



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

# ΔΙΑΓΝΩΣΗ ΒΛΑΒΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ Π. ΧΑΡΜΠΗ**

Επιβλέπων : **ΜΑΡΑΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**, Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Συνεπιβλέπων : **ΣΟΛΛΑΤΟΣ ΑΡΓΥΡΗΣ**, Δρ. Ηλ. Μηχανικός

Αθήνα, Ιούλιος 2011





ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ  
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ  
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ  
ΤΟΜΕΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ, ΕΛΕΓΧΟΥ ΚΑΙ  
ΡΟΜΠΟΤΙΚΗΣ

# ΔΙΑΓΝΩΣΗ ΒΛΑΒΩΝ ΣΕ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΑ Π. ΧΑΡΜΠΗ**

Επιβλέπων: **ΜΑΡΑΤΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**

Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 28<sup>η</sup> Ιουλίου 2011.

.....  
Καθ. Ν. Μαρατός

.....  
Καθ. Ι. Αβαριτσιώτης

.....  
Δρ. Α. Γ. Σολδάτος

Αθήνα, Ιούλιος 2011

.....  
Κωνσταντίνα Π. Χαρμπί

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Κωνσταντίνα Π. Χαρμπί, 2011

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

*Αφιερώνεται στους γονείς μου  
και την αδελφή μου*



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Οι μέθοδοι διάγνωσης αστοχιών, οι οποίες βασίζονται σε περιγραφές των συστημάτων στον χώρο κατάστασης, είναι ευρέως χρησιμοποιούμενες. Μια υποσχόμενη αναλυτική μέθοδος -που αποτελεί και το αντικείμενο της παρούσας εργασίας- είναι το φίλτρο ανίχνευσης αστοχιών.

Ένα φίλτρο ανίχνευσης αστοχιών σχεδιάζεται, γενικά, για να παρέχει πληροφορία, η οποία βοηθά στην ανίχνευση και τον εντοπισμό σφαλμάτων σε ενεργοποιητές, αισθητήρες και μεταβολές της δυναμικής ενός γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου συστήματος. Ειδικότερα, η έξοδος του φίλτρου είναι ένα «αναμενόμενο» διάνυμα μετρήσεων των αισθητήρων. Αντιπροσωπεύει τις εξόδους των αισθητήρων που θα λαμβάναμε αν δεν υπήρχε καμία αστοχία στις μετρήσεις, αλλαγή δυναμικής ή άλλες διαταραχές. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει καμία διαταραχή, η έξοδος του φίλτρου προσεγγίζει το πραγματικό διάνυμα εξόδου των αισθητήρων ασυμπτωτικά όσο η επίδραση των σφαλμάτων στις αρχικές συνθήκες σβήνει. Όταν υπάρχουν διαταραχές θα υπάρχει διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης εξόδου από το φίλτρο και της πραγματικής εξόδου από τους αισθητήρες. Αυτή η διαφορά ή το σήμα σφάλματος χαρακτηρίζεται από συγκεκριμένες ιδιότητες και αποτελεί την βασική πληροφορία για τον εντοπισμό της πηγής των σφαλμάτων. Η ανίχνευση και αναγνώριση των προβληματικών αισθητήρων με φίλτρα ανίχνευσης αστοχιών είναι ανεξάρτητες από τον τρόπο με τον οποίο ένα στοιχείο παρουσιάζει βλάβη με την προϋπόθεση ότι η βλάβη αυτή αλλάζει την έξοδο του συστήματος. Απουσία αστοχιών, το φίλτρο ανίχνευσης λειτουργεί ως ένας συνήθης παρατηρητής κατάστασης.

Στη συγκεκριμένη εργασία εφαρμόστηκε η μέθοδος των φίλτρων ανίχνευσης αστοχιών σε ένα μοντέλο του συστήματος προσανατολισμού ενός δορυφόρου στον χώρο για ανίχνευση και εντοπισμό αστοχιών στους αισθητήρες του. Σε όλες τις εξεταζόμενες περιπτώσεις αστοχιών, παρατηρήθηκαν διαφοροποιήσεις στη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος.

*ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ:* Φίλτρο ανίχνευσης, Ανίχνευση σφαλμάτων, Εντοπισμός σφαλμάτων, Διάνυμα συμβάντος, Χώρος ανίχνευσης, Δημιουργός ανίχνευσης, Διαχωριστικότητα στην έξοδο, Στασιμότητα στην έξοδο, Πλήρως μετρήσιμο, Αστοχίες σε αισθητήρες.

# ABSTRACT

State space model-based fault diagnosis methods are widespread. One promising analytical method –which constitutes the subject of this thesis- is the failure detection filter.

In general, a failure detection filter is designed to provide information, which helps to detect and isolate failures occurring in actuators, sensors or changes in the dynamics of a linear, time invariant system. More specifically, the output of the filter is an ‘expected’ sensor output vector. It represents the sensor outputs which would be obtained if there were no measurement failures, dynamic changes or other disturbances. That is, if there are no disturbances, the filter output will approach the actual sensor output vector asymptotically as the effect of initial condition errors settles out. When disturbances do occur there will be a difference between the expected output from the filter and the actual output from the sensors. This difference or error signal is characterized by concrete attributes and is the source of the desired event information. The failure detection and identification in failure detection filters are independent of the manner in which a component fails as long as the failure alters the system output. In the absence of a failure, the failure detection filter functions as a usual state estimator.

In this thesis the method of failure detection filters is applied to a model of a satellite attitude control system, in order to detect and isolate failures in its sensors. Variability of the dynamic behavior of the system was observed in all examined cases of failure.

**KEYWORDS:** Detection Filter, Fault detection, Fault isolation, Event vector, Detection space, Detection generator, Output separable, Output stationary, Base normal canonical form, Fully measurable, Sensor failures



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Μαράτο Νικόλαο, που μου εμπιστεύτηκε το θέμα και για τις γνώσεις που μου παρείχε καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίσης επιβλέποντα Δρ. Σολδάτο Αργύρη για την αμέριστη βοήθεια, συμπαράσταση και καθοδήγηση που μου παρείχε σε όλη τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου.

Τελειώνοντας, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένειά μου, που μου συμπαραστέκεται σε κάθε βήμα μου και με εμπνυχώνει ηθικά για την επίτευξη των στόχων μου.



# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ	7
ABSTRACT	8
ΣΧΗΜΑΤΑ	14
ΠΙΝΑΚΕΣ	16
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΒΑΣΙΚΟΤΕΡΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ	17
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ	
<i>1.1 Βασικές έννοιες στην τεχνική διάγνωσης σφαλμάτων</i>	18
<i>1.2 Αντικείμενο της εργασίας</i>	18
<i>1.3 Επιστημονική–Τεχνική σημασία του προβλήματος</i>	19
<i>1.4 Στόχος της εργασίας</i>	19
<i>1.5 Δομή της εργασίας</i>	19
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ	
<i>2.1 Συνοπτική παρουσίαση του προβλήματος</i>	20
<i>2.2 Αναλυτικότερη παρουσίαση του προβλήματος</i>	21

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ ΑΣΤΟΧΙΩΝ

<i>3.1 Ανίχνευση μίας αστοχίας</i>	30
<i>3.1.1 Χώροι ανίχνευσης</i>	31
<i>3.1.2 Θεώρημα ανίχνευσης</i>	33
<i>3.1.3 Μη παρατηρήσιμα συστήματα</i>	37
<i>3.2 Ανίχνευση πολλών αστοχιών</i>	40
<i>3.2.1 Ικανές συνθήκες για ένα αμοιβαία ανιχνεύσιμο σύνολο</i>	41
<i>3.2.2 Αμοιβαία ανιχνεύσιμο υποσύνολο ενός μη ανιχνεύσιμου συνόλου</i>	45
<i>3.2.3 Επαύξηση του χώρου κατάστασης</i>	52
<i>3.2.4 Σύνοψη–Αλγόριθμος</i>	52
<i>3.3 Στασιμότητα στην έξοδο</i>	59
<i>3.3.1 Προσθήκη ενός στάσιμου διανύσματος συμβάντος σε ένα ανιχνεύσιμο</i>	60
<i>3.3.2 Προσθήκη μιας στάσιμης κλάσης σε ένα ανιχνεύσιμο σύνολο</i>	64
<i>3.3.3 Σύνοψη–Αλγόριθμος</i>	65
<i>3.4 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για ένα ανιχνεύσιμο σύνολο</i>	70
<i>3.5 Πλήρως μετρήσιμα συστήματα</i>	71
<i>3.6 Κανονική μορφή</i>	73

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΣΤΟΧΙΕΣ ΣΕ ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ

<i>4.1 Πληροφορία για αστοχία σε αισθητήρα σε πλήρως μετρήσιμο σύστημα</i>	84
<i>4.2 Πληροφορία για αστοχία σε αισθητήρα σε μερικώς μετρήσιμο σύστημα</i>	86

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ	
<i>5.1 Μέθοδοι διάγνωσης σφαλμάτων</i>	91
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΦΑΡΜΟΓΗ	
<i>6.1 Δορυφορικά συστήματα</i>	94
<i>6.2 Εφαρμογή Μεθοδολογίας–Αποτελέσματα</i>	96
<i>6.2 Κριτική Ανάλυση Αποτελεσμάτων</i>	109
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	111
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	112
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ	117
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β: ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	120
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ: ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ	134

## ΣΧΗΜΑΤΑ

ΣΧΗΜΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΣΕΛΙΔΑ
2.1	Γενική υλοποίηση μοντέλου αναφοράς για εκτίμηση κατάστασης και/ή ανίχνευση αστοχιών	23
2.2	Υποθετικό σφάλμα εκτίμησης κατάστασης (αριστερά) και σφάλμα εκτίμησης εξόδου (δεξιά) για αστοχία σε ενεργοποιητή όταν ο πίνακας ανάδρασης $D$ έχει επιλεγεί αυθαίρετα	28
2.3	Υποθετικό σφάλμα εκτίμησης κατάστασης (αριστερά) και σφάλμα εκτίμησης εξόδου (δεξιά) για αστοχία σε ενεργοποιητή όταν ο $D$ αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης	29
3.1	Υλοποίηση του συστήματος ανίχνευσης αστοχιών σε κανονική μορφή	83
6.1	Συνάρτηση $n_{ci}(t)$	99
6.2	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 1 <sup>ο</sup> αισθητήρα	101
6.3	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 1 <sup>ου</sup> αισθητήρα	101
6.4	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 1 <sup>ο</sup> αισθητήρα	102
6.5	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 5 <sup>ο</sup> αισθητήρα	103
6.6	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 5 <sup>ου</sup> αισθητήρα	103
6.7	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 5 <sup>ο</sup> αισθητήρα	104
6.8	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 8 <sup>ο</sup> αισθητήρα	105
6.9	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 8 <sup>ου</sup> αισθητήρα	105
6.10	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 8 <sup>ο</sup> αισθητήρα	106
6.11	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 9 <sup>ο</sup> αισθητήρα	107
6.12	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 9 <sup>ου</sup> αισθητήρα	107

ΣΧΗΜΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΣΕΛΙΔΑ
6.13	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 9 <sup>ο</sup> αισθητήρα	108
ΠΒ.1	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 2 <sup>ο</sup> αισθητήρα	120
ΠΒ.2	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 2 <sup>ου</sup> αισθητήρα	120
ΠΒ.3	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 2 <sup>ο</sup> αισθητήρα	121
ΠΒ.4	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 3 <sup>ο</sup> αισθητήρα	122
ΠΒ.5	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 3 <sup>ου</sup> αισθητήρα	122
ΠΒ.6	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 3 <sup>ο</sup> αισθητήρα	123
ΠΒ.7	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 4 <sup>ο</sup> αισθητήρα	124
ΠΒ.8	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 4 <sup>ου</sup> αισθητήρα	124
ΠΒ.9	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 4 <sup>ο</sup> αισθητήρα	125
ΠΒ.10	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 6 <sup>ο</sup> αισθητήρα	126
ΠΒ.11	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 6 <sup>ου</sup> αισθητήρα	126
ΠΒ.12	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 6 <sup>ο</sup> αισθητήρα	127
ΠΒ.13	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 7 <sup>ο</sup> αισθητήρα	128
ΠΒ.14	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 7 <sup>ου</sup> αισθητήρα	128
ΠΒ.15	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 7 <sup>ο</sup> αισθητήρα	129
ΠΒ.16	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 10 <sup>ο</sup> αισθητήρα	130
ΠΒ.17	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 10 <sup>ου</sup> αισθητήρα	130
ΠΒ.18	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 10 <sup>ο</sup> αισθητήρα	131

ΣΧΗΜΑ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΣΕΛΙΔΑ
ΠΒ.19	Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 11 <sup>ο</sup> αισθητήρα	132
ΠΒ.20	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 11 <sup>ου</sup> αισθητήρα	132
ΠΒ.21	Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 11 <sup>ο</sup> αισθητήρα	133

## ΠΙΝΑΚΕΣ

ΠΙΝΑΚΑΣ	ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ	ΣΕΛΙΔΑ
6.1.1	Προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας για κάθε αισθητήρα	98
6.1.2	Δημιουργοί ανίχνευσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του $D$	99
6.1.3	Αποστάσεις υπολοίπου από προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας, για κάθε αστοχία	109
ΠΓ.1	Ο πίνακας $A$ της μαθηματικής παράστασης στο χώρο κατάστασης	134
ΠΓ.2	Ο πίνακας $B$ της μαθηματικής παράστασης στο χώρο κατάστασης	135
ΠΓ.3	Ο πίνακας $C$ της μαθηματικής παράστασης στο χώρο κατάστασης	135



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΒΑΣΙΚΟΤΕΡΩΝ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

$f_i$ :	Διάνυσμα συμβάντος.
$n_i(t)$ :	Αυθαίρετη χρονική συνάρτηση που σχετίζεται με τη φύση της αστοχίας.
$W_i$ :	Ο ελέγξιμος υπόχωρος του διανύσματος συμβάντος $f_i$ .
$\varepsilon(t)$ :	Σφάλμα εκτίμησης κατάστασης.
$\varepsilon'(t)$ :	Σφάλμα εκτίμησης εξόδου (υπόλοιπο).
$A$ :	Ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στον πίνακα $A$ .
$B$ :	Ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στον πίνακα $B$ .
$C$ :	Ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στον πίνακα $C$ .
$D$ :	Ο γραμμικός τελεστής που αντιστοιχεί στον πίνακα $D$ .
$d(S)$ :	Η διάσταση του χώρου $S$ .
$\bar{R}_i$ :	Ο χώρος ανίχνευσης του διανύσματος συμβάντος $f_i$ .
$g_i$ :	Ο δημιουργός ανίχνευσης για την αστοχία που συνδέεται με το διάνυσμα συμβάντος $f_i$ .
$v_i$ :	Η διάσταση του $\bar{R}_i$ .
$\psi_d(\cdot)$ :	Το επιθυμητό ελάχιστο πολυώνυμο που συνδέεται με τον $\bar{R}_i$ .
$I$ :	Ο υπόχωρος που δημιουργείται από μία ομάδα διανυσμάτων συμβάντος.
$\bar{R}_I$ :	Ο χώρος ανίχνευσης του $I$ .
$v_I$ :	Η διάσταση του $\bar{R}_I$ .
$R_0$ :	Ο επιπλέον υπόχωρος του $\bar{R}_I$ .
$R_{0g}$ :	Ειδική περίπτωση του $R_0$ .
$h_i$ :	Διάνυσμα συμβάντος που εξετάζεται για στασιμότητα στην έξοδο.
$\bar{d}_i$ :	Ο χώρος ανίχνευσης του διανύσματος συμβάντος $h_i$ .
$I_i$ :	Σύνολο δεικτών για το $h_i$ .
$\hat{A}, \hat{C}, \hat{D}$	Οι πίνακες $A, C, D$ εκφρασμένοι στην κανονική μορφή.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Βασικές έννοιες στην τεχνική διάγνωσης σφαλμάτων

Ολόκληρη η έννοια της διάγνωσης σφαλμάτων συνίσταται στις ακόλουθες τρεις ουσιαστικές διαδικασίες:

*Ανίχνευση αστοχίας (Fault detection):* Ανίχνευση της ύπαρξης σφαλμάτων στις λειτουργικές μονάδες της διεργασίας, τα οποία οδηγούν σε μη επιθυμητή ή μη ανεκτή συμπεριφορά ολόκληρου του συστήματος

*Εντοπισμός αστοχίας (Fault isolation):* Προσδιορισμός της θέσης των διαφόρων σφαλμάτων στο σύστημα

*Ανάλυση ή Αναγνώριση αστοχίας (Fault analysis or identification):* Προσδιορισμός του τύπου, του μεγέθους και της αιτίας της αστοχίας.

Η σχετική σημασία των τριών διαδικασιών είναι προφανώς υποκειμενική, ωστόσο η ανίχνευση είναι άκρως απαραίτητη για κάθε πρακτικό σύστημα και ο εντοπισμός είναι σχεδόν εξίσου σημαντικός. Η αναγνώριση αστοχίας, από την άλλη, αν και αναμφίβολα χρήσιμη, μπορεί να μην είναι ουσιαστική αν δεν περιλαμβάνεται καμία ενέργεια αναδιαμόρφωσης. Συνεπώς, η διάγνωση σφαλμάτων πολύ συχνά θεωρείται ως ανίχνευση αστοχίας και εντοπισμός (εν συντομία FDI) στη βιβλιογραφία [15].

### 1.2 Αντικείμενο της εργασίας

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη των δύο πρώτων διαδικασιών της τεχνικής διάγνωσης σφαλμάτων, ήτοι της ανίχνευσης και του εντοπισμού αστοχίας. Πιο συγκεκριμένα, τα ανωτέρω θέματα θα εξεταστούν στους αισθητήρες δορυφόρου, με εφαρμογή της μεθόδου των φίλτρων ανίχνευσης αστοχιών. Στα πλαίσια της εργασίας, δεν θα διενεργηθεί εκτενής αναφορά στην ανάλυση/ αναγνώριση αστοχίας καθώς επίσης και στις ενέργειες που πρέπει να λάβουν χώρα, προκειμένου να αποκατασταθεί το πρόβλημα.

### **1.3 Επιστημονική – Τεχνική σημασία του προβλήματος**

Η ορθή λειτουργία, συντήρηση και ασφάλεια του συστήματος, προϋποθέτουν:

- την ύπαρξη διαδικασίας παρακολούθησης καθώς επίσης και
- την εφαρμογή ενός πλάνου συντήρησης που να αντικαθιστά τα μέρη που έχουν υποστεί βλάβη, προτού επηρεάσουν το σύστημα.

Είναι πολύ χρήσιμο να εντοπίζεται η αστοχία σε πρώιμο στάδιο προκειμένου να γίνεται άμεση αποκατάστασή της και να μην προκαλείται η συνολική δυσλειτουργία του συστήματος

### **1.4 Στόχος της Εργασίας**

Η παρούσα εργασία έχει ως στόχο να παρέχει:

- μια συστηματική παρουσίαση του προβλήματος ανίχνευσης αστοχιών σε γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα με τη μέθοδο των φίλτρων ανίχνευσης αστοχιών
- μια ειδίκευση σε αστοχίες αισθητήρων
- εφαρμογή της ανωτέρω θεωρίας για ανίχνευση αστοχιών σε αισθητήρες δορυφόρου και συνεπώς αξιολόγηση της μεθόδου βάσει των αποτελεσμάτων προσομοίωσης.

### **1.5 Δομή της Εργασίας**

Μετά τα εισαγωγικά στοιχεία του πρώτου κεφαλαίου, το δεύτερο κεφάλαιο δίνει μια συνοπτική και κατόπιν αναλυτική παρουσίαση του προβλήματος. Το τρίτο κεφάλαιο ξεκινά με έρευνα της δομής του προβλήματος ανίχνευσης με αξιωματικό τρόπο (υποενότητα 3.1.1). Ο όγκος των θεωρητικών αποτελεσμάτων παρουσιάζεται στη συνέχεια έως και την ενότητα 3.5 και ακολούθως παρουσιάζεται η κανονική μορφή, ενώ στο τέλος των ενοτήτων 3.2 και 3.3 συνοψίζονται τα προηγούμενα αποτελέσματα με λιγότερο τυπικό τρόπο. Στο τέταρτο κεφάλαιο ειδικεύονται τα προηγούμενα αποτελέσματα σε αστοχίες που αφορούν αισθητήρες. Στο πέμπτο κεφάλαιο γίνεται μια σύγκριση της μεθόδου των φίλτρων ανίχνευσης αστοχιών με εναλλακτικές μεθοδολογίες. Στο έκτο κεφάλαιο εξηγείται ο τρόπος με τον οποίο εφαρμόζεται η μεθοδολογία για το πρόβλημα της ανίχνευσης αστοχιών στους αισθητήρες δορυφόρου και αξιολογούνται τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή αυτή. Στο έβδομο κεφάλαιο αναφέρονται τα συμπεράσματα που προέκυψαν από την εκτέλεση της εργασίας, οι περιορισμοί της, όπως επίσης και προτεινόμενες επεκτάσεις της.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

### 2.1 Συνοπτική παρουσίαση του προβλήματος

Η ανίχνευση αναφέρεται στη διαδικασία απόκτησης πληροφοριών για γεγονότα βασισμένων σε προσβάσιμα σήματα του συστήματος. Το επιθυμητό διάνυσμα ελέγχου  $u_d(t)$  και το διάνυσμα εξόδου του αισθητήρα  $y(t)$  θεωρούμε ότι είναι προσβάσιμα σήματα.

Η απλούστερη μέθοδος ανίχνευσης αστοχιών είναι η σύγκριση της απόδοσης δύο όμοιων στοιχείων— διαφορά σηματοδοτεί αστοχία [42]. Αναγνώριση ως προς το ποιο από τα δύο έχει χαλάσει γίνεται συγκρίνοντας το καθένα με ένα τρίτο στοιχείο. Αυτή η διαδικασία ψηφοφορίας είναι απλή, αλλά τα πλεονάζοντα στοιχεία μπορεί να είναι ακριβά, βαριά ή ογκώδη. Μία άλλη λύση στο πρόβλημα ανίχνευσης αποτελεί το φίλτρο ανίχνευσης.

Το φίλτρο ανίχνευσης αποτελεί ένα γραμμικό φίλτρο οδηγούμενο από τα προσβάσιμα σήματα  $u_d(t)$  και  $y(t)$  [39]. Η έξοδος του φίλτρου είναι ένα ‘αναμενόμενο’ διάνυσμα εξόδου αισθητήρα. Αντιπροσωπεύει τις εξόδους αισθητήρα που θα λαμβάναμε αν δεν υπήρχαν καθόλου αστοχίες, αλλαγές ή άλλες διαταραχές. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει καμία διαταραχή η έξοδος του φίλτρου θα προσεγγίζει το πραγματικό διάνυσμα εξόδου αισθητήρα ασυμπτωτικά όσο η επίδραση των σφαλμάτων στις αρχικές συνθήκες σβήνει. Όταν διαταραχές όντως υπάρχουν θα υπάρχει διαφορά μεταξύ της αναμενόμενης εξόδου από το φίλτρο και της πραγματικής εξόδου από τους αισθητήρες. Αυτή η διαφορά ή το σήμα σφάλματος αποτελεί την πηγή της επιθυμητής πληροφορίας για γεγονότα. Το φίλτρο ανίχνευσης σχεδιάζεται έτσι ώστε όταν συμβούν συγκεκριμένα γεγονότα το προκύπτον σήμα σφάλματος να συμπεριφέρεται με έναν τρόπο που είναι ασυνήθιστος και εύκολα αναγνωρίσιμος. Οι πληροφορίες για γεγονότα λαμβάνονται ψάχνοντας για αυτές τις ασυνήθιστες αποκρίσεις σφάλματος. Συμβαίνει ότι –απουσία διαταραχών- όχι μόνο η έξοδος του φίλτρου προσεγγίζει την έξοδο του αισθητήρα αλλά και η κατάσταση του φίλτρου προσεγγίζει την κατάσταση του συστήματος. Με αυτήν την έννοια το φίλτρο ανίχνευσης αποτελεί επίσης ένα φίλτρο εκτίμησης κατάστασης. Σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να είναι ακόμη και επιθυμητό να επιτρέψουμε το φίλτρο ανίχνευσης να

χρησιμεύει και ως εκτιμητής κατάστασης. Ωστόσο, ένα φίλτρο σχεδιασμένο για εκτίμηση κατάστασης δε θα αποτελεί ένα επιτυχές φίλτρο ανίχνευσης παρά μόνο από καθαρή σύμπτωση.

Ενώ ένα φίλτρο που αποτελεί εκτιμητή κατάστασης σχεδιάζεται για να μειώνει όλα τα σφάλματα όσο το δυνατόν περισσότερο, το φίλτρο ανίχνευσης σχεδιάζεται για να βελτιώσει και να κάνει εύκολα αναγνωρίσιμα εκείνα τα σφάλματα που προκύπτουν από συγκεκριμένα γεγονότα. Το φίλτρο θα πρέπει να είναι ειδικά σχεδιασμένο προκειμένου να το επιτυγχάνει αυτό. Ο λόγος για τον οποίο ένα φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να αποτελεί και επιτυχή εκτιμητή κατάστασης είναι ότι μπορεί (και πρέπει) να σχεδιάζεται ώστε να εξουδετερώνει όλα τα σφάλματα, ακόμη και τα διαφορετικά από εκείνα που σχετίζονται με τα γεγονότα που είναι σχεδιασμένο να ανιχνεύει. Επομένως, απουσία αυτών των ειδικών γεγονότων τα σφάλματα θα πρέπει να είναι μικρά. Επιπρόσθετα, αν την αναγνώριση αστοχιών ακολουθήσουν κατάλληλες διορθωτικές ενέργειες, το φίλτρο ανίχνευσης ξαναποκτά φυσιολογική λειτουργία. Για παράδειγμα, η αποσύνδεση ενός χαλασμένου αισθητήρα θα εξαλείψει την παρουσία αστοχίας. Παράλληλα, η εκτίμηση του φίλτρου για το ποια θα πρέπει να είναι η χαμένη μέτρηση μπορεί να υποκαταστήσει τη συγκεκριμένη μέτρηση.

## 2.2 Αναλυτικότερη παρουσίαση του προβλήματος

Η προσοχή μας θα περιοριστεί σε ντετερμινιστικά συστήματα τα οποία είναι γραμμικά και χρονικά αμετάβλητα όταν λειτουργούν κανονικά. Τέτοια συστήματα μπορούν να χαρακτηριστούν πλήρως από μια σχέση εισόδου-εξόδου μεταξύ ενός διανύσματος ελέγχου  $u(t)$  και ενός διανύσματος μέτρησης  $y(t)$ . Ωστόσο, η αναπαράσταση του χώρου κατάστασης των συστημάτων απαιτεί τον επιπλέον ορισμό ενός διανύσματος κατάστασης  $x(t)$ :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.2.1)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

Τα διανύσματα  $u(t)$  ( $=u_d(t)$ ),  $x(t)$  και  $y(t)$  είναι  $p$ -διάστατο,  $n$ -διάστατο και  $m$ -διάστατο αντίστοιχα και οι  $A, B, C$  είναι σταθεροί πίνακες συντεταγμένων διάστασης  $n \times n$ ,  $n \times p$  και  $m \times n$ . Ούτε το διάνυσμα κατάστασης  $x(t)$  ούτε η τριάδα  $(A, B, C)$  ορίζεται μοναδικά για ένα δοθέν σύστημα. Υπάρχουν ποικίλες ισοδύναμες επιλογές για τους  $(A, B, C)$ .

Αν ο  $C$  δεν είναι αντιστρέψιμος, το διάνυσμα εξόδου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή δεν περιέχει αρκετή πληροφορία για τον προσδιορισμό του  $x(t)$ . Οι περισσότεροι νόμοι ελέγχου ανάδρασης απαιτούν ακριβή γνώση του  $x(t)$ . Η συνήθης διαδικασία που χρησιμοποιείται και στη θεωρία παρατηρητή και στη θεωρία στοχαστικής εκτίμησης είναι να προσεγγίσουν το  $x(t)$  με το διάνυσμα κατάστασης  $x_m(t)$  ενός μοντέλου αναφοράς (Σχήμα 2.1). Οι δύο προσεγγίσεις προσδιορίζουν διαφορετικά κριτήρια για την επιλογή ενός πίνακα ανάδρασης  $D$ . Σημειώνεται ότι η θεωρία παρατηρητή είναι κατά κάποιο τρόπο πιο γενική με την έννοια ότι δεν απαιτεί ένα  $n$ -διάστατο μοντέλο αναφοράς. Το κύριο μέλημα της θεωρίας ανίχνευσης αστοχιών είναι να συνδυάσει αυτή την ικανότητα εκτίμησης κατάστασης με την ικανότητα ανίχνευσης αστοχιών. Ο περιορισμός που τίθεται στην επιλογή του  $D$  είναι ότι το σφάλμα εξόδου,  $y(t) - y_m(t)$ , θα πρέπει να περιέχει πληροφορία για την αστοχία του συστήματος σε μορφή που να μπορεί να ερμηνευθεί εύκολα. Υποκείμενη σε αυτόν τον περιορισμό, η ελευθερία επιλογής του  $D$  για τους σκοπούς της εκτίμησης κατάστασης μεγιστοποιείται.

Η προσέγγιση του μοντέλου αναφοράς βασίζεται στην υπόθεση ότι η τριάδα  $(A_m, B_m, C_m)$  περιγράφει τη σχέση εισόδου-εξόδου του συστήματος που μοντελοποιείται υπό την προϋπόθεση ότι το σύστημα δεν έχει χαλάσει. Αφού αυτό απαιτεί τα  $(A, B, C)$  και  $(A_m, B_m, C_m)$  να είναι ισοδύναμες αναπαραστάσεις του συστήματος, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να αντικαταστήσουμε το  $(A_m, B_m, C_m)$  στο μοντέλο αναφοράς με το  $(A, B, C)$ . Οι εξισώσεις του συστήματος για το μοντέλο αναφοράς είναι τότε όμοιες με τις (2.2.1) εκτός από την παρουσία του όρου ανάδρασης του σφάλματος εξόδου:

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + Bu(t) + D(y(t) - y_m(t)) : \quad x_m(0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.2)$$

$$y_m(t) = Cx_m(t)$$

Μια εναλλακτική αναπαράσταση είναι να αντικαταστήσουμε το  $y_m(t)$  στη διαφορική εξίσωση από το  $Cx_m(t)$ :

$$\dot{x}_m(t) = (A - DC)x_m(t) + Bu(t) + Dy(t) : \quad x_m(0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.3)$$

$$y_m(t) = Cx_m(t)$$

Οι (2.2.2) και οι (2.2.3) γίνονται ταυτόσημες με την (2.2.1) αν το  $y_m(t)$  είναι ίσο με το  $y(t)$ .

Η ακρίβεια με την οποία η προσέγγιση του μοντέλου αναφοράς εκτιμά το  $x(t)$  μπορεί να προσδιοριστεί στα πλαίσια των εξισώσεων σφάλματος:

$$\varepsilon(t) = x(t) - x_m(t) \quad (2.2.4)$$

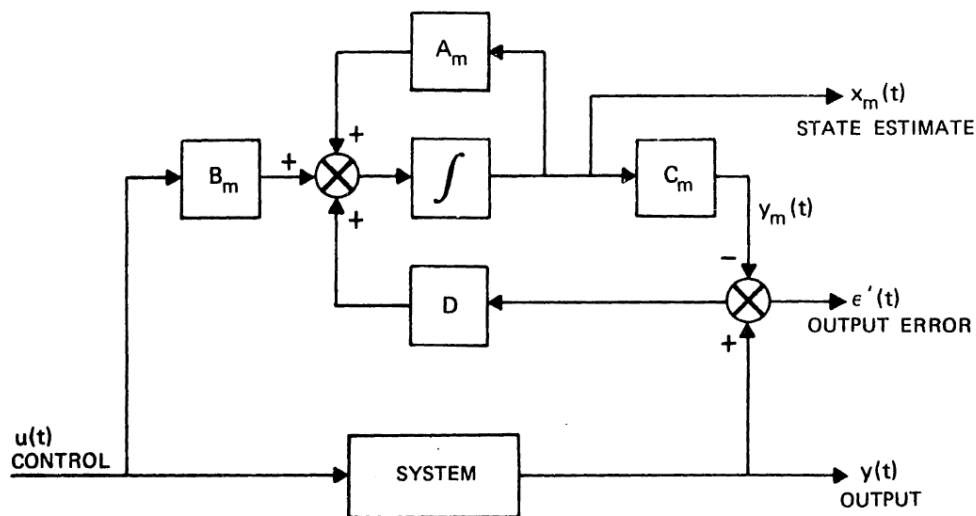
$$\varepsilon'(t) = y(t) - y_m(t)$$

Απουσία κάποιας αστοχίας, το  $\varepsilon(t)$  ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση αντίστοιχη με την (2.2.3):

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) : \varepsilon(0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.5)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t)$$

Προκειμένου το μοντέλο αναφοράς να αποτελεί έναν ασυμπτωτικά ευσταθή εκτιμητή κατάστασης, είναι αναγκαίο ο  $D$  να επιλεγεί έτσι ώστε όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  να έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Αυτό είναι το βασικό κριτήριο με το οποίο η θεωρία παρατηρητή ορίζει έναν αποδεκτό πίνακα ανάδρασης  $D$ . Η θεωρία ανίχνευσης αστοχιών εγγυάται την ικανότητα να ικανοποιήσουμε αυτό το κριτήριο παρέχοντας σχεδόν πλήρη ελευθερία στην επιλογή των ιδιοτιμών του  $(A - DC)$ .



Σχήμα 2.1 Γενική υλοποίηση μοντέλου αναφοράς για εκτίμηση κατάστασης και/ή ανίχνευση αστοχιών

Παρουσία κάποιας αστοχίας ή αλλαγής σε μια παράμετρο του συστήματος, η τριάδα  $(A, B, C)$  στην οποία βασίζεται το μοντέλο αναφοράς δεν περιγράφει πλέον τη δυναμική του υπό βλάβη συστήματος και το  $x_m(t)$  δεν είναι απαραίτητα μια καλή προσέγγιση του  $x(t)$ . Το μοντέλο

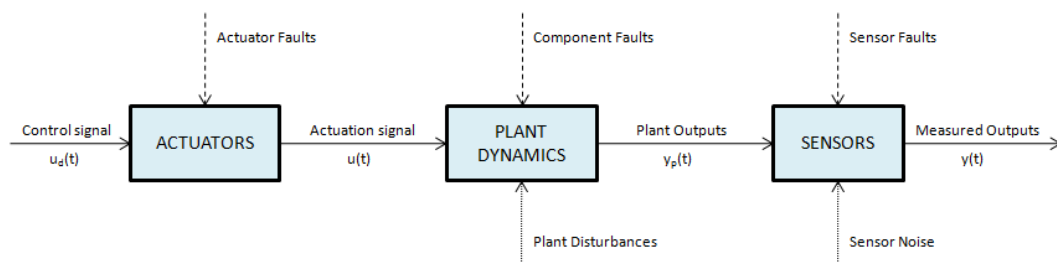
αναπαριστά το  $x(t)$  και το  $y(t)$  στο σύστημα που έχει χαλάσει ως συνάρτηση του  $(A, B, C)$  και μίας σειράς πρόσθετων διανυσμάτων:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f_1 n_1(t) + f_2 n_2(t) + \dots \quad : x(0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.6)$$

$$y(t) = Cx(t) + e_{m1} n_{c1}(t) + e_{m2} n_{c2}(t) + \dots$$

Οι βαθμωτοί συντελεστές  $n_1(t), n_2(t) \dots$  και  $n_{c1}(t), n_{c2}(t) \dots$  είναι εν γένει συναρτήσεις των  $x(t)$  και  $u(t)$ , αλλά μπορεί να είναι αυθαίρετες χρονικές συναρτήσεις. Το  $e_{mi}$  είναι το  $i$ -οστό μοναδιαίο διάνυσμα στον  $m$ -διάστατο χώρο εξόδου, αλλά τα  $f_1, f_2$  μπορεί να είναι οποιαδήποτε  $n$ -διάστατα διανύσματα. Η χρησιμότητα της θεωρίας που θα αναπτυχθεί παρακάτω στηρίζεται στο γεγονός ότι οι αστοχίες του συστήματος μπορούν συχνά να μοντελοποιηθούν με χρήση της (2.2.6) με έναν μόνο προσθετικό όρο. Πιο συγκεκριμένα,

Μοντελοποίηση αστοχιών: Το σύστημα ανοιχτού βρόχου μπορεί να αποσυντεθεί σε τρία τμήματα: τους ενεργοποιητές, τη δυναμική του συστήματος και τους αισθητήρες. Στο παρακάτω Σχήμα απεικονίζεται η ανωτέρω αποσύνθεση, η οποία χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη. Αστοχίες είναι δυνατόν να εμφανισθούν σε οποιοδήποτε από τα τρία τμήματα του συστήματος ανοιχτού βρόχου. Εκτός από τις πιθανές αστοχίες, παρουσιάζονται οι εξωτερικές διαταραχές και ο θόρυβος που επηρεάζουν τη δυναμική της διεργασίας και τις μετρήσεις των αισθητήρων αντίστοιχα.



Συνεπώς, τα πιθανά είδη αστοχιών είναι τα εξής:

- Αστοχία σε ενεργοποιητή: Μία αστοχία στον  $i$ -οστό ενεργοποιητή μοντελοποιείται μαθηματικά ως εξής:

$$u(t) = u_d(t) + \hat{e}_{pi} n_i(t) \quad (2.2.7)$$

όπου  $\hat{e}_{pi}$  είναι ένα μοναδιαίο  $p$ -διάνυσμα στην  $i$ -οστή διεύθυνση συντεταγμένων:

$$\hat{e}_{pi} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$



και  $n_i(t)$  είναι μία αυθαίρετη βαθμωτή χρονική συνάρτηση. Αντικαθιστώντας την (2.2.7) στην (2.2.1) έχουμε:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_d(t) + b_i n_i(t), \quad x(0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.8)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

όπου  $b_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη του πίνακα  $B$ .

Τις (2.2.8) θα καλούμε *μοντέλο αστοχίας ενεργοποιητή*.

- Αστοχία σε αισθητήρα. Μία αστοχία στον  $i$ -οστό αισθητήρα μοντελοποιείται ως εξής:

$$y(t) = Cx(t) + \hat{e}_{mi} n_{ci}(t) \quad (2.2.9)$$

όπου  $\hat{e}_{mi}$  είναι ένα μοναδιαίο  $m$ -διάνυσμα στην  $i$ -οστή διεύθυνση συντεταγμένων και  $n_{ci}(t)$  είναι μία αυθαίρετη βαθμωτή χρονική συνάρτηση.

Αντικαθιστώντας την (2.2.9) στην (2.2.1) έχουμε:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.2.10)$$

$$y(t) = Cx(t) + \hat{e}_{mi} n_{ci}(t)$$

Τις (2.2.10) θα καλούμε *μοντέλο αστοχίας αισθητήρα*.

- Μεταβολές στη δυναμική του συστήματος, που προκύπτουν από μεταβολές των στοιχείων των πινάκων  $A$ ,  $B$  ή  $C$ .

Σημειώνεται ότι οι μεταβολές στα δυναμικά χαρακτηριστικά της διεργασίας (περίπτωση 3) εμφανίζονται στην εξίσωση κατάστασης του συστήματος με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται και οι αστοχίες σε ενεργοποιητή.

Η συμπεριφορά των σφαλμάτων  $\varepsilon(t)$  και  $\varepsilon'(t)$  μετά από μια αστοχία συστήματος μπορούν να προσδιοριστούν από το  $\varepsilon(t)$  τη στιγμή της αστοχίας, την (2.2.2) και το κατάλληλο μοντέλο αστοχίας. Εξαιτίας της σημασίας τους, η προσοχή μας θα περιοριστεί στα μοντέλα αστοχίας ενεργοποιητή και αισθητήρα. Με την αστοχία να συμβαίνει τη χρονική στιγμή  $t_0$ , τα σφάλματα που αντιστοιχούν στις (2.2.8) και (2.2.10) είναι αντίστοιχα:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) + b_i n_i(t) \quad : \quad \varepsilon(t_0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.11)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t) \quad t \geq t_0$$

και:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) - d_i n_{ci}(t) \quad : \varepsilon(t_0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.12)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t) + \hat{e}_{mi} n_{ci}(t) \quad t \geq t_0$$

όπου το  $d_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη του πίνακα ανάδρασης  $D$ .

Εξαιτίας της σημασίας τους στον ορισμό των ιδιοτήτων του συστήματος ανίχνευσης αστοχιών, διανύσματα τα οποία εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση για το  $\varepsilon(t)$  όμοια με τα  $b_i$  και  $d_i$  παραπάνω, τα καλούμε *διανύσματα συμβάντος* (*event vectors*).

Το κεντρικό ζήτημα στη θεωρία ανίχνευσης αστοχιών είναι πώς να επιλέξουμε τον πίνακα ανάδρασης  $D$  έτσι ώστε το  $\varepsilon'(t)$  που παράγεται από μια αστοχία να μπορεί να συσχετιστεί με εκείνη την αστοχία άμεσα. Αυτή η συσχέτιση δεν είναι συνάρτηση του τρόπου με τον οποίο η αστοχία συμβαίνει αλλά της δυναμικής σχέσης μεταξύ του χαλασμένου στοιχείου και του υπόλοιπου συστήματος. Αναφορικά με τα μοντέλα αστοχίας ενεργοποιητή και αισθητήρα, η συσχέτιση είναι συνάρτηση των διανυσμάτων συμβάντος  $b_i$  και  $d_i$  και του  $\hat{e}_{mi}$ , αλλά είναι ανεξάρτητη από τις χρονικές συναρτήσεις  $n_i(t)$  και  $n_{ci}(t)$ . Για να δούμε πόσο σημαντική είναι η ανεξαρτησία από τις  $n_i(t)$  και  $n_{ci}(t)$ , ας θεωρήσουμε την αστοχία στο πρώτο στοιχείο ελέγχου που το οδηγεί στο να μη λαμβάνει εντολή εισόδου. Αν το στοιχείο ελέγχου αποτύχει με τρόπο διαφορετικό από το να τεθεί εκτός λειτουργίας, η  $n_1(t)$  θα είναι κάποια χρονική συνάρτηση διαφορετική από την  $-u(t)$ . Η μόνη ιδιότητα που χαρακτηρίζει όλους τους δυνατούς τρόπους αστοχιών για το πρώτο στοιχείο ελέγχου είναι ότι, πέρα από έναν βαθμωτό παράγοντα, το μοντέλο αστοχίας ενεργοποιητή θα πρέπει να χρησιμοποιεί το διάνυσμα συμβάντος  $b_1$ . Όμοια, η  $n_{ci}(t)$  στο μοντέλο αστοχίας αισθητήρα για τον πρώτο αισθητήρα μπορεί να είναι  $x_1(t)$ ,  $s_1$  ή κάποια άλλη χρονική συνάρτηση. Όμως, το διάνυσμα  $e_{mi}$  πρέπει να είναι το  $e_{m1}$ . Κατά συνέπεια, η πρώτη στήλη του  $D$  είναι το διάνυσμα συμβάντος που σχετίζεται με κάθε αστοχία του πρώτου αισθητήρα.

Η ανάλυση που ακολουθεί χρησιμοποιεί το γενικό μοντέλο:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) + f_1 n_1(t) \quad : \varepsilon(t_0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.13)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t) \quad t \geq t_0$$

όπου  $f_1$  είναι ένα  $n \times 1$  διάνυσμα και  $n_1(t)$  μία αυθαίρετη χρονική συνάρτηση. Η λύση της εξίσωσης (2.2.13) είναι:

$$\varepsilon(t) = e^{(A-DC)(t-t_0)}\varepsilon(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(A-DC)(t-\tau)} f_1 n_1(\tau) d\tau \quad (2.2.14)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t)$$

Για έναν δοθέντα  $D$ , η  $\varepsilon(t)$  περιγράφει μία τροχιά στον  $n$ -διάστατο χώρο κατάστασης, η οποία είναι συνάρτηση του  $\varepsilon(t_0)$ , του διανύσματος συμβάντος  $f_1$  και του  $n_1(t)$ . Το σφάλμα εξόδου  $\varepsilon'(t)$  περιγράφει μια αντίστοιχη τροχιά στο χώρο εξόδου. Ως διαισθητική βοήθεια, ένα ζεύγος υποθετικών τροχιών φαίνεται στο Σχήμα 2.2 για την περίπτωση όπου:

$$Cf_1 \neq 0 \quad (2.2.15)$$

$$\varepsilon(t_0) = 0$$

Δεδομένου ότι ο πίνακας  $(A-DC)$  είναι ευσταθής, το σφάλμα εκτίμησης κατάστασης στη μόνιμη κατάσταση θα είναι:

$$\varepsilon(t) \cong \int_{t_0}^t e^{(A-DC)(t-\tau)} f_1 n_1(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{\infty} (A-DC)^j f_1 \int_{t_0}^t \frac{t-\tau}{j!} n_1(\tau) d\tau \quad (2.2.16)$$

Όπως προκύπτει από την (2.2.16), το βασικό χαρακτηριστικό των τροχιών στη μόνιμη κατάσταση το οποίο είναι ανεξάρτητο από την  $n_1(t)$  είναι ότι το  $\varepsilon(t)$  θα πρέπει να περιέχεται στον ελέγξιμο υπόχωρο του  $f_1$ , δηλ. στον υπόχωρο που παράγεται από τις στήλες του  $W$ :

$$W = [f_1 \quad (A-DC)f_1 \quad (A-DC)^2 f_1 \quad \dots \quad (A-DC)^{n-1} f_1] \quad (2.2.17)$$

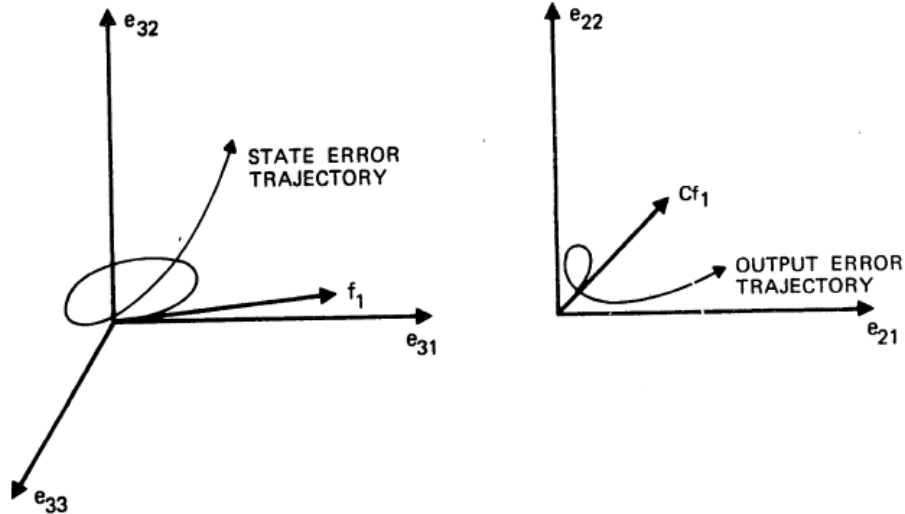
Όμοια, το σφάλμα εξόδου  $\varepsilon'(t)$  στη μόνιμη κατάσταση περιορίζεται στον υπόχωρο που παράγεται από τις στήλες του  $CW$  ( $\varepsilon'(t) \cong C \int_{t_0}^t e^{(A-DC)(t-\tau)} f_1 n_1(\tau) d\tau$  όπως προκύπτει από τις (2.2.13) και (2.2.16)).

