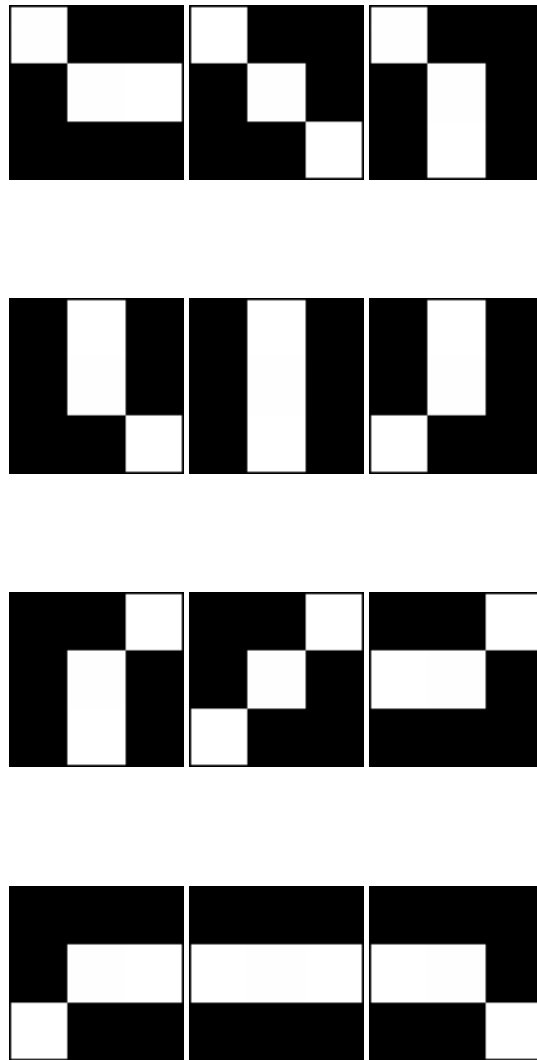
Ξεκινάμε από πάνω αριστερά. Φτιάχνω μία περιοχή με 0 το κέντρο και τα γύρω pixels από 1 έως 8 (σχήμα 3) και παίρνω μόνο τους επιτρεπτούς συνδυασμούς (σχήμα 4). Από το πάνω αριστερά σημείο, πάω μόνο στους επιτρεπτούς συνδυασμούς, ελέγχω το σταυρό σε κάθε σημείο και αν έχει 2 άσπρα και 2 μαύρα pixels, ή 1 μαύρο και 3 άσπρα pixels, επιλέγεται το κατάλληλο κι έτσι προχωρώ ωρολογιακά μέχρι το κλείσιμο.

Αντιγραφή περιγράμματος και εικόνας σε δύο νέους πίνακες.

Κλήση της perigramma – Επιστροφή των συντεταγμένων των σημείων του περιγράμματος σε δύο διανύσματα.

1	2	3
8	0	4
7	6	5

Σχήμα 3



Σχήμα 4 Σε αυτήν την εικόνα παρουσιάζονται όλοι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί εικονοστοιχείων. Με άσπρο χρώμα εμφανίζονται τα pixels που ανήκουν στο περίγραμμα.

Ξεκινάμε τις περιστροφές. Για κάθε γωνία:

Βήμα 3: Διάβασμα και επεξεργασία δεύτερης εικόνας

Διάβασμα της δεύτερης εικόνας.

Επέκταση της εικόνας που παίρνουμε από το τρισδιάστατο scanner για να χωράει όλες τις περιστροφές του rotated fragment.

Περιστροφή της εικόνας.

Καθαρισμός εικόνας με μάσκα 3x3.

Καθαρισμός εικόνας με μάσκα 7x7.

Καθαρισμός εικόνας 4 pixels, δηλαδή, αν ανάμεσα σε 2 άσπρα pixel (τομής) έχω 2 μαύρα (υπόβαθρου) τότε κάνω το περικλειόμενο υπόβαθρο τομή, και δεικνύω αντίστροφα.

Καθαρισμός εικόνας 3 pixels, δηλαδή, αν ανάμεσα σε 2 άσπρα pixel (τομής) έχω 1 μαύρο (υπόβαθρου) τότε κάνω το περικλειόμενο υπόβαθρο τομή, και δεικνύω αντίστροφα.

Βήμα 4: Εύρεση περιγράμματος δεύτερης εικόνας

Ξεκινάμε από πάνω αριστερά. Φτιάχνω μία περιοχή με 0 το κέντρο και τα γύρω pixels από 1 έως 8 (σχήμα 1) και παίρνω μόνο τους επιτρεπούς συνδυασμούς (σχήμα 2). Από το πάνω αριστερά σημείο, πάω μόνο στους επιτρεπούς συνδυασμούς, ελέγχω το σταυρό σε κάθε σημείο και αν έχει 2 άσπρα και 2 μαύρα, ή 1 μαύρο και 3 άσπρα, επιλέγεται το κατάλληλο κι έτσι προχωρώ ωρολογιακά μέχρι το κλείσιμο.

III: Σαρώνω όλο του περίγραμμα του σταθερού κονιάματος, ωρολογιακά, με σταθερό βήμα (fixed)

kl: Ακολουθεί εξαντλητική σάρωση του περιγράμματος του περιστρεφόμενου κονιάματος, ανθρωρολογιακά, με σταθερό βήμα (rotating)

Βήμα 5: Εύρεση του βέλους

Βρίσκουμε πόσο πρέπει να μετατοπιστεί το υπ' αριθμόν kl pixel του τρέχοντος κονιάματος για να συμπέσει με το υπ' αριθμόν III pixel του σταθερού.

Δημιουργία πινάκων με τα μετατοπισμένα σημεία του περιγράμματος μετά τη σύμπτωση των σημείων επαφής

Βήμα 6: Εύρεση ορίων

Κατασκευή της σταθερής αλυσίδας

Φτιάχνουμε τη barrier line. Έστω AB η αρχή και το πέρας της σταθερής αλυσίδας. Εύρεση της εξίσωσης της καθέτου επί του ευθυγράμμου τμήματος AB στο B.

Βήμα 7: Έλεγχος μήκους

Εάν ξεπεράσω κάποιο υπερβολικό μήκος θεωρώ ότι δεν έχω κόλληση. Το μήκος αυτό είναι σταθερό και δοσμένο σαν παράμετρος, και προκύπτει από το θεώρημα που αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2.

