



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ
ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ
ΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ ΣΕ ΜΙΑ
ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΑΓΟΡΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στυλιανός Ν. Καρκαλάτος

Χρήστος Θ. Τσεγκής

Επιβλέπων: Ιωάννης Ψαρράς

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2011



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
 ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
 ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
 ΤΟΜΕΑΣ ΗΛΕΚΤΡΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΞΕΩΝ ΚΑΙ
 ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΓΙΑ
 ΤΗΝ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΤΩΝ ΕΠΕΝΔΥΣΕΩΝ ΣΕ ΜΙΑ
 ΑΝΤΑΓΩΝΙΣΤΙΚΗ ΑΓΟΡΑ ΗΛΕΚΤΡΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ**

ΔΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Στυλιανός Ν. Καρκαλάτος

Χρήστος Θ. Τσεγκής

Επιβλέπων: Ιωάννης Ψαρράς

Καθηγητής ΕΜΠ

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 18^η Οκτωβρίου 2011.

.....

Ιωάννης Ψαρράς

Καθηγητής ΕΜΠ

.....

Δημήτριος Ασκούνης

Επίκουρος Καθηγητής
 ΕΜΠ

.....

Βασίλειος Ασημακόπουλος

Καθηγητής ΕΜΠ

Αθήνα, Οκτώβριος 2011

.....
Τσεγκής Χρήστος

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

.....
Καρκαλάτος Στυλιανός

Διπλωματούχος Ηλεκτρολόγος Μηχανικός και Μηχανικός Υπολογιστών Ε.Μ.Π.

Copyright © Τσεγκής Χρήστος και Καρκαλάτος Στυλιανός.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον επιβλέποντα καθηγητή της διπλωματικής μας κο. Ιωάννη Ψαρρά, για την καθοδήγησή του και τη βοήθεια του σε κάθε φάση της δημιουργίας της. Επίσης, θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον κο. Σωτήρη Παπαδέλη, η συνεισφορά του οποίου ήταν ιδιαίτερα σημαντική για την επιτυχή ολοκλήρωση της εργασίας αυτής. Θέλουμε να εκφράσουμε την ευγνωμοσύνη μας στους γονείς μας για την διαρκή τους υποστήριξη, που επέτρεψε την επιτυχή διεκπεραίωση των σπουδών μας. Τέλος, θέλουμε να ευχαριστήσουμε τους φίλους και συναδέλφους μας για τα όμορφα φοιτητικά χρόνια που περάσαμε μαζί.

Καρκαλάτος Ν. Στυλιανός

Τσεγκής Θ. Χρήστος

Αθήνα, 18^η Οκτωβρίου 2011

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι η παρουσίαση μιας προτεινόμενης αρχιτεκτονικής μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μια ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία ξεπερνά ορισμένες αδυναμίες των υπαρχόντων μοντέλων και διαθέτει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης μερικών πολύ πρόσφατων ιδεών γύρω από την αβεβαιότητα. Αρχικά, αναφερθήκαμε στις αδυναμίες των υφιστάμενων μοντέλων, όπως το πρόβλημα του κεντρικού σχεδιασμού μιας ενεργειακής πολιτικής και η αδυναμία αξιολόγησης μιας επένδυσης από την μεριά ενός επενδυτή. Στη συνέχεια παρουσιάσαμε τις βασικές παραμέτρους ενός οικονομικού-ενεργειακού μοντέλου, δηλαδή τη μοντελοποίηση της αβεβαιότητας, που εμπεριέχεται σε μια επενδυτική απόφαση, τη μοντελοποίηση των αποφάσεων, η οποία αποτελεί δυνατότητα έκφρασης με συμπαγή τρόπο των επενδυτικών αποφάσεων, και τη μοντελοποίηση των δομικών σχέσεων, όπου αναπτύξαμε το μοντέλο προσδιορισμού των τρεχουσών τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας. Τέλος, περιγράψαμε αναλυτικά την προτεινόμενη αρχιτεκτονική μοντέλου.

Λέξεις Κλειδιά

Αξιολόγηση επενδύσεων, ενεργειακή πολιτική, κεντρικός σχεδιασμός, ο ρόλος του επενδυτή, Πραγματικά Δικαιώματα, στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός, επανάληψη πολιτικής ελαχίστων τετραγώνων, μοντελοποίηση αβεβαιότητας των τιμών ενέργειας, βραχυπρόθεσμο / μακροπρόθεσμο μοντέλο Schwartz και Smith, φίλτρα Kalman, συνάρτηση προσφορών ηλεκτρικής ενέργειας, τρέχουσες τιμές ηλεκτρικής ενέργειας

Abstract

The purpose of this thesis is a presentation of innovative model architecture for the evaluation of investments in a competitive electricity market, which overcomes some weaknesses of existing models and has the possibility of intergrating some very recent ideas about the uncertainty. Initially, we mentioned the weaknesses of existing models, such as the problem of central planning of an energy policy and the evaluation weakness of an investment on the part of an investor. Then we presented the basic parameters of an economic-energy model, which are the modeling of uncertainty, inherent in an investment decision, decision modeling and modeling of structural relationships, where we developed the model for determining the power spot prices. Finally, we described in detail the innovative model architecture.

Key words

Investment evaluation, energy policy, central planning, the role of individual actor, Real Options, stochastic Dynamic Programming, Least Squares Policy Iteration, modeling uncertainty of energy prices, short-term/long-term model Schwartz and Smith, Kalman filters, bid stack function, spot power prices

Πίνακας περιεχομένων

Εισαγωγή.....	13
1. Ερευνητικά ερωτήματα μελετών αξιολόγησης ενεργειακών πολιτικών	14
1.1 Κριτήρια απόδοσης για την αξιολόγηση ενεργειακών πολιτικών.....	14
1.2 Κεντρικός σχεδιασμός για τη διαμόρφωση μίας ενεργειακής πολιτικής	17
1.3 Ο ρόλος του επενδυτή και η σχέση μεταξύ ενεργειακών πολιτικών και αβεβαιοτήτων	24
1.4 Τεχνικές απαιτήσεις άσκησης μίας επενδυτικής απόφασης.....	34
2. Μοντέλα Πραγματικών Δικαιωμάτων.....	38
2.1 Ανεξάρτητες επενδυτικές αποφάσεις	40
2.2 Αμοιβαίως αποκλειόμενες επενδυτικές αποφάσεις	43
2.3 Συνδυαστικές επενδυτικές αποφάσεις	45
2.4 Switching επενδυτικές αποφάσεις.....	49
3. Δυναμικός Προγραμματισμός.....	50
3.1 Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού	51
3.3 Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός	55
3.3.1 Αρχή Βελτιστοποίησης της εξίσωσης BELLMAN	57
3.4 Προσεγγιστικός Δυναμικός Προγραμματισμός.....	60
3.4.1 Η Βασική Ιδέα.....	61
3.4.2 Βασικός Αλγόριθμος Προσεγγιστικού Δυναμικού Προγραμματισμού.....	63
4. Εργαλεία Δυναμικού Προγραμματισμού και η λειτουργία τους.....	65
4.1 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων MONTE CARLO.....	65
4.1.1 Least-Squares MONTE CARLO Αλγόριθμος.....	68
4.2 Επανάληψη Πολιτικής μέσω Προσέγγισης Ελαχίστων Τετραγώνων	71
4.3 Μέθοδος Παράθεσης.....	83
4.4 Μέθοδος Προσέγγισης Με Τη Χρήση Μοντέλων Παλινδρόμησης.....	86
5. Προσδιορισμός Στοχαστικών Διαδικασιών για τη μοντελοποίηση των αβεβαιοτήτων, που επηρεάζουν μία επενδυτική απόφαση	91
5.1 Μοντελοποίηση Τιμών Ενέργειας.....	91
5.1.1 Μοντελοποίηση τιμών καυσίμου	91
5.1.2 Μοντελοποίηση τιμής άνθρακα	93
5.1.3 Μοντελοποίηση Τιμών Ηλεκτρικής Ενέργειας.....	97
5.2 Ανάλυση στοχαστικών διαδικασιών	100
5.2.1 GBM (Geometric Brownian Motion)	100
5.2.2 FAT TAILS: GARCH MODEL.....	102

5.2.3	FAT TAILS: JUMP DIFFUSION MODELS.....	105
5.2.4	FAT TAILS VARIANCE GAMMA (VG) PROCESS	107
5.3	α - Σταθερές Κατανομές.....	108
5.4	Μοντέλο των Schwartz και Smith	115
6.	Προτεινόμενη Αρχιτεκτονική Μοντέλου για την Αξιολόγηση	
	Επενδύσεων σε μια Ανταγωνιστική Αγορά Ηλεκτρικής Ενέργειας	120
6.1	Προτεινόμενη Αρχιτεκτονική Μοντέλου	120
6.2	Μοντέλο για την εξέλιξη των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας.....	128
6.3	Φίλτρα Kalman	135
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	141

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι η παρουσίαση μιας προτεινόμενης αρχιτεκτονικής μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μια ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας, η οποία ξεπερνά ορισμένες αδυναμίες των υπάρχοντων μοντέλων και διαθέτει τη δυνατότητα ενσωμάτωσης μερικών πολύ πρόσφατων ιδεών γύρω από την αβεβαιότητα, που από τη μεριά της επηρεάζει μια επενδυτική απόφαση.

Στο 1^ο κεφάλαιο γίνεται μια παρουσίαση των ερευνητικών ερωτημάτων μελετών αξιολόγησης ενεργειακών πολιτικών από τη σκοπιά του κεντρικού σχεδιαστή μιας ενεργειακής πολιτικής και από τη σκοπιά του επενδυτή. Επίσης, αναφέρονται οι τεχνικές απαιτήσεις άσκησης μιας επενδυτικής απόφασης.

Στο 2^ο κεφάλαιο αναλύονται τα μοντέλα Πραγματικών Δικαιωμάτων, τα οποία αποτελούν μια δυνατότητα προσομοίωσης του τρόπου, με τον οποίο λαμβάνονται στην πράξη οι επενδυτικές αποφάσεις.

Στο 3^ο κεφάλαιο περιγράψαμε το στοχαστικό Δυναμικό Προγραμματισμό και τον προσεγγιστικό Δυναμικό Προγραμματισμό, που αποτελούν μια προσέγγιση για τη μοντελοποίηση των προβλημάτων βελτιστοποίησης, που εμπεριέχουν αβεβαιότητα.

Στο 4^ο κεφάλαιο παρουσιάσαμε τα εργαλεία Δυναμικού Προγραμματισμού και την λειτουργία τους, τα οποία αποτελούν μηχανισμούς εκτίμησης των παραμέτρων των προβλημάτων βελτιστοποίησης. Τέτοια εργαλεία είναι η επανάληψη πολιτικής ελαχίστων τετραγώνων (LSPI), η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων Monte Carlo (LSM), η μέθοδος παράθεσης και η μέθοδος προσέγγισης μέσω της χρήσης μοντέλων παλινδρόμησης.

Στο 5^ο κεφάλαιο αναφέρθηκε ο προσδιορισμός και η ανάλυση στοχαστικών διαδικασιών για την μοντελοποίηση των αβεβαιοτήτων, που επηρεάζουν μια επενδυτική απόφαση σε μια ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Επιπρόσθετα, παρουσιάζεται αναλυτικά και το μοντέλο Schwartz και Smith, το οποίο προσδιορίζει την αξία ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης για εμπορεύματα.

Στο 6^ο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την προτεινόμενη αρχιτεκτονική μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μια ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Ακόμα,

αναλύεται το μοντέλο προσδιορισμού των τρέχουσων τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας μέσω της χρήσης συναρτήσεων προσφοράς και παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Γίνεται, επίσης, μια συνοπτική παρουσίαση των φίλτρων Kalman, τα οποία πραγματοποιούν ανάλυση και προσαρμογή δεδομένων του μοντέλου Schwartz και Smith στις αγορές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης.

1. Ερευνητικά ερωτήματα μελετών αξιολόγησης ενεργειακών πολιτικών

1.1 Κριτήρια απόδοσης για την αξιολόγηση ενεργειακών πολιτικών

Για την αξιολόγηση της επιτυχίας μίας ενεργειακής πολιτικής σύμφωνα με τη πηγή [9] δύο βασικές κατηγορίες μπορούν να διακριθούν:

- Effectiveness and Efficacy

Η αποτελεσματικότητα (effectiveness) των ενεργειακών πολιτικών εξαρτάται κυρίως από το κατά πόσο οι σωστοί στόχοι έχουν καθοριστεί και τα κατάλληλα μέτρα έχουν παρθεί. Η επίτευξη των στόχων αυτών δείχνει την αποτελεσματικότητα στην εφαρμογή της πολιτικής (efficacy). Η αξιολόγηση, ως εκ τούτου, θα πρέπει να επικεντρωθεί σε αυτά τα δύο κριτήρια απόδοσης για να καθοριστεί, αν το τελικό αποτέλεσμα των πολιτικών ταυτίζονται με τους επιθυμητούς στόχους, που είχαν τεθεί.

- (Cost-) Efficiency

Ο γενικός στόχος της θέσπισης ενεργειακών πολιτικών είναι να επιτύχουν τους επιθυμητούς στόχους με το πιο οικονομικό τρόπο. Όσον αφορά την αξιολόγηση, αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματα μίας ενεργειακής πολιτικής θα πρέπει να σταθμίζονται σε σχέση με τα εφαρμοζόμενα μέσα - πολιτικές, τα οποία στις περισσότερες περιπτώσεις, σημαίνουν κόστη. Τα κόστη αυτά μπορεί να είναι το άμεσος κόστος εφαρμογής μίας πολιτικής, όπως η ανάγκη επένδυσης σε εξελιγμένο περιβαλλοντολογικά εξοπλισμό ή τα κόστη, που αφορούν το διοικητικό μέρος της υλοποίησης, τη παρακολούθηση και την εφαρμογή υποστηρικτικών πολιτικών. Από

αυτή την άποψη θα ήταν χρήσιμο να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα και να πραγματοποιήσουμε μια συγκριτική αξιολόγηση με άλλες υποστηρικτικές πολιτικές. Η εφαρμογή μίας ενεργειακής πολιτικής, όμως, δε συνεπάγεται πάντα κόστος.

Επιπρόσθετα, απαιτείται σχεδιασμός αποτελεσματικών ενεργειακών πολιτικών για την αύξηση της αποδοτικότητας. Οι πολιτικές αποδοτικότητας είναι απαραίτητες για να ξεπεραστούν τα υπάρχοντα εμπόδια στην αγορά και να επιταχύνουν την εφαρμογή των πολιτικών αυτών σε όλους τους τομείς. Για το αποτελεσματικό σχεδιασμό αυτών των εργαλείων πολιτικής, δηλαδή εργαλείων - πολιτικών, που χρησιμοποιούνται από τη κυβέρνηση, για να ξεπεραστούν τα προβλήματα - εμπόδια εφαρμογής μίας ενεργειακής πολιτικής και να οδηγήσουν στην επίτευξη των επιθυμητών στόχων, οι υπεύθυνοι χάραξης αυτών των ενεργειακών πολιτικών καλό θα ήταν:

- Να καθορίσουν συγκεκριμένους και επιτεύξιμους στόχους αποδοτικότητας
- Να αναπτύξουν μία συγκροτημένη στρατηγική για τον τρόπο επίτευξης αυτού του στόχου
- Να αναπτύξουν συγκεκριμένα εργαλεία πολιτικών για την υλοποίηση αυτής της στρατηγικής
- Να παρακολουθούν την απόδοση αυτών των εργαλείων πολιτικής
- Να αξιολογούν και εάν είναι απαραίτητο να βελτιώνουν τα εργαλεία πολιτικών

Τα πέντε αυτά σημεία αποτελούν τη διαδικασία ανάπτυξης μίας αποτελεσματικής ενεργειακής πολιτικής (policy cycle).

Επίσης, για να αξιολογηθούν η αποτελεσματικότητα και η αποδοτικότητα μίας ενεργειακής πολιτικής είναι ανάγκη να αξιολογηθούν τα κόστη και τα οφέλη αυτής της πολιτικής εκ των υστέρων (ex - post). Μία τέτοια αποτίμηση πραγματοποιήθηκε από τους Ragwitz et al. [8] για την αξιολόγηση και βελτιστοποίηση προγραμμάτων στήριξης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας στην Ευρωπαϊκή αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Η περίπτωση αυτή είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα, επειδή το Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο θέτει στόχους – 20% της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας να προέρχεται μόνο από ανανεώσιμες πηγές ενέργειας μέχρι το 2020 – και αφήνει τις εθνικές κυβερνήσεις να βρουν τις κατάλληλες υποστηρικτικές πολιτικές, οι οποίες θα βοηθήσουν για την επίτευξη του στόχου αυτού.

Τελικά, αποδείχθηκε ότι οι τέσσερις μείζονος σημασίας υποστηρικτικές πολιτικές, που χρησιμοποιήθηκαν για την επίτευξη του στόχου αυτού ήταν:

- Κανονισμός (πρότυπα επιδόσεων, υποχρεώσεις)
- Πληροφορίες(σήμανση, τα πιστοποιητικά ενεργειακής απόδοσης, εκστρατείες ευαισθητοποίησης του κοινού)
- Οικονομικά κίνητρα (επιδότησεις, επιχορηγήσεις επενδύσεων, φορολογικές εκπτώσεις, ειδικά τιμολόγια τροφοδοσίας)
- Εθελοντικές συμφωνίες

Για να προσδιορίσουν, ποιες από αυτές τις πολιτικές ήταν οι πιο αποτελεσματικές οι Ragwitz et al. [8] προσδιόρισαν το τύπο τους και την αυστηρότητα στην εφαρμογή τους, που χρησιμοποιήθηκαν από τις χώρες της Ε.Ε. και συνέκριναν αυτό με τη δυνατότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές, που προκύπτουν από κίνητρα και υποχρεώσεις. Σε δεύτερη φάση ο δείκτης για την αποδοτικότητα αυτής της ενεργειακής πολιτικής σε καθεμία από τις χώρες αυτές προσδιορίστηκε από τη συσχέτιση του αποτελέσματος της ενεργειακής πολιτικής με το κόστος των αντίστοιχων υποστηρικτικών πολιτικών.

Καταληκτικά, και οι τρεις δείκτες απόδοσης (efficiency, efficacy, effectiveness) είναι απαραίτητοι σε μία ενεργειακή πολιτική και μπορούν να επηρεαστούν από τις αλληλεπιδράσεις αυτής της πολιτικής. Με αυτή την έννοια, αυτές οι αλληλεπιδράσεις μπορούν να επηρεάσουν το αποτέλεσμα των στόχων μίας πολιτικής θετικά ή αρνητικά. Ωστόσο, η ανάλυση τους είναι αρκετά περίπλοκο και πολυδιάστατο πρόβλημα, το οποίο απαιτεί μία διεπιστημονική προσέγγιση από διάφορους ερευνητικούς τομείς: οικονομική, περιβαλλοντική και ενεργειακή ανάλυση.

Μπορούμε να αξιολογήσουμε και να μελετήσουμε μια ενεργειακή πολιτική από δύο οπτικές γωνίες:

- **Κεντρικός σχεδιασμός (Central planning)**
- **Επενδυτής (Individual Actor)**

1.2 Κεντρικός σχεδιασμός για τη διαμόρφωση μίας ενεργειακής πολιτικής

Η κυρία ιδέα, που βρίσκεται πίσω από τον κεντρικό σχεδιασμό μίας ενεργειακής πολιτικής, αναφέρεται σε κοινωνικό επίπεδο και συγκεκριμένα στο τι είναι βέλτιστο να γίνει από κοινωνικής άποψης. Όσον αφορά αυτή την οπτική γωνία για την αξιολόγηση μίας ενεργειακής πολιτικής, ο κεντρικός σχεδιαστής μίας ενεργειακής πολιτικής (central planner) αποφασίζει για όλους, έτσι ώστε διαρκώς οι επενδύσεις να πραγματοποιούνται με βάση τη λογική του ελάχιστου κόστους και κάθε στιγμή το μείγμα τεχνολογίας να είναι το βέλτιστο.

Ας υποθέσουμε πως βρισκόμαστε σε μια κατάσταση A και έχουμε να πετύχουμε ένα συγκεκριμένο στόχο (π.χ τη μείωση των εκπομπών διοξειδίου του άνθρακα). Οπότε, ο στόχος έγκειται στη μετάβαση από μια κατάσταση A σε μια κατάσταση B. Αυτό πρέπει να γίνει με το μικρότερο δυνατό κόστος και ταυτόχρονα εξετάζεται αν τα κίνητρα είναι προς την σωστή κατεύθυνση. Συνεπώς, ο central planner καθορίζει τα σενάρια. Αυτά με τη σειρά τους επιλύονται μέσω διαδεδομένων τεχνοοικονομικών μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού Markal or Times με βάση το ελάχιστο δυνατό κόστος.

Η διαμόρφωση ενεργειακών πολιτικών είναι η διαδικασία, που αναγνωρίζει τη μίξη δυνατοτήτων πολιτικής, για την επίτευξη των μακροπρόθεσμων στόχων ενός οικονομικού - ενεργειακού συστήματος. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα μίας ενεργειακής πολιτικής, που υιοθετείται στις μέρες μας, θα είναι ορατά σε ένα χρονικό πλαίσιο, που υπερβαίνει τη δεκαετία. Στη πραγματικότητα, όσο πιο πολύ χρόνο χρειάζονται τα αποτελέσματα μίας πολιτικής να γίνουν ορατά, τόσο πιο ευάλωτη είναι η πολιτική και διέπεται από απρόβλεπτα μελλοντικά ενδεχόμενα. Αυτό το γεγονός κάνει δύσκολο και ακόμα πιο παραπλανητικό το εγχείρημα να ποσοτικοποιηθούν οι πιθανότητες για τη υλοποίηση των διαφορετικών μελλοντικών πιθανών αποτελεσμάτων. Στόχος μας είναι να παρουσιάσουμε ένα πλαίσιο, που παρέχει στους υπευθύνους χάραξης ενεργειακών πολιτικών την ικανότητα, να αναγνωρίζουν τις συνθήκες, υπό τις οποίες η επιλογή τους για την εφαρμογή μίας ενεργειακής πολιτικής θα αλλάξει, καθώς και τους συνδυασμούς δυνατοτήτων πολιτικής, που χαρακτηρίζονται από λιγότερη αβεβαιότητα, σε σχέση με την αβεβαιότητα όλων των πιθανών μελλοντικών αποτελεσμάτων.

Κατά το σχεδιασμό ενεργειακών πολιτικών για την επίτευξη ενός συγκεκριμένου στόχου, οι υπεύθυνοι χάραξης των πολιτικών αυτών πρέπει πρώτα να αναγνωρίσουν τις διαφορετικές δυνατότητες πολιτικής, που μπορούν να υιοθετηθούν. Στις πιο πολλές περιπτώσεις υπάρχει μια πληθώρα από εναλλακτικές πολιτικές για την εκτέλεση μιας επιλεγμένης στρατηγικής. Γενικά, οι δυνατότητες πολιτικής μπορούν να διακριθούν σε δυο κατηγορίες:

- Δυνατότητες πολιτικής, που παρέχουν κίνητρα και αντικίνητρα για τις νέες επενδύσεις στο ενεργειακό τομέα, ώστε να ακολουθήσουν ένα συγκεκριμένο τεχνολογικό μονοπάτι.
- Δυνατότητες πολιτικής αντιστάθμισης ή περιορισμού των επιρροών από διαφορές γεωπολιτικές εξελίξεις.

Οι εναλλακτικές πολιτικές (policy options – δυνατότητες πολιτικής), που οι υπεύθυνοι χάραξης πολιτικών έχουν στη διάθεση τους, αξιολογούνται βάσει της αναμενόμενης σχέσης κόστους - αποτελεσματικότητας, για την επίτευξη των προκαθορισμένων στόχων. Παρόλα αυτά, δεδομένου ότι στις μέρες μας το μείγμα τεχνολογιών αλλάζει τόσο αργά, το αποτέλεσμα αυτών των εναλλακτικών πολιτικών θα είναι ορατό σε ένα πλαίσιο χρόνου, που υπερβαίνει τη δεκαετία. Το ίδιο ισχύει και για εναλλακτικές πολιτικές, η επίδοση των οποίων εξαρτάται από μελλοντικές γεω - πολιτικές εξελίξεις, οι οποίες δεν μπορούν να προβλεφτούν ρεαλιστικά σε μακροπροθέσμους ορίζοντες.

Τα προηγούμενα στοιχεία κάνουν δύσκολη και ακόμα πιο παραπλανητική τη προσπάθεια ποσοτικοποίησης των πιθανοτήτων για την πραγματοποίηση των διαφορετικών πιθανών μελλοντικών αποτελεσμάτων. Για αυτό το λόγο η σχεδίαση μίας ενεργειακής πολιτικής χαρακτηρίζεται από βαθιά αβεβαιότητα των μη ελεγχόμενων παραμέτρων του υπό μελέτη οικονομικού - ενεργειακού συστήματος (Lempert et al. 2004, [13], Doukas, Flamos και Psarras, 2009, [11]) και θα πρέπει, οπότε, να αντιμετωπιστεί κατά πολύ. Όταν οι φορείς λήψης αποφάσεων αντιμετωπίζουν βαθιά αβεβαιότητα, η εύρεση βέλτιστων αποφάσεων δεν μπορεί να βασιστεί στην πρόβλεψη μελλοντικών εξελίξεων ή στην αναγνώριση των πιο πιθανών σεναρίων. Σε αντίθεση, οι πολιτικές και τα εργαλεία υλοποίησης από μόνα τους είναι τα μέσα για την διαχείριση και την αντιστάθμιση της αβεβαιότητας.

Κριτικές Παράμετροι για την αντιμετώπιση αβεβαιοτήτων στο σχεδιασμό μίας ενεργειακής πολιτικής

Η αξιολόγηση των δυνατοτήτων πολιτικής μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω της χρήσης σε μικρή κλίμακα αναλυτικών μικροοικονομικών μοντέλων, όπως και μέσω της χρήσης ολοκληρωμένων μοντέλων αξιολόγησης (Integrated Assessment Models - IAMs) σε μεγαλύτερη κλίμακα. Και στις δυο περιπτώσεις, η αβεβαιότητα, που μοντελοποιείται και ενσωματώνεται στη διαδικασία αξιολόγησης πολιτικών, έχει μία σημαντική επίπτωση στην εφαρμογή των αποτελεσμάτων των μοντέλων για το πρακτικό σχεδιασμό της πολιτικής. Αυτό το στοιχείο είναι κοινώς αποδεκτό και διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης της αβεβαιότητας στην ανάλυση μίας ενεργειακής πολιτικής έχουν προκύψει.

Ανάλυση σεναρίου

Η ανάλυση σεναρίων πραγματοποιείται από ένα μικρό αριθμό μοντέλων, που τρέχουν βασισμένα σε διαφορετικούς συνδυασμούς παραδοχών. Στη περίπτωση ανάλυσης σεναρίων, διαφορετικά σενάρια αποδίδουν διαφορετικές βέλτιστες αποφάσεις. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η απάντηση στην ερώτηση ‘‘ποιες είναι οι βέλτιστες αποφάσεις, που πρέπει να παρθούν, δίνοντας σειρά σε όλες τις δυνατές μελλοντικές υλοποιήσεις’’, είναι αναπόφευκτα εξαρτωμένα από τα σενάρια, όπου οι υπεύθυνοι λήψης αποφάσεων θεωρούν πιο πιθανά στο να γίνουν αληθινά. Μια τέτοια προσέγγιση είναι διαφορετική από αυτή τη προσέγγιση, που ισχυρίζεται, ότι η βαθιά αβεβαιότητα αναγνωρίζεται και τα σενάρια αξιολογούνται με βάση την ικανότητα να αναγνωρίσουν τις συνθήκες, κάτω από τις οποίες οι βέλτιστες αποφάσεις διαφοροποιούνται σημαντικά.

Προσομοίωση και Διερευνητική Ανάλυση

Οι περιορισμοί της ανάλυσης ενός σεναρίου επιβάλλονται, εξ’ αιτίας της δυσκολίας επαναυπολογισμού των ολοκληρωμένων μοντέλων αξιολόγησης (Integrated Assessment Models - IAMs) πάνω σε ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών σεναρίων. Οι περιορισμοί της ανάλυσης σεναρίων καθορίστηκαν από τους Ravn and Skytte [14]. Εάν μια τέτοια δυσκολία δεν ισχύει, η τεχνική προσομοίωσης Monte Carlo (Sluijs, 1996, [15]) και η διερευνητική μοντελοποίηση (Bankes, 1993, [10]) μπορούν να χρησιμοποιηθούν για αναλύσεις ενεργειακών πολιτικών. Η τεχνική προσομοίωσης

Monte Carlo υποθέτει γνώση των στατιστικών ιδιοτήτων της αβεβαιότητας, ενώ η διερευνητική μοντελοποίηση δε υποθέτει και, επίσης, έχει γίνει δημοφιλής για την αναγνώριση αξιοσημείωτων αποφάσεων στο σχεδιασμό πολιτικών προώθησης ανανεώσιμων πηγών ενέργειας (Griffin, 2008, [16]) και διαχείρισης φυσικών πόρων (Groves, 2005, [12]). Για τη συγκεκριμένη ενότητα αντλήσαμε πληροφορίες από τη πηγή [25].

Στοιχεία ενός τυπικού οικονομικού – ενεργειακού μοντέλου

Αρκετά ενεργειακά μοντέλα, που σχετίζονται με το στρατηγικό σχεδιασμό και τη διαμόρφωση ενεργειακής πολιτικής, έχουν αναπτυχθεί τις τελευταίες δεκαετίες. Στις περισσότερες εφαρμογές τέτοια μοντέλα αναπτύσσονται για το σχεδιασμό με βάση τα σενάρια (Scenario – Based Planning). Μοντέλα, που χρησιμοποιούνται για το σχεδιασμό με βάση τα σενάρια, είναι τα μοντέλα βελτιστοποίησης (Optimization Models). Τα μοντέλα βελτιστοποίησης τείνουν να ικανοποιήσουν μία εκτιμώμενη ζήτηση ενέργειας μέσω ενός συνδυασμού πρωτογενών πηγών ενέργειας ή τεχνολογιών μετατροπής ενέργειας, που ελαχιστοποιούν το κόστος.

Τα πιο γνωστά οικονομικά – ενεργειακά μοντέλα βελτιστοποίησης είναι αυτά, που προκύπτουν μέσω των πιο διαδεδομένων μοντέλων Γραμμικού Προγραμματισμού (Markal or Times), επειδή είναι γνωστό, ότι η ανάπτυξη της τεχνολογίας, για παράδειγμα, δείχνει μια ισχυρή μη γραμμική σχέση μεταξύ των επενδύσεων και των αποτελεσμάτων και αυτό έχει τεράστια επιρροή στα αποτελέσματα των ενεργειακών πολιτικών και των επιχειρηματικών στρατηγικών.

Markal – Times μοντέλα παράγουν τεχνοοικονομικά μοντέλα, τα οποία χρησιμοποιούνται για τη παραγωγή σεναρίων για την ανάλυση του μέλλοντος ενός συγκεκριμένου ενεργειακού τομέα. Κάθε σενάριο αποτελείται από διάφορα στοιχεία: καμπύλες ζήτησης και προσφοράς, υποθέσεις σχετικά με τις ενεργειακές πολιτικές, διαθεσιμότητα τεχνολογιών, εμπορεύματα. Άρα, τα MARKAL - TIMES μοντέλα προσδιορίζουν τη λύση (επενδύσεις σε εξοπλισμό, προσφορά πρωτογενούς ενέργειας και οι αποφάσεις σχετικά με το εμπόριο ενέργειας), που αντιστοιχεί με την παροχή υπηρεσιών ενέργειας σε ελάχιστο συνολικό κόστος.

Τα μοντέλα αυτά όμως παρουσιάζουν ένα μειονέκτημα. Δεν μας δίνουν πληροφορίες ποτέ για το τι πρόκειται να γίνει στο μέλλον, αλλά μας πληροφορούν για το τι είναι

βέλτιστο να γίνει από κοινωνικής άποψης. Αυτό αποτελεί μια καλή πληροφορία, αλλά δεν μας αρκεί για να εκτιμήσουμε τι θα γίνει στο μέλλον, δηλαδή το πώς θα συμπεριφερθούν πραγματικά οι επενδυτές, που αποτελεί ένα στοιχείο, που πρέπει να γνωρίζουμε. Για να εκτιμήσουμε τι θα γίνει στο μέλλον θα πρέπει να εξετάσουμε την επένδυση από την μεριά του ιδιώτη επενδυτή (individual actors), ώστε να δούμε τα κίνητρα του και τις προθέσεις του. Παρακάτω παραθέτονται τα στοιχεία ενός τυπικού οικονομικού – ενεργειακού μοντέλου.

1. Είσοδοι

Η είσοδος κάθε μοντέλου αντιστοιχεί σε ένα σενάριο, δηλαδή σε ένα σύνολο συνεπών υποθέσεων για τη μελλοντική εξέλιξη των παραμέτρων του υπό εξέταση ενεργειακού συστήματος. Ένα πλήρες σενάριο αποτελείται από τέσσερις τύπους δεδομένων:

- Ζήτηση ενεργειακών υπηρεσιών
- Διαθεσιμότητα πόρων
- Πολιτική που έχει τεθεί
- Περιγραφές ενός συνόλου τεχνολογιών

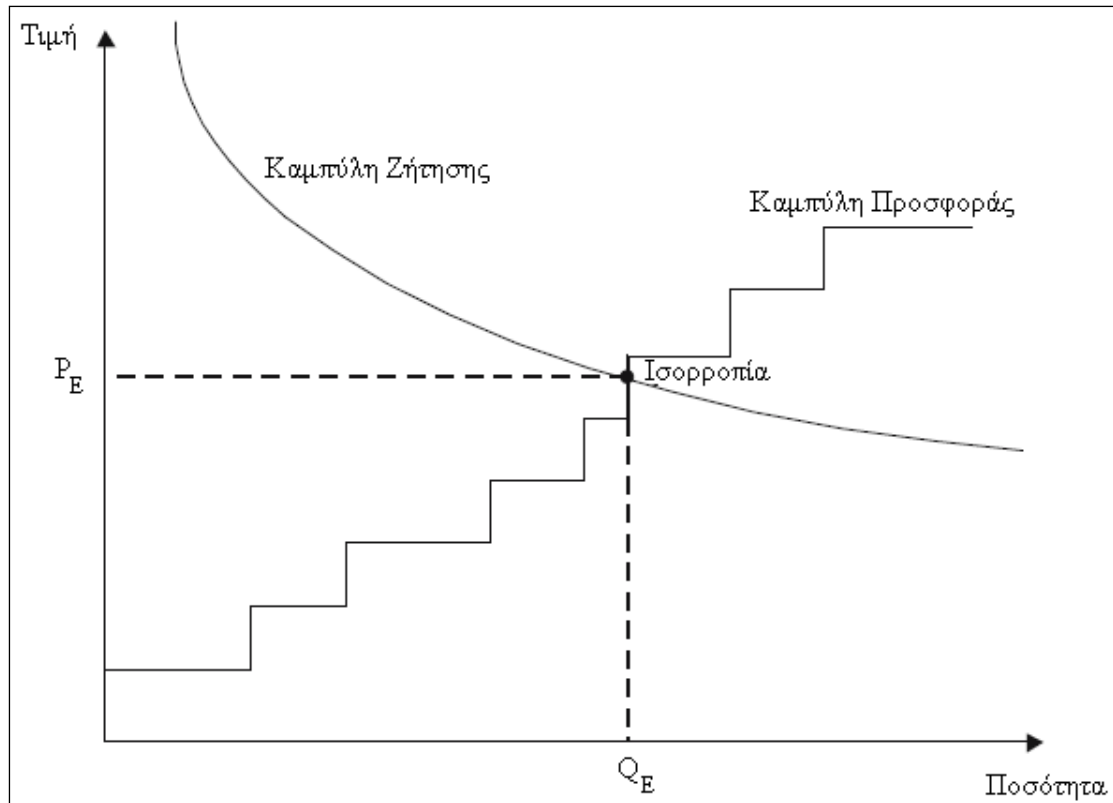
Ειδικότερα:

Ζήτηση ενεργειακών υπηρεσιών

Η δημιουργία του σεναρίου ζήτησης αναφοράς απαιτεί το προσδιορισμό της ζήτησης των ενεργειακών υπηρεσιών τελικής χρήσης, όπως είναι η ζήτηση ενέργειας για μεταφορές, για φωτισμό κατοικημένων περιοχών, για παραγωγή χάλυβα κτλ., κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα στον οποίο το σενάριο θα λειτουργήσει. Η ζήτηση παρέχεται από το χρήστη μόνο για το σενάριο αναφοράς. Όταν το μοντέλο οργανώνεται για εναλλακτικά σενάρια, όπως για παράδειγμα για μια περίπτωση περιορισμού της εκπομπής αερίων ρύπων ή για ένα σύνολο εναλλακτικών τεχνολογικών υποθέσεων, είναι δυνατό η ζήτηση να επηρεαστεί.

Κάθε μοντέλο έχει την ικανότητα του υπολογισμού της μεταβολής της ζήτησης ως προς τους μεταβαλλόμενους όρους ενός εναλλακτικού σεναρίου. Για να γίνει αυτό, το μοντέλο απαιτεί ακόμη ένα σύνολο μεταβλητών εισόδου, που είναι οι ελαστικότητες τιμής – ζήτησης. Στη πραγματικότητα, κάθε μοντέλο οδηγείται όχι από τη ζήτηση αλλά από καμπύλες ζήτησης σε σχέση με την τιμή της ενέργειας. Παραθέτεται

παρακάτω η γραφική παράσταση, που μας παρουσιάζει την ισορροπία στη περίπτωση ενεργειακής υπηρεσίας, όπου ο χρήστης ρητά παρέχει τη καμπύλη ζήτησης.



Σχήμα 1.1 Ισορροπία στην περίπτωση ενεργειακής υπηρεσίας, όπου ο χρήστης ρητά παρέχει την καμπύλη ζήτησης

Η ισορροπία προσφοράς - ζήτησης βρίσκεται στο σημείο τομής της συνάρτησης προσφοράς και της συνάρτησης ζήτησης και αντιστοιχεί σε μια ποσότητα ισορροπίας Q_E και σε μια τιμή ισορροπίας P_E . Στην τιμή P_E , οι προμηθευτές είναι πρόθυμοι να παρέχουν την ποσότητα Q_E και οι καταναλωτές είναι πρόθυμοι να αγοράσουν αυτήν την ποσότητα Q_E .

Διαθεσιμότητα πόρων

Το δεύτερο συστατικό ενός σεναρίου είναι ένα σύνολο καμπύλων προσφοράς για την πρωτογενή ενέργεια και τους υλικούς πόρους. Οι πολλών βαθμίδων καμπύλες προσφοράς προκύπτουν ώστε κάθε βαθμίδα να αναπαριστά ένα ορισμένο δυναμικό του διαθέσιμου πόρου ως προς το κόστος αυτού. Επιπλέον, η διαθεσιμότητα πόρων περιλαμβάνει τον προσδιορισμό των εμπορικών συναλλαγών.

Πολιτική που έχει τεθεί

Στο μέτρο που μια ενεργειακή πολιτική επηρεάζει το ενεργειακό σύστημα, μπορεί να αποτελέσει αναπόσπαστο τμήμα του καθορισμού ενός σεναρίου. Παραδείγματος χάριν, ένα σενάριο, που δε λαμβάνει υπόψη πολιτικές, μπορεί να αγνοήσει εντελώς τις εκπομπές των διάφορων ρύπων, ενώ σενάρια εναλλακτικών ενεργειακών πολιτικών μπορεί να επιβάλουν περιορισμούς εκπομπών ή φόρους εκπομπής. Η λεπτομερής αποτύπωση των διαθέσιμων τεχνολογιών στα ενεργειακά μοντέλα επιτρέπει την προσομοίωση μιας ευρείας ποικιλίας τόσο στοχευμένων μέτρων, όπως είναι τα τεχνολογικά χαρτοφυλάκια και οι στοχοθετημένες επιχορηγήσεις σε ομάδες τεχνολογίας, όσο και ευρύτερων πολιτικών, όπως είναι ο γενικός φόρος άνθρακα ή το σύστημα εμπορικών συναλλαγών δικαιωμάτων εκπομπών αερίου. Απλούστερα παραδείγματα ενεργειακής πολιτικής αποτελούν ο περιορισμός της μελλοντικής επέκτασης των πυρηνικών εγκαταστάσεων, η επιβολή φόρων στα καύσιμα ή η χορήγηση βιομηχανικών επιχορηγήσεων.

Περιγραφές ενός συνόλου τεχνολογιών

Το τέταρτο και τελευταίο συστατικό ενός σεναρίου είναι το σύνολο των τεχνικών και οικονομικών παραμέτρων, που λαμβάνονται υπόψη για το μετασχηματισμό των αρχικών πόρων σε ενεργειακές υπηρεσίες. Οι σχετικές τεχνοοικονομικές παράμετροι περιγράφονται με τη μορφή τεχνολογιών, που μετασχηματίζουν μερικά προϊόντα σε άλλα (καύσιμα, υλικά, ενεργειακές υπηρεσίες, εκπομπές). Μερικές τεχνολογίες μπορούν να επιβληθούν, ενώ άλλες μπορούν απλά να είναι διαθέσιμες στους επενδυτές και καταναλωτές ενέργειας.

2. Έξοδοι

Χρησιμοποιώντας τα προαναφερόμενα, το μοντέλο δίνει ως έξοδο την παροχή ενεργειακών υπηρεσιών με το ελάχιστο συνολικό κόστος ή ακριβέστερα με την ελάχιστη απώλεια συνολικού πλεονάσματος, λαμβάνοντας ταυτόχρονα αποφάσεις σχετικές με την επένδυση σε εξοπλισμό, τη λειτουργία του εξοπλισμού, την προσφορά ενέργειας και το ενεργειακό εμπόριο.

Ειδικότερα, για κάθε δεδομένο σενάριο, η λύση του γραμμικού προγράμματος του μοντέλου, για κάθε χρονική περίοδο και σε κάθε περιοχή, προσδιορίζει:

- Το σύνολο των επενδύσεων σε όλες τις τεχνολογίες
- Τα επίπεδα λειτουργίας όλων των τεχνολογιών
- Εισαγωγές και εξαγωγές κάθε τύπου εμπορεύσιμων ενεργειακών μορφών και υλικών
- Τις παραγόμενες ροές (ηλεκτρισμού και μη) από κάθε τεχνολογία.
- Τις εκπομπές αερίων θερμοκηπίου κάθε ουσίας από κάθε τεχνολογία, κάθε τομέα και σύνολο.

3. Δομή

Η δομή ενός μοντέλου καθορίζεται από τις εξισώσεις και τις μεταβλητές, που με τη σειρά τους καθορίζονται από τα δεδομένα, που παρέχονται από το χρήστη. Η βάση δεδομένων του μοντέλου περιέχει τόσο ποιοτικά, όσο και ποσοτικά στοιχεία.

Τα ποιοτικά δεδομένα περιλαμβάνουν, για παράδειγμα, τους καταλόγους πηγών ενέργειας, των τεχνολογιών, που ο δημιουργός του μοντέλου πιστεύει ότι ισχύουν σε κάθε περιοχή κατά τη διάρκεια του χρονικού ορίζοντα, καθώς επίσης και τις εκπομπές αερίων, που πρόκειται να υπολογιστούν. Αυτές οι πληροφορίες μπορούν να ταξινομηθούν περαιτέρω σε υποομάδες. Παραδείγματος χάριν, οι πηγές ενέργειας μπορούν να χωριστούν σύμφωνα με τον τύπο τους σε ορυκτά καύσιμα, πυρηνική ενέργεια, ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, κ.λπ.

Τα ποσοτικά δεδομένα, αντίθετα, περιγράφουν τις τεχνολογικές και οικονομικές τιμές των παραμέτρων για κάθε τεχνολογία, κάθε περιοχή και κάθε χρονικό διάστημα. Κατά τη διαμόρφωση μοντέλων πολλών περιοχών είναι συχνή η περίπτωση μιας τεχνολογίας, που μπορεί να είναι διαθέσιμη για χρήση σε δύο διακριτές περιοχές εντούτοις, οι υποθέσεις δαπανών και απόδοσης μπορούν να είναι διαφορετικές.

1.3 Ο ρόλος του επενδυτή και η σχέση μεταξύ ενεργειακών πολιτικών και αβεβαιοτήτων

Ενεργειακές πολιτικές, που μπορεί να εμφανίζονται ανταγωνιστικές ως προς το κόστος τους στο επενδυτικό περιβάλλον, μπορεί, παρόλα αυτά, να μην προσελκύσουν πολλούς επενδυτές, όταν αυτές αξιολογηθούν από πλευράς κινδύνων (αβεβαιοτήτων) και αποδόσεων. Επίσης, κίνητρα ενεργειακών πολιτικών, που φαίνονται επαρκή για

την επίτευξη των πολιτικών αυτών, μπορεί να μη βοηθήσουν αρκετά στην πραγματοποίηση της επένδυσης, όταν οι κίνδυνοι και οι αποδόσεις των πολιτικών αυτών λαμβάνονται υπόψη.

Επομένως, σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στη σχέση μεταξύ των ενεργειακών πολιτικών και της αβεβαιότητας της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας, καθώς επίσης και στο πως μία ενεργειακή πολιτική μπορεί να ανταποκριθεί σε θέματα, που σχετίζονται με τη χρηματοδότηση ενός επενδυτικού έργου, με τη ροή πληροφοριών σε ιδιωτικές αγορές ηλεκτρικής ενέργειας και με την εταιρική οικονομική στρατηγική. Τέλος, θα παρέχουμε κάποιες προτάσεις για ανάπτυξη μελλοντικών ενεργειακών πολιτικών, οι οποίες θα επιδιώκουν να καθορίσουν ένα μεγαλύτερο επενδυτικό περιβάλλον. Οπότε, θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε στα ακόλουθα ερωτήματα: α) Πως οι επενδυτικοί κίνδυνοι μπορούν να ληφθούν υπόψη σε μία ενεργειακή πολιτική και β) Πως μία ενεργειακή πολιτική επηρεάζει τον κίνδυνο.

Η χάραξη ενεργειακών πολιτικών παρατηρείται από την αρχή της λειτουργίας των αγορών ηλεκτρικής ενέργειας και οι λόγοι αναγκαιότητας αυτών είναι οι ακόλουθοι:

- Πιθανή αδυναμία της αγοράς (μονοπωλιακή αγορά, αρνητικές περιβαλλοντολογικές επιπτώσεις, έλλειψη καινοτομίας).
- Κοινωνικοί λόγοι και λόγοι ηθικού δικαίου.
- Γεωπολιτικοί λόγοι, καθώς και λόγοι εξασφάλισης επαρκούς παραγωγής ενέργειας για κάλυψη της ζήτησης.

Οπότε είναι φανερό, ότι συγκεκριμένοι λόγοι καθορίζουν την αναγκαιότητα χάραξης ενεργειακής πολιτικής παρέμβασης στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας, οι προτεραιότητες της οποίας καθορίζονται με το πέρας του χρόνου δημιουργώντας διαφορετικούς μηχανισμούς υλοποίησης.

Πως οι επενδυτικοί κίνδυνοι μπορούν να ληφθούν υπόψη σε μία ενεργειακή πολιτική.

Σε μία ενεργειακή πολιτική η εκτίμηση του κόστους δε μπορεί από μόνη της να ανιχνεύσει το πλήρες φάσμα των κινδύνων (αβεβαιοτήτων), που αφορούν τους επενδυτές. Η εκτίμηση του κόστους είναι κατάλληλη για ορισμένες ενεργειακές πολιτικές, ενώ δε πρέπει να χρησιμοποιείται στη χάραξη ενεργειακών πολιτικών, οι οποίες προορίζονται για την προώθηση άμεσων επενδύσεων. Πιο συγκεκριμένα, οι

επενδυτές πρέπει να έχουν επίγνωση του ρόλου του κινδύνου κατά τα έσοδα, όπως και του ρόλου του κινδύνου κατά το κόστος σε μία επένδυση. Ωστόσο, ενώ μία ενεργειακή πολιτική συχνά αξιολογεί μία σειρά από αβεβαιότητες κόστους, σπάνια δίνει παρόμοια προσοχή στις επιπτώσεις των αβεβαιοτήτων πάνω στις μελλοντικές τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας. Με λίγα λόγια, οι επενδυτές, όταν θα θελήσουν να εφαρμόσουν μία ενεργειακή πολιτική, θα πρέπει να γνωρίζουν όλους τους κινδύνους, που θα διέπουν την επένδυσή τους.

Ορισμένοι επενδυτικοί όμιλοι χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό εξελιγμένα στοχαστικά μοντέλα για την αξιολόγηση σεναρίων και τον προσδιορισμό των αβεβαιοτήτων και κινδύνων, που διέπουν μία επιχείρηση. Επίσης, θα ήταν χρήσιμο για τους αναλυτές ενεργειακών πολιτικών να συμπεριλάβουν και τα κίνητρα για συγκεκριμένες τεχνολογίες σε παρόμοια μορφή αξιολόγησης. Ωστόσο, αυτοί οι αναλυτές δε μπορούν να προβλέψουν τις επενδυτικές αποφάσεις των εταιρειών λεπτομερώς, γιατί διαφορετικές εταιρείες μπορεί να πάρουν διαφορετικές επενδυτικές αποφάσεις, ακόμη και όταν αντιμετωπίζουν τις ίδιες συνθήκες αγοράς.

Όμως, μια ανάλυση ενεργειακής πολιτικής θα μπορούσε να αξιολογήσει τις δυνητικές αποδόσεις για επενδύσεις σε συγκεκριμένες τεχνολογίες. Οι πληροφορίες σχετικά με το κόστος θα μπορούσαν να συνδυαστούν με μια σειρά από σεναρία τιμών ηλεκτρικής ενέργειας, τιμών άνθρακα και παραδοχών σχετικά με την αντιστοιχία των ποσοτήτων τους, ώστε να προσδιοριστεί η καθαρά παρούσα αξία της επένδυσης.