Η ελευθερία να επιλέξουμε τον  $D$  παρέχει τη δυνατότητα να αλλάξουμε τους  $W$  και  $CW$  για να κάνουμε το σφάλμα εξόδου που παράγεται από την  $f_1 n_1(t)$  εύκολα αναγνωρίσιμο. Το θεώρημα ανίχνευσης αποδεικνύει ότι ο  $D$  μπορεί να απαιτηθεί να ικανοποιεί:

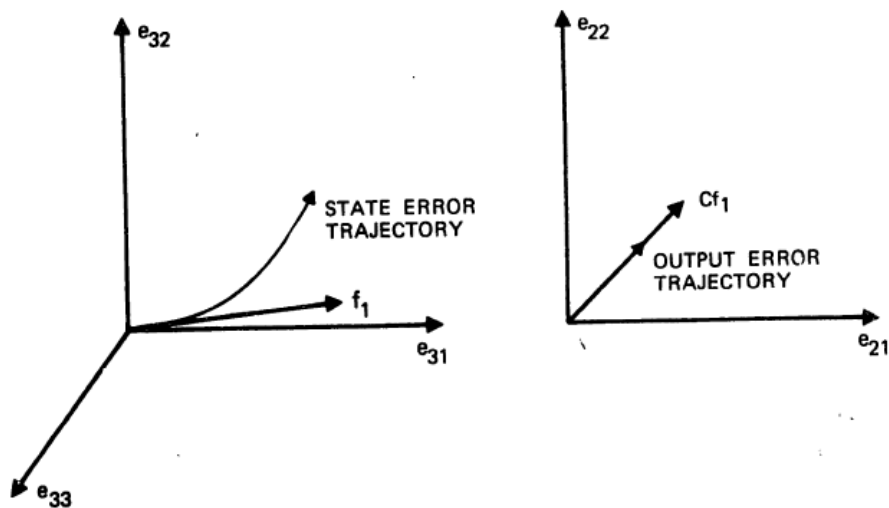
$$rk(CW) = 1 \quad (2.2.18)$$

διατηρώντας συγχρόνως την ελευθερία να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$ . Προκειμένου να γίνει διάκριση μεταξύ του γενικού πίνακα ανάδρασης και αυτού που απαιτούμε να ικανοποιεί την (2.2.18) για κάποιο  $f_1$ , ο τελευταίος αναφέρεται ως φίλτρο αντίχνευσης για εκείνη την  $f_1$ .

Το δεύτερο Σχήμα δείχνει υποθετικές τροχιές σφάλματος αντίστοιχες με εκείνες του πρώτου με τη διαφορά ότι ο  $D$  αποτελεί φίλτρο αντίχνευσης. Υποκείμενο σε ορισμένους περιορισμούς που θα αναφέρουμε παρακάτω, το γεγονός ότι το  $e'(t)$  περιορίζεται στη διεύθυνση εξόδου  $Cf_1$  επιτρέπει το σφάλμα να συσχετιστεί μοναδικά με το διάνυσμα συμβάντος  $f_1$  και επομένως με την αστοχία που μοντελοποιείται από την  $f_1 n_1(t)$ . Αν η συσχέτιση δεν είναι μοναδική, η επόμενη ενότητα παρέχει έναν μηχανισμό για να καθορίσουμε το σύνολο των αστοχιών που παράγουν την ίδια τροχιά σφάλματος εξόδου. Αποδεικνύεται επίσης ότι επιλέγοντας τον  $D$  να αποτελεί φίλτρο αντίχνευσης για την  $f_1$  ελαχιστοποιούμε τον αριθμό των αστοχιών σε αυτό το σύνολο.



Σχήμα 2.2: Υποθετικό σφάλμα εκτίμησης κατάστασης (αριστερά) και σφάλμα εκτίμησης εξόδου (δεξιά) για αστοχία σε ενεργοποιητή όταν ο πίνακας ανάδρασης  $D$  έχει επιλεγεί αυθαίρετα.



Σχήμα 2.3: Υποθετικό σφάλμα εκτίμησης κατάστασης (αριστερά) και σφάλμα εκτίμησης εξόδου (δεξιά) για αστοχία σε ενεργοποιητή όταν ο  $D$  αποτελεί φίλτρο αντίχτυσης

Σημειώνεται ότι καλό είναι να προηγηθεί μια ανάγνωση του παραρτήματος Α.1 προτού αναγνωστούν οι επόμενες ενότητες, καθώς χρησιμοποιούνται σε αυτές έννοιες και σύμβολα που ορίζονται εκεί χωρίς να γίνεται άμεση αναφορά.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΙΧΝΕΥΣΗΣ ΑΣΤΟΧΙΩΝ

### 3.1 Ανίχνευση μίας αστοχίας

Ορισμός 3.1.1: Οι ιδιοτιμές ενός  $n \times n$  πίνακα μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα αν υπάρχει ένα σύνολο ακεραίων  $\{n_1, \dots, n_l\}$  με  $n_1 + \dots + n_l = n$  τ.ώ οι ιδιοτιμές μπορούν να προσδιοριστούν  $n_i$  τη φορά.

Για έναν πραγματικό πίνακα αυτό επιβάλλει έναν ελαφρύ περιορισμό στον προσδιορισμό των μιγαδικών ιδιοτιμών, επειδή αυτές πρέπει να εμφανίζονται σε μιγαδικά συζυγή ζεύγη. Για παράδειγμα στην περίπτωση ενός πραγματικού  $4 \times 4$  πίνακα ( $n = 4$ ) με  $n_1 = 3$  και  $n_2 = 1$ , τρεις ιδιοτιμές πρέπει να προσδιοριστούν ως ομάδα και η τελευταία προσδιορίζεται χωριστά. Αφού οι μιγαδικές ιδιοτιμές πρέπει να εμφανίζονται σε συζυγή ζεύγη, η ομάδα των τριών ιδιοτιμών μπορεί να έχει το πολύ ένα συζυγές ζεύγος με μία πραγματική ιδιοτιμή. Η τελευταία ιδιοτιμή προσδιοριζόμενη χωριστά (ως ομάδα του ενός) πρέπει να είναι πραγματική. Η πιθανότητα δύο μιγαδικών συζυγών ζευγών ιδιοτιμών κατά συνέπεια αποκλείεται.

Ορισμός 3.1.2: Δοθεισών των εξισώσεων (2.2.13) το διάνυσμα συμβάντος  $f_1$  θα λέμε ότι είναι ανιχνεύσιμο (*detectable*), αν υπάρχει  $D$  τ.ώ

- Το σφάλμα εξόδου (στη μόνιμη κατάσταση) που παράγεται από την αστοχία που συνδέεται με το διάνυσμα συμβάντος έχει σταθερή διεύθυνση και
- Όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα.

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αποτελεί ο  $D$  φίλτρο ανίχνευσης για το  $f_1$  -ισοδύναμη της (2.2.18) με όρους διανυσματικού χώρου-είναι η εξής:

$$d(CH_1) = 1 \tag{3.1.1}$$

όπου  $H_1$  είναι ο ελέγξιμος υπόχωρος της  $f_1$  ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα  $f_1, (A - DC)f_1, (A - DC)^2 f_1, \dots$

Ωστόσο η (3.1.1) δεν εγγυάται έναν αποδεκτό αλγόριθμο για την τοποθέτηση των ιδιοτιμών του  $(A - DC)$ . Υπάρχουν διάφοροι λόγοι για τη 2<sup>η</sup> συνθήκη του ορισμού 3.1.2.: Ο πίνακας  $(A - DC)$  θα πρέπει να είναι τουλάχιστον ευσταθής, ώστε ο όρος που οφείλεται στην αρχική συνθήκη στη λύση της (2.2.14) να εξαλειφθεί. Διαφορετικά, το  $\varepsilon'(t)$  δεν θα περιοριστεί στη διεύθυνση εξόδου  $Cf_1$ . Επιπλέον, όμως, είναι επιθυμητό να έχουμε αρκετό έλεγχο πάνω στις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  για να μπορούμε να επηρεάσουμε το χρόνο που απαιτείται για να λάβει το  $\varepsilon'(t)$  την τελική του τιμή.

Προκειμένου να αναπτυχθεί ένας τέτοιος αλγόριθμος είναι επιθυμητό να θέσουμε το πρόβλημα ανίχνευσης αστοχιών σε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Το πρόβλημα τίθεται πλέον βολικά στα πλαίσια του χώρου ανίχνευσης της  $f_1$ , όπως αυτός θα οριστεί παρακάτω. Ο χώρος ανίχνευσης της  $f_1$  έχει και μια δεύτερη εφαρμογή που δικαιολογεί περαιτέρω την εισαγωγή του. Ορισμένες αστοχίες μπορεί να μην είναι διακρίσιμες αν στηριχθούμε μόνο στην κατεύθυνση του σφάλματος εξόδου.

Είναι εμφανές ότι αυτή η δυσκολία σχετίζεται με τη διαφορά της διάστασης του χώρου κατάστασης και του αριθμού των ανεξάρτητων αισθητήρων του συστήματος. Αποδεικνύεται ότι ο χώρος ανίχνευσης της  $f_1$  αποτελείται από τις μη διακρίσιμες από την  $f_1$ , βάσει της κατεύθυνσης μόνο, αστοχίες. Θα αναφερθούμε αναλυτικότερα και πιο τυπικά σε αυτό στη συνέχεια.

### 3.1.1 Χώροι ανίχνευσης

Ορισμός 3.1.3: Έστω  $f_1$  ένα διάνυσμα συμβάντος που σχετίζεται με μία αστοχία σε ένα σύστημα το οποίο μοντελοποιείται από την τριάδα  $(A, B, C)$  όταν δεν υπάρχουν αστοχίες. Έστω ότι  $Cf_1 \neq 0$ . Ο χώρος ανίχνευσης (*detection space*) της  $f_1$  συμβολίζεται με  $\bar{R}_1$  και είναι το ευθύ άθροισμα:

$$i) \quad \bar{R}_1 = f_1 \oplus R_1$$

όπου ο  $R_1$  είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος που ικανοποιεί τις εξής τρεις συνθήκες:

$$ii) \quad n(M) \cap R_1 = \emptyset$$

$$iii) \quad R_1 \subset n(C)$$

$$iv) \quad AR_1 \subset \bar{R}_1$$

Παρατηρήσεις:

- 1) Το  $f_1$  ανήκει στον  $\bar{R}_1$ .
- 2) Ο  $\bar{R}_1$  είναι παρατηρήσιμος υπόχωρος για το  $(A, B, C)$ .
- 3)  $C\bar{R}_1 = Cf_1$

Η ανάπτυξη των ιδιοτήτων του  $\bar{R}_1$  έγινε με την υπόθεση ότι  $Cf_1 \neq 0$ . Αν  $Cf_1 = 0$  τότε

$$(A - DC)f_1 = Af_1$$

και ο  $H_1$  παράγεται από την ακολουθία διανυσμάτων  $f_1, Af_1, (A - DC)Af_1, (A - DC)^2Af_1, \dots$ . Όμοια, αν  $Cf_1, CAf_1, \dots, CA^{\mu-2}f_1$  είναι όλα μηδέν, είναι δυνατόν να δείξουμε ότι

$$(A - DC)^k f_1 = A^k f_1 \quad k \leq \mu$$

και ότι ο  $H_1$  παράγεται από την ακολουθία διανυσμάτων  $f_1, Af_1, \dots, A^{\mu-2}f_1, A^{\mu-1}f_1, (A - DC)A^{\mu-1}f_1, (A - DC)^2A^{\mu-1}f_1, \dots$ . Ο χώρος εξόδου,  $CH_1$ , ο οποίος σχετίζεται με τον  $H_1$  παράγεται σε αυτήν την περίπτωση από την αντίστοιχη ακολουθία  $\emptyset, \emptyset, \dots, \emptyset, CA^{\mu-1}f_1, C(A - DC)A^{\mu-1}f_1, C(A - DC)^2A^{\mu-1}f_1, \dots$ . Η πρωταρχική σημασία στη θεωρία ανίχνευσης αστοχιών των μηδενικών διανυσμάτων στην ακολουθία για τον  $CH_1$  είναι ότι εστιάζει την προσοχή στη διεύθυνση εξόδου  $CA^{\mu-1}f_1$  αντί για την  $Cf_1$ . Αυτή η μετατόπιση της προσοχής μπορεί να τονιστεί τροποποιώντας τον ορισμό 3.1.3:

Ορισμός 3.1.3α: Έστω  $f_1$  ένα διάνυσμα συμβάντος που σχετίζεται με μία αστοχία σε ένα σύστημα το οποίο μοντελοποιείται από την τριάδα  $(A, B, C)$  όταν δεν υπάρχουν αστοχίες και υποθέτουμε ότι  $\mu$  είναι ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο  $CA^{\mu-1}f_1 \neq 0$ . Ο χώρος ανίχνευσης της  $f_1$  συμβολίζεται με  $\bar{R}_1$  και είναι το ευθύ άθροισμα:

$$i) \quad \bar{R}_1 = A^{\mu-1}f_1 \oplus R_1$$

όπου ο  $R_1 \subset E^n$  είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος που ικανοποιεί τις εξής τρεις συνθήκες:

- ii)  $n(M) \cap R_1 = \emptyset$
- iii)  $R_1 \subset n(C)$
- iv)  $AR_1 \subset \bar{R}_1$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα διανύσματα  $f_1, Af_1, \dots, A^{\mu-2}f_1$  ικανοποιούν τα ii) - iv) και επομένως περιέχονται στον  $R_1$ . Ωστόσο, γενικά, παράγουν μόνο έναν υπόχωρο του  $R_1$  και κατά



συνέπεια ο αλγόριθμος που αναπτύσσεται παρακάτω πρέπει και εδώ να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να προσδιοριστούν οι  $R_1$  και  $\bar{R}_1$ .

### 3.1.2 Θεώρημα ανίχνευσης

Θεώρημα 3.1.1: Ένα διάνυσμα συμβάντος είναι ανιχνεύσιμο αν το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο.

Πιο συγκεκριμένα, αν το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο τότε κάθε διάνυσμα συμβάντος  $\in \mathbb{R}^n$  είναι ανιχνεύσιμο, δηλ. υπάρχει  $D$  τ.ώ

- Το σφάλμα εξόδου που παράγεται από την αστοχία που συνδέεται με το διάνυσμα συμβάντος έχει σταθερή διεύθυνση και
- Όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα.

#### Σκιαγράφηση απόδειξης

Αναγκαία και ικανή συνθήκη για να αποτελεί ο  $D$  φίλτρο ανίχνευσης για το  $f$ -ισοδύναμη της (3.1.1) - είναι να ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$(A - DC)f = \xi_f \quad (3.1.2)$$

για κάποιο  $\xi_f \in \bar{R}_f$  (όπου  $\bar{R}_f$  είναι ο χώρος ανίχνευσης του  $f$ ).

Η παραπάνω εξίσωση αποδεικνύεται ότι έχει λύση για κάθε  $f$  και κάθε  $\xi_f \in \bar{R}_f$ . Ο  $\bar{R}_f$  είναι αναλλοίωτος ως προς  $(A - DC)$  για κάθε  $D$  που ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση. Το γεγονός αυτό με τη σειρά του διασφαλίζει ότι τα διανύσματα  $f, (A - DC)f, (A - DC)^2 f, \dots$  περιέχονται στον  $\bar{R}_f$ . Αφού αυτά τα διανύσματα παράγουν τον ελέγχσιμο υπόχωρο του  $f$ , έπεται ότι ο  $H_f$  είναι υπόχωρος του  $\bar{R}_f$ . Επομένως, ο  $CH_f$  θα είναι υπόχωρος του  $C\bar{R}_f$  και  $d(CH_f) = 1$ , δηλ. η αστοχία που σχετίζεται με το  $f$  παράγει σφάλματα εξόδου σε μία διεύθυνση, κατά μήκος της  $Cf$ .

Μέχρι στιγμής έχουμε ικανοποιήσει την 1<sup>η</sup> συνθήκη του ορισμού— γνωρίζουμε δηλαδή ότι υπάρχει πίνακας ανάδρασης τ.ώ η έξοδος που παράγεται από μια συγκεκριμένη αστοχία κείται σε μία διεύθυνση. Απομένει να δείξουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα. Επειδή ο  $\bar{R}_f$  είναι αναλλοίωτος ως προς  $(A - DC)$ , υπάρχει ένα σύνολο:

$$v_f = d(\bar{R}_f) \quad (3.1.3)$$

ιδιοτιμών του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_f$ . Οι υπόλοιπες  $n - v_f$  σχετίζονται με κάποιο αυθαίρετο συμπλήρωμα του  $\mathbb{R}^n$ . Αν ο  $\mathbb{R}^n$  διαμεριστεί:

$$\mathbb{R}^n = \bar{R}_f \oplus \bar{R}_f^c$$

οι επιπλέον  $n - v_f$  ιδιοτιμές σχετίζονται με τον  $\bar{R}_f^c$ .

Έστω ότι ο  $\mathbb{R}^n$  διαμερίζεται όμοια με πριν, όμως με τον επιπλέον περιορισμό στην επιλογή του  $\bar{R}_f^c$ :  $d(C\bar{R}_f^c) = m - 1$ .

Επειδή ο  $\bar{R}_f$  είναι αναλλοίωτος ως προς  $(A - DC)$  για κάθε  $D$  που ικανοποιεί την εξίσωση (3.1.2), αν μια βάση για τον  $\mathbb{R}^n$  προσδιοριστεί ως  $v_f$  γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα από τον  $\bar{R}_f$  και  $n - v_f$  από τον  $\bar{R}_f^c$  ο πίνακας  $(A - DC)$  για αυτή τη βάση παίρνει τη μορφή  $\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ 0 & A22 \end{pmatrix}$  και ο  $C$  τη μορφή  $[C1, C2]$ .

Οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι οι ιδιοτιμές του  $A11$  και του  $A22$ . Το ζεύγος  $(A11, C1)$  είναι πάντα παρατηρήσιμο. Θέλουμε και το  $(A22, C2)$  να είναι παρατηρήσιμο ή ισοδύναμα το  $((A - DC), C)$  να είναι παρατηρήσιμο  $(\text{mod } \bar{R}_f)$  (ακριβής ορισμός θα δοθεί μετά το τέλος της απόδειξης) κάτι που συμβαίνει αν  $(A, C)$  παρατηρήσιμο. Η παρατηρησιμότητα εγγυάται ότι υπάρχουν πίνακες  $D21$  και  $D22$  τ.ώ οι ιδιοτιμές των  $(A11 - D21C1)$  και  $(A22 - D22C2)$  να είναι οποιοδήποτε επιθυμητό σύνολο. Ταυτόχρονα, ο  $\bar{R}_f$  παραμένει αναλλοίωτος ως προς  $(A - (D + D2)C)$ , όπου  $D2 = \begin{pmatrix} D21 & 0 \\ 0 & D22 \end{pmatrix}$  στην προαναφερθείσα βάση δηλ. ο  $(D + D2)$  ικανοποιεί την (3.1.2) προφανώς για κάποιο άλλο  $\xi_f \in \bar{R}_f$ . Συνεπώς, επιθυμητός τελεστής είναι ο  $(D + D2)$  ■

Ορισμός 3.1.4: Ένα σύστημα  $((A - DC), C)$  είναι παρατηρήσιμο  $(\text{mod } \bar{R}_f)$  αν κανένα διάνυσμα  $f'$  το οποίο δεν περιέχεται στον  $\bar{R}_f$  δεν παράγει σφάλματα εξόδου τα οποία περιορίζονται στον υπόχωρο εξόδου  $C\bar{R}_f$ . Ισοδύναμα, αν  $d'_f$  είναι ο ελέγξιμος υπόχωρος για το  $f'$ , δηλαδή ο χώρος που παράγεται από  $f', (A - DC)f', (A - DC)^2f', \dots$  η συνθήκη για παρατηρησιμότητα  $(\text{mod } \bar{R}_f)$  είναι:

$$Cd'_f \not\subset C\bar{R}_f$$

Ορισμός 3.1.5: Έστω  $f_1$  και  $f_2$  διανύσματα συμβάντος που σχετίζονται με αστοχίες σε ένα σύστημα το οποίο μοντελοποιείται-όταν δεν υπάρχουν αστοχίες-από την τριάδα  $(A, B, C)$ . Το διάνυσμα συμβάντος  $f_2$  είναι *ισοδύναμο στην ανίχνευση* (*detection equivalent*) με το  $f_1$  αν:

- Κάθε φίλτρο ανίχνευσης για το  $f_1$  αποτελεί επίσης φίλτρο ανίχνευσης για το  $f_2$  και
- Το σφάλμα εξόδου το οποίο παράγεται από την αστοχία που σχετίζεται με το διάνυσμα συμβάντος  $f_2$  (και το οποίο έχει σταθερή διεύθυνση) έχει την ίδια διεύθυνση με αυτήν που σχετίζεται με το διάνυσμα συμβάντος  $f_1$ .

Αν το  $f_2$  είναι ισοδύναμο στην ανίχνευση με το  $f_1$ , ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών που βασίζεται μόνο στη διεύθυνση του σφάλματος εξόδου δεν μπορεί να διακρίνει μεταξύ των αστοχιών που σχετίζονται με τα δύο διανύσματα συμβάντος.

Αποδεικνύεται ότι ο χώρος ανίχνευσης  $\bar{R}_f$  είναι ο χώρος όλων των διανυσμάτων συμβάντος που είναι ισοδύναμο στην ανίχνευση με το  $f$ . Ειδικότερα, ο χώρος ανίχνευσης  $\bar{R}_f$  είναι ισομορφικός-δηλ. υπάρχει 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο  $\{\xi_f\}$  των διανυσμάτων τα οποία είναι ισοδύναμο στην ανίχνευση με το  $f$ .

Σε πολλές περιπτώσεις, ο  $R_1$  είναι μηδενικός και το  $f_1$  είναι ο δικός του χώρος ανίχνευσης. Αυτό αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου κανένα διάνυσμα συμβάντος δεν είναι ισοδύναμο στην ανίχνευση με το  $f_1$ . Αυτή η περίπτωση είναι σημαντική, επειδή εγγυάται ότι ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών μπορεί μοναδικά να συσχετίσει ένα σφάλμα στη διεύθυνση  $Cf_1$  με την αστοχία που σχετίζεται με το  $f_1$ . Παρόλο που δεν υπάρχει γενικός κανόνας, το γεγονός ότι ο  $R_1$  είναι υπόχωρος του  $n(C)$  υπονοεί ότι ο  $R_1$  είναι πολύ πιθανό να είναι μηδενικός αν το  $m$  είναι περίπου ίσο με το  $n$ , αν δηλ. υπάρχουν σχεδόν τόσες ανεξάρτητες μετρήσεις όσες και οι μεταβλητές κατάστασης. Αν το  $m$  είναι ίσο με το  $n$  τότε ο  $n(C)$  είναι μηδενικός, επομένως και ο  $R_1$ . Η περίπτωση όπου το  $m$  είναι ίσο με το  $n$  είναι μια απλή εφαρμογή της θεωρίας σχετικής με την ανίχνευση αστοχιών και θα παρουσιαστεί αναλυτικά αργότερα.

Ένα ακόμη σημείο που αξίζει να σημειωθεί είναι το εξής: Αν  $f_2$  είναι ένα διάνυσμα συμβάντος τ.ώ  $Cf_2 = Cf_1$  και  $f_2$  δεν ανήκει στον  $\bar{R}_1$  τότε ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών το οποίο ανιχνεύει την αστοχία που σχετίζεται με το  $f_1$ , δεν μπορεί να ανιχνεύσει συγχρόνως και εκείνη που σχετίζεται με το  $f_2$ , καθώς για τη δεύτερη αστοχία το σφάλμα εξόδου δεν μπορεί να περιοριστεί σε μία κατεύθυνση (θα υπάρχει και άλλη συνιστώσα πέραν της  $Cf_1$ ).

Λήμμα 3.1.1: Έστω  $d(\bar{R}_f) = \nu_f$ . Υπάρχει ένα μοναδικό διάνυσμα  $g \in \bar{R}_f$ , το οποίο καλείται δημιουργός ανίχνευσης (*detection generator*) του  $\bar{R}_f$ , τ.ώ:

$$i) \mathbf{A}^k g \in \bar{R}_f \quad k < \nu_f - 1$$

$$ii) \mathbf{C} \mathbf{A}^{\nu_f - 1} g = \mathbf{C}f$$

Οι δηλώσεις υπονοούν ότι τα διανύσματα  $g, \mathbf{A}g, \dots, \mathbf{A}^{\nu_f - 1}g$  αποτελούν βάση για τον  $\bar{R}_f$ . Ο δημιουργός ανίχνευσης είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στον προσδιορισμό υπολογιστικών αλγορίθμων σχετικών με την επιλογή του  $\mathbf{D}$ .

Αλγόριθμος υπολογισμού  $g$ : Έστω  $K = \mathbf{A} - \mathbf{A}f[(\mathbf{C}f)^T(\mathbf{C}f)]^{-1}(\mathbf{C}f)^T\mathbf{C}$ ,

$$M' = \begin{bmatrix} C' \\ C'K \\ \vdots \\ C'K^{n-1} \end{bmatrix}$$

όπου  $C' = [E_m - \mathbf{C}f[(\mathbf{C}f)^T(\mathbf{C}f)]^{-1}(\mathbf{C}f)^T]\mathbf{C}$ ,  $E_m$  ο μοναδιαίος πίνακας και

$$N' = n(M')$$

Τότε  $g = N'\beta'$ , όπου  $\beta'$  είναι ένα  $\nu_f$ -διάνυσμα τ.ώ

$$\begin{pmatrix} CN' \\ CKN' \\ \vdots \\ CK^{\nu_f - 2}N' \end{pmatrix} \beta' = 0$$

Λήμμα 3.1.2: Για μία δοθείσα βάση, έστω:

$$D_f = \mathbf{A}f[(\mathbf{C}f)^T(\mathbf{C}f)]^{-1}(\mathbf{C}f)^T \text{ και}$$

$C' = [E_m - \mathbf{C}f[(\mathbf{C}f)^T(\mathbf{C}f)]^{-1}(\mathbf{C}f)^T]\mathbf{C}$ , όπου  $E_m$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας. Τότε,

$$\bar{R}_f = n(M'_D)$$

όπου

$$M'_D = \begin{bmatrix} C' \\ C'(A - D_f C) \\ \vdots \\ C'(A - D_f C)^{n-1} \end{bmatrix}$$

Αυτό το λήμμα το συμπεριλάβαμε μόνο για να δείξουμε ότι ακόμη και στα πιο περίπλοκα συστήματα υπάρχει ένας απλός, κατασκευαστικός αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των χώρων ανίχνευσης.

Το ακόλουθο λήμμα παρουσιάζει έναν τρόπο προσδιορισμού πίνακα ανάδρασης  $\mathbf{D}$ , για τον οποίο ο  $\bar{R}_f$  είναι αναλλοίωτος ως προς  $(\mathbf{A} - \mathbf{DC})$  ενώ ταυτόχρονα τοποθετούνται και οι  $v_f$  το πλήθος επιθυμητές ιδιοτιμές, οι σχετιζόμενες με τον  $\bar{R}_f$ . Η τοποθέτηση των ιδιοτιμών αυτών γίνεται με τη βοήθεια του επιθυμητού ελάχιστου πολυωνύμου  $\psi_d(\cdot)$  για τον  $\bar{R}_f$  :

$$\psi_d(\lambda) = \lambda^{v_f} + p_{v_f} \lambda^{v_f-1} + p_{v_f-1} \lambda^{v_f-2} + \dots p_2 \lambda + p_1 \quad (3.1.4)$$

Λήμμα 3.1.3: Έστω  $g$  ο δημιουργός ανίχνευσης του  $\bar{R}_f$  και έστω επίσης ότι  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  είναι παρατηρήσιμο. Αν  $\psi_d(\cdot)$  είναι το  $v_f$ -τάξης επιθυμητό ελάχιστο πολυώνυμο για τον  $\bar{R}_f$  αναφορικά με τον  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$ , ο  $\mathbf{D}$  πρέπει να ικανοποιεί:

$$\boxed{\mathbf{DC} \mathbf{A}^{v_f-1} g = \psi_d(\mathbf{A}) g} \quad (3.1.5)$$

Ο  $\bar{R}_f$  είναι αναλλοίωτος αναφορικά με τον  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$  για κάθε τέτοιο  $\mathbf{D}$ . Η (3.1.5) μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$\mathbf{DC} f = \psi_d(\mathbf{A}) g \quad (3.1.5')$$

Το προηγούμενο λήμμα δεν προσδιορίζει ένα μοναδικό φίλτρο ανίχνευσης αν  $v_f \neq n$ . Το θεώρημα ανίχνευσης εξασφαλίζει ότι η ελευθερία που απομένει είναι αρκετή για την τοποθέτηση των υπόλοιπων  $n - v_f$  ιδιοτιμών. Ένας τρόπος για την τοποθέτηση των ιδιοτιμών αυτών περιγράφεται στο τέλος της ενότητας για την κανονική μορφή. Ένας άλλος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τη μερική παρατηρησιμότητα του συστήματος  $(\mathbf{A} - \mathbf{DC}, \mathbf{C}')$ . Αφού  $\bar{R}_f \subset n(M'_D)$ , οι ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_f$  δεν μπορούν να αλλάξουν με ανάδραση της εξόδου για το  $(\mathbf{A} - \mathbf{DC}, \mathbf{C}')$ . Αρκετοί αλγόριθμοι για τοποθέτηση ιδιοτιμών στο παρατηρήσιμο υποσύστημα μπορούν να βρεθούν στη βιβλιογραφία [6].

### 3.1.3 Μη παρατηρήσιμα συστήματα

Δυστυχώς, το πρόβλημα ανίχνευσης αστοχιών χάνει κάποιες από τις επιθυμητές ιδιότητες αν το μοντέλο αναφοράς  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  στο οποίο πρόκειται να βασιστεί το σύστημα ανίχνευσης αστοχιών δεν

είναι παρατηρήσιμο. Δεν είναι απαραίτητο το σύστημα να είναι παρατηρήσιμο— μόνο ένα κατάλληλο μοντέλο του συστήματος να είναι παρατηρήσιμο. Πρακτικά, ένα παρατηρήσιμο μοντέλο μπορεί να αποκτηθεί απλά εξαλείφοντας την μη παρατηρήσιμη δυναμική από το μοντέλο. Αυτό δεν αλλάζει την αποτελεσματικότητα του συστήματος ανίχνευσης αστοχιών καθώς οι αστοχίες στο μη παρατηρήσιμο μέρος του συστήματος δεν μπορούν να ανιχνευθούν. Αν για κάποιο λόγο πρέπει να σχεδιάσουμε ένα φίλτρο ανίχνευσης για ένα μη παρατηρήσιμο μοντέλο συστήματος, οι δυσκολίες που θα αναφερθούν στη συνέχεια θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη.

Αν το  $(A, C)$  δεν είναι παρατηρήσιμο, ο χώρος ανίχνευσης όπως ορίζεται στον Ορισμό 3.1.3 δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός. Αυτό το μειονέκτημα μπορεί να εξαλειφθεί με διάφορους τρόπους. Ένας είναι να αλλάξουμε τον ορισμό για να εξασφαλίσουμε μοναδική λύση. Ως παράδειγμα, θα ήταν αναγκαίο να αλλάξουμε τη συνθήκη i) σε:

$$i)' \quad \bar{R}'_f = f' \oplus R'_f \quad (3.1.6)$$

όπου  $f'$  ανήκει στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του  $n(M)$ :

$$f' \in n(M)^\perp$$

$$f' \equiv f \pmod{n(M)}$$

Η απαιτούμενη αλλαγή στη συνθήκη ii) είναι όμοια:

$$ii)' \quad R'_f \subset n(M)^\perp \quad (3.1.7)$$

Το τελικό αποτέλεσμα θα ήταν να περιορίσουμε την προσοχή μας στην προβολή του  $\bar{R}'_f$  πάνω στο  $n(M)^\perp$ . Το  $n(M)^\perp$  είναι ο χώρος γραμμών του  $M$  και αναφερόμαστε σε αυτόν κλασικά ως τον παρατηρήσιμο χώρο του  $(A, C)$ . Μια τέτοια ειδίκευση του ορισμού του χώρου ανίχνευσης δεν θα προσέθετε στη διαισθητική κατανόηση του προβλήματος ανίχνευσης αστοχιών ούτε θα επέτρεπε να ληφθούν επιπρόσθετα αποτελέσματα. Πάντως, στην υλοποίηση αλγορίθμων, είναι απλό να επιλέξουμε  $\bar{R}'_f \in n(M)^\perp$  ως το χώρο ανίχνευσης της  $f'$  αν κάτι τέτοιο φαίνεται επιθυμητό.

Αν το  $(A, C)$  δεν είναι παρατηρήσιμο, τότε ο  $\bar{R}'_f$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$E^n = \bar{R}'_f \oplus \bar{R}'_f^c \oplus n(M) \quad (3.1.8)$$

Ο μη παρατηρήσιμος χώρος  $n(M)$  του συστήματος είναι αναλλοίωτος. Αυτός ο χώρος και οι ιδιοτιμές που σχετίζονται με αυτόν αποτελούν ένα υποσύστημα το οποίο ποτέ δεν επηρεάζει την έξοδο του συστήματος. Είναι φανερό ότι αυτές οι ιδιοτιμές δεν μπορούν να αλλαχθούν ποτέ με ανάδραση της εξόδου. Εάν,

$$v_0 = d(n(M))$$

μόνο  $n - v_0$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να τοποθετηθούν με επιλογή του  $D$ .

Η επιλογή του  $\bar{R}_f^c$  δεν είναι μοναδική ακόμη κι αν το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο. Από την (3.1.6) είναι φανερό ότι για ένα μη παρατηρήσιμο σύστημα η αποσύνθεση δεν απαιτεί ο  $\bar{R}_f$  να είναι μοναδικός. Κάθε  $\bar{R}'$  που ικανοποιεί:

$$\bar{R}' \oplus n(M) = \bar{R}_f \oplus n(M) \quad (3.1.9)$$

είναι αναλλοίωτος ( $\text{mod } n(M)$ ) αναφορικά με τον  $(A - DC)$  αν ο  $\bar{R}_f$  είναι αναλλοίωτος αναφορικά με τον  $(A - DC)$ . Ως παράδειγμα, είναι δυνατόν να επιλέξουμε τον  $\bar{R}'_f$  όπως ορίζεται στις (3.1.6) και (3.1.7). Η σημασία της (3.1.9) είναι ότι υπονοεί ότι δεν είναι ανάγκη να προσδιορίσουμε τον  $\bar{R}_f$  προκειμένου να λύσουμε το πρόβλημα ανίχνευσης αστοχιών. Το πρόβλημα χαρακτηρίζεται πλήρως από οποιαδήποτε λύση της εξίσωσης. Υπάρχουν  $v_f$  ιδιοτιμές που μπορούν να τοποθετηθούν και που σχετίζονται με εκείνον τον  $\bar{R}'$ .

Αν το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο, ο  $\bar{R}_f$  είναι ισομορφικός με το σύνολο  $\{\xi_f\}$  των διανυσμάτων τα οποία είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση με το  $f$ . Αν το  $(A, C)$  δεν είναι παρατηρήσιμο, χρειαζόμαστε ένα πιο γενικό μέσο για τον χαρακτηρισμό των  $\{\xi_f\}$ . Ξεκάθαρα, κάθε  $\xi_f \in \bar{R}'$  για κάθε  $\bar{R}'$  που ικανοποιεί την (3.1.9) είναι ισοδύναμο στην ανίχνευση με το  $f$ .

Προκειμένου να θέσουμε αυτά τα επιχειρήματα πιο αυστηρά είναι αναγκαίο να υιοθετήσουμε έναν τροποποιημένο ορισμό της ανιχνευσιμότητας.

Ορισμός 3.1.6: Ένα διάνυσμα συμβάντος θα λέμε ότι είναι ημι-ανιχνεύσιμο (*quasi-detectable*), αν υπάρχει  $D$  τ.ώ

- Το σφάλμα εξόδου που παράγεται από την αστοχία που συνδέεται με το διάνυσμα συμβάντος έχει σταθερή διεύθυνση και
- Οι  $n - v_0$  ιδιοτιμές που σχετίζονται με την παρατηρήσιμη δυναμική του  $(A - DC, C)$  μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα.

Το θεώρημα ανίχνευσης μπορεί να ερμηνευθεί στα πλαίσια αυτού του ορισμού.

Θεώρημα 3.1.1' (Θεώρημα ανίχνευσης για μη παρατηρήσιμα συστήματα): Η αστοχία που σχετίζεται με το διάνυσμα συμβάντος  $f$  είναι ημι-ανιχνεύσιμη αν και μόνο αν ο  $\bar{R}_f$  είναι παρατηρήσιμος.

Αφού κάθε διάνυσμα  $\xi \notin n(M)$  επηρεάζει την έξοδο του συστήματος, είναι εμφανές ότι κάθε διάνυσμα  $\xi_f \in \bar{R}_f \oplus n(M)$  είτε παράγει έξοδο που είναι μόνο κατά μήκος της  $Cf$  είτε δεν παράγει καθόλου έξοδο. Το σύνολο  $\{\xi_f\}$  των διανυσμάτων τα οποία είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση με την  $f$  είναι όλα τα διανύσματα  $\xi_f \in \bar{R}_f \oplus n(M)$  τα οποία ικανοποιούν  $\xi_f \notin n(M)$ .

Συνοπτικά, αν το  $(A, C)$  δεν είναι παρατηρήσιμο, το πρόβλημα ανίχνευσης αστοχιών αλλάζει με τρεις τρόπους:

- $v_0$  από τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  γίνονται μη ελέγξιμες.
- Ο χώρος ανίχνευσης δεν είναι μοναδικός και η συνάρτησή του ικανοποιείται από κάθε λύση της (3.1.9) και
- Το σύνολο  $\{\xi_f\}$  των διανυσμάτων τα οποία είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση με το  $f$  είναι όλα τα διανύσματα  $\xi_f \in \bar{R}_f \oplus n(M)$  τα οποία ικανοποιούν  $\xi_f \notin n(M)$ .

### 3.2 Ανίχνευση πολλών αστοχιών

Σε ένα σύστημα με μεγάλο αριθμό πιθανών αστοχιών, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες περισσότερα από ένα γεγονότα μπορούν να ανιχνευθούν από ένα μόνο φίλτρο ανίχνευσης.

Το βασικό θεώρημα που αφορά την αμοιβαία ανιχνευσιμότητα (ακριβής ορισμός θα δοθεί παρακάτω) περιλαμβάνει δύο συνθήκες οι οποίες μαζί είναι ικανές για ένα σύνολο  $r$  αστοχιών να είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμες. Η πρώτη συνθήκη είναι οι διευθύνσεις εξόδου  $Cf_1 \dots Cf_r$  να είναι γραμμικά ανεξάρτητες, όπου  $f_1 \dots f_r$  είναι τα διανύσματα συμβάντος που σχετίζονται με τις αστοχίες. Η δεύτερη συνθήκη περιλαμβάνει τους αντίστοιχους χώρους ανίχνευσης  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ .

Αν ένα σύνολο  $r$  αστοχιών είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμες το επόμενο βήμα είναι να υλοποιήσουμε αλγορίθμους για το σχεδιασμό του συστήματος ανίχνευσης αστοχιών. Αν δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμες αλλά τα  $Cf_1 \dots Cf_r$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διάφορες επιλογές είναι διαθέσιμες. Μία απ' αυτές είναι να παραβιάσουμε τον ορισμό και να επιτρέψουμε ορισμένες ιδιοτιμές του



$(A - DC)$  να μην μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα. Μία άλλη είναι να βρούμε ένα υποσύνολο των  $r$  αστοχιών που μπορούν να ανιχνευθούν από ένα μόνο φίλτρο ανίχνευσης. Μία τρίτη επιλογή είναι να αυξήσουμε τη διάσταση του μοντέλου αναφοράς με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι αστοχίες να μπορούν να ανιχνευθούν από ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών.

Σημ.: Γίνεται η υπόθεση ότι το μοντέλο αναφοράς  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο (το πραγματικό σύστημα δεν χρειάζεται να είναι παρατηρήσιμο). Αν το  $(A, C)$  δεν είναι παρατηρήσιμο τότε τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στη συνέχεια είναι εξίσου έγκυρα ως μελέτη αμοιβαία ημι-ανιχνεύσιμων γεγονότων. Επίσης, υποθέτουμε ότι  $Cf_i \neq 0, i = 1 \dots r$ . Αν αυτό δεν αληθεύει για κάποιο  $f_i$ , το συγκεκριμένο  $f_i$  απλά αντικαθίσταται από το πρώτο στοιχείο στην ακολουθία  $f_i, Af_i, A^2f_i \dots$  το οποίο δεν περιέχεται στο  $n(C)$ .

### 3.2.1 Ικανές συνθήκες για ένα αμοιβαία ανιχνεύσιμο σύνολο

Ορισμός 3.2.1: Δοθεισών των εξισώσεων σφάλματος:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) + f_i n_i(t) \quad i = 1 \dots r$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t)$$

τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  θα λέμε ότι είναι *αμοιβαία ανιχνεύσιμα* (*mutually detectable*), αν υπάρχει  $D$  τ.ώ

- Το σφάλμα εξόδου που παράγεται από την αστοχία που συνδέεται με κάθε διάνυσμα συμβάντος έχει σταθερή διεύθυνση και
- Όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα.

Ορισμένες ειδικές περιπτώσεις μπορούν να εξεταστούν ευθύς αμέσως. Έστω ότι τα διανύσματα συμβάντος  $f_i$  και  $f_j$  έχουν την ίδια διεύθυνση εξόδου, ισχύει δηλ. ότι

$$Cf_i = Cf_j$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- $f_j$  ανήκει στον  $\bar{R}_i$ : Τότε τα διανύσματα συμβάντος  $f_i$  και  $f_j$  είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση. Συνεπώς, αν περιορίσουμε τη μία αστοχία να παράγει σφάλμα εξόδου κατά μήκος της διεύθυνσης  $Cf_i$  μόνο, περιορίζεται και η δεύτερη. Επομένως, ένα σύστημα

ανίχνευσης αστοχιών μπορεί πάντα να σχεδιαστεί έτσι ώστε να ανιχνεύει και τις δύο αστοχίες, αλλά η απόφαση ως προς το ποια αστοχία έχει συμβεί δεν μπορεί να βασιστεί στη διεύθυνση του σφάλματος εξόδου αυτής καθ' αυτής.

- $f_j$  δεν ανήκει στον  $\bar{R}_i$ : Σε αυτήν την περίπτωση, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένα ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών το οποίο ανιχνεύει την αστοχία που σχετίζεται με το  $f_i$  δεν μπορεί να ανιχνεύσει συγχρόνως και εκείνη που σχετίζεται με το  $f_j$ , καθώς για τη δεύτερη αστοχία το σφάλμα εξόδου δεν μπορεί να περιοριστεί σε μία κατεύθυνση (θα υπάρχει και άλλη συνιστώσα πέραν της  $Cf_i$ ).

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας είναι άμεσα γενικεύσιμα μόνο σε αυτές τις δύο περιπτώσεις.

Επιπρόσθετα αποτελέσματα θα δοθούν αρχικά για την περίπτωση όπου οι διευθύνσεις εξόδου  $Cf_1 \dots Cf_r$  είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Αν εξαιρέσουμε την πιθανή συμπερίληψη ισοδύναμων στην ανίχνευση αστοχιών, αυτό περιορίζει την προσοχή μας σε  $m$  το πολύ πιθανές αστοχίες.

Εξαιτίας της σημασίας των γραμμικά ανεξάρτητων διευθύνσεων, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 3.2.2: Έστω  $I$  ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$ . Τα διανύσματα  $f_1 \dots f_r$  είναι *διαχωρίσιμα στην έξοδο (output separable)* αν:

$$d(CI) = r$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η διαχωρισιμότητα στην έξοδο είναι ικανή να εγγυηθεί ότι μπορεί να βρεθεί κάποιος  $D$  για τον οποίο οι αστοχίες που σχετίζονται με τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  παράγουν σφάλματα εξόδου σε μία διεύθυνση. Επιπλέον,  $v'_i$  ( $v'_i = \sum_{i=1,r} v_i$  και  $v_i = d(\bar{R}_i)$   $i = 1 \dots r$ ) το πλήθος ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  τοποθετούνται αυθαίρετα. Όλα αυτά συνοψίζονται τυπικότερα στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.2.1: Αν τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, υπάρχει  $D$  τ.ώ οι αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  παράγουν σφάλματα εξόδου σε μία διεύθυνση για το σύστημα ανίχνευσης αστοχιών  $(A - DC, C)$  και οι  $v'_i$  το πλήθος ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι στοιχεία ενός επιθυμητού συνόλου  $\Lambda$ .

Αξίζει να σημειώσουμε ότι παρόλο που η γραμμική ανεξαρτησία των  $Cf_1 \dots Cf_r$  εγγυάται την ύπαρξη φίλτρου ανίχνευσης για τα  $f_1 \dots f_r$ , χρειάζεται μια ισχυρότερη συνθήκη αν επιθυμούμε το φίλτρο να είναι εφαρμόσιμο στην πράξη. Συνεπώς, ο βαθμός της διαχωρισιμότητας στην

έξοδο είναι σημαντικός. Ο μηχανικός θα πρέπει να σχεδιάσει το μοντέλο αναφοράς και να επιλέξει τα διανύσματα συμβάντος έτσι ώστε οι διευθύνσεις αστοχίας να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο διαχωρίσιμες. Υπάρχει ένα απλό μέτρο της διαχωρισιμότητάς τους το οποίο είναι χρήσιμο για αυτήν την εργασία. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν  $m$  ανεξάρτητες μετρήσεις και έστω ότι έχουν επιλεγεί  $m$  διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος, δηλ. ο μέγιστος δυνατός αριθμός. Σχηματίζουμε τα  $Cf_1 \dots Cf_r$  και τα κανονικοποιούμε έτσι ώστε καθένα από αυτά να έχει μέτρο ένα. Η απόλυτη τιμή της ορίζουσας του  $m \times m$  πίνακα που έχει ως στήλες του τα κανονικοποιημένα  $Cf$  θα είναι μεταξύ μηδέν και ένα. Όταν τα  $Cf$  είναι ορθογώνια, η τιμή θα είναι ένα και όταν ένα ή περισσότερα είναι περίπου γραμμικός συνδυασμός των άλλων, η τιμή θα είναι περίπου μηδέν. Φαίνεται ότι για να αποδίδει καλά το φίλτρο ανίχνευσης, αυτή η ορίζουσα θα πρέπει να είναι δύο δέκατα ή περισσότερο σε απόλυτη τιμή.

Αν  $v'_i$  είναι ίσο με  $n$  τότε από το παραπάνω λήμμα έπεται αμέσως ότι οι  $r$  αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμες. Οι αστοχίες μπορούν επίσης να είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμες αν  $v'_i$  είναι μικρότερο του  $n$ , αρκεί να υπάρχει αρκετή ελευθερία στην επιλογή του  $D$  για εναπόθεση των υπόλοιπων  $n - v'_i$  ιδιοτιμών του  $A - DC$ . Για το σκοπό αυτό είναι αναγκαία μια γενίκευση της έννοιας του χώρου ανίχνευσης.