Κάθε ευθεία χωρίζει το επίπεδο σε 3 χώρους. Σε κάθε έναν από αυτούς τους χώρους η ευθεία διατηρεί σταθερά αρνητική, θετική ή μηδενική τιμή. Οι δύο barrier lines, χωρίζουν το επίπεδο σε 3 χώρους η κάθε μία. Όλα τα σημεία του περιγράμματος που βρίσκονται μέσα στο χωρίο Ω , ανήκουν στον ίδιο χώρο που σχηματίζει κάθε barrier line, και αποτελούν την αλυσίδα μας. Οπότε, το πρόσημο της αρχής οποιασδήποτε αλυσίδας ως προς τις 2 barrier lines, είναι το πρόσημο που θα διατηρήσει ως προς τις ίδιες σε όλα τα σημεία της.

Βήμα 8: Έλεγχος συνθήκης γωνιών

Συνθήκη: Τι γωνία μπορεί να σχηματίζουν στο AB και το AG, όπου Γ το τέλος της περιστρεφόμενης (τρέχουσας) αλυσίδας.

Ελέγχουμε αν η γωνία μεταξύ AB και AG, δηλαδή των ευθύγραμμων αντιπροσώπων των αλυσίδων αυτών είναι ικανοποιητικά μικρή. Και πάλι η μέγιστη επιτρεπόμενη γωνία είναι σταθερή και δοσμένη σαν παράμετρος, και προκύπτει από το δεύτερο θεώρημα του κεφαλαίου 2.

Βήμα 9: Κλήση μιας συνάρτησης υπολογισμού του εμβαδού ανάμεσα στις δύο, γνωστές πλέον, αλυσίδες. Η συνάρτηση αυτή περιγράφεται αναλυτικά στην επόμενη ενότητα.

Βήμα 10: Έλεγχος κριτηρίου

Έλεγχος αν το εμβαδόν είναι μικρότερο από το μέγιστο επιτρεπτό εμβαδόν άνω διατομής. Την ίδια στιγμή ελέγχεται και αν το ποσοστό επικάλυψης είναι μικρότερο από ένα μέγιστο αποδεκτό ποσοστό.

Αν το σημείο αυτό ταιριάσματος δεν περάσει αυτούς τους ελέγχους τότε απορρίπτεται ως ταιρίασμα.

Σε αντίθετη περίπτωση, δηλαδή αν το σημείο ταιριάσματος περάσει αυτούς τους ελέγχους, έχουμε πιθανό ταιρίασμα και καλείται η συνάρτηση `tairiasma_orofos` έτσι ώστε να προχωρήσουμε στις πιο κάτω διατομές.

Για όλες τις τομές που έχουμε δώσει στο πρόγραμμα

Βήμα 11: Διάβασμα και επεξεργασία επόμενης τομής του θραύσματος αναφοράς

Διάβασμα της νέας τομής του σταθερού θραύσματος.

Επέκταση της εικόνας που παίρνουμε από το τρισδιάστατο scanner.

Καθαρισμός εικόνας με μάσκα 3x3.

Καθαρισμός εικόνας με μάσκα 7x7.

Καθαρισμός εικόνας 4 pixels.

Καθαρισμός εικόνας 3 pixels.

Βήμα 12: Εύρεση περιγράμματος

Εύρεση περιγράμματος, και αποθήκευση των συντεταγμένων των σημείων του περιγράμματος.

Βήμα 13:Εύρεση της νέας σταθερής αλυσίδας

Βρίσκουμε το αρχικό σημείο της νέας αλυσίδας, δηλαδή το

αντίστοιχο σημείο A της άνω διατομής, το σημείο από όπου θα αρχίσει η σύγκρισή μας.

Και πάλι χρησιμοποιούμε την ιδιότητα της ευθείας να χωρίζει το χώρο σε τρία μέρη, ανάλογα με το πρόσημο που παίρνει η εξίσωσή της.

Βήμα 14:Διάβασμα και επεξεργασία της επόμενης τομής του τρέχοντος θραύσματος

Διαβάζουμε την επόμενη τομή του 2^{ου} θραύσματος.

Επέκταση της εικόνας, καθαρισμός, περιστροφή και εκ νέου καθαρισμός της.

Βήμα 15: Εύρεση ορίων

Εύρεση αρχής της νέας περιστρεφόμενης αλυσίδας

Βρίσκεται και η αρχή της περιστρεφόμενης αλυσίδας στη νέα τομή.

Εύρεση τέλους πρώτης αλυσίδας.

Εύρεση τέλους δεύτερης αλυσίδας

Βήμα 16: Έλεγχος κριτηρίου γωνίας

Έλεγχος για υπέρβαση μέγιστης επιτρεπόμενης γωνίας μεταξύ των νέων AB και AG.

Βήμα 17: Υπολογισμός του εμβαδού ανάμεσα στις αλυσίδες των νέων τομών.

Αν το εμβαδό αυτό δεν έχει ξεπεράσει το επιτρεπτό όριο εμβαδού τομής, κρατούνται τα κατάλληλα στοιχεία για μετέπειτα χρήση (π.χ. στατιστική μελέτη). Διαφορετικά, αν ο αριθμός των τομών που έχουν «ταιριάξει» είναι ικανοποιητικά μεγάλος, η μεταβλητή "exw_tairiaksei" επιστρέφει στην tairiasma ως 1, για να υποδηλώσει πιθανό ταίριασμα. Αν όχι, τότε η ένωση απορρίπτεται και η "exw_tairiaksei" επιστρέφει 0.

Βήμα 18: Έλεγχος για ταίριασμα

Μόλις επιστρέψει η "tairiasma_orofos" αν η μεταβλητή "exw_tairiaksei" έχει γίνει 1 κρατάμε συνολικά στατιστικά και κατάλληλα στοιχεία, ώστε αργότερα να μπορούμε να βρούμε το ακριβές σημείο που υπήρξε πιθανό ταίριασμα και να το αναπαραστήσουμε οπτικά.

Βήμα 19: Ομαδοποίηση αποτελεσμάτων

Είναι πιθανό, λόγω του περιθωρίου σφάλματος που δίνουμε, σε μία περιοχή ταιριάσματος, τα κοντινά σημεία να δίνουν πιθανό ταίριασμα. Γι' αυτό το λόγο κρατάμε όλα τα στοιχεία που χρειαζόμαστε σε μία struct (μία για κάθε σημείο πιθανού ταιριάσματος). Αφού γίνουν όλοι οι πιθανοί έλεγχοι για μία γωνία περιστροφής του τρέχοντος θραύσματος, γίνεται μία συγχώνευση για σημεία που βρίσκονται πολύ κοντά, κατά την οποία κρατάμε μόνο το σημείο που είχε το βέλτιστο εμβαδόν. Αυτή τη διαδικασία ονομάζουμε συγχώνευση περιοχών.