Πως μια ενεργειακή πολιτική επηρεάζει τους κινδύνους.

Η ίδια η ενεργειακή πολιτική μπορεί να επηρεάσει τους επενδυτικούς κινδύνους. Σ' αυτό το σημείο θα αναφέρουμε μια σειρά από παράγοντες, που μπορεί να επηρεάσουν μια ενεργειακή πολιτική:

1. Πολιτικές αλλαγές μπορούν να επηρεάσουν τις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, ιδιαίτερα αν τα νεοεκλεγέντα πολιτικά κόμματα έχουν διαφορετική άποψη για τις ενεργειακές πολιτικές και αλλάζουν ή καταργούν μηχανισμούς στήριξης αυτών των πολιτικών ή εισάγουν νέες πολιτικές.
2. Οι νέες κυβερνήσεις μπορούν να αλλάζουν τους νόμους και τους κανόνες, που μέχρι τότε εφαρμόζονταν στην αγορά. Τέτοιες αλλαγές μπορούν να επηρεάσουν

τις τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας, την μεταβλητότητα των τιμών και τους κινδύνους.

3. Η προσέγγιση, ότι η ρυθμιστική αρχή θα αναλάβει τον έλεγχο της αγοράς, θα επηρεάσει την δομή της αγοράς και την μεταβλητότητα των τιμών. Η δύναμη της αγοράς μπορεί να μειώνει την μεταβλητότητα των τιμών, αλλά ο φόβος της παρέμβασης της ρυθμιστικής αρχής μπορεί να αποθαρρύνει ορισμένες κατηγορίες επενδύσεων.
4. Πολιτικές, οι οποίες σχετίζονται με θέματα, όπως η δυσκολία εξασφάλισης των απαραίτητων αδειών, τις εγκρίσεις του δικτύου και την τιμολόγηση του δικτύου μεταφοράς, μπορούν να επηρεάσουν την βιωσιμότητα των επενδύσεων.
5. Οι κυβερνήσεις μπορούν να παρεμβαίνουν άμεσα για να εμποδίζουν μια επένδυση, όπως για παράδειγμα η νομοθεσία κατά της εγκατάστασης νέων σταθμών πυρηνικής ενέργειας σε πολλές χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης.
6. Οι κυβερνήσεις παρέχουν κίνητρα και πολιτικές στήριξης των επενδύσεων.

Ως εκ τούτου, μια σειρά κινδύνων, που σχετίζονται με τις ενεργειακές πολιτικές, θα επηρεάσει το κόστος χρηματοδότησης ενός έργου. Πολιτικές, οι οποίες εμπεριέχουν κινδύνους, μπορούν, επίσης, να αυξήσουν άμεσα τα κόστη, όπως για παράδειγμα, μέσω των τελών για διασύνδεση στο δίκτυο διανομής και μέσω των καθυστερήσεων στην κατασκευή του έργου, που προκαλείται λόγω της καθυστέρησης των απαραίτητων αδειοδοτήσεων.

Μια ενεργειακή πολιτική μπορεί, παρόλα αυτά, να δημιουργήσει αγορές μέσα από μια ποικιλία μηχανισμών - πολιτικών στήριξης και παροχής κινήτρων. Οπότε, αυτή η πολιτική θα μπορεί να αυξήσει τα κέρδη μιας επένδυσης και να περιορίσει τον κίνδυνο μείωσής τους. Υπάρχουν, οπότε, μηχανισμοί στήριξης, οι οποίοι έχουν σαν στόχο την αύξηση των εσόδων, την βελτίωση των ταμειακών ροών, την προώθηση ορισμένων κατηγοριών τεχνολογίας (Ανανεώσιμες Πηγές Ενέργειας) και επιτρέπουν σε αυτές τις μορφές ενέργειας να ανταγωνιστούν άλλες επενδυτικές κινήσεις.

Στις μέρες μας, η αύξηση της ανησυχίας για την κλιματική αλλαγή, έχει οδηγήσει σε αναθεώρηση των στόχων της ενεργειακής πολιτικής. Η αναθεώρηση των στόχων αυτών οδήγησε σε νέες πολιτικές, όπως η παραγωγή ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές.

Παραθέτουμε παρακάτω μια σειρά από υποστηρικτικές ενεργειακές πολιτικές για την προώθηση της ανάπτυξης συγκεκριμένων τεχνολογιών για ανανεώσιμες πηγές ενέργειας:

1. Πολιτικές άμεσης στήριξης των εσόδων
2. Ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας
3. Προγράμματα σταθερής τιμολογιακής πολιτικής
4. Επιδοτήσεις κεφαλαίων
5. Οι κυβερνήσεις λαμβάνουν συμμετοχή στο κεφάλαιο (χρηματοδότηση από το κράτος)
6. Κανόνες δημοσίων συμβάσεων
7. Φορολογικά κίνητρα
8. Άμεσος κανονισμός (διοίκηση και έλεγχος)

Από την άλλη πλευρά, υπάρχει ένα επίπεδο κινδύνων, όσον αφορά τις τιμές, που συνδέονται με τις διαφορετικές πολιτικές στήριξης των εσόδων των ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Αυτές οι υποστηρικτικές πολιτικές είναι οι ακόλουθες:

1. Σταθερές - προσδιορισμένες τιμές για την ηλεκτρική ενέργεια, που παράγεται από τις ανανεώσιμες πηγές ενέργειας, για συγκεκριμένη περίοδο του χρόνου.(π.χ. Γερμανία – ειδικά τιμολόγια τροφοδοσίας, επιδότηση λειτουργίας - Feed in Tariffs). Οι πληρωμές ανά MWh είναι καθορισμένες για συγκεκριμένες τεχνολογίες για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα (ή αριθμό ωρών λειτουργίας).
 2. Μία προσαύξηση πέρα και πάνω από το μέσο όρο των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας, το οποίο καθορίζεται ξανά από τη τεχνολογία.
 3. Μια αγορά για πιστοποιητικά ανανεώσιμων πηγών ενέργειας. Αυτές οι αγορές μπορεί να διαφοροποιούνται ανάλογα με τη τεχνολογία ή να καλύπτουν όλες τις μορφές ανανεώσιμων πηγών ενέργειας.
- Renewables Portfolio Standards in parts of the US

Λήψη αποφάσεων, όπου η πληροφόρηση είναι ελλιπής ή ασύμμετρη. Η ενεργειακή πολιτική απαντά για την υπεραισιοδοξία κατά την αξιολόγηση, το στρατηγικό παιχνίδι μεταξύ επενδυτών και την ελλιπή πληροφόρηση

Υπάρχουν ακόμη τρεις παράγοντες, οι οποίοι καθορίζουν τη σχέση μεταξύ κινήτρων και επενδύσεων – ενεργειακών πολιτικών πάνω στις νέες τεχνολογίες. Και οι τρεις σχετίζονται με την ποσότητα και ποιότητα της πληροφόρησης για το κόστος των νέων τεχνολογιών, και με τους κινδύνους, που αντιμετωπίζουν οι επενδυτές και οι συμμετέχοντες στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας.

Υπεραισιοδοξία κατά την αξιολόγηση μίας επένδυσης

Οι κατασκευαστές των νέων τεχνολογιών παρουσιάζουν συνήθως μία υπεραισιοδόξη αξιολόγηση μίας ενεργειακής πολιτικής στους υποψήφιους επενδυτές, παρά την έλλειψη πληροφορίας, η οποία αντικαθίσταται από την εμπειρία. Δηλαδή, με άλλα λόγια, οι κατασκευαστές εκτιμούν ότι η επένδυση - ενεργειακή πολιτική θα παρουσιάσει εξωπραγματικά χαμηλά κόστη, ενώ παράλληλα υποστηρίζουν ότι θα αποφέρει υπερβολικά κέρδη. Ωστόσο, υπάρχουν και επενδυτές, όπου δεν μετρούν πάντα την υπεραισιοδοξία κατά την αξιολόγηση μίας ενεργειακής πολιτικής.

Ασύμμετρες πληροφορίες, εταιρική οικονομική στρατηγική, στρατηγικό παιχνίδι μεταξύ των επενδυτών

Υπάρχει μία ασυμμετρία πληροφοριών μεταξύ αυτών, που χαράζουν την ενεργειακή πολιτική, κι αυτών, που συμμετέχουν και δραστηριοποιούνται στην αγορά. Οι τελευταίοι έχουν καλύτερη πληροφόρηση. Σε ορισμένες περιπτώσεις, οι συμμετέχοντες στην αγορά μπορεί να έχουν συμφέρον να παραποιήσουν τα κόστη των τεχνολογιών.

Οι εταιρείες, που ενδιαφέρονται για την εξασφάλιση της επιδότησης και επιχορήγησης για την ανάπτυξη των νέων τεχνολογιών τους, έχουν συμφέρον να πείσουν τους επενδυτές (individual actors) για την αποτελεσματικότητα του κόστους της επένδυσης αυτής. Αυτό αντανακλάται στη παρουσίαση μίας υπεραισιοδόξης αξιολόγησης της ενεργειακής πολιτικής. Όμως, όταν τα κόστη αυξάνονται σε σχέση με τις πρώτες εκτιμήσεις, ή οι κίνδυνοι τείνουν να αποδειχθούν περισσότεροι, από ότι είχαν εκτιμηθεί, οι επενδυτές αρχίζουν να μη πείθονται και οι υπεύθυνοι της ενεργειακής πολιτικής πρέπει να βρουν τρόπους να υποστηρίξουν την πολιτική τους.

Με άλλα λόγια, αυτοί, που χάραξαν την ενεργειακή πολιτική, ακολούθησαν μία εσκεμμένη στρατηγική – στρατηγικό παιχνίδι, παρουσιάζοντας υπερβολικά χαμηλές εκτιμήσεις κόστους της πολιτικής τους στους επενδυτές και δίνοντας λιγότερη προσοχή σε άλλα πιο σημαντικά επενδυτικά κριτήρια.

Όμως, οι επιπτώσεις της υπεραισιοδοξίας κατά την αξιολόγηση, της ελλιπής πληροφόρησης και της διαστρέβλωσης του ύψους του κόστους μίας επένδυσης παρουσιάζονται παρακάτω:

1. Οι υπεύθυνοι της ενεργειακής πολιτικής μπορεί να έχουν σχετικά ελλιπή πληροφόρηση για τα κόστη των αναδυόμενων τεχνολογιών, σε αντίθεση με αυτούς, που χαράζουν το κεντρικό σχεδιασμό αγοράζοντας ή αναπτύσσοντας τεχνολογίες, οι οποίοι μπορούν να εξασφαλίσουν πληροφορίες από ‘πρώτο χέρι’.
2. Η υπεραισιοδοξία κατά την αξιολόγηση αποτελεί ένα κοινό χαρακτηριστικό γνώρισμα στην ανάπτυξη νέων τεχνολογιών. Αυτοί, που αναπτύσσουν τις τεχνολογίες ή οι προμηθευτές των εξοπλισμών, μπορούν, επίσης, να έχουν κίνητρα να παρουσιάσουν παραποιημένο το κόστος των νέων τεχνολογιών, δηλαδή είτε χαμηλό είτε υψηλό.
3. Στη περίπτωση που οι νέες τεχνολογίες αξιοποιούνται για πρώτη φορά, οι πληροφορίες σχετικά με το κόστος μπορεί να περιοριστούν για όλους τους ενδιαφερόμενους.
4. Τα κόστη (και η ακρίβεια των εκ των προτέρων εκτιμήσεων) θα αποκαλυφθούν κατά κύριο λόγο μέσω ενεργειών της αγοράς.
5. Μπορεί να υπάρχει, επίσης, για τους δυνητικούς επενδυτές το δικαίωμα αναμονής (καθυστέρηση επενδύσεων), όπου υπάρχουν ελλιπής πληροφόρηση και κίνδυνοι.

Συμπεράσματα και προτάσεις

Τέλος, θα παρουσιάσουμε ορισμένα συμπεράσματα, τα οποία βοηθούν τους επενδυτές να διερευνήσουν καλύτερα μία ενεργειακή πολιτική και να γνωρίσουν βαθύτερα τους επενδυτικούς κινδύνους και αβεβαιότητες.

Τα κύρια ζητήματα για ενεργειακές πολιτικές, που αναλύθηκαν σε αυτή την ενότητα, αφορούν το πώς οι πολιτικές αυτές επηρεάζουν τον κίνδυνο κατά την επένδυση. Οι αναλυτές ενεργειακών πολιτικών έχουν παραδοσιακά επικεντρωθεί στους κινδύνους, που αφορούν τα κόστη. Όμως, υπάρχουν και σημαντικοί κίνδυνοι κατά τα έσοδα, που

σχετίζονται με τη τιμή του ηλεκτρικού ρεύματος. Μια σημαντική κατηγορία κινδύνων κατά των εσόδων προκύπτει από τη μεταβλητότητα των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτοί οι κίνδυνοι δεν επιβαρύνουν το ίδιο όλους τους τύπους σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Για διάφορους λόγους ορισμένες επιλογές (συνήθως οι εγκαταστάσεις ορυκτών καυσίμων) έχουν μεγάλο βαθμό ελέγχου επί των τιμών και την ικανότητα να περνούν τις υψηλές τιμές των καυσίμων στους καταναλωτές. Άλλες (όπως η πυρηνική ενέργεια, οι ανανεώσιμες πηγές ενέργειας και οι υδροηλεκτρικές μονάδες), έχουν μικρό ή καθόλου έλεγχο επί των τιμών και μπορεί να αντιμετωπίσουν προβλήματα κατά τη διάρκεια μιας συνεχιζόμενης περιόδου χαμηλών τιμών. Αν οι τιμές παρουσιάζονται ευμετάβλητες, ο κίνδυνος κατά τα έσοδα μπορεί να είναι υψηλός για την τελευταία κατηγορία τεχνολογιών, και μπορεί να αποθαρρύνει την πραγματοποίηση επενδύσεων ανεξάρτητα από το κόστος τους. Ο κίνδυνος αυτός μπορεί, επίσης, να εμφανιστεί στην αγοράς λόγω των αδειών για τις εκπομπές CO₂ ή εξαιτίας των πράσινων πιστοποιητικών ηλεκτρικής ενέργειας. Οπότε αυτοί οι κίνδυνοι μπορεί να έχουν ουσιαστικό αντίκτυπο στις επενδύσεις.

Πράγματι, έχουμε δείξει ότι τεχνολογίες, που φαίνονται να είναι ελκυστικές από άποψη συγκριτικού κόστους, μπορεί να είναι ιδιαίτερα αβέβαιες επενδύσεις λόγω της έκθεσης τους σε διάφορους κινδύνους - αβεβαιότητες, που σχετίζονται με τη τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας. Επιπλέον, ενεργειακές πολιτικές, οι οποίες εμφανίζονται κερδοφόρες, όταν αξιολογούνται με βάση το κόστος τους, μπορεί να μην είναι σε θέση να ανταπεξέλθουν, λόγω των κινδύνων στις τιμές, οι οποίοι τις περισσότερες φορές δεν αναφέρονται σκόπιμα από τους υπεύθυνους ενεργειακών πολιτικών στις αναλύσεις τους.

Επομένως, υπάρχει μία σαφής ανάγκη για περαιτέρω έρευνα σχετικά με τη σχέση μεταξύ ενεργειακών πολιτικών, κινδύνων και επενδύσεων. Οπότε, τα ακόλουθα βασικά ζητήματα για τις ενεργειακές πολιτικές παρουσιάζονται ακολούθως.

Η ενεργειακή πολιτική πρέπει να εφαρμόζεται, περιλαμβάνοντας όλους τους κινδύνους κατά την επένδυση. Αυτό σημαίνει κατανόηση προέλευσης του κινδύνου και πως ο κίνδυνος αυτός επηρεάζει μία επένδυση. Οπότε οι ενεργειακές πολιτικές πρέπει να μοντελοποιούν τα επενδυτικά σενάρια και να ενσωματώνουν σε αυτά τον κίνδυνο κατά των εσόδων, αντί να εστιάζουν σε μεγάλο βαθμό στα κόστη.

Αυτοί, που χαράζουν τις ενεργειακές πολιτικές, πρέπει να αναπτύξουν ένα μοντέλο αξιολόγησης ενεργειακών πολιτικών και επενδύσεων, για να αξιολογήσουν προτεινόμενες υποστηρικτικές πολιτικές ενάντια σε μία σειρά από κινδύνους, που προκύπτουν από τις αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, και ενάντια σε πολιτικές, όπως αβεβαιότητες κόστους, που σχετίζονται με τη τεχνολογία. Το μοντέλο αυτό θα πρέπει να είναι ανοιχτό για πιθανούς επενδυτές και ανεξάρτητους αναλυτές, ώστε να σχολιάσουν με παραδοχές και παραμέτρους. Η ανάπτυξη ενός τέτοιου μοντέλου είναι πολύπλοκη και απαιτεί περαιτέρω έρευνα και διαβούλευση με τους επενδυτές και τους αναλυτές ενεργειακών πολιτικών.

Ο σχεδιασμός μίας ενεργειακής πολιτικής μπορεί να επηρεάσει τους κινδύνους κατά των εσόδων, όπως για παράδειγμα τα σταθερά τιμολογιακά προγράμματα (π.χ. τα Γερμανικά ειδικά τιμολόγια τροφοδοσίας και βασισμένες στην αγορά πολιτικές (όπως τα Renewables Obligations), τα οποία διαφέρουν όσον αφορά την κατανομή του κινδύνου. Οι υπεύθυνοι χάραξης της πολιτικής πρέπει να κρίνουν τι είδους κινδύνους υφίσταται και ποιος είναι στην καλύτερη θέση για να το διαχειριστεί. Για παράδειγμα, σταθερές τιμολογιακές πολιτικές ή επίπεδα τιμών μειώνουν ή αφαιρούν τους κινδύνους, που σχετίζονται με τις τιμές την ηλεκτρικής ενέργειας. Μπορεί, ωστόσο, να εκθέσουν τους καταναλωτές σε μεγαλύτερους κινδύνους από την άποψη του επιπέδου των δαπανών, και μπορεί επίσης να αποτύχουν να δώσουν κίνητρα στους αναλυτές, για να ανακαλύψουν τα πραγματικά κόστη.

Βασιζόμενες στην αγορά πολιτικές δημιουργούν περισσότερους κινδύνους για αυτούς, που αναπτύσσουν τις νέες τεχνολογίες, αλλά μπορούν να παρέχουν μεγαλύτερη ανταγωνιστική πίεση στην μείωση των κοστών. Ωστόσο, εάν οι κίνδυνοι είναι υπερβολικά πολλοί, η αγορά ενδέχεται απλώς να αποτύχει στην πραγματοποίηση της επένδυσης.

Παραθέτουμε μια ιεραρχία κινδύνων, η οποία συνδέει μια ενεργειακή πολιτική με τη τεχνολογική ωρίμανση:

- Η επιδότηση κεφαλαίου είναι πολύ πιθανό να είναι κατάλληλη σε περιπτώσεις νέων τεχνολογιών, που αναδύονται από έρευνα και ανάπτυξη (R&D), και, επίσης, για μεγάλης κλίμακας επενδύσεις (π.χ. κυματική ενέργεια).
- Προγράμματα σταθερής τιμολογιακής πολιτικής μπορεί να είναι περισσότερο κατάλληλα στα αρχικά στάδια εφαρμογής αναδυόμενων τεχνολογιών, εκείνων

που είναι αποδεδειγμένες, αλλά δεν πρόκειται ακόμα να χρησιμοποιηθούν σε μεγάλη κλίμακα, κρύβοντας σημαντικό τεχνολογικό κίνδυνο και έχουν ακόμη να επωφεληθούν από την εκτεταμένη «Μάθηση μέσα από τη χρήση».

- Βασιζόμενες στην αγορά πολιτικές είναι καταλληλότερες για τη δημιουργία μεγάλων αγορών για συγκεκριμένες τεχνολογίες, ή για να δημιουργήσουν κίνητρα για μέσα ελάχιστου κόστους για τη μείωση του άνθρακα βραχυπρόθεσμα.

Πληροφορίες σχετικά με τα κόστη και τις επιδόσεις των νέων τεχνολογιών συχνά αποκαλύπτονται μέσω της δραστηριότητας της αγοράς. Οι υπεύθυνοι των ενεργειακών πολιτικών μπορεί να έχουν κακή και ελλιπή πληροφόρηση. Πολιτικές, που βασίζονται σε αυτές τις πληροφορίες, οι οποίες απουσιάζουν, μπορεί να υπόκεινται σε υπεραισιοδοξία κατά την αξιολόγηση και να εφαρμόζονται εσκεμμένα και σκόπιμα από τους συμμετέχοντες στην αγορά. Όταν η πληροφορία είναι σπάνια, απαιτούνται επενδύσεις για την αποκαλύψουν. Η πολιτική μπορεί να χρειαστεί να πληρώσει για αυτό, ξεπερνώντας την αξία του δικαιώματος αναμονής. Επομένως, η πολιτική πρέπει να είναι διατεθειμένη να κάνει σαφής πρόβλεψη για τις πληρωμές πριμοδοτήσεων για «πρωτοπόρους», δεδομένου ότι αυτοί, με δεδομένα υψηλότερο επενδυτικό κίνδυνο, θα αποκαλύψουν πρώτοι τα δεδομένα κόστους και κινδύνου για την ευρύτερη αγορά.

Οι υπεύθυνοι των ενεργειακών πολιτικών πρέπει, επίσης, να πραγματοποιούν ποιοτικές αξιολογήσεις της εταιρικής οικονομικής στρατηγικής, της υπεραισιοδοξίας κατά την αξιολόγηση και του στρατηγικού παιχνιδιού μεταξύ των επενδυτών. Επίσης, στο βαθμό που είναι εφικτό η κυβέρνηση πρέπει να παρουσιάσει τους στόχους μιας ενεργειακής πολιτικής για την καλύτερη κατανόησή τους, καθώς αυτό θα δημιουργήσει μεγαλύτερες προσδοκίες, οι οποίες αποτελούν μια σημαντική κινητήρια δύναμη για στρατηγικές επενδύσεις στην βιομηχανία ενέργειας.

Εάν οι στόχοι μιας ενεργειακής πολιτικής εξαρτώνται από τις επενδύσεις σε συγκεκριμένες τεχνολογίες, τότε οι πολιτικές πρέπει να σχεδιάζονται συμπεριλαμβάνοντας και αξιολογώντας τους επενδυτικούς κινδύνους, και όχι μόνο έχοντας σαν κριτήριο το κόστος της επένδυσης, γιατί τα κόστη αποτελούν το ένα μέρος της εξίσωσης. Όσοι υπεύθυνοι χαράσσουν μία ενεργειακή πολιτική, δε μπορούν να καθορίσουν ποια είδους τεχνολογία χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί, αλλά μπορούν μόνο να δώσουν κίνητρα, έτσι ώστε να ενθαρρύνουν τους επενδυτές προς

ένα διαφοροποιημένο και χαμηλής περιεκτικότητας σε CO₂ μίγμα παραγωγής. Για να είναι τα κίνητρα αυτά ικανά, έτσι ώστε να προωθήσουν ένα τέτοιο μίγμα παραγωγής, θα πρέπει να βασίζονται σε μια σαφή κατανόηση του, πως παίρνονται οι επενδυτικές αποφάσεις. Γι αυτό το λόγο κρίνεται σκόπιμο να μελετήσουμε από την πλευρά του επενδυτή, ποια στοιχεία πρέπει να λαμβάνει υπόψη για την επίτευξη, ή μη, μιας επένδυσης.

Από όλα τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι ο επενδυτής πρέπει να λαμβάνει πολλές παραμέτρους υπόψη για την πραγματοποίηση μιας επένδυσης. Οι παράμετροι αυτοί δεν έχουν να κάνουν απαραίτητα μόνο με το κόστος της επένδυσης, αλλά και με έννοιες. όπως ο χρόνος υλοποίησης της επένδυσης, τα μακροπρόθεσμα κόστη, που αφορούν τα καύσιμα, τα κίνητρα για μελλοντική είσοδο ανταγωνιστών στην αγορά, ο κίνδυνος κατά τα έσοδα, ο κίνδυνος κόστους, οι εκπομπές CO₂ κ.α. Σκοπός αυτού, που είναι υπεύθυνος μίας ενεργειακής πολιτικής, είναι να προσδιορίσει όλους αυτούς τους παράγοντες και να βρει τα κατάλληλα κίνητρα και υποστηρικτικές πολιτικές, ώστε να προσελκύσει επενδυτές στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Για τη συγκεκριμένη ενότητα 1.3 αντλήσαμε πληροφορίες από τη πηγή [34].

1.4 Τεχνικές απαιτήσεις άσκησης μίας επενδυτικής απόφασης

Σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στις τεχνικές απαιτήσεις άσκησης μίας επενδυτικής απόφασης. Οι τεχνικές απαιτήσεις είναι οι ακόλουθες:

1. Η δυνατότητα προσομοίωσης του τρόπου, με τον οποίο λαμβάνονται στη πράξη οι επενδυτικές αποφάσεις
2. Η δυνατότητα μοντελοποίησης της συμπεριφοράς των επενδυτών με ένα συμπαγή τρόπο
3. Η δυνατότητα δημιουργίας σεναρίων σε δύο επίπεδα:
 - Σε επίπεδο τάσεων (trend)
 - Σε επίπεδο διακυμάνσεων

Τώρα θα αναφερθούμε αναλυτικά στις τρεις αυτές τεχνικές απαιτήσεις.

Μία τεχνική απαίτηση αποτελεί η δυνατότητα προσομοίωσης του τρόπου, με τον οποίο λαμβάνονται στη πράξη οι επενδυτικές αποφάσεις. Οι επενδυτικές αποφάσεις

ακολουθούν συνήθως μία λογική, η οποία βασίζεται σε κάποια παραδείγματα. Τα παραδείγματα αυτά τυποποιημένα μπορεί να εκφράσουν τη θεωρία των Πραγματικών Δικαιωμάτων (Real Options).

Οπότε, θέλουμε ένα δομημένο τρόπο για να περιγράψουμε τη κατάσταση s από τα σενάρια. Τον τρόπο αυτό το παρέχει ο αλγόριθμος LSPI (Least Squares Policy Iteration), προσδιορίζοντας την αξία της αντικειμενικής συνάρτησης $V(s, a)$. Επιπρόσθετα, αναζητούμε ένα δομημένο τρόπο για να περιγράψουμε τις αποφάσεις a . Ο τρόπος αυτός για να περιγράψουμε τις αποφάσεις a , σε ότι αφορά τις επενδύσεις για την είσοδο σε νέες αγορές ηλεκτρικής ενέργειας, είναι η θεωρία των Πραγματικών Δικαιωμάτων.

Μία άλλη τεχνική απαίτηση αποτελεί η δυνατότητα μοντελοποίησης της συμπεριφοράς των επενδυτών με ένα συμπαγή τρόπο. Με τον όρο συμπαγή τρόπο εννοούμε την ύπαρξη ενός κανόνα, ο οποίος μας υποδεικνύει, να προσδιορίζουμε την απόφαση a , που αντιστοιχεί σε κάθε κατάσταση s . Για αυτό το λόγο προσπαθούμε να βρούμε αλγορίθμους, που προσδιορίζουν την αξία της αντικειμενικής συνάρτησης $V(s, a)$. Άρα, θέλουμε ένα συμπαγή τρόπο για να προσδιορίσουμε την αξία, που έχει κάθε απόφαση σε σχέση με τη παρούσα κατάσταση. Αυτό το κάνουμε για να μπορούμε μετά να παίξουμε ένα άλλο παιχνίδι, το οποίο μας παρέχει τη δυνατότητα να διαφοροποιούμε την αξία της συνάρτησης $V(s, a)$, έτσι ώστε να διαφοροποιούμε τους επενδυτές.

Όλοι οι επενδυτές βελτιστοποιούν τις αποφάσεις τους με βάση τη κατάσταση s . Όμως, για το ίδιο s οι αποφάσεις των επενδυτών δεν έχουν την ίδια αξία, γιατί διαφορετικοί επενδυτές έχουν διαφορετικές προσδοκίες. Κάθε επενδυτής παρατηρεί τα ίδια πράγματα στη παρούσα κατάσταση, άλλα έχει διαφορετικές προσδοκίες. Η ιδέα των προσδοκιών προέρχεται από τα σενάρια. Τα σενάρια εμπεριέχουν τις προσδοκίες των επενδυτών και ουσιαστικά αλλάζοντας το σύνολο των σεναρίων, αλλάζουμε τις προσδοκίες. Οπότε, παράγουμε διαφορετικά $V(s, a)$ (διαφορετικές αξίες της αντικειμενικής συνάρτησης). Ο λόγος, που θέλουμε να έχουμε τα $V(s, a)$ σαν κανόνες, είναι, ότι μπορούμε κάποια χρονική στιγμή να έχουμε διαφορετικά $V(s, a)$ ή διαφορετικές προσδοκίες. Για παράδειγμα η προσδοκία (α) αντιστοιχεί στην αξία V_1 της αντικειμενικής συνάρτησης, η προσδοκία (β) στη V_2 , κ.τ.λ.

Οπότε, μπορούμε μετά να φανταστούμε ένα παιχνίδι (ένα μοντέλο), το οποίο ακολουθεί τη λογική, πως θα εξελιχθούν τα πράγματα, αν οι περισσότεροι από τους

επενδυτές πιστεύουν στη προσδοκία (α), ή στη προσδοκία (β) ή και το ανάποδο. Κατά βάση αυτός είναι ο μηχανισμός, με τον οποίο λειτουργούν όλα τα πράγματα. Δηλαδή, όλοι οι κύκλοι, που πραγματοποιεί μία οικονομία, δεν είναι τίποτα άλλο από προσδοκίες και πεποιθήσεις, που αλλάζουν.

Συνεπώς, εξαιτίας της ύπαρξης αυτής της απαίτησης αναζητούμε αλγόριθμους, που μας παρέχουν συμπαγείς τέτοιες σχέσεις, και γι' αυτό υπεισέρχεται ο αλγόριθμος LSPI (Least Squares Policy Iteration). Αυτός ο αλγόριθμος μας προσδιορίζει με ένα συμπαγή τρόπο (ως τύπο) την αξία των αποφάσεων. Παραθέτεται ο ακόλουθος τύπος, που προσδιορίζει την αξία αυτών: $V(s, a) = \sum_{i=1}^k \Phi_i(s, a)W_i$, όπου Φ_i αποτελούν τις συναρτήσεις βάσης και W_i τους παραμέτρους.

Η τελευταία απαίτηση από τις τεχνικές απαιτήσεις αποτελεί η δυνατότητα δημιουργίας σεναρίων σε δύο επίπεδα:

- Σε επίπεδο τάσεων (trend)
- Σε επίπεδο διακυμάνσεων

Στην πραγματικότητα εννοούμε, ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα σενάριο και να θεωρήσουμε ότι η τιμή του φυσικού αερίου (καυσίμου) θα ακολουθήσει μακροπρόθεσμα μια καμπύλη - τάση (trend). Αυτό έχει τη λογική της μακροπρόθεσμης τιμής ισορροπίας. Αυτή η λογική υπονοεί ότι έχουμε συνδυάσει δυο παράγοντες: τη μελλοντική ζήτηση του φυσικού αερίου (εκτίμηση ζήτησης) μαζί με το κόστος για την εξόρυξη του, διανομή του κτλ. Όμως, η πραγματική τιμή του φυσικού αερίου μπορεί να διαφέρει λόγω των διακυμάνσεων.

Τα σενάρια παράγονται με την τεχνική προσομοίωσης Monte Carlo. Αν θεωρήσουμε ότι αυτά ακολουθούν μια γεωμετρική κίνηση Brown (GBM), η αναλυτική έκφραση αυτής της στοχαστικής διαδικασίας εμπεριέχει τον παράγοντα (ϵ), ο οποίος ακολουθεί κανονική κατανομή. Επίσης, ο παράγοντας (μ) μας δείχνει την τάση (drift) και ο παράγοντας (σ) πόσο πολύ ή λίγο υπάρχει διακύμανση. Συνεπώς, όταν παράγουμε ένα τέτοιο δείγμα, δημιουργούμε ένα μονοπάτι. Παράγουμε άλλο δείγμα, δημιουργείται άλλο μονοπάτι.

Επιπρόσθετα, στην παρούσα διπλωματική έχουμε αναλύσει το βραχυπρόθεσμο – μακροπρόθεσμο μοντέλο των Schwartz και Smith, το οποίο προσδιορίζει τις τιμές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (futures contracts) για τα καύσιμα, και αυτές οι τιμές αποτελούν κομμάτι των σεναρίων, που δημιουργούμε. Δηλαδή, με άλλα λόγια, δημιουργούμε σενάρια για τις τιμές των καυσίμων μέσω αυτού του

μοντέλου. Η ιδέα, που κρύβεται πίσω από τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι η ακόλουθη: κανένας επενδυτής δεν αγοράζει συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης για εμπορεύματα, όπως το φυσικό αέριο, άνθρακας (commodities) στην τρέχουσα τιμή τους, αλλά όλοι αυτοί αγοράζουν συμβόλαια αυτή τη χρονική στιγμή (τώρα) για να τα παραλάβουν σε ένα μήνα, σε δύο μήνες, σε ένα χρόνο. Άρα, οι μοναδικές τιμές, που μπορούμε να παρατηρήσουμε και να χρησιμοποιήσουμε, είναι οι τιμές των συμβολαίων.

Η τιμή ενός συμβολαίου, το οποίο το αγοράζουμε τώρα για να μας παραδοθεί σε χρόνο t , προσδιορίζεται από την μέση τιμή της τρέχουσας τιμής του για εκείνη την περίοδο επί τον παράγοντα προσαύξησης λόγω κινδύνου. Η προσαύξηση στην τιμή του συμβολαίου λόγω κινδύνου έχει να κάνει, με το ποιος από τους αγοραστές και τους πωλητές ενδιαφέρεται περισσότερο να κλειδώσει τις τιμές. Οι αγοραστές κερδίζουν, όταν οι πωλητές "καίγονται" περισσότερο να κλειδώσουν τις τιμές. Δηλαδή, αν σε μια αγορά ηλεκτρικής ενέργειας περισσότερο φόβο έχει ο πωλητής σε σχέση με τον αγοραστή, τότε ο δεύτερος κερδίζει την διαφορά στις τιμές των συμβολαίων (προσαύξηση λόγω κινδύνου). Το αντίθετο συμβαίνει, όταν οι αγοραστές "καίγονται" περισσότερο να κλειδώσουν τις τιμές. Οπότε, το παιχνίδι παίζεται στο ποιος "καίγεται" περισσότερο να κλειδώσει τις τιμές.

Συνεπώς, μέσω της χρήσης των μοντέλων Schwartz και Smith μοντελοποιούμε τις τρέχουσες τιμές των συμβολαίων και προσδιορίζουμε την αξία τους, που αποτελούν σενάρια για τις τιμές των καυσίμων.

2. Μοντέλα Πραγματικών Δικαιωμάτων

Η μοντελοποίηση των πραγματικών Δικαιωμάτων (Real Options) χρησιμοποιείται για την αξιολόγηση επενδύσεων και ενεργειακών πολιτικών σε διαφορετικές τεχνολογίες παραγωγής ενέργειας. Οι Frayer και Oludere [17] αναφέρουν ότι τα λειτουργικά κέρδη μίας ευέλικτης μονάδας παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας ορίζονται ως μία σειρά από ωριαία προθεσμιακά συμβόλαια, τα οποία δίνουν το δικαίωμα στον κάτοχο - επενδυτή, αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ένα χρηματοδοτικό μέσο. Ένα προσαρμοσμένο μοντέλο των Black - Scholes συνηθίζεται να χρησιμοποιείται για την αποτίμηση και βέλτιστη άσκηση αυτών των προθεσμιακών συμβολαίων (Call Options), και συνεπώς για την αποτίμηση της ηλεκτρικής ενέργειας, που παράγεται.

Η μόνη αβέβαιη παράμετρος είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής του καυσίμου, που απαιτείται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, και της τιμής, με την οποία ο ηλεκτρισμός πωλείται στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτή η διαφορά μεταξύ των τιμών αυτών καλείται με τον αγγλικό όρο - spark spread -. Επιπρόσθετα, οι Gardner και Zhuang [18] παρουσιάζουν μία προσέγγιση δυναμικού προγραμματισμού, όπου τα λειτουργικά έξοδα, καθώς οι λειτουργικοί περιορισμοί συμπεριλαμβάνονται στο μοντέλο αποτίμησης προθεσμιακών συμβολαίων. Και εδώ η μόνη αβέβαιη παράμετρος είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής του καυσίμου, που απαιτείται για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, και της τιμής, με την οποία ο ηλεκτρισμός πωλείται στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας.

Θεμελιώδη μοντέλα, όπως τα μοντέλα μερικής ισορροπίας, έχουν χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση, κατά συνεκτικό τρόπο, της σχέσης μεταξύ της ζήτησης ηλεκτρικής ενέργειας, της συνολικής εγκατεστημένης δυναμικότητας, των λειτουργικών κοστών και της τιμής, με την οποία μία επιχείρηση μπορεί να πουλήσει τη παραγωγή της, συμπεριλαμβανομένης και της επίπτωσης στην επένδυσή της, που ενδέχεται να υπάρξει λόγω της εξέλιξης της τιμής.

Πιο συγκεκριμένα, ο Botterud [22] παρουσιάζει ένα στοχαστικό δυναμικό μοντέλο βελτιστοποίησης για την αξιολόγηση επενδύσεων και ενεργειακών πολιτικών σε νέες μονάδες παραγωγής φυσικού αερίου στη Νορβηγία. Το μοντέλο του είναι σε θέση να ενσωματώσει διάφορες πηγές αβεβαιότητας, όπως και ενεργειακές πολιτικές από

ανταγωνιστές μέσω ενός προκαθορισμένου επιπέδου τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας, το οποίο αποτελεί ένασμα για την είσοδο στην αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα απλό θεμελιώδες μοντέλο αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας συνηθίζεται να προσδιορίζει τις τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας για κάθε κατάσταση ζήτησης και τιμής καυσίμου, που απαιτείται για τη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.

Οι Stine και Meibom [20] αναφέρουν ότι τα σενάρια των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας παράγονται με ένα μοντέλο μερικής ισορροπίας του σκανδιναβικού συστήματος ηλεκτρικής ενέργειας και σε συνδυασμό με ένα μοντέλο δέντρων αποφάσεων των επενδυτικών αποφάσεων και ενεργειακών πολιτικών. Το μοντέλο μερικής ισορροπίας, που χρησιμοποιείται, είναι το μοντέλο Balmorel (Ravn et al., [19]). Επίσης, ένα ολοκληρωμένο, δυναμικό μοντέλο αποτίμησης και αξιολόγησης, που αποτελείται από ένα μη γραμμικό μοντέλο κρουστικής απόκρισης και ένα κοινωνικό - οικονομικό μοντέλο (Weber et al., [21]), δίνει έμφαση στην ενδογενή τεχνολογική αλλαγή ως κυρίαρχη διαδικασία, που διέπει την οικονομική ανάπτυξη, η οποία από τη μεριά της εμφανίζεται ως συνώνυμη με την αύξηση σε ανθρώπινο δυναμικό και παραγωγικότητα στην εργασία.

Ένα σημαντικό σώμα της βιβλιογραφίας περιλαμβάνει τις περιπτώσεις, όπου η έννοια των Πραγματικών Δικαιωμάτων χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση της επιρροής μίας ενεργειακής πολιτικής - συνήθως με τη μορφή της πολιτικής, που εμπεριέχει κάποια μορφή αβεβαιότητας - στην αξιολόγηση των επενδύσεων σε μία ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι η μελέτη των Blyth et al. [23], όπου η επίδραση της αβεβαιότητας για τη μελλοντική θέσπιση ανωτάτων ορίων CO₂ και τιμών για ορυκτά καύσιμα αξιολογείται.

Στη παρούσα διπλωματική παρουσιάζονται παραδείγματα - τυπολογίες επίλυσης μοντέλων πραγματικών δικαιωμάτων μέσω της χρήσης δυωνυμικών δέντρων (Binomial approach) σύμφωνα με τη πηγή [24]. Υπάρχουν διάφοροι τύποι μοντέλων πραγματικών δικαιωμάτων, όπως το δικαίωμα να εγκαταλείψει μία εταιρεία ένα επενδυτικό σχέδιο (option to abandon), το δικαίωμα να επεκτείνει τις επιχειρηματικές δραστηριότητες περαιτέρω (option to expand), το δικαίωμα να παραχωρήσει σε τρίτους ένα ποσοστό της εταιρείας (διοίκηση) μέσω μιας νόμιμης σύμβασης (option to contract). Όλα αυτά τα δικαιώματα αποτελούν τις ανεξάρτητες επενδυτικές αποφάσεις, το δικαίωμα να ασκήσει μία από τις τρεις προαναφερθείσες πολιτικές

(αμοιβαίως αποκλειόμενες αποφάσεις), και τέλος το δικαίωμα να συνεχίσει ή όχι ένα επενδυτικό σχέδιο, όπου όμως η απόφαση αυτή εξαρτάται από κάποια άλλη απόφαση (συνδυαστικές αποφάσεις – Compound Option).

2.1 Ανεξάρτητες επενδυτικές αποφάσεις

Οι ανεξάρτητες επενδυτικές αποφάσεις μπορούν καλύτερα να παρουσιαστούν παραθέτοντας ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι μία φαρμακευτική εταιρεία αναπτύσσει ένα συγκεκριμένο φάρμακο. Όμως, εξαιτίας της αβέβαιης φύσης της διαδικασίας εξέλιξης του φαρμάκου, της ζήτησης της αγοράς, της επιτυχίας στα πειράματα σε ανθρώπους και ζώα, της έγκρισης του Οργανισμού Τροφίμων και Φαρμάκων, η διοίκηση έχει αποφασίσει ότι μπορεί και να ακολουθήσει μία στρατηγική (πολιτική) εγκατάλειψης αυτού του επενδυτικού σχεδίου μέσα σε ένα ορισμένο χρονικό ορίζοντα λόγω πιθανής εμφάνισης ζημίας. Αυτό το μοντέλο πραγματικών δικαιωμάτων μας βοηθάει να αποφασίσουμε τι θα ήταν καλύτερο για την επιχείρηση να γίνει: να εγκαταλείψει αυτό το επενδυτικό σχέδιο ή να συνεχίσει πάνω σε αυτό. Πάντοτε μία επιχείρηση θέλει να ακολουθεί μία πολιτική, που να μεγιστοποιεί το κέρδος της.

Αυτό το μοντέλο πραγματικών δικαιωμάτων επιλύεται με την ακόλουθη μεθοδολογία:

1. Κάνοντας χρήση του κλασσικού μοντέλου προσδιορισμού των ταμειακών ροών μίας εταιρείας αναγομένων στο χρόνο, βρίσκουμε τη παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών -So-
2. Χρησιμοποιώντας τη τεχνική προσομοίωσης (Monte Carlo Simulation) υπολογίζουμε τη μεταβλητότητα (σ) των μελλοντικών ταμειακών ροών
3. Επίσης, πρέπει να γνωρίζουμε το παράγοντα κινδύνου (r) που εμπεριέχεται στην επένδυση, την αξία πώλησης του προϊόντος (π.χ. η αξία πώλησης της πατέντας του φαρμάκου - salvage value), εάν η εταιρεία αποφασίσει να εγκαταλείψει την επενδυτική προσπάθεια, που ξεκίνησε, και θελήσει να πουλήσει το προϊόν της, καθώς και το χρονικό ορίζοντα της επένδυσης (T).

Οπότε, τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του πραγματικού δικαιώματος (αξία της επιλογής), το οποίο δίνει την επιλογή σε μία εταιρεία να εγκαταλείψει ένα επενδυτικό σχέδιο, ώστε να αποφύγει τυχόν ζημίες.

4. Υπολογισμός του πρώτου δυωνυμικού δέντρου (underlying lattice)

α) Εύρεση των παραγόντων u , d , καθώς επίσης και της πιθανότητας ουδετέρου κινδύνου (risk - neutral probability). Οι τύποι των παραπάνω παραγόντων δίνονται από τους ακόλουθους τύπους:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} \quad p = \frac{e^{r(\delta t)} - d}{u - d}$$

β) Ξεκινώντας με αρχικό κόμβο του δυωνυμικού δέντρου, την τιμή της παρούσας αξίας των ταμειακών ροών της εταιρείας (S_0), πολλαπλασιάζουμε την τιμή αυτή με τους u και d παράγοντες. Οπότε και οι υπόλοιποι κόμβοι του πρώτου δυωνυμικού δέντρου υπολογίζονται με τον ίδιο τρόπο.

5. Υπολογισμός του δεύτερου δυωνυμικού δέντρου (option valuation lattice), όπου εδώ υπολογίζουμε την αξία της επιλογής, δηλαδή αν συμφέρει καλύτερα μία επιχείρηση να εγκαταλείψει ή όχι το επενδυτικό της σχέδιο σε κάποιο ορισμένο χρονικό ορίζοντα, με απώτερο σκοπό τη μεγιστοποίηση του κέρδους της.

6. Χρησιμοποιώντας τη τεχνική προς τα πίσω (backward induction), υπολογίζουμε πρώτα τους τερματικούς κόμβους και ύστερα τους ενδιάμεσους κόμβους. Πιο αναλυτικά, σε ένα τερματικό κόμβο η τιμή του προκύπτει από την επιλογή της μέγιστης τιμής μεταξύ των αξιών να εγκαταλείψει η επιχείρηση το επενδυτικό σχέδιο ή να συνεχίσει να το εφαρμόζει. Δηλαδή, στο τέλος του καθορισμένου χρονικού ορίζοντα της επένδυσης η εταιρεία έχει το δικαίωμα να εφαρμόσει μία πολιτική εγκατάλειψης της επένδυσης και να πουλήσει το προϊόν της ή να συνεχίσει την εφαρμογή του σχεδίου της.

Η αξία εγκατάλειψης του επενδυτικού σχεδίου είναι η αξία πώλησης του προϊόντος (salvage value), ενώ η αξία συνέχισης του σχεδίου είναι οι τιμές των αντίστοιχων κόμβων από το πρώτο δυωνυμικό δέντρο (underlying lattice).

Πηγαίνοντας στους ενδιάμεσους κόμβους, ξανά έχουμε δύο επιλογές να κάνουμε: είτε εγκατάλειψη, είτε συνέχιση του επενδυτικού σχεδίου. Η αξία ενός ενδιάμεσου κόμβου προκύπτει από την επιλογή της μέγιστης τιμής μεταξύ της αξίας πώλησης του προϊόντος, όταν η επιχείρηση έχει αποφασίσει εγκατάλειψη της επένδυσης και της τιμής, που προκύπτει από τον ακόλουθο τύπο:

$$[P * (\text{τιμή άνω κόμβου}) + (1 - P) * (\text{τιμή κάτω κόμβου})] * e^{(-r * \delta t)}$$

Όπου P η πιθανότητα ουδετέρου κινδύνου, r ο παράγοντας κινδύνου, που εμπεριέχεται σε μία επένδυση, και $\delta t = 1$.

Οπότε με τη τεχνική backward, υπολογίζονται και οι υπόλοιποι κόμβοι (από τους τερματικούς κόμβους μέχρι τον αρχικό) του δεύτερου δυωνυμικού δέντρου (option valuation lattice). Καταληκτικά, η αξία της επιλογής (real option value) υπολογίζεται από την αφαίρεση των τιμών των αρχικών κόμβων των δύο δυωνυμικών δέντρων.

Μία άλλη επιλογή από τις ανεξάρτητες επενδυτικές αποφάσεις αποτελεί η αξιολόγηση αν την εταιρεία συμφέρει ή όχι να επεκτείνει (αυξήσει) τις επιχειρηματικές της δραστηριότητες περαιτέρω, τις οποίες αποκτά από έναν άλλο ανταγωνιστή με ένα κόστος επένδυσης όμως. Αυτό το μοντέλο πραγματικών δικαιωμάτων υλοποιείται με την ίδια μεθοδολογία, που αναφέρθηκε παραπάνω, με μόνο ορισμένες διαφορές, οι οποίες θα επισημανθούν παρακάτω.

Τα μόνα επιπλέον στοιχεία, που πρέπει να γνωρίζουμε, είναι ο παράγοντας επέκτασης και το κόστος των επιπρόσθετων επιχειρηματικών δραστηριοτήτων, που αποκτάει από έναν άλλο ανταγωνιστή.

Υπολογίζουμε κανονικά, όπως πριν, το πρώτο δυωνυμικό δέντρο (underlying lattice). Ύστερα υπολογίζουμε και το δεύτερο δυωνυμικό δέντρο, όπου οι τερματικοί του κόμβοι προσδιορίζονται από την επιλογή της μέγιστης τιμής μεταξύ των τιμών επέκτασης των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων της εταιρείας ή συνέχισης, όπως έχει. Πάντοτε η εταιρεία ακολουθεί πολιτικές μεγιστοποίησης του κέρδους της. Για αυτό, με αυτό το μοντέλο πραγματικών δικαιωμάτων μπορεί να εκτιμήσει, αν συμφέρει ή όχι να κάνει επέκταση των δραστηριοτήτων της. Η αξία επέκτασης υπολογίζεται με τον ακόλουθο τύπο (1):

$$\text{Expansion} = (\text{expand factor}) * (\text{τιμή αντίστοιχου underlying κόμβου}) - (\text{κόστος επέκτασης})$$

Ενώ η αξία συνέχισης προέρχεται από τον αντίστοιχο κόμβο του πρώτου δυωνυμικού δέντρου. Οι ενδιάμεσοι κόμβοι προσδιορίζονται με τον ίδιο τρόπο, όπως πριν, με την μόνη διαφορά, ότι χρησιμοποιείται ο τύπος (1) για τον υπολογισμό της αξίας της επέκτασης, ενώ η αξία της συνέχισης υπολογίζεται από τον ίδιο τύπο:

$$[P*(τιμή\άνω\κόμβου) + (1-P)*(τιμή\κάτω\κόμβου)]*e^{(-r*\delta t)}$$

Σε αυτή τη περίπτωση επιλογής η εταιρεία μπορεί να αξιολογήσει αν συμφέρει ή όχι να παραχωρήσει (ανάθεση) μέρος των επιχειρηματικών της δραστηριοτήτων σε τρίτους μέσω μίας νόμιμης σύμβασης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η εταιρεία με αυτή τη πολιτική να γλιτώνει αρκετά έξοδα, τα οποία τις προκαλούσαν ζημιές.