Ορισμός 3.2.3: Έστω  $I \subset \mathbb{R}^n$  το οποίο παράγεται από τα  $f_1 \dots f_r$  και έστω ότι τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Ο χώρος ανίχνευσης για το  $I$  είναι ο υπόχωρος  $\bar{R}_I \subset \mathbb{R}^n$  τ.ώ:

$$i) \quad \bar{R}_I = I \oplus R_I$$

όπου ο  $R_I$  είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος που ικανοποιεί τις εξής τρεις συνθήκες:

$$ii) \quad n(M) \cap R_I = \emptyset$$

$$iii) \quad R_I \subset n(C)$$

$$iv) \quad AR_I \subset \bar{R}_I$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν ο  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε ο  $\bar{R}_f$  να είναι αναλλοίωτος ως προς τον  $A - DC$ , κάθε διάνυσμα συμβάντος στον  $\bar{R}_f$  παράγει σφάλματα εξόδου τα οποία είναι μόνο κατά μήκος της διεύθυνσης  $Cf$ . Όμοια, αν ο  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε ο  $\bar{R}_I$  να είναι αναλλοίωτος ως προς τον  $A - DC$ , κάθε διάνυσμα συμβάντος στον  $\bar{R}_I$  παράγει σφάλματα εξόδου τα οποία περιορίζονται στο υπερεπίπεδο  $CI$ .

Λήμμα 3.2.2: Για μια δοθείσα βάση έστω  $F$  ο πίνακας:

$$F = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_r]$$

και έστω ότι  $rk(F) = rk(CF) = r$ . Έστω:

$$D_I = AF[(CF)^T \ CF]^{-1} (CF)^T \quad \text{και}$$

$$C'_I = [E_m - CF[(CF)^T \ CF]^{-1} (CF)^T]C$$

όπου  $E_m$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

Αν το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο, τότε ο  $\bar{R}_I$  είναι ο μη παρατηρήσιμος χώρος του  $(A - D_I C, C'_I)$ , δηλ.

$$\bar{R}_I = n(M'_D)$$

Επίσης, ο  $\bar{R}_I$  είναι αναλλοίωτος ως προς τον  $A - D_I C$ .

Ο χώρος ανίχνευσης  $\bar{R}_I$  είναι περισσότερο από μια αυθαίρετη γενίκευση του  $\bar{R}_f$ . Πρόκειται για έναν χώρο ανίχνευσης ο οποίος θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψη μαζί με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  όταν εξετάζεται η αμοιβαία ανιχνευσιμότητα. Προτού αναπτύξουμε τη σχέση του  $\bar{R}_I$  με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε τη σχέση των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  μεταξύ τους. Το ακόλουθο λήμμα δείχνει ότι η ένωση  $\bar{R}_1 \cup \bar{R}_2 \cup \dots \bar{R}_r$  μπορεί να εκφραστεί ορθά ως το ευθύ άθροισμα  $\bar{R}_1 \oplus \bar{R}_2 \oplus \dots \bar{R}_r$ . Αυτή η ιδιότητα αληθεύει μόνο αν τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο.

Λήμμα 3.2.3: Αν τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, τότε τα  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι αμοιβαία διακριτά, δηλ.:

$$d(\bar{R}_1 \cup \bar{R}_2 \cup \dots \bar{R}_r) = \sum_{i=1,r} d(\bar{R}_i)$$

Η απλούστερη σχέση που αποδεικνύεται μεταξύ του  $\bar{R}_I$  και των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι ότι κάθε  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι υπόχωρος του  $\bar{R}_I$ . Αυτό το αποτέλεσμα, παρόλο που αποδεικνύεται αρκετά εύκολα, το παραθέτουμε ως λήμμα εξαιτίας της σημασίας του.

Λήμμα 3.2.4: Αν τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος, οι ατομικοί χώροι ανίχνευσης είναι υπόχωροι του  $\bar{R}_I$ :

$$\bar{R}_1 \oplus \bar{R}_2 \oplus \dots \bar{R}_r \subset \bar{R}_I$$

Τα τέσσερα Λήμματα που αναφέρθηκαν προηγούμενα επιτρέπουν το πρόβλημα της αμοιβαίας ανιχνευσιμότητας των διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων συμβάντος να τεθεί σε επιλύσιμη μορφή. Αν η διάσταση του  $\bar{R}_I$  συμβολιστεί με  $v_I$ :

$$d(\bar{R}_I) = v_I \quad (3.2.1)$$

μία συνέπεια του Λήμματος 3.2.2 είναι ότι αν ο  $\bar{R}_I$  είναι αναλλοίωτος αναφορικά με τον  $A - DC$ , υπάρχουν  $v_I$  ιδιοτιμές του  $A - DC$  που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_I$ . Όπως δηλώνεται στο Λήμμα 3.2.1 οι  $v'_I$  ιδιοτιμές του  $A - DC$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  μπορούν να τοποθετηθούν σχεδόν αυθαίρετα. Το Λήμμα 3.2.4 ξεκάθαρα απαιτεί:

$$v_I \geq v'_I \quad (3.2.2)$$

Αποδεικνύεται ότι κάθε  $D$  που κάνει τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  αναλλοίωτους κάνει επίσης και τον  $\bar{R}_I$ . Αυτές οι διαπιστώσεις προτείνουν ότι μπορεί να είναι δύσκολο να κάνουμε τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  αναλλοίωτους και να τοποθετήσουμε όλες τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  σχεδόν αυθαίρετα αν το  $v_I$  δεν είναι ίσο με το  $v'_I$ .

Θεώρημα 3.2.1: Τα διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα αν και μόνο αν  $v_I = v'_I$ .

### 3.2.2 Αμοιβαία ανιχνεύσιμο υποσύνολο ενός μη ανιχνεύσιμου συνόλου

Το παραπάνω θεώρημα δηλώνει ότι τα διαχωρίσιμα στην έξοδο διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα από ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών αν η ένωση των χώρων ανίχνευσής τους  $\bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_r$  δεν είναι ίση με τον  $\bar{R}_I$ . Αφού το Λήμμα 3.2.4 απαιτεί η ένωση  $\bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_r$  να είναι υπόχωρος του  $\bar{R}_I$ , το θεώρημα αναγνωρίζει ότι ο  $\bar{R}_I$  μπορεί για κάποιο λόγο να είναι μεγαλύτερος από τον  $\bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_r$ . Ο «επιπλέον χώρος» του  $\bar{R}_I$  έχει ως αποτέλεσμα ένα σύνολο ιδιοτιμών του  $(A - DC)$  που δεν μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα αν ο  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $A - DC$ . Η αρχική προσπάθεια αυτής της ενότητας είναι να αναπτύξει τη δομή του  $\bar{R}_I$  πιο ολοκληρωμένα από το Λήμμα 3.2.4, προκειμένου να καθορίσουμε το λόγο για τις μη ελέγξιμες ιδιοτιμές. Εν συνεχεία, αναπτύσσονται αλγόριθμοι για την επιλογή ενός υποσυνόλου των  $f_1 \dots f_r$  που είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμο.

Όταν τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας δεν παρέχουν μια αναπαράσταση του  $\bar{R}_I$  με τα  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Ο παρακάτω ορισμός παρέχει μια τέτοια αναπαράσταση ορίζοντας τυπικά τον επιπλέον υπόχωρο  $R_0$  του  $\bar{R}_I$ .

Ορισμός 3.2.4: Έστω ότι τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα. Ο επιπλέον υπόχωρος (*excess subspace*) του  $\bar{R}_I$  είναι κάθε υπόχωρος  $R_0 \subset n(\mathbf{C})$  ο οποίος ικανοποιεί:

$$\bar{R}_I = \bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_r \oplus R_0 \quad (3.2.3)$$

Ο επιπλέον υπόχωρος του  $\bar{R}_I$  δεν είναι μοναδικός. Κάθε υπόχωρος ο οποίος ικανοποιεί την (3.2.3) και ανήκει στο  $n(\mathbf{C})$  αποτελεί έναν επιπλέον υπόχωρο για τον  $\bar{R}_I$ . Η πλειονότητα των ιδιοτήτων ενός επιπλέον υποχώρου μπορεί να προσδιοριστεί χωρίς ειδική επιλογή του  $R_0$ . Για παράδειγμα, η διάσταση του  $R_0$  ορίζεται από τα  $v_I$  και  $v'_I$  :

$$d(R_0) = v_0 = v_I - v'_I \quad (3.2.4)$$

Το παρακάτω Λήμμα δηλώνει ότι αν ο  $\mathbf{D}$  επιλεγεί έτσι ώστε οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$ , οι  $v_0$  ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$  που σχετίζονται με τον  $R_0$  είναι οι ίδιες για κάθε επιλογή  $\mathbf{D}$  ή  $R_0$ . Αυτές είναι οι ιδιοτιμές που προλαμβάνουν τα  $f_1 \dots f_r$  από το να είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα. Το λήμμα δεν υπονοεί ότι οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές είναι υποσύνολο των αρχικών ιδιοτιμών του  $\mathbf{A}$  και εν γένει δεν είναι. Προσδιορίζονται από το σύστημα και τους χώρους ανίχνευσης.

Λήμμα 3.2.5: Έστω  $R_0$  ένας επιπλέον υπόχωρος του  $\bar{R}_I$  και  $f_1 \dots f_r$  διαχωρίσιμα στην έξοδο. Αν ο  $\mathbf{D}$  επιλεγεί έτσι ώστε τα  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι αναλλοίωτα αναφορικά με τον  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$ , οι  $v_0$  ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$  που σχετίζονται με τον  $R_0$  είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του  $\mathbf{D}$ .

Το Λήμμα 3.2.5 επιτρέπει η μελέτη για την αμοιβαία ανιχνευσιμότητα των  $f_1 \dots f_r$  να επικεντρωθεί στον  $R_0$ . Από τη συνθήκη iv) του Ορισμού 3.2.3 και από τον Ορισμό 3.2.4, η εικόνα του  $R_0$  κάτω από τον  $\mathbf{A}$  μπορεί να εκφραστεί:

$$\mathbf{A}R_0 \subset R_0 \oplus \bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_r \quad (3.2.5)$$

Αφού το  $R_0$  ανήκει στο  $n(\mathbf{C})$  αλλά επίσης είναι παρατηρήσιμο, δεν μπορεί να υπάρξει κανένας υπόχωρος  $R'_0$  του  $R_0$  ο οποίος να είναι αναλλοίωτος αναφορικά με τον  $\mathbf{A}$  (ή αναφορικά με τον  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$ ):

$$\mathbf{A} R'_0 \not\subset R'_0 \quad \forall R'_0 \subset R_0 \quad (3.2.6)$$

Όμοια, δεν μπορεί να υπάρξει κανένας υπόχωρος  $R'_0$  του  $R_0$  του οποίου η εικόνα κάτω από τον  $A$  να περιέχεται στο  $R'_0$  και κάποιο χώρο ανίχνευσης  $\bar{R}_k$  :

$$A R'_0 \not\subset R'_0 \oplus \bar{R}_k \quad \forall R'_0 \subset R_0 \quad 1 \leq k \leq r \quad (3.2.7)$$

Διαφορετικά, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο Ορισμός 3.1.3 για να δείξουμε ότι ο  $R'_0$  πρέπει να είναι υπόχωρος του  $\bar{R}_k$ . Οι εξισώσεις (3.2.5) - (3.2.7) υποστηρίζουν το διαισθητικό επιχείρημα ότι ο  $R_0$  σχετίζεται μέσω του τελεστή  $A$  με τα  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  με τέτοιο τρόπο ώστε δεν μπορεί να είναι μέρος κανενός εκ των χώρων ανιχνεύσεων μόνου του.

Αν ο  $R_0$  επιλεγεί αυθαίρετα έτσι ώστε απλά να ικανοποιεί τον Ορισμό 3.2.4, η (3.2.5) δείχνει τη σχέση του  $R_0$  με τα  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Υπάρχει μία ειδική επιλογή του  $R_0$  για την οποία η (3.2.5) μπορεί να απλοποιηθεί. Αυτός ο επιπλέον υπόχωρος συμβολίζεται με  $R_{0g}$ . Σε αυτό ακριβώς αναφέρεται το παρακάτω Λήμμα:

Λήμμα 3.2.6: Έστω ότι τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο και  $g_1 \dots g_r$  οι αντίστοιχοι δημιουργοί ανίχνευσης. Υπάρχει ένας μοναδικός επιπλέον υπόχωρος  $R_{0g}$  του  $R_I$  τ.ώ:

$$A R_{0g} \subset R_{0g} \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_r$$

Αλγόριθμος υπολογισμού  $R_{0g}$ : Είναι,

$$R_{0g} = n(M'_0)$$

όπου

$$M'_0 = \begin{bmatrix} \bar{c}_1(A - D_I C) \\ \vdots \\ \bar{c}_1(A - D_I C)^{v_1-1} \\ \bar{c}_2(A - D_I C) \\ \vdots \\ \bar{c}_m(A - D_I C)^{v_m-1} \end{bmatrix}$$

και

$$[(CF)^T \quad CF]^{-1} (CF)^T C = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \vdots \\ \bar{c}_m \end{bmatrix}$$

Η χρησιμότητα του  $R_{0g}$  είναι ότι επιτρέπει να δούμε τον επιπλέον υπόχωρο ως οντότητα. Η μελέτη του  $v_I$  –διάστατου χώρου ανίχνευσης  $\bar{R}_I$  περιορίζεται στη μελέτη του  $(v_0 + r)$ –διάστατου χώρου  $R_{0g} \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_r$ .

Υποθέτουμε ότι ο  $D$  έχει επιλεγεί έτσι ώστε οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $A - DC$ . Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια διαμέριση του  $R_{0g}$ :

$$R_{0g} = R_{0gk} \oplus R_{0gk}^c \quad (3.2.8)$$

τέτοια ώστε η εικόνα του  $R_{0gk}$  κάτω από τον  $A$  να μην έχει συνιστώσα κατά μήκος του  $g_k$ :

$$A R_{0gk} \subset R_{0gk} \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_{k-1} \oplus g_{k+1} \oplus \dots \oplus g_r \quad (3.2.9)$$

Αν  $R_{0gk}$  είναι ο μεγαλύτερος υπόχωρος ο οποίος ικανοποιεί τις (3.2.7) και (3.2.8), τότε η παρατηρησιμότητα του  $R_{0g}$  υπονοεί ότι ο  $R_{0gk}^c$  ικανοποιεί:

$$\begin{aligned} R_{0gk}^c &\subset R_{0g} \\ A R_{0gk}^c &\subset R_{0gk}^c \oplus g_k \pmod{\bar{R}_k^D \oplus R_{0gk}} \quad k = 1 \dots r \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

όπου  $\bar{R}_k^D = \bar{R}_1 \oplus \dots \oplus \bar{R}_{k-1} \oplus \bar{R}_{k+1} \oplus \dots \oplus \bar{R}_r$

και ότι ο  $R_{0gk}^c$  είναι παρατηρήσιμος  $\pmod{\bar{R}_k^D}$ , δηλαδή κάθε διάνυσμα συμβάντος στον  $R_{0gk}^c$  παράγει ένα σήμα σφάλματος εξόδου το οποίο έχει συνιστώσα κατά μήκος του  $Cf_k$ . Η διάσταση του  $R_{0gk}^c$  είναι:

$$v_{0k}^c = d(R_{0gk}^c) \quad (3.2.11)$$

Ο  $R_{0gk}^c$  θα ήταν υπόχωρος του  $\bar{R}_k$  με τη διαφορά ότι το σήμα σφάλματος εξόδου για κάθε διάνυσμα συμβάντος στον  $R_{0gk}^c$  έχει και άλλη συνιστώσα κατά μήκος κάποιας διεύθυνσης διαφορετικής από το  $Cf_k$ —εξ ου και η ανάγκη για το  $\pmod{\bar{R}_k^D \oplus R_{0gk}}$  επιχείρημα στην (3.2.10).

Η σημασία του  $R_{0gk}^c$  είναι ότι αντιπροσωπεύει τη συνεισφορά της  $f_k$  στον επιπλέον υπόχωρο του  $\bar{R}_I$ . Αν η  $f_k$  απομακρυνθεί από τα  $f_1 \dots f_r$ , η (3.2.10) υπονοεί ότι κανένα διάνυσμα στον  $R_{0gk}^c$  δεν μπορεί να είναι στο νέο επιπλέον υπόχωρο επειδή το σφάλμα εξόδου το οποίο παράγεται από διανύσματα συμβάντος στον  $R_{0gk}^c$  δεν μπορεί να περιοριστεί στο χώρο εξόδου που παράγεται από τα  $Cf_1 \dots Cf_{k-1}, Cf_{k+1} \dots Cf_r$ . Από την άλλη, η (3.2.9) προτείνει ότι τα



διανύσματα συμβάντος στον  $R_{0gk}$  παραμένουν στο νέο επιπλέον υπόχωρο αφού δεν παράγουν καμία συνιστώσα εξόδου κατά μήκος του  $Cf_k$ . Αποδεικνύεται ότι ο νέος επιπλέον υπόχωρος αποτελείται μόνο από τον  $R_{0gk}$ . Το αποτέλεσμα της απομάκρυνσης του  $f_k$  είναι ότι η διάσταση του επιπλέον υποχώρου μειώνεται σε:

$$v_{0k} = d(R_{0gk}) = v_0 - v_{0k}^c \quad (3.2.12)$$

Εάν,

$$R_{0gk} = \emptyset \quad 1 \leq k \leq r \quad (3.2.13)$$

τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_{k-1}, f_{k+1} \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα.

Αν η (3.2.13) δεν ικανοποιείται για κανένα  $1 \leq k \leq r$ , δύο ή περισσότερα διανύσματα συμβάντος από τα  $f_1 \dots f_r$  πρέπει να αφαιρεθούν προκειμένου να πάρουμε ένα αμοιβαία ανιχνεύσιμο σύνολο διανυσμάτων συμβάντος. Θα ήταν δυνατό να γενικεύσουμε τον ανωτέρω συλλογισμό στην αφαίρεση  $l$  διανυσμάτων συμβάντος, αλλά μια απλούστερη διαδικασία είναι να χρησιμοποιήσουμε τα  $R_{0gk}$  και  $R_{0gj}$  με άμεσο τρόπο για να καθορίσουμε τον νέο επιπλέον υπόχωρο αν αφαιρεθούν και το  $f_k$  και το  $f_j$  από τα  $f_1 \dots f_r$ . Αν  $I$  είναι το σύνολο δεικτών αποτελούμενο από τους δύο δείκτες  $k$  και  $j$ , και  $R_{0gI}$  συμβολίζει το νέο επιπλέον υπόχωρο με τα  $f_k$  και  $f_j$  απομακρυσμένα, το Θεώρημα 3.2.2 λέει ότι ο  $R_{0gI}$  είναι η τομή του  $R_{0gk}$  και του  $R_{0gj}$ :

$$R_{0gI} = R_{0gk} \cap R_{0gj} \quad 1 \leq j \leq r, \quad 1 \leq k \leq r \quad (3.2.14)$$

Η εξίσωση (3.2.14) είναι εφαρμόσιμη σε ένα γενικό σύνολο  $l$  διανυσμάτων. Τα μόνα διανύσματα στον  $R_{0gI}$  είναι όσα περιέχονται και στους δύο υποχώρους (και στον  $R_{0gk}$  και τον  $R_{0gj}$ ), δηλαδή είναι τα διανύσματα στον  $R_{0g}$  των οποίων η παρουσία δεν επηρεάζεται από την απομάκρυνση ούτε του  $f_k$  ούτε του  $f_j$ . Το θεώρημα προτείνει ότι ένας λογικός αλγόριθμος για να βρούμε ένα ανιχνεύσιμο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  είναι να υπολογίσουμε τους  $R_{0g1} \dots R_{0gr}$  και στη συνέχεια να απομακρύνουμε τα  $l$  διανύσματα συμβάντος για τα οποία η γενίκευση της (3.2.14) έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενικό χώρο.

Θεώρημα 3.2.2: Δοθέντων των διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων συμβάντος  $f_1 \dots f_r$ , έστω  $I$  ένα αυθαίρετο υποσύνολο του συνόλου δεικτών  $\{1, 2, \dots, r\}$ . Αν τα διανύσματα  $f_k$  με  $k$  να ανήκει στο  $I$  αφαιρεθούν από τα  $f_1 \dots f_r$ , τότε ο επιπλέον υπόχωρος που σχετίζεται με τα υπόλοιπα διανύσματα συμβάντος είναι:

$$R_{0gI} = \bigcap_{k \in I} R_{0gk}$$

Πλην ελαχίστων προσθέσεων, το Θεώρημα 3.2.2 ολοκληρώνει την ανάπτυξη της δομής του  $\bar{R}_I$  και των αλγορίθμων εύρεσης ενός αμοιβαία ανιχνεύσιμου υποσυνόλου των  $f_1 \dots f_r$ . Αν  $R_{0gI}$  είναι ο μηδενικό χώρος  $\emptyset$ , το αντίστοιχο σύνολο διανυσμάτων συμβάντος είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα. Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε αλγορίθμους βασισμένους σε πίνακες που είναι υπολογιστικά απλούστεροι από το Λήμμα 3.2.5 και το Θεώρημα 3.2.2.

Οι πίνακες  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  και  $R_{0g}$  μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε οι στήλες τους να αποτελούν βάση για τους αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  και  $R_{0g}$  και ο πίνακας  $G$  μπορεί να οριστεί στα πλαίσια των διανυσμάτων  $g_1 \dots g_r$ .

Το ισοδύναμο σε όρους πίνακα της  $AR_{0g} \subset R_{0g} \oplus g_1 \oplus \dots \oplus g_r$  είναι το εξής:

$$AR_{0g} = R_{0g} \Pi + G\Theta$$

Ένα υποσύστημα το οποίο σχετίζεται με τον  $R_{0g}$  μπορεί να οριστεί στα πλαίσια του  $\Pi$  και ο  $\Theta$  καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο το συγκεκριμένο υποσύστημα αλληλεπιδρά με τα αναλλοίωτα υποσυστήματα (αυτά που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ ). Το ακόλουθο Λήμμα είναι το ισοδύναμο σε όρους πίνακα του Λήμματος 3.2.5 και αναφέρει ότι οι ιδιοτιμές του  $\Pi$  θα πρέπει να είναι οι ρίζες του σχετικού ελάχιστου πολυωνύμου  $(\text{mod } \bar{R}_1 \oplus \dots \oplus \bar{R}_r)$  του  $A - DC$  για τον  $R_{0g}$ .

Λήμμα 3.2.7: Έστω ότι ο  $D$  έχει επιλεγεί έτσι ώστε οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $A - DC$ . Το αντίστοιχο ελάχιστο πολυώνυμο του  $R_{0g}$  για τον  $A - DC$  είναι η χαρακτηριστική εξίσωση του  $\Pi$ , όπου ο  $\Pi$  ορίζεται ως:

$$AR_{0g} = R_{0g} \Pi + G\Theta$$

Θεώρημα 3.2.3: Δοθέντων των διαχωρίσιμων στην έξοδο διανυσμάτων  $f_1 \dots f_r$ , υποθέτουμε ότι τα πρώτα  $l$  διανύσματα αφαιρούνται από το σύνολο και έστω  $\Theta_L^c$  οι πρώτες  $l$  γραμμές του  $\Theta$ . Ο επιπλέον υπόχωρος  $R_{0gL}$  για τα εναπομείναντα  $r - l$  διανύσματα παράγεται από τις  $v_{0L}$  στήλες του  $R_{0gL}$ :

$$R_{0gL} = R_{0g}\beta$$

όπου οι στήλες του  $v_0 \times v_{0L}$  πίνακα  $\beta$  παράγουν το μηδενοχώρο του:

$$M_{0L} = \begin{bmatrix} \theta_L^c \\ \theta_L^c \Pi \\ \vdots \\ \theta_L^c \Pi^{v_0-1} \end{bmatrix}$$

Το προηγούμενο θεώρημα δεν είναι τόσο χρήσιμο όσο το Θεώρημα 3.2.2, επειδή δεν επιτρέπει ο  $R_{0gL}$  να συσχετιστεί με τα  $R_{0gk}$ ,  $k = 1 \dots r$ , τα οποία προκύπτουν αν αφαιρέσουμε το αντίστοιχο  $f_k$  από τα  $f_1 \dots f_r$ . Τα δύο ακόλουθα πορίσματα εξαλείφουν αυτό το μειονέκτημα. Το πρώτο πόρισμα παρέχει έναν απλό μηχανισμό εύρεσης των  $R_{0gL}$  και  $R_{0gL}^c$ , μαζί με τους πίνακες  $\theta_L$  και  $\Pi_L$ .

Πόρισμα 1: Δοθέντων των συνθηκών του ανωτέρω θεωρήματος, ορίζουμε τους εξής μετασχηματισμούς:

$$\Pi_L^0 = [\Delta: \beta]_L^{-1} \Pi [\Delta: \beta]_L$$

$$(G\theta)_L^0 = G\theta [\Delta: \beta]_L$$

$$R_{0g}^0 = R_{0g} [\Delta: \beta]_L$$

όπου οι στήλες του  $\beta$  και  $\Delta$  παράγουν το μηδενικό χώρο και το χώρο γραμμών του  $M_{0L}$  αντίστοιχα. Αν οι πίνακες  $\Pi_L^0$  και  $(G\theta)_L^0$  διαμεριστούν:

$$\Pi_L^0 = \begin{bmatrix} \Pi_L^c & 0 \\ \Pi_{L0}^c & \Pi_L \end{bmatrix}$$

$$(G\theta)_L^0 = [G_L^c \theta_L^c \Delta + G_L \theta_L \Delta : G_L \theta_L \beta]$$

με  $G_L \theta_L \beta$  έναν  $n \times v_{0L}$  υποπίνακα,  $\Pi_L$  έναν  $v_{0L} \times v_{0L}$  υποπίνακα κτλ. , τότε οι  $R_{0gL}$  και  $R_{0gL}^c$  ικανοποιούν:

$$AR_{0gL}^c = R_{0gL}^c \Pi_L^c + R_{0gL} \Pi_{L0}^c + G_L \theta_L \Delta + G_L^c \theta_L^c \Delta$$

$$AR_{0gL} = R_{0gL} \Pi_L + G_L \theta_L \beta$$

όπου οι  $R_{0gL}$  και  $R_{0gL}^c$  μπορούν να καθοριστούν από μια διαμέριση του  $R_{0g}^0$  :

$$R_{0g}^0 = [R_{0gL}^c : R_{0gL}]$$

Πόρισμα 2: Έστω  $\Pi_1 \dots \Pi_r$  λύσεις του Πορίσματος 1 αν το αντίστοιχο  $f_k$  αφαιρεθεί από τα  $f_1 \dots f_r$  και έστω ότι τα στοιχεία των συνόλων  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$  είναι οι ιδιοτιμές των  $\Pi_1 \dots \Pi_r$  αντίστοιχα. Αν το σύνολο δεικτών  $I$  είναι ένα τυχαίο υποσύνολο του  $\{1, 2, \dots, r\}$  και κάθε  $f_k$  για το οποίο  $k \in I$  αφαιρεθεί από τα  $f_1 \dots f_r$ , οι ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον επιπλέον υπόχωρο των  $f_j$  που απομένουν ( $j \notin I$ ) είναι τα στοιχεία του:

$$\Lambda_I = \bigcap_{k \in I} \Lambda_k$$

### 3.2.3 Επαύξηση του χώρου κατάστασης

Υπάρχουν αρκετές περιστάσεις στις οποίες μία αλλαγή στη διάσταση του χώρου κατάστασης του μοντέλου αναφοράς μπορεί να κάνει το πρόβλημα ανίχνευσης αστοχιών απλούστερο. Υποθέτουμε ότι το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο. Αποδεικνύεται ότι αν τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, υπάρχει ένα παρατηρήσιμο μοντέλο αναφοράς  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  τάξης  $\tilde{n} \geq n$  για το οποίο είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα. Αν τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, η επαύξηση του χώρου κατάστασης είναι μία εναλλακτική της απομάκρυνσης διανυσμάτων από το σύνολο.

Θεώρημα 3.2.4: Έστω ότι τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, αλλά όχι αμοιβαία ανιχνεύσιμα για το  $(A, C)$ . Η ελάχιστη ισοδύναμη αναπαράσταση  $(\tilde{A}, \tilde{C})$  για την οποία τα  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα είναι τάξης:

$$\tilde{n} = n + \sum_{k=1, r} v_{0k}^c - v_0$$

### 3.2.4 Σύνοψη-Αλγόριθμος

Το Λήμμα 3.2.1 αποδεικνύει ότι η διαχωρισιμότητα στην έξοδο είναι ικανή να εγγυηθεί ότι ο  $D$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε οι αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  να παράγουν σφάλματα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση-- μια αποδεκτή επιλογή του  $D$  είναι ο  $D_I$  όπως δόθηκε προηγούμενα. Η δυσκολία είναι ότι ο ορισμός της αμοιβαίας ανιχνευσιμότητας (Ορισμός 3.2.1) απαιτεί να υπάρχει  $D$  τ.ώ:

- Το σφάλμα εξόδου που παράγεται από τις αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  είναι σε μία μόνο διεύθυνση και
- Όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να προσδιοριστούν σχεδόν αυθαίρετα.

Η διαχωρισιμότητα στην έξοδο δεν είναι ικανή να εγγυηθεί ότι και οι δύο ανωτέρω συνθήκες μπορούν να ικανοποιηθούν.

Ο προσδιορισμός μιας ικανής συνθήκης για αμοιβαία ανιχνευσιμότητα απαιτεί μια γενίκευση της έννοιας των χώρων ανίχνευσης. Πρόκειται για τον χώρο ανίχνευσης  $\bar{R}_I$  όπως αυτός ορίστηκε προηγούμενα. Το βασικό στοιχείο του είναι ότι περιέχει καθέναν εκ των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  όπως επίσης και το ευθύ άθροισμά τους:

$$\bar{R}_1 \oplus \bar{R}_2 \oplus \dots \bar{R}_r \subset \bar{R}_I \quad (3.2.15)$$

Κατασκευάζονται πίνακες  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  και  $\bar{R}_F$  έτσι ώστε οι στήλες τους να αποτελούν βάση για τους αντίστοιχους διανυσματικούς χώρους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  και  $\bar{R}_I$ .

Με όρους πίνακα, η (3.2.15) υπονοεί ότι:

$$rk(\bar{R}_F) \geq rk([\bar{R}_1: \dots: \bar{R}_r]) \quad (3.2.15')$$

και ότι ο χώρος στηλών του  $\bar{R}_F$  περιέχει τους χώρους στηλών όλων των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Οι δυσκολίες που περιλαμβάνονται στην ανίχνευση των  $f_1 \dots f_r$  με ένα μόνο φίλτρο ανίχνευσης είναι η ανισότητα στην (3.2.15). Το Θεώρημα 3.2.1 λέει ότι ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα  $f_1 \dots f_r$  να είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα είναι η (3.2.15) να είναι ισότητα.

Αν η (3.2.15) είναι ισότητα, το υπόλοιπο αυτής της ενότητας δεν χρειάζεται. Υποθέτοντας ότι το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο, ένα φίλτρο ανίχνευσης μπορεί να επιλεγεί για τα  $f_1 \dots f_r$  και όλες οι  $n$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να τοποθετηθούν χρησιμοποιώντας τις τεχνικές της υποενότητας τοποθέτηση ιδιοτιμών που παρουσιάζεται αμέσως μετά ή της ενότητας 3.6. Αν η (3.2.15) δεν είναι ισότητα, το Λήμμα 3.2.1 εγγυάται ότι και σε αυτήν την περίπτωση μπορεί να επιλεγεί  $D$  για τον οποίο κάθε αστοχία που σχετίζεται με ένα εκ των  $f_1 \dots f_r$  παράγει σφάλμα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση, αλλά κάποιες από τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  δεν μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα. Αν το  $v_0$  οριστεί:

$$\begin{aligned} v_0 &= rk \bar{R}_F - \sum_{i=1,r} rk \bar{R}_i \\ &= v_I - \sum_{i=1,r} v_i \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

ένα σύνολο  $v_0$  ιδιοτιμών του  $(A - DC)$  έχουν σταθερή τιμή η οποία δεν μπορεί να αλλάξει (Λήμματα 3.2.5 και 3.2.7).

Το Λήμμα 3.2.6 αναφέρεται σε έναν  $v_0$ -διάστατο υπόχωρο  $R_{0g}$  – ο οποίος καλείται επιπλέον υπόχωρος του  $\bar{R}_I$  – τ.ώ:

$$\bar{R}_I = \bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_r \oplus R_{0g}$$

Αν ο  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε καθένα εκ των  $f_1 \dots f_r$  να παράγει σφάλμα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση, οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που δεν μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα είναι οι ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον  $R_{0g}$ . Κατασκευάζουμε πίνακα  $R_{0g}$  έτσι ώστε οι στήλες του να αποτελούν βάση για τον διανυσματικό χώρο  $R_{0g}$ . Με τον  $G$  ορισμένο από τους δημιουργούς ανίχνευσης για τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ :

$$G = [g_1 \quad \dots \quad g_r] \tag{3.2.17}$$

έναν  $v_0 \times v_0$  πίνακα  $\Pi$  και έναν  $r \times v_0$  πίνακα  $\Theta$  μπορούν να κατασκευαστούν τ.ώ:

$$A R_{0g} = R_{0g} \Pi + G \Theta \tag{3.2.18}$$

Οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι οι ιδιοτιμές του  $\Pi$ .

Από τη στιγμή που ο επιπλέον υπόχωρος του  $\bar{R}_I$  και οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  έχουν προσδιοριστεί, τρεις επιλογές είναι διαθέσιμες στο σχεδιαστή:

- i) Επέλεξε έναν  $D$  για τον οποίο καθένα εκ των  $f_1 \dots f_r$  παράγει σφάλμα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση και αποδέξου τις  $v_0$  μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$ .
- ii) Βρες ένα υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  για το οποίο δεν υπάρχουν καθόλου μη ελέγξιμες ιδιοτιμές για τον  $(A - DC)$ , ή
- iii) Αύξησε τη διάσταση του μοντέλου αναφοράς σε  $\tilde{n}$  με τέτοιο τρόπο ώστε όλες οι ιδιοτιμές του  $(\tilde{A} - \tilde{D}\tilde{C})$  να μπορούν να τοποθετηθούν.

Η επιλογή μεταξύ αυτών των επιλογών προφανώς εξαρτάται από το εάν οι ιδιοτιμές του  $\Pi$  ως ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι αποδεκτές ή όχι.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα της απομάκρυνσης διανυσμάτων συμβάντος από τα  $f_1 \dots f_r$  πρώτα. Το θεώρημα ανίχνευσης εγγυάται ότι οποιοδήποτε διάνυσμα από τα  $f_1 \dots f_r$  είναι ανιχνεύσιμο. Επομένως, όσο απομακρύνονται διανύσματα από το σύνολο  $f_1 \dots f_r$ , ο αριθμός των ιδιοτιμών του  $(A - DC)$  που δεν μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα θα πρέπει να μειώνεται. Είναι δυνατόν να μετακινήσουμε ένα ή περισσότερα διανύσματα από τα  $f_1 \dots f_r$ , να βρούμε έναν νέο

$\bar{R}_l$  για τα εναπομείναντα διανύσματα, να ελέγξουμε για αμοιβαία ανιχνευσιμότητα, κτλ. Το πρόβλημα είναι ότι αν το  $r$  είναι μεγάλο, ο υπολογισμός που απαιτείται για να αποκτήσουμε τελικά ένα αμοιβαία ανιχνεύσιμο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  μπορεί να είναι απαγορευτικός. Το Θεώρημα 3.2.3 και τα πορίσματά του παρουσιάζουν έναν πιο αποτελεσματικό αλγόριθμο.

Αν τα πρώτα  $l$  διανύσματα από τα  $f_1 \dots f_r$  απομακρυνθούν, το Θεώρημα 3.2.3 ορίζει έναν πίνακα  $M_{0L}$ :

$$M_{0L} = \begin{bmatrix} \theta_L^c \\ \theta_L^c \Pi \\ \vdots \\ \theta_L^c \Pi^{v_0-1} \end{bmatrix} \quad (3.2.19)$$

όπου  $\theta_L^c$  είναι οι πρώτες  $L$  γραμμές του  $\theta$  στην (3.2.18). Το Πόρισμα 1 του Θεωρήματος 3.2.3 τότε ορίζει έναν  $v_0 \times v_0$  πίνακα μετασχηματισμού  $[\Delta: \beta]_L$  όπου οι  $v_{0L}$  στήλες του  $\beta$  παράγουν το μηδενικό χώρο του  $M_{0L}$  και οι  $v_0 - v_{0L}$  στήλες του  $\Delta$  παράγουν το χώρο γραμμών του  $M_{0L}$ . Και ο  $\Pi$  και ο  $R_{0g}$  για τα αρχικά  $r$  διανύσματα συμβάντος μπορούν τότε να μετασχηματιστούν:

$$\Pi_L^0 = [\Delta: \beta]_L^{-1} \Pi [\Delta: \beta]_L = \begin{bmatrix} \Pi_L^c & 0 \\ \Pi_{L0}^c & \Pi_L \end{bmatrix} \quad (3.2.20)$$

$$R_{0g}^0 = R_{0g} [\Delta: \beta]_L = [R_{0gL}^c: R_{0gL}]$$

όπου  $\Pi_L$  είναι  $v_{0L} \times v_{0L}$ ,  $R_{0gL}$  είναι  $n \times v_{0L}$  κτλ. Το Πόρισμα 1 του Θεωρήματος 3.2.3 λέει ότι ο επιπλέον υπόχωρος για τα  $f_{l+1} \dots f_r$  είναι ο χώρος στηλών του  $R_{0gL}$ . Αν ο  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε καθένα εκ των  $f_{l+1} \dots f_r$  να παράγει σφάλμα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση, οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι οι  $v_{0L}$  ιδιοτιμές του  $\Pi_L$ . Δεδομένου ότι οι ιδιοτιμές ενός πίνακα δεν αλλάζουν με μετασχηματισμό ομοιότητας, έπεται ότι οι  $v_{0L}$  ιδιοτιμές του  $\Pi_L$  θα αποτελούν υποσύνολο των  $v_0$  ιδιοτιμών του  $\Pi$ . Προφανώς το θεώρημα είναι εφαρμόσιμο στην απομάκρυνση  $l$  αυθαίρετα επιλεγμένων διανυσμάτων συμβάντος από τα  $f_1 \dots f_r$  αν ο  $\theta_L^c$  επιλεγεί να είναι οι κατάλληλες γραμμές του  $\theta$ .

Παρόλο που οι (3.2.19) και (3.2.20) είναι υπολογιστικά πιο αποτελεσματικές από το να προσδιορίζαμε τον  $\bar{R}_l$  για τα διανύσματα συμβάντος  $f_{l+1} \dots f_r$  και κατόπιν να βρίσκαμε τους  $R_{0gL}$  και  $\Pi_L$  άμεσα, το Πόρισμα 2 του Θεωρήματος 3.2.3 επιτρέπει μια πολύ μεγαλύτερη εξοικονόμηση. Η διαδικασία είναι να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.2.3 και το Πόρισμα 1 απομακρύνοντας αρχικά μόνο την  $f_1$  από τα  $f_1 \dots f_r$  και στη συνέχεια μόνο την  $f_2$  από τα  $f_1 \dots f_r$

και ούτω καθεξής για  $r$  επαναλήψεις. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα ένα σύνολο  $r$  εξισώσεων όμοιων με την (3.2.18):

$$AR_{0gk} = R_{0gk}\Pi_k + G_k\theta_k \quad k = 1 \dots r \quad (3.2.21)$$

όπου  $G_k$  είναι ο  $G$  χωρίς την  $k$ -οστή στήλη,  $\theta_k$  είναι ο  $\theta$  χωρίς την  $k$ -οστή γραμμή, ο χώρος στηλών του  $R_{0gk}$  είναι ο επιπλέον υπόχωρος μετά την απομάκρυνση του  $f_k$  από τα  $f_1 \dots f_r$  και οι ιδιοτιμές του  $\Pi_k$  είναι οι αντίστοιχες μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$ . Αν κάποιος  $R_{0gk}$  είναι μηδέν, τα  $r - 1$  διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_{k-1}, f_{k+1} \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα.

Με τις  $r$  λύσεις από την (3.2.21), έστω  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$  τα σύνολα των ιδιοτιμών για τους αντίστοιχους  $\Pi_1 \dots \Pi_r$ . Αν κάποιο αυθαίρετο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  απομακρυνθεί από τα  $f_1 \dots f_r$ , το Πρόρισμα 2 αναφέρει ότι οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τα εναπομείναντα διανύσματα συμβάντος μπορούν να προσδιοριστούν από τις τομές του κατάλληλου συνόλου από τα  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$ . Ως παράδειγμα, αν και το  $f_1$  και το  $f_2$  απομακρυνθούν από τα  $f_1 \dots f_r$ , οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τα  $f_3 \dots f_r$  είναι η τομή του  $\Lambda_1$  και  $\Lambda_2$ :

$$\Lambda_I = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$$

Αν το  $\Lambda_I$  είναι το κενό σύνολο, τότε τα  $f_3 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα. Αν όχι, μπορούμε να δοκιμάσουμε άλλους συνδυασμούς. Το Πρόρισμα 2 του Θεωρήματος 3.2.3 γενικεύει αυτό το απλό τεστ σε όλα τα δυνατά υποσύνολα των  $f_1 \dots f_r$ .

Οι τομές που περιγράφηκαν από το Πρόρισμα 2 του Θεωρήματος 3.2.3 υπολογίζονται πολύ εύκολα από τη στιγμή που οι  $\Pi_1 \dots \Pi_r$  και τα  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$  έχουν προσδιοριστεί από την (3.2.21) χρησιμοποιώντας το πόρισμα 1 του Θεωρήματος 3.2.3. Τότε γίνεται απλό ζήτημα να προσδιορίσουμε όλα τα δυνατά αμοιβαία ανιχνεύσιμα υποσύνολα των  $f_1 \dots f_r$ . Εναλλακτικά, είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε μεγαλύτερα υποσύνολα των  $f_1 \dots f_r$  τα οποία δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, αλλά για τα οποία οι αντίστοιχες μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι αποδεκτές. Αυτό ισοδυναμεί με συμβιβασμό μεταξύ των επιλογών i) και ii) που αναφέρθηκαν νωρίτερα. Σε ορισμένες εφαρμογές, οποιαδήποτε από αυτές τις δύο εναλλακτικές έχει ως αποτέλεσμα ένα υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  το οποίο είναι μικρότερο απ' όσο επιθυμούμε ή το οποίο περιέχει μόνο ένα ζευγάρι διανυσμάτων συμβάντος που σχετίζονται με αστοχία σε αισθητήρα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η επιλογή iii) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να πάρουμε ένα μεγαλύτερο σύνολο αμοιβαία ανιχνεύσιμων διανυσμάτων συμβάντος από την επιλογή ii).



Τα διανύσματα  $f_1 \dots f_r$  μπορούν να γίνουν αμοιβαία ανιχνεύσιμα με επαύξηση του χώρου κατάστασης αν και μόνο αν είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Αφού η τάξη του  $C$  είναι  $m$ , αυτό εγγυάται ότι  $m$  κατάλληλα επιλεγμένες αστοχίες μπορούν να ανιχνευθούν με ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών. Το κόστος είναι ότι το μοντέλο αναφοράς στο οποίο το σύστημα ανίχνευσης αστοχιών βασίζεται μπορεί να έχει μεγαλύτερη διάσταση από το αρχικό μοντέλο αναφοράς.

Τοποθέτηση ιδιοτιμών: Αν το μοντέλο αναφοράς είναι εκφρασμένο στη κανονική μορφή, οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να τοποθετηθούν απλά με τρόπο παρόμοιο με εκείνον που θα χρησιμοποιηθεί στην ενότητα 3.6. Διαφορετικά, είναι αναγκαίο να χρησιμοποιήσουμε τους αλγορίθμους που αναπτύσσονται σε αυτήν την υποενότητα. Τα αποτελέσματα των προηγούμενων ενοτήτων χρησιμοποιούνται εδώ για να παρέχουν αλγορίθμους για να:

- τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ ,
- τοποθετήσουμε τις υπόλοιπες  $n - v_l$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$ ,

Η λύση στο πρόβλημα εναπόθεσης των ιδιοτιμών εξαρτάται από το σύνολο των διανυσμάτων συμβάντος  $f_1 \dots f_r$ , αλλά εξαρτάται ακόμη πιο βασικά από τον  $A$  και τον  $C$ . Ας υποθέσουμε προς στιγμήν ότι είναι επιθυμητό να επιλέξουμε τον  $D$  έτσι ώστε ο  $(A - DC)$  να είναι ίσος με κάποιον επιλεγέντα πίνακα  $A_A$ . Αν ο  $C$  είναι αντιστρέψιμος, η μοναδική λύση του  $D$  είναι:

$$D = (A - A_A)C^{-1} \quad (3.2.22)$$

Αν ο  $C$  δεν είναι αντιστρέψιμος, ωστόσο, λύση στην:

$$DC = (A - A_A) \quad (3.2.23)$$

μπορεί να μην υπάρχει. Αν  $\Lambda$  είναι το σύνολο  $n$  επιθυμητών ιδιοτιμών του  $(A - DC)$ , αυτές οι ιδιοτιμές δεν προσδιορίζουν μοναδικά έναν επιθυμητό  $A_A$ .

Οι χώροι ανίχνευσης  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι  $v_1 \dots v_r$ -διάστατοι αντίστοιχα. Εξαιτίας της απαίτησης οι αστοχίες που σχετίζονται με καθένα εκ των  $f_1 \dots f_r$  να παράγουν σφάλματα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση,  $v_1$  από τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  σχετίζονται μοναδικά με τον  $\bar{R}_1$ ,  $v_2$  με τον  $\bar{R}_2$ , κ.ο.κ. Έστω  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$  τα σύνολα των επιθυμητών ιδιοτιμών που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Τα στοιχεία των  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$  είναι οι ρίζες ενός αντίστοιχου συνόλου πολυωνύμων  $\psi_1(\cdot) \dots \psi_r(\cdot)$ :

$$\psi_k(\lambda) = (\lambda - \lambda_{k1})(\lambda - \lambda_{k2}) \dots (\lambda - \lambda_{kv_k}) \quad k = 1 \dots r \quad (3.2.24)$$

$$= \lambda^{v_k} + p_{kv_k} \lambda^{v_k-1} + \dots p_{k2} \lambda + p_{k1}$$

όπου  $\lambda_{kj} \in \Lambda_k$  κτλ. Αυτά είναι τα επιθυμητά σχετικά ελάχιστα πολυώνυμα των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  αναφορικά με τον  $A - DC$ . Αν το  $v'_I$  οριστεί ως:

$$\sum_{k=1,r} v_k = v'_I \leq n$$

τότε η ένωση των  $\Lambda_1 \dots \Lambda_r$ :

$$\Lambda'_I = \cup_{k=1,r} \Lambda_k$$

είναι ένα υποσύνολο του επιθυμητού  $\Lambda$  με  $v'_I$  στοιχεία.

Όσον αφορά την επιλογή των ιδιοτιμών, στις περισσότερες περιπτώσεις, οι ιδιοτιμές θα πρέπει να είναι κάπως πιο αρνητικές από τις αντίστοιχες ιδιοτιμές του ίδιου του συστήματος. Ακόμη, αρκετές φορές, η πλέον πρακτική προσέγγιση είναι να επιλέξουμε την ίδια τιμή για όλες τις ελέγξιμες ιδιοτιμές προκειμένου να γίνει εκμετάλλευση και της στασιμότητας στην έξοδο όπως αυτή θα αναπτυχθεί παρακάτω.

Αφού τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, έχει αναφερθεί ότι μπορεί να επιλεγεί ένας  $D$  τ.ώ:

- Τα σφάλματα εξόδου που παράγονται από τις αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  είναι σε μία μόνο διεύθυνση και
- Το  $\Lambda'_I$  είναι ένα υποσύνολο των ιδιοτιμών του  $(A - DC)$  με  $v'_I$  στοιχεία.