Βήμα 20: Εκτύπωση αποτελεσμάτων

Επιστρέφουμε στη main για να γράψουμε τα αποτελέσματα που βρήκαμε, δηλαδή τα στοιχεία για τα πιθανά ταιριάσματα, σε ένα output txt αρχείο, και να προχωρήσουμε στην επόμενη γωνία περιστροφής.

3.3 Ένα ισχυρό κριτήριο για το αν δύο θραύσματα μπορεί να ταιριάζουν ή όχι

Στο στάδιο 6 της μεθόδου δημιουργήσαμε δύο αλυσίδες pixels, όπου η μία, έστω C^{Σ} , που ονομάστηκε σταθερή είναι συνεκτικό υποσύνολο του περιγράμματος της άνω τομής του σταθερού θραύσματος, ενώ η δεύτερη, έστω C^{Π} , που ονομάστηκε περιστρεφόμενη ή τρέχουσα είναι συνεκτικό υποσύνολο του περιγράμματος της άνω τομής του περιστρεφόμενου θραύσματος. Οι δύο αλυσίδες, εκκινούν από το ίδιο σημείο, έστω A , και περατούνται στη γραμμή $B\Gamma$, που ονομάστηκε barrier line. Με βάση αυτά τα γεωμετρικά στοιχεία, θα δημιουργηθεί ένα κατάλληλο τρισδιάστατο χωρίο μεταξύ των θραυσμάτων που ελέγχονται για ταιρίασμα. Πράγματι, από το $B\Gamma$ φέρουμε το μοναδικό επίπεδο, έστω E^B , που είναι κάθετο σε όλες τις εξεταζόμενες διατομές. Υπενθυμίζεται, ότι τα θραύσματα έχουν στραφεί κατά τέτοιο τρόπο, ώστε όλες οι διατομές τους να είναι κάθετες προς έναν άξονα που τον θεωρούμε ως τον z άξονα.

Εν συνεχεία, φέρουμε το μοναδικό επίπεδο, έστω E^A , που περνά από το σημείο επαφής A και είναι παράλληλο προς το επίπεδο E^B . Προφανώς το E^A είναι εκ κατασκευής παράλληλο προς τον z άξονα και κάθετο σε όλες τις διατομές των δύο θραυσμάτων.

Τέλος, για κάθε θραύσμα χωριστά, έχουμε αυτό που ονομάζουμε «βάθος θραύσματος», δηλαδή το μέγιστο αριθμό παράλληλων διατομών που έχουν εμβαδόν τομής με το θραύσμα πάνω από ένα μικρό, κατάλληλα επιλεγμένο, όριο. Είναι προφανές, ότι για την παρούσα μέθοδο θεωρούμε ότι το κάθε θραύσμα εκκινεί από την άνω διατομή που είναι συνήθως ζωγραφισμένη και περατούται στην κατώτερη διατομή, η οποία απέχει (βάθος θραύσματος) x (απόσταση διατομών) από την άνω διατομή. Έστω β_{Σ} το βάθος του σταθερού θραύσματος και β_{Π} το βάθος του περιστρεφόμενου. Παίρνουμε το μικρότερο εκ των β_{Π} , β_{Σ} και το θεωρούμε ως κοινό βάθος β_K του συμπλέγματος των δύο εξεταζόμενων θραυσμάτων, των οποίων οι άνω διατομές είναι πάντα ομοεπίπεδες.

Ορίζουμε το χώρο V , ο οποίος φράσσεται από τις εξής επιφάνειες:

1. Το κοινό άνω επίπεδο στο οποίο κείνται οι άνω τομές των θραυσμάτων
2. Από το επίπεδο E^A
3. Από το barrier plane E^B
4. Από το κοινό κατώτερο επίπεδο, δηλαδή από το επίπεδο της κοινής διατομής που αντιστοιχεί στο κοινό βάθος β_K , E^K
5. Από την παράπλευρη επιφάνεια S^{Σ} του σταθερού θραύσματος που περικλείεται από τα επίπεδα E^A , E^B , E^K και προφανώς από την άνω διατομή. Για αυτήν την επιφάνεια θα χρησιμοποιούμε τον αγγλικό όρο fixed escarpment ή τον ελληνικό σταθερό πέτασμα.

6. Από την παράπλευρη επιφάνεια S^{Γ} του περιστρεφόμενου θραύσματος που περικλείεται από τα επίπεδα E^A , E^B , E^K και προφανώς από την άνω διατομή. Για αυτήν την επιφάνεια θα χρησιμοποιούμε τον αγγλικό όρο *rotated escarpment* ή τον ελληνικό περιστρεφόμενο πέτασμα.

Ο όγκος του V καθορίζει το βαθμό προσαρμογής των δύο θραυσμάτων. Στην ιδανική περίπτωση ταιριάσματος, ο όγκος του V είναι 0 .

Στην πράξη, ακόμα και στην περίπτωση εξαιρετικής προσαρμογής των δύο θραυσμάτων, πρέπει πάντα να πραγματοποιείται ο έλεγχος εάν υπάρχει επικάλυψη μεταξύ σταθερού και περιστρεφόμενου θραύσματος αφενός, αλλά και ολοκλήρων των προσαρμοσμένων θραυσμάτων των. Μία τέτοια επικάλυψη θα μπορούσε να οφείλεται σε ατέλειες της διαδικασίας τρισδιάστατης σάρωσης, αλλά και σε περιέργες συμπτώσεις που δημιουργήσαν ιδιόμορφα γεωμετρικά αποτελέσματα λόγω φθοράς στα συμβαλλόμενα θραύσματα.

Άρα, συνοπτικά το ισχυρό αυτό κριτήριο βέλτιστης προσαρμογής αποτελείται από τις εξής απαιτήσεις:

K_1 : Ο όγκος του χωρίου V πρέπει πάντα να είναι μικρότερος από ένα κατάλληλα επιλεγμένο κατώφλι, έστω O^K . Στην ιδανική περίπτωση $O^K=0$, αλλά η διαδικασία θραύσης της τοιχογραφίας ως και η φθορά που επακολούθησε, μας επιβάλλουν να λάβουμε υπ' όψιν το ισχυρό ενδεχόμενο απώλειας υλικού μεταξύ *fixed* και *rotated escarpment*. Το άνω αποδεκτό όριο απώλειας, το οποίο ταυτόχρονα δεν καταστρατηγεί δραματικά τη γεωμετρική συνέχεια των δύο ταιριασμένων θραυσμάτων, καθορίζει το μέγεθος του O^K .

K_2 : Ο βαθμός επικάλυψης των δύο υπό εξέτασιν θραυσμάτων στη θέση βέλτιστης προσαρμογής πρέπει θεωρητικά να είναι 0. Για τους λόγους όμως που προαναφέρθηκαν, επιτρέπεται να υπάρχει ένα μικρό ποσοστό επικάλυψης του O^K , π.χ. 5%- 10%.