Και αυτό το μοντέλο πραγματικών δικαιωμάτων επιλύεται με την ίδια προαναφερθείσα μεθοδολογία, με μόνο λίγες διαφορές, οι οποίες θα επισημανθούν παρακάτω.

Τα επιπλέον στοιχεία, που πρέπει να γνωρίζουμε, είναι το ποσοστό παραχώρησης των επιχειρηματικών δραστηριοτήτων της εταιρείας σε τρίτους μέσω νόμιμης σύμβασης (Contraction factor), καθώς επίσης και τα χρήματα, που αποκομίζει από αυτή την σύμβαση.

Επιπρόσθετα, μία άλλη διαφορά είναι και ο τύπος, που υπολογίζει την αξία το να κάνει η εταιρεία σύμβαση με τρίτους:

$$Contract = (contract\ factor) * (τιμή\αντίστοιχου\underlying\κόμβου) + (savings)$$

2.2 Αμοιβαίως αποκλειόμενες επενδυτικές αποφάσεις

Το δικαίωμα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να επιλέξουμε ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές πολιτικές, όπως είναι το δικαίωμα του να εγκαταλείψουμε την επένδυση, το δικαίωμα να επεκτείνουμε περαιτέρω τις λειτουργίες μιας επιχείρησης και στο δικαίωμα της σύμβασης, ανάθεσης δηλαδή σε τρίτους των λειτουργιών τις επιχείρησης.

Και σε αυτή τη περίπτωση τα βήματα, με τα οποία υλοποιείται ο αλγόριθμος για την επίλυση αυτού του μοντέλου πραγματικών δικαιωμάτων είναι πανομοιότυπα με τα παραπάνω. Η μόνη ουσιαστική διαφορά, που εντοπίζεται, είναι ότι το μοντέλο αυτό αποτελεί ένα μίγμα των τριών προαναφερθέντων μοντέλων. Δηλαδή, όσον αφορά το προσδιορισμό των τερματικών και των ενδιάμεσων κόμβων του δέντρου (option valuation lattice), πρέπει να επιλέξουμε τη μεγίστη τιμή μεταξύ και των τριών δικαιωμάτων, που συμμετέχουν στο μοντέλο.

Συγκεκριμένα η αξία το να εγκαταλείψουμε την επένδυση είναι το ποσό, που αποκτά η εταιρεία από την πώληση του προϊόντος. Η αξία επέκτασης σε περαιτέρω λειτουργίες - δραστηριότητες μιας επιχείρησης καθορίζεται από το παράγοντα επέκτασης της επένδυσης πολλαπλασιασμένη με την τιμή του κόμβου, που βρήκαμε στο πρώτο στάδιο (underlying lattice), αφαιρούμενο κατά το κόστος πραγματοποίησης της επέκτασης αυτής. Όσον αφορά την αξία σύμβασης, της ανάθεσης, δηλαδή σε τρίτους των λειτουργιών της επιχείρησης, η τιμή της προκύπτει από το ποσοστό, που μας έχει απομένει να διαχειριστεί η εταιρεία πολλαπλασιασμένο με την τιμή στον κόμβο αυτό, που βρήκαμε στο πρώτο στάδιο (underlying lattice) και σε αυτό προσθέτουμε τα συμφωνηθέντα κέρδη, που μας προσφέρουν οι τρίτοι (vendors), που διαχειρίζονται μέρος των επιχειρησιακών λειτουργιών.

Έπειτα σύμφωνα με την προαναφερθείσα τεχνική (backward induction) προχωράμε στους ενδιάμεσους κόμβους του δέντρου (option valuation lattice), όπου η τιμή τους καθορίζεται μέσω της επιλογής της μέγιστης τιμής μεταξύ των τιμών, που μας δίνει το καθένα από τα παραπάνω δικαιώματα και της τιμής το να διατηρηθεί το δικαίωμα ανοιχτό, το οποίο δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\left[P * (\text{τιμή άνω κόμβου}) + (1 - P) * (\text{τιμή κάτω κόμβου}) \right] * e^{(-r * \delta t)},$$

όπου οι τιμές των κόμβων είναι οι κόμβοι, που συμβάλλουν στο κόμβο, που υπολογίζουμε. Επίσης, χρησιμοποιείται ο παράγοντας κινδύνου (r), γιατί οι τιμές είναι ανοιγμένες στο χρόνο, αφού το δικαίωμα παραμένει ανοιχτό. Επίσης, θεωρούμε $\delta t=1$.

Επιλύοντας το μοντέλο, υπολογίζουμε την αρχική κατάσταση του δυωνυμικού δέντρου (option valuation lattice) S_0' και παρατηρούμε διαφορετική τιμή παρατηρώντας το S_0 , που είχαμε υπολογίσει αρχικά (underlying lattice). Ως S_0 ορίζουμε την καθαρή παρούσα αξία, ενώ ως S_0' την ENPV (expanded NPV). Η διαφορά τους προσδιορίζει την αξία του δικαιώματος (real option value).

Αυτό, που είναι αξιοσημείωτο, είναι, πως αν πάρουμε την αξία κάθε επιλογής χωριστά για ένα συγκεκριμένο παράδειγμα και αθροίσουμε τις αξίες τους μετά, το άθροισμα τους είναι διαφορετικό από το αν τις πάρουμε όλες μαζί. Συνεπώς,

καταλήγουμε σε διαφορετικά και λανθασμένα αποτελέσματα. Αυτό έγκειται στην αμοιβαία, αποκλειστική και ανεξάρτητη φύση αυτών των συγκεκριμένων επιλογών. Άρα σε μια επιχείρηση δεν είναι δυνατόν να συνυπάρχουν διαφορετικές επιλογές την ίδια χρονική στιγμή (αμοιβαίως αποκλειόμενες αποφάσεις).

2.3 Συνδυαστικές επενδυτικές αποφάσεις

Σε μία ανάλυση συνδυαστικών αποφάσεων, η τιμή μίας επιλογής εξαρτάται από τη τιμή μίας άλλης επιλογής. Παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα για τη καλύτερη κατανόηση των συνδυαστικών αποφάσεων.

Μια φαρμακευτική εταιρία πρόσφατα απέσπασε την έγκριση από τον οργανισμό τροφίμων και φαρμάκων (FDA) για την προώθηση ενός φαρμακευτικού προϊόντος της στο τομέα των αλλεργιών. Η εταιρεία έπρεπε για να πάρει την έγκριση από τον οργανισμό να διεξάγει ένα πειραματικό πρόγραμμα σε ανθρώπους. Για το λόγο αυτό, διεξήγαγε δοκιμές σε 10000 ασθενείς με το κόστος να ανέρχεται στα 50 εκατομμύρια \$. Οπότε θεωρούμε, πως τα αρχικά κόστη ανέρχονται σε 50 εκατομμύρια \$. Η παρούσα αξία της συνολικής επένδυσης συμπεριλαμβανομένου των κοστών για τις παροχές ανέρχεται στο ποσό των 275 εκατομμυρίων \$. Αυτά τα κόστη αποτελούν τα τελικά κόστη. Έχουμε ως χρονικό ορίζοντα τα τρία έτη ($T=3$). Χρησιμοποιώντας τη τεχνική προσομοίωσης (Monte Carlo simulation) υπολογίζουμε τη μεταβλητότητα των προβλεπόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών να είναι $\sigma=0.25$. Ο κίνδυνος, που εμπεριέχει η επένδυση, είναι $r=0.12$. Η παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών ανέρχεται στο 1 δισεκατομμύριο \$.

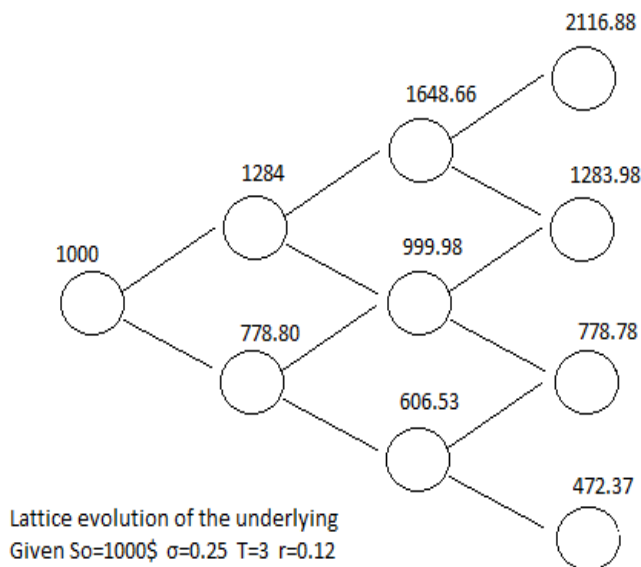
Η ανάλυση των συνδυαστικών αποφάσεων περιλαμβάνει τρία δικτυωτά πλέγματα (δέντρα). Στο πρώτο στάδιο υπολογίζουμε το δέντρο (underlying lattice). Στο δεύτερο στάδιο υπολογίζουμε το δέντρο (intermediate equity lattice) χρησιμοποιώντας τις τιμές του δέντρου (underlying lattice) και στο τρίτο στάδιο το δέντρο (option valuation lattice) βασισμένο στις τιμές του δέντρου του δεύτερου σταδίου.

Όλοι οι απαιτούμενοι υπολογισμοί και βήματα στο πρώτο δέντρο (underlying lattice) βασίζονται στους συντελεστές (up factor , down factor) και στη πιθανότητα ουδέτερου κίνδυνου (risk - neutral probability). Συγκεκριμένα έχουμε:

Ο συντελεστής up factor υπολογίζεται από τον τύπο $up = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = 1.2840$ και συντελεστής down factor από το τύπο: $down = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}} = 0.7788$. Η πιθανότητα ουδέτερου κίνδυνου υπολογίζεται από το τύπο: $P = \frac{e^{r(\delta t)} - d}{u - d} = 0.69$. Ξεκινώντας στον αρχικό κόμβο του δέντρου με την τιμή των 1000\$ (σε εκατομμύρια), πολλαπλασιάζουμε την τιμή αυτή με τους up και down συντελεστές. Στη συνέχεια οι υπόλοιποι κόμβοι του δέντρου συμπληρώνονται βασιζόμενοι στη λογική αυτή.

Παραθέτουμε το ακόλουθο δέντρο (underlying lattice):

Bionomial approach-Step 1



$$up = e^{\sigma(\delta)^{0.5}} = 1.2840$$

$$d = e^{-\sigma(\delta)^{0.5}} = 0.7788$$

$$P = (e^{r(\delta t)} - d) / (u - d) = 0.69$$

Σχήμα 2.1 Υπολογισμός του δέντρου (underlying lattice)

Το δεύτερο βήμα περιλαμβάνει τον υπολογισμό του δέντρου (equity lattice). Παρατηρούμε ότι ο τερματικός κόμβος N έχει την τιμή 2066,88 \$, η οποία προκύπτει από την επιλογή του μεγίστου μεταξύ στο να εκτελεστεί η επιλογή ή όχι. Η αξία της επιλογής προκύπτει από την ακόλουθη αφαίρεση: $(2116.88 - 50)\$ = 2066.88\$$. Η επιλογή προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $\text{MAX}[2066.88, 0]$, η οποία μας δίνει 2066.88 εκατομμύρια \$.

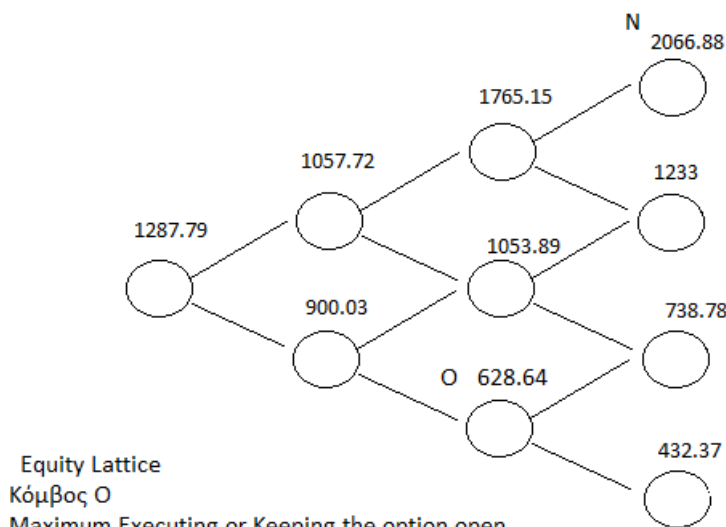
Στους ενδιάμεσους κόμβους παρατηρούμε, πως ο κόμβος O έχει τιμή 570.98\$ (εκατομ.). Στο συγκεκριμένο αυτό κόμβο η τιμή εκτέλεσης της επιλογής είναι: $606.53 - 50 = 556.53$ \$ (εκατομ.). Η τιμή 606.53 προέρχεται από το παραπάνω δέντρο (underlying lattice). Η τιμή το να συνεχίσεις υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$[P * (738.78) + (1 - P) * (432.37)] * e^{(-r * \delta t)} = 570.98$$

Η τιμή στον κόμβο αυτό καθορίζεται από την επιλογή της μέγιστης τιμής εκ των δυο αυτών υπολογιστικών διαδικασιών. Χρησιμοποιώντας τη τεχνική backward συμπληρώνουμε τους υπόλοιπους κόμβους του δέντρου (intermediate equity lattice) και τελικά ο αρχικός κόμβος έχει την τιμή 1287.89 (εκατομ.)\$.

Παραθέτουμε το ακόλουθο δέντρο:

Bionomial approach-Step II



Equity Lattice

Κόμβος O

Maximum Executing or Keeping the option open

Executing = $606.53 - 50 = 556.53$

Keeping option open = $p * 738.78 + (1 - p) * 432.37 * e^{(-r(d(t)))} = 628.64$

Maximum between executing or 0
Execute = $2116.88 - \text{investment cost } 1 = 2116.88 - 50 = 2066.88$

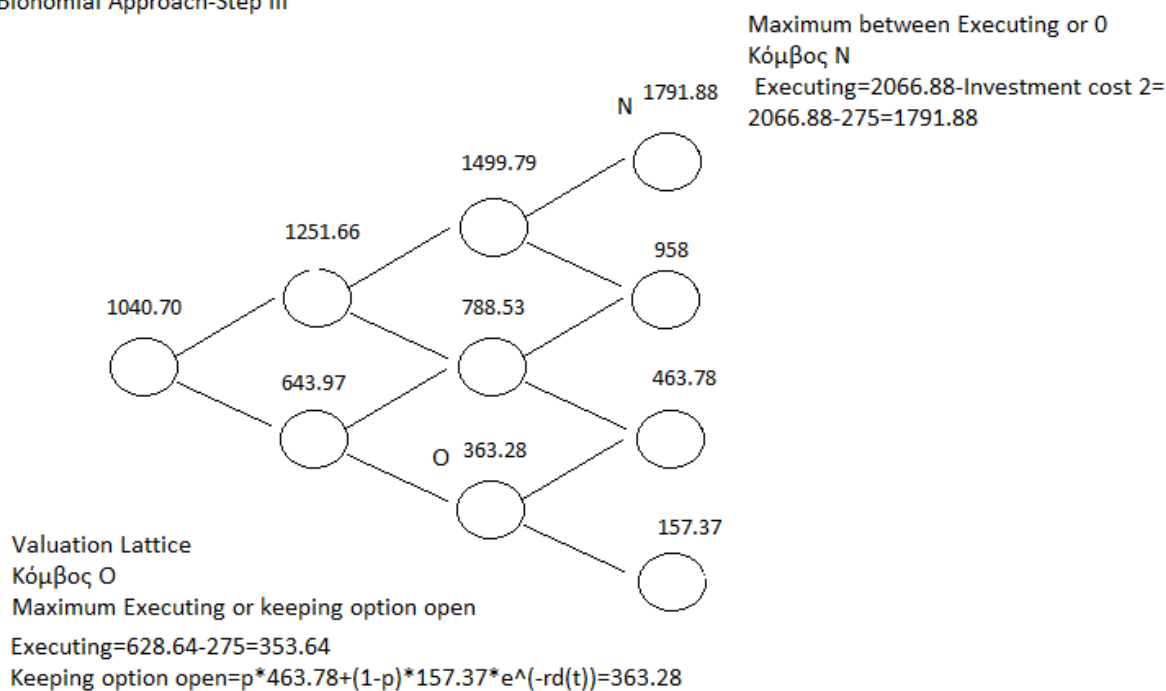
Σχήμα 2.2 Υπολογισμός του δέντρου (equity lattice)

Στο τρίτο βήμα έχουμε ως στόχο να υπολογίσουμε το δέντρο (option valuation lattice), το οποίο θα μας προσδιορίσει την αξία του δικαιώματος, δηλαδή την αξία το να κάνω κάτι (η αξία της ευελιξίας). Στο τερματικό κόμβο P παρατηρούμε ότι έχει τιμή 1791.88\$ (εκατομ.), η οποία προκύπτει από την επιλογή του μεγίστου μεταξύ του μηδενός και της τιμής του δικαιώματος. Η τιμή του δικαιώματος αυτού προκύπτει από το τύπο $(2066.88 - 275)\$ = 1791.88$ \$ (εκατομ.). Η τιμή 2066.88 προέρχεται από

το δέντρο (equity lattice) και όχι από το δέντρο (underlying lattice), επειδή οι τιμές των κόμβων αυτού του δέντρου αποτελούν μία άλλη επιλογή. Με παρόμοιο τρόπο ο ενδιάμεσος κόμβος Q παρατηρούμε ότι έχει τιμή 363.28\$ (εκατομ.), η οποία προκύπτει από τη συνάρτηση μεγιστοποίησης $\text{MAX}[353.64, 363.28]$. Χρησιμοποιώντας τη τεχνική backward υπολογίζουμε όλες τις τιμές των κόμβων του δέντρου του (option valuation lattice). Η τιμή του αρχικού κόμβου, που είναι και τιμή της συνδυαστικής απόφασης, είναι 1040.70\$ (εκατομ.).

Παραθέτουμε το ακόλουθο δέντρο:

Bionomial Approach-Step III



Σχήμα 2.3 Υπολογισμός του δέντρου (option valuation lattice)

Η τιμή της δικαιώματος υπολογίζεται από την αφαίρεση της τιμής της συνδυαστικής απόφασης (Compound option) και της τιμής της στατικής καθαρής παρούσας αξίας (static NPV). Η στατική καθαρά παρούσα αξία προκύπτει από την ακόλουθη αφαίρεση: $1000 - 50 = 950$ \$ (εκατομ.). Οπότε, η τιμή του δικαιώματος είναι: $1040.70 - 950 = 90.70$ \$ (εκατομ.).

2.4 Switching επενδυτικές αποφάσεις

Ένα τέτοιου είδους μοντέλο πραγματικών δικαιωμάτων ισχύει, όταν ένα επενδυτικό σχέδιο έχει διαφορές φάσεις και όταν οι τελευταίες φάσεις του εξαρτώνται από τις προηγούμενες (switching αποφάσεις). Είναι εφαρμόσιμο για ερευνά και ανάπτυξη (Research and Development) ή σε επενδύσεις, που έχουν πολλαπλά στάδια. Η διαφορά σε αυτό το μοντέλο έγκειται στο ότι υπάρχουν περισσότερες από μια χρονικές περίοδοι, όπως και επενδυτικά κόστη ανάλογα με τις φάσεις, που υπάρχουν στο εκάστοτε πρόβλημα. Ο αριθμός των σταδίων καθορίζει το ποσά βήματα, δηλαδή ποσά δυωνυμικά δικτυωτά πλέγματα θα δημιουργήσουμε. Κάθε ένα από αυτά έχει τον επενδυτικό του ορίζοντα και το αντίστοιχο κόστος της επένδυσης. Η μεθοδολογία επίλυσης του είναι, κατά τα αλλά, ακριβώς ίδια με τα προηγούμενα μοντέλα.

3. Δυναμικός Προγραμματισμός

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής είναι να εξετάσει κάποιες πτυχές του τομέα του δυναμικού προγραμματισμού. Θα πρέπει να αντιμετωπίσουμε τον δυναμικό προγραμματισμό ως μέσο επίλυσης προβλημάτων, που εξελίσσονται στο χρόνο [6]. Δυναμικός προγραμματισμός είναι μια μέθοδος υπολογισμού, η οποία εφαρμόζεται, όταν πρόκειται να ληφθεί μια σύνθετη απόφαση, η οποία προκύπτει από τη σύνθεση επιμέρους αποφάσεων, που αλληλοεξαρτώνται. Η εξάρτηση μπορεί να προκύπτει, επειδή οι αποφάσεις παρουσιάζουν κάποια χρονική διάδοχη ή συνδέονται με κοινούς περιορισμούς [7].

Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι ο προγραμματισμός της παραγωγής υπό ποικίλες απαιτήσεις, η επέκταση της παραγωγικής ικανότητας, ώστε να αντιμετωπιστεί η αυξανόμενη ζήτηση και ο σχεδιασμός επενδύσεων σε διάφορους τομείς [6].

Οι αποφάσεις αυτές μπορεί να λαμβάνονται σε ένα περιβάλλον γνωστών συνθηκών (ντετερμινιστικός δυναμικός προγραμματισμός) ή ακόμα και σένα περιβάλλον αβεβαιότητας (στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός) [67].

Η μέθοδος επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βασίζεται στη διασύνδεση των επιμέρους αποφάσεων με κατάλληλη αναδρομική σχέση, ώστε η σύνθεση των επιμέρους αποφάσεων να δίνει την τελικά ζητούμενη απόφαση. Το αρχικό πρόβλημα διασπάται σε επιμέρους προβλήματα, τα οποία συνδέονται με τη βοήθεια κατάλληλων αναδρομικών σχέσεων [67].

Η κύρια ιδέα, που βρίσκεται πίσω από τον δυναμικό προγραμματισμό, είναι η ακόλουθη: Για να λύσουμε ένα δοσμένο πρόβλημα, χρειαζόμαστε να λύσουμε μέρη του προβλήματος και τότε συνδυάζουμε τις λύσεις αυτών των προβλημάτων για να φτάσουμε σε μία γενική λύση. Για να καλυφθούν όλες οι εκδοχές από τη διασύνδεση των επιμέρους προβλημάτων, τα προβλήματα αυτά λύνονται παραμετρικά, δηλαδή για όλες τις δυνατές τιμές ορισμένων παραμέτρων. Ο Δυναμικός προγραμματισμός ψάχνει να λύσει κάθε πρόβλημα ξεχωριστά και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μειώνεται το υπολογιστικό κόστος.

Σημαντικές έννοιες στο δυναμικό προγραμματισμό είναι ο ορίζοντας χρόνου, οι μεταβλητές κατάστασης, απόφασης και συναρτήσεις μετάβασης. Ο χρονικός ορίζοντας αναφέρεται στον αριθμό των σταδίων (χρονικές περίοδοι) του

προβλήματος. Οι μεταβλητές κατάστασης περιγράφουν την κατάσταση του συστήματος, για παράδειγμα τη σημερινή ικανότητα παραγωγής, τη σημερινή ηλικία ή το ποσό των χρημάτων, που έχει κάποιος σε διαφορετικούς λογαριασμούς σε μια τράπεζα. Οι μεταβλητές απόφασης είναι μεταβλητές υπό τον έλεγχο ενός. Μπορεί, για παράδειγμα, να αντιπροσωπεύουν αποφάσεις για το πώς να μεταφερθούν χρήματα από έναν τραπεζικό λογαριασμό σε έναν άλλο. Η συνάρτηση μετάβασης δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν οι μεταβλητές κατάστασης ως μια συνάρτηση των αποφάσεων. Δηλαδή, υποδεικνύει την κατάσταση, που θα επακολουθήσει από τον συνδυασμό της παρούσας κατάστασης και των αντίστοιχων αποφάσεων. Παραδείγματος χάριν, μπορεί να δείχνει τον τρόπο με τον οποίο αυξάνονται τα χρήματα σε μια τράπεζα.

Η κυριότερη ιδέα πίσω από το δυναμικό προγραμματισμό είναι να εξετάζουμε ένα στάδιο κάθε φορά, ξεκινώντας από το τελευταίο. Για κάθε στάδιο, βρίσκουμε τη βέλτιστη απόφαση όλων των δυνατών καταστάσεων, υπολογίζοντας τη βέλτιστη συσσωρευμένη επιστροφή από την ισχύουσα κατάσταση ως το τέλος του χρονικού ορίζοντα για όλες τις δυνατές καταστάσεις. Έπειτα, μεταβαίνουμε ένα βήμα προς το παρόν και υπολογίζουμε τις επιστροφές από εκείνο το στάδιο μέχρι το τέλος του χρόνου, προσθέτοντας μαζί τις άμεσες επιστροφές και τις επιστροφές όλων των τελευταίων περιόδων, που βασίζονται στους υπολογισμούς, που έγιναν στο προηγούμενο στάδιο [6].

3.1 Χαρακτηριστικά Προβλημάτων Δυναμικού Προγραμματισμού

Τα προβλήματα αυτά περιέχουν τα ακόλουθα στοιχεία σύμφωνα με τη πηγή [2]:

- 1) Μεταβλητή κατάσταση (S_t): περιλαμβάνει όλες τις απαραίτητες πληροφορίες για να πάρουμε μια απόφαση, δηλαδή πληροφορίες, οι οποίες περιγράφουν, πως το σύστημα εξελίσσεται στο χρόνο
- 2) Μεταβλητή απόφασης (x_t): αποφάσεις, που μας δείχνουν, πως ελέγχουμε τη διαδικασία

3) Συνάρτηση μετάβασης: η συνάρτηση αυτή προσδιορίζει τη μετάβαση του συστήματος από μια παρούσα κατάσταση S_t προς την επομένη κατάσταση S_{t+1} , δηλαδή $S_{t+1} = S^M(S_t, x_t, W_{t+1})$.

4) Συνάρτηση κέρδους: προσδιορίζει τη διάφορα εσόδων - εξόδων σε κάθε κατάσταση

5) Εξωγενείς πληροφορίες: χρησιμοποιούνται στην περίπτωση στοχαστικού (προσεγγιστικού) δυναμικού προγραμματισμού

6) Αντικειμενική συνάρτηση: εδώ με επίσημο τρόπο εκφράζουμε τη μεγιστοποίηση της συνάρτησης κέρδους σε ένα ορισμένο χρονικό ορίζοντα

Επίσης, στα προβλήματα Δυναμικού Προγραμματισμού παρουσιάζονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά σύμφωνα με τη πηγή [7]:

- I. Οι αποφάσεις λαμβάνονται διαδοχικά
- II. Το πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε βήματα (φάσεις) και σε κάθε βήμα απαιτείται να ληφθεί μια "στρατηγική" απόφαση
- III. Κάθε βήμα έχει ένα ορισμένο αριθμό "καταστάσεων", που συνδέονται με αυτό
- IV. Το αποτέλεσμα μιας στρατηγικής απόφασης, που λαμβάνεται σε κάθε βήμα, είναι να μετατρέψει την παρούσα κατάσταση σε μια κατάσταση, που συνδέεται με το επόμενο βήμα
- V. Με κάθε απόφαση συνδέεται ένα κέρδος ή μία ζημία (συνάρτηση κέρδους - reward function)
- VI. Ο αντικειμενικός σκοπός, που εκφράζεται από την αντικειμενική συνάρτηση, είναι να μεγιστοποιηθεί το συνολικό κέρδος ή να ελαχιστοποιηθεί η συνολική ζημία, ή γενικότερα να επιτευχθεί το καλύτερο δυνατό αποτέλεσμα
- VII. Τέλος, ο τρόπος, με τον οποίο βρεθήκαμε σε μια κατάσταση ενός βήματος, είναι άσχετος με τις αποφάσεις, που θα επακολουθήσουν. Δηλαδή οι αποφάσεις, που θα επακολουθήσουν, εξαρτάται μόνο από την κατάσταση, στην οποία βρισκόμαστε και όχι από τον τρόπο με τον οποίο βρεθήκαμε σε αυτή την κατάσταση

Παράδειγμα Δυναμικού Προγραμματισμού

Παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα για να κατανοήσουμε καλύτερα τη λειτουργία και τα χαρακτηριστικά του δυναμικού προγραμματισμού σύμφωνα με τη πηγή [2]:

Το παράδειγμα, που παραθέτουμε, σχετίζεται με την αγορά και πώληση προϊόντος . Τα προϊόντα μπορεί να είναι ποικίλα, όπως μετοχές, επενδυτικά σχέδια, ενεργειακά εμπορεύματα (πετρέλαιο), καταναλωτικά αγαθά. Πολλά προβλήματα τέτοιου είδους έχουν επιπρόσθετες πηγές αβεβαιότητας. Με άλλα λόγια παρουσιάζεται αβεβαιότητα και στη ζήτηση του προϊόντος, αλλά και στη τιμή, που αγοράζουμε και πουλάμε το προϊόν.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα μοντελοποιείται ως εξής:

x_t^p = το προϊόν, που αγοράζεται τη χρονική στιγμή t , για να χρησιμοποιηθεί τη χρονική στιγμή $t+1$

x_t^s = η ποσότητα των προϊόντος, που πωλείται με σκοπό την ικανοποίηση τη ζήτησης κατά το χρονικό διάστημα t

$$x_t = (x_t^p, x_t^s),$$

R_t = Τα διαθέσιμα προϊόντα τη χρονική στιγμή t πριν τη λήψη οποιαδήποτε απόφασης

D_t = η ζήτηση, που πρόκειται να καλυφθεί τη χρονική στιγμή t .

Πρέπει να ισχύει $x_t^s \leq \min \{R_t, D_t\}$, επειδή δεν μπορούμε να πουλήσουμε κάτι, που δεν έχουμε στην διάθεσή μας και, επίσης, περισσότερο από αυτό, που ζητά η αγορά (μερίδιο της αγοράς).

Οι τιμές, που αγοράζουμε και πουλάμε τα προϊόντα, συμβολίζονται ως εξής:

p_t^p = η τιμή αγοράς του προϊόντος τη χρονική στιγμή t

p_t^s = η πώλησης του προϊόντος τη χρονική στιγμή t

$$p_t = (p_t^s, p_t^p).$$

Επιπρόσθετα, λόγω της ύπαρξης εξωγενών πληροφοριών παρουσιάζονται τυχαίες αλλαγές στη διαθέσιμη ποσότητα, στη ζήτηση και στις τιμές. Τα παραπάνω μοντελοποιούνται ως εξής:

\widehat{R}_t = οι εξωγενείς αλλαγές στη διαθέσιμη ποσότητα, που πραγματοποιούνται στο χρονικό διάστημα

\widehat{D}_t = η ζήτηση στο χρονικό διάστημα t ,

\widehat{p}_t^p = αλλαγή στην τιμή αγοράς του προϊόντος κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ $t-1$ και t

\widehat{p}_t^s = αλλαγή στην τιμή πώλησης κατά το χρονικό διάστημα μεταξύ $t-1$ και t ,
 $\widehat{p}_t = (\widehat{p}_t^p, \widehat{p}_t^s)$

Υποθέτουμε ότι οι εξωγενείς αλλαγές στη διαθέσιμη ποσότητα \widehat{R}_t , συμβαίνουν πριν την ικανοποίηση της ζήτησης.

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό W_t , ο οποίος μας παρουσιάζει όλες τις πληροφορίες, που γίνονται γνωστές για πρώτη φορά μεταξύ $t-1$ και t , οπότε στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα έχουμε: $W_t = (\widehat{R}_t, \widehat{D}_t, \widehat{p}_t)$.

Η κατάσταση του συστήματός μας περιγράφεται από τη μεταβλητή $S_t = (R_t, D_t, p_t)$.

Η συνάρτηση μετάβασης από μια κατάσταση στην άλλη δίνεται από τον ακόλουθο τύπο: $S_{t+1} = S^M(S_t, x_t, W_{t+1})$. Επίσης, η εξίσωση, που δημιουργεί τη συνάρτηση μετάβασης στο συγκεκριμένο παράδειγμα θα είναι:

$$R_{t+1} = R_t - x_t^s + x_t^p + \widehat{R}_{t+1},$$

$$D_{t+1} = D_t - x_t^s + \widehat{D}_{t+1},$$

$$p_{t+1}^p = p_t^p + \widehat{p}_{t+1}^p,$$

$$p_{t+1}^s = p_t^s + \widehat{p}_{t+1}^s.$$

Η συνάρτηση κέρδους για μία περίοδο είναι:

$$C_t(S_t, x_t) = \text{ΕΣΟΔΑ} - \text{ΕΞΟΔΑ} = p_t^s x_t^s - p_t^p x_t^p.$$

Οπότε, άμα επιλύσουμε την παρακάτω εξίσωση Bellman, παίρνουμε τις βέλτιστες αποφάσεις για το συγκεκριμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης:

$$V_t(S_t) = \max (C_t(S_t, x_t) + \gamma EV_{t+1}(S_{t+1}^M(S_t, x_t, W_{t+1})) | S_t).$$

Το συγκεκριμένο πρόβλημα αποτελεί κλασικό παράδειγμα και μας επιτρέπει να κατανοήσουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της επίλυσης στοχαστικών προβλημάτων βελτιστοποίησης μέσω του δυναμικού προγραμματισμού.

Για το πλήρη καθορισμό ενός προβλήματος δυναμικού προγραμματισμού απαιτείται ο πλήρης προσδιορισμός τόσο των δεδομένων, όσο και των απαραίτητων συναρτήσεων. Οι πληροφορίες αντλήθηκαν από τη πηγή [2]:

Δεδομένα:

- Την αρχική κατάσταση S_0
- Την διαδικασία παραγωγής της εξωγενούς πληροφορίας W_t . Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε την πληροφορία, που εισέρχεται στο σύστημα και πως αυτή παράγεται.

Συναρτήσεις:

- Η συνάρτηση κέρδους $C(S_t, x_t)$, παρουσιάζεται και στη μορφή αυτή $C(S_t, x_t, W_{t+1})$
- Τη συνάρτηση μετάβασης $S_{t+1} = S^M(S_t, x_t, W_{t+1})$
- Την οικογένεια συναρτήσεων απόφασης $(X^\pi(S))_{\pi \in \Pi}$
- Την αντικειμενική συνάρτηση V_t

3.3 Στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός

Ο στοχαστικός προγραμματισμός είναι μια προσέγγιση για τη μοντελοποίηση των προβλημάτων βελτιστοποίησης, που εμπεριέχουν αβεβαιότητα. Ενώ τα ντετερμινιστικά προβλήματα βελτιστοποίησης διατυπώνονται με γνώστες παραμέτρους, τα προβλήματα, που συναντάμε στην πραγματικότητα σχεδόν πάντα

περιλαμβάνουν ορισμένες παραμέτρους, οι οποίες είναι άγνωστες, όταν πρέπει να ληφθεί μια απόφαση. Όταν οι παράμετροι είναι αβέβαιοι, αλλά υποτίθεται ότι παίρνουν ένα συγκεκριμένο σύνολο δυνατών τιμών, μπορεί να αναζητηθεί μια λύση, που θα είναι εφικτή για όλες τις πιθανές τιμές παραμέτρων και θα βελτιστοποιεί μια δοσμένη αντικειμενική συνάρτηση.

Τα μοντέλα στοχαστικού προγραμματισμού είναι παρόμοια σε μορφή, αλλά προσπαθούν να επωφεληθούν από το γεγονός, ότι οι κατανομές πιθανότητας, που διέπουν τα στοιχεία, είναι γνώστες ή μπορούν να εκτιμηθούν. Συχνά αυτά τα μοντέλα εφαρμόζονται σε περιπτώσεις, όπου οι αποφάσεις λαμβάνονται ουσιαστικά κατ' επανάληψη κάτω από τις ίδιες συνθήκες και ο στόχος είναι η λήψη μιας απόφασης, που θα έχει καλή απόδοση κατά μέσο ορό.

Ο στοχαστικός δυναμικός προγραμματισμός με τη βοήθεια του μαθηματικού προγραμματισμού (γραμμικός, μη γραμμικός, ακέραιος προγραμματισμός) μπορεί να επιλύσει πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης. Υπάρχει, όμως, μία μεγάλη κατηγορία προβλημάτων, όπου οι καταστάσεις τους είναι συνεχείς ή η μεταβλητή κατάστασης είναι ένα διάνυσμα, που παράγει ένα χώρο κατάστασης, ο οποίος είναι πολύ μεγάλος για να απαριθμηθεί. Επιπρόσθετα, ο υπολογισμός της μήτρας μετάβασης $p_t(S_{t+1}|S_t, x_t)$ μπορεί να είναι αρκετά δύσκολος ή ακόμα και αδύνατος να πραγματοποιηθεί μερικές φορές.

Όλες αυτές οι δυσκολίες μπορούν να αντιμετωπιστούν με τη θεωρία του Markov, η οποία αποτελεί μία διαδικασία λήψης βέλτιστων αποφάσεων σε τέτοιου είδους προβλήματα. Επίσης, η θεωρία Markov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση προβλημάτων με μικρό χώρο κατάστασης και απόφασης καθώς, επίσης, και για την απλοποίηση δύσκολων και πολύπλοκων αλγορίθμων.

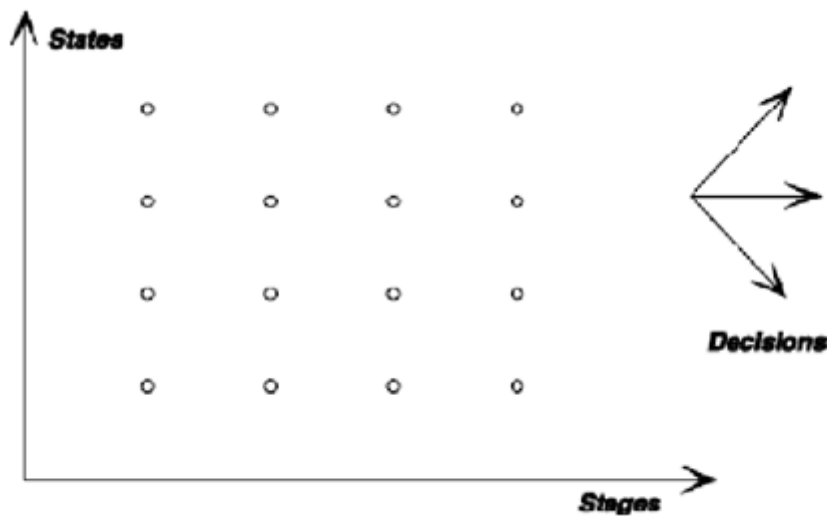
Σε πολλά στοχαστικά προβλήματα πρέπει να επιλυθεί η αντικειμενική συνάρτηση: $\max_{\pi} E\{\sum_{t=0}^T \gamma^t C_t^{\pi}(S_t, X_t^{\pi}(S_t))\}$, για να πάρουμε τη βέλτιστη απόφαση. Αυτό είναι, όμως, υπολογιστικά δύσκολο να πραγματοποιηθεί, αλλά αποτελεί τη βάση για το προσδιορισμό των ιδιοτήτων των βέλτιστων λύσεων. [2]

3.3.1 Αρχή Βελτιστοποίησης της εξίσωσης BELLMAN

Τα προβλήματα βελτιστοποίησης μπορεί να είναι πολλών τύπων. Οι διαφορές τους φαίνονται στον στόχο, δηλαδή στην ελαχιστοποίηση ή τη μεγιστοποίηση, στους περιορισμούς (δηλαδή ανισότητες ή ισότητες και ελεύθερες ή μη αρνητικές μεταβλητές) και στις μαθηματικές ιδιότητες των συναρτήσεων, που σχετίζονται με την αντικειμενική συνάρτηση ή τους περιορισμούς. Έχουμε δει γραμμικές συναρτήσεις, μη γραμμικές και ακόμη ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Παρά τις όποιες διαφορές τους, όλα αυτά τα προβλήματα μπορούν να παρουσιαστούν όπως παρακάτω:

$$\max\{F(x_1, \dots, x_n) | x \in X\}$$

Εδώ το X είναι το διατεταγμένο εφικτό σύνολο αποφάσεων, βάσει των οποίων προσπαθούμε να μεγιστοποιήσουμε ή κάποιες φορές να ελαχιστοποιήσουμε τη δοθείσα αντικειμενική συνάρτηση F . Αυτή η γενική τοποθέτηση καλύπτει και μία κλάση προβλημάτων ειδικής απόφασης. Φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Σχήμα 3.1 Δυναμικό σύστημα τεσσάρων σταδίων [6]

Θεωρούμε ένα σύστημα, που ελέγχεται σε πεπερασμένα πολλά στάδια. Συχνά τα στάδια είναι μόνο σημεία στο χρόνο, γι αυτό και χρησιμοποιείται ο όρος δυναμικά συστήματα. Το παράδειγμα στο προηγούμενο σχήμα έχει τέσσερα στάδια. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι υπάρχουν τέσσερις στήλες. Υποθέτουμε ότι σε κάθε στάδιο το σύστημα μπορεί να είναι σε μία από πεπερασμένες πολλές καταστάσεις. Στο σχήμα υπάρχουν τέσσερις πιθανές καταστάσεις σε κάθε στάδιο, που αναπαριστώνται από τις τέσσερις τελείες σε κάθε στήλη. Επίσης, σε κάθε στάδιο (εκτός ίσως από το τελευταίο), πρέπει να ληφθεί μία απόφαση, η οποία θα έχει

επιρροή στην κατάσταση του συστήματος στο επόμενο στάδιο. Μαζί με την απόφαση έχουμε και ένα άμεσο αποτέλεσμα (ή άμεσο κόστος). Τα τρία βέλη, που φαίνονται στο σχήμα (στο δεξί μέρος) υποδεικνύουν ότι σε αυτό το παράδειγμα υπάρχουν τρεις πιθανές αποφάσεις :

- να μεταβούμε σε χαμηλότερη κατάσταση στο επόμενο στάδιο
- να παραμείνουμε στην ίδια κατάσταση και
- να μεταβούμε σε υψηλότερη κατάσταση

Φυσικά θεωρούμε ότι αν βρισκόμαστε στην υψηλότερη ή στη χαμηλότερη δυνατή κατάσταση, τότε μόνο δύο αποφάσεις είναι πιθανές. Δοθείσης της αρχικής κατάστασης του συστήματος, σκοπός μας είναι να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε κάποια συνάρτηση, που δίνεται από τα άμεσα αποτελέσματα για όλα τα στάδια και τις καταστάσεις, όπου το σύστημα διέρχεται, ως ένα αποτέλεσμα των αποφάσεών μας. Οι πληροφορίες αντλήθηκαν από τη πηγή [6].

Η γενική τυπική περιγραφή ενός προβλήματος τέτοιου τύπου είναι η ακόλουθη σύμφωνα με τη πηγή [2]:

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t))) \\ &= C_t(S_t, x_t^*(S_t)) + \gamma V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t^*(S_t))) \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι έχουμε μία συνάρτηση $V_{t+1}(S_{t+1})$, η οποία μας δίνει την τιμή του να βρισκόμαστε στην κατάσταση S_{t+1} (στην ουσία μας πληροφορεί για την τιμή μετάβασης από την κατάσταση S_t στην S_{t+1}). Μπορούμε να συγκρίνουμε κάθε πιθανή απόφαση x_t και να επιλέξουμε την απόφαση x_t , που έχει τα μεγαλύτερα κέρδη $C_t(S_t, x_t)$ για μία περίοδο, λαμβάνοντας υπ' όψιν την αξία του να βρεθούμε στην κατάσταση $S_{t+1} = S^M(S_t, x_t)$ συμβολίζοντας την με $V_{t+1}(S_{t+1})$. Επειδή η αξία αυτή αναπαριστά τα χρήματα, που λαμβάνουμε σε μία περίοδο στο μέλλον, ίσως χρειαστεί η ανάγκη αναγωγής χρησιμοποιώντας τον παράγοντα γ . Επομένως, επιλύουμε την ακόλουθη σχέση: $x_t^*(S_t) = \operatorname{argmax}_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma V_{t+1}(S_{t+1}))$,

Όπου το "argmax" μας δηλώνει ότι πρέπει να επιλέξουμε την απόφαση x_t , που να μεγιστοποιεί την έκφραση στην παρένθεση.

Η αξία του να είμαστε στην κατάσταση S_t είναι η αξία του να επιλέξουμε την βέλτιστη απόφαση $x_t^*(S_t)$, η οποία είναι:

$$\begin{aligned}
 V_t(S_t) &= \max_{x_t \in X_t} \left(C_t(S_t, x_t) + \gamma V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t)) \right) \\
 &= C_t(S_t, x_t^*(S_t)) + \gamma V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t^*(S_t))).
 \end{aligned}$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι η εξίσωση βελτιστοποίησης για ντετερμινιστικά προβλήματα. Η εξίσωση αυτή μοντελοποιείται ως εξής:

t : τα στάδια, με $t=1, \dots, T$,

S_t : η κατάσταση στο στάδιο t ,

x_t : η απόφαση, που λαμβάνεται στο στάδιο t

$S_{t+1} = S^M(S_t, x_t)$: η μετάβαση του συστήματος από την κατάσταση S_t και η απόφαση, που λαμβάνεται στο στάδιο t στην κατάσταση στο επόμενο στάδιο S_{t+1}

$C_t(S_t, x_t)$: το άμεσο κόστος, αν στο στάδιο t το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση S_t και έχει ληφθεί η απόφαση x_t

$V_t(S_t)$: η ολική αντικειμενική συνάρτηση

γ : discount factor (ο παράγοντας με τον οποίο μπορείς να κάνεις αναγωγή)

Στη περίπτωση των στοχαστικών προβλημάτων, ένας νέος παράγοντας υπεισέρχεται στη μοντελοποίηση της εξίσωσης Bellman. Πρέπει να μοντελοποιήσουμε το γεγονός, ότι νέα πληροφορία γίνεται γνωστή και συγχρόνως διαθέσιμη, αφού πάρουμε την απόφαση x_t . Αυτή η πληροφορία μπορεί να αποτελέσει αβεβαιότητα στη συνάρτηση κέρδους και στο καθορισμό της επόμενης κατάστασης S_{t+1} .

Ένα στοχαστικό παράδειγμα, που θα μας βοηθήσει να κατανοήσουμε το ρόλο της νέας πληροφορίας στην εξίσωση Bellman, είναι το ακόλουθο σύμφωνα με τη πηγή [2]:

Θεωρούμε το πρόβλημα διαχείρισης αποθεμάτων πετρελαίου σε ένα διυλιστήριο. Ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή κατάστασης S_t είναι το απόθεμα σε πετρέλαιο (χιλιάδες βαρέλια) τη χρονική στιγμή t (πρέπει ο S_t να είναι ακέραιος αριθμός). Η μεταβλητή απόφασης x_t είναι η ποσότητα σε πετρέλαιο, που παραγγέλνουμε τη χρονική στιγμή t , η οποία γίνεται διαθέσιμη προς χρήση μεταξύ t και $t+1$. Επιπρόσθετα, η μεταβλητή \hat{D}_{t+1} είναι η ζήτηση σε πετρέλαιο μεταξύ t και $t+1$.

Η ακόλουθη συνάρτηση απλής διαχείρισης αποθεμάτων πετρελαίου αποτελεί τη συνάρτηση μετάβασης: $S_{t+1}(S_t, x_t) = \max \{0, S_t + x_t - \widehat{D}_{t+1}\}$.

Ο συμβολισμός $S_{t+1}(S_t, x_t)$ μας δείχνει την εξάρτηση της S_{t+1} με τις S_t και x_t . Η μεταβλητή \widehat{D}_{t+1} είναι τυχαία τη χρονική στιγμή t . Όταν πρέπει να πάρουμε την απόφαση x_t , δεν ξέρουμε τη κατάσταση S_{t+1} . Αυτή η δυσκολία αντιμετωπίζεται, αν ξέρουμε την κατανομή πιθανότητας της ζήτησης σε πετρέλαιο. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μπορούμε να υπολογίσουμε τη πιθανότητα, ώστε η S_{t+1} να πάρει μία συγκεκριμένη τιμή. Οπότε, μπορούμε να βρούμε την κατανομή πιθανότητας για την κατάσταση S_{t+1} ως εξής:

$$Prob(S_{t+1} = s') = \begin{cases} 0 & \text{Αν } s' > S_t + x_t \\ P^d(S_t + x_t - s') & \text{Αν } 0 < s' \leq S_t + x_t \\ \sum_{d=S_t+x_t}^{\infty} P^d(d) & \text{Αν } s' = 0 \end{cases}$$

Άρα η εξίσωση Bellman, που χρησιμοποιήθηκε προηγουμένως για την επίλυση ντετερμινιστικών προβλημάτων, γίνεται ως εξής:

$$V_t(S_t) = \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma \sum_{s' \in S} P(S_{t+1} = s' | S_t, x_t) V_{t+1}(s')),$$

η οποία μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$V_t(S_t) = \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma E\{V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t)) | S_t\}), \text{ όπου το } E, \text{ εκφράζει την αναμενόμενη τιμή, αντί να αθροίσουμε τις πιθανότητες. [2]}$$

3.4 Προσεγγιστικός Δυναμικός Προγραμματισμός

Μπορούμε να επιλύσουμε πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης του τύπου $\max_{\pi} E\{\sum_{t=0}^T \gamma^t C_t^{\pi}(S_t, X_t^{\pi}(S_t))\}$ (1) υπολογίζοντας με αναδρομή τη συνάρτηση Bellman: $V_t(S_t) = \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma E\{V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t)) | S_t\})$ (2) προς τα πίσω στο χρόνο σύμφωνα με τη πηγή [2].