Μια απευθείας γενίκευση του Λήμματος 3.1.3 παρέχει έναν αλγόριθμο για την εύρεση αυτού του  $D$ . Με τους δημιουργούς ανίχνευσης  $g_1 \dots g_r$  και με τα  $\psi_1(\cdot) \dots \psi_r(\cdot)$  γραμμένα ως πολυώνυμα του  $A$ , ένας  $n \times r$  πίνακας σχηματίζεται:

$$\psi_F(A) = [\psi_1(A)g_1 \dots \psi_r(A)g_r] \quad (3.2.25)$$

Ο  $D$  είναι τότε οποιαδήποτε λύση της:

$$\boxed{DCF = \psi_F(A)} \quad (3.2.26)$$

$$\text{όπου } F = [f_1 \quad \dots \quad f_r] \quad (3.2.27)$$

Η (3.2.26) είναι εγγυημένο ότι έχει λύση και μια λύση μπορεί να βρεθεί χρησιμοποιώντας συμβατικές τεχνικές ανάλυσης πινάκων. Η διαφορά μεταξύ της (3.2.23) και της (3.2.26) είναι ότι

η (3.2.26) εμμέσως περιέχει τον περιορισμό ότι κάθε λύση  $D$  ικανοποιεί και τις δύο συνθήκες που αναφέρθηκαν παραπάνω.

Αν το  $r$  είναι ίσο με το  $rk(C)$ , η (3.2.26) έχει μοναδική λύση. Αν όχι, ο αλγόριθμος που αναπτύσσεται μετά την κανονική μορφή επιλέγει μια συγκεκριμένη λύση. Σε οποιαδήποτε περίπτωση πάντως, αν τα  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, επιλέγεται μια λύση τ.ώ οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  να είναι τα στοιχεία του  $\Lambda$ . Αν τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, ωστόσο, για κάθε λύση της (3.2.26) ορισμένες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι σταθερές και μη ελέγξιμες. Αυτές είναι οι  $\nu_0$  ιδιοτιμές του  $\Pi$  τις οποίες συζητήσαμε νωρίτερα.

### 3.3 Στασιμότητα στην έξοδο

Για κάποιο συγκεκριμένο  $D$  που επιλέχθηκε για τα  $f_1 \dots f_m$ , μπορεί να υπάρχει ένα σύνολο διανυσμάτων συμβάντος  $h_1 \dots h_q$ , πέραν των  $f_1 \dots f_m$  τα οποία παράγουν και αυτά έξοδο σε μία κατεύθυνση. Τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_m, h_1 \dots h_q$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, αφού η έξοδός τους κείται σε μία διεύθυνση μόνο αν ο  $D$  ικανοποιεί ένα σύνολο περιορισμών επιπρόσθετων σε αυτούς που απαιτούνται για να γίνουν τα  $f_1 \dots f_m$  αμοιβαία ανιχνεύσιμα. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι το ελάχιστο κόστος που σχετίζεται με την επέκταση του συνόλου των διανυσμάτων στο  $f_1 \dots f_m, h_1 \dots h_q$  είναι μία απώλεια στην ελευθερία τοποθέτησης των ιδιοτιμών καθενός εκ των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_m$  ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους χώρους ανίχνευσης.

Ορισμός 3.3.1: Έστω ότι τα  $f_1 \dots f_m$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο και έστω  $D^*$  η κλάση των τελεστών τ.ώ για κάθε  $D \in D^*$  η έξοδος που παράγεται από καθένα εκ των  $f_1 \dots f_m$  ως προς  $(A - DC, C)$  έχει μία μόνο διεύθυνση. Ο υπόχωρος  $\bar{d}$  μπορεί να γίνει *στάσιμο στην έξοδο* (output stationary) με τα  $f_1 \dots f_m$  αν υπάρχει  $D' \in D^*$  για τον οποίο η έξοδος από κάθε στοιχείο  $\xi_i \in \bar{d}$  για το  $(A - D'C, C)$  κείται μόνο κατά μήκος της διεύθυνσης  $C\xi_i$  (ή  $CA\xi_i$ , αν  $C\xi_i = 0$ , κτλ.)

Η στασιμότητα στην έξοδο είναι μία προσπάθεια να χρησιμοποιήσουμε τον τελευταίο βαθμό ελευθερίας που απομένει στην επιλογή του  $D$ -την ελευθερία να επιλέξουμε τις ιδιοτιμές του  $A - DC$ - για να αποκτήσουμε πληροφορία σχετικά με αστοχίες που σχετίζονται με γεγονότα διαφορετικά από τα  $f_1 \dots f_m$  από το σύστημα ανίχνευσης αστοχιών. Η μέθοδος μπορεί να είναι αρκετά επιτυχημένη.

### 3.3.1 Προσθήκη ενός στάσιμου διανύσματος συμβάντος σε ένα ανιχνεύσιμο σύνολο

Θεώρημα 3.3.1: Έστω ότι τα  $f_1 \dots f_m$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα,  $\bar{d}_i$  είναι ο χώρος ανίχνευσης του διανύσματος συμβάντος  $h_i$ , και  $f_1 \dots f_l$  το μικρότερο υποσύνολο του  $f_1 \dots f_m$  τ.ώ:

$$\bar{d}_i \subset \bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_l$$

Τότε ο  $\bar{d}_i$  (και  $h_i$ ) μπορεί να γίνει στάσιμος στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  αν και μόνο αν

$$C\bar{d}_i = a_1 C\bar{R}_1 + \dots a_l C\bar{R}_l$$

και όλα τα  $a_1 \dots a_l$  είναι διάφορα του μηδενός. Υποθέτοντας ότι  $Cf_1 \dots Cf_l, Ch_i$  είναι όλα διάφορα του μηδενός

$$\beta_i Ch_i = a_1 Cf_1 + \dots a_l Cf_l$$

για τα ίδια  $a_1 \dots a_l$ , όπου  $\beta_i$  είναι ένας βαθμωτός παράγοντας για το  $h_i$ .

Προτού μελετήσουμε τις επιπτώσεις του Θεωρήματος 3.3.1, είναι χρήσιμο να ορίσουμε το τεστ σε όρους πίνακα. Το τεστ που ορίζεται στο Πόρισμα 1 αντιστρέφει το τεστ του θεωρήματος 3.3.1, με την έννοια ότι πρώτα βρίσκει τα μη μηδενικά  $a_1 \dots a_l$  στην έκφραση για το  $Ch_i$  και κατόπιν προσδιορίζει αν ο  $\bar{d}_i$  περιέχεται στο ευθύ άθροισμα των αντίστοιχων χώρων ανίχνευσης ή όχι.

Πόρισμα 1: Υποθέτουμε ότι τα  $f_1 \dots f_l$  είναι το μικρότερο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_m$  για τα οποία η:

$$CF_L^c a_L^c = \beta_i Ch_i$$

έχει λύση όπου:

$$a_L^c = [a_1 \dots a_l]^T$$

$$F_L^c = [f_1 \dots f_l]^T$$

Το διάνυσμα συμβάντος  $h_i$  μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  αν και μόνο αν υπάρχει λύση της:

$$\bar{R}_L^c \mathcal{E} = \bar{S}_i$$

όπου:

$$\bar{R}_L^c = [\bar{R}_1 : \dots : \bar{R}_l]$$

και οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l, \bar{S}_i$  είναι οι ισοδύναμοι πίνακες του κατάλληλου χώρου ανίχνευσης  $S$ . Αν υπάρχει  $\bar{E}$ , θα ικανοποιεί την:

$$\bar{E} = \left( \bar{R}_L^c T \bar{R}_L^c \right)^{-1} \bar{R}_L^c T \bar{S}_i$$

Αν τα  $f_1 \dots f_m$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, αλλά όχι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, το Θεώρημα 3.3.1 πρέπει να τροποποιηθεί. Οι τροποποιήσεις περιλαμβάνουν μια αλλαγή στο τεστ του  $\bar{d}_i$  και ένα τεστ στο  $h_{iR}$  το οποίο δεν απαιτούνταν προηγουμένως. Το Πρόρισμα 2 συνοψίζει τη γενική περίπτωση.

Πρόρισμα 2: Υποθέτουμε ότι τα  $f_1 \dots f_m$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Έστω  $\bar{R}_{iL}^c$  ο χώρος ανίχνευσης του  $I_L^c$  όπου ο  $I_L^c$  παράγεται από τα  $f_1 \dots f_l$  και έστω  $f_1 \dots f_l$  το μικρότερο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_m$  για τα οποία:

$$\bar{d}_i \subset \bar{R}_{iL}^c$$

Τότε ο  $\bar{d}_i$  μπορεί να γίνει στάσιμος στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  αν και μόνο αν:

$$\beta_i h_i = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_l f_l + \xi_{hi}$$

με τα  $\alpha_1 \dots \alpha_l$  μη μηδενικά και  $h_{iR} \in \bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_l \pmod{\bar{d}_i}$  όπου:

$$h_{iR} \equiv \mathbf{A} \xi_{hi} \pmod{d_i}$$

Το Θεώρημα 3.3.1 επιτρέπει μερικές απλές παρατηρήσεις στη δυνατότητα του να κάνουμε περισσότερα από ένα διανύσματα συμβάντος στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ . Αν  $\bar{d}_i$  είναι ο χώρος ανίχνευσης για δύο διαφορετικά διανύσματα συμβάντος  $h_i$  και  $h_j$ , αν δηλαδή τα  $h_i$  και  $h_j$  είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση, αποδεικνύεται ότι το να κάνουμε το  $h_i$  στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  έχει ως αποτέλεσμα να γίνονται και τα δύο (και το  $h_i$  και το  $h_j$ ) στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ . Το ακόλουθο πρόρισμα εισάγει την αμοιβαία στασιμότητα στην έξοδο για την ειδική περίπτωση όπου οι χώροι ανίχνευσης  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  περιέχονται στην κατάλληλη ένωση  $\cup_{k \in I_i} \bar{R}_k, i = 1 \dots q$  και τα σύνολα δεικτών  $I_1 \dots I_q$  είναι ξένα. Σε αυτήν την περίπτωση τα  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  δεν έχουν προφανώς καμία αλληλεπίδραση και μπορούν να θεωρηθούν χωριστά. Στο γενικό αποτέλεσμα θα αναφερθούμε παρακάτω.

Πρόρισμα 3: Υποθέτουμε ότι τα  $f_1 \dots f_m$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα και ορίζουμε τα σύνολα δεικτών  $I_i$  να είναι τα μικρότερα σύνολα για τα οποία:

$$\bar{d}_i \subset \cup_{k \in I_i} \bar{R}_k \quad i = 1 \dots q$$

Αν κάθε  $\bar{d}_i$  μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ , τότε το σύνολο των υποχώρων  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  μπορεί να γίνει output stationary με τα  $f_1 \dots f_m$  αν:

$$I_i \cap I_j = \emptyset$$

για κάθε  $i \neq j$ .

Αν το  $\bar{d}_i$  μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ , πρέπει να καθορίσουμε την επίδραση στην εναπόθεση των  $n$  ιδιοτιμών που σχετίζονται με τον  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$ . Αν:

$$v_{iL}^c = \sum_{k=1, l} v_k$$

και τα  $f_1 \dots f_m$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, είναι προφανές ότι οι  $n - v_{iL}^c$  ιδιοτιμές που δεν σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$  μπορούν να τοποθετηθούν και εδώ σχεδόν αυθαίρετα. Η δυνατότητα τοποθέτησης των υπόλοιπων  $v_{iL}^c$  ιδιοτιμών συνοψίζεται στο Θεώρημα 3.3.2. Έστω ότι η διάσταση του  $\bar{d}_i$  είναι  $v_d$ . Η επίπτωση του να κάνουμε τον  $\bar{d}_i$  στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  είναι ότι  $l \times v_d$  ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_1 \oplus \dots \bar{R}_l$  μπορούν να τοποθετηθούν. Η τοποθέτηση επιτρέπει μόνο  $v_d$  διακριτές ιδιοτιμές, καθεμία από τις οποίες πρέπει να έχει πολλαπλότητα  $l$ .

Ισχύει ότι  $v_d \leq v_k$  για  $k = 1 \dots l$  και συνεπώς  $v_d \leq \min(v_k, k = 1 \dots l)$ . Αν το  $\bar{d}_i$  είναι να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ , αυτό προτείνει δύο διαδικασίες σχεδίασης. Η πρώτη είναι ότι τα  $f_1 \dots f_m$  πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε οι χώροι ανίχνευσής τους να είναι περίπου ίσης διάστασης και η δεύτερη είναι ότι το  $h_i$  πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε ο χώρος ανίχνευσής του να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερος. Στο βαθμό που αυτό μπορεί να επιτευχθεί, ο αριθμός των μη ελέγξιμων ιδιοτιμών μπορεί να ελαχιστοποιηθεί.

Θεώρημα 3.3.2: Υποθέτουμε ότι ο  $\bar{d}_i$  ικανοποιεί το θεώρημα για τα  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$ . Αν ο  $\bar{d}_i$  γίνει στάσιμος στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ , οι  $v_d$  ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$  που σχετίζονται με τον  $\bar{d}_i$  μπορούν να τοποθετηθούν σχεδόν αυθαίρετα. Οι ιδιοτιμές του  $\mathbf{A} - \mathbf{DC}$  που σχετίζονται με καθένα εκ των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$  αποτελούνται από τις  $v_d$  που σχετίζονται με τον  $\bar{d}_i$  και από  $v_k - v_d$  ιδιοτιμές που είναι ανεξάρτητες από την επιλογή του  $\mathbf{D} \in \mathbf{D}^*$ .

Υπάρχουν δύο σύνολα αλγορίθμων για το Θεώρημα 3.3.2: Αλγόριθμοι για εναπόθεση των  $v_d$  ιδιοτιμών στο  $\Lambda_d$  (όπου  $\Lambda_d$  είναι το επιθυμητό σύνολο των  $v_d$  ιδιοτιμών που σχετίζονται με τον

$\bar{d}_i$ ) και αλγόριθμοι για τον καθορισμό των μη ελέγξιμων ιδιοτιμών του  $A - DC$  αν ο  $\bar{d}_i$  γίνει στάσιμος στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ . Ο αλγόριθμος που ικανοποιεί την πρώτη απαίτηση παρουσιάζεται στο Πόρισμα 1.

Πόρισμα 1: Υποθέτουμε ότι το  $h_i$  ικανοποιεί το Θεώρημα 3.3.1. Τότε το  $h_i$  είναι στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  και κάθε στοιχείο του  $\Lambda_d$  είναι ιδιοτιμή του  $A - DC$  πολλαπλότητας  $l$  αν ο  $D$  είναι λύση των  $l$  γραμμικών εξισώσεων:

$$(A - DC) f_k = 1/a_k (PR)_k (\bar{R}_L^c)^T \bar{R}_L^c)^{-1} (PR)_k^T [-\beta_i Y(A) g_d + \sum_{j=1, l} a_j A f_j], \quad k = 1 \dots l$$

Ο  $\bar{R}_L^c$  προσδιορίζεται από τους χώρους ανίχνευσης των  $f_1 \dots f_l$ :

$$\bar{R}_L^c = [\bar{R}_1 : \dots : \bar{R}_l]$$

$(PR)_k$  είναι ο  $\bar{R}_L^c$  με όλους τους υποπίνακες να έχουν τεθεί ίσοι με το μηδέν εκτός από τον  $k$ -οστό και  $Y(\cdot)$  το επιθυμητό ελάχιστο πολυώνυμο για τον  $\bar{d}_i$  (οι ρίζες του  $Y(\cdot)$  είναι τα στοιχεία του  $\Lambda_d$ ).

Ο δεύτερος αλγόριθμος που απαιτείται για το θεώρημα είναι για τις μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $A - DC$  που προκύπτουν από την εφαρμογή του Πορίσματος 1. Έστω  $\psi_k(\cdot)$  το ελάχιστο πολυώνυμο του  $\bar{R}_k$  αναφορικά με τον  $A - DC$ :

$$\psi_k(A - DC) \bar{R}_k = 0 \quad k = 1 \dots l \quad (3.3.1)$$

Οι ιδιοτιμές του  $A - DC$  που δεν μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα και που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_k$  είναι οι ρίζες του  $\psi_k(\cdot)$  που δεν είναι επίσης ρίζες του  $Y(\cdot)$ , δηλ. είναι οι ρίζες του πηλίκου  $\psi_k(\cdot) / Y(\cdot)$ . Αν το  $\psi_k(\cdot)$  εκφραστεί:

$$\psi_k(\lambda) = \lambda^{v_k} + p_{kv_k} \lambda^{v_k-1} + \dots p_{k2} \lambda + p_{k1} \quad (3.3.2)$$

τότε οι συντελεστές  $p_{k1} \dots p_{kv_k}$  είναι τα στοιχεία του διανύσματος συντεταγμένων  $p_k$ :

$$p_k = \begin{bmatrix} p_{k1} \\ \vdots \\ p_{kv_k} \end{bmatrix}$$

όπου  $p_k$  είναι η λύση στην:

$$W p_k = -(A - DC)^{v_k} g_k \quad (3.3.3)$$

και  $W$  είναι ο πίνακας ελεγχιμότητας του  $g_k$ :

$$W = [g_k \ (A - DC)g_k \ \dots \ (A - DC)^{v_k-1}g_k] \quad (3.3.4)$$

### 3.3.2 Προσθήκη μιας στάσιμης κλάσης σε ένα ανιχνεύσιμο σύνολο

Αν καθένας εκ των  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  μπορεί να γίνει στάσιμος στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ , δεν έπεται κατ' ανάγκη ότι οι  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  μπορούν να γίνουν αμοιβαία στάσιμοι στην έξοδο (*mutually output stationary*) με τα  $f_1 \dots f_m$ . Η μελέτη της αμοιβαίας στασιμότητας στην έξοδο μπορεί να γίνει σε τρία επίπεδα. Το απλούστερο επίπεδο συνοψίστηκε στο Πόρισμα 3 του Θεωρήματος 3.3.1. Αν  $I_1 \dots I_q \in \{1, 2 \dots m\}$  είναι τα μικρότερα σύνολα δεικτών για τα οποία:

$$\bar{d}_i \subset \cup_{k \in I_i} \bar{R}_k \quad i = 1 \dots q \quad (3.3.5)$$

το πόρισμα βεβαιώνει ότι οι  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  μπορούν να γίνουν αμοιβαία στάσιμοι στην έξοδο αν τα σύνολα δεικτών είναι όλα ξένα:

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \quad (3.3.6)$$

Το δεύτερο επίπεδο δυσκολίας το συναντάμε αν τα σύνολα δεικτών είναι ταυτόσημα:

$$I_i = I_j \quad \forall i \neq j \quad (3.3.7)$$

Σε αυτήν την περίπτωση αποδεικνύεται ότι ο έλεγχος για αμοιβαία στασιμότητα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  χρειάζεται να εφαρμοστεί σε έναν μόνο υπόχωρο από το σύνολο  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$ . Αν υπάρχουν  $l$  στοιχεία στο  $I_i$ , ο  $\bar{d}_i$  ορίζει μια κλάση  $\bar{d}_i^*$  χώρων ανίχνευσης (στην πραγματικότητα έναν  $l$ -διάστατο υπόχωρο από χώρους ανίχνευσης) οι οποίοι είναι πάντα αμοιβαία στάσιμοι στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$  όταν ο  $\bar{d}_i$  είναι στάσιμος στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ . Αν οι  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  μπορούν να γίνουν αμοιβαία στάσιμοι στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_m$ , αποδεικνύεται ότι όλοι οι  $\bar{d}_1 \dots \bar{d}_q$  πρέπει να είναι στοιχεία του  $\bar{d}_i^*$ , για κάθε  $i \leq q$ . Η έξοδος που σχετίζεται με κάθε στοιχείο του  $\bar{d}_i^*$  έχει μια μοναδική διεύθυνση στον  $l$ -διάστατο υπόχωρο του  $E^m$  ο οποίος παράγεται από την  $\cup_{k \in I_i} C f_k$ .

Μια επέκταση του παραπάνω είναι αν υπάρχει κάποιο  $\mu \leq q$  για το οποίο



$$I_i \subset I_\mu \quad i = 1 \dots q \quad (3.3.8)$$

Όσο το μέγεθος του συνόλου δεικτών  $I_i$  αυξάνεται, η διάσταση της κλάσης  $\bar{d}_i^*$  αυξάνεται. Στη γενική περίπτωση όπου τα  $I_1 \dots I_q$  έχουν τομή αλλά είναι ανεξάρτητα, η κλάση  $\bar{d}_N^*$  πρέπει να οριστεί στο σύνολο δεικτών:

$$I_N = \bigcup_{i=1,q} I_i$$

Αν κανένα από τα ατομικά σύνολα δεικτών δεν είναι ίσο με το  $I_N$ , θα πρέπει να ορίσουμε ένα διάνυσμα συμβάντος  $h_N$  και τον χώρο ανίχνευσής του  $\bar{d}_N$  πάνω στην  $\bigcup_{k \in I_N} \bar{R}_k$ .

Το πρώτο επίπεδο είναι απλή επέκταση των επιχειρημάτων της προηγούμενης ενότητας. Ωστόσο, για τα υπόλοιπα επίπεδα, η άλγεβρα που απαιτείται είναι αρκετά περίπλοκη και η εφαρμογή των Λημμάτων παύει να είναι τετριμμένη. Για το λόγο αυτό δεν θα γίνει περεταίρω ανάλυση.

Πάντως, διαισθητικά θα μπορούσαμε να πούμε ότι στην περίπτωση που κάποια από τα σύνολα δεικτών έχουν τομή αλλά δεν είναι ταυτόσημα, η στασιμότητα αυτών των επιπρόσθετων διανυσμάτων που σχετίζονται εξαρτάται από το εάν ή όχι δύο από τα σύνολα κάνουν την ίδια ιδιοτιμή μη ελέγξιμη και απαιτούν διαφορετικές τιμές για αυτήν.

### 3.3.3 Σύνοψη-Αλγόριθμος

Ακόμη και αν μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  είναι αποδεκτές, τα αποτελέσματα πάνω στην αμοιβαία ανιχνευσιμότητα επιτρέπουν το πολύ  $rk(C)$  αστοχίες να ανιχνευθούν από ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών. Η στασιμότητα στην έξοδο επιδιώκει να καθορίσει εάν ειδικές επιλογές του  $D$  που αυξάνουν αυτόν τον αριθμό μπορούν να βρεθούν ή όχι. Η στασιμότητα στην έξοδο θεωρεί το πρόβλημα εύρεσης κάποιου  $D$  για τον οποίο καθένα εκ των  $f_1 \dots f_r$ ,  $h_i$  παράγει σφάλμα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση, όπου  $h_i$  είναι ένα εκ των  $h_1 \dots h_q$  και τα  $h_1 \dots h_q$  δεν είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  (Τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο). Το κόστος της χρήσης στασιμότητας στην έξοδο για να αυξήσουμε τον αριθμό των αστοχιών που μπορούν να ανιχνευθούν από ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών είναι ότι ορισμένες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορεί να πρέπει να τοποθετηθούν με πολλαπλότητα μεγαλύτερη από ένα. Το πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης, ωστόσο, είναι ότι μπορεί να

αυξήσει σημαντικά τον αριθμό των αστοχιών που μπορούν να ανιχνευθούν από ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών.

Εξ ορισμού τα  $f_1 \dots f_r, h_i$  δεν είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Αφού τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο, αυτό υπονοεί ότι το  $Ch_i$  είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των  $Cf_1 \dots Cf_r$ . Έστω ότι  $f_1 \dots f_l$  είναι το μικρότερο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  για το οποίο η:

$$CF_L^c a_L^c = \beta_i Ch_i \quad (3.3.9)$$

έχει λύση όπου:

$$a_L^c = [a_1 \dots a_l]^T \quad (3.3.10)$$

$$F_L^c = [f_1 \dots f_l]^T$$

και τα  $a_1 \dots a_l$  είναι ένα σύνολο μη μηδενικών συντελεστών. Αν τα  $f_1 \dots f_l$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, το Πόρισμα 1 του Θεωρήματος 3.3.1 εγγυάται ότι το  $h_i$  μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  αν υπάρχει λύση στην:

$$\bar{R}_L^c \mathcal{E} = \bar{S}_i \quad (3.3.11)$$

όπου:

$$\bar{R}_L^c = [\bar{R}_1 : \dots : \bar{R}_l] \quad (3.3.12)$$

και όπου  $\bar{S}_i$  αντιστοιχεί στον  $\bar{d}_i$  με τον ίδιο τρόπο που ο  $\bar{R}_i$  αντιστοιχεί στον  $\bar{R}_i$ .

Αν υπάρχει λύση στην (3.3.11), μία λύση θα είναι:

$$\mathcal{E} = (\bar{R}_L^c{}^T \bar{R}_L^c)^{-1} \bar{R}_L^c{}^T \bar{S}_i \quad (3.3.13)$$

Το Πόρισμα 2 του Θεωρήματος 3.3.1 παρουσιάζει ένα παρόμοιο τεστ για την περίπτωση όπου τα  $f_1 \dots f_l$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα.

Αν το  $h_i$  μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ , η επόμενη ερώτηση αφορά έναν αλγόριθμο επιλογής του  $D$  και εάν οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  μπορούν να επιλεγούν και εδώ αυθαίρετα ή όχι. Αν:

$$v_d = rk(\bar{S}_i) \quad (3.3.14)$$

το Θεώρημα 3.3.2 μας βεβαιώνει ότι ένα σύνολο  $v_d$  ιδιοτιμών  $\Lambda_d$  μπορεί να επιλεγεί αυθαίρετα και ότι μπορούμε να βρούμε έναν  $D$  για τον οποίο:

- i) Το  $h_i$  είναι στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  για τον  $(A - DC)$  και
- ii)  $v_d$  από τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με καθέναν εκ των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$  είναι τα στοιχεία του  $\Lambda_d$ .

Ο περιορισμός στις επιλογές του  $D$  είναι ότι  $l$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  θα πρέπει να είναι ίσες με κάθε στοιχείο του  $\Lambda_d$ . Οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τους υπόλοιπους χώρους ανίχνευσης  $\bar{R}_{l+1} \dots \bar{R}_r$  εξακολουθούν να μπορούν να τοποθετηθούν ελεύθερα. Αν  $v_k > v_d$  για κάποιο  $k \leq l$ , ωστόσο, οι  $v_k - v_d$  επιπρόσθετες ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον αντίστοιχο  $\bar{R}_k$  είναι μη ελέγξιμες. Ένας αλγόριθμος για επιλογή του  $D$  θα παρουσιαστεί στη συνέχεια.

Η κύρια δυσκολία με τη στασιμότητα στην έξοδο είναι η πιθανή εισαγωγή μη ελέγξιμων ιδιοτιμών του  $(A - DC)$ . Ένας αλγόριθμος για προσδιορισμό των μη ελέγξιμων ιδιοτιμών παρουσιάζεται παρακάτω. Αν οι ιδιοτιμές είναι μη αποδεκτές, δεν μπορεί να γίνει τίποτα εκτός από το να άρουμε τον περιορισμό στο  $h_i$  για στασιμότητα στην έξοδο.

Οι εξισώσεις (3.3.9) και (3.3.11) μπορούν να εφαρμοστούν σε καθένα εκ των  $h_1 \dots h_q$  για να καθορίσουμε ποια μπορούν να γίνουν στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ . Αν κάποιο  $h_i$  δεν μπορεί, θα πρέπει να αφαιρεθεί από το σύνολο. Είναι τότε δυνατόν να θεωρήσουμε την αμοιβαία στασιμότητα στην έξοδο των υπόλοιπων στοιχείων του συνόλου.

Ανόμοια με το πρόβλημα της αμοιβαίας ανιχνευσιμότητας, δεν υπάρχει περιορισμός στον αριθμό των διανυσμάτων συμβάντος τα οποία μπορούν να γίνουν αμοιβαία στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ , αλλά το γεγονός ότι καθένα από δύο διανύσματα συμβάντος μπορεί να γίνει ατομικά στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  δεν υπονοεί κατ' ανάγκη ότι μπορούν να γίνουν αμοιβαία στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ . Έστω ότι τα  $h_i$  και  $h_j$  είναι δύο στοιχεία από τα  $h_1 \dots h_q$ . Ο απλούστερος έλεγχος αφορά τα υποσύνολα των  $Cf_1 \dots Cf_r$  τα οποία χρειάζονται για να κατασκευάσουμε τα  $Ch_i$  και  $Ch_j$  όμοια με την (3.3.9). Αν  $I_i$  είναι το μικρότερο σύνολο δεικτών για το οποίο το  $Ch_i$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $Cf_k, k \in I_i$ , και  $I_j$  είναι ένα αντίστοιχο σύνολο δεικτών για το  $h_j$  τότε το πόρισμα 3 του Θεωρήματος 3.3.1 λέει ότι τα  $h_i$  και  $h_j$  μπορούν να γίνουν αμοιβαία στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  αν:

$$I_i \cap I_j = \emptyset \quad (3.3.15)$$

Αυτή είναι μία ικανή αλλά όχι αναγκαία συνθήκη για αμοιβαία στασιμότητα στην έξοδο.

Η δυσκολία με την αμοιβαία στασιμότητα στην έξοδο είναι ότι η άλγεβρα που χρειάζεται για να βρούμε ένα αμοιβαία στάσιμο στην έξοδο υποσύνολο των  $h_1 \dots h_q$  μπορεί να συμπληρωθεί στο σχεδιαστικό αλγόριθμο για τον  $D$  από ένα σύνολο μη ελέγξιμων και μη αποδεκτών ιδιοτιμών του  $(A - DC)$ . Δεν υπάρχει κανένας ασφαλής κανόνας για αποφυγή αυτού του προβλήματος, αλλά ορισμένοι κανόνες βοηθούν. Με τη σειρά με την οποία θα πρέπει να εφαρμόζονται:

- i) Αγνόησε κάθε  $h_i$  για το οποίο οι διαστάσεις  $v_k$  των χώρων ανίχνευσης  $\bar{R}_k, k \in I_i$  δεν είναι περίπου ίσοι,
- ii) Αγνόησε κάθε  $h_i$  για το οποίο το  $v_d$  είναι πολύ μικρότερο από το ελάχιστο  $v_k, k \in I_i$  και
- iii) Μην προσπαθήσεις να κάνεις τα  $h_i$  και  $h_j$  αμοιβαία στάσιμα στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  αν οι διαστάσεις των  $\bar{d}_i$  και  $\bar{d}_j$  δεν είναι περίπου ίσες ή δεν ισχύει η (3.3.15).

Αυτοί οι κανόνες δεν σβήνουν την πιθανότητα να έχουμε μη αποδεκτές ιδιοτιμές για τον  $(A - DC)$  αλλά ελαχιστοποιούν την πιθανότητα ελαχιστοποιώντας τον αριθμό των μη ελέγξιμων ιδιοτιμών που προκύπτουν από εφαρμογή του Θεωρήματος 3.3.2.

Ακολούθως αναπτύσσονται αλγόριθμοι για:

- να επιλέξουμε  $D$  έτσι ώστε το  $h_i$  να είναι στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ , και
- να προσδιορίσουμε τις μη ελέγξιμες ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  αν το  $h_i$  γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ .

Τοποθέτηση ιδιοτιμών: Όπως και προηγούμενα, υποθέτουμε ότι τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο και τα  $h_1 \dots h_q$  είναι υποψήφια για στασιμότητα στην έξοδο.

Αυτό που απομένει είναι να ορίσουμε έναν αλγόριθμο τοποθέτησης ιδιοτιμών όταν χρησιμοποιείται στασιμότητα στην έξοδο. Όπως παραπάνω, υποθέτουμε ότι το  $h_i$  πρόκειται να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$  και ότι  $f_1 \dots f_l$  είναι το μικρότερο υποσύνολο των  $f_1 \dots f_r$  για το οποίο η:

$$CF_L^c a_L^c = \beta_i C h_i$$

έχει λύση όπου:

$$a_L^c = [a_1 \dots a_l]^T$$

$$F_L^c = [f_1 \dots f_l]^T$$

Οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_{l+1} \dots \bar{R}_r$  παραμένουν ανεπηρέαστες από την απαίτηση της στασιμότητας στην έξοδο. Μπορούν να τοποθετηθούν όπως και προηγούμενα απαιτώντας ο  $D$  να ικανοποιεί τις  $r - l$  εξισώσεις:

$$\boxed{DCF_L = \psi_{FL}(A)} \quad (3.3.16)$$

όπου  $F_L$  είναι οι τελευταίες  $r - l$  στήλες του  $F$  και  $\psi_{FL}(A)$  είναι οι τελευταίες  $r - l$  στήλες του  $\psi_F(A)$ .

Η επίδραση της στασιμότητας στην έξοδο είναι να περιορίσει την ελευθερία με την οποία οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$  μπορούν να τοποθετηθούν. Αν  $v_d$  είναι η διάσταση του  $\bar{d}_i$ , ένα μόνο σύνολο  $\Lambda_d$  με  $v_d$  στοιχεία και ένα αντίστοιχο πολυώνυμο  $Y_d(\cdot)$  μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα. Το Θεώρημα 3.3.2 τότε απαιτεί τα στοιχεία του  $\Lambda_d$  να αποτελούν ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με καθένα εκ των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$ . Η καθαρή επίδραση είναι ότι μόνο  $v_d$  μοναδικές ιδιοτιμές μπορούν να επιλεγούν και καθεμία θα πρέπει να τοποθετηθεί με πολλαπλότητα  $l$ . Το Πρόσχημα 1 του Θεωρήματος 3.3.2 παρέχει έναν αλγόριθμο για να επιβεβαιώσει ότι ένας αποδεκτός  $D$  επιλέγεται. Οι  $l$  γραμμικές εξισώσεις από το πρόσημα πλέον των  $r - l$  γραμμικών εξισώσεων που υπάρχουν στην (3.3.16) μαζί αντικαθιστούν την (3.2.26). Μία λύση σε αυτές τις εξισώσεις είναι εγγυημένη και είναι μοναδική αν το  $r$  είναι ίσο με το  $rk(C)$ . Σε διαφορετική περίπτωση, ο αλγόριθμος που αναπτύσσεται μετά την κανονική μορφή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρούμε μία μοναδική λύση.

Αν  $v_1 \dots v_l$  είναι οι διαστάσεις των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$ , το Θεώρημα 3.3.2 δηλώνει ότι το  $v_d$  ικανοποιεί:

$$v_d \leq \min(v_1 \dots v_l)$$

Ενώ η (3.2.26) επιτρέπει όλες οι  $v'_i$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$  να τοποθετηθούν, η παραπάνω συζήτηση υπονοεί ότι η στασιμότητα στην έξοδο του  $h_i$  επιτρέπει μόνο  $lv_d$  από τις ιδιοτιμές να τοποθετηθούν. Οι υπόλοιπες  $v'_i - lv_d$  ιδιοτιμές μπαίνουν αυτόματα για κάθε αποδεκτή επιλογή του  $D$ . Αυτές οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές δε θα πρέπει να συγχέονται με εκείνες του  $\Pi$  οι οποίες συζητήθηκαν νωρίτερα. Αυτές είναι συνέπεια της επιθυμίας να κάνουμε το  $h_i$  στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_r$ . Το εάν ή όχι είναι εφικτό να σχεδιάσουμε ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών για να ανιχνεύσουμε τις αστοχίες που σχετίζονται με καθένα εκ των  $f_1 \dots f_r$  καθώς επίσης και την αστοχία που σχετίζεται με το  $h_i$

εξαρτάται από το εάν αυτές οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές είναι αποδεκτές ή όχι. Ένας αλγόριθμος για τον προσδιορισμό των μη ελέγξιμων ιδιοτιμών παρουσιάζεται στη συζήτηση που έπεται του Πορίσματος 1 του Θεωρήματος 3.3.2.

Γενίκευση των αλγορίθμων εναπόθεσης ιδιοτιμών στα  $h_1 \dots h_q$  ακολουθεί την ίδια γραμμή που αναπτύχθηκε ακριβώς παραπάνω. Αν τα  $h_i$  και  $h_j$  είναι δύο διανύσματα συμβάντος που ικανοποιούν την (3.3.15), τότε το Πόρισμα 1 του Θεωρήματος 3.3.2 μπορεί να εφαρμοστεί ανεξάρτητα για καθένα από αυτά. Η γενική περίπτωση δεν αναπτύχθηκε ιδιαίτερα. Πάντως, όταν χρησιμοποιείται με κατάλληλη παραλλαγή της (3.3.16), καθένας από αυτούς τους αλγορίθμους ορίζει ένα σύνολο  $r$  συνεπών εξισώσεων τις οποίες ο  $D$  θα πρέπει να ικανοποιεί.

### 3.4 Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για ένα ανιχνεύσιμο σύνολο

Λήμμα 3.4.1: Έστω  $I$  ο υπόχωρος που παράγεται από τα  $f_1 \dots f_r$  και υποθέτουμε ότι τα  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Αν το  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο και ο  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε ο  $\bar{R}_I$  να είναι αναλλοίωτος, κανένα διάνυσμα  $\xi \notin \bar{R}_I$  δεν μπορεί να παράγει έξοδο για το σύστημα  $(A - DC, C)$  η οποία περιορίζεται στο  $CI$ .

Το ακόλουθο θεώρημα περιορίζεται στην περίπτωση όπου καμία δυάδα από τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση. Αυτή είναι η γενική περίπτωση, αφού αν τα  $f_i$  και  $f_j$  είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση, τότε  $\bar{R}_i = \bar{R}_j$  και μόνο ένα εκ των  $f_i, f_j$  χρειάζεται να συμπεριληφθεί στο σύνολο των διανυσμάτων συμβάντος.

Θεώρημα 3.4.1: Υποθέτουμε ότι καμία δυάδα διανυσμάτων συμβάντος από τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση. Τα διανύσματα  $f_1 \dots f_r$  μπορούν να γίνουν αμοιβαία ανιχνεύσιμα με επαύξηση του χώρου κατάστασης αν και μόνο αν είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο.

Απόδειξη:

Ικανό: Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.4

Αναγκαίο: Έστω  $I$  ο υπόχωρος που παράγεται από τα  $f_1 \dots f_r$  και υποθέτουμε ότι  $d(I) = p < r$ . Επιλέγουμε  $p$  διανύσματα από το σύνολο τα οποία είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Χάρην ευκολίας, έστω ότι αυτά είναι τα  $f_1 \dots f_p$ . Έστω, επίσης  $I_p^c$  ο χώρος που παράγεται από τα

$f_1 \dots f_p$  και έστω  $\bar{R}_{I_p^c}$  ο χώρος ανίχνευσης του  $I_p^c$ . Αυξάνουμε το χώρο κατάστασης αν είναι αναγκαίο έτσι ώστε τα  $f_1 \dots f_p$  να αμοιβαία ανιχνεύσιμα.

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις :

- Έστω ότι  $f_k \notin \bar{R}_{I_p^c}$  για κάποιο  $p < k \leq r$ . Τότε για κάθε  $D$  για τον οποίο τα  $f_1 \dots f_p$  παράγουν σφάλματα εξόδου κατά μήκος μόνο της αντίστοιχης διεύθυνσης  $Cf_1 \dots Cf_p$  το σφάλμα εξόδου που παράγεται από την  $f_k$  μπορεί να περιοριστεί στο χώρο εξόδου που παράγεται από τα διανύσματα στην ακολουθία  $Cf_k, C(A - DC)f_k, \dots$  Εκ κατασκευής,  $Cf_k \in CI_p^c$ . Αλλά το προηγούμενο λήμμα απαιτεί να υπάρχει κάποιος ακέραιος  $\mu$  για τον οποίο  $C(A - DC)^\mu f_k \notin CI_p^c$  και κατά συνέπεια το  $f_k$  δεν μπορεί να περιοριστεί να παράγει σφάλματα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση. Επομένως, τα  $f_1 \dots f_p, f_k$  δεν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα.
- Αν όλα τα  $f_k$  για  $p < k \leq r$  ικανοποιούν  $f_k \in \bar{R}_{I_p^c}$ , τότε αφού καμία δυάδα από τα  $f_1 \dots f_r$  δεν είναι ισοδύναμα στην ανίχνευση, για κάθε  $f_k$  θα υπάρχει κάποιο ελάχιστο σύνολο δεικτών  $I_k \in \{1 \dots p\}$  με δύο ή περισσότερα στοιχεία τ.ώ  $f_k \in \bigcup_{j \in I_k} \bar{R}_j$ . Από το θεώρημα, τα σφάλματα εξόδου που παράγονται από τα  $f_1 \dots f_p, f_k$  μπορούν να περιοριστούν στις αντίστοιχες διευθύνσεις  $Cf_1 \dots Cf_p, Cf_k$  μόνο αν κάποιες από τις ιδιοτιμές που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_p$  έχουν πολλαπλότητα ίση με τον αριθμό των στοιχείων του  $I_k$ . Επομένως, ο ορισμός δεν μπορεί να ικανοποιηθεί για τα  $f_1 \dots f_p, f_k$  για κανένα  $p < k \leq r$ . ■

### 3.5 Πλήρως μετρήσιμα συστήματα

Το απλούστερο πρόβλημα ανίχνευσης αστοχιών αφορά συστήματα όπου το πλήρες διάνυσμα κατάστασης μετρείται. Τα συστήματα αυτά καλούνται *πλήρως μετρήσιμα συστήματα* (*fully measurable systems*) και χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι  $rk(C) = n$ . Ο πίνακας μετρήσεων μπορεί επομένως να αντιστραφεί για να καθορίσει την κατάσταση του συστήματος άμεσα. Τα πλήρως μετρήσιμα συστήματα αποτελούν ένα εκφυλισμένο παράδειγμα του γενικού προβλήματος ανίχνευσης αστοχιών.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί κάθε διάνυσμα συμβάντος είναι ο δικός του χώρος ανίχνευσης για πλήρως μετρήσιμα συστήματα. Εξαιτίας αυτού του γεγονότος, τα προηγούμενα βασικά αποτελέσματα μπορούν να μειωθούν σε δύο -μάλλον απλές- δηλώσεις.

Υπενθυμίζουμε ότι τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  ορίζονται να είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο αν τα  $Cf_1 \dots Cf_r$  είναι αμοιβαία ανεξάρτητα. Για πλήρως μετρήσιμα συστήματα, η ανεξαρτησία των  $f_1 \dots f_r$  υπονοεί διαχωρισιμότητα στην έξοδο. Τα προηγούμενα αποτελέσματα μπορούν να συνοψιστούν για πλήρως μετρήσιμα συστήματα σε ένα μόνο θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.1: Αν τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα για κάθε πλήρως μετρήσιμο σύστημα  $(A, B, C)$ .

Το παραπάνω θεώρημα λέει ότι οι αστοχίες που αντιπροσωπεύονται από τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  μπορούν να ανιχνευθούν από ένα μόνο σύστημα ανίχνευσης αστοχιών αν τα διανύσματα συμβάντος είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Η ανεξαρτησία των  $f_1 \dots f_r$  είναι ικανή να διασφαλίσει ότι μπορεί να επιλεγεί  $D$  τ.ώ το σήμα σφάλματος που σχετίζεται με καθένα από τα διανύσματα συμβάντος να βρίσκεται μόνο κατά μήκος της αντίστοιχης διεύθυνσης  $Cf_1 \dots Cf_r$  και όλες οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  να μπορούν να επιλεγούν ελεύθερα. Η δυσκολία των ιδιοτιμών που δεν μπορούν να τοποθετηθούν αυθαίρετα δεν υφίσταται για πλήρως μετρήσιμα συστήματα.

Για να ολοκληρώσουμε τα αποτελέσματα, θα πρέπει να θεωρήσουμε σύνολα διανυσμάτων συμβάντος που δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητα. Αυτό το πρόβλημα αντιστοιχεί στη στασιμότητα στην έξοδο. Διανύσματα συμβάντος  $h_1 \dots h_q$  τα οποία είναι γραμμικοί συνδυασμοί των  $f_1 \dots f_r$  μπορούν να προστεθούν στα  $f_1 \dots f_r$ , αλλά τότε είναι αναγκαίο να ορίσουμε κάποιες από τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  να έχουν ίδια τιμή. Η στασιμότητα στην έξοδο για πλήρως μετρήσιμα συστήματα συνοψίζεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.5.2: Έστω ότι τα  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα για το πλήρως μετρήσιμο σύστημα  $(A, B, C)$  και έστω  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  οι ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο  $D$  επιλέγεται έτσι ώστε το σήμα σφάλματος που σχετίζεται με καθένα από τα  $f_1 \dots f_r$  να είναι σε μία μόνο κατεύθυνση για το  $(A - DC, C)$  και ένα υποσύνολο  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  των  $r$  ιδιοτιμών είναι ίσες. Κάθε αστοχία με ένα διάνυσμα συμβάντος  $h_1$  το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των  $f_1 \dots f_k$  παράγει έξοδο κατά μήκος μόνο της διεύθυνσης  $Ch_1$ .

Αυτό είναι μια αναδιατύπωση μιας οικείας ιδιότητας της άλγεβρας πινάκων. Ο  $D$  επιλέγεται έτσι ώστε τα  $f_1 \dots f_r$  να είναι ιδιοδιανύσματα του  $A - DC$ . Επομένως:

$$(A - DC)f_i = \lambda_i f_i \quad i = 1 \dots r \quad (3.5.1)$$



και οι αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  παράγουν έξοδο σε μία διεύθυνση. Αν  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  είναι ίσες, τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός  $h_1$  των  $f_1 \dots f_k$  αποτελεί και αυτός ιδιοδιάνυσμα του  $A - DC$  και συνεπώς η αστοχία που σχετίζεται με αυτόν πρέπει να παράγει έξοδο κατά μήκος μόνο της διεύθυνσης  $Ch_1$ . Αν όλες οι  $n$  ιδιοτιμές επιλεγούν να είναι ίσες τότε κάθε διάνυσμα αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του  $A - DC$  και κάθε αστοχία που μπορεί να περιγραφεί από ένα μόνο διάνυσμα συμβάντος παράγει έξοδο σε μία μόνο διεύθυνση.

### 3.6 Κανονική μορφή

Ένα μοντέλο αναφοράς εκφρασμένο σε ένα σύστημα συντεταγμένων το οποίο κάνει την επιλογή ενός φίλτρου ανίχνευσης τετριμμένη ορίζεται να είναι στην *κανονική μορφή* (*base normal canonical form*). Η κανονική μορφή έχει ένα επιπλέον πλεονέκτημα, ότι επιτρέπει το μοντέλο αναφοράς να είναι αποσυζευγμένο σε ένα σύνολο υποσυστημάτων μικρότερης διάστασης. Οι ιδιότητες της *κανονικής μορφής* για ντετερμινιστικά συστήματα και ο πίνακας μετασχηματισμού στην κανονική μορφή περιγράφονται σε αυτήν την ενότητα.

Έστω ότι τα διανύσματα συμβάντος  $f_1 \dots f_r$  είναι διαχωρίσιμα στην έξοδο. Αν ο  $D$  αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης για τα  $f_1 \dots f_r$ , τότε οι αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  παράγουν σφάλματα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση για το  $(A - DC, C)$ , δηλαδή οι χώροι ανίχνευσης  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $A - DC$ . Αν  $\xi$  είναι ένα αυθαίρετο διάνυσμα στον  $\bar{R}_j$  για κάποιο  $j \leq r$ , τότε η ιδιότητα του αναλλοίωτου απαιτεί το  $(A - DC)\xi$  να είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων που παράγουν τον  $\bar{R}_j$ . Αυτό προτείνει ότι αν ένα σύστημα συντεταγμένων για τον  $E^n$  επιλεγεί έτσι ώστε τα διανύσματα βάσης για κάθε  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι μοναδιαία διανύσματα, τότε ο  $A - DC$  είναι τουλάχιστον μερικώς μπλοκ διαγώνιος. Η ιδιότητα ο πίνακας να είναι μπλοκ διαγώνιος όταν το μοντέλο αναφοράς εκφράζεται στο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων είναι μια γενική ιδιότητα των αναλλοίωτων υποχώρων.