K_3 : Αντιστοίχως, στην ιδανική περίπτωση προσαρμογής, τα θραύσματα ως στερεά σώματα θα έπρεπε να είχαν συνολικά, και επιπλέον των «πετασμάτων», μηδενική επικάλυψη, εν τούτοις, για τους λόγους που προαναφέρθηκαν, επιτρέπουμε μία μικρή επικάλυψη αναλόγου τάξεως με το K_2 .

3.4 Υπολογισμός εμβαδού μεταξύ αλυσίδων

Για την περιγραφή αυτής της συνάρτησης, θα πάρουμε τρεις περιπτώσεις:

1. Αν οι αλυσίδες είναι ισομήκεις
2. Αν η σταθερή αλυσίδα έχει μεγαλύτερο μήκος από την περιστρεφόμενη
3. Αν η σταθερή αλυσίδα έχει μικρότερο μήκος από την περιστρεφόμενη

3.4.1 Περίπτωση ισομηκών αλυσίδων

Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι οι 2 αλυσίδες είναι ισομήκεις. Συνδέουμε με ευθύγραμμο τμήμα το πρώτο pixel A_1 της μιας με το πρώτο pixel B_1 της άλλης, εν συνεχεία, το δεύτερο pixel A_2 της μιας με το δεύτερο pixel της άλλης $B_2 \dots$ το i -οστό A_i της μιας με το i -οστό B_i της άλλης, πάντα με ευθύγραμμο τμήματα.

Υπενθυμίζεται ότι η παραμετρική εξίσωση της ευθείας στον R^3 γράφεται ως εξής:

Έστω A και B 2 τυχόντα σημεία του R^3 με συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0) και (x_1, y_1, z_1) αντίστοιχα. Τότε $\overrightarrow{AB} = (x_1 - x_0) * \hat{i} + (y_1 - y_0) * \hat{j} + (z_1 - z_0) * \hat{k}$.

Έστω M τυχόν σημείο της ευθείας AB . Ικανή και αναγκαία συνθήκη το M όντως να ανήκει σε αυτή την ευθεία είναι τα διανύσματα \overrightarrow{AM} και \overrightarrow{AB} να είναι συγγραμμικά. Δηλαδή πρέπει να υπάρχει αριθμός $\lambda \in R$ τέτοιος ώστε $\overrightarrow{AM} = \lambda * \overrightarrow{AB}$. Εάν (x, y, z) είναι οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου M της ευθείας, τότε η τελευταία διανυσματική σχέση ισοδυναμεί με τις τρεις κάτωθι βαθμωτές σχέσεις

$$x - x_0 = \lambda * (x_1 - x_0), y - y_0 = \lambda * (y_1 - y_0), z - z_0 = \lambda * (z_1 - z_0),$$

Ισοδυνάμως, $x = \lambda * (x_1 - x_0) + x_0, y = \lambda * (y_1 - y_0) + y_0, z = \lambda * (z_1 - z_0) + z_0$.

Είναι ιδιαίτερος χρήσιμο κυρίως για υλοποίηση στον υπολογιστή να κανονικοποιούμε την παράμετρο λ . Πράγματι, ορίζουμε τα κατευθύνοντα διανύσματα της ευθείας

$$E_1 = \frac{x_1 - x_0}{|AB|}, E_2 = \frac{y_1 - y_0}{|AB|}, E_3 = \frac{z_1 - z_0}{|AB|}, |AB| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Οπότε, οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας γράφονται στη μορφή

$$x = \lambda * E_1 + x_0, y = \lambda * E_2 + y_0, z = \lambda * E_3 + z_0.$$

Τώρα, καθίσταται προφανές ότι όταν $0 < \lambda < 1$, τότε το σημείο $M(x, y, z)$ διαγράφει το εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος AB , όταν $\lambda > 1$ το M διατρέχει την ημιευθεία δεξιά του B , όπου δεν ανήκει το A , κι όταν $\lambda < 0$ το M διατρέχει την ημιευθεία αριστερά του A η οποία δεν περιλαμβάνει το B .

Θα χρησιμοποιήσουμε τα ανωτέρω για να υπολογίσουμε το εμβαδόν, δηλαδή τον αριθμό των pixels, του χωρίου Ω , που ορίζεται από τη σταθερή αλυσίδα, την τρέχουσα αλυσίδα και τη γραμμή φράγμα (barrier line). Πράγματι, θεωρούμε μία πυκνή διαμέριση του διαστήματος $(0, 1)$ π.χ. αυτήν κατά την οποία δύο διαδοχικά σημεία απέχουν κατά 0.05. Αυτή η διαμέριση του λ γεννά δύο αντίστοιχες διαμερίσεις για τα x και y , όπου τονίζεται ότι αυτά είναι συντεταγμένες ενός τυχόντος σημείου στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος $A_i B_i$. Επειδή στον υπολογιστή και ειδικότερα στις τομές θραυσμάτων που επεξεργαζόμαστε, υπάρχει κβαντισμός, απαιτείται να βρούμε τον αριθμό των διαφορετικών pixels που συναντάει η ευθεία $A_i B_i$. Για το σκοπό αυτό

κάνουμε ταυτόχρονη στρογγύλευση των x,y , η οποία προσφέρει ένα pixel. Βρίσκοντας τον αριθμό των διαφορετικών pixels που γεννιούνται από αυτή τη διαδικασία, λαμβάνουμε και τον αριθμό των διαφορετικών pixels από τα οποία διέρχεται η ευθεία $A_i B_i$ και τα οποία προφανώς ανήκουν στο χωρίο Ω .

Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία για όλα τα ζεύγη pixels $(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_i, B_i)$, σταθεράς και περιστρεφόμενης αλυσίδας, οπότε λαμβάνουμε ένα ικανό υποσύνολο Π_{pix} pixels, τα οποία όλα ανήκουν στο Ω . Επειδή στο Π_p μπορεί να υπάρχουν επαναλήψεις, εφαρμόζουμε αλγόριθμο που υπολογίζει μόνο τα διαφορετικά στοιχεία του Π_p . Από εδώ και στο εξής, όταν αναφερόμεθα στο Π_p θα εννοούμε ότι όλα τα στοιχεία του είναι διαφορετικά.