Όμως η σχέση (1) αδυνατεί να επιλύσει μερικές φορές ακόμη και μικρά προβλήματα. Η Bellman συνάρτηση (2) μας δίνει ένα τρόπο επίλυσης τέτοιων προβλημάτων βελτιστοποίησης. Δυστυχώς όμως και αυτή η εξίσωση αδυνατεί πολλές φορές να επιλύσει αρκετές πολύπλοκες εφαρμογές.

Ο προσεγγιστικός δυναμικός προγραμματισμός, αντιθέτως, διαθέτει ένα σύνολο από στρατηγικές επίλυσης για δύσκολα και μεγάλα προβλήματα βελτιστοποίησης, αλλά αυτή δεν είναι η μόνη εφαρμογή του. Ακόμα και μικρά προβλήματα μπορούν να επιλύονται αρκετά δύσκολα λόγω της έλλειψης κατάλληλου μοντέλου απόκτησης πληροφοριών ή λόγω της απουσίας της συνάρτησης μετάβασης. Οπότε, ο προσεγγιστικός δυναμικός προγραμματισμός μπορεί να επιλύσει και τέτοιου είδους προβλήματα.

3.4.1 Η Βασική Ιδέα

Η λειτουργία του προσεγγιστικού δυναμικού προγραμματισμού βασίζεται σε μία αλγοριθμική διαδικασία σύμφωνα με τη πηγή [2], η οποία ονομάζεται forward through time (προς τα εμπρός στο χρόνο). Εξάλλου ο προσεγγιστικός δυναμικός προγραμματισμός αποκαλείται επίσης και forward dynamic programming. Εάν θέλαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα, που αναφερθήκαμε παραπάνω με τη χρήση του κλασσικού δυναμικού προγραμματισμού, θα έπρεπε να βρούμε τη τιμή της $V_t(S_t)$:

$$\begin{aligned} V_t(S_t) &= \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma E\{V_{t+1}(S_{t+1}(S_t, x_t)) | S_t\}) \\ &= \max_{x_t \in X_t} (C_t(S_t, x_t) + \gamma \sum_{s' \in S} P(S_{t+1} = s' | S_t, x_t) V_{t+1}(s')). \end{aligned}$$

για κάθε τιμή της μεταβλητής κατάστασης S_t . Το πρόβλημα βελτιστοποίησης μας αφορά την επιλογή της βέλτιστης απόφασης x_t . Όμως, το συγκεκριμένο πρόβλημα δεν επιλύεται με τον κλασσικό δυναμικό προγραμματισμό, επειδή όλες οι πιθανές καταστάσεις πρέπει να υπολογιστούν.

Χρησιμοποιώντας, όμως, το προσεγγιστικό δυναμικό προγραμματισμό τέτοιου είδους προβλήματα επιλύονται αρκετά πιο εύκολα. Με το προσεγγιστικό δυναμικό προγραμματισμό πηγαίνουμε προς τα εμπρός στο χρόνο. Πρέπει όμως να ξεπεράσουμε δύο δυσκολίες. Η πρώτη είναι ότι χρειαζόμαστε ένα τρόπο να παράγουμε τυχαίες πληροφορίες, δηλαδή με άλλα λόγια θέλουμε να έχουμε ένα δείγμα πληροφοριών με το τι θα συμβεί στο επόμενο χρονικό διάστημα. Η δεύτερη δυσκολία έγκειται ότι χρειαζόμαστε ένα τρόπο να πάρουμε αποφάσεις. Πρώτα, θα αναφερθούμε στο πρόβλημα λήψης αποφάσεων και έπειτα στο πρόβλημα προσομοίωσης τυχαίας πληροφορίας.

Στο στοχαστικό δυναμικό προγραμματισμό πηγαίναμε πίσω στο χρόνο (backward through time), υπολογίζοντας την αξία της $V_t(S_t)$, η οποία παρήγαγε βέλτιστες αποφάσεις x_t . Στην περίπτωση του προσεγγιστικού δυναμικού προγραμματισμού πηγαίνουμε προς τα εμπρός στο χρόνο (forward through time). Οπότε, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία της $V_t(S_t)$ και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να οδηγηθούμε σε προσέγγιση για να πάρουμε βέλτιστες αποφάσεις.

Έστω $\bar{V}_t(S_t)$ είναι μία προσέγγιση της $V_t(S_t)$ (αντικειμενική συνάρτηση) για κάθε πιθανή κατάσταση S_t . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε οποιαδήποτε προσέγγιση θέλουμε, προσέχοντας όμως να αποφύγουμε την εισαγωγή σφαλμάτων. Φυσικά η πρόκληση είναι να αναζητήσουμε προσεγγίσεις, οι οποίες είναι καλές για το εκάστοτε πρόβλημα, που θέλουμε να επιλύσουμε μέσω του προσεγγιστικού δυναμικού προγραμματισμού.

Ο προσεγγιστικός δυναμικός προγραμματισμός λειτουργεί υπολογίζοντας την προσέγγιση $\bar{V}_t(S_t)$ επαναληπτικά. Θεωρούμε ότι η αρχική προσέγγιση \bar{V}_t^0 για όλα τα t είναι μηδενική ($\bar{V}_t^0 = 0$). Έστω ότι \bar{V}_t^{n-1} η προσέγγιση της V_t^{n-1} μετά από $(n-1)$ επαναλήψεις. Προσδιορίζουμε την απόφαση x_0 κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, όπου βρισκόμαστε στην κατάσταση S_0 επιλύοντας τη συνάρτηση:

$$\begin{aligned} x_0 &= \operatorname{argmax}_{x \in X_0} (C(S_0, x) + \gamma E\{\bar{V}_1(S_1) | S_0\}) \\ &= \operatorname{argmax}_{x \in X_0} (C(S_0, x) + \gamma \sum_{s' \in S} P_0(s' | S_0, x) \bar{V}_1(s')). \end{aligned}$$

Όπου η απόφαση x_0 είναι η τιμή της x , που μεγιστοποιεί τη παραπάνω εξίσωση, και $P_0(s' | S_0, x)$ είναι η μήτρα μετάβασης (δοσμένη).

Μετάπειτα προχωράμε προς τα εμπρός στο χρόνο από την κατάσταση S_0 στην κατάσταση S_1 . Για να υπολογίσουμε τη προσεγγιστική τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης στην κατάσταση S_1 , θα χρησιμοποιήσουμε την απόφαση x_0 , που υπολογίσαμε προηγουμένως. Επιπρόσθετα, χρειαζόμαστε να ξέρουμε τη πληροφορία, η οποία γίνεται γνωστή στο διάστημα ανάμεσα στο $t=0$ και $t=1$. Τη χρονική στιγμή $t=0$, αυτή η πληροφορία είναι άγνωστη και συνεπώς τυχαία. Η στρατηγική μας θα είναι να χρησιμοποιήσουμε μία τεχνική, η οποία θα παράγει τυχαίες πληροφορίες. Αυτή η τεχνική προσομοίωσης ονομάζεται Monte Carlo simulation.

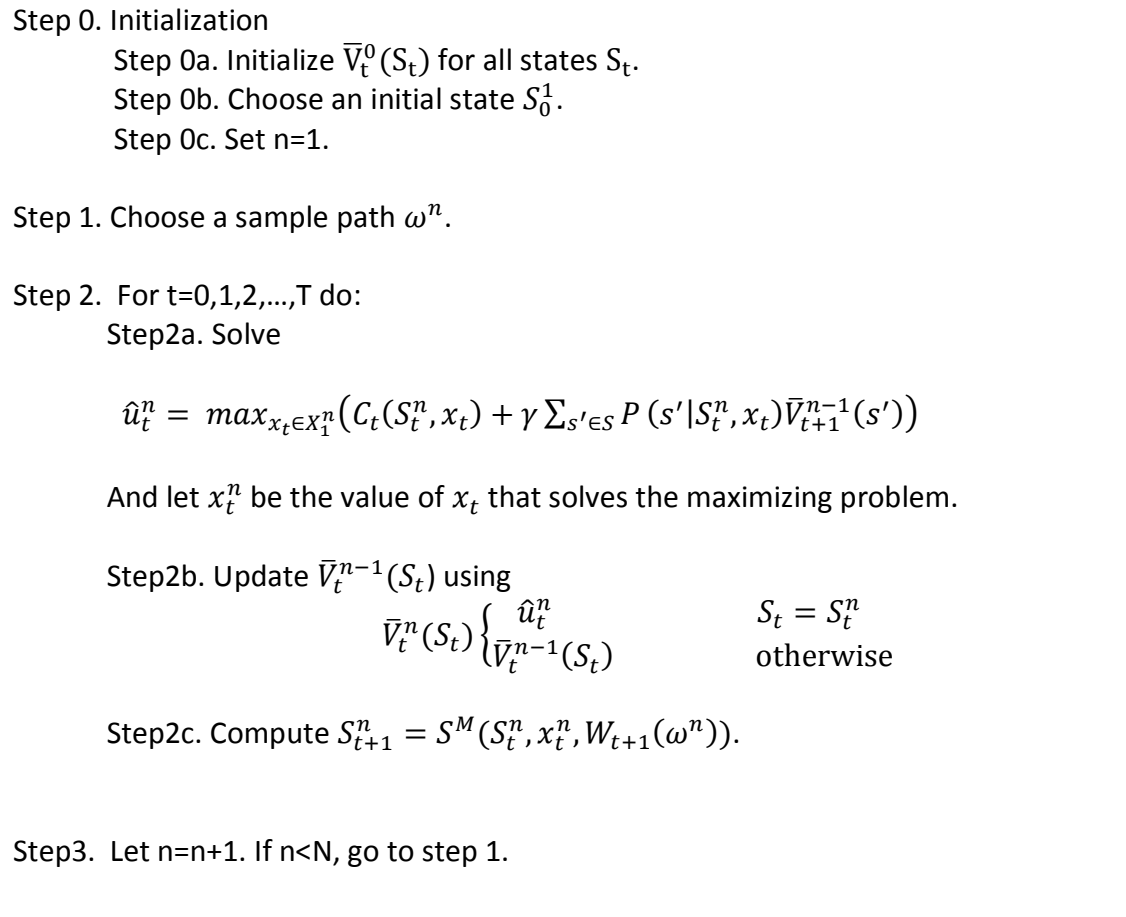
Ένα παράδειγμα αυτής της τεχνικής προσομοίωσης είναι το ακόλουθο: Έστω η τιμή για ένα προϊόν κυμαίνεται μεταξύ 60 και 70 μονάδες. Σχεδόν όλα τα σύγχρονα λογισμικά διαθέτουν μία συνάρτηση, η οποία παράγει αριθμούς, που κυμαίνονται μεταξύ του 0 και 1. Δηλαδή η συνάρτηση $U=\text{rand}()$ παράγει μία τιμή για την U , η οποία βρίσκεται ανάμεσα στο 0 και 1. Οπότε, μπορούμε να παράγουμε μία τυχαία τιμή χρησιμοποιώντας την εξίσωση $P_t=60+10*U$. Αυτή η τεχνική παραγωγής τυχαίας πληροφορίας δεν είναι η μοναδική, αλλά είναι μία από τις πιο δημοφιλείς τεχνικές προσομοίωσης. [2]

3.4.2 Βασικός Αλγόριθμος Προσεγγιστικού Δυναμικού Προγραμματισμού

Αφού τώρα έχουμε το τυχαίο δείγμα πληροφορίας, μπορούμε να υπολογίσουμε την επόμενη κατάσταση S_1 . Αυτό το πετυχαίνουμε θεωρώντας ότι ξέρουμε τη συνάρτηση μετάβασης: $S_{t+1} = S^M(S_t, x_t, W_{t+1})$, όπου S_t η μεταβλητή κατάστασης, x_t η μεταβλητή απόφασης και W_{t+1} η τυχαία πληροφορία, η οποία είναι γνωστή ανάμεσα στο t και $t+1$. Οπότε, αφού έχουμε τα \bar{V}_t για όλα τα t , επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία λήψης απόφασης επιλύοντας την εξίσωση:

$$x_1 = \underset{x \in X_1}{\text{argmax}} (C(S_1, x) + \gamma \sum_{s' \in S} P_1(s' | S_1, x) \bar{V}_2(s')).$$

Αφού υπολογίσουμε το x_1 , παράγουμε εκ νέου καινούργιες πληροφορίες, υπολογίζουμε το S_2 και έτσι η αλγοριθμική διαδικασία επαναλαμβάνεται. Οπότε τη χρονική στιγμή t θα βρισκόμαστε στην κατάσταση S_t^n και θα πάρουμε την απόφαση x_t^n χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης \bar{V}_t^{n-1} . Η αντικειμενική συνάρτηση έχει δείκτη $(n-1)$, επειδή υπολογίσθηκε χρησιμοποιώντας πληροφορίες από την επανάληψη $(n-1)$. Αφού βρούμε το x_t^n , θα παρατηρήσουμε τις πληροφορίες $W_{t+1}(\omega^n)$, οι οποίες περιέχονται στο S_{t+1}^n . Όλη αυτή η διαδικασία περιγράφεται από το βασικό αλγόριθμο του προσεγγιστικού δυναμικού προγραμματισμού, που παρουσιάζεται παρακάτω σύμφωνα με τη πηγή [2]:



Σχήμα 3.2 Βασικός αλγόριθμος ADP Προσεγγιστικού Δυναμικού [2]

Καταληκτικά, ο στοχαστικός Δυναμικός Προγραμματισμός προσδιορίζει βέλτιστες αποφάσεις για δεδομένα μονοπάτια αβέβαιων τιμών. Αν θελήσουμε να αποτυπώσουμε τώρα την αβεβαιότητα στα μονοπάτια, πρέπει να πάρουμε πάρα πολλά μονοπάτια. Αυτό το πράγμα ουσιαστικά δημιουργεί δέντρα, που είναι πολύ δύσκολο να τα διατρέξεις. Οπότε, έρχεται ο προσεγγιστικός Δυναμικός Προγραμματισμός και εφαρμόζει την ακόλουθη ιδέα: η αντικειμενική συνάρτηση (value function), που χρησιμοποιείται και από το στοχαστικό Δυναμικό Προγραμματισμό, προσεγγίζεται ως μία συνάρτηση. Εμείς έχουμε υιοθετήσει την ιδέα, ότι μπορούμε να τη προσεγγίζουμε ως μία συνάρτηση. Όταν θα την έχουμε προσεγγίσει ως μία συνάρτηση, έπειτα πρέπει να βρούμε ένα μηχανισμό για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους της. Τέτοια εργαλεία Δυναμικού Προγραμματισμού είναι η μέθοδος Least Squares Policy Iteration και η Least Squares Monte Carlo, με τη διαφορά όμως ότι η μέθοδος Least Squares Monte Carlo μπορεί να προσεγγίζει την αντικειμενική συνάρτηση με γραμμικά τετράγωνα χωρίς να σου δίνει τελικά τύπο με τα στοιχεία, ενώ η μέθοδος Least Squares Policy Iteration εκτιμά πραγματικά παραμέτρους της αντικειμενικής συνάρτησης.

4. Εργαλεία Δυναμικού Προγραμματισμού και η λειτουργία τους

4.1 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων MONTE CARLO

Σε αυτή τη θεματική ενότητα θα αναφερθούμε στον αλγόριθμο Least-Squares Monte Carlo (LSM) για την αποτίμηση προθεσμιακών συμβολαίων Αμερικάνικου τύπου σύμφωνα με τη πηγή [4]. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται ευρέως στην οικονομική βιομηχανία και αποτελεί ένα από τα πιο βασικά εργαλεία για την αποτίμηση συμβολαίων τέτοιου τύπου.

Με τον όρο Options εννοούμε προθεσμιακά συμβόλαια, τα οποία δίνουν το δικαίωμα στον κάτοχο - επενδυτή, αλλά όχι την υποχρέωση, να αγοράσει ή να πουλήσει ένα χρηματοδοτικό μέσο με μία προσδιορισμένη τιμή σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Με τον όρο Call Options εννοούμε τη δυνατότητα, που δίνεται στον κάτοχο, να αγοράσει ένα χρηματοδοτικό μέσο (μετοχές, εμπορεύματα, συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, νομίσματα, κ.α.), ενώ με τον όρο Put Options εννοούμε τη δυνατότητα του επενδυτή να πουλήσει.

Η αποτίμηση και η βέλτιστη άσκηση αυτών των προθεσμιακών συμβολαίων είναι ένα από τα πιο σημαντικά πρακτικά προβλήματα στην αποτίμηση συμβολαίων. Αυτοί οι τύποι συμβολαίων εμφανίζονται σε πολλούς τομείς των χρηματο - πιστωτικών αγορών, όπως κεφάλαια, εμπορεύματα, συναλλάγματα, ασφάλεια, ενέργεια, δάνεια, ακίνητα, αναδυόμενες αγορές.

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο Αμερικάνικου τύπου μπορεί να τεθεί σε ισχύ σε οποιαδήποτε στιγμή κατά τη διάρκεια της προθεσμίας του. Το τι κερδίζει ο επενδυτής από αυτό το συμβόλαιο, εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την πολιτική, που ακολουθείται. Στη λήξη της προθεσμίας του η βέλτιστη στρατηγική είναι απλώς να τεθεί σε ισχύ το συμβόλαιο, εάν αυτό έχει αξία, αλλιώς το αφήνεις να λήξει. Πριν λήξει όμως, η βέλτιστη πολιτική είναι να εξετάσει ο επενδυτής την τιμή του χρηματοδοτικού μέσου, να συγκρίνει μετέπειτα την αξία άμεσης ισχύς του προθεσμιακού συμβολαίου με την προσδοκώμενη - αναμενόμενη αξία αναμονής και τέλος, να προσδιορίσει, αν η άμεση ισχύς του συμβολαίου είναι η πιο κερδοφόρα πολιτική.

Το κλειδί της βέλτιστης πολιτικής είναι ο προσδιορισμός της προσδοκώμενης αξίας αναμονής. Δηλαδή, με άλλα λόγια το τι κερδίζει ο επενδυτής, εάν ακολουθήσει πολιτική αναμονής.

Οι Monte Carlo αλγόριθμοι για την αποτίμηση των προθεσμιακών συμβολαίων βασίζονται σε μία πολύ γνωστή τεχνική υλοποίησης Monte Carlo, η οποία εφαρμόζεται αρκετά εύκολα. Οι τεχνικές Monte Carlo μπορούν να είναι αρκετά αποτελεσματικές για προβλήματα αποτίμησης συμβολαίων μεγάλων διαστάσεων, ενώ ο βαθμός σύγκλισής τους δεν εξαρτάται από τον αριθμό των διαστάσεων. Αυτά τα πλεονεκτήματα είναι τόσο θαυμάσια, ώστε οι αλγόριθμοι Monte Carlo να έχουν υιοθετηθεί παγκοσμίως στην οικονομική βιομηχανία ως μέθοδος αποτίμησης ενός προθεσμιακού συμβολαίου.

Υπάρχουν δύο βασικές προκλήσεις στην εφαρμογή των μεθόδων Monte Carlo. Η πρώτη είναι η δημιουργία του αλγορίθμου, ο οποίος θα μπορεί να εκτιμήσει αποτελεσματικά, τότε συμφέρει τον επενδυτή να θέσει σε ισχύ το συμβόλαιο. Η δεύτερη πρόκληση είναι η κατασκευή αλγορίθμων, των οποίων η παρουσία μπορεί να βελτιωθεί μέσω κλιμάκωσης σε πολλαπλούς επεξεργαστές. Το βασικό ζήτημα είναι, ότι οι προσομοιώσεις παράγουν μεταβλητές κατάστασης προς τα εμπρός στο χρόνο, ενώ ο προσδιορισμός των βέλτιστων πολιτικών (exercise or hold the option) απαιτεί μεθόδους προς τα πίσω (backward) δυναμικού προγραμματισμού.

Τώρα θα αναφερθούμε λεπτομερώς στον αλγόριθμο της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων Monte Carlo (Least Squares Monte Carlo). Η μέθοδος αυτή μπορεί να χωριστεί σε τρεις φάσεις: 1) Παραγωγή σεναρίων, 2) Προσαρμογή, 3) Αποτίμηση.

Η μέθοδος LSM λειτουργεί παράγοντας σενάρια προς τα εμπρός μέσω της τεχνικής προσομοίωσης Monte Carlo και στη συνέχεια εκτελεί επαναλήψεις (backwards style), όπου σε κάθε βήμα πραγματοποιείται μία προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης αναμονής. Αυτός ο αλγόριθμος είναι απλός στην εφαρμογή του, λόγω της ύπαρξης της τεχνικής Monte Carlo. Επιπρόσθετα, ένα άλλο πλεονέκτημα του αλγορίθμου είναι ότι οι συναρτήσεις αναμονής δημιουργούνται ρητά και ο αλγόριθμός είναι εύκολο να προσαρμοστεί στις υπάρχουσες τιμές των αγορών.

Ας υποθέσουμε ότι ω είναι ένα σενάριο, το οποίο σχετίζεται με τις τιμές ενός χρηματοδοτικού μέσου (προϊόν), παράγεται μέσω της τεχνικής προσομοίωσης Monte

Carlo. Επίσης, οι χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_τ , όπου $0 < t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_\tau = T$ αποτελούν τις χρονικές στιγμές, όπου μπορεί ο επενδυτής να θέσει σε ισχύ το προθεσμιακό συμβόλαιο και $C(\omega, s; t, T)$ αποτελεί σενάριο ταμειακών ροών, το οποίο παράγεται υποθέτοντας ότι το συμβόλαιο δεν τίθεται σε ισχύ τη χρονική στιγμή t ή πριν από αυτή και ο επενδυτής αναμένει.

Στη λήξη της προθεσμίας του συμβολαίου ο επενδυτής ακολουθεί πολιτική ισχύς του, εάν αυτό έχει αξία. Τη χρονική στιγμή t_k , πριν τη λήξη της προθεσμίας, ο επενδυτής πρέπει να αποφασίσει, εάν θέσει σε ισχύ το προθεσμιακό συμβόλαιο σε αυτό το σημείο ή θα συνεχίσει να αναμένει και θα αποφασίσει ξανά στο επόμενο χρονικό σημείο. Ενώ ο επενδυτής γνωρίζει τα χρήματα, που θα αποκομίσει από την άμεση ισχύ του συμβολαίου, δεν γνωρίζει τις προσδοκώμενες ταμειακές ροές από την αναμονή.

Σύμφωνα με τη θεωρία αποτίμησης, έστω $F(\omega; t_k)$ η αξία αναμονής τη χρονική στιγμή t_k για το σενάριο ω δίνεται από τον τύπο:

$$F(\omega; t_k) = E_Q \left[\sum_{j=k+1}^t \exp^{-r(\omega, t_j; t_k)} C(\omega, t_j; t_k, T) / F_{tk} \right]$$

Όπου $r(\omega, t_j; t_k)$ είναι το επιτόκιο αναγωγής στη χρονική περίοδο t_k και Q μέτρο αποτίμησης ουδετέρου κινδύνου.

Ο λόγος, που χρησιμοποιούμε τον αλγόριθμο LSM, είναι ότι αποσκοπούμε σε μία καλή εκτίμηση - αποτίμηση της παραπάνω συνάρτησης αναμονής. Ας υποθέσουμε ότι $\hat{F}(\omega, t_k)$ αποτελεί την εκτίμηση. Όταν γίνεται αυτή η εκτίμηση, μπορούμε να αποφασίσουμε, εάν είναι βέλτιστη πολιτική το να θέσεις σε ισχύ το προθεσμιακό συμβόλαιο ή το να αναμένεις, συγκρίνοντας την αξία άμεσης ισχύς με την εκτίμηση $\hat{F}(\omega, t_k)$.

Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται μέχρι οι αποφάσεις για ισχύ του συμβολαίου έχουν προσδιορισθεί για κάθε σενάριο. Μόλις η στρατηγική (exercise the Option) έχει εκτιμηθεί, η αποτίμηση προθεσμιακών συμβολαίων Αμερικάνικου τύπου είναι απλή. Σενάρια τιμών ενός χρηματοδοτικού μέσου παράγονται μέσω της τεχνικής Monte Carlo. Για κάθε σενάριο το βέλτιστο σημείο (the optimal stopping point) προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας συναρτήσεις, που παράγουν εκτιμήσεις. Σύμφωνα

με τη θεωρία αποτίμησης προθεσμιακών συμβολαίων Αμερικάνικου τύπου μία βέλτιστη πολιτική ισχύς του συμβολαίου θα παράγει ακριβώς μία χρηματοροπή για κάθε σενάριο.

4.1.1 Least-Squares MONTE CARLO Αλγόριθμος

Παρατίθεται ο ακόλουθος αλγόριθμος, ο οποίος είναι LSM αλγόριθμος για αποτίμηση προθεσμιακών συμβολαίων Αμερικάνικου τύπου σύμφωνα με τη πηγή [4]:

Algorithm 1: LSM Algorithm for pricing

Input: Strike price K , riskless interest rate, number of timesteps τ , number of paths n

Output: Price of American Option

Generate n paths each of τ timesteps, using Monte Carlo simulations from Q

For $j \leftarrow \tau - 1$ to 1 **do**

For every path ω **do**

 Find estimate $\hat{F}(\omega, t_j)$ of the continuation value at t_j for ω

 Exercise value at t_j for path ω is $E(\omega, t_j) = \max(K - S(t_j, \omega), 0)$ for put option,

 Where $S(t_j, \omega)$ is simulated stock price value at time t_j along path ω

If $\hat{F}(\omega, t_j) \leq E(\omega, t_j)$ **then**

 Optimum strategy at t_j is to exercise then

Else

 Optimum strategy at t_j is that of t_{j+1}

End

End

End

Generate new paths, each of τ timesteps using Monte Carlo simulations

Find optimum stopping points for these paths using estimator functions of the continuation value obtained above

Discount the resulting cash flow from the stopping time to time zero.

Return average starting price of option over all paths generated.

Σχήμα 4.1 LSM Αλγόριθμος για την αποτίμηση προθεσμιακών συμβολαίων Αμερικάνικου τύπου [4]

Προσαρμογή στη μέθοδο Least - Squares Monte Carlo

Το κλειδί για τη προσέγγιση της μεθόδου LSM είναι η χρήση ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των προσδοκώμενων κερδών λόγω της αναμονής σύμφωνα με τη πηγή [4]. Σε αυτή τη φάση (calibration), η συνάρτηση αναμονής $F(\omega; t_k)$ προσεγγίζεται ως γραμμικός συνδυασμός ενός συνόλου βασικών συναρτήσεων F_{tk} . Οπότε, η συνάρτηση αναμονής παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$F(\omega, t_j) = \sum_{k=1}^m a_k L_k(S(t_j, \omega)),$$

όπου $S(t_j, \omega)$ είναι η τιμή του χρηματοδοτικού μέσου τη χρονική στιγμή t_j για το σενάριο ω και a_k είναι ο συντελεστής, που αντιστοιχεί στη k^{th} βασική συνάρτηση L_k .

Αυτές οι συναρτήσεις, που έχουν προσεγγιστεί (approximate continuation functions) μπορούν να ερμηνευθούν ως η κατά προσέγγιση αξία του προθεσμιακού συμβολαίου τη χρονική στιγμή t_j για το σενάριο ω . Οι συντελεστές a_k προσδιορίζονται από τη μέθοδο παλινδρόμησης (least square regression).

Ας υποθέσουμε ότι A_j είναι ένας πίνακας $n \times m$ διαστάσεων για την j^{th} επανάληψη, όπου $A_j(i, k) = L_k(S(t_j, \omega_i))$, με ω_i να είναι το i^{th} σενάριο, $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι $X_j = [a_k]_j$ αποτελεί το διάνυσμα των συντελεστών των βασικών συναρτήσεων για την j^{th} επανάληψη, το οποίο προσδιορίζεται από τη μέθοδο παλινδρόμησης. Ο στόχος είναι να βρούμε τους συντελεστές, οι οποίοι ελαχιστοποιούν τη μήτρα $\|A_j X_j - Y_j\|$. Το διάνυσμα στήλης $[Y_j]_i$ προσδιορίζεται από

την αξία του προθεσμιακού συμβολαίου στο σενάριο I για το χρόνο t_{j+1} . Μόλις οι συντελεστές α_k προσδιορισθούν μέσω της γραμμικής παλινδρόμησης, τότε οι τιμές των συμβολαίων στο σενάριο i ενημερώνονται ως ακολούθως: Συγκρίνεται η εκτιμώμενη συνάρτηση αναμονής ($F(\omega, t_j)$) με τη τιμή, εάν τεθεί σε ισχύς το προθεσμιακό συμβόλαιο. Στη περίπτωση που η αξία άσκησης του Option είναι μεγαλύτερη, τότε χρησιμοποιείται αυτή για την ενημέρωση της τιμής στο σενάριο i , αλλιώς χρησιμοποιείται η τιμή στο χρόνο t_{j+1} , αναγόμενο από το παράγοντα αναγωγής $r(\omega, t_j; t_k)$.

Επιπρόσθετα, ισχύει $A_j = U\Sigma V^T$, όπου U είναι ένας $n \times n$ ορθογώνιος πίνακας, V είναι ένας $m \times m$ ορθογώνιος πίνακας και Σ ένας $n \times m$ διαγώνιος πίνακας. Η μήτρα $\|A_j X_j - Y_j\|$ ελαχιστοποιείται για $X_j = (A_j^T A_j)^{-1} A_j^T Y_j = (V \Sigma^{-1} U^T) Y_j$.

Παρακάτω παραθέτουμε τον αλγόριθμο για την αποτίμηση της αξίας αναμονής τη χρονική στιγμή t_j για κάθε σενάριο ω .

Algorithm 2: Estimation of continuation value at time t_j for each path ω

Input: Values of all paths at time t_j , set of m basis functions $L_k, k = 1, 2, \dots, m$, vector of option prices Y_j

Output: $\hat{F}(\omega, t_j)$

Store path values at time t_j for different paths in array S_j i.e. , $S_j(i) = S(t_j, \omega_i)$

Using Least Square Regression, solve the system of equations $Y_j = \sum_{k=1}^m a_k L_k(S_j)$ to determine $a_k, k = 1, 2, 3, \dots, m$ (only non-zero Y_j entries considered here).

-Determine SVD of design matrix $A_j [A_j(i, k) = L_k(S(t_j, \omega_i))]$ s.t. $A_j = U\Sigma V^T$

-Determine a_k from U, V and $\Sigma. = 1, 2, 3, \dots, m, [\alpha_k]_j = (V \Sigma^{-1} U^T) Y_j$.

Return $\sum_{k=1}^m a_k L_k(S(t_j, \omega))$.

Σχήμα 4.2 Αλγόριθμος για την αποτίμηση της αξίας αναμονής [4]

4.2 Επανάληψη Πολιτικής μέσω Προσέγγισης Ελαχίστων Τετραγώνων

Στη παρούσα διπλωματική θα αναφερθούμε στον αλγόριθμο LSTDQ (Least – Squares Temporal – Difference) και στον αλγόριθμο LSPI (Least – Squares Policy Iteration – Επανάληψη Πολιτικής Ελαχίστων Τετραγώνων), οι οποίοι είναι αλγόριθμοι reinforcement learning. Οι πληροφορίες αντλήθηκαν από τη πηγή [1].

Οι μέθοδοι προσέγγισης βρίσκονται στην καρδιά όλων των επιτυχημένων εφαρμογών των μεθόδων reinforcement learning. Αυτοί οι μέθοδοι (reinforcement learning) ασχολούνται με το πώς κάποιος πρέπει να πάρει αποφάσεις σε ένα περιβάλλον, ώστε να μεγιστοποιήσει το κέρδος του. Συνδυάζουν, επίσης, τη προσέγγιση της αξίας μίας αντικειμενικής συνάρτησης με γραμμικές αρχιτεκτονικές και προσεγγιστική επανάληψη πολιτικών. Οι μέθοδοι αυτοί έχουν χρησιμοποιηθεί και σε πολλούς άλλους τομείς, όπως η θεωρία ελέγχου, οι επιχειρησιακές έρευνες, η οικονομική θεωρία και θεωρία παιγνίων. Στους τελευταίους δύο τομείς οι μέθοδοι αυτοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξηγήσουν, πως η ισορροπία προκύπτει.

Επιστρέφοντας, όμως, στις μεθόδους προσέγγισης οι αρχιτεκτονικές γραμμικής προσέγγισης έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως, αφού προσφέρουν πολλά πλεονεκτήματα στο πλαίσιο της προσέγγισης μίας συνάρτησης και, επίσης, είναι εύκολη η εφαρμογή τους.

Ο αλγόριθμος LSTDQ είναι ιδανικός για προβλήματα προβλέψεων, δηλαδή προβλήματα, που μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τη προσεγγιστική αξία της αντικειμενικής συνάρτησης μίας καθορισμένης πολιτικής. Ο αλγόριθμος LSPI χρησιμοποιεί τα αποτελέσματα του αλγορίθμου LSTDQ, για να παράγει ένα προσεγγιστικό αλγόριθμο επανάληψης – πολιτικής. Επιπρόσθετα, ο αλγόριθμος αυτός προσδιορίζει την αξία της συνάρτησης κατάστασης – απόφασης, η οποία επιτρέπει την επιλογή απόφασης χωρίς ένα μοντέλο και τη σταδιακή βελτίωση της πολιτικής μέσα σε ένα πλαίσιο επανάληψη – πολιτική. Αυτό το εργαλείο Δυναμικού Προγραμματισμού, επίσης, συνδυάζει την αποτελεσματικότητα για την εύρεση πολιτικής με την αποτελεσματικότητα των δεδομένων του αλγορίθμου LSTDQ.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα ελέγχου, το οποίο είναι μία διαδικασία λήψης αποφάσεων - Markov Decision Process (MDP). Ένα MDP πρόβλημα ορίζεται από 5 παραμέτρους (S,A,P,R,γ), όπου: $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από καταστάσεις, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο από δράσεις - αποφάσεις, P είναι ένα μοντέλο μετάβασης, όπου $P(s,a,s')$ είναι η πιθανότητα για τη μετάβαση στη κατάσταση s' , όταν παίρνεις την απόφαση a στη κατάσταση s , R είναι η συνάρτηση κέρδους ή κόστους, όπου $R(s,a,s')$ είναι η πρόσδοδος για τη μετάβαση $s \rightarrow s'$, όταν παίρνουμε την απόφαση a και, τέλος, γ είναι ένας παράγοντας αναγωγής για τις μελλοντικές προσόδους.

Μία σταθερή ντετερμινιστική πολιτική για ένα MDP πρόβλημα συμβολίζεται $\pi(a, s)$ και αντιπροσωπεύει την πιθανότητα, όπου η πολιτική επιλέγει μία μόνο απόφαση a για κάθε κατάσταση s . Ορίζεται και η συνάρτηση $Q^\pi(s, a)$ (state – action value function) για κάθε πολιτική π ως όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί καταστάσεων και αποφάσεων και υποδεικνύει, επίσης, τη συνολική πρόσδοδο κατά τη λήψη της απόφασης a στην κατάσταση s , ακολουθώντας τη πολιτική π . Παραθέτουμε τον ακόλουθο τύπο:

$$Q^\pi(s, a) = R(s, a) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s, a, s') \sum_{a' \in A} (\pi(a', s') Q^\pi(s', a')),$$

$$\text{όπου } R(s, a) = \sum_{s' \in S} P(s, a, s') R(s, a, s')$$

Για κάθε πρόβλημα MDP υπάρχει μία βέλτιστη ντετερμινιστική πολιτική, π^* , η οποία μεγιστοποιεί την αναμενόμενη συνολική πρόσδοδο (reward) από οποιαδήποτε αρχική κατάσταση. Είναι, συνεπώς, επαρκή για τον περιορισμό της αναζήτησης βέλτιστης πολιτικής μόνο μέσα στο χώρο των ντετερμινιστικών πολιτικών.

Επανάληψη πολιτικής (Policy Iteration) και Προσεγγιστική Επανάληψη πολιτικής (Approximate Policy Iteration)

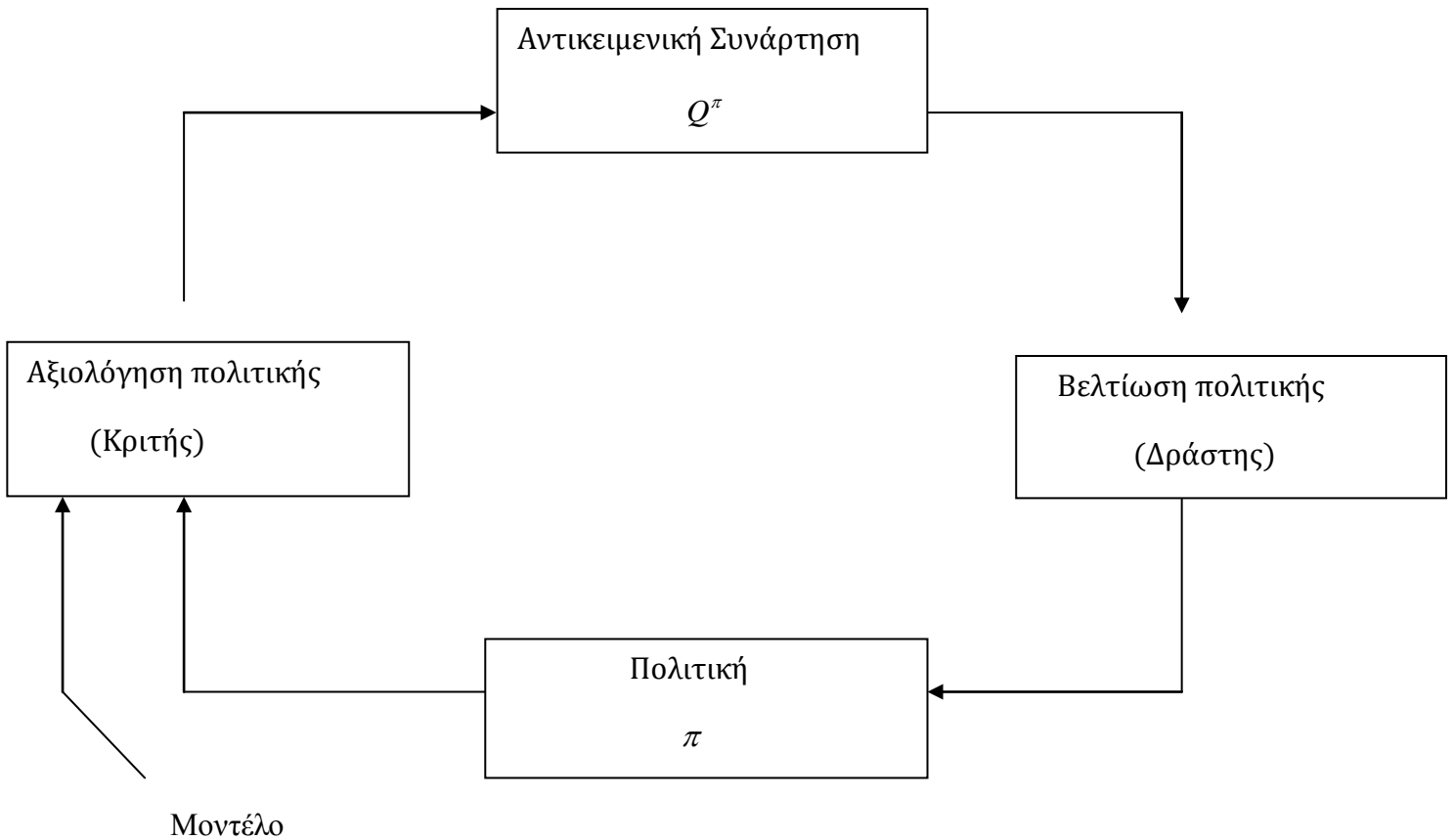
Η επανάληψη πολιτικής είναι μια μέθοδος ανακάλυψης της βέλτιστης πολιτικής για κάθε δοθέν MDP (Markov Decision Process). Η επανάληψη πολιτικής είναι μια επαναληπτική διαδικασία στο χώρο των ντετερμινιστικών πολιτικών και ανακαλύπτει τη βέλτιστη πολιτική δημιουργώντας μια σειρά από πολιτικές βελτίωσης. Κάθε επανάληψη m αποτελείται από δυο φάσεις:

Αξιολόγηση πολιτικής, η οποία υπολογίζει την αξία της συνάρτησης κατάστασης – απόφασης Q^{π_m} της τρέχουσας πολιτικής π_m , επιλύοντας ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων Bellman.

Καθώς επίσης και η **Βελτίωση πολιτικής**, που ορίζει τη βελτιωμένη πολιτική π_{m+1} για την Q^{π_m} ως :

$$\pi_{m+1}(s) = \arg \max_{a \in A} Q^{\pi_m}(s, a)$$

Η πολιτική π_{m+1} είναι μια ντετερμινιστική πολιτική, η όποια είναι τουλάχιστον καλή, όπως η π_m , αν όχι καλύτερη. Αυτά τα δυο βήματα (**Αξιολόγηση πολιτικής και Βελτίωση πολιτικής**) επαναλαμβάνονται μέχρι να μην υπάρχει καμία αλλαγή στην πολιτική, στη περίπτωση στην όποια η επανάληψη έχει συγκληθεί στη βέλτιστη πολιτική, συχνά σε ένα εκπληκτικό αριθμό επαναλήψεων. Η **Βελτίωση πολιτικής** είναι συχνά γνωστή και ως (Δράστης, αυτός που ενεργεί), ενώ η **Αξιολόγηση πολιτικής** ως (Κριτής, αυτός που κρίνει), επειδή ο δράστης είναι υπεύθυνος για τον τρόπο, που γίνεται η δράση – λαμβάνεται η απόφαση, ενώ ο κριτής για την άσκηση κριτικής στο τρόπο, που ενεργεί ο δράστης. Ως εκ τούτου, οι αλγόριθμοι **επανάληψης πολιτικής** είναι γνώστες και ως αρχιτεκτονικές **δράστη - κριτή**. Το ακόλουθο σχήμα μας δείχνει ένα διάγραμμα επανάληψης πολιτικής καθώς και τις εξαρτήσεις ανάμεσα σε ποικίλα στοιχεία.

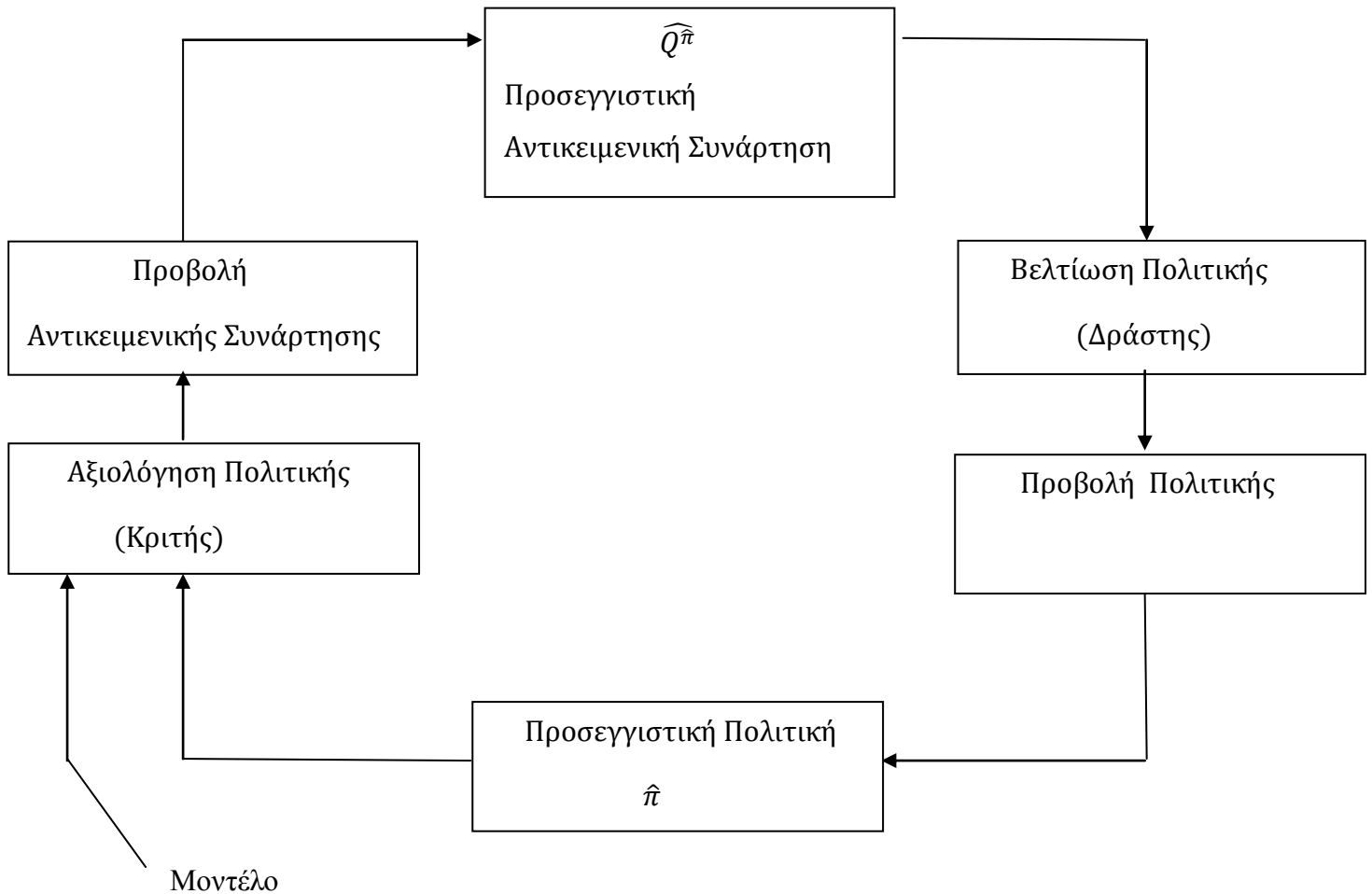


Σχήμα 4.3 Επανάληψη Πολιτικής (Αρχιτεκτονική δράστης – κριτής) [1]

Η σύγκλιση της επανάληψης πολιτικής για τη βέλτιστη πολιτική εξαρτάται κυρίως πάνω σε μια συνοπτική παρουσίαση της αξίας της αντικειμενικής, στην ακριβή λύση των εξισώσεων Bellman, και στη συνοπτική παρουσίαση κάθε πολιτικής. Τέτοιες ακριβείς αναπαραστάσεις και μέθοδοι δεν είναι πρακτικές για μεγάλους χώρους καταστάσεων και αποφάσεων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, οι προσεγγιστικοί μέθοδοι είναι πιο εύχρηστες. Προσεγγίσεις στο πλαίσιο επανάληψης πολιτικής μπορεί να παρουσιαστούν σε δυο μέρη:

- **Αναπαράσταση της αντικειμενικής συνάρτησης:** Η ακριβής αναπαράσταση της πραγματικής αντικειμενικής συνάρτησης $Q^\pi(s, a)$ αντικαθίσταται από μία γενική προσέγγιση $\widehat{Q}^\pi(s, a; w)$, όπου w είναι οι παράμετροι της προσέγγισης.
- **Αναπαράσταση πολιτικής:** Η ακριβής αναπαράσταση της πολιτικής $\pi(s)$ αντικαθίσταται από μια παραμετρική αναπαράσταση $\hat{\pi}(s, \theta)$, όπου θ είναι οι παράμετροι της αναπαράστασης.

Ο κρίσιμος παράγοντας για έναν επιτυχημένο προσεγγιστικό αλγόριθμο είναι η επιλογή της παραμετρικής προσεγγιστικής αρχιτεκτονικής και η επιλογή της μεθόδου αναπαράστασης (προσαρμογή των παραμέτρων). Αυτή η φόρμα της επανάληψης πολιτικής, που παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα, είναι γνωστή ως προσεγγιστική επανάληψη πολιτικής (approximate policy iteration).



Σχήμα 4.4 Προσεγγιστική επανάληψη πολιτικής [1]

Επανάληψη Πολιτικής Ελαχίστων Τετραγώνων (Μέθοδος LSPI)

Η κύρια ιδέα πίσω από τον αλγόριθμο LSPI

Για πολλά πρακτικά προβλήματα ελέγχου, το MDP μοντέλο δεν είναι πλήρως διαθέσιμο. Ο χώρος καταστάσεων, ο χώρος αποφάσεων και ο παράγοντας αναγωγής (γ) είναι διαθέσιμα, ενώ το μοντέλο μετάβασης και η συνάρτηση κέρδους δεν είναι γνωστά. Άρα, πρέπει να αξιολογήσουμε ή ακόμη καλύτερα να βρούμε τις πολιτικές

αποφάσεων για τέτοια προβλήματα. Όμως, σε αυτή τη περίπτωση οι αλγόριθμοι πρέπει να βασίζονται σε πληροφορίες, που προέρχονται από την αλληλεπίδραση μεταξύ αυτού, που αποφασίζει, και της ίδιας της διαδικασίας ή από ένα παραγωγικό μοντέλο της διαδικασίας. Οι πληροφορίες αυτές περιλαμβάνουν παρατηρήσεις καταστάσεων, αποφάσεων και προσόδων. Αυτές οι παρατηρήσεις αποτελούν τα δείγματα: (s, a, r, s') , που σημαίνουν, ότι σε κάποια χρονική στιγμή η διαδικασία ήταν στη κατάσταση s , μία απόφαση a λήφθηκε από τον υπεύθυνο, ένα κέρδος r λήφθηκε και έγινε η μετάβαση στην επόμενη κατάσταση s' .

Το πρόβλημα αξιολόγησης μίας πολιτικής ή ανακάλυψης μίας καλής πολιτικής από δείγματα είναι γνωστό με τον αγγλικό όρο reinforcement learning.