Το κρίσιμο σημείο στην παραπάνω συζήτηση είναι ότι ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο ο  $A - DC$  είναι μερικώς μπλοκ διαγώνιος είναι συνάρτηση μόνο των  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Ο μετασχηματισμός σε αυτό το σύστημα συντεταγμένων μπορεί να κατασκευαστεί από τα διανύσματα βάσης για τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  ανεξάρτητα από την επιλογή του φίλτρου ανίχνευσης  $D$ . Η βάση που ορίστηκε στο Λήμμα 3.1.1 είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Αν  $g_1$  είναι ο δημιουργός ανίχνευσης για τον  $\bar{R}_1$ , η ενδεικνύμενη βάση για τον  $\bar{R}_1$  είναι η  $g_1, Ag_1, \dots, A^{v_1-1} g_1$ . Όμοιες

βάσεις υπάρχουν για τους  $\bar{R}_2 \dots \bar{R}_r$ . Η κανονική μορφή ορίζεται από αυτά τα διανύσματα βάσης.

Ο πίνακας μετασχηματισμού από το δοθέν σύστημα συντεταγμένων στην κανονική μορφή ορίζεται να είναι ο  $T^{-1}$ . Αν  $r = m$  και τα  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, ο  $T^{-1}$  καθορίζεται μοναδικά από τις βάσεις για τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  που δίνονται στο Λήμμα 3.1.1, αλλιώς ένα επιπρόσθετο σύνολο διανυσμάτων πρέπει να προσδιοριστεί. Η γενική δομή για τον  $T^{-1}$  είναι:

$$T^{-1} = [g_1, Ag_1, \dots, A^{v_1-1} g_1 \quad g_2 \dots A^{v_2-1} g_2 \quad \dots \quad g_r \dots A^{v_r-1} g_r : T_0]^{-1} \quad (3.6.1)$$

όπου ο βασικός περιορισμός για τον υποπίνακα  $T_0$  είναι ότι πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε ο  $T$  να είναι μη ιδιάζων:

$$T_0 = [z_1 \dots z_{v_0} \quad w_{r+1} \dots (A - D_I C)^{q_{r+1}-1} w_{r+1} \dots \quad w_m \dots (A - D_I C)^{q_m-1} w_m]$$

Αυτός ο ειδικός  $T_0$  επιλέγεται έτσι ώστε τα  $z_1 \dots z_{v_0}$  να αποτελούν βάση για τον επιπλέον υπόχωρο  $R_{0g}$  που σχετίζεται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  και τα υπόλοιπα διανύσματα θα τα ορίσουμε παρακάτω. Όλα τα διανύσματα στο δεξί μέλος της (3.6.1) εκτός από  $m$  ανήκουν στο  $n(C)$ . Αυτές οι  $m$  στήλες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουμε έναν μετασχηματισμό για το χώρο εξόδου συμβατό με τον  $T^{-1}$ :

$$T_m^{-1} = [CA^{v_1-1} g_1 \dots CA^{v_r-1} g_r \quad C'_1(A - D_I C)^{q_{r+1}-1} w_{r+1} \dots C'_1(A - D_I C)^{q_m-1} w_m]^{-1} \quad (3.6.2)$$

Ο μετασχηματισμός στην κανονική μορφή είναι ένας μετασχηματισμός ομοιότητας— ο  $T^{-1}$  μετασχηματίζει το διάνυσμα κατάστασης στην κανονική μορφή και ο  $T$  το μετασχηματίζει πίσω στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων. Το μοντέλο αναφοράς και το διάνυσμα κατάστασης στην κανονική μορφή συμβολίζονται ως:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= T^{-1} A T \\ \hat{B} &= T^{-1} B \\ \hat{C} &= T_m^{-1} C T \\ \hat{D} &= T^{-1} D T_m \\ \hat{\bar{R}}_i &= T^{-1} \bar{R}_i \\ \hat{x}_m(t) &= T^{-1} x_m(t) \\ \hat{y}_m(t) &= T_m^{-1} y_m(t) \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Μια υλοποίηση του μοντέλου αναφοράς στην κανονική μορφή φαίνεται στο Σχήμα 3.1. Τα μοντέλα αναφοράς  $(\hat{A} - \hat{D}\hat{C}, \hat{C})$  και  $(A - DC, C)$  θα ήταν ισοδύναμες περιγραφές του ίδιου συστήματος αν το  $\hat{y}_m(t)$  ήταν στο αρχικό σύστημα συντεταγμένων, αν δηλ. ο πίνακας μετασχηματισμού της εξόδου  $T_m^{-1}$  δεν εμφανιζόταν στην (3.6.3). Το πλεονέκτημα του μετασχηματισμένου χώρου εξόδου καταδεικνύεται αργότερα. Το μειονέκτημα είναι ότι η έξοδος του συστήματος  $y(t)$  θα πρέπει να μετασχηματίζεται προτού ενσωματωθεί στις εκτιμήσεις του μοντέλου αναφοράς.

Με τους  $T^{-1}$  και  $T_m^{-1}$  να έχουν οριστεί, είναι δυνατόν να ξεκινήσουμε μία συστηματική ανάπτυξη της δομής των  $\hat{A}$ ,  $\hat{C}$  και  $\hat{D}$ . Ο πίνακας  $\hat{A}$  είναι της μορφής:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}'_{11} & \hat{A}'_{12} & \cdots & \hat{A}'_{1r} & \hat{\theta}_1 & \hat{\Gamma}'_1 \\ \hat{A}'_{21} & \hat{A}'_{22} & & \vdots & \hat{\theta}_2 & \hat{\Gamma}'_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{A}'_{r1} & \cdots & & \hat{A}'_{rr} & \hat{\theta}_r & \hat{\Gamma}'_r \\ \hat{A}'_{01} & \cdots & \cdots & \hat{A}'_{0r} & \Pi & \hat{\Gamma}'_0 \\ \hat{A}'_{\Gamma 1} & \cdots & \cdots & \hat{A}'_{\Gamma r} & 0 & \hat{A}'_{\Gamma \Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.6.4)$$

Οι υποπίνακες  $\hat{A}'_{\Gamma \Gamma}$  και  $\hat{\Gamma}'_1 \dots \hat{\Gamma}'_r, \hat{\Gamma}'_0$  περιγράφουν τη δυναμική του  $A$  που δεν σχετίζεται με τον  $\bar{R}_l$ . Ο  $\hat{A}'_{\Gamma \Gamma}$  έχει διάσταση  $(n - v_l) \times (n - v_l)$  και οι  $\hat{\Gamma}'_1 \dots \hat{\Gamma}'_r, \hat{\Gamma}'_0$  έχουν αντίστοιχες διαστάσεις. Ο πίνακας  $\Pi$  είναι ο  $v_0 \times v_0$  πίνακας που σχετίζεται με τον  $R_{0g}$  στην (3.2.18)– αυτό μπορεί να επαληθευτεί αν μετατρέψουμε την (3.2.18) στην κανονική μορφή. Όμοια οι  $\hat{\theta}_1 \dots \hat{\theta}_r$  είναι πίνακες που έχουν μόνο μία μη μηδενική γραμμή αντίστοιχη μιας γραμμής του  $\theta$ , όπως αυτός ορίζεται στην (3.2.18):

$$\hat{\theta}_i = \begin{bmatrix} \theta_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.5)$$

Οι υπόλοιποι υποπίνακες του  $\hat{A}$  σχετίζονται με τους χώρους ανίχνευσης  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Ο σκοπός του μετασχηματισμού είναι να θέσουμε αυτούς τους υποπίνακες σε μια πρότυπη μορφή. Οι εκτός διαγωνίου πίνακες  $\hat{A}'_{ij}$  είναι  $v_i \times v_j$  πίνακες με μόνο μία μη μηδενική στήλη:

$$\hat{A}'_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{ij1} \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{a}_{ijv_i} \end{pmatrix} = (0|\hat{a}_{ij}) \quad i = 1 \dots r, 0, \Gamma, \quad j = 1 \dots r, \quad i \neq j \quad (3.6.6)$$

Οι διαγώνιοι υποπίνακες είναι  $v_i \times v_i$  πίνακες της μορφής:

$$\hat{A}'_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -p'_{i1} \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & -p'_{iv_i} \end{pmatrix} \quad (3.6.7)$$

Ο πίνακας εξόδου  $\hat{C}$  έχει απλούστερη δομή από τον  $\hat{A}$ :

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{c}_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \hat{c}_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \hat{c}_r & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \hat{C}_{\Gamma m} \end{pmatrix} \quad (3.6.8)$$

όπου  $\hat{c}_1 \dots \hat{c}_r$  είναι μοναδιαία διανύσματα στους  $v_1 \dots v_r$ -διάστατους υποχώρους:

$$\hat{c}_i = \hat{e}_{v_i v_i}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad i = 1 \dots r$$

Με τα  $\hat{A}$  και  $\hat{C}$  να έχουν προσδιοριστεί πλήρως, η προσοχή μας μπορεί να στραφεί στον αλγόριθμο επιλογής του  $\hat{D}$ . Ο  $\hat{D}$  θα επιλεγεί ως άθροισμα τριών όρων :

$$\hat{D} = \hat{D}_{FR} + \hat{D}_\psi + \hat{D}_\Gamma \quad (3.6.9)$$

όπου

- ο  $\hat{D}_{FR}$  επιλέγεται έτσι ώστε οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  να είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$ , δηλ. επιλέγεται ώστε να εξασφαλίσει ότι ο  $\hat{D}$  αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης για τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ .
- οι  $\hat{D}_\psi$  και  $\hat{D}_\Gamma$  χρησιμοποιούνται για την εναπόθεση των ιδιοτιμών του  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$ , με τέτοιο τρόπο όμως ώστε να μην παραβιάζεται η ιδιότητα του αναλλοίωτου.

Παρατηρήσεις:

- 1) Με ένα δοθέν σύνολο επιθυμητών ιδιοτιμών ο  $\hat{D}$  είναι εν γένει μοναδικός, ωστόσο οι συνισταμένοι πίνακες  $\hat{D}_{FR}$ ,  $\hat{D}_\psi$  και  $\hat{D}_\Gamma$  γενικά δεν είναι.
- 2) Αν  $r = m$  τότε  $\hat{D}_\Gamma = 0$ .

Μια καλή επιλογή για τον  $\widehat{D}_{FR}$  είναι η ακόλουθη:

$$\widehat{D}_{FR} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a}_{12} & \cdots & \hat{a}_{1r} & 0 & 0 \\ \hat{a}_{21} & 0 & \cdots & \hat{a}_{2r} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{a}_{r1} & \hat{a}_{r2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \hat{a}_{01} & \hat{a}_{02} & \cdots & \hat{a}_{0r} & 0 & 0 \\ \hat{a}_{\Gamma 1} & \hat{a}_{\Gamma 2} & \cdots & \hat{a}_{\Gamma r} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.10)$$

όπου τα διανύσματα  $\hat{a}_{12}$  κτλ. ορίζονται στην (3.6.6). Με αυτήν την επιλογή του  $\widehat{D}_{FR}$  ο  $\hat{A} - \widehat{D}_{FR}\hat{C}$  γίνεται περίπου μπλοκ διαγώνιος:

$$\hat{A} - \widehat{D}_{FR}\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{A}'_{11} & 0 & \cdots & 0 & \hat{\Theta}_1 & \hat{\Gamma}'_1 \\ 0 & \hat{A}'_{22} & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \hat{A}'_{rr} & \hat{\Theta}_r \\ \vdots & & & & \ddots & \Pi \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \hat{A}'_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.6.11)$$

Το γεγονός ότι ο  $\hat{A} - \widehat{D}_{FR}\hat{C}$  είναι μπλοκ διαγώνιος είναι ικανό να εγγυηθεί ότι οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  είναι αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $\hat{A} - \widehat{D}_{FR}\hat{C}$ .

Μια παραλλαγή του ανωτέρου επιχειρήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξουμε ότι αναγκαία και ικανή απαίτηση για να είναι οι  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$  αναλλοίωτοι αναφορικά με τον  $\hat{A} - \widehat{D}\hat{C}$  είναι ο  $\hat{A} - \widehat{D}\hat{C}$  να εμφανίζει την ιδιότητα να είναι μερικώς μπλοκ διαγώνιος, όπως στην (3.6.11). Ο πίνακας  $\widehat{D}_\psi$  μπορεί να επιλεγεί να εναποθέτει τις ιδιοτιμές του  $\hat{A} - \widehat{D}\hat{C}$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ , χωρίς να παραβιάζει αυτόν τον περιορισμό. Η γενική λύση για τον  $\widehat{D}_\psi$  είναι η ακόλουθη:

$$\widehat{D}_\psi = \begin{pmatrix} d_{\psi 1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_{\psi 2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{\psi r} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6.12)$$

όπου τα  $v_1 \dots v_r$ -διάστατα διανύσματα  $d_{\psi 1} \dots d_{\psi r}$  ικανοποιούν την:

$$d_{\psi_i} = \begin{bmatrix} -p'_{i1} + p_{i1} \\ -p'_{i2} + p_{i2} \\ \vdots \\ -p'_{iv_i} + p_{iv_i} \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots r \quad (3.6.13)$$

Οι συντελεστές  $p'_{i1} \dots p'_{iv_i}$  είναι τα στοιχεία των  $\hat{A}'_{11} \dots \hat{A}'_{rr}$  από την (3.6.7). Οι συντελεστές  $p_{i1} \dots p_{iv_i}$  είναι οι συντελεστές των επιθυμητών σχετικών ελάχιστων πολυωνύμων  $\psi_1(\cdot) \dots \psi_r(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} \psi_i(\lambda) &= \lambda^{v_i} + p_{iv_i}\lambda^{v_i-1} + \dots + p_{i2}\lambda + p_{i1} & i = 1 \dots r & \quad (3.6.14) \\ &= (\lambda - \lambda_{i1})(\lambda - \lambda_{i2}) \dots (\lambda - \lambda_{iv_i}) \end{aligned}$$

όπου  $\lambda_{i1} \dots \lambda_{iv_i}$  είναι οι επιθυμητές ιδιοτιμές του  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$ . Με τη βοήθεια της (3.6.8) είναι εύκολο να εξακριβώσουμε ότι:

$$\hat{A} - (\hat{D}_{FR} + \hat{D}_\psi)\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \dots & 0 & \hat{\theta}_1 & \hat{\Gamma}'_1 \\ 0 & \hat{A}_{22} & & \vdots & \hat{\theta}_2 & \hat{\Gamma}'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \hat{A}_{rr} & \hat{\theta}_r & \hat{\Gamma}'_r \\ \vdots & & & 0 & \Pi & \hat{\Gamma}'_0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \hat{A}'_{r\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.6.15)$$

όπου οι διαγώνιοι υποπίνακες είναι:

$$\hat{A}_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -p_{i1} \\ 1 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -p_{i(v_i-1)} \\ 0 & & 0 & 1 & -p_{iv_i} \end{pmatrix} \quad (3.6.16)$$

Από την (3.6.16), έπεται ότι το γινόμενο  $\psi_1(\cdot)\psi_2(\cdot) \dots \psi_r(\cdot)$  διαιρεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του  $\hat{A} - (\hat{D}_{FR} + \hat{D}_\psi)\hat{C}$  και επομένως καθεμία εκ των  $\lambda_{i1} \dots \lambda_{iv_i}$  κτλ. είναι ιδιοτιμή του  $\hat{A} - (\hat{D}_{FR} + \hat{D}_\psi)\hat{C}$  σχετιζόμενη με τον κατάλληλο χώρο αντίχενωσης.

Αν  $r = m$ , όπως αναφέρθηκε και προηγούμενα ο προσδιορισμός του  $\hat{D}$  έχει ολοκληρωθεί. Σε διαφορετική περίπτωση, το τελευταίο βήμα στην επιλογή του  $\hat{D}$  είναι να επιλέξουμε τον  $\hat{D}_\Gamma$  για να εναποθέσουμε τις υπόλοιπες  $n - v_I$  ιδιοτιμές του  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$  που μπορούν να τοποθετηθούν. (Οι

$v_0$  ιδιοτιμές του  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$  που σχετίζονται με τον  $R_{0g}$  είναι μη ελέγξιμες). Η γενική λύση για τον  $\hat{D}_\Gamma$  είναι:

$$\hat{D}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \hat{D}_{\Gamma 1} \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{D}_{\Gamma 2} \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{D}_{\Gamma r} \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{D}_{\Gamma 0} \\ 0 & \cdots & 0 & \hat{D}_{\Gamma m} \end{pmatrix} \quad (3.6.17)$$

όπου ο  $\hat{D}_{\Gamma m}$  είναι ένας  $(n - v_I) \times (m - r)$  υποπίνακας. Η τελική έκφραση για τον  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$  είναι τότε:

$$\hat{A} - \hat{D}\hat{C} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \cdots & 0 & \hat{\theta}_1 & \hat{\Gamma}_1 \\ 0 & \hat{A}_{22} & & \vdots & \hat{\theta}_2 & \hat{\Gamma}_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \hat{A}_{rr} & \hat{\theta}_r & \hat{\Gamma}_r \\ \vdots & & & 0 & \Pi & \hat{\Gamma}_0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \hat{A}_{\Gamma\Gamma} \end{pmatrix} \quad (3.6.18)$$

όπου :

$$\hat{\Gamma}_i = \hat{\Gamma}'_i - \hat{D}_{\Gamma i} \hat{C}_{\Gamma m} \quad i = 1 \dots r, 0 \quad (3.6.19)$$

$$\hat{A}_{\Gamma\Gamma} = \hat{A}'_{\Gamma\Gamma} - \hat{D}_{\Gamma m} \hat{C}_{\Gamma m}$$

Εξαιτίας της δομής του  $\hat{C}$ , το μόνο αποτέλεσμα του  $\hat{D}_\Gamma$  είναι να αλλάξει τις τελευταίες  $n - v_I$  στήλες του  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$ . Επομένως, η τιμή του επηρεάζει μόνο τις  $n - v_I$  ιδιοτιμές του  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$  που δεν σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r, R_0$ .

Η υπολογιστική χρησιμότητα της κανονικής μορφή φανερώνεται από την ευκολία με την οποία ο  $\hat{D}$  στην (3.6.9) μπορεί να προσδιοριστεί. Ο  $\hat{D}_{FR}$  μπορεί να επιλεγεί με εποπτεία χρησιμοποιώντας την (3.6.10). Από τη στιγμή που έχει επιλεγεί ένα σύνολο επιθυμητών ιδιοτιμών  $\lambda_{i1} \dots \lambda_{iv_i}$  κτλ, το μόνο που απαιτείται για να προσδιορίσουμε τον  $\hat{D}_\psi$  στην (3.6.12) είναι να υπολογίσουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου στην (3.6.14). Αν το φίλτρο ανίχνευσης έχει σχεδιαστεί να ανιχνεύει  $m$  διαχωρίσιμες στην έξοδο αστοχίες, αν δηλ.  $r = m$  τότε ο  $\hat{D}_\Gamma$  είναι μηδενικός. Σε διαφορετική περίπτωση, ο  $\hat{D}_\Gamma$  προσδιορίζεται μέσω αλγορίθμου

τον οποίο θα περιγράψουμε παρακάτω. Ουσιαστικά δηλ. η κανονική μορφή επιτρέπει ο  $\hat{D}$  να επιλεγεί με απλή εποπτεία.

Υπάρχει και ένα δεύτερο σημαντικό πλεονέκτημα της κανονικής μορφή. Εξαιτίας του ότι ο  $\hat{A} - \hat{D}\hat{C}$  είναι μερικώς μπλοκ διαγώνιος και των αντίστοιχων διαμερίσεων του  $\hat{C}$ , το μοντέλο αναφοράς  $(\hat{A} - \hat{D}\hat{C}, \hat{C})$  μπορεί να αποσυζευχθεί σε ένα σύνολο  $r + 2$  υποσυστημάτων διάστασης  $v_1 \dots v_r, v_0, n - v_l$  αντίστοιχα. Με τα  $\hat{x}_m(t)$ ,  $\hat{y}_m(t)$  και  $\hat{B}$  διαμερισμένα όμοια με τα  $(\hat{A} - \hat{D}\hat{C})$  και  $\hat{C}$  αντίστοιχα:

$$\hat{x}_m(t) = \begin{bmatrix} x_{m1}(t) \\ \vdots \\ x_{mr}(t) \\ x_{m0}(t) \\ x_{m\Gamma}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6.20)$$

$$\hat{y}_m(t) = \begin{bmatrix} y_{m1}(t) \\ \vdots \\ y_{mr}(t) \\ y_{m\Gamma}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6.21)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \vdots \\ \hat{B}_r \\ B_0 \\ B_\Gamma \end{bmatrix} \quad (3.6.22)$$

Τότε το αποσυζευγμένο μοντέλο αναφοράς ικανοποιεί τις  $r$  εξισώσεις:

$$\dot{\hat{x}}_{mi}(t) = \hat{A}_{ii}\hat{x}_{mi}(t) + \hat{B}_i u(t) + \hat{\theta}_i \hat{x}_{m0}(t) + \hat{\Gamma}_i \hat{x}_{m\Gamma}(t) \quad (3.6.23)$$

$$y_{mi}(t) = \hat{c}_i \hat{x}_{mi}(t) \quad i = 1 \dots r$$

όπου τα  $\hat{x}_{m0}(t)$  και  $\hat{x}_{m\Gamma}(t)$  είναι λύσεις των εξισώσεων:

$$\dot{\hat{x}}_{m0}(t) = \Pi \hat{x}_{m0}(t) + \hat{B}_0 u(t) + \hat{\Gamma}_0 \hat{x}_{m\Gamma}(t) \quad (3.6.24)$$

$$\dot{\hat{x}}_{m\Gamma}(t) = \hat{A}_{\Gamma\Gamma} \hat{x}_{m\Gamma}(t) + \hat{B}_\Gamma u(t) \quad (3.6.25)$$

$$y_{m\Gamma}(t) = \hat{C}_{\Gamma m} \hat{x}_{m\Gamma}(t)$$

Αν οι αστοχίες που σχετίζονται με τα  $f_1 \dots f_r$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμες τότε η (3.6.24) εξαφανίζεται. Αν επιπλέον  $r = m$  τότε εξαφανίζεται και η (3.6.25) και μένει μόνο η (3.6.23). Η



αποσύζευξη μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική μείωση των υπολογιστικών απαιτήσεων του μοντέλου αναφοράς.

Τοποθέτηση των υπόλοιπων  $n - v_l$  ιδιοτιμών του  $A - DC$ : Υπενθυμίζουμε ότι,

$$M'_D \triangleq \begin{bmatrix} C'_l \\ C'_l(A - D_l C) \\ \vdots \\ C'_l(A - D_l C)^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.6.26)$$

Εφαρμόζουμε τη διαδικασία της ορθογωνίας μείωσης στον  $M'_D$  όπως αυτή περιγράφεται στο Παράρτημα Α2. Ξεκινάμε τη διαδικασία με:

$$\Omega^{(1)} = E^n$$

όπου  $E^n$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας

και έστω ότι αυτή τελειώνει με:

$$\Omega_l = \Omega^{(nm-m+1)}$$

Χρειάστηκαν συνολικά  $n - v_l$  μειώσεις με χρήση της ii). Εξαιτίας του τρόπου με τον οποίο κατασκευάστηκε ο  $C'_l$ , υπήρχαν μόνο  $m - r$  γραμμές του  $C'_l$  στην (3.6.26) για τις οποίες η i) εγγυάται μη μηδενικό βοηθητικό διάνυσμα. Ας υποθέσουμε χάριν ευκολίας ότι αυτές είναι οι τελευταίες  $m - r$  γραμμές  $c'_{r+1} \dots c'_m$  του  $C'_l$ . Για  $i = r + 1 \dots m$ , έστω  $q_i$  ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο όλα τα  $c'_i \dots c'_i(A - D_l C)^{q_i-1}$  έχουν μη μηδενικά βοηθητικά διανύσματα και έστω  $w'_i$  το βοηθητικό διάνυσμα το οποίο σχετίζεται με το  $c'_i(A - D_l C)^{q_i-1}$ . Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν  $n - v_l$  γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα στην ακολουθία

$$w'_{r+1} \dots (A - D_l C)^{q_{r+1}-1} w'_{r+1} \dots (A - D_l C)^{q_m-1} w'_m$$

και ότι αυτά τα διανύσματα, μαζί με μια βάση του  $\bar{R}_l$  ορίζουν μια βάση για το χώρο κατάστασης. Συνεπώς, ο πίνακας  $T_0$  που απαιτείται στην ενότητα 3.6 είναι

$$T_0 = [z_1 \dots z_{v_0} w'_{r+1} \dots (A - D_l C)^{q_{r+1}-1} w'_{r+1} \dots (A - D_l C)^{q_m-1} w'_m]$$

Η ενότητα 3.2.4 αναφέρει ότι οι  $v_l$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_l$  μπορούν να τοποθετηθούν σχεδόν αυθαίρετα απαιτώντας ο  $D$  να είναι οποιαδήποτε λύση της:

$$DCF = \psi_F(A) \quad (3.6.27)$$

όπου,

$$\psi_F(A) = [\psi_1(A)g_1 \dots \psi_r(A)g_r]$$

και  $\psi_1(\cdot) \dots \psi_r(\cdot)$  είναι τα επιθυμητά ελάχιστα πολυώνυμα τα οποία σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_r$ . Αν  $r < rk(C)$  η λύση της (3.6.27) δεν είναι μοναδική. Μοναδική λύση λαμβάνουμε, ωστόσο, αν οι υπόλοιπες  $n - v_l$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  προσδιοριστούν. Ο πλέον βολικός τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό είναι να χρησιμοποιήσουμε τα διανύσματα  $w'_{r+1} \dots w'_m$ .

Τα  $w'_{r+1} \dots w'_m$  θα τα χειριστούμε ως δημιουργούς ανίχνευσης ( $\text{mod } \bar{R}_l$ ). Η (3.6.27) αφήνει αρκετή ελευθερία στην επιλογή του  $D$  για να γίνουν οι χώροι που παράγονται από  $w'_{r+1} \dots (A - D_l C)^{q_{r+1}-1} w'_{r+1}$  κτλ. αναλλοίωτοι ( $\text{mod } \bar{R}_l$ ). Έστω  $D'_\psi$  οποιαδήποτε λύση της (3.6.27).

Αν  $\psi'_{r+1}(\cdot) \dots \psi'_m(\cdot)$  είναι τα επιθυμητά ελάχιστα πολυώνυμα τα οποία σχετίζονται με αυτούς τους χώρους:

$$\psi'_i(\lambda) = \lambda^{q_i} + p'_{iq_i} \lambda^{q_i-1} + \dots + p'_{i1} \quad i = r + 1 \dots m \quad (3.6.28)$$

τότε μία μοναδική λύση για τον  $D$  η οποία αναθέτει σε όλες τις  $n$  ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  την επιθυμητή τιμή είναι:

$$D = D'_\psi + D_\Gamma \quad (3.6.29)$$

όπου ο  $D_\Gamma$  είναι λύση της:

$$D_\Gamma C'_l W = \psi'_w(A - D'_\psi C) \quad (3.6.30)$$

και:

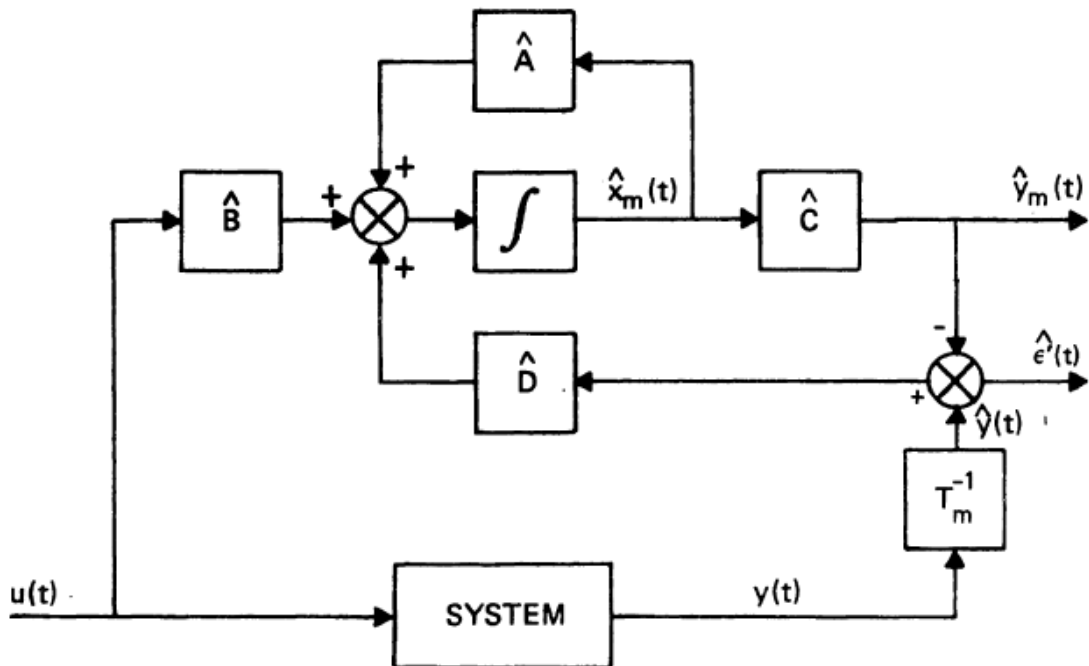
$$W = \left[ (A - D'_\psi C)^{q_{r+1}-1} w'_{r+1} \dots (A - D'_\psi C)^{q_m-1} w'_m \right] \quad (3.6.31)$$

$$\psi'_w(A - D'_\psi C) = [\psi'_{r+1}(A - D'_\psi C)w'_{r+1} \dots \psi'_m(A - D'_\psi C)w'_m] \quad (3.6.32)$$

Άσχετα από τον τρόπο με τον οποίο επιλέγεται ο  $D'_\psi$ , η (3.6.29) παρέχει μοναδική αναπαράσταση για τον  $D$ . Επομένως, αν χρησιμοποιείται η κανονική μορφή για τον προσδιορισμό του  $D'_\psi$  ως:

$$D'_\psi = D_{FR} + D_\psi \quad (3.6.33)$$

όπου τα  $D_{FR}$  και  $D_\psi$  είναι μετασχηματισμοί των λύσεων των (3.6.10) και (3.6.12), τότε οι (3.6.29) και (3.6.30) μπορούν να χρησιμοποιηθούν προκειμένου να προσδιορίσουμε τον  $D_\Gamma$  και να ολοκληρώσουμε την επιλογή του  $D$ .



Σχήμα 3.1: Υλοποίηση του συστήματος ανίχνευσης αστοχιών σε κανονική μορφή

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## ΑΣΤΟΧΙΕΣ ΣΕ ΑΙΣΘΗΤΗΡΕΣ

### 4.1 Πληροφορία για αστοχία σε αισθητήρα σε πλήρως μετρήσιμο σύστημα

Θα δείξουμε ότι το σφάλμα που παράγεται από αστοχία σε αισθητήρα, εν γένει, θα κείται σε διδιάστατο επίπεδο.

Έστω ότι μία αστοχία συμβαίνει στον  $i$ -οστό αισθητήρα:

$$y(t) = Cx(t) + \hat{e}_{mi}n_{ci}(t) \quad (2.2.9)$$

όπου  $\hat{e}_{mi}$  είναι ένα μοναδιαίο  $m$ -διάνυσμα στην  $i$ -οστή διεύθυνση συντεταγμένων, και  $n(t)$  είναι μια αυθαίρετη βαθμωτή συνάρτηση του χρόνου. Αν αντικαταστήσουμε την (2.2.1) με την (2.2.9) στην περιγραφή του συστήματος και θέσουμε  $A - DC = -\sigma_f I^*$  (όπου  $I$  είναι ο  $n \times n$  μοναδιαίος πίνακας και  $\sigma_f$  είναι ένας θετικός αριθμός), η εξίσωση σφάλματος γίνεται:

$$\dot{\varepsilon}(t) = -\sigma_f \varepsilon(t) - D\hat{e}_{mi}n_{ci}(t) \quad (4.1.1)$$

Η λύση της (4.1.1) είναι η εξής:

$$\varepsilon(t) = e^{-\sigma_f(t-t_0)}\varepsilon(t_0) - D\hat{e}_{mi} \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau \quad (4.1.2)$$

και το μόνιμο σφάλμα είναι το εξής:

$$\varepsilon(t) = -D\hat{e}_{mi} \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau \quad (4.1.3)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το  $\varepsilon(t)$  δεν είναι ούτε προσβάσιμο σήμα, ούτε μπορεί να παραχθεί από προσβάσιμα σήματα. Η εξίσωση (2.2.9) δεν μπορεί να λυθεί ως προς  $x(t)$  επειδή το  $n_{ci}(t)$  είναι άγνωστο. Ωστόσο, το σφάλμα εξόδου

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) &= C\varepsilon(t) + \hat{e}_{mi}n_{ci}(t) \\ &= -CD\hat{e}_{mi} \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau + \hat{e}_{mi}n_{ci}(t) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

είναι προσβάσιμο. Το  $n_{ci}(t)$  και το  $\int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau$  είναι βαθμωτά, συνεπώς αυτό το μόνιμο σφάλμα πάντα κείται στο επίπεδο που σχηματίζουν στο χώρο εξόδου τα δύο  $m$ -διανύσματα,  $CD\hat{e}_{mi}$  και  $\hat{e}_{mi}$ . Εν γένει, το  $\varepsilon'(t)$  θα βρίσκεται σε αυτό το επίπεδο. Οι μόνες περιπτώσεις στις οποίες το  $\varepsilon'(t)$  διατηρεί σταθερή διεύθυνση είναι οι εξής:

$$1) \text{ Αν } CD\hat{e}_{mi} = \alpha\hat{e}_{mi} \quad (4.1.5)$$

ή

2) Αν η  $n_{ci}(t)$  ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$n_{ci}(t) = \alpha \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau \quad (4.1.6)$$

όπου  $\alpha$  είναι μια αυθαίρετη βαθμωτή σταθερά.

Το επίπεδο σφάλματος που ορίζεται από τα  $CD\hat{e}_{mi}$  και  $\hat{e}_{mi}$  είναι το ίδιο για όλες τις ισοδύναμες περιγραφές του συστήματος.

Όταν  $m = n$  και ο  $C$  είναι ο μοναδιαίος πίνακας, η εξίσωση (\*) μπορεί να επιλυθεί μοναδικά ως προς  $D$  για να λάβουμε:

$$D = A + \sigma_f I \quad (4.1.7)$$

Τότε

$$\hat{e}_{mi} = \hat{e}_i \quad (4.1.8)$$

και

$$CD\hat{e}_{mi} = D\hat{e}_i = (A + \sigma_f I)\hat{e}_i = a_i + \sigma_f \hat{e}_i \quad (4.1.9)$$

όπου  $a_i$  είναι η  $i$ -οστή στήλη του  $A$ . Τότε η (4.1.4) μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \varepsilon'(t) &= -(a_i + \sigma_f \hat{e}_i) \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau + \hat{e}_i n_{ci}(t) \\ &= -a_i \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau + \hat{e}_i \left[ n_{ci}(t) - \sigma_f \int_{t_0}^t e^{-\sigma_f(t-\tau)} n_{ci}(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Το διδιάστατο επίπεδο σφάλματος καθορίζεται μοναδικά από τα  $a_i$  και  $\hat{e}_i$ . (Αν το  $a_i$  τυχαίνει να είναι συγγραμμικό με το  $\hat{e}_i$  τότε το επίπεδο σφάλματος εκφυλίζεται και το σφάλμα κείται στη

σταθερή διεύθυνση του  $\hat{e}_i$ ). Ένα σφάλμα το οποίο παραμένει περιορισμένο στο επίπεδο που σχηματίζουν τα  $a_i$  και  $\hat{e}_i$  είναι ενδεικτικό εμφάνισης αστοχίας στον  $i$ -οστό αισθητήρα.

Καθένας εκ των  $m$  αισθητήρων μπορεί να σχετιστεί με ένα επίπεδο σφάλματος στο χώρο εξόδου. Ένα σήμα σφάλματος το οποίο παραμένει σε ένα απ' αυτά τα επίπεδα σφάλματος είναι ενδεικτικό αστοχίας στον αισθητήρα με τον οποίο έχει συσχετιστεί. Αφού υπάρχουν  $m$  επίπεδα σφάλματος στον  $m$ -διάστατο χώρο εξόδου, αυτά τα επίπεδα θα τέμνονται (αν δεν είναι όλα τα  $m$  επίπεδα εκφυλισμένα). Ωστόσο, ακόμη και όταν τα επίπεδα σφάλματος που σχετίζονται με δύο διαφορετικούς αισθητήρες τέμνονται, είναι και εκεί δυνατόν να διαφοροποιήσουμε μεταξύ της αστοχίας των δύο αισθητήρων, εκτός από τις ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις:

- Τα δύο επίπεδα σφάλματος συμπίπτουν, ή στην πραγματικότητα, και οι δύο αισθητήρες έχουν το ίδιο επίπεδο σφάλματος.
- Το σήμα σφάλματος διατηρεί σταθερή διεύθυνση που συμπίπτει με την τομή των δύο επίπεδων σφάλματος. Προκειμένου να συμβεί κάτι τέτοιο, η βαθμωτή συνάρτηση  $n_{ci}(t)$  που αντιπροσωπεύει την αστοχία του αισθητήρα θα πρέπει να ικανοποιεί μία ειδική εξίσωση της μορφής (4.1.6).

Οι δύο ανωτέρω ειδικές περιπτώσεις αφορούν αστοχίες που δεν είναι διακρίσιμες βάσει της κατεύθυνσης μόνο.

#### 4.2 Πληροφορία για αστοχία σε αισθητήρα σε μερικώς μετρήσιμο σύστημα

Οι εξισώσεις σφάλματος που αντιστοιχούν σε αστοχία του  $i$ -οστού αισθητήρα είναι οι εξής:

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) - d_i n_{ci}(t) : \varepsilon(0) \text{ δοθέν} \quad (2.2.12)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t) + \hat{e}_{mi} n_{ci}(t)$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η αστοχία που περιγράφεται από τις παραπάνω εξισώσεις θα παρήγαγε πάντα ένα σφάλμα εξόδου περιορισμένο στην κατεύθυνση  $\hat{e}_{mi}$  αν θέταμε το  $d_i$  ίσο με το μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η μέτρηση  $y_i(t)$  δε θα τροφοδοτούνταν στο φίλτρο καθόλου. Αλλά στο σχεδιασμό των φίλτρων ανίχνευσης, όπως έχει ήδη αναφερθεί, ενδιαφερόμαστε όχι μόνο με το να περιορίσουμε τα σφάλματα εξόδου σε αναγνωρίσιμες περιοχές, είτε ευθείες είτε επίπεδα, αλλά επίσης με το να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$ . Το να θέτουμε το  $d_i$  ίσο με το μηδέν αφαιρεί τον έλεγχο από μια ιδιοτιμή που σε διαφορετική περίπτωση θα μπορούσε να τεθεί

ελεύθερα στην πιο χρήσιμη τιμή. Πάραυτα, σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτό μπορεί να αποτελεί επιθυμητή επιλογή.

Οι αλγόριθμοι που αναπτύχθηκαν προηγούμενα χρησιμοποιούν τα διανύσματα συμβάντος στις εξισώσεις σφάλματος για την επιλογή του  $D$ . Αφού το διάνυσμα συμβάντος είναι στήλη του  $D$ , αυτό οδηγεί σε ένα κυκλικό επιχείρημα. Προκειμένου να βγούμε από αυτή τη δυσκολία, είναι απαραίτητο να αντικαταστήσουμε την παραπάνω εξίσωση με εξισώσεις σφάλματος στις οποίες το  $d_i$  δεν εμφανίζεται ρητά.

Έστω  $f$  κάποιο διάνυσμα που ικανοποιεί την:

$$\hat{e}_{mi} = Cf \quad (4.2.1)$$

και ας θεωρήσουμε τις συνέπειες του να απαιτήσουμε ο  $D$  να αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης για το  $f$ . Όπως έχει αναφερθεί ο  $D$  θα πρέπει να ικανοποιεί μία εξίσωση της μορφής:

$$(A - DC)f = \xi_f \quad (4.2.2)$$

όπου  $\xi_f$  είναι κάποιο διάνυσμα στο χώρο ανίχνευσης του  $f$ . Λόγω της (4.2.1) η (4.2.2) γίνεται:

$$d_i = Af - \xi_f \quad (4.2.3)$$

Είναι εμφανές ότι η απαίτηση το σύστημα ανίχνευσης αστοχιών να ανιχνεύει την «αστοχία» που σχετίζεται με το  $f$  έχει ως αποτέλεσμα η  $i$ -οστή στήλη του  $D$  να γίνεται συγκεκριμένη με αποτέλεσμα να μην υφίσταται πλέον κυκλικό επιχείρημα. Είναι τότε δυνατό να απαιτήσουμε οι υπόλοιπες στήλες του  $D$  να ανιχνεύουν μία δεύτερη «αστοχία» σχετιζόμενη με το  $d_i n_{ci}(t)$ , δηλ. με το  $(Af - \xi_f)n_{ci}(t)$ . Για να δώσουμε έμφαση σε αυτήν την απαίτηση, η (2.2.12) μπορεί να αντικατασταθεί από μία εξίσωση σφάλματος με δύο διανύσματα συμβάντος :

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A - DC)\varepsilon(t) + (Af - \xi_f)n_{ci}(t) + f \quad (4.2.4)$$

$$\varepsilon'(t) = C\varepsilon(t)$$

Η παραπάνω εξίσωση συσχετίζει το ζευγάρι διανυσμάτων συμβάντος  $\{f, Af - \xi_f\}$  με την αστοχία στον  $i$ -οστό αισθητήρα.

Δύο σημεία αναφορικά με την (4.2.4) χρήζουν περαιτέρω σχολιασμού. Το πρώτο είναι ότι η χρήση δύο διανυσμάτων συμβάντος για το χαρακτηρισμό της αστοχίας σε αισθητήρα γενικά συνεπάγεται ότι το σφάλμα εξόδου που παράγεται από μία αστοχία σε αισθητήρα δεν μπορεί να

περιοριστεί σε μία μόνο διεύθυνση. Αν τα  $Cf$  και  $C(Af - \xi_f)$  δεν είναι συγγραμμικά και αν το  $C(Af - \xi_f)$  είναι διάφορο του μηδενός, το σφάλμα εξόδου μπορεί να περιοριστεί μόνο στο επίπεδο που παράγεται από τα  $Cf$  και  $C(Af - \xi_f)$ .

Το δεύτερο σημείο είναι ότι ο μόνος περιορισμός για το  $f$  είναι ότι πρέπει να ικανοποιεί την (4.2.1) και ο μόνος περιορισμός για το  $\xi_f$  είναι ότι θα πρέπει να ανήκει στο χώρο ανίχνευσης του  $f$ . Συχνά, μπορεί να επιλεγεί  $f$ , το οποίο αποτελεί διάνυσμα συμβάντος για αστοχία σε ενεργοποιητή ή μεταβολή στη δυναμική του συστήματος. Όταν υπάρχει τέτοιο  $f$ , ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών σχεδιασμένο για το  $\{f, Af - \xi_f\}$  μπορεί να ανιχνεύσει και να απομονώσει και την αστοχία του συστατικού μέρους που σχετίζεται με το  $f$  και την αστοχία του αισθητήρα. Η αστοχία του συστατικού μέρους που σχετίζεται με το  $f$  παράγει σφάλμα εξόδου που είναι κατά μήκος μόνο της διεύθυνσης  $Cf$ . Η αστοχία στον αισθητήρα παράγει σφάλμα εξόδου το οποίο περιορίζεται στο επίπεδο που παράγεται από τα  $Cf$  και  $C(Af - \xi_f)$ .

Η τελευταία δυσκολία με τις αστοχίες σε αισθητήρες αφορά αισθητήρες οι οποίοι είναι γραμμικά εξαρτημένοι. Αν  $rk(C) < m$ , η έξοδος κάποιων αισθητήρων είναι γραμμικός συνδυασμός της εξόδου των υπολοίπων. Το γεγονός αυτό εισάγει κάποια ασάφεια στον καθορισμό των αστοχιών των αισθητήρων. Για παράδειγμα, αν δύο αισθητήρες είναι ίδιοι, είναι αδύνατο να προσδιορίσουμε από την έξοδο του συστήματος ανίχνευσης αστοχιών ποιος από τους δύο έχει χαλάσει. Για να λύσουμε αυτό το πρόβλημα αυξάνουμε τη διάσταση του μοντέλου κατάστασης.

Διαδικασία σχεδίασης: Ζεύγη διανυσμάτων συμβάντος  $\{f, Af - \xi_f\}$ , όπου  $\xi_f$  ανήκει στο χώρο ανίχνευσης του  $f$  θα πρέπει να συσχετιστούν με όλες τις αστοχίες αισθητήρων ή τρόποι για τον μοναδικό προσδιορισμό των κατάλληλων στηλών του  $D$  προτού ο  $D$  προσδιοριστεί πλήρως θα πρέπει να αναπτυχθούν.

Υποθέτουμε ότι τα  $f_1 \dots f_s$  είναι ένα σύνολο διανυσμάτων συμβάντος για ένα σύνολο  $s$  αστοχιών του ενδιαφέροντος. Υποθέτουμε επίσης ότι πρόκειται να παρακολουθήσουμε μια αστοχία στον  $i$ -οστό αισθητήρα. Για να θέσουμε την αστοχία αισθητήρα στη μορφή (4.2.4) θα πρέπει να βρούμε ένα  $f$  το οποίο ικανοποιεί την (4.2.1). Κατά σειρά προτίμησης, οι διαδικασίες για να το επιτύχουμε αυτό είναι:

i) Αν κάποιο εκ των  $f_1 \dots f_s$  ικανοποιεί:

$$\hat{e}_{mi} = Cf_k \quad k \in \{1, 2 \dots s\}$$



έστω,

$$f = f_k$$

και όρισε το σύνολο διανυσμάτων συμβάντος  $\{f, Af\}$ . Αυτό το σύνολο είναι το σύνολο διανυσμάτων συμβάντος αναγκαίων για την (4.2.4).

ii) Αν  $f_1 \dots f_l$  είναι ένα υποσύνολο των  $f_1 \dots f_s$  και ένας γραμμικός συνδυασμός των  $f_1$  και  $f_l$  ικανοποιεί την

$$\hat{e}_{mi} = \sum_{k=1,l} a_k C f_k$$

τότε όρισε το σύνολο  $\{f_1 \dots f_l, d_i\}$ . Αυτή η επιλογή θα συζητηθεί περαιτέρω στη συνέχεια.

iii) Βρες ένα  $f$  το οποίο ικανοποιεί την

$$\hat{e}_{mi} = Cf$$

και όρισε το σύνολο  $\{f, Af\}$ .

Η επιλογή ii) διαφέρει από τη διαδικασία που περιγράφηκε προηγουμένως στο ότι το  $d_i$  δεν χρειάζεται να εξαλειφθεί. Αν επιλεγεί φίλτρο ανίχνευσης το οποίο ανιχνεύει τα  $f_1 \dots f_l$  και οι ιδιοτιμές του  $A - DC$  που σχετίζονται με τους  $\bar{R}_1 \dots \bar{R}_l$  τοποθετηθούν χρησιμοποιώντας τις ενότητες 3.2.4 και 3.3.3, το  $d_i$  προσδιορίζεται μοναδικά. Αν απομένει αρκετή ελευθερία στην επιλογή του  $D$  ώστε να ανιχνεύει το  $d_i$ , τότε η αστοχία αισθητήρα μπορεί να ανιχνευθεί μαζί με τις αστοχίες για τα  $f_1 \dots f_l$  και παράγει έξοδο στο χώρο εξόδου που ορίζεται από τα  $\hat{e}_{mi}$  και  $Cd_i$ .