Επειδή η γεωμετρική μορφή των δύο αλυσίδων και επομένως του χωρίου Ω , μπορεί να είναι πολύ περίπλοκη, και στην πράξη συνήθως είναι, προχωρούμε και στην εξής διαδικασία:

Κάθε pixel του Π_p το θεωρούμε κέντρο ενός «σταυρού» το κάθε σκέλος του οποίου αποτελείται από 5 pixels, δύο αριστερά του κέντρου, δύο δεξιά, δύο άνω αυτού και δύο κάτω του κέντρου. Το αριστερά και δεξιά καθορίζεται από την τιμή της στήλης της εικόνας της διατομής που μελετούμε. Συγκεκριμένα, έστω ότι η διατομή μας είναι μία ψηφιακή εικόνα $m \times n$ pixels και ότι (i,j) είναι οι στήλες και οι γραμμές του κέντρου. Τότε, τα pixels αριστερά του κέντρου είναι τα $(i-2, j)$ και $(i-1, j)$, τα δύο δεξιά αυτού είναι $(i+1, j)$ και $(i+2, j)$, τα δύο άνω αυτού είναι τα $(i, j-2)$ και $(i, j-1)$ και τα δύο κάτω αυτού είναι τα $(i, j+1)$ και $(i, j+2)$.

Για κάθε pixel ενός τέτοιου «σταυρού» ελέγχουμε εάν αυτό δεν ανήκει στο Π_p , ενώ ταυτόχρονα είναι εξωτερικό και της διατομής του σταθερού θραύσματος και της διατομής του περιστρεφόμενου ή εσωτερικό και των δύο αυτών διατομών. Σε αυτήν την περίπτωση, θεωρούμε ότι το συγκεκριμένο pixel του σταυρού ανήκει στο χωρίο Ω και άρα το προσθέτουμε στο σύνολο Π_p .

Επαναλαμβάνουμε συνεχώς την προηγούμενη διαδικασία, κάνοντας κέντρα του σταυρού και τα νέα pixels του Π_p έως ότου δεν υπάρχει άλλο στοιχείο του προκύπτοντος σταυρού που να ανήκει στο Ω .

3.4.2 Η σταθερή αλυσίδα έχει μεγαλύτερο μήκος από την περιστρεφόμενη

Έστω N ο αριθμός των pixels της τρέχουσας αλυσίδας και L αυτός της σταθερής. Υπολογίζουμε το πηλίκο $p = \left\lfloor \frac{L}{N} \right\rfloor$ και το υπόλοιπο γ της διαίρεσης του L με το N . Τότε, δημιουργούμε ένα θύσανο p ευθυγράμμων τμημάτων $A_1 B_1, A_2 B_1, \dots, A_p B_1$, όπου το πρώτο pixel της τρέχουσας αλυσίδας διασυνδέεται με ευθύγραμμα τμήματα με κάθε ένα από τα p πρώτα pixels της σταθερής αλυσίδας. Εν συνεχεία, δημιουργούμε ένα δεύτερο θύσανο ευθυγράμμων τμημάτων $A_{p+1} B_2, A_{p+2} B_2, \dots, A_{2p} B_2$, όπου τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα έχουν κοινή αρχή το δεύτερο pixel της τρέχουσας αλυσίδας και πέρας κάθε ένα pixel της σταθερής με αύξοντα

αριθμό από $p+1$ έως $2p$. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία, έως ότου κάνουμε αρχή του σχετικού θυσάνου το τελευταίο υπ' αριθμόν N pixel της τρέχουσας αλυσίδας. Εάν υπάρχει και υπόλοιπο, επεκτείνουμε τον τελευταίο θύσανο συνδέοντας το τελευταίο pixel της τρέχουσας αλυσίδας με ευθύγραμμα τμήματα με τα τελευταία Y pixel της σταθεράς. Έτσι σχηματίζουμε το Π_p σε αυτήν την περίπτωση, και συνεχίζουμε όπως και πριν να το επεκτείνουμε με το σταυρό του κάθε pixel έως ότου προσμετρηθούν όλα τα pixels.

3.4.3 Η σταθερή αλυσίδα έχει μικρότερο μήκος από την περιστρεφόμενη

Έστω N ο αριθμός των pixels της τρέχουσας αλυσίδας και L αυτός της σταθεράς. Υπολογίζουμε το ηλίκο $p = \left\lfloor \frac{N}{L} \right\rfloor$ και το υπόλοιπο Y της διαίρεσης του N με το L . Τότε, δημιουργούμε ένα θύσανο p ευθυγράμμων τμημάτων $A_1B_1, A_1B_2, \dots, A_1B_p$, όπου το πρώτο pixel της σταθερής αλυσίδας διασυνδέεται με ευθύγραμμα τμήματα με κάθε ένα απ' τα p πρώτα pixel της τρέχουσας αλυσίδας, εν συνεχεία, δημιουργούμε ένα δεύτερο θύσανο ευθυγράμμων τμημάτων $A_2B_{p+1}, A_2B_{p+2}, \dots, A_2B_{2p}$, όπου τα ευθύγραμμα αυτά τμήματα έχουν κοινή αρχή το δεύτερο pixel της σταθερής αλυσίδας και πέρασ κάθε ένα pixel της τρεχούσης με αύξοντα αριθμό από $p+1$ έως $2p$. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία, έως ότου κάνουμε αρχή του σχετικού θυσάνου το τελευταίο υπ' αριθμόν L pixel της σταθερής αλυσίδας. Εάν υπάρχει και υπόλοιπο, επεκτείνουμε τον τελευταίο θύσανο συνδέοντας το τελευταίο pixel της σταθερής αλυσίδας με ευθύγραμμα τμήματα με τα τελευταία Y pixel της τρεχούσης. Έτσι σχηματίζουμε το Π_p σε αυτήν την περίπτωση, και συνεχίζουμε όπως και πριν να το επεκτείνουμε με το σταυρό του κάθε pixel έως ότου προσμετρηθούν όλα τα pixels.

3.5 Η έξοδος του συστήματος

Όπως προαναφέρθηκε, η έξοδος του συστήματος είναι ένα txt αρχείο, το οποίο περιλαμβάνει τα απαραίτητα στοιχεία για την οπτικοποίηση του ταιριάσματος καθώς και άλλα στατιστικά στοιχεία. Πιο αναλυτικά, περιλαμβάνει:

1. Τη γωνία περιστροφής του τρέχοντος θραύσματος, στην οποία βρέθηκε το πιθανό ταιρίασμα.
2. Τη μετατόπιση που υπέστη το θραύσμα αναφοράς στο i κατά την επέκταση του πλαισίου του.
3. Τη μετατόπιση που υπέστη το θραύσμα αναφοράς στο j κατά την επέκταση του πλαισίου του.