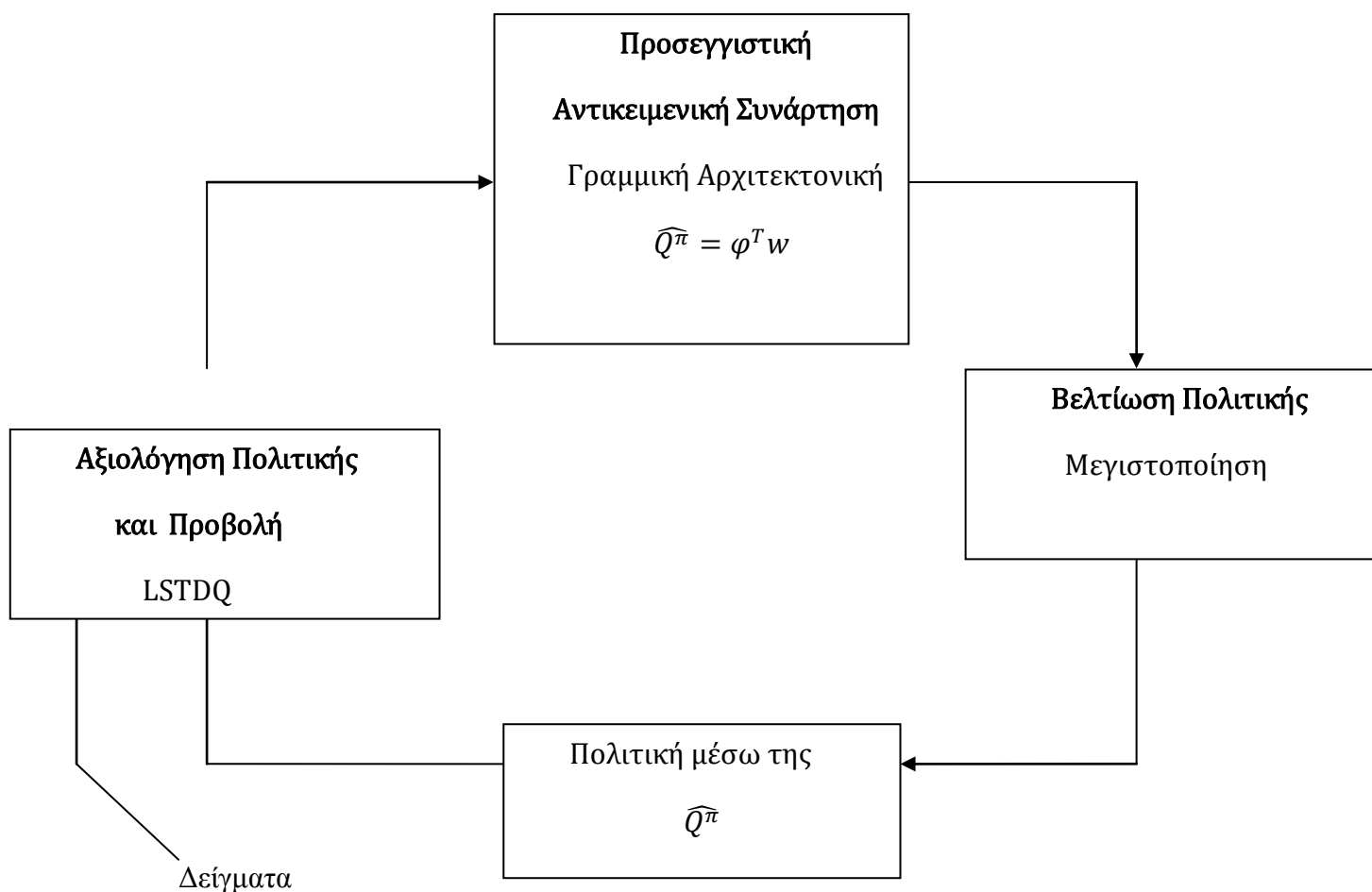
Η μέθοδος επανάληψης πολιτικής ελαχίστων τετραγώνων (Least Squares Policy Iteration - **LSPI**) είναι ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος επανάληψης πολιτικής, που μαθαίνει πολιτικές αποφάσεων από δείγματα. Στο ακόλουθο σχήμα παρουσιάζεται ένα διάγραμμα της μεθόδου LSPI, που υποδεικνύει πως ο αλγόριθμος ταιριάζει σ ένα πλαίσιο προσεγγιστικής επανάληψης - πολιτικής.

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι η αξία της συνάρτησης κατάστασης - απόφασης προσεγγίζεται από μια γραμμική αρχιτεκτονική και η πραγματική αναπαράσταση της αποτελείται από μια περιγραφή από συναρτήσεις βάσης και ένα σύνολο από παραμέτρους. Βασική ιδέα στην ανάπτυξη του αλγορίθμου αυτού είναι, πως η τεχνική αναπαριστώντας μια πολιτική ως αντικειμενική συνάρτηση κατάστασης – απόφασης, θα μπορούσε να εφαρμοστεί σ' ένα προσεγγιστικό αλγόριθμο επανάληψης πολιτικής. Η πολιτική δεν είναι φυσικά αποθηκευμένη κάπου, αλλά υπολογίζεται μόνο, όταν ζητηθεί. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε κατάσταση s υπολογίζουμε όλες τις αποφάσεις σε αυτή την κατάσταση και εκτελούμε τη μεγιστοποίηση για να αντλήσουμε την επιλογή απόφασης σε αυτή τη κατάσταση. Ως αποτέλεσμα αυτών, όλες οι προσεγγίσεις και τα σφάλματα στην ανάπτυξη πολιτικής και αναπαράστασης έχουν εξαλειφτεί με κόστος κάποιας επιπλέον βελτιστοποίησης στην πολιτική.

Το υπόλοιπο μέρος για να κλείσει ο βρόχος στο ακόλουθο σχήμα είναι μια διαδικασία, που αξιολογεί μια πολιτική χρησιμοποιώντας δείγματα και παράγει τη προσεγγιστική αντικειμενική συνάρτηση της. Στη μέθοδο LSPI, αυτό το βήμα διενεργείται από τη μέθοδο LSTDQ, έναν αλγόριθμο, που μαθαίνει αποτελεσματικά

τη προσεγγιστική αξία της συνάρτησης κατάστασης - απόφασης \widehat{Q}^π μιας πολιτικής π , όταν η αρχιτεκτονική προσέγγισης είναι μια γραμμική αρχιτεκτονική.

Η μέθοδος LSPI είναι μόνο μια συγκεκριμένη περίπτωση από την οικογένεια αλγορίθμων reinforcement-learning για έλεγχο, βασισμένο στην προσεγγιστική επανάληψη πολιτικής. Τα δυο συστατικά, που ποικίλουν ανάμεσα στις περιπτώσεις αυτής της οικογενείας είναι η αρχιτεκτονική προσέγγισης, η αξιολόγηση πολιτικής και η διαδικασία προβολής, που είναι η μέθοδος για την εξεύρεση κατάλληλων παραμέτρων, που μεγιστοποιούν την ακρίβεια της προσέγγισης σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια και με σεβασμό στο σκοπό της συνάρτησης. Για τον αλγόριθμο LSPI, αυτά τα συστατικά επιλέχθηκαν για να είναι γραμμικές αρχιτεκτονικές και LSTDQ, αλλά πρωταρχικά κάθε άλλο ζεύγος επίλογων θα μπορούσε να παράγει έναν αλγόριθμο για έλεγχο. Αυτές οι επιλογές φτιαγμένες για τον LSPI προσφέρουν σημαντικά πλεονεκτήματα και ευκαιρίες για βελτιστοποίηση της συνολικής αποδοτικότητας του αλγορίθμου.



Σχήμα 4.5 Επανάληψη Πολιτικής ελαχίστων τετραγώνων [1]

Προσέγγιση της αξίας της αντικειμενικής συνάρτησης μέσω γραμμικών αρχιτεκτονικών

Ας υποθέσουμε ότι $\widehat{Q}^\pi(s, a; w)$ αποτελεί τη προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης $Q^\pi(s, a)$ μέσω της παραμετρικής αρχιτεκτονικής προσέγγισης με παραμέτρους w . Η κύρια ιδέα της προσέγγισης της αξίας της συνάρτησης αυτής είναι, ότι οι παράμετροι w μπορούν να προσαρμοστούν κατάλληλα, έτσι ώστε οι προσεγγιστικές αξίες της συνάρτησης να είναι αρκετά κοντά με τις κανονικές αξίες της. Μία δυσκολία, που συνδέεται με τη προσέγγιση της αντικειμενικής συνάρτησης, πέρα από την απώλεια ακρίβειας, είναι η επιλογή της μεθόδου παρουσίασης των παραμέτρων w . Αυτή είναι η μέθοδος εύρεσης κατάλληλων παραμέτρων, που μεγιστοποιούν την ακρίβεια της προσέγγισης σύμφωνα με ορισμένα κριτήρια.

Άρα, οι αξίες της αντικειμενικής συνάρτησης $Q^\pi(s, a)$ προσεγγίζονται μέσω ενός γραμμικού παραμετρικού συνδυασμού από k συναρτήσεις βάσης:

$$\widehat{Q}^\pi(s, a; w) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(s, a) w_j, \text{ όπου}$$

w_j οι παράμετροι και $\varphi_j(s, a)$ οι συναρτήσεις βάσης. Οπότε, ψάχνουμε να βρούμε μία συνδυασμένη αξιολόγησης πολιτικής και προσαρμογής των παραμέτρων μέθοδο, που θα λαμβάνει ως είσοδο μία πολιτική π και ένα μοντέλο της διαδικασίας και ως έξοδο ένα σύνολο παραμέτρων w^π , τέτοιο ώστε \widehat{Q}^π να είναι μία καλή προσέγγιση της συνάρτησης Q^π .

Ο Αλγόριθμος LSTDQ

Έστω ότι έχουμε το πρόβλημα προσδιορισμού της προσέγγισης (\widehat{Q}^π) της αντικειμενικής συνάρτησης κατάστασης - απόφασης (Q^π) μίας καθορισμένης πολιτικής π από δείγματα μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν k γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις βάσης στη γραμμική αρχιτεκτονική. Αυτό το πρόβλημα είναι αντίστοιχο με το να προσδιορίσεις τις παραμέτρους w^π της εξίσωσης $\widehat{Q}^\pi = \Phi w^\pi$. Οι ακριβείς τιμές για τις παραμέτρους w^π μπορούν να υπολογιστούν από το μοντέλο λύνοντας το ακόλουθο γραμμικό σύστημα: $A = w^\pi b$, όπου $A = \Phi^T \Delta_\mu (\Phi - \gamma P \Pi_\pi \Phi)$ και $b = \Phi^T \Delta_\mu R$. Ο παράγοντας μ είναι η κατανομή πιθανότητας στο $(S \times A)$, που ορίζει τις παραμέτρους της προσαρμογής.

Τα A και b μπορούν να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας δείγματα. Το γραμμικό σύστημα μπορεί να λυθεί, έτσι ώστε να καθοριστούν οι παράμετροι w^π , οι οποίοι προσδιορίζουν την αντικειμενική συνάρτηση $Q^\pi(s, a)$. Οπότε θα έχουμε:

$$A = \Phi^T \Delta_\mu(\Phi - \gamma P \Pi_\pi \Phi) = \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \mu(s, a) \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s, a, s') [\varphi(s, a) (\varphi(s, a) - \gamma \varphi(s', \pi(s')))^T]$$

$$\text{και } b = \Phi^T \Delta_\mu R = \sum_{s \in \mathcal{S}} \sum_{a \in \mathcal{A}} \mu(s, a) \sum_{s' \in \mathcal{S}} P(s, a, s') [\varphi(s, a) R(s, a, s')].$$

Η βασική παρατήρηση εδώ είναι, ότι το δείγμα (s, a, r, s') , που προέρχεται από τη διαδικασία μαζί με τη πολιτική π στη κατάσταση s' παρέχει όλες τις πληροφορίες, που χρειάζονται για τους παραπάνω τύπους. Αυτό ισχύει, γιατί s' είναι η κατάσταση, που μεταβαίνουμε, όταν πάρουμε την απόφαση a στη κατάσταση s και r προκύπτει από το $R(s, a, s')$. Άρα, θεωρώντας ένα πεπερασμένο σύνολο δειγμάτων $D = \{(s_i, a_i, r_i, s'_i) | i = 1, 2, \dots, L\}$ τα A και b μπορούν να προσδιοριστούν με τους ακόλουθους τύπους:

$$\tilde{A} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\varphi(s_i, a_i) (\varphi(s_i, a_i) - \gamma \varphi(s'_i, \pi(s'_i)))^T]$$

$$\text{και } \tilde{b} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L [\varphi(s_i, a_i) r_i].$$

Σε κάθε προσδιορισμό των \tilde{A} και \tilde{b} , ο παράγοντας L είναι πεπερασμένος και ως εκ τούτου ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $\frac{1}{L}$ μπορεί να αφαιρεθεί χωρίς να επηρεάσει τη λύση του συστήματος. Δεδομένου ότι, ένα μοναδικό δείγμα συμβάλλει στο προσδιορισμό των \tilde{A} και \tilde{b} , είναι εύκολο να κατασκευάσουμε κανόνα ενημέρωσης για τα \tilde{A} και \tilde{b} (update rule). Ας υποθέσουμε ότι $\tilde{A}^{(t)}$ και $\tilde{b}^{(t)}$ είναι οι πρόσφατες εκτιμήσεις των A και b για μία καθορισμένη πολιτική π , υποθέτοντας ότι αρχικά έχουμε $\tilde{A}^{(0)} = 0$ και $\tilde{b}^{(0)} = 0$. Ένα νέο δείγμα (s_t, a_t, r_t, s'_t) συνεισφέρει στη προσέγγιση σύμφωνα με τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\tilde{A}^{(t+1)} = \tilde{A}^{(t)} + \varphi(s_t, a_t) (\varphi(s_t, a_t) - \gamma \varphi(s'_t, \pi(s'_t)))^T$$

$$\text{και } \tilde{b}^{(t+1)} = \tilde{b}^{(t)} + \varphi(s_t, a_t) r_t.$$

Ο αλγόριθμος LSTDQ προσδιορίζει τη προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της αξίας της αντικειμενικής συνάρτησης κατάστασης – απόφασης (s, a) μίας καθορισμένης

πολιτικής από δείγματα. Επίσης, άλλη λειτουργία αυτού του αλγορίθμου είναι, ότι το ίδιο σύνολο δειγμάτων D μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιορίσει τη προσεγγιστική αξία της συνάρτησης $\widehat{Q}^\pi(s, a; w) = \sum_{j=1}^k \varphi_j(s, a) w_j$ μίας οποιαδήποτε πολιτικής, για όσο διάστημα η $\pi(s')$ είναι διαθέσιμη για κάθε κατάσταση s' . Μία πιο αποδοτική εφαρμογή του αλγορίθμου LSTDQ χρησιμοποιεί μεθόδους ελαχίστων τετραγώνων για να υπολογίσει το αντίστροφο του \tilde{A} . Ας υποθέσουμε, ότι $B^{(t)}$ είναι ο αντίστροφος του $\tilde{A}(t)$ τη χρονική στιγμή t . Χρησιμοποιώντας το τύπο των Sherman – Morrison θα έχουμε:

$$B^{(t)} = \left(\tilde{A}^{(t-1)} + \varphi(s_t, a_t) \left([\varphi(s_t, a_t) - \gamma \varphi(s_t', \pi(s_t'))]^T \right) \right)^{-1} =$$

$$B^{(t-1)} - \frac{B^{(t-1)} \left([\varphi(s_t, a_t) - \gamma \varphi(s_t', \pi(s_t'))]^T \right) B^{(t-1)}}{1 + \left([\varphi(s_t, a_t) - \gamma \varphi(s_t', \pi(s_t'))]^T \right) B^{(t-1)} \varphi(s_t, a_t)}$$

Παραθέτουμε τη βελτιστοποιημένη εφαρμογή του αλγορίθμου LSTDQ:

LSTDQ – OPT($D, \kappa, \varphi, \gamma, \pi$)

// learns \widehat{Q}^π from samples

// D : sources of samples (s, a, r, s')

// k : Number of basis functions

// φ : Basis functions

// γ : Discount factor

// π : Policy whose value function is sought

$\tilde{B} \leftarrow \frac{1}{\delta} I$ // ($k \times k$) matrix

$\tilde{b} \leftarrow 0$ // ($k \times 1$) vector

For each $(s, a, r, s') \in D$

$$B \leftarrow B - \frac{B \varphi(s, a) (\varphi(s, a) - \gamma \varphi(s', \pi(s')))^T B}{1 + (\varphi(s, a) - \gamma \varphi(s', \pi(s')))^T B \varphi(s, a)}$$

$$\tilde{b} \leftarrow \tilde{b} + \varphi(s, a)r$$

$$\tilde{\omega}^\pi \leftarrow \tilde{B}\tilde{b}$$

return $\tilde{\omega}^\pi$

Σχήμα 4.6 Βελτιστοποιημένη εφαρμογή του αλγορίθμου LSTDQ [1]

Ο Αλγόριθμος LSPI

Η αξία της συνάρτησης κατάστασης - απόφασης προσεγγίζεται, χρησιμοποιώντας μια γραμμική αρχιτεκτονική:

$$\hat{Q}(s, a; w) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(s, a)w_i = \varphi(s, a)^T w$$

Η πολιτική (π) σε αυτή τη προσεγγιστική αξία της συνάρτησης σε κάθε δοθείσα κατάσταση s μπορεί να αποκτηθεί μέσω μεγιστοποίησης των προσεγγιστικών αξιών σε όλες τις αποφάσεις του A :

$$\pi(s) = \operatorname{argmax} \hat{Q}(s, a) = \operatorname{argmax} \varphi(s, a)^T w$$

Για πεπερασμένο χώρο αποφάσεων είναι απλό, αλλά για μεγάλους ή συνεχείς χώρους αποφάσεων, μεγιστοποίηση σε όλες τις αποφάσεις του A μπορεί να μην είναι πρακτικό να γίνει. Σε τέτοιες περιπτώσεις κάποιο είδος βελτιστοποίησης στο χώρο των αποφάσεων μπορεί να απαιτηθεί να καθορίσει την καλύτερη απόφαση.

Τελικά, κάθε πολιτική π , που αναπαριστάται από συναρτήσεις βάσης φ και ένα σύνολο από παραμέτρους w , τροφοδοτείται από την LSTDQ μαζί με ένα σύνολο από δείγματα για αξιολόγηση. Ο αλγόριθμος LSTDQ εκτελεί τη μεγιστοποίηση, όπως απαιτείται για να καθορίσει την πολιτική για κάθε κατάσταση s' από κάθε δείγμα (s, a, r, s') στο σύνολο των δειγμάτων. Η μέθοδος LSTDQ εξάγει ως αποτελέσματα τις παραμέτρους w^π της προσεγγιστικής αντικειμενικής συνάρτησης της πολιτικής π και η επανάληψη συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ο αλγόριθμος LSPI παραθέεται ακολούθως. Κάθε πηγή D από δείγματα μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε κάθε επανάληψη για την κλήση της LSTDQ. Εάν ένα αρχικό

σύνολο από δείγματα, που καλύπτει επαρκώς το χώρο κατάστασης – απόφασης, μπορεί να επιτευχθεί, αυτό το μόνο σύνολο μπορεί να επαναχρησιμοποιηθεί σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου LSPI. Εναλλακτικά, το D μπορεί να ενημερώνεται ανάμεσα στις επαναλήψεις.

Παρατηρούμε, επίσης, ότι ενώ οι αξίες συναρτήσεων και πολιτικές αναπαριστώνται μέσω των παραμέτρων w της προσεγγιστικής αρχιτεκτονικής, ένας μετρητής σε διαδοχικές παραμέτρους χρησιμοποιείται ως κριτήριο σταματήματος (stop criterion). Από αυτή την άποψη η μέθοδος LSPI μπορεί να θεωρηθεί ως μία επανάληψη στο χώρο των παραμέτρων w . Παρόλα που η LSPI είναι ένας προσεγγιστικός αλγόριθμος επανάληψης πολιτικής, το γενικό όριο για την επανάληψη πολιτικής ισχύει. Μια σημαντική ιδιότητα της LSPI είναι ότι δεν απαιτεί μια προσεγγιστική αναπαράσταση πολιτικής, αφαιρώντας οποιαδήποτε πηγή σφάλματος στο μέρος του δράστη της αρχιτεκτονικής δράστη – κριτή.

Επιπρόσθετα, ο αλγόριθμος LSPI παρέχει μεγάλη ευελιξία στην αντιμετώπιση των ζητημάτων επιλογής συναρτήσεων βάσης και συλλογής δειγμάτων. Πρώτον, δεν είναι απαραίτητο, ότι το σύνολο των συναρτήσεων βάσης παραμένει το ίδιο σε όλες τις επαναλήψεις της LSPI. Σε κάθε επανάληψη μία διαφορετική πολιτική αξιολογείται και σύνολα συναρτήσεων βάσης μπορεί να είναι πιο κατάλληλα από άλλα για την αναπαράσταση της αξίας της συνάρτησης κατάστασης – απόφασης για κάθε μία από αυτές τις πολιτικές. Δεύτερον, η LSPI επιτρέπει μεγαλύτερη ευελιξία στην συλλογή δειγμάτων, που χρησιμοποιούνται σε κάθε επανάληψη. Ενώ, η LSPI προσεγγίζει αξίες συναρτήσεων κατάστασης – απόφασης, μπορεί να χρησιμοποιήσει δείγματα από οποιαδήποτε πολιτική για να εκτιμήσει την αξία της συνάρτησης μίας άλλης πολιτικής. Παραθέεται ο ακόλουθος αλγόριθμος LSPI:

$LSPI(D, k, \varphi, \gamma, \varepsilon, \pi_o)$	//Learns a policy from samples
// D : source of samples (s, a, r, s')	
// k : number of basis functions	
// φ : basis functions	

```

//  $\gamma$ : discount factor

//  $\epsilon$ : stopping criterion

//  $\pi_0$ : Initial policy ,given as  $w_0$  (default:  $w_0 = 0$ )

 $\pi' \leftarrow \pi_0$                                      //  $w' \leftarrow w_0$ 

Repeat

     $\pi \leftarrow \pi'$                                //  $w \leftarrow w'$ 

     $\pi' \leftarrow LSTDQ(D, k, \varphi, \gamma, \pi)$      //  $w' \leftarrow LSTDQ(D, k, \varphi, \gamma, w)$ 

until ( $\pi \approx \pi'$ )                               // until ( $\|w - w'\| < \epsilon$ )

Return  $\pi$                                            // Return  $w$ 

```

Σχήμα 4.7 Ο αλγόριθμος LSPI [1]

Η μέθοδος LSPI έχει το μειονέκτημα πως μπορεί να μην δουλεύει πάντα και επίσης είναι πιο αργή σε σχέση με τη μέθοδο LSM όσον αφορά μικρά πρόβλημα. Πλεονεκτεί ωστόσο σε πιο πολύπλοκα προβλήματα και από άποψη χρόνου αλλά και στο ότι εκφράζει τη σχέση μεταξύ σεναρίου και απόφασης με συμπαγή τρόπο (αξία της αντικειμενικής συνάρτησης $V(s, a)$). Αντίθετα η μέθοδος LSM παίρνει τα σεσάρια, που τα εισάγουμε ως εισόδους σε αυτό, και πάνω σε κάθε σεσάριο πηγαίνει και παίρνει αποφάσεις. Οπότε η LSM μας παρέχει ένα δέντρο. Όταν όμως θέλουμε να δούμε αποφάσεις για σεσάρια, που δεν του τα έχουμε εισάγει, τότε είναι αρκετά δύσκολο να πάρεις ακριβείς αποφάσεις.

4.3 Μέθοδος Παράθεσης

Στην ενότητα αυτή θα περιγράψουμε τη μέθοδο παράθεσης (collocation method) για την επίλυση μοντέλων αποφάσεων Markov με συνεχείς καταστάσεις (Markov decision models) σύμφωνα με τη πηγή [3]. Θα αναφερθούμε σε μοντέλα με μονοδιάστατη κατάσταση και χώρους αποφάσεων. Η παρουσίαση γενικεύεται και σε μοντέλα με καταστάσεις και αποφάσεις μεγάλων διαστάσεων. Θεωρούμε έπειτα την εξίσωση Bellman's για ένα δυναμικό πρόβλημα αποφάσεων με άπειρο ορίζοντα διακριτού χρόνου και συνεχή κατάσταση:

$$V(s) = \max_{x \in X(s)} \{f(s, x) + \delta E_c V(g(s, x, \varepsilon))\}$$

Θεωρούμε πως ο χώρος κατάστασης είναι το διάστημα $S = [s_{\min}, s_{\max}]$, και οι αποφάσεις είτε είναι συνεχείς, είτε είναι διακριτές υπόκεινται στον ακόλουθο περιορισμό: $a(s) < x < b(s)$, όπου $a(s)$, $b(s)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις κατάστασης. Επιπρόσθετα, θεωρούμε πως η συνάρτηση κέρδους $f(s, x)$ και η συνάρτηση μετάβασης $g(s, x, \varepsilon)$ είναι δυο φορές συνεχείς και παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Για να υπολογίσουμε μια προσεγγιστική λύση για την εξίσωση Bellman μέσω της μεθόδου παράθεσης, υιοθετούμε την παρακάτω στρατηγική: Πρώτα, γραφούμε την προσεγγιστική αξία της αντικειμενικής συνάρτησης ως ένα γραμμικό συνδυασμό γνωστών συναρτήσεων βάσης $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, όπου οι συντελεστές c_1, c_2, \dots, c_n προσδιορίζονται μέσω της χρήσης του ακόλουθου τύπου:

$$V(s) = \sum_{j=1}^n c_{j*} \varphi_j(s)$$

Κατά δεύτερον, καθορίζουμε τους συντελεστές της συνάρτησης βάσης c_1, c_2, \dots, c_n απαιτώντας η προσεγγιστική αξία να ικανοποιεί την εξίσωση Bellman όχι σε όλες τις δυνατές καταστάσεις, αλλά τουλάχιστον σε n καταστάσεις s_1, s_2, \dots, s_n , οι οποίες ονομάζονται κόμβοι παράθεσης. Ένας εργαλείο παράθεσης αποτελεί το πολυώνυμο Chebychev.

Η στρατηγική παράθεσης αντικαθιστά την εξίσωση Bellman με ένα σύστημα n μη γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους. Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τη προσεγγιστική αξία της αντικειμενικής συνάρτησης, ή πιο ακριβέστερα, υπολογίζουμε τους n συντελεστές c_1, c_2, \dots, c_n . Οπότε, πρέπει να επιλύσουμε το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων:

$$\sum_j c_{j*} \varphi_j(s_i) = \max_{x \in X(s_i)} \{f(s_i, x) + \delta E_i \sum_{j=1}^n c_{j*} \varphi_j(g(s_i, x, \varepsilon))\}$$

Το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη

διανυσματική μορφή: $\Phi_c = u(c)$

Όπου, Φ ο πίνακας παράθεσης, ο οποίος είναι ένας $n \times n$ διαστάσεων πίνακας, του οποίου το ij^{th} στοιχείο είναι η j^{th} συνάρτηση βάσης, που υπολογίζεται στον i^{th} κόμβο παράθεσης:

$$\Phi_{i,j} = \Phi_j(s_i)$$

Και u αποτελεί τη συνάρτηση παράθεσης, της οποίας το i^{th} στοιχείο υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$u_i(c) = \max\{f(s_i, x) + \delta E_t \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(g(s_i, x, \varepsilon))\}$$

Η συνάρτηση παράθεσης, που εκτιμάται σε ένα συγκεκριμένο διάνυσμα συντελεστών βάσης c , παράγει ένα διάνυσμα, του οποίου η i^{th} είσοδος είναι η αξία, που αποκτάται λύνοντας το πρόβλημα βελτιστοποίησης, το οποίο εμπεριέχεται στην εξίσωση Bellman στον i^{th} κόμβο παράθεσης, αντικαθιστώντας την αντικειμενική συνάρτηση με την προσέγγιση $\sum_j c_j \varphi_j$.

Σε γενικές γραμμές, η εξίσωση παράθεσης μπορεί να λυθεί χρησιμοποιώντας μια μέθοδο επίλυσης μη γραμμικών εξισώσεων. Για παράδειγμα, γράφουμε την εξίσωση παράθεσης ως ένα πρόβλημα σταθερού σημείου (fixed - point problem), δηλαδή $c = \Phi^{-1}u(c)$ και έπειτα, γίνονται οι επαναλήψεις της συνάρτησης χρησιμοποιώντας τον επαναληπτικό κανόνα:

$$c \leftarrow \Phi^{-1}u(c)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση παράθεσης ως ένα πρόβλημα (root finding) $\Phi_c - u(c) = 0$ και να το επιλύσουμε ως προς c χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Newton, που χρησιμοποιεί τον επαναληπτικό κανόνα:

$$c \leftarrow c - [\Phi - u'(c)]^{-1}[\Phi c - u(c)]$$

Όπου $u'(c)$ είναι ένας $n \times n$ διαστάσεων Ιακωβιανός πίνακας της συνάρτησης παράθεσης u ως προς c . Κάθε στοιχείο του πίνακα u' μπορεί να υπολογιστεί εφαρμόζοντας το θεώρημα Envelope στο πρόβλημα βελτιστοποίησης του $u(c)$.

Ειδικότερα ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$u'_{ij}(c) = \frac{\partial u_i}{\partial c_j}(c) = \delta E_c \varphi_j(g(s_i, x_i, \varepsilon))$$

Όπου το x_i είναι η βέλτιστη απόφαση στο πρόβλημα μεγιστοποίησης, η οποία παράγει την $u_i(c)$. Ως παραλλαγή της μεθόδου Newton θα μπορούσαμε, επίσης, να εργαστούμε με τη μέθοδο quasi - Newton για να επιλύσουμε τη συνάρτηση παράθεσης.

Εάν το μοντέλο είναι στοχαστικό, πρέπει να υπολογίσουμε τις προσδοκίες (αναμενόμενες τιμές) με ένα αριθμητικά πρακτικό τρόπο. Η τυχαία και συνεχής μεταβλητή ε στη συνάρτηση μετάβασης αντικαθίσταται με μια διακριτή προσέγγιση, στην οποία θεωρούμε τιμές $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ με πιθανότητες w_1, w_2, \dots, w_m αντιστοίχως. Σε αυτή τη περίπτωση, η συνάρτηση παράθεσης u παίρνει την ακόλουθη ειδική συγκεκριμένη μορφή:

$$u_i(c) = \max_{x \in X(s_i)} \left\{ f(s_i, x) + \delta E_t \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n w_k c_{j*} \varphi_j(g(s_i, x, \varepsilon_k)) \right\}$$

Και ο Ιακωβιανός πίνακας παίρνει συνεπώς τη μορφή:

$$u'_{ij}(c) = \delta \sum_{k=1}^m w_k \varphi_j(g(s_i, x_i, \varepsilon_k))$$

4.4 Μέθοδος Προσέγγισης Με Τη Χρήση Μοντέλων Παλινδρόμησης

Παραθέτουμε το ακόλουθο παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση των μοντέλων παλινδρόμησης (regression models). Σημαντικές πληροφορίες για αυτή την ενότητα αντλήσαμε από τη πηγή [2]. Θεωρούμε το πρόβλημα προσδιορισμού της αξίας το να κάνουμε μία επιλογή, η οποία μας δίνει το δικαίωμα να πουλήσουμε ένα προϊόν σε μία συγκεκριμένη τιμή σε κάποια περίοδο διακριτού χρόνου.

Στο παράδειγμά μας έχουμε τη δυνατότητα να κάνουμε χρήση του δικαιώματος μας (put the option), δηλαδή να πουλήσουμε το προϊόν τη τελευταία μέρα του μηνός για τους επόμενους 12 μήνες. Θεωρούμε ότι μπορούμε να πουλήσουμε το προϊόν μας στα 1.20\$ σε οποιαδήποτε από τις τέσσερις χρονικές περιόδους, τις οποίες έχουμε υποθέσει.

Εάν περιμένουμε μέχρι την τέταρτη περίοδο, πρέπει τότε να πουλήσουμε το προϊόν μας, λαμβάνοντας όμως 0\$, όταν η τιμή του είναι πάνω από τα 1.20\$. Στις ενδιάμεσες περιόδους, όμως, έχουμε τη δυνατότητα να μην πραγματοποιήσουμε τη πώληση του προϊόντος, αλλά να το κρατήσουμε για τις επόμενες περιόδους, εάν η τιμή του είναι κάτω από τα 1.20\$. Φυσικά πουλάμε το προϊόν, στη περίπτωση που η τιμή του είναι πάνω από τα 1.20\$.

Το πρόβλημά μας έγκειται στο να προσδιορίσουμε, εάν πρέπει ή όχι να πουλήσουμε το προϊόν μας στις ενδιάμεσες χρονικές περιόδους, με απώτερο σκοπό να έχουμε όσο γίνεται μεγαλύτερο κέρδος.

Παραθέτουμε το παρακάτω πίνακα 4.1, ο οποίος μας παρουσιάζει 10 δείγματα τιμών σε τέσσερις χρονικές περιόδους ($t=1,2,3,4$).

		ΤΙΜΕΣ ΠΡΟΙΟΝΤΟΣ			
		ΧΡΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ			
ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΙΜΩΝ(\$)	T=1	T=2	T=3	T=4	
1	1.21	1.08	1.17	1.15	
2	1.09	1.12	1.17	1.13	
3	1.15	1.08	1.22	1.35	
4	1.17	1.12	1.18	1.15	
5	1.08	1.15	1.10	1.27	
6	1.12	1.22	1.23	1.17	
7	1.16	1.14	1.13	1.19	
8	1.22	1.18	1.21	1.28	
9	1.08	1.11	1.09	1.10	
10	1.15	1.14	1.18	1.22	

Πίνακας 4.1 Δείγματα τιμών σε τέσσερις χρονικές περιόδους

Εάν περιμένουμε μέχρι την τέταρτη περίοδο ($t=4$), η αποπληρωμή (payoff), δηλαδή τα χρήματα, που θα πάρουμε, μας δίνεται από το παρακάτω πίνακα 4.2, η οποία είναι μηδενική εάν η τιμή του προϊόντος μας είναι πάνω από τα 1.20\$ και επίσης δίνεται

από το τύπο $(120 - p_4)$ για τιμές κάτω από τα 1.20\$. Στη χρονική περίοδο ($t = 3$) γνωρίζουμε τις τιμές του προϊόντος και για τις προηγούμενες χρονικές περιόδους και για τη περίοδο που βρισκόμαστε (p_1, p_2, p_3) .

	ΧΡΟΝΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ			
ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΙΜΩΝ(\$)	T=1	T=2	T=3	T=4
1	-	-	-	0.05
2	-	-	-	0.07
3	-	-	-	0.00
4	-	-	-	0.05
5	-	-	-	0.00
6	-	-	-	0.03
7	-	-	-	0.01
8	-	-	-	0.00
9	-	-	-	0.10
10	-	-	-	0.00

Πίνακας 4.2 Η πληρωμή μας στο χρόνο 4 εάν αναμένουμε ακόμη να κάνουμε την επιλογή μας

Θέλουμε να προβλέψουμε και να προσδιορίσουμε την αξία το να πουλήσουμε το προϊόν μας τη χρονική περίοδο ($t=4$). Ας υποθέσουμε ότι η αξία το να μην πουλήσουμε το προϊόν τη χρονική περίοδο ($t=4$) είναι $V_4(a_4)$. Η προσδοκώμενη τιμή στο χρόνο ($t = 3$) δίνεται από το τύπο $\bar{V}_3(a_3) = E[V_4(a_4)/a_3]$. Στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε τη $\bar{V}_3(a_3)$ χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες, που γνωρίζουμε μέχρι τη χρονική στιγμή ($t = 3$).

Εφαρμόζουμε το τύπο της γραμμικής παλινδρόμησης (linear regression) $Y = \theta_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2 + \theta_3 X_3$, όπου $Y = V_4$, $X_1 = p_2$, $X_2 = p_3$, $X_3 = (p_3)^2$.

Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ότι οι μεταβλητές X_1, X_2, X_3 είναι οι συναρτήσεις βάσης. Αυτές οι μεταβλητές μας παρουσιάζουν τις τιμές του προϊόντος μας μέχρι και

τη χρονική στιγμή ($t = 3$). Μετέπειτα προσπαθούμε εμείς να προβλέψουμε τι θα συμβεί στο χρόνο ($t = 4$).

Παραθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα 4.3, ο οποίος μας πληροφορεί για τα αποτελέσματα της γραμμικής παλινδρόμησης.

	ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ			ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗ
ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΙΜΩΝ	X_1	X_2	X_3	Y
1	1.08	1.17	1.3689	0.05
2	1.12	1.17	1.3689	0.07
3	1.08	1.22	1.4884	0.00
4	1.12	1.18	1.3924	0.05
5	1.15	1.10	1.2100	0.00
6	1.22	1.23	1.5129	0.03
7	1.44	1.13	1.2769	0.01
8	1.18	1.21	1.4641	0.00
9	1.11	1.09	1.1881	0.10
10	1.14	1.18	1.3924	0.00

Πίνακας 4.3 Δεδομένα παλινδρόμησης στο χρόνο T=3

Εφαρμόζουμε τη παλινδρόμηση στα δεδομένα, που διαθέτουμε για να προσδιορίσουμε τις παραμέτρους $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. Η γραμμική παλινδρόμηση αποτελεί μόνο μία προσέγγιση και σε αυτό το παράδειγμά μας εφαρμόζεται στη περιοχή των τιμών του προϊόντος στις διάφορες χρονικές περιόδους.

Χρησιμοποιώντας όλες τις παρατηρήσεις (τιμές), έχουμε τη παρακάτω εξίσωση:

$$\bar{V}_3 = 0.0056 - 0.1234 * p_2 + 0.6011 * p_3 - 0.3903 * (p_3)^2$$

Όπου το \bar{V}_3 αποτελεί μία προσέγγιση της αναμενόμενης αξίας της τιμής του προϊόντος, εάν επιλέξουμε να μην πουλήσουμε το προϊόν μας μέχρι τη χρονική περίοδο ($t = 4$). Οπότε, χρησιμοποιούμε τη προσέγγιση για να αποφασίσουμε, τι θα κάνουμε τη χρονική περίοδο ($t = 3$).

Παραθέτουμε τον ακόλουθο πίνακα 4.4 για να μας δείξει τη σύγκριση μεταξύ το να πουλήσουμε το προϊόν ή να μη το πουλήσουμε μέχρι το χρόνο ($t = 4$). Η δεύτερη στήλη του παρακάτω πίνακα μας παρουσιάζει το κέρδος, που θα έχουμε, αν πουλήσουμε το προϊόν στο χρόνο $t=3$, ενώ η τρίτη στήλη μας δείχνει τη προσδοκώμενη τιμή το να διατηρήσουμε το προϊόν μέχρι το χρόνο $t=4$, η οποία βασίζεται στη προσέγγιση μέσω της γραμμικής παλινδρόμησης. Επειδή η αξία αυτή αναπαριστά τα χρήματα, που λαμβάνουμε σε μία περίοδο στο μέλλον, ίσως χρειαστεί η ανάγκη αναγωγής χρησιμοποιώντας τον παράγοντα γ , ο οποίος έχει τιμή 0.95.

ΚΕΡΔΗ		
ΠΙΝΑΚΑΣ(4)	ΑΠΟΦΑΣΗ	
ΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΙΜΩΝ	EXERCISE	HOLD
1	0.03	$0.04155*0.95=\mathbf{0.03947}$
2	0.03	$0.03662*0.95=\mathbf{0.03479}$
3	0.00	$0.02397*0.95=\mathbf{0.02372}$
4	0.02	$0.03346*0.95=\mathbf{0.03178}$
5	0.10	$0.05285*0.95=0.05021$
6	0.00	$0.00414*0.95=\mathbf{0.00394}$
7	0.07	$0.00899*0.95=0.00854$
8	0.00	$0.01610*0.95=\mathbf{0.01530}$
9	0.11	$0.06032*0.95=0.05731$
10	0.02	$0.03099*0.95=\mathbf{0.02944}$

Πίνακας 4.4 Τα κέρδη εάν κάνουμε την επιλογή στο χρόνο 3 και η αναμενόμενη αξία αναμονής βασισμένη στη προσέγγιση.

Συγκρίνοντας τις δύο αυτές καταστάσεις (exercise or hold the option), επιλέγουμε τη **μεγαλύτερη τιμή**, δηλαδή στο παράδειγμά μας $Y_1 = \max[0.03, 0.03947] = 0.03947$. Αυτή η τιμή είναι απόλυτα βασισμένη στη $\bar{V}_3(a_3)$ (approximate value function). Τελικά, παρατηρούμε ότι δε θα πουλήσουμε το προϊόν μας στα δείγματα 1,2,3,4,6,8 και 10, ενώ θα το πουλήσουμε στο χρόνο $t=3$ στα δείγματα τιμών 5,7 και 9.

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για να εκτιμήσουμε και να προσδιορίσουμε τώρα το $\bar{V}_2(a_t)$ και ύστερα το $\bar{V}_1(a_t)$. Καταληκτικά, αναλύοντας αυτό το παράδειγμα θελήσαμε να εξηγήσουμε τη βασική λειτουργία της γραμμικής παλινδρόμησης.

5. Προσδιορισμός Στοχαστικών Διαδικασιών για τη μοντελοποίηση των αβεβαιοτήτων, που επηρεάζουν μία επενδυτική απόφαση

5.1 Μοντελοποίηση Τιμών Ενέργειας

5.1.1 Μοντελοποίηση τιμών καυσίμου

Στη παρούσα διπλωματική κάνουμε σύντομη περιγραφή διαφορετικών προσεγγίσεων για τη μοντελοποίηση τιμών καυσίμου. Οι πιο σημαντικές αβεβαιότητες, που συνδέονται με επενδύσεις στη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, αφορούν τα περιθώρια κέρδους. Αυτά τα περιθώρια κέρδους εξαρτώνται κυρίως από την εξέλιξη των τιμών καυσίμων, άνθρακα και ηλεκτρικής ενέργειας. Ως εκ τούτου, εστιάζουμε σε δύο βασικές προσεγγίσεις – στοχαστικές διαδικασίες για τη μοντελοποίηση αυτών των τιμών: τη Γεωμετρική Κίνηση Brown (Geometric Brownian Motion) και τη Mean-Reverting στοχαστική διαδικασία. Ως επίλογο αυτής της υποενότητας, αναφέρουμε κάποια σημαντικά στοιχεία, όσον αφορά τη ποιότητα των προβλέψεων εξέλιξης των τιμών των καυσίμων και τις επιπτώσεις για την επέκταση την παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

Πρώιμα έργα στον τομέα της μοντελοποίησης των τιμών των καυσίμων συχνά βασίζονται στη GBM στοχαστική διαδικασία. Για παράδειγμα, οι επιστήμονες Gibson και Schwartz [45] περιγράφουν την τρέχουσα τιμή του πετρελαίου ως GBM διαδικασία. Η επιλογή και χρήση των GBM στοχαστικών διαδικασιών μπορεί να εξηγηθεί μέσω του διάσημου έργου των Black και Scholes [53], οι οποίοι ανέπτυξαν ένα μοντέλο για τιμολόγηση προθεσμιακών συμβολαίων, βασισμένα στη θεώρηση, πως οι τιμές ακολουθούν GBM διαδικασία. Ωστόσο, στη δεκαετία του 90 υπήρχε το ερώτημα, εάν η θεώρηση αυτή ήταν σωστή. Οι Bessembinder et al. [36] μελέτησαν για πολλά προϊόντα (Commodities), κατά πόσον οι επενδυτές προβλέπουν mean - reversion (μέση επαναφορά των τιμών) στις τρέχουσες τιμές. Για το αργό πετρέλαιο, ανέφεραν ότι το 44% των τυπικών τιμών αναμένεται να αντιστραφεί κατά τους επόμενους οκτώ μήνες.

Ο μεγάλος επιστήμονας Schwartz [49] διατυπώνει ένα μοντέλο για τη μοντελοποίηση τιμών των εμπορευμάτων (πετρέλαιο, φυσικό αέριο, τρόφιμα, μέταλλα, κρέας σε μεγάλες ποσότητες), στο οποίο ο λογάριθμος της τρέχουσας τιμής θεωρείται ότι ακολουθεί μια mean - reverting διαδικασία των Ornstein - Uhlenbeck. Εκτός από αυτό το μοντέλο ενός παράγοντα, ο Schwartz διατυπώνει επίσης ένα μοντέλο με δύο παράγοντες, καθώς και ένα μοντέλο τριών παραγόντων. Το πλεονέκτημα των μοντέλων αυτών με τους πολλούς παράγοντες είναι η ικανότητα τους να εξετάζουν πρόσθετες παραμέτρους, που επηρεάζουν τις τιμές των εμπορευμάτων.

Ωστόσο, μία κύρια δυσκολία, αυτών των μοντέλων με πολλούς παράγοντες είναι, πως οι παράγοντες αυτοί, που χρησιμοποιούνται σε αυτά τα μοντέλα, δε παρατηρούνται άμεσα. Όταν οι τιμές των καυσίμων χρησιμοποιούνται ως μία παράμετρο εισόδου για θεμελιώδη μοντέλα αγορών ηλεκτρικής ενέργειας, οι προσεγγίσεις, που χρησιμοποιούνται πιο συχνά για τη προσομοίωση των τιμών καυσίμων, ακολουθούν GBM στοχαστική διαδικασία (Aronne et al. [57], Botterud [37]) ή mean - reverting διαδικασίες (Hundt, Sun [58]).

Σημαντικές παρατηρήσεις σχετικά με τις προβλέψεις τιμών καυσίμων

Ακόμη κι εάν μία ευρεία ποικιλία μοντέλων πρόβλεψης τιμών καυσίμων υπάρχει, η ποιότητα των προβλέψεων, που προέρχονται από αυτά τα μοντέλα, είναι συχνά υπό αμφισβήτηση. Οι Manera et al. [48] παρουσιάζουν μια μελέτη διαφορετικών μοντέλων, που χρησιμοποιούνται για την πρόβλεψη των τιμών του πετρελαίου. Οι Manera et al. παρατηρούν ότι δεν υπάρχει συναίνεση σχετικά με το κατάλληλο μοντέλο πρόβλεψης, επειδή τα ευρήματα ποικίλουν μεταξύ των μοντέλων, των χρονικών περιόδων και της συχνότητας δεδομένων. Ένα ανάλογο συμπέρασμα παρουσιάζεται από τον Fattouh [44]. Ο συγκεκριμένος συγγραφέας επανεξετάζει τις τρεις σημαντικές προσεγγίσεις, που χρησιμοποιούνται για την ανάλυση τιμής του πετρελαίου: τα μη διαρθρωτικά μοντέλα, την ανεπίσημη προσέγγιση και το πλαίσιο προσφοράς - ζήτησης. Ο Fattouh καταλήγει στο συμπέρασμα, ότι καθεμία από αυτές τις τρεις προσεγγίσεις υπόκειται σε σημαντικούς περιορισμούς, κυρίως όταν χρησιμοποιούνται για προβλέψεις.

Ενώ και οι δύο παραπάνω μελέτες των Manera et al. και Fattouh αφορούσαν μοντέλα για τη μοντελοποίηση των τιμών του πετρελαίου, τα αποτελέσματά τους είναι πιθανόν εφαρμόσιμα και για μοντέλα για τη μοντελοποίηση των τιμών του φυσικού

αερίου. Για παράδειγμα, στη Γερμανία η τιμή του φυσικού αερίου συνδέεται άμεσα με την τιμή του πετρελαίου. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματα σχετικά με τη πρόβλεψη των τιμών των καυσίμων, δυο πράγματα πρέπει να κρατήσουμε. Πρώτον, ένα τέλειο μοντέλο πρόβλεψης δεν μπορεί να ισχύει. Δεύτερον, ακόμη και αν η κατάλληλη στοχαστική διαδικασία για τη μοντελοποίηση της τιμής του καύσιμου μπορεί να αναγνωριστεί, οι προβλέψεις μπορεί να εξακολουθούν να διαφέρουν ανάλογα με τα ιστορικά δεδομένα, που χρησιμοποιήθηκαν για την εκτίμηση των παραμέτρων της διαδικασίας. Κατά τη γνώμη μας, τα ευρήματα αυτά υπογραμμίζουν τη σημασία να εξετάζονται μία ευρεία ποικιλία διαφορετικών σεναρίων των τιμών των καυσίμων σε ένα μοντέλο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας.

5.1.2 Μοντελοποίηση τιμής άνθρακα

Εκτός από τις τιμές των καυσίμων, οι τιμές του άνθρακα έχουν ισχυρό αντίκτυπο στο κόστος παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Παρόμοια με τις τιμές των καυσίμων, οι τιμές του άνθρακα μπορεί να αλλάξουν την κερδοφορία των διαφόρων τεχνολογιών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Σε σύγκριση με τις τιμές των καυσίμων, οι τιμές του άνθρακα είναι πιο δύσκολο να μοντελοποιηθούν.

Δυσκολίες στην πρόβλεψη τιμών του άνθρακα

Οι πρόσθετες δυσκολίες της μοντελοποίησης των τιμών του άνθρακα σε σύγκριση με τη μοντελοποίηση των τιμών καύσιμου είναι εξ' αιτίας της σύντομης ιστορίας του Συστήματος Εμπορίας Εκπομπών (EU ETS) και της ισχυρής επιρροής της αβέβαιης μελλοντικής νομοθεσίας.

Σύντομη Ιστορία

Το Σύστημα Εμπορίας Εκπομπών (EU ETS) ξεκίνησε το 2005. Κατά συνέπεια, το ύψος των ιστορικών δεδομένων, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάπτυξη και τη προσαρμογή των μοντέλων πρόβλεψης τιμών, είναι πολύ περιορισμένο. Επιπλέον, η πρώτη περίοδος λειτουργίας του Συστήματος Εμπορίας Εκπομπών από το 2005-2007 μπορεί να θεωρηθεί ως μιας δοκιμαστική περίοδος. Μία δραματική πτώση των τιμών θα μπορούσε να παρατηρηθεί το 2006, καθώς έγινε προφανές ότι, τα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης είχαν επιτρέψει τη λειτουργία εταιρειών με

υψηλές εκπομπές διοξειδίου του άνθρακα. Είναι αμφίβολο, αν μια τέτοια πτώση των τιμών είναι μια φυσιολογική συμπεριφορά της αγοράς.