Στην i) και iii) παραπάνω, το  $Af$  μπορεί να αντικατασταθεί από το  $Af - \xi_f$  όπου  $\xi_f$  είναι ένα αυθαίρετο στοιχείο του  $\bar{R}_f$ . Αν το  $Af$  περιέχεται στον  $\bar{R}_f$ , το σφάλμα αισθητήρα μπορεί να κείται σε μία μόνο διεύθυνση και μόνο το  $f$  χρειάζεται να ληφθεί υπόψη. Τα τρία βήματα παρουσιάζονται με σειρά αποτελεσματικότητας με την οποία χρησιμοποιούν τη σχεδιαστική ελευθερία στην επιλογή του  $D$ . Εφόσον η iii) απαιτεί να οριστούν δύο νέα διανύσματα συμβάντος είναι προφανώς η λιγότερο αποτελεσματική. Η επιλογή ii) είναι η πλέον δύσκολη να υλοποιηθεί, η i) η πιο απλή. Η επιλογή i) θα πρέπει πάντα να εξετάζεται πρώτη.

Ξεκινώντας από ένα αρχικό σύνολο διανυσμάτων συμβάντος  $f_1 \dots f_s$ , η εφαρμογή των i)- iii) παράγει ένα μεγαλύτερο σύνολο  $f_1 \dots f_p$ . Όπως υποδείχθηκε, κάποια από τα διανύσματα συμβάντος στο σύνολο θα πρέπει να τα λαμβάνουμε υπόψη σε ζεύγη για το σχεδιαστικό

αλγόριθμο. Αν μια αστοχία αισθητήρα χαρακτηρίζεται από το ζεύγος διανυσμάτων συμβάντος  $\{f, Af\}$ , δεν έχει νόημα να σχεδιάσουμε ένα φίλτρο ανίχνευσης για ένα μόνο διάνυσμα συμβάντος του ζεύγους. Αυτή η εξάρτηση σε ζεύγη θα πρέπει να αναγνωρίζεται στη σχεδιαστική διαδικασία.

Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι αν από τη δομή του μοντέλου αναφοράς κάποιος μπορεί να προσδιορίσει την διάσταση του χώρου ανίχνευσης του  $d_i$ , τότε μπορεί να είναι δυνατόν να γράψουμε την (3.1.5') ως μη γραμμική εξίσωση η οποία μπορεί να λυθεί αριθμητικά. Για παράδειγμα, αν η διάσταση του χώρου ανίχνευσης του  $d_i$  μπορεί να είναι μόνο ένα, τότε

$$g_i = d_i$$

και με το  $d_i$  στη θέση του  $f$ , η (3.1.5') γίνεται:

$$DCd_i = p_1 d_i + Ad_i \quad (4.2.5)$$

Αυτή η μη γραμμική εξίσωση θα πρέπει να λυθεί ταυτόχρονα με τις εξισώσεις που προκύπτουν από τα υπόλοιπα διανύσματα συμβάντος. Το πιο πιθανό είναι ότι για τη λύση θα χρειαστεί ένας αλγόριθμος σε υπολογιστή ο οποίος λύνει συστήματα μη γραμμικών εξισώσεων.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

## ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΜΕ ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

### 5.1 Μέθοδοι διάγνωσης σφαλμάτων

Υπάρχουν δύο βασικές προσεγγίσεις για το πρόβλημα της διάγνωσης σφαλμάτων: η προσέγγιση που βασίζεται στην περίσσεια υλικού εξοπλισμού και η προσέγγιση που βασίζεται στην αναλυτική περίσσεια [13].

Οι μέθοδοι παράλληλου πλεονάζοντος υλικού εξοπλισμού [1], [4], χρησιμοποιούν πολλαπλές λωρίδες αισθητήρων, ενεργοποιητών, υπολογιστών και λογισμικού για να μετρήσουν και/ή να ελέγξουν μια συγκεκριμένη μεταβλητή. Τυπικά, ένα σχήμα ψηφοφορίας εφαρμόζεται στο σύστημα πλεονάζοντος υλικού εξοπλισμού για να αποφασίσουμε εάν και πότε έχει συμβεί κάποια αστοχία και την πιθανή τοποθεσία της μεταξύ των πλεοναζόντων συστατικών του συστήματος. Το σχήμα αυτό στηρίζεται στην ανάπτυξη απλής λογικής και οδηγεί στον αποκλεισμό του οργάνου που έχει υποστεί αστοχία. Για παράδειγμα, εάν ένα από τα τρία πλεονάζοντα σήματα διαφέρει σημαντικά από τα άλλα δύο, το σήμα αυτό αποκλείεται. Οι διατάξεις ψηφοφορίας είναι εύκολα υλοποιήσιμες και συνήθως παρέχουν ταχεία ανίχνευση μεγάλων αστοχιών, όμως είναι εφαρμόσιμες μόνο σε συστήματα που κατέχουν μεγάλο βαθμό παράλληλου πλεονάζοντος υλικού εξοπλισμού. Τα κύρια προβλήματα που συναντώνται στην περίσσεια υλικού εξοπλισμού είναι ο επιπλέον εξοπλισμός και το κόστος συντήρησης και, επιπρόσθετα, ο επιπλέον χώρος που απαιτείται για την εγκατάσταση του εξοπλισμού.

Στην προσέγγιση που βασίζεται στην αναλυτική περίσσεια [9], [14], η μαθηματική σχέση μεταξύ διαφορετικών μεταβλητών μέσα στο σύστημα, που επιβάλλεται από το αναλυτικό μοντέλο του συστήματος (υπό τη μορφή συνήθων διαφορικών εξισώσεων, μοντέλων βάσει δεδομένων, και μοντέλων έμπειρων συστημάτων), λειτουργεί ως ένα σημείο αναφοράς για τη διάγνωση αστοχίας. Πιο συγκεκριμένα, όποτε οι μετρήσεις του συστήματος παραβιάζουν αυτές τις σχέσεις, συμπεραίνεται η παρουσία μίας αστοχίας. Η απόκλιση από τις αναλυτικές σχέσεις μετά την εμφάνιση αστοχιών αντικατοπτρίζεται σε ένα σύνολο από σήματα, τα υπόλοιπα. Έτσι, τα σήματα των υπολοίπων θα πρέπει, σε ιδανικές συνθήκες (δηλαδή απουσία διαταραχών και

θορύβου), να είναι μηδενικά όταν το σύστημα είναι υγιές, ενώ θα πρέπει να αποκλίνουν από το μηδέν όταν εμφανίζονται σφάλματα.

Στο σχήμα της αναλυτικής περίσσειας δεν εισάγονται επιπρόσθετα σφάλματα υλικού εξοπλισμού, καθώς δεν απαιτείται επιπλέον υλικός εξοπλισμός. Κατά συνέπεια, η αναλυτική περίσσεια είναι μάλλον πιο αξιόπιστη από την περίσσεια υλικού εξοπλισμού.

Η διάγνωση αστοχίας που βασίζεται στην αναλυτική περίσσεια, γενικά, αποτελείται από δύο στάδια:

- την παραγωγή υπολοίπων (residual generation) που αποσκοπεί στην παραγωγή ενός σήματος ένδειξης σφάλματος-του υπολοίπου, κάνοντας χρήση των διαθέσιμων μετρήσεων εισόδου-εξόδου του υπό παρακολούθηση συστήματος και
- την λήψη αποφάσεων (decision-making), όπου τα υπόλοιπα εξετάζονται για την πιθανότητα σφαλμάτων και κατόπιν εφαρμόζεται ένας κανόνας αποφάσεων για να καθορίσουμε αν έχει συμβεί κάποιο σφάλμα. Μια διαδικασία αποφάσεων μπορεί να αποτελείται από ένα απλό τεστ κατωφλίου στις στιγμιαίες τιμές ή τους κινητούς μέσους των υπολοίπων ή μπορεί να αποτελείται από μεθόδους θεωρίας στατιστικών αποφάσεων.

Γενικά, για την παραγωγή υπολοίπων, [20], χρησιμοποιούνται τρεις βασικές προσεγγίσεις. Η πρώτη προσέγγιση περιλαμβάνει τις μεθόδους που βασίζονται σε παρατηρητές (observer-based) [17], [18]. Η προσέγγιση αυτή συνίσταται στην εκτίμηση των εξόδων του συστήματος από τις μετρήσεις (ή από ένα υποσύνολο των μετρήσεων) χρησιμοποιώντας παρατηρητή κατάστασης και στον ορισμό των υπολοίπων ως η διαφορά μεταξύ των πραγματικών μετρήσεων και των εκτιμήσεων του μοντέλου.

Η δεύτερη προσέγγιση είναι η ισοτιμία χώρου (parity space) [21], [37], [40], όπου το υπόλοιπο παράγεται με χρήση των αποκαλούμενων συναρτήσεων ισοτιμίας που ορίζονται σε ένα χρονικό παράθυρο των δεδομένων εισόδου-εξόδου του συστήματος. Η μέθοδος της ισοτιμίας χώρου βασίζεται σε απλές αλγεβρικές προβολές και στη γεωμετρία, και η βασική ιδέα πίσω από αυτή τη μέθοδο είναι να παρέχει έναν κατάλληλο έλεγχο για την ισοτιμία ή τη συνέπεια διαφόρων μετρήσεων στο υπό παρακολούθηση σύστημα. Παρ' όλα αυτά, σημειώνεται ότι η μέθοδος της ισοτιμίας χώρου είναι περισσότερο ευαίσθητη στον θόρυβο των μετρήσεων και σε διαταραχές σε σύγκριση με τις μεθόδους που βασίζονται σε παρατηρητές, οι οποίες είναι περισσότερο σθεναρές λόγω της δομής του κλειστού βρόχου.

Τέλος, η τρίτη προσέγγιση είναι η εκτίμηση παραμέτρων [23], [24]. Η προσέγγιση αυτή βασίζεται στην υπόθεση ότι τα σφάλματα αντικατοπτρίζονται στις φυσικές παραμέτρους του συστήματος, όπως τριβή, μάζα, ιξώδες, αντίσταση, επαγωγή, χωρητικότητα, κτλ. Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ότι οι παράμετροι της πραγματικής διεργασίας εκτιμώνται συνεχώς on-line χρησιμοποιώντας γνωστές μεθόδους εκτίμησης παραμέτρων και τα αποτελέσματα συγκρίνονται με τις παραμέτρους του μοντέλου αναφοράς που λαμβάνονται στην αρχή σε συνθήκες στις οποίες δεν υπάρχουν σφάλματα. Τα υπόλοιπα σε αυτή την προσέγγιση είναι ουσιαστικά η διαφορά μεταξύ των εκτιμήσεων των παραμέτρων του συστήματος και των αντίστοιχων τιμών για την ονομαστική (χωρίς αστοχία) περίπτωση.

Σύγκριση των τριών ανωτέρω προσεγγίσεων: Αποδεικνύεται ότι η προσέγγιση της ισοτιμίας χώρου είναι ισοδύναμη με την προσέγγιση που βασίζεται σε παρατηρητές υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Υπάρχουν διαφορές, ωστόσο δεν θα γίνει αναφορά τους εδώ δεδομένου ότι δεν αποτελούν αντικείμενο της παρούσας εργασίας. Για το λόγο αυτό θα εστιάσουμε στις διαφορές μεταξύ των δύο προηγούμενων προσεγγίσεων και της προσέγγισης εκτίμησης παραμέτρων [4]:

Δύο πρώτες προσεγγίσεις:

- Η διαδικασία σχεδίασης είναι συστηματική και απλή.
- Εύκολες στην υλοποίηση και ο αλγόριθμος εκτέλεσης είναι απλός.
- Εύκολο να χειριστεί κάποιος πολλαπλές αστοχίες αν ο αριθμός μετρήσεων είναι επαρκής.
- Ιδιαίτερα κατάλληλες για ανίχνευση και εντοπισμό αστοχιών σε ενεργοποιητές και αισθητήρες.
- Δυνατόν να ανιχνεύσουν και να εντοπίσουν σφάλματα σε παραμέτρους, αν και περίπλοκο να επιτευχθεί.

Τρίτη προσέγγιση:

- Η διαδικασία σχεδίασης είναι συστηματική αλλά όχι απλή.
- Η υλοποίηση είναι πολύπλοκη, διότι απαιτεί πολλούς υπολογισμούς.
- Η ανίχνευση και ο εντοπισμός πολλαπλών αστοχιών δεν είναι ένα εύκολο ζήτημα αν δεν είναι εγκατεστημένοι πολλοί αισθητήρες.
- Η ανίχνευση και ο εντοπισμός αστοχιών σε ενεργοποιητές και αισθητήρες είναι δυνατόν να επιτευχθεί, ωστόσο είναι αρκετά περίπλοκο.
- Η ανίχνευση και ο εντοπισμός αστοχιών σε παραμέτρους είναι πολύ απλές διαδικασίες.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

### 6.1 Δορυφορικά συστήματα

Όπως στις περισσότερες κατασκευές, έτσι και στους δορυφόρους υπάρχει η πιθανότητα εμφάνισης μη αναμενόμενων ανωμαλιών και αστοχιών σε εσωτερικές συνιστώσες και υποσυστήματα κατά τη διάρκεια του χρόνου ζωής τους. Γενικά, η ανάπτυξη της τεχνολογίας που θα κάνει τον δορυφόρο ικανό να ανιχνεύει, να εντοπίζει, να αναγνωρίζει και τελικά να προσαρμόζεται αυτόματα σε μη αναμενόμενες αστοχίες στις συνιστώσες του ή τα υποσυστήματά του είναι άκρως επιθυμητή.

Οι διαδεδομένες μεθοδολογίες που χρησιμοποιούνται στην παρακολούθηση της συμπεριφοράς δορυφόρων, οι οποίοι βρίσκονται σε τροχιά γύρω από τη Γη, εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από την υποστήριξη από το έδαφος. Στον επίγειο σταθμό, οι χειριστές αξιολογούν και αναλύουν μία μεγάλη ποσότητα δεδομένων προκειμένου να προσδιορίσουν την τρέχουσα κατάσταση του δορυφόρου. Είναι φανερό ότι ο τρόπος αυτός είναι χρονοβόρος και απαιτείται πολλή εργασία για την εφαρμογή του, ενώ εξαρτάται από ανθρώπινα λάθη. Για τον λόγο αυτό, είναι επιθυμητή η αυτονομία στην παρακολούθηση της κατάστασης ενός δορυφόρου και στη διάγνωση σφαλμάτων, ώστε η λειτουργία των αποστολών δορυφόρων να καταστεί πιο αποτελεσματική και πιο αποδοτική.

Υποσυστήματα δορυφόρου: Οι δορυφόροι είναι πολύπλοκα μηχανικά συστήματα που αποτελούνται από διάφορα ηλεκτρικά, μηχανολογικά, ηλεκτρομηχανολογικά και θερμικά υποσυστήματα και συνιστώσες που αλληλεπιδρούν και συνεργάζονται μεταξύ τους συνεχώς, για να διατηρήσουν και να εκπληρώσουν τους σκοπούς της αποστολής του δορυφόρου.

Τα μονολιθικά διαστημικά σκάφη διαιρούνται τυπικά σε επτά υποσυστήματα:

- σχετικά με τη διαχείριση των εντολών και των δεδομένων (Command and Data Handling, C&DH),
- σχετικά με τον προσδιορισμό και τον έλεγχο της τοποθέτησης στον χώρο (Attitude Determination and Control, ADCS),

- σχετικά με τον έλεγχο τροχιάς (orbital control),
- σχετικά με τον έλεγχο πλοήγησης (navigation control),
- σχετικά με την τηλεμετρία και την απόδοση εντολών από απόσταση (Telemetry and TeleCommand, T&TC),
- θερμικά υποσυστήματα και
- προωθητικά υποσυστήματα.

Το κάθε υποσύστημα είναι επιφορτισμένο με την τέλεση ενός συγκεκριμένου συνόλου λειτουργιών. Επιπλέον, πολλά από αυτά τα υποσυστήματα επικοινωνούν πάντα μεταξύ τους, προκειμένου να εξασφαλιστεί η εκτέλεση των εντολών του δορυφόρου.

Εξαιτίας της προαναφερθείσας πολυπλοκότητας των δορυφορικών συστημάτων, διάφορα σύνολα απαιτήσεων και χαρακτηριστικών διαγνωστικής αυτονομίας σε διαφορετικά επίπεδα τίθενται συχνά για έναν δορυφόρο. Έτσι, για την αποτελεσματική και αποδοτική αντιμετώπιση του προβλήματος της αυτόνομης διάγνωσης σφάλματος και της αναπροσαρμογής ενός δορυφόρου, πραγματοποιείται η ακόλουθη ιεραρχική αποσύνθεση του προβλήματος σε τρία επίπεδα:

- Επίπεδο συνιστωσών: περιλαμβάνει τη διάγνωση αστοχιών σε αισθητήρες, ενεργοποιητές και εσωτερικές συνιστώσες του συστήματος ενός δορυφόρου.
- Επίπεδο υποσυστημάτων: αφορά στην ακολουθία των εντολών και των γεγονότων μεταξύ των υποσυστημάτων του δορυφόρου και την επίδραση των αστοχιών σε αυτό το επίπεδο.
- Επίπεδο αποστολής: περιλαμβάνει όλες τις ενέργειες που σχετίζονται με την ασφάλεια και τους στόχους της αποστολής, οι οποίες οδηγούν σε ανασχεδιασμό της αποστολής του δορυφόρου –εάν χρειάζεται– εξαιτίας της εμφάνισης αστοχιών.

Το πρόβλημα του ελέγχου της τοποθέτησης στον χώρο: Ο έλεγχος της τοποθέτησης στον χώρο (attitude control) αφορά στον προσανατολισμό του δορυφόρου ως προς ένα επιθυμητό πλαίσιο αναφοράς. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να χωριστεί σε τρία υποπροβλήματα:

- Προσδιορισμός της τοποθέτησης στον χώρο, που γίνεται με τη βοήθεια αισθητήρων θέσης,
- Διόρθωση της τοποθέτησης στον χώρο, η οποία επιτυγχάνεται με ροπές που εφαρμόζονται στο σώμα του δορυφόρου και παράγονται από ενεργοποιητές, όπως προωθητές,

- Έλεγχος της τοποθέτησης στον χώρο, που βασίζεται σε υπολογιστικούς αλγορίθμους που καθορίζουν το μέγεθος και την κατεύθυνση των ροπών που πρέπει να εφαρμοστούν στον δορυφόρο, ως απόκριση σε μία εντολή σχετικά με την τοποθέτηση του δορυφόρου στον χώρο, ή για την αντιστάθμιση των διαταραχών.

Η εμφάνιση αστοχίας σε ένα σύστημα ελέγχου της τοποθέτησης του δορυφόρου στον χώρο, εξαιτίας δυσλειτουργίας σε εσωτερικές συνιστώσες του συστήματος, ενεργοποιητές ή αισθητήρες, θα μπορούσε να έχει ως συνέπεια τη μεγαλύτερη κατανάλωση ενέργειας, την απώλεια ελέγχου και εν τέλει την αποτυχία της αποστολής. Οι βλάβες μπορούν, γενικά, να οδηγήσουν σε μη αναμενόμενες μεταβολές ή στη σταδιακή γήρανση των συνιστωσών του συστήματος ελέγχου της τοποθέτησης του δορυφόρου στον χώρο, των ενεργοποιητών και/ή των αισθητήρων.

## 6.2 Εφαρμογή Μεθοδολογίας – Αποτελέσματα

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα θεωρούμε έντεκα αστοχίες, καθεμία από τις οποίες αντιστοιχεί σε έναν από τους έντεκα αισθητήρες του υπό εξέταση συστήματος. Το θεωρούμενο σύστημα περιγράφεται από ένα μοντέλο στο χώρο κατάστασης με τους πίνακες  $A \in \mathbb{R}^{22 \times 22}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{22 \times 19}$  και  $C \in \mathbb{R}^{11 \times 22}$ . Επομένως η διάσταση του χώρου κατάστασης είναι 22. Σημειώνεται επίσης ότι το ζεύγος  $(A, C)$  είναι παρατηρήσιμο.

Σύμφωνα με τη θεωρία, η αστοχία στον  $i$ -οστό αισθητήρα σχετίζεται με το ζευγάρι διανυσμάτων συμβάντος  $\{f_i, Af_i\}$ . Συνεπώς, τα διανύσματα συμβάντος για το συγκεκριμένο παράδειγμα είναι τα ζεύγη  $\{f_i, Af_i\}$ ,  $i = 1 \dots 11$  όπου  $f_i$  είναι κάποιο διάνυσμα που ικανοποιεί την  $\hat{e}_{mi} = Cf_i$ .

Αρχικά, θεωρούμε τα διανύσματα  $f_i$ ,  $i = 1 \dots 11$  τα οποία είναι εκ κατασκευής διαχωρίσιμα στην έξοδο. Συνεπώς, εξετάζουμε αν είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα, αν δηλαδή υπάρχει πίνακας ανάδρασης  $D$  ο οποίος να αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης για όλα τα  $f_i$ ,  $i = 1 \dots 11$  και συγχρόνως να μπορούμε να τοποθετήσουμε όλες τις ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  σχεδόν αυθαίρετα. Για το σκοπό αυτό υπολογίζουμε τους χώρους ανίχνευσης  $\bar{R}_i$  και τις διαστάσεις τους, όπως επίσης και τους αντίστοιχους δημιουργούς ανίχνευσης  $g_i$ . Προκύπτει σε κάθε περίπτωση ότι  $v_i = d(\bar{R}_i) = 2$ . Επομένως,  $v'_i = \sum_{i=1, m} v_i = n$ . Έπεται, επομένως, ότι τα  $f_i$ ,  $i = 1 \dots 11$  είναι αμοιβαία ανιχνεύσιμα.



Κατόπιν, θεωρούμε τα διανύσματα  $Af_i, i = 1 \dots 11$  τα οποία αλλάζουμε με επιτρεπτό τρόπο για διευκόλυνσή μας. Πιο συγκεκριμένα, αν το  $Af_i$  έχει συνιστώσα στον αντίστοιχο  $\bar{R}_i$  τότε τη μηδενίζουμε. (Σημειώνεται ότι αυτή η ενέργεια είναι επιτρεπτή δεδομένου ότι το δεύτερο διάνυσμα του ζεύγους,  $Af_i$ , μπορεί να είναι το  $Af_i - \xi_{f_i}$ , με  $\xi_{f_i} \in \bar{R}_i$ ). Δεδομένου ότι δεν απομακρύνουμε κανένα  $f_i$  από το αρχικό σύνολο-κάτι που θα συνέβαινε αν τα  $f_i$  δεν ήταν αμοιβαία ανιχνεύσιμα και οι μη ελέγξιμες ιδιοτιμές που προέκυπταν δεν ήταν επιτρεπτές-έπεται ότι κάθε  $CAf_i, i = 1 \dots 11$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $Cf_1 \dots Cf_{11}$ . Συνεπώς, θα χρησιμοποιήσουμε στασιμότητα στην έξοδο.

Ελέγχουμε για κάθε  $Af_i$  αν μπορεί να γίνει στάσιμο στην έξοδο με τα  $f_1 \dots f_{11}$ , χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 1. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή μπορούν να γίνουν όλα. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Πόρισμα 1 για να τα κάνουμε στάσιμα στην έξοδο και κατόπιν υπολογίζουμε τις μη ελέγξιμες ιδιοτιμές-αν υπάρχουν-που προκύπτουν από εφαρμογή του πορίσματος. Στο παράδειγμά μας τα σύνολα δεικτών είναι όλα ξένα μεταξύ τους και κατά συνέπεια δεν χρειάζεται κάτι περισσότερο από διαδοχική εφαρμογή του Πορίσματος 1. Πιο συγκεκριμένα, τα σύνολα δεικτών για όλα τα  $Af_i$  πλην του  $Af_4$  έχουν μόνο ένα στοιχείο. Τα εν λόγω  $Af_i$  είναι δηλαδή ισοδύναμα στην ανίχνευση με κάποια  $f_i$  και επομένως αν απαιτήσουμε ο  $D$  να αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης για αυτά τα  $f_i$  τότε θα αποτελεί φίλτρο ανίχνευσης και για τα ισοδύναμα με αυτά στην ανίχνευση  $Af_i$  (στο παράδειγμά μας όλα πλην του  $Af_4$ ). Επιλέγουμε αυτόν τον τρόπο και χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 1 μόνο για το  $Af_4$  τελικά. Επειδή η διάσταση του χώρου ανίχνευσης του  $Af_4$  είναι 1 προκύπτουν δύο μη ελέγξιμες ιδιοτιμές. Αυτές, με εφαρμογή της θεωρίας, βρίσκουμε ότι είναι οι -1.333 και -1.111 οι οποίες είναι αρνητικές και συνεπώς τις αποδεχόμαστε.(Σημειώνεται ότι το  $Af_{11}$  (το τροποποιημένο) είναι μηδέν και επομένως αστοχία στον  $11^\circ$  αισθητήρα πρόκειται για εκφυλισμένη περίπτωση που θα παράγει σφάλμα εξόδου σε μία μόνο διεύθυνση και όχι σε επίπεδο).

Το επόμενο βήμα είναι η τοποθέτηση των ιδιοτιμών και η εύρεση του πίνακα  $D$ . Το πλήθος των ιδιοτιμών που αντιστοιχούν στον κάθε χώρο ανίχνευσης  $\bar{R}_i$ , θα πρέπει να είναι ίσο με τη διάστασή του. Σε περίπτωση που τοποθετηθεί μία μιγαδική ιδιοτιμή, θα πρέπει να τοποθετηθεί και η συζυγής της. Ακόμη, όπως έχει ήδη αναφερθεί, αφού χρησιμοποιούμε στασιμότητα στην έξοδο για το  $Af_4$  έπεται ότι δύο ιδιοτιμές του  $(A - DC)$  θα πρέπει να είναι ίδιες. Τέλος, επειδή το φίλτρο μας ανιχνεύει  $m$  το πλήθος (11) διαχωρίσιμες στην έξοδο αστοχίες δεν υπάρχουν ιδιοτιμές που σχετίζονται με τον  $\bar{R}_7^C$ .

Όσο δεν υπάρχει αστοχία στο σύστημα, το υπόλοιπο θα τείνει στο μηδέν. Αντίθετα, όταν χαλάσει κάποιος από τους αισθητήρες, το διάνυσμα του υπολοίπου θα πρέπει να κείται στο επίπεδο αστοχίας που αντιστοιχεί στον αισθητήρα που έχει υποστεί βλάβη. Ο εντοπισμός της αστοχίας γίνεται υπολογίζοντας την απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από κάθε επίπεδο αστοχίας  $\{Cf_i, CAf_i\}, i = 1 \dots 11$ . Για τον υπολογισμό της απόστασης έγινε έμμεση χρήση του τύπου υπολογισμού προβολής διανύσματος σε επίπεδο. Ο τελικός τύπος που χρησιμοποιήθηκε είναι ο εξής:  $r_{oi}(t) = (E^{11} - P(i)(P(i)^T P(i))^{-1} P(i)^T) \varepsilon'(t)$  και κατόπιν υπολογίστηκε το μέτρο αυτού, όπου ο πίνακας  $P(i)$  έχει ως στήλες του τα  $Cf_i$  και  $CAf_i$ , τα διανύσματα δηλ. που παράγουν το εκάστοτε επίπεδο.

Στους επόμενους πίνακες παρουσιάζονται τα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας για κάθε αισθητήρα καθώς και οι δημιουργοί ανίχνευσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του  $D$ :

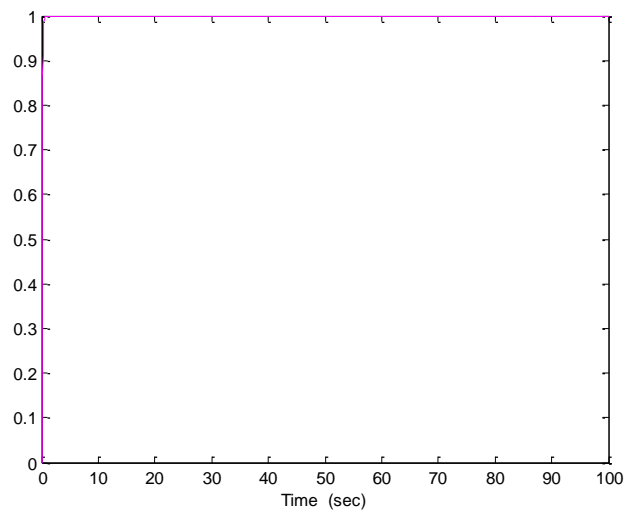
$\{Cf_1, CAf_1\}$		$\{Cf_2, CAf_2\}$		$\{Cf_3, CAf_3\}$		$\{Cf_4, CAf_4\}$		$\{Cf_5, CAf_5\}$		$\{Cf_6, CAf_6\}$		$\{Cf_7, CAf_7\}$		$\{Cf_8, CAf_8\}$		$\{Cf_9, CAf_9\}$		$\{Cf_{10}, CAf_{10}\}$		$Cf_{11}$
1	-11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	-7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	3	1	-14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	5	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	3	1	-9,33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	9	0	1	1	-9,11	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	-5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1	-4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	1	-17	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	1	-9	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1

Πίνακας 6.1.1: Προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας για κάθε αισθητήρα

$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_7$	$g_8$	$g_9$	$g_{10}$	$g_{11}$	$g'_4$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
0	0	0	0	0	0	0	0	0	4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Πίνακας 6.1.2: Δημιουργοί ανίχνευσης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του  $D$ .

Η συνάρτηση  $n_{ci}(t)$  που χρησιμοποιήθηκε για την προσομοίωση απεικονίζεται στο παρακάτω Σχήμα 6.1:



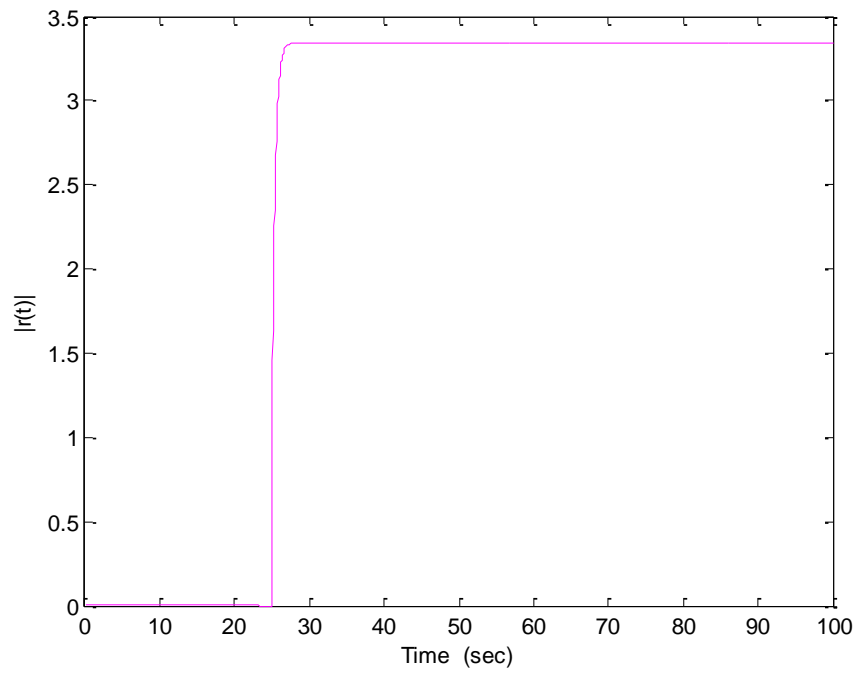
Σχήμα 6.1: Συνάρτηση  $n_{ci}(t)$

Όπως αναλύθηκε σε προηγούμενο κεφάλαιο, εάν ο πίνακας ανάδρασης  $D$  επιλεγεί έτσι ώστε ο  $(A - DC)$  να είναι ευσταθής, τότε μετά τη μεταβατική απόκριση και απουσία διαταραχών, το υπόλοιπο στη μόνιμη κατάσταση θα είναι μη μηδενικό μόνο στην περίπτωση ύπαρξης κάποιας αστοχίας στο σύστημα.

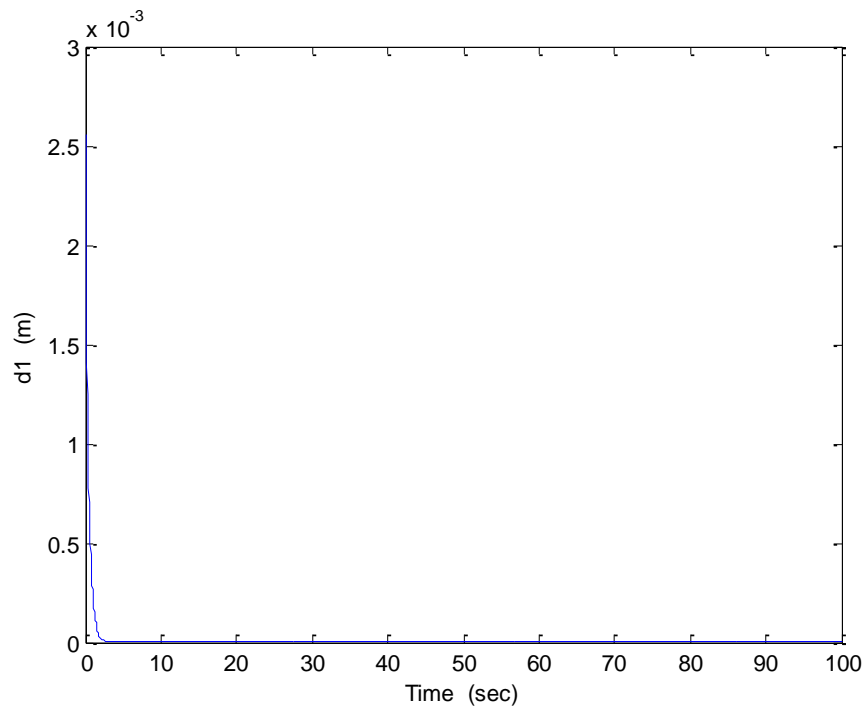
Για τη συγκεκριμένη προσομοίωση, η αστοχία εισάγεται στο σύστημα τη χρονική στιγμή 25. Άρα, μετά την εξάλειψη των μεταβατικών φαινομένων και μέχρι τη χρονική στιγμή 25, το υπόλοιπο θα πρέπει να είναι μηδενικό.

Μετά την είσοδο αστοχίας στο σύστημα, το υπόλοιπο θα πρέπει να αποκλίνει από το μηδέν. Στη συνέχεια παρουσιάζονται ενδεικτικά τα αποτελέσματα για τον  $1^\circ$ , τον  $5^\circ$ ,  $8^\circ$  και τον  $9^\circ$  αισθητήρα (στο Παράρτημα Β περιέχονται τα αποτελέσματα για τους υπόλοιπους αισθητήρες).

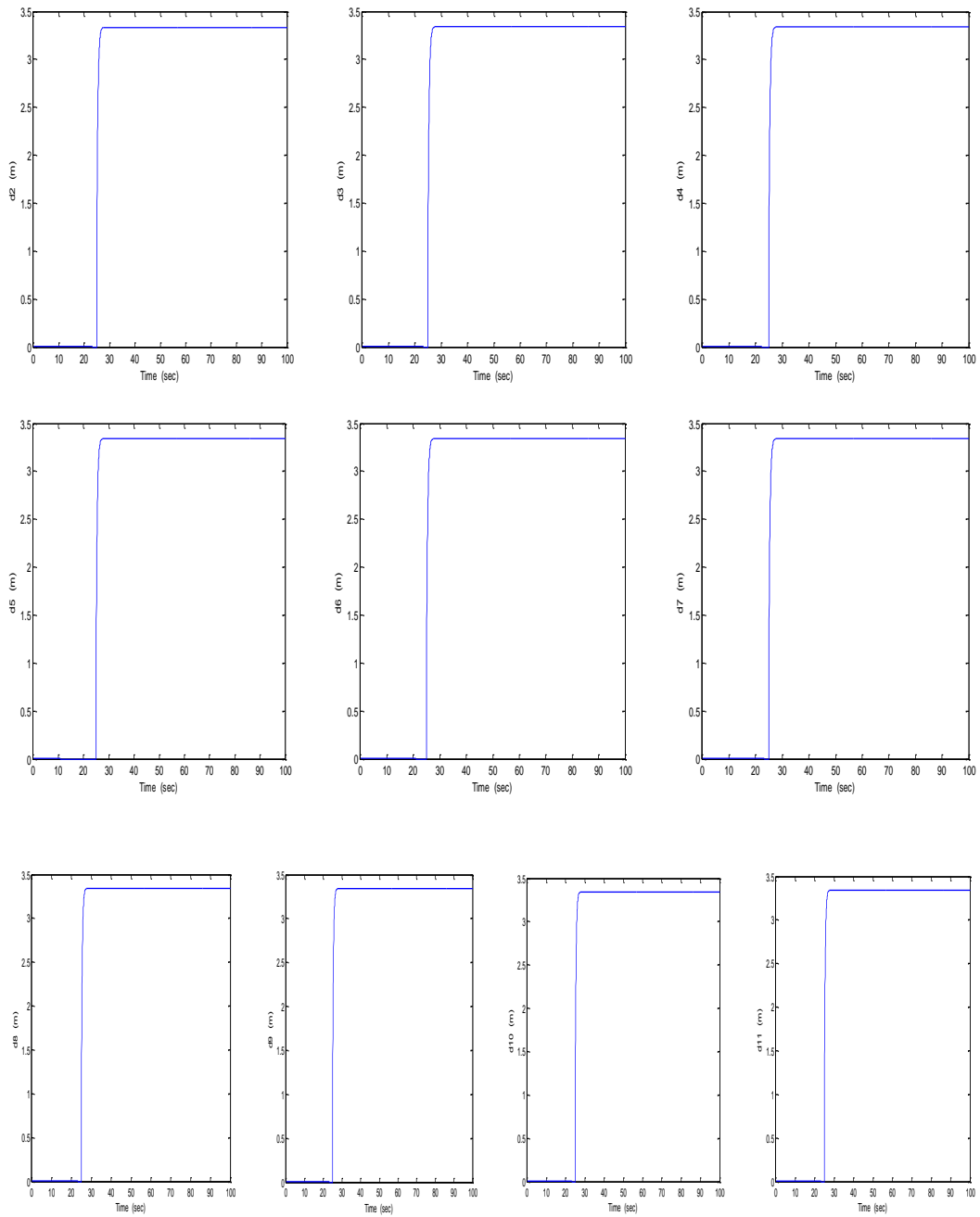
Λίγο μετά από τη χρονική στιγμή 25, όπου εμφανίζεται η αστοχία, η τιμή του υπολοίπου παραμένει σταθερή και διάφορη του μηδενός, μέχρι και το τέλος της προσομοίωσης σε κάθε περίπτωση. Για καθέναν από τους αισθητήρες 1, 5, 8 και 9 παρουσιάζεται αρχικά το υπόλοιπο, ακολουθεί το διάγραμμα της απόστασης του διανύσματος του υπολοίπου από το αντίστοιχο προκαθορισμένο επίπεδο αστοχίας και τέλος τα διαγράμματα των αποστάσεων του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας.



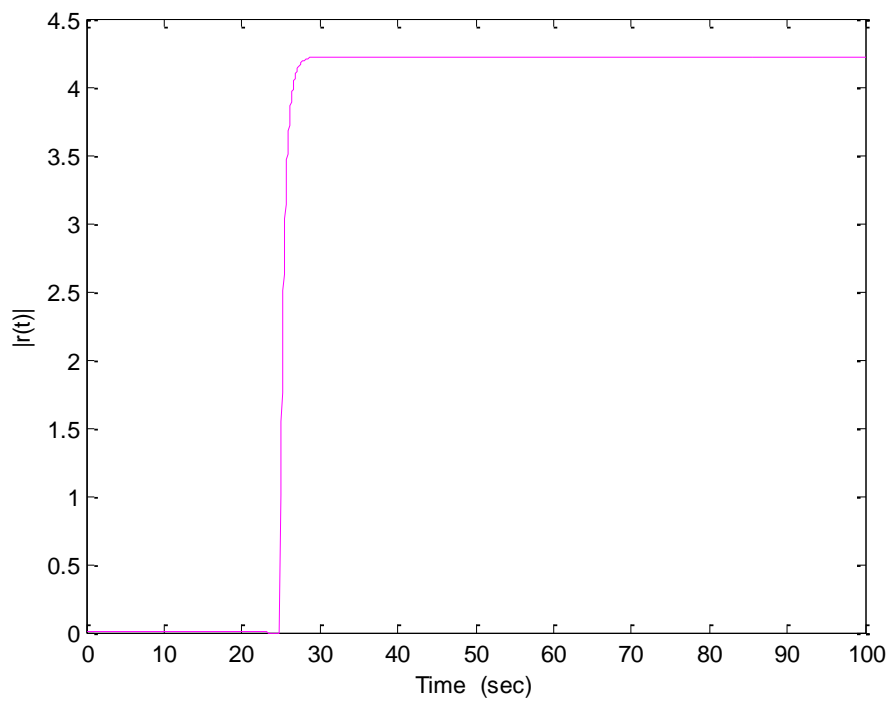
Σχήμα 6.2: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 1<sup>ο</sup> αισθητήρα



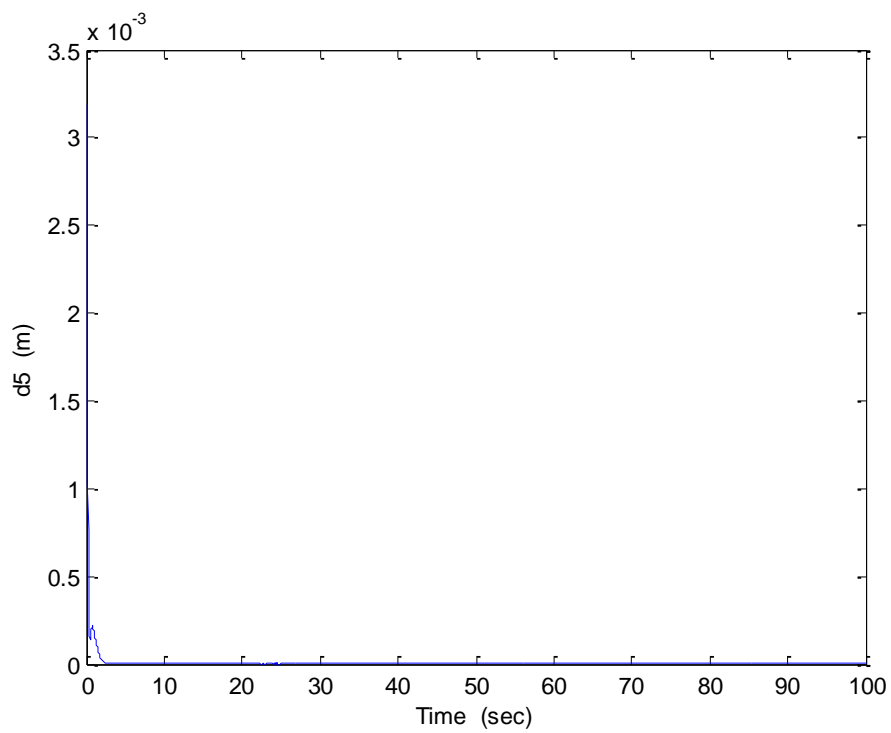
Σχήμα 6.3: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 1<sup>ου</sup> αισθητήρα



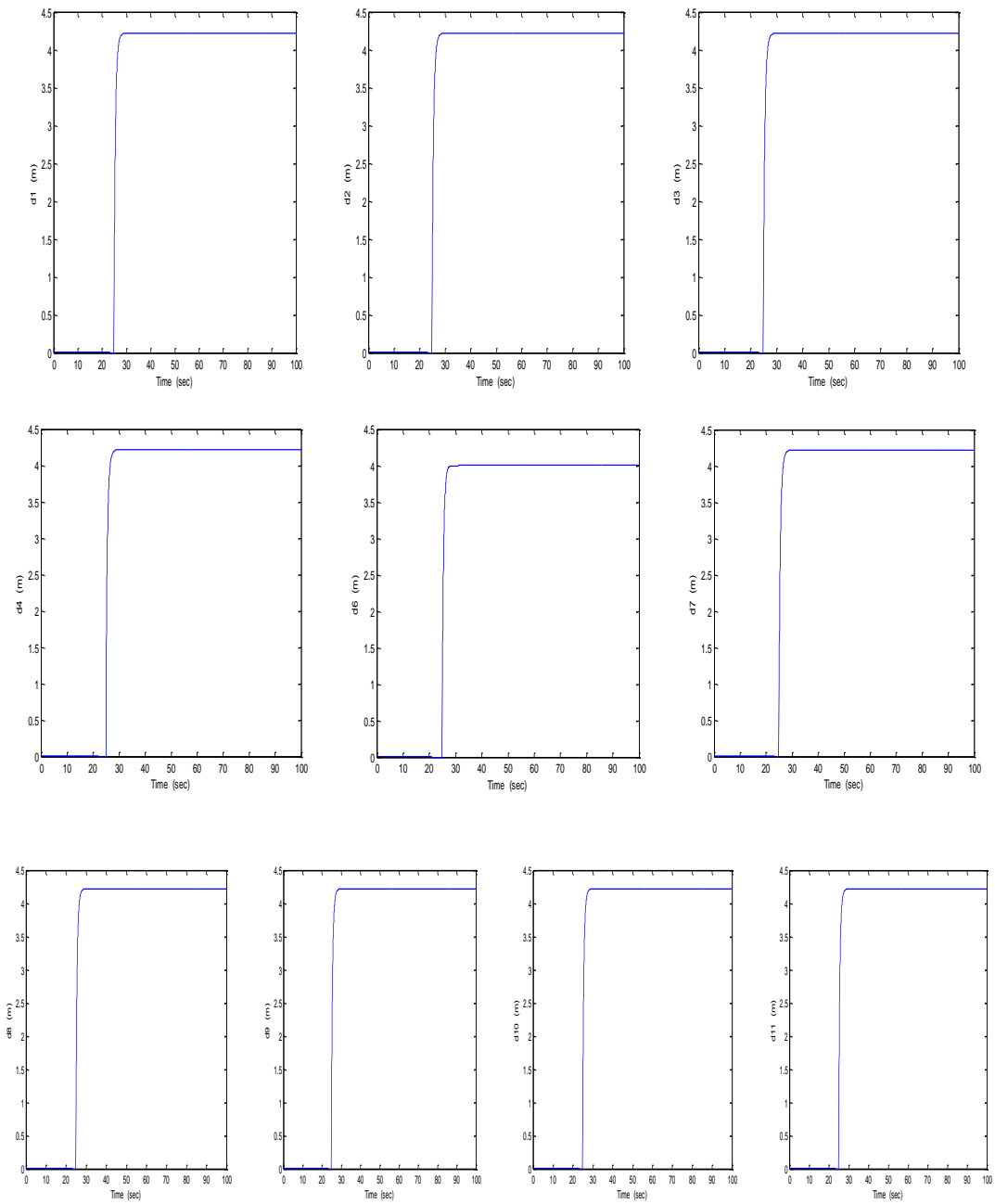
Σχήμα 6.4: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 1<sup>ο</sup> αισθητήρα



Σχήμα 6.5: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 5<sup>ο</sup> αισθητήρα