4. Τη μετατόπιση που υπέστη το τρέχον θραύσμα στο i κατά την επέκταση του πλαισίου του.
5. Τη μετατόπιση που υπέστη το τρέχον θραύσμα στο j κατά την επέκταση του πλαισίου του.
6. Τον αύξοντα αριθμό του σημείου αρχής της σταθερής αλυσίδας για την οποία βρέθηκε το ταίριασμα.
7. Τον αύξοντα αριθμό του σημείου αρχής της περιστρεφόμενης αλυσίδας, για την οποία βρέθηκε το ταίριασμα.
8. Την τεταγμένη του σημείου του περιγράμματος του θραύσματος αναφοράς στο οποίο βρέθηκε το ταίριασμα.
9. Την τετμημένη του σημείου του περιγράμματος του θραύσματος αναφοράς στο οποίο βρέθηκε το ταίριασμα.
10. Την τεταγμένη του σημείου του περιγράμματος του τρέχοντος θραύσματος στο οποίο βρέθηκε το ταίριασμα, πριν υποστεί την περιστροφή.
11. Την τετμημένη του σημείου του περιγράμματος του τρέχοντος θραύσματος στο οποίο βρέθηκε το ταίριασμα, πριν υποστεί την περιστροφή.
12. Το βέλος κάθετης μετατόπισης, δηλαδή τον αριθμό που χρειάστηκε να προσθέσουμε στην τεταγμένη του σημείου επαφής του περιστρεφόμενου θραύσματος ώστε να συμπέσει με εκείνη του σημείου επαφής του σταθερού θραύσματος.
13. Το βέλος οριζόντιας μετατόπισης, δηλαδή τον αριθμό που χρειάστηκε να προσθέσουμε στην τετμημένη του σημείου επαφής του περιστρεφόμενου θραύσματος ώστε να συμπέσει με εκείνη του σημείου επαφής του σταθερού θραύσματος.
14. Τη μέση τιμή των εμβαδών μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.
15. Τη μέγιστη τιμή των εμβαδών μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.
16. Τη μέση τιμή των εμβαδών επικάλυψης μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.

17. Τη μέση τιμή του ποσοστού επικάλυψης μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.
18. Τη μέγιστη τιμή του ποσοστού επικάλυψης μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.
19. Την ελάχιστη τιμή των εμβαδών επικάλυψης μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.
20. Την ελάχιστη τιμή καθαρού εμβαδού μεταξύ όλων των τομών των θραυσμάτων για τα εν λόγω σημεία επαφής.

4 Οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων

Προκειμένου να δούμε τα δύο θραύσματα στη δοσμένη θέση ταιριάσματος και να επιβεβαιώσουμε και οπτικά ότι ταιριάζουν με τη βοήθεια του θεματικού περιεχομένου, χρησιμοποιούμε φωτογραφίες των θραυσμάτων που ελέγχθηκαν, τις τομές του 3D-scanner και τον κώδικα της Matlab που περιγράφεται στην ενότητα 4.2 .

4.1 Οι έγχρωμες τομές

Τα αποτελέσματα του συστήματος δίνουν τις ακριβείς συντεταγμένες των σημείων που βρέθηκε το ταίριασμα. Οι συντεταγμένες αυτές όμως αναφέρονται στην ασπρόμαυρη τομή που παίρνουμε από το 3D-scanner. Προφανώς, δεν μπορούν να μεταφερθούν με μοναδικό τρόπο σε κάποια έγχρωμη φωτογραφία του θραύσματος, δεδομένου ότι δε γνωρίζουμε ούτε τι κλίση είχε το θραύσμα όταν θεωρήθηκε η γωνία αναφοράς 0, ούτε αν η κλίμακα της φωτογραφίας είναι η ίδια. Γι' αυτούς τους λόγους, προκειμένου να έχουμε μονοσήμαντη αντιστοίχιση, τοποθετούμε βέλτιστα την έγχρωμη φωτογραφία πάνω στην ασπρόμαυρη τομή ώστε οι συντεταγμένες να διατηρηθούν ίδιες. Με απλό κώδικα στη Matlab, βρίσκουμε το μια διαισθητική γωνία περιστροφής και ένα διαισθητικό ποσοστό μεγέθυνσης της φωτογραφίας ώστε να ταιριάζει στην τομή. Γύρω από αυτά τα μεγέθη κάνουμε υπολογισμό σφάλματος της τοποθέτησης, και στο σημείο με το ελάχιστο σφάλμα θεωρούμε τη βέλτιστη προσαρμογή της έγχρωμης εικόνας στην τομή.

4.2 Περιγραφή του κώδικα της Matlab

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο κώδικας της C μας δίνει σαν output ένα αρχείο .txt το οποίο περιέχει blocks n στοιχείων, το κάθε ένα από τα οποία αποτελείται από όλα τα στοιχεία που χαρακτηρίζουν μονοσήμαντα για ποια σημεία επαφής έχουμε πιθανό ταίριασμα. Προκειμένου να μπορέσουμε να το αναπαραστήσουμε οπτικά, θα χρειαστεί αρχικά να διαβάσουμε αυτά τα στοιχεία. Θα αποθηκεύσουμε λοιπόν αυτό το αρχείο σε έναν πίνακα και κατόπιν θα χρησιμοποιούμε τα στοιχεία αυτά ανά n -άδες για να βλέπουμε όλες τις πιθανές κολλήσεις που δίνει ο κώδικας. Για κάθε μία από αυτές τις n -άδες καλείται ένας κώδικας, ώστε τελικά, να δούμε τα δύο θραύσματα που ελέγχθηκαν τοποθετημένα σε μία εικόνα, με το δεύτερο θραύσμα περιστραμμένο κατάλληλα, και ενωμένα στο σημείο που βρέθηκε το πιθανό ταίριασμα.

Είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι οι έγχρωμες εικόνες των δύο θραυσμάτων βρίσκονται σε άσπρο (255,255,255) φόντο και είναι resized και rotated ώστε να ταιριάζουν ακριβώς στις τομές που έδωσε το 3D-scanner, όπως περιγράφηκε παραπάνω.