Διαφορετικές φάσεις

Ένα άλλο πρόβλημα αποτελεί η διαίρεση του Συστήματος Εμπορίας Εκπομπών (EU ETS) σε διάφορες περιόδους εμπορίας. Μετά την πρώτη φάση, η δεύτερη περίοδος εμπορίας έχει ξεκινήσει το 2008 και λήγει το 2012. Καθώς η Ευρωπαϊκή Ένωση Αδειοδοτήσεων (European Union Allowances - EUAs) θα μπορούσε περιορισμένα να μεταφέρθει μεταξύ των δύο αυτών περιόδων, οι περίοδοι αυτές πρέπει να αντιμετωπίζονται ως ξεχωριστές αγορές. Κατά συνέπεια, τα διαφορετικά μοντέλα για τη μοντελοποίηση των τιμών άνθρακα μπορεί να είναι σημαντικά για τις περιόδους αυτές. Μια τρίτη περίοδος εμπορίας Εκπομπών αρχίζει το 2013 και τελειώνει το 2020. Τα δεδομένα από τη δεύτερη περίοδο μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τα μοντέλα των τιμών στην εξέταση της τρίτης περιόδου.

Νομικό πλαίσιο και βασικές αρχές

Οι κύριοι παράγοντες, που επηρεάζουν το προσδιορισμό της τιμής των εκπομπών CO₂ είναι τα ακόλουθα:

- (i) η πολιτική και τα θέματα διαχείρισης
- (ii) θεμελιώδη στοιχεία της αγοράς, που αφορούν άμεσα την παραγωγή CO₂ (Benz και Truck [39]).

Και οι δύο παράγοντες είναι εξαιρετικά αβέβαιοι, ιδιαίτερα σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Για παράδειγμα, τα Εθνικά Σχέδια κατανομής (The National Allocation Plans) για τη δεύτερη περίοδο εμπορίας, που καθορίζουν το ύψος των επιτρεπόμενων εκπομπών, έχουν ολοκληρωθεί από τον Ιανουάριο του 2007. Σήμερα μόνο το ύψος επιτρεπόμενων εκπομπών μέχρι το 2012 είναι καθορισμένο. Είναι πολύ δύσκολο να προβλεφτούν τιμές χωρίς να γνωρίζουν τις μελλοντικές συνθήκες. Εντούτοις, για επενδύσεις σε μονάδες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, απαιτούνται μακροπρόθεσμες προβλέψεις τιμών.

Στη συνέχεια, παραθέτουμε μια επισκόπηση μερικών προσεγγίσεων για τη μοντελοποίηση των τιμών του άνθρακα. Καθώς το σύστημα εμπορίας εκπομπών είναι σχετικά νέο, μόνο μερικά μοντέλα για τη προσομοίωση των τιμών του CO₂ ισχύουν.

Τα περισσότερα από αυτά μοντελοποιούν τρέχουσες τιμές. Παρόλα αυτά, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα αυτά, καθώς περιγράφουν κάποια τυπικά χαρακτηριστικά των τιμών του CO₂.

Οι Paolella και Taschini [54] αναλύουν τις τρέχουσες τιμές των επιτρεπόμενων εκπομπών CO₂ στην Ευρωπαϊκή Ένωση. Συζητούν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τη μοντελοποίηση των τιμών άνθρακα:

- 1) μια προσέγγιση, που βασίζεται σε θεμελιώδεις αρχές του CO₂ και
- 2) μια προσέγγιση βασισμένη στις μελλοντική - τρέχουσα ισοτιμία του CO₂.

Ακολουθώντας τη πρώτη προσέγγιση, οι Paolella και Taschini εξετάζουν, εάν οι τιμές των καυσίμων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως υποκατάστατο για τις τιμές του CO₂. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι το επίπεδο τιμών των καυσίμων δεν εξηγεί πλήρως το επίπεδο τιμών του CO₂ (2005).

Όσον αφορά τη δεύτερη προσέγγιση, οι Paolella και Taschini υποστηρίζουν ότι, λόγω των αβεβαιοτήτων, που σχετίζονται με τις εκπομπές (π.χ. η πολιτική αβεβαιότητα), η ανάλυση των σεναρίων τιμών, που βασίζεται στην ύπαρξη μιας καλής μελλοντικής - τρέχουσας ισοτιμίας, δεν είναι σωστή. Ως εναλλακτική λύση, οι Paolella και Taschini προτείνουν διαφορετικά στοχαστικά μοντέλα GARCH (**G**eneralized **a**utoregressive **c**onditional **h**eteroscedasticity (Bollerslev [59])).

Οι Benz και Trück εξετάζουν τη δυναμική της τρέχουσας τιμής των δικαιωμάτων εκπομπής στο Σύστημα Εμπορίας Εκπομπών (EU ETS). Προτείνουν δύο διαφορετικά στοχαστικά μοντέλα, το AR-GARCH μοντέλο και το Markov μοντέλο (Markov regime - switching model). Παρόλο που το μοντέλο GARCH είναι ελαφρώς χειρότερο, τα μοντέλα με συνεχή μεταβλητότητα, όπως η κατανομή Gaussian, λειτουργούν σαφώς χειρότερα. Οι Benz και Trück εξηγούν την καλύτερη απόδοση των μοντέλων με όρους διακύμανσης από την εξάρτηση των τιμών του άνθρακα στις βασικές αρχές.

Οι Spangardt και Meyer [51] χρησιμοποιούν μία διαφορετική στοχαστική διαδικασία (mean reverting), για να μοντελοποιήσουν της τρέχουσες τιμές του άνθρακα. Με αυτόν τον τρόπο, οι συγγραφείς υποθέτουν ένα ετήσιο ρυθμό αύξησης των τιμών του άνθρακα της τάξης του 3%.

Οι Dannenberg και Ehrenfeld [41] θεωρούν, πως οι τιμές του άνθρακα μεταβάλλονται γύρω από το οριακό κόστος μείωσης των εκπομπών. Ως εκ τούτου, οι Dannenberg και Ehrenfeld προτείνουν να μοντελοποιήσουν την τρέχουσα τιμή του άνθρακα με τη μέθοδο (mean reverting). Για να συνειδητοποιήσουν τις επιπτώσεις των νέων πληροφοριών, που μπορούν να αλλάξουν σημαντικά τις προσδοκίες του οριακού κόστους μείωσης των εκπομπών, οι Dannenberg και Ehrenfeld εισάγουν άλματα, όσον αφορά το επίπεδο, στο οποίο οι τιμές επανέρχονται.

Οι Δασκαλάκης et al. [40] αναλύουν τρέχουσες και μελλοντικές τιμές από τρεις διαφορετικές αγορές: Nordpool, Powernext και European Climate Exchange (ECX). Η ανάλυση των τρεχουσών τιμών μας αναφέρει, πως οι τρέχουσες τιμές πιθανώς χαρακτηρίζονται από άλματα. Μια δοκιμή μεταξύ έξι διαφορετικών στοχαστικών διαδικασιών δείχνει καλύτερα αποτελέσματα για τη στοχαστική διαδικασία GBM με άλματα.

Οι Seifert et al. [50] παρουσιάζουν ένα στοχαστικό μοντέλο ισορροπίας για τις τρέχουσες τιμές των εκπομπών CO₂. Οι Seifert et al. αναφέρουν ότι οι τρέχουσες τιμές των εκπομπών CO₂ δεν παρουσιάζουν μέση επαναφορά (mean reversion), ούτε πρέπει να ακολουθήσουν οποιαδήποτε εποχικότητα. Η μεταβλητότητα των τιμών εξαρτάται από το χρόνο και τη τιμή, και αυξάνεται, όταν το τέλος της περιόδου εμπορίας εκπομπών πλησιάζει.

Μια συνέπεια της σχετικά σύντομης ύπαρξης του Συστήματος Εμπορίας Εκπομπών (EU ETS) είναι η έλλειψη των καθιερωμένων μοντέλων πρόβλεψης των τιμών. Μέχρι στιγμής, δεν υπάρχουν κοινώς αποδεκτά μοντέλα για τις μακροπρόθεσμες προβλέψεις τιμών, που απαιτούνται για μοντέλα επέκτασης της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Ως εκ τούτου, τα περισσότερα μοντέλα επέκτασης της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας χρησιμοποιούν είτε ντετερμινιστικές τιμές άνθρακα (Sun et al. [55], Swider και Weber [60]), ή εξετάζουν διαφορετικά προκαθορισμένα σενάρια στο πλαίσιο βελτιστοποίησης (Jensen και Meibom [61], Klein et al. [46]).

5.1.3 Μοντελοποίηση Τιμών Ηλεκτρικής Ενέργειας

Οι τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας μπορούν είτε να μοντελοποιηθούν ως μια στοχαστική διαδικασία, ή να καθορίζονται από ένα θεμελιώδες μοντέλο αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Σε αυτή την ενότητα αναλύουμε την πρώτη προσέγγιση.

Υπάρχουν δυο διαφορετικές προσεγγίσεις για τη μοντελοποίηση των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας ως στοχαστική διαδικασία. Όσον αφορά τη πρώτη, αναφέρεται σε οικονομικά μοντέλα, που εστιάζουν στη στοχαστικότητα και δεν λαμβάνουν υπ' όψιν την επιρροή ντετερμινιστικών αποτελεσμάτων. Αντίθετα, τα οικονομετρικά μοντέλα βασίζονται στη θεώρηση, ότι οι αλλαγές τιμών προέρχονται από μια υπέρθεση των ντετερμινιστικών και στοχαστικών επιδράσεων. Στη συνέχεια, θα συζητήσουμε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας, που μοντελοποιούνται ως μια στοχαστική διαδικασία σε σχέση με τα θεμελιώδη μοντέλα της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας.

Πλεονεκτήματα και αδυναμίες

Τα χρηματοοικονομικά και οικονομετρικά μοντέλα ανταποκρίνονται καλύτερα στη βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη τιμών ηλεκτρικής ενέργειας (Schmutz και Elkuch [62]). Τα περισσότερα από αυτά μοντέλα εστιάζουν σε μια καλή προσέγγιση των χαρακτηριστικών των τρεχουσών τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας. Σε σύγκριση με τα θεμελιώδη μοντέλα αγορών ηλεκτρικής ενέργειας, τα χρηματοοικονομικά και οικονομετρικά μοντέλα έχουν τα ακόλουθα πλεονεκτήματα:

- Γενικά, τα χρηματοοικονομικά και οικονομετρικά μοντέλα εκμεταλλεύονται τις στατιστικές ιδιότητες της κατανομής των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας καλύτερα από ότι τα θεμελιώδη μοντέλα.
- Υπάρχουν αρκετά διαθέσιμα δεδομένα για τη προσαρμογή αυτών των μοντέλων
- Προσομοιώσεις, βασισμένες σε ένα οικονομικό ή ένα οικονομετρικό μοντέλο, είναι πιο γρήγορα συγκρίσιμες, σε σχέση με τα θεμελιώδη μοντέλα της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας.
- Τα χρηματοοικονομικά και οικονομετρικά μοντέλα δεν εξαρτώνται από το είδος του ανταγωνισμού στην υπό εξέταση αγορά. Η μονή θεώρηση είναι, πως

ο βαθμός του ανταγωνισμού δεν αλλάζει. Για τις βραχυπρόθεσμες περιόδους, η προϋπόθεση αυτή πληρείται.

Ωστόσο, τα χρηματοοικονομικά και οικονομετρικά μοντέλα έχουν δυο μειονεκτήματα, που τα καθιστούν ακατάλληλα για μακροπρόθεσμη επένδυση.

1. Τα χρηματοοικονομικά και οικονομετρικά μοντέλα βασίζονται σε μια σχετικά σταθερή δομή της αγοράς. Δεδομένου ότι τα μοντέλα προσαρμόζονται, χρησιμοποιώντας ιστορικά δεδομένα, οι προβλέψεις των τιμών μπορεί πλέον να μην είναι ακριβείς, αν αλλάζουν τα θεμελιώδη δεδομένα της αγοράς. Για παράδειγμα, τέτοια μοντέλα δεν μπορούν να προβλέψουν τις επιπτώσεις της αύξησης της διείσδυσης της αιολικής ενέργειας, αν αυτά τα αποτελέσματα δεν παρατηρούνται ακόμα στις αγορές.
2. Όταν τέτοια μοντέλα χρησιμοποιούνται για τα μοντέλα επέκτασης της παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, υποστηρίζεται, σε γενικές γραμμές, πως η κατασκευή νέων μονάδων δεν έχει επίδραση στις τιμές, που παρατηρούνται.

Σε αυτή τη παράγραφο παραθέεται μια σύντομη επισκόπηση διαφορετικών χρηματοοικονομικών και οικονομετρικών μοντέλων για τη μοντελοποίηση της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας. Όπως μπορεί να γίνει φανερό από την ευρεία ποικιλία των διαφορετικών προσεγγίσεων, δεν υπάρχει συναίνεση σχετικά με τη καλύτερη μέθοδο.

Ο Deng [42] προτείνει τρεις διαφορετικές στοχαστικές διαδικασίες (mean – reverting jump - diffusion) για τη μοντελοποίηση της τρέχουσας τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας. Ο Deng συμπεριλαμβάνει σε αυτά τα μοντέλα μια επιπλέον διαδικασία, η οποία μπορεί να συσχετιστεί με τις τιμές ηλεκτρικής ενέργειας. Αυτές οι διαδικασίες μπορεί να είναι οι τρέχουσες τιμές καύσιμου και η ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας. Για τον υπολογισμό υψηλών τιμών ηλεκτρικής ενέργειας για μικρές περιόδους, που ίσως αυτό μπορεί να προκληθεί από αναγκαστική διακοπή της παράγωγης ηλεκτρικής ενέργειας, ο Deng επεκτείνει το βασικό μοντέλο σε ένα μοντέλο Markov (regime – switching model). Αυτό το μοντέλο επιτρέπει την εναλλαγή μεταξύ κανονικών και υψηλών τιμών.

Οι Lucia και Schwartz [47] διαμορφώνουν ένα μοντέλο τιμολόγησης για τρέχουσες και παράγωγες τιμές, με βάση τις παρατηρήσεις από την αγορά Nordpool, και το σκανδιναβικό χρηματιστήριο ηλεκτρικής ενέργειας. Για την τρέχουσα αγορά,

χρησιμοποιούν ένα απλό μοντέλο με ένα συντελεστή, που αποτελείται από μια ντετερμινιστική συνάρτηση εξαρτώμενη από το χρόνο και μια στοχαστική διαδικασία των Ornstein - Uhlenbeck. Η ντετερμινιστική συνάρτηση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δηλώσει εποχικότητα στο μοντέλο. Το μοντέλο με ένα συντελεστή επεκτείνεται από μία δεύτερη στοχαστική διαδικασία, όπως η Arithmetic Brownian Motion (ABM).

Ο Barlow [35] χρησιμοποιεί ένα απλό μοντέλο προσφοράς - ζήτησης για να καθορίσει τις τρέχουσες τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας. Η ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας μοντελοποιείται μέσω της στοχαστικής διαδικασίας των Ornstein - Uhlenbeck. Το μοντέλο, που προκύπτει για τις τρέχουσες τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας, είναι ένα μοντέλο διάχυσης (Diffusion Model), που περιλαμβάνει τις τιμές αιχμής.

Οι Escribano et al. [43] παρουσιάζουν ένα μοντέλο πολλών συντελεστών για τη μοντελοποίηση των τρεχουσών τιμών. Το μοντέλο εμπεριέχει εποχικότητα, επαναφορά τιμών (mean-reversion), στοχαστική μεταβλητότητα και άλματα. Για να επιτρέψουν άλματα στο μοντέλο τους, οι Escribano et al. χρησιμοποιούν ένα ρητό όρο άλματος.

Οι Geman και Roncoroni [56] εισάγουν ένα χαρακτηριστικό άλματος - επαναφοράς (jump - reversion) στο μοντέλο τρεχουσών τιμών για να υπολογίσουν τα άλματα τιμών. Καθορίζουν δυο διαφορετικές καταστάσεις, βασισμένες στην οριακή τιμή. Εάν η πρόσφατη τιμή είναι κάτω από το όριο, μόνο θετικά άλματα μπορούν να συμβούν. Αν η τιμή είναι πάνω από το όριο, μόνο αρνητικά άλματα είναι πιθανά. Η ένταση - συχνότητα των αλμάτων μπορεί να εξαρτάται από το χρόνο.

Οι Weron και Misiorek [52] συγκρίνουν δώδεκα μεθόδους (χρονοσειρές) για τη βραχυπρόθεσμη πρόβλεψη τρεχουσών τιμών. Αυτές οι μέθοδοι περιλαμβάνουν μοντέλα αυτοπαλινδρόμησης, μοντέλα μεταγωγής (regime - switching model) και μοντέλα διάχυσης - άλματος mean - reverting. Η απόδοση των μοντέλων αυτών ελέγχεται μέσω χρονοσειρών από την αγορά της Καλιφόρνιας και τη Σκανδιναβική αγορά.

5.2 Ανάλυση στοχαστικών διαδικασιών

Στις επενδύσεις είναι επιθυμητό να κατανοήσουμε τα χαρακτηριστικά μιας χρονοσειράς, προσδιορίζοντας τον παράγοντα της αβεβαιότητας. Στη παρούσα διπλωματική στοχεύουμε να αναλύσουμε ορισμένες στοχαστικές διαδικασίες, οι οποίες μπορούν να βοηθήσουν στη κατανόηση των βασικών χαρακτηριστικών του παράγοντα της αβεβαιότητας. Πληροφορίες αντλήσαμε από τη πηγή [5]. Αυτές οι στοχαστικές διαδικασίες, οι οποίες μπορούν να αποτελέσουν δομικά στοιχεία για την ανάπτυξη πολύπλοκων μοντέλων, διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

1. Fat tails
2. Mean reversion

Στην αρχή, αφού έχουμε επιλέξει την κατάλληλη στοχαστική διαδικασία, έπειτα θα πρέπει να εξηγήσουμε, πως οι παράμετροι αυτής της στοχαστικής διαδικασίας μπορούν να προσδιοριστούν με βάση τα ιστορικά δεδομένα. Μετέπειτα, αφού οι παράμετροι έχουν προσδιοριστεί, μπορούμε να εκτιμήσουμε τον παράγοντα της αβεβαιότητας μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας και να παράγουμε μελλοντικά σενάρια για την επένδυσή μας. Άρα, σε αυτή την ενότητα θα αναφερθούμε στο προσδιορισμό (μοντελοποίηση) αβεβαιοτήτων μέσω ορισμένων στοχαστικών διαδικασιών.

Όπως αναφερθήκαμε προηγουμένως, οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες. Εμείς θα αναφερθούμε αναλυτικά για την κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών Fat tails, καθώς επίσης και για την στοχαστική διαδικασία GBM (Geometric Brownian Motion), η οποία αποτελεί ένα θεμελιώδες παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας, ενώ για τις στοχαστικές διαδικασίες mean – reversion θα αναφερθούμε σε μικρότερη κλίμακα παρακάτω. Η διαδικασία GBM δεν λειτουργεί ουσιαστικά ούτε σαν Mean reversion, ούτε σαν Fat tails, αλλά μέσα από κάποιες γενικεύσεις μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποια χαρακτηριστικά και των δύο.

5.2.1 GBM (Geometric Brownian Motion)

Η στοχαστική διαδικασία GBM περιγράφει τη τυχαία συμπεριφορά της τιμής ενός προϊόντος $S(t)$ σε συναρτήσει με το χρόνο. Η GBM καθορίζεται ως εξής:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (1),$$

Όπου W είναι μία τυπική κίνηση Brown, δηλαδή μία ειδική διαδικασία διάχυσης, που χαρακτηρίζεται από ανεξάρτητες ειδικά κατανομημένες μεταβολές ακολουθώντας κανονική ή Gaussian κατανομή με μέση τιμή μηδενική και τυπική απόκλιση ίση με τη τετραγωνική ρίζα της χρονικής περιόδου. Ανεξαρτησία στις μεταβολές σημαίνει ότι το μοντέλο είναι μία διαδικασία Markov, η οποία είναι ένας συγκεκριμένος τύπος διαδικασίας, για τον οποίο μόνο η πρόσφατη τιμή του προϊόντος έχει βαρύνουσα σημασία για τον υπολογισμό - εκτίμηση των αβεβαιοτήτων των γεγονότων, συμπεριλαμβάνοντας παράλληλα και τις μελλοντικές τιμές του προϊόντος. Με πιο απλά λόγια, για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων, που αφορούν τις μελλοντικές τιμές των προϊόντων, η γνώση του παρελθόντος δεν προσθέτει τίποτα στη γνώση του παρόντος.

Ο όρος d μας υποδηλώνει ότι η παραπάνω εξίσωση (1) είναι συνεχής στοχαστική διαδικασία στο χρόνο, όπου η αξία της τιμής μπορεί να αλλάζει σε οποιοδήποτε χρονικό σημείο. Η ιδιότητα των ανεξάρτητων ειδικά κατανομημένων μεταβολών είναι πολύ σημαντική και θα αξιοποιηθεί στη προσαρμογή, όπως και στη προσομοίωση της τυχαίας συμπεριφοράς των τιμών του προϊόντος.

Χρησιμοποιώντας μερικές βασικές στοχαστικές μεθόδους λογισμού, η εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$d \log S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \quad (2),$$

Όπου \log δηλώνει τον τυπικό φυσικό λογάριθμο. Η διαδικασία ακολουθώντας τη χρήση λογαρίθμου ονομάζεται Αριθμητική κίνηση Brown. Οι μεταβολές στο λογάριθμο της αξίας του προϊόντος ακολουθούν κανονική κατανομή. Η εξίσωση (2), ενσωματώνοντάς της τις χρονικές στιγμές t και u , γράφεται ως εξής:

$$\log S(u) - \log S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (u - t) + \sigma (W(u) - W(t)) \sim N \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) (u - t), \sigma^2 (u - t) \right) \quad (3)$$

Για $u = T, t = 0$ και μέσω της ύψωσης σε δύναμη, η λύση για την εξίσωση GBM επιτυγχάνεται ως εξής:

$$S(T) = S(0) \exp\left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right]T + \sigma W(T)\right) \quad (4)$$

Αυτή η εξίσωση μας δείχνει, ότι η τιμή του προϊόντος στη διαδικασία GBM ακολουθεί μία λογαριθμο - κανονική κατανομή, ενώ οι λογαριθμικές επιστροφές (logarithmic returns: $\log \left[\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right]$) ακολουθούν κανονική κατανομή. Οι μέση τιμή και η διακύμανση της $S(T)$ μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν χρησιμοποιώντας τη παραπάνω λύση, επειδή η $W(T)$ είναι γκαουσιανή με μέση τιμή μηδενική και διακύμανση T . Οπότε η μέση τιμή και η διακύμανση της $S(T)$ δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$E[S(T)] = S(0)e^{\mu T} \text{ και } Var(S(T)) = e^{2\mu T} S^2(0)(e^{\sigma^2 T} - 1) \quad (5)$$

Για να προσομοιώσουμε αυτή τη στοχαστική διαδικασία, η συνεχής συνάρτηση μεταξύ διακριτών χρονικών στιγμών $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ απαιτεί να επιλυθεί ως ακολούθως:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp\left(\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right](t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}\right) \quad (6)$$

Όπου $Z_1, Z_2, Z_3 \dots \dots Z_n$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές από τη τυπική κανονική κατανομή. Η προσομοίωση είναι ακριβής και δεν εισάγει σφάλμα διακριτοποίησης, εξαιτίας του γεγονότος ότι η εξίσωση μπορεί να επιλυθεί ακριβώς.

5.2.2 FAT TAILS: GARCH MODEL

Τα μοντέλα GARCH εμφανίστηκαν για πρώτη φορά από το διάσημο επιστήμονα Bollerslev [59]. Το βασικό γνώρισμα ενός GARCH μοντέλου είναι, ότι η μεταβλητότητα αλλάζει με το χρόνο και με τα στοιχεία - πληροφορίες του παρελθόντος. Σε αντίθεση με το GBM μοντέλο, το οποίο θεωρεί ότι η μεταβλητότητα παραμένει σταθερή. Το GBM μοντέλο θα μπορούσε εύκολα να γενικευθεί έχοντας μία χρονοεξαρτημένη, αλλά πλήρως ντετερμινιστική μεταβλητότητα, χωρίς να εξαρτάται από την κατάσταση της διαδικασίας σε οποιαδήποτε χρόνο.

Απεναντίας το GARCH μοντέλο εξαρτάται από την εξέλιξη της διαδικασίας. Πιο συγκεκριμένα, το GARCH μοντέλο θεωρεί ότι η υποθετική διακύμανση, η οποία εξαρτάται από τις διαθέσιμες πληροφορίες μέχρι τη χρονική στιγμή t_i , δίνεται από έναν γραμμικό συνδυασμό περασμένων διακυμάνσεων $\sigma(t_{i-1})^2$ και τετραγωνικών τιμών περασμένων επιστροφών. Οπότε, θα έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\frac{\Delta S(t_i)}{S(t_i)} = \mu \Delta t_i + \sigma(t_i) \Delta W(t_i) \quad (7)$$

$$\sigma(t_i)^2 = \omega \bar{\sigma}^2 + \alpha \sigma(t_{i-1})^2 + \beta \varepsilon(t_{i-1})^2 \quad (8)$$

$$\varepsilon(t_i)^2 = (\sigma(t_i) \Delta W(t_i))^2 \quad (9),$$

$$\text{όπου } \Delta S(t_i) = S(t_{i+1}) - S(t_i)$$

και η εξίσωση (7) είναι στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου και μέρος της εξίσωσης (1).

Στα GARCH μοντέλα η διακύμανση είναι διαδικασία αυτοπαλινδρόμησης (autoregressive process) γύρω από ένα ποσοστό της μακροχρόνιας μέσης διακύμανσης $\bar{\sigma}^2$. Το μοντέλο GARCH παίρνοντας $\omega=0$ και $\beta=1-\alpha$ μετατρέπεται σε εκθετικό μοντέλο κινητού μέσου όρου και δίνει περισσότερη βαρύτητα στις πρόσφατες παρατηρήσεις. Επιπρόσθετα, το μοντέλο GARCH μπορεί να γενικευθεί σε ένα GARCH(p,q) μοντέλο. Αυτές οι παράμετροι μπορούν να προσδιοριστούν μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων ή μέσω της μέγιστης πιθανοφάνειας, με το περιορισμό όμως $\alpha+\beta+\omega=1$. Οπότε, τα αποτελέσματα του GARCH μοντέλου ακολουθούν μία μη Gaussian κατανομή, η οποία ονομάζεται Fat tails.

Οι Fat tails κατανομές επιτρέπουν τη χρήση τυχαίων μεταβλητών έχοντας τέτοιες κατανομές, όπου οι τιμές τους είναι πιο ακραίες από ότι στη περίπτωση της κανονικής ή Gaussian κατανομής και συνεπώς ταιριάζουν περισσότερο σε μοντέλα μεγάλης αβεβαιότητας. Οπότε τα αποτελέσματα στο μοντέλο GARCH θα τείνουν να είναι πιο αβέβαια σε σχέση με τα αποτελέσματα του μοντέλου GBM. Αυτή η συγκεκριμένη δομή του GARCH μοντέλου επιτρέπει το διαχωρισμό της μεταβλητότητας, όπου σημαίνει ότι μία περίοδο υψηλής μεταβλητότητας θα ακολουθείται από υψηλή μεταβλητότητα και αντίστροφα μία περίοδο χαμηλής

μεταβλητότητας θα ακολουθείται από χαμηλή μεταβλητότητα. Αυτή η κατάσταση παρατηρείται συχνά στα οικονομικά δεδομένα.

Το GARCH μοντέλο μετά από μία μεγάλη έρευνα του Bollerslev μπορεί να διακριθεί σε εκθετικό μοντέλο (EGARCH), σε threshold GARCH μοντέλο (TGARCH) και σε μη γραμμικό GARCH μοντέλο (NGARCH). Πιο συγκεκριμένα, το NGARCH μοντέλο είναι μία ενδιαφέρουσα επέκταση του GARCH μοντέλου, επειδή επιτρέπει ασύμμετρη συμπεριφορά στη μεταβλητότητα. Δηλαδή με άλλα λόγια, θετικές επιστροφές δείχνουν χαμηλότερη μεταβλητότητα, ενώ αρνητικές επιστροφές δείχνουν μία αύξηση στη μεταβλητότητα. Το NGARCH μοντέλο διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\Delta S(t_i)}{S(t_i)} = \mu \Delta t_i + \sigma(t_i) \Delta W(t_i)$$

$$\varepsilon(t_i)^2 = (\sigma(t_i) \Delta W(t_i))^2$$

$$\sigma(t_i)^2 = \omega + \alpha \sigma(t_{i-1})^2 + \beta (\varepsilon(t_{i-1}))^2 - \gamma \sigma(t_{i-1})^2$$

Οι παράμετροι NGARCH ω , α και β είναι θετικοί και τα α , β , γ υπόκεινται στο περιορισμό: $\alpha + \beta(1 + \gamma^2) < 1$. Συγκρίνοντας το με το μοντέλο GARCH, αυτό το μοντέλο περιέχει μία επιπρόσθετη παράμετρο γ , η οποία είναι μία προσαρμογή για τα νέα αποτελέσματα. Στη περίπτωση που $\gamma=0$, οδηγούμαστε στο συμμετρικό μοντέλο GARCH, στο οποίο θετική και αρνητική $\varepsilon(t_{i-1})$ έχουν το ίδιο αποτέλεσμα στην υποθετική διακύμανση.

Παρόλο που η διακύμανση αλλάζει με το χρόνο, αυτή είναι γνωστή και σταθερή μεταξύ των χρονικών στιγμών t_{i-1} και t_i . Με άλλα λόγια, η διακύμανση στα μοντέλα GARCH είναι τοπικά σταθερή. Συνεπώς, υποθέτοντας τη διακύμανση τη χρονική στιγμή t_{i-1} , η πυκνότητα της διαδικασίας στην επόμενη χρονική στιγμή είναι ακόμη κανονική. Επιπρόσθετα, οι υποθετικές επιστροφές είναι ακόμη ανεξάρτητες. Οπότε, η συνάρτηση πιθανοφάνειας (the log - likelihood function) για τα σενάρια x_1, x_2, \dots, x_n , όπου $X_i = \frac{\Delta S(t_i)}{S(t_i)}$ γράφεται ως εξής:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f_{\theta}(X_i, X_{i-1})$$

$$f_{\theta}(X_i; X_{i-1}) = f_N(x_i; \mu, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$L(\theta) = \text{constant} + \frac{1}{2} \left(-\log(\sigma_i^2) - \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma_i^2} \right) \quad (10)$$

Όπου f_{θ} συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής. Για να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση (the log-likelihood function) , αρκεί να μεγιστοποιήσουμε την εξίσωση (10).

5.2.3 FAT TAILS: JUMP DIFFUSION MODELS

Σε σύγκριση με την κανονική κατανομή των επιστροφών του GBM μοντέλου, οι επιστροφές λογαριθμικού τύπου του GBM μοντέλου με άλματα είναι συχνά κατανομή Fat tails. Οπότε, ένα άλλο μοντέλο με κατανομή Fat tails είναι το μοντέλο Jump Diffusion με σύνθετα άλματα Poisson. Σε αυτό το μοντέλο, μία πρότυπη χρονικά ομοιογενής διαδικασία Poisson δείχνει την άφιξη των αλμάτων, και τα μεγέθη των αλμάτων αποτελούν τυχαίες μεταβλητές με τυπική Gaussian κατανομή ή εκθετική κατανομή. Ο επιστήμονας Merton [64] εφάρμοσε αυτό το μοντέλο για την αποτίμηση συμβολαίων για μετοχές, χρησιμοποιώντας τα άλματα. Το μοντέλο αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t)dJt,$$

Όπου ξανά η μεταβλητή W_t είναι μία μεταβλητή της διαδικασίας Wiener και Jt είναι μία διαδικασία άλματος. Η μεταβλητή Jt δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$J_t = \sum_{j=1}^{N_T} (Y_j - 1)$ or $dJ(t) = (Y_{N(t)} - 1)dN(t)$, όπου $(N_T)_T \geq 0$ ακολουθεί μία ομοιογενής κατανομή Poisson με παράμετρο λ , και συνεπώς ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λT . Η κατανομή Poisson αποτελεί μία διακριτή κατανομή πιθανότητας, η οποία εκφράζει τη πιθανότητα εμφάνισης μίας σειράς γεγονότων, που συμβαίνουν σε μία καθορισμένη χρονική περίοδο.

Δεδομένου ότι η κατανομή Poisson είναι μία διωνυμική κατανομή, όπου ο αριθμός των επαναλήψεων (n) του πειράματος Bernoulli τείνει στο άπειρο και κάθε προσπάθεια του πειράματος έχει πιθανότητα επιτυχίας $(\frac{\lambda}{n})$, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα

να αποτελεί μοντέλο εμφάνισης σπάνιων γεγονότων. Για μία κατανομή Poisson με παράμετρο λT , η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η ακόλουθη:

$$f_p(x, \lambda T) = \frac{\exp(-\lambda T) (\lambda T)^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots$$

Η διαδικασία Poisson $(N_T)_{T \geq 0}$ καταμετρά τον αριθμό των αφίξεων σε διάστημα $[1, T]$ και Y_j είναι το μέγεθος του j -th άλματος. Οι μεταβλητές Y αποτελούν ανεξάρτητες ιδανικά κατανεμημένες λογαριθμο-κανονικές μεταβλητές ($Y_j \sim \exp(N(\mu_Y, \sigma_Y^2))$), οι οποίες είναι επίσης ανεξάρτητες από τη διαδικασία Brown W και από τη βασική διαδικασία Poisson N . Επιπρόσθετα, στη περίπτωση Jump Diffusion έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις, οι οποίες εκφράζουν το επίπεδο τιμών ενός προϊόντος λογαριθμικά:

$$d \log S(t) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) + \log(Y_{N(t)}) dN(t) \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$d \log S(t) = \left(\mu + \lambda \mu_Y - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) + [\log(Y_{N(t)}) dN(t) - \mu_Y \lambda dt]$$

Όπου τώρα τόσο το άλμα μεταξύ των αγκυλών όσο και οι μεταβλητές διάχυσης έχουν μηδενική μέση τιμή.

Η λύση για το παραπάνω μοντέλο για τα επίπεδα τιμών S περιγράφεται εύκολα με την ενσωμάτωση της λογαριθμικής εξίσωσης ως εξής:

$$S(T) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W(T) \right) \prod_{j=1}^{N(T)} Y_j$$

Η διακριτοποίηση της παραπάνω εξίσωσης για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα Δt είναι η ακόλουθη: $S(t) = S(t - \Delta t) \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t \right) \prod_{j=1}^{n_t} Y_j$, όπου το ε ακολουθεί κανονική κατανομή, δηλαδή $\varepsilon \sim N(0,1)$ και το $n_t = N_t - N_{t-\Delta t}$ μετρά άλματα ανάμεσα στα χρονικά διαστήματα $(t - \Delta t)$ και t . Η παραπάνω λύση του μοντέλου Jump Diffusion μπορεί να γραφεί για λογαριθμικές επιστροφές ως εξής:

$$X(t) := \Delta \log(S(t)) = \log(S(t)) - \log(S(t - \Delta t)) \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$X(t) = \Delta \log(S(t)) = \mu^* \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t + \Delta J_t^*$$

Όπου τα άλματα ΔJ_t^* στο χρονικό διάστημα Δt και η παράμετρος μ^* ορίζονται ως εξής: $\Delta J_t^* = \sum_{j=1}^{n_t} \log(Y_j) - \lambda \Delta t \mu_Y$, $\mu^* = (\mu + \lambda \mu_Y - \frac{1}{2} \sigma^2)$, όπου τα άλματα ΔJ_t^* έχουν μηδενική μέση τιμή.

5.2.4 FAT TAILS VARIANCE GAMMA (VG) PROCESS

Αυτή η στοχαστική διαδικασία αποτελεί ακόμη ένα τρόπο, ώστε να επιτευχθεί στοχαστική διαδικασία με Fat tails. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω μίας διαδικασίας, που προκύπτει από τη χρονική μεταβολή της διαδικασίας Brown με μία ανεξάρτητη μεταβλητή. Η ανεξάρτητη μεταβλητή αποτελεί μία διαδικασία με ανεξάρτητες και σταθερές μεταβολές. Με άλλα λόγια, αντί η στοχαστική διαδικασία αυτή να εξαρτάται από τη μεταβλητότητα, όπως στα GARCH μοντέλα ή σε άλλα διάφορα στοχαστικά μοντέλα και αντί επίσης να γίνει προσθήκη μίας πηγής τυχαιότητας - αβεβαιότητας, σαν π.χ. τα άλματα, αυτή η στοχαστική διαδικασία προσδίδει στο χρόνο της διαδικασίας (π.χ. χρόνος επένδυσης ή χρόνος λειτουργίας της αγοράς) τυχαιότητα μέσω της παραπάνω μεταβλητής. Δύο μοντέλα, που βασίζονται σε αυτή τη διαδικασία είναι η διαδικασία Variance Gamma (VG) και Normal Inverse Gaussian (NIG). Αυτές αποτελούν μία υποκατηγορία των γενικευμένων υπερβολικών κατανομών (generalised hyperbolic, GH - distributions) και εξαρτώνται από τη τάση, τη μεταβλητότητα της διαδικασίας Brown και από τη διακύμανση της παραπάνω μεταβλητής (subordinator).

Τόσο η διαδικασία VG, όσο και η διαδικασία NIG έχουν εκθετικές ουρές και ο ρυθμός απόσβεσης στην ουρά τους είναι ο ίδιος και για τις δύο κατανομές και μικρότερος από ότι για την κανονική κατανομή. Συνεπώς, αυτά τα μοντέλα για αυτούς τους ουσιαστικούς λόγους μπορούν να πετύχουν στοχαστική διαδικασία με Fat tails.

Εμείς, εδώ, θα επικεντρωθούμε στη διαδικασία VG, η οποία αποτελεί μία κανονική κατανομή, όπου οι παράμετροί τους δίνονται από τη κατανομή Gamma της subordinator. Η φιλοσοφία δεν είναι τελείως διαφορετική από το μοντέλο GBM με άλματα, όπου η διαδικασία επιστροφής είναι επίσης μία μίξη.

Η κατανομή VG εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο τομέα της οικονομίας από τους Madan και Seneta [65]. Το μοντέλο αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$d \log S(t) = \bar{\mu} dt + \bar{\theta} dg(t) + \bar{\sigma} dW(g(t)) \quad S(0) = S_0$$

Όπου $\bar{\mu}$, $\bar{\theta}$, $\bar{\sigma}$ είναι πραγματικές σταθερές και ισχύει $\bar{\sigma} \geq 0$. Αυτό το μοντέλο διαφέρει από τη διαδικασία Brown κυρίως στον όρο g_t . Στη πραγματικότητα, το μοντέλο αυτό εισάγει τον όρο g_t για να χαρακτηρίσει το χρόνο λειτουργίας - δραστηριότητας της αγοράς. Επίσης, ορίζει το χρόνο αγοράς ως μία θετική αύξουσα τυχαία διαδικασία, $g(t)$, με $g(u) - g(t), u \geq t \geq 0$. Στην ορολογία των πιθανοτήτων η $g(t)$ είναι μία μεταβλητή subordinator. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος αγοράς θα πρέπει να προσαρμοστεί ανάμεσα στις χρονικές στιγμές t και u . Οπότε, υποθέτοντας την subordinator g ανάμεσα στις δύο χρονικές στιγμές t και u θα έχουμε την ακόλουθη σχέση:

$\bar{\sigma} (W(g(u)) - W(g(t))) : g \sim \bar{\sigma} \sqrt{(g(u) - g(t))} \varepsilon$, όπου ε είναι μία τυπική κατανομή Gaussian. Επιπρόσθετα έχουμε:

$$\left(\log \left(\frac{S(u)}{S(t)} \right) - \bar{\mu}(u - t) \right) : g \sim N(\bar{\theta}(g(u) - g(t)), \bar{\sigma}^2(g(u) - g(t)))$$

Η διαδικασία VG θεωρεί ότι $\{g(t)\} \sim \Gamma\left(\frac{t}{\nu}, \nu\right)$, δηλαδή η διαδικασία VG ακολουθεί κατανομή Gamma με παράμετρο ν , η οποία είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία Brown με $\{W_t\}_t \geq 0$.

5.3 α - Σταθερές Κατανομές

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ

Η α - σταθερή κατανομή είναι πιο κομψός τρόπος να περιγράψουμε ακραίες τιμές. Οι α - σταθερές κατανομές υπονοούν ότι όσο λιγότερη πιθανότητα υπάρχει να συμβεί κάτι, τόσο μεγαλύτερος είναι ο αντίκτυπος του και ταυτόχρονα τα ακραία ενδεχόμενα είναι πιο πιθανά από εκείνα, που υπονοεί η κανονική κατανομή. Μία εναλλακτική περίπτωση της α - σταθερής κατανομής θα αποτελούσε η δημιουργία οποιαδήποτε κατανομής, έτσι ώστε να μας δίνει άλματα. Δηλαδή στη πιθανότητα για κάτι, να συμβαίνει και ένα άλμα. Εκεί υπεισέρχονται όμως δυο άλλοι παράμετροι, όπως το

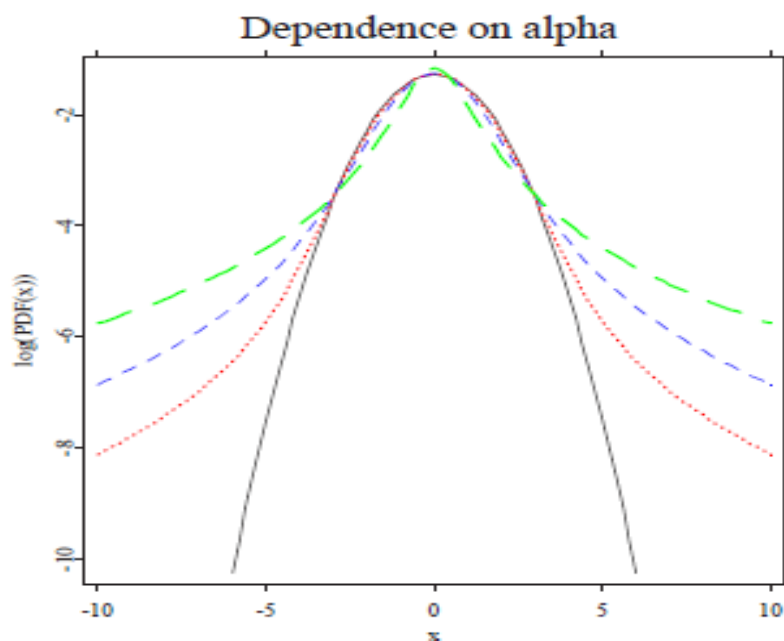
μέγεθος του άλματος και το κάθε ποτέ θα παίρνουμε το άλμα. Ωστόσο, ο προσδιορισμός αυτών των δυο παραγόντων είναι δύσκολος και όχι τόσο αποτελεσματικός. Συνεπώς, αποτελεί λιγότερο κομψό τρόπο για να περιγράψουμε ακραίες τιμές σε σύγκριση με τη α - σταθερή κατανομή. Αυτός είναι ο λόγος, όπου στη παρούσα διπλωματική αναφερθήκαμε στη α - σταθερή κατανομή.

Αρχικά ας επισημάνουμε, πως η σταθερή κατανομή σύμφωνα με τη πηγή [26] αναφέρεται και συχνά ως α - σταθερή κατανομή (Lévy stable, Levy [27]). Η α - σταθερή κατανομή (α - stable distribution) απαιτεί 4 παραμέτρους για να οριστεί πλήρως:

- μια παράμετρο σταθερότητας $\alpha \in (0,2]$, που ονομάζεται, επίσης, και δείκτης ουράς , έκθετης ουράς ή χαρακτηριστικός έκθετης .
- μια παράμετρο ασυμμετρίας $\beta \in [-1,1]$
- μια παράμετρο κλίμακας $\sigma > 0$
- μια παράμετρο θέσης $\mu \in R$

Ο έκθετης ουράς (α) προσδιορίζει το ρυθμό, στον οποίο οι ουρές της κατανομής στενεύουν, δηλαδή πλησιάζουν μεταξύ τους, όπως αυτό παρουσιάζεται στην παρακάτω γραφική παράσταση. Για $\alpha=2$ είναι η συνεχής γραμμή, για $\alpha=1,8$ η έντονα διακεκομμένη γραμμή, για $\alpha=1,5$ η λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή και για $\alpha=1$ η πιο λίγο έντονα διακεκομμένη γραμμή. Η κανονική κατανομή (Gaussian, $\alpha=2$)

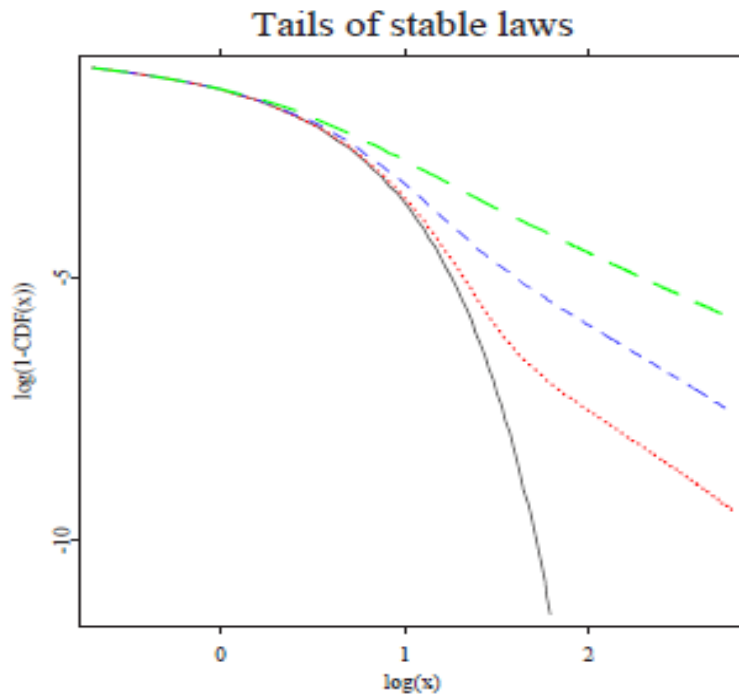
αποτελεί μία παραβολή και είναι η μόνη α -σταθερή κατανομή με εκθετικές ουρές.



Σχήμα 5.1 Γραφική απεικόνιση συμμετρικών α -σταθερών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για διάφορα α [26]

Αξιοσημείωτο είναι, πως όταν $\alpha=2$ έχουμε αποτελέσματα κανονικής κατανομής. Όταν $\alpha < 2$ η διακύμανση είναι μη πεπερασμένη και οι ουρές της κατανομής είναι ασυμπτωτικά ισοδύναμες με το νόμο του Pareto.

Η σύγκλιση σε μια power - law ουρά ποικίλει για τα διάφορα α , και όπως φαίνεται στη παρακάτω γραφική παράσταση, είναι πιο αργή για τις μεγαλύτερες τιμές του δείκτη ουράς. Παραθέτεται παρακάτω η γραφική παράσταση, η οποία μας δείχνει τις δεξιές ουρές συμμετρικών α - σταθερών αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής (cdfs). Για $\alpha=2$ είναι η συνεχής γραμμή, για $\alpha=1.95$ η έντονα διακεκομμένη γραμμή, για $\alpha=1.8$ η λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή, για $\alpha=1.5$ η πιο λίγο έντονα διακεκομμένη γραμμή. Για $\alpha < 2$ οι ουρές σχηματίζουν ευθείες γραμμές με κλίση $-\alpha$.



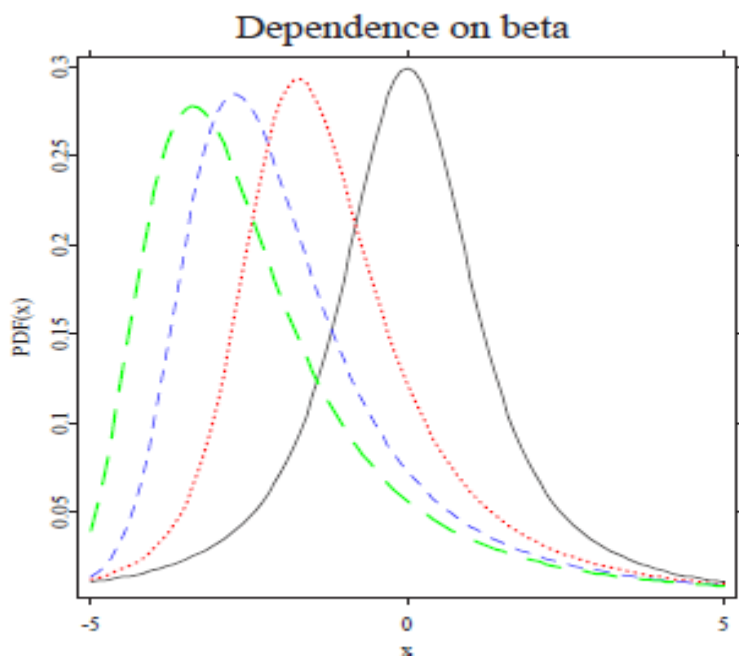
Σχήμα 5.2 Δεξιές ουρές συμμετρικών α - σταθερών αθροιστικών συναρτήσεων κατανομής για διάφορες τιμές του α [26]

Επιπλέον, οι ουρές των συναρτήσεων της α - σταθερής κατανομής παρουσιάζουν ένα crossover από μια κατά προσέγγιση απόσβεση με εκθέτη $\alpha > 2$ μέχρι μία ουρά με εκθέτη α . Αυτό το φαινόμενο είναι πιο ορατό για μεγάλα α (Weron [30]).