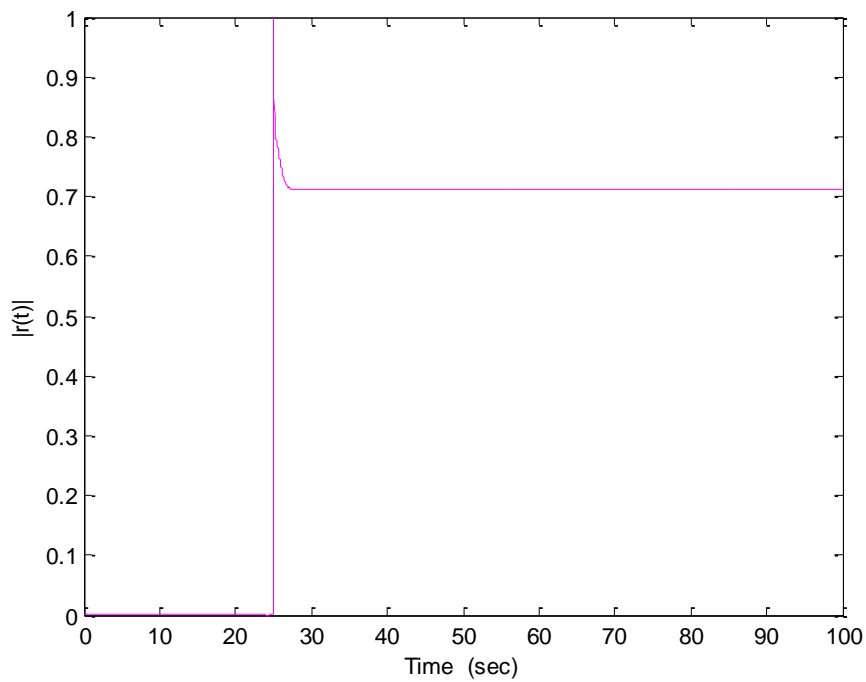


Σχήμα 6.6: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 5<sup>ου</sup> αισθητήρα

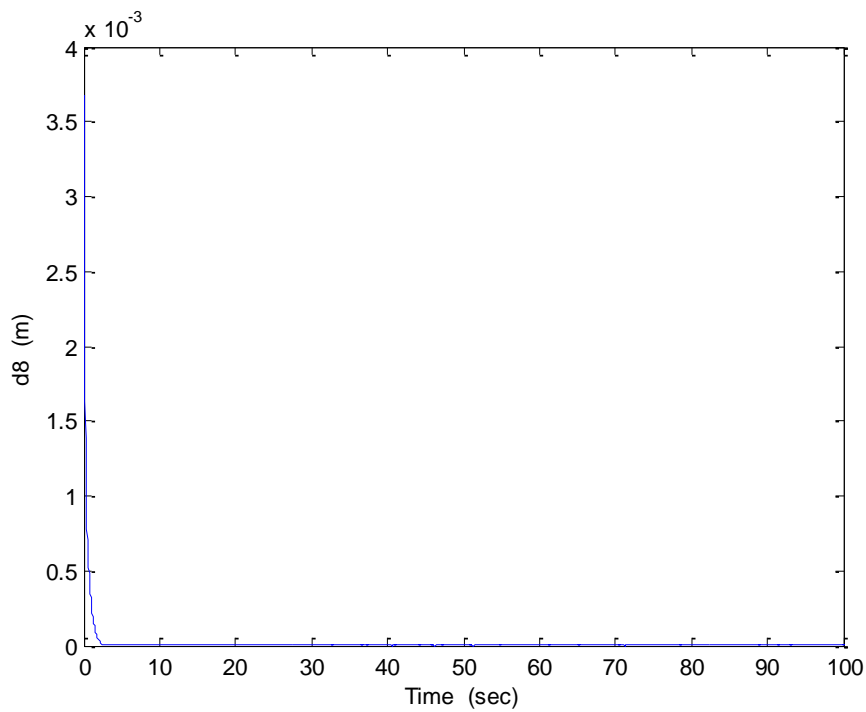


Σχήμα 6.7: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 5<sup>ο</sup> αισθητήρα

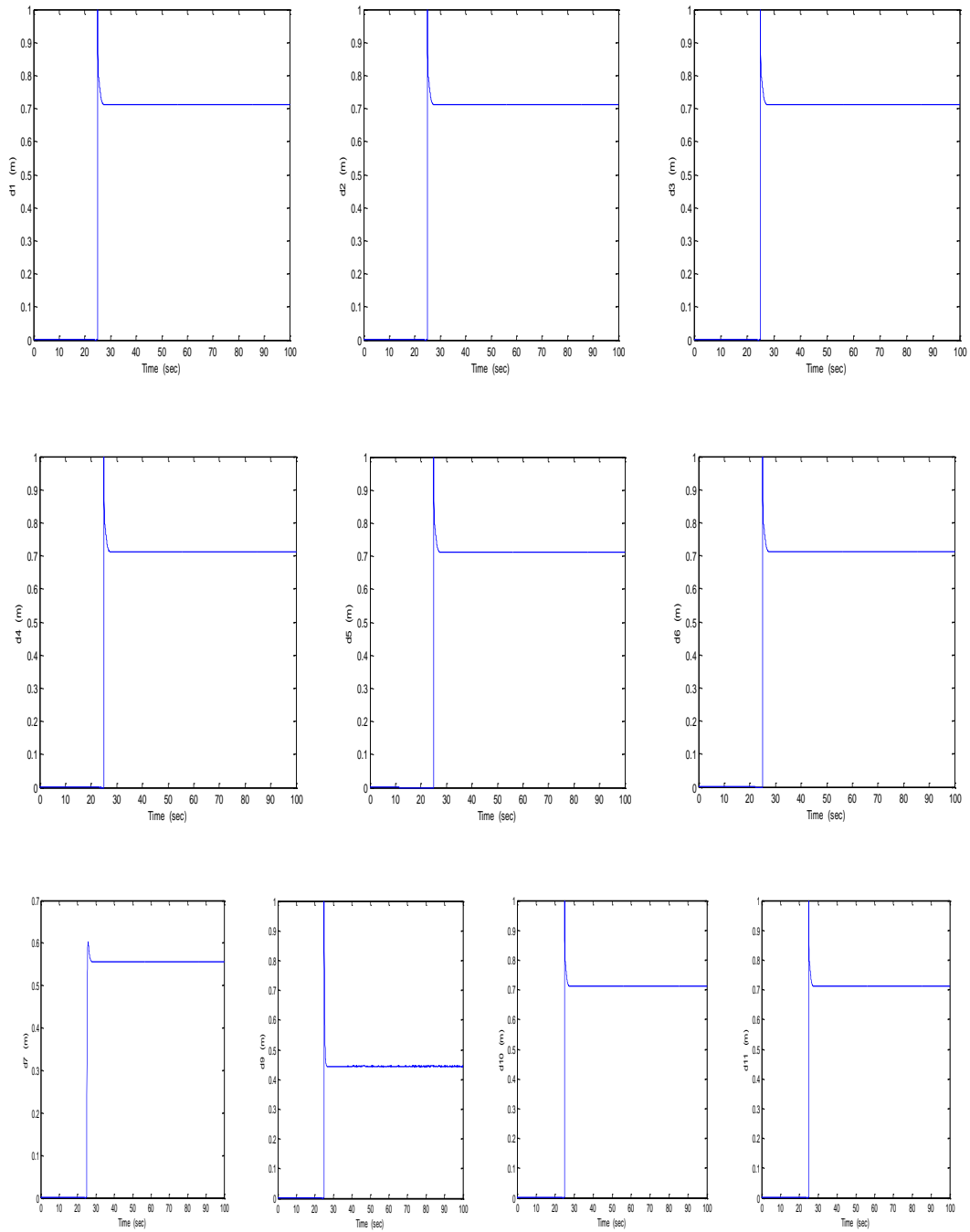




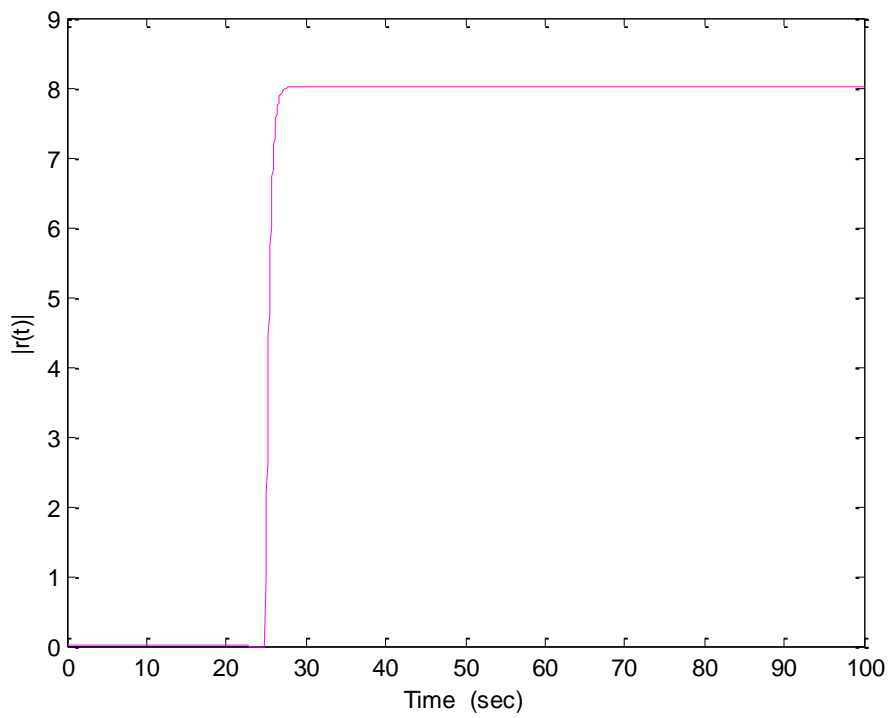
Σχήμα 6.8: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 8<sup>ο</sup> αισθητήρα



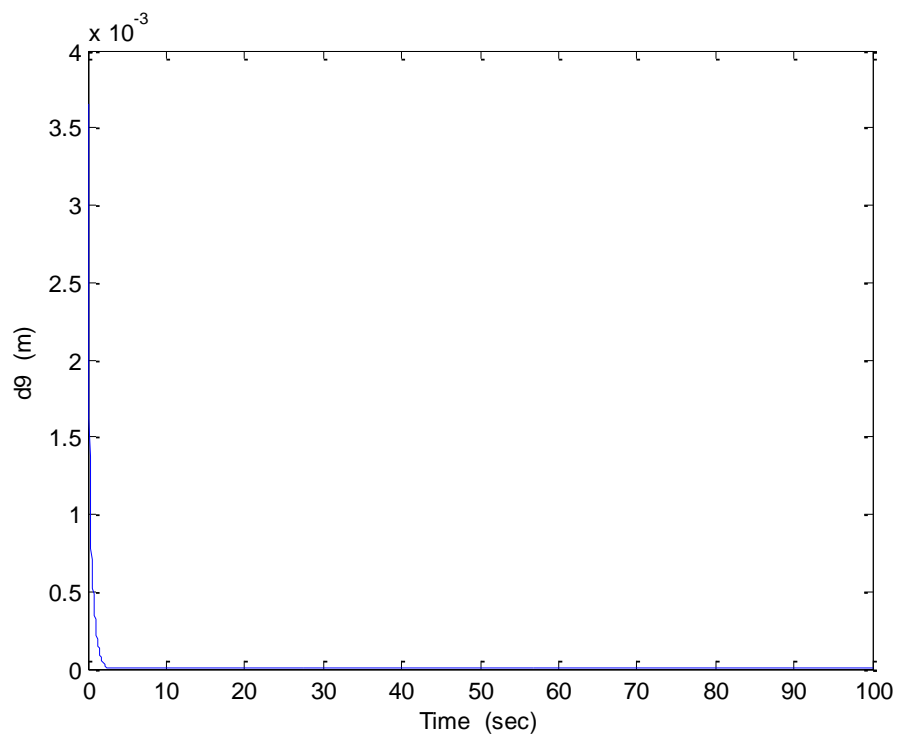
Σχήμα 6.9: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 8<sup>ου</sup> αισθητήρα



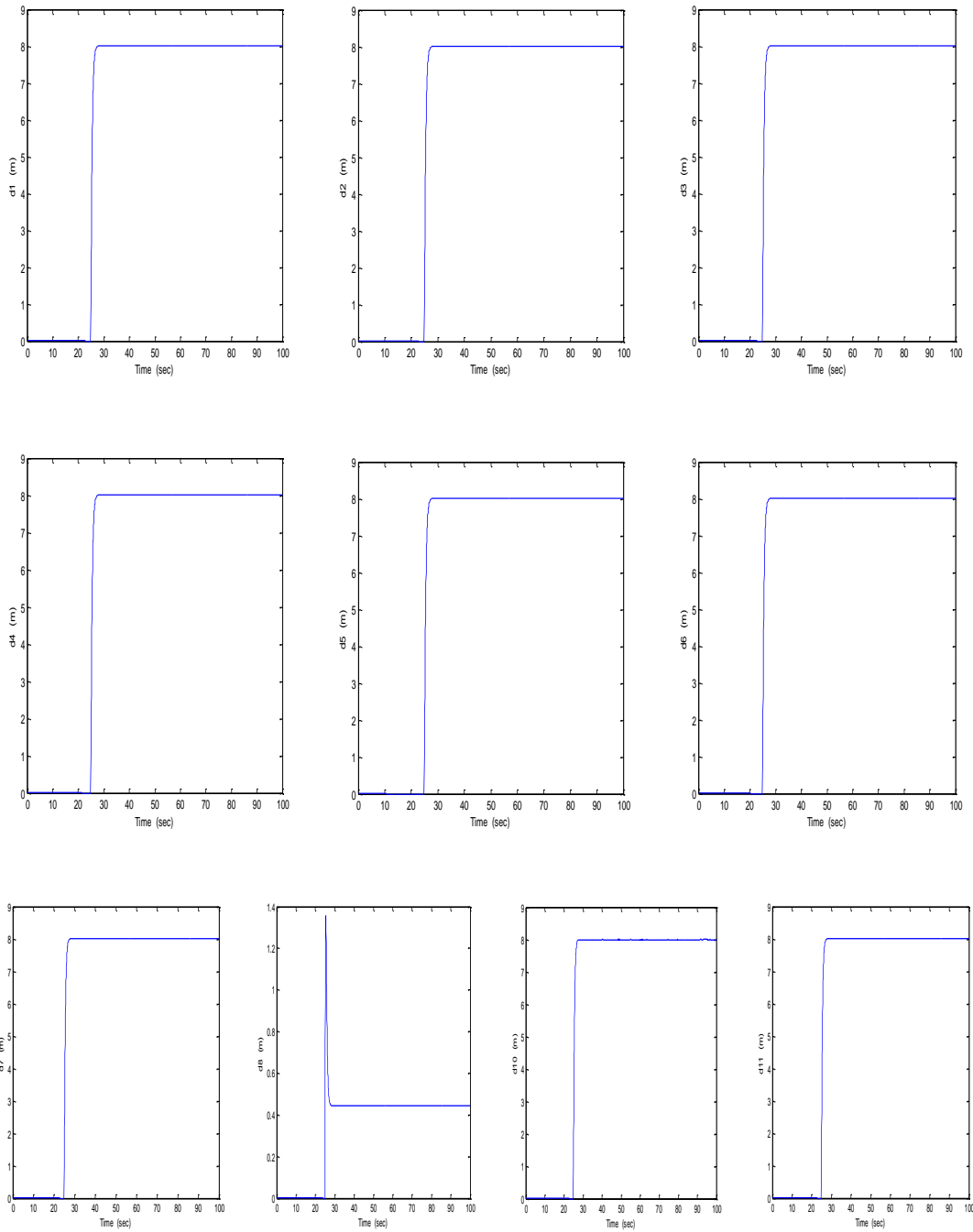
Σχήμα 6.10: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 8<sup>ο</sup> αισθητήρα



Σχήμα 6.11: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 9<sup>ο</sup> αισθητήρα



Σχήμα 6.12: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 9<sup>ου</sup> αισθητήρα



Σχήμα 6.13: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 9<sup>ο</sup> αισθητήρα

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται συγκεντρωτικά οι αποστάσεις του υπολοίπου από όλα τα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας, για όλες τις πιθανές περιπτώσεις αστοχίας. Όπως φαίνεται από τον παρακάτω πίνακα, το υπόλοιπο που παράγεται από αστοχία στον 11<sup>ο</sup> αισθητήρα έχει σχεδόν μηδενική απόσταση και από το προκαθορισμένο επίπεδο αστοχίας του 10<sup>ο</sup> αισθητήρα δεδομένου ότι ιδανικά ανήκει και σε αυτό. Ωστόσο, αν δούμε υπόλοιπο κατά μήκος του  $\hat{e}_{m11}$  το πιο πιθανό είναι να οφείλεται σε αστοχία στον 11<sup>ο</sup> αισθητήρα παρά στον 10<sup>ο</sup>.

	d <sub>1</sub> (m)	d <sub>2</sub> (m)	d <sub>3</sub> (m)	d <sub>4</sub> (m)	d <sub>5</sub> (m)	d <sub>6</sub> (m)	d <sub>7</sub> (m)	d <sub>8</sub> (m)	d <sub>9</sub> (m)	d <sub>10</sub> (m)	d <sub>11</sub> (m)
Αστοχία στον 1 <sup>ο</sup> αισθητήρα	2,47*10 <sup>-16</sup>	3,333	3,341	3,341	3,341	3,341	3,341	3,341	3,341	3,341	3,341
Αστοχία στον 2 <sup>ο</sup> αισθητήρα	0,4444	2,50*10 <sup>-16</sup>	1,333	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405
Αστοχία στον 3 <sup>ο</sup> αισθητήρα	5,407	0,8889	4,86*10 <sup>-15</sup>	5,333	5,407	5,407	5,407	5,407	5,407	5,407	5,407
Αστοχία στον 4 <sup>ο</sup> αισθητήρα	4,749	4,749	4,743	4,97*10 <sup>-16</sup>	0,2222	1,516	4,749	4,749	4,749	4,749	4,749
Αστοχία στον 5 <sup>ο</sup> αισθητήρα	4,222	4,222	4,222	4,222	4,76*10 <sup>-14</sup>	4,222	4,222	4,222	4,222	4,222	4,222
Αστοχία στον 6 <sup>ο</sup> αισθητήρα	4,006	4,006	4,006	1,284	0,2222	1,58*10 <sup>-16</sup>	4	4,006	4,006	4,006	4,006
Αστοχία στον 7 <sup>ο</sup> αισθητήρα	1,024	1,024	1,024	1,024	1,024	0,7778	6,86*10 <sup>-16</sup>	1,024	1,024	1,024	1,024
Αστοχία στον 8 <sup>ο</sup> αισθητήρα	0,7115	0,7115	0,7115	0,7115	0,7115	0,7115	0,5556	1,91*10 <sup>-17</sup>	0,444	0,7115	0,7115
Αστοχία στον 9 <sup>ο</sup> αισθητήρα	8,012	8,012	8,012	8,012	8,012	8,012	8,012	0,4444	3,68*10 <sup>-15</sup>	8	8
Αστοχία στον 10 <sup>ο</sup> αισθητήρα	2,247	2,247	2,247	2,247	2,247	2,247	2,247	2,247	0,3333	3,70*10 <sup>-16</sup>	2,222
Αστοχία στον 11 <sup>ο</sup> αισθητήρα	0,5556	0,5556	0,5556	0,5556	0,5556	0,5556	0,5556	0,5556	0,5556	6,17*10 <sup>-16</sup>	0

Πίνακας 6.1.3: Αποστάσεις υπολοίπου από προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας, για κάθε αστοχία

### 6.3 Κριτική Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Για την ανίχνευση και τον εντοπισμό αστοχιών χρησιμοποιήθηκε στην παρούσα εργασία η μέθοδος των φίλτρων ανίχνευσης αστοχιών. Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τις προσομοιώσεις ήταν αρκετά ακριβή και οδήγησαν στην ανίχνευση και το σωστό εντοπισμό της

εκάστοτε αστοχίας. Επίσης, επαληθεύτηκε το βασικό πλεονέκτημα των φίλτρων ανίχνευσης αστοχιών, ότι δηλαδή η ανίχνευση και ο εντοπισμός αστοχιών είναι ανεξάρτητες του τρόπου με τον οποίο ένα στοιχείο υφίσταται βλάβη, δεδομένου ότι το υπόλοιπο κινούνται πάντα στο σωστό επίπεδο ανεξάρτητα από τη βλάβη την οποία εμφάνιζε ο εκάστοτε αισθητήρας. Παρ' όλα αυτά, κατά την εφαρμογή της μεθόδου παρατηρήθηκε ότι η ακρίβεια των αποτελεσμάτων εξαρτάται από το πλήθος των αστοχιών που εμφανίζονται ταυτόχρονα. Επίσης, εξ' ορισμού, τα φίλτρα ανίχνευσης αστοχιών είναι σχεδιασμένα να λειτουργούν κάτω από ιδανικές συνθήκες (απουσία διαταραχών και θορύβου). Στην περίπτωση μη ιδανικών συνθηκών η απόδοση του συγκεκριμένου συστήματος ανίχνευσης αστοχιών μειώνεται αρκετά εάν δεν λάβουν χώρα οι κατάλληλες προσαρμογές.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων επαλήθευσαν τα κύρια στοιχεία της θεωρίας και έδειξαν ότι ένα σύστημα ανίχνευσης αστοχιών βασισμένο στη θεωρία αποδίδει ικανοποιητικά και μπορεί να παρέχει αξιόπιστη ανίχνευση αστοχιών, ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο τα μέρη του συστήματος υφίστανται βλάβη, δηλαδή επιτυγχάνονται υψηλά επίπεδα αξιοπιστίας με λιγότερο πλεονάζοντα εξοπλισμό. Για να εντοπίσουμε ποια συνιστώσα του συστήματος δυσλειτουργεί, δεν χρειάζεται να υπάρχει τρεις φορές κάθε συνιστώσα ευαίσθητη σε αστοχία, κάτι που θα ήταν αναγκαίο αν χρησιμοποιούνταν μέθοδος βασισμένη σε περίσσεια υλικού εξοπλισμού.

Η παρούσα εργασία περιορίστηκε στην ανίχνευση και τον εντοπισμό μίας αστοχίας, χωρίς να ληφθεί υπόψη η παρουσία θορύβου και διαταραχών. Επίσης, δεν πραγματοποιήθηκε η αναγνώριση του μεγέθους και της φύσης της αστοχίας. Γενικά, η αναγνώριση μίας αστοχίας είναι πολύ σημαντική για τις μεθόδους που βασίζονται στην αναλυτική περίσσεια, καθώς καθορίζει εάν το σύστημα είναι ικανό να εξακολουθεί να λειτουργεί ικανοποιητικά.

Ακόμη, αποδείχθηκε ότι για μια συγκεκριμένη επιλογή των ιδιοτιμών του φίλτρου, το πρόβλημα μπορεί να λυθεί, ωστόσο δεν προσδιορίστηκε μια βέλτιστη επιλογή ιδιοτιμών σε σχέση με τη διαφοροποίηση μεταξύ των εξόδων του υγιούς και του υπό βλάβη συστήματος και αναφορικά με τη χρονική καθυστέρηση προτού ανιχνευθεί μια αστοχία. Αυτό θα μπορούσε να αποτελεί αντικείμενο περαιτέρω μελέτης.

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. R.V. Beard, *Failure Accommodation in Linear Systems Through Self Reorganization*, Ph.D dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1971.
2. G. S. Britov and L. A. Mironovski, *Diagnostics of linear systems of automatic regulation*, *Tekh. Kibernetics*, Vol.1, 1972, pp.76-83.
3. J. Chen, *Robust Residual Generation for Model-based Fault Diagnosis of Dynamic Systems*, Ph.D thesis, Dept. of Electronics, University of York, York, UK, 1995.
4. J. Chen and R. J. Patton, *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
5. J. Chen, R. J. Patton and H. Y. Zhang, *Design of unknown input observers and robust fault detection filters*, *International Journal of Control*, Vol. 63, No. 1, 1994, pp. 85-105.
6. R. H. Chen and J. L. Speyer, *Detection filter analysis and design using eigenstructure assignment*, *Proceedings of the 2006 American Control Conference*, Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.
7. J. Chen and H. Y. Zhang, *Robust detection of faulty actuators via unknown input observers*, *International Journal of System Science*, **22**, 1991, pp. 1829-1839.
8. L. H. Chiang, E. L. Russell and R. D. Braatz, *Fault Detection and Diagnosis in Industrial Systems*, Springer, 2001.
9. E.Y. Chow and A.S. Willsky, *Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems*, *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol.AC-29, No 3, 1984, pp.689-691.
10. W. H. Chung and J. L. Speyer, *A game theoretic fault detection Filter*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 43, No. 2, 1998, pp. 143-161.



11. M. Desai and A. Ray, *A fault detection and isolation methodology*, Proceedings of the 20<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Vol. 20, 1981, pp. 1369-1369.
12. X. Ding and P. M. Frank, *Fault Detection via Optimally Robust Detection Filters*, Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control, Institute of Electrical and Electronic Engineers, Tampa, FL, 1989, pp. 1767–1772.
13. J. T. Ephgrave, *Redundant Adaptive Strapdown Navigation systems*, Aerospace report No. TOR-0066 (5306)-10, The Aerospace Corp., 1969.
14. P. M. Frank, *Fault diagnosis in dynamic systems using analytical and knowledge-based Redundancy - A survey and some new results*, Automatica, Vol. 26, No.3, 1990, pp. 459-474.
15. P.M. Frank, *Principles of Model-based Fault Detection*, Artificial Intelligence in Real-Time Control, Delft The Netherlands, 1992.
16. P.M. Frank, *Robust model-based fault detection in dynamic systems*, IFAC Symp. On-Line Fault Detection and Supervision in the Chemical Process Industries, Newark, 1992.
17. P.M. Frank, *Enhancement of robustness in observer-based fault detection*, Int. J. Control, Vol. 59, No. 4, 1994, pp. 955-981.
18. E. A. García and P.M. Frank, *Deterministic Nonlinear Observer-based Approaches to Fault Diagnosis: A Survey*, Control Eng. Practice, Vol. 5, No. 5, 1997, pp 663-670.
19. J. Gertler, *Fault-detection and diagnosis in engineering systems*, New York: Marcel Dekker, 1998.
20. J. Gertler, *Residual generation in model-based fault diagnosis*, Control-Theory and Advanced Technology, Vol. 9, 1993, pp. 259-285.
21. J. Gertler and D. Singer, *A new structure framework for parity equations based failure detection and isolation*, Automatica, Vol.26, 1990, pp. 381-388.

22. J. Gilmore and R. McKern, *A redundant strapdown inertial system mechanization – SIRU*, Control and Flight Mechanics Conf. Santa Barbara, CA, 1970.
23. R. Isermann, *Process fault detection based on modelling and estimation methods: A survey*, Automatica, Vol. 20, 1984, pp. 387-404.
24. R. Isermann, *Fault diagnosis via parameter estimation and knowledge processing*, Automatica, Vol. 29, No. 4, 1994, pp. 815-835.
25. R. Isermann, *Model-based fault detection and diagnosis – status and applications*, Annual Reviews in Control 29, 2005, pp. 71–85
26. H. L. Jones, *Failure Detection in Linear Systems*, Ph.D dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1973.
27. M. J. Khosrowjerdi, R. Nikoukhah and N. Safari-Shad, *Fault detection in a mixed  $H_2 / H_\infty$  setting*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 50, No. 7, 2005.
28. S. Liberatore, J. L. Speyer and A. C. Hsu, *Application of a fault detection filter to structural health monitoring*, Automatica, 42, 2006, pp. 1199 – 1209.
29. M. A. Massoumnia, *A geometric approach to the synthesis of failure detection filters*, IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 31, No.9, 1986, pp. 839-846.
30. N. Meskin and K. Khorasani, *Fault detection and isolation of actuator faults in spacecraft formation flight*, Proceedings of the 45th IEEE conference on Decision and Control, San Diego, CA, USA, 2006.
31. H. Monsef, A. M. Ranjbar and S. Jadid, *Fuzzy rule-based expert system for power system fault diagnosis*, IEEE Proceedings Generation, Transmission & Distribution, Vol. 144, No. 2, 1997, pp. 186-192.

32. J. Park and G. Rizzoni, *A closed-form expression for the fault detection filter*, Decision and Control, Proceedings of the 32nd IEEE Conference, San Antonio, TX, Vol.1, 1993, pp. 259 – 264.
33. J. Park and G. Rizzoni, *An eigenstructure assignment algorithm for the design of fault detection filters*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, No. 7, 1994.
34. J. Park, G. Rizzoni and W. B. Ribbens, *On the representation of sensor faults in detection filters*, Automatica, 1992.
35. R. J. Patton, *Fault detection and diagnosis in aerospace systems using analytical redundancy*, IEEE Computing & Control Eng. J., 2(3), 1191, pp. 127-136.
36. R. J. Patton, *Robustness in model-based fault diagnosis: the 1995 situation*, IFAC Annual Reviews, No. 21, 1997, pp. 103-123.
37. R. J. Patton and J. Chen, *A review of parity space approaches to fault diagnosis*, Proceedings of IFAC/IMACS Symp. SAFEPROCESS'91, Baden, Germany, 1991b, Vol. 1, pp. 239-255.
38. R. J. Patton and J. Chen, *Robustness in model-based fault diagnosis*, Concise Encyclopedia of Simulation and Modelling, 1992b, D Atherton and P. Borne Eds., pp. 379-392, Pergamon Press.
39. R. J. Patton and J. Chen, *A survey of robustness in quantitative model-based fault diagnosis*, Appl. Math. And Comp. Sci. 3(3), 1993b, 399-416.
40. R. J. Patton and J. Chen, *Review of parity space approaches to fault diagnosis for aerospace systems*, Journal of Guidance, Control and Dynamics, 17, 1994, pp. 278-285.
41. R. J. Patton and J. Chen, *Observer – based Fault Detection and Isolation: Robustness and Applications*, Control Eng. Practice, Vol. 5, No. 5, 1997, pp. 671-682.
42. R. Patton, P. Frank, R. Clark, *Fault Diagnosis in Dynamic Systems: Theory and Application*, Prentice Hall International, 1989.

43. J. Stoustrup, H. Niemann and A. J. Cour-Harbo, *Optimal threshold functions for fault detection and isolation*, Proceedings of the 2003 American Control Conference, Vol. 2, 2003, pp. 1782-1787.
44. V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin, and S. N. Kavuri, *A review of process fault detection and diagnosis part I: Quantitative modelbased methods*, Computers and Chem. Eng. 27, 2003, pp. 293-311.
45. V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, K. Yin and S. N. Kavuri, *A review of process fault detection and diagnosis part III: Process history based methods*, Computers and Chem. Eng. 27, 2003, pp. 327-346.
46. N. Viswanadham, J. H. Taylor and E. C. Luce, *A frequency domain approach to failure detection and isolation with application*, Control Theory and Advanced Technology, 3, 1987, pp. 45-72.
47. J. E. White and J. L. Speyer, *Detection Filter design: spectral theory and algorithms*, IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 32, No. 7, 1987, pp. 593-603.
48. K. Watanabe and D. M. Himmelblau, *Instrument fault detection in systems with unmeasurable disturbance*, IEEE transactions on Automatic Control, **20**, 1982, pp.716-717.
49. W. M. Wonham and A. S. Morse, *Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems: A Geometric Approach*, SIAM Journal of Control, Vol. 8, No. 1, 1970, pp. 1-18.
50. K. Zhou, J. C. Doyle and K. Glover, *Robust and Optimal Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1996.
51. K. Zhou and J. C. Doyle, *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall, New Jersey, 1998.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

### A1 Γενικές Ιδιότητες διανυσματικών χώρων

Ένας υπόχωρος  $R$  του  $\mathbb{R}^n$  συμβολίζεται με  $R \subset \mathbb{R}^n$ . Η διάσταση του  $R$  συμβολίζεται με  $d(R)$ .

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός υποχώρου  $R \subset \mathbb{R}^n$  είναι ένας υπόχωρος  $R^\perp$  που αποτελείται από όλα τα διανύσματα τα οποία είναι κάθετα σε κάθε διάνυσμα του  $R$ :

$$R^\perp = \{\rho \in \mathbb{R}^n : \rho \cdot \xi = 0, \forall \xi \in R\}$$

Για κάθε  $n \times n$  πίνακα  $A$ , υπάρχει ένας μοναδικός γραμμικός τελεστής που ορίζεται στον  $\mathbb{R}^n$  και συμβολίζεται με  $A$ . Αν  $R \subset \mathbb{R}^n$ , η εικόνα του  $R$  μέσω του  $A$  είναι ο μικρότερος υπόχωρος  $R' \subset \mathbb{R}^n$  τέτοιος ώστε για κάθε  $\xi \in R$  υπάρχει κάποιο  $\xi' \in R'$  το οποίο ικανοποιεί:

$$\xi' = A\xi$$

Η εικόνα του  $R$  μέσω του  $A$  συμβολίζεται συχνά ως  $AR$  και η σχέση του  $R'$  με τον  $R$  συμβολίζεται ως:

$$R' = AR$$

Ο μηδενοχώρος του τελεστή  $A$  συμβολίζεται με  $n(A)$  και ορίζεται ως ο μεγαλύτερος υπόχωρος του  $\mathbb{R}^n$  του οποίου η εικόνα μέσω του  $A$  είναι ο μηδενικός χώρος  $\emptyset$ .

Ένας υπόχωρος  $R \subset \mathbb{R}^n$  ορίζεται να είναι αναλλοίωτος αναφορικά με τον  $A$  αν η εικόνα του ικανοποιεί  $AR \subset R$ . Με άλλα λόγια, ένας υπόχωρος είναι αναλλοίωτος αναφορικά με τον  $A$  αν περιέχει την εικόνα του μέσω του  $A$ .

Κάθε αναλλοίωτος υπόχωρος συνδέεται με ένα ελάχιστο πολυώνυμο  $\psi(\cdot)$ . Οι ρίζες του πολυωνύμου είναι οι ιδιοτιμές του  $A$  που σχετίζονται με αυτόν τον υπόχωρο.

Τα διανύσματα  $\xi, \rho \in E^n$  ορίζουμε να είναι μαθηματικά ανάλογα (*modulo*  $R$ ) αν η διαφορά τους είναι στοιχείο του  $R$ , αν δηλαδή  $\xi - \rho \in R$ . Συμβολικά, η μαθηματική αναλογία προσδιορίζεται ως:

$$\xi \equiv \rho(\text{mod } R)$$

Η μαθηματική αναλογία αποτελεί γενίκευση της ισότητας. Το  $(\text{mod } R)$  επιχείρημα μπορεί να ερμηνευθεί ως επέκταση του μηδενικού χώρου  $\emptyset$  ώστε να συμπεριλάβει τον  $R$ .

Σημειώνεται ότι η ουσιαστική διαφορά μεταξύ ενός πίνακα και ενός γραμμικού τελεστή είναι ότι ο γραμμικός τελεστής ορίζεται χωρίς να προσαρτήσουμε μια βάση για το διανυσματικό χώρο. Για κάθε ιδιότητα γραμμικών τελεστών υπάρχει μια ισοδύναμη ιδιότητα για πίνακες.

Αν ο  $R$  έχει μία βάση  $\xi_1 \dots \xi_k$ , έστω  $R$  ο πίνακας του οποίου οι στήλες είναι τα διανύσματα  $\xi_1 \dots \xi_k$  εκφρασμένα στο κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων. Από σύμβαση, ο  $R$  συμβολίζεται:

$$R = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \dots \quad \xi_k]$$

Ο χώρος στηλών του  $R$  είναι το ισοδύναμο σε όρους πίνακα του υποχώρου  $R$ .

Με τον  $M$  ορισμένο ως:

$$M \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

το σύστημα  $(A, B, C)$  είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν ο  $M$  είναι τάξης  $n$ .

Ορισμός: Ένας υπόχωρος  $R$  είναι παρατηρήσιμος για το  $(A, B, C)$  αν:

$$R \cap n(M) = \emptyset$$

## A2 Διαδικασία ορθογώνιας μείωσης

Θεωρούμε έναν  $n' \times n$  πίνακα:

$$V = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_{n'}^T \end{bmatrix}$$

όπου τα  $v_j$ ,  $j = 1 \dots n'$  είναι αυθαίρετα  $n$ -διανύσματα. Η διαδικασία ορθογώνιας μείωσης είναι μια επαναληπτική διαδικασία η οποία παράγει έναν συμμετρικό, θετικά ημιορισμένο πίνακα  $\Omega^{(n)}$  ο χώρος στηλών του οποίου συμπίπτει με το  $n(V)$ . Στην  $j$ -οστή επανάληψη η  $j$ -οστή γραμμή του  $V$  εξετάζεται για να καθορίσουμε εάν είναι ορθογώνια στο χώρο στηλών ενός

συμμετρικού πίνακα. Αν δεν είναι, ο χώρος στηλών του πίνακα μειώνεται ώστε να εξασφαλίζεται ορθογωνιότητα. Ο αλγόριθμος ξεκινά με έναν αρχικό πίνακα  $\Omega^{(1)}$  ο οποίος είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Η απομάκρυνση γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε οι  $\Omega^{(j)}$ ,  $j = 1 \dots n'$  να παραμένουν συμμετρικοί και θετικά ημιορισμένοι. Μετά το πέρας της διαδικασίας, ο χώρος στηλών του  $\Omega^{(n)}$  είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών του  $V$ , δηλαδή είναι το  $n(V)$ . Ο αλγόριθμος ξεκινά με οποιονδήποτε συμμετρικό, θετικά ορισμένο πίνακα  $\Omega^{(1)}$ . Η επανάληψη είναι μια διαδικασία δύο βημάτων στα πλαίσια του βοηθητικού διανύσματος  $w_j$ :

$$\text{i) } w_j = \Omega^{(j)} v_j$$

$w_j$  είναι το εσωτερικό γινόμενο του  $v_j$  με τον χώρο γραμμών του  $\Omega^{(j)}$ -- το οποίο είναι επίσης ο χώρος στηλών του  $\Omega^{(j)}$ , αφού ο  $\Omega^{(j)}$  είναι συμμετρικός. Αν το  $w_j$  είναι μηδενικό, το  $v_j$  είναι ορθογώνιο στο χώρο στηλών του  $\Omega^{(j)}$  και καμία τροποποίηση του  $\Omega^{(j)}$  δεν απαιτείται:

$$\text{ii) } \Omega^{(j+1)} = \Omega^{(j)}$$

Αν το  $w_j$  δεν είναι μηδενικό, το  $n(\Omega^{(j+1)})$  μεγαλώνει προκειμένου να συμπεριλάβει το  $v_j$ :

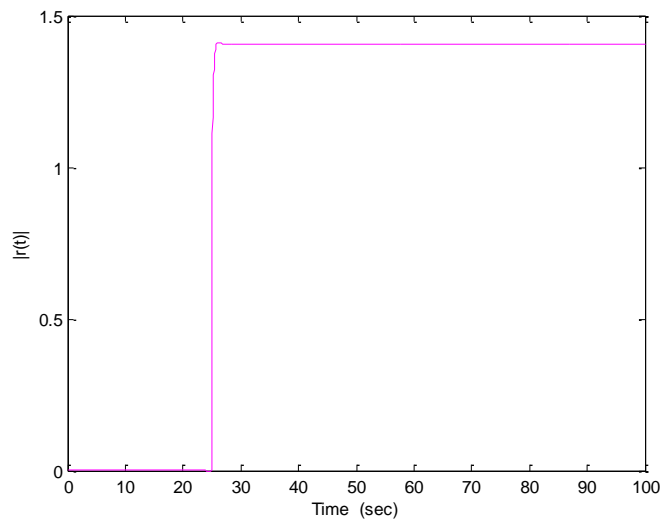
$$\text{ii)' } \Omega^{(j+1)} = \Omega^{(j)} - \frac{w_j w_j^T}{w_j^T v_j}$$

Μετά από  $n'$  επαναλήψεις το πολύ, ο χώρος γραμμών του  $V$  είναι το  $n(\Omega^{(n)})$  και ο χώρος στηλών του  $\Omega^{(n)}$  είναι το  $n(V)$ .

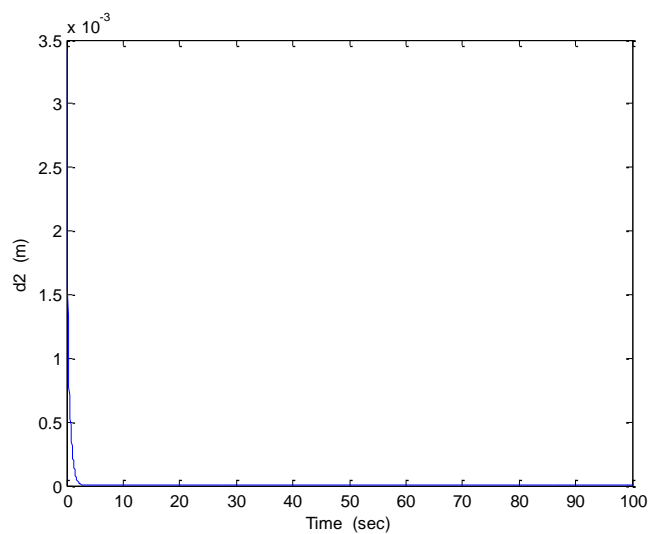
# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

## ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Παραθέτουμε τα αποτελέσματα που αφορούν τους αισθητήρες 2, 3, 4, 6, 7, 10 και 11 του δορυφόρου.