- Διάβασμα εικόνας αναφοράς (θραύσματος αναφοράς).
- Μετατροπή πρώτης εικόνας σε double ώστε να είναι δυνατή η επεξεργασία της.
- Εύρεση και αποθήκευση σε δύο διανύσματα των συντεταγμένων των σημείων που περιέχουν πληροφορία (δηλαδή που δεν είναι άσπρο φόντο).
- Εύρεση της μέγιστης διάστασης της εικόνας.
- Διάβασμα τρέχουσας εικόνας (τρέχοντος θραύσματος).
- Μετατροπή δεύτερης εικόνας σε double ώστε να είναι δυνατή η επεξεργασία της.
- Εύρεση και αποθήκευση σε δύο διανύσματα των συντεταγμένων των σημείων που περιέχουν πληροφορία (δηλαδή που δεν είναι άσπρο φόντο).
- Εύρεση της μέγιστης διάστασης της εικόνας.
- Η εικόνα στην οποία θα εμφανιστούν και οι δύο αυτές εικόνες, είναι ένας κοινός καμβάς, στο κέντρο του οποίου θα βρίσκεται η εικόνα αναφοράς και κάπου γύρω από αυτήν, ενωμένη στο κατάλληλο σημείο και περιστραμμένη κατάλληλα θα βρίσκεται η τρέχουσα εικόνα.
- Κατά συνέπεια, οι διαστάσεις του κοινού καμβά πρέπει να είναι $\text{max_diastasi_eikonas_anaforas} + 2 * \text{round}(\sqrt{2} * \text{max_diastasi_trexousas_eikonas})$
- Αρχικοποίηση του κοινού καμβά σε άσπρο.
- Τοποθέτηση της εικόνας αναφοράς στο κέντρο του κοινού καμβά.
- Τα στοιχεία που έχουμε στο block των αποτελεσμάτων είναι σημεία με συντεταγμένες στο επεκτεταμένο πλαίσιο, οπότε αφαιρώντας τη μετατόπιση που είχαν υποστεί αρχικά, παίρνουμε τις συντεταγμένες του αρχικού σημείου ταιριάσματος.
- Καλούμε την εξωτερική συνάρτηση `our_rotated_image`, η οποία παίρνει σαν ορίσματα μια έγχρωμη εικόνα `imm_color` και μία γωνία σε μοίρες `gwnia` και περιστρέφει την

`imm_color` κατά θ γωνία. Σε αυτήν την περίπτωση, δίνουμε σαν ορίσματα την τρέχουσα εικόνα και τη γωνία που παίρνουμε από το block των αποτελεσμάτων.

- Μετά την επιστροφή της συνάρτησης, βρίσκουμε εκ νέου το θεματικό περιεχόμενο της νέας, εστραμμένης πλέον εικόνας.
- Στροφή του σημείου επαφής του τρέχοντος θραύσματος όπως ακριβώς στρέψαμε και την εικόνα με την `our_rotated_image`.
- Δείχνουμε το σημείο επαφής του σταθερού θραύσματος στον κοινό καμβά, χρωματίζοντάς το έντονα.
- Βάζουμε στον κοινό καμβά την εστραμμένη τρέχουσα έτσι ώστε τα δύο σημεία επαφής να συμπίπτουν.
- Εμφάνιση του κοινού καμβά.

5 Αποτελέσματα / Συμπεράσματα

5.1 Αποτελέσματα

Παρακάτω, θα δείξουμε τα ταιριάσματα που έδωσε το σύστημα για μία τριάδα κομματιών ανά δύο. Τα θραύσματα είναι τα 253A, 253B και 253C. Όπως φαίνεται στην εικόνα 2, τα κομμάτια 253A και 253B ταιριάζουν. Για τα συγκεκριμένα θραύσματα, το σύστημα έδωσε και ταιρίασμα ανάμεσα στις ευθείες του. Παράδειγμα ταιριάσματος μεταξύ ευθειών, μπορούμε να δούμε στην εικόνα 4, μεταξύ των κομματιών 253B και 253C. Στην εικόνα 3 βλέπουμε το σωστό ταιρίασμα ανάμεσα στα κομμάτια 253B και 253C.



Εικόνα 2 Τα θραύσματα 253A και 253B στο σημείο

Όπως περιμέναμε, το ταιρίασμα μεταξύ των δύο κομματιών δεν είναι τέλειο, αφού το περίγραμμα των κομματιών έχει φθαρεί με το χρόνο καθώς και από την αρχική αιτία θραύσης. Ακόμη, πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας ότι και η φωτογραφία δεν έχει ταιριάξει τέλεια πάνω στην τομή, δεδομένου ότι είναι δύσκολο να τραβήξει κανείς μία φωτογραφία απολύτως παράλληλη με την άνω επιφάνεια του θραύσματος, δεδομένου ότι το κονίαμα από κάτω το καθιστά πολύ ασταθές. Παρ' όλα αυτά, με την οπτικοποίηση είναι φανερό ότι το θεματικό περιεχόμενο των θραυσμάτων ταιριάζει και ότι τα κομμάτια ενώνονταν κατά αυτόν τον τρόπο.



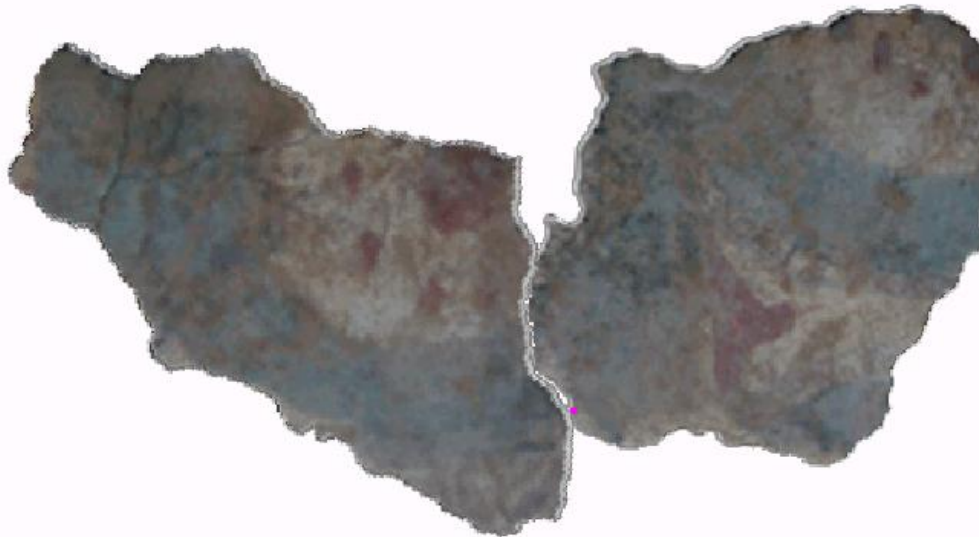
Εικόνα 3 Μία πιθανή ένωση των κομματιών η οποία ήταν αδύνατο να αποφευχθεί

Στην παραπάνω εικόνα βλέπουμε ότι το σύστημα θεώρησε ότι τα θραύσματα ταιριάζουν στις ευθείες. Αυτό είναι απολύτως λογικό, δεδομένου ότι όταν και οι δύο αλυσίδες σύγκρισης βρίσκονται στο ευθύ τμήμα των θραυσμάτων, ο όγκος ανάμεσα στα θραύσματα είναι πολύ μικρός, οι γεωμετρίες ταιριάζουν και τα μήκη είναι συγκρίσιμα. Οπότε, η θέση δίνει ταιριάζει αφού πληρεί όλα τα κριτήρια του συστήματός μας. Παρ' όλα αυτά, το σύστημα έδωσε σαν πιθανό ταίριασμα και το σημείο στο οποίο τα θραύσματα όντως ταιριάζουν. Η θέση αυτή φαίνεται στην εικόνα 4.