Όταν $\alpha > 1$ η μέση τιμή της κατανομής υπάρχει και είναι ίση με μ . Σε γενικές γραμμές, η p_{th} στιγμή (the p_{th} moment) μίας σταθερής τυχαίας μεταβλητής είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $p < \alpha$. Όταν η παράμετρος ασυμμετρίας είναι θετική, η κατανομή είναι λοξή προς τα δεξιά. Όταν είναι αρνητική είναι λοξή προς τα αριστερά. Όταν $\beta = 0$, η κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μ . Όταν το α τείνει στο 2, η παράμετρος ασυμμετρίας β χάνει τη δύναμη της και η κατανομή πλησιάζει τη Gaussian κατανομή ανεξαρτήτως του β . Οι παράμετροι σ και μ είναι οι παράμετροι κλίμακας και θέσης αντίστοιχα. Το σ καθορίζει το πλάτος και η παράμετρος μ τη μετατόπιση της κορυφής της πυκνότητας. Για $\sigma = 1$ και $\mu = 0$ αυτή κατανομή ονομάζεται πρότυπη σταθερή.

Παραθέτουμε παρακάτω τη γραφική παράσταση α - σταθερών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για $\alpha = 1.2$ και $\beta = 0$ (συνεχής γραμμή), για $\beta = 0.5$ (η έντονα διακεκομμένη γραμμή), για $\beta = 0.8$ (η λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή) και $\beta = 1$ (ακόμη λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή). Παρατηρούμε ότι, όταν η

παράμετρος ασυμμετρίας είναι θετική, η κατανομή είναι λοξή προς τα δεξιά και όταν $\beta=0$ η κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το μ .

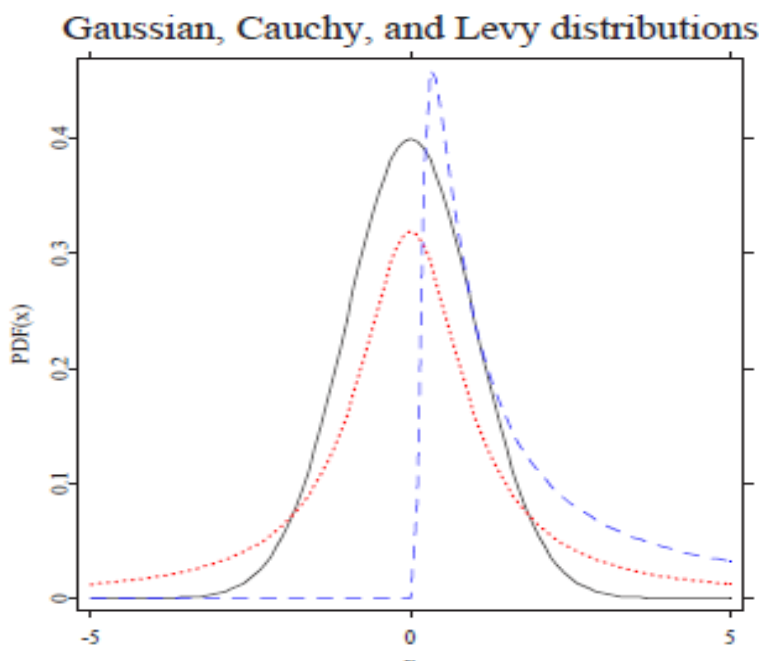


Σχήμα 5.3 Γραφική παράσταση σταθερών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας για $\alpha=1.2$ και διάφορες τιμές του β [26]

Παρουσίαση χαρακτηριστικής συνάρτησης

Λόγω της έλλειψης κλειστών τύπων για πυκνότητες για όλες τις κατανομές εκτός από τρεις, ο α -stable νόμος μπορεί να περιγράψει από τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\varphi(t)$ (ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας).

Παραθέτουμε παρακάτω τη γραφική παράσταση, η οποία μας δείχνει τους κλειστούς τύπους για πυκνότητες. Οι κλειστοί τύποι για κατανομές είναι γνωστοί για τρεις κατανομές, τη Gaussian ($\alpha=2$, συνεχής γραμμή), Cauchy ($\alpha=1$, έντονα διακεκομμένη γραμμή), Levy ($\alpha=0.5$, $\beta=1$, λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή). Η τελευταία είναι μία εντελώς ασύμμετρη κατανομή. Σε γενικές γραμμές, $\alpha < 1$ και $\beta = 1$ (-1) η κατανομή εντελώς ασύμμετρη προς τα δεξιά (αριστερά).



Σχήμα 5.4 Γραφική απεικόνιση των κατανομών Gaussian, Cauchy, Levy [26]

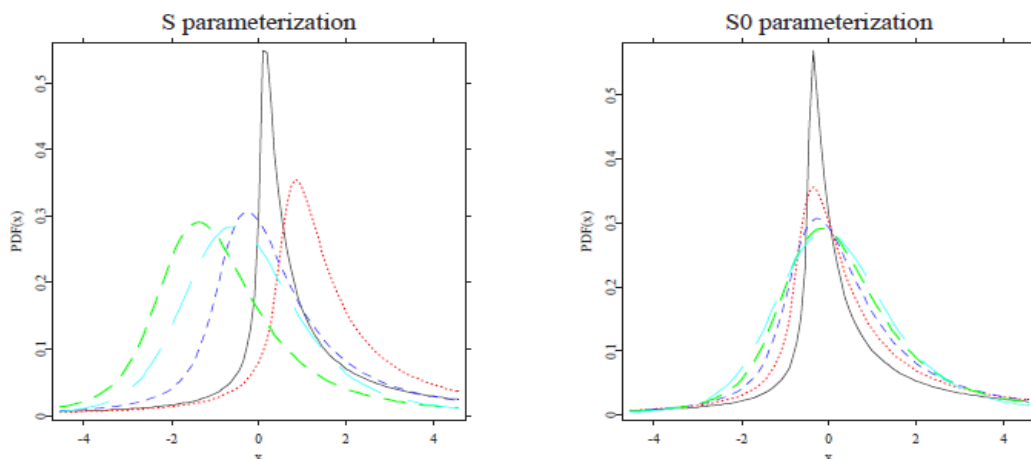
Ωστόσο, υπάρχουν πολλές παραμετροποιήσεις για τον α - stable νόμο και μεγάλη σύγχυση έχει προκληθεί από αυτές τις διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η ποικιλία των τύπων μπορεί να προκληθεί από ένα συνδυασμό ιστορικής εξέλιξης και πολυάριθμων προβλημάτων, που έχουν αναλυθεί χρησιμοποιώντας εξειδικευμένες μορφές σταθερών κατανομών. Η πιο δημοφιλής παραμετροποίηση της χαρακτηριστικής συνάρτησης $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$, δηλαδή μια α - σταθερή τυχαία μεταβλητή με παραμέτρους α , σ , β και μ δίνεται από το τύπο (Samorodnitsky και Taqqu [29], Weron [31]) :

$$\ln \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2}\} + i\mu t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \{1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln |t|\} + i\mu t, & \alpha = 1 \end{cases}, \quad \text{όπου για αριθμητικούς}$$

σκοπούς, χρησιμοποιείται κυρίως η παραμετροποίηση του Nolan [28]:

$$\ln \varphi(t) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |t|^\alpha \{1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\pi\alpha}{2} [(\sigma |t|)^{1-\alpha} - 1]\} + i\mu_\sigma t, & \alpha \neq 1 \\ -\sigma |t| \{1 + i\beta \operatorname{sign}(t) \frac{2}{\pi} \ln(\sigma |t|)\} + i\mu_\sigma t, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Παραθέτουμε παρακάτω τη γραφική παράσταση, η οποία μας παρουσιάζει μία σύγκριση των S και S^0 παραμετροποιήσεων: α - σταθερές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας για $\beta=0.5$ και $\alpha=0.5$ (συνεχής γραμμή), 0.75 (έντονα διακεκομμένη γραμμή), 1 (λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή), 1.25 (ακόμη λιγότερο έντονα διακεκομμένη γραμμή) και 1.5 (η λιγότερο έντονη διακεκομμένη γραμμή).



Σχήμα 5.5 Μία σύγκριση των S και S^0 παραμετροποιήσεων [26]

Η $S_a^0(\sigma, \beta, \mu_o)$ παραμετροποίηση είναι μια παραλλαγή της παραμετροποίησης Zolotariev (Zolotarev [32]), με τη χαρακτηριστική συνάρτηση και ως εκ τούτου τη συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής να είναι από κοινού συνεχής και στις τέσσερις παραμέτρους. Αυτό μπορούμε να το παρατηρήσουμε στο δεξιό μέρος του σχήματος 5.5.

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε διαφορές παραμετροποιήσεις, καθώς τα α και β ποικίλουν. Οι παράμετροι θέσης των δυο παρακάτω αναπαραστάσεων αναφέρονται για $\mu = \mu_o - \beta\sigma \tan \frac{\pi\alpha}{2}$ για $\alpha \neq 1$ και $\mu = \mu_o - \beta\sigma \frac{2}{\pi} \ln \sigma$ για $\alpha = 1$. Παρατηρούμε, επίσης, πως η παράμετρος κλίμακας σ_G της κατανομής Gauss ορίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$f_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_G} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_G^2}\right\}, \text{ όπου } \sigma_G = \sqrt{2}\sigma.$$

5.4 Μοντέλο των Schwartz και Smith

ΒΡΑΧΥΠΡΟΘΕΣΜΟ/ΜΑΚΡΟΠΡΟΘΕΣΜΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΩΝ SCHWARTZ ΚΑΙ SMITH

Στο πλαίσιο της παρούσας διπλωματικής ακολουθούμε το βραχυπρόθεσμο/μακροπρόθεσμο μοντέλο των Schwartz και Smith (short-term/long-term model) για τη μοντελοποίηση των τιμών φυσικού αερίου ή άνθρακα σύμφωνα με τη πηγή [33]. Αυτό το μοντέλο αποτελεί μία στοχαστική διαδικασία, που χρησιμοποιείται για τη μοντελοποίηση τιμών των εμπορευμάτων. Με τον όρο Commodities εννοούμε οτιδήποτε δεν είναι χαρτί (ομόλογα, μετοχές), όπως φυσικό αέριο, άνθρακας, πετρέλαιο, μέταλλα, τρόφιμα, κρέας σε μεγάλες ποσότητες κ.α..

Αυτό το μοντέλο των Schwartz και Smith χρησιμοποιεί τη στοχαστική διαδικασία (mean reversion) σε βραχυπρόθεσμες τιμές και τη στοχαστική διαδικασία GBM (Geometric Brownian Motion) για την αβεβαιότητα στο επίπεδο ισορροπίας, για το οποίο οι τιμές επανέρχονται. Αυτοί οι δύο παράγοντες μπορούν να εκτιμηθούν από τις τρέχουσες και μελλοντικές τιμές. Οι αλλαγές των τιμών για μακράς διάρκειας συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης παρέχουν πληροφορίες σχετικά με το επίπεδο των τιμών ισορροπίας, δηλαδή το επίπεδο τιμών, που ισορροπεί η μακροπρόθεσμη αγορά με τη ζήτηση. Επιπρόσθετα, οι διαφορές μεταξύ των τιμών για βραχυπρόθεσμα και μακροπρόθεσμα συμβόλαια δίνουν πληροφορίες σχετικά με τις βραχυπρόθεσμες διακυμάνσεις των τιμών.

Αυτό το μοντέλο των Schwartz και Smith χρησιμοποιεί τη στοχαστική διαδικασία GBM για να περιγράψει τη τυχαία συμπεριφορά του επιπέδου τιμών ισορροπίας, επειδή υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με τη τιμή ισορροπίας, στην οποία οι τιμές επανέρχονται. Επίσης, χρησιμοποιεί τη στοχαστική διαδικασία (mean reversion) για να περιγράψει τις βραχυπρόθεσμες μεταβολές των τιμών.

Σε αυτό το σημείο θα αναφερθούμε στη στοχαστική διαδικασία (mean reversion). Όταν η τιμή ενός εμπορεύματος είναι υψηλότερη από κάποιο μακροπρόθεσμο μέσο επίπεδο τιμών ή κάποιο επίπεδο τιμών ισορροπίας, η προσφορά του εμπορεύματος αυτού θα αυξηθεί, επειδή παραγωγοί με υψηλότερο κόστος παραγωγής θα εισέλθουν στην αγορά, φέρνοντας πτωτικές πιέσεις στις τιμές. Αντίθετα, όταν οι τιμές είναι

σχετικά χαμηλές, η προσφορά του εμπορεύματος θα μειωθεί, δεδομένου ότι ορισμένοι παραγωγοί με υψηλό κόστος παραγωγής του αγαθού αυτού θα εγκαταλείψουν την αγορά, ασκώντας ανοδικές πιέσεις στις τιμές. Όταν αυτές οι εισοδοί και έξοδοι δεν είναι άμεσες, οι τιμές μπορεί προσωρινά να είναι χαμηλές ή υψηλές, αλλά θα έχουν τη τάση να επανέλθουν προς το επίπεδο ισορροπίας. Με άλλα λόγια η βασική ιδέα της στοχαστικής διαδικασίας (mean reversion) είναι, ότι αν η τιμή ενός εμπορεύματος είναι π.χ. πολύ υψηλή, τότε θα βρεθούν υποκατάστατα ή θα παραχθούν μεγαλύτερες ποσότητες του αγαθού αυτού, ώστε οι τιμές του να μειωθούν και να επανέλθουν στο επίπεδο ισορροπίας. Η στοχαστική διαδικασία GBM έχει αναλυθεί παραπάνω.

Μαθηματική περιγραφή του μοντέλου των Schwartz και Smith

Ας υποθέσουμε ότι S_t χαρακτηρίζει τη τρέχουσα τιμή ενός εμπορεύματος τη χρονική στιγμή t . Θα αποσυνθέσουμε τις τρέχουσες τιμές σε δύο στοχαστικούς παράγοντες, δηλαδή $\ln(S_t) = x_t + \xi_t$, όπου x_t θα αναφέρεται ως βραχυχρόνια απόκλιση των τιμών και ξ_t ως το επίπεδο τιμών ισορροπίας. Οι βραχυπρόθεσμες αποκλίσεις των τιμών είναι η διαφορά μεταξύ τρεχουσών τιμών και τιμών ισορροπίας. Αυτές οι αποκλίσεις μπορεί να αντικατοπτρίζουν βραχυπρόθεσμες μεταβολές της ζήτησης, που προκύπτουν για διάφορους λόγους, όπως διακυμάνσεις του καιρού ή μεταβολή των συνθηκών αγοράς. Οι βραχυπρόθεσμες μεταβολές (x_t) υποτίθεται ότι θα επανέλθουν προς το μηδέν, ακολουθώντας τη στοχαστική διαδικασία των Ornstein – Uhlenbeck (mean reversion). Οπότε, θα έχουμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$dx_t = -kx_t dt + \sigma_x dz_x \quad (1)$$

Ενώ το επίπεδο ισορροπίας (ξ_t) ακολουθεί τη στοχαστική διαδικασία GBM με την ακόλουθη εξίσωση:

$$d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_\xi \quad (2)$$

Εδώ οι όροι dz_x και dz_ξ σχετίζονται με τις μεταβολές της στοχαστικής διαδικασίας Brownian Motion, όπου ισχύει $dz_x dz_\xi = \rho_{x\xi} dt$.

Μεταβολές στις βραχυχρόνιες αποκλίσεις (x_t) αντιπροσωπεύουν προσωρινές μεταβολές των τιμών, που δεν αναμένεται να εξακολουθούν να υφίστανται. Μεταβολές στο επίπεδο ισορροπίας (ξ_t) αντιπροσωπεύουν θεμελιώδεις μεταβολές, που αναμένεται ότι θα συνεχίσουν να υφίστανται. Ο παράγοντας (k) στη στοχαστική

διαδικασία (mean reversion) περιγράφει το ρυθμό, κατά τον οποίο οι βραχυχρόνιες μεταβολές αναμένεται να εξαφανιστούν.

Επιπρόσθετα, θα παραθέσουμε τους αναλυτικούς τύπους για τις κατανομές των μεταβλητών κατάστασης και τρεχουσών τιμών του μοντέλου των Schwartz και Smith. Έστω ότι x_0 και ξ_0 είναι δοσμένα. Βρίσκουμε ότι x_t και ξ_t ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή: $E[(x_t, \xi_t)] = [e^{-\kappa t} x_0, \xi_0 + \mu_\xi t]$ (3 α) και

$$\text{διακύμανση: } Cov[(x_t, \xi_t)] = \begin{bmatrix} (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_x^2}{2\kappa} & (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{x\xi} \sigma_x \sigma_\xi}{\kappa} \\ (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{x\xi} \sigma_x \sigma_\xi}{\kappa} & \sigma_\xi^2 t \end{bmatrix} \quad (3\beta)$$

Ο λογάριθμος της μελλοντικής τρέχουσας τιμής ακολουθεί και αυτός κανονική κατανομή με μέση τιμή: $E[\ln(S_t)] = e^{-\kappa t} x_0 + \xi_0 + \mu_\xi t$ (4 α) και διακύμανση:

$$Var[\ln(S_t)] = (1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_x^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{x\xi} \sigma_x \sigma_\xi}{\kappa} \quad (4\beta).$$

Η τρέχουσα τιμή ακολουθεί λογαριθμο – κανονική κατανομή με προσδοκώμενη τιμή, που δίνεται από τον ακόλουθο τύπο: $E[S_t] = \exp(E[\ln(S_t)] + \frac{1}{2} Var[\ln(S_t)])$ ή

$$\ln(E[S_t]) = E[\ln(S_t)] + \frac{1}{2} Var[\ln(S_t)] = e^{-\kappa t} x_0 + \xi_0 + \mu_\xi t + \frac{1}{2} \left((1 - e^{-2\kappa t}) \frac{\sigma_x^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 t + 2(1 - e^{-\kappa t}) \frac{\rho_{x\xi} \sigma_x \sigma_\xi}{\kappa} \right) \quad (5).$$

Στοχαστικές διαδικασίες και Αποτίμηση σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου (Risk-Neutral)

Για να αποτιμήσουμε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, προθεσμιακά συμβόλαια, καθώς επίσης και εμπορεύματα, που σχετίζονται με επενδύσεις, χρησιμοποιούμε το μοντέλο των Schwartz και Smith σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου (Risk - Neutral). Σε μία αποτίμηση σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου χρησιμοποιούμε στοχαστικές διαδικασίες ουδετέρου κινδύνου, για να περιγράψουμε τη δυναμική των μεταβλητών κατάστασης και ανάγουμε τις ταμειακές ροές με ένα επιτόκιο μηδενικού κινδύνου. Σε αυτό το μοντέλο, που εξετάζουμε, έχουμε εισάγει δύο επιπλέον παραμέτρους, τις λ_x, λ_ξ , οι οποίες προσδιορίζουν τις συνεχείς μειώσεις για κάθε στοχαστική διαδικασία. Ειδικότερα, υποθέτουμε ότι οι στοχαστικές διαδικασίες σε περιβάλλον

ουδετέρου κινδύνου είναι της ακόλουθης μορφής: $dx_t = (-kx_t - \lambda_x)dt + \sigma_x dz_x^*$ (6 $_{\alpha}$) και $d\xi_t = (\mu_{\xi} - \lambda_{\xi})dt + \sigma_{\xi} dz_{\xi}^*$ (6 $_{\beta}$), όπου $dz_x^* dz_{\xi}^* = \rho_{x\xi} dt$.

Η στοχαστική διαδικασία σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου για τη βραχυχρόνια μεταβολή των τιμών (x_t) είναι τώρα μία διαδικασία (mean reversion), η οποία επανέρχεται ως προς τον όρο $\frac{-\lambda_x}{\kappa}$ και όχι ως προς το μηδέν, όπως συμβαίνει στην απλή στοχαστική διαδικασία (mean reversion). Η διαδικασία ουδετέρου κινδύνου για τις τιμές ισορροπίας είναι ακόμη μία στοχαστική διαδικασία (Geometric Brownian Motion), αλλά τώρα ισχύει $\mu_{\xi}^* = \mu_{\xi} - \lambda_{\xi}$, όπου η παράμετρος μ_{ξ} προκύπτει, για παράδειγμα αν φανταστεί κανείς μακροπρόθεσμα μία τιμή για το φυσικό αέριο, όπου συμπίπτει η μακροχρόνια ζήτηση του με το μακροχρόνιο κόστος εξόρυξής του. Η παράμετρος αυτή μεταβάλλεται τυχαία σύμφωνα με τη στοχαστική διαδικασία (Geometric Brownian Motion).

Έστω ότι x_0 και ξ_0 είναι δοσμένα. Βρίσκουμε ότι, όταν βρισκόμαστε σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου, οι μεταβλητές x_t και ξ_t ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή: $E^*[(x_t, \xi_t)] = \left[e^{-\kappa t} x_0 - (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\lambda_x}{\kappa}, \xi_0 + \mu_{\xi}^* t \right]$ και διακύμανση: $Cov^*[(x_t, \xi_t)] = Cov[(x_t, \xi_t)]$.

Οι αστερίσκοι δηλώνουν τις προσδοκίες και διακυμάνσεις, που λαμβάνονται περισσότερο υπόψη από τις στοχαστικές διαδικασίες σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου, τις οποίες ορίσαμε παραπάνω (6 $_{\alpha}$), (6 $_{\beta}$), παρά από τις απλές διαδικασίες (1),(2). Επίσης, σε περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου ο λογάριθμος της μελλοντικής τρέχουσας τιμής, δηλαδή $\ln(S_t) = x_t + \xi_t$, ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή: $E^*[\ln(S_t)] = e^{-\kappa t} x_0 - (1 - e^{-\kappa t}) \frac{\lambda_x}{\kappa} + \xi_0 + \mu_{\xi}^* t$ (7 $_{\alpha}$) και διακύμανση: $Var^*[\ln(S_t)] = Var[\ln(S_t)]$ (7 $_{\beta}$).

Συγκρίνοντας τις εξισώσεις (4) και (7), παρατηρούμε ότι η προσαύξηση λόγω κινδύνου ελαττώνει το λογάριθμο της αναμενόμενης τρέχουσας τιμής κατά $(1 - e^{-\kappa t}) \frac{\lambda_x}{\kappa} + \lambda_{\xi} t$. Η προσαύξηση λόγω κινδύνου εξαρτάται από το χρόνο και όχι από την αξία των μεταβλητών κατάστασης.

Αποτίμηση της αξίας συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης

Ας υποθέσουμε ότι $F_{T,0}$ είναι η τρέχουσα τιμή της αγοράς για ένα συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης με χρόνο T μέχρι τη λήξη του. Δηλαδή με άλλα λόγια, ένα συμβόλαιο δεν είναι τίποτα άλλο από την αξία το να αγοράσω τώρα κάτι (Commodity), για να το πάρω στο μέλλον. Οπότε, η αξία των συμβολαίων αυτών υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\ln(F_{T,0}) = \ln(E^*[S_t]) = E^*[\ln(S_t)] + \frac{1}{2} \text{Var}^*[\ln(S_t)] = e^{-\kappa t} x_0 + \xi_0 + A(T),$$

$$\text{Όπου} \quad A(T) = \mu_\xi^* T - (1 - e^{-\kappa T}) \frac{\lambda_x}{\kappa} + \frac{1}{2} \left((1 - e^{-2\kappa T}) \frac{\sigma_x^2}{2\kappa} + \sigma_\xi^2 T + 2(1 - e^{-\kappa T}) \frac{\rho_{x\xi} \sigma_x \sigma_\xi}{\kappa} \right).$$

Οι παράμετροι λ_x, λ_ξ ονομάζονται προσαυξήσεις λόγω κινδύνου και χρησιμοποιούνται, όταν κάποιος επενδυτής πουλάει το συμβόλαιό του, για να αναλάβει τον κίνδυνο της εξέλιξης των τιμών. Η παράμετρος λ_x είναι η προσαύξηση λόγω κινδύνου για τις βραχυχρόνιες μεταβολές – αβεβαιότητες, ενώ η παράμετρος λ_ξ είναι η προσαύξηση λόγω κινδύνου για τις μακροχρόνιες μεταβολές.

Καταληκτικά, η σχέση (8) είναι μία στοχαστική διαδικασία, που μοντελοποιεί τρέχουσες τιμές, κάνοντας προσαρμογή (ελαχιστοποίηση τετραγωνικού σφάλματος) στα δεδομένα των συμβολαίων. Οπότε, τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης ακολουθούν αυτή τη στοχαστική διαδικασία. Επιπρόσθετα, μέσω της προσαρμογής μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραμέτρους $\lambda_x, \lambda_\xi, \mu_\xi, \mu_x$, αλλά όχι τις παραμέτρους σ_x, σ_ξ , με βάση τις τιμές των συμβολαίων, που υπάρχουν τώρα στην αγορά. Τις παραμέτρους σ_x, σ_ξ μπορούμε να τις υπολογίσουμε από τις προηγούμενες τιμές των σ . Αφού προσδιορίσουμε τις τιμές όλων αυτών των παραμέτρων, χρησιμοποιούμε τον τύπο (8), για να αποτιμήσουμε την αξία ενός συμβολαίου μελλοντικής εκπλήρωσης.

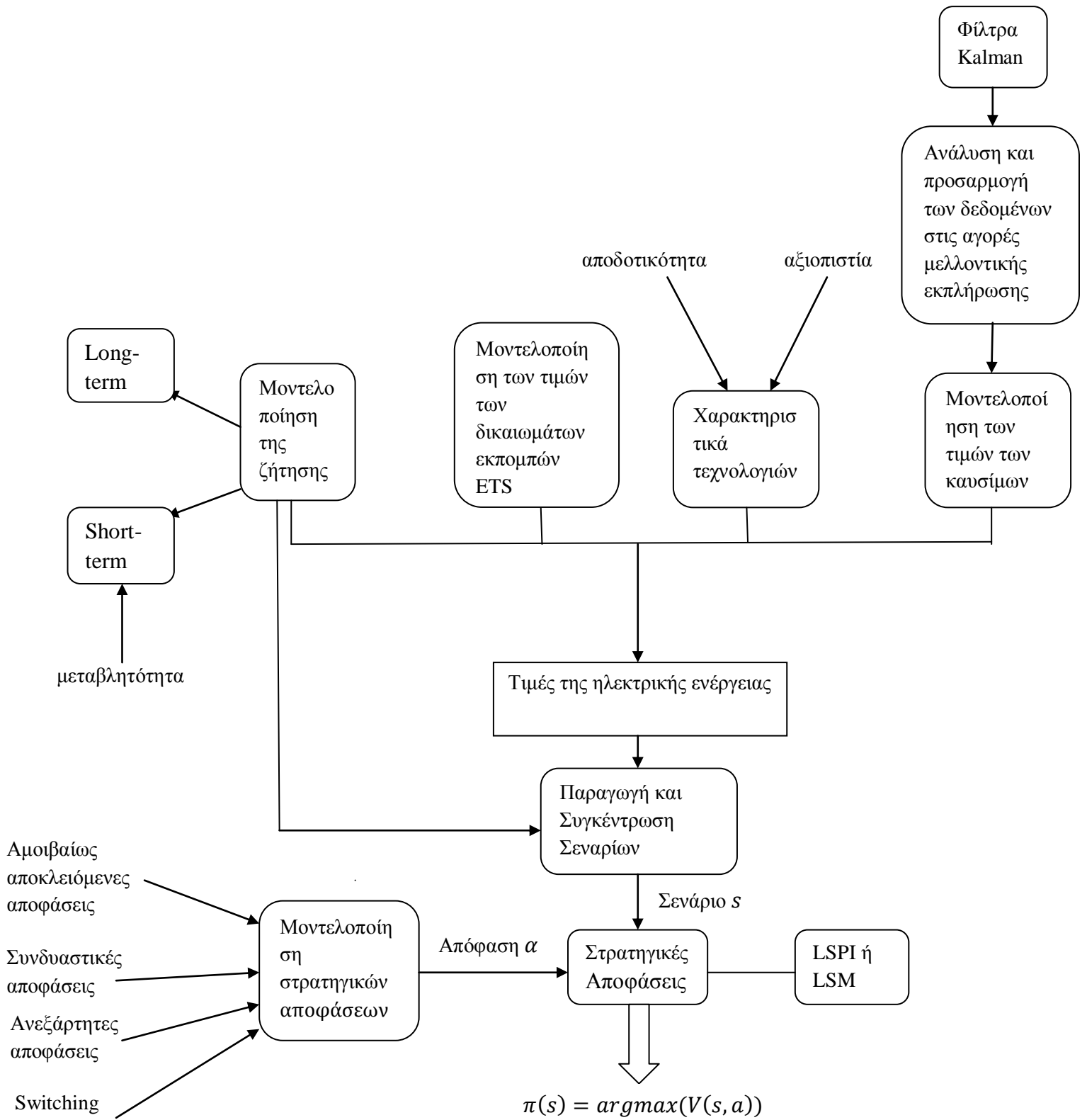
6. Προτεινόμενη Αρχιτεκτονική Μοντέλου για την Αξιολόγηση Επενδύσεων σε μια Ανταγωνιστική Αγορά Ηλεκτρικής Ενέργειας

6.1 Προτεινόμενη Αρχιτεκτονική Μοντέλου

Στη παρούσα διπλωματική αναφερθήκαμε αναλυτικά στη μοντελοποίηση των επενδυτικών αποφάσεων, της αβεβαιότητας, που επηρεάζουν τις επενδυτικές αποφάσεις, και στη μοντελοποίηση της αγοράς ηλεκτρικής ενέργειας. Όλα αυτά τα στοιχεία συμπεριλαμβάνονται σε μία προτεινόμενη Αρχιτεκτονική μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μία ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας.

Η προτεινόμενη Αρχιτεκτονική μοντέλου παραθέτεται στο ακόλουθο σχήμα:

Αρχιτεκτονική Μοντέλου



Σχήμα 6.1 Προτεινόμενη Αρχιτεκτονική μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μία ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας

Σκοπός της ανάπτυξης αυτής της προτεινόμενης Αρχιτεκτονικής μοντέλου αποτελεί ο προσδιορισμός της αναμενόμενης αξίας κάθε επενδυτικής απόφασης a , ανάλογα με το σενάριο s , που υφίσταται. Με άλλα λόγια αυτή η Αρχιτεκτονική μοντέλου αποτελεί ένα τρόπο, με τον οποίο μπορούμε να παίρνουμε τις διαφορετικές επενδυτικές αποφάσεις (Options), ανάλογα με το σενάριο.

Ο προσδιορισμός των στρατηγικών αποφάσεων απαιτεί μία σειρά από δεδομένα (εισόδους). Θα παρουσιάσουμε κάθε είσοδο από αυτές ως μία συνιστώσα (module, component) του μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μία ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο LSPI (Least Squares Policy Iteration), ο οποίος υλοποιείται στο στάδιο των στρατηγικών αποφάσεων, δίνουμε αξία στις επενδυτικές αποφάσεις (περιγραφή ως τύπο), που θέλουμε να πάρουμε. Δηλαδή, πίσω από τον αλγόριθμο LSPI κρύβεται η αξία της αντικειμενικής συνάρτησης $V(s, a)$, η οποία εξαρτάται από τις αποφάσεις a και από τα σενάρια s . Η μέθοδος LSPI παρουσιάζεται αναλυτικά στην ενότητα (4.2). Συνεπώς, πρέπει να βρούμε τις αποφάσεις a και τα σενάρια s .

Η μοντελοποίηση των στρατηγικών αποφάσεων αποτελεί μία άλλη συνιστώσα, η οποία μας προσδιορίζει, ποιες είναι οι επενδυτικές αποφάσεις, που θα πάρουμε. Οπότε, από αυτό το στάδιο παίρνουμε τις αποφάσεις. Τα σενάρια τα παίρνουμε από μία άλλη συνιστώσα, η οποία ονομάζεται παραγωγή και συγκέντρωση σεναρίων.

Η μοντελοποίηση των στρατηγικών αποφάσεων αποτελείται από μία ιεραρχία από επενδυτικές αποφάσεις (επιλογές – Options), οι οποίες αναφέρθηκαν αναλυτικά στο κεφάλαιο 2. Η συνιστώσα αυτή υλοποιεί κάποιες τυπολογίες – παραδείγματα, οι οποίες είναι οι ακόλουθες:

- αμοιβαίως αποκλειόμενες αποφάσεις (Options to choose, ενότητα (2.4))
- συνδυαστικές αποφάσεις (Compound Options, ενότητα (2.5))
- ανεξάρτητες αποφάσεις (ενότητες (2.1, 2.2, 2.3))
- switching αποφάσεις (sequential Compound Options, ενότητα (2.6))

Οπότε, μέσω της μοντελοποίησης των στρατηγικών αποφάσεων πετυχαίνουμε την υλοποίηση των επιλογών, που έχουμε, είτε ως αμοιβαίως αποκλειόμενες αποφάσεις, είτε ως ανεξάρτητες, είτε ως συνδυαστικές και είτε ως switching.

Τώρα θα αναφέρουμε τι σημαίνει κάθε τυπολογία. Για παράδειγμα διαθέτουμε δύο επιλογές A και B. Στις αμοιβαίως αποκλειόμενες αποφάσεις μπορούμε να κάνουμε την επιλογή A και όχι τη B, ή το αντίθετο. Και οι δύο επιλογές μαζί δε μπορούν να πραγματοποιηθούν. Στις συνδυαστικές αποφάσεις πρέπει να πάρουμε πρώτα την επιλογή A, έτσι ώστε μετά να μπορούμε να πάρουμε την επιλογή B. Στις ανεξάρτητες αποφάσεις μπορούμε να πάρουμε την επιλογή A, ή τη B. Επίσης, δεν έχουμε κανένα πρόβλημα να τις πάρουμε και μαζί. Τέλος, στις switching αποφάσεις έχουμε διάφορες καταστάσεις και μπορούμε να μεταβούμε από τη μία κατάσταση στην άλλη, έχοντας μία σειρά από περιορισμούς και κόστη. Όλα αυτά αποτελούν τυπολογίες – παραδείγματα.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τους τρόπους, με τους οποίους μπορούμε να μοντελοποιήσουμε τις στρατηγικές αποφάσεις. Η συνιστώσα παραγωγής και συγκέντρωσης σεναρίων αποτελεί έναν από αυτούς τους τρόπους. Η συνιστώσα αυτή θέλουμε να μας παράγει σαν έξοδο ένα πίνακα, ο οποίος θα εμπεριέχει ως δεδομένα τις τιμές των καυσίμων, που χρησιμοποιούνται για τη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας, τις τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας και τη ζήτηση αυτής. Άρα, επειδή το στάδιο αυτό έχει ως εισόδους πολλά διαφορετικά δεδομένα, πραγματοποιείται στο στάδιο αυτό aggregation, δηλαδή συγκέντρωση των δεδομένων αυτών σε μία έξοδο (πίνακας).

Παρατηρώντας το σχήμα 6.1 βλέπουμε ότι το στάδιο παραγωγής και συγκέντρωσης σεναρίων έχει ως εισόδους τη τρέχουσα τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας και τα δεδομένα από τη ζήτηση αυτής. Η τρέχουσα τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας προσδιορίζεται από ένα μοντέλο, το οποίο αναλύσαμε στην ενότητα (6.2). Το μοντέλο αυτό χρειάζεται ως εισόδους τις τρέχουσες τιμές των καυσίμων, τα κόστη εκπομπών, τα σενάρια της ζήτησης της ηλεκτρικής ενέργειας, τη διαθεσιμότητα των μονάδων παραγωγής και ένα συντελεστή, ο οποίος μας δείχνει την αποδοτικότητα του καυσίμου.

Οι τρέχουσες τιμές των καυσίμων $F_{t,t}$ προσδιορίζονται από το στάδιο, που πραγματοποιεί τη μοντελοποίηση των τιμών των καυσίμων μέσω της χρήσης του μοντέλου Schwartz και Smith. Το μοντέλο αυτό παρουσιάστηκε αναλυτικά στην ενότητα (5.4). Οπότε, αυτή η συνιστώσα μας παρέχει στοιχεία για τα καύσιμα.

Τα κόστη Εκπομπών προσδιορίζονται μέσω της μοντελοποίησης των δικαιωμάτων εκπομπών (ETS permits). Το Σύστημα Εμπορίας Εκπομπών εφαρμόστηκε πρώτη φορά στην Ευρωπαϊκή Ένωση. Τα κόστη εκπομπών προκύπτουν με αυτό τον τρόπο, γιατί τα δικαιώματα εκπομπών και γενικά τα δικαιώματα αυτά καθαυτά αποτελούν μία μορφή εμπορευμάτων (tradable Commodities). Δηλαδή, ο προσδιορισμός των δικαιωμάτων εκπομπών δε διαφέρει τρομερά από το προσδιορισμό των καυσίμων, όπως το φυσικό αέριο (μοντέλο Schwartz και Smith). Και τα δικαιώματα εκπομπών και τα εμπορεύματα (φυσικό αέριο) αποτελούν εισόδους μέσα σε μία παραγωγική διαδικασία και εμφανίζουν μακροπρόθεσμη σχέση.

Πιο συγκεκριμένα, στο μοντέλο Schwartz και Smith υπάρχει ένας παράγοντας μ_x , ο οποίος προκύπτει, για παράδειγμα αν φανταστούμε μακροπρόθεσμα μία τιμή για το φυσικό αέριο, όπου η μακροχρόνια ζήτηση του συμπίπτει με το μακροχρόνιο κόστος εξόρυξης του και διανομής του. Το ίδιο μπορούμε να παρατηρήσουμε στα δικαιώματα εκπομπών, με τη μόνη διαφορά τώρα ότι ο αντίστοιχος παράγοντας τους εξαρτάται κατά βάση, από το πώς τα κόστη συμμόρφωσης θα μεταβληθούν μακροπρόθεσμα.

Οι τιμές των δικαιωμάτων εκπομπών (tradable emission allowances) επηρεάζονται από το Cap, το οποίο αποτελεί ένα σύστημα, που περιορίζει τις συνολικές εκπομπές μέσω της δημιουργίας ενός περιορισμένου αριθμού εμπορεύσιμων δικαιωμάτων εκπομπών. Δηλαδή αποτελεί το άνω όριο των δικαιωμάτων εκπομπών. Οι εταιρείες είναι υποχρεωμένες να αποκτήσουν ίσο αριθμό δικαιωμάτων με τις εκπομπές, που παράγουν. Η Ευρωπαϊκή Ένωση παρέχει τη προσφορά των δικαιωμάτων αυτών (supply). Όμως, στη πρώτη και δεύτερη φάση λειτουργίας του Συστήματος Εμπορίας Εκπομπών παρείχε στοιχεία υπερβολικής προσφοράς δικαιωμάτων, με αποτέλεσμα όλες οι εταιρείες να παράγουν περισσότερες εκπομπές, από ότι έπρεπε. Αν στη τρίτη φάση η Ε.Ε. είχε μειώσει αυτό τον αριθμό, αυτό θα δημιουργούσε έλλειψη, όπου θα είχε σαν επακόλουθο την αύξηση της τιμής των δικαιωμάτων εκπομπών. Οπότε, με ένα παρόμοιο μοντέλο σαν το μοντέλο Schwartz και Smith μοντελοποιούμε τις τιμές αυτές. Γενικά αποτελεί περίπλοκο πρόβλημα η μοντελοποίηση των δικαιωμάτων εκπομπών. Συνεπώς, μοντελοποιώντας τα δικαιώματα εκπομπών προσδιορίζουμε τα κόστη εκπομπών.

Επιπρόσθετα, ένας τρίτος παράγοντας, που απαιτείται για να προσδιοριστεί η τρέχουσα τιμή της ηλεκτρικής ενέργειας και που αποτελεί και είσοδο του σταδίου για τη παραγωγή σεναρίων, είναι η ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας. Η ζήτηση είναι λίγο διαφορετική από τα προαναφερθέντα, γιατί χαρακτηρίζεται από δύο καταστάσεις:

- βραχυπρόθεσμη κατάσταση (short – term)
- μακροπρόθεσμη κατάσταση (long – term)

Η βραχυπρόθεσμη κατάσταση χαρακτηρίζεται από μεταβλητότητα (volatility). Όταν παρατηρούμε τις τιμές της ζήτησης ενός εμπορεύματος (tradable Commodity) σε οποιαδήποτε κλίμακα (ανά μέρα, ανά βδομάδα, ανά μήνα), πάντοτε παρουσιάζουν αυτές την ίδια ή περίπου την ίδια μεταβλητότητα. Αυτό το χαρακτηριστικό δε παρατηρείται όμως στην ετήσια ζήτηση (μακροπρόθεσμη κατάσταση). Σε αυτή τη περίπτωση η ετήσια ζήτηση μοντελοποιείται ως καμπύλη. Δηλαδή, λέμε ότι η ζήτηση από τώρα μέχρι τα επόμενα δέκα χρόνια σε αυτό το σενάριο είναι αυτή η καμπύλη, σε ένα άλλο σενάριο είναι μια άλλη καμπύλη.

Επίσης, όταν εξετάζουμε τη ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας βραχυπρόθεσμα, παρατηρούμε ότι χαρακτηρίζεται και από ένα άλλο στοιχείο, την εποχικότητα. Η εποχικότητα μπορεί να είναι ετήσια, δηλαδή να παρατηρείται μέγιστη ζήτηση (peak) ηλεκτρικής ενέργειας ορισμένες μέρες του καλοκαιριού λόγω της χρήσης κλιματιστικών, καθώς και μερικές μέρες του χειμώνα λόγω της χρήσης συσκευών θέρμανσης. Οπότε, οι καιρικές συνθήκες επηρεάζουν τη ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας. Μπορεί να είναι εβδομαδιαία, αφού κατά τη διάρκεια των εργάσιμων μερών παρατηρείται περισσότερη κατανάλωση σε σχέση με τα σαββατοκύριακα και τις αργίες ή τέλος μπορεί να είναι ημερήσια, αφού την ημέρα έχουμε μεγαλύτερη ζήτηση σε σύγκριση με τη νύχτα (κατά κανόνα από τα μεσάνυχτα μέχρι τις 6:00 π.μ.).

Η ζήτηση μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί μία στοχαστική διαδικασία της μορφής $S_t = f(t) + X_t$, όπου $f(t) = \sum_{i=1}^N \left\{ \beta_i \cos\left(\frac{2*\pi*i*t}{P}\right) + n_i \sin\left(\frac{2*\pi*i*t}{P}\right) \right\}$, P αποτελεί τον αριθμό των ημερών σε ένα έτος, για $N = 1$ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις μας προσδιορίζουν την ετήσια εποχικότητα, για $N = 2$ μας προσδιορίζουν την εξαμηνιαία εποχικότητα, κ.τ.λ. Μία συνήθης προσέγγιση αποτελεί η χρήση μη γραμμικής παλινδρόμησης για να προσδιορίσουμε τις επιδράσεις της εποχικότητας β_i και n_i . Ο

παράγοντας X_t , που απομένει από τη παραπάνω παλινδρόμηση, ακολουθεί μία mean – reverting στοχαστική διαδικασία:

$dX_t = a(L_t - X_t)dt + \sigma dW_t$, όπου L_t αποτελεί τη μακροπρόθεσμη τάση (trend) της ζήτησης της ηλεκτρικής ενέργειας και dW_t είναι μία διαδικασία Wiener.

Συνεπώς, η μεταβλητότητα, που παρατηρείται στη βραχυπρόθεσμη κατάσταση, είναι πολύ σημαντική για το μοντέλο προσδιορισμού της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας, γιατί το μοντέλο αυτό προσδιορίζει τις τρέχουσες τιμές. Άρα, η μοντελοποίηση της ζήτησης της ηλεκτρικής ενέργειας πραγματοποιείται στη μακροπρόθεσμη κατάσταση ως ένα απλό σενάριο και στη βραχυπρόθεσμη κατάσταση εξετάζοντας τη μεταβλητότητα και την εποχικότητα της.

Επιπρόσθετα, η ζήτηση αποτελεί είσοδο στη συνιστώσα παραγωγής και συγκέντρωσης σεναρίων, για να γνωρίζει ο επενδυτής το μερίδιο της αγοράς. Όταν ο επενδυτής θέλει να πάρει επενδυτικές αποφάσεις, πρέπει να γνωρίζει τις τιμές, που μπορεί να πουλήσει και το μερίδιο της αγοράς, που ελπίζει να πάρει. Οπότε, η ζήτηση έχει δύο λειτουργίες: χρησιμεύει για να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές της ως σενάρια στο μοντέλου προσδιορισμού της τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας και επίσης, για να πληροφορηθεί ο επενδυτής για το μερίδιο της αγοράς.

Στο στάδιο των στρατηγικών αποφάσεων αυτό, που μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε, είναι το residual demand, δηλαδή τι δεν καλύπτουν από μεριάς ζήτησης οι υπόλοιποι συμμετέχοντες στην αγορά. Οπότε, στο στάδιο αυτό πρέπει να γνωρίζουμε, αν υπάρχει χώρος στην αγορά για να συμμετέχουμε. Αν δεν υπάρχει χώρος, τότε δεν έχει νόημα να συζητάμε θέμα επένδυσης. Τι σημαίνει όμως δεν υπάρχει χώρος στην αγορά για να κάνουμε επενδύσεις; Σημαίνει ότι ο λόγος της ζήτησης προς την εγκατεστημένη δυναμικότητα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας είναι πολύ μικρότερος της μονάδος, δηλαδή αυτοί, που συμμετέχουν ήδη στην αγορά, μπορούν να καλύψουν τη ζήτηση. Οπότε, μία επένδυση στην αγορά αυτή δεν θα έχει κανένα όφελος.

Παρατηρώντας ξανά τη προτεινόμενη Αρχιτεκτονική μοντέλου, η μοντελοποίηση των τιμών των καυσίμων έχει ως είσοδο μία συνιστώσα, η οποία ουσιαστικά πραγματοποιεί ανάλυση και προσαρμογή των δεδομένων στις αγορές των

συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Στο στάδιο αυτό προσδιορίζονται οι παράμετροι του μοντέλου τιμών καυσίμων Schwartz και Smith.

Για τη προσαρμογή του μοντέλου Schwartz και Smith χρησιμοποιούμε φίλτρα Kalman, τα οποία παρουσιάζουμε αναλυτικά στην ενότητα (6.3). Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να κάνουμε προσαρμογή του μοντέλου αυτού, όπως μη γραμμικά ελάχιστα τετράγωνα, φίλτρα Kalman και βελτιστοποίηση της συνάρτησης μέγιστης πιθανοφάνειας μέσω αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Επιλέγουμε να χρησιμοποιήσουμε τα φίλτρα Kalman ως πιο κομψό και ευσταθή τρόπο.

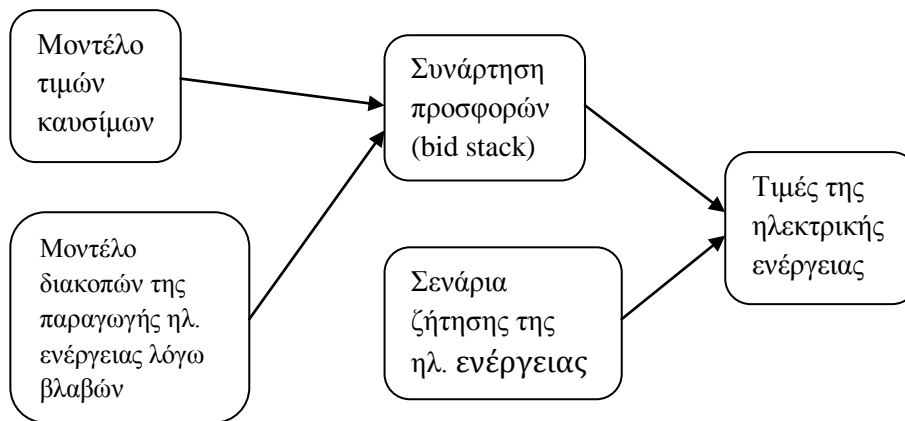
Επιπρόσθετα, έχουμε και μία βάση δεδομένων, η οποία περιλαμβάνει χαρακτηριστικά τεχνολογιών, τα οποία δεν αποτελούν αντικείμενο σεναρίων, όπως ο παράγοντας Heat_Rate, που μας δείχνει την αποδοτικότητα του καυσίμου (efficiency) και το διάνυσμα διακοπών λειτουργίας του εργοστασίου, το οποίο μας δείχνει τη διαθεσιμότητα των μονάδων παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας (αξιοπιστία – reliability).

Καταληκτικά, η συνιστώσα στρατηγικών αποφάσεων παίρνει ως εισόδους τις αποφάσεις a και τα σενάρια s , τα οποία προσδιορίστηκαν μέσω της μοντελοποίησης των στρατηγικών αποφάσεων και της παραγωγής και συγκέντρωσης σεναρίων αντίστοιχα. Τελικά, η συνιστώσα των στρατηγικών αποφάσεων βγάζει ως έξοδο την αναμενόμενη αξία κάθε απόφασης a , ανάλογα με το σενάριο s . Δηλαδή αν πάρουμε μία επενδυτική απόφαση a , που μεγιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση $V(s, a)$, η οποία προσδιορίζεται μέσω των αλγορίθμων LSPI (Least Squares Policy Iteration) ή LSM (Least Squares Monte Carlo), τότε ισχύει $\pi(s) = \operatorname{argmax}(V(s, a))$. Οπότε, έχουμε ένα τρόπο να αποφασίζουμε τις διαφορετικές αποφάσεις (Options) ανάλογα με τα σενάρια. Ο αλγόριθμος LSM αναλύθηκε στην ενότητα (4.1).

Οι αλγόριθμοι LSM και LSPI αποτελούν εναλλακτικούς αλγορίθμους, έτσι ώστε να μπορούμε να υλοποιήσουμε τις στρατηγικές μας αποφάσεις. Ο LSPI μας δίνει το βελτιστοποιημένο τύπο της αντικειμενικής συνάρτησης $V(s, a)$, ενώ ο LSM μας δίνει αποφάσεις πάνω στα σενάρια, που του έχουμε εισάγει. Από τις δύο μεθόδους προκρίνεται η μέθοδος LSPI, επειδή είναι καλύτερη και πιο γρήγορη για πολύπλοκα προβλήματα. Αυτή κατά βάση είναι μία συνοπτική παρουσίαση της προτεινόμενης Αρχιτεκτονικής μοντέλου για την αξιολόγηση επενδύσεων σε μία ανταγωνιστική αγορά ηλεκτρικής ενέργειας.