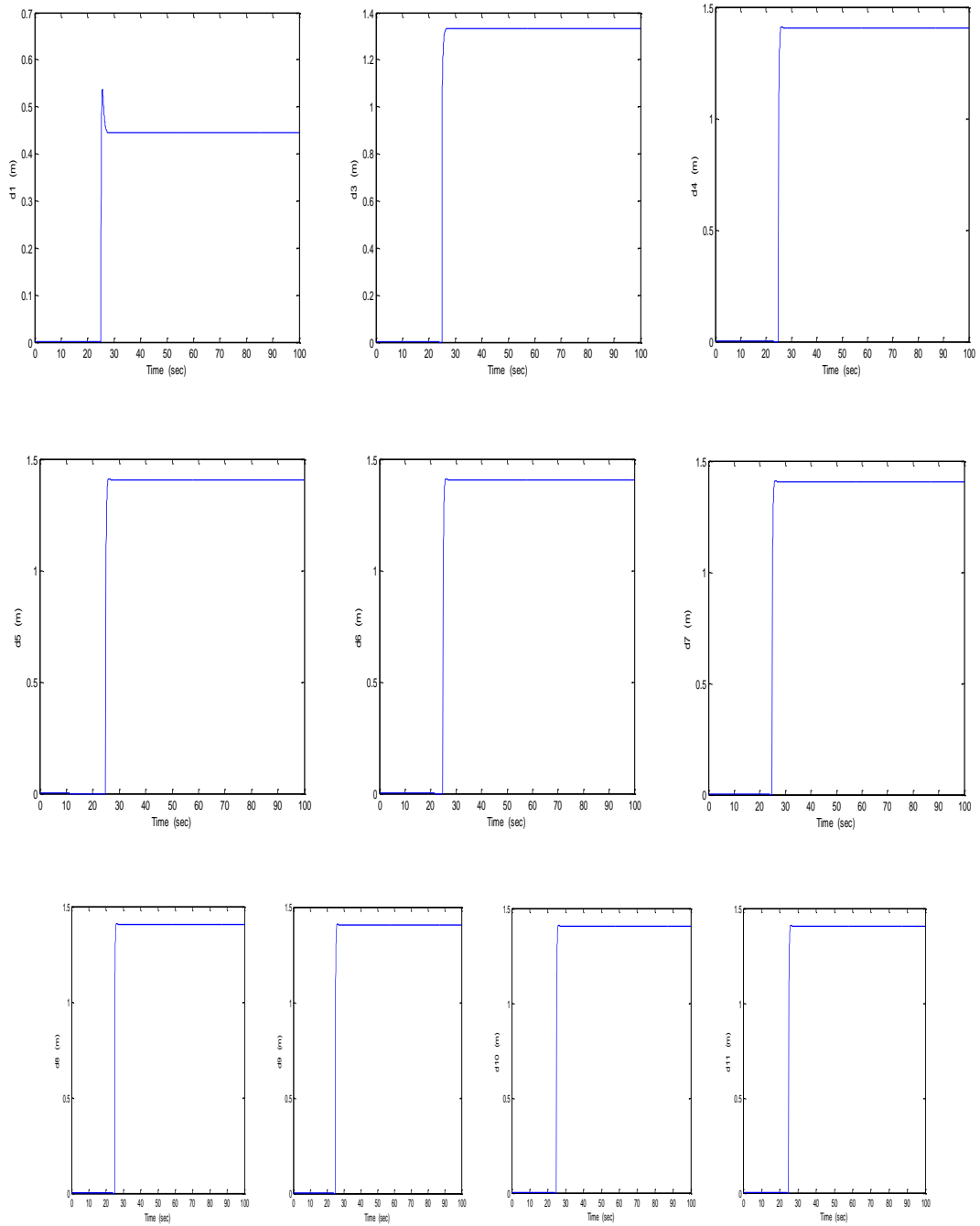


Σχήμα ΠΒ.1: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 2<sup>ο</sup> αισθητήρα

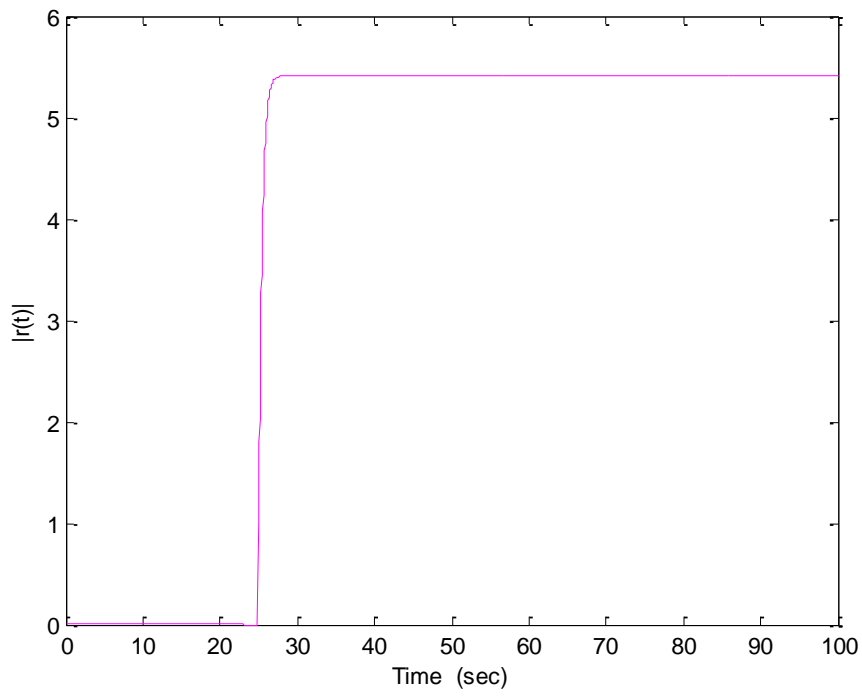


Σχήμα ΠΒ.2: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 2<sup>ου</sup> αισθητήρα

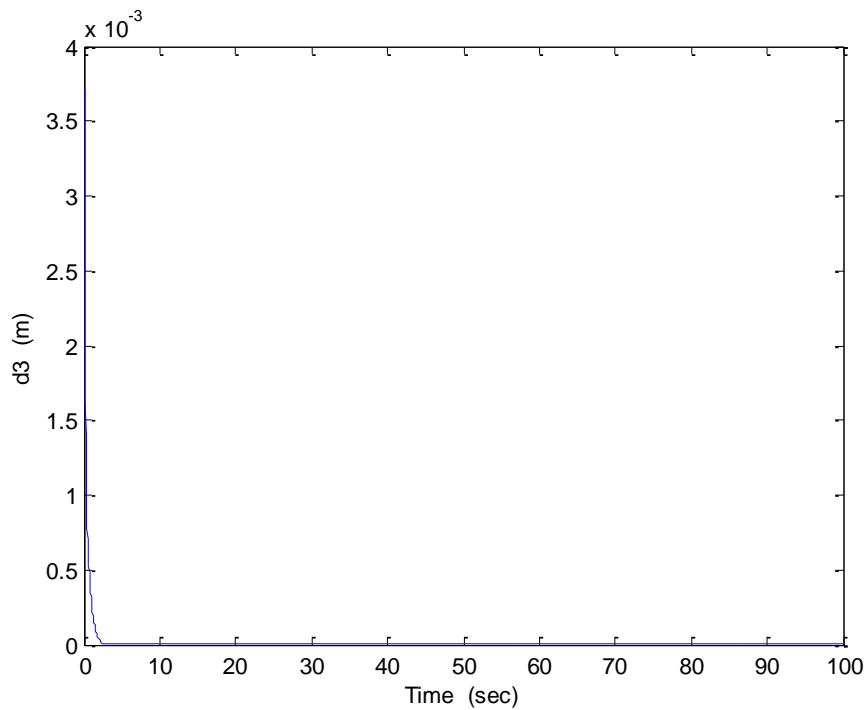




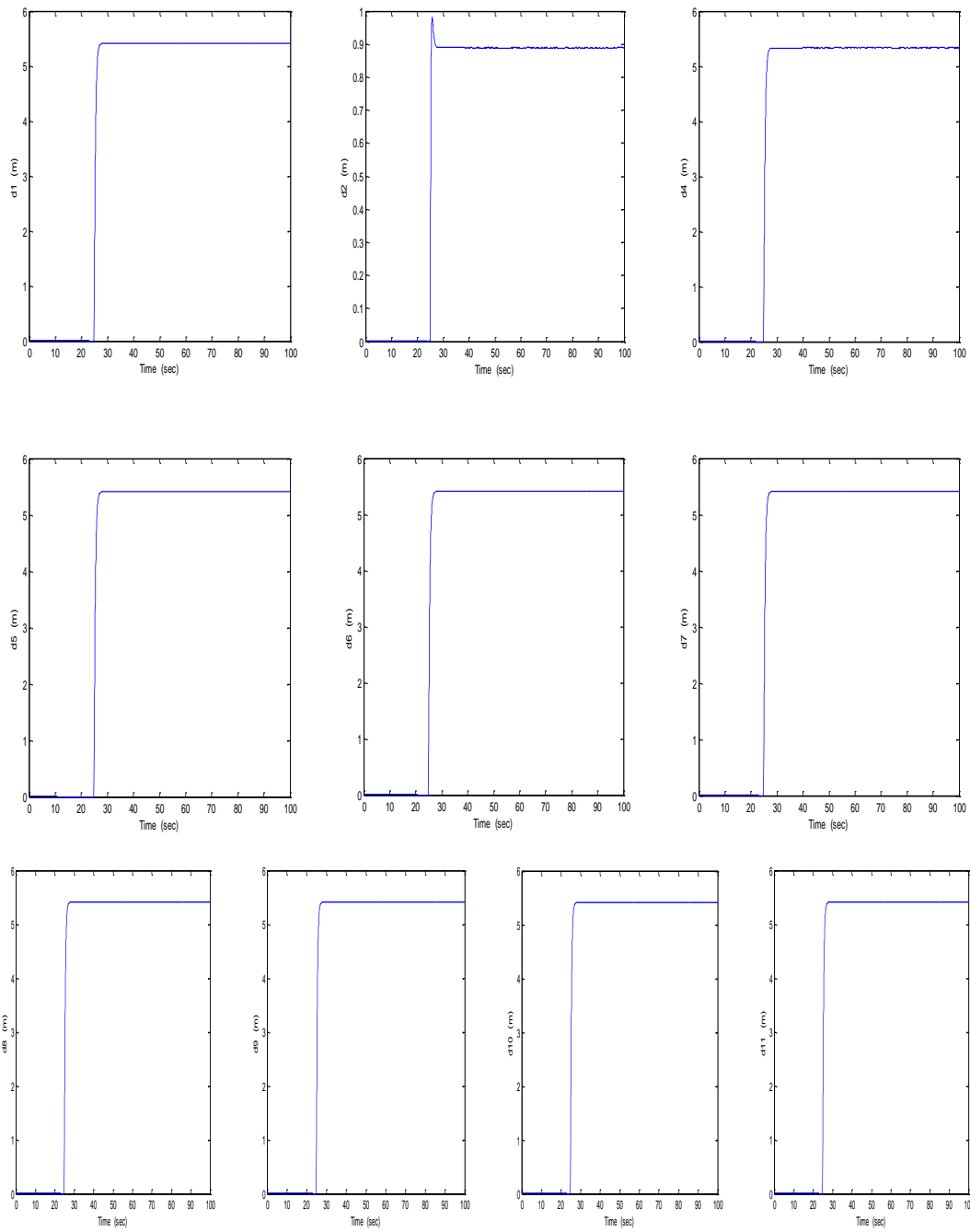
Σχήμα ΠΒ.3: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 2<sup>ο</sup> αισθητήρα



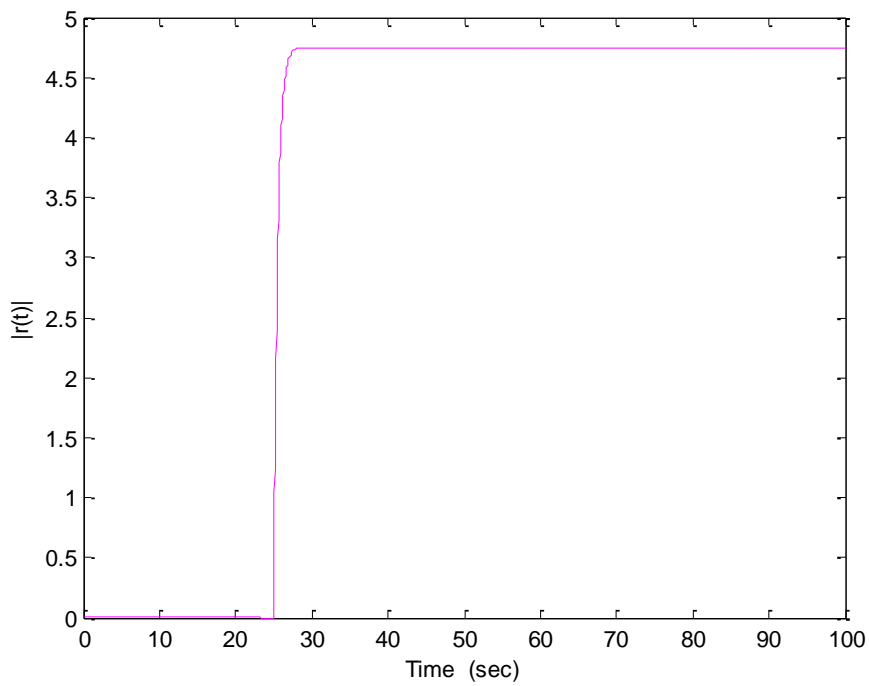
Σχήμα ΠΒ.4: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 3<sup>ο</sup> αισθητήρα



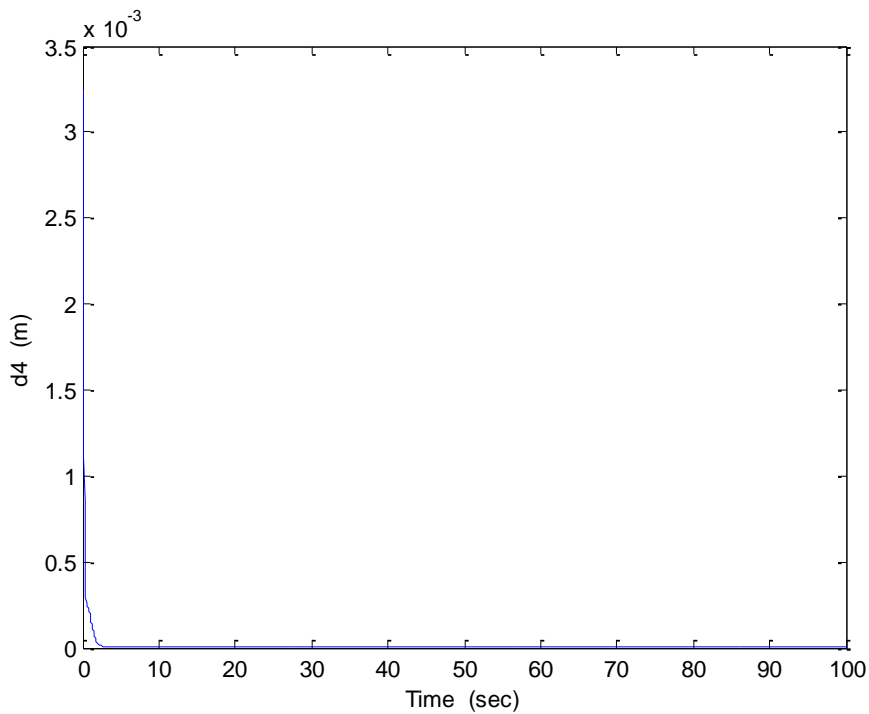
Σχήμα ΠΒ.5: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 3<sup>ου</sup> αισθητήρα



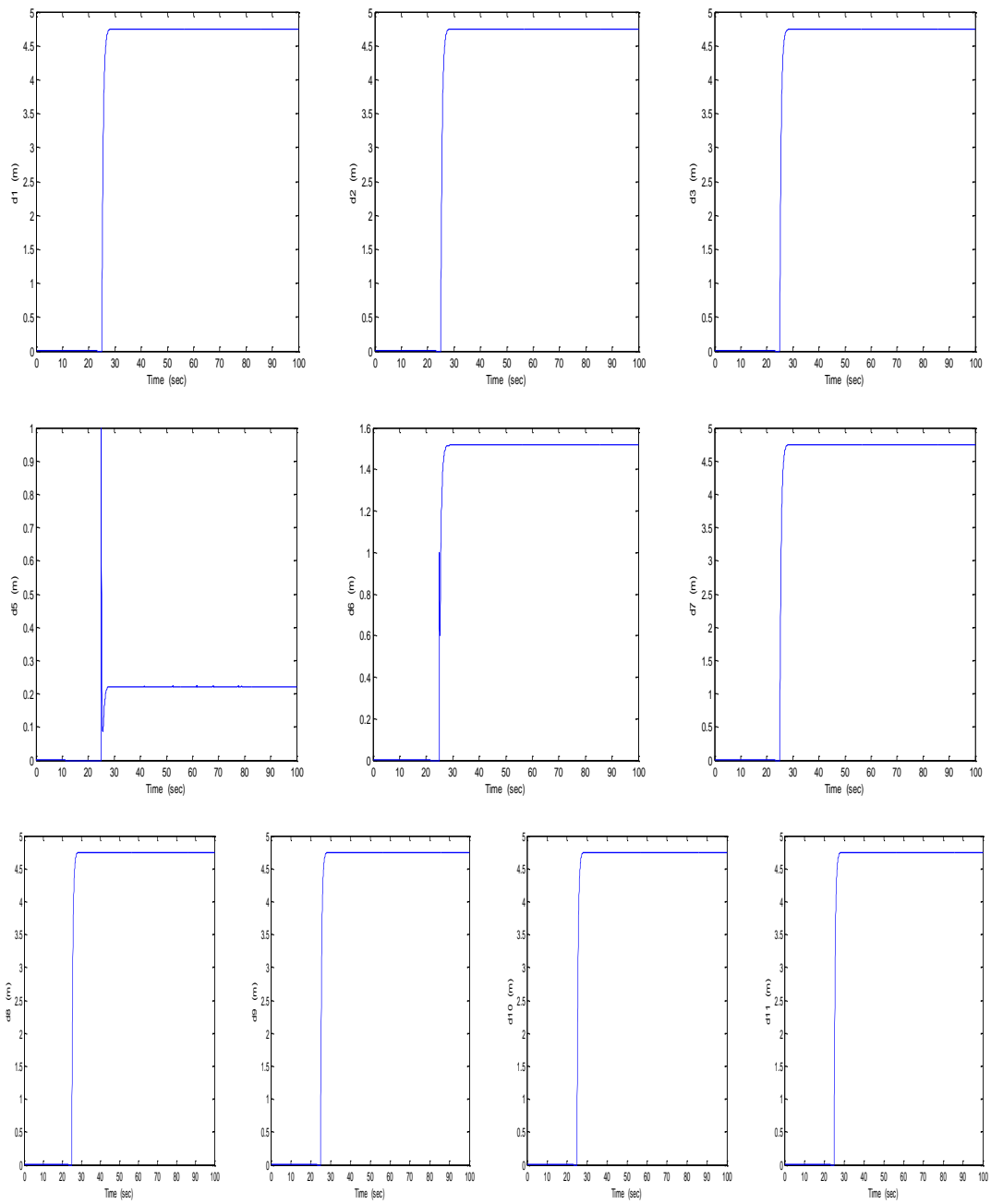
Σχήμα ΠΒ.6: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 3<sup>ο</sup> αισθητήρα



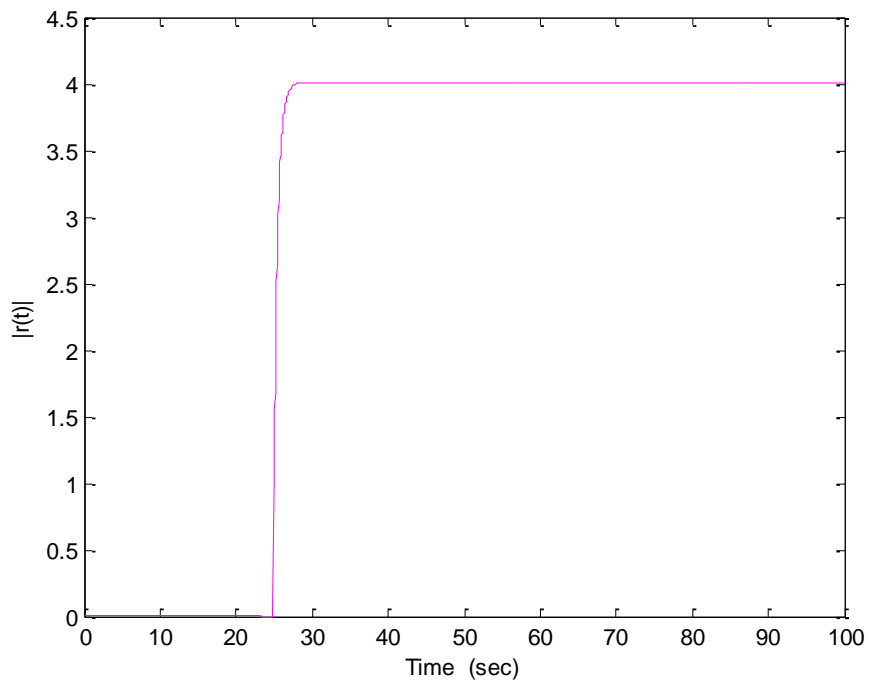
Σχήμα ΠΒ.7: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 4<sup>ο</sup> αισθητήρα



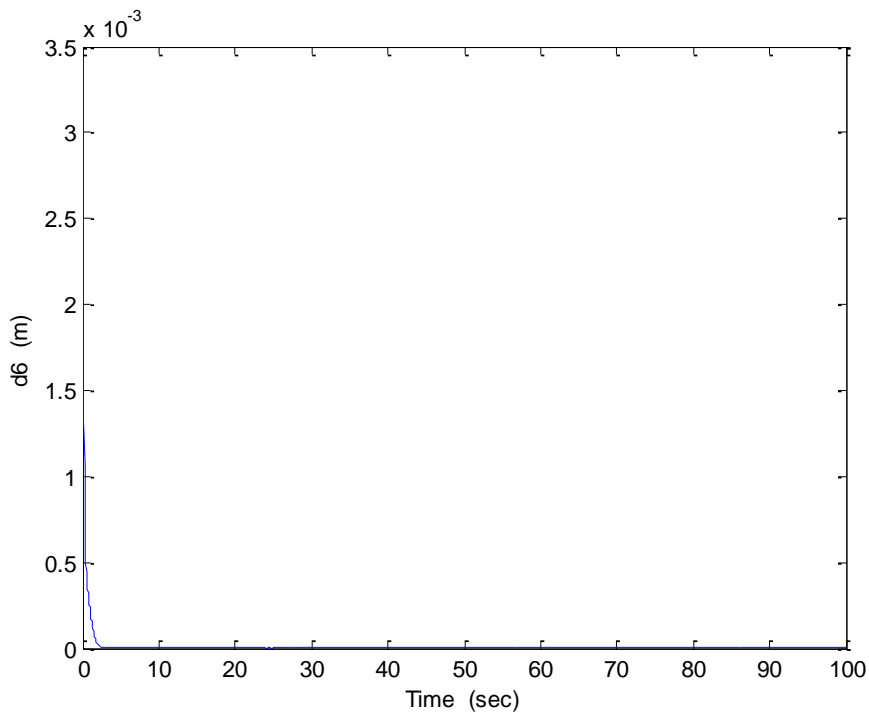
Σχήμα ΠΒ.8: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 4<sup>ου</sup> αισθητήρα



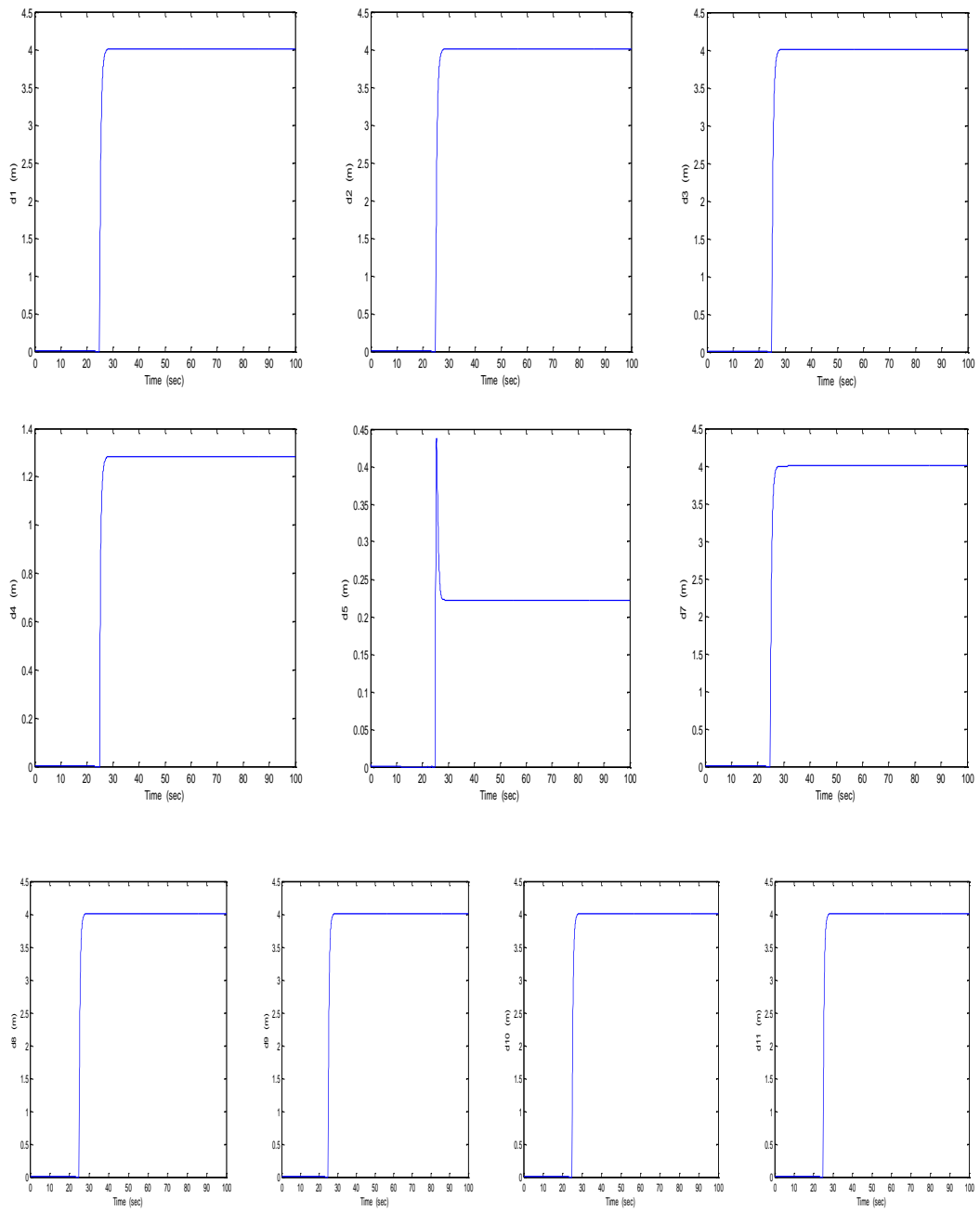
Σχήμα ΠΒ.9: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 4<sup>ο</sup> αισθητήρα



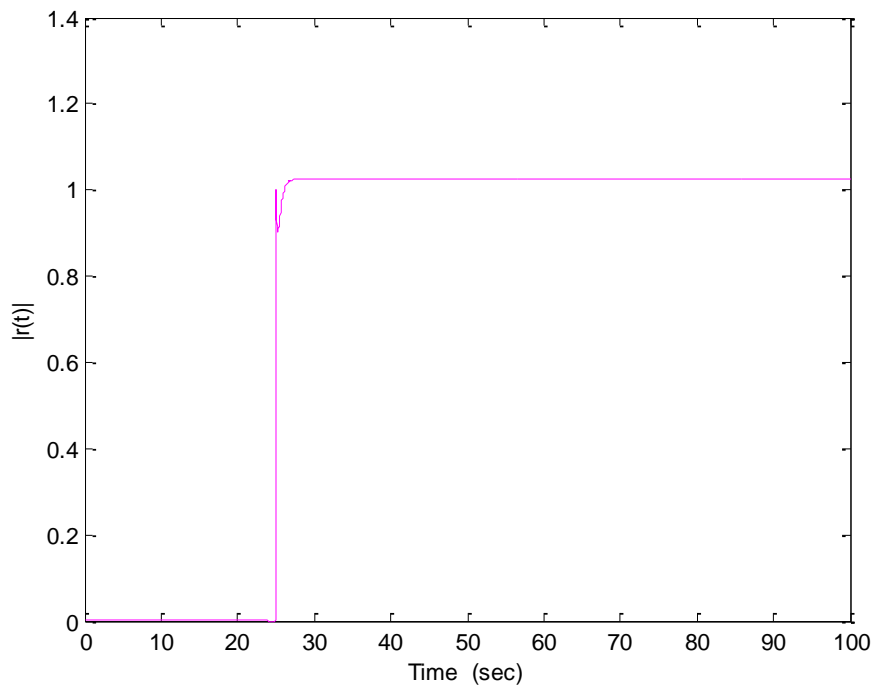
Σχήμα ΠΒ.10: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 6<sup>ο</sup> αισθητήρα



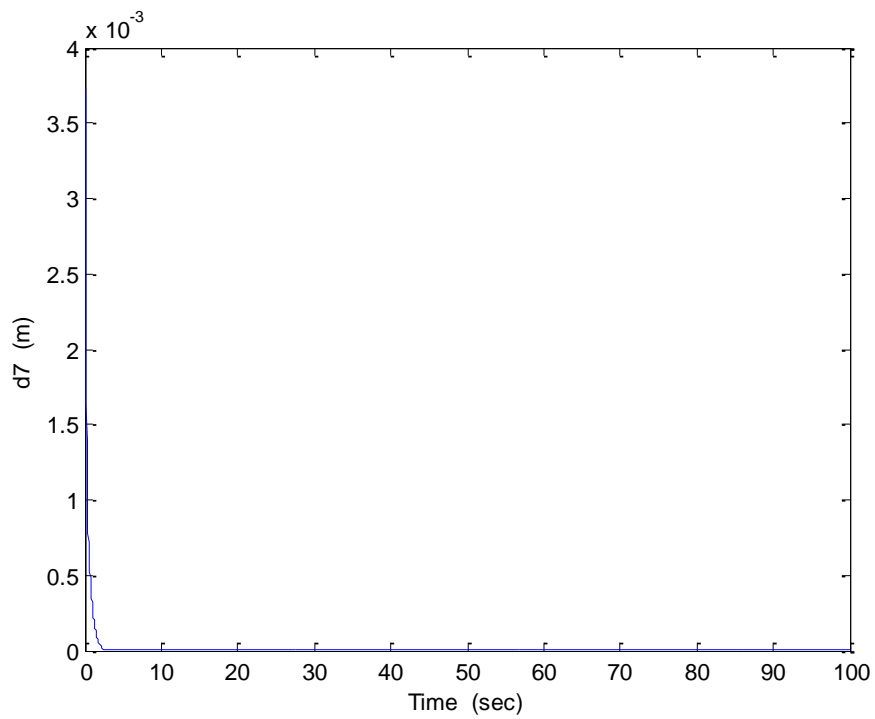
Σχήμα ΠΒ.11: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 6<sup>ου</sup> αισθητήρα



Σχήμα ΠΒ.12: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 6<sup>ο</sup> αισθητήρα

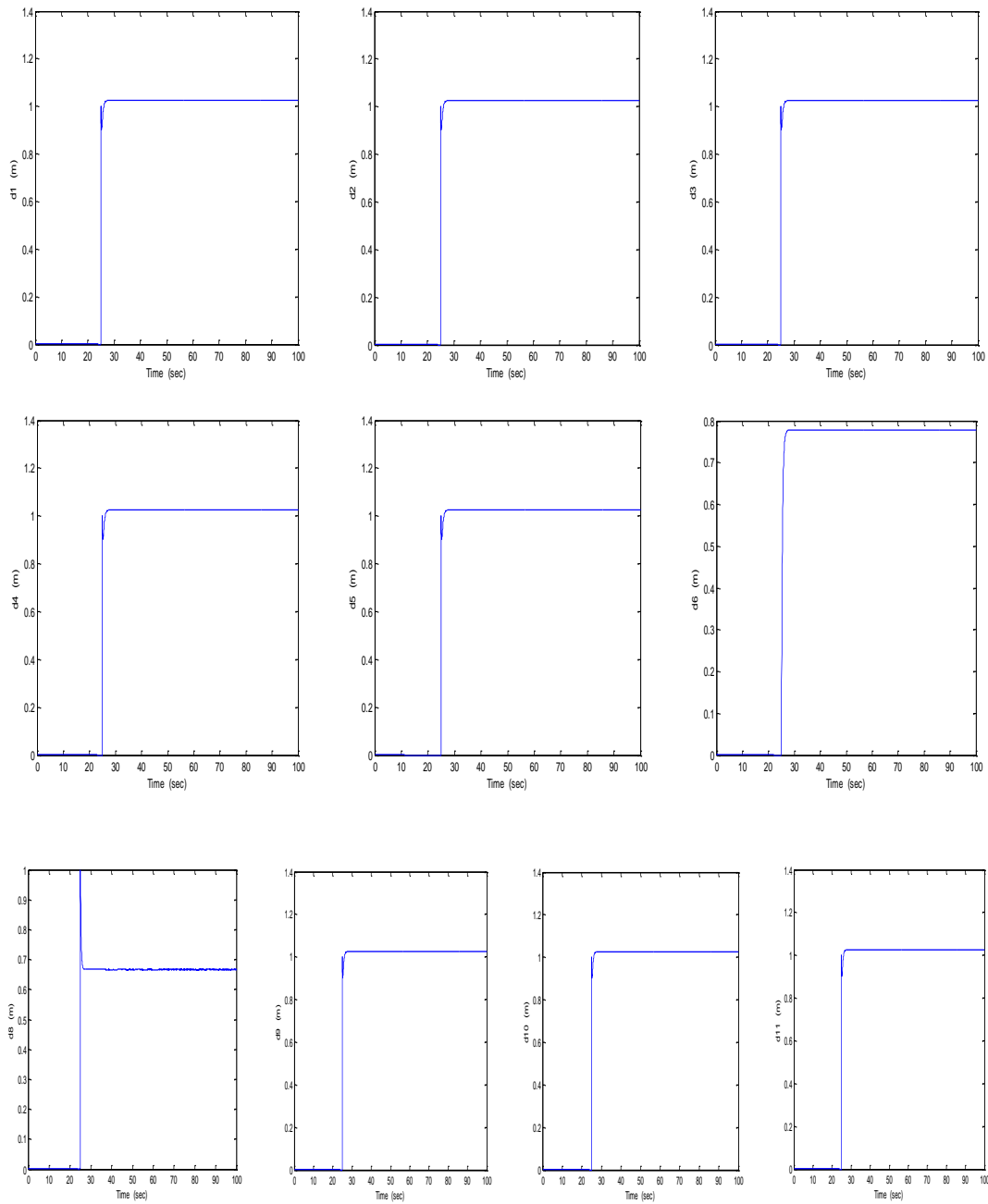


Σχήμα ΠΒ.13: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 7<sup>ο</sup> αισθητήρα

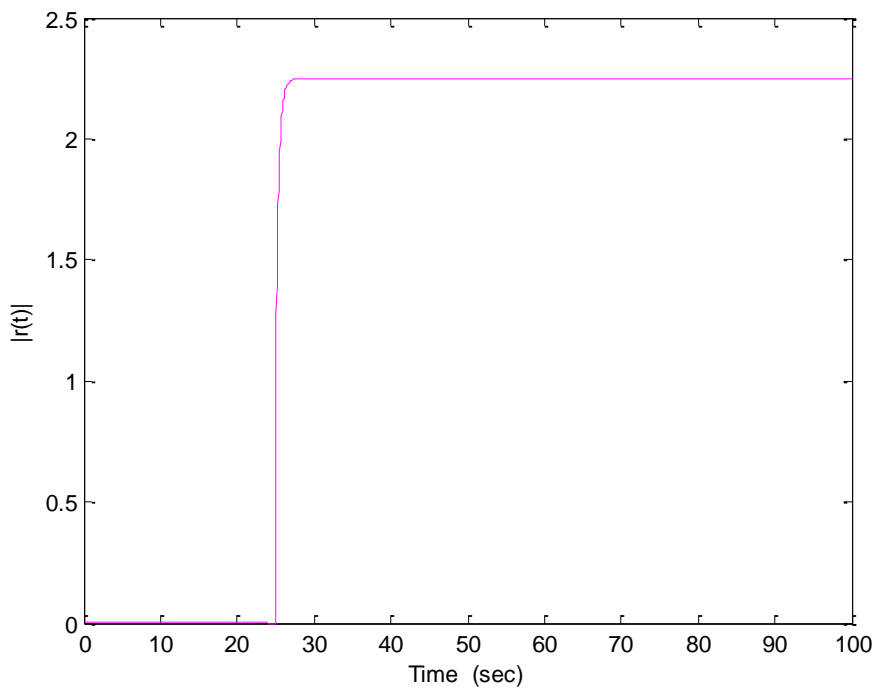


Σχήμα ΠΒ.14: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 7<sup>ου</sup> αισθητήρα

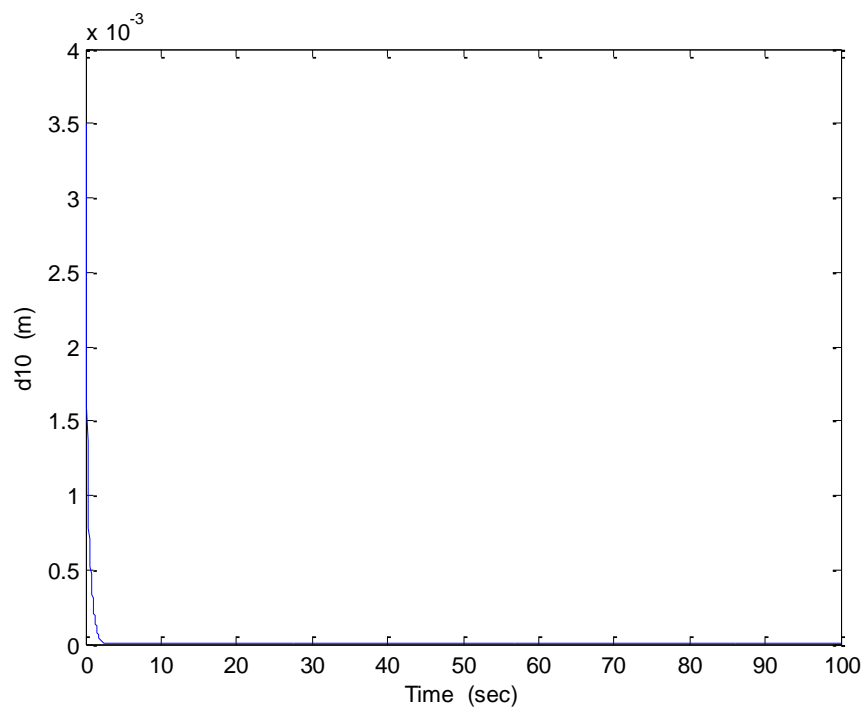




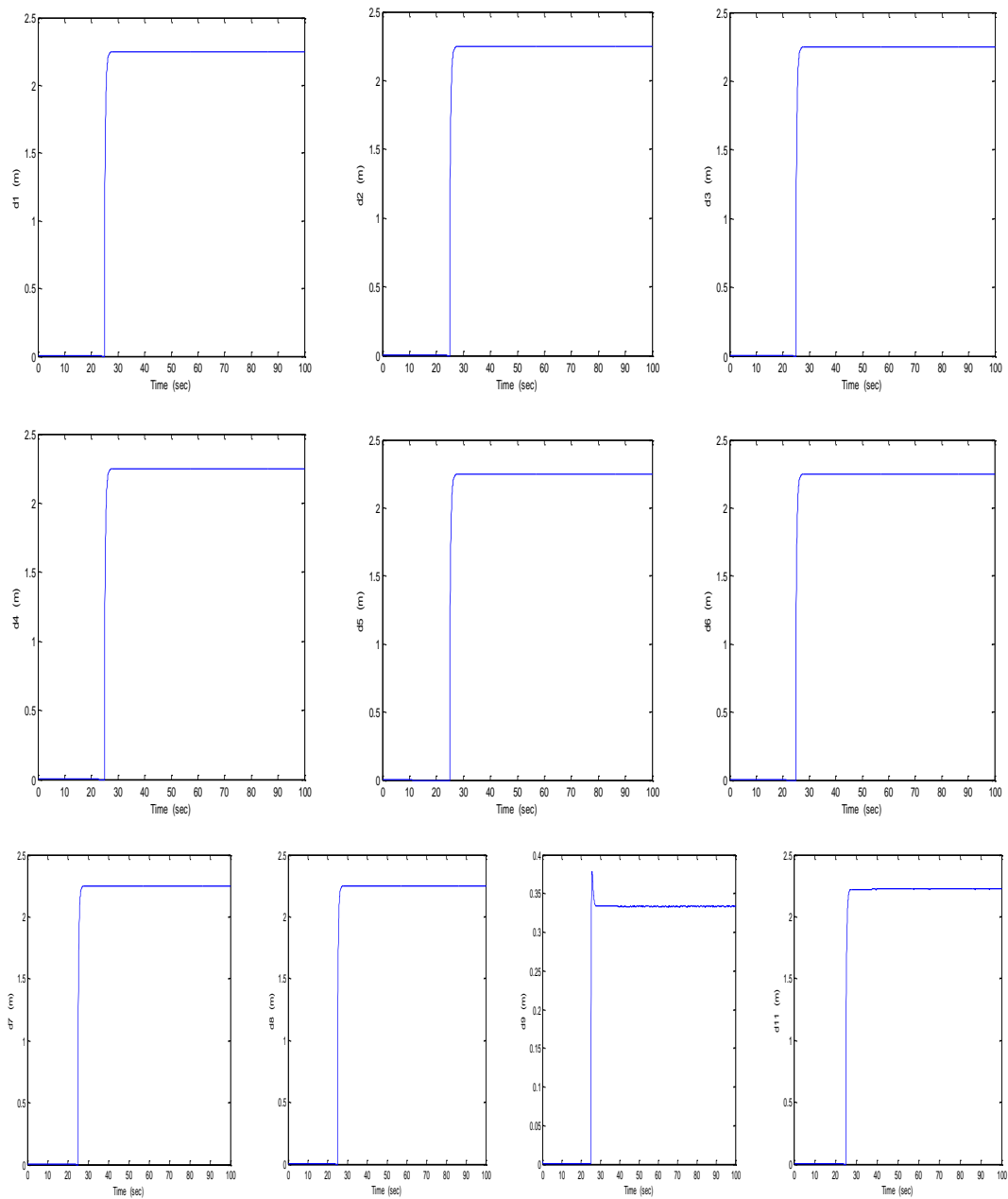
Σχήμα ΠΒ.15: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον 7<sup>ο</sup> αισθητήρα



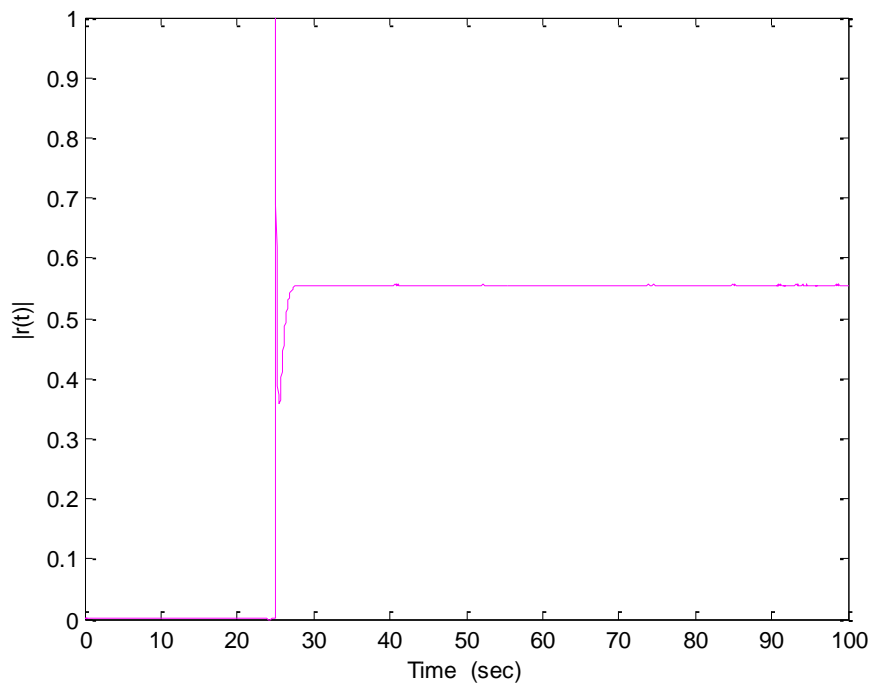
Σχήμα ΠΒ.16: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον  $10^0$  αισθητήρα



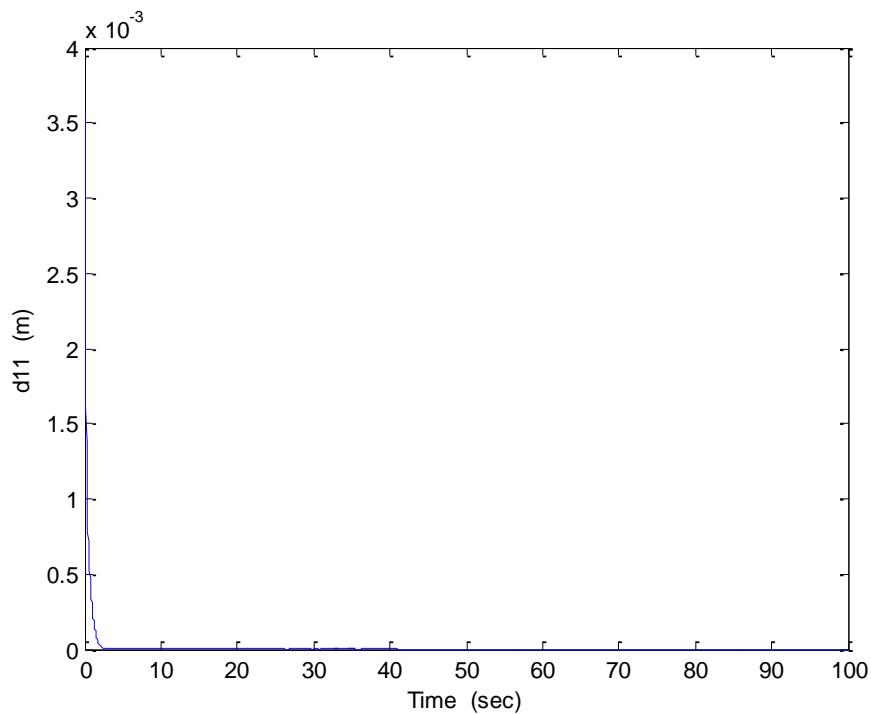
Σχήμα ΠΒ.17: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του  $10^{00}$  αισθητήρα



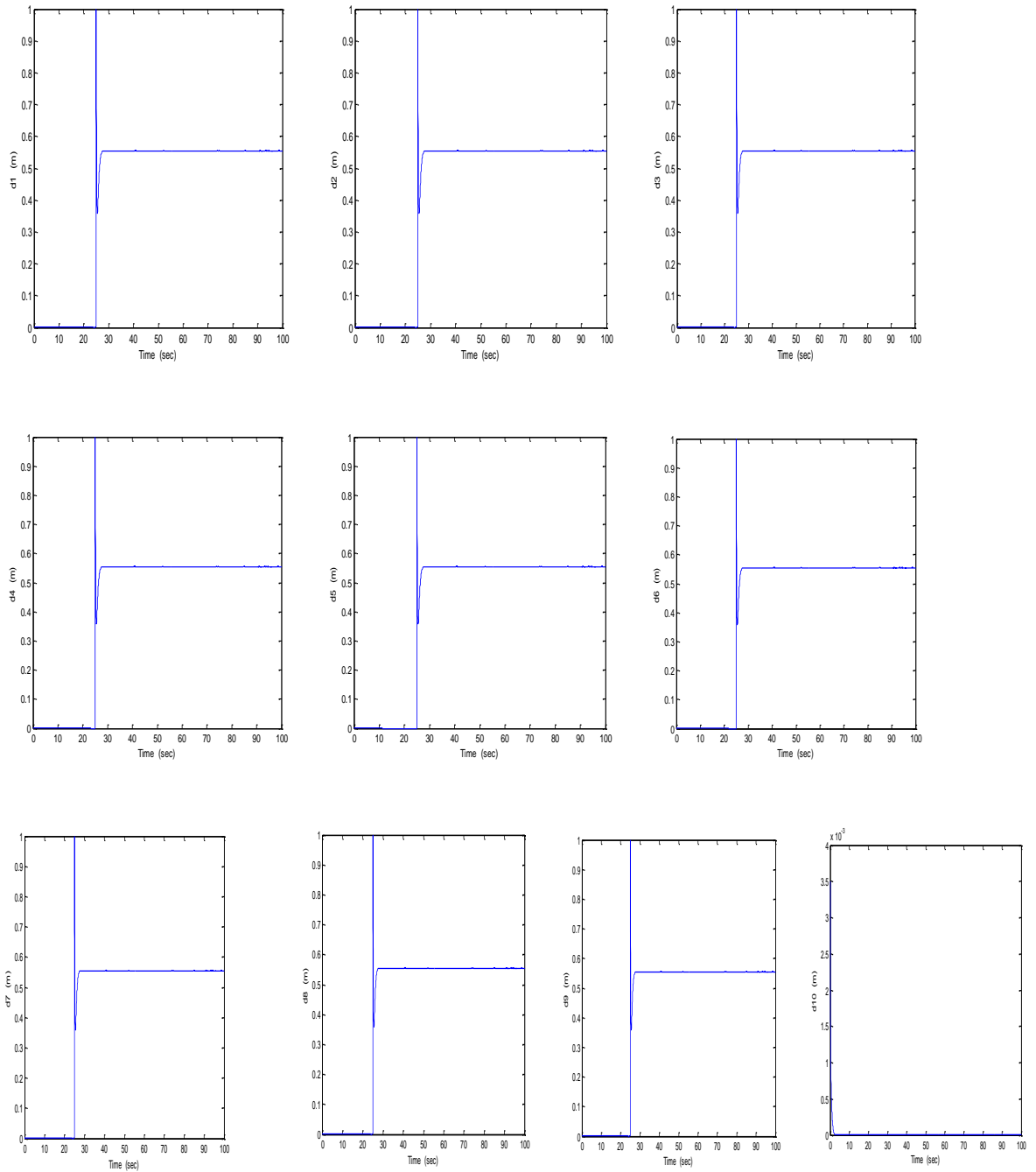
Σχήμα ΠΒ.18: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον  $10^0$  αισθητήρα



Σχήμα ΠΒ.19: Σήμα υπολοίπου παρουσία αστοχίας στον 11<sup>ο</sup> αισθητήρα



Σχήμα ΠΒ.20: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από το επίπεδο αστοχίας του 11<sup>ου</sup> αισθητήρα



Σχήμα ΠΒ.21: Απόσταση του διανύσματος του υπολοίπου από τα υπόλοιπα προκαθορισμένα επίπεδα αστοχίας. Αστοχία στον  $11^\circ$  αισθητήρα

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

## ΠΙΝΑΚΕΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΤΟ ΧΩΡΟ ΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

Ο πίνακας  $A$  της μαθηματικής παράστασης του γραμμικοποιημένου μοντέλου του δορυφόρου είναι:

	-11	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	-7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	-12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	3	0	-14	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	4	0	-48	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	5	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	8	0	-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	3	0	-9,33	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	4	0	-10,67	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A=	0	0	0	0	0	0	9	0	1	0	-9,11	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	10	0	3	0	-8,89	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	-5	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-6	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	-4	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	0	-4	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	-17	1	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	0	-72	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	-9
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	-20
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-2
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	-5

Πίνακας ΠΓ.1: Ο πίνακας  $A$  της μαθηματικής παράστασης στο χώρο κατάστασης

Ο πίνακας εισόδου  $B$  είναι:

	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0026	-0,0012	-0,0004	0,0025	-0,0011	-0,0004	-0,0008	-0,0013	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0009	0,00087	-0,0015	-0,0016	0,0005	0,0006	-0,0009	-0,0009	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0008	0,00106	-0,0019	-0,0015	-0,0006	-0,0013	0,0018	0,00165	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0011	0,0004	0,00087	0,0013	-0,0027	0,0012	0,0004	-0,0025	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0005	0,00059	-0,0009	-0,0009	0,0009	0,0009	-0,0015	-0,0015	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B=	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-0,001	-0,0007	0,0015	0,0018	0,0012	0,0007	-0,0016	-0,0018	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0042	-0,0042	-0,0033	0,0033	0,0042	-0,0042	-0,0033	0,00331	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-4E-04	0,00186	0,00191	0,0002	0,0004	-0,0019	-0,0019	-0,0002	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0008	0,00106	-0,0019	-0,0015	-0,0006	-0,0013	0,0018	0,00165	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	-0,001	-0,0007	0,0015	0,0018	0,0012	0,0007	-0,0016	-0,0018	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0,0042	-0,0042	-0,0033	0,0033	0,0042	-0,0042	-0,0033	0,00331	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Πίνακας ΠΓ.2: Ο πίνακας  $B$  της μαθηματικής παράστασης στο χώρο κατάστασης

Ο πίνακας εξόδων  $C$  του μοντέλου του δορυφόρου είναι:

	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C=	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Πίνακας ΠΓ.3: Ο πίνακας  $C$  της μαθηματικής παράστασης στο χώρο κατάστασης