Εικόνα 4 Η σωστή κόλληση μεταξύ 253B και 253C

Για ένα άλλο ζευγάρι κομματιών, το ζεύγος 257A και 257B, το σύστημα έδωσε την κόλληση που φαίνεται στην εικόνα 5. Είναι προφανές, ότι αυτό το ταίριασμα δε είναι εύκολα εντοπίσιμο, διότι με το θεματικό περιεχόμενο που έχουν τα θραύσματα, περιμένουμε αυτόματα άλλο ταίριασμα.



Εικόνα 5 Η ένωση που έδωσε το σύστημα μεταξύ 257A και 257B

5.2 Συμπεράσματα

Τα αποτελέσματα της παρούσης διπλωματικής κατέδειξαν την ισχύ της μεθόδου εικονικής συγκολλήσεως θραυσμένων αντικειμένων, η οποία πρωτοδημοσιεύθηκε στα *Journal of Applied Mathematics and Computing* ⁽¹⁾, *IEEE Transactions on Signal Processing* ⁽²⁾, *IEEE 9th International Conference on Signal Processing* ⁽³⁾ και *Pattern Analysis and Machine Intelligence (Pami)* ⁽⁴⁾ και αρκετά διεξοδικώς παρουσιάστηκε στην παρούσα διπλωματική. Συγκεκριμένα, ελέγχθηκε εάν πέντε το πλήθος κονιάματα ταιρίαζαν μεταξύ τους ανά ζεύγη. Ο έλεγχος αυτός πραγματοποιήθηκε για ποικίλες τιμές των κρίσιμων παραμέτρων ταιριάσματος, όπως αυτές περιγράφηκαν στην παράγραφο 3.2 της παρούσης εργασίας. Οι εικονικές συνενώσεις που προτάθηκαν συμπεριελάμβαναν πάντα την ορθή, δηλαδή αυτή που έγινε δεκτή από τους αρχαιολόγους και τους συντηρητές. Αυτό από μόνο του συνιστά μία σημαντικότερη επιτυχία της μεθοδολογίας και του συστήματος, διότι επιβεβαιώνει ότι το σύστημα μπορεί να περιορίσει

δραματικά υπέρ του χρήστη τον αριθμό των πιθανών συνενώσεων που πρέπει να ελέγξει. Πέραν αυτού, το σύστημα σε πολλές περιπτώσεις έδωσε μοναδική λύση την δέουσα. Αυτό συμβαίνει, στις περιπτώσεις όπου:

A) Οι πλευρικές επιφάνειες των κονιαμάτων είχαν τυχαία κατανομή στο χώρο και δεν συμπεριελάμβαναν μεγάλα επίπεδα τμήματα, όπως συμβαίνει αρκετές φορές στα όρια τις τοιχογραφίας. Σε αυτήν την ακραία περίπτωση, όπως ήταν αναμενόμενο, το σύστημα έδωσε σαν πιθανές συνενώσεις και εκείνες κατά τις οποίες οι επίπεδες επιφάνειες ήταν σε επαφή. Η τελευταία διαπίστωση υποδεικνύει την αναγκαιότητα στη μεθοδολογία να συμπεριληφθεί και η συνέχεια του χρωματικού και θεματικού περιεχομένου των ζωγραφισμένων εδρών των κονιαμάτων, γεγονός που θα αποτελέσει αντικείμενο μελλοντικής έρευνας. Τα ανωτέρω επιβεβαιώνουν κάτι που από την αρχή οι ερευνητές που ανέπτυξαν τη μεθοδολογία γνώριζαν, δηλαδή ότι η γνώμη των ειδικών αρχαιολόγων και συντηρητών είναι το μοναδικό απολύτως τελεσίδικο κριτήριο για το αν δυο θραύσματα-κονιάματα όντως ταιριάζουν. Δηλαδή, όπως προελέχθη, το σύστημα είναι ισχυρά υποβοηθητικό.

B) Η δύναμη του συστήματος κι ο βαθμός υποβοήθησης του ειδικού αρχαιολόγου είτε συντηρητή, ισχυρά αναδεικνύονται όταν το μήκος των αλυσίδων επαφής είναι σημαντικά μεγάλο, μεγαλύτερο των 2cm. Προφανώς όσο μεγαλύτερο είναι το μήκος επαφής των αλυσίδων, όσο μικρότερη η φθορά και όσο τυχαιότερη η καμπυλότητα των πλευρικών πετασμάτων των κονιαμάτων, τόσο μεγαλύτερη φαίνεται ότι είναι η δύναμη της μεθοδολογίας και του αναπτυχθέντος συστήματος.

Βιβλιογραφία

1. **Dimitris Arabadjis, Constantin Papaodysseus, Panayiotis Rousopoulos, Michalis Panagopoulos.** On the mathematical formulation of the problem of reassembling fragmented objects: two new theorems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*. Springer, 2010, vol. 34 pp. 81-100.
2. **C. Papaodysseus, Th. Panagopoulos, M. Exarhos, C. Triantafyllou, D. Fragoulis.** Contour-shape Based Reconstruction of Fragmented, 1600 B.C. Wall Paintings. *IEEE Transactions on Signal Processing*. June 2002, IEEE Vol. 50, No 6, pp.1277-1288.
3. **C. Papaodysseus, D. Arabadjis, M. Panagopoulos, P. Rousopoulos, M. Exarhos and E. Papazoglou.** Automated Reconstruction of Fragmented Objects Using Their 3D Representation - Application to Important Archaeological Finds. *IEEE 9th International Conference on Signal Processing (ICSP'08), Beijing, October 2008*.
4. **C. Papaodysseus, D. Arabadjis, P. Rousopoulos, M. Panagopoulos, M. Exarhos, and E. Papazoglou.** Efficient Solution to the 3D Problem of Automatic Wall Paintings Reassembly. *Pattern Analysis and Machine Intelligence*. [Submitted for publication].
5. **Immerwahr, S.** *Aegean Painting in the Bronze Age*. Pennsylvania : s.n., 1990.
6. **Iakovidis, Sp.** *Late Helladic Citadels on Mainland Greece*. Leiden : s.n., 1983.
7. **Schliemann, H.** *Tiryas*. Leipzig : s.n., 1886.
8. **Rodenwaldt, D.** *Die Fresken des Palastes, Tiryas II*. Athen : s.n., 1912.