6.2 Μοντέλο για την εξέλιξη των τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας

Στη παρούσα διπλωματική θα αναφερθούμε αναλυτικά στο μοντέλο σύμφωνα με τη πηγή [63], που χρησιμοποιούμε για να περιγράψουμε την εξέλιξη των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας. Αρχικά, θα προσδιορίσουμε τις διαδικασίες για τον καθορισμό των παραγόντων (καύσιμα, διακοπές λειτουργίας του εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας λόγω βλαβών και ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας). Μετέπειτα, θα δημιουργήσουμε το μετασχηματισμό προσφορών ηλεκτρικής ενέργειας (bid stack) και τέλος θα προσδιορίσουμε τη διαδικασία για την εύρεση των τρεχουσών τιμών της ηλεκτρικής ενέργειας. Σχηματικά το μοντέλο παρουσιάζεται στο ακόλουθο σχήμα.



Σχήμα 6.2 Μοντέλο προσδιορισμού τιμών ηλεκτρικής ενέργειας

Μοντέλο για τις τιμές των καυσίμων

Το πρώτο βήμα στη προσπάθεια μοντελοποίησης μας αποτελεί ο προσδιορισμός των κοστών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, που σχετίζονται με τα καύσιμα (φυσικό αέριο και άνθρακας). Χρησιμοποιούμε τα συγκεκριμένα είδους καύσιμα, γιατί αποτελούν εμπορεύσιμα αγαθά (tradable Commodities) και εμπορεύονται και σε τρέχουσες και σε προθεσμιακές αγορές με τη μορφή συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και προθεσμιακών συμβολαίων. Οπότε, ο τύπος, που υπολογίζει τα κόστη παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας λόγω των καυσίμων είναι ο ακόλουθος:

Κόστος καυσίμου $\left(\frac{E}{MWh}\right) = \frac{\text{Heat Rate} \left(\frac{Btu}{KWh}\right)}{1000} * \text{Τιμή καυσίμου} \left(\frac{E}{MMBtu}\right)$, όπου Heat Rate είναι ένας παράγοντας, που μας δείχνει την αποδοτικότητα του καυσίμου.

Η διαδικασία εξέλιξης για τα καύσιμα αποτελείται από τον καθορισμό της διαδικασίας εξέλιξης για τις τρέχουσες ή προθεσμιακές τιμές και από το σύνολο των δεδομένων της αγοράς, που χρησιμοποιούνται για τη προσαρμογή της διαδικασίας.

Στη παρούσα διπλωματική χρησιμοποιούμε το βραχυπρόθεσμο – μακροπρόθεσμο μοντέλο των Schwartz και Smith για να περιγράψουμε την εξέλιξη των τιμών των καυσίμων. Με το μοντέλο αυτό προσδιορίζουμε την αξία των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης των καυσίμων, που χρησιμοποιούμε, και παράλληλα μέσω των συμβολαίων αυτών καθορίζουμε τις τρέχουσες τιμές των καυσίμων, οι οποίες είναι το μόνο απαιτούμενο στοιχείο για τον υπολογισμό των ταμειακών ροών.

Ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας

Σε αυτό το κομμάτι θα έχουμε σενάρια για τη ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας.

Μοντέλο διακοπών λειτουργίας του εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας λόγω βλαβών

Οι διακοπές λειτουργίας θα μοντελοποιηθούν ανεξάρτητα για κάθε μονάδα παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας. Στόχος μας είναι να αναπτύξουμε μία διαδικασία, που παράγει διακοπές λειτουργίας με τυχαίο τρόπο σε συμφωνία με τα τεχνικά και εμπειρικά δεδομένα και να τη χρησιμοποιήσουμε για να προσδιορίσουμε τη διαθεσιμότητα των μονάδων παραγωγής. Η διαδικασία για τη μοντελοποίηση των διακοπών λειτουργίας λόγω βλαβών αποτελείται από δύο στάδια:

- Μοντελοποίηση των τυχαίων χρονικών διαστημάτων μεταξύ των αναγκαστικών διακοπών λειτουργίας, δηλαδή μοντελοποίηση των περιόδων διαθεσιμότητας: $\Delta t_{1,l}^{avail}, \Delta t_{2,l}^{avail}, \dots, \Delta t_{m,l}^{avail}, \dots$, όπου $l = 1, 2, \dots, L_{gen}$ η l -th μονάδα παραγωγής, L_{gen} : ο συνολικός αριθμός των μονάδων παραγωγής και $m = 1, 2, \dots$
- Μοντελοποίηση της διάρκειας κάθε διακοπής λειτουργίας: $\Delta t_{1,l}^{out}, \Delta t_{2,l}^{out}, \dots, \Delta t_{m,l}^{out}, \dots$

Ο προσδιορισμός του ρυθμού (λ_l), με τον οποίο εμφανίζονται οι βλάβες, μπορεί να είναι επαρκής για τη μοντελοποίηση των διακοπών λειτουργίας. Οπότε, επιλέγουμε

τη διαδικασία Poisson (κατανομή Poisson) για να προσδιορίσουμε τις διακοπές λειτουργίας. Σύμφωνα με την κατανομή Poisson, οι χρονικοί περίοδοι μεταξύ των διακοπών λειτουργίας έχουν εκθετική κατανομή:

$$P_r(\Delta t_{m,l}^{avail} \leq x) = 1 - e^{-\lambda_l x}, x \geq 0, l = 1, 2, \dots, L_{gen}, \quad \text{όπου}$$

$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l, \dots, \lambda_{L_{gen}}$ αποτελεί το διάνυσμα των ρυθμών εμφάνισης των βλαβών, που προκαλούν τη διακοπή λειτουργίας για κάθε μονάδα παραγωγής l .

Συνδυάζοντας τη παραπάνω διαδικασία με τη διαδικασία προσδιορισμού της διάρκειας των διακοπών λειτουργίας, μπορούμε τώρα να καθορίσουμε τη διαθεσιμότητα μίας μονάδας παραγωγής σε ένα οποιαδήποτε χρόνο. Πιο επίσημα, ένα μοντέλο διακοπών λειτουργίας λόγω βλαβών παράγει στο χρόνο T το ακόλουθο διάνυσμα: $\Omega_T(\lambda) = (\omega_{T,1}, \dots, \omega_{T,L_{gen}})$, το οποίο ορίζεται ως ακολούθως:

$$\omega_{T,l} = \begin{cases} 0, & \text{εάν στο χρόνο } T \text{ η μονάδα } l \text{ παθαίνει αναγκαστική διακοπή} \\ 1, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Συνεπώς, αν για μία συγκεκριμένη μονάδα l ισχύει $\Omega_{T,l}(\lambda) = 1$, τότε αυτή η μονάδα είναι διαθέσιμη για παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας στο χρόνο T , ενώ εάν ισχύει $\Omega_{T,l}(\lambda) = 0$, τότε αυτή είναι εκτός λειτουργίας.

Προσδιορισμός της συνάρτησης παραγωγής (the generation stack function)

Ο καθορισμός της συνάρτησης προσφορών (the bid stack function), η οποία παίζει ένα πολύ σημαντικό ρόλο στο μοντέλο μας, μπορεί να επιτευχθεί μέσω του μετασχηματισμού της συνάρτησης παραγωγής. Οπότε, αποτελεί ανάγκη ο προσδιορισμός της συνάρτησης παραγωγής. Η προσέγγιση μίας συνάρτησης παραγωγής σημαίνει ταξινόμηση των σταθμών παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας σύμφωνα με τα βραχυπρόθεσμα κόστη παραγωγής τους. Αυτά τα κόστη είναι τα ακόλουθα:

Βραχυπρόθεσμα Κόστη Παραγωγής

- Κόστη καυσίμων ($Q_{T,l}$)
- Κόστη Εκπομπών ($E_{T,l}$)
- Άλλα μεταβλητά Κόστη ($VOM_{T,l}$)

Τα μεταβλητά κόστη αποτελούν κόστη λειτουργίας και διαχείρισης μίας μονάδας παραγωγής, όπως κόστος εργασίας, κόστη για τη θέρμανση/ψύξη, ή ένα μέρος των σταθερών κοστών.

Οπότε, τα βραχυπρόθεσμα κόστη παραγωγής μίας μονάδας l σε ένα χρόνο T ορίζονται ως ακολούθως: $W_{T,l} = HR_{T,l}^{u_i} * U_{T,l}^{i_i} + E_{T,l} + VOM_{T,l}$ (1), εάν το καύσιμο u_i είναι φυσικό αέριο ή άνθρακας

$HR_{T,l}^{u_i}$ είναι ένας παράγοντας (Heat Rate) της μονάδας παραγωγής, που σχετίζεται με την αποδοτικότητα των καυσίμων, και $U_{T,l}^{i_i}$ αποτελεί τη τιμή του καυσίμου στο χρόνο T .

Από τη στιγμή, που τα κόστη παραγωγής προσδιορίζονται για κάθε μονάδα, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση παραγωγής μέσω της ταξινόμησης όλων των διαθέσιμων μονάδων σύμφωνα με τα κόστη τους. Πιο επίσημα, η διαδικασία δημιουργίας της συνάρτησης παραγωγής είναι η ακόλουθη:

1. Για ένα δοσμένο χρόνο T , βρίσκουμε τις τιμές όλων των καυσίμων, που χρησιμοποιούνται από τις μονάδες για τη παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας
2. Υπολογίζουμε τα κόστη παραγωγής για κάθε μονάδα χρησιμοποιώντας το τύπο (1)
3. Προσδιορίζουμε το διάνυσμα διακοπών λειτουργίας του εργοστασίου παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας λόγω βλαβών $\Omega_T(\lambda) = (\omega_{T,1}, \dots, \omega_{T,LGen},)$ σύμφωνα με τη διαδικασία, που αναλύσαμε παραπάνω στο μοντέλο διακοπών λειτουργίας
4. Χρησιμοποιούμε το διάνυσμα $\Omega_T(\lambda) = (\omega_{T,1}, \dots, \omega_{T,LGen},)$ για να προσδιορίσουμε τη διαθεσιμότητα των μονάδων.

Η προσέγγιση της παραγωγής προσδιορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο: μία σειρά από διαθέσιμες μονάδες παραγωγής $l = 1, 2, \dots, L_{gen}$ τοποθετούνται με τέτοιο τρόπο, ώστε τα αντίστοιχα κόστη παραγωγής τους να ικανοποιούν την ακόλουθη σχέση:

$$W_{T,l_1} \leq W_{T,l_2} \leq \dots \leq W_{T,l_i} \leq \dots$$

Αυτό σημαίνει ότι οι μονάδες παραγωγής ταξινομούνται με αύξουσα σειρά των κοστών τους. Οπότε, ορίζουμε την αξία της συνάρτησης παραγωγής για μια δοσμένη

ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας ως το κόστος παραγωγής της τελευταίας μονάδας, που απαιτείται για τη κάλυψη αυτής της ζήτησης.

Ας υποθέσουμε ότι $C_{l_1}, C_{l_2}, \dots, C_{l_i}, \dots$ είναι οι δυναμικότητες παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, οι οποίες είναι εγκατεστημένες. Εάν η ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας είναι ίση με την εγκατεστημένη δυναμικότητα της πρώτης μονάδας παραγωγής (l_1), δηλαδή $D = C_{l_1}$, τότε η αξία της συνάρτησης παραγωγής δίνεται και υπολογίζεται από τον ακόλουθο τύπο: $s^{gen}(D) = W_{T,l_1}$. Εάν γενικότερα η ζήτηση είναι $D = C_{l_1} + C_{l_2} + \dots + C_{l_i}$, τότε η αξία της ίδιας συνάρτησης είναι η ακόλουθη: $s^{gen}(D) = W_{T,l_i}$.

Συνεπώς, αυτή η διαδικασία προσδιορίζει την αξία της συνάρτησης παραγωγής στα διακριτά σημεία. Εάν η ζήτηση πέφτει ανάμεσα σε αυτά τα σημεία, τότε χρησιμοποιούμε μία διαδικασία παρεμβολής (είτε τμηματικά συνεχής παρεμβολή είτε τμηματικά γραμμική παρεμβολή) και, έτσι, βρίσκουμε την αξία της συνάρτησης παραγωγής.

Η συνάρτηση παραγωγής μπορεί να γραφεί με την ακόλουθη μορφή: $s^{gen}(D_T; T, U_T, \Omega_T(\lambda), E_T, VOM_T, C_T)$,

η οποία μας δείχνει την εξάρτηση της συνάρτησης στο χρόνο T από τις τιμές των καυσίμων U_T , τις διακοπές της λειτουργίας λόγω βλαβών $\Omega_T(\lambda)$, τις τιμές των εκπομπών E_T , τα μεταβλητά κόστη VOM_T , και τις εγκατεστημένες δυναμικότητες C_T .

Προσδιορισμός της συνάρτησης προσφορών

Τώρα είμαστε έτοιμοι να κάνουμε το τελικό βήμα στη κατασκευή μιας συνάρτησης, που συνδέει τη ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας με τη τιμή της. Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται συνάρτηση προσφορών. Η συνάρτηση αυτή προσδιορίζεται ως ο μετασχηματισμός της συνάρτησης παραγωγής και αναπαριστάται με την ακόλουθη μορφή στο χρόνο T :

$S_T^{bid}(D_T) = a_1 s^{gen}(D_T; T, U_T, \Omega_T(a_2 \lambda), E_T, VOM_T, a_3 C_T)$, όπου a_1, a_2, a_3 είναι παράμετροι.

Υπάρχουν διάφοροι λόγοι, γιατί η συνάρτηση προσφορών μπορεί να διαφέρει από τη συνάρτηση παραγωγής. Συνεπώς, ο σκοπός μας είναι να επιλέξουμε το κατάλληλο μετασχηματισμό μεταξύ και των δύο συναρτήσεων, έτσι ώστε να λάβει υπόψη του

αυτές τις διαφορές. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε αυτές τις παραμέτρους a_1, a_2, a_3 . Η παράμετρος a_1 μπορεί να ερμηνευθεί ως ένας παράγοντας, που απαιτείται για να προσδιοριστεί η προσαύξηση ή η μείωση στα κόστη παραγωγής λόγω εμποδίων της αγοράς και άλλων λειτουργικών δυσκολιών. Η a_2 προσδιορίζει την αβεβαιότητα σχετικά με τα λειτουργικά χαρακτηριστικά των σταθμών παραγωγής και η a_3 παρουσιάζει καλύτερα τα αβέβαια επίπεδα αποθεματικών και τους λειτουργικούς περιορισμούς. Οπότε ο παραπάνω τύπος μας παρουσιάζει τις πηγές απόκλισης μεταξύ των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας και κοστών παραγωγής αυτής.

Τώρα διαθέτουμε όλα τα απαραίτητα στοιχεία για να ορίσουμε την εξέλιξη των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας. Οπότε, υπολογίζουμε τις τρέχουσες τιμές της ηλεκτρικής ενέργειας με τον ακόλουθο τύπο:

$$P_T = S_T^{bid}(D_T) = a_1 S^{gen}(D_T; T, U_T, \Omega_T(a_2 \lambda), E_T, VOM_T, a_3 C_T)$$

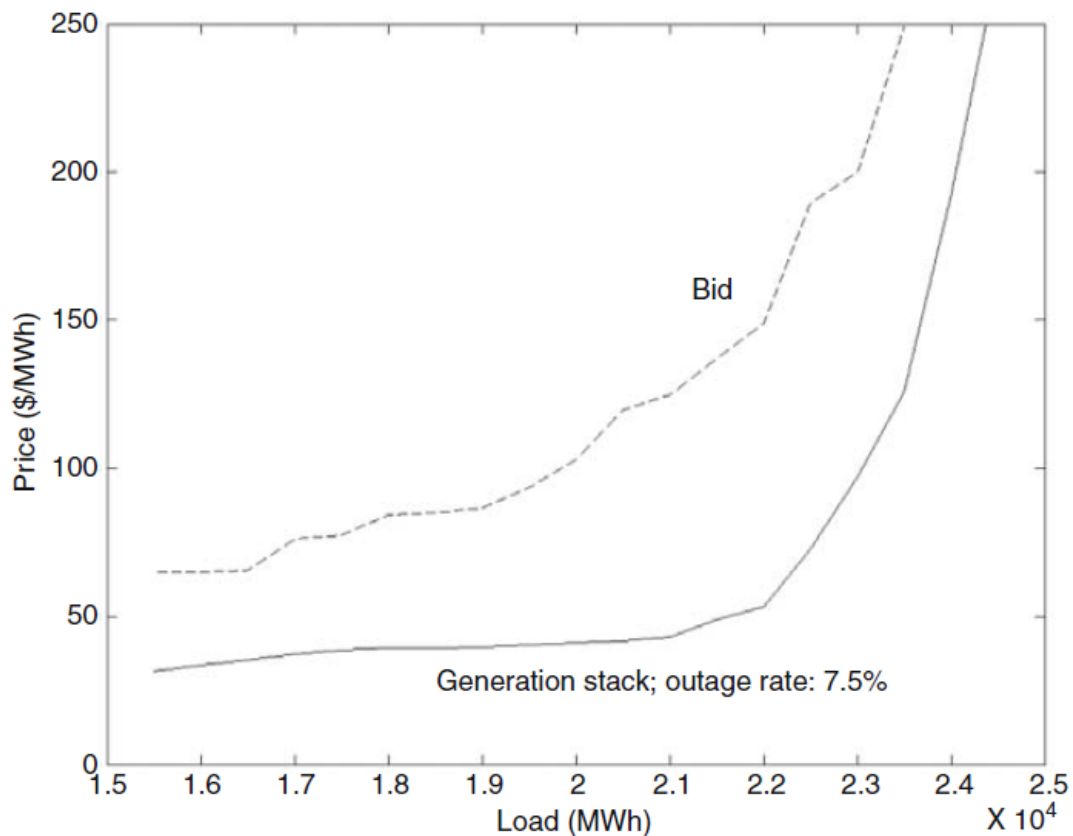
Για οποιαδήποτε καθορισμένο σύνολο των παραμέτρων a_1, a_2, a_3 η παραπάνω έκφραση ορίζει μια διαδικασία εξέλιξης των τιμών ηλεκτρικής ενέργειας μέσω των διαδικασιών εξέλιξης των μεταβλητών (U_T, Ω_T). Η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να βρούμε τις παραμέτρους a_1, a_2, a_3 , που παρέχουν την καλύτερη αντιστοιχία με τα δεδομένα ης αγοράς.

Η ιδέα, που κρύβεται πίσω από τη χρήση των παραμέτρων, είναι η ακόλουθη: χρησιμοποιώντας τις παραμέτρους a_1, a_2, a_3 στη παραπάνω εξίσωση (calibration process), βελτιστοποιούμε αυτή τη σχέση με μη γραμμικά ελάχιστα τετράγωνα, έτσι ώστε οι διαφορές, που υπάρχουν μεταξύ τους να εξαλειφθούν και η μία να συμπέσει με την άλλη.

Παραθέεται παρακάτω το ακόλουθο σχήμα, που μας δείχνει τις καμπύλες των συναρτήσεων προσφορών (the bid stack curve) και παραγωγής (the generation stack curve).

Καθώς παρατηρούμε το ακόλουθο σχήμα, διαπιστώνουμε ότι η καμπύλη προσφορών διαφέρει από τη καμπύλη παραγωγής. Ο λόγος είναι ο ακόλουθος: τη καμπύλη παραγωγής μπορούμε να την υπολογίσουμε αντικειμενικά. Γνωρίζουμε τις τιμές των καυσίμων, τις τιμές των δικαιωμάτων εκπομπών, τη διαθεσιμότητα των μονάδων παραγωγής, τα βραχυπρόθεσμα κόστη παραγωγής και έτσι μπορούμε να

υπολογίσουμε τη συνάρτηση παραγωγής. Αντίθετα η καμπύλη προσφορών περιλαμβάνει τη συμπεριφορά των εταιρειών, η οποία είναι μη προσεγγίσιμη από μας, δηλαδή είναι κάτι στοχαστικό. Οπότε, η καμπύλη προσφορών εμπεριέχει αβεβαιότητα. Άρα, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τη καμπύλη παραγωγής και στη συνέχεια να τη προσαρμόσουμε στα στοιχεία, που παίρνουμε από τον ΔΕΣΜΗΕ μέσα από το προσδιορισμό κάθε παραμέτρου $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, που βρίσκεται στο τύπο προσδιορισμού της τρέχουσας τιμής της ηλεκτρικής ενέργειας.



Σχήμα 6.3 Γραφική παράσταση καμπυλών προσφορών και παραγωγής [63]

6.3 Φίλτρα Kalman

Η ανάλυση και προσαρμογή των δεδομένων του μοντέλου Schwartz και Smith στις αγορές των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης γίνεται μέσω των φίλτρων Kalman. Στη παρούσα ενότητα θα αναφερθούμε αναλυτικά στη διαδικασία KSEM (Kalman – Smoother Expectation Maximization) σύμφωνα με τη πηγή [66], η οποία είναι χρήσιμη στο προσδιορισμό των παραμέτρων του μοντέλου Schwartz και Smith, το οποίο με τη σειρά του χρησιμοποιείται για τη περιγραφή της εξέλιξης των τιμών των καυσίμων (φυσικό αέριο).

Η διαδικασία KSEM αποτελεί μία εναλλακτική βελτιστοποίηση για τη προσαρμογή του μοντέλου των τιμών των καυσίμων. Η βελτιστοποίηση πραγματοποιείται μέσω της εύρεσης ενός συνόλου εισόδων, που μεγιστοποιεί μία συνάρτηση πιθανότητας.

Γενικά, η πραγματική λειτουργία των φίλτρων Kalman είναι η βελτιστοποίηση της αναμενόμενης τιμής μίας συνάρτησης (expectation). Έστω ότι έχουμε μία στοχαστική διαδικασία (συνάρτηση αποτίμησης τιμών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης για τα καύσιμα), η οποία περιέχει ορισμένες παραμέτρους, όπως $\mu_x, \mu_x, \sigma_x^2, \sigma_x^2, \lambda_x, \lambda_x$. Αν δεν έχουμε κάποια εικόνα για αυτές τις παραμέτρους, δε μπορούμε με κάποιο τρόπο να έχουμε εκτίμηση, παρότι τα φίλτρα Kalman στη παρούσα διπλωματική παίρνουν τέτοιες αρχικές εκτιμήσεις. Θεωρούμε ότι δεν έχουμε αρχικές εκτιμήσεις. Τότε τα φίλτρα Kalman θα δώσουν μία πολύ καλή εκτίμηση – αίσθηση, η οποία έρχεται και ταιριάζει τις παραμέτρους με τα ιστορικά δεδομένα.

Από την άλλη μεριά, σε οποιαδήποτε αγορά υπάρχουν συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και προθεσμιακά συμβόλαια (Options), τα οποία αποτελούν το δικαίωμα να αγοράζουμε τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Τα προθεσμιακά συμβόλαια προσδιορίζονται από ένα τύπο, που εμπεριέχει μία παράμετρο σ , και μπορούμε να πούμε ότι από τις τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων μπορούμε να βρούμε τη παράμετρο σ_x , δηλαδή τι πιστεύει η αγορά. Κάτι άλλο, που μπορούμε να κάνουμε, είναι να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχουν προθεσμιακά συμβόλαια πάνω στα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Αν υπήρχαν, πως η αγορά θα μπορούσε να εκτιμήσει τη παράμετρο σ_x ; Η απάντηση είναι από ιστορικά δεδομένα. Η αγορά παίρνει τις

διακυμάνσεις των παραμέτρων αυτών ιστορικά και κάνει εκτίμηση για τη παράμετρο σ_x .

Μπορεί, επίσης, η αγορά να εφαρμόσει και άλλες τεχνικές, όπως να θεωρήσει τη παράμετρο σ μία συνάρτηση του χρόνου και να βγάλει ως αποτέλεσμα μία συνάρτηση ως προς το χρόνο. Όπως και να έχει πάντως, τη παράμετρο σ_x μπορούμε να την εκτιμήσουμε ξεχωριστά. Στη συνέχεια τις βραχυπρόθεσμες παραμέτρους λ_x, μ_x μπορούμε να τις εκτιμήσουμε με διάφορους τρόπους, όπως ελάχιστα τετράγωνα, ενώ τις μακροπρόθεσμες παραμέτρους μπορούμε να τις εκτιμήσουμε μέσω της πιθανοφάνειας. Οποτεδήποτε λοιπόν μπορούμε να κάνουμε εκτιμήσεις ξεχωριστά και με άλλους τρόπους για τις παραπάνω παραμέτρους, τότε χρησιμοποιούμε μη γραμμικά ελάχιστα τετράγωνα, μέθοδος παλινδρόμησης, μεγιστοποίηση πιθανοφάνειας. Το μόνο, που χρειάζεται να γνωρίζουμε, είναι η κατανόηση των εκτιμήσεων των βραχυπρόθεσμων παραμέτρων. Συνεπώς, σε περίπτωση που έχουμε πληροφορίες και από αλλού, και όχι μόνο από ιστορικές πηγές, τότε χρησιμοποιούμε την ευέλικτη διαδικασία της πιθανοφάνειας. Αν δε μπορούμε σε όλη αυτή τη διαδικασία, χρησιμοποιούμε φίλτρα Kalman.

Η χρήση των φίλτρων Kalman για τη προσαρμογή του μοντέλου Schwartz και Smith

Το μοντέλο Schwartz και Smith εκφράζει το λογάριθμο της τρέχουσας τιμής ενός εμπορεύματος ως το άθροισμα μίας βραχυπρόθεσμης συνιστώσας x_t και μίας μακροπρόθεσμης συνιστώσας ξ_t της τιμής: $\ln(S_t) = \xi_t + x_t$

Το επίπεδο τιμών ισορροπίας ξ_t μοντελοποιείται μέσω της στοχαστικής διαδικασίας Γεωμετρική Κίνηση Brown: $d\xi_t = \mu_\xi dt + \sigma_\xi dz_{\xi,t}^P$, όπου μ_ξ και σ_ξ αντιπροσωπεύουν το μέσο όρο της αύξησης και μεταβλητότητας, που συνδέονται με τη τιμή ισορροπίας για το χρονικό διάστημα $[0, T]$. Ο όρος $dz_{\xi,t}^P$ είναι κίνηση Brown σε περιβάλλον πραγματικού κόσμου P .

Η αβεβαιότητα, που σχετίζεται με τη τιμή ισορροπίας, x_t μοντελοποιείται μέσω μίας στοχαστικής διαδικασίας mean – reverting: $dx_t = -kx_t dt + \sigma_x dz_{x,t}^P$, όπου k είναι η ταχύτητα της διαδικασίας mean reversion και σ_x αποτελεί τη μεταβλητότητα των βραχυπρόθεσμων μεταβολών της τιμής για το χρονικό διάστημα $[0, T]$. Ο όρος $dz_{x,t}^P$

αποτελεί και αυτός κίνηση Brown σε περιβάλλον πραγματικού κόσμου P . Οι δύο διαδικασίες υποτίθεται ότι έχουν μία σταθερή συσχέτιση p_{ex} .

Ο προσδιορισμός των τιμών των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης για τα καύσιμα γίνεται μέσω του ακόλουθου τύπου:

$$\ln(F(t, T)) = \ln(E_Q(S_T | t)) = B(k; \mu_\xi, \sigma_x^2, \sigma_\xi^2, p_{ex}, \lambda_\xi, \lambda_x, T) + \xi_T + e^{-kT} x_t$$

Αυτό το μοντέλο είναι ένα δυναμικό σύστημα, που αποτελείται από δύο εξελισσόμενες διαδικασίες: η μία είναι οι βραχυπρόθεσμες και μακροπρόθεσμες μεταβλητές κατάστασης και η άλλη είναι η διαδικασία προσδιορισμού των τιμών των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης ως μία συνάρτηση αυτών των μεταβλητών κατάστασης. Δύο επιπρόσθετες παράμετροι λ_ξ, λ_x , η μακροπρόθεσμη και βραχυπρόθεσμη προσαύξηση της τιμής του καυσίμου λόγω κινδύνου αντίστοιχα, εισάγονται στο μοντέλο για να ληφθεί υπόψη η αλλαγή από το περιβάλλον πραγματικού κόσμου P στο περιβάλλον ουδετέρου κινδύνου Q . Αυτοί οι παράμετροι προσαύξησης λόγω κινδύνου είναι δύσκολο να εκτιμηθούν και εδώ η διαδικασία KSEM δείχνει τη χρησιμότητα της στη προσαρμογή του μοντέλου Schwartz και Smith.

Λαμβάνοντας υπόψη ένα διάνυσμα n συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης, το μοντέλο μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή χώρου κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_\xi dt \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-kdt} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ \xi_{t-1} \end{bmatrix} + N_t,$$

$$\begin{bmatrix} \ln(F(t, T_1)) \\ \dots \\ \ln(F(t, T_n)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(T_1) \\ \dots \\ B(T_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-kT_1} & 1 \\ \dots & 1 \\ e^{-kT_n} & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_t \\ \xi_t \end{bmatrix} + V_t$$

$$\text{Με } Cov(N_t) = \begin{bmatrix} (1 - e^{-2kdt})\sigma_x^2 dt & (1 - e^{-kdt})p_{ex}\sigma_x\sigma_\xi dt \\ (1 - e^{-kdt})p_{ex}\sigma_x\sigma_\xi dt & \sigma_\xi^2 dt \end{bmatrix}$$

$$\text{Και } Cov(V_t) = \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 & 0 & 0 \\ \dots & \sigma_{u_i}^2 & \dots \\ 0 & 0 & \sigma_{u_n}^2 \end{bmatrix}$$

Η δομή του χώρου κατάστασης του μοντέλου Schwartz και Smith παίρνει την μορφή της από τα ακόλουθα συστήματα εξισώσεων: Το μοντέλο Schwartz και Smith

αποτελεί μία κατηγορία μοντέλων (reduced – form models), τα οποία μπορούν να εκφραστούν με την ακόλουθη γραμμική, χρονικά αμετάβλητη, Gaussian μορφή χώρου κατάστασης.

$x_{t+1} = Ax_t + N_t$ και $\psi_t = Hx_t + V_t$, όπου N_t, V_t αποτελούν κατανομές Gaussian με μέση τιμή και συνδιακύμανση W, Q αντίστοιχα. Το παραπάνω δυναμικό σύστημα μπορεί εύκολα να γραφεί σε μία πιο γενική μορφή:

$x_{t+1} = c + Ax_t + N_t$, $\psi_{t+1} = d + Hx_{t+1} + V_t$. Οπότε, το σύστημα αυτό χαρακτηρίζεται από το παράγοντα $\theta = [c, A, W, d, H, Q]$.

Η δομή του μοντέλου Schwartz και Smith μπορεί να πάρει την ακόλουθη μορφή συγκρίνοντάς τη με το παραπάνω σύστημα:

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{21} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_{11} \\ \dots \\ d_{n1} \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h_{11} & 1 \\ \dots & \dots \\ h_{n1} & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & 0 \\ \dots & q_{22} & \dots \\ 0 & 0 & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Παίρνοντας το grad της συνάρτησης $E(\log(f(Y, X|\theta)))$, έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις κατά την εκτίμηση του H:

$$\psi_t' Q^{-1} H v_{t|T} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{i,t}((v_{t|T})_{11} h_{i1} + (v_{t|T})_{21})}{q_{ii}}$$

$$d' Q^{-1} H v_{t|T} = \sum_{i=1}^n \frac{d_{i1}((v_{t|T})_{11} h_{i1} + (v_{t|T})_{21})}{q_{ii}}$$

$$tr(H' Q^{-1} H K_{t,t|T}) = K_{t,t|T}{}_{11} \sum_{i=1}^n \frac{h_{i1}^2}{q_{ii}} + 2(K_{t,t|T})_{21} \sum_{i=1}^n \frac{h_{i1}}{q_{ii}} + (K_{t,t|T})_{22} \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_{ii}}$$

Οπότε, ενδιαφερόμαστε να βρούμε τις εκτιμήσεις ($\widehat{h_{i1}}$) των στοιχείων της πρώτης στήλης του πίνακα H (h_{i1}). Συνεπώς, παίρνουμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης $E_H(\log(f(Y, X|\theta)))$ για κάθε στοιχείο του πίνακα H, ώστε να πάρουμε την εκτίμηση για κάθε στοιχείο:

$$\frac{d}{dh_{i1}} E_H(\log(f(Y, X|\theta))) = 0 \Rightarrow h_{m,i1} = \frac{\sum_{t=1}^T \psi_{i,t}(v_{t|T})_{11} - d_{i1} \sum_{t=1}^T (v_{t|T})_{11} - \sum_{t=1}^T (K_{t,t|T})_{21}}{\sum_{t=1}^T (K_{t,t|T})_{11}}$$

Τώρα θα πρέπει να κάνουμε το ίδιο για τους πίνακες Q, c, d, W και a. Τα μόνα στοιχεία, που χρειάζεται να εκτιμηθούν, είναι τα ακόλουθα: q_{ii} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, c_{21} , a_{11} και όλα τα στοιχεία των πινάκων d και W. Οπότε, οι εκτιμήσεις είναι οι ακόλουθες:

$$q_{ii,m} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[\psi_{i,t} - d_{i1,m}^2 - 2\psi_{i,t} - d_{i1,m} \left((v_{t|T})_{11} h_{i1,m} + (v_{t|T})_{21} \right) \right. \\ \left. + (K_{t,t|T})_{11} h_{i1,m}^2 + 2(K_{t,t|T})_{21} h_{i1,m} + (K_{t,t|T})_{22} \right]$$

$$c_{21,m} = \frac{1}{(T-1)W_{22}^{-1}} \left[W_{12}^{-1} \sum_{t=2}^T (v_{t|T})_{11} \right. \\ \left. + W_{22}^{-1} \sum_{t=2}^T (v_{t|T})_{21} - W_{21}^{-1} a_{11,m} \sum_{t=2}^T (v_{t-1|T})_{11} \right. \\ \left. - W_{22}^{-1} \sum_{t=2}^T (v_{t-1|T})_{21} \right]$$

$$a_{11,m} = \frac{1}{W_{11}^{-1} \sum_{t=2}^T (K_{t-1,t-1|T})_{11}} \left[\sum_{t=2}^T W_{11}^{-1} (K_{t-1,t|T})_{11} - W_{12}^{-1} (K_{t-1,t|T})_{21} \right. \\ \left. + W_{21}^{-1} \left(\sum_{t=2}^T (K_{t-1,t|T})_{12} - c_{21,m} \sum_{t=2}^T (v_{t-1|T})_{11} \right) \right]$$

$$\widehat{d}_m = \frac{1}{T} \left[\sum_{t=1}^T \psi_t - H_m \sum_{t=1}^T (v_{t|T}) \right]$$

$$\widehat{W}_m = \frac{1}{T-1} \left[\sum_{t=2}^T K_{t,t|T} - v_{t|T} c' - K_{t-1,t|T} A_m' - c_m v_{t|T}' + c_m c_m' + c_m v_{t-1|T}' A_m' \right. \\ \left. - A_m K_{t-1,t|T}' + A_m v_{t-1|T} c' + A_m K_{t-1,t-1|T} A_m' \right]$$

Εκτίμηση ψ

Για το μοντέλο Schwartz και Smith θεωρούμε το διάνυσμα $\psi = [\kappa, \mu_\xi, \sigma_\chi^2, \sigma_\xi^2, p_{ex}, \lambda_\xi, \lambda_\chi]$ να παράγει το θ . Αυτές αποτελούν παραμέτρους, που χρειάζονται να εκτιμηθούν. Συνεπώς, αναπτύσσουμε το μηχανισμό $\psi = \theta^{-1}[c, A, W, d, H, Q]$ για αυτό το μοντέλο, ώστε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους του μοντέλου Schwartz και Smith.

Το στοιχείο c_{21} του διανύσματος c είναι αντίστοιχο με το παράγοντα $\mu_\xi dt$ και οπότε, έχουμε τον ακόλουθο τύπο: $\widehat{\mu}_\xi = \frac{c_{21}}{dt}$. Επίσης, και οι υπόλοιποι παράμετροι υπολογίζονται ως εξής με τη χρήση των φίλτρων Kalman:

$$\widehat{\kappa} = \frac{[-(\ln(\widehat{a}_{11})) + \sum_{i=1}^n \ln(\widehat{h}_{11})]}{(dt + \sum_{i=1}^n T_i)} \quad \text{και} \quad \widehat{\sigma}_\chi^2 = \frac{\widehat{W}_{11}}{(1 - e^{-2\widehat{\kappa}dt})2\widehat{\kappa}}$$

Οι παράμετροι σ_ξ^2 και p_{ex} μπορούν να εκτιμηθούν ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Αντιθέτως, οι προσαυξήσεις των τιμών των καυσίμων λόγω κινδύνου $\lambda_\xi, \lambda_\chi$ είναι πολύ δύσκολο να προσδιοριστούν. Επειδή βρίσκονται από κοινού μέσα στο διάνυσμα d και όλοι οι άλλοι παράμετροι είναι γνωστοί, οι προσαυξήσεις λόγω κινδύνου μπορούν να γραφούν ως ένα σύστημα n γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους. Η λύση του συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της χρήσης εκτιμήσεων ελαχίστων τετραγώνων, οι οποίες είναι μοναδικές.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Michail G. Lagoudakis, Ronald Parr, Department of Computer Science, Duke University, *Journal of Machine Learning Research* 4 (2003), 1107-1149, Least-Square Policy Iteration
- [2] Warren B. Powell, *Approximate Dynamic Programming*
- [3] Mario J. Miranda, The Ohio State University, Paul L. Fackler, North Carolina State University, *Applied Computational Economics and Finance*
- [4] Anamitra R. Choudhury, Alan King, Sunil Kumar, Yogish Sabharwal, *Optimizations in Financial Engineering: The Least-Squares Monte Carlo Method of Longstaff and Schwartz*, IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium-IPDPS 2008 (October 2007)
- [5] Damiano Brigo, Antonio Dalessandro, Matthias Neugebauer, Fares Triki, *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*, November 2007
- [6] Μαρούλα Ναταλία, Πανεπιστήμιο Πατρών, Διατμηματικό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών <Μαθηματικά των Υπολογιστών και των Αποφάσεων>, Στοχαστικός (Γραμμικός) Προγραμματισμός, Πάτρα 2010
- [7] Δατσέρης Γιάννης, Τεχνολογικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Κρήτης, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, Τμήμα Εφαρμοσμένης Πληροφορικής και Πολυμέσων, Δυναμικός Προγραμματισμός και Εφαρμογές, Διπλωματική Εργασία, Επιβλέπων καθηγητής: Τριανταφυλλίδης Γεώργιος
- [8] Ragwitz, M., Huber, C., and Resch, G., 2007. Promotion of renewable energy sources: effects on innovation. *International Journal of Public Policy*, 2:32-56 pp
- [9] Renewables Academy (RENAC) AG, Support instrument to improve energy efficiency, Germany, www.renac.de
- [10] Bankes, S. "Exploratory modeling for policy analysis." *Operations Research* 41, (1993): 3, 435-449.
- [11] Doukas, H., Flamos, A., Psarras, J. (2009), Risks on security of Oil & Gas Supply, *International scientific Journal: Energy Sources*, part B: Economics, Planning and Policy, Taylor & Francis (in press)
- [12] Groves, D. G. "New Methods for Identifying Robust Long-Term Water Resources Management Strategies for California". Ph.D. diss., Pardee RAND Graduate School, 2005

- [13] Lempert, R. J., S. W. Popper, S. C. Bankes. "Shaping the Next One Hundred Years – New Methods for Quantitative, Long-Term Policy Analysis." RAND Corporation, 2004.
- [14] Ravn, H. F., and K. Skytte. "Uncertainty in energy-economic modeling of the electrical power sector." *Annals of Operations Research* 97, (2000): 213-229.
- [15] Sluijs, J. (1996) "Integrated Assessment Models and the Management of Uncertainties". Working Paper, International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria.
- [16] Griffin, J. 'Improving Cost-Effectiveness and Mitigating Risks of Renewable Energy Requirements.' Ph.D. diss., Pardee RAND Graduate School, 2008.
- [17] Frayer, J. and N. Z. Uludere, "What is worth? Applications of Real Options Theory to the Valuation of Generation Assets", *The Electricity Journal* 14 (8), 40-51, 2001.
- [18] Doug Gardner and Yiping Zhuang, "Valuation of Power Generation Assets: A Real Options Approach", *Algo Research Quarterly* 9, Vol. 3, No.3, December 2000.
- [19] Ravn, H., Grohnheit, P.E., Munksgaard, J., et al., "Balmore: a model for analyses of the electricity and CHP markets in the Baltic Sea Region, 2001, http://www.eabalmorel.dk/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=2&Itemid=22.
- [20] Stine Grenaa Jensen and Peter Meibom, "Investments in liberalised power markets: Gas turbine investment opportunities in the Nordic power system", *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 30.2 (Feb. 2008), 113–124.
- [21] Weber M. et al., "A multi-actor dynamic integrated assessment model (MADIAM) of induced technological change and sustainable economic growth", 2005.
- [22] Botterud, A., "Long-term Planning in Restructured Power Systems. Dynamic Modelling in New Power Generation under Uncertainty", PhD Thesis, The Norwegian University of Science and Technology (NTNU), 2003.
- [23] Blyth, W., Yang, M., Bradley, R. "Modelling Investment Risks and Uncertainties with Real Options Approach", *Climate Policy Uncertainty and Investment Risk*, IEA, 2007. <http://www.iea.org/w/bookshop/add.aspx?id=305>

- [24] Johnathan Mun, *Real Options Analysis, Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions*, 2006.
- [25] Papadelis, S., Flamos, A., Psarras, J. (2011), “A Framework to address uncertainties in Energy Policy Formulation”, *International scientific Journal: Energy Sources, Part B: Economics, Planning and Policy*, Taylor & Francis, in press.
- [26] Szymon Borak, Wolfgang Hardle, Rafal Weron, *Stable Distributions*, CASE-Center for Applied Statistics and Economics, Humboldt-University Berlin, Germany, Hugo Steinhaus Center, Wroclaw University of Technology, Poland
- [27] Levy, P. (1925). *Calcul des Probabilites*, Gauthier Villars.
- [28] Nolan, J. P. (1997). Numerical calculation of stable densities and distribution functions, *Communications in Statistics { Stochastic Models* 13: 759-774.
- [29] Samorodnitsky, G. and Taqqu, M. S. (1994). *Stable Non Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall.
- [30] Weron, R. (2001). Levy-stable distributions revisited: Tail index > 2 does not exclude the Levy-stable regime, *International Journal of Modern Physics C* 12: 209-223.
- [31] Weron, R. (2004). Computationally intensive Value at Risk calculations, in J. E. Gentle, W. Härdle, Y. Mori (eds.) *Handbook of Computational Statistics*, Springer, Berlin, 911-950.
- [32] Zolotarev, V. M. (1986). *One-Dimensional Stable Distributions*, American Mathematical Society.
- [33] Eduardo Schwartz, James E. Smith, *Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices*, Anderson Graduate School of Management, University of California, Los Angeles, Fuqua School of Business, Duke University, Durham, North Carolina
- [34] Robert Gross, Philip Heptonstall, William Blyth, *Investment in electricity generation: the role of costs, incentives and risks*, Imperial college, London, May 2007
- [35] Martin T. Barlow. “A Diffusion Model for Electricity Prices”. In: *Mathematical Finance* 12.4 (2002), pp. 287–298
- [36] Hendrik Bessembinder, Jay F. Coughenour, Paul J. Seguin, and Margaret Monroe Smoller. “Mean Reversion in Equilibrium Asset Prices: Evidence from the Futures Term Structure”. In: *The Journal of Finance* 50.1 (1995), pp. 361–375.

- [37] Audun Botterud. “Long-Term Planning in Restructured Power Systems: Dynamic Modelling of Investments on New Power Generation under Uncertainty”. PhD thesis. Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering, Norwegian University of Science and Technology (NTNU)
- [38] George E. P. Box, Gwilym M. Jenkins, and Gregory C. Reinsel. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 4th ed. Hoboken, N.J.: John Wiley, June 2008.
- [39] Eva Benz and Stefan Trück. “Modeling the price dynamics of CO₂ emission allowances”. In: *Energy Economics* 31.1 (2009), pp. 4–15.
- [40] George Daskalakis, Dimitris Psychoyios, and Raphael N. Markellos. “Modeling CO₂ emission allowance prices and derivatives: Evidence from the European trading scheme”. In: *Journal of Banking & Finance* 33.7 (July 2009), pp. 1230–1241.
- [41] Henry Dannenberg and Wilfried Ehrenfeld. *Prognose des CO₂-Zertifikatepreisrisikos*. IWH - Diskussionspapiere 5. Halle Institute for Economic Research, May 2008
- [42] Shijie Deng. *Stochastic Models of Energy Commodity Prices and Their Applications: Mean-reversion with Spikes and Jumps*. Working Paper PWP-073. University of California Energy Institute, 1999.
- [43] Álvaro Escribano, Juan Ignacio Peña, and Pablo Villaplana. *Modeling Electricity Prices: International Evidence*. Economics Series 08, Working Paper 02-27. Departamento de Economía, Universidad Carlos III, June 2002.
- [44] Bassam Fattouh. *The Drivers of Oil Prices: The Usefulness and Limitations of Non-Structural model, the Demand–Supply Framework and Informal Approaches*. EIB Papers, Volume 12 1. European Investment Bank, Economic and Financial Studies, June 2007
- [45] Rajna Gibson and Eduardo S. Schwartz. “Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims”. In: *The Journal of Finance* 45.3 (1990), 959–976.
- [46] Alexandre Klein, Julian Bouchard, and Sabine Goutier. *Generation capacity expansion under long-term uncertainties in the US electric market*. Paper presented at the 12th USAEE/IAEE North American Conference – Unveiling the Future of Energy Frontiers, New Orleans, Louisiana USA. Dec. 2008.

- [47] Julio J. Lucia and Eduardo S. Schwartz. "Electricity Prices and Power Derivatives: Evidence from the Nordic Power Exchange". In: *Review of Derivatives Research* 5.1 (2002), pp. 5–50.
- [48] Matteo Manera, Chiara Longo, Anil Markandya, and Elisa Scarpa. *Evaluating the Empirical Performance of Alternative Econometric Models for Oil Price Forecasting*. Fondazione Eni Enrico Mattei Working Papers 69. Fondazione Eni Enrico Mattei, 2007.
- [49] Eduardo S. Schwartz. "The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging". In: *Journal of Finance* 52.3 (1997), pp. 923–73.
- [50] Jan Seifert, Marliese Uhrig-Homburg, and Michael Wagner. "Dynamic behavior of CO₂ spot prices". In: *Journal of Environmental Economics and Management* 56.2 (Sept. 2008)
- [51] Gorden Spangardt and Jürgen Meyer. "Risiko management im Emissions handel". In: *Emissions handel*. 2005, pp. 219–232.
- [52] Rafal Weron and Adam Misiorek. "Forecasting spot electricity prices: A comparison of parametric and semiparametric time series models". In: *International Journal of Forecasting* 24.4 (Dec. 2008), pp. 744–763.
- [53] Fischer Black and Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". In: *The Journal of Political Economy* 81.3 (1973), 637–654.
- [54] Marc S. Paoletta and Luca Taschini. *An Econometric Analysis of Emission Trading Allowances*. Working Paper 341. National Centre of Competence in Research Financial Valuation and Risk Management, 2006.
- [55] Ninghong Sun, Ingo Ellersdorfer, and Derk J. Swider. "Model-based long-term electricity generation system planning under uncertainty". In: *2008 Third International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies*. Nanjing, China, 2008, pp. 1298–1304.
- [56] Hélyette Geman and Andrea Roncoroni. "Understanding the Fine Structure of Electricity Prices". In: *The Journal of Business* 79.3 (2006), pp. 1225–1261.
- [57] Alexandre Vasconcelos Aronne, Haroldo Guimarães Brasil, and Ivan Dionysio Aronne. *Valuation of Investments in Flexible Power Plants: A Case Study in the Brazilian Power Market*. Paper presented at the 12th Annual International Conference on Real Options: Theory Meets Practice, Rio de Janeiro, Brasil. July 2008

- [58] Matthias V. Hundt and Ninghong Sun. “Modelling thermal power plants as real options applying stochastic mixed-integer programming”. In: Conference Proceedings of the 6th International Conference on the European Energy Market (EEM09). Leuven, Belgium, May 2009.
- [59] Tim Bollerslev. “Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity”. In: *Journal of Econometrics* 31.3 (1986), pp. 307–327.
- [60] Derk J. Swider and Christoph Weber. “The costs of wind’s intermittency in Germany: application of a stochastic electricity market model”. In: *European Transactions on Electrical Power* 17.2 (2007), pp. 151–172.
- [61] Stine Grenaa Jensen and Peter Meibom. “Investments in liberalized power markets: Gas turbine investment opportunities in the Nordic power system”. In: *International Journal of Electrical Power & Energy Systems* 30.2 (Feb. 2008), pp. 113–124.
- [62] Alain Schmutz and Philipp Elkuch. “Electricity price forecasting: Application and experience in the European power markets”. In: *Proceedings of the 6th IAEE European Conference*. Zurich, Switzerland, 2004.
- [63] Alexander Eydeland, Krzysztof Wolyniec, *Energy and Power Risk Management, New Developments in Modeling, Pricing and Hedging*, (2003).
- [64] Merton, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3, 125–144.
- [65] Madan, D. B. and E. Seneta (1990). The variance gamma (v.g.) model for share market returns. *Journal of Business* 63, 511–524.
- [66] Moeti M. Ncube, Department of Statistics, Florida State University, James S. Doran, Bank of America Professor of Finance, Department of Finance, Florida State University, Anuj Srivastava, Department of Statistics, Florida State University, *Calibration of Reduced-Form Models, Implementation of a Kalman-Smoother Expectation Maximization Procedure*, (2010)
- [67] Μηλιώτης Π., *Δυναμικός Προγραμματισμός, Εκδόσεις Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών*

